Пшеничников Артём P3107, 476205

7.0-4.5
61.5

ИДЗ Ряды. Часть 1.

Вариант 52%20 = 12.

Задание 1. Сходимость числовых рядов.

12. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}\right)^4$; б) $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\left(\ln\left(\frac{\ln n}{\ln(n-1)}\right)-\frac{1}{n\ln n}\right)$;

в) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{\ln^3 n}{n}\sin\frac{\pi n}{6}$; г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^{n+\frac{1}{n}}}{\left(n+\frac{1}{n}\right)^n}$; д) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\left(\cos\frac{n^2+1}{n^2-1}\right)^n$;

е)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\sqrt{n}}\int\limits_0^n e^{-x^2}dx$.

а). $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}\right)^4$

Ряд не явл. знакопеременным, т.к. все члены полож.
Исследуем на сходимость.
Для двойных факт. справедливо:

$(2n)!! = 2^n\cdot n!$

$(2n+1)!! = \frac{(2n+1)!}{2^n\cdot n!}$

$\Rightarrow \left(\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}\right)^4 = \left(\frac{2^{2n}\cdot(n!)^2}{(2n+1)!}\right)^4$, $\frac{2^{2n}\cdot(n!)^2}{(2n+1)!} = A$

Приближение Стирлинга для факт.:

$n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$

$(2n+1)! \sim \sqrt{2\pi(2n+1)}\cdot\left(\frac{2n+1}{e}\right)^{2n+1}$

$A \sim \frac{\left(\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n\right)^2}{\sqrt{2\pi(2n+1)}\left(\frac{2n+1}{e}\right)^{2n+1}} =$

$= \frac{2\pi n\left(\frac{n}{e}\right)^{2n}}{\sqrt{2\pi(2n+1)}\left(\frac{2n+1}{e}\right)^{2n+1}} = \underbrace{\frac{2\pi n}{\sqrt{2\pi(2n+1)}}}\cdot\underbrace{\frac{n^{2n}}{(2n+1)^{2n+1}}}\cdot e \sim \frac{2\pi n}{\sqrt{2\pi(2n+1)}}\cdot\frac{1}{(2n+1)\cdot 2^{2n}}\cdot e \sim$

ограничено

$\frac{1}{2n+1}\cdot\left(\frac{n}{2n+1}\right)^{2n} = \frac{1}{2n+1}\cdot\underbrace{\left(\frac{1}{2+1/n}\right)^{2n}}_{\sim\frac{1}{2^{2n}} \text{ при } n\to\infty} \sim \frac{1}{(2n+1)\cdot 2^{2n}}$

$\sim \frac{e}{(2n+1)\cdot 2^{2n}}$; $\left(\frac{e}{(2n+1)\cdot 2^{2n}}\right)^4 \sim \frac{C}{2^{8n}\cdot(2n+1)^4} \sim \frac{C}{n^2}$

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ сходится, => исх. ряд сходится

Ответ: Сходится.

б). $\sum_{n=3}^{\infty}\left(\ln\left(\frac{\ln n}{\ln(n-1)}\right)-\frac{1}{n\ln n}\right)$

Исследуем на знакопеременность.

При малых n члены ряда >0 (прямое вычисление)

Но при больших n: $\ln\left(\frac{\ln n}{\ln(n-1)}\right) \sim \frac{1}{n\ln n} - \frac{1}{2n^2(\ln n)^2}+\ldots \Rightarrow$

$\Rightarrow a_n \sim -\frac{1}{2n^2(\ln n)^2}+\ldots < 0$ при больших n

Следовательно, ряд знакопеременный.

Исследуем на абсолютную сходимость:

$$\sum_{n=3}^{\infty}\left|\underbrace{\ln\left(\frac{\ln n}{\ln(n-1)}\right)}_{\ln(\ln n)-\ln(\ln(n-1)) \approx \frac{1}{n\ln n}+\frac{\ln n+1}{2n^2(\ln n)^2}+\ldots} - \frac{1}{n\cdot\ln n}\right| \approx \sum_{n=3}^{\infty}\left|\underbrace{-\frac{\ln n+1}{2n^2(\ln n)^2}+\ldots}_{\sim -\frac{1}{2n^2\ln n}}\right| \approx \sum_{n=3}^{\infty}\underbrace{\frac{1}{2n^2\ln n}}_{|a_n|} \quad **$$

$$\ln(\ln(n-1)) \approx \ln(\ln n) - \frac{1}{n\ln n} - \frac{\ln n+1}{2n^2(\ln n)^2}+\ldots$$

(по Тейлору)

Сравним наш ряд с рядом $\sum \frac{1}{n^2\ln n}$ *: при больших n

$\frac{1}{n^2\ln n} < \frac{1}{n^2}$, т.к. $\ln n > 1$. Ряд $\sum\frac{1}{n^2}$ сходится, $\Rightarrow$ * сходится $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ ** сходится.

Получаем, что ряд сходится абсолютно, откуда следует условная сходимость.

Ответ: ряд знакопеременный, сходится условно и абсолютно.

в). $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{\ln^3 n}{n} \sin\frac{\pi n}{6}$

Ряд, очевидно, знакопеременный, т.к. $\frac{\ln^3 n}{n} > 0$, а $\sin\frac{\pi n}{6}$ – осциллирует

Исследуем на абсолютную сходимость.

$\measuredangle \sum\limits_{n=2}^{\infty} \left| \frac{\ln^3 n}{n} \cdot \sin\left(\frac{\pi n}{6}\right) \right| \le \sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{\ln^3 n}{n}$ * (т.к. $-1 \le \sin x \le 1$)

Исследуем сходимость через интегральный признак.

$$\int_2^{\infty} \frac{\ln^3 x}{x} dx = \left[\begin{aligned} t &= \ln x \\ dt &= \frac{dx}{x} \end{aligned} \right] = \int_{\ln 2}^{\infty} t^3 dt = \frac{t^4}{4} \Big|_{\ln 2}^{\infty} = \left\{ \frac{\infty^4}{4} \right\} - \frac{\ln^4 2}{4} = \infty$$

Следовательно, ряд * расходится абсолютно.

Исследуем ряд на условную сходимость.

Применим признак Дирихле. $\sum a_n = x_n y_n$; $x_n = \sin\left(\frac{\pi n}{6}\right)$; $y_n = \frac{\ln^3 n}{n}$

Необходимо, чтобы y_n монотонно стремилась к 0, а x_n – огр.

Проверим монотонность y_n.

$$\measuredangle f(x) = \frac{\ln^3 x}{x}. \quad f'(x) = \frac{3 \cdot \ln^2 x \cdot \frac{1}{x} \cdot x - \ln^3 x}{x^2} = \frac{\ln^2 x \cdot \overbrace{(3 - \ln x)}^{<0 \text{ при } x > e^3}}{x^2} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ при $x > e^3$ $f(x)$ монотонно убывает к нулю.

Проверим ограниченность частичных сумм x_n.

$\sin\left(\frac{\pi n}{6}\right)$ – периодична с периодом 12. $\left(\frac{\pi(n+12)}{6} = \frac{\pi n}{6} + 2\pi \right)$

Сумма значений при $n \in [2, 13]$ равна нулю (полный оборот).

Следовательно, любая частичная сумма разбивается на какое-то кол-во оборотов и два неполных, которые огр. в силу огр. sin. $\Rightarrow$

Частичные суммы ограничены.

Ответ: ряд знакопеременный, условно сходится, абсолютно расходится.

2). $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^{n+\frac{1}{n}}}{\left(n+\frac{1}{n}\right)^{n}}$ $\begin{matrix} \} > 0 \\ \} > 0 \end{matrix} \Bigg| \Rightarrow$ не явл. знакопеременным.

Исследуем на сходимость:

$\measuredangle\ a_n = \dfrac{n^{n+1/n}}{\left(n+\frac{1}{n}\right)^n} = \dfrac{n^n \cdot n^{\frac{1}{n}}}{n^n\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n} = \dfrac{n^{\frac{1}{n}}}{\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n}$

Для сходимости ряда необходимо чтобы $a_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$.

$\measuredangle \lim\limits_{n\to\infty} n^{\frac{1}{n}}$. $\ln(n^{\frac{1}{n}}) = \dfrac{\ln n}{n} \longrightarrow 0 \Rightarrow n^{\frac{1}{n}} \to e^0 = 1$

$\measuredangle \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n$. $\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right) \approx \dfrac{1}{n^2} - \dfrac{1}{2n^4} + \ldots$. Тогда $\ln\left(\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n\right) =$

$= n\cdot\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right) \approx n\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{2n^4}\right) = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{2n^3} \longrightarrow 0 \Rightarrow \left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n \to e^0 = 1$

Тогда $\lim a_n = \dfrac{\lim n^{\frac{1}{n}}}{\lim\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n} = \dfrac{1}{1} = 1 \neq 0 \Rightarrow$ ряд расходится.

Ответ: ряд расходится.

9). $\sum_{n=2}^{\infty}\left(\cos\frac{n^2+1}{n^2-1}\right)^n$

Исследуем на знакопеременность.

$\exists\, a_n = \left(\cos \underbrace{\frac{n^2+1}{n^2-1}}_{1+\frac{2}{n^2-1}}\right)^n$

$n=2:\ \frac{5}{3},\ \cos\left(\frac{5}{3}\right)<0$, но степень $\vdots\, 2$

$n=3:\ \frac{10}{8},\ \cos\left(\frac{10}{8}\right)>3$

$n\geq 4:\ 1<\varphi<\frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos\varphi>0$

Все члены ряда положительны, $\Rightarrow$ ряд не знакопеременен.

Исследуем на сходимость через признак сравнения.

$\left|\cos\left(\frac{n^2+1}{n^2-1}\right)\right|<1$ для $\forall n\geq 2$, $\left|\cos\left(\frac{n^2+1}{n^2-1}\right)\right| \longrightarrow \cos(1)\approx 0.54$.

Начиная с некоторого n_0 можно выбрать $p\in(0.55, 1)$, пусть $p=0{,}7$.

Тогда $\left|\cos\left(\frac{n^2+1}{n^2-1}\right)\right|\leq p$ при $n\geq n_0$. Тогда $|a_n|\leq p^n$ для всех $n\geq n_0$

Ряд $\sum_2^{\infty} p^n$ сходится при $p<1$ $\Rightarrow$ исходный ряд сходится абс.

Ответ: Ряд сходится абсолютно.

e). $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \underbrace{(-1)^n}_{\Downarrow} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{n}}}_{>0} \underbrace{\int\limits_0^n e^{-x^2}dx}_{>0}$

ряд знакочередующийся => знакопеременный.

Исследуем на абсолютную сходимость.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}} \int_0^n e^{-x^2} dx \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \underbrace{\int_0^n e^{-x^2} dx}_{\substack{\text{интеграл вероятности.} \\ \text{стремится к } \sqrt{\pi}/2 \text{ при } n\to\infty}} \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{n}} \overset{*}{>} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ расходится $\Rightarrow$ исходный ряд расходится

для больших n: $\int_0^n e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} - \underbrace{\int_n^{\infty} e^{-x^2}}_{\text{остаток экспоненциально мал}} \sim \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

Исследуем на условную сходимость.

Применим признак Лейбница для знакочередующихся рядов.

Если $q_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \int_0^n e^{-x^2}$ монотонно убывает к 0, то $\sum (-1)^n q_n$ — сход.

Исследуем q_n на монотонность.

$q_n \sim \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{n}} \to 0$, но $*$. Теперь нужно проверить монотонность.

$$q'(n) = \frac{d}{dn}\left(\frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \int_0^n e^{-x^2}dx\right) = \underbrace{-\frac{1}{2n^{\frac{3}{2}}} \cdot \int_0^n e^{-x^2}dx}_{<0} + \underbrace{\frac{1}{\sqrt{n}} \cdot e^{-n^2}}_{\text{экс. мал при больших } n}$$

$\Downarrow$

$q'(n) < 0 \Rightarrow q_n$ монотонно убывает.

Получаем, что ряд сходится условно.

Ответ: ряд знакопеременный, условно сходится, абсолютно расходится.

Задание 2. Области сходимости функционального ряда.

$$12. \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\pi\sqrt{n^2+x^2}\right)$$

Упростим аргумент синуса.

$\sqrt{n^2+x^2} = n\sqrt{1+x^2/n^2} \approx n + \frac{x^2}{2n} - \frac{x^4}{8n^3} + \ldots \Rightarrow \pi\sqrt{n^2+x^2} \approx \pi n + \frac{\pi x^2}{2n} - \ldots$

Применим тождество $\sin(\pi n+\varphi) = (-1)^n \sin\varphi$. Также $\sin\varphi \approx \varphi$ при малых φ.

$\sin\left(\pi\sqrt{n^2+x^2}\right) = (-1)^n \sin\left(\frac{\pi x^2}{2n} - \ldots\right) \approx (-1)^n \cdot \frac{\pi x^2}{2n}$

Исследуем на абсолютную сходимость.

$\Delta\ \sum_{n=1}^{\infty} \left|\sin\left(\pi\sqrt{n^2+x^2}\right)\right| \approx \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi x^2}{2n}$. Ряд сравним с $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, который расходится. $\Rightarrow$ исходный ряд абсолютно расходится при $\forall x \neq 0$.

Исследуем на условную сходимость.

Применим признак Лейбница для знакочередующихся рядов.

Если $a_n = \left|\frac{\pi x^2}{2n}\right|$ монотонно убывает к 0, то $\sum(-1)^n a_n$ сходится.

$\lim a_n = \lim \frac{\pi x^2}{2n} = 0$. Функция $a(n) = \frac{c}{n}$ монотонно убывает $\Rightarrow$

ряд сходится условно при $\forall x \neq 0$.

Признак Лейбница требует монотонное убывание, $\Rightarrow$

$c \neq 0 \Rightarrow \frac{\pi x^2}{2} \neq 0 \Rightarrow x \neq 0$, но при $x = 0$ все члены $= 0 \Rightarrow$

ряд сходится. $\Rightarrow$ обл. усл сходимости – $x \in \mathbb{R}$

Ответ: область абсолютной сходимости ряда: $x \in \{0\}$,

область условной сходимости ряда: $x \in \mathbb{R}$.

Задание 3. Равномерная сходимость функциональной последовательности.

12. $f_n(x) = \sin^2\left(\sqrt{1+nx^2} - \sqrt{n}x\right)$, а) $E = (0,1)$; б) $E = (1,+\infty)$

а). $E = (0,1)$.

Найдём поточечный предел. Упростим аргумент синуса.

$\measuredangle$ $a_n(x) = \sqrt{1+nx^2} - \sqrt{n}\,x = \dfrac{(1+nx^2)-nx^2}{\sqrt{1+nx^2}+\sqrt{n}x} = \dfrac{1}{\underbrace{\sqrt{1+nx^2}+\sqrt{n}x}_{\text{при больших } n\ \sqrt{1+nx^2}\sim\sqrt{n}x}} \sim \dfrac{1}{2\sqrt{n}x}$

$f_n(x) = \underbrace{\sin^2(a_n(x))}_{\sin\varphi\sim\varphi \text{ при малых } \varphi} \sim a_n^2(x) \sim \left(\dfrac{1}{2\sqrt{n}x}\right)^2 = \dfrac{1}{4nx^2} \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0\ \forall x\in(0,1)$

$*$

Получаем поточечный предел $f(x) = 0$ на $E = (0,1)$

Исследуем на равномерную сходимость.

Необходимо, чтобы $\sup\limits_{x\in(0,1)} |f_n(x) - 0| \longrightarrow 0$ при $n\to 0$

$g(x) = \frac{1}{x^2}$ неограничена при $x\to 0^+$, $\Rightarrow \sup\limits_{x\in(0,1)} f_n(x) \sim \sup \frac{1}{4nx^2} = \infty$

Найдём точки максимума.

$\measuredangle$ $f_n(x) = \sin^2\left(\dfrac{1}{\sqrt{1+nx^2}+\sqrt{n}x}\right) = [y=\sqrt{n}x] = \sin^2\Bigg(\underbrace{\dfrac{1}{\sqrt{1+y^2}+y}}_{g(y):}\Bigg) \geq \sin^2\left(\dfrac{1}{2\sqrt{n}x}\right)$

Максимум для $g(y)$ достигается при $y=0$, $\Rightarrow$ при $x=0$, но $x\in(0,1) \Rightarrow$ макс при $x\to 0+$ $\Leftarrow$ $\left|\begin{array}{l} y\to 0: g(y)\to\frac{1}{1+0} = 1 \\ y\to\infty: g(y)\sim\frac{1}{2y}\to 0\end{array}\right.$

Возьмём за $x_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$. Тогда $a_n(x_n) = \dfrac{1}{\sqrt{1+1}+1} = \dfrac{1}{\sqrt{2}+1} \simeq 0.414 \Rightarrow$

$\Rightarrow f_n(x_n) = \sin^2(0.414) \simeq 0.403^2 \simeq 0.162$ – не зависит от n и не стремится к 0.

Получаем, что $\sup|f_n(x)| \not\to 0$ при $n\to\infty \Rightarrow$ сходимость на E не равномерна.

Ответ: Функциональная последовательность сходится поточечно к 0 на E, но не сходится равномерно.

б). $E = (1, +\infty)$

Получаем аналогичный результат, как для $E = (0,1)$. (*):

Поточечный предел $f(x) = 0$ на $E = (1; +\infty)$

Проведём оценку супремума.

$f_n(x) \sim \frac{1}{4nx^2}$. $g(x) = \frac{1}{x^2}$ убывает, поэтому её макс. на E при $x = 1$.

$\sup\limits_{x \in (1;+\infty)} f_n(x) \sim \frac{1}{4n \cdot 1^2} = \frac{1}{4n}$. $\frac{1}{4n} \to 0$ при $n \to \infty$, $\sup \to 0$

Для равн. сходимости нужно, чтобы $\forall \varepsilon > 0\ \exists N: \forall n > N: \sup\limits_{x \in (1;+\infty)} |f_n(x)| < \varepsilon$

Получаем это из того, что $\frac{1}{4n} < \varepsilon$ при $n > \frac{1}{4\varepsilon}$. $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ сходимость равномерна на E.

Ответ: Функциональная последовательность равномерно сходится к 0 на E.

Задание 4. Равномерная сходимость ряда.

12. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x\cos nx}{\sqrt{n}\ln(nx+2)}$, $E=(0,2)$;

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \exp\left(-n\sin^2 x\right)$, $E_1=\left(0,\frac{\pi}{4}\right]$, $E_2=\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]$.

а). $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x\cos nx}{\sqrt{n}\ln(nx+2)}$, $E=(0,2)$

Проанализируем общий член ряда.

$$a_n(x) = \frac{x\cos(nx)}{\sqrt{n}\ln(nx+2)} = \underbrace{\frac{x}{\ln(nx+2)}}_{\substack{\text{монотонно}\\ \text{убывает по } n}} \cdot \underbrace{\frac{\cos(nx)}{\sqrt{n}}}_{\substack{\text{осциллирует, но}\\ \text{убывает как } \frac{1}{\sqrt{n}}}}$$

Применим признак Дирихле.

$y_n(x) = \frac{x}{\ln(nx+2)}$ – монотонно убывает, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x}{\ln(nx+2)} = 0$. (при $x\in(0,2)$)

$S_n(x) = \frac{\cos(nx)}{\sqrt{n}}$. Известно, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n^p}$ сходится абсолютно при $p>\frac{1}{2}$ и сходится условно при $p=\frac{1}{2}$ и при $x\notin 2\pi\mathbb{Z}$.

$S_N(x)$ – второй случай. Получим $\left|\sum\limits_{n=1}^{N} \frac{\cos(nx)}{\sqrt{n}}\right| \leq C$ для $x\in(0,2)$

Значит, по признаку Дирихле ряд сходится равномерно на E.

Ответ: Ряд сходится равномерно на E.

б). $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \exp\left(-n\sin^2 x\right)$, $E_1 = \left(0, \frac{\pi}{4}\right]$, $E_2 = \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$

Проанализируем общий член ряда.

$a_n(x) = e^{\underbrace{-n\sin^2 x}}$

при $\sin^2 x > 0$, $a_n(x)$ эксп. убывает при $n \to \infty$.
при $\sin^2 x \to 0$, $a_n(x) \to 1$ => ряд может расходиться.

Исследуем сходимость на E_2.

$x \in E_2 \Rightarrow x \geq \frac{\pi}{4} \Rightarrow \sin x \geq \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \sin^2 x \geq \frac{1}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow a_n(x) = e^{-n\sin^2 x} \leq e^{-\frac{n}{2}} = A_n$. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} A_n = \sum e^{-\frac{n}{2}}$ - геометр. ряд со знаменателем $q = e^{-\frac{1}{2}} < 1$ => он сходится. => => $a_n(x)$ также сходится равномерно по признаку Вейерштрасса ($|a_n(x)| \leq A_n$).

Исследуем сходимость на E_1.

Для $x \in E_1$: $\sin^2 x > 0 \Rightarrow a_n(x) = e^{-n\sin^2 x}$ члены геом. ряда со знаменателем $q = e^{-\sin^2 x} < 1$ => ряд сходится поточечно на E_1.

Проведём оценку равномерной сходимости.

$\forall$ хвост ряда: $R_N(x) = \sum\limits_{n=N+1}^{\infty} e^{-n\sin^2 x} = \dfrac{e^{-(N+1)\sin^2 x}}{1 - e^{-\sin^2 x}}$.

При $x \to 0$, $\sin x \sim x$, $\sin^2 x \sim x^2 \Rightarrow e^{-\sin^2 x} \sim 1 - x^2$; $1 - e^{-\sin^2 x} \sim x^2$;

$e^{-(N+1)\sin^2 x} \sim e^{-(N+1)x^2} \Rightarrow R_N(x) \sim \dfrac{e^{-(N+1)x^2}}{x^2}$.

Выберем $x = \frac{1}{\sqrt{N}} \Rightarrow x^2 = \frac{1}{N} \Rightarrow R_N(x) \sim \dfrac{e^{-(N+1)/N}}{1/N} = Ne^{-(N+1)/N} \to \infty$ при $N \to \infty$

Следовательно, $\sup\limits_{x \in E_1} R_N(x) \not\to 0$ => равномерной сходимости нет.

Ответ: ряд сходится равномерно на E_2 и поточечно на E_1.

Задание 5. Сумма функционального ряда.

$$12.\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{3n-1}}{2n+1}$$

Проанализируем общий член ряда.

$$a_n(x) = \frac{(-1)^n x^{3n-1}}{2n+1}$$

Применим признак Даламбера, чтобы определить радиус сходимости.

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}(x)}{a_n(x)}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^3(2n+1)}{2n+3}\right| = |x|^3$$

Ряд сходится при $|x|^3<1$, $\Rightarrow |x|<1$

Проверим границы

$x=1$: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}$ – сходится условно по признаку Лейбница.

$x=-1$: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot(-1)^{3n-1}}{2n+1} = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n+1}$ – расходится

Получаем множество сходимости: $x\in(-1,1]$.

Теперь найдём сумму ряда.

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{3n-1}}{2n+1} = \frac{1}{x}\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot x^{3n}}{2n+1}}_{T(x)}$$

Используем тождество $\frac{1}{2n+1} = \int_0^1 t^{2n}dt$:

$$T(x) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot x^{3n}\cdot\int_0^1 t^{2n}dt = \int_0^1 \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}(-x^3t^2)^n}_{=\frac{-x^3t^2}{1+x^3t^2}\ \text{(геометрическая прогр.)}} dt = \int_0^1\frac{-x^3t^2}{1+x^3t^2}dt =$$

$$= \int_0^1\left(-1+\frac{1}{1+x^3t^2}\right)dt = \begin{bmatrix} u=x^{\frac{3}{2}}t \\ t=u/x^{\frac{3}{2}} \\ dt=du/x^{\frac{3}{2}}\end{bmatrix} =$$

$$= -1+\int_0^{x^{\frac{3}{2}}}\frac{1}{1+x^3\cdot\left(\frac{u}{x^{3/2}}\right)^2}\cdot\frac{du}{x^{3/2}} = -1+\int_0^{x^{\frac{3}{2}}}\frac{1}{1+u^2}\cdot\frac{du}{x^{3/2}} = -1+\frac{1}{x^{3/2}}\int_0^{x^{\frac{3}{2}}}\frac{du}{1+u^2} = -1+\frac{1}{x^{3/2}}\operatorname{arctg}(x^{3/2})$$

$$S(x) = \frac{1}{x}T(x) = -\frac{1}{x}+\frac{1}{x^{5/2}}\arctan(x^{3/2})$$

Ответ: ряд сходится при $x\in(-1;1]$, его сумма равна $-\frac{1}{x}+\frac{\arctan(x^{\frac{3}{2}})}{x^{5/2}}$.

ИДЗ Ряды. Часть 2.

Вариант 52% 30 = 22.

V.

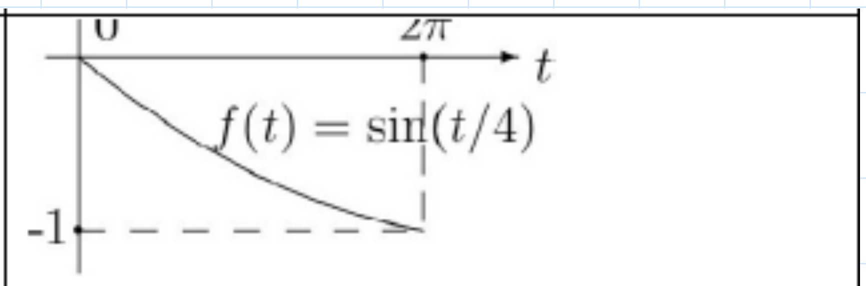
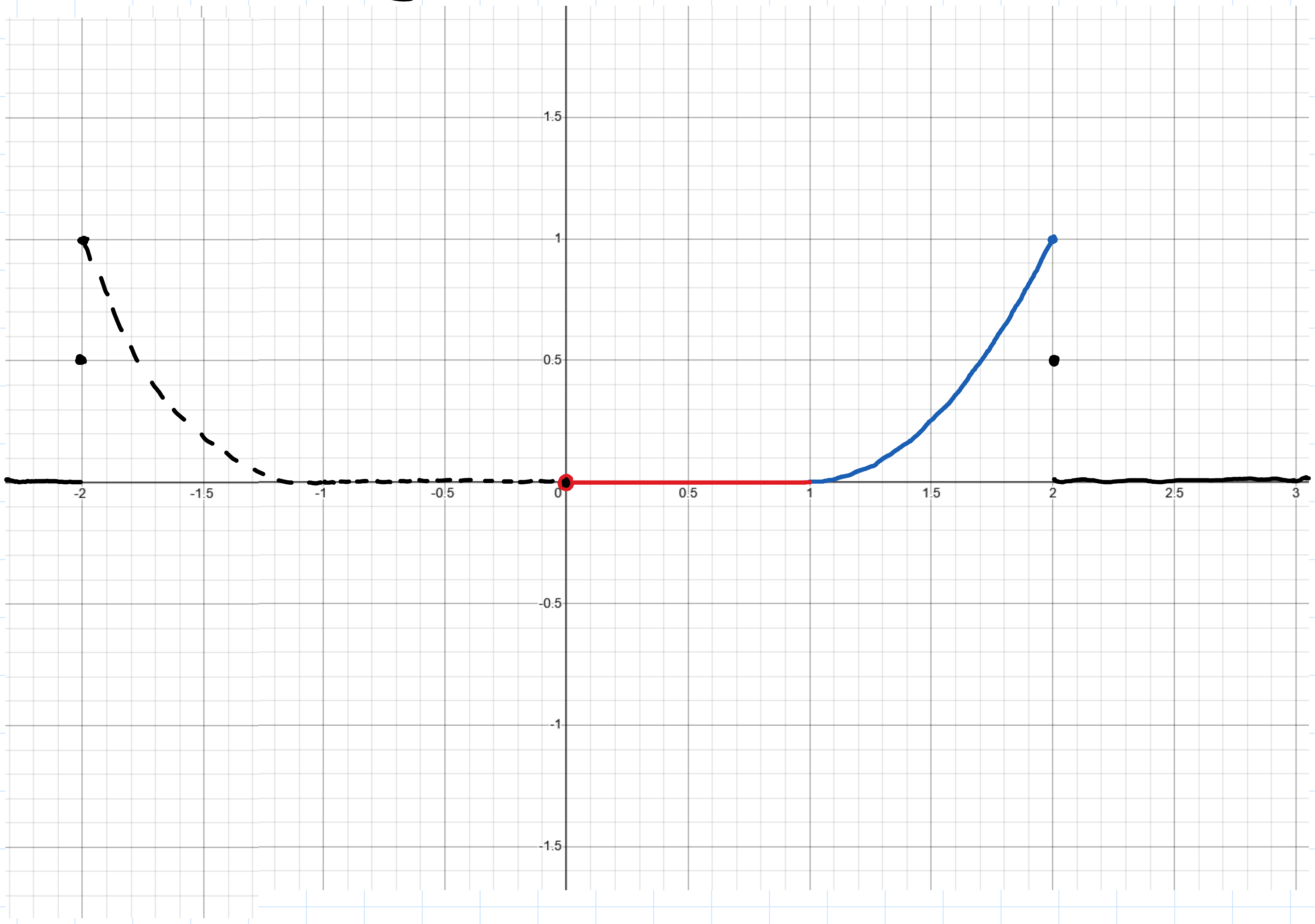
22	$f(x)=\begin{cases}0, & 0<x\le 1,\\ (x-1)^2, & 1<x\le 2,\end{cases}$ покосинусамкратныхдуг;	

График функции:



Для разложение по косинусам, продолжим $f(x)$ на $[-2,0]$ как чётную функцию. Тогда $f(x)$ будет определена на $[-2;2]$.

Ряд Фурье по косинусам на интервале $(0,L)$ имеет вид:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\left(\frac{\pi n x}{L}\right),$$ где $L=2$, и

$$a_0=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\,dx=\int_0^2 f(x)\,dx\ ;\quad a_n=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\left(\frac{\pi n x}{L}\right)dx=\int_0^2 f(x)\cos\left(\frac{\pi n x}{2}\right)dx$$

$$a_0=\int_0^1 0\,dx+\int_1^2(x-1)^2dx=\int_0^1 t^2dt=\frac{t^3}{3}\Big|_0^1=\frac{1}{3}$$

$$a_n=\int_1^2(x-1)^2\cos\left(\frac{\pi n x}{2}\right)dx=\begin{bmatrix}t=x-1\\ x=t+1\\ dx=dt\end{bmatrix}=\int_0^1 t^2\underbrace{\cos\left(\frac{\pi n(t+1)}{2}\right)}dt \ \ominus$$

$$\cos\left(\frac{\pi n t}{2}+\frac{\pi n}{2}\right)=\cos\left(\frac{\pi n t}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi n}{2}\right)-\sin\left(\frac{\pi n t}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)$$

$$\ominus\ \cos\left(\frac{\pi n}{2}\right)\int_0^1 t^2\cos\left(\frac{\pi n t}{2}\right)dt-\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)\int_0^1 t^2\sin\left(\frac{\pi n t}{2}\right)dt=I_1-I_2.$$

$$I_1=\begin{bmatrix}u=t^2\\ dv=\cos\left(\frac{\pi n t}{2}\right)dt\end{bmatrix}=uv-\int_0^1 v\,du=\underbrace{\frac{2}{\pi n}t^2\sin\left(\frac{\pi n t}{2}\right)}_{\frac{2}{\pi n}\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)}-\underbrace{\frac{4}{\pi n}\int_0^1 t\sin\left(\frac{\pi n t}{2}\right)dt}_{I_3}\ \ominus$$

$$I_3 = \left[\begin{matrix} u=t \\ dv=\sin(\frac{\pi n t}{2})dt\end{matrix}\right] = -\frac{2}{\pi n}\cdot \underbrace{t\cos\left(\frac{\pi n t}{2}\right)}_{\cos(\frac{\pi n}{2})} + \frac{2}{\pi n}\underbrace{\int_0^1 \cos\left(\frac{\pi n t}{2}\right)dt}_{\frac{2}{\pi n}\sin(\frac{\pi n}{2})} =$$

$$= -\frac{2}{\pi n}\cos\left(\frac{\pi n}{2}\right) + \frac{4}{\pi^2 n^2}\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)$$

$$= \frac{2}{\pi n}\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right) - \frac{4}{\pi n}\left(-\frac{2}{\pi n}\cos\left(\frac{\pi n}{2}\right) + \frac{4}{\pi^2n^2}\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)\right) = \frac{2}{\pi n}\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right) + \frac{8}{\pi^2n^2}\cos\left(\frac{\pi n}{2}\right) - \frac{16}{\pi^3 n^3}\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)$$

$$I_2 = \left[\begin{matrix} u=t^2 \\ dv=\cos(\frac{\pi n t}{2})dt\end{matrix}\right] = uv - \int_0^1 v\,du = \underbrace{\frac{-2}{\pi n} t^2\cos\left(\frac{\pi n t}{2}\right)}_{-\frac{2}{\pi n}\cos(\frac{\pi n}{2})} + \frac{4}{\pi n}\underbrace{\int_0^1 t\cos\left(\frac{\pi n t}{2}\right)dt}_{I_4} =$$

$$I_4 = \left[\begin{matrix} u=t \\ dv=\sin(\frac{\pi n t}{2})dt\end{matrix}\right] = \frac{2}{\pi n}\cdot\underbrace{t\sin\left(\frac{\pi n t}{2}\right)}_{\sin(\frac{\pi n}{2})} - \frac{2}{\pi n}\underbrace{\int_0^1\sin\left(\frac{\pi n t}{2}\right)dt}_{-\frac{2}{\pi n}(\cos(\frac{\pi n}{2})-1)} =$$

$$= \frac{2}{\pi n}\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right) + \frac{4}{\pi^2n^2}\left(\cos\left(\frac{\pi n}{2}\right)-1\right)$$

$$= -\frac{2}{\pi n}\cos\left(\frac{\pi n}{2}\right) + \frac{4}{\pi n}\left(\frac{2}{\pi n}\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right) + \frac{4}{\pi^2n^2}\left(\cos\left(\frac{\pi n}{2}\right)-1\right)\right) = -\frac{2}{\pi n}\cos\left(\frac{\pi n}{2}\right) + \frac{8}{\pi^2n^2}\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right) + \frac{16}{\pi^3n^3}\left(\cos\left(\frac{\pi n}{2}\right)-1\right)$$

$$a_n = \cos\left(\frac{\pi n}{2}\right)\left(\frac{2}{\pi n}\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right) + \frac{8}{\pi^2n^2}\cos\left(\frac{\pi n}{2}\right) - \frac{16}{\pi^3n^3}\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)\right) -$$

$$- \sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)\cdot\left(-\frac{2}{\pi n}\cos\left(\frac{\pi n}{2}\right) + \frac{8}{\pi^2n^2}\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right) + \frac{16}{\pi^3n^3}\left(\cos\left(\frac{\pi n}{2}\right)-1\right)\right) =$$

$$= \frac{2}{\pi n}\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi n}{2}\right) + \frac{8}{\pi^2n^2}\cos^2\left(\frac{\pi n}{2}\right) - \frac{16}{\pi^3n^3}\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi n}{2}\right) + \frac{2}{\pi n}\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi n}{2}\right) -$$

$$- \frac{8}{\pi^2n^2}\sin^2\left(\frac{\pi n}{2}\right) - \frac{16}{\pi^3n^3}\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)\left(\cos\left(\frac{\pi n}{2}\right)-1\right) =$$

$$= \frac{4}{\pi n}\underbrace{\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi n}{2}\right)}_{\frac{1}{2}\sin 2\varphi} + \frac{8}{\pi^2n^2}\Big(\underbrace{\cos^2\left(\frac{\pi n}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{\pi n}{2}\right)}_{\cos 2\varphi}\Big) - \frac{16}{\pi^3n^3}\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)\left(\cos\left(\frac{\pi n}{2}\right)-1\right) =$$

$$= \frac{2}{\pi n}\underbrace{\sin(\pi n)}_{\text{всегда}=0} + \frac{8}{\pi^2n^2}\cos(\pi n) - \frac{16}{\pi^3n^3}\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)\left(\cos\left(\frac{\pi n}{2}\right)-1\right) =$$

$$= \frac{8}{\pi^2n^2}\underbrace{\cos(\pi n)}_{(-1)^n} - \frac{16}{\pi^3n^3}\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)\left(\cos\left(\frac{\pi n}{2}\right)-1\right) =$$

$$= \frac{8\cdot(-1)^n}{\pi^2n^2} - \frac{16}{\pi^3n^3}\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)\left(\cos\left(\frac{\pi n}{2}\right)-1\right)$$

$\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right) = 0$ при чётных, ± 1 при нечётных, $\cos\left(\frac{\pi n}{2}\right)$ - наоборот

Получаем, для чётных n, $a_n = \frac{8}{\pi^2n^2}(-1)^n$

для нечётных n, $a_n = \frac{8}{\pi^2n^2}(-1)^n + \frac{16}{\pi^3n^3}(-1)^{(n-1)/2}$

Ответ: Искомый ряд $f(x) = \frac{1}{6} + \sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{8}{\pi^2n^2}(-1)^n + \frac{16}{\pi^3n^3}\cdot(-1)^{(n-1)/2}\cdot[n \not\vdots\, 2]\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi n x}{2}\right).$

VI. Разложи $f(x)=\sin(\frac{x}{4})$ в комплексной форме.

Определение: на интервале $(0, 2\pi)$ ряд имеет вид:

$$f(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}, \text{ где } c_n=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)e^{-inx}dx$$

Вычислим коэффициенты для $f(x)=\sin(\frac{x}{4})$ по ф. Эйлера:

$$\sin(\frac{x}{4})=\frac{e^{ix/4}-e^{-ix/4}}{2i}$$

Подставим:

$$c_n=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{e^{ix/4}-e^{-ix/4}}{2i}e^{-inx}dx=\frac{1}{4\pi i}\Big(\underbrace{\int_0^{2\pi}e^{ix(1/4-n)}dx}_{I_1}-\underbrace{\int_0^{2\pi}e^{-ix(1/4+n)}dx}_{I_2}\Big)=$$

$$I_1=\int_0^{2\pi}e^{ix\overbrace{(1/4-n)}^{a}}dx=\begin{cases}2\pi, & a=0\\ (e^{ia2\pi}-1)/ia, & a\neq 0\end{cases}$$

$$I_2=\int_0^{2\pi}e^{-ix\overbrace{(1/4+n)}^{a}}dx=\begin{cases}2\pi, & a=0\\ (e^{ia2\pi}-1)/ia, & a\neq 0\end{cases}$$

Для $n\in\mathbb{Z}$, $a\neq 0$, $\Rightarrow$

$$I_1=\frac{e^{i(1/4-n)2\pi}-1}{i(1/4-n)}\quad ; \quad e^{i(1/4-n)2\pi}=e^{i\pi/2}\cdot e^{-i2\pi n}=i\cdot 1=i$$

$$I_2=\frac{e^{-i(1/4+n)2\pi}-1}{-i(1/4+n)}\quad ; \quad e^{-i(1/4+n)2\pi}=e^{-i\pi/2}\cdot e^{-i2\pi n}=-i\cdot 1=-i$$

$$= \frac{1}{4\pi i}\Big(\underbrace{\frac{i-1}{i(1/4-n)}}_{\frac{1+i}{1/4-n}}-\underbrace{\frac{-i-1}{-i(1/4+n)}}_{\frac{1+i}{1/4+n}}\Big)=\frac{1+i}{4\pi i}\Big(\underbrace{\frac{1}{1/4-n}+\frac{1}{1/4+n}}_{\frac{2(1/4)}{(1/4)^2-n^2}=\frac{1/2}{1/16-n^2}}\Big)=\frac{1+i}{4\pi i}\Big(\frac{1/2}{1/16-n^2}\Big)=$$

$$=\frac{1+i}{8\pi i(1/16-n^2)}=\frac{1-i}{8\pi(1/16-n^2)}=\frac{1-i}{8\pi}\cdot\frac{1}{1/16-n^2}$$

$$\left(1+i=\sqrt{2}e^{i\pi/4}\ ;\ (1+i)/i=\sqrt{2}e^{i\pi/4}/e^{i\pi/2}=\sqrt{2}e^{-i\pi/4}=1-i\right)$$

Ответ: Искомый ряд: $f(x)=\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1-i}{8\pi(1/16-n^2)}e^{inx}$.

График суммы ряда: