

## 刚体的定轴转动

### 一 选择题

1. 一绕定轴转动的刚体，某时刻的角速度为 $\omega$ ，角加速度为 $\alpha$ ，则其转动加快的依据是：（ ）

- A.  $\alpha > 0$       B.  $\omega > 0, \alpha > 0$       C.  $\omega < 0, \alpha > 0$       D.  $\omega > 0, \alpha < 0$

解：答案是 B。

2. 用铅和铁两种金属制成两个均质圆盘，质量相等且具有相同的厚度，则它们对过盘心且垂直盘面的轴的转动惯量。（ ）

- A. 相等；      B. 铅盘的大；      C. 铁盘的大；      D. 无法确定谁大谁小

解：答案是 C。

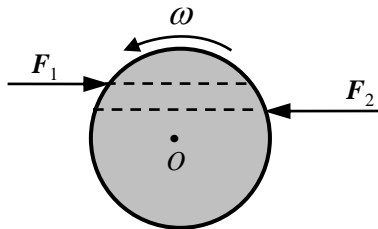
简要提示：铅的密度大，所以其半径小，圆盘的转动惯量为： $J = Mr^2/2$ 。

3. 一圆盘绕过盘心且与盘面垂直的光滑固定轴  $O$  以角速度  $\omega$  按图示方向转动。若将两个大小相等、方向相反但不在同一条直线的力  $F_1$  和  $F_2$  沿盘面同时作用到圆盘上，则圆盘的角速度  $\omega$  的大小在刚作用后不久 （ ）

- A. 必然增大  
B. 必然减少  
C. 不会改变  
D. 如何变化，不能确定

解：答案是 B。

简要提示：力  $F_1$  和  $F_2$  的对转轴力矩之和垂直于纸面向里，根据刚体定轴转动定律，角加速度的方向也是垂直于纸面向里，与角速度的方向（垂直于纸面向外）相反，故开始时一定减速。



选择题 3 图

4. 一轻绳绕在半径为  $r$  的重滑轮上，轮对轴的转动惯量为  $J$ ，一是以力  $F$  向下拉绳使轮转动；二是以重量等于  $F$  的重物挂在绳上使之转动，若两种情况使轮边缘获得的切向加速度分别为  $a_1$  和  $a_2$ ，则有：（ ）

- A.  $a_1 = a_2$       B.  $a_1 > a_2$       C.  $a_1 < a_2$       D. 无法确定

解：答案是 B。

简要提示: (1) 由刚体定轴转动定律,  $Fr = J\alpha_1$  和  $a_1 = r\alpha_1$ , 得:  $a_1 = Fr^2/J$

(2) 受力分析得: 
$$\begin{cases} mg - T = ma_2 \\ Tr = J\alpha_2 \\ a_2 = r\alpha_2 \end{cases}$$
, 其中  $m$  为重物的质量,  $T$  为绳子的张力。

得:  $a_2 = Fr^2/(J + mr^2)$ , 所以  $a_1 > a_2$ 。

5. 一半径为  $R$ , 质量为  $m$  的圆柱体, 在切向力  $F$  作用下由静止开始绕轴线作定轴转动, 则在 2 秒内  $F$  对柱体所作功为: ( )

- A.  $4F^2/m$       B.  $2F^2/m$       C.  $F^2/m$       D.  $F^2/2m$

解: 答案是 A。

简要提示: 由定轴转动定律:  $FR = \frac{1}{2}MR^2\alpha$ , 得:  $\Delta\theta = \frac{1}{2}\alpha t^2 = \frac{4F}{mR}$

所以:  $W = M\Delta\theta = 4F^2/m$

6. 一电唱机的转盘正以  $\omega_0$  的角速度转动, 其转动惯量为  $J_1$ , 现将一转动惯量为  $J_2$  的唱片置于转盘上, 则共同转动的角速度应为: ( )

- A.  $\frac{J_1}{J_1 + J_2}\omega_0$       B.  $\frac{J_1 + J_2}{J_1}\omega_0$       C.  $\frac{J_1}{J_2}\omega_0$       D.  $\frac{J_2}{J_1}\omega_0$

解: 答案是 A。

简要提示: 角动量守恒

7. 已知银河系中一均匀球形天体, 现时半径为  $R$ , 绕对称轴自转周期为  $T$ , 由于引力凝聚作用, 其体积不断收缩, 假设一万年後, 其半径缩小为  $r$ , 则那时该天体的: ( )

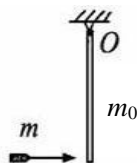
- A. 自转周期增加, 转动动能增加;  
B. 自转周期减小, 转动动能减小;  
C. 自转周期减小, 转动动能增加;  
D. 自转周期增加, 转动动能减小。

解: 答案是 C。

简要提示: 由角动量守恒,  $\frac{2}{5}MR^2\omega_0 = \frac{2}{5}Mr^2\omega$ , 得转动角频率增大, 所以

转动周期减小。转动动能为  $E_{k0} = \frac{1}{2} \frac{2}{5} MR^2 \omega_0^2$ ,  $E_k = \frac{1}{2} \frac{2}{5} Mr^2 \omega^2$  可得  $E_k > E_{k0}$ 。

8. 如图, 一质量为  $m_0$  的均匀直杆可绕通过  $O$  点的水平轴转动, 质量为  $m$  的子弹水平射入静止直杆的下端并留在直杆内, 则在射入过程中, 由子弹和杆组成的系统 ( )



选择题 8 图

- A. 动能守恒
- B. 动量守恒
- C. 机械能守恒
- D. 对  $O$  轴的角动量守恒

解: 答案是 D。

## 二 填空题

1. 半径为 30cm 的飞轮, 从静止开始以  $0.5 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-2}$  的角加速度匀加速转动, 则飞轮边缘上一点在转过  $240^\circ$  时的切向加速度为\_\_\_\_\_; 法向加速度为\_\_\_\_\_。

解: 答案是  $0.15 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ ;  $0.4\pi \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ 。

简要提示:  $a_t = r\alpha = 0.15 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ 。

由  $\theta = \frac{1}{2} \alpha t^2$ ,  $\omega = \alpha t$ , 得:  $a_n = \omega^2 r = 0.4\pi \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$

m

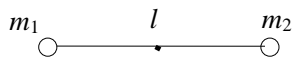
2. 一质量为 0.5 kg、半径为 0.4 m 的薄圆盘, 以 1500r/s 的角速度绕过盘心且垂直盘面的轴的转动, 今在盘缘施以 0.98N 的切向力直至盘静止, 则所需时间为\_\_\_\_\_s。

解: 答案是 961 s。

简要提示: 由定轴转动定律,  $FR = \frac{1}{2} MR^2 \alpha$ ,  $\omega = \alpha t$ ,

得: 
$$t = \frac{\omega m R}{2F} = \frac{3000\pi \times 0.5 \times 0.4}{2 \times 0.98} = 961 \text{ s}$$

3. 一长为  $l$ , 质量不计的细杆, 两端附着小球  $m_1$  和  $m_2$  ( $m_1 > m_2$ ), 细杆可绕通过杆中心并垂直于杆的水平轴转动, 先将杆置于水平然后放开, 则刚开始转动的角加速度应为\_\_\_\_\_。



填空题 3 图

解: 答案是  $\frac{2(m_1 - m_2)g}{(m_1 + m_2)l}$ 。

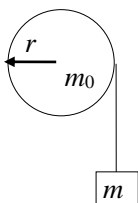
简要提示：由刚体定轴转动定律， $(m_1 g - m_2 g) \frac{l}{2} = (m_1 + m_2) \frac{l^2}{4} \alpha$

得：
$$\alpha = \frac{2(m_1 - m_2)g}{(m_1 + m_2)l}$$

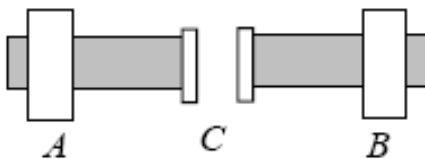
4. 如图所示，质量为  $m_0$ ，半径为  $r$  的绕有细线的圆柱可绕固定水平对称轴无摩擦转动，若质量为  $m$  的物体缚在线的一端并在重力作用下，由静止开始向下运动，当  $m$  下降  $h$  的距离时， $m$  的动能与  $m_0$  的动能之比为\_\_\_\_\_。

解：答案是  $\frac{2m}{m_0}$ 。

简要提示：由  $v = \omega r$ ，， 得：
$$\frac{E_{km}}{E_{km_0}} = \frac{2m}{m_0}$$



填空题 4 图



填空题 5 图

5. 如图所示， $A$ 、 $B$  两飞轮的轴杆在一条直线上，并可用摩擦啮合器  $C$  使它们连结。开始时  $B$  轮静止， $A$  轮以角速度  $\omega_A$  转动，设在啮合过程中两飞轮不受其它力矩的作用。当两轮连结在一起后，共同的角速度为  $\omega$ 。若  $A$  轮的转动惯量为  $J_A$ ，则  $B$  轮的转动惯量  $J_B =$ \_\_\_\_\_。

解：答案是  $J_A(\omega_A - \omega) / \omega$

简要提示：两飞轮不受外力矩的作用，所以系统的角动量守恒，得：

$$J_A \omega_A = (J_A + J_B) \omega$$

所以：

$$J_B = J_A(\omega_A - \omega) / \omega$$

6. 一位转动惯量为  $J_0$  的花样滑冰运动员以角速度  $\omega_0$  自转，其角动量为\_\_\_\_\_；转动动能为\_\_\_\_\_。当其收回手臂使转动惯量减为  $J_0 / 3$  时，则其角速度变为\_\_\_\_\_；转动动能变为\_\_\_\_\_。

解：答案是  $J_0 \omega_0$ ；  $J_0 \omega_0^2 / 2$ ；  $3 \omega_0$ ；  $3 J_0 \omega_0^2 / 2$

简要提示：角动量守恒

7. 一圆形转台可绕中心轴无摩擦的转动，台上有一辆玩具小汽车相对台面由静止启动，当其绕轴作顺时针圆周运动时，转台将作\_\_\_\_\_转动；当汽车突然刹车停止转动的过程中，系统的\_\_\_\_\_守恒；而\_\_\_\_\_和\_\_\_\_\_不守恒。

解：答案是逆时针；角动量；动量；机械能

### 三 计算题

1. 一细杆绕其上端在竖直平面内摆动，杆与竖直方向的夹角  $\theta = \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{2} t$ 。  
求：(1) 杆摆动的角速度和角加速度；(2) 距上端 0.5m 处的一点的速度和加速度。

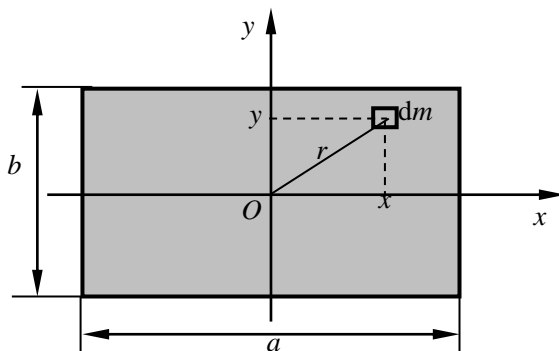
解：(1)  $\omega = \frac{d\theta}{dt} = -\frac{\pi^2}{8} \sin \frac{\pi}{2} t$ ;  $\alpha = \frac{d\omega}{dt} = -\frac{\pi^3}{16} \cos \frac{\pi}{2} t$

(2)  $v = \omega l = -\frac{\pi^2}{16} \sin \frac{\pi}{2} t$ ;  $a_t = l\alpha = -\frac{\pi^3}{32} \cos \frac{\pi}{2} t$ ;  $a_n = \omega^2 l = \frac{\pi^4}{128} \sin^2 \frac{\pi}{2} t$

2. 有一个板长为  $a$ 、板宽为  $b$  的均匀矩形薄板，其质量为  $m$ 。求矩形板对于与板面垂直并通过板中心的轴的转动惯量。

解：如图，把矩形薄板分成无限多个小质元，任取一个小质元，其面积为  $dS$ ，设薄板的质量面密度为  $\sigma$ ，则小质元质量为

$$dm = \sigma dS = \sigma dx dy$$



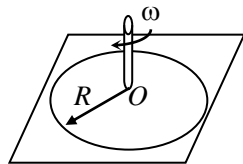
小质元  $dm$  对于中心轴的转动惯量

$$dJ = r^2 dm = (x^2 + y^2) \sigma dx dy$$

整个矩形板的转动惯量

$$J = \int dJ = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} (x^2 + y^2) \sigma \, dx dy = \frac{1}{12} \sigma ab(a^2 + b^2) = \frac{1}{12} m(a^2 + b^2)$$

3. 如图所示, 质量为  $m$ , 半径为  $R$  的圆盘在水平面上绕中心竖直轴  $O$  转动, 圆盘与水平面间的摩擦系数为  $\mu$ , 已知开始时薄圆盘的角速度为  $\omega_0$ , 求圆盘停止前转过的角度。



计算题 3 图

**解** 薄圆盘在转动过程受到摩擦力矩  $M$  的作用, 产生一个与旋转方向相反的角加速度  $\alpha$ , 先求摩擦力矩  $M$ 。

薄圆盘的面密度为  $\sigma = \frac{m}{\pi R^2}$ , 如下图, 在距圆盘中心为  $r$  处, 选一宽为  $dr$  的圆环, 则该圆环所受的摩擦力矩为

$$dM = \mu \cdot 2\pi r dr \sigma g \cdot r = \frac{2\pi mg}{R^2} r^2 dr$$

整个圆盘所受的合力矩为

$$M = \int dM = \int_0^R \frac{2\pi mg}{R^2} r^2 dr = \frac{2}{3} \mu mg R$$

根据刚体定轴转动定律, 得到角加速度  $\alpha$

$$\alpha = \frac{M}{J} = \frac{\frac{2}{3} \mu mg R}{\frac{1}{2} m R^2} = \frac{4\mu g}{3R}$$

因角加速度  $\alpha$  是常量, 故圆盘作匀加速转动, 满足  $\omega_0^2 - \omega^2 = 2\alpha\theta$ , 式中  $\omega = 0$  为末角速度,  $\theta$  为转角 (弧度)。所以圆盘停止前转过的角度

$$\theta = \frac{\omega_0^2}{2\alpha} = \frac{\omega_0^2}{2 \times (4\mu g)/(3R)} = \frac{3R\omega_0^2}{8\mu g}$$

4. 质量为  $m$  半径为  $R$  的圆盘绕一固定轴在水平面上转动, 初始角速度为  $\omega_0$ , 设它受到与转动角速度成正比的阻力矩  $M = -k\omega$  ( $k$  为正的常量)。求: (1) 圆盘的角速度从  $\omega_0$  变到  $\omega_0/2$  所需的时间。(2) 在此期间内圆盘转动多少圈?

**解** (1) 根据转动定律  $M = -k\omega = J\alpha$

有 
$$J \frac{d\omega}{dt} = -k\omega$$

其中, 圆盘的转动惯量为 
$$J = \frac{1}{2} mR^2$$

将上式分离变量并积分 
$$\int_{\omega_0}^{\omega} \frac{d\omega}{\omega} = \int_0^t -\frac{k}{J} dt$$

得 
$$\ln \frac{\omega}{\omega_0} = -\frac{k}{J} t$$

所以, 角速度从  $\omega_0$  变到  $\frac{\omega_0}{2}$  所需的时间为

$$t = \frac{J}{K} \ln \frac{\omega}{\omega_0} = \frac{J}{k} \ln 2 = \frac{mR^2}{2k} \ln 2$$

(2) 由  $\ln \frac{\omega}{\omega_0} = -\frac{k}{J} t$  得得到

$$\omega = \omega_0 e^{-\frac{k}{J} t} = \frac{d\theta}{dt}$$

再积分 
$$\int_0^{\theta} d\theta = \int_0^t \omega dt = \int_0^t \omega_0 e^{-\frac{k}{J} t} dt$$

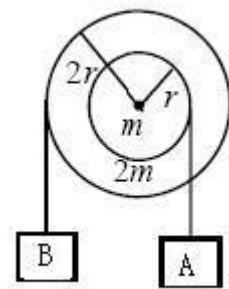
将  $t = \frac{J}{k} \ln 2$  代入, 得 
$$\theta = \frac{J\omega_0}{2k}$$

在这段时间内圆盘转过的圈数 
$$N = \frac{\theta}{2\pi} = \frac{J\omega_0}{4\pi k} = \frac{mR^2\omega_0}{8\pi k}$$

5. 质量分别为  $m$  和  $2m$ 、半径分别为  $r$  和  $2r$  的两个均匀圆盘, 同轴地粘在一起, 可以绕通过盘心且垂直盘面的水平光滑固定轴转动, 对转轴的转动惯量为  $9mr^2/2$ , 大小圆盘边缘都绕有绳子, 绳子下端都挂一质量为  $m$  的重物, 如图所示. 求盘的角加速度的大小.

**解:** 隔离物体, 分别对重物和转盘受力分析, 如图所示. 根据牛顿定律和刚体转动定律, 有:

$$mg - T' = ma'$$



计算题 5 图

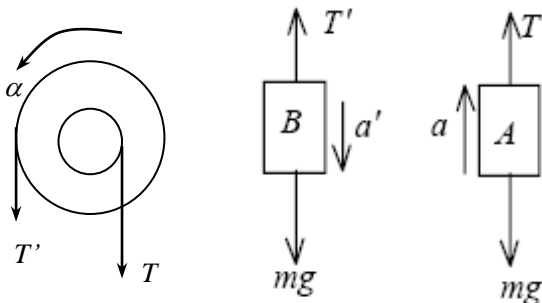
$$T - mg = ma$$

$$T' \cdot 2r - Tr = J\alpha = 9mr^2\alpha/2$$

由转盘和重物之间的运动学关系，有：

$$a' = 2r\alpha$$

$$a = r\alpha$$



联立以上方程，可得：

$$\alpha = \frac{2g}{19r}$$

6. 如图所示，半径为  $r$ ，转动惯量为  $J$  的定滑轮 A 可绕水平光滑轴  $o$  转动，轮上缠绕有不能伸长的轻绳，绳一端系有质量为  $m$  的物体 B，B 可在倾角为  $\theta$  的光滑斜面上滑动，求 B 的加速度和绳中张力。

**解：** 物体 B 的运动满足牛顿第二定律

$$mg \sin \theta - T = ma$$

定滑轮 A 的运动满足刚体定轴转动定律

$$Tr = J\alpha$$

加速度和角加速度之间满足关系

$$a = r\alpha$$

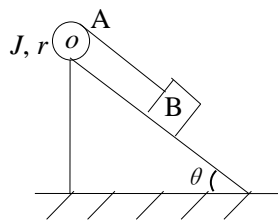
联立解得 B 的加速度

$$a = \frac{mr^2}{mr^2 + J} g \sin \theta$$

$a$  的方向沿斜面向下。

绳中张力为

$$T = \frac{J}{mr^2 + J} mg \sin \theta$$



计算题 6 图

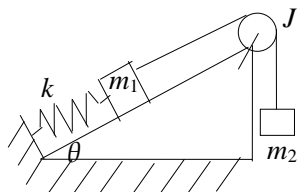


7. 如图所示, 质量为  $m_1$  的物体可在倾角为  $\theta$  的光滑斜面上滑动。 $m_1$  的一边系有劲度系数为  $k$  的弹簧, 另一边系有不可伸长的轻绳, 绳绕过转动惯量为  $J$ , 半径为  $r$  的小滑轮与质量为  $m_2$  ( $>m_1$ ) 的物体相连。开始时用外力托住  $m_2$  使弹簧保持原长, 然后撤去外力, 求  $m_2$  由静止下落  $h$  距离时的速率及  $m_2$  下降的最大距离。

解: 在  $m_2$  由静止下落  $h$  距离的过程中机械能守恒, 因此有

$$m_2gh = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v^2 + \frac{1}{2}J\omega^2 + \frac{1}{2}kh^2 + m_1gh\sin\theta$$

式中  $\omega = \frac{v}{r}$ , 解得  $m_2$  由静止下落  $h$  距离时的速率



计算题 7 图

$$v = \sqrt{\frac{2(m_2 - m_1 \sin \theta)gh - kh^2}{m_1 + m_2 + J/r^2}}$$

$m_2$  下降到最低时,  $m_1$ 、 $m_2$  速率为零, 代入上式, 得到  $m_2$  下降的最大距离

$$h_{\max} = \frac{2}{k}(m_2 - m_1 \sin \theta)g$$

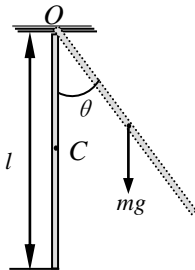
8. 一质量为 2.50kg, 长为 1.0 m 的均质棒, 可以绕棒的上端点自由转动。开始时棒竖直自由悬挂。今以 100N 的力垂直打击它的下端点, 打击时间为 0.020 s。(1) 若打击前棒是静止的, 求打击时细棒角动量的变化;(2) 棒的端点上升的高度。

解 (1) 均质棒在瞬间外力的作用下, 角动量将发生变化。根据刚体定轴转动角动量定理, 打击时细棒角动量的变化为

$$\Delta L = M\Delta t = Fl\Delta t = 2.0\text{kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}$$

(2) 取棒与地球为系统。如图, 选支点  $O$  处为重力势能的零点。在转动过程中, 系统的机械能守恒。根据机械能守恒定律

$$\frac{1}{2}J\omega^2 = \frac{1}{2}mgl(1 - \cos\theta)$$



其中  $J = \frac{1}{3}ml^2$ ,  $\omega = \frac{\Delta L}{J}$ 。解得, 棒端点上升的高度

$$\Delta h = l(1 - \cos \theta) = \frac{J\omega^2}{mg} = \frac{3(Fl\Delta t)^2}{m^2 l^2 g} = 0.196\text{m}$$

2. 转动定理:  $J\alpha = \frac{1}{2}mgl \sin \theta$

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d\omega}{1} \frac{\omega}{d\theta}$$

$$J \frac{d\omega}{1} \frac{\omega}{d\theta} = \frac{1}{2}mgl \sin \theta$$

$$\frac{1}{2}J\omega^2 = \frac{1}{2}mgl(1 - \cos \theta)$$

9. 一溜冰者伸开双臂以1.0r/s的转速绕身体中心轴转动, 此时她的转动惯量为  $1.44\text{kg} \cdot \text{m}^2$ 。为了增加转速, 她收起了双臂, 转动惯量变为  $0.48\text{kg} \cdot \text{m}^2$ 。求: (1) 她收起双臂后的转速; (2) 她收起双臂前后绕身体中心轴转动的转动动能。

解 (1) 溜冰者收起双臂的过程没有外力矩作用, 根据角动量守恒定律

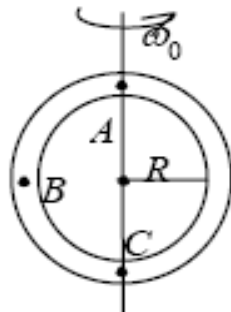
$$J_0\omega_0 = J\omega$$

滑冰者收起双臂后的转速  $\omega = \frac{J_0}{J}\omega_0 = 3.0\text{r/s}$

(2) 滑冰者收起双臂前, 后的转动动能

$$E_{k1} = \frac{1}{2}J_0\omega_0^2 = 28.4\text{J}, \quad E_{21} = \frac{1}{2}J\omega^2 = 85.3\text{J}$$

10. 空心圆环可绕光滑的竖直固定轴AC自由转动, 转动惯量为  $J_0$ , 环的半径为  $R$ , 初始时环的角速度为  $\omega_0$ 。质量为  $m$  的小球静止在环内最高处A点, 由于某种微小干扰, 小球沿环向下滑动, 问小球滑到与环心O在同一高度的B点和环的最低处的C点时, 环的角速度及小球相对于环的速度各为



计算题 10 图

多大?(设环的内壁和小球都是光滑的, 小球可视为质点, 环截面半径 $r \ll R$ .)

**解:** 选小球和环为系统. 在转动过程中沿转轴方向的合外力矩为零, 所以角动量守恒. 对地球、小球和环系统机械能守恒. 取过环心  $O$  的水平面为势能零点.

小球到  $B$  点时, 有:

$$J_0 \omega_0 = (J_0 + mR^2) \omega$$

$$\frac{1}{2} J_0 \omega_0^2 + mgR = \frac{1}{2} J_0 \omega^2 + \frac{1}{2} m(\omega^2 R^2 + v_B^2)$$

其中  $v_B$  表示小球在  $B$  点时相对于地面的竖直分速度, 也就是它相对于环的速度. 由以上两式解出

$$\omega = J_0 \omega_0 / (J_0 + mR^2)$$

$$v_B = \sqrt{2gR + \frac{J_0 \omega_0^2 R^2}{mR^2 + J_0}}$$

小球到  $C$  点时, 由角动量守恒定律, 系统的角速度又回复至  $\omega_0$ , 而由机械能守恒, 有:

$$\frac{1}{2} m v_C^2 = mg(2R)$$

所以  $v_C = \sqrt{4gR}$ 。

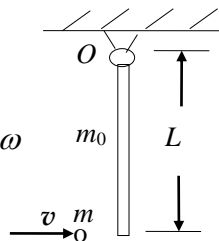
11. 质量为  $m_0$  长为  $L$  的均匀直杆可绕过端点  $O$  的水平轴转动, 一质量为  $m$  的质点以水平速度  $v$  与静止杆的下端发生碰撞, 如图所示, 若  $m_0 = 6m$ , 求质点与杆分别作完全非弹性碰撞和完全弹性碰撞后杆的角速度大小。

**解:** (1) 完全非弹性碰撞时, 质点射入杆内, 与杆一起转动. 在此过程中质点和杆系统的角动量守恒, 设系统绕端点  $O$  转动的角速度为  $\omega$ , 因此

$$mvL = J\omega = \left(\frac{1}{3}m_0L^2 + mL^2\right)\omega = (2mL^2 + mL^2)\omega = 3mL^2\omega$$

解出

$$\omega = \frac{v}{3L}$$



计算题 11 图

(2) 完全弹性碰撞时, 碰撞前后系统关于端点  $O$  的角动量守恒, 设碰撞后质点的水平速度为  $v'$ , 直杆绕端点  $O$  转动的角速度为  $\omega$ , 因此有

$$mvL = mv'L + J\omega = mv'L + \frac{1}{3}(6m)L^2\omega$$

得到

$$v - v' = 2L\omega \quad (1)$$

碰撞前后系统的机械能守恒, 因此有

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mv'^2 + \frac{1}{2}J\omega^2 = \frac{1}{2}mv'^2 + mL^2\omega^2$$

由上式得到

$$v^2 - v'^2 = 2L^2\omega^2 \quad (2)$$

将 (2) 式和 (1) 式两边相除, 得到

$$v + v' = L\omega \quad (3)$$

再由 (3) 式和 (1) 式解得

$$\omega = \frac{2v}{3L}$$

12. 如图所示, 一长为  $L$ , 质量为  $m$  的均匀细棒, 一端悬挂在  $O$  点上, 可绕水平轴在竖直面内无摩擦地转动, 在同一悬挂点, 有长为  $l$  的轻绳悬挂一小球, 质量也为  $m$ , 当小球悬线偏离铅垂方向某一角度由静止释放, 小球在悬点正下方与静止细棒发生弹性碰撞。若碰撞后小球刚好静止, 试求绳长  $l$  应为多少?

**解:** 在碰撞过程中, 小球和棒都在垂直位置, 因此系统受到的关于转轴  $O$  的合外力矩为零, 因此系统在碰撞前后瞬间的角动量守恒。设碰撞后瞬间细棒绕转轴  $O$  转动的角速度为  $\omega$ , 由角动量守恒, 有

$$mvl = \frac{1}{3}mL^2\omega$$

另外由于没有摩擦和阻尼, 因此系统在碰撞期间的机械能也守恒。即小球的动能全部转化为棒的转动动能

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}mL^2\omega^2$$

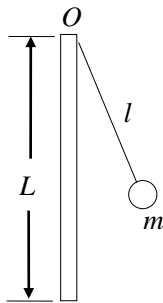
由以上两式解得

$$l = \sqrt{\frac{1}{3}}L$$

**或解** 设碰撞后小球的速率为  $v'$ , 则由角动量守恒和机械能守恒, 有

$$mvl = mv'l + \frac{1}{3}mL^2\omega$$

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mv'^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}mL^2\omega^2$$



计算题 12 图

求得

$$v' = \frac{3l^2 - L^2}{3l^2 + L^2} v$$

令  $v' = 0$ ，则

$$3l^2 - L = 0$$

解得

$$l = \sqrt{\frac{1}{3}} L$$

13. 转台绕中心竖直轴以角速度  $\omega_0$  匀速转动，相对于转轴的转动惯量为  $J$ ，现有质量为  $m$  的小钢球以每秒  $n$  个的速率垂直落入转台上半径为  $r$  的圆轨道内，求转台的角速度随时间的变化关系。

解：由角动量守恒，初始时角动量为： $L = J\omega_0$ ，

$t$  时刻系统的转动惯量和角动量为： $J' = J + ntmr^2$ ； $L = J'\omega$

所以角速度为：

$$\omega = J\omega_0 / (J + mntr^2)$$

**14.** 在一半径为  $R$ 、质量为  $m_0$ 、可绕中心竖直轴自由转动的水平圆盘的边上，站着一个人质量为  $m$ ，求当人沿圆盘的边缘走完一周回到原有位置时，圆盘转过的角度为多大？

解：设人相对于圆盘的速率为  $v$ ，圆盘转动的角速度为  $\omega$ 。将人和转盘作为一个系统，在转动过程中沿转轴方向的外力矩为零，因此系统的角动量守恒。因此得到

$$L = \frac{1}{2} m_0 R^2 \omega - m(v - \omega R)R = 0$$

$$\therefore \omega = \frac{2mv}{(m_0 + 2m)R}$$

设人沿圆盘的边缘走完一周回到原有位置时所需时间为  $T$ ，则圆盘转过的角度为

$$\Delta\theta = \int_0^T \omega dt = \frac{2m \int_0^T v dt}{(m_0 + 2m)R} = \frac{2m \times 2\pi R}{(m_0 + 2m)R} = \frac{4\pi m}{m_0 + 2m}$$

或解：设圆盘和人相对于地面转动的角速度大小为  $\omega_1$  和  $\omega_2$ ， $\omega_1$  与  $\omega_2$  的转动方向相反。则人相对于圆盘的转动角速度为  $\omega_1 + \omega_2$ 。将人和转盘作为一个系统，在转动过程中沿转轴方向的外力矩为零，因此系统的角动量守恒

$$\frac{1}{2}m_0R^2\omega_1 - mR^2\omega_2 = 0$$

$$\omega_2 = \frac{m_0}{2m}\omega_1$$

设人沿圆盘的边缘走完一周回到原有位置时所需时间为  $T$ ，则有

$$\int_0^T (\omega_1 + \omega_2) dt = 2\pi$$

将  $\omega_2 = \frac{m_0}{2m}\omega_1$  代入上式，得到圆盘相对于地面转动的角度

$$\theta = \int_0^T \omega_1 dt = \frac{4\pi m}{m_0 + 2m}$$

15. 质量为 5kg、半径为 25cm 的轮子，装在一根长为 40cm 的轻杆的中部，并可绕此杆转动，杆的一端 A 用一根链条挂起。开始时杆在水平位置，轮子的转动角速度为  $12 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ ，方向如图所示，求：(1) 该轮子的自转角动量；(2) 作用于轴上的外力矩；(3) 系统的进动角速度，并判断进动方向。

解：(1) 自转角动量为：

$$L = J\omega = \frac{1}{2}mr^2\omega = 0.5 \times 5 \times 0.25^2 \times 12 = 1.875 (\text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2})$$

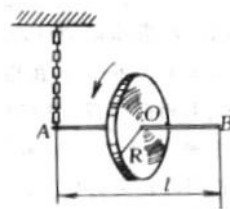
(2) 外力矩为：

$$M = mg \frac{l}{2} = 5 \times 9.8 \times \frac{0.4}{2} = 9.8 (\text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2})$$

(2) 进动角速度为：

$$\omega_p = \frac{M}{L} = 5.2 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

有外力矩自转角动量的方向可以判断，从上往下看，进动的方向为逆时针方向。



计算题 15 图