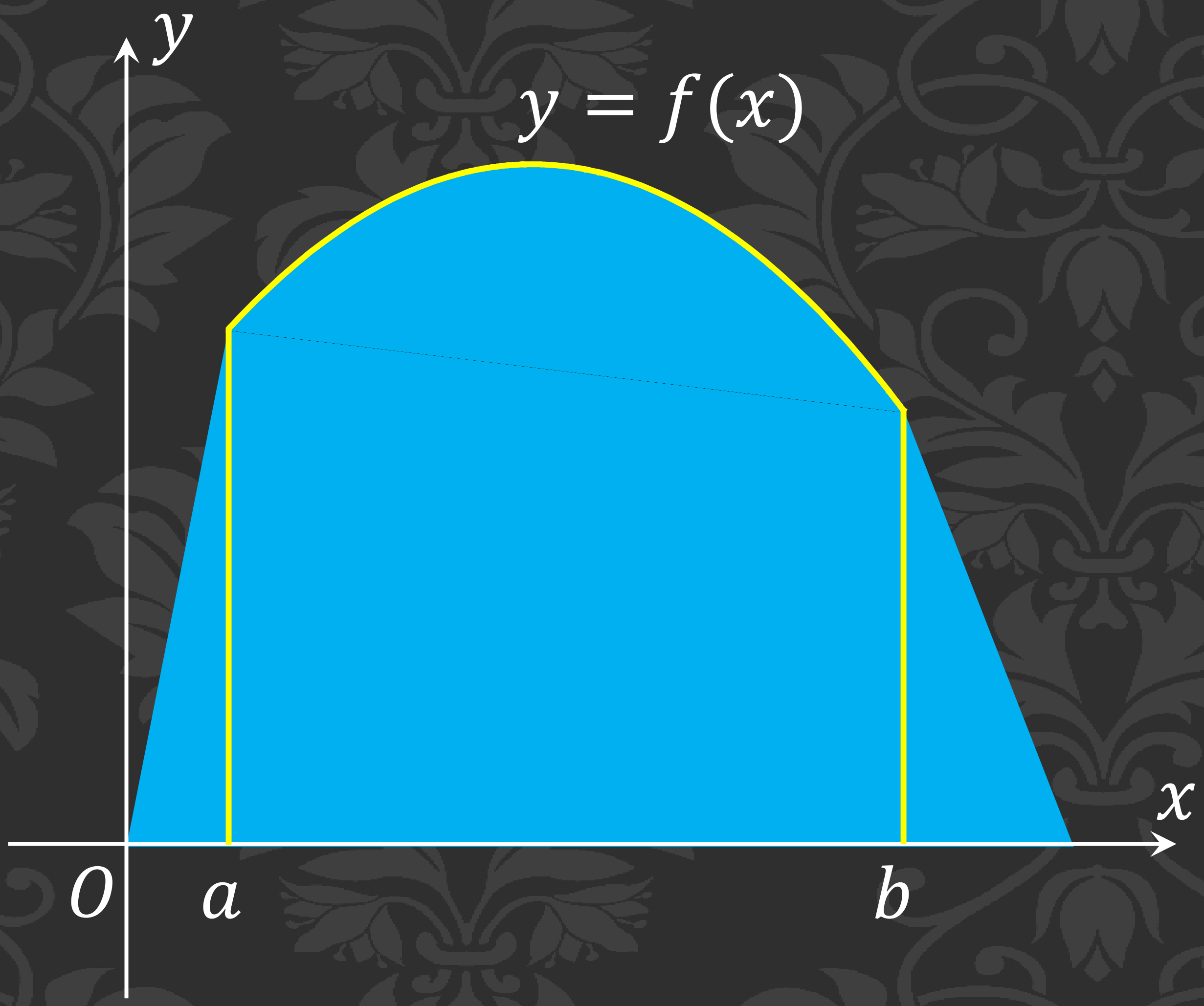
高等数学

5.1定积分

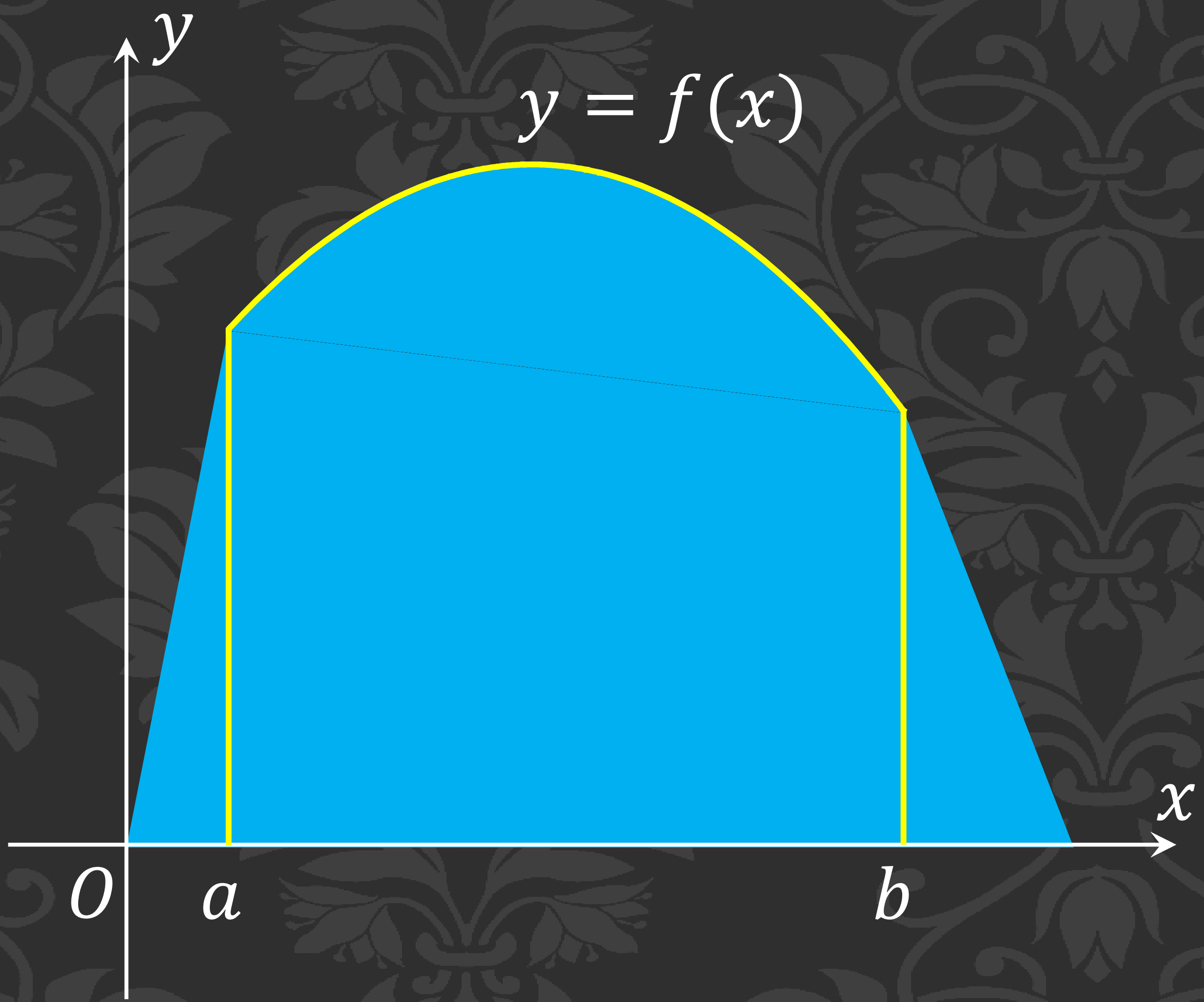
基础部数学教研室

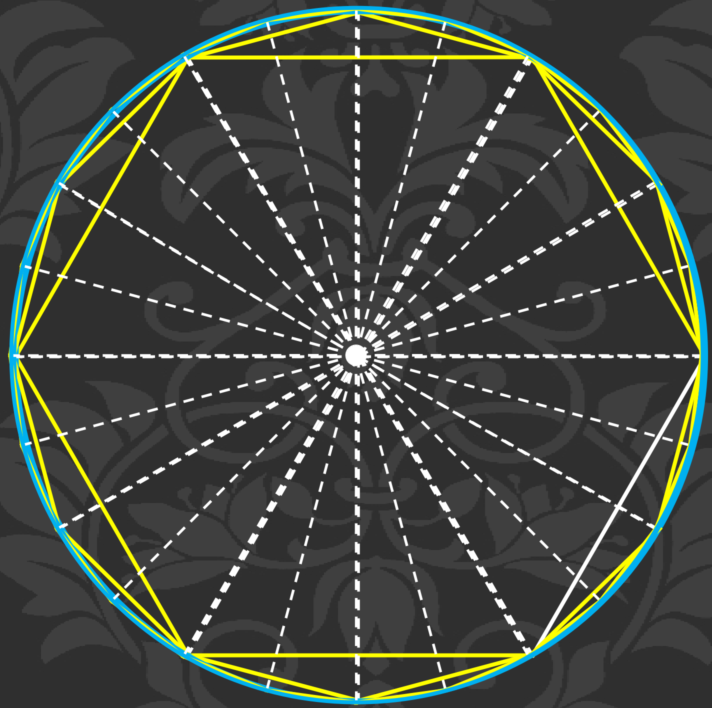
郑治中

大坝的溢流坝



y
$y = f(x)$
x
O
a
b





割圆术

几个典型的定积分问题

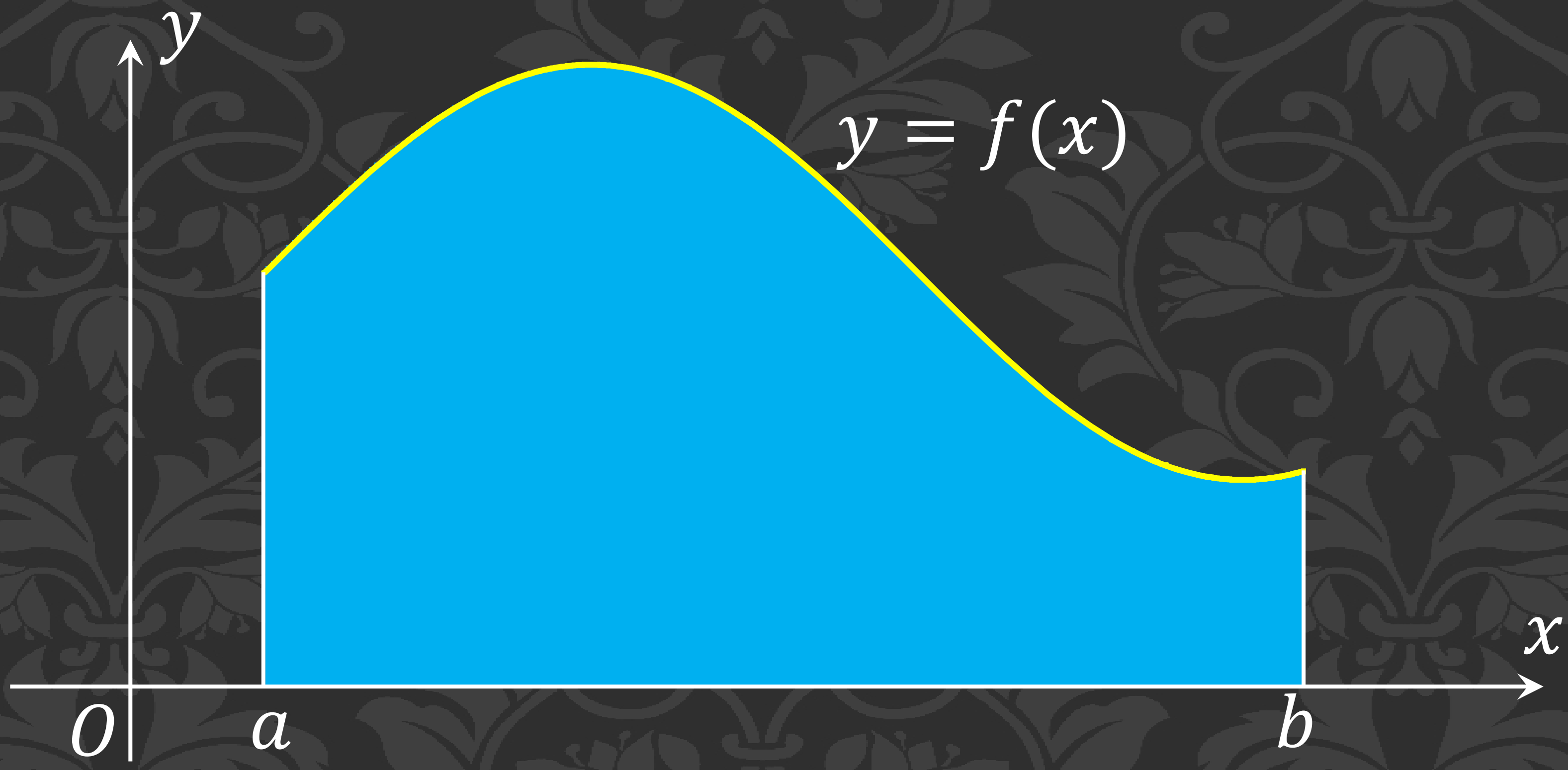
定积分的定义

定积分的几何意义

定积分的基本性质

曲边梯形的面积

曲边梯形是由连续曲线 $y = f(x)$（$f(x) \geq 0$）， x轴及两直线 $x = a, x = b$所围成.

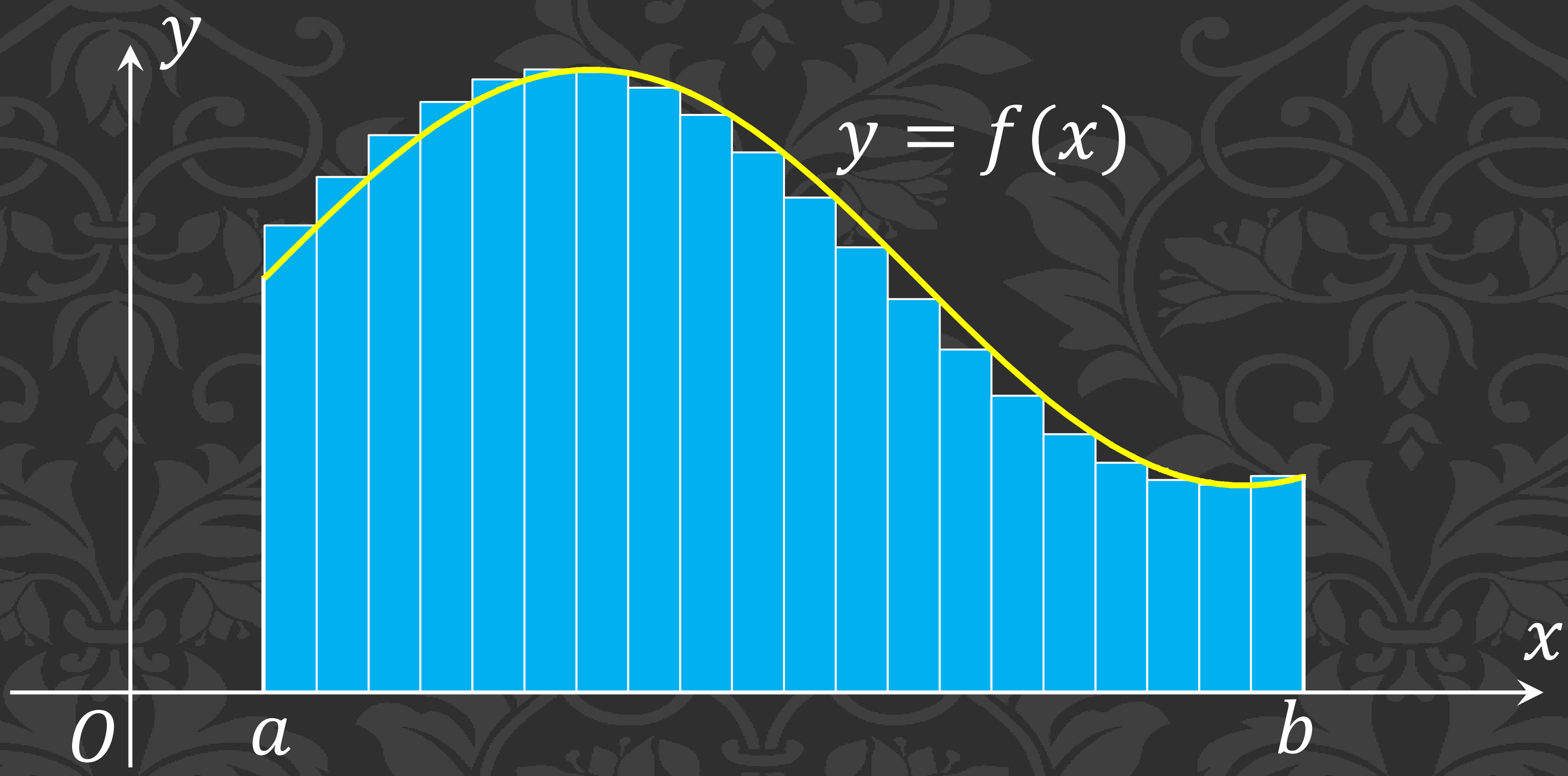


曲边梯形的面积

n等分区间$[a,b]$，用小矩形的面积近似小曲边梯形的面积.

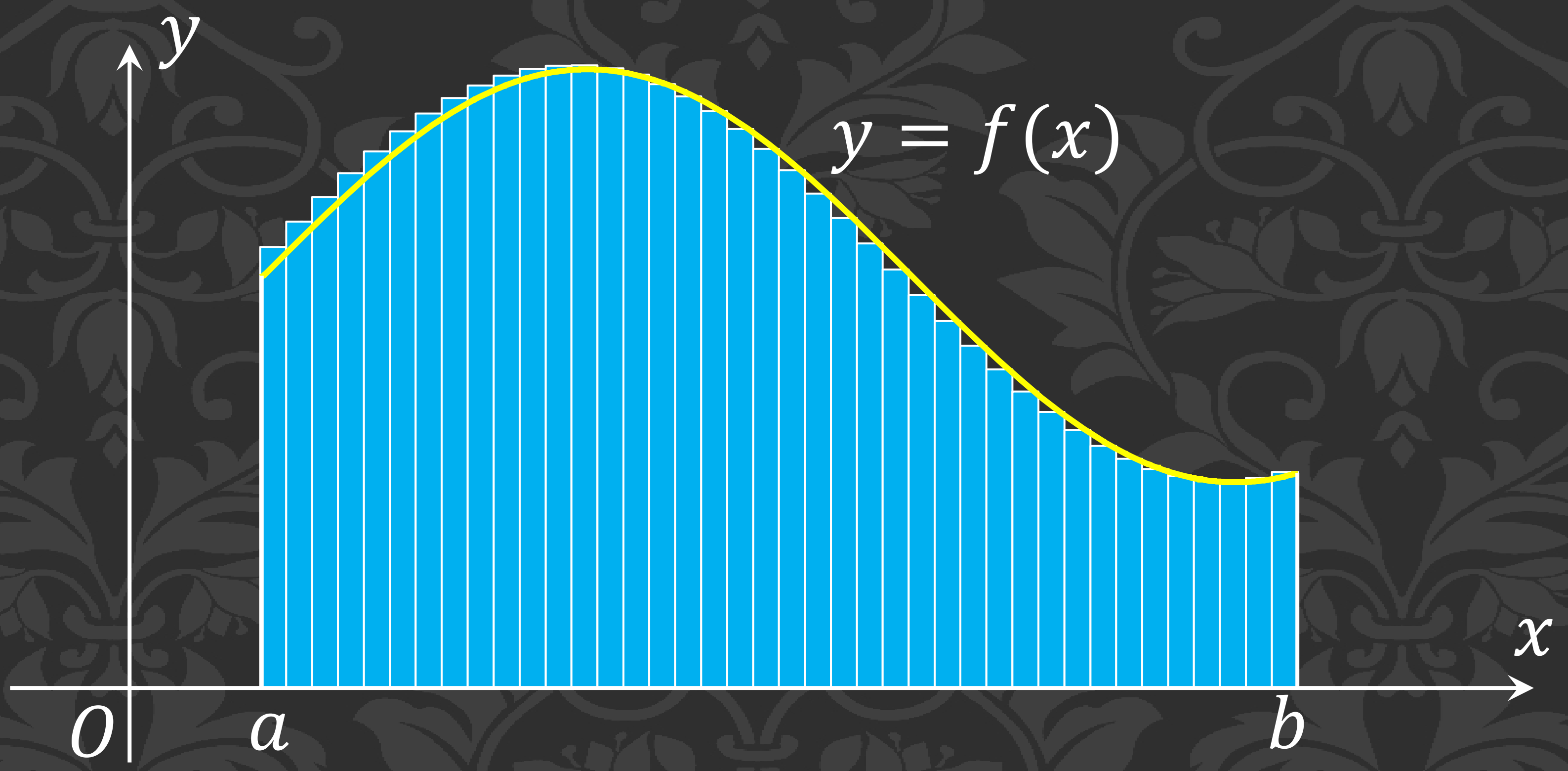
曲边梯形的面积

n等分区间$[a, b]$，用小矩形的面积近似小曲边梯形的面积.



曲边梯形的面积

n等分区间$[a, b]$，用小矩形的面积近似小曲边梯形的面积.

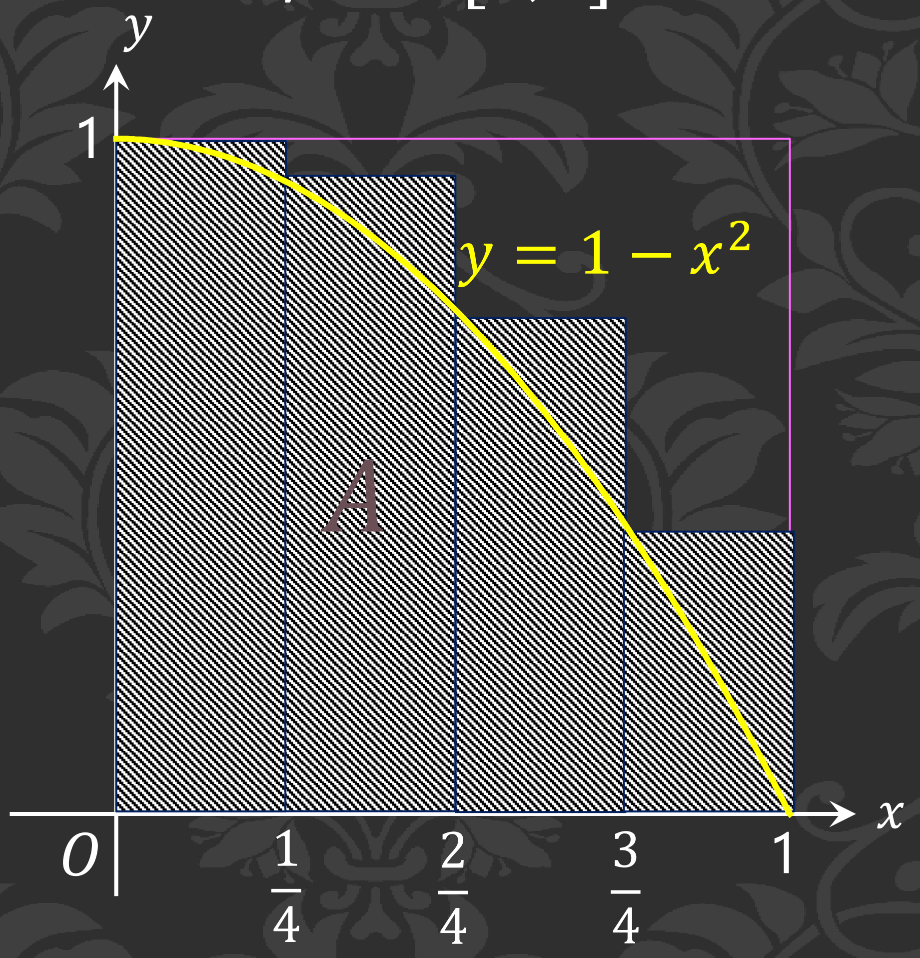


例如，假设曲边梯形的曲边为抛物线 $y = 1 - x^2, x \in [0,1]$.

设图中区域的面积为A,显然 $0 < A < 1$.

将区间[0,1] 进行4等分，用左端点函数值作为小矩形的高来近似小的曲边梯形面积，有

$$L_4 = \frac{1}{4}\left[f(0) + f\left(\frac{1}{4}\right) + f\left(\frac{2}{4}\right) + f\left(\frac{3}{4}\right)\right] = \frac{25}{32}$$



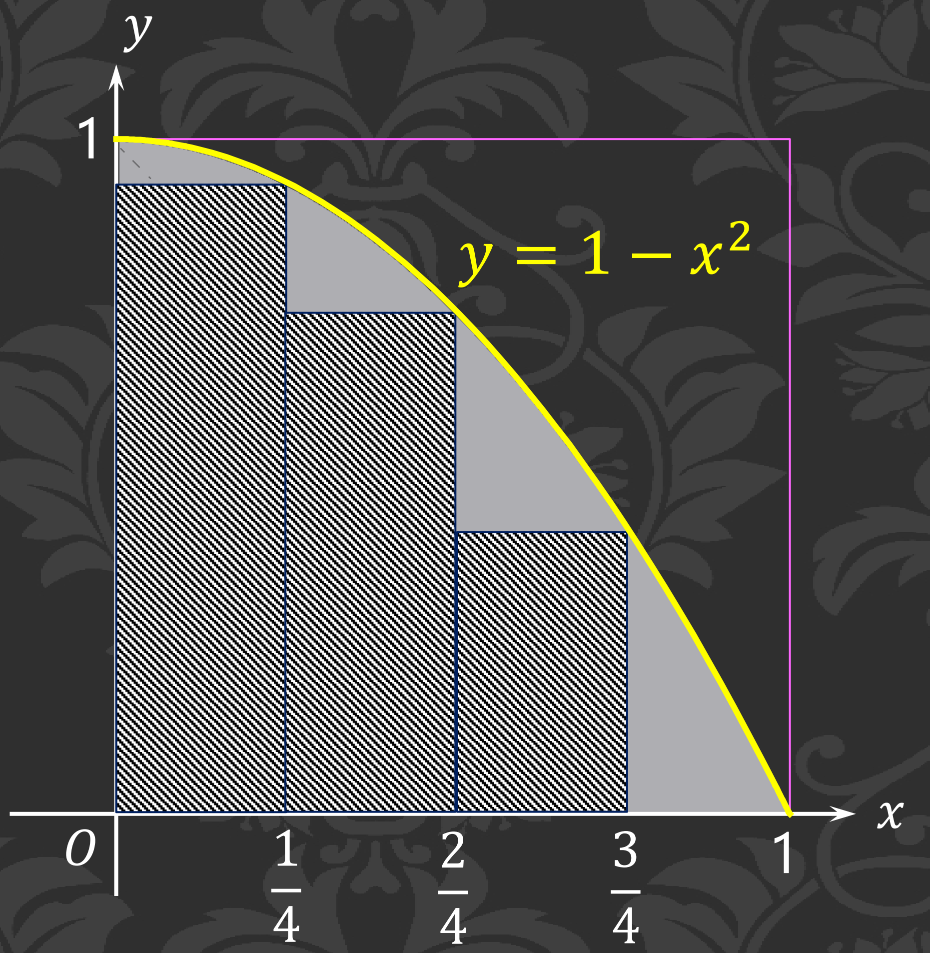
例如，假设曲边梯形的曲边为抛物线 $f(x)=1-x^2,\ x\in[0,1]$.

设图中区域的面积为A,显然 $0<A<1$.

将区间[0,1] 进行4等分，用右端点函数值作为小矩形的高来近似小的曲边梯形面积，有

$$L_4=\frac{1}{4}\left[f(0)+f\left(\frac{1}{4}\right)+f\left(\frac{2}{4}\right)+f\left(\frac{3}{4}\right)\right]=\frac{25}{32}$$

$$R_4=\frac{1}{4}\left[f\left(\frac{1}{4}\right)+f\left(\frac{2}{4}\right)+f\left(\frac{3}{4}\right)+f(1)\right]=\frac{17}{32}$$



一般地，将区间$[0,1]$进行n等分，得到n个子区间

$$\left[0,\frac{1}{n}\right],\left[\frac{1}{n},\frac{2}{n}\right],\cdots,\left[\frac{n-1}{n},1\right]$$

左和 $L_n=\frac{1}{n}\cdot\left[f(0)+f\left(\frac{1}{n}\right)+\cdots+f\left(\frac{n-1}{n}\right)\right]=1-\frac{(n-1)(2n-1)}{6n^2}$

右和 $R_n=\frac{1}{n}\cdot\left[f\left(\frac{1}{n}\right)+f\left(\frac{2}{n}\right)+\cdots+f(1)\right]=1-\frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}$

$$\lim_{n\to\infty}L_n=\lim_{n\to\infty}R_n=\frac{2}{3}\qquad R_n<A<L_n \longrightarrow A=\frac{2}{3}$$

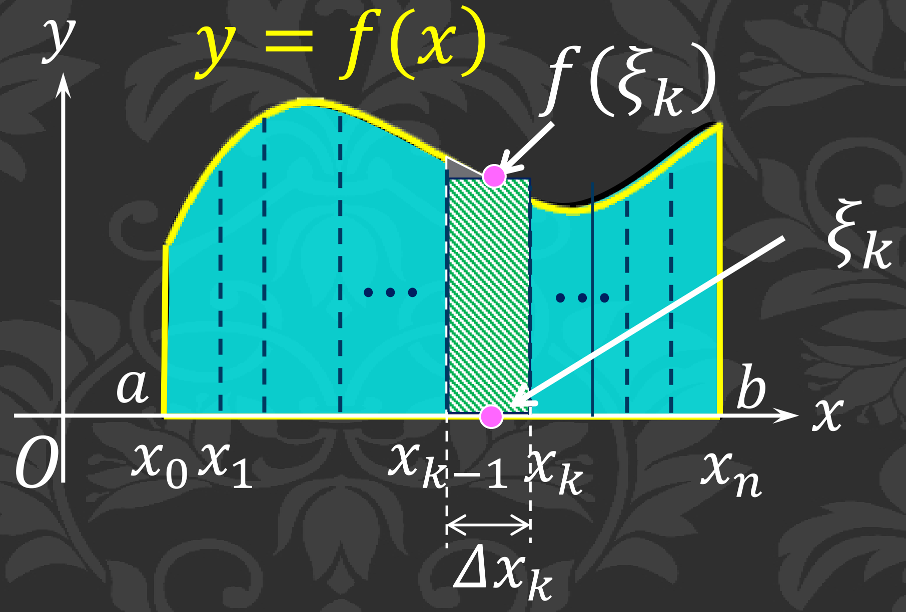
一般曲边梯形的面积. 设$f(x)$在$[a,b]$上连续，且$f(x)\geq 0$.

1. 分割: 在区间$[a,b]$中任意插入$n-1$个分点

$$a=x_0<x_1<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$$

将曲边梯形分割成n个窄条曲边梯形.

$$\Delta x_k=x_k-x_{k-1}, k=1,2,\cdots,n.$$



2. 取近似: $\forall \xi_k\in[x_{k-1},x_k]$, 则对应的窄曲边梯形的面积

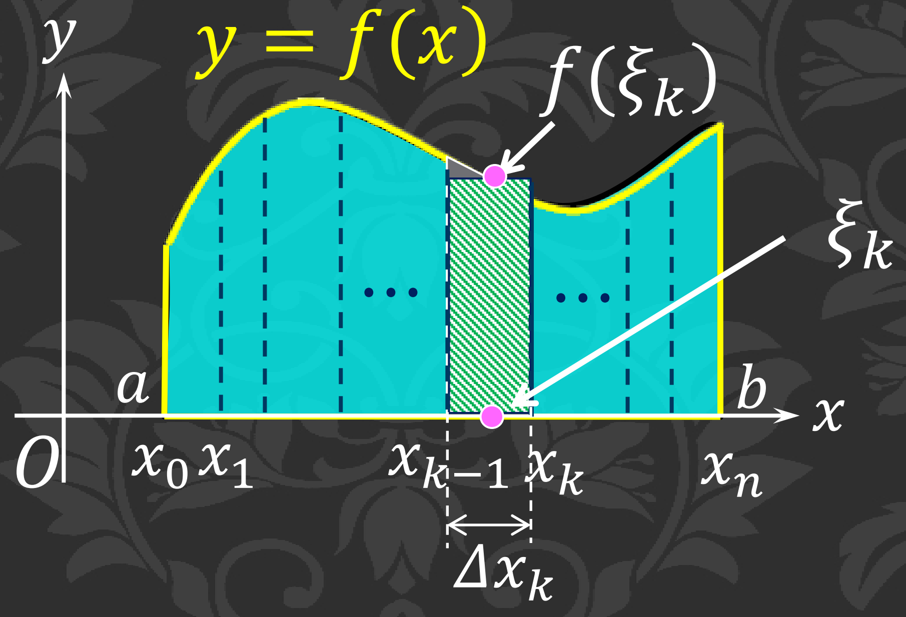
$$A_k\approx f(\xi_k)\Delta x_k, k=1,2,\cdots,n$$

一般曲边梯形的面积. 设$f(x)$在$[a,b]$上连续，且$f(x)\geq 0$.

3. 作和: $A=\sum_{k=1}^{n} A_k \approx \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$

4. 取极限: 记$\lambda = \max\limits_{1\leq k\leq n}\{\Delta x_k\}$, 则

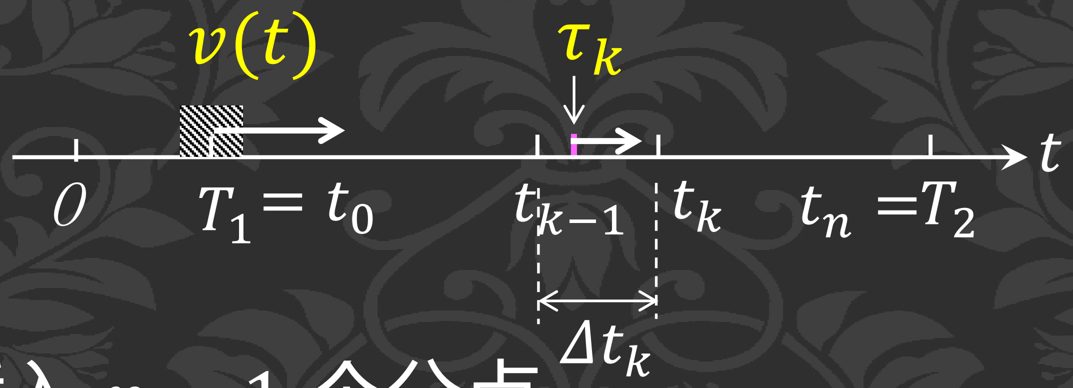
$$A=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k.$$



思想：分割取近似,作和求极限

变速直线运动的路程

某物体作变速直线运动,设速度 $v(t) \in C[T_1, T_2]$, 求这段时间内物体经过的路程 s.



1. 分割: 在区间$[T_1, T_2]$中任意插入 $n-1$ 个分点

$$T_1 = t_0 < t_1 < \cdots < t_{n-1} < t_n = T_2,$$

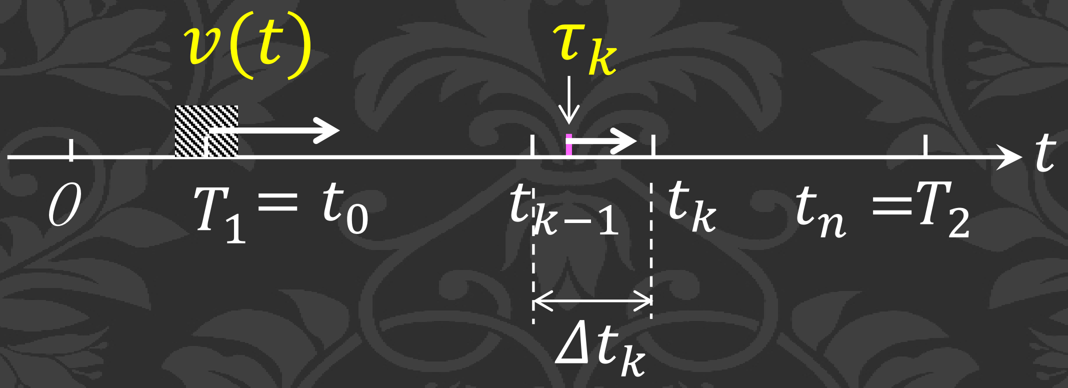
记 $\Delta t_k = t_k - t_{k-1}, k = 1,2,\cdots,n.$

2. 取近似: $\forall \tau_k \in [t_{k-1}, t_k]$,则对应该时段上的路程为

$$\Delta s_k \approx v(\tau_k)\Delta t_k, k = 1,2,\cdots,n$$

- 变速直线运动的路程

某物体作变速直线运动,设速度 $v(t) \in C[T_1, T_2]$, 求这段时间内物体经过的路程 s.

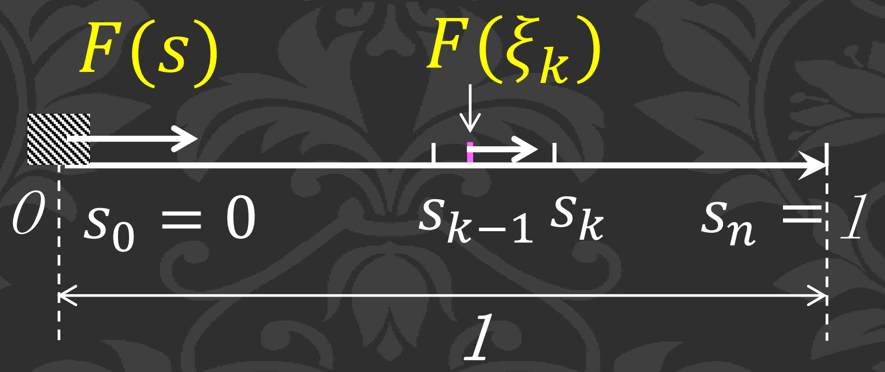


3. 作和: $$s = \sum_{k=1}^{n} \Delta s_k \approx \sum_{k=1}^{n} v(\tau_k) \Delta t_k .$$

4. 取极限: 记 $\lambda = \max\limits_{1 \le k \le n} \{\Delta t_k\}$, 则 $s = \lim\limits_{\lambda \to 0} \sum\limits_{k=1}^{n} v(\tau_k) \Delta t_k .$

同向变力所做的功

设物体受同向变力作用沿力的方向移动路程 l , 力的大小$F(s) \in C[0,l]$, 求变力$F(s)$所做的功W.



1. 分割: 在区间$[0,l]$中任意插入 $n-1$ 个分点

$$0 = s_0 < s_1 < \cdots < s_{n-1} < s_n = l,$$

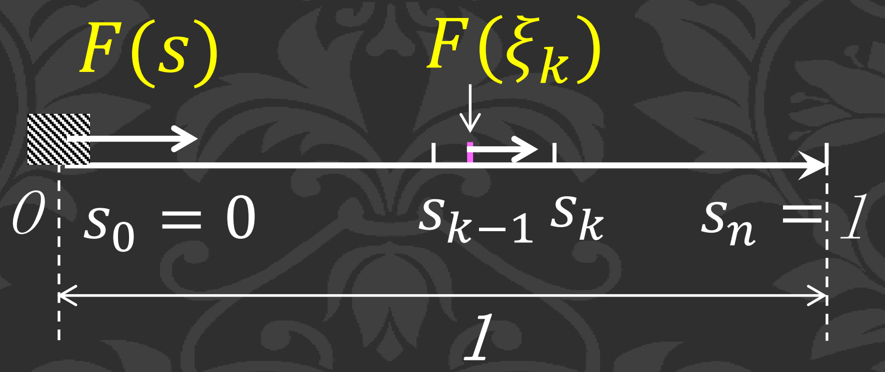
记 $\Delta s_k = s_k - s_{k-1}, k = 1,2,\cdots,n.$

2. 取近似: $\forall \xi_k \in [s_{k-1}, s_k]$,则对应该路段上的功为

$$\Delta W_k \approx F(\xi_k)\Delta s_k, k = 1,2,\cdots,n$$

同向变力所做的功

设物体受同向变力作用沿力的方向移动路程 l，力的大小$F(s)\in C[0,l]$，求变力$F(s)$所做的功W.



3. 作和: $$W=\sum_{k=1}^{n}\Delta W_k\approx\sum_{k=1}^{n}F(\xi_k)\Delta s_k.$$

4. 取极限: 记$\lambda=\max\limits_{1\le k\le n}\{\Delta s_k\}$，则 $$W=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n}F(\xi_k)\Delta s_k.$$

上述三个问题具有两个共同的基本特征:

(1) 所求总量等于各小区间上的部分量之和;

(2) 所求量近似等于某常量与对应区间长度之乘积.

解决问题方法的共性:

(1) 解决问题的步骤相同

分割，近似，求和，取极限

(2) 所求量的结构式相同

$$A=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k,\quad s=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} v(\tau_k)\Delta t_k,\quad W=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} F(\xi_k)\Delta s_k.$$

定义1 设连续函数$f(x)$在 $[a,b]$, 在$[a,b]$中任意插入 $n-1$个分点 $a=x_0<x_1<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$, 记 $\Delta x_k=x_k-x_{k-1}$, $k=1,2,\cdots,n$, 任意取$\xi_k\in[x_{k-1},x_k]$, 作和数 $I_n=\sum_{k=1}^{n}f(\xi_k)\Delta x_k$, 记$\lambda=\max\limits_{1\le k\le n}\{\Delta x_k\}$, 若只要当$\lambda\to 0$时, 和数 I_n 总趋于确定的极限 I, 则称极限值 I 为函数$f(x)$在区间 $[a,b]$上的定积分(黎曼积分), 记作 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$, 即

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\lim_{\lambda\to 0}I_n=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n}f(\xi_k)\Delta x_k$$

此时称 $f(x)$在 $[a,b]$上可积(黎曼可积).

积分上限

$[a,b]$称为积分区间 $$\int_a^b \boxed{f(x)\,\mathrm{d}x} = \lim_{\lambda\to 0}\boxed{\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k}$$

积分下限

被积函数

被积表达式

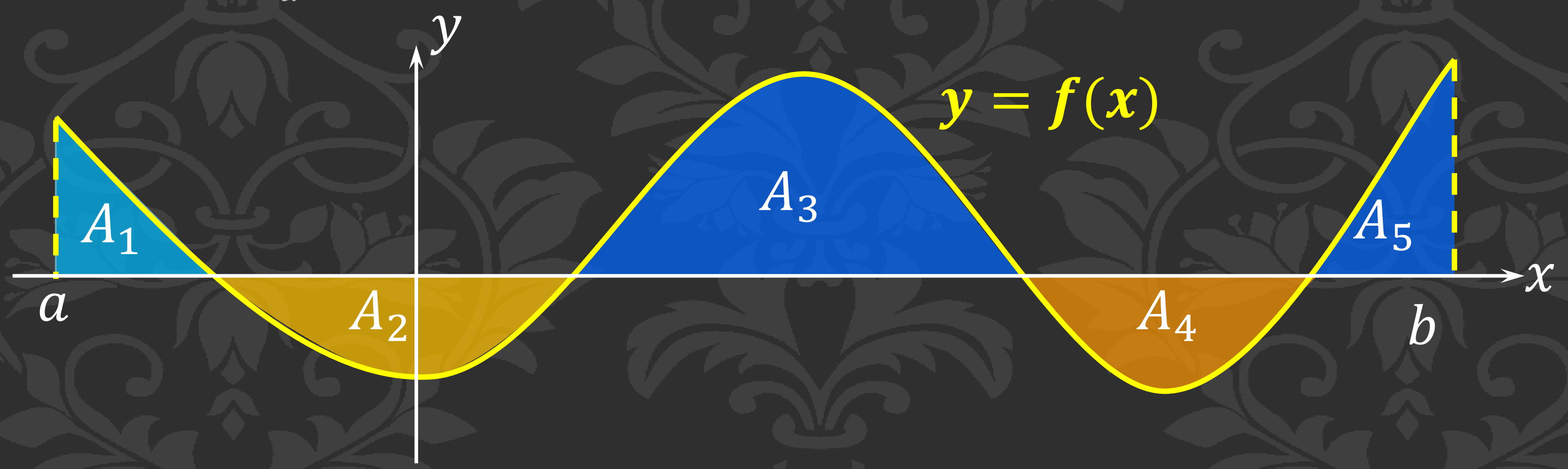
积分变量

积分和（黎曼和）

规定： (1) $\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}\,x = 0$; (2) $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,x = -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}\,x$.

$f(x) > 0,\ \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = A$ ——曲边梯形面积

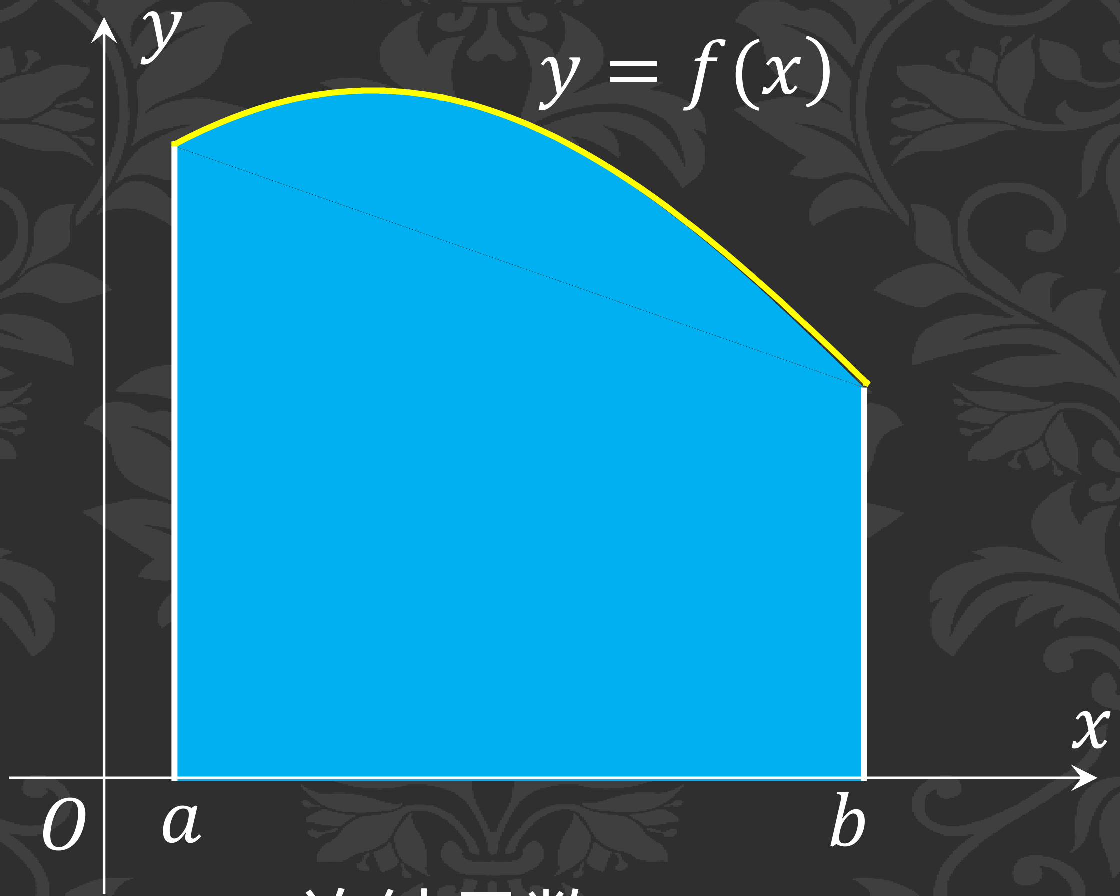
$f(x) < 0,\ \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -A$ ——曲边梯形面积的负值



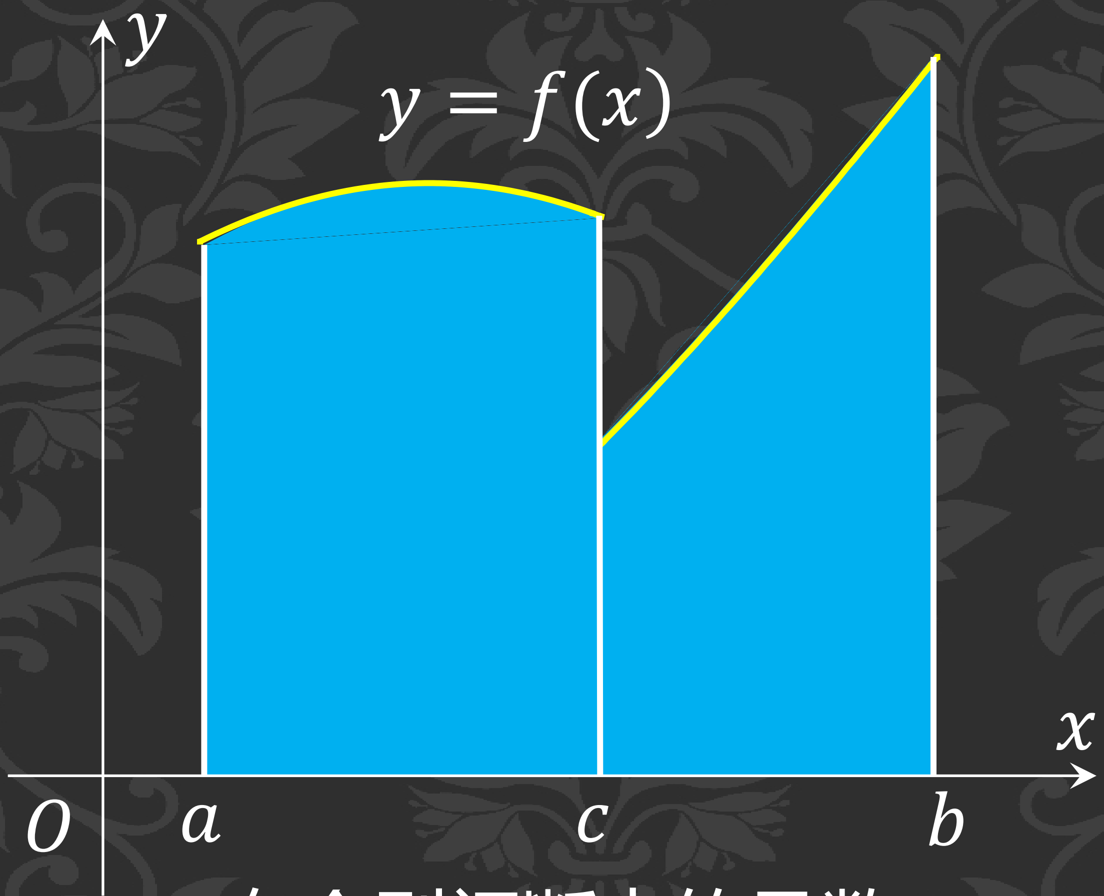
$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = A_1 - A_2 + A_3 - A_4 + A_5$ ——各部分面积的代数和

例 证明狄利克雷函数 $D(x)=\begin{cases}1, x\in Q,\\ 0, x\in Q^c\end{cases}$ 在任何闭区间$[a,b]$上不可积.

- 什么样的函数是可积的?



连续函数



有个别间断点的函数

定理1 （可积性定理）

- 若函数 $f(x)$在 $[a,b]$上连续, 则$f(x)$在 $[a,b]$上必可积.
- 函数$f(x)$在区间$[a,b]$上有界，且只有有限多个间断点，则 $f(x)$在区间$[a,b]$上可积.
- 若函数$f(x)$在 $[a,b]$上可积, 则$f(x)$在 $[a,b]$上有界;

性质1 (线性性)

$$\int_a^b [\alpha f(x)+\beta g(x)]\mathrm{d}x=\alpha\int_a^b f(x)\mathrm{d}x+\beta\int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

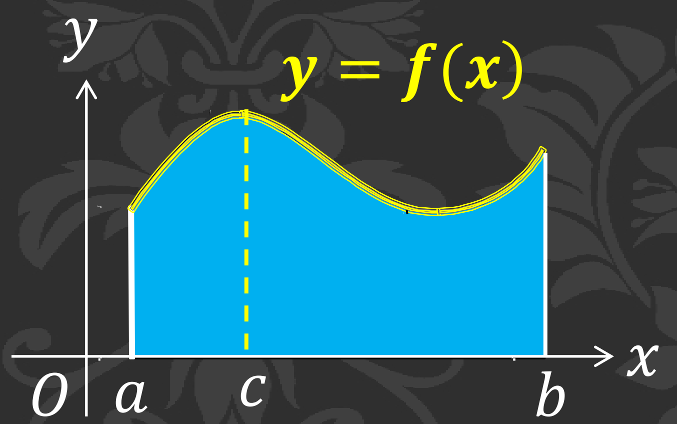
由性质1, 易知

(1) $\int_a^b [f(x)\pm g(x)]\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\pm\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$;

(2) $\int_a^b kf(x)\mathrm{d}x=k\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ (k是常数)

性质2 (对积分区间的可加性)

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$$



说明: 当a,b,c 的相对位置任意时, 上式仍成立.

例如, 当$a < b < c$时, 有

$$\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\Rightarrow \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x - \int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

性质3 (保号性)

若$f(x) \geq 0, x \in [a, b]$,则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \geq 0$;

推论1 (保序性)

若 $f(x) \leq g(x)$, 则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leq \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$.

推论2 (绝对值不等式)

$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right| \leq \int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x.$$

性质4 (积分估值)

若$m \le f(x) \le M, x \in [a, b]$, 则

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \le M(b-a).$$

例1　试比较下列两个积分的大小:

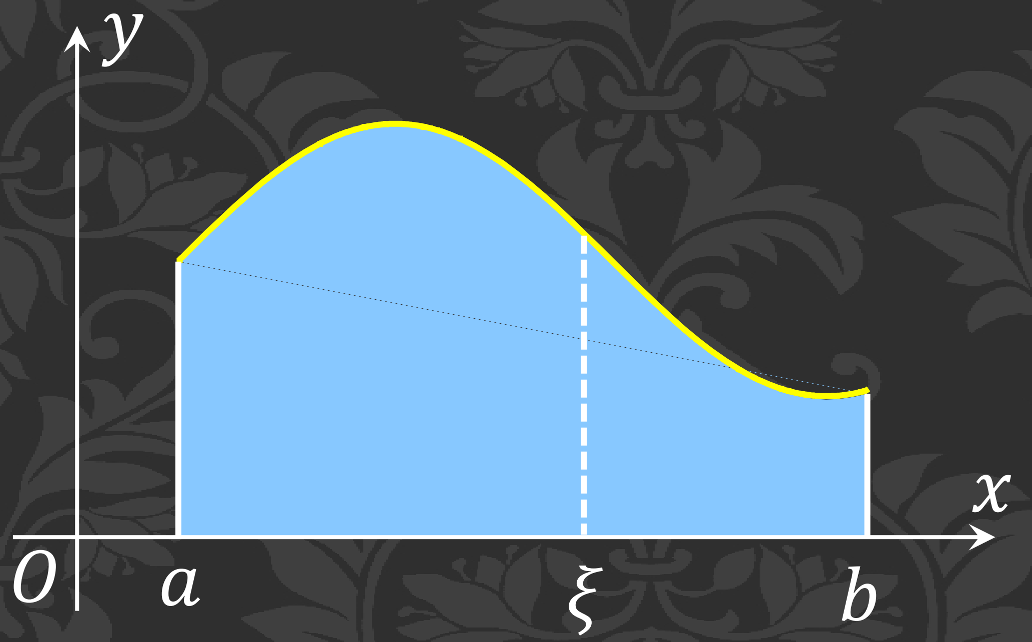
$$I_1 = \int_0^1 e^{x^2}\mathrm{d}x,\quad I_2 = \int_0^1 e^{x^3}\mathrm{d}x.$$

$$e^{x^2} > e^{x^3} \quad (0 < x < 1) \quad \Rightarrow I_1 > I_2$$

性质5 (积分中值定理)

设函数$f(x) \in C[a,b]$,则至少存在一点 $\xi \in [a,b]$, 使

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a).$$



$$f(\xi) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$ ——函数$f(x)$在$[a,b]$上的平均值

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{f(\bar{x}_1) + f(\bar{x}_2) + \cdots + f(\bar{x}_n)}{n}$$ 算术平均值

推广的积分第一中值定理

设$f(x), g(x)$ 在闭区间$[a, b]$上连续，且$g(x)$在$[a, b]$上不变号，则至少存在一点$\xi\in[a,b]$，使得

$$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = f(\xi)\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

例2 证明 $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^n x dx=0.$

思考 是否成立 $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x dx=0$?

例3 设函数$f(x)$在$[0,1]$上连续，在$(0,1)$内可导，且

$$3\int_{\frac{2}{3}}^{1} f(x)\,dx = f(0).$$

证明存在$c\in(0,1)$，使得$f'(c)=0$.

例 求解以下极限

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+\frac{1}{n}} + \frac{1}{n+\frac{2}{n}} + \cdots + \frac{1}{n+\frac{n}{n}}$$

夹逼准则

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+n}$$

夹逼准则失效

定积分数列极限的关系

$$\boxed{\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k} = \boxed{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x}$$

一般地，将区间$[a,b]$进行n 等分，得到 n 个子区间

$$\left[a, a+\frac{b-a}{n}\right], \left[a+\frac{b-a}{n}, a+\frac{2(b-a)}{n}\right], \cdots, \left[a+\frac{(n-1)(b-a)}{n}, b\right]$$

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f\left(a+\frac{k(b-a)}{n}\right)\frac{b-a}{n} = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a+\frac{k(b-a)}{n}\right)\frac{b-a}{n}}$$

如果$f(x)$在$[a,b]$ 上可积

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f\left(a+\frac{k(b-a)}{n}\right)\frac{b-a}{n}=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a+\frac{k(b-a)}{n}\right)\frac{b-a}{n}=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

计算数列极限 $\Rightarrow$ 计算定积分

例5 用定积分表示下列极限:

$$(1)\ \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{1+\frac{k}{n}}$$

$$(2)\ \lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n}\left(\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}+\cdots+\sin\frac{(n-1)\pi}{n}\right)\right]$$