高等数学

2.5 函数的微分

基础部数学教研室

郑治中

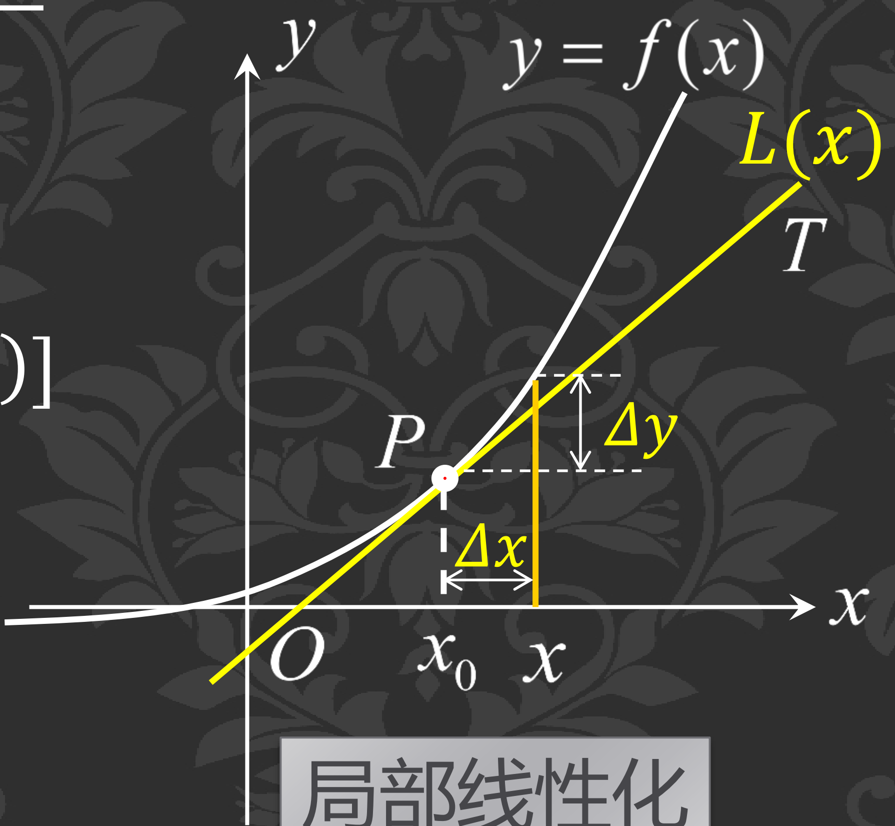
导数定义：$f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

$$f(x)$$

$$=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+o[(x-x_0)]$$

$$f(x)\approx f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)=L(x)$$

以直代曲　　局部线性化函数



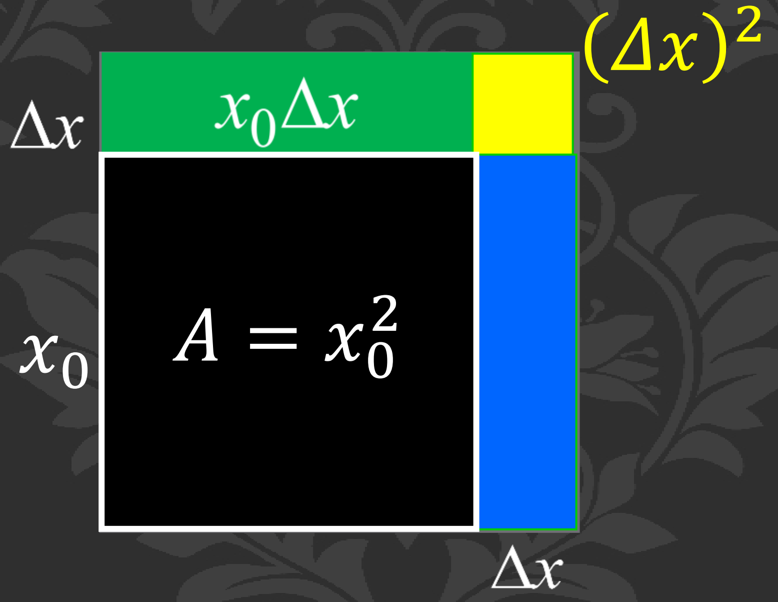
局部线性化

即　$\Delta y=f'(x_0)\Delta x+o(\Delta x)\approx f'(x_0)\Delta x$

一块正方形金属薄片受温度变化的影响，其边长x由x_0变到$x_0 + \Delta x$，则其面积$A = A(x)$的增量为

$$\Delta A = (x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2$$

$$= \underbrace{2x_0\Delta x}_{\substack{\text{关于}\Delta x\text{的}\\ \text{线性主部}}} + \underbrace{(\Delta x)^2}_{\substack{\Delta x \to 0\text{时为}\\ \text{高阶无穷小}}}$$



故 $\Delta A \approx 2x_0\Delta x.$

微分的概念

一阶微分形式的不变性

微分在近似计算中的应用

定义1 设函数 $y=f(x)$ 在 x_0 的某邻域 $(x_0-\delta,\ x_0+\delta)$ 内有定义，若存在与Δx无关的常数$\boldsymbol{A}$，使函数$y=f(x)$在点x_0处的增量$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$ 可以表示为

$$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=A\Delta x+o(\Delta x)\ (\Delta x\to 0),$$

则称函数$y=f(x)$在x_0处可微（或可微分），$A\Delta x$称为$y=f(x)$在点x_0处的微分，记为

$$\mathrm{d}y|_{x=x_0} \text{ 或 } \mathrm{d}f(x)|_{x=x_0} \text{ ,即 } \mathrm{d}y|_{x=x_0}=A\Delta x.$$

若是在一般点x处的微分，则简记为 $\mathrm{d}y=A\Delta x$.

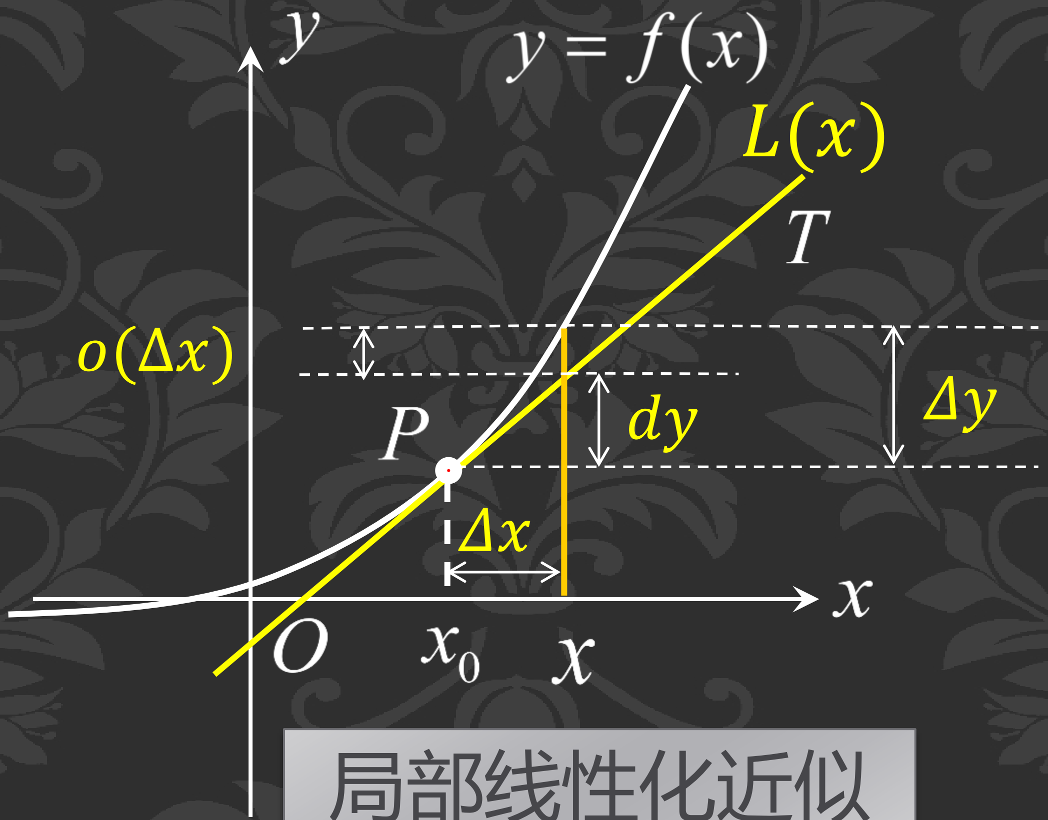
例1　设$f(x)=x$，证明$f(x)$在任何点x_0处可微，且

$$\mathrm{d}f(x)|_{x=x_0}=\Delta x.$$

函数$y=f(x)$在一般点x处的微分则写成

$$\mathrm{d}y=A\mathrm{d}x \text{ 或 } \mathrm{d}f(x)=A\mathrm{d}x.$$

- 微分的几何含义



局部线性化近似

定理1 设函数$y=f(x)$在x_0的某邻域$(x_0-\delta,\ x_0+\delta)$内有定义，则 $y=f(x)$ 在 x_0 可微的充要条件是 $y=f(x)$ 在x_0处可导，且 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的微分为

$$\mathrm{d}y|_{x=x_0}=f'(x_0)\mathrm{d}x \text{ 或 } \mathrm{d}f(x)|_{x=x_0}=f'(x_0)\mathrm{d}x\,.$$

微分：自变量微小变化时，函数变化的线性近似值

导数：自变量微小变化时，函数变化的快慢程度（变化率）

在高维时，可导和可微并不相互推出。

- 微分公式表和导数公式表（P111）

定理2(四则运算) 设函数$u(x), v(x)$在x处可导，则$u(x)+v(x)$、$u(x)v(x)$和$\frac{u(x)}{v(x)}$ $(v(x)\neq 0)$在x处可微，且

(1) $\mathrm{d}(u+v)=\mathrm{d}u+\mathrm{d}v$;

(2) $\mathrm{d}(uv)=v\mathrm{d}u+u\mathrm{d}v$;

(3) $\mathrm{d}(\frac{u}{v})=\frac{v\mathrm{d}u-u\mathrm{d}v}{v^2}$.

定理3(复合运算) 设有复合函数 $y=f[\varphi(x)]$，其中 $y=f(u)$ 和 $u=\varphi(x)$ 均可导，则函数 $y=f[\varphi(x)]$ 可微，且

$$\mathrm{d}y=f'(u)\varphi'(x)\mathrm{d}x.$$

$\mathrm{d}u$

$[f(\varphi(x))]'_x$

$$\mathrm{d}y=f'(u)\mathrm{d}u=[f(\varphi(x))]'_x\,\mathrm{d}x$$

无论是自变量，还是中间变量，微分公式的形式保持不变，将此性质称为**微分形式的一阶不变性**.

例2 求函数 $y = e^{\arctan x^2}$ 的微分.

例3 求函数 $y = \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2})$的微分.

例4 求函数 $y = \ln\tan(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{4})$的微分.

例5 将下面给出的微分形式写成某一函数的微分：

(1) $x^2\mathrm{d}x$;　　(2) $e^{2x}\mathrm{d}x$;

(3) $\cos(5x-1)\mathrm{d}x$;　　(4) $\dfrac{1}{1+2x^2}\mathrm{d}x$.

例6 利用微分的形式不变性, 函数 $y=\sin(1+e^{x^2})$ 求dy.

例7 利用微分的形式不变性,函数 $y=\sin(x+y)$ 求dy和$\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

- 函数的近似计算

若$y=f(x)$在点x处可微，则对于充分小的$|\Delta x|$，有近似公式

$$f(x_0+\Delta x)\approx f(x_0)+f'(x_0)\Delta x.$$

它说明：用线性函数$f(x_0)+f'(x_0)\Delta x$来近似 $f(x_0+\Delta x)$，所产生的误差

$$\delta=|f(x_0+\Delta x)-[f(x_0)+f'(x_0)\Delta x]|$$

是 Δx 的高级无穷小，即

$$\delta=o(\Delta x)\ (\Delta x\to 0).$$

常见的近似公式有$|x| \ll 1$:

(1) $\sin x \approx x$, $\arcsin x \approx x$;

(2) $\tan x \approx x$, $\arctan x \approx x$;

(3) $\cos x \approx 1-\dfrac{x^2}{2}$

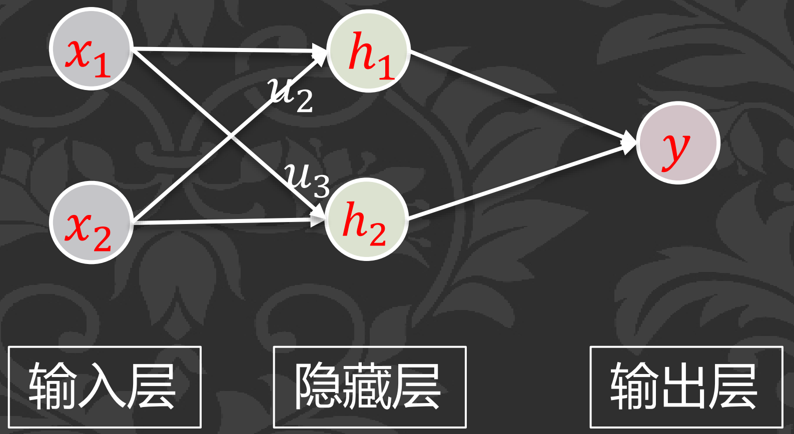
(4) $\ln(1+x) \approx x$, $e^x \approx 1+x$;

(5) $(1+x)^\alpha \approx 1+\alpha x, \dfrac{1}{1-x} = 1+x$

例8 利用微分计算 $\sin 30°30'$, $\sqrt{1.05}, e^{-0.03}, \sqrt[4]{80}$ 的近似值.

- 深度网络中的线性近似

深度神经网络



深度网络层间的运算仅仅是线性运算！