解 由 $\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{1}{x}-\left(\dfrac{1}{x}-a\right)e^x\right]=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1-e^x}{x}+ae^x\right)=-1+a=1$,则 $a=2$. 故应选(C).

习题 1-6 解答

1. 计算下列极限:

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin \omega x}{x}$;   (2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan 3x}{x}$;   (3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{\sin 5x}$;

(4) $\lim\limits_{x\to 0}x\cot x$;   (5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{x\sin x}$;   (6) $\lim\limits_{n\to\infty}2^n\sin\dfrac{x}{2^n}$ (x 为不等于零的常数,$n\in \mathbf{N}_+$).

解 (1) 当 $\omega\neq 0$ 时,$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin \omega x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\omega\cdot\dfrac{\sin \omega x}{\omega x}\right)=\omega\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin \omega x}{\omega x}=\omega$;

当 $\omega=0$ 时,$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin \omega x}{x}=0=\omega$,

故不论 ω 为何值,均有 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin \omega x}{x}=\omega$.

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan 3x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(3\cdot\dfrac{\tan 3x}{3x}\right)=3\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan 3x}{3x}=3$.

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{\sin 5x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin 2x}{2x}\cdot\dfrac{5x}{\sin 5x}\cdot\dfrac{2}{5}\right)=\dfrac{2}{5}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{2x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5x}{\sin 5x}=\dfrac{2}{5}$.

(4) $\lim\limits_{x\to 0}x\cot x=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x}{\sin x}\cdot\cos x\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sin x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\cos x=1$.

(5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{x\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin^2 x}{x\sin x}=2\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=2$.

(6) $\lim\limits_{n\to\infty}2^n\sin\dfrac{x}{2^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\sin\dfrac{x}{2^n}}{\dfrac{x}{2^n}}\cdot x\right)=x$.

2. 计算下列极限

(1) $\lim\limits_{x\to 0}(1-x)^{\frac{1}{x}}$;   (2) $\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{x}}$;

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1+x}{x}\right)^{2x}$;   (4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^{kx}$ (k 为正整数).

解 (1) $\lim\limits_{x\to 0}(1-x)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0}[1+(-x)]^{\frac{1}{(-x)}(-1)}=e^{-1}$.

(2) $\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0}[(1+2x)^{\frac{1}{2x}}]^2=e^2$.

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1+x}{x}\right)^{2x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x\right]^2=e^2$.

(4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^{kx}=\lim\limits_{x\to\infty}\left[1+\dfrac{1}{(-x)}\right]^{(-x)(-k)}=e^{-k}$.

*3. 根据函数极限的定义,证明极限存在的准则 I′.

准则 I′ 如果

(1) $g(x)\leqslant f(x)\leqslant h(x)$, $x\in \mathring{U}(x_0,r)$ 或 $|x|>M$,

(2) $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=A$, $\lim\limits_{x\to x_0}h(x)=A$,

那么 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在,且等于 A.

证 $\forall\varepsilon>0$,因 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=A$,,故 $\exists\delta_1>0$,当 $0<|x-x_0|<\delta_1$ 时,有 $|g(x)-A|<\varepsilon$,即

$$A-\varepsilon<g(x)<A+\varepsilon, \tag{3}$$

又因 $\lim\limits_{x\to x_0}h(x)=A$,故对上面的 $\varepsilon>0$,$\exists\delta_2>0$,当 $0<|x-x_0|<\delta_2$ 时,有 $|h(x)-A|<\varepsilon$,即

3 题视频解析

31

$$A-\varepsilon<h(x)<A+\varepsilon. \tag{4}$$

取 $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2,r\}$，则当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，假设(1)及关系式(3)、(4)同时成立，从而有

$$A-\varepsilon<g(x)\leqslant f(x)\leqslant h(x)<A+\varepsilon,$$

即有 $|f(x)-A|<\varepsilon$. 因此 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在，且等于 A.

> 评注：对于 $x\to\infty$ 的情形，利用极限 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$ 的定义及假设条件，可以类似地证明相应的准则 I'.

4. 利用极限存在准则证明：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}=1$；　　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}n\left(\dfrac{1}{n^2+\pi}+\dfrac{1}{n^2+2\pi}+\cdots+\dfrac{1}{n^2+n\pi}\right)=1$；

(3) $\lim\limits_{x\to0}\sqrt[n]{1+x}=1$；　　(4) $\lim\limits_{x\to0^+}x\left[\dfrac{1}{x}\right]=1$.

证　(1) 因 $1<\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}<1+\dfrac{1}{n}$，而 $\lim\limits_{n\to\infty}1=1$，$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)=1$，由夹逼准则，即得证.

(2) 因 $\dfrac{n}{n+\pi}\leqslant n\left(\dfrac{1}{n^2+\pi}+\dfrac{1}{n^2+2\pi}+\cdots+\dfrac{1}{n^2+n\pi}\right)\leqslant\dfrac{n^2}{n^2+\pi}$，

而 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{n+\pi}=1$，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2}{n^2+\pi}=1$，由夹逼准则，即得证.

(3) 当 $x>0$ 时，$1<\sqrt[n]{1+x}<1+x$；

当 $-1<x<0$ 时，$1+x<\sqrt[n]{1+x}<1$.

而 $\lim\limits_{x\to0}1=1$，$\lim\limits_{x\to0}(1+x)=1$. 由夹逼准则，即得证.

(4) 当 $x>0$ 时，$1-x<x\left[\dfrac{1}{x}\right]\leqslant1$. 而 $\lim\limits_{x\to0^+}(1-x)=1$，$\lim\limits_{x\to0^+}1=1$. 由夹逼准则，即得证.

5. 设数列 $\{x_n\}$ 满足：$x_1=\sqrt{2}$，$x_{n+1}=\sqrt{2+x_n}\,(n\in\mathbf{N}_+)$. 证明：$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，并求此极限.

证　(1) 用数学归纳法证明 $x_n<2$.

(i) $x_1=\sqrt{2}<2$.

(ii) 假设 $x_k<2$，则 $x_{k+1}=\sqrt{2+x_k}<\sqrt{2+2}=2$，故 $x_n<2$，$\forall n\in\mathbf{N}_+$.

(2) 用数学归纳法证明 $\{x_n\}$ 单调增加.

(i) $x_1=\sqrt{2}<x_2=\sqrt{2+\sqrt{2}}$.

(ii) 假设 $x_k<x_{k+1}$，则 $x_k+2<x_{k+1}+2$，所以 $\sqrt{2+x_k}<\sqrt{2+x_{k+1}}$，即 $x_{k+1}<x_{k+2}$. 所以 $\{x_n\}$ 单调增加.

由单调有界准则知 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$，在 $x_{n+1}=\sqrt{2+x_n}$ 两边取极限，得 $A=\sqrt{2+A}$，解得 $A=2$ 或 $A=-1$(舍去). 即 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=2$.

6. 设数列 $\{x_n\}$ 满足：$x_1\in(0,\pi)$，$x_{n+1}=\sin x_n\,(n\in\mathbf{N}_+)$，证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，并求此极限.

证　(1) 显然 $|x_{n+1}|=|\sin x_n|\leqslant1$，$n=1,2,\cdots$. 即 $\{x_n\}$ 有界.

(2) $x_{n+1}=\sin x_n\leqslant x_n$，$n=1,2,\cdots$. 即 $\{x_n\}$ 单调减少.

由单调有界准则知 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$，在 $x_{n+1}=\sin x_n$ 两边取极限，得 $A=\sin A$，故 $A=0$. 即 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$.