总习题二解答

1. 在“充分”“必要”和“充分必要”三者中选择一个正确的填入下列空格内：

(1) $f(x)$在点 x_0 可导是 $f(x)$在点 x_0 连续的______条件，$f(x)$在点 x_0 连续是 $f(x)$在点 x_0 可导的______条件；

(2) $f(x)$在点 x_0 的左导数 $f'_-(x_0)$及右导数 $f'_+(x_0)$都存在且相等是 $f(x)$在点 x_0 可导的______条件；

(3) $f(x)$在点 x_0 可导是 $f(x)$在点 x_0 可微的______条件.

解 (1)充分，必要.　　(2)充分必要.　　(3)充分必要.

2. 设 $f(x)=x(x+1)(x+2)\cdots(x+n)(n\geqslant 2)$，则 $f'(0)=$______.

2 题视频解析

解 $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}[(x+1)(x+2)\cdots(x+n)]=n!$.

3. 下题中给出的四个结论，从中选出一个正确的结论：

设 $f(x)$在 $x=a$ 的某个邻域内有定义，则 $f(x)$在 $x=a$ 处可导的一个充分条件是_______.

3 题视频解析

(A) $\lim\limits_{h\to+\infty}h\left[f\left(a+\dfrac{1}{h}\right)-f(a)\right]$存在　　(B) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+2h)-f(a+h)}{h}$存在

(C) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a-h)}{2h}$存在　　(D) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a)-f(a-h)}{h}$存在

解 由 $\lim\limits_{h\to+\infty}h\left[f\left(a+\dfrac{1}{h}\right)-f(a)\right]=\lim\limits_{h\to+\infty}\dfrac{f\left(a+\dfrac{1}{h}\right)-f(a)}{\dfrac{1}{h}}$存在，仅可知 $f'_+(a)$存在，故不能选(A).

取 $f(x)=\begin{cases}1, & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$ 显然$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(0+2h)-f(0+h)}{h}=0$，但 $f(x)$在 $x=0$ 处不可导，故不能选择(B).

取 $f(x)=|x|$，显然$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(0+h)-f(0-h)}{2h}=0$，但 $f(x)$在 $x=0$ 处不可导，故不能选择(C).

而$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a)-f(a-h)}{h}=\lim\limits_{-h\to 0}\dfrac{f(a+(-h))-f(a)}{-h}$存在，按导数定义知 $f'(a)$存在，故选择(D).

4. 设有一根细棒，取棒的一端作为原点，棒上任意点的坐标为 x，于是分布在区间$[0,x]$上细棒的质量 m 与 x 存在函数关系 $m=m(x)$. 应怎样确定细棒在点 x_0 处的线密度(对于均匀细棒来说，单位长度细棒的质量叫做这细棒的线密度)？

解 在区间$[x_0,x_0+\Delta x]$上的平均线密度为 $\bar{\rho}=\dfrac{\Delta m}{\Delta x}=\dfrac{m(x_0+\Delta x)-m(x_0)}{\Delta x}$.

在点 x_0 处的线密度为 $\rho(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{m(x_0+\Delta x)-m(x_0)}{\Delta x}=\left.\dfrac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0}$

5. 根据导数的定义，求 $f(x)=\dfrac{1}{x}$的导数.

解 由导数的定义知，当 $x\neq 0$ 时，$\left(\dfrac{1}{x}\right)'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\dfrac{1}{x+\Delta x}-\dfrac{1}{x}}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{-1}{x(x+\Delta x)}=-\dfrac{1}{x^2}$.

6. 求下列函数 $f(x)$的 $f'_-(0)$及 $f'_+(0)$，又 $f'(0)$是否存在：

(1) $f(x)=\begin{cases}\sin x, & x<0,\\ \ln(1+x), & x\geqslant 0;\end{cases}$　　(2) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$

解 (1)$f'_-(0)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\sin x}{x}=1$,

$f'_+(0)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=1$.

由 $f'_-(0)=f'_+(0)=1$,知 $f'(0)=f'_-(0)=f'_+(0)=1$.

(2)$f'_-(0)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\dfrac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}-0}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}=1$,

$f'_+(0)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\dfrac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}-0}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}=0$.

由 $f'_-(0)\neq f'_+(0)$知 $f'(0)$不存在.

7. 讨论函数 $f(x)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处的连续性与可导性.

7 题视频解析

解 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}x\sin\dfrac{1}{x}=0=f(0)$,故 $f(x)$在 $x=0$ 处连续.

由$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\sin\dfrac{1}{x}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\sin\dfrac{1}{x}$不存在,故 $f(x)$在 $x=0$ 处不可导.

8. 求下列函数的导数:

(1)$y=\arcsin(\sin x)$; (2)$y=\arctan\dfrac{1+x}{1-x}$;

(3)$y=\ln\tan\dfrac{x}{2}-\cos x\cdot\ln\tan x$; (4)$y=\ln(e^x+\sqrt{1+e^{2x}})$; (5)$y=x^{\frac{1}{x}}\ (x>0)$.

解 (1)$y'=\dfrac{1}{\sqrt{1-\sin^2 x}}\cos x=\dfrac{\cos x}{|\cos x|}$.

(2)$y'=\dfrac{1}{1+\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)^2}\cdot\dfrac{(1-x)+(1+x)}{(1-x)^2}=\dfrac{1}{1+x^2}$.

(3)$y'=\dfrac{1}{\tan\dfrac{x}{2}}\cdot\sec^2\dfrac{x}{2}\cdot\dfrac{1}{2}+\sin x\ln\tan x-\cos x\dfrac{1}{\tan x}\sec^2 x-\sec^2 x=\sin x\cdot\ln\tan x$.

(4)$y'=\dfrac{1}{e^x+\sqrt{1+e^{2x}}}\left(e^x+\dfrac{2e^{2x}}{2\sqrt{1+e^{2x}}}\right)=\dfrac{e^x}{\sqrt{1+e^{2x}}}$.

(5)先在等式两端分别取对数,得 $\ln y=\dfrac{\ln x}{x}$,再在所得等式两端分别对 x 求导,得

$$\frac{y'}{y}=\frac{\frac{1}{x}\cdot x-\ln x}{x^2}=\frac{1-\ln x}{x^2},$$

于是 $y'=x^{\frac{1}{x}-2}(1-\ln x)$.

9. 求下列函数的二阶导数:

(1)$y=\cos^2 x\cdot\ln x$; (2)$y=\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.

解 (1)$y'=2\cos x(-\sin x)\cdot\ln x+\cos^2 x\cdot\dfrac{1}{x}=-\sin 2x\cdot\ln x+\dfrac{\cos^2 x}{x}$.

$$y''=-2\cos 2x\cdot\ln x-\sin 2x\cdot\frac{1}{x}+\frac{2\cos x(-\sin x)\cdot x-\cos^2 x}{x^2}$$

$$=-2\cos 2x\cdot\ln x-\frac{2\sin 2x}{x}-\frac{\cos^2 x}{x^2}.$$

(2)$y'=\dfrac{\sqrt{1-x^2}-x\dfrac{(-2x)}{2\sqrt{1-x^2}}}{(\sqrt{1-x^2})^2}=\dfrac{1}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}$.

$$y''=-\frac{3}{2}\cdot(1-x^2)^{-\frac{5}{2}}\cdot(-2x)=\frac{3x}{(1-x^2)^{\frac{5}{2}}}.$$

*10. 求下列函数的 n 阶导数：

(1)$y=\sqrt[m]{1+x}$；　　　　(2)$y=\dfrac{1-x}{1+x}$.

解 (1)$y'=\dfrac{1}{m}(1+x)^{\frac{1}{m}-1}$，$y''=\dfrac{1}{m}\left(\dfrac{1}{m}-1\right)(1+x)^{\frac{1}{m}-2}$，…，

$$y^{(n)}=\frac{1}{m}\left(\frac{1}{m}-1\right)\cdots\left(\frac{1}{m}-n+1\right)(1+x)^{\frac{1}{m}-n}.$$

(2)由$\left(\dfrac{1}{1+x}\right)^{(n)}=\dfrac{(-1)^n n!}{(1+x)^{n+1}}$知

$$y^{(n)}=\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{(n)}=\left(-1+\frac{2}{x+1}\right)^{(n)}=2\left(\frac{1}{x+1}\right)^{(n)}=\frac{2\cdot(-1)^n n!}{(1+x)^{n+1}}.$$

11. 设函数 $y=y(x)$ 由方程 $e^y+xy=e$ 所确定，求 $y''(0)$.

解 把方程两边分别对 x 求导，得 $e^y y'+y+xy'=0$.　①

将 $x=0$ 代入 $e^y+xy=e$ 得 $y=1$，再将 $x=0$，$y=1$ 代入①式得

$$y'\big|_{x=0}=-\frac{1}{e},$$

在①式两边分别关于 x 再求导，可得 $e^y y'^2+e^y y''+y'+y'+xy''=0$.　②

将 $x=0$，$y=1$，$y'\big|_{x=0}=-\dfrac{1}{e}$代入②式，得　$y''(0)=\dfrac{1}{e^2}$.

11题视频解析

12. 设 $y=y(x)$是由方程$\begin{cases}e^x=3t^2+2t+1,\\ t\sin y-y+\dfrac{\pi}{2}=0\end{cases}$所确定，求$\dfrac{dy}{dx}\Big|_{t=0}$.

解 由 $e^x=3t^2+2t+1$ 得 $x=\ln(3t^2+2t+1)$，所以$\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{6t+2}{3t^2+2t+1}$.

在 $t\sin y-y+\dfrac{\pi}{2}=0$ 两边对 t 求导，得

$\sin y+t\cdot\cos y\cdot\dfrac{dy}{dt}-\dfrac{dy}{dt}=0$，所以$\dfrac{dy}{dt}=\dfrac{\sin y}{1-t\cos y}$.

当 $t=0$ 时，$x=0$，$y=\dfrac{\pi}{2}$，因此$\dfrac{dy}{dx}\Big|_{t=0}=\dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dy}{dt}}\Bigg|_{t=0}=\dfrac{\sin y}{1-t\cos y}\cdot\dfrac{3t^2+2t+1}{6t+2}\Big|_{t=0}=\dfrac{1}{2}$.

13. 求下列由参数方程所确定的函数的一阶导数$\dfrac{dy}{dx}$及二阶导数$\dfrac{d^2y}{dx^2}$：

(1)$\begin{cases}x=a\cos^3\theta,\\ y=a\sin^3\theta;\end{cases}$　　　　(2)$\begin{cases}x=\ln\sqrt{1+t^2},\\ y=\arctan t.\end{cases}$

解 (1)$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}}=\dfrac{3a\sin^2\theta\cos\theta}{3a\cos^2\theta(-\sin\theta)}=-\tan\theta$，

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\frac{d}{d\theta}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dx}{d\theta}}=\frac{-\sec^2\theta}{-3a\cos^2\theta\sin\theta}=\frac{1}{3a}\sec^4\theta\csc\theta.$$

(2) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\dfrac{\frac{1}{1+t^2}}{\frac{t}{1+t^2}}=\dfrac{1}{t}$, $\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dx}{dt}}=\dfrac{-\frac{1}{t^2}}{\frac{t}{1+t^2}}=-\dfrac{1+t^2}{t^3}$.

14. 求曲线 $\begin{cases}x=2e^t,\\ y=e^{-t}\end{cases}$ 在 $t=0$ 相应的点处的切线方程及法线方程.

解 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\dfrac{-e^{-t}}{2e^t}=-\dfrac{1}{2e^{2t}}$, $\quad \left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{t=0}=-\dfrac{1}{2}$.

$t=0$ 对应的点为(2,1),故曲线在点(2,1)处的切线方程为

$$y-1=-\frac{1}{2}(x-2),\qquad 即\quad x+2y-4=0.$$

法线方程为 $y-1=2(x-2)$, 即 $2x-y-3=0$.

15. 已知 $f(x)$ 是周期为 5 的连续函数,它在 $x=0$ 的某个邻域内满足关系式

$$f(1+\sin x)-3f(1-\sin x)=8x+o(x),$$

且 $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导,求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(6,f(6))$ 处的切线方程.

15 题视频解析

解 由 $f(x)$ 连续,令关系式两端令 $x\to0$,取极限得 $f(1)-3f(1)=0$, $\quad f(1)=0$.

又 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(1+\sin x)-3f(1-\sin x)}{x}=8$,

而 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(1+\sin x)-3f(1-\sin x)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(1+\sin x)-3f(1-\sin x)}{\sin x}\cdot\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}$

$\xlongequal{令 t=\sin x}\lim\limits_{t\to0}\dfrac{f(1+t)-3f(1-t)}{t}=\lim\limits_{t\to0}\dfrac{f(1+t)-f(1)}{t}+3\lim\limits_{t\to0}\dfrac{f(1-t)-f(1)}{-t}$

$=4f'(1)$,

故 $f'(1)=2$. 由于 $f(x+5)=f(x)$,于是 $f(6)=f(1)=0$,

$$f'(6)=\lim_{x\to0}\frac{f(6+x)-f(6)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{f(1+x)-f(1)}{x}=f'(1)=2,$$

因此,曲线 $y=f(x)$ 在点 $(6,f(6))$ 即 $(6,0)$ 处的切线方程为

$$y-0=2(x-6),\qquad 即\quad 2x-y-12=0.$$

16. 当正在高度 H 水平飞行的飞机开始向机场跑道下降时,如图 2-7 所示,从飞机到机场的水平地面距离为 L. 假设飞机下降的路径为三次函数 $y=ax^3+bx^2+cx+d$ 的图形,其中 $y|_{x=-L}=H$, $y|_{x=0}=0$. 试确定飞机的降落路径.

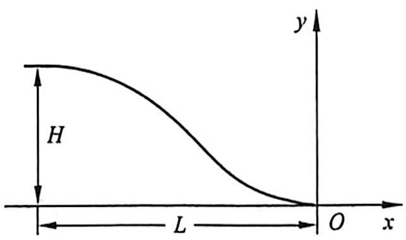

图 2-7

解 建立坐标系如图 2-7 所示. 根据题意,可知

$y|_{x=0}=0$, $\Rightarrow d=0$.

$y|_{x=-L}=H$, $\Rightarrow -aL^3+bL^2-cL=H$.

为使飞机平稳降落,尚需满足

$y'|_{x=0}=0$, $\Rightarrow c=0$.

$y'|_{x=-L}=0$, $\Rightarrow 3aL^2-2bL=0$.

解得 $a=\dfrac{2H}{L^3}$, $b=\dfrac{3H}{L^2}$. 故飞机的降落路径为 $y=H\left[2\left(\dfrac{x}{L}\right)^3+3\left(\dfrac{x}{L}\right)^2\right]$.

17. 甲船以 6km/h 的速率向东行驶,乙船以 8km/h 的速率向南行驶. 在中午 12:00,乙船位于甲船之北 16km 处. 问下午 1:00 两船相离的速率为多少?

解 设从中午十二点整起，经过 th，甲船与乙船的距离为 $s=\sqrt{(16-8t)^2+(6t)^2}$，

故速率 $v=\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=\dfrac{2(16-8t)\cdot(-8)+72t}{2\sqrt{(16-8t)^2+(6t)^2}}$.

当 $t=1$ 时（即下午 1:00）两船相离的速率为 $v\big|_{t=1}=\dfrac{-128+72}{20}=-2.8(\mathrm{km/h})$.

18. 利用函数的微分代替函数的增量求 $\sqrt[3]{1.02}$ 的近似值.

解 利用 $\sqrt[3]{1+x}\approx1+\dfrac{1}{3}x$，取 $x=0.02$，得 $\sqrt[3]{1.02}\approx1+\dfrac{1}{3}\times0.02\approx1.007$.

19. 已知单摆的振动周期 $T=2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}$，其中 $g=980\mathrm{cm/s^2}$，l 为摆长（单位为 cm）. 设原摆长为 20cm，为使周期 T 增大 0.05s，摆长约需加长多少？

解 由 $\Delta T\approx\mathrm{d}T=\dfrac{\pi}{\sqrt{gl}}\Delta l$，得 $\Delta l=\dfrac{\sqrt{gl}}{\pi}\mathrm{d}T\approx\dfrac{\sqrt{gl}}{\pi}\Delta T$.

故 $\Delta l\big|_{l=20}\approx\dfrac{\sqrt{980\times20}}{3.14}\times0.05\approx2.23(\mathrm{cm})$.

即原摆长约需加长 2.23(cm).

第二章自测题

一、填空题

1. 设 $f'(x_0)=-1$，则 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{f(x_0-2x)-f(x_0-x)}=$______.

2. 设 $f'(0)=2$，则 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(3\sin x)-f(2\arctan x)}{x}=$______.

3. 设 $y=(1+\sin x)^x$，则 $\mathrm{d}y\big|_{x=\pi}=$______.

4. 设 $x+y=\tan y$，则 $\mathrm{d}y=$______.

5. 曲线 $y=\ln x$ 与直线 $x+y=1$ 垂直的切线方程为______.

6. (2022 数学二，5 分) 已知函数 $y=y(x)$ 由方程 $x^2+xy+y^3=3$ 确定，则 $y''(1)=$________.

7. (2020 数学一，数学 设 $\begin{cases}x=\sqrt{t^2+1},\\ y=\ln(t+\sqrt{t^2+1}),\end{cases}$ 则 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\bigg|_{t=1}=$ ______.

8. (2021 数学一，) 设函数 $y=y(x)$ 由参数方 $t+1$, $1)\mathrm{e}^t+t^2$ $t=0$

$=$________.

二、选择题