第34卷第1期
2005年2月
信息与控制
Information and Control
Vol.34,No.1
Feb.,2005

文章编号:1002-0411(2005)01-0012-04

一种利用小波包分析计算混沌时间序列Kolmogorov熵的方法

单华宁[1],王平立[2],王执铨[1]
(1. 南京理工大学自动化系,江苏 南京 210094; 2. 南京理工大学计算机系,江苏 南京 210094)

摘　要:提出了一种利用非线性时间序列的小波包变换模数代替混沌信号本身,在 m 维相空间中计算其Kolmogorov熵的方法,并用具体实例进行了仿真验算和噪声分析.结果表明,这种算法准确、可靠,并且可以有效克服采样过程中常常出现的噪声对信号的干扰.

关键词:混沌; 时间序列; Kolmogorov熵; 小波包
中图分类号:TP13　　　　**文献标识码**:A

A Method of Computing Kolmogorov Entropy of the Chaotic Time Series with Wavelet Packet Analysis

SHAN Hua-ning[1], WANG Ping-li[2], WANG Zhi-quan[1]
(1. *Department of Automatic Control, Nanjing University of Science & Technology, Nanjing* 210094, *China*;
2. *Department of Computer Science, Nanjing University of Science & Technology, Nanjing* 210094, *China*)

Abstract: In this paper, it is presented that Kolmogorov entropy of the chaotic signal can be computed in m-dimensional phase space with the wavelet packet transform modulus of the nonlinear time series instead of the chaotic signal itself. Based on simulation testing and noise analysis with some examples, it is found that this method is accurate and reliable. It can also overcome the noise disturbance to the signal during the sampling process.

Keywords: chaos; time series; Kolmogorov entropy; wavelet packet

1　引言(Introduction)

时间序列是对客观事物全面的、本质的描述,混沌信号的时间序列分析研究是当前非线性科学的前沿课题之一[1].Kolmogorov熵是吸引子的不变量,它在表征系统的混沌性质方面一直起着重要的作用,如何方便、快速、有效地从时间序列信号中将它提取出来,一直是从事混沌应用研究的人们感兴趣的课题[2,3].小波包分析[4]是一种时域—频域分析,同时具有时域和频域的良好局部化性质,而且随着信号不同,频率成分在时间(空间)域取样的疏密可自动调节,可达到效率高、质量佳的效果.它是目前许多科学和工程技术领域研究中极为活跃的热门问题之一,已在多种领域获得了广泛的应用[5].

2　小波包分析(Wavelet packet analysis)

设正交小波函数 $\Psi(t)$、尺度函数 $\varphi(t)$,它们满足双尺度方程:

$$\begin{cases}\varphi(t) = \sqrt{2}\sum_{n\in z} h_n\varphi(2t-n)\\ \Psi(t) = \sqrt{2}\sum_{n\in z} g_n\varphi(2t-n)\end{cases} \tag{1}$$

记 $u_0(t)=\varphi(t)$,$u_1(t)=\Psi(t)$,则上式变成:

$$\begin{cases}u_0(t) = \sqrt{2}\sum_{n\in z} h_n u_0(2t-n)\\ u_1(t) = \sqrt{2}\sum_{n\in z} g_n u_0(2t-n)\end{cases} \tag{2}$$

那么由公式

$$\begin{cases}u_{2k}(t) = \sqrt{2}\sum_{n\in z} h_n u_k(2t-n)\\ u_{2k+1}(t) = \sqrt{2}\sum_{n\in z} g_n u_k(2t-n)\end{cases} \tag{3}$$

所定义的函数集合 $\{u_n(t)\}_{n=0,1,2,\dots}$ 即为由 $u_0(t)=\varphi(t)$ 所确定的小波包.

3　小波包变换模数的Kolmogorov熵(Kolmogorov entropy of the wavelet packet tran-

收稿日期:2004-07-21

sform modulus)

设混沌时间序列为$\{x(t_i),\ i=1,2,\cdots,N\}$，对其进行小波包变换，得到相应的由小波包变换模数构成的序列$\{\tilde{x}(t_i),\ i=1,2,\cdots,N\}$，其嵌入维数为$m$，延迟时间为$\tau$，则重构相空间为：

$$\tilde{X}(t_i)=(\tilde{x}(t_i),\ \tilde{x}(t_i+\tau),\ \tilde{x}(t_i+2\tau),\cdots,\tilde{x}(t_i+(m-1)\tau)),\quad i=1,2,\cdots,M \tag{4}$$

其中$\tilde{X}(t_i)$为m维相空间中的相点，M为相点个数，且$M=N-(m-1)\tau$，集合$\{\tilde{X}(t_i)\mid i=1,2,\cdots,M\}$描述了系统在相空间中的演化轨迹．令关联积分为：

$$C_m^2(r)=\frac{1}{N^2}\sum_i\sum_j H(r-|\tilde{X}(t_i)-\tilde{X}(t_j)|) \tag{5}$$

其中$H(r)=\begin{cases}1 & r\geqslant 0\\ 0 & r<0\end{cases}$为 Heaviside 阶跃函数．

Grassberger 和 Procaccia 提出[6]，Kolmogorov 熵可用K_2熵来逼近，并且得出K_2熵与关联积分$C_m^2(r)$存在以下关系：

$$K_2=-\lim_{\tau\to 0}\lim_{r\to 0}\lim_{m\to\infty}\frac{1}{m\tau}\log_2 C_m^2(r) \tag{6}$$

对离散时间序列，固定延迟时间τ和嵌入维数m，则(6)式为：

$$K_2=-\lim_{r\to 0}\frac{1}{m\tau}\log_2 C_m^2(r) \tag{7}$$

由于关联积分$C_m^2(r)$在$r\to 0$时与r存在以下关系[6]：

$$\lim_{r\to 0}C_m^2(r)\propto r^{D_2} \tag{8}$$

其中D_2为关联维数．因此结合(7)式和(8)式，有：

$$\lim_{r\to 0}C_m^2(r)=r^{D_2}2^{-K_2 m\tau} \tag{9}$$

故可以得出：

$$K_2=\frac{1}{m\tau}\log_2\frac{r^{D_2}}{C_m^2(r)}\quad(r\to 0) \tag{10}$$

在实际计算中，给定一些具体的r值，相应的可得到对应的K_2值，在关系$r\sim K_2$中，考察其最佳线性拟合直线，该直线在纵轴上的截距就是所要求的 Kolmogorov 熵K的稳定估计．由 Brock 等人[7,8]的研究可知，r值的选择可以通过时间序列的标准差σ得到，其取值范围为$\frac{\sigma}{2}\leqslant r\leqslant 2\sigma$．

4　混沌系统仿真结果与分析(Simulation results and analysis of some chaotic systems)

为了检验算法的准确性，我们以 Rossler 系统和 Lorenz 系统为例进行讨论．

(1) Rossler 混沌系统由如下三维系统所产生：

$$\begin{cases}\dot{x}=-y-z\\ \dot{y}=x+ay\\ \dot{z}=b+z(x-c)\end{cases} \tag{11}$$

其中参数$a=0.15$，$b=2.0$，$c=10.0$．取初值$x(0)=10.0$，$y(0)=0$，$z(0)=0$；积分时间步长Δt取 0.0314．用四阶 Runge-Kutta 法积分方程组，除去前面1×10^4个点，取后面4×10^4个点的变量x的时间序列计算，每隔 10 步选一个点．对此混沌时间序列进行小波包变换，小波包函数取 sym8，得到一相应的由小波包变换模数构成的时间序列，对其进行相空间重构，嵌入维数m和延迟时间τ的选取采用 C-C 方法[9]，利用 G-P 算法可计算出关联维数D_2[2]，计算出的最佳线性拟合直线如图 1 所示，得到$K=0.136$，这个结果与文献[10]报道的实际结果0.137 ± 0.004是一致的．

(2) Lorenz 混沌系统的数学模型为：

$$\begin{cases}\dot{x}=\alpha(y-z)\\ \dot{y}=\gamma x-y-xz\\ \dot{z}=xy-bz\end{cases} \tag{12}$$

其中参数$\alpha=10$，$\gamma=28$，$b=8/3$．取初值$x(0)=y(0)=z(0)=1$，积分时间步长 0.001．用四阶 Runge-Kutta 法积分方程组，除去前面2×10^4个点，取后面4×10^4个点的变量x的时间序列，每隔 10 步选一个点．对此混沌时间序列进行小波包变换，小波包函数取 sym8，得到一相应的由小波包变换模数构成的时间序列，对其进行相空间重构，嵌入维数m

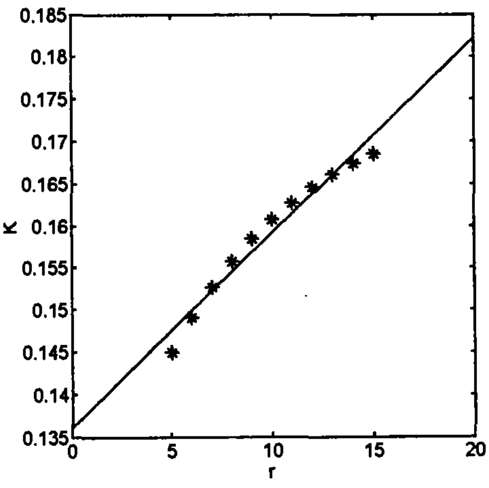

图 1　Rossler 系统的 Kolmogorov 熵的计算

Fig. 1　Computing the Kolmogorov entropy of Rossler system

和延迟时间的选取采用 C-C 方法[9]，利用 G-P 算法可计算出关联维数 D_2[2]，计算出的最佳线性拟合直线如图 2 所示，得到 $K=0.248$，这个结果与文献[10]报道的实际结果 0.245 ±0.006 是一致的.

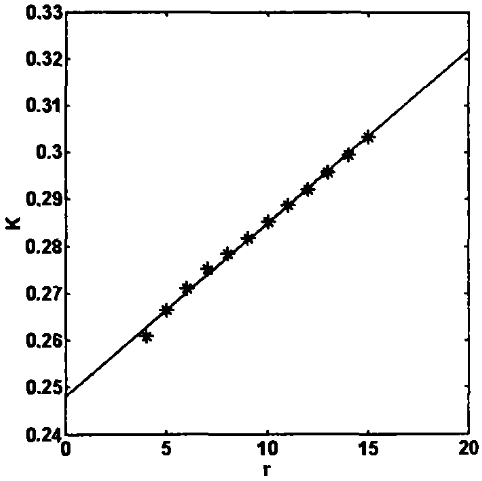

图 2　Lorenz 系统的 Kolmogorov 熵的计算

Fig. 2　Computing the Kolmogorov entropy of Lorenz system

5　噪声的影响（Effect of the noise）

在实际应用中，有用信号通常表现为低频信号，而噪声信号则通常表现为高频信号，由于小波包变换能同时在时、频域中对信号进行分析，所以它能较有效地区分信号中的突变部分和噪声，从而实现信号的去噪. 因此利用小波包变换模数计算混沌系统 Kolmogorov 熵的算法，可以有效地克服噪声的影响.

本文以 Lorenz 混沌系统为例，首先在混沌信号上叠加高斯白噪声，其噪声强度为 1.0235，分别计算出直接采用信号本身计算出的 Kolmogorov 熵值和采用其小波包变换模数（小波函数取 sym8）计算出的 Kolmogorov 熵值，计算结果见图 3、图 4.

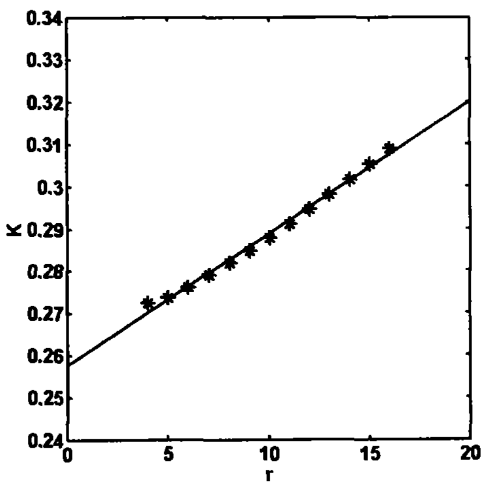

图 3　叠加高斯白噪声后的 Lorenz 混沌系统的 Kolmogorov 熵的计算

Fig. 3　Computing the Kolmogorov entropy of Lorenz chaotic system with added Gaussian white noise

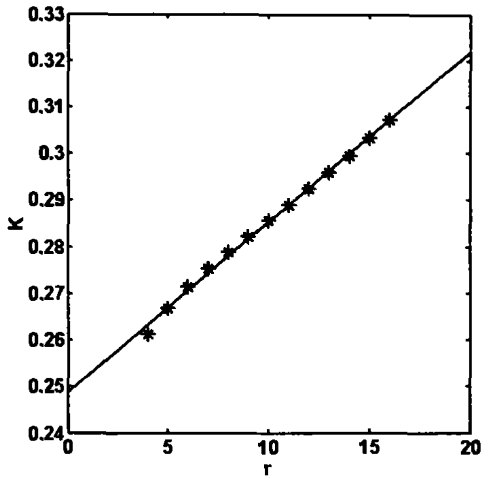

图 4　利用小波包变换模数计算叠加高斯白噪声后的 Lorenz 混沌系统的 Kolmogorov 熵

Fig. 4　Computing the Kolmogorov entropy of Lorenz chaotic system with added Gaussian white noise by the wavelet packet transform modulus

从图 3、4 中可以看出，直接采用信号本身计算出的 Kolmogorov 熵值为 0.258，已不准确，利用小波包变换模数计算出的 Kolmogorov 熵值为 0.249，而文献[10]报道的 Kolmogorov 熵值实际结果为 0.245 ±0.006，由此可以看出它能够较好地克服噪声的影响，得到满意的计算结果.

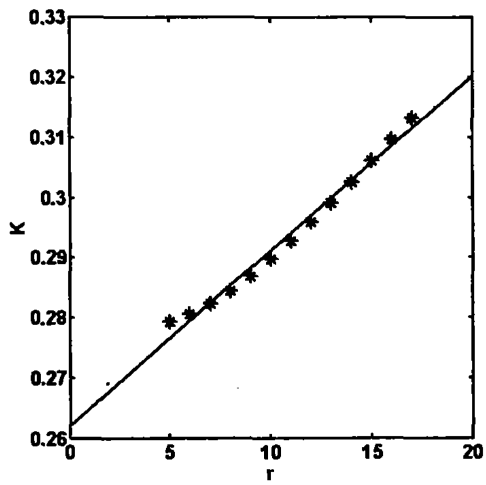

图 5　叠加正弦函数后的 Lorenz 混沌系统的 Kolmogorov 熵的计算

Fig. 5　Computing the Kolmogorov entropy of Lorenz chaotic system with added sinusoidal function

其次,在 Lorenz 混沌信号上叠加正弦函数 $y = 5\sin(2x)$,其噪声强度为 3.5323,分别计算出直接采用信号本身得到的 Kolmogorov 熵值及采用其小波包变换模数(小波函数取 sym8)得到的 Kolmogorov 熵值,计算结果见图 5、图 6.

从图 5、6 中可以看出,采用信号直接计算出的 Kolmogorov 熵值为 0.262,已不准确,利用小波包变换模数计算出的 Kolmogorov 熵值为 0.2498,而文献[10]报道的 Kolmogorov 熵值实际结果为 0.245 ± 0.006,由此可以看出它在噪声强度较大的情况下,依然能够较好地克服噪声的影响,得到满意的计算结果.

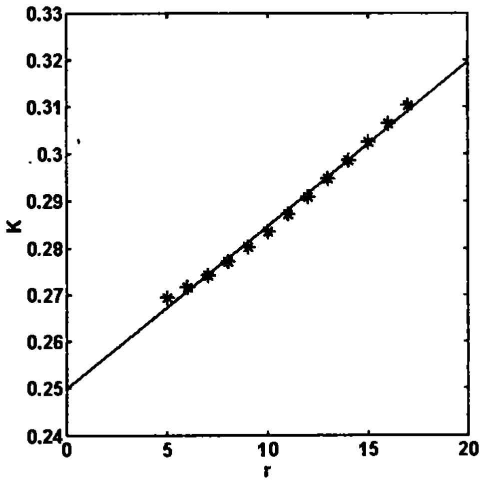

图 6　利用小波包变换模数计算叠加正弦函数后的 Lorenz 混沌系统的 Kolmogorov 熵

Fig. 6　Computing the Kolmogorov entropy of Lorenz chaotic system with added sinusoidal function by the wavelet packet transform modulus

6　结论(Conclusion)

本文提出了一种利用非线性时间序列的小波包变换模数代替信号本身,在 m 维相空间中计算其 Kolmogorov 熵的方法,以 Rossler 混沌系统和 Lorenz 混沌系统为例验证了算法的准确性,其仿真结果与系统本身具有基本相同的精度;以 Lorenz 混沌系统为例分析了噪声对这种方法的影响,结果表明这种方法可以有效克服采样过程中常常出现的噪声对信号的干扰,得到较为满意的结果.

参　考　文　献(References)

[1] Tong H. Nonlinear time series analysis since 1990: some personal reflections [J]. Acta Mathematicae Applicatae Sinica (English Series), 2002,18(2):177 ~ 184.

[2] Grassberger P, Procaccia I. Characterization of strange attractors [J]. Physical Review Letters, 1983,50(5):346 ~ 349.

[3] Finn J M, Goettee J D, Toroczkai Z, *et al.* Estimation of entropies and dimensions by nonlinear symbolic time series analysis [J]. Chaos, 2003,13(2):444 ~ 456.

[4] 李永根,吴纪桃. 分形与小波 [M]. 北京:科学出版社,2002.

[5] Pommer A, Uhl A. Selective encryption of wavelet-packet encoded image data: efficiency and security [J]. Multimedia Systems, 2003,9(3):279 ~ 287.

[6] Grassberger P, Procaccia I. Estimation of the Kolmogorov entropy from a chaotic signal [J]. Physical Review A, 1983,28(4): 2591 ~ 2593.

[7] Brock W A, Dechert W D, Scheinkman J A. A test for independence based on the correlation dimension [J]. Econometric Reviews, 1996,15(3):197 ~ 235.

[8] LeBaron B. A fast algorithm for the BDS statistic [J]. Studies in Nonlinear Dynamics and Econometrics, 1997, 2(2):53 ~ 59.

[9] Kim H S, Eykholt R, Salas J D. Nonlinear dynamics, delay times, and embedding windows [J]. Physica D, 1999,127(1 - 2):48 ~ 60.

[10] 赵贵兵,石炎福,段文锋,等. 从混沌序列同时计算关联维和 Kolmogorov 熵 [J]. 计算物理,1999,16(5):309 ~ 315.

作者简介

单华宁(1964 -),女,博士研究生,副教授.研究领域为数值分析,混沌理论及应用.

王执铨(1938 -),男,教授,博士生导师.研究领域为复杂大系统的建模与控制,动态系统的容错控制.

王平立(1960 -),男,副教授.研究领域为微机控制与应用.