

简谐振动的合成实验

一、实验目的

1. 掌握谐振动的表达与合振动的分析
2. 掌握信号的相位、幅度、频率等参数的物理含义
3. 掌握用示波器观察波形以及测量电压、周期和频率的方法。
4. 掌握使用信号发生器。
5. 利用李萨茹图分析待测信号的相位频率等信息

二、实验仪器

Waveace1012 型数字示波器 1 台、DG4062 型数字信号发生器一台、传输线 2 条等。

三、示波器的使用（三四节的内容在实验报告中仅需概述即可）

示波器就是显示波形的机器，它还被誉为“电子工程师的眼睛”。它的核心功能就是为了把被测信号的实际波形显示在屏幕上，以供工程师查找定位问题或评估系统性能等等。它的发展同样经历了模拟和数字两个时代，如图 1 和图 2 所示。

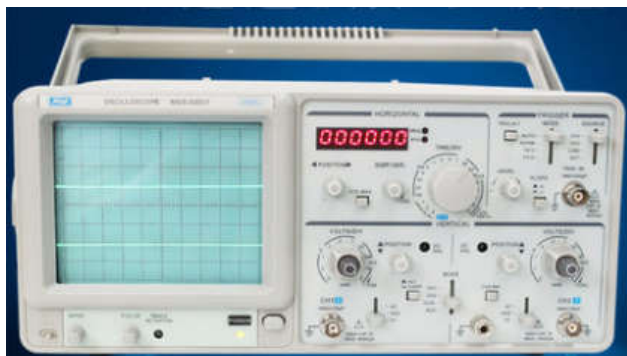


图 1 模拟示波器



图 2 数字示波器

模拟示波器采用的是模拟电路（示波管，其基础是电子枪）电子枪向屏幕发射电子，发射的电子经聚焦形成电子束，并打到屏幕上。屏幕的内表面涂有荧光物质，这样电子束打中的点就会发出光来。而数字示波器则是数据采集，A/D 转换，软件编程等一系列的技术制造出来的高性能示波器。数字示波器一般支持多级菜单，能提供给用户多种选择，多种分析功能。还有一些示波器可以提供存储，实现对波形的保存和处理。模拟示波器显示的波形是连续的，是信号真实的波形，而且反应速度特快。而数字示波器显示的波形是经过数字电路采样得来的点组成的，是个不连续的波形，采样率越高的示波器，越与真实波形接近，但显示速度没有模拟机快。反应速度快是模拟示波器最大的优点之一，是数字机很难取代的，比如，在测试某一信号时，模拟示波器能在瞬间显示波形，几乎没有延时，而数字机还需要将测试的信号进过数字电路处理后，再显示出模拟的波形，在显示时间上落后模拟示波器。

在此，我们仅介绍数字示波器的使用情况。示波器可以将输入的波形在屏幕上显示出来，waveace1012 型示波器具有两个输入通道，可以同时测量并显示 2 路信号的变化波形。示波器的屏幕可以设置成横坐标为时间 t ，纵坐标为输入信号的电压量的大小，称为“Y-T”时基，如图所示。横轴上每一小格代表 5ms，纵轴上每一小格代表 1V 的电压，即**尺度值**。在此模式时，两个信号共用时间轴，纵轴

的尺度值是独立的。我们也可以将示波器屏幕横向代表通道 1 输入的电压值，纵向代表通道 2 输入的电压值，也就是将通道 1 和通道 2 关于时间 t 的参数方程在屏幕上显示出来，称为“X+Y”时基。



图 3 Wavea1012 型示波器面板区域

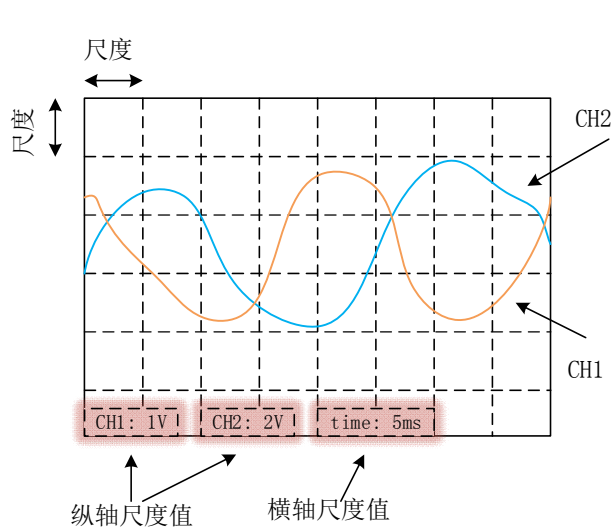


图 4 示波器的尺度值

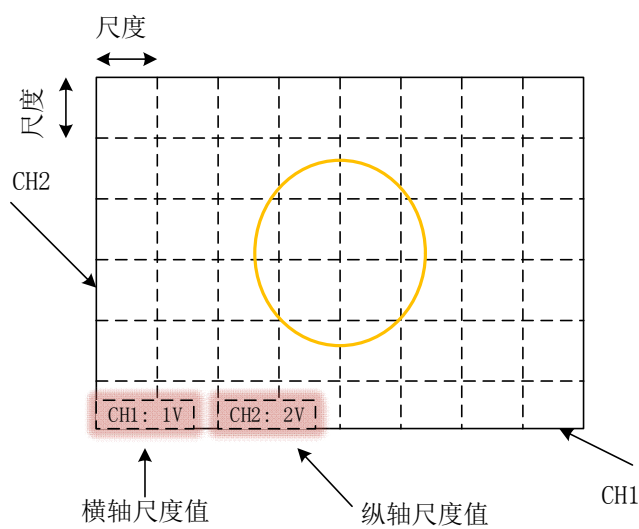


图 5 示波器的“XY”时基

【通道的选中与开关】

按下“CH1”和“CH2”按键，可以选中相应的通道以及该通道的打开与关闭，如图 6 所示。显示出通道参数后，通过旁边的屏幕按键即可进行设置，按多次进行选择切换，可以通过旋钮按键进行选择，选择后按“ON/OFF”键关闭菜单，如图 7 所示，图中是通道 1 的参数菜单。耦合方式“直流”表示显示完整的信号波形，“交流”表示仅显示信号的交流分量，直流就被滤除了。



图 6 通道选中按钮

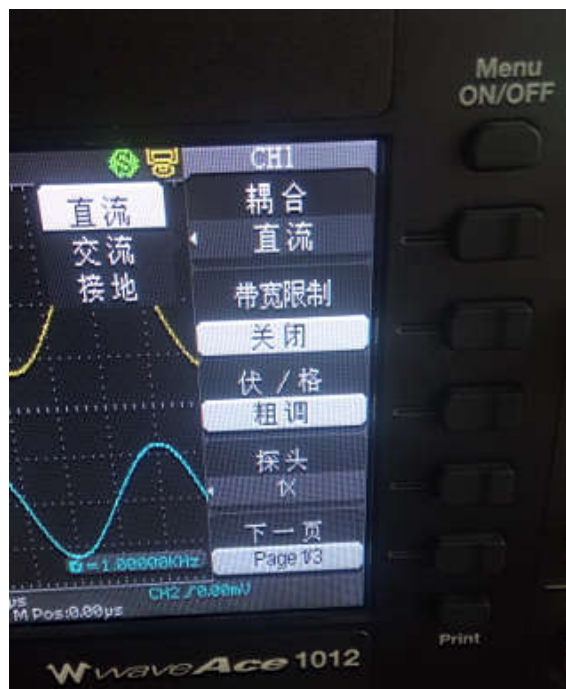


图 7 屏幕按键与参数选择

【尺度值的设置】

选中某个通道后，即可对其相关参数进行设置。调节“Vertical”旋钮可以改变纵轴的尺度值，调节“Position”可以改变波形 0v 位置，如图 4 所示。实验时，两个通道 0v 均调节至中央位置。调节“Horizontal”旋钮改变纵轴的尺度值，时间“Position”可以改变 0 时刻的位置，实验时调节至屏幕中央位置。“AUTO”按键可以根据输入信号的特性，自动设置一个最佳的尺度值。

【时基的选择】

按下“DISPLAY”键，在格式菜单中可以选择“YT”和“XY”两种时基，如图 8 所示。

【光标手动测量】

实验时会需要测量出屏幕中两个点之间的横向值或纵向值，这里介绍光标手动测量的方法。按下“CURSORS”键，选择“手动”模式，测量类型选择“电压”即纵向值测量，如图 8 所示。在屏幕中出现两条横线，分别是“CurA”和“CurB”，通过屏幕按键选择 A 或 B，然后通过“旋钮按键”调节横线的位置，在屏幕左上方显示两条光标线之间的值与差值。

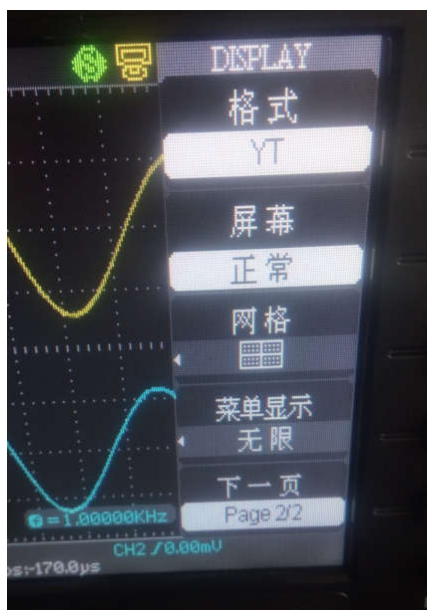


图 8 DISPLAY 设置

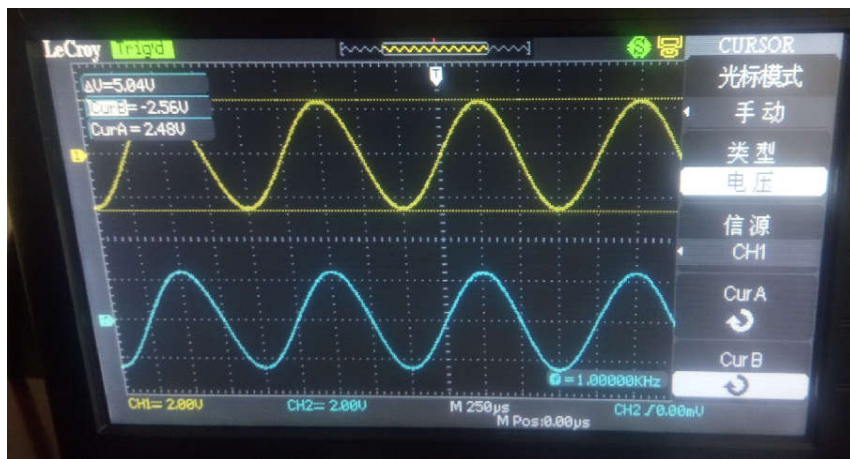


图 9 手动光标测量

四、信号源的使用

数字信号发生器是指产生所需参数的电测试信号的仪器。按信号波形可分为正弦信号、函数（波形）信号、脉冲信号和随机信号发生器等四大类。信号发生器又称信号源或振荡器，在生产实践和科技领域中有着广泛的应用。产生的信号常用峰峰值 V_{pp} 、频率、相位、直流偏置电压等参数描述。

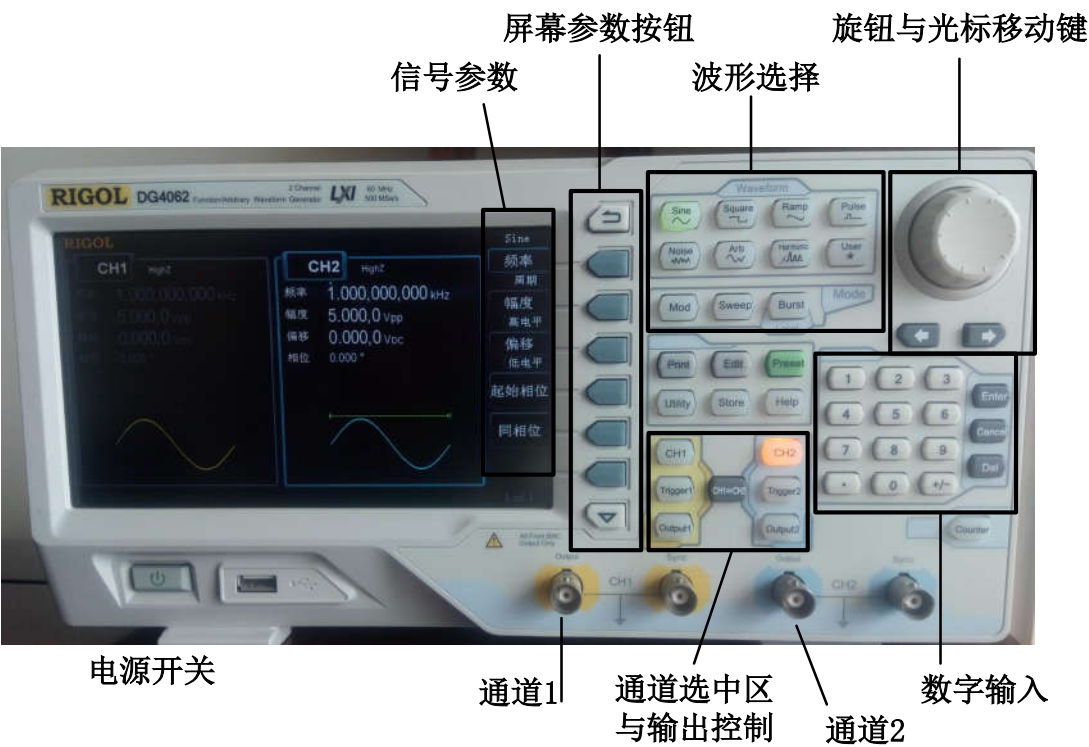


图 9 DG4062 型数字信号源面板图

【通道选中与输出控制】

“CH1”与“CH2”表示激活选中某个通道，然后即可对其参数进行修改，如图 10 所示。“Output1”和“Output2”是通道信号输出开关，灯亮表示输出已经打开。

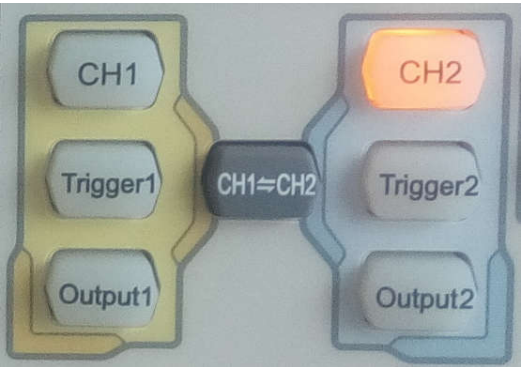


图 10 通道选择区按键

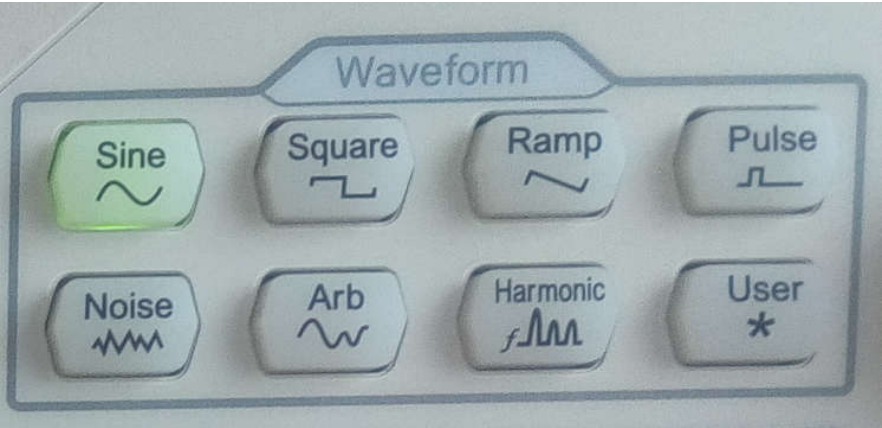


图 11 信号波形选择区

【波形选择区】

信号源可以输出多种信号波形，在波形选择区进行按键选择，灯亮表示选择了这个波形，实验时用“Sine”波形，如图 11 所示。

【波形参数修改】

若要修改频率、周期、相位等参数，只需按下屏幕右侧的按键选择该参数，如图 12 所示，此时选中了频率参数，同时光标在“1”处，如图 13 所示。通过旋钮可以增减，也可以之间用数字键直接输入数字和单位，如图 14。若再按一次该键，则参数“频率”切换成“周期”，如图。另外，相位的有效数字位可以达到 6 个，如图。

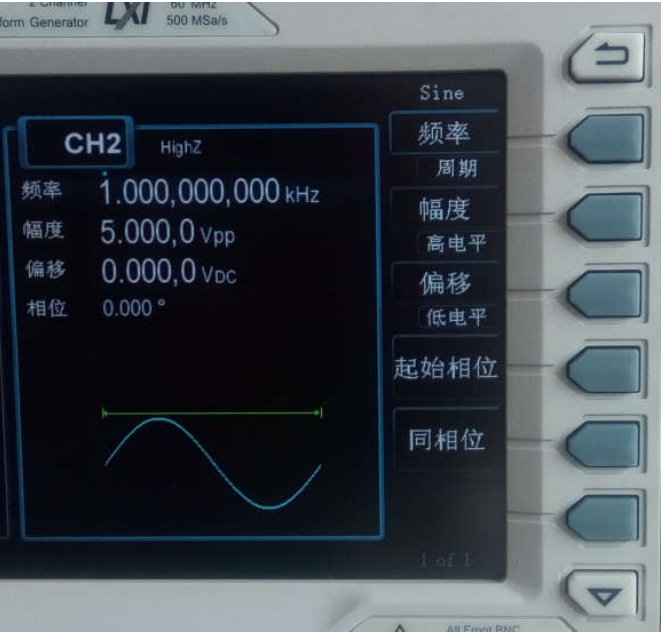


图 12 信号参数的设置



图 13 频率值与光标

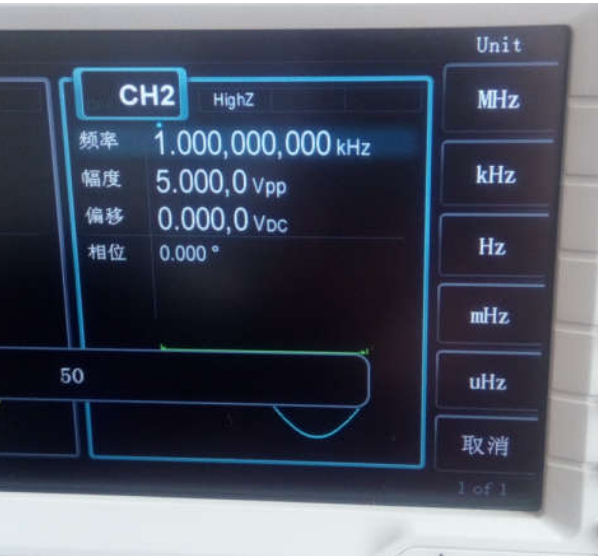


图 14 数字输入频率



图 15 频率或周期参数的激活



图 16 相位值的有效数字位

五、时谐信号简介

简谐振动中，一个振子的位移通常用余弦函数来表示，例如

$$u = A \cos(\omega t + \phi) + u_0 \tag{1}$$

实验中用时谐电压信号表示，式中 A 表示振幅， ω 表示角频率， ϕ 表示初相位， u_0 表示直流偏置即初始位移。图 17 给出了信号的周期 T 、直流偏置 u_0 和峰峰值 V_{pp} 的示意图。

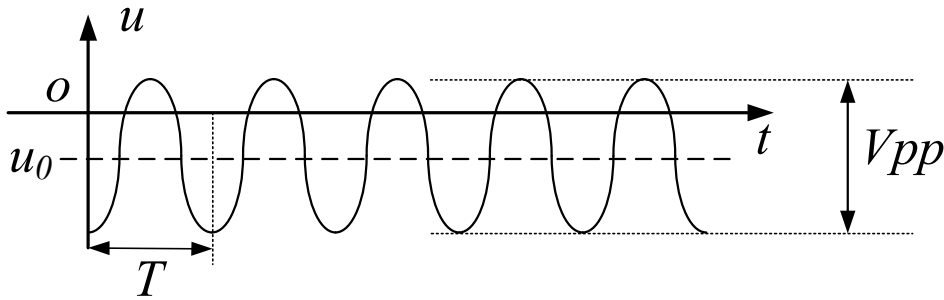


图 17 信号的周期与峰峰值

图 18 给出同频率时，不同的初相位和直流偏置电压时的示意图以及对比情况。

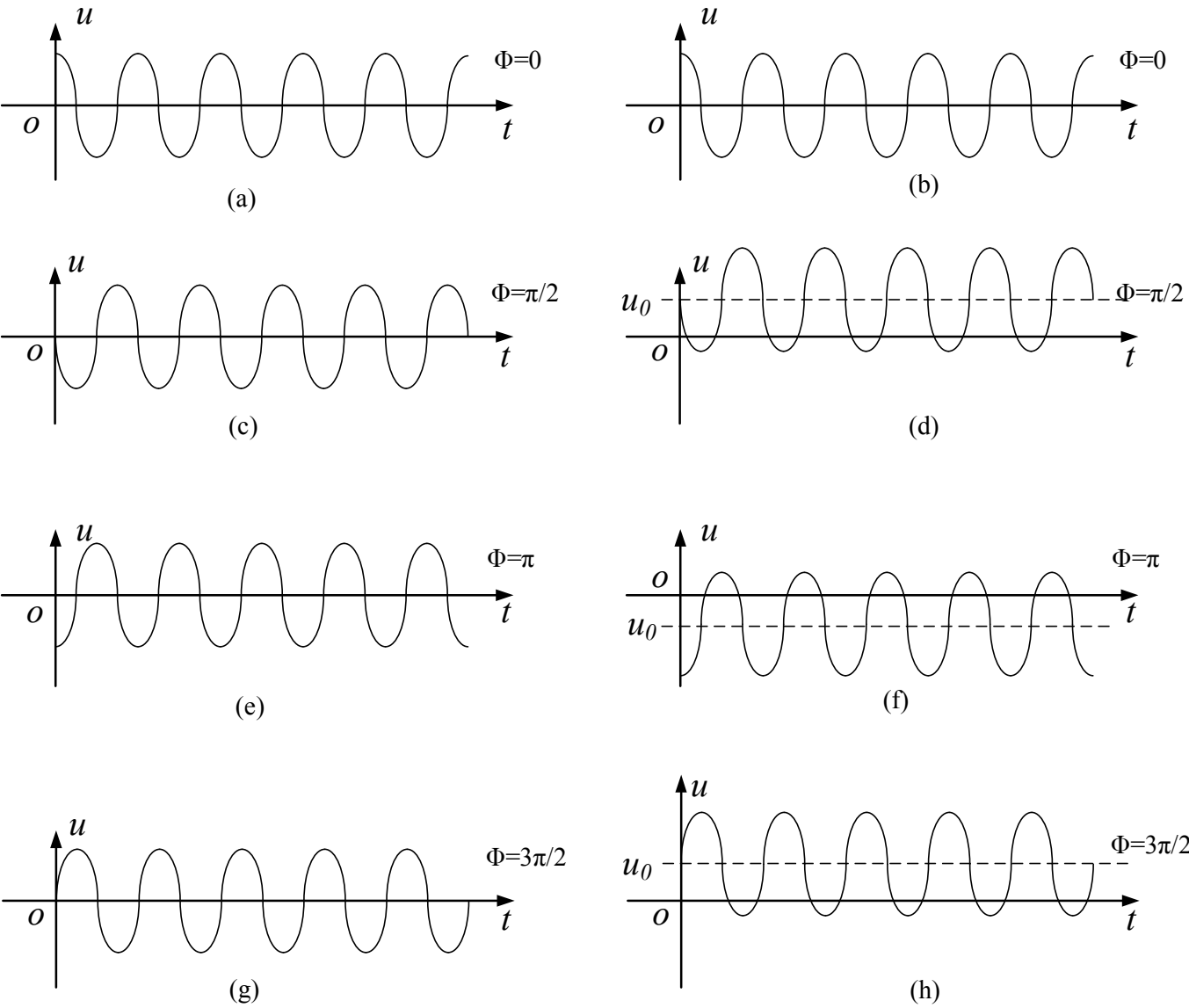


图 18 信号的初相位和直流偏置

(a)、(c)、(e) 和 (g) 分别给出不同初相位时的波形示意图, (b)、(d)、(f) 和 (h) 分别给出了直流偏置等于 0 和正负压时的波形示意图。初相位差决定了 $t=0$ 时的初位移, (c) 图中初相位为什么是 $\pi/2$ 而不是 $3\pi/2$ 呢? 因为时间增加 dt 后, 相位是 $\pi/2 + d\phi$, \cos 函数为负值即位移小于 0。两个振子的相位 $\omega t + \phi$ 之差称为相位差, 是以 $2n\pi$ 为循环的。

假设有两个独立的同频率的信号, 其电压的表达式分别为

$$u_1 = A_1 \cos(\omega t + \phi_{10}) \quad (3)$$

$$u_2 = A_2 \cos(\omega t + \phi_{20}) \quad (4)$$

式中 A_1 、 A_2 和 ϕ_{10} 、 ϕ_{20} 分别是两个信号的幅度和初相位。那么两路信号的代数和即为

$$u_1 + u_2 = A_1 \cos(\omega t + \phi_{10}) + A_2 \cos(\omega t + \phi_{20}) \quad (5)$$

应用三角函数的等式关系将上式展开, 可以化成

$$u = A \cos(\omega t + \phi_0) \quad (6)$$

式中 A 和 ϕ_0 的值分别为

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\phi_{20} - \phi_{10})} \quad (7)$$

$$\tan \phi_0 = \frac{A_1 \sin \phi_{10} + A_2 \sin \phi_{20}}{A_1 \cos \phi_{10} + A_2 \cos \phi_{20}} \quad (8)$$

应用旋转振幅矢量图, 可以很方便地得到上述两信号的合振幅和相位, 详见大学物理中的简谐振动章节。合成信号的振幅与原来信号的初相位差 ($\phi_{20} - \phi_{10}$) 有关。下面仅讨论两个特例

1. 同频同相, 即相位差 $\phi_{20} - \phi_{10} = 2k\pi, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

这时 $\cos(\phi_{20} - \phi_{10}) = 1$, 则

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2} = A_1 + A_2 \quad (9)$$

即两信号相加后的振幅等于原来两个信号的振幅之和, 这时信号幅度达到最大值, 如图 19 所示。

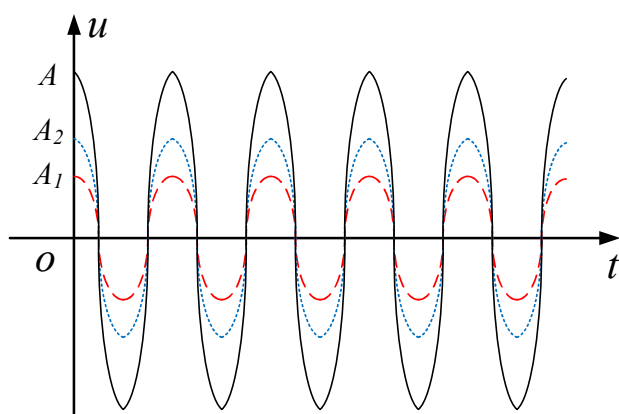


图 19 同相相加

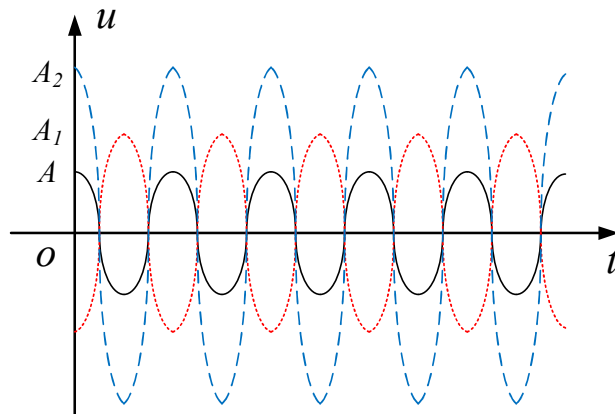


图 20 反相相加

2. 同频反相, 即相位差 $\phi_{20} - \phi_{10} = (2k+1)\pi, k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$

这时 $\cos(\phi_{20} - \phi_{10}) = -1$, 则

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_1^2 + 2A_1A_2} = |A_1 - A_2| \quad (10)$$

即两个信号相加后的振幅等于原来两个信号的幅度之差, 这时信号幅度达到最小值, 如图 20 所示。幅度在性质上是正量, 所以上式中取绝对值。

一般情形下, $\phi_{20} - \phi_{10}$ 是其他任意值时, 信号相加后幅度在 $A_1 + A_2$ 和 $|A_1 - A_2|$ 之间。

六、李萨茹图简介

当一质点同时参与两个不同方向的振动时, 质点的位移是这两个振动的位移矢量和。在一般情形下, 质点将在平面上作曲线运动, 质点的轨迹可有各种形状。轨迹的形状由两个振动的周期、振幅和相位差来决定。

为简单起见, 我们先讨论两个相互垂直的、同频率的谐振动的合成。设两个谐振动分别在 ox 轴和 oy 轴上进行, 振动表达式分别为

$$x = A_1 \cos(\omega t + \phi_{10}) \quad (11)$$

$$y = A_2 \cos(\omega t + \phi_{20}) \quad (12)$$

式中 ω 为两个振动的角频率, A_1 、 A_2 和 ϕ_{10} 、 ϕ_{20} 分别为两振动的振幅和初相位。实验时, 我们用两个时谐信号源的电压表示质点的位移, 信号幅度表示振幅。

在任一时刻 t , 质点的位置是 (x, y) , t 改变时, (x, y) 也改变, 所以上列两方程就是用参量 t 来表示质点运动轨迹的参量方程。如果把参量 t 消去, 就得到轨迹的直角坐标方程

$$\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} - 2\frac{xy}{A_1A_2}\cos(\phi_{20} - \phi_{10}) = \sin^2(\phi_{20} - \phi_{10}) \quad (13)$$

一般来说, 上述方程式椭圆方程。因为质点的位移 x 和 y 在有限范围内变动, 所以椭圆轨道不会超出以 $2A_1$ 和 $2A_2$ 为边的矩形范围。按照两个振动在不同时刻的对应点, 可以做出合运动的轨迹如图所示。椭圆的性质 (即长短轴的大小和方位), 由相位差 $\phi_{20} - \phi_{10}$ 来决定。

例如两个分振动分别为 $x = A_1 \cos \omega t$, $y = A_2 \cos(\omega t + \frac{\pi}{4})$, 应用旋转圆法即可画出不同时刻在平面中

位置, 详见大学物理谐振动章节。 $t=0$ 时, 两个分振动的合位移是“1”位置矢量在坐标轴 ox 和 oy 上的投影量, 即对应 xoy 坐标系中“1”的位置。下一时刻, 旋转至“2”位置, 合振动对应 xoy 坐标系中“2”的位置。

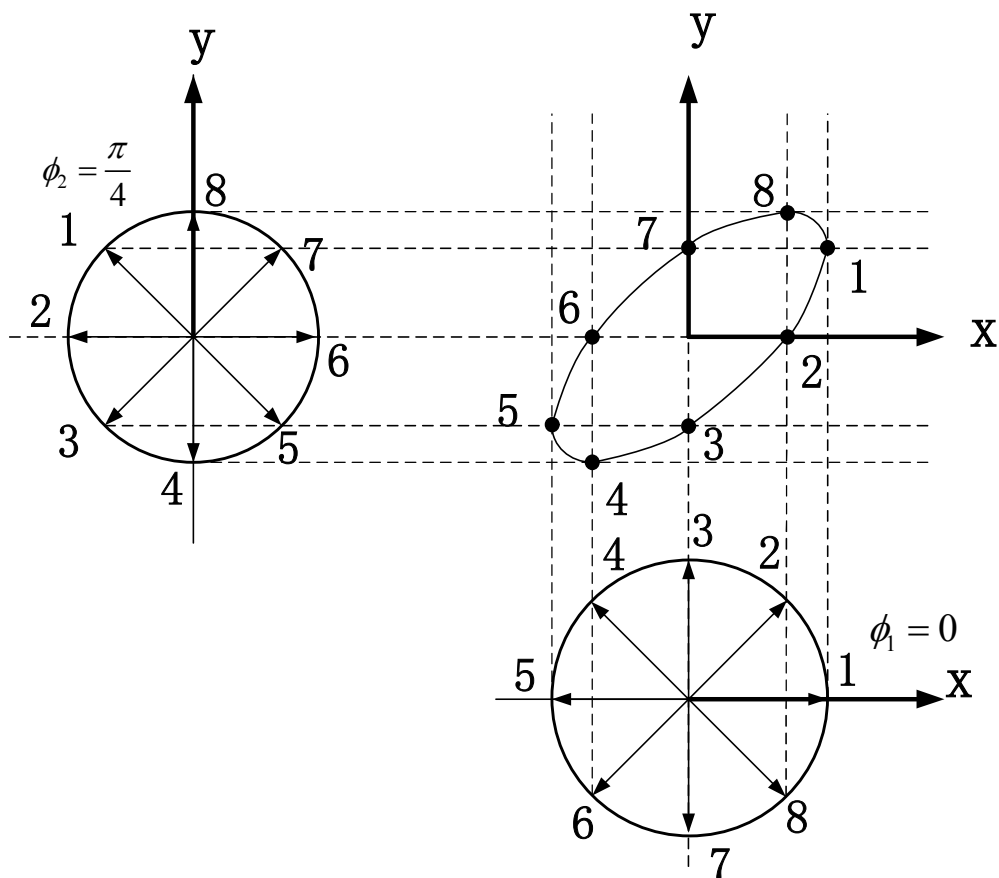


图 21 运动轨迹的模拟

下面分析几种特殊情形

1. $\phi_{20} - \phi_{10} = 0$ ，即两振动同相。

在这种情况下，轨迹方程式变为

$$\frac{x^2}{A_1^2} - \frac{y^2}{A_2^2} = 0 \quad (14)$$

亦即

$$\frac{x}{A_1} = \frac{y}{A_2} \quad (15)$$

因此，质点的轨道是一条直线。这直线通过坐标原点，斜率为这两个振动振幅之比 $\frac{A_2}{A_1}$ 。

2. $\phi_{20} - \phi_{10} = \pi$ ，即两振动反相。

在这种情况下，轨迹方程式变为

$$\frac{x}{A_1} = -\frac{y}{A_2} \quad (16)$$

2. $\phi_{20} - \phi_{10} = \pi/2, 3\pi/2$ 或 $-\pi/2$ 。

在这种情况下，轨迹方程式变为

$$\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} = 1 \quad (17)$$

在这两种相位差时，质点的运动轨迹都是正椭圆，但在椭圆上的运动方向不同。

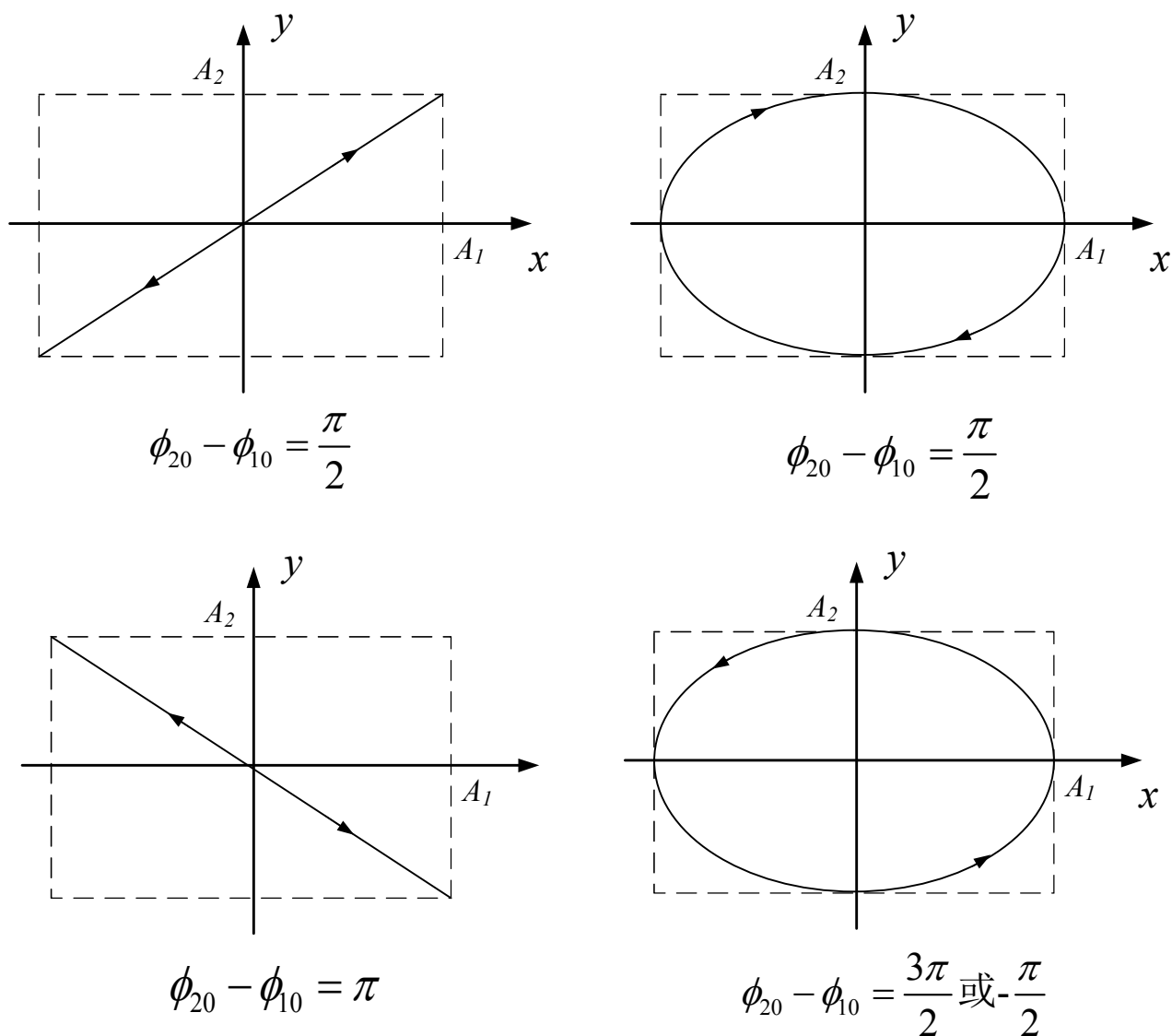


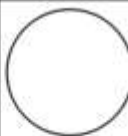


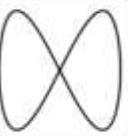
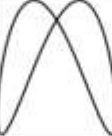


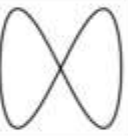


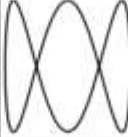


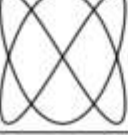

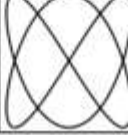

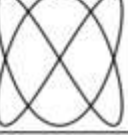


图 22 不同相位差时的轨迹

最后，我们来介绍两个相互垂直但具有不同频率的谐振动和初相位差的合成。假设两个振动频率相差之间有简单的整数比值的关系时，同时相位差稳定，则也可得到稳定的合成运动轨迹即李萨茹图，表 1 给出了不同频率比和相位差之间振动轨迹。

表 1 几种李萨茹图

相位差角 频率比	0	$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{2}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	π
1:1					
1:2					
1:3					
2:3					

频率比是 $\omega_y:\omega_x$ ，相位差是 $\phi_y-\phi_x$ 。李萨茹图与外边界边框的切点数量之比等于两个方向上的频率之比。
图 23 中，在 y 轴上有 3 个切点，在 x 轴上 2 个切点，因此两个方向上的频率之比也是 3:2。

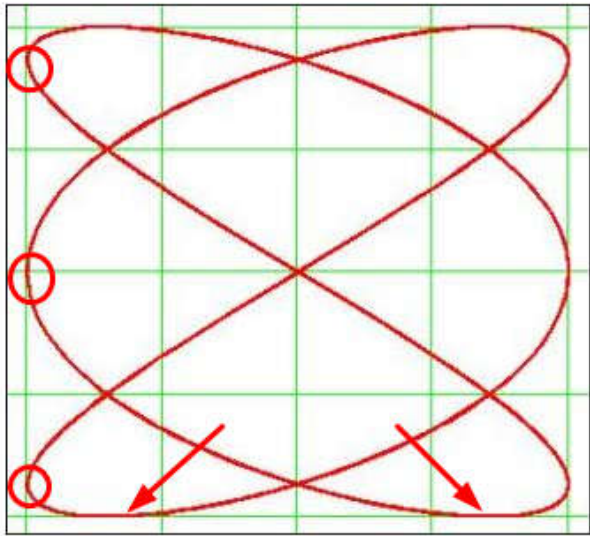


图 23 切点与频率比

七、仪器连接

将信号源输出通道 1 和 2 分别接入示波器的输入通道 1 和 2，如图所示，然后打开两个仪器的电源，将信号源 “Output1” 和 “Output2” 输出都打开，示波器的两个输入通道都打开显示。



图 24 仪器的连接

八、实验内容与方法

1、画出两路不同相位差的波形的叠加 $u_1 + u_2$

$$u_1 = A_1 \cos(\omega t + \phi_{10}) = A_1 \cos(2\pi f t + \phi_{10}) \quad (18)$$

$$u_2 = A_2 \cos(\omega t + \phi_{20}) = A_2 \cos(2\pi f t + \phi_{20}) \quad (19)$$

设置信号源的输出通道 1 的参数如下： $V_{pp} = 2V$ ， $f = 1KHz$ ， $\phi_{10} = 0^\circ$ 保持不变。输出通道 2 的 $f = 1KHz$ 保持不变，观察叠加波形随通道 2 的相位和幅度的变化情形并画出波形示意图，此时示波器的时基应调节为“Y-T”。在示波器同时打开两路信号的显示并打开“MATH”中“X+Y”波形。注意分析时间轴 0 的位置，不能从示波器上读出，因为示波器的其触发方式不同时，其 0 点位置的波形是不同的。

初相位 ϕ_{20} (度)	V_{pp} (V)	叠加波形 $u_1 + u_2$
0	2	用示波器测量出叠加波形的 V_{pp} 和周期，并用手机拍照，课后在直角坐标纸上画出三个波形示意图。 $V_{pp} = \underline{\hspace{2cm}}$ ， $T = \underline{\hspace{2cm}}$ 。
90	2	用示波器测量出叠加波形的 V_{pp} 和周期，并用手机拍照，课后在直角坐标纸上画出三个波形示意图。 $V_{pp} = \underline{\hspace{2cm}}$ ， $T = \underline{\hspace{2cm}}$ 。
90	1	用示波器测量出叠加波形的 V_{pp} 和周期，并用手机拍照，课后在直角坐标纸上画出三个波形示意图。 $V_{pp} = \underline{\hspace{2cm}}$ ， $T = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

2、由李萨茹图估算相位差

$$x = A_1 \cos(\omega t + \phi_{10}) = A_1 \cos(2\pi f t + \phi_{10}) \quad (20)$$

$$y = A_2 \cos(\omega t + \phi_{20}) = A_2 \cos(2\pi f t + \phi_{20}) \quad (21)$$

设置信号源的输出通道 1 的参数如下： $V_{pp} = 2V$ ， $f = 5KHz$ ， $\phi_{10} = 0^\circ$ 保持不变。判断下图所示的李萨茹图所对应的通道 2 信号的参数即 V_{pp} 、 f 、 ϕ_{20} 的大小（初相位是 10 的 n 倍）。此时示波器的时基应调节成“X-Y”，即横向代表通道 1，纵向代表通道 2。

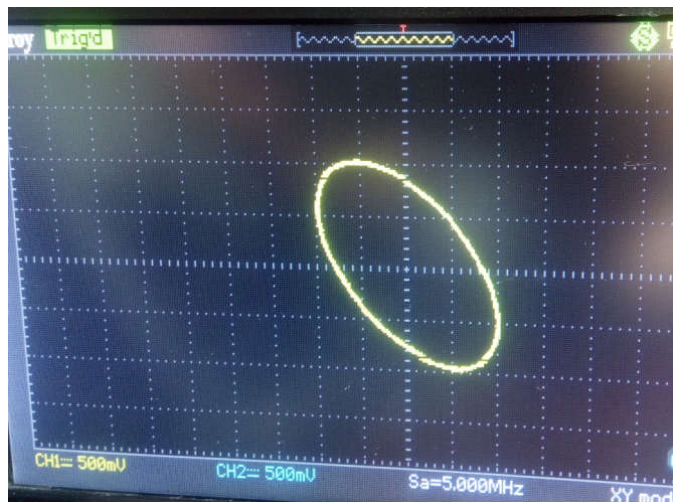


图 25 李萨茹图 1

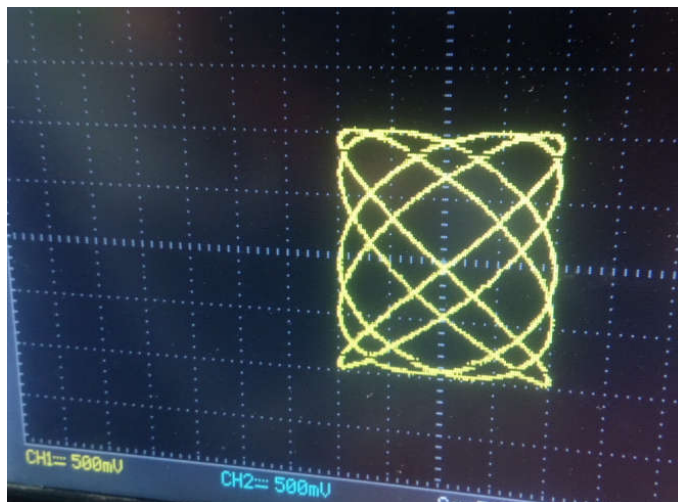


图 26 李萨茹图 2

九、数据处理

1. 采用作图法，在直角坐标纸上画出相应的示意波形并标记相应参数的大小。
2. 完成表 2。

表 2 测量结果

	频率 (KHz)	初相位 ϕ_{20} (度)
图 25		
图 26		

十、注意事项

观察对比李萨茹图时，注意示波器的尺度值。实验报告中关于示波器和信号源的论述部分仅需给出一些概述内容即可。

十一、问题回答

频率确定的情况下，李萨茹图的形状和相位差之间存在一一对应关系吗？为什么？