ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ

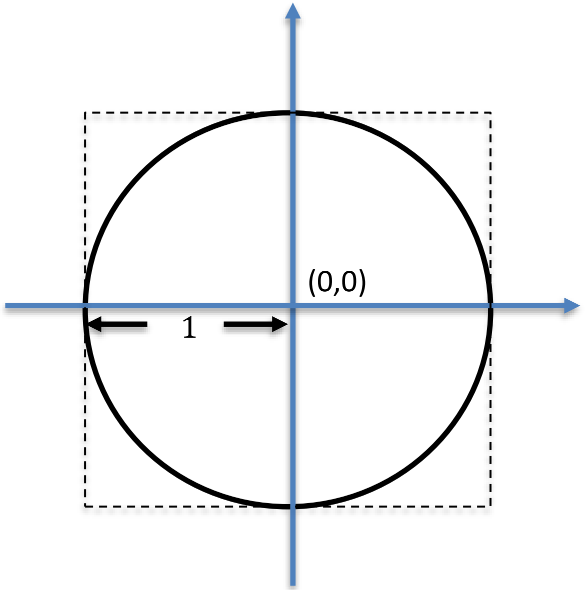
ΤΜΗΜΑ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΗΣ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

ΑΝΑΛΥΣΗ ΑΛΓΟΡΙΘΜΩΝ

Αναδρομικές Σχέσεις

Κωνσταντίνος Γιαννουτάκης
Επίκουρος Καθηγητής

ΑΣΚΗΣΗ ΠΡΟΗΓΟΥΜΕΝΗΣ ΔΙΑΛΕΞΗΣ



- Αλγόριθμος υπολογισμού του π
  - Στοχαστικός αλγόριθμος (Monte Carlo τεχνική)
- Θεωρούμε ένα κύκλο με κέντρο το (0,0) και ακτίνα 1, καθώς επίσης και ένα εφαπτόμενο τετράγωνο
  - Δημιουργούμε <<τυχαία>> σημεία στο χωρίο που προσδιορίζεται από το τετράγωνο
  - Υπολογίζουμε το πλήθος των σημείων που βρίσκονται μέσα στον κύκλο

$$\frac{\varepsilon\mu\beta\alpha\delta\acute{o}\nu\ \kappa\acute{\upsilon}\kappa\lambda o\upsilon}{\varepsilon\mu\beta\alpha\delta\acute{o}\nu\ \tau\varepsilon\tau\rho\alpha\gamma\acute{\omega}\nu o\upsilon} = \frac{\pi r^2}{4r^2} = \frac{\pi}{4}$$

$$\pi = 4\frac{\varepsilon\mu\beta\alpha\delta\acute{o}\nu\ \kappa\acute{\upsilon}\kappa\lambda o\upsilon}{\varepsilon\mu\beta\alpha\delta\acute{o}\nu\ \tau\varepsilon\tau\rho\alpha\gamma\acute{\omega}\nu o\upsilon} \approx 4\frac{\pi\lambda\eta\theta o\varsigma\ \sigma\eta\mu\varepsilon\iota\omega\nu\ \sigma\tau o\nu\ \kappa\acute{\upsilon}\kappa\lambda o}{\pi\lambda\eta\theta o\varsigma\ \sigma\eta\mu\varepsilon\iota\omega\nu\ \sigma\tau o\ \tau\varepsilon\tau\rho\alpha\gamma\omega\nu o}$$

- Να γραφεί σε γλώσσα προγραμματισμού C, ο κώδικας για τον υπολογισμό του π με την παραπάνω διαδικασία.
  - Δημιουργία <<τυχαίων>> αριθμών με την rand() - **stdlib.h**
    - <<Τυχαίοι>> αριθμοί στο διάστημα [0,RAND_MAX]

ΛΥΣΗ

```c
#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>

int main() {

 int i,count,n;
 double x,y,pi;

 printf("Enter number of points: ");
 scanf("%d", &n);

 count = 0;
 for(i = 0; i < n; i++) {
     x=(double)2*rand()/RAND_MAX-1;
     y=(double)2*rand()/RAND_MAX-1;
     if(x*x+y*y<=1) count++;
 }
 pi = (double) 4*count/n;
 printf("Approximate value of PI = %f", pi);
}
```

Μπορούμε να αυξήσουμε την «τυχαιότητα» της rand() δίνοντας μια παράμετρο για την «αρχικοποίηση» (seed) των τυχαίων αριθμών.

Χρησιμοποιούμε την `time()` (`time.h`) που επιστρέφει τον χρόνο (σε δευτερόλεπτα) από τις 1/1/1970 (Unix timestamp ή epoch time) έως τώρα: `srand(time(0))`

ΣΥΝΟΨΗ ΔΙΑΛΕΞΗΣ

- Αναδρομικές σχέσεις
  - Ορισμοί
  - Επίλυση αναδρομικών σχέσεων
    - Μέθοδος αντικατάστασης
    - Μέθοδος επανάληψης
    - Δένδρο αναδρομής
    - Κύρια μέθοδος

ΑΝΑΔΡΟΜΗ

- *Αναδρομικές Σχέσεις*
- *Μέθοδοι επίλυσης αναδρομικών σχέσεων*

ΑΝΑΔΡΟΜΗ (RECURSION)

- **Αναδρομική συνάρτηση**: μια συνάρτηση που **ορίζεται συναρτήσει του εαυτού της**

- **Αναδρομικό πρόγραμμα**: ένα πρόγραμμα που **καλεί τον εαυτό του**

- Το αναδρομικό πρόγραμμα πρέπει να έχει **οπωσδήποτε** μια **συνθήκη τερματισμού**

ΑΝΑΔΡΟΜΙΚΟΣ ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ

- **Αναδρομικός αλγόριθμος** (recursive algorithm) είναι ένας αλγόριθμος που επιλύει ένα πρόβλημα λύνοντας ένα ή περισσότερα μικρότερα στιγμιότυπα του ίδιου προβλήματος
- Υλοποιούμε αναδρομικούς αλγορίθμους με αναδρομικές συναρτήσεις

```
long int factorial(int n) {
    if (n>=1)
        return n* factorial(n-1);
    else
        return 1;
}
```

ΑΝΑΔΡΟΜΙΚΕΣ ΣΧΕΣΕΙΣ

- **Αναδρομική Σχέση** είναι μια **εξίσωση** ή **ανίσωση** η οποία ορίζει μια συνάρτηση μέσω της τιμής της για κάποιο μικρότερο όρισμα.

- **Παράδειγμα**: Ένας αναδρομικός αλγόριθμος θα μπορούσε να χωρίζει ένα πρόβλημα σε υποπροβλήματα διαφορετικών μεγεθών όπως 2/3 και 1/3. Εάν τα βήματα της διαίρεσης και του συνδυασμού απαιτούν γραμμικό χρόνο ($\mathcal{O}(n)$), τότε από έναν τέτοιο αλγόριθμο θα προέκυπτε η παρακάτω αναδρομική σχέση:

$$T(n) = \begin{cases} \mathcal{O}(1) & \text{εάν } n = 1 \\ T\left(\frac{2n}{3}\right) + T\left(\frac{n}{3}\right) + \mathcal{O}(n) & \text{εάν } n > 1 \end{cases}$$

ΑΝΑΔΡΟΜΙΚΕΣ ΣΧΕΣΕΙΣ

Μέθοδοι επίλυσης αναδρομικών σχέσεων – Εύρεση ασυμπτωτικών φραγμάτων τύπου Θ και $\mathcal{O}$.

- **Μέθοδος Αντικατάστασης (ή μέθοδος εικασίας)**: Εικάζουμε κάποιο φράγμα και αποδεικνύουμε την ορθότητα της εικασίας με τη μέθοδο της μαθηματικής επαγωγής.
- **Μέθοδος Επανάληψης**: Αναλύουμε την αναδρομική σχέση με διαδοχικές αντικαταστάσεις των αναδρομών με μειωμένα ορίσματα.
- **Μέθοδος του Δένδρου Αναδρομής**: Απεικονίζουμε την αναδρομική σχέση με τη μορφή δένδρου, οι κόμβοι του οποίου αντιπροσωπεύουν τα κόστη στα διάφορα επίπεδα της αναδρομής. Η άθροιση των επιμέρους ποσοτήτων (κόστη) γίνεται με τις ιδιότητες των αθροισμάτων.
- **Κύρια Μέθοδος**

ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΗΣ ΑΝΤΙΚΑΤΑΣΤΑΣΗΣ

Προσδιορισμός άνω φράγματος για την αναδρομική σχέση

$$T(n) = \begin{cases} 2, & \alpha\nu\ n = 1 \\ T\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + 7, & \delta\iota\alpha\varphi o\rho\varepsilon\tau\iota\kappa\alpha \end{cases}$$

- Εικάζουμε ότι η λύση είναι $\mathcal{O}(\lg n)$. Θα αποδείξουμε επαγωγικά ότι $T(n) \leq c \lg n$ για $c > 0$ και $n \geq n_0$.
  - Για $n = 1$ έχουμε: $T(1) = 2 > c \lg 1 = 0$ άρα δεν ισχύει
  - Για $n = 2$ έχουμε: $T(2) = T(1) + 7 = 2 + 7 = 9 \leq c \lg 2 \Rightarrow c \geq 9$. Άρα η σχέση ισχύει για $n = 2$.

ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΗΣ ΑΝΤΙΚΑΤΑΣΤΑΣΗΣ

Προσδιορισμός άνω φράγματος για την αναδρομική σχέση

$$T(n) = \begin{cases} 2, & \alpha\nu\ n = 1 \\ T\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + 7, & \delta\iota\alpha\varphi o\rho\varepsilon\tau\iota\kappa\alpha \end{cases}$$

- Επαγωγική Υπόθεση
  - Υποθέτουμε ότι ισχύει η ανίσωση $T(n) \leq c \lg n$ για $n > 2$ όπου $c \geq 9$.
- Επαγωγικό Βήμα
  - Θα αποδείξουμε ότι ισχύει για $m = n + 1$.
  - Έχουμε ότι $m > 3$ άρα $\left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor \geq 2$. Από την επαγωγική υπόθεση, θέτοντας $n = \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor$, έχουμε: $T\left(\left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor\right) \leq c \lg \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor \leq c(\lg m - \lg 2) = c(\lg m - 1)$.
  - Από την αναδρομική σχέση έχουμε: $T(m) = T\left(\left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor\right) + 7 \leq c(\lg m - 1) + 7 = c \lg m - c + 7 \leq c \lg m$ για $c \geq 9$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Προσδιορισμός άνω φράγματος για την αναδρομική σχέση

$$T(n) = \begin{cases} 0, & \alpha\nu\ n = 0 \\ T(n-1) + n, & \delta\iota\alpha\varphi o\rho\varepsilon\tau\iota\kappa\alpha \end{cases}$$

- Εικάζουμε ότι η λύση είναι $\mathcal{O}(n^2)$. Θα αποδείξουμε επαγωγικά ότι $T(n) \leq cn^2$ για $c > 0$ και $n \geq n_0$.
- Για $n_0 = 1$, ισχύει $T(1) = T(0) + 1 = 0 + 1 = 1 \leq c1^2 = c$
- Έστω ότι ισχύει για $n = m$, δηλαδή $T(m) \leq cm^2$
- Θα δείξουμε ότι ισχύει για $n = m + 1$:
    - $T(m+1) = T(m) + m + 1 \leq cm^2 + m + 1 \leq cm^2 + 2cm + c = c(m+1)^2$

ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΗΣ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣ

Προσδιορισμός άνω φράγματος για την αναδρομική σχέση

$$T(n) = \begin{cases} 2, & αν\ n = 1 \\ T\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + 7, & διαφορετικα \end{cases}$$

$$T(n) = T\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + 7 = \left(T\left(\left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor\right) + 7\right) + 7 =$$

$$T\left(\left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor\right) + 2 \cdot 7 = \left(T\left(\left\lfloor \frac{n}{8} \right\rfloor\right) + 7\right) + 2 \cdot 7 = T\left(\left\lfloor \frac{n}{8} \right\rfloor\right) + 3 \cdot 7 = \cdots = T\left(\left\lfloor \frac{n}{2^i} \right\rfloor\right) + i \cdot 7$$

Η αναδρομή σταματάει όταν $\left\lfloor \frac{n}{2^i} \right\rfloor = 1 \Rightarrow 2^i \leq n \Rightarrow i \leq \lg n.$

Τότε ισχύει: $T(n) = T\left(\left\lfloor \frac{n}{2^i} \right\rfloor\right) + i \cdot 7 \leq T(1) + 7 \lg n = 2 + 7 \lg n$

$= \mathcal{O}(\lg n).$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Προσδιορισμός φράγματος για την αναδρομική σχέση

$$T(n) = \begin{cases} 1, & \alpha\nu\ n = 1 \\ 4T\left(\frac{n}{2}\right) + \frac{n^2}{\lg n}, & \delta\iota\alpha\varphi o\rho\varepsilon\tau\iota\kappa\alpha \end{cases}$$

- $T(n) = 4T\left(\frac{n}{2}\right) + \frac{n^2}{\lg n} = 4\left(4T\left(\frac{n}{4}\right) + \frac{\left(\frac{n}{2}\right)^2}{\lg\frac{n}{2}}\right) + \frac{n^2}{\lg n} = 4^2T\left(\frac{n}{4}\right) + \frac{n^2}{\lg(n)-1} + \frac{n^2}{\lg n} = 4^2\left(4T\left(\frac{n}{8}\right) + \frac{\left(\frac{n}{4}\right)^2}{\lg\frac{n}{4}}\right) + \frac{n^2}{\lg(n)-1} + \frac{n^2}{\lg n} = 4^3T\left(\frac{n}{8}\right) + \frac{n^2}{\lg(n)-2} + \frac{n^2}{\lg(n)-1} + \frac{n^2}{\lg n} = \cdots = 4^iT\left(\frac{n}{2^i}\right) + n^2\left(\frac{1}{\lg n} + \frac{1}{\lg(n)-1} + \cdots + \frac{1}{\lg(n)-(i-1)}\right)$
- Η αναδρομή σταματάει όταν $\frac{n}{2^i} = 1$ δηλαδή όταν $i = \lg n$
- Τότε $T(n) = n^2 + n^2\left(\frac{1}{\lg n} + \frac{1}{\lg(n)-1} + \cdots + 1\right) = n^2 + n^2 H_{\lg n} \cong n^2 + n^2 \ln\lg n = \mathcal{O}(n^2 \ln\lg n)$

N-οστός αρμονικός αριθμός

$$H_N = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{N} \approx \ln N$$

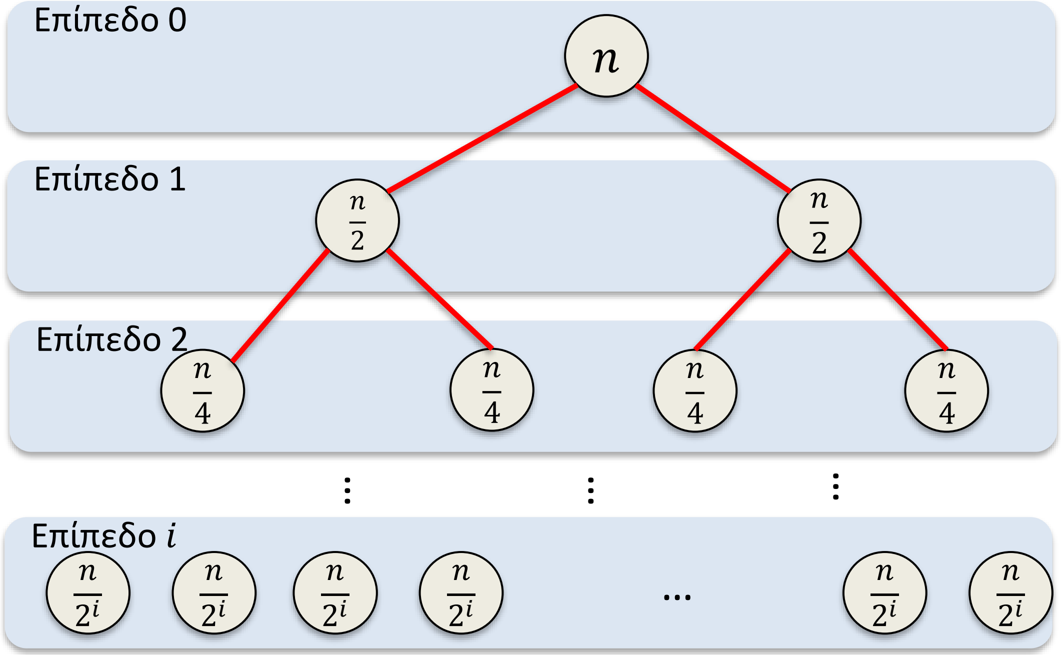
ΔΕΝΔΡΟ ΑΝΑΔΡΟΜΗΣ

Προσδιορισμός άνω φράγματος για την αναδρομική σχέση

$$T(n) = \begin{cases} 2, & \alpha\nu\ n = 1 \\ 2T\left(\frac{n}{2}\right) + 7, & \delta\iota\alpha\varphi o\rho\varepsilon\tau\iota\kappa\alpha \end{cases}$$

Κατασκευάζουμε το δένδρο αναδρομής

- Η αναδρομή σταματάει όταν $i = \lg n$
- Το δένδρο έχει $\lg n + 1$ επίπεδα
- Το *k*-οστό επίπεδο αντιστοιχεί σε 2^k αναδρομικές κλήσεις όπου κάθε μία απαιτεί 7 πράξεις
- Συνολικό κόστος: $7(1 + 2 + 4 + \cdots + 2^i) = 7\frac{2^{i+1}-1}{2-1} = 7(2 \cdot 2^{\lg n} - 1) = 14n - 7 = \mathcal{O}(n)$



ΚΥΡΙΑ ΜΕΘΟΔΟΣ (MASTER METHOD)

- Η **κύρια μέθοδος** είναι ένα σημαντικό εργαλείο για την επίλυση μιας μεγάλης κατηγορίας αναδρομικών σχέσεων

- Έστω $T(n): \mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathbb{R}^*$ μια αναδρομική σχέση της μορφής:

$$T(n) = aT\left(\frac{n}{b}\right) + f(n)$$

όπου

- $a \geq 1$ και $b \geq 1$ σταθερές
- $\frac{n}{b}$ είναι το $\left\lfloor\frac{n}{b}\right\rfloor$ ή το $\left\lceil\frac{n}{b}\right\rceil$
- $f(n): \mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathbb{R}^*$ μια θετική συνάρτηση

ΚΥΡΙΑ ΜΕΘΟΔΟΣ (MASTER METHOD)

- Εάν ο χρόνος εκτέλεσης $T(n)$ ενός αλγορίθμου για την επίλυση ενός προβλήματος Π μεγέθους $\Theta(n)$ δίνεται από την αναδρομική σχέση
$$T(n) = aT\left(\frac{n}{b}\right) + f(n)$$

τότε

Το $T(n)$ έχει ασυμπτωτικά φράγματα:

1. Αν $\boldsymbol{f(n) = O(n^{\log_b \alpha - \varepsilon})}$ για κάποια σταθερά $\varepsilon > 0$, τότε ισχύει $\boldsymbol{T(n) = \Theta(n^{log_b \alpha})}$
2. Αν $\boldsymbol{f(n) = \Theta(n^{\log_b \alpha})}$, τότε ισχύει $\boldsymbol{T(n) = \Theta(n^{\log_b \alpha} \log n)}$
3. Αν $\boldsymbol{f(n) = \Omega(n^{\log_b \alpha + \varepsilon})}$ για κάποια σταθερά $\varepsilon > 0$, και αν $\boldsymbol{af\left(\frac{n}{b}\right) \leq cf(n)}$ για κάποια σταθερά $c < 1$, **και για όλα τα επαρκώς μεγάλα $\boldsymbol{n}$**, τότε ισχύει $\boldsymbol{T(n) = \Theta(f(n))}$

ΚΥΡΙΑ ΜΕΘΟΔΟΣ (MASTER METHOD)

Η λύση της αναδρομικής σχέσης καθορίζεται από τη μεγαλύτερη από τις δύο συναρτήσεις

– Άρα **συγκρίνουμε τη συνάρτηση $\boldsymbol{f(n)}$ και τη συνάρτηση $\boldsymbol{n^{\log_b \alpha}}$**

1. Αν η μεγαλύτερη είναι η $n^{\log_b \alpha}$ (**Περίπτωση 1**) τότε η λύση είναι η $\boldsymbol{T(n) = \Theta(n^{\log_b \alpha})}$
2. Αν οι δύο συναρτήσεις είναι ισομεγέθεις (**Περίπτωση 2**) τότε πολλαπλασιάζουμε με ένα λογαριθμικό παράγοντα και η λύση είναι η $\boldsymbol{T(n) = \Theta\left(n^{\log_b \alpha} \log n\right) = \Theta(f(n) \log n)}$
3. Αν η μεγαλύτερη είναι η $f(n)$ (**Περίπτωση 3**) τότε η λύση είναι η $\boldsymbol{T(n) = \Theta(f(n))}$

ΚΥΡΙΑ ΜΕΘΟΔΟΣ (MASTER METHOD)

Τεχνικά ζητήματα

1. Στην *Περίπτωση 1* δεν αρκεί η $f(n)$ να είναι μικρότερη από $n^{\log_b \alpha}$ αλλά θα πρέπει να είναι **πολυωνυμικά μικρότερη** ➔ η $f(n)$ θα πρέπει να είναι ασυμπτωτικά μικρότερη της $n^{\log_b \alpha}$ κατά ένα παράγοντα n^{ε} για κάποια σταθερά $\varepsilon > 0$.
2. Στην *Περίπτωση 3* δεν αρκεί η $f(n)$ να είναι μεγαλύτερη από $n^{\log_b \alpha}$ αλλά θα πρέπει να είναι **πολυωνυμικά μεγαλύτερη** και επιπλέον να ικανοποιεί τη **συνθήκη «ομαλότητας»** $af(n/b) \leq cf(n)$ με $c < 1$
   – Η συνθήκη αυτή ικανοποιείται στις περισσότερες πολυωνυμικά φραγμένες συναρτήσεις που θα συναντήσουμε.

ΚΥΡΙΑ ΜΕΘΟΔΟΣ (MASTER METHOD)

Τεχνικά ζητήματα

Οι 3 Περιπτώσεις δεν καλύπτουν όλες τις δυνατότητες για την $f(n)$.

- Μεταξύ των περιπτώσεων 1 και 2 υπάρχει ένα κενό στην περίπτωση που η $f(n)$ είναι μικρότερη από την $n^{\log_b \alpha}$ αλλά όχι πολυωνυμικά μικρότερη
- Μεταξύ των περιπτώσεων 2 και 3 υπάρχει ένα κενό στην περίπτωση που η $f(n)$ είναι μεγαλύτερη από την $n^{\log_b \alpha}$ αλλά όχι πολυωνυμικά μεγαλύτερη ή δεν ισχύει η συνθήκη ομαλότητας.

Τότε *η κύρια μέθοδος δε μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την επίλυση της αναδρομικής σχέσης*.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1

- Θεωρούμε την αναδρομική σχέση

$$\boldsymbol{T(n) = 9T\left(\frac{n}{3}\right) + n}$$

- Έχουμε a=9, b=3 και $f(n) = n$. Επομένως $n^{\log_b \alpha}$ = $n^{\log_3 9} = n^2$
  - Εφόσον $f(n) \leq n^2$ σκεφτόμαστε την **Περίπτωση 1**
- Δεδομένου ότι $f(n) = \mathcal{O}(n^{\log_3 9-\varepsilon})$, όπου $\varepsilon = 1$, μπορούμε να εφαρμόσουμε την Περίπτωση 1.
  - $n^{\log_3 9-\varepsilon} = n^{\log_3 9-1} = n^{2-1} = n = f(n)$, όπου $\log_3 9$=2
- $\boldsymbol{T(n) = \Theta\left(n^{log_b \alpha}\right) = \Theta\left(n^2\right)}$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2

- Θεωρούμε την αναδρομική σχέση

$$\boldsymbol{T(n) = T\left(\frac{2n}{3}\right) + 1}$$

- Έχουμε a=1, b=3/2 και $f(n) = 1$. Επομένως, $n^{\log_b \alpha}$ = $n^{\log_{3/2} 1} = n^0 = 1$
  - Εφόσον $f(n) = n^{\log_b \alpha}$ σκεφτόμαστε την **Περίπτωση 2**
- Δεδομένου ότι $f(n) = \Theta(n^{\log_b \alpha}) = \Theta(1)$, μπορούμε να εφαρμόσουμε την Περίπτωση 2.
- $\mathbf{T(n)} = \boldsymbol{\Theta\left(n^{\log_b \alpha} \log n\right) = \Theta(\log n)}$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3

- Θεωρούμε την αναδρομική σχέση

$$\boldsymbol{T(n) = 3T\left(\frac{n}{4}\right) + n}$$

- Έχουμε a=3, b=4 και $f(n) = n$. Επομένως, $n^{\log_b \alpha} = n^{\log_4 3} = n^{0.793}$
  - Εφόσον $f(n) > n^{\log_b \alpha}$ σκεφτόμαστε την **Περίπτωση 3**
- Δεδομένου ότι $f(n) = \Omega(n^{\log_4 3+\varepsilon})$, όπου $\varepsilon \approx 0.2$, ισχύει η Περίπτωση 3 υπό την προϋπόθεση ότι ισχύει η συνθήκη ομαλότητας $af\left(\frac{n}{b}\right) = 3\left(\frac{n}{4}\right) \leq \left(\frac{3}{4}\right)n = cf(n)$ για $c = 3/4$
- $\boldsymbol{T(n) = \Theta(n)}$

ΑΣΚΗΣΗ

Προσπαθήστε να βρείτε τα φράγματα των ακόλουθων αναδρομικών σχέσεων:

- $\boldsymbol{T(n) = T\left(\frac{n}{4}\right) + \sqrt{n}}$
- $\boldsymbol{T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + n}$

Κωνσταντίνος Γιαννουτάκης

Επίκ. Καθηγητής

kgiannou@uom.edu.gr

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ