1)

1. Ассоциативность :

   Для любых $x, y, z \in G$:

   $$(x * y) * z = (x \cdot a \cdot y) * z = (x \cdot a \cdot y) \cdot a \cdot z = x \cdot a \cdot y \cdot a \cdot z,$$

   $$x * (y * z) = x * (y \cdot a \cdot z) = x \cdot a \cdot (y \cdot a \cdot z) = x \cdot a \cdot y \cdot a \cdot z.$$

   Таким образом, $(x * y) * z = x * (y * z)$, ассоциативность выполняется.

2. Нейтральный элемент :

   Найдем $e' \in G$, такой что $x * e' = x$ и $e' * x = x$.

   Из условия $x \cdot a \cdot e' = x$ следует $a \cdot e' = e$, откуда $e' = a^{-1}$.

   Проверка:

   $$x * a^{-1} = x \cdot a \cdot a^{-1} = x \cdot e = x, \quad a^{-1} * x = a^{-1} \cdot a \cdot x = e \cdot x = x.$$

   Нейтральный элемент для операции $*$ — a^{-1}.

3. Обратный элемент :

   Для каждого $x \in G$ найдем $x' \in G$, такой что $x * x' = a^{-1}$ и $x' * x = a^{-1}$.

   Решая $x \cdot a \cdot x' = a^{-1}$, получаем $x' = a^{-1} \cdot x^{-1} \cdot a^{-1}$.

   Проверка:

   $$x * x' = x \cdot a \cdot (a^{-1} \cdot x^{-1} \cdot a^{-1}) = x \cdot (a \cdot a^{-1}) \cdot x^{-1} \cdot a^{-1} = e \cdot a^{-1} = a^{-1},$$

   $$x' * x = (a^{-1} \cdot x^{-1} \cdot a^{-1}) \cdot a \cdot x = a^{-1} \cdot x^{-1} \cdot (a^{-1} \cdot a) \cdot x = a^{-1} \cdot (x^{-1} \cdot x) = a^{-1}.$$

   Обратный элемент для x относительно $*$ — $x' = a^{-1} \cdot x^{-1} \cdot a^{-1}$.

Заключение :

Все аксиомы группы выполняются. Следовательно, $(G, *)$ — группа.

Ответ :

Группа G с операцией $*$ действительно является группой, так как выполняются все аксиомы группы: ассоциативность, наличие нейтрального элемента a^{-1} и обратных элементов $a^{-1} \cdot x^{-1} \cdot a^{-1}$ для каждого $x \in G$.

$$\boxed{(G, *) \text{ — группа}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

+ **Г1.** Пусть $G, \cdot$ — группа, $a \in G$. Для любых двух элементов $x, y \in G$ положим $x * y = x \cdot a \cdot y$. Докажите, что $G, *$ — тоже группа.

Г2. Отображение $\varphi(x) : G \to G$, заданное формулой $\varphi(x) = x^{-1}$ является гомоморфизмом групп. Сколько может быть элементов в группе $G/Z(G)$?

Г3. Подстановка $\varphi \in S_{17}$ такова, что $\mathrm{ord}(\varphi)$ нечетно. Докажите, что $\varphi \in A_{17}$.

Г4. Пусть G — группа, N_1 и N_2 — ее нормальные подгруппы. Докажите, что для любых $a_1 \in N_1$ и $a_2 \in N_2$ выполняется $[a_1, a_2] \in N_1 \cap N_2$.

2)

1. Анализ условия гомоморфизма :

   Отображение $\varphi(x) = x^{-1}$ является гомоморфизмом, если для любых $a, b \in G$ выполняется равенство:

   $$\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b) \quad \Rightarrow \quad (ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}.$$

   Однако в общем случае $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$. Для выполнения равенства $b^{-1}a^{-1} = a^{-1}b^{-1}$ необходимо, чтобы a^{-1} и b^{-1} коммутировали для всех $a, b \in G$. Это возможно только если G — абелева группа (все элементы коммутируют).

2. Следствие для центра группы :

   В абелевой группе каждый элемент коммутирует со всеми остальными, поэтому центр $Z(G)$ совпадает с самой группой G:

   $$Z(G) = G.$$

3. Факторгруппа $G/Z(G)$:

   Факторгруппа $G/Z(G)$ состоит из классов смежности по подгруппе $Z(G)$. Поскольку $Z(G) = G$, существует только один класс смежности — сама группа G. Таким образом:

   $$G/Z(G) \simeq \{e\},$$

   где $\{e\}$ — тривиальная группа с одним элементом.

Ответ :

$$\boxed{1}$$

3)

1. Разложение подстановки на циклы :

   Порядок подстановки φ определяется как наименьшее общее кратное длин циклов в её разложении:

   $$\mathrm{ord}(\varphi) = \text{НОК}(l_1, l_2, \ldots, l_k),$$

   где l_i — длины непересекающихся циклов. Если $\mathrm{ord}(\varphi)$ нечётно, то все l_i также должны быть нечётными, так как НОК нечётных чисел остаётся нечётным.

2. Чётность циклов :

   Цикл длины l можно представить как произведение $l-1$ транспозиций. Если l нечётно, то $l-1$ чётно, то есть каждый цикл в разложении φ соответствует чётному числу транспозиций. Общее количество транспозиций в разложении φ будет суммой чётных чисел, что также чётно.

3. Чётность подстановки :

   Подстановка φ является чётной, если её можно представить как произведение чётного числа транспозиций. Поскольку разложение φ содержит только чётное число транспозиций, $\varphi \in A_{17}$.

4. Альтернативный подход через гомоморфизм знака :

   Рассмотрим гомоморфизм знака $\mathrm{sgn} : S_{17} \to \{\pm 1\}$. Порядок $\mathrm{sgn}(\varphi)$ в группе $\{\pm 1\}$ должен делить $\mathrm{ord}(\varphi)$ и порядок $\{\pm 1\}$, равный 2. Поскольку $\mathrm{ord}(\varphi)$ нечётен, $\mathrm{sgn}(\varphi) = 1$, то есть φ чётна.

Заключение :

Все циклы в разложении φ имеют нечётную длину, что приводит к чётному числу транспозиций в разложении. Следовательно, φ является чётной подстановкой и принадлежит A_{17}.

$$\boxed{\varphi \in A_{17}}$$

4)

Для доказательства того, что коммутатор $[a_1, a_2]$ элементов $a_1 \in N_1$ и $a_2 \in N_2$ принадлежит пересечению $N_1 \cap N_2$, воспользуемся следующими рассуждениями:

1. Определение коммутатора :

   Коммутатор двух элементов a_1 и a_2 определяется как $[a_1, a_2] = a_1^{-1} a_2^{-1} a_1 a_2$.

2. Принадлежность N_1 :

   - Так как N_1 — нормальная подгруппа, для любого $a_1 \in N_1$ и $a_2 \in G$ сопряжение $a_2^{-1} a_1 a_2$ принадлежит N_1.
   - Таким образом, $a_2^{-1} a_1 a_2 \in N_1$.
   - Умножая $a_1^{-1} \in N_1$ на $a_2^{-1} a_1 a_2 \in N_1$, получаем $[a_1, a_2] = a_1^{-1}(a_2^{-1} a_1 a_2) \in N_1$.

3. Принадлежность N_2 :

   - Так как N_2 — нормальная подгруппа, для любого $a_2^{-1} \in N_2$ и $a_1 \in G$ сопряжение $a_1^{-1} a_2^{-1} a_1$ принадлежит N_2.
   - Таким образом, $a_1^{-1} a_2^{-1} a_1 \in N_2$.
   - Умножая $a_1^{-1} a_2^{-1} a_1 \in N_2$ на $a_2 \in N_2$, получаем $[a_1, a_2] = (a_1^{-1} a_2^{-1} a_1) a_2 \in N_2$.

4. Заключение :

   Коммутатор $[a_1, a_2]$ принадлежит как N_1, так и N_2, следовательно, он лежит в их пересечении $N_1 \cap N_2$.

Ответ :

$$\boxed{[a_1, a_2] \in N_1 \cap N_2}$$