Пшеничников Артём 467205

Лабораторная работа 2.

Длина кривой безье.

Вариант 467205%15+1 = 1.

$A(0,0)$, $C(10,0)$, $K(2,7)$

Кривая задаётся ур-ем:

$$B(t) = (1-t)^2A + 2t(1-t)B + t^2C, \ t \in [0,1]$$

Ур-е по координатам:

$$x(t) = (1-t)^2x_A + 2t(1-t)x_B + t^2x_c$$

$$y(t) = (1-t)^2y_A + 2t(1-t)y_B + t^2y_c$$

Подставим коорд. т. A и C:

$$x(t) = 2t(1-t)x_B + 10t^2$$

$$y(t) = 2t(1-t)y_B$$

Длину кривой вычислим по формуле:

$$L = \int_0^1 \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt$$

$$x'(t) = 2(1-2t)x_B + 20t$$

$$y'(t) = 2(1-2t)y_B$$

Подставим:

$$L = \int_0^1 \sqrt{(2(1-2t)x_B + 20t)^2 + (2(1-2t)y_B)^2}\, dt$$

Теперь необходимо найти такие x_B и y_B, что $K(2,7) \in B(t)$. $\Rightarrow \exists t_K \in [0,1] : B(t_K) = K(2,7)$

Чтобы кривая проходила через K:

$\underline{x:}$ $$x(t_K) = (1-t_K)^2 x_A + 2t_K(1-t_K)x_B + t_K^2 x_C = 2$$

$\underline{y:}$ $$y(t_K) = (1-t_K)^2 y_A + 2t_K(1-t_K)y_B + t_K^2 y_C = 7$$

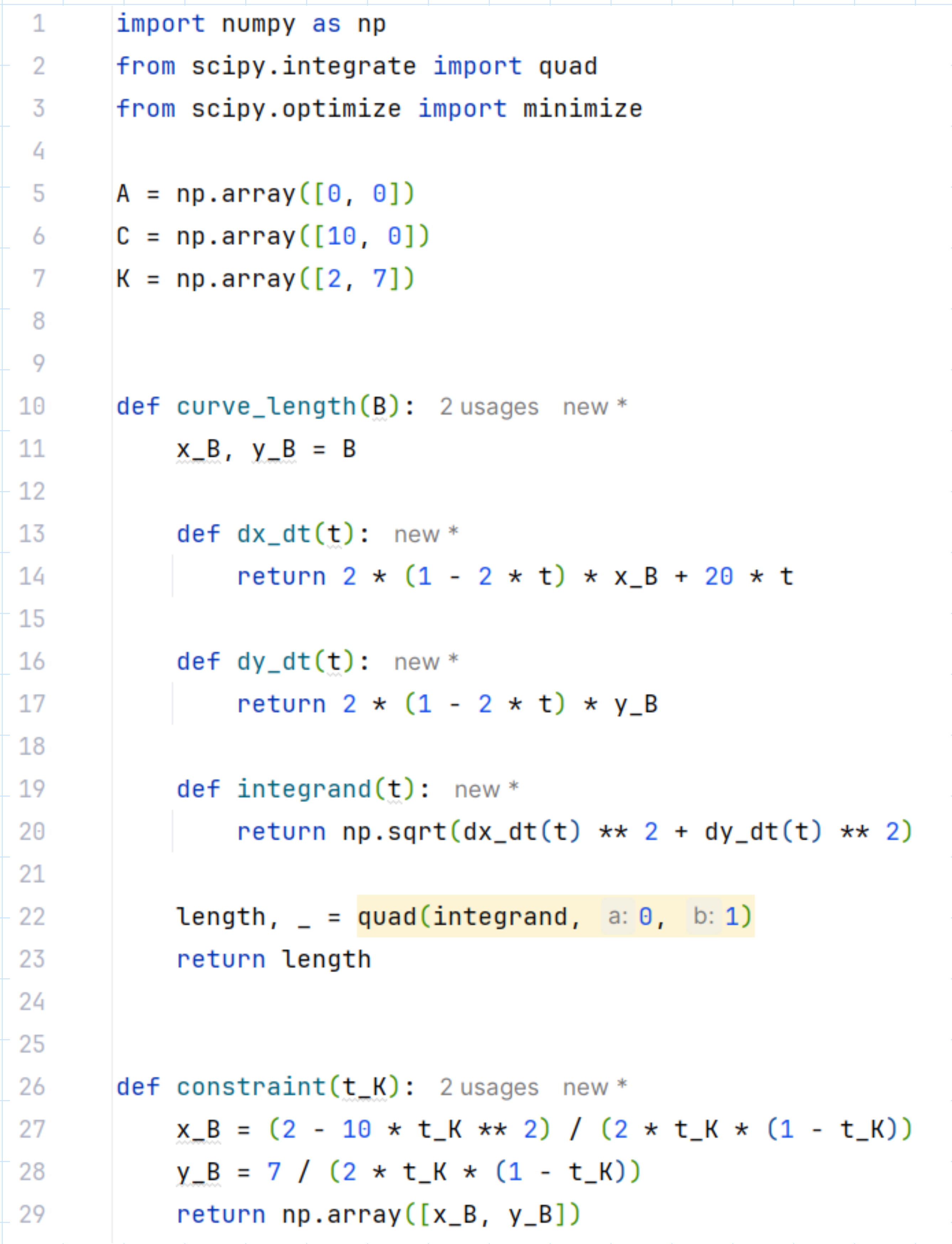
Подставим A, C:

$$2t_K(1-t_K)x_B + 10t_K^2 = 2 \Rightarrow x_B = \frac{2-10t_K^2}{2t_K(1-t_K)}$$

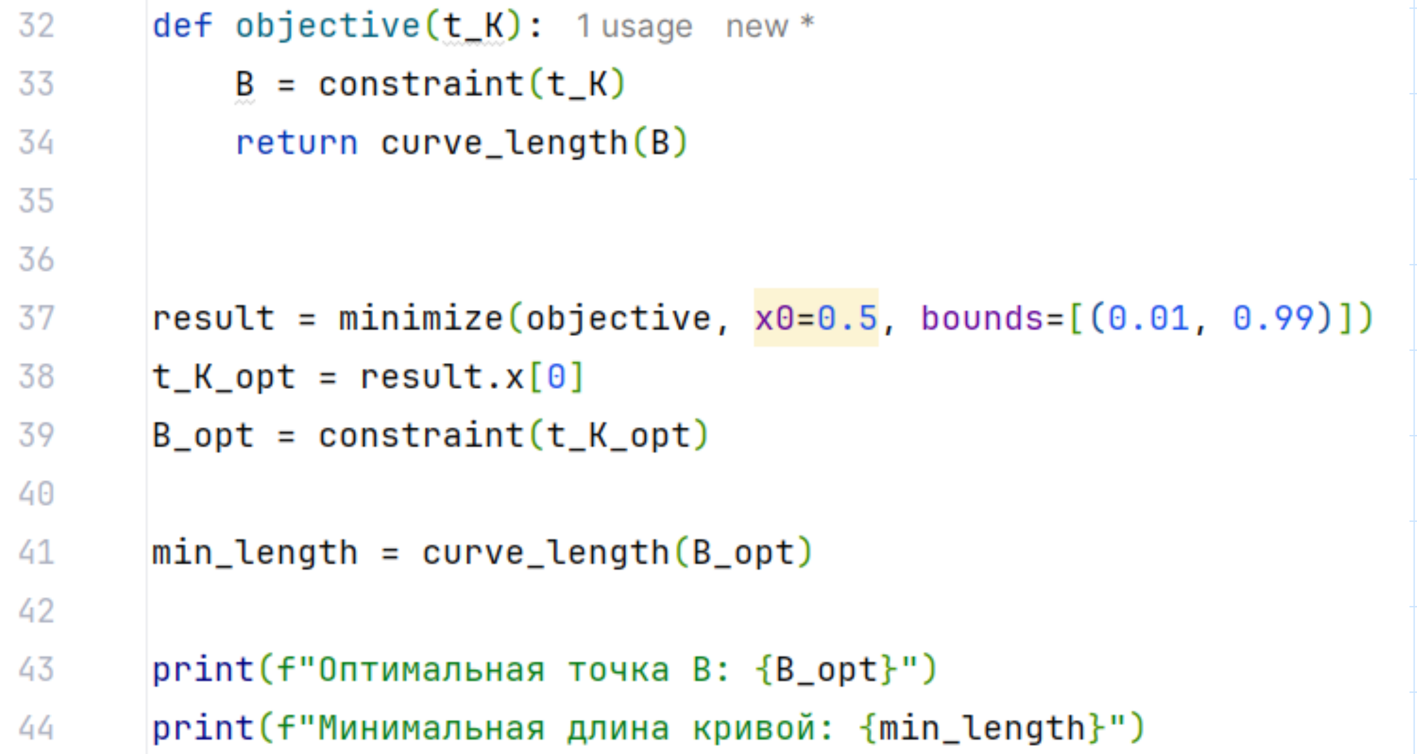
$$2t_K(1-t_K)y_B = 7 \Rightarrow y_B = \frac{7}{2t_K(1-t_K)}$$

Получаем, что B зависит от t.

Подберём необходимые значения перебором:

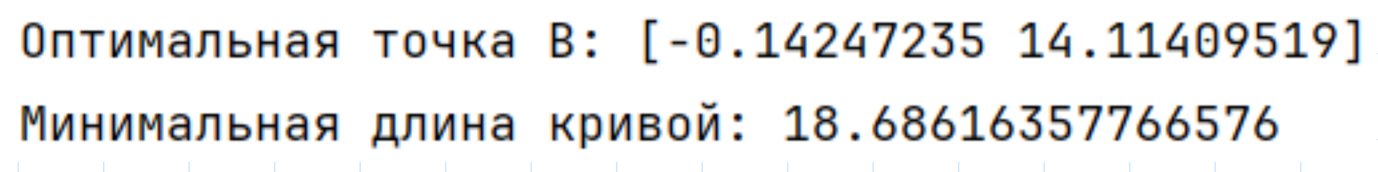


```python
import numpy as np
from scipy.integrate import quad
from scipy.optimize import minimize

A = np.array([0, 0])
C = np.array([10, 0])
K = np.array([2, 7])


def curve_length(B):  2 usages  new *
    x_B, y_B = B

    def dx_dt(t):  new *
        return 2 * (1 - 2 * t) * x_B + 20 * t

    def dy_dt(t):  new *
        return 2 * (1 - 2 * t) * y_B

    def integrand(t):  new *
        return np.sqrt(dx_dt(t) ** 2 + dy_dt(t) ** 2)

    length, _ = quad(integrand,  a: 0,  b: 1)
    return length


def constraint(t_K):  2 usages  new *
    x_B = (2 - 10 * t_K ** 2) / (2 * t_K * (1 - t_K))
    y_B = 7 / (2 * t_K * (1 - t_K))
    return np.array([x_B, y_B])
```



```python
def objective(t_K):  1 usage  new *
    B = constraint(t_K)
    return curve_length(B)


result = minimize(objective, x0=0.5, bounds=[(0.01, 0.99)])
t_K_opt = result.x[0]
B_opt = constraint(t_K_opt)

min_length = curve_length(B_opt)

print(f"Оптимальная точка B: {B_opt}")
print(f"Минимальная длина кривой: {min_length}")
```

Получаем результат:



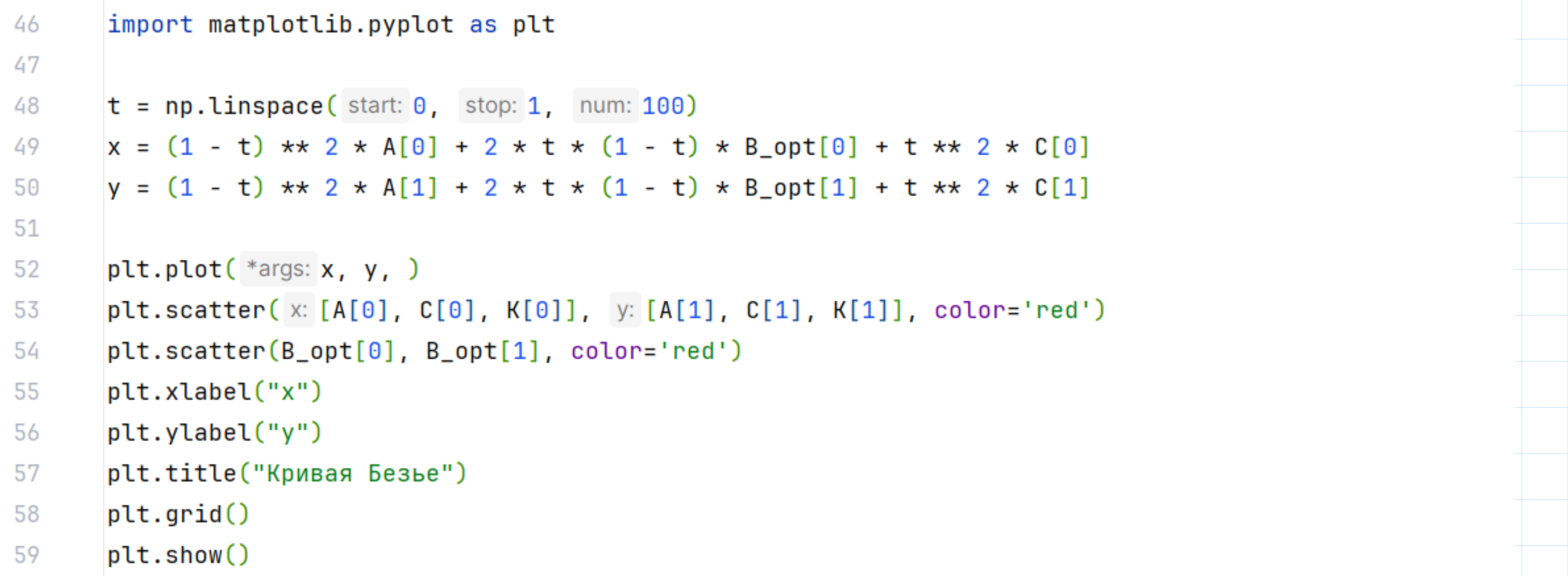
```
Оптимальная точка B: [-0.14247235 14.11409519]
Минимальная длина кривой: 18.68616357766576
```

Искомая точка B:

$x_B \approx -0{,}1425$; $y_B \approx 14.1141$

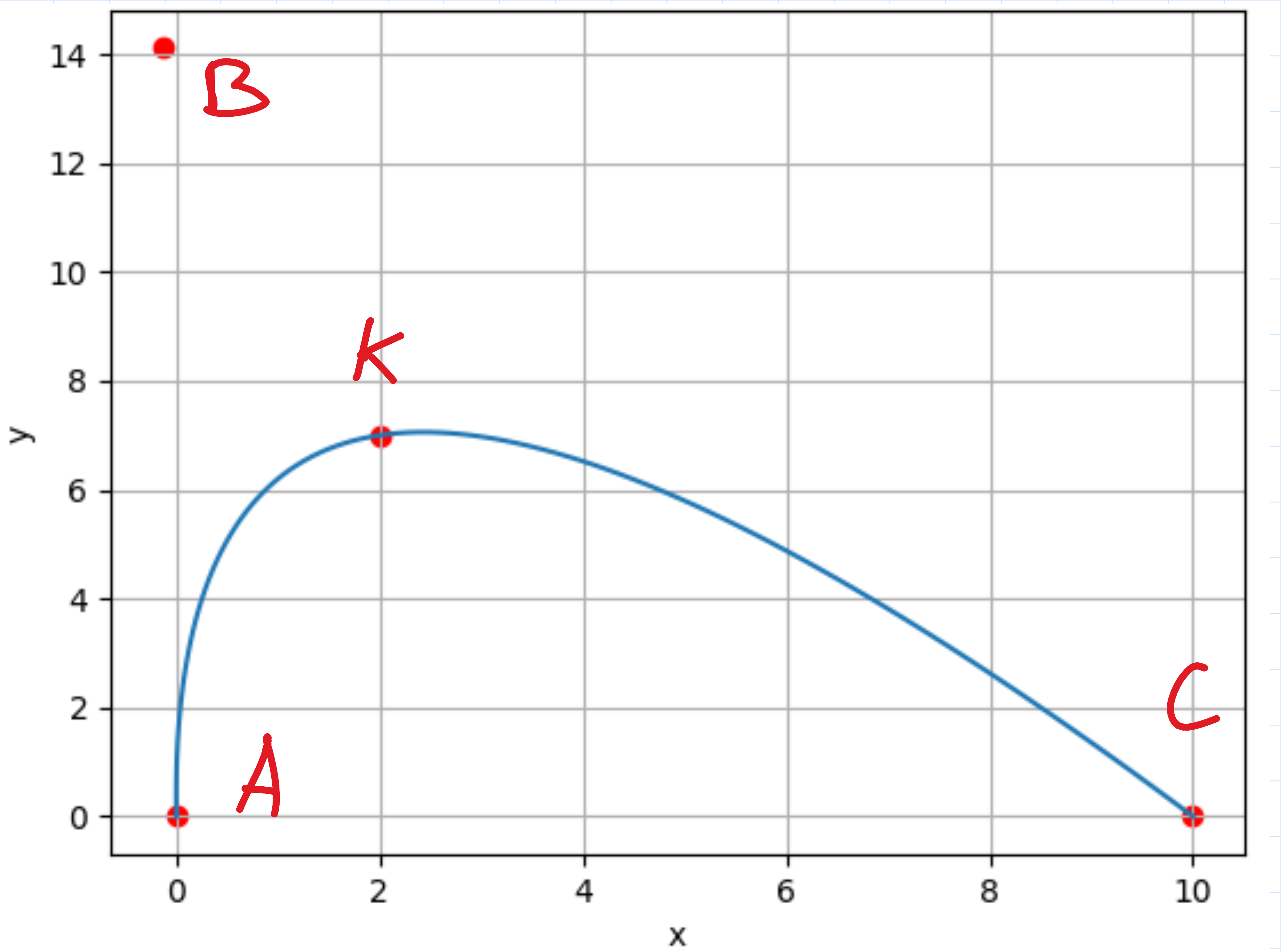
Длина: ~ 18.6862

Также сделаем граф. визуализацию:



```
import matplotlib.pyplot as plt

t = np.linspace( start: 0,  stop: 1,  num: 100)
x = (1 - t) ** 2 * A[0] + 2 * t * (1 - t) * B_opt[0] + t ** 2 * C[0]
y = (1 - t) ** 2 * A[1] + 2 * t * (1 - t) * B_opt[1] + t ** 2 * C[1]

plt.plot( *args: x, y, )
plt.scatter( x: [A[0], C[0], K[0]],  y: [A[1], C[1], K[1]], color='red')
plt.scatter(B_opt[0], B_opt[1], color='red')
plt.xlabel("x")
plt.ylabel("y")
plt.title("Кривая Безье")
plt.grid()
plt.show()
```

Построим график:



Ответ: длина провода ≈ 18.6862,
опорные точки: A(0,0), C(10,0),
B(-0.1425, 14.1141)