练习: 求积分 $\oint_{|z|=1}\dfrac{e^z}{z}\mathrm{d}z$, 并证明 $\int_0^{\pi} e^{\cos\theta}\cos(\sin\theta)\mathrm{d}\theta=\pi$.

解: 根据柯西积分公式知,

$$\oint_{|z|=1}\frac{e^z}{z}\mathrm{d}z=2\pi i\cdot e^z\Big|_{z=0}=2\pi i;$$

令 $z=re^{i\theta}$, $(-\pi\le\theta\le\pi)$ $\quad |z|=r=1$

$$\oint_{|z|=1}\frac{e^z}{z}\mathrm{d}z=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{re^{i\theta}}}{re^{i\theta}}\cdot ire^{i\theta}\mathrm{d}\theta=\int_{-\pi}^{\pi}ie^{e^{i\theta}}\mathrm{d}\theta$$

$$=\int_{-\pi}^{\pi} ie^{e^{i\theta}}\mathrm{d}\theta=\int_{-\pi}^{\pi} ie^{\cos\theta+i\sin\theta}\mathrm{d}\theta$$

$$=2i\int_{0}^{\pi} e^{\cos\theta}\cos(\sin\theta)\mathrm{d}\theta-\int_{-\pi}^{\pi} e^{\cos\theta}\sin(\sin\theta)\mathrm{d}\theta$$

因为 $\oint_{|z|=1}\frac{e^{z}}{z}\mathrm{d}z=2\pi i,$

$$\oint_{|z|=1}\frac{e^{z}}{z}\mathrm{d}z=2i\int_{0}^{\pi} e^{\cos\theta}\cos(\sin\theta)\mathrm{d}\theta-\int_{-\pi}^{\pi} e^{\cos\theta}\sin(\sin\theta)\mathrm{d}\theta$$

比较两式得 $\int_{0}^{\pi} e^{\cos\theta}\cos(\sin\theta)\mathrm{d}\theta=\pi.$

第六节　高阶导数

- 一、主要定理
- 二、典型例题

一、主要定理

Z_0为被积函数的唯一奇点，否则不能直接利用公式

定理

解析函数 $f(z)$ 的导数仍为解析函数, 它的 n 阶导数为:

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} \mathrm{d}z \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

其中 C 为在函数 $f(z)$ 的解析区域 D 内围绕 z_0 的任何一条正向简单闭曲线, 而且它的内部全含于 D.

高阶导数公式的作用:不在于通过积分来求导，而在于通过求导来求积分.

二、典型例题

例1 计算下列积分,其中 C 为正向圆周 : $|z| = r > 1$.

(1) $\oint_C \dfrac{\cos \pi z}{(z-1)^5}\,dz$;　　(2) $\oint_C \dfrac{e^z}{(z^2+1)^2}\,dz$.

解　(1) 函数 $\dfrac{\cos \pi z}{(z-1)^5}$ 在 C 内 $z=1$ 处不解析,

但 $\cos \pi z$ 在 C 内处处解析,

根据公式 $f^{(n)}(z_0) = \dfrac{n!}{2\pi i}\oint_C \dfrac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz$

$$\oint_C \frac{\cos \pi z}{(z-1)^5} dz = \frac{2\pi i}{(5-1)!}(\cos \pi z)^{(4)}\Big|_{z=1} = -\frac{\pi^5 i}{12};$$

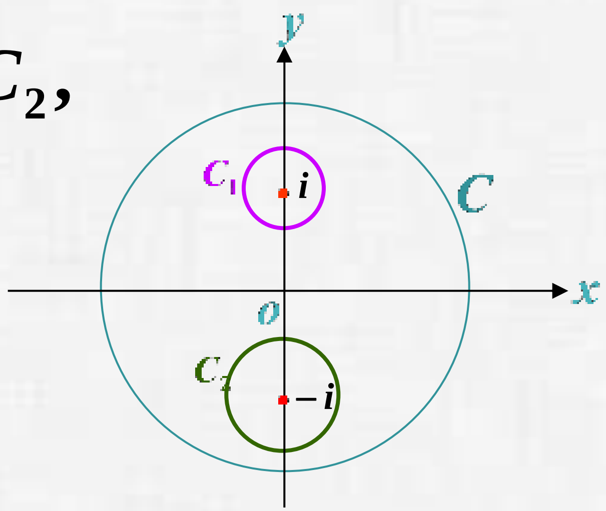
(2) 函数 $\dfrac{e^z}{(z^2+1)^2}$ 在 C 内的 $z=\pm i$ 处不解析,

在 C 内以 i 为中心作一个正向圆周 C_1,

以 $-i$ 为中心作一个正向圆周 C_2,

则函数 $\dfrac{e^z}{(z^2+1)^2}$ 在由 C, C_1, C_2

围成的区域内解析,

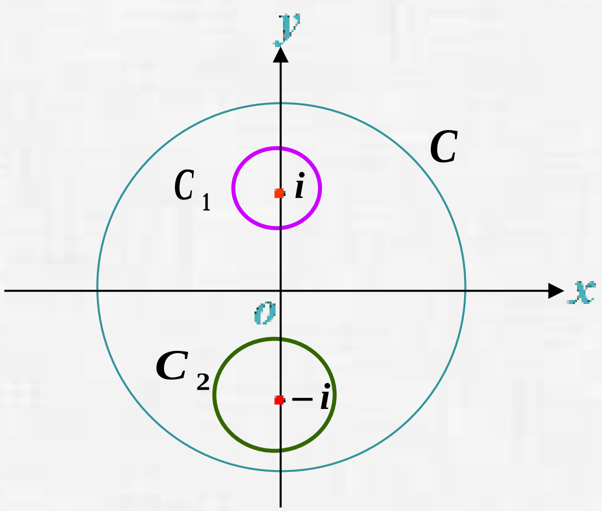


根据复合闭路定理

$$\oint_C \frac{e^z}{(z^2+1)^2}\mathrm{dz} = \oint_{C_1} \frac{e^z}{(z^2+1)^2}\mathrm{dz} + \oint_{C_2} \frac{e^z}{(z^2+1)^2}\mathrm{dz}$$

$$\oint_{C_1} \frac{e^z}{(z^2+1)^2}\mathrm{dz} = \oint_{C_1} \frac{\dfrac{e^z}{(z+i)^2}}{(z-i)^2}\mathrm{dz}$$

$$= \frac{2\pi i}{(2-1)!}\left[\frac{e^z}{(z+i)^2}\right]'\Bigg|_{z=i} = \frac{(1-i)e^i}{2}\pi,$$



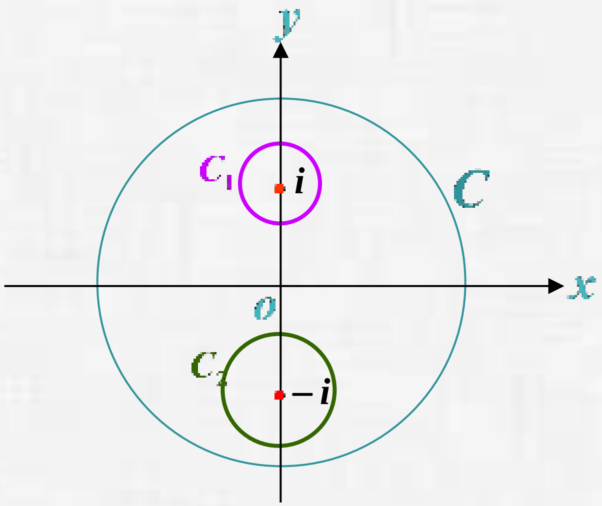
同理可得 $\oint_{C_2} \frac{e^z}{(z^2+1)^2} dz = \frac{-(1+i)e^{-i}}{2}\pi,$

于是 $\oint_{C} \frac{e^z}{(z^2+1)^2} dz = \frac{(1-i)e^{i}}{2}\pi + \frac{-(1+i)e^{-i}}{2}\pi$

$$= \frac{\pi}{2}(1-i)(e^i - ie^{-i})$$

$$= \frac{\pi}{2}(1-i)^2(\cos 1 - \sin 1)$$

$$= i\pi\sqrt{2}\sin\left(1-\frac{\pi}{4}\right).$$



例2 求积分 $\oint\limits_{|z|=1} \dfrac{e^z}{z^n}\mathrm{d}z$. ($n$为整数)

解 (1) $n \le 0$, $\dfrac{e^z}{z^n}$ 在 $|z| \le 1$ 上解析,

由柯西－古萨基本定理得 $\oint\limits_{|z|=1} \dfrac{e^z}{z^n}\mathrm{d}z = 0$;

(2) $n = 1$, 由柯西积分公式得

$$\oint\limits_{|z|=1} \frac{e^z}{z^n}\mathrm{d}z = 2\pi i \cdot (e^z)\Big|_{z=0} = 2\pi i;$$

(3) $n>1$,

根据公式 $f^{(n)}(z_0)=\dfrac{n!}{2\pi i}\oint_C \dfrac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\mathrm{d}z$

$$\oint_{|z|=1}\frac{e^z}{z^n}\mathrm{d}z=\frac{2\pi i}{(n-1)!}(e^z)^{(n-1)}\Big|_{z=0}$$

$$=\frac{2\pi i}{(n-1)!}.$$

例3 设 C 是不通过 z_0 的简单闭曲线,

求 $g(z_0)=\oint_C \dfrac{z^4+z^2}{(z-z_0)^3}\mathrm{d}z.$

z_0 在 C 外, $g(z_0)=0;$

z_0 在 C 内, $g(z_0)=2(6z_0^2+1)\pi i.$

例4 求积分 $\oint_C \frac{1}{(z-2)^2 z^3}\mathrm{d}z.$

其中$C:(1)\ |z-3|=2;\quad (2)\ |z-1|=3.$

解 函数 $\frac{1}{(z-2)^2 z^3}$ 有两个奇点 $z=2$ 和 $z=0$,

$(1)\ |z-3|=2$, 仅包含奇点 $z=2$, 取 $f(z)=\frac{1}{z^3}$,

$$\oint_C \frac{1}{(z-2)^2 z^3}\mathrm{d}z=\oint_C \frac{\frac{1}{z^3}}{(z-2)^2}\mathrm{d}z=\frac{2\pi i}{1!}\left(\frac{1}{z^3}\right)'\Bigg|_{z=2}=-\frac{3\pi i}{8};$$

(2) $|z-1|=3$

两个奇点 $z=2$ 和 $z=0$ 都含在 C 内,

作简单闭曲线 C_1 和 C_2 分别包含 0 和 2,

C_1 和 C_2 互不包含且互不相交,

根据复合闭路定理和高阶导数公式,

$$\oint_C \frac{1}{(z-2)^2 z^3}\mathrm{d}z = \oint_{C_1} \frac{1}{(z-2)^2 z^3}\mathrm{d}z + \oint_{C_2} \frac{1}{(z-2)^2 z^3}\mathrm{d}z$$

$$= \oint_{C_1} \frac{\frac{1}{(z-2)^2}}{z^3}\,dz + \oint_{C_2} \frac{\frac{1}{z^3}}{(z-2)^2}\,dz$$

$$= \frac{2\pi i}{2!}\left[\frac{1}{(z-2)^2}\right]''\Bigg|_{z=0} + \frac{2\pi i}{1!}\left[\frac{1}{z^3}\right]'\Bigg|_{z=2}$$

$$= \frac{3\pi i}{8} - \frac{3\pi i}{8} = 0.$$

例5 设函数 $f(z)$ 在单连通域 B 内连续，且对于 B 内任何一条简单闭曲线 C 都有 $\oint_C f(z)\mathrm{d}z = 0$，证明 $f(z)$ 在 B 内解析.

$\int_{z_0}^{z} f(\zeta)\mathrm{d}\zeta$ 的值与连接 z_0 和 z 的路线无关，

单值函数 $F(z) = \int_{z_0}^{z} f(\zeta)\mathrm{d}\zeta$， $F'(z) = f(z)$，

所以 $F(z)$ 是 B 内一个解析函数，故 $f(z)$ 为解析函数.

三、小结

$$f^{(n)}(z_0)=\frac{n!}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\mathrm{d}z$$

高阶导数公式是复积分的重要公式. 它表明了解析函数的导数仍然是解析函数这一异常重要的结论, 同时表明了……本质区别.

这一点与实变量函数有本质的区别

高阶导数公式说明, 函数 $f(z)$ 只要在闭区域 $\overline{G}$ 中处处可微, 它就一定无限次可微, 并且它的各阶导数均为闭区域 $\overline{G}$ 上的解析函数.