试卷编号 2022XXX： 概率论与数理统计 课程试卷 （期中测试卷）

姓名：________________ 学号：________________ 单位：________________

注意事项：

1. 本试卷共三大题 17 小题，满分 100 分，考试时间 120 分钟，考核方式为闭卷，本场考试允许考生携带的物品为：笔、橡皮；
2. 严禁考生携带课程考核规定以外的任何书籍纸张、各种通讯工具，以及有液晶显示或存储功能的手表、电子辞典等，考试中不得相互借用任何考试用品，学员证须放置于桌面；
3. 《学员学籍管理实施细则》规定：考试作弊将给予开除学籍处分。

一、选择题（每题3分，共15分）

1. 设事件A与事件B互不相容, 则 ( )

A. $P(\bar{A}\bar{B})=0$　　B. $P(AB)=P(A)P(B)$

C. $P(A)=1-P(B)$　　D. $P(\bar{A}\cup\bar{B})=1$

2. 设随机变量X,Y相互独立, $X\sim N(0,\sigma_1^2)$, $Y\sim N(0,\sigma_2^2)$, 则概率$P\{|X-Y|<1\}$ ( )

A. 随σ_1与σ_2的减少而减少

B. 随σ_1与σ_2的增加而增加

C. 随σ_1的增加而减少, 随σ_2的减少而增加

D. 随σ_1的增加而增加, 随σ_2的减少而减少

3. 设连续型随机变量X_1与X_2相互独立, 方差均存在, X_1与X_2的概率密度分别为$f_1(x)$与$f_2(x)$, 随机变量Y_1的概率密度为$f_{Y_1}(y)=\dfrac{1}{2}\left(f_1(y)+f_2(y)\right)$, 随机变量$Y_2=\dfrac{1}{2}(X_1+X_2)$, 则( )

A. $EY_1>EY_2, DY_1>DY_2$　　B. $EY_1=EY_2, DY_1=DY_2$

C. $EY_1=EY_2, DY_1<DY_2$　　D. $EY_1=EY_2, DY_1>DY_2$

4. 设随机变量$X_1,\cdots,X_n(n>1)$独立同分布且其方差为$\sigma^2>0$. 令$Y=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i$, 则( )

A. $\mathrm{Cov}(X_1,Y)=\dfrac{\sigma^2}{n}$　　B. $\mathrm{Cov}(X_1,Y)=\sigma^2$

C. $D(X_1+Y)=\dfrac{n+2}{n}\sigma^2$　　D. $D(X_1-Y)=\dfrac{n+1}{n}\sigma^2$

5. 设随机变量$X\sim N(0,1)$, $Y\sim N(1,4)$, 相关系数$\rho_{XY}=1$, 则 ( )

A. $P\{Y=-2X-1\}=1$　　B. $P\{Y=2X+1\}=1$

C. $P\{Y=-2X+1\}=1$　　D. $P\{Y=2X-1\}=1$

二、填空题（每题3分，共15分）

6. 设$P(A)=a$, $P(B)=0.3$, $P\left(\bar{A}\cup B\right)=0.7$. 若事件$A$与$B$互不相容, 则$a=$_______.

7. 设随机变量X与Y相互独立且都服从区间$[0,3]$上的均匀分布, 则$P\left\{\max\{X,Y\}\leq 1\right\}=$_______.

8. 已知随机变量X与Y相互独立且都服从正态分布$N\left(\mu,\dfrac{1}{2}\right)$, 如果$P\{X+Y\leq 1\}=\dfrac{1}{2}$, 则$\mu=$_______.

9. 随机变量$(X,Y)\sim N(0,0,1,4,\rho)$, $D(2X-Y)=1$, 则$\rho=$_______.

10. 设随机变量X服从参数为1的泊松分布, 则$P\left\{X=E\left(X^2\right)\right\}=$_______.

三、解答题（每题10分，共70分）

11. 高射炮对一架飞机进行三次独立射击, 每次射击的命中率为0.6, 而飞机中一弹、中两弹、中三弹被击落的概率分别为0.2、0.6、1.
(1)求射击三次后, 飞机被击落的概率.
(2)已知飞机被击落, 求飞机恰好中两弹的概率.

12. 设某班车起点上车人数X服从参数为$\lambda(\lambda>0)$的泊松分布, 每位乘客在中途下车的概率为$p(0<p<1)$, 且中途下车与否相互独立. 以Y表示在中途下车的人数. 求:
(1)在发车时有n个乘客的条件下, 中途有m人下车的概率.
(2)二维随机变量(X,Y)的联合分布律.

13. 设二维随机变量(X,Y)的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}k(6-x-y), & 0<x<2, 2<y<4\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

(1)确定常数k; (2) 求$P\{X<1.5\}$; (3)求$P\{X+Y\leq 4\}$.

14. 设随机变量X的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\cos\left(\dfrac{x}{2}\right), & 0\leq x<\pi\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

对X独立重复观察4次, 用Y表示观察值大于$\dfrac{\pi}{3}$的次数. 求:
(1)Y的分布; (2) Y^2的数学期望.

15. 设二维随机变量(X,Y)的联合概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}(x+y)\mathrm{e}^{-(x+y)}, & x>0, y>0\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

求关于X的边缘概率密度, 并判断X与Y是否相互独立.

16. 设随机变量X服从几何分布, 其分布律为

$$P\{X=k\}=p(1-p)^{k-1},\quad k=1,2,\cdots,\text{其中}0<p<1\text{是常数},$$

求$E(X),D(X)$.

17. 对于一个学生而言, 来参加家长会的家长人数是一个随机变量. 设一个学生无家长、有1名家长、有2名家长来参加会议的概率分别为0.1, 0.7, 0.2. 若学校共有400名学生, 设各学生参加会议的家长人数相互独立, 且服从同一分布. 求:
(1)参加会议的家长人数X超过452的概率.
(2)有1名家长参加会议的学生人数不多于300的概率.

注：本题可能会用到这些数据, 供参考.
$\Phi(1.1142)=0.8674$, $\Phi(1.1422)=0.8733$, $\Phi(2.0756)=0.9810$, $\Phi(2.1822)=0.9855$.