

EÖTVÖS LORÁND TUDOMÁNYEGYETEM  
TERMÉSZETTUDOMÁNYI KAR

FIZIKAI INTÉZET

# Háromrészeske Bose-Einstein korrelációk vizsgálata

*Bagoly Attila*

*Fizikus MSc*

Témavezető:

*Csanád Máté*

*ELTE TTK Atomfizikai tanszék*



2017

# Tartalomjegyzék

<b>1. Bevezetés</b>	<b>1</b>
1.1. Nagyenergiás nehézion-fizika . . . . .	1
1.2. Kvar-k-gluon plazma . . . . .	2
1.3. A PHENIX kísérlet . . . . .	4
<b>2. Bose-Einstein korrelációk</b>	<b>4</b>
2.1. Definíció . . . . .	4
2.2. Két nem kölcsönható részecske korrelációs függvénye . . . . .	5
2.3. Forrás függvény . . . . .	6
2.3.1. Lévy eloszlás . . . . .	7
2.4. A mag-glória modell . . . . .	9
2.5. A korreláció erőssége . . . . .	10
2.6. Parciális koherencia . . . . .	11
<b>3. Coulomb-korrekció számítása</b>	<b>12</b>
3.1. Coulomb-kölcsönhatás . . . . .	12
3.1.1. Kétrészecske . . . . .	12
3.1.2. Háromrészecske . . . . .	12
3.2. A Coulomb-korrekciós integrál . . . . .	12
3.3. Adaptív Gauss–Kronrod módszer . . . . .	12
3.4. Markov chain Monte Carlo módszerek . . . . .	12
3.5. Monte Carlo módszer . . . . .	12
3.6. Markov lánc . . . . .	12
3.7. Implementáció . . . . .	12
3.7.1. CUDA . . . . .	12
3.7.2. MapReduce . . . . .	12
<b>4. Adatanalízis</b>	<b>13</b>
4.1. Korrelációs függvény változói . . . . .	13
4.2. Korrelációs függvény mérése . . . . .	13
4.3. Illesztett modell . . . . .	13
<b>5. Eredmények</b>	<b>13</b>
5.1. Illesztés vizualizáció . . . . .	13
5.2. Háromrészecske korrelációs erősség . . . . .	13
5.3. Parciális koherencia . . . . .	13
<b>6. Összefoglaló</b>	<b>13</b>

# 1. Bevezetés

## 1.1. Nagyenergiás nehézion-fizika

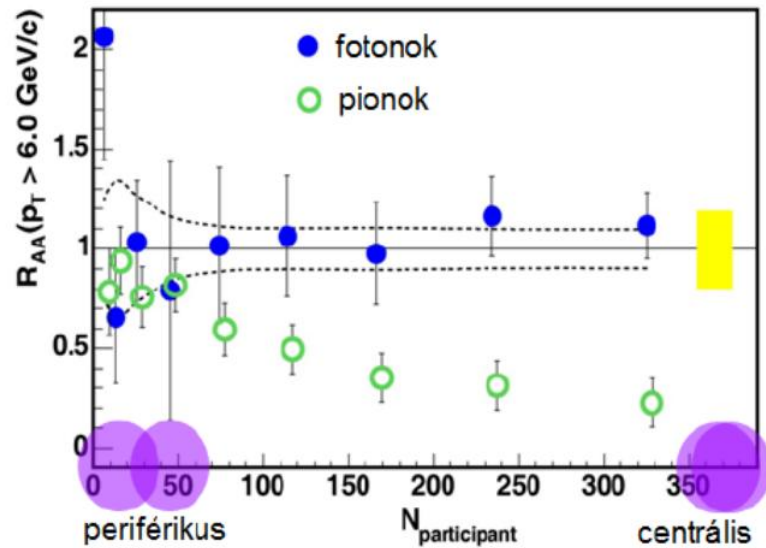
A nehézion-fizikában nagy rendszámú atommagok közel fénysebességen való ütköztetésével próbálunk információt szerezni az elemi részecskék világáról. Az atommagokat közel fénysebességre gyorsítjuk elektromágneses terek segítségével (LHC, RHIC a két legnagyobb energiájú gyorsító). A labor-rendszerből nézve Lorentz-kontrahált atommagokat összeütköztetünk, az ütközés során lejátszódnak bizonyos valószínűséggel „kemény” folyamatok amelyek során részecskezápörök (jet) keletkeznek, melyek hadronokból, leptonokból és fotonokból állnak. A kemény folyamatok jellemzője, hogy a jetek párokban keletkeznek, majd az impulzusmegmaradás miatt ellenkező irányba haladnak, az ütközések során a legvalószínűbb egy jet-pár keletkezése. Egy ütközés során nem csak kemény folyamatok zajlanak, hanem a „lágymű” folyamatok is, melyek során a részecskék nem jetekben keletkeznek. Az ütköző atommagok tömegközépponti energiájának növelésével nő a kemény folyamatok valószínűsége, és csökken a lágymű folyamatoké. Az ütközési pont köré épített detektorok segítségével mérjük a keletkező részecskék eloszlásait és különböző fizikai paramétereit. Ezen adatok segítségével próbálunk következtetni az ütközés után lezajló jelenségekre.

Az ütközések jellemzésére definiálni szoktuk az impakt paramétert, amely a középpontok távolságát jelenti. Az impakt paraméter alapján centralitás osztályokba rendezzük az ütközéseket, ezen osztályokat a centrálisról periférikus felé haladva százalékosan adunk meg.

Másik fontos fogalom a nukleáris módosulási faktor, amely segítségével az ütközés folyamatát tudjuk jellemezni. Az ütközés centralitását ismerve ki tudjuk számolni az ütközésben résztvevő nukleonok számát. A teljes folyamatot elképzelhetjük bináris ütközések összegeként, amennyiben feltesszük, hogy a protonok páronként ütköznek és egymástól függetlenül zajlanak az események. Független p+p ütközésekből ismerjük egy ilyen esemény során keletkező részecskék számát. Nehézion ütközések esetén ezt a számot megszorozzuk az ütközés bináris eseményeinek számával, így megkapjuk a keletkező részecskék számát. Azonban ezt a számot közvetlenül is meghatározhatjuk két nehézion összeütköztetésével, az előbbivel vett arányt nevezzük a nukleáris módosulási faktornak. Például Au+Au ütközés esetén, ha a keletkező részecskék száma  $N_{Au}$ , bináris ütközések száma  $N_{bin}$  és p+p ütközések esetén a keletkező részecskék száma  $N_p$  akkor a nukleáris módosulási faktor a következőképpen néz ki:

$$R_{AA} = \frac{N_{Au}}{N_{bin}N_p}, \quad (1.1.1)$$

ennek értékére  $R_{AA} = 1$  várunk, mivel az Au+Au ütközéseket úgy képzeljük el, hogy az ütközésben résztvevő protonok páronként ütköztek.



1.1. ábra. Au+Au ütközések esetén a nukleáris módosulási faktor a nukleonszám függvényében pionokra és fotonokra. Az ábrán látható, hogy nagy centralitás esetén kevesebb nagyenergiás piont észlelünk mint p+p ütközések alapján várnánk, továbbá az erős kölcsönhatásban nem fotonok száma a várttal egyezik. Ez utal az erősen kölcsönható közeg jelenlétére.

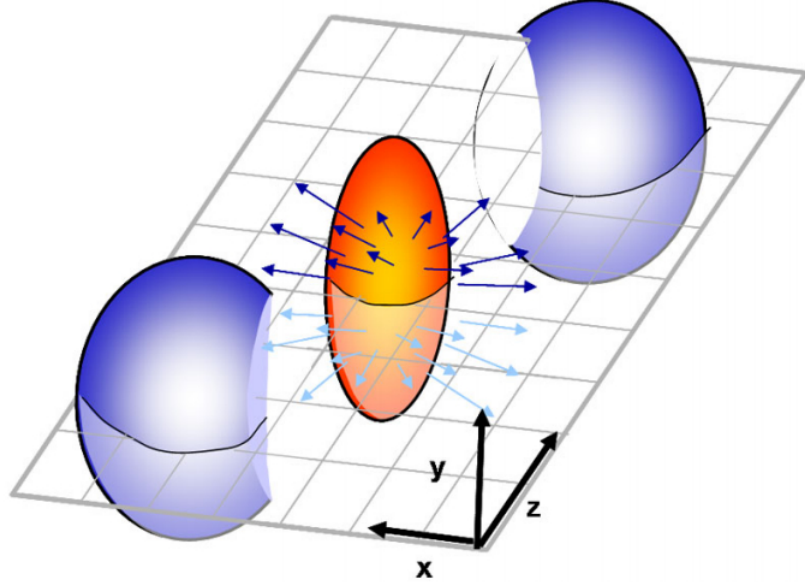
## 1.2. Kvark-gluon plazma

A RHIC gyorsítóban Au+Au ütközések során nagy nagy centralitásnál mérések során kevesebb nagyenergiás részecskét mértek a p+p ütközések alapján vártnál (1.1 ábra), a jet-párok egyik tagja nem jelent meg. Azonban ezen tapasztalatoknak több kiváltó oka is lehet, a kérdés eldöntésére további kísérleteket végeztek. Az egyik volt a deutérium-arany ütközések elvégzése, azonban itt semmilyen centralitásnál nem volt jet-elnyomás. Ennek magyarázata, hogy ütközések esetén erősen kölcsönható közeg jöhet létre amely a jet-pár egyik tagját elnyeli (amely nagyobb utat tesz meg benne), azonban deutérium-arany ütközések során a létrejövő közeg mérete túl kicsi, hogy elnyelje azt.

Ezen közeg létrejöttét elméletileg a QCD magyarázza meg. Az elmélet szerint nagyon nagy energián megjelennek kvark szabadsági fokok, azaz a kvarkok hadronba zártsága megszűnik. A létrejövő közeg az erősen kölcsönható kvark-gluon plazma nevet viseli (sQGP). Ezen közegben nagyok a hatáskeresztmetszetek, ezért kicsi a szabad úthossz és gyors a termalizáció, ezért van értelme lokális egyensúlyról beszélni, így alkalmazhatóak rá a statisztikus fizika fogalmai (pl. hőmérséklet). Az ősrobbanást követő egy milliomod másodpercben az univerzumot is a kvark-gluon plazma alkotta [20].

Az új közeg felfedezése után a RHIC gyorsítóban ezen közeg tulajdonságainak megismerését célzó kísérletek kezdődtek. Ezen kísérletek során kiderült, hogy a kvark-gluon plazma az eddig látott legtökéletesebb (viszkózitás mentes) folyadékként viselkedik, amely meglepő volt hisz nagyon kis viszkózitással rendelkező folyadékokat eddig nagyon alacsony hőmérsékleten tudtak csak előállítani. A kvarkfolyadék viszkózitására a gravitációs- és kvantumtérelméletek analógiájából (AdS/CFT) származik egy alsó becs-

lés, eszerint a viszkozitás nem lehet kisebb mint  $\hbar/4\pi$ .



1.2. ábra. Két gömb ütközéseként létrejövő speciális ellipszoidális szimmetriával rendelkező kezdeti eloszlás kialakulása.

Ultrarelativistikus sebességre felgyorsított atommagok ütközése két Lorentz-kontrahált korong ütközéseként fogható fel, laborrendszerből nézve. Amint az 1.2 ábra is szemlélteti, ez a létrejövő kvarkanyagban speciális kezdeti eloszlást eredményez, egy  $\cos(2\varphi)$ -szerinti aszimmetriát az eloszlásban, amely a tengelyszimmetriától való elliptikus eltérést jelenti. A nyalábirányra merőlegesen bevezetjük a transzverz-síkot, ebben a síkban az kvarkanyag kezdeti eloszlását Fourier-sorba fejtjük a következőképpen:

$$A(\varphi) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ a_n \cos(n\varphi) + b_n \sin(n\varphi) \right] \quad (1.2.1)$$

Ezen sorfejtés alapján látható, hogy az  $a_2$  jellemzi az előbb említett aszimmetriát, amennyiben tökéletesen gömbszimmetrikusak lennének az atommagok és a keletkező ellipszis egyik nagytengelyén vennénk föl a koordináta-rendszer x-tengelyét csupán ez a tag jelenne meg. Azonban mivel az atommagok véges nukleonszámmal rendelkeznek, melyeknek van valamilyen eloszlása a magon belül, a gömbszimmetria csupán első közelítésként fogható fel.

Az ütközés után létrejövő kvarkanyag robbanásszerűen tágul egész addig amíg a hőmérséklet le nem csökken egy bizonyos értékre, ekkor megszűnik ez a fázis és a kvarkokból hadronok keletkeznek amelyeket mérni is tudunk. Mivel a kvarkanyag folyadékszerűen viselkedik a kezdeti aszimmetriák nem tűnnek el, a kifagyás pillanatába is jelen vannak, ezért azok a keletkező hadronok eloszlásában is megjelennek.

Az aszimmetriákat jellemző paramétereket az impulzustérben szokás definiálni. A részecskék eloszlását transzverz-síkban a  $N(p_t, \varphi)$  függvénnyel jellemezzük, amely megmondja, hogy  $[\varphi, \varphi + d\varphi]$  irányban  $[p_t, p_t + dp_t]$  impulzus-tartományban mennyi részecske található. A függvény szögfüggését leválasztva, azt Fourier-sorba fejtvé és 1-re normálva a következő alakban írhatjuk:

$$N(p_t, \varphi) = N(p_t) \left( 1 + \sum_{n=1}^{\infty} [v_n \cos(n\varphi) + w_n \sin(n\varphi)] \right) \quad (1.2.2)$$

A Fourier-sor első komponensei játszanak fontosabb szerepet. Ezek közül is a  $v_2$  együtttható a leglényegesebb, mert ez a paraméter hordozza az ellipszoidális aszimmetriát, ezt az elliptikus folyás paraméterének nevezzük. Ezen aszimmetria a kifagyott hadronok és fotonok eloszlásában [1] is megjelenik, ezért a folyadékkép helyességét bizonyítja a kvark-gluon plazma esetén. A Fourier-sor szinuszos részét nem szoktuk külön kezelni, mivel a mérések során a reakciósíkhöz képesti szög szerinti sort veszünk ( $\sum v_n \cos[n(\varphi - \psi_n)]$ ), így a fenti szinuszos és koszinuszos tagok összevonva jelennek meg. Más mérési módszer esetén ugyan megjelenhetnek külön is a szinuszos tagok, de ekkor is szimmetria okokból ezen tagok eltűnnek.

### 1.3. A PHENIX kísérlet

## 2. Bose-Einstein korrelációk

Bose-Einstein korrelációk vizsgálatának megalapozói Robert Hanbury Brown és Richard Q. Twiss volt, ők 1956-ban publikált cikkükben [15] vezették be a módszert, azonban munkájuk vegyes fogadtatásban részesült a tudományos közösség részéről. A módszer segítségével képesek voltak meghatározni a Sirius csillag átmérőjét a fotonok közötti korrelációk méréséből. Mérési elrendezésük két változtatható távolságra levő foton detektorból állt (ezek egy-egy fókuszáló tányér és fotoelektron-sokszorozóból álltak). A két detektor segítségével mérték a Sirius csillagból jövő fotonok közti korrelációt, különböző detektortávolságokon. Az így kapott pontokra elméleti megfontolásokból kapott korrelációs függvényt illesztettek, amely segítségével meghatározták a csillag átmérőjét. A két tudós tiszteletére a bozonok közti intenzitás korrelációt szokás Hanbury Brown és Twiss effektusnak nevezni (vagy röviden HBT effektus), az ilyen jellegű vizsgáldásokat pedig HBT analízisnek.

A HBT effektus részecskefizikai alkalmazásában jelentős szerepet játszott G. Goldhaber, S. Goldhaber, W.Y. Lee és A. Pais kutatása, akik proton-antiproton 1.05 GeV/c tömegközépponti energián történő ütköztetésekben keletkező pionokat vizsgáltak. Mérésük során azonos pionok között nem várt korrelációt tapasztaltak, melynek vizsgálatával felfedezték a  $\rho^0$  rezonanciát, amely  $4.5 \cdot 10^{-24}$  másodperc alatt elbomlik két pionra ( $\rho^0 \rightarrow \pi^+ \pi^-$ ), eredményüket 1960-ban publikálták [14]. Később kiderült, hogy az általuk tapasztalt korrelációnak az oka, hogy a fotonokhoz hasonlóan a pionok is bozonok. Goldhaber és társai kutatása nyomán a részecskefizikában is beindult a HBT effektus vizsgálata. Későbbiekben kiderült, hogy az asztrofizikához hasonlóan ezek a korrelációk itt is információt hordoznak a forrás geometriájáról [17].

### 2.1. Definíció

Általánosan  $n$  részecske közti korrelációs függvény a következőképpen definiálható [4, 10]:

$$C_n(p_1, p_2, \dots, p_n) = \frac{N_n(p_1, p_2, \dots, p_n)}{N_1(p_1)N_1(p_2) \dots N_1(p_n)}, \quad (2.1.1)$$

ahol  $p_i = (p_i^0, \mathbf{p}_i)$  4-es impulzusmomentum,  $N_n(p_1, p_2, \dots, p_n)$  az  $n$  részecske invariáns momentum eloszlás. A korrelációs függvény szemléletesen azt mondja meg, hogy milyen valószínűséggel keletkezik egy részecske  $n$ -es  $p_1, p_2, \dots, p_n$  4-es momentumokkal.

Az  $n$  részecske invariáns impulzusmomentum eloszlás meghatározható a következő módon:

$$N_n(p_1, p_2, \dots, p_n) = \int \prod_{i=1}^n \mathcal{S}(p_i, x_i) |\Psi_{p_1, p_2, \dots, p_n}(x_1, x_2, \dots, x_n)|^2 \prod_{i=1}^n d^4 x_i, \quad (2.1.2)$$

ahol a  $\Psi_{p_1, p_2, \dots, p_n}(x_1, x_2, \dots, x_n)$  az  $n$  részecske hullámfüggvény, az  $\mathcal{S}(p_i, x_i)$  pedig az úgynevezett forrásfüggvény, amely megadja annak a valószínűségét, hogy  $x_i$  helyen keletkezik egy részecske  $p_i$  impulzussal.

Az  $n$  részecske hullámfüggvény meghatározásához nemrelativisztikus közelítést használunk HBT effektus vizsgálata során, így a függvényt a Schrödinger egyenlet megoldásából kapjuk (ügyelve, arra hogy mivel bozonjaink vannak, két részecske felcserélésére szimmetrikus legyen a hullámfüggvény):

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n, t)}{\partial t} = \left[ \sum_{i=1}^n \left( -\frac{\hbar^2}{2m_i} \Delta_i + V_i(\mathbf{x}_i) \right) + \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} V_{ij}(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) \right] \Psi(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n, t) \quad (2.1.3)$$

A HBT effektus vizsgálatánál a különböző számítások könnyítése érdekében elhanyagoljuk az erős kölcsönhatást, amely tapasztalatok szerint pionok esetén megtehető, de már protonok esetén nem [18]. Továbbá csak a párok közti Coulomb-kölcsönhatást vesszük figyelembe, elhanyagolva többi hadron által okozott töltésfelhőt. Így a 2.1.3 egyenlet a következő, egyszerűbb alakra egyszerűsödik:

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n, t)}{\partial t} = \left[ -\sum_{i=1}^n \frac{\hbar^2}{2m_i} \Delta_i + \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} V_C(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) \right] \Psi(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n, t) \quad (2.1.4)$$

Mivel energia saját állapotokkal dolgozunk, ezért a 2.1.4 egyenletet megoldó hullámfüggvény felírható:

$$\Psi_{p_1, p_2, \dots, p_n}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n, t) = \Psi_{p_1, p_2, \dots, p_n}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n) \prod_{i=1}^n e^{-\frac{i}{\hbar} c p_i^0 t}, \quad (2.1.5)$$

ahol  $\Psi_{p_1, p_2, \dots, p_n}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n)$  az időfüggetlen Schrödinger egyenlet megoldása:

$$\left[ -\sum_{i=1}^n \frac{\hbar^2}{2m_i} \Delta_i + \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} V_C(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) - c \sum_{i=1}^n p_i^0 \right] \Psi_{p_1, p_2, \dots, p_n}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n) = 0 \quad (2.1.6)$$

Továbbá könnyedén belátható, hogy a 2.1.2 egyenletben szereplő hullámfüggvény abszolút értéke szimmetrizációt elvégezve a következő lesz (nemrelativisztikus közelítésben mondhatjuk, hogy  $\mathbf{x}_i = (t, \mathbf{x}_i)$ ):

$$|\Psi_{p_1, p_2, \dots, p_n}(x_1, x_2, \dots, x_n)| = \frac{1}{\sqrt{n!}} \left| \sum_{(\alpha)} \Psi_{p_1, p_2, \dots, p_n}(\mathbf{x}_{\alpha_1}, \mathbf{x}_{\alpha_2}, \dots, \mathbf{x}_{\alpha_n}) \right| \quad (2.1.7)$$

ahol  $\sum_{(\alpha)}$  az  $(1, 2, \dots, n)$  összes permutációjára való összegzés.

## 2.2. Két nem kölcsönható részecske korrelációs függvénye

Két azonos részecske esetén, nem kölcsönható esetben a 2.1.4 egyenlet könnyedén megoldható, megoldásai a jól ismert síkhullámok. A kétrészecskés invariáns impulzuseloszlásban szereplő hullámfüggvény szimmetrizáció elvégzése után a következő lesz:

$$\Psi_{p_1 p_2}(x_1, x_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} (e^{ip_1 x_1 + ip_2 x_2} + e^{ip_2 x_1 + ip_1 x_2}) \quad (2.2.1)$$

A  $K = p_1 + p_2$ ,  $k = \frac{p_1 - p_2}{2}$ ,  $r = x_1 - x_2$ ,  $R = \frac{x_1 + x_2}{2}$  változókra áttérve (ezen transzformáció esetén az integrálási mérték nem változik, hiszen  $d^4x_1 d^4x_2 = d^4R d^4r$ ) a hullámfüggvény abszolút értéke a következő alakra egyszerűsödik:

$$|\Psi_{p_1 p_2}(r, R)| = \frac{1}{\sqrt{2}} |e^{KR}(e^{ikr} + e^{-ikr})| = \sqrt{2} |\cos 2kr| \quad (2.2.2)$$

Ebből következőleg a kétrészecske invariáns momentumeloszlásra a következő alak adódik:

$$N_2(p_1, p_2) = \tilde{S}(0, p_1) \tilde{S}(0, p_2) + \frac{1}{2} (\tilde{S}(2k, p_1) \tilde{S}^*(2k, p_2) + \tilde{S}^*(2k, p_1) \tilde{S}(2k, p_2)), \quad (2.2.3)$$

ahol  $\tilde{S}$  a forrásfüggvény Fourier transzformáltja:

$$\tilde{S}(q, k) = \int d^4x \mathcal{S}(x, k) e^{iqx} \quad (2.2.4)$$

Az egyrészecske invariáns momentumeloszlásra pedig  $N_1(p) = \tilde{S}(0, p)$  adódik. Ezekből a 2.1.1 definíciót használva a kétrészecske korrelációs függvényre kapjuk a következő alakot:

$$C_2(p_1, p_2) = 1 + \frac{\tilde{S}(2k, p_1) \tilde{S}^*(2k, p_2) + \tilde{S}^*(2\mathbf{k}, p_1) \tilde{S}(2\mathbf{k}, p_2)}{2\tilde{S}(0, p_1) \tilde{S}(0, p_2)} \quad (2.2.5)$$

Szokás alkalmazni a  $p_1 \approx p_2 \approx K = p_1 + p_2$  közelítést ( $q \ll K$ ), amelyet az indokol, hogy a forrást Fourier transzformáltjának az egyes részecskék momentumától való függése sokkal simább mint a relatív momentumtól való függése [16]. A kétrészecske korrelációs függvény ekkor:

$$C_2(k, K) = 1 + \frac{|\tilde{S}(k, K)|^2}{|\tilde{S}(0, K)|^2} \quad (2.2.6)$$

Ez az alak azt a fontos üzenetet hordozza, hogy a kétrészecske korrelációs függvény meghatározásával megkapjuk a forrásfüggvény Fourier transzformáltját. Tehát a korrelációs függvény méréssel a forrás függvényt meg tudjuk határozni.

A korrelációs függvény a  $k, K$  négyes impulzusok helyett hármass momentumokkal is kifejezhető, ugyanis a két négyesmomentum szorzata definíció és az egyes részecskék tömeghőj feltétele ( $p_{i\mu} p_i^\mu = 0$ ) alapján eltűnik, azaz:

$$0 = kK = k_0 K_0 - \mathbf{k} \mathbf{K} \Rightarrow k_0 = \frac{\mathbf{k} \mathbf{K}}{K_0} \quad (2.2.7)$$

A  $p_1 \approx p_2 \approx K$  feltevés alapján a  $K$  körülbelül tömeghőj van, azaz  $K_0 = \sqrt{m^2 - \mathbf{K}^2}$ , így a korrelációs függvény a  $k, K$  négyes-momentumok helyett a  $\mathbf{k}, \mathbf{K}$  hármass-momentumok függvényeként is tekinthető.

### 2.3. Forrás függvény

A 2.1.2 egyenletben szereplő  $\mathcal{S}(p, x)$  függvényt nevezzük forrásfüggvénynek, ez megadja annak a valószínűségét, hogy  $x$  helyen keletkezik egy  $p$  impulzusú részecske. Az általunk vizsgált energiákon, az ütközés során kvark-gluon plazma keletkezik, amely robbanásszerűen tágul, melynek következtében csökken a hőmérséklete. Ha lokálisan a QGP eléri egy bizonyos hőmérsékletet, akkor fázisátmenet történik, kifagynak a kvark szabadsági fokok és hadronok keletkeznek. A forrásfüggvényt épp ezen fázisátmenetek határozzák meg.



A fázisátmenetet pillanatszerűnek tekinthetjük, mivel ha feltesszük, hogy ez nem teljesül, akkor mondhatjuk, hogy a forrásfüggvény felírható szorzat alakban:  $\mathcal{S}(x) = \mathcal{S}_T(\tau)\mathcal{S}(\mathbf{x})$ . Az időfüggő részre feltehető továbbá:

$$\mathcal{S}_T(\tau) = \frac{1}{(2\pi\Delta\tau)^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{(\tau-\tau_0)^2}{2\Delta\tau^2}} \quad (2.3.1)$$

Térszerű részre kevés megszorítással élve, a kétrészecske korrelációs függvényre a következő alak adódik:

$$C_2(k) = 1 + \lambda e^{-k_0\Delta\tau^2 - k_{\text{long}}R_{\text{long}}^2 - k_{\text{side}}R_{\text{side}}^2 - k_{\text{out}}R_{\text{out}}^2}, \quad (2.3.2)$$

ahol az  $R_{\text{long}}, R_{\text{side}}, R_{\text{out}}$  az úgynevezett HBT sugarak. Továbbá adódik a HBT sugarak közti következő összefüggés:

$$R_{\text{out}}^2 - R_{\text{side}}^2 \propto \Delta\tau^2 \quad (2.3.3)$$

Kísérleti tapasztalat továbbá, hogy  $R_{\text{out}} \approx R_{\text{side}}$ , ebből következőleg a  $\Delta\tau \approx 0$ , tehát, a forrásfüggvény időfüggő része egy  $\tau_0$ -ra koncentrált Dirac-delta, azaz a fázisátmenet pillanatszerűen történik [19, 10, 8].

A forrásfüggvény alakjára elsődlegesen Gauss eloszlást alkalmaztak [11, 16], azonban a PHENIX kísérletben  $\sqrt{s_{NN}} = 200$  GeV tömegközépponti energiájú arany-arany ütközések során bizonyítékot találtak nem gaussi, lassan lecsengő struktúrára [2]. Egy magyarázat a lassan lecsengő viselkedésre lehet a Lévy repülés [7]. A kvark-glon plazmából már kifagyott hadronok gáza tágu, így a rendszer egyre hidegebb, ritkább lesz, a hatáskeresztmetszetek egyre kisebbé válnak, megnövelve az átlagos szabad úthosszat. Ennek következtében egyre hosszabb lépések is megjelennek a hadronok véletlen bolyongás során. Ennek következtében eltávolodás eloszlása lassan lecsengő eloszlás lesz, melynek szórása már nem létezik. Ezen véletlen bolyongó hadronok aztán elbomolhatnak a vizsgált részecskékre, ezért járulékot adnak a forrásfüggvénybe. Ezen hadronok eltávolodása (QGP-ből való kifagyás helyétől), a centrális határeloszlás tétele alapján Lévy eloszláshoz tart, hiszen az összeadott lépések lassan lecsengő eloszlással rendelkező valószínűségi változónak tekinthető.

### 2.3.1. Lévy eloszlás

A forrásfüggvény alakjára munkám során három dimenziós Lévy eloszlást használtam. A Lévy eloszlás három dimenzióban a következő karakterisztikus függvény segítségével adható meg:

$$\Phi(\mathbf{q}, \alpha, R) = e^{-|\mathbf{q}R|^\alpha} \quad (2.3.4)$$

A karakterisztikus függvény Fourier transzformáltját kiszámolva (az integrálás csak numerikusan végezhető el) megkapható a Lévy eloszlás:

$$\mathcal{L}(\mathbf{r}, \alpha, R) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3q \Phi(\mathbf{q}, \alpha, R) e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}} = \frac{1}{(2\pi)^3} \int e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}} e^{-|\mathbf{q}R|^\alpha}, \quad (2.3.5)$$

ahol  $0 < \alpha \leq 2$  és  $0 < R$  a Lévy eloszlás paraméterei. Speciálisan,  $\alpha = 2$  esetén a Lévy eloszlás a normális eloszlás lesz:

$$\mathcal{N}(\mathbf{r}, \sigma) = \mathcal{L}\left(\mathbf{r}, \frac{\sigma}{\sqrt{2}}\right) = \mathcal{L}\left(\mathbf{r}, 2^{-\frac{1}{\alpha}}\sigma\right) \quad (2.3.6)$$

Mivel Lévy eloszlást használunk a forrás modellezésére, ezért a Lévy paraméterek a forrásról hordoznak információt, és magára a forrásra jellemzőek. Egy  $\alpha, R$  paraméterű forrás esetén, a forrásfüggvényre a következő alakot használjuk:

$$\mathcal{S}(p, x; \alpha, R) = \mathcal{L}(\mathbf{x}, \alpha, 2^{-\frac{1}{\alpha}}R) \quad (2.3.7)$$

A Lévy eloszlás skálaparamétertől való függésére ( $R$  paraméter) teljesül a következő összefüggés:

$$\mathcal{L}(\mathbf{r}, \alpha, R) = \mathcal{L}\left(\frac{\mathbf{r}}{R}, \alpha, 1\right) R^{-3} \equiv \mathcal{L}\left(\frac{\mathbf{r}}{R}, \alpha\right) R^{-3} \quad (2.3.8)$$

Továbbá az eloszlás nem függ az  $\mathbf{r}$  irányától, csak a nagyságától (belátható változócsere segítségével  $\mathbf{q}' = \mathbf{A}\mathbf{q}$ :  $|\mathbf{q}| = |\mathbf{q}'|\mathbf{q}\mathbf{r} = |\mathbf{q}||\mathbf{r}|$ , ekkor  $d^3q = d^3q'$ ):

$$\mathcal{L}(\mathbf{r}, \alpha, R) = \mathcal{L}(|\mathbf{r}|, \alpha, R) \quad (2.3.9)$$

Az egydimenziós Lévy eloszlás aszimptotikus viselkedéséből [5] kiindulva könnyedén meghatározható a háromdimenziós eloszlás viselkedése is. Nagy  $r$  paraméter esetén, a Lévy eloszlás a következő sor segítségével kapható meg ( $r \gg 1$ ):

$$\mathcal{L}(r, \alpha) \approx \frac{\alpha}{2\pi^2} \sum_{k=1}^N (-1)^{k+1} \frac{\Gamma(\alpha k)}{\Gamma(k)} \sin\left(\frac{\pi \alpha k}{2}\right) \frac{\alpha k + 1}{r^{\alpha k + 3}}, \quad (2.3.10)$$

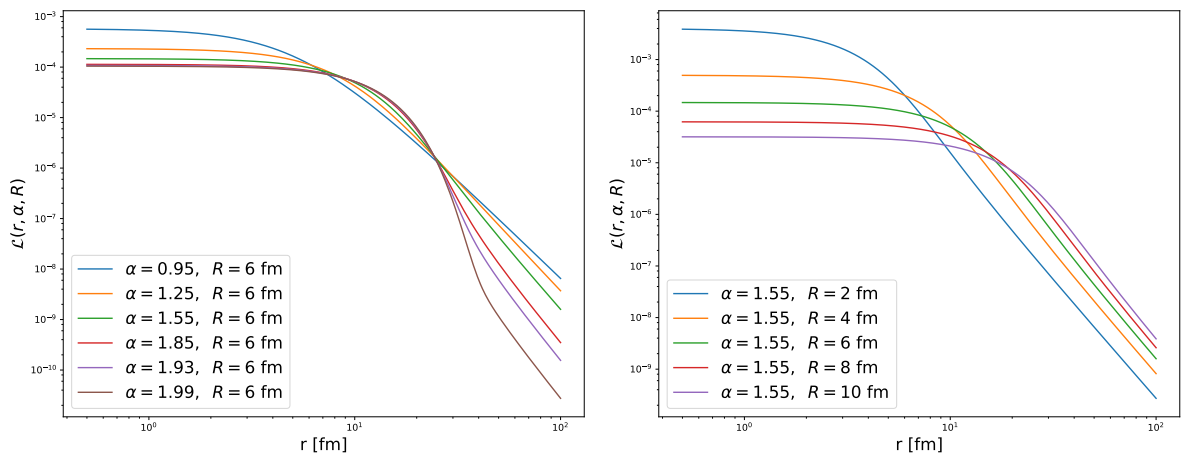
ahol  $\Gamma(x)$  a Gamma függvény:

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty x^{z-1} e^{-x} dx \quad (2.3.11)$$

A kis  $r$  viselkedés hasonló módon egy sor segítségével kapható ( $r \ll 1$ ):

$$\mathcal{L}(r, \alpha) \approx -\frac{1}{2\pi^2\alpha} \sum_{k=0}^n \frac{\Gamma\left(\frac{k+3}{\alpha}\right)}{\Gamma(k+3)} \sin\left(\frac{\pi(k+3)}{2}\right) (k+2)(k+1)x^k \quad (2.3.12)$$

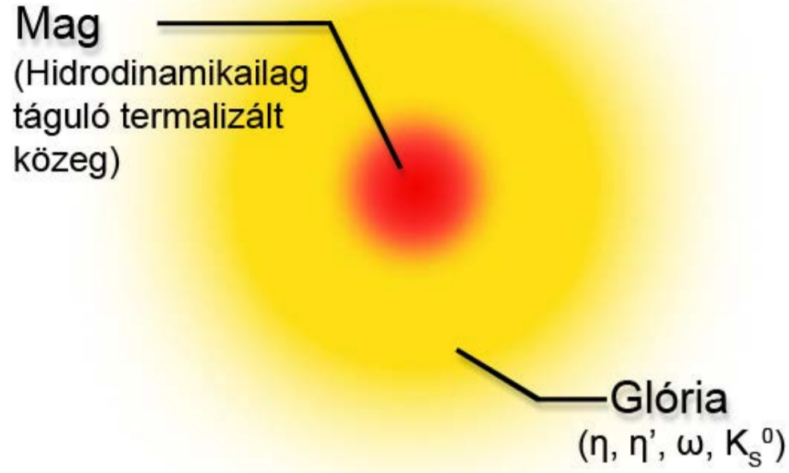
A Lévy eloszlás meghatározása során kis és nagy értékekre ezen aszimptotikus sorokat alkalmaztam, a köztes tartományban pedig 15 pontú adaptív Gauss Kronrod integrálási módszert alkalmaztam (részletek a 3.3 fejezetben), melyet GPU-ra párhuzamosítva CUDA-ban (részletek a 3.7.1 fejezetben), továbbá klasztere párhuzamosítva MapReduce programozási modellben implementáltam (részletek a 3.7.2 fejezetben). Az integrálást sok paraméterre elvégeztem (felbontást úgy állítottam be, hogy két pont között lineáris interpoláció hibája a megengedett hiba alatt legyen), eredményekből egy Lévy táblázat készült, amelyhez egy könnyen használható olvasó interfész tartozik. Néhány  $\alpha$  és  $R$  paraméter esetén az eloszlást a 2.1 ábrák szemléltetik.



2.1. ábra. Háromdimenziós Lévy eloszlás sugárfüggése különböző  $\alpha$  és  $R$  paraméterek esetén.

## 2.4. A mag-glória modell

A HBT effektus vizsgálata során nehéz ionokat ütköztetünk nagy energián. Az ütközés során létrejövő kvark-gluon plazma robbanásszerűen tágul (ezen tágulás leírására hidrodinamika alkalmazható), elérve egy kritikus hőmérsékletet fázisátmenet történik, hadronok fagynak ki pillanatszerűen. A hadronok közül munkánbana töltött pionok közti korrelációt vizsgáltam, mivel ezen részecskékből keletkezik a legtöbb az ütközések során. A kirepülő pionokat az ütközési centrum köré épített detektorrendszerrel detektáljuk. Azonban pionok nem csak a forró kvarkanyag kifagyása során keletkeznek, hanem később, instabil részecskék (pl.  $\eta, \eta', \omega$ ) bomlásából is [6]. Ezen jelenség leírására szolgál a mag-glória (core-halo) modell [13, 10], melynek szemléltetése a 2.2 ábrán látható. A mag mérete 10 femtométer alatti, míg a glória mérete több száz, vagy akár több ezer femtométer is lehet, mivel egyes hosszú élettartamú instabil részecskék ilyen távolságokra jutnak el mielőtt elbomlanának pionokra.



2.2. ábra. Mag-glória modell szemléltetése.

Mivel a 2.2.6 összefüggés alapján a korrelációs függvény a forrás Fourier transzformáltjával áll kapcsolatban, továbbá a glóriában a pionok nagy  $x$  távolságokon keletkeznek, ezért a glória kis relatív impulzusú tartományban ad járulékot a korrelációs függvényhez. Ugyanakkor a detektor impulzusfelbontása véges, ezért az egymáshoz nagyon közeli impulzussal rendelkező részecskék nem megkülönböztethetők, azaz bizonyos relatív impulzus alatti tartományban (felbonthatatlan régió) nem tudjuk megmérni a korrelációs függvényt. Ezt az effektust szemlélteti a 2.3 ábra.

A mag-glória modellben feltételezünk egy magot valamint egy glóriát leíró forrásfüggvény létezését. A teljes rendszert leíró forrásfüggvény pedig ezen kettő összege:

$$\mathcal{S}(x, p) = \mathcal{S}_M(x, p) + \mathcal{S}_G(x, p) \implies \tilde{\mathcal{S}}(k, K) = \tilde{\mathcal{S}}_M(k, K) + \tilde{\mathcal{S}}_G(k, k) \quad (2.4.1)$$

Mivel a Fourier transzformált a nulla helyen megegyezik a függvény integráljával, továbbá a forrásfüggvény integrálja a keletkezett részecskék számát adja meg, ezért ha a magban keletkező részecskék

száma  $N_M$ , a glóriában  $N_G$ , akkor:

$$\tilde{S}_M(0, K) = N_M, \quad \tilde{S}_G(0, K) = N_G, \quad \tilde{S}(0, K) = N_M + N_G \quad (2.4.2)$$

A nagy (legalább 50 fm) szélességű  $\mathcal{S}_G$  keskeny  $\tilde{S}_G$  Fourier transzformáltat eredményez, melynek szélessége maximálisan 4 MeV. Ez a maximális szélesség a detektor véges felbontóképességéből adódó felbonthatatlan régióba esik tipikusan, ezért az mondható, hogy:  $\tilde{S}_G \approx 0$ , azaz  $\tilde{S} = \tilde{S}_M$ . Ebből a kétrészecske korrelációs függvényre adódik:

$$C_2(k, K) = 1 + \frac{|\tilde{S}(k, K)|^2}{|\tilde{S}(0, K)|^2} = 1 + \frac{|\tilde{S}_M(k, K)|^2}{(N_M + N_G)^2} = 1 + \lambda_2 \frac{|\tilde{S}_M(k, K)|^2}{|\tilde{S}_M(0, K)|^2}, \quad (2.4.3)$$

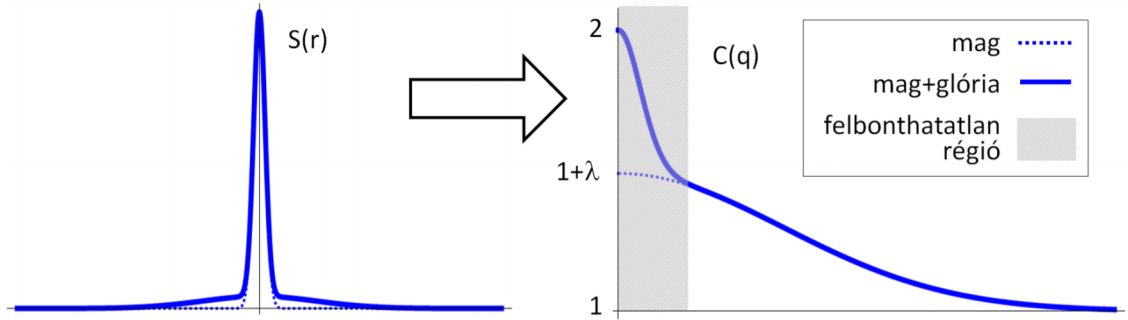
ahol bevezettem a:

$$\lambda_2 = \frac{N_M^2}{(N_M + N_G)^2} \equiv f_C^2 \quad (2.4.4)$$

jelölést. Az összefüggésben bevezettem egy új mennyiséget, a mag arányt arányát, amely megmondja, hogy az összes észlelt részecske, hányad része származik a magból:

$$f_C = \frac{N_M}{N_M + N_G} \quad (2.4.5)$$

Tehát amíg a 2.2.6 egyenletben a  $k \rightarrow 0$  esetben a korrelációs függvény  $C_2(k, K) \rightarrow 2$ , addig mag-glória modellben, a 2 helyett a  $1 + \lambda_2$ -höz tart a korrelációs függvény.



2.3. ábra. Keskeny magból és széles glóriából álló forráshoz tartozó korrelációs függvény. A glória keskeny csúcsot eredményez a korrelációs függvényben, amely a detektor véges felbontásának következtében nem látható.

## 2.5. A korreláció erőssége

A mag-glória modellnél láttuk, hogy a kétrészecske korrelációs függvény kis relatív impulzusokra tart a 2.4.4 egyenlet által definiált  $\lambda_2$  paraméter által meghatározott  $1 + \lambda_2$  értékhez. Ezt a paramétert szokás kétrészecske korrelációs erősségnek nevezni.

Ebből kiindulva általánosan definiálhatjuk az  $n$  részecske korrelációs erősséget:

$$\lambda_n = \lim_{k_1 \rightarrow 0} \dots \lim_{k_n \rightarrow 0} C_n(k_1, \dots, k_n) - 1 \quad (2.5.1)$$

Mag-glória modell esetén az  $n$  részecske korrelációs erősség kifejezhető a 2.4.5 összefüggéssel definiált magarány segítségével a következőképpen [9]:

$$\lambda_n = \sum_{j=1}^n \binom{n}{j} \alpha_j f_C^j \quad (2.5.2)$$

Az egyenletben szereplő  $\alpha_j$  paraméter a következőképpen határozható meg:

$$\alpha_n = n! - 1 - \sum_{j=1}^{n-1} \binom{n}{j} \alpha_j, \quad (2.5.3)$$

első néhány értéke:  $\alpha_1 = 0$ ,  $\alpha_2 = 1$ ,  $\alpha_3 = 2$ .

## 2.6. Parciális koherencia

Az eddigiekben feltettük, hogy a forrás teljesen kaotikus, a kifagyott pionok fázisa teljesen véletlenszerű. Azonban előfordulhat, hogy a kifagyott részecskepárok fáziskülönbsége részben állandó, azaz a forrás részben koherens módon kelt részecskéket. Ezt az effektust nevezik parciális koherenciának [12, 10, 9]. Ekkor a momentum eloszlást másképp kell számolni, hiszen a 2.1.2 összefüggésben már kihasználtuk, hogy a részecskék fázisa véletlenszerű, melynek következtében átlagolás során eltűnik.

Az effektust mag-glória modellnél látottakhoz hasonló módon történő figyelembevétele érdekében bevezetjük a koherencia arányát, amely megadja, hogy a magból származó részecskék hányad része keletkezett koherens módon:

$$p_C = \frac{N_M^C}{N_M} \quad (2.6.1)$$

Mag-glória modellnél láttuk, hogy amennyiben a részecskék nem csak közvetlenül a forró kvark-anyagból származnak, akkor az  $n$  részecske korrelációs erősségek függeni fognak a 2.4.5 egyenlet által definiált magaránytól a 2.5.2 egyenlet által meghatározott módon. Ehhez hasonlóan, azt mondhatjuk, hogy amennyiben részecske keletkezés során van parciális koherencia, akkor az  $n$  részecske korrelációs erősség függeni fog a magarány mellett a koherencia arányától a következő módon [12, 9]:

$$\lambda_n(f_C, p_C) = \sum_{j=2}^n \binom{n}{j} \alpha_j f_C^j [(1 - p_C)^j + j p_C (1 - p_C)^{j-1}], \quad (2.6.2)$$

ahol az  $\alpha_j$  paramétert a 2.5.3 egyenlet határozza meg. Az egyenlet két- és háromrészecske esetén a következőkre egyszerűsödik:

$$\lambda_2 = f_C^2 [(1 - p_C)^2 + 2 p_C (1 - p_C)] \quad (2.6.3)$$

$$\lambda_3 = 2 f_C^3 [(1 - p_C)^3 + 3 p_C (1 - p_C)^2] + 3 f_C^2 [(1 - p_C)^2 + 2 p_C (1 - p_C)] \quad (2.6.4)$$

Ezen két egyenlet mutatja, hogy két- és háromrészecske korrelációk vizsgálatából amennyiben meghatározzuk a korrelációs erősségeket, meghatározható az  $f_C$  és  $p_C$  paraméter, azaz a magból származó részecskék aránya, illetve a magban koherens módon keletkezett részecskék aránya.

Koherencia létének vizsgálata érdekében vezessük be a következő paramétert:

$$\kappa_3 = \frac{\lambda_3 - 3 \lambda_2}{2 \sqrt{\lambda_2^3}} \quad (2.6.5)$$

Ez a paraméter nem függ az  $f_C$  értékétől, mag-glória modell esetén koherencia hiányában konstans  $\kappa_3 = 1$  lesz. Amennyiben van parciális koherencia, ezen paraméter nem lesz konstans, függeni fog a  $p_C$  paramétertől.

### 3. Coulomb-korrekció számítása

Háromrészecke: [3]

#### 3.1. Coulomb-kölcsönhatás

##### 3.1.1. Kétrészecke

hipergeometrikus függvény számolás, aszimptotikus sor, cachelés

##### 3.1.2. Háromrészecke

#### 3.2. A Coulomb-korrekciós integrál

#### 3.3. Adaptív Gauss–Kronrod módszer

#### 3.4. Markov chain Monte Carlo módszerek

kézzel írott jegyzetet beírni

#### 3.5. Monte Carlo módszer

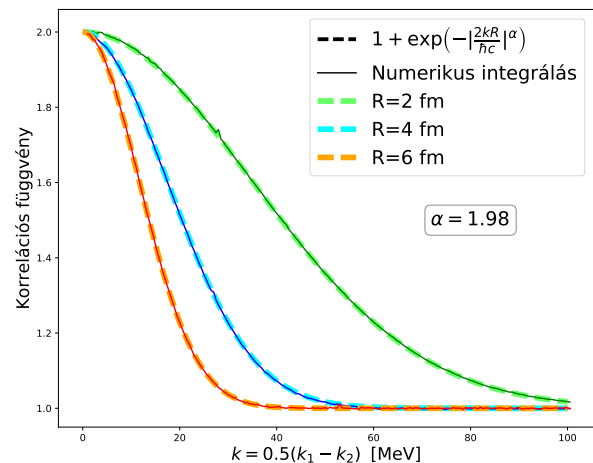
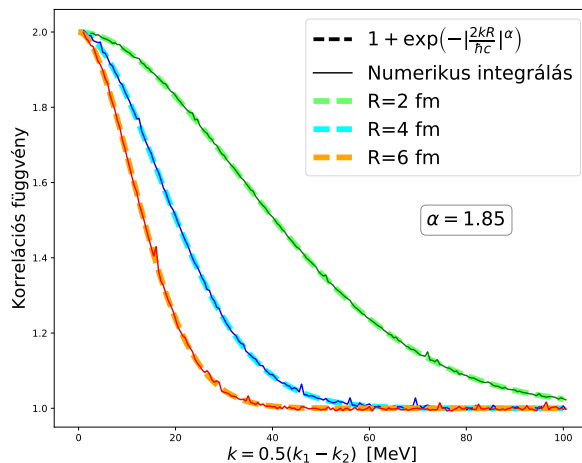
#### 3.6. Markov lánc

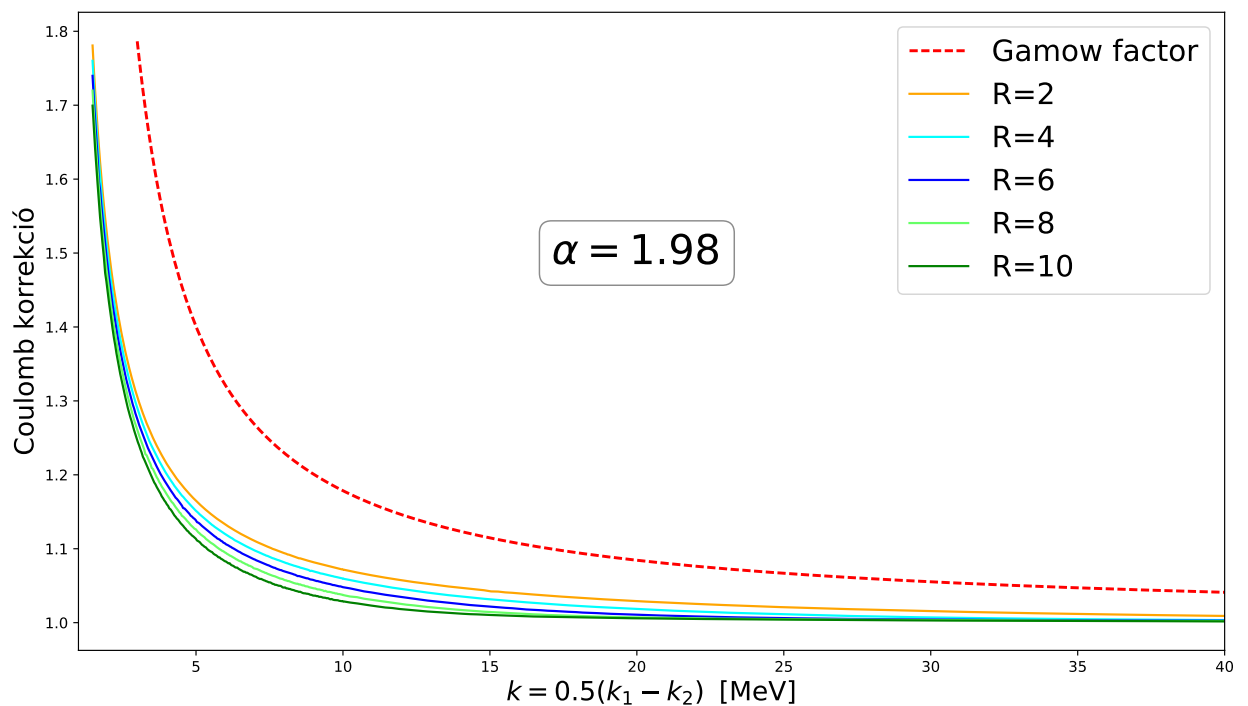
Markov tulajdonság, grafikus model, faktorizál

#### 3.7. Implementáció

##### 3.7.1. CUDA

##### 3.7.2. MapReduce





## 4. Adatanalízis

### 4.1. Korrelációs függvény változói

### 4.2. Korrelációs függvény mérése

### 4.3. Illesztett modell

## 5. Eredmények

### 5.1. Illesztés vizualizáció

### 5.2. Háromrészeske korrelációs erősség

### 5.3. Parciális koherencia

## 6. Összefoglaló

## Hivatkozások

- [1] A. Adare et al. Observation of direct-photon collective flow in  $\sqrt{s_{NN}} = 200$  GeV Au+Au collisions. *Phys.Rev.Lett.*, 109:122302, 2012.
- [2] S. S. Adler et al. Evidence for a long-range component in the pion emission source in Au + Au collisions at  $s(NN)^{1/2} = 200$ -GeV. *Phys. Rev. Lett.*, 98:132301, 2007.

- [3] E. O. Alt, T. Csorgo, B. Lorstad, and J. Schmidt-Sorensen. Coulomb corrections to the three-body correlation function in high-energy heavy ion reactions. *Phys. Lett.*, B458:407–414, 1999.
- [4] E. O. Alt, T. Csorgo, B. Lorstad, and J. Schmidt-Sorensen. Coulomb wave function corrections for n particle Bose-Einstein correlations. *Eur. Phys. J.*, C13:663–670, 2000.
- [5] Sebastian Ament and Michael O’Neil. Accurate and efficient numerical calculation of stable densities via optimized quadrature and asymptotics. *Statistics and Computing*, pages 1–15, 1 2017.
- [6] J. Bolz, U. Ornik, M. Plumer, B. R. Schlei, and R. M. Weiner. Resonance decays and partial coherence in Bose-Einstein correlations. *Phys. Rev.*, D47:3860–3870, 1993.
- [7] M. Csanad, T. Csorgo, and M. Nagy. Anomalous diffusion of pions at RHIC. *Braz. J. Phys.*, 37:1002–1013, 2007.
- [8] Mate Csanad and Marton Vargyas. Observables from a solution of 1+3 dimensional relativistic hydrodynamics. *Eur. Phys. J.*, A44:473–478, 2010.
- [9] T. Csorgo. Higher order Bose-Einstein correlations for systems with large halo. *Phys. Lett.*, B409:11–18, 1997.
- [10] T. Csorgo. Particle interferometry from 40-MeV to 40-TeV. *Heavy Ion Phys.*, 15:1–80, 2002.
- [11] T. Csorgo. Review of HBT or Bose-Einstein correlations in high energy heavy ion collisions. *J. Phys. Conf. Ser.*, 50:259–270, 2006.
- [12] T. Csorgo, B. Lorstad, J. Schmid-Sorensen, and Andras Ster. Partial coherence in the core / halo picture of Bose-Einstein n particle correlations. *Eur. Phys. J.*, C9:275–281, 1999.
- [13] T. Csorgo, B. Lorstad, and J. Zimanyi. Bose-Einstein correlations for systems with large halo. *Z. Phys.*, C71:491–497, 1996.
- [14] Gerson Goldhaber, Sulamith Goldhaber, Won-Yong Lee, and Abraham Pais. Influence of Bose-Einstein statistics on the anti-proton proton annihilation process. *Phys. Rev.*, 120:300–312, 1960.
- [15] R. Hanbury Brown and R. Q. Twiss. A Test of a new type of stellar interferometer on Sirius. *Nature*, 178:1046–1048, 1956.
- [16] Michael Annan Lisa, Scott Pratt, Ron Soltz, and Urs Wiedemann. Femtoscopy in relativistic heavy ion collisions. *Ann. Rev. Nucl. Part. Sci.*, 55:357–402, 2005.
- [17] Sandra S. Padula. HBT interferometry: Historical perspective. *Braz. J. Phys.*, 35:70–99, 2005.
- [18] S. Pratt, T. Csorgo, and J. Zimanyi. Detailed predictions for two pion correlations in ultrarelativistic heavy ion collisions. *Phys. Rev.*, C42:2646–2652, 1990.
- [19] A. Ster, M. Csanad, T. Csorgo, B. Lorstad, and B. Tomasik. Spectra, elliptic flow and azimuthally sensitive HBT radii from Buda-Lund model for  $\sqrt{s_{NN}} = 200$  GeV Au+Au collisions. *Eur. Phys. J.*, A47:58, 2011.
- [20] Steven Weinberg. *The First Three Minutes*. Basic Books, New York, New York, 1977.