Nagyenergiás nehézion-ütközések numerikus hidrodinamikai modellezése

Bagoly Attila
ELTE TTK Fizika BSc, 3. évfolyam

Témavezető:
Csanád Máté

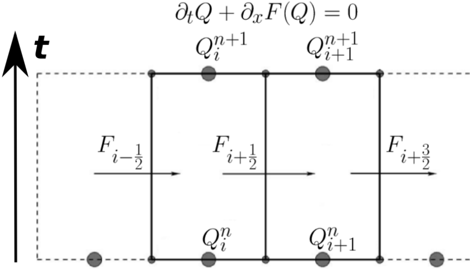
ELTE TTK Atomfizikai tanszék

2015.08.19.

Numerikus módszer

- Transzverz sík kitüntetett: $2+1$ dimenziós egyenletek
- Hidrodinamika egyenletei: $\partial_t Q + \partial_x F(Q) + \partial_y G(Q) = 0$

- Numerikus megoldás: diszkretizáció $\leftarrow$ véges térfogat módszer
- Probléma: fluxusok a rácspontok között



- Instabilitás: perturbáció amely rácspontokban nulla $\rightarrow$ CFL feltétel
- 2 térdimenziót bonyolult $\rightarrow$ operátor szétválasztás
- Viszkozitás: ideális fluxus + viszkózus fluxus $\leftarrow$ operátor szétválasztás

MUSTA módszer

- n-edik időlépésben: $Q_i^{(0)} \equiv Q_i^n$, $Q_{i+1}^{(0)} \equiv Q_{i+1}^n$
- ℓ-edik előrejelzett fiktív értékek: $Q_i^{(\ell)}$, $F_i^{(\ell)} \equiv F\left(Q_i^{(\ell)}\right)$
- Köztes érték és fluxus:

$$Q_{i+\frac{1}{2}}^{(\ell)} = \frac{1}{2}\left[Q_i^{(\ell)} + Q_{i+1}^{(\ell)}\right] - \frac{1}{2}\frac{\Delta t}{\Delta x}\left[F_{i+1}^{(\ell)} - F_i^{(\ell)}\right], \quad F_M^{(\ell)} \equiv F\left(Q_{i+\frac{1}{2}}^{(\ell)}\right)$$

- Korrigált cellaközi fluxus:

$$F_{i+\frac{1}{2}}^{(\ell)} = \frac{1}{4}\left[F_{i+1}^{(\ell)} + 2F_M^{(\ell)} + F_i^{(\ell)} - \frac{\Delta x}{\Delta t}\left(Q_{i+1}^{(\ell)} - Q_i^{(\ell)}\right)\right]$$

- Következő előrejelzés a korrigált fluxusok meghatározásához:

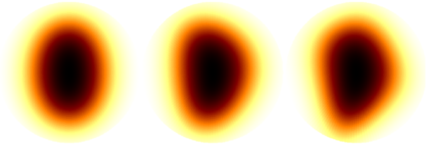
$$Q_i^{(\ell+1)} = Q_i^{(\ell)} - \frac{\Delta t}{\Delta x}\left[F_{i+\frac{1}{2}}^{(\ell)} - F_i^{(\ell)}\right]$$

- k lépés $\rightarrow F_{i+\frac{1}{2}} = F_{i+\frac{1}{2}}^{(k)} \implies Q_i^{n+1} = Q_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}\left(F_{i+\frac{1}{2}} - F_{i-\frac{1}{2}}\right)$
- A módszer publikálva: E. F. Toro et al, 2006, J. Comp. Phys

Kezdőfeltétel és aszimmetria paraméterek

- Mennyiségek: helyfüggés csak skálaváltozóban, ebben szimmetria
- Számsűrűség és nyomás $\propto \exp(-s)$; sebességmező: Hubble/0
- Skálaváltozó:

$$s = \frac{r^2}{R^2}\left(1 + \epsilon_2 \cos(2(\phi - \psi_2)) + \epsilon_3 \cos(3(\phi - \psi_3)) + \epsilon_4 \cos(4(\phi - \psi_4))\right)$$



- Aszimmetriát jellemző paraméter: $\varepsilon_n = \langle \cos(n\phi) \rangle_{\rho/\mathbf{v}/p}$
- ε_n (most bevezetett) $\neq \epsilon_m$ (kezdőfeltétel skálaváltozójában)

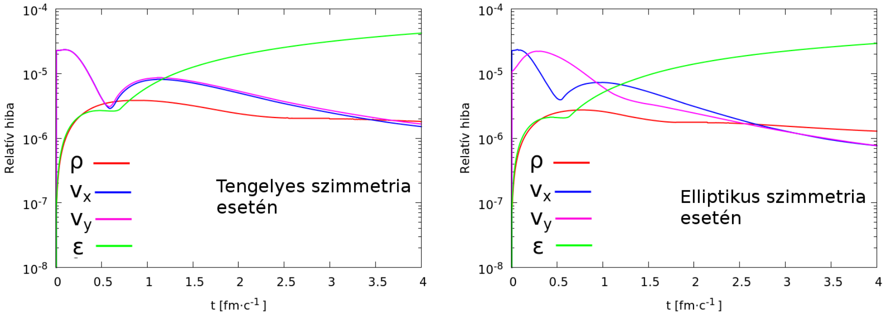
Aszimmetriák jellemzése

- Skálaváltozó: $s = \frac{r^2}{R^2}\left(1 + \epsilon_2 \cos(2\phi) + \epsilon_3 \cos(3\phi) + \epsilon_4 \cos(4\phi)\right)$
- Aszimmetriát jellemző paraméter: $\varepsilon_n = \langle \cos(n\phi) \rangle_{\rho/\mathbf{v}/p}$
- ε_n (most bevezetett) $\neq \epsilon_m$ (kezdőfeltétel skálaváltozójában)
- Kezdetben a ε_n és ϵ_m közti kapcsolatot becsülhetjük Taylor-sorfejtéssel: $\chi = 2 + \sum_n \varepsilon_n^2$
    - $< cos(\varphi) >= \left([\varepsilon_2 \cdot \cos\left(2\psi_2 - 3\psi_3\right) + \varepsilon_4 \cdot \cos\left(4\psi_4 - 3\psi_3\right)]\varepsilon_3\right)/\chi$
    - $< cos(2\varphi) >= \left(-\varepsilon_2 \cdot \cos 2\psi_2 + \varepsilon_2\varepsilon_4 \cdot \cos\left(2\psi_2 - 4\psi_4\right)\right)/\chi$
    - $< cos(3\varphi) >= \left(-\varepsilon_3 \cdot \cos 3\psi_3\right)/\chi$
    - $< cos(4\varphi) >= \left(-\varepsilon_4 \cdot \cos 4\psi_4 + \frac{1}{4}\varepsilon_2^2 \cdot \cos 4\psi_2\right)/\chi$

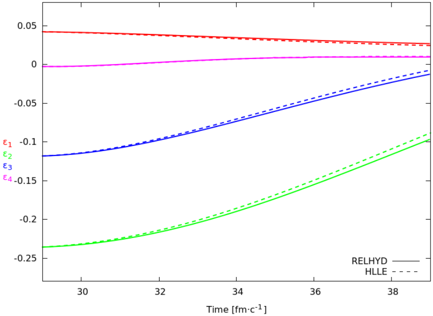
Kód tesztelése

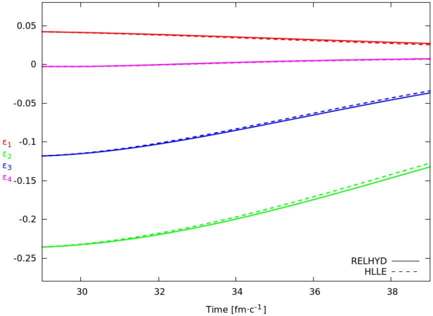
- Egzakt megoldással (Csörgő et al, PhysRevC67)
- Relatív hiba a numerikus és analitikus megoldás közt:

$$\int |\rho_{\text{analitikus}}(t,\underline{x}) - \rho_{\text{numerikus}}(t,\underline{x})|d^2x \Big/ \int \rho_{\text{analitikus}}(t,\underline{x})d^2x$$

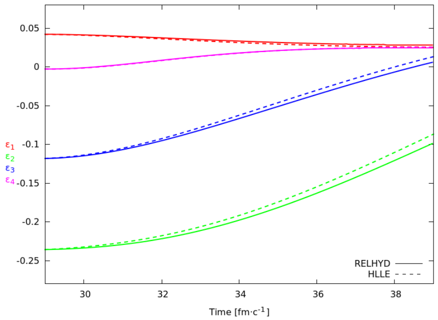


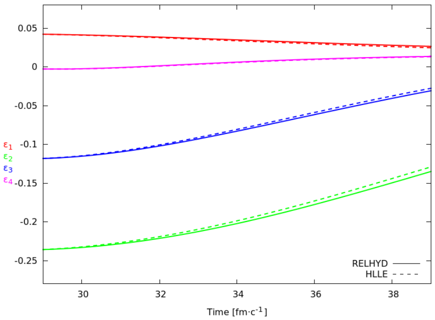
Relativisztikus kód tesztelése: Számsűrűség $\kappa = 2$ és $\kappa = 4$



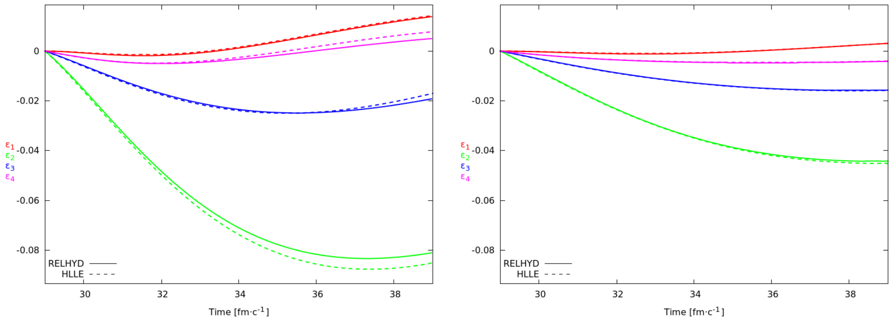


Relativisztikus kód tesztelése: Nyomás $\kappa = 2$ és $\kappa = 4$



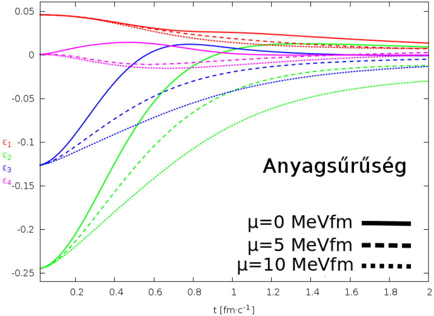


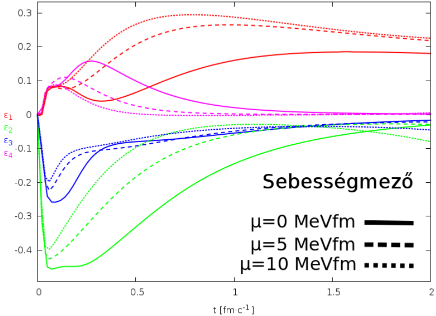
Relativisztikus kód tesztelése: Sebességmező $\kappa = 2$ és $\kappa = 4$



Viszkozitás hatása

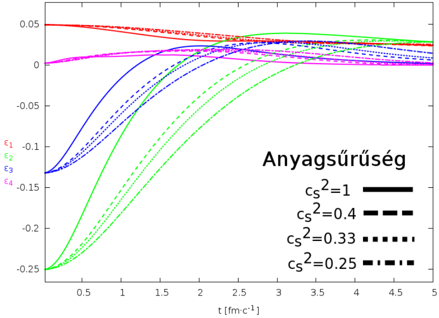
- Energiasűrűségben és anyagsűrűségben: lassít
  - Viszkozitás: lassítja az áramlást
- Sebességeloszlásban: gyorsít
  - Nagyobb,kisebb aszimmetriájú részek más erőt éreznek: különbségek gyorsan eltűnnek
- Ábra: ε_1 piros, ε_2 zöld, ε_3 kék, ε_4 magenta

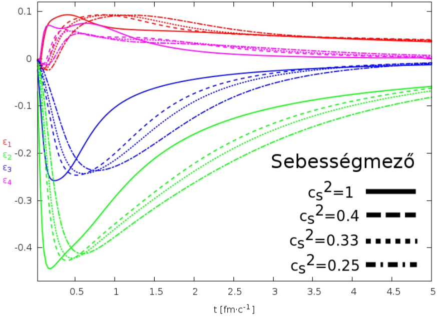




Hangsebesség hatása

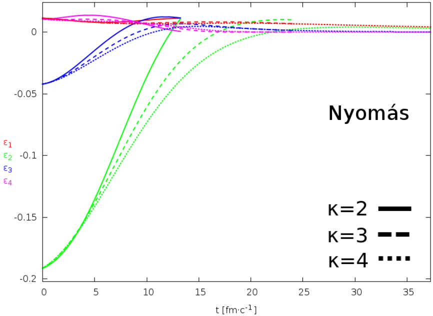
- Minden eloszlásban: aszimmetriák eltűnése lassul
  - Nyomáshullámok sebessége csökken → kiegyenlítődés tovább tart
- Hangsebességek: $c_s^2 = 1$ vagy $0,4$ vagy $0,33$ vagy $0,25$

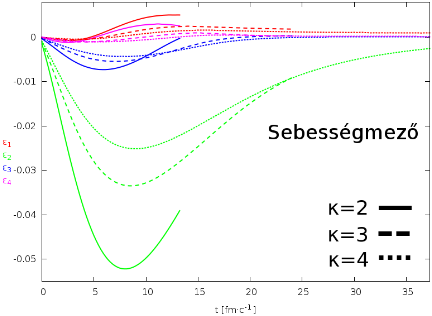




Hangsebesség hatása

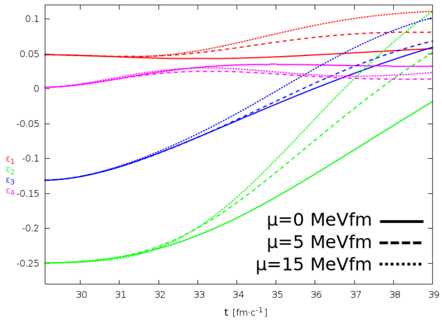
- Minden eloszlásban: aszimmetriák eltűnése lassul
  - Nyomáshullámok sebessége csökken → kiegyenlítődés tovább tart
- Kifagyás máskor történik!

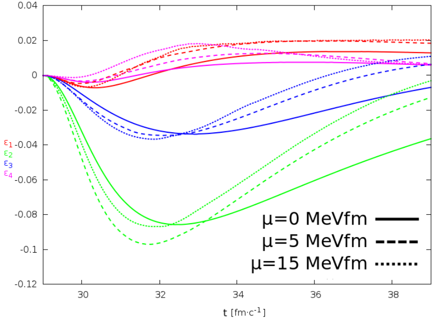




Viszkozitás hatása

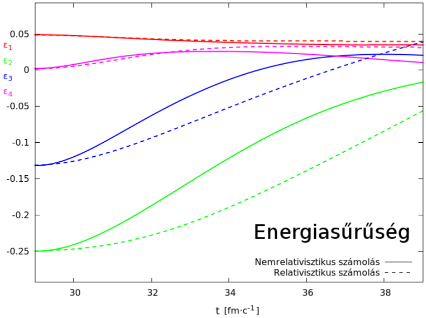
- Energiasűrűségben, anyagsűrűségben, sebességeloszlásban: gyorsít
- Nemrelativisztikus esetben más eredmény
- Ábra: nyomáseloszlásban és sebességmezőben számolt aszimmetriaparaméterek

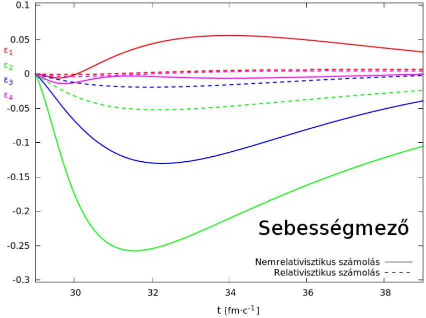




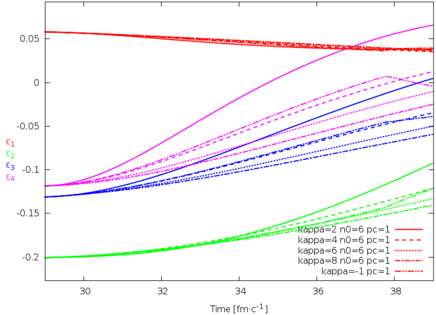
Relativisztikus és nemrelativisztikus hidrodinamika összehasonlítása

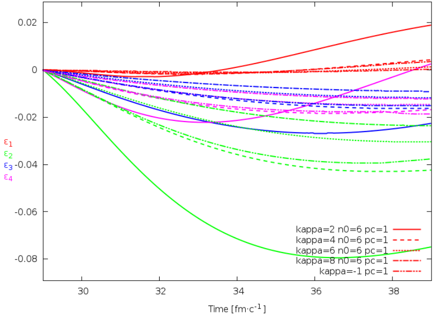
- Relativisztikus eset: lassabban tűnik el az asszimmetria
- Nemrelativisztikus eset: sebességmezőben nagyobb aszimmetria alakul ki



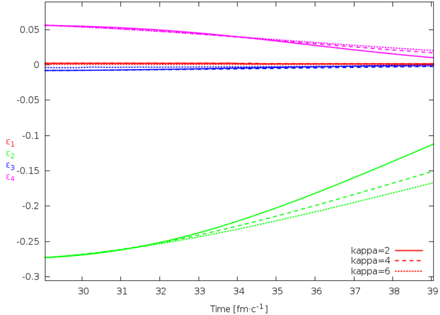


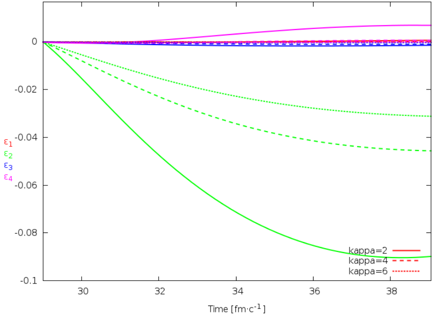
QCD állapotegyenlet



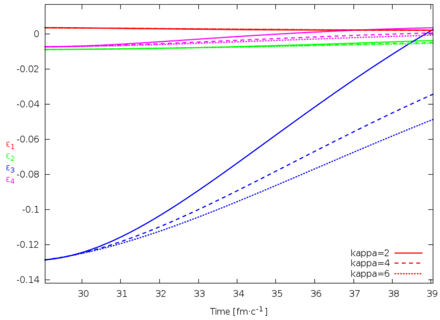


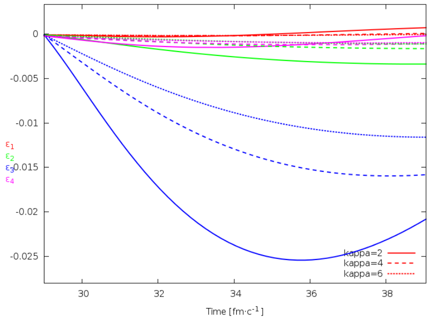
Reakciósík átlagolás: $\psi_2 = 0$



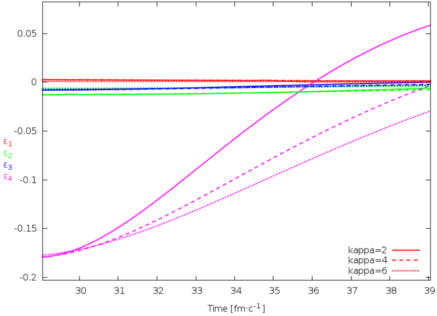


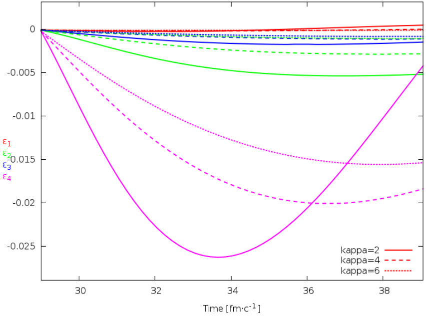
Reakciósík átlagolás: $\psi_3 = 0$





Reakciósík átlagolás: $\psi_4 = 0$





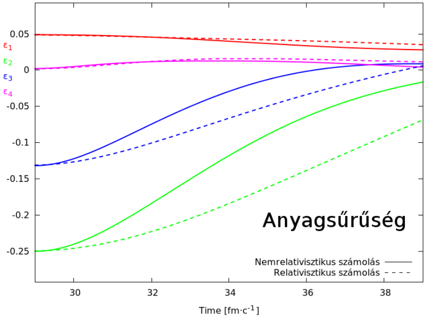
Összegzés

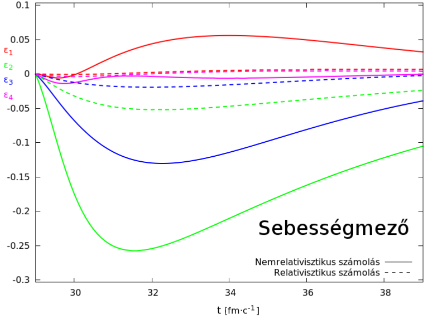
- Két kód: relativisztikus és nemrelativisztikus hidrodinamikára külön + Karpenko kódja relativisztikus viszkozitásra
- Teszteltük a kódokat
- Vizsgáltuk a hangsebesség, viszkozitás hatását az időfejlődésre
- QCD állapotegyenletet is használtunk
- Néztünk reakciósíkokra vett átlagot

Köszönöm a figyelmet!

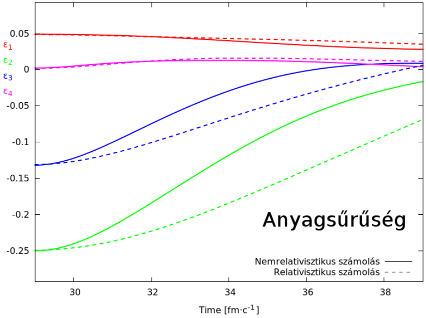
Relativisztikus és nemrelativisztikus hidrodinamika összehasonlítása

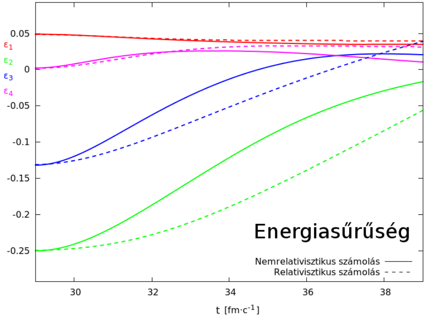
- Relativisztikus eset: lassabban tűnik el az asszimmetria
- Nemrelativisztikus eset: sebességmezőben nagyobb aszimmetria alakul ki





Relativisztikus és nemrelativisztikus hidrodinamika összehasonlítása

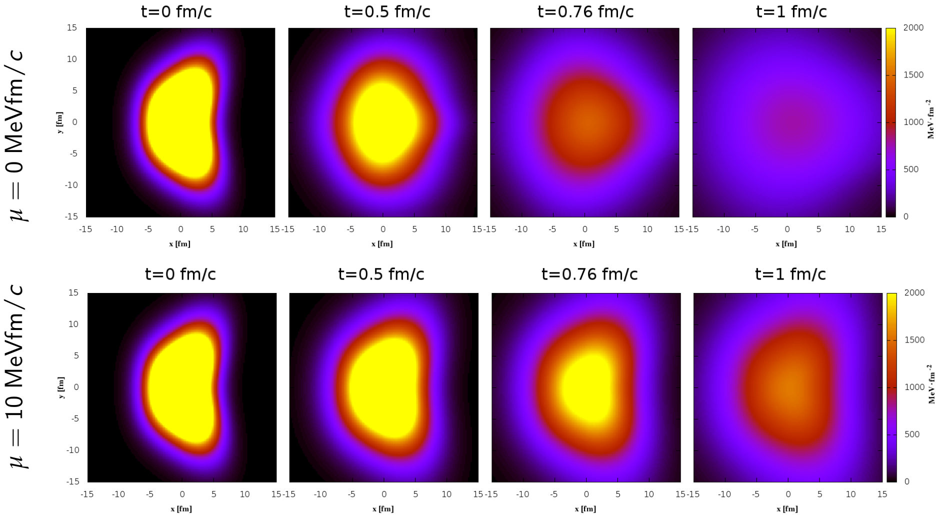




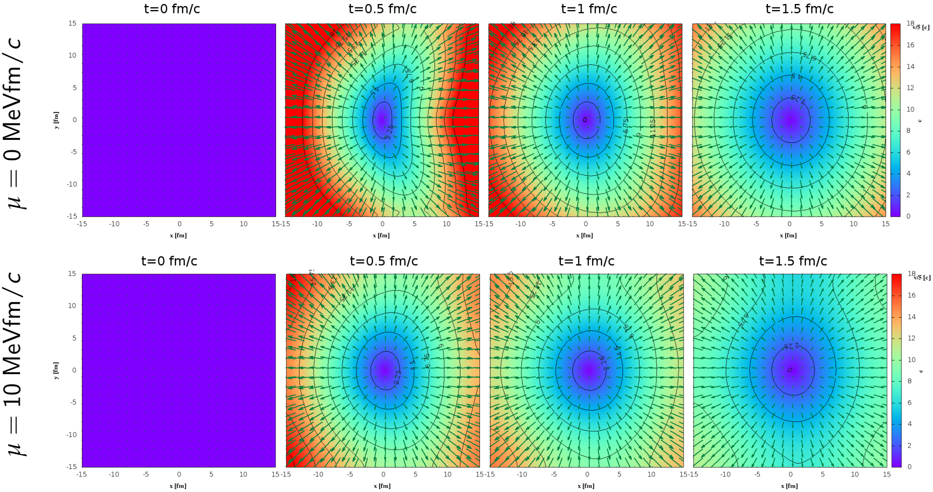
Hidrodinamika egyenletei

- Nemrelativisztikus hidrodinamika:
  - Anyagmegmaradás: $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \rho \mathbf{v} = 0$
  - Impulzusmegmaradás:
  $$\rho\left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v}\right) = -\nabla p + \mu \Delta \mathbf{v} + \left(\zeta + \frac{\mu}{3}\right)\nabla(\nabla \mathbf{v}) + \mathbf{f}$$
  - Energiamegmaradás: $\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \nabla \varepsilon \mathbf{v} = -p\nabla \mathbf{v} + \nabla(\boldsymbol{\sigma} \mathbf{v})$
  - ρ anyagsűrűség, $\mathbf{v}$ sebességmező, ε energiasűrűség, p nyomáseloszlás
- Relativisztikus hidrodinamika:
  $$T^{\mu\nu} = (\varepsilon + p)u^\mu u^\nu - pg^{\mu\nu}, \quad \partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$$
  - $T^{\mu\nu}$ energia-impulzus tenzor, u^μ négyes-sebesség, $g^{\mu\nu}$ metrikus tenzor
- Állapotegyenlet: $\varepsilon = \kappa(T)p \quad (\kappa = 1/c_s^2,\ \kappa = 3/2$ id. gáz)
- Advekciós forma: $\partial_t Q(\rho, \varepsilon, \mathbf{v}) + \partial_x F(Q) = 0 \quad$ (F fluxus)

Viszkozitás hatása: energiasűrűség időfejlődése



Viszkozitás hatása: sebességeloszlás időfejlődése



Kód tesztelése

- Nemrelativisztikus esetben: egzakt megoldással (Csörgő et al, PhysRevC67):

$$s = \frac{x^2}{X^2(t)} + \frac{y^2}{Y^2(t)}$$

$$\rho = \rho_0 \frac{V_0}{V} e^{-s}, \quad p = p_0 \left(\frac{V_0}{V}\right)^{1+\frac{1}{\kappa}} e^{-s}$$

$$\mathbf{v}(t, \mathbf{r}) = \left(\frac{\dot{X}}{X} x, \frac{\dot{Y}}{Y} y\right)$$

$$\ddot{X} X = \ddot{Y} Y = \frac{T_i}{m} \left(\frac{V_0}{V}\right)^{\frac{1}{\kappa}}, \quad V = X(t) Y(t)$$

Bíráló kérdései és válaszok

- Azt írja, hogy a RHIC az LHC utáni legnagyobb energiájú részecskegyorsító. Milyen értelemben nagyobb a RHIC gyorsító 100 GeV/n energiája az LHC előgyorsítójaként is használt SPS 450 GeV/n energiájánál?
  Az ütközés során nukleononkénti tömegközépponti energia nagyobb (SPS fix céltárgyat használ).
- Valóban rendelkezik-e a standard modell $U(1) \times SU(2)$ mértékszimmetriával?
  A Lagrange-függvény rendelkezik ezen szimmetriával, de az alapállapot sérti. Tehát nem.
- A kvarkanyag elektromos töltése sokszorosa az atommagénak. Miért egyezik mégis a kiszabaduló fotonok észlelt mennyisége periférikus és centrális ütközések esetén?
  A fotonok száma nem ugyanannyi, hanem az R_{AA} konstans (nukleáris módosulási faktor). Ami azt jelenti, hogy minden centralistánál annyi foton keletkezik amennyit N+N ütközésekből várunk.

Bíráló kérdései és válaszok

- Miért feltételezheti az 1.3 részben az ütköző atommagok gömbszimmetriáját a nagy sebességeknél fellépő Lorentz-kontrakció ellenére?
  Ez egy közelítés, az egyszerű szemléltetés kedvéért. Az ütköző magok elnyúlt ellipszoidok, a végállapotban kifagyáskor longitudinális irányba elnyúlt eloszlás lesz, valamilyen köztes időpillanatban lehet gömbhöz közeli szimmetria.
- Mit jelöl $\sqrt{-g}$ a (2.2.2) egyenletben hidrodinamikai esetben?
  Jacobi determinánst jelöli, függetlenül, az anyagi Lagrange-sűrűségfüggvénytől.
- Miért használhat nemrelativisztikus hidrodinamikát mélyen relativisztikus ütközések leírására? Milyen információt nyújt a relativisztikus tárgyaláshoz képest?
  Ez egy közelítés, eredményeit összevetve a relativisztikus eredményekkel láthatjuk, hogy fizikai folyamatok alakítják az asszimmetriák időfejlődését, és nem a relativisztikus hidrodinamika „különlegessége”. Viszkozitás esetén is elvégezhető az összehasonlítás, ami fontos, hiszen relativisztikusan nem definiált, hogy lehet a súrlódást kezelni.

Operátorok felbontása

$$\partial_t u = Au + Bu$$

$$u(t + \Delta t) = e^{\Delta t(A+B)} u(t)$$

$$u_{\mathrm{Lie}}(t + \Delta t) = e^{\Delta t A} e^{\Delta t B} u(t)$$

$$u_{\mathrm{Strang}}(t + \Delta t) = e^{\frac{1}{2}\Delta t A} e^{\Delta t B} e^{\frac{1}{2}\Delta t A} e^{\Delta t B} u(t)$$

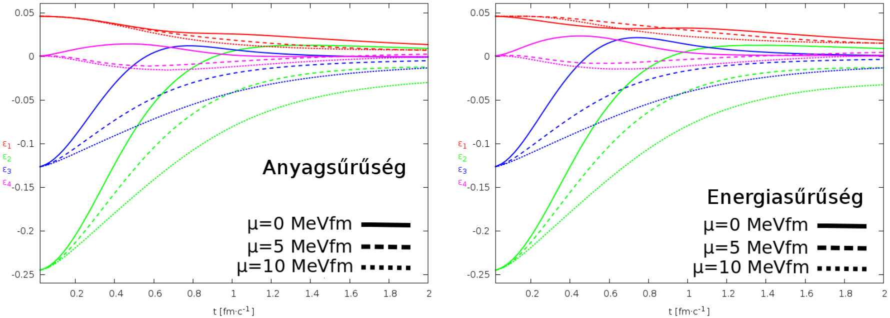
Viszkózus hidrodinamika

$$\partial_t Q + \partial_x F_{\mathrm{id}}(Q) + \partial_y G_{\mathrm{id}}(Q) + \partial_x F_{\mathrm{visc}}(Q, \partial Q) + \partial_y G_{\mathrm{visc}}(Q, \partial Q) = 0$$

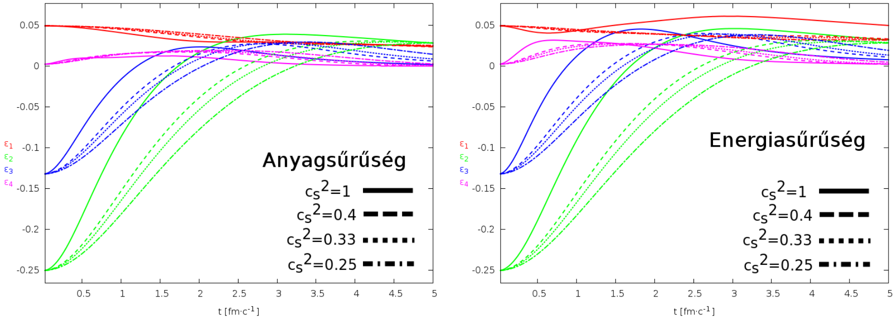
$\Longrightarrow$ operátorfelbontás

- Ideális lépés: $\partial_t Q + \partial_x F_{\mathrm{id}}(Q) + \partial_y G_{\mathrm{id}}(Q) = 0 \to Q^{\mathrm{id}}, \partial Q^{\mathrm{id}}$ $\to F_{\mathrm{visc}}, G_{\mathrm{visc}}$
- Viszkózus lépés: $\partial_t Q + \partial_x F_{\mathrm{visc}}(Q^{\mathrm{id}}, \partial Q^{\mathrm{id}}) + \partial_y G_{\mathrm{visc}}(Q^{\mathrm{id}}, \partial Q^{\mathrm{id}}) = 0$ $\to Q$

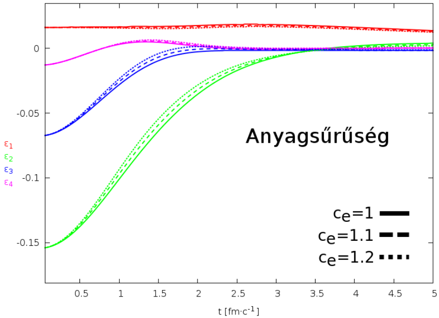
Viszkozitás hatása: ε_n anyag- és energiasűrűségben

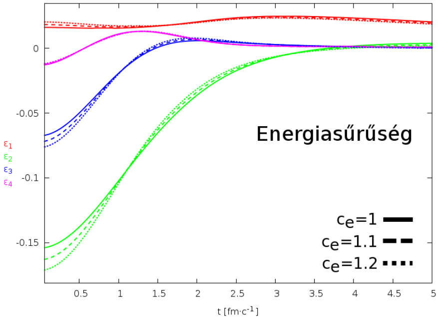


Hangsebesség hatása: ε_n anyag- és energiasűrűségben

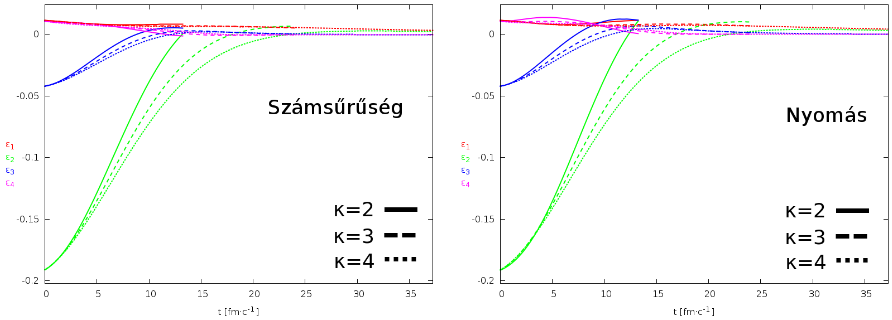


Nyomásgradiens hatása: ε_n anyag- és energiasűrűségben

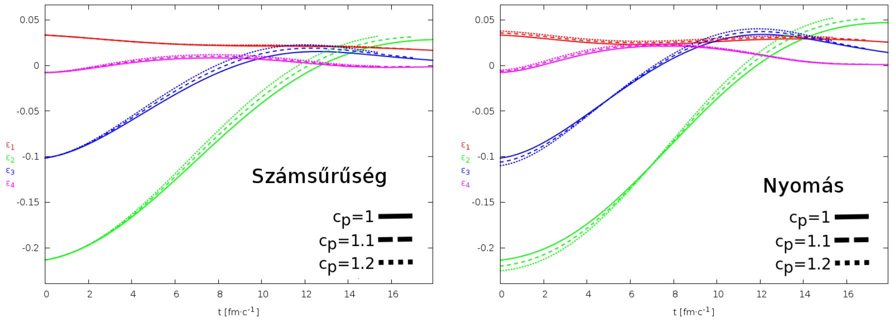




Hangsebesség hatása: ε_n számsűrűségben és nyomáseloszlásban



Nyomásgradiens hatása: ε_n számsűrűségben és nyomáseloszlásban



Kitekintés

- Viszkozitás hatásának vizsgálata relativisztikus esetben
- Relativisztikus és nemrelativisztikus viszkozitás összehasonlítása
- QCD állapotegyenlet használata