СМАЧНЕЙШАЯ 2 КР ЛИНАЛ

ИТМО. 2 семестр. Переписывание контрольной работы №2. 16.05.2023

1. Являются ли следующие отображение $\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^5$ линейным? Если является, то запишите его матрицу в стандартных базисах пространств. $\varphi(x_1, x_2, x_3, x_4) = (3x_2, x_1 - x_3, 5x_2 - x_1 + x_4, x_4 + x_3 + x_2, -7x_2 + x_3)$

2. Приведите квадратичную форму $f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = 4x_1x_5 + 3x_2x_5 + 2x_3x_4 + 5x_4^2$ к диагональному виду невырожденным преобразованием переменных.

3. Пусть $e_1, \ldots, e_n$ — базис линейного пространства V над полем $\mathbb{R}$. Докажите, что $e_1 + e_2, e_1 + e_3, \ldots, e_1 + e_n$ — тоже базис V.

4. Линейные подпространства V_1 и V_2 линейного пространства V таковы, что $V = V_1 \oplus V_2$. Пусть $a, b \in V$. Докажите, что аффинные подпространства $V_1 + a$ и $V_2 + b$ пересекаются ровно по одному вектору.

5. Пусть V — конечномерное линейное пространство над полем $\mathbb{C}$, а оператор $\varphi \in \mathrm{End(V)}$ таков, что $\varphi^3 = \varphi + 1$. Докажите, что собственные числа φ могут принимать не более чем три значения.

1. Являются ли следующие отображения $\varphi : \mathbb{R}^4 \to$ линейными:
а) $\varphi(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_2, x_1 + x_3, 5x_4 - x_1)$;
б) $\varphi(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1, x_2^3, x_3^2, x_4)$?
Для тех отображений, что являются линейными, запишите их матрицы в стандартных базисах пространств.

2. Приведите квадратичную форму $f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = 2x_1x_6 + 3x_2x_5 + 2x_3x_4 + 5x_6^2$ к диагональному виду невырожденным преобразованием переменных.

3. Пусть $e_1, \ldots, e_n$ — базис линейного пространства V над полем $\mathbb{R}$. При каких $n \in \mathbb{N}$ $e_1 + e_2, e_2 + e_3, \ldots, e_n + e_1$ — тоже базис V?

4. Пусть V — линейное пространство над $\mathbb{R}$, W — его аффинное, но не линейное подпространство, а $e_1, e_2, \ldots, e_n \in W$. Пусть числа $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ таковы, что $\alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_n e_n \in W$. Докажите, что $\alpha_1 + \ldots + \alpha_n = 1$.

5. Дана матрица $A \in M_{m,n}(K)$ и матрицы $B, C \in M_{n,m}(K)$. Оказалось, что $AB = E_m$ и $CA = E_n$. Докажите, что $n = m$.

6. Матрица $A \in M_n(K)$ обратима. Докажите, $\chi_{A \cdot A^T} = \chi_{A^T \cdot A}$.

7. Пусть $\dim V = n$, $x \in V$ и $\varphi \in \mathrm{End(V)}$ таковы, что вектора $\varphi(x), \varphi^2(x), \ldots, \varphi^n(x)$ линейно независимы. Докажите, что φ обратим.

1.1) да, является, просто проверить. Матрица вот
0 3 0 0
1 0 -1 0
-1 5 0 1
0 1 1 1
0 -7 1 0

1.3) Я так понимаю тут карпов опечатался и в базисе должно быть e1, e1 + e2, … , e1 + en (иначе задача лажа). Решение: просто предположить р-во нулю, все коэфф будут = 0

1.4) пусть a \in V2, b \in V1. Случай когда a \in V1 и b \in V2 очев (пространство при сдвиге перешло само в себя)
Очев один элемент в пересечении это a + b, пусть есть еще один: v1 + a = v2 + b, v1 \in V1, v2 \in V2
v1 - v2 = b - a
НУО v1 - v2 \in V1
(v1 - v2 = b – a; b - a \in V; V поделено на два подпространства; V1 и V2; и в каком-то одном лежит b - a (тк V1 и V1 пересекаются только в нуле, а если b = a то это неинтересный случай); пусть лежит в V1)
но тогда a \in V1 - противоречие с критерием прямой суммы

1.5) пусть \alpha - собственное число. Заметим что \phi^3(x) = \alpha^3 * x
Тогда по условию \alpha^3 = \alpha + 1 - над C не более 3 разных корней, чтд

2.1) а) да, б) нет

2.2)

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6) = 2x_1x_6 + 3x_2x_5 + 2x_3x_4 + 5x_6^2 =$$

$$\left(\frac{1}{5}x_1^2 + 2x_1x_6 + 5x_6^2\right) - \frac{1}{5}x_1^2 + 3x_2x_5 + 2x_3x_4 = \left(\frac{\sqrt{5}}{5}x_1 + \sqrt{5}x_6\right)^2 - \frac{1}{5}x_1^2 + 3x_2x_5 + 2x_3x_4$$

$$\frac{\sqrt{5}}{5}x_1 + \sqrt{5}x_6 = y_1,\ x_1 = y_2,\ x_2 = y_3 - y_4,\ x_5 = y_3 + y_4,\ x_3 = y_5 - y_6,\ x_4 = y_5 + y_6$$

$$y_1^2 - \frac{1}{5}y_2^2 + 3(y_3 - y_4)(y_3 + y_4) + 2(y_5 - y_6)(y_5 + y_6) = y_1^2 - \frac{1}{5}y_2^2 + 3y_3^2 - 3y_4^2 + 2y_5^2 - 2y_6^2$$

$$f(y_1,y_2,y_3,y_4,y_5,y_6) = y_1^2 - \frac{1}{5}y_2^2 + 3y_3^2 - 3y_4^2 + 2y_5^2 - 2y_6^2$$

2.3) Просто посчитать определитель матрицы соответствующей новому базису, он 1 + (-1)^n. Ответ: при нечетных *

2.4) Пусть e_i = a + p_i, где p_i \in V.
\alpha_1 * e_1 + … + \alpha_n * e_n \in W
a(\alpha_1 + … + \alpha_n) + \alpha_1 * p1 + … + \alpha_n * pn \in W
Пусть \alpha_1 + … + \alpha_n = b, НУО b > 1, \alpha_1 * p1 + … + \alpha_n * pn = v \in V
тогда ab + v = a(n + 1) + v \in W, значит an \in V => a \in V, тогда W - линейное – противоречие

2.5) Раз AB = E_m, то A - обратимая матрица и A^-1 = B. Так как CA = E_n, то CA*B = E_n * B (она n на m, умножение норм), C = B, значит C = A^-1.
m = rk(E_m) = rk(AB) <= min(rk(A), rk(B)) => rk(A) >= m
n = rk(E_n) = rk(CA) <= min(rk(C), rk(A)) => rk(A) >= n
Однако A \in M_m,n => rk(A) <= min(n, m)
=> n=m (n <= rk(A) <= min(n, m) => n <= m)
(m <= rk <= n <= m)

2.6)

$\exists$ Матрицу $AA^T - tE_n$ (6)

$A^{-1}(AA^T - tE_n)A = (A^{-1}A^T - A^{-1}tE_n)A =$

$= A^{-1}A^TA - A^{-1}tE_nA = A^TA - A^{-1}tA = A^TA - tE_n$

$\det(A^{-1}(\dots)A) = \det(A^{-1}A)\det(\dots) = \det(A^TA - \ )$

$\det(AA^T - tE_n) = \det(A^TA - tE_n)$

$\chi_{AA^T} = \chi_{A^TA}$, чтд.

2.7)

\phi - сюръекция, а так как у нас оператор, то и биекция. А биекция обратима

$y = \sum \alpha_i \varphi^i(x)$

$\alpha_1\varphi(x) + \quad + \alpha_n\varphi^n(x) =$

$= \varphi(\underbrace{\alpha_1 x + \alpha_2\varphi(x) + \quad + \alpha_n\varphi^{n-1}(x)}_{z})$

3.5)

Пусть $P = a + U, Q = b + V$ — аффинные подпространства пространства V. Дано:

$W = P \cap Q \neq \emptyset$.

Докажем, что W — аффинное подпространство.

Выберем $c \in W$. Тогда $c \in P$ и $c \in Q$, то есть:

$$P = c + U, \quad Q = c + V.$$

Тогда их пересечение:

$$W = P \cap Q = c + (U \cap V).$$

Так как $U \cap V$ — линейное подпространство, то W имеет вид $c +$ **(линейное подпространство)**, а значит, является аффинным подпространством .

$$\boxed{W = c + (U \cap V) \Rightarrow W \text{ — аффинное}}$$

* **2. Построение матрицы перехода**

Рассмотрим матрицу A, столбцы которой — координаты новых векторов в базисе $\{e_i\}$:

Вот такую посчитать нужно

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Эта матрица **циркулянтная**, и её определитель можно вычислить явно.

ИТМО. 2 семестр. Контрольная работа №2. 25.05.202[illegible]

1. Являются ли следующие отображения $\varphi : \mathbb{R}^4 \to$ линейными:

а) $\varphi(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_2, x_1 - x_3, 2x_4 - x_2)$;

б) $\varphi(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1, x_2^2, x_3^3, x_4^3)$?

Для тех отображений, что являются линейными, запишите их матрицы в стандартных базисах пространств.

2. Пусть U, V — конечномерные линейные пространство, U_1 и U_2 — подпространства U, V_1 и V_2 — подпространства V, а $\varphi : U \to V$ — линейное отображение.

Докажите верное из следующих двух равенств. Неверное равенство замените на подходящее включение и докажите это включение, к неверному включению постройте контрпример.

а) $\varphi(U_1 + U_2) = \varphi(U_1) + \varphi(U_2)$;

б) $\varphi^{-1}(V_1 + V_2) = \varphi^{-1}(V_1) + \varphi^{-1}(V_2)$.

3. Пусть V — конечномерное линейное пространство над полем $\mathbb{C}$, а оператор $\varphi \in \mathrm{End}(V)$ таков, что $\varphi^k = 0$ для некоторого натурального числа k. Найдите собственные числа оператора φ.

4. Матрица $A \in M_{m,n}(K)$ такова, что $A \cdot A^T$ — обратима. Чему может быть равен $\mathrm{rk}(A)$?

5. Пусть P и Q — аффинные подпространства линейного пространства V , а $W = P \cap Q$ непусто. Докажите, что W — также аффинное подпространство V.

6. Пусть V — линейное подпространство $\mathbb{F}_2^n$ (напомним, что $\mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$ — поле вычетов по модулю 2, а $\mathbb{F}_2^n$ — множество из всех векторов-столбцов, каждый из которых состоит из n нулей и единиц). Весом век- тора из $\mathbb{F}_2^n$ называется сумма его коэффициентов. Сколько может быть в V векторов нечетного веса?

3.1) а) да, б) нет

3.3) \phi(x) = \lambda x

\phi(x)^2 = \lambda * \phi(x) = \lambda^2 * x

...

\phi(x) ^ k = \lambda^k * x = 0 => \lambda = 0

3.4) Пусть A^T = B (лень писать символы). AB - обратима, значит rk(AB) = n. Мы знаем что rk(A), rk(B) <= n, но n = rk(AB) <= min(rk(A), rk(B)) <= n, значит rk(A) = n

3.2)

Во втором у меня тут получилось, что а) верно, т.к. для любого u из $U_1 + U_2$ верно $\varphi(u) = \varphi(u_1) + \varphi(u_2)$, а это входит в $\varphi(U_1) + \varphi(U_2)$; также для любых u_1 из U_1 и u_2 из U_2 справедливо $\varphi(u_1) + \varphi(u_2) = \varphi(u_1 + u_2)$, а это входит в $\varphi(U_1 + U_2)$. В таком случае, б) неверно, а правильное утверждение там - $\varphi^{\{-1\}}(V_1 + V_2)$ является надмножеством $\varphi^{\{-1\}}(V_1) + \varphi^{\{-1\}}(V_2)$. Идея в том, что для любых v_1 из V_1 и v_2 из V_2 справедливо $\varphi^{\{-1\}}(v_1) + \varphi^{\{-1\}}(v_2) = u_1 + u_2 = u$, и при этом $\varphi^{\{-1\}}(v_1) + \varphi^{\{-1\}}(v_2) = \varphi^{\{-1\}}(v_1 + v_2)$, то есть все возможные u из U, такие, что $\varphi^{\{-1\}}(v_1) + \varphi^{\{-1\}}(v_2) = u$, автоматически являются прообразами и для $v_1 + v_2$, а значит, $\varphi^{\{-1\}}(V_1) + \varphi^{\{-1\}}(V_2)$ является подмножеством $\varphi^{\{-1\}}(V_1 + V_2)$. Обратное может быть неверно, так как могут существовать такие v_1 из V_1 и v_2 из V_2, что их прообразов не существует (и, соответственно, не существует такого u из U, что $u = \varphi^{\{-1\}}(v_1) + \varphi^{\{-1\}}(v_2)$), но существует прообраз $v_1 + v_2$, так что в $\varphi^{\{-1\}}(V_1 + V_2)$ существует элемент, которого нет в $\varphi^{\{-1\}}(V_1) + \varphi^{\{-1\}}(V_2)$. Контрпример в голову приходит такой: пусть V - это трёхмерное пространство, U - одномерное, $\varphi((u_1)) = (u_1, 0, 0)$, $V_1 = \{(x, y, 0)\}$, $V_2 = \{(0, y, z)\}$, тогда v_1 из V_1 и v_2 из V_2, у которых y не равно 0, не имеют прообразов, но если они обратны друг другу по сложению (а ещё z у v_2 равен 0), то $v_1 + v_2 = (x, 0, 0)$ - элемент, имеющий прообраз в U.