时，$\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}x}>0$，故当 $x=0,y=0$ 时，ρ 最小.

故所求点为$(0,0)$.

方法总结

把曲率和最值结合起来，是本节一类综合题目. 这就要求对求最值的方法和步骤要牢记于心，能够把知识融汇贯通，灵活运用，只要公式记忆准确，计算仔细认真，一般就能够顺利地解决问题.

【例 3】 （2018 数学二，4 分）曲线 $\begin{cases} x=\cos^3 t, \\ y=\sin^3 t \end{cases}$ 在 $t=\frac{\pi}{4}$ 对应点处的曲率为________.

解 $y'=\frac{(\sin^3 t)'}{(\cos^3 t)'}=\frac{3\sin^2 t\cos t}{3\cos^2 t\cdot(-\sin t)}=-\tan t$，

$$y''=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)\cdot\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=(-\tan t)'\cdot\frac{1}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=-\sec^2 t\cdot\frac{1}{3\cos^2 t\cdot(-\sin t)}=\frac{1}{3\cos^4 t\sin t}.$$

于是 $y'\big|_{t=\frac{\pi}{4}}=-1$，$y''\big|_{t=\frac{\pi}{4}}=\frac{4}{3}\sqrt{2}$，曲率 $K=\frac{|y''|}{[1+(y')^2]^{\frac{3}{2}}}\Bigg|_{t=\frac{\pi}{4}}=\frac{\frac{4}{3}\sqrt{2}}{[1+(-1)^2]^{\frac{3}{2}}}=\frac{2}{3}$.

故应填 $\frac{2}{3}$.

习题 3—7 解答

1. 求椭圆 $4x^2+y^2=4$ 在点$(0,2)$处的曲率.

解 由 $8x+2yy'=0$ 知 $y'=\frac{-4x}{y}$，$y''=\frac{-16}{y^3}$. 故 $y'\big|_{x=0}=0$，$y''\big|_{x=0}=-2$，故在点$(0,2)$处的曲率为

$$K=\frac{|y''|}{[1+y'^2]^{\frac{3}{2}}}\Bigg|_{(0,2)}=2.$$

2. 求曲线 $y=\ln\sec x$ 在点(x,y)处的曲率及曲率半径.

解 $y'=\frac{1}{\sec x}\cdot\sec x\tan x=\tan x$，$y''=\sec^2 x$. 故曲率 $K=\frac{|y''|}{[1+(y')^2]^{\frac{3}{2}}}=\frac{\sec^2 x}{(1+\tan^2 x)^{\frac{3}{2}}}=|\cos x|$，

曲率半径 $\rho=\frac{1}{K}=|\sec x|$.

3. 求抛物线 $y=x^2-4x+3$ 在其顶点处的曲率及曲率半径.

解 抛物线的顶点为$(2,-1)$，$y'=2x-4$，$y''=2$.

抛物线 $y=x^2-4x+3$ 在其顶点处的曲率 $K=\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}\Bigg|_{(2,-1)}=2$，

曲率半径 $\rho=\frac{1}{K}=\frac{1}{2}$.

3 题视频解析

4. 求曲线 $x=a\cos^3 t$，$y=a\sin^3 t$ 在 $t=t_0$ 相应的点处的曲率.

解 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\dfrac{3a\sin^2 t\cos t}{-3a\cos^2 t\sin t}=-\tan t$，$\quad \dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}=\dfrac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\dfrac{-\sec^2 t}{-3a\cos^2 t\sin t}=\dfrac{1}{3a\sin t\cos^4 t}$.

故曲线在 $t=t_0$ 处的曲率为 $K=\dfrac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}\Bigg|_{t=t_0}=\dfrac{\left|\frac{1}{3a\sin t\cos^4 t}\right|}{[1+(-\tan t)^2]^{\frac{3}{2}}}\Bigg|_{t=t_0}=\dfrac{2}{|3a\sin(2t_0)|}$.

5. 对数曲线 $y=\ln x$ 上哪一点处的曲率半径最小？求出该点处的曲率半径.

5 题视频解析

解 $y'=\dfrac{1}{x}$，$y''=-\dfrac{1}{x^2}$. 曲线的曲率 $K=\dfrac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}=\dfrac{\left|-\frac{1}{x^2}\right|}{\left[1+\left(\frac{1}{x}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}=\dfrac{x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}$，

曲率半径为 $\rho=\dfrac{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}{x}$.

又 $\rho'=\dfrac{(1+x^2)^{\frac{1}{2}}(2x^2-1)}{x^2}$.

令 $\rho'=0$ 得驻点 $x_1=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，$x_2=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$（舍去）.

当 $0<x<\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 时，$\rho'<0$，即 ρ 在 $\left(0,\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ 上单调减少；当 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}<x<+\infty$ 时，$\rho'>0$，即 ρ 在 $\left[\dfrac{\sqrt{2}}{2},+\infty\right)$ 上单调增加. 因此在 $x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 处 ρ 取得极小值；驻点唯一，从而 ρ 的极小值就是最小值，因此最小的曲率半径为 $\rho\Big|_{x=\frac{\sqrt{2}}{2}}=\dfrac{\left(1+\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$.

*6. 证明曲线 $y=a\operatorname{ch}\dfrac{x}{a}$ 在点 (x,y) 处的曲率半径为 $\dfrac{y^2}{a}$.

证 $y'=\operatorname{sh}\dfrac{x}{a}$，$y''=\dfrac{1}{a}\operatorname{ch}\dfrac{x}{a}$，曲线在点 (x,y) 处的曲率为 $K=\dfrac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}=\dfrac{\left|\frac{1}{a}\operatorname{ch}\frac{x}{a}\right|}{\left(1+\operatorname{sh}^2\frac{x}{a}\right)^{\frac{3}{2}}}=\dfrac{1}{a\operatorname{ch}^2\frac{x}{a}}$，

曲率半径为 $\rho=\dfrac{1}{K}=a\operatorname{ch}^2\dfrac{x}{a}=\dfrac{y^2}{a}$.

7. 一飞机沿抛物线路径 $y=\dfrac{x^2}{10\,000}$（y 轴铅直向上，单位为 m）做俯冲飞行. 在坐标原点 O 处飞机的速度为 $v=200\text{m/s}$. 飞行员体重 $G=70\text{kg}$. 求飞机俯冲至最低点即原点 O 处时座椅对飞行员的反力.

解 $y'=\dfrac{2x}{10\,000}=\dfrac{x}{5\,000}$，$\quad y''=\dfrac{1}{5\,000}$.

抛物线在坐标原点的曲率半径为 $\rho=\dfrac{1}{K}\Bigg|_{x=0}=\dfrac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{|y''|}\Bigg|_{x=0}=5\,000$.

所以向心力为 $F_1=\dfrac{mv^2}{\rho}=\dfrac{70\times200^2}{5\,000}=560(N)$.

座椅对飞行员的反力 F 等于飞行员的离心力及飞行员本身的重量对座椅的压力之和，因此

$$F=mg+F_1=70\times9.8+560=1\,246(\text{N}).$$

8. 汽车连同载质量共 5t，在抛物线拱桥上行驶，速度为 21.6km/h，桥的跨度为 10m，拱的矢高为 0.25m（图 3－15）. 求汽车越过桥顶时对桥的压力.

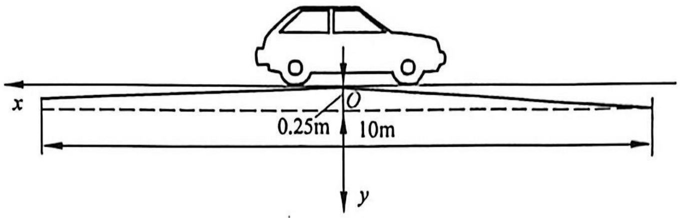

图 3—15

解 建立直角坐标系如图 3—15 所示，设抛物线拱桥方程为 $y=ax^2$.

由于抛物线过点(5,0.25)，代入方程得 $a=\left.\dfrac{y}{x^2}\right|_{(5,0.25)}=\dfrac{0.25}{25}=0.01$.

$$y'=2ax,\qquad y''=2a,$$

因此 $\left.y'\right|_{x=0}=0$, $\qquad \left.y''\right|_{x=0}=0.02$,

$$\left.\rho\right|_{x=0}=\left.\frac{1}{K}\right|_{x=0}=\left.\frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{|y''|}\right|_{x=0}=50.$$

汽车越过桥顶时对桥的压力为

$$F=mg-\frac{mv^2}{\rho}=5\times10^3\times9.8-\frac{5\times10^3\times\left(\dfrac{21.6\times10^3}{3\ 600}\right)^2}{50}=45\ 400(\text{N}).$$

9. 设 R 为抛物线 $y=x^2$ 上任一点 $M(x,y)$ 处的曲率半径，s 为该曲线上某一点 M_0 到点 M 的弧长，证明：$3R\dfrac{\mathrm{d}^2R}{\mathrm{d}s^2}-\left(\dfrac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}s}\right)^2-9=0$.

9 题视频解析

证 $y'=2x, y''=2$. 所以 $R=\dfrac{(1+(y')^2)^{\frac{3}{2}}}{y''}=\dfrac{(1+4x^2)^{\frac{3}{2}}}{2}$.

设 $M_0(x_0,y_0)$，则 $s=\displaystyle\int_{x_0}^{x}\sqrt{1+4t^2}\,\mathrm{d}t$.

所以 $\dfrac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}s}=\dfrac{\dfrac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}x}}{\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}x}}=\dfrac{\dfrac{\dfrac{3}{2}(1+4x^2)^{\frac{1}{2}}\times8x}{2}}{\sqrt{1+4x^2}}=6x$. $\quad \dfrac{\mathrm{d}R^2}{\mathrm{d}s^2}=\dfrac{\dfrac{\mathrm{d}\left(\dfrac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}s}\right)}{\mathrm{d}x}}{\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}x}}=\dfrac{6}{\sqrt{1+4x^2}}$.

所以 $3R\dfrac{\mathrm{d}^2R}{\mathrm{d}s^2}-\left(\dfrac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}s}\right)^2-9=\dfrac{3}{2}(1+4x^2)^{\frac{3}{2}}\cdot\dfrac{6}{\sqrt{1+4x^2}}-(6x)^2-9$

$=9(1+4x^2)-36x^2-9=0$.

* 10. 求曲线 $y=\tan x$ 在点 $\left(\dfrac{\pi}{4},1\right)$ 处的曲率圆方程.

解 $y'=\sec^2x$, $y''=2\sec^2x\tan x$，故 $\left.y'\right|_{x=\frac{\pi}{4}}=2$, $\left.y''\right|_{x=\frac{\pi}{4}}=4$.

设曲线在点 $\left(\dfrac{\pi}{4},1\right)$ 处的曲率中心的坐标为 (α,β)，则

$$\alpha=\left[x-\frac{y'(1+y'^2)}{y''}\right]_{\left(\frac{\pi}{4},1\right)}=\frac{\pi}{4}-\frac{2(1+4)}{4}=\frac{\pi-10}{4},$$

$$\beta=\left[y+\frac{1+y'^2}{y''}\right]_{\left(\frac{\pi}{4},1\right)}=1+\frac{1+4}{4}=\frac{9}{4}.$$

曲率半径 $\rho=\left.\dfrac{1}{K}\right|_{x=\frac{\pi}{4}}=\left.\dfrac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{|y''|}\right|_{x=\frac{\pi}{4}}=\dfrac{5^{\frac{3}{2}}}{4}$,

因此所求的曲率圆方程为 $\left(\xi-\dfrac{\pi-10}{4}\right)^2+\left(\eta-\dfrac{9}{4}\right)^2=\dfrac{125}{16}$.

* 11. 求抛物线 $y^2=2px$ 的渐屈线方程.

解 由 $2yy'=2p$，及 $y'^2+yy''=0$ 知 $y'=\dfrac{p}{y}$，$y''=-\dfrac{p^2}{y^3}$.

故抛物线 $y^2=2px$ 的渐屈线方程为

$$\begin{cases}\alpha=x-\dfrac{y'(1+y'^2)}{y''}=x-\dfrac{\dfrac{p}{y}\left[1+\left(\dfrac{p}{y}\right)^2\right]}{-\dfrac{p^2}{y^3}}=\dfrac{3y^2}{2p}+p,\\[2ex] \beta=y+\dfrac{1+y'^2}{y''}=y+\dfrac{1+\left(\dfrac{p}{y}\right)^2}{-\dfrac{p^2}{y^3}}=-\dfrac{y^3}{p^2},\end{cases}$$

其中 y 为参数. 或消去参数 y 得渐屈线方程为 $27p\beta^2=8(\alpha-p)^3$.

第八节　方程的近似解

一、主要内容归纳

1. 利用二分法求方程近似解的步骤

设 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，$f(a)f(b)<0$，且方程 $f(x)=0$ 在 (a,b) 内仅有一个实根 ξ，于是 $[a,b]$ 即是这个根的一个隔离区间.

(1) 取 $[a,b]$ 的中点 $\xi_1=\dfrac{a+b}{2}$，计算 $f(\xi_1)$. 如果 $f(\xi_1)=0$，那么 $\xi=\xi_1$；

(2) 如果 $f(\xi_1)$ 与 $f(a)$ 同号，那么取 $a_1=\xi_1$，$b_1=b$，由 $f(a)f(b)<0$，即知 $a_1<\xi<b_1$，且

$$b_1-a_1=\frac{1}{2}(b-a);$$

如果 $f(\xi_1)$ 与 $f(b)$ 同号，那么取 $a_1=a$，$b_1=\xi_1$，也有 $a_1<\xi<b_1$，且 $b_1-a_1=\dfrac{1}{2}(b-a)$；

总之，当 $\xi\neq\xi_1$ 时，可求得 $a_1<\xi<b_1$，且 $b_1-a_1=\dfrac{1}{2}(b-a)$