Zagadnienie: Moc zbioru. Zbiory przeliczalne i nieprzeliczalne. Nr zagadnienia 2
Dział: Logika i teoria mnogości. Nr działu I.

Moc zbioru

Zbiór (*niegdyś mnogość, wielość*) – kolekcja niepowtarzających się elementów. Pojęcie to jest jednym z najbardziej fundamentalnych pojęć matematyki, w teorii mnogości (teorii zbiorów) jest ono postrzegane jako pojęcie pierwotne.

Moc zbioru

Georg Cantor, twórca teorii mnogości, określał moc zbioru jako pewne uporządkowanie. Moc zbioru określa wielkość danego zbioru, a zbiory mają tę samą moc, gdy mają tyle samo elementów. Określeniem mocy zbioru jest liczba kardynalna tego zbioru. Liczba kardynalna zbioru skończonego jest równa liczbie jego elementów.

Liczbę kardynalną (moc) zbioru *X* oznaczamy symbolem $|X|$ lub $\overline{\overline{X}}$ – tej właśnie symboliki używał Cantor.

Powiemy, że moc zbioru X jest nie większa od mocy zbioru Y, gdy istnieje funkcja różnowartościowa ze zbioru X do zbioru Y. W takiej sytuacji piszemy: $|X| \leq |Y|$. Jeżeli $|X| \leq |Y|$ i nieprawda, że $|X| = |Y|$, to mówimy, że zbiór X ma moc mniejszą niż zbiór Y.

Tw. *Cantora-Bernsteina-Schrödera* mówi, że jeśli $|X| \leq |Y|$ i $|Y| \leq |X|$, to $|X| = |Y|$.

Tw. *Cantora* to twierdzenie teorii mnogości głoszące, że każdy zbiór ma moc mniejszą niż rodzina jego wszystkich podzbiorów, czyli jego zbiór potęgowy. (Jeżeli $X \neq \emptyset$ to $|X| \leq |P(X)|$, gdzie $P(X) = \{ Y \mid Y \subset X \}$)

Równość mocy zbiorów określamy jako *równoliczność*.
Zbiory X i Y nazywamy równolicznymi, jeśli istnieje bijekcja $f\colon X \to Y$ przekształcająca zbiór X na Y.
Równoliczność zbiorów zapisujemy:

$$\mathbf{X \sim Y}$$

Przykłady:

- $X = \mathbb{N}$, $Y = \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N} \setminus \{0\}$ $\quad f(n) = n + 1$
- $X = \mathbb{N}$, $Y = \{ 2k \mid k \in \mathbb{N} \}$, $f\colon X \to Y$ $\quad f(n) = 2 \cdot n$

Dla dowolnych zbiorów X, Y, Z, zachodzi:

- $X \sim X$
- $X \sim Y \Rightarrow Y \sim X$
- $(X \sim Y) \wedge (Y \sim Z) \Rightarrow X \sim Z$

Tw. Każdy nieskończony podzbiór liczb naturalnych jest równoliczny ze zbiorem wszystkich liczb naturalnych.
Wniosek: Zbiór A jest równoliczny ze zbiorem $\mathbb{N}$ wtedy i tylko wtedy, gdy elementy zbioru A można ustawić w nieskończony ciąg.

Zamiast mówić, że dane zbiory są równoliczne, można również mówić, że zbiory te są równej mocy lub że mają tę samą liczbę kardynalną.

Posługując się pojęciem równoliczności można zdefiniować pojęcia zbiorów skończonego i nieskończonego.

Zbiór nieskończony to zbiór, który jest równoliczny z pewnym swoim właściwym podzbiorem. Liczbę kardynalną nazywamy nieskończoną, gdy jest mocą pewnego zbioru nieskończonego, np. zbiór $\mathbb{N}$ jest nieskończony.

Zbiór skończony to zbiór, który nie jest nieskończony. Moc zbioru skończonego wyraża się zawsze pewną nieujemną liczbą całkowitą.

Zbiory przeliczalne i nieprzeliczalne

Zbiór przeliczalny

Zbiór $A \neq \emptyset$ jest przeliczalny wtedy i tylko wtedy, gdy jest on zbiorem wyrazów pewnego ciągu nieskończonego, czyli wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje funkcja f przekształcająca zbiór wszystkich liczb naturalnych na zbiór A.

Zbiór przeliczalny zatem to zbiór skończony lub równoliczny ze zbiorem wszystkich liczb naturalnych.

Zbiory przeliczalne nieskończone są równej mocy. Moc zbiorów przeliczalnych nieskończonych oznaczamy symbolem $\aleph_0$ (czytaj: alef zero).

Przykłady zbiorów przeliczalnych:

- podzbiór zbioru przeliczalnego jest zbiorem przeliczalnym,
- suma dowolnej skończonej ilości zbiorów przeliczalnych jest zbiorem przeliczalnym,
- produkt kartezjański dwóch zbiorów przeliczalnych jest zbiorem przeliczalnym,
- zbiór wszystkich liczb całkowitych jest zbiorem przeliczalnym,
- zbiór wszystkich liczb wymiernych jest zbiorem przeliczalnym,
- zbiór wszystkich ciągów skończonych o wyrazach należących do ustalonego zbioru przeliczalnego jest zbiorem przeliczalnym,
- zbiór wszystkich wielomianów jednej zmiennej o współczynnikach wymiernych jest przeliczalny.

Zbiór nieprzeliczalny

Zbiór nieprzeliczalny to zbiór, który nie jest przeliczalny.

Zbiór liczb rzeczywistych przedziału (0, 1) jest zbiorem nieprzeliczalnym, gdyż nie istnieje ciąg o wyrazach z przedziału (0, 1) taki, że każda liczba rzeczywista z tego przedziału jest wyrazem ciągu.

Jeżeli zbiór A jest nieprzeliczalny i $A \subset B$, to B jest również zbiorem nieprzeliczalnym. Z twierdzenia tego wynika, że zbiór wszystkich liczb rzeczywistych jest nieprzeliczalny.

Moc zbioru wszystkich liczb rzeczywistych nazywamy continuum i oznaczamy $\mathfrak{C}$.

Przykłady zbiorów nieprzeliczalnych:

- zbiór wszystkich liczb rzeczywistych jest zbiorem nieprzeliczalnym,
- zbiór wszystkich liczb niewymiernych jest zbiorem nieprzeliczalnym,
- zbiór wszystkich podzbiorów zbioru liczb naturalnych jest nieprzeliczalny.

Arytmetyka liczb kardynalnych

Liczba wszystkich podzbiorów zbioru skończonego o *n* elementach wynosi 2^n. Dla zbiorów nieskończonych X zbiór wszystkich podzbiorów przyjęło się oznaczać 2^X. Moce zbiorów X i 2^X są różne.

$$2^{\aleph_0} = \mathfrak{C}$$
$$2^{\mathfrak{C}} > \mathfrak{C}$$

Na liczbach kardynalnych, które w pewnym sensie są uogólnieniem liczb naturalnych można wykonywać działania arytmetyczne.

<u>Dodawanie:</u>

Niech $n = |X|$, $m = |Y|$ i $X \cap Y = \emptyset$, wtedy: $n+m = |X \cup Y|$

Dodawanie liczb kardynalnych jest łączne i przemienne. Jednak nie zawsze jego wynik jest zgodny z doświadczeniem ze świata liczb naturalnych. I tak:

$$\aleph_0 + n = \aleph_0$$
$$\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$$

<u>Mnożenie:</u>

Niech $n = |X|$, $m = |Y|$, wtedy: $n \cdot m = |X \times Y|$

Mnożenie liczb kardynalnych jest także łączne i przemienne, podlega także prawu rozdzielności względem dodawania.

$$\aleph_0 \cdot n = \aleph_0$$
$$\aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0$$

<u>Potęgowanie:</u>

Niech $n = |X|$, $m = |Y|$, wtedy $m^n = |Y^X|$

Własności potęgowania liczb kardynalnych:

1. $m^{n+k} = m^n \cdot m^k$
2. $(m \cdot n)^k = m^k \cdot n^k$
3. $(m^n)^k = m^{n \cdot k}$