М1) 23.04.24

$$\begin{matrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & & & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & & & & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & & & & & 1 & 1 \\ 0 & & & & & & & 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}$$

2) −1) 3) $-\left(\cdot 2\right)\cdot\frac{1}{2}$ 4) −3) $\cdot\frac{2}{3}$ 5) −4) $\cdot\frac{3}{5}$

$$\begin{matrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{5}{3} & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{8}{5} & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{13}{8} & -1 & 0 \\ & & & & & 0 & \frac{21}{13} & -1 \\ & & & & & & 0 & -1 \\ & & & & & & & 0 \\ & & & & & & & 0 \end{matrix}$$

$1+^2$

$1+\frac{3}{5}=\frac{8}{5}$

$$D_n=\overbrace{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}}^{n}=1\cdot D_{n-1}+\underbrace{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}}_{= D_{n-2}}$$

$$D_n=D_{n-1}+D_{n-2}$$

$$\det(A)=1\cdot 2\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{3}\cdot\frac{8}{5}\cdot\frac{13}{8}\cdot\frac{21}{13}\cdot\frac{34}{21}\cdot\frac{55}{34}\cdot\frac{89}{55}\cdot$$

7 8 9 10

$$\cdot\frac{144}{89}\cdot\frac{233}{144}=233$$

11 12

Г1) $\exists G$ – гр., $M\subset G$; $K=\{g\in G: gM=M\}$

док. $K<G$

$\Rightarrow$ ~~1) $g=e$~~ ~~2) $M=\{0\}$~~

нужно док.: 1) $\exists e\in K$
2) K-замк. по опер.
3) K замк. по g^{-1}

1) $\exists e\in G\Rightarrow eM=\{em: m\in M\}=\{m: m\in M\}=M$
$\Rightarrow eM=M\Rightarrow e\in K\Rightarrow K\neq\varnothing$

2) $\exists g,h\in K: gM=M$ и $hM=M$
нужно показать, что $gh\in K$: $(gh)M=M$
$\exists (gh)M$: $(gh)M=\{(gh)m: m\in M\}$, т.к. выполняется ассоц, то $(gh)m=g(hm)\Rightarrow$
$(gh)M=\{g(hm): m\in M\}=g\{hm: m\in M\}=g(hM)$,
т.к. $h\in K$, то $hM=M\Rightarrow (gh)M=g(hM)=gM$
т.к. $g\in K$, то $gM=M\Rightarrow (gh)M=gM=M$
$\Rightarrow (gh)M=M$, $gh\in K$

3) $\exists g\in K: gM=M$; нужно показ., что $g^{-1}\in K$ т.е.
$g^{-1}M=M\Rightarrow \exists g^{-1}M=\{g^{-1}m: m\in M\}$
3.1) док. $g^{-1}M\subseteq M$: т.к. $gM=M$, то $\forall m'\in M\ \exists m\in M$:
$m'=gm$ (т.к. $gM=M$) $\Rightarrow g^{-1}m'=g^{-1}(gm)=(g^{-1}g)m=em=m$,
$m\in M\Rightarrow g^{-1}m'\in M\Rightarrow g^{-1}M\subseteq M$

3.2) док: $M \subseteq g^{-1}M$: $\ominus$ $\forall m \in M$, т.к. $gM = M$ => можем $\ominus$ $g^{-1}m$, положим, что $m = g^{-1}m'$, $m' \in M$;

$\exists m' = gm \Rightarrow g^{-1}m' = g^{-1}(gm)$, $m' = gm \in gM = M$

$\Rightarrow m \in g^{-1}M$ и $M \subseteq g^{-1}M$

$\Rightarrow g^{-1}M = M \Rightarrow g^{-1} \in K$, $\forall g$

$\Rightarrow K < G$ - ч.т.д.

Г2) $\exists H < G$, $A = \alpha H$ - л.с.к; $x, y, z \in A$

док: $xz^{-1}y \in A$

$\alpha H = A = \{\alpha h : h \in H\}$

$\alpha h = x, y, z$; $z = \alpha h_3 \Rightarrow z^{-1} = (\alpha h_3)^{-1} = \alpha^{-1} h_3^{-1}$

$xz^{-1}y = \alpha h_0 = \alpha h_1 z^{-1} \alpha h_2$

$\Rightarrow h_0 = \alpha h_1 h_2 z^{-1} = \alpha h_1 h_2 \alpha^{-1} h_3^{-1}$

$\Rightarrow$ $h_0 = h_1 h_2 h_3^{-1}$, т.к. H - подгр. G,

$h_{1,2,3}^{-1} \in H$ и H - замк. по умнож.,

то $\exists h_0 : h_0 = h_1 \cdot h_2 \cdot h_3^{-1} \Rightarrow \exists \alpha h_0 \in A$ =>

$\Rightarrow xz^{-1}y \in A$

Г3) G: $f: G \to G$ по ф-ле $f(x) = x^2$ - гомо. групп.

док: G-абелева => f - коммутативно

$\ominus$ $f(ab) = (ab)^2 = abba$

$f(a)f(b) = \underset{aabb}{a^2 b^2} = f(ab) = (ab)^2$ $\Big] \Rightarrow abab = aabb$

&

$abab = aabb$

$a^{-1}abab = ebab = bab$

$a^{-1}aabb = eabb = abb$

$\Rightarrow bab = abb$ (1)

$\underset{e}{b^{-1}b}ab = b^{-1}abb$ $\Rightarrow abb^{-1} = (b^{-1}abb)b^{-1}$

$\Rightarrow ab = b^{-1}abb$

$\Rightarrow a = b^{-1}ab \Rightarrow ba = bb^{-1}ab = ab$

$\Rightarrow ba = ab$

$\Rightarrow abab = aabb \Leftrightarrow a(ba)b = a(ab)b$

- ч.т.д.

6.5

б) $D_n = \begin{vmatrix} 6 & 3 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 6 & 3 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 6 & 3 & \dots & & & \\ 0 & 0 & 3 & 6 & 3 & \dots & & \\ \dots & & & & & 3 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & \dots & & & & 3 & 6 \end{vmatrix} = 6 \cdot D_{n-1} - 3 \begin{vmatrix} 3 & 3 & 0 & \dots \\ 0 & 6 & 3 & \dots \\ \dots & & & \\ & & & 3 \\ & & & 6 \end{vmatrix}$

$= \underbrace{6D_{n-1} - 9D_{n-2}}$

$t^2 - 6t + 9 = 0$

$t_1 = t_2 = 3$

7.1

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ опр. методом Алг. доп..

$\Delta = 1$

$\boxed{\text{алг. поиска обратной:}}$

I $A \cdot A^{+} = E \cdot A \cdot A^{+} \to (A|E) \sim (E|A^{-1})$

эл. преобр. (метод Гаусса)

$\begin{array}{c} \\ 1) \\ 2) \\ 3) \\ 4) \end{array} \left(\begin{array}{cccc|cccc} & A & & & & E & & \\ 1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$

$\Downarrow$ E $\quad$ $\Downarrow$ A^{-1}

по строкам / по столбцам.

лучше

2) + 4) $\cdot (-2)$

$\left.\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \end{array}\right| \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$

1, 2 − 3

1, 2, 3 − 4

$\left.\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \end{array}\right| \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$

$\left.\begin{array}{cccc} -2 & 0 & 0 & -1 \\ -3 & -1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \end{array}\right| \begin{array}{cccc} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$

1 − 2

$\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \left.\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & -2 \\ -3 & -1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \end{array}\right| \begin{array}{cccc} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$

2+3

$\left.\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \end{array}\right| \begin{array}{cccc} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$

1+4

$\left.\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \end{array}\right| \begin{array}{cccc} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$

II A, A^{-1} для $\forall\ a^{-1}_{ij} = \frac{A^T_{ij}}{|A|}$

1) A^T, $\det(A)$

2) для $\forall\ a_{ij}$ ищем A_{ij}

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} A_{11}/|A| & A_{12}/|A| \\ \dots & \dots \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -7 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}$$

$\det(A) = 12 - 7 = 5$

$$A^T = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -7 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 6/5 & 1/5 \\ 7/5 & 2/5 \end{pmatrix}$$

$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot 6 = 6$

$A_{12} = 7$

$A_{21} = 1$

$A_{22} = 2$

$f(x) \to a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0 \quad \{x^3, x^2, x, 1\}$

$f(x) \to a_3x^3 + ib_3x^3 + a_2x^2 + ib_2x^2 + a_1x + ib_1x + a_0 + ib_0$

$\{x^3, ix^3, x^2, ix^2, x, ix, 1, i\}$

линейный оператор:

$\varphi: L_1 \to L_2$

1) $\forall x, y \in L_1 \quad \varphi(\bar{x} + \bar{y}) = \varphi(\bar{x}) + \varphi(\bar{y})$

2) $\forall \lambda \in K \quad \varphi(\lambda \bar{x}) = \lambda \varphi(\bar{x})$

в матр. виде $A \cdot \bar{x} = \bar{x}'$

матр. л. о. в базисе $\{e_n\}$
лин. опер.

$(A\bar{e}_1, A\bar{e}_2, \dots A\bar{e}_n) = [A]_e$

закон преобр. лин. оп.:

$[A_e]\ \{e_n\} \to \{e'_n\}\ [A]_{e'}$

$e'_n = e_n \cdot T_{e\to e'} \,|\, \cdot e_n^{-1}$

$e_n^{-1} e'_n = T_{e\to e'};\ [A]_{e'} = T^{-1}_{e\to e'} [A]_e T_{e\to e'}$

Г4) отобр. $f: S_{17} \to S_{17}$ по ф-ле $f(\sigma) = \sigma^{55}$ сюръек?

S_{17} - симметр. группа порядка 17 - мн-во всех перестановок мн-ва из 17 эл.

перестановка - биективное отобр. на себя.

Кол-во эл в S_{17}: $|S_{17}| = 17!$

данное отобр. ставит в соотв перестанов. σ^{55}, т.е. мы применяем σ 55 раз

$\sigma(1)=2$; $\sigma(2)=3$, $\sigma(3)=1 \Rightarrow \sigma^2 = \sigma \circ \sigma$

$\sigma^2(1) = \sigma(\sigma(1)) = \sigma(2) = 3$ и т.д. $\sigma^3(1) = 1$

в данном случае для цикла длины 3 (123) $\sigma^3 = id$ - тождеств. перест.

у нас будет сюрр, если для $\forall \tau \in S_{17}$ $\exists \sigma \in S_{17}: f(\sigma) = \tau$, т.е. $\sigma^{55} = \tau$

~~т.е. S_{17} замкнута относительно возведения в 55 степень~~

~~иначе~~ $\sigma^{55} = id$, если $k | 55$, где k - длина цикла

иначе $\sigma^{55} = \sigma^{55 \bmod k}$

порядок σ - это НОК всех её циклов перестановки

$55 = 11 \cdot 5$

$\exists$ возможные k: $k \in \{1, \dots 17\} | 55$

$\Rightarrow k = 1, 5, 11$ только циклы длины

$\Rightarrow \sigma$ ~~...~~$^{55} = id$, если $k \in \{1,5,11\}$

образ f - мн-во всех σ^{55}, чтобы f - сюр, $Im(f) = S_{17}$, т.е. $\forall \tau \in S_{17}: \tau = \sigma^{55}$ должен быть представим как что-то 55 ст.

$\exists k \in \{2, 3 \dots\} \setminus 1,5,11$

$k=2$: $\sigma = (12)$ 55 ~~...~~ $\equiv_2 1$

$\Rightarrow \sigma^{55} = \sigma^1 = (12)$

~~и т.д.~~

$k=3$ $\sigma = (123)$ $\sigma^{55} = \sigma^1 = (123$

$k=4$ $\sigma(1234)$ $55 \equiv_4 = 3$

• $\exists$ $k=7$: $\tau^7 = id$, $\sigma^{55} = \tau$; $5 \equiv_7 6 \Rightarrow \sigma^6 = \tau$, но τ не 6 ст. в цикле с $k = 7$ - y . $\longrightarrow$

уточнение

$\sigma^{55} = \sigma^{55 \bmod k} = \sigma^{6} = \sigma^{-1} = (1\ 7\ (5\ 4\ 3\ 2)$,

а не $\tau = \tau^{7} = (1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7) = id \Rightarrow \lightning$

τ		τ^{-1}
$1 \to 2$		$2 \to 1$
$2 \to 3$	$\Rightarrow$	$3 \to 2$
...		...
$7 \to 1$		$1 \to 7$

ч.т.д.

$\Rightarrow f$ - не искорчено

09.07.2024

М1) $A \in M(\mathbb{R})$, $\sigma \in S_n$, сначала столбцы $\to \sigma$, затем строки $\to$ как изменится $\det(A)$

$\exists A = (a_{ij}) \xrightarrow{\sigma(\text{столбцов})} B = (b_{ij})$,

где $b_{ij} = a_{i\sigma^{-1}(j)}$

теперь $B = (b_{ij}) \xrightarrow{\sigma(\text{строк})} C(c_{ij})$,

где $c_{ij} = b_{\sigma^{-1}(i)j} = a_{\sigma^{-1}(i)\sigma^{-1}(j)}$

$\det(A) = \sum\limits_{\sigma \in S_n} sign(\sigma) \cdot a_{1\sigma(1)} \cdot a_{2\sigma(2)} \cdot \ldots \cdot a_{n\sigma(n)}$

$sign(\sigma) = (-1)^{I(\sigma)}$

$\det(A) = \sum\limits_{\sigma \in S_n} sign(\sigma) \prod\limits_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)}$

$\det(C) = \sum\limits_{\sigma \in S_n} sign(\sigma) \prod\limits_{i=1}^{n} c_{i,\sigma(i)} = \sum\limits_{\sigma \in S_n} sign(\sigma) \prod\limits_{i=1}^{n}$

$a_{\sigma^{-1}(i)\sigma^{-1}(\sigma^{-1}(i))} \Rightarrow \det(A) = \det(C)$

$a_{\sigma^{-1}(i),i}$ — хуйня.

вариант лучше:

$\exists$ матр. эл. преобр. $E^{i,\sigma(i)}$ - перестанов- на σ столбцов

$\Rightarrow \exists B = A \cdot E^{i,\sigma(i)} \Rightarrow \det(B) = \det(AE^{i,\sigma(i)}) =$

$= \det(A) \cdot \det(E^{i,\sigma(i)}) = \det(A) \cdot sign(\sigma)$

теперь $\exists$ матр. эл. преобр. $E^{i,\sigma(i)}$ - перестановка σ строк

$\Rightarrow \exists C = E^{i,\sigma(i)} B \Rightarrow \det(C) = \det(BE^{i,\sigma(i)}) =$

$= \det(B)\det(E^{i,\sigma(i)}) = \det(A) \cdot sign(\sigma) \cdot sign(\sigma)$

$= \det(A) \cdot sign^2(\sigma)$, где $sign(\sigma) = \pm 1 \Rightarrow sign^2(\sigma) = 1$

$\Rightarrow \det(C) = \det(A) \Rightarrow \det(A)$ не изменится.

Г1) $\forall$ подгр. цикл. гр. – циклич.

Θ $H_k < G = \langle a \rangle$ для каждого $k \in \mathbb{Z}$:

1) $k=0$, $H_0 = \langle a^0 \rangle = \langle e \rangle = \{e\}$

$k=1$, $H_1 = \langle a^1 \rangle = \langle a \rangle = G$

$k=2$, $H_2 = \langle a^2 \rangle = \{\dots, a^{-4}, a^{-2}, a^0, a^2, a^4 \dots\}$

$k=-1$, $H_{-1} = \langle a^{-1} \rangle = \{\dots a^2, a^1, a^0, a^{-1}, a^{-2}, \dots\}$

$H_k = \langle a^k \rangle$, $k \in \mathbb{Z} \Rightarrow H_k$ – ∞ много

2) док, ~~что все~~ H_k различны:

очевидно, что H_k и H_{-k} совпадают, т.к. $H_k = \langle a^k \rangle$, $H_{-k} = \langle a^{-k} \rangle$ – т.к. цикл. порожд. эл. равна гр. порожд. его обратным.

$\Rightarrow$ Θ $k \geq 0$ – докажем, что они различны.

$]$ $H_k \subseteq H_m$, $k, m > 0$, $k \neq m$

если $a^k \in H_m = \langle a^m \rangle$, то $a^k = (a^m)^s = a^{ms} \Rightarrow$

$\Rightarrow k = ms$

если $m < k$, то $s = \frac{k}{m}$, но $s \in \mathbb{Z}$

для каждого $k \geq 0$ $H_k = \{a^{kn} : n \in \mathbb{Z}\}$ – т.е. эл. с шагом k и все подгр. различны, т.к. a^k не выразить через a^m с другим шагом, если $k \neq m$ – ч.т.д.

Г2) $]$ $H < G$, $A = \lambda H$, $x, y \in A$

$x^{-1} y \in A$, док, что $A = H$

$\lambda H = A = \{\lambda h ; h \in H\} \Rightarrow$ ~~[illegible]~~

$\lambda h_1 = x \Rightarrow x^{-1} = (\lambda h_1)^{-1} = \lambda^{-1} h_1^{-1}$ – т.к. H замкн. отн. $\wedge(-1)$

$\lambda h_2 = y$

Γ $\lambda h_0 = x^{-1} y = x^{-1} \lambda h_2 \Rightarrow h_0 = x^{-1} h_2 = \lambda^{-1} h_1^{-1} h_2 \;\Big|\cdot \lambda$

$\Rightarrow \lambda h_0 = \lambda \lambda^{-1} h_1^{-1} h_2 = e h_1^{-1} h_2$

\# т.к. H-подгр, $\Rightarrow$ замкн. $\Rightarrow \exists h' : h' = h_1^{-1} h_2$

$\llcorner$ т.к. $e h' = \lambda h_0 \Rightarrow e h' \in A \Rightarrow \lambda = e$

$x^{-1} y = h_1^{-1} h_2 \in H$ – т.к. H – замкн.

$x^{-1} y \in A = \lambda H \Rightarrow h_1^{-1} h_2 \in \lambda H \Rightarrow h_1^{-1} h_2 = \lambda h_0$, $h_0 \in H$

$\lambda = h_1^{-1} h_2 h_0^{-1} \in H \Rightarrow \lambda \in H$

$\Rightarrow \lambda H = A = \{\lambda h : \lambda, h \in H\} = H$ – т.к. H – замкн. но при этом $\lambda H = A = H$ ~~[illegible]~~ строго, т.к. смеж. классы либо = либо $\cancel{\cap}$

Г3) $\exists\ \varphi: G \to H$ - гомо гр. : $Im(G) = H$,

док., что $\varphi([G,G]) = [H,H]$

докажем: 1) $f([G,G]) \subseteq [H,H]$

2) $[H,H] \subseteq f([G,G])$

1) $\exists g \in [G,G] : g = [x_1,y_1]\cdot[x_2,y_2]\dots[x_k,y_k]$,

$x_iy_i = x_iy_ix_i^{-1}y_i^{-1}$

$f(g) = f([x_1,y_1]\dots[x_k,y_k]) = f([x_1,y_1])\cdot\dots f([x_k,y_k])$

$f([x_i,y_i]) = f(x_iy_ix_i^{-1}y_i^{-1}) = f(x_i)f(y_i)f(x_i^{-1})f(y_i^{-1}) =$

$= f(x_i)f(y_i)f(x_i)^{-1}f(y_i)^{-1} = [f(x_i), f(y_i)]$ - коммут. в H

$\Rightarrow f(g) = [f(x_1), f(y_1)]\dots[f(x_k), f(y_k)]$

$[H,H]$ - порождена всеми коммут. $[h,h']$, $h,h' \in H$

$\Rightarrow f(g) \in [H,H] \Rightarrow f([G,G]) \subseteq [H,H]$

2) f - сюр. (по усл.) $\Rightarrow \forall h^{\in H} \exists g^{\in G} : f(g) = h$

$\Rightarrow \exists\ [h_1,h_2] \in H = h_1h_2h_1^{-1}h_2^{-1}$

$\Rightarrow \exists g_1, g_2 : f(g_1) = h_1$ и $f(g_2) = h_2$

тогда $f(g_1g_2g_1^{-1}g_2^{-1}) = f(g_1)f(g_2)f(g_1^{-1})f(g_2^{-1}) = h_1h_2h_1^{-1}h_2^{-1}$

$= [h_1,h_2]$

$[g_1,g_2] \in [G,G] \Rightarrow f([g_1,g_2]) = [h_1,h_2]$

$\Rightarrow \forall [h_1,h_2] \in H$ лежит в $f([G,G])$

$\exists k \in [H,H]$, $k = [h_1,h_1']\dots[h_m,h_m']$

для каждого $[h_i,h_i']\ \exists\ g_i, g_i' \in G : f(g_i) = h_i, f(g_i') = h_i'$

и $f([g_i,g_i']) = [h_i,h_i']$, тогда

$f([g_1,g_1']\dots[g_m,g_m']) = [h_1,h_1']\dots[h_m,h_m'] = k$

$[g_1,g_1']\dots[g_m,g_m'] \in [G,G] \Rightarrow k \in f([G,G])$

$\Rightarrow [H,H] \subseteq f([G,G])$

$\Rightarrow f([G,G]) = [H,H]$

Г4) $\exists\ \sigma \in S_n$, $ord(\sigma) = 4$, r - кол-во эл., кот. σ остав. на месте; док: $n-r$ - чётно

~~$r \equiv n \pmod 4$~~

~~$n - r \equiv 0 \pmod 4 \Rightarrow n - r \vdots 4 \Rightarrow n-r \vdots 2$~~

?

$ord(\sigma)=4$ – $\min k: \sigma^k = id$ (мног. прим.)

r – кол-во $i: \sigma(i)=i$

- перест. раскл. на циклы

$(i_1, i_2, \dots, i_k)$, $\sigma(i_1)=i_2 \dots \sigma(i_k)=i_1$

- порядок цикла длины $k = k$, т.к. $\sigma^k(i_1)=i_1$
- порядок всей ~~цик~~ перестановки равен НОК длин всех её циклов

$\Rightarrow$ у нее $k \in \{1, 2, 4\}$

- сумма длин всех циклов $= n$.

r – кол-во фикс. точ. или же циклов длины 1.

$\exists$ r-цикл. 1

m – циклы 2

k – циклы 4

$n = r \cdot 1 + m \cdot 2 + k \cdot 4$

при этом $m \cup k \neq 0$, т.к. если бы были только циклы длина 1, то $ord(\sigma)=1$

$\Rightarrow m+k \geq 1$

$\Rightarrow n - r = 2m + 4k \Rightarrow$ очевидно $n-r$ – чётно

22.03.2024

M1) $A \in M_{101}(\mathbb{R})$: $a_{i,j} = -a_{j,i}$

симметр. отн. гл. диаг.

гл. диаг $= 0$ док

$$\begin{array}{c|cccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \hline 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 1 & & & \\ 3 & -1 & -1 & 0 & & & \\ 4 & -1 & & & 0 & & \\ 5 & -1 & & & & 0 & \\ 6 & -1 & & & & & 0 \end{array}$$

$\Rightarrow A^T = -A$ – по св-вам косо-симметр. матр.

$\Rightarrow \det(A^T) = \det(-A)$

известно, что $\det(A^T) = \det(A)$

$\det(A) = \det(-A) = (-1)^n(\det(A)) = (-1)^{101}\det(A)$

$\Rightarrow \det(A) = -\det(A) \Rightarrow \det(A) = 0$

M2)

$$A = \begin{bmatrix} x & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & y \\ 0 & x & 0 & & & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & x & & & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x & 0 & & \\ & & y & 0 & \cdot & & \\ & y & 0 & & & \cdot & 0 \\ y & 0 & & & & 0 & x \end{bmatrix}$$

$\det(A)_n = x \cdot M_{1,1} - y \cdot M_{1,2n} =$

$= x($

$\exists\ n=1$ $\begin{matrix} x & y \\ y & x \end{matrix}$ $\det(A_2) = x^2 - y^2$

$n=2$ $\begin{bmatrix} x & 0 & 0 & y \\ 0 & x & y & 0 \\ 0 & y & x & 0 \\ y & 0 & 0 & x \end{bmatrix}$ $\det(A_4) = xM_{11} - yM_{14} =$

Axp

$M_{11} = \begin{bmatrix} x & y & 0 \\ y & x & 0 \\ 0 & 0 & x \end{bmatrix}$ $\quad \begin{matrix} x & 0 \\ 0 & x \end{matrix} \quad \begin{matrix} y & 0 \\ 0 & x \end{matrix}$

$\det(M_{11}) = x \cdot x^2 - y \cdot yx = x^3 - xy^2$

M_{14} $\quad \begin{matrix} 0 & 0 & y \\ x & y & 0 \\ y & x & 0 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 0 & y \\ x & 0 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 0 & y \\ y & 0 \end{matrix}$

$\det(M_{14}) = +x \cdot xy \mp yyy = +x^2y \mp y^3$

$\det(A) = x(x^3 - xy^2) - y(x^2y - y^3) =$

$= x^4 - x^2y^2 - x^2y^2 + y^4 = (x^2 - y^2)^2$

предположим $\det(A_{2n}) = (x^2 - y^2)^n$

] $A = xI + yE^{i,2n+1-i}$, где I - ед. матр

$E^{i,2n+1-i}$ - матр - перестановк

$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Г1)] G - мн-во всех вещ. чисел, отличных от -1; док: G - гр, относительно оп. $a * b = ab + a + b$

1) замк - очев (показать, что $a * b \neq -1$)

2) $(a*b)*c = (ab+a+b)c + ab + a + b + c =$

$= abc + ac + bc + ab + a + b + c$

$a*(b*c) = \uparrow$ - очев - ассоц. - да.

3) ~~$a*1=a$~~

$a*1 = a \cdot 1 + a + 1 \Rightarrow a = a + a + 1 \Rightarrow a = -1$

4) $\cancel{a*a}^{-1} = aa^{-1} + a + a^{-1} = e + a + a^{-1} = e$

3) $a * e = a \Rightarrow ae + a + e = a \Rightarrow e(a+1) = 0$, $a \neq -1$

$\Rightarrow e = 0$ проверим $a * 0 = a \cdot 0 + a + 0 = a$ - да

4) для кажд a $\exists b \in G$: $a * b = e = 0$ ($b = a^{-1}$)

$\Rightarrow ab + a + b = 0 \Rightarrow b = -\frac{a}{a+1}$, проверим, что $b \neq -1$: $\frac{-a}{a+1} = -1 \Rightarrow a = a + 1 \Rightarrow 0 = 1 \Rightarrow$ ↯

$\Rightarrow b \neq -1$ - ч.т.д.

Г2)] G - гр. ; H_1 и H_2 - её норм. подгр.

: $H_1 \cap H_2 = \{e\}$; $\forall x \in H_1$ и $\forall y \in H_2$ док: $xy = yx$

$$H_1 = gH_1g^{-1} ; H_2 = gH_2g^{-1}$$

Θ $[x,y] = xyx^{-1}y^{-1}$

если $xy = yx$, то $[x,y] = xyx^{-1}y^{-1} = yxx^{-1}y^{-1} = yy^{-1} = e$

нужно док, что $[x,y] = e$, для $\forall x,y$

для этого докажем, что $\begin{cases}[x,y] \in H_1 \\ [x,y] \in H_2\end{cases} \Rightarrow$

~~[illegible]~~

т.к. H_2 - норм. подгр. G, то $\forall g \in G$ $gyg^{-1} \in H_2$,

] $g = x$, Θ xyx^{-1}

$y \in H_2$; $xyx^{-1} \in H_2$; $[x,y] = xyx^{-1}y^{-1} = \underset{H_2}{\underset{\cap}{(xyx^{-1})}}\underset{H_2}{\underset{\uparrow}{y^{-1}}}$

т.к. H_2 - замкнута

$\Rightarrow [x,y] \in H_2$

$[x,y] = x(yx^{-1}y^{-1})$, Θ $yx^{-1}y^{-1} = y(x^{-1}y^{-1})$:

$x^{-1} \in H_1$,] $g = y$, тогда yxy^{-1} - сопряжение x эл y и $yH_1y^{-1} = H$

$\Rightarrow \begin{bmatrix} x \in H_1 \\ yx^{-1}y^{-1} \in H_1 \end{bmatrix} \Rightarrow xyx^{-1}y^{-1} \in H_1$

$$\underset{[x,y]}{\overset{\parallel}{}} \Rightarrow \in H_1$$

$\Rightarrow \begin{cases}[x,y] \in H_1 \\ [x,y] \in H_2\end{cases} \Rightarrow \in H_1 \cap H_2 = \{e\}$

$\Rightarrow [x,y] = e \Rightarrow xyx^{-1}y^{-1} = e$

$\Rightarrow$ ~~$x(xyx^{-1}y^{-1})y = xey$~~ ~~$(xx)yx^{-1}y^{-1}y = xy$~~ - ч.т.д.

Г3)] $H < G$, $(G:H) = 2$, док: $[G,G] < H$

по т. Лагранжа: $|G| = |H| \cdot (G:H) = 2|H|$

из $(G:H) = 2 \Rightarrow G$ делится на 2 лев. смежн. кл. и 2 пр. смежн. кл.

левые: H ; aH , $a \in G \setminus H$

прав: H ; Ha

$gH = Hg$, $\forall g \in G$: если $g \in H$, то $gH = H = Hg$

если $g \notin H$, то $gH = aH$; $Hg = Ha \Rightarrow aH = Ha$

$H \cup aH = G$

$\Rightarrow H \triangleleft G$

норм. подгр.

$\Rightarrow$ фактор гр. G/H состоит из H и aH

$|G/H| = 2 \sim \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ и коммутативна

$\exists\, G/H = \{H, aH\}$, тогда

$H \cdot H = H$

$H \cdot aH = aH$

$aH \cdot H = aH$

$aH \cdot aH = a^2 H = H$

$aH \cdot H = H \cdot aH \Rightarrow G/H$ - коммут.

$[G,G]$ - min норм. подгр. G; фактор гр. $G/[G,G]$ - коммут.

- если G/H - коммут., то $[G,G] < H$

$\forall x, y \in G$; $[x,y] = xyx^{-1}y^{-1}$

$\Rightarrow xHyH = xyH$

$yHxH = yxH$, т.к. G/H - коммут, то

$xyH = yxH \Rightarrow xy(yx)^{-1} = xyy^{-1}x^{-1} = xyx^{-1}y^{-1} \in H$,

т.е. $[x,y] \in H$

$[G,G]$ - порождена всеми $[x,y]$, $x, y \in G$

$[x,y] \in H$ - подгр. замк. отн. умнож. и обрат.

$\Rightarrow [G,G] \leq H$

Г4) $f: S_{19} \to S_{19}$ по ф-ле $f(\sigma) = \sigma^{103}$

а) f - гомо. групп? $|S_{19}| = 19!$

$\exists\, \sigma$ и τ

$f(\sigma \circ \tau) = (\sigma \circ \tau)^{103} = \underbrace{(\sigma \circ \tau) \dots}_{103\text{ раз}}$

$\sigma^{103} \circ \tau^{103} = \underbrace{(\sigma \circ \sigma \dots)}_{103} \underbrace{(\tau \circ \tau \dots)}_{103}$

не совпадают т.к. σ и τ не коммутируют, т.к. S_{19} - не абелева гр.

$\exists\, \sigma = (123)$

$\tau = (234)$

$\sigma \circ \tau = (123) \circ (234) \equiv (1234)$

$(\sigma \circ \tau)^{103} = (1234)^{103} = (1234)^3 = (1342)$

$\sigma^{103} = (123)^{103} = (123)$

$\tau^{103} = (234)^{103} = (234)$ $\Rightarrow \sigma^{103} \circ \tau^{103} = (1234)$ $\times$

б) f - биекция - ?

инъекция:

$f(\sigma) = \sigma^{103}$

если $f(\sigma) = f(\tau)$, то $\sigma^{103} = \tau^{103}$

по теор. Лагранж. $|S_{19}| = 19!$ ⋮ $ord(\sigma)$, $\sigma \in S_{19}$

$ord(\sigma)$ - НОК длин всех циклов (≤ 19)

$\sigma^k = id$, если k кратно $ord(\sigma)$

если 103 не кратно $ord(\sigma)$, $\sigma^{103} \neq id$

1→2
2→3
3→4
4→5
5→1

1 2 3 4 5

1→2→3→4→5

$\sigma = (12345)$ $\sigma^{103} = (12345)^{103} = \sigma^3 = (14253)$

$\tau = (13524)$ $\tau^{103} = (13524) = \sigma^3 = (12453)$

$\sigma \neq \tau$, но $\sigma^{103} = \tau^{103}$

=> f не инъекция

сюръекц:

$\exists \forall \rho \in S_{19}$ как σ^{103}

$ord(\sigma) | 19!$; $103 \in P$

если ρ - цикл длины 5, $ord(\rho) = 5$

$103 \equiv_5 3$, $\sigma^{103} = \rho$

-> не биекция

как работает $\sigma^3 \to \sigma^3$

$\sigma = (123)$: $\sigma(1) = 2$ $\sigma(2) = 3$ $\sigma(3) = 1$

$\sigma^3 = \sigma \circ \sigma \circ \sigma$ т.е. $\sigma^3(1) = \sigma(\sigma(\sigma(1))) =$

$= \sigma(\sigma(2)) = \sigma(3) = 1 = id$

Г5) док, что для неабелевой гр. G группа $G/Z(G)$ - не циклична

$Z(G) = \{z \in G : zg = gz$ для всех $g \in G\}$

нужно док, что $\nexists$ $gZ(G) \in G/Z(G)$: что он порождает $G/Z(G)$

- $Z(G)$ - нормальна, т.к. $\forall g \in G$ и $z \in Z(G)$ $gzg^{-1} \in Z(G)$

$gZ(G) = \{gz : z \in Z(G)\} \in G/Z(G)$ - смежные классы

операция в $G/Z(G)$: $(gZ(G))(hZ(G)) = ghZ(G)$

т.к. G - не абелева, то $\exists a, b$: $ab \neq ba$

$\Rightarrow [a,b] = aba^{-1}b^{-1} \neq e$

от противного:

I $G/Z(G)$ - циклич $\Rightarrow \exists g \in G : G/Z(G) =$
$= \langle g Z(G) \rangle$, т.е. $\forall x Z(G) \in G/Z(G)$
представим как $x Z(G) = (g Z(G))^k =$
$= g^k Z(G)$, $k \in \mathbb{N}$

в циклич. гр. все эл. коммутируют $\Rightarrow$
$xy Z(G) = yx Z(G)$ или же $\cancel{xy(yx)^{-1} \in Z}$
$\Rightarrow \exists g$ $xy(yx)^{-1} = xyx^{-1}y^{-1} = [x,y] \in Z(G)$

$=$ ~~пусть~~ $\exists$ $a, b \in G : ab \neq ba$, т.е.
$[a,b] \neq e$

если $G/Z(G)$ - цикл, то
$a Z(G) b Z(G) = ab Z(G)$
$b Z(G) a Z(G) = ba Z(G)$

эл. в $G/Z(G)$ $\Rightarrow ab Z(G) = ba Z(G) \Rightarrow [a,b] = aba^{-1}b^{-1} \in Z(G)$
коммутируют для $\forall a, b$
$\Rightarrow [G,G] < Z(G)$, т.к. $[G,G]$ порождена
но $G/[G,G]$ - всегда абелева
$\Rightarrow G/Z(G)$ - абелева — ↯ с условием

29.03.2023

Г4) коммутант гр. G содержится
все ..., док: $[a,bc] = [a,b] \cdot [a,c]$
для $\forall a, b, c \in G$

$[a,bc] = a(bc)a^{-1}(bc)^{-1} = abca^{-1}c^{-1}b^{-1}$
$[a,b] = aba^{-1}b^{-1}$
$[a,c] = aca^{-1}c^{-1}$
по св-вам коммут: $[a,b]g = g[a,b]$
т.е. $ab = ba[a,b]$
$ac = ca[a,c]$

Θ $[a,bc] = a(bc)a^{-1}(c^{-1}b^{-1}) = \begin{cases}(cb)^{-1} = (cb[b,c])^{-1}\end{cases}$

$=$ см х.а.

14.03.2023

М1) $A \in M_n(K)$ - ..., отн. побоч. диаг.

наш изм. опр.

$a_{ij} \to a_{ji}$ $\quad a_{ij} \to a_{n+1-j,\,n+1-i}$

? $\det(A^T)$ при транспонировании такого вида мы меняем местами все стр. и столб.

$$3\begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}_3 \quad 4\begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}_4$$

заметим, что будет $\left[\frac{n}{2}\right]$ перест. строк $\Rightarrow \det(A') = (-1)^{\left[\frac{n}{2}\right]} \det(A)$, где A' – матр. с перест. столб.

$\Rightarrow \det(A^T) = \left((-1)^{\left[\frac{n}{2}\right]}\right)^2 \det(A) = \det(A)$

ещё перест. строчек.

M2) см. реш. на лист.

a	b	c		c	b	a
d	e	f		f	e	d
z	x	0		0	x	z
				0	x	z
				f	e	d
				c	b	a

T1) $\exists$ $\varphi_{a,b}(x) = ax+b$; $G = \{\varphi_{a,b} : a,b \in \mathbb{R}, a \neq 0\}$

a) гр.; ан.: о 1) ~~$\varphi(\varphi(x)) = a(ax+b)+b =$~~

~~$= a^2x+ab+b$~~

1) $\forall$ $\varphi_{a,b}, \varphi_{c,d} \in G$, $a, c \neq 0$

$(\varphi_{ab} \circ \varphi_{cd})(x) = \varphi_{ab}(\varphi_{cd}(x)) = a(cx+d)+b =$

$= acx+ad+b = \varphi_{ac,\, ad+b}$, где $ac \neq 0$, $ad+b \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \varphi_{ac,\, ab+b} \in G \Rightarrow G$ – замк.

2) $(\varphi_{ab} \circ (\varphi_{cd} \circ \varphi_{ef}))(x) = ((\varphi_{ab} \circ \varphi_{cd}) \circ \varphi_{ef})(x)$ – по св-ву ф-ций $\Rightarrow$ ассоц.

3) $\varphi_{ab} \circ e = \varphi_{ab}$, $\exists$ $\varphi_{cd} = e$ (ц, 1)

$\Rightarrow acx+ad+b = ax+b$

$\Rightarrow acx+ad = ax$

$ac = a \Rightarrow c = 1$

$ad = 0 \Rightarrow d = 0$, всех a $\Rightarrow$ уд.

аналогично для $e \circ \varphi_{ab} = \varphi_{cd} \circ \varphi_{ab}$

4) для φ_{ab} $\exists$ φ_{cd} : $\varphi_{ab} \circ \varphi_{cd} = \varphi_{1,0}$

$\varphi_{cd} \circ \varphi_{ab} = \varphi_{1,0}$

$\Rightarrow acx + ad + b = x$

$\Rightarrow ac = 1,\ c = \frac{1}{a}$, т.к. $a \neq 0$

$d = -\frac{b}{a}$

$\Rightarrow \varphi_{c,d} = \varphi_{1/a, -b/a} \in G$, т.к. $1/a \neq 0$

$\Rightarrow G$ - гр.

б) $H = \{\varphi_{1,b} : b \in \mathbb{R}\}$ - подгр. G?

1) $H \neq \varnothing$

2) замк. по $\circ$

3) замк по обр. эл-

1) $\varphi_{1,0}(x) = x \in H$, $(b=0)$ - нейтр. эл. G

$H \neq \varnothing$

2) $(\varphi_{1b} \circ \varphi_{1c})(x) = x + c + b = x + (c+b)$

это $\varphi_{1,c+b} \in H$, т.к. $c+b \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow H$ - замк.

3) $\varphi_{ad} \circ \varphi_{1b} = \varphi_{1,0}$ нейтр. эл в G

$\varphi_{ad}(x+b) = a(x+b) + d = ax + ab + d = x$

$\Rightarrow a = 1;\ d = -b$; $\varphi_{1,-b} \in H$, т.к. $-b \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \varphi_{1,-b}$ - обр. эл. H

$\Rightarrow H$ - подгр. G.

Г2) $\sigma 1\ (2\ 4\ 6)$ - меняем эл. 1-ой чёт.

$2 \to 4$

$\sigma 2\ (1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6)$

$4 \to 6$

$6 \to 2$

либо меняем

эл. 1-ой чёт (если возвести её в 2n ст.)

либо меняем

местами чёт и нечёт эл

$(2\ 1\ 5\ 4\ 3\ 6)$ (если ст. $2n-1$)

контр пример

здесь поменялись

местами

и чёт и нечёт

эл ~~???~~ (чёт с чёт и неч. с неч)

- это невозможно получить из $\sigma 1$ и $\sigma 2$

S_n порождается всеми транспоз.
- 2 циклами
либо 1-ним n-циклом и 1-ой транспоз.
(при опр. услов.)

Г3) $A \neq \emptyset$, $A \subset G$; $\forall x, y, z \in A$ верно $xy^{-1}z \in A$; док: A - прав. смеж. кл. гр. G по некоторой $H < G$
т.е. $A = Ha = \{ha : h \in H\}$

для $\forall a \in A$ $\exists$ $H = \{h \in G ; ha \in A\}$
докажем, что $H < G$ и $A = Ha$
1) нейтр. эл. в H:
$\exists h = e$, тогда $ea = a \in A \Rightarrow ea \in A \Rightarrow e \in H$
$\Rightarrow H \neq \emptyset$
2) замк по ·
$\exists h_1, h_2 \in H$; $h_1 a \in A$, $h_2 a \in A$
покажем, что $h_1 h_2 \in H \Rightarrow h_1 h_2 a \in A$
~~$\exists x = h_1 a$, $y = h_2 a$, $z = a$,~~
~~$y^{-1} = (h_2 a)^{-1} = a^{-1} h_2^{-1}$, тогда~~

~~$xy^{-1}z = (h_1 a)(a^{-1} h_2^{-1})a = h_1 (a a^{-1}) h_2^{-1} a = h_1 e h_2^{-1} a =$~~
~~$= h_1 h_2^{-1} a \in A$~~
~~$\exists x = h_1 h_2^{-1} a$, $y = a$, $z = a$~~
~~$x \in A$, $y = a \in A$, $z = a \in A$; $y^{-1} = a^{-1}$~~

$x = h_1 a$
$y = a$ $\Rightarrow xy^{-1}z = (h_1 a)(a^{-1})(h_2 a) = h_1 h_2 a \in A$
$z = h_2 a$
$\Rightarrow h_1 h_2 \in H \Rightarrow H$-замкн по ·
3) замк по обр.
$\exists h \in H$: $ha \in A$
покажем, что $h^{-1} \in H \Rightarrow h^{-1} a \in A$
$\exists x = a$, $y = ha$, $z = a$
$y^{-1} = (ha)^{-1} = a^{-1} h^{-1} \Rightarrow xy^{-1}z = a(a^{-1} h^{-1})a =$
$= h^{-1} a \in A \Rightarrow h^{-1} \in H \Rightarrow H < G$

покажем, что $A = Ha$
1) $Ha \subseteq A$: по опр $H = \{h \in G : ha \in A\}$
для $\forall h \in H$, $ha \in A \Rightarrow Ha = \{ha : h \in H\} \subseteq A$
2) $A \subseteq Ha$: для $\forall x \in A$, $\exists y = a$, $z = a \Rightarrow$
~~$xy^{-1}z = xa^{-1}a = xe \in A$~~

$\exists\, h = xa^{-1}$

$ha = (xa^{-1})a = xe = x$

покажем, что $h \in H \Rightarrow ha \in A$

$ha = x \in A \Rightarrow h = xa^{-1} \in H$

$\Rightarrow x = ha$ для $h = xa^{-1} \in H$

$\Rightarrow A \subseteq Ha$

$\Rightarrow A = Ha$ – ч.т.д.

Г4) $\varphi([a,b]) = \varphi(a^{-1}b^{-1}ab) =$

$= \varphi(a^{-1})\varphi(b^{-1})\varphi(a)\varphi(b) = \varphi(a^{-1})\varphi(a)\varphi(b^{-1})\varphi(b) = e_H$ – т.к. φ – гомо и H – абел.

$\exists\, \varphi: G \to H$ – гомо

H – абелева

$\Rightarrow$ для $\forall a, b \in G$ $\varphi([a,b]) = e_H$

док.: $\ker(\varphi) \supset [G,G]$ $\Rightarrow$ т.к. $[G,G]$ – порождено $[a_i, b_i]$ $\forall i$, то

$\varphi([G,G]) = \{e_H\} \Rightarrow$ по определению ядра $[G,G] \subset \ker(\varphi)$ – ч.т.д.

~~Г5) по т. Коши $\exists a: ord(a) = p$ и $\exists b$: $ord(b) = q$, $a \neq b$~~

~~тогда $|\langle a \rangle| = p$, $|\langle b \rangle| = q$ $\Rightarrow$ $\boxed{G = \langle ab \rangle}$~~

~~все различные элементы в G~~

~~т.к. $|G| = pq$ и G – абелева~~

$\exists\, G$ – аб. гр. $|G| = pq$, где p, q – различные простые числа

док., что G – цикл.