Equation d'onde de d'Alembert (unidimensionnelle)

I – Chaîne infinie d'oscillateurs et approximation des milieux continus :

II – Vibrations transversales d'une corde : équation d'onde de d'Alembert :

III – Familles de solutions de l' équation d'onde de d'Alembert :

1 - Ondes progressives :

2 - Ondes progressives harmoniques :

3 - Ondes stationnaires :

IV – Applications :

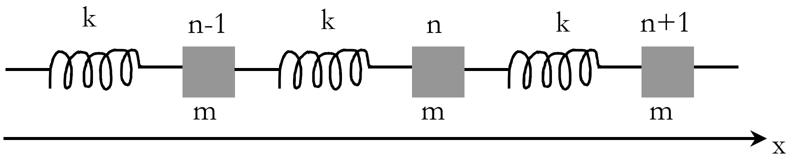
1 - Etude des petits mouvements libres d'une corde vibrante fixée à ses deux extrémités, modes propres :

2 - Corde de Melde ; ondes stationnaires et résonances :

I – Chaîne infinie d'oscillateurs et approximation des milieux continus :

Afin d'étudier la propagation d'ondes sonores dans les solides, on utilise le modèle suivant (voir figure) : le solide est constitué d'une chaîne infinie d'atomes ponctuels, de masse m, reliés entre eux par des ressorts de raideur k et de longueur à vide d (correspondant à la distance inter-atome à l'équilibre).

Le mouvement de l'ensemble se fait sans frottements le long de l'axe (Ox). Les atomes se déplacent légèrement autour de leurs positions d'équilibres respectives, que l'on peut repérer sous la forme $x_{éq,n} = nd$.



On repère les positions des atomes hors équilibre par leurs abscisses :

$$x_n(t) = nd + u_n(t)$$

où les déplacements $u_n(t)$ restent faibles vis-à-vis de d.

Le théorème du CI appliqué à l'atome de rang (n) donne, en projection :

$$m\ddot{x}_n = -k(u_n - u_{n-1}) + k(u_{n+1} - u_n) = -k(2u_n - u_{n-1} - u_{n+1})$$

La distance d inter-atome est de l'ordre de $d \approx 10^{-10}\,m$, distance très inférieure aux distances caractéristiques des phénomènes de propagation que l'on étudie. On va ainsi définir une fonction continue de la manière suivante :

$$u(x_n, t) = u_n(t)$$

Il vient alors :

$$u_{n+1}(t) = u(x_{n+1}, t) = u(x_n + d, t) = u(x_n, t) + \frac{\partial u}{\partial x} d + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} d^2$$

$$u_{n-1}(t) = u(x_{n-1}, t) = u(x_n - d, t) = u(x_n, t) - \frac{\partial u}{\partial x} d + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} d^2$$

Et l'équation du mouvement devient alors :

$$m\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = k\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} d^2\right)$$

Soit :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \qquad avec \qquad c = \sqrt{\frac{kd^2}{m}}$$

C'est l'équation d'onde de d'Alembert, déjà obtenu en EM lors du chapitre sur les équations locales. On sait qu'elle est associée à un phénomène ondulatoire de célérité c.

II – Vibrations transversales d'une corde ; équation d'onde de d'Alembert :

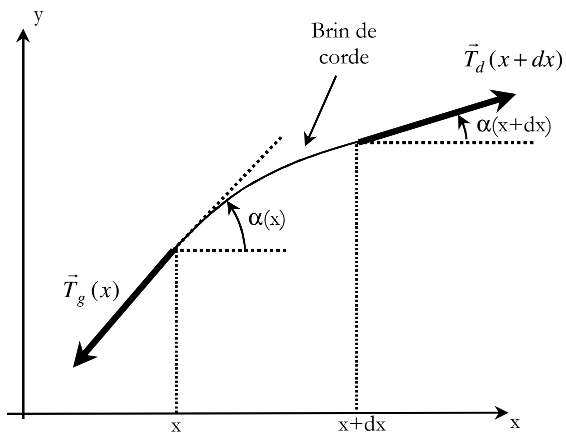
On considère une corde inextensible, de masse linéique μ, tendue horizontalement avec une force constante F.

A l'équilibre, la corde est horizontale. On supposera dans la suite que la pesanteur n'intervient pas (sinon, la forme de la corde serait une chaînette).

On se propose d'étudier les petits mouvements au voisinage de cet équilibre, avec le modèle suivant :

- L'élément de corde situé au point de coordonnées (x,0) à l'équilibre se trouve au point de coordonnées (x,y(x,t)) hors équilibre ; autrement dit, on néglige son déplacement le long de (Ox).
- L'angle α(x,t) que fait la tangente à la corde au point d'abscisse x à l'instant t est un infiniment petit ($\cos\alpha \approx 1$; $\tan\alpha \approx \sin\alpha \approx \alpha$).
- Si on considère une coupure fictive au point d'abscisse x, l'action exercée par la partie gauche de la corde sur la partie droite se réduit à une force $\vec{T}_g(x)$ tangente à la corde ; de même, l'action exercée par la partie droite sur la partie gauche se réduit à une force $\vec{T}_d(x)$. D'après le principe des actions réciproques, $\vec{T}_d(x) = -\vec{T}_g(x)$.

Le théorème du CI appliqué à un élément de corde situé entre les abscisses x et x + dx donne :



$$\mu\, dx \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\vec{u}_y = \vec{T}_g(x,t) + \vec{T}_d(x+dx,t) = -\vec{T}_d(x,t) + \vec{T}_d(x+dx,t)$$

En projection et en notant $T = \left\|\vec{T}_d\right\|$:

$$0 = -T(x,t)\cos\alpha(x,t) + T(x+dx,t)\cos\alpha(x+dx,t) \qquad (1)$$

$$\mu\, dx \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -T(x,t)\sin\alpha(x,t) + T(x+dx,t)\sin\alpha(x+dx,t) \qquad (2)$$

Si on se limite à l'ordre 1, l'équation (1) donne :

$$T(x+dx) = T(x) = cste = F$$

L'équation (2) se réécrit :

$$\mu\, dx \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -F\alpha(x,t) + F\alpha(x+dx,t) = F\frac{\partial \alpha}{\partial x}dx$$

Or, $\tan\alpha = \dfrac{\partial y}{\partial x} \approx \alpha$, d'où :

$$\mu \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = F \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \qquad soit \qquad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0 \qquad (avec\ c = \sqrt{\frac{F}{\mu}})$$

On retrouve là encore l'équation d'ondes de d'Alembert.

Dans le cas de la corde, l'onde est dite transversale (le déplacement a lieu selon Oy).

Dans le cas de la chaîne infinie d'atomes, l'onde était longitudinale (le déplacement se faisait selon (Ox)).

III – Familles de solutions de l'équation d'onde de d'Alembert :

1 - Ondes progressives :

On se propose de résoudre l'équation de d'Alembert unidimensionnelle :

$$\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = 0$$

De manière symbolique, cette équation peut s'écrire :

$$\left(v\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t}\right).\left(v\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial t}\right) s = 0$$

On pose :

$$p = t + \frac{x}{v} \qquad et \qquad q = t - \frac{x}{v}$$

et, en considérant x et t comme des fonctions de p et de q :

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial x}\frac{\partial}{\partial p} + \frac{\partial q}{\partial x}\frac{\partial}{\partial q} = \frac{1}{v}\left(\frac{\partial}{\partial p} - \frac{\partial}{\partial q}\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial p}{\partial t}\frac{\partial}{\partial p} + \frac{\partial q}{\partial t}\frac{\partial}{\partial q} = \frac{\partial}{\partial p} + \frac{\partial}{\partial q}$$

On en déduit :

$$v\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t} = 2\frac{\partial}{\partial p} \qquad et \qquad v\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial t} = -2\frac{\partial}{\partial q}$$

L'équation de d'Alembert prend alors la forme :

$$\frac{\partial^2 s}{\partial p \partial q} = \frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{\partial s}{\partial q}\right) = 0$$

Par conséquent, $\frac{\partial s}{\partial q} = \varphi(q)$ et, si f(q) désigne une primitive de φ(q), alors :

$$s = f(q) + g(p) = f(t - \frac{x}{v}) + g(t + \frac{x}{v})$$

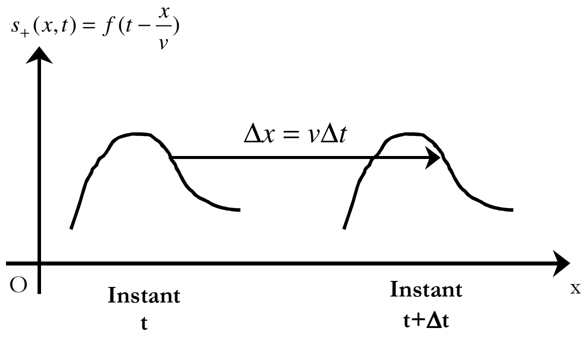
Interprétation physique : on considère une fonction de la forme :

$$s_+(x,t) = f(t - \frac{x}{v})$$

On constate que :

$$f(t-\frac{x}{v}) = f(t+\Delta t - \frac{x+\Delta x}{v})$$

pour tout couple Δx et Δt vérifiant : $\Delta x = v\Delta t$. Ainsi, $s_+(x,t)$ représente un signal qui se propage sans déformation à la vitesse v le long de l'axe (Ox) dans le sens positif. Une fonction de la forme $f(t-\frac{x}{v})$ est appelée onde plane progressive.



La solution $s_-(x,t) = f(t+\frac{x}{v})$ représente un signal qui se propage sans déformation à la vitesse v le long de l'axe (Ox) dans le sens négatif.

On se propose maintenant de résoudre l'équation de d'Alembert tridimensionnelle :

$$\Delta s - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = 0 \qquad avec\ s(\vec{r},t) = s(x,y,z,t)$$

On vérifie que des fonctions de la forme :

$$s_{x,\pm}(x,y,z,t) = f(t \mp \frac{x}{v}) \quad ; \quad s_{y,\pm}(x,y,z,t) = f(t \mp \frac{y}{v}) \quad ; \quad s_{z,\pm}(x,y,z,t) = f(t \mp \frac{z}{v})$$

sont solution de l'équation tridimensionnelle (ces solutions sont appelées ondes planes de directions de propagations respectives $\vec{u}_x, \vec{u}_y\ et\ \vec{u}_z$, dans le sens positif ou négatif).

Remarque : des ondes sphériques sont également solution de l'équation de d'Alembert tridimensionnelle : on cherche, par exemple, des solutions à symétrie sphérique s(r,t). En utilisant la forme du laplacien en coordonnées sphériques, il vient :

$$\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(rs) - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = 0$$

Soit encore :

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2}(rs) - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}(rs) = 0$$

On constate alors que la fonction rs(r,t) est solution de l'équation unidimensionnelle de d'Alembert. Par conséquent :

$$rs(r,t) = f(t-\frac{x}{v}) + g(t+\frac{x}{v})$$

Soit :

$$s(r,t) = \frac{1}{r}f(t-\frac{x}{v}) + \frac{1}{r}g(t+\frac{x}{v})$$

Les deux termes de cette somme représentent des ondes sphériques respectivement divergente et convergente. On constate que le signal ne se propage pas sans déformation en raison de l'affaiblissement exprimé par le facteur 1 / r.

Ordres de grandeurs :

On peut évaluer l'ordre de grandeur de la célérité des ondes dans le modèle de la chaîne d'atomes et la comparer avec l'ordre de grandeur de la célérité des ondes sonores dans les solides qui vaut typiquement quelques milliers de mètres par seconde.

Pour estimer la raideur k, on suppose que l'ordre de grandeur de l'énergie de liaison par atome est l'ev et que cette énergie est de la forme élastique $\frac{1}{2}kd^2$ où $d \approx 10^{-10}\,m$. On trouve $k \approx 10\,N.m^{-1}$.

Avec $m \approx 10^{-26}\,kg$, on obtient :

$$c = \sqrt{\frac{kd^2}{m}} \approx 3.10^3\,m.s^{-1}$$

Soit un ordre de grandeur tout à fait satisfaisant.

Dans chacun des deux exemples (chaîne d'atomes et corde vibrante), on constate que la célérité est une fonction croissante de la raideur du milieu (k ou F) et décroissante de l'inertie du milieu (m ou μ). On peut retenir, plus généralement que :

« Des ondes mécaniques se propagent d'autant plus mal que le milieu est plus mou et plus inerte. »

2 - Ondes progressives harmoniques :

On se limite ici à des solutions harmoniques de l'équation de d'Alembert, c'est-à-dire des solutions de la forme :

$$s(x,t) = A\cos\left(\omega(t - \frac{x}{c})\right)$$

Ces solutions correspondent à des ondes planes progressives harmoniques (OPPH).

Ces fonctions, de période temporelle $T = \frac{2\pi}{\omega}$ possèdent une période spatiale $\lambda = cT = 2\pi\frac{c}{\omega}$ appelée longueur d'onde.

On définit le vecteur d'onde $\vec{k}$ tel que :

$$\vec{k} = k\,\vec{u}_x \qquad avec \qquad k = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda}$$

L'OPPH est alors de la forme :

$$s(x,t) = A\cos(\omega t - kx)$$

3 - Ondes stationnaires :

On cherche des solutions de l'équation de d'Alembert de la forme (méthode de séparation des variables) :

$$s(x,t) = f(x)\,g(t)$$

En substituant dans l'équation de d'Alembert :

$$\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = 0$$

Il vient :

$$f''(x)g(t) - \frac{1}{c^2} f(x)\ddot{g}(t) = 0$$

D'où :

$$\frac{1}{f(x)} f''(x) = \frac{1}{c^2}\frac{\ddot{g}(t)}{g(t)} = cste = K$$

On obtient ainsi deux équations différentielles :

$$\frac{1}{f(x)} f''(x) = K \qquad et \qquad \frac{1}{c^2}\frac{\ddot{g}(t)}{g(t)} = K$$

Ou encore :

$$f''(x) - Kf(x) = 0 \qquad et \qquad \ddot{g}(t) - c^2 K g(t) = 0$$

Si K > 0, la solution de la deuxième équation différentielle est de la forme :

$$g(t) = Ae^{c\sqrt{K}\,t} + Be^{-c\sqrt{K}\,t}$$

Cette solution est à rejeter : en effet, elle correspond soit à une solution divergente soit à une solution transitoire.

Dans la suite, on suppose K < 0 ; alors, en posant $-c^2 K = \omega^2$:

$$g(t) = A\cos(\omega t - \varphi)$$

La 1ère équation donne alors :

$$f''(x) + \frac{\omega^2}{c^2} f(x) = 0 \qquad soit \qquad f(x) = B\cos\left(\frac{\omega}{c}x - \psi\right)$$

La solution globale de l'équation de d'Alembert est alors :

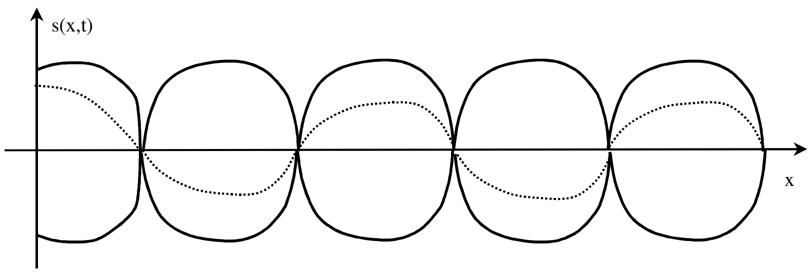
$$s(x,t) = C\cos\left(\frac{\omega}{c}x - \psi\right)\cos(\omega t - \varphi)$$

On pose dans la suite $k = \dfrac{\omega}{c}$, alors :

$$s(x,t) = C\cos(kx - \psi)\cos(\omega t - \varphi)$$

Ce type de solutions, appelé onde plane stationnaire est très différent d'une onde plane progressive : les dépendances spatiale et temporelle interviennent séparément ; la dépendance spatiale intervient dans l'amplitude de l'oscillation temporelle et non plus dans la phase, de telle sorte que tous les points de la corde vibrent en phase ou en opposition de phase.

L'allure de la corde à différents instants est représentée sur la figure suivante. Certains points de la corde sont fixes et sont appelés nœuds de vibrations ; d'autres ont une amplitude de vibration maximale et sont appelés ventres de vibrations.



Les courbes en gras correspondent aux instants où la vibration est extrémale ; la courbe en pointillés correspond à un instant quelconque.

Position des nœuds : elle s'obtient en écrivant que :

$$\cos(kx-\psi)=0 \qquad soit \qquad kx_n-\psi=(2n+1)\frac{\pi}{2}$$

Soit, avec $k=\dfrac{2\pi}{\lambda}$:

$$x_n=\frac{2n+1}{4}\lambda+\frac{\psi}{k}$$

La distance entre deux nœuds successifs est égale à $\dfrac{\lambda}{2}$.

Position des ventres : elle s'obtient en écrivant que :

$$\cos(kx-\psi)=\pm 1 \qquad soit \qquad kx_v-\psi=n\pi$$

Soit :

$$x_v=\frac{n}{2}\lambda+\frac{\psi}{k}$$

La distance entre deux ventres successifs est égale à $\dfrac{\lambda}{2}$.

La distance entre un nœud et un ventre successif est égale à $\dfrac{\lambda}{4}$.

IV – Applications :

1 - Etude des petits mouvements libres d'une corde vibrante fixée à ses deux extrémités, modes propres :

On considère une corde de longueur L fixée à ses extrémités d'abscisses x = 0 et x = L :

$$y(0,t)=y(L,t)=0 \qquad \text{(à tout instant)}$$

Les CI sont les suivantes :

$$\text{A t = 0 : } y(x,0)=\alpha(x) \;\; et \;\; \frac{\partial y}{\partial t}(x,0)=\beta(x)$$

La corde évolue ensuite librement (régime libre).

On cherche des solutions de l'équation de d'Alembert sous la forme d'ondes stationnaires :

$$y(x,t)=C\cos(kx-\psi)\cos(\omega t-\varphi)$$

Les conditions aux limites entraînent :

$$\cos\psi = 0 \qquad et \qquad \cos(kL-\psi) = 0$$

Par conséquent, $\psi = \frac{\pi}{2}$ et $\sin kL = 0$, soit $kL = n\pi$: la norme du vecteur d'onde k est quantifiée. Les pulsations le sont également :

$$k = \frac{\omega}{c} \qquad d'où \qquad \omega = n\frac{\pi c}{L}$$

En faisant intervenir la longueur d'onde $\lambda = cT = c\frac{2\pi}{\omega}$, il vient :

$$L = n\frac{\lambda}{2}$$

La longueur de la corde doit être égale à un nombre entier de fois la demi-longueur d'onde. Cette condition traduit la contrainte imposée par les extrémités fixes de la corde : on doit y avoir un nœud de vibration et l'on sait que deux nœuds de vibration successifs sont distants de $\frac{\lambda}{2}$.

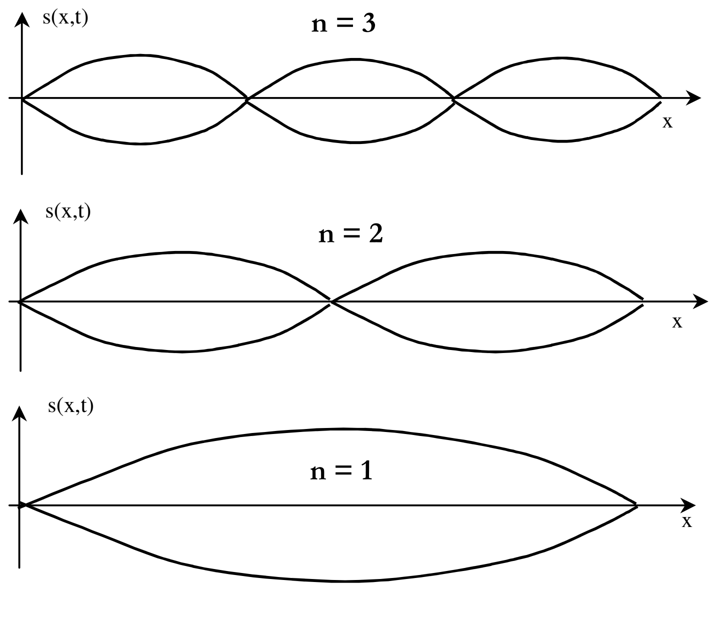
Ces pulsations, quantifiées par l'entier n, sont appelées pulsations propres ; un mode propre sera caractérisé par la solution suivante de l'équation de d'Alembert :

$$y_n(x,t) = C_n \cos\left(n\frac{\pi c}{L}t - \varphi_n\right)\sin\left(n\frac{\pi}{L}x\right)$$

La solution générale sera une superposition de ces modes propres :

$$y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos\left(n\frac{\pi c}{L}t - \varphi_n\right)\sin\left(n\frac{\pi}{L}x\right)$$

L'allure de la corde vibrante pour les premiers modes propres est donnée sur la figure :



Trois premiers modes propres d'une corde fixée à ses extrémités.

Les CI imposent :

$$y(x,0) = \alpha(x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(\varphi_n)\sin\left(n\frac{\pi}{L}x\right)$$

et :

$$\frac{\partial y}{\partial t}(x,0) = \beta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \left(n\frac{\pi c}{L} \right) \sin(\varphi_n) \sin\left(n\frac{\pi}{L} x \right)$$

Etendus à l'intervalle $\left]-\infty,+\infty\right[$, ces développements en série de Fourier sont ceux d'une fonction impaire (absence de termes en cosinus) de période 2L.

Connaissant les fonctions α(x) et β(x) sur l'intervalle physique [0,L] correspondant à la corde, on peut définir des fonctions impaires et périodiques de période double 2L, puis développer ces fonctions en série de Fourier :

$$\alpha(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \sin\left(n\frac{\pi}{L} x \right) \qquad et \qquad \beta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \sin\left(n\frac{\pi}{L} x \right)$$

Avec :

$$\alpha_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{+L} \sin\left(n\frac{\pi}{L} x \right) \alpha(x)\, dx$$

et :

$$\beta_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{+L} \sin\left(n\frac{\pi}{L} x \right) \beta(x)\, dx$$

En identifiant les deux développements en séries de Fourier :

$$\alpha_n = C_n \cos\varphi_n \qquad et \qquad \beta_n = C_n \left(n\frac{\pi c}{L} \right) \sin(\varphi_n)$$

On peut ainsi en déduire les coefficients C_n et φ_n inconnus et déterminer ensuite la solution finale y(x,t).

En conclusion, on peut construire la solution générale en régime libre de l'équation de d'Alembert pour une corde fixée à ses deux extrémités par superposition de modes propres, en utilisant les développements en séries de Fourier des conditions initiales.

A x fixé, la dépendance temporelle de y(x,t) fait apparaître un fondamental de pulsation $\omega_1 = \frac{\pi c}{L}$.

Le mouvement de la corde est donc périodique, de période $T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} = \frac{2L}{c}$.

En pratique, une corde vibrante réagit avec l'air ambiant et émet une onde sonore. Ceci a pour effet de prélever de l'énergie sur la corde et d'amortir ses oscillations qui ne sont donc pas réellement périodiques.

2 - Corde de Melde ; ondes stationnaires et résonances :

Dans l'expérience de Melde, l'extrémité d'abscisse x = L d'une corde est fixée (y(L,t)=0) et un opérateur impose en x = 0 un déplacement harmonique $y(0,t) = a\cos\omega t$ de pulsation ω.

On s'intéresse au régime forcé, obtenu après disparition du régime transitoire. On cherche ainsi une solution de l'équation de d'Alembert correspondant à une onde stationnaire de même pulsation que l'excitation :

$$y(x,t) = C\cos(kx - \psi)\cos(\omega t - \varphi)$$

Les conditions aux limites imposent :

$$y(0,t) = C\cos(\psi)\cos(\omega t - \varphi) = a\cos\omega t \qquad et \qquad y(L,t) = 0 = C\cos(kL - \psi)\cos(\omega t - \varphi)$$

D'où :

$$a = C\cos(\psi) \quad ; \quad \varphi = 0 \quad ; \quad kL - \psi = \frac{\pi}{2}$$

Soit :

$$C = \frac{a}{\sin(kL)} \quad ; \quad \varphi = 0 \quad ; \quad \psi = kL - \frac{\pi}{2}$$

Par conséquent :

$$y(x,t) = a\,\frac{\sin(k(L-x))}{\sin(kL)}\cos\omega t \qquad (avec\ k = \frac{\omega}{c})$$

L'amplitude des vibrations est maximale pour $\sin(k(L-x)) = \pm 1$ et vaut (en valeur absolue) :

$$y_{\max} = \frac{a}{\sin(kL)}$$

Cette amplitude maximale devient infinie (la corde est alors en résonance) pour des pulsations excitatrices telles que :

$$kL = n\pi \qquad soit \qquad \omega_n = n\,\frac{\pi\,c}{L}$$

correspondant aux modes propres de la corde. Néanmoins, d'inévitables amortissements et la raideur de la corde font que l'amplitude maximale garde une valeur finie.

Exercices
Equation d'onde de d'Alembert (unidimensionnelle)

1) Corde de Melde : lors d'une manipulation avec la corde de Melde, on trouve les résultats ci-dessous :

a) Pour une même longueur de la corde L et une même masse M accrochée à celle-ci, on obtient les résultats suivants :

*** Fréquence de résonance 19 Hz pour deux fuseaux.

*** Fréquence de résonance 28 Hz pour trois fuseaux.

Ces valeurs numériques sont-elles compatibles entre elles ? Quelles seraient les fréquences de résonance suivantes ?

b) La longueur de la corde est L = 117 cm. Quelle est la vitesse c de propagation d'une perturbation sur cette corde ?

c) La masse M accrochée à cette corde est égale à M=25 g. Quelle est la tension de la corde ? En déduire un ordre de grandeur de la masse linéique de la corde.

2) Résonances sur une corde vibrante en présence de forces volumiques : on étudie les petits mouvements dans la direction $\mathbf{u}_z$ d'une corde métallique de longueur L, fixée en ses deux extrémités d'abscisses x=0 et x=L. On néglige la pesanteur. La corde est parcourue par un courant d'intensité $I=I_0\cos\omega t$ et plongée dans un champ magnétique $\mathbf{B}=B_0\sin(\pi x/L)\mathbf{u}_y$.. On note F la tension de la corde et μ sa masse linéique.

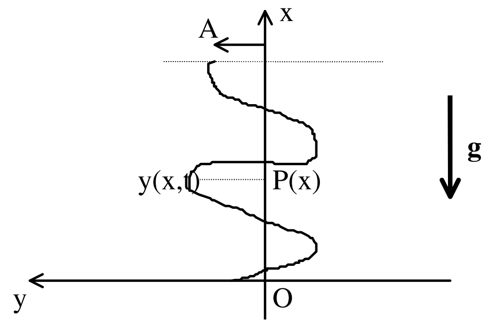
a) Montrer que le déplacement z(x,t) d'un point de la corde est solution d'une équation aux dérivées partielles de la forme :

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = A\sin(\frac{\pi x}{L})\cos(\omega t)$$

où c et A sont deux constantes à exprimer en fonction des données.

b) En régime sinusoïdal forcé, on cherche une solution de la forme $z(x,t)=C\sin(\pi x/L)\cos(\omega t)$. Déterminer C pour $\omega \neq \pi c/L$. Que se passe-t-il lorsque ω tend vers $\pi c/L$?

3) Etude des vibrations d'une corde verticale : l'axe (Ox) est vertical ascendant, (Oy) horizontal. Une corde, infiniment souple, de masse linéique μ, de longueur L est suspendue au point A dans le champ de pesanteur d'intensité g. Lorsque la corde est au repos, son extrémité inférieure coïncide avec le point O. Son point d'accrochage A effectue des oscillations horizontales : $y_A = a\cos\omega t$, d'amplitude a très inférieure à L. L'extrémité inférieure de la corde ne subit aucune contrainte. Le déplacement (quasi-horizontal) d'un point P(x) de la corde par rapport à sa position d'équilibre est noté y(x,t).



Dans toute la suite, on suppose que y, $\partial y/\partial x$ et $\partial^2 y/\partial x^2$ sont très petits et que le déplacement de la corde ne se produit que dans la direction (Oy).

a) Montrer que l'équation de propagation des ondes le long de la corde est :

$$\partial^2 y / \partial t^2 = g\left(\partial y / \partial x + x.\partial^2 y / \partial x^2\right)$$

b) On cherche une solution de l'équation ci-dessus sous la forme :

$$y(x,t) = \alpha(x)\cos\omega t + \beta(x)\sin\omega t$$

* Montrer que α(x) et β(x) vérifient la même équation différentielle.

* On note : $X = x(\omega^2/g)$; $\alpha = A_0 A(X)$; $\beta(x) = B_0 A(X)$, avec A(0)=1. Etablir l'équation vérifiée par la fonction A(X), puis rechercher une solution de cette équation sous la forme d'un développement en série entière :

$$A(X) = 1 + A_1 X + A_2 X^2 + \ldots$$

Déterminer les coefficients A_k.

Solution :

La relation de la dynamique appliqué à un élément de corde situé entre x et x + dx donne :

$$\mu dx\, \vec{a} = \vec{T}(x+dx) - \vec{T}(x) + \mu dx\, \vec{g}$$

Le poids ne peut pas être ici négligé puisqu'il est responsable de la tension de la corde.

* En projection sur (Ox) vertical :

$$0 = T_x(x+dx) - T_x(x) - \mu dx\, g$$

Par conséquent :

$$\frac{\partial T_x}{\partial x} = \mu dx\, g \qquad soit \qquad T_x = \mu g\, x$$

* En projection sur (Oy) horizontal :

$$\mu dx \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T_y(x+dx) - T_y(x) = \frac{\partial T_y}{\partial x} dx$$

La tension étant tangente à la corde, on peut écrire :

$$angle\ \alpha = \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{T_y}{T_x} \qquad soit \qquad \frac{\partial T_y}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(T_x \frac{\partial y}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\mu g x \frac{\partial y}{\partial x}\right)$$

Ou encore :

$$\frac{\partial T_y}{\partial x} = \mu g x \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \mu g \frac{\partial y}{\partial x}$$

Finalement :

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = g\left(x \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \frac{\partial y}{\partial x}\right)$$

b) On cherche des solutions de la forme : $y(x,t) = \alpha(x)\cos \omega t + \beta(x)\sin \omega t$. Ainsi :

$$-\omega^2 \alpha(x)\cos \omega t - \omega^2 \beta(x)\sin \omega t = g\left(x\left(\frac{d^2\alpha}{dx^2}\cos \omega t + \frac{d^2\beta}{dx^2}\sin \omega t\right) + \left(\frac{d\alpha}{dx}\cos \omega t + \frac{d\beta}{dx}\sin \omega t\right)\right)$$

Soit :

$$\left(\omega^2\alpha(x) + gx\frac{d^2\alpha}{dx^2} + g\frac{d\alpha}{dx}\right)\cos \omega t + \left(\omega^2\beta(x) + gx\frac{d^2\beta}{dx^2} + g\frac{d\beta}{dx}\right)\sin \omega t = 0$$

Cette égalité devant être vérifiée à tout instant, on en déduit :

$$\omega^2\alpha(x) + gx\frac{d^2\alpha}{dx^2} + g\frac{d\alpha}{dx} = 0 \qquad et \qquad \omega^2\beta(x) + gx\frac{d^2\beta}{dx^2} + g\frac{d\beta}{dx} = 0$$

Ainsi, les fonctions α et β vérifient bien la même équation différentielle.

On note : $X = x(\omega^2 / g)$; $\alpha = A_0 A(X)$; $\beta(x) = B_0 A(X)$, avec $A(0) = 1$. L'équation différentielle vérifiée par la fonction $A(X)$ devient :

$$A + X\frac{d^2 A}{dX^2} + \frac{dA}{dX} = 0$$

La solution sous forme d'une série entière :

$$A(X) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k X^k$$

vérifie cette équation différentielle si :

$$1 + A_1 + \sum_{k=1}^{\infty}\left(A_k + (k+1)A_{k+1} + (k+1)kA_{k+1}\right)X^k = 0$$

On en déduit :

$$A_1 = -1 \quad ; \quad A_{k+1} = -\frac{A_k}{(k+1)^2}, \ puis\ A_k = \frac{(-1)^k}{(k!)^2}$$

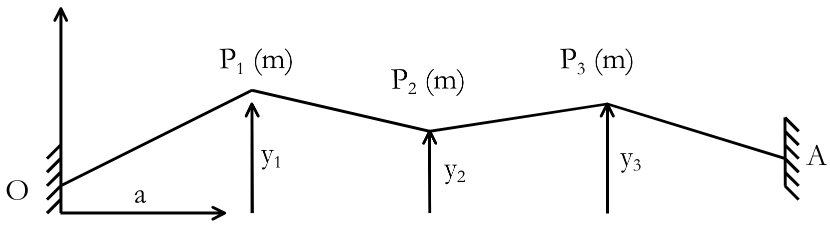
Les premiers termes de la solution sont ainsi :

$$A(X) = 1 - X + \frac{1}{4}X^2 - \frac{1}{36}X^3 + \frac{1}{576}X^4 - \frac{1}{14\,400}X^5 + \ldots$$

Remarque : on peut aussi résoudre l'équation différentielle avec MAPLE.

4) Oscillations transversales d'une corde plombée : une corde élastique de masse négligeable est, à l'équilibre, tendue avec une force F entre deux points fixes O et A distants de 4a. La corde porte, régulièrement espacés, trois plombs P_1, P_2 et P_3 de même masse m. On néglige le poids des plombs, chaque tronçon de corde dont la longueur est a dans l'état d'équilibre initial est caractérisé par la raideur k et la longueur naturelle $l_0<a$. On pose $\omega_0^2=F/ma$.

On étudie les petits mouvements transversaux des plombs ; l'ordonnée du plomb P_n est y_n à la date t ($y_n<<a$), on admet que son abscisse reste constamment égale à $x_n=na$.



a) Etablir un système différentiel du second ordre relatif au mouvement étudié.

b) On recherche des solutions du type $y_n=a_n\cos\omega t$ (tous les plombs vibrant en phase à la même fréquence). Déterminer les valeurs de ω possibles pour de tels mouvements (modes propres du système).

Solution :

a) Le PFD appliqué à chaque plomb en projection verticale donne :

$$m\ddot{y}_1 = -F\frac{y_1}{a} - F\frac{y_1-y_2}{a}$$
$$m\ddot{y}_2 = F\frac{y_1-y_2}{a} - F\frac{y_2-y_3}{a}$$
$$m\ddot{y}_3 = -F\frac{y_3-y_2}{a} - F\frac{y_3}{a}$$

Soit :

$$\ddot{y}_1 = \omega_0^2(-2y_1+y_2)$$
$$\ddot{y}_2 = \omega_0^2(y_1-2y_2+y_3)$$
$$\ddot{y}_3 = \omega_0^2(y_2-2y_3)$$

b) On obtient le système linéaire :

$$(\omega^2-2\omega_0^2)a_1+\omega_0^2 a_2=0$$
$$\omega_0^2 a_1+(\omega^2-2\omega_0^2)a_2+\omega_0^2 a_3=0$$
$$\omega_0^2 a_2+(\omega^2-2\omega_0^2)a_3=0$$

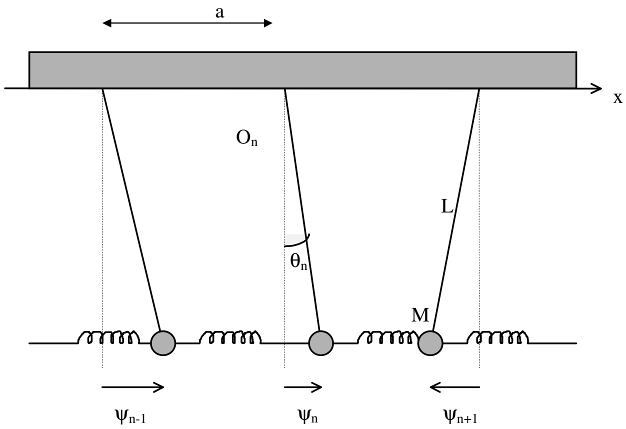
Ce système ne possède de solutions non triviales que si son déterminant est nul :

$$\begin{vmatrix} \omega^2-2\omega_0^2 & \omega_0^2 & 0 \\ \omega_0^2 & \omega^2-2\omega_0^2 & \omega_0^2 \\ 0 & \omega_0^2 & \omega^2-2\omega_0^2 \end{vmatrix} = 0$$

On obtient alors trois pulsations propres :

$$\omega_1=\omega_0\sqrt{2-\sqrt{2}} \quad ; \quad \omega_2=\omega_0\sqrt{2} \quad ; \quad \omega_3=\omega_0\sqrt{2+\sqrt{2}}$$

5) Equation de propagation de Klein-Gordon : on étudie la propagation d'onde le long d'une chaîne de pendules simples, identiques, de masse M et de longueur L, couplés par des ressorts de constante K, représentés sur la figure ci-dessous :



On notera $\omega_0 = \sqrt{K/M}$ et $\Omega_0 = \sqrt{g/L}$.

a) Quelle est l'équation de propagation liant les petits déplacements $\psi_n \approx L\theta_n$, ψ_{n-1} et ψ_{n+1} des extrémités des pendules ?

b) Quelle est la relation de dispersion des ondes progressives monochromatiques caractérisant cette propagation ?

c) Représenter la relation de dispersion en précisant la bande permise pour les pulsations d'oscillations libres de la chaîne de pendules couplés.

d) Préciser la forme prise par ces résultats dans l'approximation des milieux continus.

Solution :

a) Le théorème du moment cinétique appliqué au pendule (n) donne :

$$ML^2\ddot{\theta}_n = -MgL\theta_n + KL(\theta_{n-1} - 2\theta_n + \theta_{n+1})$$

D'où l'équation de propagation :

$$\ddot{\theta}_n = -\Omega_0^2\theta_n + \omega_0^2(\theta_{n-1} - 2\theta_n + \theta_{n+1})$$

b) On cherche des solutions sous la forme d'ondes planes : $\underline{\theta}_n = Ae^{i(\omega t - kx)}$. Ainsi :

$$-\omega^2 A^{i(\omega t - nka)} = -\Omega_0^2 A^{i(\omega t - nka)} + \omega_0^2(A^{i(\omega t-(n-1)ka)} - 2A^{i(\omega t - nka)} + A^{i(\omega t-(n+1)ka)})$$

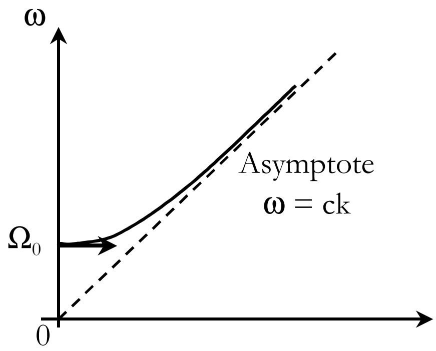
Soit :

$$-\omega^2 = -\Omega_0^2 + \omega_0^2(^{ika} - 2 + A^{-ika}) = -\Omega_0^2 + \omega_0^2(2\cos ka - 2)$$

Finalement :

$$\omega^2 = \Omega_0^2 + 4\omega_0^2 \sin^2\left(\frac{ka}{2}\right)$$

c) L'intervalle de pulsations possible est (zone de Brillouin) : $\left[\Omega_0, \sqrt{\Omega_0^2 + 4\omega_0^2}\right]$. On peut tracer ω en fonction de k :



d) Dans l'approximation des milieux continus :

$$\theta_n(t) = \theta(na,t)$$

$$\theta_{n+1}(t) = \theta((n+1)a,t) = \theta(na,t) + \frac{\partial\theta(na,t)}{\partial x}a + \frac{1}{2}\frac{\partial^2\theta(na,t)}{\partial x^2}a^2$$

$$\theta_{n-1}(t) = \theta((n-1)a,t) = \theta(na,t) - \frac{\partial\theta(na,t)}{\partial x}a + \frac{1}{2}\frac{\partial^2\theta(na,t)}{\partial x^2}a^2$$

En reportant dans l'équation $\ddot{\theta}_n = -\Omega_0^2\theta_n + \omega_0^2(\theta_{n-1} - 2\theta_n + \theta_{n+1})$, il vient :

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2} = -\Omega_0^2\theta + \omega_0^2\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}a^2$$

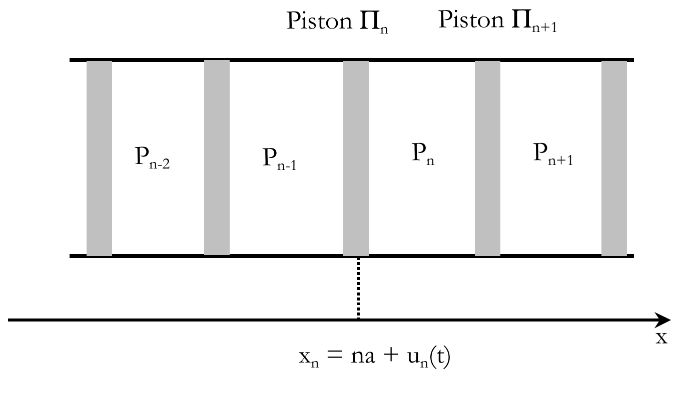
Soit, avec $c^2 = \omega_0^2 a^2 = \left(\frac{Ka}{M}\right)^2$:

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} + \Omega_0^2\theta = 0 \qquad \text{(équation de Klein-Gordon)}$$

La relation de dispersion prend alors la forme :

$$-\omega^2\theta - c^2(-k^2\theta) + \Omega_0^2\theta = 0 \qquad \textit{soit} \qquad k^2 = \frac{\omega^2 - \Omega_0^2}{c^2}$$

6) Un modèle de propagation du son dans l'air : un tuyau calorifugé de section S est partagé en une infinité de compartiments (C_n) par des pistons calorifugés Π_n et Π_{n+1} de section S et de masse m.



Dans chaque compartiment se trouve une mole d'air, assimilé à un GP évoluant de manière isentropique selon la loi de Laplace $PV^\gamma = cste$. A l'équilibre ; l'abscisse du piston (n) vaut

$x_{n,éq} = na$ et la pression a la même valeur P_0 dans chaque compartiment. Hors équilibre, l'abscisse du piston (n) vaut $x_n = na + u_n(t)$, avec $|u_n(t)| << a$ et la pression dans le compartiment (n) vaut P_n.

a) Etablir l'expression de la pression P_n en fonction de P_0, γ, a, u_n et u_{n+1} et la linéariser. En déduire l'équation différentielle linéaire déterminant le mouvement du piston Π_n.

b) On fait l'approximation des milieux continus en définissant une fonction u(x,t) variant peu à l'échelle de a, telle que $u(na,t) = u_n(t)$. Etablir l'équation aux dérivées partielles dont est solution u(x,t). Définir une célérité c et commenter son expression.

c) Evaluer la célérité c du son dans l'air en supposant que les pistons de masse m du modèle sont en réalité constitués par le volume d'air V = Sa compris entre deux pistons dans le modèle.

On donne : $\gamma = 1{,}4$; $P_0 = 1\,bar$; $\mu_0 = 1{,}3\,kg.m^{-3}$ (masse volumique de l'air dans les CNTP).

Solution :

a) $P_n = P_0(1+(u_{n+1}-u_n)/a)^{-\gamma} \approx P_0(1-\gamma(u_{n+1}-u_n)/a)$

b) $\ddot{u}_n = (\gamma S P_0/ma)(u_{n+1}+u_{n-1}-2u_n)$; $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$ avec $c = \sqrt{\dfrac{\gamma P_0 Sa}{m}}$; c augmente si le milieu est plus rigide (P_0 augmente) et moins inerte (m diminue), ce qui est naturel pour des ondes mécaniques.

c) AN : $c = 328\,m.s^{-1}$ (en bon accord avec la valeur attendue).

7) Corde plombée : une corde de longueur 2L et de masse linéique μ_0 a ses deux extrémités fixées sur un axe (Ox). Une masse ponctuelle M solidaire de la corde a été placée à égale distance de ses extrémités. On ne tiendra pas compte de la pesanteur et on se limitera aux petits mouvements selon un axe (Oy) perpendiculaire à (Ox). La corde est tendu avec une tension T_0. On note $c = \sqrt{\dfrac{T_0}{\mu_0}}$ et $m = 2\mu_0 L$ (masse totale de la corde).

a) Soient $\psi_1(x,t)\ et\ \psi_2(x,t)$ les élongations de la corde respectivement pour $0 \le x \le L$ et pour $L \le x \le 2L$. Y(t) repère le mouvement de la masse M. Déterminer les modes propres de cette corde plombée.

b) Etudier les cas particuliers : $M \to 0\ (M << m),\ M \to \infty\ (M >> m)\ \ et\ \ M\ \ finie\ non\ nulle\ et\ \mu_0 \to 0$; retrouver simplement le résultat obtenu.

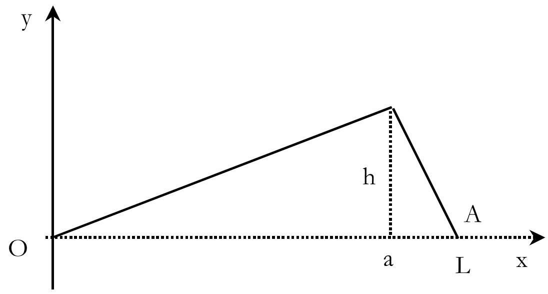
8) Corde de guitare : une corde de guitare de longueur L et de masse linéique μ est tendue (tension T_0) entre deux points O et A. A l'instant t = 0, la corde est abandonnée dans la position de la figure (corde pincée) sans vitesse initiale.

$$y(x,0) = f(x) \qquad avec \qquad f(x) = h\frac{x}{a}\ \ pour\ \ x \in [0,a]\ \ et\ \ f(x) = h\frac{L-x}{L-a}\ \ pour\ \ x \in [0,L]$$

a) Donner l'équation y(x,t) représentant la forme de la corde à un instant t.

Rappel : la fonction 2L – périodique impaire se confondant avec f(x) sur l'intervalle [0,L] est développable en séries de Fourier selon :

$$f(x) = \sum_{1}^{\infty} B_n \sin\left(n\,2\pi\,\frac{x}{2L}\right) \qquad où \qquad B_n = \frac{2hL^2}{\pi^2 a(L-a)}\,\frac{\sin\left(n\pi\,\frac{a}{L}\right)}{n^2}$$



b) Déterminer la force F_y exercée par la corde sur l'extrémité A (chevalet). Que se passe-t-il si « l'attaque » s'effectue en $a = \frac{L}{p}$ (p entier) ?