第二章　解析函数

第一节　解析函数的概念

- 一、复变函数的导数与微分
- 二、解析函数的概念
- 三、小结与思考

一、复变函数的导数与微分

1.导数的定义:

设函数 $w = f(z)$ 定义于区域 D, $z_0 \in D$, 且$z_0 + \Delta z \in D$,

如果极限 $\lim\limits_{\Delta z \to 0} \dfrac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}$ 存在,

那么就称 $f(z)$ 在z_0可导.这个极限值称为 $f(z)$ 在 z_0 的导数,

记作 $$f'(z_0) = \left.\frac{dw}{dz}\right|_{z=z_0} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}.$$

注!意

注:

$z_0+\Delta z \to z_0$(即$\Delta z \to 0$)的方式是任意的.

即$z_0+\Delta z$在区域D内以任意方式趋于z_0时,

比值$\dfrac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}$都趋于同一个数.

如果函数 $f(z)$ 在区域 D 内处处可导,我们就称 $f(z)$ 在区域内 D 可导.

例1　讨论$f(z)=\operatorname{Im} z$的可导性.

解　$$\frac{\Delta f}{\Delta z}=\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}=\frac{\operatorname{Im}(z+\Delta z)-\operatorname{Im} z}{\Delta z}$$

$$=\frac{\operatorname{Im} z+\operatorname{Im}\Delta z-\operatorname{Im} z}{\Delta z}=\frac{\operatorname{Im}\Delta z}{\Delta z}$$

$$=\frac{\operatorname{Im}(\Delta x+i\Delta y)}{\Delta x+i\Delta y}=\frac{\Delta y}{\Delta x+i\Delta y},$$

当点沿平行于实轴的方 向$(\Delta y=0)$而使$\Delta z\to 0$时,

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y=0}}\frac{\Delta y}{\Delta x+i\Delta y}=0,$$

当点沿平行于虚轴的方 向$(\Delta x=0)$而使$\Delta z\to 0$时,

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}=\lim_{\substack{\Delta y\to 0\\ \Delta x=0}}\frac{\Delta y}{\Delta x+i\Delta y}=\frac{1}{i},$$

当点沿不同的方向使$\Delta z\to 0$时,极限值不同,

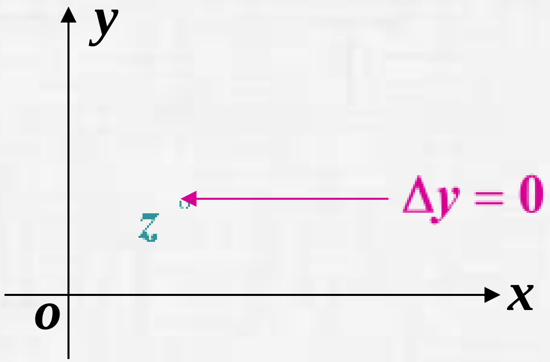
故$f(z)=\operatorname{Im} z$在复平面上处处不可导.

例2　问$f(z)=x+2yi$是否可导？

解　$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}$$

$$=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{(x+\Delta x)+2(y+\Delta y)i-x-2yi}{\Delta z}$$

$$=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta x+2\Delta yi}{\Delta x+\Delta yi}$$

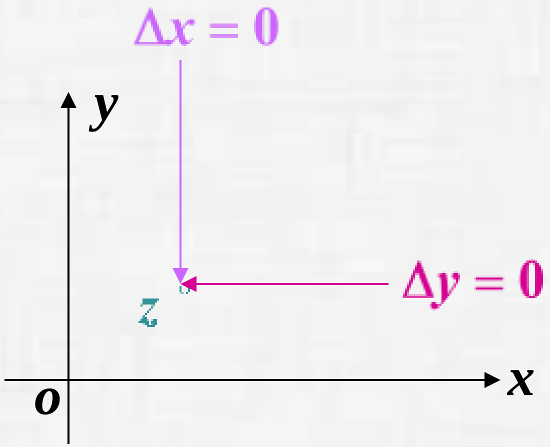


设$z+\Delta z$沿着平行于 x 轴的直线趋向于 z，

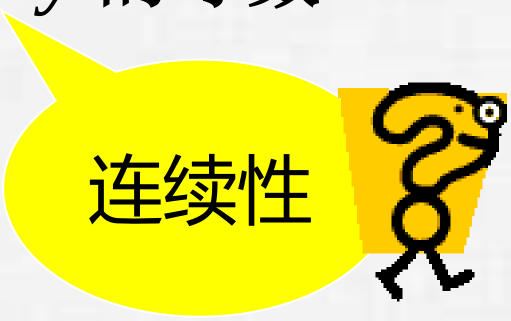
$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta x + 2\Delta y i}{\Delta x + \Delta y i} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1,$$

设 $z + \Delta z$ 沿着平行于 y 轴的直线趋向于 z,

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta x + 2\Delta y i}{\Delta x + \Delta y i} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{2\Delta y i}{\Delta y i} = 2,$$



所以 $f(z) = x + 2yi$ 的导数不存在.



2.可导与连续:

函数 $f(z)$ 在 z_0 处可导则在 z_0 处一定连续, 但函数 $f(z)$ 在 z_0 处连续不一定在 z_0 处可导.

证 根据在 z_0 可导的定义,

$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta > 0, \quad$ 使得当 $0 < |\Delta z| < \delta$ 时,

有 $$\left| \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} - f'(z_0) \right| < \varepsilon,$$

令 $$\rho(\Delta z) = \frac{\boxed{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}}{\Delta z} - f'(z_0)$$

则 $$\lim_{\Delta z \to 0} \rho(\Delta z) = 0,$$

因为 $f(z_0+\Delta z)-f(z_0)=f'(z_0)\Delta z+\rho(\Delta z)\Delta z,$

所以 $\lim\limits_{\Delta z\to 0} f(z_0+\Delta z)=f(z_0),$

即$f(z)$在 z_0 连续. [证毕]

例3 讨论$f(z)=z^2$的可导性.

3.求导法则:

由于复变函数中导数定义与一元实变函数中导数的定义在形式上完全一致, 并且复变函数中的极限运算法则也和实变函数中一样, 因而实变函数中的求导法则都可以不加更改地推广到复变函数中来, 且证明方法也是相同的.

求导公式与法则:

(1) $(c)' = 0$, 其中c为复常数.

(2) $(z^n)' = nz^{n-1}$, 其中n为正整数.

(3) $\left[f(z)\pm g(z)\right]' = f'(z)\pm g'(z).$

(4) $\left[f(z)g(z)\right]' = f'(z)g(z)+f(z)g'(z).$

(5) $\left[\dfrac{f(z)}{g(z)}\right]' = \dfrac{f'(z)g(z)-f(z)g'(z)}{g^2(z)}.\quad (g(z)\neq 0)$

(6) $\left\{f[g(z)]\right\}' = f'(w)g'(z).$ 其中$w=g(z)$

(7) $f'(z)=\dfrac{1}{\varphi'(w)},$ 其中$w=f(z)$与$z=\varphi(w)$是两个互为反函数的单值函数，且$\varphi'(w)\neq 0$

4.微分 (differential)的概念:

复变函数微分的概念在形式上与一元实变函数的微分概念完全一致.

定义 设函数 $w=f(z)$在 z_0 可导, 则

$$\Delta w = f(z_0+\Delta z) - f(z_0) = f'(z_0)\cdot\Delta z + \rho(\Delta z)\Delta z,$$

式中 $\lim\limits_{\Delta z\to 0}\rho(\Delta z)=0$, $|\rho(\Delta z)\Delta z|$是$|\Delta z|$的高阶无穷小, $f'(z_0)\cdot\Delta z$是函数 $w=f(z)$的改变量Δw的线性部分.

$f'(z_0)\cdot\Delta z$ 称为函数 $w=f(z)$在点 z_0 的微分,

记作 $dw = f'(z_0)\cdot\Delta z.$

如果函数在 z_0 的微分存在,则称函数 $f(z)$ 在 z_0 可微.

特别地, 当 $f(z)=z$ 时,

$$\mathrm{d}w=\mathrm{d}z=f'(z_0)\cdot\Delta z=\Delta z,$$

$$\mathrm{d}w=f'(z_0)\cdot\Delta z=f'(z_0)\cdot\mathrm{d}z,\Leftrightarrow f'(z_0)=\left.\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}\right|_{z=z_0}$$

函数 $w=f(z)$ 在 z_0 可导与在 z_0 可微是等价的.

如果函数 $f(z)$ 在区域 D 内处处可微,则称 $f(z)$ 在区域 D 内可微.

二、解析函数的概念

定义

如果函数 $f(z)$ 在 z_0 及 z_0 的邻域内处处可导, 那么称 $f(z)$ 在 z_0 解析.

如果函数 $f(z)$ 在 z_0 不解析, 那末称 z_0 为 $f(z)$ 的奇点.

如果函数 $f(z)$在区域 D内每一点解析，则称 $f(z)$在区域 D内解析. 或称 $f(z)$是区域 D内的一个 $\boxed{\text{解析函数}}$(全纯函数或正则函数).

可导?
解析?

函数在**一点处解析**与在**一点处可导**是**不等价**的概念. 即函数在一点处可导，不一定在该点处解析.函数在一点处解析比在该点处可导的要求要高得多.

函数在**区域内解析**与在**区域内可导**是**等价**的.

例4 研究函数 $f(z)=z^2, g(z)=x+2yi$ 和 $h(z)=|z|^2$ 的解析性.

解 $f(z)=z^2$ 在复平面内是解析的;

$g(z)=x+2yi$ 处处不解析;

下面讨论 $h(z)=|z|^2$ 的解析性,

$$\frac{h(z_0+\Delta z)-h(z_0)}{\Delta z}=\frac{|z_0+\Delta z|^2-|z_0|^2}{\Delta z}$$

$$=\frac{(z_0+\Delta z)(\overline{z_0}+\overline{\Delta z})-z_0\overline{z_0}}{\Delta z}=\overline{z_0}+\overline{\Delta z}+z_0\frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z},$$

(1) $z_0=0,\qquad \lim\limits_{\Delta z\to 0}\dfrac{h(z_0+\Delta z)-h(z_0)}{\Delta z}=0.$

(2) $z_0\neq 0,$

令 $z_0+\Delta z$ 沿直线 $y-y_0=k(x-x_0)$ 趋于 z_0,

$$\frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z}=\frac{\Delta x-i\Delta y}{\Delta x+i\Delta y}=\frac{1-i\dfrac{\Delta y}{\Delta x}}{1+i\dfrac{\Delta y}{\Delta x}}=\frac{1-ik}{1+ik}$$

由于 k 的任意性,

$$\frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z}=\frac{1-ki}{1+ki}$$不趋于一个确定的值.

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{h(z_0+\Delta z)-h(z_0)}{\Delta z}$$不存在.

因此 $h(z)=|z|^2$ 仅在 $z=0$ 处可导,而在其他点都不可导,根据定义,它在复平面内处处不解析.

例5 研究函数 $w=\frac{1}{z}$ 的解析性.

解 因为 $w=\frac{1}{z}$ 在复平面内除 $z=0$ 处处可导,

且 $\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}=-\frac{1}{z^2}$,

所以 w 在复平面内除 $z=0$ 外处处解析,

$z=0$ 为它的奇点.

例6 研究函数 $f(z)=z\,\mathrm{Re}(z)$ 的可导性与解析性.

解 (1) $z=0$,

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(0+\Delta z)-f(0)}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta z\,\mathrm{Re}(\Delta z)}{\Delta z}=0,$$

故 $f(z)=z\,\mathrm{Re}(z)$ 在 $z=0$ 处可导.

(2) $z\neq 0$,

$$\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}=\frac{(z+\Delta z)\mathrm{Re}(z+\Delta z)-z\,\mathrm{Re}(z)}{\Delta z}$$

$$=\frac{z}{\Delta z}\mathrm{Re}(z)+\mathrm{Re}(z+\Delta z)$$

令 $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$,

$$\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z} = z\frac{\Delta x}{\Delta x + i\Delta y} + x + \Delta x,$$

因为 $\lim\limits_{\substack{\Delta x=0\\ \Delta y\to 0}} \dfrac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z} = x,$

$$\lim_{\substack{\Delta y=0\\ \Delta x\to 0}} \frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z} = z + x,$$

所以 $\lim\limits_{\Delta z\to 0}\dfrac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}$不存在.

即当$z\neq 0$时, $f(z)$不可导,

因此 $f(z)$仅在$z=0$处可导,而在其他点都不可导,根据定义,它在复平面内处处不解析.

定理

(1) 在区域 D 内解析的两个函数 $f(z)$ 与 $g(z)$ 的和、差、积、商(除去分母为零的点)在 D 内解析.

(2) 设函数 $h = g(z)$ 在 z 平面上的区域 D 内解析,函数 $w = f(h)$ 在 h 平面上的区域 G 内解析.如果对 D 内的每一个点 z,函数 $g(z)$ 的对应值 h 都属于 G,那末复合函数 $w = f[g(z)]$ 在 D 内解析.

以上定理的证明, 可利用求导法则.

根据定理可知:

(1) 所有多项式(复变量)在复平面内处处解析.

(2) 任何一个有理分式函数 $\dfrac{P(z)}{Q(z)}$ 在不含分母为零的点的区域内是解析的, 使分母为零的点是它的奇点.

第二节　函数解析的充要条件

- 一、主要定理
- 二、典型例题
- 三、小结

一、主要定理

定理一

设函数 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 定义在区域 D 内,则 $f(z)$ 在 D 内一点 $z=x+yi$ 可导的充要条件是：$u(x,y)$ 与 $v(x,y)$ 在点 (x,y) 可微，并且在该点满足柯西一黎曼方程

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}.$$

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{1}{i}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial y}.$$

定理二　函数 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 在其定义域 D 内解析的充要条件是： $u(x,y)$ 与 $v(x,y)$ 在 D 内可微, 并且满足柯西一黎曼方程.

解析函数的判定方法:

(1) 如果能用求导公式与求导法则证实复变函数 $f(z)$ 的导数在区域 D 内处处存在,则可根据解析函数的定义断定 $f(z)$ 在 D 内是解析的.

(2) 如果复变函数 $f(z)=u+iv$ 中 u,v 在 D 内的各一阶偏导数都存在、连续(因而 $u,v(x,y)$ 可微)并满足 $\mathrm{C-R}$ 方程,那么根据解析函数的充要条件可以断定 $f(z)$ 在 D 内解析.

二、典型例题

例1 判定下列函数在何处可导, 在何处解析:

(1) $w=\bar{z}$;　　(2) $f(z)=e^{x}(\cos y+i\sin y)$;

(3) $w=z\,\mathrm{Re}(z)$.

解 (1) $w=\bar{z}$,　　$u=x,\quad v=-y,$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=1,\quad \frac{\partial u}{\partial y}=0,\quad \frac{\partial v}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial v}{\partial y}=-1.$$

不满足柯西一黎曼方程,

故 $w=\bar{z}$ 在复平面内处处不可导,处处不解析.

(2) $f(z)=\boxed{e^{x}(\cos y+i\sin y)}$ 指数函数

$$u=e^{x}\cos y,\quad v=e^{x}\sin y,$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=e^{x}\cos y,\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-e^{x}\sin y,$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=e^{x}\sin y,\quad \frac{\partial v}{\partial y}=e^{x}\cos y,$$

四个偏导数
均连续

即 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y},\quad \dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{\partial v}{\partial x}.$

故 $f(z)$ 在复平面内处处可导,处处解析.

且 $f'(z)=e^{x}(\cos y+i\sin y)=f(z).$

(3) $w = z\,\mathrm{Re}(z) = x^2 + xyi,\qquad u = x^2,\quad v = xy,$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x,\quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0,\quad \frac{\partial v}{\partial x} = y,\quad \frac{\partial v}{\partial y} = x.$$

四个偏导数均连续

仅当 $x = y = 0$ 时,满足柯西一黎曼方程,

故函数 $w = z\,\mathrm{Re}(z)$ 仅在 $z = 0$ 处可导,

在复平面内处处不解析.

例2　证明$\bar{z}^2$在复平面上不解析.

证　$\bar{z}^2 = x^2 - y^2 - 2xyi$,

$$u = x^2 - y^2, \quad v = -2xy,$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -2y, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -2y, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = -2x.$$

仅当$x = 0$, $y = 0$时, 满足柯西一黎曼方程,

故函数$w = \bar{z}^2$仅在直线$z = 0$上可导,

在复平面内不解析.

例3 设 $f(z)=x^2+axy+by^2+i(cx^2+dxy+y^2)$, 问常数 a,b,c,d 取何值时, $f(z)$ 在复平面内处处解析?

解 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=2x+ay,\qquad \dfrac{\partial u}{\partial y}=ax+2by,$

$\dfrac{\partial v}{\partial x}=2cx+dy,\qquad \dfrac{\partial v}{\partial y}=dx+2y,$

欲使 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y},\quad \dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{\partial v}{\partial x},$

$2x+ay=dx+2y,\qquad -2cx-dy=ax+2by,$

所求 $a=2,\ b=-1,\ c=-1,\ d=2.$

例4 证明函数 $f(z)=\sqrt{|xy|}$ 在点 $z=0$ 满足柯西—黎曼方程但在点 $z=0$ 不可导.

证 因为 $f(z)=\sqrt{|xy|}$，所以 $u=\sqrt{|xy|}$， $v=0$,

$$u_x(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{u(x,0)-u(0,0)}{x-0}=0=v_y(0,0),$$

$$u_y(0,0)=\lim_{y\to 0}\frac{u(0,y)-u(0,0)}{y-0}=0=-v_x(0,0),$$

柯西—黎曼方程在点 $z=0$ 成立.

但当 z 沿第一象限内的射线 $y = kx$ 趋于零时,

$$\frac{f(z) - f(0)}{z - 0} = \frac{\sqrt{|xy|}}{x + iy} \to \frac{\sqrt{k}}{1 + ik},$$ 随 k 变化,

故 $\lim\limits_{z \to 0} \dfrac{f(z) - f(0)}{z - 0}$ 不存在,

函数 $f(z) = \sqrt{|xy|}$ 在点 $z = 0$ 不可导.

例5 设 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 在区域 D 内解析,并且 $v=u^2$,求 $f(z)$.

解 $$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}=2u\frac{\partial u}{\partial y}, \qquad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}=-2u\frac{\partial u}{\partial x}, \qquad (2)$$

将(2)代入(1)得 $$\frac{\partial u}{\partial x}(4u^2+1)=0,$$

由 $(4u^2+1)\neq 0 \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x}=0,$

由(2)得 $\frac{\partial u}{\partial y}=0$, 所以 $u=c$ (常数),

于是 $f(z)=c+ic^2$ (常数).

例6 如果 $f'(z)$ 在区域 D 内处处为零，则 $f(z)$ 在区域 D 内为一常数.

证 $$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}-i\frac{\partial u}{\partial y}\equiv 0,$$

故 $$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial x}\equiv 0,$$

所以 $u=$常数, $v=$常数,

因此 $f(z)$ 在区域 D 内为一常数.

三、小结

在本课中我们得到了一个重要结论—函数解析的充要条件:

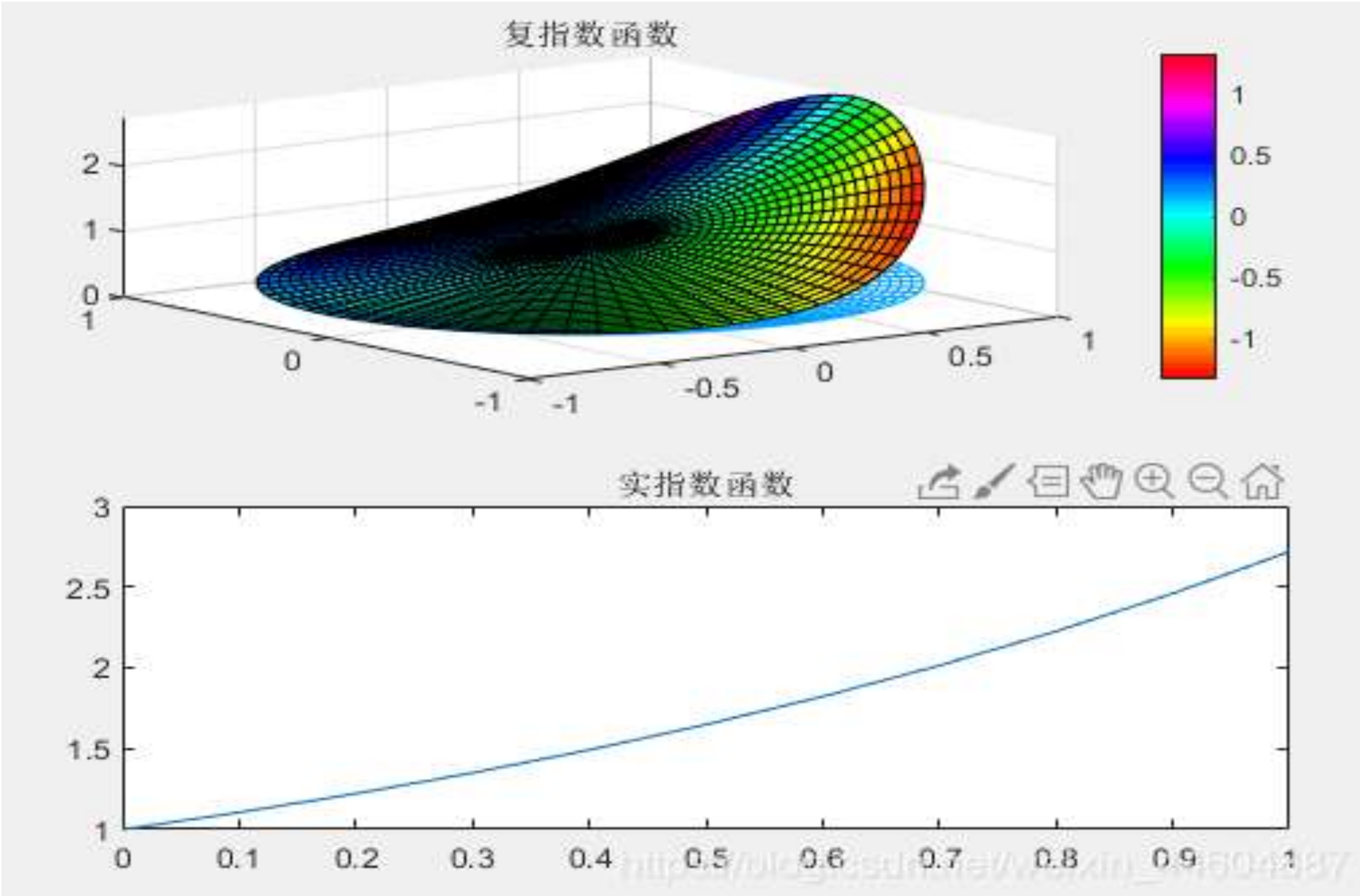
$u(x,y)$与$v(x,y)$在D内可微,并且满足柯西—黎曼方程

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}.$$

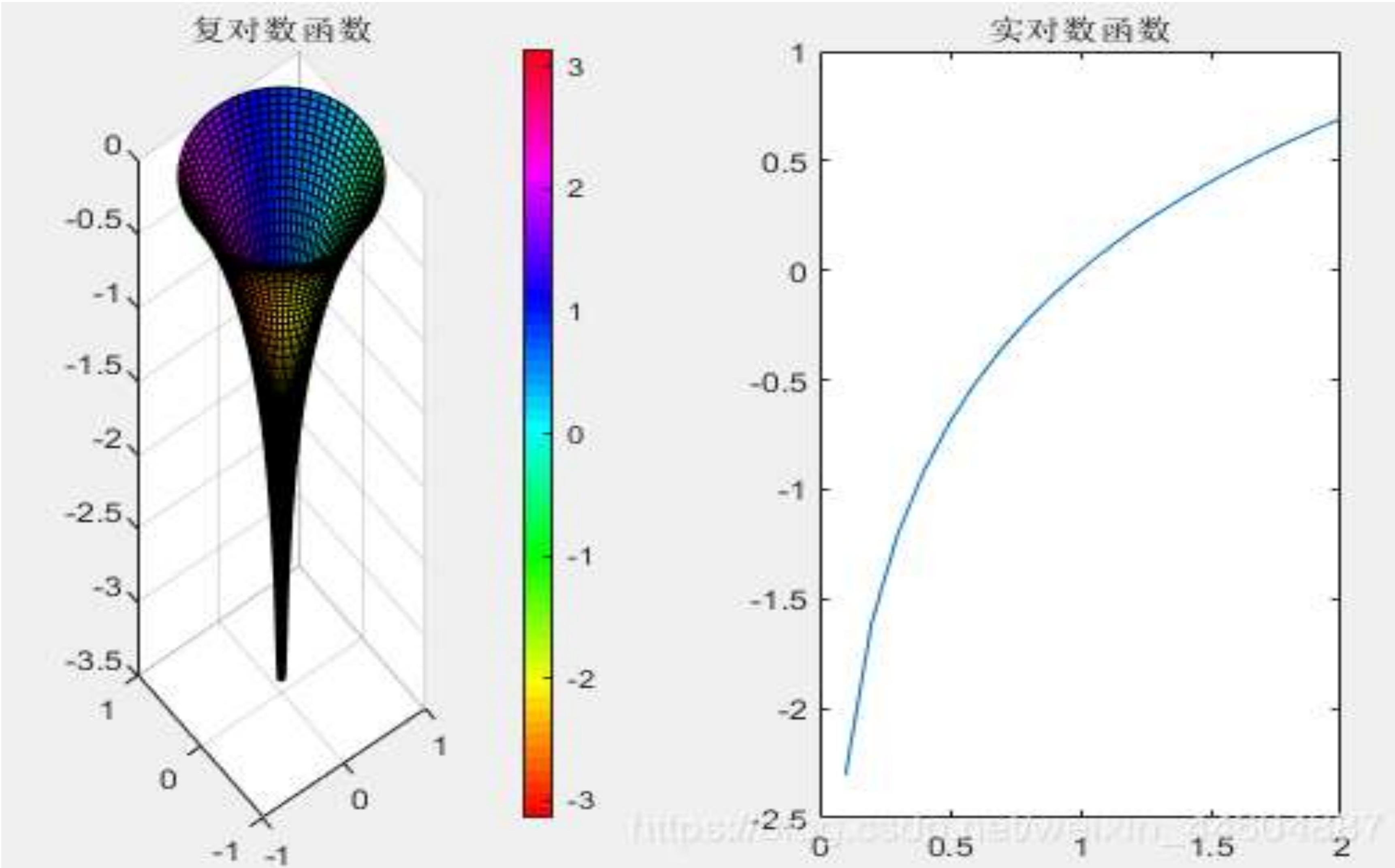
掌握并能灵活应用柯西—黎曼方程.

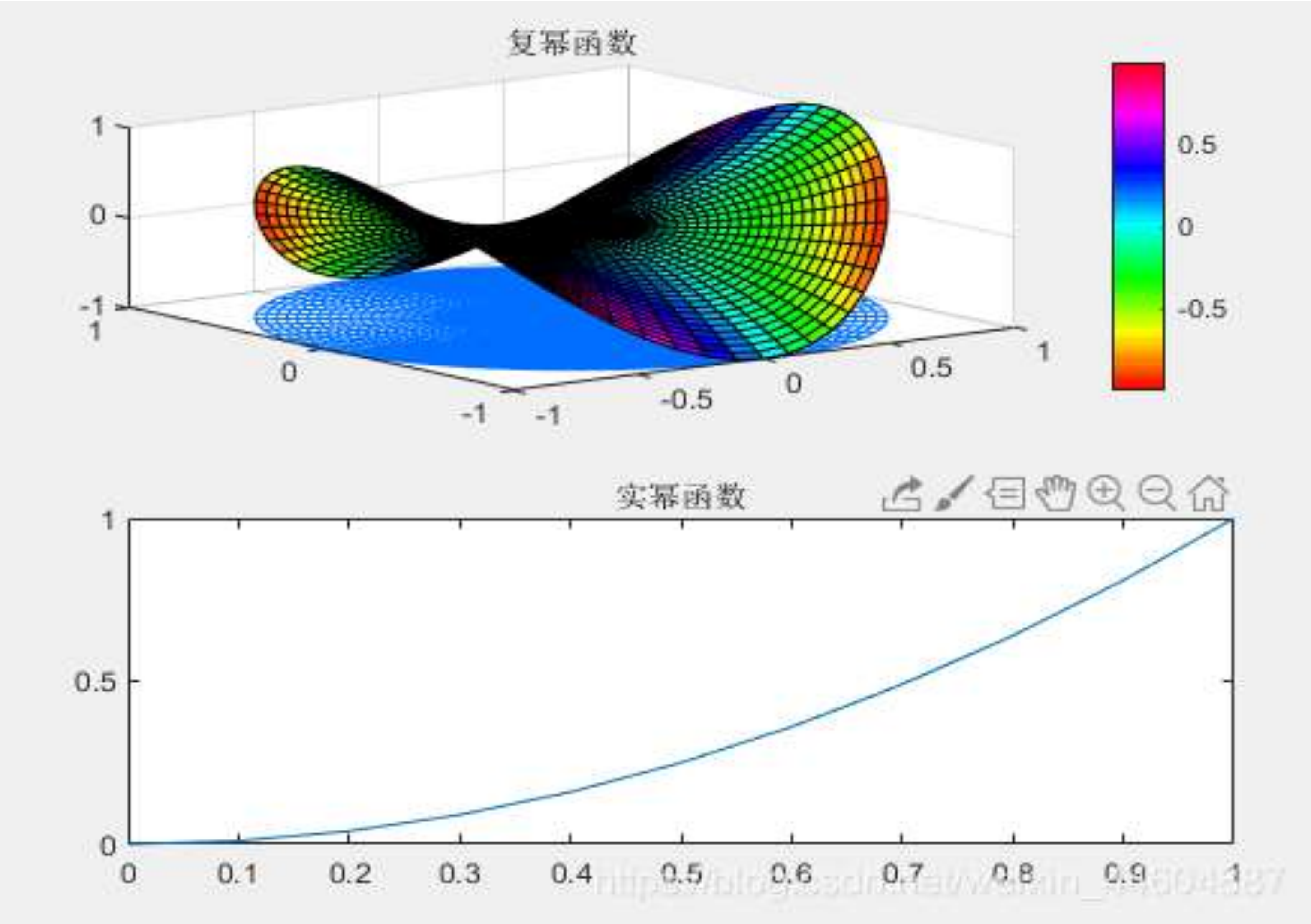
第三节　初等函数

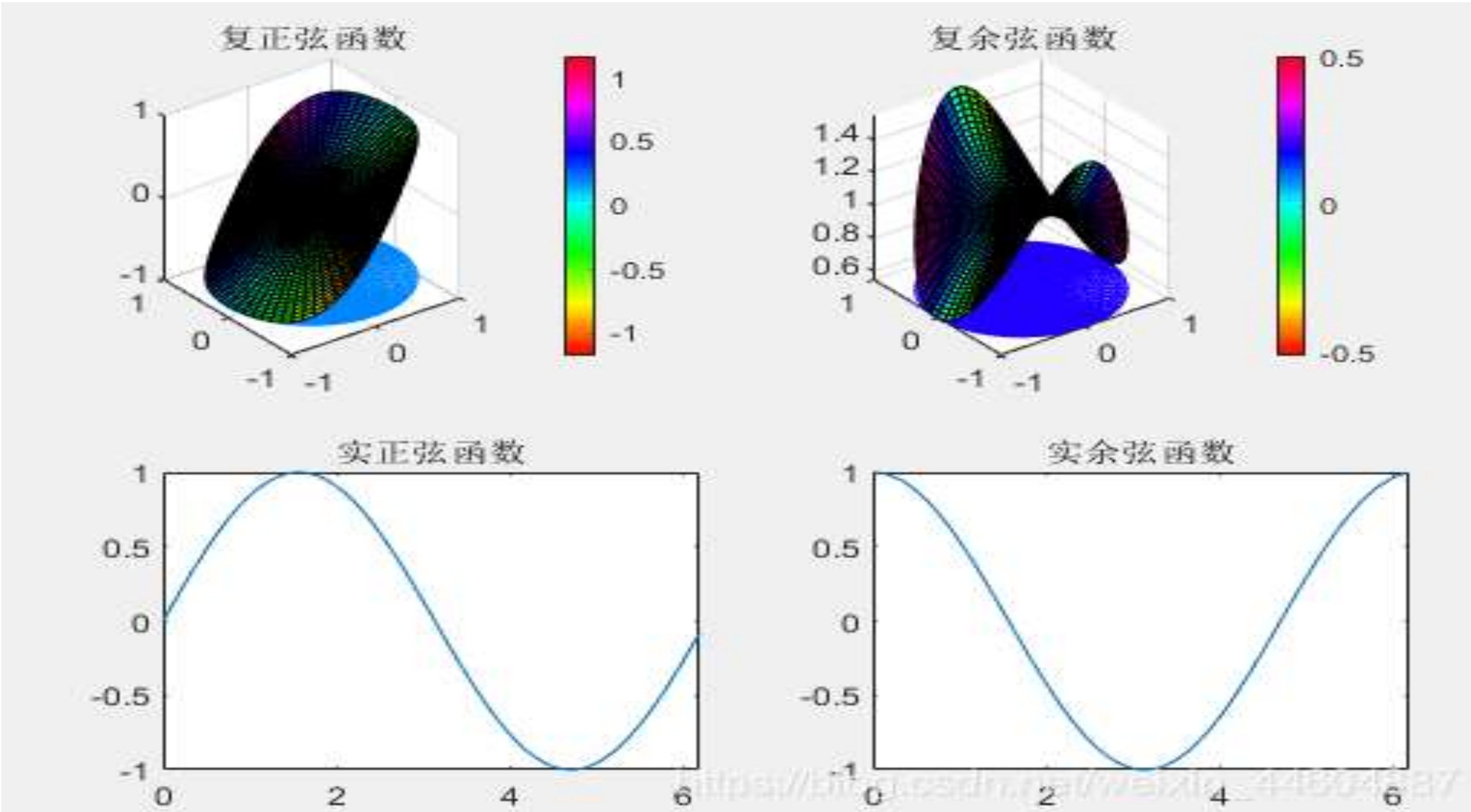
- 一、指数函数
- 二、对数函数
- 三、乘幂 a^b 与幂函数
- 四、三角函数和双曲函数
- 五、反三角函数和反双曲函数
- 六、小结与思考

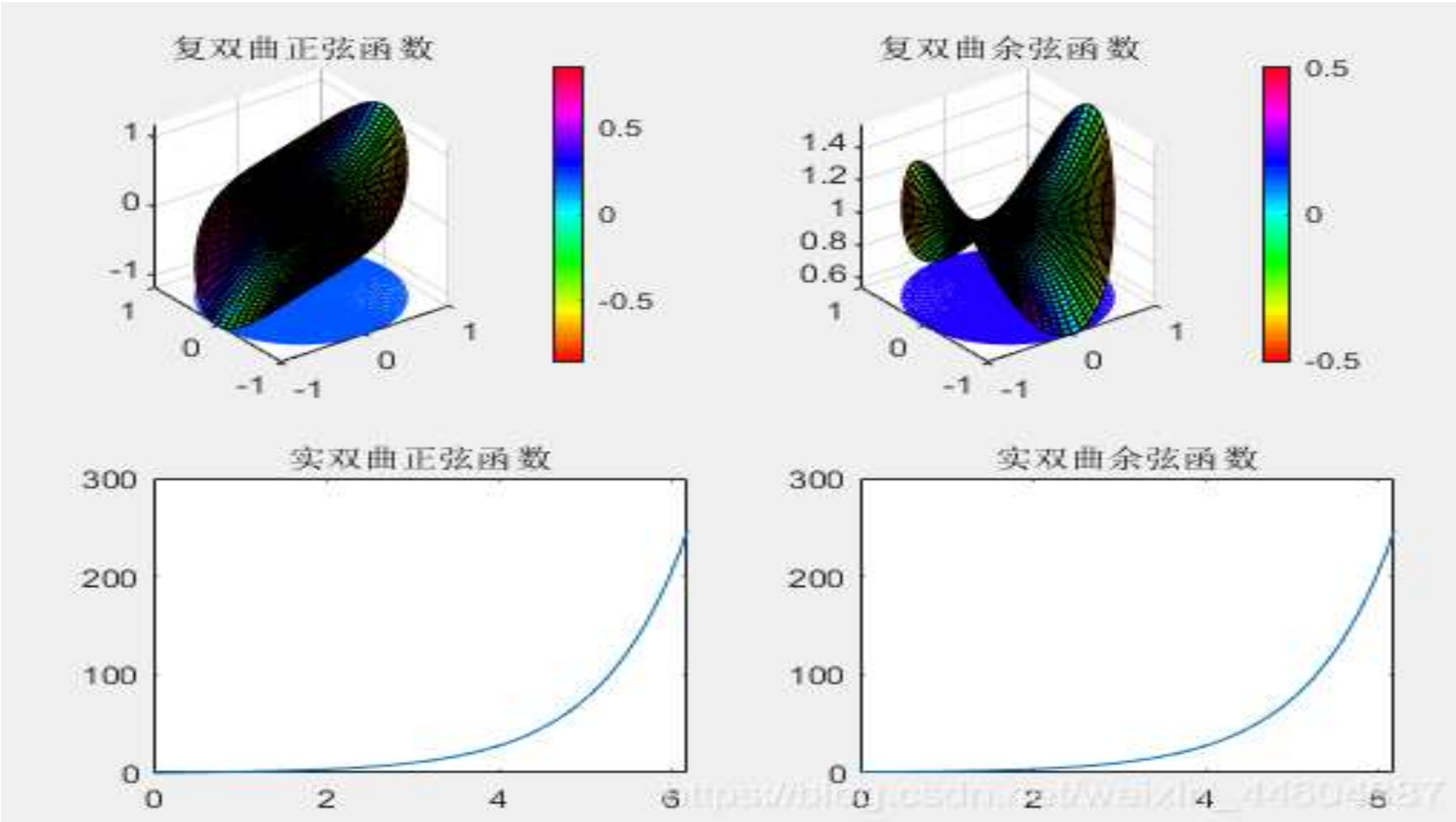


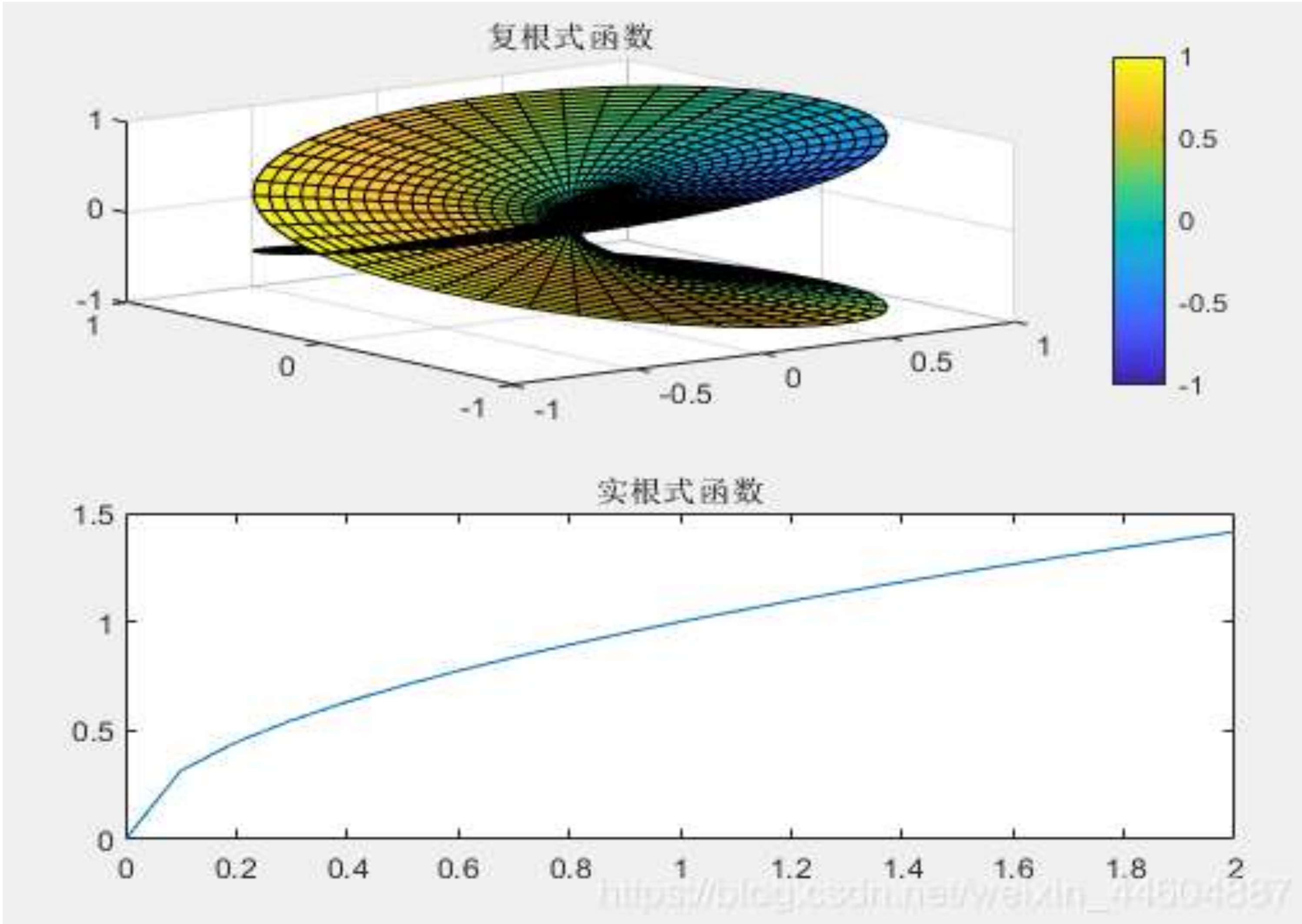
复指数函数
2
1
0
1
0
-1
-1
-0.5
0
0.5
1
1
0.5
0
-0.5
-1
实指数函数
3
2.5
2
1.5
1
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1


复对数函数
实对数函数
https://blog.csdn.net/weixin_42504287

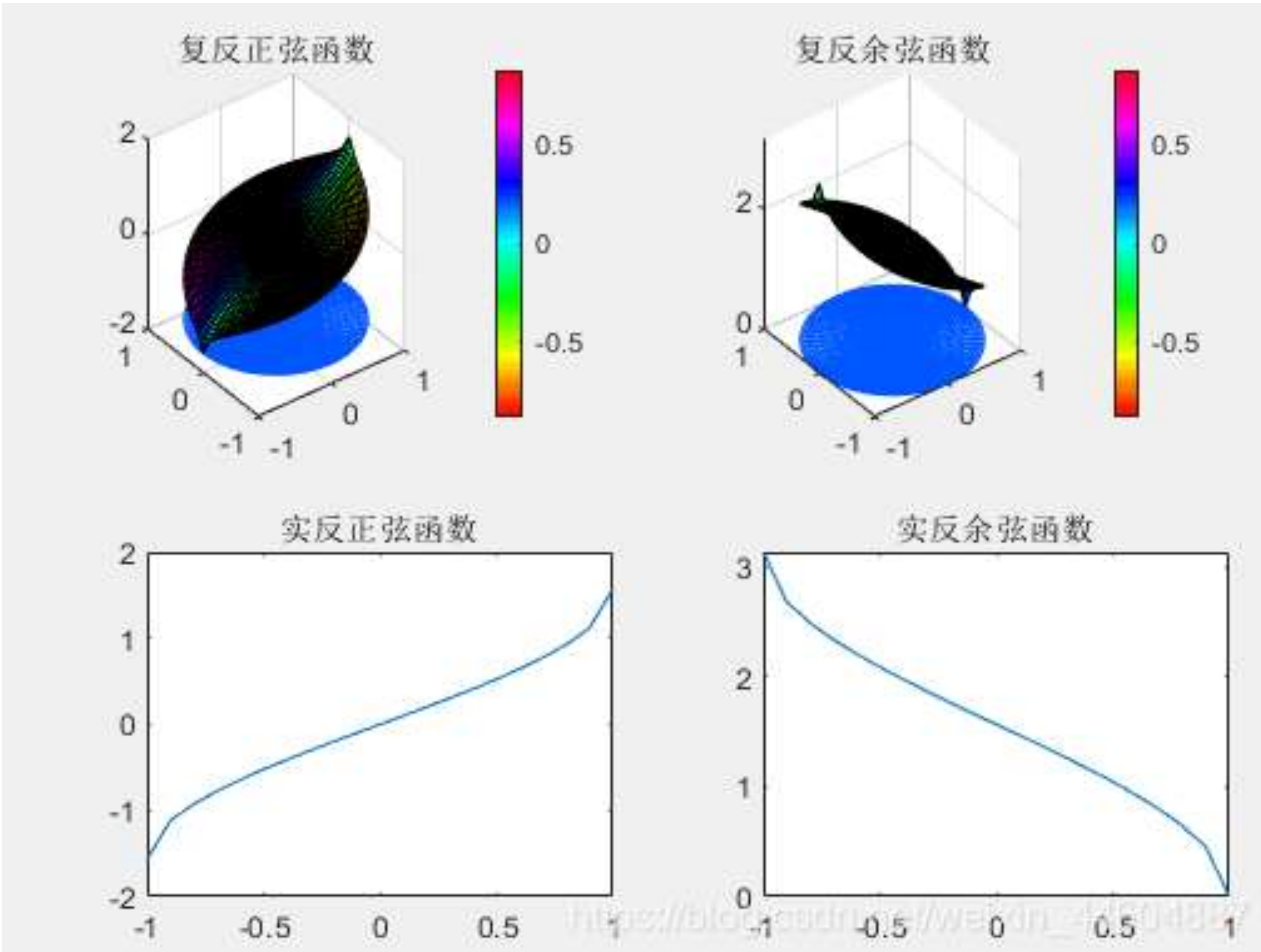

复幂函数
实幂函数


复正弦函数
复余弦函数
实正弦函数
实余弦函数


复双曲正弦函数
复双曲余弦函数
实双曲正弦函数
实双曲余弦函数



复根式函数
1
0.5
0
-0.5
-1
1
0
-1
1
0
-1
-1
-0.5
0
0.5
1
实根式函数
1.5
1
0.5
0
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
1.2
1.4
1.6
1.8
2


复反正弦函数
复反余弦函数
实反正弦函数
实反余弦函数
https://blog.csdn.net/weixin_44604887

一、指数函数

1.指数函数的定义:

当函数 $f(z)$ 在复平面内满足以下三个条件:

(1) $f(z)$在复平面内处处解析;

(2) $f'(z) = f(z)$;

(3)当$\mathrm{Im}(z) = 0$时, $f(z) = e^x$,其中$x = \mathrm{Re}(z)$.

此函数称为复变数 z的指数函数,记为

$$\exp z = e^x(\cos y + i\sin y)$$

指数函数的定义等价于关系式:

$$\left.\begin{aligned}&|\exp z| = e^{x},\\ &\operatorname{Arg}(\exp z) = y + 2k\pi,\end{aligned}\right\}$$ (其中k为任何整数)

指数函数 $\exp z$ 可以用 e^{z} 来表示.

$$e^{z} = e^{x}(\cos y + i\sin y)$$

注: e^{z} 没有幂的意义, 只是代替 $\exp z$ 的符号.

性质:

1、单值函数. 2、$e^{z} \neq 0$.

3. 加法定理 $\exp z_1 \cdot \exp z_2 = \exp(z_1 + z_2)$

证 设 $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$,

$$
\begin{aligned}
\text{左端} &= \exp z_1 \cdot \exp z_2 \\
&= e^{x_1}(\cos y_1 + i\sin y_1)\cdot e^{x_2}(\cos y_2 + i\sin y_2) \\
&= e^{x_1+x_2}[(\cos y_1 \cos y_2 - \sin y_1 \sin y_2)] \\
&\qquad + i[(\sin y_1 \cos y_2 + \cos y_1 \sin y_2)] \\
&= e^{x_1+x_2}[\cos(y_1 + y_2) + i\sin(y_1 + y_2)] \\
&= \exp(z_1 + z_2) = \text{右端}.
\end{aligned}
$$

4、周期性

$\exp z$ 的周期是$2k\pi i$， 即 $e^{z+2k\pi i}=e^{z}\cdot e^{2k\pi i}=e^{z}$.

(其中k为任何整数)

该性质是实变指数函数 e^{x}所没有的.

例1 设 $z=x+iy$, 求(1) $\left|e^{i-2z}\right|$; (2)$\left|e^{z^{2}}\right|$; (3)$\operatorname{Re}(e^{\frac{1}{z}})$;

解 因为$e^{z}=e^{x+iy}=e^{x}(\cos y+i\sin y)$

所以其模 $\left|e^{z}\right|=e^{x}$， 实部 $\operatorname{Re}(e^{z})=e^{x}\cos y$.

$$(1)\ e^{i-2z}=e^{i-2(x+iy)}=e^{-2x+i(1-2y)},$$

$$\left|e^{i-2z}\right|=e^{-2x};$$

$$(2)\ e^{z^2}=e^{(x+iy)^2}=e^{x^2-y^2+2xyi},$$

$$\left|e^{z^2}\right|=e^{x^2-y^2};$$

$$(3)\ e^{\frac{1}{z}}=e^{\frac{1}{x+yi}}=e^{\frac{x}{x^2+y^2}+i\frac{-y}{x^2+y^2}},$$

$$\operatorname{Re}(e^{\frac{1}{z}})=e^{\frac{x}{x^2+y^2}}\cos\frac{y}{x^2+y^2}.$$

例2 求出下列复数的辐角主值:

$(1)e^{2+i}$; $(2)e^{2-3i}$; $(3)e^{3+4i}$; $(4)e^{-3-4i}$; $(5)e^{i\alpha}-e^{i\beta}$ $(0<\beta<\alpha<2\pi)$.

解 因为$e^{z}=e^{x+iy}=e^{x}(\cos y+i\sin y)$的辐角

$$\mathrm{Arg}\,e^{z}=y+2k\pi \quad (k\text{为整数})$$

其辐角主值$\arg e^{z}$为区间$(-\pi,\pi]$内的一个辐角.

(1) $\mathrm{Arg}\,e^{2+i}=1+2k\pi,\qquad \arg e^{2+i}=1;$

(2) $\mathrm{Arg}\,e^{2-3i}=-3+2k\pi,\quad \arg e^{2-3i}=-3;$

$$(3)e^{3+4i};$$

$$\operatorname{Arg}e^{3+4i}=4+2k\pi,\quad \arg e^{3+4i}=4-2\pi;$$

$$(4)e^{-3-4i};$$

$$\operatorname{Arg}e^{-3-4i}=-4+2k\pi,\quad \arg e^{-3-4i}=-4+2\pi;$$

$$(5)e^{i\alpha}-e^{i\beta}=\cos\alpha+i\sin\alpha-(\cos\beta+i\sin\beta)$$

$$=(\cos\alpha-\cos\beta)+i(\sin\alpha-\sin\beta)$$

$$=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}+2i\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$=2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\left(-\sin\frac{\alpha+\beta}{2}+i\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$$

$$=2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\left(\cos\frac{\pi+\alpha+\beta}{2}+i\sin\frac{\pi+\alpha+\beta}{2}\right)$$

因$0<\beta<\alpha<2\pi$, $\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}>0$,

上式就是复数$e^{i\alpha}-e^{i\beta}$的三角表示式.

所以 $\operatorname{Arg}(e^{i\alpha}-e^{i\beta})=\dfrac{\pi+\alpha+\beta}{2}+2k\pi$,

当$\alpha+\beta\leq\pi$时, $\arg(e^{i\alpha}-e^{i\beta})=\dfrac{\pi+\alpha+\beta}{2}$,

当$\alpha+\beta>\pi$时, $\arg(e^{i\alpha}-e^{i\beta})=\dfrac{\pi+\alpha+\beta}{2}-2\pi$.

例3 求函数 $f(z)=e^{\frac{z}{5}}$ 的周期.

解 e^z 的周期是$2k\pi i$,

$$f(z)=e^{\frac{z}{5}}=e^{\frac{z}{5}+2k\pi i}=e^{\frac{z+10k\pi i}{5}}$$

$$=f(z+10k\pi i),$$

故函数 $f(z)=e^{\frac{z}{5}}$ 的周期是 $10k\pi i$.

二、对数函数

1. 定义

满足方程 $e^{w}=z\ \boxed{(z\neq 0)}$ 的函数 $w=f(z)$ 称为对数函数，记为 $w=\boxed{\mathrm{Ln}z}=\boxed{\ln|z|}+i\mathrm{Arg}z.$

由于 $\mathrm{Arg}z$ 为多值函数，所以对数函数 $w=f(z)$ 也是多值函数，并且每两值相差 $2\pi i$ 的整数倍.

如果将 $\mathrm{Lnz} = \ln|z| + i\mathrm{Argz}$ 中 Argz 取主值 $\arg z$，
那末 Lnz 为一单值函数，记为 $\ln z$，称为 Lnz 的主值.

$$\ln z = \ln|z| + i\arg z.$$

其余各值为 $\mathrm{Lnz} = \ln z + 2k\pi i \quad (k = \pm 1, \pm 2, \cdots)$，
对于每一个固定的 k，上式确定一个单值函数，
称为 Lnz 的一个分支.

特殊地，当 $z = x > 0$ 时，Lnz 的主值 $\ln z = \ln x$，
是实变数对数函数.

例4 求$\mathrm{Ln}2, \mathrm{Ln}(-1)$以及与它们相应的主值.

解 因为 $\mathrm{Ln}2 = \ln 2 + 2k\pi i$,

所以$\mathrm{Ln}2$的主值就是$\ln 2$.

因为 $\mathrm{Ln}(-1) = \ln 1 + i\mathrm{Arg}(-1)$

$= (2k+1)\pi i \quad$ (k为整数)

所以$\mathrm{Ln}(-1)$的主值就是πi.

注意: 在实变函数中, 负数无对数, 而复变数对数函数是实变数对数函数的拓广.

例5 解方程 $e^z - 1 - \sqrt{3}i = 0.$

解 因为 $e^z = 1 + \sqrt{3}i,$

所以 $z = \mathrm{Ln}(1 + \sqrt{3}i)$

$$= \ln\left|1 + \sqrt{3}i\right| + i\left(\frac{\pi}{3} + 2k\pi\right)$$

$$= \ln 2 + i\left(\frac{\pi}{3} + 2k\pi\right)$$

$$(k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$$

例6　求下列各式的值：

$$(1)\mathrm{Ln}(-2+3i);\quad (2)\mathrm{Ln}(3-\sqrt{3}i);\quad (3)\mathrm{Ln}(-3).$$

解　$(1)\mathrm{Ln}(-2+3i)$

$$=\ln|-2+3i|+i\mathrm{Arg}(-2+3i)$$

$$=\frac{1}{2}\ln 13+i\left(\pi-\arctan\frac{3}{2}+2k\pi\right).$$

$$(k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots)$$

$$(2)\mathrm{Ln}(3-\sqrt{3}i)$$

$$=\ln\left|3-\sqrt{3}i\right|+i\mathrm{Arg}(3-\sqrt{3}i)$$

$$=\ln 2\sqrt{3}+i\left(\arctan\frac{-\sqrt{3}}{3}+2k\pi\right)$$

$$=\ln 2\sqrt{3}+i\left(2k\pi-\frac{\pi}{6}\right). \qquad (k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots)$$

$$(3)\mathrm{Ln}(-3)=\ln\left|-3\right|+i\mathrm{Arg}(-3)$$

$$=\ln 3+(2k+1)\pi i. \quad (k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots)$$

2. 性质

(1) $\mathrm{Ln}(z_1 \cdot z_2) = \mathrm{Ln}z_1 + \mathrm{Ln}z_2$,

(2) $\mathrm{Ln}\dfrac{z_1}{z_2} = \mathrm{Ln}z_1 - \mathrm{Ln}z_2$,

(3) 在除去负实轴(包括原点)的复平面内, 主值支和其它各分支处处连续, 处处可导, 且

$$(\ln z)' = \frac{1}{z}, \quad (\mathrm{Ln}z)' = \frac{1}{z}.$$

证 (3) 设 $z=x+iy$， 当$x<0$时,

$$\lim_{y\to 0^-}\arg z=-\pi,\qquad \lim_{y\to 0^+}\arg z=\pi,$$

所以,除原点与负实轴,在复平面内其它点$\ln z$处处连续.

$z=e^w$在区域$-\pi<\arg z<\pi$内的反函数$w=\ln z$是单值的,

$$\frac{\mathrm{d}\ln z}{\mathrm{d}z}=\frac{1}{\dfrac{\mathrm{d}e^w}{\mathrm{d}w}}=\frac{1}{z}.$$

[证毕]

三、乘幂 a^b与幂函数

1. 乘幂的定义

设 a 为不等于零的一个复数, b 为任意一个复数, 乘幂 a^b 定义为 $e^{b\mathrm{Ln}a}$, 即 $a^b = e^{b\mathrm{Ln}a}$.

注意:

由于 $\mathrm{Ln}a = \ln|a| + i(\arg a + 2k\pi)$ 是多值的, 因而 a^b 也是多值的.

(1) 当 b 为整数时, $a^b = e^{b\mathrm{Ln}a} = e^{b[\ln|a| + i(\arg a + 2k\pi)]}$

单多值关键

$$= e^{b(\ln|a|+i\arg a)+\boxed{2kb\pi i}} = e^{b\ln a},$$ a^b具有单一的值.

(2) 当 $b = \dfrac{p}{q}$ (p与q为互质的整数, $q > 0$)时,

$$a^b = e^{\frac{p}{q}[\ln|a|+i(\arg a+2k\pi)]} = e^{\frac{p}{q}\ln|a|+i\frac{p}{q}(\arg a+2k\pi)}$$

$$= e^{\frac{p}{q}\ln|a|}\left[\cos\frac{p}{q}(\arg a+2k\pi)+i\sin\frac{p}{q}(\arg a+2k\pi)\right]$$

a^b具有 q 个值, 即取 $k = 0,1,2,\cdots,(q-1)$时相应的值.

2. 幂函数

如果 $a = z$ 为一复变数 就得到一般的幂函数

$w = z^b$;

当 $b = n$ 与 $\dfrac{1}{n}$ 时, 就分别得到通常的幂函数 $w = z^n$

及 $z = w^n$ 的反函数 $w = z^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{z}$.

例7 求 $1^{\sqrt{2}}$ 和 i^i 的值. $\quad a^b = e^{b\mathrm{Ln}a}$

解 $1^{\sqrt{2}} = e^{\sqrt{2}\mathrm{Ln}1} = e^{2k\pi i\cdot\sqrt{2}}$

$= \cos(2\sqrt{2}k\pi) + i\sin(2\sqrt{2}k\pi)$ 其中 $k = 0, \pm1, \pm2, \cdots$.

$i^i = e^{i\mathrm{Ln}i} = e^{i\left(\frac{\pi}{2}i + 2k\pi i\right)} = e^{-\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)}$ 其中 $k = 0, \pm1, \pm2, \cdots$.

练习 计算 $(-3)^{\sqrt{5}}$.

$$(-3)^{\sqrt{5}} = 3^{\sqrt{5}}[\cos\sqrt{5}(2k+1)\pi + i\sin\sqrt{5}(2k+1)\pi].$$

$(k = 0, \pm1, \pm2, \cdots)$

例8 求 $(1+i)^i$ 的辐角的主值.

解 $$(1+i)^i = e^{i\mathrm{Ln}(1+i)} = e^{i[\ln|1+i|+i\mathrm{Arg}(1+i)]}$$

$$= e^{i\left[\frac{1}{2}\ln 2+\left(\frac{\pi}{4}i+2k\pi i\right)\right]} = e^{-\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)+i\frac{1}{2}\ln 2}$$

$$= e^{-\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)}\cdot\left[\cos\left(\frac{1}{2}\ln 2\right)+i\sin\left(\frac{1}{2}\ln 2\right)\right]$$

其中 $k=0,\pm1,\pm2,\cdots$.

故 $(1+i)^i$ 的辐角的主值为 $\frac{1}{2}\ln 2$.

3. 幂函数的解析性

(1) 幂函数 z^n 在复平面内是单值解析的,

$$(z^n)' = nz^{n-1}.$$

(2) 幂函数 $z^{\frac{1}{n}}$ 是多值函数,具有n个分支.
它的 各个分支在除去原点和负实轴的复平面内是解析的,

$$\left(z^{\frac{1}{n}}\right)' = \left(\sqrt[n]{z}\right)' = \left(e^{\frac{1}{n}\mathrm{Ln} z}\right)' = \frac{1}{n} z^{\frac{1}{n}-1}.$$

Lnz的解析性

(3) 幂函数 $w = z^b$ (除去 $b = n$ 与 $\frac{1}{n}$ 两种情况外)

也是一个多值函数,

它的 各个分支在除去原点和负实轴的复平面内是解析的,

$$(z^b)' = bz^{b-1}.$$

(1) 幂函数 z^n 在复平面内是单值解析的,

(2) 幂函数 $z^b (b \notin Z)$ 的各个分支在除去原点和负实轴的复平面内解析

四、三角函数和双曲函数

1. 三角函数的定义

因为 $e^{iy}=\cos y+i\sin y,\qquad e^{-iy}=\cos y-i\sin y,$

将两式相加与相减, 得

$$\cos y=\frac{e^{iy}+e^{-iy}}{2},\qquad \sin y=\frac{e^{iy}-e^{-iy}}{2i}.$$

现在把余弦函数和正弦函数的定义推广到自变数取复值的情况.

我们定义余弦函数为 $\cos z = \dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$,

正弦函数为 $\sin z = \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2}$.

性质1

容易证明, $\sin z$ 是奇函数, $\cos z$ 是偶函数.

$$\sin(-z) = -\sin z, \quad \cos(-z) = \cos z.$$

性质2

正弦函数和余弦函数都是以 2π 为周期的.

$$\sin(z + 2\pi) = \sin z, \quad \cos(z + 2\pi) = \cos z.$$

性质3

正弦函数和余弦函数在复平面内都是解析函数.

$$(\sin z)' = \cos z, \quad (\cos z)' = -\sin z.$$

性质4

有关正弦函数和余弦函数的几组重要公式

$$(1) \quad \begin{cases} \cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2, \\ \sin(z_1 + z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2, \\ \sin^2 z + \cos^2 z = 1. \end{cases}$$

$$(2)\quad \begin{cases} \cos(x+yi)=\cos x\cos yi-\sin x\sin yi, \\ \sin(x+yi)=\sin x\cos yi+\cos x\sin yi. \end{cases}$$

当 z 为纯虚数 yi 时,

$$\cos yi=\frac{e^{-y}+e^{y}}{2}=\operatorname{ch} y,\quad \sin yi=\frac{e^{-y}-e^{y}}{2i}=i\operatorname{sh} y.$$

$$(2)'\quad \begin{cases} \cos(x+yi)=\cos x\operatorname{ch} y-i\sin x\operatorname{sh} y, \\ \sin(x+yi)=\sin x\operatorname{ch} y+i\cos x\operatorname{sh} y. \end{cases}$$

当 $y\to\infty$ 时, $|\sin yi|\to\infty$, $|\cos yi|\to\infty$.

(注意：这是与实变函数完全不同的)

其他复变数三角函数的定义

正切函数 $\tan z = \dfrac{\sin z}{\cos z}$， 余切函数 $\cot z = \dfrac{\cos z}{\sin z}$，

正割函数 $\sec z = \dfrac{1}{\cos z}$， 余割函数 $\csc z = \dfrac{1}{\sin z}$.

2. 双曲函数的定义

我们定义双曲余弦函数为 $\operatorname{ch} z = \dfrac{e^z + e^{-z}}{2}$,

双曲正弦函数为 $\operatorname{sh} z = \dfrac{e^z - e^{-z}}{2}$,

双曲正切函数为 $\operatorname{th} z = \dfrac{e^z + e^{-z}}{e^z - e^{-z}}$.

当 z 为实数 x 时, 它与高等数学中的双曲函数的定义完全一致.

五、反三角函数和反双曲函数

1. 反三角函数的定义

设 $z=\cos w$，那么称 w 为 z 的反余弦函数，记作 $w=\operatorname{Arccos} z$.

由 $z=\cos w=\dfrac{e^{iw}+e^{-iw}}{2}$， 得 $e^{2iw}-2ze^{iw}+1=0$，

方程的根为 $e^{iw}=z+\sqrt{z^2-1}$，两端取对数得

$$\operatorname{Arccos} z=-i\operatorname{Ln}(z+\sqrt{z^2-1}).$$

同样可以定义反正弦函数和反正切函数，重复以上步骤，可以得到它们的表达式：

$$\text{Arcsin}z = -i\text{Ln}(iz + \sqrt{1-z^2}),$$

$$\text{Arctan}z = -\frac{i}{2}\text{Ln}\frac{1+iz}{1-iz}.$$

2. 反双曲函数的定义

反双曲正弦 $\text{Arsinh}z = \text{Ln}(z + \sqrt{z^2+1}),$

反双曲余弦 $\text{Arcosh}z = \text{Ln}(z + \sqrt{z^2-1}),$

反双曲正切 $\text{Artanh}z = \frac{1}{2}\text{Ln}\frac{1+z}{1-z}.$

六、小结与思考

复变初等函数是一元实变初等函数在复数范围内的自然推广，它既保持了后者的某些基本性质，又有一些与后者不同的特性. 如:

1. 指数函数具有周期性 (周期为 $2\pi i$)

2. 负数无对数的结论不再成立

3. 三角正弦与余弦不再具有有界性