Układy równań liniowych. Twierdzenie Kroneckera-Capellego. Metody rozwiązywania układów równań liniowych.

Układem równań liniowych nazywamy układ postaci:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 & + \ldots + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 & + \ldots + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \quad \vdots \qquad \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 & + \ldots + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{cases}$$

Wyjaśnienie symboli:

$a_{11},\ldots,a_{mn}$ - współczynniki równania

$b_1,\ldots,b_m$ - wyrazy wolne

$x_1,\ldots,x_n$ - niewiadome równania

Oznaczamy przez A macierz główną układu

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

oraz przez U macierz uzupełnioną (rozszerzoną)

$$U = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

Twierdzenie Kroneckera-Capellego służy do oceniania ilości rozwiązań układu równań. Układ równań może być dowolny (tzn. liczba równań i niewiadomych nie muszą być sobie równe).

Układ równań liniowych:

- posiada przynajmniej jedno rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy:

rzA = rzU = n, gdzie n jest liczbą niewiadomych **(układ niezależny / oznaczony)**

- ma nieskończenie wiele rozwiązań zależnych od **n–r** parametrów wtedy i tylko wtedy, gdy:

rzA = rzU = r < n (układ zależny / nieoznaczony)

- nie ma rozwiązań wtedy i tylko wtedy, gdy:

rzA ≠ rzU (układ sprzeczny)

Przykład. Określ liczbę rozwiązań układu równań postaci:

$$\begin{cases} -2x + 3y - z = 1 \\ 4x - 6y + z = 2 \\ 8x - 12y + 3z = 0 \end{cases}$$

Wiążemy z układem równań dwie macierze:

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 3 & -1 \\ 4 & -6 & 1 \\ 8 & -12 & 3 \end{bmatrix}$$

oraz

$$U = \left[\begin{array}{ccc|c} -2 & 3 & -1 & 1 \\ 4 & -6 & 1 & 2 \\ 8 & -12 & 3 & 0 \end{array}\right]$$

Chcemy obliczyć rzędy obu macierzy. W tym celu szukamy największego niezerującego się minoru w każdej, i otrzymujemy, że **rzA = rzU = 2**. Zatem układ ma rozwiązanie.

Widzimy, że układ ma 3 zmienne, a **rzA = rzU = 2 < 3** , stąd układ ma nieskończenie wiele rozwiązań.

Tradycyjne metody rozwiązywania układów równań liniowych

Metoda podstawiania	○ Polega na wyznaczeniu z któregoś równania jednej niewiadomej i podstawieniu jej do drugiego równania
Metoda przeciwnych współczynników	○ Polega na dodawaniu równań stronami gdy przy jednej zmiennej w równaniach znajdują się przeciwne współczynniki $\begin{cases} x+2y=8 \\ 4x-2y=2 \end{cases}$ $x+4x+2y-2y=8+2$
Metoda graficzna	○ Rozwiązanie układu równań tą metodą polega na narysowaniu prostych w układzie współrzędnych. $\begin{cases} x+2y=8 \\ 2x-y=1 \end{cases}$ $\begin{cases} y=-\frac{1}{2}x+4 \\ y=2x-1 \end{cases}$ ○ Dla układu oznaczonego rozwiązaniem jest punkt przecięcia prostych ○ Dla układu nieoznaczonego proste mają nieskończenie wiele punktów wspólnych (proste te się pokrywają) ○ Dla układu sprzecznego proste nie mają punktów wspólnych (są równoległe i rozłączne).

Metody rozwiązywania układów równań liniowych z wykorzystaniem macierzy

Przy użyciu macierzy odwrotnej	○ Układ równań **A · x = b**, znając macierz odwrotną można rozwiązać: $A \cdot x = b$ $A^{-1} \cdot A \cdot x = A^{-1} \cdot b$ $x = A^{-1} \cdot b$
Wzory Cramera (metoda wyznaczników)	○ Układ równań **A · x = b** o macierzy nieosobliwej **A** ma dokładnie jedno rozwiązanie postaci: $x_k = \frac{\det(A_k)}{\det(A)} \qquad k = 1, \ldots, n$ ○ macierz $\mathbf{A_k}$ powstaje z macierzy **A** przez zastąpienie k-tej kolumny przez wektor **b**
Metoda Eliminacji Gaussa	○ Rozwiązując układ *m* równań liniowych z *n* niewiadomymi należy, za pomocą **operacji elementarnych** wyłącznie na wierszach, sprowadzić macierz rozszerzoną układu równań liniowych do **postaci schodkowej**. ○ Następnie należy rozstrzygnąć istnienie rozwiązań układu z pomocą **twierdzenia Kroneckera-Capellego**. ○ Jeżeli układ nie jest sprzeczny, to zbiór rozwiązań układu wyjściowego jest równy zbiorowi rozwiązań układu reprezentowanego przez powstałą schodkową macierz rozszerzoną.
Metoda LU (rozkład trójkątny)	○ Rozwiązanie układu równań **A x = b**, jeśli istnieje rozkład trójkątny A = LU: $LU\,x = b, \quad U\,x = y, \quad L\,y = b$

Przykład

Rozwiąż układ równań metodą wyznaczników:

$$\begin{cases} 7x+2y=1 \\ 3x+4y=2 \end{cases}$$

Rozwiązanie:

Oba równania są już zapisane w postaci $ax+by=c$.

Możemy zatem przejść do liczenia trzech wyznaczników W, W_x oraz W_y.

Dla ułatwienia zapiszemy nasz układ równań jeszcze raz, kolorując współczynniki liczbowe:

$$\begin{cases} {\color{red}7}x+{\color{blue}2}y={\color{green}1} \\ {\color{red}3}x+{\color{blue}4}y={\color{green}2} \end{cases}$$

Teraz nasze wyznaczniki budujemy z odpowiednich kolumn w taki sposób:

$$W=\begin{vmatrix} {\color{red}7} & {\color{blue}2} \\ {\color{red}3} & {\color{blue}4} \end{vmatrix} \qquad W_x=\begin{vmatrix} {\color{green}1} & {\color{blue}2} \\ {\color{green}2} & {\color{blue}4} \end{vmatrix} \qquad W_y=\begin{vmatrix} {\color{red}7} & {\color{green}1} \\ {\color{red}3} & {\color{green}2} \end{vmatrix}$$

Obliczamy je, mnożąc liczby na krzyż i odejmując od siebie:

$$W=\begin{vmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}=7\cdot 4-3\cdot 2=28-6=22$$

$$W_x=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}=1\cdot 4-2\cdot 2=4-4=0$$

$$W_y=\begin{vmatrix} 7 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}=7\cdot 2-3\cdot 1=14-3=11$$

Teraz obliczmy rozwiązania układu równań korzystając ze **wzorów Cramera**:

$$x=\frac{W_x}{W}=\frac{0}{22}=0$$

$$y=\frac{W_y}{W}=\frac{11}{22}=\frac{1}{2}$$

Czyli rozwiązaniem układu równań jest para liczb:

$$x=0$$

$$y=\frac{1}{2}$$

Wyznacznik macierzy

Aby obliczyć wyznacznik macierzy 1 na 1 należy skorzystać z wzoru:

$$det(A) = |\, a_{11} \,| = a_{11}$$

Aby obliczyć wyznacznik macierzy 2 na 2 wystarczy skorzystać z wzoru:

$$det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}$$

Obliczając wyznacznik macierzy 3 na 3 korzystamy z wzory:

$$det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} +$$

$$+ a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33}$$

Rząd macierzy

Chcąc obliczyć rząd macierzy musimy znaleźć największą macierz, której wyznacznik jest różny od zera, wielkość tej niezerowej macierzy będzie szukaną wartością.

Minor macierzy

Minor - wyznacznik macierzy kwadratowej powstałej z danej macierzy przez skreślenie pewnej liczby jej wierszy i kolumn.