3 Przestrzenie i przekształcenia liniowe. Baza i wymiar przestrzeni, macierz przekształcenia - definicje i przykłady.

Definicja. *Niech $k = (k, +, \cdot)$ będzie dowolnym ciałem. Układ $V = (v, \oplus, \odot)$ nazywamy przestrzenią liniową (wektorową), gdzie V jest zbiorem (nazywanym zbiorem wektorów, w odróżnieniu od zbioru k-skalarów), zaś:*

$$\oplus : V \times V \longrightarrow V$$

- dodawanie wektorów (działanie dwuargumentowe),

$$\odot : k \times V \longrightarrow V$$

- mnożenie wektorów przez skalary (działanie dwuargumentowe, zewnętrzne),
o ile spełnione są następujące warunki:

(1) $(V, \oplus)$ *jest grupą abelową,*

(2) $\forall_{\alpha,\beta\in k, v\in V} (\alpha \cdot \beta) \odot v = \alpha \odot (\beta \odot v)$

(3) $\forall_{v\in V} 1 \odot v = v$

(4) $\forall_{\alpha,\beta\in k, v\in V} (\alpha + \beta) \odot v = (\alpha \odot v) \oplus (\beta \odot v)$

(5) $\forall_{\alpha\in k, v,w\in V} \alpha \odot (v \oplus w) = (\alpha \odot v) \oplus (\alpha \odot w)$

Przykład. *Przykłady przestrzeni liniowych*

(1) $V = \{\overrightarrow{0}\}$
$\lambda \odot \overrightarrow{0} = \overrightarrow{0}$
$\overrightarrow{0} \oplus \overrightarrow{0} = \overrightarrow{0}$

(2) $V = k$
$\oplus : k \times k \longrightarrow k, \qquad v \oplus v' = v + v'$
$\odot : k \times k \longrightarrow k, \qquad \lambda \odot v = \lambda \cdot v$

(3) $n = \{1, 2, \dots\} \in \mathbb{N}^{\geqslant 1}$

$$V = k^n = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \middle| x1, \dots, x_n \in k \right\} \to M_{n\times 1}(k)$$

$$\oplus : k^n \times k^n \longrightarrow k^n, \qquad \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{bmatrix}$$

$$\odot : k \times k^n \longrightarrow k^n, \qquad \lambda \odot \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda \cdot x_1 \\ \vdots \\ \lambda \cdot x_n \end{bmatrix}$$

(3') $k = \mathbb{R}$
k^n *jest:*

- *prostą, gdy* $n = 1$

- *płaszczyzną, gdy* $n = 2$

- *przestrzenią, gdy* $n = 3$

(3") $\{x \in \mathbb{R}^3 | Ax_1 + Bx_2 + Cx_3 = 0\} < \mathbb{R}^3, \qquad \{x \in \mathbb{R}^2 | Ax_1 + Bx_2 = 0\} < \mathbb{R}^2$

(3"') $\mathbb{C}$ *jest przestrzenią nad ciałem* $\mathbb{R}$ *z działaniami:*

$$\oplus = + : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$$

- zwykłe dodawanie,

$$\odot = \cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$$

(4) $M_{m\times n}(k)$ *z działaniami dodawania macierzy i mnożenia macierzy przez skalay (elementy ciała k) tworzy przestrzeń liniową nad* k.

(5) przestrzeń funkcyjna.
$F(X, k) := \{f : X \longrightarrow k\}$*, gdzie* X *- zbiór,* k*- ciało,* f *- funkcja, oraz:*

$$\oplus : F \times F \longrightarrow F$$
$$(f \oplus g)(x) = f(x) + g(x),\ x \in X$$
$$\odot : \lambda \times F \longrightarrow F$$
$$(\lambda \odot g)(x) = \lambda \cdot g(x),\ x \in X.$$

$(F, \oplus, \odot)$ *jest przestrzenią liniową. Jeśli* $X\{1, \dots, n\}$ *to* $F = k^n$

$$f : 1, \dots, n \leftrightarrow \begin{bmatrix} f(1) \\ \vdots \\ f(n) \end{bmatrix}$$

Definicja. *Podzbiór* U *przestrzeni* V *nazywamy podprzestrzenią przestrzeni liniowej* V *(ozn.* $U < V$*) o ile*

$$\forall_{w,v \in U, \alpha \in k}\ w \oplus v \in U,\ \alpha \odot v \in U$$

Definicja. ***Kombinacją liniową*** *wektorów* $v_1, \dots, v_n \in V$ *nazywamy dowolny wektor postaci*

$$\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n$$

gdzie $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in k$

Definicja. *Niech* $X < V$ *będzie dowolną podprzestrzenią. Wówczas istnieje najmniejsza w sensie inkluzji podprzestrzeń przestrzeni* V *zawierająca* X *(ozn.* $< X >$*), nazywana* ***podprzestrzenią generowaną*** *przez* X*. Ponadto* $< X >= Komb(X)$ *- zbiór wszystkich kombinacji liniowych elementów z* X*.*

Definicja. *Wektory* $v_1, \dots, v_n \in V$ *są* ***liniowo zależne*** *o ile*

$$\exists_{\alpha_1,\dots,\alpha_n\in k}\ \alpha_1 v_1+\cdots+\alpha_n v_n=0$$

(Nie wszystkie α_i są równe 0!)

Wektory są ***liniowo niezależne****, gdy nie są liniowo zależne, tzn.:*

$$\forall_{\alpha_1,\dots,\alpha_n\in k}\ \alpha_1 v_1+\cdots+\alpha_n v_n=0\Rightarrow\alpha_1=\cdots=\alpha_n=0$$

Ponadto układ $X=\{v_i\}_{i\in I}$ jest liniowo niezależny, gdy każdy skończony podzbiór X jest liniowo niezależny. X jest zależny, gdy istnieje skończony podzbiór liniowo zależny.

Definicja. *Podzbiór $B\subset V$ podprzestrzeni liniowej V nazywamy bazą przestrzeni V o ile:*

(1) B generuje V

(2) B jest liniowo niezależne

Lemat. *Dla podzbioru $B<V$ zachodzi:*

(1) B jest bazą,

(2) B jest maksymalnym (w sensie inkluzji) zbiorem liniowo niezależnym w V.

Definicja. ***Wymiarem*** *przestrzeni V nazywamy moc zbioru jego dowolnej (pewnej) bazy B (ozn. $dim_k V$).*

Definicja. *Niech V,W będą przestrzeniami liniowymi nad ciałem k. Odwzorowanie $T:V\longrightarrow W$ nazywamy liniowym, o ile:*

$$\forall_{v,v'\in V}T(v+_V v')=T(v)+_W T(v')$$
$$\forall_{\alpha\in k,v\in V}T(\alpha\cdot_V v)=\alpha\cdot_W T(v)$$

Odwzorowanie T nazywamy izomorfizmem liniowym o ile jest liniowe i jest bijekcją (wówczas przestrzenie V i W nazywamy izomorficznymi i piszemy $V\simeq W$).

Przykład. *Przykłady odwzorowań liniowych*

(0) $0:V\longrightarrow V\qquad id:V\longrightarrow V$

(1) $M_{m\times n}\ni A\mapsto T_A:k^n\longrightarrow k^m$
$T_A(x)=Ax\in k^m$, $x\in k^n$

(2) $T:k[x]\longmapsto k[x]$, $T(g)=g\cdot f$
$g\in k[x]$ *jest ustalonym wielomianem.*

(3) $T:F_w(\mathbb{R},\mathbb{R})\longrightarrow F_w(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $T(f)=f'$

(4) $T:F_w(\mathbb{R},\mathbb{R})\longrightarrow\mathbb{R}$, $(f)=f'(c)$, $c\in\mathbb{R}$

(5) $R_\alpha:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}^2$

$$R_\alpha(\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix})=\begin{bmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x\cos\alpha-y\sin\alpha\\ x\sin\alpha+y\cos\alpha\end{bmatrix}$$

(6) $T_v : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \qquad T_v \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + v_1 \\ y + v_2 \end{bmatrix} \qquad v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$

-odwzorowanie liniowe $\Leftrightarrow v = 0$

Lemat. *Niech* $T : k^n \longrightarrow k^m$ *będzie odwzorowaniem liniowym. Wówczas*

$$\exists!_{A \in M_{m\times n}(k)} \text{ taka, że } T = T_A (= A\cdot)$$

Definicja. *Macierz* $A = A(T)_{B,B'}$ *nazywana jest macierzą odwzorowania* T *w bazach* B *i* B'. *Określają ją zależności:*

$$T(v_1) = \sum_{i=1}^{m} a_{i1} v_i'$$
$$\dots$$
$$T(v_n) = \sum_{i=1}^{m} a_{in} v_i'$$

gdzie:

V *- przestrzeń n-wymiarowa*

$B = (v_1, \dots, v_n)$ *- baza np.* V

V' *- przestrzeń m-wymiarowa*

$B' = (v_1', \dots, v_n')$ *- baza np. V'*

$T : V \longrightarrow V'$ *- odwzorowanie liniowe.*