总习题一解答

1. 在“充分”“必要”和“充分必要”三者中选择一个正确的填入下列空格内：

(1) 数列$\{x_n\}$有界是数列$\{x_n\}$收敛的______条件. 数列$\{x_n\}$收敛是数列$\{x_n\}$有界的______条件.

(2) $f(x)$在x_0的某一去心邻域内有界是$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$存在的______条件. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$存在是$f(x)$在$x_0$的某一去心邻域内有界的______条件.

(3) $f(x)$在x_0的某一去心邻域内无界是$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$的______条件. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$是$f(x)$在$x_0$的某一去心邻域内无界的______条件.

(4) $f(x)$当$x\to x_0$时的右极限$f(x_0^+)$及$f(x_0^-)$左极限都存在且相等是$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$存在的______条件.

解 (1)必要，充分.　(2)必要，充分.　(3)必要，充分.　(4)充分必要.

2. 已知函数$f(x)=\begin{cases}(\cos x)^{-x^2}, & x\neq 0,\\ a, & x=0\end{cases}$在$x=0$连续，则$a=$______.

解 $a=f(0)=\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{-x^2}=1$.

3. 以下两题中给出了四个结论，从中选出一个正确结论：

(1) 设$f(x)=2^x+3^x-2$，则当$x\to 0$时，有________.

(A) $f(x)$与x是等价无穷小　(B) $f(x)$与x同阶但非等价无穷小

(C) $f(x)$是比x高阶的无穷小　(D) $f(x)$是比x低阶的无穷小

3题视频解析

(2) 设$f(x)=\dfrac{e^{\frac{1}{x}}-1}{e^{\frac{1}{x}}+1}$，则$x=0$是$f(x)$的________.

(A)可去间断点　(B)跳跃间断点　(C)第二类间断点　(D)连续点

解 (1) 因为$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^x+3^x-2}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^x-1}{x}+\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3^x-1}{x}=\ln 2+\ln 3=\ln 6\neq 1$，

所以当$x\to 0$时，$f(x)$与x同阶但非等价无穷小，应选(B).

(2) $f(0-0)=\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=-1$，$f(0+0)=\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=1$，因为$f(0+0)$、$f(0-0)$均存在，但$f(0+0)\neq f(0-0)$，所以$x=0$是$f(x)$的跳跃间断点，应选(B).

4. 设$f(x)$的定义域是$[0,1]$，求下列函数的定义域：

(1) $f(e^x)$；　(2) $f(\ln x)$；　(3) $f(\arctan x)$；　(4) $f(\cos x)$

解 (1) 因为$0\leqslant e^x\leqslant 1$，所以$x\leqslant 0$，即函数$f(e^x)$的定义域为$(-\infty,0]$

(2) 因为$0\leqslant \ln x\leqslant 1$，所以$1\leqslant x\leqslant e$，即函数$f(\ln x)$的定义域为$[1,e]$.

(3) 因为$0\leqslant \arctan x\leqslant 1$，所以$0\leqslant x\leqslant \tan 1$，即函数$f(\arctan x)$的定义域为$[0,\tan 1]$.

(4) 因为$0\leqslant \cos x\leqslant 1$，所以$2n\pi-\dfrac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant 2n\pi+\dfrac{\pi}{2}$，$n\in \mathbf{Z}$，即函数$f(\cos x)$的定义域为

$\left[2n\pi-\dfrac{\pi}{2},2n\pi+\dfrac{\pi}{2}\right]$，$n\in\mathbf{Z}$.

5. 设$f(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant 0,\\ x, & x>0,\end{cases}$　$g(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant 0,\\ -x^2, & x>0,\end{cases}$　求$f[f(x)]$，$g[g(x)]$，$f[g(x)]$，$g[f(x)]$.

解 因为$f[f(x)]=\begin{cases}0, & f(x)\leqslant 0,\\ f(x), & f(x)>0,\end{cases}$而$f(x)\geqslant 0$，$x\in\mathbf{R}$，

所以 $f[f(x)]=f(x)$，$x\in\mathbf{R}$.

因为 $g[g(x)]=\begin{cases}0, & g(x)\leqslant 0,\\ -g^2(x), & g(x)>0,\end{cases}$ 而 $g(x)\leqslant 0$，$x\in\mathbf{R}$，

所以 $g[g(x)]=0$，$x\in\mathbf{R}$.

因为 $f[g(x)]=\begin{cases}0, & g(x)\leqslant 0,\\ g(x), & g(x)>0,\end{cases}$ 而 $g(x)\leqslant 0$，$x\in\mathbf{R}$，

所以 $f[g(x)]=0$，$x\in\mathbf{R}$.

因为 $g[f(x)]=\begin{cases}0, & f(x)\leqslant 0,\\ -f^2(x), & f(x)>0,\end{cases}$ 而 $f(x)\geqslant 0$，$x\in\mathbf{R}$，

所以 $g[f(x)]=g(x)$，$x\in\mathbf{R}$.

6. 利用 $y=\sin x$ 的图形作出下列函数的图形

(1) $y=|\sin x|$；　　(2) $y=\sin|x|$；　　(3) $y=2\sin\dfrac{x}{2}$.

解　$y=\sin x$ 的图形为如图 1—14 所示.

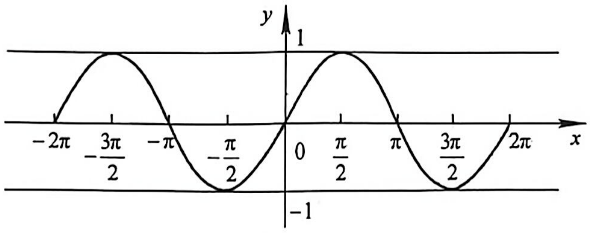

图 1—14

(1) $y=|\sin x|$ 应将 $y=\sin x$ 的下方图形翻至上方如图 1—15 所示.

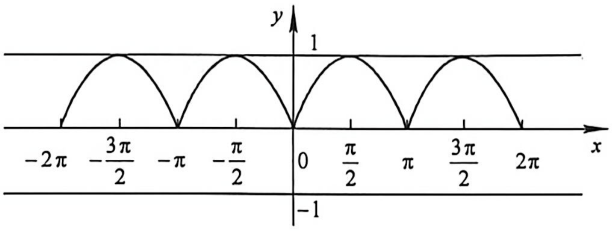

图 1—15

(2) $y=\sin|x|$ 应将 $y=\sin x$ 的右方图形翻至左方如图 1—16 所示.

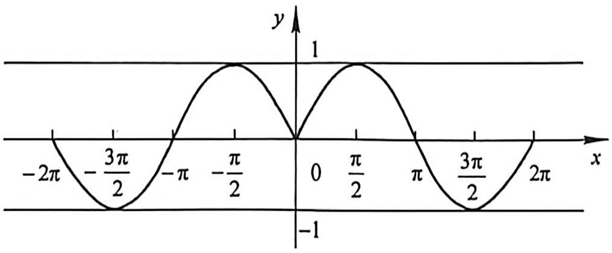

图 1—16

(3) $y=2\sin\dfrac{x}{2}$ 将 $y=\sin x$ 宽度拉宽高度升高，如图 1—17 所示.

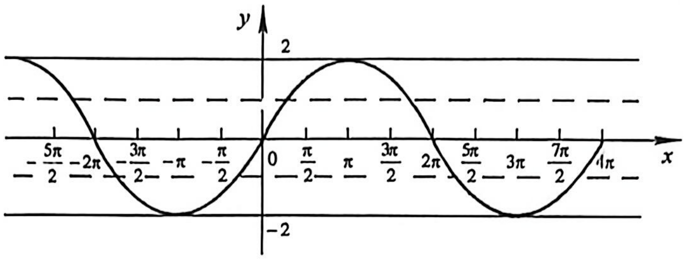

图 1—17

7. 把半径为 R 的一圆形铁皮，自圆心处剪去中心角为 α 的一扇形后围成一无底圆锥. 试建立该圆锥的体积 V 与角 α 间的函数关系.

解 设围成的圆锥底半径为 r，高为 h，则按题意(图 1—18)有

$$(2\pi-\alpha)R=2\pi r,\qquad h=\sqrt{R^2-r^2}.$$

故 $$r=\frac{(2\pi-\alpha)R}{2\pi},$$

$$h=\sqrt{R^2-\frac{(2\pi-\alpha)^2}{4\pi^2}R^2}=\frac{\sqrt{4\pi\alpha-\alpha^2}}{2\pi}R,$$

圆锥体积

$$V=\frac{1}{3}\pi\cdot\frac{(2\pi-\alpha)^2}{4\pi^2}R^2\cdot\frac{\sqrt{4\pi\alpha-\alpha^2}}{2\pi}R$$

$$=\frac{R^3}{24\pi^2}(2\pi-\alpha)^2\sqrt{4\pi\alpha-\alpha^2}\ (0<\alpha<2\pi).$$

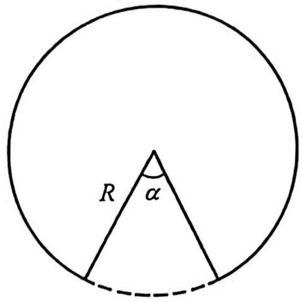

图 1—18

·8. 根据函数极限的定义证明 $\lim\limits_{x\to3}\frac{x^2-x-6}{x-3}=5$.

证 因为 $\left|\frac{x^2-x-6}{x-3}-5\right|=\left|\frac{(x-3)(x+2)}{x-3}-5\right|=|x-3|$，

要使 $\left|\frac{x^2-x-6}{x-3}-5\right|<\varepsilon$，只要 $|x-3|<\varepsilon$，所以 $\forall\varepsilon>0$，取 $\delta=\varepsilon$，则当 $0<|x-3|<\delta$ 时，就有 $\left|\frac{x^2-x-6}{x-3}-5\right|<\varepsilon$.

即 $\lim\limits_{x\to3}\frac{x^2-x-6}{x-3}=5$.

9. 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2-x+1}{(x-1)^2}$；

(2) $\lim\limits_{x\to+\infty}x(\sqrt{x^2+1}-x)$；

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x+3}{2x+1}\right)^{x+1}$；

(4) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}$；

(5) $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{a^x+b^x+c^x}{3}\right)^{\frac{1}{x}}(a>0,a\neq1;b>0,b\neq1;c>0,c\neq1)$；

(6) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{\tan x}$；

(7) $\lim\limits_{x\to a}\frac{\ln x-\ln a}{x-a}(a>0)$；

(8) $\lim\limits_{x\to0}\frac{x\tan x}{\sqrt{1-x^2}-1}$.

9 题视频解析

解 (1) 因为 $\lim\limits_{x\to1}\frac{(x-1)^2}{x^2-x+1}=0$，所以 $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2-x+1}{(x-1)^2}=\infty$.

(2) $$\lim_{x\to+\infty}x(\sqrt{x^2+1}-x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x(\sqrt{x^2+1}-x)(\sqrt{x^2+1}+x)}{\sqrt{x^2+1}+x}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1}=\frac{1}{2}.$$

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x+3}{2x+1}\right)^{x+1}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{2x+1}{2}}\right)^{\frac{2x+1}{2}}\cdot\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x+3}{2x+1}\right)^{\frac{1}{2}}=\mathrm{e}.$

(4) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}=\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{\sec x-1}{x^2}\right)=\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{1}{2}x^2}{x^2}=\frac{1}{2}.$

(5)因为 $\left(\frac{a^x+b^x+c^x}{3}\right)^{\frac{1}{x}}=\left(1+\frac{a^x+b^x+c^x-3}{3}\right)^{\frac{3}{a^x+b^x+c^x-3}\cdot\frac{1}{3}\left(\frac{a^x-1}{x}+\frac{b^x-1}{x}+\frac{c^x-1}{x}\right)}$,

而 $\left(1+\frac{a^x+b^x+c^x-3}{3}\right)^{\frac{3}{a^x+b^x+c^x-3}}\to\mathrm{e}\ (x\to0)$,

$$\frac{a^x-1}{x}\to\ln a,\quad \frac{b^x-1}{x}\to\ln b,\quad \frac{c^x-1}{x}\to\ln c(x\to0),$$

所以 $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{a^x+b^x+c^x}{3}\right)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}^{\frac{1}{3}(\ln a+\ln b+\ln c)}=\sqrt[3]{abc}.$

(6)因为 $(\sin x)^{\tan x}=[1+(\sin x-1)]^{\frac{1}{\sin x-1}\cdot(\sin x-1)\tan x}$,而

$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}[1+(\sin x-1)]^{\frac{1}{\sin x-1}}=\mathrm{e}$,

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x-1)\tan x=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x-\sin\frac{\pi}{2}}{\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}\cdot\sin x=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{2\sin\frac{x-\frac{\pi}{2}}{2}\cos\frac{x+\frac{\pi}{2}}{2}}{2\sin\frac{x+\frac{\pi}{2}}{2}\cos\frac{x+\frac{\pi}{2}}{2}}\cdot\sin x$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}\cdot\sin x=0,$$

所以 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{\tan x}=\mathrm{e}^0=1.$

(7)令 $x-a=t$,则 $x=a+t$,当 $x\to a$ 时,$t\to0$. 故

$$\lim_{x\to a}\frac{\ln x-\ln a}{x-a}=\lim_{t\to0}\frac{\ln\left(1+\frac{t}{a}\right)}{t}=\frac{1}{a}\lim_{t\to0}\ln\left(1+\frac{t}{a}\right)^{\frac{a}{t}}=\frac{1}{a}.$$

(8) $\lim\limits_{x\to0}\frac{x\tan x}{\sqrt{1-x^2}-1}=\lim\limits_{x\to0}\frac{x^2}{-\frac{1}{2}x^2}=-2.$

10. 设 $f(x)=\begin{cases}x\sin\frac{1}{x}, & x>0,\\ a+x^2, & x\leqslant0,\end{cases}$ 要使 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续,应怎样选择数 a?

解 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 及 $(0,+\infty)$ 内均连续,要使 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续,只要选择数 a,使 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续即可. 而

$$\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}x\sin\frac{1}{x}=0,\qquad \lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^-}(a+x^2)=a,$$

又 $f(0)=a$,故应选择 $a=0$,$f(x)$ 在 $x=0$ 处连续,从而 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续.

11. 设 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+x}{1+x^{2n}}$,求 $f(x)$ 的间断点,并说明间断点所属类型.

解 当 $|x|<1$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+x}{1+x^{2n}}=1+x$；当 $|x|>1$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+x}{1+x^{2n}}=0$.

故 $f(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant -1,\\ 1+x, & -1<x<1,\\ 1, & x=1,\\ 0, & x>1.\end{cases}$

由于 $\lim\limits_{x\to -1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to -1^+}f(x)=f(-1)=0$，所以 $x=-1$ 为连续点.

而 $\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=2$，$\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=0$，所以 $x=1$ 为第一类间断点.

12. 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)=1$.

12 题视频解析

证 因为 $\dfrac{n}{\sqrt{n^2+n}}<\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}<1$，

而 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\sqrt{n^2+n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}}=1$，$\quad\lim\limits_{n\to\infty}1=1$，

所以由夹逼准则，即得证.

13. 证明方程 $\sin x+x+1=0$ 在开区间 $\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$ 内至少有一个根.

证 设 $f(x)=\sin x+x+1$，则 $f(x)$ 在 $\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$ 上连续. 因为

$$f\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)-\frac{\pi}{2}+1=-\frac{\pi}{2}<0,$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\sin\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}+1=\frac{\pi}{2}+2>0,$$

由介值定理，至少存在一点 $\xi\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$，使 $f(\xi)=0$，即 $\sin\xi+\xi+1=0$. 所以方程 $\sin x+x+1=0$ 在 $\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$ 内至少有一个根.

14. 如果存在直线 $L:y=kx+b$，使得当 $x\to\infty$（或 $x\to+\infty$，$x\to-\infty$）时，曲线 $y=f(x)$ 上的动点 $M(x,y)$ 到直线 L 的距离 $d(M,L)\to 0$，则称 L 为曲线 $y=f(x)$ 的渐近线. 当直线 L 的斜率 $k\neq 0$ 时，称 L 为斜渐近线.

(1) 证明：直线 $L:y=kx+b$ 为曲线 $y=f(x)$ 的渐近线的充分必要条件是

$$k=\lim_{\substack{x\to\infty\\ \left(\substack{x\to+\infty\\ x\to-\infty}\right)}}\frac{f(x)}{x},\qquad b=\lim_{\substack{x\to\infty\\ \left(\substack{x\to+\infty\\ x\to-\infty}\right)}}[f(x)-kx].$$

(2) 求曲线 $y=(2x-1)e^{\frac{1}{x}}$ 的斜渐近线；

(3) 求曲线 $y=x\ln\left(e+\dfrac{1}{x}\right)$ 的渐近线.

解 (1) 就 $x\to+\infty$ 的情形证明，其他情形类似.

设 $L:y=kx+b$ 为曲线 $y=f(x)$ 的渐近线.

1° 若 $k\neq 0$，如图 1—19 所示，$k=\tan\alpha$（α 为 L 的倾角，$\alpha\neq\dfrac{\pi}{2}$），曲线 $y=f(x)$ 上动点 $M(x,y)$ 到直线 L 的距离为 $|MK|$. 过 M 作横轴的垂线，交直线 L 于 K_1，则

$$|MK_1|=\frac{|MK|}{\cos\alpha}.$$

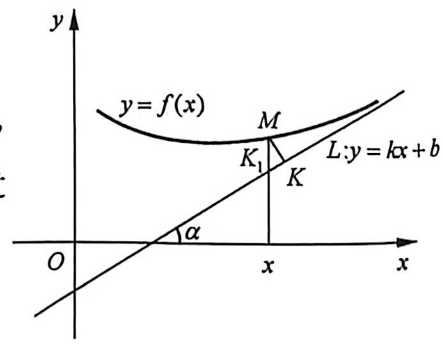

图 1—19

显然$|MK|\to 0(x\to+\infty)$与$|MK_1|\to 0$
$(x\to+\infty)$等价，而

$$|MK_1|=|f(x)-(kx+b)|.$$

因为$L:y=kx+b$是曲线$y=f(x)$的渐近线，
所以$|MK|\to 0(x\to+\infty)\Rightarrow|MK_1|\to 0(x\to+\infty)$，

即 $$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(kx+b)]=0, \quad ①$$

从而 $$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-kx]=\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(kx+b)]+b=0+b=b, \quad ②$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}[f(x)-kx]+k=0+k=k. \quad ③$$

反之，若②、③成立，则①成立，即$L:y=kx+b$是曲线$y=f(x)$的渐近线.

2° 若$k=0$，设$L:y=b$是曲线$y=f(x)$的水平渐近线，如图 1—20 所示. 按定义有$|MK|\to 0(x\to+\infty)$，而$|MK|=|f(x)-b|$，故有

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=b. \quad ④$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=0. \quad ⑤$$

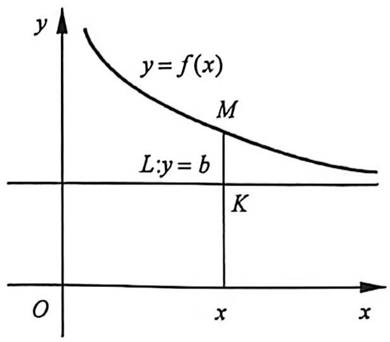

图 1—20

反之，若④、⑤成立，即有

$$|MK|=|f(x)-b|\to 0\ (x\to+\infty),$$

故$y=b$是曲线$y=f(x)$的水平渐近线.

(2)因为$k=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(2x-1)}{x}e^{\frac{1}{x}}=2$，

$$b=\lim_{x\to\infty}[f(x)-2x]=\lim_{x\to\infty}[(2x-1)e^{\frac{1}{x}}-2x]$$

$$=\lim_{x\to\infty}2x(e^{\frac{1}{x}}-1)-\lim_{x\to\infty}e^{\frac{1}{x}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}2\frac{e^{\frac{1}{x}}-1}{\frac{1}{x}}-1=2\lim_{u\to 0}\frac{e^u-1}{u}-1=1,$$

所以，所求曲线的渐近线为$y=2x+1$.

(3)因为$k=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x\ln\left(e+\frac{1}{x}\right)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\ln\left(e+\dfrac{1}{x}\right)=1.$

$$b=\lim_{x\to\infty}[f(x)-x]=\lim_{x\to\infty}\left[x\ln\left(e+\frac{1}{x}\right)-x\right]\xlongequal{t=\frac{1}{x}}\lim_{t\to 0}\frac{\ln(e+t)-1}{t}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{\ln\left(1+\frac{t}{e}\right)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{\frac{t}{e}}{t}=\frac{1}{e}.$$

所以所求的渐近线为$y=x+\dfrac{1}{e}$.

又因为$\lim\limits_{x\to 0^+}x\ln\left(e+\dfrac{1}{x}\right)=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{\ln(e+t)}{t}=0$

且$\lim\limits_{x\to-\frac{1}{e}^-}x\ln\left(e+\dfrac{1}{x}\right)=\infty$，

所以$x=-\dfrac{1}{e}$为铅直渐近线.

因为$\lim\limits_{x\to\infty}x\ln\left(e+\dfrac{1}{x}\right)=0$，

所以没有水平渐近线.