高等数学



2.1 导数的概念

基础部数学教研室

郑治中

"问题是数学的心脏"

保罗·哈尔莫斯

问题1：已知物体运动的路程与时间的关系，求物体在任意时刻的速度和加速度.

问题2：求曲线的切线.

由解决相关问题而发展起来的数学理论称为微分学！

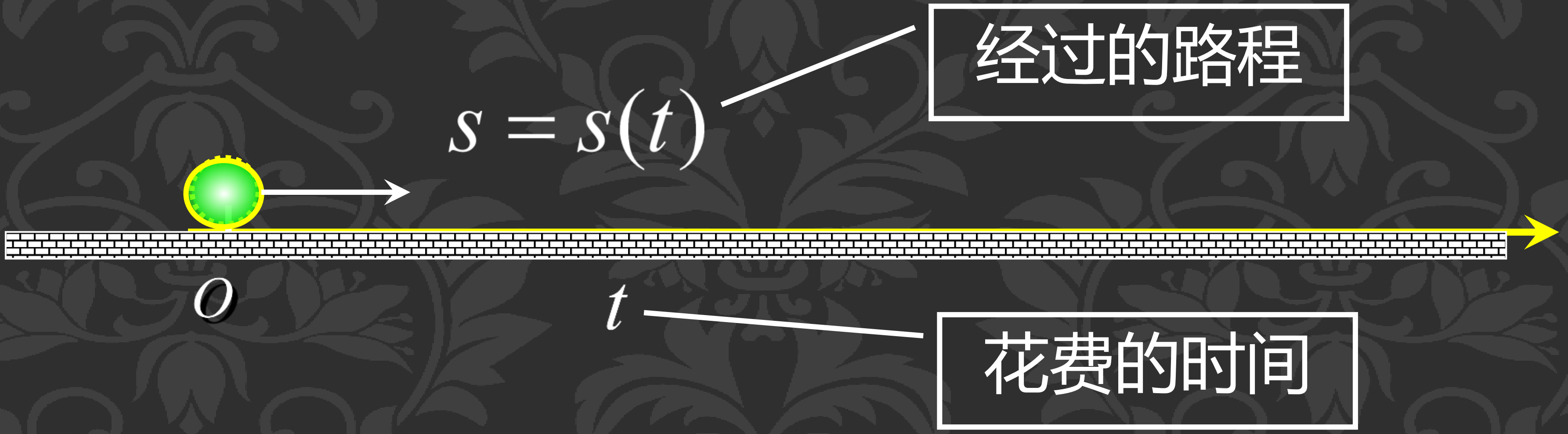
引例

导数的定义及几何意义

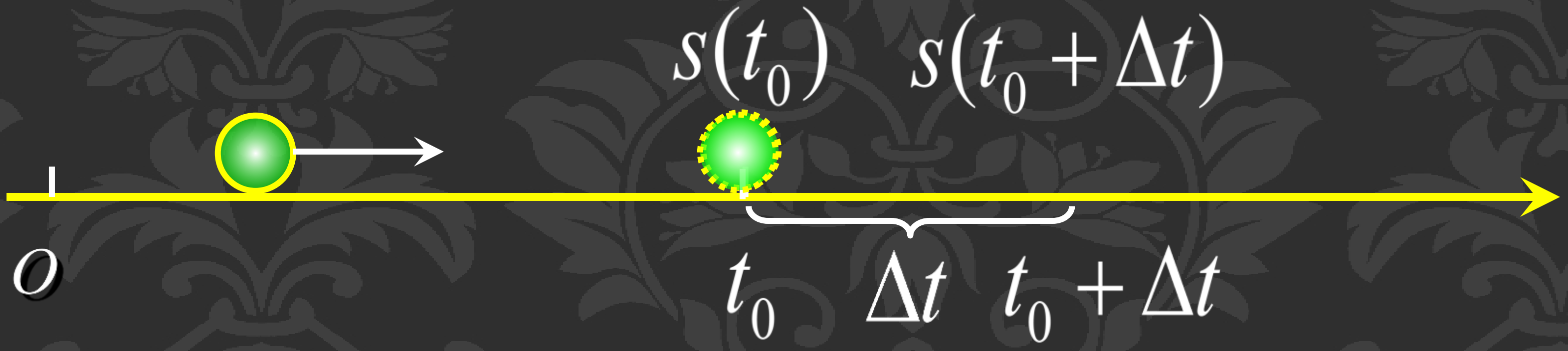
导数存在的条件

导函数

问题1　求变速直线运动的瞬时速度



匀速直线运动的速度：$v = \dfrac{\text{经过的路程}}{\text{所花的时间}}$

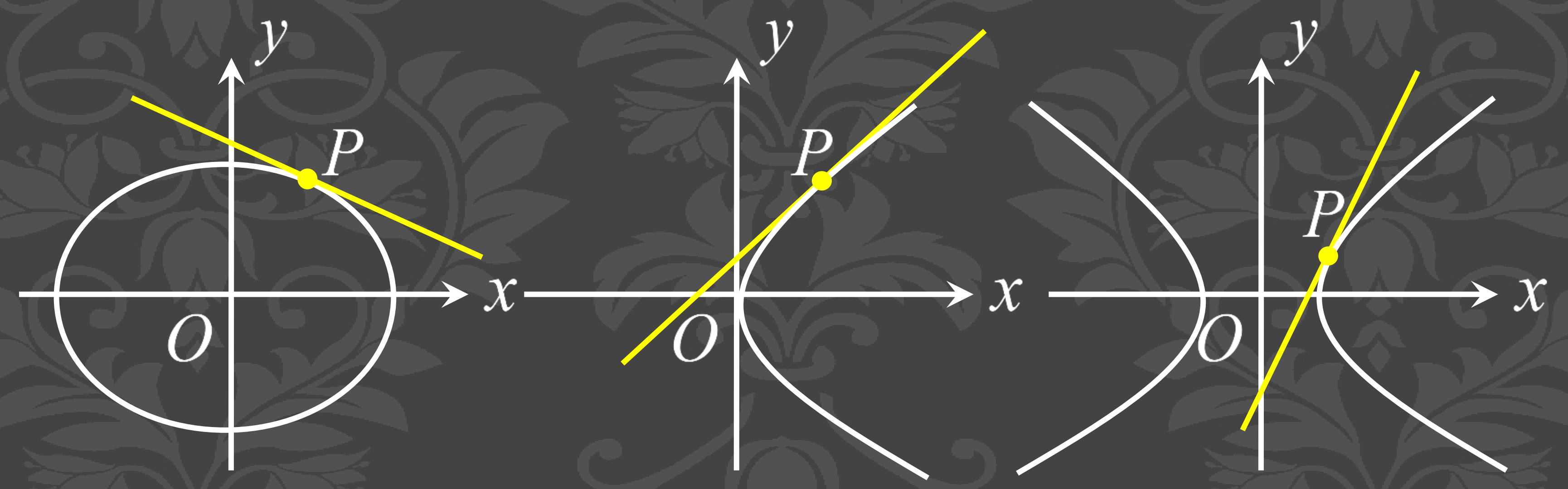


变速直线运动的平均速度： $\bar{v}=\dfrac{s(t_0+\Delta t)-s(t_0)}{\Delta t}$

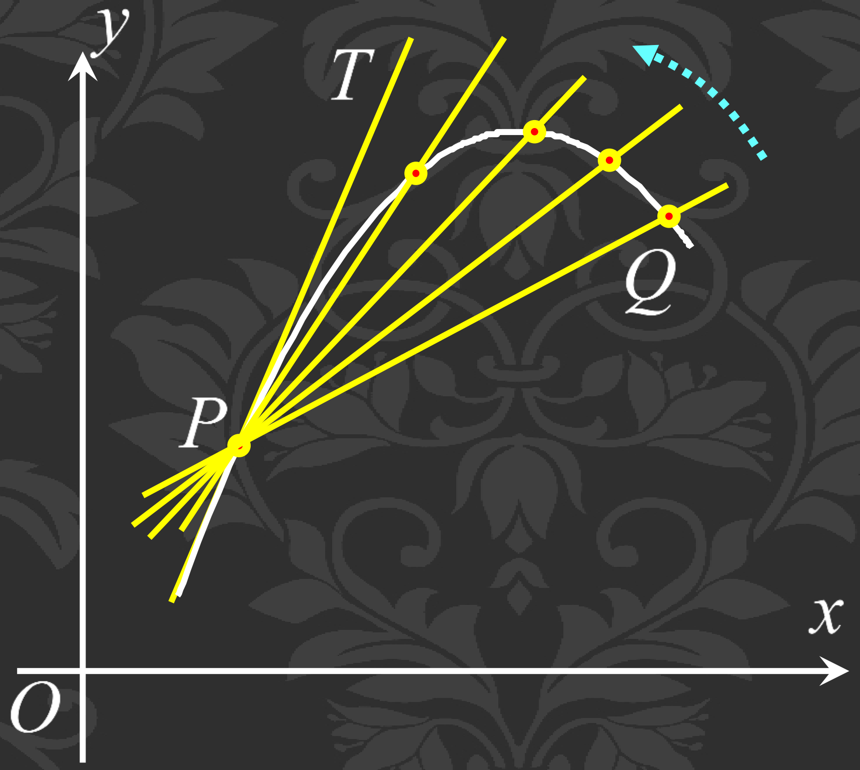
在 t_0 时刻的**瞬时速度**为 $v(t_0)=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{s(t_0+\Delta t)-s(t_0)}{\Delta t}$

问题2　求曲线的切线

欧几里德定义圆锥曲线的切线：和曲线只接触一点而且位于曲线一边的直线.



一般曲线的切线 —— 割线的极限状态



一般曲线的切线 —— 割线的极限状态

割线的斜率：

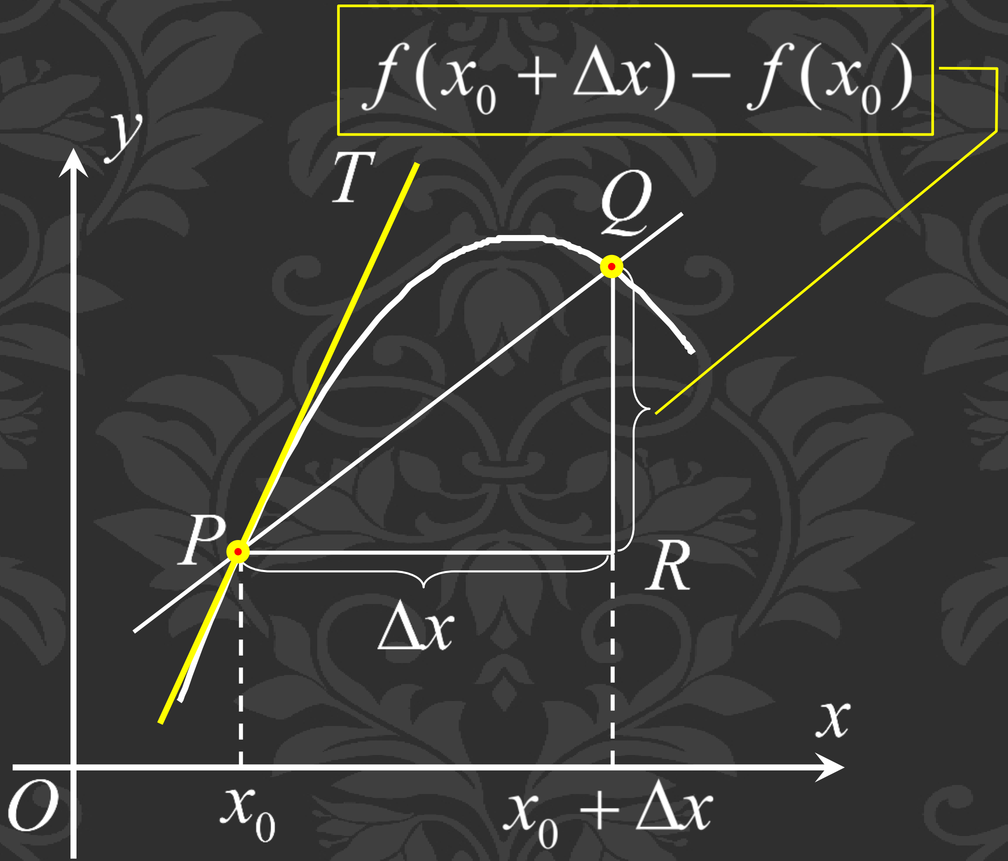
$$k_{PQ}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

切线的斜率：

$$k=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

切线方程

$$y=k(x-x_0)+f(x_0)$$



变速直线运动的瞬时速度

$$v(t_0)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{s(t_0+\Delta t)-s(t_0)}{\Delta t}$$

曲线切线的斜率

$$k=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

瞬时变化率

问题的共性:

所求量为函数增量与自变量增量之比的极限 .

定义1 设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某个邻域内有定义，若极限

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

存在，则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 处**可导**，其极限值称为函数 $f(x)$ 在 x_0 处的**导数**，记为

$$f'(x_0) \quad 或 \quad y'_x\Big|_{x=x_0}, \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\Big|_{x=x_0}, \quad \frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}\Big|_{x=x_0}.$$

若上述极限不存在，则称函数 $f(x)$ 在 x_0 处**不可导**.

变速直线运动的瞬时速度

$$v(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)}{\Delta t} = s'(t_0)$$

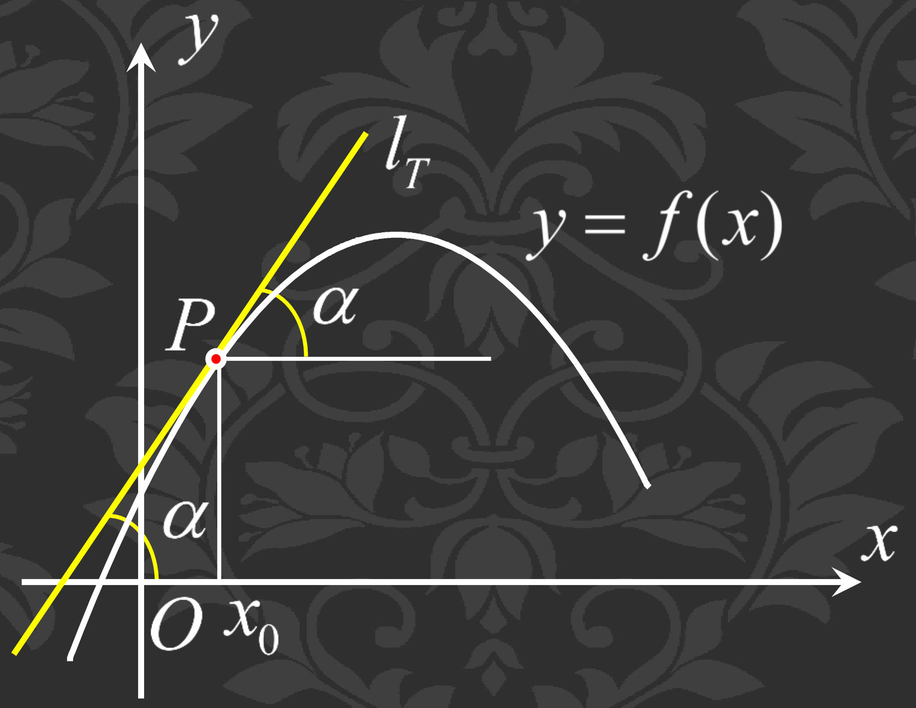
切线的斜率

$$k = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0)$$

导数的几何意义

如果函数 $f(x)$ 在点 x_0 处可导，则在几何上 $f'(x_0)$ 表示曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_0, f(x_0))$ 处的**切线的斜率**.

$$f'(x_0)=\tan\alpha$$



切线方程:

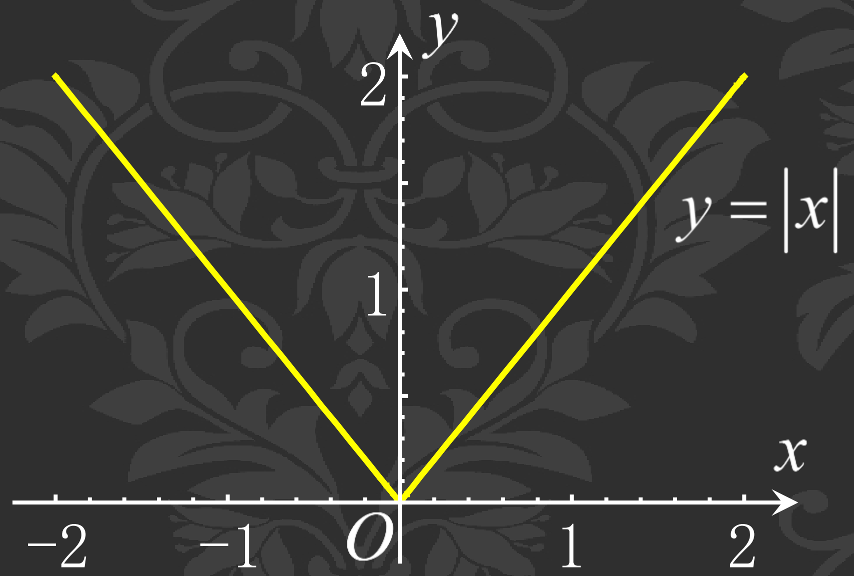
$$l_T: y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$$

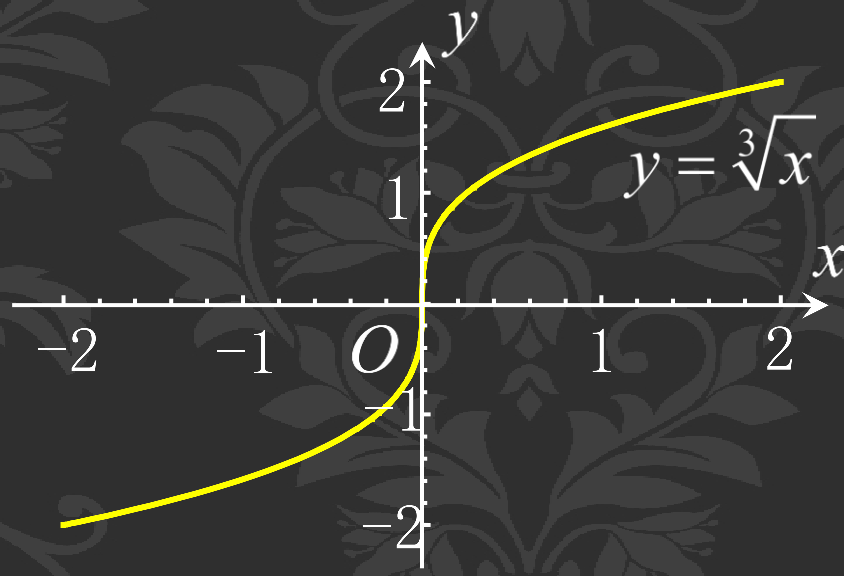
- 导数 $f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$
- 左导数 $f'_-(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$
- 右导数 $f'_+(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$

定理1 函数 $f(x)$ 在 x_0 处可导的充要条件是它在 x_0 的左、右导数存在且相等.

定理2 若函数 $f(x)$ 在 x_0 可导，则 $f(x)$ 一定在 x_0 处连续.

例1 函数 $f(x)=|x|$ 在 $x=0$ 处连续但不可导.

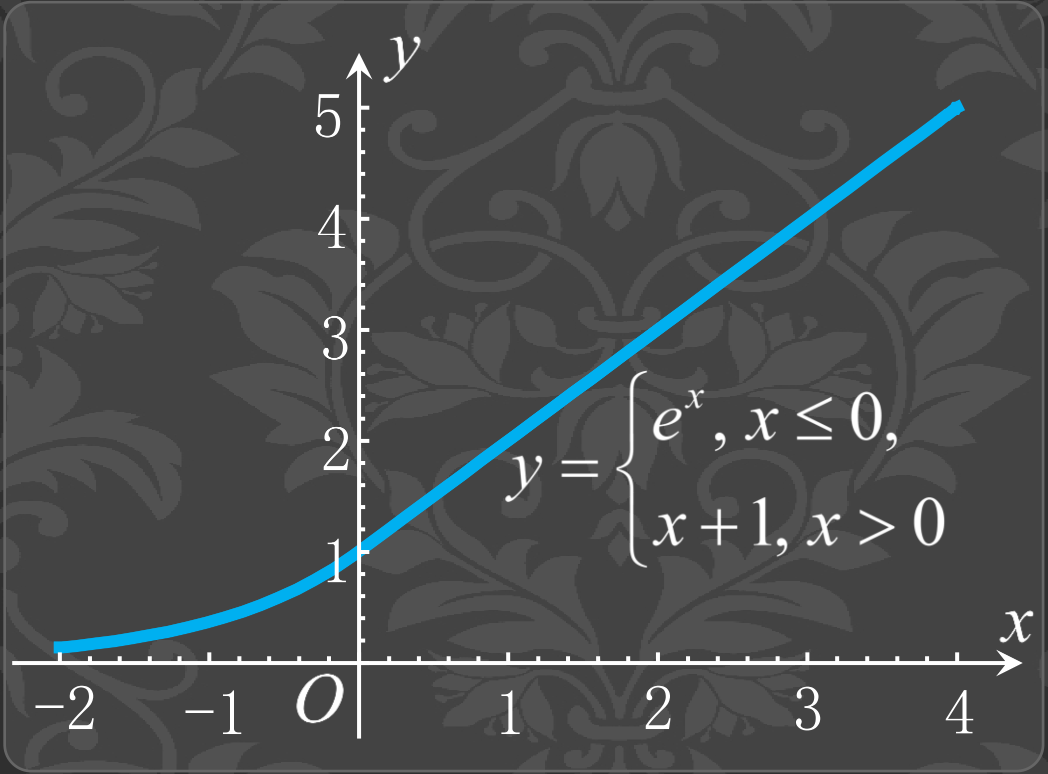




例2 求常数 a, b, 使函数$f(x)=\begin{cases} ax+b, & x>0, \\ e^x, & x\le 0 \end{cases}$在$x=0$处连续且可导.

例3 讨论函数在$x=0$处连续性和可导性

$$f(x)=\begin{cases} x^a \sin\frac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$$



例4 函数$f(x)=\begin{cases} e^{x^2}, & x\le 1 \\ ax+b, & x>1 \end{cases}$要使$f'(1)$存在，则$a,b$取何值?

例5 讨论$f(x)=x^2D(x)$的可导性

定义2　如果函数 $y=f(x)$ 在 (a,b) 内的每一点都可导，则称函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内可导. 如果函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内可导，且 $f'_{+}(a)$ 与 $f'_{-}(b)$ 都存在，则称函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上可导. 导数对应的函数 $f'(x)$ 称为原来函数 $f(x)$ 的导函数，简称导数，记为

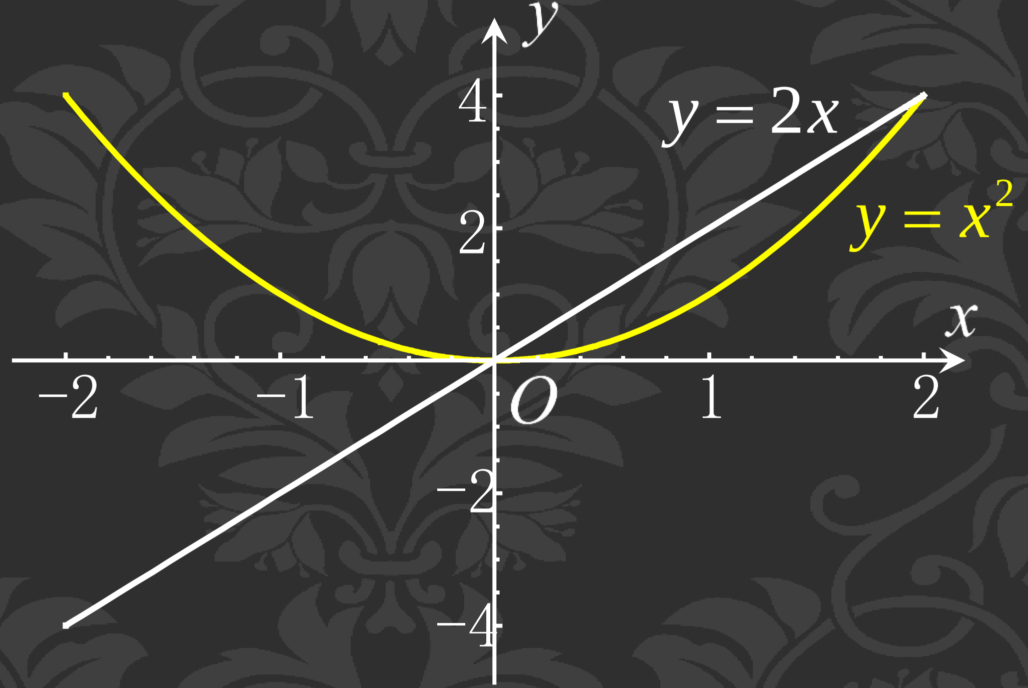
$$y',\ f'(x),\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x},\ \frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}.$$

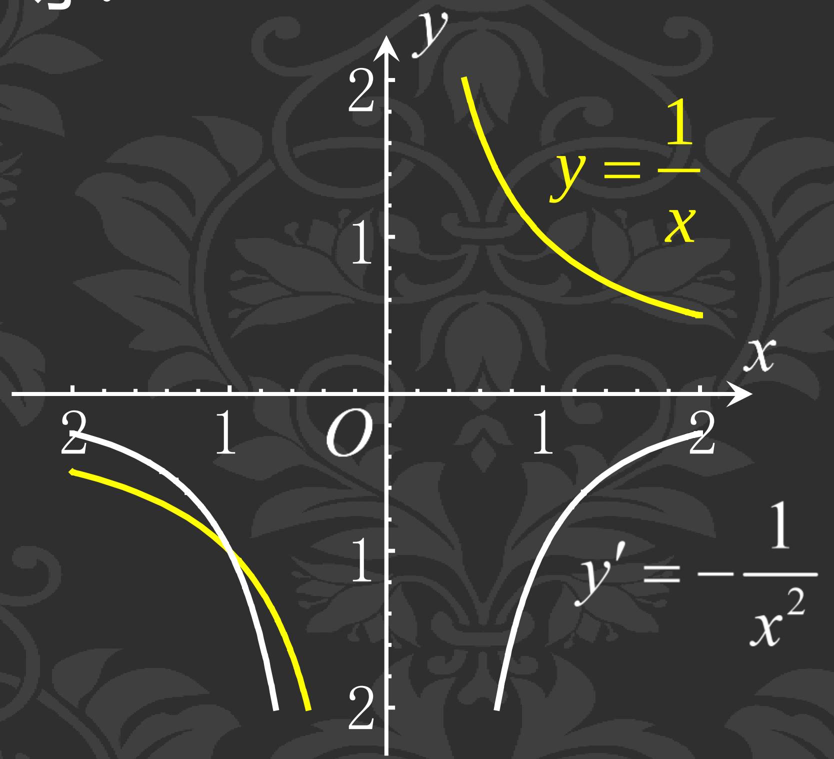
导函数的定义式为:　$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h},x\in(a,b).$$

例6 求常值 $f(x)=C$ 函数（C 为常数）的导数.

例7 求函数 $f(x)=x^2$ 的导数.

例8 证明函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在 $x\neq 0$ 处均可导.





例9 求函数$y=\sin x, y=\cos x, y=a^{x}, y=\log_{a}x$的导数

例10 研究$H(x)=\begin{cases}1, & x\geq 0\\ 0, & x<0\end{cases}$的可导性

例11 能否用以下式子定义函数在某点的可导性

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h}$$

例12 设$f(x)$在$x=0$处连续，$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=1$,求$f'(0)$.

例13 设$f(x)=|x^3-1|g(x)$, 其中$g(x)$在$x=1$点连续，求$g(1)$, 使得$f(x)$ $x=1$点可导.

例14 利用导数定义求$\lim\limits_{n\to\infty} n(\sqrt[n]{a}-1)$.

例15 利已知$f'(a)$存在，且$f(x)>0$,求$\lim\limits_{n\to\infty}[\frac{f\left(a+\frac{1}{n}\right)}{f(a)}]^n$.

例16 设$f(x)$可导，$F(x)=f(x)(1+|sinx|)$, 则$f(0)=0$是$F(x)$在$x=0$处可导的（　　）

A.充分必要条件　　B.充分条件但非必要条件

C.必要条件但非充分条件　　D.既非充分又非必要条件

例17 设 $f(x)=(x^2-x-2)|x^3-x|$ 不可导点的个数（　　）

A.3　　B.2　　C.1　　D. 0