

# Nagyenergiás nehézion-ütközések numerikus hidrodinamikai modellezése

Bagoly Attila

Témavezető:  
Csanád Máté

ELTE TTK Atomfizikai tanszék

Tudományos Diákköri Konferencia  
2014.12.13.

Kvark-gluon plazma folyadékszerű viselkedésének következtében:

- hogyan hatnak különböző effektusok az aszimmetriák időfejlődésére
- olyan effektusok amelyek nem kezelhetők analitikusan

Kvark-gluon plazma folyadékszerű viselkedésének következtében:

- hogyan hatnak különböző effektusok az aszimmetriák időfejlődésére
- olyan effektusok amelyek nem kezelhetőek analitikusan
- Numerikus hidrodinamika: realisztikus modell QGP-re (kf. pl. Monte-Carlo szimulációból): ekkor minden effektus hatása keveredik

Kvark-gluon plazma folyadékszerű viselkedésének következtében:

- hogyan hatnak különböző effektusok az aszimmetriák időfejlődésére
- olyan effektusok amelyek nem kezelhetőek analitikusan
- Numerikus hidrodinamika: realiztikus modell QGP-re (kf. pl. Monte-Carlo szimulációból): ekkor minden effektus hatása keveredik
- Kezdőfeltétel: legyen közel létező analitikus megoldásokhoz, de realiztikusabb modellt adjon

# Tartalom

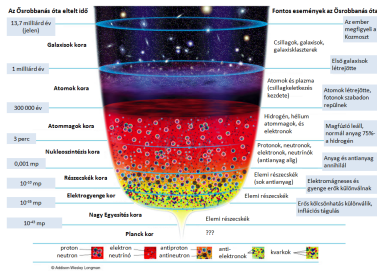
- 1 Bevezető
- 2 Hidrodinamika egyenletei
- 3 Numerikus módszer
- 4 Kód tesztelése
- 5 Nemrelativisztikus eredmények
- 6 Relativisztikus eredmények
- 7 Kifagyás
- 8 Összegzés

# Bevezető

- Nehézion ütközések: nagy energiasűrűség  
→ kvark szabadsági fokok

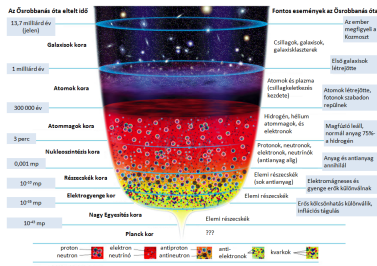
# Bevezető

- Nehézion ütközések: nagy energiasűrűség  
→ kvark szabadsági fokok
- Ősrobbanás: univerzum kvarkok és gluonok „őslevese”
- Új ismeretek: kvark-gluon plazma vizsgálata



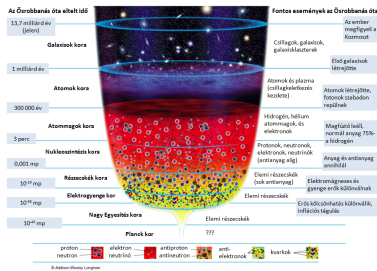
# Bevezető

- Nehézion ütközések: nagy energiasűrűség  
→ kvark szabadsági fokok
- Ősrobbanás: univerzum kvarkok és gluonok „őslevese”
- Új ismeretek: kvark-gluon plazma vizsgálata
- Kísérleti tapasztalat (2005): tökéletes folyadék



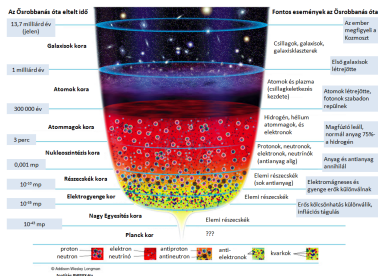


# Bevezető

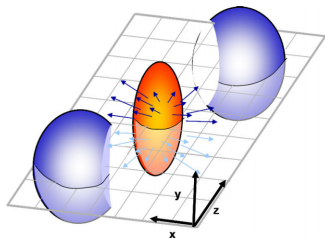


- Nehézion ütközések: nagy energiasűrűség  
→ kvark szabadsági fokok
- Ősrobbanás: univerzum kvarkok és gluonok „őslevese”
- Új ismeretek: kvark-gluon plazma vizsgálata
- Kísérleti tapasztalat (2005): tökéletes folyadék
- Nagy hatáskeresztmetszetek, rövid szabad úthossz, gyors termalizáció: statisztikus fizika

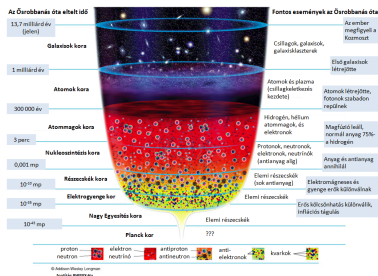
# Bevezető



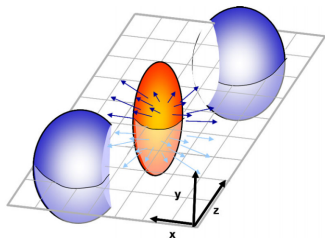
- Nehézion ütközések: nagy energiasűrűség  
→ kvark szabadsági fokok
- Ősrobbanás: univerzum kvarkok és gluonok „őslevese”
- Új ismeretek: kvark-gluon plazma vizsgálata
- Kísérleti tapasztalat (2005): tökéletes folyadék
- Nagy hatáskeresztmetszetek, rövid szabad úthossz, gyors termalizáció: statisztikus fizika
- Kezdeti eloszlás: aszimmetriák a kezdeti eloszlásban



# Bevezető



- Nehézion ütközések: nagy energiasűrűség  
→ kvark szabadsági fokok
- Ősrobbanás: univerzum kvarkok és gluonok „őslevese”
- Új ismeretek: kvark-gluon plazma vizsgálata
- Kísérleti tapasztalat (2005): tökéletes folyadék
- Nagy hatáskeresztmetszetek, rövid szabad úthossz, gyors termalizáció: statisztikus fizika
- Kezdeti eloszlás: aszimmetriák a kezdeti eloszlásban
- Aszimmetriák: kifagynak a részecskék eloszlásában



# Hidrodinamika egyenletei

- Nemrelativisztikus hidrodinamika:

# Hidrodinamika egyenletei

- Nemrelativisztikus hidrodinamika:

- Anyagmegmaradás:  $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \mathbf{v} = 0$

# Hidrodinamika egyenletei

- Nemrelativisztikus hidrodinamika:

- Anyagmegmaradás:  $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \mathbf{v} = 0$

- Impulzusmegmaradás:

$$\rho \left( \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right) = -\nabla p + \mu \Delta \mathbf{v} + \left( \zeta + \frac{\mu}{3} \right) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{v}) + \mathbf{f}$$

# Hidrodinamika egyenletei

- Nemrelativisztikus hidrodinamika:

- Anyagmegmaradás:  $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \mathbf{v} = 0$

- Impulzusmegmaradás:

$$\rho \left( \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right) = -\nabla p + \mu \Delta \mathbf{v} + \left( \zeta + \frac{\mu}{3} \right) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{v}) + \mathbf{f}$$

- Energiamegmaradás:  $\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \nabla \cdot \varepsilon \mathbf{v} = -p \nabla \cdot \mathbf{v} + \nabla \cdot (\boldsymbol{\sigma} \mathbf{v})$

- $\rho$  anyagsűrűség,  $\mathbf{v}$  sebességmező,  $\varepsilon$  energiasűrűség,  $p$  nyomáeloszlás

# Hidrodinamika egyenletei

- Nemrelativisztikus hidrodinamika:

- Anyagmegmaradás:  $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \rho \mathbf{v} = 0$

- Impulzusmegmaradás:

$$\rho \left( \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} \right) = -\nabla p + \mu \Delta \mathbf{v} + \left( \zeta + \frac{\mu}{3} \right) \nabla (\nabla \mathbf{v}) + \mathbf{f}$$

- Energiamegmaradás:  $\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \nabla \varepsilon \mathbf{v} = -p \nabla \mathbf{v} + \nabla (\sigma \mathbf{v})$

- $\rho$  anyagsűrűség,  $\mathbf{v}$  sebességmező,  $\varepsilon$  energiasűrűség,  $p$  nyomáseloszlás

- Állapotegyenlet:  $\varepsilon = \kappa(T)p$  ( $\kappa = 1/c_s^2$ ,  $\kappa = 3/2$  id. gáz)



# Hidrodinamika egyenletei

- Nemrelativisztikus hidrodinamika:

- Anyagmegmaradás:  $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \rho \mathbf{v} = 0$

- Impulzusmegmaradás:

$$\rho \left( \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} \right) = -\nabla p + \mu \Delta \mathbf{v} + \left( \zeta + \frac{\mu}{3} \right) \nabla (\nabla \mathbf{v}) + \mathbf{f}$$

- Energiamegmaradás:  $\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \nabla \varepsilon \mathbf{v} = -p \nabla \mathbf{v} + \nabla (\sigma \mathbf{v})$

- $\rho$  anyagsűrűség,  $\mathbf{v}$  sebességmező,  $\varepsilon$  energiasűrűség,  $p$  nyomáseloszlás

- Állapotegyenlet:  $\varepsilon = \kappa(T)p$  ( $\kappa = 1/c_s^2$ ,  $\kappa = 3/2$  id. gáz)

- Relativisztikus hidrodinamika:

$$T^{\mu\nu} = (\varepsilon + p) u^\mu u^\nu - p g^{\mu\nu}, \quad \partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$$

- $T^{\mu\nu}$  energia-impulzus tenzor,  $u^\mu$  négyes-sebesség,  $g^{\mu\nu}$  metrikus tenzor

# Hidrodinamika egyenletei

- Nemrelativisztikus hidrodinamika:

- Anyagmegmaradás:  $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \rho \mathbf{v} = 0$

- Impulzusmegmaradás:

$$\rho \left( \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} \right) = -\nabla p + \mu \Delta \mathbf{v} + \left( \zeta + \frac{\mu}{3} \right) \nabla (\nabla \mathbf{v}) + \mathbf{f}$$

- Energiamegmaradás:  $\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \nabla \varepsilon \mathbf{v} = -p \nabla \mathbf{v} + \nabla (\sigma \mathbf{v})$

- $\rho$  anyagsűrűség,  $\mathbf{v}$  sebességmező,  $\varepsilon$  energiasűrűség,  $p$  nyomáseloszlás

- Állapotegyenlet:  $\varepsilon = \kappa(T)p$  ( $\kappa = 1/c_s^2$ ,  $\kappa = 3/2$  id. gáz)

- Relativisztikus hidrodinamika:

$$T^{\mu\nu} = (\varepsilon + p) u^\mu u^\nu - p g^{\mu\nu}, \quad \partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$$

- $T^{\mu\nu}$  energia-impulzus tenzor,  $u^\mu$  négyes-sebesség,  $g^{\mu\nu}$  metrikus tenzor

- Advekción formula:  $\partial_t Q_i + \partial_x F_i(Q) + \partial_y G_i(Q) + \partial_z K_i(Q) = 0$

# Numerikus módszer

- Midrapiditás: eloszlások maximuma, sőt „plató”  $\rightarrow 2 + 1$  dimenzió

# Numerikus módszer

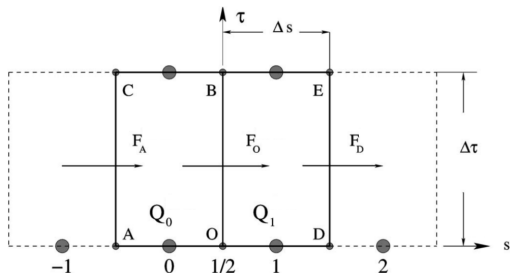
- Midrapiditás: eloszlások maximuma, sőt „plató”  $\rightarrow 2 + 1$  dimenzió
- Numerikus megoldás: diszkretizáció

# Numerikus módszer

- Midrapiditás: eloszlások maximuma, sőt „plató”  $\rightarrow 2 + 1$  dimenzió
- Numerikus megoldás: diszkretizáció
- Végtes térfogat módszer: mennyiségek átlaga rácspont körül

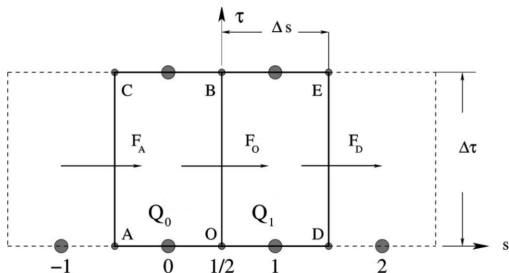
# Numerikus módszer

- Midrapiditás: eloszlások maximuma, sőt „plató”  $\rightarrow 2 + 1$  dimenzió
- Numerikus megoldás: diszkretizáció
- Véges térfogat módszer: mennyiségek átlaga rácspont körül
- Probléma: fluxusok értéke a rácspontok között, egzaktul nem lehet



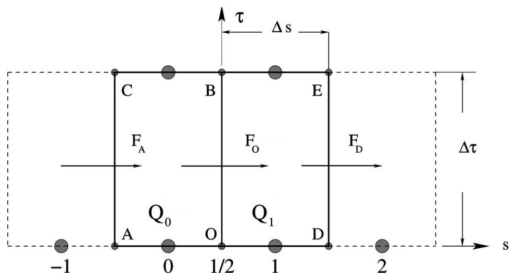
# Numerikus módszer

- Midrapiditás: eloszlások maximuma, sőt „plató”  $\rightarrow 2 + 1$  dimenzió
- Numerikus megoldás: diszkretizáció
- Véges térfogat módszer: mennyiségek átlaga rácspont körül
- Probléma: fluxusok értéke a rácspontok között, egzaktul nem lehet
- Instabilitás:  $Q_i + Ae^{-ik\Delta x} \rightarrow$  CFL feltétel (pl.  $C = u\Delta t / \Delta x < 1$ )



# Numerikus módszer

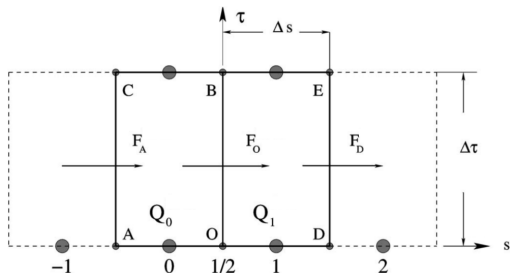
- Midrapiditás: eloszlások maximuma, sőt „plató”  $\rightarrow 2 + 1$  dimenzió
- Numerikus megoldás: diszkretizáció
- Véges térfogat módszer: mennyiségek átlaga rácspont körül
- Probléma: fluxusok értéke a rácspontok között, egzaktul nem lehet
- Instabilitás:  $Q_i + Ae^{-ik\Delta x} \rightarrow$  CFL feltétel (pl.  $C = u\Delta t/\Delta x < 1$ )
- 2 térdimenziót bonyolult kezelni  $\rightarrow$  operátor szétválasztás





# Numerikus módszer

- Midrapiditás: eloszlások maximuma, sőt „plató”  $\rightarrow 2 + 1$  dimenzió
- Numerikus megoldás: diszkretizáció
- Véges térfogat módszer: mennyiségek átlaga rácspont körül
- Probléma: fluxusok értéke a rácspontok között, egzaktul nem lehet
- Instabilitás:  $Q_i + Ae^{-ik\Delta x} \rightarrow$  CFL feltétel (pl.  $C = u\Delta t/\Delta x < 1$ )
- 2 térdimenziót bonyolult kezelni  $\rightarrow$  operátor szétválasztás
- Viskozitás: ideális lépés + csak viszkózus fluxussal lépés



# MUSTA módszer

- Az  $l$  előrejelzett értékek:  $Q_{i/(i+1)}^{(l)}, F_{i/(i+1)}^{(l)} \equiv F(Q_{i/(i+1)}^{(l)})$

# MUSTA módszer

- Az  $l$  előrejelzett értékek:  $Q_{i/(i+1)}^{(l)}, F_{i/(i+1)}^{(l)} \equiv F(Q_{i/(i+1)}^{(l)})$
- Kezdetben:  $Q_i^{(0)} \equiv Q_i^n, Q_{i+1}^{(0)} \equiv Q_{i+1}^n$

# MUSTA módszer

- Az  $l$  előrejelzett értékek:  $Q_{i/(i+1)}^{(l)}, F_{i/(i+1)}^{(l)} \equiv F(Q_{i/(i+1)}^{(l)})$
- Kezdetben:  $Q_i^{(0)} \equiv Q_i^n, Q_{i+1}^{(0)} \equiv Q_{i+1}^n$
- Köztes érték és fluxus:

$$Q_{i+\frac{1}{2}}^{(l)} = \frac{1}{2} [Q_i^{(l)} + Q_{i+1}^{(l)}] - \frac{1}{2} \frac{\Delta t}{\Delta x} [F_{i+1}^{(l)} - F_i^{(l)}], \quad F_M^{(l)} \equiv F(Q_{i+\frac{1}{2}}^{(l)})$$

- Korrigált cellaközi fluxus:

$$F_{i+\frac{1}{2}}^{(l)} = \frac{1}{4} \left[ F_{i+1}^{(l)} + 2F_M^{(l)} + F_i^{(l)} - \frac{\Delta x}{\Delta t} (Q_{i+1}^{(l)} - Q_i^{(l)}) \right]$$

# MUSTA módszer

- Az  $l$  előrejelzett értékek:  $Q_{i/(i+1)}^{(l)}, F_{i/(i+1)}^{(l)} \equiv F(Q_{i/(i+1)}^{(l)})$
- Kezdetben:  $Q_i^{(0)} \equiv Q_i^n, Q_{i+1}^{(0)} \equiv Q_{i+1}^n$
- Köztes érték és fluxus:

$$Q_{i+\frac{1}{2}}^{(l)} = \frac{1}{2} [Q_i^{(l)} + Q_{i+1}^{(l)}] - \frac{1}{2} \frac{\Delta t}{\Delta x} [F_{i+1}^{(l)} - F_i^{(l)}], \quad F_M^{(l)} \equiv F(Q_{i+\frac{1}{2}}^{(l)})$$

- Korrigált cellaközi fluxus:

$$F_{i+\frac{1}{2}}^{(l)} = \frac{1}{4} \left[ F_{i+1}^{(l)} + 2F_M^{(l)} + F_i^{(l)} - \frac{\Delta x}{\Delta t} (Q_{i+1}^{(l)} - Q_i^{(l)}) \right]$$

- Következő előrejelzés a korrigált fluxusok meghatározásához:

$$Q_i^{(l+1)} = Q_i^{(l)} - \frac{\Delta t}{\Delta x} [F_{i+\frac{1}{2}}^{(l)} - F_i^{(l)}]$$

$$Q_{i+1}^{(l+1)} = Q_{i+1}^{(l)} - \frac{\Delta t}{\Delta x} [F_{i+1}^{(l)} - F_{i+\frac{1}{2}}^{(l)}]$$

- A módszer publikálva: E. F. Toro et al, 2006, J. Comp. Phys

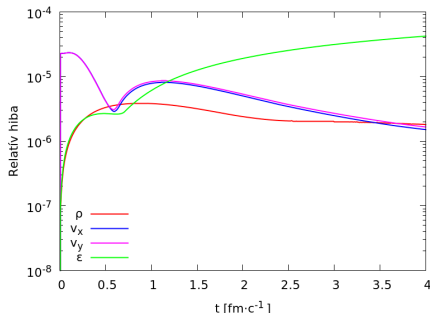
# Kód tesztelése

- A kódot meglévő egzakt megoldásokkal teszteltük (Csörgő et al, PhysRevC67):  $s = \frac{x^2}{X^2(t)} + \frac{y^2}{Y^2(t)}$ ,  $\rho = \rho_0 \frac{V_0}{V} e^{-s}$ ,  $p = p_0 \left(\frac{V_0}{V}\right)^{1+\frac{1}{\kappa}}$ ,  $\mathbf{v}(t, \mathbf{r}) = \left(\frac{\dot{X}}{X}x, \frac{\dot{Y}}{Y}y\right)$ ,  $\ddot{X}X = \ddot{Y}Y = \frac{T_i}{m} \left(\frac{V_0}{V}\right)^{\frac{1}{\kappa}}$ ,  $V = X(t)Y(t)$

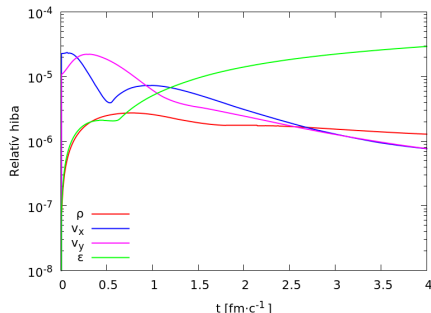
# Kód tesztelése

- A kódot meglévő egzakt megoldásokkal teszteltük (Csörgő et al, PhysRevC67):  $s = \frac{\dot{x}^2}{X^2(t)} + \frac{\dot{y}^2}{Y^2(t)}$ ,  $\rho = \rho_0 \frac{V_0}{V} e^{-s}$ ,  $p = p_0 \left(\frac{V_0}{V}\right)^{1+\frac{1}{\kappa}}$ ,  $\mathbf{v}(t, \mathbf{r}) = (\frac{\dot{X}}{X}x, \frac{\dot{Y}}{Y}y)$ ,  $\ddot{X}X = \ddot{Y}Y = \frac{T_i}{m} \left(\frac{V_0}{V}\right)^{\frac{1}{\kappa}}$ ,  $V = X(t)Y(t)$
- Relatív hiba a numerikus és analitikus megoldás közt

$X = Y$



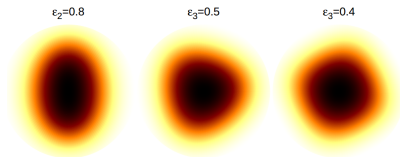
$X \neq Y$



# Kezdőfeltétel

- Skálaváltozó:

$$s = \frac{r^2}{R^2} \left( 1 + \epsilon_2 \cos(2\phi) + \epsilon_3 \cos(3\phi) + \epsilon_4 \cos(4\phi) \right)$$

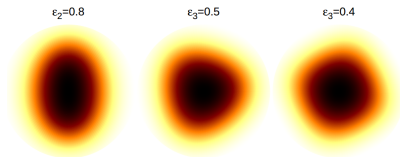




# Kezdőfeltétel

- Skálaváltozó:

$$s = \frac{r^2}{R^2} \left( 1 + \epsilon_2 \cos(2\phi) + \epsilon_3 \cos(3\phi) + \epsilon_4 \cos(4\phi) \right)$$

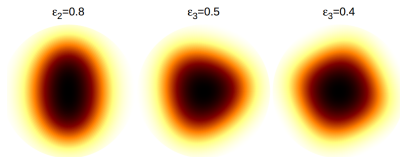


- Sebesség: nemrelativisztikus esetben 0, relativisztikus esetben Hubble-sebességmező
- Anyagűrűség/számsűrűség és nyomás  $\propto \exp(-s)$

# Kezdőfeltétel

- Skálaváltozó:

$$s = \frac{r^2}{R^2} \left( 1 + \epsilon_2 \cos(2\phi) + \epsilon_3 \cos(3\phi) + \epsilon_4 \cos(4\phi) \right)$$



- Sebesség: nemrelativisztikus esetben 0, relativisztikus esetben Hubble-sebességmező
- Anyagűrűség/számsűrűség és nyomás  $\propto \exp(-s)$
- Konstans nyomással analitikus megoldás: Csanád és Szabó, Phys.Rev. C90 (2014) 054911
- Nyomásgradiens vizsgálata:  $p \propto \exp(-p c \cdot s)$

# Aszimmetriák jellemzése

- Aszimmetriát jellemző paraméterre:  $\varepsilon_n = \langle \cos(n\phi) \rangle_{\rho/\mathbf{v}/p}$

# Aszimmetriák jellemzése

- Aszimmetriát jellemző paraméterre:  $\varepsilon_n = \langle \cos(n\phi) \rangle_{\rho/\mathbf{v}/p}$
- $\varepsilon_n$  (most bevezetett)  $\neq \epsilon_m$  (kezdőfeltétel skálaváltozójában)

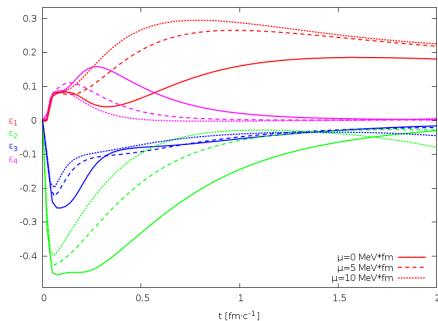
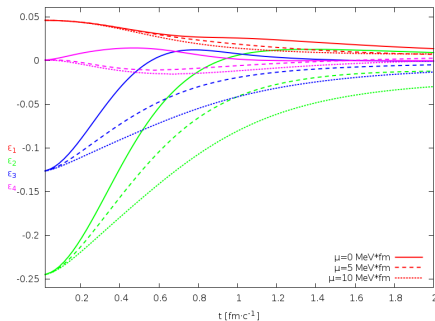
# Aszimmetriák jellemzése

- Aszimmetriát jellemző paraméterre:  $\varepsilon_n = \langle \cos(n\phi) \rangle_{\rho/v/p}$
- $\varepsilon_n$  (most bevezetett)  $\neq \epsilon_m$  (kezdőfeltétel skálaváltozójában)
- Kezdetben a  $\varepsilon_n$  és  $\epsilon_m$  közti kapcsolatot becsülhetjük Taylor-sorfejtéssel:
  - Legyen:  $\chi = 2 + \sum_{n=2}^4 \epsilon_n^2$
  - Megjelenik:  $\varepsilon_1 = (\epsilon_2 + \epsilon_4)\epsilon_3/\chi$
  - $\epsilon_4$  befolyásolja:  $\varepsilon_2 = \epsilon_2(\epsilon_4 - 1)/\chi$
  - $\varepsilon_3 = -\epsilon_3/\chi$
  - $\epsilon_2$  is létrehoz:  $\varepsilon_4 = (-\epsilon_4 + \frac{1}{2}\epsilon_2^2)/\chi$

# Viszkozitás hatása

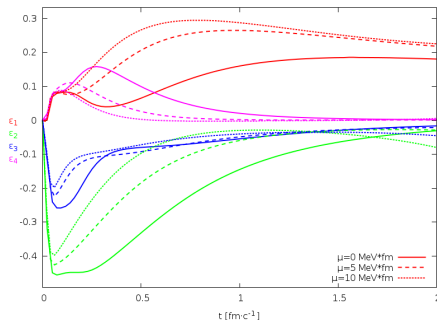
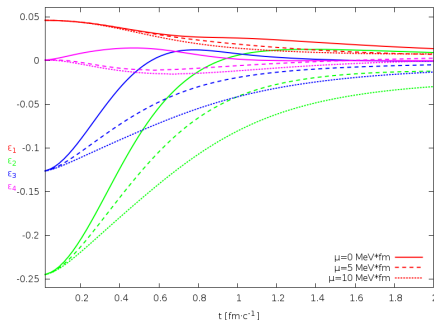
- Energiasűrűségben és anyagsűrűségben: lassít
  - Viszkozitás: lassítja az áramlást

- Ábra:  $\varepsilon_1$  piros,  $\varepsilon_2$  zöld,  $\varepsilon_3$  kék,  $\varepsilon_4$  magenta

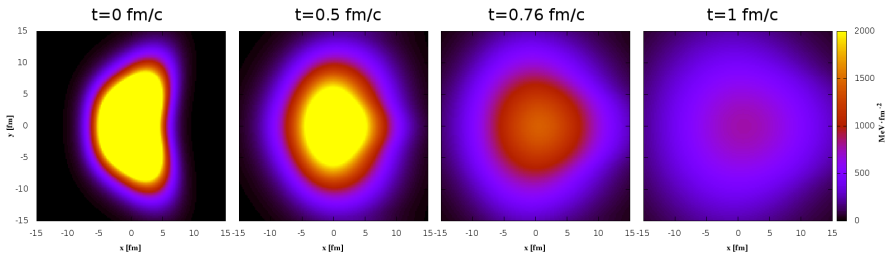
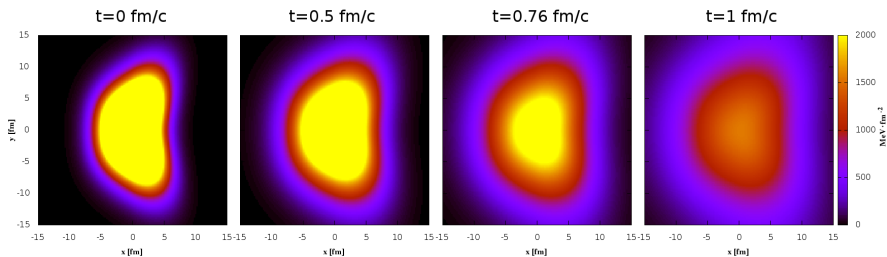


# Viszkozitás hatása

- Energiasűrűségben és anyagsűrűségben: lassít
  - Viszkozitás: lassítja az áramlást
- Sebességeloszlásban: gyorsít
  - Nagyobb, kisebb aszimmetriájú részek más erőt éreznek: különbségek gyorsan eltűnnek
- Ábra:  $\varepsilon_1$  piros,  $\varepsilon_2$  zöld,  $\varepsilon_3$  kék,  $\varepsilon_4$  magenta

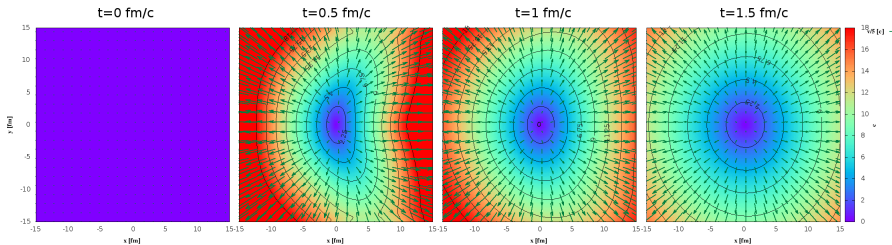
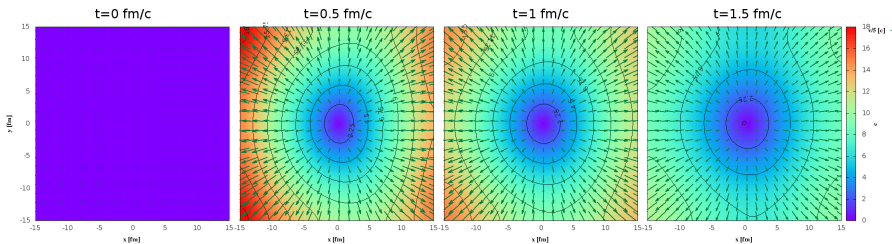


# Viszkozitás hatása: energiasűrűség időfejlődése

 $\mu = 0 \text{ MeV fm}/c$ 

 $\mu = 10 \text{ MeV fm}/c$ 


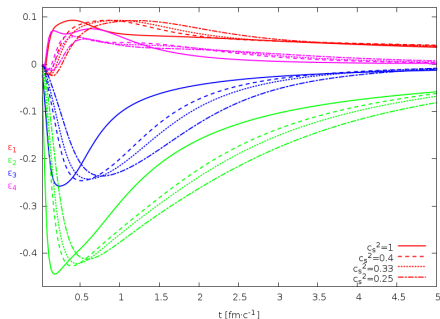
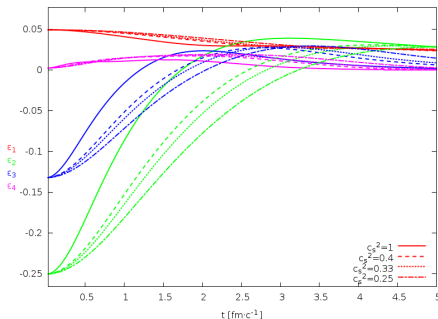


# Viszkozitás hatása: sebességeloszlás időfejlődése

 $\mu = 0 \text{ MeVfm}/c$ 

 $\mu = 10 \text{ MeVfm}/c$ 


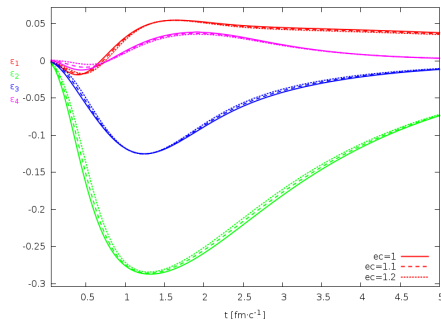
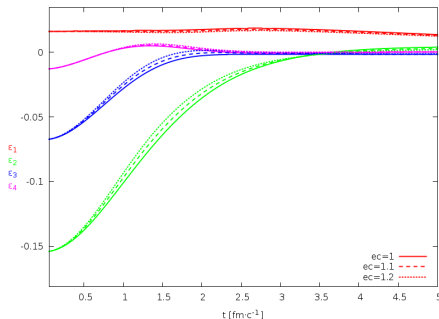
# Hangsebesség hatása

- Minden eloszlásban: aszimmetriák eltűnése lassul
  - Nyomáshullámok sebessége csökken  $\rightarrow$  kiegyenlítődés tovább tart
- Hangsebességek:  $c_s^2 = 1$  vagy 0,4 vagy 0,33 vagy 0,25



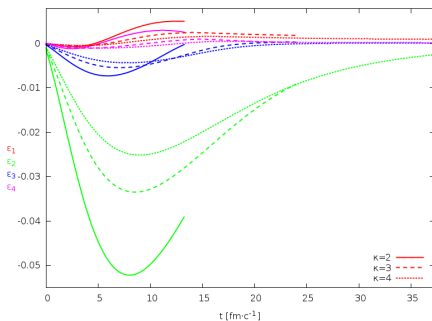
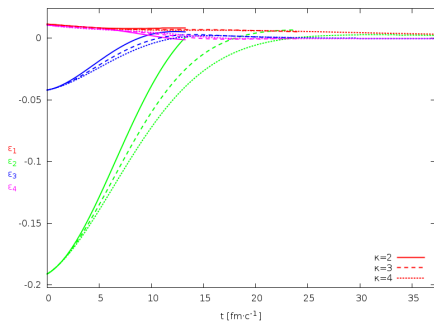
# Nyomásgradiens hatása

- Minden eloszlásban: aszimmetriák gyorsabban eltűnnek
  - Nagyobb gradiens: gyorsabb áramlás
- Anyagsűrűség  $\propto \exp(-s)$
- Energiasűrűség  $\propto \exp(-ec \cdot s)$



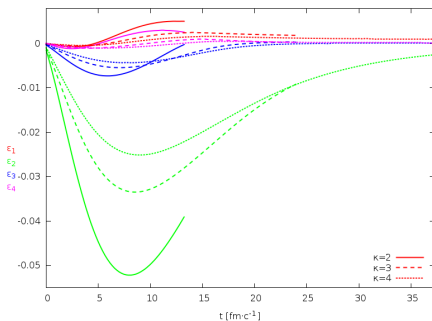
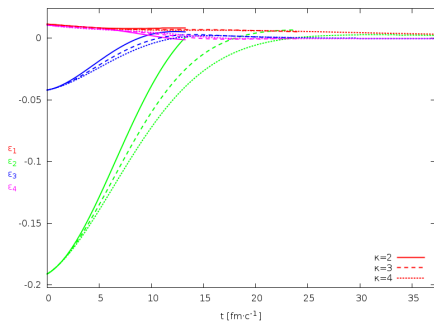
# Hangsebesség hatása

- Minden eloszlásban: aszimmetriák eltűnése lassul
- Nyomáshullámok sebessége csökken  $\rightarrow$  kiegyenlítődés tovább tart



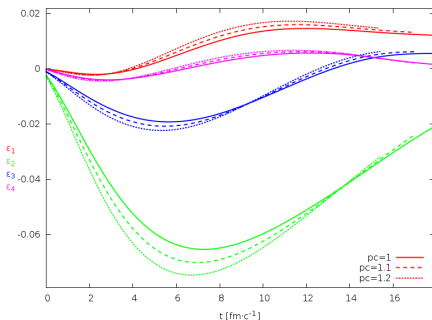
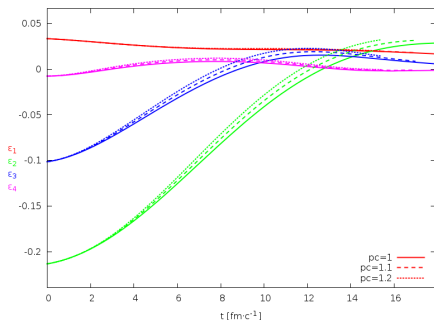
# Hangsebesség hatása

- Minden eloszlásban: aszimmetriák eltűnése lassul
  - Nyomáshullámok sebessége csökken  $\rightarrow$  kiegyenlítődés tovább tart
- Kifagyás máskor történik!



# Nyomásgradiens hatása

- Minden eloszlásban: aszimmetriák gyorsabban eltűnnek
  - Nagyobb gradiens: gyorsabb áramlás
- Számsűrűség  $\propto \exp(-s)$
- Nyomás  $\propto \exp(-pc \cdot s)$



# Kifagyás

- Maxwell-Jüttner típusú forrásfüggvény:

$$S(x, p) d^4x = \mathcal{N} n(x) \exp \left( - \frac{p_\mu u^\mu}{T(x)} \right) H(\tau) p_\mu d^3 \frac{u_\mu d^3 x}{u^0} d\tau$$

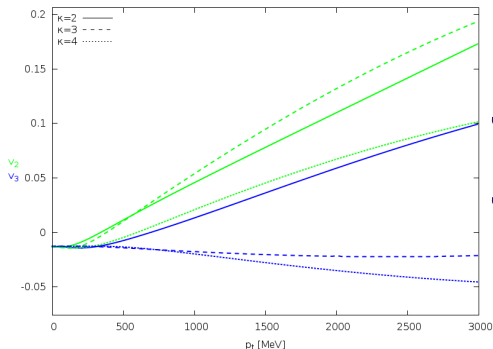
# Kifagyás

- Maxwell-Jüttner típusú forrásfüggvény:

$$S(x, p) d^4x = \mathcal{N} n(x) \exp\left(-\frac{p_\mu u^\mu}{T(x)}\right) H(\tau) p_\mu d^3 \frac{u_\mu d^3 x}{u^0} d\tau$$

- Mérhető mennyiségek:

$$v_n(p_t) = \langle \cos(n\varphi) \rangle_N = \frac{1}{N(p_t)} \int_0^{2\pi} N(p_t, \varphi) \cos(n\varphi) d\varphi$$



- Impulzustérbeli aszimmetriák: erősen függés a hangsebességtől
- Hangsebességre érzékeny: kifagyás ideje



# Összegzés

- Motiváció: egyszerű effektusok, hogyan befolyásolják az aszimmetriák időfejlődését

# Összegzés

- Motiváció: egyszerű effektusok, hogyan befolyásolják az aszimmetriák időfejlődését
- Analitikus tárgyalásra kevés az esély, ezért numerikus módszert alkalmaztunk

# Összegzés

- Motiváció: egyszerű effektusok, hogyan befolyásolják az aszimmetriák időfejlődését
- Analitikus tárgyalásra kevés az esély, ezért numerikus módszert alkalmaztunk
- Kezdőfeltétel hasonló a már létező analitikus megoldásokhoz, de realisztikusabb

# Összegzés

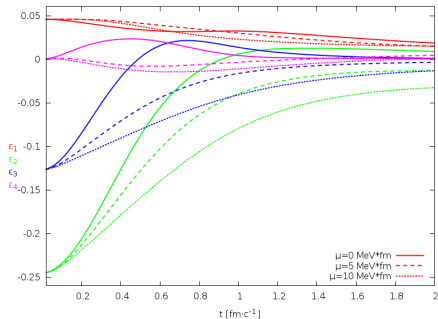
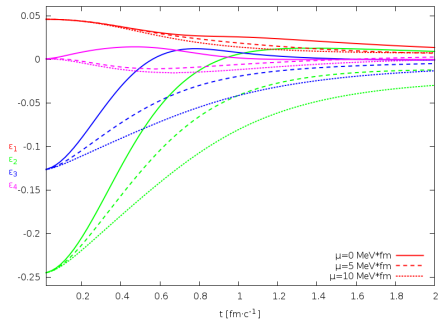
- Motiváció: egyszerű effektusok, hogyan befolyásolják az aszimmetriák időfejlődését
- Analitikus tárgyalásra kevés az esély, ezért numerikus módszert alkalmaztunk
- Kezdőfeltétel hasonló a már létező analitikus megoldásokhoz, de realisztikusabb
- A viszkozitás lassabbá teszi az anyag- és energiasűrűségben számolt aszimmetriák időfejlődését, sebességeloszlásban gyorsabbá

# Összegzés

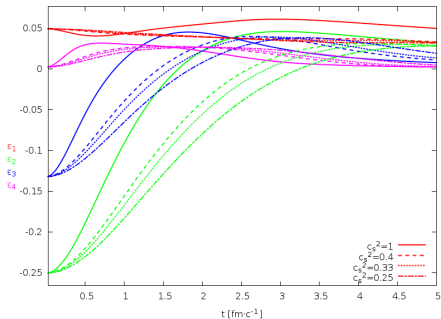
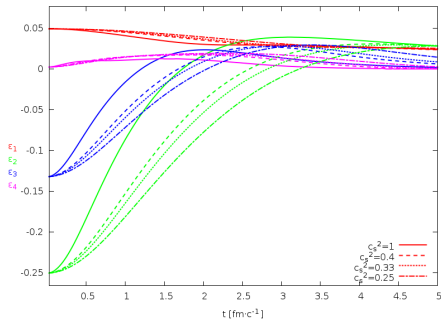
- Motiváció: egyszerű effektusok, hogyan befolyásolják az aszimmetriák időfejlődését
- Analitikus tárgyalásra kevés az esély, ezért numerikus módszert alkalmaztunk
- Kezdőfeltétel hasonló a már létező analitikus megoldásokhoz, de realisztikusabb
- A viszkozitás lassabbá teszi az anyag- és energiasűrűségben számolt aszimmetriák időfejlődését, sebességeloszlásban gyorsabbá
- Hangsebesség csökkentése lassítja az aszimmetriák időfejlődését, kifagyás később következik be

# Köszönöm a figyelmet!

# Viszkozitás hatása: $\varepsilon_n$ anyag- és energiasűrűségben

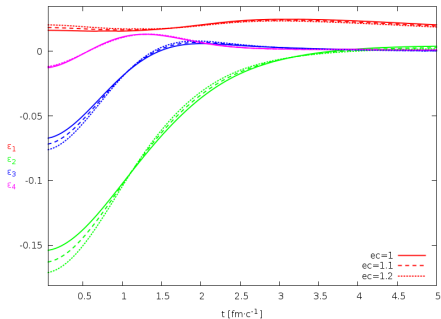
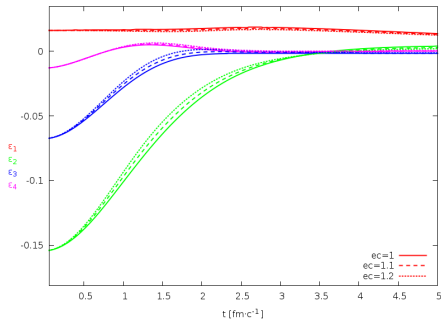


# Hangsebesség hatása: $\varepsilon_n$ anyag- és energiasűrűségben





# Nyomásgradiens hatása: $\varepsilon_n$ anyag- és energiasűrűségben



$$\partial_t u = Au + Bu$$

$$u(t + \Delta t) = e^{\Delta t(A+B)} u(t)$$

$$u_{\text{Lie}}(t + \Delta t) = e^{\Delta t A} e^{\Delta t B} u(t)$$

$$u_{\text{Strang}}(t + \Delta t) = e^{\frac{1}{2}\Delta t A} e^{\Delta t B} e^{\frac{1}{2}\Delta t A} e^{\Delta t B} u(t)$$