$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{\sin x}}{x-\sin x}=\lim_{x\to 0}e^{\sin x}\frac{e^{x-\sin x}-1}{x-\sin x}=\lim_{x\to 0}e^{\sin x}\frac{x-\sin x}{x-\sin x}=1.$$

显然，应用洛必达法则计算这个极限并没有达到简化计算的目的. 因此，大家在使用洛必达法则解题时，为了避免复杂的计算，应能化简尽可能先化简，并综合运用以下方法：函数的连续性与四则运算法则；适当的恒等变形（如分子或分母的有理化、三角恒等式等）；利用已知极限和等价无穷小代换；利用换元法（即复合函数求极限）等.

习题 3—2 解答

1. 用洛必达法则求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}$；　(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{\sin x}$；　(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-x}{x-\sin x}$；

(4) $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{\sin 3x}{\tan 5x}$；　(5) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{\ln\sin x}{(\pi-2x)^2}$；　(6) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^m-a^m}{x^n-a^n}$ $(a\neq 0)$；

(7) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln\tan 7x}{\ln\tan 2x}$；　(8) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{\tan x}{\tan 3x}$；　(9) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\operatorname{arccot} x}$；

(10) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x^2)}{\sec x-\cos x}$；　(11) $\lim\limits_{x\to 0}x\cot 2x$；　(12) $\lim\limits_{x\to 0}x^2e^{\frac{1}{x^2}}$；

(13) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{2}{x^2-1}-\dfrac{1}{x-1}\right)$；　(14) $\lim\limits_{x\to 0}(e^x+x)^{\frac{1}{x}}$；　(15) $\lim\limits_{x\to 0^+}x^{\sin x}$；

(16) $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{1}{x}\right)^{\tan x}$.

解 (1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{1+x}}{1}=1.$

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x+e^{-x}}{\cos x}=\dfrac{2}{1}=2.$

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-x}{x-\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sec^2 x-1}{1-\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan^2 x}{\frac{x^2}{2}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{\frac{x^2}{2}}=2.$

(4) $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{\sin 3x}{\tan 5x}=\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{3\cos 3x}{5\sec^2 5x}=-\dfrac{3}{5}.$

(5) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{\ln\sin x}{(\pi-2x)^2}=\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{\frac{1}{\sin x}\cos x}{2(\pi-2x)\cdot(-2)}=-\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{\cot x}{4(\pi-2x)}=-\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{-\csc^2 x}{-8}=-\dfrac{1}{8}.$

(6) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^m-a^m}{x^n-a^n}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{mx^{m-1}}{nx^{n-1}}=\dfrac{m}{n}a^{m-n}(a\neq 0).$

(7) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln\tan 7x}{\ln\tan 2x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\frac{1}{\tan 7x}\sec^2 7x\cdot 7}{\frac{1}{\tan 2x}\sec^2 2x\cdot 2}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\tan 2x}{\tan 7x}\cdot\dfrac{\sec^2 7x}{\sec^2 2x}\cdot\dfrac{7}{2}$

$=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{2x}{7x}\cdot\dfrac{\sec^2 7x}{\sec^2 2x}\cdot\dfrac{7}{2}=1.$

(8) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{\tan x}{\tan 3x}=\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{\sec^2 x}{3\sec^2 3x}=\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos^2 3x}{3\cos^2 x}=\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{-6\cos 3x\sin 3x}{-6\cos x\sin x}=-\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos 3x}{\cos x}$

$=-\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{-3\sin 3x}{-\sin x}=3.$

(9) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}{\operatorname{arccot} x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{x}}\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)}{-\dfrac{1}{1+x^2}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1+x^2}{x+x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\dfrac{1}{x^2}+1}{\dfrac{1}{x}+1}=1.$

(10) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+x^2)}{\sec x-\cos x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\dfrac{2x}{1+x^2}}{\sec x\tan x+\sin x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{\sin x}\cdot\dfrac{\cos^2 x}{1+\cos^2 x}\cdot\dfrac{2}{1+x^2}=1.$

(11) $\lim\limits_{x\to0}x\cot 2x=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{\tan 2x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{2\sec^2 2x}=\dfrac{1}{2}.$

(12) $\lim\limits_{x\to0}x^2\mathrm{e}^{\frac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\mathrm{e}^{\frac{1}{x^2}}}{\dfrac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\mathrm{e}^{\frac{1}{x^2}}\left(\dfrac{1}{x^2}\right)'}{\left(\dfrac{1}{x^2}\right)'}=\lim\limits_{x\to0}\mathrm{e}^{\frac{1}{x^2}}=+\infty.$

(13) $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{2}{x^2-1}-\dfrac{1}{x-1}\right)=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{-x+1}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{-1}{2x}=-\dfrac{1}{2}.$

(14) $\lim\limits_{x\to0}(\mathrm{e}^x+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(\mathrm{e}^x+x)}{x}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to0}\frac{\mathrm{e}^x+1}{\mathrm{e}^x+x}}=\mathrm{e}^2;$

(15) $\lim\limits_{x\to0^+}x^{\sin x}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to0^+}\sin x\ln x}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\sin x}{x}\cdot x\ln x}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to0^+}x\ln x}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to0^+}(-x)}=\mathrm{e}^0=1.$

(16) $\lim\limits_{x\to0^+}\left(\dfrac{1}{x}\right)^{\tan x}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to0^+}\tan x\cdot\ln\frac{1}{x}}=\mathrm{e}^{-\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\tan x}{x}\cdot x\ln x}=\mathrm{e}^{-\lim\limits_{x\to0^+}x\ln x}=\mathrm{e}^{-\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}}=\mathrm{e}^{-\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to0^+}x}=\mathrm{e}^0=1.$

评注：在用洛必达法则求极限时，除了注意用洛必达法则对极限类型等的要求以外，还要注意求极限的过程中合理地应用重要极限、等价无穷小、初等变换等方法，以使运算过程更快捷、简洁.

2. 验证极限$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+\sin x}{x}$存在，但不能用洛必达法则得出.

证 由于$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+\sin x)'}{(x)'}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+\cos x}{1}$不存在，故不能使用洛必达法则来求此极限，但并不表明此极限不存在，此极限可用以下方法求得：$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+\sin x}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{\sin x}{x}\right)=1+0=1.$

3. 验证极限$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2\sin\dfrac{1}{x}}{\sin x}$存在，但不能用洛必达法则得出.

3 题视频解析

证 由于$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\left(x^2\sin\dfrac{1}{x}\right)'}{(\sin x)'}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2x\sin\dfrac{1}{x}-\cos\dfrac{1}{x}}{\cos x}$不存在，故不能使用洛必达法则来求此极限，但可用以下方法求此极限：

$$\lim_{x\to0}\frac{x^2\sin\dfrac{1}{x}}{\sin x}=\lim_{x\to0}\left(\frac{x}{\sin x}\cdot x\sin\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to0}\frac{x}{\sin x}\cdot\lim_{x\to0}x\sin\frac{1}{x}=1\times0=0.$$

*4. 讨论函数 $f(x)=\begin{cases}\left[\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{\mathrm{e}}\right]^{\frac{1}{x}}, & x>0,\\ \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}, & x\leqslant0\end{cases}$ 在点 $x=0$ 处的连续性.

4 题视频解析

解 $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\left[\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{\mathrm{e}}\right]^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{x}\ln\left[\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{\mathrm{e}}\right]},$

而 $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{1}{x}\left[\frac{1}{x}\ln(1+x)-1\right]=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{1+x}-1}{2x}$

$$=\lim_{x\to0^+}-\frac{1}{2(1+x)}=-\frac{1}{2},$$

故 $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=e^{-\frac{1}{2}}$,又

$$\lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^-}e^{-\frac{1}{2}}=e^{-\frac{1}{2}},\qquad f(0)=e^{-\frac{1}{2}}.$$

因为 $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=f(0)$,故函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

第三节　泰勒公式

一、主要内容归纳

1. 泰勒定理　若 $f(x)$ 在含有 x_0 的某个邻域内具有直到 $n+1$ 阶的导数,则对于该邻域内任意点 x,有 $f(x)=\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$,其中 ξ 介于 x_0 与 x 之间,$f^{(0)}(x_0)=f(x_0)$.

2. 麦克劳林公式　在 $x_0=0$ 展开的泰勒公式,也称为麦克劳林公式,即

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1},$$

其中 ξ 介于 0 与 x 之间.

带有佩亚诺余项的麦克劳林展开式为

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\cdots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(0)x^n+o(x^n).$$

3. 常用的六个泰勒展开式

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+o(x^n),$$

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+$$