第七节　解析函数与调和函数的关系

- 一、调和函数的定义
- 二、解析函数与调和函数的关系

一、调和函数的定义

定义

如果二元实变函数 $\varphi(x, y)$ 在区域 D 内具有二阶连续偏导数,并且满足拉普拉斯方程

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}=0,$$

那么称 $\varphi(x, y)$ 为区域 D 内的调和函数.

二、解析函数与调和函数的关系

1. 关系

定理 任何在区域 D 内解析的函数, 它的实部和虚部都是 D 内的调和函数.

证 设 $w = f(z) = u + iv$ 为 D 内的一个解析函数,

那么 $$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

从而 $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}.$$

定理 如果函数 $z=f(x,y)$ 的两个二阶混合偏导数 $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ 及 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ 在区域 D 内连续，那么在该区域内这两个二阶混合偏导数必相等.

根据解析函数高阶导数定理,

u 与 v 具有任意阶的连续偏导数,

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x}=\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y},$$

从而 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$, 同理 $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0$,

因此 u 与 v 都是调和函数.

2. 共轭调和函数的定义

设 $u(x,y)$ 为区域 D 内给定的调和函数, 我们把使 $u+iv$ 在 D 内构成解析函数的调和函数 $v(x,y)$ 称为 $u(x,y)$ 的共轭调和函数.

换句话说, 在 D 内满足方程 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y},\ \dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{\partial v}{\partial x}$ 的两个调和函数中, v 称为 u 的共轭调和函数.

区域D内的解析函数的虚部为实部的共轭调和函数.

3. 偏积分法

如果已知一个调和函数 u, 那么就可以利用柯西一黎曼方程求得它的共轭调和函数 v, 从而构成一个解析函数$u+vi$. 这种方法称为**偏积分法**.

例1 证明 $u(x,y)=y^3-3x^2y$ 为调和函数,并求其共轭调和函数 $v(x,y)$ 和由它们构成的解析函数.

解 因为 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=-6xy,\quad \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-6y,$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=3y^2-3x^2,\qquad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=6y,$$

于是 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,$ 故 $u(x,y)$ 为调和函数.

因为 $\dfrac{\partial v}{\partial y}=\dfrac{\partial u}{\partial x}=-6xy,$

$$v=-6\int xy\mathrm{d}y=-3xy^2+g(x),$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=-3y^2+g'(x),$$

又因为 $\dfrac{\partial v}{\partial x}=-\dfrac{\partial u}{\partial y}=-3y^2+3x^2,$

$$-3y^2+g'(x)=-3y^2+3x^2, \qquad (c\text{为任意常数})$$

故 $g(x)=\int 3x^2\mathrm{d}x=x^3+c,\ v(x,y)=x^3-3xy^2+c,$

得一个解析函数 $w=y^3-3x^2y+i(x^3-3xy^2+c).$

这个函数可以化为 $w=f(z)=i(z^3+c).$

例2 已知$v(x,y)=e^{x}(y\cos y+x\sin y)+x+y$为调和函数，求一解析函数 $f(z)=u+iv$，使 $f(0)=0$.

解 $$\frac{\partial v}{\partial x}=e^{x}(y\cos y+x\sin y+\sin y)+1,$$

$$\frac{\partial v}{\partial y}=e^{x}(\cos y-y\sin y+x\cos y)+1,$$

由 $$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}=e^{x}(\cos y-y\sin y+x\cos y)+1,$$

得 $$u=\int[e^{x}(\cos y-y\sin y+x\cos y)+1]\mathrm{d}x$$

$$u = e^x(x\cos y - y\sin y) + x + g(y),$$

由 $\dfrac{\partial v}{\partial x} = -\dfrac{\partial u}{\partial y}$，得

$$e^x(y\cos y + x\sin y + \sin y) + 1$$

$$= e^x(x\sin y + y\cos y + \sin y) - g'(y),$$

故 $g(y) = -y + c,$

于是 $u = e^x(x\cos y - y\sin y) + x - y + c,$

$$f(z)=u+iv$$

$$=xe^{x}e^{iy}+iye^{x}e^{iy}+x(1+i)+iy(1+i)+c$$

$$=ze^{z}+(1+i)z+c,$$

由 $f(0)=0,$ 得 $c=0,$

所求解析函数为 $f(z)=ze^{z}+(1+i)z.$

4. 不定积分法

已知调和函数 $u(x,y)$ 或 $v(x,y)$，用不定积分求解析函数的方法称为不定积分法.

解析函数 $f(z)=u+iv$ 的导数 $f'(z)$ 仍为解析函数，

且 $f'(z)=u_x+iv_x=u_x-iu_y=v_y+iv_x$

把 u_x-iu_y 与 v_y+iv_x 用 z 来表示，

$$f'(z)=u_x-iu_y=U(z),\quad f'(z)=v_y+iv_x=V(z),$$

将上两式积分, 得

$$\boxed{f(z)=\int U(z)\mathrm{d}z+c,}\qquad \boxed{f(z)=\int V(z)\mathrm{d}z+c,}$$

适用于已知实部 u 求 $f(z)$,

适用于已知虚部 v 求 $f(z)$,

例3 求 k 值, 使 $u = x^2 + ky^2$ 为调和函数. 再求v, 使 $f(z) = u + iv$ 为解析函数, 并求 $f(i) = -1$的 $f(z)$.

解 因为 $\dfrac{\partial u}{\partial x} = 2x$, $\quad \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2$,

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 2ky, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2k,$$

根据调和函数的定义可得 $k = -1$,

因为 $f'(z) = U(z) = u_x - iu_y = 2x - 2kyi$

$$= 2x - 2kyi = 2x + 2yi = 2z,$$

根据不定积分法 $f(z) = \int 2z\mathrm{d}z = z^2 + c,$

由 $f(i) = -1,$ 得 $c = 0,$

所求解析函数为

$$f(z) = x^2 - y^2 + 2xyi = z^2.$$

例4 用不定积分法求解例1中的解析函数 $f(z)$

实部 $u(x,y)=y^3-3x^2y.$

解 $f'(z)=U(z)=u_x-iu_y$

$$=3i(x^2+2xyi-y^2)=3iz^2,$$

$$f(z)=\int 3iz^2\mathrm{d}z=iz^3+c_1,$$

(因为 $f(z)$ 的实部为已知函数,不可能包含实的任意常数, 所以常数 c_1 为任意纯虚数)

故 $f(z)=i(z^3+c).$ (c 为任意实常数)

例5 用不定积分法求解例2中的解析函数 $f(z)$

虚部 $v(x,y)=e^x(y\cos y+x\sin y)+x+y.$

解 $f'(z)=V(z)=v_y+iv_x$

$$=e^x(\cos y-y\sin y+x\cos y)+1$$

$$+i[e^x(y\cos y+x\sin y+\sin y)+1]$$

$$=e^x(\cos y+i\sin y)+i(x+iy)e^x\sin y$$

$$+(x+iy)e^x\cos y+1+i$$

$$= e^x(\cos y + i\sin y) + (x+iy)e^x[\cos y + i\sin y]$$
$$+1+i$$

$$= e^{x+iy} + (x+iy)e^{x+iy} + 1 + i$$

$$= e^z + ze^z + 1 + i,$$

$$f(z) = \int V(z)\mathrm{dz} = \int (e^z + ze^z + 1 + i)\mathrm{dz}$$

$$= ze^z + (1+i)z + c. \quad (c\text{为任意实常数})$$

例6 已知 $u+v=(x-y)(x^2+4xy+y^2)-2(x+y)$,
试确定解析函数 $f(z)=u+iv$.

解 两边同时求导数

$$u_x+v_x=(x^2+4xy+y^2)+(x-y)(2x+4y)-2,$$

$$u_y+v_y=-(x^2+4xy+y^2)+(x-y)(4x+2y)-2,$$

且 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y},\quad \dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{\partial v}{\partial x},$

所以上面两式分别相加减可得

$$v_y = 3x^2 - 3y^2 - 2, \qquad v_x = 6xy,$$

$$f'(z) = v_y + iv_x = 3x^2 - 3y^2 - 2 + 6xyi$$

$$= 3z^2 - 2,$$

$$f(z) = \int (3z^2 - 2)\mathrm{d}z = z^3 - 2z + c.$$

(c为任意实常数)

三、小结

本节我们学习了调和函数的概念、解析函数与调和函数的关系以及共轭调和函数的概念.

应注意的是: 1. 任意两个调和函数u与v所构成的函数$u+iv$不一定是解析函数.

2. 满足柯西—黎曼方程$u_x = v_y, v_x = -u_y,$的v称为u的共轭调和函数, u与v注意的是地位不能颠倒.