Relacją dwuargumentową w zbiorze X nazywamy dowolny podzbiór R drugiej potęgi kartezjańskiej X^2 ($R \subset X^2$).

Przykład: $\{(x, y) \vee x, y \in R, x \leq y\}$

Relacja pusta : $\emptyset \subset X^2$
Relacja totalna : $X^2 \subset X^2$

Jeżeli R jest relacją to **dziedziną relacji** nazywamy zbiór $D_R = \{x \in X | \exists_{y \in X} (x, y) \in R\}$
Przeciwdziedziną nazywamy zbiór $D_R^{-1} = \{y \in X | \exists_{x \in X} (x, y) \in R\}$

Relacja odwrotna $R \subset X^2$ $R^{-1} = \{(y, x) | (x, y) \in R\} \subset X^2$
Przykład: $\leqslant \in R^2$, $\leqslant^{-1} = \geqslant$

Własności relacji $R \subset X^2 = X \times X$:

- **zwrotna** $\forall_{x \in X} (x, x) \in R$
- przeciw zwrotna $\forall_{x \in X} (x, x) \notin R$
- **symetryczna** $\forall_{x, y \in X} (x, y) \in R \Rightarrow (y, x) \in R$
- antysymetryczna $\forall_{x, y \in X} (x, y) \in R \Rightarrow (y, x) \notin R$
- słabo antysymetryczna $\forall_{x, y \in X} (x, y) \in R \wedge (y, x) \in R \Rightarrow x = y$
- **przechodnia** $\forall_{x, y, z \in X} (x, y) \in R \wedge (y, z) \in R \Rightarrow (x, z) \in R$
- spójna $\forall_{x, y \in X} (x, y) \in R \vee (y, x) \in R \vee x = y$

Relację $R \subset X \times X$ nazywamy **relacją równoważności**, jeśli jest ona zwrotna, symetryczna i przechodnia. Przykład : = (równość jest relacją równoważności)

Niech R będzie relacją równoważności określoną w zbiorze $X \neq \emptyset$. **Klasą abstrakcji** elementu $x \in X$ względem relacji R nazywamy zbiór $[x]_R = \{y \in X : x R y\}$

Zbiór ilorazowy to zbiór wszystkich klas abstrakcji względem relacji równoważności:

$X / R = \{[x]_R : x \in X\}$

Przykłady:

1)Rozważmy zbiór $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ Określmy w nim relację x R y wtedy i tylko wtedy, gdy x i y dają taką samą resztę z dzielenia przez 3.

Jest to relacja równoważności

.

Klasami abstrakcji są:
$[1]=[4]=[7]=\{1,4,7\}$
$[2]=[5]=\{2,5\}$
$[3]=[6]=\{3,6\}$

Poszczególne warstwy są rozłączne. Przestrzenią ilorazową jest zbiór:
$A/R=\{\{1,4,7\},\{2,5\},\{3,6\}\}$

2) Niech $m,n\in N$, m R n <=> m^2-n^2 jest wielokrotnością 3.

Sprawdzamy czy jest to relacja równoważności.

a) zwrotność

$a^2-a^2=0\cdot 3$ jest zwrotna

b) symetryczność

jeżeli $a^2-b^2=k\cdot 3$, to $b^2-a^2=(-k)\cdot 3$ jest symetryczna

c) przechodniość

jeżeli $a^2-b^2=k\cdot 3$, $b^2-c^2=l\cdot 3$, to
$a^2-c^2=(a^2-b^2)+(b^2-c^2)=k\cdot 3+l\cdot 3=(k+l)\cdot 3$ jest przechodnia

Relacja R jest relacją równoważności.

Klasy abstrakcji:

Załóżmy, że $a,b\nmid 3$ wówczas :
$a=3*k+r$
$b=3*l+s$
$a^2-b^2=9\cdot k+6\cdot k\cdot r+r^2-9\cdot l^2-6\cdot l\cdot s-s^2=3(3\cdot k+2\cdot k\cdot r-3\cdot l-2\cdot l\cdot s)+(r-s)$

Czyli $(r-s)=0\vee(r-s)=1$, stąd mamy dwie klasy abstrakcji :

$[0]=\{0,3,6,9,12....\}$

$[1]=\{1,2,4,5,7,8,....\}$