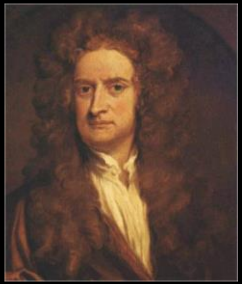
高等数学

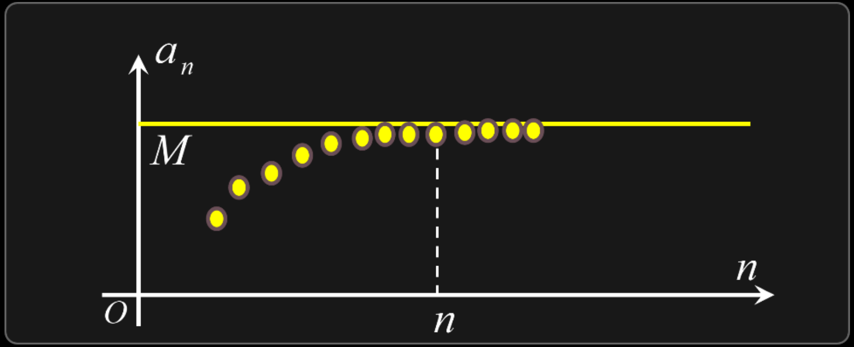


§1.6 极限存在准则二　重要极限二

§1.6 极限存在准则二　重要极限二

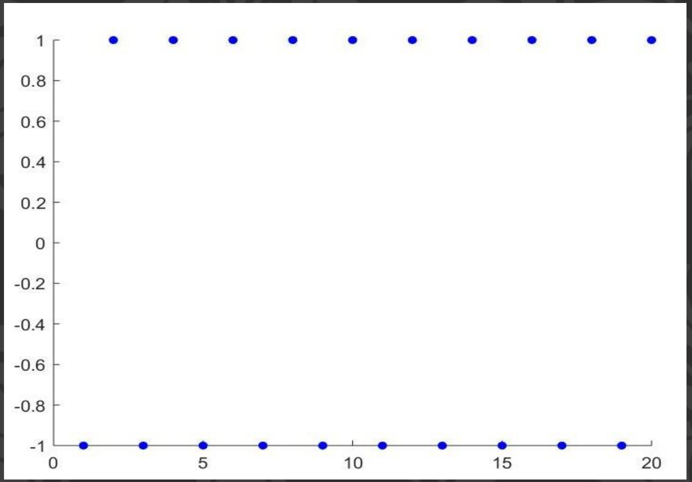
单调有界准则

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$



温故知新

递推数列 $-1,1,-1,1,-1,1,\cdots \quad x_n=(-1)^n$



递推公式: $x_{n+1}=-x_n, \quad x_1=-1.$

做法：令 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n \cancel{=a}$ 上式两边同取极限, 得

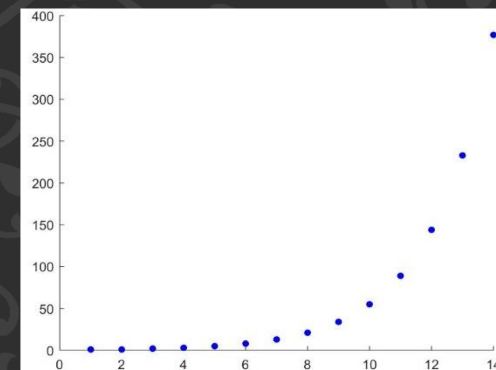
$$a=-a \quad \Rightarrow a=0.$$

温故知新

递推数列　　$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \ldots$　斐波那契数列

递推公式：　$y_n = y_{n-1} + y_{n-2}$,　　$y_1 = 1, y_2 = 1.$

做法：令 $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = a$, 则 $a = 2a \quad \Rightarrow a = 0.$



一、单调有界准则

问题： 数列满足什么性质时，才能收敛?

已知对于数列， 收敛 $\longrightarrow$ 有界

有界 $\not\longrightarrow$ 收敛 （如 $\{(-1)^n\}$）

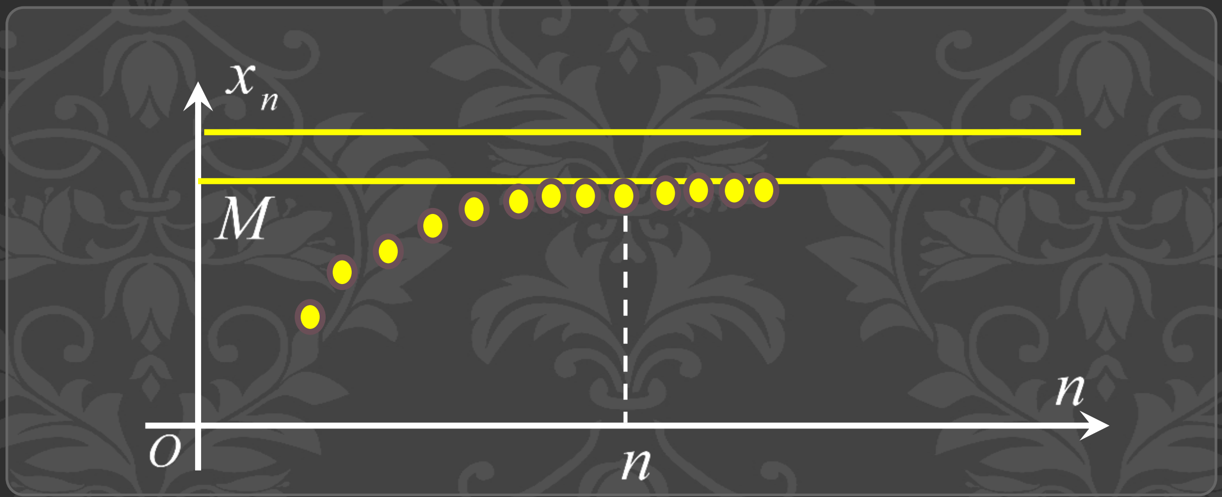
思考： 对于一个有界数列， 增加什么限制，

才能保证其收敛?

定理1(单调有界准则) 设数列$\{x_n\}$单调增加且有上界，即

$$x_1 \le x_2 \le \cdots \le x_{n-1} \le x_n \le \cdots$$

且存在常数M使得$x_n \le M \ (n = 1,2,\cdots)$则数列$\{x_n\}$存在极限.



猜测： $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \sup\{x_n \mid n = 1,2,\cdots\}$

回顾

上确界: 非空实数集 E 的最小上界. 记为 $\sup E$.

满足:

(1) 对任意的 $x \in E$, $x \le \sup E$.

(2) 对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $x_0 \in E$, 使得 $x_0 > \sup E - \varepsilon$.

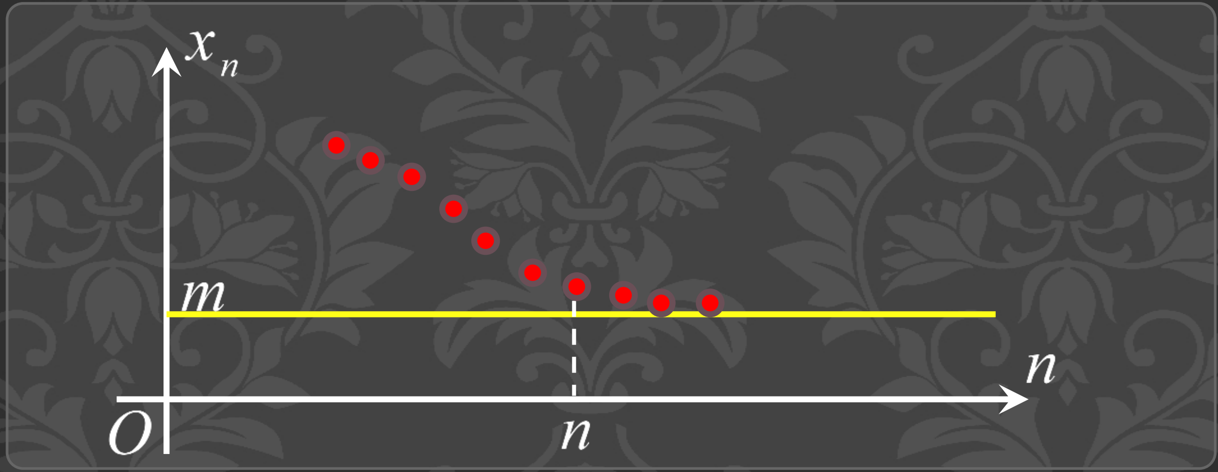
确界定理:

一个非空有上界的实数集 必有上确界.

推论 设数列$\{x_n\}$单调下降且有下界，即

$$x_1 \geq x_2 \geq \cdots \geq x_{n-1} \geq x_n \geq \cdots$$

且存在常数M使得$x_n \geq M \ (n = 1,2,\cdots)$则数列$\{x_n\}$存在极限.



猜测： $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \inf\{x_n \mid n = 1,2,\cdots\}$

极限存在准则II

单调有界准则 任何单调有界数列一定存在极限.

注

- 单调有界准则为定性结论;
- 单调有界仅是数列收敛的充分非必要条件; 如 $\{(-1)^n \frac{1}{n}\}$.
- 判断单调性、有界性的方法:

差值法、比值法、常用不等式结论、数学归纳法等

例1 数列$\{x_n\}$满足 $x_1=\sqrt{2},\quad x_{n+1}=\sqrt{2+x_n}$,

(1) 求证 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在; (2) 求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

证明: (单调性) 由 $x_1=\sqrt{2}, x_2=\sqrt{2+\sqrt{2}}$, 显然 $x_1<x_2$.

若假设 $x_{k-1}<x_k$, 则 $\sqrt{2+x_{k-1}}<\sqrt{2+x_k}$, 即 $x_k<x_{k+1}$.

从而由归纳法知, $\{x_n\}$ 是单调递增的.

(有界性) 由于 $x_1=\sqrt{2}<2$, 假设 $x_n<2$,

则 $x_{n+1}=\sqrt{2+x_n}<\sqrt{2+2}<2$, 所以 $\{x_n\}$ 有上界.

进而由单调有界收敛准则知, $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在.

例1 数列$\{x_n\}$满足 $x_1=\sqrt{2},\quad x_{n+1}=\sqrt{2+x_n},$

(1) 求证 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在; (2) 求 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n.$

解: 因为 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$ 存在, 可设 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n=A.$

由于 $x_{n+1}=\sqrt{2+x_n},$ 即 $x_{n+1}^2=2+x_n,$

从而 $\lim\limits_{n\to\infty} x_{n+1}^2=\lim\limits_{n\to\infty}(2+x_n),$ 即 $A^2=2+A,$

解得 $A=2,$ $A=-1$ (舍去)

$$\lim_{n\to+\infty} x_n=2.$$

例2 设 $x_{n+1}=\frac{1}{2}(x_n+\frac{1}{x_n}), n=1,2,3\cdots, \quad x_1=2$, 求 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$.

解: 因为 $x_{n+1}=\frac{1}{2}(x_n+\frac{1}{x_n}) \geq \sqrt{x_n\cdot\frac{1}{x_n}}=1.$

且 $\frac{x_{n+1}}{x_n}=\frac{1}{2}(1+\frac{1}{x_n^2}) \leq \frac{1}{2}(1+1)=1.$ 所以 $\{x_n\}$ 单减有下界.

由单调有界准则可得, $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$ 存在

设 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n=A$, 则 $A=\frac{1}{2}(A+\frac{1}{A})$, 解得 $A=\pm 1.$

由 $x_1>0$ 易得 $x_n>0$, 所以 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n=1.$

- 利用单调有界准则求极限的步骤:

(1) 论证数列的单调性和有界性，即极限存在;

(2) 对递推公式两边取极限，解方程得到极限值.

二、重要极限II

思考

(1) 相同存储时间内滚动计算利息的次数越多，最终得到的本息和是不是就会越多？

(2) 如果是这样，最终的本息和会多到什么程度呢？

二、重要极限II

问题： 顾客向银行存入本金1万元，设银行规定年复利率为100%，考虑下列不同结算方式，求1年后的最终存款额。

- 每年结算一次　$A_1 = 1 + 1 = 2$
- 每半年结算(每年2次)　$A_2 = (1 + \frac{1}{2})^2 = 2.25$
- 每季度结算(每年4次)　$A_4 = (1 + \frac{1}{4})^4 = 2.44$
- 每年结算n次　$A_n = (1 + \frac{1}{n})^n \to ?$

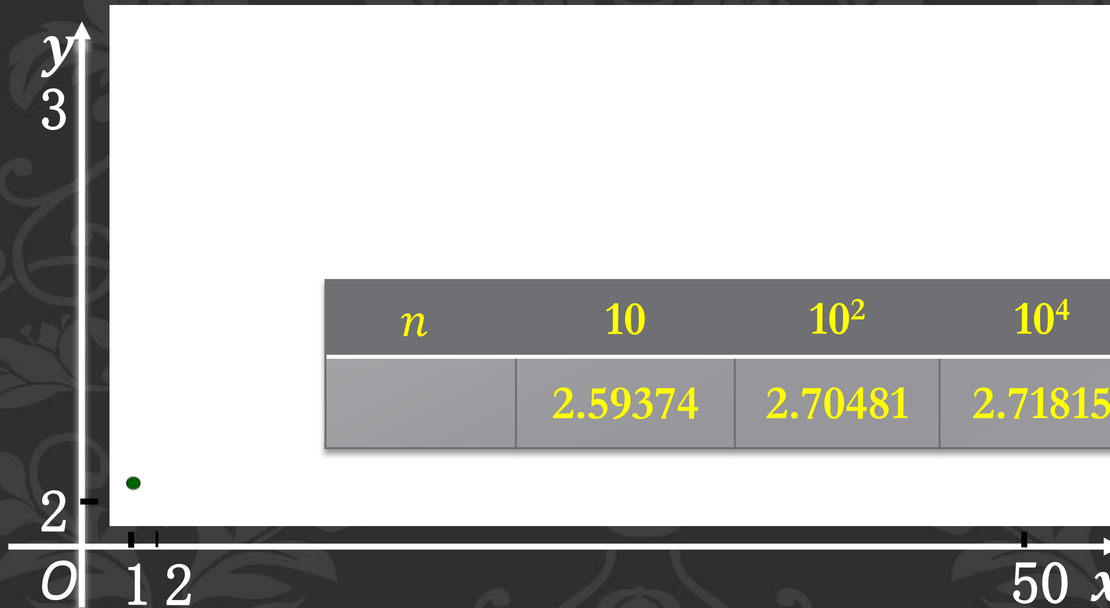
数列　$(1+1)^1, (1+\frac{1}{2})^2, (1+\frac{1}{3})^3, \cdots, (1+\frac{1}{n})^n, \cdots$

数列 $(1+1)^1, (1+\frac{1}{2})^2, (1+\frac{1}{3})^3, \cdots, (1+\frac{1}{n})^n, \cdots$

思考:

- 数列 $\{(1+\frac{1}{n})^n\}$ 具有怎样的变化趋势?
- 数列 $\{(1+\frac{1}{n})^n\}$ 单调递增吗?
- 当 $n\to\infty$时, $(1+\frac{1}{n})^n \to$ 1 / ? / ∞

观察数列 $\{(1+\frac{1}{n})^n\}$ 的变化趋势



n	10	10^2	10^4	10^6	…
	2.59374	2.70481	2.71815	2.71828	…

猜测： 数列 $\{(1+\frac{1}{n})^n\}$ 单调递增.

证明：(1) 先证 $\{(1+\frac{1}{n})^n\}$ 单调递增. 由算术 - 几何平均值不等式

$$\sqrt[n+1]{x_1 x_2 \cdots x_{n+1}} \le \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_{n+1}}{n+1},$$

令 $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 1+\frac{1}{n}, x_{n+1} = 1,$ 得

$$\sqrt[n+1]{(1+\frac{1}{n})^n \cdot 1} \le \frac{n(1+\frac{1}{n})+1}{n+1} \le 1+\frac{1}{n+1}$$

因此有 $(1+\frac{1}{n})^n \le (1+\frac{1}{n+1})^{n+1}.$ 数列单调递增

证明: (2) 再证 $\{(1+\frac{1}{n})^n\}$ 有上界.

$$(1+\frac{1}{n})^n$$

$$=1+\frac{n}{1!}\cdot\frac{1}{n}+\frac{n(n-1)}{2!}\cdot\frac{1}{n^2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\cdot\frac{1}{n^3}+\cdots+\frac{n(n-1)\cdots(n-n+1)}{n!}\cdot\frac{1}{n^n}$$

$$=1+1+\frac{1}{2!}(1-\frac{1}{n})+\frac{1}{3!}(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})+\cdots+\frac{1}{n!}(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})\cdots(1-\frac{n-1}{n})$$

回顾: 二项展开式 $(a+b)^n=\sum_{i=0}^{n}C_n^i a^{n-i}b^i$ 其中 $C_n^i=\frac{n!}{r!(n-r)!}$.

证明： (2) 再证 $\{(1+\frac{1}{n})^n\}$ 有上界.

$$(1+\frac{1}{n})^n \le 1+1+\frac{1}{2!}\cancel{(1-\frac{1}{n})}+\frac{1}{3!}\cancel{(1-\frac{1}{n})}\cancel{(1-\frac{2}{n})}+\cdots$$

$$\le 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}} \quad +\frac{1}{n!}\cancel{(1-\frac{1}{n})}\cancel{(1-\frac{2}{n})}\cdots\cancel{(1-\frac{n-1}{n})}$$

$$=1+\frac{1-(\frac{1}{2})^n}{1-\frac{1}{2}} \quad = 3-(\frac{1}{2})^{n-1} < 3.$$

综上, 由单调有界定理知 $\{(1+\frac{1}{n})^n\}$ 存在极限.

重要极限二　设 $a_n=(1+\frac{1}{n})^n\ (n=1,2,\cdots)$，数列 $\{a_n\}$ 存在极限.

n	a_n	n	a_n
10	2.59374246	10^5	2.71826824
10^2	2.70481383	10^6	2.71828047
10^3	2.71692393	10^7	2.71828169
10^4	2.71814593	10^8	2.71828179

欧拉(Euler), 瑞士
1707-1783

$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n=e=2.7182818284\cdots$$

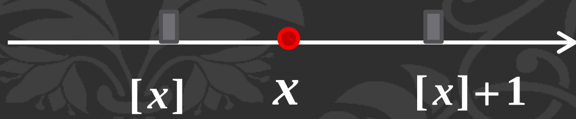
(欧拉数)

数列极限与函数极限关系

数列极限 $$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$

函数极限 $$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$$

分析:



当 $x \geq 1$时， 有 $[x] \leq x \leq [x]+1$,

证明:

$$\left(1+\frac{1}{[x]+1}\right)^{[x]} \leq \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} \leq \left(1+\frac{1}{[x]}\right)^{[x]+1},$$

又由于

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{[x]}\right)^{[x]+1} = \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{[x]}\right)^{[x]} \cdot \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{[x]}\right) = e$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{[x]+1}\right)^{[x]} = \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{[x]+1}\right)^{[x]+1} \cdot \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{[x]+1}\right)^{-1} = e$$

夹逼准则 所以 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = \mathrm{e}.$

问题: $\lim\limits_{x\to-\infty}(1+\dfrac{1}{x})^{x}=?$

证明: 令 $t=-x$, 则

$$\lim_{x\to-\infty}(1+\frac{1}{x})^{x}=\lim_{t\to+\infty}(1-\frac{1}{t})^{-t}=\lim_{t\to+\infty}(1+\frac{1}{t-1})^{t}=\lim_{t\to+\infty}(1+\frac{1}{t-1})^{t-1}(1+\frac{1}{t-1})=\mathrm{e}$$

问题: $\lim\limits_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=?$

证明: 令 $t=\dfrac{1}{x}$, 则 $\lim\limits_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{t\to\infty}(1+\dfrac{1}{t})^{t}=\mathrm{e}$

重要极限之二

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e. \qquad \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e.$$

1^{∞} 型未定式　　幂指函数　$y=f(x)^{g(x)}$　　$f(x)\to 1,$　　$g(x)\to\infty.$

- 此公式适用于求 1^{∞} 型未定式的极限.

$$\lim_{\varphi(x)\to\infty}\left(1+\frac{1}{\varphi(x)}\right)^{\varphi(x)}=e \qquad \lim_{\varphi(x)\to 0}(1+\varphi(x))^{\frac{1}{\varphi(x)}}=e$$

特点：　1) 1^{∞}型未定式;

2) 底数中 1 后的变量(包括符号)与指数互为倒数.

例3 证明以下结论：

(1) $$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1;$$

(2) $$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1.$$

触类旁通 $$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a.$$

此公式建立了指数函数、对数函数与幂函数之间的极限关系.

三角函数

反三角函数

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

幂函数

$$\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^{x}=\mathrm{e}$$

指数函数

对数函数

例4 求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x+2}{3x-1}\right)^{2x}$. 1^{∞}

解： $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x+2}{3x-1}\right)^{2x} = \lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{3x-1}\right)^{2x} = \lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{3x-1}\right)^{\frac{3x-1}{3}\cdot\frac{3}{3x-1}\cdot 2x}$

$$= \lim_{x\to\infty}\left[\boxed{\left(1+\frac{3}{3x-1}\right)^{\frac{3x-1}{3}}}\right]^{\boxed{\frac{6x}{3x-1}}}$$

$\to$ e $\quad \to$ 2

$$= e^{2}.$$

回顾 幂指函数 $f(x)^{g(x)}$

$$f(x)\to A>0,\quad g(x)\to B \Rightarrow f(x)^{g(x)}\to A^{B}.$$

例5 求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}(\cos^2\frac{1}{x})^{\frac{x^2}{2}}$. 1^{∞}

解: $\lim\limits_{x\to\infty}(\cos^2\frac{1}{x})^{\frac{x^2}{2}}=\lim\limits_{x\to\infty}\left[(1-\sin^2\frac{1}{x})^{-\frac{1}{\sin^2\frac{1}{x}}}\right]^{-\sin^2\frac{1}{x}\cdot\frac{x^2}{2}}$

$$\because \lim_{x\to\infty}-\sin^2\frac{1}{x}\cdot\frac{x^2}{2}=-\frac{1}{2}\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}\right)^2=-\frac{1}{2}.$$

$$\therefore \lim_{x\to\infty}(\cos^2\frac{1}{x})^{\frac{x^2}{2}}=e^{-\frac{1}{2}}.$$

例7 求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}(\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x})^{x}$

解： $\lim\limits_{x\to\infty}(\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x})^{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left((\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x})^{2}\right)^{\frac{x}{2}}$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\sin\frac{2}{x}\right)^{\frac{x}{2}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\sin\frac{2}{x}\right)^{\frac{1}{\sin\frac{2}{x}}\cdot\frac{\sin\frac{2}{x}}{\frac{2}{x}}}$$

$$=\mathrm{e}.$$

总结

应用 $\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}$ 求幂指函数 $f(x)^{g(x)}$ 极限的要点:

- 条件: $f(x)\to 1,\quad g(x)\to\infty.$
- 做法: 将 $f(x)^{g(x)}$ 转化为含 $(1+\varphi(x))^{\frac{1}{\varphi(x)}}$ 形式的函数,

  且 $\varphi(x)\to 0.$

悬链线

$$y = a\frac{e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}}{2}$$ （a 为常数）

思考

$$1^{365}=1 \qquad 1.01^{365}=? \qquad 0.99^{365}=?$$

$$1.01^{365} \approx [(1+0.01)^{100}]^{3.65} \approx e^{3.65} \approx 38$$

$$0.99^{365} \approx [(1-0.01)^{100}]^{3.65} \approx e^{-3.65} \approx 0.03$$

进而 $\lim\limits_{n\to\infty} 1.01^n=+\infty,\qquad \lim\limits_{n\to\infty} 0.99^n=0.$

积硅步以至千里，积懈怠以致深渊.

作业：练习册1.6节

补充练习：

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x-2}\right)^{x+3}$$

$$\lim_{x\to 0}(x+e^{x})^{\frac{2}{x}}$$

$$\lim_{x\to 1}(x)^{\frac{1}{1-x}}$$