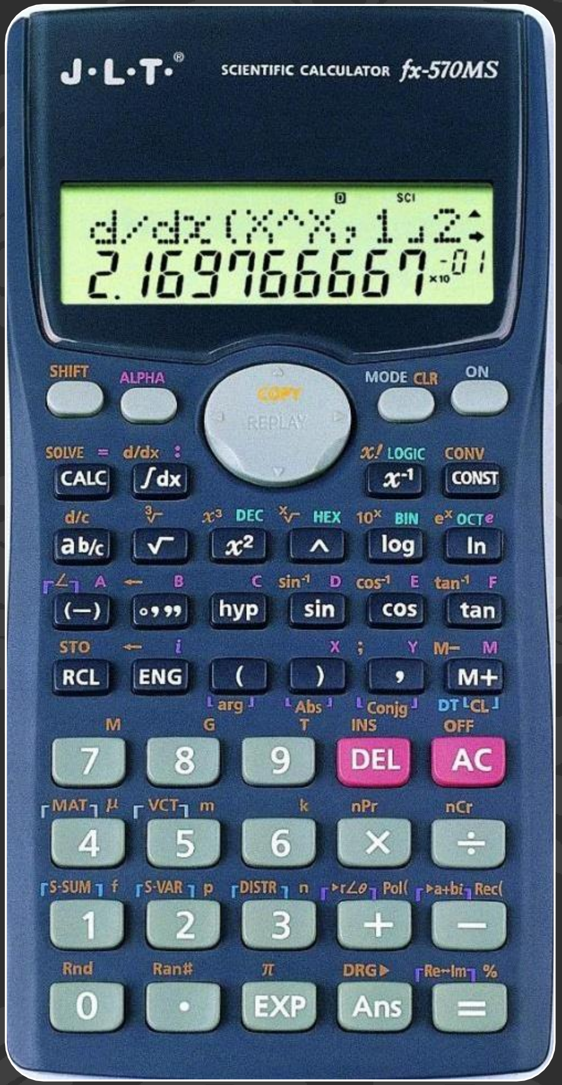
高等数学

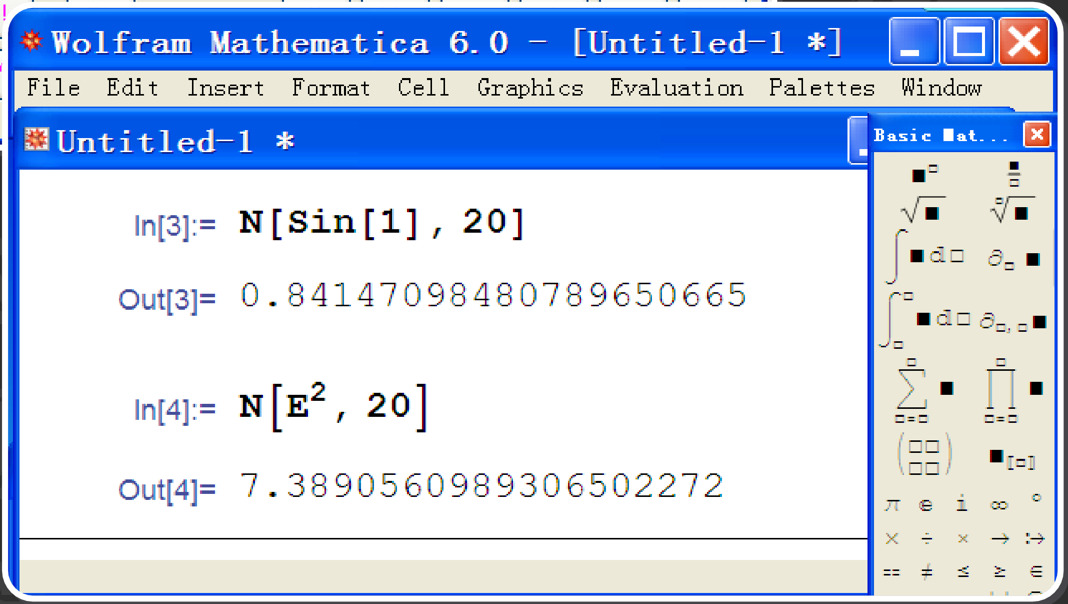
3.3 泰勒公式

基础部数学教研室

郑治中


J·L·T·
SCIENTIFIC CALCULATOR fx-570MS
d/dx(X^X,1,2
2.169766667


计算器
编辑(E) 查看(V) 帮助(H)
0.087155742747658173558064270837474
十六进制 十进制 八进制 二进制
角度 弧度 梯度
Inv Hyp
Backspace CE C


Wolfram Mathematica 6.0 - [Untitled-1 *]
File Edit Insert Format Cell Graphics Evaluation Palettes Window
Untitled-1 *
In[3]:= N[Sin[1], 20]
Out[3]= 0.84147098480789650665
In[4]:= N[E^2, 20]
Out[4]= 7.3890560989306502272

"以直代曲" 在近似计算中的应用

$$f(x_0+\Delta x)\approx f(x_0)+f'(x_0)\Delta x$$

$$e^x\approx 1+x,\qquad \ln(1+x)\approx x$$

$$f(x)=\sqrt{x}=\sqrt{x_0+\Delta x}\approx\sqrt{x_0}+\frac{1}{2\sqrt{x_0}}\cdot\Delta x$$

$$\sqrt{1.05}=\sqrt{1+0.05}\approx 1+\frac{1}{2}\cdot 0.05=1.025$$

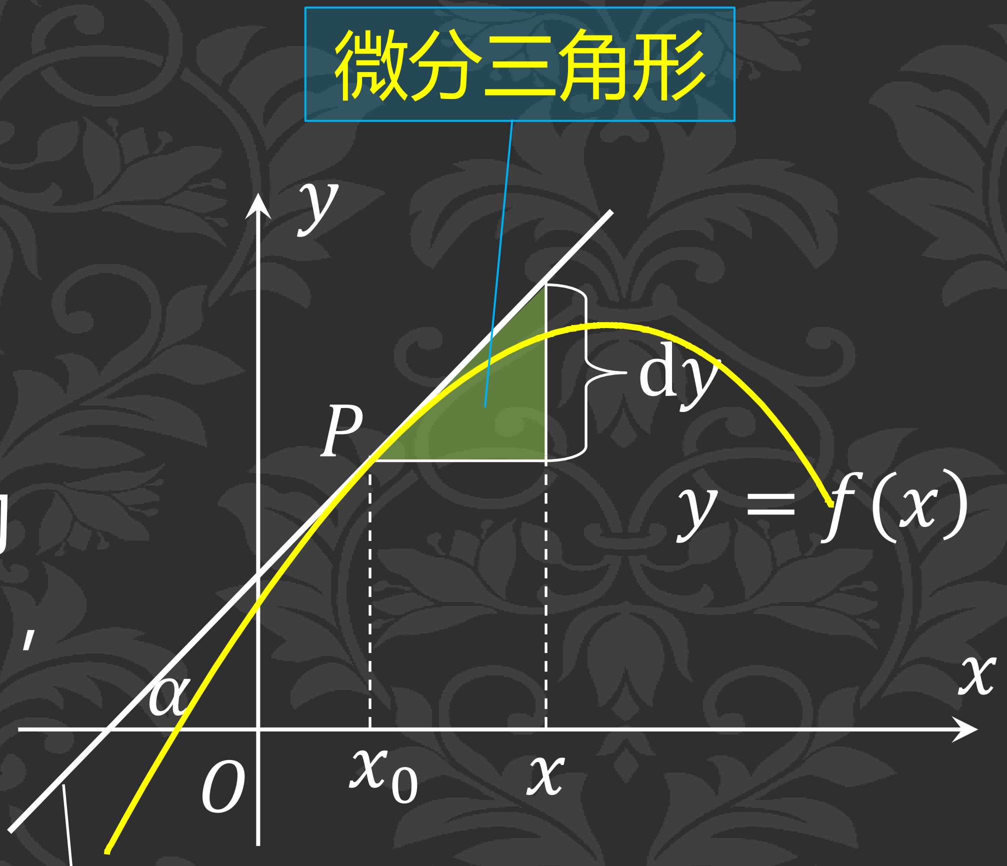
$$\sqrt{1.05}=1.02469507\cdots$$

可微函数可以由线性函数逼近(局部线性化)，即

$$f(x) \approx f(x_0) + f(x_0)(x - x_0)$$

几何含义：
用曲线在点$P(x_0, f(x_0))$ 处的切线来近似代替曲线$y = f(x)$ ，即所谓的“以直代曲”.

- 精度不高
- 精度不能控制



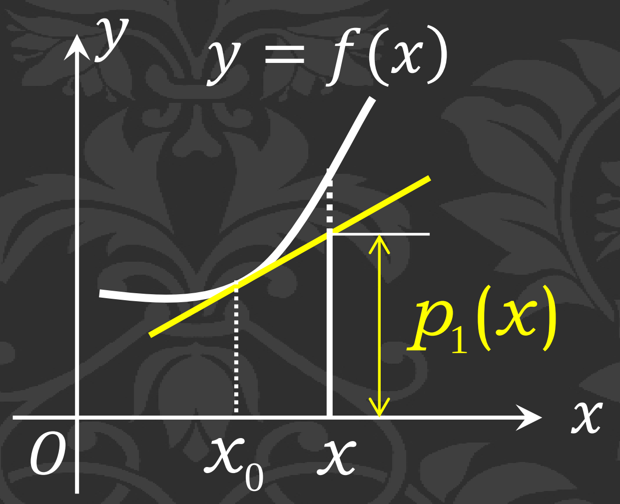
$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

函数的多项式逼近

几个函数的麦克劳林多项式

$f(x)$与$p_1(x)$的共同特征：

- $p_1(x_0) = f(x_0)$
- $p'_1(x_0) = f'(x_0)$



考虑在点x_0 的某邻域内，用一个n次多项式 $p_n(x)$来逼近函数$f(x)$，要求：

$$p_n(x_0) = f(x_0), p_n'(x_0) = f'(x_0), \cdots, p_n^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(x_0),$$

试求满足条件的$p_n(x)$.

- 函数$f(x)$在点 x_0处的 n 阶泰勒多项式

$$p_n(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

函数 $f(x)$在点 x_0处的泰勒系数

特别地，若 $x_0=0$，则称

$$p_n(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k$$

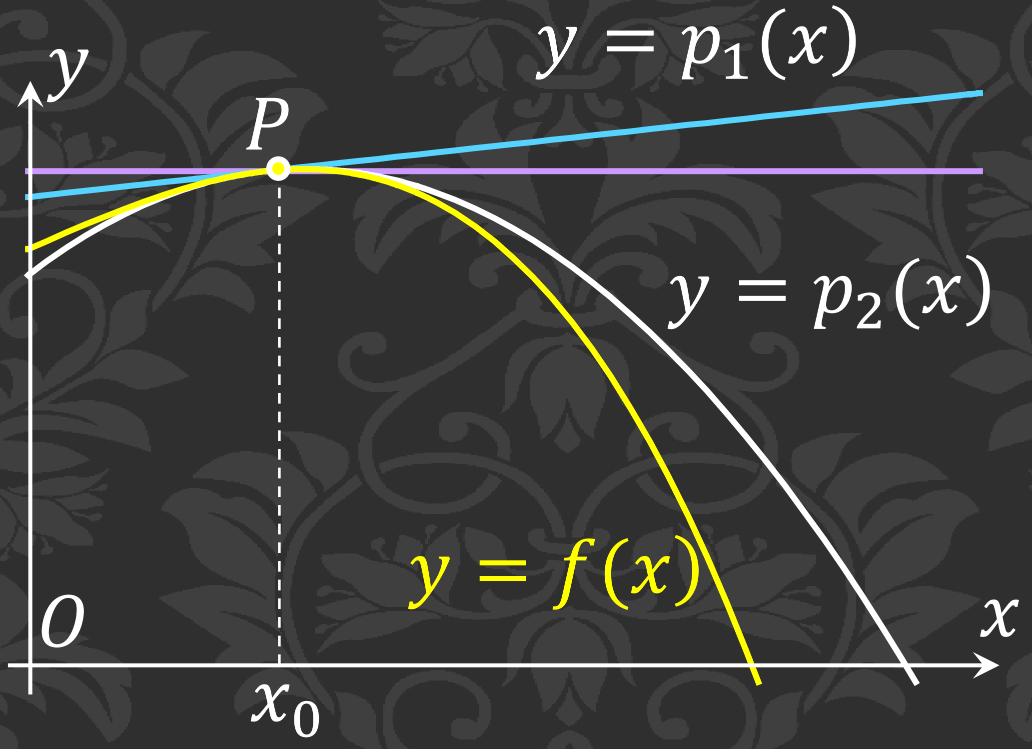
为函数 $f(x)$的 n 阶麦克劳林多项式.

函数$f(x)$在点 x_0处的 0,1,2 阶泰勒多项式

$$p_0(x) = f(x_0)$$

$$p_1(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

$$p_2(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2$$



$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - p_1(x)}{(x - x_0)^1} = 0 \Longleftrightarrow f(x) = p_1(x) + o((x - x_0)\ \ )$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - p_2(x)}{(x - x_0)^2} = 0 \Longleftrightarrow f(x) = p_2(x) + o((x - x_0)^2)$$

泰勒余项

设$f(x)=p_n(x)+R_n(x)$，称

$$|R_n(x)|=|f(x)-p_n(x)|$$

为泰勒多项式 $p_n(x)$逼近$f(x)$ 的绝对误差.

定理1 设函数$f(x)$在 x_0处具有 n 阶导数，则当$x\to x_0$ 时，有

$$R_n(x)=o[(x-x_0)^n].$$

皮亚诺余项

即

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+\boxed{o[(x-x_0)^n].}$$

函数$f(x)$在点 x_0处带皮亚诺余项的 n 阶泰勒公式

- 特别当$x_0=0$时，称

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k+o\left(x^n\right)$$

为$f(x)$的带皮亚诺余项的n阶麦克劳林公式.

- 定理1表明用 n阶泰勒多项式近似表示 $f(x)$时，其误差是 $\boxed{(x-x_0)^n \text{ 在过程 } x\to x_0 \text{中的高阶无穷小}}$. 这说明当$n>1$ 时，只要x充分接近x_0，相应的逼近精度较线性逼近大大提高了.
- 皮亚诺余项只是对误差作了定性的刻画，不能用于具体的精度分析.

例1 求函数$f(x)=e^x$的 n 阶麦克劳林多项式.

$$e^x \approx p_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$$

例2 求函数$f(x)=\sin x$ 的 n 阶麦克劳林多项式.

$$\sin x \approx p_{2m+1}(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^m \cdot \frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!}.$$

例3 求函数$f(x)=\cos x$ 的 n 阶麦克劳林多项式.

$$\cos x \approx p_{2m}(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^m \cdot \frac{x^{2m}}{(2m)!}$$

例4 求函数$f(x)=\ln(1+x)$的 n 阶麦克劳林多项式.

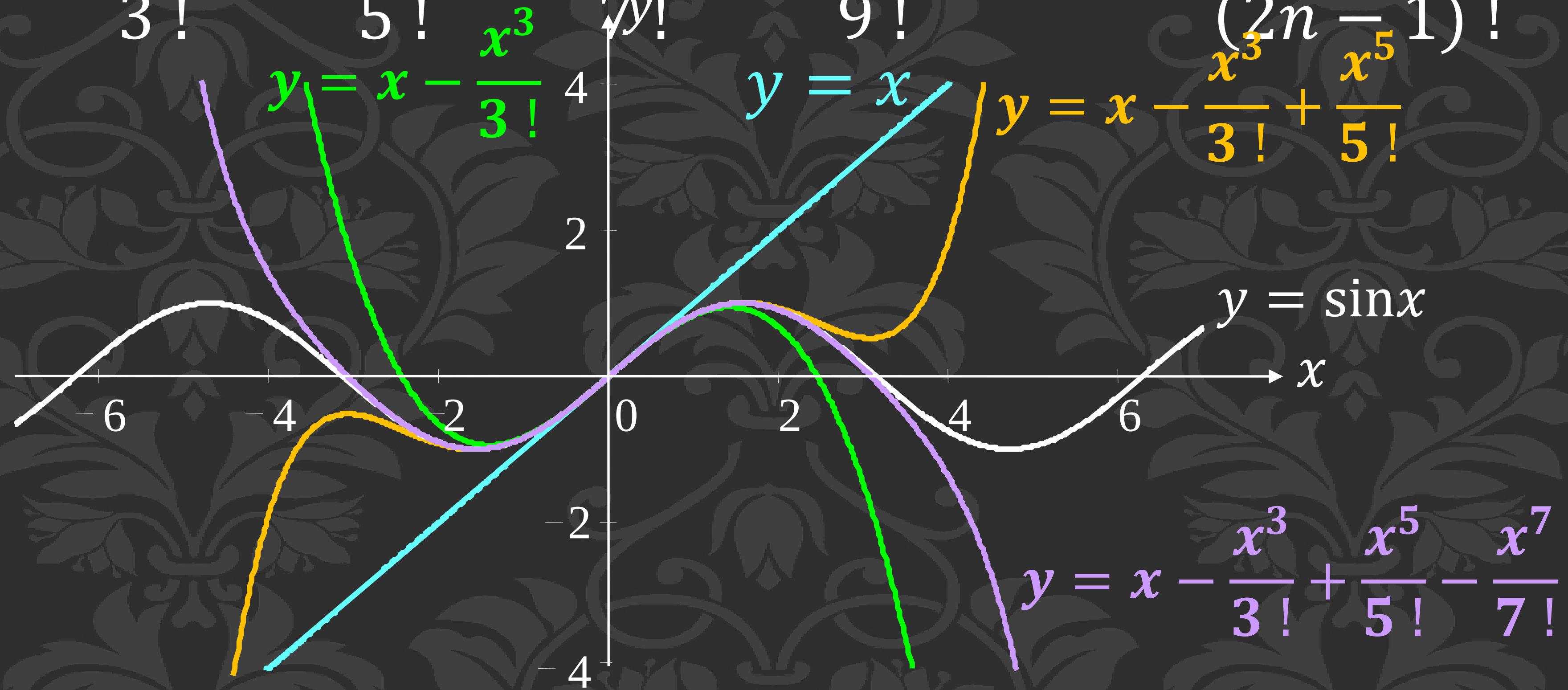
$$\ln(1+x)\approx p_n(x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$$

例5 求函数$f(x)=(1+x)^\alpha$的 n 阶麦克劳林多项式.

$$(1+x)^\alpha\approx p_n(x)=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n$$

泰勒多项式逼近Sin$x$

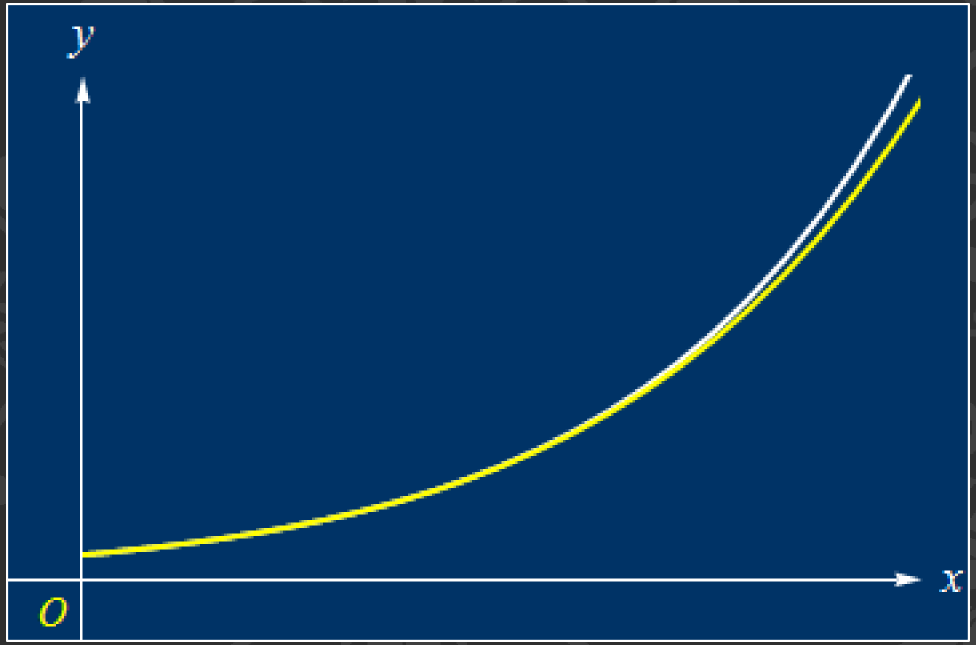
$$\sin x \approx x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \frac{1}{9!}x^9 + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!}x^{2n-1}$$



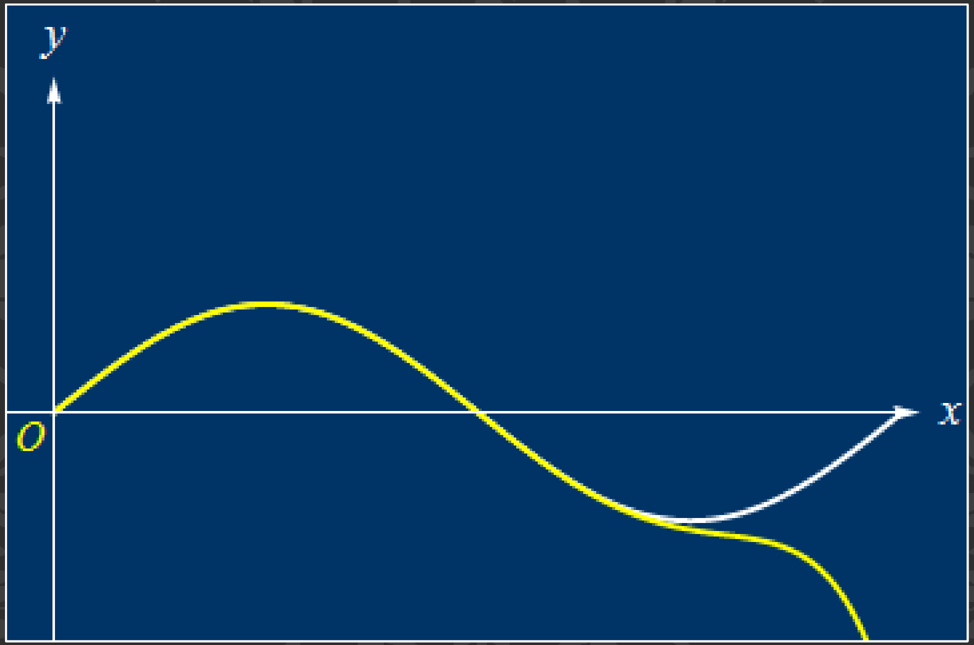
泰勒多项式逼近sin$x$:

$$\sin x \approx x - \frac{1}{3\,!}x^3 + \frac{1}{5\,!}x^5 - \frac{1}{7\,!}x^7 + \frac{1}{9\,!}x^9 + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)\,!}x^{2n-1}$$

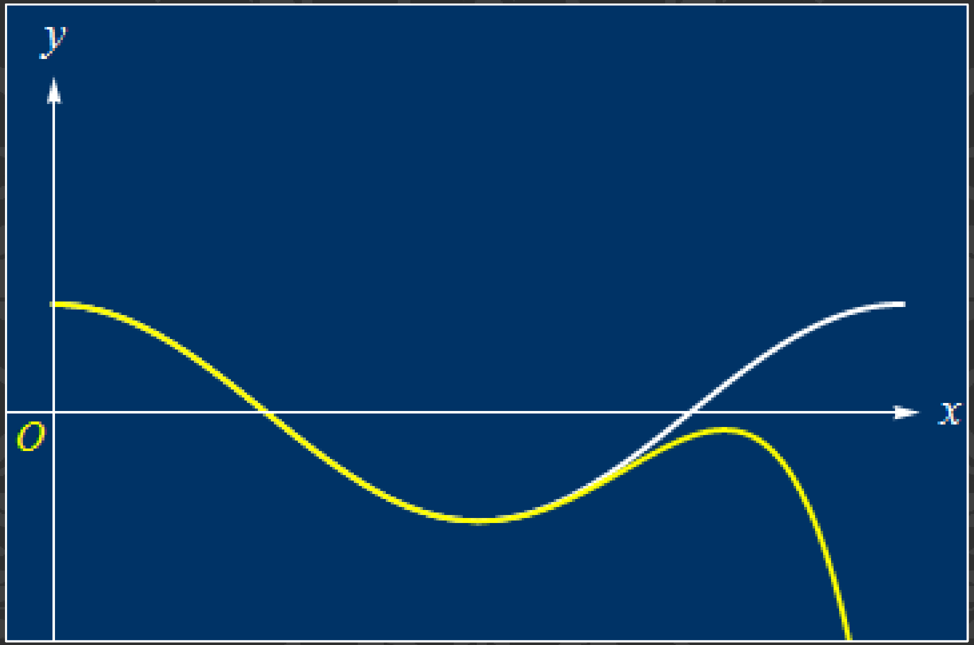
$$e^{x} \sim p_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$$



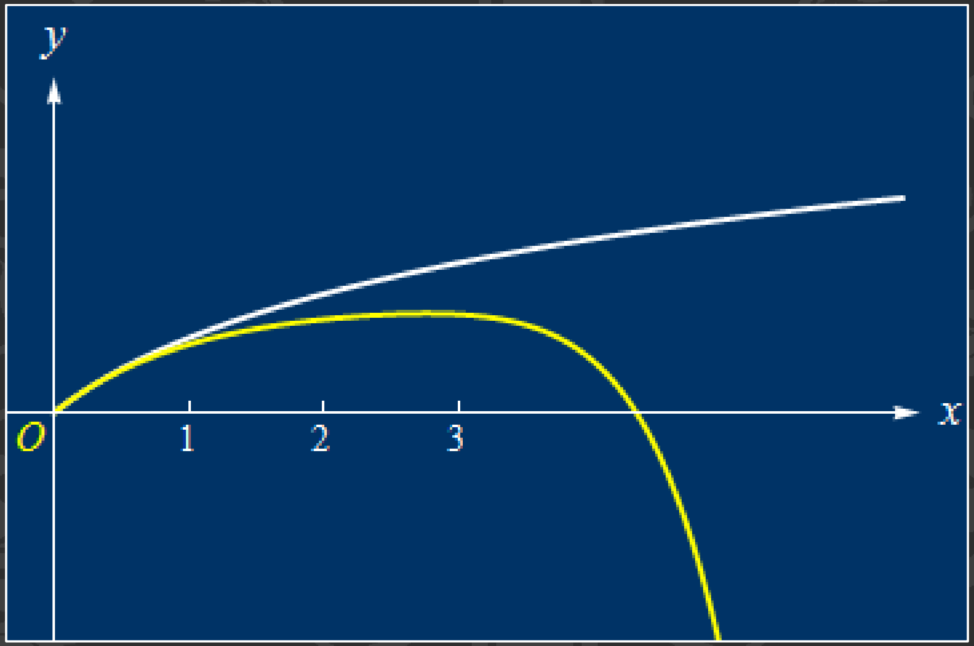
$$\sin x \sim p_{2m+1}(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^m \cdot \frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!}.$$



$$\cos x \sim p_{2m}(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^m \cdot \frac{x^{2m}}{(2m)!}$$

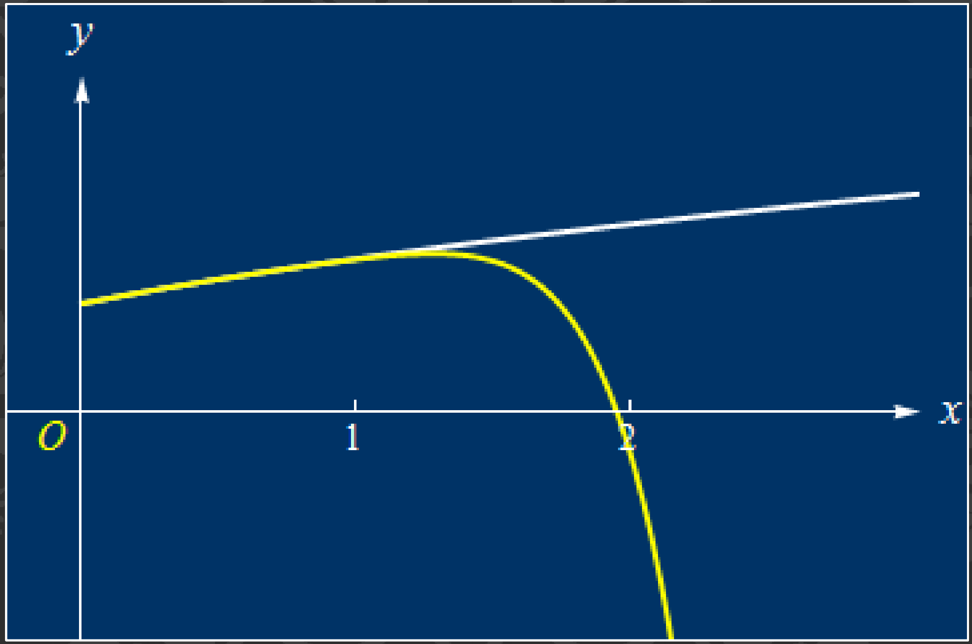


$$\ln(1+x) \sim p_n(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$$



$$
\begin{aligned}
(1+x)^{\alpha} &\sim p_n(x) \\
&= 1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n
\end{aligned}
$$

取$\alpha=\frac{1}{2}$，有



高等数学

3.3 泰勒公式

基础部数学教研室

郑治中

间接法求泰勒公式及应用

泰勒公式及误差估计

定理1　设函数$f(x)$在 x_0处具有 n 阶导数，则当$x \to x_0$ 时，有

$$R_n(x) = o[(x - x_0)^n].$$

皮亚诺余项

即

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + \boxed{o[(x - x_0)^n].}$$

函数$f(x)$在点 x_0处带皮亚诺余项的 n 阶泰勒公式

量子力学的诞生：黑体辐射公式的低频和高频近似

任何物体都会辐射电磁波。烧红的铁棒辐射可见光，人体辐射红外线。黑体是任何电磁波射到其上都会全部吸收而不会反射的理想物体，它只会按自身的温度辐射电磁波。

Planck黑体辐射公式

$$\rho(\nu) = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3}\frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}$$

$\Uparrow$

单位体积能量密度

Planck黑体辐射公式 $\rho(\nu) = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3}\frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}$

ν较小 瑞利-金斯(Rayleigh-Jeans)公式 $\rho(\nu) = \frac{8\pi kT}{c^3}\nu^2 = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3}\frac{1}{\frac{h\nu}{kT}}$

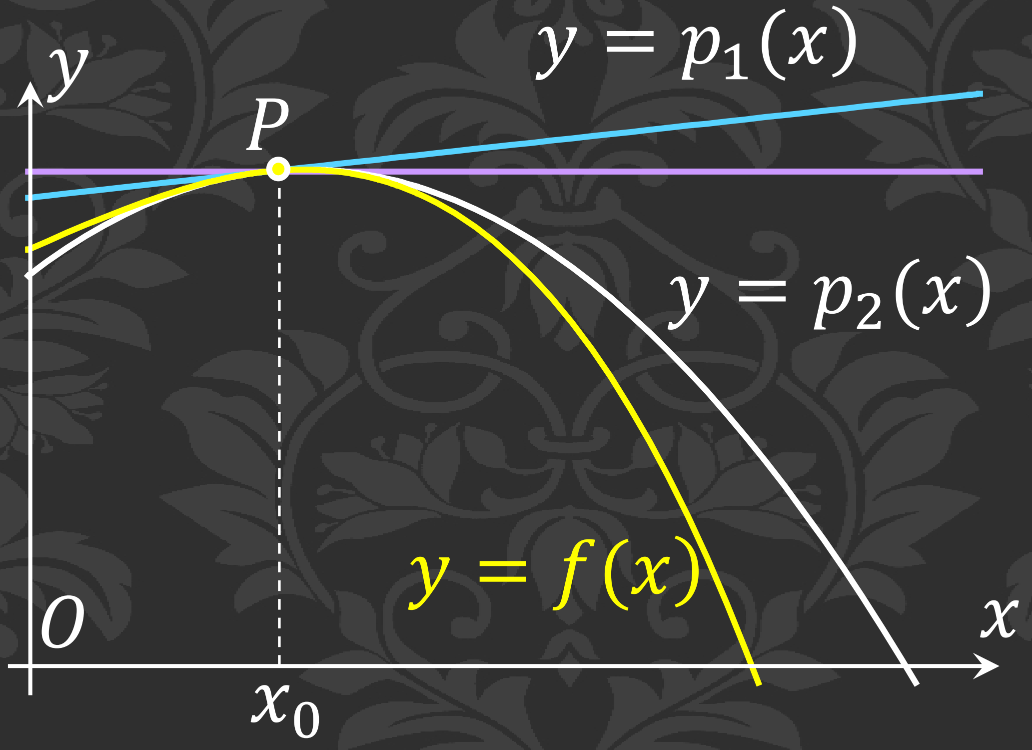
ν较大 维恩(Wein) 公式 $\rho(\nu) = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3}e^{-\frac{h\nu}{kT}} = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3}\frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}}}$

- 函数$f(x)$在点 x_0处的 0,1,2 阶泰勒多项式

$$p_0(x) = f(x_0)$$

$$p_1(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

$$p_2(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2$$



$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - p_n(x)}{(x - x_0)^n} = 0 \Longleftrightarrow f(x) = p_n(x) + o((x - x_0)^n)$$

- 间接法求函数$f(x)$泰勒公式

已知 $e^x = p_n(x) + o(x^n) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$

求 e^{x^2} 带peano型余项的泰勒公式.

用直接法？ 变量代换，间接法！

$$e^{x^2} = 1 + x^2 + \frac{(x^2)^2}{2!} + \cdots + \frac{(x^n)^2}{n!} + o(x^{2n})$$

例1 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}$

例2 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-x\cos x}{\sin^3 x}$

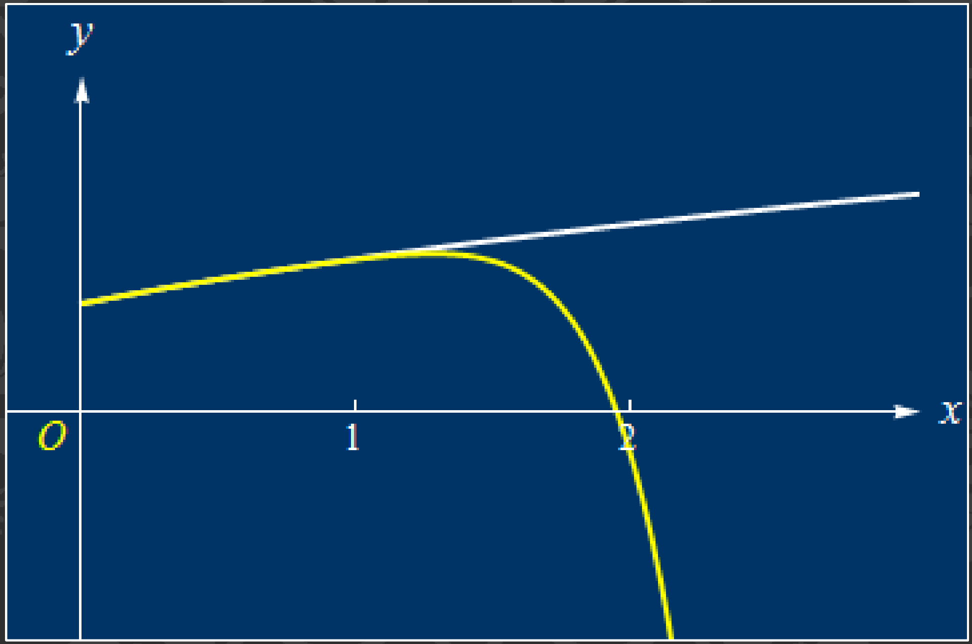
例3 求 $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt[6]{x^6+x^5}-\sqrt[6]{x^6-x^5}\right)$.

例4 用间接法求 $f(x)=\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1+x}{1-x}$ 带皮亚诺余项的麦克劳林公式.

例5 用间接法求 $f(x)=\dfrac{1}{2+x}$ 在$x_0=1$ 处的 7 阶泰勒多项式，并求 $f^{(7)}(1)$.

$$(1+x)^{\alpha} \sim p_n(x)$$
$$= 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n$$

取$\alpha = \frac{1}{2}$，有



$$\sqrt{1+\Delta x}=(1+\Delta x)^{\frac{1}{2}}$$

$$\sqrt{1.05}=1.02469507\cdots$$

$$\approx\ 1+\frac{1}{2}\cdot\Delta x+\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2!}(\Delta x)^2$$

$$\sqrt{1.05}\approx 1+\frac{1}{2}\cdot 0.05+\frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)}{2}0.05^2=1.0246875$$

二阶逼近

$$\approx 1+\frac{1}{2}\cdot 0.05+\frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)}{2!}0.05^2+\frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{2}-2)}{3!}0.05^3$$

$$=1.02469531\cdots$$

三阶逼近

定理2 设函数 $f(x)$ 在含有 x_0 的区间 (a,b) 内有直 $n+1$ 阶导数，则对任意 $x\in(a,b)$，至少存在介于x与 x_0之间的一点ξ，使得

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}.$$

或

拉格朗日余项

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+\boxed{\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}}.$$

函数 $f(x)$在点 x_0 处带拉格朗日余项的 n 阶泰勒公式

- 特别当$x_0=0$时，称

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1} \quad \xi\text{介于}0\text{和}x\text{之间}$$

为函数 $f(x)$带拉格朗日余项的麦克劳林公式.

- 若$n=0$, 带拉格朗日余项的 n 阶泰勒公式可写为

$$f(x)=f(x_0)+f'(\xi)(x-x_0),$$

其中ξ介于x与 x_0之间.

拉格朗日中值定理是泰勒公式的一个特例。

常见函数的带拉格朗日型余项的麦克劳林公式

- 指数函数 $f(x) = e^x$ 的麦克劳林公式

$$e^x \approx p_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$$

$$f^{(k)}(x) = e^x, \quad k = 0,1,2,\cdots$$

$$\boxed{e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1}, \quad 0 < \theta < 1}$$

- 正弦函数 $f(x)=\sin x$ 的麦克劳林公式

$$\sin x \approx p_{2m-1}(x)=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots+(-1)^{m-1}\cdot\frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!}.$$

$$f^{(k)}(x)=\sin\left(x+k\cdot\frac{\pi}{2}\right), k=0,1,2,\cdots$$

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\cdots+(-1)^{m-1}\frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!}+(-1)^m\frac{\cos\theta x}{(2m+1)!}x^{2m+1},$$

$$0<\theta<1$$

- 余弦函数 $f(x) = \cos x$ 的麦克劳林公式

$$\cos x \approx p_{2m}(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^m \cdot \frac{x^{2m}}{(2m)!}$$

$$f^{(k)}(x) = \cos\left(x + k \cdot \frac{\pi}{2}\right), k = 0,1,2,\cdots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \cdots + (-1)^m \frac{x^{2m}}{(2m)!} + (-1)^{m+1} \frac{\cos\theta x}{(2m+2)!} x^{2m+2},$$

$$0 < \theta < 1$$

- 对数函数 $f(x) = \ln(1+x)$ 的麦克劳林公式

$$\ln(1+x) \approx p_n(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$$

$$f^{(k)}(x) = (-1)^{k-1}\frac{(k-1)!}{(1+x)^k}, k = 1,2,\cdots$$

$$\boxed{\begin{aligned}\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} \\ +(-1)^n\frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+\theta x)^{n+1}}, \quad 0 < \theta < 1\end{aligned}}$$

- 幂函数 $f(x)=(1+x)^{\alpha}$ 的麦克劳林公式

$$(1+x)^{\alpha} \approx p_n(x) = 1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n$$

$$f^{(k)}(x)=\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)(1+x)^{\alpha-k},\quad k=0,1,2,\cdots$$

$$\boxed{(1+x)^{\alpha}=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{(n+1)!}\frac{x^{n+1}}{(1+\theta x)^{n+1-\alpha}},0<\theta<1}$$

如果 $f(x)$在包含x_0的某个开区间 (a,b)内具 $n+1$阶导数，则对任一$x\in(a,b)$，至少存在介于x_0和x之间的一点ξ，使得

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+R_n(x),\qquad R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}.$$

$$=o\left[(x-x_0)^n\right](x\to x_0)$$

近似计算

若 $f^{(n+1)}(x)$在 (a,b)内有界，即存在正数 M，对$x\in(a,b)$，

有$|f^{(n+1)}(x)|\le M$, 从而有 $|R_n(x)|\le\dfrac{M}{(n+1)!}|x-x_0|^{n+1}$ 误差估计

例6 证明：当$x > 0$时，$e^x > 1 + x + \dfrac{x^2}{2}$.

例7 用三阶Taylor公式, 求 $f(x) = \sin 29^\circ$ 近似值，并估计误差.

例8（爱因斯坦狭义相对论的质能关系式）

狭义相对论认为经典力学中$\bar{v}=(v_1,v_2,v_3)$的质点，其经典动量(p_1,p_2,p_3)在狭义相对论中都会变成四维向量(p_0,p_1,p_2,p_3)

$$p_0=\frac{m_0c}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}，\quad p_i=\frac{m_0v_i}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\quad i=1,2,3$$

其中 m_0为静止质量，v 为物体的运动速度, c为光速.

当v和c相比很小时，$\frac{v}{c}$接近于零，$\frac{p_i}{m_0v_j}\rightarrow 1$

利用泰勒近似公式：

$$p_0=\frac{m_0c}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

$$\boxed{cp_0}=\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}=m_0c^2\left(1+\frac{1}{2}\left(\frac{v}{c}\right)^2+o\left(\frac{v^2}{c^2}\right)\right)$$

质点总能量

$$\approx\boxed{m_0c^2}+\boxed{\frac{1}{2}m_0v^2}$$

经典动能

常值

$$\Rightarrow E=cp_0=mc^2$$

例9 设函数 $f(x)$ 在$(a,+\infty)$ 内具有二阶导数，且 $f(x)$, $f''(x)$在$(a,+\infty)$有界，证明$f'(x)$ 在$(a,+\infty)$内有界.

例10 设函数$f(x)$在闭区间$[-1,1]$上具有三阶连续导数，且$f(-1)=0$, $f(1)=1$，$f'(0)=0$．证明：在开区间 $(-1,1)$, 内至少存在一点ξ，使$f'''(\xi)=3$.

例11 设$f(x)$在$[a,b]$上有n阶导数，且$f(a)=f(b)=f'(b)=\cdots=f^{(n)}(b)=0$，则必定存在$\xi\in(a,b)$，使$f^{(n)}(\xi)=0$

例12 设$f(x)$在$[a,b]$上二阶可导，且$f'(a)=f'(b)=0$，证明存在$\xi\in(a,b)$，使$f''(\xi)\geq\frac{4}{(b-a)^2}|f(b)-f(a)|$

例13 设$f(x)$在$[0,1]$上二阶可导，且$|f(x)| \le a$，$|f''(x)| \le b$，a,b非负，证明对于一切$c \in (0,1)$，使$f'(c) \le 2a + \frac{1}{2}b$

例14 $f(x)$在$[0,1]$上具有二阶连续导数，且$f(0) = f(1) = 0$，当$x \in (0,1)$时，$|f''(x)| \le A$，证明：$0 \le x \le 1$使，$|f'(c)| \le \frac{A}{2}$