Nagyenergiás nehézion-ütközések numerikus hidrodinamikai modellezése

Bagoly Attila
ELTE TTK Fizika BSc, 3. évfolyam

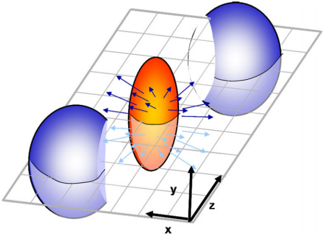
Témavezető:
Csanád Máté

ELTE TTK Atomfizikai tanszék

Bolyai Kollégium, Szakszeminárium
2015.04.29.

Bevezető

- Nehézion ütközések: nagy energiasűrűség → kvark szabadsági fokok
- Ősrobbanás: univerzum kvarkok és gluonok „őslevese”
- Kísérleti tapasztalat (2005): tökéletes folyadék
- Nagy hatáskeresztmetszetek, gyors termalizáció → statisztikus fizika
- Kezdeti eloszlás: aszimmetriák → kifagynak a részecskék eloszlásában



Motiváció

Kvark-gluon plazma folyadékszerű viselkedésének következtében:

- hogyan hatnak különböző effektusok az aszimmetriák időfejlődésére
- analitikusan nem kezelhető effektusok

$\Longrightarrow$ Numerikus hidrodinamika: realisztikus modell QGP-re, de minden effektus hatása keveredik

$\Longrightarrow$ Kezdőfeltétel: legyen közel létező analitikus megoldásokhoz, de realisztikusabb modellt adjon

Tartalom

Hidrodinamika egyenletei

- Nemrelativisztikus hidrodinamika:
  - Anyagmegmaradás: $\dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla} \rho \mathbf{v} = 0$
  - Impulzusmegmaradás:
  $$\rho\left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\boldsymbol{\nabla})\mathbf{v}\right) = -\boldsymbol{\nabla} p + \mu \Delta \mathbf{v} + \left(\zeta + \frac{\mu}{3}\right)\boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla}\mathbf{v}) + \mathbf{f}$$
  - Energiamegmaradás: $\dfrac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla} \varepsilon \mathbf{v} = -p \boldsymbol{\nabla} \mathbf{v} + \boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\sigma} \mathbf{v})$
  - ρ anyagsűrűség, $\mathbf{v}$ sebességmező, ε energiasűrűség, p nyomáseloszlás
- Relativisztikus hidrodinamika:
  $$T^{\mu\nu} = (\varepsilon + p) u^\mu u^\nu - p g^{\mu\nu}, \quad \partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$$
  - $T^{\mu\nu}$ energia-impulzus tenzor, u^μ négyes-sebesség, $g^{\mu\nu}$ metrikus tenzor
- Állapotegyenlet: $\varepsilon = \kappa(T) p \quad (\kappa = 1/c_s^2,\ \kappa = 3/2$ id. gáz)
- Advekciós forma: $\partial_t Q(\rho, \varepsilon, \mathbf{v}) + \partial_x F(Q) = 0 \quad$ (F fluxus)

Általános relativitáselmélet röviden

- Ívelemnégyzet: $ds^2 = dx_\mu dx^\mu = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$
- Konnexió: $w(x+dx)^\mu = \overline{v(x)}^\mu = v(x)^\mu - \Gamma^\mu_{\nu\lambda} v^\nu dx^\lambda$
- Deriválás: $\nabla_\mu v^\nu = \partial_\mu v^\nu + \Gamma^\nu_{\lambda\mu} v^\lambda$
- Riemann-geometria: $\Gamma = \partial g$
- Görbület: $\Delta v_\mu = \frac{1}{2} \Delta f^{\nu\lambda} R^\rho_{\mu\nu\lambda} v_\rho$, $[\nabla_\mu, \nabla_\nu] v_\lambda = R^\rho_{\lambda\mu\nu} v_\rho$, $R = g^{\mu\nu} R^\rho_{\mu\rho\nu}$
- Tehát görbületet jellemző skalár: $R \propto \partial\Gamma \propto \partial^2 g$

Általános relativitáselmélet röviden

- Anyag görbíti a téridőt:

$$S[g] = \frac{1}{c}\int d^4x\sqrt{-g}\left(\mathcal{L}_M + \frac{c^4}{16\pi G}R\right)$$

- Ennek variációja:

$$\delta S = \frac{1}{c}\int d^4x\sqrt{-g}\left(\frac{1}{2}T^{\mu\nu} - \frac{c^4}{16\pi G}\left(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg^{\mu\nu}\right)\right)\delta g_{\mu\nu}$$

- Einstein egyenlet:

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg^{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T^{\mu\nu}$$

- Kovariáns divergenciát kiszámolva:

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$$

Honnan jönnek a relativisztikus hidrodinamika egyenletei?

- Folyadék: csak belső energia: $\mathcal{L}_M = \varepsilon$
- Hatás "anyagi" része: $S_M = \int \frac{d^4x}{c}\sqrt{-g}\mathcal{L}_M$
- Energia-impulzus tenzor: $\delta S_M = \int \frac{d^4x}{c}\sqrt{-g}\frac{1}{2}T_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}$
- Mitől függ a belső energia?

Termodinamika

- Sűrűségek $\epsilon = \frac{E}{V}$ (energia), $\sigma = \frac{S}{V}$ (entrópia), $n = \frac{N}{V}$ (szám)
- Termodinamika első főtétele (felhasználva az Euler egyenletet és Gibbs-Duham relációt):

$$d\epsilon = Td\sigma + \mu dn$$

- Entrópiasűrűség metrikus tenzor szerinti deriváltja?
- Legyen $s = \frac{S}{N} \rightarrow$ ezt könnyebb deriválni metrika szerint
- Főtétel átírva:

$$d\epsilon = \frac{\epsilon + p}{n} dn + nTds$$

- Tehát $\varepsilon(n, s)$

Energia-impulzus tenzor meghatározása

- Variáljunk:

$$\delta S = \int \frac{d^4x}{c}\left[\epsilon\delta\sqrt{-g} + \sqrt{-g}\left(\frac{\partial\epsilon}{\partial n}\delta n + \frac{\partial\epsilon}{\partial s}\delta s\right)\right]$$

- Mi a fajlagos entrópia variációja?
  - $s = S/N$
  - Részecskeszám nem függ a metrikától!
  - A rendszer entrópiája sem!
  - $\delta s = 0$
- Mi a számsűrűség variációja?

$$\delta N = \delta\int n dV_0 = \delta\int\frac{d^4x}{d\tau c}\sqrt{-g}n = 0 \Rightarrow \delta\left(\frac{n\sqrt{-g}}{d\tau}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \delta ln\left(\frac{n\sqrt{-g}}{d\tau}\right) = 0 \Rightarrow \frac{\delta n}{n} = \frac{\delta(d\tau)}{d\tau} - \frac{\delta\sqrt{-g}}{\sqrt{-g}}$$

Energia-impulzus tenzor meghatározása

- Ívelem variációja:

$$\delta(d\tau) = \frac{1}{c}\delta\sqrt{ds^2} = \frac{1}{c}\frac{1}{2ds}\delta(ds^2) = \frac{1}{2c^2 d\tau}\delta(g_{kl}dx^k dx^l)$$

$$\Rightarrow \frac{\delta(d\tau)}{d\tau} = \frac{1}{2c^2}\frac{dx^k}{d\tau}\frac{dx^l}{d\tau}\delta g_{kl} = \frac{1}{2c^2}u^k u^l \delta g_{kl}$$

- Determináns mátrixelem szerinti deriváltja: $\frac{\partial A}{\partial A_{kl}} = A(A^{-1})_{kl} \Rightarrow$

$$\delta g = g g^{kl}\delta g_{kl}$$

- Jacobi-determináns variációja:

$$\delta\sqrt{-g} = \frac{1}{2\sqrt{-g}}(-g)g^{kl}\delta g_{kl} = \frac{\sqrt{-g}}{2}g^{kl}\delta g_{kl}$$

$$\Rightarrow \delta n = \frac{n}{2}\left(\frac{u^k u^l}{c^2} - g^{kl}\right)\delta g_{kl}$$

Energia-impulzus tenzor meghatározása

- A hatás variációja:

$$\delta S = \int \frac{d^4x}{c}\left[\epsilon\frac{\sqrt{-g}}{2}g^{kl}\delta g_{kl} + \sqrt{-g}\frac{\varepsilon + p}{n}\frac{n}{2}(\frac{u^k u^l}{c^2} - g^{kl})\delta g_{kl}\right]$$

$$\Rightarrow \delta S = \int \frac{d^4x}{c}\frac{\sqrt{-g}}{2}\left[\epsilon g^{kl} + (\epsilon + p)\left(\frac{u^k u^l}{c^2} - g^{kl}\right)\right]\delta g_{kl}$$

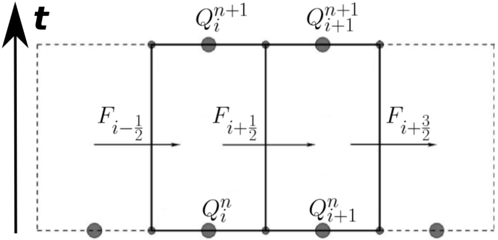
- Ideális folyadék energia-impulzus tenzor: $T^{kl} = (\epsilon + p)\frac{u^k u^l}{c^2} - pg^{kl}$
- Minkowski-téridőben az egyenletek:

$$\partial_\mu T^{\nu\mu} = 0$$

Numerikus módszer

- Transzverz sík kitüntetett: $2+1$ dimenziós egyenletek
- Numerikus megoldás: diszkretizáció $\leftarrow$ véges térfogat módszer
- Probléma: fluxusok a rácspontok között
- Instabilitás: perturbáció amely rácspontokban nulla $\rightarrow$ CFL feltétel
- 2 térdimenziót bonyolult $\rightarrow$ operátor szétválasztás
- Viszkozitás: ideális fluxus + viszkózus fluxus $\leftarrow$ operátor szétválasztás

$$\partial_t Q + \partial_x F(Q) = 0$$



Operátorok felbontása

$$\partial_t u = Au + Bu$$

$$u(t+\Delta t) = e^{\Delta t(A+B)} u(t)$$

$$u_{\mathrm{Lie}}(t+\Delta t) = e^{\Delta t A} e^{\Delta t B} u(t)$$

$$u_{\mathrm{Strang}}(t+\Delta t) = e^{\frac{1}{2}\Delta t A} e^{\Delta t B} e^{\frac{1}{2}\Delta t A} e^{\Delta t B} u(t)$$

Viszkózus hidrodinamika

$$\partial_t Q + \partial_x F_{\mathrm{id}}(Q) + \partial_y G_{\mathrm{id}}(Q) + \partial_x F_{\mathrm{visc}}(Q, \partial Q) + \partial_y G_{\mathrm{visc}}(Q, \partial Q) = 0$$

$\Longrightarrow$ operátorfelbontás

- Ideális lépés: $\partial_t Q + \partial_x F_{\mathrm{id}}(Q) + \partial_y G_{\mathrm{id}}(Q) = 0 \rightarrow Q^{\mathrm{id}}, \partial Q^{\mathrm{id}}$ $\rightarrow F_{\mathrm{visc}}, G_{\mathrm{visc}}$
- Viszkózus lépés: $\partial_t Q + \partial_x F_{\mathrm{visc}}(Q^{\mathrm{id}}, \partial Q^{\mathrm{id}}) + \partial_y G_{\mathrm{visc}}(Q^{\mathrm{id}}, \partial Q^{\mathrm{id}}) = 0$ $\rightarrow Q$

MUSTA módszer

- n-edik időlépésben: $Q_i^{(0)} \equiv Q_i^n$, $Q_{i+1}^{(0)} \equiv Q_{i+1}^n$
- ℓ-edik előrejelzett fiktív értékek: $Q_i^{(\ell)}$, $F_i^{(\ell)} \equiv F\left(Q_i^{(\ell)}\right)$
- Köztes érték és fluxus:

$$Q_{i+\frac{1}{2}}^{(\ell)} = \frac{1}{2}\left[Q_i^{(\ell)} + Q_{i+1}^{(\ell)}\right] - \frac{1}{2}\frac{\Delta t}{\Delta x}\left[F_{i+1}^{(\ell)} - F_i^{(\ell)}\right], \quad F_M^{(\ell)} \equiv F\left(Q_{i+\frac{1}{2}}^{(\ell)}\right)$$

- Korrigált cellaközi fluxus:

$$F_{i+\frac{1}{2}}^{(\ell)} = \frac{1}{4}\left[F_{i+1}^{(\ell)} + 2F_M^{(\ell)} + F_i^{(\ell)} - \frac{\Delta x}{\Delta t}\left(Q_{i+1}^{(\ell)} - Q_i^{(\ell)}\right)\right]$$

- Következő előrejelzés a korrigált fluxusok meghatározásához:

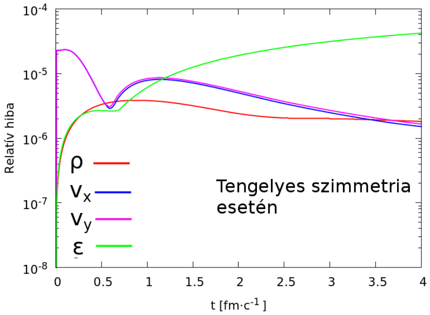
$$Q_i^{(\ell+1)} = Q_i^{(\ell)} - \frac{\Delta t}{\Delta x}\left[F_{i+\frac{1}{2}}^{(\ell)} - F_i^{(\ell)}\right]$$

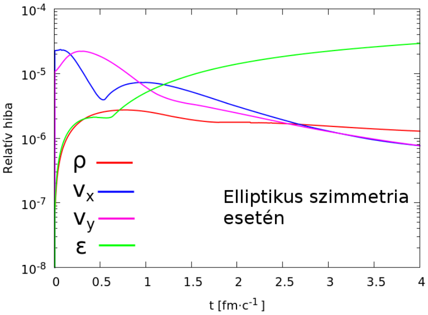
- k lépés $\rightarrow F_{i+\frac{1}{2}} = F_{i+\frac{1}{2}}^{(k)} \implies Q_i^{n+1} = Q_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}(F_{i+\frac{1}{2}} - F_{i-\frac{1}{2}})$
- A módszer publikálva: E. F. Toro et al, 2006, J. Comp. Phys

Kód tesztelése

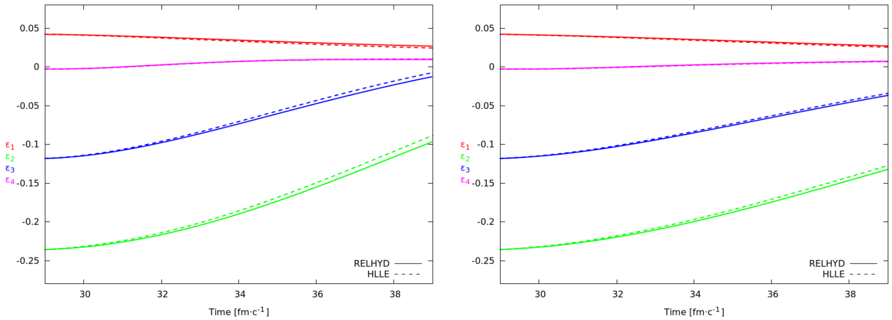
- Egzakt megoldással (Csörgő et al, PhysRevC67)
- Relatív hiba a numerikus és analitikus megoldás közt:

$$\int \left|\rho_{\text{analitikus}}(t,\underline{x}) - \rho_{\text{numerikus}}(t,\underline{x})\right| d^2x \Big/ \int \rho_{\text{analitikus}}(t,\underline{x})\, d^2x$$

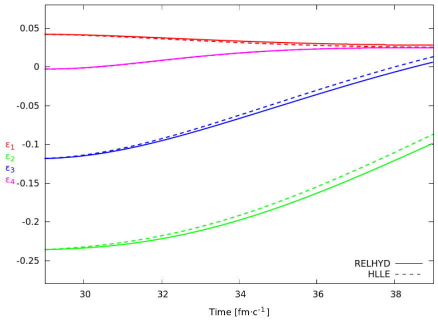


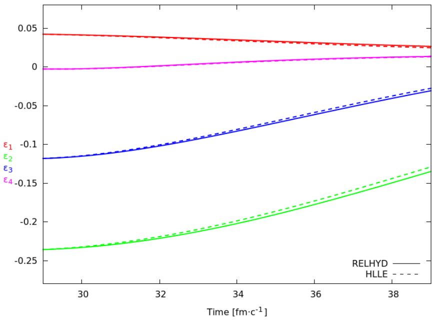


Relativisztikus kód tesztelése: Számsűrűség $\kappa = 2$ és $\kappa = 4$

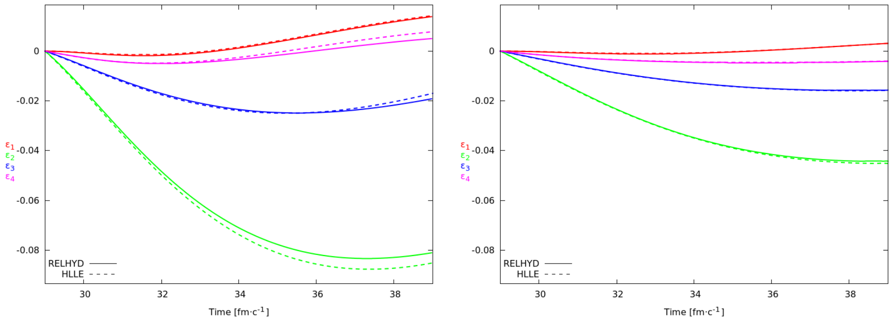


Relativisztikus kód tesztelése: Nyomás $\kappa = 2$ és $\kappa = 4$





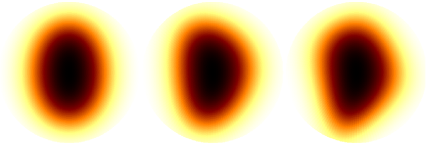
Relativisztikus kód tesztelése: Sebességmező $\kappa = 2$ és $\kappa = 4$



Kezdőfeltétel

- Mennyiségek: helyfüggés csak skálaváltozóban, ebben szimmetria
- Számsűrűség és nyomás $\propto \exp\left(-s\right)$
- Skálaváltozó:

$$s = \frac{r^2}{R^2}\Big(1 + \epsilon_2 \cos(2\phi) + \epsilon_3 \cos(3\phi) + \epsilon_4 \cos(4\phi)\Big)$$



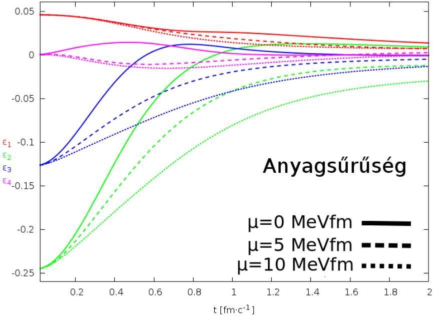
- Sebesség: Hubble-sebességmező vagy 0
- Nyomásgradiens vizsgálata: $p \propto \exp\left(-\mathrm{c_p} \cdot \mathrm{s}\right)$
- Konstans nyomással multipólus analitikus megoldás: Csanád és Szabó, Phys.Rev. C90 (2014) 054911

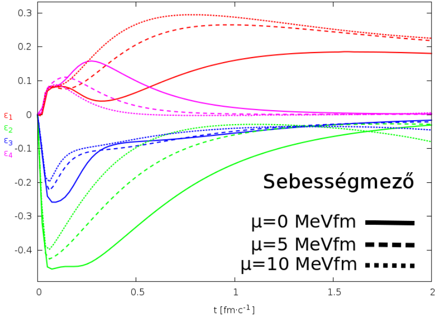
Aszimmetriák jellemzése

- Skálaváltozó: $s = \frac{r^2}{R^2}\left(1 + \epsilon_2 \cos(2\phi) + \epsilon_3 \cos(3\phi) + \epsilon_4 \cos(4\phi)\right)$
- Aszimmetriát jellemző paraméter: $\varepsilon_n = \langle \cos(n\phi) \rangle_{\rho/\mathbf{v}/p}$
- ε_n (most bevezetett) $\neq$ ϵ_m (kezdőfeltétel skálaváltozójában)
- Kezdetben a ε_n és ϵ_m közti kapcsolatot becsülhetjük Taylor-sorfejtéssel:
  - $\varepsilon_1 = 0 + \epsilon_3(\epsilon_2 + \epsilon_4) + \mathcal{O}(\epsilon^4)$
  - $\varepsilon_2 = -\epsilon_2 + \epsilon_2\epsilon_4 + \epsilon_2 \sum_n \epsilon_n^2 + \mathcal{O}(\epsilon^4)$
  - $\varepsilon_3 = -\epsilon_3 + \epsilon_3 \sum_n \epsilon_n^2 + \mathcal{O}(\epsilon^4)$
  - $\varepsilon_4 = -\epsilon_4 + \frac{1}{2}\epsilon_2^2 - \epsilon_4 \sum_n \epsilon_n^2 + \mathcal{O}(\epsilon^4)$

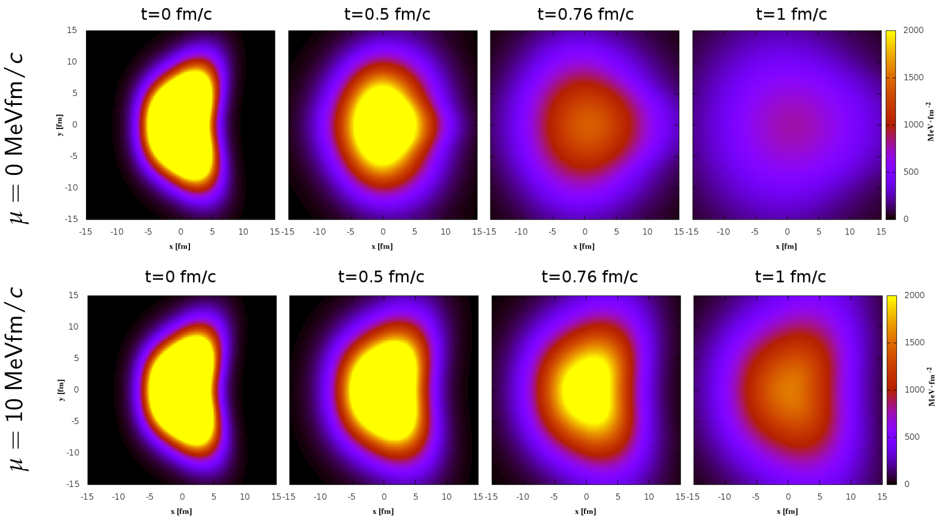
Viszkozitás hatása

- Energiasűrűségben és anyagsűrűségben: lassít
  - Viszkozitás: lassítja az áramlást
- Sebességeloszlásban: gyorsít
  - Nagyobb,kisebb aszimmetriájú részek más erőt éreznek: különbségek gyorsan eltűnnek
- Ábra: ε_1 piros, ε_2 zöld, ε_3 kék, ε_4 magenta

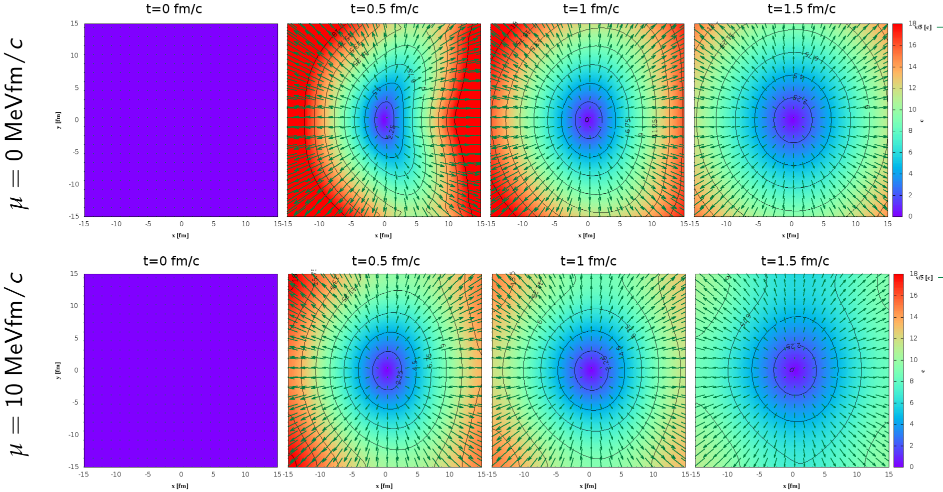




Viszkozitás hatása: energiasűrűség időfejlődése

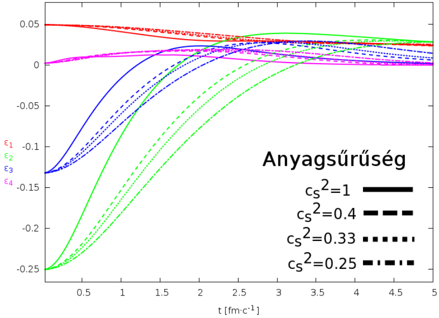


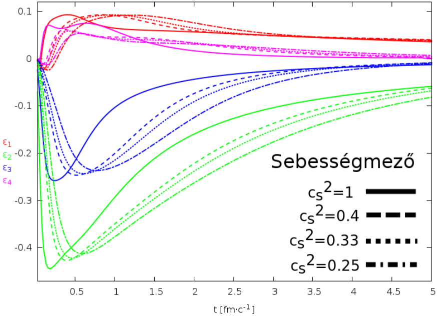
Viszkozitás hatása: sebességeloszlás időfejlődése



Hangsebesség hatása

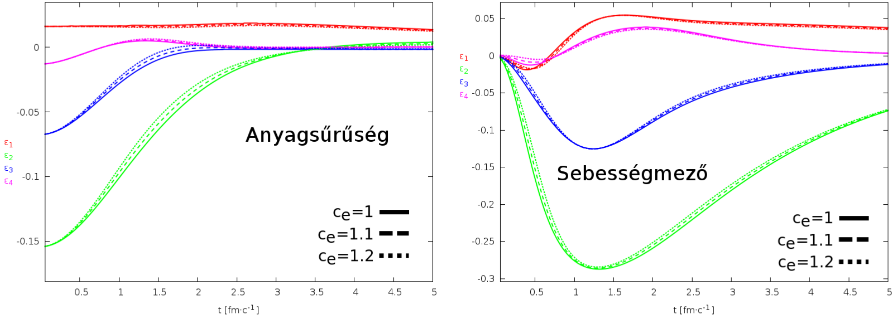
- Minden eloszlásban: aszimmetriák eltűnése lassul
  - Nyomáshullámok sebessége csökken → kiegyenlítődés tovább tart
- Hangsebességek: $c_s^2 = 1$ vagy $0,4$ vagy $0,33$ vagy $0,25$





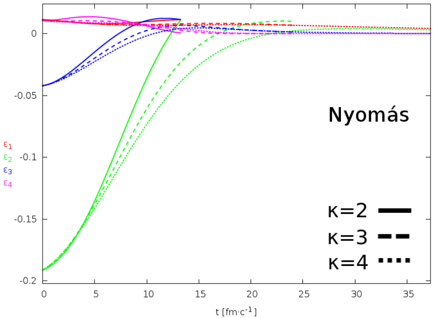
Nyomásgradiens hatása

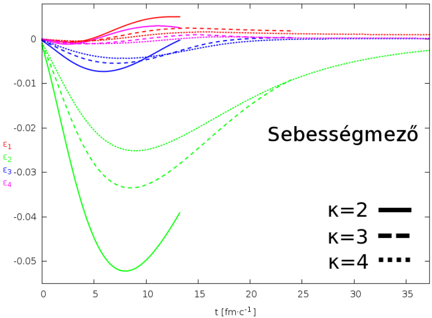
- Minden eloszlásban: aszimmetriák gyorsabban eltűnnek
  - Nagyobb gradiens: gyorsabb áramlás
- Anyagsűrűség $\propto \exp(-s)$
- Nyomás $\propto \exp(-c_e \cdot s)$



Hangsebesség hatása

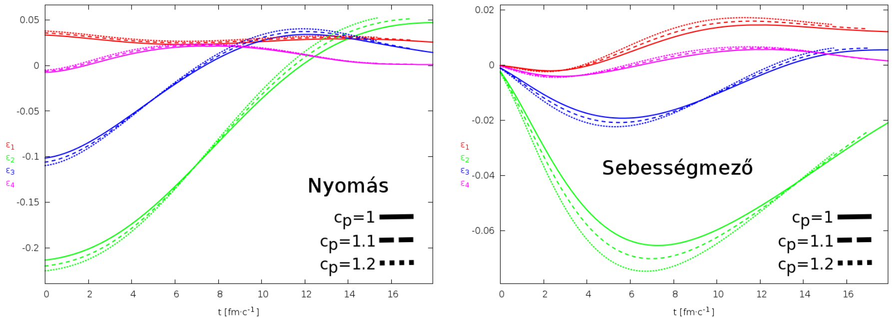
- Minden eloszlásban: aszimmetriák eltűnése lassul
  - Nyomáshullámok sebessége csökken → kiegyenlítődés tovább tart
- Kifagyás máskor történik!





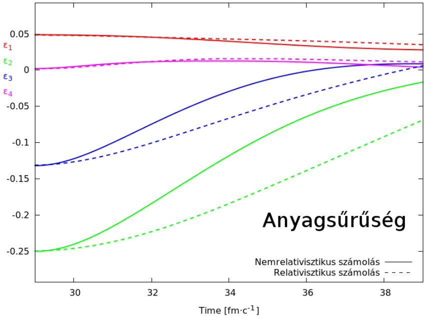
Nyomásgradiens hatása

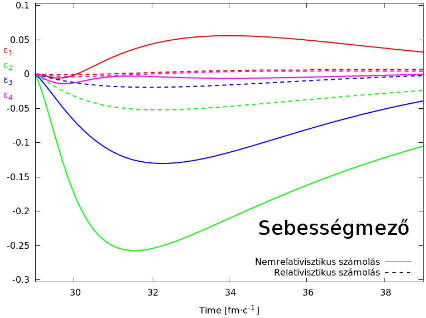
- Minden eloszlásban: aszimmetriák gyorsabban eltűnnek
    - Nagyobb gradiens: gyorsabb áramlás
- Számsűrűség $\propto \exp(-s)$
- Nyomás $\propto \exp(-c_p \cdot s)$



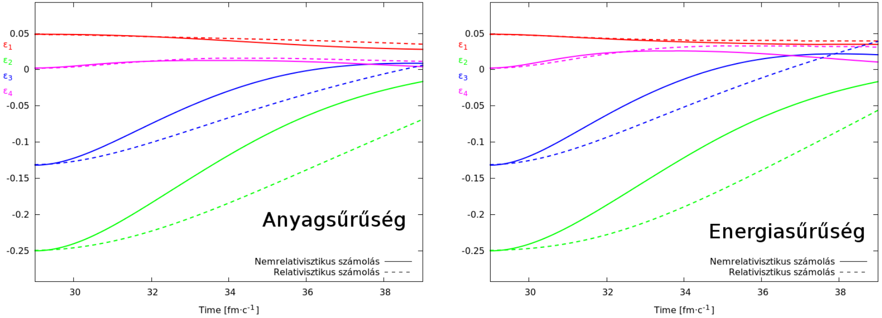
Relativisztikus és nemrelativisztikus hidrodinamika összehasonlítása

- Relativisztikus eset: lassabban tűnik el az asszimmetria
- Nemrelativisztikus eset: sebességmezőben nagyobb aszimmetria alakul ki



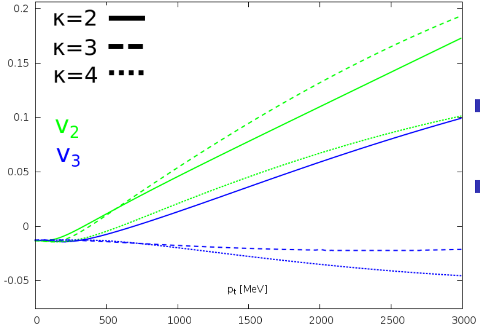


Relativisztikus és nemrelativisztikus hidrodinamika összehasonlítása



Kifagyás

- Hőmérséklet $\downarrow$ $\Rightarrow$ kvark-szabadsági fokok eltűnnek $\Rightarrow$ hadronok
- Maxwell-Jüttner típusú forrásfüggvény:
  $$S(x,p)d^4x = \mathcal{N} n(x) \exp\left(-\frac{p_\mu u^\mu}{T(x)}\right) H(\tau) p_\mu d^3 \frac{u_\mu d^3x}{u^0} d\tau$$
- Mérhető mennyiségek:
  $$v_n(p_t) = \langle \cos(n\varphi)\rangle_N = \frac{1}{N(p_t)} \int_0^{2\pi} N(p_t,\varphi) \cos(n\varphi) d\varphi$$



- Impulzustérbeli aszimmetriák: erősen függés a hangsebességtől
- Hangsebességre érzékeny: kifagyás ideje

Összegzés

- Motiváció: egyszerű effektusok, hogyan befolyásolják az aszimmetriák időfejlődését
- Analitikus tárgyalás korlátozottabb, ezért numerikus módszert alkalmaztunk

Összegzés

- Motiváció: egyszerű effektusok, hogyan befolyásolják az aszimmetriák időfejlődését
- Analitikus tárgyalás korlátozottabb, ezért numerikus módszert alkalmaztunk
- Kezdőfeltétel hasonló a már létező analitikus megoldásokhoz, de realisztikusabb

Összegzés

- Motiváció: egyszerű effektusok, hogyan befolyásolják az aszimmetriák időfejlődését
- Analitikus tárgyalás korlátozottabb, ezért numerikus módszert alkalmaztunk
- Kezdőfeltétel hasonló a már létező analitikus megoldásokhoz, de realisztikusabb
- A viszkozitás lassabbá teszi az anyag- és energiasűrűségben számolt aszimmetriák időfejlődését, sebességeloszlásban gyorsabbá

Összegzés

- Motiváció: egyszerű effektusok, hogyan befolyásolják az aszimmetriák időfejlődését
- Analitikus tárgyalás korlátozottabb, ezért numerikus módszert alkalmaztunk
- Kezdőfeltétel hasonló a már létező analitikus megoldásokhoz, de realisztikusabb
- A viszkozitás lassabbá teszi az anyag- és energiasűrűségben számolt aszimmetriák időfejlődését, sebességeloszlásban gyorsabbá
- Hangsebesség csökkentése lassítja az aszimmetriák időfejlődését, kifagyás később következik be

Köszönöm a figyelmet!

Kód tesztelése

- Nemrelativisztikus esetben: egzakt megoldással (Csörgő et al, PhysRevC67):

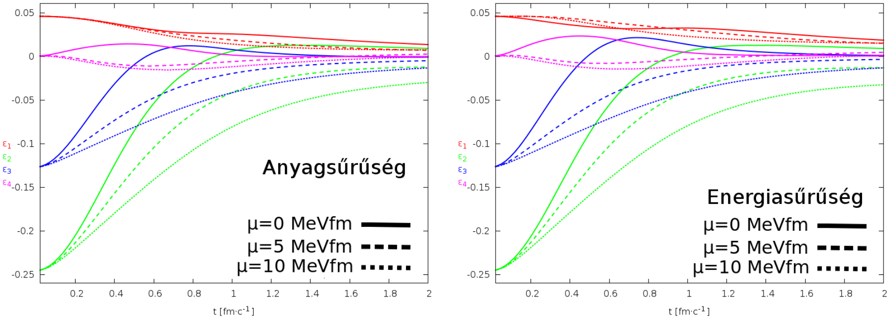
$$s = \frac{x^2}{X^2(t)} + \frac{y^2}{Y^2(t)}$$

$$\rho = \rho_0 \frac{V_0}{V} e^{-s}, \quad p = p_0 \left(\frac{V_0}{V} \right)^{1+\frac{1}{\kappa}} e^{-s}$$

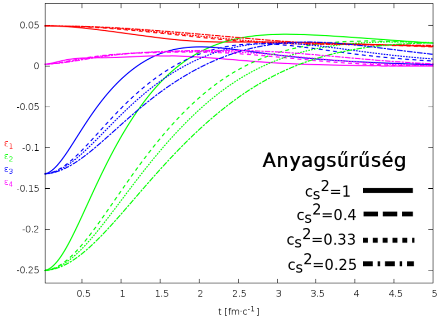
$$\mathbf{v}(t, \mathbf{r}) = \left(\frac{\dot{X}}{X} x, \frac{\dot{Y}}{Y} y \right)$$

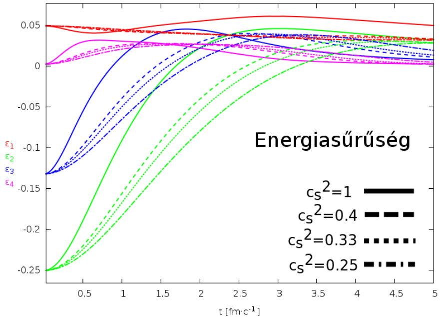
$$\ddot{X} X = \ddot{Y} Y = \frac{T_i}{m} \left(\frac{V_0}{V} \right)^{\frac{1}{\kappa}}, \quad V = X(t) Y(t)$$

Viszkozitás hatása: ε_n anyag- és energiasűrűségben

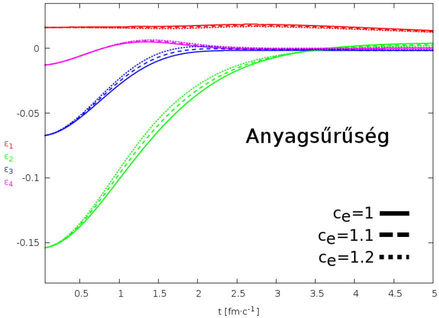


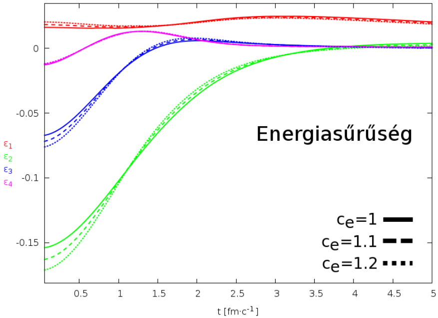
Hangsebesség hatása: ε_n anyag- és energiasűrűségben



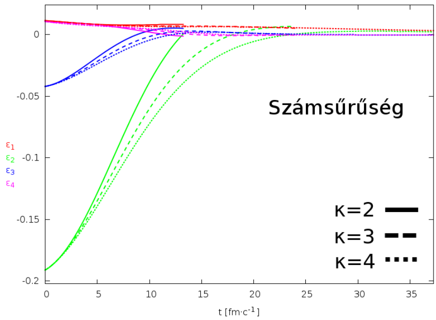


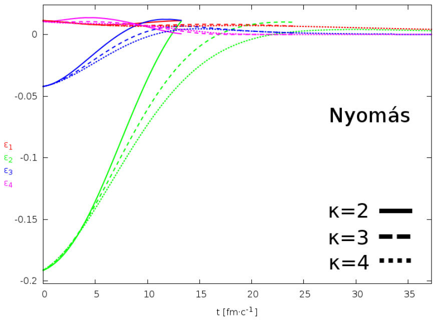
Nyomásgradiens hatása: ε_n anyag- és energiasűrűségben



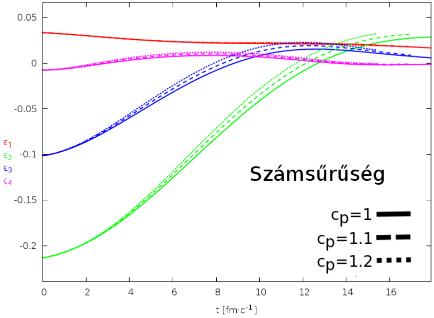


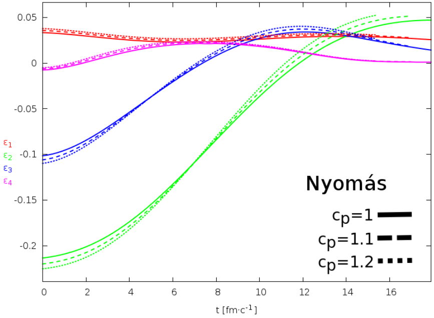
Hangsebesség hatása: ε_n számsűrűségben és nyomáseloszlásban





Nyomásgradiens hatása: ε_n számsűrűségben és nyomáseloszlásban





Kitekintés

- Viszkozitás hatásának vizsgálata relativisztikus esetben
- Relativisztikus és nemrelativisztikus viszkozitás összehasonlítása
- QCD állapotegyenlet használata