Ayudantía 2

Repaso

Tensores: operadores lineales anteriores a las coordenadas

$\sigma \qquad \sigma_{ij} = e_j \cdot \sigma e_i$

Productos: interior (reduce orden) y exterior (aumenta orden)

$$u \cdot v = \sum_{i=1}^{3} u_i v_i \equiv u_i v_i \in \mathbb{R}$$

$$u \otimes v \equiv (u \otimes v)_{ij} = u_i v_j \equiv [u \otimes v] = [u][v]^T$$

$$\nabla \otimes v \equiv (\nabla \otimes v)_{ij} = \nabla_i v_j = \frac{\partial v_j}{\partial x_i}$$

Notación indicial: aprovecharse de la linealidad para usar álgebra simple y simplificar objetos

$$u \times v \neq v \times u$$

pero

$$¡\, \epsilon_{ijk} u_j v_k = u_j v_k \epsilon_{ijk} \,!$$

Problema 1. *Notación indicial*
Utilizando notación indicial, demuestre que

i) $\epsilon_{ijk}\epsilon_{pqk} = \delta_{ip}\delta_{jq} - \delta_{iq}\delta_{jp}$

ii) Para $\boldsymbol{s}, \boldsymbol{t}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$, se tiene que $(\boldsymbol{s} \times \boldsymbol{t}) \cdot (\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{s} \cdot \boldsymbol{u})(\boldsymbol{t} \cdot \boldsymbol{v}) - (\boldsymbol{s} \cdot \boldsymbol{v})(\boldsymbol{t} \cdot \boldsymbol{u})$

iii) Para $f, g \in C^2(\mathbb{R}^n)$, se tiene que $\Delta(fg) = f\Delta g + 2\nabla f \cdot \nabla g + \Delta g$

iv) para $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$ y $\boldsymbol{v} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ diferenciable, se tiene que $\nabla \otimes (f\boldsymbol{v}) = \nabla f \otimes \boldsymbol{v} + f\nabla \otimes \boldsymbol{v}$

Ayuda: $\epsilon_{ijk}\epsilon_{lmn} = \begin{vmatrix} \delta_{il} & \delta_{im} & \delta_{in} \\ \delta_{jl} & \delta_{jm} & \delta_{jn} \\ \delta_{kl} & \delta_{km} & \delta_{kn} \end{vmatrix}$

$$= \delta_{il}(\delta_{jm}\delta_{kn} - \delta_{jn}\delta_{km}) - \delta_{im}(\delta_{jl}\delta_{kn} - \delta_{jn}\delta_{kl})$$
$$+ \delta_{in}(\delta_{jl}\delta_{km} - \delta_{jm}\delta_{kl})$$

i) $k = n$: $\epsilon_{ijk}\epsilon_{lmk} = \delta_{il}(\delta_{jm}\cancelto{1}{\delta_{kk}} - \delta_{jk}\delta_{km}) - \delta_{im}(\delta_{jl}\cancelto{1}{\delta_{kk}} - \delta_{jk}\delta_{kl})$

$$+ \delta_{ik}(\delta_{jl}\delta_{km} - \delta_{jm}\delta_{kl})$$

$$= \cancelto{0}{\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{il}\delta_{jm}} - \cancelto{0}{\delta_{im}\delta_{jl} + \delta_{im}\delta_{jl}} + \boxed{\delta_{im}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jm}} \quad \blacksquare$$

ii) $(s\times t)\cdot(u\times v) = (s\times t)_i\,(u\times v)_i$

$$= \epsilon_{ijk} s_j t_k \, \epsilon_{ilm} u_l v_m$$

$$= \epsilon_{ijk} \epsilon_{ilm} s_j t_k u_l v_m$$

$$= \epsilon_{jki} \epsilon_{lmi} s_j t_k u_l v_m$$

$$= (\delta_{jl}\delta_{km} - \delta_{jm}\delta_{kl}) s_j t_k u_l v_m$$

$$= \delta_{jl} s_j \delta_{km} t_k u_l v_m - \delta_{jm} v_m \delta_{kl} u_l s_j t_k$$

$$= s_l u_l t_m v_m - v_j s_j u_k t_k$$

$$= (s\cdot u)(t\cdot v) - (s\cdot v)(t\cdot u) \quad \blacksquare$$

iii) $\Delta(fg) = \nabla\cdot\nabla(fg) = (fg)_{,i,i} = (f_{,i}\, g + f g_{,i})_{,i}$

$$= f_{,i,i}\, g + f_{,i}\, g_{,i} + f_{,i}\, g_{,i} + f g_{,i,i}$$

$$= g f_{,i,i} + 2 f_{,i}\, g_{,i} + f g_{,i,i}$$

$$= g\Delta f + 2\nabla f\cdot\nabla g + f\Delta g \quad \blacksquare$$

iv) $\nabla\otimes(fv) \equiv (\nabla\otimes fv)_{ij} = \nabla_i (fv)_j$

$$= (fv)_{j,i}$$

$$= (f v_j)_{,i}$$

$$= f_{,i} v_j + f v_{j,i}$$

$$= (\nabla f)_i v_j + f(\nabla\otimes v)_{ij}$$

$\equiv \nabla f\otimes v + f\nabla\otimes v \quad \blacksquare$

Problema 2. *Transformación de coordenadas*
La Figura 1 muestra una viga curvada por una fuerza en su extremo.

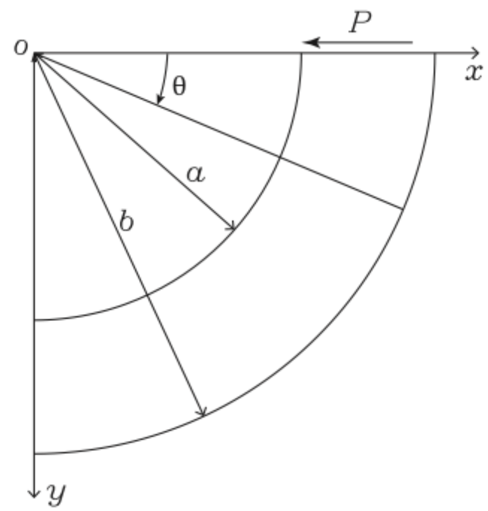


Figura 1: Viga curvada por una fuerza en el extremo

El campo de tensiones en coordenadas polares está dado por:

$$\sigma_{rr} = \left(2Ar - \frac{2B}{r^3} + \frac{D}{r}\right)\sin(\theta),$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \left(6Ar + \frac{2B}{r^3} + \frac{D}{r}\right)\sin(\theta) \text{ y}$$

$$\sigma_{\theta r} = -\left(2Ar - \frac{2B}{r^3} + \frac{D}{r}\right)\cos(\theta)$$

donde

$$A = \frac{P}{2N} \qquad B = -\frac{Pa^2b^2}{2N} \qquad D = -\frac{P}{N}(a^2+b^2)$$

y

$$N = a^2 - b^2 + (a^2+b^2)\log\frac{b}{a}$$

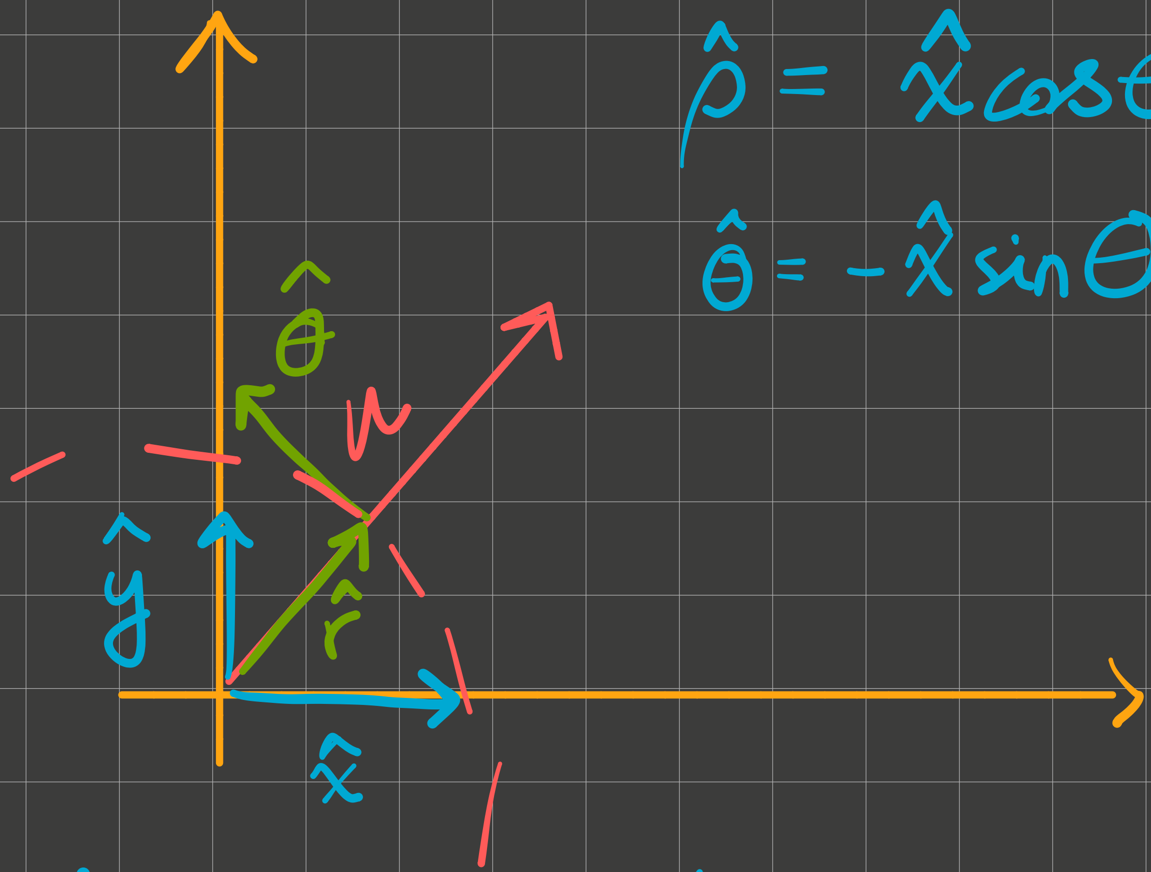
Se pide: σ_{xx} σ_{yy} σ_{xy}

i) Encuentre las tensiones $(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy})$ en coordenadas cartesianas.

ii) Evalúe las tensiones en los planos $x = 0$ e $y = 0$ para las expresiones tanto en coordenadas polares y cartesianas y compare.

$$[\sigma]_{r\theta z} = [Q][\sigma]_{xyz}[Q^T] \iff [u]_{r\theta z} = [Q][u]_{xyz}$$

$$Q = \left([a_i]_B\right)$$



$$\hat{\rho} = \hat{x}\cos\theta + \hat{y}\sin\theta$$

$$\hat{\theta} = -\hat{x}\sin\theta + \hat{y}\cos\theta$$

$$[Q] = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

¿Cómo resolver el ejercicio?

1. Construir $[Q]$ ✓

2. Calcular $[\sigma]_{xyz}$ ✓

$$[\sigma]_{xyz} = [Q]^T[\sigma]_{r\theta z}[Q]$$

3. Reemplazar ✓

$$r = \sqrt{x^2+y^2} \quad \theta = \arctan \frac{y}{x}$$

4. Evolver