第四章　习题课

一．内容总结

二．典型例题

三．能力拓展

一. 内容总结

明确对象

概率论的基本概念

数学抽象

随机变量及其分布

高维拓展

多维随机变量及其分布

凝练表达

随机变量的数字特征

一. 内容总结

随机变量的数字特征

- 数学期望 → 矩
- 方差
- 协方差
- 相关系数 → 不相关与独立性

数学期望、方差、协方差：

- 定义
- 含义
- 计算
  - 定义法
  - 定理（公式）法
  - 性质法

分布	分布律或概率密度	期望	方差
二项分布	$P\{X=k\}=C_n^k p^k q^{n-k},(k=0,1,2,\cdots,n)$		
泊松分布	$P\{X=k\}=\dfrac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda},(k=0,1,2,\cdots)$		
均匀分布	$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & a<x<b\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$		
指数分布	$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta}e^{-\frac{x}{\theta}}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$		
正态分布	$f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},-\infty<x<+\infty$		

一. 内容总结

数学期望、方差、协方差、相关系数四个数字特征的含义分别是什么？

随机变量不相关与随机变量的相互独立的联系和区别是什么？

数学期望、方差、协方差、相关系数四个数字特征之间存在怎样的关系？

随机变量不相关的充要条件有哪些？

二. 典型例题

例1. 设 n 只球($1\sim n$ 号)随机地放进 n 只盒子($1\sim n$ 号)中去，一只盒子装一只球，若一只球装入与球相同号码的盒子中，称为一个配对，记 X 为总的配对数，求 $E(X)$、 $D(X)$.

分析: 离散型随机变量比较复杂的时候，采取化整为零的方法计算期望，随机变量和的方差要注意随机变量是否相互独立.

二. 典型例题

例2 设随机变量 X 服从瑞利分布，其概率密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{\sigma^2}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}, & x>0\\ 0, & x\leqslant 0\end{cases}$$

其中 $\sigma>0$ 是常数，求$E(X),D(X)$.

分析:计算连续型随机变量的期望与方差，常见分布的期望与方差的计算方法经常会用到.

二. 典型例题

例3 设随机变量 X 服从几何分布，其分布律为

$$P\{X=k\}=p(1-p)^{k-1} \qquad k=1,2,\ldots$$

其中 $0<p<1$ 是常数，求 $E(X)$，$D(X)$。

分析:逐项求导.

二. 典型例题

例4 设 A 和 B 是试验E的两个事件，且$P(A)>0,P(B)>0$，并定义随机变量X，Y：

$$X=\begin{cases}1, & 若A发生\\ 0, & else\end{cases} \qquad Y=\begin{cases}1, & 若B发生\\ 0, & else\end{cases}$$

证明：若 $\rho_{XY}=0$，则X，Y必定相互独立。

分析:注意不相关与独立的关系，事件的独立判定与随机变量的独立的判定.

二. 典型例题

例5 设(X, Y)服从二维正态分布，且有$D(X)=\sigma_1^2$，$D(Y)=\sigma_2^2$，证明：当$a^2=\sigma_1^2/\sigma_2^2$，随机变量 $W=X-aY$ 与 $V=X+aY$ 相互独立。

分析:二维正态分布时，独立与不相关等价.

二. 典型例题

例6 设X和Y的数学期望分别为－2和2，方差分别为1和4，而相关系数为－0.5，则 $P\{|X+Y|\geq 6\}\leq$ ______

分析：注意切比雪夫不等式的两种形式.

练习 设随机变量X，Y的联合分布在以点(0,1),(1,0),(1,1)为顶点的三角形区域内服从均匀分布，试求随机变量$U=X+Y$的方差.

分析：注意函数的数学期望求法和方差的计算.

二. 典型例题

例7 设 X_1，X_2，…，X_n 相互独立，并且都服从同一分布：数学期望为 μ，方差为σ^2，令

$$\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i \qquad S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$$

求 $E(\bar{X})$，$D(\bar{X})$，$E(S^2)$.

思考：S^2为什么这样定义？

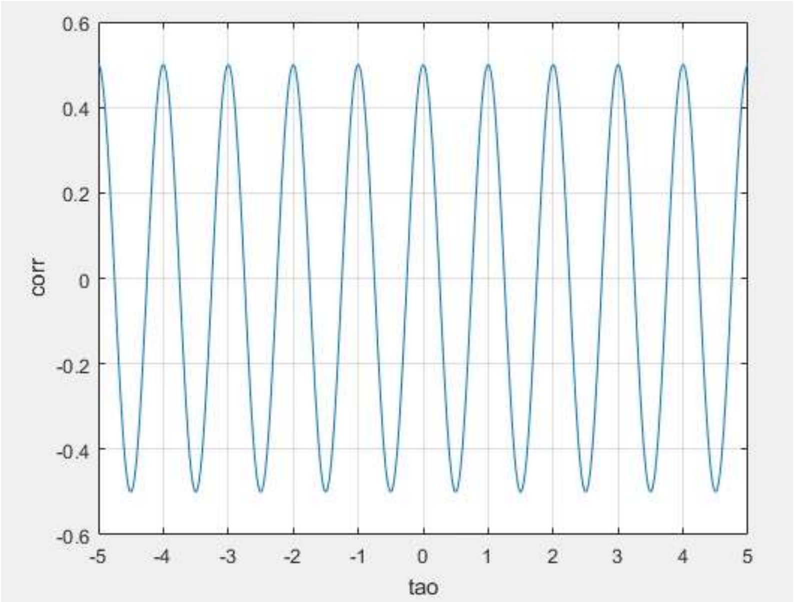
三. 能力拓展

案例一

正弦随机信号：

给定具有某种概率分布的振幅随机变量A、角频率随机变量ω与相位随机变量 θ (具体概率分布与特性视应用而定)，以(时间)参量 t 建立随机信号(或过程):

$$W(t) = A\cos(\omega t + \theta)$$



案例一

(1) 假定正弦随机信号$\{\boldsymbol{W}(\boldsymbol{t}) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{cos}\boldsymbol{\omega t}, -\infty < \boldsymbol{t} < \infty\}$的振幅随机变量$A$服从0到1之间的均匀分布，计算其 t 时刻随机变量的均值。

(2) 假定正弦随机信号$\{\boldsymbol{W}(\boldsymbol{t}) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{cos}(\boldsymbol{\omega t} + \boldsymbol{\theta}), -\infty < \boldsymbol{t} < \infty\}$的相位$\theta$服从$-\pi$到$\pi$之间的均匀分布，计算其 t 时刻随机变量的均值。

案例二

方差的应用 （标准分）

假设三位学生的语文、英语和数学成绩如表所示

	语文	英语	数学
学生甲	100	110	90
学生乙	90	110	100
学生丙	100	90	110

统计得到这次考试语文、英语和数学成绩服从正态分布 $N(87.3,12.69^2)$，$N(96.8,12.29^2)$，$N(96.8,16.14^2)$。他们的总分都是300分，如何进一步评价学生的成绩？

三. 能力拓展

$N(87.3,12.69^2)$，$N(96.8,12.29^2)$，$N(96.8,16.14^2)$

三位学生的语文、英语和数学成绩标准分如表所示

	学生甲		学生乙		学生丙	
语文	100	1	90	0.21	100	1
英语	110	1.07	110	1.07	90	-0.55
数学	90	-0.42	100	0.2	110	0.82
标准分		1.65		1.48		1.27

把原始分转化为标准分以后，可以比较同一次考试中不同学科学生综合成绩的高低。

案例三

协方差的应用

——高等数学与高等代数成绩的相关性分析

我校大二学生高等数学和高等代数成绩统计如下，则计算高等数学成绩 X 和高等代数成绩 Y 的相关关系。

X \ Y	1	2	3	4	5
1(0-45)	0. 045	0. 033	0. 014	0. 002	0. 001
2(45-59)	0. 046	0. 073	0. 045	0. 008	0. 001
3(60-75)	0. 037	0. 085	0. 103	0. 065	0. 004
4(75-90)	0. 011	0. 036	0. 101	0. 129	0. 027
5(90-100)	0. 002	0. 005	0. 022	0. 063	0. 042

相关系数为0.607，说明两门成绩具有一定的相关性。

三. 能力拓展

案例三


```
I=rgb2gray(imread('1.jpg'));
J=medfilt2(I);
K=rgb2gray(imread('2.jpg'));
figure;
subplot(131);imshow(I);title('1图');
subplot(132);imshow(J);title('1图中值滤波');
subplot(133);imshow(K);title('2图');
r1=corr2(I,J)
r2=corr2(I,K)
```

照片要一样大小

相关系数r1 =
 0.9899
r2 =
 -0.2942

三. 能力拓展

案例四

柯西公式的百态人生

二维形式

$$\left(a^2+b^2\right)\left(c^2+d^2\right)\geq\left(ac+bd\right)^2$$

等号成立条件： $ad=bc\left(a/b=c/d\right)$

三角形式

$$\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{c^2+d^2}\geq\sqrt{\left(a-c\right)^2+\left(b-d\right)^2}$$

等号成立条件： $ad=bc$

概率形式

$$\int_{-\infty}^{\infty}x^2dF(x)\geq\left(\int_{-\infty}^{\infty}xdF(x)\right)^2$$

$$[E(XY)]^2\leq E(X^2)E(Y^2)$$

积分形式

$$\left[\int_a^b f(x)g(x)dx\right]^2\leq\int_a^b f^2(x)dx\int_a^b g^2(x)dx$$

向量形式

$$|\alpha||\beta|\geq|\alpha\cdot\beta|,\quad \alpha=\left(a_1,a_2,a_3\cdots,a_n\right),\beta=\left(b_1,b_2,b_3\cdots,b_n\right)\left(n\in N,n\geq2\right)$$

等号成立条件： β为零向量，或$\alpha=\lambda\beta\left(\lambda\in R\right)$

案例四

柯西公式的百态人生

一般形式

$$\sum_{k=1}^{n} a_k^{\ 2} \sum_{k=1}^{n} b_k^{\ 2} \ge \left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \right)^2$$

Holder 不等式

$$(a_1^{\ p} + a_2^{\ p} + \cdots + a_n^{\ p})^{\frac{1}{p}} (b_1^{\ q} + b_2^{\ q} + \cdots + b_n^{\ q})^{\frac{1}{q}} \ge a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\right)$$

Minkowski 不等式

$$(a_1^{\ p} + a_2^{\ p} + \cdots + a_n^{\ p})^{\frac{1}{p}} + (b_1^{\ p} + b_2^{\ p} + \cdots + b_n^{\ p})^{\frac{1}{p}} \ge [(a_1 + b_1)^p + (a_2 + b_2)^p + \cdots + (a_n + b_n)^p]^{\frac{1}{p}}$$

三. 能力拓展

(第十五届CMC) 若$f(x)$在$[0,1]$上有连续的导数且$f(0)=0$，求证：

$$\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x \le 4\int_0^1 (1-x)^2|f'(x)|^2\mathrm{d}x$$

并求使上式成为等式的$f(x)$.

解答. 由分部积分法

$$\begin{aligned}\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x &= (x-1)f^2(x)\Big|_0^1 - \int_0^1 (x-1)2f(x)f'(x)\mathrm{d}x \\ &= 2\int_0^1 (1-x)f'(x)\cdot f(x)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

.... (4 分)

由 Cauchy 积分不等式, 有

$$\int_0^1 (1-x)f'(x)\cdot f(x)\mathrm{d}x \leqslant \left(\int_0^1 (1-x)^2(f'(x))^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}.$$

于是

$$\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x \leqslant 4\int_0^1 (1-x)^2|f'(x)|^2\mathrm{d}x.$$

.... (10 分)