高等数学

2.4 隐函数与参数方程求导

基础部数学教研室

郑治中

隐函数的导数

参数方程确定函数的导数

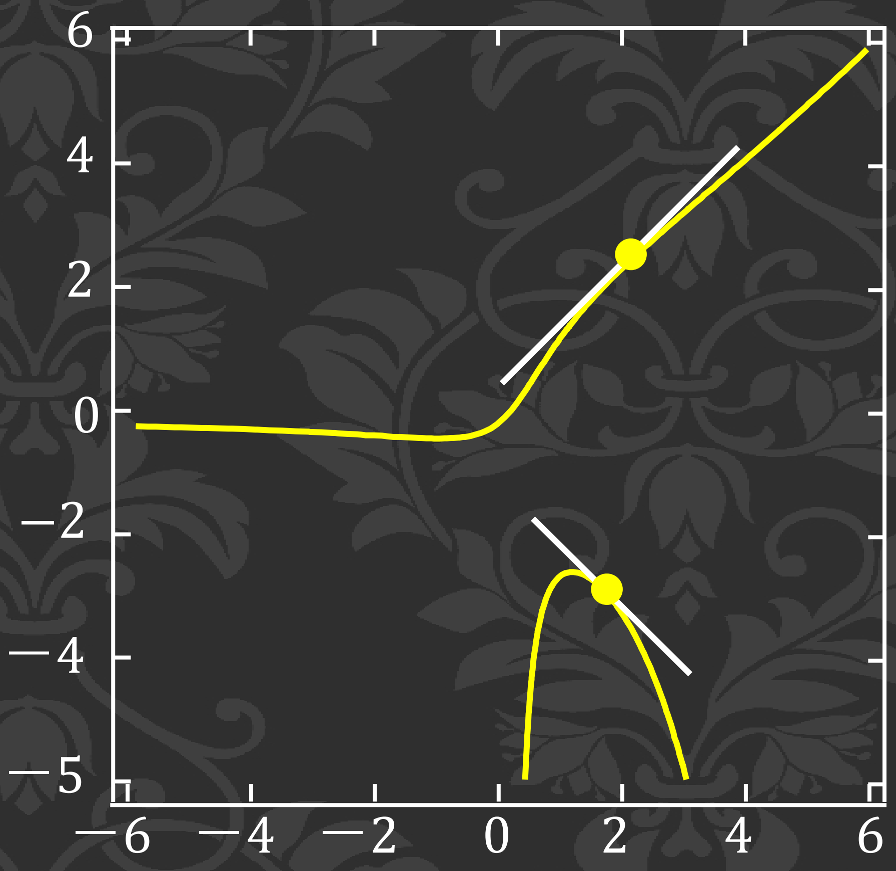
相关变化率

直角坐标方程所确定函数的导数

$$e^y - e^x - xy = 0$$

无法得到函数明确显式表达

$$k = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = ?$$

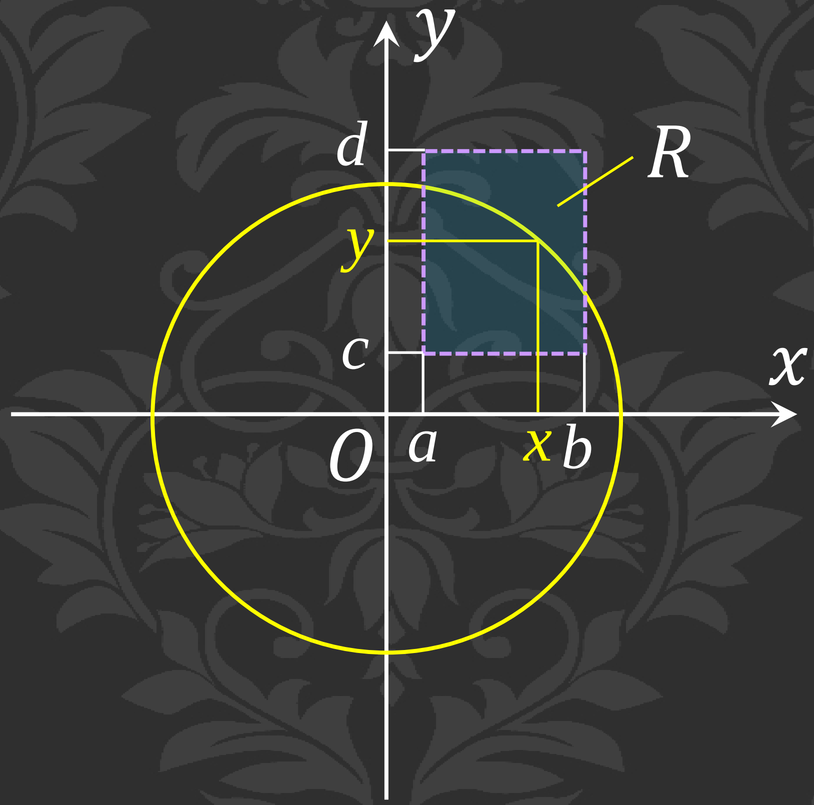


显函数: $y = f(x)$ 或 $x = f(y)$.

隐函数: 对于方程 $F(x,y) = 0$ 及平面上的矩形区域

$R = \{(x,y) | a < x < b, c < y < d\}$,

若当 $x \in (a, b)$ 时，存在惟一的 $y \in (c, d)$，使得$F(x,y) = 0$，则称方程 $F(x,y) = 0$ 在R上确定一个隐函数 $y = y(x)$.



$x^2 + y^2 = a^2$

隐函数求导法

假设由方程$F(x,y)=0$所确定的函数为 $y=y(x)$，则把它回代回方程$F(x,y)=0$中，所得的恒等式为$F[x,y(x)]=0.$

利用复合函数求导法则，对上式两端同时对自变量 x求导，再解出所求导数 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$. 这样求导数的方法称为隐函数求导法.

例1 设$y = y(x)$是由方程 $x^3 + y^3 = 3xy$ 确定的隐函数，且满足

$y\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2}$，求$y = y(x)$对应的曲线在$\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$处的切线方程.

例2 设下列方程y是x的隐函数，求y'

（1） $e^{xy} = 3x^2y$

（2） $\arctan\frac{y}{x} = \ln\sqrt{x^2 + y^2}$

例3 （1）求椭圆 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$在点$M(\sqrt{2},\frac{\sqrt{2}}{2})$处切线方程；

（2）求由 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$确定的隐函数$y=f(x)$的$\frac{d^2y}{dx^2}$.

在求二阶导数时，注意y'表达式中的y仍旧是x的函数，求导时仍需按照复合函数求导法则.

例4 设$y=y(x)$是由方程$xy+e^y=1$所确定的隐函数，求$y''(x)$

对数求导法

例5 求函数 $y = x^x$ 的导数.

对函数 $y = x^x$ 两边取对数，得 $\ln y = x\ln x$

对方程两边同时关于x求导数，得

$$\frac{1}{y}y' = \ln x + 1 \Rightarrow y' = y(\ln x + 1) = x^x(\ln x + 1)\,.$$

例6 求函数 $y = (x^2+1)\sqrt[3]{(x-2)^2(x^2+x)}$ 的导数.

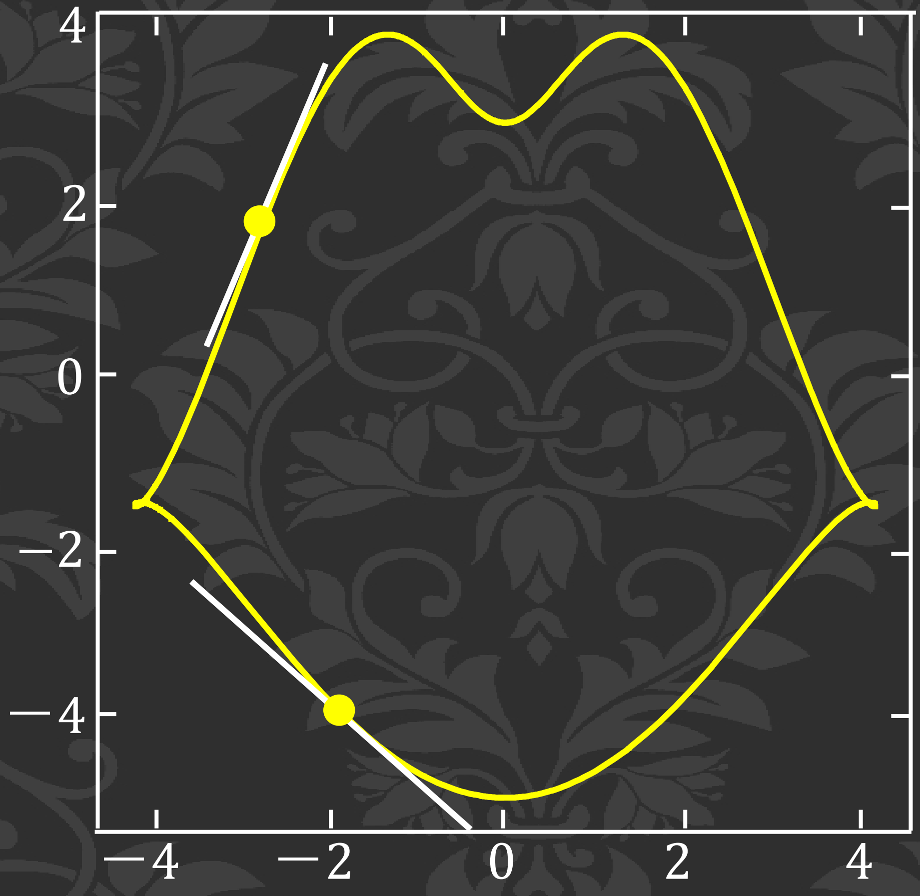
例7 若 $x^y = y^x$,求y'.

例8 求$y = x^{x^x}$, $x > 1$的导数

参数方程所确定函数的导数

$$\begin{cases} x = 4\sin t - \sin 2t, \\ y = 4\cos t - \cos 4t \end{cases} (0 \le t < 2\pi)$$

$$k = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = ?$$



参数方程所确定函数的导数

设函数 $y = y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$ 确定，φ具有单调可导的反函数$t = \varphi^{-1}(x)$，ψ可导且$\varphi' \neq 0$，则

$$y' = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}, \qquad y'' = \frac{\psi''(t)\varphi'(t) - \psi'(t)\varphi''(t)}{[\varphi'(t)]^3}$$

例10 极坐标系下曲线$\rho=\rho(\theta)$的切线斜率，其中假设ρ可导.

例11 设函数$y=y(x)$由参数方程$\begin{cases} x=t-\sin t, \\ y=1-\cos t \end{cases}$确定，求：

1）在$t=\frac{\pi}{2}$时切线方程；2）求$y''(x)$.

例12 求心形线$\rho=a(1-cos\theta)$在$\theta=\frac{\pi}{4}$的点M的切线斜率.

相关变化率

1) 问题中含有多个变量，变量之间有确定的关系，且都是某一变量（如时间t）的函数，这些变量的之间存在一定的关系;

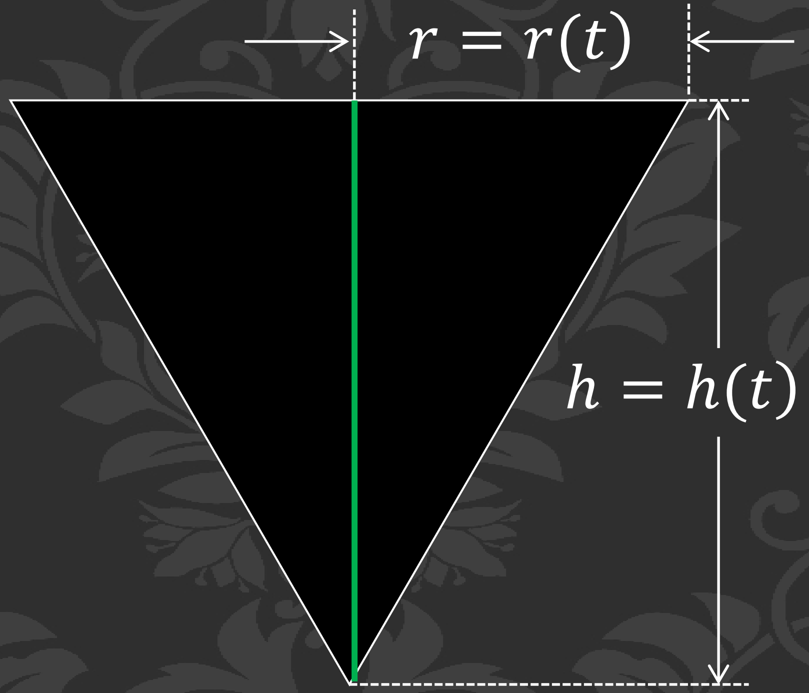
2) 变量中的一部分及其变化率在t时刻已知;

求其余变量在该时刻的变化率.

例13 设直圆锥的底半径r、高h都是时间t的可微函数，则其体积V也是时间 t 的可微函数，试给出变化率 $\frac{dV}{dt}$、$\frac{dr}{dt}$ 和 $\frac{dh}{dt}$ 的关系.

例13解 圆锥的体积为

$$V=\frac{1}{3}\pi r^2 h$$



将等式两边同时关于时间 t 求导数，得到

$$\frac{dV}{dt}=\frac{\pi}{3}\left(2rh\frac{dr}{dt}+r^2\frac{dh}{dt}\right)$$

例14 有一深度为8米、上底直径为8米的正圆锥容器，现向该容器以每分钟4立方米的速度注水．问：当容器中水深为5米时，水面上升的速度为多少？