高等数学

5.3 定积分的换元法与分部积分

基础部数学教研室

郑治中

定积分的换元法

奇偶函数的定积分

周期函数的定积分

定积分的分部积分法

三角函数积分

凑微分法 + 利用三角恒等式

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1,\ \ 1 + \tan^2 x = \sec^2 x$$

$$\sin A \cos B = \frac{1}{2}[\sin(A + B) + \sin(A - B)]$$

$$\sin A \sin B = \frac{1}{2}[\cos(A - B) - \cos(A + B)]$$

$$\cos A \cos B = \frac{1}{2}[\cos(A - B) + \cos(A + B)]$$

根式函数积分

根式表达式

根式表达式	代换表达式		
$\sqrt{a^2 - x^2}$	$x = a\sin\theta$	$(-\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2})$
$\sqrt{a^2 + x^2}$	$x = a\tan\theta$	$(-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2})$
$\sqrt{x^2 - a^2}$	$x = a\sec\theta$	$(0 \le \theta < \frac{\pi}{2})$

代换表达式

定积分换元法

定理1 (1) 设$f(x) \in C[a,b]$,

(2) $\varphi(\alpha) = a, \varphi(\beta) = b$,且 $\varphi'(t)$在$[\alpha,\beta]$上连续，则

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt$$

例1 求下列定积分:

$(1)\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\,dx, (a > 0)$;　　$(2)\int_0^{\pi/2} \cos^5 x \sin x\,dx$;

定积分换元法要点

1. 换元换限，且新积分上下限与原积分上下限一一对应；
2. 换元后求出的原函数不必换为原来变量，直接用新变量定积分进行计算；
3. 在不定积分的计算中，常用的积分变换与不定积分的积分变换相同。

例2 求下列定积分：

$$(1)\int_{-1}^{1}\frac{1}{1+x^2+x}dx;\quad (2)\int_{1}^{\sqrt{3}}\frac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}};\quad (3)\int_{0}^{\ln 2}\sqrt{1-e^{-2x}}dx;$$

奇偶函数的定积分

问题 计算积分 $\int_{-1}^{1} \frac{1+\sin x}{3+x^2} \mathrm{d}x$.

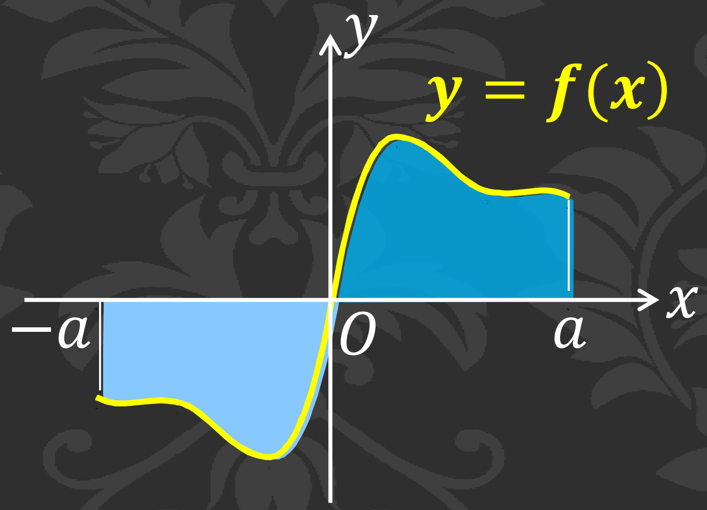
$$\int_{-1}^{1} \frac{1+\sin x}{3+x^2} \mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} \frac{1}{3+x^2} \mathrm{d}x + \int_{-1}^{1} \boxed{\frac{\sin x}{3+x^2}} \mathrm{d}x$$

奇函数

定理2 设函数$f(x)$在闭区间$[-a,a]$上连续.

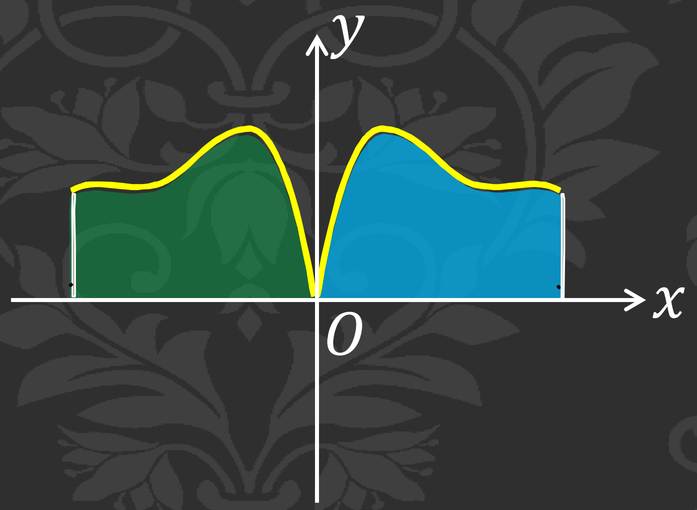
(1) 如果$f(x)$为奇函数，那么

$$\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = 0;$$



(2) 如果$f(x)$为偶函数，那么

$$\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{a} f(x)\mathrm{d}x\,.$$



- 利用奇偶函数性质，可以简化定积分计算

定积分中奇偶函数的处理方法:

(1) 直接法：如果被积函数就是奇函数或者偶函数，直接按照奇偶函数的定积分公式计算，但要注意积分区间的对称性;

例3 计算定积分:

(1) $\int_{-1}^{1} \sin^9 x \, dx$;　　(2) $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{(\arcsin x)^2}{\sqrt{1-x^2}} dx$.

定积分中奇偶函数的处理方法:

(2) 拆项法：将被积函数拆成奇偶函数和的形式，在对称区间上对具有奇偶性质的被积函数使用奇偶函数的定积分公式计算;

例4 计算定积分 $\int_{-1}^{1} \frac{1+\sin x}{3+x^2} \mathrm{d}x.$

例5 证明 $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1+x^2} dx \leq \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1+x^2} dx$

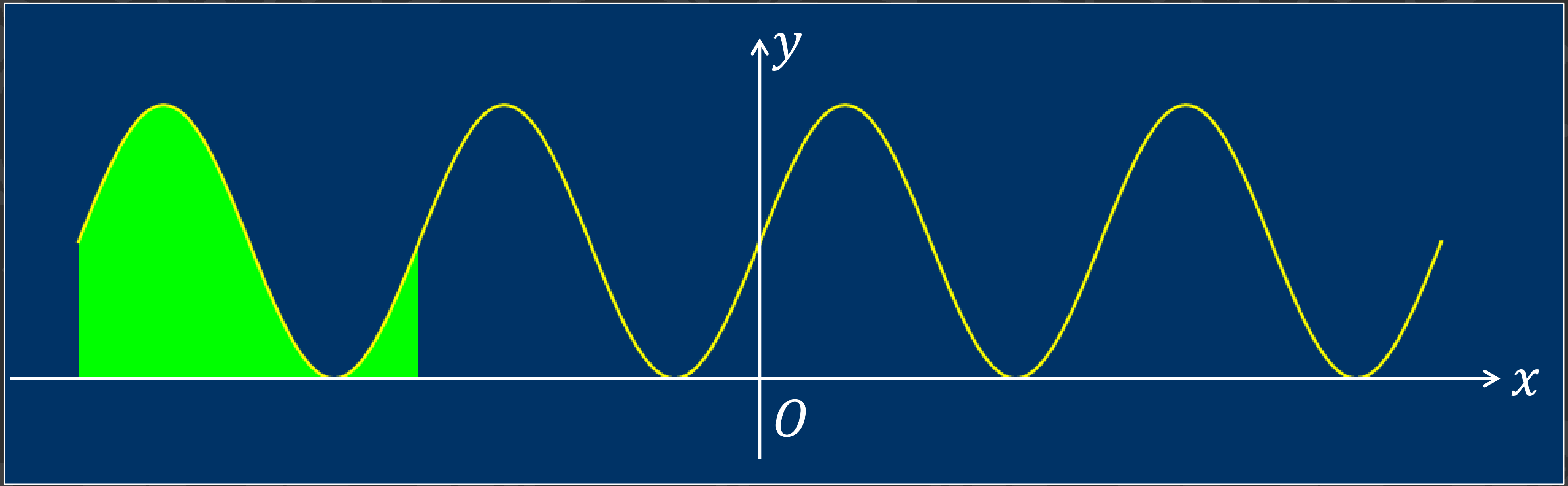
周期函数的定积分

问题 计算积分 $\displaystyle\int_0^{2023\pi} \boxed{\frac{|\sin x|}{1+\cos^2 x}}\,\mathrm{d}x$. 周期函数

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = -\arctan\cos x\Big|_0^{\pi} = \frac{\pi}{2}$$

定理3 设$f(x)$是以T为周期的连续函数，则对任意实数a，有

$$\int_a^{a+T} f(x)\mathrm{d}x = \int_0^T f(x)\mathrm{d}x = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\mathrm{d}x.$$



例7 计算定积分$\int_{-2}^{3}(x-[x])\,\mathrm{d}x$.

例8 $f(x)$是奇函数，证明$\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$是偶函数

定积分的分部积分

$$\int \underline{u(x)\ v'(x)}\mathrm{d}x = u(x)v(x) - \int u'(x)\ v(x)\,\mathrm{d}x$$

不定积分的分部积分公式

解决目标：$\int f(x)\,\mathrm{d}x$

要　　求：(1) $v(x)$容易求得;

(2) $\int u'(x)\,v(x)\mathrm{d}x$比$\int u(x)\,v'(x)\mathrm{d}x$好求.

$$\int u\ \mathrm{d}v = uv - \int v\ \mathrm{d}u$$

定理4 设函数$u(x)$与$v(x)$在$[a,b]$上有连续的导数，则

$$\int_a^b u(x)v'(x)\mathrm{d}x = [u(x)v(x)]|_a^b - \int_a^b v(x)u'(x)\mathrm{d}x\,.$$

定积分分部积分公式

$$\int_a^b u\mathrm{d}v = uv|_a^b - \int_a^b v\mathrm{d}u\,.$$

例10 求下列定积分：

(1) $\int_{-1}^{0} xe^{-x}\mathrm{d}x$；　　(2) $\int_0^1 x\ln(1+x^2)\,\mathrm{d}x$.

例11 若$f(x)=\int_1^{x^2}\frac{\sin t}{t}dt$，求$\int_0^1 xf(x)dx$

例12 设$f''(x)$连续，$f(\pi)=1$，$\int_0^{\pi}[f(x)+f''(x)]\sin x\,\mathrm{d}x=3$，求$f(0)$

例13 设n为正整数，计算 $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\mathrm{d}x$.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\,\mathrm{d}x=\begin{cases}\dfrac{(n-1)!!}{n!!}\cdot 1, & n\text{为奇数},\\ \dfrac{(n-1)!!}{n!!}\cdot\dfrac{\pi}{2}, & n\text{为偶数}.\end{cases}$$

华莱士公式

其中$n!!$读作n的双阶乘. 当n为奇数时，它是从1到n的所有奇数相乘；当n是偶数时，它是从2到n的所有偶数相乘.

$5!!=5\cdot 3\cdot 1,\ 6!!=6\cdot 4\cdot 2.$