

习题 2-3 解答

1. 求下列函数的二阶导数:

- (1) $y=2x^2+\ln x$; (2) $y=e^{2x-1}$; (3) $y=x\cos x$;
 (4) $y=e^{-t}\sin t$; (5) $y=\sqrt{a^2-x^2}$; (6) $y=\ln(1-x^2)$;
 (7) $y=\tan x$; (8) $y=\frac{1}{x^3+1}$; (9) $y=(1+x^2)\arctan x$;
 (10) $y=\frac{e^x}{x}$; (11) $y=xe^{x^2}$; (12) $y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$.

解 (1) $y'=4x+\frac{1}{x}$, $y''=4-\frac{1}{x^2}$.

(2) $y'=e^{2x-1} \cdot 2=2e^{2x-1}$, $y''=2e^{2x-1} \cdot 2=4e^{2x-1}$.

(3) $y'=\cos x+x(-\sin x)=\cos x-x\sin x$, $y''=-\sin x-\sin x-x\cos x=-2\sin x-x\cos x$.

(4) $y'=e^{-t}(-1)\sin t+e^{-t}\cos t=e^{-t}(\cos t-\sin t)$,

$y''=e^{-t}(-1)(\cos t-\sin t)+e^{-t}(-\sin t-\cos t)=e^{-t}(-2\cos t)=-2e^{-t}\cos t$.

(5) $y'=\frac{-2x}{2\sqrt{a^2-x^2}}=-\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}$, $y''=-\frac{\sqrt{a^2-x^2}-x \cdot \frac{(-2x)}{2\sqrt{a^2-x^2}}}{(\sqrt{a^2-x^2})^2}=\frac{-a^2}{(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}}$.

(6) $y'=\frac{1}{1-x^2} \cdot (-2x)=\frac{2x}{x^2-1}$, $y''=\frac{2(x^2-1)-2x \cdot (2x)}{(x^2-1)^2}=-\frac{2(1+x^2)}{(1-x^2)^2}$.

(7) $y'=\sec^2 x$, $y''=2\sec^2 x \tan x$.

(8) $y'=\frac{-3x^2}{(x^3+1)^2}$, $y''=-\frac{3[2x(x^3+1)^2-x^2 \cdot 2(x^3+1) \cdot 3x^2]}{(x^3+1)^4}=\frac{6x(2x^3-1)}{(x^3+1)^3}$.

(9) $y'=2x\arctan x+(1+x^2) \cdot \frac{1}{1+x^2}=2x\arctan x+1$,

$y''=2\arctan x+2x \cdot \frac{1}{1+x^2}=2\arctan x+\frac{2x}{1+x^2}$.

(10) $y'=\frac{xe^x-e^x}{x^2}=\frac{(x-1)e^x}{x^2}$, $y''=\frac{(e^x+(x-1)e^x)x^2-2x(x-1)e^x}{x^4}=\frac{e^x(x^2-2x+2)}{x^3}$.

(11) $y'=e^{x^2}+xe^{x^2} \cdot 2x=(1+2x^2)e^{x^2}$, $y''=4xe^{x^2}+(1+2x^2)e^{x^2} \cdot 2x=2x(3+2x^2)e^{x^2}$.

(12) $y'=\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\left(1+\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}\right)=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$, $y''=\frac{-\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}}{(\sqrt{1+x^2})^2}=-\frac{x}{\sqrt{(1+x^2)^3}}$.

2. 设 $f(x)=(x+10)^6$, 求 $f'''(2)$.

解 $f'(x)=6(x+10)^5$, $f''(x)=30(x+10)^4$, $f'''(x)=120(x+10)^3$,

$f'''(2)=120 \times 12^3=207\ 360$.

3. 设 $f''(x)$ 存在, 求下列函数的二阶导数 $\frac{d^2 y}{dx^2}$:

(1) $y=f(x^2)$; (2) $y=\ln[f(x)]$.

解 (1) $y'=f'(x^2) \cdot 2x=2xf'(x^2)$, $y''=2f'(x^2)+2xf''(x^2) \cdot 2x=2f'(x^2)+4x^2 f''(x^2)$.

(2) $y'=\frac{f'(x)}{f(x)}$, $y''=\frac{f''(x)f(x)-f'^2(x)}{f^2(x)}$.

4. 试从 $\frac{dx}{dy}=\frac{1}{y'}$ 导出: (1) $\frac{d^2 x}{dy^2}=-\frac{y''}{(y')^3}$; (2) $\frac{d^3 x}{dy^3}=\frac{3(y'')^2-y'y'''}{(y')^5}$.

解 (1) $\frac{d^2 x}{dy^2}=\frac{d}{dy}\left(\frac{dx}{dy}\right)=\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{y'}\right) \cdot \frac{dx}{dy}=-\frac{y''}{(y')^2} \cdot \frac{1}{y'}=-\frac{y''}{(y')^3}$.



4 题视频解析



$$(2) \frac{d^3 x}{dy^3} = \frac{d}{dy} \left(\frac{d^2 x}{dy^2} \right) = \frac{d}{dx} \left(\frac{-y''}{(y')^3} \right) \frac{dx}{dy} = -\frac{y'''(y')^3 - y'' \cdot 3(y')^2 y''}{(y')^6} \cdot \frac{1}{y'} = \frac{3(y'')^2 - y' y'''}{(y')^5}.$$

5. 已知物体的运动规律为 $s = A \sin \omega t$ (A, ω 是常数), 求该物体运动的加速度, 并验证: $\frac{d^2 s}{dt^2} + \omega^2 s = 0$.

解 $\frac{ds}{dt} = A \cos \omega t \cdot \omega = A \omega \cos \omega t, \quad \frac{d^2 s}{dt^2} = -A \omega^2 \sin \omega t,$

故 $\frac{d^2 s}{dt^2} + \omega^2 s = -A \omega^2 \sin \omega t + \omega^2 A \sin \omega t = 0.$

6. 密度大的陨星进入大气层时, 当它离地心为 s km 时的速度与 \sqrt{s} 成反比, 试证陨星的加速度与 s^2 成反比.

证 由题意知 $v = \frac{ds}{dt} = \frac{k}{\sqrt{s}}$, 其中 k 为比例系数, 则

$$a = \frac{d^2 s}{dt^2} = \frac{d}{ds} \left(\frac{k}{\sqrt{s}} \right) \cdot \frac{ds}{dt} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{k}{s^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{k}{\sqrt{s}} = -\frac{k^2}{2s^2},$$

即陨星的加速度与 s^2 成反比.

7. 假设质点沿 x 轴运动的速度为 $\frac{dx}{dt} = f(x)$, 试求该质点运动的加速度.

解 质点运动的加速度为

$$a = \frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{d}{dx} (f(x)) \cdot \frac{dx}{dt} = f'(x) f(x).$$

8. 设函数 $f(x) = \begin{cases} e^x \cos x, & x \leq 0, \\ ax^2 + bx + c, & x > 0, \end{cases}$ 试选择常数 a, b, c , 使 $f(x)$ 具有二阶导数.

解 (1) 由 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续可得 $c=1$.

$$(2) f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^x \cos x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^x (\cos x - 1) + e^x - 1}{x} \\ = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^x (\cos x - 1)}{x} + \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^x \cdot \left(-\frac{x^2}{2}\right)}{x} + \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{x} = 0 + 1 = 1.$$

$$f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{ax^2 + bx}{x} = b.$$

由 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导可得 $b=1$.

$$\text{所以 } f'(x) = \begin{cases} e^x (\cos x - \sin x), & x \leq 0, \\ 2ax + 1, & x > 0. \end{cases}$$

$$(3) f''_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f'(x) - f'(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2ax + 1 - 1}{x} = 2a,$$

$$f''_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f'(x) - f'(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^x (\cos x - \sin x) - 1}{x} \\ = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{e^x \cos x - 1}{x} - \frac{e^x \sin x}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^x \cos x - 1}{x} - \lim_{x \rightarrow 0^-} e^x \cdot \frac{\sin x}{x} = 1 - 1 = 0.$$

由 $f(x)$ 在 $x=0$ 处二阶可导, 可得 $2a=0$, 即 $a=0$.

综上所述, 当 $a=0, b=1, c=1$ 时, $f(x)$ 具有二阶导数.

9. 求下列函数所指定的阶的导数:

(1) $y = e^x \cos x$, 求 $y^{(4)}$; (2) $y = x^2 \sin 2x$, 求 $y^{(50)}$.

解 (1) 利用莱布尼茨公式 $(uv)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k u^{(n-k)} v^{(k)}$,

$$\text{其中 } C_n^k = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!}.$$



8 题视频解析



9 题视频解析



$$\begin{aligned}
 (e^x \cos x)^{(4)} &= (e^x)^{(4)} \cos x + 4(e^x)''' (\cos x)' + \frac{4 \times 3}{2!} (e^x)'' (\cos x)'' + \frac{4 \times 3 \times 2}{3!} (e^x)' (\cos x)''' + e^x (\cos x)^{(4)} \\
 &= e^x \cos x - 4e^x \sin x + 6e^x (-\cos x) + 4e^x \sin x + e^x \cos x = -4e^x \cos x.
 \end{aligned}$$

(2) 由 $(\sin 2x)^{(n)} = 2^n \sin\left(2x + \frac{n\pi}{2}\right)$ 及莱布尼茨公式

$$\begin{aligned}
 (x^2 \sin 2x)^{(50)} &= x^2 (\sin 2x)^{(50)} + 50(x^2)' (\sin 2x)^{(49)} + \frac{50 \cdot 49}{2!} (x^2)'' (\sin 2x)^{(48)} \\
 &= 2^{(50)} x^2 \sin\left(2x + \frac{50\pi}{2}\right) + 100 \cdot 2^{(49)} x \sin\left(2x + \frac{49\pi}{2}\right) + \frac{50 \cdot 49}{2} \cdot 2 \cdot 2^{(48)} \sin\left(2x + \frac{48\pi}{2}\right) \\
 &= 2^{50} (-x^2 \sin 2x + 50x \cos 2x + \frac{1225}{2} \sin 2x).
 \end{aligned}$$

• 10. 求下列函数的 n 阶导数的一般表达式:

(1) $y = x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots + a_{n-1} x + a_n$ (a_1, a_2, \cdots, a_n 都是常数);

(2) $y = \sin^2 x$; (3) $y = x \ln x$; (4) $y = x e^x$.

解 (1) $y' = nx^{n-1} + a_1(n-1)x^{n-2} + a_2(n-2)x^{n-3} + \cdots + a_{n-1}$,
 $y'' = n(n-1)x^{n-2} + a_1(n-1)(n-2)x^{n-3} + \cdots + a_{n-2}$,
 \cdots
 $y^{(n)} = n(n-1)(n-2)\cdots 3 \cdot 2 \cdot 1 = n!$.

(2) $y = \sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$, $y^{(n)} = \frac{-1}{2} \cos\left(2x + \frac{n\pi}{2}\right) \cdot 2^n = -2^{n-1} \cos\left(2x + \frac{n\pi}{2}\right)$.

(3) $y' = \ln x + x \cdot \frac{1}{x} = \ln x + 1$, $y'' = \frac{1}{x}$, $y^{(n)} = \frac{(-1)^{n-2}(n-2)!}{x^{n-1}}$ ($n \geq 2$).

(4) $y' = e^x + x e^x = (1+x)e^x$, $y'' = e^x + (1+x)e^x = (2+x)e^x$.

设 $y^{(k)} = (k+x)e^x$, 则 $y^{(k+1)} = e^x + (k+x)e^x = (1+k+x)e^x$, 故 $y^{(n)} = (n+x)e^x$.

• 11. 求函数 $f(x) = x^2 \ln(1+x)$ 在 $x=0$ 处的 n 阶导数 $f^{(n)}(0)$ ($n \geq 3$).

解 本题可用莱布尼茨公式求解.

设 $u = \ln(1+x)$, $v = x^2$, 则 $u^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n}$ ($n=1, 2, \cdots$), $v' = 2x$, $v'' = 2$, $v^{(k)} = 0$ ($k \geq 3$). 故由莱布尼茨公式, 得

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n} \cdot x^2 + n \frac{(-1)^{n-2}(n-2)!}{(1+x)^{n-1}} \cdot 2x + \frac{n(n-1)}{2} \cdot \frac{(-1)^{n-3}(n-3)!}{(1+x)^{n-2}} \cdot 2 \quad (n \geq 3),$$

$$f^{(n)}(0) = \frac{(-1)^{n-1}n!}{n-2} \quad (n \geq 3).$$



11 题视频解析

第四节 隐函数及由参数方程确定的函数的导数 相关变化率

一、主要内容归纳