2. Podstawowe techniki zliczania obiektów (metoda bijektywna, reguła włączania i wyłączania, rekurencja).

Metoda bijektywna

Liczymy ilość obiektów kombinatorycznych konstruując funkcję pomiędzy rozważanym zbiorem oraz zbiorem, którego ilość elementów jest znana. W „najlepszych" sytuacjach funkcja ta jest bijekcją, stąd tę metodę zliczania obiektów kombinatorycznych nazywamy metodą bijektywną. Zilustrujemy teraz tę metodą przykładem.

Jeśli X jest zbiorem o n elementach, to $|PX| = n!$.

Dowód.

Dowód będzie indukcyjny ze względu na n. Dla $n = 0$ teza jest oczywista.

Przypuśćmy teraz, że $n > 1$. Funkcja $f : PX \to \bigcup_{x\in X} PX\setminus\{x\}$ dana wzorem

$f(a) := (a1, . . . , an-1)$

jest bijekcją. Z założenie indukcyjnego wiemy, że $|PX\setminus\{x\}| = (n - 1)!$ dla

każdego $x \in X$, więc $|PX| = n(n - 1)! = n!$, co kończy dowód

Reguła włączania i wyłączania

Reguła włączania i wyłączania

Twierdzenie 2.15.

Dla dowolnych zbiorów $X_1, \ldots, X_n$ mamy

$$\left|\bigcup_{i\in[1,n]} X_i\right| = \sum_{k\in[1,n]} (-1)^{k-1} \sum_{1\le i_1<\cdots<i_k\le n} |X_{i_1}\cap\cdots\cap X_{i_k}|.$$

Dowód.

Indukcja względem n. Dla $n = 1$ teza jest oczywista. Podobnie łatwo udowodnić powyższy wzór dla $n = 2$. Załóżmy teraz, że $n > 2$. Niech $Y_i := X_i \cap X_n$ dla $i \in [1, n-1]$. Wtedy

$$\begin{aligned}
\left|\bigcup_{i\in[1,n]} X_i\right| &= \left|\bigcup_{i\in[1,n-1]} X_i\right| + |X_n| - \left|\Big(\bigcup_{i\in[1,n-1]} X_i\Big)\cap X_n\right| \\
&= \left|\bigcup_{i\in[1,n-1]} X_i\right| + |X_n| - \left|\bigcup_{i\in[1,n-1]} Y_i\right| \\
&= \sum_{k\in[1,n-1]} (-1)^{k-1} \sum_{1\le i_1<\cdots<i_k\le n-1} |X_{i_1}\cap\cdots\cap X_{i_k}| \\
&+ |X_n| - \sum_{k\in[1,n-1]} (-1)^{k-1} \sum_{1\le i_1<\cdots<i_k\le n-1} |Y_{i_1}\cap\cdots\cap Y_{i_k}| \\
&= \sum_{k\in[1,n-1]} (-1)^{k-1} \sum_{1\le i_1<\cdots<i_k\le n-1} |X_{i_1}\cap\cdots\cap X_{i_k}| + |X_n| \\
&+ \sum_{k\in[2,n]} (-1)^{k-1} \sum_{1\le i_1<\cdots<i_{k-1}\le n-1} |X_{i_1}\cap\cdots\cap X_{i_{k-1}}\cap X_n| \\
&= \sum_{k\in[1,n]} (-1)^{k-1} \sum_{1\le i_1<\cdots<i_k\le n} |X_{i_1}\cap\cdots\cap X_{i_k}|
\end{aligned}$$

rekurencja

bez sensu jest abym dłubał w wordzie te wszystkie wzorki a i tak wiekszość nie będzie wiedziała co autor miał na myśli. Dlatego odsyłam do wykladu

http://www-users.mat.umk.pl/~gregbob/matdysk/Wyklad.pdf strony:26-31