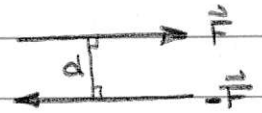
4.4. Moment of a Couple — عزم المزدوج

Couple

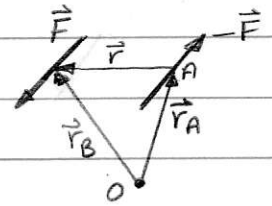
المزدوج : هو قوتين متوازيتين متساويتين في المقدار ومتعاكستين في الاتجاه يفصل بينهما مسافة عمودية قدرها (d).



وبما ان محصلة القوى هي (صفر)، لذلك فأن المزدوج يسبب فقط تأثيراً للتدوير

(مثل مسك عجلة قيادة السيارة بيدين اثنين و تدوير العجلة)

* العزم الناتج عن المزدوج يدعى "عزم المزدوج (a couple moment)" ويمكن تحديد قيمته من خلال ايجاد مجموع عزوم القوى المكونة للمزدوج حول نقطة معينة.
* عزم المزدوج هو متجه حر (Free Vector) اي انه يعمل (يؤثر) على اي نقطة وليس مثل العزم (moment) حول نقطة (او محور) الذي سبق التعرف عليه.



$$M_{@O} = \vec{r}_B \times \vec{F} + \vec{r}_A \times (-\vec{F})$$

$$= (\vec{r}_B - \vec{r}_A) \times \vec{F}$$

but $\vec{r}_B = \vec{r}_A + \vec{r}$ ⇒ or $\vec{r} = \vec{r}_B - \vec{r}_A$, then

$$M_{@O} = \vec{r} \times \vec{F}$$

وبذلك يكون عزم المزدوج معتمد على ($\vec{r}$) وليس على $\vec{r}_A$ أو $\vec{r}_B$ [Free Vector]

Moment of a Couple Formulation

Scalar Formulation

- Magnitude

$$M = Fd$$

حيث ان:-

F: مقدار احدى قوى المزدوج

d: المسافة العمودية بين القوتين

- Direction

اتجاه عزم المزدوج يخضع لاتجاه الابهام في قاعدة اليد اليمنى (M ستكون عمودية على المستوى الذي يحتوي القوتين)

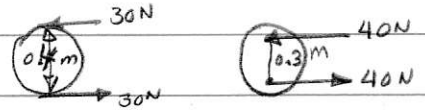
Vector Formulation

استغلال Cross Product لايجاد عزم المزدوج :-

$$M = \vec{r} \times \vec{F}$$

Equivalent Couples

المزدوجات المتكافئة :- اذا كان هناك مزدوجين اثنين لهما نفس المقدار ونفس الاتجاه ، فأن هذين المزدوجين يعتبران متكافئين .



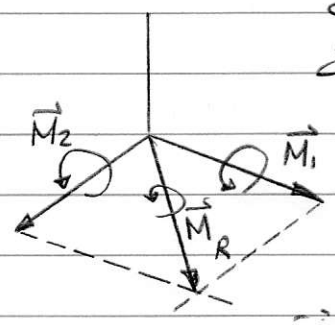
في الشكل المجاور :- كلا المزدوجين

$M = (0.4)(30) = 12^{N.m}$ $\quad M = (0.3)(40) = 12^{N.m}$

لهما مقدار يساوي ($12\ N.m$) واتجاه واحد هو عمودي على الورقة (خارج من الورقة) .

Resultant Couple Moment

محصلة عزوم المزدوج :- بما ان عزم المزدوج هو (Vector) ، لذلك يمكن ايجاد المحصلة بتطبيق جمع المتجهات وذلك من خلال تحريك $\vec{M}_1$ و $\vec{M}_2$ (لانها متجهات حرة) الى ان تلتقي بدايتهما ومن ثم تكمل متوازي الاضلاع ونجد المحصلة $\vec{M}_R$



أو يمكن كتابة المحصلة بصيغة i, j, k من خلال :-

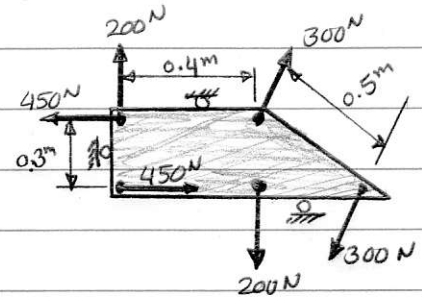
$$M_R = \Sigma (\vec{r} \times \vec{F})$$

ملاحظة :- في مسائل (3D) ، يتم الحصول على عزم المزدوج من خلال التمثيل المتجه (Vector) :-

$$M = \vec{r} \times \vec{F}$$

حيث ان r : متجه يبدأ من اي نقطة على خط تأثير القوة الاولى الى اي نقطة على خط تأثير القوة الثانية .

<u>Ex</u> Determine the resultant couple moment of the three couples acting on the plate.



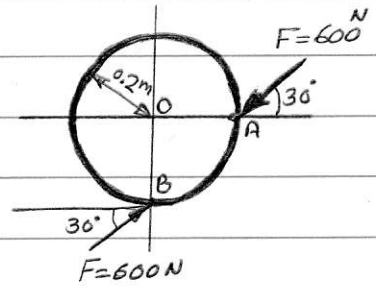
<u>Solution:</u>

$$M_R = \Sigma M$$

$$= (450)(0.3) - (200)(0.4) - (300)(0.5)$$

$$= -95\ N.m \quad \text{or} = 95\ N.m$$

Ex Determine the magnitude and direction of the couple moment acting on the wheel shown in figure.



Solution :-

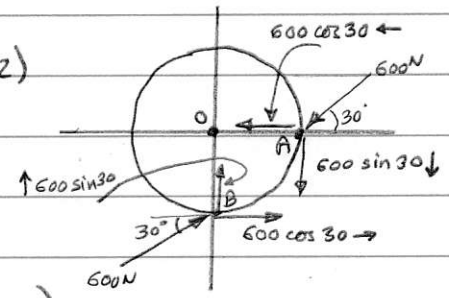
يمكن ايجاد M من خلال $M = Fd$ إلا ان ايجاد قيمة (d) فيه تفاصيل حل كثيرة (d : هي المسافة العمودية بين خطي تأثير القوتين).

أو يمكن تحليل كل قوة الى مركباتها على محوري (x, y) :-

about "O" ;

$\therefore M_R = \Sigma M_{@O} = (600\cos 30)(0.2) - (600\sin 30)(0.2)$

$= 43.9 \text{ N.m} \circlearrowleft$



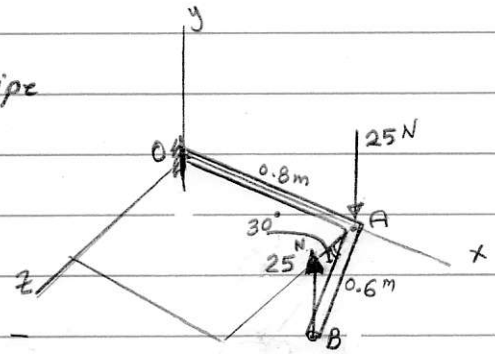
about "A" ;

$\therefore M_R = \Sigma M_{@A} = (600\cos 30)(0.2) - (600\sin 30)(0.2)$

$= 43.9 \text{ N.m} \circlearrowright$

Free Vector !!!

Ex : Determine the couple moment acting on the pipe shown in figure. Segment AB is directed (30°) below the (x-z) plane



Solution :- المسألة هي (3D) لذلك يفضل التعامل معها بصيغة (Vector) أو (i, j, k).

- المفروض ان نجد المتجه ($\vec{r}_{AB}$) الواصل بين القوتين . هذا المتجه $\vec{r}_{AB}$ هو :-

$A(0.8, 0, 0)$, $B(0.8, -0.6\sin\theta, 0.6\cos\theta)$

$\therefore \vec{r}_{AB} = (0.8-0.8)i + (-0.6\sin\theta - 0)j + k(0.6\cos\theta - 0)$ $[\theta = 30°]$

$\vec{r}_{AB} = -0.3j + 0.5196k$

- القوة بصيغة Cartesian Vector هي :-

$\vec{F} = 25j$