$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}u}\ \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}w}\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{v}}\cdot\frac{1}{w}\cdot(-\sin x)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1-\ln\cos x}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{\ln\cos x}}\cdot\frac{1}{\cos x}\cdot(-\sin x)=-\frac{\tan x}{2\sqrt{\ln\cos x(1-\ln\cos x)}}.$$

(4) $y=\dfrac{1}{\sqrt{\sin\frac{1}{x}}}=\left(\sin\frac{1}{x}\right)^{-\frac{1}{2}}$, $y'=-\dfrac{1}{2}\left(\sin\frac{1}{x}\right)^{-\frac{3}{2}}\cos\frac{1}{x}\cdot\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)=\dfrac{\cot\frac{1}{x}}{2x^2\cdot\sqrt{\sin\frac{1}{x}}}.$

● **方法总结** ···

　　复合函数的求导关键在于搞清复合关系,从外层到内层一步一步进行求导运算,不要遗漏,尤其当既有四则运算,又有复合函数运算时,要根据题目中给出的函数表达式决定先用四则运算求导法则还是先用复合函数求导法则.

习题 2—2 解答

1. 推导余切函数及余割函数的导数公式:
$$(\cot x)'=-\csc^2 x;\qquad (\csc x)'=-\csc x\cot x.$$

解　$(\cot x)'=\left(\dfrac{\cos x}{\sin x}\right)'=\dfrac{-\sin x\sin x-\cos x\cos x}{\sin^2 x}=-\dfrac{1}{\sin^2 x}=-\csc^2 x.$

　　$(\csc x)'=\left(\dfrac{1}{\sin x}\right)'=\dfrac{-\cos x}{\sin^2 x}=-\csc x\cot x.$

2. 求下列函数的导数:

(1) $y=x^3+\dfrac{7}{x^4}-\dfrac{2}{x}+12$;　　(2) $y=5x^3-2^x+3\mathrm{e}^x$;　　(3) $y=2\tan x+\sec x-1$;　　(4) $y=\sin x\cos x$;

(5) $y=x^2\ln x$;　　　　　　　　(6) $y=3\mathrm{e}^x\cos x$;　　　　　(7) $y=\dfrac{\ln x}{x}$;　　　　　　　(8) $y=\dfrac{\mathrm{e}^x}{x^2}+\ln 3$;

(9) $y=x^2\ln x\cos x$;　　　　　(10) $s=\dfrac{1+\sin t}{1+\cos t}$.

解　(1) $y'=3x^2-\dfrac{28}{x^5}+\dfrac{2}{x^2}.$

　　(2) $y'=15x^2-2^x\ln 2+3\mathrm{e}^x.$

　　(3) $y'=2\sec^2 x+\sec x\tan x=\sec x(2\sec x+\tan x).$

　　(4) $y'=\left(\dfrac{1}{2}\sin 2x\right)'=\dfrac{1}{2}\cdot 2\cos 2x=\cos 2x.$

　　(5) $y'=2x\ln x+x^2\cdot\dfrac{1}{x}=x(2\ln x+1).$

　　(6) $y'=3\mathrm{e}^x\cos x-3\mathrm{e}^x\sin x=3\mathrm{e}^x(\cos x-\sin x).$

　　(7) $y'=\dfrac{\frac{1}{x}\cdot x-\ln x}{x^2}=\dfrac{1-\ln x}{x^2}.$

　　(8) $y'=\dfrac{\mathrm{e}^x\cdot x^2-2x\mathrm{e}^x}{x^4}=\dfrac{\mathrm{e}^x(x-2)}{x^3}.$

　　(9) $y'=2x\ln x\cos x+x^2\cdot\dfrac{1}{x}\cos x+x^2\ln x(-\sin x)=2x\ln x\cos x+x\cos x-x^2\ln x\sin x.$

$(10) s' = \dfrac{\cos t(1+\cos t)-(1+\sin t)(-\sin t)}{(1+\cos t)^2} = \dfrac{1+\sin t+\cos t}{(1+\cos t)^2}.$

3. 求下列函数在给定点处的导数：

(1) $y=\sin x-\cos x$, 求 $y'|_{x=\frac{\pi}{6}}$ 和 $y'|_{x=\frac{\pi}{4}}$;

(2) $\rho=\theta\sin\theta+\dfrac{1}{2}\cos\theta$, 求 $\dfrac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}\theta}\Big|_{\theta=\frac{\pi}{4}}$;

(3) $f(x)=\dfrac{3}{5-x}+\dfrac{x^2}{5}$, 求 $f'(0)$ 和 $f'(2)$.

解 (1) $y'=\cos x+\sin x$, $\quad y'|_{x=\frac{\pi}{6}}=\cos\dfrac{\pi}{6}+\sin\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}$, $\quad y'|_{x=\frac{\pi}{4}}=\cos\dfrac{\pi}{4}+\sin\dfrac{\pi}{4}=\sqrt{2}.$

(2) $\dfrac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}\theta}=\sin\theta+\theta\cos\theta+\dfrac{1}{2}(-\sin\theta)=\dfrac{1}{2}\sin\theta+\theta\cos\theta,$

$\dfrac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}\theta}\Big|_{\theta=\frac{\pi}{4}}=\dfrac{1}{2}\sin\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi}{4}\cos\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\sqrt{2}}{4}\Big(1+\dfrac{\pi}{2}\Big).$

(3) $f'(x)=\dfrac{3}{(5-x)^2}+\dfrac{2}{5}x,$ $\quad f'(0)=\dfrac{3}{25},$ $\quad f'(2)=\dfrac{1}{3}+\dfrac{4}{5}=\dfrac{17}{15}.$

4. 以初速 v_0 竖直上抛的物体，其上升高度 s 与时间 t 的关系是 $s=v_0t-\dfrac{1}{2}gt^2$, 求：

(1) 该物体的速度 $v(t)$;

(2) 该物体达到最高点的时刻.

解 (1) $v(t)=\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=v_0-gt.$ (2) 物体达到最高点的时刻 $v=0$, 即 $v_0-gt=0$, 故 $t=\dfrac{v_0}{g}.$

5. 求曲线 $y=2\sin x+x^2$ 上横坐标为 $x=0$ 的点处的切线方程和法线方程.

解 $y'=2\cos x+2x,$ $\quad y'|_{x=0}=2,$ $\quad y|_{x=0}=0,$

因此曲线在点 $(0,0)$ 处的切线方程为 $y-0=2(x-0),$ $\quad$ 即 $\quad 2x-y=0,$

法线方程为 $y-0=-\dfrac{1}{2}(x-0),$ $\quad$ 即 $\quad x+2y=0.$

6. 求下列函数的导数：

(1) $y=(2x+5)^4$; $\quad\quad$ (2) $y=\cos(4-3x)$; $\quad\quad$ (3) $y=e^{-3x^2}$; $\quad\quad$ (4) $y=\ln(1+x^2)$;

(5) $y=\sin^2 x$; $\quad\quad$ (6) $y=\sqrt{a^2-x^2}$; $\quad\quad$ (7) $y=\tan x^2$; $\quad\quad$ (8) $y=\arctan e^x$;

(9) $y=(\arcsin x)^2$; $\quad\quad$ (10) $y=\ln\cos x.$

解 (1) $y'=4(2x+5)^3\cdot 2=8(2x+5)^3.$

(2) $y'=-\sin(4-3x)(-3)=3\sin(4-3x).$

(3) $y'=e^{-3x^2}\cdot(-6x)=-6xe^{-3x^2}.$

(4) $y'=\dfrac{1}{1+x^2}\cdot 2x=\dfrac{2x}{1+x^2}.$

(5) $y'=2\sin x\cos x=\sin 2x.$

(6) $y'=\dfrac{1}{2\sqrt{a^2-x^2}}(-2x)=-\dfrac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}.$

(7) $y'=\sec^2 x^2\cdot 2x=2x\sec^2 x^2.$

(8) $y'=\dfrac{1}{1+(e^x)^2}\cdot e^x=\dfrac{e^x}{1+e^{2x}}.$

(9) $y'=2\arcsin x\cdot\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}=\dfrac{2}{\sqrt{1-x^2}}\arcsin x.$

(10) $y'=\dfrac{1}{\cos x}(-\sin x)=-\tan x.$

7. 求下列函数的导数：

(1) $y=\arcsin(1-2x)$；　　(2) $y=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$；　　(3) $y=e^{-\frac{x}{2}}\cos 3x$；　　(4) $y=\arccos\dfrac{1}{x}$；

(5) $y=\dfrac{1-\ln x}{1+\ln x}$；　　(6) $y=\dfrac{\sin 2x}{x}$；　　(7) $y=\arcsin\sqrt{x}$；　　(8) $y=\ln(x+\sqrt{a^2+x^2})$；

(9) $y=\ln(\sec x+\tan x)$；　　(10) $y=\ln(\csc x-\cot x)$.

解 (1) $y'=\dfrac{1}{\sqrt{1-(1-2x)^2}}\cdot(-2)=-\dfrac{1}{\sqrt{x-x^2}}$.

(2) $y'=\dfrac{-\dfrac{(-2x)}{2\sqrt{1-x^2}}}{(\sqrt{1-x^2})^2}=\dfrac{x}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$.

(3) $y'=-\dfrac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}\cos 3x-3e^{-\frac{x}{2}}\sin 3x=-\dfrac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}(\cos 3x+6\sin 3x)$.

(4) $y'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-\left(\dfrac{1}{x}\right)^2}}\cdot\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)=\dfrac{|x|}{x^2\sqrt{x^2-1}}$.

(5) $y'=\dfrac{-\dfrac{1}{x}(1+\ln x)-(1-\ln x)\cdot\dfrac{1}{x}}{(1+\ln x)^2}=-\dfrac{2}{x(1+\ln x)^2}$.

(6) $y'=\dfrac{2x\cos 2x-\sin 2x}{x^2}$.

(7) $y'=\dfrac{1}{\sqrt{1-(\sqrt{x})^2}}\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{x}}=\dfrac{1}{2\sqrt{x-x^2}}$.

(8) $y'=\dfrac{1}{x+\sqrt{a^2+x^2}}\left(1+\dfrac{2x}{2\sqrt{a^2+x^2}}\right)=\dfrac{1}{x+\sqrt{a^2+x^2}}\cdot\dfrac{x+\sqrt{a^2+x^2}}{\sqrt{a^2+x^2}}=\dfrac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}$.

(9) $y'=\dfrac{1}{\sec x+\tan x}(\sec x\tan x+\sec^2 x)=\sec x$.

(10) $y'=\dfrac{1}{\csc x-\cot x}(-\csc x\cot x+\csc^2 x)=\csc x$.

8. 求下列函数的导数：

(1) $y=\left(\arcsin\dfrac{x}{2}\right)^2$；　　(2) $y=\ln\tan\dfrac{x}{2}$；　　(3) $y=\sqrt{1+\ln^2 x}$；　　(4) $y=e^{\arctan\sqrt{x}}$；

(5) $y=\sin^n x\cos nx$；　　(6) $y=\arctan\dfrac{x+1}{x-1}$；　　(7) $y=\dfrac{\arcsin x}{\arccos x}$；　　(8) $y=\ln\ln\ln x$；

(9) $y=\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}$；　　(10) $y=\arcsin\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$.

解 (1) $y'=2\arcsin\dfrac{x}{2}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{1-\left(\dfrac{x}{2}\right)^2}}\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{2\arcsin\dfrac{x}{2}}{\sqrt{4-x^2}}$.

(2) $y'=\dfrac{1}{\tan\dfrac{x}{2}}\cdot\sec^2\dfrac{x}{2}\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2\sin\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2}}=\dfrac{1}{\sin x}=\csc x$.

(3) $y'=\dfrac{1}{2\sqrt{1+\ln^2 x}}\cdot 2\ln x\cdot\dfrac{1}{x}=\dfrac{\ln x}{x\sqrt{1+\ln^2 x}}$.

(4) $y'=e^{\arctan\sqrt{x}}\cdot\dfrac{1}{1+(\sqrt{x})^2}\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{x}}=\dfrac{1}{2\sqrt{x}(1+x)}e^{\arctan\sqrt{x}}$.

(5) $y'=n\sin^{n-1}x\cos x\cos nx+\sin^n x(-\sin nx)\cdot n=n\sin^{n-1}x(\cos x\cos nx-\sin x\sin nx)$

$$=n\sin^{n-1}x\cos(n+1)x.$$

$$(6)\ y'=\frac{1}{1+\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2}\cdot\frac{(x-1)-(x+1)}{(x-1)^2}=\frac{-2}{(x-1)^2+(x+1)^2}=-\frac{1}{1+x^2}.$$

$$(7)\ y'=\frac{\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\arccos x-\arcsin x\left(-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)}{(\arccos x)^2}=\frac{\arccos x+\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}(\arccos x)^2}=\frac{\pi}{2\sqrt{1-x^2}(\arccos x)^2}.$$

$$(8)\ y'=\frac{1}{\ln\ln x}\cdot\frac{1}{\ln x}\cdot\frac{1}{x}=\frac{1}{x\ln x\ln\ln x}.$$

$$(9)\ y'=\frac{\left(\dfrac{1}{2\sqrt{1+x}}+\dfrac{1}{2\sqrt{1-x}}\right)(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})-(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x})\left(\dfrac{1}{2\sqrt{1+x}}-\dfrac{1}{2\sqrt{1-x}}\right)}{(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})^2}$$

$$=\frac{1}{2}\frac{\dfrac{1}{\sqrt{1+x}\ \sqrt{1-x}}(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})^2+\dfrac{1}{\sqrt{1+x}\ \sqrt{1-x}}(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x})^2}{2+2\sqrt{1-x^2}}$$

$$=\frac{1}{4}\frac{2+2}{(1+\sqrt{1-x^2})\sqrt{1-x^2}}=\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2\sqrt{1-x^2}}.$$

$$(10)\ y'=\frac{1}{\sqrt{1-\left(\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}\right)^2}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}}\cdot\frac{-(1+x)-(1-x)}{(1+x)^2}=-\frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{1-x}{1+x}}}\cdot\frac{1}{\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}}\cdot\frac{1}{(1+x)^2}$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{2x}(1+x)\sqrt{1-x}}=-\frac{1}{(1+x)\sqrt{2x(1-x)}}.$$

9. 设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 可导,且 $f^2(x)+g^2(x)\neq0$,试求函数 $y=\sqrt{f^2(x)+g^2(x)}$ 的导数.

解 $y'=\dfrac{1}{2\sqrt{f^2(x)+g^2(x)}}[2f(x)f'(x)+2g(x)g'(x)]=\dfrac{f(x)f'(x)+g(x)g'(x)}{\sqrt{f^2(x)+g^2(x)}}.$

10. 设 $f(x)$ 可导,求下列函数的导数 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$:

$(1)\ y=f(x^2);$ $(2)\ y=f(\sin^2 x)+f(\cos^2 x);$ $(3)\ y=\dfrac{f(\mathrm{e}^x)}{\mathrm{e}^{f(x)}}.$

解 $(1)\ y'=f'(x^2)2x=2xf'(x^2).$

$(2)\ y'=f'(\sin^2 x)2\sin x\cos x+f'(\cos^2 x)2\cos x(-\sin x)=\sin 2x[f'(\sin^2 x)-f'(\cos^2 x)].$

$(3)\ y=\mathrm{e}^{-f(x)}f(\mathrm{e}^x),\ y'=-f'(x)\mathrm{e}^{-f(x)}f(\mathrm{e}^x)+\mathrm{e}^{-f(x)}f'(\mathrm{e}^x)\mathrm{e}^x=\mathrm{e}^{-f(x)}[\mathrm{e}^x f'(\mathrm{e}^x)-f'(x)f(\mathrm{e}^x)].$

11. 求下列函数的导数:

$(1)\ y=\mathrm{e}^{-x}(x^2-2x+3);$ $(2)\ y=\sin^2 x\cdot\sin(x^2);$ $(3)\ y=\left(\arctan\dfrac{x}{2}\right)^2;$ $(4)\ y=\dfrac{\ln x}{x^n};$

$(5)\ y=\dfrac{\mathrm{e}^t-\mathrm{e}^{-t}}{\mathrm{e}^t+\mathrm{e}^{-t}};$ $(6)\ y=\ln\cos\dfrac{1}{x};$ $(7)\ y=\mathrm{e}^{-\sin^2\frac{1}{x}};$ $(8)\ y=\sqrt{x+\sqrt{x}};$

$(9)\ y=x\arcsin\dfrac{x}{2}+\sqrt{4-x^2};$ $(10)\ y=\arcsin\dfrac{2t}{1+t^2}.$

解 $(1)\ y'=-\mathrm{e}^{-x}(x^2-2x+3)+\mathrm{e}^{-x}(2x-2)=\mathrm{e}^{-x}(-x^2+4x-5).$

$(2)\ y'=2\sin x\cos x\cdot\sin(x^2)+\sin^2 x\cos(x^2)\cdot 2x=\sin 2x\sin(x^2)+2x\sin^2 x\cos(x^2).$

$(3)\ y'=2\arctan\dfrac{x}{2}\cdot\dfrac{1}{1+\left(\dfrac{x}{2}\right)^2}\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{4}{4+x^2}\arctan\dfrac{x}{2}.$

$(4)\ y'=\dfrac{\dfrac{1}{x}x^n-nx^{n-1}\ln x}{x^{2n}}=\dfrac{1-n\ln x}{x^{n+1}}.$

10 题视频解析

$(5)\ y'=\dfrac{(e^t+e^{-t})(e^t+e^{-t})-(e^t-e^{-t})(e^t-e^{-t})}{(e^t+e^{-t})^2}=\dfrac{4}{(e^t+e^{-t})^2}.$ 或 $y'=(\mathrm{th}t)'=\dfrac{1}{\mathrm{ch}^2t}.$

$(6)\ y'=\dfrac{1}{\cos\frac{1}{x}}\left(-\sin\frac{1}{x}\right)\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)=\dfrac{1}{x^2}\tan\frac{1}{x}.$

$(7)\ y'=e^{-\sin^2\frac{1}{x}}\left(-2\sin\frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}\right)\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)=\dfrac{1}{x^2}\sin\frac{2}{x}e^{-\sin^2\frac{1}{x}}.$

$(8)\ y'=\dfrac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}}\left(1+\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\right)=\dfrac{2\sqrt{x}+1}{4\sqrt{x}\sqrt{x+\sqrt{x}}}.$

$(9)\ y'=\arcsin\dfrac{x}{2}+x\cdot\dfrac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2}}\cdot\dfrac{1}{2}+\dfrac{(-2x)}{2\sqrt{4-x^2}}=\arcsin\dfrac{x}{2}+\dfrac{x}{\sqrt{4-x^2}}-\dfrac{x}{\sqrt{4-x^2}}=\arcsin\dfrac{x}{2}.$

$(10)\ y'=\dfrac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{2t}{1+t^2}\right)^2}}\cdot\dfrac{2(1+t^2)-2t\cdot2t}{(1+t^2)^2}=\dfrac{1+t^2}{\sqrt{(1-t^2)^2}}\cdot\dfrac{2(1-t^2)}{(1+t^2)^2}$

$=\dfrac{2(1-t^2)}{|1-t^2|(1+t^2)}=\begin{cases}\dfrac{2}{1+t^2}, & |t|<1,\\[2mm] -\dfrac{2}{1+t^2}, & |t|>1.\end{cases}$

12. 求下列函数的导数： $shx=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$ $chx=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$ $thx=\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$

$(1)\ y=\mathrm{ch}(\mathrm{sh}x)$;　　　　　$(2)\ y=\mathrm{sh}x\cdot e^{\mathrm{ch}x}$;　　　　$(3)\ y=\mathrm{th}(\ln x)$;　　　　$(4)\ y=\mathrm{sh}^3x+\mathrm{ch}^2x$;

$(5)\ y=\mathrm{th}(1-x^2)$;　　　　$(6)\ y=\mathrm{arsh}(x^2+1)$;　　$(7)\ y=\mathrm{arch}(e^{2x})$;　　$(8)\ y=\arctan(\mathrm{th}x)$;

$(9)\ y=\ln\mathrm{ch}x+\dfrac{1}{2\mathrm{ch}^2x}$;　　$(10)\ y=\mathrm{ch}^2\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)$.

$ch^2x-sh^2x=1.$

解 $(1)\ y'=\mathrm{sh}(\mathrm{sh}x)\cdot\mathrm{ch}x=\mathrm{ch}x\,\mathrm{sh}(\mathrm{sh}x).$

$(2)\ y'=\mathrm{ch}xe^{\mathrm{ch}x}+\mathrm{sh}xe^{\mathrm{ch}x}\mathrm{sh}x=e^{\mathrm{ch}x}(\mathrm{ch}x+\mathrm{sh}^2x).$

$(3)\ y'=\dfrac{1}{\mathrm{ch}^2(\ln x)}\cdot\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{x\mathrm{ch}^2(\ln x)}.$

$(4)\ y'=3\mathrm{sh}^2x\mathrm{ch}x+2\mathrm{ch}x\mathrm{sh}x=\mathrm{sh}x\mathrm{ch}x(3\mathrm{sh}x+2).$

$(5)\ y'=\dfrac{1}{\mathrm{ch}^2(1-x^2)}\cdot(-2x)=-\dfrac{2x}{\mathrm{ch}^2(1-x^2)}.$

$(6)\ y'=\dfrac{1}{\sqrt{1+(x^2+1)^2}}\cdot2x=\dfrac{2x}{\sqrt{x^4+2x^2+2}}.$

$(7)\ y'=\dfrac{1}{\sqrt{(e^{2x})^2-1}}\cdot e^{2x}\cdot2=\dfrac{2e^{2x}}{\sqrt{e^{4x}-1}}.$

$(8)\ y'=\dfrac{1}{1+(\mathrm{th}x)^2}\cdot\dfrac{1}{\mathrm{ch}^2x}=\dfrac{1}{1+\frac{\mathrm{sh}^2x}{\mathrm{ch}^2x}}\cdot\dfrac{1}{\mathrm{ch}^2x}=\dfrac{1}{\mathrm{ch}^2x+\mathrm{sh}^2x}=\dfrac{1}{1+2\mathrm{sh}^2x}.$

$(9)\ y'=\dfrac{1}{\mathrm{ch}x}\mathrm{sh}x-\dfrac{1}{(2\mathrm{ch}^2x)^2}\cdot4\mathrm{ch}x\mathrm{sh}x=\dfrac{\mathrm{sh}x}{\mathrm{ch}x}-\dfrac{\mathrm{sh}x}{\mathrm{ch}^3x}=\dfrac{\mathrm{sh}x(\mathrm{ch}^2x-1)}{\mathrm{ch}^3x}=\dfrac{\mathrm{sh}^3x}{\mathrm{ch}^3x}=\mathrm{th}^3x.$

$(10)\ y'=2\mathrm{ch}\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)\mathrm{sh}\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)\cdot\dfrac{x+1-(x-1)}{(x+1)^2}=\dfrac{2}{(x+1)^2}\mathrm{sh}\left(2\cdot\dfrac{x-1}{x+1}\right).$

13. 设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 均在点 x_0 的某一邻域内有定义，$f(x)$ 在 x_0 处可导，$f(x_0)=0$，$g(x)$ 在 x_0 处连续，试讨论 $f(x)g(x)$ 在 x_0 处的可导性.

解 由 $f(x)$ 在 x_0 处可导，且 $f(x_0)=0$，则有 $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{x-x_0}.$

由 $g(x)$ 在 x_0 处连续，则有 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=g(x_0)$，故

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{x - x_0} g(x) = f'(x_0)g(x_0),$$

即 $f(x)g(x)$ 在 x_0 处可导,其导数为 $f'(x_0)g(x_0)$.

14. 设函数 $f(x)$ 满足下列条件:

(1) $f(x+y) = f(x)f(y)$,对一切 $x, y \in \mathbf{R}$;

(2) $f(x)$ 在 $x = 0$ 处可导.

试证明 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上处处可导,且 $f'(x) = f(x)f'(0)$.

14 题视频解析

证 令 $x = y = 0$,得 $f(0) = f(0) \cdot f(0)$,故 $f(0) = 0$ 或 1.

(1) 若 $f(0) = 0$,则 $f(x) = f(x) \cdot f(0) = 0$,于是 $f'(x) = 0$,即有 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上处处可导,且 $f'(x) = 0 = f(x) \cdot f'(0)$.

(2) 若 $f(0) = 1$,则对 $\forall x \in \mathbf{R}$,有

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x)f(\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f(x) \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(\Delta x) - 1}{\Delta x}$$

$$= f(x) \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = f(x)f'(0).$$

即 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上处处可导,且 $f'(x) = f(x)f'(0)$.

综上结论成立.

第三节　高阶导数

一、主要内容归纳

1. 定义

函数 $f(x)$ 的导数的导数,称为 $f(x)$ 的二阶导数,记为 $f''(x)$;一般 $f(x)$ 的 $(n-1)$ 阶导数的导数称为 $f(x)$ 的 n 阶导数,记为 $f^{(n)}(x)$. 二阶及二阶以上的导数称为高阶导数.

设函数 $u = u(x), v = v(x)$ 具有 n 阶导数,则

$$(u \pm v)^{(n)} = u^{(n)} \pm v^{(n)}, \qquad (ku)^{(n)} = ku^{(n)},$$

$$(uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(n-k)} v^{(k)} = u^{(n)}v + nu^{(n-1)}v' + \frac{n(n-1)}{2!} u^{(n-2)}v'' + \cdots$$

称为莱布尼茨 n 阶导数公式.

2. 常用的高阶导数公式

$(1)(a^x)^{(n)} = a^x \ln^n a \quad (a > 0)$

$(2)(e^x)^{(n)} = e^x$;