复对称线性方程组的广义修正 HSS 迭代方法

XXX *

华东师范大学数学系

上海, 200241, 中国

摘要

复系数线性方程组广泛存在于科学与工程计算的众多应用领域中. 目前求解大规模稀疏线性方程组的主要方法是迭代法, 预处理方法是改善迭代法收敛性和稳定性的主要技术. 事实上, 好的预处理子已成为迭代法取得成功的关键因素.

第一节 引言

考虑复系数线性方程组

$$\mathcal{A}x \equiv (W + iT)x = b \tag{1.1}$$

其中 $W \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 对称正定, $T \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 对称半正定, $x, b \in \mathbb{C}^n$. 此时 $\mathcal{A}$ 的 Hermitian 与 skew-Hermitian 部分分别为

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}(\mathcal{A} + \mathcal{A}^*) = W, \qquad \mathcal{S} = \frac{1}{2}(\mathcal{A} - \mathcal{A}^*) = iT,$$

即 HSS [4] 算法中的 $\mathcal{H}$ 和 $\mathcal{S}$ 分别为 W 和 iT. 关于这类问题的研究可参见 [2, 3, 7, 8]

1.1 MHSS 和 PMHSS 迭代方法

为了避免在迭代过程中求解复系数线性方程组, Bai, Benzi, Chen 针对 HSS 方法进行了适当地修正, 提出了 MHSS [2] 算法和 PMHSS [3] 算法. PMHSS 算法具体迭代格式如下：

Algorithm 1 PMHSS 算法

1: 给定一个初值 $x^{(0)} \in \mathbb{C}^n$ 和常数 $\alpha > 0$
2: **for** $k = 1, 2, \ldots$ 直到序列 $\{x^{(k)}\}_{k=0}^{\infty}$ 收敛 **do**
3: 解方程: $(\alpha V + W)x^{(k+\frac{1}{2})} = (\alpha V - iT)x^{(k)} + b$
4: 解方程: $(\alpha V + T)x^{(k+1)} = (\alpha V + iW)x^{(k+\frac{1}{2})} - ib$
5: **end for**

在 PMHSS 算法中, 如果取 $V = I$, 则可得到 MHSS 算法. 文献中还证明了对于任意 $\alpha > 0$, MHSS 和 PMHSS 算法都无条件收敛到问题 (1.1) 的唯一的解. 在文献 [2, 3] 的数值

*email@ecnu.edu.cn, 本文由某某某基金资助.

实验中, 我们可以看出, MHSS 和 PMHSS 方法相较 HSS 和 PHSS, 在迭代步数和计算时间上, 都有一定程度的优势和改进.

以上算法都是针对 W 和 T 是实对称矩阵的情形进行的 HSS 算法的推广. 文献 [5] 考虑了 W, T 非对称的情形, 并给出了 W 和 T 非对称时, MHSS 算法的收敛性.

定理 1.1 设 $A = W + iT$, 其中 $W, T \in \mathbb{R}^{n\times n}$. 若 $(1-i)W$ 正定, $(1+i)T$ 半正定, 则

$$\rho(M(\alpha)) < 1, \quad \forall\ \alpha > 0.$$

第二节 GMHSS 迭代方法

我们考虑对 MHSS 算法做进一步的推广. 设

$$\mathcal{A} = W + iT,$$

其中 W, T 都是实对称矩阵. 并假定存在某个实数 β, 使得 $\beta W + T$ 正定, $W - \beta T$ 半正定. 分别在原线性方程组 (1.1) 两边同时乘以 $(\beta - i)$ 和 $(1 + \beta i)$, 可得

$$\begin{cases} (\beta - i)(W + iT)x = (\beta - i)b, \\ (1 + \beta i)(W + iT)x = (1 + \beta i)b. \end{cases}$$

由此, 我们可以构造出如下的广义修正 HSS 迭代方法, 记为 GMHSS.

Algorithm 2 GMHSS 算法

1: 给定一个初值 $x^{(0)} \in \mathbb{C}^n$ 和常数 $\alpha > 0$
2: **for** $k = 1, 2, \ldots$ 直到序列 $\{x^{(k)}\}_{k=0}^{\infty}$ 收敛 **do**
3: 解方程: $(\alpha I + \beta W + T)x^{(k+\frac{1}{2})} = (\alpha I + iW - i\beta T)x^{(k)} + (\beta - i)b$
4: 解方程: $(\alpha I + W - \beta T)x^{(k+1)} = (\alpha I - i\beta W - iT)x^{(k+\frac{1}{2})} + (1 + i\beta)b$
5: **end for**

根据假设, $\beta W + T \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 正定, $W - \beta T \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 半正定, 所以当 $\alpha > 0$ 时, $\alpha I + \beta W + T$ 和 $\alpha I + W - \beta T$ 都是实对称正定矩阵. 因此在 GMHSS 算法的两步交替迭代中, 需要求解的子线性方程组的系数矩阵都是对称正定的, 因此可以用不完全 Cholesky 分解或者不精确的共轭梯度法来计算.

2.1 GMHSS 算法收敛性分析

我们首先给出可以一个描述一般两步分裂迭代算法收敛的准则 [4].

引理 2.1 设 $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $A = M_1 - N_1 = M_2 - N_2$ 是矩阵 A 的两个分裂, 给定初值 $x^{(0)} \in \mathbb{C}^n$, 对于序列 $\{x^k\}(k = 0, 1, 2 \ldots)$ 并通过以下的迭代方法求解 $x^{(k+1)}$:

$$\begin{cases} M_1 x^{(k+\frac{1}{2})} = N_1 x^{(k)} + b \\ M_2 x^{(k+1)} = N_2 x^{(k+\frac{1}{2})} + b \end{cases}$$

则对于 $\forall x^{(0)} \in C^n$, 迭代序列 $x^{(k)}$ 均收敛到线性方程组 $Ax = b$ 的唯一解 $x_* \in C^n$.

我们通过直接计算可知 GMHSS 方法的迭代格式为

$$x^{(k+1)} = M(\alpha)x^{(k)} + G(\alpha)b, \quad k = 0, 1, 2, \ldots. \tag{2.1}$$

利用引理 2.1, 我们可以得到以下定理.

定理 2.1 *设 $\mathcal{A} = W + iT \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $W \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $T \in \mathbb{R}^{n\times n}$, 并且存在某个实数 β, 使得 $\beta W + T$ 对称正定, $W - \beta T$ 对称半正定. 那么, 对于 $\forall\alpha > 0$, 我们有*

$$\rho(M(\alpha)) \le \sigma(\alpha).$$

证明 此处省略若干字... ... □

下面的结论给出了近似最优参数 α_* 的选取方法.

推论 2.1 *设上述定理中的条件都满足, 矩阵 $\beta W + T$ 的最小和最大特征根分别记为 λ_{min} 和 λ_{max}, 则*

$$\alpha_* \triangleq \arg\min_{\alpha} \max_{\lambda_{min}\le\lambda\le\lambda_{max}} \sigma(\alpha) = \sqrt{\lambda_{min}\lambda_{max}}.$$

第三节 数值算例

在本节中, 我们使用文献 [2] 中的两个数值算例来测试 GMHSS 算法的数值效果.

例 3.1 *考虑线性方程组*

$$\left[\left(K + \frac{3-\sqrt{3}}{\tau}I\right) + i\left(K + \frac{3+\sqrt{3}}{\tau}I\right)\right]x = b,$$

其中 τ 表示时间步长, 该问题来源于抛物方程 R_{22}-Padé 近似的中心差分离散, 更多的细节可参见文献 [1–3].

表格 1 中列出的是 MHSS 和 GMHSS 算法的数值结果.

表 1: MHSS 和 GMHSS 数值结果比较

n		2^8	2^{10}	2^{12}	2^{14}	2^{16}
MHSS	α_*	1.16	0.78	0.55	0.40	0.30
	IT	39	53	72	98	133
	CPU	2.25e-2	7.36e-2	1.02e+0	1.46e+1	1.55e+2
GMHSS	α_*	0.23	0.11	0.06	0.03	0.01
	IT	36	37	39	40	41
	CPU	1.36e-2	3.76e-2	3.16e-1	2.58e+0	2.20e+1

从表 1 中可以看出, 无论是在迭代步数上, 还是在迭代时间上, GMHSS 算法都优于 MHSS 算法.

参 考 文 献

[1] O. Axelsson and A. Kucherov, Real valued iterative methods for solving complex symmetric linear systems, Numer. Linear Algebra Appl., 7 (2000), 197–218. 3

[2] Z-Z Bai, M. Benzi and F. Chen, Modified HSS iteration methods for a class of complex symmetric linear systems, Computing, 87 (2010), 93–111. 1, 3

[3] Z-Z Bai, M. Benzi and F. Chen, On preconditioned MHSS iteration methods for complex symmetric linear systems, Numer. Algorithms, 56 (2011), 297–317. 1, 3

[4] Z-Z Bai, G. H. Golub and M. K. Ng, Hermitian and skew-Hermitian splitting methods for non-Hermitian positive definite linear systems, SIAM J.Matrix. Anal.Appl., 24 (2003), 603–626. 1, 2

[5] X-X Guo and S. Wang, Modified HSS iteration methods for a class of non-Hermitian positive-definite linear systems, Applied Mathematics and Computation, 218 (2012), 10122–10128. 2

[6] L. Li, T-Z Huang and X-P Liu, Modified Hermitian and skew-Hermitian splitting methods for non-Hermitian positive-definite linear systems, Numer.Linear Algebra Appl., 14 (2007), 217–235.

[7] S. Novikov, S. V. Manakov, L. P. Pitaevski, V. E. Zakharov, Theory of Solitons. The Inverse Scattering Method, Translated from Russian. Contemporary Soviet Mathematics. Consultants Bureau[Plenum], New York (1984). 1

[8] H. van der Vorst, J. Melissen, A Petrov-Galerkin type method for solving $Ax = b$, where A is symmetric complex, IEEE Trans Magn., 26 (1990), 706–708. 1

[9] 王珅, 两类非 Hermitian 线性方程组的迭代法研究, 硕士论文, 中国海洋大学, 2012.