Algebra zbiorów

Zbiór jest pojęciem pierwotnym, czyli pojęciem którego nie definiujemy. Podobnie pojęciem pierwotnym jest punkt.

Oznaczenia:
$a \in A$ - element a należy do zbioru A
$a \notin A$ - element a nie należy do zbioru A
$A \subset B$ - A zawiera się w B
$\varnothing$ - zbiór pusty
2^A - zbiór wszystkich podzbiorów zbioru A
$2^A = \{B: B \subset A\}$
Jeżeli zbiór A jest n-elementowy ma 2^n podzbiorów

Podstawowe zbiory liczbowe

$\mathbb{N}$ - liczby naturalne (z zerem)
$\mathbb{N}_k$ liczby naturalne większe bądź równe k
$\mathbb{Z}$ - liczby całkowite
$\mathbb{Q}$ - liczby wymierne
$\mathbb{R}$ - liczby rzeczywiste
$\mathbb{C}$ - liczby zespolone

Zbiór możemy określić:

1. wymieniając jego elementy
   Np. $A=\{a_1, a_2, ..., a_n\}$,
2. podając własność, jaką spełniają elementy zbioru i tylko one
   Np. $B=\{n \in N : n \leq 20\}$

Zbiorem **skończonym** nazywamy zbiór mający dokładnie n elementów, gdzie n jest liczbą naturalną lub zerem. Zbiór pusty zaliczamy więc również do zbiorów skończonych.
Zbiory **nieskończone** zawierają nieskończoną ilość elementów, np. zbiór liczb parzystych.

Zbiory X i Y nazywamy **równolicznymi**, jeśli istnieje bijekcja $f : X \to Y$.
Dla zbiorów równolicznych X i Y stosujemy oznaczenie $X \sim Y$.
Zbiory skończone są równoliczne $\Leftrightarrow$ mają tyle samo elementów.

Każdy zbiór A, który jest równej mocy ze zbiorem liczb naturalnych, nazywamy **przeliczalnym**.
Jeżeli więc A jest zbiorem przeliczalnym, to jest równoliczny ze zbiorem liczb naturalnych.

Moc zbioru przeliczalnego oznaczamy $\aleph_0$ – **alef zero** ($\aleph$ – pierwsza litera alfabetu hebrajskiego).

Zbiór nazywamy **co najwyżej przeliczalnym**, jeśli jest skończony lub przeliczalny.

Zbiór nazywamy **nieprzeliczalnym**, jeśli nie jest zbiorem co najwyżej przeliczalnym.
Zbiór A jest nieprzeliczalny $\Leftrightarrow$ nie można wszystkich elementów zbioru A ustawić w ciąg.
Elementów zbioru nieprzeliczalnego nie da się ponumerować.

Przykład: Zbiór liczb rzeczywistych z przedziału (0, 1) jest nieprzeliczalny.

Uwaga: Moc zbioru R nazywamy **continuum** i oznaczamy gotycką literą c.
Zachodzi $c \neq \aleph_0$, ponieważ $R \nsim N$.

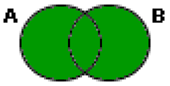
Twierdzenie Cantora:
Zbiór liczb rzeczywistych R jest wyższej mocy niż zbiór liczb naturalnych N, co zapisujemy
$|N| < |R|$ lub $\aleph_0 < 2^{\aleph_0} = c$

Równość zbiorów

Zbiory są równe, gdy mają dokładnie te same elementy

$A = B \Leftrightarrow [A \subset B \wedge B \subset A]$

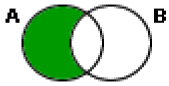
Suma zbiorów A i B



Jest to zbiór tych wszystkich elementów, które należą do zbioru A lub do zbioru B.

$A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\}$

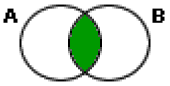
Różnica zbiorów A i B



Jest to zbiór tych wszystkich elementów, które należą do zbioru A i nie należą do zbioru B.

$A \setminus B = \{x : x \in A \wedge x \notin B\}$

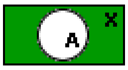
Iloczyn zbiorów A i B



Jest to zbiór tych wszystkich elementów, które należą do zbioru A i do zbioru B.

$A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\}$

Dopełnienie zbioru A do zbioru X (A')



Jest to zbiór tych wszystkich elementów, które należą do zbioru X i nie należą do zbioru A.

$A' = \{x : x \in X \wedge x \notin A\}$

Para uporządkowana

Dane są zbiory X i Y . Parę uporządkowaną o poprzedniku $x \in X$ i następniku $y \in Y$ oznaczamy symbolem (x, y).

Przyjmujemy, że dwie pary uporządkowane (x_1, y_1) i (x_2, y_2) są równe wtedy i tylko wtedy, gdy $x_1 = x_2$ i $y_1 = y_2$.

Uogólnieniem pojęcia pary uporządkowanej jest n-ka uporządkowana $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Iloczyn kartezjański zbiorów A i B

Jest to zbiór wszystkich par uporządkowanych (x,y), gdzie x jest elementem zbioru A i y jest elementem zbioru B.

$AxB = \{(x, y) : x \in A \wedge y \in B\}$

Przykład

Iloczyn kartezjański zbiorów X={1,2,3} i Y={4,7} zawiera 6 par uporządkowanych:

X×Y={(1,4),(1,7),(2,4),(2,7),(3,4),(3,7)}.

Można tworzyć iloczyn kartezjański zbioru ze sobą, tzn. X×X.

Prawa działań na zbiorach

$A \cup B = B \cup A$

$A \cap B = B \cap A$

$A \cup A = A$

$A \cap A = A$

$A \cup \varnothing = A$

$A \cap \varnothing = \varnothing$

$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$

$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$

Prawa De Morgana

$(A \cup B)' = A' \cap B'$

$(A \cap B)' = A' \cup B'$

Różnica symetryczna

Różnicą symetryczną zbiorów X i Y nazywamy zbiór:

$X \div Y = (X \setminus Y) \cup (Y \setminus X)$.

Dla dowolnych zbiorów X i Y spełniona jest następująca równość:

$X \div Y = (X \cup Y) \setminus (X \cap Y)$.

Dla dowolnych zbiorów X, Y i Z zachodzą następujące własności:

(1) $X \div Y = Y \div X$,

(2) $X \div (Y \div Z) = (X \div Y) \div Z$,

(3) $X \div \emptyset = X$, (4) $X \div X = \emptyset$.