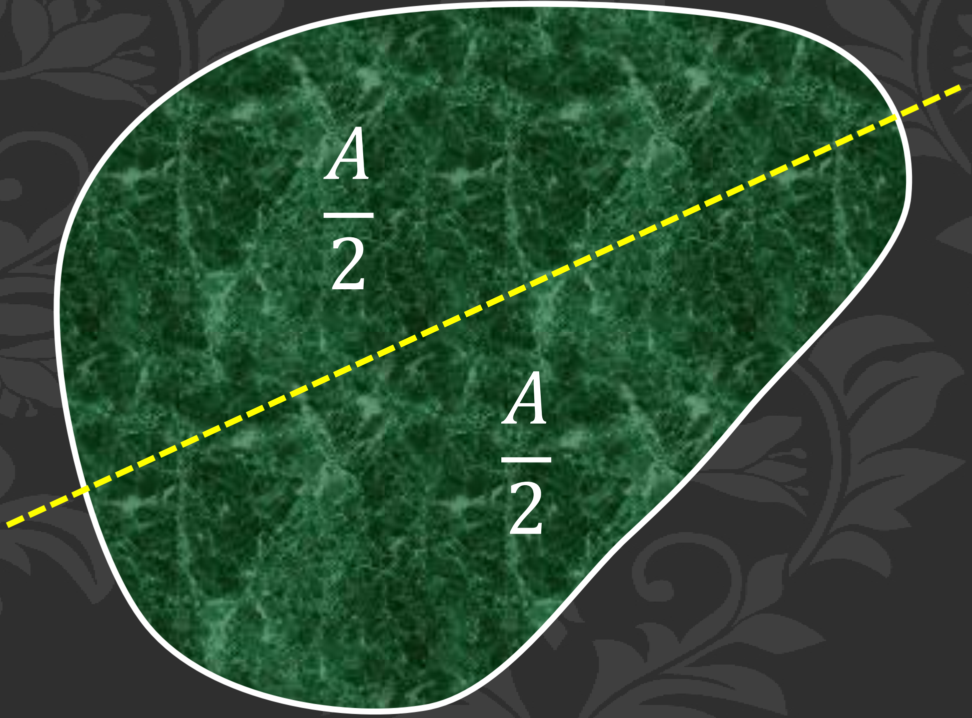
10 闭区间上连续函数性质

从直观上我们知道，任给一块面积为 A 的大理石，一定可以将其用锯子以直线锯口将其分割成面积相等的两块.

如何从数学上证明?



最值定理

零值定理与介值定理

定理应用

最大值与最小值

对于在区间 I 上有定义的函数$f(x)$，如果有$x_0 \in I$，使得对于任一$x \in I$, 都有

$$f(x) \leq f(x_0)\ ,$$

则称$f(x_0)$是函数$f(x)$在区间 I 上的最大值，记作

$$M = \max_{x \in I} f(x)\ .$$

最大值与最小值

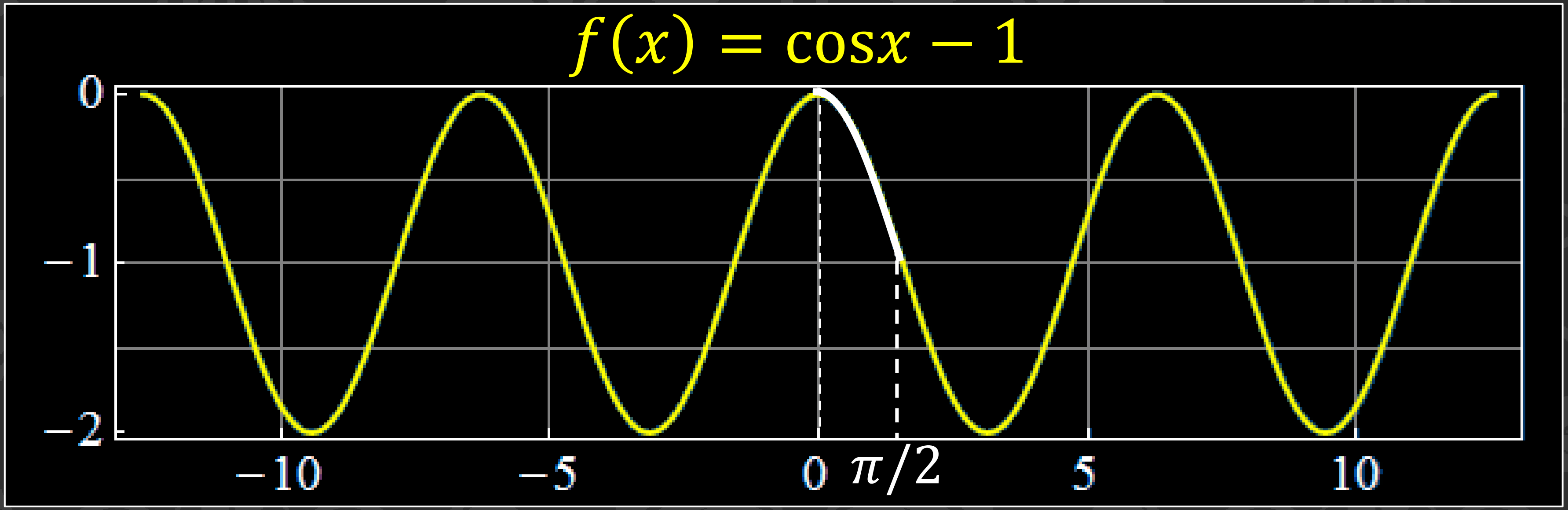
对于在区间 I 上有定义的函数$f(x)$，如果有$x_0 \in I$，使得对于任一$x \in I$, 都有

$$f(x) \geq f(x_0),$$

则称$f(x_0)$是函数$f(x)$在区间 I 上的最小值，记作

$$m = \min_{x \in I} f(x).$$

最大值与最小值



在$(-\infty, +\infty)$上，$f_{max} = 0$，$f_{min} = -2$

在$[0, \pi/2]$上，$f_{max} = 0$，$f_{min} = -1$

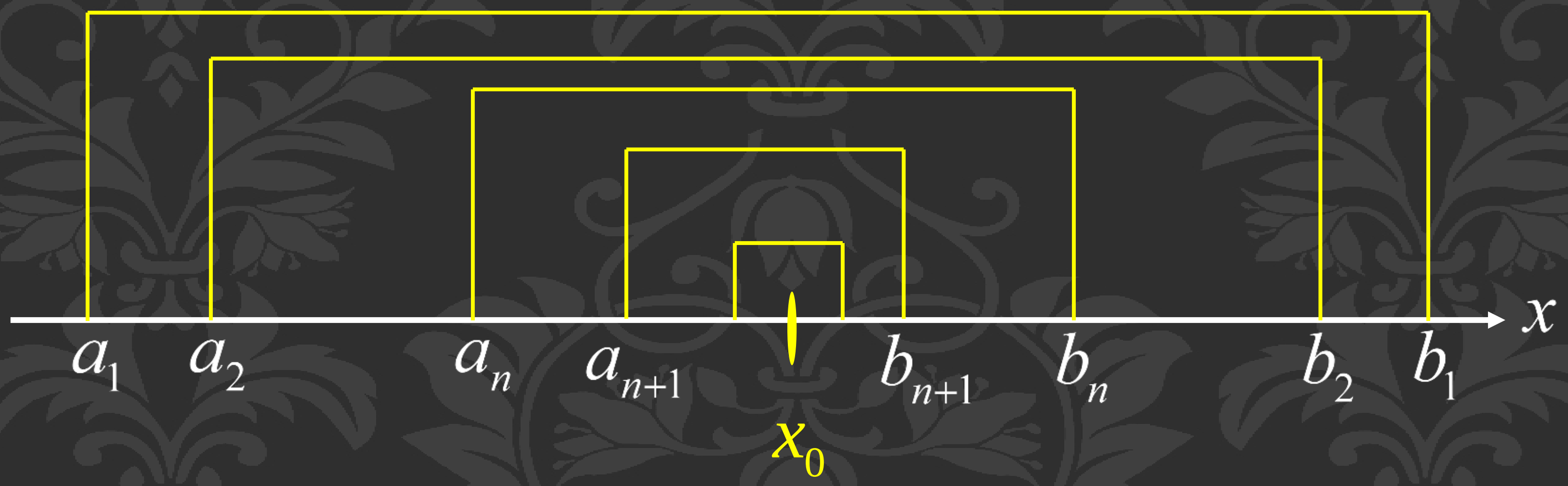
定理（区间套定理）设有区间序列 $\{[a_n,b_n]\}_{n=1}^{\infty}$ 满足

(1) $[a_n,b_n]\supset[a_{n+1},b_{n+1}]\ (n=1,2,\cdots)$ ；

(2) $b_n-a_n\to 0\ (n\to\infty)$ ，

则存在惟一的 $x_0\in[a_n,b_n]\ (n=1,2,\cdots)$ 且

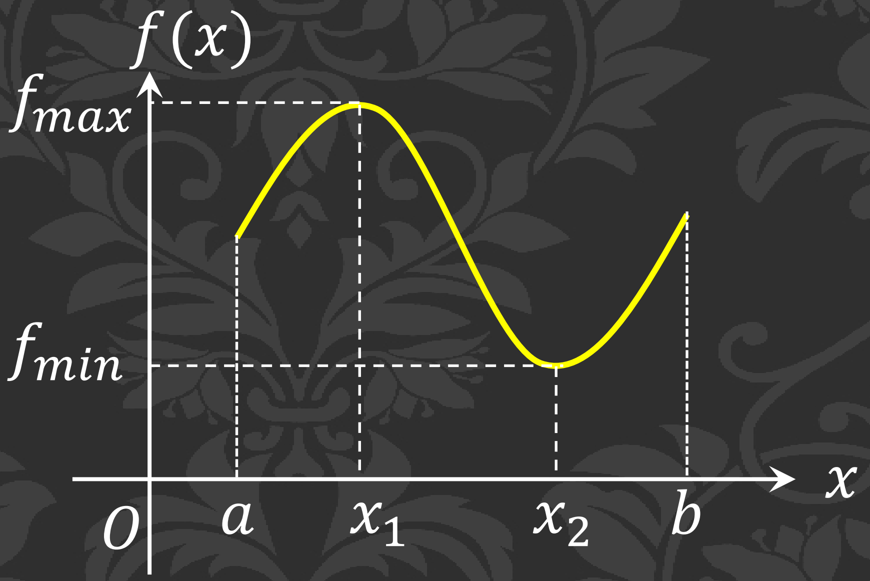
$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}b_n=x_0.$$

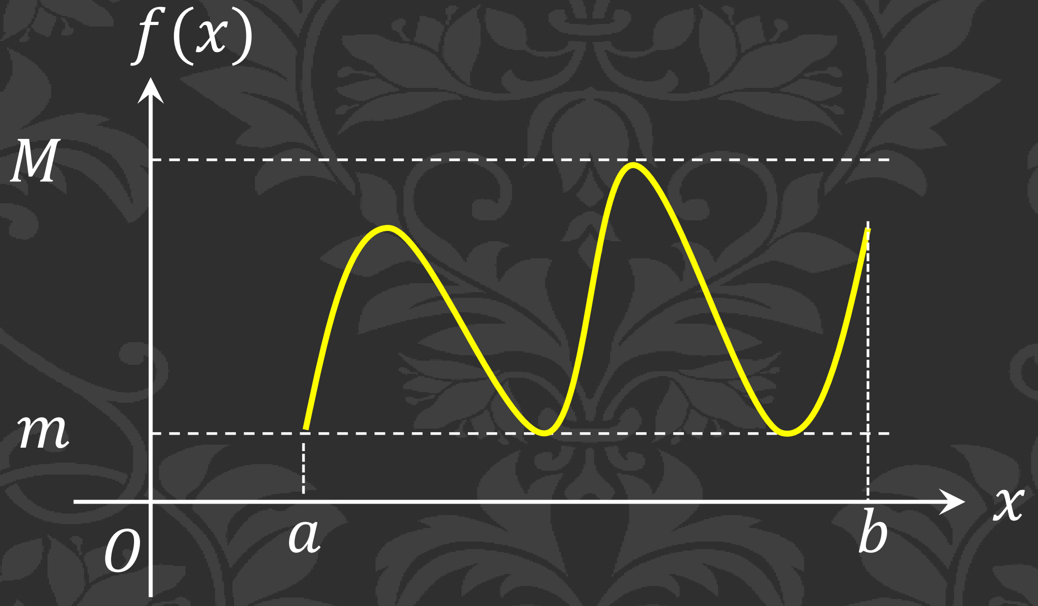


定理1(有界性) 设$f(x)$在 $[a,b]$ 上连续，则$f(x)$在$[a,b]$上有界.

定理2(最值定理) 设$f(x)$在 $[a,b]$ 上连续，则$\exists x_1, x_2 \in [a,b]$，使

$$f(x_1) = \max_{a\le x\le b} f(x),\quad f(x_2) = \min_{a\le x\le b} f(x).$$



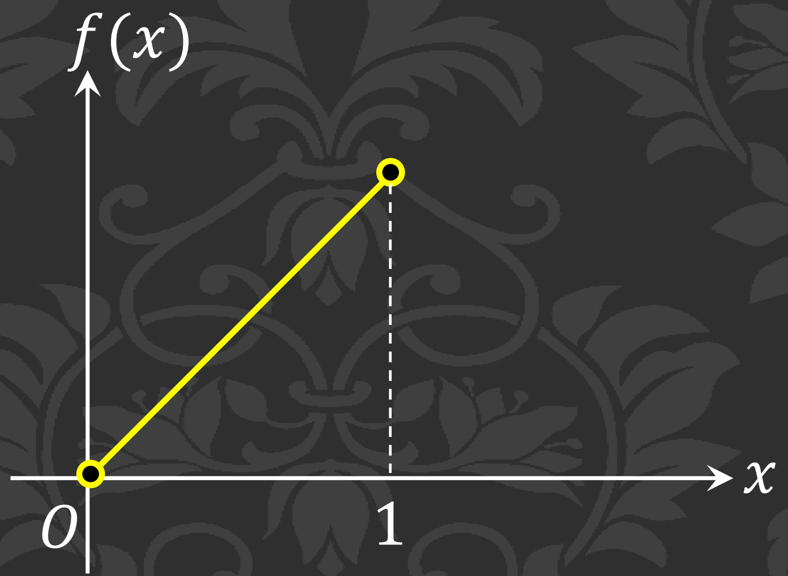


例1 试判断下列函数是否在指定区间内存在最大值和最小值．

$\boxed{(1)\ y=x\ ,\ \ x\in(0,1);}$

(2) $f(x)=\begin{cases}-x+1\ , & 0\le x<1,\\ 1, & x=1,\\ -x+3\ , & 1<x\le 2;\end{cases}$

(3) $f(x)=\sin x, x\in(-1,6)$.

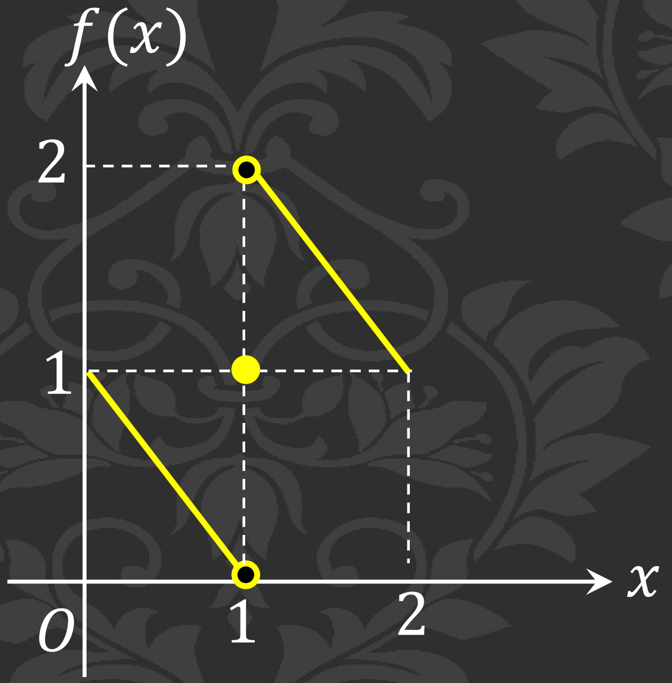


例1 试判断下列函数是否在指定区间内存在最大值和最小值．

(1) $y = x$ ， $x \in (0,1)$;

(2) $f(x) = \begin{cases} -x+1, & 0 \le x < 1, \\ 1, & x = 1, \\ -x+3, & 1 < x \le 2; \end{cases}$

(3) $f(x) = \sin x, x \in (-1,6)$.

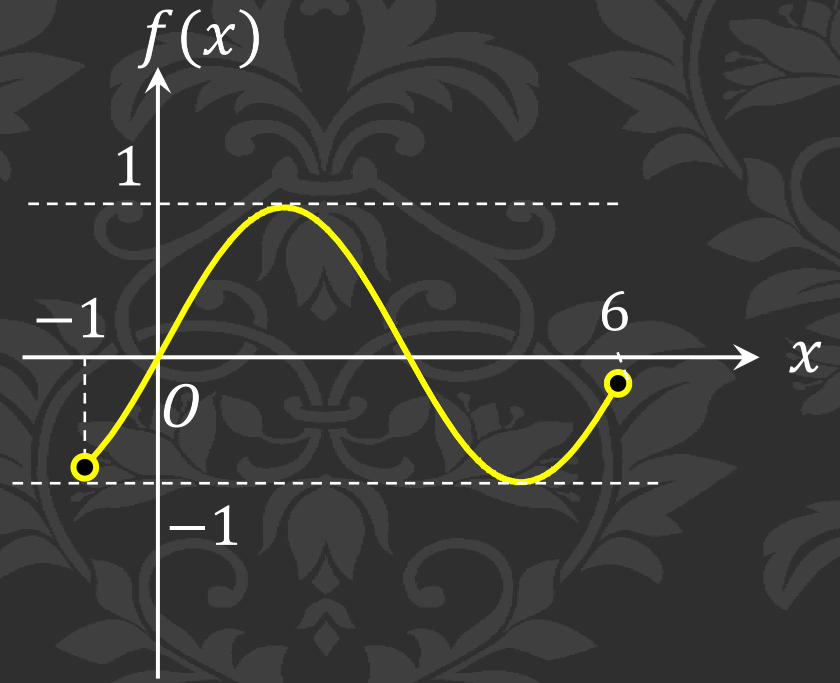


例1 试判断下列函数是否在指定区间内存在最大值和最小值．

(1) $y=x$ ， $x\in(0,1)$;

(2) $f(x)=\begin{cases}-x+1\ , & 0\le x<1,\\ 1, & x=1,\\ -x+3\ , & 1<x\le 2;\end{cases}$

$\boxed{(3)\ f(x)=\sin x, x\in(-1,6).}$



例2 若$f(x)\in C[a,b)$ ，且 $\lim\limits_{x\to b^-}f(x)$ 存在，证明$f(x)$在$[a,b)$上有界.

定理3(零值定理) 设$f(x)$在 $[a,b]$ 上连续, 且$f(a)\cdot f(b)<0$, 则至少存在一点$\xi\in[a,\ b]$，使$f(\xi)=0$.

$$|b_n-a_n|=\frac{1}{2}|b_{n-1}-a_{n-1}|$$

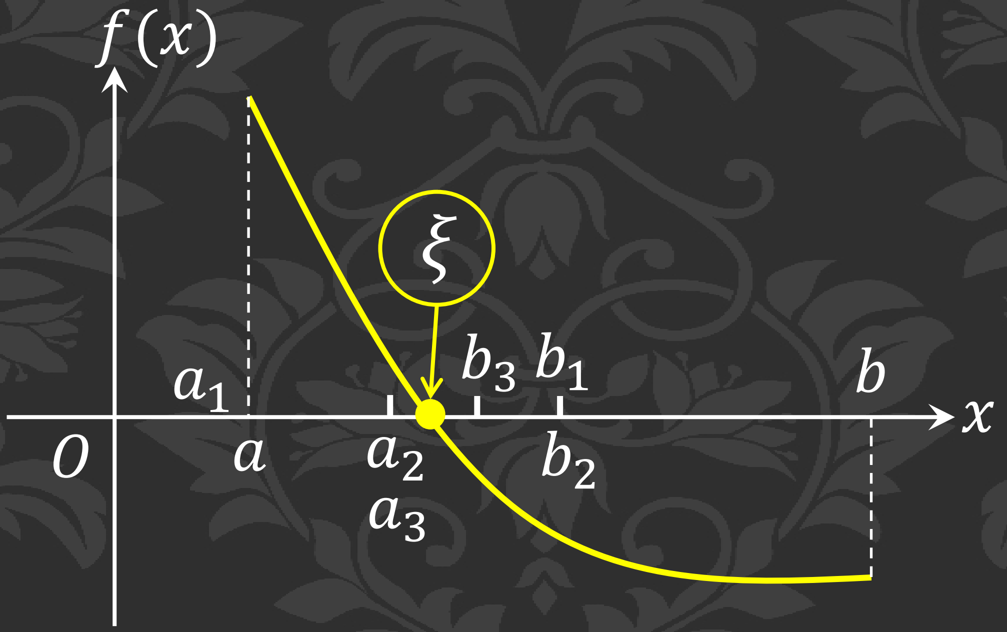
$$=\frac{1}{2^2}|b_{n-2}-a_{n-2}|=\cdots=\frac{1}{2^n}|b-a|$$

由区间套定理，存在

$$\xi\in[a_n,b_n](n=1,2,\ \cdots)$$

$$f(a_n)>0,\ f(b_n)<0$$

$$f(\xi)=\lim_{n\to\infty}f(a_n)=\lim_{n\to\infty}f(b_n)=0$$



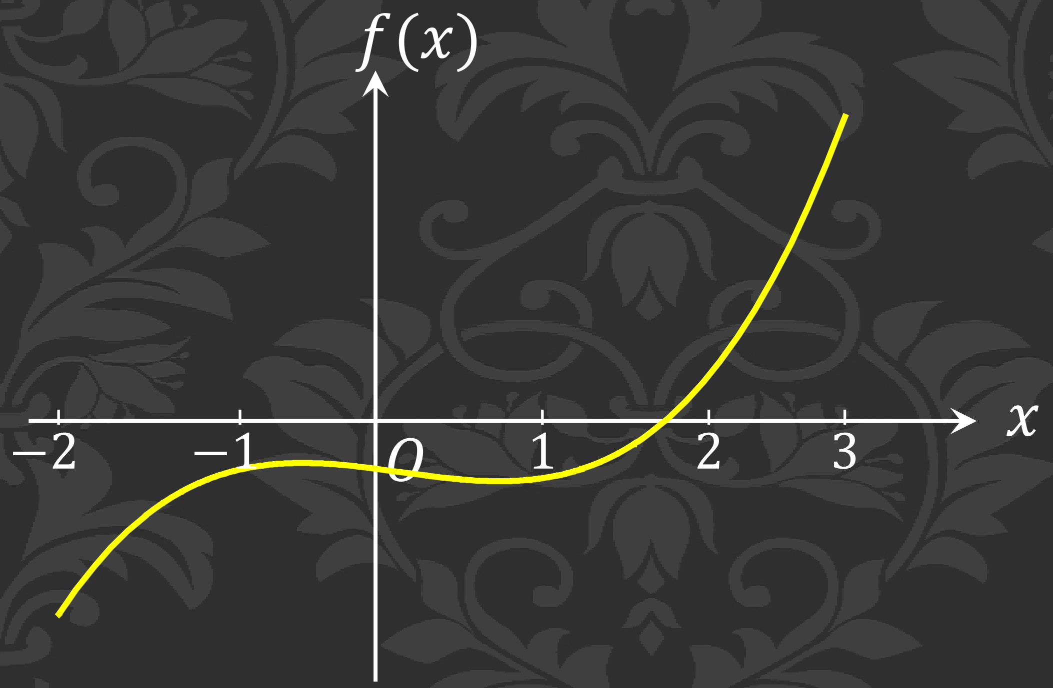
$$[a,b]\to[a_1,b_1]\to[a_2,b_2]\to\cdots$$

$$\to[a_n,b_n]\to\cdots$$

例3 证明方程$x^3 - x - 2 = 0$至少存在一实根.

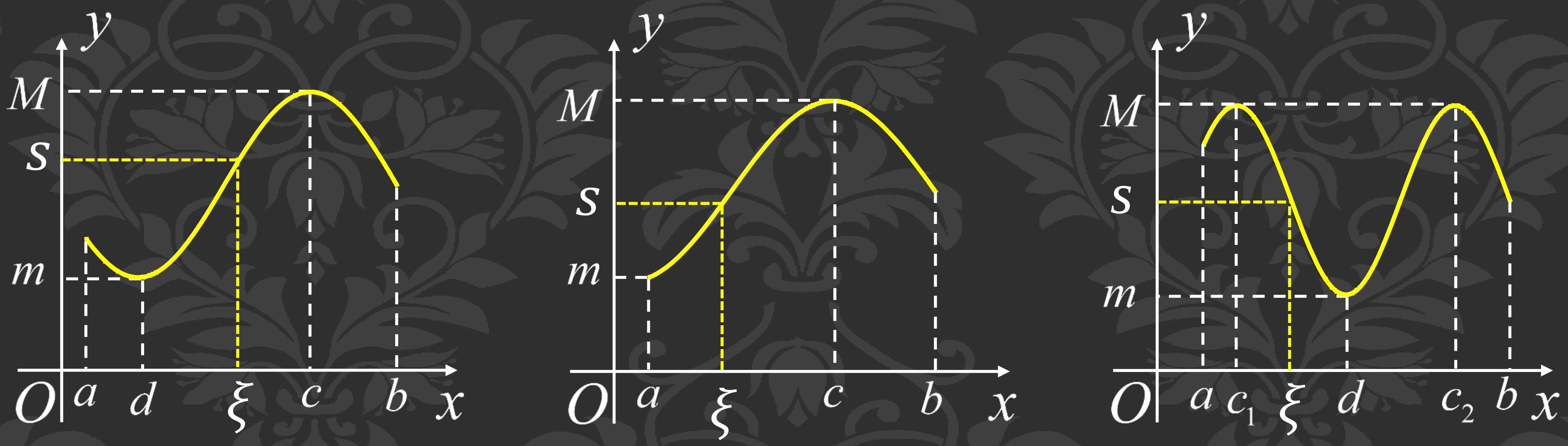
例3可以推广到一般形式：

任何一个奇数次的代数方程一定存在实根.



例4 若$f(x) \in C[0,2a], a > 0$, 若$f(0) = f(2a)$证明$f(x) = f(x + a)$在$[0, a]$内至少存在一实根.

定理4(介值定理) 设$f(x)$在 $[a,b]$ 上连续，m 和 M 分别为 $f(x)$ 在$[a,b]$上的最小值和最大值，则对于任何常数 $s: m \le s \le M$, 至少存在一点$\xi \in [a, b]$，使$f(\xi) = s$.



例5 若$f(x) \in C[a,b], a < x_1 < \cdots < x_n < b$, 证明存在$\xi \in (a,b)$

使得$f(\xi) = \frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n}$

例6 证明方程$x^5 - 3x + 1 = 0$至少有一个根介于1和2之间

例7 是否存在一个实数，比它自身的立方恰好少1？证明你的结论

建立坐标系如图.

则可构造面积函数:

$S(\theta) \in C[\alpha, \beta]$,

且有

$S(\alpha) = 0, S(\beta) = A.$

故由介值定理可知:

$\exists\ \theta_0 \in (\alpha, \beta)$,

使得 $S(\theta_0) = \dfrac{A}{2}$.