# 2.协调系统动力学模型

Two manupulators which has two freedoms.

## 2.1 Single robot without object

ith manipulator dynamic model is:



Where:



## 2.1 Single robot with object

Ith roboy dynamic model:



其中:

为第i个机械臂的关节向量:

为第i个机械臂的对称正定惯性矩阵:

为第i个机械臂的向心力和科里奥利力矩阵:

为第i个机械臂的重力向量:

为第i个机械臂的关节控制力矩向量:

为第i个机械臂的雅克比矩阵，表示从关节空间到机械臂末端执行器位姿的映射:

为目标物体作用在第i个末端执行器的力矢量:

## 2.2 多机械臂动力学模型

m个机械臂的动力学模型可以表示为:



其中:















## 2.3 Object dynamic model

当多臂机器人抓取物体时，目标物体同时受到多个机械臂的作用，目标物体的动力学方程可描述为:



其中:



为目标物体的对称正定惯性矩阵:

为目标物体的科氏力和向心力矩阵:

为目标物体的重力项:

为目标物体受到的合力

目标物体受到的合力可以表示为:



是物体施加在第i个机械臂的末端执行器上的相互作用力，并且满足:



表示从目标物体质心到第i个机械臂的末端执行器的雅克比矩阵，双臂机器人抓取物体时，机械臂和物体之间形成闭链，有:



## 2.4 内力分析

### 2.4.1 第一种

为便于控制双臂机器人抓取和操作物体，可以将施加在末端执行器上的力分解为两个部分，内力和外力:



其中，外力仅用来驱动目标物体运动，内力对物体的运动不产生直接影响，可以使机械臂末端执行器和物体之间不产生欢动:内力相互抵消，且满足约束:



因此，可以写为:



外力可以表示为:



其中，是正定的m阶对角阵，表示负载在第i个机械臂的分布情况，满足:



结合和有:



将代入至得到:



进而，得到:



### 2.4.2 第二种

内力定义在的零向量空间，即:



由和可知:



所以可以得到:



所以可以得到:



由可以看出目标物体与末端执行器相互作用的力包含了两个正交的部分:

对物体运动直接作出贡献，给物体提供加速度:

内力，不对物体运动直接作出贡献:

## 2.6 协调系统的动力学模型

针对不同的控制方法，被控系统的数学模型在形式上有所区别，下面将分别给出对应的模型a和模型b:

### 2.6.1 模型a

多机械的末端执行与所操作的目标物体没有相对运动，根据多机械臂系统的运动学模型，将第i个机械臂的末端执行器在坐标系 中的关节速度用该机械臂的关节变量表示为:



将该速度用目标物体在坐标系的位姿向量表示为:



容易得到第i个机械臂的关节向量与目标物体的位姿向量的关系:



所以，对于整个系统有:



对两边求导，得到:



所以，可以得到:



将代入至，结合的力的分解，可以得到:



将代表的目标物体动力学模型左乘，然后与相加，得到多机械协调操作目标物体系统的动力学模型a:



多机械臂协调操作目标物体系统的动力学模型a简化为:



其中:



# 3. 双臂机器人动力学建模

利用单机械臂动力学模型和目标物体动力学模型，通过机械臂末端执行器和物体之间的相互作用力并构建双臂机器人和目标物体之间的约束关系，可以建立双臂机器人操作目标物体形成闭链时的动力学模型:

为了简化双臂机器人的描述，在分析机器人动力学时，做如下假设:

1. 末端执行器抓住物体时与物体之间没有相对移动:
2. 机械臂的操作不经过奇异位型，且运动学方程是完全已知的:
3. 目标是刚性的，在操作过程中形状不发生变化: