要使 $f(x)$ 在 x_0 点连续，应有 $x_0^2=ax_0+b\Rightarrow x_0^2-ax_0=b$.

(2)可导性.

$$f'_-(x_0)=\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0^-}\frac{x^2-x_0^2}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0^-}(x+x_0)=2x_0,$$

$$f'_+(x_0)=\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0^+}\frac{ax+b-x_0^2}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0^+}\frac{ax+x_0^2-ax_0-x_0^2}{x-x_0}=a.$$

由函数在这一点可导的充要条件有：

$f'(x_0-0)=f'(x_0+0)$，即 $a=2x_0$，代入 $b=x_0^2-ax_0=-x_0^2$，

因此当 $\begin{cases}a=2x_0,\\ b=-x_0^2\end{cases}$ 时，$f(x)$在 $x=x_0$处连续、可导.

方法总结

分段函数在分界点的极限、连续和可导问题一般应采用定义通过分界点左、右两端进行讨论. 极限、连续、可导三者之间的关系是：可导⇒连续⇒极限存在. 但反过来未必成立.

【例 7】 (2022 数学二，10 分)已知函数 $f(x)$在 $x=1$ 处可导，且$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(e^{x^2})-3f(1+\sin^2x)}{x^2}=2$，求 $f'(1)$.

解 由$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(e^{x^2})-3f(1+\sin^2x)}{x^2}=2$，且 $f(x)$在 $x=1$ 处连续，

可知$\lim\limits_{x\to0}[f(e^{x^2})-3f(1+\sin^2x)]=-2f(1)=0$，故 $f(1)=0$.

则$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(e^{x^2})-3f(1+\sin^2x)}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(e^{x^2})-f(1)}{x^2}-3\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(1+\sin^2x)-f(1)}{x^2}$

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(1+e^{x^2}-1)-f(1)}{e^{x^2}-1}\cdot\dfrac{e^{x^2}-1}{x^2}-3\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(1+\sin^2x)-f(1)}{\sin^2x}\cdot\dfrac{\sin^2x}{x^2}$

$=f'(1)-3f'(1)=-2f'(1)=2$. 因此 $f'(1)=-1$.

习题 2—1 解答

1. 设物体绕定轴旋转，在时间间隔$[0,t]$内转过角度 θ，从而转角 θ 是 t 的函数：$\theta=\theta(t)$如果旋转是匀速的，那么称 $\omega=\dfrac{\theta}{t}$为该物体旋转的角速度. 如果旋转是非匀速的，应怎样确定该物体在时刻 t_0 的角速度？

解 在时间间隔$[t_0,t_0+\Delta t]$内的平均角速度 $\overline{\omega}=\dfrac{\Delta\theta}{\Delta t}=\dfrac{\theta(t_0+\Delta t)-\theta(t_0)}{\Delta t}$.

在时刻 t_0 的角速度 $\omega=\lim\limits_{\Delta t\to0}\overline{\omega}=\lim\limits_{\Delta t\to0}\dfrac{\Delta\theta}{\Delta t}=\theta'(t_0)$.

2. 当物体的温度高于周围介质的温度时，物体就不断冷却．若物体的温度 T 与时间 t 的函数关系为 $T=T(t)$，应怎样确定物体在时刻 t 的冷却速度？

解 在时间间隔 $[t,t+\Delta t]$ 内平均冷却速度 $\bar{v}=\dfrac{\Delta T}{\Delta t}=\dfrac{T(t+\Delta t)-T(t)}{\Delta t}$.

在时刻 t 的冷却速度 $v=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta T}{\Delta t}=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{T(t+\Delta t)-T(t)}{\Delta t}=T'(t)$.

3. 设某工厂生产 x 件产品的成本为 $C(x)=2\ 000+100x-0.1x^2$（元），

函数 $C(x)$ 称为成本函数，成本函数 $C(x)$ 的导数 $C'(x)$ 在经济学中称为边际成本．试求

(1) 当生产 100 件产品时的边际成本；

(2) 生产第 101 件产品的成本，并与(1)中求得的边际成本作比较，说明边际成本的实际意义.

解 (1) $C'(x)=100-0.2x$，　　$C'(100)=100-20=80$（元/件）.

(2) $C(101)=2\ 000+100\times 101-0.1\times(101)^2=11\ 079.9$（元），

$C(100)=2\ 000+100\times 100-0.1\times(100)^2=11\ 000$（元），

$C(101)-C(100)=11\ 079.9-11\ 000=79.9$（元）.

即生产第 101 件产品的成本为 79.9 元，与(1)中求得的边际成本比较，可以看出边际成本 $C'(x)$ 的实际意义是近似表达产量达到 x 单位时再增加一个单位产品所需的成本.

4. 设函数 $f(x)=\dfrac{(x-1)(x-2)\cdots(x-n)}{(x+1)(x+2)\cdots(x+n)}$，求 $f'(1)$.

解 $f'(1)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-2)(x-3)\cdots(x-n)}{(x+1)(x+2)\cdots(x+n)}=\dfrac{(-1)^{n-1}\cdot(n-1)!}{(n+1)!}=\dfrac{(-1)^{n-1}}{n(n+1)}$.

5. 证明 $(\cos x)'=-\sin x$.

证 $(\cos x)'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\cos(x+\Delta x)-\cos x}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{-2\sin\left(x+\dfrac{\Delta x}{2}\right)\sin\dfrac{\Delta x}{2}}{\Delta x}$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\left[-\sin\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\right]\frac{\sin\dfrac{\Delta x}{2}}{\dfrac{\Delta x}{2}}=-\sin x.$$

6. 下列各题中均假定 $f'(x_0)$ 存在，按照导数定义观察下列极限，指出 A 表示什么：

(1) $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0-\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=A$；

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=A$，其中 $f(0)=0$，且 $f'(0)$ 存在；

(3) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{h}=A$.

解 (1) $A=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0-\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=-\lim\limits_{-\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+(-\Delta x))-f(x_0)}{-\Delta x}=-f'(x_0)$.

(2) 由于 $f(0)=0$，故 $A=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(0)$.

(3) $A=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\left[\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}-\dfrac{f(x_0-h)-f(x_0)}{h}\right]$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}+\lim_{-h\to 0}\frac{f(x_0+(-h))-f(x_0)}{h}=2f'(x_0).$$

以下两题中，选择给出的四个结论中一个正确的结论：

7. 设 $f(x)=\begin{cases}\frac{2}{3}x^3, & x\leqslant 1,\\ x^2, & x>1,\end{cases}$ 则 $f(x)$ 在 $x=1$ 处的________.

(A)左、右导数都存在　　(B)左导数存在，右导数不存在

(C)左导数不存在，右导数存在　　(D)左、右导数都不存在

7 题视频解析

解 $f'_-(1)=\lim\limits_{x\to1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^-}\frac{\frac{2}{3}x^3-\frac{2}{3}}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^-}\frac{2}{3}\cdot\frac{x^3-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^-}\frac{2}{3}(x^2+x+1)=2$;

$f'_+(1)=\lim\limits_{x\to1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^+}\frac{x^2-\frac{2}{3}}{x-1}=\infty$,

故该函数左导数存在，右导数不存在，因此应选(B).

8. 设 $f(x)$ 可导，$F(x)=f(x)(1+|\sin x|)$，则 $f(0)=0$ 是 $F(x)$ 在 $x=0$ 处可导的________.

(A)充分必要条件.　　(B)充分条件但非必要条件.

(C)必要条件但非充分条件.　　(D)既非充分条件又非必要条件.

8 题视频解析

解 $F'_+(0)=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{F(x)-F(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{f(x)(1+\sin x)-f(0)}{x}$

$=\lim\limits_{x\to0^+}\left[\frac{f(x)-f(0)}{x}+f(x)\frac{\sin x}{x}\right]=f'(0)+f(0)$,

$F'_-(0)=\lim\limits_{x\to0^-}\frac{F(x)-F(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0^-}\frac{f(x)(1-\sin x)-f(0)}{x}$

$=\lim\limits_{x\to0^-}\left[\frac{f(x)-f(0)}{x}-f(x)\frac{\sin x}{x}\right]=f'(0)-f(0)$,

当 $f(0)=0$ 时，$F'_+(0)=F'_-(0)$，反之当 $F'_+(0)=F'_-(0)$ 时，$f(0)=0$，因此应选(A).

9. 求下列函数的导数：

(1) $y=x^4$;　(2) $y=\sqrt[3]{x^2}$;　(3) $y=x^{1.6}$;　(4) $y=\frac{1}{\sqrt{x}}$;

(5) $y=\frac{1}{x^2}$;　(6) $y=x^3\sqrt[5]{x}$;　(7) $y=\frac{x^2\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt{x^5}}$.

解 (1) $y'=4x^3$.　(2) $y=x^{\frac{2}{3}}$, $y'=\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}$.　(3) $y'=1.6x^{0.6}$.

(4) $y=x^{-\frac{1}{2}}$, $y'=-\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}$.　(5) $y=x^{-2}$, $y'=-2x^{-3}$.　(6) $y=x^{\frac{16}{5}}$, $y'=\frac{16}{5}x^{\frac{11}{5}}$.

(7) $y=x^{2+\frac{2}{3}-\frac{5}{2}}=x^{\frac{1}{6}}$, $y'=\frac{1}{6}x^{-\frac{5}{6}}$.

10. 已知物体的运动规律为 $s=t^3$ m，求这物体在 $t=2$ s 时的速度.

解 $v=\frac{ds}{dt}=3t^2$,　$v|_{t=2}=12$(m/s).

11. 试证明：

(1)若 $f(x)$ 为可导的奇函数，则 $f'(x)$ 为偶函数.

(2)若 $f(x)$ 为可导的偶函数，则 $f'(x)$ 为奇函数.

(3)如果 $f(x)$ 为偶函数，且 $f'(0)$ 存在，则 $f'(0)=0$.

11 题视频解析

证 (1)设 $f(x)$ 为可导的奇函数，则 $f(-x)=-f(x)$.

$$f'(-x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(-x+\Delta x)-f(-x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{-f(x-\Delta x)+f(x)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x-\Delta x)-f(x)}{-\Delta x}=f'(x).$$

故 $f'(x)$ 为偶函数.

(2)设 $f(x)$ 为可导的偶函数，则 $f(-x)=f(x)$.

$$f'(-x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(-x+\Delta x)-f(-x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x-\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x-\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=-f'(x).$$

故 $f'(x)$ 为奇函数.

(3) $f(x)$ 为偶函数，故有 $f(-x)=f(x)$.

因为 $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(-x)-f(0)}{x-0}=-\lim\limits_{-x\to 0}\dfrac{f(-x)-f(0)}{-x-0}=-f'(0)$，

所以 $f'(0)=0$.

12. 求曲线 $y=\sin x$ 在具有下列横坐标的各点处切线的斜率：$x=\frac{2}{3}\pi$； $x=\pi$.

解 由导数的几何意义知 $k_1=y'\big|_{x=\frac{2}{3}\pi}=\cos x\big|_{x=\frac{2}{3}\pi}=-\frac{1}{2}$，$k_2=y'\big|_{x=\pi}=\cos x\big|_{x=\pi}=-1$.

13. 求曲线 $y=\cos x$ 上点 $(\frac{\pi}{3},\frac{1}{2})$ 处的切线方程和法线方程.

解 $y'\big|_{x=\frac{\pi}{3}}=(-\sin x)\big|_{x=\frac{\pi}{3}}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$，

故曲线在点 $(\frac{\pi}{3},\frac{1}{2})$ 处的切线方程为

$$y-\frac{1}{2}=-\frac{\sqrt{3}}{2}\left(x-\frac{\pi}{3}\right),\quad 即\ \frac{\sqrt{3}}{2}x+y-\frac{1}{2}\left(1+\frac{\sqrt{3}}{3}\pi\right)=0.$$

在点 $(\frac{\pi}{3},\frac{1}{2})$ 处的法线方程为

$$y-\frac{1}{2}=\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x-\frac{\pi}{3}\right),\quad 即\ \frac{2\sqrt{3}}{3}x-y+\frac{1}{2}-\frac{2\sqrt{3}}{9}\pi=0.$$

14. 求曲线 $y=e^x$ 在点 $(0,1)$ 处的切线方程.

解 $y'\big|_{x=0}=e^x\big|_{x=0}=1$，故曲线在点 $(0,1)$ 处的切线方程为

$$y-1=1\cdot(x-0),\quad 即\quad x-y+1=0.$$

15. 在抛物线 $y=x^2$ 上取横坐标为 $x_1=1$ 及 $x_2=3$ 的两点，作过这两点的割线. 问该抛物线上哪一点的切线平行于这条割线？

解 割线的斜率 $k=\frac{3^2-1^2}{3-1}=\frac{8}{2}=4$.

假设抛物线上点 (x_0,x_0^2) 处的切线平行于该割线，则有

$$(x^2)'\big|_{x=x_0}=4,\quad 即\quad 2x_0=4.$$

故 $x_0=2$，由此得所求点为 $(2,4)$.

16. 讨论下列函数在 $x=0$ 处的连续性与可导性：

(1) $y=|\sin x|$；

(2) $y=\begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0, \\ 0, & x=0. \end{cases}$

解 (1) $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}|\sin x|=0=f(0)$，故 $y=|\sin x|$ 在 $x=0$ 处连续．又

$$f'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{-\sin x}{x}=-1,$$

$$f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{x}=1,$$

$f'_-(0)\neq f'_+(0)$，故 $y=|\sin x|$ 在 $x=0$ 处不可导．

(2) $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}x^2\sin\dfrac{1}{x}=0=f(0)$，故函数在 $x=0$ 处连续．又

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{x}=\lim_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}=0,$$

故函数在 $x=0$ 处可导．

17. 设函数 $f(x)=\begin{cases} x^2, & x\leqslant 1, \\ ax+b, & x>1. \end{cases}$ 为了使函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处连续且可导，a、b 应取什么值？

17 题视频解析

解 要函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处连续，应有

$$\lim_{x\to 1^-}f(x)=\lim_{x\to 1^+}f(x)=f(1),\quad 即\quad 1=a+b.$$

要函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导，应有 $f'_-(1)=f'_+(1)$，而

$$f'_-(1)=\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{x^2-1}{x-1}=2,$$

$$f'_+(1)=\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{ax+b-1}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{a(x-1)+a+b-1}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{a(x-1)}{x-1}=a.$$

故 $a=2,b=-1$．

18. 已知 $f(x)=\begin{cases} x^2, & x\geqslant 0, \\ -x, & x<0, \end{cases}$ 求 $f'_+(0)$ 及 $f'_-(0)$，又 $f'(0)$ 是否存在？

解 $f'_-(0)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{-x-0}{x}=-1$，$f'_+(0)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x^2-0}{x}=0$．

由于 $f'_-(0)\neq f'_+(0)$，故 $f'(0)$ 不存在．

19. 已知 $f(x)=\begin{cases} \sin x, & x<0, \\ x, & x\geqslant 0, \end{cases}$ 求 $f'(x)$．

19 题视频解析

解 $f'_-(0)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\sin x}{x}=1$，$f'_+(0)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x}{x}=1$．

由于 $f'_-(0)=f'_+(0)=1$，故 $f'(0)=1$．因此 $f'(x)=\begin{cases} \cos x, & x<0, \\ 1, & x\geqslant 0. \end{cases}$

20. 证明：双曲线 $xy=a^2$ 上任一点处的切线与两坐标轴构成的三角形的面积都等于 $2a^2$．

20 题视频解析

证 设 (x_0,y_0) 为双曲线 $xy=a^2$ 上任一点，曲线在该点处的切线斜率 $k=\left(\dfrac{a^2}{x}\right)'\Big|_{x=x_0}=-\dfrac{a^2}{x_0^2}$，

切线方程为 $y-y_0=-\dfrac{a^2}{x_0^2}(x-x_0)$ 或 $\dfrac{x}{2x_0}+\dfrac{y}{2y_0}=1$，

由此可得所构成的三角形的面积为 $A=\dfrac{1}{2}|2x_0||2y_0|=2a^2$．