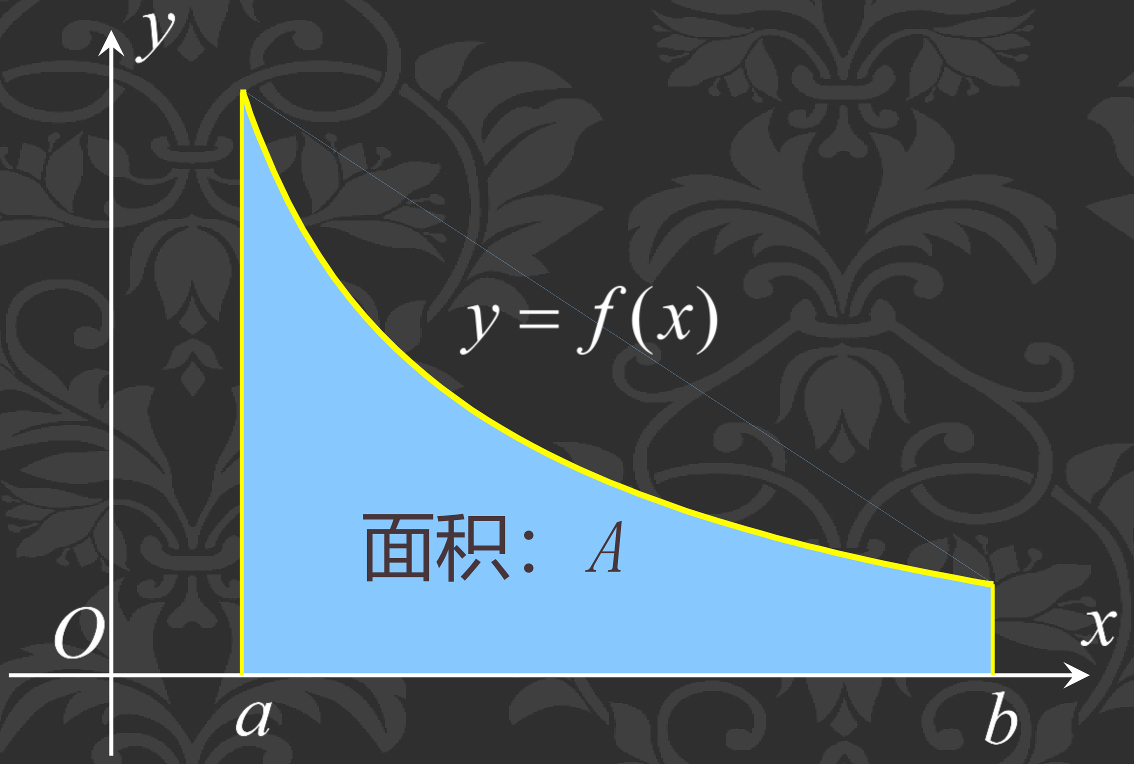
高等数学

5.4 反常积分

基础部数学教研室

郑治中

$$\boxed{A=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x}$$



定(常义)积分 $\left\{\begin{array}{l}\text{积分区间有限}\\ \text{被积函数有界}\end{array}\right.$ $\xrightarrow{\text{推广}}$ 反常积分

问题：如何计算无界平面图形的面积?

无界函数的积分

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\uparrow$$

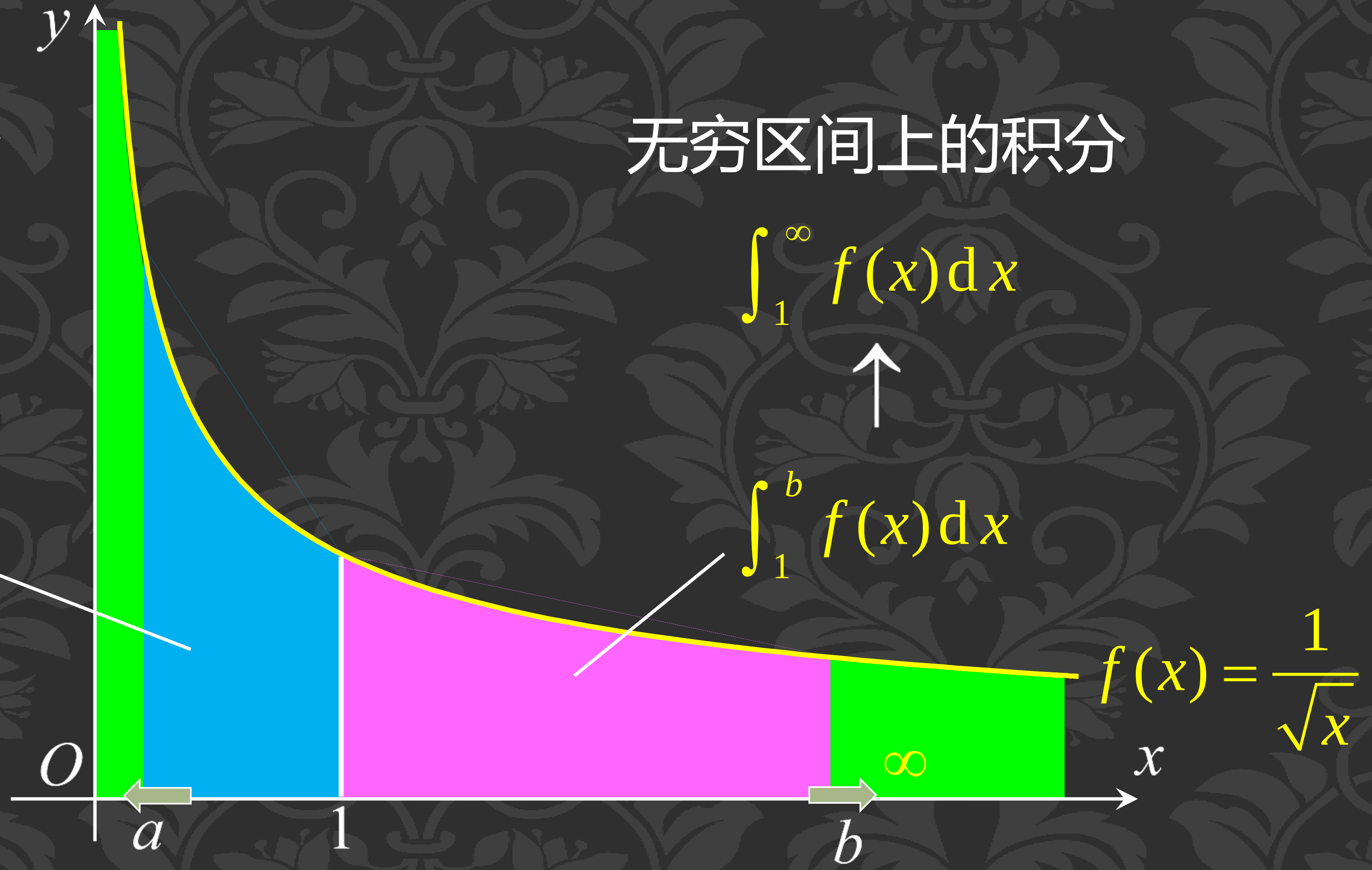
$$\int_a^1 f(x)\,\mathrm{d}x$$

无穷区间上的积分

$$\int_1^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\uparrow$$

$$\int_1^{b} f(x)\,\mathrm{d}x$$



无穷区间的反常积分

无界函数的反常积分

反常积分的敛散性

定义1 设$f(x) \in C[a,+\infty)$, $t \geq a$, 若$\lim\limits_{t \to +\infty} \int_a^t f(x)\mathrm{d}x$存在，则称**无穷区间反常积分** $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ **收敛**, 记作

$$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \lim_{t \to +\infty} \int_a^t f(x)\mathrm{d}x$$

如果上述极限不存在, 就称**无穷区间反常积分** $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ **发散**.

类似地，可以对 $f(x) \in C(-\infty,b]$进行定义

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\mathrm{d}x = \lim_{t \to -\infty} \int_t^b f(x)\mathrm{d}x$$

定义2 设$f(x)\in C(-\infty,+\infty)$，若 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 和 $\int_{-\infty}^{a} f(x)\mathrm{d}x$ 均收敛，则称**无穷区间反常积分** $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，且

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{a} f(x)\mathrm{d}x + \int_{a}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x.$$

若上式右端至少有一个反常积分为发散, 则称**无穷区间反常积分** $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 发散.

注意： 当反常积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛时，其值与a的选取无关.

上述三种形式的反常积分统称为**无穷区间反常积分**.

定理1 (无穷限积分的N-L公式)

设 $f(x)\in C[a,+\infty)$， $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数， 若极限 $F(+\infty)=\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)$存在，则反常积分 $\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，且

$$\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=F(x)\Big|_a^{+\infty}=F(+\infty)-F(a);$$

类似地，也有在$(-\infty,\mathrm{b}]$上的分部积分公式

$$\int_{-\infty}^{b}f(x)\mathrm{d}x=F(x)\Big|_{-\infty}^{b}=F(b)-F(-\infty).$$

例1 计算反常积分$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}dx$

例2 计算反常积分$\int_{0}^{+\infty}te^{-pt}dt$，其中$p$是常数，且$p>0$

例3 证明反常积分 $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p}\,\mathrm{d}x$ 当$p > 1$时收敛, 当$p \le 1$时发散 .

- 通常称无穷区间反常积分 $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p}\,\mathrm{d}x$ 为 p –积分.

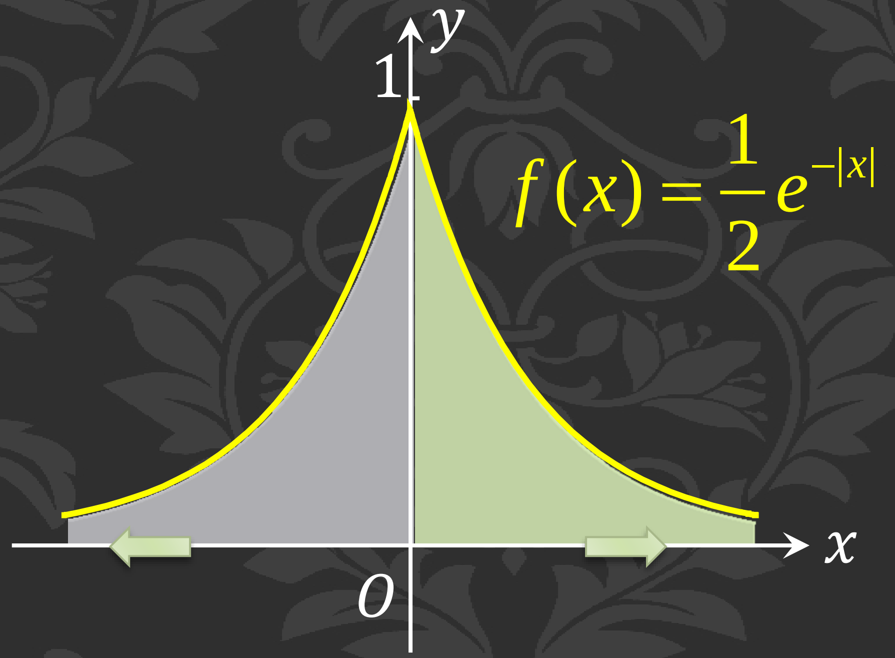
例4 计算反常积分 $\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{(1+x)^2} dx$

例5 设$f(x)=\frac{1}{2}e^{-|x|}, -\infty < x < +\infty$, 计算反常积分$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$.

注意: 对反常积分, 只有在收敛的条件下才能使用“偶倍奇零”的性质.

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2}e^{-|x|}\,\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{+\infty}\frac{1}{2}e^{-x}\,\mathrm{d}x$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x\,\mathrm{d}x \cancel{=} 0$$



定义3 (1) 设 $f(x) \in C(a,b]$，$x=a$ 为 $f(x)$的无穷间断点，$a<t<b$，若极限 $\lim\limits_{t\to a^+}\int_t^b f(x)\,dx$ 存在，则称无界函数反常积分 $\int_a^b f(x)dx$ 收敛，记作

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\lim_{t\to a^+}\int_t^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

如果上述极限不存在, 就称**无界函数反常积分** $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ **发散**.

(2) 若 $f(x)\in C[a,b)$，$x=b$为$f(x)$的无穷间断点, 则类似定义

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\lim_{t\to b^-}\int_a^t f(x)\,\mathrm{d}x.$$

(3) 若 $f(x)$ 在$[a,b]$上除点$c(a<c<b)$外连续，$x=c$ 为无穷间断点，若无界函数反常积分 $\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x$ 与 $\int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 均收敛，则称无界函数反常积分 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛，且

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^c f(x)\mathrm{d}x+\int_c^b f(x)\mathrm{d}x.$$

若上式右端两个反常积分至少有一个发散, 则称无界函数反常积分 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$发散.

- 无穷间断点又称为瑕点, 无界函数的反常积分也称为瑕积分.

定理2 (1) 设$f(x)$在$(a,b]$上连续，$x=a$是$f(x)$的瑕点, $F(x)$为$f(x)$在$(a,b]$上的一个原函数，若$F(a+0)=\lim\limits_{x\to a^+}F(x)$存在，则反常积分$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$收敛，且

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=F(b)-F(a+0).$$

(2) 设$f(x)$在$[a,b)$上连续，$x=b$是$f(x)$的瑕点, $F(x)$为$f(x)$在$[a,b)$上的一个原函数，若$F(b-0)=\lim\limits_{x\to b^-}F(x)$存在，则反常积分$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$收敛，且

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=F(b-0)-F(a).$$

例6 计算反常积分 $\int_0^a \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}}\ (a>0)$.

例7 讨论反常积分$\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2} dx$的收敛性

例8 证明反常积分 $\int_0^1 \frac{1}{x^p} dx$ 当 $p < 1$时收敛，当 $p \geq 1$时发散 .

典型反常积分收敛性	$p < 1$	$p = 1$	$p > 1$
无穷区间反常积分 $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx$	发散	发散	收敛
无界函数反常积分 $\int_0^1 \frac{1}{x^p} dx$	收敛	发散	发散

例8 若反常积分 $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^a(1+x)^b}dx$ 收敛，则

A. $a < 1, b > 1$　　B. $a > 1, b > 1$

C. $a < 1, a + b > 1$　　D. $a > 1, a + b > 1$

定理3 设$f(x)$ 在$[a,+\infty)$上连续，且$f(x)\geq 0$

$$F(x)=\int_a^x f(t)dt$$

在$[a,+\infty)$上有界，则反常积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$收敛

定理4 (比较判别法) 设$f(x), g(x)$在$[a,+\infty)$上连续，且

$$0 \le f(x) \le g(x),\ x \in [a,+\infty),$$

则 (1) 当$\int_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$收敛时, $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$收敛;

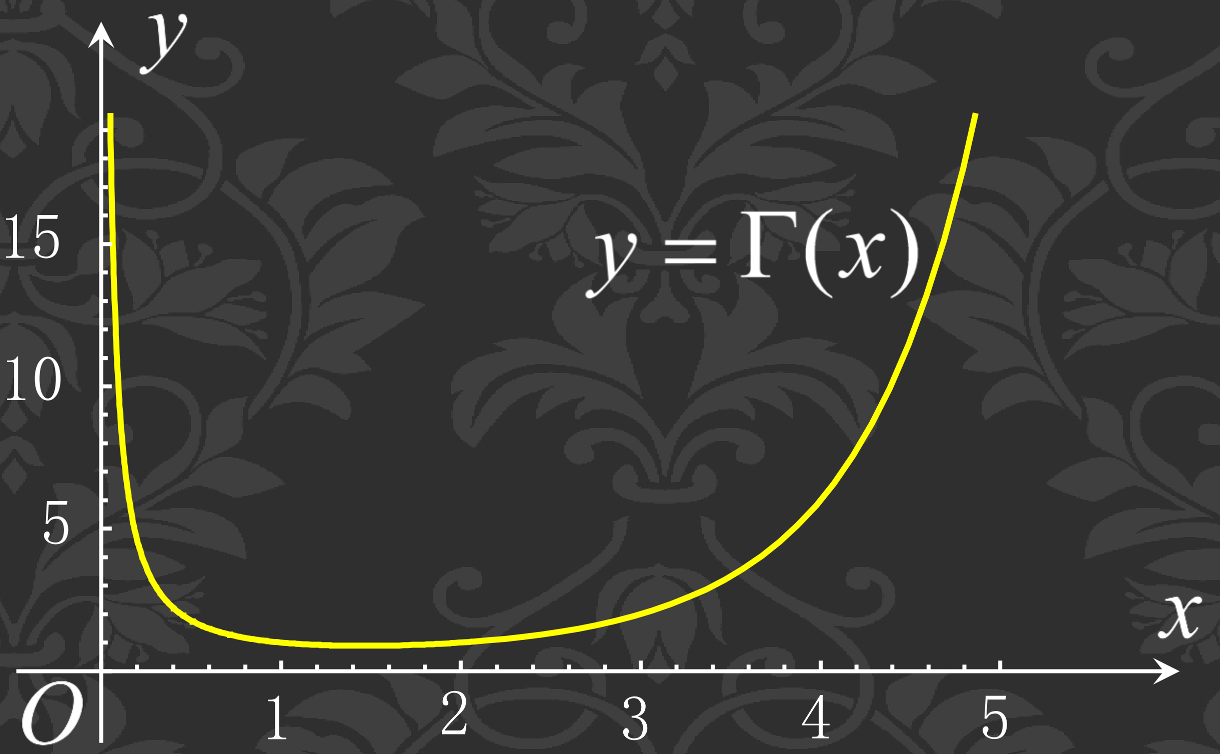
(2) 当$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$发散时, $\int_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$发散.

注1: 应用中常取$g(x) = x^{-p}$或 $g(x) = e^{-x}$ 作为比较的标准.

注2: 对无界函数的反常积分也有相应的比较判别法.

例9 证明积分$\int_0^{+\infty} x^{\alpha-1}e^{-x}\mathrm{d}x$ 当 $\alpha > 0$ 时收敛.

- 称 $\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1}e^{-x}\mathrm{d}x \ (\alpha > 0)$ 为Γ函数.



- 称 $\Gamma(\alpha)=\int_0^{+\infty}x^{\alpha-1}e^{-x}\mathrm{d}x\ \ (\alpha>0)$ 为Γ函数.
- 递推公式 $\Gamma(\alpha+1)=\alpha\Gamma(\alpha)\ \ (\alpha>0)$.

  Γ 函数特殊值 $\Gamma(1)=1$ ，$\Gamma(\frac{1}{2})=\sqrt{\pi}$
- $\Gamma(n+1)=n\Gamma(n)=n(n-1)\Gamma(n-1)=n!\ \ (n=1,2,\dots)$

  利用Γ函数可以推广阶乘

  $$\alpha! \overset{\text{def.}}{=} \Gamma(\alpha+1)\ (\alpha>0)$$