Ayudantía 3

ICE/IBM2020

pzurita@uc.cl

Repaso

¿Linealización?

¿Direcciones principales?

¿Cambios de medida?

¿Descripciones Lagrangeanas/materiales y eulerianas/espaciales? ⇐ cinemática incluida

¿Tracciones?

¿Balances?

Linealización

$E(|\nabla u| \ll 1) \approx \frac{1}{2}(\nabla u + \nabla u^T)$ es como $f(x) \approx f'(a)(x-a) + f(a)$

$$E'\Big|_{\varphi = id} = \mathcal{E} + \dots$$

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} \frac{d^i f}{dx^i}\Big|_{x=a} (a-x)^i$$

Direcciones principales

$$\underset{x \in \mathbb{R}^3 : \|x\| = 1}{\arg(\min/\max)} \; x^T A x = v \neq 0 \iff \exists \lambda : Av = \lambda v$$

difícil

benito

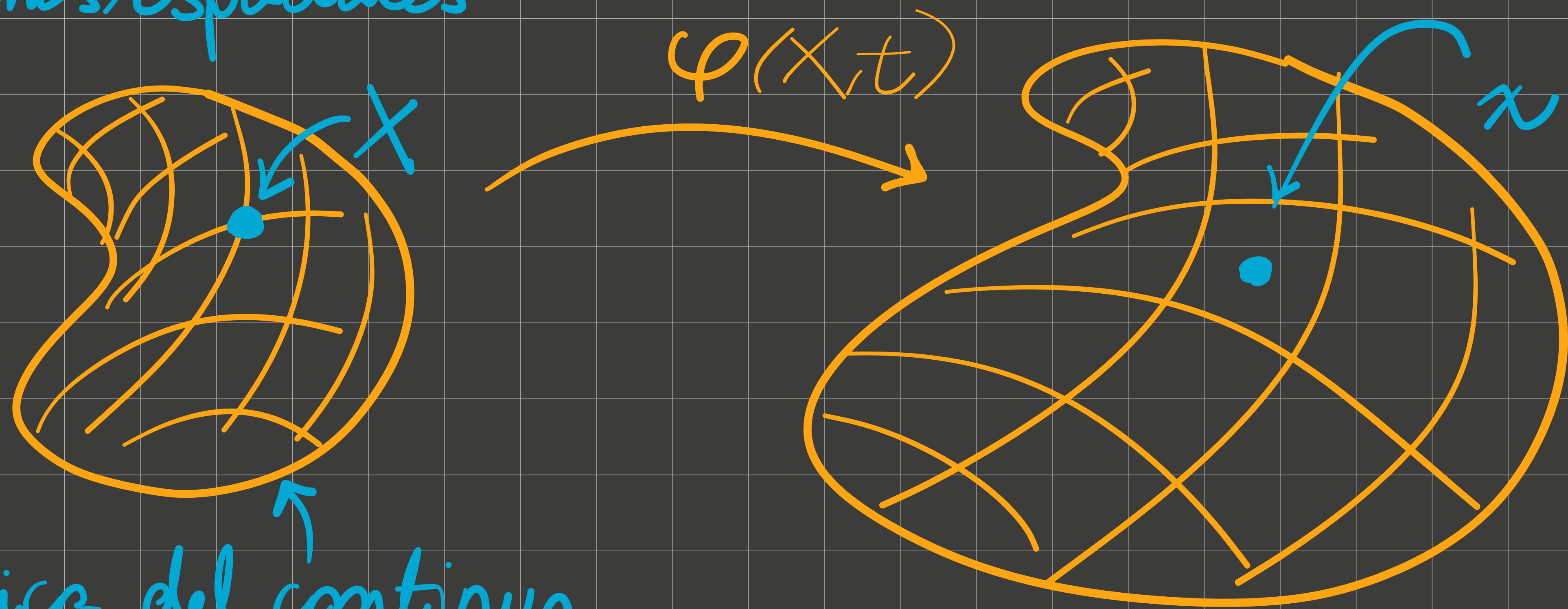
fácil

Cambios de medida

$$\frac{dv}{dV} = J \qquad d = \frac{1}{2}(\nabla v + \nabla v^T)$$

$$n\,da = J F^{-T} N\, dA \qquad \omega = \frac{1}{2}(\nabla v - \nabla v^T)$$

Descripciones Lagrangeanas/materiales y eulerianas/espaciales



Mecánica del continuo

$$V = \frac{\partial \varphi}{\partial t}$$

$$A = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}$$

$$v = V(\varphi^{-1}(x,t),\, t)$$

$$a = A(\varphi^{-1}(x,t), t)$$

Derivada material: $\dfrac{Df}{Dt} \equiv \dot{f} = \dfrac{\partial f}{\partial t} + \nabla f \cdot v$

generalizable

Tracciones

$$t = \sigma n$$

para "=", falta el φ / φ^{-1}

$$T := PN \iff \forall N . \quad df \equiv T\, dA$$

$$\text{con} \quad P = J \sigma F^{-T}$$

Balances

$$\frac{d}{dt} \int_{E_t} f \, dx = \int_{E_t} \dot{f} + f \nabla \cdot v \, dx$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho v) = 0 \equiv \dot{R} = 0$$

$$\rho \underset{\substack{\| \\ a}}{\dot{v}} = \nabla \cdot \sigma + \rho b$$

... y varias más

$$\frac{d}{dt} \int_{E_0} RV \, dX = \int_{E_0} RB \, dX + \int_{\partial E_0} T \, dS$$

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
Instituto de Ingeniería Biológica y Médica
Departamento de Ingeniería Estructural y Geotécnica
IBM2020 Introducción a la Biomecánica
Primer Semestre 2021

Ayudantía 3

Pablo Zurita Soler - pzurita@uc.cl

Problema 1. El deslizamiento relativo entre dos membranas pleurales dentro de un pulmón puede ser modelado localmente mediante la siguiente descripción de movimiento:

$$\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{X}, t) = \begin{bmatrix} X_1 + \gamma(t)X_2 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix}, \qquad t \geq 0$$

Se pide:

i) Entregue las expresión para el cambio relativo de volumen $J = \det \boldsymbol{F}$, y para el cambio relativo de área $\frac{da}{dA}$ de una superficie diferencial inicialmente orientada con normal $\boldsymbol{E}_1$ (dirección X_1)

ii) Entregue los valores y direcciones principales del tensor lagrangeano de deformaciones $\boldsymbol{E}$. Grafique como cambian los valores y direcciones principales de $\boldsymbol{E}$ para $t > 0$ asumiendo que $\gamma(t) = t$.

iii) Linealice[1] el tensor $\boldsymbol{E}$ para obtener el tensor de deformaciones infinitesimales $\boldsymbol{\varepsilon}$. Calcule las deformaciones y direcciones principales de $\boldsymbol{\varepsilon}$, y grafíquelas en función de t asumiendo que $\gamma(t) = t$. Compare con el resultado obtenido en ii).

Problema 2. Dado un campo de velocidad,

$$\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} \alpha x_1 t \\ (\alpha x_1 - \beta x_2)t \\ 0 \end{bmatrix}$$

donde $\alpha, \beta > 0$.Asumiendo que $\rho = \rho(t)$, es decir, su valor no varía con la posición y que $\rho(0) = R$, se pide:

i) Encuentre la expresión de $\rho(t)$ que satisface la conservación de masa local.

ii) Encuentre las condiciones bajo las cuales el campo v asegura un movimiento isocórico (preserva el volumen).

---

[1] Asumiendo que γ es pequeño

Problema 1. El deslizamiento relativo entre dos membranas pleurales dentro de un pulmón puede ser modelado localmente mediante la siguiente descripción de movimiento:

$$\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{X}, t) = \begin{bmatrix} X_1 + \gamma(t) X_2 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix}, \qquad t \geq 0$$

Se pide:

i) Entregue las expresión para el cambio relativo de volumen $J = \det \boldsymbol{F}$, y para el cambio relativo de área $\frac{da}{dA}$ de una superficie diferencial inicialmente orientada con normal $\boldsymbol{E}_1$ (dirección X_1)

ii) Entregue los valores y direcciones principales del tensor lagrangeano de deformaciones $\boldsymbol{E}$. Grafique como cambian los valores y direcciones principales de $\boldsymbol{E}$ para $t > 0$ asumiendo que $\gamma(t) = t$.

iii) Linealice[1] el tensor $\boldsymbol{E}$ para obtener el tensor de deformaciones infinitesimales $\boldsymbol{\varepsilon}$. Calcule las deformaciones y direcciones principales de $\boldsymbol{\varepsilon}$, y grafíquelas en función de t asumiendo que $\gamma(t) = t$. Compare con el resultado obtenido en ii).

i) $[F]_X = \begin{pmatrix} 1 & \gamma & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\quad J(X) = |[F]_X| = 1 = \frac{d\forall}{d\forall}$

$F = \nabla_0 \varphi$

incompresible

$n\,da = J F^{-T} N\, dA \qquad n\,da = 1 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\gamma & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} dA$

$= \sqrt{1 + \gamma^2}$

$n\,da = \begin{pmatrix} 1 \\ -\gamma \\ 0 \end{pmatrix} dA \Rightarrow n \frac{da}{dA} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\gamma \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\| n \frac{da}{dA} \right\| = \left| \frac{da}{dA} \right| \underbrace{\|n\|}_{1} = \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ -\gamma \\ 0 \end{pmatrix} \right\|$

ii) $E = \frac{1}{2}(F^T F - I)$

$[E]_X = \begin{pmatrix} 0 & \gamma & 0 \\ \gamma & \gamma^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

1.- $p(\lambda) := |E - \lambda I| = \lambda\left(-\lambda^2 + \frac{\gamma^2}{2}\lambda + \frac{\gamma^2}{4}\right)$

2.- $p(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda \in \left\{0, \frac{\gamma}{2}\left(\frac{\gamma}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\gamma^2+4}\right)\right\}$

3.- $Nul(E - \lambda I)$ para cada λ

$\Rightarrow v \in \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\gamma}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\gamma^2+4} \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

4.- Reemplazar $\gamma(t) = t$ y graficar $\lambda(t)$

iii) $u = \begin{pmatrix} X_1 - X_1 + \gamma X_2 \\ X_2 - X_2 \\ X_3 - X_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma X_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\mathcal{E} = \frac{1}{2}(\nabla u + \nabla u^T) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & \gamma & 0 \\ \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$ Repetir 1-4

y ver que $\lambda(t)$ es lineal

Problema 2. Dado un campo de velocidad,

$$\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} \alpha x_1 t \\ (\alpha x_1 - \beta x_2)t \\ 0 \end{bmatrix}$$

donde $\alpha, \beta > 0$.Asumiendo que $\rho = \rho(t)$, es decir, su valor no varía con la posición y que $\rho(0) = R$, se pide:

i) Encuentre la expresión de $\rho(t)$ que satisface la conservación de masa local.

ii) Encuentre las condiciones bajo las cuales el campo v asegura un movimiento isocórico (preserva el volumen).

i) $\dot{\rho} + \rho \nabla \cdot v = 0 \iff$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \cancelto{0}{\nabla\rho} \cdot v + \rho \nabla \cdot v = 0$$

$$\begin{cases} \dfrac{d\rho}{dt} + \rho(\alpha t - \beta t) = 0 \\ \rho(0) = R \end{cases}$$ $\Leftarrow$ ecuación diferencial ordinaria

ii) $\nabla \cdot v = 0 \Rightarrow \alpha t = \beta t \quad \forall t$

$\Rightarrow \alpha = \beta$ (llegaren de $J = 1$)