

$$x = 2e^{\cos 2t} \sin 2t + 2\cos 2t$$

所以  $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{(0,1)} = \left. \frac{dy}{dx} \right|_{t=0} = \frac{1}{2}$ , 即曲线在  $(0,1)$  处的切线斜率为  $\frac{1}{2}$ , 从而知法线斜率为  $-2$ .

法线方程为:  $y-1=-2(x-0)$ , 即  $y+2x-1=0$ .

**【例 6】** (2021 数学二, 5 分) 有一圆柱体底面半径与高随时间变化的速率分别为  $2\text{cm/s}$ ,  $-3\text{cm/s}$ , 当底面半径为  $10\text{cm}$ , 高为  $5\text{cm}$  时, 圆柱体的体积与表面积随时间变化的速率分别为\_\_\_\_\_.

(A)  $125\pi\text{cm}^3/\text{s}, 40\pi\text{cm}^2/\text{s}$

(B)  $125\pi\text{cm}^3/\text{s}, -40\pi\text{cm}^2/\text{s}$

(C)  $-100\pi\text{cm}^3/\text{s}, 40\pi\text{cm}^2/\text{s}$

(D)  $-100\pi\text{cm}^3/\text{s}, -40\pi\text{cm}^2/\text{s}$

**解** 设圆柱体底面半径为  $R$ , 高为  $h$ , 则  $\frac{dR}{dt}=2, \frac{dh}{dt}=-3$ .

体积  $V=\pi R^2 h$ , 表面积  $S=2\pi R h+2\pi R^2$ ,

$$\text{故 } \frac{dV}{dt} = 2\pi R \cdot \frac{dR}{dt} h + R^2 \pi \frac{dh}{dt}, \frac{dS}{dt} = 2\pi \frac{dR}{dt} h + 2\pi R \frac{dh}{dt} + 4\pi R \cdot \frac{dR}{dt},$$

$$\text{即 } \left. \frac{dV}{dt} \right|_{R=10, h=5} = -100\pi, \left. \frac{dS}{dt} \right|_{R=10, h=5} = 40\pi.$$

故应选(C).

## 方法总结

求相关变化率问题的步骤:

(1) 根据题意, 建立相关变量之间的等量关系式;

(2) 在所得等式两边同时对  $t$  求导;

(3) 代入变量在指定时刻的值及变化率, 从而求出未知变化率.

另外, 相关变化率问题大部分是实际问题, 解题的关键在于把实际问题用数学语言表达出来, 即要写出问题的函数表达式.

## 习题 2-4 解答

1. 求由下列方程所确定的隐函数的导数  $\frac{dy}{dx}$ :

(1)  $y^2 - 2xy + 9 = 0$ ;

(2)  $x^3 + y^3 - 3axy = 0$ ;

(3)  $xy = e^{x+y}$ ;

(4)  $y = 1 - xe^y$ .

**解** (1) 在方程两端分别对  $x$  求导, 得  $2yy' - 2y - 2xy' = 0$ , 从而  $y' = \frac{y}{y-x}$ .

(2) 在方程两端分别对  $x$  求导, 得  $3x^2 + 3y^2 y' - 3ay - 3axy' = 0$ , 从而  $y' = \frac{ay - x^2}{y^2 - ax}$ .

(3) 在方程两端分别对  $x$  求导, 得  $y + xy' = e^{x+y}(1+y')$ , 从而  $y' = \frac{e^{x+y} - y}{x - e^{x+y}}$ .

(4)在方程两端分别对  $x$  求导,得  $y' = -e^y - xe^y y'$ ,从而  $y' = \frac{-e^y}{1+xe^y}$ .

2. 求曲线  $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$  在点  $(\frac{\sqrt{2}}{4}a, \frac{\sqrt{2}}{4}a)$  处的切线方程和法线方程.

**解** 由导数的几何意义知,所求切线的斜率为  $k = y' \Big|_{(\frac{\sqrt{2}}{4}a, \frac{\sqrt{2}}{4}a)}$ ,

在曲线方程两端分别对  $x$  求导,得  $\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} + \frac{2}{3}y^{-\frac{1}{3}}y' = 0$ ,

从而  $y' = -\frac{x^{-\frac{1}{3}}}{y^{-\frac{1}{3}}}$ ,  $y' \Big|_{(\frac{\sqrt{2}}{4}a, \frac{\sqrt{2}}{4}a)} = -1$ .

于是所求的切线方程为  $y - \frac{\sqrt{2}}{4}a = -1(x - \frac{\sqrt{2}}{4}a)$ , 即  $x + y = \frac{\sqrt{2}}{2}a$ .

法线方程为  $y - \frac{\sqrt{2}}{4}a = 1 \cdot (x - \frac{\sqrt{2}}{4}a)$ , 即  $x - y = 0$ .

3. 设曲线  $C$  的方程为  $x^2y - xy^2 = 2$ , 试找出  $C$  上有水平切线和铅直切线的点.

**解** 在  $x^2y - xy^2 = 2$  两边对  $x$  求导,得  $2xy + x^2y' - y^2 - 2xyy' = 0$ ,  $y' = \frac{2xy - y^2}{2xy - x^2}$ .

(1)令  $y' = 0$ ,得  $2xy - y^2 = 0$ ,所以  $y = 2x$  ( $y = 0$  舍去),代入  $x^2y - xy^2 = 2$  可得  $x = -1, y = -2$ . 即  $C$  上有水平切线的点为  $(-1, -2)$ .

(2)令  $2xy - x^2 = 0$ ,得  $x = 2y$  ( $x = 0$  舍去),代入  $x^2y - xy^2 = 2$  可得  $x = 2, y = 1$ ,即  $C$  上有铅直切线的点为  $(2, 1)$ .

4. 求由下列方程所确定的隐函数的二阶导数  $\frac{d^2y}{dx^2}$ :

(1)  $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ ; (2)  $y = \tan(x+y)$ ; (3)  $y = 1 + xe^y$ ; (4)  $y - 2x = (x-y)\ln(x-y)$ .

**解** (1)应用隐函数的求导方法,得  $2xb^2 + 2a^2yy' = 0$ ,

于是  $y' = -\frac{b^2x}{a^2y}$ ,  $y'' = -\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{y - xy'}{y^2} = -\frac{b^4}{a^2y^3}$ .

(2)应用隐函数的求导方法,得

$$y' = \sec^2(x+y)(1+y') = [1 + \tan^2(x+y)](1+y') = (1+y^2)(1+y'),$$

于是  $y' = \frac{1+y^2}{1-(1+y^2)} = -\frac{1}{y^2} - 1$ ,  $y'' = \frac{2y'}{y^3} = -\frac{2(1+y^2)}{y^5} = -2\csc^2(x+y)\cot^3(x+y)$ .

(3)应用隐函数的求导方法,得  $y' = e^y + xe^y y'$ , 于是

$$y' = \frac{e^y}{1 - xe^y},$$

$$y'' = \frac{e^y \cdot y'(1 - xe^y) - e^y(-e^y - xe^y y')}{(1 - xe^y)^2} = \frac{e^y y' + e^{2y}}{(1 - xe^y)^2} = \frac{e^{2y}(2 - xe^y)}{(1 - xe^y)^3} = \frac{e^{2y}(3 - y)}{(2 - y)^3}.$$

(4)在方程  $y - 2x = (x-y)\ln(x-y)$  两边对  $x$  求导,得

$$y' - 2 = (1 - y')\ln(x-y) + (1 - y') \textcircled{1}, y' = \frac{3 + \ln(x-y)}{2 + \ln(x-y)},$$

在①式两边再对  $x$  求导,得

$$y'' = -y''\ln(x-y) + \frac{(1-y')^2}{x-y} - y'',$$

$$y'' = \frac{(1-y')^2}{[2 + \ln(x-y)](x-y)} = \frac{1}{[2 + \ln(x-y)]^3(x-y)}.$$

5. 用对数求导法求下列函数的导数:

$$(1) y = \left(\frac{x}{1+x}\right)^x;$$

$$(2) y = \sqrt[5]{\frac{x-5}{\sqrt{x^2+2}}};$$

$$(3) y = \frac{\sqrt{x+2}(3-x)^4}{(x+1)^5}; \quad (4) y = \sqrt{x \sin x} \sqrt{1-e^x}.$$

解 (1) 在  $y = \left(\frac{x}{1+x}\right)^x$  两端取对数, 得  $\ln y = x[\ln x - \ln(1+x)]$ .

在上式两端分别对  $x$  求导, 并注意到  $y = y(x)$ , 得

$$\frac{y'}{y} = [\ln x - \ln(1+x)] + x\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{1+x}\right) = \ln \frac{x}{1+x} + \frac{1}{1+x},$$

于是

$$y' = y\left(\ln \frac{x}{1+x} + \frac{1}{1+x}\right) = \left(\frac{x}{1+x}\right)^x \left(\ln \frac{x}{1+x} + \frac{1}{1+x}\right).$$

(2) 在  $y = \sqrt[5]{\frac{x-5}{\sqrt{x^2+2}}}$  两端取对数, 得

$$\ln y = \frac{1}{5} \left[ \ln(x-5) - \frac{1}{5} \ln(x^2+2) \right] = \frac{1}{5} \ln(x-5) - \frac{1}{25} \ln(x^2+2).$$

在上式两端分别对  $x$  求导, 并注意到  $y = y(x)$ , 得

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{x-5} - \frac{1}{25} \cdot \frac{2x}{x^2+2},$$

$$\text{于是 } y' = y \left[ \frac{1}{5(x-5)} - \frac{2x}{25(x^2+2)} \right] = \sqrt[5]{\frac{x-5}{\sqrt{x^2+2}}} \left[ \frac{1}{5(x-5)} - \frac{2x}{25(x^2+2)} \right].$$

(3) 在  $y = \frac{\sqrt{x+2}(3-x)^4}{(x+1)^5}$  两端取对数, 得

$$\ln y = \frac{1}{2} \ln(x+2) + 4 \ln(3-x) - 5 \ln(1+x).$$

在上式两端分别对  $x$  求导, 并注意到  $y = y(x)$ , 得

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x+2} + 4 \cdot \frac{(-1)}{3-x} - 5 \cdot \frac{1}{1+x}$$

$$\text{于是 } y' = y \left[ \frac{1}{2(x+2)} - \frac{4}{3-x} - \frac{5}{1+x} \right] = \frac{\sqrt{x+2}(3-x)^4}{(x+1)^5} \left[ \frac{1}{2(x+2)} - \frac{4}{3-x} - \frac{5}{1+x} \right].$$

(4) 在  $y = \sqrt{x \sin x} \sqrt{1-e^x}$  两端取对数, 得

$$\ln y = \frac{1}{2} \left[ \ln x + \ln \sin x + \frac{1}{2} \ln(1-e^x) \right].$$

在上式两端分别对  $x$  求导, 并注意到  $y = y(x)$ , 得

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{x} + \frac{\cos x}{\sin x} + \frac{1}{2} \cdot \frac{(-e^x)}{1-e^x} \right],$$

$$\text{于是 } y' = y \left[ \frac{1}{2x} + \frac{\cos x}{2 \sin x} - \frac{e^x}{4(1-e^x)} \right] = \frac{1}{2} \sqrt{x \sin x} \sqrt{1-e^x} \left[ \frac{1}{x} + \cot x - \frac{e^x}{2(1-e^x)} \right].$$

6. 求下列参数方程所确定的函数的导数  $\frac{dy}{dx}$ :

$$(1) \begin{cases} x = at^2, \\ y = bt^3; \end{cases} \quad (2) \begin{cases} x = \theta(1 - \sin \theta), \\ y = \theta \cos \theta. \end{cases}$$

解 (1)  $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{3bt^2}{2at} = \frac{3b}{2a} t.$

$$(2) \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} = \frac{\cos \theta - \theta \sin \theta}{1 - \sin \theta + \theta(-\cos \theta)} = \frac{\cos \theta - \theta \sin \theta}{1 - \sin \theta - \theta \cos \theta}.$$

7. 已知  $\begin{cases} x=e^t \sin t, \\ y=e^t \cos t, \end{cases}$  求当  $t=\frac{\pi}{3}$  时  $\frac{dy}{dx}$  的值.

解  $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{e^t \cos t - e^t \sin t}{e^t \sin t + e^t \cos t} = \frac{\cos t - \sin t}{\sin t + \cos t}.$

于是  $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{t=\frac{\pi}{3}} = \frac{\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}} = \sqrt{3} - 2.$

8. 写出下列曲线在所给参数值相应的点处的切线方程和法线方程:

(1)  $\begin{cases} x=\sin t, \\ y=\cos 2t, \end{cases}$  在  $t=\frac{\pi}{4}$  处; (2)  $\begin{cases} x=\frac{3at}{1+t^2}, \\ y=\frac{3at^2}{1+t^2}, \end{cases}$  在  $t=2$  处.

解 (1)  $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{-2\sin 2t}{\cos t} = -4\sin t, \left. \frac{dy}{dx} \right|_{t=\frac{\pi}{4}} = -2\sqrt{2}.$

$t=\frac{\pi}{4}$  对应点  $(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0)$ , 曲线在点  $(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0)$  处的切线方程为

$$y-0 = -2\sqrt{2}\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right), \quad \text{即 } 2\sqrt{2}x+y-2=0.$$

法线方程为

$$y-0 = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right), \quad \text{即 } \sqrt{2}x-4y-1=0.$$

(2)  $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\left(\frac{3at^2}{1+t^2}\right)'}{\left(\frac{3at}{1+t^2}\right)'} = \frac{\frac{3a[2t(1+t^2)-t^2 \cdot 2t]}{(1+t^2)^2}}{\frac{3a[(1+t^2)-t \cdot 2t]}{(1+t^2)^2}} = \frac{2t}{1-t^2}, \left. \frac{dy}{dx} \right|_{t=2} = -\frac{4}{3},$

$t=2$  对应点  $(\frac{6}{5}a, \frac{12}{5}a)$ , 曲线在点  $(\frac{6}{5}a, \frac{12}{5}a)$  处的切线方程为

$$y-\frac{12}{5}a = -\frac{4}{3}\left(x-\frac{6}{5}a\right), \quad \text{即 } 4x+3y-12a=0.$$

法线方程为

$$y-\frac{12}{5}a = \frac{3}{4}\left(x-\frac{6}{5}a\right), \quad \text{即 } 3x-4y+6a=0.$$

9. 求下列参数方程所确定的函数的二阶导数  $\frac{d^2y}{dx^2}$ :

(1)  $\begin{cases} x=\frac{t^2}{2}, \\ y=1-t; \end{cases}$  (2)  $\begin{cases} x=a\cos t, \\ y=b\sin t; \end{cases}$  (3)  $\begin{cases} x=3e^{-t}, \\ y=2e^t; \end{cases}$

(4)  $\begin{cases} x=f'(t), \\ y=tf'(t)-f(t), \end{cases}$  设  $f''(t)$  存在且不为零.

解 (1)  $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{-1}{t}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{1}{t^2}}{\frac{1}{t}} = \frac{1}{t^3}.$



8 题视频解析



$$(2) \frac{dy}{dx} = \frac{b \cos t}{-a \sin t} = -\frac{b}{a} \cot t, \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{\frac{d}{dt} \left( \frac{dy}{dx} \right)}{\frac{dx}{dt}} = \frac{-\frac{b}{a} (-\csc^2 t)}{-a \sin t} = \frac{-b}{a^2 \sin^3 t}.$$

$$(3) \frac{dy}{dx} = \frac{2e^t}{-3e^{-t}} = -\frac{2}{3} e^{2t}, \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{-\frac{4}{3} e^{2t}}{-3e^{-t}} = \frac{4}{9} e^{3t}.$$

$$(4) \frac{dy}{dx} = \frac{f'(t) + t f''(t) - f'(t)}{f''(t)} = t, \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{1}{f''(t)}.$$

10. 求下列参数方程所确定的函数的三阶导数  $\frac{d^3 y}{dx^3}$ :

$$(1) \begin{cases} x = 1 - t^2, \\ y = t - t^3; \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} x = \ln(1 + t^2), \\ y = t - \arctan t. \end{cases}$$

解 (1)  $\frac{dy}{dx} = \frac{1 - 3t^2}{-2t} = -\frac{1}{2t} + \frac{3}{2}t, \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{\frac{1}{2t^2} + \frac{3}{2}}{-2t} = -\frac{1}{4} \left( \frac{1}{t^3} + \frac{3}{t} \right),$

$$\frac{d^3 y}{dx^3} = \frac{-\frac{1}{4} \left( -\frac{3}{t^4} - \frac{3}{t^2} \right)}{-2t} = -\frac{3}{8t^5} (1 + t^2).$$

$$(2) \frac{dy}{dx} = \frac{1 - \frac{1}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}} = \frac{t}{2}, \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{2t}{1+t^2}} = \frac{1+t^2}{4t} = \frac{1}{4} \left( \frac{1}{t} + t \right),$$

$$\frac{d^3 y}{dx^3} = \frac{\frac{1}{4} \left( -\frac{1}{t^2} + 1 \right)}{\frac{2t}{1+t^2}} = \frac{t^4 - 1}{8t^3}.$$



10 题视频解析

11. 落在平静水面上的石头, 产生同心波纹. 若最外一圈波纹半径的增大速率总是 6m/s, 问在 2s 末扰动水面面积的增大的速率为多少?

解 设最外一圈波纹的半径为  $r = r(t)$ , 圆的面积  $S = S(t)$ . 在  $S = \pi r^2$  两端分别对  $t$  求导, 得

$$\frac{dS}{dt} = 2\pi r \frac{dr}{dt} \text{ 当 } t = 2 \text{ 时, } r = 6 \times 2 = 12, \quad \frac{dr}{dt} = 6 \text{ 代入上式得}$$

$$\left. \frac{dS}{dt} \right|_{t=2} = 2\pi \times 12 \times 6 = 144\pi (\text{m}^2/\text{s}).$$

12. 注水入深 8m、上顶直径 8m 的正圆锥形容器中, 其速率为  $4\text{m}^3/\text{min}$ . 当水深为 5m 时, 其表面上升的速率为多少?

解 如图 2-1 所示, 设在时刻  $t$  容器中的水深为  $h(t)$ , 水的容积为  $V(t)$ ,

$$\frac{r}{4} = \frac{h}{8}, \text{ 即 } r = \frac{h}{2}, V = \frac{1}{3} \pi r^2 h = \frac{1}{3} \pi \left( \frac{h}{2} \right)^2 h = \frac{\pi}{12} h^3.$$

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\pi}{4} h^2 \frac{dh}{dt}, \quad \text{即} \quad \frac{dh}{dt} = \frac{4}{\pi h^2} \frac{dV}{dt}.$$

$$\text{故 } \left. \frac{dh}{dt} \right|_{h=5} = \frac{4}{25\pi} \times 4 = \frac{16}{25\pi} \approx 0.204 (\text{m}/\text{min}).$$

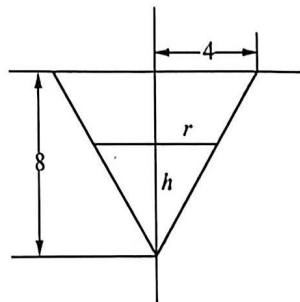


图 2-1

13. 溶液自深 18cm、顶直径 12cm 的正圆锥形漏斗中漏入一直径为 10cm 的圆柱形筒中. 开始时漏斗中盛满了溶液. 已知当溶液在漏斗中深为 12cm 时, 其表面下降的速率为  $1\text{cm}/\text{min}$ . 问此时圆柱形筒中溶液表面上升的速率为多少?

解 如图 2-2, 设在时刻  $t$  漏斗中的水深为  $H = H(t)$ , 圆柱形筒中水深为  $h = h(t)$ , 建立  $h$  与  $H$  之间的关系:

$$\frac{1}{3}\pi \times 6^2 \cdot 18 - \frac{1}{3}\pi r^2 H = \pi \times 5^2 h.$$

又  $\frac{r}{6} = \frac{H}{18}$ , 即  $r = \frac{H}{3}$ . 故

$$\frac{1}{3}\pi \times 6^2 \times 18 - \frac{1}{3}\pi \left(\frac{H}{3}\right)^2 H = \pi \times 5^2 h,$$

$$\text{即 } 216 - \frac{1}{27}H^3 = 25h.$$

上式两端分别对  $t$  求导, 得  $-\frac{3}{27}H^2 \frac{dH}{dt} = 25 \frac{dh}{dt}$ .

当  $H=12$  时,  $\frac{dH}{dt} = -1$ , 此时  $\frac{dh}{dt} = \frac{1}{25} \left( -\frac{3}{27}H^2 \frac{dH}{dt} \right) \Big|_{\substack{H=12, \\ \frac{dH}{dt}=-1}} = \frac{16}{25} = 0.64 (\text{cm/min}).$

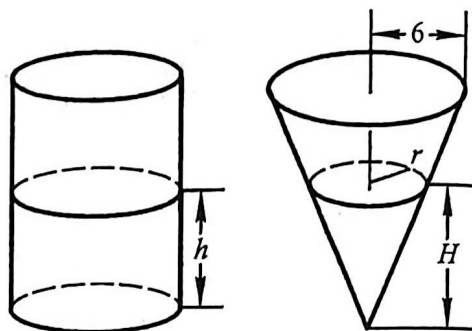


图 2-2

## 第五节 函数的微分

### 一、主要内容归纳

**1. 微分定义** 若函数  $f(x)$  在  $x$  点的增量  $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ , 可表示为  $\Delta y = Ax + o(\Delta x)$ , 其中:  $A$  是与  $\Delta x$  无关的量; 当  $\Delta x \rightarrow 0$  时,  $o(\Delta x)$  是比  $\Delta x$  高阶的无穷小. 则称  $y = f(x)$  在  $x$  点可微, 而线性主部  $A\Delta x$  称为  $y = f(x)$  在  $x$  点的微分, 记为  $dy$  或  $df(x)$ , 即  $dy = df(x) = A \cdot \Delta x$ .

当函数  $f(x)$  可微时, 微分中  $\Delta x$  的系数  $A = f'(x)$ , 记  $dx = \Delta x$ , 称之为自变量的微分, 微分表达式通常写为对称形式  $dy = f'(x)dx$ , 而导数就是函数微分与自变量微分之商(微商)

$$f'(x) = \frac{dy}{dx}.$$

### 2. 基本初等函数的微分公式

- |  |   |
|--|---|
| (1) $d(C) = 0$ ;                                   | (2) $d(x^\mu) = \mu x^{\mu-1} dx$ ( $\mu$ 为实数); |
| (3) $d(\sin x) = \cos x dx$ ;                      | (4) $d(\cos x) = -\sin x dx$ ;                  |
| (5) $d(\tan x) = \sec^2 x dx$ ;                    | (6) $d(\cot x) = -\csc^2 x dx$ ;                |
| (7) $d(\sec x) = \sec x \tan x dx$ ;               | (8) $d(\csc x) = -\csc x \cot x dx$ ;           |
| (9) $d(a^x) = a^x \ln a dx$ ( $a > 0, a \neq 1$ ); | (10) $d(e^x) = e^x dx$                          |