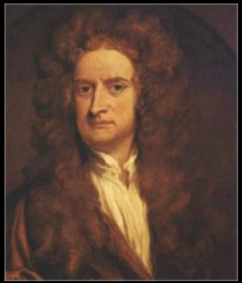
高等数学



§1.2 数列极限

基础部数学教研室

郑治中

庄子《天下篇》

一尺之锤，日取其半，万世不竭……

庄子，战国（宋）
（公元前369 - 公元前286）

- **刘徽“割圆术”**

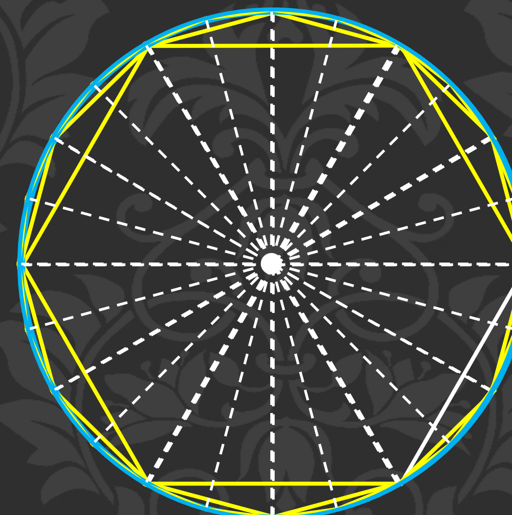
刘徽，魏晋
(约公元225—295)

“割之弥细，所失弥少，割之又割，以至于不可割，则与圆合体，而无所失矣。”

刘徽“割圆术”

刘徽，魏晋
（约公元225—295）

“割之弥细，所失弥少，割之又割，以至于不可割，则与圆合体，而无所失矣。”



边数：$6, 12, 24, \cdots, 2^n \cdot 6, \cdots$

数列极限的直观描述

数列极限的算术定义

数列极限的几何解释

1. 数列的定义

定义 按一定规律排列的无穷多个(相同或不相同的）数称为数列.
记为 $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$, 也可以简记为$\{a_n\}$, 其中$a_n$为数列的第$n$项,
称为通项或一般项。

例如 a_2—— 数列的第2项

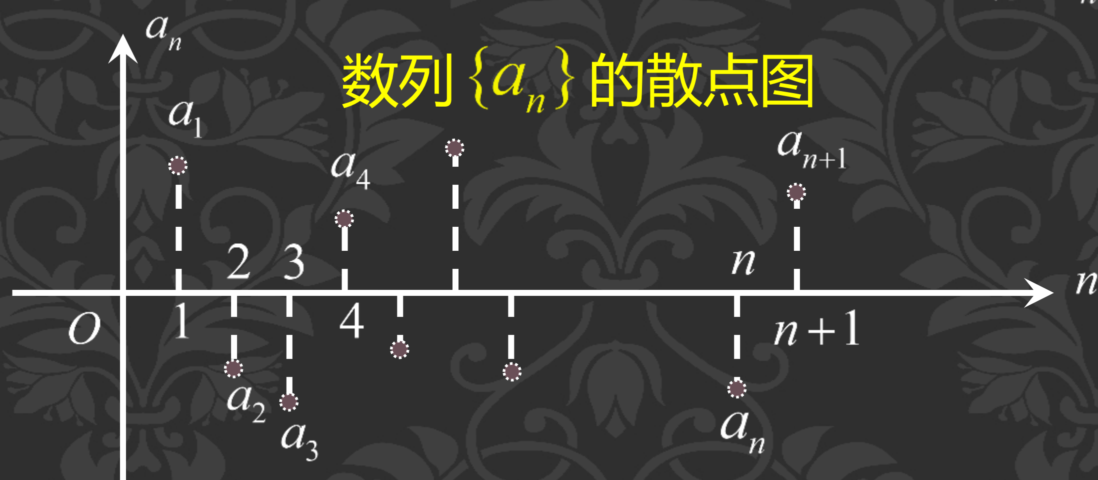
a_{2023}—— 数列的第2023项

$$\left.\begin{array}{llllll} \text{自然数} & 1 & 2 & \cdots & n & \cdots \\ & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \downarrow \\ \text{数列} & a_1 & a_2 & \cdots & a_n & \cdots \end{array}\right\}$$

整标函数

$a_n = f(n), n = 1, 2, \cdots$

- 在几何上数列的项 a_n 可以用平面上的点列 (n, a_n) $(n = 1, 2, \cdots)$



数列 $\{a_n\}$ 的散点图

2. 数列的表示方法

- 列表法

$$\{\frac{\ln n}{n}\}: \frac{\ln 2}{2}, \frac{\ln 3}{3}, \cdots, \frac{\ln n}{n}, \cdots$$

n	10	30	50	70	90
lnn /n	0.2303	0.1134	0.07824	0.06069	0.05000
n	120	140	160	180	200
lnn /n	0.03990	0.03530	0.03172	0.02885	0.02649

$$\{\sin n\}: \sin 1, \sin 2, \sin 3, \sin 4, \cdots, \sin n, \cdots$$

n	1	2	3	4	5
Sin (n)	0.8415	0.9093	0.1411	-0.7568	-0.9589
n	6	7	8	9	10
Sin (n)	-0.2794	0.6570	0.9894	0.4121	-0.5440

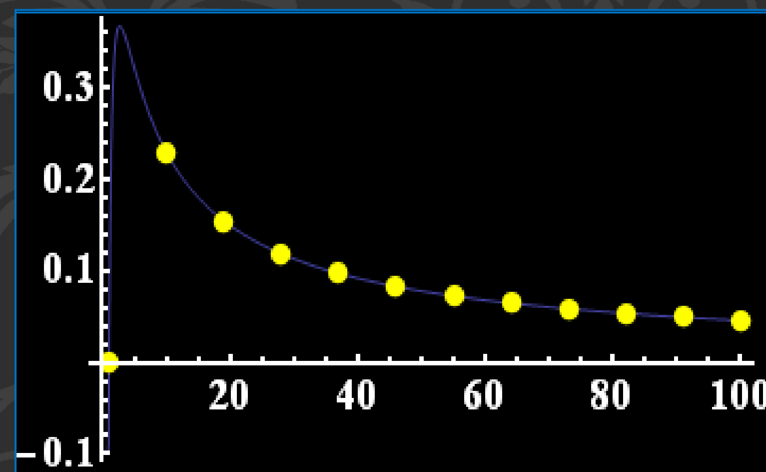
- 几何法

方法一　将数列$\{a_n\}$的项所对应数值表示在数轴上

方法二　散点图

$$a_n = \frac{\ln n}{n} \quad (n = 1, 2, \cdots, 10)$$

$$a_n = \frac{\sin n}{n} \quad (n = 10, 20, \cdots, 100)$$



3. 数列的例子

(a) $\left\{\dfrac{n}{n+1}\right\}$

$a_n = \dfrac{n}{n+1}$

$\left\{\dfrac{1}{2}, \dfrac{2}{3}, \dfrac{3}{4}, \cdots, \dfrac{n}{n+1}, \cdots\right\}$

(b) $\left\{\dfrac{(-1)^n(n+1)}{3^n}\right\}$

$a_n = \dfrac{(-1)^n(n+1)}{3^n}$

$\left\{-\dfrac{2}{3}, \dfrac{3}{9}, \cdots, \dfrac{(-1)^n(n+1)}{3^n}, \cdots\right\}$

(c) $\left\{n^{(-1)^n}\right\}$

$a_n = n^{(-1)^n}$

$\left\{1, 2, \dfrac{1}{3}, 4, \dfrac{1}{5}, \cdots, n^{(-1)^n}, \cdots\right\}$

(d) $\left\{\cos\dfrac{n\pi}{6}\right\}_{n=0}^{\infty}$

$a_n = \cos\dfrac{n\pi}{6}$

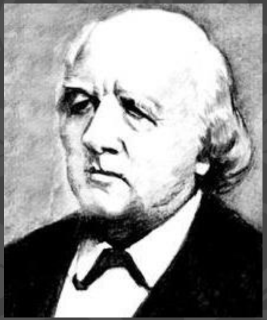
$\left\{1, \dfrac{\sqrt{3}}{2}, \dfrac{1}{2}, \cdots, \cos\dfrac{n\pi}{6}, \cdots\right\}$

柯西关于极限的定义

“当一个变量逐次取的值无限趋近一个定值时，如果最终变量的值与该定值的差要多小就有多小，那么，这一定值就称为所有其它值的极限.”

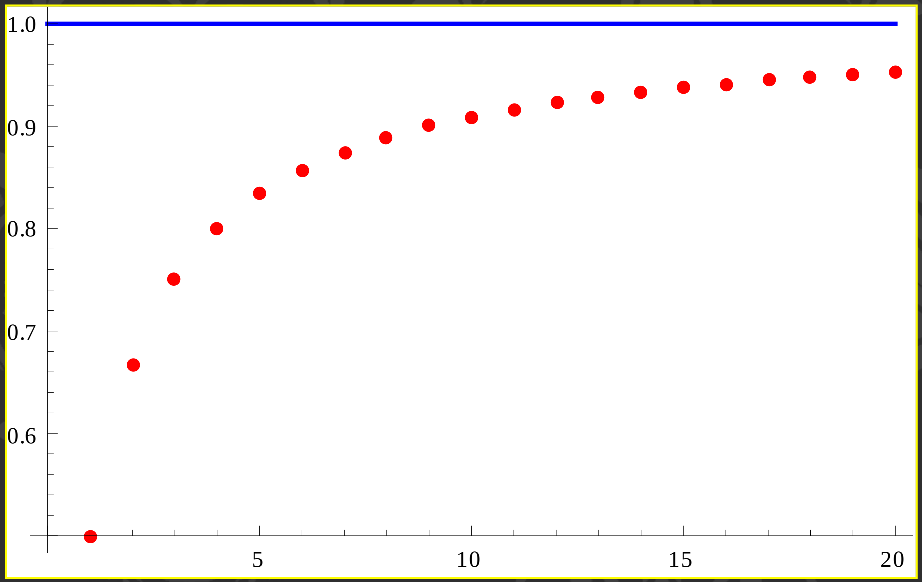
柯西 [法]
(1789-1857)

极限定义的算术化



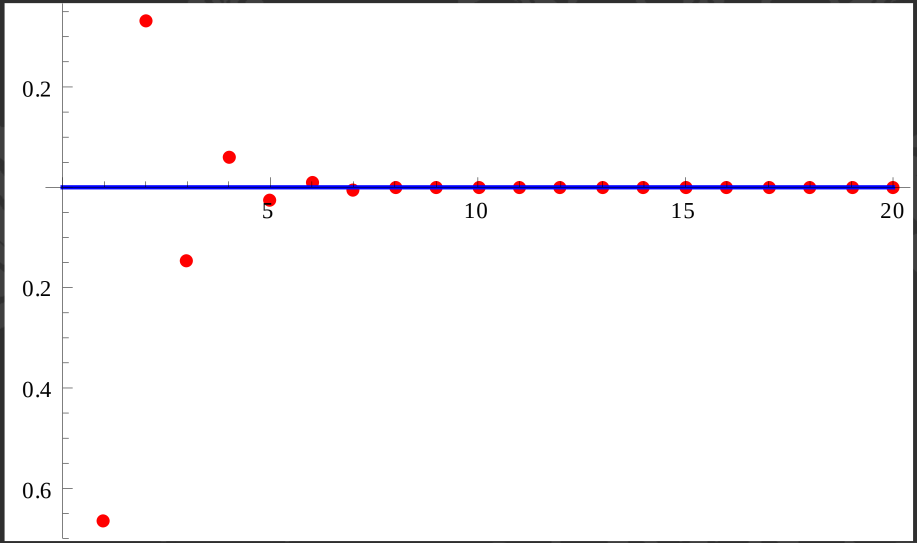
魏尔斯特拉斯[德]
(1815～1897)

$$(a)\ \left\{\frac{n}{n+1}\right\} \qquad \left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \cdots, \frac{n}{n+1}, \cdots\right\}$$



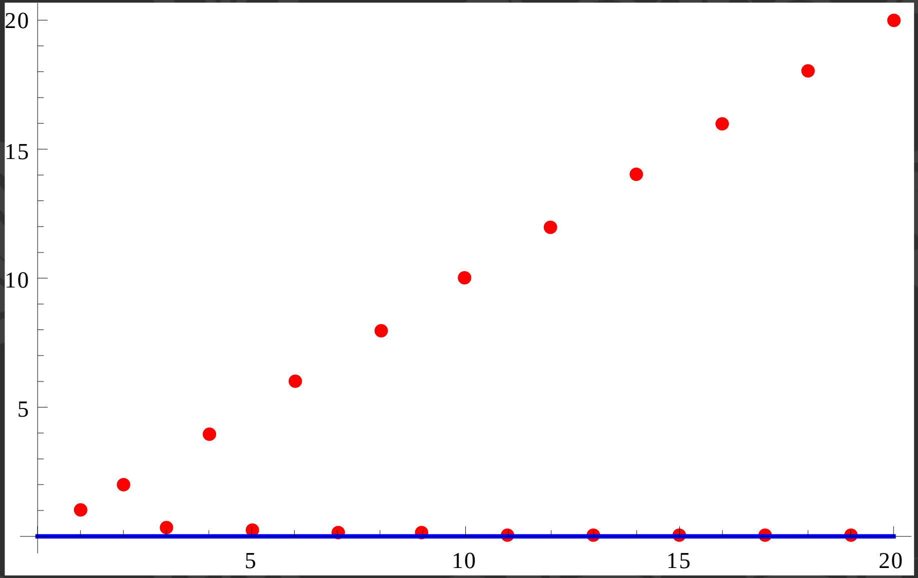
$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1$$

$$(b)\ \left\{\frac{(-1)^n(n+1)}{3^n}\right\} \qquad \left\{-\frac{2}{3}, \frac{3}{9}, \cdots, \frac{(-1)^n(n+1)}{3^n}, \cdots\right\}$$



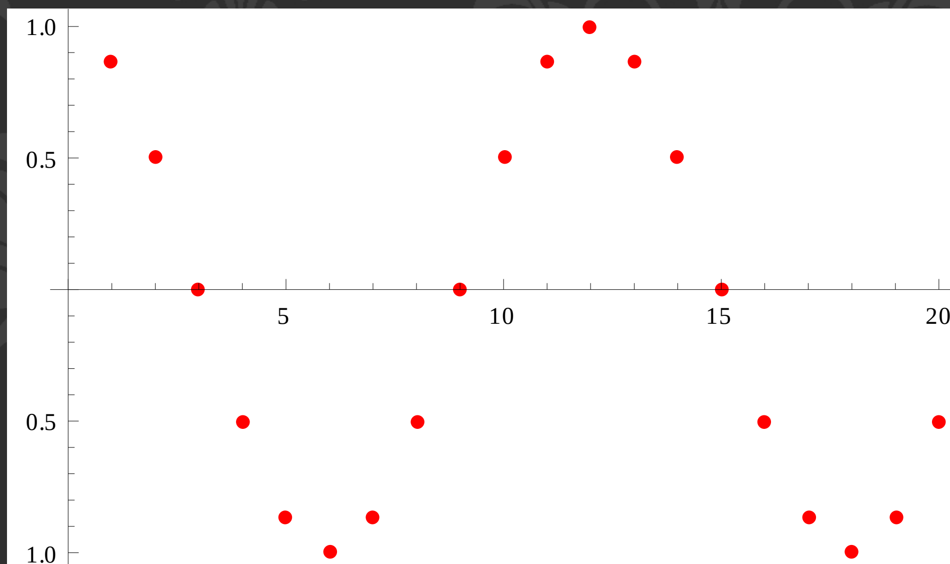
$$\lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^n(n+1)}{3^n}=0$$

$$(c)\ \left\{n^{(-1)^n}\right\} \qquad \left\{1, 2, \frac{1}{3}, 4, \frac{1}{5}, \cdots, n^{(-1)^n}, \cdots\right\}$$



数列不存在极限！

$$(d)\ \left\{\cos\frac{n\pi}{6}\right\}_{n=0}^{\infty} \qquad \left\{1, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, \cdots, \cos\frac{n\pi}{6}, \cdots\right\}$$



数列不存在极限!

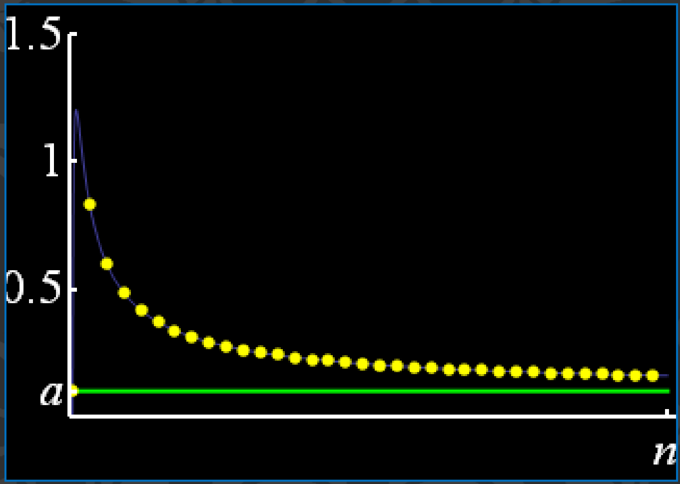
4. 数列极限的描述性的定义

"对于数列$\{x_n\}$，如果存在一个常数a，当 n 增大到一定程度后的所有项，x_n与常数a无限接近，则称常数a为数列$\{x_n\}$的极限. 记为

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ 或 $x_n \to a(n \to \infty)$."

极限 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ 几何意义：

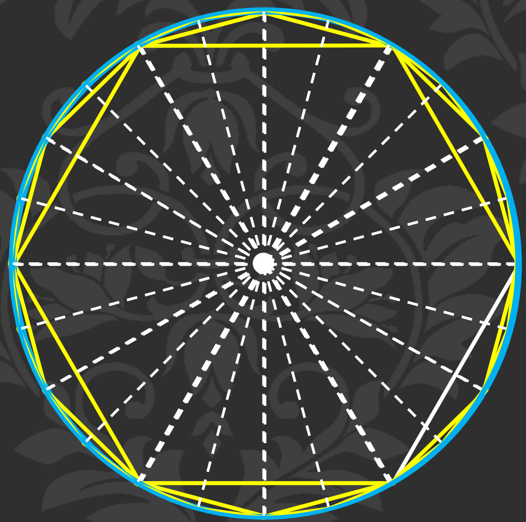
点列$\{(n, x_n)|n = 1,2,..\}$随n无限增大而无限接近水平直线$y = a$.



刘徽“割圆术”与极限的描述性定义

“对于数列$\{x_n\}$，如果存在一个常数a，当 n 增大到一定程度后的所有项，x_n与常数a无限接近，则称常数a为数列$\{x_n\}$的极限．记为

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \text{ 或 } x_n \to a(n\to\infty) \text{.”}$$



“对于数列$\{x_n\}$，如果存在一个常数a，当 n 增大到一定程度后的所有项，x_n与常数a无限接近，则称常数a为数列$\{x_n\}$的极限. 记为$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ 或 $x_n \to a(n\to\infty)$.”

- 从“定性”到“定量”

1. n增大到一定程度之后的所有项：$\exists N \in \mathbb{N}, n > N$

2. 接近：x_n和a之间的距离可用$|x_n - a|$表示，值越小越接近

3. 无限接近：$|x_n - a|$的值越来越小，要多小有多小！

数列极限的算术定义

定义 对于数列 $\{a_n\}$ ，若存在常数 a ，对于任意给定的正数 ε 均存在正整数 N ，当 $n > N$ 时，恒有

$$|a_n - a| < \varepsilon$$

成立，则称数列 $\{a_n\}$ 存在极限（或收敛），常数 a 称为数列的极限，记为

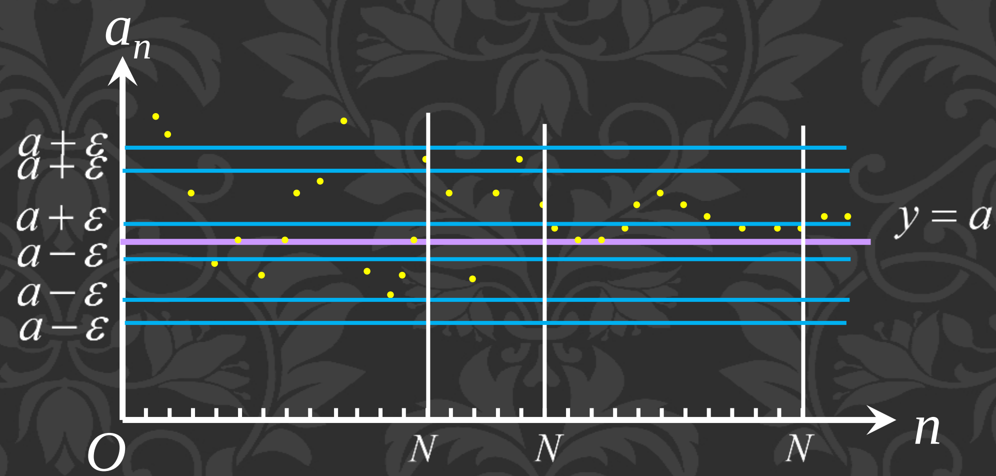
$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \quad 或 \quad a_n \to a\ (n \to \infty).$$

若上述常数不存在，则称数列不存在极限（或发散）.

- 称上述定义数列极限的语言为 “$\varepsilon - N$” 语言.

  数列极限的定义称为 “$\varepsilon - N$” 定义.

极限 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ 的几何解释:



对于任意给定的两平行线 $y=a+\varepsilon$ 与 $y=a-\varepsilon$，一定可以找到正整数 N，对于 $n>N$ 的所有点 (n, a_n) 均落在这两条平行线之间.

例1 用数列极限定义验证 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=1.$

$\forall$— 对任意（For Any） $\exists$— 存在（Exist）

极限 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$ 的 " $\epsilon-N$ " 定义（简洁形式）：

$$\forall\varepsilon>0,\exists N,\text{当 } n>N \text{ 时，恒有 } |a_n-a|<\varepsilon.$$

【证】 任给$\varepsilon>0$，存在$N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]+1$, 当 $n>N$ 时，恒有

$$\left|\frac{n+1}{n}-1\right|=\frac{1}{n}<\frac{1}{[\frac{1}{\varepsilon}]+1}<\frac{1}{\frac{1}{\varepsilon}}=\varepsilon$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=1.$

例2 证明： $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}=0$.

$$0.9999999999999999\cdots \quad \begin{matrix} =1 \\ <1 \end{matrix}$$

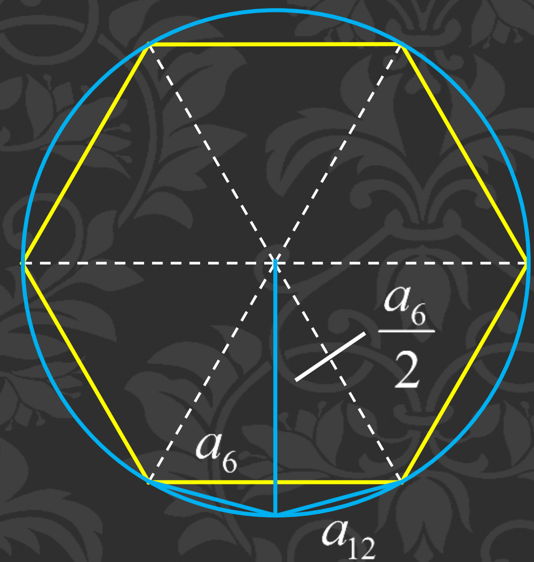
例3 设 $a_n=0.\overbrace{9\ldots9}^{n个},(n=1,2,\cdots)$，证明 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=1$.

例4 设 $a_n=(-1)^n\ (n=1,2,\ldots)$ ，证明数列$\{a_n\}$发散.

祖冲之,南北朝
（429-500）

在南北朝（429-500）时期，祖冲之利用极限的思想计算圆周率，取得了很大的成功。他利用圆内接多边形的面积逼近圆的面积，即所谓“割圆术”，该方法被写入他与儿子祖恒合著的《缀术》中。不幸的是，该书在北宋中期失传.

内接正24边形部分



边数：$6, 12, 24, \cdots, 2^n \cdot 6, \cdots$

面积：$6 \cdot \frac{a_6}{2}, 12 \cdot \frac{a_{12}}{2}, \cdots \to \pi$

在 Rt ΔBCD 中

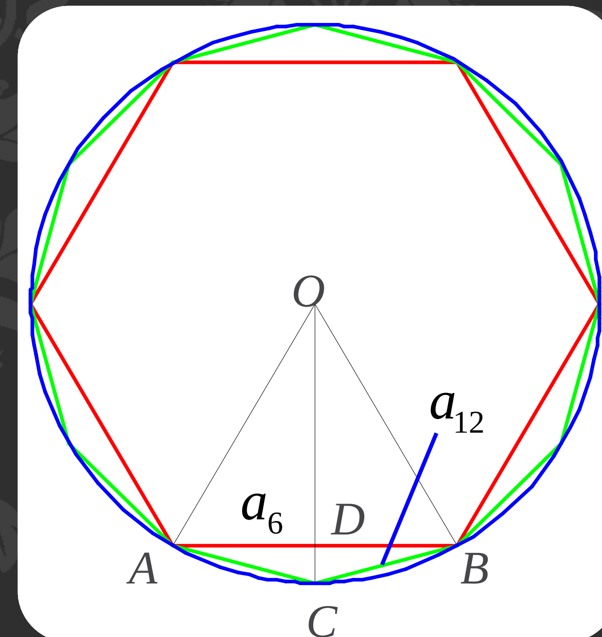
$$BC=\sqrt{BD^2+CD^2}$$

$$=\sqrt{\left(\frac{AB}{2}\right)^2+(1-OD)^2}$$

$$OD=\sqrt{1-\left(\frac{AB}{2}\right)^2}\quad (\text{Rt }\Delta BDO)$$

$$BC=\sqrt{\left(\frac{AB}{2}\right)^2+\left(1-\sqrt{1-\left(\frac{AB}{2}\right)^2}\right)^2}$$

$$a_{12}=\sqrt{\left(\frac{a_6}{2}\right)^2+\left(1-\sqrt{1-\left(\frac{a_6}{2}\right)^2}\right)^2}$$

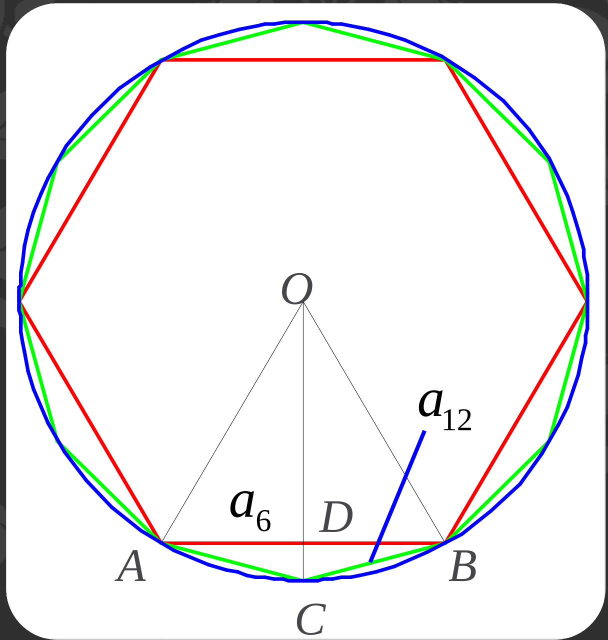


$$a_{12} = \sqrt{\left(\frac{a_6}{2}\right)^2 + \left(1 - \sqrt{1 - \left(\frac{a_6}{2}\right)}\right)^2}$$

$$a_{24} = \sqrt{\left(\frac{a_{12}}{2}\right)^2 + \left(1 - \sqrt{1 - \left(\frac{a_{12}}{2}\right)}\right)^2}$$

$$\Downarrow$$

$$a_{6\cdot 2^{n+1}} = \sqrt{\left(\frac{a_{6\cdot 2^n}}{2}\right)^2 + \left(1 - \sqrt{1 - \left(\frac{a_{6\cdot 2^n}}{2}\right)}\right)^2} \quad (n = 0, 1, \cdots)$$



正 $6\cdot 2^{n+1}$ 边形的面积为

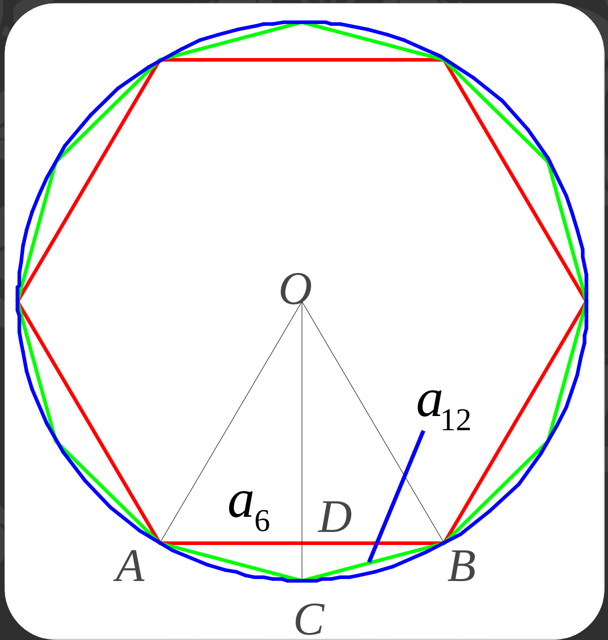
$$S_{6\cdot 2^{n+1}} = 6\cdot 2^{n}\cdot \frac{a_{6\cdot 2^{n}}}{2}\,(n=0,1,\cdots)$$

与单位圆面积的比较

$$S_{12} < \pi < S_{12} + (S_{12} - S_{6})$$

$$S_{24} < \pi < S_{24} + (S_{24} - S_{12})$$

$$\underbrace{\boxed{S_{6\cdot 2^{n+1}}}}_{\text{下界}} < \pi < \underbrace{\boxed{S_{6\cdot 2^{n+1}} + (S_{6\cdot 2^{n+1}} - S_{6\cdot 2^{n}})}}_{\text{上界}}$$



n	边数	下界	上界
1	24	3.105828541	3.211657082
2	48	3.132628613	3.159428685
3	96	3.139350203	3.146071793
4	192	3.141031951	3.142713699
5	384	3.141452472	3.141872994
6	768	3.141557608	3.141662744
7	1536	3.141583892	3.141610176
8	3072	3.141590463	3.141597034
9	6144	3.141592106	3.141593749
10	12288	3.141592517	3.141592927
11	24576	3.141592619	3.141592722

正 $6\cdot 2^{n+1}$ 边形的面积为

$$S_{6\cdot 2^{n+1}} = 6\cdot 2^n \cdot \frac{a_{6\cdot 2^n}}{2} \, (n = 0, 1, \cdots)$$

与单位圆面积的比较

$$S_{12} < \pi < S_{12} + (S_{12} - S_6)$$

$$S_{24} < \pi < S_{24} + (S_{24} - S_{12})$$

$$S_{6\cdot 2^{n+1}} < \pi < S_{6\cdot 2^{n+1}} + (S_{6\cdot 2^{n+1}} - S_{6\cdot 2^n})$$

当 $n = 11$ 时得到

$$3.14159261 < \pi < 3.14159272$$