Hidrodinamika

Bagoly Attila

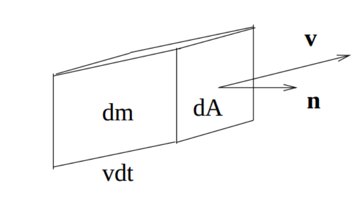
ELTE

2013.01.28

Bevezető

- Alapvető keresett mennyiségek: $\vec{v}(\vec{r}, t)$, $\rho(\vec{r}, t)$, $p(\vec{r}, t)$, $T(\vec{r}, t)$
- Ideális folyadék: összenyomhatatlan
- Tökéletes folyadék: elhanyagolható a viszkozitás és a hővezetés
- Állapotegyenlet: lokális termodinamikai egyensúlyt feltételezünk, kell egy nem "hidrodinamikai" egyenlet (pl. $\epsilon = \kappa p$),

Kontinuitási egyenlet



Ábra alapján a felületen kiáramló tömeg: $dm = \rho\vec{v}\vec{n}dAdt$ Az anyag megmarad tehát ami a felületen kiáramlik "bentről" eltűnik, azaz:

$$\frac{d}{dt}\int \rho dV + \oint \rho\vec{v}d\vec{A} = 0$$

Az felületi integrál Gauss tétel segítségével könnyedén átírható és így kapjuk a differenciális alakot:

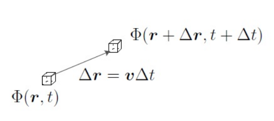
$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho\vec{v}) = 0$$

Euler-egyenlet

Hidrodinamikai derivált:

$$\Delta\phi = \phi(\vec{r}+\Delta\vec{r}, t+\Delta t) - \phi(\vec{r}, t) \Rightarrow$$

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{\partial\phi}{\partial t} + (\vec{v}\nabla)\phi$$



Kontinuummechanika mozgásegyenlete: $\rho\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{f} + div(\sigma)$. Tökéletes folyadékra érvényes (Pascal törvény): $\sigma = -pE$. Ezek alapján felírhatjuk a tökéletes folyadékra érvényes mozgásegyenletet ($f = 0$):

$$\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\nabla)\vec{v} = -\frac{\nabla p}{\rho}$$

Euler-egyenlet kicsit másként

Láttuk, hogy az anyag megmarad és a megmaradását a kontinuitás egyenlet írja le. Mi marad még meg?
Ha nem lenne nyomás tag akkor az impulzussűrűség ($\rho\vec{v}$) megmaradna.
Az impulzus meg nem maradást is felírhatjuk kontinuitás egyenlethez hasonlóan! Olyan kontinuitás egyenlet amelyben forrás tag jelenik meg! (Ezeket mérlegegyenleteknek nevezzük) Formálisan:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int \rho\vec{v}dV + \oint(\rho\vec{v})\circ\vec{v}d\vec{A} + \oint p d\vec{A} = 0$$

A felületi integrálokat térfogativá alakítva kaphatjuk meg az egyenlet differenciális alakját:

$$\frac{\partial\rho\vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\nabla)\rho\vec{v} = -\nabla p$$

Miért néztük meg ezt a konstrukciót? Még van "megmaradó" mennyiség!

Energia egyenlet

Az előbbihez hasonlóan az energiasűrűség meg nem maradására is mérlegegyenletet írhatunk fel. A "megmaradó" mennyiség most az energiasűrűség, melynek a forrástagja a nyomásból származó teljesítmény.

$$\frac{\partial}{\partial t}\int \rho\epsilon dV + \oint \rho\epsilon\vec{v}d\vec{A} + \oint p\vec{v}d\vec{A} = 0$$

Az integrálokat átalakítva kaphatjuk meg az energia egyenlet differenciális alakját:

$$\frac{\partial\rho\epsilon}{\partial t} + \nabla\rho\epsilon\vec{v} = -\nabla p\vec{v}$$

Összegzés

- Tehát a 6 darab keresett mennyiségre megalkottuk a 6 darab egyenletet.
- Ez egy 6 ismeretlenes parciális differenciálegyenlet rendszer, nem lineáris!
- Kezdő és peremfeltételek kellenek a megoldások illesztéséhez
- Analitikus megoldásuk nehéz, és az összes megoldást nem lehet megtalálni (nem lineáris)
- De van pár megoldás, a következőkben ezekből mutatok be kettőt
- Az egyenletek átfogalmazhatók számsűrűségekre is, a fent kapott egyenletekben a sűrűség helyére mindenhol számsűrűséget kell írni

Csizmadia-féle megoldás

A megoldás során az ideális gáz állapotegyenletét használták:
$\epsilon(\vec{r},t) = \frac{3}{2}p(\vec{r},t)$

A kereset mennyiségek a következőképpen alakulnak a modellben:
$p(\vec{r},t) = n(\vec{r},t)\,T(t)$
$n(\vec{r},t) = \frac{N}{(2\pi R(t)^2)^{3/2}} exp\left(-\frac{r^2}{2R(t)^2}\right)$
$T(t) = \frac{T_0}{\varphi(t)}$
$R^2(t) = R_0^2\varphi(t)$
$\vec{v}(\vec{r},t) = \frac{\dot{\varphi}(t)}{2\varphi(t)}\vec{r}$
$\varphi(t) = (1 + \frac{t-t_0}{\tau})^2 + \frac{T_0\tau^2}{mR_0^2}$
A megoldás kezdetben Gauss-eloszlást követ.

Csörgő-megoldása

A hidrodinamika egyenletei a következő állapotfüggvényekkel egészítették ki: $p = nT$, $\epsilon = \kappa p$

A megoldás ellipszoidális szimmetriát tételez fel a következő skálaparaméterrel: $s = \frac{r_x^2}{X(t)^2} + \frac{r_y^2}{Y(t)^2} + \frac{r_z^2}{Z(t)^2}$

A táguló ellipszoid tágulási sebességének leírására a Hubble sebességmező mintájára a következő sebességmezőt vezette be: $\vec{v} = (\frac{\dot{X}}{X} r_x, \frac{\dot{Y}}{Y} r_y, \frac{\dot{Z}}{Z} r_z)$

A további keresett mennyiségek a következőképpen alakulnak a megoldás szerint:

$n = n_0 \frac{V_0}{V} \nu(s)$

$T = T_0 (\frac{V_0}{V})^{1/\kappa} \tau(s)$

$\nu(S) = \frac{1}{\tau(s)} exp(-\frac{T_i}{2T_0} \int_0^2 \frac{du}{\tau(u)})$

Ahol a $V = XYZ$.

Ahhoz, hogy a fenti mennyiségek megoldják a hidrodinamika egyenletnek fenn kell állnia a következő egyenletnek: $X\ddot{X} = Y\ddot{Y} = Z\ddot{Z} = \frac{T_i}{m} (\frac{V_0}{V})^{1/\kappa}$

Kontinuitási egyenlet

Lorentz-faktor: $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$
Négyes helyvektor: $x_\mu = \gamma(c, \vec{v})$
Négyes gradiens: $\partial_\mu = (\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, \nabla)$
Számoljuk ki a következőt: $\partial_\mu(nu^\mu) = \frac{\partial}{\partial t}(n\gamma) + \nabla(n\gamma\vec{v})$ Ha $v << c$ akkor $\gamma = 1$, tehát épp a nem relativisztikus kontinuitás egyenletet kaptuk meg.
Tehát a relativisztikus kontinuitásegyenlet:

$$\partial_\mu(nu^\mu) = 0$$

Termodinamika

Energia természetes változói az S, V, N.
Termodinamika második főtétele: $dE = Tds - pdV + \mu dN$
Euler egyenlet: $E = TS - pV + \mu N$
Gibbs-Duham reláció: $SdT - Vdp + Nd\mu = 0$.

Bevezetjük a sűrűségeket: energiasűrűség $\epsilon = \frac{E}{V}$, entrópiasűrűség $\sigma = \frac{S}{V}$, számsűrűség $n = \frac{N}{V}$. A fenti egyenleteket átírjuk az új fogalmakkal: $d\epsilon = Td\sigma + \mu dn$, $\epsilon = T\sigma - p + \mu n$, $dp = \sigma dT + nd\mu$.
Bevezetjük a számsűrűségeket: $e = \frac{E}{N}$, $s = \frac{S}{N}$, $\frac{1}{n} = \frac{V}{N}$

Új mennyiség: fajlagos entalpia: $w = \frac{H}{N} = e + \frac{p}{n} = \frac{\epsilon+p}{n} = Ts + \mu$
Átírjuk az energiasűrűséget: $d\epsilon = wdn + nTds$. Tehát az energiasűrűség a számsűrűségnek és a fajlagos entrópiának a függvénye!

Energia-impulzus tenzor definíciója

Hatás: $S = \int \frac{d^4x}{c}\sqrt{-g}\mathcal{L}$
Energia-impulzus tenzor: $\delta S = \int \frac{d^4x}{c}\sqrt{-g}\frac{1}{2}T_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}$.

De mi a Lagrange sűrűségfüggvény?
Szabad részecske esetén: $S = -mc^2 \int d\tau$. Szorozzunk rá 1-el!
$S = -mc^2 \int d\tau \int dV_0 \delta_0(\vec{r} - \vec{R}) = -\int \frac{d^4x}{c} mc^2 \delta_0(\vec{r} - \vec{R})$
Energiasűrűség: $\epsilon = mc^2\delta_0(\vec{r} - \vec{R})$.
Tehát megvan, hogy mi a hidrodinamikában a Lagrange függvény:

$$\mathcal{L} = \epsilon(n, s)$$

Hatás: $S = -\int \frac{d^4x}{c}\sqrt{-g}\epsilon(n, s)$
Ezt kell variálnunk a metrikus tenzor szerint!

Energia-impulzus tenzor meghatározása

- A metrikától függ, hogy mi a térfogat!
- A részecskék száma nem függ attól, hogy hogy írom le a téridőt: N invariáns, metrika szerinti variációja nulla!
- A részecske számsűrűség függ a metrikától, mert a térfogat is függ!
- Azt mondjuk, hogy a fajlagos entrópia (részecskeszámmal osztunk!) nem függ a metrikától.

$$\delta N = \delta \int n dV_0 = \delta \int \frac{d^4x}{d\tau c}\sqrt{-g}\,n = 0 \Rightarrow \delta\left(\frac{n\sqrt{-g}}{d\tau}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \delta ln\left(\frac{n\sqrt{-g}}{d\tau}\right) = 0 \Rightarrow \frac{\delta n}{n} = \frac{\delta(d\tau)}{d\tau} - \frac{\delta\sqrt{-g}}{\sqrt{-g}}$$

Energia-impulzus tenzor meghatározása

$$\delta(d\tau) = \frac{1}{c}\delta\sqrt{ds^2} = \frac{1}{c}\frac{1}{2ds}\delta(ds^2) = \frac{1}{2c^2 d\tau}\delta(g_{kl}dx^k dx^l)$$

$$\Rightarrow \frac{\delta(d\tau)}{d\tau} = \frac{1}{2c^2}\frac{dx^k}{d\tau}\frac{dx^l}{d\tau}\delta g_{kl} = \frac{1}{2c^2}u^k u^l \delta g_{kl}$$

Tudjuk, hogy (determináns mátrix elem szerinti deriváltja): $\frac{\partial g}{\partial g_{kl}} = gg^{kl}$

$$\delta\sqrt{-g} = \frac{1}{2\sqrt{-g}}(-g)g^{kl}\delta g_{kl} = \frac{\sqrt{-g}}{2}g^{kl}\delta g_{kl}$$

$$\Rightarrow \delta n = \frac{n}{2}(\frac{u^k u^l}{c^2} - g^{kl})\delta g_{kl}$$

Most már a hatásban megjelenő minden tag variációját ismerjük! A következőkben variálom a hatást és kapom az energia impulzus tenzort!

Energia-impulzus tenzor meghatározása

$$\delta S = \int \frac{d^4x}{c}\left[\epsilon\delta\sqrt{-g} + \sqrt{-g}\left(\frac{\partial\epsilon}{\partial n}\delta n + \frac{\partial\epsilon}{\partial s}\delta s\right)\right] =>$$

$$\delta S = \int \frac{d^4x}{c}\left[\epsilon\frac{\sqrt{-g}}{2}g^{kl}\delta g_{kl} + \sqrt{-g}w\frac{n}{2}(\frac{u^k u^l}{c^2} - g^{kl})\delta g_{kl}\right]$$

Elértük a célunkat!

$$\delta S = \int \frac{d^4x}{c}\frac{\sqrt{-g}}{2}\left[\epsilon g^{kl} + (\epsilon + p)\left(\frac{u^k u^l}{c^2} - g^{kl}\right)\right]\delta g_{kl}$$

Tehát a keresett energia-impulzus tenzor: $T^{kl} = (\epsilon + p)\frac{u^k u^l}{c^2} - pg^{kl}$ A klasszikus hidrodinamika egyenleteinek itt az lesz a megfelelője, hogy e tenzor divergenciamentes, azaz

$$\partial_\mu T^{\nu\mu} = 0$$

Landau-Khalatnikov-megoldás

- Landau javasolta először a folyadékmodellt relativisztikus ütközésekre, ő is vezette le az egyenleteket
- Talált rájuk egy 1+1 dimenziós megoldást
- A megoldás gyorsuló
- Implicit

Hwa-Bjorken-megoldás

- A megoldás 1+1 dimenziós, gyorsulásmentes, explicit
- Kezdeti energiasűrűség könnyen becsülhető vele, a mért részecskeszám és energiasűrűség alapján
- Bevezetett egy f(k) impulzuseloszlás függvényt (adott impulzussal milyen valószínűséggel vannak, adott helyen)
- Feltételezés: kezdősebesség ütközés középpontjánál maximális
- Tömegközépponti rendszerben írta fel, b=0 impakt paraméterrel
- Részecskéket csoportokra osztotta, csoport átlagos helye x_μ
- Definiált egy F(x,k) számsűrűségfüggvényt (x_μ csoportban azon részecskék melyek k, k+dk impulzussal rendelkeznek)

Sebességmező: $u_\mu = \frac{x_\mu}{\tau}$; Energia-impulzus tenzor: $T_{\mu\nu} = \int k_\mu k_\nu F(x,k) \frac{d^3k}{k_0}$; Részecskeszám rapiditás-eloszlása: $\frac{dN}{d\eta} = \tau_0$

Nagy-Csörgő-Csanád-megoldás

- A megoldás 1+1 dimenziós, gyorsuló, explicit
- Speciális esetként tartalmazza a HB-t is
- LK megoldáshoz képest az előnye az, hogy explicit
- A megoldás a kezdeti energiasűrűség valamint a lejátszódó reakciók időtartamának becslésére alkalmas
- Meghatározható belőle a rapiditás-eloszlás

A használt állapotegyenlet: $\epsilon - B = \kappa(p + B)$, ahol B konstans
Sebesség: $v = th(\lambda\eta)$ Számsűrűség: $n = n_0(\frac{\tau_0}{\tau})^{\lambda d}\nu(s)$ Hőmérséklet: $T = T_0(\frac{\tau_0}{\tau})^{\lambda d/\kappa}\frac{1}{\nu(s)}$
Ha $\lambda = 1$, $d, \kappa \in R$ akkor a HB-t kapjuk vissza.

Csörgő-Csernai-Hama-Kodama-megoldás

- A megoldás 3+1 dimenziós, nem gyorsuló, explicit
- Ellipszoidális szimmetria

A skálaparaméter: $s = \frac{x^2}{X(t)^2} + \frac{y^2}{Y(t)^2} + \frac{z^2}{Z(t)^2}$
A megoldás egy táguló ellipszoid (az s skálaparaméter írja le), a tágulást leíró sebességet az asztrofizikában használatos Hubble-sebességmező ($v = Hr$) alapján konstruálták, amely nagyon hatékonyan leírja a robbanásszerű folyamatokat.
A sebességmezőt a következőképpen kell megalkotni:
$u^\mu = \gamma(1, \frac{\dot{X}}{X}x, \frac{\dot{Y}}{Y}y, \frac{\dot{Z}}{Z}z)$
A nyomástér: $n = n_0(\frac{\tau}{\tau_0})^3 \nu(s)$
A hőmérséklet: $T = T_0(\frac{\tau}{\tau_0})^{3/\kappa}\frac{1}{\nu(s)}$
A nyomástér: $p = p_0(\frac{\tau}{\tau_0})^{3+3/\kappa}$
Ez egy megoldás a relativisztikus hidrodinamika egyenleteinek amennyiben: $\dot{X}, \dot{Y}, \dot{Z}$ állandók.

Köszönöm a figyelmet!