Funkcje Tworzące i ich zastosowania

Link do wykładu Bobińskiego z MD (od str. 23): http://www-users.mat.uni.torun.pl/~gregbob/matdysk/Wyklad.pdf
Troche inne info: http://www.ii.uj.edu.pl/~roman/FT/wyklad_01.pdf
Mimuw: http://wazniak.mimuw.edu.pl/index.php?title=Matematyka_dyskretna_1/Wyk%C5%82ad_7:_Funkcje_tworz%C4%85ce

Funkcja tworząca G(x) dla ciągu to szereg funkcyjny zmiennej x

$$G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n x^n = g_0 + g_1 x + g_2 x^2 + g_3 x^3 + g_4 x^4 + \ldots .$$

Dla dwu funkcji tworzących
$F(x) = f_0 + f_1 x + f_2 x^2 + \ldots$
oraz
$G(x) = g_0 + g_1 x + g_2 x^2 + \ldots$
mamy:

$$F(x) = Gx \Leftrightarrow f_0 = g_0,\ f_1 = g_1,\ f_2 = g_2,\ \ldots$$

$$\begin{aligned}\alpha \cdot F(x) + \beta \cdot Gx &= \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha \cdot f_n + \beta \cdot g_n) x^n \\ &= (\alpha \cdot f_0 + \beta \cdot g_0) + (\alpha \cdot f_1 + \beta \cdot g_1) x + (\alpha \cdot f_2 + \beta \cdot g_2) x^2 + \ldots\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}F(x) \cdot G(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} f_k g_{n-k} \right) x^n \\ &= f_0 g_0 + (f_0 g_1 + f_1 g_0) x \\ &+ (f_0 g_2 + f_1 g_1 + f_2 g_0) x^2 \\ &+ (f_0 g_3 + f_1 g_2 + f_2 g_1 + f_3 g_0) x^3 + \ldots\end{aligned}$$

Twierdzenie.

Funkcja tworząca postaci

$$G(x) = g_0 + g_1 x + g_2 x^2 + g_3 x^3 + \ldots$$

ma odwrotną względem mnożenia (splotu), tzn. istnieje funkcja tworząca U(x) taka, że U(x)*G(x) = 1, wtedy i tylko wtedy, gdy g0 != 0.

Operacje na funkcjach tworzących:

- Dodawanie:
$$\alpha \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n + \beta \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha a_n + \beta b_n) x^n$$
- Przesunięcie:
$$x^m \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=m}^{\infty} a_{n-m} x^n$$
- Mnożenie przez liczbę:
$$c \cdot G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (c a_n) x^n,\ c \in \mathbb{C}$$
- Mnożenie:
$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$, gdie $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$
- Różniczkowanie:
$$(G(x))' = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$
- Całkowanie:
$$\int_0^x G(t)\ dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} a_{n-1} x^n$$

Jednym z najważniejszych ich zastosowań jest przydatność do rozwiązywania równań rekurencyjnych. Bardzo dobrym przykładem stosowanych technik jest wyprowadzenie wzoru na *n*-ty wyraz [ciągu Fibonacciego](#).

Liczby Fibonacciego określone są wzorami rekurencyjnymi

$$\begin{cases} F_0 = 0 \\ F_1 = 1 \\ F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \end{cases}$$

Niech $F(x)$ będzie funkcją tworzącą ciągu liczb Fibonacciego, wtedy

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n x^n.$$

Zauważmy, że

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n x^n = x + \sum_{n=2}^{\infty} (F_{n-2} + F_{n-1}) x^n = x + x^2 F(x) + x F(x).$$

Zatem

$$F(x) = \frac{x}{1-x-x^2}.$$

Niech $\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ i $\lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ będą dwoma pierwiastkami równania $x^2+x-1=0$.

Zatem mamy

$$F(x) = \frac{x}{1-x-x^2} = \frac{x}{(1-\lambda_1 x)(1-\lambda_2 x)} = \frac{1}{\sqrt{5}}(\frac{1}{1-\lambda_1 x} - \frac{1}{1-\lambda_2 x})$$
$$= \frac{1}{\sqrt{5}}(\sum_{n=0}^{\infty} x^n \lambda_1^n - \sum_{n=0}^{\infty} x^n \lambda_2^n).$$

Możemy więc już obliczyć szukany n-ty wyraz,

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\lambda_1^n - \lambda_2^n).$$

Częstym zastosowaniem funkcji tworzących jest zliczanie pewnych obiektów kombinatorycznych. Klasyczną metodą jest ułożenie najpierw równania rekurencyjnego na zliczane obiekty, a potem rozwiązanie go z użyciem funkcji tworzących. Przykładem takiego rozumowania jest m.in. wyprowadzenie wzoru na liczby Catalana.

Do REDAKTORA: wez nie usuwaj linków żadnych bo mysle ze moga sie przydac

Od REDAKTORA nie miałem nawet zamiaru usówać.