第五节　柯西积分公式

- 一、问题的提出
- 二、柯西积分公式
- 三、典型例题

一、问题的提出--闭路变形原理的遗留问题

设 B 为一单连通域, z_0 为 B 中一点.

C 为 B 内围绕 z_0 的闭曲线.

如果 $f(z)$ 在 B内解析, 但 $\dfrac{f(z)}{z-z_0}$ 在 z_0 不解析,

所以 $\oint_C \dfrac{f(z)}{z-z_0}\mathrm{d}z$ 一般不为零,

根据闭路变形原理知,该积分值不随闭曲线 C 的变化而改变,

如何求这个值?

积分曲线 C 取作以 z_0 为中心, 半径为很小的 δ 的正向圆周 $|z-z_0|=\delta$, 由 $f(z)$ 的连续性,

在 C 上函数 $f(z)$ 的值将随着 δ 的缩小而逐渐接近于它在圆心 z_0 处的值,

$$\boxed{\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}\mathrm{d}z} \text{ 将接近于 } \oint_C \frac{f(z_0)}{z-z_0}\mathrm{d}z. \quad (\delta \text{ 缩小})$$

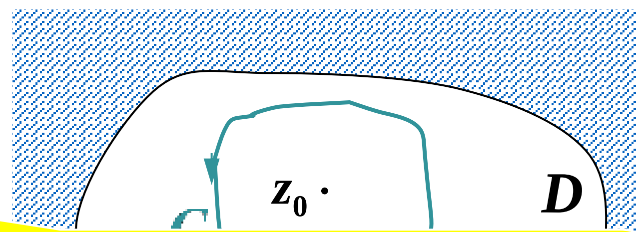
$$\oint_C \frac{f(z_0)}{z-z_0}\mathrm{d}z = f(z_0)\oint_C \frac{1}{z-z_0}\mathrm{d}z = \boxed{2\pi i f(z_0)}.$$

二、柯西积分公式

定理

如果函数 $f(z)$ 在区域 D 内处处解析, C 为 D 内的任何一条正向简单闭曲线, 它的内部完全含于 D, z_0 为 C 内任一点, 那么

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}\mathrm{d}z.$$



柯西积分公式

$z_0 \in D, z_0 \notin C$为被积函数的唯一奇点，否则不能直接利用公式

关于柯西积分公式的说明:

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}\mathrm{d}z$$

$$\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}\mathrm{d}z=2\pi i f(z_0)$$

如果 C 是圆周 $z=z_0+R\cdot e^{i\theta}$

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0+R\cdot e^{i\theta})\mathrm{d}\theta$$

三、例题

例1 求下列积分

$$(1)\ \frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=4}\frac{\sin z}{z}\mathrm{d}z;\quad (2)\ \oint_{|z|=4}\left(\frac{1}{z+1}+\frac{2}{z-3}\right)\mathrm{d}z.$$

解 $(1)\ \dfrac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=4}\dfrac{\sin z}{z}\mathrm{d}z$

因为 $f(z)=\sin z$ 在复平面内解析,

$z=0$ 位于 $|z|<4$ 内,

由柯西积分公式

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=4}\frac{\sin z}{z}\mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi i}\cdot 2\pi i\cdot \sin z\Big|_{z=0} = 0;$$

(2) $$\oint_{|z|=4}\left(\frac{1}{z+1}+\frac{2}{z-3}\right)\mathrm{d}z.$$

$$= \oint_{|z|=4}\frac{1}{z+1}\mathrm{d}z + \oint_{|z|=4}\frac{2}{z-3}\mathrm{d}z = 2\pi i\cdot 1 + 2\pi i\cdot 2$$

$$= 6\pi i.$$

例2　计算积分 $\oint_{|z|=2} \frac{e^z}{z-1} \mathrm{d}z.$

解　因为 $f(z)=e^z$ 在复平面内解析,

$z=1$ 位于 $|z|<2$ 内,

由柯西积分公式

$$\oint_{|z|=2} \frac{e^z}{z-1} \mathrm{d}z = 2\pi i \cdot e^z \Big|_{z=1} = 2e\pi i.$$

例3 计算积分 $\oint_{|z-i|=\frac{1}{2}} \frac{1}{z(z^2+1)} \mathrm{d}z.$

解 $\frac{1}{z(z^2+1)} = \frac{1}{z(z+i)(z-i)} = \frac{\boxed{\frac{1}{z(z+i)}}}{z-i}$ $= f(z)$ $z_0 = i,$

因为 $f(z)$ 在 $|z-i| \le \frac{1}{2}$ 内解析, 由柯西积分公式

$$\oint_{|z-i|=\frac{1}{2}} \frac{1}{z(z^2+1)} \mathrm{d}z = \oint_{|z-i|=\frac{1}{2}} \frac{\frac{1}{z(z+i)}}{z-i} \mathrm{d}z = 2\pi i \cdot \left.\frac{1}{z(z+i)}\right|_{z=i}$$

$$= 2\pi i \cdot \frac{1}{2i^2} = -\pi i.$$

例4 设 C 表示正向圆周 $x^2+y^2=3$,

$$f(z)=\int_C \frac{3\xi^2+7\xi+1}{\xi-z}\mathrm{d}\xi,$$ 求 $f'(1+i)$.

解 根据柯西积分公式知, 当 z 在 C 内时,

$$f(z)=2\pi i\cdot(3\xi^2+7\xi+1)\Big|_{\xi=z}=2\pi i(3z^2+7z+1),$$

故 $f'(z)=2\pi i(6z+7)$, 而 $1+i$ 在 C 内,

所以 $f'(1+i)=2\pi(-6+13i)$.

例5 计算积分 $\oint_C \dfrac{\sin\frac{\pi}{4}z}{z^2-1}\mathrm{d}z$, 其中$C:(1)\ |z+1|=\dfrac{1}{2}$;

解 (1) $\displaystyle\oint_{|z+1|=\frac{1}{2}} \frac{\sin\frac{\pi}{4}z}{z^2-1}\mathrm{d}z = \oint_{|z+1|=\frac{1}{2}} \frac{\frac{\sin\frac{\pi}{4}z}{z-1}}{z+1}\mathrm{d}z$

$$= 2\pi i\cdot\left.\frac{\sin\frac{\pi}{4}z}{z-1}\right|_{z=-1} = \frac{\sqrt{2}}{2}\pi i;$$

例5 计算积分 $\oint_C \frac{\sin\frac{\pi}{4}z}{z^2-1}\mathrm{d}z$, 其中 $C:(2)\ |z-1|=\frac{1}{2}$;

解 (2) $\oint\limits_{|z-1|=\frac{1}{2}} \frac{\sin\frac{\pi}{4}z}{z^2-1}\mathrm{d}z = \oint\limits_{|z-1|=\frac{1}{2}} \frac{\frac{\sin\frac{\pi}{4}z}{z+1}}{z-1}\mathrm{d}z$

$$= 2\pi i\cdot\left.\frac{\sin\frac{\pi}{4}z}{z+1}\right|_{z=1} = \frac{\sqrt{2}}{2}\pi i;$$

例5 计算积分 $\oint_C \frac{\sin\frac{\pi}{4}z}{z^2-1}\mathrm{d}z$, 其中 $C:(3)\ |z|=2.$

解 (3) $\oint_{|z|=2} \frac{\sin\frac{\pi}{4}z}{z^2-1}\mathrm{d}z$ 由闭路复合定理, 得

$$\oint_{|z|=2} \frac{\sin\frac{\pi}{4}z}{z^2-1}\mathrm{d}z = \oint_{|z+1|=\frac{1}{2}} \frac{\sin\frac{\pi}{4}z}{z^2-1}\mathrm{d}z + \oint_{|z-1|=\frac{1}{2}} \frac{\sin\frac{\pi}{4}z}{z^2-1}\mathrm{d}z$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\pi i + \frac{\sqrt{2}}{2}\pi i = \sqrt{2}\pi i.$$

例6 求积分 $\oint_{|z|=1} \frac{e^z}{z} \mathrm{d}z$, 并证明 $\int_0^{\pi} e^{\cos\theta} \cos(\sin\theta) \mathrm{d}\theta = \pi$.

解 根据柯西积分公式知,

$$\oint_{|z|=1} \frac{e^z}{z} \mathrm{d}z = 2\pi i \cdot e^z \Big|_{z=0} = 2\pi i;$$

令 $z = re^{i\theta}$, $(-\pi \le \theta \le \pi)$ $\quad |z| = r = 1$

$$\oint_{|z|=1} \frac{e^z}{z} \mathrm{d}z = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{re^{i\theta}}}{re^{i\theta}} \cdot ire^{i\theta} \mathrm{d}\theta = \int_{-\pi}^{\pi} ie^{e^{i\theta}} \mathrm{d}\theta$$

$$=\int_{-\pi}^{\pi} ie^{e^{i\theta}}\mathrm{d}\theta=\int_{-\pi}^{\pi} ie^{\cos\theta+i\sin\theta}\mathrm{d}\theta$$

$$=2i\int_{0}^{\pi} e^{\cos\theta}\cos(\sin\theta)\mathrm{d}\theta-\int_{-\pi}^{\pi} e^{\cos\theta}\sin(\sin\theta)\mathrm{d}\theta$$

因为 $\oint\limits_{|z|=1}\dfrac{e^{z}}{z}\mathrm{d}z=2\pi i,$

$$\oint\limits_{|z|=1}\frac{e^{z}}{z}\mathrm{d}z=2i\int_{0}^{\pi} e^{\cos\theta}\cos(\sin\theta)\mathrm{d}\theta-\int_{-\pi}^{\pi} e^{\cos\theta}\sin(\sin\theta)\mathrm{d}\theta$$

比较两式得 $\int_{0}^{\pi} e^{\cos\theta}\cos(\sin\theta)\mathrm{d}\theta=\pi.$

四、小结

柯西积分公式是复积分计算中的重要公式, 它的证明基于柯西–古萨基本定理, 它的重要性在于: 一个解析函数在区域内部的值可以用它在边界上的值通过积分表示, 所以它是研究解析函数的重要工具.

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}\mathrm{d}z.$$