Пшеничников Артём 467205

ИДЗ 3.

Вариант 467205 % 20 = 5.

5. а) $\int\limits_{1}^{\infty} \frac{x^{100}+1}{(1+1/x)^{x\sqrt{x}}} dx$; б) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{|x|}} \sin e^{x} dx$; в) $\int\limits_{0}^{1/8} \frac{\arcsin\left(x^{2}+x^{5}\right)}{x \ln^{2}(1+x)} dx$;

г) $\int\limits_{0}^{1} \cos\left(\frac{1}{\sqrt{x}}-1\right) \frac{dx}{x\sqrt[4]{x}}$.

а). $\int_1^\infty \frac{x^{100}+1}{(1+1/x)^{x\sqrt{x}}} dx$

числитель: $x^{100}+1 \sim x^{100}$

знаменатель: $(1+1/x)^{x\sqrt{x}} \sim e^{\sqrt{x}}$ $\Bigg| \Rightarrow$

$\Rightarrow f(x) \sim x^{100}/e^{\sqrt{x}}$

$$\int_1^\infty \frac{x^{100}}{e^{\sqrt{x}}} = \left[\begin{matrix} t=\sqrt{x} \\ x=t^2 \\ dx=2t\,dt \end{matrix}\right] = \left[\begin{matrix} x=1: t=\sqrt{1}=1 \\ x\to\infty: t\to\infty \end{matrix}\right] = 2\int_1^\infty t^{201} e^{-t} dt$$

$$\left(\frac{x^{100}}{e^{\sqrt{x}}} dx = \frac{t^{2\cdot 100}}{e^{t}} \cdot 2t\,dt = 2t^{201} e^{-t} dt\right)$$

Проанализируем на сходимость $\int_1^\infty t^{201} e^{-t} dt$. *

любая экспоненц. ф-я растёт быстрее показат.

$\Rightarrow e^{-t} \ll t^{201} \Rightarrow$ интеграл * сходится $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ исходный интеграл также сходится.

Ответ: Сходится.

б). $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{|x|}} \sin e^x dx$

$\frac{1}{\sqrt{|x|}} \geq 0, \ -1 \leq \sin e^x \leq 1 \Rightarrow$ ф-я знакоп.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{|x|}} \sin e^x dx = \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{\sqrt{-x}} \sin e^x dx + \int_{0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} \sin e^x dx$$

Исслед. на абс. сходимость:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left|\frac{1}{\sqrt{|x|}} \sin e^x\right| = \underbrace{\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{\sqrt{-x}} |\sin e^x| dx}_{I_1} + \underbrace{\int_{0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} |\sin e^x| dx}_{I_2}$$

I_1: $\quad \ast \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{\sqrt{-x}} |\sin e^x| dx = \int_{0^+}^{1} \frac{1}{\sqrt{-\ln(u)}} \cdot |\sin(u)| \frac{1}{u} du$ $\ast\ast$

$u = e^x \Rightarrow du = e^x dx \Rightarrow dx = \frac{du}{u}$; при $x \to -\infty : u \to 0^+$
при $x \to 0 : u \to 1$

$\frac{1}{\sqrt{-\ln(u)}}$ – медленно растёт при $u \to 0^+$

$\frac{1}{u}$ – быстро растёт

$\Downarrow$ $A = \frac{1}{u\sqrt{-\ln(u)}}$ убывает достаточно быстро

$0 \leq |\sin u| \leq 1$

также при $u \to 0^+ : A \sim 1/u^{1+\varepsilon}$ где $\varepsilon > 0$. $\Rightarrow$
$\Rightarrow I_1$ сходится

I_2: $\int_{0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} |\sin e^x| dx = \begin{bmatrix} u = e^x \\ du = e^x dx \\ dx = du/u \end{bmatrix} = \int_{1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\ln u}} |\sin u| \frac{1}{u} du$ $\ast\ast\ast$

Исследуем сходимость $\int_1^\infty \frac{|\sin u|}{u\sqrt{\ln u}}du$

$] f(x) = \frac{|\sin u|}{u\sqrt{\ln u}}$. $|\sin u| \not\to 0$, её ср. знач $= \frac{\pi}{2}$.

$u\sqrt{\ln u}$ убывает: $u \to \infty \Rightarrow \sqrt{\ln u} \to \infty$

$\frac{1}{u}$ убывает, но медленно.

$$\measuredangle \int_1^\infty \frac{1}{u\sqrt{\ln u}}du = \begin{bmatrix} t = \ln u \\ dt = \frac{du}{u} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u = 1;\, t = 0 \\ u \to \infty;\, t \to \infty \end{bmatrix} = \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{u}}du =$$

$2\sqrt{u} + C \Rightarrow$ при $u \to \infty$ инт. расходится.

Так как I_2 расходится, абс. сход. нет.

<u>Исследуем на условную сходимость:</u>

<u>I_1:</u> $\measuredangle \int_{-\infty}^0 \frac{1}{\sqrt{-x}} \sin e^x dx = [**] = \int_{0^+}^1 \frac{1}{\sqrt{-\ln u}} \cdot \sin u \cdot \frac{1}{u} du$

Интеграл сходится, как в случае $**$, $+(\sin u)$ огр.

<u>I_2:</u> $\measuredangle \int_{-\infty}^0 \frac{1}{\sqrt{-x}} \sin e^x dx = [***] = \int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{\ln u}} \cdot \sin u \cdot \frac{1}{u} du$

Интеграл сходится по критерию Дирихле:

- $\frac{1}{u\sqrt{\ln u}}$ – монотонно убывает к нулю.
- $\sin u$ – огр.

Оба интеграла (I_1, I_2) сходятся $\Rightarrow$ исх. инт. усл. сх.

Ответ: условно сходится, но абсолютно не сходится.

c). $\displaystyle\int_0^{1/8} \underbrace{\frac{\arcsin\left(x^2+x^5\right)}{x\ln^2(1+x)}}_{f(x)}dx$

Исследуем знакопеременность:

$\arcsin(y)$ определена для $y \in [-1, 1]$.

$\arcsin(y) \in [-\pi/2, \pi/2]$

$$\left.\begin{array}{l} y = x^5 + x^2 \geqslant 0 \\ x^5+x^2 \leqslant (1/8)^5 + (1/8)^2 < 1 \end{array}\right| \Rightarrow x^5+x^2 \in [0, 1]$$

$$\Downarrow$$

$$\arcsin(y) \geqslant 0$$

для $x>0$: $\ln(1+x) > 0 \Rightarrow x\ln^2(1+x) > 0$

Получаем, что $f(x)$ не явл. знакопеременной.

Исследуем на сходимость:

Интеграл имеет особую точку $x=0$: $f(0) = \dfrac{\arcsin(0)}{0 \cdot \ln^2(0)}$

Поэтому исследуем поведение около $x=0$:

$\arcsin(x^5+x^2) \approx \arcsin(x^2) \approx x^2$ ($x^5 << x^2$ при $x \to 0$)

$\ln^2(1+x) \approx x^2$ ($\ln(1+x) \approx x$ при $x \to 0$)

Получаем $f(x) \approx \dfrac{x^2}{x \cdot x^2} = \dfrac{1}{x}$

$$\int_0^{\frac{1}{8}} \frac{1}{x}dx = \ln|x|\Big|_0^{\frac{1}{8}} = \ln\left(\tfrac{1}{8}\right) - \underbrace{\lim_{\varepsilon \to 0^+} \ln(\varepsilon)}_{\to -\infty}$$ $\Rightarrow$ интеграл расходится

Ответ: интеграл расходится.

d). $\int\limits_0^1 \cos\left(\frac{1}{\sqrt{x}}-1\right)\frac{dx}{x\sqrt[4]{x}}$ $\quad f(x)=\cos\left(\frac{1}{\sqrt{x}}-1\right)\frac{1}{x\sqrt[4]{x}}$

Исследуем знакопеременность:

$\cos y$ – знакопеременна для $y \in \mathbb{R}$.

$y = 1/\sqrt{x} - 1$
при $x \to 0$: $\frac{1}{\sqrt{x}} \to \infty$ $\Big|$ => y принимает все знач. от 0 до $+\infty$. *

Получаем что $f(x)$ – знакопеременна.

Исследуем на сходимость:

Есть особая точка $x=0$. Исслед. повед. в её окр. (при $x \to 0^+$)

$\measuredangle$ $f(x) = \cos\left(\frac{1}{\sqrt{x}}-1\right)\frac{1}{x^{5/4}}$

$\cos\left(\frac{1}{\sqrt{x}}-1\right)$: при $x \to 0^+$: $1/\sqrt{x} - 1 \to +\infty$.
$\cos(1/\sqrt{x}-1)$ колеблется между -1 и 1 т.к. (*).

$\frac{1}{x^{5/4}}$: при $x \to 0^+$: $1/x^{5/4} \to +\infty$

Получаем $f(x) \sim \frac{1}{x^{5/4}}$.

$$\int_0^1 \frac{1}{x^{5/4}}dx = \frac{x^{-1/4}}{-1/4}\Big|_0^1 = -4\left(1^{-1/4} - \lim_{\varepsilon\to 0^+}\varepsilon^{-1/4}\right)$$

$\lim\limits_{\varepsilon\to 0^+}\varepsilon^{-\frac{1}{4}} = \lim\limits_{\varepsilon\to 0^+}\frac{1}{\sqrt[4]{\varepsilon}} \to \infty$ => инт. расход.

Исследуем условную сходимость:

$\exists$ $g(x) = \cos(1/\sqrt{x} - 1)$, $h(x) = x^{-5/4}$

$g(x)$ огр. на $(0,1]$, $h(x) \to +\infty$ при $x \to 0^+$

критерий Дирихле не вып. => инт. не сход. ус.

Ответ: Интеграл расходится.