(C)若$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$,则$\lim\limits_{n\to\infty} x_{3n}=\lim\limits_{n\to\infty} x_{3n+1}=a$　(D)若$\lim\limits_{n\to\infty} x_{3n}=\lim\limits_{n\to\infty} x_{3n+1}=a$,则$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$

解　由数列极限存在的充要条件,即$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a\Leftrightarrow\lim\limits_{n\to\infty} x_{2n}=\lim\limits_{n\to\infty} x_{2n+1}=a$,可知(A)(B)均正确.

由$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$,则$\{x_n\}$的任一子列也收敛于$a$,可知(C)正确.

事实上,令$x_n=\begin{cases}1,n=3k,3k+1,\\0,n=3k+2,\end{cases}k=0,1,2,\cdots$,

则$\lim\limits_{n\to\infty} x_{3n}=\lim\limits_{n\to\infty} x_{3n+1}=1$,但$\{x_n\}$发散.

故应选(D).

【例5】(2017数学二,4分)设数列$\{x_n\}$收敛,则________.

(A)$\lim\limits_{n\to\infty}\sin x_n=0$时,$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=0$　(B)$\lim\limits_{n\to\infty}(x_n+\sqrt{|x_n|})=0$时,$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=0$

(C)$\lim\limits_{n\to\infty}(x_n+x_n^2)=0$时,$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=0$　(D)$\lim\limits_{n\to\infty}(x_n+\sin x_n)=0$时,$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=0$

解　**方法一**　令$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=A$,由$\lim\limits_{n\to\infty}(x_n+\sin x_n)=A+\sin A=0$,因$x+\sin x$单调增加,故只有唯一零点,即$x=0$,因此$A=0$.

方法二　设$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=A$,则$\lim\limits_{n\to\infty}\sin x_n=\sin A=0$,$\sin A=0$有无穷多个解.

$\lim\limits_{n\to\infty}(x_n+\sqrt{|x_n|})=A+\sqrt{|A|}=0$,则$A=0$或$A=-1$.

$\lim\limits_{n\to\infty}(x_n+x_n^2)=A+A^2=0$,则$A=0$或$A=-1$.

于是(A)(B)(C)被排除,故应选(D).

习题1—2解答

1. 下列各题中,哪些数列收敛,哪些数列发散?对收敛数列,通过观察数列$\{x_n\}$的变化趋势,写出他们的极限:

(1)$x_n=\dfrac{1}{2^n}$;　(2)$x_n=(-1)^n\dfrac{1}{n}$;　(3)$x_n=2+\dfrac{1}{n^2}$;

(4)$x_n=\dfrac{n-1}{n+1}$;　(5)$x_n=n(-1)^n$;　(6)$x_n=\dfrac{2^n-1}{3^n}$;

(7)$x_n=n-\dfrac{1}{n}$;　(8)$x_n=[(-1)^n+1]\dfrac{n+1}{n}$.

解　(1)收敛,$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{2^n}=0$.　(2)收敛,$\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n\dfrac{1}{n}=0$.　(3)收敛,$\lim\limits_{n\to\infty}(2+\dfrac{1}{n^2})=2$.

(4)收敛,$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n-1}{n+1}=1$.　(5)$\{n(-1)^n\}$发散.　(6)收敛,$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n-1}{3^n}=0$.

(7)$\{n-\dfrac{1}{n}\}$发散.　(8)$\{[(-1)^n+1]\dfrac{n+1}{n}\}$发散.

2. (1)数列的有界性是数列收敛的什么条件?

(2)无界数列是否一定发散?

(3)有界数列是否一定收敛?

解　(1)必要条件.

(2)一定发散.

(3)未必一定收敛,收数列$\{(-1)^n\}$有界,但它是发散的.

CS 扫描全能王
3亿人都在用的扫描App

3. 下列关于数列$\{x_n\}$的极限是a的定义，哪些是对的，哪些是错的？如果是对的，试说明理由；如果是错的，试给出一个反例.

(1)对于任意给定的$\varepsilon>0$，存在$N\in\mathbf{N}_+$，当$n>N$时，不等式$x_n-a<\varepsilon$成立；

(2)对于任意给定的$\varepsilon>0$，存在$N\in\mathbf{N}_+$，当$n>N$时，有无穷多项x_n，使不等式$|x_n-a|<\varepsilon$成立；

(3)对于任意给定的$\varepsilon>0$，存在$N\in\mathbf{N}_+$，当$n>N$时，不等式$|x_n-a|<c\varepsilon$成立，其中c为某个正常数；

(4)对于任意给定的$m\in\mathbf{N}_+$，存在$N\in\mathbf{N}_+$，当$n>N$时，不等式$|x_n-a|<\dfrac{1}{m}$成立.

3题视频解析

解 (1)错误. 如对数列$\left\{(-1)^n+\dfrac{1}{n}\right\}$，$a=1$. 对任给的$\varepsilon>0$(设$\varepsilon<1$)，存在$N=\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]$，当$n>N$时，

$$(-1)^n+\frac{1}{n}-1\leqslant\frac{1}{n}<\varepsilon,\text{但}\left\{(-1)^n+\frac{1}{n}\right\}\text{的极限不存在.}$$

(2)错误. 如对数列$x_n=\begin{cases}n, & n=2k-1,\\ 1-\dfrac{1}{n}, & n=2k,\end{cases}\quad k\in\mathbf{N}_+,a=1.$

对任给的$\varepsilon>0$(设$\varepsilon<1$)，存在$N=\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]$，当$n>N$且$n$为偶数时，$|x_n-a|=\dfrac{1}{n}<\varepsilon$成立，但$\{x_n\}$的极限不存在.

(3)正确. 对任给的$\varepsilon>0$，取$\dfrac{1}{c}\varepsilon>0$，按假设，存在$N\in\mathbf{N}_+$，当$n>N$时，不等式$|x_n-a|<c\cdot\dfrac{1}{c}\varepsilon=\varepsilon$成立.

(4)正确. 对任给的$\varepsilon>0$，取$m\in\mathbf{N}_+$，使$\dfrac{1}{m}<\varepsilon$. 按假设，存在$N\in\mathbf{N}_+$，当$n>N$时，不等式$|x_n-a|<\dfrac{1}{m}<\varepsilon$成立.

*4. 设数列$\{x_n\}$的一般项$x_n=\dfrac{1}{n}\cos\dfrac{n\pi}{2}$. 问$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=$？求出$N$，使当$n>N$时，$x_n$与其极限之差的绝对值小于正数$\varepsilon$. 当$\varepsilon=0.001$时，求出数$N$.

解 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$. 证明如下：

因为 $|x_n-0|=\left|\dfrac{1}{n}\cos\dfrac{n\pi}{2}\right|\leqslant\dfrac{1}{n}$,

要使$|x_n-0|<\varepsilon$，只要$\dfrac{1}{n}<\varepsilon$，即$n>\dfrac{1}{\varepsilon}$. 所以$\forall\varepsilon>0$，取$N=[\dfrac{1}{\varepsilon}]$，则当$n>N$时，就有$|x_n-0|<\varepsilon$.

当$\varepsilon=0.001$时，取$N=[\dfrac{1}{\varepsilon}]=1\ 000$. 即若$\varepsilon=0.001$，只要$n>1\ 000$，就有$|x_n-0|<0.001$.

*5. 根据数列极限的定义证明：

(1)$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}=0$；　(2)$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n+1}{2n+1}=\dfrac{3}{2}$；　(3)$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^2+a^2}}{n}=1$；　(4)$\lim\limits_{n\to\infty}0.\underbrace{999\cdots9}_{n个}=1$.

证 (1)因为要使$\left|\dfrac{1}{n^2}-0\right|=\dfrac{1}{n^2}<\varepsilon$，只要$n>\dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$. 所以$\forall\varepsilon>0$，取$N=\left[\dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right]$，则当$n>N$时，就有$\left|\dfrac{1}{n^2}-0\right|<\varepsilon$，即$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}=0$.

(2)因为$\left|\dfrac{3n+1}{2n+1}-\dfrac{3}{2}\right|=\dfrac{1}{2(2n+1)}<\dfrac{1}{4n}$，要使$\left|\dfrac{3n+1}{2n+1}-\dfrac{3}{2}\right|<\varepsilon$，只要$\dfrac{1}{4n}<\varepsilon$，即$n>\dfrac{1}{4\varepsilon}$，所以$\forall\varepsilon>0$，取$N=\left[\dfrac{1}{4\varepsilon}\right]$，则当$n>N$时，就有$\left|\dfrac{3n+1}{2n+1}-\dfrac{3}{2}\right|<\varepsilon$，即$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n+1}{2n+1}=\dfrac{3}{2}$.

CS 扫描全能王
3亿人都在用的扫描App

评注：本题中所采用的证明方法是：先将$|x_n-a|$等价变形，然后适当放大，使N容易由放大后的量小于ε的不等式中求出．这在按定义证明极限的问题中是经常采用的．

(3)因为$\left|\dfrac{\sqrt{n^2+a^2}}{n}-1\right|=\dfrac{\sqrt{n^2+a^2}-n}{n}=\dfrac{a^2}{n(\sqrt{n^2+a^2}+n)}<\dfrac{a^2}{2n^2}$，要使$\left|\dfrac{\sqrt{n^2+a^2}}{n}-1\right|<\varepsilon$，只要$\dfrac{a^2}{2n^2}<\varepsilon$，即$n>\dfrac{|a|}{\sqrt{2\varepsilon}}$．所以$\forall\varepsilon>0$，取$N=\left[\dfrac{|a|}{\sqrt{2\varepsilon}}\right]$，则当$n>N$时，就有$\left|\dfrac{\sqrt{n^2+a^2}}{n}-1\right|<\varepsilon$，即$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^2+a^2}}{n}=1$．

(4)因为$|0.\underbrace{999\cdots9}_{n个}-1|=\dfrac{1}{10^n}$，要使$|0.\underbrace{999\cdots9}_{n个}-1|<\varepsilon$，只要$\dfrac{1}{10^n}<\varepsilon$，即$n>\lg\dfrac{1}{\varepsilon}$．所以$\forall\varepsilon>0$(不妨设$\varepsilon<1$)，取$N=\left[\lg\dfrac{1}{\varepsilon}\right]$，则当$n>N$时，就有$|0.\underbrace{999\cdots9}_{n个}-1|<\varepsilon$，即$\lim\limits_{n\to\infty}0.\underbrace{999\cdots9}_{n个}=1$．

*6．若$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=a$，证明$\lim\limits_{n\to\infty}|u_n|=|a|$．并举例说明：即使数列$\{|x_n|\}$有极限，数列$\{x_n\}$也未必有极限．

6 题视频解析

证 因为$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=a$，所以$\forall\varepsilon>0$，$\exists N$，当$n>N$时，有$|u_n-a|<\varepsilon$，从而有

$$||u_n|-|a||\leqslant|u_n-a|<\varepsilon,$$

故$\lim\limits_{n\to\infty}|u_n|=|a|$．

但由$\lim\limits_{n\to\infty}|u_n|=|a|$，并不能推得$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=a$．例如，考虑数列$\{(-1)^n\}$，虽然$\lim\limits_{n\to\infty}|(-1)^n|=1$，但$\{(-1)^n\}$没有极限．

*7．设数列$\{x_n\}$有界，又$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=0$，证明：$\lim\limits_{n\to\infty}x_ny_n=0$．

7 题视频解析

证 因数列$\{x_n\}$有界，故$\exists M>0$，使得对一切n有$|x_n|\leqslant M$．$\forall\varepsilon>0$，由于$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=0$，故对$\varepsilon_1=\dfrac{\varepsilon}{M}>0$，$\exists N$，当$n>N$时，就有$|y_n|<\varepsilon_1=\dfrac{\varepsilon}{M}$，从而有$|x_ny_n-0|=|x_n|\cdot|y_n|<M\cdot\dfrac{\varepsilon}{M}=\varepsilon$，

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}x_ny_n=0$．

*8．对于数列$\{x_n\}$，若$x_{2k-1}\to a(k\to\infty)$，$x_{2k}\to a(k\to\infty)$证明：$x_n\to a(n\to\infty)$．

8 题视频解析

证 因为$x_{2k-1}\to a(k\to\infty)$，所以$\forall\varepsilon>0$，$\exists k_1$，当$k>k_1$时，有$|x_{2k-1}-a|<\varepsilon$；又因为$x_{2k}\to a\ (k\to\infty)$，所以对上述$\varepsilon>0$，$\exists k_2$，当$k>k_2$时，有$|x_{2k}-a|<\varepsilon$．取$N=\max\{2k_1,2k_2\}$，则当$n>N$时，有$|x_n-a|<\varepsilon$，即$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$．

第三节 函数的极限

一、主要内容归纳

1．函数极限的定义 设函数$f(x)$在点x_0的邻域内(点x_0可除外)有定义，A为一个常数．若对任意给定的$\varepsilon>0$，都存在一个正数δ，使得满足$0<|x-x_0|<\delta$的一切x所对应的

CS 扫描全能王
3亿人都在用的扫描App