Twierdzenie Taylora

Twierdzenie (Taylora) Niech $f : U \to R$ będzie funkcją klasy C^{n+1}. Załóżmy ponadto, że $[a,b] \subset U$. Wtedy istnieje punkt $c \in (a,b)$ taki, że zachodzi równość:

$$f(b) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(b-a) + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}$$

Do dowodu powyższego twierdzenia potrzebny jest następujący lemat:

Lemat Niech $F, G : U \to R$ będą funkcjami klasy C^{n+1}. Jeżeli:

(1) $[a,b] \subset U$,

(2) Funkcje $DG, D^2G, \ldots, D^{n+1}G$ nie zerują się na (a,b),

(3) $F(a) = G(a) = F'(a) = G'(a) = \ldots = F^n(a) = G^n(a) = 0$

To istnieje punkt $c \in (a,b)$ taki, że:

$$\frac{F(b)}{G(b)} = \frac{F^{(n+1)}(c)}{G^{(n+1)}(c)}$$

Dowód lematu jest prosty, a można go np. znaleźć w książce Analiza matematyczna dla fizyków tom 1 L. Garniewicza strona: 112 książkę łatwo znaleźć w naszej lokalnej bibliotece lepiej skupić się na następującym dowodzie Twierdzenia Taylora:

Dowód Zastosujmy Lemat do funkcji F i G danych wzorami:

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f'(a)}{1!}(x-a) - \ldots - \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$
$$G(x) = (x-a)^{n+1}$$

Bez trudu można sprawdzić, że tak zdefiniowane funkcje F i G spełniają założenia lematu. Ponadto mamy:

$$F^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x), \qquad G^{(n+1)}(x) = (n+1)!$$

Zatem na mocy lematu otrzymujemy:

$$\frac{F(b)}{G(b)} = \frac{f(b) - f(a) - \frac{f'(a)}{1!}(b-a) - \ldots - \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n}{(b-a)^{n+1}} = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}$$

Co dowodzi twierdzenia wystarczy tylko sobie odpowiednio pomnożyć.

Uwaga.
Wielomian stopnia n występujący w tym twierdzeniu jest nazywany wielomianem Taylora, a wyrażenie:

$$R_n(b,a) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}$$

Nazywamy n-tą resztą (reszta ta jest dana w postaci Lagrange'a istnieją inne postaci tej reszty np. Peana, Cauchy'ego informacje na ten temat są nadobowiązkowe jak ktoś jest ciekawy może znaleźć te reszty w książce G.M. Fichtenholz'a Rachunek różniczkowy i całkowy tom 1 strona 221)

<u>Twierdzenie</u> Przy założeniach twierdzenia Taylora (dla odcinka (a,x)) zachodzi równość:

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x>a}} \frac{R_n(x,a)}{(x-a)^n} = 0$$

Dowód – wystarczy za symbol reszty podstawić wzór z powyższej uwagi i już – widać.

Co w tym twierdzeniu jest istotne to to, że reszta $R_n(x,a)$ dąży szybciej do zera niż n-ta potęga przyrostu (x-a). Potocznie można powiedzieć że twierdzenie Taylora pozwala wyrazić wartość funkcji f(x) w postaci wielomianu i reszty, która w wielu przypadkach jest bardzo mała.
Jeżeli zastosować twierdzenie Taylora do funkcji f na odcinku [0,x] to otrzymaną równość nazywa się wzorem Maclurina.

<u>Szeregi potęgowe</u>

Szereg, w którym wyrazy są funkcjami zmiennej x, tzn. szereg postaci:

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)$$

Nosi nazwę szeregu funkcyjnego,
Mówimy że szereg funkcyjny jest jednostajnie zbieżny w zbiorze A, jeżeli dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje takie N, że dla każdego $n \geq N$ oraz dla każdego $x \in A$ zachodzi nierówność:

$$\left|\sum_{k=0}^{n} u_k(x) - S(x)\right| < \varepsilon$$

Gdzie S(x) to suma tego szeregu.
Szereg funkcyjny postaci:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots$$

Nosi nazwę szeregu potęgowego.
Promieniem zbieżności szeregu potęgowego nazywamy taką liczbę $R \geq 0$, że dany szereg jest zbieżny dla wartości x spełniających nierówność $|x| < R$, a dla wartości $|x| > R$ jest rozbieżny natomiast dla x=-R i dla x =R szereg może być zarówno zbieżny jak i rozbieżny. Przedział –R<x<R nazywamy przedziałem zbieżności.
Badając promień zbieżności szeregu potęgowego możemy posłużyć się następującymi wnioskami z kryteriów zbieżności szeregów.

Kryterium d'Alemberta
Jeżeli dla danego szeregu potęgowego istnieje:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = g \neq 0$$

To promień zbieżności szeregu wynosi R=1/g. Jeżeli zaś g=0 to $R = +\infty$, a jeżeli $g = +\infty$, to R=0

Kryterium Cauchy'ego
Jeżeli dla danego szeregu potęgowego istnieje:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = s \neq 0$$

To promień zbieżności równy jest R=1/s. Jeżeli zaś s=0 to $R = +\infty$, a jeżeli $s = +\infty$, to R=0

Rozwijanie funkcji w szereg potęgowy

Jeżeli funkcja f(x) ma n-tą pochodną $f^{(n)}(x)$ w pewnym przedziale domkniętym zawierającym punkt a, wówczas dla każdego x z tego przedziału ma miejsce następujący wzór Taylora:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

Należy zwrócić uwagę na to że wyraz c jest tak naprawdę funkcją od x.
Szereg postaci:

$$f(x) = f(a) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

Nosi nazwę szeregu Taylora. Szereg ten przedstawia rozwinięcie funkcji f(x) w szereg potęgowy.
Zanotujmy twierdzenie:

Funkcja jest rozwijalna w szereg Taylora w przedziale $(a-\delta, a+\delta)$, jeżeli w tym przedziale:
(1) Funkcja ma pochodne każdego rzędu
(2) $\lim_{n\to\infty} R_n = 0$ gdzie R_n oznacza resztę szeregu, podaną we wzorze.

Uwaga. Warunek 2) jest w szczególności spełniony, jeżeli wszystkie pochodne $f^{(n)}(x)$ są wspólnie ograniczone w przedziale $(a-\delta, a+\delta)$, tzn. jeżeli istnieje taka liczba M, że

$$\left|f^{(n)}(x)\right| < M$$

Dla dowolnego n każdego x zawartego w przedziale $(a-\delta, a+\delta)$.

Dla lepszego zobrazowania tego problemu spójrzmy na następujący przykład
<u>Ex.</u> Rozwinąć w szereg Maclaurina (dla przypomnienia to taki szereg w którym we wzorze na szereg zamiast a podstawiamy 0) funkcję $f(x) = e^x$

Ponieważ pochodna funkcji e^x jest równa e^x, więc

$$f^{(n)}(x) = e^x, \qquad skąd \qquad f^{(n)}(0) = 1$$

Podstawiając do wzoru na szereg otrzymujemy:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots$$

Łatwo wykazać że promień zbieżności tego szeregu $R = +\infty$

Należy jeszcze wykazać że $\lim_{n\to\infty} R_n = 0$. Otóż warunek ten jest spełniony w każdym przedziale $(-\delta, \delta)$ na podstawie poprzedniej uwagi ponieważ dla każdego x z tego przedziału mamy $\left|e^x\right| \le e^\delta = M$. Czyli wszystko jest ok.

Wzory przybliżone

Dla uproszczenia będziemy rozpatrywali rozwinięcia postaci Maclaurina. Przypomnijmy sobie wzór:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}(x) + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}(x)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x)^{n+1}$$

Jeżeli we wzorze odrzucimy resztę, to otrzymamy wzór przybliżony:

$$f(x) \approx f(0) + \frac{f'(0)}{1!}(x) + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}(x)^n$$

Wzór ten zastępuje funkcję o charakterze skomplikowanym przez wielomian. Teraz jednak jesteśmy już w stanie oszacować błąd tego wzoru, równa się on bowiem co do wartości bezwzględnej właśnie odrzuconej reszcie. Jeśli na przykład pochodna rzędu n+1 jest ograniczona co do wartości bezwzględnej liczbą M (przynajmniej wtedy gdy argument zmienia się między 0 a x) to

$$\left|R_n(x)\right| \le \frac{Mx^{n+1}}{(n+1)!}$$

Rozpatrzmy następujący przykład

Niech $f(x) = e^x$. Wzór przybliżony będzie:

$$e^x \approx 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}$$

Ponieważ reszta jest tu równa

$$R_n(x) = \frac{e^c}{(n+1)!}x^{n+1}$$

Wtedy dla x>0 błąd można oszacować w następujący sposób:

$$\left|R_n(x)\right| = \frac{e^x}{(n+1)!}x^{n+1}$$

Jeśli w szczególności x = 1 to

$$e \approx 1 + \frac{1}{1!} + \frac{2}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!}$$

$$\left|R_n(x)\right| < \frac{1}{(n+1)!}$$

W ten sposób uzyskaliśmy jakieś przybliżenie liczby *e* jest ono tym lepsze im większe n wybierzemy do tego przybliżenia.

Źródła:
(1) L. Górniewicz, R.S. Ingarden Analiza Matematyczna dla fizyków tom 1
(2) W. Krysicki L. Włodarski Analiza matematyczna w zadaniach tom 1
(3) G.M. Fichtenholz Rachunek różniczkowy i całkowy tom 1