【例 6】 指出下列所述数列的收敛性：

(1)设$\{x_n\}$收敛，$\{y_n\}$发散，则$\{x_n+y_n\}$________；

(2)设$\{x_n\}$与$\{y_n\}$均发散，则$\{x_n+y_n\}$________；

(3)设$\{x_n\}$收敛，$\{y_n\}$发散，则$\{x_ny_n\}$________.

解 (1)数列$\{x_n+y_n\}$发散. 事实上，令$z_n=x_n+y_n$，若$\{z_n\}=\{x_n+y_n\}$收敛，则$y_n=z_n-x_n$，由条件知$\{y_n\}$也收敛，这与已知$\{y_n\}$发散矛盾，故$\{x_n+y_n\}$发散.

(2)$\{x_n+y_n\}$收敛性不确定. 比如，令$x_n=n+\frac{1}{n}$，$y_n=-n+\frac{1}{n}$，$z_n=n^2-\frac{1}{n}$，则$x_n+y_n=\frac{2}{n}$，$x_n+z_n=n^2+n$，显然数列$\{x_n\}$，$\{y_n\}$，$\{z_n\}$均发散，但是$\{x_n+y_n\}$收敛，而$\{x_n+z_n\}$发散.

(3)数列$\{x_ny_n\}$的收敛性不确定. 例如，取$\{x_n\}=\frac{1}{n}$，$y_n=n$，$z_n=(-1)^nn$，则数列$\{x_n\}$收敛，$\{y_n\}$与$\{z_n\}$均发散，但$\{x_ny_n\}=1$收敛，而$\{x_nz_n\}=\{(-1)^n\}$发散.

方法总结

由例 6 进一步说明，利用极限的四则运算法则是有条件的，只有当每个变量的极限都存在时才能用法则.

习题 1—5 解答

1. 计算下列极限：

(1)$\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2+5}{x-3}$；　(2)$\lim\limits_{x\to\sqrt{3}}\frac{x^2-3}{x^2+1}$；　(3)$\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-2x+1}{x^2-1}$；

(4)$\lim\limits_{x\to 0}\frac{4x^3-2x^2+x}{3x^2+2x}$；　(5)$\lim\limits_{h\to 0}\frac{(x+h)^2-x^2}{h}$；　(6)$\lim\limits_{x\to\infty}\left(2-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)$；

(7)$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2-1}{2x^2-x-1}$；　(8)$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+x}{x^4-3x^2+1}$；　(9)$\lim\limits_{x\to 4}\frac{x^2-6x+8}{x^2-5x+4}$；

(10)$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(2-\frac{1}{x^2}\right)$；　(11)$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^n}\right)$；　(12)$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+2+3+\cdots+(n-1)}{n^2}$；

(13)$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{5n^3}$；　(14)$\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{3}{1-x^3}\right)$.

解 (1)$\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2+5}{x-3}=\frac{\lim\limits_{x\to 2}(x^2+5)}{\lim\limits_{x\to 2}(x-3)}=\frac{9}{-1}=-9$.

(2)$\lim\limits_{x\to\sqrt{3}}\frac{x^2-3}{x^2+1}=\frac{\lim\limits_{x\to\sqrt{3}}(x^2-3)}{\lim\limits_{x\to\sqrt{3}}(x^2+1)}=\frac{0}{4}=0$.

(3)$\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-2x+1}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{(x-1)^2}{(x-1)(x+1)}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{x-1}{x+1}=\frac{\lim\limits_{x\to 1}(x-1)}{\lim\limits_{x\to 1}(x+1)}=\frac{0}{2}=0$.

(4)$\lim\limits_{x\to 0}\frac{4x^3-2x^2+x}{3x^2+2x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{4x^2-2x+1}{3x+2}=\frac{\lim\limits_{x\to 0}(4x^2-2x+1)}{\lim\limits_{x\to 0}(3x+2)}=\frac{1}{2}$.

(5)$\lim\limits_{h\to 0}\frac{(x+h)^2-x^2}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{h(2x+h)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}(2x+h)=2x$.

(6) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(2-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}2-\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}=2-0+0=2.$

(7) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2-1}{2x^2-x-1}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1-\frac{1}{x^2}}{2-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(2-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)}=\frac{1}{2}.$

(8) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+x}{x^4-3x^2+1}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}}{1-\frac{3}{x^2}+\frac{1}{x^4}}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{3}{x^2}+\frac{1}{x^4}\right)}=\frac{0}{1}=0.$

(9) $\lim\limits_{x\to4}\frac{x^2-6x+8}{x^2-5x+4}=\lim\limits_{x\to4}\frac{(x-4)(x-2)}{(x-4)(x-1)}=\lim\limits_{x\to4}\frac{x-2}{x-1}=\frac{\lim\limits_{x\to4}(x-2)}{\lim\limits_{x\to4}(x-1)}=\frac{2}{3}.$

(10) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(2-\frac{1}{x^2}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)\cdot\lim\limits_{x\to\infty}\left(2-\frac{1}{x^2}\right)=1\cdot2=2.$

(11) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^n}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1-\frac{1}{2^{n+1}}}{1-\frac{1}{2}}=\lim\limits_{n\to\infty}2\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right)=2\left(1-\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2^{n+1}}\right)=2.$

(12) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+2+3+\cdots+(n-1)}{n^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n(n-1)}{2n^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{2}.$

(13) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{5n^3}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{5}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)\left(1+\frac{3}{n}\right)$

$$=\frac{1}{5}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{3}{n}\right)=\frac{1}{5}.$$

(14) $\lim\limits_{x\to1}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{3}{1-x^3}\right)=\lim\limits_{x\to1}\frac{1+x+x^2-3}{1-x^3}=\lim\limits_{x\to1}\frac{(x-1)(x+2)}{(1-x)(1+x+x^2)}=\lim\limits_{x\to1}\frac{-(x+2)}{1+x+x^2}$

$$=-\frac{\lim\limits_{x\to1}(x+2)}{\lim\limits_{x\to1}(1+x+x^2)}=-\frac{3}{3}=-1.$$

2. 计算下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to2}\frac{x^3+2x^2}{(x-2)^2}$；　(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2}{2x+1}$；　(3) $\lim\limits_{x\to\infty}(2x^3-x+1)$.

解　(1) 因为 $\lim\limits_{x\to2}\frac{(x-2)^2}{x^3+2x^2}=\frac{\lim\limits_{x\to2}(x-2)^2}{\lim\limits_{x\to2}(x^3+2x^2)}=0$，所以 $\lim\limits_{x\to2}\frac{x^3+2x^2}{(x-2)^2}=\infty$.

(2) 因为 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x+1}{x^2}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}\right)=0$，所以 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2}{2x+1}=\infty$.

(3) 因为 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{2x^3-x+1}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x^3}}{2-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^3}}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(2-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)}=0$，所以 $\lim\limits_{x\to\infty}(2x^3-x+1)=\infty$.

3. 计算下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to0}x^2\sin\frac{1}{x}$；

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\arctan x}{x}$.

3题视频解析

解　(1) 因为 $x^2\to0\,(x\to0)$，$\left|\sin\frac{1}{x}\right|\leqslant1$，所以 $\lim\limits_{x\to0}x^2\sin\frac{1}{x}=0$.

(2) 因为 $\frac{1}{x}\to0\,(x\to\infty)$，$|\arctan x|<\frac{\pi}{2}$，所以 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\arctan x}{x}=0$.

4. 设$\{a_n\}$，$\{b_n\}$，$\{c_n\}$均为非负数列，且$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$，$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=1$，$\lim\limits_{n\to\infty}c_n=\infty$. 下列陈述中哪些是对的，哪些是错的？如果是对的，说明理由；如果是错的，试给出一个反例.

(1)$a_n<b_n$，$n\in\mathbf{N}^+$；　　(2)$b_n<c_n$，$n\in\mathbf{N}^+$；

(3)$\lim\limits_{x\to\infty}a_nc_n$ 不存在；　　(4)$\lim\limits_{x\to\infty}b_nc_n$ 不存在.

4 题视频解析

解　(1)错. 例如$a_n=\dfrac{1}{n}$，$b_n=\dfrac{n}{n+1}$，$n\in\mathbf{N}^+$，当$n=1$时，$a_1=1>\dfrac{1}{2}=b_1$，故对任意$n\in\mathbf{N}^+$ $a_n<b_n$不成立.

(2)错. 例如$b_n=\dfrac{n}{n+1}$，$c_n=(-1)^nn$，$n\in\mathbf{N}^+$当n为奇数时，$b_n<c_n$不成立.

(3)错，例如$a_n=\dfrac{1}{n^2}$，$c_n=n$，$n\in\mathbf{N}^+$. $\lim\limits_{n\to\infty}a_nc_n=0$.

(4)对. 因为，若$\lim\limits_{n\to\infty}b_nc_n$存在，则$\lim\limits_{n\to\infty}c_n=\lim\limits_{n\to\infty}(b_nc_n)\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{b_n}$也存在，与已知条件矛盾.

5. 下列陈述中哪些是对的，哪些是错的？如果是对的，说明理由；如果是错的，试给出一个反例.

(1)如果$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$存在，但$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$不存在，那么$\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)+g(x)]$不存在；

(2)如果$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$和$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$都不存在，那么$\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)+g(x)]$不存在；

(3)如果$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$存在，但$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$不存在，那么$\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)g(x)]$不存在；

(4)如果$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$和$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$都不存在，那么$\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)g(x)]$不存在.

5 题视频解析

解　(1)对. 因为若$\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)+g(x)]$存在，则$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)+g(x)]-\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$也存在，与已知条件矛盾.

(2)错. 例如$f(x)=\operatorname{sgn}x$，$g(x)=-\operatorname{sgn}x$在$x\to0$时的极限都不存在，但$f(x)+g(x)\equiv0$在$x\to0$时的极限存在.

(3)错. 例如$\lim\limits_{x\to0}x=0$，$\lim\limits_{x\to0}\sin\dfrac{1}{x}$不存在，但$\lim\limits_{x\to0}x\sin\dfrac{1}{x}=0$

(4)错. 例如$f(x)=\begin{cases}x, x\geqslant0,\\1, x<0,\end{cases}$ $g(x)=\begin{cases}1, x\geqslant0,\\x, x<0,\end{cases}$当$x\to0$时的极限都不存在，但$f(x)g(x)\equiv x$当$x\to0$时的极限存在.

6. 设有收敛数列$\{x_n\}$和$\{y_n\}$，若从某项起，有$x_n\geqslant y_n(n\geqslant N, N\in\mathbf{N}_+)$，且$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$，$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=B$，证明：$A\geqslant B$.

证　$\forall\varepsilon>0$，由$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$知，$\exists N_1$，当$n>N_1$时有$A-\varepsilon<x_n<A+\varepsilon$；

由$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=B$知，$\exists N_2$，当$n>N_2$时，有$B-\varepsilon<y_n<B+\varepsilon$，取$N_0=\max\{N,N_1,N_2\}$.

则当$n>N_0$时，有$B-\varepsilon<y_n\leqslant x_n<A+\varepsilon$，

即　$B<A+2\varepsilon$，由$\varepsilon>0$的任意性知$A\geqslant B$.

7. 证明本节定理 3 中的(2).

定理 3　(2)如果$\lim f(x)=A$，$\lim g(x)=B$，那么

$\lim[f(x)g(x)]=\lim f(x)\cdot\lim g(x)=AB$.

证　因$\lim f(x)=A$，$\lim g(x)=B$，由上节定理 1，有$f(x)=A+\alpha$，　$g(x)=B+\beta$，

其中α、β都是无穷小，于是$f(x)g(x)=(A+\alpha)(B+\beta)=AB+(A\beta+B\alpha+\alpha\beta)$，

由本节定理 2 推论 1、2，$A\beta$、$B\alpha$、$\alpha\beta$都是无穷小，再由本节定理 1，$(A\alpha+B\beta+\alpha\beta)$也是无穷小，由上节定理 1，得$\lim f(x)g(x)=AB=\lim f(x)\cdot\lim g(x)$.

7 题视频解析