第二章　牛顿定律

1．关于惯性有下面四种说法，正确的为：(　　)

A.　物体静止或作匀速运动时才具有惯性；

B.　物体受力作变速运动时才具有惯性；

C.　物体受力作变速运动时才没有惯性；

D.　惯性是物体的一种固有属性，在任何情况下物体均有惯性。

解：答案是 D 。

2．下列四种说法中，正确的为：(　　)

A.　物体在恒力作用下，不可能作曲线运动；

B.　物体在变力作用下，不可能作曲线运动；

C.　物体在垂直于速度方向，且大小不变的力作用下作匀速圆周运动；

D.　物体在不垂直于速度方向的力作用下，不可能作圆周运动；

解：答案是 C。

3．一质点从 t=0 时刻开始，在力 $\boldsymbol{F}_1=3\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}$ (SI) 和 $\boldsymbol{F}_2=-2\boldsymbol{i}-t\boldsymbol{j}$ (SI)的共同作用下在 Oxy 平面上运动，则在 t=2s 时，质点的加速度方向沿　　　(　　)

A.　x 轴正向　　B. x 轴负向　　C. y 轴正向　　D. y 轴负向

解：答案是 A。

合力 $\boldsymbol{F}=\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{F}_2=\boldsymbol{i}+(2-t)\boldsymbol{j}$。在 t=2s 时，力 $\boldsymbol{F}=\boldsymbol{i}$, 沿 x 轴正方向，加速度也沿同一方向。

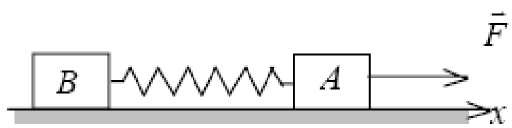
4．一人肩扛一重量为 P 的米袋从高台上往下跳，当其在空中运动时，米袋作用在他肩上的力应为：(　　)

A.　0　　B.　$P/4$　　C.　P　　D.　$P/2$

解：答案是 A。

简要提示：米袋和人具有相同的加速度，因此米袋作用在他肩上的力应为 0。

5．质量分别为m_1 和m_2 的两滑块 A 和B 通过一轻弹簧水平连结后置于水平桌面上，滑块与桌面间的滑动摩擦系数均为μ ，系统在水平拉力F 作用下匀速运动，如图所示．如突然撤消拉力，则刚撤消后瞬间，二者的加速度a_A 和a_B 分别为



选择题 5 图

A.　$a_A=0$，$a_B=0$；　　B. $a_A>0$，$a_B<0$；

C.　$a_A<0$，$a_B>0$　　D. $a_A<0$，$a_B=0$ 。

解：答案是 D。

简要提示：水平拉力刚撤消的瞬间, 滑块 A 受到的合力为弹力和滑动摩擦力，均指向负 x 方向，滑块 B 受到的合力仍然为零。

6. 两个物体 A 和 B 用细线连结跨过电梯内的一个无摩擦的轻定滑轮。已知物体

A 的质量为物体 B 的质量的 2 倍，则当两物体相对电梯静止时，电梯的运动加速度为：(　　　)

A. 大小为 g，方向向上　　　　　　B. 大小为 g，方向向下

C. 大小为 $g/2$，方向向上　　　　　D. 大小为 $g/2$，方向向下

解：答案是 B。

简要提示：设电梯的加速度为 a，方向向下。以地面为参考系，则物体 A 和 B 的动力学方程分别为：

$$2mg - T = 2ma$$

$$mg - T = ma$$

两式相减，得：$a = g$

7. 在足够长的管中装有粘滞液体，放入钢球由静止开始向下运动，下列说法中正确的是：（　　）

A.　钢球运动越来越慢，最后静止不动；

B.　钢球运动越来越慢，最后达到稳定的速度；

C.　钢球运动越来越快，一直无限制地增加；

D.　钢球运动越来越快，最后达到稳定的速度。

解：答案是 D 。

8. 质量为 m 的物体最初位于 x_0 处，在力 $F = -k/x^2$ 作用下由静止开始沿直线运动，k 为一常数，则物体在任一位置 x 处的速度应为（　　　）

A. $\sqrt{\frac{k}{m}(\frac{1}{x}-\frac{1}{x_0})}$　　B. $\sqrt{\frac{2k}{m}(\frac{1}{x}-\frac{1}{x_0})}$　　C. $\sqrt{\frac{3k}{m}(\frac{1}{x}-\frac{1}{x_0})}$　　D. $\sqrt{\frac{k}{m}(\frac{1}{x}-\frac{1}{x_0})}$

解：答案是 B。

简要提示：
$$a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = -\frac{k}{m}\frac{1}{x^2}$$

$$\int_0^v v\mathrm{d}v = \int_{x_0}^x (-\frac{k}{m}\frac{1}{x^2})\mathrm{d}x \qquad \frac{1}{2}v^2 = \frac{k}{m}(\frac{1}{x}-\frac{1}{x_0}),$$

所以
$$v = \sqrt{\frac{2k}{m}(\frac{1}{x}-\frac{1}{x_0})}$$

二 填空题

1. 一质量为 5kg 的物体（视为质点）在平面上运动，其运动学方程为 $\boldsymbol{r}=6\boldsymbol{i}-3t^2\boldsymbol{j}$ (SI)，则物体所受合外力的大小为_____N。

解：答案为：30N

由运动学方程求出物体的加速度 $\boldsymbol{a}=-6\boldsymbol{j}$ (SI)，因此物体所受合外力的大小为 ma=5×6=30 N。

2. 如图所示，一根轻弹簧的两端分别固连着质量相等的两个物体 A 和 B，用轻线将它们悬挂起来，在将线烧断的瞬间，物体 A 的加速度大小是_____ $\mathrm{m\cdot s^{-2}}$，物体 B 的加速度大小是_______$\mathrm{m\cdot s^{-2}}$

解：答案为：$2g$；　0。

简要提示：A 物体 $ma=mg+mg$，∴ $a=2g$。

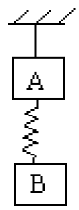
B 物体 $ma=mg-mg$，∴ $a=0$。

3. 如图所示，一细线一端系着质量为 m 的小球，另一端固定于 o 点，可在竖直平面内摆动，将小球拉至水平位置后自由释放，当球摆到与铅直线成θ角的位置时，小球的切向加速度大小为__________；法向加速度大小为________________。

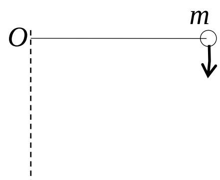
解：答案为：$g\sin\theta$ ； $2g\cos\theta$ 。

简要提示：由受力分析得：切向加速度大小 $a_\tau=g\sin\theta$ ，

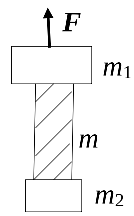
法向加速度大小 $a_n=v^2/l=2g\,l\cos\theta/l=2g\cos\theta$ 。



填空题 2 图



填空题 3 图



填空题 4 图

4. 如图所示，一条重而均匀的钢绳，质量 $m = 4$ kg，连接两物体，$m_1 = 7$ kg，$m_2 = 5$ kg，现用 F=200 N 的力向上作用于 m_1 上，则钢绳中点处的张力为______N。

解：87.5 N 。

简要提示：$a=\dfrac{F-(m+m_1+m_2)g}{m+m_1+m_2}=2.5\mathrm{m\cdot s^{-2}}$，

$$T-(m_2+m/2)g=(m_2+m/2)a\ ,$$

$$T=(m_2+m/2)(g+a)=87.5\,\mathrm{N}$$

5. 一条公路的某处有一水平弯道，弯道半径为 50m，若一辆汽车车轮与地面的静摩擦因数为 0.6，则此车在该弯道处行驶的最大安全速率为___________。

解：答案为 17.1 $\mathrm{m\cdot s^{-1}}$

简要提示：$\dfrac{mv_{\max}^2}{R}=\mu_s mg$，

最大安全速率为

$$v_{\max}=\sqrt{\mu_s Rg}=\sqrt{0.6\times50\times9.8}=17.1\mathrm{m\cdot s^{-1}}$$

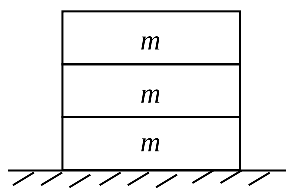
6. 如图所示，堆放着三块完全相同的物体，质量均为 m，设各接触面间的静摩擦因数与滑动摩擦因数也都相同，均为μ 。若要将最底下的一块物体抽出，则作用在其上的水平力 F 至少为________。

解：答案为： $6\mu mg$。

简要提示：对于最下面一块物体，有

$F-2mg\mu-3mg\mu=ma$，

$F=5mg\mu+ma$ 。



填空题 6 图

可以算出上面两块物体因摩擦获得的加速度都是μg，所以若要将最底下的一块物体抽出，则要求 $a>\mu g$。得到：$F \geq 6\mu mg$ 。作用在其上的水平力 F 至少为 $6\mu mg$。

7. 已知月球的质量是地球的 1/81，月球半径为地球半径的 3/11，若不计自转的影响，在地球上体重为 G_1 的一人在月球上的体重约为______________。

解：答案为：$G_1/6$ 。

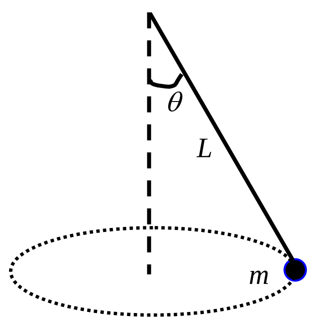
简要提示：人在地球上的重力 $G_1=\dfrac{mm_{地}}{r_1^2}$

人在月球上的重力 $G_2=\dfrac{mm_{月}}{r_2^2}$

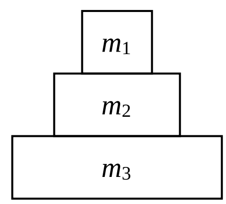
$$\therefore \quad \frac{G_2}{G_1}=\frac{\dfrac{m_{月}}{r_2^2}}{\dfrac{m_{地}}{r_1^2}}=\frac{\dfrac{m_{月}}{m_{地}}}{(\dfrac{r_2^2}{r_1^2})^2}=\frac{\dfrac{1}{81}}{(\dfrac{3}{11})^2}\approx\frac{1}{6}$$

8. 质量为 m 的小球用长为 L 的绳子悬挂着，在水平面内作匀速率圆周运动，如图所示，设转动的角速度为ω，则绳子与竖直方向的夹角θ为__________。

解：答案为：$\arccos(\dfrac{g}{\omega^2 L})$



填空题 8 图



填空题 9 图

简要提示：设绳上张力为 F，由动力学方程

$$F\sin\theta=m\omega^2 L\sin\theta$$

$$F\cos\theta=mg$$

可得： $\cos\theta=\dfrac{g}{\omega^2 L}$， $\theta=\arccos(\dfrac{g}{\omega^2 L})$

9. 如图所示，质量分别为 m_1、m_2 和 m_3 的物体叠放在一起，则当三物体匀速下落时，m_2 受到的合外力大小为__________；当它们自由下落时，m_3 受到的合外力大小为__________；当它们以加速度 a 上升时，m_1 受到的合外力大小为__________；当它们以加速度 a 下降时，三物体系统受到的合外力大小为__________；

解：答案为：0； m_3g； m_1a； $(m_1+m_2+m_3)a$ 。

简要提示：由受力分析和牛顿第二定律可以得到。

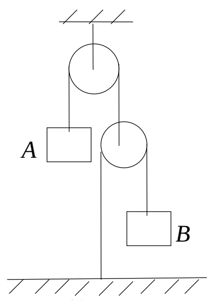
三 计算题

1．如图示，A、B 两物体质量均为 m，用质量不计的定滑轮和细绳连接，并不计摩擦，求 A、B 获得的加速度大小。

解 设悬挂 B 物体细绳上的张力为 F，则悬挂 A 物体细绳上的张力为 $2F$，物体 A 和 B 的运动方程分别为：

$$mg - F = ma_B$$

$$2F - mg = ma_A$$



计算题 1 图

由于在相同的时间内 B 向下运动的距离是 A 向上运动的距离的两倍，故有

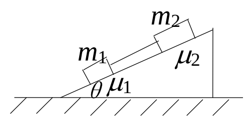
$$a_B = 2a_A$$

由以上三式解得 A 的加速度大小为 $a_A=g/5$，B 的加速度大小为 $a_B= 2g/5$。

2. 如图所示，质量分别为 m_1 和 m_2 的两木块，用一细绳拉紧，沿一倾角为θ且固定的斜面下滑， m_1 和 m_2 与斜面间的滑动摩擦因数分别为μ_1和μ_2，且$\mu_1<\mu_2$，求下滑过程中 m_1 和 m_2 的加速度以及绳子的张力.

解：两物体的运动方程分别为：

$$m_1 g\sin\theta - \mu_1 m_1 g\cos\theta - T = m_1 a_1$$
$$T + m_2 g\sin\theta - \mu_2 m_2 g\cos\theta = m_2 a_2$$
$$a_1 = a_2 \text{。}$$



计算题 2 图

联合求解得到：

$$a_1 = a_2 = g\sin\theta - \frac{\mu_1 m_1 + \mu_2 m_2}{m_1 + m_2} g\cos\theta \text{；}$$

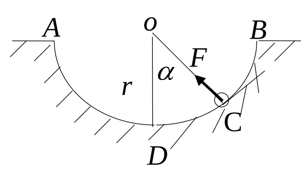
$$T = \frac{(\mu_2 - \mu_2)m_1 m_2}{m_1 + m_2} g\cos\theta \text{ 。}$$

3．一质量为 1.2kg 的质点沿半径为 lm 的圆轨道运动，切向加速度大小恒为 $3\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$，则当该质点速率为 $2\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ 时，试求它所受到的合力大小。

解：答案为 6N

切向加速度大小 $a_t=3$, 法向加速度大小 $a_n=v^2/R=4/1=4$, 故质点的加速度大小 $a=5\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$. 因此它所受到的合力大小 $F=ma=1.2\times5=6$ (N)

4. 如图所示，一质量为 m 的小球最初位于光滑圆形凹槽的 A 点，然后沿圆弧 $ADCB$ 下滑，试求小球在 C 点时的角速度和对圆弧表面的作用力，设圆弧半径为 r 。



计算题 4 图

解：小球在 D 点处角度α=0，开始在 A 点处角度α= $-\pi/2$。设圆弧表面对小球的的作用力为 $\boldsymbol{F}$，在 C 点处由

牛顿第二定律

$$-mg\sin\alpha = m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \qquad (1)$$

$$F - mg\cos\alpha = mr\omega^2 \qquad (2)$$

式（1）左边的负号表示切向力是使速率减小。由式（1）得到

$$g\sin\alpha = -r\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t}.\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}\alpha} = -r\omega\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}\alpha}$$

积分 $$g\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\alpha}\sin\alpha\,\mathrm{d}\alpha = -r\int_0^{\omega}\omega\mathrm{d}\omega$$

$$g\cos\alpha = r\frac{\omega^2}{2}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{2g\cos\alpha}{r}}$$

代入（2） $$F = mg\cos\alpha + mr\frac{2g\cos\alpha}{r} = 3mg\cos\alpha$$

小球对圆弧表面的的作用力与 $\boldsymbol{F}$ 大小相等，方向相反。

5. 一质量为 80 kg 的人乘降落伞下降，向下的加速度为 2.5 $\mathrm{m\cdot s^{-2}}$，降落伞的质量为 2.5 kg，试求空气作用在伞上的力和人作用在伞上的力。

解：（1）由 $(M+m)g - f_r = (M+m)a$，得到

$$f_r = (M+m)(g-a) = (80+2.5)(9.8-2.5) = 602(\mathrm{N})$$，方向向上。

（2）$Mg - T = Ma$，得到

$$T = M(g-a) = 80(9.8-2.5) = 584(\mathrm{N})$$

由牛顿第三定律，人作用在伞上的力

$T' = T = 584\mathrm{N}$，方向向下。

6. 一学生为确定一个盒子与一块平板间的静摩擦因数μ_s和动摩擦因数μ，他将盒子置于平板上，逐渐抬高平板的一端，当板的倾角为 30° 时，盒子开始滑动，并恰好在 4s 内滑下 4m 的距离，试据此求两个摩擦因数。

解：由 $f_s = \mu_s mg\cos\theta$， $f_s - mg\sin\theta = 0$，得到

$$\mu_s = \tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3} = 0.577$$

下滑时 $$mg\sin\theta - \mu mg\cos\theta = ma$$

由匀加速直线运动 $s = \frac{1}{2}at^2$ $a = 2s/t^2 = 0.5\mathrm{m\cdot s^{-2}}$

将上式中 $mg\sin\theta$ 以$f_s = \mu_s mg\cos\theta$ 代入得

$$\mu_s mg\cos\theta - \mu mg\cos\theta = ma$$

$$\mu = \mu_s - \frac{a}{g\cos\theta} = 0.577 - \frac{0.5}{9.8\times 0.866} = 0.52$$

7. 一物块在离地高 1m 的水平桌面上匀变速滑动，当其滑到离桌边 3 m 处时，

速率为 4 m·s^{-1}，然后滑出桌边落地，其着地点距桌边 1m，求物块与桌面间的滑动摩擦因数.

解：物块滑离桌面后做平抛运动，则离开桌边的速率为

$$v=\frac{x}{t}=x\sqrt{\frac{g}{2h}}$$

从起始点滑到桌边，物体做匀变速直线运动，其加速度 $a=\dfrac{v^2-v_0{}^2}{2s}$

由牛顿第二定律

$$-\mu mg=ma$$

得

$$\mu=-\frac{a}{g}=-\frac{1}{2gs}\left(\frac{g}{2h}x^2-v_0{}^2\right)$$

将 v_0 = 4 m· s^{-1}， s =3m， x =1m， h =1m， g = 9.8 m· s^{-2}，代入算得μ =0.19.

8．地球的半径 R = 6.4×10^3 km，地面上的重力加速度 $g=Gm_ER^2$ =9.8 m · s^{-2}，其中 G 为引力常量，m_E 为地球质量，求证地球同步卫星离地高度应为 3.6×10^4 km。

证明：设卫星质量为 m，离地心距离为 R_s，则其离地高度为 $H=R_s-R$ 。故有

$$m\omega^2 R_s = G\,m_E\,m / R_s^2 \qquad (\omega\text{为地球自转角速度})$$

$$R_s{}^3=G\frac{m_E}{\omega^2}=\frac{Gm_E}{R^2}\cdot\frac{R^2}{\omega^2}=g\frac{R^2}{\omega^2}$$

得 $$R_s=\left(g\frac{R^2}{\omega^2}\right)^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{9.8\times\frac{(6.4\times10^6)^2}{(2\pi/86400)^2}}\approx4.23\times10^7\,(\text{m})$$

所以： $$H=R_s-R=(42.3-6.4)\times10^3=3.6\times10^4\,(\text{km})$$

9. 质量为 m 的质点，原来静止，在一变力作用下运动，该力方向恒定，大小随时间变化，关系为 $F=F_0[1-(t-T)/T]$，其中 F_0、T 为恒量，求经过 2T 时间后质点的速度。

解：由牛顿第二定律，有：

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=F_0\left(2-\frac{t}{T}\right), \qquad \mathrm{d}v=\frac{F_0}{m}\left(2-\frac{t}{T}\right)\mathrm{d}t,$$

两边积分得： $$v=\int_0^{2T}\frac{F_0}{m}\left(2-\frac{t}{T}\right)\mathrm{d}t=\frac{2F_0T}{m}$$

10. 质量为 0.25kg 的质点，受 $\boldsymbol{F}=t\boldsymbol{i}$（N）的力作用，$t$=0 时该质点以 $\boldsymbol{v}_0=2\boldsymbol{j}$（m·s^{-1}）的速度通过坐标原点，求该质点任意时刻的位置矢量.

解：根据牛顿定律 $\boldsymbol{F}=m\boldsymbol{a}$，有质点加速度 $\boldsymbol{a}=\dfrac{\boldsymbol{F}}{m}=4t\boldsymbol{i}$

由题意 t=0 时，$\boldsymbol{r}_0=0$，$\boldsymbol{v}_0=2\boldsymbol{j}$，因此质点为 $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}_0+\int_0^t \boldsymbol{a}\mathrm{d}t=2t^2\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}$

任意时刻质点的位置矢量为 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_0+\int_0^t \boldsymbol{v}\mathrm{dt}=\dfrac{2}{3}t^3\boldsymbol{i}+2t\boldsymbol{j}$

11. 质量 $m=10\mathrm{kg}$ 的物体沿 x 轴无摩擦地运动，设 $t=0$ 时，物体位于原点，速度为零。试求物体在外力 $F=4+3x$ 作用下，运动了 5 m 时的速度。

解：已知：$x_0=0$，$v_0=0$，所以由牛顿运动定律

$$a=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}=F/m=\frac{4+3x}{m},$$

得
$$v\,\mathrm{d}v=\frac{4+3x}{m}\mathrm{d}x$$

两边积分
$$\int_0^v v\,\mathrm{d}v=\int_0^5\frac{4+3x}{m}\mathrm{d}x$$

解得
$$v=3.4\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$$

12. 一质量为 m 的小球，从高出水面 h 处的 A 点自由下落，已知小球在水中受到的粘滞阻力与小球的运动速度 v 成正比，设小球在水中受到的浮力可忽略不计，如以小球恰好垂直落入水中时为计时起点（t=0），试求小球在水中的运动 v 随时间 t 变化的关系式。

解：由牛顿第二定律 $m\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=mg-kv$，得到 $\mathrm{d}t=\dfrac{m\mathrm{d}v}{mg-kv}$

两边积分得：
$$\int_0^t\mathrm{d}t=\int_{v_0}^v\frac{m\mathrm{d}v}{mg-kv}=-\frac{m}{k}\int_{v_0}^v\frac{\mathrm{d}(mg-kv)}{mg-kv}$$

$$\therefore\quad t=-\frac{m}{k}\ln(mg-kv)\Big|_{v_o}^{v}=\frac{m}{k}\ln\frac{mg-kv_0}{mg-kv}$$

故
$$v=\frac{mg}{k}(1-e^{-\frac{k}{m}t})+v_0e^{-\frac{k}{m}t}$$

因
$$v_0=\sqrt{2gh}$$

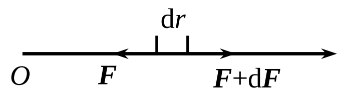
所以
$$v=\frac{mg}{k}(1-e^{-\frac{k}{m}t})+\sqrt{2gh}e^{-\frac{k}{m}t}$$

13. 一条均匀的绳子，质量为 m，长度为 L，一端拴在转轴上，并以匀角速度 ω 旋转，忽略绳子的重力，求距离转轴 r 处绳子的张力。

解：取径向向外为坐标轴的正方向，如图所示，在绳子上取一微元 $\mathrm{d}r$，由牛顿

第二定律：

$$\mathrm{d}F = -\mathrm{d}m\omega^2 r = -m\omega^2 r\mathrm{d}r / L$$



注意绳子末端是自由端，受力为零，所以两边积分：

$$\int_0^F \mathrm{d}F = -\int_L^r m\omega^2 r\mathrm{d}r / L$$

得： $$F = \frac{m\omega^2}{2L}(L^2 - r^2)$$