可将 ax^2+bx+c 通过配方化为关于 x 的一次多项式的完全平方项与一个常数平方的代数和的形式，如(6)题，然后作适当的三角代换，将根号去掉，再积分. 求这类积分往往需要多种方法.

习题 4—2 解答

1. 在下列各式等号右端的横线处填入适当的系数，使等式成立(例如：$\mathrm{d}x=\frac{1}{4}\mathrm{d}(4x+7)$)：

(1) $\mathrm{d}x=$____ $\mathrm{d}(ax)(a\neq 0)$；
(2) $\mathrm{d}x=$____ $\mathrm{d}(7x-3)$；
(3) $x\mathrm{d}x=$____ $\mathrm{d}(x^2)$；
(4) $x\mathrm{d}x=$____ $\mathrm{d}(5x^2)$；
(5) $x\mathrm{d}x=$____ $\mathrm{d}(1-x^2)$；
(6) $x^3\mathrm{d}x=$____ $\mathrm{d}(3x^4-2)$；
(7) $\mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x=$____ $\mathrm{d}(\mathrm{e}^{2x})$；
(8) $\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}\mathrm{d}x=$____ $\mathrm{d}(1+\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}})$；
(9) $\sin\frac{3}{2}x\mathrm{d}x=$____ $\mathrm{d}\left(\cos\frac{3}{2}x\right)$；
(10) $\frac{\mathrm{d}x}{x}=$____ $\mathrm{d}(5\ln|x|)$；
(11) $\frac{\mathrm{d}x}{x}=$____ $\mathrm{d}(3-5\ln|x|)$；
(12) $\frac{\mathrm{d}x}{1+9x^2}=$____ $\mathrm{d}(\arctan 3x)$；
(13) $\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}=$____ $\mathrm{d}(1-\arcsin x)$；
(14) $\frac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}=$____ $\mathrm{d}(\sqrt{1-x^2})$.

解 (1) $\frac{1}{a}$； (2) $\frac{1}{7}$； (3) $\frac{1}{2}$； (4) $\frac{1}{10}$； (5) $-\frac{1}{2}$；
(6) $\frac{1}{12}$； (7) $\frac{1}{2}$； (8) -2； (9) $-\frac{2}{3}$； (10) $\frac{1}{5}$；
(11) $-\frac{1}{5}$； (12) $\frac{1}{3}$； (13) -1； (14) -1.

2. 求下列不定积分(其中 a,b,ω,φ 均为常数)

2 题视频解析

(1) $\int \mathrm{e}^{5t}\mathrm{d}t$；
(2) $\int (3-2x)^3\mathrm{d}x$；
(3) $\int \frac{\mathrm{d}x}{1-2x}$；
(4) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{2-3x}}$；
(5) $\int (\sin ax-\mathrm{e}^{\frac{x}{b}})\mathrm{d}x$；
(6) $\int \frac{\sin\sqrt{t}}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t$；
(7) $\int x\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x$；
(8) $\int x\cos(x^2)\mathrm{d}x$；
(9) $\int \frac{x}{\sqrt{2-3x^2}}\mathrm{d}x$；
(10) $\int \frac{3x^3}{1-x^4}\mathrm{d}x$；
(11) $\int \frac{x+1}{x^2+2x+5}\mathrm{d}x$；
(12) $\int \cos^2(\omega t+\varphi)\sin(\omega t+\varphi)\mathrm{d}t$；
(13) $\int \frac{\sin x}{\cos^3 x}\mathrm{d}x$；
(14) $\int \frac{\sin x+\cos x}{\sqrt[3]{\sin x-\cos x}}\mathrm{d}x$；
(15) $\int \tan^{10}x\sec^2 x\mathrm{d}x$；
(16) $\int \frac{\mathrm{d}x}{x\ln x\ln\ln x}$；
(17) $\int \frac{\mathrm{d}x}{(\arcsin x)^2\sqrt{1-x^2}}$；
(18) $\int \frac{10^{2\arccos x}}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$；
(19) $\int \tan\sqrt{1+x^2}\cdot\frac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^2}}$；
(20) $\int \frac{\arctan\sqrt{x}}{\sqrt{x}(1+x)}\mathrm{d}x$；

(21) $\int \frac{1+\ln x}{(x\ln x)^2}dx$；

(22) $\int \frac{dx}{\sin x\cos x}$；

(23) $\int \frac{\ln\tan x}{\cos x\sin x}dx$；

(24) $\int \cos^3 x dx$；

(25) $\int \cos^2(\omega t+\varphi)dt$；

(26) $\int \sin 2x\cos 3x dx$；

(27) $\int \cos x\cos\frac{x}{2}dx$；

(28) $\int \sin 5x\sin 7x dx$；

(29) $\int \tan^3 x\sec x dx$；

(30) $\int \frac{dx}{e^x+e^{-x}}$；

(31) $\int \frac{1-x}{\sqrt{9-4x^2}}dx$；

(32) $\int \frac{x^3}{9+x^2}dx$；

(33) $\int \frac{dx}{2x^2-1}$；

(34) $\int \frac{dx}{(x+1)(x-2)}$；

(35) $\int \frac{x}{x^2-x-2}dx$；

(36) $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{a^2-x^2}}\ (a>0)$；

(37) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$；

(38) $\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2+1)^3}}$；

(39) $\int \frac{\sqrt{x^2-9}}{x}dx$；

(40) $\int \frac{dx}{1+\sqrt{2x}}$；

(41) $\int \frac{dx}{1+\sqrt{1-x^2}}$；

(42) $\int \frac{dx}{x+\sqrt{1-x^2}}$；

(43) $\int \frac{x-1}{x^2+2x+3}dx$；

(44) $\int \frac{x^3+1}{(x^2+1)^2}dx$.

解 (1)令 $u=5t$，$\int e^{5t}dt=\frac{1}{5}\int e^u du=\frac{1}{5}e^u+C=\frac{1}{5}e^{5t}+C$.

(2)令 $u=3-2x$，$\int (3-2x)^3dx=-\frac{1}{2}\int u^3du=-\frac{u^4}{8}+C=-\frac{(3-2x)^4}{8}+C$.

(3)令 $u=1-2x$，$\int \frac{dx}{1-2x}=-\frac{1}{2}\int\frac{du}{u}=-\frac{1}{2}\ln|u|+C=-\frac{1}{2}\ln|1-2x|+C$.

(4) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{2-3x}}=\int -\frac{1}{3}(2-3x)^{-\frac{1}{3}}d(2-3x)=-\frac{1}{3}\times\frac{3}{2}(2-3x)^{\frac{2}{3}}+C$

$=-\frac{1}{2}(2-3x)^{\frac{2}{3}}+C$.

(5) $\int (\sin ax-e^{\frac{x}{b}})dx=\int \sin ax dx-\int e^{\frac{x}{b}}dx=\int\frac{1}{a}\sin ax d(ax)-\int be^{\frac{x}{b}}d\left(\frac{x}{b}\right)$

$=\frac{1}{a}(-\cos ax)-be^{\frac{x}{b}}+C=-\frac{\cos ax}{a}-be^{\frac{x}{b}}+C$.

(6) $\int \frac{\sin\sqrt{t}}{\sqrt{t}}dt=\int 2\sin\sqrt{t}\,d\sqrt{t}=-2\cos\sqrt{t}+C$.

(7) $\int xe^{-x^2}dx=-\frac{1}{2}\int e^{-x^2}d(-x^2)=-\frac{1}{2}e^{-x^2}+C$.

(8) $\int x\cos(x^2)dx=\frac{1}{2}\int\cos(x^2)d(x^2)=\frac{1}{2}\sin(x^2)+C$.

(9) $\int \frac{x}{\sqrt{2-3x^2}}dx=-\frac{1}{6}\int(2-3x^2)^{-\frac{1}{2}}d(2-3x^2)=-\frac{1}{6}\times2(2-3x^2)^{\frac{1}{2}}+C=-\frac{\sqrt{2-3x^2}}{3}+C$.

(10) $\int \frac{3x^3}{1-x^4}dx=-\frac{3}{4}\int\frac{1}{1-x^4}d(1-x^4)=-\frac{3}{4}\ln|1-x^4|+C$.

(11) $\int \frac{x+1}{x^2+2x+5}dx=\frac{1}{2}\int \frac{d(x^2+2x+5)}{x^2+2x+5}=\frac{1}{2}\ln(x^2+2x+5)+C.$

(12) $\int \cos^2(\omega t+\varphi)\sin(\omega t+\varphi)dt=-\frac{1}{\omega}\cos^2(\omega t+\varphi)d[\cos(\omega t+\varphi)]=-\frac{1}{3\omega}\cos^3(\omega t+\varphi)+C.$

(13) $\int \frac{\sin x}{\cos^3 x}dx=-\int \frac{1}{\cos^3 x}d(\cos x)=\frac{1}{2\cos^2 x}+C.$

(14) $\int \frac{\sin x+\cos x}{\sqrt[3]{\sin x-\cos x}}dx=\int \frac{d(\sin x-\cos x)}{\sqrt[3]{\sin x-\cos x}}=\frac{3}{2}(\sin x-\cos x)^{\frac{2}{3}}+C.$

(15) $\int \tan^{10}x\sec^2 x dx=\int \tan^{10}x d(\tan x)=\frac{1}{11}\tan^{11}x+C.$

(16) $\int \frac{dx}{x\ln x\ln\ln x}=\int \frac{d(\ln x)}{\ln x\ln\ln x}=\int \frac{d(\ln\ln x)}{\ln\ln x}=\ln|\ln\ln x|+C.$

(17) $\int \frac{dx}{(\arcsin x)^2\sqrt{1-x^2}}=\int \frac{d(\arcsin x)}{(\arcsin x)^2}=-\frac{1}{\arcsin x}+C.$

(18) $\int \frac{10^{2\arccos x}}{\sqrt{1-x^2}}dx=\int -10^{2\arccos x}d(\arccos x)=-\frac{10^{2\arccos x}}{2\ln 10}+C.$

(19) $\int \tan\sqrt{1+x^2}\cdot\frac{x dx}{\sqrt{1+x^2}}=\frac{1}{2}\int \tan\sqrt{1+x^2}\cdot\frac{d(1+x^2)}{\sqrt{1+x^2}}=\int \tan\sqrt{1+x^2}d(\sqrt{1+x^2})$

$=-\ln|\cos\sqrt{1+x^2}|+C.$

(20) $\int \frac{\arctan\sqrt{x}}{\sqrt{x}(1+x)}dx=\int \frac{2\arctan\sqrt{x}}{1+x}d\sqrt{x}=\int 2\arctan\sqrt{x}d(\arctan\sqrt{x})=(\arctan\sqrt{x})^2+C.$

(21) $\int \frac{1+\ln x}{(x\ln x)^2}dx=\int \frac{d(x\ln x)}{(x\ln x)^2}=-\frac{1}{x\ln x}+C.$

(22) $\int \frac{dx}{\sin x\cos x}=\int \csc 2x d(2x)=\ln|\csc 2x-\cot 2x|+C=\ln|\tan x|+C.$

(23) $\int \frac{\ln\tan x}{\cos x\sin x}dx=\int \frac{\ln\tan x}{\tan x}d(\tan x)=\int \ln\tan x d(\ln\tan x)=\frac{(\ln\tan x)^2}{2}+C.$

(24) $\int \cos^3 x dx=\int (1-\sin^2 x)d(\sin x)=\sin x-\frac{1}{3}\sin^3 x+C.$

(25) $\int \cos^2(\omega t+\varphi)dt=\int \frac{\cos 2(\omega t+\varphi)+1}{2}dt=\frac{\sin 2(\omega t+\varphi)}{4\omega}+\frac{t}{2}+C.$

(26) $\int \sin 2x\cos 3x dx=\int \frac{1}{2}(\sin 5x-\sin x)dx=-\frac{1}{10}\cos 5x+\frac{1}{2}\cos x+C.$

(27) $\int \cos x\cos\frac{x}{2}dx=\int \frac{1}{2}\left(\cos\frac{3}{2}x+\cos\frac{1}{2}x\right)dx=\frac{1}{3}\sin\frac{3}{2}x+\sin\frac{1}{2}x+C.$

(28) $\int \sin 5x\sin 7x dx=\int -\frac{1}{2}(\cos 12x-\cos 2x)dx=-\frac{1}{24}\sin 12x+\frac{1}{4}\sin 2x+C.$

(29) $\int \tan^3 x\sec x dx=\int (\sec^2 x-1)d(\sec x)=\frac{1}{3}\sec^3 x-\sec x+C.$

(30) $\int \frac{dx}{e^x+e^{-x}}=\int \frac{e^x dx}{e^{2x}+1}=\int \frac{de^x}{e^{2x}+1}=\arctan e^x+C.$

(31) $\int \frac{1-x}{\sqrt{9-4x^2}}dx=\frac{1}{2}\int \frac{d\left(\frac{2x}{3}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{2x}{3}\right)^2}}+\frac{1}{8}\int \frac{d(9-4x^2)}{\sqrt{9-4x^2}}=\frac{\arcsin\frac{2x}{3}}{2}+\frac{\sqrt{9-4x^2}}{4}+C.$

(32) $\int \frac{x^3}{9+x^2}dx=\int x dx-\frac{9}{2}\int \frac{d(9+x^2)}{9+x^2}=\frac{x^2}{2}-\frac{9}{2}\ln(9+x^2)+C.$

(33) $\int \frac{dx}{2x^2-1}=\frac{1}{2}\int \left(\frac{1}{\sqrt{2}x-1}-\frac{1}{\sqrt{2}x+1}\right)dx=\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}x-1}{\sqrt{2}x+1}\right|+C.$

(34) $\int\frac{\mathrm{d}x}{(x+1)(x-2)}=\int\frac{1}{3}\left(\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x+1}\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\int\frac{1}{x-2}\mathrm{d}x-\frac{1}{3}\int\frac{1}{x+1}\mathrm{d}x$

$$=\frac{1}{3}\ln|x-2|-\frac{1}{3}\ln|x+1|+C=\frac{1}{3}\ln\left|\frac{x-2}{x+1}\right|+C.$$

(35) $\int\frac{x}{x^2-x-2}\mathrm{d}x=\int\frac{x}{(x-2)(x+1)}\mathrm{d}x=\int\frac{1}{3}\left(\frac{2}{x-2}+\frac{1}{x+1}\right)\mathrm{d}x$

$$=\frac{2}{3}\ln|x-2|+\frac{1}{3}\ln|x+1|+C.$$

(36)设 $x=a\sin u\left(-\frac{\pi}{2}<u<\frac{\pi}{2}\right)$,则 $\sqrt{a^2-x^2}=a\cos u$, $\mathrm{d}x=a\cos u\mathrm{d}u$,于是

$$\int\frac{x^2\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}}=\int a^2\sin^2 u\mathrm{d}u=a^2\int\frac{1-\cos 2u}{2}\mathrm{d}u=\frac{a^2}{2}\left(u-\frac{\sin 2u}{2}\right)+C$$

$$=\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}-\frac{x\sqrt{a^2-x^2}}{2}+C.$$

(37)当 $x>1$ 时,$\int\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2-1}}\xlongequal{x=\frac{1}{t}}-\int\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}}=-\arcsin t+C=-\arcsin\frac{1}{x}+C$,

当 $x<-1$ 时,$\int\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2-1}}\xlongequal{x=\frac{1}{t}}\int\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}}=\arcsin t+C=\arcsin\frac{1}{x}+C$,

故在$(-\infty,-1)$或$(1,+\infty)$内,有 $\int\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2-1}}=-\arcsin\frac{1}{|x|}+C.$

(38)设 $x=\tan u\left(-\frac{\pi}{2}<u<\frac{\pi}{2}\right)$,则 $\sqrt{x^2+1}=\sec u$, $\mathrm{d}x=\sec^2 u\mathrm{d}u$,于是

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(x^2+1)^3}}=\int\cos u\mathrm{d}u=\sin u+C=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}+C.$$

(39)当 $x\geqslant3$ 时,令 $x=3\sec u\left(0\leqslant u<\frac{\pi}{2}\right)$,

$$\int\frac{\sqrt{x^2-9}}{x}\mathrm{d}x=\int 3\tan^2 u\mathrm{d}u=3\int(\sec^2 u-1)\mathrm{d}u=3\tan u-3u+C$$

$$=\sqrt{x^2-9}-3\arccos\frac{3}{x}+C;$$

当 $x\leqslant-3$ 时,令 $x=3\sec u\left(\frac{\pi}{2}<u\leqslant\pi\right)$,

$$\int\frac{\sqrt{x^2-9}}{x}\mathrm{d}x=-\int 3\tan^2 u\mathrm{d}u=-3\int(\sec^2 u-1)\mathrm{d}u=-3\tan u+3u+C$$

$$=\sqrt{x^2-9}+3\arccos\frac{3}{x}+C'=\sqrt{x^2-9}-3\arccos\left(-\frac{3}{x}\right)+C'+3\pi,$$

故可统一写作 $\int\frac{\sqrt{x^2-9}}{x}\mathrm{d}x=\sqrt{x^2-9}-3\arccos\frac{3}{|x|}+C.$

(40) $\int\frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt{2x}}\xlongequal{x=\frac{u^2}{2}}\int\frac{u\mathrm{d}u}{1+u}=u-\ln(1+u)+C=\sqrt{2x}-\ln(1+\sqrt{2x})+C.$

(41)令 $x=\sin t\left(-\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2}\right)$,则 $\sqrt{1-x^2}=\cos t$, $\mathrm{d}x=\cos t\mathrm{d}t$,于是

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt{1-x^2}}=\int\frac{\cos t}{1+\cos t}\mathrm{d}t=\int\frac{2\cos^2\frac{t}{2}-1}{2\cos^2\frac{t}{2}}\mathrm{d}t=t-\tan\frac{t}{2}+C$$

$$=t-\frac{\sin t}{1+\cos t}+C=\arcsin x-\frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}+C.$$

(42)设 $x=\sin t\left(-\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2}\right)$，则 $\sqrt{1-x^2}=\cos t$，$\mathrm{d}x=\cos t\mathrm{d}t$，于是

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{x+\sqrt{1-x^2}}=\int\frac{\cos t\mathrm{d}t}{\sin t+\cos t},$$

又 $\int\frac{\cos t}{\sin t+\cos t}\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\int\left(1+\frac{\cos t-\sin t}{\sin t+\cos t}\right)\mathrm{d}t$

$=\frac{1}{2}(t+\ln|\sin t+\cos t|)+C.$

所以 $\int\frac{\mathrm{d}x}{x+\sqrt{1-x^2}}=\frac{1}{2}(\arcsin x+\ln|x+\sqrt{1-x^2}|)+C.$

(43) $\int\frac{x-1}{x^2+2x+3}\mathrm{d}x=\int\frac{x+1-2}{(x+1)^2+2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}[(x+1)^2+2]}{(x+1)^2+2}-\sqrt{2}\int\frac{\mathrm{d}\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)}{\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)^2+1}$

$$=\frac{1}{2}\ln(x^2+2x+3)-\sqrt{2}\arctan\frac{x+1}{\sqrt{2}}+C.$$

(44)设 $x=\tan t\left(-\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2}\right)$，则 $x^2+1=\sec^2 t$，$\mathrm{d}x=\sec^2 t\mathrm{d}t$，于是

$$\int\frac{x^3+1}{(x^2+1)^2}\mathrm{d}x=\int\frac{\tan^3 t+1}{\sec^2 t}\mathrm{d}t=\int\frac{\cos^2 t-1}{\cos t}\mathrm{d}(\cos t)+\int\frac{1+\cos 2t}{2}\mathrm{d}t$$

$=\frac{1}{2}\cos^2 t-\ln\cos t+\frac{t}{2}+\frac{1}{4}\sin 2t+C$

$=\frac{1}{2}\cos^2 t-\ln\cos t+\frac{t}{2}+\frac{1}{2}\sin t\cos t+C.$

按 $\tan t=x$ 作辅助三角形(图 4—2)，便有

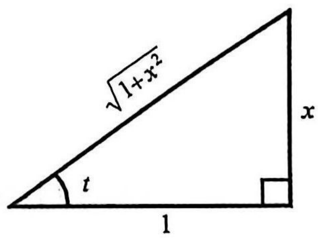

图 4—2

$$\cos t=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}},\qquad \sin t=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}},$$

于是 $\int\frac{x^3+1}{(x^2+1)^2}\mathrm{d}x=\frac{1+x}{2(1+x^2)}+\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+\frac{1}{2}\arctan x+C.$