高等数学

§1.8 连续函数

基础部数学教研室

“自然界中，一切都是连续的”

温度的变化

身高的增长

连续函数的概念

连续性的等价刻画

间断点及其类型

定义1 设函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 的某邻域 $U(x_0)$ 内有定义，若当 $x \to x_0$ 时$f(x)$存在极限，且有

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0),$$

则称函数$f(x)$在点x_0处连续，并称点x_0为函数$f(x)$的连续点.

增量形式: $$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \to 0} [f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)] = 0$$

$\varepsilon - \delta$形式: $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, 当$|x - x_0| = |\Delta x| < \delta$时，有

$$|f(x) - f(x_0)| = |\Delta y| < \varepsilon$$

定义2 (1) 设函数$f(x)$在区间$[x_0,\ x_0+\delta)$内有定义，若

$\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=f(x_0)$，则称函数$f(x)$在$x_0$处右连续.

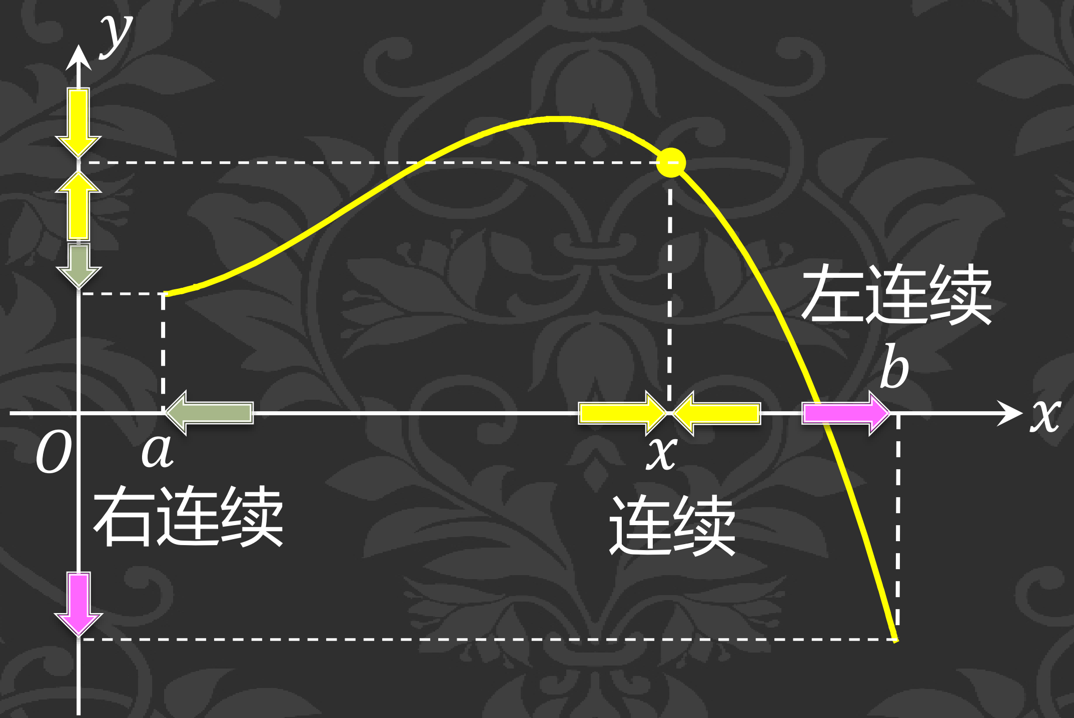
(2) 设函数$f(x)$在区间$(x_0-\delta, x_0]$内有定义，若$\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=f(x_0)$，

则称函数$f(x)$在x_0处左连续.

定理1：函数$f(x)$在x_0处连续，当且仅当它在x_0处左连续和右连续.

定义3 (1) 若函数$f(x)$在开区间 (a,b) 内每一点连续，则称该函数在区间(a,b)内连续, 记为 $f(x)\in C(a,b)$.

(2) 若函数$f(x)$在开区间(a,b)内连续，且在$x=a$和$x=b$处分别右连续和左连续，则称函数$f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续. 记为 $f(x)\in C[a,b]$.



例1 函数$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内有定义，对$(-\infty,+\infty)$内的任何x,y满足

$$f(x+y)=f(x)+f(y).$$

证明：$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内连续的充要条件是该函数在$x=0$处连续.

容易验证：

- 多项式函数 $P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ ，正弦函数$\sin x$和余弦函数 $\cos x$在$\mathbb{R}$中任何点处都连续.
- 对数函数 $\ln x$ 在$\mathbb{R}^+$中的任何点处连续.

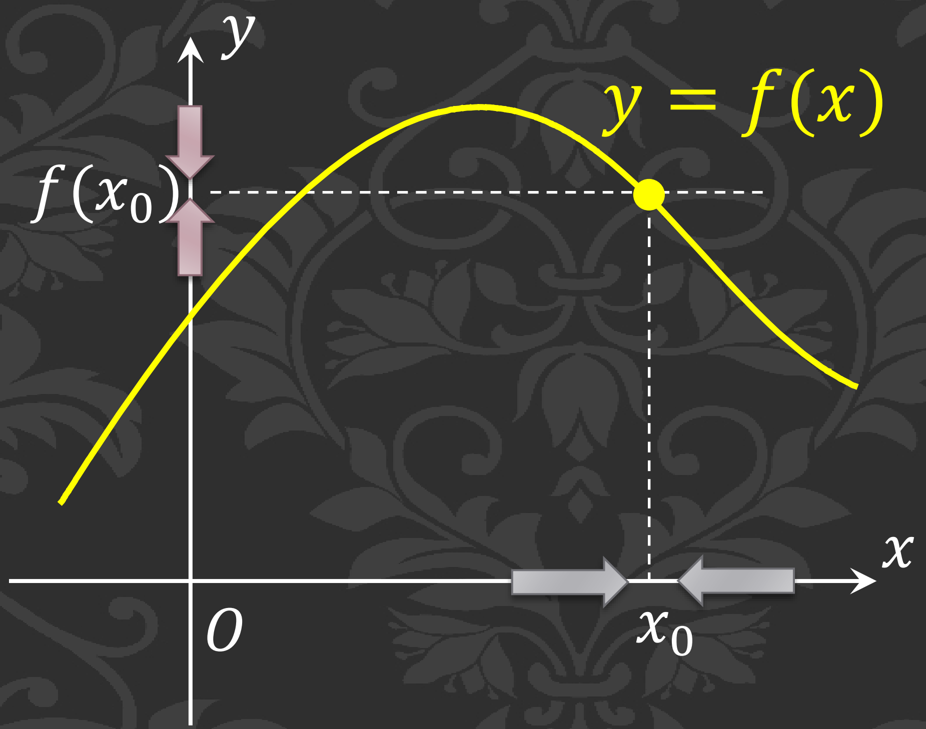
间断点及其类型：

$f(x)$在点x_0连续 $\Longleftrightarrow$ $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$

(1) $f(x)$在某$U(x_0)$有定义；

(2) 极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$存在；

(3) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.



设函数$f(x)$在x_0的某去心邻域有定义，若下列情形至少有一成立，则$f(x)$在x_0点不连续.

(1) 函数$f(x)$在x_0点无定义；

(2) 函数$f(x)$在x_0点有定义，但$\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$不存在；

(3) 函数$f(x)$在x_0点有定义，且$\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$存在，但

$$\lim_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0).$$

则称x_0为$f(x)$的间断点 .

定义4（间断点分类） **设x_0为$f(x)$的间断点.**

第Ⅰ类: $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$和$\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$均存在,

$$\delta = \left|\lim_{x\to x_0^+} f(x) - \lim_{x\to x_0^-} f(x)\right|$$

跳跃度

若$\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$，称$x_0$为可去间断点.

若$\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) \neq \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$，称$x_0$为跳跃间断点.

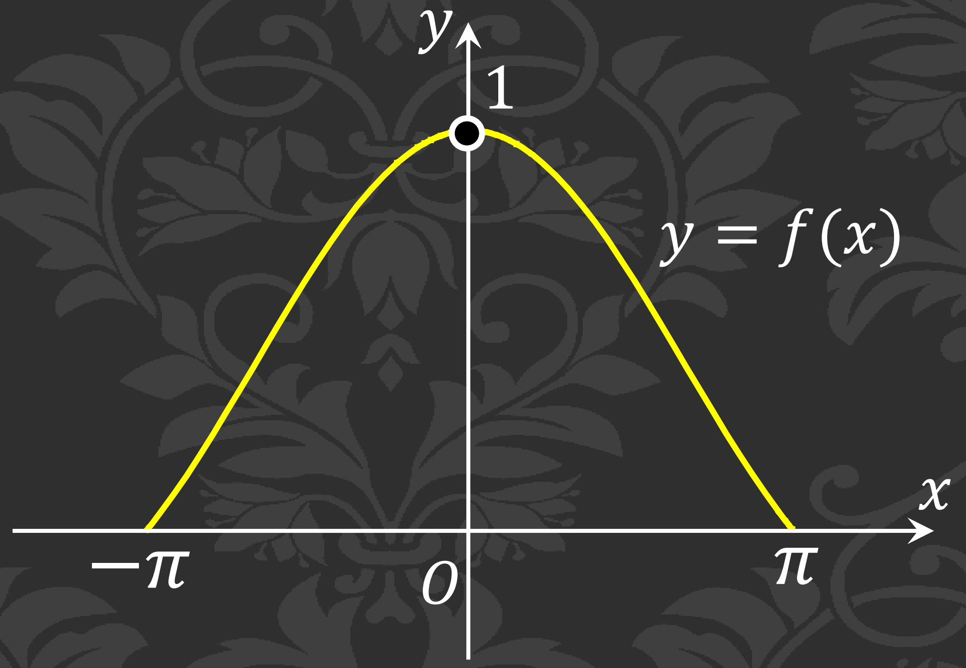
第Ⅱ类: $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$和$\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$至少一个不存在,

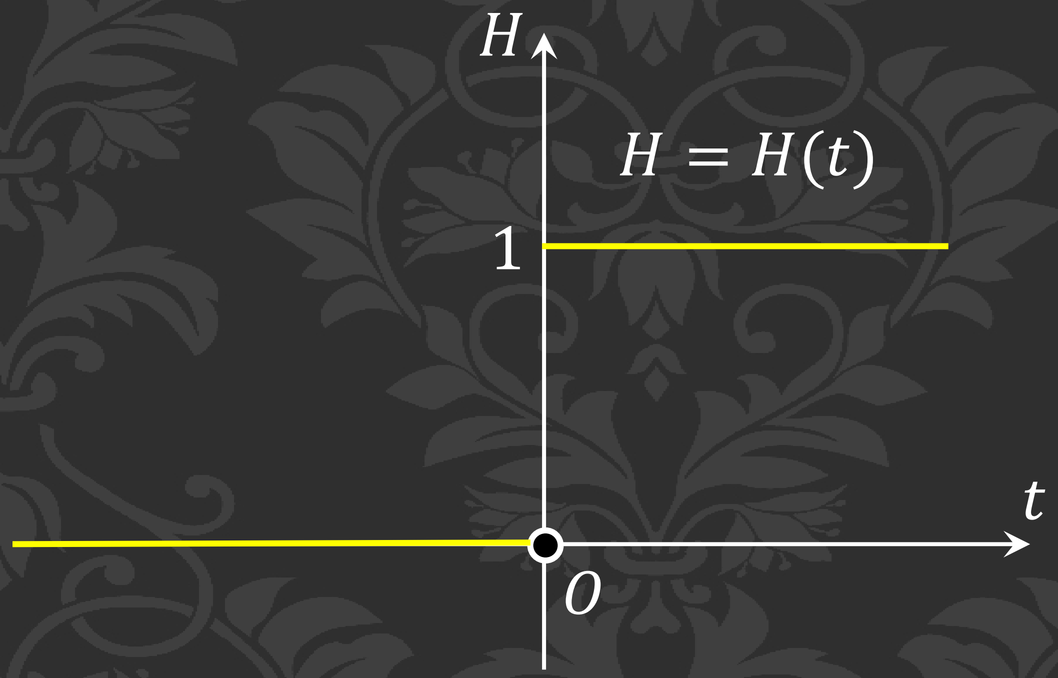
若其中有一个为∞，称x_0为无穷间断点.

若其中有一个为振荡，称x_0为振荡间断点.

例2 指出函数 $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$ 的间断点及其类型.

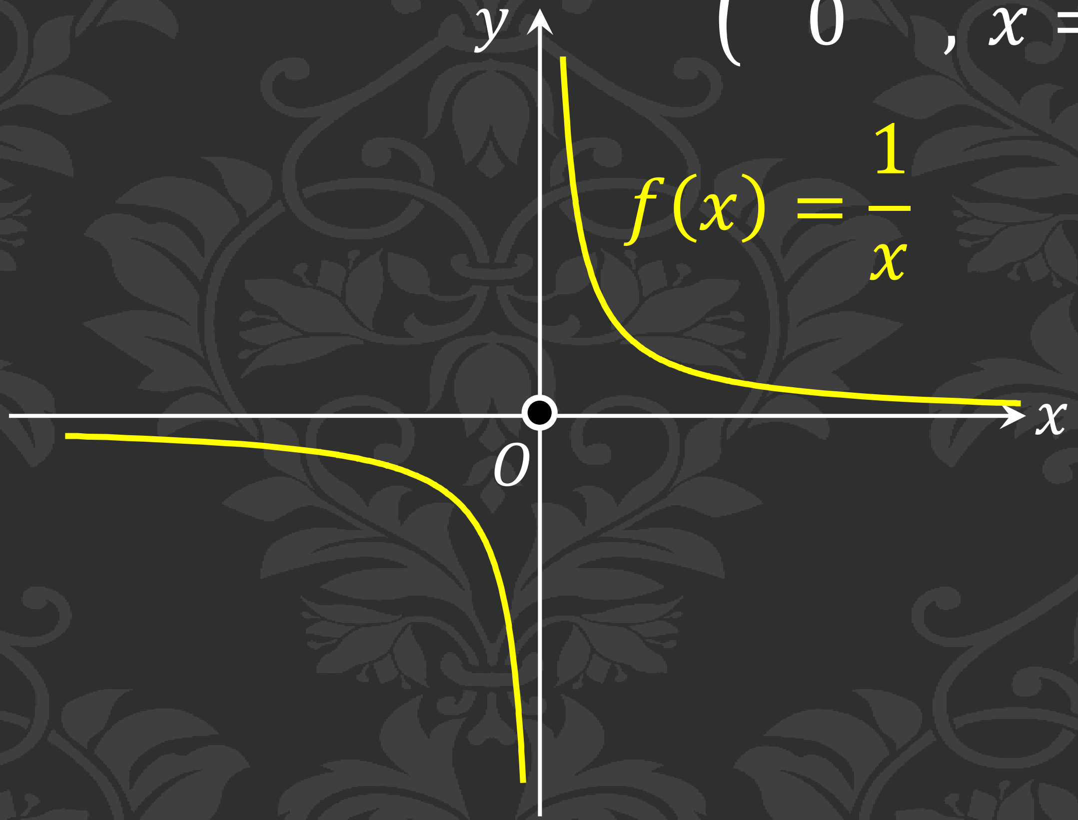
例3 单位阶梯函数(海维赛德函数)$H(t)=\begin{cases}1, & t\geq 0,\\ 0, & t<0\end{cases}$ 的间断点及其类型.



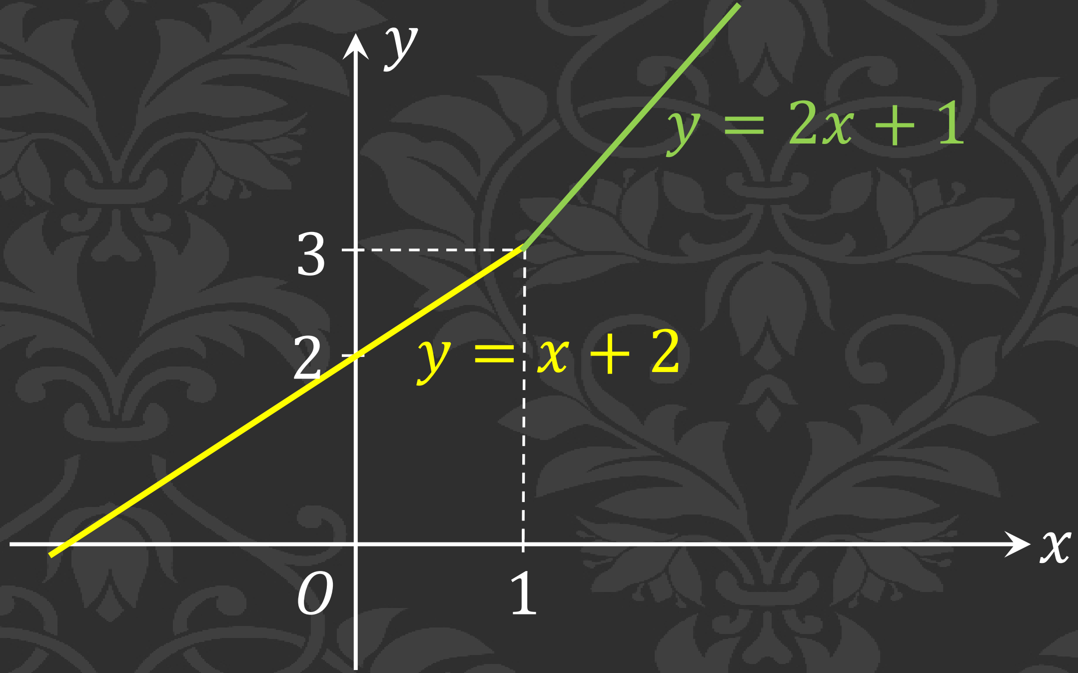


例4 指出函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 的间断点及其类型.

例5 设函数 $f(x)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$ 证明函数在 $x=0$ 处连续.



例5 设$f(x)=\begin{cases} x+a, & x<x_0, \\ 3, & x=x_0, \\ 2x+1, & x>x_0, \end{cases}$ 当常数a和x_0取何值时函数在$(-\infty,\ +\infty)$上连续?



函数在一点连续，在该点邻域内连续吗？

例6 讨论狄立克莱函数的连续性

例7 讨论函数 $f(x)=\begin{cases} x, & x\in Q \\ 0, & x\in Q^c \end{cases}$,在点 $x=0$ 处及其附近点的连续性.

- 连续函数对函数运算的封闭性

有理数 → 四则运算 → 有理数

连续函数 → 四则运算 / 复合运算 / 求逆运算 $\xrightarrow{?}$ 连续函数

连续函数的运算法则

初等函数的连续性

压缩映像原理

定理2(连续函数的四则运算) 设函数 $f(x)$, $g(x)$ 在点 x_0 处连续，则函数

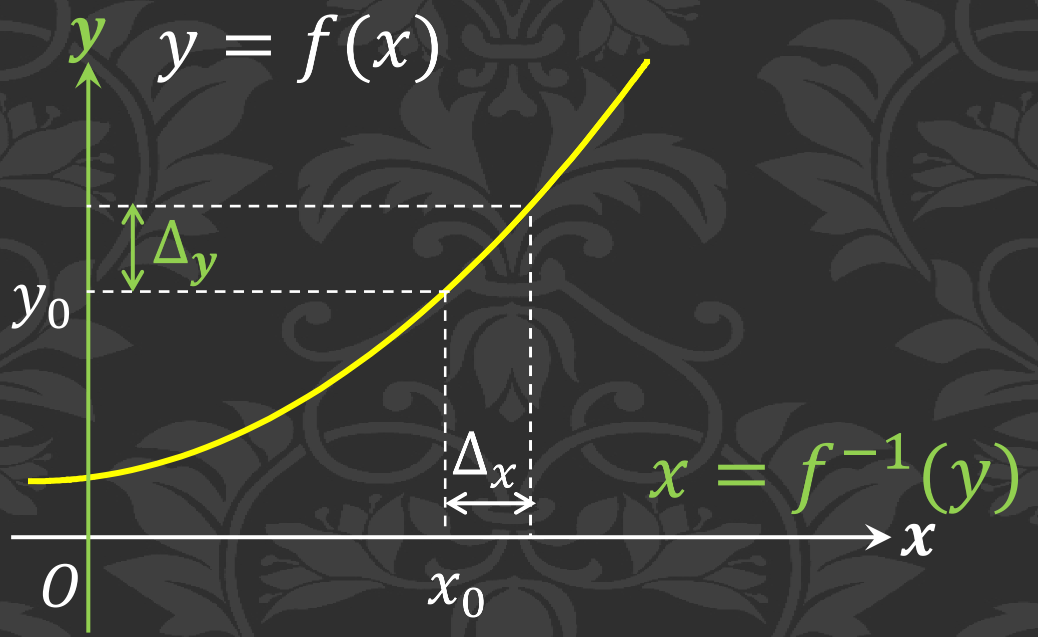
$$f(x) \pm g(x),\ f(x)\cdot g(x),\ \frac{f(x)}{g(x)}\ (g(x_0) \neq 0$$

在点 x_0 处连续. (连续函数对四则运算是封闭的)

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \Rightarrow \tan x 在 x \neq k\pi + \frac{\pi}{2} (k \in \mathbb{Z}) 处连续.$$

$$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x} \Rightarrow \cot x 在 x \neq k\pi\ (k \in \mathbb{Z}) 处连续.$$

定理4(连续函数的求逆运算) 设函数 $y=f(x)$ 在区间$\varDelta_x$上连续且递增(递减)， $\varDelta_y$ 是函数的值域，则 $\varDelta_y$ 也为一区间，且$y=f(x)$的反函数 $x=f^{-1}(y)$在区间$\varDelta_y$上连续且递增(递减).

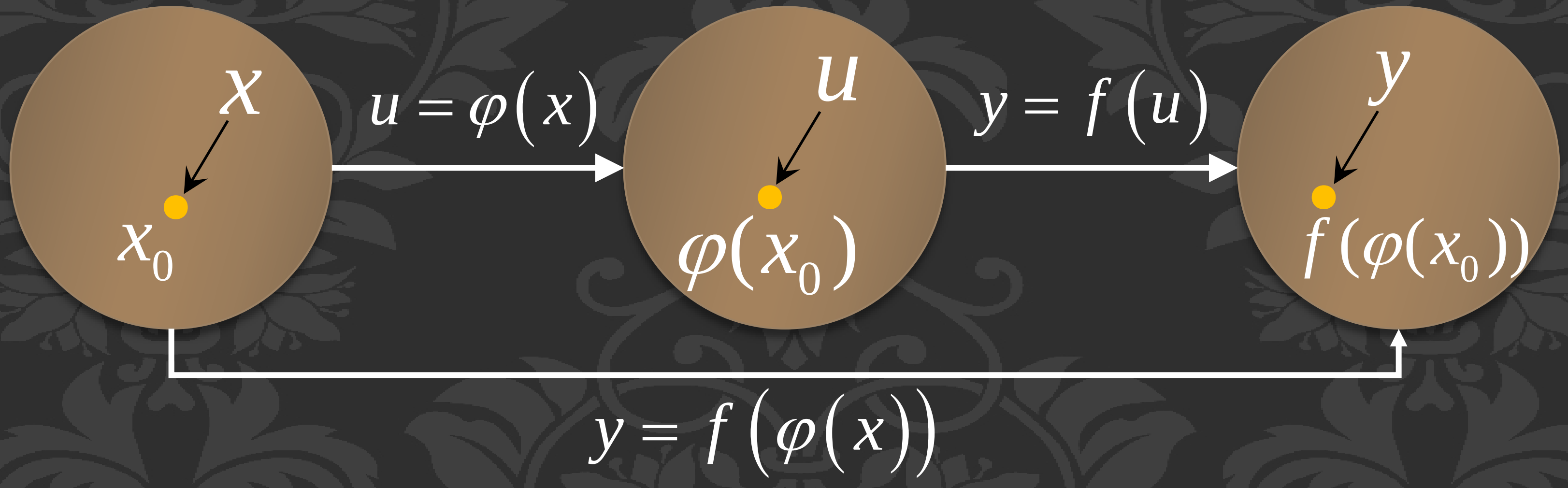


➢ 反三角函数 $y=\arcsin x, y=\arccos x$ 及 $y=\arctan x$ 等在其定义域中连续.

定理3 (连续函数的复合运算) 设复合函数 $y=f[\varphi(x)]$ 有意义，$u_0=\varphi(x_0)$，若 $u=\varphi(x)$ 在 x_0 处连续，$y=f(u)$在u_0处连续，则 $y=f[\varphi(x)]$ 在点 x_0 处连续.

例如，$y=x^a=e^{a\ln x}$ 视为函数$u=a\ln x$和$y=e^u$的复合

$\Rightarrow y=x^a$当$x>0$时连续.



基本初等函数包括下面五种函数:

(1) 幂函数: $y = x^{\mu}$ (μ为常数);

(2) 指数函数: $y = a^{x}$(a为常数,$a > 0, a \neq 1$);

(3) 对数函数: $y = \log_{a} x$(a为常数,$a > 0, a \neq 1$);

(4) 三角函数: $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \tan x$, $y = \sec x$等;

(5) 反三角函数: $y = \arcsin x$, $y = \arctan x$等.

➢ 定理5. 所有基本初等函数在其定义区间上连续.

基本初等函数在其定义域内连续
连续函数经四则运算仍连续
连续函数的复合函数连续

一切初等函数在定义区间内连续

定义域?

- 若初等函数 $f(x)$ 在区间 I 内有定义，则它在该区间内连续.

例如，$y=\sqrt{\sin x-1}$ 的定义域是离散点 $\left\{2k\pi+\frac{\pi}{2}\mid k\in\mathbb{Z}\right\}$

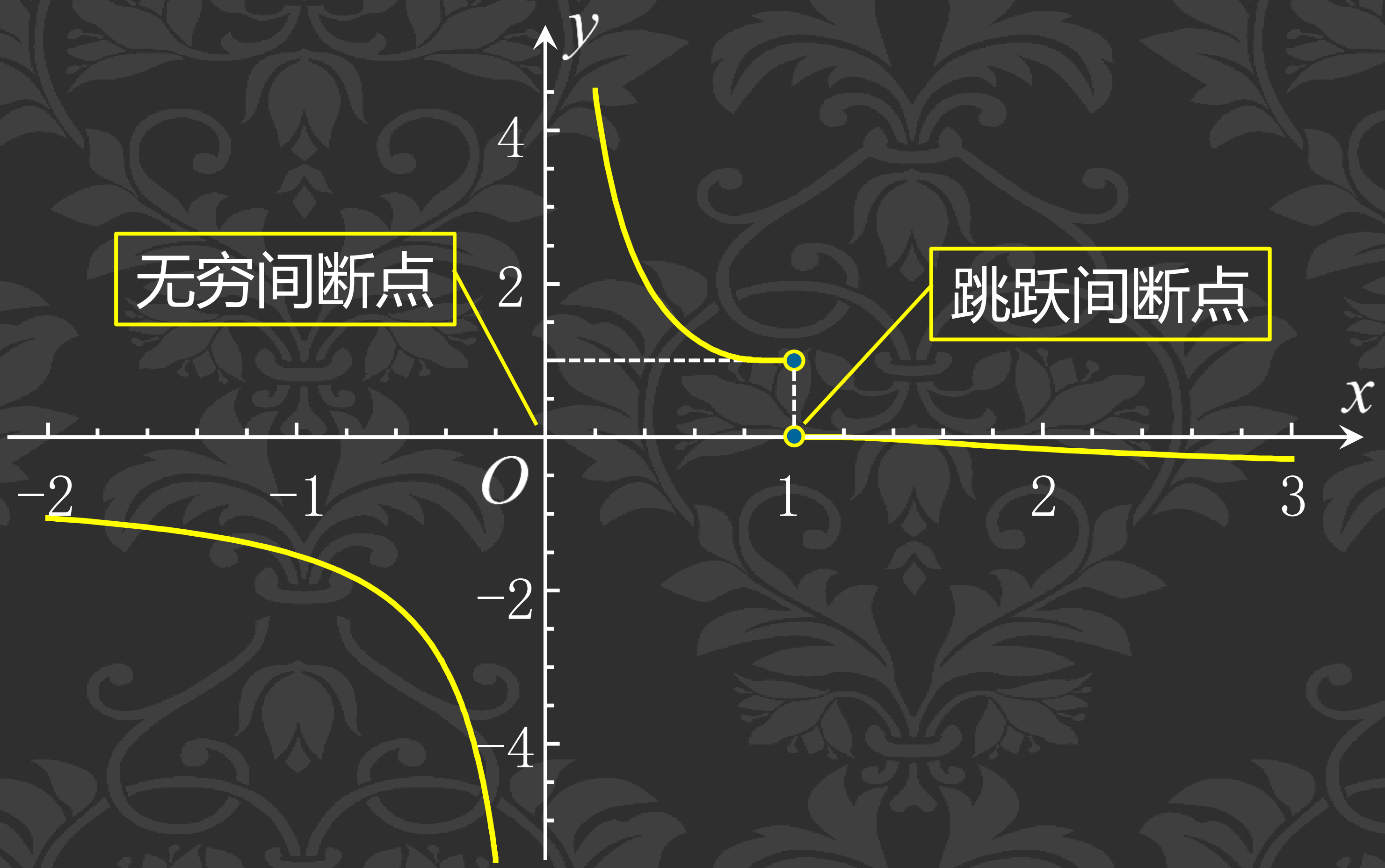
所以该函数没有连续点.

例10 求函数$f(x)=\dfrac{\ln x+\arctan x}{x^2-1}$的连续区间

例11 求函数

$$f(x)=\frac{1}{1-e^{\frac{x}{x-1}}}$$

的连续区间与间断点，并指出间断点的类型.



幂指函数：$y=u(x)^{v(x)}$

若有 $\lim\limits_{x\to x^*} u(x)=A$， $\lim\limits_{x\to x^*} v(x)=B$，且 $A>0$，则有

$$\lim_{x\to x^*} u(x)^{v(x)} = \lim_{x\to x^*} u(x)^{\lim\limits_{x\to x^*} v(x)} = A^B.$$

例13 求函数极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\cos\dfrac{1}{x}\right)^{x^2}$.

例14 求函数极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sin\dfrac{2}{x}+\cos\dfrac{1}{x}\right)^{x}$

例15 求函数极限 $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\tan x}$.

例16 求k,使得等式成立，函数极限 $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\frac{x+1}{x+k}\right)^{x} = \lim\limits_{x \to 0} e^{\frac{\sin 4x}{x}}$

连续函数与数列极限的关系

函数 $f(x)$ 在x_0 连续的充要条件是：$\forall\{x_n\}$: $x_n \to x_0$ $(n \to \infty)$, 均有 $f(x_n) \to f(x_0)$ $(n \to \infty)$.

递推数列极限的存在性

数列$\{x_n\}$：$x_{n+1} = f(x_n)$ $(n = 1,2,\cdots)$ 是否收敛? $\lim\limits_{n\to\infty} x_n =?$

如果极限 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ 存在，且 $f(x)$ 在x_0 处连续，则

$$\lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} f(x_n) \Rightarrow x_0 = f(x_0)$$

定理5 设函数 f：$[a,\ b]\to[a,\ b]$连续，若存在常数$\alpha\in(0,\ 1)$使得对于任何$x,y\in[a,\ b]$，均有

$$|f(x)-f(y)|\le\alpha|x-y|,$$

则一定存在惟一的ξ，使得$f(\xi)=\xi$.

注：（1）称满足 $f(\xi)=\xi$ 的 ξ 为函数 $f(x)$ 的不动点.

（2）称满足定理条件的函数 $f(x)$ 为区间$[a,\ b]$上的压缩映射.

- 定理5称为压缩映像原理或Banach不动点定理.

定理 （柯西收敛原理）数列 $\{a_n\}$收敛的充要条件是： 对于任意正数 ε，存在正整数 N，当 $m, n > N$ 时恒有

$$|a_n - a_m| < \varepsilon$$

- 称满足上述条件的数列 $\{a_n\}$ 为**柯西数列**（**基本数列**）