Задача 3

№3 Рассмотрим матрицу перехода:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \boxed{1} & \boxed{1} \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \boxed{1} \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & & & \vdots & \ddots & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Найдём её определитель. Заметим, что рассматривая верхние 5 строчек, можно "опустить" выделенный уголок из единиц на 3 позиции вниз, не меняя определитель:

Вычтем из последнего и предпоследнего столбцов первый:

$$\begin{pmatrix} \cdots & \boxed{1} & \boxed{1} \\ \cdots & 0 & \boxed{1} \\ \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & -1 & 0 \\ \cdots & -1 & -1 \\ \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Теперь прибавим к последнему третий, а к предпоследнему второй.

$$\begin{pmatrix} \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & -1 & 0 \\ \cdots & -1 & -1 \\ \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \boxed{1} & \boxed{1} \\ \cdots & 0 & \boxed{1} \end{pmatrix}$$

После этих преобразований, если последовательно раскрыть по первым трём строчкам, определитель исходной матрицы размера n, равен аналогичной, размера $n-3$.

В конце, может быть три случая:

1) $\begin{vmatrix} 1 & \boxed{1} & \boxed{1} \\ 1 & 1 & \boxed{1} \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 0$, при $n \equiv 0 \pmod 3$

2) $\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & \boxed{1} & \boxed{1} \\ 1 & 1 & 0 & \boxed{1} \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 3$; при $n \equiv 1 \pmod 3$

3) $\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \boxed{1} & \boxed{1} \\ 1 & 1 & 0 & 0 & \boxed{1} \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = 3$; при $n \equiv 2 \pmod 3$

Значит, новый набор векторов так же базис, только при $n \not\vdots\, 3$

Ответ: при $n \not\vdots\, 3$

ИТМО. 2 семестр. Контрольная работа №2. 20.05.2025

1. Являются ли следующие отображения $\varphi : \mathbb{R}^4 \to$ линейными:

а) $\varphi(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_2, x_1 - x_3, x_4 + x_1 + 2x_2)$;

б) $\varphi(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1, x_2^3, x_3^2, x_4 + x_3)$?

Для тех отображений, что являются линейными, запишите их матрицы в стандартных базисах пространств.

2. Приведите квадратичную форму $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 2x_1x_3 + 3x_2x_4 + 5x_3^2$ к диагональному виду невырожденным преобразованием переменных.

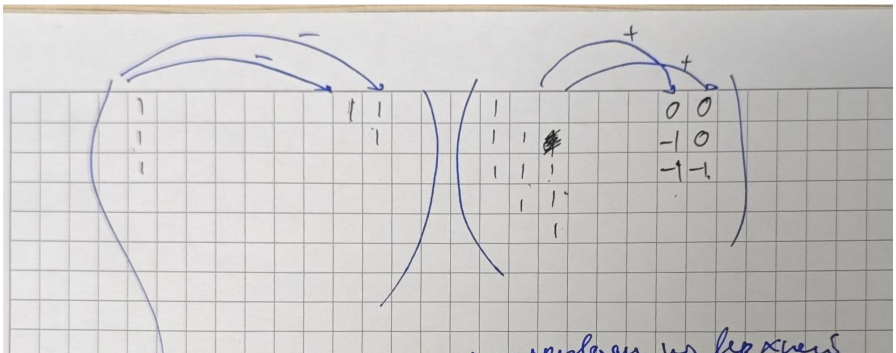
3. Пусть $n \geq 4$, а $e_1, \dots, e_n$ — базис линейного пространства V над полем $\mathbb{R}$. При каких $n \in \mathbb{N}$ $\quad e_1 + e_2 + e_3, e_2 + e_3 + e_4, \dots, e_n + e_1 + e_2$ — тоже базис V?

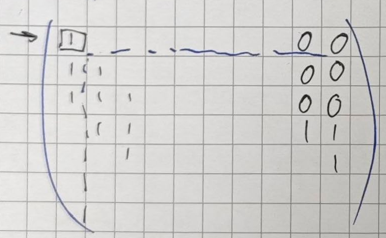
4. Дана матрица $A \in M_{m,n}(K)$ и матрицы $B, C \in M_{n,m}(K)$. Оказалось, что $AB = E_m$ и $CA = E_n$. Докажите, что $n = m$.

5. Пусть P и Q — аффинные подпространства линейного пространства V, а $W = P \cap Q$ непусто. Докажите, что W — также аффинное подпространство V.

6. Матрица $A \in M_n(K)$ обратима. Докажите, $\chi_{A \cdot A^T} = \chi_{A^T \cdot A}$.

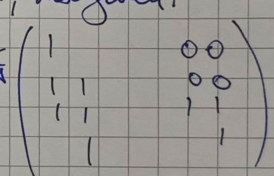
7. Пусть $\dim V = n$, $x \in V$ и $\varphi \in \mathrm{End(V)}$ таковы, что вектора $\varphi(x), \varphi^2(x), \dots, \varphi^n(x)$ линейно независимы. Докажите, что φ обратим.





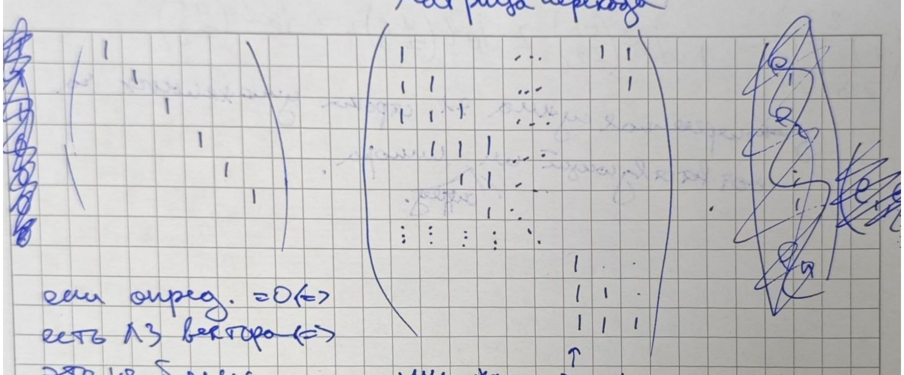
раскрываем по верхней строчке, получаем:

$1 \cdot \det$



так 3 раза, получаем матрицу $(n-3)\cdot(n-3)$

матрица перехода



если опред. $= 0 \Leftrightarrow$
есть ЛЗ вектора $\Leftrightarrow$
это не базис

умножаем это на это, получаем,
новый базис, в котором вектора
это столбцы.

можно к строке/столбцу
$+\lambda b$, тогда
опред. не меняется.

раскрываем det по первой строке

$\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = 1 \cdot \det\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{pmatrix} - 2 \cdot \det\begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{pmatrix} + 3 \cdot \det\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$

Знакопеременная сумма эл. строки умноженных на соответствующий им минора/опред.