$$\int_C f(z)\mathrm{d}z = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\cdot\Delta z_k .$$

$$\int_C f(z)\mathrm{d}z = \int_C u\mathrm{d}x - v\mathrm{d}y + i\int_C v\mathrm{d}x + u\mathrm{d}y$$

$$\int_C f(z)\mathrm{d}z = \int_\alpha^\beta f[z(t)]z'(t)\mathrm{d}t$$

1、找出积分路径的参数方程

2、化复变函数积分为一元函数定积分

复积分与实变函数的定积分有类似的性质：

(1) $\int_C f(z)\mathrm{d}z = -\int_{C^-} f(z)\mathrm{d}z;$

(2) $\int_C kf(z)\mathrm{d}z = k\int_C f(z)\mathrm{d}z;$ (k为常数)

(3) $\int_C [f(z) \pm g(z)]\mathrm{d}z = \int_C f(z)\mathrm{d}z \pm \int_C g(z)\mathrm{d}z;$

(4) 设曲线 C 的长度为 L，函数 $f(z)$ 在 C 上满足 $|f(z)| \le M$，那么 $\boxed{\left|\int_C f(z)\mathrm{d}z\right| \le \int_C |f(z)|\mathrm{d}s \le ML.}$

估值不等式

(4)证明:

因为$|\Delta z_k|$是z_k与z_{k-1}两点之间的距离,

Δs_k为这两点之间弧段的长度,

所以 $\left|\sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\cdot\Delta z_k\right| \le \sum_{k=1}^{n} |f(\zeta_k)\cdot\Delta z_k| \le \sum_{k=1}^{n} |f(\zeta_k)|\cdot\Delta s_k$

两端取极限得 $\left|\int_C f(z)\mathrm{d}z\right| \le \int_C |f(z)|\mathrm{d}s.$

因为 $\sum_{k=1}^{n} |f(\zeta_k)|\cdot\Delta s_k \le M\sum_{k=1}^{n}\Delta s_k = ML,$

所以 $\left|\int_C f(z)\mathrm{d}z\right| \le \int_C |f(z)|\mathrm{d}s \le ML.$

例　设 C 为从原点到点 $3+4i$ 的直线段,

试求积分 $\int_C \frac{1}{z-i}\mathrm{d}z$ 绝对值的一个上界.

解　C 的参数方程为 $z=(3+4i)t$, $(0\le t\le 1)$

根据估值不等式知

$$\left|\int_C \frac{1}{z-i}\mathrm{d}z\right| \le \int_C \left|\frac{1}{z-i}\right|\mathrm{d}s$$

因为在 C 上, $\left|\frac{1}{z-i}\right| = \frac{1}{|3t+(4t-1)i|}$

$$= \frac{1}{\sqrt{(3t)^2 + (4t-1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{25\left(t - \frac{4}{25}\right)^2 + \frac{9}{25}}} \leq \frac{5}{3},$$

从而 $$\left| \int_C \frac{1}{z-i} \mathrm{d}z \right| \leq \frac{5}{3} \underset{=5}{\underline{\underline{\int_C \mathrm{d}s}}} = \frac{25}{3}$$

故 $$\left| \int_C \frac{1}{z-i} \mathrm{d}z \right| \leq \frac{25}{3}.$$

例1 计算$\int_C \mathrm{zdz}$，$C:$从原点到点$3+4i$的直线段.

被积函数 $f(z)=z$, 复平面内处处解析,

此时积分与路线无关.

例2 被积函数 $f(z)=\mathrm{Re}(z)=x$,

复平面内处处不解析.

此时积分值$\int_c \mathrm{Rezdz}$与路线有关.

例4：求 $\oint_C \frac{1}{(z-z_0)^{n+1}} dz$, C 为以 z_0 为中心, r 为半径的正向圆周, n 为整数.

被积函数当 $n=0$ 时为 $\frac{1}{z-z_0}$， 此时 $\oint_c \frac{1}{z-z_0} dz = 2\pi i \neq 0.$

它在除去z_0 的圆周 C 的内部处处解析

定理 2 设区域 G 是一个单连通域，函数 $P(x,y)$，$Q(x,y)$在 G 内具有一阶连续偏导数，则曲线积分 $\int_L P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$ 在 G 内与路径无关（或沿 G 内任意闭曲线的曲线积分为零）的充分必要条件是

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \tag{5}$$

在 G 内恒成立.

第二节 柯西 - 古萨基本定理

定理 1 设闭区域 D 由分段光滑的曲线 L 围成，函数 $P(x,y)$ 及 $Q(x,y)$ 在 D 上具有一阶连续偏导数，则有

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx dy = \oint_L P dx + Q dy, \tag{1}$$

其中 L 是 D 的取正向的边界曲线.

公式(1)叫做格林公式.

定理 2 设区域 G 是一个单连通域，函数 $P(x,y)$，$Q(x,y)$ 在 G 内具有一阶连续偏导数，则曲线积分 $\int_L P dx + Q dy$ 在 G 内与路径无关（或沿 G 内任意闭曲线的曲线积分为零）的充分必要条件是

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \tag{5}$$

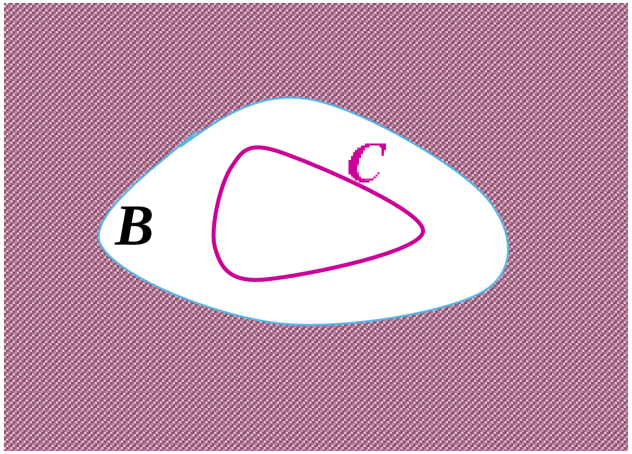
在 G 内恒成立.

一、基本定理

柯西一古萨（C-G）基本定理

如果函数 $f(z)$ 在单连通域 B 内处处解析，那么函数 $f(z)$ 沿 B 内的任何一条封闭曲线 C 的积分为零：$\oint_c f(z)\mathrm{d}z = 0.$

定理中的 C 可以不是简单曲线.



注:

(1) 如果曲线 C 是区域 B 的边界, 函数 $f(z)$ 在 B 内与 C 上解析, 即在闭区域 $\overline{B}=B+C$ 上解析, 那么

$$\oint_C f(z)\mathrm{d}z=0.$$

(2) 如果曲线 C 是区域 B 的边界, 函数 $f(z)$ 在 B 内解析, 在闭区域 $\overline{B}=B+C$ 上连续, 那么定理仍成立.

二、典型例题

例1 计算积分 $\oint_{|z|=1} \frac{1}{2z-3} \mathrm{d}z.$

解 函数 $\frac{1}{2z-3}$ 在 $|z| \le 1$ 内解析,

根据柯西—古萨定理, 有

$$\oint_{|z|=1} \frac{1}{2z-3} \mathrm{d}z = 0.$$

例2 证明$\oint_{c}(z-\alpha)^{n}\mathrm{d}z=0 \quad (n\neq-1)$, 其中$C$是任意闭曲线.

证 (1)当n为正整数时, $(z-\alpha)^{n}$在z平面上解析,

由柯西一古萨定理, $\oint_{c}(z-\alpha)^{n}\mathrm{d}z=0.$

(2)当n为负整数但不等于-1时,

$(z-\alpha)^{n}$在除点α的整个z平面上解析,

情况一： 若C不包围α点,

$(z-\alpha)^n$ 在 C 围成的区域内解析,

由柯西一古萨定理, $\oint_c (z-\alpha)^n \mathrm{d}z = 0;$

情况二： 若 C 包围 α 点,

由上节例4可知, $\oint_c (z-\alpha)^n \mathrm{d}z = 0.$

例3 计算积分 $\oint_{|z-i|=\frac{1}{2}} \frac{1}{z(z^2+1)}\mathrm{d}z.$

解 $\frac{1}{z(z^2+1)} = \frac{1}{z} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{z+i} + \frac{1}{z-i}\right),$

因为 $\frac{1}{z}$ 和 $\frac{1}{z+i}$ 都在 $|z-i| \le \frac{1}{2}$ 上解析,

根据柯西－古萨定理得

$$\oint_{|z-i|=\frac{1}{2}} \frac{1}{z(z^2+1)}\mathrm{d}z = \oint_{|z-i|=\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{2}\frac{1}{z+i} - \frac{1}{2}\frac{1}{z-i}\right)\mathrm{d}z$$

$$=\boxed{\oint_{|z-i|=\frac{1}{2}}\frac{1}{z}\,dz-\frac{1}{2}\oint_{|z-i|=\frac{1}{2}}\frac{1}{z+i}\,dz}-\frac{1}{2}\oint_{|z-i|=\frac{1}{2}}\frac{1}{z-i}\,dz$$

$$=0$$

$$=-\frac{1}{2}\oint_{|z-i|=\frac{1}{2}}\frac{1}{z-i}\,dz=-\frac{1}{2}\cdot 2\pi i=-\pi i.$$

三、小结与思考

柯西一古萨基本定理:

如果函数 $f(z)$ 在单连通域 B 内处处解析, 那么函数 $f(z)$ 沿 B 内的任何一条封闭曲线 C 的积分为零: $\oint_c f(z)\mathrm{d}z = 0.$

注意定理成立的条件.

函数在C上和C内部都解析

第三节 基本定理的推广

——复合闭路定理

- 一、复合闭路定理
- 二、典型例题
- 三、小结与思考

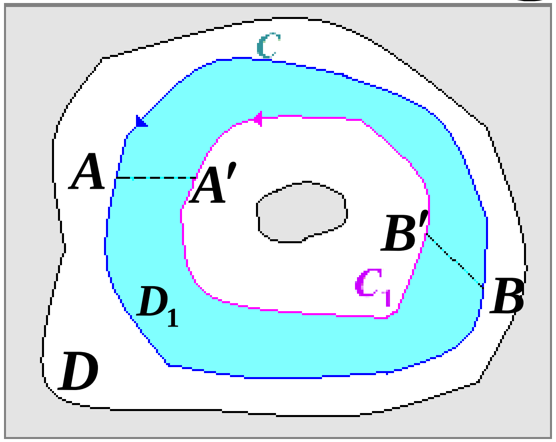
$f(x)$分别沿曲线C及C_1积分的关系

1. 闭路变形原理

设函数 $f(z)$ 在多连通域内解析,

C 及 C_1 为 D 内的任意两条简单闭曲线(正向为逆时针方向),

C 及 C_1 为边界的区域 D_1 全含于 D.



作两段不相交的弧段 $\widehat{AA'}$ 和 $\widehat{BB'}$,

为了讨论方便,添加字符 E, E', F, F',

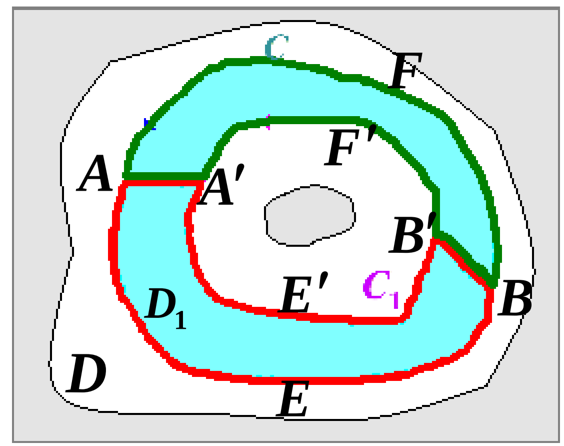
显然曲线 $AEBB'E'A'A, AA'F'B'BFA$均为封闭曲线.

因为它们的内部全含于 D,

故 $\oint_{AE\ldots} f(\ \ )\ldots 0$

C－G定理

$\oint_{AA'F'B'BFA} f(\ \ )\ldots$



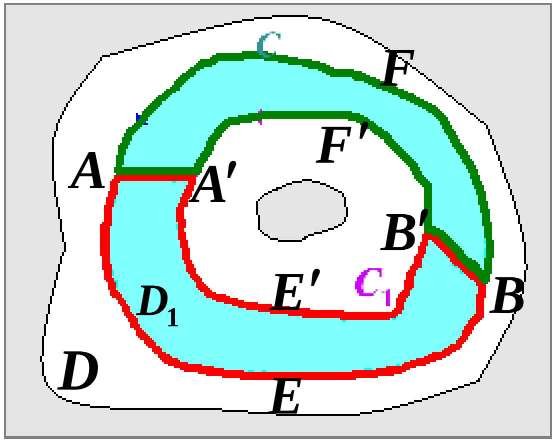
$$AEBB'E'A'A = \overset{\frown}{AEB} + \overset{\frown}{BB'} + \overset{\frown}{B'E'A'} + \overset{\frown}{A'A},$$

$$AA'F'B'BFA = \overset{\frown}{AA'} + \overset{\frown}{A'F'B'} + \overset{\frown}{B'B} + \overset{\frown}{BFA},$$

由 $\displaystyle\oint_{AEBB'E'A'A} f(z)\mathrm{d}z + \oint_{AA'F'B'BFA} f(z)\mathrm{d}z = 0$, 得

$$\oint_C f(z)\mathrm{d}z + \oint_{C_1^-} f(z)\mathrm{d}z + \int_{\overset{\frown}{AA'}} f(z)\mathrm{d}z + \int_{\overset{\frown}{A'A}} f(z)\mathrm{d}z$$

$$+ \int_{\overset{\frown}{B'B}} f(z)\mathrm{d}z + \int_{\overset{\frown}{BB'}} f(z)\mathrm{d}z = 0,$$



即 $\displaystyle\oint_C f(z)\mathrm{d}z + \oint_{C_1^-} f(z)\mathrm{d}z = 0,$

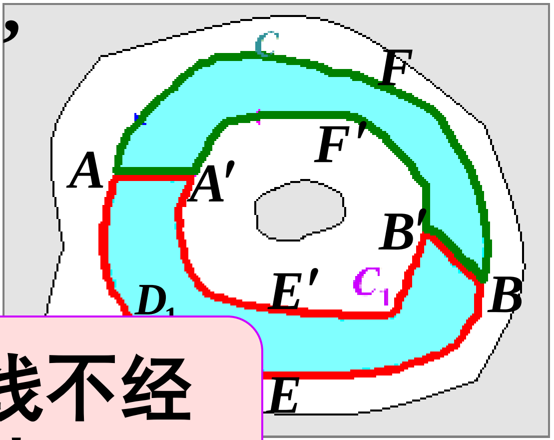
或 $$\boxed{\oint_C f(z)\mathrm{d}z = \oint_{C_1} f(z)\mathrm{d}z.}$$

如果我们把这两条简单闭曲线 C 及 C_1^- 看成一条复合闭路 Γ， Γ 的正方向为：

外面的闭曲线 C 按逆时针进行，

内部的闭曲线 C_1 按顺时针进行，

(即沿 Γ 的正向进行时, Γ 的内部总在 Γ 的左手边),



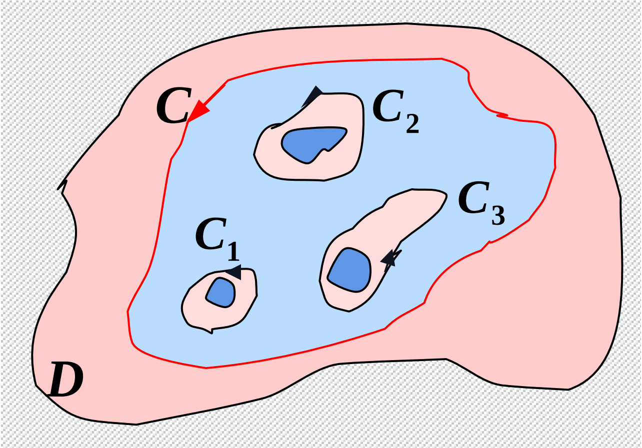
那么

说明：在变形过程中曲线不经过函数 $f(z)$ 的不解析的点.

解析函数 曲线的积分，不因闭曲线在区域内作连续变形而改变它的值. 闭路变形原理

2. 复合闭路定理

设 C 为多连通域 D 内的一条简单闭曲线，$C_1, C_2, \cdots, C_n$ 是在 C 内部的简单闭曲线，它们互不包含也互不相交，并且以 $C, C_1, C_2, \cdots, C_n$ 为边界的区域全含于 D，



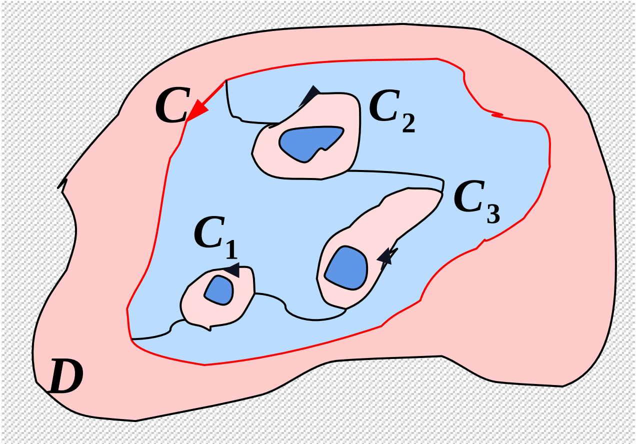
如果 $f(z)$ 在 D 内解析，

那么

(1) $\oint_{\Gamma} f(z)\mathrm{d}z = 0,$

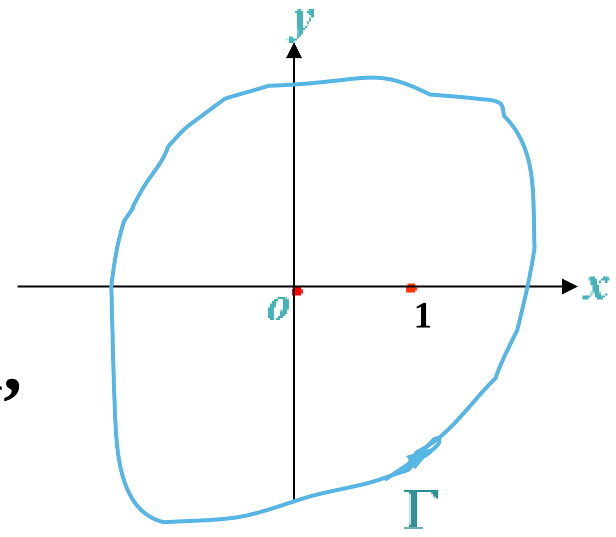
这里 Γ 为由 $C, C_1^-, C_2^-, \cdots, C_n^-$ 组成的复合闭路(其方向是：C 按逆时针进行, $C_1, C_2, \cdots, C_n$ 按顺时针进行).

(2) $\oint_{C} f(z)\mathrm{d}z = \sum_{k=1}^{n} \oint_{C_k} f(z)\mathrm{d}z,$



C 及 C_k 均取正方向.

例1 计算积分 $\oint_{\Gamma} \dfrac{2z-1}{z^2-z}\mathrm{d}z$，$\Gamma$ 为包含圆周 $|z|=1$ 在内的任何正向简单闭曲线.



解 因为函数 $\dfrac{2z-1}{z^2-z}$ 在复平面内有两个奇点 $z=0$ 和 $z=1$，

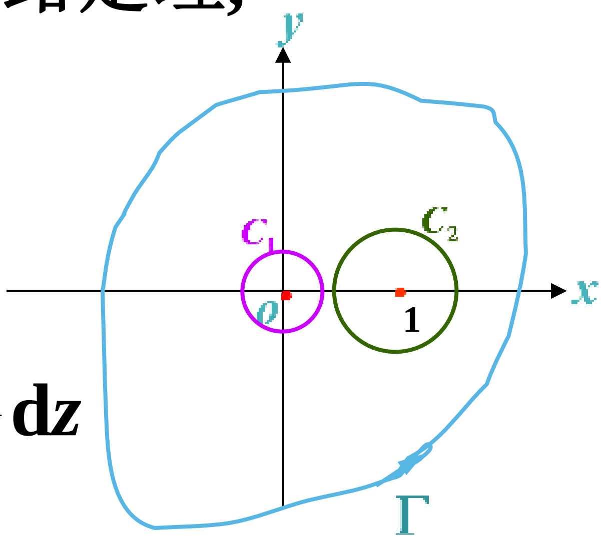
Γ 包含这两个奇点，

在Γ内作两个互不包含也互不相交的正向圆周

C_1 和 C_2，C_1 只包含奇点 $z=0$,

C_2 只包含奇点 $z=1$, 根据复合闭路定理,

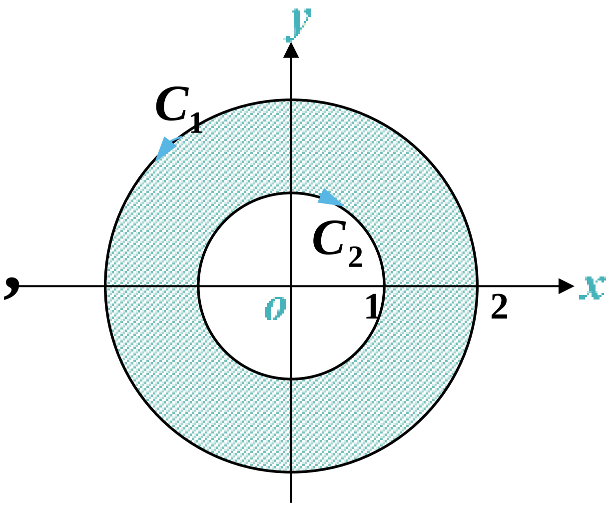
$$\oint_\Gamma \frac{2z-1}{z^2-z}\mathrm{d}z = \oint_{C_1} \frac{2z-1}{z^2-z}\mathrm{d}z + \oint_{C_2} \frac{2z-1}{z^2-z}\mathrm{d}z$$



$$= \oint_{C_1} \frac{1}{z-1}\mathrm{d}z + \oint_{C_1} \frac{1}{z}\mathrm{d}z + \oint_{C_2} \frac{1}{z-1}\mathrm{d}z + \oint_{C_2} \frac{1}{z}\mathrm{d}z$$

$$= 0 + 2\pi i + 2\pi i + 0 = 4\pi i.$$

例2 计算积分 $\oint_{\Gamma}\frac{e^z}{z}\mathrm{d}z$，$\Gamma$ 为正向圆周 $|z|=2$ 和负向圆周 $|z|=1$ 所组成.



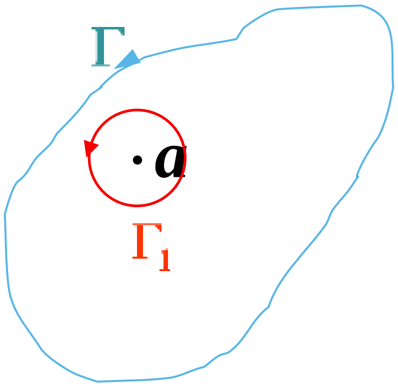
解 C_1 和 C_2 围成一个圆环域，

函数 $\frac{e^z}{z}$ 在此圆环域和其边界

上处处解析，圆环域的边界构成一条复合闭路，

根据闭路复合定理，$\oint_{\Gamma}\frac{e^z}{z}\mathrm{d}z=0.$

例3 求 $\oint_{\Gamma}\frac{1}{(z-a)^{n+1}}\mathrm{d}z$，$\Gamma$为含 a 的任一简单闭路，n为整数.



解 因为a在曲线Γ内部，

故可取很小的正数 ρ，

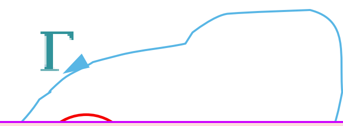
使 $\Gamma_1:|z-a|=\rho$ 含在Γ内部，

$\frac{1}{(z-a)^{n+1}}$在以$\Gamma+\Gamma_1^-$为边界的复连通域

内处处解析，

由复合闭路定理,

$$\oint_{\Gamma} \frac{1}{(z-a)^{n+1}}\mathrm{d}z = \oint \frac{1}{(z-a)^{n+1}}\mathrm{d}z$$



令 $z = a + \rho e^{i\theta}$

$$\oint_{\Gamma_1} \frac{1}{(z-a)^{n+1}}\mathrm{d}z = \int_0 \cdots (\rho e \cdots \int_0 \cdots \rho^n$$

此结论非常重要, 用起来很方便, 因为Γ不必是圆, a也不必是圆的圆心, 只要a在简单闭曲线Γ内即可.

故 $$\boxed{\oint_{\Gamma} \frac{1}{(z-a)^{n+1}}\mathrm{d}z = \begin{cases} 2\pi i, & n = 0 \\ 0, & n \neq 0. \end{cases}}$$

本课所讲述的复合闭路定理与闭路变形原理是复积分中的重要定理, 掌握并能灵活应用它是本章的难点.

常用结论:

$$\oint_{\Gamma} \frac{1}{(z-a)^{n+1}} \mathrm{d}z = \begin{cases} 2\pi i, & n=0 \\ 0, & n \neq 0. \end{cases}$$