

Exposé zur Bachelorarbeit mit dem Thema:

Ausführliche Darstellung eines klassischen Systems der probabilistischen epistemischen Logik und Beschreibung neuerer Entwicklungen

David Baldin

18. Mai 2015

Erläuterung des Themas

Die Arbeit stellt ausführlich ein klassisches System der probabilistischen epistemischen Logik dar und beschreibt neuere Entwicklungen auf diesem Gebiet.

Die Arbeit gliedert sich in zwei Teile. Im ersten Teil wird eine probabilistische epistemische Logik ausgearbeitet. Dabei wird die in *Reasoning about uncertainty, 2005* - J.Y. Halpern vorgestellte Sprache \mathcal{L}_n^{QU} und das Axiomensystem AX_n^{prob} ausgearbeitet und dargestellt. Es wird ein System der Logik mit Wahrscheinlichkeiten konstruiert, welches es ermöglicht, Aussagen der Art „Es ist doppelt so wahrscheinlich, dass es am Montag regnet wenn es am Sonntag geregnet hat, als wenn es am Sonntag nicht geregnet hat“ durch bspw. einen Term $2\ell_1(Montag_{REGEN} \wedge Sonntag_{REGEN}) > \ell_1(Montag_{REGEN} \wedge \neg Sonntag_{REGEN})$ formalisiert auszudrücken.

Ausgehend von einem System der modalen Logik für einen Agenten wird ein System für mehrere Agenten konstruiert und dieses um ein Wahrscheinlichkeitsmaß für Aussagen erweitert. Das vorgestellte System der epistemischen probabilistischen Logik erlaubt, logische Aussagen über Wahrscheinlichkeiten bestimmter Ereignisse mit mehreren Agenten zu formulieren. Bspw. lässt sich damit der Satz „Die Wahrscheinlichkeit für Sonne am Montag ist für Alice mehr als 3 mal so hoch als für Bob“ formal durch einen Term

$3\ell_{ALICE}(Montag_{SONNE}) > \ell_{BOB}(Montag_{SONNE})$ ausdrücken und nachweisen.¹

Mit einer Semantik aus der Klasse \mathcal{M}_n^{prop} der Wahrscheinlichkeitsstrukturen lässt sich darüber hinaus feststellen, ob Sätze aus \mathcal{L}_n^{QU} wahr sind oder nicht. Die formale Darstellung dieses Systems erfordert einige Vorarbeiten, insbesondere die Darstellung weiterer Systeme, welche als formale Grundlage dienen. Im einzelnen sind dies:

- Die Sprache der Aussagenlogik \mathcal{L}^{PROP}
- Eine allgemeine Darstellung der Sprache einer modalen Logik $\mathcal{L}_{\mathcal{R}}$ sowie ihrer Semantik durch Kripke Strukturen
- Die Repräsentation von Ungewissheit durch Wahrscheinlichkeitsmaße im Wahrscheinlichkeitsraum (W, \mathcal{F}, μ)

¹Befände sich Alice im spanischen Almería mit 25 Regentagen/Jahr und Bob in Glasgow mit 262 Regentagen/Jahr, so würde sich durch die vereinfachte Annahme der Wahrscheinlichkeiten für Sonnenschein: $\ell_{ALICE}(Montag_{SONNE}) = \frac{365-25}{365} \approx 0,932$ und $\ell_{BOB}(Montag_{SONNE}) = \frac{365-262}{365} \approx 0,282$, ergeben, dass Alice eine $\frac{\frac{365-25}{365}}{\frac{365-262}{365}} = \frac{340}{103} \approx 3,301$ mal höhere Wahrscheinlichkeit für Sonnenschein pro Tag hat als Bob.

- Eine epistemische Logik (eine spezielle modale Logik) $\mathcal{L}_n^K(\Phi)$ für $n \geq 1$ Agenten und ihrer Semantik durch epistemische Strukturen
- Eine Axiomatisierung der epistemischen Logik durch ein System aus Axiomen $(K, T, D, 4, 5)$
- Die Sprache der epistemisch probabilistischen Logik \mathcal{L}_n^{QU} mit der Darstellung ihrer Semantiken durch die Klasse \mathcal{M}_n^{prob} der probabilistischen Strukturen

Neben der Darstellung der Systeme werden wichtige Sätze und Eigenschaften betrachtet. Insbesondere wird das Axiomensystem der epistemischen Logik bezüglich Korrektheits- und Vollständigkeitseigenschaften untersucht. Es wird die Sprache \mathcal{L}_n^{QU} hinsichtlich ihrer Ausdrucksstärke untersucht. Zum Ende des ersten Teils, werden Eigenschaften des Axiomensystems AX_n^{prob} der epistemischen probabilistischen Logik, insbesondere Eigenschaften der Korrektheit und Vollständigkeit sowie Komplexitätseigenschaften betrachtet.

Im zweiten Teil werden neuere Entwicklungen auf dem Gebiet der dynamischen probabilistischen Wissenslogik dargestellt. Es wird ausgehend von den in *Logical dynamics of information and interaction, 2012* - J. van Benthem präsentierten Logiken *PAL*² und *DEL*³ dargestellt, wie sich eine epistemische probabilistische Logik konstruieren lässt, welche Dynamiken realisiert. Mit Dynamiken sind allgemein Mechanismen zur Aktualisierung von Wahrscheinlichkeiten gemeint. Diese Dynamiken betreffen die Wahrscheinlichkeiten von Welten⁴ aus Sicht von Agenten, die Eintrittswahrscheinlichkeiten von Events und die Wahrscheinlichkeiten bezüglich der Beobachtungen von Agenten. Dabei wird untersucht, wie sich Dynamiken charakterisieren lassen und wie diese sich von z.B. bedingtem Agentenwissen unterscheiden. An Beispielen soll die Ausdrucksstärke von *DEL* untersucht und dargestellt werden. Ausgehend von einer statischen epistemischen probabilistischen Logik, wird dargestellt, welchen Einfluss verschiedene Dynamik-Szenarien auf die Wahrscheinlichkeiten nehmen und welche Probleme dabei auftreten. Es wird gezeigt, für welche Bestandteile einer epistemischen Logik sich Wahrscheinlichkeiten sinnvoll anwenden lassen. Nach den einführenden Betrachtungen wird auf Basis der statischen epistemischen probabilistischen Logik sowie der Einführung eines probabilistischen Eventmodells, eine Regel zur Aktualisierung der Wahrscheinlichkeiten eingeführt, welche die zuvor formulierten Eigenschaften realisiert. Abschließend wird die dynamische epistemische probabilistische Logik vollständig⁵ axiomatisiert dargestellt. Zum Ende des zweiten Teils werden offene Fragen, Probleme und aktuelle Forschungsbemühungen zur Thematik dynamischer epistemischer probabilistischer Logiken präsentiert und diskutiert.

Wissenschaftliche Motivation

Das im ersten Teil auszuarbeitende System wurde in zahlreichen Publikationen und Lehrbüchern dargestellt und untersucht und ist damit sehr gut dokumentiert. Das Thema des zweiten Teils der Arbeit ist gut dokumentiert und Gegenstand aktueller Forschungen. Es existieren verschiedene, auf *DEL* referenzierende Modifikationen, welche in aktuellen Papers dargestellt und diskutiert werden. Die Motivation und Intention dieser Arbeit soll es sein, eine in sich geschlossene und technisch/formal vereinheitlichte Darstellung eines klassischen (statischen) Systems und eines dynamischen Systems der Wissenslogik mit mehreren Agenten über Wahrscheinlichkeiten zu bieten. Die Arbeit soll es dem Leser ermöglichen, ohne weitere Recherchen und mit grundlegende Kenntnissen der Logik und Stochastik, einen technischen Überblick über die Thematik zu gewinnen.

²Eine Logik welche neben Agentenwissen und dem gemeinsamen Wissen aller Agenten, Dynamiken $[!P] K_i \varphi$ zu formulieren erlaubt, welche ausdrücken was Agent i nach dem Bekanntwerden von P weiß.

³Eine Erweiterung von *PAL*, welche private Informationen handhaben kann und es erlaubt, die Auswirkungen von Beobachtungen von Agenten eines Events auszudrücken.

⁴Auch „Rahmen“ oder „Frames“ im Sinne der Modallogik

⁵Insbesondere wird eine Semantik des eingeführten Eventmodells angegeben

Methodik

- Die Ausarbeitung erfolgt deduktiv in dem Sinne, dass alle zu einer Darstellung notwendigen Vorraussetzungen vorhergehend dargestellt werden. Im Falle trivialer oder nicht relevanter Bezüge wird auf entsprechende Quellen verwiesen.
- Systeme, Sätze, Definitionen, usw. werden technisch/formal eingeführt und ggf. zur Anschaulichkeit anhand von Beispielen erläutert.
- Soweit es erforderlich ist, werden Formalismen syntaktisch vereinheitlicht.
- Fachlich wird sich die Arbeit primär an Arbeiten von J. Y. Halpern und J. van Benthem orientieren.
- Die Formalismen und Termina werden sich an der gängigen englischsprachigen Literatur orientieren.

Struktur der Arbeit

Die Struktur der Arbeit wird sich an folgendem Strukturentwurf orientieren. Im Hinblick auf die Verträglichkeit des zweiten zum ersten Teil, wird vorraussichtlich eine geringfügige Umstrukturierung erfolgen.

1. Inhaltsverzeichnis
2. Einleitung
 - (a) Motivation und Ziel der Arbeit
 - (b) Allgemeine Einführung in die Thematik [Anschauliche Einführung der Begriffe Aussagenlogik, Modallogik, Wahrscheinlichkeit, Ungewissheit, Glauben/Wissen, Agenten, Wissensrepräsentation und Dynamiken]
 - (c) Allgemeine Vereinbarungen [Bzgl. Syntax und Begrifflichkeiten wie bspw. epistemisch, probalistisch, usw.]
3. Hauptteil
 - (a) Darstellung eines klassischen Systems der Wissenslogik mit Wahrscheinlichkeiten
 - i. Formalisierung der Aussagenlogik [Einführung einer formalen Aussagenlogik]
 - A. Eine Sprache der Aussagenlogik \mathcal{L}^{PROP} [Mittels $\mathcal{L} = (\Sigma_{AL}, AS, AF, \sigma)$: Alphabet Σ_{AL} , Aussagensymbole $AS \subseteq (\Sigma_{AL})^*$, Hilfsfunktionen $cardletter_\alpha : (\Sigma)^* \rightarrow \mathbb{N}$ und $\backslash_\alpha : (\Sigma)^* \rightarrow (\Sigma)^*$, Formeln $AF \subseteq (\Sigma_{AF})^*$, $AW_\sigma : AF \rightarrow \{W, F\}$ / Semantik, [Hal05, 7.1],[vDJYHWvdHBK15, S.9,1503.00806v1.pdf],[Wit13]]
 - ii. Eine modale Logik $\mathcal{L}_{\mathcal{R}}$ [Einführung der Sprache und Semantik / Kripke Strukturen, [BP02]]
 - iii. Repräsentation von Ungewissheit [Beantworten der Frage (im technischen Sinne): Was ist Wissen? Was ist glauben? Wie lässt sich dies formal repräsentieren? Einführung möglicher Welten W , eines Wahrscheinlichkeitsmaßes sowie des Wahrscheinlichkeitsraums (W, \mathcal{F}, μ) , [Hal05, 2.1]]
 - iv. Eine epistemische Logik für mehrere Agenten [Einführung der Sprache $\mathcal{L}_n^K(\Phi)$ [Hal05, 7.2.1]]
 - A. Eine Semantik der epistemischen Logik für mehrere Agenten $[\mathcal{N}, M = (W, \mathcal{K}_1, \dots, \pi)]$, Referenzierung der Repräsentation von Ungewissheit, der Mehr-Agenten Modallogik sowie Kripke-Strukturen]
 - B. Eine Axiomatisierung der epistemischen Logik [Betrachten der Sätze $K, T, D, 4, 5$, [Hal05, 7.2.3]]
 - v. Erweiterung der epistemischen Logik für mehrere Agenten um Wahrscheinlichkeiten
 - A. Ein Einführendes Beispiel [Veranschaulichung anhand eines Beispiels (Monty Hall)]
 - B. Die Sprache \mathcal{L}_n^{QU} der epistemischen probalistischen Logik für mehrere Agenten [[Hal05, 7.3]]
 - C. Eine Semantik für \mathcal{L}_n^{QU} $[\mathcal{M}_n^{prob}]$, [Hal05, 7.3]]
 - D. Die vollständige Axiomatisierung der epistemischen probalistischen Logik für mehrere Agenten [[Hal05, 7.3]]
 - (b) Darstellung eines dynamischen Systemes der Wissenslogik mit Wahrscheinlichkeiten

- i. Einführung in die Dynamik über Wahrscheinlichkeiten [Anschauliche Einführung Anhand von Beispielen]
 - ii. Eine Logik mit öffentlichen Bekanntmachungen [*PAL*, [vB12, 2.1, 8.1]]
 - A. Erweiterung der im ersten Teil eingeführten epistemischen Logik [Gemeinsames Wissen: $C_G\varphi$, Erweiterung der Semantik um die Erreichbarkeitsrelation \rightarrow_i , Pointed Models (M, s) , Aktualisierungen $[!P]K_i\varphi$]
 - B. Eine Axiomatisierung von *PAL*
 - iii. Formale Einführung der Logik *DEL*
 - A. Epistemische Eventmodelle [$E = (E, \{\sim_i\}_{i \in G}, \{Pre_e\}_{e \in E}, e)$, [vB12, 4.2]]
 - B. Einführung und Analyse der Produkt-Aktualisierung
 - C. Eine vollständige Axiomatisierung der Logik *DEL*
 - iv. Revision und Analyse verschiedener Arten von Aktualisierungen [Stichworte: Bedingte Wahrscheinlichkeiten / Bayes' Regel, Jeffrey Rule, Produkt-Aktualisierung]
 - v. Erweiterung von *DEL* um probalistische Produkt-Aktualisierung
 - A. Erweiterung des Eventmodells
 - B. Einführung der probalistischen Produkt-Aktualisierung
 - C. Analyse des Systems anhand eines komplexen Beispiels
 - vi. Ein vollständiges Axiomensystem der dynamischen epistemischen probalistischen Logik
 - (c) Diskussion aktueller Forschungsfragen der dynamischen epistemischen probalistischen Logik
4. Schlussteil
- (a) Zusammenfassung
 - (b) Fazit
5. Literaturverzeichnis

Literaturliste

Zum Zeitpunkt der Fertigstellung des Exposés wurden folgende Arbeiten für die Arbeit als relevant eingestuft:

- Handbook of Epistemic Logic, 2015 - H. van Ditmarsch, J. Y. Halpern, W. van de Hoek
- Reasoning about uncertainty, 2005 - J. Y. Halpern
- Logical dynamics of information and interaction, 2012 - J. van Benthem
- A mathematical introduction to logic, 1972 - H. B. Enderton
- The Logic of Relevance and Necessity, 1972 - A. R. Anderson, N. D. Belnap
- Dynamic Epistemic Logic, 2007 - H. van Ditmarsch, W. van der Hoek, B. Kooi
- Epistemic logic and information update, 2008 - A. Baltag, H. van Ditmarsch, L.S. Moss
- Dynamic update with probabilities, 2009 - J. van Benthem, J. Gerbrandy, B. Kooi
- When all is done but not (yet) said: Dynamic rationality in extensive games, 2008 - A. Baltag, S. Smets, J.A. Zvesper
- Extending probabilistic dynamic epistemic logic, 2009 - J. Sack
- A Logic for Reasoning about Upper Probabilities, 2001 - J. Y. Halpern, R. Pucella
- An Introduction to Logics of Knowledge and Belief, 2015 - H. van Ditmarsch, J. Y. Halpern, W. van der Hoek, B. Kooi
- Computation as conversation, 2008 - J. van Benthem
- The stories of logic and information, 2008 - J. van Benthem, M. Martinez
- Decisions, actions, and games: A logical perspective, 2009 - J. van Benthem
- Probabilistic Dynamic Epistemic Logic, 2003 - B. Kooi
- Epistemic Probability Logic Simplified, 2014 - J. van Eijck
- A logical Approach to Reasoning about Uncertainty: A Tutorial, 1995 - J. Y. Halpern
- Conditional Probability and Update Logic, 2003 - J. van Benthem
- Reasoning About Knowledge, 1995 - R. Fagin, J. Y. Halpern, Y. Moses, M. Y. Vardi
- Open Problems in logical Dynamics, 2005 - J. van Benthem

Literatur

- [BP02] BLACKBURN PATRICK, RIJKE MAARTEN DE, VENEMA YDE: *Modal logic*. Cambridge University Press, 2002.
- [Hal05] HALPERN, J.Y.: *Reasoning about uncertainty*. MIT Press, 2005.
- [vB12] BENTHEM, J. VAN: *Logical dynamics of information and interaction*. Cambridge University Press, 2012.
- [vDJYHWvdHBK15] HOEK BARTELD KOOL, HANS VAN DITMARSCH JOSEPH Y. HALPERN WIEBE VAN DER: *An Introduction to Logics of Knowledge and Belief*. arXiv:1503.00806v1 [cs.AI] 3 Mar 2015, 2015.
- [Wit13] WITT, KURT-ULRICH: *Algebraische Grundlagen der Informatik: Zahlen - Strukturen - Codierung - Verschlüsselung*. Springer-Verlag, 2013.