方法总结

作出函数图像关键是利用导数把函数的增减区间、极值点、凹凸区间和拐点以及渐近线求出.为了便于应用一般把这些性态用表格表示出来.

习题 3—6 解答

描绘下列函数的图形:

1. $y=\frac{1}{5}(x^4-6x^2+8x+7)$;　2. $y=\frac{x}{1+x^2}$;　3. $y=e^{-(x-1)^2}$;　4. $y=x^2+\frac{1}{x}$;　5. $y=\frac{\cos x}{\cos 2x}$.

解

1. (1)所给函数 $y=\frac{1}{5}(x^4-6x^2+8x+7)$ 的定义域为$(-\infty,+\infty)$,而

$$y'=\frac{1}{5}(4x^3-12x+8)=\frac{4}{5}(x+2)(x-1)^2,y''=\frac{4}{5}(3x^2-3)=\frac{12}{5}(x+1)(x-1).$$

(2)令 $y'=0$,得 $x=-2,x=1$,令 $y''=0$,得 $x=1,x=-1$.根据上述点将区间$(-\infty,+\infty)$分成下列四个部分区间:

$$(-\infty,-2],[-2,-1],[-1,1],[1,+\infty).$$

(3)在各部分区间内 $f'(x)$及 $f''(x)$的符号、相应曲线弧的升降及凹凸性以及极值点和拐点等如下表:

x	$(-\infty,-2)$	-2	$(-2,-1)$	-1	$(-1,1)$	1	$(1,+\infty)$
y'	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$+$
y''	$+$	$+$	$+$	0	$-$	0	$+$
$y=f(x)$ 的图形		极小					

拐点$(-1,-6)$,$(1,10)$.

(4) $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$.

图形没有铅直、水平、斜渐近线.

(5)由 $f(-2)=-\frac{17}{5}$, $f(-1)=-\frac{6}{5}$, $f(1)=2$,

$f(0)=\frac{7}{5}$,得图形上的四个点

$\left(-2,-\frac{17}{5}\right)$,　$\left(-1,-\frac{6}{5}\right)$,

$(1,2)$,　$\left(0,\frac{7}{5}\right)$

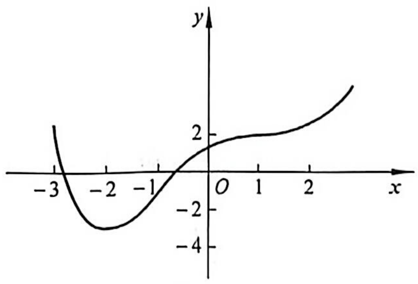

图 3—10

(6)作图如图 3—10.

2. (1)所给函数 $y=\frac{x}{1+x^2}$ 的定义域为$(-\infty,+\infty)$.由于 $y=\frac{x}{1+x^2}$是奇函数,它的图形关于原点对称,因此可以只讨论$[0,+\infty)$上该函数的图形,求出

$$y'=\frac{1+x^2-x\cdot 2x}{(1+x^2)^2}=\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2},\qquad y''=\frac{2x(x^2-3)}{(1+x^2)^3}.$$

(2)在$[0,+\infty)$内 y'的零点为 $x=1$,y''的零点为 $x=\sqrt{3}$,根据这两点把区间$[0,+\infty)$分成三个区间: $[0,$

$1]$， $[1,\sqrt{3}]$， $[\sqrt{3},+\infty)$.

(3)在$[0,+\infty)$内的各部分区间内$f'(x)$及$f''(x)$的符号、相应曲线弧的升降及凹凸性以及极值点和拐点等如下表：

x	0	$(0,1)$	1	$(1,\sqrt{3})$	$\sqrt{3}$	$(\sqrt{3},+\infty)$
y'	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
y''	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$y=f(x)$ 的图形	拐点		极大			

拐点为$\left(\sqrt{3},\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$.

(4)由于$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x}{1+x^2}=0$,所以图形有一条水平渐近线,$y=0$,图形无铅直渐近线及斜渐近线.

(5)由 $f(0)=0$, $f(1)=\frac{1}{2}$, $f(\sqrt{3})=\frac{\sqrt{3}}{4}$

得在$[0,+\infty)$内图形上的点$(0,0)$, $\left(1,\frac{1}{2}\right)$, $\left(\sqrt{3},\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$.

(6)利用图形的对称性,作出图形如图 3—11.

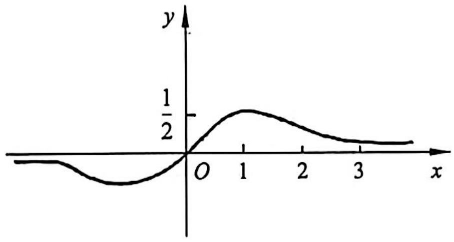

图 3—11

3. (1)所给函数 $y=\mathrm{e}^{-(x-1)^2}$ 的定义域为$(-\infty,+\infty)$,而

$y'=-2(x-1)\mathrm{e}^{-(x-1)^2}$, $y''=-4(2x^2-4x+1)\mathrm{e}^{-(x-1)^2}$.

(2)令 $y'=0$,得驻点 $x=1$,令 $y''=0$,得 $x=1-\frac{\sqrt{2}}{2}$,　$x=1+\frac{\sqrt{2}}{2}$,

根据上述点将区间$(-\infty,+\infty)$分成下列四个部分区间：

$$\left(-\infty,1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right],\quad \left[1-\frac{\sqrt{2}}{2},1\right],\quad \left[1,1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right),\quad \left[1+\frac{\sqrt{2}}{2},+\infty\right)$$

(3)在各部分区间内$f'(x)$及$f''(x)$的符号、相应曲线弧的升降及凹凸,以及极值点和拐点等如下表：

x	$\left(-\infty,1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$	$1-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2},1\right)$	1	$\left(1,1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$	$1+\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2},+\infty\right)$
y'	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
y''	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$y=f(x)$ 的图形				极大			

拐点$\left(1\pm\frac{\sqrt{2}}{2},e^{-\frac{1}{2}}\right)$.

(4)由$\lim\limits_{x\to\infty}e^{-(x-1)^2}=0$知图形有一条水平渐近线，$y=0$，图形无铅直渐近线及斜渐近线.

(5)由$f(1)=1,f\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=e^{-\frac{1}{2}}$，$f(0)=e^{-1}$，

$f\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=e^{-\frac{1}{2}}$，得图形上的点

$$(1,1),\quad \left(1-\frac{\sqrt{2}}{2},e^{-\frac{1}{2}}\right),$$

$$(0,e^{-1}),\quad \left(1+\frac{\sqrt{2}}{2},e^{-\frac{1}{2}}\right).$$

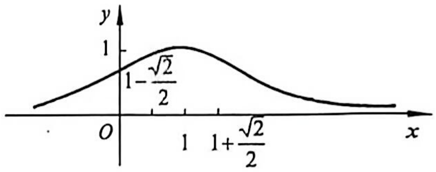

图 3—12

(6)作图如图 3—12.

4. (1)所给函数$y=x^2+\frac{1}{x}$的定义域为$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$.

$$y'=2x-\frac{1}{x^2},\qquad y''=2+\frac{2}{x^3}.$$

(2)令$y'=0$，得$x=\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$，令$y''=0$，得$x=-1$，又$x=0$时函数无定义，根据上述点，将区间$(-\infty,0)$，$(0,+\infty)$分成四个部分区间：$(-\infty,-1]$，$[-1,0)$，$\left(0,\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right]$，$\left[\frac{1}{\sqrt[3]{2}},+\infty\right)$.

(3)在各部分区间内$f'(x)$及$f''(x)$的符号、相应曲线弧的升降及凹凸以及极值点和拐点等如下表：

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,0)$	0	$\left(0,\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)$	$\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$	$\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}},+\infty\right)$
y'	$-$	$-$	$-$		$-$	0	$+$
y''	$+$	0	$-$		$+$	$+$	$+$
$y=f(x)$的图形						极小	

拐点为$(-1,0)$.

(4)$\lim\limits_{x\to 0}\left(x^2+\frac{1}{x}\right)=\infty$，所以图形有一条铅直渐近线，$x=0$，图形无水平、斜渐近线.

(5)由$f(-1)=0$，$f\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)=\frac{3}{2}\sqrt[3]{2}$

得在$(-\infty,0)$，$(0,+\infty)$内图形上的点

$$(-1,0),\quad \left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}},\frac{3}{2}\sqrt[3]{2}\right).$$

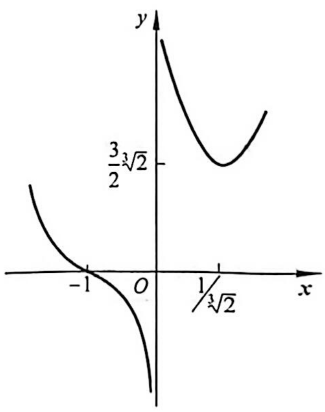

图 3—13

(6)作图如图 3—13.

5. (1)所给函数$y=\frac{\cos x}{\cos 2x}$的定义域$D=\{x\mid x\neq\frac{n\pi}{2}+\frac{\pi}{4},x\in\mathbf{R},n=0,\pm1,\pm2,\cdots\}$.

由于$y=\frac{\cos x}{\cos 2x}$是偶函数，它的图形关于y轴对称，且由于函数是以2π为周期的函数，因此可以只讨论$[0,\pi]$部分的图形．求出

$$y'=\frac{-\sin x\cos x2x+\cos x\cdot 2\sin 2x}{\cos^2(2x)}=\frac{\sin x(3-2\sin^2 x)}{\cos^2(2x)},\quad y''=\frac{\cos x(3+12\sin^2 x-4\sin^4 x)}{\cos^3(2x)}.$$

(2)令 $y'=0$,得 $x=0,x=\pi$,令 $y''=0$,得 $x=\frac{\pi}{2}$;又函数在点 $x=\frac{\pi}{4}$ 及 $x=\frac{3}{4}\pi$ 处无定义.根据这些点把区间$[0,\pi]$分成四个部分区间:$\left[0,\frac{\pi}{4}\right),\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right],\left[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{4}\right),\left(\frac{3\pi}{4},\pi\right]$.

(3)在$[0,\pi]$内的各部分区间内 $f'(x)$及 $f''(x)$的符号、相应曲线弧的升降及凹凸以及极值点和拐点等如下表:

x	0	$\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$	$\frac{\pi}{4}$	$\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$	$\frac{\pi}{2}$	$\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{4}\right)$	$\frac{3\pi}{4}$	$\left(\frac{3\pi}{4},\pi\right)$	π
y'	0	+		+	+	+		+	0
y''	+	+		−	+	+		−	−
$y=f(x)$的图形	极小								极大

拐点为$\left(\frac{\pi}{2},0\right)$.

(4)由 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} f(x)=\infty$及 $\lim\limits_{x\to\frac{3\pi}{4}} f(x)=\infty$,知图形有两条铅直渐近线:$x=\frac{\pi}{4}$ 及 $x=\frac{3\pi}{4}$,图形无水平及斜渐近线.

(5)由 $f(0)=1,f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$ 得图形上的点$(0,1),\left(\frac{\pi}{2},0\right)$.

(6)利用图形对称性及函数的周期性,作图如图 3−14.

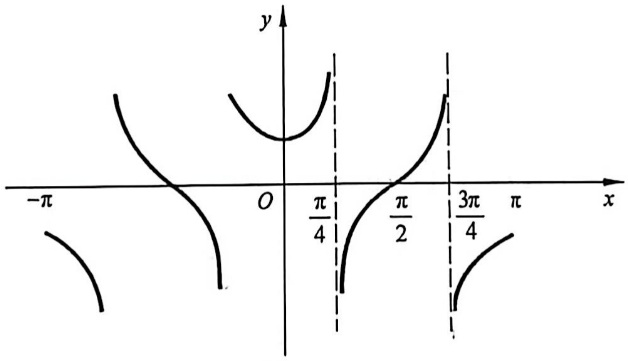

图 3−14

第七节 曲　　率

一、主要内容归纳

1. 弧微分公式　设 S 是曲线 L 的弧长函数,则

(1)若曲线方程为 $y=y(x)$,则弧微分 $dS=\sqrt{1+y'^2(x)}\,dx$.

(2)若曲线方程为 $x=x(y)$,则弧微分 $dS=\sqrt{1+x'^2(y)}\,dy$.