Relativisztikus hidrodinamika

Bagoly Attila
ELTE TTK Fizikus MSc, 2. évfolyam

Relativisztikus atommag-ütközések

2017.02.03

Bevezető

- Előadáson láttuk:

$$T^{\mu\nu} = c^{-2}(\varepsilon + p)u^\mu u^\nu - pg^{\mu\nu} \qquad \partial_\mu T^{\mu\nu} = 0 \tag{1}$$

- Részecskeszám megmarad: $\partial_\mu(nu^\mu) = 0$
- Ezek adják a relativisztikus hidrodinamika egyenleteit
- Előadásban:
  - Termodinamikai mennyiségek
  - Energia-impulzus tenzor származtatása általános relativitáselméletből
  - Kitekintés: numerikus megoldás

Termodinamika

- Mikrokanonikus sokaságon: $S(E, V, N)$
- Definició:
$$dS = \frac{1}{T}dE + \frac{p}{T}dV - \frac{\mu}{T}dN \tag{2}$$
- Elsőrendű homogén függvény: $S(\lambda E, \lambda V, \lambda N) = \lambda S(E, V, N)$
- Euler tétel: $f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^p f(x, y)$, deriválva, $\lambda = 1$-et véve: $p \cdot f(x, y) = x\partial_x f + y\partial_y f$
- Euler-tétel entrópiára:
$$S = \frac{E}{T} + \frac{pV}{T} - \frac{\mu N}{T} \tag{3}$$
- Gibbs-Duhem reláció: S differenciáját Euler-tételből véve, dS def.-el összevetve:
$$-SdT - Vdp + Nd\mu = 0 \tag{4}$$

Egyensúlyi részecskeszám, energia meghatározása

- Sokrészecske rendszer: $H = H_0 + H_1$ teljes H operátor
- Fock-tér reprezentáció:

$$H_0 = \sum_s \int d^3 r \hat{\psi}^\dagger(r,s)\left(-\frac{\hbar^2\Delta}{2m} + V(r)\right)\hat{\psi}(r,s)$$

$$H_1 = \sum_{s_1,s_2} \int d^3 r_1 d^3 r_2 \hat{\psi}^\dagger(r_1,s_1)\hat{\psi}^\dagger(r_2,s_2)\frac{1}{2}V(r_1,r_2)\hat{\psi}(r_2,s_2)\hat{\psi}(r_1,s_1)$$

- Nagykanonikus H: $K = H - \mu N$
- Komplex idő $\tau = -it$ fejlődés: $\psi(r,s,\tau) = e^{\frac{1}{\hbar}K\tau}\psi(r,s)e^{-\frac{1}{\hbar}K\tau}$
- Egyidejű kommutációs relációk:
$[\psi(r_1,s_1,\tau), \psi^\dagger(r_2,s_2,\tau)]_\mp = \delta_{s_1 s_2}\delta(r_1 - r_2)$

Egyensúlyi részecskeszám, energia meghatározása

- Véges hőmérsékleti Green függvény:

$$G(r,s,\tau,r',s',\tau') = -\left\langle T_\tau \psi(r,s,\tau)\psi^\dagger(r',s',\tau')\right\rangle \tag{5}$$

- Várható érték: $\langle O\rangle = \mathrm{Tr}\left[\hat\rho O\right]$, $\hat\rho = \frac{1}{\mathcal{Z}}e^{-\beta\hat K}$, $\mathcal{Z} = \mathrm{Tr}\left[e^{-\beta\hat K}\right]$
- Azonos idő: $G(r,s,\tau,r',s',\tau^+) = \mp\langle\hat\psi^\dagger(r',s',\tau^+)\hat\psi(r,s,\tau)\rangle$
- Részecskeszám:

$$N(T,V,\mu) = \left\langle \int \hat\psi^\dagger\hat\psi \right\rangle = \mp\sum_s \int d^3r G(r,s,\tau,r,s,\tau)$$

- Energia: $E = E(T,V,\mu) = \langle H\rangle$

$$E = \mp\frac{1}{2}\sum_s\int d^3r \lim_{\substack{\tau'\to\tau^+\\ r'\to r}} \left(-\hbar\frac{\partial}{\partial\tau} - \frac{\hbar^2\Delta}{2m} + V(r) + \mu\right) G(r,s,\tau,r',s',\tau')$$

Jelölések, egyszerű átalakítás

- Sűrűségek: $\varepsilon = \frac{E}{V}$, $\sigma = \frac{S}{V}$, $n = \frac{N}{V}$
- A 2 egyenlet:
$$d\varepsilon = Td\sigma + \mu dn \tag{6}$$
- Fajlagos mennyiségek: $e = \frac{E}{N}$, $s = \frac{S}{N}$
- A 2 egyenlet:
$$de = Tds - pd\frac{1}{n} \tag{7}$$
- Az eddigiekkel az energiasűrűség felírható ($\varepsilon(s,n)$):
$$d\varepsilon = nTds + \frac{\varepsilon + p}{n}dn \tag{8}$$
- Legyen: $w = \frac{\varepsilon+p}{n}$ (fajlagos entalpia)

Hatás

– Eddig tárgyalt mennyiségek egyensúlyiak

– Szeretnénk időfejlődést nézni

- Egy szabad részecske:

$$S = -mc^2 \int d\tau \tag{9}$$

- Tudjuk: $\int d^3 r \delta(r - R) = 1$

- Hatás átírható:

$$S = -\int d\tau d^3 r mc^2 \delta(r - R) \equiv -\int d\tau d^3 r \varepsilon = -\int \frac{d^4 x}{c} \varepsilon \tag{10}$$

Energia-impulzus tenzor

- Anyagi hatás (termodinamikai energiasűrűséget írjuk be):

$$S_M = -\int \frac{d^4x}{c}\varepsilon(s,n) \tag{11}$$

- Nem Minkowski térben: Jacobi determináns: $\sqrt{-g}$

- Általánosabban (nekünk $\mathcal{L}_M = \varepsilon$):

$$S_M[g] = -\int \frac{d^4x}{c}\sqrt{-g}\mathcal{L}_{\mathcal{M}} \tag{12}$$

- Energia-impulzus tenzor definiciója:

$$\delta S_M[g] = \int \frac{d^4x}{c}\sqrt{-g}\frac{1}{2}T_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} \tag{13}$$

Konnexió

- Téridő 4 dimenziós sokaság
- Érintőtér minden pontban (minden x-re) lin. tér: kontravariáns vektorok
- Duális tér: kovariáns vektorok. Kapcsolat: metrikus tenzor
- Kis elmozdulás: $dx \to$ lin. transzformáció köti össze a két tér elemeit:

$$w^\mu = v^\mu - \Gamma^\mu_{\alpha\beta} v^\alpha dx^\beta \tag{14}$$

- Torziómentes: $\to \Gamma_{\alpha\beta} = \Gamma_{\beta\alpha}$
- Vektor kovariáns derivált:

$$\nabla_\mu v^\nu = \partial_\mu v^\nu + \Gamma^\nu_{\alpha\mu} v^\alpha \tag{15}$$

- Tenzor kovariáns derivált:

$$\nabla_\mu T^{\nu\rho} = \partial_\mu T^{\nu\rho} + \Gamma^\mu_{\alpha\mu} T^{\alpha\rho} + \Gamma^\rho_{\alpha\mu} T^{\mu\alpha} \tag{16}$$

Riemann geometria

- Ne legyen g és Γ független
- Skalárszorzat invariáns $\rightarrow \nabla_\mu g_{\alpha\beta} = 0$
- Konnexió kifejezhető a metrikus tenzorral:

$$\Gamma_{\alpha\beta\gamma} = \frac{1}{2}\left(\partial_\beta g_{\alpha\gamma} + \partial_\gamma g_{\alpha\beta} - \partial_\alpha g_{\beta\gamma}\right) \tag{17}$$

- Riemann tenzor (görbületet méri):

$$[\nabla_\mu, \nabla_\nu] v_\gamma = R^\alpha_{\gamma\mu\nu} v_\alpha \tag{18}$$

- Riemann tenzor a konnexió derváltjaival és $\Gamma\Gamma$-val arányos
- Ricci-tenzor: $R_\mu \nu = R^\alpha_{\mu\alpha\nu}$
- Ricci-skalár: $R = R^\alpha_\alpha$, $R \propto \partial^2 g$, $[R] = m^{-2}$

Einstein egyenlet

- Teljes Lagrange:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_M - \frac{c^4}{16\pi G} R \tag{19}$$

- Teljes hatást variáljuk metrikus tenzor szerint: $\mathcal{L}_M \to T$, R variációja bonyolult:

$$\delta S[g] = \int \frac{d^4x}{c} \sqrt{-g} \frac{1}{2} \left(T_{\mu\nu} - \frac{c^4}{8\pi} \left(R_{\mu\nu} - \frac{R}{2} g_{\mu\nu} \right) \right) \delta g^{\mu\nu} \tag{20}$$

- Minden variációra el kell tűnjön:

$$T_{\mu\nu} = \frac{c^4}{8\pi} \left(R_{\mu\nu} - \frac{R}{2} g_{\mu\nu} \right) \tag{21}$$

- Jobb oldal kovariáns deriváltját véve $\to 0$
- Következésképpen:

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0 \tag{22}$$

Energia-impulzus tenzor meghatározása

- Energia-impulzus tenzor definiciója:

$$\delta S_M[g] = \int \frac{d^4x}{c}\sqrt{-g}\frac{1}{2}T_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} \tag{23}$$

- Hatás:

$$S_M = -\int \frac{d^4x}{c}\varepsilon(s,n) \tag{24}$$

- Variáljunk g szerint:

$$\delta S = \int \frac{d^4x}{c}\left[\epsilon\delta\sqrt{-g} + \sqrt{-g}\left(\frac{\partial\epsilon}{\partial n}\delta n + \frac{\partial\epsilon}{\partial s}\delta s\right)\right] \tag{25}$$

Energia-impulzus tenzor meghatározása

- A metrikától függ, hogy mi a térfogat!
- A részecskék száma nem függ attól, hogy hogy írom le a téridőt: N invariáns, metrika szerinti variációja nulla!
- Integrálási mérték: $d\Omega = dVd\tau = \sqrt{-g}d^4x/c$

$$\delta N = \delta \int ndV = \delta \int \frac{d^4x}{d\tau c}\sqrt{-g}n = 0 \Rightarrow \delta\left(\frac{n\sqrt{-g}}{d\tau}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \delta ln\left(\frac{n\sqrt{-g}}{d\tau}\right) = 0 \Rightarrow \frac{\delta n}{n} = \frac{\delta(d\tau)}{d\tau} - \frac{\delta\sqrt{-g}}{\sqrt{-g}}$$

Energia-impulzus tenzor meghatározása

$$\delta(d\tau) = \frac{1}{c}\delta\sqrt{ds^2} = \frac{1}{c}\frac{1}{2ds}\delta(ds^2) = \frac{1}{2c^2 d\tau}\delta(g_{kl}dx^k dx^l)$$

$$\Rightarrow \frac{\delta(d\tau)}{d\tau} = \frac{1}{2c^2}\frac{dx^k}{d\tau}\frac{dx^l}{d\tau}\delta g_{kl} = \frac{1}{2c^2}u^k u^l \delta g_{kl}$$

Tudjuk, hogy (determináns mátrix elem szerinti deriváltja): $\frac{\partial g}{\partial g_{kl}} = gg^{kl}$

$$\delta\sqrt{-g} = \frac{1}{2\sqrt{-g}}(-g)g^{kl}\delta g_{kl} = \frac{\sqrt{-g}}{2}g^{kl}\delta g_{kl}$$

$$\Rightarrow \delta n = \frac{n}{2}\left(\frac{u^k u^l}{c^2} - g^{kl}\right)\delta g_{kl}$$

Most már a hatásban megjelenő minden tag variációját ismerjük! A következőkben variálom a hatást és kapom az energia impulzus tenzort!

Energia-impulzus tenzor meghatározása

A fajlagos entrópia nem függ a metrikától $\Rightarrow \delta s = 0$

$$\delta S = \int \frac{d^4x}{c}\left[\epsilon\delta\sqrt{-g} + \sqrt{-g}\left(\frac{\partial\epsilon}{\partial n}\delta n + \frac{\partial\epsilon}{\partial s}\delta s\right)\right] \Rightarrow$$

$$\delta S = \int \frac{d^4x}{c}\left[\epsilon\frac{\sqrt{-g}}{2}g^{kl}\delta g_{kl} + \sqrt{-g}w\frac{n}{2}(\frac{u^k u^l}{c^2} - g^{kl})\delta g_{kl}\right]$$

Elértük a célunkat!

$$\delta S = \int \frac{d^4x}{c}\frac{\sqrt{-g}}{2}\left[\epsilon g^{kl} + (\epsilon + p)\left(\frac{u^k u^l}{c^2} - g^{kl}\right)\right]\delta g_{kl}$$

Tehát a keresett energia-impulzus tenzor: $T^{kl} = (\epsilon + p)\frac{u^k u^l}{c^2} - pg^{kl}$

Összefoglaló

- Anyagi hatás metrikus tenzor szerinti variációja $\Rightarrow T$
- $\mathcal{L}_M = \varepsilon(s, n)$
- Kapott egyenletek:

$$\nabla_k \left[\frac{1}{c^2} (\epsilon + p) u^k u^l - p g^{kl} \right] = 0 \tag{26}$$

- Visszatérve Minkowski téridőbe:

$$\partial_k \left[\frac{1}{c^2} (\epsilon + p) u^k u^l - p g^{kl} \right] = 0 \tag{27}$$

Tartalék: numerikus megoldás

2D-ben az egyenletek a következő alakba írhatók:

$$\frac{\partial Q_k}{\partial t} + \frac{\partial F_k}{\partial x} + \frac{\partial G_k}{\partial y} = 0 \tag{28}$$

Tekintünk egy $\left[t^n, t^{n-1}\right] \times \left[x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}\right] \times \left[y_{j-\frac{1}{2}}, y_{j+\frac{1}{2}}\right]$ térfogatot, és a (28) egyenletnek vegyük ezen térfogatra a térfogati integrálját:

$$\int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \int_{y_{j-\frac{1}{2}}}^{y_{j+\frac{1}{2}}} \left[Q_k(t^{n+1}) - Q_k(t^n)\right] dydx +$$

$$\int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{y_{j-\frac{1}{2}}}^{y_{j+\frac{1}{2}}} \left[F_k(Q(x_{i+\frac{1}{2}})) - F_k(Q(x_{i-\frac{1}{2}}))\right] dydt$$

$$+ \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \left[G_k(Q(y_{j+\frac{1}{2}})) - G_k(Q(y_{j-\frac{1}{2}}))\right] dxdt = 0 \tag{29}$$

Tartalék: numerikus megoldás

Az egyenletet átírhatjuk a

$$\frac{Q^{n+1}_{k;i,j} - Q^{n}_{k;i,j}}{\Delta t} + \frac{F_{k;i+\frac{1}{2}} - F_{k;i-\frac{1}{2}}}{\Delta x} + \frac{G_{k;j+\frac{1}{2}} - G_{k;j-\frac{1}{2}}}{\Delta y} = 0 \tag{30}$$

alakban, ahol

$$Q^{n}_{k;i,j} = \frac{1}{\Delta x \Delta y} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \int_{y_{j-\frac{1}{2}}}^{x_{j+\frac{1}{2}}} Q_k(t^n, x, y) dydx \tag{31}$$

$$F^{k}_{i+\frac{1}{2},j} = \frac{1}{\Delta t \Delta y} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{y_{j-\frac{1}{2}}}^{y_{j+\frac{1}{2}}} F_k(t, x_{i+\frac{1}{2}}, y) dydt \tag{32}$$

$$G^{k}_{i,j+\frac{1}{2}} = \frac{1}{\Delta t \Delta x} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} G_k(t, x, y_{j+\frac{1}{2}}) dxdt \tag{33}$$

Tartalék: numerikus megoldás összefoglalás

- Numerikus megoldás: diszkretizáció $\leftarrow$ véges térfogat módszer
- Probléma: fluxusok a rácspontok között
- Instabilitás: perturbáció amely rácspontokban nulla $\rightarrow$ CFL feltétel
- 2 térdimenziót bonyolult $\rightarrow$ operátor szétválasztás