

EÖTVÖS LORÁND TUDOMÁNYEGYETEM
TERMÉSZETTUDOMÁNYI KAR
FIZIKAI INTÉZET

Háromrészecske Bose-Einstein korrelációk
vizsgálata a PHENIX kísérletben

Bagoly Attila

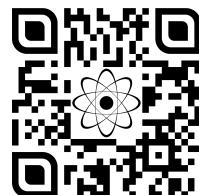
Fizikus MSc

Témavezető:

Csanád Máté

ELTE TTK Atomfizikai tanszék

2017. május 31.



Tartalomjegyzék

1. Bevezetés	1
1.1. Nagyenergiás nehézion-fizika	1
1.2. Kvark-gluon plazma	2
1.3. A PHENIX kísérlet	4
1.3.1. Eseményjellemző detektorok	5
1.3.2. Részecskeazonosító detektorok	5
2. Bose-Einstein korrelációk	6
2.1. Definíció	7
2.2. Két nem kölcsönható részecske korrelációs függvénye	8
2.3. Forrás függvény	9
2.3.1. Lévy-eloszlás	10
2.4. A mag-glória modell	12
2.5. A korreláció erőssége	14
2.6. Parciális koherencia	14
3. Coulomb-korrekción számítása	15
3.1. A Coulomb-kölcsönhatás	16
3.1.1. A kétrészecske kölcsönhatás	16
3.1.2. A háromrészecske kölcsönhatás	18
3.2. A Coulomb-korrekción integrál	19
3.2.1. Az integrál kétrészecske esetén	19
3.2.2. Az integrál háromrészecske esetén	19
3.3. Gauss-Kronrod-integrálási módszer	20
3.4. Markov-lánc Monte-Carlo-módszerek	21
3.4.1. Monte-Carlo-módszer	21
3.4.2. Markov-láncok	22
3.4.3. Metropolis-Hastings-algoritmus	23
3.5. A numerikus integrálás implementációja	25
3.5.1. A CUDA architektúra	26
3.5.2. MapReduce programozási modell	28
3.6. Eredmények	29
3.6.1. Teszt: Coulomb-kölcsönhatás nélküli eset	29
3.6.2. Kétrészecske Coulomb-korrekción	30
3.6.3. Háromrészecske Coulomb-korrekción	32

4. Adatanalízis	34
4.1. Részecskeazonosítás	34
4.2. Kétrészecske vágások	35
4.3. Korrelációs függvény változói	37
4.4. Korrelációs függvény mérése	39
4.5. Illesztett modell	41
4.6. Szisztematikus hibák	43
5. Eredmények	44
5.1. Lévy-eloszlás paraméterei	44
5.2. Háromrészecske korrelációs erősség	45
5.3. Parciális koherencia	46
6. Összefoglaló	48

1. Bevezetés

1.1. Nagyenergiás nehézion-fizika

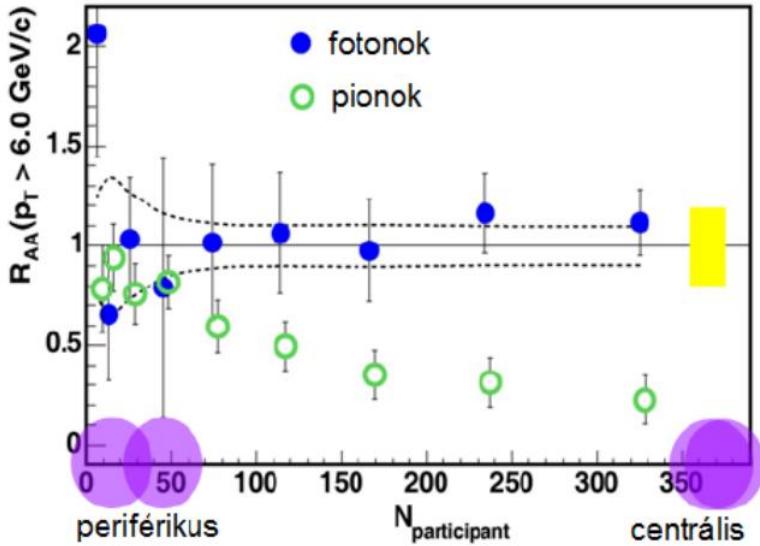
A nehézion-fizikában nagy rendszámú atommagok közel fénysebességen való ütközötésével próbálunk információt szerezni az elemi részecskék világáról. Az atommagokat közel fénysebességre gyorsítjuk elektromágneses terek segítségével (LHC, RHIC a két legnagyobb energiájú gyorsító). A labor-rendszerből nézve Lorentz-kontrahált atommagokat összeütköztetünk, az ütközés során lejátszódnak bizonyos valószínűséggel „kemény” folyamatok amelyek során részecskezáporok (jet) keletkeznek, melyek hadronokból, leptonokból és fotonokból állnak. A kemény folyamatok jellemzője, hogy a jetek párokban keletkeznek, majd az impulzusmegmaradás miatt ellenkező irányba haladnak, az ütközések során a legvalószínűbb egy jet-pár keletkezése. Egy ütközés során nem csak kemény folyamatok zajlanak, hanem a „lágy” folyamatok is, melyek során a részecskék nem jetekben keletkeznek. Az ütköző atommagok tömegközépponti energiájának növelésével nő a kemény folyamatok valószínűsége, és csökken a lágy folyamatoké. Az ütközési pont köré épített detektorok segítségével mérjük a keletkező részecskék eloszlásait és különböző fizikai paramétereit. Ezen adatok segítségével próbálunk következtetni az ütközés után lezajló jelenségekre.

Az ütközések jellemzésére definiálni szoktuk az impakt paramétert, amely a középpontok távolságát jelenti. Az impakt paraméter alapján centralitás osztályokba rendezzük az ütközéseket, ezen osztályokat a centrálisról perifériás felé haladva százalékosan adunk meg.

Másik fontos fogalom a nukleáris módosulási faktor, amely segítségével az ütközés folyamatát tudjuk jellemezni. Az ütközés centralitását ismerve ki tudjuk számolni az ütközésben résztvevő nukleonok számát. A teljes folyamatot elképzelhetjük bináris ütközések összegeként, amennyiben feltesszük, hogy a protonok páronként ütköznek és egymástól függetlenül zajlanak az események. Független p+p ütközésekben ismerjük egy ilyen esemény során keletkező részecskék számát. Nehézion ütközések esetén ezt a számot megsorozzuk az ütközés bináris eseményeinek számával, így megkapjuk a keletkező részecskék számát. Azonban ezt a számot közvetlenül is meghatározhatjuk két nehézion összeütköztetésével, az előbbivel vett arányt nevezzük a nukleáris módosulási faktornak. Például Au+Au ütközés esetén, ha a keletkező részecskék száma N_{Au} , bináris ütközések száma N_{bin} és p+p ütközések esetén a keletkező részecskék száma N_p akkor a nukleáris módosulási faktor a következőképpen néz ki:

$$R_{\text{AA}} = \frac{N_{\text{Au}}}{N_{\text{bin}} N_p}, \quad (1.1.1)$$

ennek értékére $R_{\text{AA}} = 1$ várunk, mivel az Au+Au ütközéseket úgy képzeliük el, hogy az ütközésben résztvevő protonok páronként ütköztek.



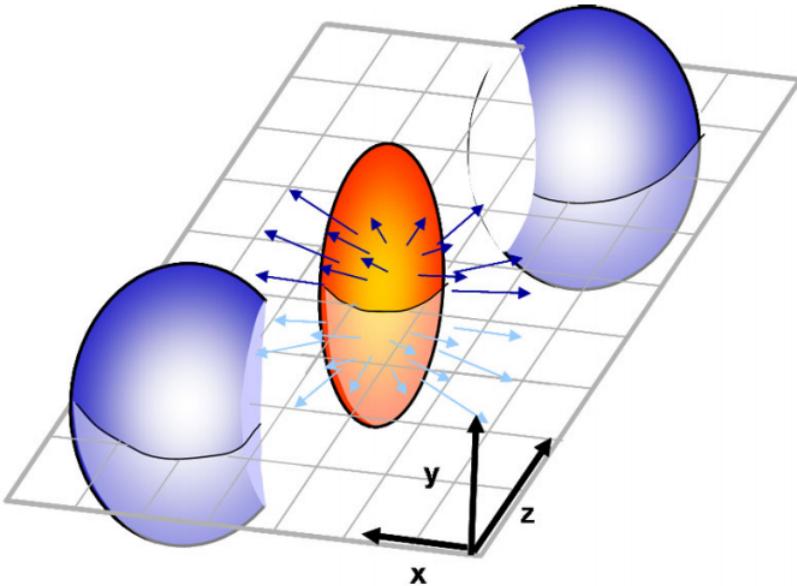
1.1. ábra. Au+Au ütközések esetén a nukleáris módosulási faktor a nukleonszám függvényében pionokra és fotonokra. Az ábrán látható, hogy nagy centralitás esetén kevesebb nagyenergiás piont észlelünk mint p+p ütközések alapján várnánk, továbbá az erős kölcsönhatásban nem fotonok száma a várttal egyezik. Ez utal az erősen kölcsönható közeg jelenlétére. Forrás: [23]

1.2. Kvark-gluon plazma

A RHIC gyorsítóban Au+Au ütközések esetén nagy centralitásnál a mérések során kevesebb nagyenergiás részecskét mértek a p+p ütközések alapján várt nál (1.1 ábra), a jet-párok egyik tagja nem jelent meg (jet-elnyomás). Ezen tapasztalatoknak több kiváltó oka is lehet, a kérdés eldöntésére további kísérleteket végeztek. Az egyik volt a deutérium-arany ütközések elvégzése, azonban itt semmilyen centralitásnál nem volt jet-elnyomás. Ennek magyarázata, hogy ütközések esetén erősen kölcsönható közeg jöhet létre amely a jet-pár egyik tagját elnyeli (amely nagyobb utat tesz meg benne), azonban deutérium-arany ütközések során a létrejövő közeg mérete túl kicsi, hogy elnyelje azt.

Ezen közeg létrejöttét elméletileg a QCD magyarázza meg. Az elmélet szerint nagyon nagy energián megjelennek kvark szabadsági fokok, azaz a kvarkok hadronba zártsága megszűnik. A létrejövő közeg az erősen kölcsönható kvark-gluon plazma nevet viseli (sQGP). Ezen közegben nagyok a hatáskeresztmetszetek, ezért kicsi a szabad úthossz és gyors a termalizáció, ezért van értelme lokális egyensúlyról beszélni, így alkalmazhatóak rá a statisztikus fizika fogalmai (pl. hőmérséklet). Az ősrobbanást követő egy milliomod másodpercben az univerzumot is a kvark-gluon plazma alkotta [43].

Az új közeg felfedezése után a RHIC gyorsítóban ezen közeg tulajdonságainak megismerését célzó kísérletek kezdődtek. Ezen kísérletek során kiderült, hogy a kvark-gluon plazma az eddig látott legtökéletesebb (viszkozitás mentes) folyadékként viselkedik, amely meglepő volt hisz nagyon kis viszkozitással rendelkező folyadékokat eddig nagyon alacsony hőmérsékleten tudtak csak előállítani. A kvarkfolyadék viszkozitására a gravitációs- és kvantumtérelméletek analógiájából (AdS/CFT) származik egy alsó becslés, eszerint a viszkozitás nem lehet kisebb mint $\hbar/4\pi$.



1.2. ábra. Két gömb ütközéseként létrejövő speciális ellipszoidális szimmetriával rendelkező kezdeti eloszlás kialakulása. Forrás: [23]

Ultrarelativisztikus sebességre felgyorsított atommagok ütközése két Lorentz-kontrahált korong ütközéseként fogható fel, laborrendszerből nézve. Amint az 1.2 ábra is szemlélteti, ez a létrejövő kvarkanyagban speciális kezdeti eloszlást eredményez, egy $\cos(2\varphi)$ -szerinti aszimmetriát az eloszlásban, amely a tengelyszimmetriától való elliptikus eltérést jelenti. A nyalábirányra merőlegesen bevezetjük a transzverz-síkot, ebben a síkban az kvarkanyag kezdeti eloszlását Fourier-sorba fejtjük a következőképpen:

$$A(\varphi) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\varphi) + b_n \sin(n\varphi)] \quad (1.2.1)$$

Ezen sorfejtés alapján látható, hogy az a_2 jellemzi az előbb említett aszimmetriát, amennyiben tökéletesen gömbszimmetrikusak lennének az atommagok és a keletkező ellipszis egyik nagyengelyén vennénk föl a a koordináta-rendszer x-tengelyét csupán ez a tag jelenne meg. Azonban

mivel az atommagok véges nukleonszámmal rendelkeznek, melyeknek van valamilyen eloszlása a magon belül, a gömbszimmetria csupán első közelítésként fogható fel.

Az ütközés után létrejövő kvarkanyag robbanásszerűen tágul egész addig amíg a hőmérséklet le nem csökken egy bizonyos értékre, ekkor megszűnik ez a fázis és a kvarkokból hadronok keletkeznek amelyeket mérni is tudunk. Mivel a kvarkanyag folyadékszerűen viselkedik a kezdeti aszimmetriák nem tűnnek el, a kifagyás pillanatába is jelen vannak, ezért azok a keletkező hadronok eloszlásában is megjelennek. Az aszimmetriákat jellemző paramétereket az impulzustérben szokás definiálni. A részecskék eloszlását transzverz-síkban a $N(p_t, \varphi)$ függvénytel jellemziük, amely megmondja, hogy $[\varphi, \varphi + d\varphi]$ irányban $[p_t, p_t + dp_t]$ impulzus-tartományban mennyi részecske található. A függvény szögfüggését leválasztva, azt Fourier-sorba fejtve és 1-re normálva a következő alakban írhatjuk:

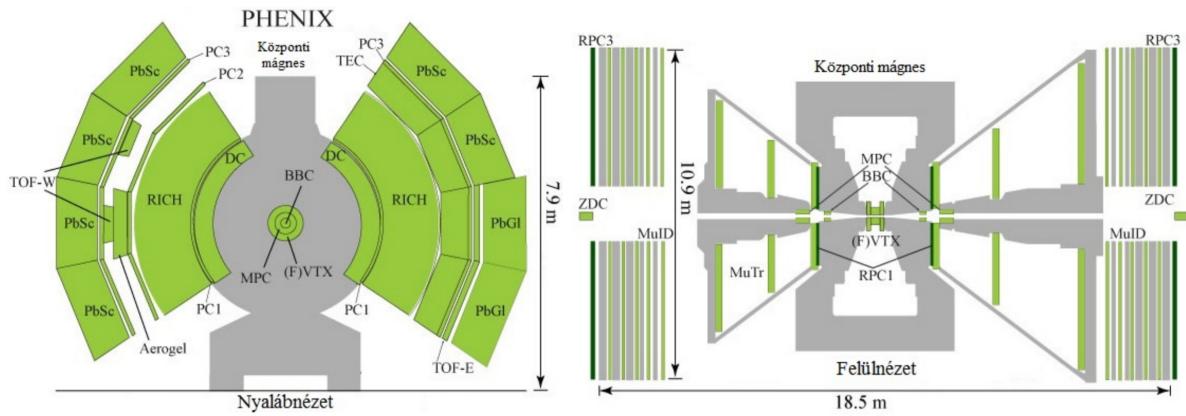
$$N(p_t, \varphi) = N(p_t) \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} [v_n \cos(n\varphi) + w_n \sin(n\varphi)] \right) \quad (1.2.2)$$

A Fourier-sor első komponensei játszanak fontosabb szerepet. Ezek közül is a v_2 együttható a leglényegesebb, mert ez a paraméter hordozza az ellipszoidális aszimmetriát, ezt az elliptikus folyás paraméterének nevezik. Ezen aszimmetria a kifagyott hadronok és fotonok eloszlásában [5] is megjelenik, ezért a folyadékkép helyességét bizonyítja a kvark-gluon plazma esetén. A Fourier-sor szinuszos részét nem szoktuk külön kezelní, mivel a mérések során a reakciósíkhöz képesti szög szerinti sort veszünk ($\sum v_n \cos[n(\varphi - \psi_n)]$), így a fenti szinuszos és koszinuszos tagok összevonva jelennek meg. Más mérési módszer esetén ugyan megjelenhetnek külön is a szinuszos tagok, de ekkor is szimmetria okokból ezen tagok eltűnnek.

1.3. A PHENIX kísérlet

A PHENIX (Pioneering High Energy Nuclear Interaction eXperiment) kísérlet az Amerikai Egyesült Államok Brookhaveni Nemzeti Laboratóriumában működő Relativisztikus nehézion-ütköztető (RHIC) egyik detektorrendszere, amelynek adatain 14 ország több száz kutatója dolgozik (PHENIX kollaboráció). A relativisztikus nehézion-ütköztető két, egyenként 3.8 km kerületű gyorsítógyűrűből áll, amelyek összesen 6 különböző pontban metszik egymást. A metszésponkokba épültek a különböző detektorrendszerek, amelyek közül ma már csak a két legnagyobb, a PHENIX és a STAR rendszerek aktívak.

A PHENIX kísérlet detektorait [6], amelyet az 1.3 ábra szemlélteti, két csoportba oszthatjuk: események globális tulajdonságait meghatározó, illetve az eseményekből kirepülő részecskék észlelését és tulajdonságait mérő detektorok.



1.3. ábra. A PHENIX detektorrendszer. A baloldali ábra mutatja a detektorrendszer nyaláb-irányra merőleges metszetét, a jobboldali pedig nyalábiránnyal párhuzamosat.

1.3.1. Eseményjellemző detektorok

Az eseményjellemző detektorok meghatározzák egyrészt, hogy történt-e ütközés (jel a többi detektor számára, hogy mérni kell), másrészt az esemény fontos jellemzőit (ütközés pontos helye, geometriai elrendezése). Ilyen detektorok a Zero Degree Calorimeter (ZDC) és a Beam Beam Counter (BBC), melyek közül az analízis során a BBC detektort használtuk.

A BBC detektor két karból áll, melyek nyalábirányban helyezkednek el egymástól 288 cm távolságra, mint az 1.3 jobboldali ábrán látható. A karokban leadott töltésből meghatározható az esemény centralitása, azaz, hogy a két ütköző atommag mennyire „középen” találta el egymást. A két detektor a beérkezési időt is méri, amelynek különbségéből meghatározható az ütközés nyalábiránnyal párhuzamosan vett helye (z-vertex, koordináta-rendszer z tengelyét nyalábiránnyal párhuzamosan vesszük fel). A detektor időfelbontása 40 ps, amely centrális ütközés esetén 0.5 cm z-vertex felbontást eredményez.

1.3.2. Részecskeazonosító detektorok

A részecskék azonosítása az impulzusuknak és sebességüknek meghatározásával történik. A sebesség mérése érdekében el kell végezni a részecskék pályájának rekonstrukcióját, amely, az úgynevezett nyomkövető detektorok: a Drift Chamber (DC) és az első Pad Chamber (PC1) segítségével történik (mindkettő sokszálas proporcionális kamra).

A DC detektorok a nyalából 2.02 és 2.46 méter távolságra helyezkednek el, és z irányba 180 cm, transzverz irányba pedig 180° tartományt fednek le. Ezek a detektorok transzverzális irányba (φ szög) mérik a részecskék pályáját 1 mrad szögfelbontással. A nyalábiránnyal párhuzamos mágneses tér hatására a részecskék pályája elgörbülik, így DC detektor által mért görbületi sugár a részecske transzverz impulzusa meghatározható.

A PC1 detektorok közvetlenül a DC detektorok mögött helyezkednek el, és mind a nyaláb

mind transzverz irányban mérik a részecske pályáját (z és φ). A PC1 detektor által mért z koordináta és a BBC detektor által meghatározott z-vertex pozíció felhasználásával meghatározható a részecskék nyalábirányú impulzusa.

A részecskék impulzusa és pályája mellett meg kell határozni a repülési időt, amelyet az ólom-szcintillátor elektromágneses kaloriméterek (PbSc) illetve repülésidő detektorok (TOF-E, TOF-W) segítségével lehetünk meg. Az elektromágneses kaloriméterek a detektorrendszer legszélén helyezkednek el, mivel ezek a berepülő részecskéket teljes energiájuk elnyerésével észlelik. A PbSc kaloriméterek segítségével pionok esetén körülbelül 400 ps időfelbontás érhető el. A TOF-E repülésidő detektor a keleti szárnyban helyezkedik el közvetlenül a PbSc detektor előtt, azonban nem fedi le a teljes keleti oldalt. Ez a detektor fotoelektron-sokszorozókkal ellátott műanyag szcintillátorból áll, segítségével 140 ps pontossággal mérhető a repülésidő. A TOF-W detektor a nyugati szárnyban, szintén a PbSc detektorok előtt helyezkedik el, valamint két különálló panelból áll. Ezen panelek sokrémes ellenállás-kamra (resistive plate chamber) detektorok, amelyek 90 ps felbontással képesek repülésidőt mérni.

A DC/PC1 detektorok által rekonstruált pályából meghatározható a részecske által megtett út (L), továbbá a TOF/PbSc és BBC detektorok segítségével mérhető a repülési idő (t), melyekből megkapjuk a részecskék sebességét. Továbbá a DC/PC1 detektorok a részecske impulzusát is meghatározza, így minden szükséges mennyiséget ismerünk a részecske azonosításához. Ezen mennyiségekkel az azonosításhoz szükséges tömegnagyzet a következőképpen alakul:

$$m^2 = \frac{p^2}{c^2} \left[\left(\frac{ct}{L} \right)^2 - 1 \right] \quad (1.3.1)$$

2. Bose-Einstein korrelációk

A Bose-Einstein korrelációk vizsgálatának megalapozói Robert Hanbury Brown és Richard Q. Twiss volt, ők 1956-ban publikált cikkükben [31] vezették be a módszert, amely vegyes fogadtatásban részesült a tudományos közösség részéről. A módszer segítségével képesek voltak meghatározni a Sirius csillag átmérőjét a fotonok közötti korrelációk méréséből. Mérési elrendezésük két változtatható távolságra levő foton detektorból állt (ezek egy-egy fókuszáló tányér és fotoelektron-sokszorozóból álltak). A két detektor segítségével mérték a Sirius csillagból jövő fotonok közti korrelációt, különböző detektortávolságokon. Az így kapott pontokra elméleti megfontolásokból kapott korrelációs függvényt illesztettek, amely segítségével meghatározták a csillag átmérőjét. A két tudós tiszteletére a bozonok közti intenzitás korrelációt szokás Hanbury Brown és Twiss effektusnak nevezni (vagy röviden HBT effektus), az ilyen jellegű vizsgálódásokat pedig HBT analízisnek.

A HBT effektus részecskefizikai alkalmazásában jelentős szerepet játszott G. Goldhaber, S. Goldhaber, W.Y. Lee és A. Pais kutatása, akik proton-antiproton 1.05 GeV/c tömegközépponti

energián történő ütközötésekben keletkező pionokat vizsgáltak. Mérésük során azonos pionok között nem várt korrelációt tapasztaltak, melynek vizsgálatával felfedezték a ρ^0 rezonanciát, amely $4.5 \cdot 10^{-24}$ másodperc alatt elbomlik két pionra ($\rho^0 \rightarrow \pi^+ \pi^-$), eredményüket 1960-ban publikálták [30]. Később kiderült, hogy az általuk tapasztalt korrelációknak az oka, hogy a fotónokhoz hasonlóan a pionok is bozonok. Goldhaber és társai kutatása nyomán a részecskefizikában is beindult a HBT effektus vizsgálata. Későbbiekben kiderült, hogy az asztronómiaihoz hasonlóan ezek a korrelációk itt is információt hordoznak a forrás geometriájáról [39, 23].

2.1. Definíció

Általánosan n részecske közti korrelációs függvény a következőképpen definiálható [13, 25]:

$$C_n(p_1, p_2, \dots, p_n) = \frac{N_n(p_1, p_2, \dots, p_n)}{N_1(p_1)N_1(p_2)\dots N_1(p_n)}, \quad (2.1.1)$$

ahol $p_i = (p_i^0, \mathbf{p}_i)$ 4-es impulzusmomentum, $N_n(p_1, p_2, \dots, p_n)$ az n részecske invariáns momentum eloszlás. A korrelációs függvény szemléletesen azt mondja meg, hogy milyen valószínűséggel keletkezik egy részecske n -es p_1, p_2, \dots, p_n 4-es momentumokkal.

Az n részecske invariáns impulzusmomentum eloszlás meghatározható a következő módon:

$$N_n(p_1, p_2, \dots, p_n) = \int \prod_{i=1}^n \mathcal{S}(p_i, x_i) |\Psi_{p_1, p_2, \dots, p_n}(x_1, x_2, \dots, x_n)|^2 \prod_{i=1}^n d^4 x_i, \quad (2.1.2)$$

ahol a $\Psi_{p_1, p_2, \dots, p_n}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ az n részecske hullámfüggvény, az $\mathcal{S}(p_i, x_i)$ pedig az úgynevezett forrásfüggvény, amely megadja annak a valószínűségét, hogy x_i helyen keletkezik egy részecske p_i impulzussal.

Az n részecske hullámfüggvény meghatározásához nemrelativisztikus közelítést használunk HBT effektus vizsgálata során, így a Ψ függvényt a Schrödinger-egyenlet megoldásából kapjuk (ügyelve, arra hogy mivel bozonjaink vannak, két részecske felcserélésére szimmetrikus legyen a hullámfüggvény):

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n, t)}{\partial t} = \left[\sum_{i=1}^n \left(-\frac{\hbar^2}{2m_i} \Delta_i + V_i(\mathbf{x}_i) \right) + \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} V_{ij}(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) \right] \Psi(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n, t) \quad (2.1.3)$$

A HBT effektus vizsgálatánál a különböző számítások könnyítése érdekében elhanyagoljuk az erős kölcsönhatást, amely tapasztalatok szerint pionok esetén megtehető, de már protonok esetén nem [41]. Továbbá csak a párok közti Coulomb-kölcsönhatást vesszük figyelembe, elhanyagolva többi hadron által okozott töltésfelhőt. Így a 2.1.3 egyenlet a következő, egyszerűbb alakra egyszerűsödik:

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n, t)}{\partial t} = \left[- \sum_{i=1}^n \frac{\hbar^2}{2m_i} \Delta_i + \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} V_C(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) \right] \Psi(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n, t) \quad (2.1.4)$$

Mivel energia saját állapotokkal dolgozunk, ezért a 2.1.4 egyenletet megoldó hullámfüggvény felírható:

$$\Psi_{p_1, p_2, \dots, p_n}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n, t) = \Psi_{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_n}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n) \prod_{i=1}^n e^{-\frac{i}{\hbar} c p_i^0 t}, \quad (2.1.5)$$

ahol $\Psi_{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_n}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n)$ az időfüggetlen Schrödinger-egyenlet megoldása:

$$\left[- \sum_{i=1}^n \frac{\hbar^2}{2m_i} \Delta_i + \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} V_C(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) - c \sum_{i=1}^n p_i^0 \right] \Psi_{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_n}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n) = 0 \quad (2.1.6)$$

Továbbá könnyedén belátható, hogy a 2.1.2 egyenletben szereplő hullámfüggvény abszolút értéke szimmetrizációt elvégezve a következő lesz (nemrelativisztikus közelítésben mondhatjuk, hogy $\mathbf{x}_i = (t, \mathbf{x}_i)$) :

$$|\Psi_{p_1, p_2, \dots, p_n}(x_1, x_2, \dots, x_n)| = \frac{1}{\sqrt{n}} \left| \sum_{(\alpha)} \Psi_{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_n}(\mathbf{x}_{\alpha_1}, \mathbf{x}_{\alpha_2}, \dots, \mathbf{x}_{\alpha_n}) \right| \quad (2.1.7)$$

ahol $\sum_{(\alpha)}$ az $(1, 2, \dots, n)$ összes permutációjára való összegzés.

2.2. Két nem kölcsönható részecske korrelációs függvénye

Két azonos részecske esetén, nem kölcsönható esetben a 2.1.4 egyenlet könnyedén megoldható, megoldásai a jól ismert síkhullámok. A kétrészecske invariáns impulzuseloszlásban szereplő hullámfüggvény szimmetrizáció elvégzése után a következő lesz:

$$\Psi_{p_1 p_2(x_1, x_2)} = \frac{1}{\sqrt{2}} (e^{ip_1 x_1 + ip_2 x_2} + e^{ip_2 x_1 + ip_1 x_2}) \quad (2.2.1)$$

Tömegközépponti koordináta rendszerben, azaz a következő változókra való áttérés után (ezen transzformáció esetén az integrálási mérték nem változik, hiszen $d^4 x_1 d^4 x_2 = d^4 R d^4 r$):

$$K = \frac{p_1 + p_2}{2}, \quad k = \frac{p_1 - p_2}{2}, \quad r = x_1 - x_2, \quad R = \frac{x_1 + x_2}{2} \quad (2.2.2)$$

a hullámfüggvény abszolút értéke a következő alakra egyszerűsödik:

$$|\Psi_{p_1 p_2}(r, R)| = \frac{1}{\sqrt{2}} \left| e^{i2KR} (e^{ikr} + e^{-ikr}) \right| = \sqrt{2} |\cos 2kr| \quad (2.2.3)$$

Ebből következőleg a kétrészecske invariáns momentumeloszlásra a következő alak adódik):

$$N_2(p_1, p_2) = \tilde{\mathcal{S}}(0, p_1) \tilde{\mathcal{S}}(0, p_2) + \frac{1}{2} (\tilde{\mathcal{S}}(2k, p_1) \tilde{\mathcal{S}}^*(2k, p_2) + \tilde{\mathcal{S}}^*(2k, p_1) \tilde{\mathcal{S}}(2k, p_2)), \quad (2.2.4)$$

ahol $\tilde{\mathcal{S}}$ a forrásfüggvény Fourier-transzformáltja:

$$\tilde{\mathcal{S}}(q, k) = \int d^4 x \mathcal{S}(x, k) e^{iqx} \quad (2.2.5)$$

Az egyrészecske invariáns momentumeloszlásra pedig $N_1(p) = \tilde{\mathcal{S}}(0, p)$ adódik. Ezekből a 2.1.1 definíciót használva a kétrészecske korrelációs függvényre kapjuk a következő alakot:

$$C_2(p_1, p_2) = 1 + \frac{\tilde{\mathcal{S}}(2k, p_1)\tilde{\mathcal{S}}^*(2k, p_2) + \tilde{\mathcal{S}}^*(2\mathbf{k}, p_1)\tilde{\mathcal{S}}(2\mathbf{k}, p_2)}{2\tilde{\mathcal{S}}(0, p_1)\tilde{\mathcal{S}}(0, p_2)} \quad (2.2.6)$$

Szokás alkalmazni a $p_1 \approx p_2 \approx K = p_1 + p_2$ közelítést ($q \ll K$), amelyet az indokol, hogy a forrás Fourier-transzformáltjának az egyes részecskék momentumától való függése sokkal simább mint a relatív momentumtól való függése [35]. A kétrészecske korrelációs függvény ekkor:

$$C_2(k, K) = 1 + \frac{|\tilde{\mathcal{S}}(k, K)|^2}{|\tilde{\mathcal{S}}(0, K)|^2} \quad (2.2.7)$$

Ez az alak azt a fontos üzenetet hordozza, hogy a kétrészecske korrelációs függvény meghatározásával megkapjuk a forrásfüggvény Fourier-transzformáltját. Tehát a korrelációs függvény mérésével a forrás függvényt meg tudjuk határozni.

A korrelációs függvény a k, K négyes impulzusok helyett hármas momentumokkal is kifejezhető, ugyanis a két négyesmomentum szorzata definíció és az egyes részecskék tömeghéj feltétele ($p_{i\mu}p_i^\mu = 0$) alapján eltűnik, azaz:

$$0 = kK = k_0K_0 - \mathbf{k}\mathbf{K} \Rightarrow k_0 = \frac{\mathbf{k}\mathbf{K}}{K_0} \quad (2.2.8)$$

A $p_1 \approx p_2 \approx K$ feltevés alapján a K körülbelül tömeghéjban van, azaz $K_0 = \sqrt{m^2 - \mathbf{K}^2}$, így a korrelációs függvény a k, K négyes-momentumok helyett a \mathbf{k}, \mathbf{K} hármas-momentumok függvényeként is tekinthető. Ezen közelítés jogosságát [45, 25] cikkek részletesen tárgyalják.

2.3. Forrás függvény

A 2.1.2 egyenletben szereplő $\mathcal{S}(p, x)$ függvényt nevezzük forrásfüggvénynek, amely megadja annak a valószínűségét, hogy x helyen keletkezik egy p impulzusú részecske. Az általunk vizsgált energiákon, az ütközés során kvark-gluon plazma keletkezik, amely robbanásszerűen tágul, melynek következtében csökken a hőmérséklete. Ha lokálisan a QGP elér egy bizonyos hőmérsékletet, akkor fázisátmenet történik, kifagynak a kvark szabadsági fokok és hadronok keletkeznek. A forrásfüggényt épp ezen fázisátmenet határozza meg.

A fázisátmenetet pillanatszerűnek tekinthetjük, mivel ha feltesszük, hogy ez nem teljesül, akkor mondhatjuk, hogy a forrásfüggvény felírható szorzat alakban: $\mathcal{S}(x) = \mathcal{S}_T(\tau)\mathcal{S}(\mathbf{x})$. Az időfüggő részre feltehető továbbá ([23]):

$$\mathcal{S}_T(\tau) = \frac{1}{(2\pi\Delta\tau)^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{(\tau-\tau_0)^2}{2\Delta\tau^2}} \quad (2.3.1)$$

A térszerű részre szintén Gauss jellegű eloszlást használva, a kétrészecske korrelációs függvényre a következő alak adódik ([23]):

$$C_2(k) = 1 + \lambda e^{-k_0\Delta\tau^2 - k_{\text{long}}R_{\text{long}}^2 - k_{\text{side}}R_{\text{side}}^2 - k_{\text{out}}R_{\text{out}}^2}, \quad (2.3.2)$$

ahol az $R_{\text{long}}, R_{\text{side}}, R_{\text{out}}$ az úgynevezett HBT sugarak. Továbbá adódik a HBT sugarak közti következő összefüggés ([23]):

$$R_{\text{out}}^2 - R_{\text{side}}^2 \propto \Delta\tau^2 \quad (2.3.3)$$

Kísérleti tapasztalat továbbá, hogy $R_{\text{out}} \approx R_{\text{side}}$, ebből következőleg a $\Delta\tau \approx 0$, tehát, a forrásfüggvény időfüggő része egy τ_0 -ra koncentrált Dirac-delta, azaz a fázisátmenet pillanatszerűen történik [42, 25, 22].

A forrásfüggvény alakjára elsődlegesen Gauss eloszlást alkalmaztak [26, 35], azonban a PHE-NIX kísérletben $\sqrt{s_{NN}} = 200$ GeV tömegközépponti energiájú arany-arany ütközések során bizonyítékot találtak nem gaussi, lassan lecsengő struktúrára [8]. Egy magyarázat a lassan lecsengő viselkedésre lehet a Lévy-repülés [21]. A kvark-glon plazmából már kifagyott hadronok gáza tágul, így a rendszer egyre hidegebb, ritkább lesz, a hatáskeresztmetszetek egyre kisebbé válnak, megnövelve az átlagos szabad úthosszat. Ennek következtében egyre hosszabb lépések is megjelennek a hadronok véletlen bolyongás során, így az eltávolodás eloszlása lassan lecsengő eloszlás lesz, melynek szórása már nem létezik. Ezen véletlen bolyongó hadronok aztán elbomolhatnak a vizsgált részecskékre, ezért járuléket adnak a forrásfüggvénybe. A hadronok eltávolodása (QGP-ből való kifagyás helyétől), a centrális határeloszlás tétele alapján Lévy-eloszláshoz tart, hiszen az összeadott lépések lassan lecsengő eloszlással rendelkező valósínűségi változóknak tekinthetők.

2.3.1. Lévy-eloszlás

A forrásfüggvény alakjára munkám során három dimenziós Lévy-eloszlást használtam. A Lévy-eloszlás három dimenzióban a következő karakterisztikus függvény segítségével adható meg:

$$\Phi(\mathbf{q}, \alpha, R) = e^{-|\mathbf{q}R|^\alpha} \quad (2.3.4)$$

A karakterisztikus függvény Fourier-transzformáltját kiszámolva (az integrálás csak numerikusan végezhető el) megkapható a Lévy-eloszlás:

$$\mathcal{L}(\mathbf{r}, \alpha, R) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3 q \Phi(\mathbf{q}, \alpha, R) e^{i\mathbf{qr}} = \frac{1}{(2\pi)^3} \int e^{i\mathbf{qr}} e^{-|\mathbf{q}R|^\alpha}, \quad (2.3.5)$$

ahol $0 < \alpha \leq 2$ és $0 < R$ a Lévy-eloszlás paraméterei. Speciálisan, $\alpha = 2$ esetén a Lévy-eloszlás a normális eloszlás lesz:

$$\mathcal{N}(\mathbf{r}, \sigma) = \mathcal{L}\left(\mathbf{r}, \frac{\sigma}{\sqrt{2}}\right) = \mathcal{L}\left(\mathbf{r}, 2^{-\frac{1}{\alpha}}\sigma\right) \quad (2.3.6)$$

Mivel Lévy-eloszlást használunk a forrás modellezésére, ezért a Lévy-paraméterek a forrásról hordoznak információt, és magára a forrásra jellemzőek. Egy α, R paraméterű forrás esetén, a forrásfüggvényre a következő alakot használjuk:

$$\mathcal{S}(p, x; \alpha, R) = \mathcal{L}\left(\mathbf{x}, \alpha, 2^{-\frac{1}{\alpha}}R\right) \quad (2.3.7)$$

A Lévy-eloszlás skálaparamétertől való függésére (R paraméter) teljesül a következő összefüggés:

$$\mathcal{L}(\mathbf{r}, \alpha, R) = \mathcal{L}\left(\frac{\mathbf{r}}{R}, \alpha, 1\right) R^{-3} \equiv \mathcal{L}\left(\frac{\mathbf{r}}{R}, \alpha\right) R^{-3} \quad (2.3.8)$$

Továbbá az eloszlás nem függ az \mathbf{r} irányától, csak a nagyságától (belátható változócsere segítségével $\mathbf{q}' = \mathbf{A}\mathbf{q}$: $|\mathbf{q}| = |\mathbf{q}'|$, $\mathbf{q}\mathbf{r} = |\mathbf{q}||\mathbf{r}|$, ekkor $d^3q = d^3q'$):

$$\mathcal{L}(\mathbf{r}, \alpha, R) = \mathcal{L}(|\mathbf{r}|, \alpha, R) \quad (2.3.9)$$

Az egydimenziós Lévy-eloszlás aszimptotikus viselkedéséről [15] kiindulva könnyedén meghatározható a háromdimenziós eloszlás viselkedése is. Nagy r paraméter esetén, a Lévy-eloszlás a következő sor segítségével kapható meg ($r >> 1$):

$$\mathcal{L}(r, \alpha) \approx \frac{\alpha}{2\pi^2} \sum_{k=1}^N (-1)^{k+1} \frac{\Gamma(\alpha k)}{\Gamma(k)} \sin\left(\frac{\pi\alpha k}{2}\right) \frac{\alpha k + 1}{r^{\alpha k + 3}}, \quad (2.3.10)$$

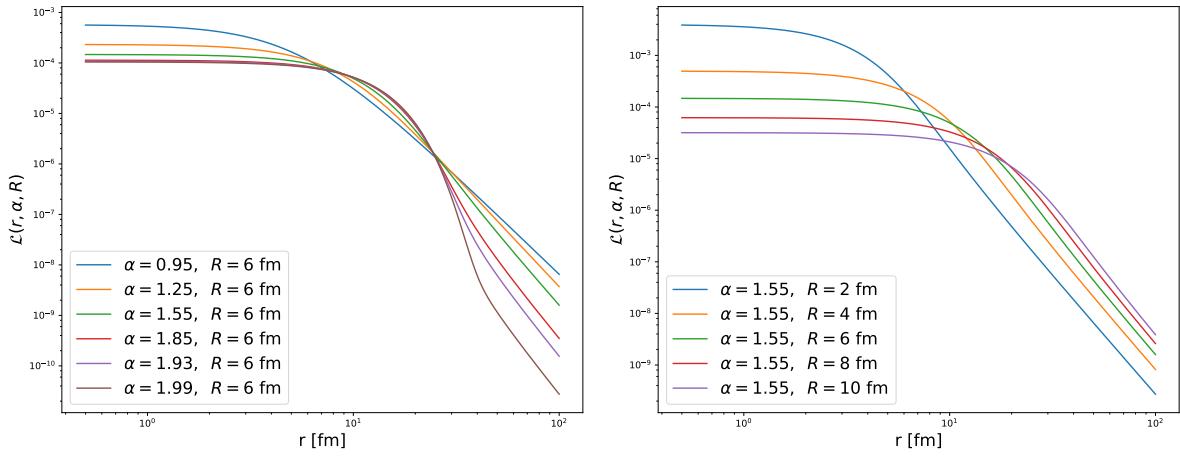
ahol $\Gamma(x)$ a Gamma függvény:

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty x^{z-1} e^{-x} dx \quad (2.3.11)$$

A kis r viselkedés hasonló módon egy sor segítségével kapható ($r << 1$):

$$\mathcal{L}(r, \alpha) \approx -\frac{1}{2\pi^2\alpha} \sum_{k=0}^n \frac{\Gamma(\frac{k+3}{\alpha})}{\Gamma(k+3)} \sin\left(\frac{\pi(k+3)}{2}\right) (k+2)(k+1)x^k \quad (2.3.12)$$

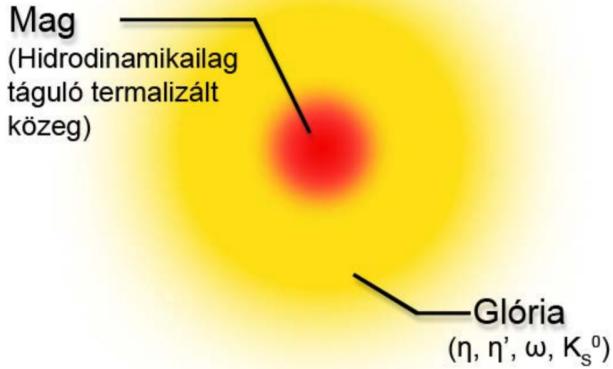
A Lévy-eloszlás meghatározása során kis és nagy értékekre ezen aszimptotikus sorokat alkalmaztam. A köztes tartományban pedig 15 pontú adaptív Gauss Kronrod integrálási módszert használva számoltam ki az eloszlást definiáló integrált (részletek a 3.3 fejezetben), amelyet GPU-ra párhuzamosítva CUDA-ban (részletek a 3.5.1 fejezetben), továbbá klasztere párhuzamosítva MapReduce programozási modellben implementáltam (részletek a 3.5.2 fejezetben). Az integrálást sok paraméterre elvégeztem (felbontást úgy állítottam be, hogy két pont között lineáris interpoláció hibája a megengedett hiba alatt legyen), az eredményekből egy Lévy táblázatot készítettem, amelyhez egy könnyen használható olvasó interfész tartozik. Néhány α és R paraméter esetén az eloszlást a 2.1 ábrák szemléltetik.



2.1. ábra. Háromdimenziós Lévy-eloszlás sugárfüggése különböző α és R paraméterek esetén.

2.4. A mag-glória modell

A HBT effektus vizsgálata során nehéz ionokat ütközöttünk nagy energián. Az ütközés során létrejövő kvark-gluon plazma robbanásszerűen tágul (ezen tágulás leírására hidrodinamika alkalmazható), elérve egy kritikus hőmérsékletet fázisátmenet történik, melynek során hadronok fagynak ki pillanatszerűen. A hadronok közül munkámban a töltött pionok közti korrelációt vizsgáltam, mivel ezen részecskékből keletkezik a legtöbb az ütközések során. A kirepülő pionokat az ütközési centrum köré épített detektorrendszerrel detektáljuk. Azonban pionok nem csak a forró kvarkanyag kifagyása során keletkeznek, hanem később, instabil részecskék (pl. η, η', ω) bomlássából is [18]. Ezen jelenség leírására szolgál a mag-glória (core-halo) modell [28, 25], melynek szemléltetése a 2.2 ábrán látható. A mag mérete 10 femtométer alatti, míg a glória mérete több száz, vagy akár több ezer femtométer is lehet, mivel egyes hosszú élettartamú instabil részecskék ilyen távolságokra jutnak el mielőtt elbomlanának pionokra.



2.2. ábra. Mag-glória modell szemléltetése. Forrás [32]

Mivel a 2.2.7 összefüggés alapján a korrelációs függvény a forrás Fourier-transzformáltjával áll kapcsolatban, továbbá a glóriában a pionok nagy x távolságokon keletkeznek, ezért a glória kis relatív impulzusú tartományban ad járuléket a korrelációs függvényhez. Ugyanakkor a detektor impulzusfelbontása véges, ezért az egymáshoz nagyon közeli impulzussal rendelkező részecskék nem megkülönböztethetők, azaz bizonyos relatív impulzus alatti tartományban (felbonthatatlan régió) nem tudjuk megmérni a korrelációs függvényt. Ezt az effektust szemlélteti a 2.3 ábra.

A mag-glória modellben feltételezünk egy magot valamint egy glóriát leíró forrásfüggvény létezetét. A teljes rendszert leíró forrásfüggvény pedig ezen kettő összege:

$$\mathcal{S}(x, p) = \mathcal{S}_M(x, p) + \mathcal{S}_G(x, p) \implies \tilde{\mathcal{S}}(k, K) = \tilde{\mathcal{S}}_M(k, K) + \tilde{\mathcal{S}}_G(k, k) \quad (2.4.1)$$

Mivel a Fourier-transzformált a nulla helyen megegyezik a függvény integráljával, továbbá a forrásfüggvény integrálja a keletkezett részecskék számát adja meg, ezért ha a magban keletkező részecskék száma N_M , a glóriában N_G , akkor:

$$\tilde{\mathcal{S}}_M(0, K) = N_M, \quad \tilde{\mathcal{S}}_G(0, K) = N_G, \quad \tilde{\mathcal{S}}(0, K) = N_M + N_G \quad (2.4.2)$$

A nagy (legalább 50 fm) szélességű \mathcal{S}_G keskeny $\tilde{\mathcal{S}}_G$ Fourier-transzformáltat eredményez, melynek szélessége maximálisan 4 MeV. Ez a maximális szélesség a detektor véges felbontóképességből adódó felbonthatatlan régióba esik tipikusan, ezért mondható, hogy: $\tilde{\mathcal{S}}_G \approx 0$, azaz $\tilde{\mathcal{S}} = \tilde{\mathcal{S}}_M$. Ebből a kétrészecske korrelációs függvényre adódik:

$$C_2(k, K) = 1 + \frac{|\tilde{\mathcal{S}}(k, K)|^2}{|\tilde{\mathcal{S}}(0, K)|^2} = 1 + \frac{|\tilde{\mathcal{S}}_M(k, K)|^2}{(N_M + N_G)^2} = 1 + \lambda_2 \frac{|\tilde{\mathcal{S}}_M(k, K)|^2}{|\tilde{\mathcal{S}}_M(0, K)|^2}, \quad (2.4.3)$$

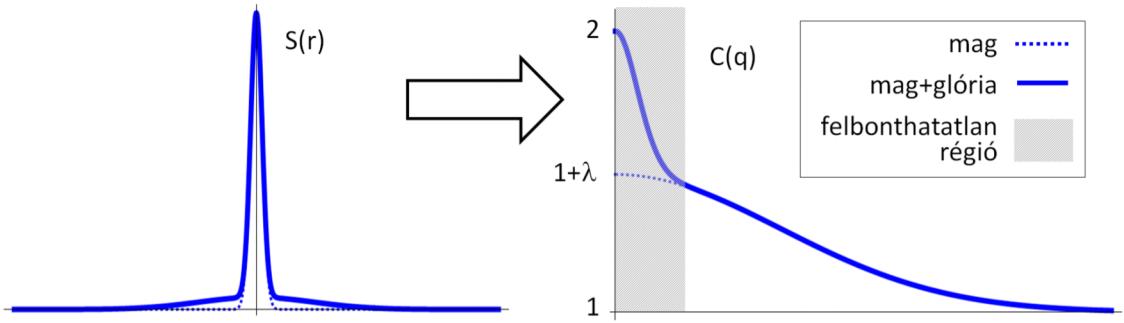
ahol bevezettem a:

$$\lambda_2 = \frac{N_M^2}{(N_M + N_G)^2} \equiv f_C^2 \quad (2.4.4)$$

jelölést. Az összefüggésben bevezettem egy új mennyiséget, a magarányt, amely megmondja, hogy az összes észlelt részecske, hányad része származik a magból:

$$f_C = \frac{N_M}{N_M + N_G} \quad (2.4.5)$$

Tehát amíg a 2.2.7 egyenletben a $k \rightarrow 0$ esetben a korrelációs függvény $C_2(k, K) \rightarrow 2$, addig mag-glória modellben, a 2 helyett a $1 + \lambda_2$ -höz tart.



2.3. ábra. Keskeny magból és széles glóriából álló forráshoz tartozó korrelációs függvény. A glória keskeny csúcsot eredményez a korrelációs függvényben, amely a detektor véges felbontásának következtében nem látható. Forrás: [23]

2.5. A korreláció erőssége

A mag-glória modellnél látunk, hogy a kétrészecske korrelációs függvény kis relatív impulzusokra tart a 2.4.4 egyenlet által definiált λ_2 paraméter által meghatározott $1 + \lambda_2$ értékhez. Ezt a paramétert szokás kétrészecske korrelációs erősségnek nevezni.

Ebből kiindulva általánosan definiálhatjuk az n részecske korrelációs erősséget:

$$\lambda_n = \lim_{k_1 \rightarrow 0} \dots \lim_{k_n \rightarrow 0} C_n(k_1, \dots, k_n) - 1 \quad (2.5.1)$$

Mag-glória modell esetén az n részecske korrelációs erősség kifejezhető a 2.4.5 összefüggéssel definiált magarány segítségével a következőképpen [24]:

$$\lambda_n = \sum_{j=1}^n \binom{n}{j} \alpha_j f_C^j \quad (2.5.2)$$

Az egyenletben szereplő α_j paraméter a következőképpen határozható meg:

$$\alpha_n = n! - 1 - \sum_{j=1}^{n-1} \binom{n}{j} \alpha_j, \quad (2.5.3)$$

első néhány értéke: $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 1$ $\alpha_3 = 2$.

2.6. Parciális koherencia

Az eddigiekben feltettük, hogy a forrás teljesen kaotikus, a kifagyott pionok fázisa teljesen véletlenszerű. Azonban előfordulhat, hogy a kifagyott részecskepárok fáziskülönbsége részben állandó, azaz a forrás részben koherens módon kelt részecskéket. Ezt az effektust nevezik parciális koherenciának [27, 25, 24]. Ekkor a momentum eloszlást másképp kell számolni, hiszen a 2.1.2 összefüggésben már kihasználtuk, hogy a részecskék fázisa véletlenszerű, melynek következtében a fázisok átlagolás során eltűnnék.

Az effektust mag-glória modellnél látottakhoz hasonló módon történő figyelembenétele érdekében bevezetjük a koherencia arányát, amely megadja, hogy a magból származó részecskék hiányad része keletkezett koherens módon:

$$p_C = \frac{N_M^C}{N_M^C + N_M^I}, \quad (2.6.1)$$

ahol N_M^C a magban keletkezett koherens részecskék száma, míg N_M^I az inkoherens módon keletkezett részecskék száma.

Mag-glória modellnél láttuk, hogy amennyiben a részecskék nem csak közvetlenül a forró kvarkanyagból származnak, akkor az n részecske korrelációs erősségek függeni fognak a 2.4.5 egyenlet által definiált magaránytól a 2.5.2 egyenlet által meghatározott módon. Ehhez hasonlóan, azt mondhatjuk, hogy amennyiben részecskekeletkezés során van parciális koherencia, akkor az n részecske korrelációs erősség függeni fog a magarány mellett a koherencia arányától a következő módon [27, 24]:

$$\lambda_n(f_C, p_C) = \sum_{j=2}^n \binom{n}{j} \alpha_j f_C^j [(1 - p_C)^j + j p_C (1 - p_C)^{j-1}], \quad (2.6.2)$$

ahol az α_j paramétert a 2.5.3 egyenlet határozza meg. Az egyenlet két- és háromrészecske esetén a következőkre egyszerűsödik:

$$\lambda_2 = f_C^2 [(1 - p_C)^2 + 2 p_C (1 - p_C)] \quad (2.6.3)$$

$$\lambda_3 = 2 f_C^3 [(1 - p_C)^3 + 3 p_C (1 - p_C)^2] + 3 f_C^2 [(1 - p_C)^2 + 2 p_C (1 - p_C)] \quad (2.6.4)$$

Ezen két egyenlet mutatja, hogy két- és háromrészecske korrelációk vizsgálatából amennyiben meghatározzuk a korrelációs erősségeket, meghatározható az f_C és p_C paraméter, azaz a magból származó részecskék aránya, illetve a magban koherens módon keletkezett részecskék aránya.

Koherencia létenek vizsgálata érdekében vezessük be a következő paramétert:

$$\kappa_3 = \frac{\lambda_3 - 3\lambda_2}{2\sqrt{\lambda_2^3}} \quad (2.6.5)$$

Ez a paraméter nem függ az f_C értékétől, mag-glória modell esetén koherencia hiányában konstans $\kappa_3 = 1$ lesz. Amennyiben van parciális koherencia, ezen paraméter nem lesz konstans, függeni fog a p_C paramétertől. Tehát ez egy jó paraméter a koherencia létenek vizsgálatára.

3. Coulomb-korrekció számítása

A Bose-Einstein analízis során kizárálag a Bose-Einstein statisztika következményeként megjelenő korrelációk vizsgálata a cél. Az analízis során töltött pionok közti korrelációt vizsgáltam,

mivel pionokból keletkezik a legtöbb. A részecskek elektromos töltésének következtében fellép a Coulomb-kölcsönhatás, amely jelentősen torzítja a korrelációs függvényt. Az effektus kiküszöbölése érdekében definiálunk egy Coulomb-korrekciónak faktort, amellyel a mért korrelációs függvényt (ezt nevezzük nyers korrelációs függvénynek) megszorozva megkapjuk a tiszta, csak Bose-Einstein statisztikából származó korrelációs függvényt.

A Coulomb-korrekciónak faktor definíciója n részecske esetén a következő [14]:

$$K(\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n) = \frac{\int \prod_{i=1}^n \mathcal{S}(\mathbf{p}_i, \mathbf{x}_i) |\Psi_{\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n}^0(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)| \prod_{i=1}^n d^3 \mathbf{x}_i}{\int \prod_{i=1}^n \mathcal{S}(\mathbf{p}_i, \mathbf{x}_i) |\Psi^C(\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n)(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)| \prod_{i=1}^n d^3 \mathbf{x}_i}, \quad (3.0.1)$$

ahol a Ψ^0 szabad hullámfüggvény, a Ψ^C pedig a Coulomb-hullámfüggvény.

3.1. A Coulomb-kölcsönhatás

3.1.1. A kétrészecske kölcsönhatás

A kétrészecske Coulomb-korrekciónak meghatározása érdekében meg kell oldanunk a kétrészecske Coulomb-problémát. Mivel azonos részecskékről beszélünk a már bevezetett tömegközépponti koordinárákra áttérve (2.2.2) a hullámfüggvény:

$$\Psi^C(\mathbf{r}, \mathbf{R}) = \Psi(\mathbf{r}) e^{i \mathbf{K} \cdot \mathbf{R}}, \quad (3.1.1)$$

alakot ölti, ahol a relatív momentumtól függő hullámfüggvényre a Schrödinger-egyenlet a következő lesz:

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2\mu} \Delta_{\mathbf{r}} + V_C(\mathbf{r}) + \frac{\hbar^2 \mathbf{k}^2}{2\mu} \right] \Psi(\mathbf{r}) = 0, \quad (3.1.2)$$

ahol $\mu = \frac{m}{2}$ a redukált tömeg, V_C pedig a Coulomb-potenciál ($V_C(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{|\mathbf{r}|}$).

Az egyenletet megoldva ([34]) valamint elvégezve a szimmetrizációt (részecskék felcserélésének szimmetriája: $\mathbf{r} \rightarrow -\mathbf{r}$) a következő alak adódik a hullámfüggvényre:

$$\Psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = \frac{\mathcal{N}}{\sqrt{2}} \left[e^{i \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} F(-i\eta, 1, i(kr - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})) + e^{-i \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} F(-i\eta, 1, i(kr + \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})) \right] \quad (3.1.3)$$

ahol \mathcal{N} normálási tényező, $\eta = \frac{\mu\alpha}{2k}$ ($\alpha \approx \frac{1}{137}$ finomszerkezeti állandó), és $F(a, b, z)$ az úgynévezett elfajult hipergeometrikus függvény, amelyet az alábbi sor definiál:

$$F(a, b, z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^{(k)}}{b^{(k)} n!} z^k, \quad (3.1.4)$$

itt $a^{(0)} = 1$, $a^{(k)} = a(a+1)\dots(a+k-1)$. Az így definiált $F(a, b, z)$ függvény kielégíti a

$$zF''(a, b, z) + (b-z)F'(a, b, z) - aF(a, b, z) = 0 \quad (3.1.5)$$

differenciálegyenletet ($' = \frac{d}{dz}$), melynek számunkra egy lényeges tulajdonsága:

$$F(a, b, z) = e^z F(b-a, b, -z) \quad (3.1.6)$$

Numerikusan a hipergeometrikus függvény kiszámolása a 3.1.4 definíció alapján történhet. Azonban $|z| >> 1$ esetén a felösszegzés nem végezhető el hatékonyan, mivel nagyon sokáig kell összegezni, hogy lássuk a konvergenciát (hogy a faktoriális legyőzze a hatványfüggvényt), és a faktoriális és hatványfüggvény következtében nagyon nagy számokkal kell dolgozni, amelyek ki-esnek a számítógép által általánosan használt 64-bites dupla pontos lebegőpontos számábrázolási tartományából. A soralak tipikusan $|z| < 30$ esetén alkalmazható. A probléma orvosolható, a hipergeometrikus függvény aszimptotikus sorának alkalmazásával, amely a következőképpen néz ki [29]:

$$F(a, b, z) = \frac{\Gamma(b)e^z z^{a-b}}{\Gamma(a)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1-a)^{(k)}(b-a)^{(k)}}{k!} z^{-k} + \frac{\Gamma(b)(-z)^{-a}}{\Gamma(b-a)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^{(k)}(a-b+1)^{(k)}}{k!} (-z)^{-k} \quad (3.1.7)$$

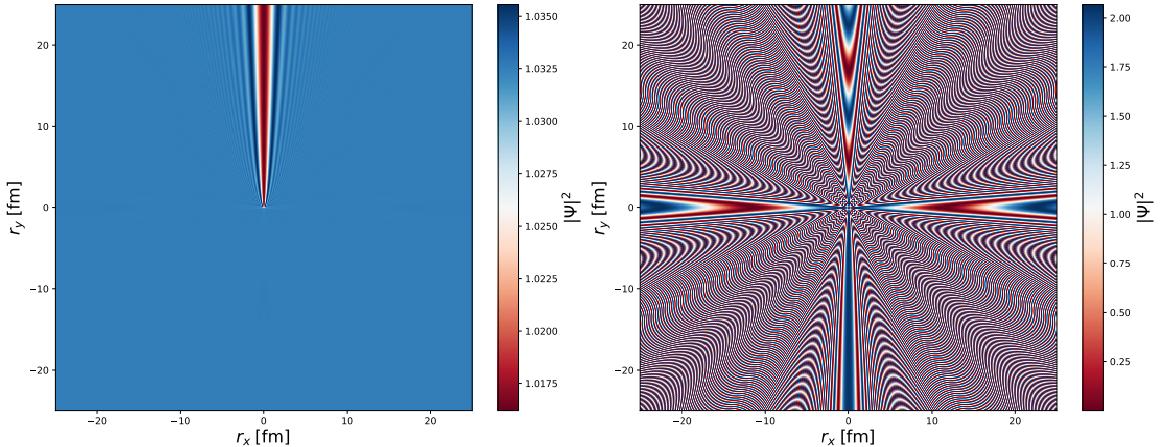
A hullámfüggvény egyre normáltságát megkövetelve az \mathcal{N} normálási tényezőre

$$\mathcal{N} = e^{-\frac{1}{2}\pi\eta} \Gamma(1+i\eta) \quad (3.1.8)$$

érték adódik. A gamma függvényre vonatkozó $\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}$, valamint $\Gamma(1+i\eta)^* = \Gamma(1-i\eta)$ azonosságok felhasználásával, a normálási tényező négyzetére kapjuk a következő összefüggést:

$$|\mathcal{N}|^2 = \frac{2\pi\eta}{e^{2\pi\eta} - 1}, \quad (3.1.9)$$

amely az úgynévezett Gamow-faktor.



3.1. ábra. A kétrészecske Coulomb-hullámfüggvény $r_z = 0$ metszete a $\mathbf{k} = (0, 50, 0)$ MeV momentum esetén. Baloldali ábra a szimmetrizáció nélküli, míg a jobboldali ábra a szimmetrizált hullámfüggvényt mutatja.

3.1.2. A háromrészecske kölcsönhatás

A háromrészecske Coulomb-korrekción meghatározásához a háromrészecske Coulomb-problémát kellene megoldani, azaz a következő Schrödinger-egyenletet [12]:

$$\left[H_0 + \sum_{i < j = 1}^3 V_{ij}^C(\mathbf{r}_{ij}) - \sum_{i=1}^3 \frac{\hbar^2 k_i^2}{2m_i} \right] \Psi_{\mathbf{k}_{12}, \mathbf{k}_{13}, \mathbf{k}_{23}}(\mathbf{r}_{12}, \mathbf{r}_{13}, \mathbf{r}_{23}) = 0, \quad (3.1.10)$$

azzal az egyszerűsítéssel, hogy azonos részecskékről lévén szó teljesül: $m_i = m$ és $V_{ij}^C(\mathbf{r}_{ij}) = V^C(\mathbf{r}_{ij}) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{|\mathbf{r}_{ij}|}$ (\mathbf{r}_{ij} , \mathbf{k}_{ij} a relatív változók). Azonban az egyenletnek csupán aszimptotikus egzakt megoldása van. Ezért Bose-Einstein korrelációk vizsgálata során a háromrészecske Coulomb-kölcsönhatást úgy vesszük figyelembe, mint három független kétrészecske kölcsönhatást, azaz a hullámfüggvényt a következőképpen állítjuk elő [12]:

$$\Psi_{\mathbf{k}_{12}, \mathbf{k}_{13}, \mathbf{k}_{23}}(\mathbf{r}_{12}, \mathbf{r}_{13}, \mathbf{r}_{23}) \sim \Psi_{\mathbf{k}_{12}}(\mathbf{r}_{12}) \Psi_{\mathbf{k}_{13}}(\mathbf{r}_{13}) \Psi_{\mathbf{k}_{23}}(\mathbf{r}_{23}), \quad (3.1.11)$$

ahol $\Psi_{\mathbf{k}_{12}}(\mathbf{r}_{12})$ a kétrészecske Coulomb-probléma megoldása. Tehát a következő Schrödinger-egyenletet elégíti ki:

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2\mu} \Delta_{\mathbf{r}_{ij}} + V^C(\mathbf{r}_{ij}) - \frac{\hbar^2 \mathbf{k}_{ij}^2}{2\mu} \right] \Psi_{\mathbf{k}_{ij}}(\mathbf{r}_{ij}) = 0, \quad (3.1.12)$$

ahol μ a redukált tömeg (pion tömeg fele), valamint a \mathbf{k}_{ij} az i, j részecskepár relatív momentumának a fele. Az egyenlet megoldása:

$$\Psi_{\mathbf{k}_{ij}}(\mathbf{r}_{kl}) = \mathcal{N}_{ij} e^{i\mathbf{k}_{ij}\mathbf{r}_{kl}} F(-i\eta_{ij}, 1, i(k_{ij}r_{kl} - \mathbf{k}_{ij}\mathbf{r}_{kl})), \quad \mathcal{N}_{ij} = e^{-\frac{\pi}{2}\eta_{ij}} \Gamma(1 + i\eta_{ij}), \quad (3.1.13)$$

ahol $\eta_{ij} = \frac{\mu\alpha}{2k_{ij}}$. Azonban annak érdekében, hogy ezt a megoldást használhassuk a háromrészecske hullámfüggvényben, a következő módosítást kell végrehajtani [12, 17, 36]:

$$\Psi_{\mathbf{k}_{ij}}(\mathbf{r}_{kl}) = \mathcal{N}_{ij} e^{i\frac{2}{3}\mathbf{k}_{ij}\mathbf{r}_{kl}} F(-i\eta_{ij}, 1, i(k_{ij}r_{kl} - \mathbf{k}_{ij}\mathbf{r}_{kl})) \quad (3.1.14)$$

A 3.1.14 egyenlet által megadott hullámfüggvényt a három relatív koordinátában véve és összeszorozva, valamint a szimmetrizációt elvégezve megkaphatjuk a háromrészecske Bose-Einstein korrelációk vizsgálatánál használt Coulomb-hullámfüggvényt:

$$\begin{aligned} \Psi_{\mathbf{k}_{12}, \mathbf{k}_{13}, \mathbf{k}_{23}}(\mathbf{r}_{12}, \mathbf{r}_{13}, \mathbf{r}_{23}) = & \frac{1}{\sqrt{6}} \left[\Psi_{\mathbf{k}_{12}}(\mathbf{r}_{12}) \Psi_{\mathbf{k}_{13}}(\mathbf{r}_{13}) \Psi_{\mathbf{k}_{23}}(\mathbf{r}_{23}) + \right. \\ & \Psi_{\mathbf{k}_{12}}(\mathbf{r}_{23}) \Psi_{\mathbf{k}_{13}}(\mathbf{r}_{12}) \Psi_{\mathbf{k}_{23}}(\mathbf{r}_{13}) + \\ & \Psi_{\mathbf{k}_{12}}(\mathbf{r}_{13}) \Psi_{\mathbf{k}_{13}}(\mathbf{r}_{23}) \Psi_{\mathbf{k}_{23}}(\mathbf{r}_{12}) + \\ & \Psi_{\mathbf{k}_{12}}(\mathbf{r}_{12}) \Psi_{\mathbf{k}_{13}}(\mathbf{r}_{23}) \Psi_{\mathbf{k}_{23}}(\mathbf{r}_{13}) + \\ & \Psi_{\mathbf{k}_{12}}(\mathbf{r}_{13}) \Psi_{\mathbf{k}_{13}}(\mathbf{r}_{12}) \Psi_{\mathbf{k}_{23}}(\mathbf{r}_{23}) + \\ & \left. \Psi_{\mathbf{k}_{12}}(\mathbf{r}_{23}) \Psi_{\mathbf{k}_{13}}(\mathbf{r}_{13}) \Psi_{\mathbf{k}_{23}}(\mathbf{r}_{12}) \right] \end{aligned} \quad (3.1.15)$$

3.2. A Coulomb-korrekción integrál

3.2.1. Az integrál kétrészecske esetén

A 3.0.1 egyenlet alapján a kétrészecske Coulomb-integrál a következő lesz:

$$K(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) = \frac{\iint \mathcal{S}(\mathbf{p}_1, \mathbf{r}_1) \mathcal{S}(\mathbf{p}_2, \mathbf{r}_2) |\Psi_{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2}^0(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)| d^3 \mathbf{r}_1 d^3 \mathbf{r}_2}{\iint \mathcal{S}(\mathbf{p}_1, \mathbf{r}_1) \mathcal{S}(\mathbf{p}_2, \mathbf{r}_2) |\Psi_{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2}^C(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)| d^3 \mathbf{r}_1 d^3 \mathbf{r}_2} \quad (3.2.1)$$

A kétrészecske Coulomb-probléma tárgyalásánál láttuk, hogy célszerű áttérni az $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$, $2\mathbf{R} = \mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2$, $2\mathbf{k} = \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2$ és $2\mathbf{K} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2$ változókra, ekkor ugyanis minden a szabad, minden a Coulomb-hullámfüggvény négyzete \mathbf{R} és \mathbf{K} független lesz:

$$|\Psi_{\mathbf{k}, \mathbf{K}}(\mathbf{r}, \mathbf{R})|^2 = |e^{i\mathbf{K}\mathbf{R}} \Psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r})|^2 = |\Psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r})|^2, \quad (3.2.2)$$

így \mathbf{R} függés csak a forrásfüggvényben marad. Ez azt jelenti, hogy a 3.2.1 Coulomb-integrál a következő alakra egyszerűsödik:

$$K(\mathbf{k}, \mathbf{K}) = \frac{\int \mathcal{S}_2(\mathbf{r}, \mathbf{k}, \mathbf{K}) |\Psi_{\mathbf{k}}^0(\mathbf{r})| d^3 \mathbf{r}}{\int \mathcal{S}_2(\mathbf{r}, \mathbf{k}, \mathbf{K}) |\Psi_{\mathbf{k}}^C(\mathbf{r})| d^3 \mathbf{r}}, \quad (3.2.3)$$

ahol a bevezetett \mathcal{S}_2 a következőképpen számolható:

$$\mathcal{S}_2(\mathbf{r}, \mathbf{k}, \mathbf{K}) = \int \mathcal{S}(\mathbf{K} + \mathbf{k}, \mathbf{R} + \frac{1}{2}\mathbf{r}) \mathcal{S}(\mathbf{K} - \mathbf{k}, \mathbf{R} - \frac{1}{2}\mathbf{r}) d^3 \mathbf{R}. \quad (3.2.4)$$

Ez az integrál elvégezhető, amennyiben a forrást α , R_M paraméterekkel jellemzett Lévy-eloszlásnak tekintjük, a végeredmény a következő lesz:

$$\mathcal{S}(\mathbf{p}, \mathbf{r}) = \mathcal{L}(\mathbf{r}, \alpha, R_M) \implies \mathcal{S}_2(\mathbf{r}, \mathbf{k}, \mathbf{K}) = \mathcal{L}(\mathbf{r}, \alpha, 2^{\frac{1}{\alpha}} R_M) \quad (3.2.5)$$

3.2.2. Az integrál háromrészecske esetén

A 3.0.1 egyenlet alapján a háromrészecske Coulomb-integrál a következő lesz:

$$K(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3) = \frac{\iiint \mathcal{S}(\mathbf{p}_1, \mathbf{r}_1) \mathcal{S}(\mathbf{p}_2, \mathbf{r}_2) \mathcal{S}(\mathbf{p}_3, \mathbf{r}_3) |\Psi_{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3}^0(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3)| d^3 \mathbf{r}_1 d^3 \mathbf{r}_2 d^3 \mathbf{r}_3}{\iiint \mathcal{S}(\mathbf{p}_1, \mathbf{r}_1) \mathcal{S}(\mathbf{p}_2, \mathbf{r}_2) \mathcal{S}(\mathbf{p}_3, \mathbf{r}_3) |\Psi_{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3}^C(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3)| d^3 \mathbf{r}_1 d^3 \mathbf{r}_2 d^3 \mathbf{r}_3} \quad (3.2.6)$$

Kétrészecske esethez hasonlóan itt is bevezetjük a relatív koordinátákat, azaz a következő változókra tértünk rá:

$$\mathbf{r}_{ij} = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j, \quad \mathbf{R} = \frac{\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_3}{3}, \quad \mathbf{k}_{ij} = \frac{\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_j}{2}, \quad \mathbf{K} = \frac{\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_3}{3}, \quad (3.2.7)$$

továbbá teljesül $\mathbf{r}_{23} = \mathbf{r}_{13} - \mathbf{r}_{12}$ és $\mathbf{k}_{23} = \mathbf{k}_{13} - \mathbf{k}_{12}$ összefüggés, így az integrálási mérték: $d^3 \mathbf{r}_1 d^3 \mathbf{r}_2 d^3 \mathbf{r}_3 = d^3 \mathbf{R} d^3 \mathbf{r}_{12} d^3 \mathbf{r}_{13}$ lesz. A hullámfüggvények ebben az esetben is csak a relatív változóktól függnek, \mathbf{R} függése csak a forrásfüggvényeknek lesz, ezért a $d^3 \mathbf{R}$ integrálás ismét a forrásfüggvények szorzatára hat. Így a háromrészecske Coulomb-integrál a következő alakú lesz:

$$K(\mathbf{k}_{12}, \mathbf{k}_{13}, \mathbf{K}) = \frac{\iint \mathcal{S}_3(\mathbf{r}_{12}, \mathbf{r}_{13}, \mathbf{k}_{12}, \mathbf{k}_{13}, \mathbf{K}) \left| \Psi_{\mathbf{k}_{12}, \mathbf{k}_{13} \mathbf{k}_{23}}^0(\mathbf{r}_{12}, \mathbf{r}_{13}, \mathbf{r}_{23}) \right| d^3 \mathbf{r}_{12} d^3 \mathbf{r}_{13}}{\iint \mathcal{S}_3(\mathbf{r}_{12}, \mathbf{r}_{13}, \mathbf{k}_{12}, \mathbf{k}_{13}, \mathbf{K}) \left| \Psi_{\mathbf{k}_{12}, \mathbf{k}_{13} \mathbf{k}_{23}}^C(\mathbf{r}_{12}, \mathbf{r}_{13}, \mathbf{r}_{23}) \right| d^3 \mathbf{r}_{12} d^3 \mathbf{r}_{13}}, \quad (3.2.8)$$

ahol a bevezetett \mathcal{S}_3 a következőképpen néz ki (momentum függést nem írtam ki):

$$\mathcal{S}_3(\mathbf{r}_{12}, \mathbf{r}_{13}) = \int \mathcal{S}\left(\mathbf{R} + \frac{5}{3}\mathbf{r}_{12} + \frac{1}{3}\mathbf{r}_{13}\right) \mathcal{S}\left(\mathbf{R} + \frac{2}{3}\mathbf{r}_{12} + \frac{1}{3}\mathbf{r}_{13}\right) \mathcal{S}\left(\mathbf{R} - \frac{7}{3}\mathbf{r}_{12} - \frac{2}{3}\mathbf{r}_{13}\right) d^3 \mathbf{R} \quad (3.2.9)$$

A forrásfüggvényre α , R_M paraméterekkel rendelkező Lévy-eloszlást feltételezve, az összefüggésbe a 2.3.5 definíciót beírva, az \mathbf{R} -re vett integrál elvégezhető, eredményül egy Dirac-deltát kapunk, így egy további \mathbf{q} -ra vett integrál is elvégezhető, végül az \mathcal{S}_3 következő alakra egyszerűsödik:

$$\mathcal{S}_3(\mathbf{r}_{12}, \mathbf{r}_{13}) = \frac{1}{(2\pi)^6} \int e^{-|\mathbf{q}_1 R_M|^\alpha - |\mathbf{q}_2 R_M|^\alpha - |\mathbf{q}_1 R_M + \mathbf{q}_2 R_M|^\alpha} e^{-i\mathbf{q}_1(4\mathbf{r}_{12} + \mathbf{r}_{13})} e^{i\mathbf{q}_2(3\mathbf{r}_{12} + \mathbf{r}_{13})} d^3 \mathbf{q}_1 d^3 \mathbf{q}_2 \quad (3.2.10)$$

3.3. Gauss–Kronrod-integrálási módszer

A 2.3.5 integrál numerikus kiszámolásához Gauss–Kronrod-módszert használtam, mivel ezen módszer használatával érhető el nagyon pontos eredmény hatékonyan [15]. Az integrálás tartománya a teljes tér, amely a cél hiba megadásával végessé tehető a következőképpen: az integrálási tartományt folyamatosan növeljük, amíg hibán belül az érték nem konvergál.

Az n -ed rendű Gauss-kvadratúra $[-1, 1]$ tartományon (konvenció szerint ezen a tartományon van megadva a szabály) vett integrált n speciálisan választott pont lineáris kombinációjával becsli:

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx \sum_{i=1}^n w_i f(x_i), \quad (3.3.1)$$

ahol a w_i, x_i pontok úgy vannak megválasztva, hogy, $2n - 1$ vagy ennél alacsonyabb rendű polinomok esetén egzakt eredményt kapunk. A módszer jó közelítő eredményt fog adni minden olyan függvényre ami legfeljebb $2n - 1$ -ed rendű polinommal közelíthető. A formulában szereplő x_i pontok az n -ed rendű Legendre-polynom gyökei, azaz őket a $P_n(x_i) = 0$ egyenlet definiálja, a súlyokat pedig a következőképpen kell meghatározni ([44]):

$$w_i = \frac{2}{(1 - x_i)^2 (P'_n(x_i))^2} \quad (3.3.2)$$

Amennyiben az integrálandó függvény $f(x) = \omega(x)g(x)$ alakban áll elő, ahol $g(x)$ egy polinom, akkor új súlyokat vezethetünk be amelyeket az $\omega(x)$ határoz meg, így egy pontosabb közelítő formulát kapunk. Például ha $\omega(x) = \exp(-x^2)$, akkor a pontokat a Hermite-polynom gyökeinek választva és a súlyokat szintén a Hermite-polinomokból meghatározva kapunk pontos közelítő formulát $f(x) \exp(-x^2)$ alakú integrál meghatározására (az $f(x)$ itt is legfeljebb $2n - 1$ -ed rendű lehet).

A Gauss-Kronrod-módszer a Gauss-módszert egészíti ki, úgy, hogy az n -ed rendű Gauss-szabály pontjaihoz hozzáad, $n+1$ további pontot, így kapva egy $2n+1$ rendű pontosabb becslést. A módszer lényege, hogy a kevésbé pontos, alacsonyabb rendű módszer pontjait fel lehet használni, egy magasabb rendű módszernél. Az $n+1$ új pont a Stieltjes-polinomok ([29]) határozzák meg. Az alacsonyabb és magasabb rendű becslések közti különbség használható hibabecslésre, amely felhasználható adaptív lépéshossz meghatározásánál (én a munkám során ezt az utat követtem).

3.4. Markov-lánc Monte-Carlo-módszerek

A Coulomb-integrál számítására a Markov-lánc Monte-Carlo-módszert ([38]) használtam, mivel ezen módszer segítségével sokkal hatékonyabban tudjuk számolni a magas dimenziós integrálokat.

3.4.1. Monte-Carlo-módszer

A Monte-Carlo integrálási módszerek tipikusan a következő alakú D dimenziós integrálok esetén bukkannak fel:

$$I = \int_{\Omega} f(x)g(x)dx, \quad (3.4.1)$$

ahol Ω az integrálási tartomány, dx a D dimenziós integrálási mérték. Amennyiben $\int_{\Omega} g(x)dx = C$, vezessük be a következő függvényt: $p(x) = g(x)/C$. Ekkor triviális módon a keresett integrál:

$$I = C \int_{\Omega} f(x)p(x)dx \equiv C\langle f \rangle_p, \quad (3.4.2)$$

lesz, ahol $\langle \cdot \rangle_p$ a p eloszlással számolt várható értéket jelöli. A $p(x)$ valószínűségi eloszlás szerint válasszunk N pontot a terükből, ezen pontokat jelöljék $x_1, \dots, x_N \in \Omega$ változók. Ezen minta segítségével becsülhetjük a várható értéket:

$$\bar{I}_N = C \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(x_i) \equiv C\bar{f} \quad (3.4.3)$$

Mivel az x_i -k azonos eloszlású valószínűségi változók, az $f(x_i)$ is azonos eloszlású valószínűségi változó lesz, jelöljük ezt y_i -vel. Az új változóban az I/C az y várható értéke, az I_N/C pedig a várható érték becslése egy N elemű minta alapján. Amennyiben teljesül, hogy $\langle y^4 \rangle < \infty$ (vagy $\langle |y| \rangle < \infty$), érvényes lesz a nagy számok erős törvénye, amely alapján a minta várható érték majdnem biztosan tart a várható értékhez:

$$\mathcal{P}\left(\lim_{N \rightarrow \infty} \bar{I}_N = I\right) = 1, \quad (3.4.4)$$

ahol \mathcal{P} jelöli a valószínűséget, azaz végtelen sok pontot véve 0 a valószínűsége, hogy az integrál becslése rossz. Azonban numerikus számolás során valamekkora véges N -et kell választanunk, és

fontos tudnunk, hogy a pontok számának a növelésével, hogy változik hiba. Ezen kapcsolat meghatározása érdekében az \bar{I}_N -et tekinthetjük valószínűségi változónak, amelynek van valamekkora $\sigma(\bar{I}_N)$ szórása, amely a következőképpen számolható:

$$\sigma^2(\bar{I}_N) = \frac{C^2}{N^2} \sum_{i=1}^N \sigma^2(f) = \frac{C^2 \sigma^2(f)}{N} \implies \sigma(\bar{I}_N) = \frac{C\sigma(f)}{\sqrt{N}}, \quad (3.4.5)$$

ahol a $\sigma(f)$ becsülhető a mintából a következő módon:

$$\sigma(f) = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (f(x_i) - \bar{f})^2 \quad (3.4.6)$$

Tehát a hiba a pontok számának a gyökével csökken.

Amennyiben $g(x) = 1$, egyenletes eloszlással mintavételezhettük és az integrál értéke $I = V\bar{f}$ lesz, ahol $V = \int_{\Omega} dx$.

3.4.2. Markov-láncok

A Monte-Carlo integrálás során lényeges lépés bizonyos eloszlással létrehozni egy mintát. Ennek a megvalósítása az úgynevezett diszkrét Markov-láncok ([37]) segítségével történhet.

3.1. Definíció. Az X_1, \dots, X_N (Ω értékű) valószínűségi változók sorozatát *Markov-láncnak* nevezzük, ha $\forall n$ és $\forall x_1, \dots, x_{n+1} \in \Omega$ esetén teljesül az úgynevezett *Markov-tulajdonság*:

$$\mathcal{P}(X_{n+1} = x_{n+1} | X_n = x_n, \dots, X_1 = x_1) = \mathcal{P}(X_{n+1} = x_{n+1} | X_n = x_n) \quad (3.4.7)$$

Tehát egy Markov-lánc egy olyan sztochasztikus folyamat, amelynek nincs memóriája, azaz egy adott időpillanatbeli valószínűség csupán az 1 lépéssel előtti értéktől függ.

Markov-láncokra a nagy számok erős törvényéhez hasonló, de annál erősebb, tételt mondhatunk ki, amely lehetővé teszi az ilyen folyamatok alkalmazását a Monte-Carlo-módszereknél. A téTEL megfogalmazása előtt, definálni kell néhány fontos fogalmat a Markov-folyamatokra.

3.2. Definíció. Az X_1, \dots, X_N Markov-láncot homogénnek nevezünk, akkor ha $\forall i, \forall a, b \in \Omega : \mathcal{P}(X_{i+1} = a | X_i = b) = T_{ab}$. A T mátrixot sztochasztikus mátrixnak szokás nevezni, és b -ből az a állapotba való jutás valószínűségét adja meg ($\sum_{b \in \Omega} T_{ab} = 1$).

3.3. Definíció. Az X_1, \dots, X_N Markov-lánc irreducibilis, ha $\forall a, b \in \Omega : \exists i \geq 0$ úgy, hogy $\mathcal{P}(X_i = a | X_0 = b) > 0$ (bármely állapotból bármely állapotba el lehet jutni).

3.4. Definíció. Egy X_1, \dots, X_N Markov-láncban, $a \in \Omega$ elemnek, van periódusa, és ez $k(a)$, ha az elembe való visszatérés k többszörös lépésben történik. Azaz:

$$k(a) = \text{LNKO}\{i > 0 : \mathcal{P}(X_i = a | X_0 = a) > 0\}, \quad (3.4.8)$$

ahol LNKO a legnagyobb közös osztót jelenti.

3.5. Definíció. Egy X_1, \dots, X_N Markov-lánc aperiodikus, ha $\forall a \in \Omega: k(a) = 1$

3.6. Definíció. Egy Ω -n értelmezett p eloszlást stacionáriusnak nevezünk, ha

$$\sum_{a \in \Omega} p_a T_{ab} = p_b, \quad \forall b \in \Omega \quad (3.4.9)$$

A Markov-folyamatot stacionáriusnak nevezzük, ha $\exists p$.

Ezen definíciók felhasználásával már kimondható az Ergodicitás tétele Markov-folyamatokra, amelynek első része analóg a nagy számok erős törvényével (azonban erősebb annál, hiszen elég ha a függvény integrálja konvergens, nem kell abszolút konvergensnek lennie). A második része fontos állítást tesz a Markov-lánc kezdőpontjának megválasztásával kapcsolatban.

3.1. Tétel. Ergodicitás tétele. Legyen X_1, \dots egy irreducibilis, homogén Markov-lánc, melynek stacionárius eloszlása p , ekkor $\forall f : \Omega \rightarrow \Sigma$, $\|\langle f \rangle\| < \infty$

$$\mathcal{P}\left(\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(X_i) = \langle f \rangle_p\right) = 1 \quad (3.4.10)$$

Amennyiben a lánc még aperiodikus is, akkor $\forall a, b \in \Omega$ esetén teljesül:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{P}(X_n = a | X_0 = b) = p(a), \quad (3.4.11)$$

azaz nem számít a lánc kezdőpontja. A tétele feltételeit teljesítő folyamatokat szokás ergodikus Markov-láncnak nevezni.

3.4.3. Metropolis-Hastings-algoritmus

Az ergodicitás tétele alapján, ha tudunk konstruálni egy p stacionárius eloszlással rendelkező homogén, irreducibilis Markov-láncot, akkor a Markov-láncon számolt időátlag (nagy időkre) majdnem biztosan konvergál az $\langle f \rangle_p = \int_{\Omega} f p$ várható értékhez.

A Metropolis-Hastings egy olyan algoritmus, amely adott p eloszláshoz tud ergodikus Markov-láncot generálni [46]. Az algoritmus alkalmazása során először egy javaslófüggvényt kell megkonstruálni, ezt $Q(x_i|x)$ szokás jelölni, amely javaslatot add az x_i pontban levő Markov-lánc következő elemére (adott x_i esetén a lánc következő elemére a javasolt x értéket $Q(x_i|x)$ valószínűséggel választjuk). Ezután a javasolt értéket a 3.4.12 egyenlet által meghatározott valószínűsséggel elfogadjuk, vagy eldobjuk (ekkor a következő elem az aktuális elem lesz). Az algoritmus vázlata vázlata a következő:

Legyen $x_0 \in \Omega$;

amíg $i = 1, \dots, N$ ismetéld

Válasszunk x elemet $Q(x_{i-1}|x)$ eloszlás szerint;

Elfogadási valószínűség:

$$\alpha = \min \left\{ 1, \frac{Q(x_{i-1}|x)p(x)}{p(x_{i-1})Q(x|x_{i-1})} \right\} \quad (3.4.12)$$

Ha $Egyenletes(0, 1) < \alpha$ **akkor**

| $x_i = x$;

különben

| $x_i = x_{i-1}$

vége

vége

Kimenet: x_1, x_2, \dots, x_N minta (p eloszlást követ)

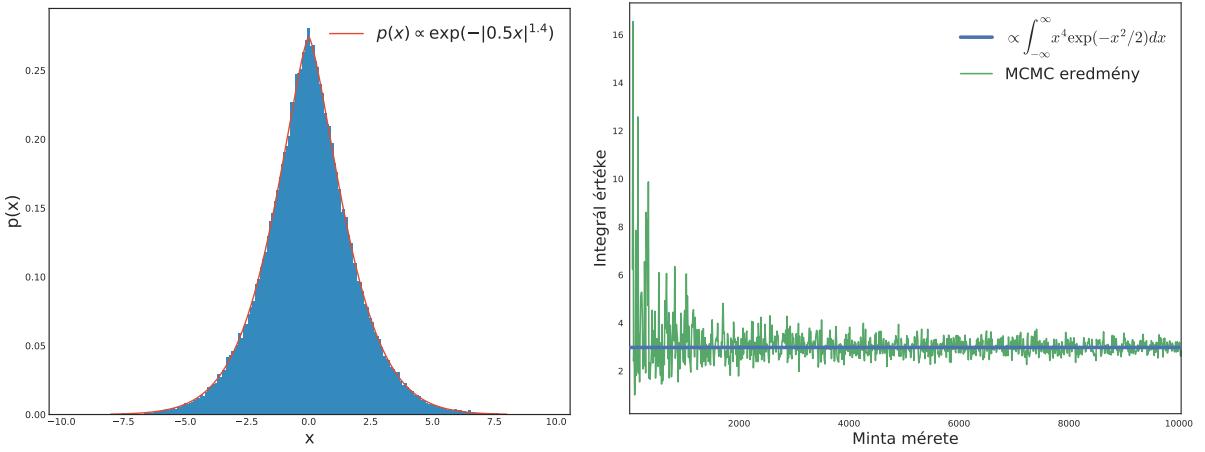
Algoritmus 1: A Metropolis-Hastings-algoritmus.

Amennyiben a javasló függvény szimmetrikus, az algoritmus egyszerűsödik és a 3.4.12 elfogadási valószínűségből kiesik a Q . Ezt az egyszerűbb algoritmust nevezik Metropolis-algoritmusnak. A munkám során én a következő szimmetrikus javaslófüggvényt választottam:

$$Q(x_i|x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-x_i)^2}{2\sigma^2}}, \quad (3.4.13)$$

tehát x_i pontban levő Markov-lánc következő elemére egy x_i körüli normális eloszlásból húztam javaslatot.

A 3.2 ábra szemlélteti a Metropolis-algoritmus alkalmazását. Először az algoritmus segítségével a Lévy-eloszlás karakteristikus függvénye szerint generáltam egy mintát ($\alpha = 1.4$, $R = 0.5$), az ábrán látható, hogy a kapott minta szépen követi a céleloszlást. A második ábra mutatja egy függvény esetén a Metropolis-algoritmus által generált minta segítségével számolt Monte-Carlo integrálás eredményét különböző mintaméret esetén. Az ábrán körülbelül látható, hogy a minta nagyságának a gyökével csökken a hibája az MCMC integrálásnak.



3.2. ábra. A baloldali ábra mutatja a $p(x) \propto e^{-|0.5x|^{1.4}}$ eloszlással Metropolis algoritmus által generált mintát és céleloszlást. A jobboldali ábra mutatja az Markov-lánc Monte Carlo integrál eredményét a minta nagyságának függvényébe.

3.5. A numerikus integrálás implementációja

A Coulomb-integrál számolását két lépésben végeztem: először kiszámoltam a 2.3.5 összefüggés által definiált Lévy-integrált sok különböző paraméter esetén, majd második lépésben ezen eredményt felhasználva számoltam a Coulomb-integrált.

A Lévy-integrál számolásához a 3.3 fejezetben bemutatott 15-öd rendű Gauss-Kronrod módszert használtam. Próbálkoztam Markov-lánc Monte-Carlo-módszerrel is számolni az integrált, de a Gauss-Kronrod-módszer sokkal hatékonyabbnak bizonyult. A 2.3.8 összefüggés alapján elegendő a számolást $R = 1$ esetén elvégzni, az eredményből aztán bármely másik R paraméter esetén meghatározható az integrál értéke. A 2.3.9 összefüggés alapján az integrál értéke csupán az \mathbf{r} vektor hosszától függ, az iránytól nem, ezért választhatjuk a $\mathbf{r} = (0, 0, r)$ vektort a számolás során, így az integrál a következő alakra egyszerűsödik:

$$\mathcal{L}(r, \alpha, R) = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty \frac{q \sin qr}{r} e^{-|qR|^\alpha} dq \quad (3.5.1)$$

Az integrálás során a lépésközt (azaz a dq -t) adaptívan határoztam meg, úgy, hogy a hibát a 7 pontú Gauss szabály és a 15 pontú pontosabb becslés különbségével közelítettem. Az integrálást mind CPU párhuzamos, mind GPU párhuzamos verzióban implementáltam. A saját implementáció mögötti motiváció abból az egyszerű tényből ered, hogy mivel nagyon sok pontban kell elvégezni a számolást (10^6 nagyságrendű paraméterszám), saját implementációval nagyon erősen ki tudom használni a sokmagos architektúrák nyújtotta előnyöket. Továbbá azért döntöttem a grafikus processzorra (GPU) való implementálás mellett is, mert a GPU sokkal nagyobb része van számításra tervezve mint a CPU-é (több tranzisztor vesz részt a számolásban), sokkal több maggal rendelkezik (tipikusan egy modern CPU 4-6, míg egy GPU akár több ezer maggal), ame-

lyek kihasználhatók a sok integrálás párhuzamos végzése során. Az általános tapasztalom, az, hogy a GPU bevonása a számolásba költséges, használata csupán a masszívan párhuzamosítható problémák esetén érdemes (konkrétan 128 darab integrál elvégzésig a laptopomban levő 4 magos Intel i7 processzor gyorsabb volt, mint az Nvidia Geforce 960m videokártyán történő számolás, azonban 128 fölött a GPU már győzelmet aratott).

A CPU párhuzamos változat implementálását C++ nyelven végeztem, a legújabb, 2014-es nyelvi standardot követve, amely tartalmazza a CPU-ra történő párhuzamosításhoz szükséges eszközöket. A GPU általános célú programozására több lehetőség van. Nvidia kártyák esetén a leghatékonyabb választás az Nvidia saját fejlesztésű CUDA platformja. De használható erre a célra a más gyártók eszközeit is támogató OpenCL is, viszont általában hosszú és átláthatatlan kódot eredményez. Azonban napjainkban a mesterséges intelligencia térhódításának köszönhetően, kiemelkedő szerephez jutottak a nagy teljesítményű, GPU-t kihasználni tudó könyvtárak. A legbiztosabb jövőt mutató könyvtár a SYCL, amelynek a szabványát a Khronos csoport definiálta, és ipari szintű implementációja jelenleg béta státuszban van. Ezen könyvtár egy modern C++ absztrakciós réteg az OpenCL-hez, így több gyártó eszközén használható a számítások gyorsításra, miközben az OpenCL hátrányait kiküszöbölte, elegáns kódot eredményez. Mivel én Nvidia GPU-val rendelkezek, ezért a GPU párhuzamosításra CUDA könyvtárat választottam. Következő alfejezetben ezen könyvtár működését mutatom be röviden.

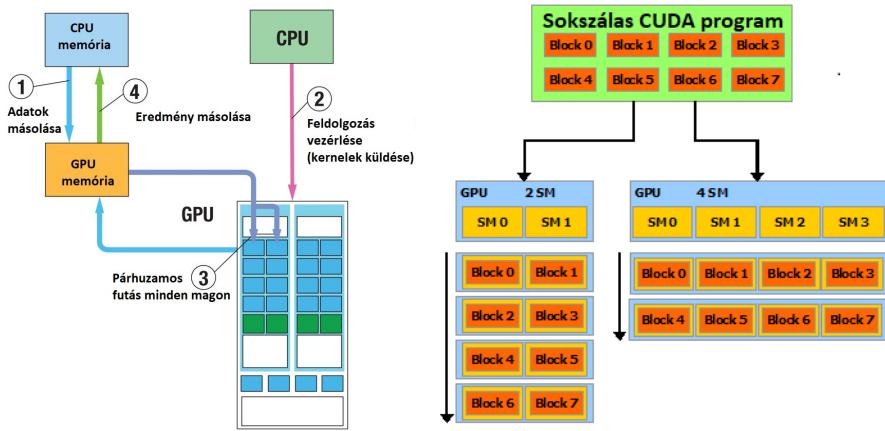
3.5.1. A CUDA architektúra

A GPU elsősorban grafikus alkalmazások számára van kifejlesztve. Ezen alkalmazások közös jellemzője, hogy nagyon nagy számítási igényűek és masszívan párhuzamosíthatók. A grafikus processzorokat ennek szellemében fejlesztik. Ennek eredményeként sokkal több tranzisztorot dedikálnak számoláshoz, mint a CPU-ban. Az Nvidia ismerte fel először, hogy hardverükben nagy lehetőségek rejlenek a számítás-intenzív, nem grafikus programok számára is, amelyek a tudományos világban folyton felbukkannak. Ezért alkották meg a CUDA platformot, amely egy olyan kiegészítést ad elsősorban C, C++ nyelvekhez, amely segítségével a grafikus processzor általános célú számításra használható.

CUDA felhasználásával hibrid kódot fejleszthetünk, melyet az Nvidia saját, nvcc névre keresztelt fordítójával tudunk lefordítani. Ezen kódokat azért szokás hibridnek nevezni, mert minden GPU minden CPU kódot egy helyen tartalmazzák. A GPU önmagában csak nagyon egyszerű feladatokat tud ellátni (pl. kiszámolni sok integrált), működését a CPU vezérli, ezért a CUDA kódban, a számítások végzésére úgynevezett kerneleket írunk (kb. egy függvény), standard C++ nyelven (STL könyvtár nem használható), amelyeket aztán a CPU-n futó kód tud indítani. A grafikus processzorok saját memóriával rendelkeznek, és a kernelek ezen tudnak operálni. Ez azt jelenti, hogy egy CUDA programban a következő szisztema szerint kell kódot fejleszteni (ezt szemlélteti a 3.3 baloldali ábrája):

- Előkészítjük az adatokat, melyeket a CPU-hoz tartozó memóriába tárolunk.
- Lefoglaljuk a GPU memóriájában a váltózóinknak a helyet a cudaMalloc függvény segítségével. A foglalás után a CPU-n futó programrész mutatókkal rendelkezik a lefoglalt helyekre.
- Az adatokat amelyek szükségesek a GPU-n végzett számításhoz, átmásoljuk a GPU memóriájában lefoglalt helyekre. A másolást a CPU végzi, a cudaMemcpy függvény hívásának következtében.
- A GPU-ra szánt függvényt (azaz kernelt) meghívjuk, hívás közben megadjuk hogy hány példányban szeretnénk elindítani párhuzamosan és átadjuk a GPU memóriájába lefoglalt helyekre mutató változókat. A kernelek indítása nagyon hasonló a megszokott függvényhíváshoz, csupán annyi az eltérés, hogy függvény neve után <<<...>>> alakban specifikálni kell az indítási információkat (hány példányba fusson párhuzamosan). A számolás eredményét a kernelek szintén a GPU memóriájába tudják írják.
- A számolás eredményét átmásoljuk a GPU memóriájából a CPU memóriájába.

A kernel indításánál <<< és >>> szimbólumok közé kell írni a kernel indításának leírását. A leíráshoz két paramétert kell megadni: blokkok száma és szálak száma blokkonként. Ez mutatja, hogy a CUDA programozási modellje, a párhuzamosan futó szálakat blokkokba csoportosítja. Az Nvidia kártyákban a magok szintén hardveresen blokkokba vannak csoportosítva, ezeket streaming multiprocessornak (SM) nevezik, és a magok mellett tartalmaznak vezérlő áramköröket. Egy blokk egy SM-en fog futni, tetszőleges sorrendben, azaz nem biztos hogy párhuzamosan, hiszen a blokkok száma nincs korlátozva. Amennyiben több blokkot adunk meg mint amennyi SM van a grafikus processzorunkban, akkor hardveresen meg van oldva, hogy ezek egymás után szét legyenek osztva, úgy, hogy minden teljesen kihasználva legyen az adott hardver. Ez gyakorlatilag azt jelenti, hogy a GPU-ra írt kód úgymond erősen skálázik. Tehát megírunk egy kódöt, aztán a grafikus processzor belsőleg úgy fogja szétosztani a számolást, hogy minden teljesen ki legyen használva a hardver. Ezt hivatott szemléltetni a 3.3 jobboldali ábra: 8 blokk egy 2 SM-el rendelkező hardver esetén 4-4 blokk csoportra lesz szétosztva, és ezeket egymás után a hardver küldi az SM-eknek, 4 SM-el rendelkező hardver esetén pedig 2-es csoportokba osztja a blokkokat. Ezen működés pedig a GPU architektúrájába van építve. A blokkok számával ellentétbe a szálak száma korlátozott, az újabb eszközök esetén maximálisan 1024 szál indítható blokkonként. minden blokkhoz és minden szálhoz tartozik egy egyedi azonosító, egy ID (akkárcsak egy ciklus esetén a futó index), ezen azonosítókat minden futó kernel ismeri, segítségükkel a memória adott területére hivatkozhatunk.



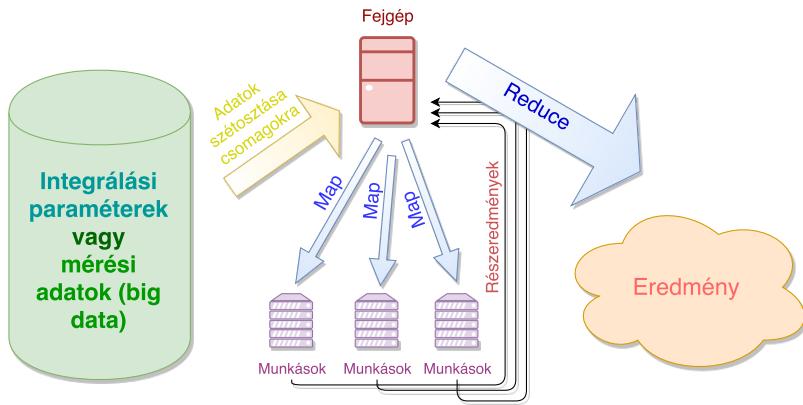
3.3. ábra. Baloldali kép: a CUDA program általános felépítését láthatjuk. Jobboldali kép: CUDA-ban írt programok skálázását mutatja be. (Forrás: internet)

3.5.2. MapReduce programozási modell

A MapReduce egy általánosan használt, egyszerű programozási modell, amelyet párhuzamos adatfeldolgozásra lehet használni. A modell két fő részből épül fel: map és reduce, amely két magasabbrendű függvény (azaz olyan függvények amelynek paraméteri lehetnek függvények). A map függvény mint a neve sugallja egy leképzést végez, alkalmazza az adatokra a kapott függvényt (érezhetően ez triviálisan párhuzamosítható). A reduce pedig a kapott adatokat a kapott függvény szerint összefűzi (összegzi). Ezen két roppantul hasznos függvénynek sok hasznos implementációja van. Például a map-nek python nyelven az ipyparallel könyvtárban található a klaszter-párhuzamos implementációja, amely a leképzést egy egész klaszteren végzi.

A Coulomb-integrálok számolásánál ezen modell szerint jártam el. Első lépésben fejlesztettem egy az integrálokat számoló C++ könyvtárat, amelyből egy python csomagot készítettem. Ezután az ipyparallel csomag felhasználásával python nyelven ezen csomagot a MapReduce modell keretében a Brookhaven Nemzeti Laboratórium egyik klaszterén szétosztva használtam. Azaz először az integrálási paramétereket csoportosítottam kis csomagokba, úgy, hogy annyi csomagot állítsak elő amennyi számítógép áll rendelkezésemre (tipikusan 200-300 gépet használtam), aztán a klaszter-párhuzamos map segítségével elvégeztem az integrálást (egy csomag esetén a leképzés: csomag minden elemére Coulomb-integrál kiszámolása). Végül a kapott eredményt reduce függvény segítségével összefűztem, így az előállt eredmény egyszerű struktúrával rendelkezett. A programozási modellt a 3.4 ábra szemlélteti.

A MapReduce programozási modell nem csak az integrálás során jött elő, hanem az adatanalízis során is. Ugyanis itt a rendelkezésre álló adatokat szétosztva sok gépre párhuzamosítva meghatároztam a korrelációs függvényt (map), aztán a sok különböző eredményt összefűztem (reduce).



3.4. ábra. Az ábra a MapReduce programozási modellt mutatja be. A fejgép kisebb csomagokra osztja az adatokat, majd a klaszter számítógépein (munkások) elindít egy párhuzamos leképzést egy adott függvényvel az adatokon (map). Végül a kapott eredményeket a fejgép összefűzi (reduce) és így előáll a végeredmény.

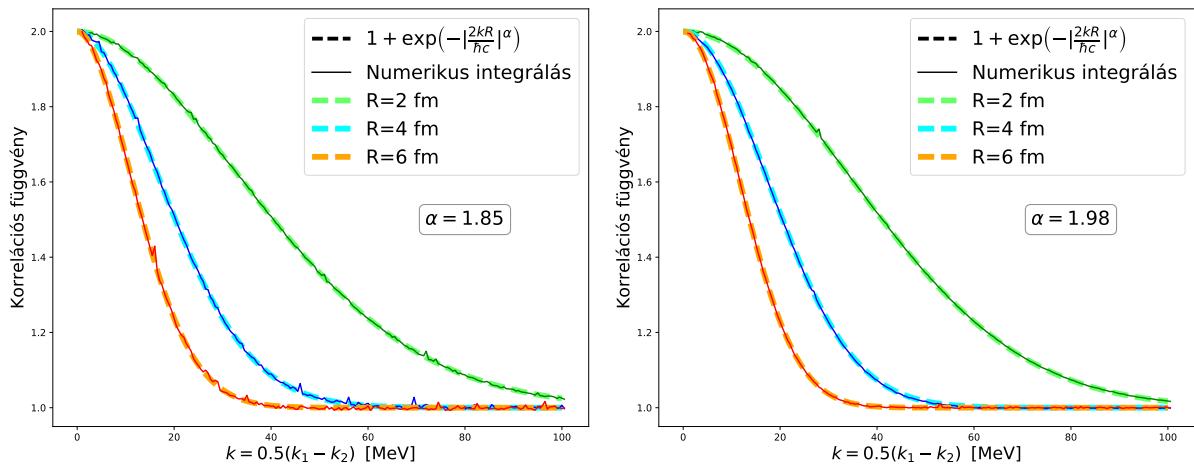
3.6. Eredmények

3.6.1. Teszt: Coulomb-kölcsönhatás nélküli eset

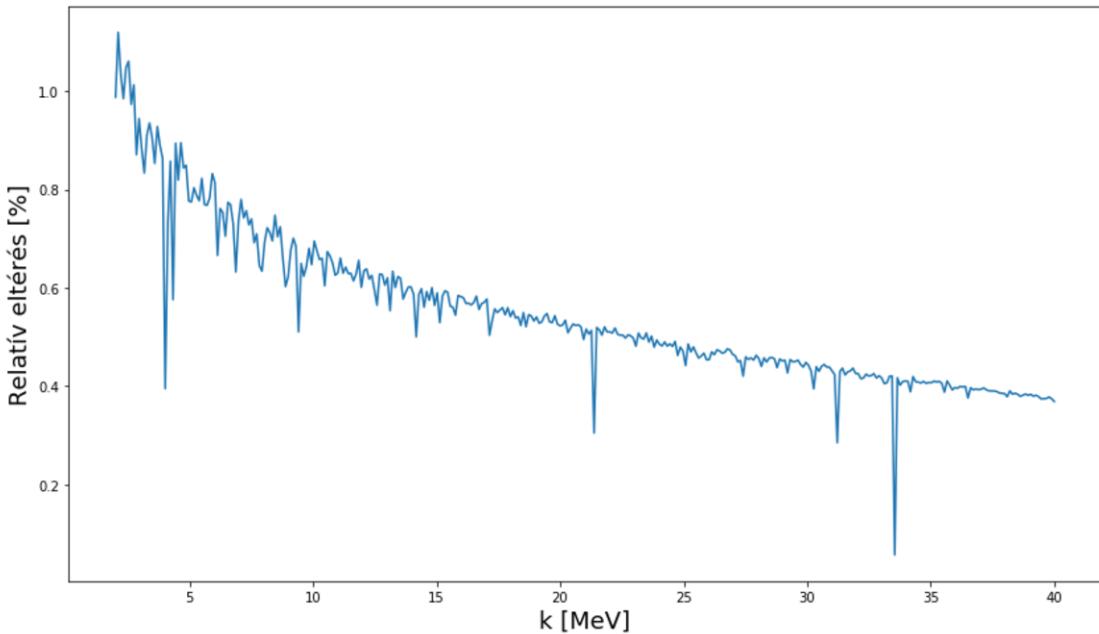
A számolás elvégzésére írt kódot modulárisan fejlesztettem, minden modult külön teszteltem. minden elvégzett teszt bemutatása hosszadalmas lenne, ezért itt két tesztet mutatok be.

Az első teszt egy modul kivételével az össze modul megbízhatóságát mutatja (az egy ki-
eső modul a komplex hipergeometrikus függvényt számoló kód, ezt a python mpmath könyvtár segítségével teszteltem). Amennyiben a 3.2.3 kétrészecske Coulomb-integrál számlálóját tekint-
jük, felismerhetjük a korrelációs függvény definícióját, Coulomb-kölcsönhatás nélküli esetben. Ez Lévy-eloszlást feltételezve forrásfüggvénynek, a 2.4.3 összefüggés alapján a Lévy karakterisztikus függvénye lesz. Az eredményt a 3.5 ábra szemlélteti. Látható, hogy a numerikus eredmény kellően pontosan reprodukálja az analitikusat.

A PHENIX magyar csoport már régóta foglakozik Bose-Einstein korrelációk vizsgálatával, ezért a Coulomb-integrál betáblázatozása több körben megtörtént. Jelenleg a legutóbbi számolás eredményeként született táblázat van használatban, amelyet a Nagy Márton készített. Ezt fel lehet használni az általam készített kód tesztelésére. Az összehasonlítás a 3.6 ábrán látható. Az ábra mutatja, hogy maximálisan 1% a relatív eltérés a két számolás között, ez elfogadható.



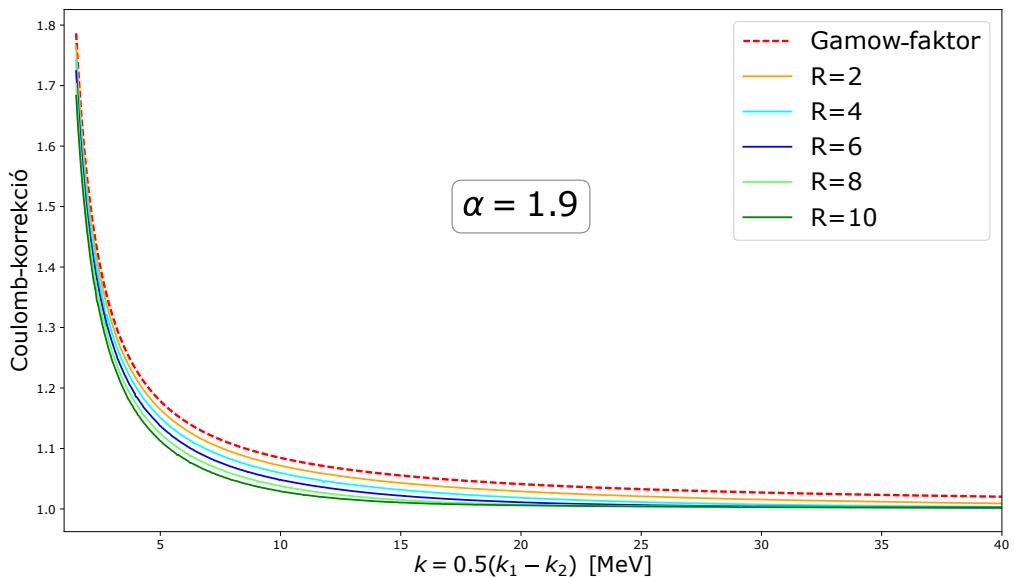
3.5. ábra. Coulomb-kölcsönhatás nélküli kétrészecske korreláció számolása numerikusan és analitikusan, a kód tesztelése céljából.



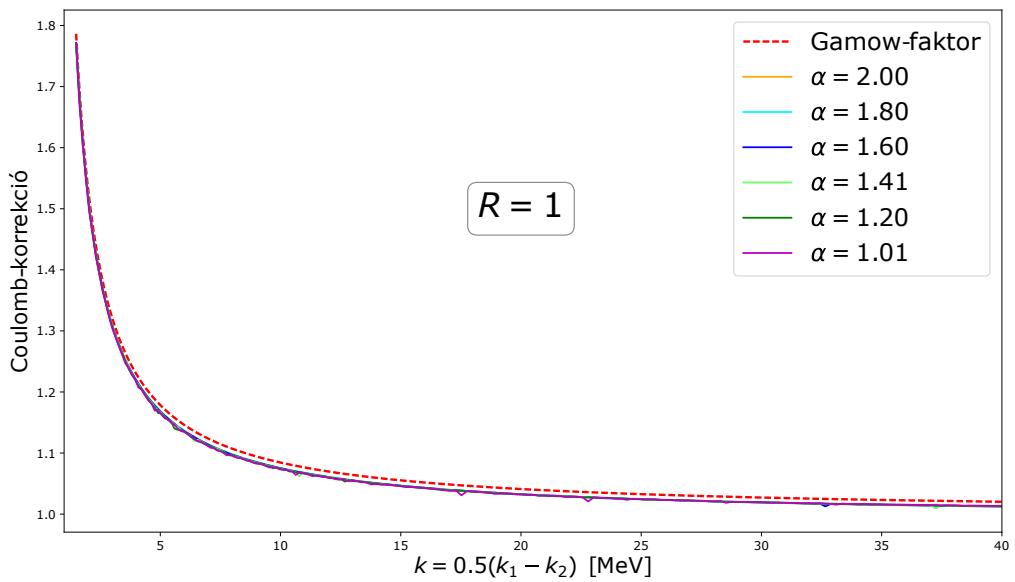
3.6. ábra. A fejlesztett kód tesztelése a Nagy Márton által számolt Coulomb-integrál összehasonlítása révén.

3.6.2. Kétrészecske Coulomb-korrekción

A kétrészecske Coulomb-integrál relatív impulzus különbség felétől való függését különböző R Lévy-paraméter esetén a 3.7 ábra szemlélteti. Hasonlóan az α Lévy-paramétertől való függést a 3.8 ábra mutatja.



3.7. ábra. Kétrészecske Coulomb-korrekción a Lévy-eloszlás R paraméterének függvényében. A szaggatott vonal mutatja a 3.1.9 egyenlet által definiált Gamow-faktort.



3.8. ábra. Kétrészecske Coulomb-korrekción a Lévy-eloszlás α paraméterének függvényében. A szaggatott vonal mutatja a 3.1.9 egyenlet által definiált Gamow-faktort.

3.6.3. Háromrészecske Coulomb-korrekción

A háromrészecske Coulomb-korrekción a 3.2.8 által megadott integrálok elvégzésével lehet meghatározni. Az összefüggés mutatja, hogy ez sokkal nehezebb feladat mint a kétrészecske integrál, mert egyrészt a forrásfüggvények szorzata nem lesz felírható Lévy-eloszlások egyszerű kombinációjaként (a tömegközépponti változóra vett integrálás megmarad) továbbá a hullámfüggvény meghatározása sokkal számításigényesebb, és összességében sokkal több a változó. Mivel később bemutatott okokból a korrelációs függvényt csak a momentumkülönbségek nagyságában mérjük, ezért a Coulomb-korrekción kiszámítását is a momentumok nagyságában végezzük, tehát a K_3 -at „csupán” 3 momentumváltozóban kell kiértékelni. A korrekció továbbá függ a Lévy-eloszlás α és R paraméterétől. Az korrelációs függvény illesztéséhez minden paraméterben, legalább minden paraméter esetén 100 binben ki kell számolni az integrált és egy táblázatot készíteni, amelyet számítógép memoriájába kell tölteni, hogy illesztés során lehessen hatékonyan használni. Ez a felosztás 10^{10} darab integrált eredményez, mindenik értékét 32-bites lebegőpontos számként ábrázolva 37.25 GB méretű táblázatot kapunk. A Brookhaven Nemzeti Laboratórium klaszterein sajnos nem áll ekkora memória rendelkezésünkre (illesztéshez használt minden node ekkora memóriamennyiséggel kellene rendelkezzen). Kevesebb memóriával is megoldható a feladat, de ekkor az illesztés sebessége drasztikusan megnő. További probléma, hogy az integrál meghatározása rendkívül számításigényes, ezért 1 darab meghatározása is nagyon időigényes (jelenlegi tapasztalatok szerint, másfél nap nem elég a minimálisan elvárható pontossághoz). Ezen megállapítások mutatják, hogy a tényleges háromrészecske Coulomb-korrekción praktikusan nem használható.

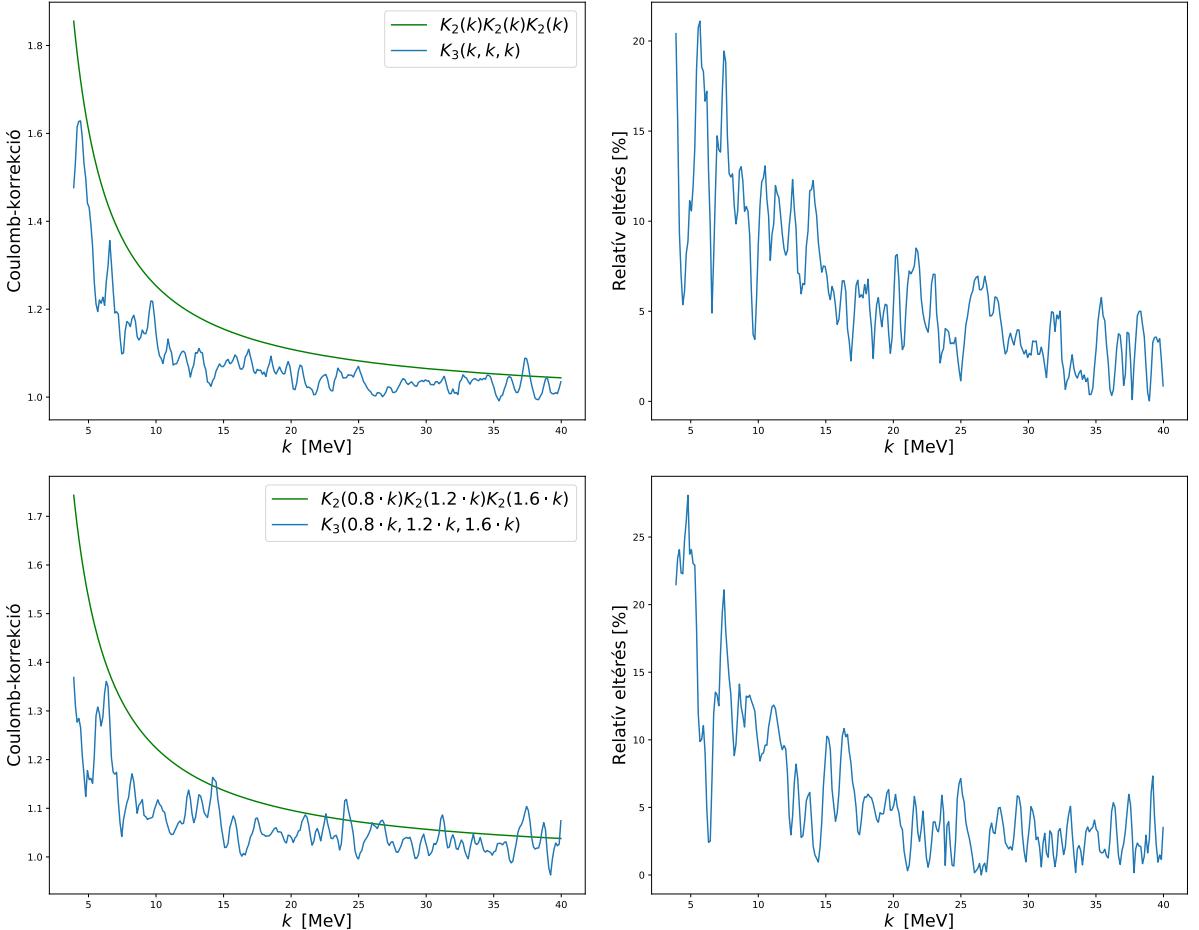
Mivel elsősorban a rendkívüli számításigénynek következtében a háromrészecske Coulomb-integrál nem betáblázatozható, az analízis során az általánosított Riverside-módszer alkalmazásával határoztam meg a korrekciót [11, 3]. A közelítés során a háromrészecske Coulomb-korrekción a kétrészecskés korrekciók szorzataként állítjuk elő, azaz:

$$K_3(k_{12}, k_{23}, k_{31}) = K_2(k_{12})K_2(k_{23})K_2(k_{31}) \quad (3.6.1)$$

A háromrészecskés Bose-Einstein korrelációk vizsgálatánál ezen közelítés alkalmazása általánosan elterjedt [1]. Mivel az integrál nem számolható ki az összes paraméter esetén, ezért momentumtérben egydimenziós altereken szokás vizsgálni a közelítés pontosságát. A kutatások azt mutatják, hogy a közelítés maximálisan néhány százalék hibát okoz ([1]). Azonban forrásfüggvényre ezen kutatások nem használtak Lévy-eloszlást. Például az egyik legújabb, az ALICE kísérlet által végzett kutatás [1] során a forrás Gaussi struktúrától való eltérés figyelembevételére sorfejtést alkalmaztak.

Munkám során én is elkezdtem vizsgálni az általánosított Riverside-módszer pontosságát Lévy-eloszlás alkalmazása esetén, azonban a nagy számításigény és a leadási határidő következtében az integrálást még nem sikerült az elvárható pontossággal kiszámolni. Ennek követ-

keztében az általánosított Riverside-módszer jóval pontatlanabbnak tűnik, mint az az irodalom alapján elvárt. A közelítés pontosságát két egydimenziós szeletben vizsgáltam, az elsőt a $k_{12} = k_{23} = k_{31} = k$ definiálja, a másodikat a $k_{12} = 0.8 \cdot k$, $k_{23} = 1.2 \cdot k$, $k_{31} = 1.6 \cdot k$ egyenletek. Mindkét esetben a k -t 3 MeV-től 40 MeV-ig vettetem. Az eredményeket a 3.9 ábrák mutatják a két egydimenziós szeletben. A baloldali ábrák mutatják a közelítésből és a K_3 integrálásból kapott Coulomb-korrekciót, a jobboldali ábrák pedig a kettő közti relatív eltérést. Látható az ábrákon, hogy a K_3 integrálóból kapott görbe erősen fluktuál a Monte-Carlo-módszerekre jellemző módon. Ez lehetőséget ad, hogy a jövőben sokkal hosszabb számolások során a korrekciót pontosan meghatározzuk. Az ábrákon a relatív eltérésre maximálisan 25%-ot látunk, amely azonban a numerikus integrálás erős fluktuációjának következtében nem vehető teljesen komolyan. Azonban a várakozásnak megfelelően az ábrák mutatják a trendet: nagy momentum esetén a hiba egyre kisebb lesz.



3.9. ábra. Numerikus integrálásból és az általánosított Riverside-módszerből kapott háromrézsze cske Coulomb-korrekció két különböző egydimenziós szeletben. Baloldali ábrákon láthatjuk a két módszerrel kapott Coulomb-korrekciót, a jobboldali ábrákon pedig a kettő relatív eltérését.

4. Adatanalízis

Az analízis során a PHENIX detektorrendszerrel 2010-ben, $\sqrt{s_{NN}} = 200$ GeV tömegközépponti ütközési energián felvett arany-arany ütközések adatait használtam. Az adathalmaz körülbelül $7.3 \cdot 10^9$ eseményt tartalmaz. A kalibrációkat és részecskeazonosítást Nagy Márton végezte el. Az általam analizált adatmennyiséget tömörítve, binárisan formátumban tárolva 2.3 TB volt. Az analízist a ROOT programcsomag segítségével végeztem [19].

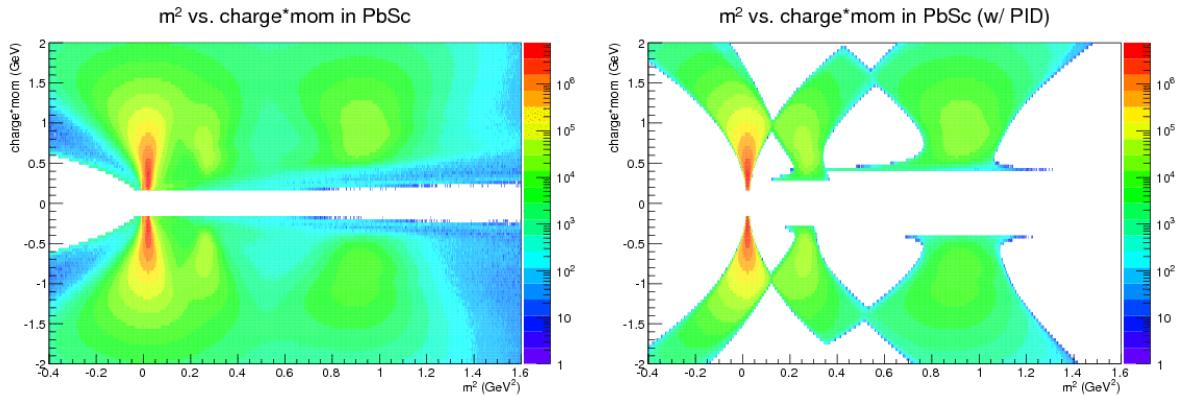
A kvantumstatisztikai korrelációkat különböző részecskék esetén vizsgálhatjuk (pionok, kaonok, protonok, stb.). Annak érdekében, hogy legyen elég statisztikánk a háromrészecske analízishez, az ütközések során legnagyobb számba létrejövő azonos töltésű pionok esetén vizsgáltam a Bose-Einstein korrelációkat.

4.1. Részecskeazonosítás

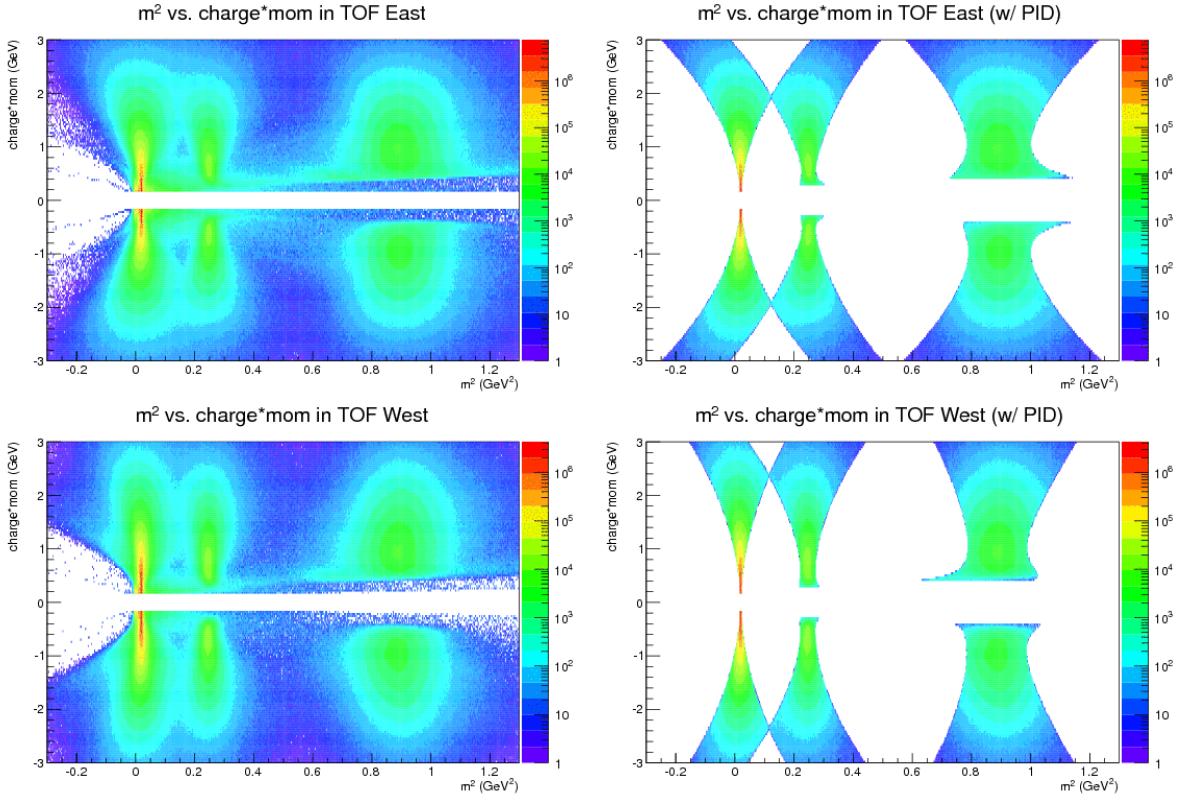
A részecskeazonosítás az 1.3.2 fejezetben bemutatott módon történt, azaz először meghatároztuk a részecske pályáját a DC és PC1 detektor segítségével, majd ugyanezen detektorok segítségével a részecske momentumát, és végül TOF és PbSc detektorok segítségével a repülési időt.

Mivel a részecske pályáját a DC és PC1 detektorban mért pálya alapján rekonstruáltuk, és a megtett út meghatározása érdekében ezt a rekonstruált utat a TOF és PbSc detektorokba vetítettük, vizsgálni kell a projekcióhoz közelí beütések és projekció helye közti különbség (φ, z koordinátákban) eloszlását. Ezen az eloszláson vágást kell alkalmaznunk (ezt nevezzük 'matching' vágásnak). Különböző matching vágások alkalmazása a szisztematikus hiba egyik fontos forrása.

Az analízis során pionok közötti korrelációt mérünk, ezért szeretnénk kizárnai a többi részecskeét, tehát fontos, a pontos részecskeazonosítás. A részecskeazonosítást meghatározó vágásokat PID vágásnak nevezzük, és különböző vágások alkalmazása a szisztematikus hibaanalízis során vizsgálandó. A részecskeazonosítást a különböző detektorokban 2σ vágás esetén a 4.1 és a 4.2 ábra szemlélteti.



4.1. ábra. Nagy Márton által végzett részecskeazonosítás a PbSc detektorokban, 2σ vágások alkalmazása mellett (baloldali ábra vágás nélkül, jobboldali a PID vágás alkalmazása után).



4.2. ábra. Nagy Márton által végzett részecskeazonosítás a TOF detektorokban, 2σ PID vágások alkalmazása mellett (baloldali ábra vágás nélkül, jobboldali a PID vágás alkalmazása után).

4.2. Kétrészecske vágások

Ettől a fejezettről kezdve a PbSc detektorok keleti karban levő részére EMCE, a nyugati karban levő részére pedig EMCW rövidítésekkel hivatkozunk. Továbbá a Drift Chamber (DC) detektor nevét olykor DCH rövidítéssel írom.

A korrelációs függvény mérésekor figyelembe kell venni a pálya rekonstrukciós algoritmus sajátosságaiból adódó hibákat. A pálya rekonstrukciója során két effektus okoz hibát: közeledi részecskepályák esetén az algoritmus összeolvászthatja a két részecskét eggyé, valamint az is megtörténhet, hogy egy pályát kettéoszt az algoritmus, létrehozva egy úgynevezett „szellem” részecskét. Ezen effektusok kiküszöbölése érdekében kétrészecske vágásokat alkalmazunk, melynek során kidobjuk az adott távolságnál közelebb eső részecskéket. Ezen vágások megkonstruálása érdekében vizsgáltuk a kétrészecske pályatávolságok, a Δz és $\Delta\varphi$, eloszlását a különböző detektorokban, amelyeket a 4.3 és a 4.4 ábrák mutatnak, az alkalmazott vágásokkal együtt (mivel ezen vágások is azonosak a kétrészecske analízis során alkalmazott vágásokkal, ezért a bemutatott ábrák esztétikai okokból abból az analízisből származnak [20]).

A különböző detektorokban a kétrészecske vágásokat az alábbi egyenletekkel definiáltuk:

- DCH, EMC, EMCW:

$$\Delta\varphi > \Delta\varphi_0 - \frac{\Delta\varphi_0}{\Delta z_0} \Delta z \text{ és } \Delta\varphi > \Delta\varphi_1 \quad (4.2.1)$$

- TOFE:

$$\Delta\varphi > \Delta\varphi_0 - \frac{\Delta\varphi_0}{\Delta z_0} \Delta z \quad (4.2.2)$$

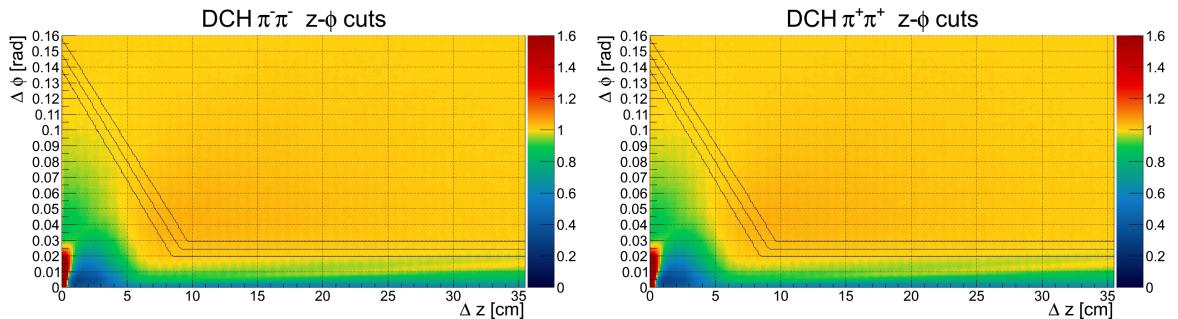
- TOFW:

$$\Delta\varphi > \Delta\varphi_0 \text{ és } \Delta z > \Delta z_0 \quad (4.2.3)$$

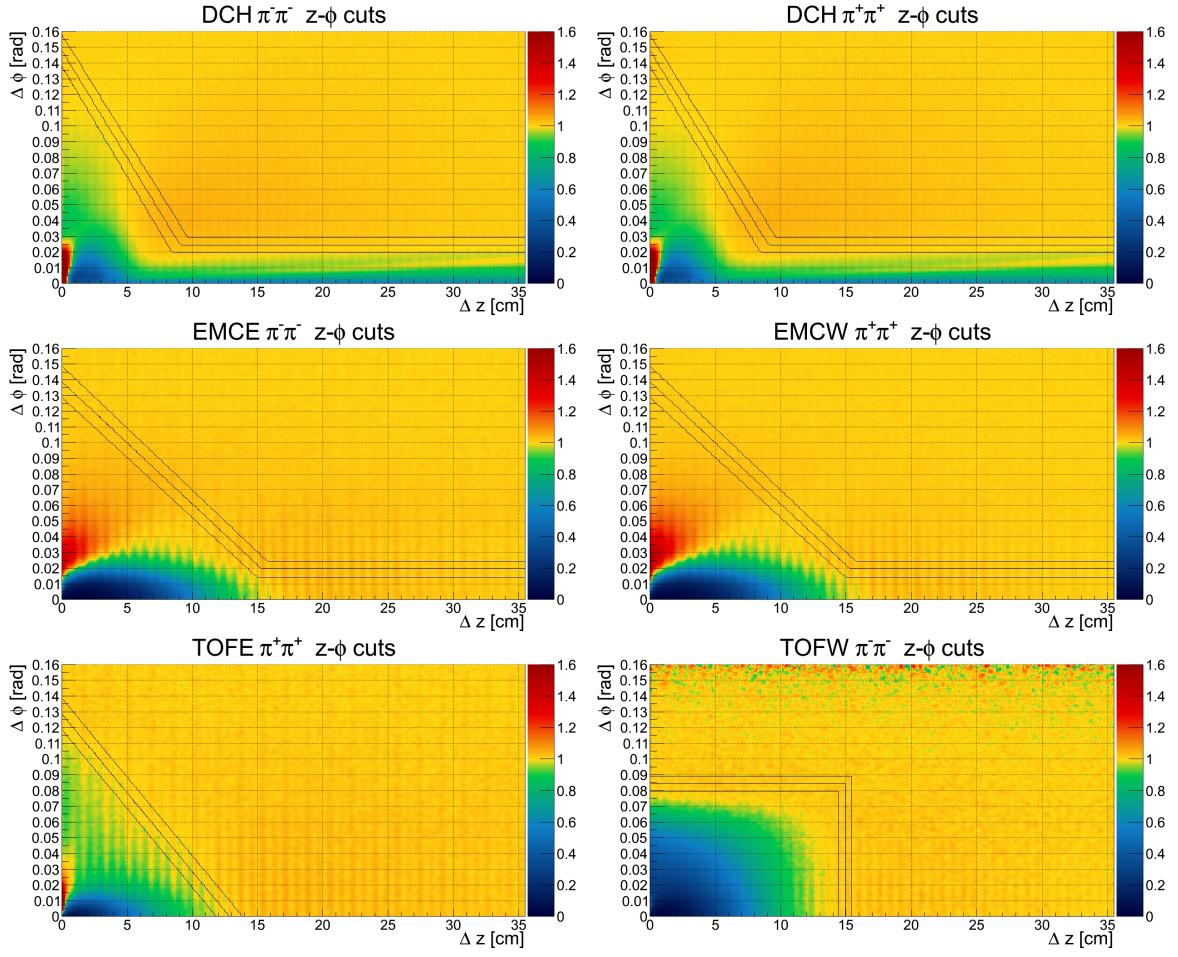
Az egyenletekben megjelenő paramétereket az 1 táblázat foglalja össze. A végső számolás során a 0 sorszámú vágást alkalmaztam, a táblázatban szereplő többi értéket a szisztematikus hiba analízis során használtam fel.

vágás	DCH			EMC			TOFE		TOFW	
	Δz_0 [fm]	$\Delta\varphi_0$	$\Delta\varphi_1$	Δz_0 [fm]	$\Delta\varphi_0$	$\Delta\varphi_1$	Δz_0 [fm]	$\Delta\varphi_0$	Δz_0 [fm]	$\Delta\varphi_0$
0	11	0.15	0.025	18	0.14	0.020	13	0.13	15.0	0.14
1	10	0.14	0.020	18	0.14	0.020	13	0.13	15.0	0.14
2	12	0.16	0.030	18	0.14	0.020	13	0.13	15.0	0.14
3	11	0.15	0.025	17	0.13	0.015	12	0.12	14.5	0.13
4	11	0.15	0.025	19	0.15	0.025	14	0.14	15.5	0.15

1. táblázat. A (4.2.1)-(4.2.3) egyenletekben használt vágások paraméterei. A vágások hatását függetlenül vizsgáljuk, a 0-2 vágások a DCH detektorra, a 0,3,4 vágások pedig az EMC, TOFE, TOFW detektorokra vonatkoznak.



4.3. ábra. A kétrészecske analízis során készült $\Delta\varphi - \Delta z$ eloszlások, és az alkalmazott vágások a DCH detektorban.



4.4. ábra. A kétrészecske analízis során készült $\Delta\varphi - \Delta z$ eloszlások, és az alkalmazott vágások a különböző detektorokban.

4.3. Korrelációs függvény változói

A 2.2 fejezetben láttuk, hogy a kétrészecske korrelációs függvényben célszerű áttérni a $2k = p_1 - p_2$ és $2K = p_1 + p_2$ változókra. A korrelációs függvény K függése tipikusan simább mint a k függés [35], ekkor szokás alkalmazni a $p_1 \approx p_2 \approx K$ közelítést, azaz feltesszük, hogy a K körülbelül tömeghéjon van. Ennek következtében a 2.2.8 egyenlet kihasználásával a kétrészecske korrelációs függvény vizsgálható a \mathbf{k} és \mathbf{K} hármas vektorok függvényeként, ahol a \mathbf{k} -ra gondolhatunk fő kinematikai változóként. Továbbá midrapiditáshoz közel a \mathbf{K} hármasvektor helyett áttérhetünk K_T (transzverz momentum nagysága) vagy m_T (transzverz tömeg) változóra, amelyeket a következő összefüggések definiálnak:

$$K_T = \frac{1}{2} \sqrt{K_x^2 + K_y^2}, \quad m_T c = \sqrt{m^2 c^2 + K_T^2}, \quad (4.3.1)$$

ahol m a piontömeg és $\mathbf{K} = (K_x, K_y, K_z)$.

Háromrészecske korrelációk vizsgálata során szintén áttérünk a már bevezetett $2k_{ij} = p_i - p_j$

és $3K = p_1 + p_2 + p_3$ változókra. Az előbb tárgyalt tömeghéj közelítést ebben az esetben is megtehetjük ($p_1 \approx p_2 \approx p_3 \approx K$), melynek eredményeként áttérhetünk a \mathbf{k}_{ij} és \mathbf{K} hármasvektorokra, továbbá a \mathbf{K} vektor helyett használhatjuk a K_T (vagy m_T) skalár változót.

Tehát különböző m_T tömegek esetén mérjük a háromrészecske korrelációs függvényt, mint a \mathbf{k}_{ij} változók függvénye. A relatív momentumok esetén használjuk a Bertsch-Pratt (BP) [40, 16] dekompozíciót, melynek keretében a vektort out-side-long irányokra bontjuk, ahol az out az átlagos transzverz momentum iránya, a long a nyalábirány, a side pedig az előző kettőre merőleges:

$$\mathbf{k}_{ij} = (k_{ij}^{\text{out}}, k_{ij}^{\text{side}}, k_{ij}^{\text{long}}) \quad (4.3.2)$$

Szokás még áttérni a longitudinálisan együtt mozgó rendszerre (LCMS) egy longitudinális irányba végzett Lorentz boost segítségével [45].

Tehát ezek alapján a háromrészecske korrelációs függvény a $\mathbf{k}_{ij}^{\text{LCMS}}$ vektorok és m_T függvénye, azaz minden m_T esetén egy 6 dimenziós eloszlás. Mivel nincsen elég adat ilyen magas dimenzióban a korrelációs függvény meghatározásához, ezért $\mathbf{k}_{ij}^{\text{LCMS}}$ vektorokról át kell térnünk valamilyen skalár mennyiségekre, így csökkentve a dimenziószámot háromra.

Kétrészecske korrelációk vizsgálata során is gyakran áttérnek a 3 dimenziós relatív momentum vektorról valamilyen skalár mennyiségre, így növelte a statisztikát [2, 33]. Kétrészecske esetén a legegyszerűbb Lorentz-transzformációra invariáns mennyiséget a következőképpen kapjuk:

$$k_{\text{inv}} = \sqrt{k_\mu k^\mu} = \sqrt{(1 - \beta_T)^2 k_{\text{out}}^2 + k_{\text{side}}^2 + k_{\text{long}}^2}, \quad (4.3.3)$$

ahol $\beta_T = \frac{2K_T}{E_1 + E_2}$. Az összefüggés mutatja, hogy k_{inv} értéke lehet kicsi, miközben a k_{out} nagy, ha a β_T 1-hez közelí.

A Bose-Einstein korrelációk korábbi vizsgálata során kiderült, hogy $\sqrt{s_{NN}} = 200$ GeV tömegközépponti energián végezett ütközések esetén az úgynevezett Bertsch-Pratt-sugarak (R_{out} , R_{side} , R_{long}) azonos nagyságrendűek, azaz a korrelációs függvény közel gömbszimmetrikus az LCMS rendszerben [7, 10, 4, 9]. Amennyiben az LCMS rendszer helyett a pár tömegközépponti rendszerébe (PCMS) térünk át, teljesülni fog, hogy:

$$k_{\text{inv}} = |\mathbf{k}^{\text{PCMS}}| \quad (4.3.4)$$

Ebben a rendszerben azonban a korrelációs függvény már nem lesz gömbszimmetrikus, így $\sqrt{s_{NN}} = 200$ GeV tömegközépponti energián a k_{inv} nem jó választás. Ezért egy olyan változóra kell áttérnünk, amelynek kis értékei esetén teljesül, hogy mindenkomponens értéke kicsi. A legegyszerűbb ilyen választás az LCMS rendszerben a momentumkülönbség vektor nagysága (jel. $k = \mathbf{k}_{\text{LCMS}}$). A k a laborrendszerben vett változók segítségével a következő lesz:

$$k = \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_{\text{long,LCMS}}^2}, \quad (4.3.5)$$

ahol $2k_{x/y} = p_{1,x/y} - p_{2,x/y}$ és

$$k_{\text{long,LCMS}}^2 = \frac{(p_{1z}E_2 - p_{2z}E_1)^2}{(E_1 + E_2)^2 - (p_{1z} - p_{2z})^2} \quad (4.3.6)$$

A kétrészecske esetén látottak alapján a háromrészecske korrelációk vizsgálata során, a kétrészecske momentumkülönbség vektorok helyett az LCMS koordináta-rendszerben számolt nagyságukra térünk át. Így laborrendszerben mért változók segítségével a korrelációs függvény változói a következőképpen számolhatók:

$$k_{ij} = |\mathbf{k}_{ij}^{\text{LCMS}}| = \sqrt{k_{ij,x}^2 + k_{ij,y}^2 + k_{ij,\text{long,LCMS}}^2}, \quad (4.3.7)$$

ahol

$$k_{ij,\text{long,LCMS}}^2 = \frac{\left[p_{iz}E_j - p_{jz}E_i + \frac{1}{2}E_k(p_{iz} - p_{jz}) - \frac{1}{2}(E_i - E_j)p_{kz} \right]^2}{(E_1 + E_2 + E_3)^2 - (p_{1z} + p_{2z} + p_{3z})^2}, \quad (4.3.8)$$

ahol $i \neq j \neq k$.

Tehát a korrelációs függvényt különböző m_T esetén a k_{ij} LCMS rendszerben vett momentumkülönbség nagyságok függvényében vizsgáljuk, így a dimenziószámot 6-ról 3-ra redukáltuk.

4.4. Korrelációs függvény mérése

A korrelációs függvény mérése során az adott eseményben beazonosított részkecskénekből tripletket képezünk. Ezután a triplettben a részecskepárok momentum különbségéből az előző fejezetben tárgyalt módon meghatározzuk nagyságukat a longitudinálisan együttes mozgó rendszerben. Ezen nagyságokból elkészítünk egy 3 dimenziós momentum eloszlást a triplettek transzverz tömegeinek különböző értékeire (transzverz tömegek tartományát összesen 32 bin-re osztottuk). Ideális esetben ez lenne a korrelációs függvény, azonban ezen mérési módszer során nem vettük figyelembe a detektorok jelentős kinematikai akceptanciai effektusait. Ezen effektusok kiküszöbölése érdekében az úgynévezett eseménykeverés módszerét kell alkalmazni.

Az eseménykeverés módszere során az ideális esetben korrelációs függvényt megadó eloszlást aktuális eloszlásnak nevezzük, és $\mathcal{A}(k_{12}, k_{23}, k_{31})$ jelölést alkalmazzuk rá (ez az eloszlás az ideálistól jelentősen eltér). Az aktuális eloszlás mellett meg kell határoznunk egy háttéreloszlást ($\mathcal{B}(k_{12}, k_{23}, k_{31})$), amelyet az \mathcal{A} eloszláshoz hasonló módon, azonban a triplett tagjait különböző eseményből véve kapunk, így ez csupán a detektorok által mesterségesen létrehozott korrelációt tartalmazza. Ezen eloszlás segítségével már megkapható a korrelációs függvény:

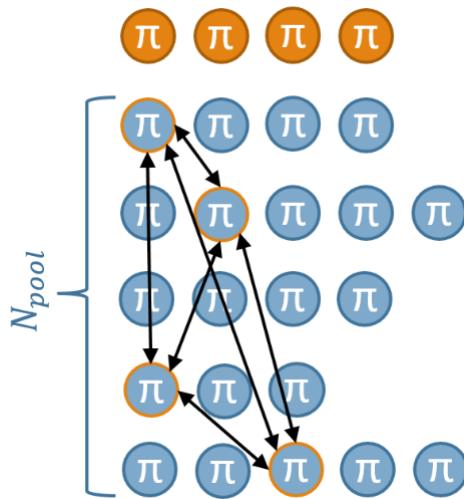
$$C_3(k_{12}, k_{23}, k_{31}) = \frac{\mathcal{A}(k_{12}, k_{23}, k_{31}) \int \mathcal{B}(k_1, k_2, k_3) dk_1 dk_2 dk_3}{\mathcal{B}(k_{12}, k_{23}, k_{31}) \int \mathcal{A}(k_1, k_2, k_3) dk_1 dk_2 dk_3}, \quad (4.4.1)$$

ahol az integrálás olyan tartományon történik ahol a korrelációs függvény már nem mutat kvantumstatisztikai effektusokat.

Ahhoz, hogy biztosítsuk, hogy a háttéreloszlás az azonos kinematikai akceptancia effektusokat tartalmazza, teljesülnie kell, hogy az aktuális és háttéresemények hasonlóak z -vertex

pozícióban és centralitásban. Ezért a z -vertex tartományát 2 cm, a centralitási tartományt pedig 3% felbontással felosztottam, és az aktuális eseményhez az azonos centralitás és z -vertex bin-ben levő háttéreseményeket választottam.

Az eseménykeverés módszere során a háttéreloszlás meghatározása többféleképpen történhet. Az általam alkalmazott eseménykeverő módszert a 4.5 ábra szemlélteti. A módszer során az eseményekből egy N_{pool} méretű háttérhalmazt készítünk, amelynek mérete legalább akkora mint a legnagyobb esemény multiplicitása. Az aktuális eloszlás meghatározása során, az esemény minden pionjához véletlenszerűen választunk egy eseményt a háttérhalmazból, majd a választott eseményből sorsolunk egy az aktuális eseményből származó pion töltésével egyező pontot. Az így kapott háttérrészecskékből az \mathcal{A} eloszláshoz hasonlóan meghatározzuk a \mathcal{B} háttéreloszlást.

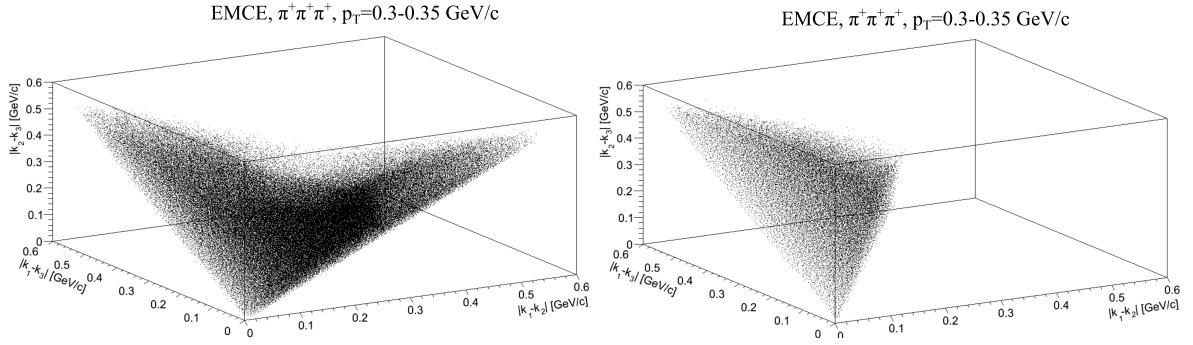


4.5. ábra. A használt eseménykeverő módszer szemléltetése: az aktuális esemény multiplicitával megegyező számú régi eseményt választunk véletlenszerűen, majd minden eseményből egy részecskét sorsolunk.

Az aktuális és háttéreloszlások meghatározása során, kitüntetek egy sorrendet a triplettek részecskéi között, mivel így sokkal hatékonyabb az eloszlásokat meghatározó algoritmus. Azonban fizikailag a sorrend nem számít, ezért fontos ezen mesterséges effektustól való megszabadulás. Ezt a \mathcal{A} , \mathcal{B} eloszlások összehajtjogatásával tehetjük meg. Ez azt jelenti, hogy, ha az aktuális eloszlás (i, j, k) bin-ben levő értékéhez, hozzá kell adnunk az indexek minden lehetséges permutációját (lenullázva ezeket), azaz:

$$\mathcal{A}(i, j, k) = \mathcal{A}(i, j, k) + \mathcal{A}(i, k, j) + \mathcal{A}(k, i, j) + \mathcal{A}(k, j, i) + \mathcal{A}(j, k, i) + \mathcal{A}(j, i, k). \quad (4.4.2)$$

A hajtogatást az aktuális és háttéreloszláson kell végezni, a korrelációs függvény meghatározása előtt. A 4.6 ábra mutatja az aktuális eloszlást hajtogatás előtt és után. Az ábrákon látjuk továbbá, hogy a \vec{k}_{12} , \vec{k}_{13} , \vec{k}_{23} között teljesül a háromszög-egyenlőtlenség.



4.6. ábra. Baloldali ábra mutatja a mérés utáni (hajtогatás előtti) aktuális eloszlást, míg a jobboldali a hajtогatás utáni eloszlást.

4.5. Illesztett modell

A kvantumstatisztikai modell meghatározása a kétrészecsksé esetben bemutatotthoz hasonlóan történik, azaz kétrészecsksé hullámfüggvény relatív koordinátafüggésére síkhullámot használunk:

$$\Psi_{\mathbf{k}_{ij}}(\mathbf{r}_{kl}) = e^{i\mathbf{k}_{ij}\mathbf{r}_{kl}}, \quad (4.5.1)$$

majd három ilyen hullámfüggvény szorzatának szimmetrizálása után kapjuk meg a háromrészecske hullámfüggvényt:

$$\begin{aligned} \Psi_{\mathbf{k}_{12}, \mathbf{k}_{23}, \mathbf{k}_{31}}(\mathbf{r}_{12}, \mathbf{r}_{23}, \mathbf{r}_{31}) = & \frac{1}{\sqrt{6}} \left(e^{i\frac{2}{3}\mathbf{k}_{12}\mathbf{r}_{12}} e^{i\frac{2}{3}\mathbf{k}_{23}\mathbf{r}_{23}} e^{i\frac{2}{3}\mathbf{k}_{31}\mathbf{r}_{31}} + e^{i\frac{2}{3}\mathbf{k}_{12}\mathbf{r}_{13}} e^{i\frac{2}{3}\mathbf{k}_{23}\mathbf{r}_{32}} e^{i\frac{2}{3}\mathbf{k}_{31}\mathbf{r}_{21}} + \right. \\ & + e^{i\frac{2}{3}\mathbf{k}_{12}\mathbf{r}_{21}} e^{i\frac{2}{3}\mathbf{k}_{23}\mathbf{r}_{13}} e^{i\frac{2}{3}\mathbf{k}_{31}\mathbf{r}_{32}} + e^{i\frac{2}{3}\mathbf{k}_{12}\mathbf{r}_{23}} e^{i\frac{2}{3}\mathbf{k}_{23}\mathbf{r}_{31}} e^{i\frac{2}{3}\mathbf{k}_{31}\mathbf{r}_{12}} + \\ & \left. + e^{i\frac{2}{3}\mathbf{k}_{12}\mathbf{r}_{31}} e^{i\frac{2}{3}\mathbf{k}_{23}\mathbf{r}_{12}} e^{i\frac{2}{3}\mathbf{k}_{31}\mathbf{r}_{23}} + e^{i\frac{2}{3}\mathbf{k}_{12}\mathbf{r}_{32}} e^{i\frac{2}{3}\mathbf{k}_{23}\mathbf{r}_{21}} e^{i\frac{2}{3}\mathbf{k}_{31}\mathbf{r}_{13}} \right) \end{aligned} \quad (4.5.2)$$

Ezen hullámfüggvény használva, valamint a forrásfüggvény leírására Lévy-eloszlást feltételezve elvégezhető a 2.1.1 összefüggés által definiált háromrészecske korrelációs függvény kiszámolása. Áttérve az előző fejezetben tárgyalt változókra, ez a következő alakú lesz:

$$\begin{aligned} C_3^{(0)}(k_{12}, k_{13}, k_{23}) = & 1 + \ell_3 e^{-0.5(|2k_{12}R|^\alpha + |2k_{13}R|^\alpha + |2k_{23}R|^\alpha)} \\ & + \ell_2 \left(e^{|2k_{12}R|^\alpha} + e^{|2k_{13}R|^\alpha} + e^{|2k_{23}R|^\alpha} \right), \end{aligned} \quad (4.5.3)$$

ahol ℓ_2 a kétrészecske szektor korrelációs erőssége, ℓ_3 pedig a háromrészecske szektor korrelációs erőssége. Ezek mag-glória modell esetén f_C függvények.

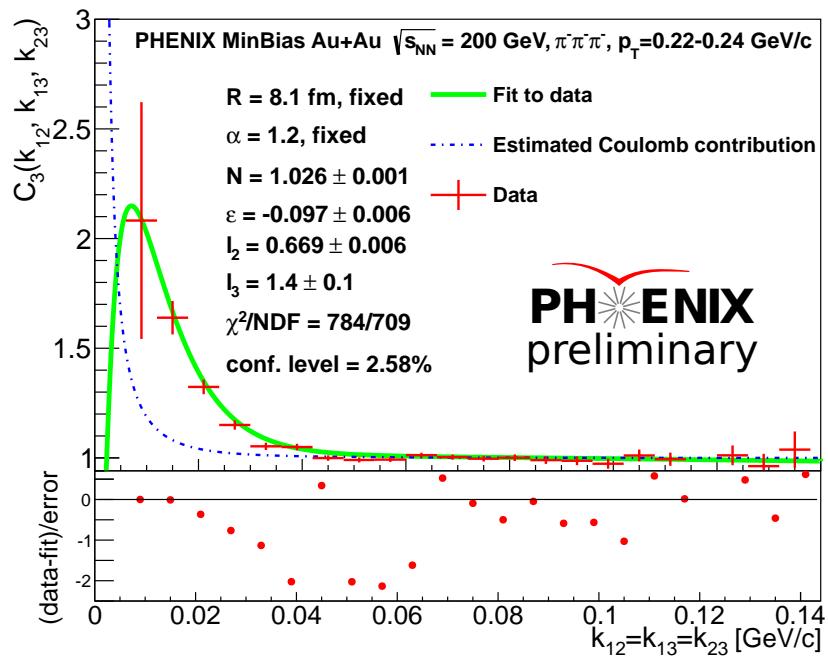
A háromrészecske korrelációs erősségre ebben az esetben a következő adódik:

$$\lambda_3(m_T) \equiv \lim_{\substack{k_{12} \rightarrow 0 \\ k_{23} \rightarrow 0 \\ k_{31} \rightarrow 0}} C_3(k_{12}, k_{23}, k_{31}, m_T) = \ell_3(m_T) - 3\ell_2(m_T) \quad (4.5.4)$$

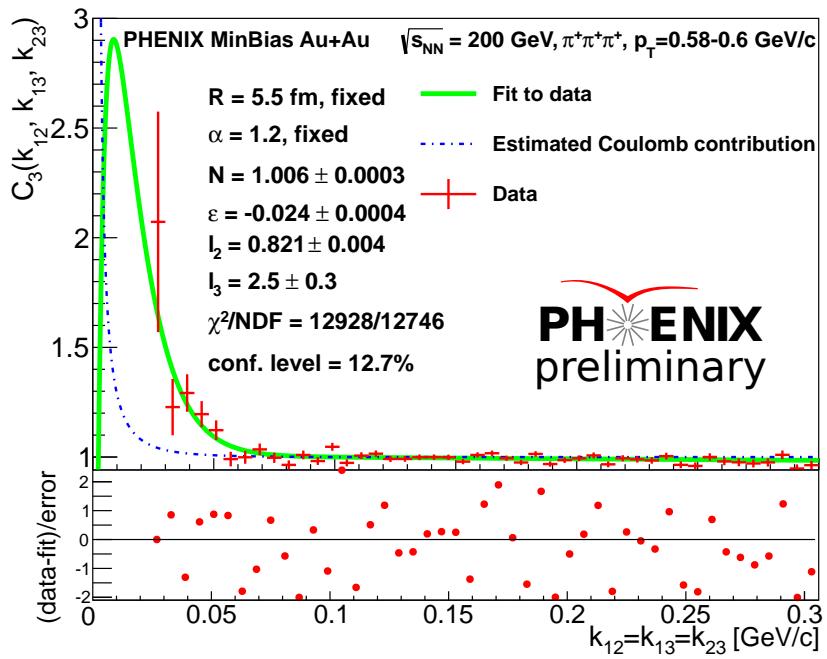
Annak érdekében, hogy a modellt illeszthessük, még be kell vezetnünk egy háttérteret. A háttér leírására a legegyszerűbb függvényt választottuk, amely három koordinátában ugyanazon meredekséggel leírt lineáris függvény szorzatából áll:

$$C_{3,\text{fit}}^{(0)}(k_{12}, k_{13}, k_{23}) = N(1 + \epsilon k_{12})(1 + \epsilon k_{13})(1 + \epsilon k_{23})C_3^{(0)}(k_{12}, k_{13}, k_{23}) \quad (4.5.5)$$

Tapasztalataink azt mutatták, hogy ez a háttérválasztás megfelelő, és nem kell a különböző változókhöz különböző meredekséget társítani, ami kettővel több illesztési paramétert eredményezne. Az illesztést a $k_{12} = k_{23} = k_{31}$ altéren kis m_T esetén a 4.7, nagy m_T esetén a 4.8 ábrák mutatják. Az ábrákon látszik, hogy az illesztések kellően pontosak.



4.7. ábra. A háromrészecske korrelációs függvény illesztésének vizualizációja a $k_{12} = k_{23} = k_{31}$ altéren, kis m_T esetén.



4.8. ábra. A háromrészecske korrelációs függvény illesztésének vizualizációja a $k_{12} = k_{23} = k_{31}$ altéren, nagy m_T esetén.

4.6. Szisztematikus hibák

Az előző fejezetekben láttuk, hogy a detektorok esetén különböző matching illetve párvágásokat alkalmazhatunk, amelyek a szisztematikus hiba leglényegesebb forrásai. A detektorrendszerből származó szisztematikus hiba mellett az illesztésnél elődefiniált paraméterek választása is hozzájárul a szisztematikus hibához (ezek közül az egyetlen jelentős hibaforrás az illesztési tartomány megválasztása). A szisztematikus hibaforrásokat és az alkalmazott vágásokat a következő lista foglalja össze:

- PID vágás: 3 különböző vágás (1.5σ , 2σ és 2.5σ)
- PC3 matching vágás: 3 különböző vágás (1.5σ , 2σ és 2.5σ)
- Matching vágás a PID detektorokban: 3 különböző vágás (1.5σ , 2σ és 2.5σ)
- Párvágás a DCH detektorban: három különböző vágás (az 1 táblázat 0,1,2 sora)
- Párvágás a PID detektorban: három különböző vágás (az 1 táblázat 0,3,4 sora)
- PID nyugati/keleti kar választása: három vágás (mindkető, keleti, nyugati)
- Illesztés határának változtatása: k_{\min} vágás (több vágás a 5 – 15 MeV tartományban)

A szisztematikus hiba kiszámolása érdekében jelöljük az analízis során kapott mennyiségeket P -vel ($\lambda_3, \kappa_3, R, \alpha$). Az alapvágásoknál ennek az értékét jelöljük $P^0(i)$ -val (ahol az i az m_T bin száma). Más vágások alkalmazása esetén a paraméter értéke megváltozhat, n típusú vágás vizsgálata során a j -ik beállítás esetén a paraméter értékét jelöljük $P_n^j(i)$ -vel. Adott m_T esetén a P paraméter szisztematikus hibáját a felső és alsó eltéréseket különválasztva a következőképpen számolhatjuk:

$$\delta P^\uparrow(i) = \sqrt{\sum_{n=\text{cuts}} \frac{1}{N_n^{j\uparrow}} \sum_{j \in J_n^\uparrow} (P_n^j(i) - P^0(i))^2} \quad (4.6.1)$$

$$\delta P^\downarrow(i) = \sqrt{\sum_{n=\text{cuts}} \frac{1}{N_n^{j\downarrow}} \sum_{j \in J_n^\downarrow} (P_n^j(i) - P^0(i))^2}, \quad (4.6.2)$$

ahol J_n^\uparrow azon j értékek halmaza, amelyekre $P_n^j(i) > P^0(i)$, és $N_n^{j\uparrow}$ ezen halmaz számossága. Hasonlóan J_n^\downarrow azon j értékek halmaza amelyekre $P_n^j(i) < P^0(i)$, és $N_n^{j\downarrow}$ ezen halmaz számossága. Az így kapott $\delta P^\uparrow(i)$ és $\delta P^\downarrow(i)$ hibák nem fizikai fluktuációkat tartalmaznak, amelyeket egy 5 pontos súlyozott átlagolással simítottunk ki.

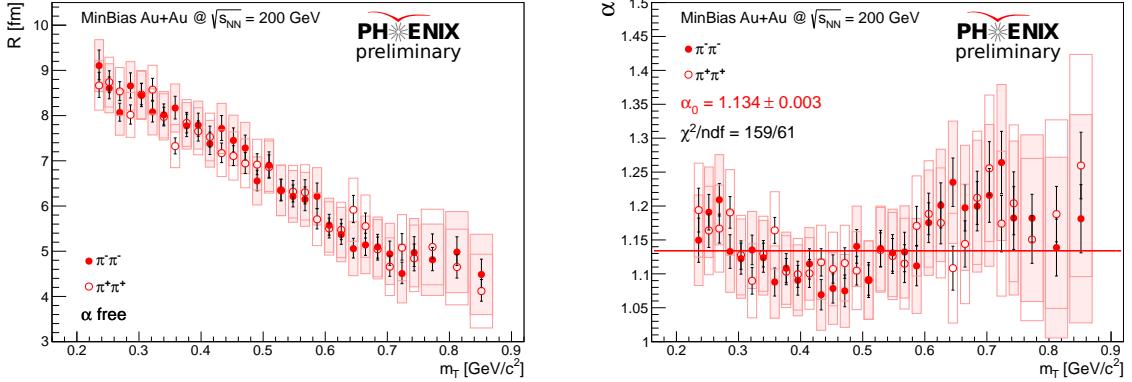
5. Eredmények

Az analízis során a $\pi^- \pi^- \pi^-$ és $\pi^+ \pi^+ \pi^+$ triplettek közti Bose-Einstein korrelációt vizsgáltam. A 4.5 fejezetben bemutatott $C_{3,\text{fit}}^{(0)}$ modellt a Coulomb-korrekciónak integrálval osztva illesztettem a mérési adatokra, meghatározva a modell $R, \alpha, \ell_2, \ell_3, \varepsilon, N$ paramétereit. Az illesztéseket m_T transzverz tömeg 32 binjében végeztem, a $180 - 850$ MeV tartományban.

5.1. Lévy-eloszlás paraméterei

A Lévy-eloszlás α és R paraméterére a várakozásunk az volt, hogy megegyezik a kétrészecske analízisből kapott eredményt, hisz ezek a paraméterek a forrásra jellemzők, és nem lehetnek érzékenyek arra, hogy hány részecske közti korrelációt vizsgálunk. A várakozásunknak megfelelően az illesztésből kapott R és α paraméter megegyezett a kétrészecske analízis során kapott paraméterekkel. Az utóbbiakat mutatja az 5.1 ábra. Az $\alpha(m_T)$ ábra mutatja, hogy ez a paraméter minden m_T esetén jelentősen eltér az $\alpha = 2$ esettől, azaz a Gauss eloszlástól.

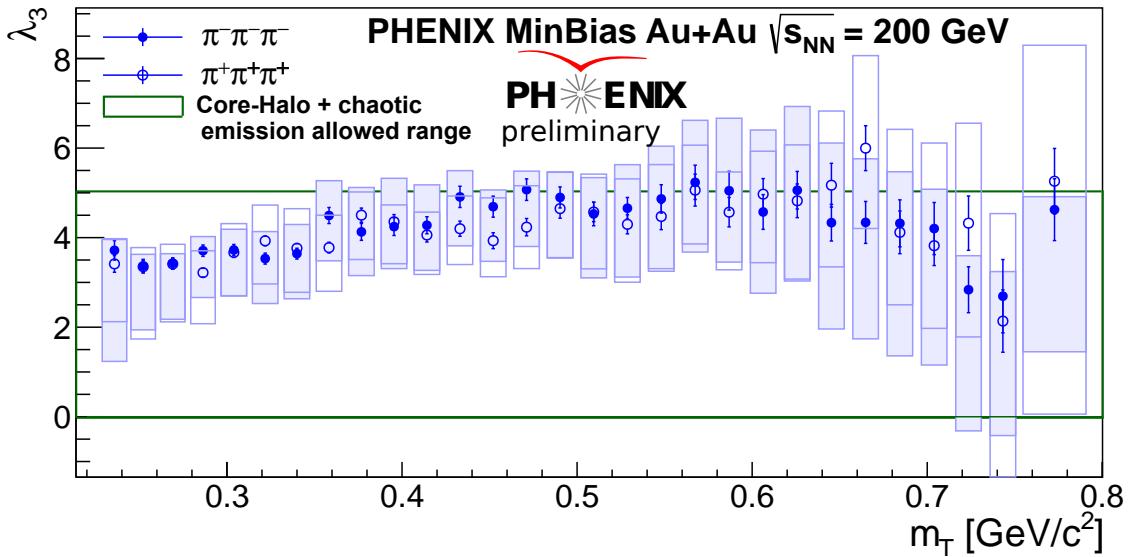
Mivel a tesztillesztések során az R és α paraméter megegyezett a kétrészecske analízisben meghatározott paraméterekkel, ezért a végső illesztésekben ezeket a paramétereket a lefixáltuk a kétrészecske analízisben kapott értékere (ezeket mutatja az 5.1 ábra). Ezzel az illesztési paraméterek számát 6-ról 4-re csökkentettük, ami jelentősen növelte az illesztési sebességet, valamint az illesztések stabilitását.



5.1. ábra. A kétrészecske analízis [20] során kapott R és α illesztési paraméterek az m_T függvényében.

5.2. Háromrészecske korrelációs erősség

Az ℓ_2 és ℓ_3 illesztési paraméterek segítségével a háromrészecske korreláció erőssége megkapható: $\lambda_3 = \ell_3 - 3\ell_2$. A korreláció erősségre kapott m_T függést az 5.2 ábra mutatja. Az ábrán látható mag-glória modellben kaotikus forrás esetén a λ_3 megengedett tartománya (zöld doboz). Továbbá az ábrán kék dobozok mutatják a szisztematikus hibát, a szokásos hibajelzők pedig a statisztikus hibát. Az ábra mutatja, hogy a korrelációs erősség minden m_T esetén a megengedett tartományban helyezkedik el.



5.2. ábra. A háromrészecske korrelációs erősségeinek az m_T függése. Az ábrán a pontok köré rajzolt dobozok mutatják a szisztematikus hibát.

5.3. Parciális koherencia

A mag-glória modell esetén már bevezettük a magarány paraméterét, valamint a parciális koherencia vizsgálata érdekében a koherensen keltett pionok arányát, melyeknek a definíciója az alábbi:

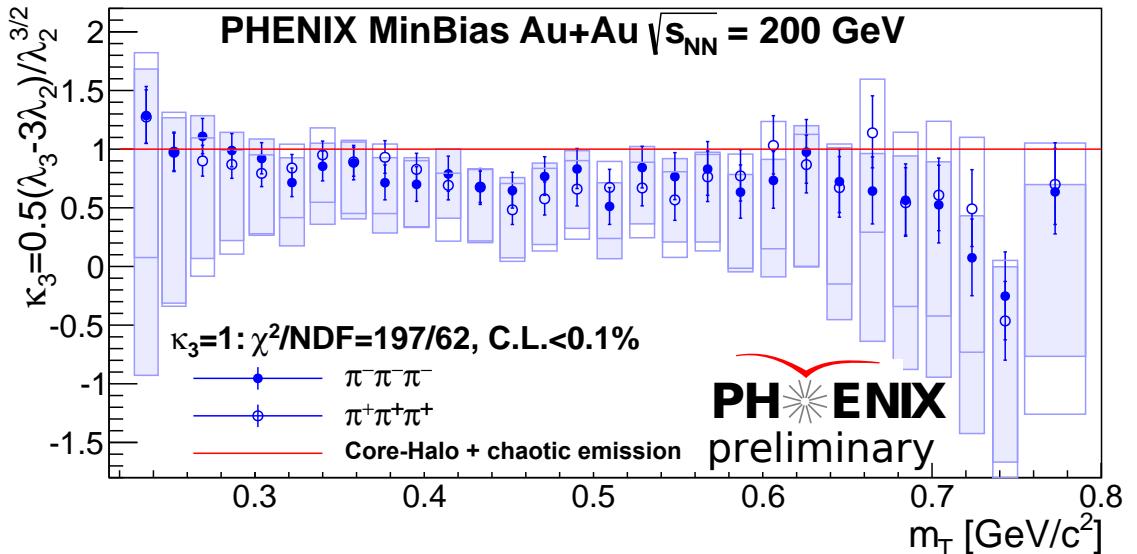
$$f_C = \frac{N_M}{N_M + N_G}, \quad p_C = \frac{N_M^C}{N_M^C + N_M^I}, \quad (5.3.1)$$

ahol N_M a magban, N_G a glóriában keletkezett részecskék száma. Az N_M^C a magban koherensen keletkezett, N_M^I az inkoherens módon keletkezett részecskék száma.

A két- és háromrészecske korrelációs erősségeknek (λ_2 , λ_3) a már bevezetett, κ_3 -al jelölt, kombinációjának specialitása, hogy nem függ az f_C paramétertől, azaz tisztán mag-glória modell esetén $\kappa_3 = 1$ minden m_T -re. A paraméter a λ_3 , λ_2 korrelációs erősségek alábbi kombinációja:

$$\kappa_3 = \frac{\lambda_3 - 3\lambda_2}{2\sqrt{\lambda_2^3}} \quad (5.3.2)$$

Láttuk továbbá, hogy amennyiben a mag részben koherens módon kelt részecskéket, amit a p_C paraméterrel jellemzünk, a κ_3 már nem lesz konstans, ehelyett valamilyen nem triviális p_C függéssel fog rendelkezni. Azaz ha az m_T függvényében a p_C változik, akkor a κ_3 paraméter is fog változni az m_T függvényében. Az 5.3 ábra mutatja ezen paraméter m_T függését. Az ábra azt mutatja, hogy a $\kappa_3 = 1$ esettől statisztikailag szignifikáns eltérés van, amely lehetőség ad a parciális koherencia létezésére.



5.3. ábra. A κ_3 paraméter m_T függése. Az ábrán a pontok köré rajzolt dobozok mutatják a szisztematikus hibát.

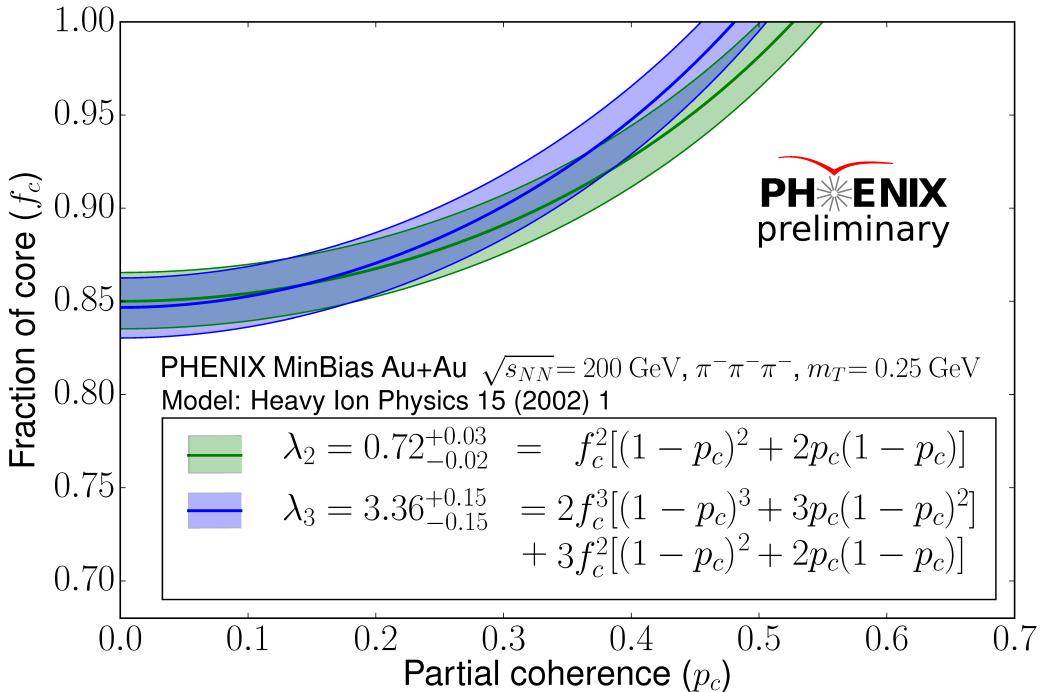
Mivel a $\kappa_3(m_T)$ ábra nem zárta ki a parciális koherencia létét, tovább vizsgáltuk ezt a jelenséget. Az előző fejezetekben tárgyaltam, hogy amennyiben létezik a jelenség, a két- és

háromrészecske korrelációs erősségek a következő alakban írhatók fel:

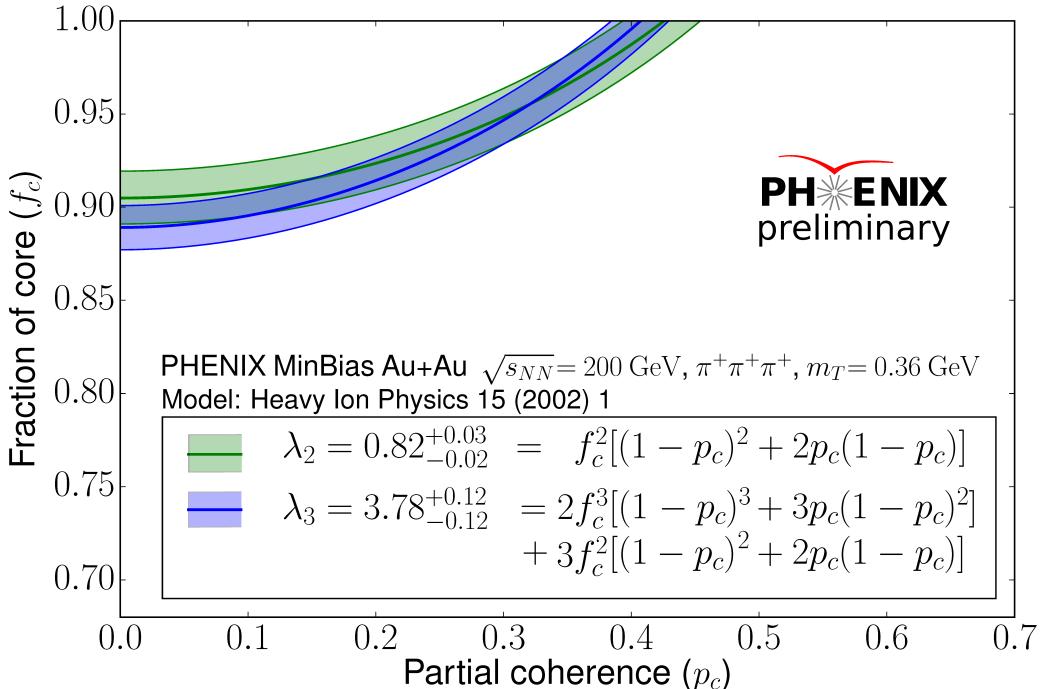
$$\begin{aligned}\lambda_2(f_C, p_C) &= f_C^2[(1 - p_C)^2 + 2p_C(1 - p_C)] \\ \lambda_3(f_C, p_C) &= 2f_C^3[(1 - p_C)^3 + 3p_C(1 - p_C)^2] + 3f_C^2[(1 - p_C)^2 + 2p_C(1 - p_C)]\end{aligned}\quad (5.3.3)$$

Adott m_T esetén ismerjük a λ_2 és λ_3 korrelációs erősségeket. Ezeket az 5.3.3 összefüggésekbe beírva kapunk két egyenletet az f_C paramétere mint a p_C függvénye. Ezután a $0 < p_C < 1$ értékeire minden $f_C(p_C)$ függvényt ábrázolhatjuk. Ezt láthatjuk $m_T = 250$ MeV esetén az 5.4, $m_T = 360$ MeV esetén pedig az 5.5 ábrán. Az ábrákon a sávok mutatják az 1σ statisztikus hibát, amely a λ_2 , λ_3 statisztikus hibájából adódik.

Az 5.4 és az 5.5 ábrák alapján a két vizsgált m_T érték esetén kizártató a 80%-nál kisebb magarány. Kizártató továbbá a domináns parciális koherencia léte, azaz az 50%-nál több koherens módon kelettel pion előfordulása, a két vizsgált transzverz tömeg esetén. Azonban ezen ábrák alapján lehetséges az 50%-nál kisebb parciális koherencia. Sőt, az ábrák mutatják, hogy lehetőség van a koherencia arányának modellfüggő meghatározására. A koherencia aránya λ_2 és λ_3 görbék metszéspontjából kapható meg. Az ábrák alapján $m_T = 250$ MeV esetén $p_C \approx 15\%$, $m_T = 360$ MeV esetén pedig $p_C \approx 32\%$.



5.4. ábra. Az f_C a p_C függvényében az $m_T = 250$ MeV esetén. A megmért λ_2 , λ_3 paramétereket az 5.3.3 egyenletekbe helyesítve adódik a két $f_C(p_C)$ függvény. Az ábrán a sávok mutatják az 1σ statisztikai hibát.



5.5. ábra. Az f_C a p_C függvényében az $m_T = 360$ MeV esetén. A megmért λ_2 , λ_3 paramétereket az 5.3.3 egyenletekbe helyesítve adódik a két $f_C(p_C)$ függvény. Az ábrán a sávok mutatják az 1σ statisztikai hibát.

6. Összefoglaló

A munkám során Lévy-típusú háromrészecske Bose-Einstein korrelációkat vizsgáltam elektromosan töltött pionok között. A korrelációs függvényt a Brookhaven Nemzeti Laboratórium Relativisztikus Nehézion-Ütköztetőnél (RHIC) található PHENIX detektorrendszerrel $\sqrt{s_{NN}} = 200$ GeV tömegközépponti energiájú arany-arany ütközésnél felvett adatokon határoztam meg. Az adathalmaz több milliárd eseményt tartalmazott, kalibráció és részecskeazonosítás után pedig 2.3 TB méretű volt. A korrelációs függvény alakjának meghatározása érdekében Lévy-eloszlásfüggvényt használtam a forrás jellemzésére. Mivel töltött részecskék korrelációját mértem, a Coulomb-kölcsönhatás jelentős járuléket adott a mért függvényben, ezért vizsgáltam a Coulomb-kölcsönhatás hatását.

A Coulomb-kölcsönhatás figyelembevétele érdekében vezettem a Coulomb-korrekciós faktort, amellyel a mért korrelációs függvényt megszorozva a kölcsönhatás járulékát eltüntetjük. A korrekció meghatározásának lényeges lépése a háromdimenziós Lévy-eloszlás pontos ismerete, ezért ennek meghatározására Gauss-Kronrod-módszert implementáltam, CPU és GPU párhuzamos változatban, lényegesen felgyorsítva a sok különböző paraméter esetén elvégzendő integ-

rálást. A Coulomb-korrekción meghatározására Markov-lánc Monte-Carlo-módszert használtam, mivel a háromrészecske korrekciót meghatározó integrál 9 dimenziós. Kétrészecske korrekció esetén elvégezve a számolást, teszteltem a módszer alkalmazhatóságát és az implementációm helyességét. A tesztelés során a PHENIX magyar csoport által használt, Nagy Márton által készített Coulomb-táblázattal hasonlítottam össze a programom eredményét. Dolgozatomban tárgyaltam a háromrészecske Coulomb-korrekción alkalmazhatóságát az analízis során, valamint bemutattam az elterjedten alkalmazott általánosított Riverside-közeliést. Egydimenziós altereken vizsgáltam a közelítő módszer pontosságát, azonban valószínűsíthetően a numerikus integrál pontatlanságából adóan az eltérés nagyobb volt, mint amit az irodalom alapján vártunk.

A háromrészecske Coulomb-korrekcióna közelítést alkalmazva a mérési adatokra háromrézecske Bose-Einstein korrelációs függvényt illesztettem. A Lévy-eloszlás α és R paramétere a várakozásunknak megfelelően megegyezett a kétrészecske analízis során kapott paraméterekkel. Az illesztésből meghatároztam háromrészecske korreláció erősségi transzverz tömegtől való függését. A kétrészecske korrelációs erősséget felhasználva vizsgáltam az általunk definiált κ_3 paraméter m_T függését is. Ezen paraméter mag-glória modell és kaotikus forrás esetén konstans ($\kappa_3 = 1$), ezért mérésével a modelltől való eltérést vizsgálhattuk. A mérés eredményeként azt tapasztaltuk, hogy a $\kappa_3 = 1$ esettől statisztikailag szignifikáns eltérés van. Erre az eltérésre egy magyarázat lehet a magban fellépő parciális koherencia, melyet munkám során részletesen vizsgáltam. Az analízis eredménye szerint a domináns parciális koherencia kizártató a vizsgált transzverz tömegek esetén, azonban nem túl erős koherencia előfordulhat, melynek nagyságát a használt modell keretei között meghatároztuk.

Köszönetnyilvánítás

Elsősorban téma vezetőmnek, Csanád Máténak, szeretném megköszönni a fáradhatatlan munkáját, melynek során bevezetett a nagyenergiás-nehézionfizika ezen területére és lehetővé tette, hogy a PHENIX kísérlethez csatlakozzak. Szeretném megköszönni támogatását, hogy mindvégig bízott munkámban és a rengeteg segítséget amit nyújtott az alapképzés elejétől kezdődően.

Továbbá szeretném köszönetet mondani Nagy Mártonnak a kétrészecske Coulomb-integrálval kapcsolatos munkájáért, valamint a kalibrációk és a részecskeazonosítás elvégzéséért.



A dolgozat az Emberi Erőforrások Minisztériuma ÚNKP-16-2 kódszámú
Új Nemzeti Kiválóság programjának támogatásával készült

Hivatkozások

- [1] Betty Bezverkhny Abelev et al. Two- and three-pion quantum statistics correlations in Pb-Pb collisions at $\sqrt{s_{NN}} = 2.76$ TeV at the CERN Large Hadron Collider. *Phys. Rev.*, C89(2):024911, 2014.
- [2] P. Achard et al. Test of the τ -Model of Bose-Einstein Correlations and Reconstruction of the Source Function in Hadronic Z-boson Decay at LEP. *Eur. Phys. J.*, C71:1648, 2011.
- [3] J. Adams et al. Three-pion hanbury brown-twiss correlations in relativistic heavy-ion collisions from the star experiment. *Phys. Rev. Lett.*, 91:262301, Dec 2003.
- [4] J. Adams et al. Pion interferometry in Au+Au collisions at $s(\text{NN})^{**}(1/2) = 200$ -GeV. *Phys. Rev.*, C71:044906, 2005.
- [5] A. Adare et al. Observation of direct-photon collective flow in $\sqrt{s_{NN}} = 200$ GeV Au+Au collisions. *Phys. Rev. Lett.*, 109:122302, 2012.
- [6] K. Adcox et al. PHENIX detector overview. *Nucl. Instrum. Meth.*, A499:469–479, 2003.
- [7] S. S. Adler et al. Bose-Einstein correlations of charged pion pairs in Au + Au collisions at $s(\text{NN})^{**}(1/2) = 200$ -GeV. *Phys. Rev. Lett.*, 93:152302, 2004.
- [8] S. S. Adler et al. Evidence for a long-range component in the pion emission source in Au + Au collisions at $s(\text{NN})^{**}(1/2) = 200$ -GeV. *Phys. Rev. Lett.*, 98:132301, 2007.
- [9] S. Afanasiev et al. Source breakup dynamics in Au+Au Collisions at $s(\text{NN})^{**}(1/2) = 200$ -GeV via three-dimensional two-pion source imaging. *Phys. Rev. Lett.*, 100:232301, 2008.
- [10] S. Afanasiev et al. Kaon interferometric probes of space-time evolution in Au+Au collisions at $s(\text{NN})^{**}(1/2) = 200$ -GeV. *Phys. Rev. Lett.*, 103:142301, 2009.
- [11] M. M. Aggarwal et al. Three-pion interferometry results from central $pb + pb$ collisions at 158AGeV/c. *Phys. Rev. Lett.*, 85:2895–2899, Oct 2000.
- [12] E. O. Alt, T. Csorgo, B. Lorstad, and J. Schmidt-Sorensen. Coulomb corrections to the three-body correlation function in high-energy heavy ion reactions. *Phys. Lett.*, B458:407–414, 1999.
- [13] E. O. Alt, T. Csorgo, B. Lorstad, and J. Schmidt-Sorensen. Coulomb wave function corrections for n particle Bose-Einstein correlations. *Eur. Phys. J.*, C13:663–670, 2000.
- [14] E. O. Alt, T. Csorgo, B. Lorstad, and J. Schmidt-Sorensen. Coulomb and core / halo corrections to Bose-Einstein N particle correlations. In *From e^+e^- to Heavy Ion Collisions:*

Proceedings of the 30th International Symposium on Multiparticle Dynamics (ISMD 2000), Tihany, Hungary, October 9-15, 2000, pages 564–571, 2001.

- [15] Sebastian Ament and Michael O’Neil. Accurate and efficient numerical calculation of stable densities via optimized quadrature and asymptotics. *Statistics and Computing*, pages 1–15, 1 2017.
- [16] G. Bertsch, M. Gong, and M. Tohyama. Pion Interferometry in Ultrarelativistic Heavy Ion Collisions. *Phys. Rev.*, C37:1896–1900, 1988.
- [17] M. Biyajima, M. Kaneyama, and T. Mizoguchi. Analyses of two and three pion Bose-Einstein correlations using Coulomb wave function. *Phys. Lett.*, B601:41–50, 2004.
- [18] J. Bolz, U. Ornik, M. Plumer, B. R. Schlei, and R. M. Weiner. Resonance decays and partial coherence in Bose-Einstein correlations. *Phys. Rev.*, D47:3860–3870, 1993.
- [19] Rene Brun and Fons Rademakers. Root - an object oriented data analysis framework. In *AIHENP’96 Workshop, Lausane*, volume 389, pages 81–86, 1996.
- [20] M. Csanad, T. Csorgo, D. Kincses, L. Roy, M. Wesley, M. Nagy, and T. Novak. Measurement and analysis of two-pion HBT correlations in Run-10 AuAu 200 GeV collisions, 2016. Internal PHENIX analysis note AN1244.
- [21] M. Csanad, T. Csorgo, and M. Nagy. Anomalous diffusion of pions at RHIC. *Braz. J. Phys.*, 37:1002–1013, 2007.
- [22] Mate Csanad and Marton Vargyas. Observables from a solution of 1+3 dimensional relativistic hydrodynamics. *Eur. Phys. J.*, A44:473–478, 2010.
- [23] M. Csanad. *Nagyenergiás atommag-ütközések téridőbeli lefolyása*. ELTE habilitációs dolgozat, 2013.
- [24] T. Csorgo. Higher order Bose-Einstein correlations for systems with large halo. *Phys. Lett.*, B409:11–18, 1997.
- [25] T. Csorgo. Particle interferometry from 40-MeV to 40-TeV. *Heavy Ion Phys.*, 15:1–80, 2002.
- [26] T. Csorgo. Review of HBT or Bose-Einstein correlations in high energy heavy ion collisions. *J. Phys. Conf. Ser.*, 50:259–270, 2006.
- [27] T. Csorgo, B. Lorstad, J. Schmid-Sorensen, and Andras Ster. Partial coherence in the core / halo picture of Bose-Einstein n particle correlations. *Eur. Phys. J.*, C9:275–281, 1999.
- [28] T. Csorgo, B. Lorstad, and J. Zimanyi. Bose-Einstein correlations for systems with large halo. *Z. Phys.*, C71:491–497, 1996.

- [29] *NIST Digital Library of Mathematical Functions*. <http://dlmf.nist.gov/>, Release 1.0.14 of 2016-12-21. F. W. J. Olver, A. B. Olde Daalhuis, D. W. Lozier, B. I. Schneider, R. F. Boisvert, C. W. Clark, B. R. Miller and B. V. Saunders, eds.
- [30] Gerson Goldhaber, Sulamith Goldhaber, Won-Yong Lee, and Abraham Pais. Influence of Bose-Einstein statistics on the anti-proton proton annihilation process. *Phys. Rev.*, 120:300–312, 1960.
- [31] R. Hanbury Brown and R. Q. Twiss. A Test of a new type of stellar interferometer on Sirius. *Nature*, 178:1046–1048, 1956.
- [32] M. Kőfaragó. *Bose-Einstein korrelációk mérése és vizsgálata nagyenergiás mag-mag ütközésekben*. ELTE diplomamunka, 2013.
- [33] Vardan Khachatryan et al. Measurement of Bose-Einstein Correlations in pp Collisions at $\sqrt{s} = 0.9$ and 7 TeV. *JHEP*, 05:029, 2011.
- [34] L.D. Landau and E.M. Lifshitz. *Elméleti fizika III.: Kvantummechanika*. Number v. 3. TYPOTeX, 2010.
- [35] Michael Annan Lisa, Scott Pratt, Ron Soltz, and Urs Wiedemann. Femtoscopy in relativistic heavy ion collisions. *Ann. Rev. Nucl. Part. Sci.*, 55:357–402, 2005.
- [36] T. Mizoguchi and M. Biyajima. An Improved formulation for three charged particles correlations in terms of Coulomb wave functions with degree of coherence. *Phys. Lett.*, B499:245–252, 2001.
- [37] J.R. Norris. *Markov Chains*. Cambridge Series in Statistical and Probabilistic Mathematics. Cambridge University Press, 1998.
- [38] Art B. Owen. *Monte Carlo theory, methods and examples*. 2013.
- [39] Sandra S. Padula. HBT interferometry: Historical perspective. *Braz. J. Phys.*, 35:70–99, 2005.
- [40] S. Pratt. Coherence and Coulomb Effects on Pion Interferometry. *Phys. Rev.*, D33:72–79, 1986.
- [41] S. Pratt, T. Csorgo, and J. Zimanyi. Detailed predictions for two pion correlations in ultrarelativistic heavy ion collisions. *Phys. Rev.*, C42:2646–2652, 1990.
- [42] A. Ster, M. Csanad, T. Csorgo, B. Lorstad, and B. Tomasik. Spectra, elliptic flow and azimuthally sensitive HBT radii from Buda-Lund model for $\sqrt{s_{NN}} = 200$ GeV Au+Au collisions. *Eur. Phys. J.*, A47:58, 2011.

- [43] Steven Weinberg. *The First Three Minutes*. Basic Books, New York, New York, 1977.
- [44] Eric W. Weisstein. Legendre-gauss quadrature. From MathWorld—A Wolfram Web Resource.
- [45] Urs Achim Wiedemann and Ulrich W. Heinz. Particle interferometry for relativistic heavy ion collisions. *Phys. Rept.*, 319:145–230, 1999.
- [46] I. Yildirim. Bayesian inference: Metropolis-hastings sampling, 2012. Published: <http://www.mit.edu/~ilkery/>.