Całka Riemanna

1. Definicje
2. Twierdzenia
3. Zastosowanie w geometrii
4. Powtórka z całkowania

1. Definicje.

Definicja. Podziałem przedziału $[a,b]$ nazywamy ciąg punktów $a=x_0<x_1<...<x_n=b$, i-tym przedziałem podziału P nazywamy przedział $s_i=[x_{i-1},x_i]$. Długość przedziału s_i oznaczamy $\Delta s_i=x_i-x_{i-1}$, a średnicą podziału $\Delta(P)=\max_{1\le i\le n}\Delta s_i$. $P([a,b])$ jest rodziną wszystkich podziałów przedziału $[a,b]$.

Definicja. Dla funkcji $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ i dla podziału $P: a=x_0<x_1<...<x_n=b$ definiujemy $\forall_{i\le n} M_i=\operatorname{supr}_{x\in s_i} f(x)$ i $m_i=\inf_{x\in x_i} f(x)$. Górną suma Riemanna dla funkcji f wzgl. Podziału P nazywamy liczbę $U(f,P)=\sum_{i=1}^{n} M_i\cdot\Delta s_i$, a dolną sumą Riemanna liczbę $L(f,P)=\sum_{i=1}^{n} m_i\cdot\Delta s_i$.

Definicja. Liczbę $S(f,s_i)=\sum_{i=1}^{n} f(\varepsilon_i)\Delta_i$, gdzie $\varepsilon_i\in[x_{i-1},x_i]$.

Definicja (inna definicja całki Riemanna). Granicę (o ile istnieje) $\lim_{\substack{n\to\infty\\ \Delta s_i\to 0}} S(f,P)$ nazywamy całką oznaczoną (Riemanna).

Definicja. Dolną całką Riemanna z funkcji f na przedziale $[a,b]$ nazywamy liczbę $\underline{\int_a^b f(x)dx}=\operatorname{supr}_{P\in P([a,b])} L(f,P)$, a górną całką Riemanna liczbę $\overline{\int_a^b f(x)dx}=\inf_{PinP([a,b])} U(f,P)$.

Definicja. Mówimy, że $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ jest całkowalna w sensie Riemanna (R-całkowalna), gdy $\underline{\int_a^b f(x)dx}=\overline{\int_a^b f(x)dx}$. Wtedy liczbę $\underline{\int_a^b f(x)dx}$ nazywamy całką (Riemanna) funkcji f na przedziale $[a,b]$ i oznaczamy $\int_a^b f(x)dx$.

Definicja. Zał, że $F,f:[a,b]\to\mathbb{R}$. Mówimy, że F jest funkcją pierwotną dla funkcji f, gdy $\forall_{x\in[a,b]} F'(x)=f(x)$.

Wniosek. Jeżeli f jest funkcją ciągłą, to f posiada funkcję pierwotną. Funkcja pierwotna dla funkcji f jest określona wzorem $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$.

Uwaga:

(1) Jeżeli F jest funkcją pierwotną dla funkcji $f:[a,b]\rightarrow\mathbb{R}$, to $\forall_{c\in\mathbb{R}} F+c$ też jest funkcją pierwotną dla f.

(2) Jeżeli F,G są funkcjami pierwotnymi dla $f,g:[a,b]\rightarrow\mathbb{R}$, to .
$\exists_{c\in\mathbb{R}}\forall_{x\in[a,b]} F(x)-G(x)=c$

(3) Jeżeli $f:[a,b]\rightarrow\mathbb{R}$ jest ciągła, G jest funkcją pierwotną dla f, to $\int_a^b f(t)\,dt = G(b)-G(a) = G\Big|_a^b$

Całki niewłaściwe.

Definicja. Zał, że f : [a,∞) → $\mathbb{R}$. Jeżeli $\forall_{b>a} f\|[a,b]$ jest R-całkowalna oraz istnieje $\lim_{x\to\infty}\int_a^x f(t)\,dt$, to mówimy, że dla f istnieje całka niewłaściwa na półprostej $[a,\infty)$ i oznaczamy ją $\int_a^\infty f(t)\,dt = \lim_{x\to\infty}\int_a^x f(t)\,dt$. Dodatkowo, jeżeli $\int_a^\infty f(t)\,dt$ jest skończona, to mówimy że f jest R-całkowalna na $[a,\infty)$. Analogicznie, jeśli f : (-∞,b) → $\mathbb{R}$.

Jeżeli $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ oraz $\forall_{a,b\in} a<b, f\|[a,b]$ jest R-całkowalna oraz istnieje $\lim_{\substack{x\to-\infty\\ y\to+\infty}}\int_x^y f(t)\,dt$, to tę granicę nazywamy całką niewłaściwą z f na prostej $\mathbb{R}$ i oznaczamy $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt$.

Definicja. Zał, że f : [a,b) → $\mathbb{R}$ oraz $\forall_{x\in[a,b]} f$ jest R-całkowalna na $[a,x]$. Jeżeli $\lim_{x\to b}\int_a^x f(t)\,dt$ istnieje, to oznaczamy ją $\int_a^b f(t)\,dt$ i nazywamy całką niewłaściwą z f na $[a,b)$. Analogicznie definiujemy całkę niewłaściwą z f : (a,b] → $\mathbb{R}$. Zał, że , f : (a,b) → $\mathbb{R}$ $c\in(a,b)$ oraz istnieją całki niewłaściwe $\int_a^c f(t)\,dt$, $\int_c^b f(t)\,dt$. Jeżeli wykonywalne jest dodawanie $\int_a^c f(t)\,dt+\int_c^b f(t)\,dt$, to sumę tę nazywamy całką niewłaściwą z f na (a,b).

2. Twierdzenia

Twierdzenie. Funkcja $f:[a,b]\rightarrow\mathbb{R}$ jest R-całkowalna $\Leftrightarrow\forall_{\varepsilon>0}\exists_{P\in P([a,b])}U(f,P)-L(f,P)<\varepsilon$

Twierdzenie Riemanna. Zał., że $f:[a,b]\rightarrow\mathbb{R}$ jest ciągła. Wtedy f jest R-całkowalna.

Twierdzenie. Załóżmy, że f jest R-całkowalna, $\forall_{x\in[a,b]} f(x)\in[m,M], g:[m,M]\rightarrow\mathbb{R}$ jest ciągła. $h=f\circ g:[a,b]\rightarrow\mathbb{R}$ jest R-całkowalna.

Wniosek. Jeżeli $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ jest R-całkowalna, $c\in\mathbb{R}$, to funkcje $c\cdot f, |f|, f^2$ są R-całkowalne.

Twierdzenie. Jeżeli $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ jest R-całkowalna, $c\in\mathbb{R}$, to $\int_a^b c\cdot f(x)dx=c\int_a^b f(x)dx$.

Twierdzenie. Jeżeli $g,f:[a,b]\to\mathbb{R}$ są R-całkowalne, to $f+g$ jest R-całkowalna i $\int_a^b (f\pm g)(x)dx=\int_a^b f(x)dx\pm\int_a^b g(x)dx$

Twierdzenie. Jeżeli $g,f:[a,b]\to\mathbb{R}$ są R-całkowalne to $f\cdot g$ jest R-całkowalna.

Twierdzenie o wartości średniej. Załóżmy, że $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ jest ciągła. Wtedy $\underset{c\in[a,b]}{\exists}\int_a^b f(x)dx=f(c)(b-a)$

Twierdzenie o podziale przedziału całkowania. Zał, że $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ jest R-całkowalna, $a<c<b$. Wtedy f jest R-całkowalna na przedziałach $[a,c]$ i $[c,b]$, oraz $\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^c f(x)\,dx+\int_c^b f(x)\,dx$

3. Zastosowanie w geometrii.

I. Pole figury.

Pole figury $A\subset\mathbb{R}^2$ to funkcja $P:A\to\mathbb{R}_{+¿}$ = [a,∞) spełniająca:

(1) jeżeli $A=A_1\cup A_2$ oraz $A_1\cap A_2=\emptyset$, to $P(A)=P(A_1)+P(A_2)$;

(2) jeżeli zbiór B jest przesunięciem zbioru A, to $P(B)=P(A)$.

Definicja. Jeżeli $f:[a,b]\to\mathbb{R}_{+¿}$ jest R-całkowalna, $A=\{(x,y);x\in[a,b]\wedge y\in[0,f(x)]\}$.

Wtedy możemy określić pole zbioru A wzorem $P(A)=\int_a^b f(t)\,dt$.

Definicja. Obszarem normalnym wyznaczonym przez funkcje ciągłe $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ $(g\geq f\geq 0)$ nazywamy zbiór $N(f,g)=\{(x,y);x\in[a,b]\wedge y\in[f(x),g(x)]\}$. Pole P obszaru $N(f,g)$ obliczamy ze wzoru $P(N(f,g))=\int_a^b (g-f)(t)\,dt$.

Wniosek. Pole P obszaru ograniczonego wykresem funkcji f z osią OX jest równe $\int_a^b |f(t)|dt$.

II. Obliczanie objętości figur obrotowych.

Objętość figury jest funkcją analogiczną do funkcji pola.

Definicja. Zał, że $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ jest ciągła i nieujemna, $B(f)$ to bryła otrzymana przez obrót wykresu funkcji f dookoła osi OX, $V(f)$ to objętość bryły $B(f)$. Wtedy $V(f)=\pi\int_a^b f^2(x)\,dx$.

III. Obliczanie długości łuku.

Definicja. Zał, że $f:[a,b]\to\mathbb{R}\in C^1$. Wykres funkcji f nazywamy łukiem o końcach

$\left(a, f(a)\right), \left(b, f(b)\right)$. Wtedy długość łuku f wynosi $\int\limits_a^b \sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\,dx$.

IV. Obliczanie pól powierzchni bocznych.

Definicja. Jeżeli $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ jest ciągła, to pole powierzchni bocznej zakreślonej przez łuk f wynosi $2\pi\int\limits_a^b f(x)\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\,dx$.

4. Powtórka z całkowania

Całkowanie przez podstawienie.

Zał, że $\varphi : [a,b] \to [c,d]$ taka, że $\varphi \in C^1$ oraz $\forall_{x\in[a,b]} \varphi'(x) \neq 0$, $\varphi(a) = c$, $\varphi(b) = d$. Wtedy dla dowolnej funkcji ciągłej $f:[c,d]\to\mathbb{R}$ zachodzi $\int\limits_c^d f(t)\,dt = \int\limits_a^b (f\circ\varphi)(t)\cdot\varphi'(t)\,dt$.

Całkowanie przez części.

Zał, że $f, g:[a,b]\to\mathbb{R}$ **są klasy** C^1**.** Wtedy $\int\limits_a^b f'(x)\,g(x)\,dx = f\cdot g\Big|_a^b - \int\limits_a^b f(x)\,g(x)\,dx$

Inne przykłady:

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln|f(x)|$$

Wzór rekurencyjny:

Niech $I_n = \int dx/(1+x^2)^n$ dla $n\geq 2$ wtedy:

$$I_n = \frac{1}{2n-2}\cdot\frac{x}{(1+x^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{(2n-2)} I_{n-1} \quad \text{ponadto} \quad I_1 = arctg(x)$$