Ayudantía 8

ICE/IBM2020

pzurita@uc.cl

I2 → Martes

Pueden preguntar cualquier cosa, PERO

Lo + relevante ⟹ M5, M6, M7

MÁNDENME PREGUNTAS

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
Instituto de Ingeniería Biológica y Médica
Departamento de Ingeniería Estructural y Geotécnica
IBM2020 Introducción a la Biomecánica
Primer Semestre 2021

Ayudantía 8

Pablo Zurita Soler - pzurita@uc.cl

Problema 1. Considere los modelos viscoelásticos de fluido de Maxwell y sólido de Voigt.

a) Halle la ley constitutiva (ecuación diferencial) que rige a los modelos.

b) Calcule el módulo de almacenamiento $E'(\omega)$ y de pérdida $E''(\omega)$ de los modelos.

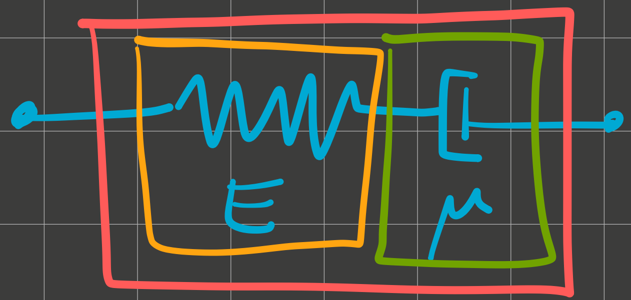
Problema 2. Asumiendo una gota de agua como una esfera sólida, y conocida la tensión superficial del agua $\gamma = 72$ dyn/cm (mN/m), encuentre cuál es la diferencia de presiones dentro y fuera de la burbuja si el radio es $R = 0{,}5$ mm.

Problema 1. Considere los modelos viscoelásticos de fluido de Maxwell y sólido de Voigt.

a) Halle la ley constitutiva (ecuación diferencial) que rige a los modelos.

b) Calcule el módulo de almacenamiento $E'(\omega)$ y de pérdida $E''(\omega)$ de los modelos.

a) 1. Dibujar el diagrama



$$\sigma = k\ddot{\varepsilon}$$

2. Reconocer los elementos: 1 2 3

3. Escribir las relaciones entre las σ y las ε de los elementos $\Rightarrow$ Lo que está en serie tiene la misma tensión

Lo que está en paralelo tiene la misma deformación

E.O.C., se suman

$$\sigma_3 = \sigma_1 = \sigma_2$$

Las del elemento más grande se denotan sin número $\rightarrow \sigma := \sigma_3$

$\varepsilon := \varepsilon_3$

$$\varepsilon_3 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sigma = \sigma_1 = \sigma_2 \\ \varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \end{cases}$$

4. Escribir relaciones constitutivas por elemento atómico.

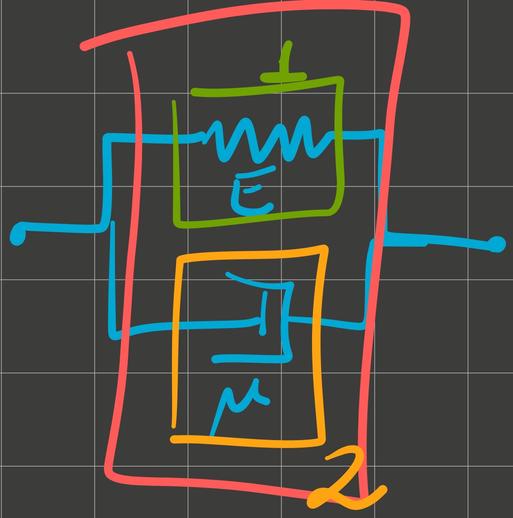
$$\Rightarrow \sigma_1 = E\varepsilon_1$$

$$\Rightarrow \sigma_2 = \mu\dot{\varepsilon}_2$$

5. Reemplazar en ecuaciones

$$\sigma = E\varepsilon_1 = \mu\dot{\varepsilon}_2 \wedge \varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$$

$$\boxed{\dot{\varepsilon} = \frac{\dot{\sigma}}{E} + \frac{\sigma}{\mu}}$$



$$\sigma := \sigma_3 \qquad \Rightarrow \qquad \sigma = \sigma_1 + \sigma_2$$
$$\varepsilon := \varepsilon_3 \qquad \qquad \varepsilon = \varepsilon_1 = \varepsilon_2$$

$$\sigma_1 = E\varepsilon_1 \qquad \Rightarrow \sigma = E\varepsilon_1 + \mu\dot{\varepsilon}_2$$
$$\sigma_2 = \mu\dot{\varepsilon}_2$$
$$\boxed{\Rightarrow \sigma = E\varepsilon + \mu\dot{\varepsilon}}$$

$E(\omega)$, $E'(\omega)$ |

$\Rightarrow$ Se asume que $\sigma = \sigma_0 \cos(\omega t + \delta)$

y $\varepsilon = \varepsilon_0 \cos(\omega t)$

$\equiv$ Asumir que $\sigma = Re(\sigma^*)$ con $\sigma^* = \sigma_0 e^{i(\omega t + \delta)}$

$\varepsilon = Re(\varepsilon^*)$ con $\varepsilon^* = \varepsilon_0 e^{i\omega t}$

$\Rightarrow$ Ver que σ^* y ε^* satisfacen la misma ecuación diferencial que σ y ε.

Para Maxwell:

$$\dot{\varepsilon}^* = \frac{\dot{\sigma}^*}{E} + \frac{\sigma^*}{\mu}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\varepsilon_0 e^{i\omega t}\right) = \frac{1}{E}\frac{d}{dt}\left(\sigma_0 e^{i(\omega t+\delta)}\right) + \frac{1}{\mu}\sigma_0 e^{i(\omega t+\delta)}$$

$$\Rightarrow \varepsilon_0 i\omega e^{i\omega t} = \frac{1}{E}\sigma_0 \omega i\, e^{i(\omega t+\delta)} + \frac{1}{\mu}\sigma_0 e^{i(\omega t+\delta)}$$

$$\Rightarrow i\omega\varepsilon^* = \frac{i\omega}{E}\sigma^* + \frac{1}{\mu}\sigma^*$$ ← relación entre σ^* y ε^*

⇒ Calcular $E^* = \frac{\sigma^*}{\varepsilon^*}$

$$\Rightarrow i\omega\varepsilon^* = \left(\frac{i\omega}{E} + \frac{1}{\mu}\right)\sigma^*$$

$$\Rightarrow E^* = \frac{\sigma^*}{\varepsilon^*} = \frac{i\omega}{\left(\frac{i\omega}{E} + \frac{1}{\mu}\right)}$$

⇒ Escribir E^* de la forma $E^* = E' + iE''$

$$\Rightarrow \frac{i\omega E\mu}{i\omega\mu + E} \Rightarrow \frac{(i\omega E\mu)(-i\omega\mu + E)}{E^2 + \omega^2\mu^2} \Rightarrow \boxed{\frac{\omega^2 E\mu^2}{E^2+\omega^2\mu^2}} + i\boxed{\frac{\omega E^2\mu}{E^2+\omega^2\mu^2}}$$

Para Voigt:

$$\sigma^* = E\varepsilon^* + \mu\dot{\varepsilon}^*$$

$$\sigma^* = E\varepsilon^* + \mu \frac{d}{dt}\varepsilon_0 e^{i\omega t}$$

$$\sigma^* = (E + \mu i\omega)\varepsilon^*$$

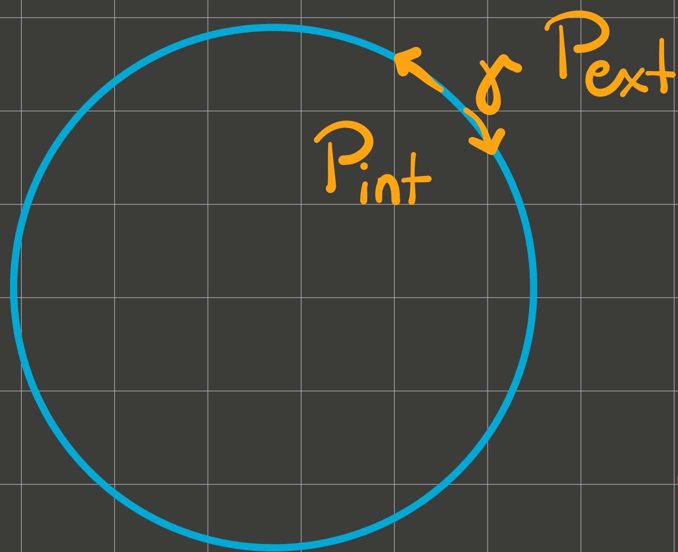
$$\Rightarrow E^* = \frac{\sigma^*}{\varepsilon^*} = E + \mu i\omega \Rightarrow E' = E, \quad E'' = \omega\mu$$

tiene sentido, la pérdida se da por viscosidad, proporcional a la frecuencia

$\Rightarrow$ buena pregunta: ¿qué comportamientos cambian entre baja y alta frecuencia? ¿qué dice eso sobre la inmediatez de la reacción?

Problema 2. Asumiendo una gota de agua como una esfera sólida, y conocida la tensión superficial del agua $\gamma = 72$ dyn/cm (mN/m), encuentre cuál es la diferencia de presiones dentro y fuera de la burbuja si el radio es $R = 0{,}5$ mm.

γ energía por unidad de área — marginal para aumentar área

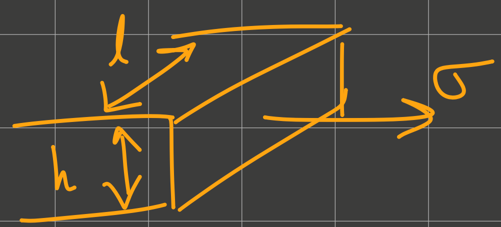


contrafactual para llegar a configuración

$$\Rightarrow (P_{int} - P_{ext}) = \frac{2\gamma}{R}$$

¿por qué?

"Ley de Laplace": $P = \frac{2\frac{F}{A}h}{R}$ para, con l unidad de longitud,



$\sigma h = \frac{F}{lh} h = \frac{F}{l} = \gamma$ por lo que

cambio $\rightarrow \Delta P = \frac{2\gamma}{R}$