习题 1—1 解答

1. 求下列函数的自然定义域：

(1) $y=\sqrt{3x+2}$；　(2) $y=\dfrac{1}{1-x^2}$；　(3) $y=\dfrac{1}{x}-\sqrt{1-x^2}$；

(4) $y=\dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}}$；　(5) $y=\sin\sqrt{x}$；　(6) $y=\tan(x+1)$；

(7) $y=\arcsin(x-3)$；　(8) $y=\sqrt{3-x}+\arctan\dfrac{1}{x}$；

(9) $y=\ln(x+1)$；　(10) $y=e^{\frac{1}{x}}$.

解 (1) $3x+2\geqslant0\Rightarrow x\geqslant-\dfrac{2}{3}$ 即定义域为 $\left[-\dfrac{2}{3},+\infty\right)$.

(2) $1-x^2\neq0\Rightarrow x\neq\pm1$，即定义域为 $(-\infty,-1)\cup(-1,1)\cup(1,+\infty)$.

(3) $x\neq0$ 且 $1-x^2\geqslant0\Rightarrow x\neq0$ 且 $|x|\leqslant1$，即定义域为 $[-1,0)\cup(0,1]$.

(4) $4-x^2>0\Rightarrow|x|<2$，即定义域为 $(-2,2)$.

(5) $x\geqslant0$，即定义域为 $[0,+\infty)$.

(6) $x+1\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$ 即定义域为 $\left\{x\,\middle|\,x\in\mathbf{R}\text{ 且 }x\neq\left(k+\dfrac{1}{2}\right)\pi-1,k\in\mathbf{Z}\right\}$.

(7) $|x-3|\leqslant1\Rightarrow2\leqslant x\leqslant4$，即定义域为 $[2,4]$.

(8) $3-x\geqslant0$ 且 $x\neq0$，即定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,3]$.

(9) $x+1>0\Rightarrow x>-1$，即定义域为 $(-1,+\infty)$.

(10) $x\neq0$，即定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$.

> 评注：本题是求函数的自然定义域，一般方法是先写出构成所求函数的各个简单函数的定义域，再求出这些定义域的交集，即得所求定义域. 下列简单函数及其定义域是经常用到的：
>
> $y=\dfrac{Q(x)}{P(x)}$，$P(x)\neq0$；　$y=\sqrt[2n]{x}$，$x\geqslant0$；
>
> $y=\log_a x$，$x>0$；　$y=\tan x$，$x\neq(k+\dfrac{1}{2})\pi$，$k\in\mathbf{Z}$；
>
> $y=\cot x$，$x\neq k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$；　$y=\arcsin x$，$|x|\leqslant1$；
>
> $y=\arccos x$，$|x|\leqslant1$.

2. 下列各题中，函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是否相同？为什么？

(1) $f(x)=\lg x^2$，$g(x)=2\lg x$；　(2) $f(x)=x$，$g(x)=\sqrt{x^2}$；

(3) $f(x)=\sqrt[3]{x^4-x^3}$，$g(x)=x\sqrt[3]{x-1}$；　(4) $f(x)=1$，$g(x)=\sec^2x-\tan^2x$.

解 (1) 不同，因为定义域不同.

(2) 不同，因为对应法则不同，$g(x)=\sqrt{x^2}=\begin{cases}x, & x\geqslant0,\\ -x, & x<0.\end{cases}$

① 定义域

② 对应法则

(3) 相同，因为定义域、对应法则均相同.

(4) 不同，因为定义域不同.

3. 设 $\varphi(x)=\begin{cases}|\sin x|, & |x|<\dfrac{\pi}{3},\\ 0, & |x|\geqslant\dfrac{\pi}{3},\end{cases}$

求 $\varphi(\frac{\pi}{6})$，$\varphi(\frac{\pi}{4})$，$\varphi(-\frac{\pi}{4})$，$\varphi(-2)$，并作出函数 $y=\varphi(x)$ 的图形.

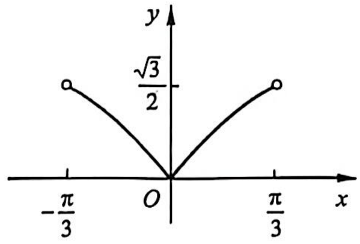

图 1—1

解 $\varphi\left(\frac{\pi}{6}\right)=\left|\sin\frac{\pi}{6}\right|=\frac{1}{2}$，$\varphi\left(\frac{\pi}{4}\right)=\left|\sin\frac{\pi}{4}\right|=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

$\varphi\left(-\frac{\pi}{4}\right)=\left|\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right|=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$\varphi(-2)=0$.

$y=\varphi(x)$ 的图形如图 1—1 所示.

4. 讨论下列函数的有界性.

(1) $f(x)=\frac{x}{1+x^2}$；　　(2) $f(x)=\frac{1+x^2}{1+x^4}$.

4 题视频解析

解 (1)对任意的 $x\in(-\infty,+\infty)$，有 $|f(x)|=\left|\frac{x}{1+x^2}\right|\leqslant\frac{1}{2}$，所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有界.

(2)当 $|x|=1$ 时，$|f(x)|=1$；

当 $|x|>1$ 时，$|f(x)|=\frac{1+x^2}{1+x^4}<\frac{1+x^4}{1+x^4}=1$；

当 $|x|<1$ 时，$|f(x)|=\frac{1+x^2}{1+x^4}\leqslant1+x^2<2$.

所以，对任意的 $x\in(-\infty,+\infty)$，有 $|f(x)|<2$，即 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有界.

5. 试证下列函数在指定区间内的单调性：

(1) $y=\frac{x}{1-x}$，$(-\infty,1)$；　　(2) $y=x+\ln x$，$(0,+\infty)$.

证 (1) $y=f(x)=\frac{x}{1-x}=-1+\frac{1}{1-x}$，$x\in(-\infty,1)$

设 $x_1<x_2<1$. 因为 $f(x_2)-f(x_1)=\frac{1}{1-x_2}-\frac{1}{1-x_1}=\frac{x_2-x_1}{(1-x_1)(1-x_2)}>0$，

所以 $f(x_2)>f(x_1)$，即 $f(x)$ 在 $(-\infty,1)$ 内单调增加.

(2) $y=f(x)=x+\ln x$，$x\in(0,+\infty)$.

设 $0<x_1<x_2$. 因为 $f(x_2)-f(x_1)=x_2+\ln x_2-x_1-\ln x_1=x_2-x_1+\ln\frac{x_2}{x_1}>0$，

所以，$f(x_2)>f(x_1)$，即 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内单调增加.

6. 讨论下列函数的单调性：

(1) $f(x)=ax^2+bx+c$，其中 $a,b,c\in\mathbf{R}$，$a\neq0$；

(2) $f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$，其中 $a,b,c,d\in\mathbf{R}$，$c>0$.

6 题视频解析

解 (1) $f(x)=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a}$.

当 $a>0$ 时，$f(x)$ 在 $\left(-\infty,-\frac{b}{2a}\right)$ 单调减少，$f(x)$ 在 $\left[-\frac{b}{2a},+\infty\right)$ 单调增加.

当 $a<0$ 时，$f(x)$ 在 $\left(-\infty,-\frac{b}{2a}\right)$ 单调增加，$f(x)$ 在 $\left[-\frac{b}{2a},+\infty\right)$ 单调减少.

(2) $f(x)=\frac{a}{c}+\frac{bc-ad}{c(cx+d)}$，

当 $bc-ad>0$ 时，$f(x)$ 分别在 $\left(-\infty,-\frac{d}{c}\right)$ 及 $\left(-\frac{d}{c},+\infty\right)$ 内单调减少；当 $bc-ad<0$ 时，$f(x)$ 分别在 $\left(-\infty,-\frac{d}{c}\right)$ 及 $\left(-\frac{d}{c},+\infty\right)$ 内单调增加；当 $bc-ad=0$ 时，$f(x)=\frac{a}{c}$ 为常数函数，此时 $f(x)$ 既是单调不减函数又是单调不增函数.

7. 设 $f(x)$ 为定义在 $(-l,l)$ 内的奇函数，若 $f(x)$ 在 $(0,l)$ 内单调增加，证明 $f(x)$ 在 $(-l,0)$ 内也单调增加.

证 设 $-l<x_1<x_2<0$，则 $0<-x_2<-x_1<l$，由 $f(x)$ 是奇函数，得 $f(x_2)-f(x_1)=-f(-x_2)+f(-x_1)$. 因为 $f(x)$ 在 $(0,l)$ 内单调增加，所以 $f(-x_1)-f(-x_2)>0$，从而 $f(x_2)>f(x_1)$ 即 $f(x)$ 在 $(-l,0)$ 内也单调增加.

8. 设下面所考虑的函数都是定义在区间 $(-l,l)$ 上的. 证明：

(1) 两个偶函数的和是偶函数，两个奇函数的和是奇函数；

(2) 两个偶函数的乘积是偶函数，两个奇函数的乘积是偶函数，偶函数与奇函数的乘积是奇函数.

8 题视频解析

证 (1) 设 $f_1(x)$，$f_2(x)$ 均为偶函数，则 $f_1(-x)=f_1(x)$，$f_2(-x)=f_2(x)$. 令 $F(x)=f_1(x)+f_2(x)$，于是 $F(-x)=f_1(-x)+f_2(-x)=f_1(x)+f_2(x)=F(x)$，

故 $F(x)$ 为偶函数.

设 $g_1(x)$，$g_2(x)$ 是奇函数，则 $g_1(-x)=-g_1(x)$，$g_2(-x)=-g_2(x)$. 令 $G(x)=g_1(x)+g_2(x)$，于是

$$G(-x)=g_1(-x)+g_2(-x)=-g_1(x)-g_2(x)=-G(x),$$

故 $G(x)$ 为奇函数.

(2) 设 $f_1(x)$，$f_2(x)$ 均为偶函数，则 $f_1(-x)=f_1(x)$，$f_2(-x)=f_2(x)$. 令 $F(x)=f_1(x)\cdot f_2(x)$. 于是 $F(-x)=f_1(-x)\cdot f_2(-x)=f_1(x)f_2(x)=F(x)$，

故 $F(x)$ 为偶函数.

设 $g_1(x)$，$g_2(x)$ 均为奇函数，则 $g_1(-x)=-g_1(x)$，$g_2(-x)=-g_2(x)$. 令 $G(x)=g_1(x)\cdot g_2(x)$. 于是 $G(-x)=g_1(-x)\cdot g_2(-x)=[-g_1(x)][-g_2(x)]=g_1(x)\cdot g_2(x)=G(x)$，

故 $G(x)$ 为偶函数.

设 $f(x)$ 为偶函数，$g(x)$ 为奇函数，则 $f(-x)=f(x)$，$g(-x)=-g(x)$. 令 $H(x)=f(x)\cdot g(x)$，于是 $H(-x)=f(-x)\cdot g(-x)=f(x)[-g(x)]=-f(x)\cdot g(x)=-H(x)$，

故 $H(x)$ 为奇函数.

9. 下列函数中哪些是偶函数，哪些是奇函数，哪些既非偶函数又非奇函数？

(1) $y=x^2(1-x^2)$；　(2) $y=3x^2-x^3$；　(3) $y=\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$；

(4) $y=x(x-1)(x+1)$；　(5) $y=\sin x-\cos x+1$；　(6) $y=\dfrac{a^x+a^{-x}}{2}\ (a>0,a\neq1)$.

解 (1) $y=f(x)=x^2(1-x^2)$，因为 $f(-x)=(-x)^2[1-(-x)^2]=x^2(1-x^2)=f(x)$，

所以 $f(x)$ 为偶函数.

(2) $y=f(x)=3x^2-x^3$，因为

$$f(-x)=3(-x)^2-(-x)^3=3x^2+x^3,$$

$$f(-x)\neq f(x),\text{ 且 } f(-x)\neq -f(x),$$

所以 $f(x)$ 既非偶函数又非奇函数.

(3) $y=f(x)=\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$，因为 $f(-x)=\dfrac{1-(-x)^2}{1+(-x)^2}=\dfrac{1-x^2}{1+x^2}=f(x)$，

所以 $f(x)$ 为偶函数.

(4) $y=f(x)=x(x-1)(x+1)$，因为 $f(-x)=(-x)[(-x)-1][(-x)+1]=-x(x+1)(x-1)=-f(x)$，所以 $f(x)$ 为奇函数.

(5) $y=f(x)=\sin x-\cos x+1$，因为 $f(-x)=\sin(-x)-\cos(-x)+1=-\sin x-\cos x+1$，

$$f(-x)\neq f(x)\text{ 且 } f(-x)\neq -f(x),$$

所以 $f(x)$ 既非偶函数又非奇函数.

(6) $y=f(x)=\dfrac{a^x+a^{-x}}{2}$，因为 $f(-x)=\dfrac{a^{-x}+a^x}{2}=f(x)$，所以 $f(x)$ 为偶函数.

10. 下列各函数中哪些是周期函数？对于周期函数，指出其周期：

(1) $y=\cos(x-2)$； (2) $y=\cos 4x$； (3) $y=1+\sin \pi x$；

(4) $y=x\cos x$； (5) $y=\sin^2 x$.

解 (1)是周期函数，周期 $l=2\pi$. (2)是周期函数，周期 $l=\frac{\pi}{2}$. (3)是周期函数，周期 $l=2$.

(4)不是周期函数. (5)是周期函数，周期 $l=\pi$.

11. 求下列函数的反函数：

(1) $y=\sqrt[3]{x+1}$； (2) $y=\frac{1-x}{1+x}$； (3) $y=\frac{ax+b}{cx+d}\ (ad-bc\neq 0)$；

(4) $y=2\sin 3x\ \left(-\frac{\pi}{6}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{6}\right)$； (5) $y=1+\ln(x+2)$； (6) $y=\frac{2^x}{2^x+1}$.

分析 函数 f 存在反函数的前提条件为：$f:D\to f(D)$是单射. 本题中所给出的各函数易证均为单射，特别(1)、(4)、(5)、(6)中的函数均为单调函数，故都存在反函数.

$\arcsin\frac{y}{2}=\cancel{\sin}3x$

解 (1)由 $y=\sqrt[3]{x+1}$解得 $x=y^3-1$，即反函数为 $y=x^3-1$.

(2)由 $y=\frac{1-x}{1+x}$解得 $x=\frac{1-y}{1+y}$，即反函数为 $y=\frac{1-x}{1+x}$.

(3)由 $y=\frac{ax+b}{cx+d}$解得 $x=\frac{-dy+b}{cy-a}$，即反函数为 $y=\frac{-dx+b}{cx-a}$.

(4)由 $y=2\sin 3x\left(-\frac{\pi}{6}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{6}\right)$解得 $x=\frac{1}{3}\arcsin\frac{y}{2}$，即反函数为 $y=\frac{1}{3}\arcsin\frac{x}{2}$.

(5)由 $y=1+\ln(x+2)$解得 $x=e^{y-1}-2$，即反函数为 $y=e^{x-1}-2$.

(6)由 $y=\frac{2^x}{2^x+1}$解得 $x=\log_2\frac{y}{1-y}$，即反函数为 $y=\log_2\frac{x}{1-x}$.

12. 在下列各题中，求由所给函数构成的复合函数，并求该函数分别对应于给定自变量值 x_1 和 x_2 的函数值：

(1) $y=u^2$，$u=\sin x$，$x_1=\frac{\pi}{6}$，$x_2=\frac{\pi}{3}$； (2) $y=\sin u$，$u=2x$，$x_1=\frac{\pi}{8}$，$x_2=\frac{\pi}{4}$；

(3) $y=\sqrt{u}$，$u=1+x^2$，$x_1=1$，$x_2=2$； (4) $y=e^u$，$u=x^2$，$x_1=0$，$x_2=1$；

(5) $y=u^2$，$u=e^x$，$x_1=1$，$x_2=-1$.

解 (1) $y=\sin^2 x$，$y_1=\frac{1}{4}$，$y_2=\frac{3}{4}$. (2) $y=\sin 2x$，$y_1=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$y_2=1$.

(3) $y=\sqrt{1+x^2}$，$y_1=\sqrt{2}$，$y_2=\sqrt{5}$. (4) $y=e^{x^2}$，$y_1=1$，$y_2=e$.

(5) $y=e^{2x}$，$y_1=e^2$，$y_2=e^{-2}$.

13. 设 $f(x)$的定义域 $D=[0,1]$，求下列各函数的定义域：

(1) $f(x^2)$； (2) $f(\sin x)$；

(3) $f(x+a)(a>0)$； (4) $f(x+a)+f(x-a)(a>0)$.

解 (1) $0\leqslant x^2\leqslant 1\Rightarrow x\in[-1,1]$.

(2) $0\leqslant \sin x\leqslant 1\Rightarrow x\in[2n\pi,(2n+1)\pi]$，$n\in\mathbf{Z}$.

(3) $0\leqslant x+a\leqslant 1\Rightarrow x\in[-a,1-a]$.

(4) $\begin{cases}0\leqslant x+a\leqslant 1,\\ 0\leqslant x-a\leqslant 1\end{cases}\Rightarrow$当 $0<a\leqslant\frac{1}{2}$时，$x\in[a,1-a]$；当 $a>\frac{1}{2}$时，定义域为 $\varnothing$(即空集).

14. 设 $f(x)=\begin{cases}1, & |x|<1,\\ 0, & |x|=1,\\ -1, & |x|>1,\end{cases}$ $g(x)=e^x$，求 $f[g(x)]$和 $g[f(x)]$，并作出这两个函数的图形.

解 $f[g(x)]=f(e^x)=\begin{cases}1, & x<0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x>0.\end{cases}$ $g[f(x)]=e^{f(x)}=\begin{cases}e, & |x|<1,\\ 1, & |x|=1,\\ e^{-1}, & |x|>1.\end{cases}$

$f[g(x)]$与$g[f(x)]$的图形依次如图 1—2，图 1—3 所示.

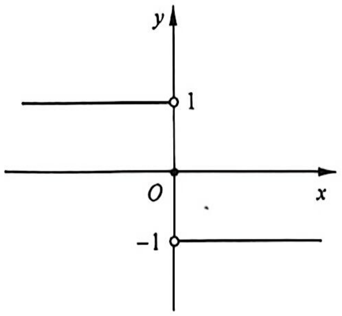

图 1—2

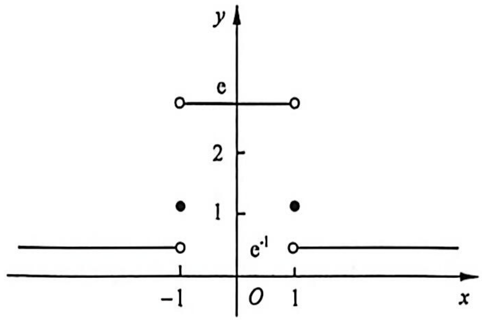

图 1—3

15. 已知水渠的横断面为等腰梯形，斜角 $\varphi=40^\circ$(图 1—4). 当过水断面 $ABCD$ 的面积为定值 S_0 时，求湿周 L ($L=AB+BC+CD$)与水深 h 之间的函数关系式，并指明其定义域.

解 $AB=CD=\dfrac{h}{\sin 40^\circ}$，又

$$S_0=\frac{1}{2}h[BC+(BC+2\cot 40^\circ\cdot h)],$$

得 $$BC=\frac{S_0}{h}-\cot 40^\circ\cdot h,$$

所以 $$L=\frac{S_0}{h}+\frac{2-\cos 40^\circ}{\sin 40^\circ}h,$$

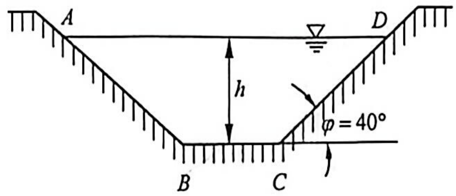

图 1—4

而 $h>0$ 且 $\dfrac{S_0}{h}-\cot 40^\circ\cdot h>0$ 因此湿周函数的定义域为$(0,\ \sqrt{S_0\tan 40^\circ})$.

16. 设 xOy 平面上有正方形 $D=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1\}$及直线 $l:x+y=t(t\geqslant 0)$. 若$S(t)$表示正方形 D 位于直线 l 左下方部分的面积，试求 $S(t)$与 t 之间的函数关系.

解 当 $0\leqslant t\leqslant 1$ 时，$S(t)=\dfrac{1}{2}t^2$；当 $1<t\leqslant 2$ 时，$S(t)=1-\dfrac{1}{2}(2-t)^2=-\dfrac{1}{2}t^2+2t-1$；

当 $t>2$ 时，$S(t)=1$.

故 $$S(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}t^2, & 0\leqslant t\leqslant 1,\\ -\dfrac{1}{2}t^2+2t-1, & 1<t\leqslant 2,\\ 1, & t>2.\end{cases}$$

17. 求联系华氏温度(用 F 表示)和摄氏温度(用 C 表示)的转换公式，并求

(1)90℉的等价摄氏温度和−5℃的等价华氏温度；

(2)是否存在一个温度值，使华氏温度计和摄氏温度计的读数是一样的？如果存在，那么该温度值是多少？

解 设 $F=mC+b$，其中 m,b 均为常数.

因为 $F=32^\circ$相当于 $C=0^\circ$，$F=212^\circ$相当于 $C=100^\circ$，所以 $b=32$，$m=\dfrac{212-32}{100}=1.8$.

故 $$F=1.8C+32\quad 或\quad C=\frac{5}{9}(F-32).$$

(1)$F=90^\circ$，$\qquad C=\dfrac{5}{9}(90-32)\approx 32.2^\circ$.

$C=-5^\circ$，$\qquad F=1.8\times(-5)+32=23^\circ$.

(2)设温度值 t 符合题意，则有 $t=1.8t+32$，$t=-40$.

即华氏−40°恰好也是摄氏−40°.

18. 已知 Rt$\triangle ABC$ 中，直角边 AC、BC 的长度分别为 20，15，动点 P 从 C 出发，沿三角形边界按 $C\to B\to A$ 方向移动；动点 Q 从 C 出发，沿三角形边界按 $C\to A\to B$ 方向移动，移动到两动点相遇时为止，且点 Q 移动的速度是点 P 移动的速度的 2 倍. 设动点 P 移动的距离为 x，$\triangle CPQ$ 的面积为 y，试求 y 与 x 之间的函数关系.

解 因为 $AC=20$，$BC=15$，所以，$AB=\sqrt{20^2+15^2}=25$.

由 $20<2\times 15<20+25$ 可知，点 P，Q 在斜边 AB 上相遇.

令 $x+2x=15+20+25$，得 $x=20$. 即当 $x=20$ 时，点 P，Q 相遇. 因此，所求函数的定义域为 $(0,20)$.

(1) 当 $0<x<10$ 时，点 P 在 CB 上，点 Q 在 CA 上（图 1－5）. 由 $|CP|=x$，$|CQ|=2x$，得 $y=x^2$.

(2) 当 $10\leqslant x\leqslant 15$ 时，点 P 在 CB 上，点 Q 在 AB 上（图 1－6）.

$$|CP|=x,\quad |AQ|=2x-20.$$

设点 Q 到 BC 的距离为 h，则 $\dfrac{h}{20}=\dfrac{|BQ|}{25}=\dfrac{45-2x}{25}$，

得 $h=\dfrac{4}{5}(45-2x)$，故 $y=\dfrac{1}{2}xh=\dfrac{2}{5}x(45-2x)=-\dfrac{4}{5}x^2+18x$.

(3) 当 $15<x<20$ 时，点 P，Q 都在 AB 上（图 1－7）.

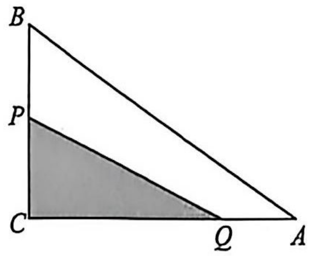

图 1－5

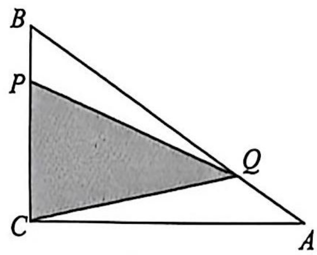

图 1－6

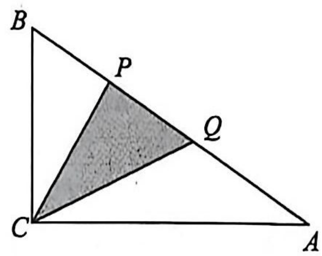

图 1－7

$$|BP|=x-15,\quad |AQ|=2x-20,\quad |PQ|=60-3x.$$

设点 C 到 AB 的距离 h'，则 $h'=\dfrac{15\times 20}{25}=12$，得 $y=\dfrac{1}{2}|PQ|\cdot h'=-18x+360$.

$$\text{综上可得 } y=\begin{cases} x^2, & 0<x<10, \\ -\dfrac{4}{5}x^2+18x, & 10\leqslant x\leqslant 15, \\ -18x+360, & 15<x<20. \end{cases}$$

第二节　数列的极限

一、主要内容归纳

1. 数列　一个定义在正整数集合上的函数 $a_n=f(n)$（称为整标函数），当自变量 n 按正整数 1，2，3，…依次增大的顺序取值时，函数按相应的顺序排成一串数：$f(1)$，$f(2)$，$f(3)$，…，$f(n)$，…称为一个无穷数列，简称数列. 数列中的每一个数称为数列的项，$f(n)$ 称为数列的一般项或通项.

2. 数列极限的定义

(1) 设 $\{x_n\}$ 是一数列，如果存在常数 a，当 n 无限增大时，x_n 无限接近（或趋近）于 a，则称数列 $\{x_n\}$ 收敛，a 称为数列 $\{x_n\}$ 的极限，或称数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a，记为 $\lim x_n=a$. 或 $x_n\to a$ 当