Jméno: Petr Valenta **UČO:** 487561

2. [20 bodů] Uvažujme modifikaci algoritmu pro inkrementaci binárního počítadla uloženého v poli $B[0 \dots \infty]$.

```
i ← 0;
while B[i] = 1 do
    B[i] ← 0;
    i ← i + 1
B[i] ← 1;
ComputeSomething(i)
```

Ve srovnání s variantou analyzovanou na přednášce se v uvažované variantě na konci volá funkce ComputeSomething s parametrem i. Předpokládejme, že časová složitost funkce závisí pouze a jenom na hodnotě parametru i, označme ji $T(i)$. Na přednášce jsme dokazovali, že když složitost $T(i)$ je konstantní, tak amortizovaná složitost operace inkrementace počítadla je konstantní.

(a) Určete, jaká je amortizovaná složitost operace inkrementace počítadla, jestliže $T(i) = i$.

(b) Určete, jaká je amortizovaná složitost operace inkrementace počítadla, jestliže $T(i) = 2^i$.

K analýze použijte metodu účtů nebo metodu potenciálové funkce!

Časť (a)

Ak je na začiatku binárne počítadlo prázdne, sekvencia n Increment operácií obráti $O(n)$ bitov.

Uvažujme potenciálovú funkciu $\Phi(D) = 2x$, kde x je počet 1 v počítadle. Platí $\Phi(D_0) = 0$ a zároveň $\Phi(D_i) \geq \Phi(D_0)$. Ak i-ta operácia obráti t_i bitov z hodnoty 1 na 0. Potom reálna cena $c_i = 2t_i + 1$. Kde t_i je cena cyklu while, operácia $B[i] \leftarrow 1$ stojí 1 a ComputeSomething stojí t_i, pretože i sa inkrementuje len pri zmene z 0 na 1.

Rozdiel potenciálov medzi $\Phi(D_i) - \Phi(D_{i-1})$ je $2 - 2t_i$, kde pripočítame 2 za preklopenie poslednej 0 na 1 a odpočítame $2t_i$ za všetky preklopené 1 do 0.

Potom amortizovaná cena:

$\hat{c}_i = c_i + \Phi(D_i) - \Phi(D_{i-1})$

$\hat{c}_i = 2t_i + 1 + \Phi(D_i) - \Phi(D_{i-1})$

$\hat{c}_i = 2t_i + 1 + 2 - 2t_i$

$\hat{c}_i = 3$

Amortizovaná cena Increment je teda $\mathcal{O}(1)$.

Časť (b)

Ak je na začiatku binárne počítadlo prázdne, sekvencia n Increment operácií obráti $O(n)$ bitov.

Uvažujme potenciálovú funkciu $\Phi(D) = 2^{t_i} + x_i$, kde x_i je počet 1 v počítadle a t_i je počet 1 po prvú 0 sprava. Platí $\Phi(D_0) = 1$ a zároveň $\Phi(D_i) \geq \Phi(D_0)$. Ak i-ta operácia obráti t_i bitov z hodnoty 1 na 0. Potom reálna cena $c_i = t_i + 1 + 2^{t_i}$. Kde t_i je cena cyklu while, operácia $B[i] \leftarrow 1$ stojí 1 a ComputeSomething stojí 2^{t_i}, pretože i sa inkrementuje len pri zmene z 0 na 1.

Jméno: Petr Valenta **UČO:** 487561

0007 *list* 2 *učo* 4875 61 *body*

Oblast strojově snímaných informací. Své učo a číslo listu vyplňte zleva dle vzoru číslic. Jinak do této oblasti nezasahujte. 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Počet 1 v počítadle po vykonaní operácie Increment: $x_i = x_{i-1} - t_i + 1$

Potom amortizovaná cena:
$\hat{c}_i = c_i + \Phi(D_i) - \Phi(D_{i-1})$
$\hat{c}_i = t_i + 1 + 2^{t_i} + \Phi(D_i) - \Phi(D_{i-1})$
$\hat{c}_i = t_i + 1 + 2^{t_i} + (2^{t_i} + x_i) - (2^{t_{i-1}} + x_{i-1})$
$\hat{c}_i = t_i + 1 + 2^{t_i} + (2^{t_i} + x_{i-1} - t_i + 1) - (2^{t_{i-1}} + x_{i-1})$
$\hat{c}_i = t_i + 1 + 2^{t_i} + 2^{t_i} + x_{i-1} - t_i + 1 - 2^{t_{i-1}} - x_{i-1}$
$\hat{c}_i = 2 + 2^{t_i}$
Amortizovaná cena Increment je teda $\mathcal{O}(2 + 2^{t_i})$.

Priemerný počet 1 po prvú 0 sprava je možné určiť následovnou sumou:

$$t_i = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{2^{n+1}} = 1$$