要使 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，则应有 $f(0^+)=f(0^-)=f(0)$，即 $b=2=a$，

故当 $a=b=2$ 时，$f(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

习题 1—9 解答

1. 求函数 $f(x)=\dfrac{x^3+3x^2-x-3}{x^2+x-6}$ 的连续区间，并求极限 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$，$\lim\limits_{x\to -3}f(x)$ 及 $\lim\limits_{x\to 2}f(x)$.

解 显然 $f(x)$ 在 $x_1=-3$，$x_2=2$ 处无意义，所以这两个点为间断点，此外函数处处连续，连续区间为 $(-\infty,-3)$，$(-3,2)$，$(2,+\infty)$.

因为 $f(x)=\dfrac{x^3+3x^2-x-3}{x^2+x-6}=\dfrac{(x^2-1)(x+3)}{(x+3)(x-2)}=\dfrac{x^2-1}{x-2}$，

所以 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\dfrac{1}{2}$，　$\lim\limits_{x\to -3}f(x)=-\dfrac{8}{5}$，　$\lim\limits_{x\to 2}f(x)=\infty$.

2. 设函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在点 x_0 连续，证明函数

$$\varphi(x)=\max\{f(x),g(x)\},\qquad \psi(x)=\min\{f(x),g(x)\}$$

在点 x_0 也连续.

证 $\varphi(x)=\max\{f(x),g(x)\}=\dfrac{1}{2}[f(x)+g(x)+|f(x)-g(x)|]$，

$\psi(x)=\min\{f(x),g(x)\}=\dfrac{1}{2}[f(x)+g(x)-|f(x)-g(x)|]$.

又，若 $f(x)$ 在点 x_0 连续，则 $|f(x)|$ 在点 x_0 也连续；连续函数的和、差仍连续，故 $\varphi(x)$、$\psi(x)$ 在点 x_0 也连续.

3. 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{x^2-2x+5}$；　(2) $\lim\limits_{\alpha\to\frac{\pi}{4}}(\sin 2\alpha)^3$；　(3) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\ln(2\cos 2x)$；

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x}$；　(5) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{5x-4}-\sqrt{x}}{x-1}$；　(6) $\lim\limits_{x\to\alpha}\dfrac{\sin x-\sin\alpha}{x-\alpha}$；

(7) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-x})$；　(8) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(1-\frac{1}{2}x^2\right)^{\frac{2}{3}}-1}{x\ln(1+x)}$.

解 (1) $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{x^2-2x+5}=\sqrt{\lim\limits_{x\to 0}(x^2-2x+5)}=\sqrt{5}$.

(2) $\lim\limits_{\alpha\to\frac{\pi}{4}}(\sin 2\alpha)^3=(\lim\limits_{\alpha\to\frac{\pi}{4}}\sin 2\alpha)^3=\left(\sin\dfrac{\pi}{2}\right)^3=1$.

(3) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\ln(2\cos 2x)=\ln(\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}2\cos 2x)=\ln\left(2\cos\dfrac{\pi}{3}\right)=\ln 1=0$.

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\sqrt{x+1}+1}=\dfrac{1}{2}$.

(5) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{5x-4}-\sqrt{x}}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{4}{\sqrt{5x-4}+\sqrt{x}}=2$.

(6) $\lim\limits_{x\to\alpha}\dfrac{\sin x-\sin\alpha}{x-\alpha}=\lim\limits_{x\to\alpha}\dfrac{2\sin\frac{x-\alpha}{2}\cos\frac{x+\alpha}{2}}{x-\alpha}=\lim\limits_{x\to\alpha}\dfrac{\sin\frac{x-\alpha}{2}}{\frac{x-\alpha}{2}}\cdot\lim\limits_{x\to\alpha}\cos\dfrac{x+\alpha}{2}=\cos\alpha$.

(7) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-x})=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x}{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2-x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+\sqrt{1-\frac{1}{x}}}=1$.

(8) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(1-\dfrac{1}{2}x^2\right)^{\frac{2}{3}}-1}{x\ln(1+x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{2}{3}\cdot\left(-\dfrac{1}{2}x^2\right)}{x\cdot x}=-\dfrac{1}{3}$.

评注：本题及下一题求极限中，采用了以下几种常用的方法：

(1)利用极限运算法则；

(2)利用复合函数的连续性，将函数符号与极限符号交换次序；

(3)利用一些初等方法：因式分解，分子或分母有理化，分子分母同乘或除以一个不为零的因子，消去分母中趋于零的因子等；

(4)利用重要极限以及它们的变形；

(5)利用等价无穷小替代.

4. 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}e^{\frac{1}{x}}$；　(2) $\lim\limits_{x\to 0}\ln\dfrac{\sin x}{x}$；　(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{\frac{x}{2}}$；

(4) $\lim\limits_{x\to 0}(1+3\tan^2x)^{\cot^2x}$；　(5) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3+x}{6+x}\right)^{\frac{x-1}{2}}$；　(6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{x\sqrt{1+\sin^2x}-x}$；

(7) $\lim\limits_{x\to e}\dfrac{\ln x-1}{x-e}$；　(8) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{3x}-e^{2x}-e^x+1}{\sqrt[3]{(1-x)(1+x)}-1}$；

(9) $\lim\limits_{x\to\infty}x(e^{\frac{1}{2x}}-1)$；　(10) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}e^{\frac{1}{x-1}}$.

解 (1) $\lim\limits_{x\to\infty}e^{\frac{1}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}}=e^0=1$.

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\ln\dfrac{\sin x}{x}=\ln\left(\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}\right)=\ln 1=0$.

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{\frac{x}{2}}=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x\right]^{\frac{1}{2}}=e^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e}$.

(4) $\lim\limits_{x\to 0}(1+3\tan^2x)^{\cot^2x}=\lim\limits_{x\to 0}[(1+3\tan^2x)^{\frac{1}{3}\cot^2x}]^3=e^3$.

(5) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3+x}{6+x}\right)^{\frac{x-1}{2}}=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1-\dfrac{3}{6+x}\right)^{-\frac{6+x}{3}}\right]^{-\frac{3}{2}}\cdot\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{3}{6+x}\right)^{-\frac{7}{2}}=e^{-\frac{3}{2}}$.

(6)
$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{x\sqrt{1+\sin^2x}-x}&=\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x(\sqrt{1+\sin^2x}-1)(\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x})}\\&=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{\sec x-1}{\sqrt{1+\sin^2x}-1}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x}}\right)\\&=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^2}{\frac{1}{2}\sin^2x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x}}\\&=1\times 1\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

(7) $\lim\limits_{x\to e}\dfrac{\ln x-1}{x-e}\xlongequal{x-e=t}\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\ln(e+t)-\ln e}{t}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\ln\left(1+\dfrac{t}{e}\right)}{t}=\dfrac{1}{e}$.

(8) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{3x}-e^{2x}-e^x+1}{\sqrt[3]{(1-x)(1+x)}-1}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(e^{2x}-1)(e^x-1)}{(1-x^2)^{\frac{1}{3}}-1}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x\cdot x}{-\dfrac{1}{3}x^2}=-6$.

(9) $\lim\limits_{x\to\infty} x\left(e^{\frac{1}{2x}}-1\right) \xlongequal{t=\frac{1}{x}} \lim\limits_{t\to 0}\dfrac{e^{\frac{t}{2}}-1}{t}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\frac{t}{2}}{t}=\dfrac{1}{2}$.

(10) $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x^2-1}{x-1}e^{\frac{1}{x-1}}=\lim\limits_{x\to 1^-}(x+1)e^{\frac{1}{x-1}}=0$，$\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x^2-1}{x-1}e^{\frac{1}{x-1}}=\lim\limits_{x\to 1^+}(x+1)e^{\frac{1}{x-1}}=+\infty$.

所以$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}e^{\frac{1}{x-1}}$不存在且不为$\infty$.

5. 设 $f(x)$在 $\mathbf{R}$ 上连续，且 $f(x)\neq 0$，$\varphi(x)$在 $\mathbf{R}$ 上有定义，且有间断点，则下列陈述中，那些是对的，哪些是错的？如果是对的，说明理由；如果是错的，试给出一个反例.

(1) $\varphi[f(x)]$必有间断点；　　(2) $[\varphi(x)]^2$ 必有间断点；

(3) $f[\varphi(x)]$未必有间断点；　　(4) $\dfrac{\varphi(x)}{f(x)}$必有间断点；

5 题视频解析

解 (1)错. 例如 $\varphi(x)=\operatorname{sgn}x$，$f(x)=e^x$，$\varphi[f(x)]\equiv 1$，在 $\mathbf{R}$ 上处处连续.

(2)错. 例如 $\varphi(x)=\begin{cases}1, & x\in\mathbf{R},\\ -1, & x\in\mathbf{R}^C,\end{cases}$ $[\varphi(x)]^2\equiv 1$ 在 $\mathbf{R}$ 上处处连续.

(3)对. 例如 $\varphi(x)$同(2)，$f(x)=|x|+1$，$f[\varphi(x)]\equiv 2$ 在 $\mathbf{R}$ 上处处连续.

(4)对. 因为，若 $F(x)=\dfrac{\varphi(x)}{f(x)}$在 $\mathbf{R}$ 上处处连续，则 $\varphi(x)=F(x)f(x)$也在 $\mathbf{R}$ 上处处连续，这与已知条件矛盾.

6. 设函数$\begin{cases}e^x, & x<0,\\ a+x & x\geqslant 0,\end{cases}$应当怎样选择数 a，才能使得 $f(x)$成为在$(-\infty,+\infty)$内的连续函数.

6 题视频解析

解 由初等函数的连续性，$f(x)$在$(-\infty,0)$及$(0,+\infty)$内连续，所以要使 $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内连续，只要选择数 a，使 $f(x)$在 $x=0$ 处连续即可.

在 $x=0$ 处，$\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}e^x=1$，　$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(a+x)=a$，　$f(0)=a$，

取 $a=1$，即有 $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=f(0)$，

即 $f(x)$在 $x=0$ 处连续. 于是，选择 $a=1$，$f(x)$就成为在$(-\infty,+\infty)$内的连续函数.

第十节　闭区间上连续函数的性质

一、主要内容归纳

闭区间上连续函数的性质

(1) **最大值和最小值定理**　闭区间上的连续函数必取得最大值和最小值.

(2) **有界性定理**　闭区间上的连续函数在该区间上有界.