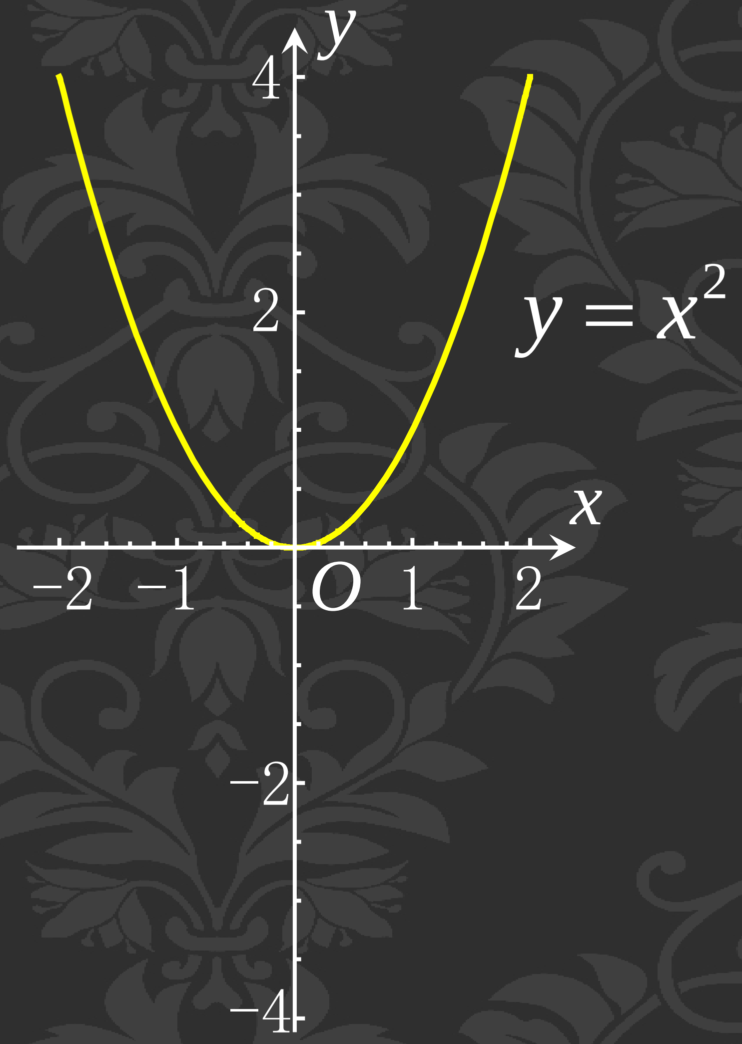
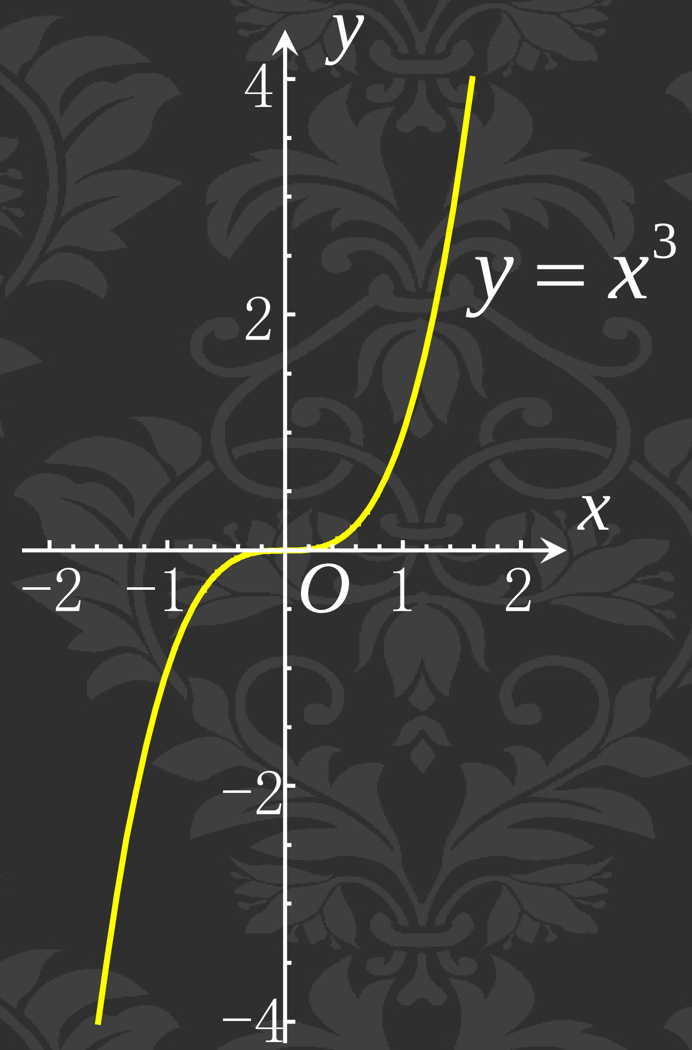
高等数学

3.4 函数的单调性与极值

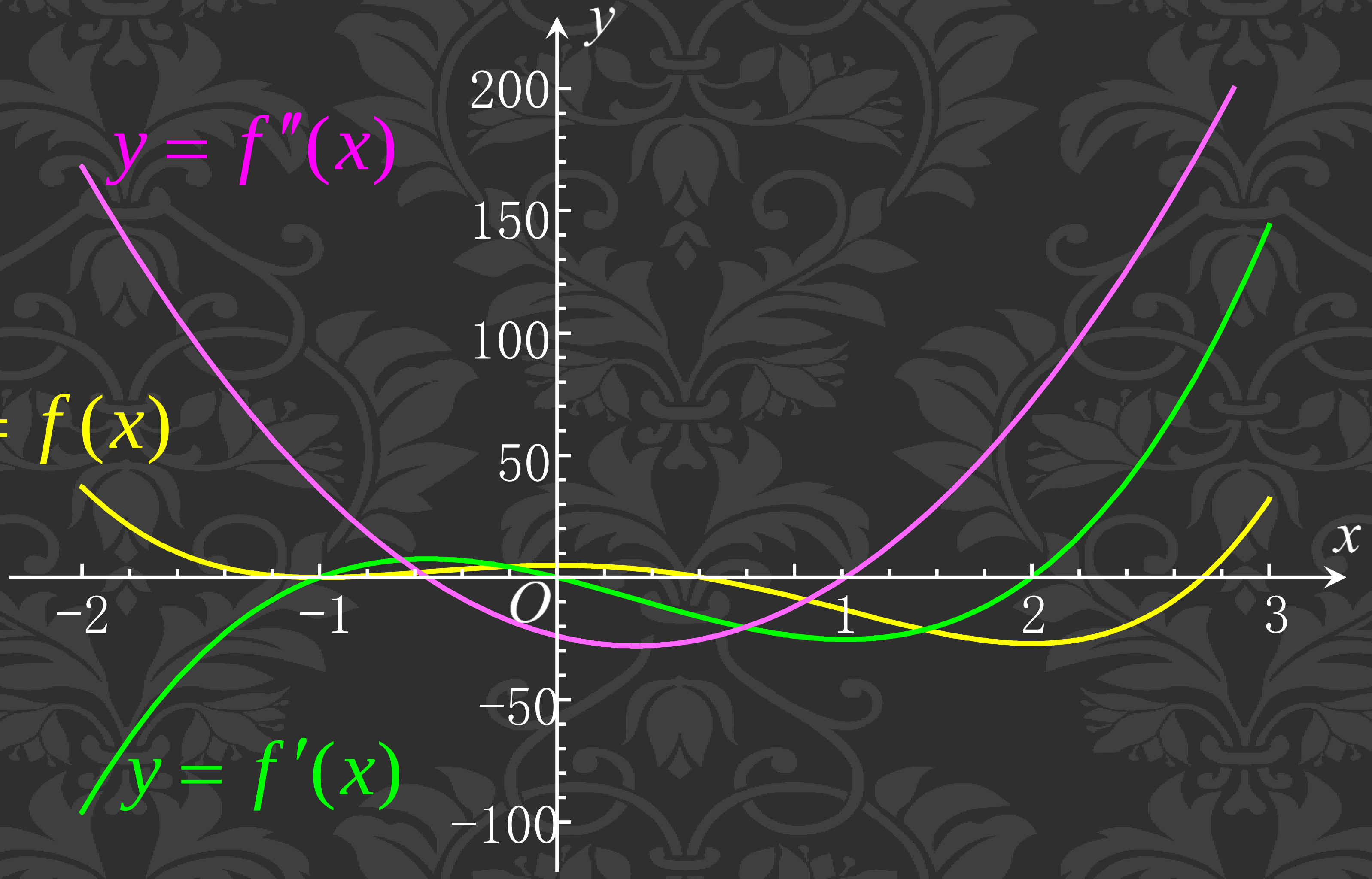
基础部数学教研室

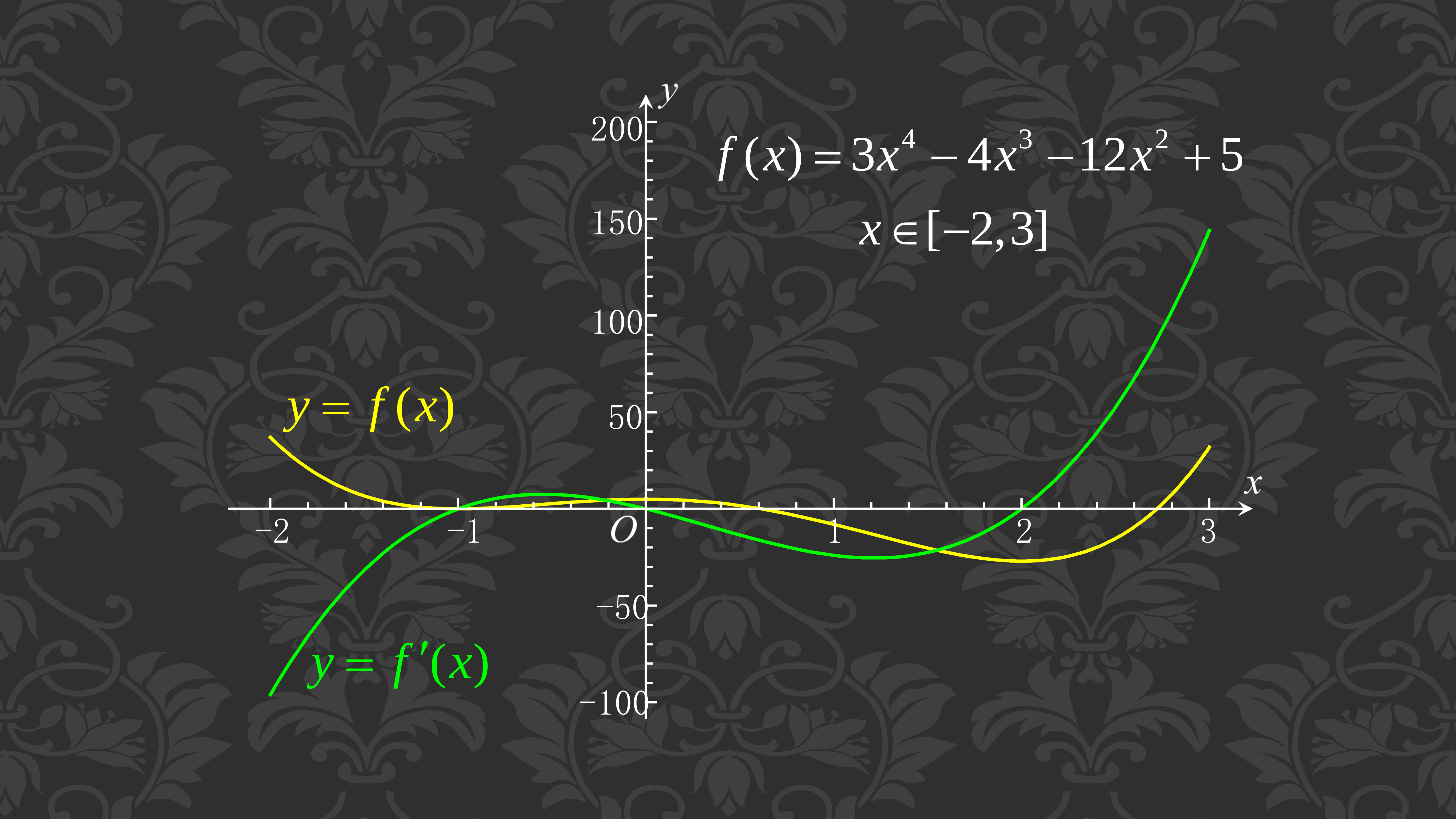
郑治中


y
4
2
$y = x^2$
x
−2 −1 O 1 2
−2
−4

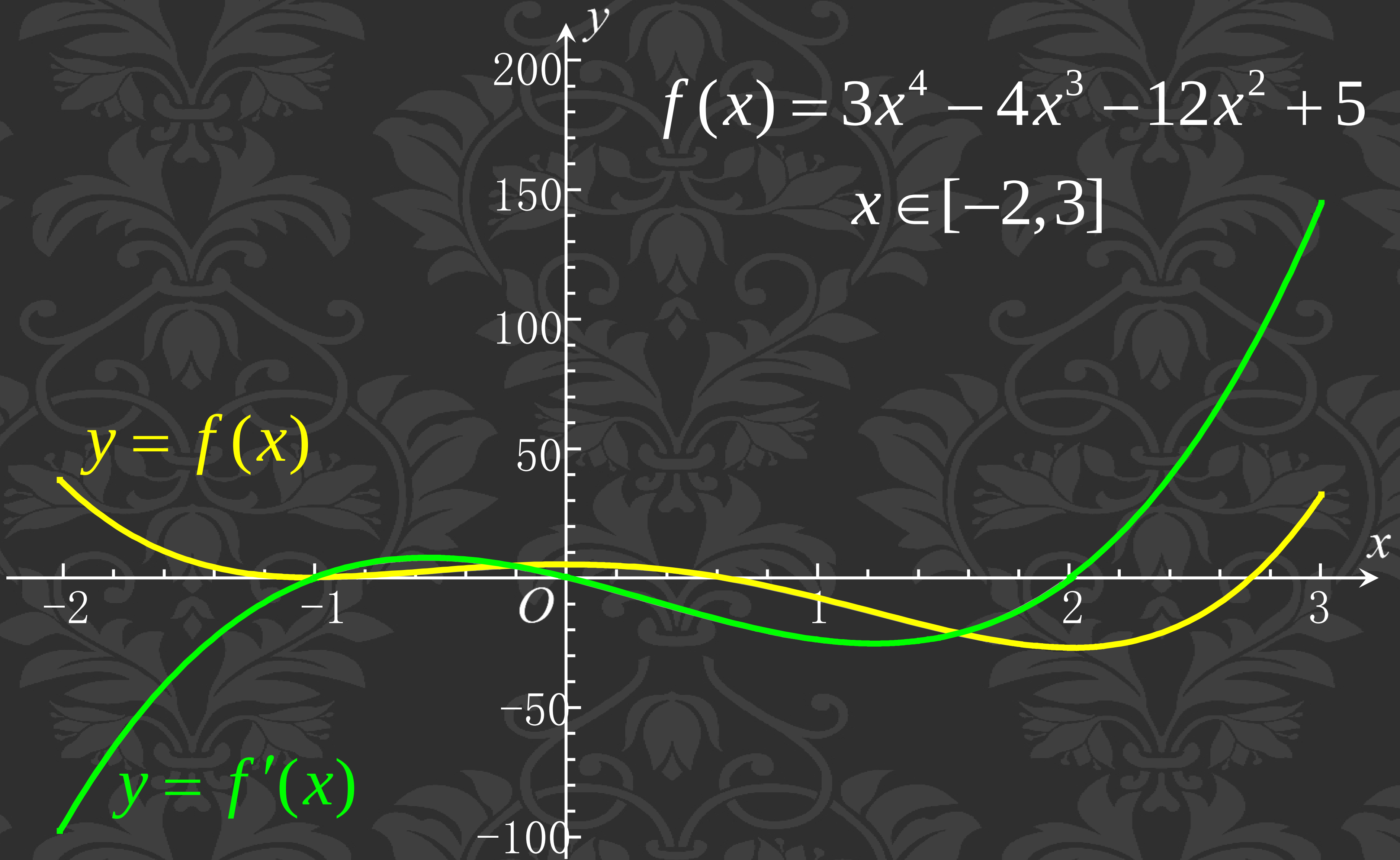

y
4
2
$y = x^3$
x
−2 −1 O 1 2
−2
−4

研究多项式函数的图形 $f(x)=3x^4-4x^3-12x^2+5, x\in[-2,3]$

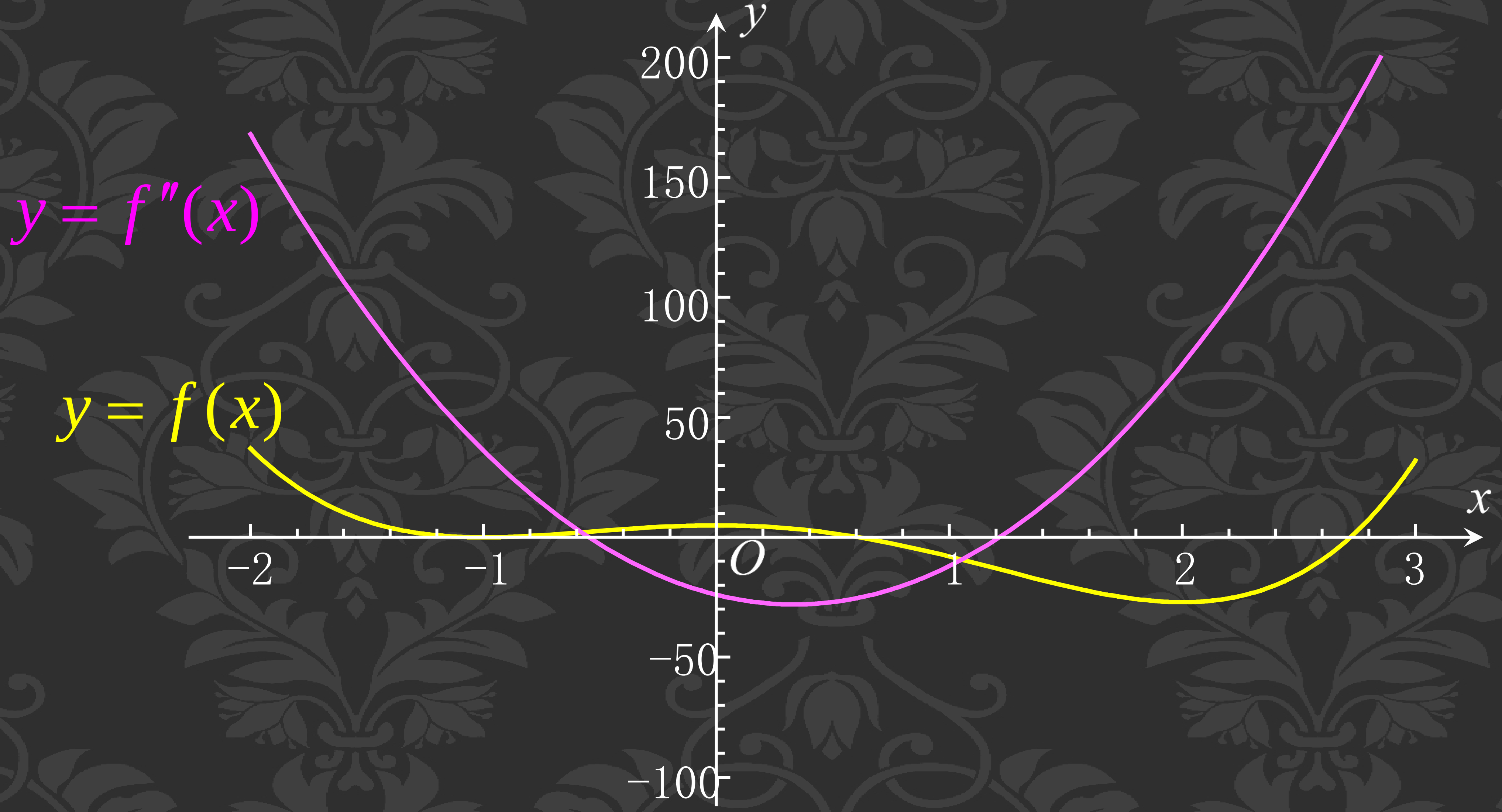




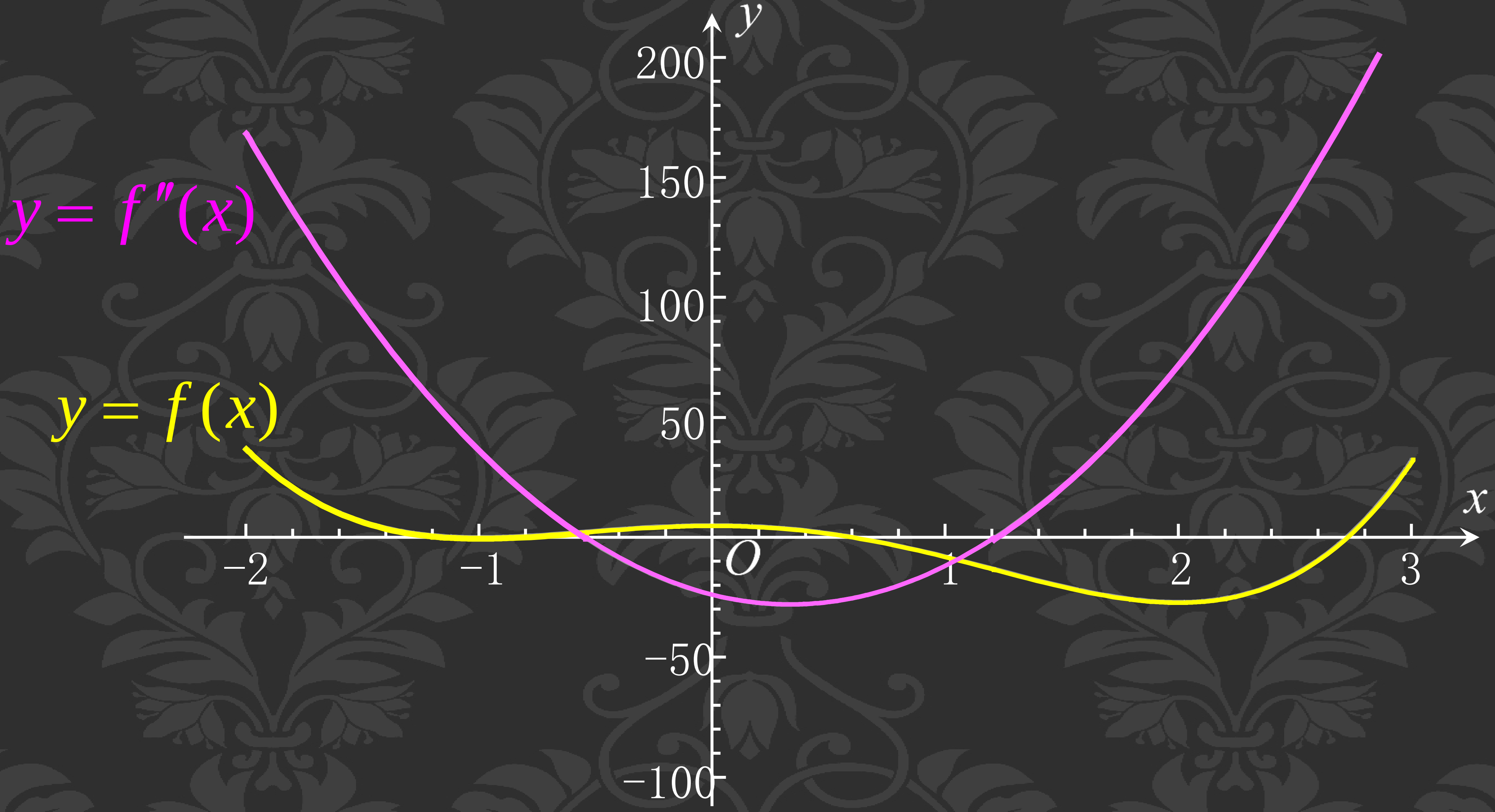
$f(x)=3x^4-4x^3-12x^2+5$
$x\in[-2,3]$
$y=f(x)$
$y=f'(x)$
y
x
O
200
150
100
50
−50
−100
−2
−1
1
2
3



$f(x)=3x^4-4x^3-12x^2+5$
$x\in[-2,3]$
$y=f(x)$
$y=f'(x)$
y
x
O
200
150
100
50
−50
−100
−2
−1
1
2
3



$y = f''(x)$
$y = f(x)$
y
x
O
200
150
100
50
−50
−100
−2
−1
1
2
3



$y = f''(x)$
$y = f(x)$
y
x
O
200
150
100
50
−50
−100
−2
−1
1
2
3

函数单调性与极值

函数的最值

函数的凹凸性及其判定

函数单调性的判定

定理1 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，(a,b) 内可导.

（1）如果在 (a,b) 内 $f'(x)>0$，那么 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上严格单调增加;

（2）如果在 (a,b) 内 $f'(x)<0$，那么 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上严格单调减少.

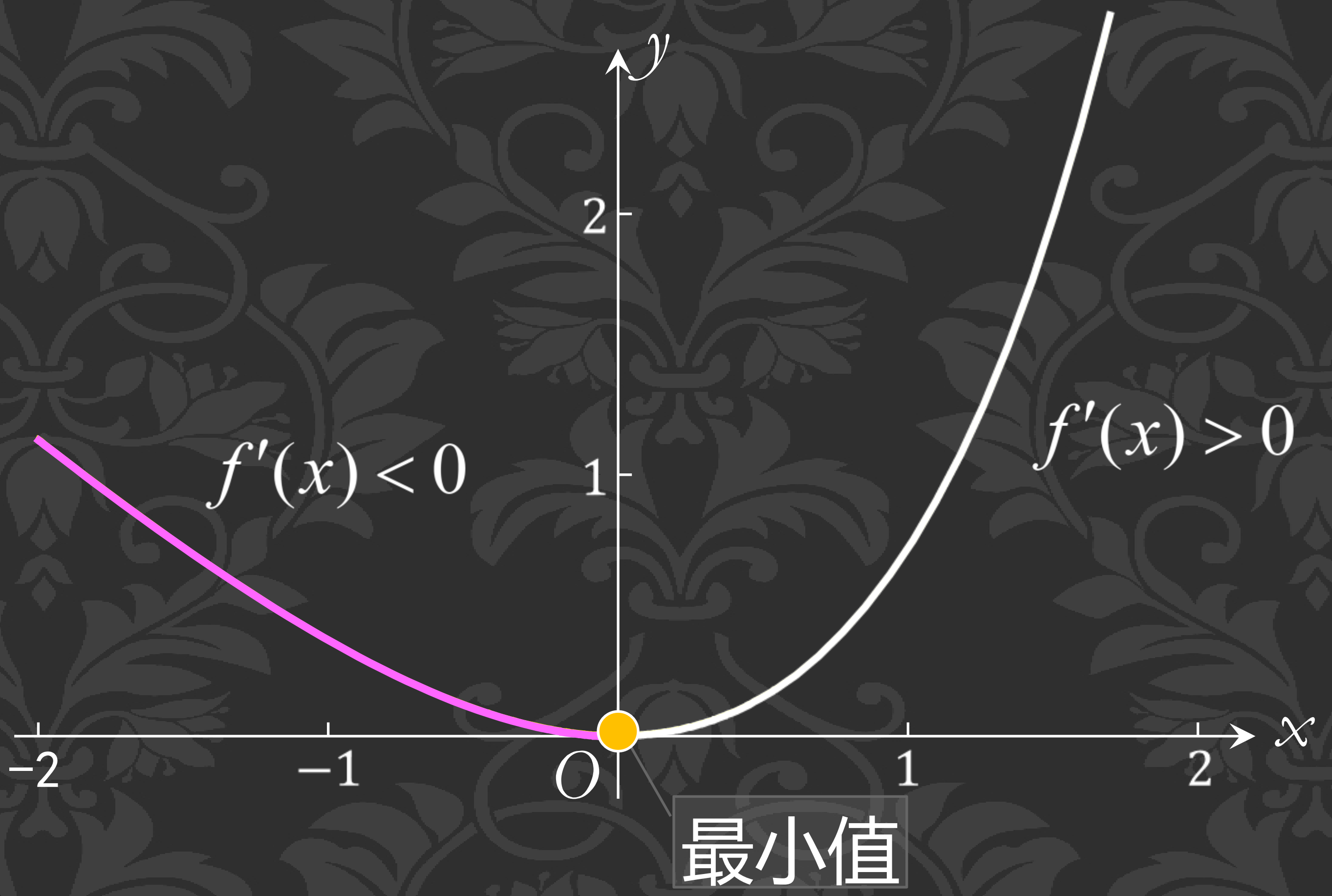
注意：定理1对于开区间也成立.

设函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内可导.

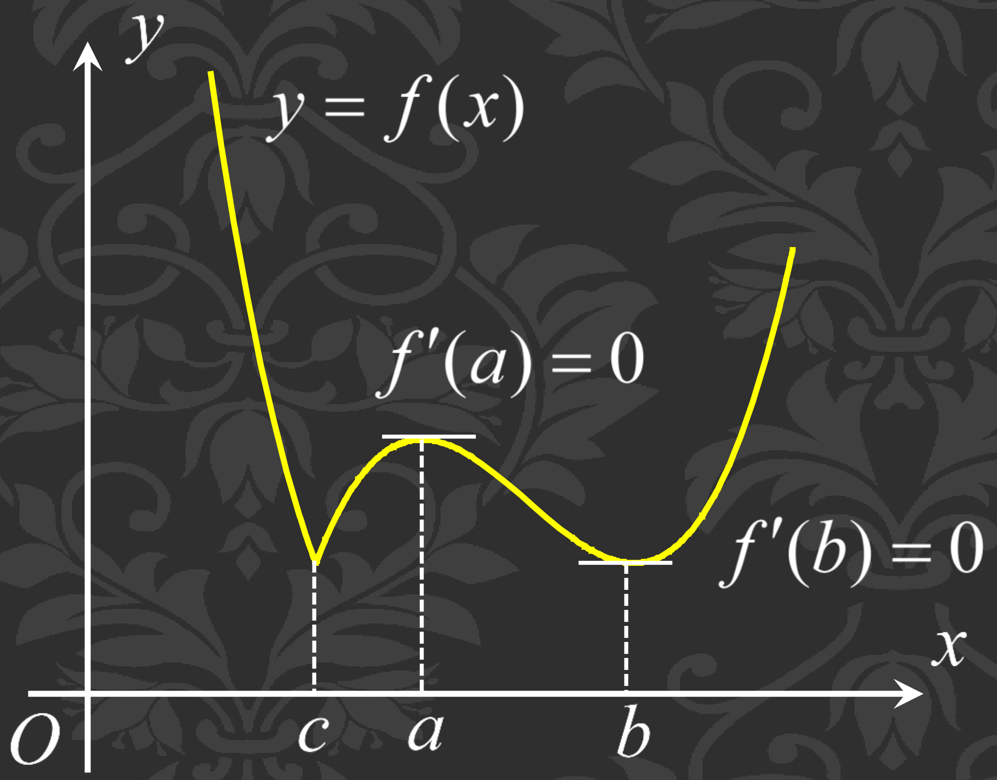
（1*）如果在 (a,b) 内 $f'(x)>0$，那么 $f(x)$ 在 (a,b) 内严格单调增加;

（2*）如果在 (a,b) 内 $f'(x)<0$，那么 $f(x)$ 在 (a,b) 内严格单调减少.

例1 讨论函数 $f(x)=e^x-x-1$ 在 $(-\infty,\infty)$ 内的单调性.



函数极值的判定

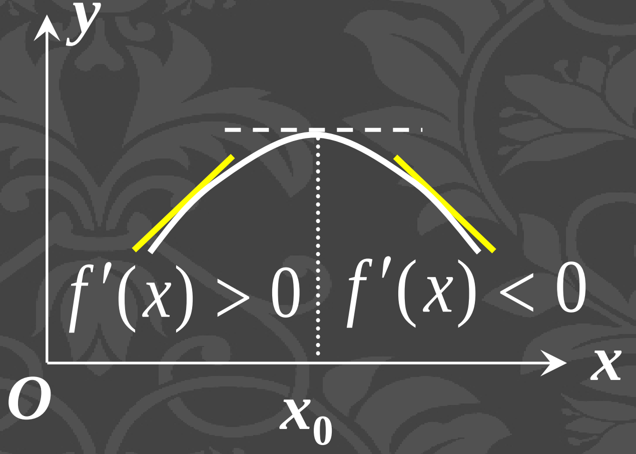


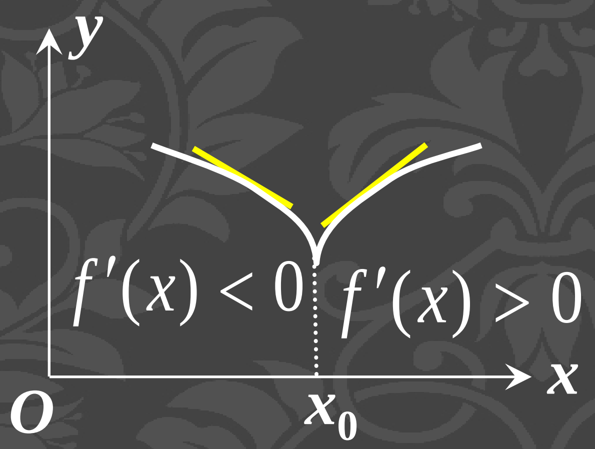
函数的可能极值点

- 驻点
- 不可导点

定理2的直观含义：

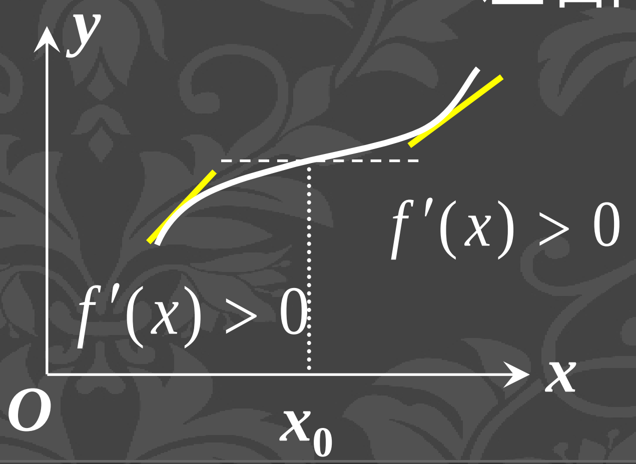
左正右负 取极大

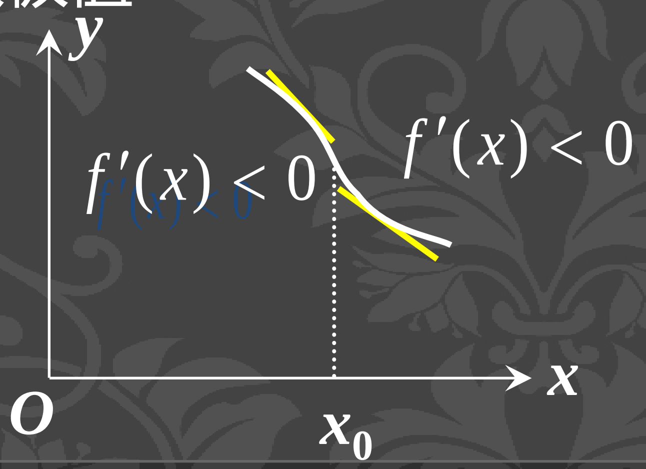




左负右正 取极小

左右同号不取极值





定理2（极值第一充分条件）设函数 $f(x)$ 在 x_0 处连续，在 x_0 的某个去心δ邻域内可导.

（1）如果当 $x_0-\delta<x<x_0$ 时，$f'(x)>0$；当 $x_0<x<x_0+\delta$ 时，$f'(x)<0$，那么 $f(x)$ 在 x_0 处取极大值.

（2）如果当 $x_0-\delta<x<x_0$ 时，$f'(x)<0$；当 $x_0<x<x_0+\delta$ 时，$f'(x)>0$，那么 $f(x)$ 在 x_0 处取极小值.

（3）如果 $f'(x)$ 在 $(x_0-\delta, x_0)$ 和 $(x_0, x_0+\delta)$ 内符号相同，则函数 $f(x)$ 在 x_0 处不取极值.

例2 求函数 $f(x)=\sqrt[3]{(x-1)(x-2)^2}$ 的单调区间和极值.

$$f'(x)=\frac{\sqrt[3]{(x-1)(x-2)^2}}{3(x-1)(x-2)}(3x-4) \qquad \frac{+}{+}(+)$$

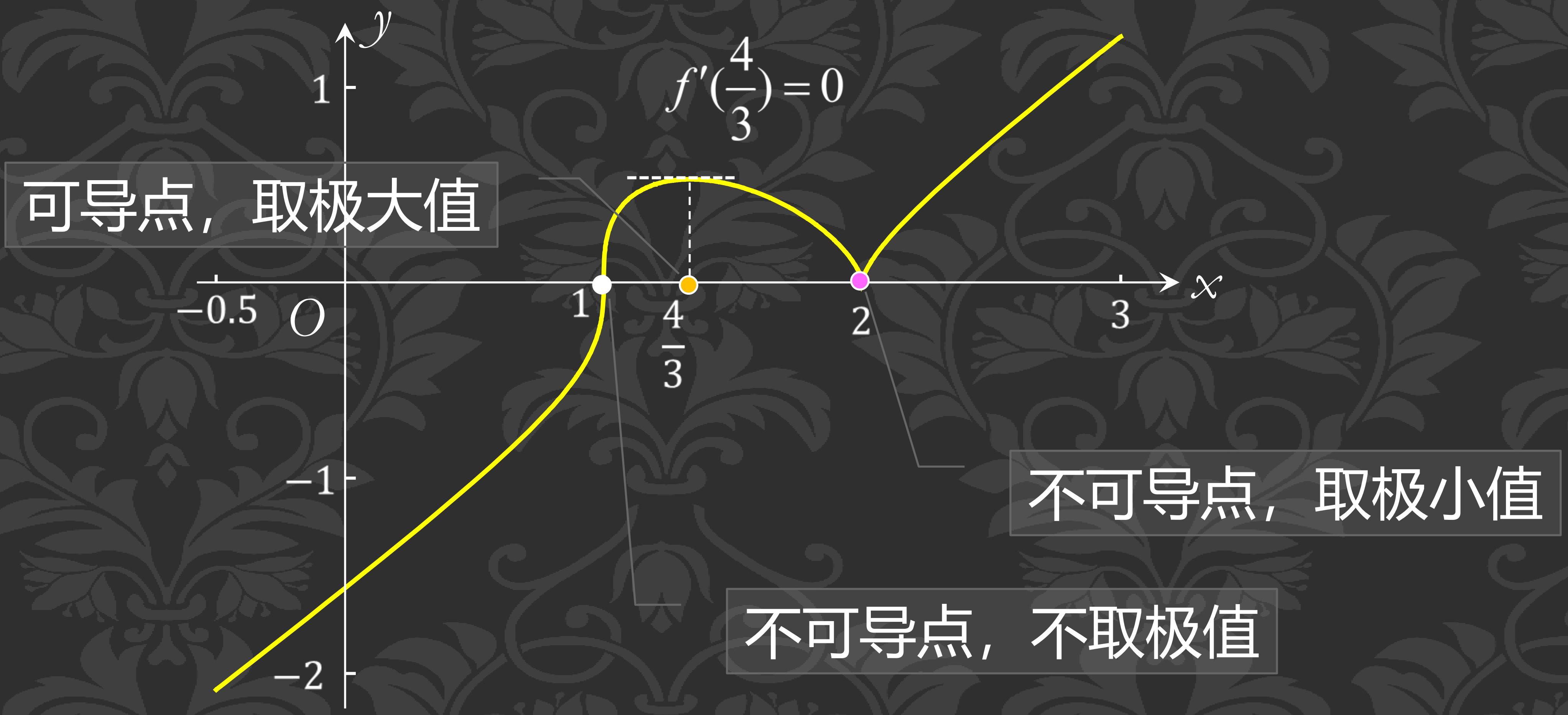
x	$(-\infty,1)$	1	$\left(1,\frac{4}{3}\right)$	$\frac{4}{3}$	$\left(\frac{4}{3},2\right)$	2	$(2,+\infty)$
y'	$+$	不存在	$+$	0	$-$	不存在	$+$
y	$\nearrow$	非极值点	$\nearrow$	极大值点	$\searrow$	极小值点	$\nearrow$

例2 求函数 $f(x)=\sqrt[3]{(x-1)(x-2)^2}$ 的单调区间和极值.

极大值 $f\left(\dfrac{4}{3}\right)=\dfrac{\sqrt[3]{4}}{3}$ 　　极小值 $f(2)=0$

x	$(-\infty,1)$	1	$\left(1,\dfrac{4}{3}\right)$	$\dfrac{4}{3}$	$\left(\dfrac{4}{3},2\right)$	2	$(2,+\infty)$
y'	$+$	不存在	$+$	0	$-$	不存在	$+$
y	↗	非极值点	↗	极大值点	↘	极小值点	↗

例2 求函数 $f(x)=\sqrt[3]{(x-1)(x-2)^2}$ 的单调区间和极值.



定理3 (极值第二充分条件)　设函数$f(x)$在x_0处具有二阶导数，且 $f'(x_0)=0$，那么

(1) 当 $f''(x_0)<0$ 时，函数$f(x)$在x_0处取得极大值.

(2) 当 $f''(x_0)>0$ 时，函数$f(x)$在x_0处取得极小值.

(3) 当 $f''(x_0)=0$ 时，无法确定函数$f(x)$在x_0处是否取得极值.

例如：$f(x)=x^3$，函数$f(x)$在$x=0$处不取极值.

$f(x)=x^4$，函数$f(x)$在$x=0$处取得极小值.

$$f'(0)=f''(0)=0$$

求函数单调区间与极值的一般步骤

（1）求函数 $f(x)$ 的定义域；

（2）求函数 $f'(x)$ 的表达式，并求得 $f(x)$的驻点及不可导点，它们是 $f(x)$ 所有可能的极值点；

（3）以这些点为分点将函数的定义域划分为若干区间，在各划分区间上，依据 $f'(x)$ 的符号确定函数的单调区间，并判定这些点是否取极值.

例3 求函数 $f(x)=x^3-6x^2+5$ 的极值.

$$f'(x)=3x^2-12x=0 \Rightarrow x=0,\ x=4$$

$$f''(x)\big|_{x=0}=(6x-12)\big|_{x=0}=-12<0$$

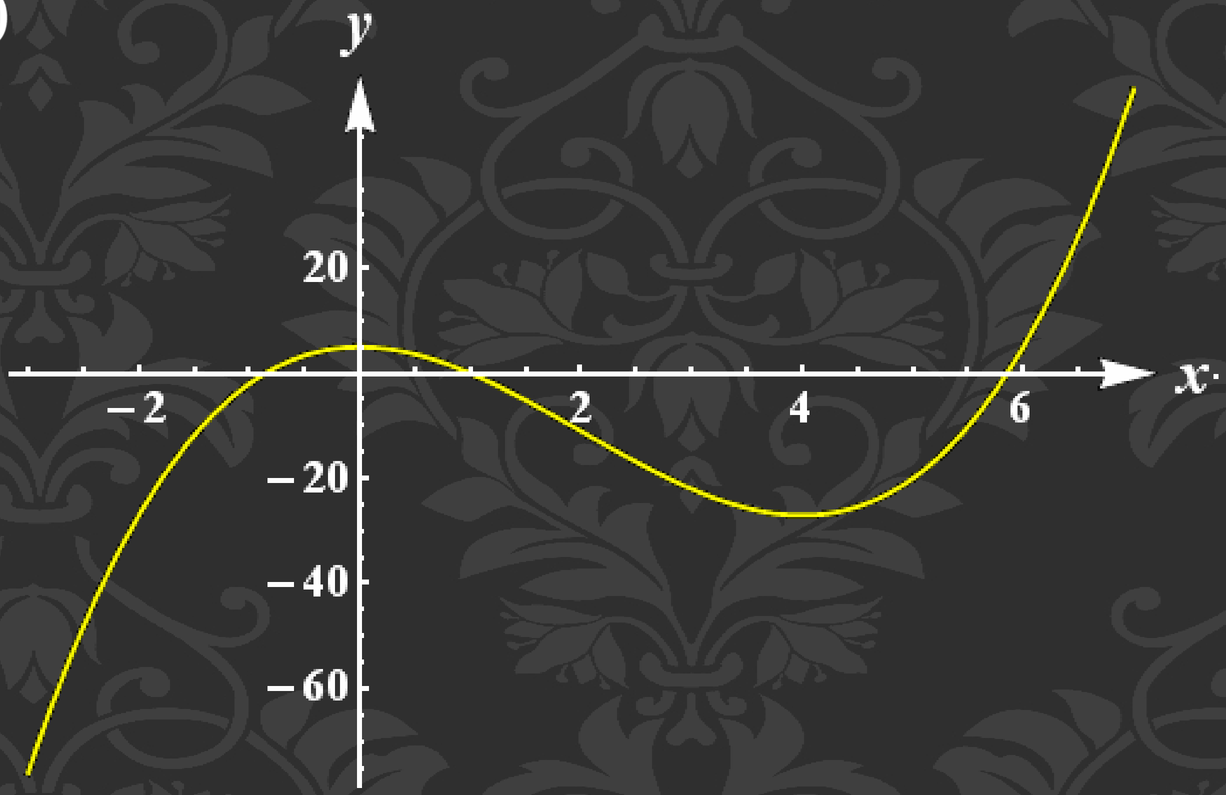
函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 取极大值

$$f(0)=5$$

$$f''(x)\big|_{x=4}=(6x-12)\big|_{x=4}=12>0$$

函数 $f(x)$ 在 $x=4$ 取极小值

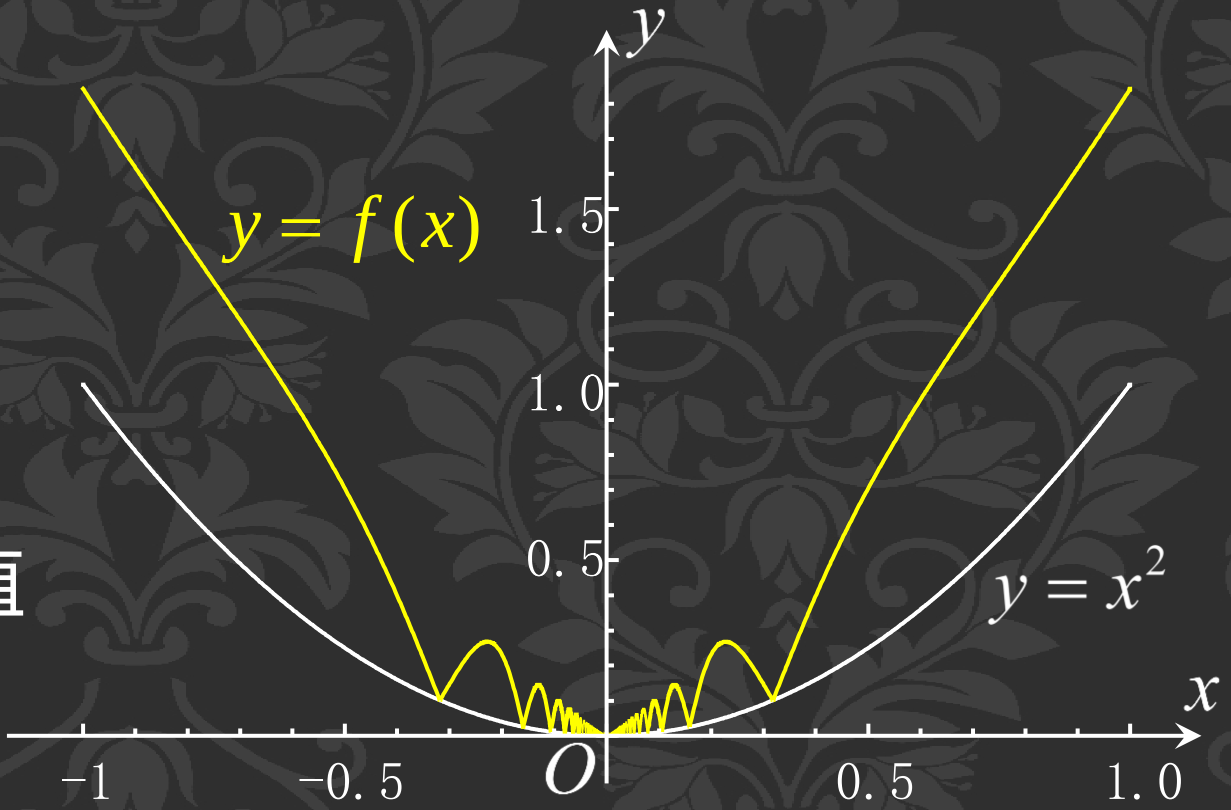
$$f(4)=-27$$



问题：极值点附近是否一定有单调性？

$$f(x)=\begin{cases} x^2+\left|x\sin\dfrac{1}{x}\right|, & x\neq 0, \\ 0, & x=0 \end{cases}$$

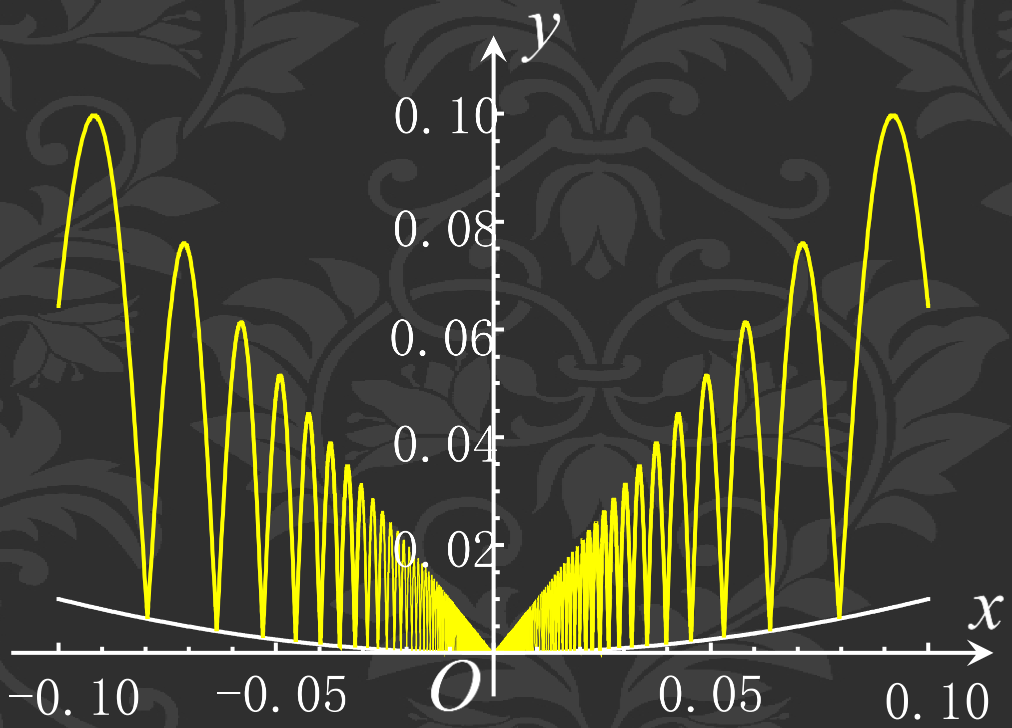
函数$f(x)$在$x=0$取得极小值



问题：极值点附近是否一定有单调性？

$$f(x)=\begin{cases} x^2+\left|x\sin\dfrac{1}{x}\right|, & x\neq 0, \\ 0, & x=0 \end{cases}$$

函数$f(x)$在$x=0$取得极小值



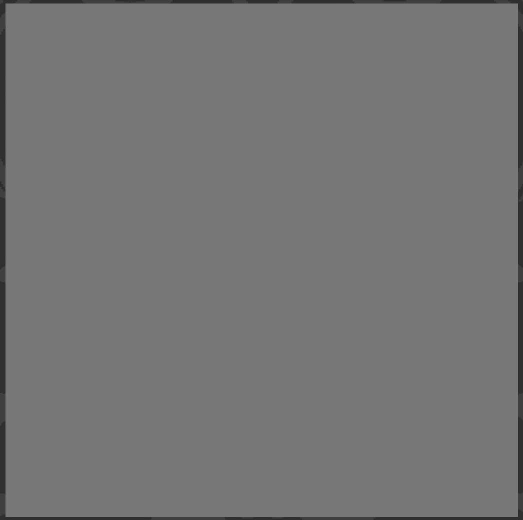
高等数学

3.5 函数的最值凹凸性

基础部数学教研室

郑治中

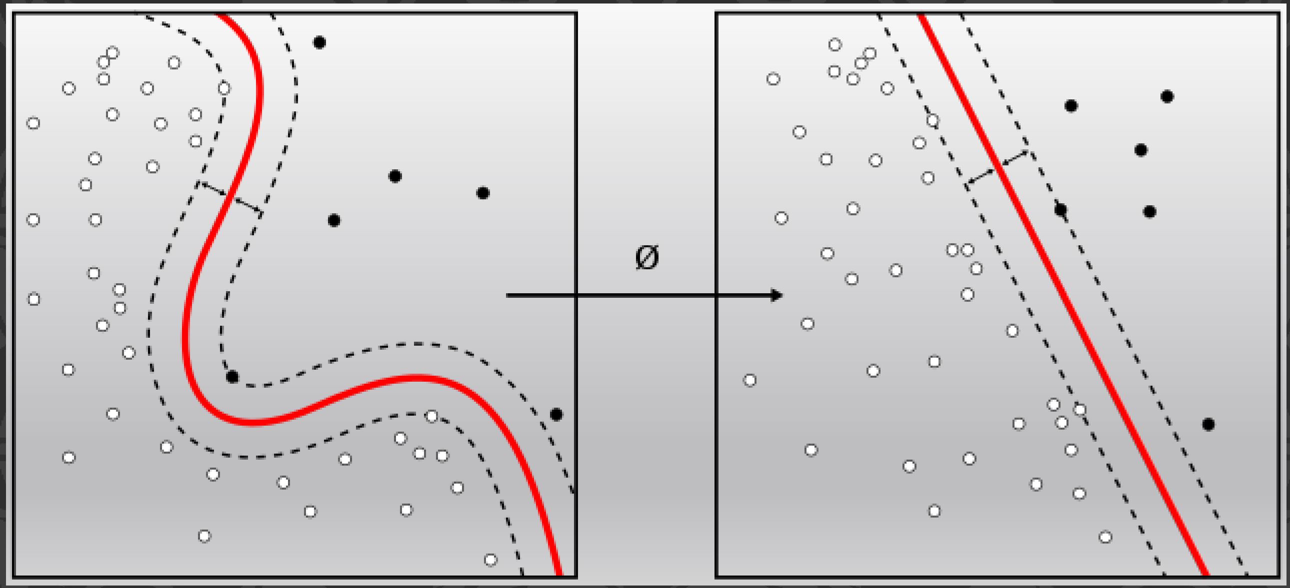
产品最多、用料最省、成本最低、利润最高



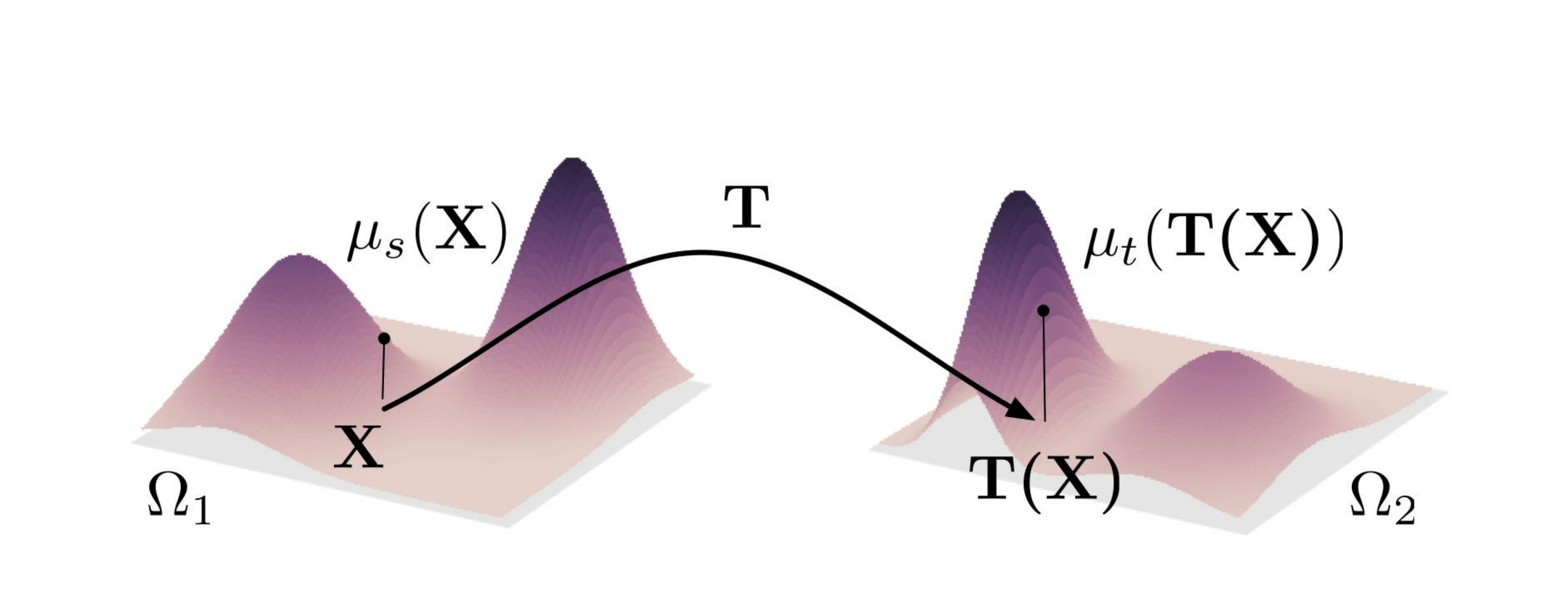
含有噪声的图片

背景噪声

去除噪声的图片



凸集分离



最优传输 Optimal Transport

最大值与最小值

设函数 $f(x)$ 定义在集合 D 上，若存在 D 上的点 c 使得

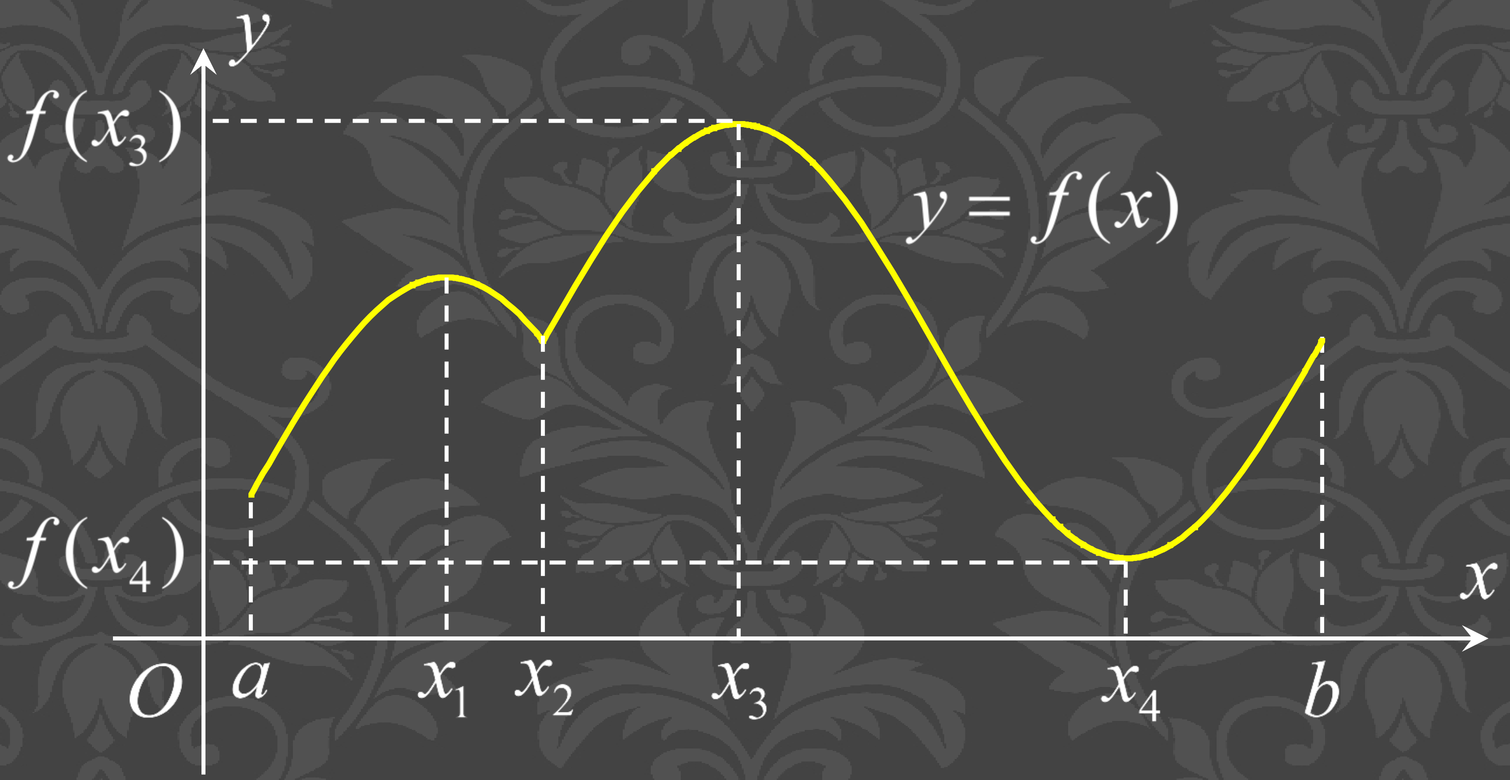
$$f(x) \le f(c)$$

对 D 上的一切 x 成立，则称 $f(c)$ 为函数 $f(x)$ 在 D 上的**最大值**（亦称 $f(x)$ 在 D 上取得最大值），记为

$$M = f(c) = \max_{x \in D} f(x)$$

类似可以定义$f(x)$ 在集合 D 上的**最小值** $f(d)$，记为

$$m = f(d) = \min_{x \in D} f(x)$$



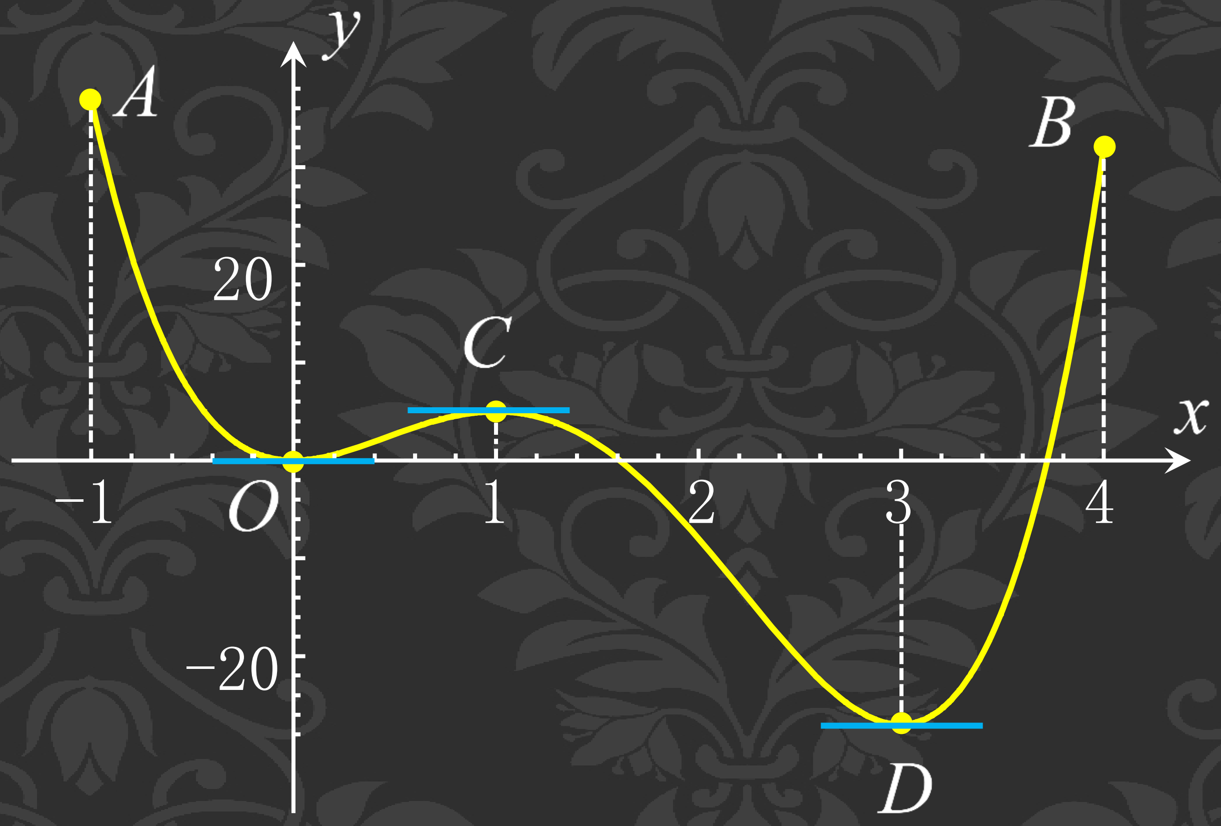
$f(x)$ 在$[a,b]$上的 最大值为$f(x_3)$，最小值为$f(x_4)$

$$f(x_3)=\max_{x\in[a,b]} f(x) \qquad f(x_4)=\min_{x\in[a,b]} f(x)$$

例4 观察函数 $f(x)=3x^4-16x^3+18x^2$ 在 $[-1,4]$ 上的图形，讨论函数的极值和最值.

$f(-1)=37$		最大值
$f(0)=0$	极小值	
$f(1)=5$	极大值	
$f(3)=-27$	极小值	最小值
$f(4)=32$		

$$f'(0)=f'(1)=f'(3)=0$$



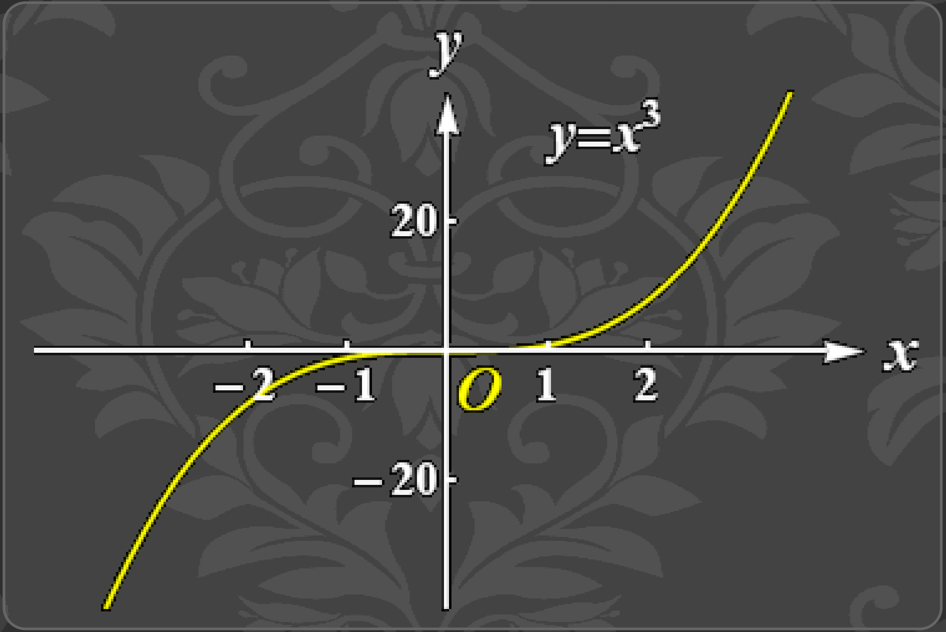
注： ●对于可微函数，极值点一定是驻点.

几何意义：函数的图形在极值点处对应水平切线.

但驻点不一定是极值点.

例如，函数$f(x)=x^3$.

$x=0$处的导数等于0，曲线在原点处有水平切线，但 $x=0$ 不是极值点 .



●不可导点也可能是极值点.

闭区间上连续函数最值的求法

设函数 $f(x)$ 在闭区间$[a,b]$内连续，求闭区间上连续函数最值的一般步骤为:

(1) 求出 $f(x)$在区间 (a,b)内的所有驻点和不可导点:

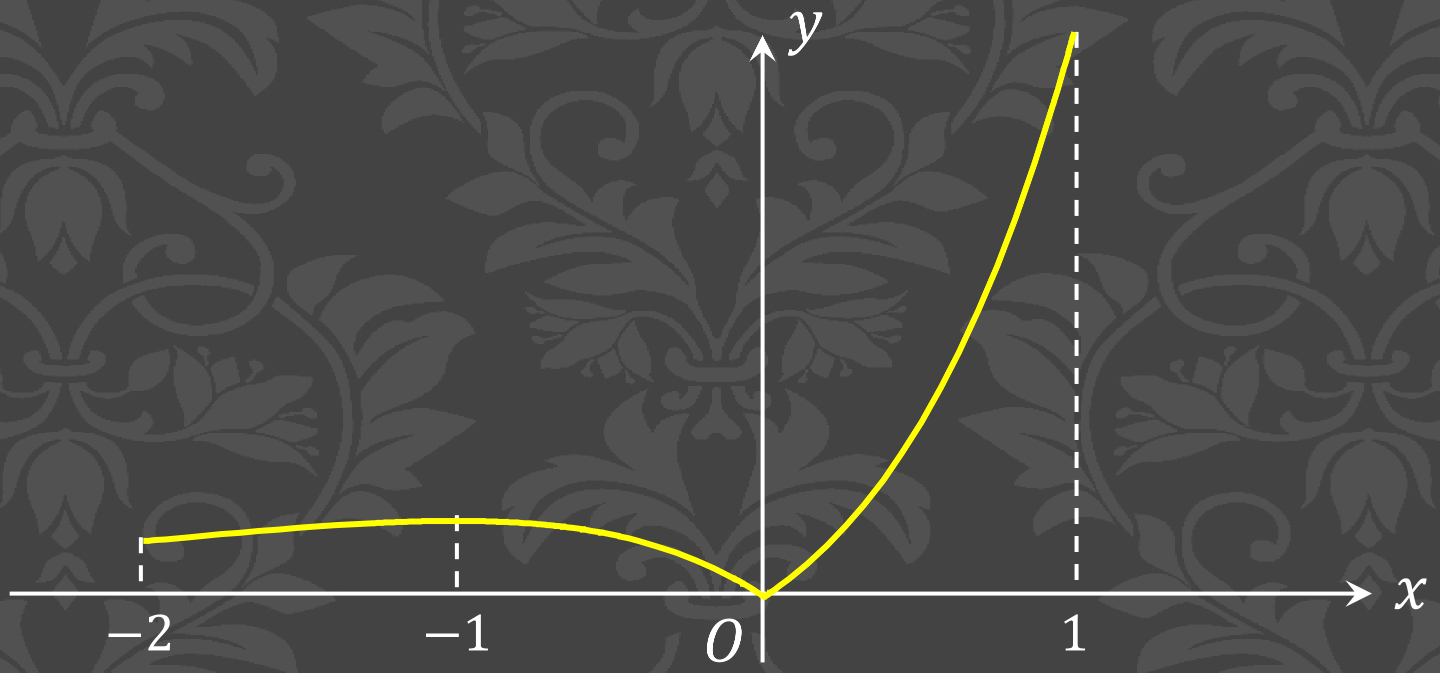
$$x_1, x_2, \cdots, x_n;$$

(2) 求 $f(x)$在$x_1, x_2, \cdots, x_n$及区间端点 a,b 的函数值:

$$f(a), f(x_1), f(x_2), \cdots, f(x_n), f(b);$$

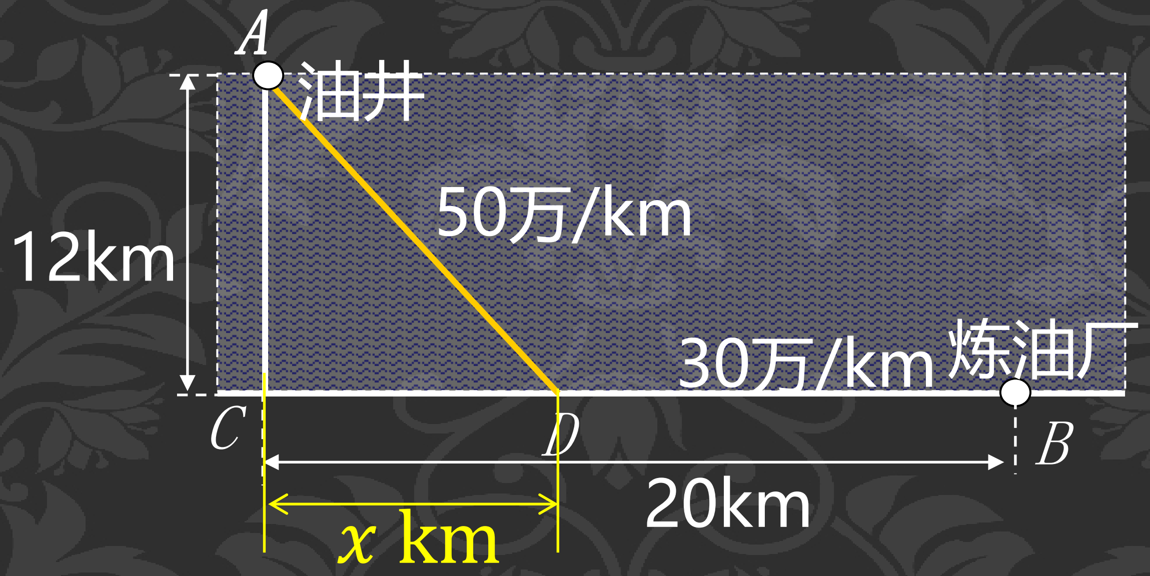
(3) 比较各点函数值的大小，最大者为所求最大值, 最小者为所求最小值.

例5 求$f(x) = |x|e^x$在区间$[-2,1]$上的最大值和最小值.



$$f(-2)=\frac{2}{e^2},\ f(-1)=\frac{1}{e},\ f(0)=0,\ f(1)=e.$$

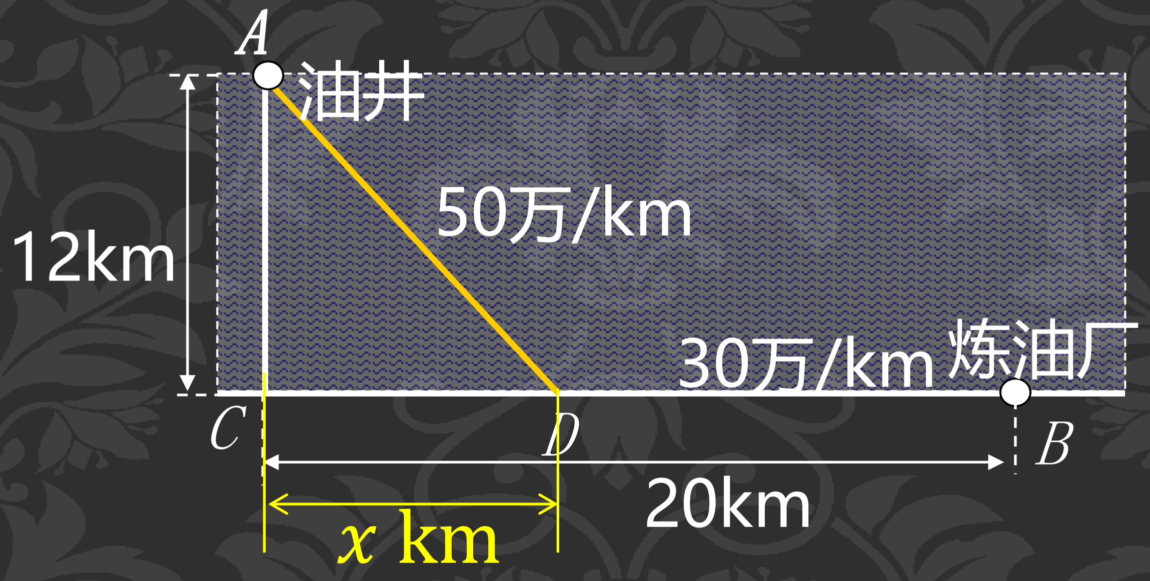
例6 用输油管把离岸12公里的一座油井和沿岸往下20公里处的炼油厂连接起来，如果水下输油管的铺设成本为每公里50万元，陆地输油管的铺设成本为每公里30万元. 问应如何铺设水下和陆地输油管，使总的连接费用最小?



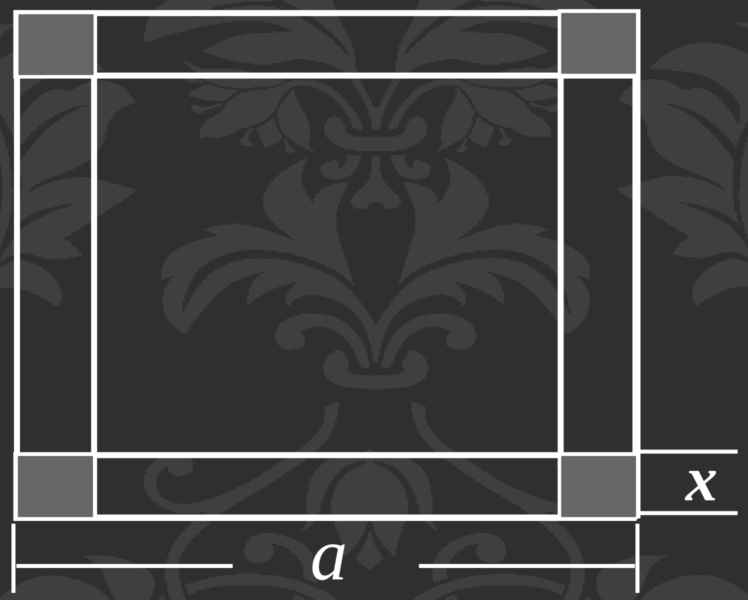
目标函数：$y = 50\sqrt{144 + x^2} + 30(20 - x)$

决策变量x的范围：$0 \le x \le 20$

问题归结为: 当x在区间[0，20]内取何值时，函数 y的值最小?

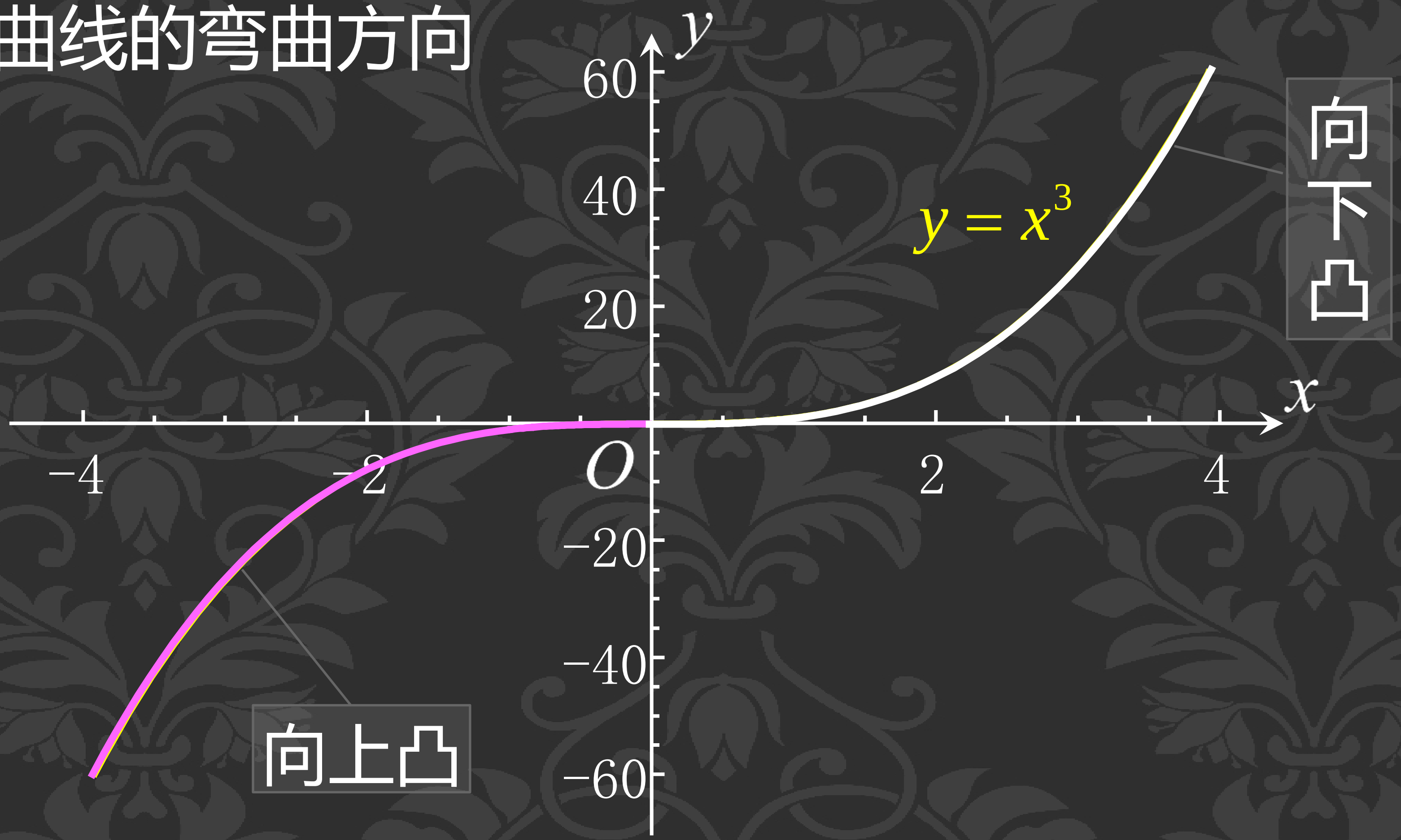


例7 一个边长为 a 的正方形铁片，在四个角各剪去一个边长为x 的小正方形，然后折成一个无盖长方体容器，问当 x 取何尺寸时，才能使容器的容积最大?



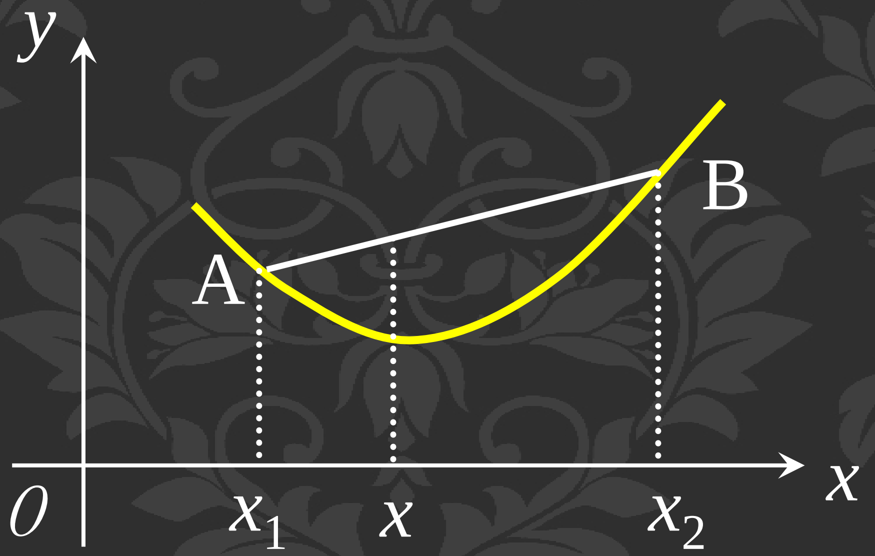
凸函数

考虑曲线的弯曲方向



凸曲线的几何特征分析

特点: 连接图形上任意两点的弦总位于这两点间弧段的上方.



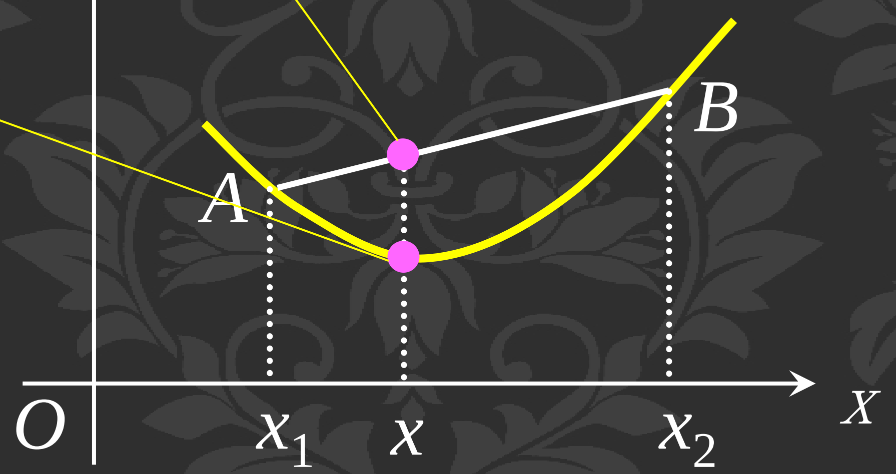
弦 AB 的方程: $$y = f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

函数 $f(x)$ 在 $[x_1, x_2]$ 上的曲线弧位于弦 AB 的下方可表示为

$$\boxed{f(x)} \le \boxed{f(x_1)+\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}(x-x_1)} \quad x_1 \le x \le x_2.$$

整理得

$$f(x) \le \frac{x_2-x}{x_2-x_1}f(x_1)+\frac{x-x_1}{x_2-x_1}f(x_2)$$



弦 AB 的方程: $\boxed{y=f(x_1)+\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}(x-x_1)}$

凸函数第一种定义 设函数 $f(x)$ 在区间 I 上有定义，如果对于任意 $x_1, x_2 \in I$，及任意实数 $\lambda \in [0, 1]$，恒有

$$f\left[\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2\right] \le \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2),$$

则称 $f(x)$ 为区间 I 上的**向下凸函数**（简称**凸函数 convex**）.

如果对于任意 $x_1, x_2 \in I$，$x_1 \neq x_2$，及任意实数 $\lambda \in (0, 1)$，恒有

$$f\left[\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2\right] < \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2),$$

则称 $f(x)$ 为区间 I 上的**严格向下凸函数**（简称**严格凸函数**）.

定义1* 设函数 $f(x)$ 在区间 I 上有定义，如果对于任意 $x_1, x_2 \in I$，及任意实数 $\lambda \in [0, 1]$，恒有

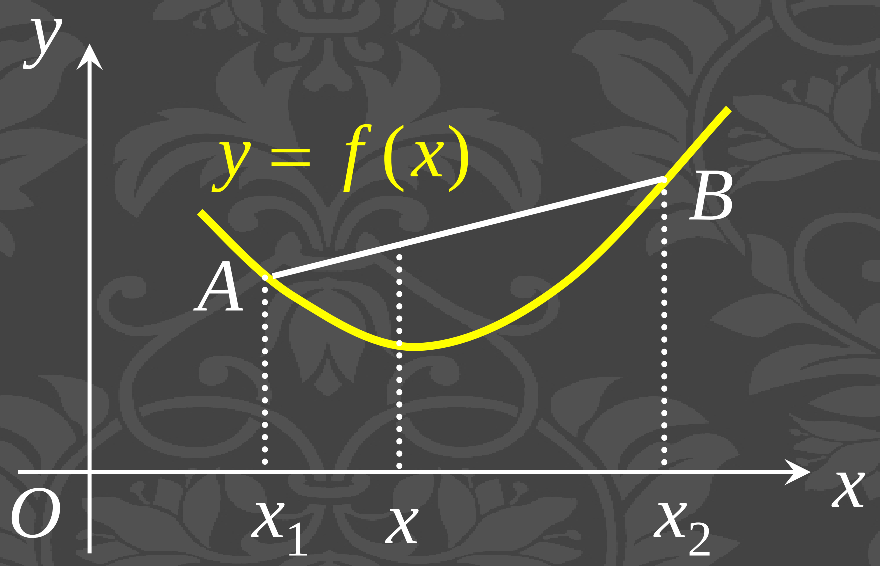
$$f\left[\lambda x_1+(1-\lambda)x_2\right] \geq \lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2),$$

则称 $f(x)$ 为区间 I 上的向上凸函数（凹函数 concave）.

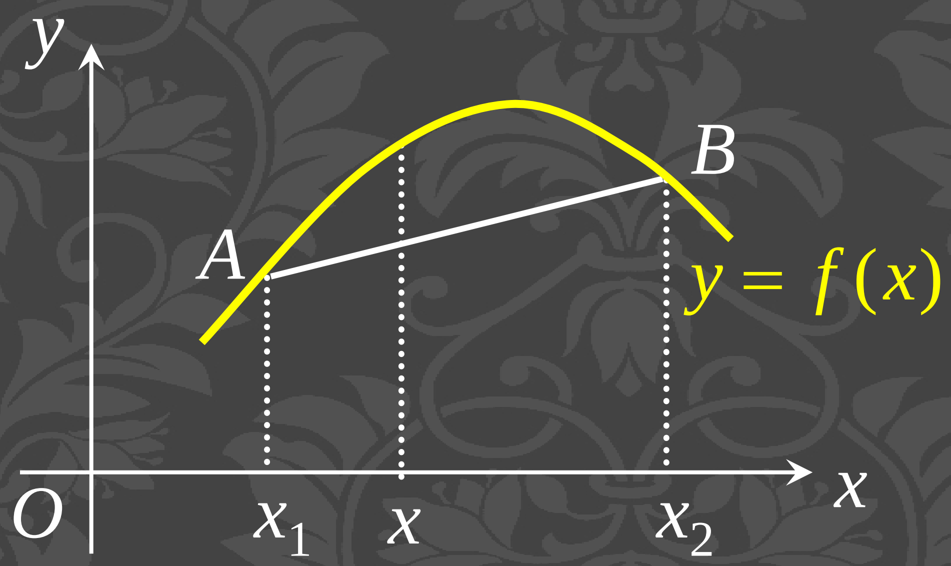
如果对于任意 $x_1, x_2 \in I$，$x_1 \neq x_2$，及任意实数 $\lambda \in (0, 1)$，恒有

$$f\left[\lambda x_1+(1-\lambda)x_2\right] > \lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2),$$

则称 $f(x)$ 为区间 I 上的严格向上凸函数（严格凹函数）.



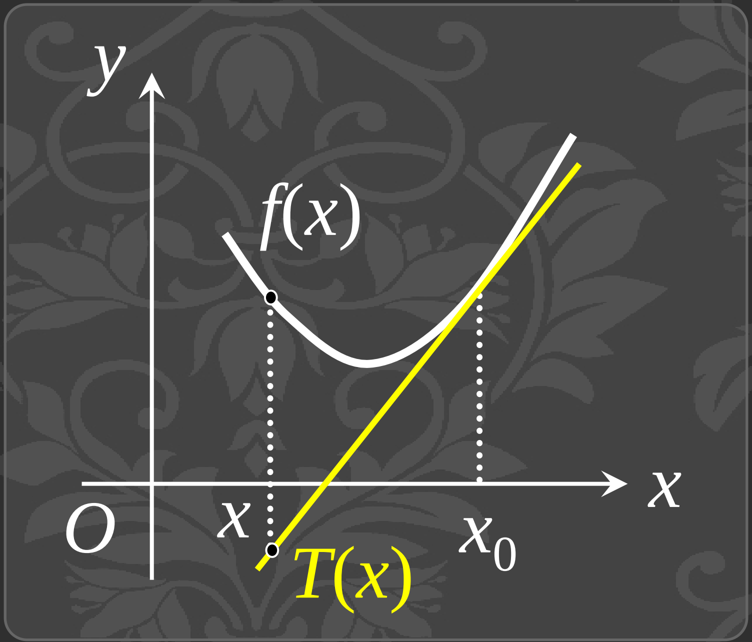
向下凸函数（convex）

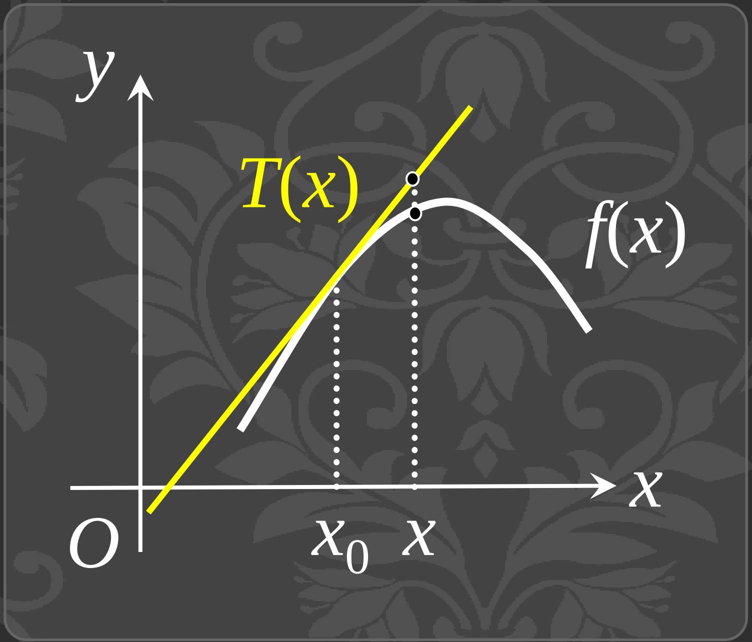


向上凸函数（concave）

凸曲线与其切线的位置关系

向下凸函数的图形位于切线上方，向上凸函数的图形位于切线下方.





$$f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

$$f(x) \leq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

定理4（凸函数第二种定义）设函数 $f(x)$ 在 (a, b) 内可导，则

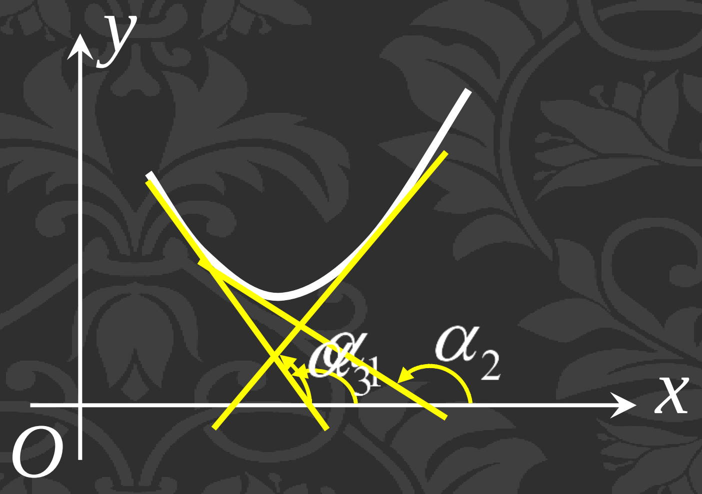
（1） 函数 $f(x)$ 为 (a, b) 内的向下凸函数的充分必要条件是：对任意 $x_1, x_2 \in (a, b)$ 都有

$$f(x_1) \geq f(x_2) + f'(x_2)(x_1 - x_2).$$

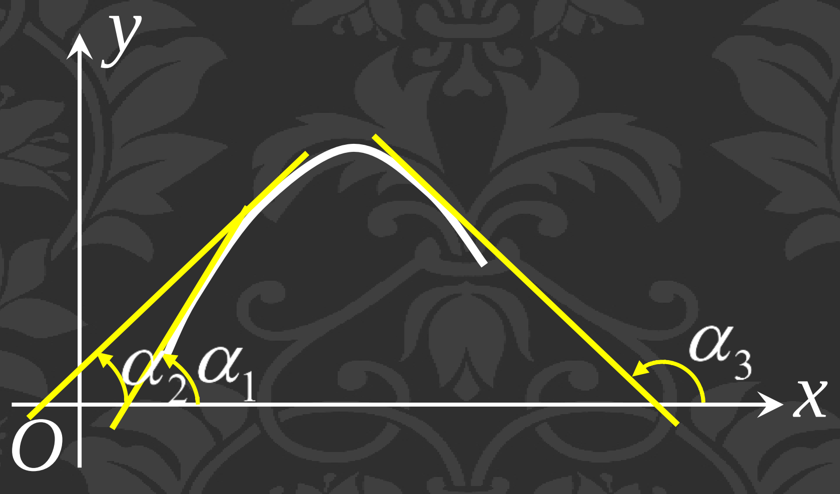
（2）函数 $f(x)$ 为 (a, b) 内的严格向下凸函数的充分必要条件是对任意 $x_1, x_2 \in (a, b)$, $x_1 \neq x_2$, 都有

$$f(x_1) \leq f(x_2) + f'(x_2)(x_1 - x_2).$$

凸函数的判定



$\tan\alpha_1 < \tan\alpha_2 < \tan\alpha_3$



$\tan\alpha_1 > \tan\alpha_2 > \tan\alpha_3$

向下凸函数　随着 x 增大，向下凸函数图形的切线斜率增大，其导函数$f'(x)$单调增加；

向上凸函数　随着 x 增大，向上凸函数图形的切线斜率减少，其导函数$f'(x)$单调减少.

定理5（凸函数第三种定义） 设函数 $f(x)$ 在 (a, b) 内具有二阶导数,

(1) 如果 (a, b) 内 $f''(x) > 0$ 则 $f(x)$ 为严格向下凸函数;

(2) 如果 (a, b) 内 $f''(x) < 0$ 则 $f(x)$ 为严格向上凸函数.

注: 一般地， 如果 (a, b) 内 $f''(x) \geq 0$, 则 $f(x)$ 为向下凸函数;

如果 (a, b) 内 $f''(x) \leq 0$, 则 $f(x)$ 为向上凸函数.

定理6（凸函数第四种定义）

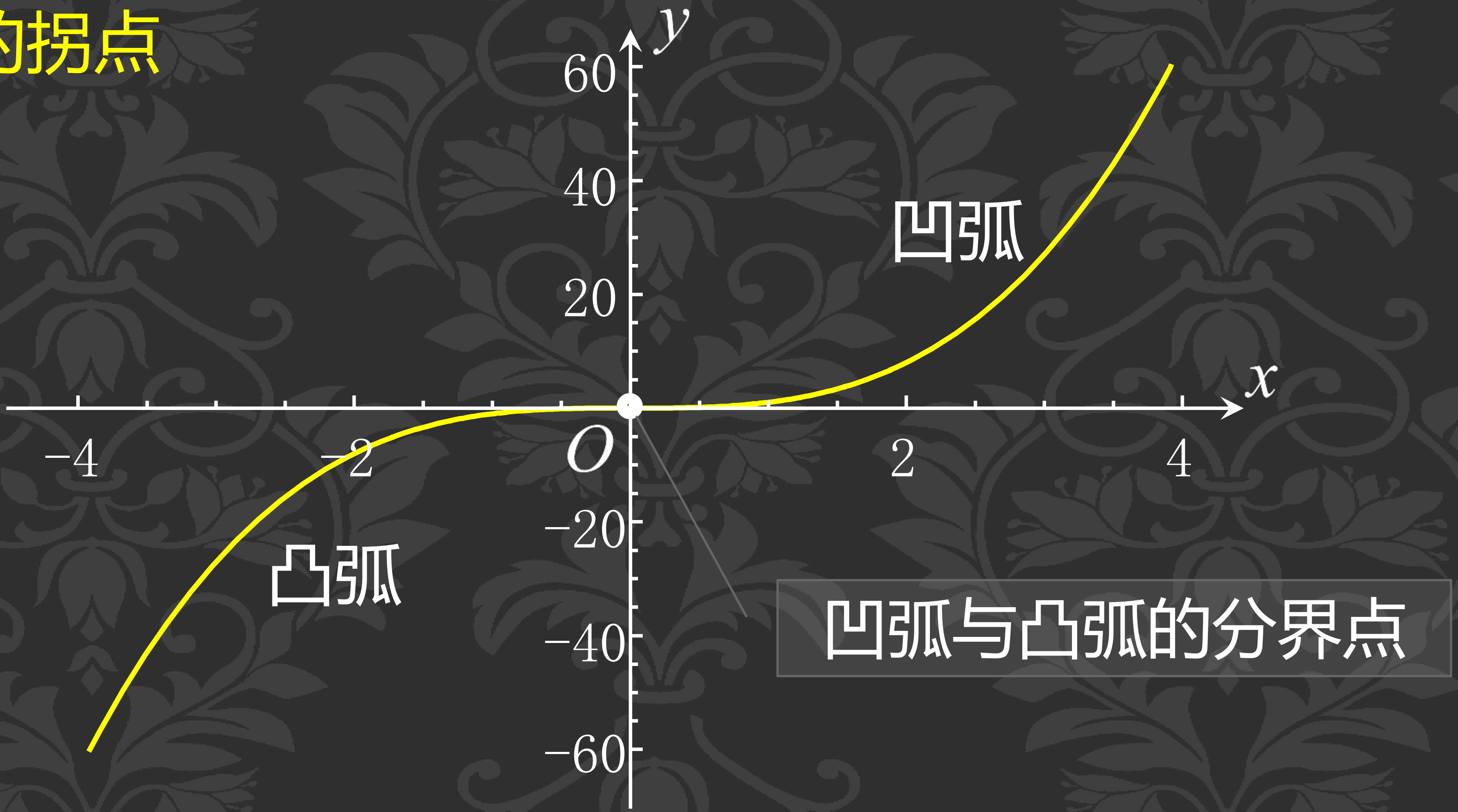
设函数 $f(x)$为可微函数，则 $f(x)$ 为向下凸函数，当且仅当定义域D为凸集，且$f'(x)$是单调函数，即

$$\left(f'(x) - f'(y)\right)(x - y) \geq 0 \qquad \forall x, y \in D$$

当函数为多元函数时，上式记为

$$\left(\nabla f(x) - \nabla f(y)\right)(x - y) \geq 0 \qquad \forall x, y \in D$$

曲线的拐点



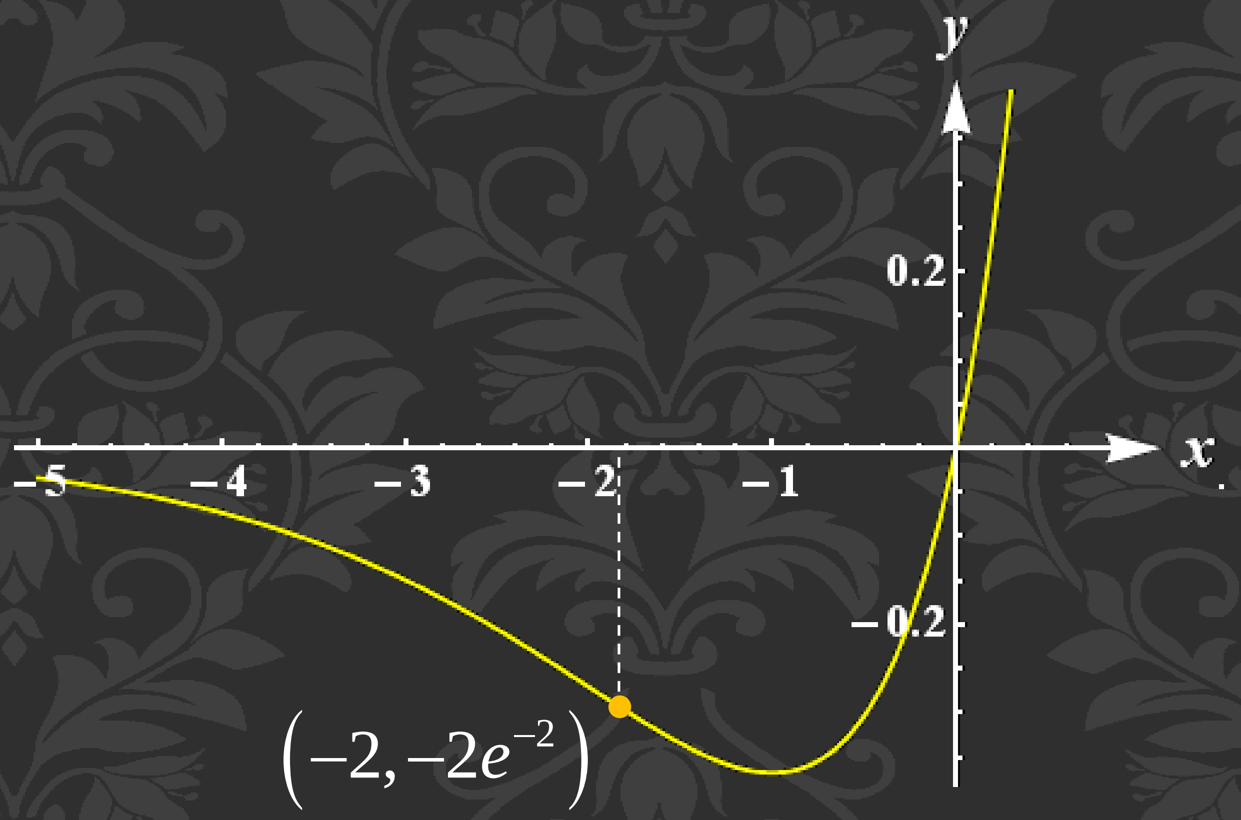
连续曲线凹弧和凸弧的分界点称为曲线的**拐点**.

定理6 $f(x)$ 在 (a, b) 内具有二阶导数，$x_0 \in (a, b)$，若$(x_0, f(x_0))$为曲线$y = f(x)$的拐点且$f''(x)$在x_0处连续，则$f''(x_0) = 0$.

定理7 （拐点第一充分条件） 设函数 $f(x)$ 在 (a, b) 内有二阶导数. 若 $f''(x)$在 x_0 的左、右两侧附近异号，则点 $(x_0, f(x_0))$为曲线 $y = f(x)$的一个拐点.

定理8 （拐点第二充分条件） 设函数 $f(x)$ 在 (a, b) 内具有三阶导数，且 $f''(x_0) = 0$, $f'''(x_0) \neq 0$则点 $(x_0, f(x_0))$ 为曲线 $y = f(x)$ 的拐点.

例5 求曲线 $y = xe^x$ 的凹凸区间和拐点.



高等数学

3.6 用导数研究函数形态

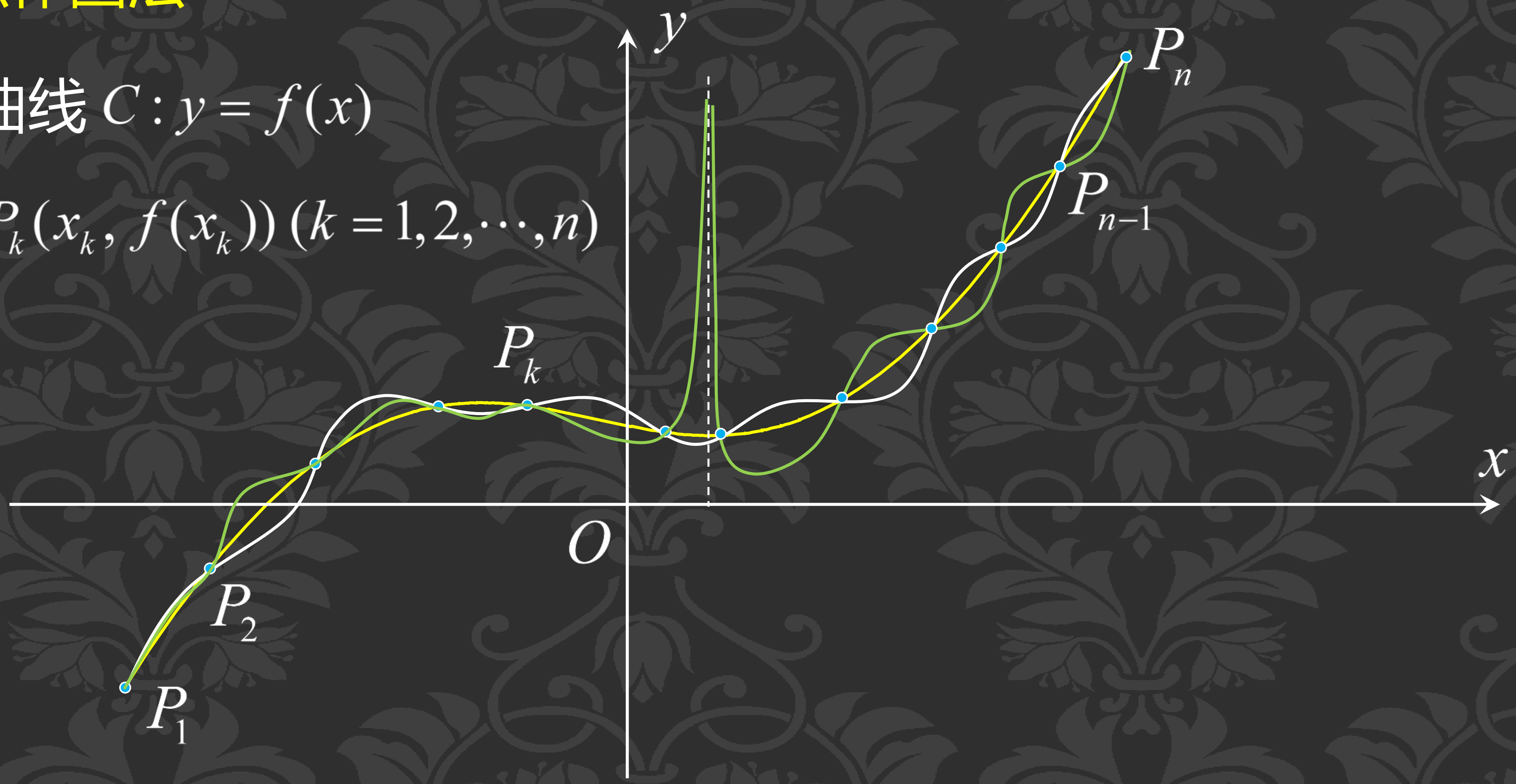
基础部数学教研室

郑治中

描点作图法

描绘曲线 $C: y = f(x)$

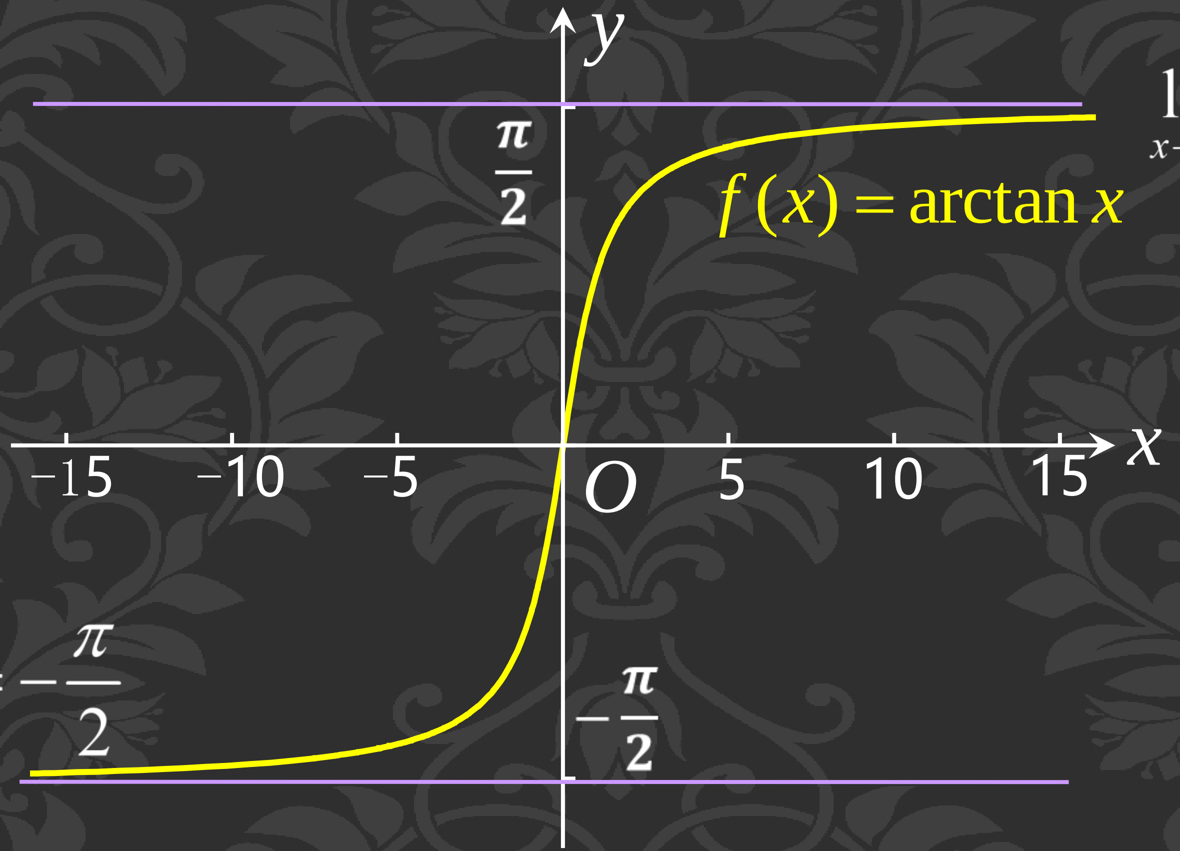
取点 $P_k(x_k, f(x_k))\ (k = 1, 2, \cdots, n)$



函数图形特性	条件	结论	示例
增减性	$f'(x)>0$	$f(x)$ 增	$f(x)=x$
	$f'(x)<0$	$f(x)$ 减	$f(x)=-x$
凹凸性	$f''(x)>0$	$f(x)$ 下凸（凹）	$f(x)=x^2$
	$f''(x)<0$	$f(x)$ 上凸（凸）	$f(x)=-x^2$

<table>
<tr><th>点的类型</th><th>极值点与拐点判定方法</th><th>示例</th></tr>
<tr><td rowspan="2">极值点
x_0</td><td>$f'(x)$ 在 x_0 两侧异号</td><td rowspan="2">$y=x^2, y=-x^2$
极值点$x_0=0$</td></tr>
<tr><td>$f'(x_0)=0, f''(x_0)\neq 0$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">拐点
$(x_0, f(x_0))$</td><td>$f''(x)$ 在 x_0 两侧异号</td><td rowspan="2">$y=x^3$
拐点$(0,0)$</td></tr>
<tr><td>$f''(x_0)=0, f'''(x_0)\neq 0$</td></tr>
</table>

变化趋势——接近水平直线 $y=0,\ y=\pm\dfrac{\pi}{2}$



$$\lim_{x\to+\infty}\arctan x=\frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x\to-\infty}\arctan x=-\frac{\pi}{2}$$

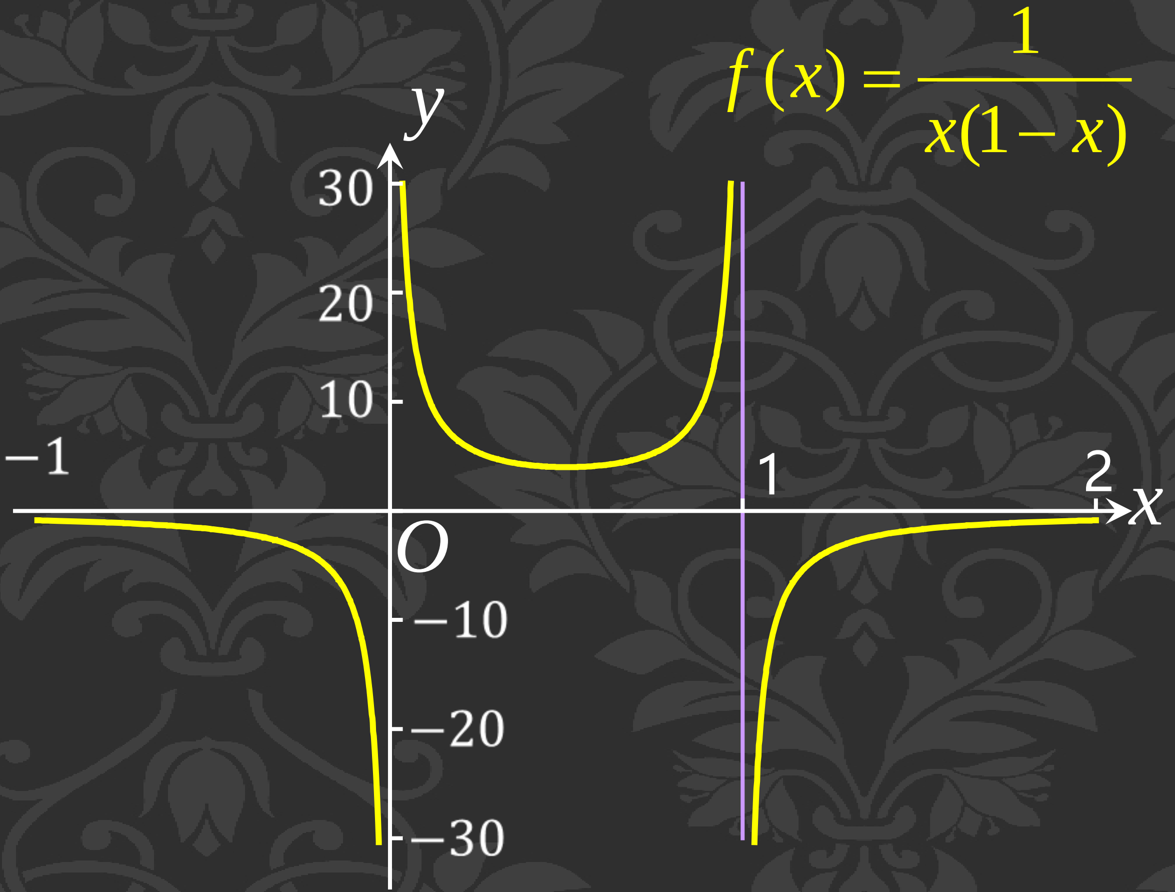
变化趋势——接近铅直直线　$x=0,\ x=1$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = -\infty$$

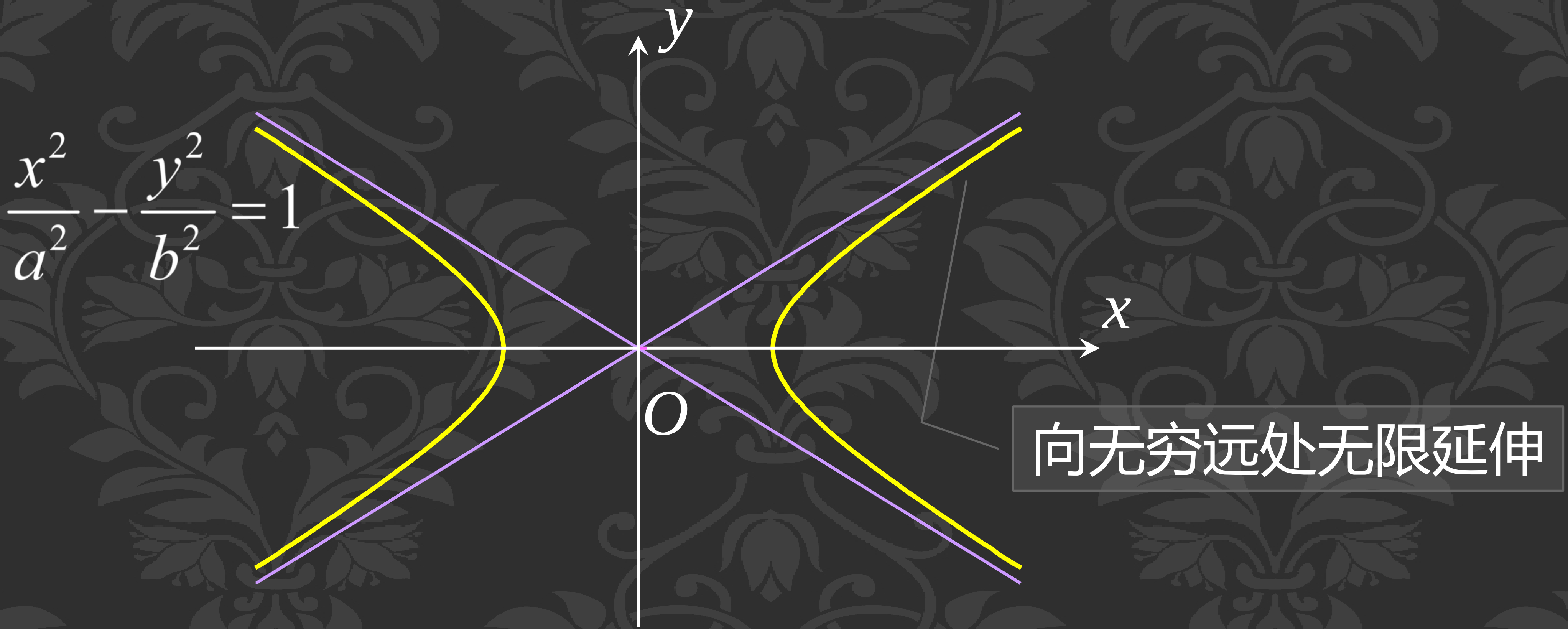
$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$$

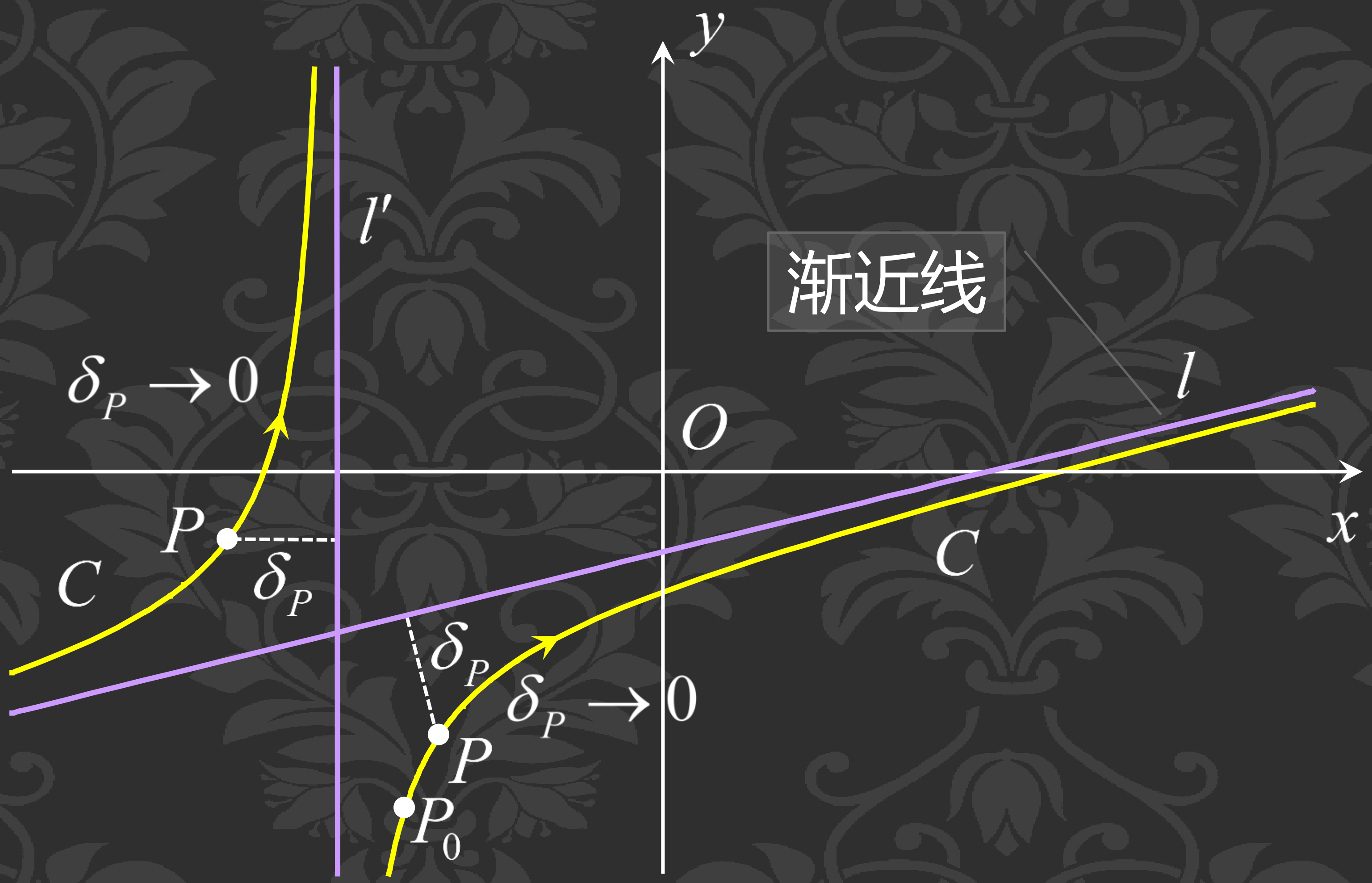
$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = -\infty$$



变化趋势——接近斜直线 $y=\pm\dfrac{b}{a}x$





定义1 直线l称为曲线 C 的**渐近线**，若点 P 沿 C 的某一支无限远离某一定点P_0时动点 P 到直线l的距离

$$\delta_P \to 0.$$

定理1（曲线渐近线的求法）

（1）曲线 $C: y=f(x)\,(a<x<+\infty)$ 存在水平渐近线 $y=b$ 的充要条件是：$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=b$.

（2）曲线 $C: y=f(x)\,(a<x<b)$ 存在铅直渐近线 $x=a$ 的充要条件是：$\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$.

（3）曲线 $C: y=f(x)\,(a<x<+\infty)$ 存在斜渐近线 $y=kx+b$ 的充要条件是：$k=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x},\ b=\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-kx],\ k\neq 0$.

定理1（曲线渐近线的求法）

（3）曲线

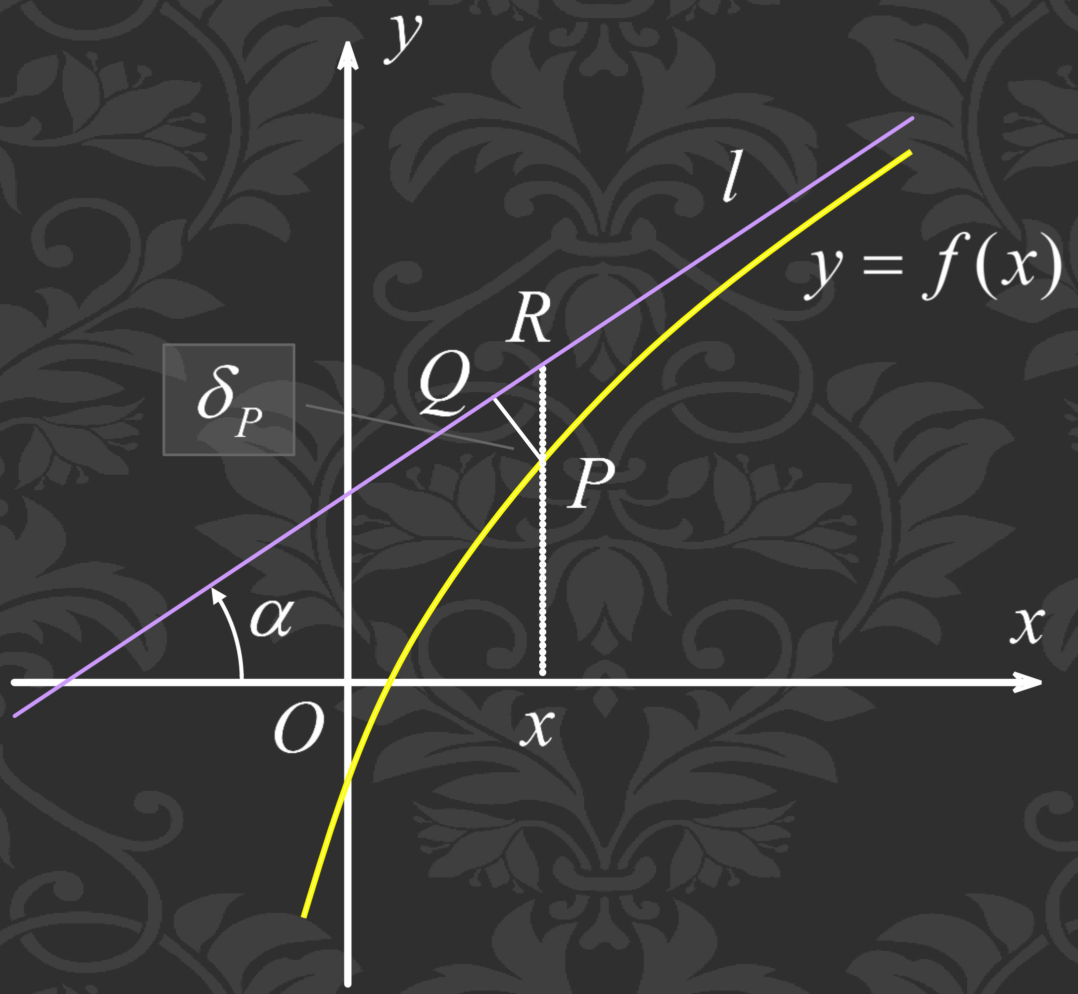
$C: y = f(x)\,(a < x < +\infty)$

存在斜渐近线 $y = kx + b$

的充要条件是：

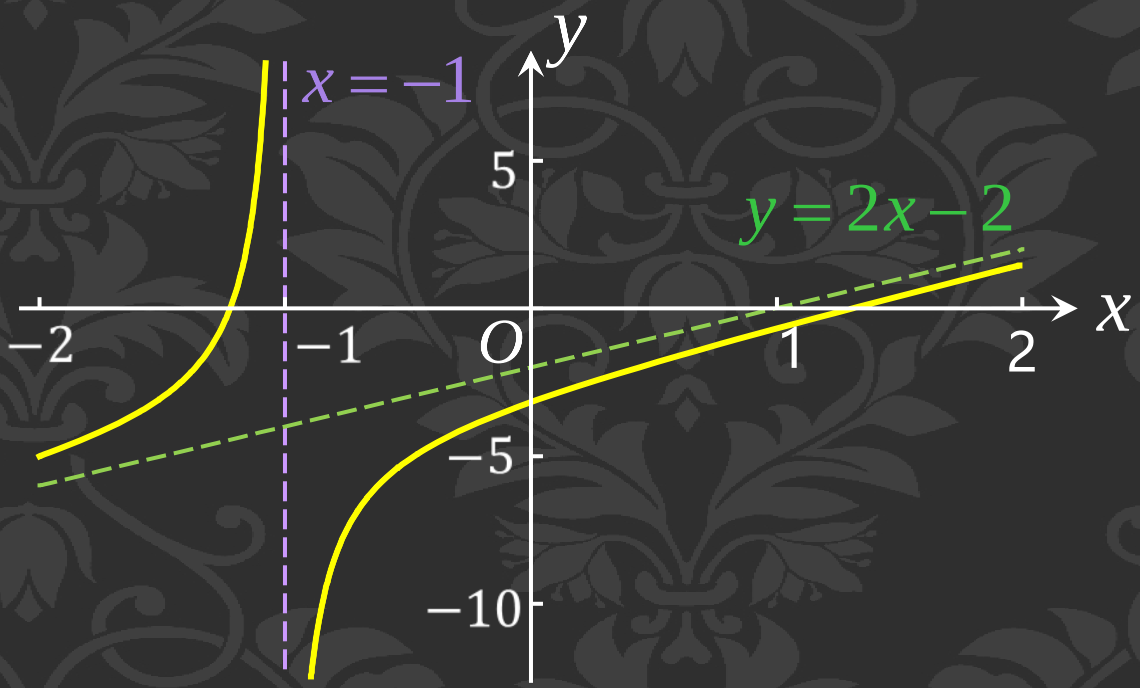
$$k = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x},\ k \neq 0$$

$$b = \lim_{x \to +\infty} [f(x) - kx].$$



例6 求双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 的斜渐近线.

例7 求曲线 $f(x)=\dfrac{2x^2-3}{x+1}$ 的渐近线.



分析作图法

第一步: 函数的一般性质分析：确定函数 $f(x)$ 的定义域、值域、奇偶性、周期性与坐标轴的交点；

第二步: 求一阶导数 $f'(x)$ 和二阶导数 $f''(x)$，确定使 $f'(x)=0$ 的点及 $f'(x)$ 不存在的点，以及使 $f''(x)=0$ 的点及 $f''(x)$ 不存在的点，即找出函数 $f(x)$ 的可能极值点和拐点；

第三步: 列表分析，分别根据 $f'(x)$ 及 $f''(x)$ 的符号确定 $f(x)$ 的单调区间和凹凸区间、极值点和拐点；

第四步: 用渐近线界定曲线的变化趋势．求水平渐近线、铅垂渐近线和斜渐近线;

第五步: 描点作图，并标出关键点的坐标，使 $y = f(x)$ 的图形轮廓清晰，特征分明．

例8 作出函数 $y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ 的图形.

定理 Jeason不等式

$f(x)$在 (a, b) 内二阶可导，$f''(x) \geq 0$，$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n \in (0,1)$，$\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = 1$，若$x_1, x_2, \cdots, x_n \in (a, b)$，则

$$f(\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n) \leq \lambda_1 f(x_1) + \cdots + \lambda_n f(x_n),$$

若$f''(x) > 0$,则等号成立当且仅当$x_1 = \cdots = x_n$.