$$\lim_{x\to+\infty}\int_x^{x+2} t\cdot\sin\frac{3}{t}\cdot f(t)\mathrm{d}t=2\lim_{\xi\to+\infty}\xi\cdot\sin\frac{3}{\xi}\cdot f(\xi)=2\lim_{\xi\to+\infty}f(\xi)\cdot\frac{\sin\frac{3}{\xi}}{\frac{3}{\xi}}\cdot 3=6.$$

习题 5—1 解答

*1. 利用定积分定义计算由抛物线 $y=x^2+1$、两直线 $x=a$、$x=b(b>a)$ 及 x 轴所围成的图形的面积.

解 由于函数 $f(x)=x^2+1$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，因此可积，为计算方便，不妨把 $[a,b]$ 分成 n 等份，则分点为 $x_i=a+\frac{i(b-a)}{n}(i=0,1,2,\cdots,n)$，每个小区间长度为 $\Delta x_i=\frac{b-a}{n}$，取 ξ_i 为小区间的右端点 x_i，则

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i&=\sum_{i=1}^{n}\left[\left(a+\frac{i(b-a)}{n}\right)^2+1\right]\frac{b-a}{n}\\&=\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n}(a^2+1)+2\frac{a(b-a)^2}{n^2}\sum_{i=1}^{n}i+\frac{(b-a)^3}{n^3}\sum_{i=1}^{n}i^2\\&=(b-a)(a^2+1)+a(b-a)^2\frac{n+1}{n}+(b-a)^3\frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2},\end{aligned}$$

当 $n\to\infty$ 时，上式极限为

$$(b-a)(a^2+1)+a(b-a)^2+\frac{1}{3}(b-a)^3=\frac{b^3-a^3}{3}+b-a,$$

即为所求图形的面积.

*2. 利用定积分定义计算下列积分：

(1) $\int_a^b x\mathrm{d}x\ (a<b)$；　　(2) $\int_0^1 \mathrm{e}^x\mathrm{d}x$.

解 由于被积函数在积分区间上连续，因此把积分区间分成 n 等份，并取 ξ_i 为小区间的右端点，得到

(1) $$\begin{aligned}\int_a^b x\mathrm{d}x&=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left[a+\frac{i(b-a)}{n}\right]\frac{b-a}{n}=\lim_{n\to\infty}\left[a(b-a)+\frac{(b-a)^2}{n^2}\frac{n(n+1)}{2}\right]\\&=a(b-a)+\frac{(b-a)^2}{2}=\frac{b^2-a^2}{2}.\end{aligned}$$

(2) $$\int_0^1\mathrm{e}^x\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\mathrm{e}^{\frac{i}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}(\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}+\mathrm{e}^{\frac{2}{n}}+\cdots+\mathrm{e}^{\frac{n}{n}})=\lim_{n\to\infty}\frac{(\mathrm{e}^{\frac{1}{n}})^{n+1}-\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}}{n(\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}-1)}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}(\mathrm{e}-1)}{\lim\limits_{n\to\infty}n(\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}-1)}=\mathrm{e}-1.$$

其中 $\lim\limits_{n\to\infty}n(\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}-1)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}}=1.$

3. 利用定积分的几何意义，证明下列等式：

(1) $\int_0^1 2x\mathrm{d}x=1$；　(2) $\int_0^1\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{4}$；　(3) $\int_{-\pi}^{\pi}\sin x\mathrm{d}x=0$；　(4) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos x\mathrm{d}x=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\mathrm{d}x$.

解 (1)根据定积分的几何意义，定积分 $\int_0^1 2x\mathrm{d}x$ 表示由直线 $y=2x$、$x=1$ 及 x 轴围成的图形的面积，该图形是三角形，如图 5—1 所示，底边长为 1，高为 2，因此面积为 1，即 $\int_0^1 2x\mathrm{d}x=1$.

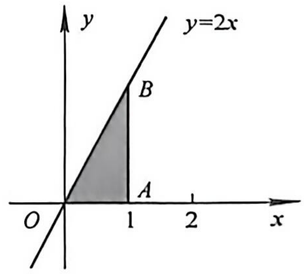

图 5—1

(2)根据定积分的几何意义，定积分 $\int_0^1\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x$ 表示由曲线 $y=\sqrt{1-x^2}$ 以及 x 轴、y 轴围成的在第Ⅰ象限内的图形面积，即单位圆

的四分之一的图形，如图 5－2 所示，因此有 $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx=\frac{\pi}{4}$.

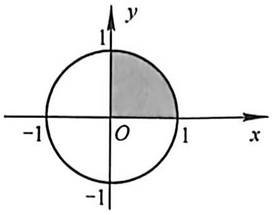

图 5－2

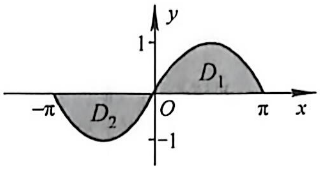

图 5－3

(3)由于函数 $y=\sin x$ 在区间$[0,\pi]$上非负，在区间$[-\pi,0]$上非正. 根据定积分的几何意义，定积分 $\int_{-\pi}^{\pi}\sin x\,dx$ 表示曲线 $y=\sin x(x\in[0,\pi])$与 x 轴所围成的图形 D_1 的面积减去曲线 $y=\sin x(x\in[-\pi,0])$与 x 轴所围成的图形 D_2 的面积，如图 5－3 所示，显然图形 D_1 与 D_2 的面积是相等的，因此有 $\int_{-\pi}^{\pi}\sin x\,dx=0$.

(4)由于函数 $y=\cos x$ 在区间$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$上非负，根据定积分的几何意义，定积分 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx$ 表示曲线 $y=\cos x\left(x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\right)$与 x 轴和 y 轴所围成的图形 D_1 的面积加上曲线 $y=\cos x\left(x\in\left[-\frac{\pi}{2},0\right]\right)$与 x 轴和 y 轴所围成的图形 D_2 的面积，如图 5－4所示，而图形 D_1 的面积与图形 D_2 的面积显然相等，因此有 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx$.

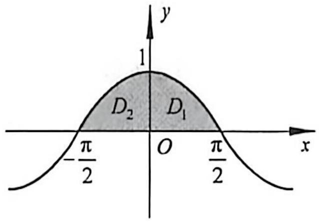

图 5－4

4. 利用定积分的几何意义，求下列积分：

(1) $\int_0^t x\,dx(t>0)$；　(2) $\int_{-2}^{4}\left(\frac{x}{2}+3\right)dx$；　(3) $\int_{-1}^{2}|x|\,dx$；　(4) $\int_{-3}^{3}\sqrt{9-x^2}\,dx$.

解 (1)根据定积分的几何意义，$\int_0^t x\,dx$ 表示由直线 $y=x$，$x=t$ 以及 x 轴围成的直角三角形的面积，如图 5－5 所示，该直角三角形的两条直角边的长均为 t，因此面积为$\frac{t^2}{2}$，故有 $\int_0^t x\,dx=\frac{t^2}{2}$.

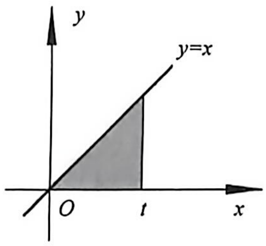

图 5－5

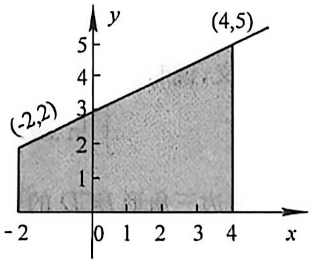

图 5－6

(2)根据定积分的几何意义，$\int_{-2}^{4}\left(\frac{x}{2}+3\right)dx$ 表示的是由直线 $y=\frac{x}{2}+3$，$x=-2$，$x=4$ 以及 x 轴所围成的梯形的面积，如图 5－6 所示，该梯形的两底长分别为$\frac{-2}{2}+3=2$ 和$\frac{4}{2}+3=5$，梯形的高为 $4-(-2)=6$，因此面积为 21，故有 $\int_{-2}^{4}\left(\frac{x}{2}+3\right)dx=21$.

(3)根据定积分的几何意义，$\int_{-1}^{2}|x|\,dx$ 表示的是由直线 $y=|x|$，$x=-1$，$x=2$ 以及 x 轴所围成的图

形的面积，如图 5—7 所示，该图形由两个等腰直角三角形组成，分别由直线 $y=-x$，$x=-1$ 和 x 轴所围成，其直角边长为 1，面积为 $\frac{1}{2}$；由直线 $y=x$，$x=2$ 和 x 轴所围成，其直角边长为 2，面积为 2. 因此 $\int_{-1}^{2}|x|\mathrm{d}x=\frac{5}{2}$.

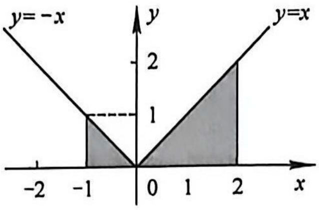

图 5—7

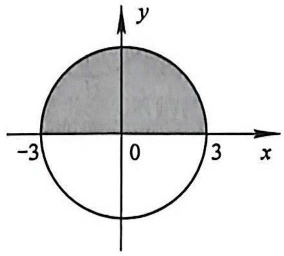

图 5—8

(4)根据定积分的几何意义，$\int_{-3}^{3}\sqrt{9-x^2}\,\mathrm{d}x$ 表示的是由上半圆周 $y=\sqrt{9-x^2}$ 以及 x 轴所围成的半圆的面积，如图 5—8 所示，因此有 $\int_{-3}^{3}\sqrt{9-x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{9}{2}\pi$.

5. 设 $a<b$，问 a,b 取什么值时，积分 $\int_{a}^{b}(x-x^2)\mathrm{d}x$ 取得最大值？

5 题视频解析

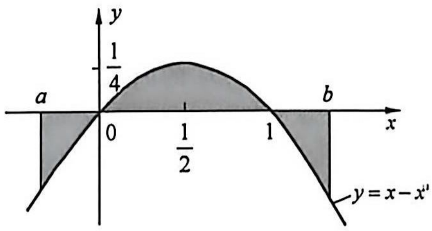

图 5—9

解 根据定积分的几何意义，$\int_{a}^{b}(x-x^2)\mathrm{d}x$ 表示的是由 $y=x-x^2$，$x=a$，$x=b$，以及 x 轴所围成的图形在 x 轴上方部分的面积减去 x 轴下方部分的面积，如图 5—9 所示. 因此只有当下方部分面积为 0，上方部分面积为最大时，$\int_{a}^{b}(x-x^2)\mathrm{d}x$ 的值才最大，即当 $a=0$，$b=1$ 时，积分 $\int_{a}^{b}(x-x^2)\mathrm{d}x$ 取得最大值.

6. 试从定积分的几何意义，说明以下等式成立：

$$\int_{1}^{e}\ln x\,\mathrm{d}x+\int_{0}^{1}e^{x}\,\mathrm{d}x=e.$$

6 题视频解析

解 $\int_{1}^{e}\ln x\,\mathrm{d}x$ 表示曲边三角形 BCD 的面积，

$\int_{0}^{1}e^{x}\,\mathrm{d}x$ 表示曲边梯形 $OABD$ 的面积，

所以 $\int_{1}^{e}\ln x\,\mathrm{d}x+\int_{0}^{1}e^{x}\,\mathrm{d}x$ 等于矩形 $OABC$ 的面积 e.

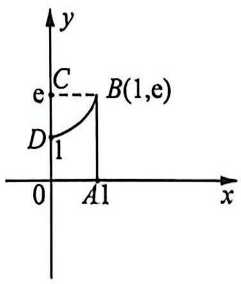

图 5—10

7. 已知 $\ln 2=\int_{0}^{1}\frac{1}{1+x}\mathrm{d}x$，试用抛物线法公式(1—6)，求出 ln 2 的近似值(取 $n=10$，计算时取 4 位小数).

解 计算 y_i 并列表

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	0.000 0	0.100 0	0.200 0	0.300 0	0.400 0	0.500 0	0.600 0	0.700 0	0.800 0	0.900 0	1.000 0
y_i	1.000 0	0.909 1	0.833 3	0.769 2	0.714 3	0.666 7	0.625 0	0.588 2	0.555 6	0.526 3	0.500 0

按抛物线法公式(1−6),求得

$$s=\frac{1}{30}[(y_0+y_{10})+2(y_2+y_4+y_6+y_8)+4(y_1+y_3+y_5+y_7+y_9)]\approx 0.6931.$$

8. 设 $\int_{-1}^{1}3f(x)\mathrm{d}x=18$, $\int_{-1}^{3}f(x)\mathrm{d}x=4$, $\int_{-1}^{3}g(x)\mathrm{d}x=3$. 求:

(1) $\int_{-1}^{1}f(x)\mathrm{d}x$; (2) $\int_{1}^{3}f(x)\mathrm{d}x$;

(3) $\int_{3}^{-1}g(x)\mathrm{d}x$; (4) $\int_{-1}^{3}\frac{1}{5}[4f(x)+3g(x)]\mathrm{d}x$.

解 (1) $\int_{-1}^{1}f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\int_{-1}^{1}3f(x)\mathrm{d}x=6$.

(2) $\int_{1}^{3}f(x)\mathrm{d}x=\int_{-1}^{3}f(x)\mathrm{d}x-\int_{-1}^{1}f(x)\mathrm{d}x=-2$.

(3) $\int_{3}^{-1}g(x)\mathrm{d}x=-\int_{-1}^{3}g(x)\mathrm{d}x=-3$.

(4) $\int_{-1}^{3}\frac{1}{5}[4f(x)+3g(x)]\mathrm{d}x=\frac{4}{5}\int_{-1}^{3}f(x)\mathrm{d}x+\frac{3}{5}\int_{-1}^{3}g(x)\mathrm{d}x=5$.

9. 证明定积分的性质:

(1) $\int_{a}^{b}kf(x)\mathrm{d}x=k\int_{a}^{b}f(x)\mathrm{d}x$ (k 是常数); (2) $\int_{a}^{b}1\mathrm{d}x=\int_{a}^{b}\mathrm{d}x=b-a$.

证 根据定积分的定义,在区间$[a,b]$中插入 $n-1$ 个点 $a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b$,记 $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$,任取 $\xi_i\in[x_{i-1},x_i]$,则

(1) $\int_{a}^{b}kf(x)\mathrm{d}x=\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}kf(\xi_i)\Delta x_i=k\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i=k\int_{a}^{b}f(x)\mathrm{d}x$.

(2) $\int_{a}^{b}1\mathrm{d}x=\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}\Delta x_i=\lim\limits_{\lambda\to 0}(b-a)=b-a$.

10. 估计下列各积分的值:

(1) $\int_{1}^{4}(x^2+1)\mathrm{d}x$; (2) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}}(1+\sin^2 x)\mathrm{d}x$; (3) $\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}}x\arctan x\mathrm{d}x$; (4) $\int_{2}^{0}\mathrm{e}^{x^2-x}\mathrm{d}x$.

解 (1)在$[1,4]$上,$2\leqslant x^2+1\leqslant 17$,因此有

$$6=\int_{1}^{4}2\mathrm{d}x\leqslant\int_{1}^{4}(x^2+1)\mathrm{d}x\leqslant\int_{1}^{4}17\mathrm{d}x=51.$$

(2)在$[\frac{1}{4}\pi,\frac{5}{4}\pi]$上,$1=1+0\leqslant 1+\sin^2 x\leqslant 1+1=2$,因此有

$$\pi=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5}{4}\pi}\mathrm{d}x\leqslant\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5}{4}\pi}(1+\sin^2 x)\mathrm{d}x\leqslant\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5}{4}\pi}2\mathrm{d}x=2\pi.$$

(3)在$[\frac{1}{\sqrt{3}},\sqrt{3}]$上,函数 $f(x)=x\arctan x$ 是单调增加的,因此

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\leqslant f(x)\leqslant f(\sqrt{3}),\quad 即\quad \frac{\pi}{6\sqrt{3}}\leqslant x\arctan x\leqslant\frac{\pi}{\sqrt{3}},$$

故有$\frac{\pi}{9}=\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}}\frac{\pi}{6\sqrt{3}}\mathrm{d}x\leqslant\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}}x\arctan x\mathrm{d}x\leqslant\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}}\frac{\pi}{\sqrt{3}}\mathrm{d}x=\frac{2}{3}\pi$.

(4)设$f(x)=x^2-x$, $x\in[0,2]$,则 $f'(x)=2x-1$, $f(x)$在$[0,2]$上的最大值、最小值必为 $f(0)$、

$f(\frac{1}{2})$、$f(2)$中的最大值和最小值，即最大值和最小值分别为 $f(2)=2$ 和 $f(\frac{1}{2})=-\frac{1}{4}$，因此有

$$2e^{-\frac{1}{4}}=\int_0^2 e^{-\frac{1}{4}}dx\leqslant\int_0^2 e^{x^2-x}dx\leqslant\int_0^2 e^2dx=2e^2,$$

而 $\int_2^0 e^{x^2-x}dx=-\int_0^2 e^{x^2-x}dx$，故 $-2e^2\leqslant\int_2^0 e^{x^2-x}dx\leqslant-2e^{-\frac{1}{4}}$.

11. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，证明 $\int_0^1 f^2(x)dx\geqslant\left(\int_0^1 f(x)dx\right)^2$.

11 题视频解析

证 记 $a=\int_0^1 f(x)dx$，则由定积分性质 4 得 $\int_0^1[f(x)-a]^2dx\geqslant0$.

即 $\int_0^1[f(x)-a]^2dx=\int_0^1 f^2(x)dx-2a\int_0^1 f(x)dx+a^2=\int_0^1 f^2(x)dx-\left[\int_0^1 f(x)dx\right]^2$ $\geqslant0$,

由此结论成立.

12. 设 $f(x)$ 及 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，证明：

12 题视频解析

(1)若在 $[a,b]$ 上，$f(x)\geqslant0$，且 $f(x)\not\equiv0$，则 $\int_a^b f(x)dx>0$；

(2)若在 $[a,b]$ 上，$f(x)\geqslant0$，且 $\int_a^b f(x)dx=0$，则在 $[a,b]$ 上 $f(x)\equiv0$；

(3)若在 $[a,b]$ 上，$f(x)\leqslant g(x)$，且 $\int_a^b f(x)dx=\int_a^b g(x)dx$，则在 $[a,b]$ 上 $f(x)\equiv g(x)$.

证 (1)根据条件必定存在 $x_0\in[a,b]$，使得 $f(x_0)>0$. 由函数 $f(x)$ 在 x_0 连续可知，存在 $a\leqslant\alpha<\beta\leqslant b$，使得当 $x\in[\alpha,\beta]$ 时 $f(x)>\frac{f(x_0)}{2}$. 因此有 $\int_a^b f(x)dx=\int_a^\alpha f(x)dx+\int_\alpha^\beta f(x)dx+\int_\beta^b f(x)dx$,

由定积分性质得到：

$$\int_a^\alpha f(x)dx\geqslant0,\quad \int_\alpha^\beta f(x)dx>\int_\alpha^\beta\frac{f(x_0)}{2}dx=\frac{\beta-\alpha}{2}f(x_0)>0,\quad \int_\beta^b f(x)dx\geqslant0,$$

故得到结论 $\int_a^b f(x)dx>0$.

(2)用反证法. 如果 $f(x)\not\equiv0$，则由(1)得到 $\int_a^b f(x)dx>0$，与假设条件矛盾，因此 $f(x)\equiv0$.

(3)令 $h(x)=g(x)-f(x)$，则 $h(x)\geqslant0$，且 $\int_a^b h(x)dx=\int_a^b g(x)dx-\int_a^b f(x)dx=0$,

由(1)可得在 $[a,b]$ 上 $h(x)\equiv0$，从而结论成立.

13. 根据定积分的性质及第 12 题的结论，说明下列各对积分哪一个的值较大：

(1) $\int_0^1 x^2dx$ 还是 $\int_0^1 x^3dx$？　(2) $\int_1^2 x^2dx$ 还是 $\int_1^2 x^3dx$？

(3) $\int_1^2\ln x\,dx$ 还是 $\int_1^2(\ln x)^2dx$？　(4) $\int_0^1 x\,dx$ 还是 $\int_0^1\ln(1+x)dx$？

(5) $\int_0^1 e^xdx$ 还是 $\int_0^1(1+x)dx$？

解 (1)在 $[0,1]$ 上 $x^2\geqslant x^3$，因此 $\int_0^1 x^2dx$ 比 $\int_0^1 x^3dx$ 大.

(2)在 $[1,2]$ 上 $x^2\leqslant x^3$，因此 $\int_1^2 x^3dx$ 比 $\int_1^2 x^2dx$ 大.

(3)在 $[1,2]$ 上由于 $0\leqslant\ln x\leqslant1$，得 $\ln x\geqslant(\ln x)^2$，因此 $\int_1^2\ln x\,dx$ 比 $\int_1^2(\ln x)^2dx$ 大.

(4)由于当 $x>0$ 时，$\ln(1+x)<x$，因此 $\int_0^1 x\,dx$ 比 $\int_0^1\ln(1+x)dx$ 大.

(5)由于当 $x>0$ 时 $\ln(1+x)<x$，故此时有 $1+x<e^x$，因此 $\int_0^1 e^xdx$ 比 $\int_0^1(1+x)dx$ 大.