Пшеничников Артём 467205

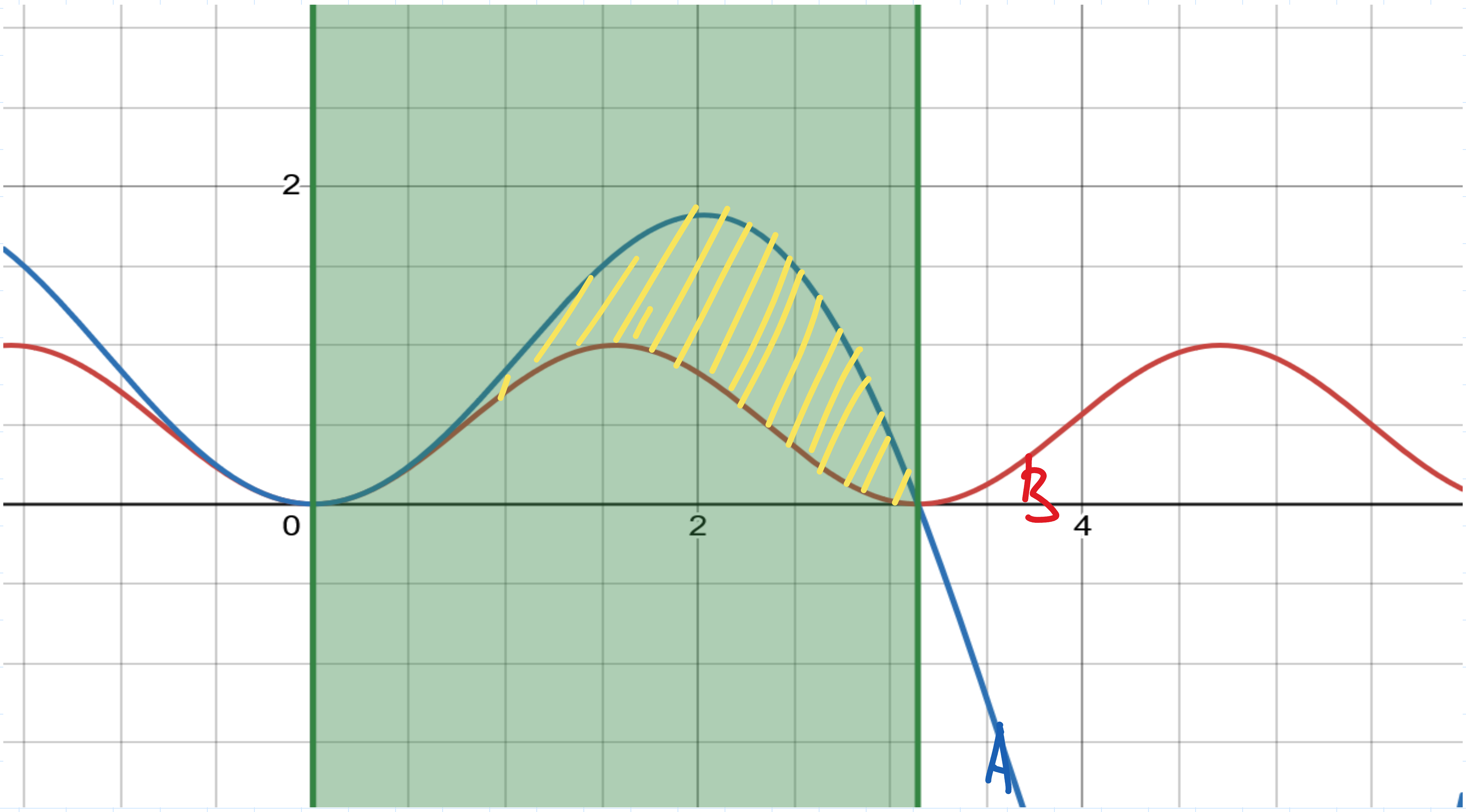
ИДЗ 1

Вариант 52 mod 4 + 1 = 1

1.1

1.1 С помощью интеграла Римана вычислить площадь фигуры, ограниченной графиками функций

$$y = \sin^2 x, \quad y = x \sin x, \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi.$$



$S = A - B$

$A = \int_0^\pi x \sin x \, dx = \begin{bmatrix} u = x & du = 1 \cdot dx \\ dv = \sin x dx & v = -\cos x \end{bmatrix} = -x\cos x - \int_0^\pi -\cos x dx = -x\cos x + \sin x \Big|_0^\pi = -\pi \cos \pi + \sin \pi = -\pi \cdot (-1) + 0 = \pi$

$B = \int_0^\pi \sin^2 x \, dx = \left[\sin^2 \frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{2} \right] = \int_0^\pi \frac{1 - \cos 2x}{2} dx =$

$= \frac{1}{2} \int_0^\pi 1 - \cos 2x dx = \frac{1}{2} x + \frac{1}{2} \int_0^\pi \frac{1}{2}(-\cos 2x) d2x =$

$= \frac{1}{2} x - \frac{1}{4} \sin x \Big|_0^\pi = \frac{\pi}{2}$ $\quad S = \pi - \pi/2 = \frac{\pi}{2}$

Ответ: $\frac{\pi}{2}$.

w/1.2

1.2 Вычислить площадь фигуры, ограниченной графиками функций

$$y = \sin^2 x, \quad y = x \sin x, \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi,$$

приближенно с помощью интегральных сумм. Сравнить результаты точного и численного вычислений при $n = 10, 100, 1000$.

$$S = \sum_{i=1}^{n} (x_i \sin x_i - \sin^2 x_i) \Delta x_i$$

$$\Delta x_i = \frac{\pi}{n} \qquad x_i = \pi \frac{i}{n}$$

```python
def calculate_area(func: Callable[[float], float], start: float, end: float, n: int) -> float:  2 usages  new *
    step = (end - start) / n
    half_step = step / 2
    x = start + half_step
    area = 0.0
    while x < end:
        area += func(x) * step
        x += step
    return area


func1 = lambda x: sin(x) ** 2
func2 = lambda x: x * sin(x)
st = 0
ed = pi

correct_area = pi / 2
print(f"Площадь = {correct_area}")

for q in [10, 100, 1000, 10000]:
    approx_area = calculate_area(func2, st, ed, q) - calculate_area(func1, st, ed, q)
    print(f"n = {q:<6}: {approx_area:.5f} (ошибка {abs((correct_area - approx_area) / correct_area * 100):.5f}%)")
```

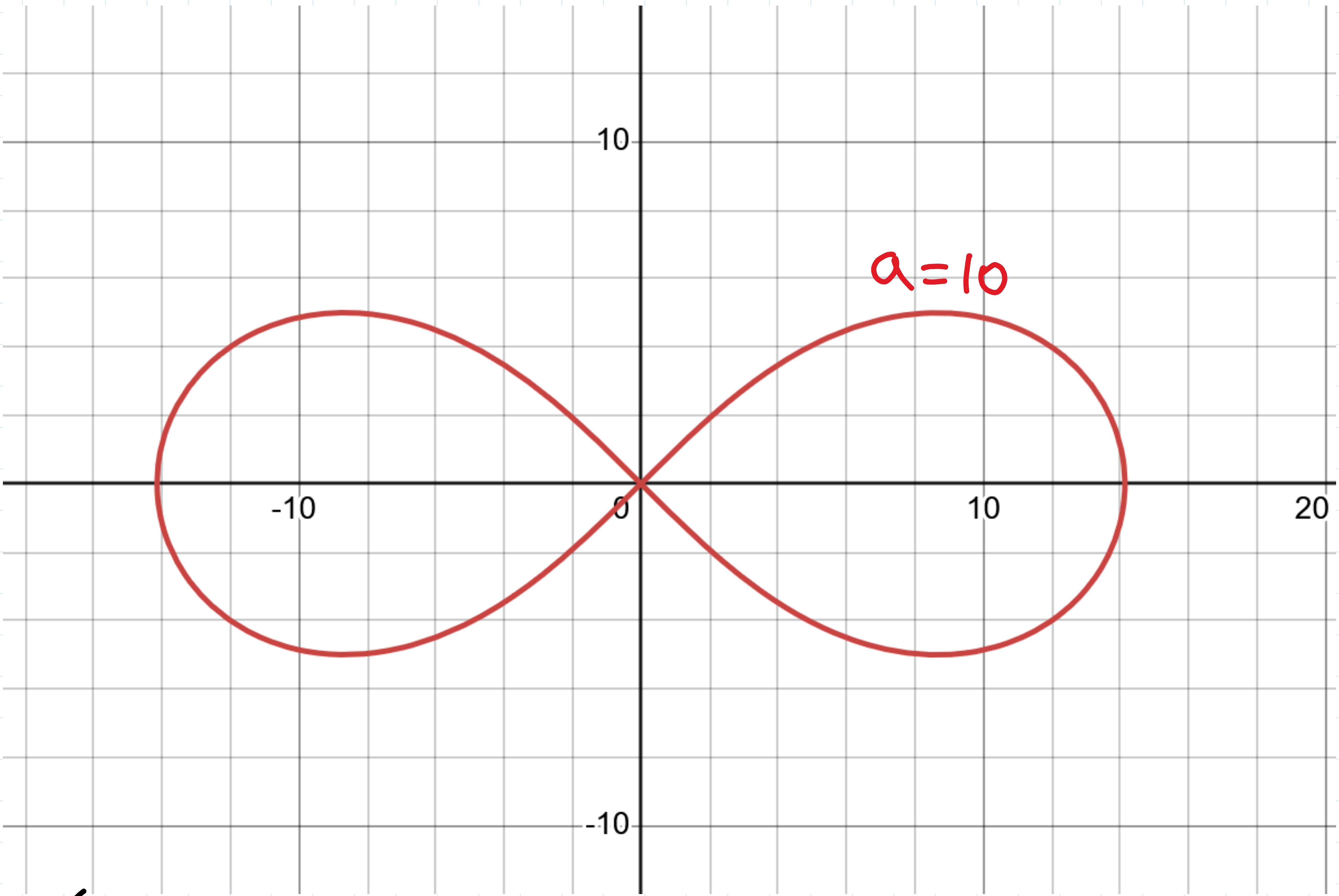
Получаем:

```
Площадь = 1.5707963267948966
n = 10     : 1.5837529 (ошибка 0.8248408%)
n = 100    : 1.5709255 (ошибка 0.0082249%)
n = 1000   : 1.5707976 (ошибка 0.0000822%)
n = 10000  : 1.5707963 (ошибка 0.0000008%)
```

w/1.2

2.1 Представить геометрическую интерпретацию лемнискаты Бернулли:

$$(x^2+y^2)^2-2a^2(x^2-y^2)=0.$$



w/2.2

2.2 Вычислить площадь фигуры, ограниченной лемнискатой, с помощью интеграла Римана.

$$(x^2+y^2)^2-2a^2(x^2-y^2)=\begin{bmatrix} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \end{bmatrix}=$$

$$=(r^2\cos^2\theta+r^2\sin^2\theta)^2-2a^2(r^2\cos^2\theta-r^2\sin^2\theta)=$$

$$=r^4(\underbrace{\cos^2\theta+\sin^2\theta}_{1})^2-2a^2r^2(\underbrace{\cos^2\theta-\sin^2\theta}_{\cos2\theta})=$$

$$=r^4-2a^2r^2\cos2\theta\ ;\ r^4=2a^2r^2\cos2\theta\ ;\ r^2=2a^2\cos2\theta$$

$r=\sqrt{2a^2\cos2\theta}$. ур. имеет смысл при $\cos2\theta\geq0\Rightarrow$

$\Rightarrow\theta\in[-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}]\cup[\frac{3\pi}{4};\frac{5\pi}{4}]$. Л. симметрична => возьмём один отрезок и умножим на $\underline{2}$.

$$S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2 d\theta = \underline{2}\cdot\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} 2a^2\cos 2\theta\, d\theta = 2a^2\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\cos 2\theta d\theta =$$

$$= 2a^2\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{2}\cos 2\theta\, d2\theta = 2a^2\cdot\frac{1}{2}\sin 2\theta\Big|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} = a^2\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)-\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) =$$

$$= a^2(1-(-1)) = 2a^2$$

Ответ: $2a^2$.

№2.3

2.3 Вычислить площадь фигуры, ограниченной лемнискатой, приближенно с помощью интегральных сумм. Сравнить результаты точного и численного вычислений при $n = 10, 100, 1000$.

$(x^2+y^2)^2-2a^2(x^2-y^2)=0.$

$\exists\, t = y^2$

$$(x^2+t)^2-2a^2(x^2-t)=0$$

$$x^4+2x^2t+t^2-2a^2x^2+2a^2t=0$$

$$t^2+t(2x^2+2a^2)+(x^4-2a^2x^2)=0$$

$$t^2+t\underbrace{(2x^2+2a^2)}_{P}+\underbrace{x^2(x^2-2a^2)}_{Q}=0$$

$$t^2+tP+Q=0$$

т.к. $y^2>0$

$$t=\frac{-P\pm\sqrt{P^2-4Q}}{2}=\frac{-2x^2-2a^2+\sqrt{(2x^2+2a^2)^2-4x^2(x^2-2a^2)}}{2}=$$

$$=\frac{1}{2}\left(-2x^2-2a^2+\sqrt{4x^4+\underline{8x^2a^2}+4a^4-4x^4+\underline{8x^2a^2}}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(-2x^2-2a^2+2a\sqrt{4x^2+a^2}\right)=-x^2-a^2+a\sqrt{4x^2+a^2}$$

Запишем площадь для ветви $x\geq 0,\ y\geq 0$:

$$S=\sum_{i=0}^{n} y(x_i)\Delta x_i\ ,\quad y(x)=\sqrt{-x^2-a^2+a\sqrt{4x^2+a}}$$

$$x_i = \frac{ia\sqrt{2}}{n} \qquad \Delta x_i = \frac{a\sqrt{2}}{n}$$

при $y=0$:

$$(x^2+y^2)^2 - 2a^2(x^2-y^2) = x^4 - 2a^2x^2 = 0$$

$$x^2(x^2 - 2a^2) = 0 \Rightarrow x = 0; \quad x = \pm a\sqrt{2} \Rightarrow \max(x) = a\sqrt{2}$$

$\Rightarrow$ интегрируем от 0 до $a\sqrt{2}$ и умнож. на 4.

```python
a = 1
func3 = lambda x: sqrt(-x ** 2 - a ** 2 + a * sqrt(4 * x ** 2 + a)) * 4
st = 0
ed = a * sqrt(2)

correct_area = 2 * (a ** 2)
print("График 2:")
print(f"Площадь = {correct_area}")

for q in [10, 100, 1000, 10000]:
    approx_area = calculate_area(func3, st, ed, q)
    print(f"n = {q:<6}: {approx_area:.7f} (ошибка {abs((correct_area - approx_area) / correct_area * 100):.7f}%)")
```

Получаем:

```
График 2:
Площадь = 2
n = 10     : 2.0156888 (ошибка 0.7844395%)
n = 100    : 2.0004303 (ошибка 0.0215155%)
n = 1000   : 2.0000129 (ошибка 0.0006454%)
n = 10000  : 2.0000004 (ошибка 0.0000201%)
```

(ф-я подсчёта суммы не менялась)

w/1.3

3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной петлёй кривой:

$$x = at - t^2, \quad y = at^2 - t^3, \quad a > 0.$$

Петля возникает при самопересечении кривой.

Найдём $t_1, t_2 : t_1 \neq t_2$ при которых $x(t_1) = x(t_2)$ и $y(t_1) = y(t_2)$

$\underline{x}$: $at_1 - t_1^2 = at_2 - t_2^2$

$a(t_1 - t_2) = t_1^2 - t_2^2$

$a(t_1 - t_2) = (t_1 - t_2)(t_1 + t_2)$

$a = t_1 + t_2$ * $\quad (t_1 - t_2 \neq 0 \iff t_1 \neq t_2)$

$\underline{y}$: $at_1^2 - t_1^3 = at_2^2 - t_2^3$

$a(t_1^2 - t_2^2) = t_1^3 - t_2^3 = (t_1 - t_2)(t_1^2 + t_1t_2 + t_2^2)$

$a(t_1 - t_2)(t_1 + t_2) = (t_1 - t_2)(t_1^2 + t_1t_2 + t_2^2)$

$$\left.\begin{matrix} a(t_1 + t_2) = t_1^2 + t_1t_2 + t_2^2 \\ * \end{matrix}\right\} a^2 = t_1^2 + t_1t_2 + t^2$$

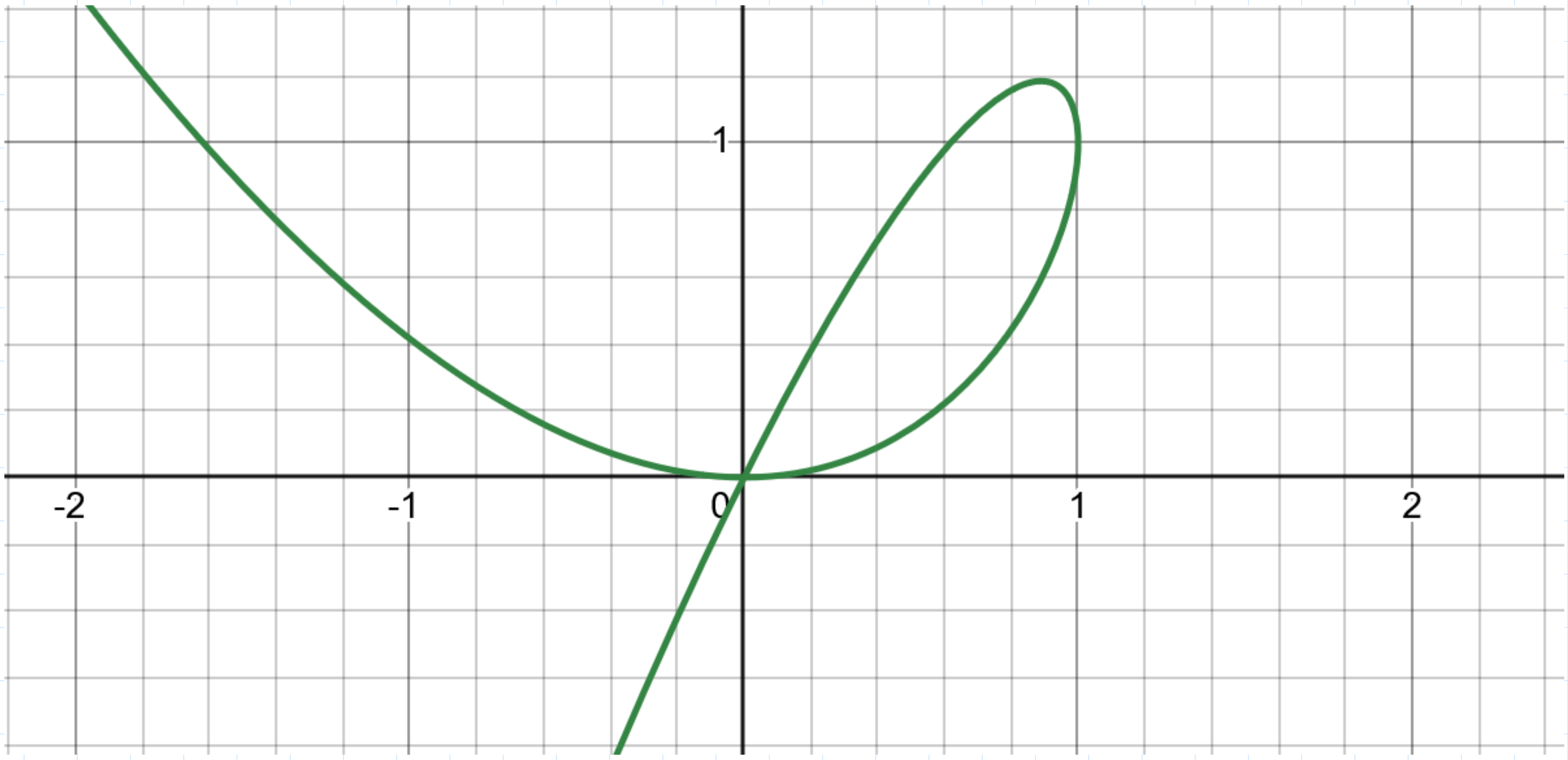
$$\left.\begin{matrix} a^2 = (t_1 + t_2)^2 - t_1t_2 \\ * \end{matrix}\right\} a^2 = a^2 - t_1t_2 \Rightarrow t_1t_2 = 0$$

Получаем $t_1 = 0 \lor t_2 = 0$. НУО $\left.\begin{matrix} \exists\, t_1 = 0 \\ * \end{matrix}\right\} \Rightarrow t_2 = a$

При $t = 0 : x = y = 0$

$t = a : x = a \cdot a - a^2 = 0, \ y = a \cdot a^2 - a^3 = 0$

Начало и конец $(t=0, t=a)$ петли лежат в точке $x = 0, y = 0$



Площадь фигуры огр. парам. кривой:

$$S = \left| \int_{t_1}^{t_2} y(t) \cdot x'(t)\, dt \right|$$

$x(t) = at - t^2$, $x'(t) = a - 2t$

$y(t) = at^2 - t^3$

$$S = \left| \int_0^a (at^2 - t^3)\cdot(a-2t)\, dt \right| =$$

$$= \left| \int_0^a (a^2t^2 - 2at^3 - at^3 + 2t^4)\, dt \right| =$$

$$= \left| \int_0^a a^2t^2\, dt - \int_0^a 3at^3\, dt + \int_0^a 2t^4\, dt \right| =$$

$$= \left| a^2 \cdot \frac{t^3}{3} - 3a\frac{t^4}{4} + 2\frac{t^5}{5} \right| \Big|_0^a =$$

$$= \left| a^2 \cdot \frac{a^3}{3} - 3a\frac{a^4}{4} + 2\frac{a^5}{5} \right| =$$

$$= \left| \frac{a^5}{3} - \frac{3a^5}{4} + \frac{2a^5}{5} \right| = \left| \frac{20a^5 - 45a^5 + 24a^5}{60} \right| =$$

$$= \left| \frac{-1a^5}{60} \right| = \frac{a^5}{60}$$

Ответ: $\frac{a^5}{60}$.