

# 高等数学



## 4.3 分部积分



基础部数学教研室

郑治中

问题1：试计算  $\int \sqrt{a^2 + x^2} dx$ .

$$\int \sqrt{a^2 + x^2} dx \stackrel{x = a\tan t}{=} \int a \sec t \cdot a \sec^2 t dt = a^2 \int \sec^3 t dt = ?$$

问题2：试计算  $\int e^{\sqrt{x}} dx \stackrel{\sqrt{x} = t}{=} 2 \int t e^t dt = ?$

$$\int x \sin x dx = ?$$

$$\int x \ln x dx = ?$$

$$\int e^x \sin x dx = ?$$

## 不定积分的分部积分法



$$\int u(x) v'(x) dx = u(x)v(x) - \int u'(x) v(x) dx$$

### 不定积分的分部积分公式

解决目标:  $\int f(x) dx$

要 求:

- (1)  $v(x)$ 容易求得;
- (2)  $\int u'(x) v(x) dx$ 比  $\int u(x) v'(x) dx$ 好求.

$$\int u dv = uv - \int v du$$

例3 求下列不定积分：

$$(1) \int xe^x dx ;$$

$$(2) \int x^2 e^x dx ;$$

$$(3) \int x \sin 2x dx .$$

1. 如何确定 $u$ 和 $v$ 的取值
2. 多次分部积分如何求解

$$\int u(x) v^{(n)}(x) dx$$

★ 斜线：两数相乘

做几次分部积分就有  
几条斜线

★ 横线：两数相乘再积分

仅有一条横线

★ 符号起始+，交错往下

左导

$$u(x)$$

$$u'(x)$$

$$u''(x)$$

⋮

$$u^{(n-1)}(x)$$

$$u^{(n)}(x)$$

右积

$$v^{(n)}(x)$$

$$v^{(n-1)}(x)$$

$$v^{(n-2)}(x)$$

⋮

$$v'(x)$$

$$v(x)$$

+

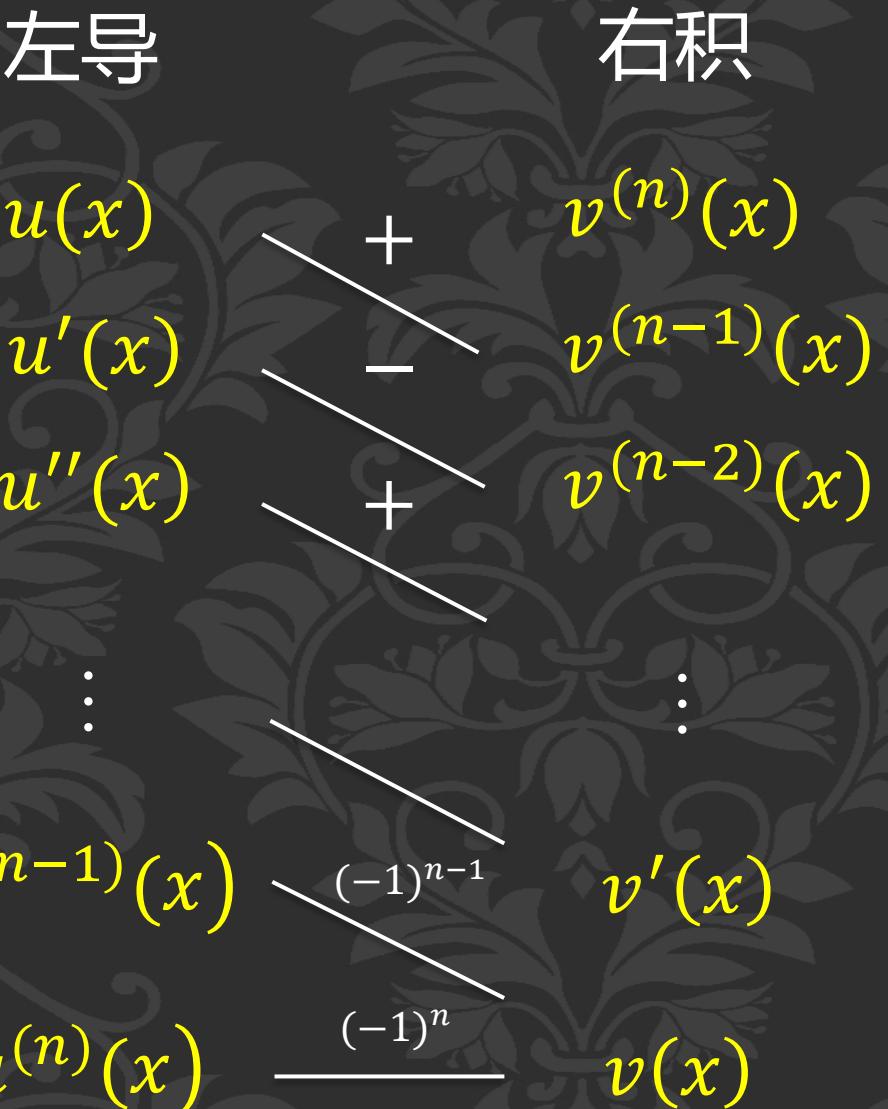
-

+

$(-1)^{n-1}$

$(-1)^n$

$$\begin{aligned}
& \int u(x) v^{(n)}(x) dx = \\
& u(x)v^{(n-1)} - u'(x)v^{(n-2)}(x) \\
& + \cdots + \\
& + (-1)^{n-1}u^{(n-1)}(x)v(x) \\
& + (-1)^n \int u^{(n)}(x)v(x) dx
\end{aligned}$$



**例3** 求下列不定积分：

$$(1) \int xe^x dx;$$

$$(2) \int x^2 e^x dx;$$

$$(3) \int x \sin 2x dx.$$

**例** 求

$$\int \sec^3 t dt$$

**例** 求

$$\int \sqrt{x^2 - a^2} dx \quad (a > 0).$$

$$(x = a \sec t)$$

**例4** 求下列不定积分：

$$(1) \int \sqrt{a^2 + x^2} dx \quad (2) \int \arcsin x dx$$

**例5** 求下列不定积分：

$$(1) \int e^x \sin x dx \quad (2) \int \cos \alpha x \cos \beta x dx$$

例6 求不定积分  $\int x \ln x \, dx$

例7 求不定积分  $\int \frac{\ln x}{\sqrt{1+x}} \, dx$

例8 求不定积分  $\int \frac{\arctan e^x}{e^{2x}} \, dx$

例9 求不定积分：

$$\int \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) dx$$

$$\int e^{-\frac{x}{2}} \frac{\cos x - \sin x}{\sqrt{\sin x}} dx$$

$$\int \arcsin \sqrt{x} dx$$

$$\int \frac{\ln^3 x}{x^2} dx$$

$$\int \cos \ln x dx$$

$$\int e^{ax} \cos bx dx$$

**例10** 已知 $\ln(x + \sqrt{1 + x^2})$ 是 $f(x)$ 的原函数，求 $\int xf'(x)dx$

**例11** 已知 $\frac{\sin x}{x}$ 是 $f(x)$ 的原函数，求 $\int x^3f'(x)dx$

**例12** 设 $f(\ln x) = \frac{\ln(1+x)}{x}$ ，求 $\int f(x)dx$

**例13** 求下列不定积分  $I_n = \int \frac{dx}{(a^2 + x^2)^n}$ , 其中  $n$  为正整数且  $a > 0$ .

$$I_n = \frac{1}{2a^2(n-1)} \cdot \frac{x}{(a^2 + x^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2a^2(n-1)} I_{n-1} \quad (n \geq 1)$$

$$I_1 = \int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C$$

$$I_2 = \frac{1}{2a^2} \cdot \frac{x}{a^2 + x^2} + \frac{1}{2a^2} I_1$$

$$= \frac{1}{2a^2} \cdot \frac{x}{a^2 + x^2} + \frac{1}{2a^3} \arctan \frac{x}{a} + C$$