

21. 已知数列  $\{a_n\}, \{b_n\}$  的项数均为  $m (m > 2)$ , 且  $a_n, b_n \in \{1, 2, \Lambda, m\}$ ,  $\{a_n\}, \{b_n\}$  的前  $n$  项和分别为  $A_n, B_n$ , 并规定  $A_0 = B_0 = 0$ . 对于  $k \in \{0, 1, 2, \Lambda, m\}$ , 定义  $r_k = \max \{i \mid B_i \leq A_k, i \in \{0, 1, 2, \Lambda, m\}\}$ , 其中,  $\max M$  表示数集  $M$  中最大的数.

(1) 若  $a_1 = 2, a_2 = 1, a_3 = 3, b_1 = 1, b_2 = 3, b_3 = 3$ , 求  $r_0, r_1, r_2, r_3$  的值;

(2) 若  $a_1 \geq b_1$ , 且  $2r_j \leq r_{j+1} + r_{j-1}, j = 1, 2, \Lambda, m-1$ , , 求  $r_n$ ;

(3) 证明: 存在  $p, q, s, t \in \{0, 1, 2, \Lambda, m\}$ , 满足  $p > q, s > t$ , 使得  $A_p + B_t = A_q + B_s$ .

