ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ

ΤΜΗΜΑ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΗΣ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

ΑΝΑΛΥΣΗ ΑΛΓΟΡΙΘΜΩΝ

Ασυμπτωτική πολυπλοκότητα

Κωνσταντίνος Γιαννουτάκης
Επίκουρος Καθηγητής

ΣΥΝΟΨΗ ΔΙΑΛΕΞΗΣ

- Μαθηματικό υπόβαθρο
- Ασυμπτωτική πολυπλοκότητα & κλάσεις πολυπλοκότητας

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟ ΥΠΟΒΑΘΡΟ

- *Μαθηματικοί ορισμοί / Χρήσιμες Συναρτήσεις*
- *Ασυμπτωτικοί συμβολισμοί*
- *Κλάσεις πολυπλοκότητας*

ΧΡΗΣΙΜΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

- $\lfloor x \rfloor$ κάτω ακέραιο μέρος: μεγαλύτερος ακέραιος έτσι ώστε $\leq x$
- $\lceil x \rceil$ άνω ακέραιο μέρος: μικρότερος ακέραιος έτσι ώστε $\geq x$

$$x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x \leq \lceil x \rceil < x + 1$$

- $\ln N$: φυσικός λογάριθμος: x τέτοιο ώστε $e^x = N$
- $\lg N$: δυαδικός λογάριθμος: x τέτοιο ώστε $2^x = N$
- $H_N = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{N} \approx \ln N$ (N-οστός αρμονικός αριθμός)

ΧΡΗΣΙΜΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

- $\binom{N}{k} = \frac{N!}{(N-k)!k!}$ (διωνυμικοί συντελεστές)
- $\lg(N!) = \lg 1 + \lg 2 + \lg 3 + \cdots + \lg N \approx N \lg N$ (Προσέγγιση Stirling)

ΧΕΙΡΙΣΜΟΣ ΑΘΡΟΙΣΜΑΤΩΝ

- $\sum_{i=1}^{n} 1 = n$
- $\sum_{i=j}^{n} 1 = n - j + 1$
- $\sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ (Αριθμητική πρόοδος)
- $\sum_{i=0}^{n} r^i = \frac{r^{n+1}-1}{r-1}, r \neq 1$ (Γεωμετρική πρόοδος με λόγο r)
- $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} = \ln n$ (Αρμονική πρόοδος)
- $\sum_{i=0}^{n} f(i) = \sum_{j=m}^{n+m} f(j-m)$ (Αλλαγή μεταβλητής)

ΜΙΚΡΟ ΟΜΙΚΡΟΝ (o)

Συμβολίζουμε με $f(x) = o(g(x))$ εάν υπάρχουν $c > 0$ και x_0 τέτοια ώστε
$$f(x) < cg(x), \forall x > x_0$$

Εναλλακτικός ορισμός

Συμβολίζουμε με $f(x) = o(g(x))$ εάν
$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

Παραδείγματα

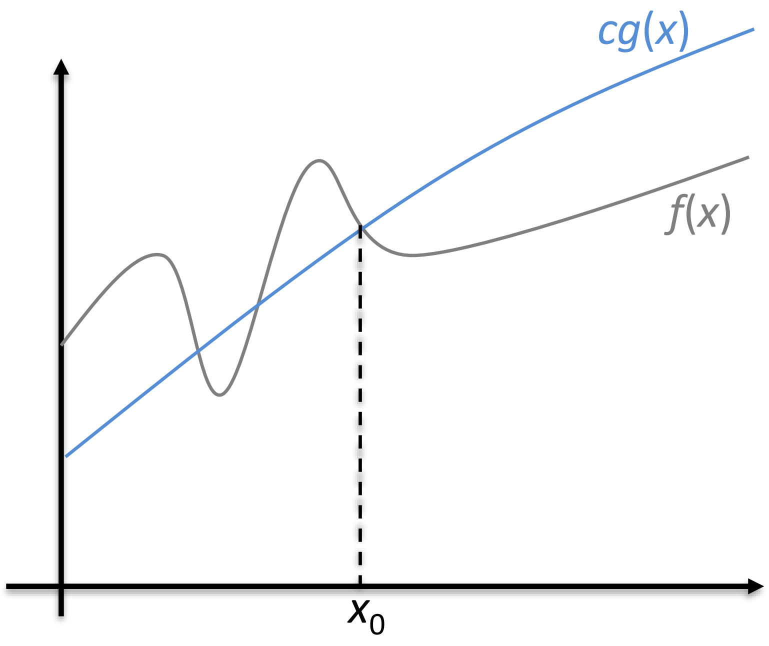
- $x^2 = o(x^5)$
- $\sin(x) = o(x)$
- $\frac{1}{x} = o(1)$
- $23\ln(x) = o(x^{0.02})$

ΜΕΓΑΛΟ ΟΜΙΚΡΟΝ ($\mathcal{O}$)

Συμβολίζουμε με $f(x) = \mathcal{O}(g(x))$ εάν υπάρχουν $c > 0$ και x_0 τέτοια ώστε
$f(x) \leq cg(x), \forall x > x_0$

Παραδείγματα

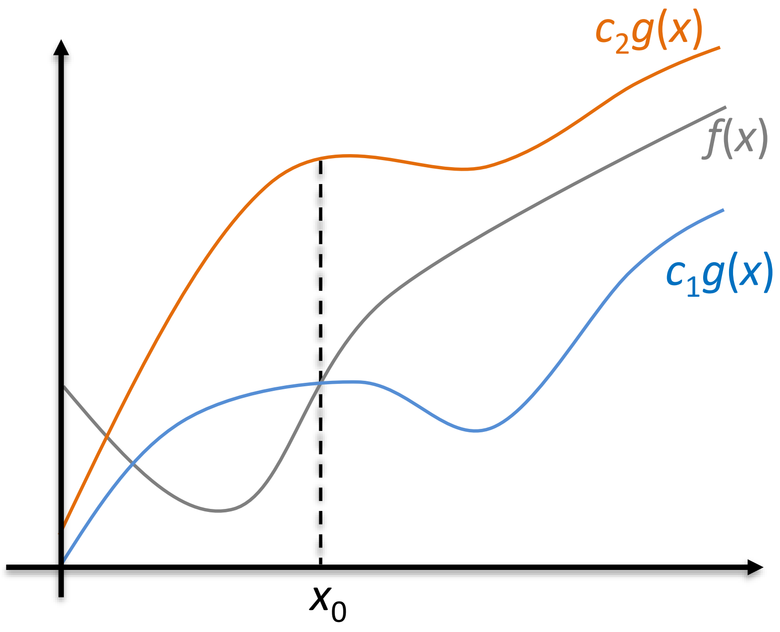
- $\sin(x) = \mathcal{O}(x)$, αλλά πιο συχνά $\sin(x) = \mathcal{O}(1)$
- $x^3 + 5x^2 + 77\cos(x) = \mathcal{O}(x^5)$
- $\frac{1}{1+x^2} = \mathcal{O}(1)$



ΘΗΤΑ (Θ)

Συμβολίζουμε με $f(x) = \Theta(g(x))$ εάν υπάρχουν $c_1 > 0$, $c_2 > 0$ και x_0 τέτοια ώστε $\forall x > x_0$ να ισχύει

$$c_1 g(x) \leq f(x) \leq c_2 g(x)$$



Παραδείγματα

- $(x+1)^2 = \Theta(3x^2)$
- $\frac{x^2+5x+7}{5x^3+7x+2} = \Theta\left(\frac{1}{x}\right)$
- $\sqrt{3+\sqrt{2x}} = \Theta\left(x^{1/4}\right)$
- $\left(1+\frac{3}{x}\right)^x = \Theta(1)$

ΜΙΚΡΟ ΩΜΕΓΑ (ω)

Συμβολίζουμε με $f(x) = \omega(g(x))$ εάν υπάρχουν $c > 0$ και x_0 τέτοια ώστε $\forall x > x_0$ να ισχύει $cg(x) < f(x)$

Εναλλακτικός ορισμός

Συμβολίζουμε με $f(x) = \omega(g(x))$ εάν

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$$

Παραδείγματα

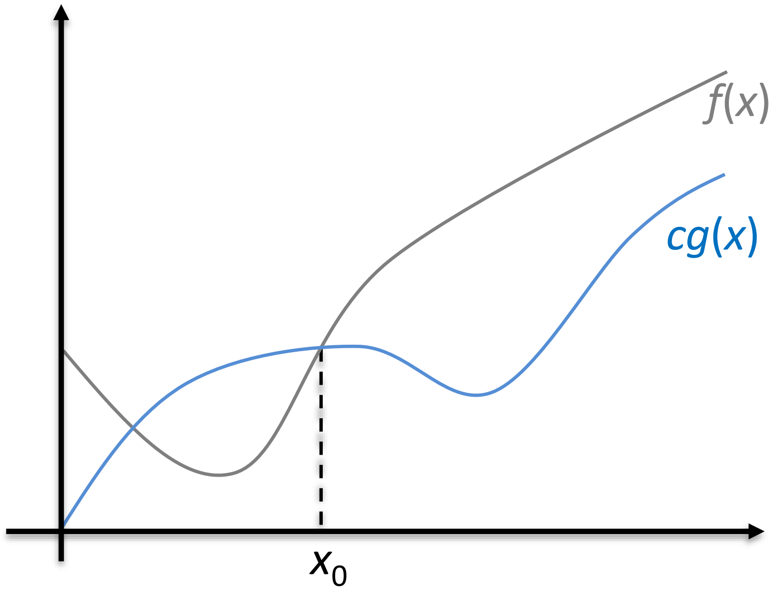
- $x^3 = \omega(x^2)$
- $5x + 6 = \omega(1)$
- $x^{0.02} = \omega(23 \ln(x))$

ΜΕΓΑΛΟ ΩΜΕΓΑ (Ω)

Συμβολίζουμε με $f(x) = \Omega(g(x))$ εάν υπάρχουν $c > 0$ και x_0 τέτοια ώστε $\forall x > x_0$ να ισχύει $cg(x) \leq f(x)$

Παραδείγματα

- $x^3 = \Omega(x^2)$
- $4x^3 + 5 = \Omega(x)$



ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1

Συμβολίζουμε με $f(x) = \mathcal{O}(g(x))$ εάν υπάρχουν $c > 0$ και x_0 τέτοια ώστε
$f(x) \leq cg(x), \forall x > x_0$

Δείξτε ότι $x = \mathcal{O}(2^x)$.

Λύση

Αρκεί να βρούμε $c > 0$ και x_0 έτσι ώστε να ισχύει $x \leq c2^x, \forall x > x_0$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = 2^x - x$. Η συνάρτηση είναι συνεχής και παραγωγίσιμη με $h'(x) = 2^x \ln 2 - 1$ που είναι θετική για κάθε $x \geq 1$.

Άρα η h είναι γνησίως αύξουσα για $x \geq 1$, άρα $h(x) > h(1) = 1$ άρα $2^x - x > 1 > 0$ άρα $2^x \geq x$, οπότε επιλέγουμε $c = 1$ και $x_0 = 1$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2

Δείξτε ότι $2x^3 + 100x^2 + x = \mathcal{O}(x^3)$.

Λύση

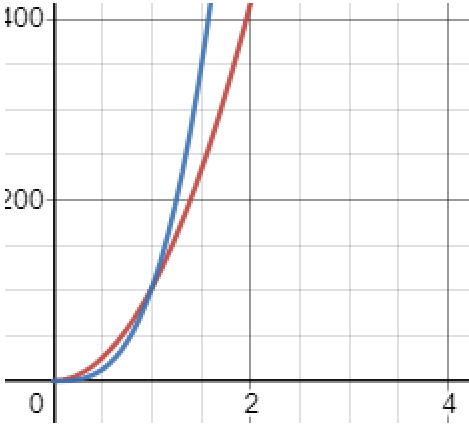
Αρκεί να βρούμε μια θετική σταθερά c και ένα x_0 έτσι ώστε:

$$2x^3 + 100x^2 + x \leq cx^3$$

Έχουμε όμως (για $x \geq 1$):

$$2x^3 + 100x^2 + x \leq 2x^3 + 100x^3 + x^3 = 103x^3$$

Άρα επιλέγουμε $c = 103$ και $x_0 = 1$.



ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3

Δείξτε ότι $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = \mathcal{O}(x^n)$.

Λύση

Έχουμε:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \leq$$
$$|a_n| x^n + |a_{n-1}| x^{n-1} + \cdots + |a_1| x + |a_0| \leq$$
$$|a_n| x^n + |a_{n-1}| x^n + \cdots + |a_1| x^n + |a_0| x^n =$$
$$(|a_n| + |a_{n-1}| + \cdots + |a_1| + |a_0|) x^n$$

για $x \geq 1$. Επομένως επιλέγουμε:

$$c = |a_n| + |a_{n-1}| + \cdots + |a_1| + |a_0| \text{ και } x_0 = 1.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4

Δείξτε ότι $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = \Omega(x^n)$ για $a_i > 0$.

Λύση

Έχουμε, για $x \geq 1$:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \geq a_n x^n$$

Άρα επιλέγουμε $c = a_n$ και $x_0 = 1$.

Δείξαμε ότι το πολυώνυμο $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ για $a_i > 0$ είναι $\mathcal{O}(x^n)$ και $\Omega(x^n)$.
Αυτό σημαίνει ότι είναι $\Theta(x^n)$.

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

Μεταβατικότητα

- Αν $f = \mathcal{O}(g)$ και $g = \mathcal{O}(h)$ τότε $f = \mathcal{O}(h)$
- Αν $f = \Omega(g)$ και $g = \Omega(h)$ τότε $f = \Omega(h)$
- Αν $f = \Theta(g)$ και $g = \Theta(h)$ τότε $f = \Theta(h)$

Αθροίσματα

- Αν $f = \mathcal{O}(h)$ και $g = \mathcal{O}(h)$ τότε $f + g = \mathcal{O}(h)$
- Αν $f = \Omega(h)$ και $g = \Omega(h)$ τότε $f + g = \Omega(h)$
- Αν $f = \Theta(h)$ και $g = \Theta(h)$ τότε $f + g = \Theta(h)$

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

Συμμετρία

- $f = \Theta(g)$ αν και μόνο αν $g = \Theta(f)$
- $f = \mathcal{O}(g)$ αν και μόνο αν $g = \Omega(f)$

Επιπλέον ιδιότητες

- Εάν $f = \mathcal{O}(g)$ και $a > 0$ τότε $af = \mathcal{O}(g)$
- Εάν $f_1 = \mathcal{O}(g_1)$ και $f_2 = \mathcal{O}(g_2)$ τότε
    - $f_1 f_2 = \mathcal{O}(g_1 g_2)$
    - $f_1 + f_2 = \mathcal{O}(\max\{g_1, g_2\})$

ΚΛΑΣΕΙΣ ΠΟΛΥΠΛΟΚΟΤΗΤΑΣ

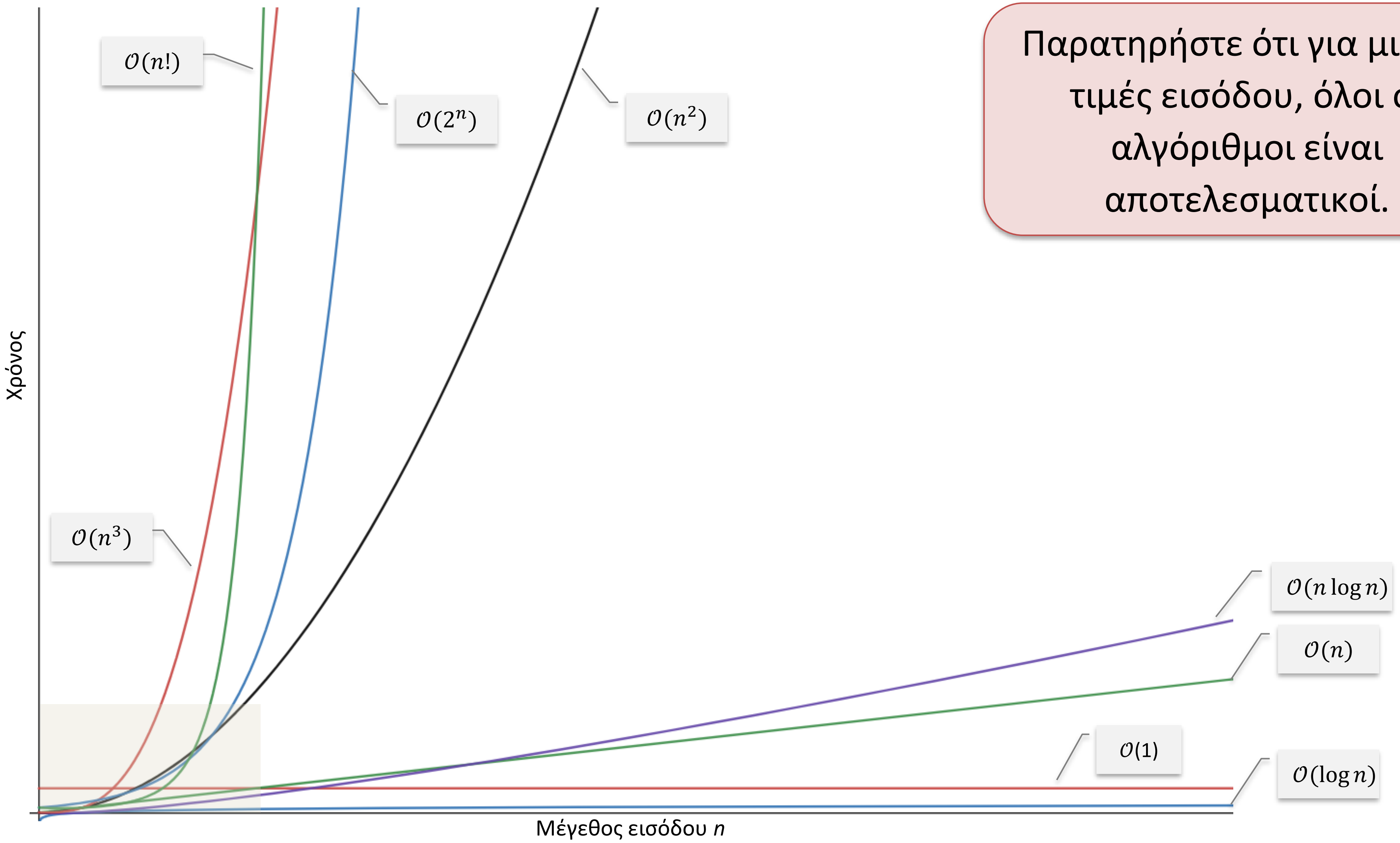
- *Βασικές κλάσεις πολυπλοκότητας*
- *Χρόνοι εκτέλεσης*
- *Ρυθμός αύξησης*

ΒΑΣΙΚΕΣ ΚΛΑΣΕΙΣ

- Σταθερή: $\mathcal{O}(1)$
- Λογαριθμική: $\mathcal{O}(\log n)$
- Γραμμική: $\mathcal{O}(n)$
- n-log-n ή γραμμολογαριθμική: $\mathcal{O}(n \log n)$
- Τετραγωνική: $\mathcal{O}(n^2)$
- Κυβική: $\mathcal{O}(n^3)$
- Εκθετική: $\mathcal{O}(2^n)$
- Παραγοντική: $\mathcal{O}(n!)$

Συνήθως, το μέγεθος του προβλήματος εκφράζεται με την ανεξάρτητη μεταβλητή n αντί για x.

ΓΡΑΦΙΚΗ ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΗ



Παρατηρήστε ότι για μικρές τιμές εισόδου, όλοι οι αλγόριθμοι είναι αποτελεσματικοί.

ΧΡΟΝΟΙ ΕΚΤΕΛΕΣΗΣ

Οι χρόνοι εκτέλεσης διαφόρων αλγορίθμων σε έναν επεξεργαστή που εκτελεί **ένα εκατομμύριο εντολές το δευτερόλεπτο**. Όταν ο χρόνος εκτέλεσης υπερβαίνει το 10^{25} sec, θεωρούμε ότι χρειάζεται πάρα πολύ (very long).

	n	$n \log_2 n$	n^2	n^3	1.5^n	2^n	$n!$
$n = 10$	< 1 sec	< 1 sec	< 1 sec	< 1 sec	< 1 sec	< 1 sec	4 sec
$n = 30$	< 1 sec	< 1 sec	< 1 sec	< 1 sec	< 1 sec	18 min	10^{25} years
$n = 50$	< 1 sec	< 1 sec	< 1 sec	< 1 sec	11 min	36 years	very long
$n = 100$	< 1 sec	< 1 sec	< 1 sec	1 sec	12,892 years	10^{17} years	very long
$n = 1{,}000$	< 1 sec	< 1 sec	1 sec	18 min	very long	very long	very long
$n = 10{,}000$	< 1 sec	< 1 sec	2 min	12 days	very long	very long	very long
$n = 100{,}000$	< 1 sec	2 sec	3 hours	32 years	very long	very long	very long
$n = 1{,}000{,}000$	1 sec	20 sec	12 days	31,710 years	very long	very long	very long

ΑΠΛΟΙ ΚΑΝΟΝΕΣ

- Οι πολλαπλασιαστικές σταθερές παραλείπονται
  - Το $5n^2$ γίνεται n^2, το $1000n$ γίνεται n.
- Εάν $a > b$, τότε το n^a επικρατεί του n^b
  - Το n^3 επικρατεί του n^2.
- Ένας εκθετικός όρος επικρατεί έναντι ενός πολυωνύμου
  - Το 3^n επικρατεί έναντι του n^{100} (επικρατεί ακόμη και έναντι του 2^n).
- Ένας πολυωνυμικός όρος επικρατεί έναντι ενός λογαριθμικού
  - Το n επικρατεί έναντι του $(\log n)^3$.
  - Το n^2 επικρατεί έναντι του $n \log n$.

ΧΡΟΝΟΙ ΕΚΤΕΛΕΣΗΣ ΚΑΙ ΠΟΛΥΠΛΟΚΟΤΗΤΑ

$T(n)$ – Χρόνος εκτέλεσης	$\mathcal{O}(n)$ - Πολυπλοκότητα
$n^2 + 100n + 1$	$\mathcal{O}(n^2)$
$0.0000005n^3 + 1000000n^2$	$\mathcal{O}(n^3)$
$100n$	$\mathcal{O}(n)$
2^{3n}	$\mathcal{O}(8^n)$
2^{3+n}	$\mathcal{O}(2^n)$
$2 \cdot 3^n$	$\mathcal{O}(3^n)$
$30 \log_{20}(23n)$	$\mathcal{O}(\log n)$
$n^2 \log n + n \log(n^2)$	$\mathcal{O}(n^2 \log n)$
$3\log n + 1000\log(\log n)$	$\mathcal{O}(\log n)$
$5n^{1.5} + n^{1.75}$	$\mathcal{O}(n^{1.75})$

ΡΥΘΜΟΣ ΑΥΞΗΣΗΣ

Για τη σύγκριση της τάξης αύξησης μεγέθους δυο συναρτήσεων μπορούμε να υπολογίσουμε το όριο

$$\lim_{n\to\infty}\frac{t(n)}{g(n)}=\begin{cases}0, & \eta\ t(n)\ \varepsilon\chi\varepsilon\iota\ \mu\iota\kappa\rho\acute{o}\tau\varepsilon\rho\eta\ \tau\alpha\sigma\eta\ \alpha\acute{\upsilon}\xi\eta\sigma\eta\varsigma\ \alpha\pi\acute{o}\ \tau\eta\ g(n)\\ c>0, & \eta\ t(n)\ \varepsilon\chi\varepsilon\iota\ \tau\eta\nu\ \iota\delta\iota\alpha\ \tau\alpha\sigma\eta\ \alpha\acute{\upsilon}\xi\eta\sigma\eta\varsigma\ \mu\varepsilon\ \tau\eta\ g(n)\\ \infty & \eta\ t(n)\ \varepsilon\chi\varepsilon\iota\ \mu\varepsilon\gamma\alpha\lambda\acute{\upsilon}\tau\varepsilon\rho\eta\ \tau\alpha\sigma\eta\ \alpha\acute{\upsilon}\xi\eta\sigma\eta\varsigma\ \alpha\pi\acute{o}\ \tau\eta\ g(n)\end{cases}$$

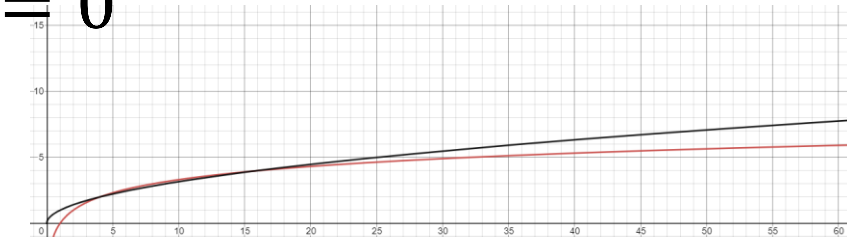
$\boxed{t(n)\in\mathcal{O}(g(n))}$

$\boxed{t(n)\in\Theta(g(n))}$

$\boxed{t(n)\in\Omega(g(n))}$

Παράδειγμα

- Συγκρίνετε το ρυθμό αύξησης των $\lg n$ και $\sqrt{n}$.
    - Έχουμε $\lim_{n\to\infty}\frac{\lg n}{\sqrt{n}}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n\ln 2}}{\frac{1}{2}n^{-\frac{1}{2}}}=2\ln 2\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{n}=0$

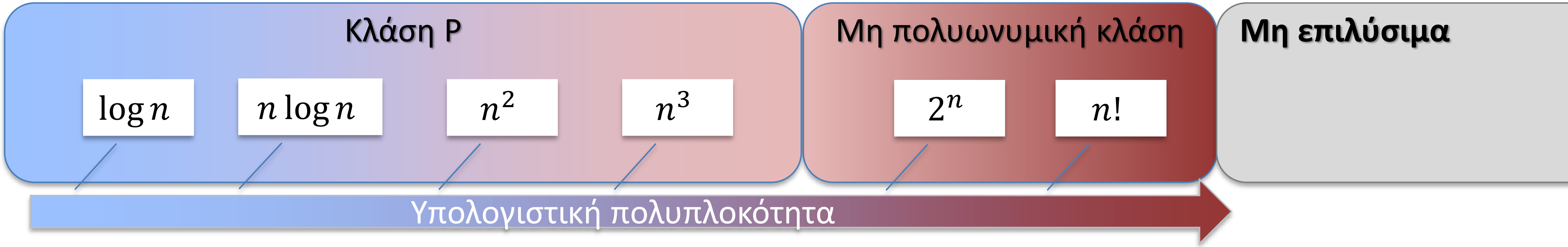


ΚΛΑΣΕΙΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΗΣ ΠΟΛΥΠΛΟΚΟΤΗΤΑΣ

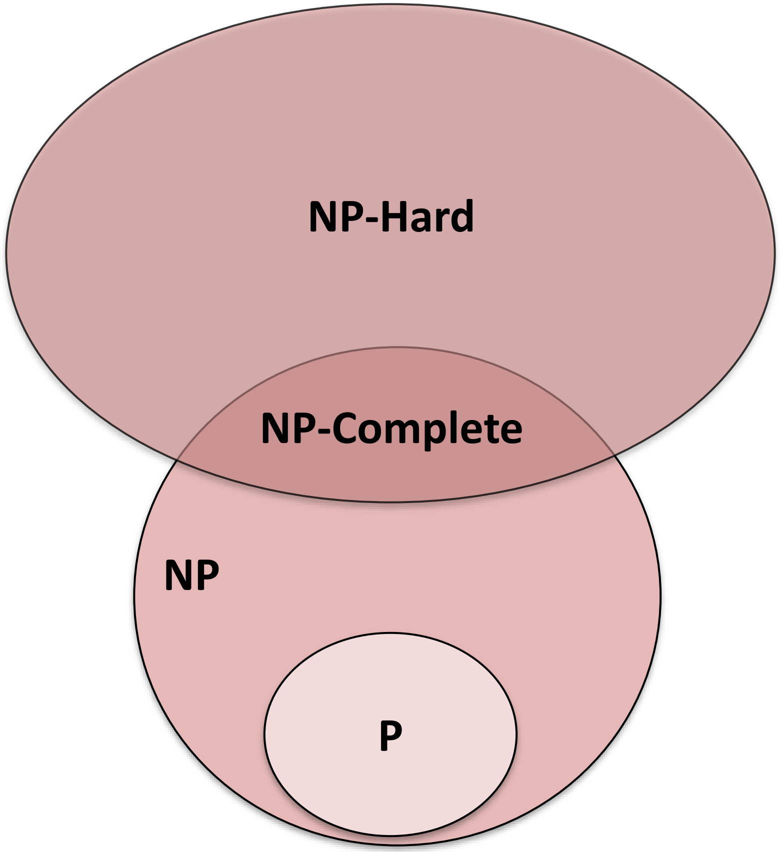
- Κλάση P
  - Το σύνολο των προβλημάτων που μπορούν να επιλυθούν από **ντετερμινιστικούς** αλγορίθμους σε **πολυωνυμικό** χρόνο
  - P: Polynomial

- Κλάση NP (P⊆NP)
  - Το σύνολο των προβλημάτων που μπορούν να επιλυθούν από **μη ντετερμινιστικούς** αλγορίθμους σε **πολυωνυμικό** χρόνο
  - Μια υποψήφια λύση μπορεί να ελεγχθεί σε πολυωνυμικό χρόνο
  - NP: Nondeterministic Polynomial
  - Ισχύει NP⊆P, δηλαδή P=NP?
    - https://www.claymath.org/library/monographs/MPPc.pdf

- NP-Complete (NP-Πλήρες) προβλήματα
  - Ανήκει στην κλάση NP
  - Όλα τα υπόλοιπα προβλήματα της κλάσης NP ανάγονται πολυωνυμικά σε αυτό
  - https://en.wikipedia.org/wiki/List_of_NP-complete_problems



ΚΛΑΣΕΙΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΗΣ ΠΟΛΥΠΛΟΚΟΤΗΤΑΣ



ΑΣΚΗΣΗ

Έστω δύο αλγόριθμοι Α και Β με χρόνο εκτέλεσης $\boldsymbol{T_A(n) = 0.1n^2 logn}$ ms και $\boldsymbol{T_B(n) = 2.5n^2}$ ms. Ποιος αλγόριθμος είναι πιο αποδοτικός; Βρείτε το $\boldsymbol{n_0}$ όπου για κάθε $\boldsymbol{n > n_0}$ ο αλγόριθμος που επιλέξατε είναι πιο αποδοτικός από τον άλλο.

ΑΣΚΗΣΗ

Δίνεται ο χρόνος εκτέλεσης ($T(n)$) οκτώ αλγορίθμων. Κατατάξτε τους σε αύξουσα σειρά ως προς την πολυπλοκότητά τους (πρώτα αυτός που έχει την μικρότερη πολυπλοκότητα).

Αλγόριθμος	Πολυπλοκότητα
1	$n\log^2 n$
2	n^3
3	$n^2 \log n$
4	8^n
5	n^2
6	$n^2/2$
7	$n \log n$
8	2^n

Κωνσταντίνος Γιαννουτάκης

Επίκ. Καθηγητής

kgiannou@uom.edu.gr

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ