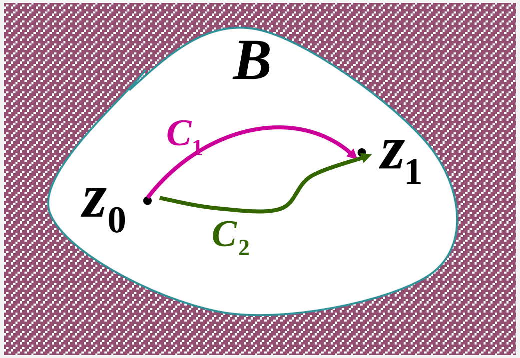
第四节 原函数与不定积分

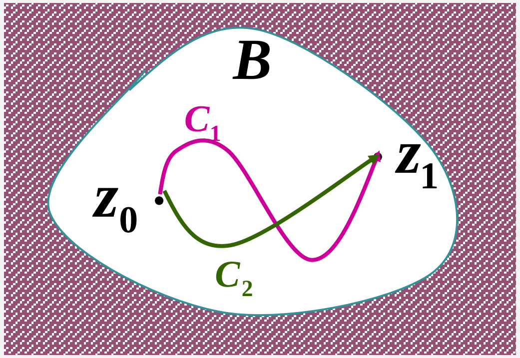
一、主要定理和定义

定理一

如果函数 $f(z)$ 在单连通域 B 内处处解析,那么积分 $\int_C f(z)dz$ 与连结起点及终点的路线 C 无关.

起点为 z_0, 终点为 z_1





$$\int_{C_1} f(z)dz = \int_{C_2} f(z)dz$$

解析函数在单连通域内的积分只与起点和终点有关,

$$\int_{C_1} f(z)\mathrm{d}z = \int_{C_2} f(z)\mathrm{d}z = \int_{z_0}^{z_1} f(z)\mathrm{d}z$$

如果固定 z_0, 让 z_1 在 B 内变动, 并令 $z_1 = z$,

确定 B 内的一个单值函数

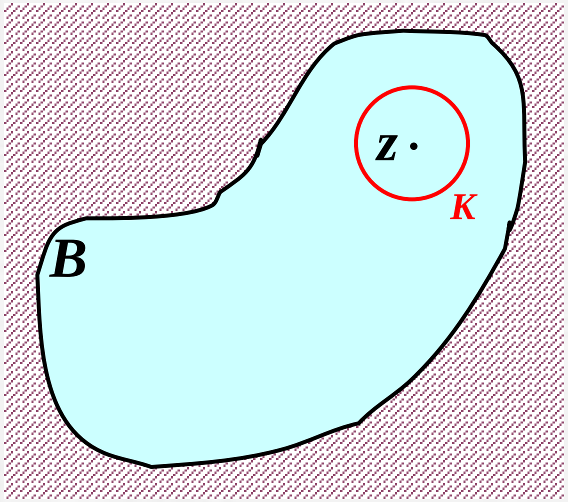
$$F(z) = \int_{z_0}^{z} f(\zeta)\mathrm{d}\zeta$$

定理二

如果函数 $f(z)$ 在单连通域 B 内处处解析，那么函数 $F(z)=\int_{z_0}^{z} f(\zeta)\mathrm{d}\zeta$ 必为 B 内的一个解析函数，并且 $F'(z)=f(z)$.

证 设 $\boldsymbol{z}$ 为 $\boldsymbol{B}$ 内任一点，

以 z 为中心作一含于 B 内的小圆 K，半径为 r



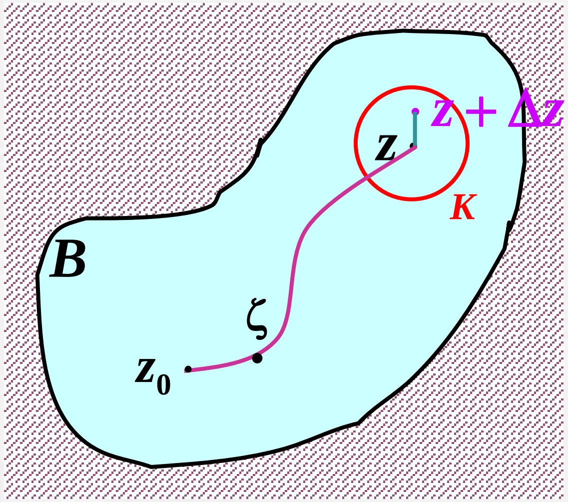
取 $|\Delta z| < r$, 则 $z+\Delta z$ 在 K 内, 由 $F(z)$ 的定义,

$$F(z+\Delta z)-F(z)=\int_{z_0}^{z+\Delta z} f(\zeta)\mathrm{d}\zeta-\int_{z_0}^{z} f(\zeta)\mathrm{d}\zeta$$

由于积分与路线无关,

$\int_{z_0}^{z+\Delta z} f(\zeta)\mathrm{d}\zeta$ 的积分路线可先取 z_0 到 z,

(注意 : 这一段与 $\int_{z_0}^{z} f(\zeta)\mathrm{d}\zeta$ 的路线相同)



然后从 z 沿直线到 $z+\Delta z$,

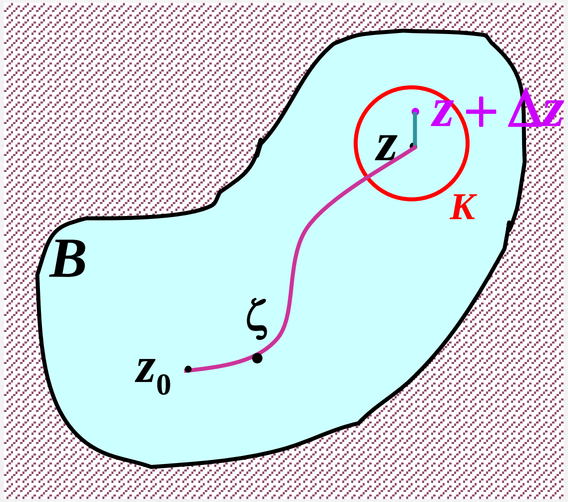
于是 $F(z+\Delta z)-F(z)=\int_{z}^{z+\Delta z} f(\zeta)\mathrm{d}\zeta,$

因为 $\int_{z}^{z+\Delta z} f(z)\mathrm{d}\zeta = f(z)\int_{z}^{z+\Delta z}\mathrm{d}\zeta = f(z)\Delta z,$

所以 $\dfrac{F(z+\Delta z)-F(z)}{\Delta z}-f(z)$

$$=\frac{1}{\Delta z}\int_{z}^{z+\Delta z} f(\zeta)\mathrm{d}\zeta - f(z)$$

$$=\frac{1}{\Delta z}\int_{z}^{z+\Delta z}[f(\zeta)-f(z)]\mathrm{d}\zeta$$

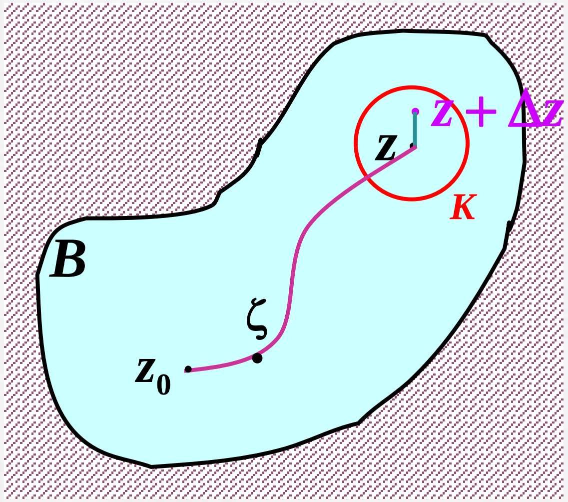


因为 $f(z)$ 在 B 内解析，所以 $f(z)$ 在 B 内连续，

故 $\forall \varepsilon > 0$，$\exists \delta > 0$，

使得满足 $|\zeta - z| < \delta$ 的一切 ζ 都在 K 内，

即 $|\Delta z| < \delta$ 时，总有 $|f(\zeta) - f(z)| < \varepsilon$，



由积分的估值性质,

$$\left|\frac{F(z+\Delta z)-F(z)}{\Delta z}-f(z)\right|=\frac{1}{|\Delta z|}\left|\int_{z}^{z+\Delta z}[f(\zeta)-f(z)]\mathrm{d}\zeta\right|$$

$$\leq\frac{1}{|\Delta z|}\int_{z}^{z+\Delta z}|f(\zeta)-f(z)|\mathrm{d}s\leq\frac{1}{|\Delta z|}\cdot\varepsilon\cdot|\Delta z|=\varepsilon.$$

于是 $\lim\limits_{\Delta z\to 0}\left|\frac{F(z+\Delta z)-F(z)}{\Delta z}-f(z)\right|=0,$

即 $F'(z)=f(z).$

2. 原函数的定义:

如果函数 $\varphi(z)$ 在区域 B 内的导数为$f(z)$, 即 $\varphi'(z) = f(z)$, 那么称 $\varphi(z)$ 为 $f(z)$ 在区域 B 内的原函数.

显然 $F(z) = \int_{z_0}^{z} f(\zeta)\mathrm{d}\zeta$ 是 $f(z)$ 的一个原函数.

原函数之间的关系:

$f(z)$ 的任何两个原函数相差一个常数.

无穷多原函数的全体称为不定积分

如果 $f(z)$ 在区域 B 内有

那么它就有无穷多个原函数,

一般表达式为 $F(z)+c$ (c为任意常数).

3. 不定积分的定义:

称 $f(z)$的原函数的一般表达式 $F(z)+c$ (c为任意常数)为 $f(z)$的不定积分,记作

$$\int f(z)\mathrm{d}z = F(z)+c.$$

定理三 (类似于牛顿-莱布尼兹公式)

如果函数 $f(z)$ 在单连通域 B 内处处解析, $G(z)$ 为 $f(z)$ 的一个原函数, 那么

$$\int_{z_0}^{z_1} f(z)\mathrm{d}z = G(z_1) - G(z_0)$$

这里 z_0, z_1 为域 B 内的两点.

证　因为$\int_{z_0}^{z} f(z)\mathrm{d}z$也是$f(z)$的原函数,

所以$\int_{z_0}^{z} f(z)\mathrm{d}z = G(z) + c$,

当$z = z_0$时，根据柯西-古萨基本定理,

得$c = -G(z_0)$，所以$\int_{z_0}^{z} f(z)\mathrm{d}z = G(z) - G(z_0)$,

或$\int_{z_0}^{z_1} f(z)\mathrm{d}z = G(z_1) - G(z_0)$.

二、例题

例1 求 $\int_{z_0}^{z_1} z\mathrm{d}z$ 的值.

解 因为 z 是解析函数，它的原函数是 $\frac{1}{2}z^2$,

由牛顿-莱布尼兹公式知,

$$\int_{z_0}^{z_1} z\mathrm{d}z = \frac{1}{2}z^2\Big|_{z_0}^{z_1} = \frac{1}{2}(z_1^2 - z_0^2).$$

例2　求 $\int_0^{\pi i} z\cos z^2 \mathrm{d}z$ 的值.

解　$$\int_0^{\pi i} z\cos z^2 \mathrm{d}z = \frac{1}{2}\int_0^{\pi i} \cos z^2 \mathrm{d}z^2$$

$$= \frac{1}{2}\sin z^2 \Big|_0^{\pi i} = \frac{1}{2}\sin(-\pi^2) = -\frac{1}{2}\sin \pi^2.$$

(使用了微积分学中的“凑微分”法)

例3 试沿区域 $\mathrm{Im}(z) \geq 0, \mathrm{Re}(z) \geq 0$ 内的圆弧 $|z| = 1$,

求 $\displaystyle\int_1^i \frac{\ln(z+1)}{z+1}\mathrm{d}z$ 的值.

解 $$\int_1^i \frac{\ln(z+1)}{z+1}\mathrm{d}z = \int_1^i \ln(z+1)\mathrm{d}\ln(z+1)$$

$$= \left.\frac{\ln^2(z+1)}{2}\right|_1^i = \frac{1}{2}[\ln^2(1+i) - \ln^2 2]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{2}\ln 2 + \frac{\pi}{4}i\right)^2 - \ln^2 2\right] = -\frac{\pi^2}{32} - \frac{3}{8}\ln^2 2 + \frac{\pi\ln 2}{8}i.$$

例4 求$\int_C (2z^2+8z+1)\mathrm{d}z$的值. 其中$C$是连接0到$2\pi a$的摆线：$x=a(\theta-\sin\theta)$, $y=a(1-\cos\theta)$.

解 因为函数$2z^2+8z+1$在复平面内处处解析，所以积分与路线无关，根据牛—莱公式:

$$\int_C (2z^2+8z+1)\mathrm{d}z=\int_0^{2\pi a}(2z^2+8z+1)\mathrm{d}z$$

$$=\left[\frac{2}{3}z^3+4z^2+z\right]_0^{2\pi a}=\frac{16}{3}\pi^3a^3+16\pi^2a^2+2\pi a.$$

三、小结

原函数、不定积分、牛顿—莱布尼兹公式.

$$F(z)=\int_{z_0}^{z} f(\zeta)\mathrm{d}\zeta$$

$$\int f(z)\mathrm{d}z = F(z)+c$$

$$\int_{z_0}^{z_1} f(z)\mathrm{d}z = G(z_1)-G(z_0)$$