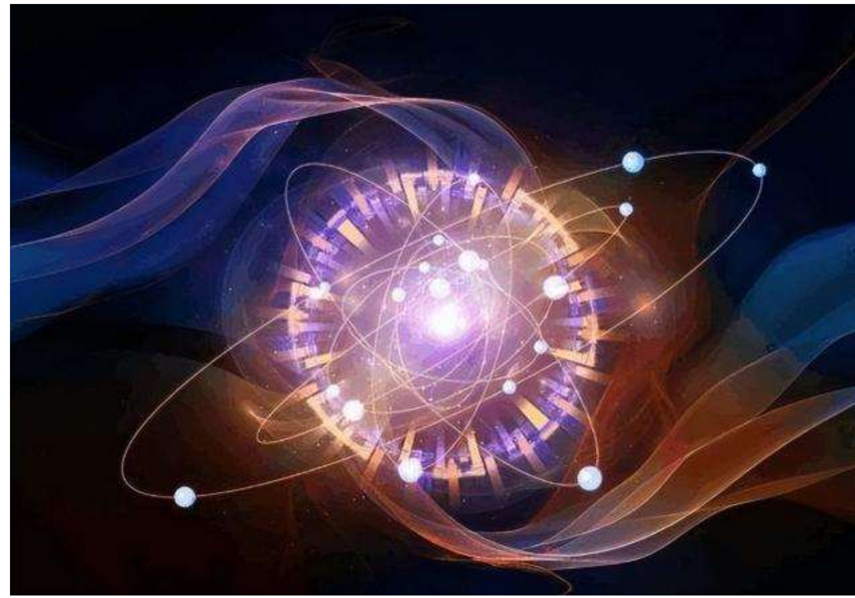
对物质波如何理解？



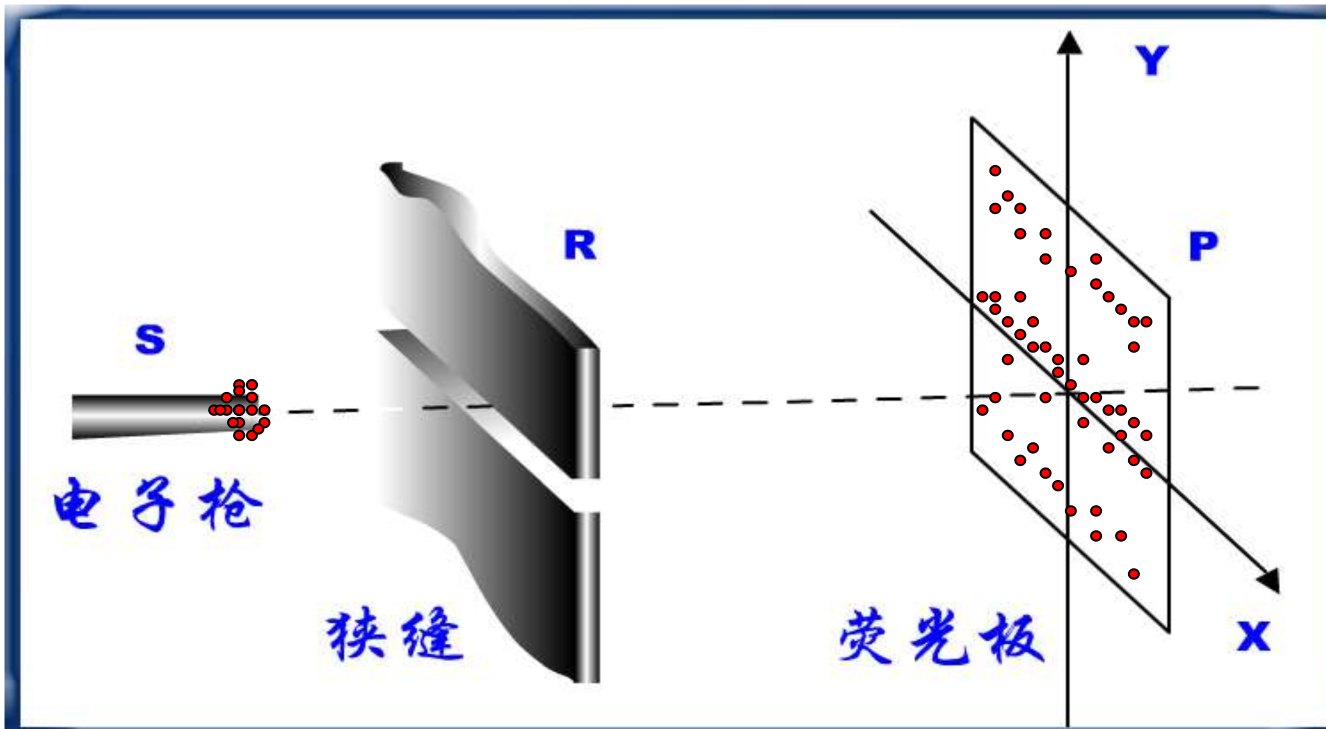
历史上有两种**错误**观点：

1、把波当成是电子的内部结构，把电子看成波包。

媒质中波包会扩散而消失，而电子是完整的。

2、大量粒子运动形成的疏密波。

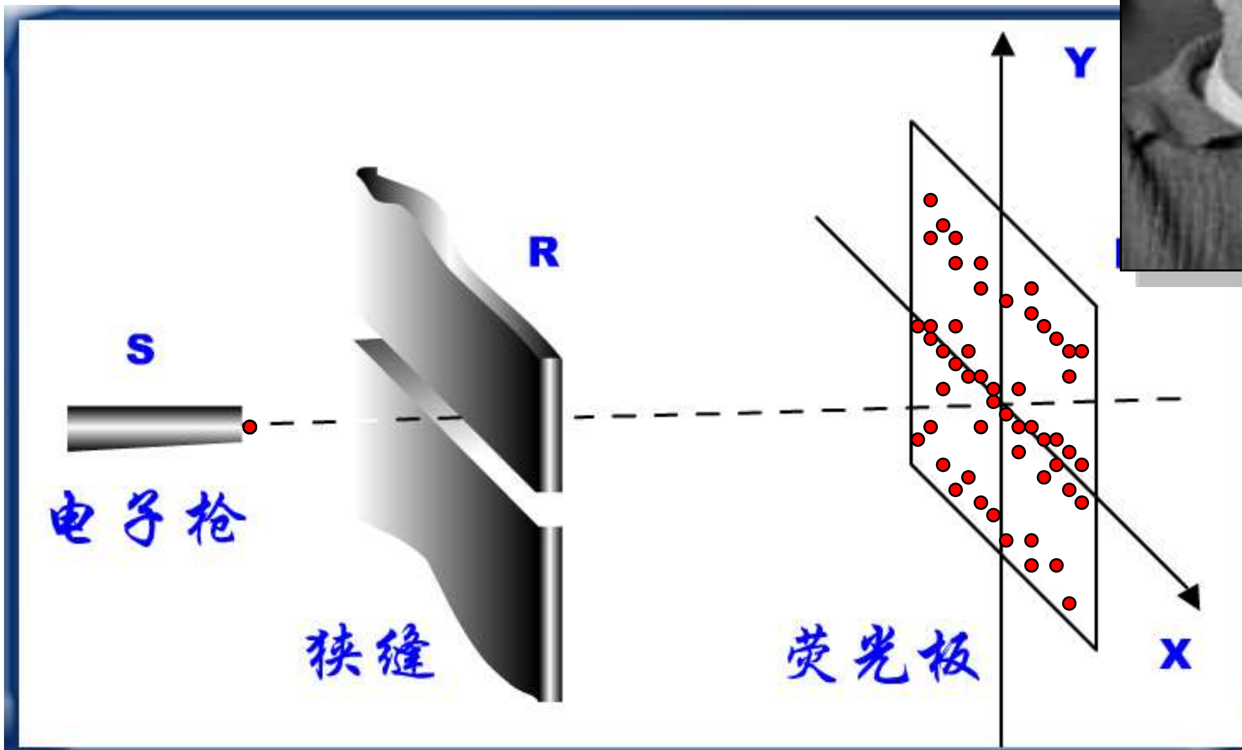
一个粒子就不应该和对应一个物质波。



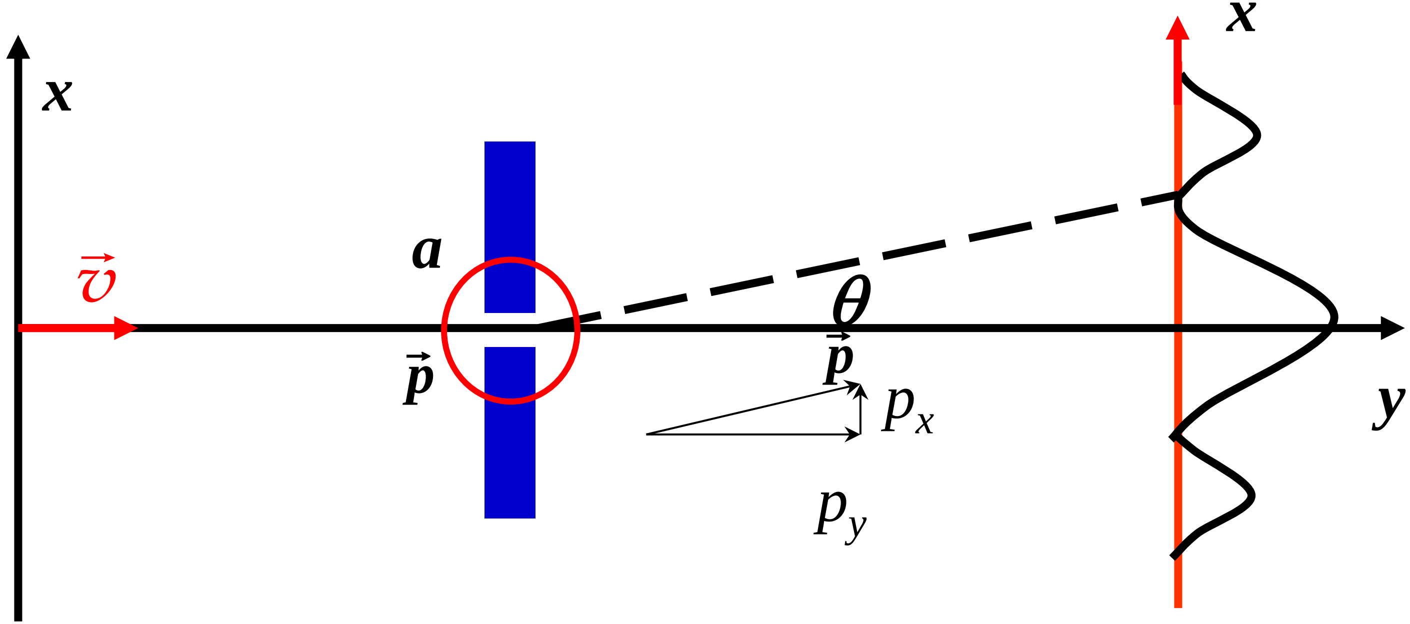
电子单缝衍射实验　　　多电子衍射

22.2 不确定关系

一、不确定关系



电子单缝衍射实验　　　单电子衍射

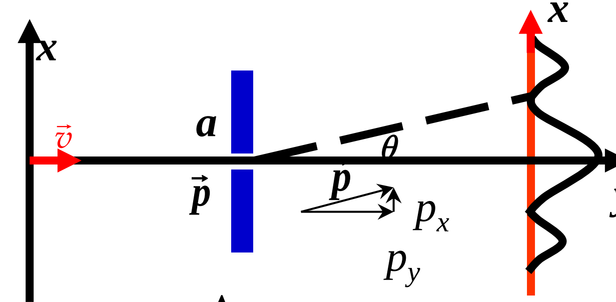


（1）在x方向位置的不确定度： $\Delta x = a$

（2）动量在x方向上分量的不确定度：

A、一级极小处的电子 $\Delta p_x = p\sin\theta_1$

中央明纹内的电子 $0 \le p_x \le p\sin\theta_1$



x方向p的不确定度 $\Delta p_x = p\sin\theta_1$ $\sin\theta_1 = \dfrac{\Delta p_x}{p}$

单缝衍射中对一级极小 $a\sin\theta_1 = \lambda$ $\sin\theta_1 = \dfrac{\lambda}{a} = \dfrac{\lambda}{\Delta x}$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\Delta p_x}{p} &= \frac{\lambda}{\Delta x} \\ \lambda &= \frac{h}{p} \end{aligned}\right\} \quad \Delta p_x = \frac{h}{\Delta x} \qquad \therefore \Delta p_x \cdot \Delta x = h$$

B、将次级衍射考虑在内

$$\Delta p_x \geq p\sin\theta_1 \qquad \sin\theta_1 = \frac{\lambda}{\Delta x} \qquad \therefore \Delta p_x \cdot \Delta x \geq h$$

C、一般关系 $\hbar = \dfrac{h}{2\pi} = 1.055\times10^{-34} J\cdot s$

$$\Delta x \cdot \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2} \qquad \Delta y \cdot \Delta p_y \geq \frac{\hbar}{2} \qquad \Delta z \cdot \Delta p_z \geq \frac{\hbar}{2}$$

D、能量与时间不确定关系 $\Delta E \cdot \Delta t \geq \dfrac{\hbar}{2}$

——量子力学的基本原理之一

原子中某激发态的平均寿命为

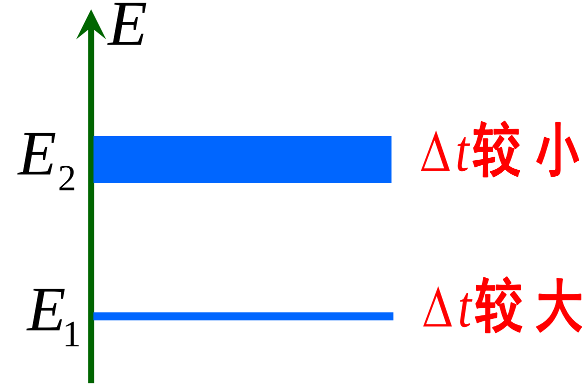
$$\boxed{\Delta E \cdot \Delta t \approx \frac{\hbar}{2}}$$

$$\Delta t = 10^{-8}\,\mathrm{s}$$

$$E = h\nu$$

$$\Delta\nu = \frac{\Delta E}{h}$$

$$\approx \frac{h}{4\pi\,\Delta t} \approx 7.95\times 10^{6}\,\mathrm{Hz}$$



谱线的自然宽度

微观粒子的力学量不可能全部有确定的值。

二、关于不确定性关系的讨论

1. 不确定关系意味着两个互相制约、互成反比的物理量的不确定量不能同时无限制地减小。

2. 微观粒子永远不可能静止 —— 存在零点能

3. 不确定关系是波粒二象性的反映。

一个作匀速运动的一维粒子，它可在整个x轴上出现

$\Delta p \to 0$　$\Delta x \to \infty$　p 为常数　$p = \dfrac{h}{\lambda}$

λ完全确定，即其德布罗意波为单色平面波

4. 划出了经典力学适用的范围：h的作用

例：试求原子中的电子速度的不确定量，取原子的线度约为 $10^{-10}m$ 。

解：原子中电子位置的不确定量 $\Delta r \approx 10^{-10}m$

由不确定关系 $\Delta r \cdot \Delta(mv) \geq \frac{\hbar}{2}$

$$\Delta v \geq \frac{\hbar}{2m\Delta r}$$

$$= \frac{1.05\times10^{-34}J\cdot s}{2\times9.11\times10^{-31}kg\times10^{-10}m} = 5.8\times10^{5}m/s$$

微观世界中不能用动量来描述运动状态

例： 设一束光的波长为500nm，其波长的不确定度为 $2\times10^{-8}nm$，求光子坐标的不确定度。

解： 由不确定关系 $\Delta x\cdot\Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2}$

$$p=\frac{h}{\lambda}$$ 对此式求微分 $$\Delta p=-h\frac{\Delta\lambda}{\lambda^2}$$

动量的不确定度的大小 $$\boxed{\Delta p=\frac{h}{\lambda^2}\Delta\lambda}$$

$$\therefore \Delta x \geq \frac{\hbar}{2\Delta p}=\frac{\lambda^2}{4\pi\Delta\lambda}=\frac{(500nm)^2}{4\times3.14\times2\times10^{-8}nm}=995m$$

微观世界中轨道概念失去意义

说明:

$$\Delta x \cdot \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2} \quad \Delta p_x \cdot \Delta x \geq h \quad \Delta p_x \cdot \Delta x \geq \hbar$$

都是关于不确定量的数值估计，本质没有差别。

具体计算时一般可用 $\Delta x \cdot \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2}$ ，如果题目中指明用其他两个关系式，就由题干要求去计算。

沃纳·海森堡 因创立量子力学，并导致氢的同素异形体的发现而获1932年诺贝尔物理学奖

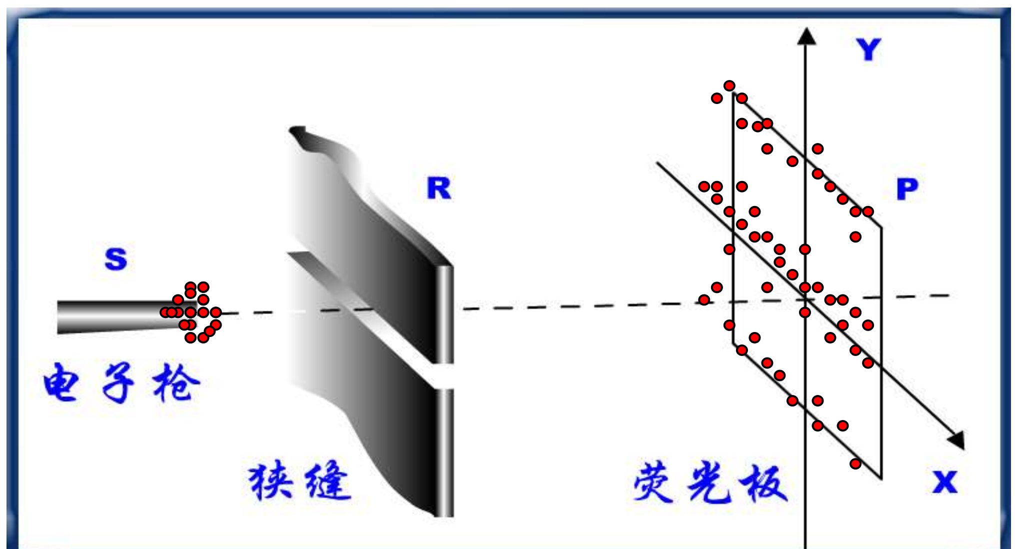
22.3 波函数与概率密度

一、对物质波的理解

1. 波动性　　非经典波　　无“波动”

德布罗意波波长和频率的乘积不等于相应粒子的运动速度，即$u \neq \lambda \nu$ 。

多电子衍射

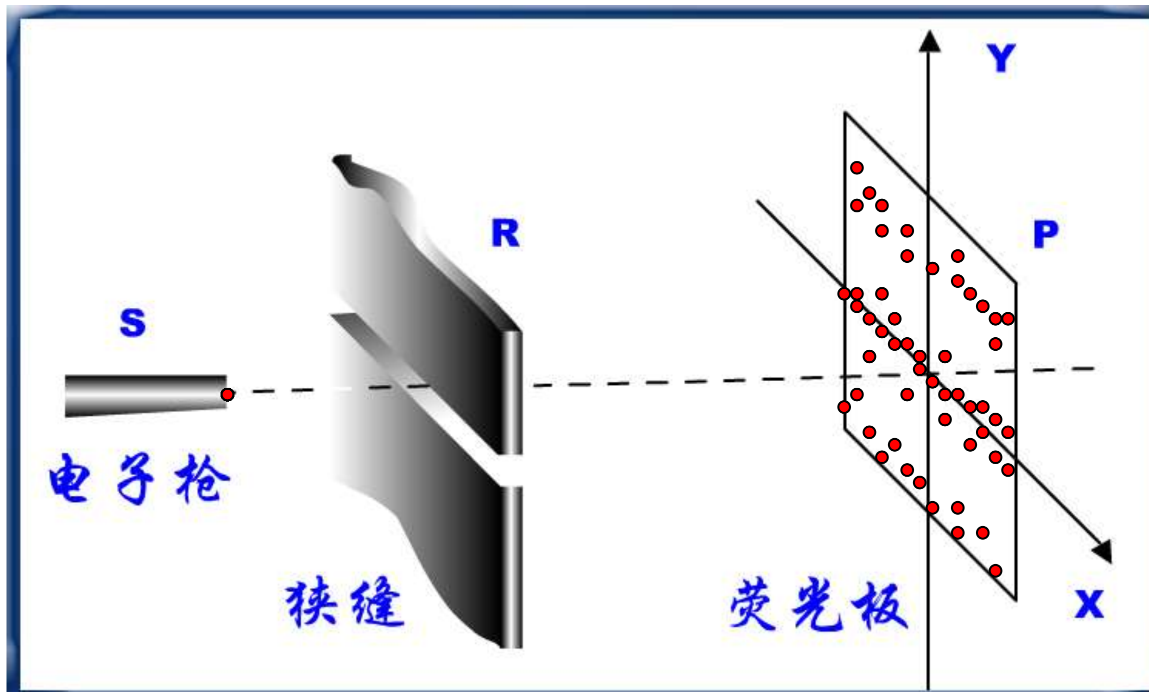


一、对物质波的理解

1. 波动性　　非经典波　　无“波动”

2. 粒子性　　非经典粒子　无“轨道”

单电子衍射



一、对物质波的理解

1.波动性

2. 粒子性

3. 波粒二象性

- 在同一时刻是互斥的
- 包含于同一对象

对于同一事物的两个互补属性决定了该事物的某一方面性质不可能同时由这两种属性来描述，从这个意义上说两者是互斥的；但是要全面地反映光的性质，只有把这两种属性结合起来，才能形成对该事物的完备描述，从这个意义上说二者又是互补的。

——玻尔

波与粒子统一于何处？

概率！

1954年诺贝尔物理学奖

玻恩

德布罗意波（物质波）→概率波

波的强度→粒子空间概率

光子衍射图样分析

波动性：某处明亮，则某处光强大，即 I 大。

粒子性：某处明亮，则某处光子多，即 N大。

光子数 $N \propto I \propto E_0^2$

I 大，光子出现概率大；

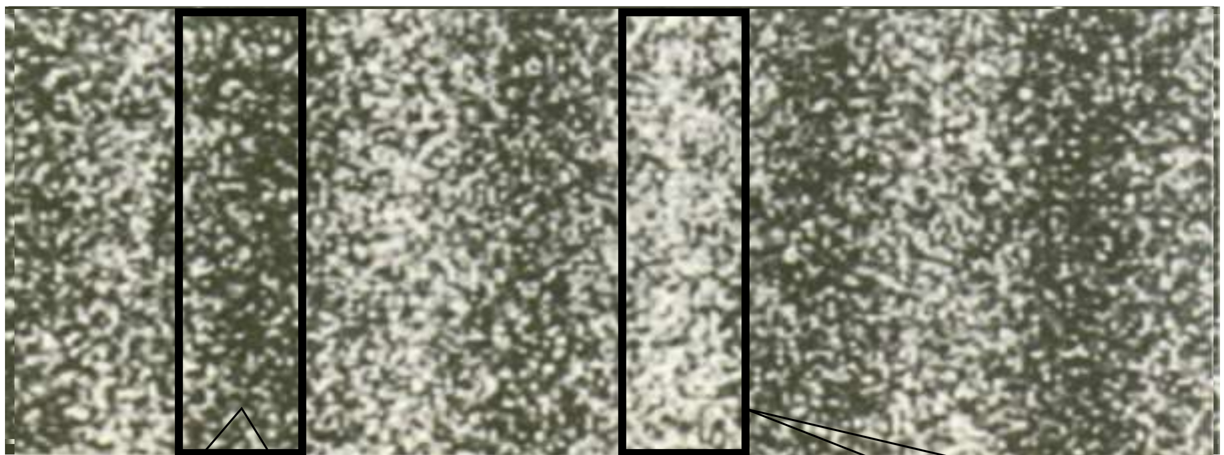
I 小，光子出现概率小。

光子在某处出现的概率和该处光波振幅的平方成正比。

电子衍射图样分析

单个电子在哪一处出现是偶然事件；

大量电子的分布有确定的统计规律。



出现概率小

电子数 N = 70000

出现概率大

电子双缝干涉图样

电子数在屏上的分布是单个分布概率的累积，结果出现干涉条纹。

二、物质波的波函数及其物理意义

1. 自由粒子的波函数

（1）回顾机械波

一列沿x 轴正向传播的平面单色简谐波的波函数

$$y(x,t)=y_0\cos\omega(t-\frac{x}{u})=y_0\cos 2\pi(\nu t-\frac{x}{\lambda})$$

若写成复函数形式： $y(x,t)=y_0 e^{-i2\pi(\nu t-\frac{x}{\lambda})}$

即应用欧拉公式： $e^{-i\varphi}=\cos\varphi-i\sin\varphi$

取其实部，即表示机械波。

（2）物质波

以沿x方向匀速直线运动的自由粒子为例：

自由粒子：不受外部作用，能量不变、频率不变。

从波动性看，它只能是单色平面波 用Ψ表示

$$y = y_0 \cos 2\pi(\nu t - \frac{x}{\lambda}) \longrightarrow \Psi = \Psi_0 \cos 2\pi(\nu t - \frac{x}{\lambda})$$

量子力学表明，描述微观粒子的波函数是复函数：

$$\Psi(x,t) = \Psi_0 e^{-i2\pi(\nu t - \frac{x}{\lambda})}$$

应用德布罗意公式：$E = h\nu \quad P = h/\lambda$

物质波（德布罗意波）表达式为：

$$\Psi(x,t) = \Psi_0 e^{-i2\pi(\nu t - \frac{x}{\lambda})} = \Psi_0 e^{-i\frac{2\pi}{h}(Et - Px)}$$ 自由粒子波函数

沿 $\vec{r}$ 方向匀速直线运动的自由粒子的波函数为：

$$\Psi(\vec{r},t)=\Psi_0 e^{-i\frac{2\pi}{h}(E\cdot t-\vec{P}\cdot\vec{r})}$$

注意：（1）自由粒子的能量和动量为常量，其波函数所描述的德布罗意波是单色平面波。

（2）对于处在外场作用下运动的非自由粒子，其能量和动量不是常量，其波函数所描述的德布罗意波就不是平面波。

（3）外场不同，粒子的运动状态及描述运动状态的波函数也不相同。

用波函数来描写粒子的运动状态。

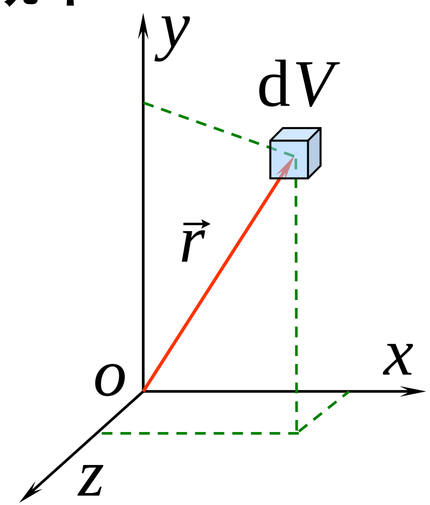
——量子力学的基本原理之二

2. 波函数的统计意义

（1）概率密度

表示在某处**单位体积**内粒子出现的概率

$$w = |\Psi|^2 = \Psi\Psi^*$$



某时刻在某点附近，**体积元** $\mathrm{d}V$ 内粒子出现的概率：

$$\mathrm{d}W = |\Psi|^2 \cdot \mathrm{d}V = \Psi\Psi^* \cdot \mathrm{d}V$$

一维情况 $\mathrm{d}W = |\Psi|^2 \cdot \mathrm{d}x$

（2）归一化波函数

在波函数存在的全部空间中必能找到粒子，即某一时刻在整个空间内发现粒子的概率为1。

$$W=\int_{-\infty}^{+\infty}\Psi\Psi^{*}\mathrm{d}V=1$$ 此条件称归一化条件。

满足归一化条件的波函数，称归一化波函数。

- $\Psi(\vec{r},t)$ 和 $c\Psi(\vec{r},t)$描述的相对几率分布完全相同。c为复常数

$$\frac{\left|c\Psi(\vec{r}_1,t)\right|^2}{\left|c\Psi(\vec{r}_2,t)\right|^2}=\frac{\left|\Psi(\vec{r}_1,t)\right|^2}{\left|\Psi(\vec{r}_2,t)\right|^2}$$

由此将普通波函数得出其等效的归一化波函数

- 推广：由N个粒子组成的系统的波函数是全体N个粒子的坐标以及时间的复函数 $\Psi(\vec{r}_1,\ldots\vec{r}_N;\mathrm{t})$，其在空间出现的概率为 $\left|\Psi(\vec{r}_1,\ldots\vec{r}_N;\mathrm{t})\right|^2 \mathrm{d}^3\vec{r}_1\ldots\mathrm{d}^3\vec{r}_N$

代表粒子1出现在 $\vec{r}_1$附近的体积元 $\mathrm{d}^3\vec{r}_1$

同时粒子2出现在 $\vec{r}_2$附近的体积元 $\mathrm{d}^3\vec{r}_2$

等等的概率。

其归一化为 $W=\left|\Psi(\vec{r}_1,\ldots\vec{r}_N;\mathrm{t})\right|^2 \mathrm{d}^3\vec{r}_1\ldots\mathrm{d}^3\vec{r}_N=1$

可用 $\mathrm{d}\tau$ 表示一般系统的空间体积元　三维粒子 $\mathrm{d}\tau=\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$

N个三维粒子 $\mathrm{d}\tau=\mathrm{d}x_1\mathrm{d}y_1\mathrm{d}z_1\ldots\mathrm{d}x_N\mathrm{d}y_N\mathrm{d}z_N$

（3）波函数的三个标准化条件

1）单值：因任一体积元内粒子出现的概率只有一种，故波函数一定是单值的；

2）有限：因粒子出现的概率不可能为无限大，故波函数必须是有限的；

3）连续：因粒子出现的概率不会在某处发生突变，故波函数必须处处连续。

结论：波函数描写了粒子在空间出现的概率，就这个意义讲，**德布罗意波是概率波。**波函数决不是粒子的运动轨迹，它只是给出了粒子概率的空间分布。

例: 作一维运动的粒子被束缚在$0<x<a$的范围内。已知其归一化波函数为$\Psi(x)=A\sin\frac{\pi x}{a}$

求 （1）常数A

（2）粒子在0到$a/2$区域内出现的概率

（3）粒子在何处出现的概率最大

解： (1) $\int_{-\infty}^{+\infty}\Psi\Psi^{*}\mathrm{d}x = A^{2}\int_{0}^{a}\sin^{2}\frac{\pi x}{a}\mathrm{d}x$

$$= A^{2}\int_{0}^{a}\frac{1-\cos\frac{2\pi x}{a}}{2}\mathrm{d}x = \frac{a}{2}A^{2} = 1 \quad A = \sqrt{\frac{2}{a}}$$

（2）粒子在0到$a/2$区域内出现的概率

（3）粒子在何处出现的概率最大

(2) $$\int_0^{\frac{a}{2}} \Psi\Psi^* \mathrm{d}x = \frac{2}{a}\int_0^{\frac{a}{2}} \sin^2 \frac{\pi x}{a} \mathrm{d}x = \frac{1}{2}$$

(3) $$\frac{\mathrm{d}\left|\Psi(x)\right|^2}{\mathrm{d}x} = \frac{2}{a}\cdot 2\sin\frac{\pi x}{a}\cdot\frac{\pi}{a}\cos\frac{\pi x}{a} = \frac{2\pi}{a^2}\sin\frac{2\pi x}{a} = 0$$

$$\frac{2\pi x}{a} = k\pi, k = 0,\pm1,\pm2,\cdots \because 0 < x < a, \quad \therefore x = \frac{a}{2}$$

物质波与机械波的区别

物质波： 概率波

波函数： 不代表某实在物理量在空间的波动

振幅： 无实在物理意义，无法从实验直接测得

波函数模的平方： 有实在物理意义，代表任意时刻在某处单位体积内粒子出现的几率。

单个粒子何时在何处出现并不确定，但出现的概率是确定的；波函数按波的形式去分配粒子出现的概率。

作业：

P228: 一. 3 二. 4、6 三. 3、6