习题 1—10 解答

1. 假设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[0,1]$ 连续，并且对 $[0,1]$ 上任一点 x 有 $0 \leqslant f(x) \leqslant 1$. 试证明 $[0,1]$ 中必存在一点 c，使得 $f(c)=c$（c 称为函数 $f(x)$ 的不动点）.

证 设 $F(x)=f(x)-x$，则 $F(0)=f(0) \geqslant 0$，$F(1)=f(1)-1 \leqslant 0$.

若 $F(0)=0$ 或 $F(1)=0$，则 0 或 1 即为 $f(x)$ 的不动点；若 $F(0) \geqslant 0$ 且 $F(1)<0$，则由零点定理，必存在 $c \in (0,1)$，使 $F(c)=0$，即 $f(c)=c$，这时 c 为 $f(x)$ 的不动点.

2. 证明方程 $x^5-3x=1$ 至少有一个根介于 1 和 2 之间.

证 设 $f(x)=x^5-3x-1$，则 $f(x)$ 在闭区间 $[1,2]$ 上连续，且 $f(1)=-3<0$，$f(2)=25>0$. 由零点定理，即知 $\exists\, \xi \in (1,2)$，使 $f(\xi)=0$，ξ 即为方程的根.

3. 证明方程 $x=a\sin x+b$，其中 $a>0$，$b>0$，至少有一个正根，并且它不超过 $a+b$.

证 设 $f(x)=x-a\sin x-b$，则 $f(x)$ 在闭区间 $[0,a+b]$ 上连续，且 $f(0)=-b<0$，$f(a+b)=a[1-\sin(a+b)]$，当 $\sin(a+b)<1$ 时，$f(a+b)>0$. 由零点定理，即知 $\exists\, \xi \in (0,a+b)$，使 $f(\xi)=0$，即 ξ 为原方程的根，它是正根且不超过 $a+b$，当 $\sin(a+b)=1$ 时，$f(a+b)=0$，$a+b$ 就是满足条件的正根.

4. 证明任一最高次幂的指数为奇数的代数方程 $a_0x^{2n+1}+a_1x^{2n}+\cdots+a_{2n}x+a_{2n+1}=0$ 至少有一实根，其中 $a_0, a_1, \cdots, a_{2n+1}$ 均为常数，$n \in \mathbf{N}$.

4 题视频解析

证 不妨设 $a_0>0$. 由 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x^{2n+1}\left(a_0+\dfrac{a_1}{x}+\cdots+\dfrac{a_{2n}}{x^{2n}}+\dfrac{a_{2n+1}}{x^{2n+1}}\right)=+\infty$，

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} x^{2n+1}\left(a_0+\frac{a_1}{x}+\cdots+\frac{a_{2n}}{x^{2n}}+\frac{a_{2n+1}}{x^{2n+1}}\right)=-\infty,$$

可知，存在 $x_1<0$，使 $f(x_1)<0$，存在 $x_2>0$，使 $f(x_2)>0$. 又 $f(x)$ 在 $[x_1,x_2]$ 上连续. 由零点定理，存在 $\xi \in (x_1,x_2)$，使 $f(\xi)=0$，故方程 $f(x)=0$ 至少有一实根.

5. 证明：方程 $x^3+2x^2-4x-1=0$ 有三个实根.

证 令 $f(x)=x^3+2x^2-4x-1$，则 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，

又 $f(-4)=-17<0, f(-2)=7>0, f(0)=-1<0, f(3)=22>0$.

由零点定理知 $f(x)=0$ 在 $(-4,-2)$，$(-2,0)$，$(0,3)$ 内各至少有一个根，又 $f(x)=0$ 为三次方程，故方程 $x^3+2x^2-4x-1=0$ 有三个实根.

6. 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，$a<x_1<x_2<\cdots<x_n<b\,(n \geqslant 3)$，则在 (x_1,x_n) 内至少有一点 ξ，使

$$f(\xi)=\frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n}.$$

6 题视频解析

证 因为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，又 $[x_1,x_n] \subset [a,b]$，所以 $f(x)$ 在 $[x_1,x_n]$ 上连续. 设

$$M=\max\{f(x) \mid x_1 \leqslant x \leqslant x_n\}, \qquad m=\min\{f(x) \mid x_1 \leqslant x \leqslant x_n\},$$

则
$$m \leqslant \frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n} \leqslant M.$$

若上述不等式中为严格不等号，则由介值定理知，$\exists\, \xi \in (x_1,x_n)$ 使 $f(\xi)=\dfrac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n}$；

若上述不等式中出现等号，如 $m=\dfrac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n}$，

则有 $f(x_1)=f(x_2)=\cdots=f(x_n)=m$，任取 $x_2,\cdots,x_{n-1}$ 中一点作为 ξ，即有 $\xi \in (x_1,x_n)$，使

$$f(\xi)=\frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n}.$$

如
$$\frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n}=M,$$

同理可证.

* 7. 设函数 $f(x)$ 对于闭区间 $[a,b]$ 上的任意两点 x、y，恒有 $|f(x)-f(y)|\leqslant L|x-y|$，其中 L 为正常数，且 $f(a)f(b)<0$. 证明：至少有一点 $\xi\in(a,b)$，使得 $f(\xi)=0$.

7 题视频解析

证 任取 $x_0\in(a,b)$，$\forall\varepsilon>0$，取 $\delta=\min\left\{\frac{\varepsilon}{L},x_0-a,\ b-x_0\right\}$，则当 $|x-x_0|<\delta$ 时，由假设

$$|f(x)-f(x_0)|\leqslant L|x-x_0|<L\delta\leqslant\varepsilon,$$

所以 $f(x)$ 在 x_0 连续. 由 $x_0\in(a,b)$ 的任意性知，$f(x)$ 在 (a,b) 内连续.

当 $x_0=a$ 或 $x_0=b$ 时，取 $\delta=\frac{\varepsilon}{L}$，并将 $|x-x_0|<\delta$ 换成 $x\in[a,a+\delta)$ 或 $x\in(b-\delta,b]$，便可知 $f(x)$ 在 $x=a$ 右连续，在 $x=b$ 左连续. 从而 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续.

又由假设 $f(a)f(b)<0$，由零点定理即知 $\exists\,\xi\in(a,b)$，使得 $f(\xi)=0$.

* 8. 证明：若 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，且 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$ 存在，则 $f(x)$ 必在 $(-\infty,+\infty)$ 内有界.

证 设 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$，则对 $\varepsilon=1>0$，$\exists\,X>0$，当 $|x|>X$ 时，有

$$|f(x)-A|<1\Rightarrow|f(x)|\leqslant|f(x)-A|+|A|<|A|+1.$$

又，$f(x)$ 在 $[-X,X]$ 上连续，利用有界性定理，得：$\exists\,M>0$，对 $\forall\,x\in[-X,X]$，有 $|f(x)|\leqslant M$. 取 $M'=\max\{M,|A|+1\}$，即有 $|f(x)|\leqslant M'$，$\forall\,x\in(-\infty,+\infty)$.

* 9. 在什么条件下，(a,b) 内的连续函数 $f(x)$ 为一致连续？

解 若 $f(a+0)$、$f(b-0)$ 均存在，设 $F(x)=\begin{cases}f(a+0), & x=a,\\ f(x), & x\in(a,b),\\ f(b-0), & x=b.\end{cases}$

易证 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，从而 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致连续，也就有 $F(x)$ 在 (a,b) 内一致连续，即 $f(x)$ 在 (a,b) 内一致连续.