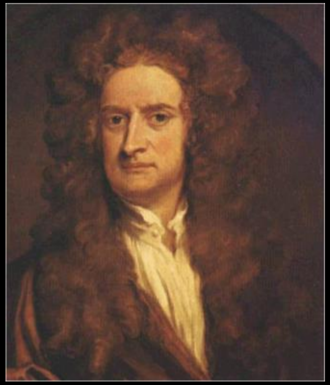
高等数学



§1.7 无穷小的比较

集合 → 等价关系 →(分类) 等价类

2023届新生　　在同一个数学课程教学班　　22个教学班

满足自反性、对称性、传递性

三角形　　相似关系、全等关系

问题： 对于函数集合, 能否定义其上的等价关系?

分类研究法是一种重要的科学研究方法.

三角函数

指数函数

幂函数

反三角函数

对数函数

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arctan x}{x}=1$$

$\frac{0}{0}$ 型 未定式

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^x-1}{x}=1$$

问题： 无穷小之商的极限等于1是否代表分子和分母相等?

以商的极限为 1 构建两函数之间的关系, 建立了**等价关系**

下面的四个函数都是过程$x \to 0$的无穷小：

$$f(x) = x,\ \ g(x) = \sin x,\ \varphi(x) = x^2,\ \psi(x) = \ln(1+2x).$$

x	$f(x)$	$g(x)$	$\varphi(x)$	$\psi(x)$
0.5	0.5	0.479426	0.25	0.693147
0.4	0.4	0.389418	0.16	0.587787
0.3	0.3	0.29552	0.09	0.470004
0.2	0.2	0.198669	0.04	0.336472
0.1	0.1	0.099833	0.01	0.182322
0.05	0.05	0.049979	0.0025	0.09531

自变量$x \to 0$时，函数趋于零的快慢比较

x	$\frac{g(x)}{f(x)}=\frac{\sin x}{x}$	$\frac{\psi(x)}{f(x)}=\frac{\ln(1+2x)}{x}$	$\frac{g(x)}{\varphi(x)}=\frac{\sin x}{x^2}$	$\frac{\varphi(x)}{g(x)}=\frac{x^2}{\sin x}$
0.5	0.958851	1.386294	1.917702	**0.521457**
0.4	0.973546	1.469467	2.433865	**0.410869**
0.3	0.985067	1.566679	3.283558	**0.304548**
0.2	0.993347	1.682361	4.966733	**0.20134**
0.1	0.998334	1.823216	9.983342	**0.100167**
0.05	0.999583	1.906204	19.99167	**0.050021**
0.01	0.999983	1.980263	99.99833	**0.01**

定义1 设$f(x), g(x)$均是过程$x \to x^*$中的无穷小, 且$g(x) \neq 0$,

(1) 若 $\lim\limits_{x \to x^*} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$, 则称 $f(x)$ 是 $g(x)$ 在过程 $x \to x^*$ 的高阶无穷小，记作 $f(x) = o\big(g(x)\big)\ (x \to x^*)$.

也称 $g(x)$ 是 $f(x)$ 在过程 $x \to x^*$ 的低阶无穷小.

例如，$\dfrac{\varphi(x)}{g(x)} = \dfrac{x^2}{\sin x} \to 0 \quad (x \to 0) \quad \Rightarrow \varphi(x) = o\big(g(x)\big)(x \to 0)$

思考 $o(\alpha(x))$代表什么? 一类函数 $\lim\limits_{x \to x^*} \dfrac{o(\alpha(x))}{\alpha(x)} = 0.$

$o(\alpha(x))$唯一吗? $x \to 0$时, $x^2 = o(x) \quad x^3 = o(x) \ \cdots$

定义1 设$f(x), g(x)$均是过程$x \to x^*$中的无穷小, 且$g(x) \neq 0$,

(2) 若 $\lim\limits_{x \to x^*} \dfrac{f(x)}{g(x)} = C \neq 0$, 则称$f(x)$是 $g(x)$在过程$x \to x^*$的同阶无穷小.

(3) 若 $\lim\limits_{x \to x^*} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$，则称$f(x)$是 $g(x)$在过程$x \to x^*$的等价无穷小，记为 $f(x) \sim g(x)\ (x \to x^*)$.

例如， $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{\sin x} = 1 \Rightarrow x \sim \sin x\ \ (x \to 0)$

定义1 设$f(x),g(x)$均是过程$x\to x^*$中的无穷小, 且$g(x)\neq 0$,

(4) 若 $\lim\limits_{x\to x^*}\dfrac{f(x)}{g^n(x)}=C\neq 0$, 则称$f(x)$是 $g(x)$在过程$x\to x^*$的n阶无穷小.

特别的，当$g(x)=x$时，称$f(x)$是$x\to 0$ 时的n阶无穷小

例如， $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\dfrac{1}{2}$ $\Rightarrow 1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2\ \ (x\to 0)$

例1 证明$x \to 0$时，$\sqrt[n]{1+x}-1 \sim \frac{1}{n}x.$

证明: 由于 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[n]{1+x}-1}{\frac{1}{n}x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[n]{1+x}-1}{\frac{1}{n}x}\cdot\dfrac{(1+x)^{\frac{n-1}{n}}+\cdots+(1+x)^{\frac{1}{n}}+1}{(1+x)^{\frac{n-1}{n}}+\cdots+(1+x)^{\frac{1}{n}}+1}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{n}{(1+x)^{\frac{n-1}{n}}+\cdots+(1+x)^{\frac{1}{n}}+1}=1,$$

所以结论成立.

回顾: 因式分解公式 $a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+\cdots+ab^{n-2}+b^{n-1})$

$$x-1=(x^{\frac{1}{n}}-1)(x^{\frac{n-1}{n}}+x^{\frac{n-2}{n}}+\cdots+x^{\frac{1}{n}}+1)$$

例2　证明下列等价关系（过程均为$x \to 0$）：

(1) $\sin x \sim x$;　　(2) $1-\cos x \sim \frac{1}{2}x^2$;　　(3) $\tan x \sim x$;

(4) $\ln(1+x) \sim x$;　　(5) $e^x - 1 \sim x$;

(6) $a^x - 1 \sim x\ln a \ (a > 0, a \neq 1)$;

(7) $(1+x)^a - 1 \sim ax \ (a \neq 0)$;

(8) $x \sim \arcsin x$.

- 同一过程的等价无穷小具有传递性.

定理1 设 α 和 β 均为过程$x \to x^*$的等价无穷小，其充要条件是

$$\beta = \alpha + o(\alpha), x \to x^*.$$

注：等价无穷小之间相差一个高阶无穷小，等价不代表相等。

$$\sin x \sim x \to \sin x = x + o(x)$$

$$1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2 \to 1 - \cos x = \frac{1}{2}x^2 + o(x) \quad x \to 0$$

$$\tan x \sim x \to \tan x = x + o(x)$$

性质： $o(x) + o(x) = o(x)$，类似地 $o(x^2) + o(x^2) = o(x^2)$

定理2 设 $f_j(x)$ $(j=1,2)$ 和 $g_j(x)$ $(j=1,2)$ 均为过程$x\to x^*$的无穷小，$f_j(x), g_j(x)$ $(j=1,2)$在相应的去心邻域中不等于0，且有$f_1(x)\sim f_2(x)$ $(x\to x^*)$，$g_1(x)\sim g_2(x)$ $(x\to x^*)$.

(1) 若极限 $\lim\limits_{x\to x^*}\frac{f_1(x)}{g_1(x)}$存在，则极限 $\lim\limits_{x\to x^*}\frac{f_2(x)}{g_2(x)}$一定存在，且

$$\lim_{x\to x^*}\frac{f_1(x)}{g_1(x)}=\lim_{x\to x^*}\frac{f_2(x)}{g_2(x)}.$$ (无穷小等价代换)

(2) 若 $\lim\limits_{x\to x^*}\frac{f_1(x)}{g_1(x)}=\infty$，则有 $\lim\limits_{x\to x^*}\frac{f_2(x)}{g_2(x)}=\infty$.

例3 计算函数极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}$.

错误的等价代换： $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}\cancel{=}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-x}{x^3}=0$

例4 计算函数极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{\ln(2-e^{x^2})}$.

例5 计算函数极限 $\lim\limits_{n\to\infty} n(\sqrt[3]{1+sin\frac{2}{n}}-1)$.

例5 计算极限 (1)$\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sin[\sin(x-1)]}{\ln x}$, (2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{\cos x}-1}{2^{x^2}-1}$.

例6 若$x \to 0$时, $(1-ax^2)^{\frac{1}{4}}-1$与$x\sin x$是等价无穷小，求a

例7 若$x \to 0$时，求以下无穷小的阶数

(1) $\frac{1}{1+x}-(1-x)$, (2) $\cos x-\sqrt{\cos x}$,

(3) $\sqrt{1+tanx}-\sqrt{1-sinx}$, (4) $cosx-\cos 2x$,

(5) $\ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$.