Пшеничников Артём, 467205

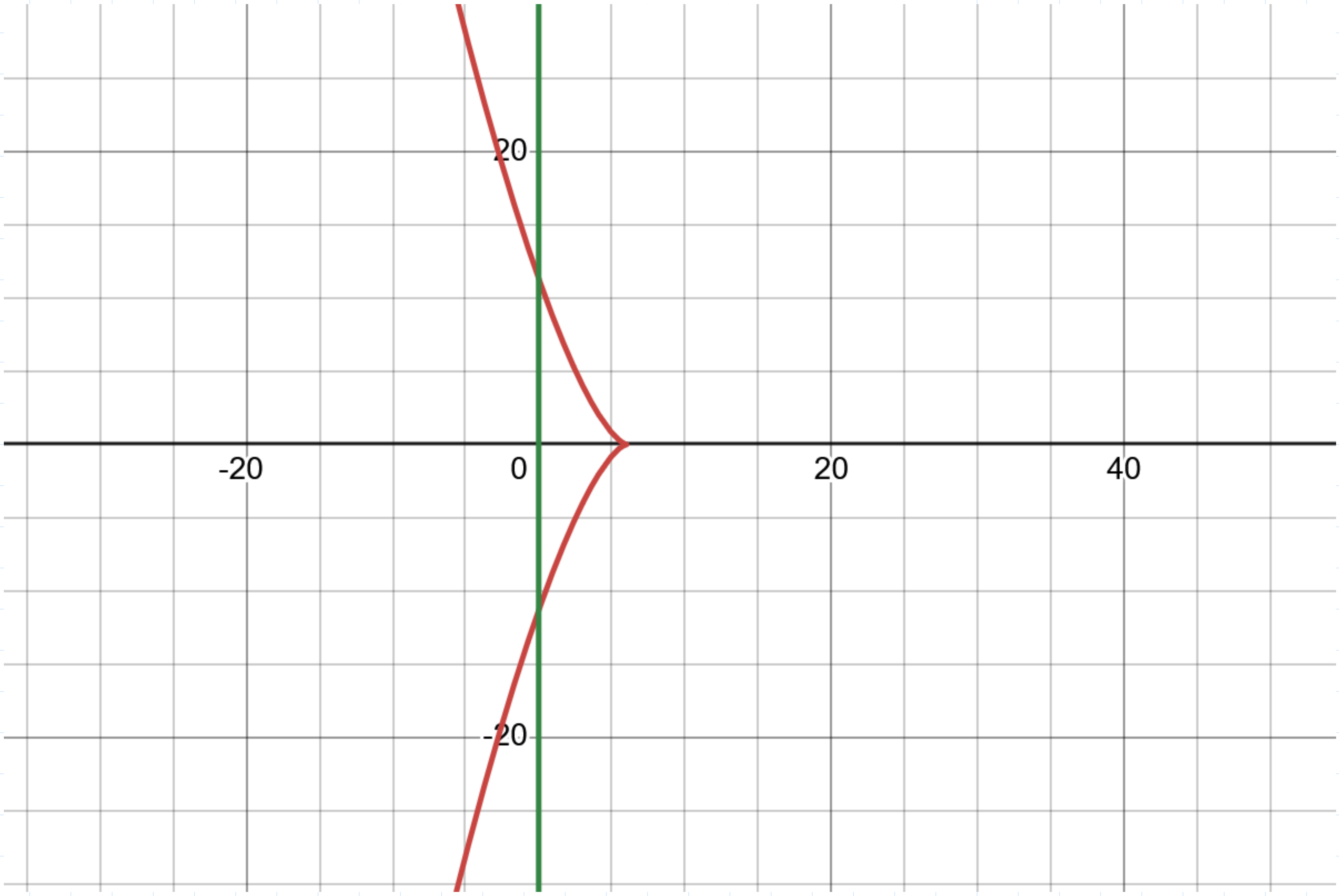
ИДЗ 2

Вариант 467205 % 10 = 5

№1

Вычислить длину кривой:

1. $x = 6 - 3t^2,\ y = 4t^3,\ x \geqslant 0$



$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt\ ;\quad x \geqslant 0 \Rightarrow 6 - 3t^2 \geqslant 0$$

$$2 \geqslant t^2 \Rightarrow t \in [-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$$

$$\frac{dx}{dt} = (6 - 3t^2)' = -6t\ ;\quad \frac{dy}{dt} = (4t^3)' = 12t^2$$

$$L = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \sqrt{36t^2 + 144t^4}\,dt = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} 6|t|\sqrt{1+4t^2} =$$

ф-я чётная => выч. половину: $= \int_0^{\sqrt{2}} 12|t|\sqrt{1+4t^2} =$

$$= 12\int_0^{\sqrt{2}} t\sqrt{1+4t^2}\,dt = \begin{bmatrix} u=1+4t^2 \\ du = 8t\,dt \\ t\,dt = \frac{du}{8} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t=0: u=1 \\ t=\sqrt{2}: u=9 \end{bmatrix}$$

$$= 12\int_1^9 \sqrt{u}\,\frac{du}{8} = \frac{12}{8}\int_1^9 u^{\frac{1}{2}}\,du = \frac{3}{2}\cdot\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Bigg|_1^9 = 9^{\frac{3}{2}} - 1^{\frac{3}{2}} =$$

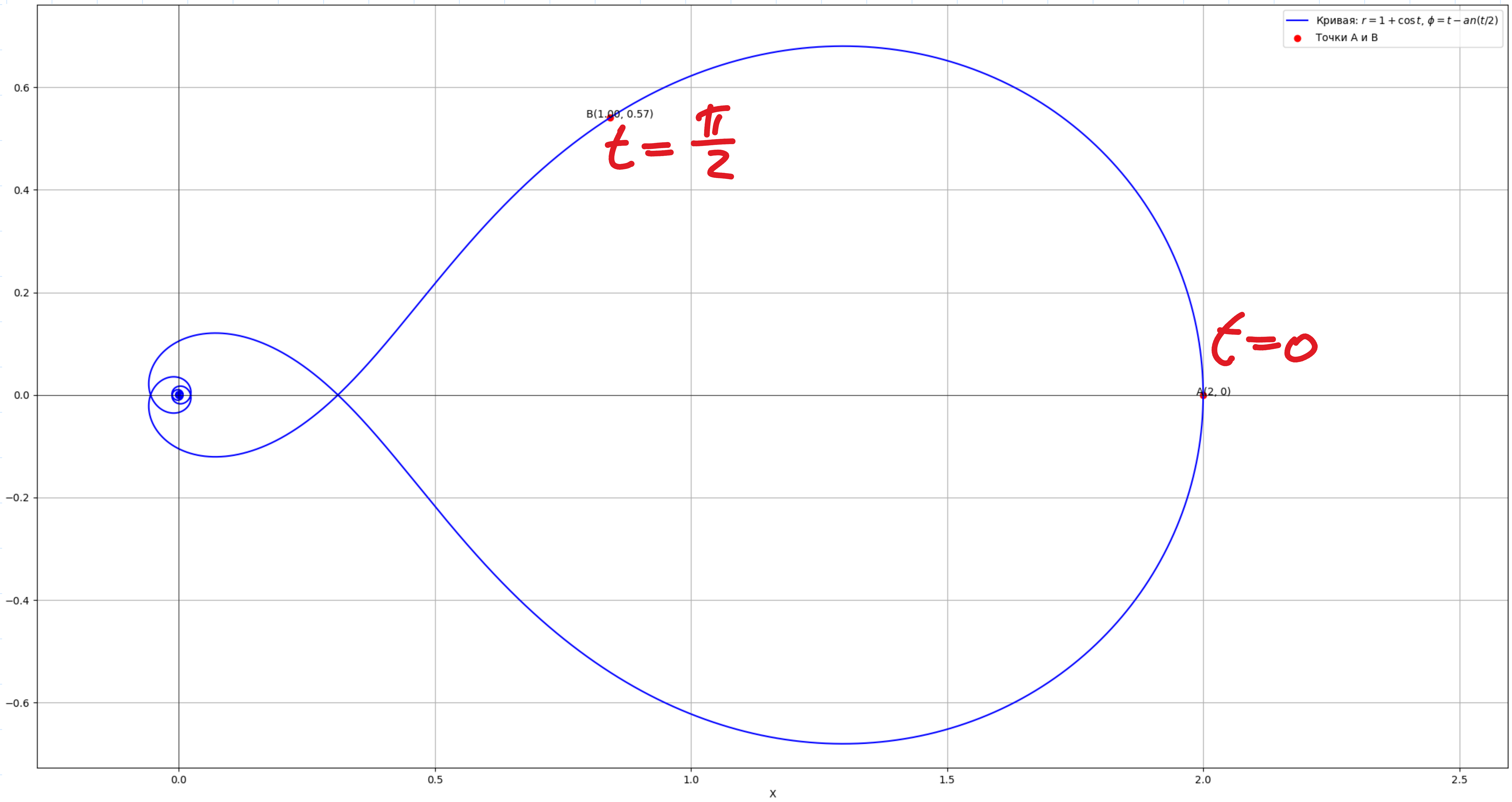
$$= 27 - 1 = 26$$

Ответ: 26.

№2

$r = 1+\cos t,\ \varphi = t - \operatorname{tg}(t/2)$ от точки $A(2,0)$ до точки $B(r_0,\varphi_0)$:

$r_0 = 1,\ \varphi_0 = \pi/2$



$A:\quad 1+\cos t = 2 \Rightarrow \cos t = 1 \Rightarrow t = 0$

$\quad t - \operatorname{tg}(t/2) = 0 \Rightarrow t = \operatorname{tg}(t/2) \Rightarrow t = 0$

B: $1+\cos t=1 \Rightarrow \cos t=0 \Rightarrow t\in\{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\}$

$t-tg(t/2)=\frac{\pi}{2}$

1). $t=\pi/2: \frac{\pi}{2}-tg(\pi/4)=\pi/2 \Rightarrow tg(\pi/4)=0\neq 1$

2). $t=3\pi/2: 3\pi/2-tg(3\pi/4)=\pi/2 \Rightarrow tg(3\pi/4)=\pi\neq -1$

Получаем, что точка B не лежит на кривой.

В качестве приближение возьмём $t=\frac{\pi}{2}$.

Формула длины: $L=\int_{t_a}^{t_b}\sqrt{r'(t)^2+r(t)^2\cdot\varphi'(t)^2}\,dt$

$$L=\begin{bmatrix} r'(t)=-\sin t \\ \varphi'(t)=1-\frac{1}{2\cos^2 t/2}\end{bmatrix}=$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\sin^2 t+(1+\cos t)^2\left(1-\frac{1}{2\cos^2\frac{t}{2}}\right)^2}\,dt=\begin{bmatrix}\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)= \\ =\frac{1+\cos x}{2}\end{bmatrix}$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\sin^2 t+(1+\cos t)^2\left(1-\frac{1}{1+\cos t}\right)^2}\,dt=$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\sin^2 t+\left((1+\cos t)-\frac{1+\cos t}{1+\cos t}\right)^2}\,dt=$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\sin^2 t+\cos^2 t}\,dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}1\,dt=\frac{\pi}{2}$$

Ответ: $\frac{\pi}{2}$