Вопросы

Первообразная. Теорема о семействе первообразных функции. Неопределенный интеграл, его свойства. Таблица основных формул интегрирования.

Определение (Первообразная): Функция $F(x)$ называется **первообразной** для функции $f(x)$ на интервале I, если $F(x)$ дифференцируема на I и выполняется равенство:

$$F'(x) = f(x) \quad \text{для всех} \quad x \in I$$

Теорема (О семействе первообразных): Если $F(x)$ является первообразной для функции $f(x)$ на интервале I, то любая другая первообразная $\Phi(x)$ для $f(x)$ на том же интервале I имеет вид:

$$\Phi(x) = F(x) + C$$

где C произвольная постоянная ($C \in \mathbb{R}$).

Определение (Неопределенный интеграл): Совокупность всех первообразных $F(x) + C$ для функции $f(x)$ на интервале I называется **неопределенным интегралом** от функции $f(x)$ и обозначается символом $\int f(x)\,\mathrm{d}x$.

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C$$

где $F'(x) = f(x)$.

Свойства неопределенного интеграла:

1. Производная неопределенного интеграла равна подынтегральной функции:

$$\left(\int f(x)\,\mathrm{d}x\right)' = (F(x) + C)' = F'(x) = f(x)$$

2. Дифференциал неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению:

$$\mathrm{d}\left(\int f(x)\,\mathrm{d}x\right) = \left(\int f(x)\,\mathrm{d}x\right)'\mathrm{d}x = f(x)\,\mathrm{d}x$$

3. Неопределенный интеграл от дифференциала некоторой функции равен этой функции плюс произвольная постоянная:

$$\int \mathrm{d}F(x) = \int F'(x)\,\mathrm{d}x = \int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C$$

4. **Линейность:** Если $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ и $\int g(x)\,\mathrm{d}x$ существуют, то для любых констант $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ существует $\int (\alpha f(x) + \beta g(x))\,\mathrm{d}x$, и

$$\int (\alpha f(x) + \beta g(x))\,\mathrm{d}x = \alpha \int f(x)\,\mathrm{d}x + \beta \int g(x)\,\mathrm{d}x$$

Таблица основных формул интегрирования:

- $\int 0\,\mathrm{d}x = C$
- $\int 1\,\mathrm{d}x = x + C$
- $\int x^\alpha\,\mathrm{d}x = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$ ($\alpha \neq -1$)
- $\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln|x| + C$
- $\int e^x\,\mathrm{d}x = e^x + C$
- $\int a^x\,\mathrm{d}x = \frac{a^x}{\ln a} + C$ ($a > 0, a \neq 1$)
- $\int \cos x\,\mathrm{d}x = \sin x + C$
- $\int \sin x\,\mathrm{d}x = -\cos x + C$
- $\int \frac{1}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \tan x + C$
- $\int \frac{1}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x = -\cot x + C$
- $\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,\mathrm{d}x = \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + C = -\arccos\left(\frac{x}{a}\right) + C_1$ ($a > 0$)
- $\int \frac{1}{a^2+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\arctan\left(\frac{x}{a}\right) + C = -\frac{1}{a}arccot\left(\frac{x}{a}\right) + C_1$ ($a \neq 0$)
- $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+-a^2}}\,\mathrm{d}x = \ln\left|x + \sqrt{x^2+-a^2}\right| + C$ (длинный логарифм)
- $\int \cosh x\,\mathrm{d}x = \sinh x + C$
- $\int \sinh x\,\mathrm{d}x = \cosh x + C$
- $\int \frac{1}{\cosh^2 x}\,\mathrm{d}x = \tanh x + C$
- $\int \frac{1}{\sinh^2 x}\,\mathrm{d}x = -\coth x + C$

Метод замены переменной в неопределенном интеграле. Интегрирование по частям.

Пусть требуется вычислить $\int f(x)\,\mathrm{d}x$.

Теорема (Формула замены переменной): Пусть функция $x = \varphi(t)$ имеет непрерывную производную $\varphi'(t)$, и существует обратная функция $t = \varphi^{-1}(x)$. Пусть существует интеграл $\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = G(t) + C$. Тогда существует $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ и выполняется равенство:

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \left[\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t\right]_{t=\varphi^{-1}(x)} =$$

$$= G(\varphi^{-1}(x)) + C$$

Идея метода:

1. Вводим новую переменную t через подстановку $x = \varphi(t)$ (или $t = \psi(x)$).
2. Находим дифференциал $\mathrm{d}x = \varphi'(t)\,\mathrm{d}t$.
3. Подставляем x и $\mathrm{d}x$ в исходный интеграл, выражая его через t: $\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$.
4. Вычисляем полученный интеграл по переменной t.
5. Возвращаемся к исходной переменной x, используя обратную замену $t = \varphi^{-1}(x)$.

Альтернативная форма (подстановка вида $t = \psi(x)$): Если $t = \psi(x)$, то $\mathrm{d}t = \psi'(x)\,\mathrm{d}x$. Если подынтегральное выражение можно представить как $g(\psi(x))\psi'(x)\,\mathrm{d}x$, то:

$$\int g(\psi(x))\psi'(x)\,\mathrm{d}x = \left[\int g(t)\,\mathrm{d}t\right]_{t=\psi(x)}$$

Метод интегрирования по частям

Теорема (Формула интегрирования по частям): Пусть функции $u(x)$ и $v(x)$ имеют непрерывные производные $u'(x)$ и $v'(x)$ на некотором интервале. Тогда справедливо равенство:

$$\int u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)\,\mathrm{d}x$$

или, в дифференциальной форме ($\mathrm{d}v = v'(x)\,\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}u = u'(x)\,\mathrm{d}x$):

$$\int u\,\mathrm{d}v = uv - \int v\,\mathrm{d}u$$

Вывод формулы: Формула следует из правила дифференцирования произведения двух функций:

$$(u(x)v(x))' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$$

Интегрируя обе части по x, получаем:

$$\int (u(x)v(x))'\,\mathrm{d}x = \int u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x + \int u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x$$

По определению неопределенного интеграла, $\int (uv)'\,\mathrm{d}x = uv + C$. Учитывая, что интеграл в правой части также вычисляется с точностью до константы, её можно опустить на этом шаге:

$$uv = \int v\,\mathrm{d}u + \int u\,\mathrm{d}v$$

Перенося $\int v\,\mathrm{d}u$ в другую часть равенства, получаем формулу интегрирования по частям:

$$\int u\,\mathrm{d}v = uv - \int v\,\mathrm{d}u$$

Идея метода: Представить подынтегральное выражение $f(x)\,\mathrm{d}x$ в виде $u\,\mathrm{d}v$ так, чтобы интеграл $\int v\,\mathrm{d}u$ был проще исходного или сводился к нему.

Интегрирование рациональных функций путем разложения на простейшие дроби.

Определение (Рациональная функция): Рациональная функция (или дробь) — это функция вида $R(x) = \frac{P_{n(x)}}{Q_{m(x)}}$, где $P_{n(x)}$ и $Q_{m(x)}$ многочлены степеней n и m соответственно.

Шаг 1: Выделение целой части (если дробь неправильная) Если $n = \deg(P_n) \geq m = \deg(Q_m)$ (дробь неправильная), то делим $P_{n(x)}$ на $Q_{m(x)}$ «уголком»:

$$\frac{P_{n(x)}}{Q_{m(x)}} = M_{n-m}(x) + \frac{N_{k(x)}}{Q_{m(x)}}$$

где $M_{n-m}(x)$ — многочлен (целая часть), а $\frac{N_{k(x)}}{Q_{m(x)}}$ — правильная рациональная дробь ($k = \deg(N_k) < m$). Интегрирование сводится к:

$$\int \frac{P_{n(x)}}{Q_{m(x)}}\,\mathrm{d}x = \int M_{n-m}(x)\,\mathrm{d}x + \int \frac{N_{k(x)}}{Q_{m(x)}}\,\mathrm{d}x$$

Интеграл от многочлена $M_{n-m}(x)$ вычисляется просто. Основная задача — интегрирование правильной рациональной дроби.

Шаг 2: Разложение правильной рациональной дроби на простейшие Пусть дана правильная дробь $\frac{N_{k(x)}}{Q_{m(x)}}$ ($k < m$).

1. **Факторизация знаменателя:** Разложить знаменатель $Q_{m(x)}$ на неприводимые множители над $\mathbb{R}$:

$$Q_{m(x)} = c \cdot (x - x_1)^{k_1} ... (x - x_p)^{k_p} \cdot$$

$$\cdot (x^2 + p_1 x + q_1)^{l_1} ... (x^2 + p_{s}x + q_s)^{l_s}$$

где x_i — действительные корни кратности k_i, $p_j^2 - 4q_j < 0$, и $\sum k_i + 2\sum l_j = m$. Константу c можно вынести за знак интеграла.

2. **Теорема о разложении:** Любая правильная рациональная дробь $\frac{N_{k(x)}}{Q_{m(x)}}$ (с $c = 1$) может быть **единственным** образом представлена в виде суммы простейших дробей:

$$\frac{N_{k(x)}}{Q_{m(x)}} = \sum_{i=1}^{p}\left(\sum_{r=1}^{k_i}\frac{A_{i,r}}{(x - x_i)^r}\right) +$$

$$+ \sum_{j=1}^{s}\left(\sum_{t=1}^{l_j}\frac{B_{j,t}x + C_{j,t}}{(x^2 + p_j x + q_j)^t}\right)$$

где $A_{i,r}, B_{j,t}, C_{j,t} \in \mathbb{R}$ — неопределенные коэффициенты.

3. **Нахождение коэффициентов:** Коэффициенты A, B, C находятся методом неопределенных коэффициентов или методом частных значений (подстановкой удобных значений x, включая корни знаменателя).

Шаг 3: Интегрирование простейших дробей

- **Тип I:**

$$\int \frac{A}{x - a}\,\mathrm{d}x = A\ln|x - a| + C$$

- **Тип II:** ($k \geq 2$)

$$\int \frac{A}{(x - a)^k}\,\mathrm{d}x = A\int (x - a)^{-k}\,\mathrm{d}(x - a) =$$

$$= \frac{A}{(1 - k)(x - a)^{k-1}} + C$$

- **Тип III:** ($p^2 - 4q < 0$)

$$\int \frac{Bx + C}{x^2 + px + q}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\frac{B}{2}(2x + p) + \left(C - B\frac{p}{2}\right)}{x^2 + px + q}\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{B}{2}\int \frac{\mathrm{d}(x^2 + px + q)}{x^2 + px + q} + \left(C - B\frac{p}{2}\right)\int \frac{\mathrm{d}x}{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + \left(q - \frac{p^2}{4}\right)}$$

$$= \frac{B}{2}\ln(x^2 + px + q) + \frac{C - B\frac{p}{2}}{\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}}\arctan\left(\frac{x + \frac{p}{2}}{\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}}\right) + C_1$$

(знаменатель $x^2 + px + q > 0$)

- **Тип IV:** ($p^2 - 4q < 0, l \geq 2$)

$$\int \frac{Bx + C}{(x^2 + px + q)^l}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\frac{B}{2}(2x + p) + \left(C - B\frac{p}{2}\right)}{(x^2 + px + q)^l}\,\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{B}{2}\int (x^2 + px + q)^{-l}\,\mathrm{d}(x^2 + px + q) +$$

$$+ \left(C - B\frac{p}{2}\right)\int \frac{\mathrm{d}x}{\left(\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + a^2\right)^l}$$

(где $a^2 = q - \frac{p^2}{4}$)

$$= \frac{\frac{B}{2(1-l)}}{(x^2 + px + q)^{l-1}} + \left(C - B\frac{p}{2}\right)I_l$$

Интеграл $I_l = \int \frac{\mathrm{d}t}{(t^2+a^2)^l}$ (где $t = x + \frac{p}{2}$) вычисляется по рекуррентной формуле:

$$I_l = \frac{1}{2a^2(l - 1)}\frac{t}{(t^2 + a^2)^{l-1}} + \frac{2l - 3}{2a^2(l - 1)}I_{l-1}$$

сводящей его к $I_1 = \frac{1}{a}\arctan\left(\frac{t}{a}\right)$.

Вывод: Интеграл от любой рациональной функции выражается через элементарные функции: многочлены, рациональные дроби, логарифмы и арктангенсы.

Интегрирование иррациональных функций.

Здесь $R(.,.)$ обозначает рациональную функцию своих аргументов.

1. Интегралы вида

$$\int R\left(x, \left(\frac{ax + b}{cx + d}\right)^{r_1}, ..., \left(\frac{ax + b}{cx + d}\right)^{r_n}\right)\mathrm{d}x$$

- **Условие:** $r_1, ..., r_n \in \mathbb{Q}$ (рациональные), $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $ad - bc \neq 0$.
- **Метод:** Рационализация с помощью подстановки.
  1. Найти $h = \text{НОК}(\text{знаменатели} \ \ r_1, ..., r_n)$.
  2. Использовать подстановку: $t^h = \frac{ax-b}{cx+d}$.
  3. Выразить x и $\mathrm{d}x$ через t рационально. Все дробные степени $\left(\frac{ax-b}{cx+d}\right)^{r_i}$ станут целыми степенями t.
  4. Интеграл сводится к $\int R_1(t)\,\mathrm{d}t$, где R_1 — рациональная функция.

2. Интегралы вида

$$\int R\left(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}\right)\mathrm{d}x$$

- **Условие:** $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, $b^2 - 4ac \neq 0$.
- **Методы:**
  - **Подстановки Эйлера:** Рационализируют подынтегральную функцию.
    1. Если $a > 0$: $\sqrt{ax^2 + bx + c} = +-\sqrt{a}x + t$.
    2. Если $c > 0$: $\sqrt{ax^2 + bx + c} = xt + -\sqrt{c}$.
    3. Если $ax^2 + bx + c$ имеет действительные корни x_1, x_2 ($b^2 - 4ac > 0$): $\sqrt{ax^2 + bx + c} = t(x - x_1)$ (или $t(x - x_2)$).

    Все подстановки приводят к интегралу от рациональной функции t.
  - **Метод Остроградского (для частного случая):** Для интеграла вида $\int \frac{P_{n(x)}}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,\mathrm{d}x$ существует разложение:

$$\int \frac{P_{n(x)}}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}\,\mathrm{d}x = Q_{n-1}(x)\sqrt{ax^2 + bx + c} +$$

$$+ \lambda\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$$

    где $Q_{n-1}(x)$ — многочлен степени $n - 1$ с неопределенными коэффициентами, $\lambda \in \mathbb{R}$ — константа. Коэффициенты находятся дифференцированием и приравниванием коэффициентов. Оставшийся интеграл — табличный.
  - **Общий случай:** Интеграл $\int R\left(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}\right)\mathrm{d}x$ можно свести к сумме интеграла от рациональной функции и интеграла вида $\int \frac{P(x)}{Q(x)\sqrt{ax^2+bx+c}}\,\mathrm{d}x$. Последний, в свою очередь, раскладывается на сумму интегралов вида:
    - $$\int \frac{P(x)}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}\,\mathrm{d}x$$ (берется методом Остроградского).
    - $\int \frac{\mathrm{d}x}{(x-\alpha)^k\sqrt{ax^2+bx+c}}$ (сводится к предыдущему типу подстановкой $t = \frac{1}{x-\alpha}$).
    - $\int \frac{(Ax+B)\,\mathrm{d}x}{(x^2+px-q)^k\sqrt{ax^2+bx+c}}$ (сводится более сложными подстановками, например, Абеля или дробно-линейной).

3. Интегралы от дифференциального бинома

$$\int x^m(ax^n + b)^p\,\mathrm{d}x$$

- **Условие:** $m, n, p \in \mathbb{Q}$; $a, b \in \mathbb{R}$; $a, b, n, p \neq 0$.
- **Теорема Чебышёва:** Интеграл выражается через элементарные функции **только** в трех случаях:
  1. $p \in \mathbb{Z}$ (p целое). Подстановка: $x = t^q$, где $q = \text{НОК}(\text{знаменатель} \ \ m, \ \text{знаменатель} \ \ n)$.
  2. $\frac{m+1}{n} \in \mathbb{Z}$ (целое). Подстановка: $ax^n + b = t^s$, где $s = \text{знаменатель} \ \ p$.
  3. $\frac{m+1}{n} + p \in \mathbb{Z}$ (целое). Подстановка: $a + bx^{-n} = t^s$ (или $ax^n + b = x^n t^s$), где $s = \text{знаменатель} \ \ p$.

Во всех трех случаях интеграл сводится к интегралу от рациональной функции t.

Интегрирование выражений, содержащих тригонометрические функции.

Здесь $R(u, v)$ обозначает рациональную функцию своих аргументов.

1. Интегралы вида

$$\int R(\sin x, \cos x)\,\mathrm{d}x$$

- **Универсальная тригонометрическая подстановка:** Всегда работает, но может приводить к сложным вычислениям.

$$t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$$

  Тогда:

$$\sin x = \frac{2t}{1 + t^2}, \quad \cos x = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}, \quad \mathrm{d}x = \frac{2\,\mathrm{d}t}{1 + t^2}$$

  Интеграл сводится к $\int R_1(t)\,\mathrm{d}t$, где R_1 — рациональная функция t.
- **Частные случаи (упрощающие подстановки):**
  1. Если $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$ (нечетность по $\sin x$): Подстановка: $t = \cos x \Rightarrow \mathrm{d}t = -\sin x\,\mathrm{d}x$.
  2. Если $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$ (нечетность по $\cos x$): Подстановка: $t = \sin x \Rightarrow \mathrm{d}t = \cos x\,\mathrm{d}x$.
  3. Если $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$ (четность по $\sin x$ и $\cos x$ одновременно): Подстановка: $t = \tan x \Rightarrow \mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x} \Rightarrow \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$.

$$\sin x = \frac{t}{\sqrt{1 + t^2}}, \quad \cos x = \frac{1}{\sqrt{1 + t^2}}$$

     (При подстановке в R корни обычно сокращаются).

2. Интегралы вида

$$\int \sin^m x \cos^n x\,\mathrm{d}x$$

, где $m, n \in \mathbb{Z}$

- Если хотя бы один из показателей m или n — **нечетное положительное** число:
  - Если m нечетно: отщепляем $\sin x\,\mathrm{d}x$ и делаем замену $t = \cos x$.
  - Если n нечетно: отщепляем $\cos x\,\mathrm{d}x$ и делаем замену $t = \sin x$.
- Если оба показателя m и n — **четные неотрицательные** числа: Используем формулы понижения степени:

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}, \quad \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2},$$

$$\sin x \cos x = \frac{\sin 2x}{2}$$

- Если $m + n$ — **четное отрицательное** число (или оба показателя отрицательные): Используем подстановку $t = \tan x$ (или $t = \cot x$). Это случай (3) из пункта 1.

3. Интегралы вида $\int \sin(\alpha x)\sin(\beta x)\,\mathrm{d}x$, $\int \cos(\alpha x)\cos(\beta x)\,\mathrm{d}x$, $\int \sin(\alpha x)\cos(\beta x)\,\mathrm{d}x$

- Используются формулы преобразования произведения тригонометрических функций в сумму/разность:
  - $\sin A\sin B = \frac{1}{2}[\cos(A-B)-\cos(A+B)]$
  - $\cos A\cos B = \frac{1}{2}[\cos(A-B)+\cos(A+B)]$
  - $\sin A\cos B = \frac{1}{2}[\sin(A-B)+\sin(A+B)]$

4. Интегралы вида

$$\int R(\sinh x, \cosh x)\,\mathrm{d}x$$

- Интегрируются аналогично тригонометрическим функциям.
- Универсальная подстановка: $t = \tanh(\frac{x}{2})$.

$$\sinh x = \frac{2t}{1-t^2},\quad \cosh x = \frac{1+t^2}{1-t^2},\quad \mathrm{d}x = \frac{2\,\mathrm{d}t}{1-t^2}$$

- Частные случаи (нечетность/четность) и интегрирование произведений степеней $\sinh^m x\cosh^n x$ аналогичны тригонометрическим, но с использованием гиперболических тождеств (например, $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$).

Определенный интеграл. Эквивалентность различных определений. Свойства линейности и аддитивности интеграла Римана. Теорема о среднем.

Пусть $f : [a,b] \to \mathbb{R}$.

- **Разбиение** τ отрезка $[a,b]$: $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$.
- **Частичный отрезок:** $\Delta_i = [x_{i-1}, x_i]$.
- **Длина отрезка:** $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$.
- **Ранг (мелкость) разбиения:** $\lambda(\tau) = max_{i=1,\dots,n}\Delta x_i$.
- **Отмеченные точки:** $\xi = \{\xi_1, \dots, \xi_n\}$, где $\xi_i \in \Delta_i$.
- **Оснащенное разбиение:** (τ, ξ).
- **Интегральная сумма Римана:** $\sigma_{\tau(f,\xi)} = \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i$.

Определение (Интеграл Римана через $\varepsilon - \delta$): Число I называется **определенным интегралом** (интегралом Римана) функции f на $[a,b]$, если

$$\forall\varepsilon > 0\quad \exists\delta > 0\quad \forall(\tau,\xi):\quad \lambda(\tau) < \delta \Rightarrow \left|\sigma_{\tau(f,\xi)} - I\right| < \varepsilon$$

Обозначение: $I = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. Функция f называется **интегрируемой по Риману** на $[a,b]$ (обозначение $f \in R[a,b]$).

Определение (Интеграл Римана через последовательности): Число I называется пределом интегральных сумм $\sigma_{\tau(f,\xi)}$ при $\lambda(\tau) \to 0$, если для **любой** последовательности оснащенных разбиений (τ^k, ξ^k) такой, что $\lambda(\tau^k) \overset{k\to\infty}{\to} 0$, выполняется:

$$\lim_{k\to\infty} \sigma_{\tau^k}(f, \xi^k) = I$$

Теорема (Эквивалентность определений): Определение интеграла Римана через $\varepsilon - \delta$ эквивалентно определению через предел последовательностей интегральных сумм.

Свойства интеграла Римана

Теорема (Линейность): Если $f, g \in R[a,b]$ и $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, то $(\alpha f + \beta g) \in R[a,b]$ и

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))\,\mathrm{d}x = \alpha\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \beta\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$

(Док-во: следует из линейности сумм σ_τ и линейности предела.)

Теорема (Аддитивность по отрезку интегрирования):
1. Если $f \in R[a,b]$ и $c \in (a,b)$, то $f \in R[a,c]$ и $f \in R[c,b]$.
2. Если $f \in R[a,c]$ и $f \in R[c,b]$, то $f \in R[a,b]$ и

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

(Используя соглашения $\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0$ и $\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, формула верна для любого расположения a, b, c.)

Теорема (О среднем): Пусть:
1. $f, g \in R[a,b]$.
2. $g(x)$ знакопостоянна на $[a,b]$ (т.е. $\forall x \in [a,b] : g(x) \geq 0$ или $\forall x \in [a,b] : g(x) \leq 0$).
3. $m = \inf_{x\in[a,b]} f(x)$, $M = \sup_{x\in[a,b]} f(x)$.

Тогда $\exists\mu \in [m, M]$ такое, что:

$$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = \mu\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$

Дополнительно: Если $f \in C[a,b]$ (непрерывна), то $\exists\xi \in [a,b]$ такое, что $\mu = f(\xi)$:

$$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = f(\xi)\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$

Частный случай (при $g(x) = 1$):
- Если $f \in R[a,b]$, то $\exists\mu \in [m, M] : \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \mu(b-a)$.
- Если $f \in C[a,b]$, то $\exists\xi \in [a,b] : \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = f(\xi)(b-a)$. Величина $f(\xi) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ называется **средним значением** функции f на $[a,b]$.

Определенный интеграл. Свойства об оценках интеграла Римана. Теорема о среднем.

См. вопрос о определённом интеграле.

Предполагается $a \leq b$ и функции интегрируемы на $[a,b]$.

1. Монотонность интеграла: Если $f, g \in R[a,b]$ и $f(x) \leq g(x)$ для всех $x \in [a,b]$, то

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$

(Док-во: из $f(\xi_i) \leq g(\xi_i)$ и $\Delta x_i \geq 0$ следует $\sigma_{\tau(f,\xi)} \leq \sigma_{\tau(g,\xi)}$, переходим к пределу при $\lambda(\tau) \to 0$.)

Следствие 1 (Неотрицательность): Если $f(x) \geq 0$ на $[a,b]$, то $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geq 0$. *(Следует из монотонности при $g(x) = 0$ или $g(x) = f(x)$ и $f(x) = 0$.)*

Следствие 2 (Оценка интеграла константами): Если $f \in R[a,b]$ и $m \leq f(x) \leq M$ для всех $x \in [a,b]$, то

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq M(b-a)$$

(Док-во: интегрируем неравенство $m \leq f(x) \leq M$, используя $\int_a^b m\,\mathrm{d}x = m(b-a)$ и $\int_a^b M\,\mathrm{d}x = M(b-a)$.) Здесь $m = \inf_{x\in[a,b]} f(x)$ и $M = \sup_{x\in[a,b]} f(x)$.

2. Интегрирование неравенства с модулем: Если $f \in R[a,b]$, то $|f| \in R[a,b]$ и

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$$

(Док-во 1: из $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$ и монотонности интеграла.) (Док-во 2: из $|\sum f(\xi_i)\Delta x_i| \leq \sum|f(\xi_i)|\Delta x_i$ и перехода к пределу.)

Теорема (О среднем): Пусть:
1. $f, g \in R[a,b]$.
2. $g(x)$ знакопостоянна на $[a,b]$ (т.е. $\forall x \in [a,b] : g(x) \geq 0$ или $\forall x \in [a,b] : g(x) \leq 0$).
3. $m = \inf_{x\in[a,b]} f(x)$, $M = \sup_{x\in[a,b]} f(x)$.

Тогда $\exists\mu \in [m, M]$ такое, что:

$$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = \mu\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$

Дополнительно: Если $f \in C[a,b]$ (непрерывна), то по теореме о промежуточном значении $\exists\xi \in [a,b]$ такое, что $\mu = f(\xi)$:

$$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = f(\xi)\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$

Частный случай (при $g(x) = 1$):
- Если $f \in R[a,b]$, то $\exists\mu \in [m, M] : \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \mu(b-a)$.
- Если $f \in C[a,b]$, то $\exists\xi \in [a,b] : \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = f(\xi)(b-a)$. Величина $f(\xi) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ называется **средним значением** функции f на $[a,b]$.

Суммы Дарбу и их свойства.

Пусть $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ и $\tau = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$ — разбиение отрезка $[a,b]$. Обозначим $\Delta_i = [x_{i-1}, x_i]$ и $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$.

Определения:
- $m_i = \inf_{x\in\Delta_i} f(x)$ — точная нижняя грань f на Δ_i.
- $M_i = \sup_{x\in\Delta_i} f(x)$ — точная верхняя грань f на Δ_i. *(Для существования конечных m_i, M_i требуется ограниченность f на $[a,b]$.)*
- **Нижняя сумма Дарбу:**

$$s_{\tau(f)} = \sum_{i=1}^n m_i\Delta x_i$$

- **Верхняя сумма Дарбу:**

$$S_{\tau(f)} = \sum_{i=1}^n M_i\Delta x_i$$

Свойства сумм Дарбу:

1. **Связь с интегральной суммой Римана:** Для любого оснащенного разбиения (τ, ξ) верно:

   $s_{\tau(f)} \leq \sigma_{\tau(f,\xi)} \leq S_{\tau(f)}$

2. **Суммы Дарбу как точные грани интегральных сумм:** При фиксированном разбиении τ:

   $s_{\tau(f)} = \inf_\xi \sigma_{\tau(f,\xi)}$

   $S_{\tau(f)} = \sup_\xi \sigma_{\tau(f,\xi)}$

   (Супремум и инфимум берутся по всем возможным наборам отмеченных точек ξ.)

3. **Необходимость ограниченности:** Если f не ограничена на $[a,b]$, то для любого разбиения τ хотя бы одна из сумм Дарбу ($S_{\tau(f)}$ или $s_{\tau(f)}$) будет бесконечной ($+\infty$ или $-\infty$).

4. **Монотонность при измельчении разбиения:** Пусть τ_2 — измельчение τ_1 (т.е., τ_2 содержит все точки τ_1, $\tau_2 \supset \tau_1$). Тогда:

   $s_{\tau_1}(f) \leq s_{\tau_2}(f) \leq S_{\tau_2}(f) \leq S_{\tau_1}(f)$

   (При добавлении новых точек нижняя сумма не убывает, верхняя — не возрастает.)

5. **Сравнение любых сумм Дарбу:** Для любых двух разбиений τ' и τ'' отрезка $[a,b]$ выполняется:

   $s_{\tau'}(f) \leq S_{\tau''}(f)$

   (Любая нижняя сумма не превосходит любую верхнюю сумму.)

6. **Нижний и верхний интегралы Дарбу:**
   - Нижний интеграл Дарбу: $I_* = \sup_\tau s_{\tau(f)}$ (супремум по всем разбиениям τ)
   - Верхний интеграл Дарбу: $I^* = \inf_\tau S_{\tau(f)}$ (инфимум по всем разбиениям τ)
   - Для любого τ: $s_{\tau(f)} \leq I_* \leq I^* \leq S_{\tau(f)}$.

Необходимое условие интегрируемости функции. Критерий интегрируемости функции.

Теорема: Если функция f интегрируема по Риману на $[a,b]$ (т.е., $f \in R[a,b]$), то f **ограничена** на $[a,b]$.

$f \in R[a,b] \Rightarrow \exists C > 0 : \forall x \in [a,b], |f(x)| \leq C$

Идея доказательства: Предполагаем, что f интегрируема, но не ограничена. Тогда для любого разбиения τ найдется отрезок Δ_k, на котором f не ограничена. На этом отрезке можно выбрать отмеченные точки ξ_k так, чтобы значение $f(\xi_k)$ было сколь угодно большим (по модулю). Это позволяет построить интегральные суммы $\sigma_{\tau(f,\xi)}$, которые не стремятся к конечному пределу $I = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, что противоречит определению интегрируемости. Следовательно, f должна быть ограничена.

Критерий интегрируемости функции по Риману (Критерий Дарбу)

Теорема: Ограниченная функция $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ интегрируема по Риману на $[a,b]$ **тогда и только тогда, когда** выполняется одно из следующих эквивалентных условий:

1. **В терминах сумм Дарбу:** Предел разности верхней и нижней сумм Дарбу равен нулю при стремлении ранга разбиения к нулю:

   $$\lim_{\lambda(\tau)\to 0}\left(S_{\tau(f)} - s_{\tau(f)}\right) = 0$$

   Или, в $\varepsilon - \delta$ форме:

   $$\forall\varepsilon > 0\quad \exists\delta > 0\quad \forall\tau:\quad \lambda(\tau) < \delta \Rightarrow S_{\tau(f)} - s_{\tau(f)} < \varepsilon$$

2. **В терминах интегралов Дарбу:** Нижний интеграл Дарбу равен верхнему интегралу Дарбу:

   $I_* = I^*$

   где $I_* = \sup_\tau s_{\tau(f)}$ и $I^* = \inf_\tau S_{\tau(f)}$. В этом случае $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = I_* = I^*$.

3. **В терминах колебаний:** Обозначим $\omega(f, \Delta_i) = M_i - m_i = \sup_{x\in\Delta_i} f(x) - \inf_{x\in\Delta_i} f(x)$ (колебание f на Δ_i). Тогда:

   $$\lim_{\lambda(\tau)\to 0}\sum_{i=1}^n \omega(f, \Delta_i)\Delta x_i = 0$$

   Или, в $\varepsilon - \delta$ форме:

   $$\forall\varepsilon > 0\quad \exists\delta > 0\quad \forall\tau:\quad \lambda(\tau) < \delta \Rightarrow \sum_{i=1}^n \omega(f, \Delta_i)\Delta x_i < \varepsilon$$

Идея доказательства ($\Rightarrow$ Необходимость): Если $f \in R[a,b]$, то $\forall\varepsilon > 0\exists\delta$, что для $\lambda(\tau) < \delta$, $\left|\sigma_{\tau(f,\xi)} - I\right| < \frac{\varepsilon}{3}$. Отсюда $S_{\tau(f)} \leq I + \frac{\varepsilon}{3}$ и $s_{\tau(f)} \geq I - \frac{\varepsilon}{3}$. Вычитая, получаем $S_{\tau(f)} - s_{\tau(f)} \leq 2\frac{\varepsilon}{3} < \varepsilon$. **Идея доказательства ($\leq$ Достаточность):** Если $\lim(S_\tau - s_\tau) = 0$, то $I_* = I^* = I$. Из $s_{\tau(f)} \leq \sigma_{\tau(f,\xi)} \leq S_{\tau(f)}$ и $s_{\tau(f)} \leq I \leq S_{\tau(f)}$ следует $\left|\sigma_{\tau(f,\xi)} - I\right| \leq S_{\tau(f)} - s_{\tau(f)}$. Так как правая часть стремится к 0, то $\sigma_{\tau(f,\xi)} \to I$, значит $f \in R[a,b]$.

Классы интегрируемых функций. Интегрируемость непрерывной и кусочно-непрерывной функции.

Напомним, что функция f интегрируема по Риману на $[a,b]$ ($f \in R[a,b]$) если существует конечный предел интегральных сумм $\lim_{\lambda(\tau)\to 0}\sigma_{\tau(f,\xi)} = I$.

Необходимое условие: Если $f \in R[a,b]$, то f ограничена на $[a,b]$.

Критерий Дарбу (в терминах колебания):

$$f \in R[a,b] \Leftrightarrow \lim_{\lambda(\tau)\to 0}\sum_{i=1}^n \omega(f, \Delta_i)\Delta x_i = 0$$

где $\omega(f, \Delta_i) = \sup_{x\in\Delta_i} f(x) - \inf_{x\in\Delta_i} f(x)$ — колебание функции f на отрезке Δ_i.

—

Теорема 1: Интегрируемость непрерывных функций Если функция f непрерывна на отрезке $[a,b]$ ($f \in C[a,b]$), то она интегрируема по Риману на $[a,b]$ ($f \in R[a,b]$).

Доказательство (идея):
1. Если $f \in C[a,b]$, то f равномерно непрерывна на $[a,b]$ (Теорема Кантора).
2. $\forall\varepsilon > 0\exists\delta > 0\forall x', x'' \in [a,b] : |x' - x''| < \delta \Rightarrow |f(x') - f(x'')| < \frac{\varepsilon}{b-a}$.
3. Возьмем разбиение τ с рангом $\lambda(\tau) < \delta$. Тогда для любого Δ_i, его длина $\Delta x_i < \delta$.
4. Колебание $\omega(f, \Delta_i) = \sup_{\Delta_i} f - \inf_{\Delta_i} f = f(x_i') - f(x_i'')$ для некоторых $x_i', x_i'' \in \Delta_i$ (т.к. f непрерывна на Δ_i).
5. Поскольку $|x_i' - x_i''| < \delta$, то $\omega(f, \Delta_i) = |f(x_i') - f(x_i'')| < \frac{\varepsilon}{b-a}$.
6. Оцениваем сумму из критерия Дарбу:

   $$\sum_{i=1}^n \omega(f, \Delta_i)\Delta x_i < \sum_{i=1}^n \frac{\varepsilon}{b-a}\Delta x_i = \frac{\varepsilon}{b-a}(b-a) = \varepsilon$$

7. Так как $\sum\omega(f, \Delta_i)\Delta x_i < \varepsilon$ при $\lambda(\tau) < \delta$, по критерию Дарбу $f \in R[a,b]$.

—

Определение (Кусочно-непрерывная функция, КНФ): Функция $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ называется **кусочно-непрерывной** на $[a,b]$, если:
1. Существует конечное разбиение $a = c_0 < c_1 < \dots < c_m = b$.
2. На каждом интервале (c_{i-1}, c_i) функция f непрерывна.
3. В каждой точке c_i ($i = 0, \dots, m$) существуют конечные односторонние пределы $f(c_i + 0)$ (для $i < m$) и $f(c_i - 0)$ (для $i > 0$). (Т.е. все точки разрыва - это точки разрыва **I рода**).

Теорема 2: Интегрируемость кусочно-непрерывных функций Если функция f кусочно-непрерывна на отрезке $[a,b]$, то она интегрируема по Риману на $[a,b]$ ($f \in R[a,b]$).

Доказательство (идея):
1. **Ограниченность:** КНФ ограничена на $[a,b]$, так как она непрерывна на интервалах (c_{i-1}, c_i) и имеет конечные пределы в точках разрыва c_i.
2. **Вспомогательная функция:** Рассмотрим функцию $\tilde{f}(x)$, которая совпадает с $f(x)$ во всех точках непрерывности $x \in (c_{i-1}, c_i)$. В точках c_i доопределим $\tilde{f}(c_i)$ любыми значениями (например, $\tilde{f}(c_i) = f(c_i + 0)$ или 0).
3. **Интегрируемость $\tilde{f}$ на подынтервалах:** На каждом замкнутом отрезке $[c_{i-1}, c_i]$ функция $\tilde{f}$ может быть доопределена в концах c_{i-1}, c_i так, чтобы стать непрерывной на этом отрезке (например, $\tilde{f}(c_{i-1}) = f(c_{i-1} + 0)$, $\tilde{f}(c_i) = f(c_i - 0)$). Такая доопределенная функция $\tilde{f}_i$ непрерывна на $[c_{i-1}, c_i]$, следовательно, $\tilde{f}_i \in R[c_{i-1}, c_i]$.
4. **Интегрируемость $\tilde{f}$ на $[a,b]$:** По свойству аддитивности, если функция интегрируема на частях $[c_{i-1}, c_i]$, то она интегрируема и на всем отрезке $[a,b]$. Таким образом, $\tilde{f} \in R[a,b]$.
5. **Связь f и $\tilde{f}$:** Функции f и $\tilde{f}$ отличаются только в конечном числе точек $c_0, c_1, \dots, c_m$.
6. **Теорема об изменении в конечном числе точек:** Изменение значений интегрируемой функции в конечном числе точек не влияет на её интегрируемость и значение интеграла.
7. **Вывод:** Так как $\tilde{f} \in R[a,b]$ и f отличается от $\tilde{f}$ в конечном числе точек, то $f \in R[a,b]$ и $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \tilde{f}(x)\,\mathrm{d}x$.

Другие важные классы интегрируемых функций:
- **Монотонные функции:** Если f монотонна на $[a,b]$, то $f \in R[a,b]$.
- **Функции с конечным числом точек разрыва:** Если f ограничена на $[a,b]$ и имеет конечное число точек разрыва, то $f \in R[a,b]$. (КНФ - частный случай).

Определенный интеграл. Арифметические свойства интегрируемых функций.

См. вопрос о определённом интеграле.

Пусть $f, g \in R[a,b]$ (т.е. f и g интегрируемы по Риману на $[a,b]$). Из необходимого условия интегрируемости следует, что f и g ограничены на $[a,b]$.

Теорема:
1. **Линейность:** Для любых $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, функция $(\alpha f + \beta g)$ интегрируема на $[a,b]$, и

   $$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))\,\mathrm{d}x = \alpha\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \beta\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$

2. **Произведение:** Функция $(f \cdot g)$ интегрируема на $[a,b]$ ($f \cdot g \in R[a,b]$). *(Важно: В общем случае $\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x \neq \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \cdot \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.)*
3. **Модуль:** Функция $|f|$ интегрируема на $[a,b]$ ($|f| \in R[a,b]$).
4. **Частное:** Если $\exists C > 0$ такое, что $|g(x)| \geq C$ для всех $x \in [a,b]$, то функция $\frac{f}{g}$ интегрируема на $[a,b]$. *(Достаточно доказать для $\frac{1}{g}$, тогда $\frac{f}{g} = f \cdot \left(\frac{1}{g}\right)$ будет интегрируема по п.2.)*

Доказательства (идеи, использующие критерий Дарбу в терминах колебаний): Напомним критерий: $h \in R[a,b] \Leftrightarrow \lim_{\lambda(\tau)\to 0}\sum_{i=1}^n \omega(h, \Delta_i)\Delta x_i = 0$. По условию, $\sum\omega(f, \Delta_i)\Delta x_i \to 0$ и $\sum\omega(g, \Delta_i)\Delta x_i \to 0$ при $\lambda(\tau) \to 0$.

1. **Линейность:** Используем свойство колебания: $\omega(\alpha f + \beta g, E) \leq |\alpha|\omega(f, E) + |\beta|\omega(g, E)$. Тогда $\sum\omega(\alpha f + \beta g, \Delta_i)\Delta x_i \leq |\alpha|\sum\omega(f, \Delta_i)\Delta x_i + |\beta|\sum\omega(g, \Delta_i)\Delta x_i$. Правая часть стремится к $|\alpha| \cdot 0 + |\beta| \cdot 0 = 0$ при $\lambda(\tau) \to 0$. Следовательно, левая часть тоже стремится к 0, и $(\alpha f + \beta g) \in R[a,b]$. Формула для интеграла получается из линейности интегральных сумм и линейности предела.
2. **Произведение:** Так как f, g интегрируемы, они ограничены: $|f(x)| \leq M_f$, $|g(x)| \leq M_g$. Пусть $M = max(M_f, M_g)$. Используем свойство колебания: $\omega(f \cdot g, E) \leq M_f\omega(g, E) + M_g\omega(f, E) \leq M(\omega(f, E) + \omega(g, E))$. Тогда $\sum\omega(fg, \Delta_i)\Delta x_i \leq M(\sum\omega(f, \Delta_i)\Delta x_i + \sum\omega(g, \Delta_i)\Delta x_i)$. Правая часть стремится к $M(0 + 0) = 0$ при $\lambda(\tau) \to 0$. Значит, $(f \cdot g) \in R[a,b]$.
3. **Модуль:** Используем свойство: $||f(x)| - |f(y)|| \leq |f(x) - f(y)|$. Взяв супремум, получаем $\omega(|f|, E) \leq \omega(f, E)$. Тогда $\sum\omega(|f|, \Delta_i)\Delta x_i \leq \sum\omega(f, \Delta_i)\Delta x_i$. Правая часть стремится к 0 при $\lambda(\tau) \to 0$. Значит, $|f| \in R[a,b]$.
4. **Частное (для $\frac{1}{g}$):** Пусть $|g(x)| \geq C > 0$. Используем свойство: $\left|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(y)}\right| = \frac{|g(y)-g(x)|}{|g(x)g(y)|} \leq \frac{\omega(g,E)}{C^2}$. Взяв супремум, получаем $\omega\left(\frac{1}{g}, E\right) \leq \frac{\omega(g,E)}{C^2}$. Тогда $\sum\omega\left(\frac{1}{g}, \Delta_i\right)\Delta x_i \leq \frac{1}{C^2}\sum\omega(g, \Delta_i)\Delta x_i$. Правая часть стремится к $\frac{1}{C^2} \cdot 0 = 0$ при $\lambda(\tau) \to 0$. Значит, $\frac{1}{g} \in R[a,b]$. Интегрируемость $\frac{f}{g} = f \cdot \left(\frac{1}{g}\right)$ следует из п.2.

Интеграл с переменным верхним пределом. Свойства непрерывности и дифференцируемости интеграла с переменным верхним пределом.

Определение: Пусть функция f интегрируема на отрезке $[a,b]$ ($f \in R[a,b]$). **Интегралом с переменным верхним пределом** называется функция $\Phi : [a,b] \to \mathbb{R}$, определенная как:

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

Теорема 1 (О непрерывности интеграла с переменным верхним пределом): Если $f \in R[a,b]$, то функция $\Phi(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ непрерывна на $[a,b]$ ($\Phi \in C[a,b]$).

Доказательство (идея):
1. Рассмотрим приращение $\Delta\Phi = \Phi(x_0 + \Delta x) - \Phi(x_0)$ для $x_0 \in [a,b]$.
2. По свойству аддитивности: $\Delta\Phi = \int_a^{x_0+\Delta x} f(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^{x_0} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{x_0}^{x_0+\Delta x} f(t)\,\mathrm{d}t$.
3. Так как $f \in R[a,b]$, она ограничена: $\exists M > 0 : |f(t)| \leq M$ для $t \in [a,b]$.
4. Оценим $|\Delta\Phi|$:

   $$|\Delta\Phi| = \left|\int_{x_0}^{x_0+\Delta x} f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leq \left|\int_{x_0}^{x_0+\Delta x} |f(t)|\,\mathrm{d}t\right| \leq$$

$$\leq \left|\int_{x_0}^{x_0+\Delta x} M\,\mathrm{d}t\right| = M|\Delta x|$$

1. Так как $M|\Delta x| \to 0$ при $\Delta x \to 0$, то по теореме о двух милиционерах $\lim_{\Delta x \to 0} \Delta\Phi = 0$.
2. Это означает непрерывность $\Phi(x)$ в точке x_0. Так как x_0 произвольна, $\Phi(x)$ непрерывна на $[a, b]$.

Теорема 2 (О дифференцируемости интеграла с переменным верхним пределом): Пусть $f \in R[a, b]$. Если функция f непрерывна в точке $x_0 \in [a, b]$, то функция $\Phi(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ дифференцируема в точке x_0, и

$\Phi'(x_0) = f(x_0)$

Доказательство (идея):

1. Рассмотрим предел отношения приращений: $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Phi(x_0+\Delta x)-\Phi(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x}\int_{x_0}^{x_0+\Delta x} f(t)\,\mathrm{d}t$.
2. Нужно показать, что этот предел равен $f(x_0)$. Рассмотрим разность:

$$\left|\frac{1}{\Delta x}\int_{x_0}^{x_0+\Delta x} f(t)\,\mathrm{d}t - f(x_0)\right| =$$

$$= \left|\frac{1}{\Delta x}\int_{x_0}^{x_0+\Delta x} f(t)\,\mathrm{d}t - \frac{1}{\Delta x}\int_{x_0}^{x_0+\Delta x} f(x_0)\,\mathrm{d}t\right| =$$

$$= \left|\frac{1}{\Delta x}\int_{x_0}^{x_0+\Delta x} (f(t) - f(x_0))\,\mathrm{d}t\right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{|\Delta x|}\left|\int_{x_0}^{x_0+\Delta x} |f(t) - f(x_0)|\,\mathrm{d}t\right|$$

1. Так как f непрерывна в x_0: $\forall\varepsilon > 0 \exists\delta > 0$ такое, что если $|t - x_0| < \delta$, то $|f(t) - f(x_0)| < \varepsilon$.
2. Выберем $|\Delta x| < \delta$. Тогда для всех t между x_0 и $x_0 + \Delta x$ выполнено $|t - x_0| < \delta$, и значит $|f(t) - f(x_0)| < \varepsilon$.
3. Оценим интеграл:

$$\left|\int_{x_0}^{x_0+\Delta x} |f(t) - f(x_0)|\,\mathrm{d}t\right| \leq \left|\int_{x_0}^{x_0+\Delta x} \varepsilon\,\mathrm{d}t\right| = \varepsilon|\Delta x|$$

4. Подставляем в неравенство из п.2:

$$\left|\frac{\Phi(x_0+\Delta x) - \Phi(x_0)}{\Delta x} - f(x_0)\right| \leq \frac{1}{|\Delta x|}(\varepsilon|\Delta x|) = \varepsilon$$

5. По определению предела, это означает $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta\Phi}{\Delta x} = f(x_0)$, т.е. $\Phi'(x_0) = f(x_0)$.

Следствие 1 (Существование первообразной): Если функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$ ($f \in C[a, b]$), то функция $\Phi(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ является **первообразной** для f на $[a, b]$. *(Это следует из Теоремы 2, так как если f непрерывна всюду на [a,b], то Φ'(x) = f(x) всюду на [a,b]).*

Следствие 2 (Связь первообразных): Если $f \in C[a, b]$, то любая первообразная $F(x)$ для $f(x)$ на $[a, b]$ представима в виде:

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t + C$$

где C — некоторая константа. *(Следует из того, что две первообразные одной функции на отрезке отличаются на константу).*

Интеграл с переменным верхним пределом. Существование первообразной у непрерывной функции. Формула Ньютона - Лейбница.

Определение (Интеграл с переменным верхним пределом): Пусть $f \in R[a, b]$. Функция $\Phi : [a, b] \to \mathbb{R}$ определена как:

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

Теорема (О дифференцируемости $\Phi(x)$): Пусть $f \in R[a, b]$. Если f непрерывна в точке $x_0 \in [a, b]$, то $\Phi(x)$ дифференцируема в x_0 и $\Phi'(x_0) = f(x_0)$.

Следствие (Существование первообразной у непрерывной функции): Если функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$ ($f \in C[a, b]$), то функция $\Phi(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ является **первообразной** для f на $[a, b]$. **Доказательство:** Поскольку f непрерывна в каждой точке $x \in [a, b]$, по предыдущей теореме функция $\Phi(x)$ дифференцируема в каждой точке $x \in [a, b]$, и ее производная $\Phi'(x) = f(x)$. Это точно соответствует определению первообразной. **Вывод:** Любая непрерывная на отрезке функция имеет на этом отрезке первообразную (конкретно, $\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ является одной из них).

Формула Ньютона-Лейбница

Теорема 1 (Формула Ньютона-Лейбница для непрерывных функций): Пусть $f \in C[a, b]$, и $F(x)$ — **любая** первообразная для $f(x)$ на $[a, b]$ (т.е. $F'(x) = f(x)$ для $x \in [a, b]$). Тогда

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$$

Обозначение: $F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b$.

Доказательство:

1. Поскольку $f \in C[a, b]$, функция $\Phi(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ является одной из первообразных для $f(x)$ на $[a, b]$.
2. Любая другая первообразная $F(x)$ для $f(x)$ на $[a, b]$ связана с $\Phi(x)$ соотношением $F(x) = \Phi(x) + C$ для некоторой константы C.
3. Найдем C, подставив $x = a$: $F(a) = \Phi(a) + C = \int_a^a f(t)\,\mathrm{d}t + C = 0 + C \Rightarrow C = F(a)$.
4. Значит, $F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t + F(a)$.
5. Подставим $x = b$ в это равенство: $F(b) = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + F(a)$.
6. Выражаем интеграл: $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = F(b) - F(a)$.

Теорема 2 (Обобщенная формула Ньютона-Лейбница): Пусть:

1. Функция f интегрируема по Риману на $[a, b]$ ($f \in R[a, b]$).
2. Функция $F(x)$ непрерывна на $[a, b]$.
3. $F'(x) = f(x)$ для всех $x \in [a, b]$, за исключением, возможно, конечного числа точек.

Тогда

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$$

Доказательство (идея):

1. Рассмотрим разбиение $\tau = \{x_0; \ldots; x_n\}$ отрезка $[a, b]$.
2. $F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^n (F(x_i) - F(x_{i-1}))$.
3. По теореме Лагранжа о среднем значении (которая применима на каждом $[x_{i-1}; x_i]$, так как F непрерывна и дифференцируема почти всюду), $\exists\xi_i \in (x_{i-1}; x_i)$ такая, что $F(x_i) - F(x_{i-1}) = F'(\xi_i)\Delta x_i = f(\xi_i)\Delta x_i$. (Строгое обоснование требует аккуратности из-за точек недифференцируемости F).
4. Тогда $F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i = \sigma_{\tau(f,\xi)}$.
5. Так как $f \in R[a, b]$, предел интегральных сумм $\sigma_{\tau(f,\xi)}$ при $\lambda(\tau) \to 0$ существует и равен $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.
6. Поскольку левая часть $F(b) - F(a)$ не зависит от разбиения τ, получаем $F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Замена переменной в определенном интеграле. Интегрирование по частям. Свойства определённого интеграла от чётной, нечётной и периодической функций.

Теорема: Пусть:

1. Функция $f(x)$ непрерывна на отрезке с концами a и b.
2. Функция $x = \varphi(t)$ непрерывно дифференцируема на отрезке $[\alpha, \beta]$ ($\varphi \in C^1[\alpha, \beta]$).
3. Значения $\varphi(t)$ при $t \in [\alpha, \beta]$ принадлежат отрезку с концами a и b.
4. $\varphi(\alpha) = a$ и $\varphi(\beta) = b$.

Тогда:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$$

Доказательство (идея): Пусть $F(x)$ — первообразная для $f(x)$. Тогда по формуле Ньютона-Лейбница $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$. Рассмотрим функцию $G(t) = F(\varphi(t))$. Ее производная $G'(t) = F'(\varphi(t))\varphi'(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t)$. Функция $G(t)$ является первообразной для $f(\varphi(t))\varphi'(t)$. По формуле Ньютона-Лейбница для правой части: $\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = G(\beta) - G(\alpha) = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) = F(b) - F(a)$ Обе части равны $F(b) - F(a)$.

Интегрирование по частям в определенном интеграле

Теорема: Пусть функции $u(x)$ и $v(x)$ непрерывно дифференцируемы на $[a, b]$ (т.е. $u, v \in C^1[a, b]$). Тогда:

$$\int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b v(x)u'(x)\,\mathrm{d}x$$

или в дифференциальной форме:

$$\int_a^b u\,\mathrm{d}v = [uv]_a^b - \int_a^b v\,\mathrm{d}u$$

где $[uv]_a^b = u(b)v(b) - u(a)v(a)$.

Доказательство (идея): Интегрируем тождество $(uv)' = u'v + uv'$ на $[a, b]$:

$$\int_a^b (uv)'\,\mathrm{d}x = \int_a^b u'v\,\mathrm{d}x + \int_a^b uv'\,\mathrm{d}x$$

. Левая часть по формуле Ньютона-Лейбница равна $[uv]_a^b$.

$$[uv]_a^b = \int_a^b v\,\mathrm{d}u + \int_a^b u\,\mathrm{d}v$$

. Перенося $\int_a^b v\,\mathrm{d}u$, получаем формулу.

Интегрирование четных, нечетных и периодических функций

Теорема (Интеграл от нечетной функции по симметричному промежутку): Если $f \in R[-a, a]$ и f — нечетная функция ($f(-x) = -f(x)$ для $x \in [-a, a]$), то:

$$\int_{-a}^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0$$

(Док-во: Разбиваем на $\int_{-a}^0 + \int_0^a$. В первом делаем замену $x = -t$.)

Теорема (Интеграл от четной функции по симметричному промежутку): Если $f \in R[-a, a]$ и f — четная функция ($f(-x) = f(x)$ для $x \in [-a, a]$), то:

$$\int_{-a}^a f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x$$

(Док-во: Аналогично нечетному случаю, замена $x = -t$ в $\int_{-a}^0$ приводит к $\int_0^a$.)

Теорема (Интеграл от периодической функции по промежутку длиной в период): Если $f \in R_loc(\mathbb{R})$ (локально интегрируема) и f — периодическая с периодом T ($f(x + T) = f(x)$), то для любого $a \in \mathbb{R}$:

$$\int_a^{a+T} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^T f(x)\,\mathrm{d}x$$

(Док-во: Разбиваем $\int_a^{a+T} = \int_a^0 + \int_0^T + \int_T^{a-T}$. В последнем интеграле делаем замену $x = t + T$.)

Приложение определённых интегралов к вычислению площадей плоских фигур. Понятие, свойства и вычисление площади плоской фигуры.

Определение (Площадь): Пусть $\mathcal{U}$ — класс «квадрируемых» подмножеств $\mathbb{R}^2$. Функция $S : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ называется **площадью**, если она удовлетворяет аксиомам:

1. **Неотрицательность:** $S(A) \geq 0$ для $A \in \mathcal{U}$.
2. **Аддитивность:** Если $A, B \in \mathcal{U}$ и $A \cap B = \emptyset$ (или имеют пересечение нулевой площади, например, по границе), то $A \cup B \in \mathcal{U}$ и $S(A \cup B) = S(A) + S(B)$.
3. **Нормировка:** Площадь единичного квадрата $[0, 1] \times [0, 1]$ равна 1. (Из этого следует, что площадь прямоугольника со сторонами a, b равна ab).
4. **Инвариантность относительно движений:** Если $A \in \mathcal{U}$ и V — движение (параллельный перенос, поворот), то $V(A) \in \mathcal{U}$ и $S(V(A)) = S(A)$.

Свойства площади (вытекающие из аксиом):

- **Монотонность:** Если $A, B \in \mathcal{U}$ и $A \subset B$, то $S(A) \leq S(B)$.
- **Площадь множеств нулевой «толщины»:** Площадь отрезка, точки или любой конечной кривой равна 0.

Вычисление площади с помощью определенного интеграла

1. Площадь криволинейной трапеции Определение (Подграфик / Криволинейная трапеция): Пусть $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, $f(x) \geq 0$. Множество

$$G_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}$$

называется **подграфиком** функции f (или криволинейной трапецией).

Теорема (Площадь подграфика): Если $f \in R[a, b]$ и $f(x) \geq 0$ на $[a, b]$, и подграфик G_f квадрируем, то его площадь равна:

$$S(G_f) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

Идея доказательства: Для любого разбиения τ, площадь $S(G_f)$ заключена между площадями вписанной и описанной ступенчатых фигур, которые равны нижней $s_{\tau(f)}$ и верхней $S_{\tau(f)}$ суммам Дарбу.

$$s_{\tau(f)} \leq S(G_f) \leq S_{\tau(f)}$$

Поскольку $f \in R[a, b]$, $\sup_\tau s_{\tau(f)} = \inf_\tau S_{\tau(f)} = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. Следовательно, $S(G_f)$ должна быть равна интегралу.

2. Площадь фигуры между двумя графиками Определение: Пусть $f, g \in R[a, b]$ и $f(x) \leq g(x)$ на $[a, b]$. Фигура, заключенная между графиками:

$$G_{f,g} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, f(x) \leq y \leq g(x)\}$$

Теорема (Площадь фигуры между графиками): Если $G_{f,g}$ квадрируема, то ее площадь равна:

$$S(G_{f,g}) = \int_a^b (g(x) - f(x))\,\mathrm{d}x$$

Идея доказательства: Сдвинуть фигуру вверх на константу C так, чтобы обе функции стали неотрицательными ($f_1 = f + C, g_1 = g + C$). Площадь не изменится из-за инвариантности. Тогда $S(G_{f,g}) = S(G_{g_1}) - S(G_{f_1}) = \int_a^b g_1(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b f_1(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b (g(x) + C - (f(x) + C))\,\mathrm{d}x = \int_a^b (g(x) - f(x))\,\mathrm{d}x$.

3. Площадь в полярных координатах Определение (Криволинейный сектор): Пусть $r = f(\varphi)$, где $f : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$, $f(\varphi) \geq 0$, $0 < \beta - \alpha \leq 2\pi$. Множество точек

$$\tilde{G}_f = \{(r\cos\varphi, r\sin\varphi) \in \mathbb{R}^2 : \alpha \leq \varphi \leq \beta, \quad 0 \leq r \leq f(\varphi)\}$$

называется **криволинейным сектором**.

Теорема (Площадь криволинейного сектора): Если $f \in R[\alpha, \beta]$ и сектор $\tilde{G}_f$ квадрируем, то его площадь равна:

$$S(\tilde{G}_f) = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta f^2(\varphi)\,\mathrm{d}\varphi$$

Идея доказательства: Площадь малого сектора с углом $\Delta\varphi_i$ и радиусом $f(\varphi_i)$ приближенно равна $\frac{1}{2}[f(\varphi_i)]^2\Delta\varphi_i$. Суммирование таких площадей приводит к интегральной сумме для $\frac{1}{2}f^2(\varphi)$. Более строго — через суммы Дарбу для функции $\frac{1}{2}f^2(\varphi)$, используя площадь кругового сектора.

Приложение определённых интегралов к вычислению объемов тел. Понятие, свойства и вычисление объёма тела.

Определение (Объём): Пусть $\mathcal{U}$ — класс «кубируемых» подмножеств (тел) в $\mathbb{R}^3$. Функция $V : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ называется **объёмом**, если она удовлетворяет аксиомам:

1. **Неотрицательность:** $V(T) \geq 0$ для $T \in \mathcal{U}$.
2. **Аддитивность:** Если $T_1, T_2 \in \mathcal{U}$ и $T_1 \cap T_2 = \emptyset$ (или имеют пересечение нулевого объёма), то $T_1 \cup T_2 \in \mathcal{U}$ и $V(T_1 \cup T_2) = V(T_1) + V(T_2)$.
3. **Нормировка:** Объём единичного куба $[0, 1]^3$ равен 1. (Из этого следует, что объём прямоугольного параллелепипеда со сторонами a, b, c равен abc).
4. **Инвариантность относительно движений:** Если $T \in \mathcal{U}$ и v — движение в $\mathbb{R}^3$, то $v(T) \in \mathcal{U}$ и $V(v(T)) = V(T)$.

Свойства объёма (вытекающие из аксиом):

- **Монотонность:** Если $T_1, T_2 \in \mathcal{U}$ и $T_1 \subset T_2$, то $V(T_1) \leq V(T_2)$.
- **Объём «плоских» множеств:** Объём множества, лежащего в одной плоскости (например, прямоугольника), равен 0.

Вычисление объёма с помощью определенного интеграла

1. Метод сечений Определение (Сечение): Пусть T — тело в $\mathbb{R}^3$. **Сечением** тела T плоскостью, перпендикулярной оси Ox в точке x, называется множество:

$$T(x) = \{(y, z) \in \mathbb{R}^2 : (x, y, z) \in T\}$$

Обозначим площадь этого сечения через $S(x)$ (если она существует).

Теорема (Объем тела через площади сечений): Пусть тело T расположено между плоскостями $x = a$ и $x = b$ ($a < b$). Если для каждого $x \in [a, b]$ сечение $T(x)$ квадрируемо (имеет площадь $S(x)$), функция площади сечения $S(x)$ интегрируема на $[a, b]$ ($S(x) \in R[a, b]$), и объем $V(T)$ существует, то:

$$V(T) = \int_a^b S(x)\,\mathrm{d}x$$

Идея доказательства: Рассматриваем разбиение τ отрезка $[a, b]$. На малом отрезке $\Delta_i = [x_{i-1}; x_i]$ объем части тела T_i, соответствующей этому отрезку, приближенно равен объему цилиндра с основанием $S(\xi_i)$ (где $\xi_i \in \Delta_i$) и высотой Δx_i, т.е. $S(\xi_i)\Delta x_i$. Сумма таких объемов $\sum S(\xi_i)\Delta x_i$ является интегральной суммой для функции $S(x)$. В пределе при $\lambda(\tau) \to 0$ получаем интеграл. (Более строго — через суммы Дарбу для $S(x)$ и вписанные/описанные цилиндрические тела).

2. Объем тела вращения Определение (Тело вращения вокруг оси Ox): Пусть $f \in C[a, b]$ и $f(x) \geq 0$. Телом вращения графика $y = f(x)$ вокруг оси Ox называется множество:

$$T_f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : a \leq x \leq b, \quad y^2 + z^2 \leq f^2(x)\}$$

Теорема (Объем тела вращения): Объем тела вращения T_f равен:

$$V(T_f) = \pi\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x$$

Доказательство: Применяем метод сечений. Сечение тела T_f плоскостью, перпендикулярной оси Ox в точке x, является кругом радиуса $R = f(x)$. Площадь этого сечения $S(x) = \pi R^2 = \pi[f(x)]^2$. Так как f непрерывна, то и f^2 непрерывна, а значит $S(x)$ интегрируема. По теореме об объеме через сечения:

$$V(T_f) = \int_a^b S(x)\,\mathrm{d}x =$$

$$= \int_a^b \pi f^2(x)\,\mathrm{d}x = \pi\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x$$

Приложение определённых интегралов к вычислению длин дуг кривых. Понятия пути, гладкости пути, эквивалентности путей, кривой, гладкости кривой, ломаной, вписанной в путь, длины пути, длины кривой, спрямляемости пути. Свойства эквивалентных путей. Вычисление длины вписанной ломаной. Свойство аддитивности длины пути.

Определение (Путь): Путь (или параметризованная кривая) в $\mathbb{R}^n$ — это непрерывное отображение $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$, где $[a, b]$ — отрезок.

- Координатное представление: $\gamma(t) = \left(x_1(t), \ldots, x_{n(t)}\right)$, где $x_{i(t)}$ — непрерывные функции.
- $\gamma(a)$ — начало пути, $\gamma(b)$ — конец пути.
- Путь замкнут, если $\gamma(a) = \gamma(b)$.
- **Носитель пути:** $\gamma([a, b]) = \{\gamma(t) : t \in [a, b]\}$.

Определение (Гладкость пути):

- Путь γ называется C^m**-гладким** ($m \geq 1$), если $\forall i : x_{i(t)} \in C^{m[a,b]}$.
- Путь **гладкий**, если он C^1-гладкий.
- Путь **кусочно-гладкий**, если существует разбиение $a = t_0 < \ldots < t_k = b$, такое что γ гладкий на каждом $[t_{j-1}; t_j]$.
- *(Иногда дополнительно требуют $\gamma'(t) = \left(x_1'(t), \ldots, x_{n(t)}'\right) \neq (0)$ для гладкого пути).*

Определение (Эквивалентные пути): Пути $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ и $\tilde{\gamma} : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^n$ называются **эквивалентными** ($\gamma \sim \tilde{\gamma}$), если существует строго возрастающая непрерывная биекция (замена параметра)$\omega : [a, b] \to [\alpha, \beta]$ такая, что $\gamma(t) = \tilde{\gamma}(\omega(t))$. *(Отношение $\sim$ является отношением эквивалентности).*

Определение (Кривая): Кривая $\{\gamma\}$ — это класс эквивалентности путей $\{\tilde{\gamma} : \tilde{\gamma} \sim \gamma\}$. Любой путь γ из этого класса называется **параметризацией** кривой.

Определение (Гладкость кривой): Кривая $\{\gamma\}$ называется **гладкой** (кусочно-гладкой), если существует хотя бы одна гладкая (кусочно-гладкая) параметризация $\gamma \in \{\gamma\}$.

Длина пути и кривой

Определение (Ломаная, вписанная в путь): Пусть $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ — путь и $\tau : a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$ — разбиение отрезка $[a, b]$. **Ломаной**, вписанной в путь γ и соответствующей разбиению τ, называется объединение отрезков $[\gamma(t_{i-1}), \gamma(t_i)]$ для $i = 1, \ldots, n$. Обозначение: L_τ.

Длина вписанной ломаной: Длина ломаной L_τ — это сумма длин ее сегментов:

$$|L_\tau| = \sum_{i=1}^{n} |\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})|$$

где $|(v)| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} v_k^2}$ — евклидова длина вектора в $\mathbb{R}^n$.

$$|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} \left(x_{k(t_i)} - x_{k(t_{i-1})}\right)^2}$$

Определение (Длина пути): Длина пути $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ — это точная верхняя грань длин всех вписанных ломаных:

$$l_\gamma = \sup_\tau |L_\tau|$$

где супремум берется по всем возможным разбиениям τ отрезка $[a, b]$.

Определение (Спрямляемый путь): Путь γ называется **спрямляемым**, если его длина конечна: $l_\gamma < +\infty$.

Свойство эквивалентных путей: Если пути γ и $\tilde{\gamma}$ эквивалентны ($\gamma \sim \tilde{\gamma}$), то их длины равны: $l_\gamma = l_{\tilde{\gamma}}$. *(Идея: Каждому разбиению τ для γ соответствует разбиение $\tilde{\tau} = \omega(\tau)$ для $\tilde{\gamma}$, и $|L_\tau| = |L_{\tilde{\tau}}|$. Множества длин ломаных совпадают, значит и их супремумы равны.)*

Определение (Длина кривой): Длина кривой $\{\gamma\}$ это длина l_γ любой ее параметризации $\gamma \in \{\gamma\}$. Обозначение: $l_{\{\gamma\}}$.

Свойство аддитивности длины пути: Пусть $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ путь, $c \in (a, b)$, $\gamma^* = \gamma|_{[a,c]}$, $\tilde{\gamma} = \gamma|_{[c,b]}$. Путь γ спрямляем $\leftrightarrow$ пути γ^* и $\tilde{\gamma}$ спрямляемы. В этом случае:

$$l_\gamma = l_{\gamma^*} + l_{\tilde{\gamma}}$$

(Идея: $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$. Любое разбиение $[a, b]$ можно дополнить точкой c, не уменьшая длину ломаной.)

Вычисление длины пути (связь с интегралом)

Теорема (Вычисление длины гладкого пути): Если путь $\gamma(t) = \left(x_1(t), \dots, x_{n(t)}\right)$ является гладким ($\gamma \in C^1[a, b]$), то он спрямляем, и его длина вычисляется по формуле:

$$l_\gamma = \int_a^b |\gamma'(t)|\,\mathrm{d}t = \int_a^b \sqrt{(x_1'(t))^2 + \dots + \left(x_{n(t)}'\right)^2}\,\mathrm{d}t$$

Частные случаи:

- **Длина графика функции:** $y = f(x)$, $f \in C^1[a, b]$. Параметризация $\gamma(x) = (x, f(x))$.

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,\mathrm{d}x$$

- **Длина кривой в полярных координатах:** $r = f(\varphi)$, $f \in C^1[\alpha, \beta]$. Параметризация $\gamma(\varphi) = (f(\varphi)\cos\varphi, f(\varphi)\sin\varphi)$.

$$l = \int_\alpha^\beta \sqrt{(f(\varphi))^2 + (f'(\varphi))^2}\,\mathrm{d}\varphi$$

Приложение определённых интегралов к вычислению длин дуг кривых. Понятия пути, гладкости пути, эквивалентности путей, кривой, гладкости кривой, ломаной, вписанной в путь, длины пути, длины кривой, спрямляемости пути. Достаточное условие спрямляемости пути. Свойство непрерывной дифференцируемости длины части пути. Вычисление длины пути.

Определение (Путь): Путь (или параметризованная кривая) в $\mathbb{R}^n$ — это непрерывное отображение $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$, где $[a, b]$ — отрезок.

- Координатное представление: $\gamma(t) = \left(x_1(t), \dots, x_{n(t)}\right)$, где $x_{i(t)}$ — непрерывные функции.

Определение (Гладкость пути):

- Путь γ называется C^m**-гладким** ($m \ge 1$), если $\forall i : x_{i(t)} \in C^{m[a,b]}$.
- Путь **гладкий**, если он C^1-гладкий.
- Путь **кусочно-гладкий**, если он непрерывен и состоит из конечного числа гладких кусков.

Определение (Эквивалентные пути): Пути $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ и $\tilde{\gamma} : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^n$ называются **эквивалентными** ($\gamma \sim \tilde{\gamma}$), если существует строго возрастающая непрерывная биекция (замена параметра)$\omega : [a, b] \to [\alpha, \beta]$ такая, что $\gamma(t) = \tilde{\gamma}(\omega(t))$.

Определение (Кривая): Кривая $\{\gamma\}$ — это класс эквивалентности путей $\{\tilde{\gamma} : \tilde{\gamma} \sim \gamma\}$. Любой путь γ из этого класса называется **параметризацией** кривой.

Определение (Гладкость кривой): Кривая $\{\gamma\}$ называется **гладкой** (кусочно-гладкой), если существует хотя бы одна гладкая (кусочно-гладкая) параметризация $\gamma \in \{\gamma\}$.

Длина пути и кривой

Определение (Ломаная, вписанная в путь): Пусть $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ — путь и $\tau : a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ — разбиение отрезка $[a, b]$. **Ломаной**, вписанной в путь γ, называется объединение отрезков $[\gamma(t_{i-1}), \gamma(t_i)]$, $i = 1, \dots, n$. Обозначение: L_τ. Её длина: $|L_\tau| = \sum_{i=1}^{n} |\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})|$.

Определение (Длина пути): Длина пути $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ — это точная верхняя грань длин всех вписанных ломаных:

$$l_\gamma = \sup_\tau |L_\tau|$$

Определение (Спрямляемый путь): Путь γ называется **спрямляемым**, если его длина конечна: $l_\gamma < +\infty$. Длина кривой - это длина любой её спрямляемой параметризации.

Теорема (Достаточное условие спрямляемости): Если путь $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ является **гладким** (т.е. $\gamma \in C^1[a, b]$), то он **спрямляем**. **Идея доказательства:** Используя теорему Лагранжа о среднем значении для каждой компоненты $x_{k(t)}$, показываем, что длина любой вписанной ломаной $|L_\tau|$ ограничена сверху величиной, зависящей от максимумов модулей производных $\left|x_{k(t)}'\right|$ и длины отрезка $(b - a)$. Следовательно, $\sup|L_\tau|$ конечен.

Длина части пути (Функция длины дуги)

Определение (Функция длины дуги): Пусть $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ спрямляемый путь. Функция $s : [a, b] \to \mathbb{R}$, определенная как

$$s(t) = l_{\gamma|_{[a,t]}}$$

(т.е. длина участка пути от $\gamma(a)$ до $\gamma(t)$), называется **функцией длины дуги** пути γ.

Теорема (Свойство функции длины дуги): Пусть $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ **гладкий** путь ($\gamma \in C^1[a, b]$). Тогда функция длины дуги $s(t)$ непрерывно дифференцируема на $[a, b]$ ($s(t) \in C^1[a, b]$) и её производная равна модулю вектора скорости:

$$s'(t) = |\gamma'(t)| = \sqrt{(x_1'(t))^2 + \dots + \left(x_{n(t)}'\right)^2}$$

Идея доказательства: Оцениваем приращение $\Delta s = s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)$ через $|\gamma(t_0 + \Delta t) - \gamma(t_0)|$, применяем теорему Лагранжа и непрерывность производных $x_{k(t)}'$, чтобы показать, что $\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = |\gamma'(t_0)|$. Непрерывность $s'(t)$ следует из непрерывности $\gamma'(t)$.

Вычисление длины пути

Теорема (Формула для вычисления длины пути): Если путь $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ является **гладким** ($\gamma \in C^1[a, b]$), то его длина равна:

$$l_\gamma = \int_a^b |\gamma'(t)|\,\mathrm{d}t = \int_a^b \sqrt{(x_1'(t))^2 + \dots + \left(x_{n(t)}'\right)^2}\,\mathrm{d}t$$

Доказательство: Функция длины дуги $s(t)$ является первообразной для $|\gamma'(t)|$ (по предыдущей теореме). По формуле Ньютона-Лейбница: $\int_a^b |\gamma'(t)|\,\mathrm{d}t = \int_a^b s'(t)\,\mathrm{d}t = s(b) - s(a)$. По определению $s(t)$, имеем $s(b) = l_{\gamma|_{[a,b]}} = l_\gamma$ и $s(a) = l_{\gamma|_{[a,a]}} = 0$. Следовательно, $l_\gamma = \int_a^b |\gamma'(t)|\,\mathrm{d}t$.

Частные случаи:

- **Длина графика функции:** $y = f(x)$, $f \in C^1[a, b]$.

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,\mathrm{d}x$$

- **Длина кривой в полярных координатах:** $r = f(\varphi)$, $f \in C^1[\alpha, \beta]$.

$$l = \int_\alpha^\beta \sqrt{(f(\varphi))^2 + (f'(\varphi))^2}\,\mathrm{d}\varphi$$

Несобственные интегралы: основные понятия, свойства линейности, монотонности, аддитивности по промежутку. Критерий сходимости несобственного интеграла в терминах остатка.

Определение (Локально интегрируемая функция): Функция f называется **локально интегрируемой** на промежутке I (обозначение $f \in R_{loc}(I)$), если f интегрируема по Риману на любом отрезке $[c, d] \subset I$.

Определение (Несобственный интеграл): Пусть $f \in R_{loc}[a, b)$, где $-\infty < a < b \le +\infty$. **Несобственным интегралом** от f по $[a, b)$ называется предел:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\omega \to b-0} \int_a^\omega f(x)\,\mathrm{d}x$$

Аналогично, для $f \in R_{loc}(a, b]$, где $-\infty \le a < b < +\infty$:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\omega \to a+0} \int_\omega^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

- Если предел существует и **конечен**, несобственный интеграл называется **сходящимся**.
- В противном случае (предел не существует или равен $\pm\infty$), интеграл называется **расходящимся**.

Замечания:

1. Если $b = +\infty$ (или $a = -\infty$), интеграл называют **несобственным интегралом I рода** (по бесконечному промежутку).
2. Если $b \in \mathbb{R}$ и f не ограничена в окрестности точки b (аналогично для a), интеграл называют **несобственным интегралом II рода** (от неограниченной функции).
3. Если особенность (бесконечный предел или неограниченность функции) находится внутри (a, b) в точке c, то:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

Интеграл слева сходится тогда и только тогда, когда **оба** интеграла справа сходятся.

Свойства несобственных интегралов (Формулируются для сходящихся интегралов)

- **Линейность:** Если $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ и $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$ сходятся, то для $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ интеграл $\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))\,\mathrm{d}x$ сходится и:

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))\,\mathrm{d}x = \alpha \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \beta \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$

- **Монотонность:** Если $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ и $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$ сходятся и $f(x) \le g(x)$ для $x \in [a, b)$, то:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \le \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$

- **Аддитивность по промежутку:** Пусть $a < c < b$. Несобственный интеграл $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ (с особенностью в b) сходится $\leftrightarrow$ несобственный интеграл $\int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$ сходится. В этом случае:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

(Здесь $\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x$ — собственный интеграл Римана). Аналогично для особенности в точке a.

Критерий Коши сходимости несобственного интеграла (Эквивалентен утверждению о сходимости «остатка» к нулю)

Пусть $f \in R_{loc}[a, b)$, где b — точка особенности ($b \in \mathbb{R}$ или $b = +\infty$). Несобственный интеграл $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ сходится **тогда и только тогда, когда**

$\in [a, b)$ такое, что для любых ω_1, ω_2 с $M \le \omega_1 < \omega_2 < b$

$$\left|\int_{\omega_1}^{\omega_2} f(x)\,\mathrm{d}x\right| < \varepsilon$$

Формулировка в терминах остатка: Интеграл $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ сходится $\leftrightarrow$ **остаток интеграла** $R(\omega) = \int_\omega^b f(x)\,\mathrm{d}x$ стремится к нулю при $\omega \to b - 0$:

$$\lim_{\omega \to b-0} \int_\omega^b f(x)\,\mathrm{d}x = 0$$

(Примечание: Это прямо следует из определения сходимости $\int_a^b f = \lim_{\omega \to b-0} \int_a^\omega f$, если $I = \int_a^b f$, то $\int_\omega^b f = I - \int_a^\omega f$.) Критерий Коши показывает, что сходимость равносильна малости интеграла по «хвосту» промежутка интегрирования.

Несобственные интегралы: основные понятия. Формула интегрирования по частям. Формула замены переменной.

Определение (Несобственный интеграл): Пусть $f \in R_{loc}[a, b)$, где $-\infty < a < b \le +\infty$. **Несобственным интегралом** от f по $[a, b)$ называется предел:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\omega \to b-0} \int_a^\omega f(x)\,\mathrm{d}x$$

Аналогично для $f \in R_{loc}(a, b]$ ($\lim_{\omega \to a+0} \int_\omega^b f(x)\,\mathrm{d}x$). Интеграл **сходится**, если предел существует и конечен. В противном случае — **расходится**.

Формула интегрирования по частям для несобственных интегралов

Теорема: Пусть функции $u(x)$ и $v(x)$ непрерывно дифференцируемы на $[a, b)$ ($u, v \in C^1[a, b)$). Если существует **хотя бы один** из несобственных интегралов $\int_a^b u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x$ или $\int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x$, и **существует конечный предел** $\lim_{x \to b-0}(u(x)v(x))$, то существует и другой несобственный интеграл, и справедлива формула:

$$\int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = \left[\lim_{x \to b-0}(u(x)v(x)) - u(a)v(a)\right] - \int_a^b u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x$$

Обозначение:

$$\int_a^b u\,\mathrm{d}v = [uv]_a^{b-0} - \int_a^b v\,\mathrm{d}u$$

где $[uv]_a^{b-0} = \lim_{x \to b-0}(u(x)v(x)) - u(a)v(a)$.

Доказательство (идея): Применяем формулу интегрирования по частям для определенного интеграла на отрезке $[a, \omega]$, где $\omega < b$:

$$\int_a^\omega u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = [u(\omega)v(\omega) - u(a)v(a)] - \int_a^\omega u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x$$

Затем переходим к пределу при $\omega \to b - 0$ в обеих частях равенства, используя условия теоремы.

Формула замены переменной для несобственных интегралов

Теорема: Пусть $f(x)$ непрерывна на $[a, b)$ (b может быть $+\infty$). Пусть функция $x = \varphi(t)$ удовлетворяет условиям:

1. $\varphi : [\alpha, \beta) \to [a, b)$ (β может быть $+\infty$) — взаимно однозначное отображение (биекция).
2. $\varphi(t)$ непрерывно дифференцируема на $[\alpha, \beta)$ ($\varphi \in C^1[\alpha, \beta)$).
3. $\varphi(\alpha) = a$ и $\lim_{t \to \beta-0} \varphi(t) = b$.

Тогда несобственные интегралы $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ и $\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$ сходятся или расходятся **одновременно**. Если они сходятся, то их значения равны:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$$

Доказательство (идея): Применяем формулу замены переменной для определенного интеграла на отрезке $[a, \omega] = [\varphi(\alpha), \varphi(\gamma)]$, где $\gamma < \beta$ и $\omega = \varphi(\gamma)$:

$$\int_a^\omega f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\gamma)} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_\alpha^\gamma f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$$

Затем переходим к пределу при $\omega \to b - 0$. Так как φ — биекция и $\lim_{t \to \beta-0} \varphi(t) = b$, то условие $\omega \to b - 0$ эквивалентно $\gamma \to \beta - 0$. Переход к пределу в обеих частях равенства дает искомую формулу. *(Важно аккуратно обращаться с пределами интегрирования и направлением отображения φ)*

Несобственные интегралы: основные понятия. Критерий сходимости несобственного интеграла от знакопостоянной функции. Признаки сравнения.

Определение (Несобственный интеграл): Пусть $f \in R_{loc}[a, b)$, где $-\infty < a < b \le +\infty$. **Несобственным интегралом** от f по $[a, b)$ называется предел:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\omega \to b-0} \int_a^\omega f(x)\,\mathrm{d}x$$

Аналогично для $f \in R_{loc}(a, b]$. Интеграл **сходится**, если предел существует и конечен. В противном случае — **расходится**.

Критерий сходимости несобственного интеграла от знакопостоянной функции

Рассмотрим случай, когда подынтегральная функция $f(x)$ сохраняет знак на промежутке интегрирования $[a, b)$. Без ограничения общности, пусть $f(x) \ge 0$ для всех $x \in [a, b)$.

Рассмотрим функцию $F(\omega) = \int_a^\omega f(x)\,\mathrm{d}x$ для $\omega \in [a, b)$. Поскольку $f(x) \ge 0$, функция $F(\omega)$ является **неубывающей** на $[a, b)$. *(Действительно, если $\omega_1 < \omega_2$, то $F(\omega_2) - F(\omega_1) = \int_{\omega_1}^{\omega_2} f(x)\,\mathrm{d}x \ge 0$.)*

По теореме о пределе монотонной функции, предел $\lim_{\omega \to b-0} F(\omega)$ существует тогда и только тогда, когда функция $F(\omega)$ ограничена сверху. Предел может быть конечным или $+\infty$.

Теорема (Критерий сходимости для знакопостоянных функций): Пусть $f \in R_{loc}[a, b)$ и $f(x) \ge 0$ для $x \in [a, b)$. Несобственный интеграл $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ сходится **тогда и только тогда, когда** существует константа $M > 0$ такая, что для всех $\omega \in [a, b)$ выполнено:

$$\int_a^\omega f(x)\,\mathrm{d}x \le M$$

(т.е. функция $F(\omega) = \int_a^\omega f(x)\,\mathrm{d}x$ ограничена сверху на $[a, b)$). Если $F(\omega)$ не ограничена сверху, то $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = +\infty$ (интеграл расходится). *(Аналогично для $f(x) \le 0$: сходимость эквивалентна ограниченности $F(\omega)$ снизу.)*

Признаки сравнения для интегралов от знаконеотрицательных функций

Пусть $f, g \in R_{loc}[a, b)$, $f(x) \ge 0$, $g(x) \ge 0$ для $x \in [a, b)$.

Теорема 1 (Признак сравнения): Если $f(x) \le g(x)$ для всех $x \in [a, b)$, то:

1. Если $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$ сходится, то $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ сходится.
2. Если $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ расходится, то $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$ расходится.

Доказательство (идея): Из $f(x) \le g(x)$ следует $\int_a^\omega f(x)\,\mathrm{d}x \le \int_a^\omega g(x)\,\mathrm{d}x$.

1. Если $\int_a^b g$ сходится, то $\int_a^\omega g$ ограничена сверху. Значит, $\int_a^\omega f$ тоже ограничена сверху. По критерию сходимости для неотрицательных функций, $\int_a^b f$ сходится.
2. Если $\int_a^b f$ расходится, то $\int_a^\omega f \to +\infty$. Значит, $\int_a^\omega g \to +\infty$. Следовательно, $\int_a^b g$ расходится.

Теорема 2 (Предельный признак сравнения): Пусть $g(x) > 0$ на $[a, b)$. Пусть существует предел:

$$L = \lim_{x \to b-0} \frac{f(x)}{g(x)}$$

Тогда:

1. Если $0 < L < +\infty$, то интегралы $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ и $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$ сходятся или расходятся **одновременно**.
2. Если $L = 0$ и $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$ сходится, то $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ сходится.
3. Если $L = +\infty$ и $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$ расходится, то $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ расходится.

Доказательство (идея для случая 1): Если $0 < L < +\infty$, то для ε достаточно малого (например, $\varepsilon = \frac{L}{2}$) существует $M \in [a, b)$ такое, что для $x \in [M, b)$:

$$L - \varepsilon < \frac{f(x)}{g(x)} < L + \varepsilon$$

$(L - \varepsilon)g(x) < f(x) < (L + \varepsilon)g(x)$ Далее применяется признак сравнения (Теорема 1) на промежутке $[M, b)$. Сходимость на $[M, b)$ эквивалентна сходимости на $[a, b)$ по свойству аддитивности.

Эталонные интегралы для сравнения:

- **I род ($b = +\infty$):** $\int_a^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha}$ (где $a > 0$) сходится при $\alpha > 1$, расходится при $\alpha \le 1$.
- **II род (особенность в $x = 0$):** $\int_0^a \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha}$ (где $a > 0$) сходится при $\alpha < 1$, расходится при $\alpha \ge 1$.

(Аналогично для особенности в другой точке b: $\int_c^b \frac{\mathrm{d}x}{(b-x)^\alpha}$ сходится при $\alpha < 1$, расходится при $\alpha \ge 1$).

Несобственные интегралы: основные понятия. Критерий Коши сходимости несобственных интегралов. Абсолютно и условно сходящиеся несобственные интегралы. Свойства сходимости абсолютно сходящегося интеграла и инвариантности типа сходимости несобственного интеграла при изменении подынтегральной функции на аддитивное абсолютно интегрируемое слагаемое.

Определение (Несобственный интеграл): Пусть $f \in R_{loc}[a, b)$, где $-\infty < a < b \le +\infty$. **Несобственным интегралом** от f по $[a, b)$ называется предел:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\omega \to b-0} \int_a^\omega f(x)\,\mathrm{d}x$$

Аналогично для $f \in R_{loc}(a, b]$ ($\lim_{\omega \to a+0} \int_\omega^b f(x)\,\mathrm{d}x$). Интеграл **сходится**, если предел существует и конечен. В противном случае — **расходится**.

Критерий Коши сходимости несобственных интегралов

Теорема (Критерий Коши): Пусть $f \in R_{loc}[a, b)$. Несобственный интеграл $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ сходится **тогда и только тогда, когда** $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists M \in [a, b) \quad$ такое, что для любых ω_1, ω_2 с $M \leq \omega_1 < \omega_2 < b \quad$ выполняется

$$\left| \int_{\omega_1}^{\omega_2} f(x)\,\mathrm{d}x \right| < \varepsilon$$

(Аналогично для интеграла с особенностью в нижнем пределе a.)

Абсолютная и условная сходимость

Определение (Абсолютная сходимость): Несобственный интеграл $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ называется **абсолютно сходящимся**, если сходится интеграл от модуля подынтегральной функции:

$$\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x < +\infty$$

(Поскольку $|f(x)| \geq 0$, для проверки сходимости $\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$ можно использовать критерий для знакопостоянных функций и признаки сравнения.)

Определение (Условная сходимость): Несобственный интеграл $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ называется **условно сходящимся**, если он сходится, но интеграл $\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$ расходится.

Свойства абсолютно сходящихся интегралов

Теорема 1: Абсолютная сходимость влечет сходимость
Если несобственный интеграл $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ сходится абсолютно, то он сходится и в обычном смысле.

$$\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x \ \text{ сходится } \Rightarrow \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \ \text{ сходится}$$

Доказательство (идея): Используем критерий Коши.
1. Если $\int_a^b |f|\,\mathrm{d}x$ сходится, то $\forall \varepsilon > 0 \exists M \in [a, b)$ так, что для $M \leq \omega_1 < \omega_2 < b$ выполнено $\int_{\omega_1}^{\omega_2} |f(x)|\,\mathrm{d}x < \varepsilon$ (так как $|f| \geq 0$).
2. Используя свойство $\left|\int_{\omega_1}^{\omega_2} f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leq \int_{\omega_1}^{\omega_2} |f(x)|\,\mathrm{d}x$, получаем $\left|\int_{\omega_1}^{\omega_2} f(x)\,\mathrm{d}x\right| < \varepsilon$ для тех же ω_1, ω_2.
3. Это означает, что $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ удовлетворяет критерию Коши, а значит, сходится.

Замечание: Обратное неверно. Существуют условно сходящиеся интегралы. Классический пример: $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$ сходится (условно), но $\int_1^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x}\,\mathrm{d}x$ расходится.

Теорема 2: Инвариантность типа сходимости при аддитивном возмущении Пусть $f, g \in R_{loc}[a, b)$. Если интеграл $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$ сходится **абсолютно**, то несобственные интегралы

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{и} \quad \int_a^b (f(x) + g(x))\,\mathrm{d}x$$

сходятся или расходятся **одновременно**. Более того, если они сходятся, то они сходятся **одного типа** (оба абсолютно или оба условно).

Доказательство (идея):
1. **Сходимость/Расходимость:** Из линейности, $\int_a^\omega (f + g)\,\mathrm{d}x = \int_a^\omega f\,\mathrm{d}x + \int_a^\omega g\,\mathrm{d}x$. Так как $\int g\,\mathrm{d}x$ сходится (абсолютная сходимость влечет сходимость), то $\lim \int_a^\omega g\,\mathrm{d}x$ существует и конечен. Следовательно, $\lim \int_a^\omega (f + g)\,\mathrm{d}x$ существует и конечен тогда и только тогда, когда существует и конечен $\lim \int_a^\omega f\,\mathrm{d}x$.
2. **Абсолютная сходимость:** Нужно сравнить сходимость $\int |f|\,\mathrm{d}x$ и $\int |f + g|\,\mathrm{d}x$, зная, что $\int |g|\,\mathrm{d}x$ сходится.
   - Используем неравенство треугольника: $|f + g| \leq |f| + |g|$. Если $\int |f|\,\mathrm{d}x$ сходится, то $\int (|f| + |g|)\,\mathrm{d}x = \int |f|\,\mathrm{d}x + \int |g|\,\mathrm{d}x$ сходится. По признаку сравнения, $\int |f + g|\,\mathrm{d}x$ сходится.
   - Используем другое неравенство: $|f| = |(f + g) - g| \leq |f + g| + |-g| = |f + g| + |g|$. Если $\int |f + g|\,\mathrm{d}x$ сходится, то $\int (|f + g| + |g|)\,\mathrm{d}x = \int |f + g|\,\mathrm{d}x + \int |g|\,\mathrm{d}x$ сходится. По признаку сравнения, $\int |f|\,\mathrm{d}x$ сходится.
   - Таким образом, $\int |f|\,\mathrm{d}x$ сходится $\leftrightarrow \int |f + g|\,\mathrm{d}x$ сходится (при условии сходимости $\int |g|\,\mathrm{d}x$).
3. **Вывод:** Сопоставляя п.1 и п.2, получаем, что интегралы $\int f\,\mathrm{d}x$ и $\int (f + g)\,\mathrm{d}x$ одновременно сходятся (или расходятся) и одновременно сходятся абсолютно (или не сходятся абсолютно). Следовательно, они имеют одинаковый тип сходимости (расходятся, сходятся абсолютно, сходятся условно).

Несобственные интегралы: основные понятия. Признаки Дирихле и Абеля сходимости несобственных интегралов. Главное значение несобственного интеграла.

Определение (Несобственный интеграл): Пусть $f \in R_{loc}[a, b)$, где $-\infty < a < b \leq +\infty$.

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\omega \to b-0} \int_a^\omega f(x)\,\mathrm{d}x$$

Интеграл **сходится**, если предел существует и конечен.

Признаки Дирихле и Абеля

Эти признаки полезны для установления сходимости интегралов от произведений функций, особенно когда подынтегральная функция не является знакопостоянной и признаки сравнения неприменимы. Они являются аналогами соответствующих признаков для рядов.

Теорема (Признак Дирихле): Пусть выполнены условия:
1. Функция $f(x)$ имеет ограниченную первообразную на $[a, b)$, т.е. $\exists M > 0$ такое, что $\left|\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leq M$ для всех $x \in [a, b)$.
2. Функция $g(x)$ монотонна на $[a, b)$.
3. $\lim_{x \to b-0} g(x) = 0$.

Тогда несобственный интеграл $\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$ **сходится**.

Идея доказательства: Используется формула интегрирования по частям и вторая теорема о среднем для определенных интегралов. Ограниченность $\int f$ и стремление g к нулю обеспечивают сходимость. **Типичное применение:** $f(x)$ — «быстро осциллирующая» функция с ограниченным интегралом (например, $\sin x, \cos x$), $g(x)$ — монотонно убывающая к нулю функция (например, $\frac{1}{x^\alpha}, \alpha > 0$).

Теорема (Признак Абеля): Пусть выполнены условия:
1. Несобственный интеграл $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ **сходится**.
2. Функция $g(x)$ монотонна на $[a, b)$.
3. Функция $g(x)$ ограничена на $[a, b)$, т.е. $\exists C > 0 : |g(x)| \leq C$ для всех $x \in [a, b)$.

Тогда несобственный интеграл $\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$ **сходится**.

Идея доказательства: Аналогично признаку Дирихле, используется интегрирование по частям и вторая теорема о среднем. Сходимость $\int f$ и монотонная ограниченность g обеспечивают сходимость. **Типичное применение:** $\int f\,\mathrm{d}x$ сходится (возможно, условно), $g(x)$ — монотонная ограниченная функция.

Главное значение несобственного интеграла по Коши

Иногда несобственный интеграл расходится в обычном смысле, но можно придать ему некоторое значение путем «симметричного» подхода к особым точкам.

Определение (Главное значение):

1. **Особенность внутри интервала:** Пусть $f \in R_{loc}[a, b]$ за исключением точки $c \in (a, b)$. **Главное значение по Коши** интеграла $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ определяется как:

$$v.p. \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon \to +0} \left(\int_a^{c-\varepsilon} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{c+\varepsilon}^b f(x)\,\mathrm{d}x \right)$$

   (если этот предел существует и конечен). *Пример:* $\int_{-1}^1 \mathrm{d}\frac{x}{x}$ расходится, но $v.p. \int_{-1}^1 \mathrm{d}\frac{x}{x} = \lim_{\varepsilon \to +0}\left(\int_{-1}^{-\varepsilon} \mathrm{d}\frac{x}{x} + \int_\varepsilon^1 \mathrm{d}\frac{x}{x}\right) = \lim_{\varepsilon \to -0}(\ln|-\varepsilon| - \ln|-1| + \ln|1| - \ln|\varepsilon|) = \lim_{\varepsilon \to +0}(\ln\varepsilon - 0 + 0 - \ln\varepsilon) = 0$.

2. **Бесконечные пределы:** Пусть $f \in R_{loc}(-\infty, +\infty)$. **Главное значение по Коши** интеграла $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ определяется как:

$$v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{A \to +\infty} \int_{-A}^A f(x)\,\mathrm{d}x$$

   (если этот предел существует и конечен). *Пример:* $\int_{-\infty}^{+\infty} x\,\mathrm{d}x$ расходится, но $v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} x\,\mathrm{d}x = \lim_{A \to +\infty} \int_{-A}^A x\,\mathrm{d}x = \lim_{A \to +\infty} \left[\frac{x^2}{2}\right]_{-A}^A = \lim_{A \to +\infty}\left(\frac{A^2}{2} - \frac{(-A)^2}{2}\right) = 0$.

Важно: Если несобственный интеграл сходится в обычном смысле, то его значение совпадает с главным значением по Коши. Однако существование главного значения **не гарантирует** сходимости интеграла в обычном смысле.