Ciało liczb zespolonych

Niech $\mathbb{C}:=\{Z(a,b)=\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} : a,b\in\mathbb{R}\}\in M_{2x2}(\mathbb{R})$

Zbiór liczb zespolonych w postaci macierzowej.

Własności zbioru liczb zespolonych ze względu na działania macierzowe

(0) $\mathbb{Z}(a,b)=\mathbb{Z}(c,d)\Leftrightarrow a=c, b=d$

(1) $\mathbb{C}$ jest zamknięty ze względu na sumę (różnicę) oraz mnożenie prze liczbę.

$$\mathbb{Z}(a,b)+\mathbb{Z}(c,d)=\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} c & -d \\ d & c \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a+c & -b-d \\ b+d & a+c \end{bmatrix}=\mathbb{Z}(a+c,b+d)$$

(2) $\mathbb{C}$ jest zamknięty ze względu na mnożenie

$$\mathbb{Z}(a,b)*\mathbb{Z}(c,d)=\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} c & -d \\ d & c \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a\cdot c-b\cdot d & -a\cdot d-b\cdot cd \\ b\cdot c+a\cdot d & -b\cdot d+a\cdot c \end{bmatrix}=\mathbb{Z}(a\cdot c-b\cdot d, b\cdot c+a\cdot d)$$

(2') Mnożenie w $\mathbb{C}$ jest przemienne

(3) C jest zamknięte ze względu na transponowanie

$$\mathbb{Z}(a,b)^t=\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}^T=\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}=\mathbb{Z}(a,-b)$$

(4) $\mathbb{C}$ jest zamknięte ze względu na branie odwrotności

Zbiór C wraz z działaniami macierzowymi +, · obci ętymi do $\mathbb{C}$ tworzy ciało (elementy neutralne: 0 = Z(0, 0), I2 = Z(1, 0)) nazywane ciałem liczb zespolonych.

Liczby zespolone w postaci klasycznej

$\mathbb{C}:=\{Z=a+bi : a,b\in\mathbb{R}\}$

$\mathbb{C}\supseteq\mathbb{R}:=\{Z=a+0\mathrm{i} : a\in\mathbb{R}\}$

Jeśli z = a + bi to częścią rzeczywistą z nazywamy liczbę **re(z) := a** , zaś częscia urojona liczbę **im(z) := b**

Niech z = a + bi będzie liczbą zespoloną. Wówczas:

(a) $\bar{a}=a-bi$ nazywamy liczą sprzężoną z z
(b) $|z|=\sqrt{a^2+b^2}\in\mathbb{R}$ (R dodatnie z 0) nazywamy modułem liczby z

Własności sprzężenia:

(0) $\bar{\bar{z}}=z\ \bar{z}=z\,,\,gdy\, z\in\mathbb{R}$
(1) $\overline{z+z'}=\bar{z}+\bar{z}'$
(2) $\overline{z\cdot z'}=\bar{z}\cdot\bar{z}'$
(3) $\overline{z^{-1}}=(\bar{z})^{-1}$

Własności modułów:

(1) $|\lambda\cdot z|=||\lambda||\cdot|z| gdzie\, ||a||\, oznacza\, wartość\, bezwzględną\, z\, a$
$|z|=||z|| gdy\, z\in\mathbb{R}$
$|z|=0\Leftrightarrow z=0$

(2) $|z\cdot z'|=|z|\cdot|z'|$
(2') $|z^{-1}|=\frac{1}{|z|}$
(3) $z\cdot\bar{z}=|z|^2$
(4) $z^{-1}=\frac{\bar{z}}{|b|^2}$

(5) $||z|-|z'||\leqslant|z+z'|\leqslant|z|+|z'|$ nierówność trójkąta

Zasadnicze twierdzenie algebry

Niech $a_0, a_1, \ldots, a_n\in\mathbb{C}\,; n\geqslant 1\ a_n\neq 0$ będą dowolnymi liczbami
Wówczas równanie $a_n z^n+a_{n-1}z^{n-1}+\ldots+a_1 z+a_0=0$ posiada pierwiastek w $\mathbb{C}$

Przy czym:

$$\exists_{\lambda\in\mathbb{C}}\sum_{i=0}^{n} a_i\cdot\lambda^i=0$$

W szczególności wielomian

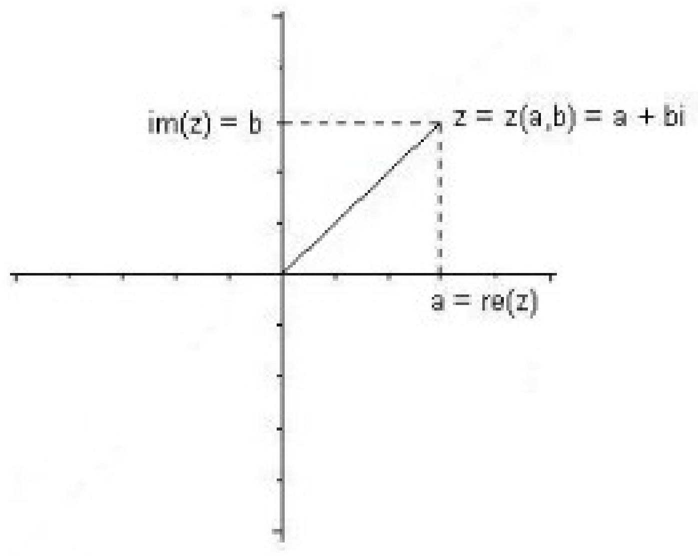
$$F=\sum_{i=0}^{n} a_i\cdot x^i\in\mathbb{C}[x]\,, n\geqslant 1\,, a_n\neq 0$$

Posiada rozkład na czynniki liniowe nad $\mathbb{C}$ tzn

$$\exists_{\lambda_1,\ldots,\lambda_n\in\mathbb{C}} F=a_n\cdot(x-\lambda_1)(x-\lambda_2)\cdot\ldots\cdot(x-\lambda_n)$$

Interpretacja geometryczna liczb zespolonych

$\mathbb{C} \ni z = a + bi = (a, b) \in \mathbb{R}^2$



Dodawanie w $\mathbb{C}$, dodawanie wektorów wodzących w R
Mnożenie przez liczbę w $\mathbb{C}$, mnożenie wektora przez liczbę w R
Sprzężenie w $\mathbb{C}$, symetria względem osi OX
Moduł w $\mathbb{C}$, długość wektora wodzacego

Postać trygonometryczna liczb zespolonych.

Niech $z = a + bi \neq 0$

$$z = |z| \cdot \left(\frac{a}{|z|} + \frac{b}{|z|} i \right) = |z| \cdot \left(\frac{a}{a^2+b^2} + \frac{b}{a^2+b^2} i \right) \Rightarrow \exists !_{a \in [0; 2\pi]} \cos(\alpha) = \frac{a}{|z|}, \sin(\alpha) = \frac{b}{|z|}$$

Stąd $z = |z|(\cos(\alpha) + i \cdot \sin(\alpha))$
Kąt $\alpha = [0, 2\pi]$ taki że $z = |z|(\cos(\alpha) + i \cdot \sin(\alpha))$ nazywamy argumentem głównym liczby z i oznaczamy $\alpha = Arg(z)$

Def

Przedstawienie liczby zespolonej w postaci $z = |z|(\cos(\alpha) + i \cdot \sin(\alpha))$ nazywamy postacią trygonometryczną liczby z.

Wzór de Moivre'a

$\forall_{z_1, z_2 \in \mathbb{C}}$ zachodzi

$$z_1 \cdot z_2 = |z_1| \cdot |z_2| (\cos(Arg(z_1)) + Arg(z_2)) + i \cdot \sin(Arg(z_1) + Arg(z_2))$$

W szczególności

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$$

zaś

$$Arg(z_1 \cdot z_2) = Arg(z_1) \cdot Arg(z_2)$$

To tyle teorii, po przykłady odsyłam do PDFa z algebry liniowej, nie będę ich tu przepisywał bo nie ma to zbytnio sensu.