ΤΜΗΜΑ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΗΣ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

ΑΝΑΛΥΣΗ ΑΛΓΟΡΙΘΜΩΝ

Εισαγωγή στη θεωρία γράφων

Κωνσταντίνος Γιαννουτάκης
Επίκουρος Καθηγητής

ΣΥΝΟΨΗ ΔΙΑΛΕΞΗΣ

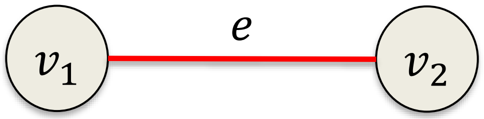
- Εισαγωγή
- Ισομορφισμοί Γράφων
- Επίπεδοι Γράφοι
- Αναπαράσταση Γράφων

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

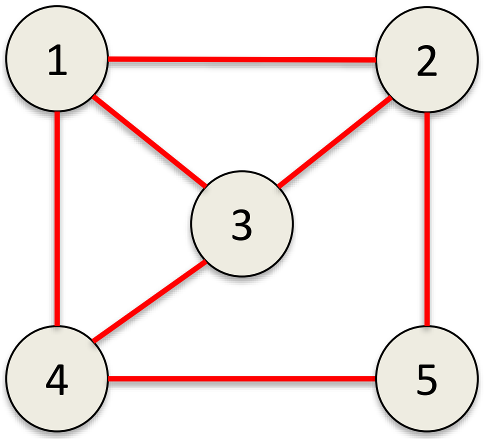
- *Ορισμοί*
- *Παραδείγματα*

ΓΡΑΦΟΙ

- Ένας **γράφος** (graph) G είναι μία αφηρημένη αναπαράσταση ενός συνόλου στοιχείων, τα οποία συνδέονται μεταξύ τους.
- Αποτελείται από 2 σύνολα $G = (V, E)$
  - V: Σύνολο κορυφών (ή κόμβων) – vertices
  - E: Σύνολο ακμών – edges
- Κάθε ακμή e ($e \in E$), συνδέει (ή εφάπτεται σε) δύο κόμβους v_1 και v_2 ($v_1, v_2 \in V$).
  - Μια τέτοια ακμή συμβολίζεται με $e = (v_1, v_2)$



ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ



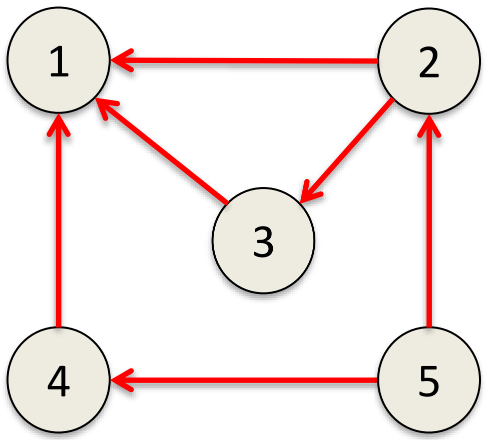
$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\} = \{1,2,3,4,5\}$
$E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7\} = \big\{\{1,2\}, \{1,3\}, \{1,4\}, \{2,3\}, \{2,5\}, \{3,4\}, \{4,5\}\big\}$

Πλήθος κόμβων: $|V| = n = 5$
Πλήθος ακμών: $|E| = m = 7$

ΚΑΤΕΥΘΥΝΟΜΕΝΟΙ (DIRECTED) ΓΡΑΦΟΙ

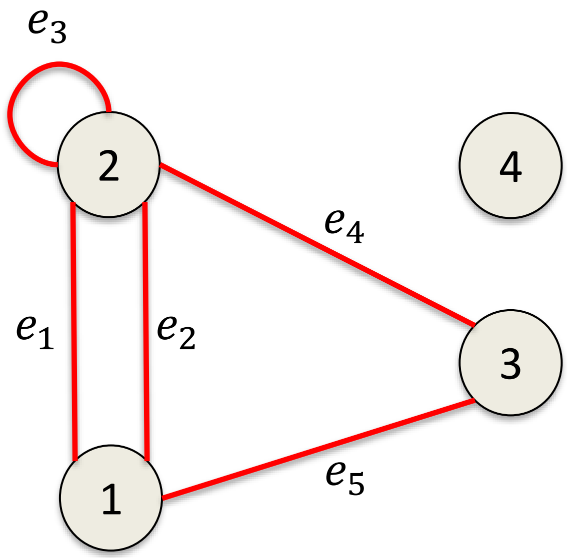
- Κάθε ακμή $e \in E$ σχετίζεται με ένα διατεταγμένο σύνολο κορυφών v_1 και v_2.
  - Μια τέτοια ακμή συμβολίζεται με $e = (v_1, v_2)$ και συμβολίζει μια ακμή από τον κόμβο v_1 προς τον κόμβο v_2.

$$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\} = \{1,2,3,4,5\}$$
$$E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\} = \big\{\{2,1\}, \{3,1\}, \{4,1\}, \{2,3\}, \{5,2\}, \{5,4\}\big\}$$



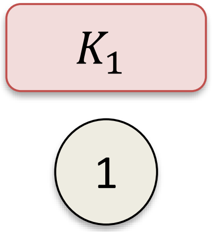
ΟΡΙΣΜΟΙ

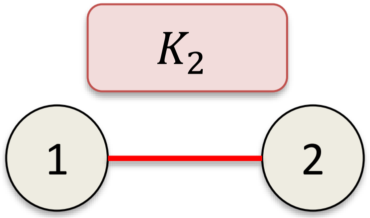
- Εάν σε έναν μη κατευθυνόμενο γράφο υπάρχουν περισσότερες από μια ακμές που συνδέουν δύο κορυφές, τότε οι ακμές ονομάζονται **παράλληλες**.
- Μια ακμή που συνδέει ένα κόμβο με τον εαυτό του, δηλαδή $e_3 = (v_2, v_2)$ ονομάζεται **ανακύκλωση**.
- Ένας μη κατευθυνόμενος γράφος χωρίς ανακυκλώσεις και παράλληλες ακμές ονομάζεται **απλός γράφος**.
- Μια κορυφή στην οποία δεν εφάπτεται καμία ακμή, καλείται **μεμονωμένη κορυφή**.

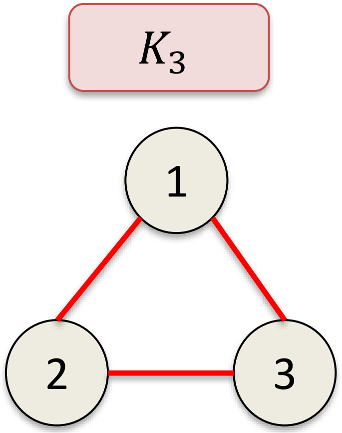


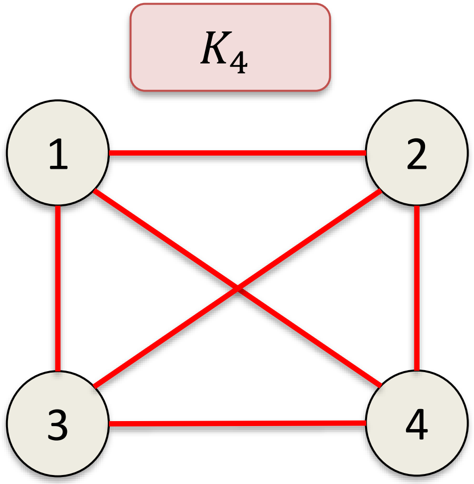
ΟΡΙΣΜΟΙ

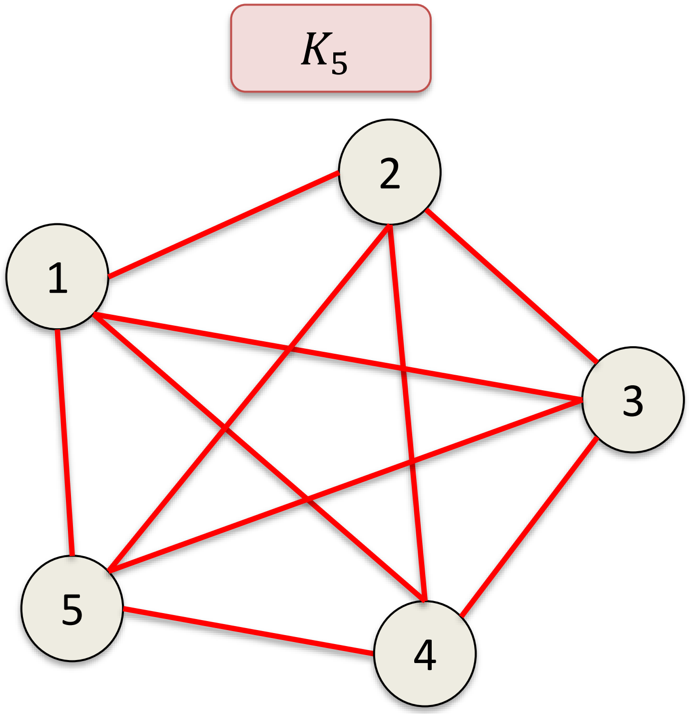
- Ένας γράφος G με n κόμβους, ονομάζεται **πλήρης**, εάν είναι απλός και για κάθε ζεύγος διακριτών κόμβων $v_1, v_2 \in V$, υπάρχει μια ακμή στο E με $e = (v_1, v_2)$. Ο γράφος αυτός συμβολίζεται με K_n.





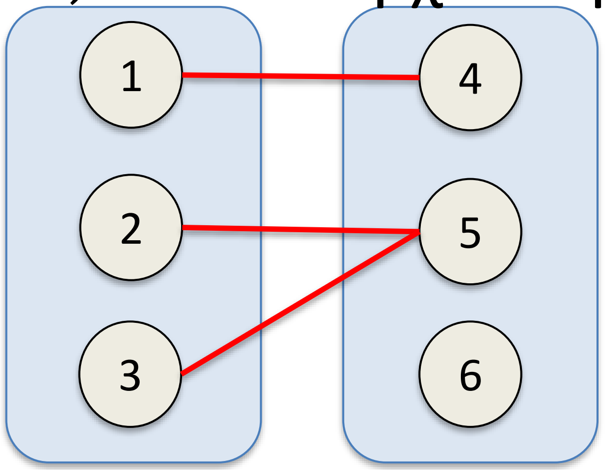






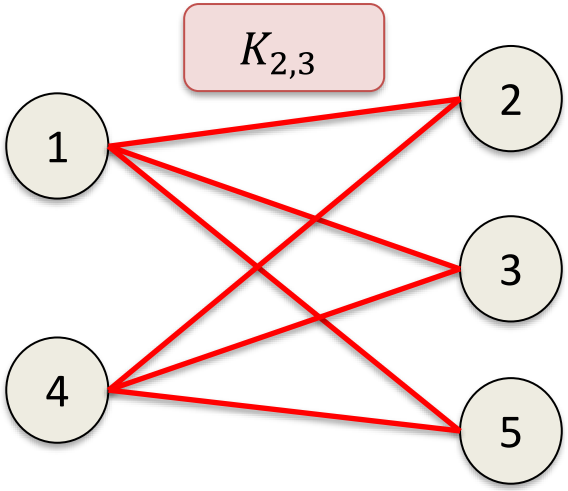
ΟΡΙΣΜΟΙ

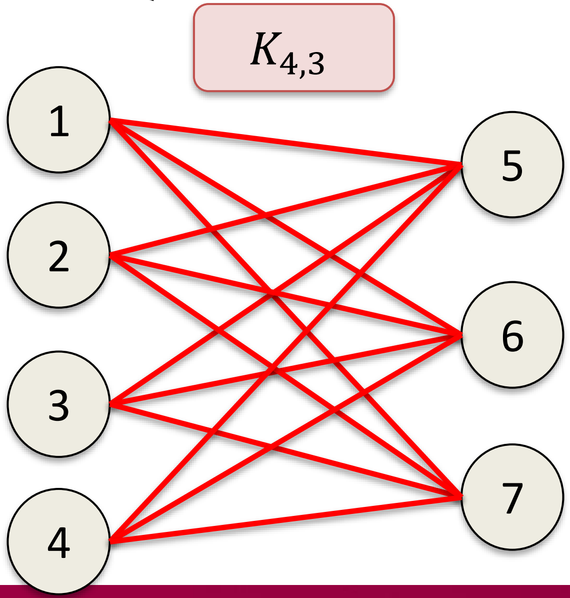
- Ένας γράφος ονομάζεται **διχοτομίσιμος**, εάν το σύνολο των κόμβων του μπορεί να διαμεριστεί σε δύο ξένα μεταξύ τους σύνολα $V1$ και $V2$, τέτοια ώστε **κάθε** ακμή $e \in E$ εφάπτεται ακριβώς σε ένα κόμβο του $V1$ και σε ένα του $V2$.
  - Ο ορισμός δεν καθορίζει ότι αν v_1 ένας κόμβος του $V1$ και v_2 ένας κόμβος του $V2$, τότε υπάρχει ακμή έτσι ώστε $e = (v_1, v_2)$.



ΟΡΙΣΜΟΙ

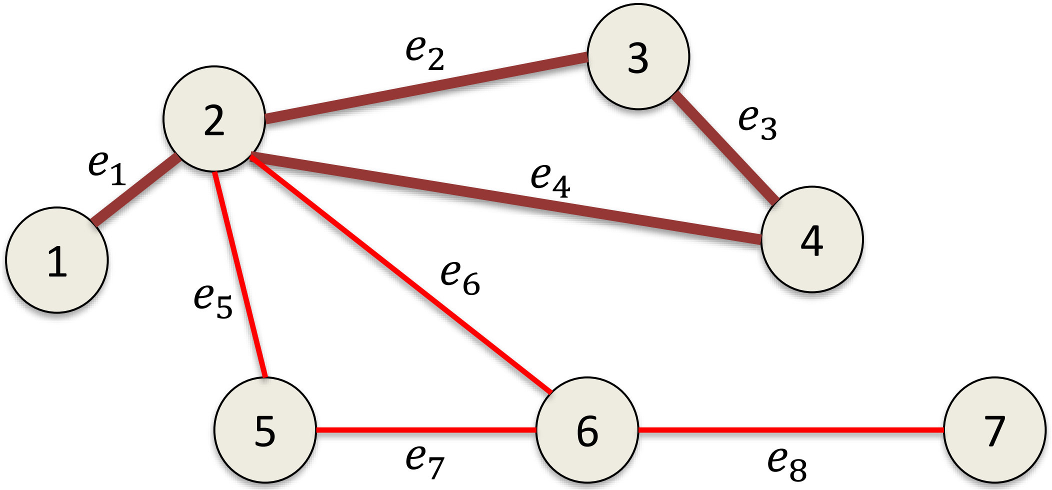
- Ένας **πλήρης και διχοτομίσιμος** γράφος (bipartite graph) με n και m ακμές (συμβολίζεται με $K_{n,m}$), είναι ένας διχοτομίσιμος γράφος που αποτελείται από δύο ξένα μεταξύ τους σύνολα κόμβων: $V1$ με n κόμβους και $V2$ με m κόμβους, όπου για κάθε ζεύγος κόμβων (v_1, v_2) (με $v_1 \in V1$ και $v_2 \in V2$) υπάρχει ακριβώς μια ακμή που εφάπτεται σε αυτές.





ΜΟΝΟΠΑΤΙΑ

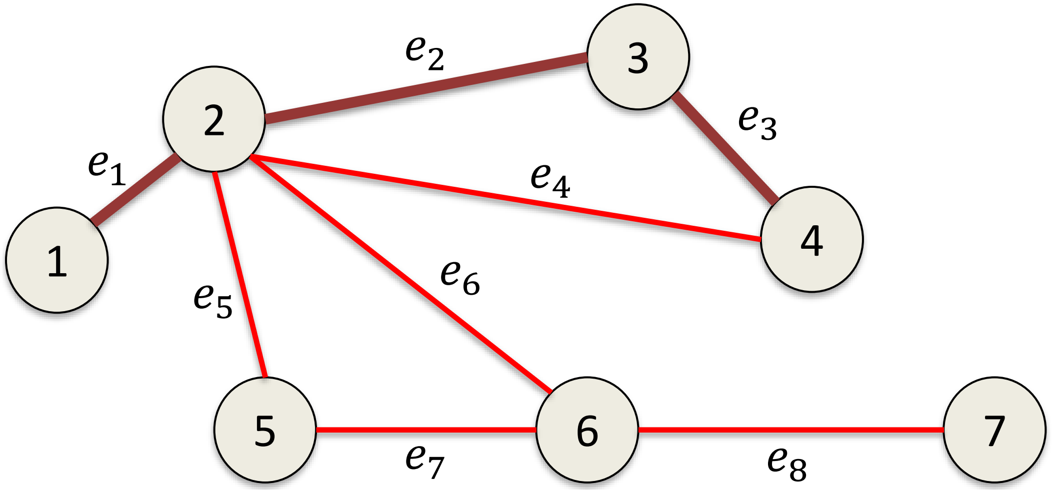
- Ένα **μονοπάτι** P από ένα κόμβο v_1 σε ένα κόμβο v_n (με $v_1, v_n \in V$), είναι μια ακολουθία από n κόμβους και $(n-1)$ ακμές, όπου οι ακμές εναλλάσσονται των κορυφών.
  - $P = (v_1, e_1, v_2, e_2, \dots, e_{n-1}, v_n)$ με κάθε ακμή e_i να εφάπτεται των κόμβων v_i και v_{i+1}.



Το μονοπάτι $(v_1, e_1, v_2, e_2, v_3, e_3, v_4, e_4, v_2)$ είναι ένα μονοπάτι **μήκους 4** από τον κόμβο v_1 στον κόμβο v_2

ΑΠΛΑ ΜΟΝΟΠΑΤΙΑ

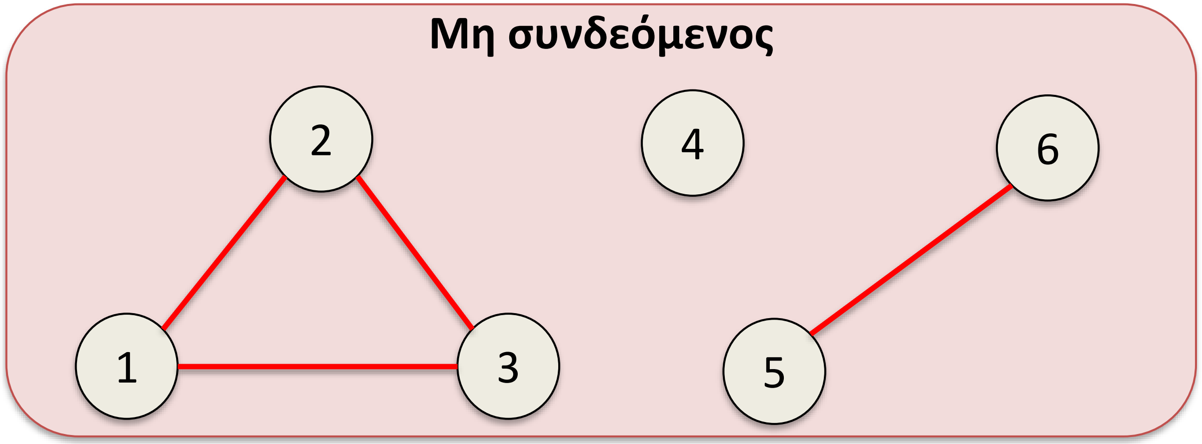
- **Απλό μονοπάτι** σε ένα γράφο ονομάζεται το μονοπάτι που δεν περιλαμβάνει επαναλαμβανόμενους κόμβους

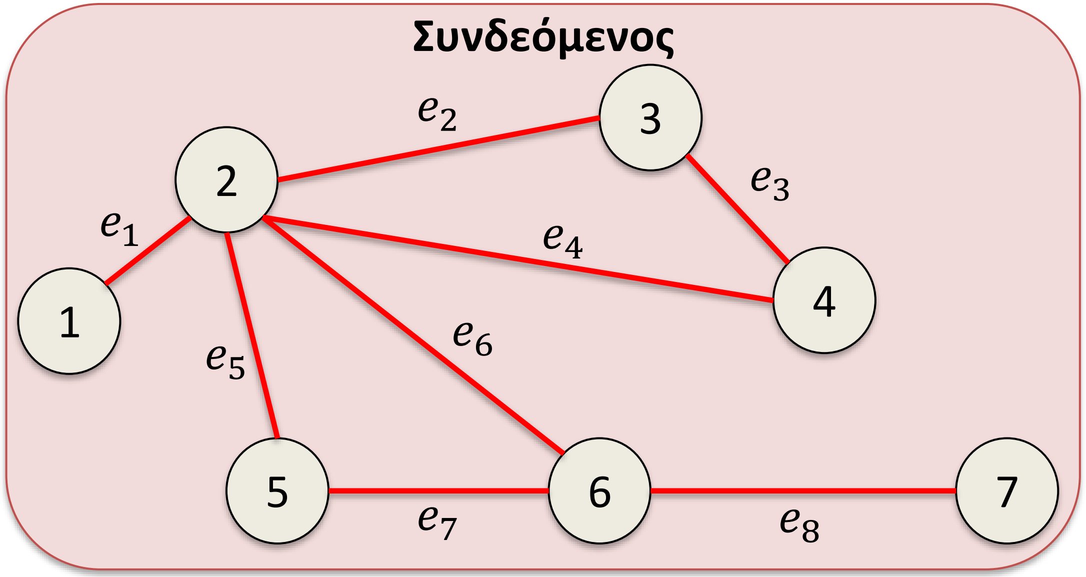


Το μονοπάτι
$(v_1, e_1, v_2, e_2, v_3, e_3, v_4)$
είναι ένα **απλό** μονοπάτι
μήκους 3 από τον κόμβο v_1
στον κόμβο v_4

ΣΥΝΔΕΟΜΕΝΟΙ ΓΡΑΦΟΙ

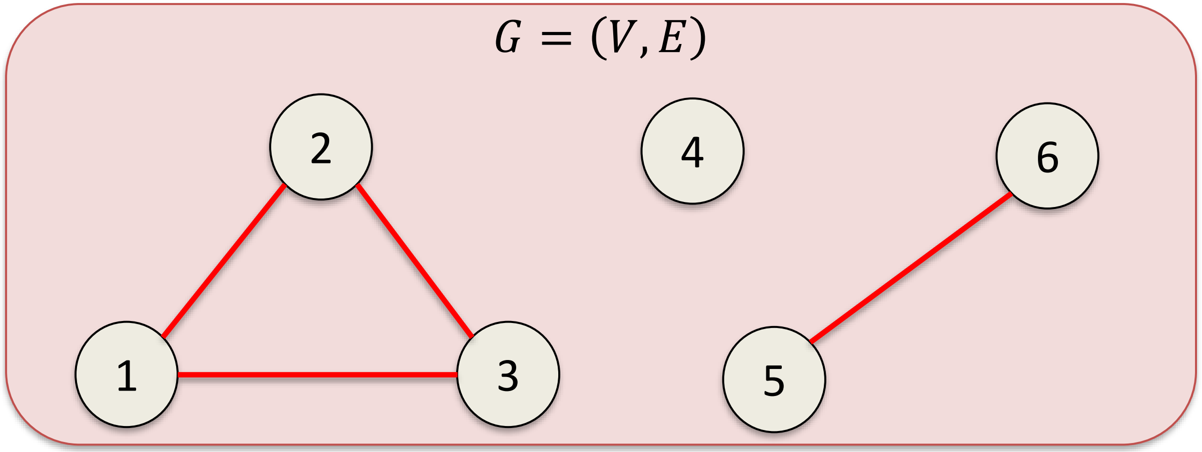
- Ένας γράφος ονομάζεται **συνδεόμενος**, εάν για κάθε ζεύγος κόμβων $v_1, v_2 \in V$, υπάρχει ένα μονοπάτι από τον v_1 στον v_2.

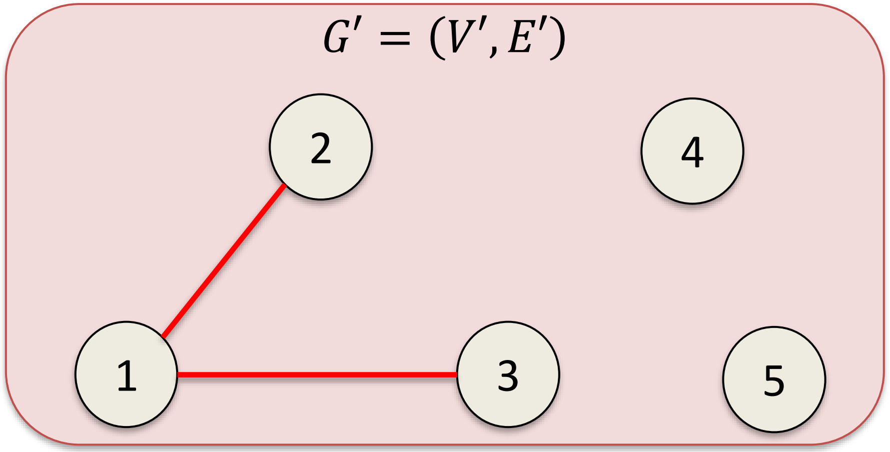




ΥΠΟ-ΓΡΑΦΟΙ

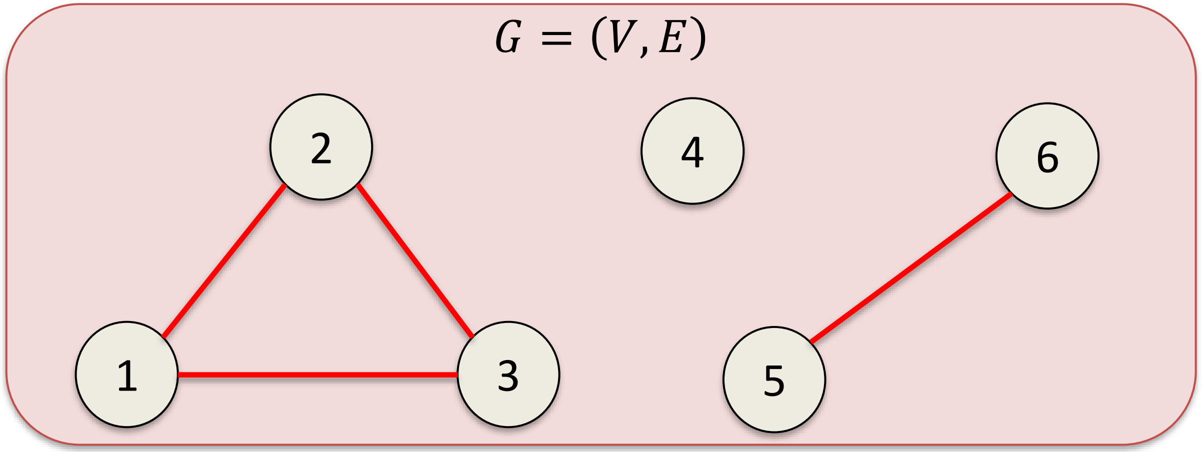
- Έστω $G = (V, E)$ ένας γράφος. Ένας γράφος $G' = (V', E')$ καλείται **υπο-γράφος** του G ανν
  - $V' \subseteq \mathrm{V}$
  - $E' \subseteq E$
  - $\forall e \in E'$, η e εφάπτεται σε δύο κόμβους που ανήκουν στο V'

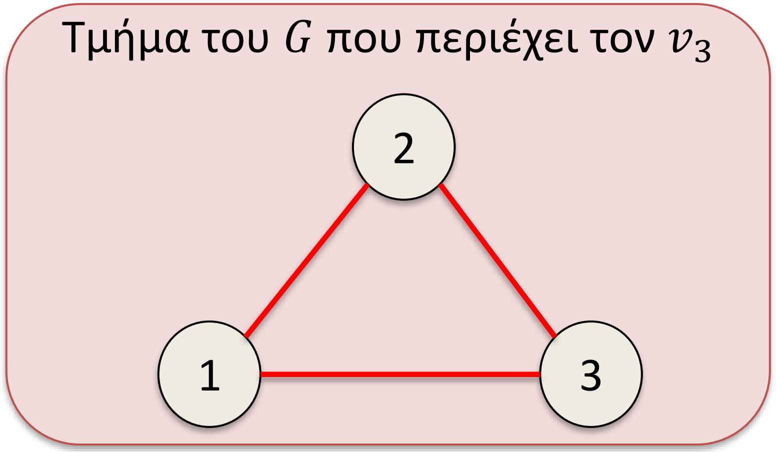


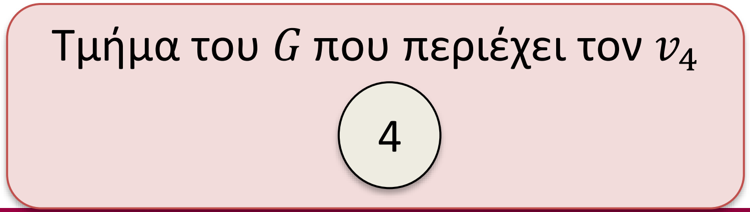


ΤΜΗΜΑ ΓΡΑΦΟΥ

- Έστω $G = (V, E)$ ένας γράφος και $v \in V$ ένας κόμβος του. Ο υπο-γράφος που αποτελείται από όλες τις ακμές και κόμβους που ανήκουν σε οποιοδήποτε μονοπάτι που ξεκινάει από τον κόμβο v, ονομάζεται **τμήμα του γράφου που περιέχει τον v**.

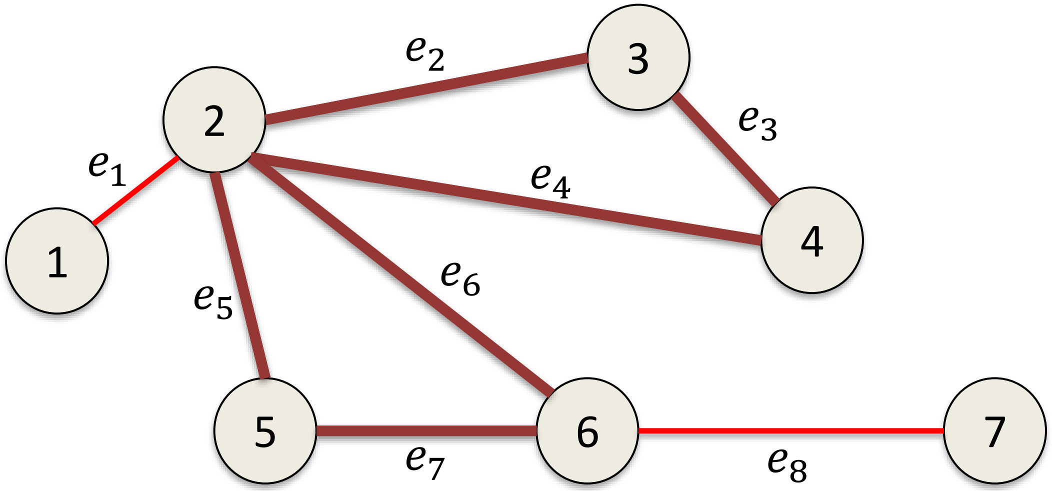






ΚΥΚΛΟΙ

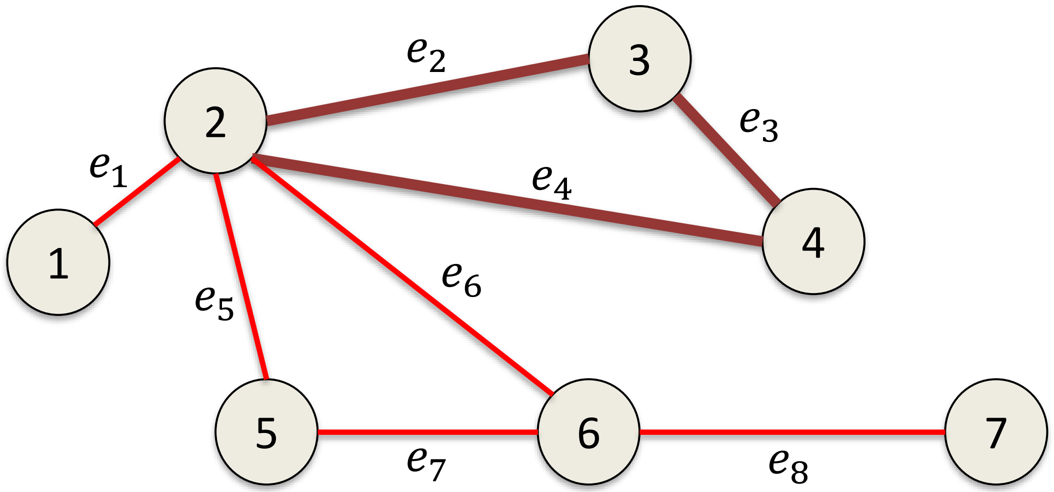
- **Κύκλος** ονομάζεται το μονοπάτι χωρίς επαναλαμβανόμενες ακμές, όπου η αρχική και τελική κορυφές συμπίπτουν



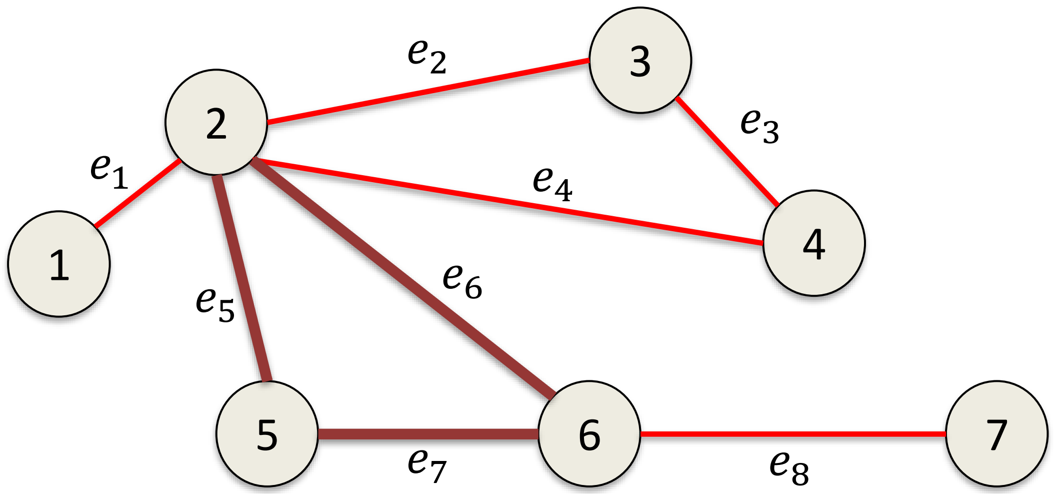
Κύκλος
$(v_2, e_2, v_3, e_3, v_4, e_4, v_2, e_6, v_6, e_7, v_5, e_5, v_2)$

ΑΠΛΟΙ ΚΥΚΛΟΙ

- **Απλός κύκλος** ονομάζεται ο κύκλος χωρίς επαναλαμβανόμενους κόμβους (εκτός του αρχικού και τελικού κόμβου)



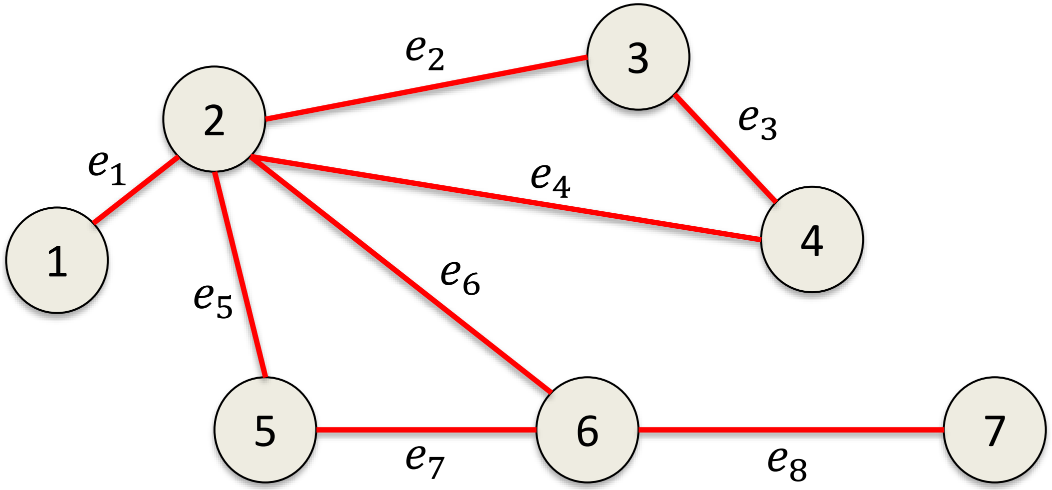
Απλός κύκλος
$(v_2, e_2, v_3, e_3, v_4, e_4, v_2)$



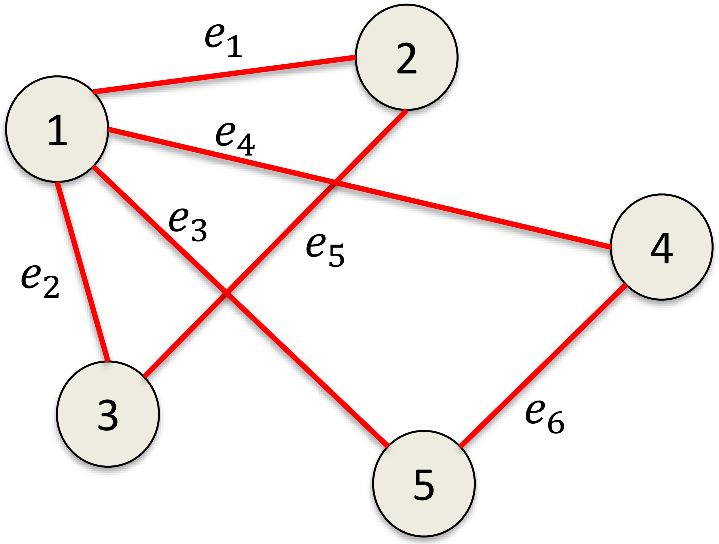
Απλός κύκλος
$(v_5, e_7, v_6, e_6, v_2, e_5, v_5)$

ΚΥΚΛΟΣ EULER

- **Κύκλος Euler** είναι ο κύκλος που περιέχει **κάθε ακμή** του γράφου **μια φορά**



Δεν υπάρχει κύκλος Euler

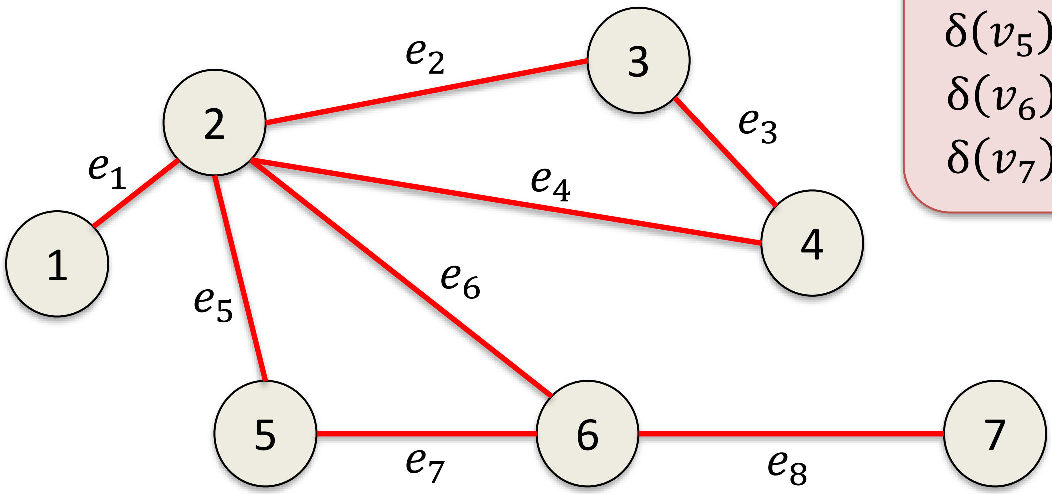


Κύκλος Euler
$(v_1, e_1, v_2, e_5, v_3, e_2, v_1, e_4, v_4, e_6, v_5, e_3, v_1)$

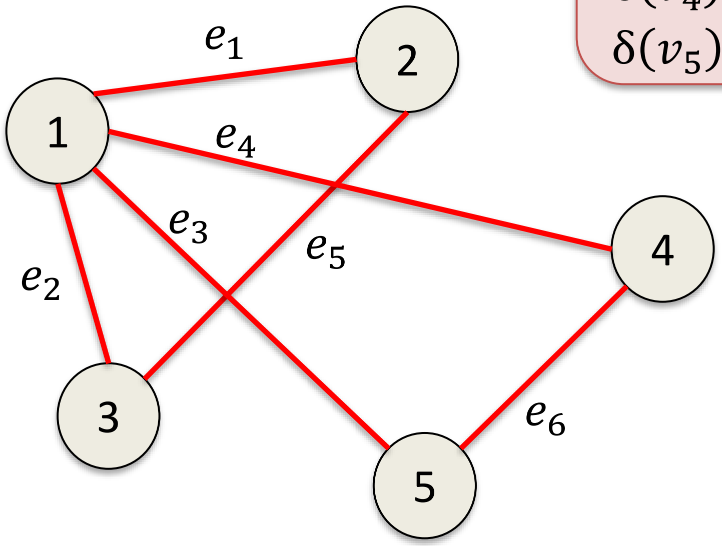
ΒΑΘΜΟΣ ΚΟΜΒΟΥ/ΚΟΡΥΦΗΣ

- **Βαθμός κόμβου** v $(v \in V)$ ενός γράφου $G = (V, E)$ ονομάζεται ο αριθμός των ακμών του γράφου που εφάπτονται της v.

$\delta(v_1) = 1$
$\delta(v_2) = 5$
$\delta(v_3) = 2$
$\delta(v_4) = 2$
$\delta(v_5) = 2$
$\delta(v_6) = 3$
$\delta(v_7) = 1$

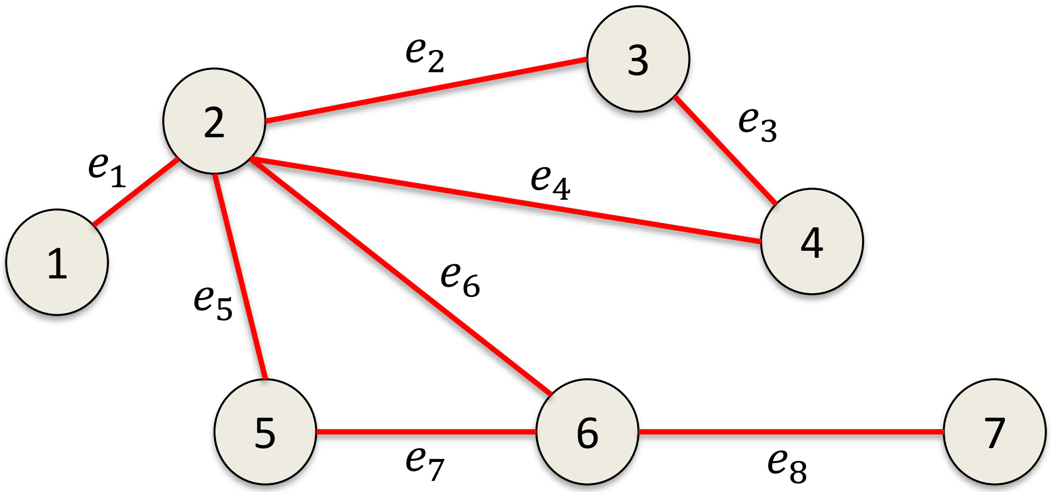


$\delta(v_1) = 4$
$\delta(v_2) = 2$
$\delta(v_3) = 2$
$\delta(v_4) = 2$
$\delta(v_5) = 2$

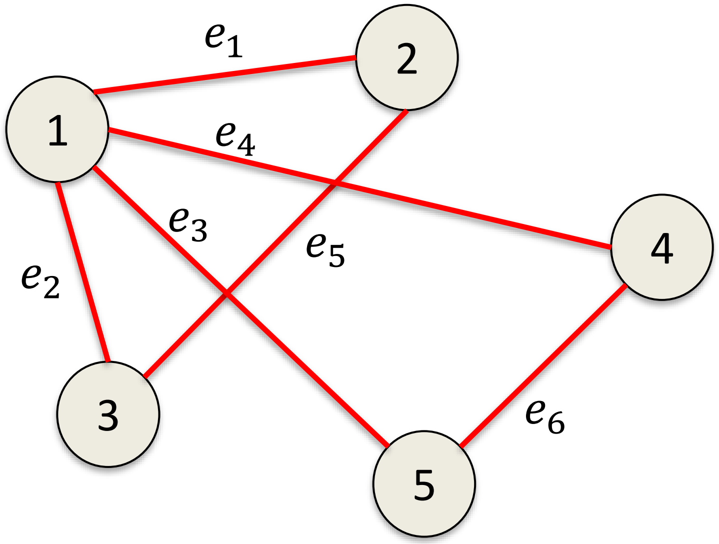


ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

Θεώρημα 1
Ένας γράφος $G = (V, E)$ έχει κύκλο του Euler εάν και μόνο εάν ο γράφος είναι **συνδεόμενος** και **κάθε** κόμβος του έχει **άρτιο βαθμό**



Δεν υπάρχει κύκλος Euler
Είναι συνδεόμενος
Οι κόμβοι v_1, v_2, v_6, v_7 έχουν περιττό βαθμό

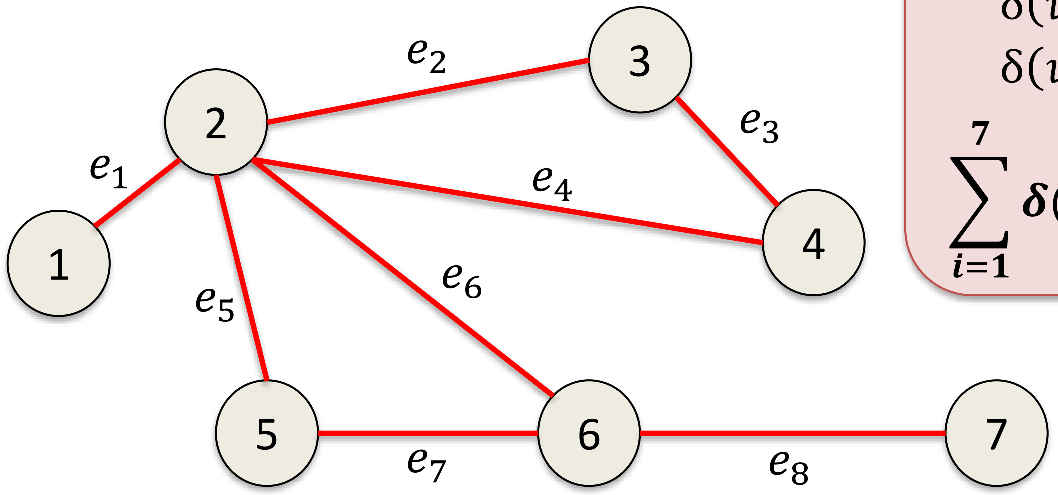


Υπάρχει κύκλος Euler
Είναι συνδεόμενος
Όλοι οι κόμβοι έχουν άρτιο βαθμό

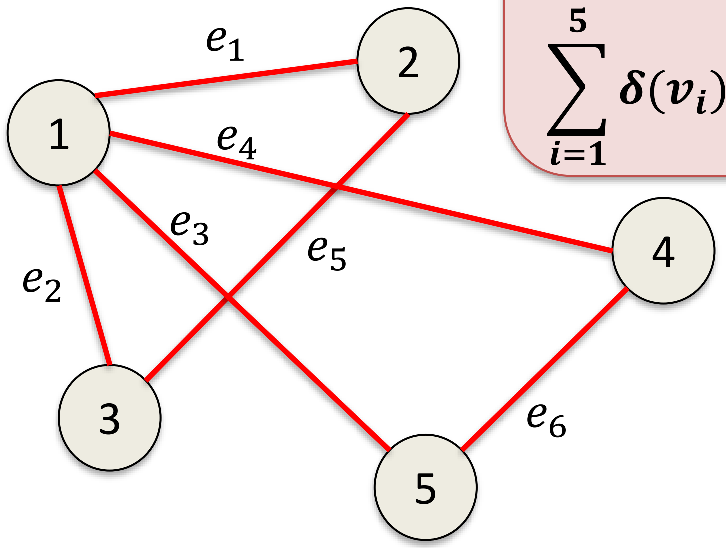
ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

Θεώρημα 2

Το άθροισμα των βαθμών των κόμβων ενός γράφου είναι άρτιος αριθμός.



$$\delta(v_1) = 1$$
$$\delta(v_2) = 5$$
$$\delta(v_3) = 2$$
$$\delta(v_4) = 2$$
$$\delta(v_5) = 2$$
$$\delta(v_6) = 3$$
$$\delta(v_7) = 1$$
$$\sum_{i=1}^{7} \boldsymbol{\delta(v_i) = 16}$$

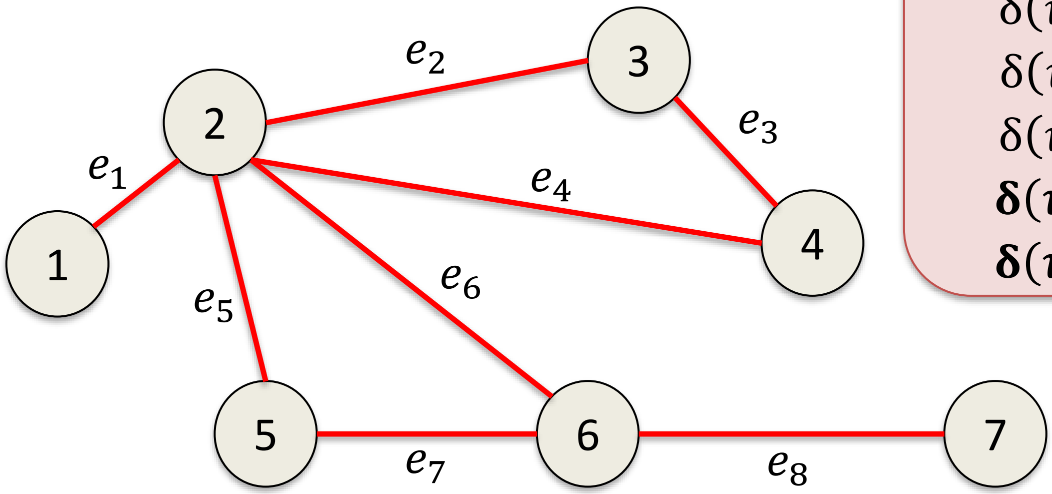


$$\delta(v_1) = 4$$
$$\delta(v_2) = 2$$
$$\delta(v_3) = 2$$
$$\delta(v_4) = 2$$
$$\delta(v_5) = 2$$
$$\sum_{i=1}^{5} \boldsymbol{\delta(v_i) = 12}$$

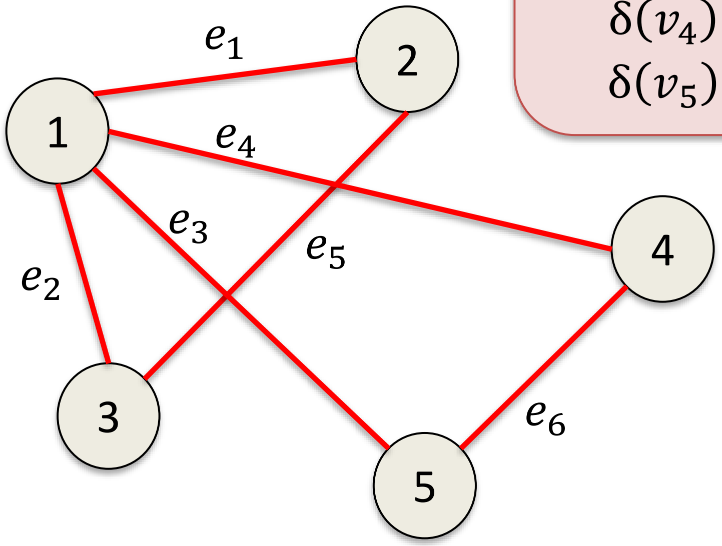
ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

Θεώρημα 3

Σε ένα γράφο, το πλήθος των κόμβων με περιττό βαθμό είναι άρτιο.



$$\boldsymbol{\delta(v_1) = 1}$$
$$\boldsymbol{\delta(v_2) = 5}$$
$$\delta(v_3) = 2$$
$$\delta(v_4) = 2$$
$$\delta(v_5) = 2$$
$$\boldsymbol{\delta(v_6) = 3}$$
$$\boldsymbol{\delta(v_7) = 1}$$

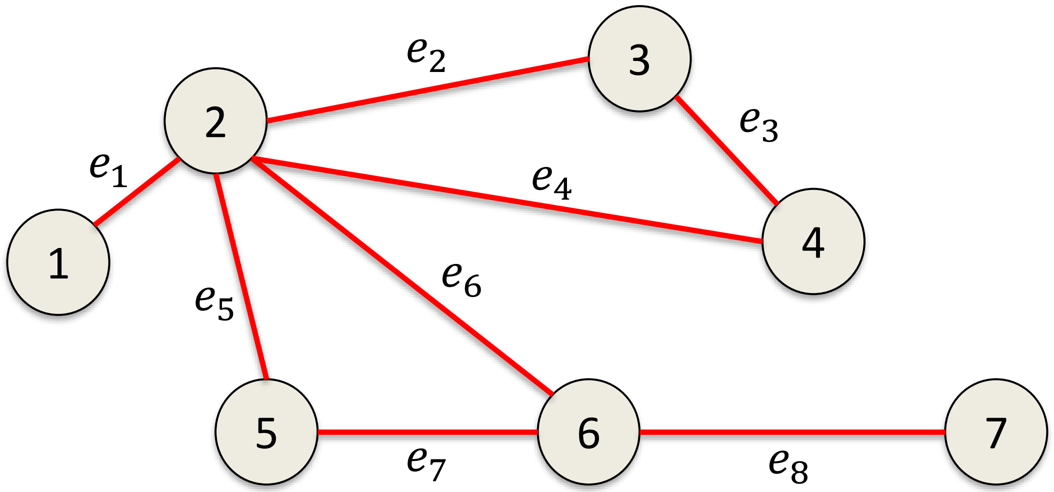


$$\delta(v_1) = 4$$
$$\delta(v_2) = 2$$
$$\delta(v_3) = 2$$
$$\delta(v_4) = 2$$
$$\delta(v_5) = 2$$

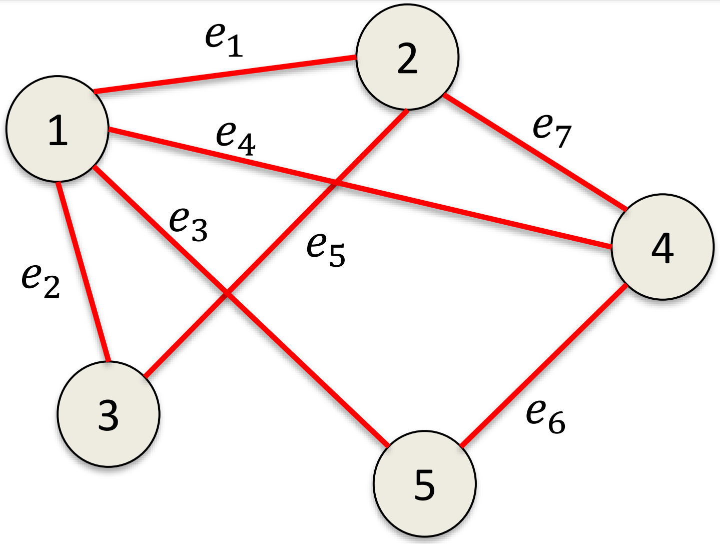
ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

Θεώρημα 4

‘Ενας γράφος έχει μονοπάτι με **μη επαναλαμβανόμενες ακμές** από ένα κόμβο v σε ένα κόμβο w $(v \neq w)$, στο οποίο περιέχονται **όλες οι ακμές** και **όλοι οι κόμβοι** του γράφου, εάν και μόνο εάν ο γράφος είναι συνδεόμενος και οι κορυφές v και w είναι οι μοναδικοί κόμβοι με περιττό βαθμό.



Οι κόμβοι v_1, v_2, v_6, v_7 έχουν περιττό βαθμό άρα **δεν υπάρχει** τέτοιο μονοπάτι



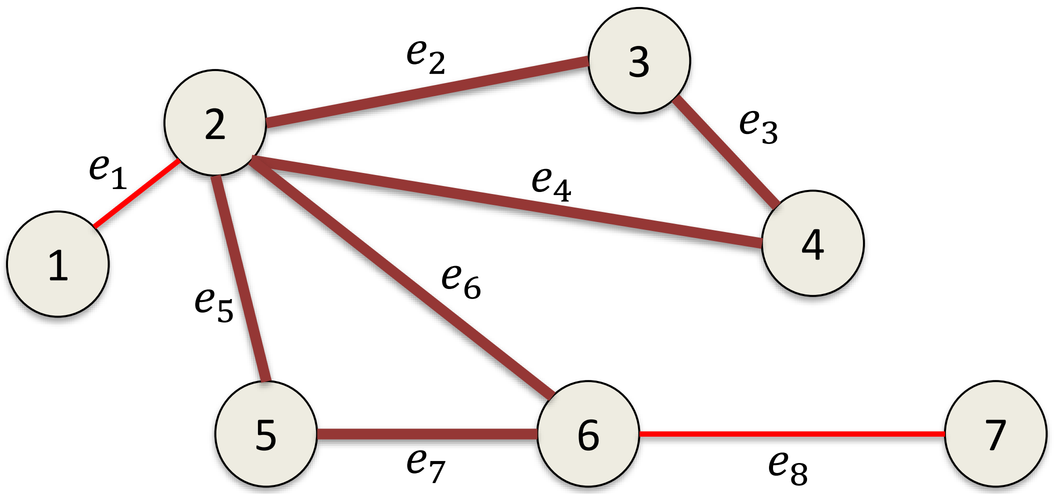
Οι κόμβοι v_2, v_4 είναι οι μοναδικοί κόμβοι με περιττό βαθμό άρα **υπάρχει** τέτοιο μονοπάτι:

$(v_2, e_1, v_1, e_2, v_3, e_5, v_2, e_7, v_4, e_4, v_1, e_3, v_5, e_6, v_4)$

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

Θεώρημα 5

Εάν ένας γράφος περιέχει ένα κύκλο από τον κόμβο v στον v, τότε ο γράφος αυτός περιέχει ένα απλό κύκλο από την v στην v.



Κύκλος

$(v_2, e_2, v_3, e_3, v_4, e_4, v_2, e_6, v_6, e_7, v_5, e_5, v_2)$

Απλός κύκλος

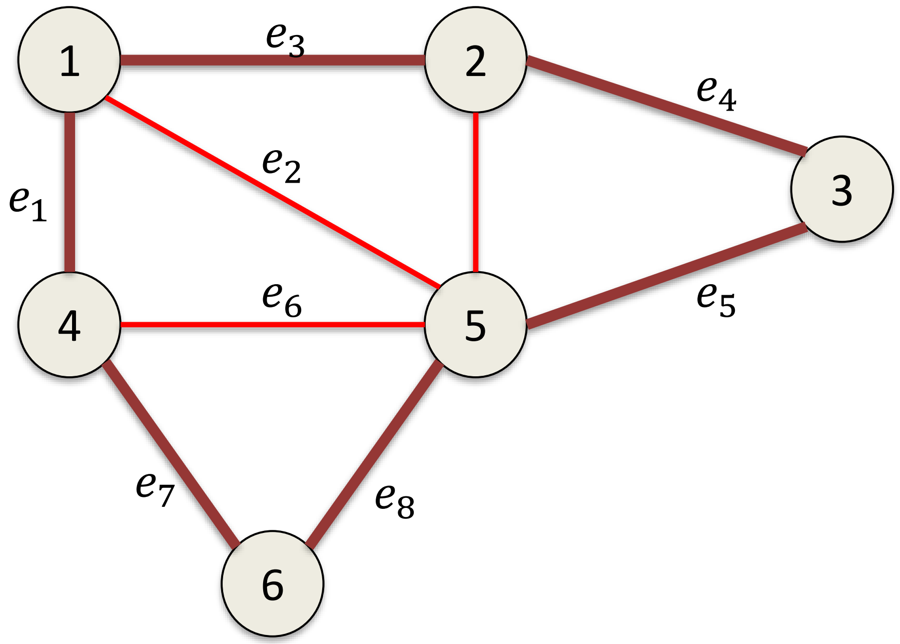
$(v_2, e_2, v_3, e_3, v_4, e_4, v_2)$

Απλός κύκλος

$(v_5, e_7, v_6, e_6, v_2, e_5, v_5)$

ΚΥΚΛΟΙ HAMILTON

- Ένας κύκλος που περιέχει **κάθε κόμβο** του γράφου **ακριβώς μια φορά** (με εξαίρεση τον αρχικό και τελικό), ονομάζεται **κύκλος του Hamilton**.



Κύκλος Hamilton
$(v_1, e_3, v_2, e_4, v_3, e_5, v_5, e_8, v_6, e_7, v_4, e_1, v_1)$

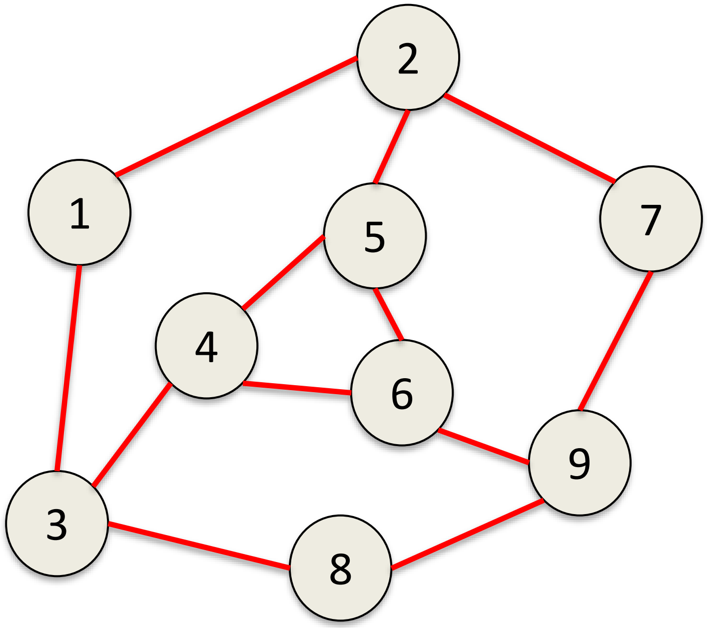
ΙΣΟΜΟΡΦΙΣΜΟΙ ΓΡΑΦΩΝ

ΟΡΙΣΜΟΣ

- Δύο γράφοι $G = (V, E)$ και $G' = (V', E')$ καλούνται **ισόμορφοι** (συμβολίζεται με $G \cong G'$) εάν
  - Υπάρχει μια 1-1 συνάρτηση $f: V \longrightarrow V'$
  - Υπάρχει μια 1-1 συνάρτηση $g: E \longrightarrow E'$
  - $\forall v, v' \in V$ με $e = (v, v')$, εάν και μόνο εάν $g(e) = (f(v), f(v'))$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

$G = (V, E)$



Ισομορφισμός

$v_1 \xrightarrow{f} v_6'$

$v_2 \xrightarrow{f} v_7'$

$v_3 \xrightarrow{f} v_3'$

$v_4 \xrightarrow{f} v_4'$

$v_5 \xrightarrow{f} v_1'$

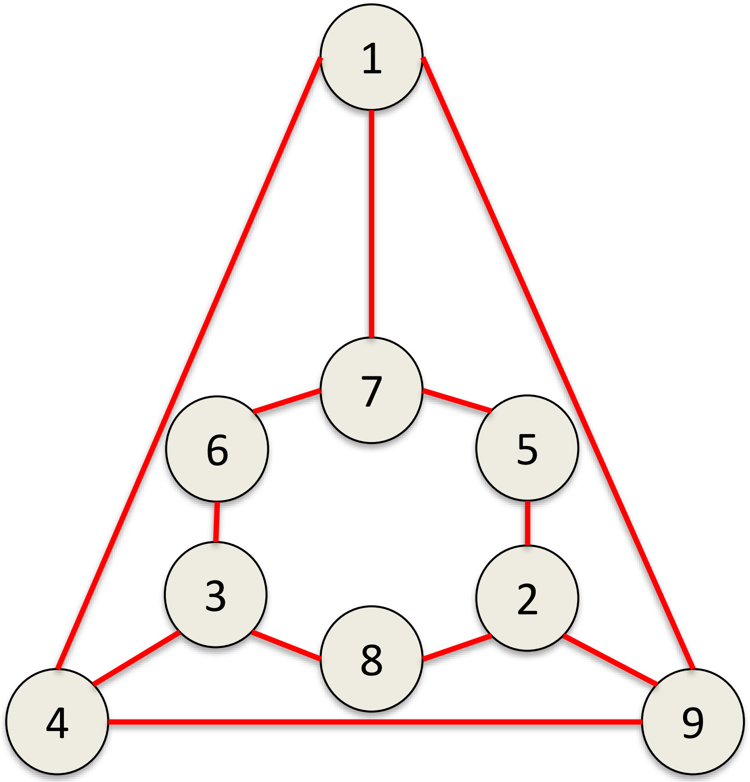
$v_6 \xrightarrow{f} v_9'$

$v_7 \xrightarrow{f} v_5'$

$v_8 \xrightarrow{f} v_8'$

$v_9 \xrightarrow{f} v_2'$

$G' = (V', E')$



Ποια είναι η συνάρτηση g του ισομορφισμού

ΑΜΕΤΑΒΛΗΤΗ ΙΔΙΟΤΗΤΑ

- Μια ιδιότητα ενός γράφου G θα καλείται **αμετάβλητη**, εάν κάθε ισόμορφος γράφος G' του G έχει επίσης αυτή την ιδιότητα.
  - Για να δείξουμε ότι δύο γράφοι G, G' δεν είναι ισόμορφοι, αρκεί να βρούμε μια αμετάβλητη ιδιότητα του G που δεν έχει ο G' (αλλά θα έπρεπε να είχε αν ήταν ισόμορφος του G)

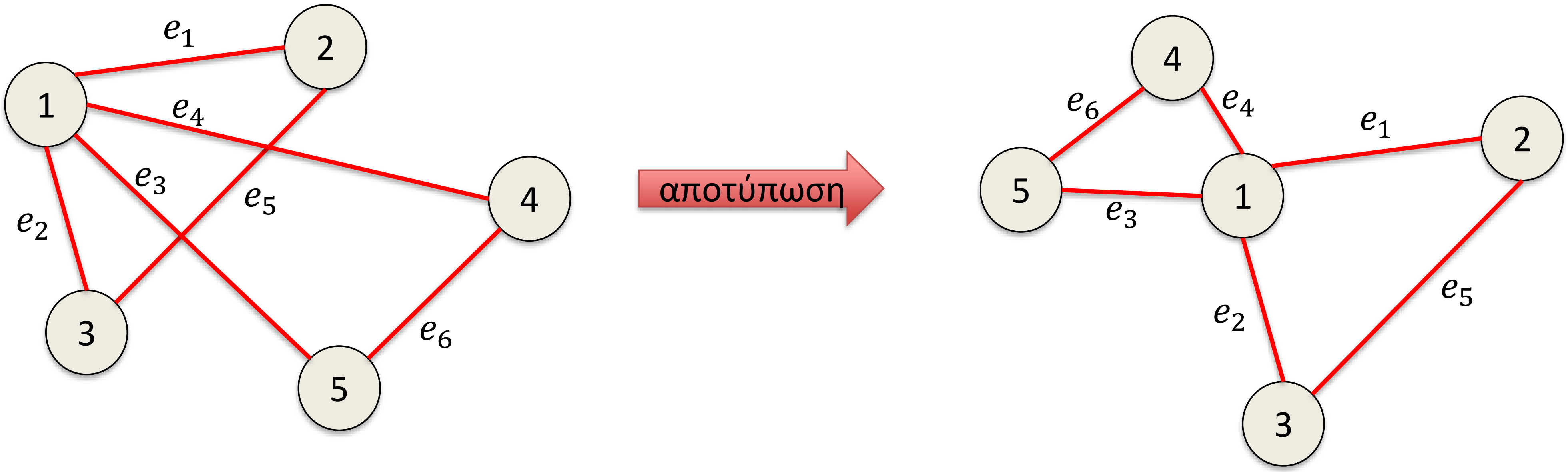
Οι ακόλουθες ιδιότητες είναι αμετάβλητες

- Ο αριθμός των κόμβων του γράφου
- Ο αριθμός των ακμών του γράφου
- Ένας κόμβος του γράφου έχει βαθμό k
- Ο γράφος έχει απλό κύκλο μήκους m

ΕΠΙΠΕΔΟΙ ΓΡΑΦΟΙ

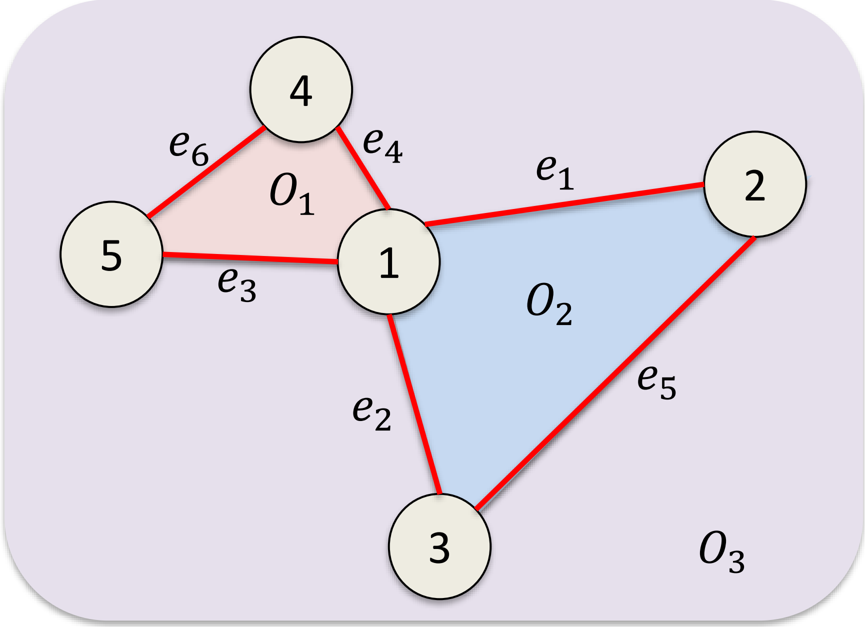
ΟΡΙΣΜΟΙ

- Ένας γράφος καλείται **επίπεδος** εάν μπορεί να αποτυπωθεί στο επίπεδο έτσι ώστε οι ακμές του να **μην διασταυρώνονται**.
- **Αποτύπωση** καλείται κάθε σχηματισμός του γράφου στο επίπεδο με μη διασταυρωμένες ακμές.



ΟΡΙΣΜΟΙ

- **Όψη** του επιπέδου ονομάζεται κάθε τμήμα του επιπέδου το οποίο ορίζεται από τους κύκλους του επίπεδου γράφου.
- **Βαθμός όψεως** καλείται ο αριθμός των ακμών του γράφου που ορίζουν την όψη.



Τύπος Euler

$$|O| = |E| - |V| + 2$$

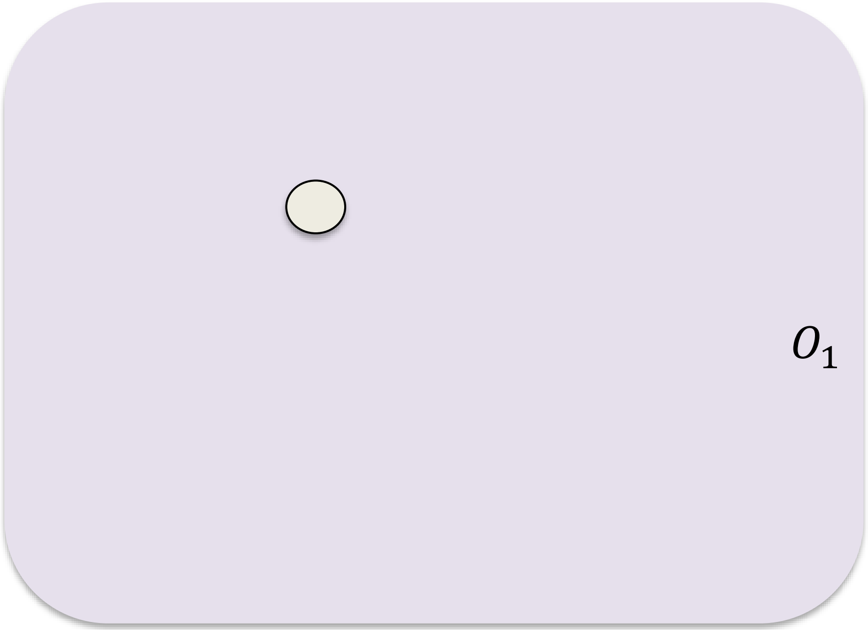
$$|E| = 6$$

$$|V| = 5$$

$$|O| = 3$$

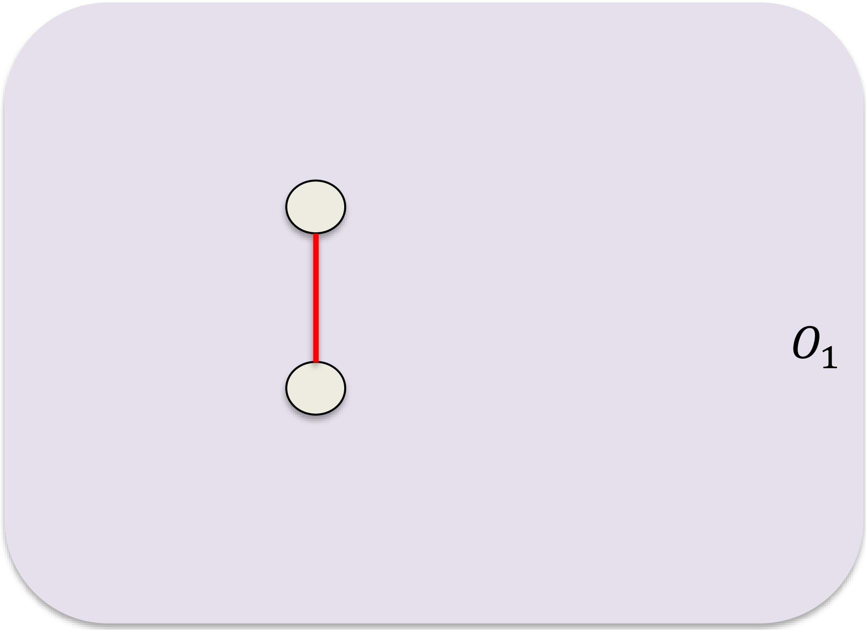
ΤΥΠΟΣ ΤΟΥ EULER

$\|E\|$	$\|V\|$	$\|O\|$	$\|E\| - \|V\| + 2$
0	1	1	1



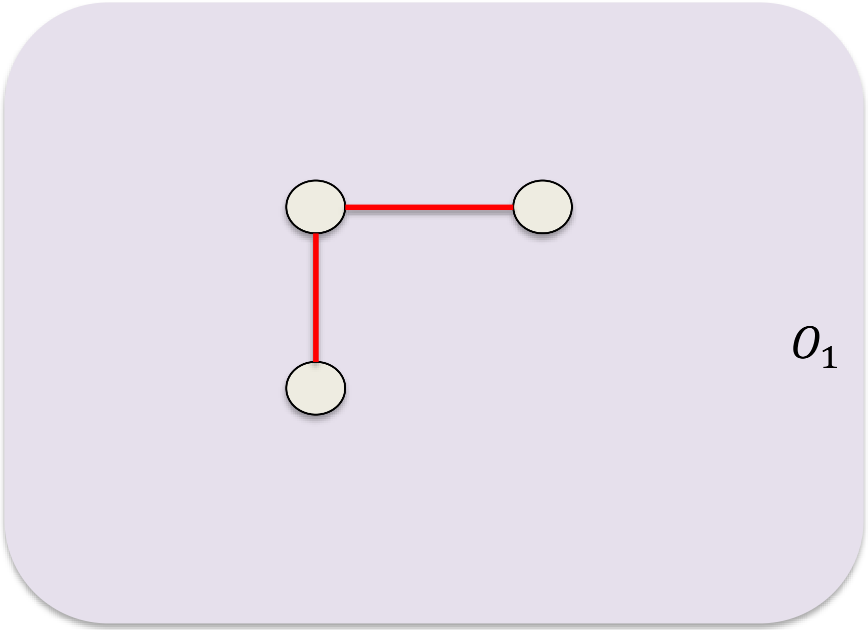
ΤΥΠΟΣ ΤΟΥ EULER

$\|E\|$	$\|V\|$	$\|O\|$	$\|E\| - \|V\| + 2$
0	1	1	1
1	2	1	1

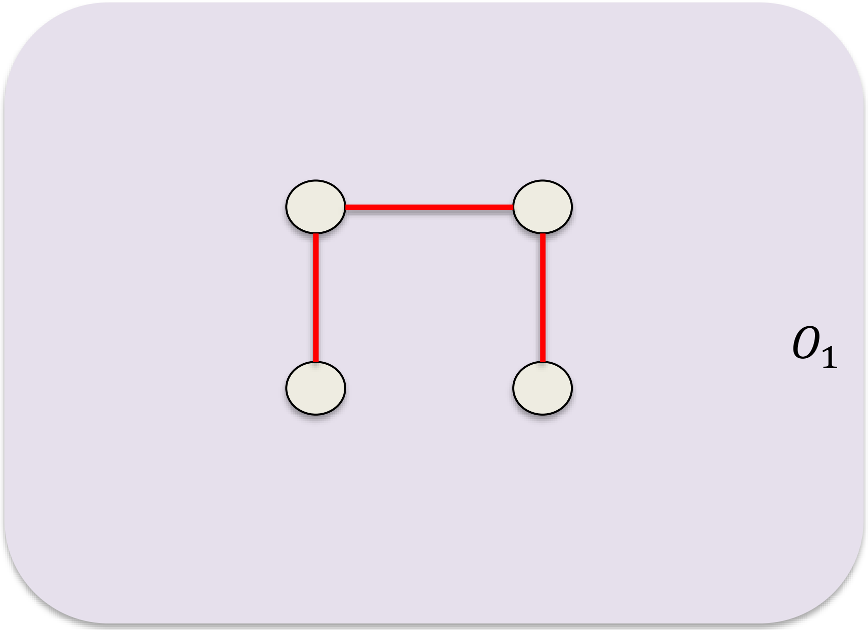


ΤΥΠΟΣ ΤΟΥ EULER

$\lvert E \rvert$	$\lvert V \rvert$	$\lvert O \rvert$	$\lvert E \rvert - \lvert V \rvert + 2$
0	1	1	1
1	2	1	1
2	3	1	1

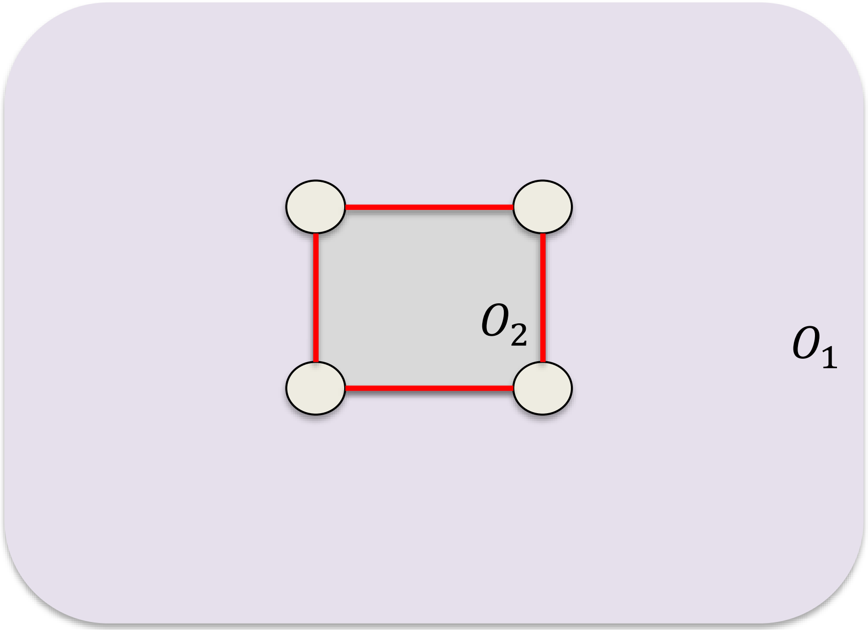


ΤΥΠΟΣ ΤΟΥ EULER



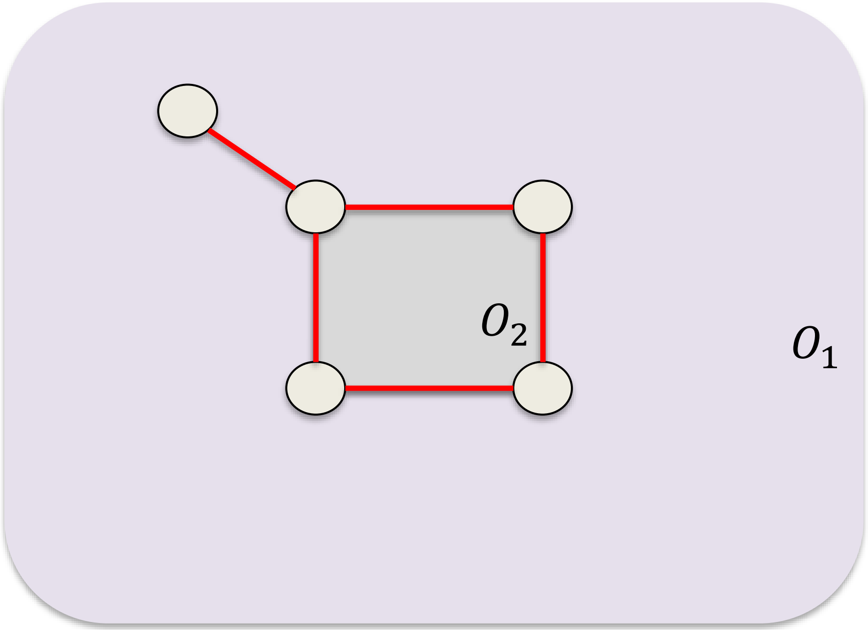
$\|E\|$	$\|V\|$	$\|O\|$	$\|E\| - \|V\| + 2$
0	1	1	1
1	2	1	1
2	3	1	1
3	4	1	1

ΤΥΠΟΣ ΤΟΥ EULER



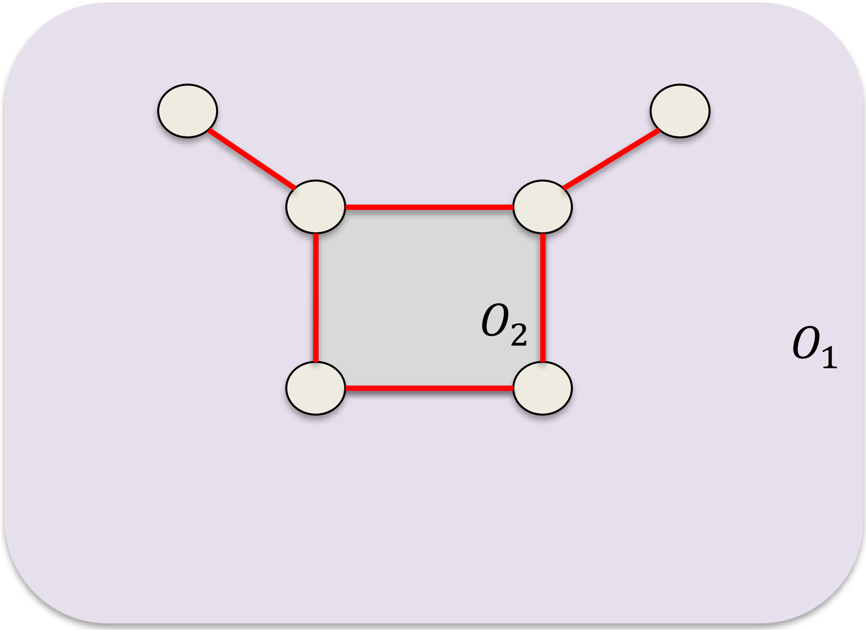
$\|E\|$	$\|V\|$	$\|O\|$	$\|E\| - \|V\| + 2$
0	1	1	1
1	2	1	1
2	3	1	1
3	4	1	1
4	4	2	2

ΤΥΠΟΣ ΤΟΥ EULER



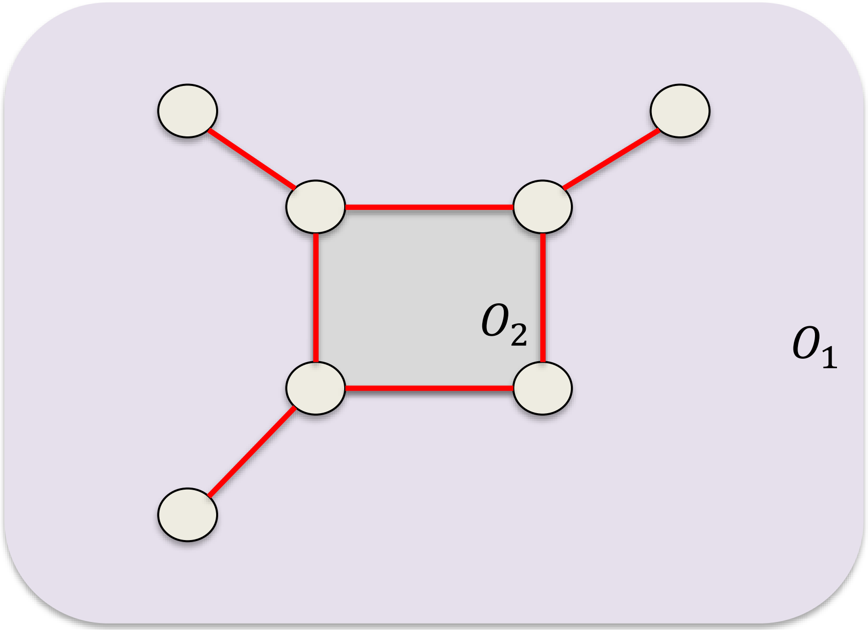
$\lvert E\rvert$	$\lvert V\rvert$	$\lvert O\rvert$	$\lvert E\rvert - \lvert V\rvert + 2$
0	1	1	1
1	2	1	1
2	3	1	1
3	4	1	1
4	4	2	2
5	5	2	2

ΤΥΠΟΣ ΤΟΥ EULER



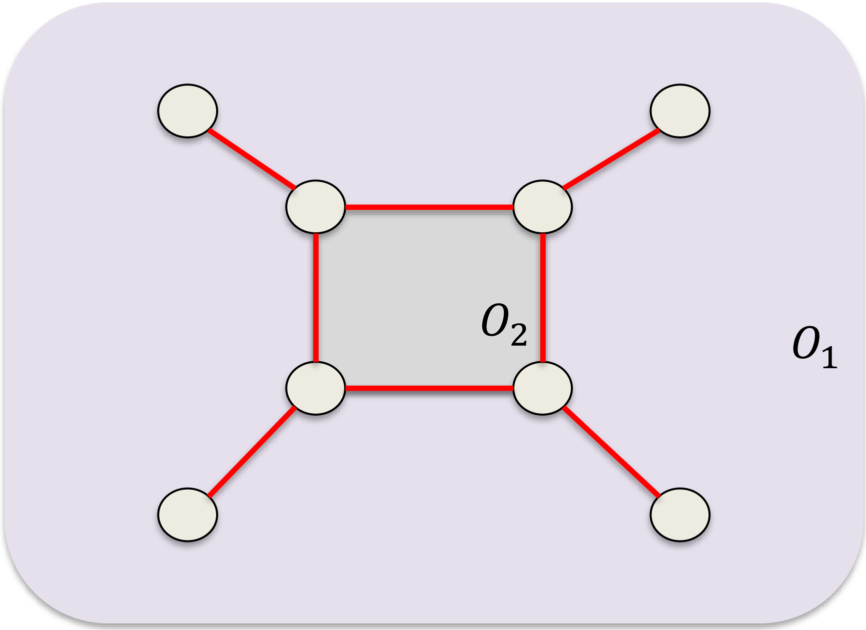
$\|E\|$	$\|V\|$	$\|O\|$	$\|E\| - \|V\| + 2$
0	1	1	1
1	2	1	1
2	3	1	1
3	4	1	1
4	4	2	2
5	5	2	2
6	6	2	2

ΤΥΠΟΣ ΤΟΥ EULER



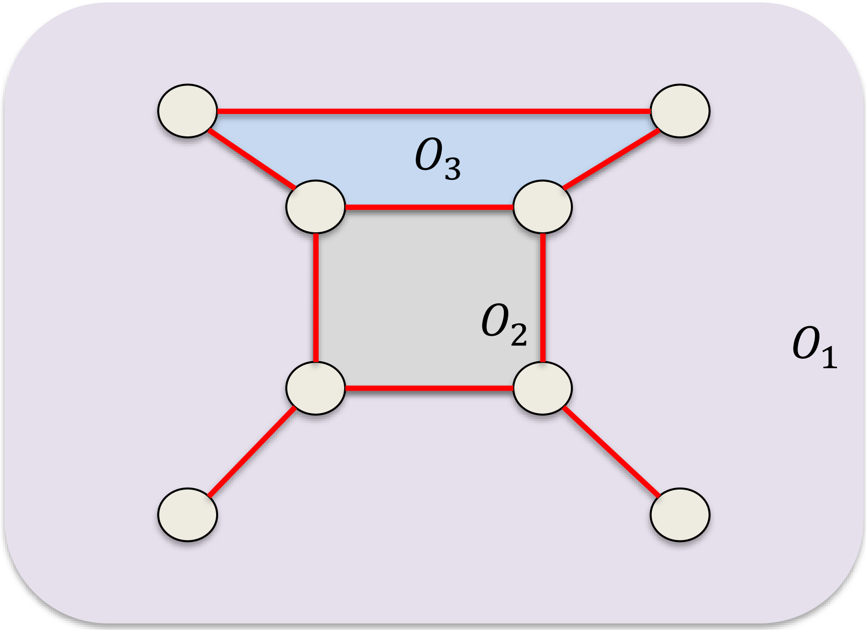
$\|E\|$	$\|V\|$	$\|O\|$	$\|E\| - \|V\| + 2$
0	1	1	1
1	2	1	1
2	3	1	1
3	4	1	1
4	4	2	2
5	5	2	2
6	6	2	2
7	7	2	2

ΤΥΠΟΣ ΤΟΥ EULER



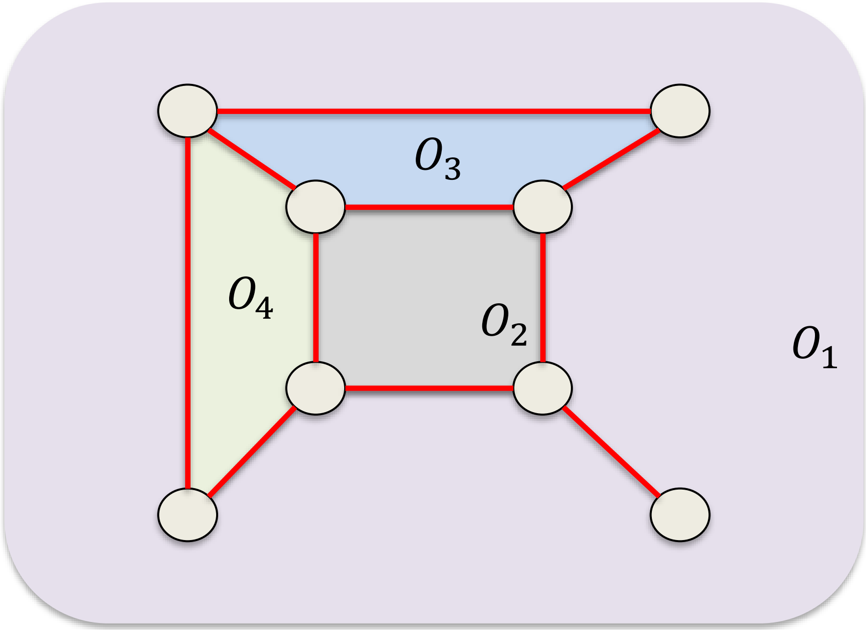
$\lvert E \rvert$	$\lvert V \rvert$	$\lvert O \rvert$	$\lvert E \rvert - \lvert V \rvert + 2$
0	1	1	1
1	2	1	1
2	3	1	1
3	4	1	1
4	4	2	2
5	5	2	2
6	6	2	2
7	7	2	2
8	8	2	2

ΤΥΠΟΣ ΤΟΥ EULER



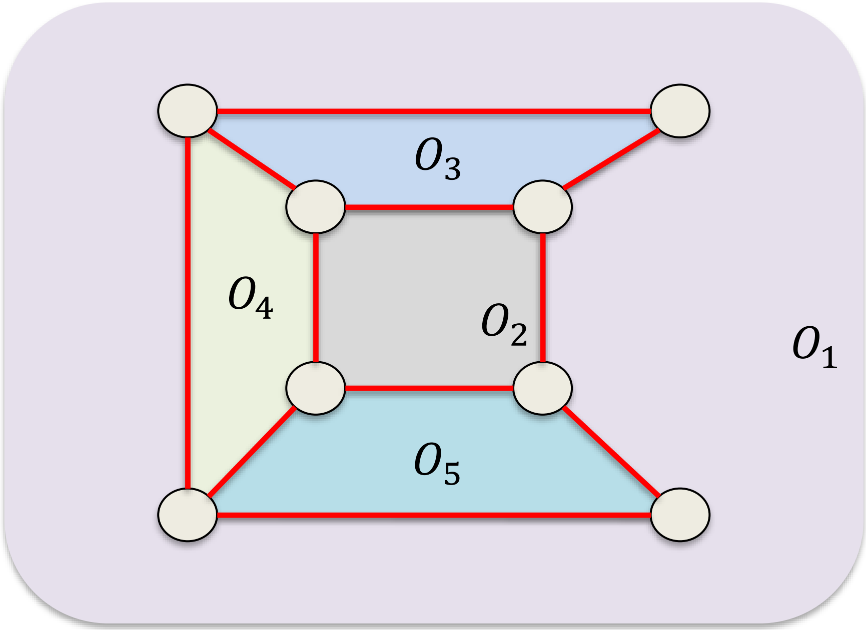
$\lvert E\rvert$	$\lvert V\rvert$	$\lvert O\rvert$	$\lvert E\rvert - \lvert V\rvert + 2$
0	1	1	1
1	2	1	1
2	3	1	1
3	4	1	1
4	4	2	2
5	5	2	2
6	6	2	2
7	7	2	2
8	8	2	2
9	8	3	3

ΤΥΠΟΣ ΤΟΥ EULER



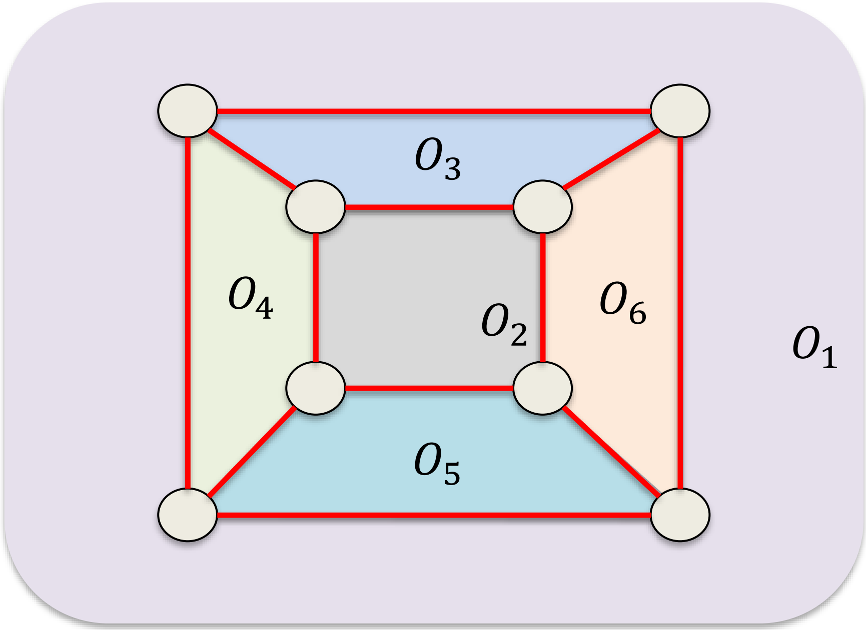
$\lvert E \rvert$	$\lvert V \rvert$	$\lvert O \rvert$	$\lvert E \rvert - \lvert V \rvert + 2$
0	1	1	1
1	2	1	1
2	3	1	1
3	4	1	1
4	4	2	2
5	5	2	2
6	6	2	2
7	7	2	2
8	8	2	2
9	8	3	3
10	8	4	4

ΤΥΠΟΣ ΤΟΥ EULER



$\lvert E\rvert$	$\lvert V\rvert$	$\lvert O\rvert$	$\lvert E\rvert - \lvert V\rvert + 2$
0	1	1	1
1	2	1	1
2	3	1	1
3	4	1	1
4	4	2	2
5	5	2	2
6	6	2	2
7	7	2	2
8	8	2	2
9	8	3	3
10	8	4	4
11	8	5	5

ΤΥΠΟΣ ΤΟΥ EULER

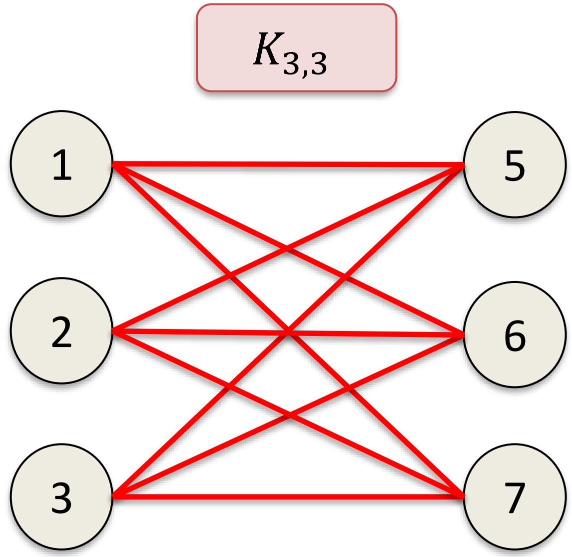


$\boldsymbol{\lvert E \rvert}$	$\boldsymbol{\lvert V \rvert}$	$\boldsymbol{\lvert O \rvert}$	$\boldsymbol{\lvert E\rvert - \lvert V\rvert + 2}$
0	1	1	1
1	2	1	1
2	3	1	1
3	4	1	1
4	4	2	2
5	5	2	2
6	6	2	2
7	7	2	2
8	8	2	2
9	8	3	3
10	8	4	4
11	8	5	5
12	8	6	6

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

Πρόταση 1

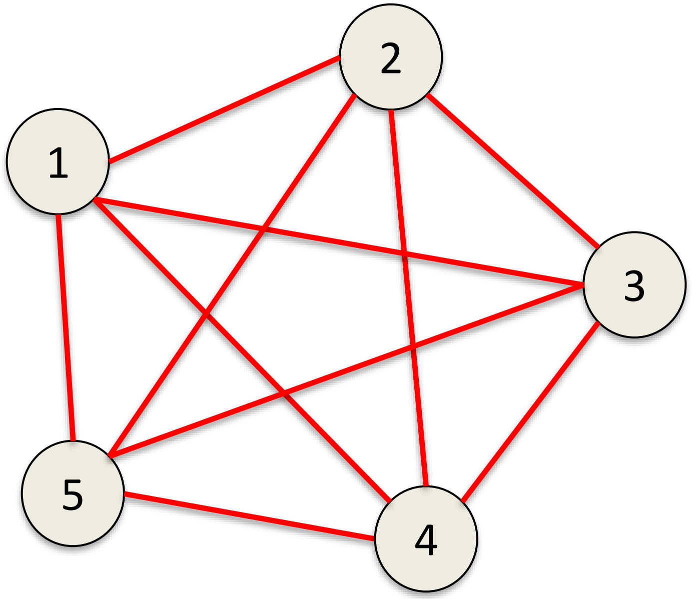
Ο πλήρης και διχοτομίσιμος γράφος $K_{3,3}$ δεν είναι επίπεδος



ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

Πρόταση 2
Ο πλήρης γράφος K_5 δεν είναι επίπεδος

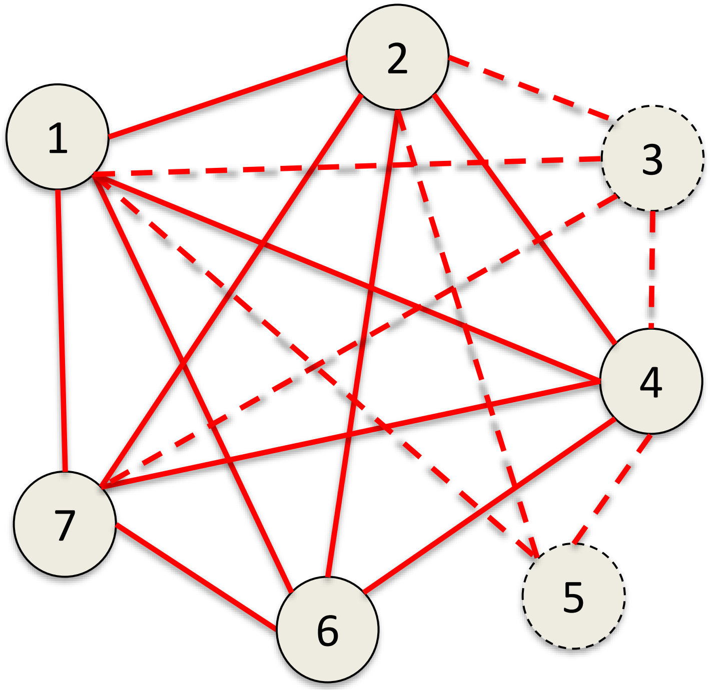
K_5



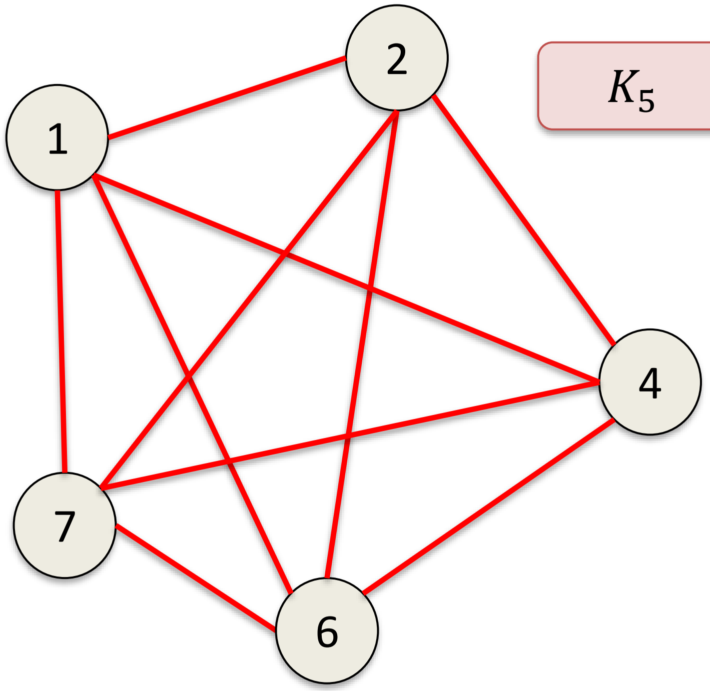
ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΟΥ KURATOWSKI

Θεώρημα του Kuratowski

Ένας γράφος G είναι επίπεδος εάν και μόνο εάν δεν περιέχει υπο-γράφο που να είναι ομοιομορφικός με τον K_5 ή με τον $K_{3,3}$.



Υπο-γράφος που προκύπτει αφαιρώντας τους κόμβους και ακμές που έχουν σημειωθεί με διακεκομμένες γραμμές



K_5

ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΓΡΑΦΩΝ

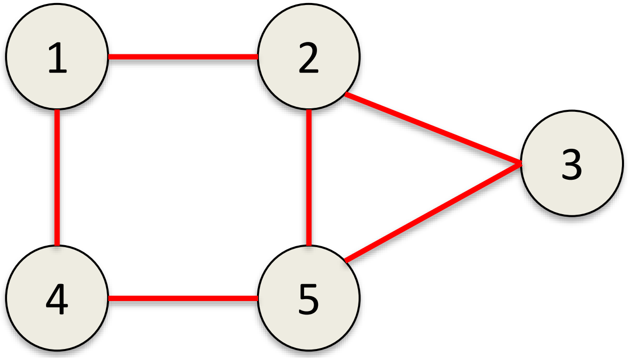
- *Πίνακες Γειτνίασης*
- *Λίστες Γειτνίασης*

ΠΙΝΑΚΑΣ ΓΕΙΤΝΙΑΣΗΣ (ADJACENCY MATRIX)

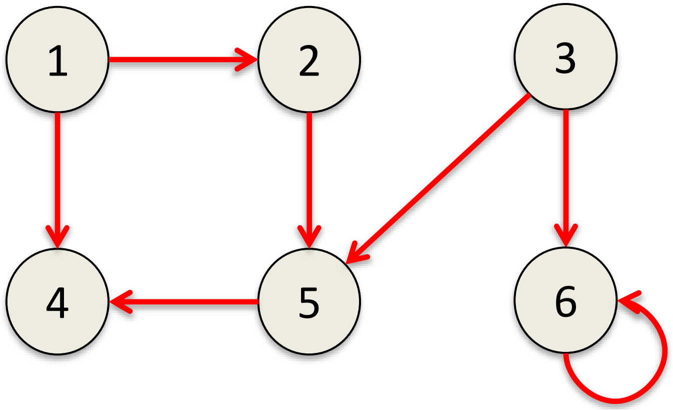
- Έστω γράφος $G = (V, E)$ και μια διάταξη των κόμβων του γράφου $(v_1, v_2, \dots, v_n)$.
- Ονομάζουμε **πίνακα γειτνίασης** (ή πίνακα σύνδεσης) του γράφου G, έναν τετραγωνικό πίνακα A διάστασης $n \times n$ όπου
  - Το στοιχείο $A[i, j]$ είναι ίσο με 1 ανν υπάρχει ακμή στον G που συνδέει τους κόμβους v_i και v_j. Σε αντίθετη περίπτωση $A[i, j]$=0.

$$A[i,j] = \begin{cases} 1, & \varepsilon\alpha\nu\ \upsilon\pi\alpha\rho\chi\varepsilon\iota\ \alpha\kappa\mu\eta\ \pi o\upsilon\ \varepsilon\varphi\alpha\pi\tau\varepsilon\tau\alpha\iota\ \sigma\tau o\upsilon\varsigma\ v_i\ \kappa\alpha\iota\ v_j \\ 0, & \delta\iota\alpha\varphi o\rho\varepsilon\tau\iota\kappa\alpha \end{cases}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ



$$A = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 \end{array} \\ \begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$



$$A = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 & v_6 \end{array} \\ \begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

- Σε έναν **μη-κατευθυνόμενο** γράφο, ο πίνακας γειτνίασης είναι **συμμετρικός**.
- Ο βαθμός ενός κόμβου σε έναν απλό γράφο είναι ίσος με το **άθροισμα των στοιχείων** του πίνακα γειτνίασης που αντιστοιχούν στη **στήλη** (**γραμμή**) του κόμβου αυτού.
- Δεν γίνεται αναπαράσταση των παράλληλων ακμών.
- Μπορούμε να ελέγξουμε εάν $e_{i,j} \in E$ (ακμή που εφάπτεται στους v_i, v_j) σε χρόνο $\mathcal{O}(1)$.
- Μπορούμε να επεξεργαστούμε όλες τις ακμές σε χρόνο $\mathcal{O}(n^2)$.

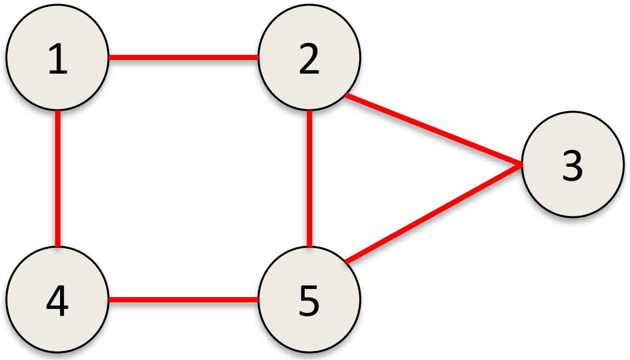
ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

Θεώρημα 1

Εάν A είναι ο πίνακας γειτνίασης ενός απλού γράφου G, τότε το στοιχείο στη θέση $i,\ j$ του πίνακα A^{ν} είναι ίσο με τον αριθμό των μονοπατιών μήκους $\nu, \nu > 0$, από τον κόμβο v_i στον κόμβο v_j του γράφου.

Θεώρημα 2

Εάν A είναι ο πίνακας γειτνίασης ενός απλού γράφου G, τότε τα στοιχεία της κύριας διαγωνίου του πίνακα A^2 είναι ίσα με το βαθμό της κάθε κορυφής του γράφου.



$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad A^2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad A^3 = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 2 & 4 & 1 \\ 5 & 2 & 4 & 1 & 6 \\ 2 & 4 & 2 & 2 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 0 & 5 \\ 1 & 6 & 4 & 5 & 2 \end{bmatrix}$$

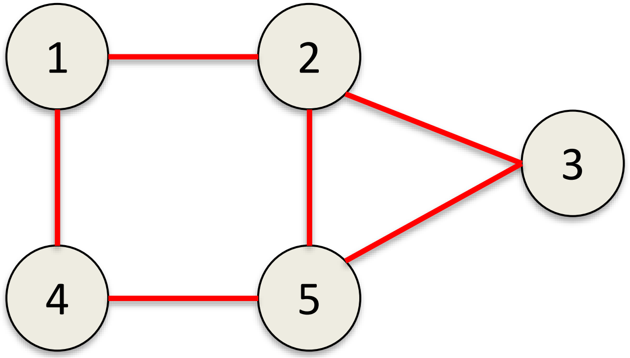
Πρόταση

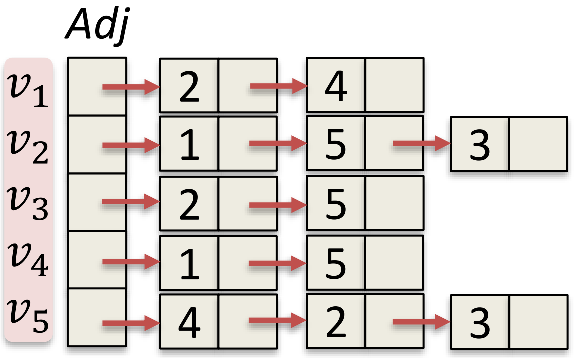
‘Εστω G_1 και G_2 δύο απλοί γράφοι. Αυτοί είναι ισόμορφοι, εάν και μόνο εάν με κάποια διάταξη των κόμβων τους, οι πίνακες γειτνίασής τους είναι ίσοι.

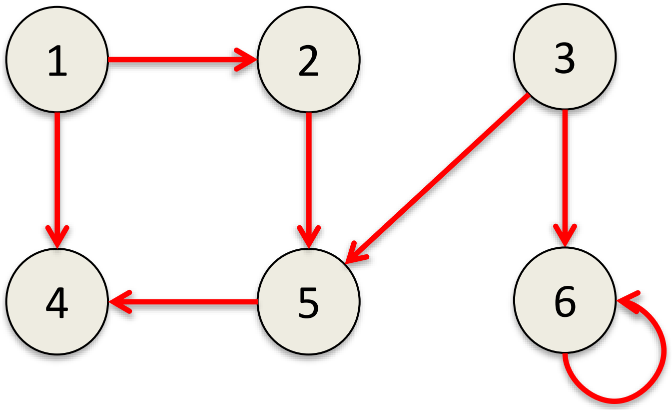
ΛΙΣΤΕΣ ΓΕΙΤΝΙΑΣΗΣ

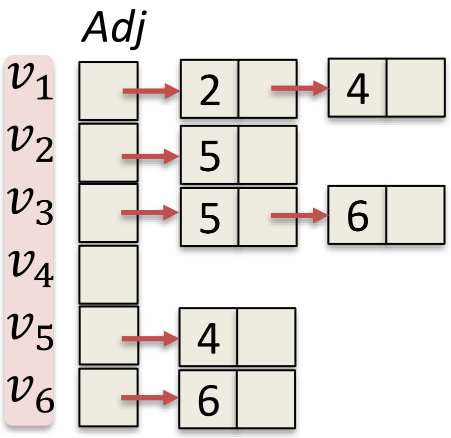
- **Λίστα γειτνίασης** (adjacency list) είναι ένας $n \times 1$ πίνακας Adj, όπου $Adj[u]$ είναι ένας δείκτης σε μια λίστα που περιέχει τους κόμβους που γειτονεύουν με τον κόμβο u.
  - Μπορούμε να ελέγξουμε εάν $e_{i,j} \in E$ (ακμή που εφάπτεται στους v_i, v_j) σε χρόνο $\mathcal{O}(n)$.
  - Μπορούμε να διαπεράσουμε τους γειτονικούς κόμβους όλων των κόμβων σε χρόνο $\mathcal{O}(m)$, όπου m το πλήθος των ακμών του γράφου.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ










```
struct node{
    int vertex;
    struct node* next;
};

struct Graph{
    int numVertices;
    struct node** adjLists;
};
```

Κωνσταντίνος Γιαννουτάκης

Επίκ. Καθηγητής

kgiannou@uom.edu.gr