Relacje i funkcje

Niech dane będą niepuste zbiory X i Y .
Iloczynem kartezjańskim zbiorów X i Y nazywamy zbiór wszystkich par uporządkowanych (x, y) takich, że $x \in X$, $y \in Y$,
czyli: $(x, y) \in X \times Y \Leftrightarrow (x \in X \wedge y \in Y)$

Relacja
Niech dane będą niepuste zbiory X i Y . Relacją w zbiorze $X \times Y$ nazywamy każdy podzbiór iloczynu kartezjańskiego $X \times Y$.

4 główne własności relacji
Relacja zwrotna $\forall_{x\in X}\ xRx$
Relacja symetryczna $\forall_{x,y\in X}\ (xRy \Rightarrow yRx)$
Relacja przechodnia $\forall_{x,y,z\in X}\ (xRy \wedge yRz) \Rightarrow xRz$
Relacja antysymetryczna $\forall_{x,y\in X}\ (xRy \wedge yRx) \Rightarrow x = y$

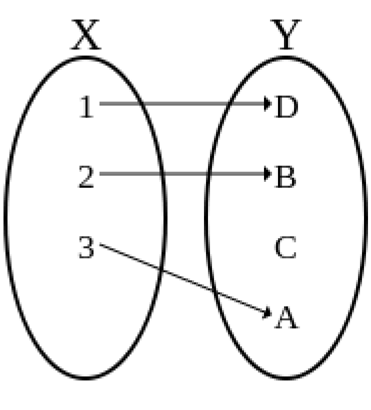
Relacja równoważności
Relację $R \subset X \times X$ nazywamy relacją równoważności, jeśli jest *zwrotna, symetryczna i przechodni*a.
Przykład: Sprawdź czy relacja jest relacją równoważności
$x\ R\ y \Leftrightarrow x = y \mid x, y \in R$
Relacja jest zwrotna, ponieważ $\forall_{x\in R}\ x = x$
Relacja jest symetryczna, ponieważ $\forall_{x,y\in R}\ x = y \Rightarrow y = x$
Relacja jest przechodnia, ponieważ $\forall_{x,y,z\in R}\ x = y \wedge y = z \Rightarrow x = z$

Funkcje
Funkcją nazywamy przyporządkowanie każdemu elementowi jednego zbioru dokładnie jednego elementu drugiego zbioru.
$\forall x\in X\ \exists !y\in y\ (x, y) \in f$
f: $X \rightarrow Y$, X-dziedzina funkcji f, y- przeciwdziedzina funkcji f.
Zbiorem wartości funkcji $f:X \rightarrow Y$ nazywamy zbiór
$f(X) = \{f(x); x \in X\} = \{y \in Y : \exists x\in X\ y = f(x)\}$

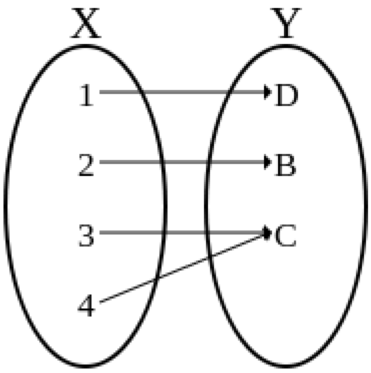
Niech $f:X \rightarrow Y$
obrazem zbioru $A\subset X$ przez f jest zbiór $f(A) = \{ y: y=f(x)$ dla pewnego $x\in A\}$

przeciwobrazem zbioru $B\subset Y$ przez f jest zbiór $f-1(B) = \{ x: f(x)\in B\}$

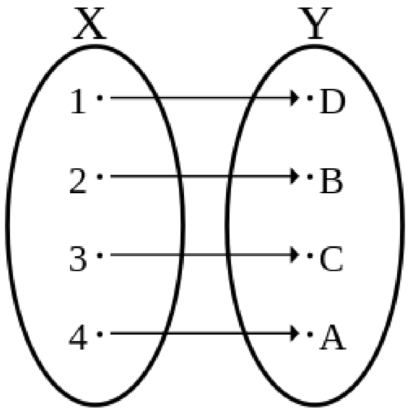
Klasyfikacja funkcji:
Niech f: $X \rightarrow Y$ będzie dowolną funkcją
-f jest funkcją *różnowartościową*(injekcją) jeżeli przeciwobraz każdego elementu $y \in Y$ ma co najwyżej jeden element (tzn może być psuty lub jednoelementowy)



-f jest funkcją *"na"*(surjekcją) jeżeli przeciwobraz każdego elementu $y \in Y$ ma conajmniej jeden element (tzn jest niepusty)



-f jest *bijekcją* jeżeli przeciwobraz każdego elementu z przeciwdziedziny ma dokładnie jeden element



Funkcja f: $X \to Y$ jest bijekcją dokładnie wtedy, gdy jest jednocześnie funkcja różnowartościową i funkcją "na"