(2)对每一个间断点 x_i，求极限 $\lim\limits_{x\to x_i^-} f(x)$ 及 $\lim\limits_{x\to x_i^+} f(x)$；

(3)判断类型：极限为常数时，属于第一类间断点，且为可去间断点；

左、右极限存在但不相等时，属于第一类间断点，且为跳跃间断点；

左、右极限至少有一个不存在时，属于第二类间断点；

极限为∞时，属于第二类间断点，且为无穷间断点.

【例 4】 设 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n-1)x}{nx^2+1}$，则 $f(x)$ 的间断点为 $x=$________.

解 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n-1)x}{nx^2+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\left(1-\dfrac{1}{n}\right)x}{x^2+\dfrac{1}{n}}=\dfrac{1}{x}$，所以 $f(x)$ 的间断点为 $x=0$.

故应填 0.

【例 5】 (2017 数学一，数学二，数学三，4 分)若函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos\sqrt{x}}{ax}, & x>0,\\ b, & x\leqslant 0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，则________.

(A) $ab=\dfrac{1}{2}$　　(B) $ab=-\dfrac{1}{2}$　　(C) $ab=0$　　(D) $ab=2$

解 $f(0+0)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1-\cos\sqrt{x}}{ax}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\frac{1}{2}x}{ax}=\dfrac{1}{2a}$，$f(0)=f(0-0)=b$.

因 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，故 $f(0+0)=f(0)=f(0-0)$，从而 $ab=\dfrac{1}{2}$.

故应选(A).

习题 1—8 解答

1. 设 $y=f(x)$ 的图形如图 1—11 所示，试指出 $f(x)$ 的全部间断点，并对可去间断点补充或修改函数值的定义，使它成为连续点.

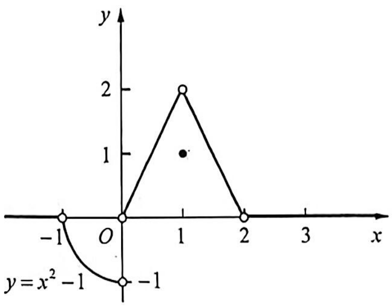

图 1—11

解 $x=-1,0,1,2$ 均为 $f(x)$ 的间断点，除 $x=0$ 外它们均为 $f(x)$ 的可去间断点. 补充定义 $f(-1)=f(2)=0$，修改定义使 $f(1)=2$，则它们均成为 $f(x)$ 的连续点.

2. 研究下列函数的连续性，并画出函数的图形：

(1) $f(x)=\begin{cases}x^2, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ 2-x, & 1<x\leqslant 2;\end{cases}$

(2) $f(x)=\begin{cases}x, & -1\leqslant x\leqslant 1,\\ 1, & x<-1 \text{ 或 } x>1.\end{cases}$

解 (1) $f(x)$ 在 $[0,1)$ 及 $(1,2]$ 内连续，在 $x=1$ 处，

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-} x^2=1,$$

CS 扫描全能王
3亿人都在用的扫描App

$$\lim_{x\to1^+}f(x)=\lim_{x\to1^+}(2-x)=1,$$

又 $f(1)=1$，故 $f(x)$ 在 $x=1$ 处连续，因此 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上连续，函数的图形如图1—12所示.

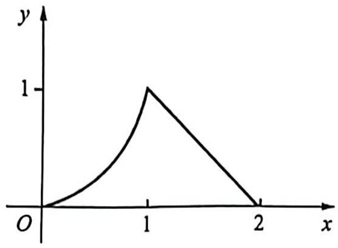

图 1—12

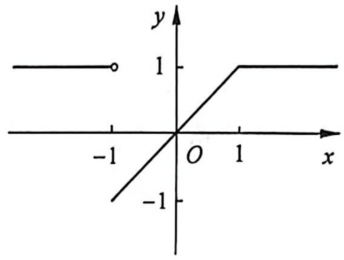

图 1—13

(2) $f(x)$ 在 $(-\infty,-1)$ 与 $(-1,+\infty)$ 内连续，在 $x=-1$ 处间断，但右连续，因为在 $x=-1$ 处

$$\lim_{x\to-1^+}f(x)=\lim_{x\to-1^+}x=-1,\quad f(-1)=-1,$$

但 $\lim\limits_{x\to-1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to-1^-}1=1$，

即 $\lim\limits_{x\to-1^+}f(x)\neq\lim\limits_{x\to-1^-}f(x)$.

函数的图形如图 1—13 所示.

3. 下列函数在指出的点处间断，说明这些间断点属于哪一类. 如果是可去间断点，则补充或改变函数的定义使它连续：

(1) $y=\dfrac{x^2-1}{x^2-3x+2}$，$x=1$，$x=2$；

(2) $y=\dfrac{x}{\tan x}$，$x=k\pi$，$x=k\pi+\dfrac{\pi}{2}$ $(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$；

(3) $y=\cos^2\dfrac{1}{x}$，$x=0$；

(4) $y=\begin{cases}x-1, & x\leqslant1,\\ 3-x, & x>1,\end{cases}$ $x=1$.

解 (1) 对 $x=1$，因为 $f(1)$ 无定义，但

$$\lim_{x\to1}\frac{x^2-1}{x^2-3x+2}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x+1)}{(x-2)(x-1)}=\lim_{x\to1}\frac{x+1}{x-2}=-2,$$

所以，$x=1$ 为第一类间断点（可去间断点），重新定义函数：

$$f_1(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-1}{x^2-3x+2}, & x\neq1,2,\\ -2, & x=1,\end{cases}$$

则 $f_1(x)$ 在 $x=1$ 处连续.

因为 $\lim\limits_{x\to2}f(x)=\infty$，所以 $x=2$ 为第二类间断点（无穷间断点）.

(2) 对 $x=0$，因为 $f(0)$ 无定义，$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{\tan x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{x}=1$，所以 $x=0$ 为第一类间断点（可去间断点），重新定义函数：$f_1(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{\tan x}, & x\neq k\pi,\ k\pi+\dfrac{\pi}{2},\\ 1, & x=0\end{cases}$ $(k\in\mathbf{Z})$，

则 $f_1(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

对 $x=k\pi$ $(k=\pm1,\pm2,\cdots)$，因为 $\lim\limits_{x\to k\pi}\dfrac{x}{\tan x}=\infty$，所以 $x=k\pi(k=\pm1,\pm2,\cdots)$ 为第二类间断点（无穷间断点）.

对 $x=k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$,因为 $\lim\limits_{x\to k\pi+\frac{\pi}{2}}\frac{x}{\tan x}=0$,而函数在 $k\pi+\frac{\pi}{2}$ 处无定义,所以 $x=k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$ 为第一类间断点(可去间断点),重新定义函数:

$$f_2(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{\tan x}, & x\neq k\pi,\ k\pi+\dfrac{\pi}{2},\\ 0, & x=k\pi+\dfrac{\pi}{2}\end{cases}\quad(k\in\mathbf{Z}),$$

则 $f_2(x)$ 在 $x=k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$ 处连续.

(3) 对 $x=0$,因为 $\lim\limits_{x\to0^+}\cos^2\frac{1}{x}$ 及 $\lim\limits_{x\to0^-}\cos^2\frac{1}{x}$ 均不存在,所以 $x=0$ 为第二类间断点.

(4) 对 $x=1$,因为 $\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}(3-x)=2$, $\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to1^-}(x-1)=0$,即左、右极限存在,但不相等,所以 $x=1$ 为第一类间断点(跳跃间断点).

> **评注**:在讨论分段函数的连续性时,在函数的分界点处,必须分别考虑函数的左连续性和右连续性,只有函数在该点既左连续,又右连续,才能得出函数在该点连续.

4. 讨论函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1-x^{2n}}{1+x^{2n}}x$ 的连续性,若有间断点,则判别其类型.

4 题视频解析

解 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1-x^{2n}}{1+x^{2n}}x=\begin{cases}-x, & |x|>1,\\ 0, & |x|=1,\\ x, & |x|<1.\end{cases}$

在分界点 $x=-1$ 处,因为

$$\lim_{x\to-1^-}f(x)=\lim_{x\to-1^-}(-x)=1,\ \lim_{x\to-1^+}f(x)=\lim_{x\to-1^+}x=-1,$$

$$\lim_{x\to-1^-}f(x)\neq\lim_{x\to-1^+}f(x),$$

所以 $x=-1$ 为第一类间断点(跳跃间断点).

在分界点 $x=1$ 处,因为

$$\lim_{x\to1^-}f(x)=\lim_{x\to-1^-}x=1,\ \lim_{x\to1^+}f(x)=\lim_{x\to1^+}(-x)=-1,$$

$$\lim_{x\to1^-}f(x)\neq\lim_{x\to1^+}f(x),$$

所 $x=1$ 为第一类间断点(跳跃间断点).

5. 下列陈述中,哪些是对的,哪些是错的?如果是对的,说明理由;如果是错的,试给出一个反例.

(1) 如果函数 $f(x)$ 在 a 连续,那么 $|f(x)|$ 也在 a 连续;

(2) 如果函数 $|f(x)|$ 在 a 连续,那么 $f(x)$ 也在 a 连续.

5 题视频解析

解 (1) 对. 因为 $\big||f(x)|-|f(a)|\big|\leqslant|f(x)-f(a)|\to0(x\to a)$.

即 $\lim\limits_{x\to a}|f(x)|=|f(a)|$,所以 $|f(x)|$ 也在 a 连续.

(2) 错. 例如 $f(x)=\begin{cases}1, & x\geqslant0,\\ -1, & x<0,\end{cases}$ 则 $|f(x)|$ 在 $x=0$ 处连续,而 $f(x)$ 在 $x=0$ 处不连续.

* 6. 证明:若函数 $f(x)$ 在点 x_0 连续且 $f(x_0)\neq0$,则存在 x_0 的某一邻域 $U(x_0)$,当 $x\in U(x_0)$ 时,$f(x)\neq0$.

证 若 $f(x_0)>0$,因为 $f(x)$ 在 x_0 连续,对于 $\varepsilon=\frac{1}{2}f(x_0)>0$,$\exists\delta>0$,当 $x\in U(x_0,\delta)$ 时,有

CS 扫描全能王
3亿人都在用的扫描App

$$|f(x)-f(x_0)|<\frac{1}{2}f(x_0),\quad 即\quad 0<\frac{1}{2}f(x_0)<f(x)<\frac{3}{2}f(x_0);$$

若 $f(x_0)<0$，因为 $f(x)$ 在 x_0 连续，对于 $\varepsilon=-\frac{1}{2}f(x_0)>0$，$\exists\delta>0$，当 $x\in U(x_0,\delta)$ 时，有

$$|f(x)-f(x_0)|<-\frac{1}{2}f(x_0),\quad 即\quad \frac{3}{2}f(x_0)<f(x)<\frac{1}{2}f(x_0)<0;$$

因此，不论 $f(x_0)>0$ 或 $f(x_0)<0$，总存在 x_0 的某一邻域 $U(x_0)$，当 $x\in U(x_0)$ 时，$f(x)\neq0$.

*7. 设 $f(x)=\begin{cases}x, & x\in\mathbf{Q},\\ 0, & x\in\mathbf{Q}^C.\end{cases}$ 证明：

(1) $f(x)$ 在 $x=0$ 连续；

(2) $f(x)$ 在非零的 x 处都不连续.

7 题视频解析

证 (1) $\forall\varepsilon>0$，取 $\delta=\varepsilon$，则当 $|x-0|=|x|<\delta$ 时，$|f(x)-f(0)|=|f(x)|\leqslant|x|<\varepsilon$，

故 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=f(0)$，即 $f(x)$ 在 $x=0$ 连续.

(2) 我们证明：$\forall x_0\neq0$，$f(x)$ 在 x_0 处不连续.

若 $x_0=r\neq0$，$r\in\mathbf{Q}$，则 $f(x_0)=f(r)=r$.

分别取一有理数列 $\{r_n\}$：$r_n\to r(n\to\infty)$，$r_n\neq r$；取一无理数列 $\{s_n\}$：$s_n\to r(n\to\infty)$，则

$$\lim_{n\to\infty}f(r_n)=\lim_{n\to\infty}r_n=r,\qquad \lim_{n\to\infty}f(s_n)=\lim_{n\to\infty}0=0,$$

而 $r\neq0$，由函数极限与数列极限的关系知 $\lim\limits_{x\to r}f(x)$ 不存在，故 $f(x)$ 在 x_0 处不连续.

若 $x_0=s$，$s\in\mathbf{Q}^C$. 同理可证：$f(x_0)=f(s)=0$，但 $\lim\limits_{x\to s}f(x)$ 不存在，故 $f(x)$ 在 x_0 处不连续.

8. 设 $f(x)$ 对任意实数 x,y，有 $f(x+y)=f(x)+f(y)$，且 $f(x)$ 在 $x=0$ 连续，证明 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上连续.

8 题视频解析

证 对任意的 $x\in\mathbf{R}$，有 $f(x)=f(x+0)=f(x)+f(0)$，所以 $f(0)=0$，又 $f(x)$ 在 $x=0$ 连续，即 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=f(0)=0$，从而对任意的 $x\in\mathbf{R}$，有

$$\lim_{\Delta x\to0}f(x+\Delta x)=\lim_{\Delta x\to0}[f(x)+f(\Delta x)]=f(x)+\lim_{\Delta x\to0}f(\Delta x)=f(x)+0=f(x).$$

故 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上连续.

第九节　连续函数的运算与初等函数的连续性

一、主要内容归纳

1. 连续函数的四则运算性质

若函数 $f(x)$、$g(x)$ 在点 x_0 连续，则 $f(x)\pm g(x)$、$f(x)g(x)$、$\dfrac{f(x)}{g(x)}$ $(g(x_0)\neq0)$ 在点 x_0 均连续.

2. 初等函数的连续性

一切初等函数在其定义区间内均连续.

本结论提供了求初等函数极限的一种方法，即求初等函数在其定义区间内某点的极限就是求函数在该点的值.

CS 扫描全能王
3亿人都在用的扫描App