高等数学

5.2 微积分基本公式

基础部数学教研室

郑治中

设变速直线运动速度为$v(t)$，则在时段$[a,b]$内物体经过的路程为

$$s = \int_a^b v(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

如果该物体运动的路程函数为 $s(t)$，则在时段$[a,b]$内的路程为

$$s = s(b) - s(a).$$

$v(t) = s'(t)$

$$\int_a^b v(t)\,\mathrm{d}t = s(b) - s(a)$$

设变速直线运动速度为$v(t)$，则在时段$[a,b]$内物体经过的路程为

$$s=\int_a^b v(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

如果该物体运动的路程函数为 $s(t)$，则在时段$[a,b]$内的路程为

$$s=s(b)-s(a).$$

$$v(t)=s'(t)$$

$$\int_a^b s'(t)\,\mathrm{d}t=\int_a^b \mathrm{d}s(t)=s(b)-s(a)$$

- 微积分基本公式
- 变限积分函数
- 原函数的存在性
- 变限积分的综合应用

定理1（微积分第二基本定理） 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上可积，$F(x)$是$f(x)$在$[a,b]$上的一个原函数，则

$$\boldsymbol{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a).}$$

微积分基本公式或牛顿—莱布尼兹公式

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(x)\big|_a^b = F(b) - F(a)$$

例1 计算定积分 $\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x$.

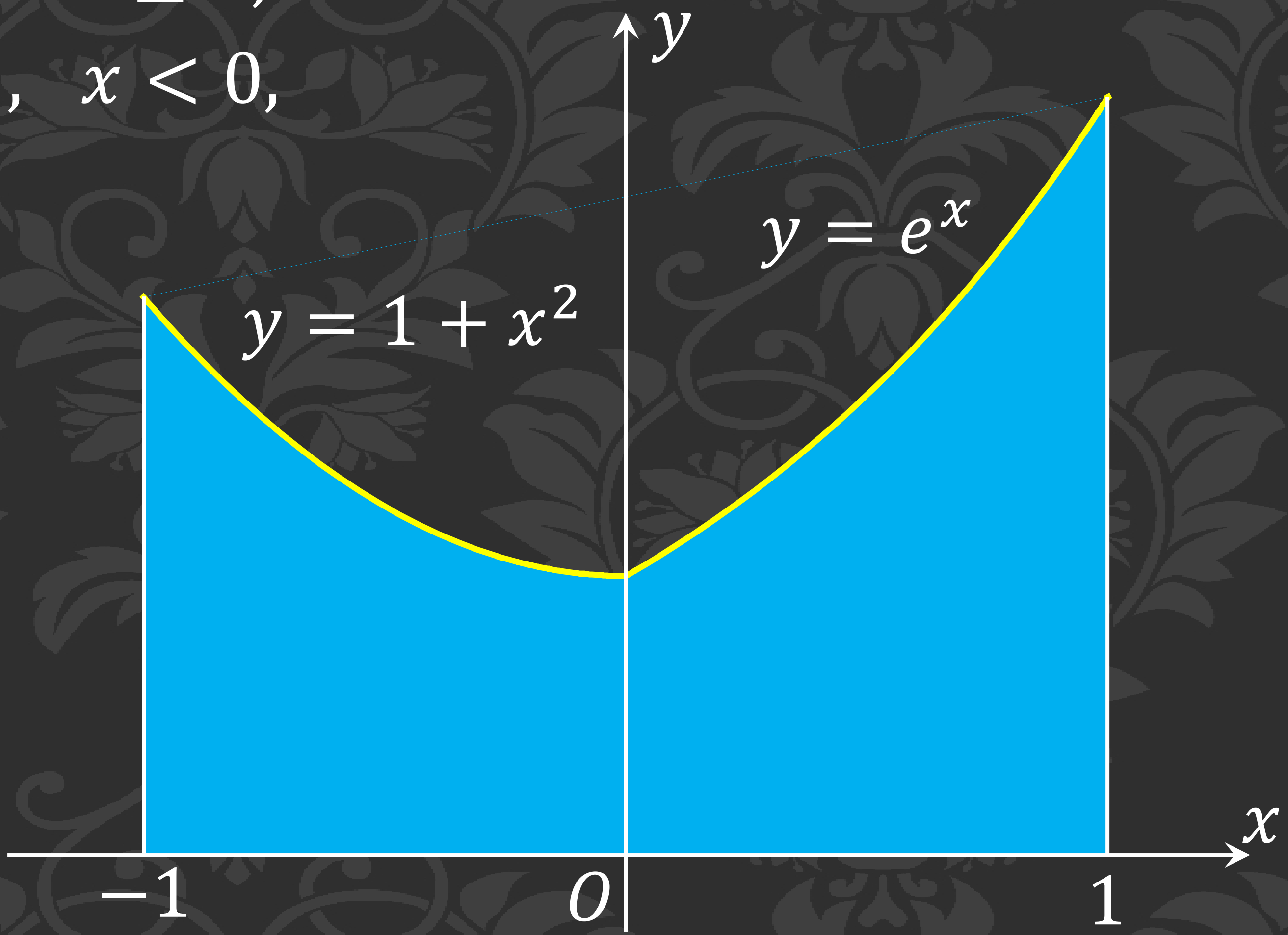
例2 计算下列定积分：

(1) $\displaystyle\int_{-1}^{\sqrt{3}} \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$　　(2) $\displaystyle\int_0^{\pi} \sin x\,\mathrm{d}x$

例3 计算定积分 $\int_0^1 (x-2e^x)\,\mathrm{d}x$.

例4 已知$f(x)=\begin{cases} e^x, & x\ge 0, \\ 1+x^2, & x<0, \end{cases}$

计算$\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x$.



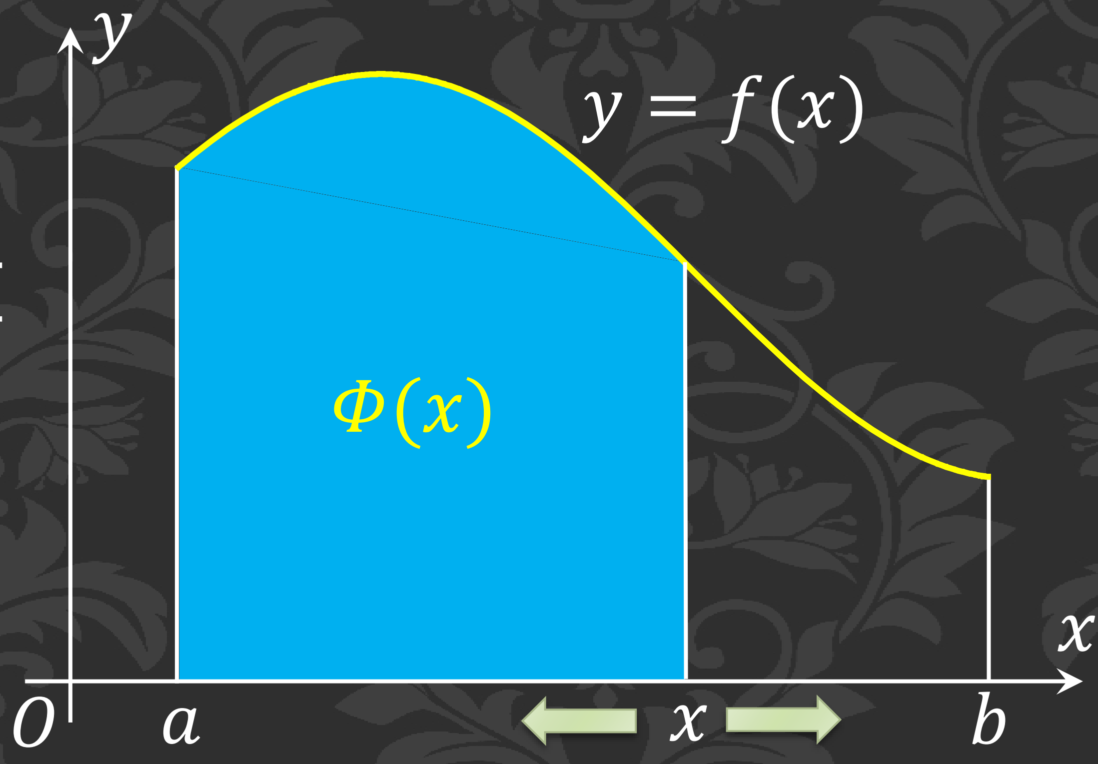
变上限函数

设$f(x)$在$[a,b]$上可积

$\forall x \in [a,b] \Rightarrow \int_a^x f(x)\,\mathrm{d}x$ 存在

$$\Phi(x) = \int_a^{x} f(x)\mathrm{d}x,\quad x \in [a,b]$$

注意: 两个x含义不同.



$$\boldsymbol{\Phi(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t\,,\ x \in [a,b]}$$

积分上限函数
或变上限积分

定理2 设$f(x)$在$[a,b]$上可积，则

$$\Phi(x)=\int_a^x f(t)dt$$

在$[a,b]$上连续

定理3 （微积分第一基本定理）设$f(x)$在$[a,b]$上连续，则函数

$$\Phi(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$$

在$[a,b]$上可导，且

$$\boldsymbol{\Phi}'(\boldsymbol{x})=\frac{\mathbf{d}}{\mathbf{d}\boldsymbol{x}}\int_{\boldsymbol{a}}^{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{t})\,\mathbf{d}\boldsymbol{t}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}).$$

- 是否任何函数都存在原函数?

究竟什么样的函数存在原函数?

定理4 如果函数$f(x)$在$[a,b]$上连续，则变上限函数

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt$$

就是$f(x)$在$[a,b]$上的一个原函数.

定理5 设$f(x)$连续，$\varphi(x)$可导，$\Phi(x)=\int_a^{\varphi(x)} f(t)\,\mathrm{d}t$，则有

$$\Phi'(x)=\frac{\mathrm{d}}{dx}\int_a^{\varphi(x)} f(t)\,\mathrm{d}t=f[\varphi(x)]\cdot\varphi'(x)$$

思考：对于满足定理4条件的$\varphi(x),\psi(x)$,考虑$\int_{\psi(x)}^{\varphi(x)} f(t)\mathrm{d}t$的导数

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{\psi(x)}^{\varphi(x)} f(t)\mathrm{d}t=f[\varphi(x)]\cdot\varphi'(x)-f[\psi(x)]\cdot\psi'(x)$$

例5 求下列变限积分函数的导数

(1) $y=\int_0^x e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$;

(2) $y=\int_0^{x^2}\sqrt{1+t^4}\,\mathrm{d}t$;

(3) $y=\int_{-x}^{\sqrt{x}}\sin t^2\,\mathrm{d}t,\ x>0.$

例6 设函数$f(x)$在$[a,b]$上连续，$F(x)$是$f(x)$在$[a,b]$的一个原函数，则

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

试利用原函数存在定理（第一基本定理）证明之.

例7 求$\int_{-2}^{2} \max\{x, x^2\} dx$

例8 函数$f(x)$连续，且$f(x)=x+2\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$，求$f(x)$

例9 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{n^2+1^2}+\dfrac{n}{n^2+2^2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n^2}\right)$

例10 若$f(x)$连续，$F(x)=\int_0^{2x} f(t)(x-t)dt$，求$F'(x)$

例11 计算$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_{\cos x}^{1} e^{-t^2}dt}{x^2}$

例12 计算 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\int_0^x \cos t^2\,\mathrm{d}t}{x^5}$.

例13 $\begin{cases} x = \int_{e}^{\sqrt{t}} ulnudu \\ y = \int_{\sqrt{t}}^{e} u^2 lnudu \end{cases}$ 求 $\dfrac{dy}{dx}$

例14 证明 $\dfrac{1}{2} \le \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{sinx}{x} dx \le \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

例15 设$f(x) \in C[0,+\infty), f(x) > 0$, 证明函数

$$F(x) = \frac{\int_0^x tf(t)dt}{\int_0^x f(t)dt}$$

在$[0,+\infty)$上是单调递增函数

例16 设$f(x)\in C(-\infty,+\infty), f(x)>0$, 证明函数

$$F(x)=\begin{cases}\dfrac{\int_0^x tf(t)dt}{\int_0^x f(t)dt}, & x\neq 0\\ C\ , & x=0\end{cases}$$

(1)确定C，使F(x)在$x=0$连续

(2)求$F'(x)$

(3)讨论$F'(x)$在$x=0$处连续性

例17 设$f(x), g(x) \in C[a, b]$, 证明

$$\left[\int_a^b f(x)g(x)dx\right]^2 \le \int_a^b f^2(x)dx \int_a^b g^2(x)dx$$

- 初等函数的原函数是否一定是初等函数?

大部分初等函数的原函数都不是初等函数，即这些函数的不定积分“积不出来”

$$\int e^{-x^2}\,\mathrm{d}\,x,\quad \int \frac{1}{\ln x}\,\mathrm{d}\,x,\quad \int \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}\,x,\quad \int \frac{\mathrm{d}\,x}{\sqrt{1-k^2\sin^2 x}},\cdots$$

定积分计算的常用工具：牛顿-莱布尼兹公式

设 $F(x)$ 为 $f(x)$ 的原函数，则有

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

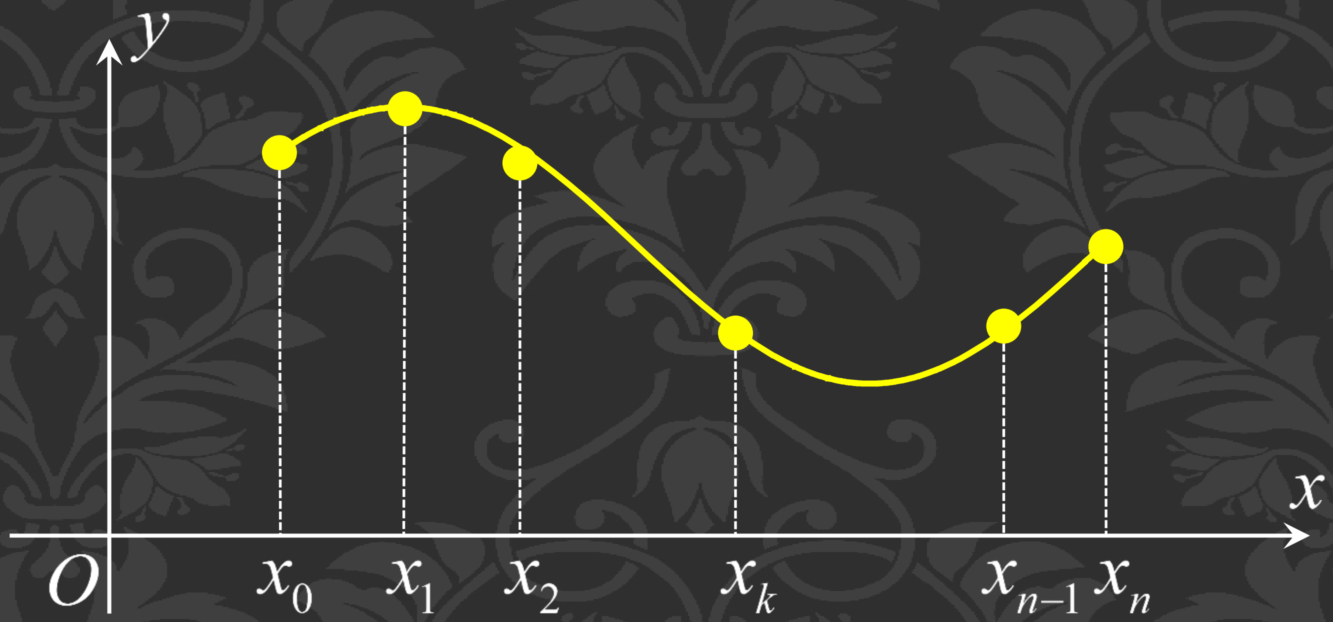
实际问题中应用牛顿—莱布尼兹公式的困难：

- $f(x)$的原函数求不出来；或者 $f(x)$的解析式结构复杂

$$\int_0^1 \sqrt{1-k^2\sin^2 x}\,\mathrm{d}\,x\ (0<k<1),\qquad \int_0^1 \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}\,x,\qquad \int_0^1 \mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}\,x.$$

- $f(x)$的解析式根本不存在，只给出了$f(x)$的一些数值或图形

x_k	x_0	x_1	$\cdots$	x_n
$f(x_k)$	y_0	y_1	$\cdots$	y_n

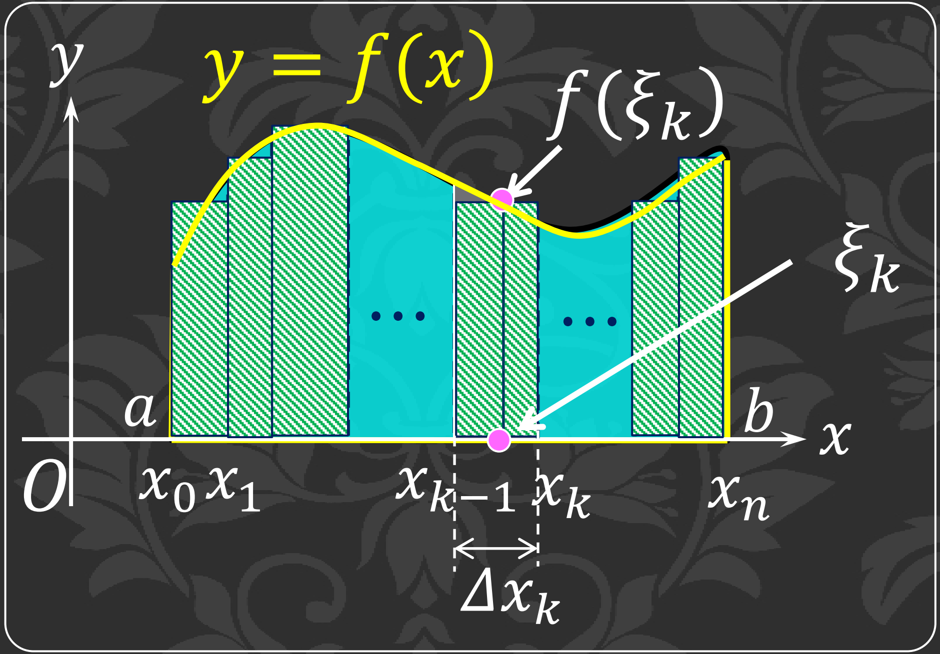


- 数值积分的基本思想
- 矩形公式
- 梯形公式
- 辛普森公式

定积分：

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k .$$

分割、取近似、作和、取极限



数值积分：

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k .$$

分割、取近似、作和

矩形公式：$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$

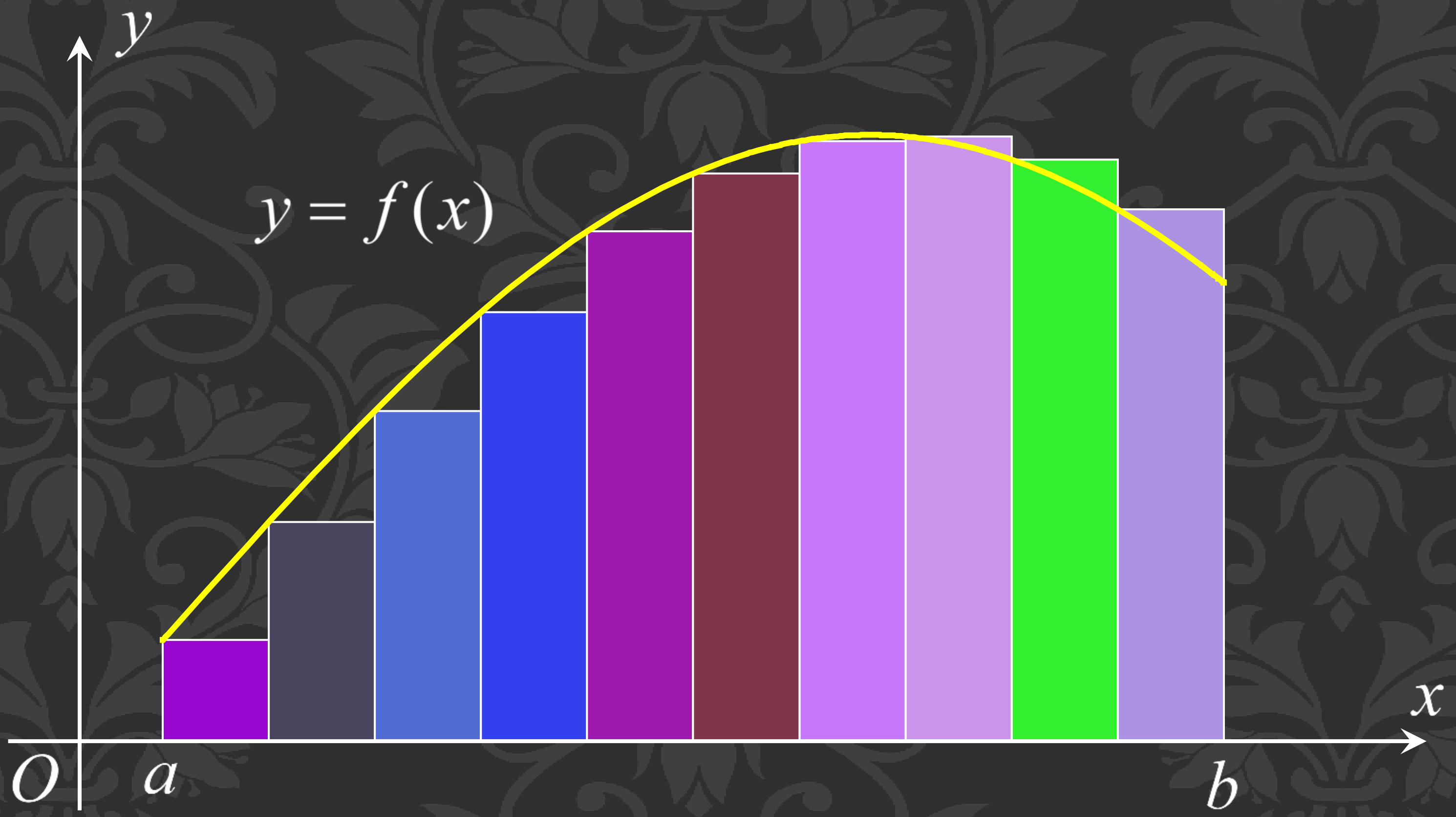
$$\xi_k = x_{k-1}\,,\ \frac{x_{k-1}+x_k}{2}\,,\ x_k$$

左矩公式：$L_n = \sum_{k=1}^{n} f(x_{k-1})(x_k - x_{k-1})$

中矩公式：$M_n = \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{x_{k-1}+x_k}{2}\right)(x_k - x_{k-1})$

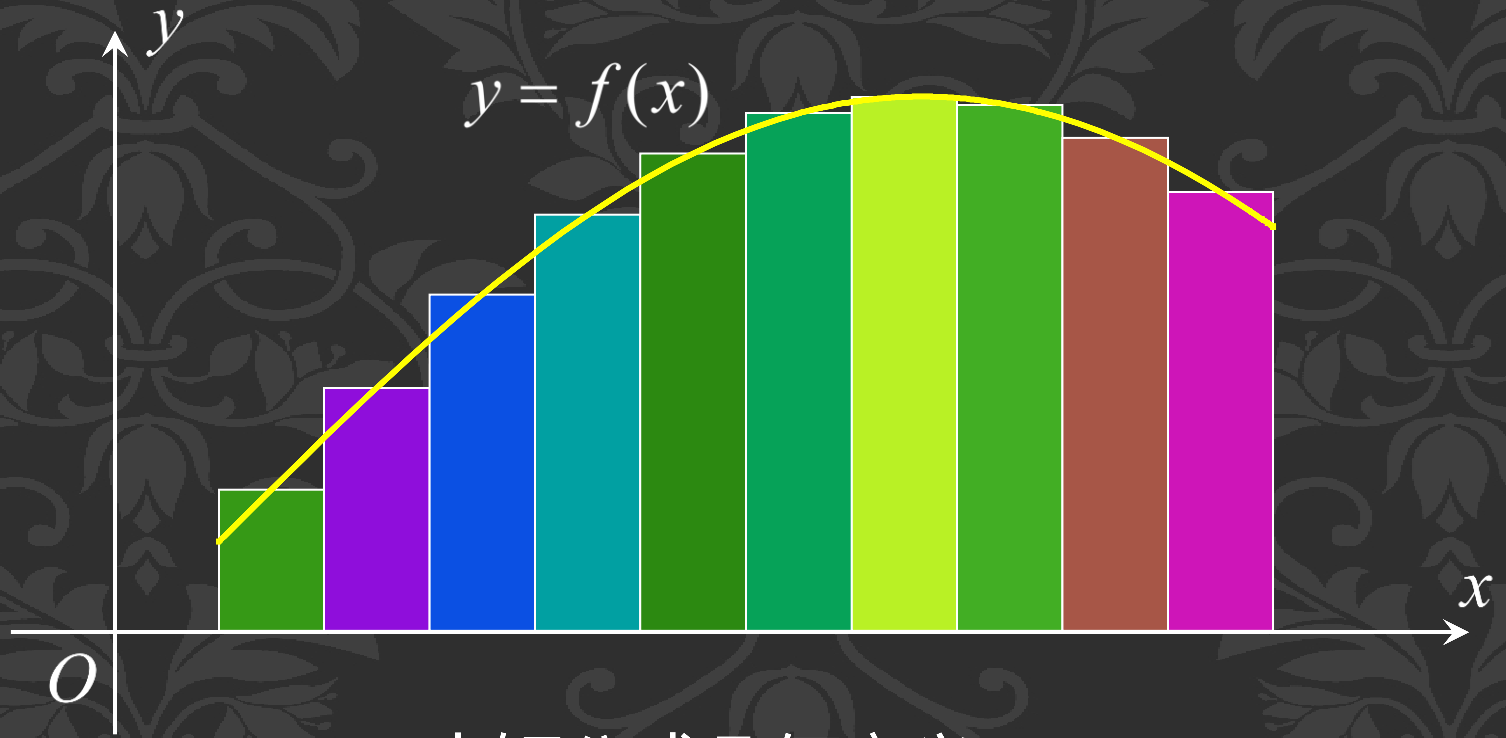
右矩公式：$R_n = \sum_{k=1}^{n} f(x_k)(x_k - x_{k-1})$

将区间$[a,b]$进行n等分: $x_k=a+\frac{k}{n}(b-a), k=0,1,2,\cdots,n.$



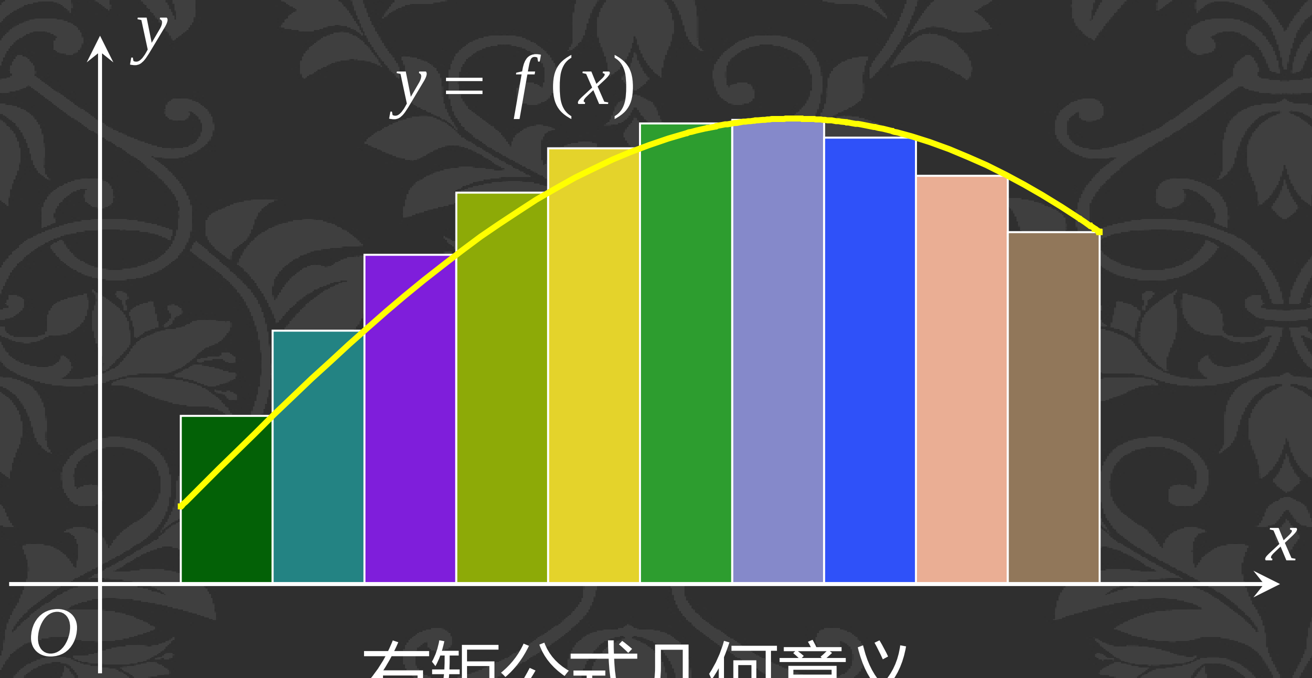
左矩公式几何意义

将区间$[a,b]$进行n等分: $x_k = a + \frac{k}{n}(b-a), k = 0,1,2,\cdots,n.$



中矩公式几何意义

将区间$[a,b]$进行n等分: $x_k = a + \frac{k}{n}(b-a), k = 0,1,2,\cdots,n.$



右矩公式几何意义

例13 试用左矩，中矩，右矩公式计算定积分$\int_0^{\pi/2}\sin x\mathrm{d}x$.

准确结果： $\int_0^{\pi/2}\sin x\mathrm{d}x=-\cos x\Big|_0^{\pi/2}=1.$

左矩公式： $L_n=\dfrac{\pi}{2n}\sum_{k=1}^{n}f\left[\dfrac{(k-1)\pi}{2n}\right].$

中矩公式： $M_n=\dfrac{\pi}{2n}\sum_{k=1}^{n}f\left[\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{(k-1)\pi}{2n}+\dfrac{k\pi}{2n}\right)\right]=\dfrac{\pi}{2n}\sum_{k=1}^{n}f\left[\dfrac{(2k-1)\pi}{4n}\right].$

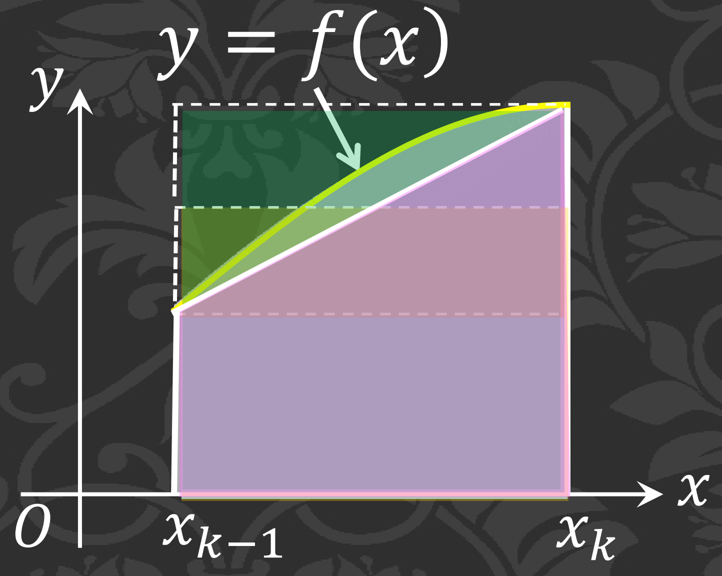
右矩公式： $R_n=\dfrac{\pi}{2n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\dfrac{k\pi}{2n}\right).$

分别取$n = 10,100,200,400,800,1600$计算得到的结果如下表：

n	左矩和	中矩和	右矩和
10	0.9194031700146124	1.0010288241427083	1.076482802694102
100	0.992125456605633	1.0000102809119054	1.0078334198735819
200	0.9960678687587692	1.0000025702141038	1.0039218503927436
400	0.9980352194864364	1.0000006425526589	1.0019622103034236
800	0.9990179310195476	1.0000001606381106	1.0009814264280412
1600	0.9995090458288292	1.0000000401595244	1.0004907935330758

梯形面积近似曲边梯形面积:

$$\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)\mathrm{d}x \approx \frac{f(x_{k-1})+f(x_k)}{2}(x_k - x_{k-1}).$$



梯形公式:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{n}\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)\mathrm{d}x$$

$$\approx \sum_{k=1}^{n}\frac{f(x_{k-1})+f(x_k)}{2}(x_k - x_{k-1}) = T_n$$

例14 已知圆周率π的近似值可以由下列定积分求出

$$\pi = \int_0^1 \frac{4}{1+x^2}\,dx$$

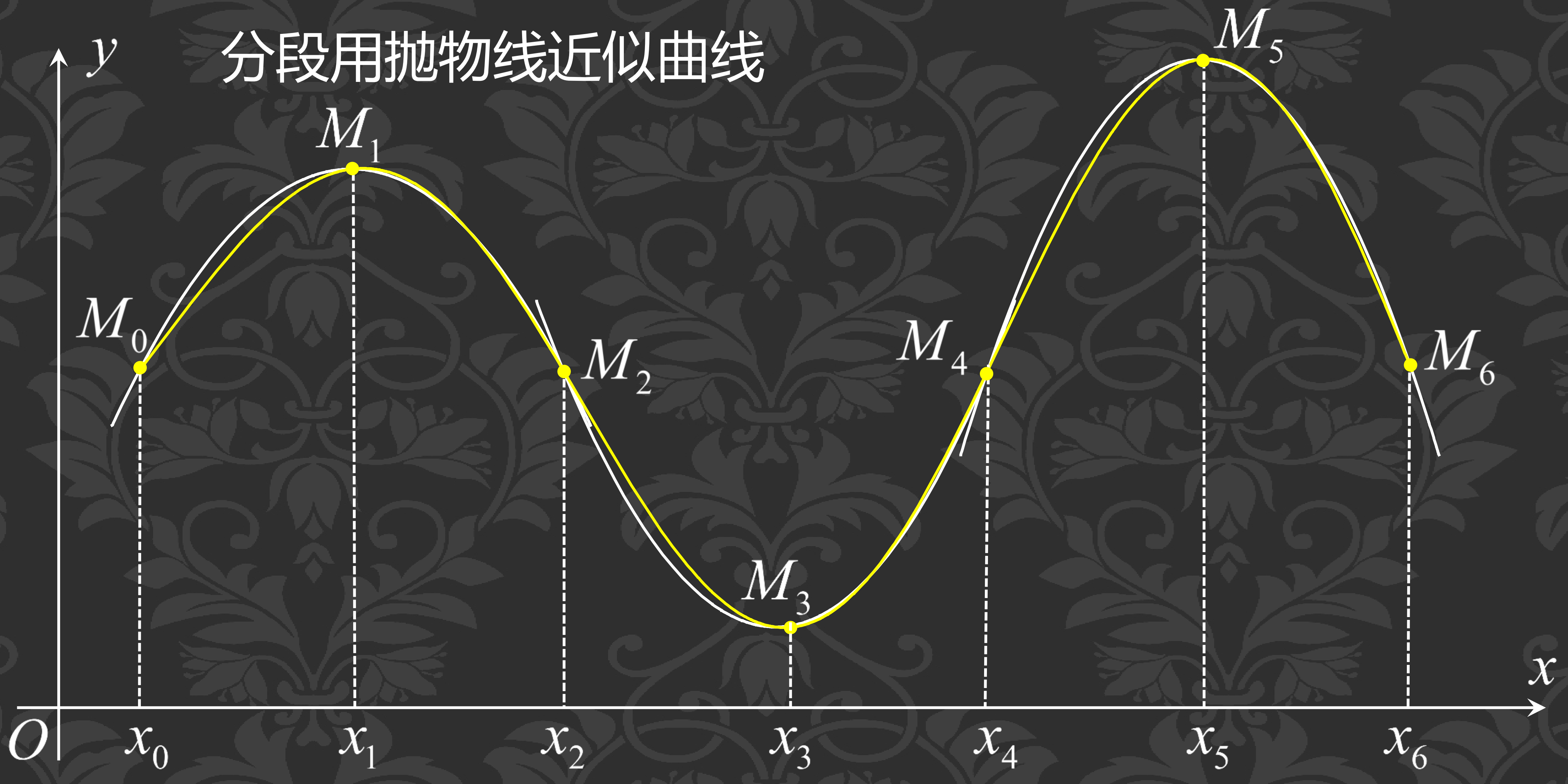
试通过梯形公式求圆周率π的似近值.

$$f(x) = \frac{4}{1+x^2},\ a = 0,\ b = 1$$

$$x_k = \frac{k}{n}\ (k = 0, 1, 2, \cdots, n)$$

n	T_n
10	3.13992598890
50	3.14152598692
100	3.14157598692
200	3.14158848692
400	3.14159161192
800	3.14159239317

$$\pi = 3.141592653\cdots$$

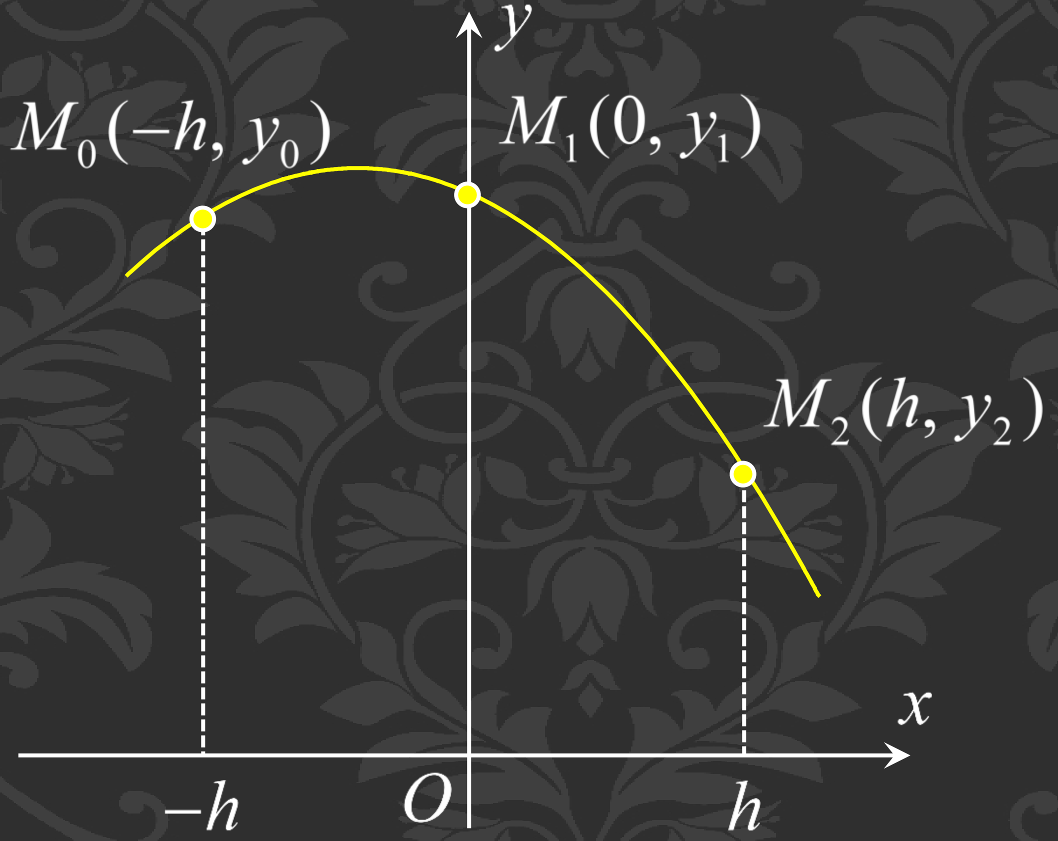


分段用抛物线近似曲线
y
x
O
M_0
M_1
M_2
M_3
M_4
M_5
M_6
x_0
x_1
x_2
x_3
x_4
x_5
x_6

抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 经过三点 $M_0(-h, y_0), M_1(0, y_1), M_2(h, y_2)$, 其在区间 $[-h, h]$ 上对应的曲边梯形面积为

$$\int_{-h}^{h} (ax^2 + bx + c)\,\mathrm{d}\,x$$

$$= \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2)$$



$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_{x_0}^{x_2} f(x)\mathrm{d}x + \int_{x_2}^{x_4} f(x)\mathrm{d}x + \cdots + \int_{x_{n-2}}^{x_n} f(x)\mathrm{d}x$$

$$\approx \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2) + \frac{h}{3}(y_2 + 4y_3 + y_4) + \cdots + \frac{h}{3}(y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n)$$

$$= \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + \cdots + 2y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n) = S_n$$

其中n为偶数，$h = \dfrac{b-a}{n}$ 辛普森法则

辛普森法则各项系数规律： $1, 4, 2, 4, 2, 4, 2, \cdots, 4, 2, 4, 1$

例15 试分别用梯形公式和辛普森公式通过下式计算π的似近值.

$$\pi = \int_0^1 \frac{4}{1+x^2}\,dx.$$

$f(x) = \frac{4}{1+x^2}$, $a = 0, b = 1$, 取$n = 10,50,100,200,300$, 得

n	T_n	S_n
10	3.139925988907159	3.141592652969784
50	3.141525986923253	3.141592653589753
100	3.141575986923128	3.141592653589792
200	3.141588486923126	3.141592653589793
300	3.141590801737941	3.141592653589793

梯形方法、中点方法与辛普森法则误差比较

梯形方法误差 $\left|E_T\right| \le \dfrac{K(b-a)^3}{12n^2} \quad \left(\left|f''(x)\right| \le K\right)$

中点方法误差 $\left|E_M\right| \le \dfrac{K(b-a)^3}{24n^2} \quad \left(\left|f''(x)\right| \le K\right)$

辛普森法则误差 $\left|E_S\right| \le \dfrac{K(b-a)^5}{180n^4} \quad \left(\left|f^{(4)}(x)\right| \le K\right)$