# POCHODNA FUNKCJI JEDNEJ ZMIENNEJ

## 1. Definicja pochodnej

**Pochodna** – miara szybkości zmian wartości funkcji względem zmian jej argumentów

## 2. Pochodna funkcji w punkcie

Załóżmy, że mamy daną funkcję $f(x)$ oraz argument $x_0$ , w otoczeniu którego funkcja f(x) jest określona.

Pochodną funkcji f(x) w punkcie x0 nazywamy granicę (o ile istnieje)

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Najczęściej zapisujemy ją w jednej z postaci:

$$\frac{dy}{dx}, f'(x_0), \frac{d}{dx} f(x_0)$$

$\Delta x = h$ – przyrost zmiennej niezależnej x

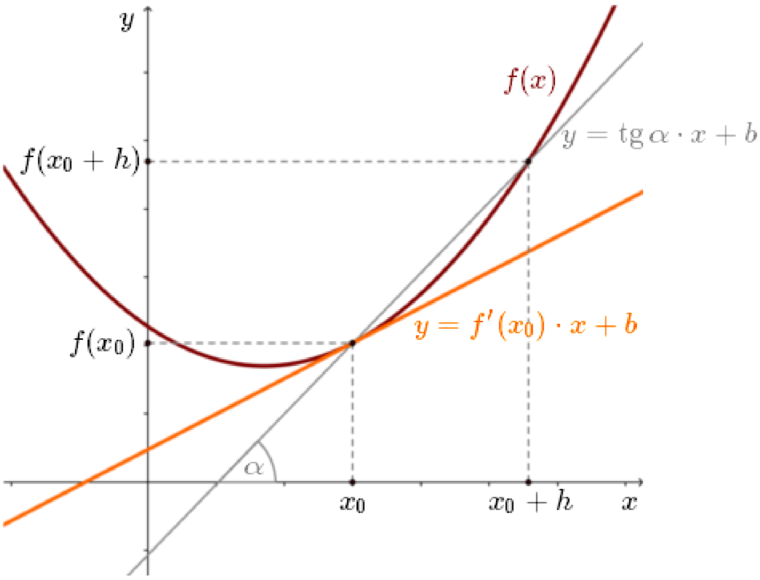
$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ – przyrost zmiennej zależnej y

$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ - iloraz różnicowy

Jeżeli przyjmie się, że $x = x_0 + h$ to pochodną w punkcie $x_0$ można zapisać tak:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

## 3. Interpretacja geometryczna




Przez dwa punkty funkcji $f(x)$ (dla argumentów $x_0$ oraz $x_0 + h$) poprowadziliśmy prostą y daną wzorem:

$$y = tg\, \alpha \cdot x + b$$

gdzie z definicji tangensa w trójkącie prostokątnym mamy:

$$tg\, \alpha = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Czyli iloraz różnicowy to **współczynnik kierunkowy** szarej prostej

Pochodna funkcji f(x) w punkcie $x_0$ - to współczynnik kierunkowy prostej stycznej do f(x) w punkcie $x_0$.

Zauważmy, że jeśli h→0, to szara prosta zbiega do pomarańczowej prostej. Możemy wręcz napisać, że:

$$\lim_{h\to 0} tg\alpha = f'(x_0)$$

Pochodna pokazuje nam jak funkcja zmienia się w danym punkcie. Dokładniej:

- Jeśli $f'(x_0) > 0$, to funkcja $f(x)$ **rośnie** w punkcie $x_0$.
- Jeśli $f'(x_0) = 0$, to funkcja $f(x)$ **jest stała** w punkcie $x_0$.
- Jeśli $f'(x_0) < 0$, to funkcja $f(x)$ **maleje** w punkcie $x_0$.

## 4. Przebieg zmienności funkcji

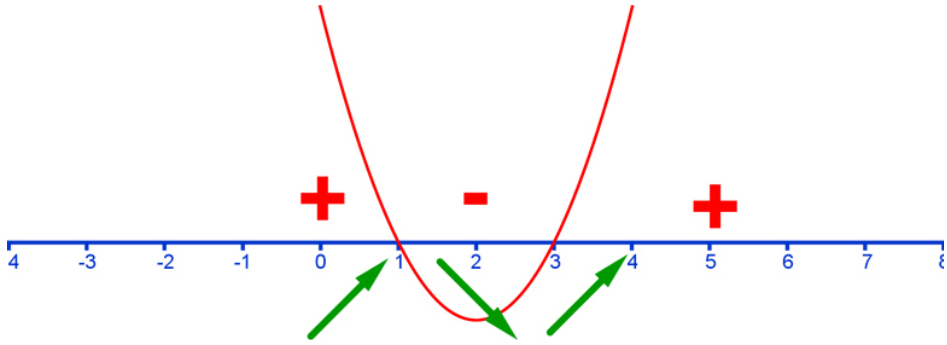
Aby go zbadać, musimy wyznaczyć miejsca zerowe pierwszej pochodnej funkcji. Weźmy funkcję

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 2$$

Wzór: $$(x^n)' = nx^{n-1}$$

$$f(x)' = 3x^2 - 12x + 9$$

$$f(x)' = 0 \leftrightarrow x = 1 \vee x = 3$$




Jeśli pochodna ma wartość dodatnią w określonym przedziale, to znaczy, że funkcja jest w tym przedziale rosnąca, a jeśli ma wartość ujemną w określonym przedziale, to funkcja w tym przedziale jest malejąca.

Jeśli funkcja jest przed miejscem zerowym rosnąca, a potem malejąca to znaczy, że w miejscu zerowym pochodnej znajduje się **MAKSIMUM**, czyli:

$$f_{max}(1) = 2$$

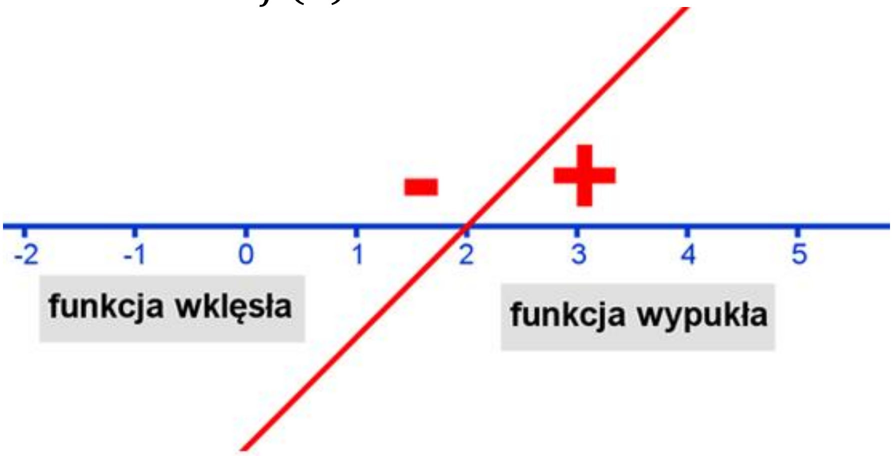
Jeśli funkcja jest przed miejscem zerowym malejąca, a potem rosnąca, to znaczy, że w miejscu zerowym pochodnej znajduje się **MINIMUM**, czyli:

$$f_{min}(3) = -2$$

**Druga pochodna**

Różniczkując pierwszą pochodną otrzymujemy pochodną drugiego rzędu:

$$f''(x) = (f')'(x)$$
$$f(x)'' = (3x^2 - 12x + 9)' = 6x - 12$$
$$f(x)'' = 0 \leftrightarrow x = 2$$




Jeśli druga pochodna ma wartość dodatnią w określonym przedziale, to znaczy, że funkcja jest w tym przedziale wypukła, a jeśli ujemną, to funkcja w tym przedziale jest wklęsła.

## 5. Reguły różniczkowania

Załóżmy, że funkcje f(x) i g(x) są różniczkowalne. Wtedy prawdziwe są następujące wzory:

Pochodna iloczynu liczby przez funkcję jest równa iloczynowi liczby przez pochodną funkcji

$$(a \cdot f(x))' = a \cdot f'(x)$$

Pochodna sumy funkcji jest sumą pochodnych

$$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$$

Pochodna różnicy funkcji jest różnicą pochodnych

$$(f(x) - g(x))' = f'(x) - g'(x)$$

Pochodna iloczynu funkcji nie jest iloczynem pochodnych

$$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

Pochodna ilorazu funkcji nie jest ilorazem pochodnych

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{[g(x)]^2}$$

Pochodna funkcji złożonej

$$f(g(x))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

**6.** Podstawowe wzory

$(c)' = 0,$ c - stała

$(x^n)' = nx^{n-1}$

$(a^x)' = a^x \ln a$

$(e^x)' = e^x$

$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$

$(\ln x)' = \frac{1}{x}$

$(\sin x)' = \cos x$

$(\cos x)' = -\sin x$

$(tgx)' = \frac{1}{\cos^2 x}$

$(ctg\, x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$

$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$(arctgx)' = \frac{1}{1+x^2}$

$(arcctgx)' = -\frac{1}{1+x^2}$