不可导.

又 $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} x^{2x}=e^{\lim\limits_{x\to 0^+} 2x\ln x}=e^0=1=f(0)=\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$，

故 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续但不可导.

综上所述，$f'(x)=\begin{cases} x^{2x}(2\ln x+2), & x>0, \\ (1+x)e^x, & x<0. \end{cases}$

令 $f'(x)=0$，得驻点为 $x=\dfrac{1}{e}$，-1.

对驻点 $x=\dfrac{1}{e}$，当 $x>\dfrac{1}{e}$ 时，$f'(x)>0$；当 $0<x<\dfrac{1}{e}$ 时，$f'(x)<0$. 故 $f(x)$ 在 $x=\dfrac{1}{e}$ 处取极小值 $f\left(\dfrac{1}{e}\right)=\left(\dfrac{1}{e}\right)^{\frac{2}{e}}$.

对驻点 $x=-1$，当 $x<-1$ 时，$f'(x)<0$；当 $-1<x<0$ 时，$f'(x)>0$，故 $f(x)$ 在 $x=-1$ 处取极小值 $f(-1)=1-\dfrac{1}{e}$.

对不可导点 $x=0$，当 $-1<x<0$ 时，$f'(x)>0$；当 $0<x<\dfrac{1}{e}$ 时，$f'(x)<0$，且 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续. 故 $f(x)$ 在 $x=0$ 处取极大值 $f(0)=1$.

习题 3—5 解答

1. 求下列函数的极值：

(1) $y=2x^3-6x^2-18x+7$；

(2) $y=x-\ln(1+x)$；

(3) $y=-x^4+2x^2$；

(4) $y=x+\sqrt{1-x}$；

(5) $y=\dfrac{1+3x}{\sqrt{4+5x^2}}$；

(6) $y=\dfrac{3x^2+4x+4}{x^2+x+1}$；

(7) $y=e^x\cos x$；

(8) $y=x^{\frac{1}{x}}$；

(9) $y=3-2(x+1)^{\frac{1}{3}}$；

(10) $y=x+\tan x$.

解 (1) $y'=6x^2-12x-18$，　$y''=12x-12$.　令 $y'=0$ 得驻点 $x_1=-1$，$x_2=3$.

由 $y''\Big|_{x=-1}=-24<0$ 知 $y\Big|_{x=-1}=17$ 为极大值；

由 $y''\Big|_{x=3}=24>0$ 知 $y\Big|_{x=3}=-47$ 为极小值.

(2) 函数的定义域为 $(-1,+\infty)$，在 $(-1,+\infty)$ 内可导，且

$$y'=1-\frac{1}{1+x},\qquad y''=\frac{1}{(1+x)^2}\ (x>-1).$$

令 $y'=0$ 得驻点 $x=0$. 由 $y''\Big|_{x=0}=1>0$ 知 $y\Big|_{x=0}=0$ 为极小值.

(3) $y'=-4x^3+4x=-4x(x^2-1)$，　$y''=-12x^2+4$.

令 $y'=0$ 得驻点 $x_1=-1$，$x_2=1$，$x_3=0$.

由 $y''\Big|_{x=-1}=-8<0$ 知 $y\Big|_{x=-1}=1$ 为极大值，

由 $y''\Big|_{x=1}=-8<0$ 知 $y\Big|_{x=1}=1$ 为极大值，

由 $y''\Big|_{x=0}=4>0$ 知 $y\Big|_{x=0}=0$ 为极小值.

(4)函数的定义域为$(-\infty,1]$，在$(-\infty,1)$内可导，且

$$y'=1-\frac{1}{2\sqrt{1-x}}=\frac{2\sqrt{1-x}-1}{2\sqrt{1-x}},\qquad y''=-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{(1-x)^{\frac{3}{2}}}.$$

令 $y'=0$ 得驻点 $x=\frac{3}{4}$ 由 $y''\Big|_{x=\frac{3}{4}}=-2<0$ 知 $y\Big|_{x=\frac{3}{4}}=\frac{5}{4}$ 为极大值.

(5)$$y'=\frac{3\sqrt{4+5x^2}-(1+3x)\cdot\dfrac{10x}{2\sqrt{4+5x^2}}}{4+5x^2}=\frac{12-5x}{(4+5x^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{-5\left(x-\frac{12}{5}\right)}{(4+5x^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

令 $y'=0$ 得驻点 $x=\frac{12}{5}$.

当$-\infty<x<\frac{12}{5}$时，$y'>0$，因此函数在$(-\infty,\frac{12}{5}]$上单调增加；当$\frac{12}{5}<x<+\infty$时，$y'<0$，因此函数在$[\frac{12}{5},+\infty)$上单调减少，从而 $y(\frac{12}{5})=\frac{\sqrt{205}}{10}$ 为极大值.

(6)$$y'=\frac{(6x+4)(x^2+x+1)-(2x+1)(3x^2+4x+4)}{(x^2+x+1)^2}=\frac{-x(x+2)}{(x^2+x+1)^2}.$$

令 $y'=0$ 得驻点 $x_1=-2$，$x_2=0$.

当$-\infty<x<-2$时，$y'<0$，因此函数在$(-\infty,-2]$上单调减少；

当$-2<x<0$时，$y'>0$，因此函数在$[-2,0]$上单调增加；

当$0<x<+\infty$时，$y'<0$，因此函数在$[0,+\infty)$上单调减少.

从而可知 $y(-2)=\frac{8}{3}$ 为极小值，$y(0)=4$ 为极大值.

(7)$y'=e^x\cos x-e^x\sin x=e^x(\cos x-\sin x)$，　$y''=-2e^x\sin x$.

令 $y'=0$，得驻点 $x_k=2k\pi+\frac{\pi}{4}$，$x_k'=2k\pi+\frac{5}{4}\pi$ $(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$.

由 $y''\Big|_{x=2k\pi+\frac{\pi}{4}}=-\sqrt{2}e^{2k\pi+\frac{\pi}{4}}<0$ 知 $y\Big|_{x=2k\pi+\frac{\pi}{4}}=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{2k\pi+\frac{\pi}{4}}$ $(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$为极大值，

由 $y''\Big|_{x'=2k\pi+\frac{5\pi}{4}}=\sqrt{2}e^{2k\pi+\frac{5\pi}{4}}>0$ 知 $y\Big|_{x=2k\pi+\frac{5\pi}{4}}=\frac{-\sqrt{2}}{2}e^{2k\pi+\frac{5\pi}{4}}$ $(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$为极小值.

(8)函数的定义域为$(0,+\infty)$，在$(0,+\infty)$内可导，且 $y'=(e^{\frac{1}{x}\ln x})'=e^{\frac{1}{x}\ln x}\cdot\frac{1-\ln x}{x^2}=x^{\frac{1}{x}-2}(1-\ln x)$，

令 $y'=0$，得驻点 $x=e$.

当$0<x<e$时，$y'>0$ 因此函数在$(0,e]$上单调增加；当 $e<x<+\infty$时，$y'<0$，因此函数在$[e,+\infty)$上单调减少，从而可知 $y(e)=e^{\frac{1}{e}}$ 为极大值.

(9)当 $x\neq-1$ 时，$y'=-\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{(x+1)^{\frac{2}{3}}}<0$. 又 $x=-1$ 时函数有定义. 因此可知函数在$(-\infty,+\infty)$单调减少，从而函数在$(-\infty,+\infty)$内无极值.

(10)由 $y'=1+\sec^2x>0$ 知所给函数在$(-\infty,+\infty)$内除 $x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}$ $(k\in\mathbf{Z})$外单调增加，从而函数无极值.

2. 试证明：如果函数 $y=ax^3+bx^2+cx+d$ 满足条件 $b^2-3ac<0$，那么这个函数没有极值.

证 $y'=3ax^2+2bx+c$，由 $b^2-3ac<0$ 知 $a\neq 0$，$c\neq 0$，y' 是二次三项式，

$$\Delta=(2b)^2-4(3a)\cdot c=4(b^2-3ac)<0.$$

当 $a>0$ 时，y' 的图像开口向上，且在 x 轴上方，故 $y'>0$，从而所给函数在 $(-\infty,+\infty)$ 内单调增加.

2 题视频解析

当 $a<0$ 时，y' 的图像开口向下，且在 x 轴下方，故 $y'<0$，从而所给函数在 $(-\infty,+\infty)$ 内单调减少.

因此，只要条件 $b^2-3ac<0$ 成立，所给函数在 $(-\infty,+\infty)$ 内单调，故函数在 $(-\infty,+\infty)$ 内无极值.

3. 试问 a 为何值时，函数 $f(x)=a\sin x+\dfrac{1}{3}\sin 3x$ 在 $x=\dfrac{\pi}{3}$ 处取得极值？它是极大值还是极小值？并求此极值.

解 $f'=a\cos x+\cos 3x$ 函数在 $x=\dfrac{\pi}{3}$ 处取得极值，则 $f'\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=0$，即 $a\cos\dfrac{\pi}{3}+\cos\pi=0$，故 $a=2$.

又 $f''(x)=-2\sin x-3\sin 3x$，$f''\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=-2\sin\dfrac{\pi}{3}-3\sin\pi=-\sqrt{3}<0$，

因此 $f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=2\sin\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{1}{3}\sin\pi=\sqrt{3}$ 为极大值.

4. 设函数 $f(x)$ 在 x_0 处有 n 阶导数，且 $f'(x_0)=f''(x_0)=\cdots=f^{(n-1)}(x_0)=0$，$f^{(n)}(x_0)\neq 0$，证明：

(1) 当 n 为奇数时，$f(x)$ 在 x_0 处不取得极值；

(2) 当 n 为偶数时，$f(x)$ 在 x_0 处取得极值，且当 $f^{(n)}(x_0)<0$ 时，$f(x_0)$ 为极大值，当 $f^{(n)}(x_0)>0$ 时，$f(x_0)$ 为极小值.

4 题视频解析

证 由含佩亚诺余项的 n 阶泰勒公式及已知条件，得 $f(x)=f(x_0)+\dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+o((x-x_0)^n)$，

即 $f(x)-f(x_0)=\dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+o((x-x_0)^n)$，由此式可知 $f(x)-f(x_0)$ 在 x_0 某邻域内的符号由 $\dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$ 在 x_0 某邻域内的符号决定.

(1) 当 n 为奇数时，$(x-x_0)^n$ 在 x_0 两侧异号，所以 $\dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$ 在 x_0 两侧异号，从而 $f(x)-f(x_0)$ 在 x_0 两侧异号，故 $f(x)$ 在 x_0 处不取得极值.

(2) 当 n 为偶数时，在 x_0 两侧 $(x-x_0)^n>0$，若 $f^{(n)}(x_0)<0$，则 $\dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n<0$，从而 $f(x)-f(x_0)<0$，即 $f(x)<f(x_0)$，故 $f(x_0)$ 为极大值；若 $f^{(n)}(x_0)>0$，则 $\dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n>0$，从而 $f(x)-f(x_0)>0$，即 $f(x)>f(x_0)$，故 $f(x_0)$ 为极小值.

5. 试利用习题 4 的结论，讨论函数 $f(x)=e^x+e^{-x}+2\cos x$ 的极值.

解：$f'(x)=e^x-e^{-x}-2\sin x$，$f''(x)=e^x+e^{-x}-2\cos x$，$f'''(x)=e^x-e^{-x}+2\sin x$，$f^{(4)}(x)=e^x+e^{-x}+2\cos x$，故 $f'(0)=f''(0)=f'''(0)=0$，$f^{(4)}(0)=4>0$，因此函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处有极小值，极小值为 4.

6. 求下列函数的最大值、最小值：

(1) $y=2x^3-3x^2$，$-1\leqslant x\leqslant 4$； (2) $y=x^4-8x^2+2$，$-1\leqslant x\leqslant 3$； (3) $y=x+\sqrt{1-x}$，$-5\leqslant x\leqslant 1$.

解 (1) 函数在 $[-1,4]$ 上可导，且 $y'=6x^2-6x=6x(x-1)$.

令 $y'=0$，得驻点 $x_1=0$，$x_2=1$，

比较 $y|_{x=-1}=-5$，$y|_{x=0}=0$，$y|_{x=1}=-1$，$y|_{x=4}=80$，

得函数的最大值为 $y|_{x=4}=80$，最小值为 $y|_{x=-1}=-5$.

(2) 函数在 $[-1,3]$ 上可导，且 $y'=4x^3-16x=4x(x-2)(x+2)$.

令 $y'=0$,得驻点 $x_1=-2$(舍去), $x_2=0$, $x_3=2$.

比较 $y|_{x=-1}=-5$, $y|_{x=0}=2$, $y|_{x=2}=-14$, $y|_{x=3}=11$,

得函数的最大值为 $y|_{x=3}=11$,最小值为 $y|_{x=2}=-14$.

(3)函数在$[-5,1)$上可导,且 $y'=1-\dfrac{1}{2\sqrt{1-x}}=\dfrac{2\sqrt{1-x}-1}{2\sqrt{1-x}}$.

令 $y'=0$,得驻点 $x=\dfrac{3}{4}$,比较 $y|_{x=-5}=-5+\sqrt{6}$, $y|_{x=\frac{3}{4}}=\dfrac{5}{4}$, $y|_{x=1}=1$,

得函数的最大值为 $y|_{x=\frac{3}{4}}=\dfrac{5}{4}$,最小值为 $y|_{x=-5}=\sqrt{6}-5$.

7. 问函数 $y=2x^3-6x^2-18x-7(1\leqslant x\leqslant 4)$在何处取得最大值？并求出它的最大值.

解 函数在$[1,4]$上可导,且 $y'=6x^2-12x-18=6(x+1)(x-3)$.

令 $y'=0$,得驻点 $x_1=-1$(舍去),$x_2=3$,

比较 $y|_{x=1}=-29$, $y|_{x=3}=-61$, $y|_{x=4}=-47$,

得函数在 $x=1$ 处取得最大值,且最大值为 $y|_{x=1}=-29$.

8. 求下列函数在何处取得最小值或最大值:

(1)$y=x^2-\dfrac{54}{x}(x<0)$,最小值；　　(2)$y=\dfrac{x}{x^2+1}(x\geqslant 0)$,最大值.

解 (1)函数在$(-\infty,0)$内可导,且 $y'=2x+\dfrac{54}{x^2}=\dfrac{2(x^3+27)}{x^2}$, $y''=2-\dfrac{108}{x^3}$.

令 $y'=0$,得驻点 $x=-3$. 由 $y''|_{x=-3}=6>0$ 知 $x=-3$ 为极小值点.

又函数在$(-\infty,0)$内的驻点唯一,故极小值点就是最小值点,即 $x=-3$ 为最小值点,且最小值为 $y|_{x=-3}=27$.

(2)函数在$[0,+\infty)$上可导,且 $y'=\dfrac{x^2+1-x\cdot 2x}{(x^2+1)^2}=\dfrac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$,$y''=\dfrac{-2x(3-x^2)}{(x^2+1)^3}$.

令 $y'=0$,得驻点 $x=-1$(舍去),$x=1$. 由 $y''|_{x=1}=-\dfrac{1}{2}<0$ 知 $x=1$ 为极大值点.

又函数在$[0,+\infty)$上的驻点唯一,故极大值点就是最大值点,即 $x=1$ 为最大值点,且最大值为 $y|_{x=1}=\dfrac{1}{2}$.

9. 设函数 $f_n(x)=nx(1-x)^n(n=1,2,3,\cdots)$,$M(n)=\max\limits_{x\in[0,1]}f_n(x)$,试求$\lim\limits_{n\to\infty}M(n)$.

9 题视频解析

解 $f_n'(x)=n(1-x)^n-n^2x(1-x)^{n-1}$,令 $f_n'(x)=0$ 得 $x=\dfrac{1}{n+1}$,

则 $M(n)=\max\left\{f(0),f(1),f\left(\dfrac{1}{n+1}\right)\right\}=\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n+1}$,

所以$\lim\limits_{n\to\infty}M(n)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1}}=\dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

10. 某车间靠墙壁要盖一间长方形小屋,现有存砖只够砌 20m 长的墙壁. 问应围成怎样的长方形才能使这间小屋的面积最大?

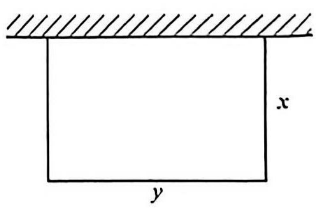


图 3—3

解 如图 3—3,设这间小屋的宽为 x,长为 y,则小屋的面积为 $S=xy$.

已知 $2x+y=20$,即 $y=20-2x$,故

$$S=x(20-2x)=20x-2x^2,\ x\in(0,10).$$

$$S'=20-4x,\quad S''=-4.$$

令 $S'=0$,得驻点 $x=5$.

由 $S''<0$ 知 $x=5$ 为极大值点,又驻点唯一,

故极大值点就是最大值点，即当宽为 5m，长为 10m 时这间小屋的面积最大.

11. 要造一圆柱形油罐，体积为 V，问底半径 r 和高 h 各等于多少时，才能使表面积最小？这时底直径与高的比是多少？

解 已知 $\pi r^2 h=V$，即 $h=\dfrac{V}{\pi r^2}$. 圆柱形油罐的表面积

$$A=2\pi r^2+2\pi rh=2\pi r^2+2\pi r\cdot\frac{V}{\pi r^2}=2\pi r^2+\frac{2V}{r},\ r\in(0,+\infty).$$

$$A'=4\pi r-\frac{2V}{r^2},\qquad A''=4\pi+\frac{4V}{r^3}.$$

令 $A'=0$，得 $r=\sqrt[3]{\dfrac{V}{2\pi}}$. 由 $A''\Big|_{r=\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}}=4\pi+8\pi=12\pi>0$，知 $r=\sqrt[3]{\dfrac{V}{2\pi}}$ 为极小值点，又驻点唯一，故极小值点就是最小值点. 此时 $h=\dfrac{V}{\pi r^2}=2\sqrt[3]{\dfrac{V}{2\pi}}=2r$，即 $2r:h=1:1$.

所以当底半径为 $r=\sqrt[3]{\dfrac{V}{2\pi}}$ 和高 $h=2\sqrt[3]{\dfrac{V}{2\pi}}$ 时，才能使表面积最小.

这时底直径与高的比为 $1:1$.

12. 某地区防空洞的截面拟建成矩形加半圆(图 3－4). 截面的面积为 5m^2. 问底宽 x 为多少时才能使截面的周长最小. 从而使建造时所用的材料最省？

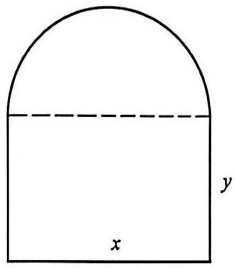


图 3－4

解 设截面的周长为 l，已知

$$l=x+2y+\frac{\pi x}{2}\quad 及\quad xy+\frac{\pi}{2}\left(\frac{x}{2}\right)^2=5,$$

即 $y=\dfrac{5}{x}-\dfrac{\pi x}{8}$.

故 $l=x+\dfrac{\pi x}{4}+\dfrac{10}{x}$，$x\in\left(0,\sqrt{\dfrac{40}{\pi}}\right)$. $\quad l'=1+\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{10}{x^2},\quad l''=\dfrac{20}{x^3}$.

令 $l'=0$，得驻点 $x=\sqrt{\dfrac{40}{4+\pi}}$.

由 $l''\Big|_{x=\sqrt{\frac{40}{4+\pi}}}=\dfrac{20}{\left(\dfrac{40}{4+\pi}\right)^{\frac{3}{2}}}>0$ 知 $x=\sqrt{\dfrac{40}{4+\pi}}$ 为极小值点，又驻点唯一，故极小值点就是最小值点. 所以当截面的底宽为 $x=\sqrt{\dfrac{40}{4+\pi}}$ 时，才能使截面的周长最小，从而使建造时所用的材料最省.

13. 设有质量为 5kg 的物体，置于水平面上，受力 $\boldsymbol{F}$ 的作用而开始移动(图 3－5). 设摩擦系数 $\mu=0.25$，问力 $\boldsymbol{F}$ 与水平线的交角 α 为多少时，才可使力 $\boldsymbol{F}$ 的大小为最小？

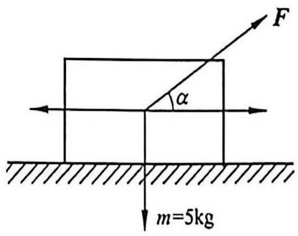


图 3－5

解 如图 3－5，力 $\boldsymbol{F}$ 的大小用 $|\boldsymbol{F}|$ 表示，则由

$$|\boldsymbol{F}|\cos\alpha=(\boldsymbol{P}-|\boldsymbol{F}|\sin\alpha)\mu$$

知 $\quad |\boldsymbol{F}|=\dfrac{\mu|\boldsymbol{P}|}{\cos\alpha+\mu\sin\alpha}$，$\alpha\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right)$.

设 $y=\cos\alpha+\mu\sin\alpha$，$\alpha\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，则 $y'=-\sin\alpha+\mu\cos\alpha$.

令 $y'=0$，得驻点 $\alpha_0=\arctan\mu$. 又

$$y''\Big|_{\alpha=\alpha_0}=-\cos\alpha_0-\mu\sin\alpha_0<0,$$

所以驻点 α_0 为极大值点，又驻点唯一，因此 α_0 为函数 $y=y(\alpha)$ 的最大值点，这时，即 $\alpha=\alpha_0=\arctan(0.25)\approx14°2'$ 时，力 $\boldsymbol{F}$ 的大小为最小.

14. 有一杠杆，支点在它的一端. 在距支点 0.1m 处挂一质量为 49kg 的物体. 加力于杠杆的另一端使杠杆保持水平(图 3－6). 如果杠杆的线密度为 5kg/m，求最省力的杆长.

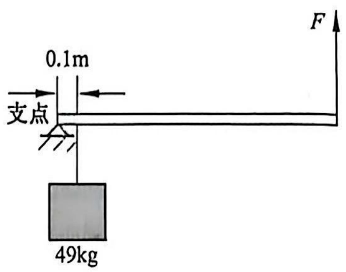


图 3－6

解 如图 3－6，设最省力的杆长为 x，则此时杠杆的重力为 $5gx$，由力矩平衡公式 $x|\boldsymbol{F}|=49g\cdot 0.1+5gx\cdot\dfrac{x}{2}\quad(x>0)$，知

$$|\boldsymbol{F}|=\frac{4.9}{x}g+\frac{5}{2}gx,\qquad |\boldsymbol{F}|'=-\frac{4.9}{x^2}g+\frac{5}{2}g,\qquad |\boldsymbol{F}|''=\frac{9.8}{x^3}g.$$

令 $|\boldsymbol{F}|'=0$ 得驻点 $x=1.4$.

又，$|\boldsymbol{F}|''\Big|_{x=1.4}=\dfrac{9.8}{(1.4)^3}g>0$，故 $x=1.4$ 为极小值点，又驻点唯一，因此 $x=1.4$ 也是最小值点，即杆长为 1.4m 时最省力.

15. 从一块半径为 R 的圆铁片上剪去一个扇形做成一个漏斗(图 3－7). 问留下的扇形的圆心角 φ 取多大时，做成的漏斗的容积最大？

解 如图 3－7，设漏斗的高为 h，顶面的圆半径为 r，则漏斗的容积为 $V=\dfrac{1}{3}\pi r^2 h$，又

$$2\pi r=R\varphi,\qquad h=\sqrt{R^2-r^2}.$$

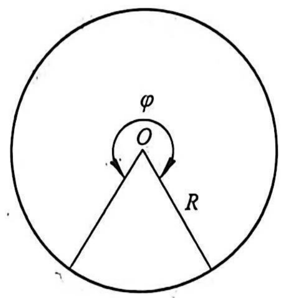


图 3－7

故 $V=\dfrac{R^3}{24\pi^2}\sqrt{4\pi^2\varphi^4-\varphi^6}\ (0<\varphi<2\pi)$.

$$V'=\frac{R^3}{24\pi^2}\cdot\frac{16\pi^2\varphi^3-6\varphi^5}{2\sqrt{4\pi^2\varphi^4-\varphi^6}}=\frac{R^3}{24\pi^2}\cdot\frac{8\pi^2\varphi-3\varphi^3}{\sqrt{4\pi^2-\varphi^2}}.$$

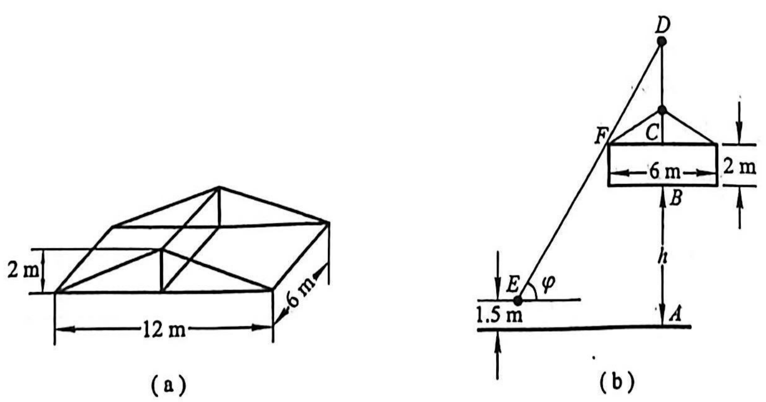
令 $V'=0$ 得 $\varphi=\sqrt{\dfrac{8}{3}}\pi=\dfrac{2\sqrt{6}}{3}\pi$.

当 $0<\varphi<\dfrac{2\sqrt{6}}{3}\pi$ 时，$V'>0$，故 V 在 $[0,\dfrac{2\sqrt{6}}{3}\pi]$ 内单调增加；

当 $\dfrac{2\sqrt{6}}{3}<\varphi<2\pi$ 时，$V'<0$，故 V 在 $[\dfrac{2\sqrt{6}}{3}\pi,2\pi)$ 内单调减少.

因此 $\varphi=\dfrac{2\sqrt{6}}{3}\pi$ 为极大值点，又驻点唯一，从而 $\varphi=\dfrac{2\sqrt{6}}{3}\pi$ 也是最大值点，即当 φ 取 $\dfrac{2\sqrt{6}}{3}\pi$ 时，做成的漏斗的容积最大.

16. 某吊车的车身高为 1.5m，吊臂长 15m. 现在要把一个 6m 宽、2m 高的屋架(图 3－8(a))，水平地吊到 6m 高的柱子上去(图 3－8(b))，问能否吊得上去？



(a)　　(b)

图 3－8

解 如图 3－8，设吊臂对地面的倾角为 φ，屋架能够吊到最大高度为 h，由 $15\sin\varphi=h-1.5+2+3\tan\varphi$ 知

$$h=15\sin\varphi-3\tan\varphi-\frac{1}{2}.\ h'=15\cos\varphi-\frac{3}{\cos^2\varphi}h''=-15\sin\varphi-\frac{6\sin\varphi}{\cos^3\varphi}.$$

令 $h'=0$，得 $\cos\varphi=\sqrt[3]{\frac{1}{5}}$，即得唯一驻点 $\varphi_0=\arccos\sqrt[3]{\frac{1}{5}}\approx 54°13'$.

又 $h''\big|_{\varphi=\varphi_0}<0$，故 $\varphi_0\approx 54°13'$为极大值点也是最大值点.

即当 $\varphi_0\approx 54°13'$时，h 达到最大值 $h_0=15\sin 54°13'-3\tan 54°13'-\frac{1}{2}\approx 7.506\text{m}$，而柱子高只有 6m，所以能吊得上去.

17. 一房地产公司有 50 套公寓出租. 当月租金定为 4 000 元时，公寓会全部租出去. 当月租金每增加 200 元时，就会多一套公寓租不出去. 而租出去的公寓平均每月需花费 400 元的维修费. 试问房租定为多少可获得最大收入？

解 设每套月房租为 x 元，则租不出去的房子套数为 $\frac{x-4\,000}{200}=\frac{x}{200}-20$，租出去的套数为 $50-\left(\frac{x}{200}-20\right)=70-\frac{x}{200}$，租出去的每套房子获利 $(x-400)$元. 故总利润为

$$y=\left(70-\frac{x}{200}\right)(x-400)=-\frac{x^2}{200}+72x-28\,000.$$

$$y'=-\frac{x}{100}+72,\qquad y''=-\frac{1}{100}.$$

令 $y'=0$，得驻点 $x=7\,200$.

由 $y''<0$ 知 $x=7\,200$ 为极大值点，又驻点唯一，这个极大值点就是最大值点. 即当每套房月租金定在 7 200 元时，可获得最大收入.

18. 已知制作一个背包的成本为 40 元，如果每一个背包的售出价格为 x 元，售出的背包数由

$$n=\frac{a}{x-40}+b(80-x)$$

给出，其中 a,b 为正常数，问什么样的售出价格能带来最大利润？

解 设利润函数为 $p(x)$，则 $p(x)=(x-40)n=a+b(x-40)(80-x)$，　$p'(x)=b(120-2x)$，

令 $p'(x)=0$，得 $x=60$(元).

由 $p''(x)=-2b<0$ 知 $x=60$ 为极大值点，又驻点唯一，这极大值点就是最大值点. 即售出价格定在 60 元时能带来最大利润.

第六节　函数图形的描绘

一、主要内容归纳

1. 曲线的渐近线

若 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$，则称直线 $y=A$ 为曲线 $y=f(x)$ 的水平渐近线（将 $x\to+\infty$改为 $x\to-\infty$仍有此定义).

若 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=\infty$，则称直线 $x=x_0$ 为曲线 $y=f(x)$ 的铅直渐近线（将 $x\to x_0^+$ 改为 $x\to x_0^-$ 仍有此定义).

若 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=a$，且 $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-ax]=b$，则称直线 $y=ax+b$ 为曲线 $y=f(x)$ 的斜渐近线（将 $x\to+\infty$改为 $x\to-\infty$仍有此定义).