

# Ayudantía 8

ICE/IBM2020

pzurita@uc.d

I2 → Martes

Pueden preguntar cualquier cosa, PERO

L<sub>0</sub> + relevante ⇒ M5, M6, M7

MAÑOENME PREGUNTAS



PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE  
Instituto de Ingeniería Biológica y Médica  
Departamento de Ingeniería Estructural y Geotécnica  
**IBM2020 Introducción a la Biomecánica**  
Primer Semestre 2021

**Ayudantía 8**

Pablo Zurita Soler - pzurita@uc.cl

---

**Problema 1.** Considere los modelos viscoelásticos de fluido de Maxwell y sólido de Voigt.

- a) Halle la ley constitutiva (ecuación diferencial) que rige a los modelos.
- b) Calcule el módulo de almacenamiento  $E'(\omega)$  y de pérdida  $E''(\omega)$  de los modelos.

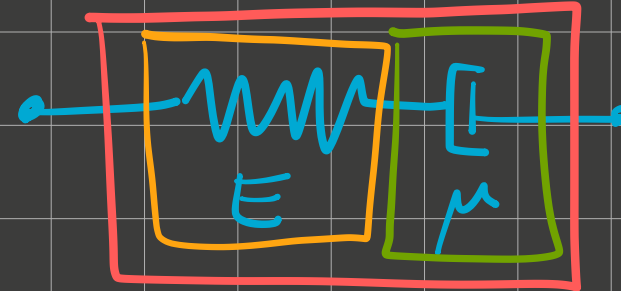
**Problema 2.** Asumiendo una gota de agua como una esfera sólida, y conocida la tensión superficial del agua  $\gamma = 72 \text{ dyn/cm}$  ( $\text{mN/m}$ ), encuentre cuál es la diferencia de presiones dentro y fuera de la burbuja si el radio es  $R = 0,5 \text{ mm}$ .


**Problema 1.** Considere los modelos viscoelásticos de fluido de Maxwell y sólido de Voigt.

a) Halle la ley constitutiva (ecuación diferencial) que rige a los modelos.

b) Calcule el módulo de almacenamiento  $E'(\omega)$  y de pérdida  $E''(\omega)$  de los modelos.

a) 1. Dibujar el diagrama




$$\sigma = k \ddot{\epsilon}$$

2. Reconocer los elementos: 1 2 3

3. Escribir las relaciones entre los  $\sigma$  y los  $\epsilon$  de los elementos  $\Rightarrow$  Lo que esté en serie tiene la misma tensión

Lo que esté en paralelo tiene la misma deformación

E.O.C., se suman

$$\sigma_3 = \sigma_1 = \sigma_2$$

las del elemento más grande se denotan sin

$$\epsilon_3 = \epsilon_1 + \epsilon_2$$

número  $\rightarrow \sigma := \sigma_3$   
 $\epsilon := \epsilon_3$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sigma = \sigma_1 = \sigma_2 \\ \epsilon = \epsilon_1 + \epsilon_2 \end{cases}$$

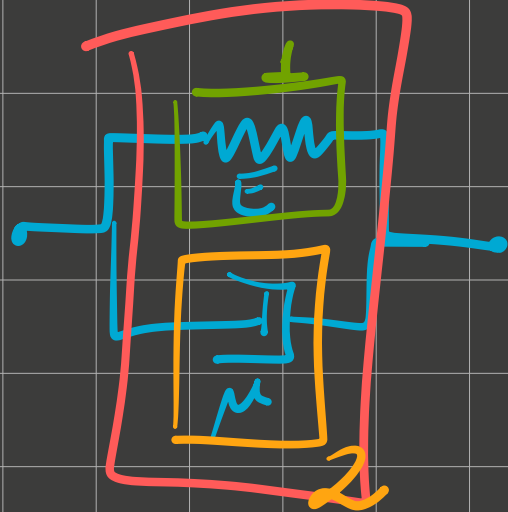
4. Escribir relaciones constitutivas por elemento atómico.

$$\begin{aligned} \Rightarrow \sigma_1 &= E \epsilon_1 \\ \Rightarrow \sigma_2 &= \mu \dot{\epsilon}_2 \end{aligned}$$

5. Reemplazar en ecuaciones

$$\sigma = E \epsilon_1 = \mu \dot{\epsilon}_2 \quad \wedge \quad \epsilon = \epsilon_1 + \epsilon_2$$

$$\dot{\epsilon} = \frac{\dot{\sigma}}{E} + \frac{\sigma}{\mu}$$



$$\sigma := \sigma_3$$

$$\varepsilon := \varepsilon_3$$

 $\Rightarrow$ 

$$\sigma = \sigma_1 + \sigma_2$$

$$\varepsilon = \varepsilon_1 = \varepsilon_2$$

$$\sigma_1 = E \varepsilon_1$$

$$\sigma_2 = \mu \dot{\varepsilon}_2$$

$$\Rightarrow \sigma = E \varepsilon_1 + \mu \dot{\varepsilon}_2$$

$$\rightarrow \sigma = E \varepsilon + \mu \dot{\varepsilon}$$

$E(\omega), E'(\omega)$

$\Rightarrow$  Se asume que  $\sigma = \sigma_0 \cos(\omega t + \delta)$   
y  $\varepsilon = \varepsilon_0 \cos(\omega t)$

$\equiv$  Asumir que  $\sigma = \text{Re}(\sigma^*)$  con  $\sigma^* = \sigma_0 e^{i(\omega t + \delta)}$   
 $\varepsilon = \text{Re}(\varepsilon^*)$  con  $\varepsilon^* = \varepsilon_0 e^{i\omega t}$

$\Rightarrow$  Ver que  $\sigma^*$  y  $\varepsilon^*$  satisfacen la misma ecuación diferencial que  $\sigma$  y  $\varepsilon$ .

Para Maxwell:

$$\dot{\mathcal{E}}^* = \frac{\dot{\sigma}^*}{\epsilon} + \frac{\sigma^*}{\mu}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}(\epsilon_0 e^{i\omega t}) = \frac{1}{\epsilon} \frac{d}{dt}(\sigma_0 e^{i(\omega t + \delta)}) + \frac{1}{\mu} \sigma_0 e^{i(\omega t + \delta)}$$

$$\Rightarrow \epsilon_0 i\omega e^{i\omega t} = \frac{1}{\epsilon} \sigma_0 \omega i e^{i(\omega t + \delta)} + \frac{1}{\mu} \sigma_0 e^{i(\omega t + \delta)}$$

$$\Rightarrow i\omega \mathcal{E}^* = \frac{i\omega}{\epsilon} \sigma^* + \frac{1}{\mu} \sigma^* \quad \leftarrow \text{relación entre } \sigma^* \text{ y } \mathcal{E}^*$$

$$\Rightarrow \text{Calcular } \mathcal{E}^* = \frac{\sigma^*}{\mathcal{E}^*}$$

$$\Rightarrow i\omega \mathcal{E}^* = \left( \frac{i\omega}{\epsilon} + \frac{1}{\mu} \right) \sigma^*$$

$$\Rightarrow \mathcal{E}^* = \frac{\sigma^*}{\mathcal{E}^*} = \frac{i\omega}{\left( \frac{i\omega}{\epsilon} + \frac{1}{\mu} \right)}$$

$$\Rightarrow \text{Escribir } \mathcal{E}^* \text{ de la forma } \mathcal{E}^* = \boxed{E'} + i \boxed{E''}$$

$$\Rightarrow \frac{i\omega E \mu}{i\omega \mu + E} \Rightarrow \frac{(i\omega E \mu)(-i\omega \mu + E)}{E^2 + \omega^2 \mu^2} \Rightarrow \boxed{\frac{\omega^2 E \mu^2}{E^2 + \omega^2 \mu^2}} + i \boxed{\frac{\omega E^2 \mu}{E^2 + \omega^2 \mu^2}}$$

Parc Vaigt:

$$\sigma^* = E\epsilon^* + \mu \dot{\epsilon}^*$$

$$\sigma^* = E\epsilon^* + \mu \frac{d}{dt} \epsilon_0 e^{i\omega t}$$

$$\sigma^* = (E + i\omega\mu) \epsilon^*$$

$$\Rightarrow E^* = \frac{\sigma^*}{\epsilon^*} = E + i\omega\mu \Rightarrow E' = E, E'' = \omega\mu$$

tiene sentido, la pérdida se da por viscosidad, proporcional  
a la frecuencia

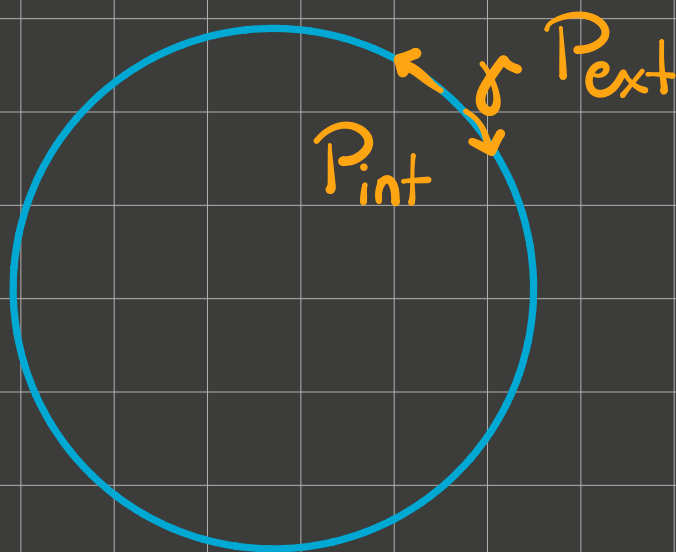
$\Rightarrow$  buena pregunta: ¿qué comportamientos cambian entre baja y alta  
frecuencia? ¿qué dice eso sobre la inmediatez  
de la reacción?



**Problema 2.** Asumiendo una gota de agua como una esfera sólida, y conocida la tensión superficial del agua  $\gamma = 72 \text{ dyn/cm}$  ( $\text{mN/m}$ ), encuentre cuál es la diferencia de presiones dentro y fuera de la burbuja si el radio es  $R = 0,5 \text{ mm}$ .

$\gamma$  energía por unidad de área

marginal para aumentar área



contrafactual para llegar a configuración

$$\Rightarrow \Delta P = \frac{\gamma A}{V}$$

$$= \frac{72 \text{ mN} \cdot 4\pi (0,5 \text{ mm})^2}{\frac{4}{3}\pi (0,5 \text{ mm})^3} \text{ m}$$

$$\Rightarrow (P_{\text{int}} - P_{\text{ext}}) V = \gamma A$$

$$\Rightarrow \gamma = \frac{V}{A} (P_{\text{int}} - P_{\text{ext}})$$

$$= \frac{L \cdot A}{A} \cdot \frac{F}{A} \rightarrow \frac{L}{A} \cdot F \rightarrow \frac{W}{A}$$