

EÖTVÖS LORÁND TUDOMÁNYEGYETEM

TERMÉSZETTUDOMÁNYI KAR

FIZIKAI INTÉZET

Háromrészecke Bose-Einstein korrelációk vizsgálata

Bagoly Attila

Fizikus MSc

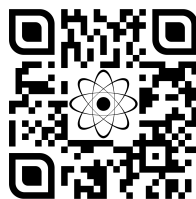
Témavezető:

Csanád Máté

ELTE TTK Atomfizikai tanszék



2017



Tartalomjegyzék

1. Bevezetés	1
1.1. Nagyenergiás nehézion-fizika	1
1.2. Kvar-k-gluon plazma	2
1.3. A PHENIX kísérlet	4
2. Bose-Einstein korrelációk	4
2.1. Definíció	5
2.2. Két nem kölcsönható részecske korrelációs függvénye	6
2.3. Forrás függvény	7
2.3.1. Lévy eloszlás	7
2.4. A mag-glória modell	9
2.5. A korreláció erőssége	11
2.6. Parciális koherencia	11
3. Coulomb-korrekció számítása	12
3.1. Coulomb-kölcsönhatás	13
3.1.1. Kétrészecske	13
3.1.2. Háromrészecske	14
3.2. A Coulomb-korrekciós integrál	15
3.2.1. Kétrészecske	15
3.2.2. Háromrészecske	15
3.3. Gauss–Kronrod integrálási módszer	16
3.4. Markov-lánc Monte Carlo módszerek	17
3.4.1. Monte Carlo módszer	17
3.4.2. Markov-láncok	18
3.4.3. Metropolis algoritmus	19
3.5. Implementáció	19
3.5.1. CUDA	19
3.5.2. MapReduce	19
3.5.3. Háromrészecske Coulomb integrál közelítése	19
3.5.4. Eredmények	19
4. Adatanalízis	21
4.1. Korrelációs függvény változói	21
4.2. Korrelációs függvény mérése	21
4.3. Illesztett modell	21
5. Eredmények	21
5.1. Illesztés vizualizáció	21
5.2. Háromrészecske korrelációs erősség	22
5.3. Parciális koherencia	23

1. Bevezetés

1.1. Nagyenergiás nehézion-fizika

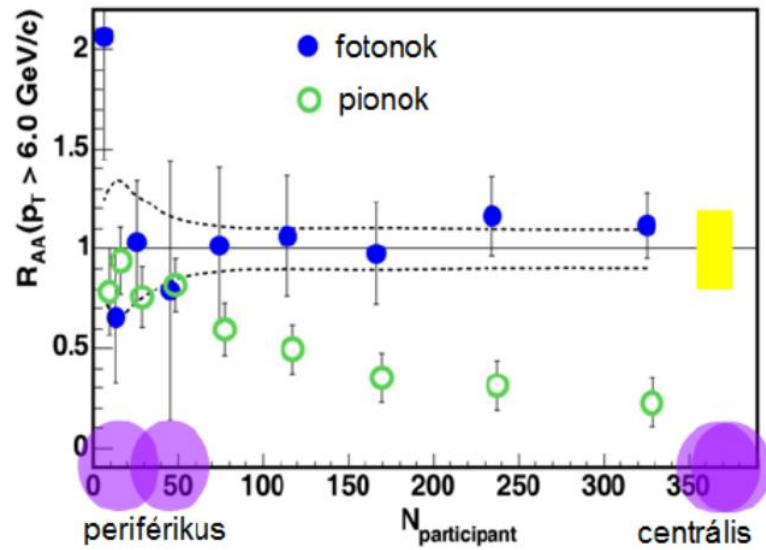
A nehézion-fizikában nagy rendszámú atommagok közel fénysebességen való ütköztetésével próbálunk információt szerezni az elemi részecskék világáról. Az atommagokat közel fénysebességre gyorsítjuk elektromágneses terek segítségével (LHC, RHIC a két legnagyobb energiájú gyorsító). A labor-rendszerből nézve Lorentz-kontrahált atommagokat összeütköztetünk, az ütközés során lejátszódnak bizonyos valószínűséggel „kemény” folyamatok amelyek során részecskezápörök (jet) keletkeznek, melyek hadronokból, leptonokból és fotonokból állnak. A kemény folyamatok jellemzője, hogy a jetek párokban keletkeznek, majd az impulzusmegmaradás miatt ellenkező irányba haladnak, az ütközések során a legvalószínűbb egy jet-pár keletkezése. Egy ütközés során nem csak kemény folyamatok zajlanak, hanem a „lágymű” folyamatok is, melyek során a részecskék nem jetekben keletkeznek. Az ütköző atommagok tömegközépponti energiájának növelésével nő a kemény folyamatok valószínűsége, és csökken a lágymű folyamatoké. Az ütközési pont köré épített detektorok segítségével mérjük a keletkező részecskék eloszlásait és különböző fizikai paramétereit. Ezen adatok segítségével próbálunk következtetni az ütközés után lezajló jelenségekre.

Az ütközések jellemzésére definiálni szoktuk az impakt paramétert, amely a középpontok távolságát jelenti. Az impakt paraméter alapján centralitás osztályokba rendezzük az ütközéseket, ezen osztályokat a centrálisról periférikus felé haladva százalékosan adunk meg.

Másik fontos fogalom a nukleáris módosulási faktor, amely segítségével az ütközés folyamatát tudjuk jellemezni. Az ütközés centralitását ismerve ki tudjuk számolni az ütközésben résztvevő nukleonok számát. A teljes folyamatot elképzelhetjük bináris ütközések összegeként, amennyiben feltesszük, hogy a protonok páronként ütköznek és egymástól függetlenül zajlanak az események. Független p+p ütközésekből ismerjük egy ilyen esemény során keletkező részecskék számát. Nehézion ütközések esetén ezt a számot megszorozzuk az ütközés bináris eseményeinek számával, így megkapjuk a keletkező részecskék számát. Azonban ezt a számot közvetlenül is meghatározhatjuk két nehézion összeütköztetésével, az előbbivel vett arányt nevezzük a nukleáris módosulási faktornak. Például Au+Au ütközés esetén, ha a keletkező részecskék száma N_{Au} , bináris ütközések száma N_{bin} és p+p ütközések esetén a keletkező részecskék száma N_p akkor a nukleáris módosulási faktor a következőképpen néz ki:

$$R_{AA} = \frac{N_{Au}}{N_{bin}N_p}, \quad (1.1.1)$$

ennek értékére $R_{AA} = 1$ várunk, mivel az Au+Au ütközéseket úgy képzeljük el, hogy az ütközésben résztvevő protonok páronként ütköztek.



1.1. ábra. Au+Au ütközések esetén a nukleáris módosulási faktor a nukleonszám függvényében pionokra és fotonokra. Az ábrán látható, hogy nagy centralitás esetén kevesebb nagyenergiás piont észlelünk mint p+p ütközések alapján várnánk, továbbá az erős kölcsönhatásban nem fotonok száma a várttal egyezik. Ez utal az erősen kölcsönható közeg jelenlétére. Forrás: [11]

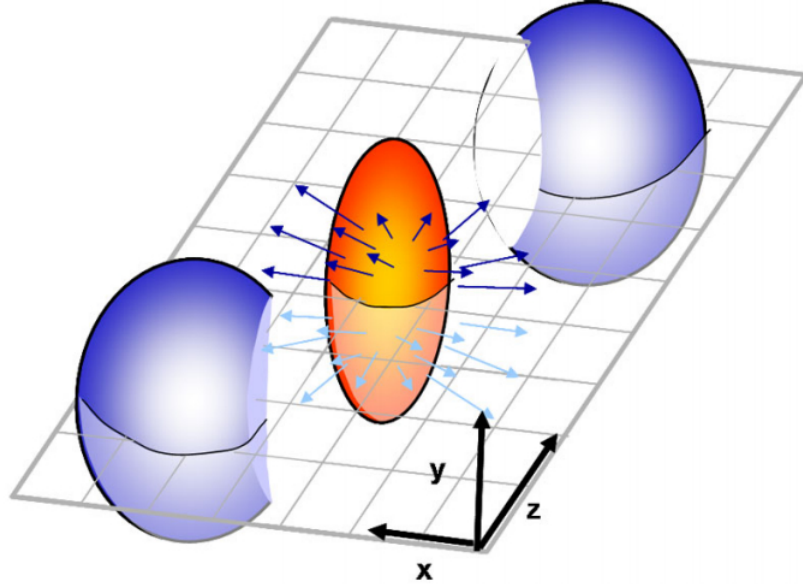
1.2. Kvark-gluon plazma

A RHIC gyorsítóban Au+Au ütközések során nagy nagy centralitásánál mérések során kevesebb nagyenergiás részecskét mértek a p+p ütközések alapján vártnál (1.1 ábra), a jet-párok egyik tagja nem jelent meg. Azonban ezen tapasztalatoknak több kiváltó oka is lehet, a kérdés eldöntésére további kísérleteket végeztek. Az egyik volt a deutérium-arany ütközések elvégzése, azonban itt semmilyen centralitásánál nem volt jet-elnyomás. Ennek magyarázata, hogy ütközések esetén erősen kölcsönható közeg jöhet létre amely a jet-pár egyik tagját elnyeli (amely nagyobb utat tesz meg benne), azonban deutérium-arany ütközések során a létrejövő közeg mérete túl kicsi, hogy elnyelje azt.

Ezen közeg létrejöttét elméletileg a QCD magyarázza meg. Az elmélet szerint nagyon nagy energián megjelennek kvark szabadsági fokok, azaz a kvarkok hadronba zártsága megszűnik. A létrejövő közeg az erősen kölcsönható kvark-gluon plazma nevet viseli (sQGP). Ezen közegben nagyok a hatáskeresztmetszetek, ezért kicsi a szabad úthossz és gyors a termalizáció, ezért van értelme lokális egyensúlyról beszélni, így alkalmazhatóak rá a statisztikus fizika fogalmai (pl. hőmérséklet). Az ősrobbanást követő egy milliomod másodpercben az univerzumot is a kvark-gluon plazma alkotta [29].

Az új közeg felfedezése után a RHIC gyorsítóban ezen közeg tulajdonságainak megismerését célzó kísérletek kezdődtek. Ezen kísérletek során kiderült, hogy a kvark-gluon plazma az eddig látott legtökéletesebb (viszkózitás mentes) folyadékként viselkedik, amely meglepő volt hisz nagyon kis viszkózitással rendelkező folyadékokat eddig nagyon alacsony hőmérsékleten tudtak csak előállítani. A kvarkfolyadék viszkózitására a gravitációs- és kvantumtérelméletek analógiájából (AdS/CFT) származik egy alsó becs-

lés, eszerint a viszkozitás nem lehet kisebb mint $\hbar/4\pi$.



1.2. ábra. Két gömb ütközéseként létrejövő speciális ellipszoidális szimmetriával rendelkező kezdeti eloszlás kialakulása. Forrás: [11]

Ultrarelativisztikus sebességre felgyorsított atommagok ütközése két Lorentz-kontrahált korong ütközéseként fogható fel, laborrendszerből nézve. Amint az 1.2 ábra is szemlélteti, ez a létrejövő kvarkanyagban speciális kezdeti eloszlást eredményez, egy $\cos(2\varphi)$ -szerinti aszimmetriát az eloszlásban, amely a tengelyszimmetriától való elliptikus eltérést jelenti. A nyalábirányra merőlegesen bevezetjük a transzverz-síkot, ebben a síkban az kvarkanyag kezdeti eloszlását Fourier-sorba fejtjük a következőképpen:

$$A(\varphi) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos(n\varphi) + b_n \sin(n\varphi) \right] \quad (1.2.1)$$

Ezen sorfejtés alapján látható, hogy az a_2 jellemzi az előbb említett aszimmetriát, amennyiben tökéletesen gömbszimmetrikusak lennének az atommagok és a keletkező ellipszis egyik nagytengelyén vennénk föl a koordináta-rendszer x-tengelyét csupán ez a tag jelenne meg. Azonban mivel az atommagok véges nukleonszámmal rendelkeznek, melyeknek van valamilyen eloszlása a magon belül, a gömbszimmetria csupán első közelítésként fogható fel.

Az ütközés után létrejövő kvarkanyag robbanásszerűen tágul egész addig amíg a hőmérséklet le nem csökken egy bizonyos értékre, ekkor megszűnik ez a fázis és a kvarkokból hadronok keletkeznek amelyeket mérni is tudunk. Mivel a kvarkanyag folyadékszerűen viselkedik a kezdeti aszimmetriák nem tűnnek el, a kifagyás pillanatába is jelen vannak, ezért azok a keletkező hadronok eloszlásában is megjelennek.

Az aszimmetriákat jellemző paramétereket az impulzustérben szokás definiálni. A részecskék eloszlását transzverz-síkban a $N(p_t, \varphi)$ függvénnyel jellemezzük, amely megmondja, hogy $[\varphi, \varphi + d\varphi]$ irányban $[p_t, p_t + dp_t]$ impulzus-tartományban mennyi részecske található. A függvény szögfüggését leválasztva, azt Fourier-sorba fejtvé és 1-re normálva a következő alakban írhatjuk:

$$N(p_t, \varphi) = N(p_t) \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[v_n \cos(n\varphi) + w_n \sin(n\varphi) \right] \right) \quad (1.2.2)$$

A Fourier-sor első komponensei játszanak fontosabb szerepet. Ezek közül is a v_2 együttható a leglényegesebb, mert ez a paraméter hordozza az ellipszoidális aszimmetriát, ezt az elliptikus folyás paraméterének nevezzük. Ezen aszimmetria a kifagyott hadronok és fotonok eloszlásában [1] is megjelenik, ezért a folyadékkép helyességét bizonyítja a kvark-gluon plazma esetén. A Fourier-sor szinuszos részét nem szoktuk külön kezelni, mivel a mérések során a reakciósíkhöz képesti szög szerinti sort veszünk ($\sum v_n \cos[n(\varphi - \psi_n)]$), így a fenti szinuszos és koszinuszos tagok összevonva jelennek meg. Más mérési módszer esetén ugyan megjelenhetnek külön is a szinuszos tagok, de ekkor is szimmetria okokból ezen tagok eltűnnek.

1.3. A PHENIX kísérlet

2. Bose-Einstein korrelációk

Bose-Einstein korrelációk vizsgálatának megalapozói Robert Hanbury Brown és Richard Q. Twiss volt, ők 1956-ban publikált cikkükben [19] vezették be a módszert, azonban munkájuk vegyes fogadtatásban részesült a tudományos közösség részéről. A módszer segítségével képesek voltak meghatározni a Sirius csillag átmérőjét a fotonok közötti korrelációk méréséből. Mérési elrendezésük két változtatható távolságra levő foton detektorból állt (ezek egy-egy fókuszáló tányér és fotoelektron-sokszorozóból álltak). A két detektor segítségével mérték a Sirius csillagból jövő fotonok közti korrelációt, különböző detektortávolságokon. Az így kapott pontokra elméleti megfontolásokból kapott korrelációs függvényt illesztettek, amely segítségével meghatározták a csillag átmérőjét. A két tudós tiszteletére a bozonok közti intenzitás korrelációt szokás Hanbury Brown és Twiss effektusnak nevezni (vagy röviden HBT effektus), az ilyen jellegű vizsgáldásokat pedig HBT analízisnek.

A HBT effektus részecskefizikai alkalmazásában jelentős szerepet játszott G. Goldhaber, S. Goldhaber, W.Y. Lee és A. Pais kutatása, akik proton-antiproton 1.05 GeV/c tömegközépponti energián történő ütköztetésekben keletkező pionokat vizsgáltak. Mérésük során azonos pionok között nem várt korrelációt tapasztaltak, melynek vizsgálatával felfedezték a ρ^0 rezonanciát, amely $4.5 \cdot 10^{-24}$ másodperc alatt elbomlik két pionra ($\rho^0 \rightarrow \pi^+ \pi^-$), eredményüket 1960-ban publikálták [18]. Később kiderült, hogy az általuk tapasztalt korrelációnak az oka, hogy a fotonokhoz hasonlóan a pionok is bozonok. Goldhaber és társai kutatása nyomán a részecskefizikában is beindult a HBT effektus vizsgálata. Későbbiekben kiderült, hogy az asztrofizikához hasonlóan ezek a korrelációk itt is információt hordoznak a forrás geometriájáról [26, 11].

2.1. Definíció

Általánosan n részecske közti korrelációs függvény a következőképpen definiálható [4, 13]:

$$C_n(p_1, p_2, \dots, p_n) = \frac{N_n(p_1, p_2, \dots, p_n)}{N_1(p_1)N_1(p_2) \dots N_1(p_n)}, \quad (2.1.1)$$

ahol $p_i = (p_i^0, \mathbf{p}_i)$ 4-es impulzusmomentum, $N_n(p_1, p_2, \dots, p_n)$ az n részecske invariáns momentum eloszlás. A korrelációs függvény szemléletesen azt mondja meg, hogy milyen valószínűséggel keletkezik egy részecske n -es p_1, p_2, \dots, p_n 4-es momentumokkal.

Az n részecske invariáns impulzusmomentum eloszlás meghatározható a következő módon:

$$N_n(p_1, p_2, \dots, p_n) = \int \prod_{i=1}^n \mathcal{S}(p_i, x_i) |\Psi_{p_1, p_2, \dots, p_n}(x_1, x_2, \dots, x_n)|^2 \prod_{i=1}^n d^4x_i, \quad (2.1.2)$$

ahol a $\Psi_{p_1, p_2, \dots, p_n}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ az n részecske hullámfüggvény, az $\mathcal{S}(p_i, x_i)$ pedig az úgynevezett forrásfüggvény, amely megadja annak a valószínűségét, hogy x_i helyen keletkezik egy részecske p_i impulzussal.

Az n részecske hullámfüggvény meghatározásához nemrelativisztikus közelítést használunk HBT effektus vizsgálata során, így a függvényt a Schrödinger egyenlet megoldásából kapjuk (ügyelve, arra hogy mivel bozonjaink vannak, két részecske felcserélésére szimmetrikus legyen a hullámfüggvény):

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n, t)}{\partial t} = \left[\sum_{i=1}^n \left(-\frac{\hbar^2}{2m_i} \Delta_i + V_i(\mathbf{x}_i) \right) + \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} V_{ij}(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) \right] \Psi(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n, t) \quad (2.1.3)$$

A HBT effektus vizsgálatánál a különböző számítások könnyítése érdekében elhanyagoljuk az erős kölcsönhatást, amely tapasztalatok szerint pionok esetén megtehető, de már protonok esetén nem [27]. Továbbá csak a párok közti Coulomb-kölcsönhatást vesszük figyelembe, elhanyagolva többi hadron által okozott töltésfelhőt. Így a 2.1.3 egyenlet a következő, egyszerűbb alakra egyszerűsödik:

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n, t)}{\partial t} = \left[-\sum_{i=1}^n \frac{\hbar^2}{2m_i} \Delta_i + \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} V_C(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) \right] \Psi(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n, t) \quad (2.1.4)$$

Mivel energia saját állapotokkal dolgozunk, ezért a 2.1.4 egyenletet megoldó hullámfüggvény felírható:

$$\Psi_{p_1, p_2, \dots, p_n}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n, t) = \Psi_{p_1, p_2, \dots, p_n}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n) \prod_{i=1}^n e^{-\frac{i}{\hbar} c p_i^0 t}, \quad (2.1.5)$$

ahol $\Psi_{p_1, p_2, \dots, p_n}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n)$ az időfüggetlen Schrödinger egyenlet megoldása:

$$\left[-\sum_{i=1}^n \frac{\hbar^2}{2m_i} \Delta_i + \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} V_C(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) - c \sum_{i=1}^n p_i^0 \right] \Psi_{p_1, p_2, \dots, p_n}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n) = 0 \quad (2.1.6)$$

Továbbá könnyedén belátható, hogy a 2.1.2 egyenletben szereplő hullámfüggvény abszolút értéke szimmetrizációt elvégezve a következő lesz (nemrelativisztikus közelítésben mondhatjuk, hogy $\mathbf{x}_i = (t, \mathbf{x}_i)$):

$$|\Psi_{p_1, p_2, \dots, p_n}(x_1, x_2, \dots, x_n)| = \frac{1}{\sqrt{n!}} \left| \sum_{(\alpha)} \Psi_{p_1, p_2, \dots, p_n}(\mathbf{x}_{\alpha_1}, \mathbf{x}_{\alpha_2}, \dots, \mathbf{x}_{\alpha_n}) \right| \quad (2.1.7)$$

ahol $\sum_{(\alpha)}$ az $(1, 2, \dots, n)$ összes permutációjára való összegzés.

2.2. Két nem kölcsönható részecske korrelációs függvénye

Két azonos részecske esetén, nem kölcsönható esetben a 2.1.4 egyenlet könnyedén megoldható, megoldásai a jól ismert síkhullámok. A kétrészecskés invariáns impulzuseloszlásban szereplő hullámfüggvény szimmetrizáció elvégzése után a következő lesz:

$$\Psi_{p_1 p_2}(x_1, x_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}(e^{ip_1 x_1 + ip_2 x_2} + e^{ip_2 x_1 + ip_1 x_2}) \quad (2.2.1)$$

Tömegközépponti koordináta rendszerben, azaz a következő változókra való áttérés után (ezen transzformáció esetén az integrálási mérték nem változik, hiszen $d^4 x_1 d^4 x_2 = d^4 R d^4 r$):

$$K = p_1 + p_2, \quad k = \frac{p_1 - p_2}{2}, \quad r = x_1 - x_2, \quad R = \frac{x_1 + x_2}{2} \quad (2.2.2)$$

a hullámfüggvény abszolút értéke a következő alakra egyszerűsödik:

$$|\Psi_{p_1 p_2}(r, R)| = \frac{1}{\sqrt{2}} |e^{KR}(e^{ikr} + e^{-ikr})| = \sqrt{2} |\cos 2kr| \quad (2.2.3)$$

Ebből következőleg a kétrészecske invariáns momentumeloszlásra a következő alak adódik):

$$N_2(p_1, p_2) = \tilde{S}(0, p_1) \tilde{S}(0, p_2) + \frac{1}{2} (\tilde{S}(2k, p_1) \tilde{S}^*(2k, p_2) + \tilde{S}^*(2k, p_1) \tilde{S}(2k, p_2)), \quad (2.2.4)$$

ahol \tilde{S} a forrásfüggvény Fourier transzformáltja:

$$\tilde{S}(q, k) = \int d^4 x \mathcal{S}(x, k) e^{iqx} \quad (2.2.5)$$

Az egyrészecske invariáns momentumeloszlásra pedig $N_1(p) = \tilde{S}(0, p)$ adódik. Ezekből a 2.1.1 definíciót használva a kétrészecske korrelációs függvényre kapjuk a következő alakot:

$$C_2(p_1, p_2) = 1 + \frac{\tilde{S}(2k, p_1) \tilde{S}^*(2k, p_2) + \tilde{S}^*(2\mathbf{k}, p_1) \tilde{S}(2\mathbf{k}, p_2)}{2\tilde{S}(0, p_1) \tilde{S}(0, p_2)} \quad (2.2.6)$$

Szokás alkalmazni a $p_1 \approx p_2 \approx K = p_1 + p_2$ közelítést ($q \ll K$), amelyet az indokol, hogy a forrást Fourier transzformáltjának az egyes részecskék momentumától való függése sokkal simább mint a relatív momentumtól való függése [22]. A kétrészecske korrelációs függvény ekkor:

$$C_2(k, K) = 1 + \frac{|\tilde{S}(k, K)|^2}{|\tilde{S}(0, K)|^2} \quad (2.2.7)$$

Ez az alak azt a fontos üzenetet hordozza, hogy a kétrészecske korrelációs függvény meghatározásával megkapjuk a forrásfüggvény Fourier transzformáltját. Tehát a korrelációs függvény méréssel a forrás függvényt meg tudjuk határozni.

A korrelációs függvény a k, K négyes impulzusok helyett hármas momentumokkal is kifejezhető, ugyanis a két négyesmomentum szorzata definíció és az egyes részecskék tömeghőj feltétele ($p_{i\mu} p_i^\mu = 0$) alapján eltűnik, azaz:

$$0 = kK = k_0 K_0 - \mathbf{k} \mathbf{K} \Rightarrow k_0 = \frac{\mathbf{k} \mathbf{K}}{K_0} \quad (2.2.8)$$

A $p_1 \approx p_2 \approx K$ feltevés alapján a K körülbelül tömeghőjén van, azaz $K_0 = \sqrt{m^2 - \mathbf{K}^2}$, így a korrelációs függvény a k, K négyes-momentumok helyett a \mathbf{k}, \mathbf{K} hármas-momentumok függvényeként is tekinthető.

2.3. Forrás függvény

A 2.1.2 egyenletben szereplő $\mathcal{S}(p, x)$ függvényt nevezzük forrásfüggvénynek, ez megadja annak a valószínűségét, hogy x helyen keletkezik egy p impulzusú részecske. Az általunk vizsgált energiákon, az ütközés során kvark-gluon plazma keletkezik, amely robbanásszerűen tágul, melynek következtében csökken a hőmérséklete. Ha lokálisan a QGP elér egy bizonyos hőmérsékletet, akkor fázisátmenet történik, kifagynak a kvark szabadsági fokok és hadronok keletkeznek. A forrásfüggvényt épp ezen fázisátmenetek határozzák meg.

A fázisátmenetet pillanatszerűnek tekinthetjük, mivel ha feltesszük, hogy ez nem teljesül, akkor mondhatjuk, hogy a forrásfüggvény felírható szorzat alakban: $\mathcal{S}(x) = \mathcal{S}_T(\tau)\mathcal{S}(x)$. Az időfüggő részre feltehető továbbá ([11]):

$$\mathcal{S}_T(\tau) = \frac{1}{(2\pi\Delta\tau)^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{(\tau-\tau_0)^2}{2\Delta\tau^2}} \quad (2.3.1)$$

Térszerű részre kevés megszorítással élve, a kétrészecske korrelációs függvényre a következő alak adódik ([11]):

$$C_2(k) = 1 + \lambda e^{-k_0\Delta\tau^2 - k_{\text{long}}R_{\text{long}}^2 - k_{\text{side}}R_{\text{side}}^2 - k_{\text{out}}R_{\text{out}}^2}, \quad (2.3.2)$$

ahol az $R_{\text{long}}, R_{\text{side}}, R_{\text{out}}$ az úgynevezett HBT sugarak. Továbbá adódik a HBT sugarak közti következő összefüggés ([11]):

$$R_{\text{out}}^2 - R_{\text{side}}^2 \propto \Delta\tau^2 \quad (2.3.3)$$

Kísérleti tapasztalat továbbá, hogy $R_{\text{out}} \approx R_{\text{side}}$, ebből következőleg a $\Delta\tau \approx 0$, tehát, a forrásfüggvény időfüggő része egy τ_0 -ra koncentrált Dirac-delta, azaz a fázisátmenet pillanatszerűen történik [28, 13, 10].

A forrásfüggvény alakjára elsődlegesen Gauss eloszlást alkalmaztak [14, 22], azonban a PHENIX kísérletben $\sqrt{s_{NN}} = 200$ GeV tömegközépponti energiájú arany-arany ütközések során bizonyítékot találtak nem gaussi, lassan lecsengő struktúrára [2]. Egy magyarázat a lassan lecsengő viselkedésre lehet a Lévy repülés [9]. A kvark-gluon plazmából már kifagyott hadronok gáza tágul, így a rendszer egyre hidegebb, ritkább lesz, a hatáskeresztmetszetek egyre kisebbé válnak, megnövelve az átlagos szabad úthosszat. Ennek következtében egyre hosszabb lépések is megjelennek a hadronok véletlen bolyongás során. Ennek következtében eltávolodás eloszlása lassan lecsengő eloszlás lesz, melynek szórása már nem létezik. Ezen véletlen bolyongó hadronok aztán elbomolhatnak a vizsgált részecskékre, ezért járulékot adnak a forrásfüggvénybe. Ezen hadronok eltávolodása (QGP-ből való kifagyás helyétől), a centrális határeloszlás tétele alapján Lévy eloszláshoz tart, hiszen az összeadott lépések lassan lecsengő eloszlással rendelkező valószínűségi változónak tekinthető.

2.3.1. Lévy eloszlás

A forrásfüggvény alakjára munkám során három dimenziós Lévy eloszlást használtam. A Lévy eloszlás három dimenzióban a következő karakterisztikus függvény segítségével adható meg:

$$\Phi(\mathbf{q}, \alpha, R) = e^{-|\mathbf{q}R|^\alpha} \quad (2.3.4)$$

A karakterisztikus függvény Fourier transzformáltját kiszámolva (az integrálás csak numerikusan végezhető el) megkapható a Lévy eloszlás:

$$\mathcal{L}(\mathbf{r}, \alpha, R) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3q \Phi(\mathbf{q}, \alpha, R) e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}} = \frac{1}{(2\pi)^3} \int e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}} e^{-|\mathbf{q}R|^\alpha}, \quad (2.3.5)$$

ahol $0 < \alpha \leq 2$ és $0 < R$ a Lévy eloszlás paraméterei. Speciálisan, $\alpha = 2$ esetén a Lévy eloszlás a normális eloszlás lesz:

$$\mathcal{N}(\mathbf{r}, \sigma) = \mathcal{L}\left(\mathbf{r}, \frac{\sigma}{\sqrt{2}}\right) = \mathcal{L}\left(\mathbf{r}, 2^{-\frac{1}{\alpha}} \sigma\right) \quad (2.3.6)$$

Mivel Lévy eloszlást használunk a forrás modellezésére, ezért a Lévy paraméterek a forrásról hordoznak információt, és magára a forrásra jellemzőek. Egy α, R paraméterű forrás esetén, a forrásfüggvényre a következő alakot használjuk:

$$\mathcal{S}(p, x; \alpha, R) = \mathcal{L}(\mathbf{x}, \alpha, 2^{-\frac{1}{\alpha}} R) \quad (2.3.7)$$

A Lévy eloszlás skálaparamétertől való függésére (R paraméter) teljesül a következő összefüggés:

$$\mathcal{L}(\mathbf{r}, \alpha, R) = \mathcal{L}\left(\frac{\mathbf{r}}{R}, \alpha, 1\right) R^{-3} \equiv \mathcal{L}\left(\frac{\mathbf{r}}{R}, \alpha\right) R^{-3} \quad (2.3.8)$$

Továbbá az eloszlás nem függ az \mathbf{r} irányától, csak a nagyságától (belátható változócsere segítségével $\mathbf{q}' = \mathbf{A}\mathbf{q}$: $|\mathbf{q}| = |\mathbf{q}'| |\mathbf{q}\mathbf{r}| = |\mathbf{q}| |\mathbf{r}|$, ekkor $d^3\mathbf{q} = d^3\mathbf{q}'$):

$$\mathcal{L}(\mathbf{r}, \alpha, R) = \mathcal{L}(|\mathbf{r}|, \alpha, R) \quad (2.3.9)$$

Az egydimenziós Lévy eloszlás aszimptotikus viselkedéséből [6] kiindulva könnyedén meghatározható a háromdimenziós eloszlás viselkedése is. Nagy r paraméter esetén, a Lévy eloszlás a következő sor segítségével kapható meg ($r \gg 1$):

$$\mathcal{L}(r, \alpha) \approx \frac{\alpha}{2\pi^2} \sum_{k=1}^N (-1)^{k+1} \frac{\Gamma(\alpha k)}{\Gamma(k)} \sin\left(\frac{\pi \alpha k}{2}\right) \frac{\alpha k + 1}{r^{\alpha k + 3}}, \quad (2.3.10)$$

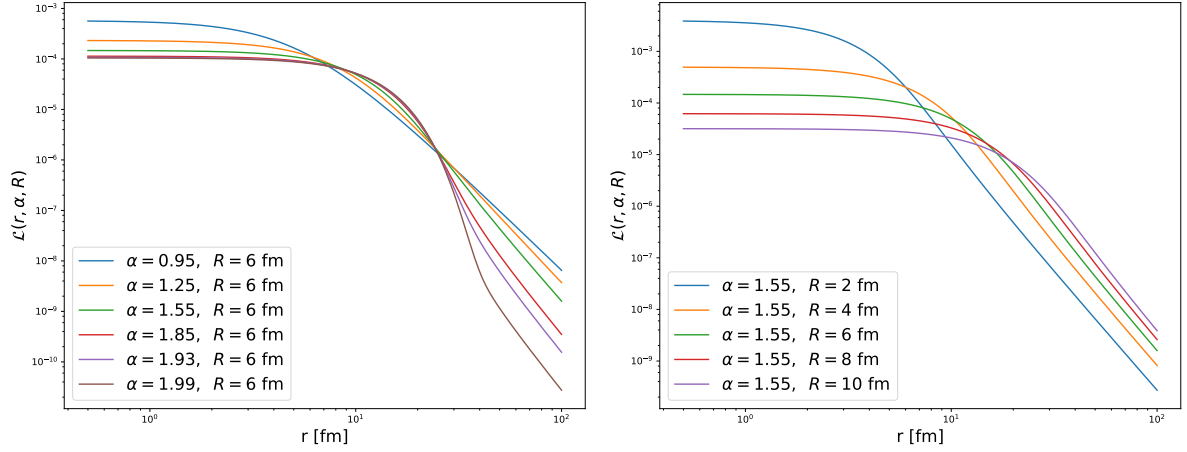
ahol $\Gamma(x)$ a Gamma függvény:

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty x^{z-1} e^{-x} dx \quad (2.3.11)$$

A kis r viselkedés hasonló módon egy sor segítségével kapható ($r \ll 1$):

$$\mathcal{L}(r, \alpha) \approx -\frac{1}{2\pi^2 \alpha} \sum_{k=0}^n \frac{\Gamma\left(\frac{k+3}{\alpha}\right)}{\Gamma(k+3)} \sin\left(\frac{\pi(k+3)}{2}\right) (k+2)(k+1) r^k \quad (2.3.12)$$

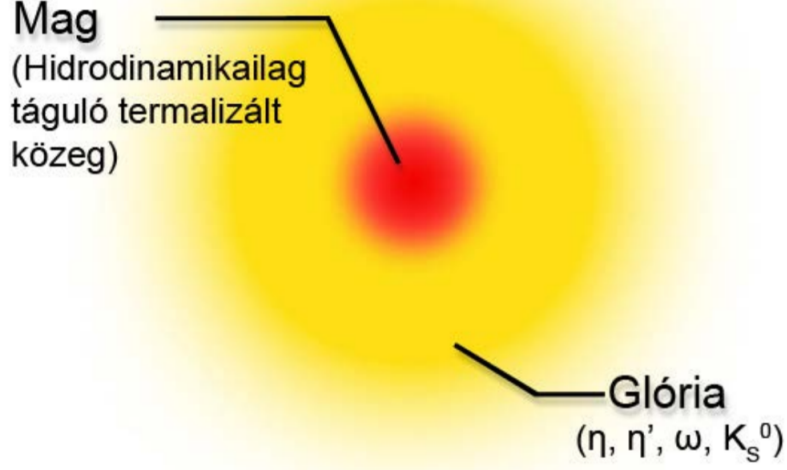
A Lévy eloszlás meghatározása során kis és nagy értékekre ezen aszimptotikus sorokat alkalmaztam, a köztes tartományban pedig 15 pontú adaptív Gauss Kronrod integrálási módszert alkalmaztam (részletek a 3.3 fejezetben), melyet GPU-ra párhuzamosítva CUDA-ban (részletek a 3.5.1 fejezetben), továbbá klasztere párhuzamosítva MapReduce programozási modellben implementáltam (részletek a 3.5.2 fejezetben). Az integrálást sok paraméterre elvégeztem (felbontást úgy állítottam be, hogy két pont között lineáris interpoláció hibája a megengedett hiba alatt legyen), eredményekből egy Lévy táblázat készült, amelyhez egy könnyen használható olvasó interfész tartozik. Néhány α és R paraméter esetén az eloszlást a 2.1 ábrák szemléltetik.



2.1. ábra. Háromdimenziós Lévy eloszlás sugárfüggése különböző α és R paraméterek esetén.

2.4. A mag-glória modell

A HBT effektus vizsgálata során nehéz ionokat ütköztetünk nagy energián. Az ütközés során létrejövő kvark-gluon plazma robbanásszerűen tágul (ezen tágulás leírására hidrodinamika alkalmazható), elérve egy kritikus hőmérsékletet fázisátmenet történik, hadronok fagynak ki pillanatszerűen. A hadronok közül munkánbana töltött pionok közti korrelációt vizsgáltam, mivel ezen részecskékből keletkezik a legtöbb az ütközések során. A kirepülő pionokat az ütközési centrum köré épített detektorrendszerrel detektáljuk. Azonban pionok nem csak a forró kvarkanyag kifagyása során keletkeznek, hanem később, instabil részecskék (pl. η, η', ω) bomlásából is [8]. Ezen jelenség leírására szolgál a mag-glória (core-halo) modell [16, 13], melynek szemléltetése a 2.2 ábrán látható. A mag mérete 10 femtométer alatti, míg a glória mérete több száz, vagy akár több ezer femtométer is lehet, mivel egyes hosszú élettartamú instabil részecskék ilyen távolságokra jutnak el mielőtt elbomlanának pionokra.



2.2. ábra. Mag-glória modell szemléltetése. Forrás [20]

Mivel a 2.2.7 összefüggés alapján a korrelációs függvény a forrás Fourier transzformáltjával áll kapcsolatban, továbbá a glóriában a pionok nagy x távolságokon keletkeznek, ezért a glória kis relatív impulzusú tartományban ad járulékot a korrelációs függvényhez. Ugyanakkor a detektor impulzusfelbontása véges, ezért az egymáshoz nagyon közeli impulzussal rendelkező részecskék nem megkülönböztethetők, azaz bizonyos relatív impulzus alatti tartományban (felbonthatatlan régió) nem tudjuk megmérni a korrelációs függvényt. Ezt az effektust szemlélteti a 2.3 ábra.

A mag-glória modellben feltételezünk egy magot valamint egy glóriát leíró forrásfüggvény létezését. A teljes rendszert leíró forrásfüggvény pedig ezen kettő összege:

$$\mathcal{S}(x, p) = \mathcal{S}_M(x, p) + \mathcal{S}_G(x, p) \implies \tilde{\mathcal{S}}(k, K) = \tilde{\mathcal{S}}_M(k, K) + \tilde{\mathcal{S}}_G(k, k) \quad (2.4.1)$$

Mivel a Fourier transzformált a nulla helyen megegyezik a függvény integráljával, továbbá a forrásfüggvény integrálja a keletkezett részecskék számát adja meg, ezért ha a magban keletkező részecskék száma N_M , a glóriában N_G , akkor:

$$\tilde{\mathcal{S}}_M(0, K) = N_M, \quad \tilde{\mathcal{S}}_G(0, K) = N_G, \quad \tilde{\mathcal{S}}(0, K) = N_M + N_G \quad (2.4.2)$$

A nagy (legalább 50 fm) szélességű \mathcal{S}_G keskeny $\tilde{\mathcal{S}}_G$ Fourier transzformáltat eredményez, melynek szélessége maximálisan 4 MeV. Ez a maximális szélesség a detektor véges felbontóképességéből adódó felbonthatatlan régióba esik tipikusan, ezért az mondható, hogy: $\tilde{\mathcal{S}}_G \approx 0$, azaz $\tilde{\mathcal{S}} = \tilde{\mathcal{S}}_M$. Ebből a kétrészecske korrelációs függvényre adódik:

$$C_2(k, K) = 1 + \frac{|\tilde{\mathcal{S}}(k, K)|^2}{|\tilde{\mathcal{S}}(0, K)|^2} = 1 + \frac{|\tilde{\mathcal{S}}_M(k, K)|^2}{(N_M + N_G)^2} = 1 + \lambda_2 \frac{|\tilde{\mathcal{S}}_M(k, K)|^2}{|\tilde{\mathcal{S}}_M(0, K)|^2}, \quad (2.4.3)$$

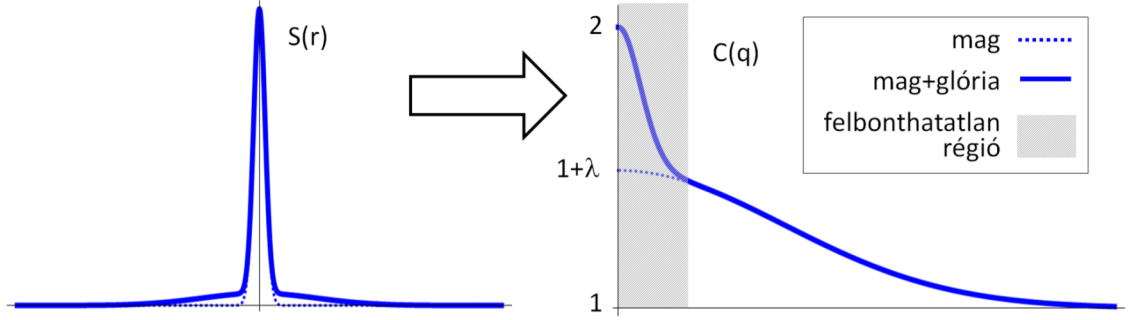
ahol bevezettem a:

$$\lambda_2 = \frac{N_M^2}{(N_M + N_G)^2} \equiv f_C^2 \quad (2.4.4)$$

jelölést. Az összefüggésben bevezettem egy új mennyiséget, a mag arányt arányát, amely megmondja, hogy az összes észlelt részecske, hányad része származik a magból:

$$f_C = \frac{N_M}{N_M + N_G} \quad (2.4.5)$$

Tehát amíg a 2.2.7 egyenletben a $k \rightarrow 0$ esetben a korrelációs függvény $C_2(k, K) \rightarrow 2$, addig mag-glória modellben, a 2 helyett a $1 + \lambda_2$ -höz tart a korrelációs függvény.



2.3. ábra. Keskeny magból és széles glóriából álló forráshoz tartozó korrelációs függvény. A glória keskeny csúcsot eredményez a korrelációs függvényben, amely a detektor véges felbontásának következtében nem látható. Forrás: [11]

2.5. A korreláció erőssége

A mag-glória modellnél láttuk, hogy a kétrészecske korrelációs függvény kis relatív impulzusokra tart a 2.4.4 egyenlet által definiált λ_2 paraméter által meghatározott $1 + \lambda_2$ értékhez. Ezt a paramétert szokás kétrészecske korrelációs erősségnek nevezni.

Ebből kiindulva általánosan definiálhatjuk az n részecske korrelációs erősséget:

$$\lambda_n = \lim_{k_1 \rightarrow 0} \dots \lim_{k_n \rightarrow 0} C_n(k_1, \dots, k_n) - 1 \quad (2.5.1)$$

Mag-glória modell esetén az n részecske korrelációs erősség kifejezhető a 2.4.5 összefüggéssel definiált magarány segítségével a következőképpen [12]:

$$\lambda_n = \sum_{j=1}^n \binom{n}{j} \alpha_j f_C^j \quad (2.5.2)$$

Az egyenletben szereplő α_j paraméter a következőképpen határozható meg:

$$\alpha_n = n! - 1 - \sum_{j=1}^{n-1} \binom{n}{j} \alpha_j, \quad (2.5.3)$$

első néhány értéke: $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 1$, $\alpha_3 = 2$.

2.6. Parciális koherencia

Az eddigiekben feltettük, hogy a forrás teljesen kaotikus, a kifagyott pionok fázisa teljesen véletlenszerű. Azonban előfordulhat, hogy a kifagyott részecskepárok fáziskülönbsége részben állandó, azaz a forrás

részben koherens módon kelt részecskéket. Ezt az effektust nevezik parciális koherenciának [15, 13, 12]. Ekkor a momentum eloszlást másképp kell számolni, hiszen a 2.1.2 összefüggésben már kihasználtuk, hogy a részecskék fázisa véletlenszerű, melynek következtében átlagolás során eltűnik.

Az effektust mag-glória modellnél látottakhoz hasonló módon történő figyelembevétele érdekében bevezetjük a koherencia arányát, amely megadja, hogy a magból származó részecskék hányad része keletkezett koherens módon:

$$p_C = \frac{N_M^C}{N_M} \quad (2.6.1)$$

Mag-glória modellnél láttuk, hogy amennyiben a részecskék nem csak közvetlenül a forró kvark-anyagból származnak, akkor az n részecske korrelációs erősségek függeni fognak a 2.4.5 egyenlet által definiált magaránytól a 2.5.2 egyenlet által meghatározott módon. Ehhez hasonlóan, azt mondhatjuk, hogy amennyiben részecske keletkezés során van parciális koherencia, akkor az n részecske korrelációs erősség függeni fog a magarány mellett a koherencia arányától a következő módon [15, 12]:

$$\lambda_n(f_C, p_C) = \sum_{j=2}^n \binom{n}{j} \alpha_j f_C^j [(1-p_C)^j + j p_C (1-p_C)^{j-1}], \quad (2.6.2)$$

ahol az α_j paramétert a 2.5.3 egyenlet határozza meg. Az egyenlet két- és háromrészecske esetén a következőkre egyszerűsödik:

$$\lambda_2 = f_C^2 [(1-p_C)^2 + 2p_C(1-p_C)] \quad (2.6.3)$$

$$\lambda_3 = 2f_C^3 [(1-p_C)^3 + 3p_C(1-p_C)^2] + 3f_C^2 [(1-p_C)^2 + 2p_C(1-p_C)] \quad (2.6.4)$$

Ezen két egyenlet mutatja, hogy két- és háromrészecske korrelációk vizsgálatából amennyiben meghatározzuk a korrelációs erősségeket, meghatározható az f_C és p_C paraméter, azaz a magból származó részecskék aránya, illetve a magban koherens módon keletkezett részecskék aránya.

Koherencia létének vizsgálata érdekében vezessük be a következő paramétert:

$$\kappa_3 = \frac{\lambda_3 - 3\lambda_2}{2\sqrt{\lambda_2^3}} \quad (2.6.5)$$

Ez a paraméter nem függ az f_C értékétől, mag-glória modell esetén koherencia hiányában konstans $\kappa_3 = 1$ lesz. Amennyiben van parciális koherencia, ezen paraméter nem lesz konstans, függeni fog a p_C paramétertől.

3. Coulomb-korrekciónak számítása

A Bose-Einstein analízis során kizárólag a Bose-Einstein statisztika következményeként megjelenő korrelációk vizsgálata a cél. Az analízis során töltött pionok közti korreláció vizsgálata a cél, mivel ezekből keletkezik a legtöbb. Azonban elektromos töltésük következtében fellép a Coulomb kölcsönhatás a részecskék között amely jelentősen torzítja a korrelációs függvényt. Az effektus kiküszöbölése érdekében definiálunk egy Coulomb-korrekciónak faktort, amellyel a nyers korrelációs függvényt megszorozva megkapjuk a tiszta, csak Bose-Einstein statisztikából származó korrelációs függvényt.

A Coulomb-korrekciónak faktor definíciója n részecske esetén a következő [5]:

$$K(\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n) = \frac{\int \prod_{i=1}^n \mathcal{S}(\mathbf{p}_i, \mathbf{x}_i) |\Psi_{\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n}^0(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)| \prod_{i=1}^n d^3 \mathbf{x}_i}{\int \prod_{i=1}^n \mathcal{S}(\mathbf{p}_i, \mathbf{x}_i) |\Psi^C \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n|(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n) \prod_{i=1}^n d^3 \mathbf{x}_i}, \quad (3.0.1)$$

ahol a Ψ^0 szabad hullámfüggvény, a Ψ^C pedig a Coulomb hullámfüggvény.

3.1. Coulomb-kölcsönhatás

3.1.1. Kétrészecske

A kétrészecske Coulomb korrekció meghatározása érdekében meg kell oldanunk a kétrészecske Coulomb problémát. Mivel azonos részecskékről beszélünk a már bevezetett tömegközépponti koordinátákra áttérve (2.2.2) a hullámfüggvény:

$$\Psi^C(\mathbf{r}, \mathbf{R}) = \Psi(\mathbf{r}) e^{i\mathbf{K}\mathbf{R}}, \quad (3.1.1)$$

alakot ölti, ahol a relatív momentumtól függő hullámfüggvényre a Schrödinger egyenlet a következő lesz:

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2\mu} \Delta_{\mathbf{r}} + V_C(\mathbf{r}) + \frac{\hbar^2 \mathbf{k}^2}{2\mu} \right] \Psi(\mathbf{r}) = 0, \quad (3.1.2)$$

ahol $\mu = \frac{m}{2}$ a redukált tömeg, V_C pedig a Coulomb potenciál ($V_C(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{|\mathbf{r}|}$).

Az egyenletet megoldva ([21]) valamint elvégezve a szimmetrizációt (részecskék felcserélésének szimmetriája: $\mathbf{r} \rightarrow -\mathbf{r}$) a következő adódik a hullámfüggvényre:

$$\Psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = \frac{\mathcal{N}}{\sqrt{2}} \left[e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} F(-i\eta, 1, i(kr - \mathbf{k}\mathbf{r})) + e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}} F(-i\eta, 1, i(kr + \mathbf{k}\mathbf{r})) \right] \quad (3.1.3)$$

ahol \mathcal{N} normálási tényező, $\eta = \frac{\mu\alpha}{2k}$ ($\alpha \approx \frac{1}{137}$ finomszerkezeti állandó), és $F(a, b, z)$ az úgynevezett elfajult hipergeometrikus függvény, amelyet az alábbi sor definiál:

$$F(a, b, z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^{(k)}}{b^{(k)} k!} z^k, \quad (3.1.4)$$

itt $a^{(0)} = 1$, $a^{(k)} = a(a+1) \dots (a+k-1)$. Az így definiált $F(a, b, z)$ függvény kielégíti a

$$zF''(a, b, z) + (b-z)F'(a, b, z) - aF(a, b, z) = 0 \quad (3.1.5)$$

differenciálegyenletet ($' = \frac{d}{dz}$), valamint számunkra egy lényeges tulajdonsága:

$$F(a, b, z) = e^z F(b-a, b, -z) \quad (3.1.6)$$

Numerikusan a hipergeometrikus függvény kiszámolása a 3.1.4 definíció alapján történhet. Azonban $|z| \gg 1$ esetén a felösszegezés nem végezhető el hatékonyan, mivel nagyon sokáig kell összegezni, hogy lássuk a konvergenciát (hogy a faktoriális legyőzze a hatványfüggvényt), és a faktoriális és hatványfüggvény következtében nagyon nagy számokkal kell dolgozni, amelyek kiesnek a számítógép által általánosan használt 64-bites dupla pontos lebegőpontos számábrázolási tartományából. A sor alak tipikusan $|z| < 30$ esetén alkalmazható. Ez a probléma orvosolható, a hipergeometrikus függvény aszimptotikus sorának alkalmazásával, amely a következőképpen néz ki [17]:

$$F(a, b, z) = \frac{\Gamma(b) e^z z^{a-b}}{\Gamma(a)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1-a)^{(k)} (b-a)^{(k)}}{k!} z^{-k} + \frac{\Gamma(b) (-z)^{-a}}{\Gamma(b-a)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^{(k)} (a-b+1)^{(k)}}{k!} (-z)^{-k} \quad (3.1.7)$$

A hullámfüggvény egyre normáltságát megkövetelve az \mathcal{N} normálási tényezőre

$$\mathcal{N} = e^{-\frac{1}{2}\pi\eta}\Gamma(1+i\eta) \quad (3.1.8)$$

érték adódik. A gamma függvényre vonatkozó $\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}$, valamint $\Gamma(1+i\eta)^* = \Gamma(1-i\eta)$ azonosságok felhasználásával, a normálási tényező négyzetére a következő adódik:

$$|\mathcal{N}|^2 = \frac{2\pi\eta}{e^{2\pi\eta} - 1}, \quad (3.1.9)$$

amely az úgynevezett Gamow-faktor.

3.1.2. Háromrészesecske

A háromrészesecske Coulomb korrekció meghatározásához a háromrészesecske Coulomb problémát kellene megoldani, azaz a következő Schrödinger egyenletet [3]:

$$\left[H_0 + \sum_{i<j=1}^3 V_{ij}^C(\mathbf{r}_{ij}) - \sum_{i=1}^3 \frac{\hbar^2 \mathbf{k}_i^2}{2m_i} \right] \Psi_{\mathbf{k}_{12}, \mathbf{k}_{13}, \mathbf{k}_{23}}(\mathbf{r}_{12}, \mathbf{r}_{13}, \mathbf{r}_{23}) = 0, \quad (3.1.10)$$

azzal az egyszerűsítéssel, hogy azonos részecskékről lévén szó teljesül: $m_i = m$ és $V_{ij}^C(\mathbf{r}_{ij}) = V^C(\mathbf{r}_{ij}) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{|\mathbf{r}_{ij}|}$ (\mathbf{r}_{ij} , \mathbf{k}_{ij} a relatív változók). Azonban az egyenletnek csupán aszimptotikus egzakt megoldása van. Ezért Bose-Einstein korrelációk vizsgálata során a háromrészesecske Coulomb kölcsönhatást úgy vesszük figyelembe, mint három független kétrészesecske kölcsönhatást, azaz a hullámfüggvényt a következőképpen állítjuk elő: [3]

$$\Psi_{\mathbf{k}_{12}, \mathbf{k}_{13}, \mathbf{k}_{23}}(\mathbf{r}_{12}, \mathbf{r}_{13}, \mathbf{r}_{23}) \sim \Psi_{\mathbf{k}_{12}}(\mathbf{r}_{12}) \Psi_{\mathbf{k}_{13}}(\mathbf{r}_{13}) \Psi_{\mathbf{k}_{23}}(\mathbf{r}_{23}), \quad (3.1.11)$$

ahol $\Psi_{\mathbf{k}_{12}}(\mathbf{r}_{12})$ a kétrészesecske Coulomb probléma megoldása. Tehát a következő Schrödinger egyenletet elégíti ki:

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2\mu} \Delta_{\mathbf{r}_{ij}} + V^C(\mathbf{r}_{ij}) - \frac{\hbar^2 \mathbf{k}_{ij}^2}{2\mu} \right] \Psi_{\mathbf{k}_{ij}}(\mathbf{r}_{ij}) = 0, \quad (3.1.12)$$

ahol μ a redukált tömeg (pion tömeg fele), valamint a \mathbf{k}_{ij} az i, j részecskepár relatív momentumának a fele. Az egyenlet megoldása:

$$\Psi_{\mathbf{k}_{ij}}(\mathbf{r}_{ij}) = \mathcal{N}_{ij} e^{i\mathbf{k}_{ij}\mathbf{r}_{ij}} F(-i\eta_{ij}, 1, i(k_{ij}r_{ij} - \mathbf{k}_{ij}\mathbf{r}_{ij})), \quad \mathcal{N}_{ij} = e^{-\frac{\pi}{2}\eta_{ij}} \Gamma(1+i\eta_{ij}), \quad (3.1.13)$$

ahol $\eta_{ij} = \frac{\mu\alpha}{2k_{ij}}$. Azonban annak érdekében, hogy ezt a megoldást használhassuk a háromrészesecske hullámfüggvényben, a következő módosítást kell végrehajtani [3, 7, 23]:

$$\Psi_{\mathbf{k}_{ij}}(\mathbf{r}_{ij}) = \mathcal{N}_{ij} e^{i\frac{2}{3}\mathbf{k}_{ij}\mathbf{r}_{ij}} F(-i\eta_{ij}, 1, i(k_{ij}r_{ij} - \mathbf{k}_{ij}\mathbf{r}_{ij})) \quad (3.1.14)$$

A 3.1.14 egyenlet által megadott hullámfüggvényt a három relatív koordinátában véve és összeszorozva, valamint a szimmetrizációt elvégezve megkaphatjuk a háromrészesecske Bose-Einstein korrelációk vizsgá-

latánál használt Coulomb hullámfüggvényt:

$$\begin{aligned} \Psi_{\mathbf{k}_{12}, \mathbf{k}_{13}, \mathbf{k}_{23}}(\mathbf{r}_{12}, \mathbf{r}_{13}, \mathbf{r}_{23}) = \frac{1}{\sqrt{6}} \left[\begin{aligned} &\Psi_{\mathbf{k}_{12}}(\mathbf{r}_{12}) \Psi_{\mathbf{k}_{13}}(\mathbf{r}_{13}) \Psi_{\mathbf{k}_{23}}(\mathbf{r}_{23}) + \\ &\Psi_{\mathbf{k}_{12}}(\mathbf{r}_{23}) \Psi_{\mathbf{k}_{13}}(\mathbf{r}_{12}) \Psi_{\mathbf{k}_{23}}(\mathbf{r}_{13}) + \\ &\Psi_{\mathbf{k}_{12}}(\mathbf{r}_{13}) \Psi_{\mathbf{k}_{13}}(\mathbf{r}_{23}) \Psi_{\mathbf{k}_{23}}(\mathbf{r}_{12}) + \\ &\Psi_{\mathbf{k}_{12}}(\mathbf{r}_{12}) \Psi_{\mathbf{k}_{13}}(\mathbf{r}_{23}) \Psi_{\mathbf{k}_{23}}(\mathbf{r}_{13}) + \\ &\Psi_{\mathbf{k}_{12}}(\mathbf{r}_{13}) \Psi_{\mathbf{k}_{13}}(\mathbf{r}_{12}) \Psi_{\mathbf{k}_{23}}(\mathbf{r}_{23}) + \\ &\Psi_{\mathbf{k}_{12}}(\mathbf{r}_{23}) \Psi_{\mathbf{k}_{13}}(\mathbf{r}_{13}) \Psi_{\mathbf{k}_{23}}(\mathbf{r}_{12}) \end{aligned} \right] \end{aligned} \quad (3.1.15)$$

3.2. A Coulomb-korrekcións integrál

3.2.1. Kétrészecske

A 3.0.1 egyenlet alapján a kétrészecske Coulomb integrál a következő lesz:

$$K(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) = \frac{\iint \mathcal{S}(\mathbf{p}_1, \mathbf{r}_1) \mathcal{S}(\mathbf{p}_2, \mathbf{r}_2) |\Psi_{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2}^0(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)| d^3 \mathbf{r}_1 d^3 \mathbf{r}_2}{\iint \mathcal{S}(\mathbf{p}_1, \mathbf{r}_1) \mathcal{S}(\mathbf{p}_2, \mathbf{r}_2) |\Psi_{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2}^C(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)| d^3 \mathbf{r}_1 d^3 \mathbf{r}_2} \quad (3.2.1)$$

A kétrészecske Coulomb probléma tárgyalásánál láttuk, hogy célszerű áttérni az $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$, $2\mathbf{R} = \mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2$, $2\mathbf{k} = \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2$ és $\mathbf{K} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2$ változókra, ekkor ugyanis mind a szabad, mind a Coulomb hullámfüggvény négyzete \mathbf{R} és \mathbf{K} független lesz:

$$|\Psi_{\mathbf{k}, \mathbf{K}}(\mathbf{r}, \mathbf{R})|^2 = |e^{i\mathbf{K}\mathbf{R}} \Psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r})|^2 = |\Psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r})|^2, \quad (3.2.2)$$

így \mathbf{R} függés csak a forrásfüggvényben marad. Ez azt jelenti, hogy a 3.2.1 Coulomb integrál a következő alakra egyszerűsödik:

$$K(\mathbf{k}, \mathbf{K}) = \frac{\int \mathcal{S}_2(\mathbf{r}, \mathbf{k}, \mathbf{K}) |\Psi_{\mathbf{k}}^0(\mathbf{r})| d^3 \mathbf{r}}{\int \mathcal{S}_2(\mathbf{r}, \mathbf{k}, \mathbf{K}) |\Psi_{\mathbf{k}}^C(\mathbf{r})| d^3 \mathbf{r}}, \quad (3.2.3)$$

ahol a bevezetett \mathcal{S}_2 a következőképpen számolható:

$$\mathcal{S}_2(\mathbf{r}, \mathbf{k}, \mathbf{K}) = \int \mathcal{S}\left(\mathbf{k} + \frac{1}{2}\mathbf{K}, \mathbf{R} + \frac{1}{2}\mathbf{r}\right) \mathcal{S}\left(\mathbf{k} - \frac{1}{2}\mathbf{K}, \mathbf{R} - \frac{1}{2}\mathbf{r}\right) d^3 \mathbf{R}. \quad (3.2.4)$$

Ez az integrál elvégezhető, amennyiben a forrást α, R_M paraméterekkel jellemzett Lévy eloszlásnak tekintjük, a végeredmény a következő lesz:

$$\mathcal{S}(\mathbf{p}, \mathbf{r}) = \mathcal{L}(\mathbf{r}, \alpha, R_M) \implies \mathcal{S}_2(\mathbf{r}, \mathbf{k}, \mathbf{K}) = \mathcal{L}(\mathbf{r}, \alpha, 2^{\frac{1}{\alpha}} R_M) \quad (3.2.5)$$

3.2.2. Háromrészecske

A 3.0.1 egyenlet alapján a kétrészecske Coulomb integrál a következő lesz:

$$K(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3) = \frac{\iiint \mathcal{S}(\mathbf{p}_1, \mathbf{r}_1) \mathcal{S}(\mathbf{p}_2, \mathbf{r}_2) \mathcal{S}(\mathbf{p}_3, \mathbf{r}_3) |\Psi_{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3}^0(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3)| d^3 \mathbf{r}_1 d^3 \mathbf{r}_2 d^3 \mathbf{r}_3}{\iiint \mathcal{S}(\mathbf{p}_1, \mathbf{r}_1) \mathcal{S}(\mathbf{p}_2, \mathbf{r}_2) \mathcal{S}(\mathbf{p}_3, \mathbf{r}_3) |\Psi_{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3}^C(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3)| d^3 \mathbf{r}_1 d^3 \mathbf{r}_2 d^3 \mathbf{r}_3} \quad (3.2.6)$$

Kétrészecske esethez hasonlóan itt is bevezetjük a relatív koordinátákat, azaz a következő változókra térünk rá:

$$\mathbf{r}_{ij} = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j, \quad \mathbf{R} = \frac{\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_3}{3}, \quad \mathbf{k}_{ij} = \frac{\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_j}{2}, \quad \mathbf{K} = \frac{\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_3}{3}, \quad (3.2.7)$$

továbbá teljesül $\mathbf{r}_{23} = \mathbf{r}_{13} - \mathbf{r}_{12}$ és $\mathbf{k}_{23} = \mathbf{k}_{13} - \mathbf{k}_{12}$ összefüggés, így az integrálási mérték: $d^3\mathbf{r}_1 d^3\mathbf{r}_2 d^3\mathbf{r}_3 = d^3\mathbf{R} d^3\mathbf{r}_{12} d^3\mathbf{r}_{13}$ lesz. A hullámfüggvények ebben az esetben is csak a relatív változóktól függenek, \mathbf{R} függése csak a forrásfüggvényeknek lesz, ezért a $d^3\mathbf{R}$ integrálás ismét a forrásfüggvények szorzatára hat. Így a háromrészesecske Coulomb integrál a következő alakú lesz:

$$K(\mathbf{k}_{12}, \mathbf{k}_{13}, \mathbf{K}) = \frac{\iint \mathcal{S}_3(\mathbf{r}_{12}, \mathbf{r}_{13}, \mathbf{k}_{12}, \mathbf{k}_{13}, \mathbf{K}) \left| \Psi_{\mathbf{k}_{12}, \mathbf{k}_{13}, \mathbf{k}_{23}}^0(\mathbf{r}_{12}, \mathbf{r}_{13}, \mathbf{r}_{23}) \right| d^3\mathbf{r}_{12} d^3\mathbf{r}_{13}}{\iint \mathcal{S}_3(\mathbf{r}_{12}, \mathbf{r}_{13}, \mathbf{k}_{12}, \mathbf{k}_{13}, \mathbf{K}) \left| \Psi_{\mathbf{k}_{12}, \mathbf{k}_{13}, \mathbf{k}_{23}}^C(\mathbf{r}_{12}, \mathbf{r}_{13}, \mathbf{r}_{23}) \right| d^3\mathbf{r}_{12} d^3\mathbf{r}_{13}}, \quad (3.2.8)$$

ahol a bevezetett \mathcal{S}_3 a következőképpen néz ki (momentum függést nem írtam ki):

$$\mathcal{S}_3(\mathbf{r}_{12}, \mathbf{r}_{13}) = \int \mathcal{S}\left(\mathbf{R} + \frac{5}{3}\mathbf{r}_{12} + \frac{1}{3}\mathbf{r}_{13}\right) \mathcal{S}\left(\mathbf{R} + \frac{2}{3}\mathbf{r}_{12} + \frac{1}{3}\mathbf{r}_{13}\right) \mathcal{S}\left(\mathbf{R} - \frac{7}{2}\mathbf{r}_{12} - \frac{2}{3}\mathbf{r}_{13}\right) d^3\mathbf{R} \quad (3.2.9)$$

A forrásfüggvényre α , R_M paraméterekkel rendelkező Lévy eloszlást feltételezve, az összefüggésbe a 2.3.5 definíciót beírva, az \mathbf{R} -re vett integrál elvégezhető, eredményül egy Dirac-deltát ad, így egy további \mathbf{q} -ra vett integrál is elvégezhető, végül a következő alakra egyszerűsödik:

$$\mathcal{S}_3(\mathbf{r}_{12}, \mathbf{r}_{13}) = \frac{1}{(2\pi)^6} \int e^{-|\mathbf{q}_1 R_M|^\alpha - |\mathbf{q}_2 R_M|^\alpha - |\mathbf{q}_1 R_M + \mathbf{q}_2 R_M|^\alpha} e^{-i\mathbf{q}_1(4\mathbf{r}_{12} + \mathbf{r}_{13})} e^{i\mathbf{q}_2(3\mathbf{r}_{12} + \mathbf{r}_{13})} d^3\mathbf{q}_1 d^3\mathbf{q}_2 \quad (3.2.10)$$

Ha azt mondhatnánk, hogy $|\mathbf{q}_1 R_M + \mathbf{q}_2 R_M|^\alpha \approx |\mathbf{q}_1 R_M|^\alpha + |\mathbf{q}_2 R_M|^\alpha$, akkor az \mathcal{S}_3 a következő lenne:

$$\mathcal{S}_3(\mathbf{r}_{12}, \mathbf{r}_{13}) = \mathcal{L}(4\mathbf{r}_{12} + \mathbf{r}_{13}, \alpha, 2^{\frac{1}{\alpha}} R_M) \mathcal{L}(3\mathbf{r}_{12} + \mathbf{r}_{13}, \alpha, 2^{\frac{1}{\alpha}} R_M) \quad (3.2.11)$$

3.3. Gauss–Kronrod integrálási módszer

A 2.3.5 integrál numerikus kiszámolásához Gauss–Kronrod módszert használtam, mivel ezen módszer használatával érhetünk el nagyon pontos eredményt hatékonyan [6]. Az integrálás tartománya a teljes tér, amely az cél hiba megadásával végessé tehető a következőképpen: az integrálási tartományt folyamatosan növeljük, amíg hibán belül az érték nem konvergál.

Az n -ed rendű Gauss-kvadratura $[-1, 1]$ tartományon (konvenció szerint ezen a tartományon van megadva a szabály) vett integrált n speciálisan választott pont lineáris kombinációjával becsli:

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx \sum_{i=1}^n w_i f(x_i), \quad (3.3.1)$$

ahol a w_i, x_i pontok úgy vannak megválasztva, hogy, $2n - 1$ vagy ennél alacsonyabb rendű polinomok esetén egzakt eredményt adjon. A módszer jó közelítő eredményt fog adni minden olyan függvényre ami legfeljebb $2n - 1$ -ed rendű polinommal közelíthető. A formulában szereplő x_i pontok az n -ed rendű Legendre polinom gyökei, azaz őket a $P_n(x_i) = 0$ egyenlet definiálja, a súlyokat pedig a következőképpen kell meghatározni ([30]):

$$w_i = \frac{2}{(1 - x_i)^2 (P'_n(x_i))^2} \quad (3.3.2)$$

Amennyiben az integrálandó függvény $f(x) = \omega(x)g(x)$ alakban áll elő, ahol $g(x)$ egy polinom, akkor új súlyokat vezethetünk be amelyeket az $\omega(x)$ határoz meg, így egy pontosabb közelítő formulát konstruálva. Például ha $\omega(x) = \exp(-x^2)$, akkor a pontokat a Hermite polinom gyökeinek választva és a súlyokat szintén a Hermite polinomokból meghatározva kapunk pontos közelítő formulát $f(x) \exp(-x^2)$ alakú integrál meghatározására (az $f(x)$ itt is legfeljebb $2n - 1$ -ed rendű lehet).

A Gauss-Kronrod módszer a Gauss módszert egészíti ki, úgy, hogy az n -ed rendű Gauss szabály pontjaihoz hozzáad, $n + 1$ további pontot, így kapva egy $2n + 1$ rendű pontosabb becslést. A módszer lényege, hogy a kevésbé pontos, alacsonyabb rendű módszer pontjait fel lehet használni, egy magasabb rendű módszernél. Az $n + 1$ új pont a Stieltjes polinomok ([17]) határozzák meg. Az alacsonyabb és magasabb rendű becslések közti különbség használható hibabecslésre, amely felhasználható adaptív lépéshossz meghatározásánál (én a munkám során ezt az utat követtem).

3.4. Markov-lánc Monte Carlo módszerek

A Coulomb integrál számítására a Markov-lánc Monte Carlo módszert ([25]) választottuk, mivel ezen módszer segítségével hatékonyabban tudjuk számolni a magas dimenziós integrálokat.

3.4.1. Monte Carlo módszer

A Monte Carlo integrálási módszerek tipikusan a következő alakú D dimenziós integrálok esetén bukkannak fel:

$$I = \int_{\Omega} f(x)g(x)dx, \quad (3.4.1)$$

ahol Ω az integrálási tartomány, dx a D dimenziós integrálási mérték. Amennyiben $\int_{\Omega} g(x)dx = C$ vezessük be a következő függvényt: $p(x) = g(x)/C$. Triviálisan módon a keresett integrál:

$$I = C \int_{\Omega} f(x)p(x)dx \equiv C\langle f \rangle_p, \quad (3.4.2)$$

ahol $\langle \cdot \rangle_p$ a p eloszlással számolt várható értéket jelöli. A $p(x)$ valószínűségi eloszlás szerint válasszunk N pontot a terüinkből, ezen pontokat jelöljük $x_1, \dots, x_N \in \Omega$ változók. Ezen minta segítségével becsülhetjük a várható értéket:

$$\bar{I}_N = C \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(x_i) \equiv C\bar{f} \quad (3.4.3)$$

Mivel az x_i -k azonos eloszlású valószínűségi változók, az $f(x_i)$ is azonos eloszlású valószínűségi változó lesz, jelöljük ezt y_i -vel. Az új változóban I/C az y várható értéke, I_N/C a várható érték becslése egy N elemű minta alapján. Amennyiben teljesül, hogy $\langle y^4 \rangle < \infty$ (vagy $\langle |y| \rangle < \infty$), akkor érvényes lesz a nagy számok erős törvénye, amely alapján a minta várható érték majdnem biztosan tart a várható értékhez:

$$\mathcal{P}\left(\lim_{N \rightarrow \infty} \bar{I}_N = I\right) = 1, \quad (3.4.4)$$

ahol \mathcal{P} jelöli a valószínűséget, azaz végtelen sok pontot véve 0 a valószínűsége, hogy az integrál becslése rossz. Azonban numerikus számolás során valamekkora véges N -et kell választanunk, és fontos tudnunk, hogy a pontok számának a növelésével, hogy változik hiba. Ezen kapcsolat meghatározása érdekében az \bar{I}_N -et tekinthetjük valószínűségi változónak, amelynek van valamekkora $\sigma(\bar{I}_N)$ szórása, amely a következőképpen számolható:

$$\sigma^2(\bar{I}_N) = \frac{C^2}{N^2} \sum_{i=1}^N \sigma^2(f) = \frac{C^2 \sigma^2(f)}{N} \implies \sigma(\bar{I}_N) = \frac{C\sigma(f)}{\sqrt{N}}, \quad (3.4.5)$$

ahol a $\sigma(f)$ becsülhető a mintából a következő módon:

$$\sigma(f) = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (f(x_i) - \bar{f})^2 \quad (3.4.6)$$

Tehát a hiba a pontok számának a gyökével csökken.

Amennyiben $g(x) = 1$, egyenletes eloszlással mintavételezhetjük és az integrál értéke $I = V\bar{f}$ lesz, ahol $V = \int_{\Omega} dx$.

3.4.2. Markov-láncok

A Monte-Carlo integrálás során lényeges lépés bizonyos eloszlással létrehozni egy mintát. Ennek a megvalósítása az úgynevezett Markov-láncok ([24]) segítségével történhet.

3.1. Definíció. Az X_1, \dots, X_N (Ω értékű) valószínűségi változók sorozatát Markov-láncnak nevezzük, ha $\forall n$ és $\forall x_1, \dots, x_{n+1} \in \Omega$ esetén teljesül az úgynevezett Markov tulajdonság:

$$\mathcal{P}(X_{n+1} = x_{n+1} | X_n = x_n, \dots, X_1 = x_1) = \mathcal{P}(X_{n+1} = x_{n+1} | X_n = x_n) \quad (3.4.7)$$

Tehát egy Markov-lánc egy olyan sztochasztikus folyamat, amelynek nincs memóriája, azaz egy adott időpillanatbeli valószínűség csupán az 1 lépéssel előtti értéktől függ.

Markov-láncokra a nagy számok erős törvényéhez hasonló, de annál erősebb, tételt mondhatunk ki, amely lehetővé teszi az ilyen folyamatok alkalmazását a Monte Carlo módszereknél. A tétel megfogalmazása előtt, definiálni kell néhány fontos fogalmat a Markov-folyamatokra.

3.2. Definíció. Az X_1, \dots, X_N Markov-láncot homogénnek nevezzük, akkor ha $\forall i, \forall a, b \in \Omega : \mathcal{P}(X_{i+1} = a | X_i = b) = T_{ab}$. A T mátrixot sztochasztikus mátrixnak szokás nevezni, és b -ből az a állapotba való jutás valószínűségét mondja meg ($\sum_{b \in \Omega} T_{ab} = 1$).

3.3. Definíció. Az X_1, \dots, X_N Markov-lánc irreducibilis, ha $\forall a, b \in \Omega : \exists i \geq 0$ úgy, hogy $\mathcal{P}(X_i = a | X_0 = b) > 0$.

3.4. Definíció. Egy X_1, \dots, X_N Markov-láncban, $a \in \Omega$ elemnek, van periódusa, és ez $k(a)$, ha az elembe való visszatérés k többszörös lépésben történik. Azaz:

$$k(a) = \text{LNKO}\{i > 0 : \mathcal{P}(X_i = a | X_0 = a) > 0\}, \quad (3.4.8)$$

ahol LNKO a legnagyobb közös osztót jelenti.

3.5. Definíció. Egy X_1, \dots, X_N Markov-lánc aperiodikus, ha $\forall a \in \Omega : k(a) = 1$

3.6. Definíció. Egy Ω -n értelmezett p eloszlás stacionáriusnak nevezzük, ha

$$\sum_{a \in \Omega} p_a T_{ab} = p_b, \quad \forall b \in \Omega \quad (3.4.9)$$

A Markov-folyamatot stacionáriusnak nevezzük, ha $\exists p$, azaz az X_n eloszlása időtől független.

Ezen definíciók felhasználásával már kimondható az Ergodicitás tétel Markov-folyamatokra, amelynek első része analóg a nagy számok erős törvényével (azonban erősebb annál, hiszen elég ha a függvény integrálja konvergens, nem kell abszolút konvergensnek lennie). A második része fontos állítást tesz a Markov-lánc kezdőpontjának megválasztásával kapcsolatban.

3.1. Tétel. Ergodicitás tétel. Legyen X_1, \dots egy irreducibilis, homogén Markov-lánc, melynek stacionárius eloszlása p , ekkor $\forall f : \Omega \rightarrow \Sigma, \|\langle f \rangle\| < \infty$

$$\mathcal{P}\left(\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(X_i) = \langle f \rangle_p\right) = 1 \quad (3.4.10)$$

Amennyiben a lánc még aperiodikus is, akkor $\forall a, b \in \Omega$ esetén teljesül:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{P}(X_n = a | X_0 = b) = p(a), \quad (3.4.11)$$

azaz nem számít a lánc kezdőpontja. A tétel feltételeit teljesítő folyamatokat szokás ergodikus Markov-láncnak nevezni.

3.4.3. Metropolis algoritmus

Markov tulajdonság, grafikus model, faktorizál

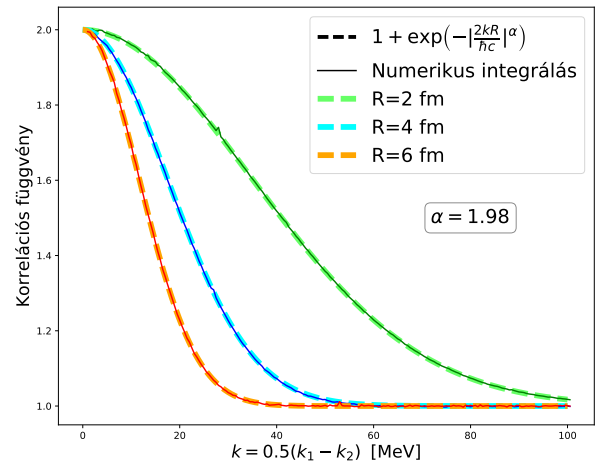
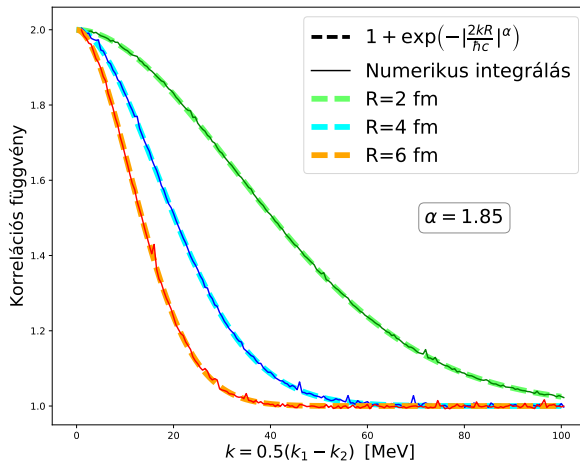
3.5. Implementáció

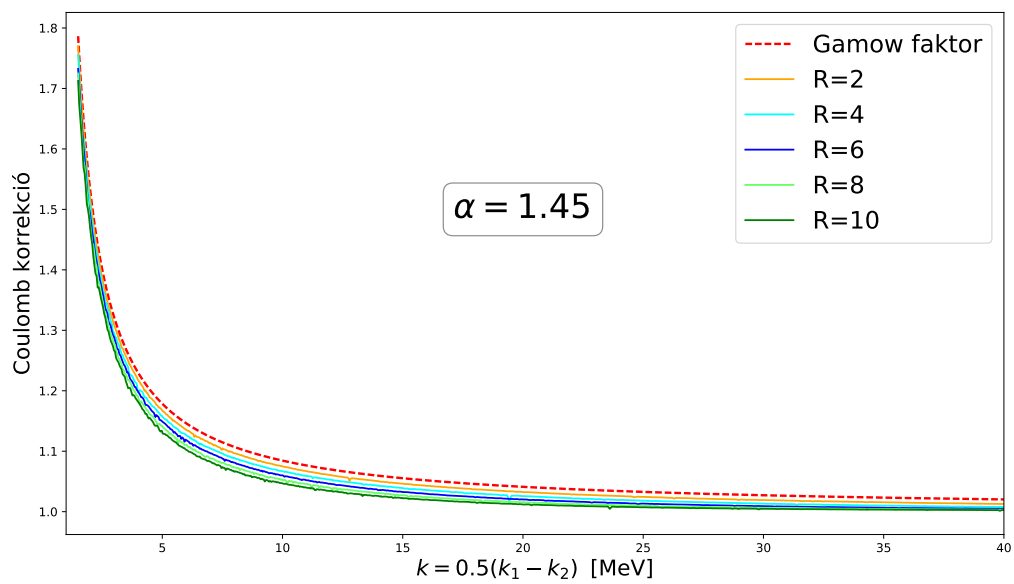
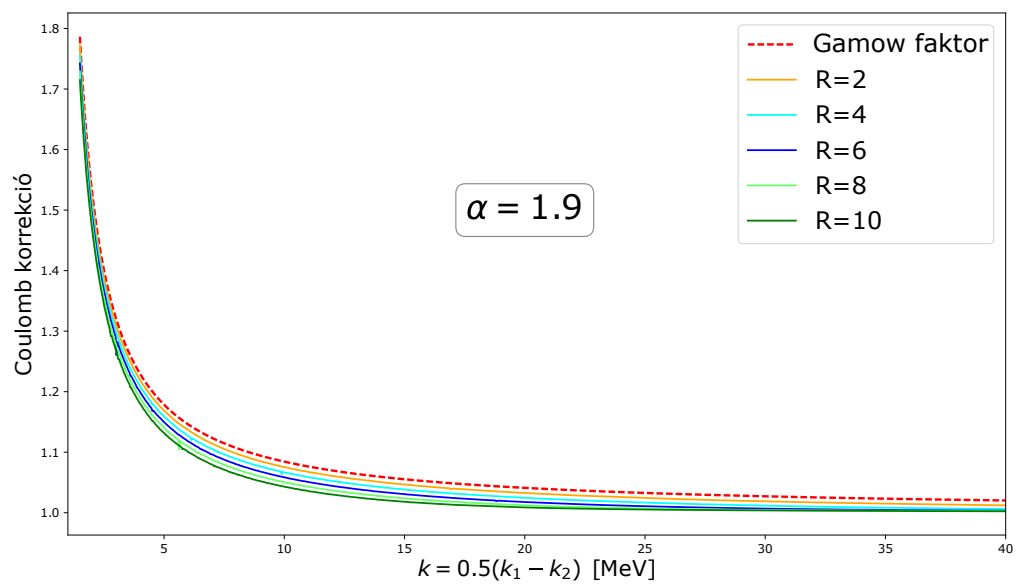
3.5.1. CUDA

3.5.2. MapReduce

3.5.3. Háromrészecske Coulomb integrál közelítése

3.5.4. Eredmények





4. Adatanalízis

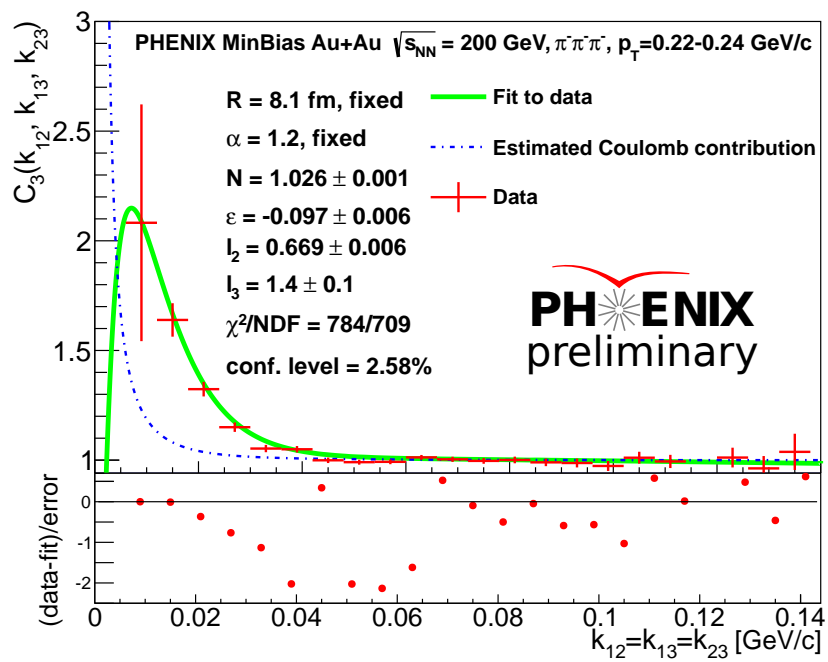
4.1. Korrelációs függvény változói

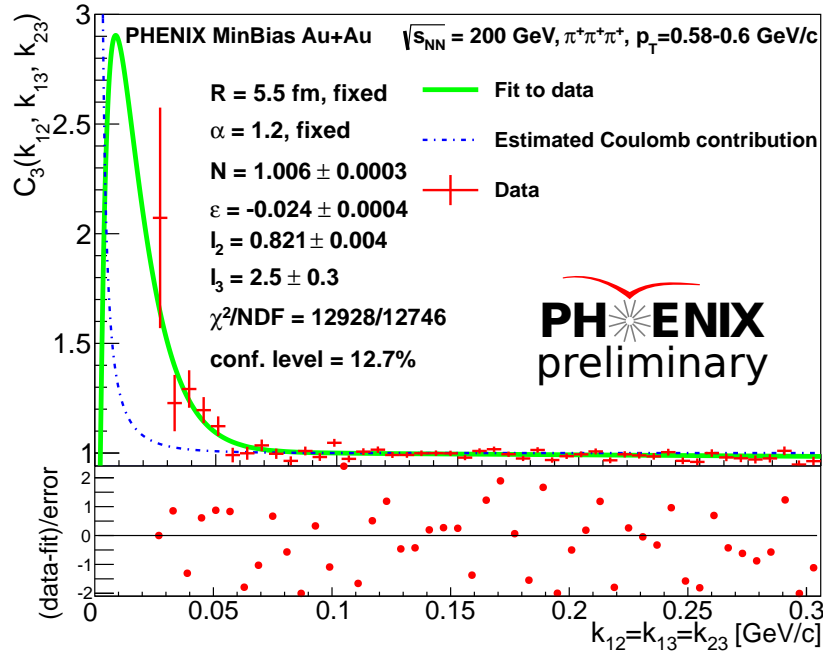
4.2. Korrelációs függvény mérése

4.3. Illesztett modell

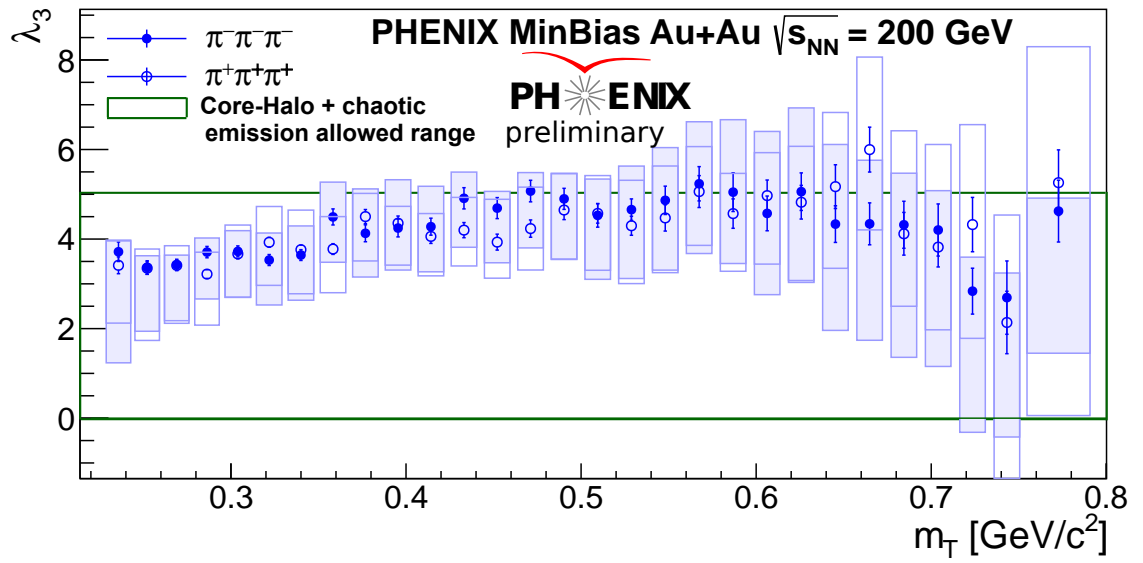
5. Eredmények

5.1. Illesztés vizualizáció

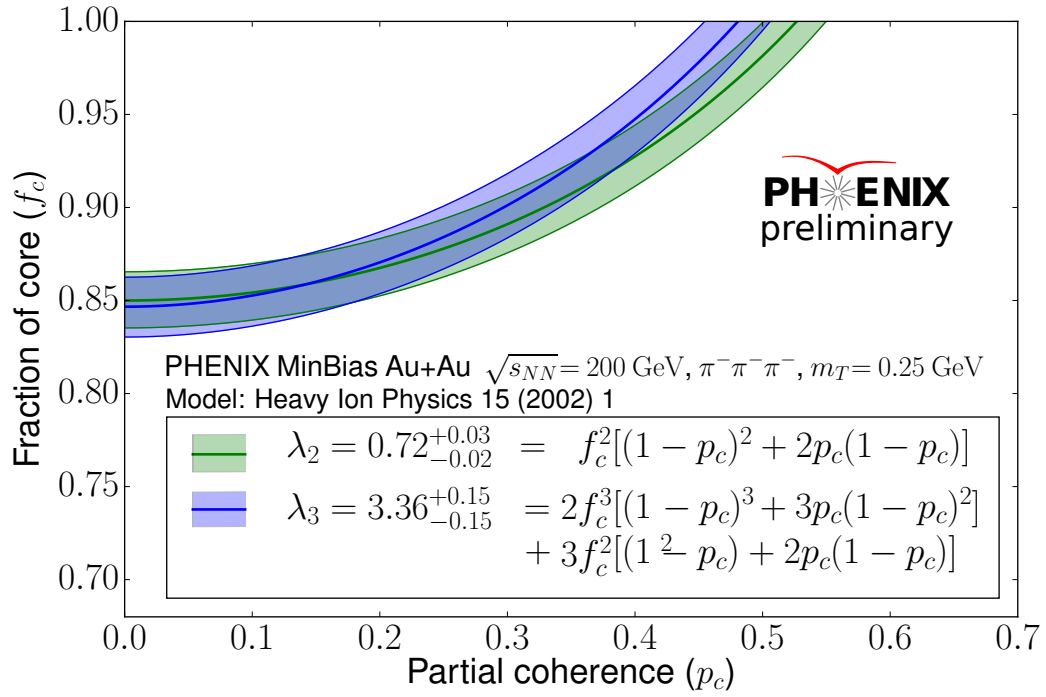
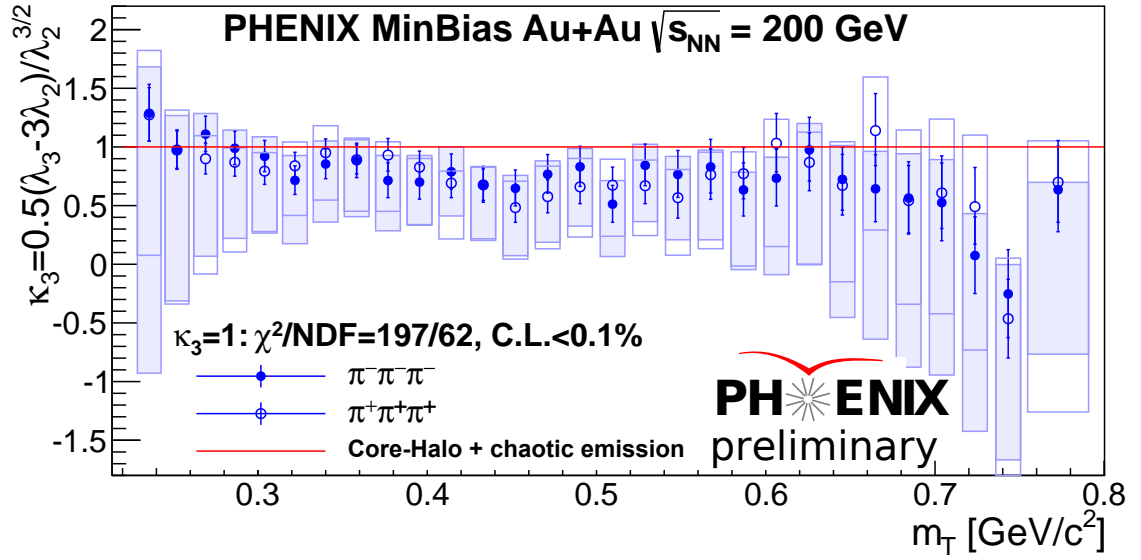


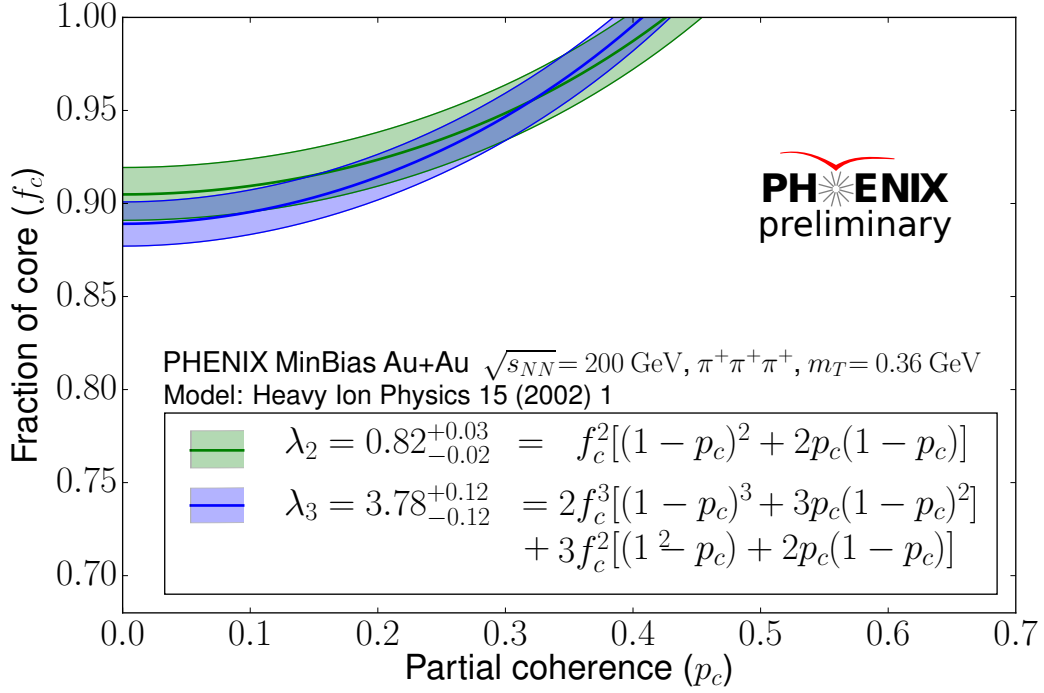


5.2. Háromrészezske korrelációs erősség



5.3. Parciális koherencia





6. Összefoglaló

Hivatkozások

- [1] A. Adare et al. Observation of direct-photon collective flow in $\sqrt{s_{NN}} = 200$ GeV Au+Au collisions. *Phys.Rev.Lett.*, 109:122302, 2012.
- [2] S. S. Adler et al. Evidence for a long-range component in the pion emission source in Au + Au collisions at $s(NN)^{1/2} = 200$ -GeV. *Phys. Rev. Lett.*, 98:132301, 2007.
- [3] E. O. Alt, T. Csorgo, B. Lorstad, and J. Schmidt-Sorensen. Coulomb corrections to the three-body correlation function in high-energy heavy ion reactions. *Phys. Lett.*, B458:407–414, 1999.
- [4] E. O. Alt, T. Csorgo, B. Lorstad, and J. Schmidt-Sorensen. Coulomb wave function corrections for n particle Bose-Einstein correlations. *Eur. Phys. J.*, C13:663–670, 2000.
- [5] E. O. Alt, T. Csorgo, B. Lorstad, and J. Schmidt-Sorensen. Coulomb and core / halo corrections to Bose-Einstein N particle correlations. In *From e^+e^- to Heavy Ion Collisions: Proceedings of the 30th International Symposium on Multiparticle Dynamics (ISMD 2000), Tihany, Hungary, October 9-15, 2000*, pages 564–571, 2001.
- [6] Sebastian Ament and Michael O’Neil. Accurate and efficient numerical calculation of stable densities via optimized quadrature and asymptotics. *Statistics and Computing*, pages 1–15, 1 2017.
- [7] M. Biyajima, M. Kaneyama, and T. Mizoguchi. Analyses of two and three pion Bose-Einstein correlations using Coulomb wave function. *Phys. Lett.*, B601:41–50, 2004.

- [8] J. Bolz, U. Ornik, M. Plumer, B. R. Schlei, and R. M. Weiner. Resonance decays and partial coherence in Bose-Einstein correlations. *Phys. Rev.*, D47:3860–3870, 1993.
- [9] M. Csanad, T. Csorgo, and M. Nagy. Anomalous diffusion of pions at RHIC. *Braz. J. Phys.*, 37:1002–1013, 2007.
- [10] Mate Csanad and Marton Vargyas. Observables from a solution of 1+3 dimensional relativistic hydrodynamics. *Eur. Phys. J.*, A44:473–478, 2010.
- [11] M. Csanád. *Nagyenergiás atommag-ütközések téridőbeli lefolyása*. ELTE habilitációs dolgozat.
- [12] T. Csorgo. Higher order Bose-Einstein correlations for systems with large halo. *Phys. Lett.*, B409:11–18, 1997.
- [13] T. Csorgo. Particle interferometry from 40-MeV to 40-TeV. *Heavy Ion Phys.*, 15:1–80, 2002.
- [14] T. Csorgo. Review of HBT or Bose-Einstein correlations in high energy heavy ion collisions. *J. Phys. Conf. Ser.*, 50:259–270, 2006.
- [15] T. Csorgo, B. Lorstad, J. Schmid-Sorensen, and Andras Ster. Partial coherence in the core / halo picture of Bose-Einstein n particle correlations. *Eur. Phys. J.*, C9:275–281, 1999.
- [16] T. Csorgo, B. Lorstad, and J. Zimanyi. Bose-Einstein correlations for systems with large halo. *Z. Phys.*, C71:491–497, 1996.
- [17] *NIST Digital Library of Mathematical Functions*. <http://dlmf.nist.gov/>, Release 1.0.14 of 2016-12-21. F. W. J. Olver, A. B. Olde Daalhuis, D. W. Lozier, B. I. Schneider, R. F. Boisvert, C. W. Clark, B. R. Miller and B. V. Saunders, eds.
- [18] Gerson Goldhaber, Sulamith Goldhaber, Won-Yong Lee, and Abraham Pais. Influence of Bose-Einstein statistics on the anti-proton proton annihilation process. *Phys. Rev.*, 120:300–312, 1960.
- [19] R. Hanbury Brown and R. Q. Twiss. A Test of a new type of stellar interferometer on Sirius. *Nature*, 178:1046–1048, 1956.
- [20] M. Köfaragó. *Bose-Einstein korrelációk mérése és vizsgálata nagyenergiás mag-mag ütközésekben*. ELTE diplomamunka.
- [21] L.D. Landau and E.M. Lifshitz. *Elméleti fizika III.: Kvantummechanika*. Number v. 3. TYPOTeX, 2010.
- [22] Michael Annan Lisa, Scott Pratt, Ron Soltz, and Urs Wiedemann. Femtoscopy in relativistic heavy ion collisions. *Ann. Rev. Nucl. Part. Sci.*, 55:357–402, 2005.
- [23] T. Mizoguchi and M. Biyajima. An Improved formulation for three charged particles correlations in terms of Coulomb wave functions with degree of coherence. *Phys. Lett.*, B499:245–252, 2001.
- [24] J.R. Norris. *Markov Chains*. Cambridge Series in Statistical and Probabilistic Mathematics. Cambridge University Press, 1998.
- [25] Art B. Owen. *Monte Carlo theory, methods and examples*. 2013.

- [26] Sandra S. Padula. HBT interferometry: Historical perspective. *Braz. J. Phys.*, 35:70–99, 2005.
- [27] S. Pratt, T. Csorgo, and J. Zimanyi. Detailed predictions for two pion correlations in ultrarelativistic heavy ion collisions. *Phys. Rev.*, C42:2646–2652, 1990.
- [28] A. Ster, M. Csanad, T. Csorgo, B. Lorstad, and B. Tomasik. Spectra, elliptic flow and azimuthally sensitive HBT radii from Buda-Lund model for $\sqrt{s_{NN}} = 200$ GeV Au+Au collisions. *Eur. Phys. J.*, A47:58, 2011.
- [29] Steven Weinberg. *The First Three Minutes*. Basic Books, New York, New York, 1977.
- [30] Eric W. Weisstein. Legendre-gauss quadrature. From MathWorld—A Wolfram Web Resource.