一，初级

1.1连续

1 函数f(x，y)在某点的邻域内连续的充要条件

函数在该点有定义

函数在该点要存在极限(即左极限等于右极限)

函数在该点的**极限值等于函数在该点的函数值**

2 证明函数在任何地方连续

该函数是由初等函数复合（和差积商）成的函数，并且这些初等函数处处连续，则该函数处处连续

如果是分段函数，先证明这几段函数内是连续的，然后证明连接点的极限相等

3 证明在某点不连续

最好用通用路径（结果包含可变k），因为特殊路径可能会忽视极限可能不存在的问题直接进一步去求极限了

1.2 极限存在和不存在

1 证明函数在某个点极限不存在

一元函数：左极限，右极限不相等

取一条路径，得到极限结果为无穷，直接得到二元函数极限不存在

取两条路径，得到两个不同的极限结果a和b，其中a!=b，同样可以说明该函数极限不存在

通用路径（含参数k），得到的极限结果与k有关，此时也可以说明二元函数极限不存在。这种最常用，也最具有普适性。

2 证明函数在某个点极限存在

充要条件：左极限及右极限都存在且相等

夹逼定理

有界量*无穷小量=无穷小量

极限的性质

极坐标换元（不能用其他特定路径）

1.3 可微

1 证明函数在某个点可微

偏导数**存在**且**连续**，**不一定要可导**->可微

可微->函数连续

可微->函数可偏导

用线性方程验证

初等函数：所有偏导连续即可微

2 证明函数在某个点不可微

偏导数**不存在**或**不连续**

1.4 混沌之序

可导一定连续 可导说明存在唯一切线，意味着保证了连续性

连续不一定可导 比如直角

对于一元函数，可微和可导是相同的概念，都意味着函数在该点存在唯一的切线

对于多元函数，可微要求所有的偏导数连续，这是一个比可导更强的条件。

函数在某点可微，则该点一定存在极限，因为可微意味着函数在该点的变化趋势是明确的，这自然保证了极限的存在。

极限是连续性的表现，可导和可微是更强的条件，它们不仅要求函数连续，还要求函数在某点的变化趋势明确。

二，偏导数

2.1 线性方程

1 线性方程 linear function linearization of f at (a,b)

$L(x,y) = f(a,b) + fx(a,b)(x-a) + fy(a,b)(y-b)$

2 linear approximation 线性近似

$u = f(x,y) \approx f(a,b) + fx(a,b)(x-a) + fy(a,b)(y-b)$

如 $f(1.01,1.01,1.01) \approx f(1,1,1)+fx(1,1,1)(1.01-1)+fy(1,1,1)(1.01-1)+fz(1,1,1)(1.01-1)$

3 全增量 total increment

$\Delta u = f(x,y) - f(x0,y0) = fx(x0,y0)\Delta x + fy(x0+y0)\Delta y + o(\rho)$

$\Delta u = f(x+\Delta x,y+\Delta y) - f(x,y)$

4 全微分

$dz=\partial f/\partial x\, dx + \partial f/\partial y\, dy$

5 用来验证是否可微

计算偏导数

构造全微分 $dz=\partial f/\partial x\, dx + \partial f/\partial y\, dy$

构造全增量 $\Delta z = f(x+\Delta x,y+\Delta y) - f(x,y)$

算出误差项 $\Delta z - dz$

证明误差项是 ρ 的高阶无穷小量 $\rho= (\Delta x^2+\Delta y^2)^{(1/2)}$

相当于证明 $\lim_{\rho\to 0} (\Delta z - dz)/\rho ==0$， 如果=0就是可微

三，切平面

1 求切平面

如果有面z=f(x,y)， 在点P(a,b,c)的切平面为：

$z-c = f_x(a,b)(x-a) + f_y(a,b)(y-b)$

如果有面F(a,b,c)=0，切平面 Tangent plane：

$F_x(x_0,y_0,z_0)(x-x_0)+F_y(x_0,y_0,z_0)(y-y_0)+F_z(x_0,y_0,z_0)(z-z_0)=0$

法向量：$(F_x(x_0,y_0,z_0),F_y(x_0,y_0,z_0),F_z(x_0,y_0,z_0))$

四，全导数

1 常规

z=f(u,v) u=h(x,y) v=g(x,y) 则

$\partial z/\partial x = \partial f/\partial u * \partial u/\partial x + \partial f/\partial v * \partial v/\partial x$

$\partial z/\partial y = \partial f/\partial u * \partial u/\partial y + \partial f/\partial v * \partial v/\partial y$

2 隐函数求全导数

若 F(x,y,z)满足

在点$P(x_0,y_0,z_0)$的某邻域内具有连续偏导数

$F(x_0,y_0,z_0) == 0$

$F_z(x_0,y_0,z_0) != 0$

则F(x,y,z) = 0 在(x_0,y_0)领域内可确定一个唯一单值连续函数z=f(x,y) 满足$z_0=f(x_0,y_0)$

并且 $\partial z/\partial x = - F_x/F_z$　$\partial z/\partial y = - F_y/F_z$

五，方向导数和梯度

1 方向导数求法 directional dervative

对 f(x,y) 求点(x0,y0)沿u- = <a,b>方向的方向导数：

Du-f(x0,y0)=lim h ->0   f(x0+ha , y0 +hb)-f(x0,y0) /h

f(x0+ha , y0 +hb) = f(x0+hcosA , y0 +hcosB)

2 梯度向量gradient vector

▽-f(x,y)=<fx(x,y),fy(x,y)>

“梯度”：描述一个向量场

“梯度向量”：指这个向量场在某一具体点上的值

“梯度”和“梯度向量”在表述上不同，但表示的是同一个对象。

3 结合

u- =<a,b,c>是单位向量

Du-f(x,y) = ▽-f(x,y) · u-

Du-f(x,y) 的最大值是|▽-f(x,y)| ，并且出现在当u- 和 ▽-f(x,y)的方向一样

六，临界点判断 critical point

D = D(a,b) = fxx(a,b)fyy(a,b) - [fxy(a,b)]^2

if D > 0 fxx(a,b) > 0 then f(a,b) is a local minimum

if D > 0 fxx(a,b) < 0 then f(a,b) is a local maximum

if D < 0 f(a,b) is not a local max or min , (a,b) is a saddle point

求global max可以找偏导为0，找边界值，将x，y的条件消元成x的条件

有限制条件的求最值:

f为要求的最值， g为限制函数

▽-f(x,y)= λ ▽-g(x,y)   (可以再来个+ul(x,y))

g(x,y) = XXX

通过上两个得出x，y， λ，再进行一些简单判断，记得验证

七，数列极限

1 数列极限的四则运算律

Assume $\lim_{n\to\infty} a_n = A,\ \lim_{n\to\infty} b_n = B.$ Then

1) $\lim_{n\to\infty} k = k$

2) $\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = \left(\lim_{n\to\infty} a_n\right)\left(\lim_{n\to\infty} b_n\right)$ Product Rule

3) $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n},\quad b_n \neq 0$ Quotient Rule

4) $\lim_{n\to\infty} ka_n = k \lim_{n\to\infty} a_n$ Constant Multiple Rule

5) $\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \pm \lim_{n\to\infty} b_n$ Sum\difference Rule

2 等价无穷小

见下

3 无穷级数 infinite series

Sn = a1+a2+a3+...

如果Sn收敛，lim n无限 an = 0

如果lim n无限 an =0 不能推出Sn收敛（比如震荡数列，调和数列）

但是如果lim n无限 an != 0 可以推出 Sn发散

调和数列 an=1/n 是发散的!

3.1 比较检测法 comparison test

如果0<=an<=bn

如果Bn收敛，则An收敛

如果An发散，则Bn发散

3.2 审敛法 limit comparison test

如果lim n->∞ an/bn=L

如果0<L<+∞, An和Bn同敛散

L=0 Bn收敛可以推An收敛

L=+∞ Bn发散可以推An发散

3.3 积分检测法 integral test

3.4 P-series test

∑1/n^p

p>1 收敛

p<=1 发散

3.5 达朗贝尔判别法 ratio test

n趋近无穷

如果lim n->8 an+1/an = p

当p<1 收敛

当1<p<+8 发散

当p=1 待定

3.6 柯西判别法 root test

n趋近无穷

lim |an|^(1/n) = p

p<1 收敛

1<p<+8 发散

p=1 待定

4 几何级数的收敛性 convergence of a geometric series

从0到无限求和 ∑n=0 ar^n = a/(1-r) 0<|r|<1

5 幂级数

a(x-c)^n

词汇本

first order partial derivatives 一阶偏导数

second partial derivative 二阶偏导数

differentiable 可微分的

intersection 交点

slope 斜率

linear function 线性函数

linearization	线性化
linear approximation	线性近似
elementary function	初等函数
High-order infinitesimal quantity	高阶无穷小量
hyperplane	超平面
tangent plane	切面
horizontal	水平的
vertical	垂直的
conical	圆锥
volume	体积
perimeter	周长
area	面积
total derivative	全导数
gradient	梯度
indicating	表示
critical point	临界点
components	向量的分量
product	乘积
first-octant	第一卦
rectangular	长方形的
rectangle	长方形
square	正方形
trapezoid	梯形
parallel	平行的
coordinate	坐标
diagonally	对角的
vertex	顶点
intersection	两条线的交叉点
infinite series	无穷级数
converges	收敛的
diverges	发散的
integral test	积分检测法
interval	区间
domain	定义域

contrary 相反的

夹逼常用不等式

$a^2+b^2 > 2ab$

$(a+b)/2 >= (ab)^{(1/2)}$

$(2ab)/(a+b) \le (ab)^{(1/2)} \le (a+b)/2 \le ((a^2+b^2)/2)^{(1/2)}$

等价无穷小，这里面的x都可以换为函数

$\sin x \sim x$

$\tan x \sim x$

$\ln(1+x) \sim x$

$e^x-1 \sim x$

$\arcsin x \sim x$

$\arctan x \sim x$

$\log a(1+x) \sim 1/\ln x$

$a^x-1 \sim \ln a \cdot x$

$1-\cos x \sim 1/2 * x^2$

$(1+x)^n-1 \sim nx$

$(1+x)^{(1/x)} = e$

初等函数求导

$\arcsin x \quad 1/\sqrt{(1-x^2)}$

$\arccos x \quad -1/\sqrt{(1-x^2)}$

$\arctan x \quad 1/1+x^2$

$\tan x \ 1/ (\cos x)^2$

等差等比求和

等差$S_n = (a_1+a_n)*n/2$

$a_n = a_1+(n-1)d$

$S_n = na_1+n(n-1)d/2s$

等比$S_n = a_1 * (1-q^n) / 1-q$

$a_n = a_1 * q^{(n-1)}$

圆锥曲线

椭圆

交点在X：$x^2/a^2+y^2/b^2=1$ $a>b>0$

交点在X：$y^2/a^2+x^2/b^2=1$ $a>b>0$

双曲线

焦点在x轴： $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$ $a>0$ $b>0$

焦点在y轴： $y^2/a^2 - x^2/b^2 = 1$ $a>0$ $b>0$