Пер 1 2023

Γ_1: $K = \{g \in G \mid Mg = M\}$, т.е. $\forall m \in M$ $mg \in M$.

1) $M(g_1 g_2) \overset{g_1, g_2 \in K}{=} (Mg_1)g_2 = mg_2 \in M$

2) $M(g_1 g_1^{-1}) = mg_1^{-1} \in M$.

Γ_2: g-нам, что ~~инъ~~ инъекция, т.к. $|S_{17}| = |S_{17}|$, то и биекция.

Хотим: ~~...~~ $\mathfrak{F}(a) = \mathfrak{F}(b) \Leftrightarrow a = b$.

~~...~~

Покажем, что это не так.

$\exists$ $a = id$, a b- перестановка с циклами длины 5, 11, 1. Тогда $\mathfrak{F}(a) = \mathfrak{F}(b)$ - !?

Γ_3: $x = ah_1$, $y = ah_2$, $z = ah_3$ | $xy^{-1}z = (ah_1)(h_2^{-1}a^{-1})(ah_3) = ah_1 h_2^{-1} h_3 \in A$.

Γ_4. $c^{-1}[a;b] = [a;b]c^{-1}$ ~~...~~

$\underset{= [a;c]}{?}$ $[c;a^{-1}] \cdot [a;bc]$

$c^{-1}a^{-1}ca \cdot a^{-1}c^{-1}b^{-1}abc = c^{-1}a^{-1}b^{-1}abc$

т.к. $c^{-1}[a;b] = [a;b]c^{-1}$, то

$c^{-1}a^{-1}b^{-1}ab = a^{-1}b^{-1}abc^{-1} \mid \cdot c$

$c^{-1}a^{-1}b^{-1}abc = [a;b]$, чтд

Пер 1 2024.

Γ_1: $G_1 = \{a^s \mid s \in \mathbb{Z}\}$ ← и все элементы различны

$\exists H_p < G := \{a^x \mid x \in \mathbb{Z}$ и $x \vdots p\}$.

Простых бесконечно, берём разные

если H_{p_1} совпало с H_{p_2}, то $p_1 = p_2$ - !?

Γ_2: $x = ah_1$, $y = ah_2$ $x^{-1}y = h_1^{-1}h_2 \in H$.

Значит $h_1^{-1}h_2 = ah_3$, тогда $a \in H$, но тогда $A = H$ (умножение замкнуто в H).

Γ_3: $\varphi([a;b]) = \mathfrak{F}(a^{-1})\mathfrak{F}(b^{-1})\overset{h_1}{\mathfrak{F}(a)}\overset{h_2}{\mathfrak{F}(b)} =$ ($h_i \in H$)

$= h_1^{-1}h_2^{-1}h_1h_2 = [h_1; h_2]$.

$\boxed{\begin{array}{l}\mathfrak{F}(a^{-1}) = \mathfrak{F}^{-1}(a) \\ \text{для гомоморфизма} \\ a \cdot a^{-1} = e \Rightarrow \mathfrak{F}(a)\mathfrak{F}(a^{-1}) = e \\ \mathfrak{F}(a^{-1}) = \mathfrak{F}^{-1}(a)\end{array}}$

т.к. $[G;G]$ - произв. всех коммутаторов G, то применим гомоморфизм к каждому $\Rightarrow$ получим $[H;H]$.

Γ_4: т.к. $ord(\sigma) = 4$, то длины всех циклов чётные, если их убрать из n, то значение по mod 2 не изменится, останутся циклы длины 1.

Пер 2 2024

Γ_1: аналогично решено

Γ_2: решено

Γ_3: $xyxy = \mathfrak{F}(xy) = \mathfrak{F}(x)\mathfrak{F}(y) = xxyy$

$yx = xy$

Γ_4: решено.

2022

Г1: $a\cdot e = \cancel{ae} + e + a = a$

$e = 0$

Ассоциативность очев

$a\cdot b = e;\ ab + a + b = 0$

$b = \frac{-a}{a+1} = a^{-1}$.

Г2: б) ∃ биекция (на конечном множестве) ⟺ ∃-сюръекция

Д-ем, что ∃-сюръекция, т.е. $\forall b \in S_n\ \exists a:\ a^{101} = b$.

т.к. $(101; 17!) = 1$, то $\exists k \in \mathbb{Z}: 101k \equiv_{17!} 1$ (Безу).

$a = a\cdot a^{17!} = a^{101k} = (a^k)^{101}$ — $17!$ ✓ Лагранж, $a^{17!} = e$; т.к. при умножении перестановки $17!$ ничего не изменится (длины циклов = делители $17!$)

Для b положим $a = b^k$, чтд.

а) найдём контрпример, где $\partial(\sigma\tau) \neq \partial(\sigma)\partial(\tau)$

$\sigma = (12);\ \tau = (23)$

$\sigma\tau = (132)$

$(\sigma\tau)^{101} = (\sigma\tau)^2 = (123)$

$\sigma^{101} = \sigma = (12)$

$\tau^{101} = \tau = (23)$

$\partial(\sigma)\partial(\tau) = (12)(23) = (132)$

Г3: $y \in H_2;\ x \in H_1$.

H_1-норм $\Rightarrow I_y(x) = y^{-1}xy \in H_1 \Rightarrow \underbrace{x^{-1}y^{-1}xy}_{[x;y]} \in H_1\ (x \in H_1)$

H_2-норм $\Rightarrow I_x(y^{-1}) = x^{-1}y^{-1}x \in H_2 \Rightarrow \underbrace{x^{-1}y^{-1}xy}_{[x;y]} \in H_2\ (y \in H_2)$

$\Rightarrow [x;y] = e \Leftrightarrow xy = yx$, чтд.

Г4: 1) В $G\ \exists a \in G:\ ord(a) = \infty$,

значит $\langle a \rangle = \{a^s \mid s \in \mathbb{Z}\}$ — и все эл. различны.

$\exists H_{p_1} = \{a^k \mid k \in \mathbb{Z}\}$, где $k \vdots p_1$.

↑ делаем такие группы для всех $p \in \mathbb{P}$, их ∞ и они не пересекаются.

2) $\forall a \in G\ ord(a) = k \in \mathbb{N}$, $\langle a \rangle = \{e; a; \ldots; a^{k-1}\}$ и все эл. разные

Тогда $\langle a_1 \rangle$ - первая подгруппа, $\langle a_2 \rangle$ - вая и т.д.

Элементов беск. много, $\langle a_i \rangle = \langle a_j \rangle \Leftrightarrow a_i = a_j$, а мы берём разные.

Г5: $\exists\ \langle g \rangle = G/Z(G)$, тогда $\forall x,y \in G \setminus Z(G)$

$x = g^k z_1,\ y = g^l z_2,\ z_1, z_2 \in Z(G)$

$xy = (g^k z_1) g^l z_2 = z_1 g^{k+l} z_2 = z_1 (g^l g^k) z_2 = (z_1 g^k g^l) z_2$

$(z_2 g^l)(z_1 g^k) = g^l z_2 g^k z_1 = yx$

$xy = yx$ - !?

2024

Г1 - есть

Г2 - есть

Г4 - аналогично

Г5 - есть

Г3: Всё G делится на H и gH, а значит $gH = Hg$, значит $g \notin H$

$H \triangleleft G,\ \forall a \in G\ a^{-1}ha \in H,\ h \in H$

$h^{-1}a^{-1}ha = [h;a] \in H$.

Аналогично $[ah] \in H$.

$\exists\ [gh_1; gh_2] \in H$, т.е. $h_1^{-1}g^{-1}h_2^{-1}h_1 g h_2 \in H$

нужно просто выкинуть элементы и показать, что $[gh_2; gh_1] = [gh_1; gh_2]^{-1}$ ост в H.

2023 ориг

Г1: а) Проверяется по аксиомам

б) $\varphi(1,b) = x + b$

$ae = ea = a = \varphi(a,b)$

Ищём e: $\varphi_{a,b}(x) \cdot \varphi_{c,d}(x) = ax+b$

~~[illegible]~~

$a(cx+d)+b = ax+b$

$acx+ad+b = ax+b$

$cx+d = x$

$c(ax+b)+d = ax+b$

$acx+bc+d = ax+b$

$\begin{cases} c=1 \\ d=0 \end{cases}$ норм

$\varphi_{1,0}(x)$ - единица.

$= x$

$(x+b)+c = x$ — ищем обратный для $\varphi_{1,b}(x)$, $\exists$ он $\varphi_{1,c}(x)$

$b=-c$ Для $\varphi_{1,b}(x)$ обратный $\varphi_{1,-b}(x)$

Замкнутость по операции:

$\varphi(1,b)\,\varphi(1,c) = (x+c)+b = x+(c+b) = \varphi_{1,c+b}(x)$

Ответ: да

Г2: (246) меняет только чётные элементы между, а (1…6) в чётной степени меняет элементы одинаковой чётности, в н/ч - разной.

Значит никак не поменять одновременно 2 н/ч эл и 2 эл. разной чётности

Ответ: нет

Г4: $\varphi([a;b]) = \varphi(a^{-1}b^{-1}ab) = \varphi(a^{-1})\varphi(b^{-1})\varphi(a)\varphi(b) =$
$= \varphi(a^{-1})\varphi(a)\varphi(b^{-1})\varphi(b) = \varphi(e)\varphi(e_G) = e_H \Leftrightarrow$
$\forall [a;b] \in [G,G]$ $\varphi([a,b]) = e_H$, чтд

Г5: По т. Коши $\exists a$, что $ord(a) = p$ и $\exists b$, $ord(b) = q$, причём $a \neq b$. Тогда $|\langle a \rangle| = p$, $|\langle b \rangle| = q$, следовательно $G = \langle ab \rangle$, т.к G абелева.

все эл. различны и лежат в G

Т.к $a^p = e$ и $b^q = e$, то вроде верно, что $(ab)^{pq} = e$ (группа абелева), причём для $k < pq$ $(ab)^k \neq e$.

[illegible] это так: $k = pq - \varepsilon$ — это $\min k$.
$(ab)^{pq-\varepsilon} = e$
$e = (ab)^{\varepsilon}$, значит $k = \varepsilon$, тогда $pq \,\vdots\, 2$,
НУО $p = 2$,
тогда $a^2 = e$ и [illegible]

Всё ещё верно: просто $b^k \in \langle b \rangle$ считаем как b^k и ab^k (или $a^{-1}b^k$)

Г3:

(видимо продолжение на след листе)

(на этом)

$H = \{h \in G \mid hz \in A\} \neq \varnothing$ $\quad x = h_1 z \quad (h_1 = xz^{-1} \in G)$

$y = h_2 z \quad h_1, h_2 \in H$

$xy^{-1}z \in A \Leftrightarrow h_1 z z^{-1} h_2^{-1} z = h_1 h_2^{-1} z \Leftrightarrow h_1 h_2^{-1} \in H$

$\forall h_1, h_2 \in H \quad h_1 h_2^{-1} \in H$

Так как $y = h_2 z$, $y z^{-1} = h_2$

Г3

• ассоциативность наследуется из G $\quad z y^{-1} = h_2^{-1}$

$z y^{-1} z = h_2^{-1} z$, значит

$z \in A$ по условию

• Обратный эл. в H всегда есть.

$x z^{-1} y \in A$

$\quad \parallel$

$h_1 z z^{-1} h_2 z = h_1 h_2 z \in A \Rightarrow h_1 h_2 \in H.$

H – подгруппа G.

Кажется $H = Hz \subseteq A$ по определению

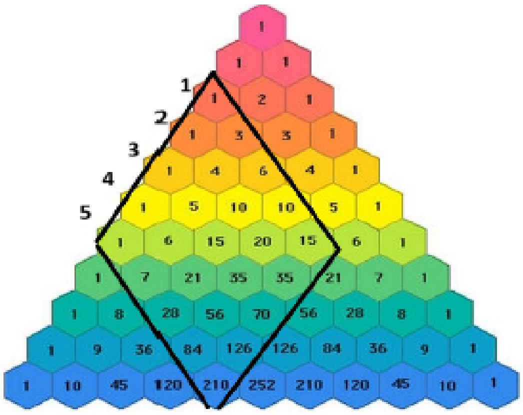
$A \subseteq H$: $\forall x \in A$.

$h := xz^{-1} \in G$.

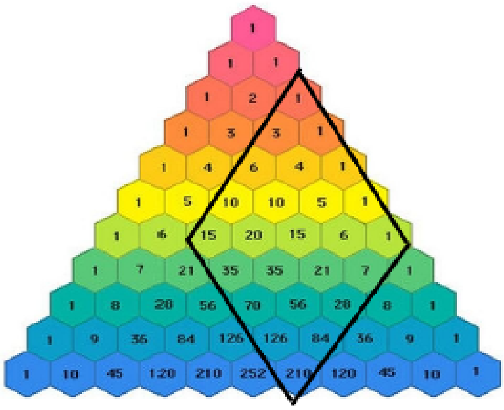
$hz = x z^{-1} z = x \in H \Rightarrow x \in Hz = H$.

2.M2

Для начала, определим - какую структуру представляет данная матрица на треугольнике Паскаля:



Нетрудно заметить, что вот такой наклонённый квадратик представляет собой нашу матрицу в зеркальном отображении, т. е., столбцы идут в обратном порядке.
На изображении n=4, m=3.
Что-бы расположить столбцы в нужном порядке, возьмём такой-же квадрат с правой стороны треугольника:



Столбцы матрицы идут налево и вниз, а строки направо и вниз. Заметим, что благодаря структуре треугольника Паскаля, если взять элемент матрицы $a_{i,j}$ и вычесть из него $a_{i-1,j}$, то получится элемент $a_{i,j-1}$.
Значит, если вычесть из некоторого столбца соседний предыдущий, то на месте каждого элемента столбца, окажется тот, который стоял над ним, а в верху окажется ноль.
Провернём такую операцию последовательно со всеми столбцами, кроме первого, начиная с последнего. Получим матрицу:

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ C_m^1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ C_{m+1}^2 & C_{m+1}^1 & C_{m+2}^1 & \dots & C_{m+n}^1 \\ C_{m+2}^3 & C_{m+2}^2 & C_{m+3}^2 & \dots & C_{m+n+1}^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ C_{m+n-1}^n & C_{m+n-1}^{n-1} & C_{m+n}^{n-1} & \dots & C_{m+2n-2}^{n-1} \end{vmatrix}$$

Если раскрыть её по первой строчке, то получим

$$\det(M_{n+1}) = \det(A) = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ C_{m+1}^1 & C_{m+2}^1 & \dots & C_{m+n}^1 \\ C_{m+2}^2 & C_{m+3}^2 & \dots & C_{m+n+1}^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ C_{m+n-1}^{n-1} & C_{m+n}^{n-1} & \dots & C_{m+2n-2}^{n-1} \end{vmatrix} = \det(M_n)$$

Далее рекурсивно, пока не дойдём до $\det(M_1) = |1| = 1 \Rightarrow \det(M_{n+1}) = 1^n = 1$

Ответ: 1