ILOCZYN SKALARNY I WEKTOROWY

1. Iloczyn skalarny

Iloczyn skalarny wektorów $A=[a_1, a_2, \ldots, a_n]$ i $B=[b_1, b_2, \ldots, b_n] \in R^n$ wyrażany jest wzorem:

$$A \circ B = \sum_{k=1}^{n} a_k * b_k$$

lub

$$A \circ B = ab \cos \alpha, \text{ gdzie}$$

$a=\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2}$, $b=\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2}$, α jest kątem miedzy wektorami A i B

Z parzystości funkcji cosinus ($\cos \alpha = \cos(-\alpha)$) wynika, że iloczyn skalarny jest przemienny, tzn:

$$A \circ B = B \circ A = ab \cos \alpha = ba \cos \alpha$$

Przez porównanie dwóch powyższych wzorów możemy wyznaczyć wyrażenie na wartość kąta między wektorami A i B: $\cos \alpha = \dfrac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n}{ab}$

Wektory A i B są **prostopadłe**, gdy $A \circ B = 0$

2. Iloczyn wektorowy

Iloczyn wektorowy to operacja, w wyniku której powstaje nowy wektor. Iloczyn wektorów A i B:

$$V = A \times B$$

Iloczyn wektorowy ma sens tylko w R^3.

Wektor V spełnia warunki:

1) V jest wektorem prostopadłym do A i do B (V jest prostopadły do płaszczyzny rozpiętej na wektorach A i B)
2) jego długość jest równa polu równoległoboku rozpiętego na wektorach A i B, tzn. $|V| = |A| \cdot |B| \cdot \sin \alpha$, gdzie α jest kątem miedzy wektorami A i B
3) orientacja trójki wektorów A , B, V jest zgodna z orientacja układu współrzędnych OXYZ

Iloczyn wektorowy NIE JEST przemienny: $A \times B = -B \times A$.

Dodatkowo: $(k*A) \times B = k (A \times B)$ $\quad A \times (B+C) = A \times B + A \times C$ $\quad A \times A = 0$

Wektory A i B są **równoległe**, gdy $A \times B = 0$

Składowe wektora $V = A \times B$ obliczamy następująco:

$A \times B = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$ Przykład: $A=[1,2,3]^T$, $B=[3,2,-1]^T$ $\quad V = A \times B = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} =$

$=i*2*(-1) + j*3*3 + k*1*2 – (k*2*3 + i*3*2 + j*1*(-1)) = -8i +10j -4k$ => $V = \begin{bmatrix} -8 \\ 10 \\ -4 \end{bmatrix}$

3. Prosta i płaszczyzna

Równania prostej na płaszczyźnie: $Ax + By + C = 0$, równanie parametryczne – $x = a_1 t + b1$, $y=a_2 t + b2$

Równanie płaszczyzny w R^3: $Ax + By + Cz + D = 0$

Równanie prostej w R^3:

- prosta powstaje z przecięcia dwóch płaszczyzn, więc definiuje ją układ równań
$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$
- równanie parametryczne: $x = a_1t + b_1$, $y=a_2t + b_2$, $z = a_3t + b_3$

Odległość punktu (x_0,y_0) od prostej o równaniu $Ax + By + C = 0$ = $\dfrac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$

Odległość punktu (x_0,y_0,z_0) od płaszczyzny o równaniu $Ax + By + Cz + D = 0$ = $\dfrac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$

4. Objętość bryły

Objętość bryły rozpiętej na 3 wektorach określa się wzorem:

$|V| = |(v_1,v_2,v_3)|$ $\qquad$ $|V| = |(A \times B) \circ C|$

$$(v_1,v_2,v_3) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

5. Zastosowania w informatyce

Powyższe operacje mają największe zastosowanie w grafice wektorowej.