

RACHUNEK ZDAŃ, TAUTOLOGIE

Składnia rachunku zdań: zmienne zdaniowe, funktory, znaki pomocnicze (nawiasy)

FUNKTORY (spójniki)

Negacja „nieprawda, że p”		Koniunkcja „p i q”			Alternatywa „p lub q”			Implikacja „jeżeli p to q”			Równoważność „p wtedy i tylko wtedy, gdy q”		
p	~p	p	q	$p \wedge q$	p	q	$p \vee q$	p	q	$p \Rightarrow q$	p	q	$p \Leftrightarrow q$
0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1
1	0	0	1	0	0	1	1	0	1	1	0	1	0
		1	0	0	1	0	1	1	0	0	1	0	0
		1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

Przykład: p – Ala ma kota. q – Ala ma psa. r – Ala ma 2 zwierzęta.

Jeśli Ala ma kota i psa, to ma 2 zwierzęta. $(p \wedge q) \Rightarrow r$

Tautologia – wyrażenie, które jest prawdziwe bez względu na wartościowanie zmiennych zdaniowych

Przykłady: $(p \vee \sim p)$, $(\sim p \wedge \sim q) \Rightarrow (\sim p \vee \sim q)$

Jak sprawdzić czy zdanie logiczne jest tautologią? Sprawdzamy, czy podane zdanie jest zawsze prawdziwe, np. za pomocą tabelki. Przykład: $\sim(p \vee q) \Leftrightarrow (\sim p \wedge \sim q)$

p	q	$p \vee q$	$\sim(p \vee q)$	~p	~q	$\sim p \wedge \sim q$	$\sim(p \vee q) \Leftrightarrow (\sim p \wedge \sim q)$
0	0	0	1	1	1	1	1
0	1	1	0	1	0	0	1
1	0	1	0	0	1	0	1
1	1	1	0	0	0	0	1

Najbardziej przydatne tautologie:

Rozdzielność koniunkcji względem alternatywy:

$$p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$

Rozdzielność alternatywy względem koniunkcji:

$$p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$$

Pierwsze prawo De Morgana:

$$\sim(p \vee q) \Leftrightarrow (\sim p \wedge \sim q)$$

Drugie prawo De Morgana:

$$\sim(p \wedge q) \Leftrightarrow (\sim p \vee \sim q)$$

Eliminacja implikacji:

$$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim p \vee q)$$

Zaprzeczenie implikacji:

$$\sim(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow p \wedge \sim q$$

Prawo kontrapozycji:

$$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim q \Rightarrow \sim p)$$

Prawo przechodniości:

$$[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)] \Rightarrow (p \Rightarrow r)$$

Te prawa (np. zaprzeczenie implikacji) można zastosować np. przeprowadzając dowód nie wprost – dowodzimy zaprzeczenie naszej tezy; jeśli dojdziemy do sprzeczności – teza jest prawdziwa

Oceń wartość logiczną wyrażenia, gdy p=0, q=1:

$$\sim(p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \wedge (q \vee p))$$

$$\sim(0 \Rightarrow 1) \Rightarrow (0 \wedge (1 \vee 0)) \Rightarrow \sim(1) \Rightarrow (0) \Rightarrow 0 \Rightarrow 0 - \text{prawda}$$

Przedstaw implikację za pomocą koniunkcji i negacji:

$$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim p \vee q) \Leftrightarrow \sim(p \wedge \sim q) \quad (\text{eliminacja implikacji} + \text{pierwsze prawo De Morgana})$$