1.POCHODNA FUNKCJI

f:D → **R** , D ⊂ **R** – przedział otwarty

x_0 – przyrost argumentu (dodatni lub ujemny)

$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ - iloraz różnicowy

Jeżeli istnieje i jest skończona granica:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

to granicę tę nazywamy pochodną funkcji *f* w punkcie x_0

W takiej sytuacji mówimy, że funkcja *f* jest różniczkowalna w punkcie x_0

$$f(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Inne oznaczenia:

$$\frac{df}{dx}|_{x=x_0}, \quad \frac{df}{dx}(x_0), \quad \frac{dy}{dx}|_{x=x_0}, \quad \frac{dy}{dx}(x_0), \ Df(x_0), \quad Df|_{x=x_0}$$

2.Interpretacja geometryczna

Jeżeli *f* jest różniczkowalna w punkcie x_0, to prostą o równaniu

$$\frac{y - f(x_0)}{x - x_0} = f^{'}(x_0)$$

$$y = x * f'(x_0) - x_0 * f'(x_0) + f(x_0)$$

nazywamy styczną do krzywej *y = f(x)* w punkcie odciętej $x = x_0$

Współczynnik kierunkowy stycznej jest równy pochodnej funkcji.

Pochodna funkcji jest równa tangensowi kąta nachylenia stycznej do krzywej do dodatniego kierunku osi *OX*

Jeżeli funkcja *f:D→ **R*** jest różniczkowalna w każdym punkcie dziedziny to mówimy, że *f* jest różniczkowalna a funkcję:

$$D \ni x \mapsto f^{'}(x)$$

nazywamy funkcją pochodną i oznaczamy *y = f'(x)*

3.Interpretacja mechaniczna

Jeżeli *S(t)* to funkcja drogi od czasu to:

$$S^{'}(t) = \frac{ds}{dt}$$

jest prędkością.

$S(t) = \frac{gt^2}{2}$ $\qquad$ $S(t + \Delta t) = \frac{g(t+\Delta t)^2}{2}$

$V_{śr} = \frac{S(t+\Delta t) - S(t)}{\Delta t} = \frac{\frac{1}{2}(g(t+\Delta t)^2 - gt^2)}{\Delta t} = \frac{1}{2} g \frac{t^2 + 2t\Delta t + \Delta t^2 - t^2}{\Delta t} = \frac{1}{2} g \frac{\Delta t(2t+\Delta t)}{\Delta t} = \frac{1}{2} g(2t + \Delta t)$
$\xrightarrow[\Delta t \to \infty]{} gt = v(t)$

4.Przedziały monotoniczności

Niech *f[a,b]→**R*** (na przedziale (a,b)) będzie funkcją różniczkowalną, wtedy

(a) Jeżeli $\forall_{x \in (a,b)} f^{'}(x) = 0$ to f jest stała na (a,b)
(b) Jeżeli $\forall_{x \in (a,b)} f^{'}(x) > 0$ to f jest rosnąca na (a,b)
(c) Jeżeli $\forall_{x \in (a,b)} f^{'}(x) < 0$ to f jest malejąca na (a,b)

Dowód:

Twierdzenie Lagrange'a

*f:[a,b]→**R*** ciągła na [a,b] i różniczkowalna. Wówczas istnieje c ∈ (a,b) takie, że

$$f^{'}(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

a) Niech $x_1, x_2 \in$ (a,b) i takie że $x_1 < x_2$ wówczas na mocy tw. Lagrange'a istnieje $x_0 \in (x_1, x_2)$ takie, że

$$0 = f^{'}(x_0) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$$

b) Niech $x_1, x_2 \in$ (a,b) i takie że $x_1 < x_2$ wówczas na mocy tw. Lagrange'a istnieje $x_0 \in (x_1, x_2)$ takie, że

$$0 < f^{'}(x_0) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \Rightarrow f(x_2) > f(x_1)$$

c) Niech $x_1, x_2 \in$ (a,b) i takie że $x_1 < x_2$ wówczas na mocy tw. Lagrange'a istnieje $x_0 \in (x_1, x_2)$ takie, że

$$0 > f'(x_0) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \Rightarrow f(x_2) < f(x_1)$$

5.Pochodna funkcji a badanie ekstremum

5.1 Warunek konieczny

Warunkiem koniecznym ekstremum w pewnym punkcie jest zerowanie się pochodnej w tym punkcie

Niech *f:D→**R*** będzie różniczkowalna , D – przedział otwarty, $x_0 \in D$

Jeżeli *f* ma w x_0 ekstremum lokalne, to $f'(x_0) = 0$

Warunek konieczny nie jest warunkiem wystarczającym (np. dla x^3)

5.2 Warunek dostateczny

Warunki dostateczne istnienia ekstremum

a) Niech *f:D→**R*** będzie różniczkowalna , D – przedział otwarty, $x_0 \in D$ takie, że $f'(x_0) = 0$ wówczas, jeżeli f' zmienia znak w x_0 to f ma ekstremum lokalne w x_0
   z – na + (minimum)
   z + na – (maksimum)
b) Niech *f:D→**R*** będzie dwukrotnie różniczkowalna , D – przedział otwarty, $x_0 \in D$ takie, że $f'(x_0) = 0$ wówczas
   i) Jeżeli $f''(x_0) > 0$ to *f* ma w x_0 minimum lokalne
   ii) Jeżeli $f''(x_0) < 0$ to *f* ma w x_0 maksimum lokalne
c) Niech *f:D→**R*** będzie n-krotnie różniczkowalna , D – przedział otwarty, $x_0 \in D$. Załóżmy, że $f'(x_0)=f''(x_0)=...=f^{n-1}(x_0) =0$ i $f^n(x_0)\neq 0$
   i) Jeżeli n jest liczbą parzystą to *f* ma ekstremum lokalne w x_0. Dokładniej $f^{(n)}(x_0) = 0 \Rightarrow minimum$, $f^{(n)}(x_0) < 0 \Rightarrow maksimum$
   ii) Jeżeli n jest liczbą nieparzystą, to *f* nie ma ekstremum w x_0

6.Pochodna funkcji a badanie punktów przegięcia i wypukłości

6.1 Wypukłość

Niech *f[a,b]→**R***

Jeżeli

$$\forall_{x_1,x_2\in[a,b]}\forall_{\lambda\in[0,1]} f\big((1-\lambda)x_1 + \lambda x_2\big) \leq (1-\lambda)f(x_1) + \lambda f(x_2)$$

to powiemy, że funkcja jest wypukła(wypukła w dół).

Jeżeli

$$\forall_{x_1,x_2\in[a,b]}\forall_{\lambda\in[0,1]} f\big((1-\lambda)x_1 + \lambda x_2\big) \geq (1-\lambda)f(x_1) + \lambda f(x_2)$$

to powiemy, że funkcja jest wklęsła(wypukła w górę).

6.2 Zależność wypukłości od pochodnej

Niech D będzie przedziałem i niech *f:D→**R*** będzie dwukrotnie różniczkowalna:

Jeżeli $\forall_{x\in D} f^{''}(x) > 0$, to *f* jest w D wypukła w dół.

Jeżeli $\forall_{x\in D} f^{''}(x) < 0$, to *f* jest w D wypukła w górę.

6.3 Zależność punktów przegięcia od pochodnej

Jeżeli *f* zmienia w punkcie x_0 rodzaj wypukłości, to mówimy ,że x_0 jest punktem przegięcia funkcji *f*

Niech *f:D→**R*** będzie dwukrotnie różniczkowalna i niech $x_0 \in D$ ma tę własność, że $f''(x_0)=0$

Wówczas, jeżeli *f''* zmienia znak w x_0 to x_0 jest punktem przegięcia funkcji *f*