Schemat rekursji

Aneta Szumowska (iriz@mat.uni.torun.pl)

19 czerwca 2009

1 Definicja funkcji rekurencyjnych

Częściowe funkcje liczbowe $f^n(x_1, ..., x_n)$ (dla n = 1,2,...), to funkcje określone na pewnym podzbiorze zbioru $\mathbb{N}^n$ o wartościach będących liczbami naturalnymi.

Dla dowolnych liczb $a_1, ..., a_n \in \mathbb{N}$ oraz funkcji f^k i g^s piszemy

$f^k(a_{j_1}, ..., a_{j_k}) = g^s(a_{j_1}, ..., a_{j_s})$,

jeśli: albo wartości $f^k(a_{j_1}, ..., a_{j_k})$ oraz $g^s(a_{j_1}, ..., a_{j_s})$ są nieokreślone, albo obie są określone i identyczne.

n-argumentowa funkcja $f^n(x_1, ..., x_n)$ jest **całkowita**, jeśli jej dziedziną jest cały zbiór $\mathbb{N}^n$, czyli gdy $D_{f^n} = \mathbb{N}^n$.

2 Funkcje proste, złożenie i podstawienie

Następujące funkcje całkowite nazywami **prostymi**:

- $s^1(x) = x + 1$,
- $o^1(x) = 0$,
- $I^n_m(x_1, ..., x_n) = x_m$ (dla $1 \leqslant m \leqslant n$).

Funkcja $h^n(x_1, ..., x_n) = g^m(x_1, ..., x_n), ..., f^n_m(x_1, ...x_n)$ otrzymywana jest z funkcji $g^m, f^n_1, ..., f^n_m$ przez operację **złożenia**.

Funkcję $h^n(x_1, ..., x_n) = g^m(t_1, ..., t_m)$ otrzymujemy z pomocą operacji **podstawienia** z funkcji $g^m, f_1, ..., f_k$, gdy $t_i = f_j(x_{j_1}, ..., x_{j_s})$, gdzie każde x_{j_l} jest jedną ze zmiennych $x_1, ..., x_n$ lub t_i jest jedną ze zmiennych $x_1, ..., x_n$.

3 Schemat rekursji prostej

Funkcję $f^{n+1}(x_1, ..., x_n, y)$ otrzymujemy z funkcji $g^n(x_1, ..., x_n)$ oraz $h^{n+2}(x_1, ..., x_n, y, z)$ za pomocą **operatora rekursji prostej**, gdy może ona być określona następującym **schematem rekursji prostej**:

- $f^{n+1}(x_1, ..., x_n, 0) = g^n(x_1, ..., x_n)$,
- $f^{n+1}(x_1, ..., x_n, y + 1) = h^{n+2}(x_1, ..., x_n, y, f^{n+1}(x_1, ..., x_n, y))$.

Dla n=0 schemat rekursji prostej przyjmuje następującą postać:

- $f(0) = a$,
- $f(y + 1) = g(y, f(y))$,

gdzie a jest jednoargumentową funkcją stałą o wartości a.

4 Minimum efektywne

Funkcję $f^n(x_1, ..., x_n)$ otrzymujemy z funkcji $g^{n+1}(x_1, ..., x_n, y)$ za pomocą operacji **minimum efektywnego** (za pomocą **μ-operatora**), co zaznaczamy następująco:

$$f^n(x_1, ..., x_n) = \mu y[g^{n+1}(x_1, ..., x_n, y) = 0],$$

gdy spełniony jest warunek:

$f^n(x_1, ..., x_n)$ jest określone i równe y wtedy i tylko wtedy, gdy
$g(x_1, ..., x_n, 0), ..., g(x_1, ..., x_n, y - 1)$ są wszystkie określone i różne od 0, zaś $g(x_1, ..., x_n, y) = 0$.

5 Funkcje: pierwotnie, częściowo i ogólnie rekurencyjne

- Funkcja $f(x_1, ..., x_n)$ jest **pierwotnie rekurencyjna** (prf), jeśli może być otrzymana z funkcji prostych za pomocą skończonej liczby zastosowań operacji złożenia oraz rekursji prostej.
- Funkcja $f(x_1, ..., x_n)$ jest **częściowo rekurencyjna** (crf), jeśli może być otrzymana z funkcji prostych za pomocą skończonej liczby zastosowań operacji złożenia, rekursji prostej oraz minimum efektywnego.
- Funkcja $f(x_1, ..., x_n)$ jest **ogólnie rekurencyjna** (orf), gdy jest ona całkowitą funkcja rekurencyjną.

Każda funkcja pierwotnie rekurencyjna jest też ogólnie rekurencyjna (lecz nie na odwrót).

6 Ograniczony μ-operator

Funkcję $f^n(x_1, ..., x_n)$ otrzymujemy z funkcji

$$g^{n+1}(x_1, ..., x_n, y) \textit{ oraz } h^n(x_1, ..., x_n)$$

za pomocą **ograniczonego μ-operatora**, jeśli dla wszystkich $x_1, ..., x_n$:

$$\mu y[g^{n+1}(x_1, ..., x_n, y) = 0]$$

jest określone i nie większe niż $h^n(x_1, ..., x_n)$ oraz

$$f^n(x_1, ..., x_n) = \mu y[g^{n+1}(x_1, ..., x_n, y) = 0]$$

7 Inne schematy rekursji

7.1 Rekursja zwrotna

Funkcję f^{n+1} otrzymujemy z $g^n, h^{n+s+1}, t_1^1, ..., t_s^1$ z pomocą schematu **rekursji zwrotnej**, gdy może ona być określona schematem:

$$f^{n+1}(x_1, ..., x_n, 0) = g^n(x_1, ..., x_n),$$
$$f^{n+1}(x_1, ..., x_n, y+1) = h^{n+s+1}(x_1, ..., x_n, f(x_1, ..., x_n, t_1(y+1)), ..., f(x_1, ..., x_n, t_s(y+1))),$$

gdzie $t_1(y+1) \leqslant y, ..., t_s(y+1) \leqslant y$.

Jeśli funkcje g, h, $t_1, ..., t_s$ są pierwotnie rekurencyjne, to funkcja f jest pierwotnie rekurencyjna.

7.2 Rekursja jednoczesna

Niech $f_1^{n+1}, ..., f_k^{n+1}$ będą zdefiniowane przez **rekursję jednoczesną**, tzn. za pomocą następującego schematu:

$$\begin{cases} f_i^{n+1}(x_1, ..., x_n, 0) = g_i^n(x_1, ..., x_n) \\ f_i^{n+1}(x_1, ..., x_n, y+1) = h_i^{n+k+1}(x_1, ..., x_n, y, f_1(x_1, ..., x_n, y), ..., f_k(x_1, ..., x_n, y)) \end{cases}$$

dla wszystkich $1 \leqslant i \leqslant k$.

Można udowodnić, że jeśli funkcje $g_1, ..., g_k, h_1, ..., h_k$ są pierowtnie rekurencyjne, to funkcje $f_1, ..., f_k$ są pierwotnie rekurencyjne.

7.3 Rekursja ograniczona

Schemat **rekursji ograniczonej** ma postać następującą:

$$f(x_1, ..., x_n, 0) = g(x_1, ..., x_n)$$
$$f(x_1, ..., x_n, x+1) = h(x_1, ..., x_n, x, f(x_1, ..., x_n, x))$$
$$f(x_1, ..., x_n, x) \leqslant j(x_1, ..., x_x, x).$$

Możliwe są różne dalsze schematy rekursji.

Definiowanie przez rekursję to ważne narzędzie w językach programowania.