

Jméno: Petr Valenta

UČO: 487561

0007

list

1

učo

487561

body

Oblast strojově snímaných informací. Své učo a číslo listu vyplňte zleva dle vzoru číslic. Jinak do této oblasti nezasahujte.

0123456789

4. [20 bodů] Uvažujme posloupnost m MAKESET operací, následovanou posloupností u UNION operací, následovanou posloupností f FIND operací. Nechť $n = m + u + f$. Dokažte, že složitost uvedené posloupnosti n operací nad datovou strukturou Union-Find má, při použití heuristik spájení dle ranku a komprese cesty, složitost $\mathcal{O}(n)$.

Můžete předpokládat, že všechny operace UNION mají jako argument kořen stromu a jejich složitost je tedy konstantní. Na začátku výpočtu je datová struktura prázdná.

Operácia MAKESET bude stále vykonaná v konštantnom čase, to znamená, že postupnosť m MAKESET operácií bude trvať $\mathcal{O}(m)$. Z toho vyplýva, že počet prvkov v dátovej štruktúre bude m . Operácia UNION je podľa zadania volaná len nad koreňmi stromov a preto jej časová zložitosť je taktiež konštantná. Postupnosť u UNION operácií bude vykonaná s časovou zložitosťou $\mathcal{O}(u)$. Keďže $n = m + u + f$, potom stačí dokázať, že postupnosť f FIND operácií má amortizovanú časovú zložitosť $\mathcal{O}(f)$.

Operácia FIND(x) nad štruktúrou s m prvkami bude trvať prinajhoršom $\log_2(m)$, x je najhlbší prvok, pretože výška stromu $h \leq \text{rank}$, pričom $\text{rank} \leq \lfloor \log_2(m) \rfloor$ podľa vlastnosti 5. To znamená, že $\lfloor \log_2(m) \rfloor + 1$ prvkov je možné nájsť s časovou zložitosťou $\mathcal{O}(1)$. K výrazu je nutné pripočítat koreň stromu, preto $+1$.

Prvkov, pri ktorých nevieme, či ich je možné dosiahnuť v konštantnom čase je $m - \lfloor \log_2(m) \rfloor - 1$. Nové m' je potom $m - \lfloor \log_2(m) \rfloor - 1 + 2$, prirátame koreň a jeden uzol, ktorý bol priamim potomkom koreňa a rodičom hľadaného prvku x . Pre m' platí to isté ako pre m . Časová zložitosť FIND je buď konštantná alebo nám upraví dátovú štruktúru. Najhorší prípad je vyhľadanie najhlbšieho prvku. Takáto operácia upraví dátovú štruktúru tak, že $\lfloor \log_2(m) \rfloor + 1$ prvkov je možné pri nasledujúcej operácii FIND vyhľadať konštantne. Každé nasledujúce vyhľadanie najhlbšieho prvku opäť sprístupní ďalších $\lfloor \log_2(m') \rfloor + 1$ prvkov. Po x takýchto FIND operácií, kde $x \ll m$, budú všetky prvky prístupné v konštantnom čase.

Všeobecne je dokázaná amortizovaná zložitosť operácie FIND ako $\mathcal{O}(\log^*(m))$, kde $\log^*(m) \leq 5$ pre m menšie ako počet atómov vo vesmíre. To znamená, že operáciu FIND je možné považovať za konštantnú a preto postupnosť f FIND operácií má časovú zložitosť $\mathcal{O}(f)$.

Zo vzťahu $n = m + u + f$ potom môžeme povedať, že postupnosť m MAKESET operácií, nasledovanou postupnosťou u UNION operácií, nasledovanou postupnosťou f FIND operácií má zložitosť $\mathcal{O}(n)$.