Funkcja tworząca *G(x)* dla ciągu liczb rzeczywistych (lub zespolonych) *(g0, g1, g2, ...)* to szereg funkcyjny zmiennej rzeczywistej (lub zespolonej) *x* postaci:

$$G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n x^n = g_0 + g_1 x + g_2 x^2 + g_3 x^3 + g_4 x^4 + \dots.$$

Własności:

- dla dwóch funkcji tworzących $F(x)=f_0+f_1x+f_2x^2+\dots$ i $G(x)=g_0+g_1x+g_2x^2+\dots$ mamy:

  $$F(x) = Gx \Leftrightarrow f_0 = g_0,\ f_1 = g_1,\ f_2 = g_2,\ \dots$$

  $$\begin{aligned} \alpha \cdot F(x) + \beta \cdot Gx &= \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha \cdot f_n + \beta \cdot g_n)\, x^n \\ &= (\alpha \cdot f_0 + \beta \cdot g_0) + (\alpha \cdot f_1 + \beta \cdot g_1)\, x + (\alpha \cdot f_2 + \beta \cdot g_2)\, x^2 + \dots \end{aligned}$$

  $$\begin{aligned} F(x) \cdot G(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} f_k g_{n-k} \right) x^n \\ &= f_0 g_0 + (f_0 g_1 + f_1 g_0)\, x \\ &+ (f_0 g_2 + f_1 g_1 + f_2 g_0)\, x^2 \\ &+ (f_0 g_3 + f_1 g_2 + f_2 g_1 + f_3 g_0)\, x^3 + \dots \end{aligned}$$

- Funkcja tworząca G(x) ma funkcję odwrotną U(x) względem mnożenia tj G(x)*U(x) = 1 wtedy i tylko wtedy gdy g_0!=0

Operacje:

- Kombinacja liniowa:

  $$\alpha \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n + \beta \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha a_n + \beta b_n) x^n$$

- Przesunięcie:

  $$x^m \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=m}^{\infty} a_{n-m} x^n$$

- Mnożenie przez liczbę:

  $$c \cdot G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (c a_n) x^n,\ c \in \mathbb{C}$$

- Mnożenie:

  $$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n, \text{ gdzie } c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$$

- Różniczkowanie:

  $$(G(x))' = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

- Całkowanie:

  $$\int_0^x G(t)\, dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} a_{n-1} x^n$$

Zastosowania:

rozwiązywanie zagadnień kombinatorycznych (np. wyprowadzenie wzoru na liczby Catalana

obliczanie iteracyjnego wzoru funkcji rekurencyjnej (np. ciąg fibbonaciego)

Niech $F(x)$ będzie funkcją tworzącą ciągu liczb Fibonacciego, wtedy

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n x^n.$$

Zauważmy, że

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n x^n = x + \sum_{n=2}^{\infty} (F_{n-2} + F_{n-1}) x^n = x + x^2 F(x) + x F(x).$$

Zatem

$$F(x) = \frac{x}{1 - x - x^2}.$$

Niech $\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ i $\lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ będą dwoma pierwiastkami równania $x^2 + x - 1 = 0$

Zatem mamy

$$F(x) = \frac{x}{1 - x - x^2} = \frac{x}{(1-\lambda_1 x)(1-\lambda_2 x)} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{1-\lambda_1 x} - \frac{1}{1-\lambda_2 x}\right)$$
$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n \lambda_1^n - \sum_{n=0}^{\infty} x^n \lambda_2^n\right).$$

Możemy więc już obliczyć szukany n-ty wyraz,

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\lambda_1^n - \lambda_2^n).$$