М1) 23.04.24

1 0
1 2 -1
0 1 1 -1
0 0 1 1 -1
0 0 1 1 -1
0 0 1 1 -1
0 0 1 1 -1
0 0 1 1
0
0
0
0

2) - 1)

3) $- \cancel{1} \cdot 2) \cdot \frac{1}{2}$

4) $-3) \cdot \frac{2}{3}$

1 -1 0 0
0 2 -1 0 0
0 0 $\frac{3}{2}$ -1 0 0
0 0 0 $\frac{5}{3}$ -1 0 0 0
0 0 0 0 $\frac{8}{5}$ -1 0 0
0 0 0 0 0 $\frac{13}{8}$ -1 0
0 $\frac{21}{13}$ -1
0 -1
0
0

-1
$\cancel{1}$ -1
$\cancel{0}$ 1

$1+^2$

5) $-4) \cdot \frac{3}{5}$ $\quad 1+\frac{3}{5}=\frac{8}{5}$

$$D_n = \overbrace{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}}^{n} = 1 \cdot D_{n-1} + \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}}_{D_{n-2}}$$

$$D_n = D_{n-1} + D_{n-2}$$

$$\det(A) = 1 \cdot \cancel{2} \cdot \frac{3}{\cancel{2}} \cdot \frac{\cancel{5}}{\cancel{3}} \cdot \frac{\cancel{8}}{\cancel{5}} \cdot \frac{\cancel{13}}{\cancel{8}} \cdot \frac{\cancel{21}}{\cancel{13}} \cdot \frac{\cancel{34}}{\cancel{21}} \cdot \frac{\cancel{55}}{\cancel{34}} \cdot \frac{\cancel{89}}{\cancel{55}} \cdot$$
7 8 9 10

$$\cdot \frac{\cancel{144}}{\cancel{89}} \cdot \frac{233}{\cancel{144}} = 233$$
11 12

Г1) $]G$ - гр., $M \subset G$; $K = \{g \in G : gM = M\}$

док. $K < G$

=> ~~1) $g = e$~~
~~2) $M = \{0\}$~~

нужно док: 1) $\exists e \in K$
2) K - замк. по опер
3) K замк по g^{-1}

1) $\ominus\ e \in G \Rightarrow eM = \{em : m \in M\} = \{m : m \in M\} = M$
$\Rightarrow eM = M \Rightarrow e \in K \Rightarrow K \neq \varnothing$

2) $\ominus\ g, h \in K : gM = M$ и $hM = M$

нужно показать, что $gh \in K : (gh)M = M$

$\ominus (gh)M : (gh)M = \{(gh)m : m \in M\}$, т.к.

выполняется асоц, то $(gh)m = g(hm) \Rightarrow$

$(gh)M = \{g(hm) : m \in M\} = g\{hm : m \in M\} = g(hM)$,

т.к. $h \in K$, то $hM = M \Rightarrow (gh)M = g(hM) = gM$

т.к. $g \in K$, то $gM = M \Rightarrow (gh)M = gM = M$

$\Rightarrow (gh)M = M$, $gh \in K$

3) $\ominus\ g \in K : gM = M$; нужно показ., что $g^{-1} \in K$ т.е.

$g^{-1}M = M \Rightarrow \ominus\ g^{-1}M = \{g^{-1}m : m \in M\}$

3.1) док. $g^{-1}M \subseteq M$: т.к. $gM = M$, то $\forall m' \in M\ \exists m \in M$:

$m' = gm$ (т.к. $gM = M$) $\Rightarrow g^{-1}m' = g^{-1}(gm) = (g^{-1}g)m = em = m$,

$m \in M \Rightarrow g^{-1}m' \in M \Rightarrow g^{-1}M \subseteq M$

3.2) док: $M \subseteq g^{-1}M$: $\ominus\ \forall m \in M$, т.к.

$gM = M \Rightarrow$ можем $\ominus\ g^{-1}m$, покажем,

что $m = g^{-1}m'$, $m' \in M$;

$]\ m' = gm \Rightarrow g^{-1}m' = g^{-1}(gm)$, $m' = gm \in gM = M$

$\Rightarrow m \in g^{-1}M$ и $M \subseteq g^{-1}M$

$\Rightarrow g^{-1}M = M \Rightarrow g^{-1} \in K$, $\forall g$

$\Rightarrow K < G$ - ч.т.д.

Г2) $]H < G$, $A = \lambda H$ - лек; $x, y, z \in A$

док: $xz^{-1}y \in A$

$\lambda H = A = \{\lambda h : h \in H\}$

$\lambda h = x, y, z$; $z = \lambda h_3 \Rightarrow z^{-1} = (\lambda h_3)^{-1} = \lambda^{-1} h_3^{-1}$

$xz^{-1}y = \lambda h_0 = \lambda h_1 z^{-1} \lambda h_2$

$\Rightarrow h_0 = \lambda h_1 h_2 z^{-1} = \lambda h_1 h_2 \lambda^{-1} h_3^{-1}$

$\Rightarrow h_0 = h_1 h_2 h_3^{-1}$, т.к. H - подгр. G,

$h_{1,2,3}^{-1} \in H$ и H - замк по умнож.,

то $\exists h_0 : h_0 = h_1 \cdot h_2 \cdot h_3^{-1} \Rightarrow \exists \lambda h_0 \in A \Rightarrow$

$\Rightarrow xz^{-1}y \in A$

Г3) G: $f : G \to G$ по ф-ле $f(x) = x^2$ - гомо. мурф.

док: G - абелева $\Rightarrow f$ - коммутативно

$\ominus\ f(ab) = (ab)^2 = abba$
$f(a)f(b) = a^2b^2 = f(ab) = (ab)^2$ ($aabb$) $\Big] \Rightarrow abab = aabb$

&

$abab = aabb$

$a^{-1}abab = ebab = bab$

$a^{-1}aabb = eabb = abb$

$\Rightarrow bab = abb$ (1)

$b^{-1}bab = b^{-1}abb \Rightarrow abb^{-1} = (b^{-1}abb)b^{-1}$

$\Rightarrow ab = b^{-1}abb$

$\Rightarrow a = b^{-1}ab \Rightarrow ba = bb^{-1}ab = ab$

$\Rightarrow ba = ab$

$\Rightarrow abab = aabb \Leftrightarrow a(ba)b = a(ab)b$

- ч.т.д.

6.5

б) $D_n = \begin{vmatrix} 6 & 3 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 6 & 3 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 6 & 3 & \dots & & & \\ 0 & 0 & 3 & 6 & 3 & \dots & 3 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & \dots & & & & 3 & 6 \end{vmatrix} = 6 \cdot D_{n-1} - 3 \begin{vmatrix} 3 & 3 & 0 & \dots \\ 0 & 6 & 3 & \dots \\ \dots & & & \\ & & & 3 \\ & & & 6 \end{vmatrix}$

$\underbrace{= 6D_{n-1} - 9D_{n-2}}$

$t^2 - 6t + 9 = 0$

$t_1 = t_2 = 3$

7.1

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ опр. методом Ал. доп..

$\Delta = 1$

$\boxed{\text{алг. нахожд. обратной:}}$

I $A \cdot A^{+} = E \cdot A \cdot A^{+} \rightarrow (A|E) \sim (E|A^{-1})$

эл. преобр. (метод Гаусса)

$$\begin{array}{c} \\ 1) \\ 2) \\ 3) \\ 4) \end{array} \begin{array}{c} A \qquad\quad E \\ \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \end{array}$$

$\Downarrow \qquad \Downarrow$

$E \qquad A^{-1}$

по строкам / по столбцам

лучше

2) $\cancel{+}$ 4) $\cdot(-2)$ 1, 2, 3 − 4

$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$ $\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & -3 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$

1, 2 − 3

$\left(\begin{array}{cccc|cccc} -2 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ -3 & -1 & -1 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$

1 − 2

$\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & -2 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ -3 & -1 & -1 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$

2 + 3

$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & -2 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$

1 + 4

$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$

II A, A^{-1} для $\forall\ a^{-1}_{ij} = \dfrac{A^{T}_{ij}}{|A|}$

1) A^T, $\det(A)$

2) для $\forall\ a_{ij}$ ищем A_{ij}

$A^{-1} = \begin{pmatrix} A_{11}/|A| & A_{12}/|A| & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$

$A = \begin{pmatrix} 2 & -7 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}$

$\det(A) = 12 - 7 = 5$

$A^T = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -7 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 6/5 & 1/5 \\ 7/5 & 2/5 \end{pmatrix}$

$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot 6 = 6$

$A_{12} = 7$

$A_{21} = 1$

$A_{22} = 2$

$f(x) \rightarrow a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0 \quad \{x^3, x^2, x, 1\}$

$f(x) \rightarrow a_3x^3 + ib_3x^3 + a_2x^2 + ib_2x^2 + a_1x + ib_1x + a_0 + ib_0$

$\{x^3, ix^3, x^2, ix^2, x, ix, 1, i\}$

линейный оператор:

$\varphi: L_1 \rightarrow L_2$

1) $\forall x, y \in L_1 \quad \varphi(\bar{x} + \bar{y}) = \varphi(\bar{x}) + \varphi(\bar{y})$

2) $\forall \lambda \in K \quad \varphi(\lambda\bar{x}) = \lambda\varphi(\bar{x})$

в матр. виде $A \cdot \bar{x} = \bar{x}'$

матр. л. о. в базисе $\{e_n\}$
лин. опер.

$(A\bar{e}_1, A\bar{e}_2, \dots A\bar{e}_n) = [A]_e$

<u>закон преобр. лин. оп.:</u>

$[A_e]\ \{e_n\} \rightarrow \{e'_n\}\ [A]_{e'}$

$e'_n = e_n \cdot T_{e \to e'} \mid \cdot e^{-1}_n$

$e^{-1}_n e'_n = T_{e \to e'}$; $[A]_{e'} = T^{-1}_{e \to e'} [A]_e T_{e \to e'}$

Г4) отобр. $f: S_{17} \to S_{17}$ по ф-ле $f(\sigma) = \sigma^{55}$ сюръек?

S_{17} - симметр. группа порядка 17 - мн-во всех перестановок мн-ва из 17 эл.
перестановка - биективное отобр. на себя.

кол-во эл в S_{17}: $|S_{17}| = 17!$

данное отобр. ставит в соотв перестанов. σ^{55}, т.е. мы применяем σ 55 раз

\# $\sigma(1) = 2$; $\sigma(2) = 3$, $\sigma(3) = 1 \Rightarrow \sigma^2 = \sigma \circ \sigma$

$\sigma^2(1) = \sigma(\sigma(1)) = \sigma(2) = 3$ и т.д. $\sigma^3(1) = 1$

в данном случае для цикла длина 3 $(1 2 3)$ $\sigma^3 = id$ - тождеств. перест.

у нас будет сюр, если для $\forall \tau \in S_{17}$ $\exists \sigma \in S_{17}: f(\sigma) = \tau$, т.е. $\sigma^{55} = \tau$

~~т.е. S_{17} замкнута относительно возведения в 55 степень~~

$\sigma^{55} = id$, если $k \mid 55$, где k - длина цикла
иначе $\sigma^{55} = \sigma^{55 \bmod k}$

порядок σ перестановки - это НОК всех её циклов

$55 = 11 \cdot 5$

$\exists$ возможные k: $k \in \{1, \dots 17\} \mid 55$
$\Rightarrow k = 1, 5, 11$ только циклы длины
$\Rightarrow \sigma^{55} = id$, если $k \in \{1, 5, 11\}$

образ f - мн-во всех σ^{55}, чтобы f - сюр, $Im(f) = S_{17}$, т.е. $\forall \tau \in S_{17}: \tau = \sigma^{55}$ должен быть представим как чьх-то 55 ст.

$\exists k \in \{2, 3 \dots\} \setminus \{1, 5, 11\}$

$k = 2$: $\sigma = (1 2)$ $55 \equiv_2 1$
$\Rightarrow \sigma^{55} = \sigma^1 = (12)$

~~и т.д.~~

$k = 3$ $\sigma = (1 2 3)$ $\sigma^{55} = \sigma^1 = (123$

$k = 4$ $\sigma(1234)$ $55 \equiv_4 = 3$

• $\exists$ $k = 7$: $\tau^7 = id$, $\sigma^{55} = \tau$; $5 \equiv_7 6 \Rightarrow \sigma^6 = \tau$, но τ не 6 ст. в цикле с $k = 7$ - $\unicode{x21AF}$ $\longrightarrow$

уточнение
$\sigma^{55} = \sigma^{55 \bmod k} = \sigma^6 = \sigma^{-1} = (1 7 6 5 4 3 2)$,
а не $\tau = \tau^7 = (1 2 3 4 5 6 7) = id \Rightarrow \unicode{x21AF}$

τ		τ^{-1}	
$1 \to 2$			
$2 \to 3$	$\Rightarrow$	$2 \to 1$	и т.д.
....		$3 \to 2$	
$7 \to 1$		....	$\Rightarrow f$ - не сюръекц.
		$1 \to 7$	

09.07.2024

М1) $A \in M(\mathbb{R})$, $\sigma \in S_n$, сначала столбцы $\to \sigma$, затем строки $\to$ как изменится $\det(A)$

$\exists A = (a_{ij}) \xrightarrow{\sigma(\text{столбцов})} B = (b_{ij})$,

где $b_{ij} = a_{i\sigma^{-1}(j)}$

теперь $B = (b_{ij}) \xrightarrow{\sigma(\text{строк})} C(c_{ij})$,

где $c_{ij} = b_{\sigma^{-1}(i)j} = a_{\sigma^{-1}(i)\sigma^{-1}(j)}$

\# $\det(A) = \sum\limits_{\sigma \in S_n} sign(\sigma) \cdot a_{1\sigma(1)} \cdot a_{2\sigma(2)} \cdot \ldots \cdot a_{n\sigma(n)}$
$sign(\sigma) = (-1)^{I(\sigma)}$

$\det(A) = \sum\limits_{\sigma \in S_n} sign(\sigma) \prod\limits_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)}$

$\det(C) = \sum\limits_{\sigma \in S_n} sign(\sigma) \prod\limits_{i=1}^{n} c_{i,\sigma(i)} = \sum\limits_{\sigma \in S_n} sign(\sigma) \prod\limits_{i=1}^{n}$

$a_{\sigma^{-1}(i)\sigma^{-1}(\sigma(i))}$ $\Rightarrow \det(A) = \det(C)$
$a_{\sigma^{-1}(i),i}$ - хуйня.

вариант лучше:
$\exists$ матр. эл. преобр. $E^{i,\sigma(i)}$ - перестановка σ столбцов
$\Rightarrow \exists B = A \cdot E^{i,\sigma(i)} \Rightarrow \det(B) = \det(AE^{i,\sigma(i)}) =$
$= \det(A) \cdot \det(E^{i,\sigma(i)}) = \det(A) \cdot sign(\sigma)$

теперь $\exists$ матр. эл преобр. $E^{i,\sigma(i)}$ - перестановка σ строк
$\Rightarrow \exists C = E^{i,\sigma(i)} B \Rightarrow \det(C) = \det(BE^{i,\sigma(i)}) =$
$= \det(B) \det(E^{i,\sigma(i)}) = \det(A) \cdot sign(\sigma) \cdot sign(\sigma)$
$= \det(A) \cdot sign^2(\sigma)$, где $sign(\sigma) = \pm 1 \Rightarrow sign^2(\sigma) = 1$
$\Rightarrow \det(C) = \det(A) \Rightarrow \det(A)$ не изменился.

Г1) $\forall$ подгр. цикл. гр. – циклич.

Θ $H_k < G=\langle a\rangle$ для каждого $k \in \mathbb{Z}$:

1) $K=0$, $H_0 = \langle a^0\rangle = \langle e\rangle = \{e\}$

$K=1$, $H_1 = \langle a^1\rangle = \langle a\rangle = G$

$K=2$, $H_2 = \langle a^2\rangle = \{\ldots, a^{-4}, a^{-2}, a^0, a^2, a^4 \ldots\}$

$k=-1$, $H_{-1} = \langle a^{-1}\rangle = \{\ldots a^2, a^1, a^0, a^{-1}, a^{-2}, \ldots\}$

$H_k = \langle a^k\rangle$, $K \in \mathbb{Z} \Rightarrow H_k$ – ∞ много

2) док, ~~что все~~ H_k различны:

очевидно, что H_k и H_{-k} совпадают, т.к. $H_k = \langle a^k\rangle$, $H_{-k} = \langle a^{-k}\rangle$ – т.к. цикл. порожд. эл. равна гр. порожд. его обратным.

$\Rightarrow$ Θ $K \geq 0$ – докажем, что они различны.

] $H_k \subseteq H_m$, $k, m > 0$, $k \neq m$

если $a^k \in H_m = \langle a^m\rangle$, то $a^k = (a^m)^s = a^{ms} \Rightarrow$

$\Rightarrow K = mS$

если $m < K$ ~~или~~, то $s = \frac{k}{m}$, но $s \in \mathbb{Z}$

для каждого $k \geq 0$ $H_k = \{a^{kn} : n \in \mathbb{Z}\}$ – т.е. эл. с шагом K и все подгр. различны, т.к. a^k не выразить через a^m с другим шагом, если $K \neq m$ – ч.т.д.

Г2)] $H < G$, $A = \alpha H$, $x, y \in A$

$x^{-1}y \in A$, док, что $A = H$

$\alpha H = A = \{\alpha h ; h \in H\} \Rightarrow$ ~~[illegible]~~

$\alpha h_1 = x \Rightarrow x^{-1} = (\alpha h_1)^{-1} = \alpha^{-1} h_1^{-1}$ – т.к. H замкн. отн. $\wedge(-1)$

$\alpha h_2 = y$

$\alpha h_0 = x^{-1}y = x^{-1}\alpha h_2 \Rightarrow h_0 = x^{-1}h_2 = \alpha^{-1}h_1^{-1}h_2 \mid \cdot \alpha$

$\Rightarrow \alpha h_0 = \alpha\alpha^{-1}h_1^{-1}h_2 = e h_1^{-1}h_2$

#

т.к. H – подгр, $\Rightarrow$ замкн. $\Rightarrow \exists h' : h' = h_1^{-1}h_2$

т.к. $eh' = \alpha h_0 \Rightarrow eh' \in A \Rightarrow \alpha = e$

$x^{-1}y = h_1^{-1}h_2 \in H$ – т.к. H – замк.

$x^{-1}y \in A = \alpha H \Rightarrow h_1^{-1}h_2 \in \alpha H \Rightarrow h_1^{-1}h_2 = \alpha h_0$, $h_0 \in H$

$\alpha = h_1^{-1}h_2h_0^{-1} \in H \Rightarrow \alpha \in H$

$\Rightarrow \alpha H = A = \{\alpha h : \alpha, h \in H\} = H$ – т.к. H – замк. но при этом $\alpha H = A = H$ строго, т.к. смеж. классы либо $=$ либо $\cap$

Г3)] $\varphi : G \to H$ – гомо гр. : $Im(G) = H$,

док., что $\varphi([G,G]) = [H,H]$

докажем: 1) $f([G,G]) \subseteq [H,H]$

2) $[H,H] \subseteq f([G,G])$

1) Θ $g \in [G,G]$: $g = [x_1,y_1]\cdot[x_2,y_2]\cdots[x_k,y_k]$,

$x_iy_i = x_iy_ix_i^{-1}y_i^{-1}$

$f(g) = f([x_1,y_1]\ldots[x_k,y_k]) = f([x_1,y_1])\cdot\ldots\cdot f([x_k,y_k])$

$f([x_i,y_i]) = f(x_iy_ix_i^{-1}y_i^{-1}) = f(x_i)f(y_i)f(x_i^{-1})f(y_i^{-1}) =$

$= f(x_i)f(y_i)f(x_i)^{-1}f(y_i)^{-1} = [f(x_i), f(y_i)]$ – коммут. в H

$\Rightarrow f(g) = [f(x_1), f(y_1)]\ldots[f(x_k), f(y_k)]$

$[H,H]$ – порождена всеми коммут. $[h,h']$, $h, h' \in H$

$\Rightarrow f(g) \in [H,H] \Rightarrow f([G,G]) \subseteq [H,H]$

2) f – сюр. (по усл.) $\Rightarrow \forall h^{\in H} \exists g^{\in G} : f(g) = h$

$\Rightarrow \Theta$ $[h_1,h_2] \in H = h_1h_2h_1^{-1}h_2^{-1}$

$\Rightarrow \exists g_1, g_2 : f(g_1) = h_1$ и $f(g_2) = h_2$

тогда $f(\underbrace{g_1g_2g_1^{-1}g_2^{-1}}_{[g_1,g_2] \in [G,G]}) = f(g_1)f(g_2)f(g_1^{-1})f(g_2^{-1}) = h_1h_2h_1^{-1}h_2^{-1} = [h_1,h_2]$

$\Rightarrow f([g_1,g_2]) = [h_1,h_2]$

$\Rightarrow \forall [h_1,h_2] \in H$ лежит в $f([G,G])$

] $K \in [H,H]$, $k = [h_1,h_1']\ldots[h_m,h_m']$

для каждого $[h_i,h_i']$ Θ $g_i, g_i' \in G$: $f(g_i) = h_i$, $f(g_i') = h_i'$

и $f([g_i,g_i']) = [h_i,h_i']$, тогда

$f([g_1,g_1']\cdot\ldots\cdot[g_m,g_m']) = [h_1,h_1']\ldots[h_m,h_m'] = k$

$[g_1,g_1']\ldots[g_m,g_m'] \in [G,G] \Rightarrow K \in f([G,G])$

$\Rightarrow [H,H] \subseteq f([G,G])$

$\Rightarrow f([G,G]) = [H,H]$

Г4)] $\sigma \in S_n$, $ord(\sigma) = 4$, а r – кол-во чис, кот. σ оставл. на месте; док: $n-r$ – четно

~~$r \equiv n \pmod 4$~~

~~$n - r \equiv 0 \pmod 4 \Rightarrow n - r \vdots 4 \Rightarrow n-r \vdots 2$~~

?

$ord(\sigma)=4$ – $\min k: \sigma^k = id$ (поряд. перест.)

r – кол-во i; $\sigma(i)=i$

- перест. раскл. на циклы
  $(i_1, i_2 \dots i_k)$, $\sigma(i_1)=i_2 \dots \sigma(i_k)=i_1$
- порядок цикла длины $k = k$, т.к. $\sigma^k(i_1)=i_1$
- порядок ~~всей~~ ~~цикл~~ перестановки равен НОК длин всех её циклов
  $\Rightarrow$ у нас $k \in \{1,2,4\}$
- сумма длин всех циклов $= n$.

r – кол-во фикс. точ. или же циклов длины 1.

Пусть r – цикл. 1

m – циклы 2

k – циклы 4

$n = r\cdot 1 + m\cdot 2 + k \cdot 4$

при этом $m \cup k \neq 0$, т.к. если бы ~~были~~ только циклы длины 1, то $ord(\sigma)=1$

$\Rightarrow m+k \geq 1$

$\Rightarrow n-r = 2m+4k \Rightarrow$ очевидно $n-r$ – чётно

22.03.2024

М1) $A \in M_{101}(\mathbb{R})$: $a_{i,j} = -a_{j,i}$

симметр. отн. гл. диаг.

гл. диаг $=0$ ∀ a

$$\begin{array}{c|cccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \hline 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 1 & & & \\ 3 & -1 & -1 & 0 & & & \\ 4 & -1 & & & 0 & & \\ 5 & -1 & & & & 0 & \\ 6 & -1 & & & & & 0 \end{array}$$

$\Rightarrow A^T = -A$ – по св-вам косо-симметр. матр.

$\Rightarrow \det(A^T) = \det(-A)$

известно, что $\det(A^T)=\det(A)$

$\det(A) = \det(-A) = (-1)^n(\det(A)) = (-1)^{101}\det(A)$

$\Rightarrow \det(A) = -\det(A) \Rightarrow \det(A)=0$

М2)

$$A = \begin{bmatrix} x & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & y \\ 0 & x & 0 & & & y & 0 \\ 0 & 0 & x & & \cdot & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & x & 0 & & \\ & & y & 0 & \cdot & & \\ & y & 0 & & & \cdot & 0 \\ y & 0 & & & & 0 & x \end{bmatrix}$$

$\det(A_n) = x \cdot M_{11} - y \cdot M_{1,2n} =$

$= x($

Э $n=1$ $\begin{matrix} x & y \\ y & x \end{matrix}$ $\det(A_2) = x^2 - y^2$

$n=2$ $\begin{bmatrix} x & 0 & 0 & y \\ 0 & x & y & 0 \\ 0 & y & x & 0 \\ y & 0 & 0 & x \end{bmatrix}$ $\det(A_4) = xM_{11} - yM_{14} =$

~~$x($~~

$M_{11} = \begin{vmatrix} x & y & 0 \\ y & x & 0 \\ 0 & 0 & x \end{vmatrix}$ $\begin{matrix} x & 0 \\ 0 & x \end{matrix}$ $\begin{matrix} y & 0 \\ 0 & x \end{matrix}$

$\det(M_{11}) = x \cdot x^2 - y \cdot yx = x^3 - xy^2$

M_{14} $\begin{vmatrix} 0 & 0 & y \\ x & y & 0 \\ y & x & 0 \end{vmatrix}$ $\begin{matrix} 0 & y \\ x & 0 \end{matrix}$ $\begin{matrix} 0 & y \\ y & 0 \end{matrix}$

$\det(M_{14}) = +x \cdot xy - yyy = +x^2y - y^3$

$\det(A) = x(x^3 - xy^2) - y(x^2y - y^3) =$

$= x^4 - x^2y^2 - x^2y^2 + y^4 = (x^2-y^2)^2$

предположим $\det(A_{2n}) = (x^2-y^2)^n$

Пусть $A = xI + yE^{i,2n+1-i}$, где I – ед. матр

$E^{i,2n+1-i}$ – матр – перестанов

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Г1) Пусть G – мн-во всех вещ. чисел, отличных от -1; док: G – гр, относительно оп. $a*b = ab+a+b$

1) замк – очев (показать, что $a*b \neq -1$)

2) $(a*b)*c = (ab+a+b)c + ab+a+b+c =$

$= abc + ac + bc + ab + a + b + c$

$a*(b*c) = $ – очев – ассоц. – да.

3) ~~$a*e=a$~~

~~$a*1 = a\cdot 1 + a + 1 \Rightarrow a = a+a+1 \Rightarrow a=-1$~~

4) ~~$a*a^{-1} = aa^{-1} + a + a^{-1} = e + a + a^{-1} = e$~~

3) $a*e = a \Rightarrow ae + a + e = a \Rightarrow e(a+1)=0$, $a \neq -1$

$\Rightarrow e = 0$ проверим $a*0 = a\cdot 0 + a + 0 = a$ – да

4) для кажд. $a \in G$ $\exists b \in G$: $a*b = e = 0$

$\Rightarrow ab + a + b = 0 \Rightarrow b = -\frac{a}{a+1}$, проверим, что $b \neq -1$: $\frac{-a}{a+1} = -1 \Rightarrow a = a+1 \Rightarrow 0 = 1 \Rightarrow$ ↯

$\Rightarrow b \neq -1$ – ч.т.д.

Г2)] G - гр. ; H_1 и H_2 – её норм. подгр.
: $H_1 \cap H_2 = \{e\}$; $\forall x \in H_1$ и $\forall y \in H_2$ док: $xy = yx$

$$H_1 = gH_1g^{-1} ; H_2 = gH_2g^{-1}$$

Ɵ $[x,y] = xyx^{-1}y^{-1}$

если $xy = yx$, то $[x,y] = xyx^{-1}y^{-1} = yxx^{-1}y^{-1} = yy^{-1} = e$

нужно док, что $[x,y] = e$, для $\forall x,y$

для этого докажем, что $\begin{cases} [x,y] \in H_1 \\ [x,y] \in H_2 \end{cases} \Rightarrow$

~~Отлично~~

т.к. H_2 – норм. подгр. G, то $\forall g \in G$ $gyg^{-1} \in H_2$,
] $g = x$, Ɵ xyx^{-1}

$y \in H_2$; $xyx^{-1} \in H_2$; $[x,y] = xyx^{-1}y^{-1} = \underset{\Cap\, H_2}{(xyx^{-1})}\underset{\Cap\, H_2}{y^{-1}}$

т.к. H_2 - замкнута
$\Rightarrow [x,y] \in H_2$

$[x,y] = x(yx^{-1}y^{-1})$, Ɵ $yx^{-1}y^{-1} = y(x^{-1}y^{-1})$:

$x^{-1} \in H_1$,] $g = y$, тогда yxy^{-1} - сопряжение x эл y и $yH_1y^{-1} = H$

$\Rightarrow \begin{cases} x \in H_1 \\ yx^{-1}y^{-1} \in H_1 \end{cases} \Rightarrow xyx^{-1}y^{-1} \in H_1$
$\qquad\qquad \| $
$\qquad [x,y] \Rightarrow \in H_1$

$\Rightarrow \begin{cases} [x,y] \in H_1 \\ [x,y] \in H_2 \end{cases} \Rightarrow \in H_1 \cap H_2 = \{e\}$

$\Rightarrow [x,y] = e \Rightarrow xyx^{-1}y^{-1} = e$

$\Rightarrow$ $x(xyx^{-1}y^{-1})y = xey$ – ч.т.д.
$(xx)yx^{-1}y^{-1}y = xy$

Г3)] $H < G$, $(G:H) = 2$, док: $[G,G] < H$

по т. Лагранжа: $|G| = |H| \cdot (G:H) = 2|H|$
из $(G:H) = 2 \Rightarrow G$ делится на 2 лев. смеж. кл. и 2 пр. смеж. кл.
левые: H ; aH, $a \in G \setminus H$
прав: H ; Ha
$gH = Hg$, $\forall g \in G$: если $g \in H$, то $gH = H = Hg$

если $g \notin H$, то $gH = aH$; $Hg = Ha \Rightarrow aH = Ha$
$H \cup aH = G$
$\Rightarrow H \triangleleft G$
норм. подгр.

$\Rightarrow$ фактор гр. G/H состоит из H и aH
$|G/H| = 2$ $\sim \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ и коммутативна ⇑

] $G/H = \{H, aH\}$, тогда
$H \cdot H = H$
$H \cdot aH = aH$
$aH \cdot H = aH$
$aH \cdot aH = a^2H = H$
$aH \cdot H = H \cdot aH \Rightarrow G/H$ - коммут.

$[G,G]$ – min норм. подгр. G ; фактор гр. $G/[G,G]$ - коммут.

• если G/H - коммут., то $[G,G] < H$
$\forall x,y \in G$; $[x,y] = xyx^{-1}y^{-1}$
$\Rightarrow xH\,yH = xyH$
$yH\,xH = yxH$, т.к. G/H - коммут, то

$xyH = yxH \Rightarrow xy(yx)^{-1} = xyx^{-1}y^{-1} \in H$,
т.е. $[x,y] \in H$

$[G,G]$ - порождена всеми $[x,y]$, $x,y \in G$
$[x,y] \in H$ - подгр. замк. отн. умнож. и обращ.
$\Rightarrow [G,G] < H$

Г4) $f: S_{19} \to S_{19}$ по ф-ле $f(\sigma) = \sigma^{103}$

а) f - гомо. групп? $|S_{19}| = 19!$
Ɵ σ и τ
$f(\sigma \circ \tau) = (\sigma \circ \tau)^{103} = \underbrace{(\sigma \circ \tau)\dots}_{103\text{ раз}}$
$\sigma^{103} \circ \tau^{103} = \underset{103}{(\sigma \circ \sigma \dots)}\underset{103}{(\tau \circ \tau \dots)}$

не совпадают т.к. σ и τ не коммутируют, т.к. S_{19} - не абелева гр.

Ɵ $\sigma = (123)$
$\tau = (234)$
$\sigma \circ \tau = (123) \circ (234) = (1234)$
$(\sigma \circ \tau)^{103} = (1234)^{103} = (1234)^3 = (1342)$
$\sigma^{103} = (123)^{103} = (123)$
$\tau^{103} = (234)^{103} = (234) \Rightarrow \sigma^{103} \circ \tau^{103} = (1234)$
$\neq$

б) f - биекция - ?

инъекция:

$f(\sigma)=\sigma^{103}$

если $f(\sigma)=f(\tau)$, то $\sigma^{103}=\tau^{103}$

по теор. Лагранж. $|S_{19}|=19!$ $\vdots$ $ord(\sigma), \sigma\in S_{19}$

$ord(\sigma)$ - НОК длин всех циклов (≤ 19)

$\sigma^{k}=id$, если k кратно $ord(\sigma)$

если 103 не кратно $ord(\sigma)$, $\sigma^{103}\neq id$

1→2
2→3
3→4
4→5
5→1

$\sigma=(12345)$ $\sigma^{103}=(12345)^{103}=\sigma^3=(14253)$

$\tau=(13524)$ $\tau^{103}=(13524)=\sigma^3=(12453)$

1 2 3 4 5

1→2→3→4→5

$\sigma\neq\tau$, но $\sigma^{103}=\tau^{103}$

=> f не инъекция

сюръекц:

$\exists\forall\rho\in S_{19}$ как σ^{103}

$ord(\sigma)\,|\,19!$; $103\in\mathbb{P}$

если ρ - цикл длины 5, $ord(\rho)=5$

$103\equiv_5 3$, $\sigma^{103}=\rho$

-> не биекция

как работает $\sigma^3\to\sigma^3$

$\sigma=(123)$: $\sigma(1)=2$ $\sigma(2)=3$ $\sigma(3)=1$

$\sigma^3=\sigma\circ\sigma\circ\sigma$ т.е. $\sigma^3(1)=\sigma(\sigma(\sigma(1)))=$

$=\sigma(\sigma(2))=\sigma(3)=1=id$

Г5) док, что для неабелевой гр. G группа $G/Z(G)$ - не циклична

$Z(G)=\{z\in G: zg=gz$ для всех $g\in G\}$

нужно док, что $\forall\, g\mathbb{Z}(G)\in G/\mathbb{Z}(G)$: что он порождает $G/\mathbb{Z}(G)$

- $Z(G)$ - нормальна, т.к. $\forall g\in G$ и $z\in\mathbb{Z}(G)$ $gzg^{-1}\in Z(G)$

$g\mathbb{Z}(G)=\{gz: z\in\mathbb{Z}(G)\}\in G/\mathbb{Z}(G)$ - смежные класс

операция в $G/\mathbb{Z}(G)$: $(g\mathbb{Z}(G))(h\mathbb{Z}(G))=gh\,\mathbb{Z}(G)$

т.к. G - не абелева, то $\exists a,b$: $ab\neq ba$

$\Rightarrow [a,b]=aba^{-1}b^{-1}\neq e$

от противного:

I $G/\mathbb{Z}(G)$ - циклич => $\exists g\in G$: $G/\mathbb{Z}(G)=$

$=\langle g\mathbb{Z}(G)\rangle$, т.е. $\forall x\mathbb{Z}(G)\in G/\mathbb{Z}(G)$

представим как $x\mathbb{Z}(G)=(g\mathbb{Z}(G))^k=$

$=g^k\mathbb{Z}(G)$, $k\in\mathbb{N}$

в циклич. гр. все эл. коммутируют =>

$xy\mathbb{Z}(G)=yx\mathbb{Z}(G)$ или же $\cancel{xy(xy)^{-1}}\mathbb{Z}$

$=\mathbb{Z}xy$ $xy(yx)^{-1}=xyx^{-1}y^{-1}=[x,y]\in\mathbb{Z}(G)$

= ~~т.к.~~ ~~если~~ $\exists\, a,b\in G: ab\neq ba$, т.е.

$[a,b]\neq e$

если $G/\mathbb{Z}(G)$ - цикл, то

$a\mathbb{Z}(G)\,b\mathbb{Z}(G)=ab\mathbb{Z}(G)$

$b\mathbb{Z}(G)\cdot a\mathbb{Z}(G)=ba\mathbb{Z}(G)$

эл. в $G/\mathbb{Z}(G)$ коммутируют => $ab\mathbb{Z}(G)=ba\mathbb{Z}(G)$ => $[a,b]=aba^{-1}b^{-1}\in\mathbb{Z}(G)$ для $\forall a,b$

=> $[G,G]<\mathbb{Z}(G)$, т.к $[G,G]$ порождена

но $G/[G,G]$ - всегда абелева

=> $G/\mathbb{Z}(G)$ - абелева — ↯ с условием

29.03.2023

Г4) коммутант гр. G содержится все центре, док: $[a,bc]=[a,b]\cdot[a,c]$ для $\forall a,b,c\in G$

$[a,bc]=a(bc)a^{-1}(bc)^{-1}=abca^{-1}c^{-1}b^{-1}$

$[a,b]=aba^{-1}b^{-1}$

$[a,c]=aca^{-1}c^{-1}$

по св-вам коммут: $[a,b]g=g[a,b]$

т.е. $ab=ba[a,b]$

$ac=ca[a,c]$

Θ $[a,bc]=a(bc)a^{-1}(c^{-1}b^{-1})=\Big\{(cb)^{-1}=(cb[b,c])^{-1}$

= см х.аі

14.03.2023

М1) $A\in M_n(K)$ - транспон. отн. побоч. диаг.

как изм. опр.

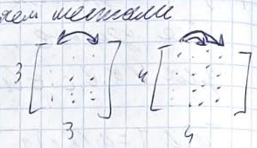
a_{ij}

	1	2	3
1	·	x_{12}	x_{31}
2	x_{21}		x_{23}
3	x_{13}	x_{32}	·

3+1-1
3+1-2
3 2

$a_{ij}\to a_{ji}$ $a_{ij}\to a_{n+1-j,\,n+1-i}$

? $\det(A^T)$ при транспонировании такого вида мы меняем местами все стр. и столб.



заметим, что

будет $\left[\frac{n}{2}\right]$ перест. строк $\Rightarrow \det(A') = (-1)^{\left[\frac{n}{2}\right]} \det(A)$,

где A' – матр. с перест. столб.

$\Rightarrow \det(A^T) = \left((-1)^{\left[\frac{n}{2}\right]}\right)^2 \det(A) = \det(A)$

ещё перест. строчек.

М2) см. реш. на лист.

$$\begin{matrix} a & b & c \\ d & e & f \\ z & x & 0 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} c & b & a \\ f & e & d \\ 0 & x & z \\ 0 & x & z \\ f & e & d \\ c & b & a \end{matrix}$$

Г1) $\exists$ ~~ф~~ $\varphi_{a,b}(x) = ax+b$; $G = \{\varphi_{a,b} : a,b \in \mathbb{R}, a \neq 0\}$

а) гр.; оп.: о 1) ~~$\varphi(\varphi(x)) = a(ax+b)+b = a^2x+ab+b$~~

1) Θ $\varphi_{a,b}$ $\varphi_{c,d} \in G$, $a, c \neq 0$

$(\varphi_{ab} \circ \varphi_{cd})(x) = \varphi_{ab}(\varphi_{cd}(x)) = a(cx+d)+b =$

$= acx+ad+b = \varphi_{ac,\,ad+b}$, где $ac \neq 0$, $ad+b \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \varphi_{ac,\,ab+b} \in G \Rightarrow G$ - замк.

2) $(\varphi_{ab} \circ (\varphi_{cd} \circ \varphi_{ef}))(x) = ((\varphi_{ab} \circ \varphi_{cd}) \circ \varphi_{ef})(x)$ – по св-ву ф-ций $\Rightarrow$ ассоц.

3) $\varphi_{ab} \circ e = \varphi_{ab}$, $\exists\ \varphi_{cd} = e$ (из 1)

$\Rightarrow acx+ad+b = ax+b$

$\Rightarrow acx+ad = ax$

$ac = a \Rightarrow c = 1$

$ad = 0 \Rightarrow d = 0$, вс[?]а $\Rightarrow$ [?]

аналогично для $e \circ \varphi_{ab} = \varphi_{cd} \circ \varphi_{ab}$

4) для φ_{ab} $\exists\ \varphi_{cd}$: $\varphi_{ab} \circ \varphi_{cd} = \varphi_{1,0}$

$\varphi_{cd} \circ \varphi_{ab} = \varphi_{1,0}$

$\Rightarrow acx+ad+b = x$

$\Rightarrow ac = 1$, $c = \frac{1}{a}$, т.к. $a \neq 0$

$d = -\frac{b}{a}$

$\Rightarrow \varphi_{c,d} = \varphi_{\frac{1}{a},\,-\frac{b}{a}} \in G$, т.к. $\frac{1}{a} \neq 0$

$\Rightarrow G$ - гр.

б) $H = \{\varphi_{1,b} : b \in \mathbb{R}\}$ - подгр. G?

1) $H \neq \emptyset$

2) замк. по $\circ$

3) замк. по обр. эл.

1) $\varphi_{1,0}(x) = x \in H$, $(b=0)$ - нейтр. эл. G

$H \neq \emptyset$

2) $(\varphi_{1b} \circ \varphi_{1c})(x) = x+c+b = x+(c+b)$

это $\varphi_{1,c+b} \in H$, т.к. $c+b \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow H$ - замк.

3) Θ ~~φ_{ab}~~: $\varphi_{ad} \circ \varphi_{1b} = \varphi_{10}$ – нейтр. эл. в G

$\varphi_{ad}(x+b) = a(x+b)+d = ax+ab+d = x$

$\Rightarrow a = 1$; $d = -b$; $\varphi_{1,-b} \in H$, т.к. $-b \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \varphi_{1,-b}$ - обр. эл. H

$\Rightarrow H$ - подгр. G.

Г2) $\sigma 1\ (2\ 4\ 6)$ – меняет эл. 1-ой чёт.

$2 \to 4$

$\sigma 2\ (1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6)$

$4 \to 6$

$6 \to 2$

либо меняют эл. 1-ой чёт (если возвести её в 2n ст.)

либо меняет местами чёт и нечёт эл (если ст. 2n-1)

$(2\ 1\ 5\ 4\ 3\ 6)$

контр пример

здесь поменялись местами и чёт и нечёт эл ~~[?]~~ (чёт с чёт и неч. с неч)

– это невозможно получить из $\sigma 1$ и $\sigma 2$

S_n порождается всеми транспоз.
- 2 циклами
либо 1-ним n-циклом и 1-ой трансп.
(при опр. услов.)

Г3) $A \neq \emptyset$, $A \subset G$; $\forall x, y, z \in A$ верно $xy^{-1}z \in A$; док: A - прав. смежн. кл. гр. G по некоторой $H < G$
т. е. $A = Ha = \{ha : h \in H\}$

для $\forall a \in A$ $\exists$ $H = \{h \in G ; ha \in A\}$
докажем, что $H < G$ и $A = Ha$
1) нейтр. эл. в H:
$\exists h = e$, тогда $ea = a \in A \Rightarrow ea \in A \Rightarrow e \in H$
$\Rightarrow H \neq \emptyset$
2) замк. по $\cdot$
$\exists h_1, h_2 \in H$; $h_1 a \in A$, $h_2 a \in A$
покажем, что $h_1 h_2 \in H \Rightarrow h_1 h_2 a \in A$
~~$\exists$ $x = h_1 a$, $y = h_2 a$, $z = a$~~
~~$y^{-1} = (h_2 a)^{-1} = a^{-1} h_2^{-1}$, тогда~~

~~$xy^{-1}z = (h_1 a)(a^{-1}h_2^{-1})a = h_1(aa^{-1})h_2^{-1}a = h_1 e h_2^{-1} a =$~~
~~$= h_1 h_2^{-1} a \in A$~~
~~$\exists$ $x = h_1 h_2^{-1} a$, $y = a$, $z = a$~~
~~$x \in A$, $y = a \in A$, $z = a \in A$; $y^{-1} = a^{-1}$~~

$x = h_1 a$
$y = a$ $\Rightarrow xy^{-1}z = (h_1 a)(a^{-1})(h_2 a) = h_1 h_2 a \in A$
$z = h_2 a$
$\Rightarrow h_1 h_2 \in H \Rightarrow H$ - замк. по $\cdot$
3) замк. по обр.
$\exists h \in H$: $ha \in A$
покажем, что $h^{-1} \in H \Rightarrow h^{-1} a \in A$
$\exists$ $x = a$, $y = ha$, $z = a$
$y^{-1} = (ha)^{-1} = a^{-1}h^{-1} \Rightarrow xy^{-1}z = a(a^{-1}h^{-1})a =$
$= h^{-1}a \in A \Rightarrow h^{-1} \in H \Rightarrow H < G$

покажем, что $A = Ha$
1) $Ha \subseteq A$: по опр. $H = \{h \in G : ha \in A\}$
для $\forall h \in H$, $ha \in A \Rightarrow Ha = \{ha : h \in H\} \subseteq A$
2) $A \subseteq Ha$: для $\forall x \in A$, $\exists y = a$, $z = a \Rightarrow$
~~$xy^{-1}z = xa^{-1}a = xe = x \in A$~~

$\exists h = xa^{-1}$
$ha = (xa^{-1})a = xe = x$
покажем, что $h \in H \Rightarrow ha \in A$
$ha = x \in A \Rightarrow h = xa^{-1} \in H$
$\Rightarrow x = ha$ для $h = xa^{-1} \in H$
$\Rightarrow A \subseteq Ha$
$\Rightarrow$ $A = Ha$ - ч. т. д.

Г4) $\exists \varphi : G \to H$ - гомо, H - абелева, док.: $\ker(\varphi) \supset [G, G]$

$\varphi([a, b]) = \varphi(a^{-1}b^{-1}ab) =$
$= \varphi(a^{-1})\varphi(b^{-1})\varphi(a)\varphi(b) = \varphi(a^{-1})\varphi(a)\varphi(b^{-1})$
$\varphi(b) = e_H$ - т.к. φ - гомо и H - абел.
$\Rightarrow$ для $\forall a, b \in G$ $\varphi([a, b]) = e_H$
$\Rightarrow$ т.к. $[G, G]$ - порождено $[a_i, b_i]$ $\forall i$, то
$\varphi([G, G]) = \{e_H\} \Rightarrow$ по определению ядра $[G, G] \subset \ker(\varphi)$ - ч. т. д.

Г5) $\exists$ G-аб. г. $|G| = pq$, где p, q - различн. простые числа, док., что G-цикл.

~~по т. Коши $\exists a : ord(a) = p$ и $\exists b$: $ord(b) = q$, $a \neq b$~~
~~тогда $|\langle a \rangle| = p$, $|\langle b \rangle| = q$ $\Rightarrow$ $G = \langle ab \rangle$~~
~~все различн. и лежат в G~~
~~т.к. $|G| = pq$ и G-абелева~~