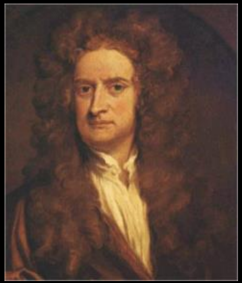
高等数学



§1.1 映射与函数

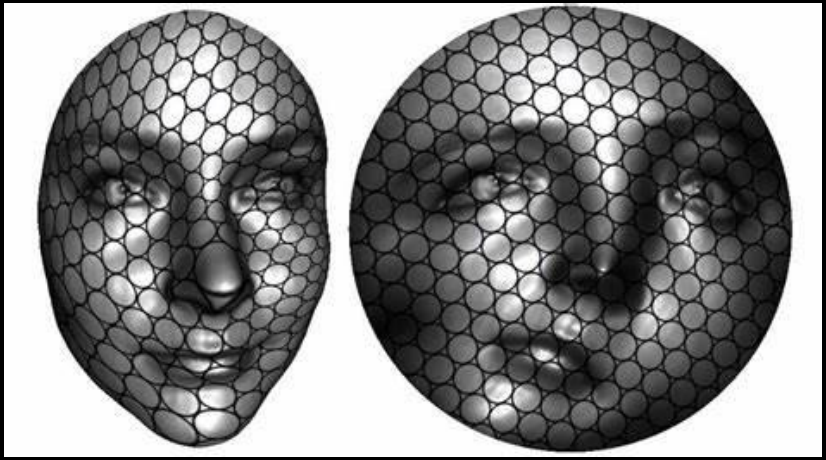
基础部数学教研室

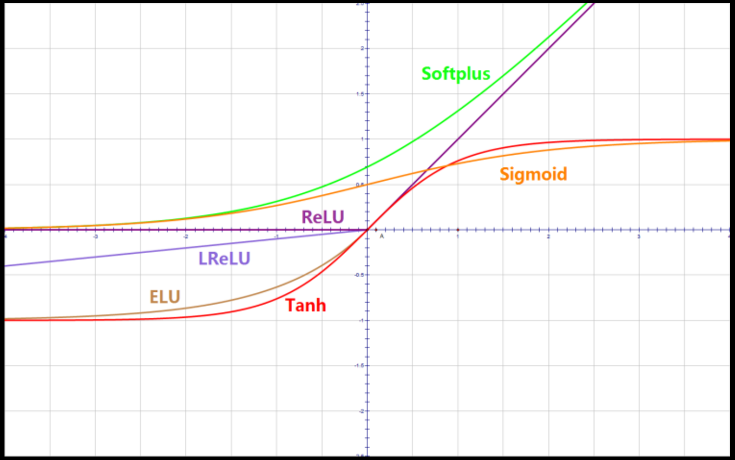
郑治中

1.1 映射与函数

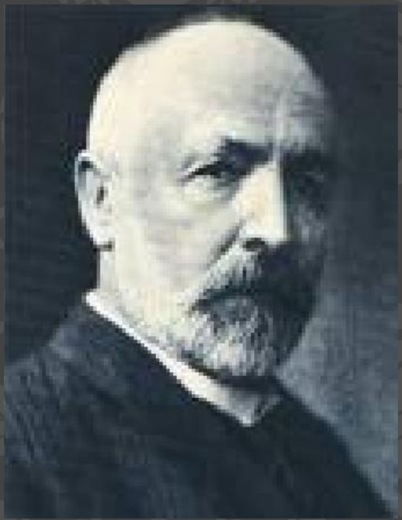
映射

函数





- 集合论是德国著名数学家康托尔于19世纪末创立的.
- 牛顿与莱布尼兹在十七世纪创立了微积分并获得飞速发展.
- 十八世纪，由于无穷概念没有精确的定义，使微积分理论遇到严重的逻辑困难.
- 十九世纪初，出现了一场重建数学基础的运动，集合论由此产生.



康托尔[德]
G. Cantor
1845—1918

- 集合的概念与运算
- 区间与邻域
- 映射
- 函数的概念
- 函数的例子
- 函数的运算
- 函数的性质

集合的概念与运算

1. 集合的定义

将具有某种特定性质的对象的全体称为集合. 组成集合的对象称为元素 .

$$a \in A \quad 或者 \quad a \notin A$$

- 集合的表示法

(1) 枚举法: $A = \{a, b, c, d, e\}$

(2) 描述法: $A = \{x \mid x \text{ 所具有的特征}\}$

例如

$A = \{3, 5, 7, 11, 13\}$

$A = \{x \mid x \text{为前5个素数}\}$

- 集合的关系

子集: $A \subset B$　　相等: $A = B$　　空集: ϕ

- 集合运算

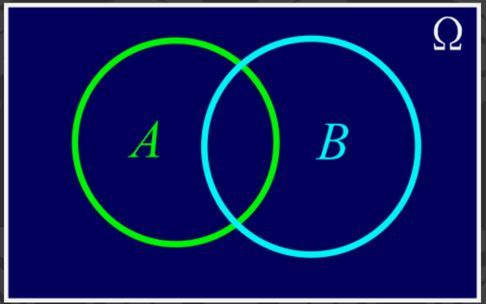
给定两个集合 A, B，定义下列运算:

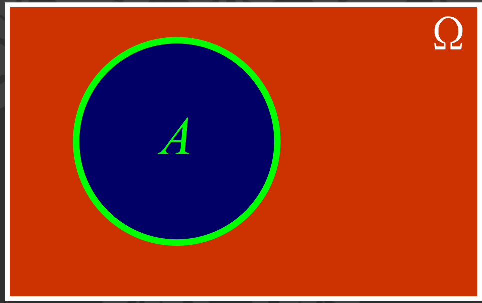
并集 $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ 或 } x \in B\}$

交集 $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{且} x \in B\}$

差集 $A - B = \{x \mid x \in A \text{且} x \notin B\}$

补集 $\bar{A} = \Omega - A$





2. 数集的表示

自然数 $\mathbb{N}=\{x\mid x=0,1,2,\ \cdots\}$

整数 $\mathbb{Z}=\{x\mid x=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots\}$

有理数 $\mathbb{Q}=\{\ p/q\ \mid p,q\in\mathbb{Z}$, p, q互素 $,q\neq0\}$

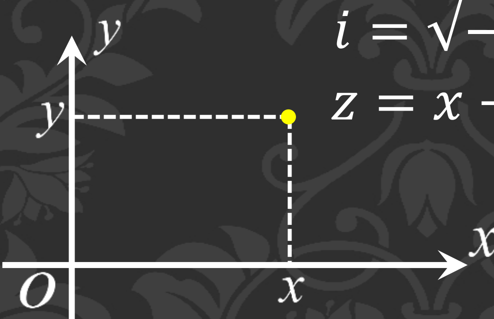
实数 $\mathbb{R}$

复数 $\mathbb{C}$

$i=\sqrt{-1}$

$z=x+iy\in\mathbb{C}$

复平面



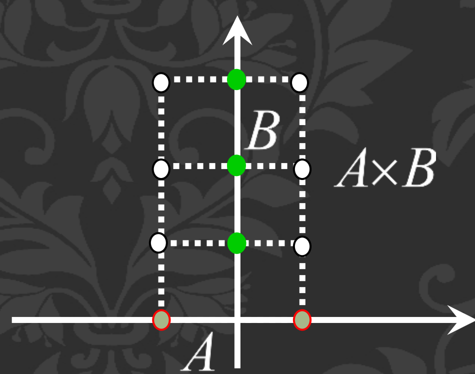
“数是人类在精神上制造出来的最抽象的概念.”

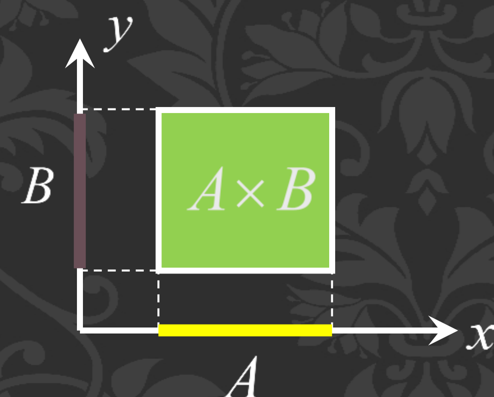
3. 直积

笛卡儿积： $A \times B = \{(x, y) | \ x \in A, y \in B\}$

例1　$A = \{-1, 1\}$, $B = \{1, 2, 3\}$

$A \times B = \{(-1, 1), (-1, 2), (-1, 3), (1, 1), (1, 2), (1, 3)\}$





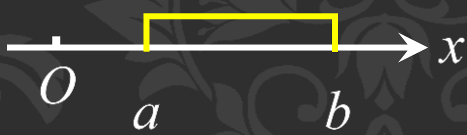
区间与邻域

4. 区间

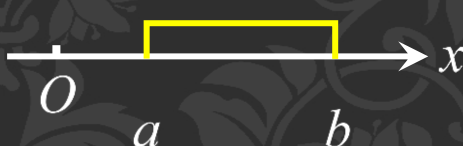
- 有限区间

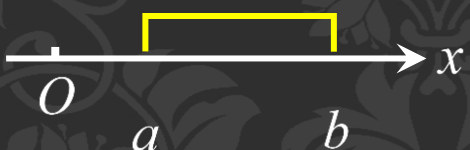
开区间 $(a,b)=\{x|\,a<x<b\}$

闭区间 $[a,b]=\{x|\,a\le x\le b\}$



半开闭区间 $[a,b)=\{x|\,a\le x<b\}$ 和 $(a,b]=\{x|\,a<x\le b\}$





无限区间

无限开区间 $(-\infty, a) = \{x \mid x < a\}$ 和 $(a, +\infty) = \{x \mid x > a\}$

无限闭区间 $(-\infty, a] = \{x \mid x \leq a\}$ 和 $[a, +\infty) = \{x \mid x \geq a\}$

全体实数的集合 $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$

5. 邻域

邻域: 以点 a 为中心的任何开区间，记作：$U(a)$

δ 邻域: $U(a,\delta)=(a-\delta,a+\delta)=\{x\mid |x-a|<\delta\}$

邻域中心　邻域半径

去心邻域: $U_0(a,\delta)=\{x\mid 0<|x-a|<\delta\}$

左邻域: $(a-\delta,a)$

右邻域: $(a,a+\delta)$

映射

定义1 设 A, B 是两个非空集合，若对 A 中的任一元素 x，依照某种规律（或法则）f，恒有 B 中的唯一确定的元素 y 与之对应，则称对应规律 f 为一个从 A 到 B 的映射. 记为

$$f: A \to B, \quad \text{或记} \quad f: x \mapsto y \ .$$

称 y 为 x 的像，记作$y = f(x)$，并称 x 为 y 的原像. 集合A称为映射 f 的定义域，集合 B 称为 f 的像集.

集合 $R_f = \{f(x) | x \in A\}$ 称为映射 f 的值域.

映射在一些特定情况下会特定称呼

$X\ (\mathbb{R}) \xrightarrow{f} Y\ (\mathbb{R})$, f 称为定义在 X 上的**函数**;

X (空间) $\xrightarrow{f} Y(\mathbb{R})$, f 称为 X 上的**泛函**;

X (空间) $\xrightarrow{f} Y$(空间), f 称为 X 上的算子;

X (空间) $\xrightarrow{f} Y$(同构X的空间), f 称为 X 上的变换.

定义2　设$f: A \to B$是映射. 若对于任意的 $x_1, x_2 \in A$，

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2,$$

则称 f 为**单射**. 若 $R_f = B$，则称 f 为**满射**. 若 f 既是单射，又是满射，则称 f 为**一一映射**，又叫**双射**.

例3 数轴上点到原点的距离 $f: \mathbb{R} \to [0, +\infty)$

$$f(x) = |x|.$$

它是满射
但非单射

函数的概念

函数的概念起源于描述一个量依赖于另一个量的变化

- 股票走势图

横轴表示开市的时间

纵轴表示股价（上图）与成交量（下图）

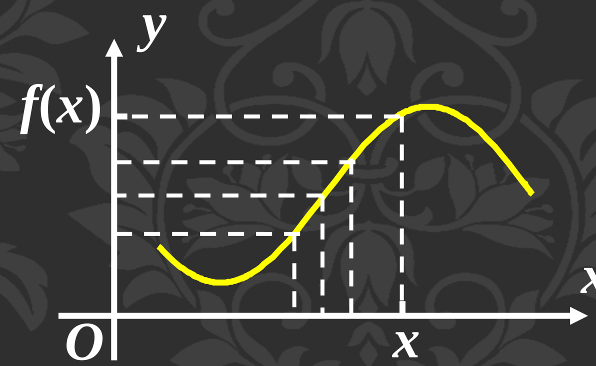
6. 函数的定义

定义3 设 D 是 $\mathbb{R}$ 中的非空子集，称映射 $f: D \to \mathbb{R}$ 为定义在 D 上的一元函数.

通常记作：$y = f(x),\ x \in D$

x 为自变量　　y为因变量

D 为定义域



$R_f = \{ f(x) \mid x \in D \}$ —— 值域

$G_f = \{ (x, f(x)) \mid x \in D \}$ —— 函数图形（或图像）

函数 f 的箭头图

注意： 1) 函数 $y=f(x), x\in D$ 由其定义域 D 与对应法则 f 唯一确定，与其他无关.

2) 两个函数相等是指它们的定义域与对应法则都相同，自然它们的值域也相同 .

函数的表示方法

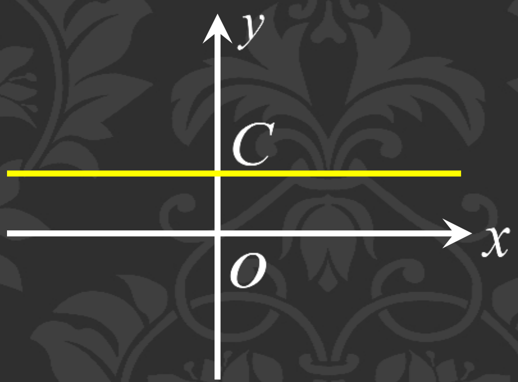
- 描述法 —— 通过语言描述
- 表格法 —— 通过数值表格表示
- 图形法 —— 通过图形表示
- 公式法 —— 通过精确公式表示

函数的例子

例4 常值函数 $y = C$

$$D_f = (-\infty, +\infty)$$

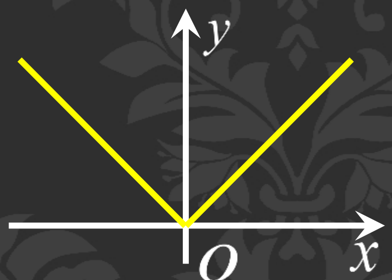
$$R_f = \{C\}$$



例5 绝对值函数 $y = |x| = \begin{cases} x, x \geq 0, \\ -x, x < 0. \end{cases}$

$$D_f = (-\infty, +\infty)$$

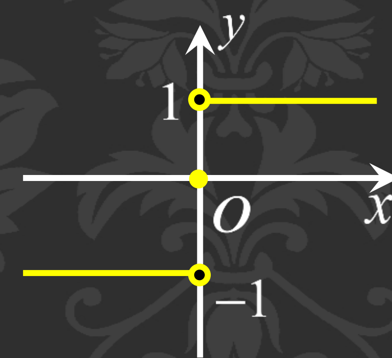
$$R_f = [0, +\infty)$$



例6 符号函数$y=\operatorname{sgn} x=\begin{cases} 1, & x>0, \\ 0, & x=0, \\ -1, & x<0. \end{cases}$

$D_f=(-\infty,+\infty)$

$R_f=\{-1,0,1\}$



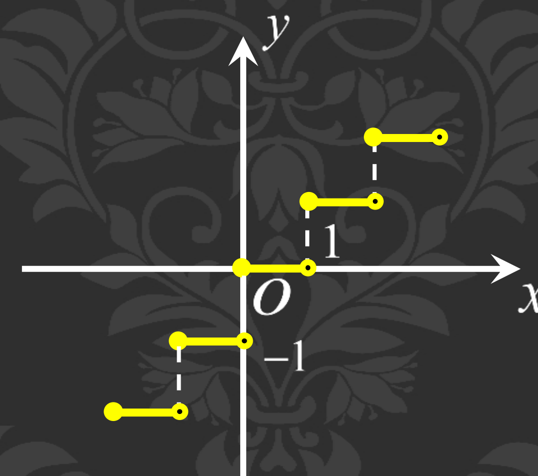
- 在不同区间或点处有不同表达式的函数称为分段函数

例7 取整函数 $y=[x]$

—— 不超过 x的最大整数

$D_f=(-\infty,+\infty)$

$R_f=\mathbb{Z}$

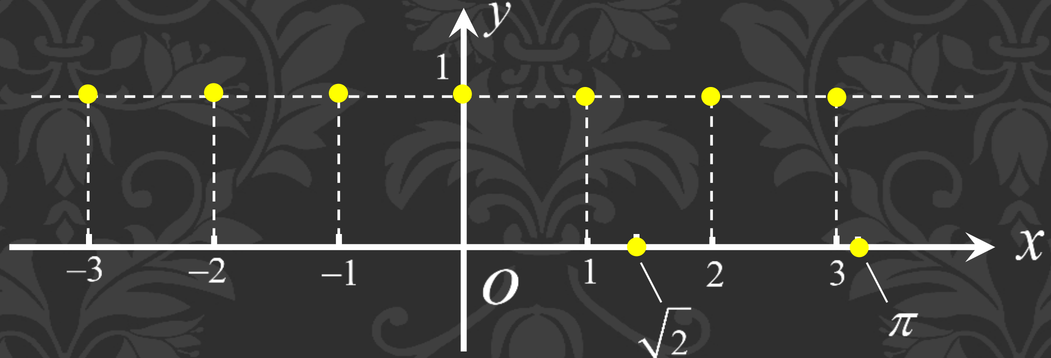


例8 狄利克雷函数 $D(x)=\begin{cases}1, x\in\mathbb{Q},\\ 0, x\notin\mathbb{Q}.\end{cases}$

不能画出该函数的完整图形

$D_f=(-\infty,+\infty)$

$R_f=\{0,1\}$



例9 Riemann函数

$$f(x)=\begin{cases} \frac{1}{q}, & x=\frac{p}{q},(p,q)=1,p,q\in\mathbb{Z}^{+},q\neq 0, \\ 1, & x=0, \\ 0, & else, \end{cases} \qquad x\in[0,1].$$

例10 最大值函数(Max)与最小值函数(Min)

最大值：$\forall\, x\in D,\exists\, x_0\in D,$使 $f(x)\leq f(x_0),$有$y=\max f(x)=f(x_0)$

最小值：$\forall\, x\in D,\exists\, x_0\in D,$使 $f(x)\geq f(x_0),$有$y=\min f(x)=f(x_0)$

五类基本初等函数

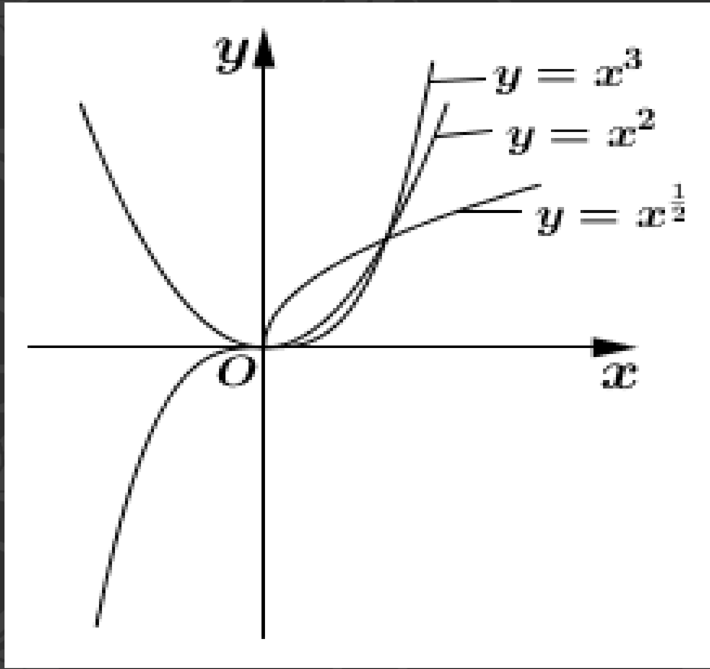
① 幂函数 $y = x^{\mu}$ （μ 是常数）

② 指数函数 $y = a^{x} (a > 0, a \neq 1)$ $y = e^{x}$

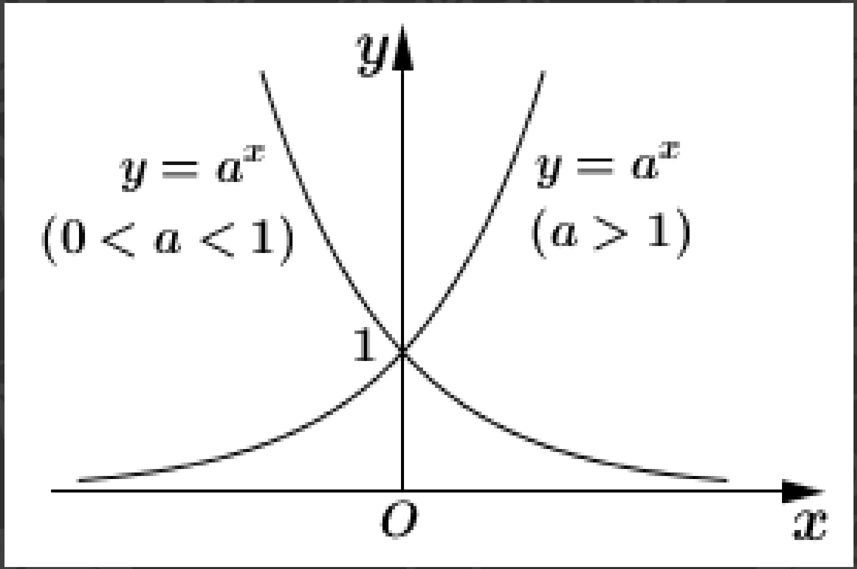
③ 对数函数 $y = \log_a x \quad (a > 0, a \neq 1)$ $y = \ln x$

④ 三角函数 $y = \sin x \quad (x \in R), \cdots\cdots$

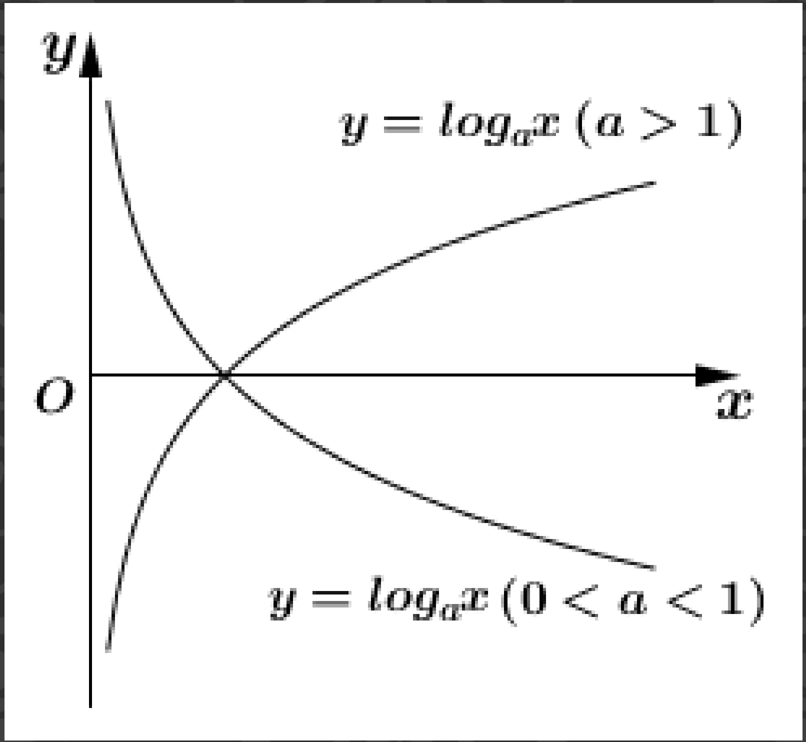
⑤ 反三角函数 $y = \arcsin x \quad (x \in [-1, 1]), \cdots\cdots$



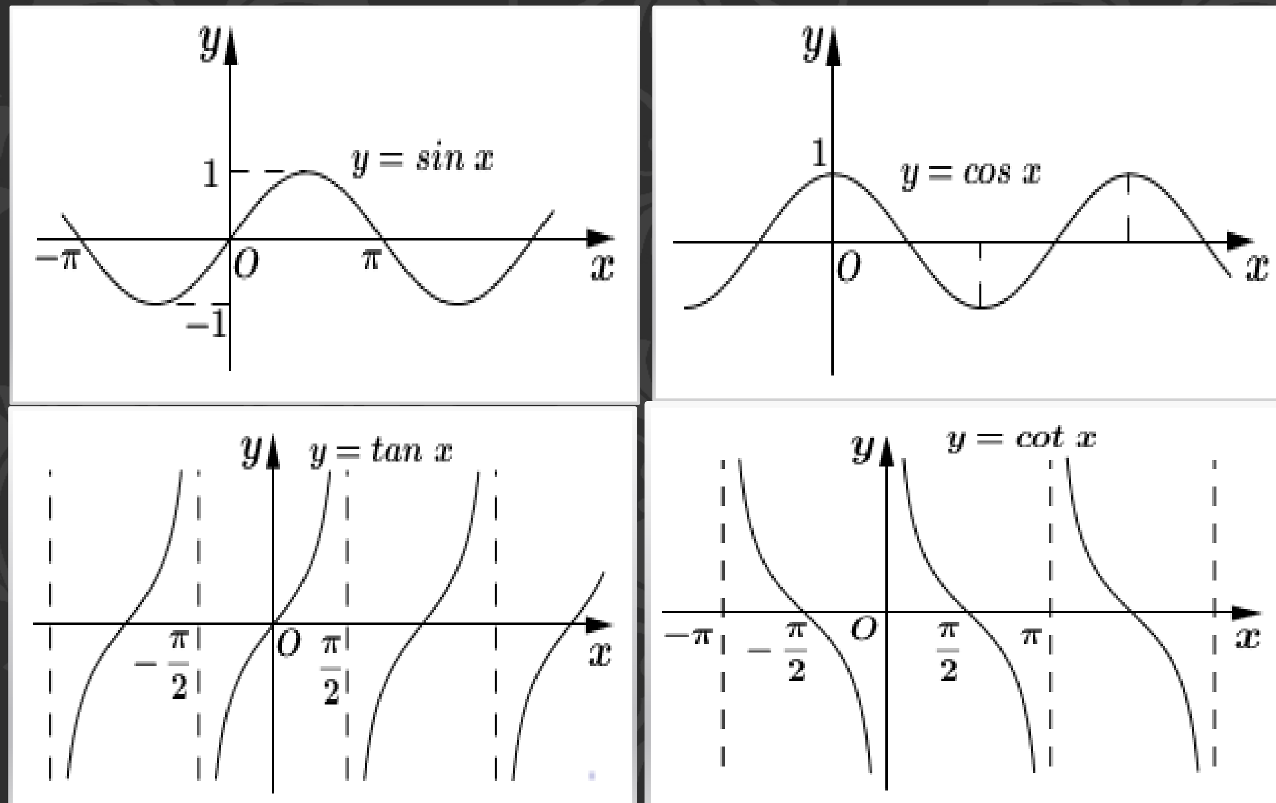
① 幂函数



② 指数函数



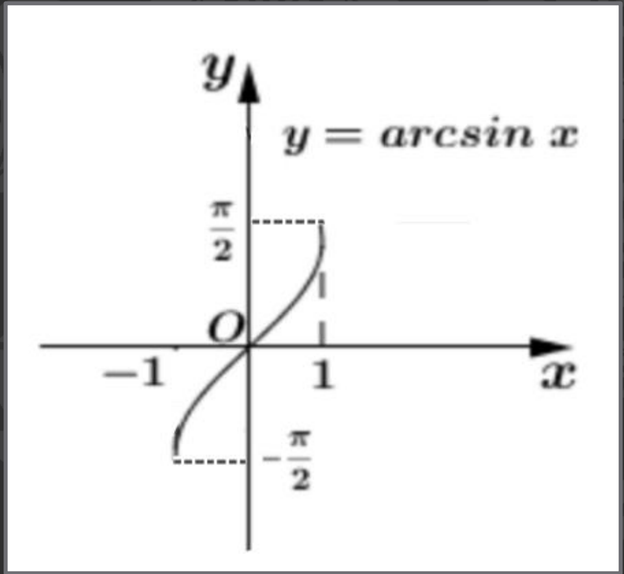
③ 对数函数



④ 三角函数

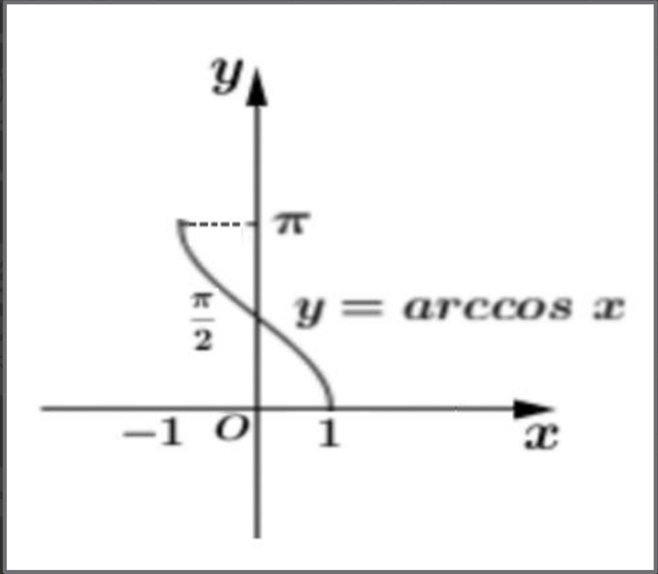
正割函数 $y = \sec x = \dfrac{1}{\cos x}$

余割函数 $y = \csc x = \dfrac{1}{\sin x}$



反正弦函数 $y = \arcsin x$,

$x \in [-1,1], y \in [-\pi/2, \pi/2]$



反余弦函数 $y = \arccos x$,

$x \in [-1,1], y \in [0, \pi]$

函数的运算

7. 函数的四则运算

定义4 设有 $f(x)\ (x\in A)$ 和 $g(x)\ (x\in B)$，且 $A\bigcap B\neq\varnothing$，则定义函数的加法 $f+g$、乘法 $f\cdot g$ 与除法 f/g 如下：

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x),\quad x\in A\bigcap B$$

$$(f\cdot g)(x)=f(x)\cdot g(x), x\in A\bigcap B$$

$$(\frac{f}{g})(x)=\frac{f(x)}{g(x)},\quad x\in A\bigcap B \text{ 且 } g(x)\neq 0$$

注意函数的定义域不能以运算后的形式来确定.

8. 函数的复合运算

例如 （1） $y=\sin u, u=2+x \xrightarrow{\text{代入}} y=\sin(2+x)$

（2） $y=u^2, u=2+x \xrightarrow{\text{代入}} y=(2+x)^2$

一般地，$y=g(u), u=f(x) \xrightarrow{\text{代入}} y=g[f(x)] \leftarrow$ 复合运算

函数复合过程就是代入的过程，复合函数又称为函数的函数

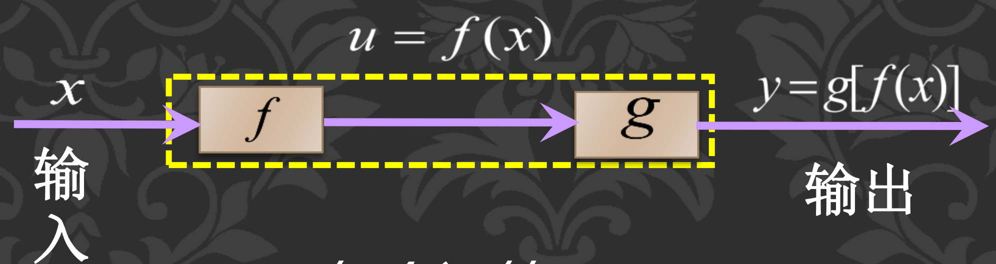
自变量 $x \rightarrow u \rightarrow y$ 因变量

中间变量

定义5 设有两函数 $f:A\to B_1$ 与 $g:B\to C$，且满足 $B_1\subset B$，函数 $h:A\to C$ 定义为：对任意 $x\in A$，有

$$h(x)=g(f(x)).$$

称 h 为 f 与 g 的**复合函数**，记作：$h=g\circ f$.



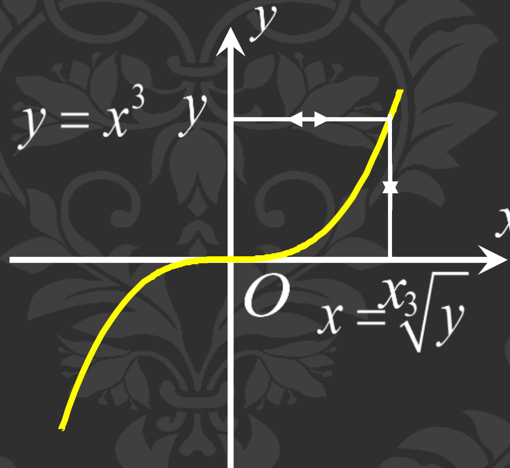
复合运算

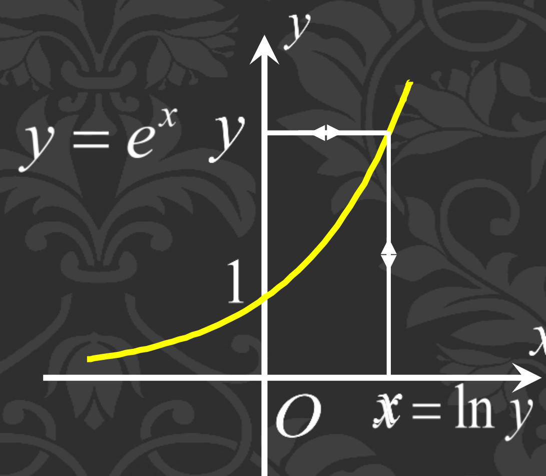
$$u=\sqrt{1+\sqrt{2+\sqrt{x}}} \Longleftrightarrow u=\sqrt{1+u_1}\ ,u_1=\sqrt{2+u_2},u_2=\sqrt{x}$$

9. 函数的求逆运算

例11 (1) $y = x^3 \xrightarrow{\text{用 } y \text{ 表示 } x} x = \sqrt[3]{y}$

(2) $y = e^x \xrightarrow{\text{用 } y \text{ 表示 } x} x = \ln y$





定义6 设函数 $f: A \to f(A)$ 是单射，那么对任何 $f(A)$ 中的y存在且唯一存在一个 A 中的 x使得$f(x) = y$，称这个对应法则给出的从 $f(A)$ 到 A的函数为 f 的反函数，记为 $f^{-1}(y) = x$.

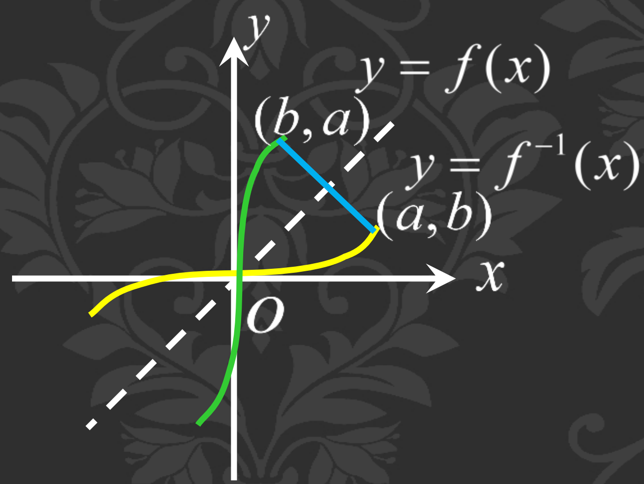
函数$y = f(x)$与$x = f^{-1}(y)$互为反函数.

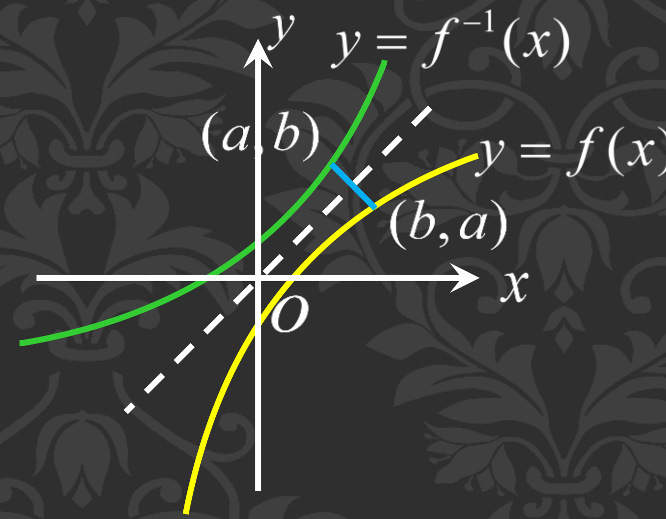
习惯上，将函数 $y = f(x)$的反函数记作$y = f^{-1}(x)$

性质 设$f^{-1}: B \to A$ 为 $f: A \to B$ 的反函数，则

$$(f^{-1} \circ f)(x) = x, \forall x \in A. \qquad (f \circ f^{-1})(y) = y, \forall y \in f(A).$$

几何上，函数$y=f(x)$ 与它的反函数 $y=f^{-1}(x)$的图形关于直线$y=x$ 对称. 但$y=f(x)$与 $x=f^{-1}(y)$ 的图形是同一个 .





函数的性质

10. 有界性

定义7 设函数 $f(x)$ 的定义域为 D, 数集 $I \subset D$.

- 如果存在M，使得对于任意的$x \in I$，有 $f(x) \leq M$则称函数$f(x)$在I上有上界.
- 如果存在m，使得对于任意的$x \in I$，有 $f(x) \geq m$则称函数$f(x)$在I上有下界.
- 如果存在$M > 0$，使得对于任意的$x \in I$，有 $|f(x)| \leq M$ 则称函数$f(x)$在I上有界.

例12 研究函数 $f(x)=x\sin x$ 在定义域上的有界性.

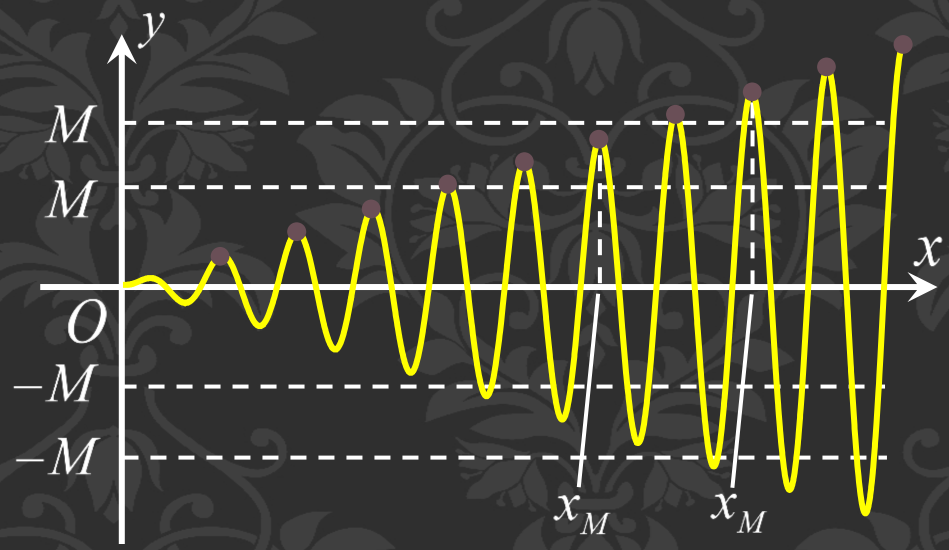
$$f\left(2n\pi+\frac{\pi}{2}\right)=2n\pi+\frac{\pi}{2}\ (n\in\mathbb{Z})$$

- 函数$f(x)$在$\mathbb{R}$上无界：

对于任意的正数M,存在

$x_M\in\mathbb{R}$,使得

$$|f(x_M)|>M$$

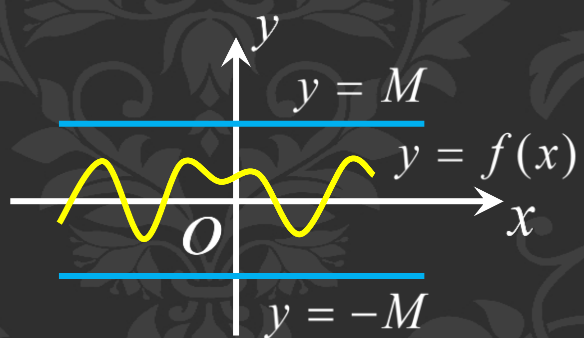


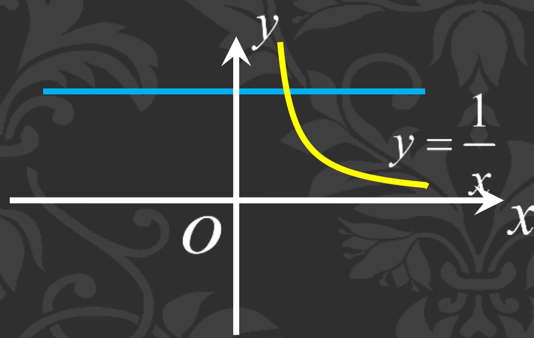
性质 函数 $f(x)$ 在区间 I 上有界的充分必要条件是它在 I 上既有上界又有下界 .

- 函数有界与无界的几何特点

有界函数的图形介于某两条水平直线之间 .

无界函数的图形不能介于任何两条水平直线之间.





- 数集的上界与上确界

设E是一个非空实数集，M是一个实常数，如果对于E中的任何元素x，均有 $x \leq M$，则称M为数集E的一个上界，并称 E有上界.

如果一个实数集E有上界，称E的最小上界为上确界，记为$\sup E$．（supremum 的缩写）

例13 讨论有限集与无限集

$$A=\{2,3,5,7\} \text{ 和 } B=\left\{1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\cdots\right\}$$

的上下界和上下确界，并判断上下确界是否在集合内.

集合A有上界也有下界

上界： 7以及比7更大的数 下界： 2以及比2更小的数

$\sup A=7$ $\inf A=2$

集合B有上界也有下界

上界： 1以及比1更大的数 下界： 小于或等于零的数

$\sup B=1$ $\inf B=0$

上确界: 非空实数集 E 的最小上界. 记为 $\sup E$.

满足: (1) 对任意的 $x \in E$, $x \le \sup E$.

(2) 对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $x_0 \in E$, 使得 $x_0 > \sup E - \varepsilon$.

连续性公理:

一个非空有上界的实数集必有上确界.

微积分的基础是极限理论，而连续性公理（等六个定理）是极限理论的基石.

设E 是一个非空实数集，m 是一个实常数，如果对于 E 中的任何元素 x，均有 $x \geq m$，则称 m 为数集 E 的一个下界，并称 E 有下界.

如果一个实数集 E 有下界，称 E 的最大下界为下确界，记为$\inf E$.（infimum 的缩写）.

11. 单调性

定义8 设函数 $f(x)$ 在区间$I\subset\mathbb{R}$ 上有定义，若对 I 中任意两点 x_1,x_2，当 $x_1<x_2$时，恒有

$$f(x_1)\le f(x_2)\quad\left(f(x_1)<f(x_2)\right)$$

$$f(x_1)\ge f(x_2)\quad\left(f(x_1)>f(x_2)\right)$$

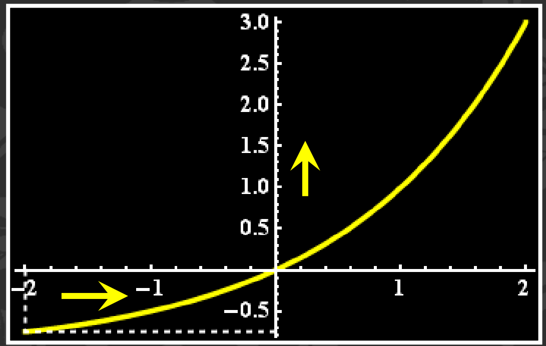
则称 $f(x)$ 在区间 I 上单调增加（严格单调增加）.

单调减少（严格单调减少）.

单调增加或单调减少的函数统称为单调函数 .

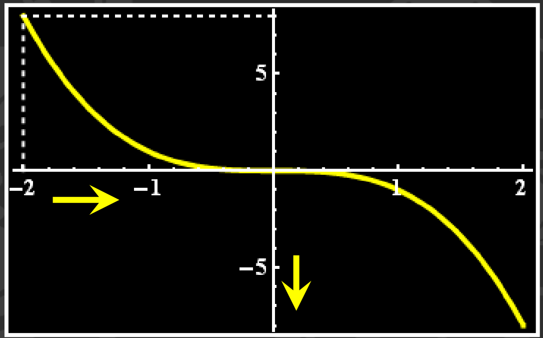
- 单调函数的几何特征

严格单调增加



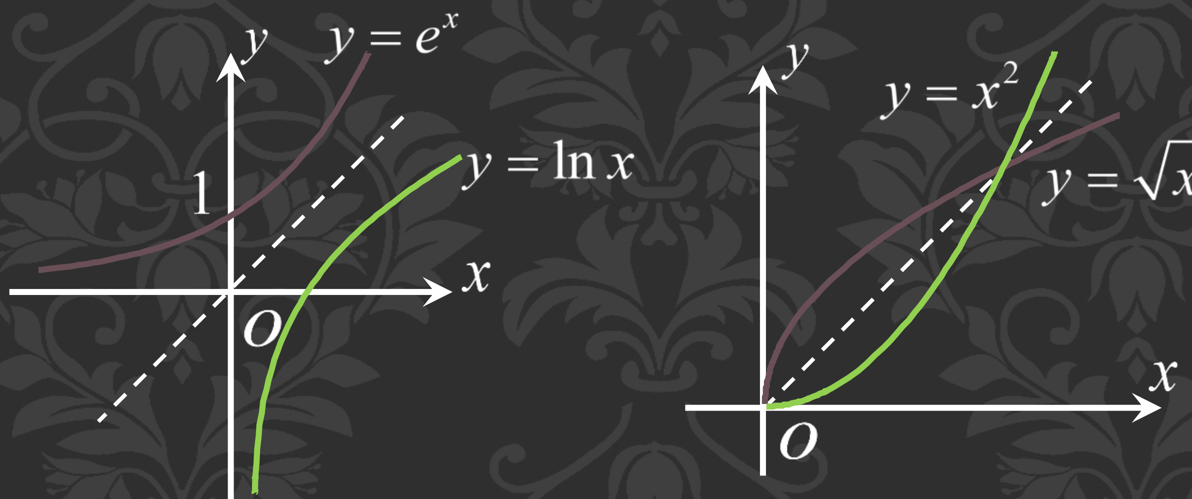
y 的值随 x 增大而增大

严格单调减少



y 的值随 x 增大反而减少

性质 严格单调增加（减少）的函数一定存反函数，且其反函数也是严格单调增加(减少).



12. 奇偶性

定义9 设函数$f(x)$ 在区间 $I=(-a,a)$ (或 $[-a,a]$) 上有定义，若对于 I 中的任意 x ，恒有

$$f(-x)=f(x) \quad (\ f(-x)=-f(x) \ )$$

则称为区间 I 上的偶函数（奇函数）.

- 奇函数的代数和仍为奇函数
- 偶函数与奇函数的乘积为奇函数

例13 证明狄利克雷函数 $y=D(x)$ 为偶函数 .

13. 周期性

定义10 设函数 $f(x)$在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内有定义，若存在正常数 T使得对于任意 x，恒有

$$f(x+T)=f(x)$$

则称 $f(x)$为以T为周期的**周期函数**.

- 如果 T是 $f(x)$的周期，nT 也为 $f(x)$ 的周期，并有

$$f(x+nT)=f(x)$$

- 在周期函数 $f(x)$ 的所有周期中，如果存在最小的正数 T_0，则称 T_0为 $f(x)$ 的**最小正周期**，或**基本周期**.