【例 7】 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 连续，在 $(0,1)$ 内二阶可导，过点 $A(0,f(0))$ 与 $B(1,f(1))$ 的直线与曲线 $y=f(x)$ 相交于点 $C(c,f(c))(0<c<1)$，证明在 $(0,1)$ 内至少存在一点 $\xi$，使 $f''(\xi)=0$.

证　由于 $f(x)$ 在 $[0,c]$ 上满足拉格朗日中值定理，故存在 $\eta_1\in(0,c)$ 使得

$$f'(\eta_1)=\frac{f(c)-f(0)}{c-0}=\frac{f(c)-f(0)}{c},$$

同理，在 $[c,1]$ 上存在 $\eta_2\in(c,1)$，使得 $f'(\eta_2)=\dfrac{f(1)-f(c)}{1-c}$，而 $\dfrac{f(c)-f(0)}{c}$ 和 $\dfrac{f(1)-f(c)}{1-c}$ 都是过点 $A$、$B$ 的直线斜率，从而

$$\frac{f(c)-f(0)}{c}=\frac{f(1)-f(c)}{1-c},\quad 即\ f'(\eta_1)=f'(\eta_2).$$

故 $f'(x)$ 在 $[\eta_1,\eta_2]$ 上满足罗尔定理的条件，于是存在 $\xi\in(\eta_1,\eta_2)\subset(0,1)$，使得 $f''(\xi)=0$.

## 习题 3—1 解答

1. 验证罗尔定理对函数 $y=\ln\sin x$ 在区间 $[\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}]$ 上的正确性.

证　函数 $f(x)=\ln\sin x$ 在 $[\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}]$ 上连续，在 $(\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6})$ 内可导，又

$$f\left(\frac{\pi}{6}\right)=\ln\sin\frac{\pi}{6}=\ln\frac{1}{2},\qquad f\left(\frac{5\pi}{6}\right)=\ln\sin\frac{5\pi}{6}=\ln\frac{1}{2},$$

即 $f\left(\frac{\pi}{6}\right)=f\left(\frac{5\pi}{6}\right)$，故 $f(x)$ 在 $[\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}]$ 上满足罗尔定理条件，由罗尔定理知至少存在一点 $\xi\in(\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6})$，使 $f'(\xi)=0$. 又 $f'(x)=\dfrac{\cos x}{\sin x}=\cot x$，令 $f'(x)=0$ 得 $x=n\pi+\dfrac{\pi}{2}$ $(n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$.

取 $n=0$ 得 $\xi=\frac{\pi}{2}\in(\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6})$.

因此罗尔定理对函数 $y=\ln\sin x$ 在区间 $[\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}]$ 上是正确的.

2. 验证拉格朗日中值定理对函数 $y=4x^3-5x^2+x-2$ 在区间 $[0,1]$ 上的正确性.

证　函数 $f(x)=4x^3-5x^2+x-2$ 在区间 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，故 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上满足拉格朗日中值定理条件，从而至少存在一点 $\xi\in(0,1)$，使 $f'(\xi)=\dfrac{f(1)-f(0)}{1-0}=\dfrac{-2-(-2)}{1}=0$.

2 题视频解析

又 $f'(\xi)=12\xi^2-10\xi+1=0$，可知 $\xi=\dfrac{5\pm\sqrt{13}}{12}\in(0,1)$，因此拉格朗日中值定理对函数 $y=4x^3-5x^2+x-2$ 在区间 $[0,1]$ 上是正确的.

3. 对函数 $f(x)=\sin x$ 及 $F(x)=x+\cos x$ 在区间 $[0,\frac{\pi}{2}]$ 上验证柯西中值定理的正确性.

证　函数 $f(x)=\sin x$，$F(x)=x+\cos x$ 在区间 $[0,\frac{\pi}{2}]$ 上连续，在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 内可导，且在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 内 $F'(x)=1-\sin x\neq0$，故 $f(x)$、$F(x)$ 满足柯西中值定理条件，从而至少存在一点 $\xi\in(0,\frac{\pi}{2})$，使 $\dfrac{f\left(\frac{\pi}{2}\right)-f(0)}{F\left(\frac{\pi}{2}\right)-F(0)}$

$=\dfrac{f'(\xi)}{F'(\xi)}$.

由$\dfrac{1-0}{\dfrac{\pi}{2}-1}=\dfrac{\cos\xi}{1-\sin\xi}$，即$\dfrac{\cos\xi}{1-\sin\xi}=\dfrac{2}{\pi-2}$，解得 $\xi=2\arctan\dfrac{4-\pi}{\pi}\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$.

因此，柯西中值定理对函数 $f(x)=\sin x$，$F(x)=x+\cos x$ 在区间$\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$上是正确的.

4. 试证明对函数 $y=px^2+qx+r$ 应用拉格朗日中值定理时所求得的点 $\xi$ 总是位于区间的正中间.

**证** 任取数值 $a,b$，不妨设 $a<b$，函数 $f(x)=px^2+qx+r$ 在区间$[a,b]$上连续，在$(a,b)$内可导，故由拉格朗日中值定理知至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使

$$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a),$$

即

$$pb^2+qb+r-pa^2-qa-r=(2p\xi+q)(b-a).$$

整理得 $\xi=\dfrac{a+b}{2}$. 即所求得的 $\xi$ 总是位于区间的正中间.

5. 不用求出函数 $f(x)=(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$ 的导数，说明方程 $f'(x)=0$ 有几个实根，并指出它们所在的区间.

5 题视频解析

**解** 函数 $f(x)$分别在$[1,2]$，$[2,3]$，$[3,4]$上连续，分别在$(1,2)$，$(2,3)$，$(3,4)$内可导，且 $f(1)=f(2)=f(3)=f(4)=0$. 由罗尔定理知至少存在 $\xi_1\in(1,2)$，$\xi_2\in(2,3)$，$\xi_3\in(3,4)$，使

$$f'(\xi_1)=f'(\xi_2)=f'(\xi_3)=0.$$

即方程 $f'(x)=0$ 至少有三个实根，又方程 $f'(x)=0$ 为三次方程，故它至多有三个实根，因此方程 $f'(x)=0$ 有且仅有三个实根，它们分别位于区间$(1,2)$，$(2,3)$，$(3,4)$内.

6. 证明恒等式：$\arcsin x+\arccos x=\dfrac{\pi}{2}\quad(-1\leqslant x\leqslant 1)$.

**证** 取函数 $f(x)=\arcsin x+\arccos x$，$x\in[-1,1]$，因 $f'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\equiv 0$，

故 $f(x)\equiv C$. 取 $x=0$，得 $f(0)=C=\dfrac{\pi}{2}$. 因此 $\arcsin x+\arccos x=\dfrac{\pi}{2}$，$x\in[-1,1]$.

7. 若方程 $a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x=0$ 有一个正根 $x=x_0$，证明方程 $a_0nx^{n-1}+a_1(n-1)x^{n-2}+\cdots+a_{n-1}=0$ 必有一个小于 $x_0$ 的正根.

**证** 取函数 $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x$，则 $f(x)$在$[0,x_0]$上连续，在$(0,x_0)$内可导，且$f(0)=f(x_0)=0$，由罗尔定理知至少存在一点 $\xi\in(0,x_0)$，使 $f'(\xi)=0$，即方程 $a_0nx^{n-1}+a_1(n-1)x^{n-2}+\cdots+a_{n-1}=0$ 必有一个小于 $x_0$ 的正根.

8. 若函数 $f(x)$在$[1,2]$上具有二阶导数，且 $f(2)=0$，又 $F(x)=(x-1)^2f(x)$，证明在$(1,2)$内至少存在一点 $\xi$，使 $F''(\xi)=0$.

8 题视频解析

**证** 显然 $F(1)=0$，$F(2)=f(2)=0$. 对 $F(x)$在$[1,2]$上应用罗尔定理，存在 $\xi_1\in(1,2)$，使 $F'(\xi_1)=0$.

又 $F'(x)=2(x-1)f(x)+(x-1)^2f'(x)$，所以 $F'(1)=0$.

再对 $F'(x)$在$(1,\xi_1)$上应用罗尔定理，在$(1,\xi_1)\subset(1,2)$内至少存在一点 $\xi$，使 $F''(\xi)=0$.

9. 设 $a>b>0$，$n>1$，证明：$nb^{n-1}(a-b)<a^n-b^n<na^{n-1}(a-b)$.

**证** 取函数 $f(x)=x^n$，则 $f(x)$在$[b,a]$上连续，在$(b,a)$内可导，由拉格朗日中值定理知，至少存在一点 $\xi\in(b,a)$，使

$$f(a)-f(b)=f'(\xi)(a-b),\qquad \text{即}\quad a^n-b^n=n\xi^{n-1}(a-b).$$

又 $0<b<\xi<a$，$n>1$，故 $0<b^{n-1}<\xi^{n-1}<a^{n-1}$.

因此 $nb^{n-1}(a-b)<n\xi^{n-1}(a-b)<na^{n-1}(a-b)$，

即 $nb^{n-1}(a-b)<a^n-b^n<na^{n-1}(a-b)$.

10. 设 $a>b>0$，证明：$\frac{a-b}{a}<\ln\frac{a}{b}<\frac{a-b}{b}$.

10 题视频解析

证 取函数 $f(x)=\ln x$，则 $f(x)$ 在 $[b,a]$ 上连续，在 $(b,a)$ 内可导，由拉格朗日中值定理知，至少存在一点 $\xi\in(b,a)$，使 $f(a)-f(b)=f'(\xi)(a-b)$，即 $\ln a-\ln b=\frac{1}{\xi}(a-b)$.

又 $0<b<\xi<a$，故 $0<\frac{1}{a}<\frac{1}{\xi}<\frac{1}{b}$，因此 $\frac{a-b}{a}<\frac{a-b}{\xi}<\frac{a-b}{b}$，即 $\frac{a-b}{a}<\ln\frac{a}{b}<\frac{a-b}{b}$.

11. 证明下列不等式：

(1) $|\arctan a-\arctan b|\leqslant|a-b|$；

(2) 当 $x>1$ 时，$e^x>ex$.

解 (1) 当 $a=b$ 时，显然成立. 当 $a\neq b$ 时，取函数 $f(x)=\arctan x$，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 或 $[b,a]$ 上连续，在 $(a,b)$ 或 $(b,a)$ 内可导，由拉格朗日中值定理知至少存在一点 $\xi\in(a,b)$ 或 $(b,a)$，使 $f(a)-f(b)=f'(\xi)(a-b)$，

即 $$\arctan a-\arctan b=\frac{1}{1+\xi^2}(a-b),$$

故 $$|\arctan a-\arctan b|=\frac{1}{1+\xi^2}|a-b|\leqslant|a-b|.$$

(2) 取函数 $f(t)=e^t$，则 $f(t)$ 在 $[1,x]$ 上连续，在 $(1,x)$ 内可导. 由拉格朗日中值定理知，至少存在一点 $\xi\in(1,x)$，使

$$f(x)-f(1)=f'(\xi)(x-1),\qquad \text{即}\quad e^x-e=e^\xi(x-1).$$

又 $1<\xi<x$，故 $e^\xi>e$，因此

$$e^x-e>e(x-1),\qquad \text{即}\quad e^x>xe.$$

12. 证明方程 $x^5+x-1=0$ 只有一个正根.

证 取函数 $f(x)=x^5+x-1$，则 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，且

$$f(0)=-1<0,\qquad f(1)=1>0,$$

由零点定理知至少存在点 $x_1\in(0,1)$，使 $f(x_1)=0$，即方程 $x^5+x-1=0$ 在 $(0,1)$ 内至少有一个正根.

若方程 $x^5+x-1=0$ 还有一个正根 $x_2$，即 $f(x_2)=0$. 则由 $f(x)=x^5+x-1$ 在 $[x_1,x_2]$（或 $[x_2,x_1]$）上连续，在 $(x_1,x_2)$（或 $x_2,x_1$）内可导知 $f(x)$ 满足罗尔定理条件，故至少存在点 $\xi\in(x_1,x_2)$（或 $(x_2,x_1)$），使 $f'(\xi)=0$.

但 $f'(\xi)=5\xi^4+1>0$，矛盾. 因此方程 $x^5+x-1=0$ 只有一个正根.

*13. 设 $f(x)$，$g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 $(a,b)$ 内可导，证明在 $(a,b)$ 内有一点 $\xi$，使

$$\begin{vmatrix} f(a) & f(b) \\ g(a) & g(b) \end{vmatrix}=(b-a)\begin{vmatrix} f(a) & f'(\xi) \\ g(a) & g'(\xi) \end{vmatrix}.$$

证 取函数 $F(x)=\begin{vmatrix} f(a) & f(x) \\ g(a) & g(x) \end{vmatrix}$，由 $f(x)$，$g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 $(a,b)$ 内可导知 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 $(a,b)$ 内可导，由拉格朗日中值定理知至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使 $F(b)-F(a)=F'(\xi)(b-a)$.

即 $F(b)=\begin{vmatrix} f(a) & f(b) \\ g(a) & g(b) \end{vmatrix}$，$F(a)=\begin{vmatrix} f(a) & f(a) \\ g(a) & g(a) \end{vmatrix}=0$，

$$F'(x)=\begin{vmatrix} 0 & f(x) \\ 0 & g(x) \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} f(a) & f'(x) \\ g(a) & g'(x) \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} f(a) & f'(x) \\ g(a) & g'(x) \end{vmatrix},$$

故 $\begin{vmatrix} f(a) & f(b) \\ g(a) & g(b) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} f(a) & f'(\xi) \\ g(a) & g'(\xi) \end{vmatrix}(b-a)$.

14. 证明：若函数 $y=f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内满足关系式 $f'(x)=f(x)$，且 $f(0)=1$，则 $f(x)=e^x$.

14 题视频解析

**证** 取函数 $F(x)=\dfrac{f(x)}{e^x}$，因 $F'(x)=\dfrac{f'(x)e^x-f(x)e^x}{e^{2x}}=\dfrac{f'(x)-f(x)}{e^x}=0$，

故 $F(x)=C$. 又 $F(0)=C=f(0)=1$，因此 $F(x)=1$，即 $\dfrac{f(x)}{e^x}=1$，故 $f(x)=e^x$.

*15. 设函数 $y=f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内具有 $n$ 阶导数，且 $f(0)=f'(0)=\cdots=f^{(n-1)}(0)=0$，试用柯西中值定理证明：

$$\frac{f(x)}{x^n}=\frac{f^{(n)}(\theta x)}{n!}\quad(0<\theta<1).$$

15 题视频解析

**证** 已知 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内具有 $n$ 阶导数，在该邻域内任取点 $x$，由柯西中值定理得

$$\frac{f(x)}{x^n}=\frac{f(x)-f(0)}{x^n-0^n}=\frac{f'(\xi_1)}{n\xi_1^{n-1}},\quad 其中 \xi_1 介于 0 与 x 之间.$$

又 $$\frac{f'(\xi_1)}{n\xi_1^{n-1}}=\frac{f'(\xi_1)-f'(0)}{n(\xi_1^{n-1}-0^{n-1})}=\frac{f''(\xi_2)}{n(n-1)\xi_2^{n-2}},\quad 其中 \xi_2 介于 0 与 \xi_1 之间.$$

依次类推，得

$$\frac{f^{(n-1)}(\xi_{n-1})}{n!\ \xi_{n-1}}=\frac{f^{(n-1)}(\xi_{n-1})-f^{(n-1)}(0)}{n!\ (\xi_{n-1}-0)}=\frac{f^{(n)}(\xi_n)}{n!},$$

其中 $\xi_n$ 介于 0 与 $\xi_{n-1}$ 之间，记 $\xi_n=\theta x\ (0<\theta<1)$，因此

$$\frac{f(x)}{x^n}=\frac{f^{(n)}(\xi_n)}{n!}=\frac{f^{(n)}(\theta x)}{n!}\quad(0<\theta<1).$$

# 第二节　洛必达法则

## 一、主要内容归纳

**1. 洛必达法则 Ⅰ**　设函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 满足：

(1) 在点 $x_0$ 的某一邻域内（点 $x_0$ 可除外）有定义，且 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$，$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=0$；

(2) 在该邻域内可导，且 $g'(x)\neq 0$；

(3) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在（或为 $\infty$），则 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在（或为 $\infty$）.

**2. 洛必达法则 Ⅱ**　设函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 满足：

(1) 在 $x_0$ 的某一邻域内（点 $x_0$ 可除外）有定义，且 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$，$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=\infty$；