

EÖTVÖS LORÁND TUDOMÁNYEGYETEM

TERMÉSZETTUDOMÁNYI KAR

FIZIKAI INTÉZET

# Háromrészecske Bose-Einstein korrelációk vizsgálata

*Bagoly Attila*

*Fizikus MSc*

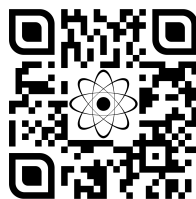
Témavezető:

*Csanád Máté*

*ELTE TTK Atomfizikai tanszék*



2017



# Tartalomjegyzék

<b>1. Bevezetés</b>	<b>1</b>
1.1. Nagyenergiás nehézion-fizika . . . . .	1
1.2. Kvar-k-gluon plazma . . . . .	2
1.3. A PHENIX kísérlet . . . . .	4
<b>2. Bose-Einstein korrelációk</b>	<b>4</b>
2.1. Definíció . . . . .	5
2.2. Két nem kölcsönható részecske korrelációs függvénye . . . . .	6
2.3. Forrás függvény . . . . .	7
2.3.1. Lévy eloszlás . . . . .	7
2.4. A mag-glória modell . . . . .	9
2.5. A korreláció erőssége . . . . .	11
2.6. Parciális koherencia . . . . .	11
<b>3. Coulomb-korrekció számítása</b>	<b>12</b>
3.1. Coulomb-kölcsönhatás . . . . .	13
3.1.1. Kétrészecske . . . . .	13
3.1.2. Háromrészecske . . . . .	14
3.2. A Coulomb-korrekciós integrál . . . . .	15
3.2.1. Kétrészecske . . . . .	15
3.2.2. Háromrészecske . . . . .	15
3.3. Gauss–Kronrod integrálási módszer . . . . .	16
3.4. Markov-lánc Monte Carlo módszerek . . . . .	17
3.4.1. Monte Carlo módszer . . . . .	17
3.4.2. Markov-lánc . . . . .	18
3.4.3. Metropolis algoritmus . . . . .	18
3.5. Implementáció . . . . .	19
3.5.1. CUDA . . . . .	19
3.5.2. MapReduce . . . . .	19
3.5.3. Háromrészecske Coulomb integrál közelítése . . . . .	19
3.5.4. Eredmények . . . . .	19
<b>4. Adatanalízis</b>	<b>21</b>
4.1. Korrelációs függvény változói . . . . .	21
4.2. Korrelációs függvény mérése . . . . .	21
4.3. Illesztett modell . . . . .	21
<b>5. Eredmények</b>	<b>21</b>
5.1. Illesztés vizualizáció . . . . .	21
5.2. Háromrészecske korrelációs erősség . . . . .	22
5.3. Parciális koherencia . . . . .	23



# 1. Bevezetés

## 1.1. Nagyenergiás nehézion-fizika

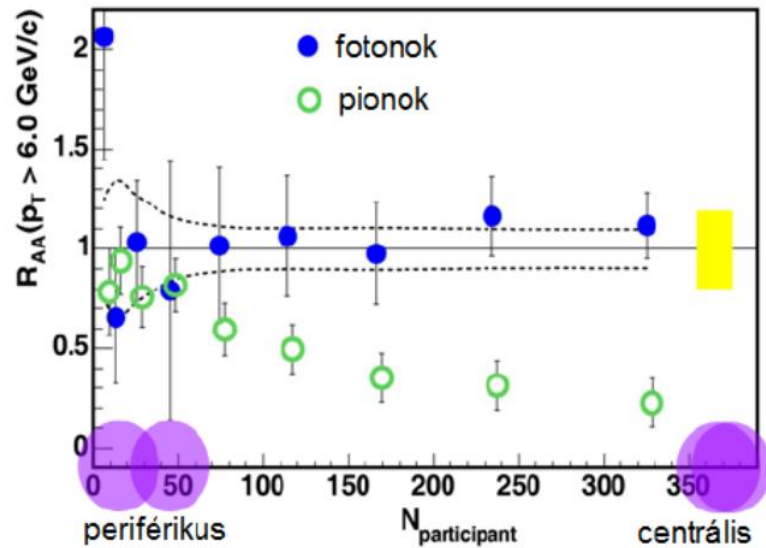
A nehézion-fizikában nagy rendszámú atommagok közel fénysebességen való ütköztetésével próbálunk információt szerezni az elemi részecskék világáról. Az atommagokat közel fénysebességre gyorsítjuk elektromágneses terek segítségével (LHC, RHIC a két legnagyobb energiájú gyorsító). A labor-rendszerből nézve Lorentz-kontrahált atommagokat összeütköztetünk, az ütközés során lejátszódnak bizonyos valószínűséggel „kemény” folyamatok amelyek során részecskezápörök (jet) keletkeznek, melyek hadronokból, leptonokból és fotonokból állnak. A kemény folyamatok jellemzője, hogy a jetek párokban keletkeznek, majd az impulzusmegmaradás miatt ellenkező irányba haladnak, az ütközések során a legvalószínűbb egy jet-pár keletkezése. Egy ütközés során nem csak kemény folyamatok zajlanak, hanem a „lágymű” folyamatok is, melyek során a részecskék nem jetekben keletkeznek. Az ütköző atommagok tömegközépponti energiájának növelésével nő a kemény folyamatok valószínűsége, és csökken a lágymű folyamatoké. Az ütközési pont köré épített detektorok segítségével mérjük a keletkező részecskék eloszlásait és különböző fizikai paramétereit. Ezen adatok segítségével próbálunk következtetni az ütközés után lezajló jelenségekre.

Az ütközések jellemzésére definiálni szoktuk az impakt paramétert, amely a középpontok távolságát jelenti. Az impakt paraméter alapján centralitás osztályokba rendezzük az ütközéseket, ezen osztályokat a centrálisról periférikus felé haladva százalékosan adunk meg.

Másik fontos fogalom a nukleáris módosulási faktor, amely segítségével az ütközés folyamatát tudjuk jellemezni. Az ütközés centralitását ismerve ki tudjuk számolni az ütközésben résztvevő nukleonok számát. A teljes folyamatot elképzelhetjük bináris ütközések összegeként, amennyiben feltesszük, hogy a protonok páronként ütköznek és egymástól függetlenül zajlanak az események. Független p+p ütközésekből ismerjük egy ilyen esemény során keletkező részecskék számát. Nehézion ütközések esetén ezt a számot megszorozzuk az ütközés bináris eseményeinek számával, így megkapjuk a keletkező részecskék számát. Azonban ezt a számot közvetlenül is meghatározhatjuk két nehézion összeütköztetésével, az előbbivel vett arányt nevezzük a nukleáris módosulási faktornak. Például Au+Au ütközés esetén, ha a keletkező részecskék száma  $N_{Au}$ , bináris ütközések száma  $N_{bin}$  és p+p ütközések esetén a keletkező részecskék száma  $N_p$  akkor a nukleáris módosulási faktor a következőképpen néz ki:

$$R_{AA} = \frac{N_{Au}}{N_{bin}N_p}, \quad (1.1.1)$$

ennek értékére  $R_{AA} = 1$  várunk, mivel az Au+Au ütközéseket úgy képzeljük el, hogy az ütközésben résztvevő protonok páronként ütköztek.



1.1. ábra. Au+Au ütközések esetén a nukleáris módosulási faktor a nukleonszám függvényében pionokra és fotonokra. Az ábrán látható, hogy nagy centralitás esetén kevesebb nagyenergiás piont észlelünk mint p+p ütközések alapján várnánk, továbbá az erős kölcsönhatásban nem fotonok száma a várttal egyezik. Ez utal az erősen kölcsönható közeg jelenlétére. Forrás: [11]

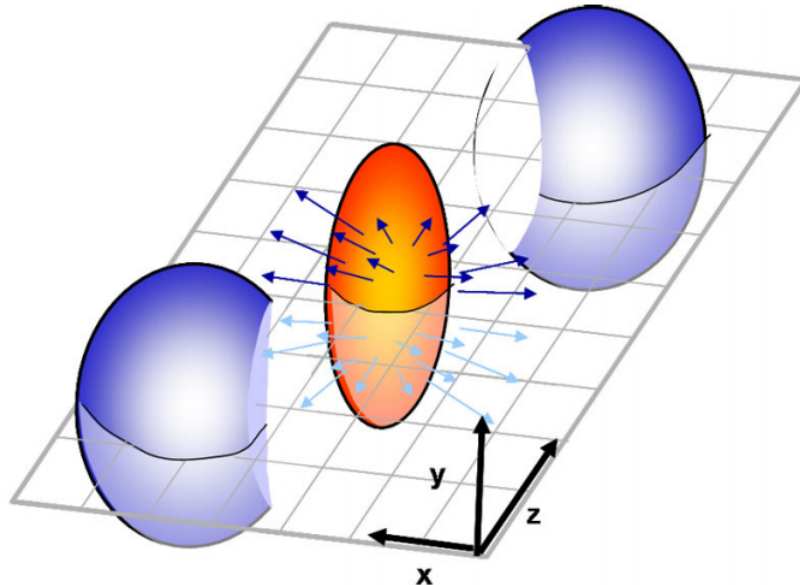
## 1.2. Kvark-gluon plazma

A RHIC gyorsítóban Au+Au ütközések során nagy nagy centralitásnál mérések során kevesebb nagyenergiás részecskét mértek a p+p ütközések alapján vártnál (1.1 ábra), a jet-párok egyik tagja nem jelent meg. Azonban ezen tapasztalatoknak több kiváltó oka is lehet, a kérdés eldöntésére további kísérleteket végeztek. Az egyik volt a deutérium-arany ütközések elvégzése, azonban itt semmilyen centralitásnál nem volt jet-elnyomás. Ennek magyarázata, hogy ütközések esetén erősen kölcsönható közeg jöhet létre amely a jet-pár egyik tagját elnyeli (amely nagyobb utat tesz meg benne), azonban deutérium-arany ütközések során a létrejövő közeg mérete túl kicsi, hogy elnyelje azt.

Ezen közeg létrejöttét elméletileg a QCD magyarázza meg. Az elmélet szerint nagyon nagy energián megjelennek kvark szabadsági fokok, azaz a kvarkok hadronba zártsága megszűnik. A létrejövő közeg az erősen kölcsönható kvark-gluon plazma nevet viseli (sQGP). Ezen közegben nagyok a hatáskeresztmetszetek, ezért kicsi a szabad úthossz és gyors a termalizáció, ezért van értelme lokális egyensúlyról beszélni, így alkalmazhatóak rá a statisztikus fizika fogalmai (pl. hőmérséklet). Az ősrobbanást követő egy milliomod másodpercben az univerzumot is a kvark-gluon plazma alkotta [27].

Az új közeg felfedezése után a RHIC gyorsítóban ezen közeg tulajdonságainak megismerését célzó kísérletek kezdődtek. Ezen kísérletek során kiderült, hogy a kvark-gluon plazma az eddig látott legtökéletesebb (viszkózitás mentes) folyadékként viselkedik, amely meglepő volt hisz nagyon kis viszkózitással rendelkező folyadékokat eddig nagyon alacsony hőmérsékleten tudtak csak előállítani. A kvarkfolyadék viszkózitására a gravitációs- és kvantumtérelméletek analógiájából (AdS/CFT) származik egy alsó becs-

lés, eszerint a viszkozitás nem lehet kisebb mint  $\hbar/4\pi$ .



1.2. ábra. Két gömb ütközéseként létrejövő speciális ellipszoidális szimmetriával rendelkező kezdeti eloszlás kialakulása. Forrás: [11]

Ultrarelativisztikus sebességre felgyorsított atommagok ütközése két Lorentz-kontrahált korong ütközéseként fogható fel, laborrendszerből nézve. Amint az 1.2 ábra is szemlélteti, ez a létrejövő kvarkanyagban speciális kezdeti eloszlást eredményez, egy  $\cos(2\varphi)$ -szerinti aszimmetriát az eloszlásban, amely a tengelyszimmetriától való elliptikus eltérést jelenti. A nyalábirányra merőlegesen bevezetjük a transzverz-síkot, ebben a síkban az kvarkanyag kezdeti eloszlását Fourier-sorba fejtjük a következőképpen:

$$A(\varphi) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ a_n \cos(n\varphi) + b_n \sin(n\varphi) \right] \quad (1.2.1)$$

Ezen sorfejtés alapján látható, hogy az  $a_2$  jellemzi az előbb említett aszimmetriát, amennyiben tökéletesen gömbszimmetrikusak lennének az atommagok és a keletkező ellipszis egyik nagytengelyén vennénk föl a koordináta-rendszer x-tengelyét csupán ez a tag jelenne meg. Azonban mivel az atommagok véges nukleonszámmal rendelkeznek, melyeknek van valamilyen eloszlása a magon belül, a gömbszimmetria csupán első közelítésként fogható fel.

Az ütközés után létrejövő kvarkanyag robbanásszerűen tágul egész addig amíg a hőmérséklet le nem csökken egy bizonyos értékre, ekkor megszűnik ez a fázis és a kvarkokból hadronok keletkeznek amelyeket mérni is tudunk. Mivel a kvarkanyag folyadékszerűen viselkedik a kezdeti aszimmetriák nem tűnnek el, a kifagyás pillanatába is jelen vannak, ezért azok a keletkező hadronok eloszlásában is megjelennek.

Az aszimmetriákat jellemző paramétereket az impulzustérben szokás definiálni. A részecskék eloszlását transzverz-síkban a  $N(p_t, \varphi)$  függvénnyel jellemezzük, amely megmondja, hogy  $[\varphi, \varphi + d\varphi]$  irányban  $[p_t, p_t + dp_t]$  impulzus-tartományban mennyi részecske található. A függvény szögfüggését leválasztva, azt Fourier-sorba fejtvé és 1-re normálva a következő alakban írhatjuk:

$$N(p_t, \varphi) = N(p_t) \left( 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ v_n \cos(n\varphi) + w_n \sin(n\varphi) \right] \right) \quad (1.2.2)$$

A Fourier-sor első komponensei játszanak fontosabb szerepet. Ezek közül is a  $v_2$  együttható a leglényegesebb, mert ez a paraméter hordozza az ellipszoidális aszimmetriát, ezt az elliptikus folyás paraméterének nevezzük. Ezen aszimmetria a kifagyott hadronok és fotonok eloszlásában [1] is megjelenik, ezért a folyadékkép helyességét bizonyítja a kvark-gluon plazma esetén. A Fourier-sor szinuszos részét nem szoktuk külön kezelni, mivel a mérések során a reakciósíkhöz képesti szög szerinti sort veszünk ( $\sum v_n \cos[n(\varphi - \psi_n)]$ ), így a fenti szinuszos és koszinuszos tagok összevonva jelennek meg. Más mérési módszer esetén ugyan megjelenhetnek külön is a szinuszos tagok, de ekkor is szimmetria okokból ezen tagok eltűnnek.

### 1.3. A PHENIX kísérlet

## 2. Bose-Einstein korrelációk

Bose-Einstein korrelációk vizsgálatának megalapozói Robert Hanbury Brown és Richard Q. Twiss volt, ők 1956-ban publikált cikkükben [19] vezették be a módszert, azonban munkájuk vegyes fogadtatásban részesült a tudományos közösség részéről. A módszer segítségével képesek voltak meghatározni a Sirius csillag átmérőjét a fotonok közötti korrelációk méréséből. Mérési elrendezésük két változtatható távolságra levő foton detektorból állt (ezek egy-egy fókuszáló tányér és fotoelektron-sokszorozóból álltak). A két detektor segítségével mérték a Sirius csillagból jövő fotonok közti korrelációt, különböző detektortávolságokon. Az így kapott pontokra elméleti megfontolásokból kapott korrelációs függvényt illesztettek, amely segítségével meghatározták a csillag átmérőjét. A két tudós tiszteletére a bozonok közti intenzitás korrelációt szokás Hanbury Brown és Twiss effektusnak nevezni (vagy röviden HBT effektus), az ilyen jellegű vizsgáldásokat pedig HBT analízisnek.

A HBT effektus részecskefizikai alkalmazásában jelentős szerepet játszott G. Goldhaber, S. Goldhaber, W.Y. Lee és A. Pais kutatása, akik proton-antiproton 1.05 GeV/c tömegközépponti energián történő ütköztetésekben keletkező pionokat vizsgáltak. Mérésük során azonos pionok között nem várt korrelációt tapasztaltak, melynek vizsgálatával felfedezték a  $\rho^0$  rezonanciát, amely  $4.5 \cdot 10^{-24}$  másodperc alatt elbomlik két pionra ( $\rho^0 \rightarrow \pi^+ \pi^-$ ), eredményüket 1960-ban publikálták [18]. Később kiderült, hogy az általuk tapasztalt korrelációnak az oka, hogy a fotonokhoz hasonlóan a pionok is bozonok. Goldhaber és társai kutatása nyomán a részecskefizikában is beindult a HBT effektus vizsgálata. Későbbiekben kiderült, hogy az asztrofizikához hasonlóan ezek a korrelációk itt is információt hordoznak a forrás geometriájáról [24, 11].

## 2.1. Definíció

Általánosan  $n$  részecske közti korrelációs függvény a következőképpen definiálható [4, 13]:

$$C_n(p_1, p_2, \dots, p_n) = \frac{N_n(p_1, p_2, \dots, p_n)}{N_1(p_1)N_1(p_2) \dots N_1(p_n)}, \quad (2.1.1)$$

ahol  $p_i = (p_i^0, \mathbf{p}_i)$  4-es impulzusmomentum,  $N_n(p_1, p_2, \dots, p_n)$  az  $n$  részecske invariáns momentum eloszlás. A korrelációs függvény szemléletesen azt mondja meg, hogy milyen valószínűséggel keletkezik egy részecske  $n$ -es  $p_1, p_2, \dots, p_n$  4-es momentumokkal.

Az  $n$  részecske invariáns impulzusmomentum eloszlás meghatározható a következő módon:

$$N_n(p_1, p_2, \dots, p_n) = \int \prod_{i=1}^n \mathcal{S}(p_i, x_i) |\Psi_{p_1, p_2, \dots, p_n}(x_1, x_2, \dots, x_n)|^2 \prod_{i=1}^n d^4x_i, \quad (2.1.2)$$

ahol a  $\Psi_{p_1, p_2, \dots, p_n}(x_1, x_2, \dots, x_n)$  az  $n$  részecske hullámfüggvény, az  $\mathcal{S}(p_i, x_i)$  pedig az úgynevezett forrásfüggvény, amely megadja annak a valószínűségét, hogy  $x_i$  helyen keletkezik egy részecske  $p_i$  impulzussal.

Az  $n$  részecske hullámfüggvény meghatározásához nemrelativisztikus közelítést használunk HBT effektus vizsgálata során, így a függvényt a Schrödinger egyenlet megoldásából kapjuk (ügyelve, arra hogy mivel bozonjaink vannak, két részecske felcserélésére szimmetrikus legyen a hullámfüggvény):

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n, t)}{\partial t} = \left[ \sum_{i=1}^n \left( -\frac{\hbar^2}{2m_i} \Delta_i + V_i(\mathbf{x}_i) \right) + \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} V_{ij}(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) \right] \Psi(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n, t) \quad (2.1.3)$$

A HBT effektus vizsgálatánál a különböző számítások könnyítése érdekében elhanyagoljuk az erős kölcsönhatást, amely tapasztalatok szerint pionok esetén megtehető, de már protonok esetén nem [25]. Továbbá csak a párok közti Coulomb-kölcsönhatást vesszük figyelembe, elhanyagolva többi hadron által okozott töltésfelhőt. Így a 2.1.3 egyenlet a következő, egyszerűbb alakra egyszerűsödik:

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n, t)}{\partial t} = \left[ -\sum_{i=1}^n \frac{\hbar^2}{2m_i} \Delta_i + \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} V_C(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) \right] \Psi(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n, t) \quad (2.1.4)$$

Mivel energia saját állapotokkal dolgozunk, ezért a 2.1.4 egyenletet megoldó hullámfüggvény felírható:

$$\Psi_{p_1, p_2, \dots, p_n}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n, t) = \Psi_{p_1, p_2, \dots, p_n}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n) \prod_{i=1}^n e^{-\frac{i}{\hbar} c p_i^0 t}, \quad (2.1.5)$$

ahol  $\Psi_{p_1, p_2, \dots, p_n}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n)$  az időfüggetlen Schrödinger egyenlet megoldása:

$$\left[ -\sum_{i=1}^n \frac{\hbar^2}{2m_i} \Delta_i + \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} V_C(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) - c \sum_{i=1}^n p_i^0 \right] \Psi_{p_1, p_2, \dots, p_n}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n) = 0 \quad (2.1.6)$$

Továbbá könnyedén belátható, hogy a 2.1.2 egyenletben szereplő hullámfüggvény abszolút értéke szimmetrizációt elvégezve a következő lesz (nemrelativisztikus közelítésben mondhatjuk, hogy  $\mathbf{x}_i = (t, \mathbf{x}_i)$ ):

$$|\Psi_{p_1, p_2, \dots, p_n}(x_1, x_2, \dots, x_n)| = \frac{1}{\sqrt{n!}} \left| \sum_{(\alpha)} \Psi_{p_1, p_2, \dots, p_n}(\mathbf{x}_{\alpha_1}, \mathbf{x}_{\alpha_2}, \dots, \mathbf{x}_{\alpha_n}) \right| \quad (2.1.7)$$

ahol  $\sum_{(\alpha)}$  az  $(1, 2, \dots, n)$  összes permutációjára való összegzés.



## 2.2. Két nem kölcsönható részecske korrelációs függvénye

Két azonos részecske esetén, nem kölcsönható esetben a 2.1.4 egyenlet könnyedén megoldható, megoldásai a jól ismert síkhullámok. A kétrészecskés invariáns impulzuseloszlásban szereplő hullámfüggvény szimmetrizáció elvégzése után a következő lesz:

$$\Psi_{p_1 p_2}(x_1, x_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}(e^{ip_1 x_1 + ip_2 x_2} + e^{ip_2 x_1 + ip_1 x_2}) \quad (2.2.1)$$

Tömegközépponti koordináta rendszerben, azaz a következő változókra való áttérés után (ezen transzformáció esetén az integrálási mérték nem változik, hiszen  $d^4 x_1 d^4 x_2 = d^4 R d^4 r$ ):

$$K = p_1 + p_2, \quad k = \frac{p_1 - p_2}{2}, \quad r = x_1 - x_2, \quad R = \frac{x_1 + x_2}{2} \quad (2.2.2)$$

a hullámfüggvény abszolút értéke a következő alakra egyszerűsödik:

$$|\Psi_{p_1 p_2}(r, R)| = \frac{1}{\sqrt{2}} |e^{KR}(e^{ikr} + e^{-ikr})| = \sqrt{2} |\cos 2kr| \quad (2.2.3)$$

Ebből következőleg a kétrészecske invariáns momentumeloszlásra a következő alak adódik):

$$N_2(p_1, p_2) = \tilde{S}(0, p_1) \tilde{S}(0, p_2) + \frac{1}{2} (\tilde{S}(2k, p_1) \tilde{S}^*(2k, p_2) + \tilde{S}^*(2k, p_1) \tilde{S}(2k, p_2)), \quad (2.2.4)$$

ahol  $\tilde{S}$  a forrásfüggvény Fourier transzformáltja:

$$\tilde{S}(q, k) = \int d^4 x \mathcal{S}(x, k) e^{iqx} \quad (2.2.5)$$

Az egyrészecske invariáns momentumeloszlásra pedig  $N_1(p) = \tilde{S}(0, p)$  adódik. Ezekből a 2.1.1 definíciót használva a kétrészecske korrelációs függvényre kapjuk a következő alakot:

$$C_2(p_1, p_2) = 1 + \frac{\tilde{S}(2k, p_1) \tilde{S}^*(2k, p_2) + \tilde{S}^*(2\mathbf{k}, p_1) \tilde{S}(2\mathbf{k}, p_2)}{2\tilde{S}(0, p_1) \tilde{S}(0, p_2)} \quad (2.2.6)$$

Szokás alkalmazni a  $p_1 \approx p_2 \approx K = p_1 + p_2$  közelítést ( $q \ll K$ ), amelyet az indokol, hogy a forrást Fourier transzformáltjának az egyes részecskék momentumától való függése sokkal simább mint a relatív momentumtól való függése [22]. A kétrészecske korrelációs függvény ekkor:

$$C_2(k, K) = 1 + \frac{|\tilde{S}(k, K)|^2}{|\tilde{S}(0, K)|^2} \quad (2.2.7)$$

Ez az alak azt a fontos üzenetet hordozza, hogy a kétrészecske korrelációs függvény meghatározásával megkapjuk a forrásfüggvény Fourier transzformáltját. Tehát a korrelációs függvény méréssel a forrás függvényt meg tudjuk határozni.

A korrelációs függvény a  $k, K$  négyes impulzusok helyett hármas momentumokkal is kifejezhető, ugyanis a két négyesmomentum szorzata definíció és az egyes részecskék tömeghőj feltétele ( $p_{i\mu} p_i^\mu = 0$ ) alapján eltűnik, azaz:

$$0 = kK = k_0 K_0 - \mathbf{k} \mathbf{K} \Rightarrow k_0 = \frac{\mathbf{k} \mathbf{K}}{K_0} \quad (2.2.8)$$

A  $p_1 \approx p_2 \approx K$  feltevés alapján a  $K$  körülbelül tömeghőjén van, azaz  $K_0 = \sqrt{m^2 - \mathbf{K}^2}$ , így a korrelációs függvény a  $k, K$  négyes-momentumok helyett a  $\mathbf{k}, \mathbf{K}$  hármas-momentumok függvényeként is tekinthető.

### 2.3. Forrás függvény

A 2.1.2 egyenletben szereplő  $\mathcal{S}(p, x)$  függvényt nevezzük forrásfüggvénynek, ez megadja annak a valószínűségét, hogy  $x$  helyen keletkezik egy  $p$  impulzusú részecske. Az általunk vizsgált energiákon, az ütközés során kvark-gluon plazma keletkezik, amely robbanásszerűen tágul, melynek következtében csökken a hőmérséklete. Ha lokálisan a QGP elér egy bizonyos hőmérsékletet, akkor fázisátmenet történik, kifagynak a kvark szabadsági fokok és hadronok keletkeznek. A forrásfüggvényt épp ezen fázisátmenetek határozzák meg.

A fázisátmenetet pillanatszerűnek tekinthetjük, mivel ha feltesszük, hogy ez nem teljesül, akkor mondhatjuk, hogy a forrásfüggvény felírható szorzat alakban:  $\mathcal{S}(x) = \mathcal{S}_T(\tau)\mathcal{S}(x)$ . Az időfüggő részre feltehető továbbá ([11]):

$$\mathcal{S}_T(\tau) = \frac{1}{(2\pi\Delta\tau)^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{(\tau-\tau_0)^2}{2\Delta\tau^2}} \quad (2.3.1)$$

Térszerű részre kevés megszorítással élve, a kétrészecske korrelációs függvényre a következő alak adódik ([11]):

$$C_2(k) = 1 + \lambda e^{-k_0\Delta\tau^2 - k_{\text{long}}R_{\text{long}}^2 - k_{\text{side}}R_{\text{side}}^2 - k_{\text{out}}R_{\text{out}}^2}, \quad (2.3.2)$$

ahol az  $R_{\text{long}}, R_{\text{side}}, R_{\text{out}}$  az úgynevezett HBT sugarak. Továbbá adódik a HBT sugarak közti következő összefüggés ([11]):

$$R_{\text{out}}^2 - R_{\text{side}}^2 \propto \Delta\tau^2 \quad (2.3.3)$$

Kísérleti tapasztalat továbbá, hogy  $R_{\text{out}} \approx R_{\text{side}}$ , ebből következőleg a  $\Delta\tau \approx 0$ , tehát, a forrásfüggvény időfüggő része egy  $\tau_0$ -ra koncentrált Dirac-delta, azaz a fázisátmenet pillanatszerűen történik [26, 13, 10].

A forrásfüggvény alakjára elsődlegesen Gauss eloszlást alkalmaztak [14, 22], azonban a PHENIX kísérletben  $\sqrt{s_{NN}} = 200$  GeV tömegközépponti energiájú arany-arany ütközések során bizonyítékot találtak nem gaussi, lassan lecsengő struktúrára [2]. Egy magyarázat a lassan lecsengő viselkedésre lehet a Lévy repülés [9]. A kvark-gluon plazmából már kifagyott hadronok gáza tágul, így a rendszer egyre hidegebb, ritkább lesz, a hatáskeresztmetszetek egyre kisebbé válnak, megnövelve az átlagos szabad úthosszat. Ennek következtében egyre hosszabb lépések is megjelennek a hadronok véletlen bolyongás során. Ennek következtében eltávolodás eloszlása lassan lecsengő eloszlás lesz, melynek szórása már nem létezik. Ezen véletlen bolyongó hadronok aztán elbomolhatnak a vizsgált részecskékre, ezért járulékot adnak a forrásfüggvénybe. Ezen hadronok eltávolodása (QGP-ből való kifagyás helyétől), a centrális határeloszlás tétele alapján Lévy eloszláshoz tart, hiszen az összeadott lépések lassan lecsengő eloszlással rendelkező valószínűségi változónak tekinthető.

#### 2.3.1. Lévy eloszlás

A forrásfüggvény alakjára munkám során három dimenziós Lévy eloszlást használtam. A Lévy eloszlás három dimenzióban a következő karakterisztikus függvény segítségével adható meg:

$$\Phi(\mathbf{q}, \alpha, R) = e^{-|\mathbf{q}R|^\alpha} \quad (2.3.4)$$

A karakterisztikus függvény Fourier transzformáltját kiszámolva (az integrálás csak numerikusan végezhető el) megkapható a Lévy eloszlás:

$$\mathcal{L}(\mathbf{r}, \alpha, R) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3q \Phi(\mathbf{q}, \alpha, R) e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}} = \frac{1}{(2\pi)^3} \int e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}} e^{-|\mathbf{q}R|^\alpha}, \quad (2.3.5)$$

ahol  $0 < \alpha \leq 2$  és  $0 < R$  a Lévy eloszlás paraméterei. Speciálisan,  $\alpha = 2$  esetén a Lévy eloszlás a normális eloszlás lesz:

$$\mathcal{N}(\mathbf{r}, \sigma) = \mathcal{L}\left(\mathbf{r}, \frac{\sigma}{\sqrt{2}}\right) = \mathcal{L}\left(\mathbf{r}, 2^{-\frac{1}{\alpha}}\sigma\right) \quad (2.3.6)$$

Mivel Lévy eloszlást használunk a forrás modellezésére, ezért a Lévy paraméterek a forrásról hordoznak információt, és magára a forrásra jellemzőek. Egy  $\alpha, R$  paraméterű forrás esetén, a forrásfüggvényre a következő alakot használjuk:

$$\mathcal{S}(p, x; \alpha, R) = \mathcal{L}(\mathbf{x}, \alpha, 2^{-\frac{1}{\alpha}}R) \quad (2.3.7)$$

A Lévy eloszlás skálaparamétertől való függésére ( $R$  paraméter) teljesül a következő összefüggés:

$$\mathcal{L}(\mathbf{r}, \alpha, R) = \mathcal{L}\left(\frac{\mathbf{r}}{R}, \alpha, 1\right)R^{-3} \equiv \mathcal{L}\left(\frac{\mathbf{r}}{R}, \alpha\right)R^{-3} \quad (2.3.8)$$

Továbbá az eloszlás nem függ az  $\mathbf{r}$  irányától, csak a nagyságától (belátható változócsere segítségével  $\mathbf{q}' = \mathbf{A}\mathbf{q}$ :  $|\mathbf{q}| = |\mathbf{q}'|\mathbf{q}\mathbf{r} = |\mathbf{q}||\mathbf{r}|$ , ekkor  $d^3\mathbf{q} = d^3\mathbf{q}'$ ):

$$\mathcal{L}(\mathbf{r}, \alpha, R) = \mathcal{L}(|\mathbf{r}|, \alpha, R) \quad (2.3.9)$$

Az egydimenziós Lévy eloszlás aszimptotikus viselkedéséből [6] kiindulva könnyedén meghatározható a háromdimenziós eloszlás viselkedése is. Nagy  $r$  paraméter esetén, a Lévy eloszlás a következő sor segítségével kapható meg ( $r \gg 1$ ):

$$\mathcal{L}(r, \alpha) \approx \frac{\alpha}{2\pi^2} \sum_{k=1}^N (-1)^{k+1} \frac{\Gamma(\alpha k)}{\Gamma(k)} \sin\left(\frac{\pi \alpha k}{2}\right) \frac{\alpha k + 1}{r^{\alpha k + 3}}, \quad (2.3.10)$$

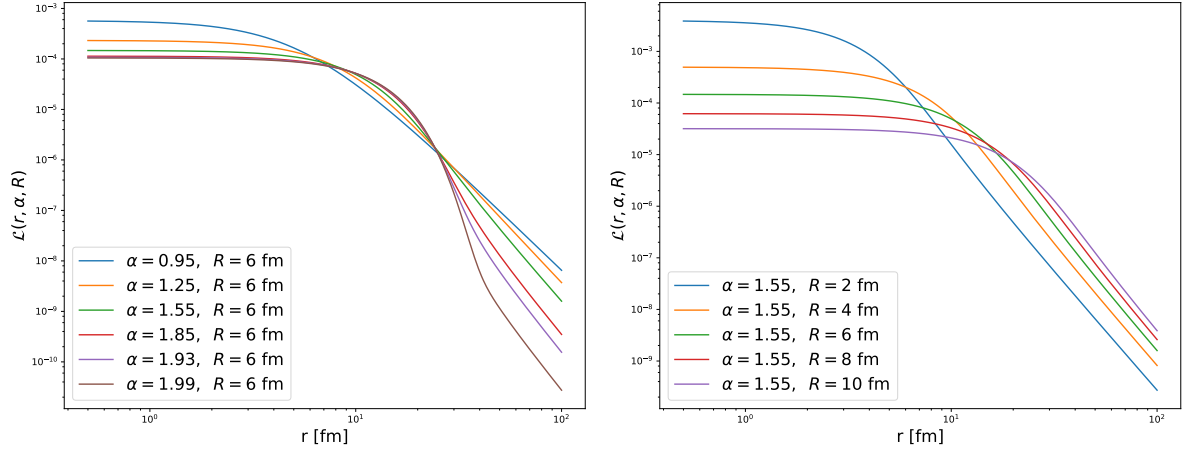
ahol  $\Gamma(x)$  a Gamma függvény:

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty x^{z-1} e^{-x} dx \quad (2.3.11)$$

A kis  $r$  viselkedés hasonló módon egy sor segítségével kapható ( $r \ll 1$ ):

$$\mathcal{L}(r, \alpha) \approx -\frac{1}{2\pi^2\alpha} \sum_{k=0}^n \frac{\Gamma\left(\frac{k+3}{\alpha}\right)}{\Gamma(k+3)} \sin\left(\frac{\pi(k+3)}{2}\right) (k+2)(k+1)x^k \quad (2.3.12)$$

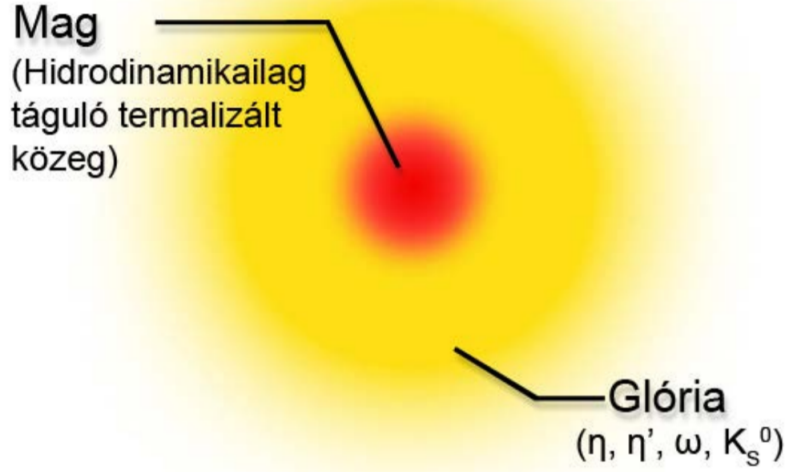
A Lévy eloszlás meghatározása során kis és nagy értékekre ezen aszimptotikus sorokat alkalmaztam, a köztes tartományban pedig 15 pontú adaptív Gauss Kronrod integrálási módszert alkalmaztam (részletek a 3.3 fejezetben), melyet GPU-ra párhuzamosítva CUDA-ban (részletek a 3.5.1 fejezetben), továbbá klasztere párhuzamosítva MapReduce programozási modellben implementáltam (részletek a 3.5.2 fejezetben). Az integrálást sok paraméterre elvégeztem (felbontást úgy állítottam be, hogy két pont között lineáris interpoláció hibája a megengedett hiba alatt legyen), eredményekből egy Lévy táblázat készült, amelyhez egy könnyen használható olvasó interfész tartozik. Néhány  $\alpha$  és  $R$  paraméter esetén az eloszlást a 2.1 ábrák szemléltetik.



2.1. ábra. Háromdimenziós Lévy eloszlás sugárfüggése különböző  $\alpha$  és  $R$  paraméterek esetén.

## 2.4. A mag-glória modell

A HBT effektus vizsgálata során nehéz ionokat ütköztetünk nagy energián. Az ütközés során létrejövő kvark-gluon plazma robbanásszerűen tágul (ezen tágulás leírására hidrodinamika alkalmazható), elérve egy kritikus hőmérsékletet fázisátmenet történik, hadronok fagynak ki pillanatszerűen. A hadronok közül munkánbana töltött pionok közti korrelációt vizsgáltam, mivel ezen részecskékből keletkezik a legtöbb az ütközések során. A kirepülő pionokat az ütközési centrum köré épített detektorrendszerrel detektáljuk. Azonban pionok nem csak a forró kvarkanyag kifagyása során keletkeznek, hanem később, instabil részecskék (pl.  $\eta, \eta', \omega$ ) bomlásából is [8]. Ezen jelenség leírására szolgál a mag-glória (core-halo) modell [16, 13], melynek szemléltetése a 2.2 ábrán látható. A mag mérete 10 femtométer alatti, míg a glória mérete több száz, vagy akár több ezer femtométer is lehet, mivel egyes hosszú élettartamú instabil részecskék ilyen távolságokra jutnak el mielőtt elbomlanának pionokra.



2.2. ábra. Mag-glória modell szemléltetése. Forrás [20]

Mivel a 2.2.7 összefüggés alapján a korrelációs függvény a forrás Fourier transzformáltjával áll kapcsolatban, továbbá a glóriában a pionok nagy  $x$  távolságokon keletkeznek, ezért a glória kis relatív impulzusú tartományban ad járulékot a korrelációs függvényhez. Ugyanakkor a detektor impulzusfelbontása véges, ezért az egymáshoz nagyon közeli impulzussal rendelkező részecskék nem megkülönböztethetők, azaz bizonyos relatív impulzus alatti tartományban (felbonthatatlan régió) nem tudjuk megmérni a korrelációs függvényt. Ezt az effektust szemlélteti a 2.3 ábra.

A mag-glória modellben feltételezünk egy magot valamint egy glóriát leíró forrásfüggvény létezését. A teljes rendszert leíró forrásfüggvény pedig ezen kettő összege:

$$\mathcal{S}(x, p) = \mathcal{S}_M(x, p) + \mathcal{S}_G(x, p) \implies \tilde{\mathcal{S}}(k, K) = \tilde{\mathcal{S}}_M(k, K) + \tilde{\mathcal{S}}_G(k, k) \quad (2.4.1)$$

Mivel a Fourier transzformált a nulla helyen megegyezik a függvény integráljával, továbbá a forrásfüggvény integrálja a keletkezett részecskék számát adja meg, ezért ha a magban keletkező részecskék száma  $N_M$ , a glóriában  $N_G$ , akkor:

$$\tilde{\mathcal{S}}_M(0, K) = N_M, \quad \tilde{\mathcal{S}}_G(0, K) = N_G, \quad \tilde{\mathcal{S}}(0, K) = N_M + N_G \quad (2.4.2)$$

A nagy (legalább 50 fm) szélességű  $\mathcal{S}_G$  keskeny  $\tilde{\mathcal{S}}_G$  Fourier transzformáltat eredményez, melynek szélessége maximálisan 4 MeV. Ez a maximális szélesség a detektor véges felbontóképességéből adódó felbonthatatlan régióba esik tipikusan, ezért az mondható, hogy:  $\tilde{\mathcal{S}}_G \approx 0$ , azaz  $\tilde{\mathcal{S}} = \tilde{\mathcal{S}}_M$ . Ebből a kétrészecske korrelációs függvényre adódik:

$$C_2(k, K) = 1 + \frac{|\tilde{\mathcal{S}}(k, K)|^2}{|\tilde{\mathcal{S}}(0, K)|^2} = 1 + \frac{|\tilde{\mathcal{S}}_M(k, K)|^2}{(N_M + N_G)^2} = 1 + \lambda_2 \frac{|\tilde{\mathcal{S}}_M(k, K)|^2}{|\tilde{\mathcal{S}}_M(0, K)|^2}, \quad (2.4.3)$$

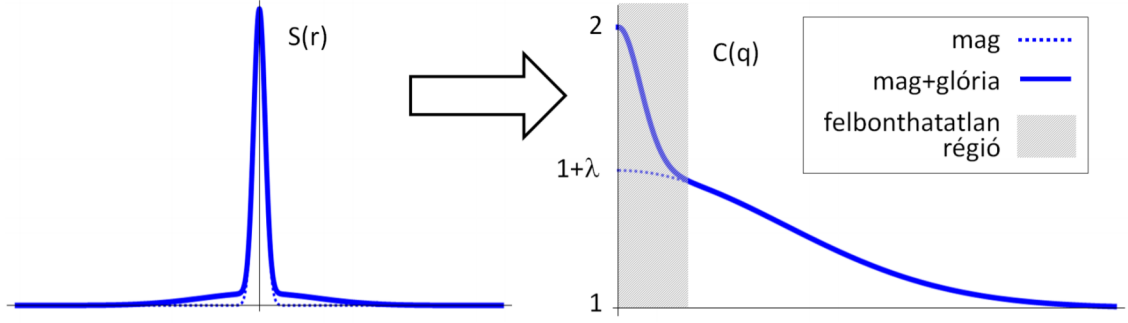
ahol bevezettem a:

$$\lambda_2 = \frac{N_M^2}{(N_M + N_G)^2} \equiv f_C^2 \quad (2.4.4)$$

jelölést. Az összefüggésben bevezettem egy új mennyiséget, a mag arányt arányát, amely megmondja, hogy az összes észlelt részecske, hányad része származik a magból:

$$f_C = \frac{N_M}{N_M + N_G} \quad (2.4.5)$$

Tehát amíg a 2.2.7 egyenletben a  $k \rightarrow 0$  esetben a korrelációs függvény  $C_2(k, K) \rightarrow 2$ , addig mag-glória modellben, a 2 helyett a  $1 + \lambda_2$ -höz tart a korrelációs függvény.



2.3. ábra. Keskeny magból és széles glóriából álló forráshoz tartozó korrelációs függvény. A glória keskeny csúcsot eredményez a korrelációs függvényben, amely a detektor véges felbontásának következtében nem látható. Forrás: [11]

## 2.5. A korreláció erőssége

A mag-glória modellnél láttuk, hogy a kétrészecske korrelációs függvény kis relatív impulzusokra tart a 2.4.4 egyenlet által definiált  $\lambda_2$  paraméter által meghatározott  $1 + \lambda_2$  értékhez. Ezt a paramétert szokás kétrészecske korrelációs erősségnek nevezni.

Ebből kiindulva általánosan definiálhatjuk az  $n$  részecske korrelációs erősséget:

$$\lambda_n = \lim_{k_1 \rightarrow 0} \dots \lim_{k_n \rightarrow 0} C_n(k_1, \dots, k_n) - 1 \quad (2.5.1)$$

Mag-glória modell esetén az  $n$  részecske korrelációs erősség kifejezhető a 2.4.5 összefüggéssel definiált magarány segítségével a következőképpen [12]:

$$\lambda_n = \sum_{j=1}^n \binom{n}{j} \alpha_j f_C^j \quad (2.5.2)$$

Az egyenletben szereplő  $\alpha_j$  paraméter a következőképpen határozható meg:

$$\alpha_n = n! - 1 - \sum_{j=1}^{n-1} \binom{n}{j} \alpha_j, \quad (2.5.3)$$

első néhány értéke:  $\alpha_1 = 0$ ,  $\alpha_2 = 1$ ,  $\alpha_3 = 2$ .

## 2.6. Parciális koherencia

Az eddigiekben feltettük, hogy a forrás teljesen kaotikus, a kifagyott pionok fázisa teljesen véletlenszerű. Azonban előfordulhat, hogy a kifagyott részecskepárok fáziskülönbsége részben állandó, azaz a forrás

részben koherens módon kelt részecskéket. Ezt az effektust nevezik parciális koherenciának [15, 13, 12]. Ekkor a momentum eloszlást másképp kell számolni, hiszen a 2.1.2 összefüggésben már kihasználtuk, hogy a részecskék fázisa véletlenszerű, melynek következtében átlagolás során eltűnik.

Az effektust mag-glória modellnél látottakhoz hasonló módon történő figyelembevétele érdekében bevezetjük a koherencia arányát, amely megadja, hogy a magból származó részecskék hányad része keletkezett koherens módon:

$$p_C = \frac{N_M^C}{N_M} \quad (2.6.1)$$

Mag-glória modellnél láttuk, hogy amennyiben a részecskék nem csak közvetlenül a forró kvark-anyagból származnak, akkor az  $n$  részecske korrelációs erősségek függeni fognak a 2.4.5 egyenlet által definiált magaránytól a 2.5.2 egyenlet által meghatározott módon. Ehhez hasonlóan, azt mondhatjuk, hogy amennyiben részecske keletkezés során van parciális koherencia, akkor az  $n$  részecske korrelációs erősség függeni fog a magarány mellett a koherencia arányától a következő módon [15, 12]:

$$\lambda_n(f_C, p_C) = \sum_{j=2}^n \binom{n}{j} \alpha_j f_C^j [(1 - p_C)^j + j p_C (1 - p_C)^{j-1}], \quad (2.6.2)$$

ahol az  $\alpha_j$  paramétert a 2.5.3 egyenlet határozza meg. Az egyenlet két- és háromrészecske esetén a következőkre egyszerűsödik:

$$\lambda_2 = f_C^2 [(1 - p_C)^2 + 2 p_C (1 - p_C)] \quad (2.6.3)$$

$$\lambda_3 = 2 f_C^3 [(1 - p_C)^3 + 3 p_C (1 - p_C)^2] + 3 f_C^2 [(1 - p_C)^2 + 2 p_C (1 - p_C)] \quad (2.6.4)$$

Ezen két egyenlet mutatja, hogy két- és háromrészecske korrelációk vizsgálatából amennyiben meghatározzuk a korrelációs erősségeket, meghatározható az  $f_C$  és  $p_C$  paraméter, azaz a magból származó részecskék aránya, illetve a magban koherens módon keletkezett részecskék aránya.

Koherencia létének vizsgálata érdekében vezessük be a következő paramétert:

$$\kappa_3 = \frac{\lambda_3 - 3\lambda_2}{2\sqrt{\lambda_2^3}} \quad (2.6.5)$$

Ez a paraméter nem függ az  $f_C$  értékétől, mag-glória modell esetén koherencia hiányában konstans  $\kappa_3 = 1$  lesz. Amennyiben van parciális koherencia, ezen paraméter nem lesz konstans, függeni fog a  $p_C$  paramétertől.

### 3. Coulomb-korrekciónak számítása

A Bose-Einstein analízis során kizárólag a Bose-Einstein statisztika következményeként megjelenő korrelációk vizsgálata a cél. Az analízis során töltött pionok közti korreláció vizsgálata a cél, mivel ezekből keletkezik a legtöbb. Azonban elektromos töltésük következtében fellép a Coulomb kölcsönhatás a részecskék között amely jelentősen torzítja a korrelációs függvényt. Az effektus kiküszöbölése érdekében definiálunk egy Coulomb-korrekciónak faktort, amellyel a nyers korrelációs függvényt megszorozva megkapjuk a tiszta, csak Bose-Einstein statisztikából származó korrelációs függvényt.

A Coulomb-korrekciónak faktor definíciója  $n$  részecske esetén a következő [5]:

$$K(\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n) = \frac{\int \prod_{i=1}^n \mathcal{S}(\mathbf{p}_i, \mathbf{x}_i) |\Psi_{\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n}^0(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)| \prod_{i=1}^n d^3 \mathbf{x}_i}{\int \prod_{i=1}^n \mathcal{S}(\mathbf{p}_i, \mathbf{x}_i) |\Psi^C \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n|(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n) \prod_{i=1}^n d^3 \mathbf{x}_i}, \quad (3.0.1)$$

ahol a  $\Psi^0$  szabad hullámfüggvény, a  $\Psi^C$  pedig a Coulomb hullámfüggvény.

### 3.1. Coulomb-kölcsönhatás

#### 3.1.1. Kétrészecske

A kétrészecske Coulomb korrekció meghatározása érdekében meg kell oldanunk a kétrészecske Coulomb problémát. Mivel azonos részecskékről beszélünk a már bevezetett tömegközépponti koordinátákra áttérve (2.2.2) a hullámfüggvény:

$$\Psi^C(\mathbf{r}, \mathbf{R}) = \Psi(\mathbf{r}) e^{i\mathbf{K}\mathbf{R}}, \quad (3.1.1)$$

alakot ölti, ahol a relatív momentumtól függő hullámfüggvényre a Schrödinger egyenlet a következő lesz:

$$\left[ -\frac{\hbar^2}{2\mu} \Delta_{\mathbf{r}} + V_C(\mathbf{r}) + \frac{\hbar^2 \mathbf{k}^2}{2\mu} \right] \Psi(\mathbf{r}) = 0, \quad (3.1.2)$$

ahol  $\mu = \frac{m}{2}$  a redukált tömeg,  $V_C$  pedig a Coulomb potenciál ( $V_C(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{|\mathbf{r}|}$ ).

Az egyenletet megoldva ([21]) valamint elvégezve a szimmetrizációt (részecskék felcserélésének szimmetriája:  $\mathbf{r} \rightarrow -\mathbf{r}$ ) a következő adódik a hullámfüggvényre:

$$\Psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = \frac{\mathcal{N}}{\sqrt{2}} \left[ e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} F(-i\eta, 1, i(kr - \mathbf{k}\mathbf{r})) + e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}} F(-i\eta, 1, i(kr + \mathbf{k}\mathbf{r})) \right] \quad (3.1.3)$$

ahol  $\mathcal{N}$  normálási tényező,  $\eta = \frac{\mu\alpha}{2k}$  ( $\alpha \approx \frac{1}{137}$  finomszerkezeti állandó), és  $F(a, b, z)$  az úgynevezett elfajult hipergeometrikus függvény, amelyet az alábbi sor definiál:

$$F(a, b, z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^{(k)}}{b^{(k)} k!} z^k, \quad (3.1.4)$$

itt  $a^{(0)} = 1$ ,  $a^{(k)} = a(a+1) \dots (a+k-1)$ . Az így definiált  $F(a, b, z)$  függvény kielégíti a

$$zF''(a, b, z) + (b-z)F'(a, b, z) - aF(a, b, z) = 0 \quad (3.1.5)$$

differenciálegyenletet ( $' = \frac{d}{dz}$ ), valamint számunkra egy lényeges tulajdonsága:

$$F(a, b, z) = e^z F(b-a, b, -z) \quad (3.1.6)$$

Numerikusan a hipergeometrikus függvény kiszámolása a 3.1.4 definíció alapján történhet. Azonban  $|z| \gg 1$  esetén a felösszegezés nem végezhető el hatékonyan, mivel nagyon sokáig kell összegezni, hogy lássuk a konvergenciát (hogy a faktoriális legyőzze a hatványfüggvényt), és a faktoriális és hatványfüggvény következtében nagyon nagy számokkal kell dolgozni, amelyek kiesnek a számítógép által általánosan használt 64-bites dupla pontos lebegőpontos számábrázolási tartományából. A sor alak tipikusan  $|z| < 30$  esetén alkalmazható. Ez a probléma orvosolható, a hipergeometrikus függvény aszimptotikus sorának alkalmazásával, amely a következőképpen néz ki [17]:

$$F(a, b, z) = \frac{\Gamma(b) e^z z^{a-b}}{\Gamma(a)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1-a)^{(k)} (b-a)^{(k)}}{k!} z^{-k} + \frac{\Gamma(b) (-z)^{-a}}{\Gamma(b-a)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^{(k)} (a-b+1)^{(k)}}{k!} (-z)^{-k} \quad (3.1.7)$$



A hullámfüggvény egyre normáltságát megkövetelve az  $\mathcal{N}$  normálási tényezőre

$$\mathcal{N} = e^{-\frac{1}{2}\pi\eta}\Gamma(1+i\eta) \quad (3.1.8)$$

érték adódik. A gamma függvényre vonatkozó  $\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}$ , valamint  $\Gamma(1+i\eta)^* = \Gamma(1-i\eta)$  azonosságok felhasználásával, a normálási tényező négyzetére a következő adódik:

$$|\mathcal{N}|^2 = \frac{2\pi\eta}{e^{2\pi\eta} - 1}, \quad (3.1.9)$$

amely az úgynevezett Gamow-faktor.

### 3.1.2. Háromrészesecske

A háromrészesecske Coulomb korrekció meghatározásához a háromrészesecske Coulomb problémát kellene megoldani, azaz a következő Schrödinger egyenletet [3]:

$$\left[ H_0 + \sum_{i<j=1}^3 V_{ij}^C(\mathbf{r}_{ij}) - \sum_{i=1}^3 \frac{\hbar^2 \mathbf{k}_i^2}{2m_i} \right] \Psi_{\mathbf{k}_{12}, \mathbf{k}_{13}, \mathbf{k}_{23}}(\mathbf{r}_{12}, \mathbf{r}_{13}, \mathbf{r}_{23}) = 0, \quad (3.1.10)$$

azzal az egyszerűsítéssel, hogy azonos részecskékről lévén szó teljesül:  $m_i = m$  és  $V_{ij}^C(\mathbf{r}_{ij}) = V^C(\mathbf{r}_{ij}) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{|\mathbf{r}_{ij}|}$  ( $\mathbf{r}_{ij}$ ,  $\mathbf{k}_{ij}$  a relatív változók). Azonban az egyenletnek csupán aszimptotikus egzakt megoldása van. Ezért Bose-Einstein korrelációk vizsgálata során a háromrészesecske Coulomb kölcsönhatást úgy vesszük figyelembe, mint három független kétrészesecske kölcsönhatást, azaz a hullámfüggvényt a következőképpen állítjuk elő: [3]

$$\Psi_{\mathbf{k}_{12}, \mathbf{k}_{13}, \mathbf{k}_{23}}(\mathbf{r}_{12}, \mathbf{r}_{13}, \mathbf{r}_{23}) \sim \Psi_{\mathbf{k}_{12}}(\mathbf{r}_{12}) \Psi_{\mathbf{k}_{13}}(\mathbf{r}_{13}) \Psi_{\mathbf{k}_{23}}(\mathbf{r}_{23}), \quad (3.1.11)$$

ahol  $\Psi_{\mathbf{k}_{12}}(\mathbf{r}_{12})$  a kétrészesecske Coulomb probléma megoldása. Tehát a következő Schrödinger egyenletet elégíti ki:

$$\left[ -\frac{\hbar^2}{2\mu} \Delta_{\mathbf{r}_{ij}} + V^C(\mathbf{r}_{ij}) - \frac{\hbar^2 \mathbf{k}_{ij}^2}{2\mu} \right] \Psi_{\mathbf{k}_{ij}}(\mathbf{r}_{ij}) = 0, \quad (3.1.12)$$

ahol  $\mu$  a redukált tömeg (pion tömeg fele), valamint a  $\mathbf{k}_{ij}$  az  $i, j$  részecskepár relatív momentumának a fele. Az egyenlet megoldása:

$$\Psi_{\mathbf{k}_{ij}}(\mathbf{r}_{ij}) = \mathcal{N}_{ij} e^{i\mathbf{k}_{ij}\mathbf{r}_{ij}} F(-i\eta_{ij}, 1, i(k_{ij}r_{ij} - \mathbf{k}_{ij}\mathbf{r}_{ij})), \quad \mathcal{N}_{ij} = e^{-\frac{\pi}{2}\eta_{ij}} \Gamma(1+i\eta_{ij}), \quad (3.1.13)$$

ahol  $\eta_{ij} = \frac{\mu\alpha}{2k_{ij}}$ . Azonban annak érdekében, hogy ezt a megoldást használhassuk a háromrészesecske hullámfüggvényben, a következő módosítást kell végrehajtani [3, 7, 23]:

$$\Psi_{\mathbf{k}_{ij}}(\mathbf{r}_{ij}) = \mathcal{N}_{ij} e^{i\frac{2}{3}\mathbf{k}_{ij}\mathbf{r}_{ij}} F(-i\eta_{ij}, 1, i(k_{ij}r_{ij} - \mathbf{k}_{ij}\mathbf{r}_{ij})) \quad (3.1.14)$$

A 3.1.14 egyenlet által megadott hullámfüggvényt a három relatív koordinátában véve és összeszorozva, valamint a szimmetrizációt elvégezve megkaphatjuk a háromrészesecske Bose-Einstein korrelációk vizsgá-

latánál használt Coulomb hullámfüggvényt:

$$\begin{aligned} \Psi_{\mathbf{k}_{12}, \mathbf{k}_{13}, \mathbf{k}_{23}}(\mathbf{r}_{12}, \mathbf{r}_{13}, \mathbf{r}_{23}) = \frac{1}{\sqrt{6}} \left[ \begin{aligned} &\Psi_{\mathbf{k}_{12}}(\mathbf{r}_{12}) \Psi_{\mathbf{k}_{13}}(\mathbf{r}_{13}) \Psi_{\mathbf{k}_{23}}(\mathbf{r}_{23}) + \\ &\Psi_{\mathbf{k}_{12}}(\mathbf{r}_{23}) \Psi_{\mathbf{k}_{13}}(\mathbf{r}_{12}) \Psi_{\mathbf{k}_{23}}(\mathbf{r}_{13}) + \\ &\Psi_{\mathbf{k}_{12}}(\mathbf{r}_{13}) \Psi_{\mathbf{k}_{13}}(\mathbf{r}_{23}) \Psi_{\mathbf{k}_{23}}(\mathbf{r}_{12}) + \\ &\Psi_{\mathbf{k}_{12}}(\mathbf{r}_{12}) \Psi_{\mathbf{k}_{13}}(\mathbf{r}_{23}) \Psi_{\mathbf{k}_{23}}(\mathbf{r}_{13}) + \\ &\Psi_{\mathbf{k}_{12}}(\mathbf{r}_{13}) \Psi_{\mathbf{k}_{13}}(\mathbf{r}_{12}) \Psi_{\mathbf{k}_{23}}(\mathbf{r}_{23}) + \\ &\Psi_{\mathbf{k}_{12}}(\mathbf{r}_{23}) \Psi_{\mathbf{k}_{13}}(\mathbf{r}_{13}) \Psi_{\mathbf{k}_{23}}(\mathbf{r}_{12}) \end{aligned} \right] \end{aligned} \quad (3.1.15)$$

## 3.2. A Coulomb-korrektíós integrál

### 3.2.1. Kétrészecske

A 3.0.1 egyenlet alapján a kétrészecske Coulomb integrál a következő lesz:

$$K(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) = \frac{\iint \mathcal{S}(\mathbf{p}_1, \mathbf{r}_1) \mathcal{S}(\mathbf{p}_2, \mathbf{r}_2) |\Psi_{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2}^0(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)| d^3 \mathbf{r}_1 d^3 \mathbf{r}_2}{\iint \mathcal{S}(\mathbf{p}_1, \mathbf{r}_1) \mathcal{S}(\mathbf{p}_2, \mathbf{r}_2) |\Psi_{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2}^C(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)| d^3 \mathbf{r}_1 d^3 \mathbf{r}_2} \quad (3.2.1)$$

A kétrészecske Coulomb probléma tárgyalásánál láttuk, hogy célszerű áttérni az  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ ,  $2\mathbf{R} = \mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2$ ,  $2\mathbf{k} = \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2$  és  $\mathbf{K} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2$  változókra, ekkor ugyanis mind a szabad, mind a Coulomb hullámfüggvény négyzete  $\mathbf{R}$  és  $\mathbf{K}$  független lesz:

$$|\Psi_{\mathbf{k}, \mathbf{K}}(\mathbf{r}, \mathbf{R})|^2 = |e^{i\mathbf{K}\mathbf{R}} \Psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r})|^2 = |\Psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r})|^2, \quad (3.2.2)$$

így  $\mathbf{R}$  függés csak a forrásfüggvényben marad. Ez azt jelenti, hogy a 3.2.1 Coulomb integrál a következő alakra egyszerűsödik:

$$K(\mathbf{k}, \mathbf{K}) = \frac{\int \mathcal{S}_2(\mathbf{r}, \mathbf{k}, \mathbf{K}) |\Psi_{\mathbf{k}}^0(\mathbf{r})| d^3 \mathbf{r}}{\int \mathcal{S}_2(\mathbf{r}, \mathbf{k}, \mathbf{K}) |\Psi_{\mathbf{k}}^C(\mathbf{r})| d^3 \mathbf{r}}, \quad (3.2.3)$$

ahol a bevezetett  $\mathcal{S}_2$  a következőképpen számolható:

$$\mathcal{S}_2(\mathbf{r}, \mathbf{k}, \mathbf{K}) = \int \mathcal{S}\left(\mathbf{k} + \frac{1}{2}\mathbf{K}, \mathbf{R} + \frac{1}{2}\mathbf{r}\right) \mathcal{S}\left(\mathbf{k} - \frac{1}{2}\mathbf{K}, \mathbf{R} - \frac{1}{2}\mathbf{r}\right) d^3 \mathbf{R}. \quad (3.2.4)$$

Ez az integrál elvégezhető, amennyiben a forrást  $\alpha, R_M$  paraméterekkel jellemzett Lévy eloszlásnak tekintjük, a végeredmény a következő lesz:

$$\mathcal{S}(\mathbf{p}, \mathbf{r}) = \mathcal{L}(\mathbf{r}, \alpha, R_M) \implies \mathcal{S}_2(\mathbf{r}, \mathbf{k}, \mathbf{K}) = \mathcal{L}(\mathbf{r}, \alpha, 2^{\frac{1}{\alpha}} R_M) \quad (3.2.5)$$

### 3.2.2. Háromrészecske

A 3.0.1 egyenlet alapján a kétrészecske Coulomb integrál a következő lesz:

$$K(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3) = \frac{\iiint \mathcal{S}(\mathbf{p}_1, \mathbf{r}_1) \mathcal{S}(\mathbf{p}_2, \mathbf{r}_2) \mathcal{S}(\mathbf{p}_3, \mathbf{r}_3) |\Psi_{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3}^0(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3)| d^3 \mathbf{r}_1 d^3 \mathbf{r}_2 d^3 \mathbf{r}_3}{\iiint \mathcal{S}(\mathbf{p}_1, \mathbf{r}_1) \mathcal{S}(\mathbf{p}_2, \mathbf{r}_2) \mathcal{S}(\mathbf{p}_3, \mathbf{r}_3) |\Psi_{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3}^C(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3)| d^3 \mathbf{r}_1 d^3 \mathbf{r}_2 d^3 \mathbf{r}_3} \quad (3.2.6)$$

Kétrészecske esethez hasonlóan itt is bevezetjük a relatív koordinátákat, azaz a következő változókra térünk rá:

$$\mathbf{r}_{ij} = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j, \quad \mathbf{R} = \frac{\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_3}{3}, \quad \mathbf{k}_{ij} = \frac{\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_j}{2}, \quad \mathbf{K} = \frac{\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_3}{3}, \quad (3.2.7)$$

továbbá teljesül  $\mathbf{r}_{23} = \mathbf{r}_{13} - \mathbf{r}_{12}$  és  $\mathbf{k}_{23} = \mathbf{k}_{13} - \mathbf{k}_{12}$  összefüggés, így az integrálási mérték:  $d^3\mathbf{r}_1 d^3\mathbf{r}_2 d^3\mathbf{r}_3 = d^3\mathbf{R} d^3\mathbf{r}_{12} d^3\mathbf{r}_{13}$  lesz. A hullámfüggvények ebben az esetben is csak a relatív változóktól függenek,  $\mathbf{R}$  függése csak a forrásfüggvényeknek lesz, ezért a  $d^3\mathbf{R}$  integrálás ismét a forrásfüggvények szorzatára hat. Így a háromrészesce Coulomb integrál a következő alakú lesz:

$$K(\mathbf{k}_{12}, \mathbf{k}_{13}, \mathbf{K}) = \frac{\iint \mathcal{S}_3(\mathbf{r}_{12}, \mathbf{r}_{13}, \mathbf{k}_{12}, \mathbf{k}_{13}, \mathbf{K}) \left| \Psi_{\mathbf{k}_{12}, \mathbf{k}_{13}, \mathbf{k}_{23}}^0(\mathbf{r}_{12}, \mathbf{r}_{13}, \mathbf{r}_{23}) \right| d^3\mathbf{r}_{12} d^3\mathbf{r}_{13}}{\iint \mathcal{S}_3(\mathbf{r}_{12}, \mathbf{r}_{13}, \mathbf{k}_{12}, \mathbf{k}_{13}, \mathbf{K}) \left| \Psi_{\mathbf{k}_{12}, \mathbf{k}_{13}, \mathbf{k}_{23}}^C(\mathbf{r}_{12}, \mathbf{r}_{13}, \mathbf{r}_{23}) \right| d^3\mathbf{r}_{12} d^3\mathbf{r}_{13}}, \quad (3.2.8)$$

ahol a bevezetett  $\mathcal{S}_3$  a következőképpen néz ki (momentum függést nem írtam ki):

$$\mathcal{S}_3(\mathbf{r}_{12}, \mathbf{r}_{13}) = \int \mathcal{S}\left(\mathbf{R} + \frac{5}{3}\mathbf{r}_{12} + \frac{1}{3}\mathbf{r}_{13}\right) \mathcal{S}\left(\mathbf{R} + \frac{2}{3}\mathbf{r}_{12} + \frac{1}{3}\mathbf{r}_{13}\right) \mathcal{S}\left(\mathbf{R} - \frac{7}{2}\mathbf{r}_{12} - \frac{2}{3}\mathbf{r}_{13}\right) d^3\mathbf{R} \quad (3.2.9)$$

A forrásfüggvényre  $\alpha$ ,  $R_M$  paraméterekkel rendelkező Lévy eloszlást feltételezve, az összefüggésbe a 2.3.5 definíciót beírva, az  $\mathbf{R}$ -re vett integrál elvégezhető, eredményül egy Dirac-deltát ad, így egy további  $\mathbf{q}$ -ra vett integrál is elvégezhető, végül a következő alakra egyszerűsödik:

$$\mathcal{S}_3(\mathbf{r}_{12}, \mathbf{r}_{13}) = \frac{1}{(2\pi)^6} \int e^{-|\mathbf{q}_1 R_M|^\alpha - |\mathbf{q}_2 R_M|^\alpha - |\mathbf{q}_1 R_M + \mathbf{q}_2 R_M|^\alpha} e^{-i\mathbf{q}_1(4\mathbf{r}_{12} + \mathbf{r}_{13})} e^{i\mathbf{q}_2(3\mathbf{r}_{12} + \mathbf{r}_{13})} d^3\mathbf{q}_1 d^3\mathbf{q}_2 \quad (3.2.10)$$

Ha azt mondhatnánk, hogy  $|\mathbf{q}_1 R_M + \mathbf{q}_2 R_M|^\alpha \approx |\mathbf{q}_1 R_M|^\alpha + |\mathbf{q}_2 R_M|^\alpha$ , akkor az  $\mathcal{S}_3$  a következő lenne:

$$\mathcal{S}_3(\mathbf{r}_{12}, \mathbf{r}_{13}) = \mathcal{L}(4\mathbf{r}_{12} + \mathbf{r}_{13}, \alpha, 2^{\frac{1}{\alpha}} R_M) \mathcal{L}(3\mathbf{r}_{12} + \mathbf{r}_{13}, \alpha, 2^{\frac{1}{\alpha}} R_M) \quad (3.2.11)$$

### 3.3. Gauss–Kronrod integrálási módszer

A 2.3.5 integrál numerikus kiszámolásához Gauss-Kronrod módszert használtam, mivel ezen módszer használatával érhetünk el nagyon pontos eredményt hatékonyan [6]. Az integrálás tartománya a teljes tér, amely az cél hiba megadásával végessé tehető a következőképpen: az integrálási tartományt folyamatosan növeljük, amíg hibán belül az érték nem konvergál.

Az  $n$ -ed rendű Gauss-kvadrátúra  $[-1, 1]$  tartományon (konvenció szerint ezen a tartományon van megadva a szabály) vett integrált  $n$  speciálisan választott pont lineáris kombinációjával becsli:

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx \sum_{i=1}^n w_i f(x_i), \quad (3.3.1)$$

ahol a  $w_i, x_i$  pontok úgy vannak megválasztva, hogy,  $2n - 1$  vagy ennél alacsonyabb rendű polinomok esetén egzakt eredményt adjon. A módszer jó közelítő eredményt fog adni minden olyan függvényre ami legfeljebb  $2n - 1$ -ed rendű polinommal közelíthető. A formulában szereplő  $x_i$  pontok az  $n$ -ed rendű Legendre polinom gyökei, azaz őket a  $P_n(x_i) = 0$  egyenlet definiálja, a súlyokat pedig a következőképpen kell meghatározni ([28]):

$$w_i = \frac{2}{(1 - x_i)^2 (P'_n(x_i))^2} \quad (3.3.2)$$

Amennyiben az integrálandó függvény  $f(x) = \omega(x)g(x)$  alakban áll elő, ahol  $g(x)$  egy polinom, akkor új súlyokat vezethetünk be amelyeket az  $\omega(x)$  határoz meg, így egy pontosabb közelítő formulát konstruálva. Például ha  $\omega(x) = \exp(-x^2)$ , akkor a pontokat a Hermite polinom gyökeinek választva és a súlyokat szintén a Hermite polinomokból meghatározva kapunk pontos közelítő formulát  $f(x) \exp(-x^2)$  alakú integrál meghatározására (az  $f(x)$  itt is legfeljebb  $2n - 1$ -ed rendű lehet).

A Gauss-Kronrod módszer a Gauss módszert egészíti ki, úgy, hogy az  $n$ -ed rendű Gauss szabály pontjaihoz hozzáad,  $n + 1$  további pontot, így kapva egy  $2n + 1$  rendű pontosabb becslést. A módszer lényege, hogy a kevésbé pontos, alacsonyabb rendű módszer pontjait fel lehet használni, egy magasabb rendű módszernél. Az  $n + 1$  új pont a Stieltjes polinomok ([17]) határozzák meg. Az alacsonyabb és magasabb rendű becslések közti különbség használható hibabecslésre, amely felhasználható adaptív lépéshossz meghatározásánál (én a munkám során ezt az utat követtem).

### 3.4. Markov-lánc Monte Carlo módszerek

A Coulomb integrál számítására a Markov-lánc Monte Carlo módszert választottuk, mivel ezen módszer segítségével hatékonyabban tudjuk számolni a magasdimenziós integrálokat.

#### 3.4.1. Monte Carlo módszer

A Monte Carlo integrálási módszerek tipikusan a következő alakú  $D$  dimenziós integrálok esetén bukkannak fel:

$$I = \int_{\Omega} f(x)g(x)dx, \quad (3.4.1)$$

ahol  $\Omega$  az integrálási tartomány,  $dx$  a  $D$  dimenziós integrálási mérték. Amennyiben  $\int_{\Omega} g(x)dx = C$  vezessük be a következő függvényt:  $p(x) = g(x)/C$ . Triviálisan módon a keresett integrál:

$$I = C \int_{\Omega} f(x)p(x)dx \equiv C\langle f \rangle_p, \quad (3.4.2)$$

ahol  $\langle \cdot \rangle_p$  a  $p$  eloszlással számolt várható értéket jelöli. A  $p(x)$  valószínűségi eloszlás szerint válasszunk  $N$  pontot a terüinkből, ezen pontokat jelöljük  $x_1, \dots, x_N \in \Omega$  változókkal. Ezen minta segítségével becsülhetjük a várható értéket:

$$\bar{I}_N = C \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(x_i) \equiv C\bar{f} \quad (3.4.3)$$

A nagy számok erős törvénye alapján a minta várható érték majdnem biztosan tart a várható értékhez:

$$\mathcal{P}\left(\lim_{N \rightarrow \infty} \bar{I}_N = I\right) = 1, \quad (3.4.4)$$

ahol  $\mathcal{P}$  jelöli a valószínűséget, azaz végtelen sok pontot véve 0 a valószínűsége, hogy az integrál becslése rossz. Azonban numerikus számolás során valamekkora véges  $N$ -et kell választanunk, és fontos tudnunk, hogy a pontok számának a növelésével, hogy változik hiba. Ezen kapcsolat meghatározása érdekében az  $\bar{I}_N$ -et tekinthetjük valószínűségi változónak, amelynek van valamekkora  $\sigma(\bar{I}_N)$  szórása, amely a következőképpen számolható:

$$\sigma^2(\bar{I}_N) = \frac{C^2}{N^2} \sum_{i=1}^N \sigma^2(f) = \frac{C^2 \sigma^2(f)}{N} \implies \sigma(\bar{I}_N) = \frac{C\sigma(f)}{\sqrt{N}}, \quad (3.4.5)$$

ahol a  $\sigma(f)$  becsülhető a mintából a következő módon:

$$\sigma(f) = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (f(x_i) - \bar{f})^2 \quad (3.4.6)$$

Tehát a hiba a pontok számának a gyökével csökken.

Amennyiben  $g(x) = 1$ , egyenletes eloszlással mintavételezhetjük és az integrál értéke  $I = V\bar{f}$  lesz, ahol  $V = \int_{\Omega} dx$ .

### 3.4.2. Markov-lánc

**3.1. Definíció.** Az  $X_1, \dots, X_N$  ( $\Omega$  értékű) valószínűségi változók sorozatát Markov-láncnak nevezzük, ha minden  $n$  és  $x_1, \dots, x_{n+1} \in \Omega$  esetén teljesül az úgynevezett Markov tulajdonság:

$$\mathcal{P}(X_{n+1} = x_{n+1} | X_n = x_n, \dots, X_1 = x_1) = \mathcal{P}(X_{n+1} = x_{n+1} | X_n = x_n) \quad (3.4.7)$$

**3.2. Definíció.** Az  $X_1, \dots, X_N$  Markov-láncot homogénnek nevezünk, akkor ha  $\forall i, \forall a, b \in \Omega : \mathcal{P}(X_{i+1} = a | X_i = b) = T_{ab}$ . A  $T$  mátrixot szokás sztochasztikus mátrixnak nevezni ( $\sum_{b \in \Omega} T_{ab} = 1$ ).

**3.3. Definíció.** Az  $X_1, \dots, X_N$  Markov-lánc irreducibilis, ha  $\forall a, b \in \Omega : \exists i \geq 0$  úgy, hogy  $\mathcal{P}(X_i = a | X_0 = b) > 0$ .

**3.4. Definíció.** Egy  $X_1, \dots, X_N$  Markov-láncban,  $a \in \Omega$  elemnek, van periódusa, és ez  $k(a)$ , ha az elembe való visszatérés  $k$  többszörös lépésben történik. Azaz:

$$k(a) = \text{LNKO}\{i > 0 : \mathcal{P}(X_i = a | X_0 = a) > 0\}, \quad (3.4.8)$$

ahol LNKO a legnagyobb közös osztót jelenti.

**3.5. Definíció.** Egy  $X_1, \dots, X_N$  Markov-lánc aperiodikus, ha  $\forall a \in \Omega : k(a) = 1$

**3.6. Definíció.** Egy  $\Omega$ -n értelmezett  $p$  eloszlás stacionárius, ha

$$\sum_{a \in \Omega} p_a T_{ab} = p_b, \quad \forall b \in \Omega \quad (3.4.9)$$

**3.1. Tétel.** Ergodicitás tétel Markov láncokra. Legyen  $X_1, \dots$  egy irreducibilis, homogén Markov-lánc és az  $X_i$ -k  $p$  eloszlása stacionárius, ekkor

$$\mathcal{P}\left(\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(X_i) - \langle f \rangle_p\right) = 1 \quad (3.4.10)$$

Amennyiben a lánc még aperiodikus is, akkor  $\forall a, b \in \Omega$  esetén teljesül:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{P}(X_n = a | X_0 = b) = p(a), \quad (3.4.11)$$

azaz nem számít a lánc kezdőpontja.

### 3.4.3. Metropolis algoritmus

Markov tulajdonság, grafikus model, faktorizál

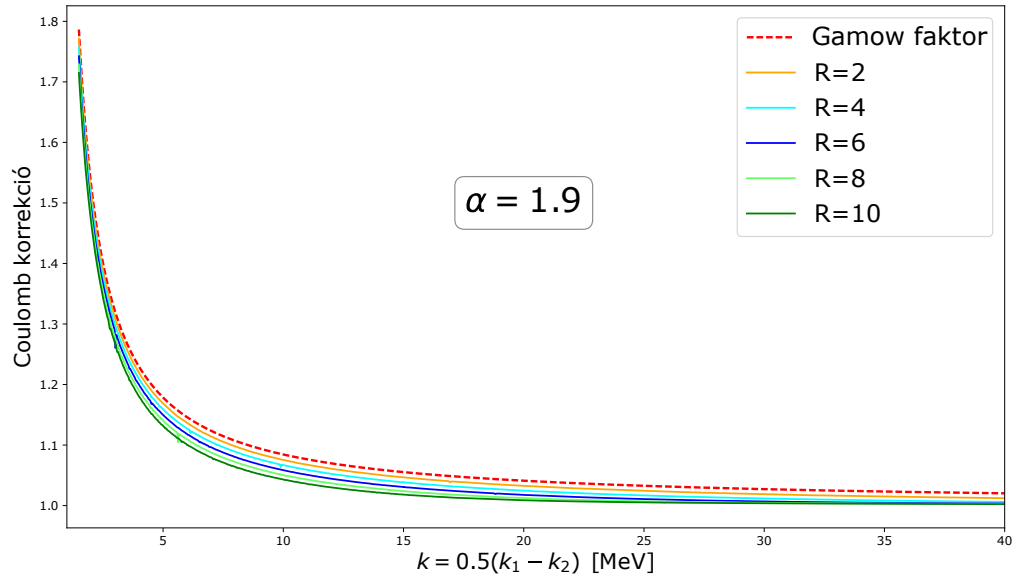
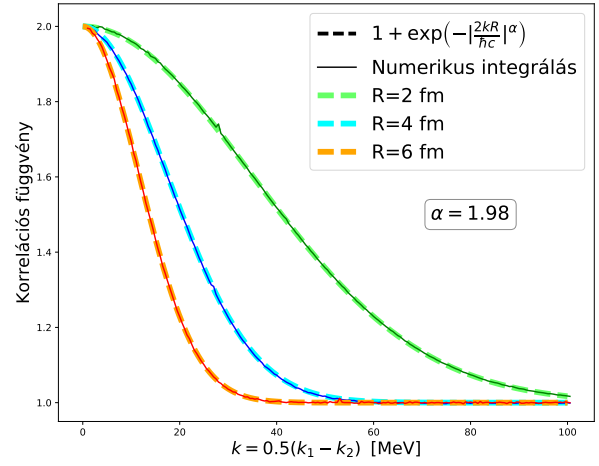
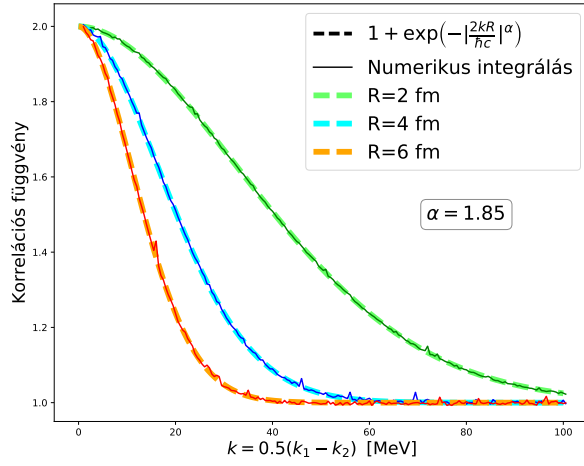
### 3.5. Implementáció

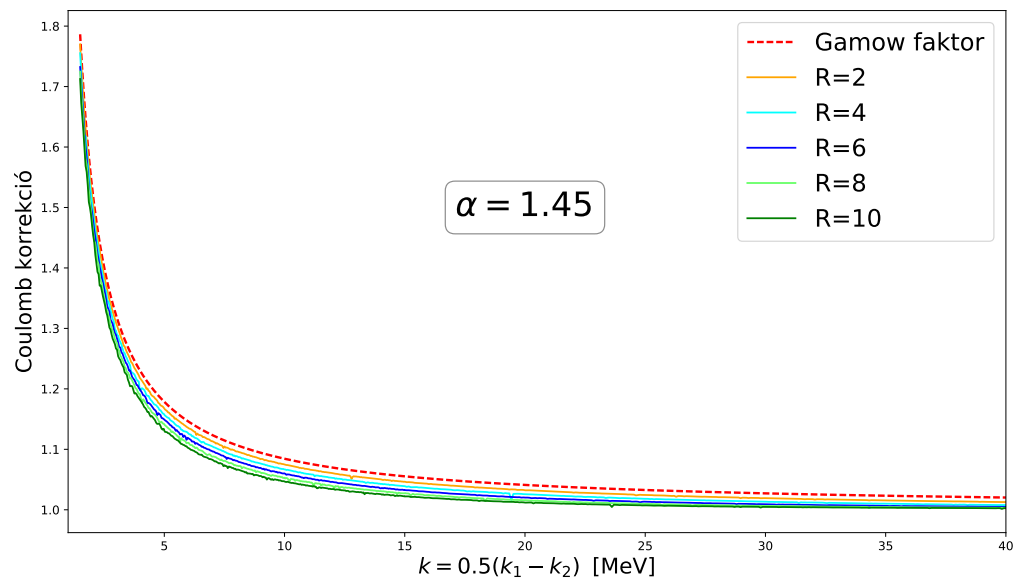
#### 3.5.1. CUDA

#### 3.5.2. MapReduce

#### 3.5.3. Háromrészeske Coulomb integrál közelítése

#### 3.5.4. Eredmények





## 4. Adatanalízis

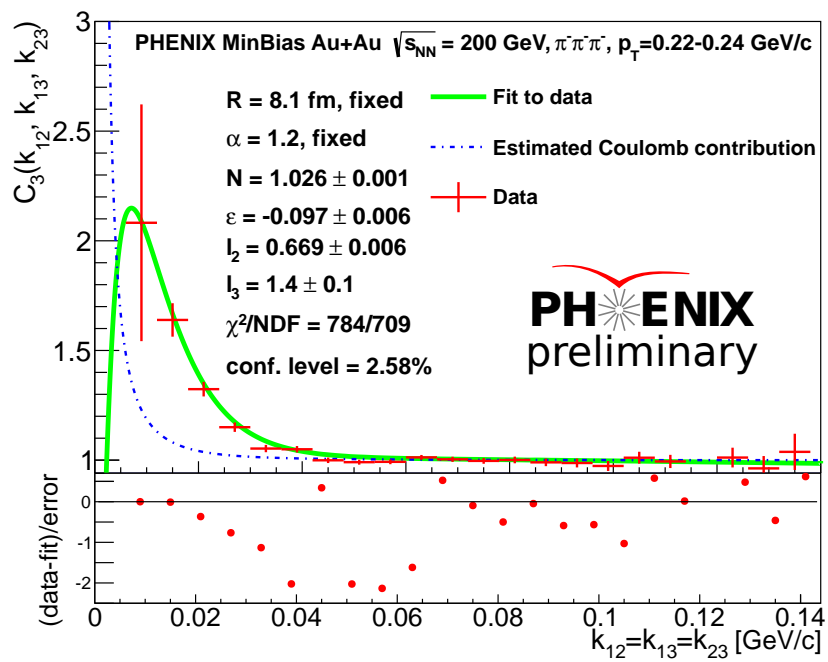
### 4.1. Korrelációs függvény változói

### 4.2. Korrelációs függvény mérése

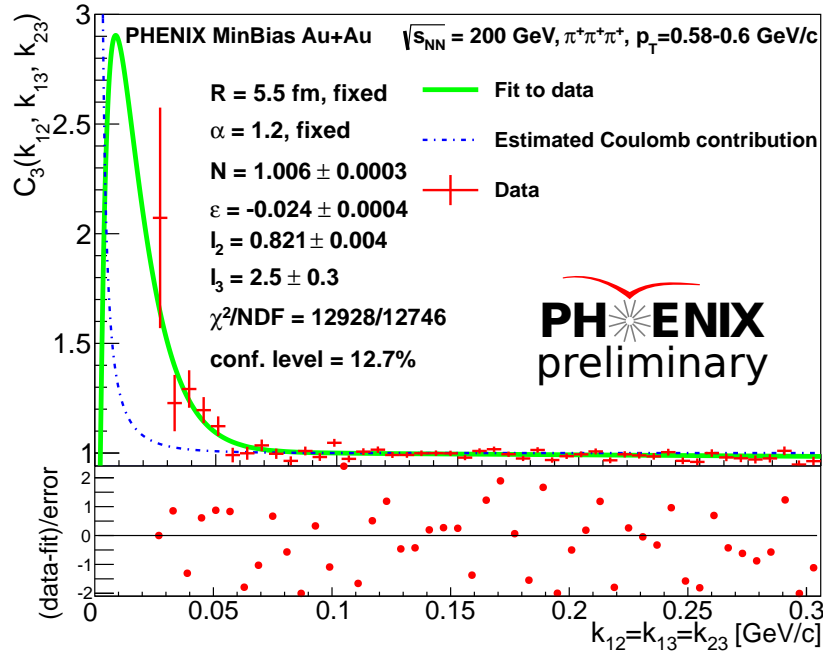
### 4.3. Illesztett modell

## 5. Eredmények

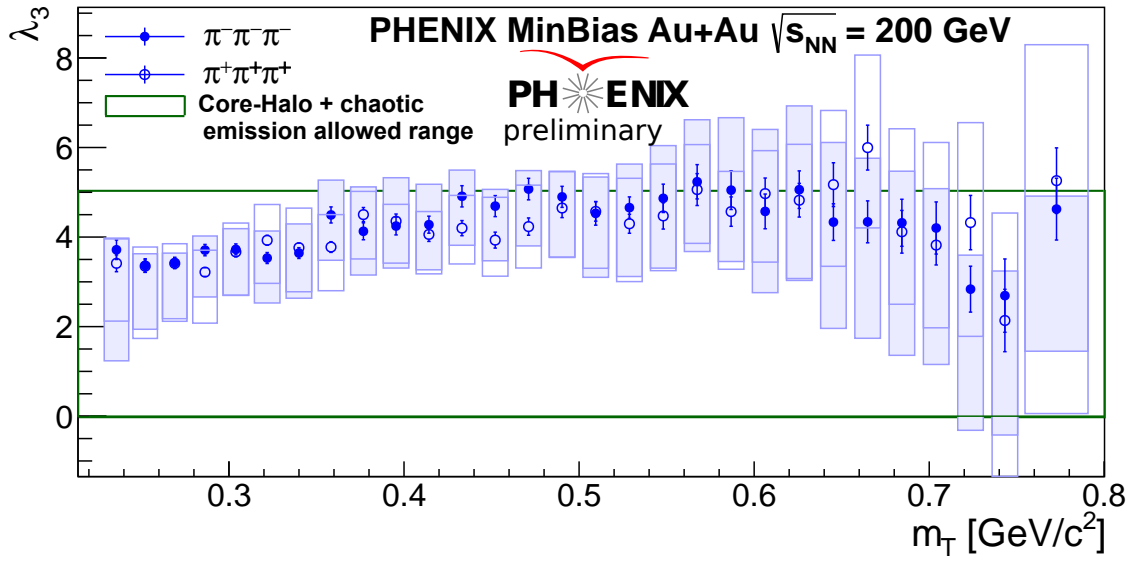
### 5.1. Illesztés vizualizáció



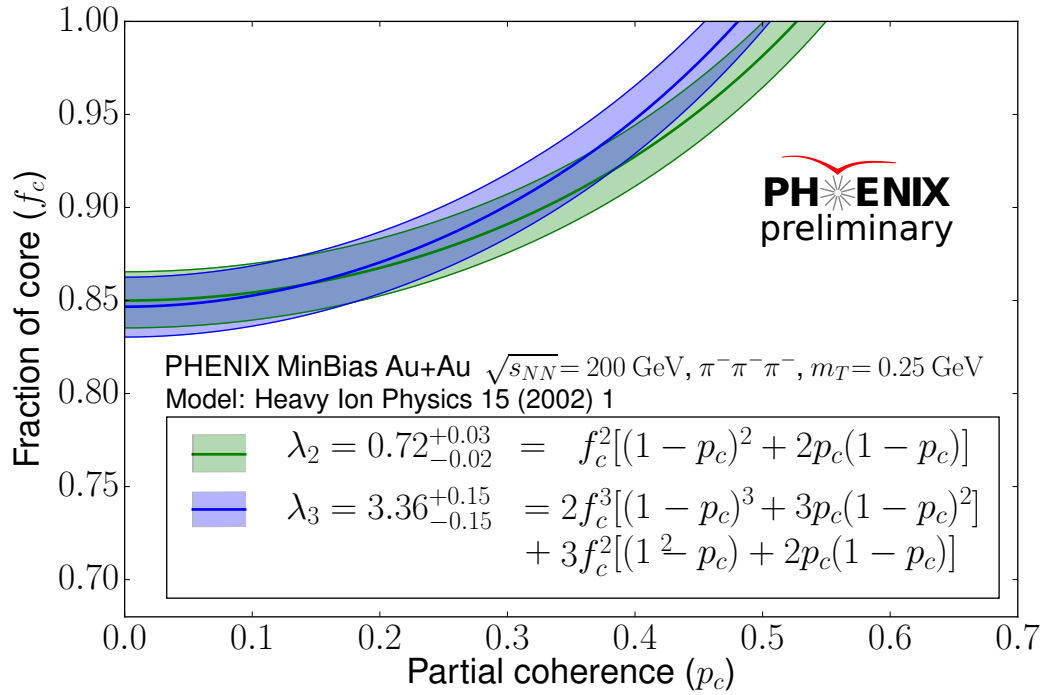
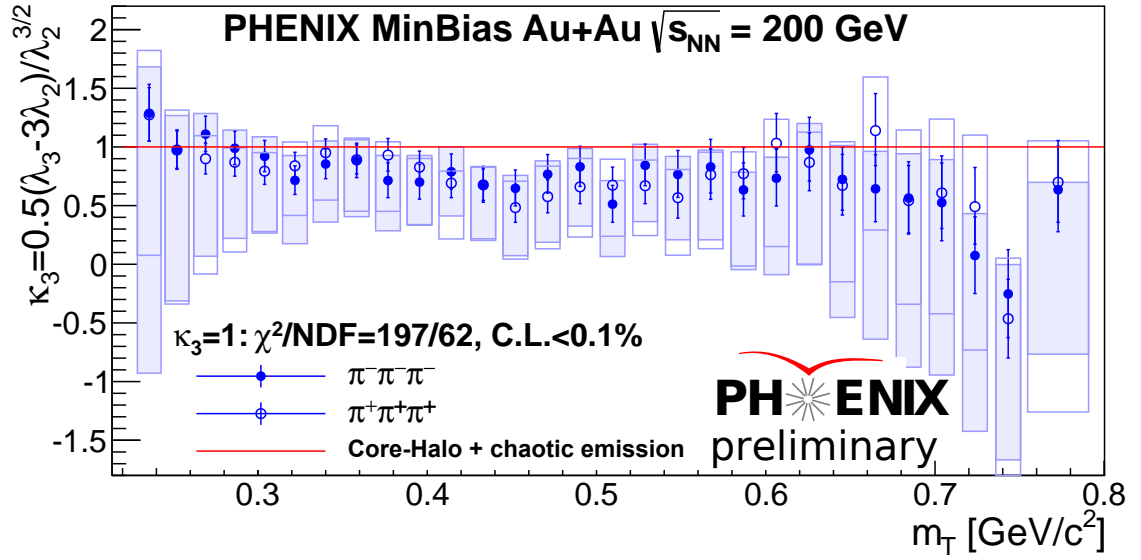


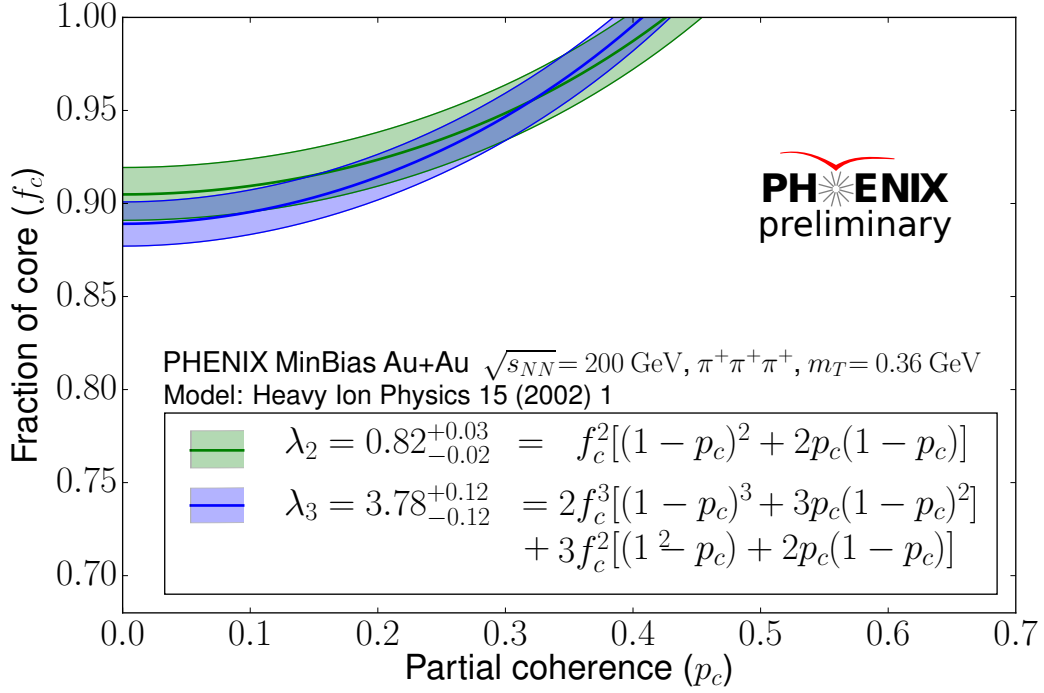


## 5.2. Háromrészezske korrelációs erősség



### 5.3. Parciális koherencia





## 6. Összefoglaló

### Hivatkozások

- [1] A. Adare et al. Observation of direct-photon collective flow in  $\sqrt{s_{NN}} = 200$  GeV Au+Au collisions. *Phys.Rev.Lett.*, 109:122302, 2012.
- [2] S. S. Adler et al. Evidence for a long-range component in the pion emission source in Au + Au collisions at  $s(NN)^{1/2} = 200$ -GeV. *Phys. Rev. Lett.*, 98:132301, 2007.
- [3] E. O. Alt, T. Csorgo, B. Lorstad, and J. Schmidt-Sorensen. Coulomb corrections to the three-body correlation function in high-energy heavy ion reactions. *Phys. Lett.*, B458:407–414, 1999.
- [4] E. O. Alt, T. Csorgo, B. Lorstad, and J. Schmidt-Sorensen. Coulomb wave function corrections for n particle Bose-Einstein correlations. *Eur. Phys. J.*, C13:663–670, 2000.
- [5] E. O. Alt, T. Csorgo, B. Lorstad, and J. Schmidt-Sorensen. Coulomb and core / halo corrections to Bose-Einstein N particle correlations. In *From  $e^+e^-$  to Heavy Ion Collisions: Proceedings of the 30th International Symposium on Multiparticle Dynamics (ISMD 2000), Tihany, Hungary, October 9-15, 2000*, pages 564–571, 2001.
- [6] Sebastian Ament and Michael O’Neil. Accurate and efficient numerical calculation of stable densities via optimized quadrature and asymptotics. *Statistics and Computing*, pages 1–15, 1 2017.
- [7] M. Biyajima, M. Kaneyama, and T. Mizoguchi. Analyses of two and three pion Bose-Einstein correlations using Coulomb wave function. *Phys. Lett.*, B601:41–50, 2004.

- [8] J. Bolz, U. Ornik, M. Plumer, B. R. Schlei, and R. M. Weiner. Resonance decays and partial coherence in Bose-Einstein correlations. *Phys. Rev.*, D47:3860–3870, 1993.
- [9] M. Csanad, T. Csorgo, and M. Nagy. Anomalous diffusion of pions at RHIC. *Braz. J. Phys.*, 37:1002–1013, 2007.
- [10] Mate Csanad and Marton Vargyas. Observables from a solution of 1+3 dimensional relativistic hydrodynamics. *Eur. Phys. J.*, A44:473–478, 2010.
- [11] M. Csanád. *Nagyenergiás atommag-ütközések téridőbeli lefolyása*. ELTE habilitációs dolgozat.
- [12] T. Csorgo. Higher order Bose-Einstein correlations for systems with large halo. *Phys. Lett.*, B409:11–18, 1997.
- [13] T. Csorgo. Particle interferometry from 40-MeV to 40-TeV. *Heavy Ion Phys.*, 15:1–80, 2002.
- [14] T. Csorgo. Review of HBT or Bose-Einstein correlations in high energy heavy ion collisions. *J. Phys. Conf. Ser.*, 50:259–270, 2006.
- [15] T. Csorgo, B. Lorstad, J. Schmid-Sorensen, and Andras Ster. Partial coherence in the core / halo picture of Bose-Einstein n particle correlations. *Eur. Phys. J.*, C9:275–281, 1999.
- [16] T. Csorgo, B. Lorstad, and J. Zimanyi. Bose-Einstein correlations for systems with large halo. *Z. Phys.*, C71:491–497, 1996.
- [17] *NIST Digital Library of Mathematical Functions*. <http://dlmf.nist.gov/>, Release 1.0.14 of 2016-12-21. F. W. J. Olver, A. B. Olde Daalhuis, D. W. Lozier, B. I. Schneider, R. F. Boisvert, C. W. Clark, B. R. Miller and B. V. Saunders, eds.
- [18] Gerson Goldhaber, Sulamith Goldhaber, Won-Yong Lee, and Abraham Pais. Influence of Bose-Einstein statistics on the anti-proton proton annihilation process. *Phys. Rev.*, 120:300–312, 1960.
- [19] R. Hanbury Brown and R. Q. Twiss. A Test of a new type of stellar interferometer on Sirius. *Nature*, 178:1046–1048, 1956.
- [20] M. Köfaragó. *Bose-Einstein korrelációk mérése és vizsgálata nagyenergiás mag-mag ütközésekben*. ELTE diplomamunka.
- [21] L.D. Landau and E.M. Lifshitz. *Elméleti fizika III.: Kvantummechanika*. Number v. 3. TYPOTeX, 2010.
- [22] Michael Annan Lisa, Scott Pratt, Ron Soltz, and Urs Wiedemann. Femtoscopy in relativistic heavy ion collisions. *Ann. Rev. Nucl. Part. Sci.*, 55:357–402, 2005.
- [23] T. Mizoguchi and M. Biyajima. An Improved formulation for three charged particles correlations in terms of Coulomb wave functions with degree of coherence. *Phys. Lett.*, B499:245–252, 2001.
- [24] Sandra S. Padula. HBT interferometry: Historical perspective. *Braz. J. Phys.*, 35:70–99, 2005.
- [25] S. Pratt, T. Csorgo, and J. Zimanyi. Detailed predictions for two pion correlations in ultrarelativistic heavy ion collisions. *Phys. Rev.*, C42:2646–2652, 1990.

- [26] A. Ster, M. Csanad, T. Csorgo, B. Lorstad, and B. Tomasik. Spectra, elliptic flow and azimuthally sensitive HBT radii from Buda-Lund model for  $\sqrt{s_{NN}} = 200$  GeV Au+Au collisions. *Eur. Phys. J.*, A47:58, 2011.
- [27] Steven Weinberg. *The First Three Minutes*. Basic Books, New York, New York, 1977.
- [28] Eric W. Weisstein. Legendre-gauss quadrature. From MathWorld—A Wolfram Web Resource.