第三章 多维随机变量及其分布

题目及答案

1（2017：22）（本题满分 11 分）设随机变量 X,Y 相互独立，且 X 的概率分布为

$P\left\{X=0\right\}=P\left\{X=2\right\}=\frac{1}{2}$，$Y$ 的概率密度为 $f(y)=\begin{cases}2y，0<y<1\\0,\ \ 其他\end{cases}$，

(1) 求 $P\left\{Y\le E\left(Y\right)\right\}$；(2) 求 $Z=X+Y$ 的概率密度。

解：

$$
\begin{aligned}
&(1)E(Y)=\int_0^1 y2ydy=\frac{2}{3}\\
&P(Y\le EY)=P(Y\le\frac{2}{3})=\int_0^{\frac{2}{3}}2ydy=\frac{4}{9}\\
&(2)F_z(Z)=P(Z\le z)=P(X+Y\le z)\\
&=P(X+Y\le z,X=0)+P(X+Y\le z,X=2)\\
&=P(Y\le z,X=0)+P(Y\le z-2,X=2)\\
&=\frac{1}{2}P(Y\le z)+\frac{1}{2}P(Y\le z-2)
\end{aligned}
$$

当 $z<0,z-2<0$，而 $z<0$，则 $F_z(Z)=0$；当 $z-2\ge 1,z>1,$ 即 $z\ge 3$ 时，$F_z(Z)=1$

当 $0\le z<1$ 时，$F_z(Z)=\frac{1}{2}z^2$；当 $1\le z<2$ 时，$F_z(Z)=\frac{1}{2}$；

当 $2\le z<3$ 时，$F_z(Z)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}(z-2)^2$

所以综上 $F_z(Z)=\begin{cases}0 & z<0\\ \frac{1}{2}z^2,0\le z<1\\ \frac{1}{2},1\le z<2\\ \frac{1}{2}+\frac{1}{2}(z-2)^2,2\le z<3\\ 1,\ \ z\ge 3\end{cases}$

所以 $f_z(Z)=\left[F_z(Z)\right]'=\begin{cases}z & 0<z<1\\ z-2 & 2<z<3\end{cases}$

2（2016：8）随机试验E有三种两两不相容的结果A_1,A_2,A_3，且三种结果发生的概率均为$\frac{1}{3}$，将试验E独立重复做 2 次，X 表示 2 次试验中结果A_1发生的次数，Y 表示 2 次试验中结果A_2发生的次数，则X 与Y 的相关系数为（　　）

解：联合分布律为

Y \ X	0	1	2
0	1/9	2/9	1/9
1	2/9	2/9	0
2	1/9	0	0

其中

$$P\{X=0,Y=0\}=\frac{1}{C_3^1C_3^1}=\frac{1}{9},P\{X=0,Y=1\}=\frac{2}{C_3^1C_3^1}=\frac{2}{9}=P\{X=1,Y=0\},$$

$$P\{X=0,Y=2\}=\frac{1}{C_3^1C_3^1}=\frac{1}{9}=P\{X=2,Y=0\},P\{X=1,Y=1\}=\frac{2}{C_3^1C_3^1}=\frac{2}{9}$$

由联合分布律，计算可得X 与Y 的相关系数为-0.5。

3（2016：22）（本题满分 11 分）设二维随机变量(X,Y)在区域$D=\left\{(x,y)\middle|0<x<1,x^2<y<\sqrt{x}\right\}$上服从均匀分布，令$U=\begin{cases}1, & X\le Y\\ 0, & X>Y\end{cases}$，

(1)写出(X,Y)的概率密度；(2)问U与X 是否相互独立？并说明理由；

(3)求$Z=U+X$的分布函数$F(z)$.

解:(1)区域D的面积$S(D)=\int_0^1(\sqrt{x}-x^2)dx=\frac{1}{3}$

$$\therefore f(x,y)=\begin{cases}3, x^2<y<\sqrt{x},\\ 0, \quad others.\end{cases}$$

(2)X与Y不独立.

因为$P\left\{U\le\frac{1}{2},X\le\frac{1}{2}\right\}=P\left\{U=0,X\le\frac{1}{2}\right\}=P\left\{X>Y,X\le\frac{1}{2}\right\}=\frac{1}{2}$

$$P\left\{U\le\frac{1}{2}\right\}=\frac{1}{2},P\left\{X\le\frac{1}{2}\right\}=\frac{1}{2}$$

$$P\left\{U\le\frac{1}{2},X\le\frac{1}{2}\right\}\ne P\left\{U\le\frac{1}{2}\right\}P\left\{X\le\frac{1}{2}\right\}$$

所以X与Y不独立.

$$
\begin{aligned}
(3)F_Z(z) &= P\{U+X\le z\}\\
&= P\{U+X\le z|U=0\}P\{U=0\}+P\{U+X\le z|U=1\}P\{U=1\}\\
&= \frac{P\{U+X\le z,U=0\}}{P\{U=0\}}P\{U=0\}+\frac{P\{U+X\le z,U=1\}}{P\{U=1\}}P\{U=1\}\\
&= P\{X\le z, X>Y\}+P\{1+X\le z, X\le Y\}
\end{aligned}
$$

又

$$
P\{X\le z, X>Y\}=\begin{cases}0, & z<0,\\ \dfrac{3}{2}z^2-z^3, & 0\le z<1,\\ \dfrac{1}{2}, & z\ge 1.\end{cases}
$$

$$
P\{X+1\le z, X\le Y\}=\begin{cases}0, & z<1,\\ 2(\mathrm{z}\text{-}1)^{\frac{3}{2}}-\dfrac{3}{2}(\mathrm{z}\text{-}1)^2, & 1\le z<2,\\ \dfrac{1}{2}, & z\ge 2.\end{cases}
$$

所以

$$
F_Z(z)=\begin{cases}0, & z<0,\\ \dfrac{3}{2}z^2-z^3, & 0\le z<1,\\ \dfrac{1}{2}+2(\mathrm{z}\text{-}1)^{\frac{3}{2}}-\dfrac{3}{2}(\mathrm{z}\text{-}1)^2, & 1\le z<2,\\ 1, & z\ge 2.\end{cases}
$$

4（2015：14）设二维随机变量(X,Y)服从正态分布$N(1,0,1,1;0)$，则

$P\{XY-Y<0\}=$________.

解：由题设知，$X\sim N(1,1), Y\sim N(0,1)$，而且$X$、$Y$相互独立，从而

$$
\begin{aligned}
P\{XY-Y<0\}&=P\{(X-1)Y<0\}=P\{X-1>0,Y<0\}+P\{X-1<0,Y>0\}\\
&=P\{X>1\}P\{Y<0\}+P\{X<1\}P\{Y>0\}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}.
\end{aligned}
$$

5（2012：7）设随机变量X与Y相互独立，且分别服从参数为 1 与参数为 4 的指数分布，则$P\{X<Y\}$=（　）

$(A)\frac{1}{5}$　　$(B)\frac{1}{3}$　　$(C)\frac{2}{5}$　　$(D)\frac{4}{5}$

解：

$$X \sim f_X(x)=\begin{cases} e^{-x}, x>0 \\ 0, \quad x \le 0 \end{cases}; \quad Y \sim f_Y(y)=\begin{cases} 4e^{-y}, y>0 \\ 0, \quad y \le 0 \end{cases}$$

$$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)=\begin{cases} 4e^{-(x+4y)}, x>0, y>0 \\ 0, \qquad \text{others} \end{cases}$$

$$P\{X<Y\}=\int_0^{+\infty}dx\int_x^{+\infty}4e^{-(x+4y)}dy=\frac{1}{5}$$

故选 A。

6（2012：23）（本题满分 11 分）设随机变量 X 与 Y 相互独立，且分别服从正态分布 $N\left(\mu,\sigma^2\right)$ 与 $N\left(\mu,2\sigma^2\right)$，其中 σ 是未知参数且 $\sigma>0$，设 $Z=X-Y$，求 Z 的概率密度 $f\left(z,\sigma^2\right)$。

解：

$$EZ=E(X-Y)=EX-EY=0, \quad DZ=D(X-Y)=DX+DY=3\sigma^2$$

$\because X,Y$独立，都服从正态分布， $\therefore Z=X-Y \sim N(0,3\sigma^2)$

故 $\quad f_Z(z)=\dfrac{1}{\sqrt{6\pi}\sigma}e^{-\frac{z^2}{6\sigma^2}}, -\infty<z<+\infty$

7（2011：22）（本题满分 11 分）设随机变量 X 与 Y 的概率分布分别为

X	0	1
P	1/3	2/3

Y	-1	0	1
P	1/3	1/3	1/3

且 $P\left\{X^2=Y^2\right\}=1$，求

（1）二维随机变量(X,Y)的概率分布；

（2）$Z=XY$的概率分布；

（3）X与Y的相关系数ρ_{XY}.

解：(1)作联合分布与边缘分布表，填入边缘分布。

$P\left\{X^2=Y^2\right\}=1 \Rightarrow P\left\{X^2 \neq Y^2\right\}=0$

$\Rightarrow P\{X=0,Y=1\}=P\{X=0,Y=-1\}=P\{X=1,Y=0\}=0$

再由联合分布与边缘分布的关系，可得

Y \ X	0	1	Y 边缘
−1	0	1/3	1/3
0	1/3	0	1/3
1	0	1/3	1/3
X 边缘	1/3	2/3	1

(2)Z取值为$-1,1,0$

$P\{Z=-1\}=P\{XY=-1\}=P\{X=1,Y=-1\}=\dfrac{1}{3}$

$P\{Z=1\}=P\{XY=1\}=P\{X=1,Y=1\}=\dfrac{1}{3}$

$P\{Z=0\}=\dfrac{1}{3}$

(3)$EX=\dfrac{2}{3},EY=0,E(XY)=0,DX=\dfrac{2}{9},DY=\dfrac{2}{3},\rho_{XY}=0$

$1 \Rightarrow P\left\{X^2 \neq Y^2\right\}=0$

$\Rightarrow P\{X=0,Y=1\}=P\{X=0,Y=-1\}=P\{X=1,Y=0\}=0$

8（2010：22)（本题满分 11 分）设二维随机变量(X,Y)的概率密度为

$f(x,y)=Ae^{-2x^2+2xy-y^2},-\infty<x<+\infty,-\infty<y<+\infty$，求常数$A$及条件概率密度

$f_{Y|X}(y|x)$。

解：由概率密度的性质$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=1$，可知

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} A\mathrm{e}^{-2x^2+2xy-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=A\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-(x-y)^2}\mathrm{d}y=1$$

又知$\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x=\sqrt{\pi}$，有$\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-(x-y)^2}\mathrm{d}y=\sqrt{\pi}\cdot\sqrt{\pi}=\pi$

所以

$$A=\frac{1}{\pi},$$

即

$$f(x,y)=\frac{1}{\pi}\mathrm{e}^{-2x^2+2xy-y^2}$$

X 的边缘概率密度为

$$f_X(x)=\frac{1}{\pi}e^{-x^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-(x-y)^2}\mathrm{d}y=\frac{1}{\pi}\mathrm{e}^{-x^2}\cdot\sqrt{\pi}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-x^2},-\infty<x<+\infty$$

当$-\infty<x<+\infty$时，

$$f_{Y|X}(y|x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}=\frac{\frac{1}{\pi}\mathrm{e}^{-2x^2+2xy-y^2}}{\frac{1}{\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-x^2}}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-(x-y)^2},-\infty<y<+\infty$$

9（2009：8）设随机变量 X 与 Y 相互独立，且 X 服从标准正态分布 $N(0,1)$，Y 的概率分布为 $P\{Y=0\}=P\{Y=1\}=\frac{1}{2}$，记 $F_Z(z)$ 为随机变量 $Z=XY$ 的分布函数，则函数 $F_Z(z)$ 的间断点个数为

(A) 0　　　　(B) 1

(C) 2　　　　(D) 3

解：$F_Z(z)=P\{XY\le z\}=P\{XY\le z|Y=0\}P\{Y=0\}+P\{XY\le z|Y=1\}P\{Y=1\}$

$=\frac{1}{2}[P\{XY\le z|Y=0\}+P\{XY\le z|Y=1\}]$

$=\frac{1}{2}[P\{X\cdot 0\le z|Y=0\}+P\{X\le z|Y=1\}]$

$\because X,Y$独立

$\therefore F_Z(z)=\frac{1}{2}[P\{X\cdot 0\le z\}+P\{X\le z\}]$

若$z<0$，则$F_Z(z)=\frac{1}{2}\Phi(z)$；

若$z \geq 0$,则$F_Z(z)=\frac{1}{2}(1+\Phi(z))$

z为间断点，选B。

10（2009：22)(本题满分 11 分)袋中有 1 个红色球,2 个黑色球与 3 个白球,现有回放地从袋中取两次,每次取一球,以X,Y,Z分别表示两次取球所取得的红球、黑球与白球的个数.

（1）求$P\{X=1|Z=0\}$.　　(2)求二维随机变量(X,Y)概率分布

解：（1）在没有取白球的情况下取了一次红球，利用压缩样本空间则相当于只有 1 个红球，，2 个黑球放回摸两次，其中摸了 1 个红球。

$$P\{X=1|Z=0\}=\frac{C_2^1 2}{C_6^1 C_6^1}=\frac{4}{9}$$

（2）$P\{X=0，Y=0\}=\frac{C_3^2 C_3^1}{C_6^1 C_6^1}=\frac{1}{4}$，$P\{X=1，Y=0\}=\frac{C_2^1 C_3^1}{C_6^1 C_6^1}=\frac{1}{6}$,

$P\{X=2，Y=0\}=\frac{1}{C_6^1 C_6^1}=\frac{1}{36}$，$P\{X=0，Y=1\}=\frac{C_2^1 C_2^1 C_3^1}{C_6^1 C_6^1}=\frac{1}{3}$,

$P\{X=1，Y=1\}=\frac{C_2^1 C_2^1}{C_6^1 C_6^1}=\frac{1}{9}$，$P\{X=2，Y=1\}=0$，

$P\{X=0，Y=2\}=\frac{C_2^1 C_2^1}{C_6^1 C_6^1}=\frac{1}{9}$，$P\{X=1，Y=2\}=0$，

$P\{X=2，Y=2\}=0$

X / Y	0	1	2
0	1/4	1/6	1/36
1	1/3	1/9	0
2	1/9	0	0

11（2008:7)设随机变量X与Y独立同分布，且X分布函数为$F(x)$，则$Z=\max\{X,Y\}$分布函数为

(A) $F^2(x)$　　　　　　　　　　(B) $F(x)F(y)$

(C) $1-[1-F(x)]^2$　　　　　　　(D) $[1-F(x)][1-F(y)]$

解：$P\{Z \le z\} = P\{\max\{X,Y\} \le z\} = P\{X \le z, Y \le z\} = P\{X \le z\}P\{Y \le z\} = F^2(z).$

故选 A

12 (2008:22)(本题满分 11 分)设随机变量 X 与 Y 相互独立, X 的概率分布为 $P\{X=i\}=\frac{1}{3}(i=-1,0,1)$，$Y$ 的概率密度为 $f_Y(y)=\begin{cases}1, & 0\le y\le 1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$，记 $Z=X+Y$，(1) 求 $P\left\{Z\le\frac{1}{2}\middle| X=0\right\}$. (2)求 Z 的概率密度.

解：（1）求条件概率，可直接利用公式求解。

$$P\left\{Z\le\frac{1}{2}\middle| X=0\right\}=\frac{P\left\{Z\le\frac{1}{2},X=0\right\}}{P\{X=0\}}=\frac{P\left\{Y\le\frac{1}{2}\right\}P\{X=0\}}{P\{X=0\}}=\int_0^{\frac{1}{2}}dy=\frac{1}{2}$$

（2）可先求出分布函数，然后求导即为所求密度函数。

设 Z 的分布函数为 $F(z)$，则其值域非零时 z 的区间为 $[-1,2]$。

当 $z<-1$ 时，$F(z)=0$；当 $z\ge 2$ 时，$F(z)=1$；

当 $-1\le z<2$ 时，

$$\begin{aligned}F(z)&=P\{Z\le z\}=P\{X+Y\le z\}\\&=P\{X+Y\le z|X=-1\}P\{X=-1\}+P\{X+Y\le z|X=0\}P\{X=0\}\\&\quad+P\{X+Y\le z|X=1\}P\{X=1\}\\&=\frac{1}{3}\left[P\{Y\le z+1\}+P\{Y\le z\}+P\{Y\le z-1\}\right]\\&=\frac{1}{3}\left[F_Y(z+1)+F_Y(z)+F_Y(z-1)\right]\end{aligned}$$

所以 Z 的概率密度函数为

$$f(z)=F'(z)=\frac{1}{3}\left[f_Y(z+1)+f_Y(z)+f_Y(z-1)\right]=\begin{cases}\frac{1}{3}, & -1\le z<2\\ 0, & 其它\end{cases}$$

13 (2007:10) 设随即变量(X,Y)服从二维正态分布，且 X 与 Y 不相关，$f_X(x)$与 $f_Y(y)$分别表示 X 与 Y 的概率密度，则在 $Y=y$ 的条件下，X 的条件概率密度 $f_{X|Y}(x|y)$为（）。

(A) $f_X(x)$　　(B) $f_Y(y)$

(C) $f_X(x)f_Y(y)$　　(D) $\dfrac{f_X(x)}{f_Y(y)}$

解：因为(X,Y)服从二维正态分布，且 X 与 Y 不相关，所以 X 与 Y 独立，所以 $f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$。故

$$f_{X|Y}(x\mid y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}=\frac{f_X(x)f_Y(y)}{f_Y(y)}=f_X(x),$$

应选（A）。

注：若(X,Y)服从二维正态分布，则 X 与 Y 不相关与 X 与 Y 独立是等价的。

14 (2007:23)(本题满分 11 分) 设二维随机变量(X,Y)的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}2-x-y, & 0<x<1,0<y<1\\ 0, & 其它\end{cases},$$

(1) 求 $P\{X>2Y\}$　　(2) 求 $Z=X+Y$ 的概率密度.

解：（1）可化为二重积分计算；

$$P\{X>2Y\}=\iint\limits_{x>2y}(2-x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{\frac{x}{2}}(2-x-y)\mathrm{d}y=\frac{7}{24}$$

(2) 利用随机变量和函数公式可得

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,z-x)\mathrm{d}x=\begin{cases}\int_0^z (2-z)\mathrm{d}x, & 0<z<1\\ \int_{z-1}^1 (2-z)\mathrm{d}x, & 1\le z<2\\ 0, & \text{其他}\end{cases}=\begin{cases}2z-z^2 & 0<z<1\\ (2-z)^2 & 1\le z<2\\ 0, & \text{其他}\end{cases}.$$

15（2006:6）设随机变量 X 与 Y 相互独立，且均服从区间 $[0,3]$ 上的均匀分布，则 $P\{\max\{X,Y\}\le 1\}=$__________.

解：$P\{\max\{X,Y\}\le 1\}=P\{X\le 1,Y\le 1\}=P\{X\le 1\}P\{Y\le 1\}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$。

16（2006:22）（本题满分 9 分）随机变量 X 的概率密度为

$$f_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}, & -1<x<0\\ \frac{1}{4}, & 0\le x<2,\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

令 $Y=X^2$，$F(x,y)$ 为二维随机变量 (X,Y) 的分布函数.（1）求 Y 的概率密度 $f_Y(y)$.（2）$F\left(-\frac{1}{2},4\right)$.

解：（1）设 Y 的分布函数为 $F_Y(y)$，即 $F_Y(y)=P(Y\le y)=P(X^2\le y)$，则

1) 当 $y<0$ 时，$F_Y(y)=0$；

2) 当 $0\le y<1$ 时，$F_Y(y)=P(X^2<y)=P\left(-\sqrt{y}<X<\sqrt{y}\right)$

$$=\int_{-\sqrt{y}}^0 \frac{1}{2}\mathrm{d}x+\int_0^{\sqrt{y}}\frac{1}{4}\mathrm{d}x=\frac{3}{4}\sqrt{y}.$$

3) 当 $1\le y<4$ 时，$F_Y(y)=P(X^2<y)=P\left(-1<X<\sqrt{y}\right)$

$$=\int_{-1}^0 \frac{1}{2}\mathrm{d}x+\int_0^{\sqrt{y}}\frac{1}{4}\mathrm{d}x=\frac{1}{4}\sqrt{y}+\frac{1}{2}.$$

4) 当 $y\ge 4$，$F_Y(y)=1$.

所以

$$f_Y(y)=F_Y{}'(y)=\begin{cases}\dfrac{3}{8\sqrt{y}},0<y<1\\ \dfrac{1}{8\sqrt{y}},1\le y\le 4\\ \quad 0,其他\end{cases}.$$

（2） $F\left(-\dfrac{1}{2},4\right)=P\left(X\le -\dfrac{1}{2},Y\le 4\right)=P\left(X\le -\dfrac{1}{2},X^2\le 4\right)$

$$=P\left(X\le -\frac{1}{2},-2\le X\le 2\right)=P\left(-2\le X\le -\frac{1}{2}\right)=\int_{-1}^{-\frac{1}{2}}\frac{1}{2}\mathrm{d}x=\frac{1}{4}$$

17 (2005:13)设二维随机变量(X,Y)的概率分布为

$X \backslash Y$	0	1
0	0.4	a
1	b	0.1

已知随机事件$\{X=0\}$与$\{X+Y=1\}$相互独立, 则

(A) $a=0.2,b=0.3$ (B) $a=0.4,b=0.1$

(C) $a=0.3,b=0.2$ (D) $a=0.1,b=0.4$

解：根据分布律的性质知$a+b=0.5$，又事件$\{X=0\}$与$\{X+Y=1\}$相互独立，于是有$P\{X=0,X+Y=1\}=P\{X=0\}P\{X+Y=1\}$，即$a=(0.4+a)(a+b)$，由此可解得$a=0.4,b=0.1$。故应选（B）。

18 (2005:22)(本题满分 9 分)设二维随机变量(X,Y)的概率密度为

$f(x,y)=\begin{cases}1, & 0<x<1,0<y<2x\\ 0, & 其它\end{cases}$， 求:(1) (X,Y)的边缘概率密度$f_X(x)$，$f_Y(y)$. (2) $Z=2X-Y$的概率密度$f_Z(z)$。

解：求边缘概率密度直接用公式即可；而求二维随机变量函数的概率密度，一般用分布函数法，即先用定义求出分布函数，再求导得到相

应的概率密度。

（1）关于 X 的边缘概率密度

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy=\begin{cases}\int_0^{2x} dy, & 0<x<1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

$$=\begin{cases}2x, & 0<x<1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

关于 Y 的边缘概率密度

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx=\begin{cases}\int_{\frac{y}{2}}^{1} dx, & 0<y<2\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

$$=\begin{cases}1-\dfrac{y}{2}, & 0<y<2\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

（2）令 $F_Z(z)=P\{Z\le z\}=P\{2X-Y\le z\}$，

当 $z<0$ 时，$F_Z(z)=P\{2X-Y\le z\}=0$；

当 $0\le z<2$ 时，$F_Z(z)=P\{2X-Y\le z\}=z-\dfrac{z^2}{4}$；

当 $z\ge 2$ 时，$F_Z(z)=P\{2X-Y\le z\}=1$，

即得分布函数为 $F_Z(z)=\begin{cases}0, & z<0\\ z-\dfrac{z^2}{4}, & 0\le z<2\\ 1, & z\ge 2\end{cases}$，故所求的概率密度函数为

$$f_Z(z)=\begin{cases}1-\dfrac{z}{2}, & 0\le z<2\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

19 (2004:22)(本题满分 9 分)设 A,B 为随机事件，且 $P(A)=\dfrac{1}{4}$，$P(B|A)=\dfrac{1}{3}$，$P(A|B)=\dfrac{1}{2}$，令 $X=\begin{cases}1, & A\text{发生}\\ 0, & A\text{不发生}\end{cases}$，$X=\begin{cases}1, & B\text{发生}\\ 0, & B\text{不发生}\end{cases}$，

求:(1) 二维随机变量 (X,Y) 的概率分布. (2) X 和 Y 的相关系数

ρ_{XY} 。

解：（1）先确定(X,Y)的可能取值，再求在每一个可能取值点上的概率，而这可利用随机事件的运算性质得到，即得二维随机变量(X,Y)的概率分布；利用联合概率分布可求出边缘概率分布，进而可计算出相关系数。

由于$P(AB)=P(A)P(B|A)=\frac{1}{12}$, $P(B)=\frac{P(AB)}{P(A|B)}=\frac{1}{6}$,所以

$$P\{X=1,Y=1\}=P(AB)=\frac{1}{12}$$

$$P\{X=1,Y=0\}=P(A\bar{B})=P(A)-P(AB)=\frac{1}{6}$$

$$P\{X=0,Y=1\}=P(\bar{A}B)=P(B)-P(AB)=\frac{1}{12}$$

$$P\{X=0,Y=0\}=P(\bar{A}\bar{B})=1-P(A\cup B)$$
$$=1-\left[P(A)+P(B)-P(AB)\right]=\frac{2}{3}$$

（或$P\{X=0,Y=0\}=1-\frac{1}{12}-\frac{1}{6}-\frac{1}{12}=\frac{2}{3}$）。

故(X,Y)的概率分布为

Y \ X	0	1
0	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$
1	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$

（2）由(X,Y)的联合分布律得X和Y的边缘分布律为

X	0	1

P	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$

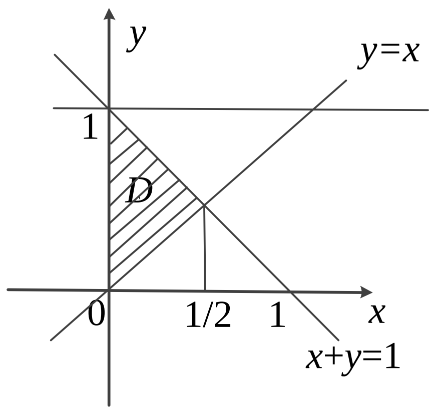
Y	0	1
P	$\frac{5}{6}$	$\frac{1}{6}$

从而$E(X)=\frac{1}{4}, D(X)=\frac{3}{16}$， $E(Y)=\frac{1}{6}, D(Y)=\frac{5}{36}$, 。由联合分布律得 $E(XY)=\frac{1}{12}$。故

$$\rho_{XY}=\frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}=\frac{\frac{1}{12}-\frac{1}{4}\times\frac{1}{6}}{\sqrt{\frac{3}{16}\times\frac{5}{36}}}=\frac{\sqrt{15}}{15}$$

20 (2003:5) 设 二 维 随 机 变 量 (X,Y) 的 概 率 密 度 为 $f(x,y)=\begin{cases}6x, & 0\le x\le y\le 1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$, 则 $P\{X+Y\le 1\}=$________ .

解：由题设，有



$$P\{X+Y\le 1\}=\iint_{x+y\le 1} f(x,y)dxdy=\int_0^{\frac{1}{2}}dx\int_x^{1-x}6xdy$$
$$=\int_0^{\frac{1}{2}}\left(6x-12x^2\right)dx=\frac{1}{4}$$

注：本题属基本题型，但在计算二重积分时，应注意找出概率密度不为零与满足不等式$x+y\le 1$的公共部分D，再在其上积分即可。完全类似例题见《文登数学全真模拟试题》。

21 (2001:11)(本题满分 7 分)设某班车起点站上客人数 X 服从参数为 $\lambda(\lambda>0)$的泊松分布，每位乘客在中途下车的概率为 $p(0<p<1)$，且中

途下车与否相互独立. Y 为中途下车的人数, 求:

(1) 在发车时有 n 个乘客的条件下, 中途有 m 人下车的概率.

(2) 二维随机变量 (X,Y) 的概率分布.

解:（1）当 $n=0,1,2,\ldots$ 时,

$$P\{Y=m|X=n\}=C_n^m p^m(1-p)^{n-m},0\le m\le n$$

（2）根据联合分布律与条件分布律和边缘分布律的关系，得

$$P\{Y=m,X=n\}=P\{Y=m|X=n\}P\{X=n\}$$

$$=C_n^m p^m(1-p)^{n-m}\frac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda},0\le m\le n,n=0,1,2,\ldots$$

22（1996:11）（本题满分 6 分）设 ξ,η 是两个相互独立且服从同一分布的两个随机变量, 已知 ξ 的分布率为 $P(\xi=i)=\frac{1}{3},i=1,2,3.$ 又设

$X=\max(\xi,\eta)$， $Y=\min(\xi,\eta)$。

(1) 写出二维随机变量的分布律:

$Y \backslash X$	1	2	3
1			
2			
3			

（2）求随机变量 X 的数学期望 $E(X)$。

解:（1）易见 (X,Y) 的可能取值为（1, 1),（2, 1),（2, 2),（3, 1),（3, 2),（3, 3)。依题意 $\{X<Y\}=\varnothing$，故 $P\{X<Y\}=0$，即

$$P\{X=1,Y=2\}=P\{X=1,Y=3\}=P\{X=2,Y=3\}=0$$

$$P\{X=1,Y=1\}=P\{\max(\xi,\eta)=1,\min(\xi,\eta)=1\}$$

$$=P\{\xi=1,\eta=1\}=P\{\xi=1\}P\{\eta=1\}=\frac{1}{9}$$

类似地可以计算出所有 p_{ij} 的值列于表中，得到随机变量 (X,Y) 的联合分布律：

$Y \backslash X$	1	2	3
1	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{9}$
2	0	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$
3	0	0	$\frac{1}{9}$

（2）由 (X,Y) 的联合分布律得 X 的边缘分布律：

X	1	2	3
P	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{5}{9}$

所以 X 的数学期望 $E(X)=1\times\frac{1}{9}+2\times\frac{1}{3}+3\times\frac{5}{9}=\frac{22}{9}$ 。

23（1992:11）（本题满分 6 分）设随机变量 X 与 Y 独立， X 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$， Y 服从 $[-\pi,\pi]$ 上的均匀分布, 试求 $Z=X+Y$ 的概率分布密度(计算结果用 Φ 表示标准正态分布函数, 其中

$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t$).

解：方法一：利用分布函数求密度函数

首先，因 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，所以 X 的密度函数为 $f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$，$x\in R$；因 $Y\sim U[-\pi,\pi]$，所以 Y 的密度函数为 $f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{2\pi}, & -\pi\le y\le\pi \\ 0, & \text{其它}\end{cases}$ 。

因为随机变量X与Y相互独立，所以二维随机变量(X,Y)的联合概率密度为$f(x,y)=f_X(x)f_Y(Y)$。要求Z的密度函数，先求Z的分布函数

$$F_Z(z)=P(Z\le z)=P(X+Y\le z)=\iint_{x+y\le z} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint_{x+y\le z} f_X(x)f_Y(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{x+y\le z}\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{d}y\int_{-\infty}^{z-y}\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}x=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{d}y\int_{-\infty}^{z-y}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Phi\left(\frac{z-y-\mu}{\sigma}\right)\mathrm{d}y$$ （由标准正态分布来表示一般正态分布）

求出Z的分布函数，因此，对分布函数求导得密度函数，Z的密度函数为

$$f_Z(z)=F_Z'(z)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{\sigma}\varphi\left(\frac{z-y-\mu}{\sigma}\right)\mathrm{d}y$$

其中$\varphi(x)$是标准正态分布的概率密度函数。由于$\varphi(x)$是偶函数，故有

$$\varphi\left(\frac{z-y-\mu}{\sigma}\right)=\varphi\left(\frac{y+\mu-z}{\sigma}\right)$$

于是 $f_Z(z)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{\sigma}\varphi\left(\frac{y+\mu-z}{\sigma}\right)\mathrm{d}y=\frac{1}{2\pi}\left[\Phi\left(\frac{\pi+\mu-z}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{-\pi+\mu-z}{\sigma}\right)\right]$

最终用标准正态分布函数$\Phi(x)$表示出来$Z=X+Y$的概率密度函数。

方法二：用卷积公式直接计算

直接应用相互独立随机变量之和密度的卷积公式求$f_Z(z)$更为简单。

因为随机变量 X 与 Y 相互独立，由卷积公式

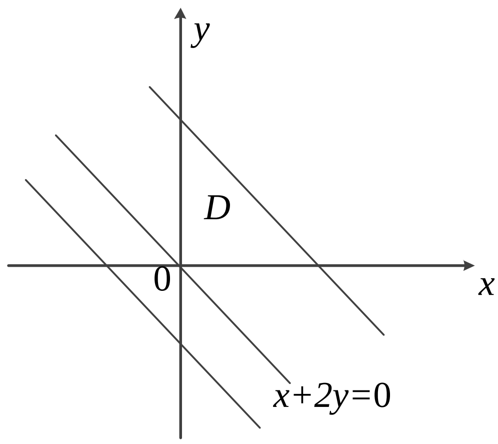
$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(z-y)\,f_Y(y)\,\mathrm{d}y=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f_X(z-y)\,\mathrm{d}y$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(z-y-\mu)^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}y=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(y+\mu-z)^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}y$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(y+\mu-z)^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}y$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{\sigma}\varphi\left(\frac{y+\mu-z}{\sigma}\right)\mathrm{d}y$$
$$=\frac{1}{2\pi}\left[\Phi\left(\frac{\pi+\mu-z}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{-\pi+\mu-z}{\sigma}\right)\right]$$

24（1991:11）（本题满分 6 分）设二维随机变量 (X,Y) 的密度函数为 $f(x,y)=\begin{cases}2e^{-(x+2y)}, & x>0,y>0\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$，求随机变量 $Z=X+2Y$ 的分布函数.

解：二维连续型随机变量的概率等于对应区域的二重积分，所以有

$$F(z)=P\{Z\le z\}=P\{X+2Y\le z\}=\iint\limits_{x+2y\le z} f(x,y)\,dxdy$$

当 $z\le 0$ 时，$F(z)=P\{Z\le z\}=0$。



因为 $x+2y=z$ 在直线 $x+2y=0$ 的下方与 $x>0,y>0$（即第一象限）没有公共区域，所以 $F(z)=0$。

当 $z>0$ 时，$x+2y=z$ 在直线 $x+2y=0$ 的上方与第一象限相交成一个三角形区域 D，此即为积分区间。

$$F(z)=\int_0^z dx\int_0^{\frac{z-x}{2}} 2e^{-(x+2y)}dy=\int_0^z\left(e^{-x}-e^{-z}\right)dx=1-e^{-z}-ze^{-z}$$

所以 $Z=X+2Y$ 的分布函数为 $F(z)=\begin{cases}0, & z<0\\ 1-e^{-z}-ze^{-z}, & z\ge 0\end{cases}$。