Пусть V — линейное подпространство поля вычетов по модулю 2, т.е. $\mathbb{F}_2^n$, где $\mathbb{F}_2 = \{0,1\}$. Вес вектора из $\mathbb{F}_2^n$ определяется как сумма его коэффициентов (в поле $\mathbb{F}_2$). Сколько может быть в V векторов нечетного веса?

3.6)

Анализ задачи:

1. Определение веса вектора :
   - Вес вектора $v = (v_1, v_2, \ldots, v_n) \in \mathbb{F}_2^n$ — это сумма его компонентов:
   $$\text{вес}(v) = v_1 + v_2 + \cdots + v_n \pmod 2.$$
   - Вес вектора является нечетным , если он равен 1 (modulo 2).
2. Свойства подпространства V :
   - Подпространство $V \subseteq \mathbb{F}_2^n$ — это множество векторов, замкнутое относительно сложения и умножения на скаляры из $\mathbb{F}_2$.
   - Размерность подпространства V обозначим через k. Тогда V содержит 2^k векторов.
3. Количество векторов нечетного веса :
   - Мы хотим найти количество векторов в V, у которых вес является нечетным.

Теорема о распределении весов в подпространстве:

Для любого линейного подпространства $V \subseteq \mathbb{F}_2^n$:

- Количество векторов с нечетным весом равно ровно половине всех векторов в V, если размерность V больше нуля.
- Если $V = \{0\}$ (подпространство состоит только из нулевого вектора), то количество векторов нечетного веса равно 0.

Доказательство:

1. Пусть V — линейное подпространство размерности k. Тогда V содержит 2^k векторов.
2. Рассмотрим операцию сложения векторов в V:
   - Если $u, v \in V$, то $u + v \in V$.
   - Вес суммы двух векторов удовлетворяет следующему свойству:
   $$\text{вес}(u+v) = \text{вес}(u) + \text{вес}(v) \pmod 2.$$
   - Это означает, что операция сложения сохраняет четность/нечетность веса.
3. Рассмотрим функцию $f : V \to \mathbb{F}_2$, определенную как:
   $$f(v) = \text{вес}(v) \pmod 2.$$
   - Эта функция является линейной, так как $f(u+v) = f(u) + f(v)$.
   - Ядро $\ker(f)$ состоит из всех векторов $v \in V$, для которых $\text{вес}(v) = 0 \pmod 2$ (четные векторы).
   - Образ $\operatorname{im}(f)$ — это множество значений $\{0,1\}$, так как вес может быть либо четным, либо нечетным.
4. По теореме о ранге-нуле:
   $$\dim(V) = \dim(\ker(f)) + \dim(\operatorname{im}(f)).$$
   - Так как $\operatorname{im}(f) \subseteq \mathbb{F}_2$, размерность образа $\dim(\operatorname{im}(f)) \le 1$.
   - Если $V \neq \{0\}$, то $\dim(\operatorname{im}(f)) = 1$ (так как существует хотя бы один вектор нечетного веса).
   - Следовательно, $\dim(\ker(f)) = \dim(V) - 1$.
5. Количество векторов в $\ker(f)$ (четных векторов) равно:
   $$|\ker(f)| = 2^{\dim(\ker(f))} = 2^{\dim(V)-1}.$$
   - Количество векторов нечетного веса равно:
   $$|V| - |\ker(f)| = 2^{\dim(V)} - 2^{\dim(V)-1} = 2^{\dim(V)-1}.$$

Итог:

Если $V \neq \{0\}$, то количество векторов нечетного веса в V равно:

$$\boxed{2^{k-1}},$$

где k — размерность подпространства V.

Если $V = \{0\}$, то количество векторов нечетного веса равно:

$$\boxed{0}.$$

3.2)

Для отображения $\varphi : U \to V$, которое является линейным, нужно решить следующее:

1. Пусть U и V — конечномерные линейные пространства.
2. U_1 и V_1 — подпространства U и V соответственно.
3. $\varphi : U \to V$ — линейное отображение.

Требуется доказать или опровергнуть одно из двух равенств:

$$\varphi(U_1) = V_1,$$

или заменить это равенство на включение:

$$\varphi(U_1) \subseteq V_1.$$

Анализ задачи:

1. Определение линейного отображения:

Линейное отображение $\varphi : U \to V$ удовлетворяет следующим свойствам:

- Аддитивность: $\varphi(u_1 + u_2) = \varphi(u_1) + \varphi(u_2)$ для любых $u_1, u_2 \in U$.
- Гомогенность: $\varphi(\alpha u) = \alpha\varphi(u)$ для любого $u \in U$ и скаляра α.

2. Образ подпространства:

Образ подпространства $U_1 \subseteq U$ при отображении φ определяется как:

$$\varphi(U_1) = \{\varphi(u) \mid u \in U_1\}.$$

Это множество является подпространством V, так как φ — линейное отображение.

3. Равенство $\varphi(U_1) = V_1$:

Для того чтобы $\varphi(U_1) = V_1$, должно выполняться два условия:

1. $\varphi(U_1) \subseteq V_1$ (включение).
2. $V_1 \subseteq \varphi(U_1)$ (обратное включение).

4. Включение $\varphi(U_1) \subseteq V_1$:

Включение $\varphi(U_1) \subseteq V_1$ означает, что образ каждого элемента из U_1 лежит в V_1. Это условие может быть выполнено, если φ специально задано таким образом, что все элементы U_1 отображаются в V_1.

Доказательство или опровержение:

Проверка равенства $\varphi(U_1) = V_1$:

Равенство $\varphi(U_1) = V_1$ верно только в том случае, если:

1. $\varphi(U_1) \subseteq V_1$ (все элементы из $\varphi(U_1)$ принадлежат V_1).
2. $V_1 \subseteq \varphi(U_1)$ (каждый элемент из V_1 является образом некоторого элемента из U_1).

Однако без дополнительных условий (например, сюръективности φ на V_1 или специального выбора U_1 и V_1) нет гарантии, что $V_1 \subseteq \varphi(U_1)$. Поэтому равенство $\varphi(U_1) = V_1$ не всегда верно.

Проверка включения $\varphi(U_1) \subseteq V_1$:

Включение $\varphi(U_1) \subseteq V_1$ означает, что для любого $u \in U_1$ выполняется $\varphi(u) \in V_1$. Это условие можно проверить напрямую, используя определение линейного отображения и свойства подпространств.

Если φ задано так, что $\varphi(U_1) \subseteq V_1$, то это включение всегда верно. Однако если этого не указано явно, то равенство $\varphi(U_1) = V_1$ нельзя считать верным без дополнительных данных.

Итог:

Без дополнительных условий равенство $\varphi(U_1) = V_1$ не всегда верно. Однако включение $\varphi(U_1) \subseteq V_1$ может быть верным, если φ специально задано таким образом.

Ответ:

$$\boxed{\varphi(U_1) \subseteq V_1}$$

Во втором у меня тут получилось, что а) верно, т.к. для любого u из U_1 + U_2 верно \phi(u) = \phi(u_1) + \phi(u_2), а это входит в \phi(U_1) + \phi(U_2); также для любых u_1 из U_1 и u_2 из U_2 справедливо \phi(u_1) + \phi(u_2) = \phi(u_1 + u_2), а это входит в \phi(U_1 + U_2). В таком случае, б) неверно, а правильное утверждение там - \phi^{-1}(V_1 + V_2) является надмножеством \phi^{-1}(V_1) + \phi^{-1}(V_2). Идея в том, что для любых v_1 из V_1 и v_2 из V_2 справедливо \phi^{-1}(v_1) + \phi^{-1}(v_2) = u_1 + u_2 = u, и при этом \phi^{-1}(v_1) + \phi^{-1}(v_2) = \phi^{-1}(v_1 + v_2), то есть все возможные u из U, такие, что \phi^{-1}(v_1) + \phi^{-1}(v_2) = u, автоматически являются прообразами и для v_1 + v_2, а значит, \phi^{-1}(V_1) + \phi^{-1}(V_2) является подмножеством \phi^{-1}(V_1 + V_2). Обратное может быть неверно, так как могут существовать такие v_1 из V_1 и v_2 из V_2, что их прообразов не существует (и, соответственно, не существует такого u из U, что u = \phi^{-1}(v_1) + \phi^{-1}(v_2)), но существует прообраз v_1 + v_2, так что в \phi^{-1}(V_1 + V_2) существует элемент, которого нет в \phi^{-1}(V_1) + \phi^{-1}(V_2). Контрпример в голову приходит такой: пусть V - это трёхмерное пространство, U - одномерное, \phi((u_1)) = (u_1, 0, 0), V_1 = {(x, y, 0)}, V_2 = {(0, y, z)}, тогда v_1 из V_1 и v_2 из V_2, у которых y не равно 0, не имеют прообразов, но если они обратны друг другу по сложению (а ещё z у v_2 равен 0), то v_1 + v_2 = (x, 0, 0) - элемент, имеющий прообраз в U.