Кр 1 линал

1

ИТМО. 2 семестр. Переписывание №2 контрольной работы №1. 23.03.2024

М. Найдите определитель матрицы 12×12 (у матрицы три ненулевые диагонали) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ & & & \dots & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 \end{vmatrix}$.

Г1. Пусть G – группа, а $M \subset G$ (не обязательно подгруппа). Положим $K = \{g \in G : gM = M\}$. Докажите, что $K < G$.

Г2. Пусть $H < G$, $A = aH$ — левый смежный класс, $x, y, z \in A$. Докажите, что $xz^{-1}y \in A$.

Г3. Группа G такова, что отображение $f : G \to G$, заданное формулой $f(x) = x^2$, является гомоморфизмом групп. Доказать, что G абелева.

Г4. Является ли отображение $f : S_{17} \to S_{17}$, заданное формулой $f(\sigma) = \sigma^{55}$, сюръекцией?

1.Г3

(xy)^2=f(xy)=f(x)f(y)=x^2*y^2

xyxy=xxyy

yx=xy

1.Г4

Допустим f сюръекция. Так как f - функция и она действует из S_17 в S_17, то она биекция.

Если она биекция, то и инъекция.

(Цикл длины 5)^55 = id и (id)^55 = id.

Следовательно предположение неверно.

Г2. Отображение $f : S_{17} \to S_{17}$ задано формулой $f(\sigma) = \sigma^{101}$.
а) Верно ли, что f — гомоморфизм групп?
б) Верно ли, что f — биекция?

4

1. просто по определению гомоморфизма расписать 2~~. т.к. 101 - простое число, то для всех перестановок из S_17 число 101 взаимно просто с длинами циклов в этих перестановках. Тогда отображение σ -> σ^101 переставляет элементы внутри циклов, однако не меняет структуру самой перестановки (если есть перестановка, состоящая из каких-то циклов, то после возведения в степень 101, она будет состоять из этих же циклов, прокрученных 101 раз, типа у нас никакой цикл не станет id), таким образом можно установить взаимооднозначное соответствие => биекция~~

то есть если нормально сформулировать б, то решение такое: 101 - простое, значит, никакая перестановка, кроме id не обратится в id, т.о. ker(f)={id} => инъекция размеры множеств равны, инъекция => сюръекция т.о. биекция

ИТМО. 2 семестр. Контрольная работа 1. 14.03.2023

М1. Матрицу $A \in M_n(K)$ транспонировали относительно побочной диагонали (из левого нижнего в правый верхней угол). Как изменился определитель?

М2. Найдите определитель матрицы из $M_{n+1}(\mathbb{R})$: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ C^1_m & C^1_{m+1} & \dots & C^1_{m+n} \\ C^2_{m+1} & C^2_{m+2} & \dots & C^2_{m+n+1} \\ & & \dots & \\ C^n_{m+n-1} & C^n_{m+n} & \dots & C^n_{m+2n-1} \end{vmatrix}$.

2

Г1. Пусть $\varphi_{a,b}(x) = ax + b$, а $G = \{\varphi_{a,b} \mid a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0\}$.
а) Докажите, что G — группа относительно композиции.
б) Является ли $H = \{\varphi_{1,b} \mid b \in \mathbb{R}\}$ подгруппой G?

Г2. Порождается ли группа S_6 подстановками (246) и (123456)?

Г3. Пусть A — непустое подмножество группы G, причем для любых $x, y, z \in A$ выполняется $xy^{-1}z \in A$. Докажите, что A — правый смежный класс группы G по некоторой ее подгруппе H.

Г4. Пусть $\varphi : G \to H$ — гомоморфизм групп, причем группа H — абелева. Докажите, что $\ker(\varphi) \supset [G, G]$.

Г5. Пусть G — абелева группа, $|G| = pq$, где p, q — различные простые числа. Докажите, что G — циклическая группа.

3

ИТМО. 2 семестр. Контрольная работа 1. 19.03.2024

М1. Матрица $A \in M_{101}(\mathbb{R})$ такова, что $a_{i,j} = -a_{j,i}$. Чему может быть равен $\det(A)$?

М2. Найдите определитель матрицы размера $2n \times 2n$: $\begin{vmatrix} x & 0 & 0 & \dots & 0 & y \\ 0 & x & 0 & \dots & y & 0 \\ & & & \dots & & \\ 0 & \dots & x & y & \dots & 0 \\ 0 & \dots & y & x & \dots & 0 \\ & & & \dots & & \\ y & 0 & 0 & \dots & 0 & x \end{vmatrix}$.

Г1. Пусть G — множество всех вещественных чисел, отличных от -1. Доказать, что G — группа относительно операции операции $a * b := ab + a + b$.

Г2. Пусть G — группа, а H_1 и H_2 — её нормальные подгруппы, причем $H_1 \cap H_2 = \{e\}$. Для любых $x \in H_1$ и $y \in H_2$ докажите, что $xy = yx$.

Г3. Пусть $H < G$, $(G : H) = 2$. Докажите, что $[G, G] < H$.

Г4. Отображение $f : S_{19} \to S_{19}$ задано формулой $f(\sigma) = \sigma^{103}$.

а) Верно ли, что f — гомоморфизм групп?

б) Верно ли, что f — биекция?

Г5. Докажите, что для неабелевой группы G группа $G/Z(G)$ не является циклической.

ИТМО. 2 семестр. Переписывание №1 контрольной работы №1. 14.03.2023

М. Пусть $A \in M_n(\mathbb{R})$, $\sigma \in S_n$. У матрицы A сначала переставили столбцы с помощью подстановки σ, а точно так же переставили строки. Как изменился определитель $\det(A)$?

Г1. Докажите, что бесконечная циклическая группа имеет бесконечно много подгрупп.

Г2. Пусть $H < G$, $A = aH$ — левый смежный класс, $x, y \in A$. Известно, что $x^{-1}y \in A$. Докажите, что $A = H$.

Г3. Пусть $\varphi : G \to H$ — гомоморфизм групп, причем $\mathrm{Im}(G) = H$. Докажите, что $\varphi([G, G]) = [H, H]$.

Г4. Пусть $\sigma \in S_n$, $\mathrm{ord}(\sigma) = 4$, а r — количество чисел, которые σ оставляет на месте. Докажите, что $n - r$

5

ИТМО. 2 семестр. Контрольная работа 1. 21.13.2022

4

М1. В матрице $A \in M_n(K)$ сначала переставили в обратном порядке все столбцы, а потом переставили в обратном порядке все строки. Как изменился $\det(A)$?

М2. Найдите определитель матрицы размера $2n \times 2n$: $\begin{vmatrix} x & 0 & 0 & \dots & 0 & y \\ 0 & x & 0 & \dots & y & 0 \\ & & & \dots & & \\ 0 & \dots & x & y & \dots & 0 \\ 0 & \dots & y & x & \dots & 0 \\ & & & \dots & & \\ y & 0 & 0 & \dots & 0 & x \end{vmatrix}$.

Г1. Пусть G — множество всех вещественных чисел, отличных от -1. Доказать, что G — группа относительно операции операции $a * b := ab + a + b$.

Г2. Отображение $f : S_{17} \to S_{17}$ задано формулой $f(\sigma) = \sigma^{101}$.

а) Верно ли, что f — гомоморфизм групп?

б) Верно ли, что f — биекция?

Г3. Пусть G — группа, а H_1 и H_2 — её нормальные подгруппы, причем $H_1 \cap H_2 = \{e\}$. Для любых $x \in H_1$ и $y \in H_2$ докажите, что $xy = yx$.

Г4. Доказать, что любая бесконечная группа имеет бесконечно много подгрупп.

Г5. Докажите, что для неабелевой группы G группа $G/Z(G)$ не является циклической.

3.Г2

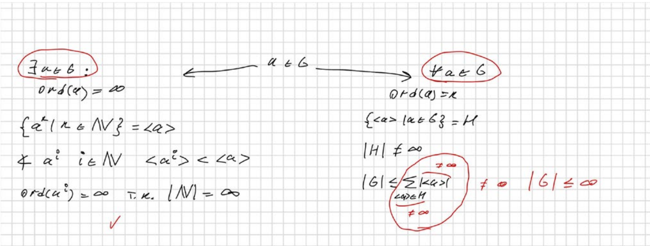
Рассмотреть коммутатор [x, y] - он в H1 и H2. Конец

2.Г2

инвариант: любая композиция перестановок в каких-то степенях не меняет местами нечётные элементы

то есть цикл (135) не получить

4.Г4



$\exists a\in G:$ $ord(a)=\infty$ ← $a\in G$ → $\forall a\in G$ $ord(a)=k$

$\{a^k \mid k\in\mathbb{N}\} = \langle a\rangle$

$\forall\ a^i\ \ i\in\mathbb{N}\ \ \langle a^i\rangle < \langle a\rangle$

$ord(a^i)=\infty$ т.к. $|\mathbb{N}|=\infty$ ✓

$\{\langle a\rangle \mid a\in G\} = H$

$|H| \neq \infty$

$|G| \le \underbrace{\sum_{\langle a\rangle\in H} \overbrace{|\langle a\rangle|}^{\neq\infty}}_{\neq\infty}$ $\neq\infty$ $|G|\le\infty$

Вот пусть у нас есть элемент
ord(a) = inf
Тогда <a> = {a^n | n in N} все разные
Ну возьми i из N и породи <a^i>
Ну и все
<a^i> < <a> < G ну и |N| = inf чтд

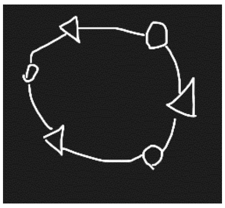
Однако пусть у нас нету элемента ord(a) != inf
ord(a) = k
H = {<a> | a in G} - все порожденный подгруппы
От противного H != inf
Тогда |G| <= sum(<a>) по всем <a> из H
чтд вот
(i – простое)

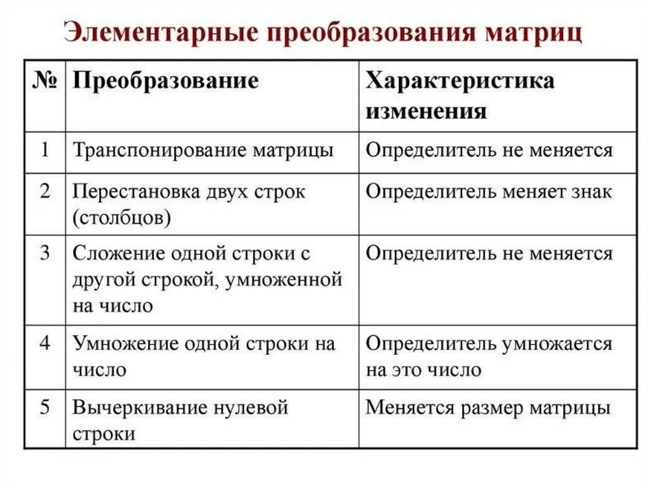
4.Г2.б

Рассмотрим a. Надо доказать, что существует b: b^101 = a. Так как 101 и 17! взаимнопросты, то существует k: 101k=1 mod 17!. a=a^(1+ 17!)=a^(101k)=(a^k)^101
тогда сюръекция, а значит биекция
(a^17! = e (Ну разобъем a на независимые циклы, пусть их длина m1 … mk
Если мы прокрутим цикл m_i кратное i чисто раз, то положение элементов не изменится
Ну для любого i от 1 до 17 17! кратно I;
ord(a)=НОК(независимые циклы)))
(Разбиваем на циклы просто; длина цикла | 17!)

2.Г2 уточнение

видно что подстановка 1 ((246)) меняет НУО только треугольники местами
Перестановки либо меняют местами четные элементы, либо заменяют все четные на все нечетные
Не получить перестановку, которая будет менять четный не нечетный и нечетный на нечетный

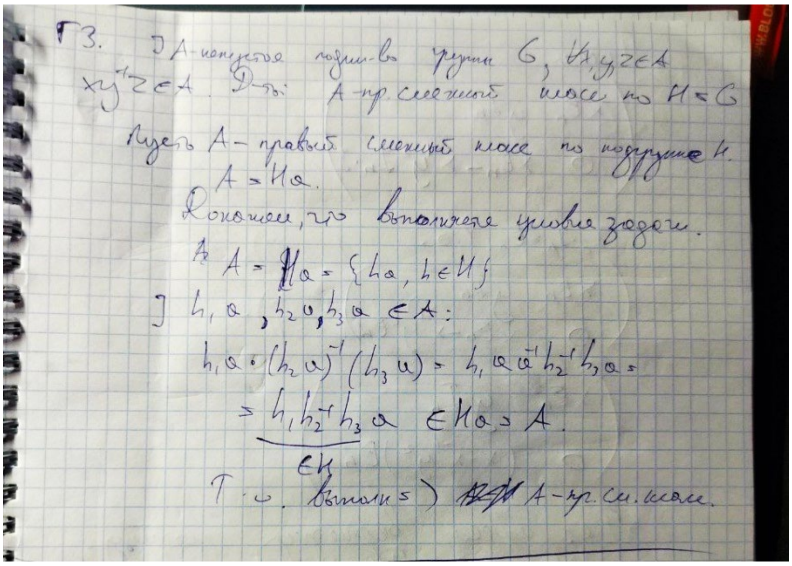




Элементарные преобразования матриц

№	Преобразование	Характеристика изменения
1	Транспонирование матрицы	Определитель не меняется
2	Перестановка двух строк (столбцов)	Определитель меняет знак
3	Сложение одной строки с другой строкой, умноженной на число	Определитель не меняется
4	Умножение одной строки на число	Определитель умножается на это число
5	Вычеркивание нулевой строки	Меняется размер матрицы

2.Г3



Г3. $\exists A$ - непустое подмн-во группы G, $\forall x,y,z\in A$ $xy^{-1}z\in A$. Д-ть: A - пр. смежный класс по $H<G$

Пусть A – правый смежный класс по подгруппе H.
$A = Ha$.
Докажем, что выполнены условия задачи.
$A = Ha = \{ha,\ h\in H\}$
$\exists\ h_1a,\ h_2a,\ h_3a \in A:$
$h_1a\cdot(h_2a)^{-1}(h_3a) = h_1 a a^{-1} h_2^{-1} h_3 a =$
$= \underbrace{h_1h_2^{-1}h_3}_{\in H} a \in Ha = A.$
Т.о. выполн.) A - пр. см. клас.

4.М2

давайте к первой строке добавим все остальные с коэфф 1, в каждой ячейке будет x+y
аналогично с любой другой строкой
получится две одинаковые и det = 0
Там (x^2-y^2)^n
попробуй к первой строке прибавить послднюю умноженную на (-y/x), потом то же самое сделай со второй м предпоследней и так далее

1.М1

там получается формула для определителя
D_n = D_n-1 + D_n-2

4.Г5

G/Z(G) абелева – доказали

Есть теорема о том что G/H - абелева <=> [G, G] < H

Тогда коммутаторы коммутируют со всеми элементами G

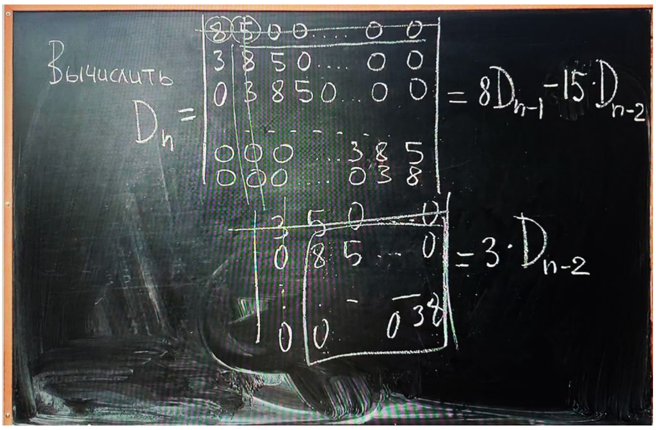
yx[x, y] = xy = x[x, y]y = y^(-1)xyy

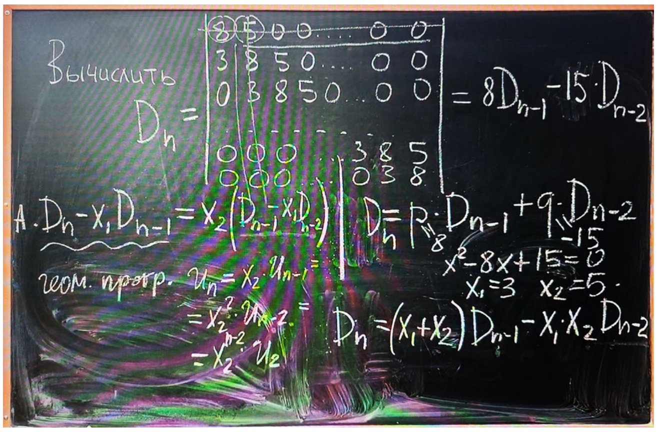
x = y(-1)xy

yx=xy

x, y брали из G

1.M1





Ну и затерпеть