故应填$\frac{\pi}{4}$.

习题 5—4 解答

1. 判定下列各反常积分的收敛性,如果收敛,计算反常积分的值:

(1) $\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^4}$;　　(2) $\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}$;

(3) $\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-ax}\mathrm{d}x(a>0)$;　　(4) $\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(1+x)(1+x^2)}$;

(5) $\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-pt}\sin\omega t\mathrm{d}t(p>0,\omega>0)$;　　(6) $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^2+2x+2}$;

(7) $\int_0^1\frac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$;　　(8) $\int_0^2\frac{\mathrm{d}x}{(1-x)^2}$;

(9) $\int_1^2\frac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{x-1}}$;　　(10) $\int_1^{\mathrm{e}}\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{1-(\ln x)^2}}$.

解 (1) $\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^4}=\left[-\frac{1}{3x^3}\right]_1^{+\infty}=\frac{1}{3}$.

(2) $\int_1^t\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}=\left[2\sqrt{x}\right]_1^t=2\sqrt{t}-2$, 当 $t\to+\infty$时,该极限不存在,故该反常积分发散.

(3) $\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-ax}\mathrm{d}x=\left[-\frac{1}{a}\mathrm{e}^{-ax}\right]_0^{+\infty}=\frac{1}{a}$.

(4) $$\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(1+x)(1+x^2)}=\int_0^{+\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+x}+\frac{1-x}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x$$
$$=\left[\frac{1}{4}\ln\frac{(1+x)^2}{1+x^2}+\frac{1}{2}\arctan x\right]_0^{+\infty}=\frac{\pi}{4}.$$

(5) $$\int\mathrm{e}^{-pt}\sin\omega t\mathrm{d}t=-\frac{1}{p}\int\sin\omega t\mathrm{d}(\mathrm{e}^{-pt})=-\frac{1}{p}\mathrm{e}^{-pt}\sin\omega t+\frac{\omega}{p}\int\mathrm{e}^{-pt}\cos\omega t\mathrm{d}t$$
$$=-\frac{1}{p}\mathrm{e}^{-pt}\sin\omega t-\frac{\omega}{p^2}\int\cos\omega t\mathrm{d}(\mathrm{e}^{-pt})$$
$$=-\frac{1}{p}\mathrm{e}^{-pt}\sin\omega t-\frac{\omega}{p^2}\mathrm{e}^{-pt}\cos\omega t-\frac{\omega^2}{p^2}\int\mathrm{e}^{-pt}\sin\omega t\mathrm{d}t,$$

因此 $\int\mathrm{e}^{-pt}\sin\omega t\mathrm{d}t=\frac{-p\mathrm{e}^{-pt}\sin\omega t-\omega\mathrm{e}^{-pt}\cos\omega t}{p^2+\omega^2}+C$,故

$$\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-pt}\sin\omega t\mathrm{d}t=\left[\frac{-p\mathrm{e}^{-pt}\sin\omega t-\omega\mathrm{e}^{-pt}\cos\omega t}{p^2+\omega^2}\right]_0^{+\infty}=\frac{\omega}{p^2+\omega^2}.$$

(6) $$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^2+2x+2}=\int_{-\infty}^0\frac{\mathrm{d}(x+1)}{(x+1)^2+1}+\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}(x+1)}{(x+1)^2+1}$$
$$=\left[\arctan(x+1)\right]_{-\infty}^0+\left[\arctan(x+1)\right]_0^{+\infty}=\pi.$$

(7) $\int_0^1\frac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}=\left[-\sqrt{1-x^2}\right]_0^1=1$.

(8) $\int_0^t\frac{\mathrm{d}x}{(1-x)^2}=\left[\frac{1}{1-x}\right]_0^t=\frac{1}{1-t}-1$,当 $t\to1^-$ 时极限不存在,故原反常积分发散.

(9) $\int_1^2\frac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{x-1}}\xlongequal{x=u^2+1}2\int_0^1(u^2+1)\mathrm{d}u=\frac{8}{3}$.

(10) $\int_1^{\mathrm{e}}\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{1-(\ln x)^2}}=\int_1^{\mathrm{e}}\frac{\mathrm{d}(\ln x)}{\sqrt{1-(\ln x)^2}}=\left[\arcsin\ln x\right]_1^{\mathrm{e}}=\frac{\pi}{2}$.

2. 求由曲线 $y=\dfrac{1}{4x^2-1}$、x 轴和直线 $x=1$ 所围成的向右无限延伸的图形的面积.

解 $S=\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{1}{4x^2-1}\mathrm{d}x=\frac{1}{4}\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2-\frac{1}{4}}\mathrm{d}x=\frac{1}{4}\times\frac{1}{2\times\frac{1}{2}}\ln\left|\frac{x-\frac{1}{2}}{x+\frac{1}{2}}\right|\Bigg|_1^{+\infty}=\frac{1}{4}\left(0-\ln\frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}}\right)=\frac{1}{4}\ln 3.$

3. 当 k 为何值时，反常积分 $\displaystyle\int_2^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x(\ln x)^k}$ 收敛？当 k 为何值时，这反常积分发散？又当 k 为何值时，这反常积分取得最小值？

3 题视频解析

解 $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{x(\ln x)^k}=\int\frac{\mathrm{d}(\ln x)}{(\ln x)^k}=\begin{cases}\ln\ln x+C, & k=1,\\ -\dfrac{1}{(k-1)\ln^{k-1}x}+C, & k\neq 1,\end{cases}$

因此当 $k\leqslant 1$ 时，反常积分发散；当 $k>1$ 时，该反常积分收敛，此时

$$\int_2^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x(\ln x)^k}=\left[-\frac{1}{(k-1)\ln^{k-1}x}\right]_2^{+\infty}=\frac{1}{(k-1)(\ln 2)^{k-1}}.$$

记 $f(k)=\dfrac{1}{(k-1)(\ln 2)^{k-1}}$，则

$$\begin{aligned}f'&=-\frac{1}{(k-1)^2(\ln 2)^{2k-2}}\left[(\ln 2)^{k-1}+(k-1)(\ln 2)^{k-1}\ln\ln 2\right]\\&=-\frac{1+(k-1)\ln\ln 2}{(k-1)^2(\ln 2)^{k-1}}.\end{aligned}$$

令 $f'(k)=0$，得 $k=1-\dfrac{1}{\ln\ln 2}$. 当 $1<k<1-\dfrac{1}{\ln\ln 2}$ 时，$f'(k)<0$，当 $k>1-\dfrac{1}{\ln\ln 2}$ 时，$f'(k)>0$，

故 $k=1-\dfrac{1}{\ln\ln 2}$ 为函数 $f(k)$ 的最小值点，即当 $k=1-\dfrac{1}{\ln\ln 2}$ 时所给反常积分取得最小值.

4. 利用递推公式计算反常积分 $I_n=\displaystyle\int_0^{+\infty}x^n\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x\ (n\in\mathbf{N})$.

4 题视频解析

解 $I_0=\displaystyle\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=\left[-\mathrm{e}^{-x}\right]_0^{+\infty}=1.$

当 $n\geqslant 1$ 时，$I_n=-\displaystyle\int_0^{+\infty}x^n\mathrm{d}(\mathrm{e}^{-x})=-\left[x^n\mathrm{e}^{-x}\right]_0^{+\infty}+n\int_0^{+\infty}x^{n-1}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=nI_{n-1}$，

故有 $I_n=n!$.

5. 计算反常积分 $\displaystyle\int_0^1\ln x\mathrm{d}x$.

5 题视频解析

解 $\displaystyle\int\ln x\mathrm{d}x=x\ln x-\int x\cdot\frac{1}{x}\mathrm{d}x=x\ln x-x+C,$

因此 $\displaystyle\int_0^1\ln x\mathrm{d}x=\left[x\ln x-x\right]_0^1=-1-\lim_{x\to 0^+}(x\ln x-x)=-1.$