

高等数学



2.3 高阶导数

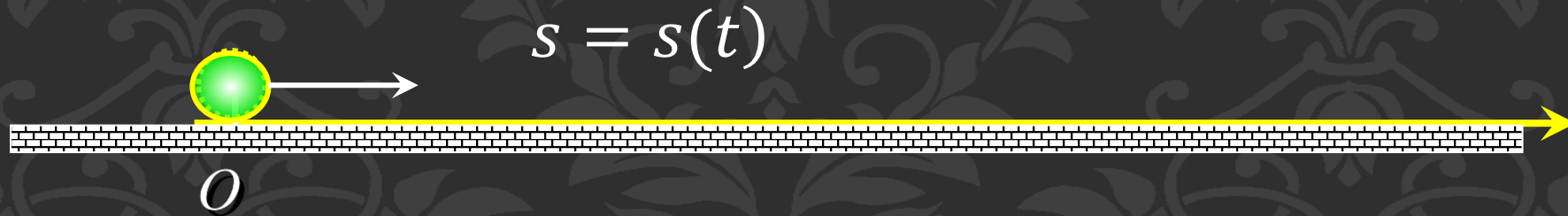


基础部数学教研室

郑治中

- 质点作变速直线运动的速度与加速度

设质点作变速直线运动的路程 s 关于时间 t 的函数为 $s = s(t)$



➤ 质点在 t 时刻的瞬时速度为

$$v(t) = s'(t)$$

➤ 质点在 t 时刻的瞬时加速度为

$$a(t) = v'(t) = [s'(t)]'$$

定义1 设函数 $y = f(x)$ 在区间 (a, b) 内可导, $x \in (a, b)$, 若极限

$$f''(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f'(x + \Delta x) - f'(x)}{\Delta x}$$

存在, 则称函数 $y = f(x)$ 在 x 处**二次可导**, 该极限称为函数 $y = f(x)$ 在 x 处的**二阶导数**, 记为 $f''(x)$ 或 y'' .

函数 $y = f(x)$ 在 x 处的**三阶导数**

$$f'''(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f''(x + \Delta x) - f''(x)}{\Delta x}$$

函数 $y = f(x)$ 在 x 处的 n 阶导数

$$f^{(n)}(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f^{(n-1)}(x + \Delta x) - f^{(n-1)}(x)}{\Delta x} \quad (n = 2, 3, \dots)$$

二阶及二阶以上的导数统称为高阶导数，也可以记作：

$$\frac{d^2 y}{d x^2}, \frac{d^3 y}{d x^3}, \frac{d^4 y}{d x^4}, \dots, \frac{d^n y}{d x^n}$$

例1 求函数 $f(x) = x^3 + 2x^2 - 3x + 10$ 的 n 阶导数.

任何 n 次多项式的 $n + 1$ 阶导数为 0, 而且反过来也是对的, 即若

$$f^{(n+1)}(x) \equiv 0,$$

则 $f(x)$ 为次数不超过 n 的多项式.



例2 求函数 $y = \frac{1}{x}$ 和 $y = a^x$ 的 n 阶导数.

$$\left(\frac{1}{x}\right)^{(n)} = (-1)^n \frac{n!}{x^{n+1}} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

例3 求函数 $y = \sin x$ 和 $y = \cos x$ 的 n 阶导数.

$$(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + n \cdot \frac{\pi}{2}\right) \quad (n = 1, 2, \dots)$$

例4 求 $y = \ln x$ 的 n 阶导数

例5 求 $y = x^\alpha$ 的 n 阶导数($\alpha \neq n$)

例6 求 $y = \sin x^2$, 求 $\frac{dy}{dx}, \frac{dy}{dx^2}, \frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^3y}{dx^3}, \frac{dy}{dx^3}$

例7 求复合函数 $f \circ g(x)$ 的二阶导数

例8 若 $y = \frac{1}{x^2-1}$, 求 $y^{(n)}$

例9 若 $y = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$ 的二阶导数

例10 若 $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{y'}$, 证明 $\frac{d^2x}{dy^2} = -\frac{y''}{(y')^3}$

$$[u(x)v(x)]' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$$

$$[u(x)v(x)]'' = u''(x)v(x) + 2u'(x)v'(x) + u(x)v''(x)$$

莱布尼兹公式 设函数 $u(x)$ 和 $v(x)$ 均存在 n 阶导数, 则有

$$[u(x)v(x)]^{(n)} = \sum_{k=0}^n C_n^k u^{(n-k)}(x)v^{(k)}(x).$$

这里 $u^{(0)}(x) = u(x)$, $v^{(0)}(x) = v(x)$.

例11 设 $y = x^3 e^x$, 求 $y^{(10)}$.