因此要使 $af(h)+bf(2h)-f(0)$ 为 h 高阶无穷小量必须有

$$\begin{cases}a+b-1=0,\\a+2b=0,\end{cases}\quad 即\begin{cases}a=2,\\b=-1.\end{cases}$$

【例 4】 设 $f(x)$ 在点 $x=0$ 的某个邻域内二阶可导，且 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x+xf(x)}{x^3}=\dfrac{1}{2}$，求 $f(0)$，$f'(0)$ 及 $f''(0)$ 的值.

解 因为 $\sin x=x-\dfrac{1}{3!}x^3+o(x^3)$， $f(x)=f(0)+f'(0)x+\dfrac{1}{2!}f''(0)x^2+o(x^2)$.

所以
$$\begin{aligned}\frac{1}{2}&=\lim_{x\to0}\frac{\sin x+xf(x)}{x^3}\\&=\lim_{x\to0}\frac{1}{x^3}\left[x-\frac{1}{3!}x^3+o(x^3)+f(0)x+f'(0)x^2+\frac{1}{2!}f''(0)x^3+o(x^3)\right]\\&=\lim_{x\to0}\frac{1}{x^3}\left[(1+f(0))x+f'(0)x^2+\left(\frac{1}{2}f''(0)-\frac{1}{6}\right)x^3+o(x^3)\right],\end{aligned}$$

从而知 $1+f(0)=0$， $f'(0)=0$， $\dfrac{1}{2}f''(0)-\dfrac{1}{6}=\dfrac{1}{2}$，

故 $f(0)=-1$， $f'(0)=0$， $f''(0)=\dfrac{4}{3}$.

【例 5】 (2021 数学一，5 分)设函数 $f(x)=\dfrac{\sin x}{1+x^2}$ 在 $x=0$ 处的三次泰勒多项式为 $ax+bx^2+cx^3$，则________.

(A) $a=1,b=0,c=-\dfrac{7}{6}$　　(B) $a=1,b=0,c=\dfrac{7}{6}$

(C) $a=-1,b=-1,c=-\dfrac{7}{6}$　　(D) $a=-1,b=-1,c=\dfrac{7}{6}$

解 因为 $\sin x=x-\dfrac{x^3}{3!}+o(x^3)$，$\dfrac{1}{1+x^2}=1-x^2+o(x^2)$，$|x|<1$.

故 $\dfrac{\sin x}{1+x^2}=x-\dfrac{7}{6}x^3+o(x^3)$，即 $a=1,b=0,c=-\dfrac{7}{6}$.

故应选(A).

习题 3—3 解答

1. 按 $x-4$ 的幂展开多项式 $f(x)=x^4-5x^3+x^2-3x+4$.

解 因为 $f'(x)=4x^3-15x^2+2x-3$，

$f''(x)=12x^2-30x+2$，

$f'''(x)=24x-30$，

$f^{(4)}(x)=24$，

$f^{(n)}(x)=0\ (n\geqslant 5)$.

$f(4)=-56,\quad f'(4)=21,\quad f''(4)=74,\quad f'''(4)=66,\quad f^{(4)}(4)=24.$

故 $x^4-5x^3+x^2-3x+4$

$$=f(4)+f'(4)(x-4)+\frac{f''(4)}{2!}(x-4)^2+\frac{f'''(4)}{3!}(x-4)^3+\frac{f^{(4)}(4)}{4!}(x-4)^4$$

$$=-56+21(x-4)+37(x-4)^2+11(x-4)^3+(x-4)^4.$$

2. 应用麦克劳林公式，按 x 的幂展开函数 $f(x)=(x^2-3x+1)^3$.

解 $f(x)=x^6-9x^5+30x^4-45x^3+30x^2-9x+1,\qquad f(0)=1,$

$f'(x)=6x^5-45x^4+120x^3-135x^2+60x-9,\qquad f'(0)=-9,$

$f''(x)=30x^4-180x^3+360x^2-270x+60,\qquad f''(0)=60,$

$f'''(x)=120x^3-540x^2+720x-270,\qquad f'''(0)=-270,$

$f^{(4)}=360x^2-1\,080x+720,\qquad f^{(4)}(0)=720,$

$f^{(5)}=720x-1\,080,\qquad f^{(5)}=-1\,080,$

$f^{(6)}=720,\qquad f^{(6)}(0)=720,$

$f^{(n)}=0\quad (n\geqslant 7),$

故 $(x^2-3x+1)^3$

$$=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+\frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4+\frac{f^{(5)}(0)}{5!}x^5+\frac{f^{(6)}(0)}{6!}x^6$$

$$=1-9x+30x^2-45x^3+30x^4-9x^5+x^6.$$

3. 求函数 $f(x)=\sqrt{x}$ 按 $x-4$ 的幂展开的带有拉格朗日余项的 3 阶泰勒公式.

解 因为 $f(x)=\sqrt{x},\quad f'(x)=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}},\quad f''(x)=-\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}},\quad f'''(x)=\frac{3}{8}x^{-\frac{5}{2}},$

$f^{(4)}(x)=-\frac{15}{16}x^{-\frac{7}{2}},\quad f(4)=2,\quad f'(4)=\frac{1}{4},\quad f''(4)=-\frac{1}{32},\quad f'''(4)=\frac{3}{256}.$

故 $\sqrt{x}=f(4)+f'(4)(x-4)+\frac{f''(4)}{2!}(x-4)^2+\frac{f'''(4)}{3!}(x-4)^3+\frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}(x-4)^4$

$$=2+\frac{1}{4}(x-4)-\frac{1}{64}(x-4)^2+\frac{1}{512}(x-4)^3-\frac{15}{384\xi^{\frac{7}{2}}}(x-4)^4,$$

其中 ξ 介于 x 与 4 之间.

4. 求函数 $f(x)=\ln x$ 按 $x-2$ 的幂展开的带有佩亚诺型余项的 n 阶泰勒公式.

解 因为 $f^{(n)}(x)=\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}, f^{(n)}(2)=\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{2^n}$,故

$$\ln x=f(2)+f'(2)(x-2)+\frac{f''(2)}{2!}(x-2)^2+\frac{f'''(2)}{3!}(x-2)^3+\cdots$$

$$+\frac{f^{(n)}(2)}{n!}(x-2)^n+o[(x-2)^n]$$

$$=\ln 2+\frac{1}{2}(x-2)-\frac{1}{2^3}(x-2)^2+\frac{1}{3\times 2^3}(x-2)^3+\cdots$$

$$+(-1)^{n-1}\frac{1}{n\times 2^n}(x-2)^n+o[(x-2)^n].$$

5. 求函数 $f(x)=\frac{1}{x}$ 按 $x+1$ 的幂展开的带有拉格朗日型余项的 n 阶泰勒公式.

5 题视频解析

解 因为 $f^{(n)}(x)=\frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}, f^{(n)}(-1)=-n!$,故

$$\frac{1}{x}=f(-1)+f'(-1)(x+1)+\frac{f''(-1)}{2!}(x+1)^2+\frac{f'''(-1)}{3!}(x+1)^3+\cdots$$

$$+\frac{f^{(n)}(-1)}{n!}(x+1)^n+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x+1)^{n+1}$$
$$=-[1+(x+1)+(x+1)^2+\cdots+(x+1)^n]+(-1)^{n+1}\xi^{-(n+2)}(x+1)^{n+1},$$

其中 ξ 介于 x 与 -1 之间.

6. 求函数 $f(x)=\tan x$ 的带有佩亚诺余项的 3 阶麦克劳林公式.

解 因为 $f(x)=\tan x, f'(x)=\sec^2 x, f''(x)=2\sec^2 x\tan x, f'''(x)=4\sec^2 x\tan^2 x+2\sec^4 x$,

$f(0)=0,\quad f'(0)=1,\quad f''(0)=0,\quad f'''(0)=2,$

因此 $f(x)=x+\frac{x^3}{3}+o(x^3)$.

7. 求函数 $f(x)=xe^x$ 的带有佩亚诺余项的 n 阶麦克劳林公式.

解 因为 $f(x)=xe^x$, $f^{(n)}(x)=(n+x)e^x$(见习题 2－3,10(4)),$f^{(n)}(0)=n$,故

$$xe^x=f(0)+f'(0)x+\frac{1}{2!}f''(0)x^2+\cdots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(0)x^n+o(x^n)$$
$$=x+x^2+\frac{x^3}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{(n-1)!}+o(x^n).$$

8. 验证当 $0<x\leqslant\frac{1}{2}$ 时,按公式 $e^x\approx1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}$ 计算 e^x 的近似值时,所产生的误差小于 0.01,并求 $\sqrt{e}$ 的近似值,使误差小于 0.01.

证 设 $f(x)=e^x$,则 $f^{(n)}(0)=1$,故 $f(x)=e^x$ 的三阶麦克劳林公式为 $e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{e^\xi}{4!}x^4$,

其中 ξ 介于 $0,x$ 之间. 按 $e^x\approx1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}$ 计算 e^x 的近似值时,其误差为 $|R_3(x)|=\frac{e^\xi}{4!}x^4$

当 $0<x\leqslant\frac{1}{2}$ 时, $0<\xi<\frac{1}{2}$, $|R_3(x)|\leqslant\frac{3^{\frac{1}{2}}}{4!}\left(\frac{1}{2}\right)^4\approx0.004\ 5<0.01$,

$$\sqrt{e}\approx1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{6}\left(\frac{1}{2}\right)^3\approx1.645.$$

9. 应用 3 阶泰勒公式求下列各数的近似值,并估计误差:

(1) $\sqrt[3]{30}$; (2) $\sin 18°$.

解 (1)因为 $f(x)=\sqrt[3]{1+x}=(1+x)^{\frac{1}{3}}\approx1+\frac{1}{3}x+\frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)}{2!}x^2+\frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)\left(\frac{1}{3}-2\right)}{3!}x^3$

$$=1+\frac{1}{3}x-\frac{1}{9}x^2+\frac{5}{81}x^3,$$

$$R_3(x)=\frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)\left(\frac{1}{3}-2\right)\left(\frac{1}{3}-3\right)}{4!}(1+\xi)^{\frac{1}{3}-4}x^4,$$

其中 ξ 介于 0 与 x 之间,故

$$\sqrt[3]{30}=\sqrt[3]{27+3}=3\sqrt[3]{1+\frac{1}{9}}\approx3\left[1+\frac{1}{3}\times\frac{1}{9}-\frac{1}{9}\left(\frac{1}{9}\right)^2+\frac{5}{81}\left(\frac{1}{9}\right)^3\right]\approx3.107\ 24.$$

误差 $|R_3|=3\times\left|\frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)\left(\frac{1}{3}-2\right)\left(\frac{1}{3}-3\right)}{4!}(1+\xi)^{\frac{1}{3}-4}\left(\frac{1}{9}\right)^4\right|$,

ξ 介于 0 与 $\frac{1}{9}$ 之间,即 $0<\xi<\frac{1}{9}$,因此 $|R_3|=\left|\frac{80}{4!\ \times3^{11}}\right|\approx1.88\times10^{-5}$.

(2)已知 $\sin x\approx x-\frac{x^3}{3!}$, $R_4(x)=\frac{\sin\left(\xi+\frac{5}{2}\pi\right)}{5!}x^5$, ξ 介于 0 与 $\frac{\pi}{10}$ 之间,故

$$\sin 18°=\sin\frac{\pi}{10}\approx\frac{\pi}{10}-\frac{1}{3!}\left(\frac{\pi}{10}\right)^3\approx0.309\ 0,$$

$$|R_4|\leqslant\frac{1}{5!}\left(\frac{\pi}{10}\right)^5\approx 2.55\times10^{-5}.$$

评注：利用 $R_3(x)=\dfrac{\sin\left(\xi+\dfrac{4}{2}\pi\right)}{4!}x^4$，$\xi\in\left(0,\dfrac{\pi}{10}\right)$，可得误差 $|R_3|\leqslant\dfrac{1}{4!}\left(\dfrac{\pi}{10}\right)^4\approx 1.3\times10^{-4}$.

* 10. 利用泰勒公式求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt[3]{x^3+3x^2}-\sqrt[4]{x^4-2x^3})$；　　(2) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos x-\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}}{x^2[x+\ln(1-x)]}$；

(3) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1+\frac{1}{2}x^2-\sqrt{1+x^2}}{(\cos x-\mathrm{e}^{x^2})\sin x^2}$；　　(4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left[x-x^2\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\right]$.

10 题视频解析

解 (1) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt[3]{x^3+3x^2}-\sqrt[4]{x^4-2x^3})=\lim\limits_{x\to+\infty}x\left[\left(1+\dfrac{3}{x}\right)^{\frac{1}{3}}-\left(1-\dfrac{2}{x}\right)^{\frac{1}{4}}\right]$.

$$=\lim_{x\to+\infty}x\left[1+\frac{1}{3}\times\frac{3}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right)-1+\frac{1}{4}\times\frac{2}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right)\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{3}{2}+\frac{o\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}\right]=\frac{3}{2}.$$

(2) $$\lim_{x\to0}\frac{\cos x-\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}}{x^2[x+\ln(1-x)]}=\lim_{x\to0}\frac{1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4!}+o(x^4)-1-\left(-\frac{x^2}{2}\right)-\frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{2}\right)^2+o(x^4)}{x^2\left[x+\left(-x-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)\right)\right]}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\left(\frac{1}{4!}-\frac{1}{8}\right)x^4+o(x^4)}{-\frac{1}{2}x^4+o(x^4)}=\lim_{x\to0}\frac{-\frac{1}{12}+\frac{o(x^4)}{x^4}}{-\frac{1}{2}+\frac{o(x^4)}{x^4}}=\frac{-\frac{1}{12}}{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{6}.$$

(3) $$\lim_{x\to0}\frac{1+\frac{1}{2}x^2-\sqrt{1+x^2}}{(\cos x-\mathrm{e}^{x^2})\sin x^2}=\lim_{x\to0}\frac{1+\frac{1}{2}x^2-\left(1+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{8}x^4+o(x^4)\right)}{\left[1-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)-1-x^2+o(x^2)\right][x^2+o(x^2)]}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{8}x^4+o(x^4)}{-\frac{3}{2}x^4+o(x^4)}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{8}+\frac{o(x^4)}{x^4}}{-\frac{3}{2}+\frac{o(x^4)}{x^4}}=\frac{\frac{1}{8}}{-\frac{3}{2}}=-\frac{1}{12}.$$

(4) $$\lim_{x\to\infty}\left[x-x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]=\lim_{x\to\infty}\left[x-x^2\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)\right]$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left[x-x+\frac{1}{2}+\frac{o\left(\frac{1}{x^2}\right)}{\frac{1}{x^2}}\right]=\frac{1}{2}.$$

11. 若函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内具有二阶导数，且 $f''(x)>0$，又 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}=1$，证明：$f(x)\geqslant x$，$x\in(-\infty,+\infty)$.

11 题视频解析

证 易知 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，由 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}=1$ 知 $f(0)=0$ 且 $f'(0)=1$，

将 $f(x)$ 在 $x=0$ 处展开，可得

$f(x)=f(0)+f'(0)x+\dfrac{f''(\xi)}{2!}x^2=x+\dfrac{f''(\xi)}{2!}x^2\geqslant x$（$\xi$ 介于 0 与 x 之间）.