LICZBY ZESPOLONE

I. Ciało liczb zespolonych C – rozszerzenie ciała liczb rzeczywistych o jednostkę urojoną *i* taką, że i^2 =-1. Liczbę zespoloną możemy zapisać jako z = a+b*i

Postać macierzowa:

$$C := \{ Z(a,b) = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \mid a,b \in R \} \ M_{2x2}(R)$$

II. Własności ze względu na działania macierzowe:

- Z(a, b) = Z(c, d) $\leftrightarrow$ a = c, b = d
- C jest zamknięte ze względu na sumę i różnicę oraz mnożenie przez liczbę x $\in$ R

$$Z(a,b) + Z(c,d) = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c & -d \\ d & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+c & -(b+d) \\ b+d & a+c \end{bmatrix} =$$
$$= Z(a+c, b+d)$$

*Z(a,b) * x = Z(a*x, b*x)*

- C jest zamknięte ze względu na mnożenie (mnożenie przemienne)

$$Z(a,b) \cdot Z(c,d) = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c & -d \\ d & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \cdot c - b \cdot d & -a \cdot d - b \cdot c \\ b \cdot c + a \cdot d & -b \cdot d + a \cdot c \end{bmatrix} =$$
$$= Z(a \cdot c - b \cdot d, b \cdot c + a \cdot d)$$

- C jest zamknięte ze względu na transponowanie

$$Z(a,b)^t = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} = Z(a, -b)$$

III. Sprzężenie i Moduł

Definicja 2.7.

Niech $z = a + bi$ będzie liczbą zespoloną. Wówczas

(a) $\overline{a} = a - bi$ *nazywamy liczbą sprzężoną do z*

(b) $|z| = \sqrt{a^2 + b^2} \in \mathbb{R}^{\geqslant 0}$ *nazywamy modułem liczby z*

Lemat 2.7 (O własnościach sprzężenia).

(0) $\overline{\overline{z}} = z \qquad \overline{z} = z \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$

(1) $\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$

(2) $\overline{z \cdot z'} = \overline{z} \cdot \overline{z'}$

(3) $\overline{z^{-1}} = \overline{z}^{-1}$, *gdy* $z \neq 0$

Lemat 2.8 (O własnościach modułów).

(1) $|\lambda \cdot z| = ||\lambda|| \cdot |z|$, $\lambda \in \mathbb{R}$ *(ozn. $||a||$ = wartość bezwzględna z a)*
$|z| = ||z||$ *gdy* $z \in \mathbb{R}$
$|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$

(2) $|z \cdot z'| = |z| \cdot |z'|$

(2′) $|z^{-1}| = \frac{1}{|z|}$

(3) $z \cdot \overline{z} = |z|^2$

(4) $z^{-1} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$

(5) *Nierówność trójkąta:*

$$\big||z| - |z'|\big| \leqslant |z + z'| \leqslant |z| + |z'|$$

IV. Argument – kąt *y* między wektorem liczby Z a osią OX (Re)
sin(*y*) = b / |z|
cos(*y*) = a / |z|

V. Postać trygonometryczna
Liczba zespolona może być wyrażona przez długość jej wektora (moduł) oraz jego kąt skierowany (argument), co przekłada się na wzór:

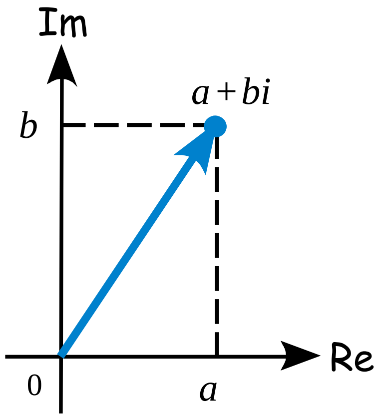
$$z = a + bi = |z|\frac{a}{|z|} + |z|\frac{b}{|z|}i = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

Mnożenie: $x \cdot y = |x| \cdot |y| \, (\cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta))$

Wzór de Moivre'a: $z^n = |z|^n(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = |z|^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$.

Pierwiastkowanie: $z_k = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right)$

VI.
Interpretacja geometryczna:



Dodawanie => dodawanie wektorów wodzących w R

Mnożenie przez x => mnożenie wektora przez x w R

Sprzężenie => symetria względem osi OX

Moduł => długość wektora wodzącego