方法总结

由于 $y=f(x)$ 的可导与可微是等价的，因此通过判定函数在一点处的可导性，确定其可微性，而不是用微分的定义判定.

习题 2—5 解答

1. 已知 $y=x^3-x$，计算在 $x=2$ 处当 Δx 分别等于 1，0.1，0.01 时的 Δy 及 $\mathrm{d}y$.

解 $\Delta y=(x+\Delta x)^3-(x+\Delta x)-x^3+x=3x(\Delta x)^2+3x^2\Delta x+(\Delta x)^3-\Delta x$,

$\mathrm{d}y=(3x^2-1)\Delta x$. 于是

$$\Delta y\Big|_{\substack{x=2\\ \Delta x=1}}=6\times1+3\times4+1^3-1=18,\qquad \mathrm{d}y\Big|_{\substack{x=2\\ \Delta x=1}}=11\times1=11;$$

$$\Delta y\Big|_{\substack{x=2\\ \Delta x=0.1}}=6\times(0.1)^2+12\times(0.1)+(0.1)^3-0.1=1.161,$$

$$\mathrm{d}y\Big|_{\substack{x=2\\ \Delta x=0.1}}=11\times(0.1)=1.1;$$

$$\Delta y\Big|_{\substack{x=2\\ \Delta x=0.01}}=6\times(0.01)^2+12\times(0.01)-(0.01)^3-0.01=0.110\ 601,$$

$$\mathrm{d}y\Big|_{\substack{x=2\\ \Delta x=0.01}}=11\times(0.01)=0.11.$$

2. 设函数 $y=f(x)$ 的图形如图 2—3，试在图 2—3(a)、(b)、(c)、(d)中分别标出在点 x_0 的 $\mathrm{d}y$、Δy 及 $\Delta y-\mathrm{d}y$，并说明其正负.

解 (a) $\Delta y>0$，$\mathrm{d}y>0$，$\Delta y-\mathrm{d}y>0$. (b) $\Delta y>0$，$\mathrm{d}y>0$，$\Delta y-\mathrm{d}y<0$.

(c) $\Delta y<0$，$\mathrm{d}y<0$，$\Delta y-\mathrm{d}y<0$. (d) $\Delta y<0$，$\mathrm{d}y<0$，$\Delta y-\mathrm{d}y>0$.

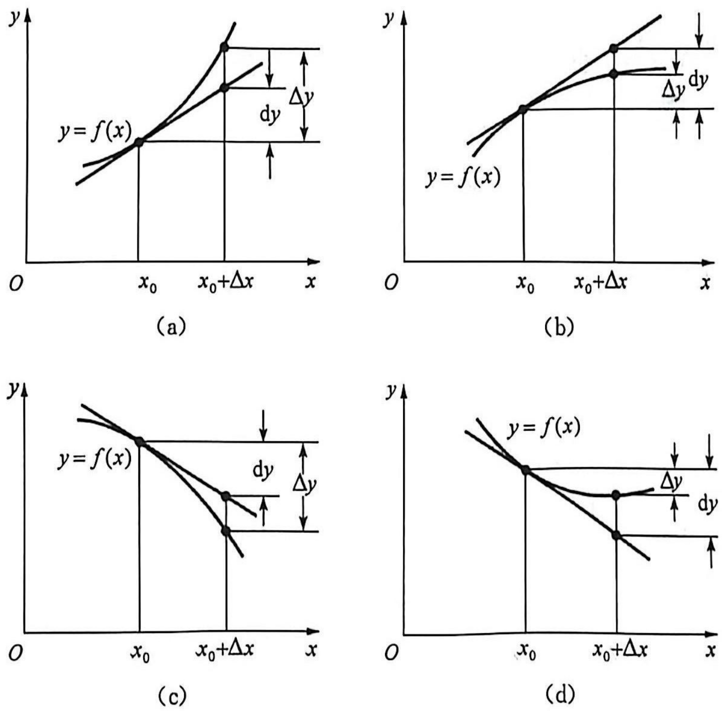

图 2—3

3. 求下列函数的微分：

(1) $y=\dfrac{1}{x}+2\sqrt{x}$； (2) $y=x\sin 2x$；

(3) $y=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$；　　(4) $y=\ln^2(1-x)$；

(5) $y=x^2e^{2x}$；。　　(6) $y=e^{-x}\cos(3-x)$；

(7) $y=\arcsin\sqrt{1-x^2}$；　　(8) $y=\tan^2(1+2x^2)$；

(9) $y=\arctan\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$；　　(10) $s=A\sin(\omega t+\varphi)$ (A,ω,φ 是常数).

解 (1) $dy=y'dx=\left(-\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)dx$.

(2) $dy=y'dx=(\sin 2x+x\cos 2x\cdot 2)dx=(\sin 2x+2x\cos 2x)dx$.

(3) $dy=y'dx=\dfrac{\sqrt{x^2+1}-x\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{(\sqrt{x^2+1})^2}dx=\dfrac{dx}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}$.

(4) $dy=y'dx=2\ln(1-x)\cdot\dfrac{(-1)}{1-x}dx=\dfrac{2}{x-1}\ln(1-x)dx$.

(5) $dy=y'dx=(2xe^{2x}+x^2e^{2x}\cdot 2)dx=2x(1+x)e^{2x}dx$.

(6) $dy=y'dx=[-e^{-x}\cos(3-x)+e^{-x}\sin(3-x)]dx$
$=e^{-x}[\sin(3-x)-\cos(3-x)]dx$.

(7) $dy=y'dx=\left[\dfrac{1}{\sqrt{1-(\sqrt{1-x^2})^2}}\cdot\dfrac{(-2x)}{2\sqrt{1-x^2}}\right]dx=-\dfrac{x}{|x|}\cdot\dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

$$=\begin{cases}\dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, & -1<x<0,\\ -\dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, & 0<x<1.\end{cases}$$

(8) $dy=y'dx=[2\tan(1+2x^2)\cdot\sec^2(1+2x^2)\cdot 4x]dx$
$=8x\tan(1+2x^2)\sec^2(1+2x^2)dx$.

(9) $dy=y'dx=\dfrac{1}{1+\left(\dfrac{1-x^2}{1+x^2}\right)^2}\cdot\dfrac{(-2x)(1+x^2)-(1-x^2)\cdot 2x}{(1+x^2)^2}dx=-\dfrac{2x}{1+x^4}dx$.

(10) $ds=s'dt=A\cos(\omega t+\varphi)\cdot\omega dt=A\omega\cos(\omega t+\varphi)dt$.

4. 将适当的函数填入下列括号内，使等式成立：

(1) $d(\quad)=2dx$；　　(2) $d(\quad)=3xdx$；

(3) $d(\quad)=\cos t dt$；　　(4) $d(\quad)=\sin\omega x dx(\omega\neq 0)$；

(5) $d(\quad)=\dfrac{1}{1+x}dx$；　　(6) $d(\quad)=e^{-2x}dx$；

(7) $d(\quad)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}dx$；　　(8) $d(\quad)=\sec^2 3x dx$.

解 (1) $d(2x+C)=2dx$.　　(2) $d\left(\dfrac{3}{2}x^2+C\right)=3xdx$.

(3) $d(\sin t+C)=\cos t dt$.　　(4) $d\left(-\dfrac{1}{\omega}\cos\omega x+C\right)=\sin\omega x dx$.

(5) $d(\ln(1+x)+C)=\dfrac{1}{1+x}dx$.　　(6) $d\left(-\dfrac{1}{2}e^{-2x}+C\right)=e^{-2x}dx$.

(7) $d(2\sqrt{x}+C)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}dx$.　　(8) $d\left(\dfrac{1}{3}\tan 3x+C\right)=\sec^2 3x dx$.

上述 C 均为任意常数.

5. 如图 2—4 所示的电缆$\overset{\frown}{AOB}$的长为 s，跨度为 $2l$，电缆的最低点 O 与杆顶连线 AB 的距离为 f，则电缆长可按下面公式计算：$s=2l\left(1+\dfrac{2f^2}{3l^2}\right)$，当 f 变化了 Δf 时，电缆长的变化约为多少？

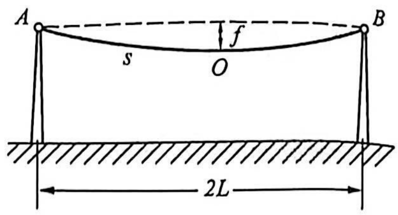

图 2—4

解 $s=2l\left(1+\dfrac{2f^2}{3l^2}\right)$，　　$\Delta s\approx ds=2l\cdot\dfrac{4f}{3l^2}\Delta f=\dfrac{8f}{3l}\Delta f.$

6. 设扇形的圆心角 $\alpha=60°$，半径 $R=100$cm（图 2—5）. 如果 R 不变，α 减少 $30'$，问扇形面积大约改变了多少？又如果 α 不变，R 增加 1cm，问扇形面积大约改变了多少？

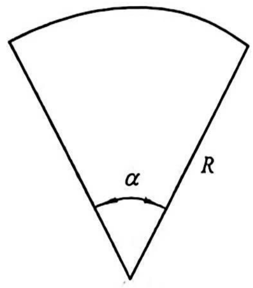

图 2—5

解 扇形面积公式为 $S=\dfrac{R^2}{2}\alpha$. 于是 $\Delta S\approx dS=\dfrac{R^2}{2}\Delta\alpha$.

将 $R=100$，$\Delta\alpha=-30'=-\dfrac{\pi}{360}$代入上式得

$$\Delta S\approx\frac{1}{2}\times100^2\times\left(-\frac{\pi}{360}\right)\approx-43.63(\text{cm}^2).$$

又 $\Delta S\approx dS\approx\alpha R\Delta R$.

将 $\alpha=\dfrac{\pi}{3}$，$R=100$，$\Delta R=1$ 代入上式得 $\Delta S\approx\dfrac{\pi}{3}\times100\times1\approx104.72(\text{cm}^2)$.

7. 计算下列三角函数值的近似值：

(1) $\cos 29°$；　　　　(2) $\tan 136°$.

解 (1)由 $\cos x\approx\cos x_0+(\cos x)'\Big|_{x=x_0}\cdot(x-x_0)$，及取 $x_0=30°=\dfrac{\pi}{6}$得

$$\cos 29°=\cos\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{180}\right)\approx\cos\frac{\pi}{6}+(-\sin x)\Big|_{x=\frac{\pi}{6}}\cdot\left(-\frac{\pi}{180}\right)\approx\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\pi}{360}\approx0.874\ 75.$$

(2)由 $\tan x\approx\tan x_0+(\tan x)'\Big|_{x=x_0}\cdot(x-x_0)$，及取 $x_0=\dfrac{3}{4}\pi$ 得

$$\tan 136°\approx\tan\frac{3}{4}\pi+\sec^2 x\Big|_{x=\frac{3}{4}\pi}\cdot\frac{\pi}{180}\approx-0.965\ 09.$$

8. 计算下列反三角函数值的近似值：

(1) $\arcsin 0.500\ 2$；　　　　(2) $\arccos 0.499\ 5$.

解 (1)由 $\arcsin x\approx\arcsin x_0+(\arcsin x)'\Big|_{x=x_0}\cdot(x-x_0)$及取 $x_0=0.5$ 得

$$\arcsin0.500\ 2\approx\arcsin0.5+\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\Bigg|_{x=0.5}\cdot0.000\ 2\approx30°47'$$

(2)由 $\arccos x\approx\arccos x_0+(\arccos x)'\Big|_{x=x_0}\cdot(x-x_0)$，及取 $x_0=0.5$ 得

$$\arccos 0.499\ 5\approx\arccos 0.5-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\Bigg|_{x=0.5}\cdot(-0.000\ 5)\approx60°2'.$$

9. 当$|x|$较小时，证明下列近似公式：

(1) $\tan x\approx x$（x 是角的弧度值）；　(2) $\ln(1+x)\approx x$；　(3) $\sqrt[n]{1+x}\approx1+\dfrac{x}{n}$；

(4) $e^x\approx1+x$.

并计算 $\tan 45'$和 $\ln 1.002$ 的近似值.

9 题视频解析

解 (1) $\tan x\approx\tan 0+(\tan x)'\Big|_{x=0}\cdot x=0+\sec^2 0\cdot x=x.$

(2) $\ln(1+x)\approx\ln(1+0)+[\ln(1+x)]'\Big|_{x=0}\cdot x=0+\dfrac{1}{1+0}x=x.$

(3) $\sqrt[n]{1+x}\approx\sqrt[n]{1+x}\Big|_{x=0}+(\sqrt[n]{1+x})'\Big|_{x=0}\cdot x=1+\frac{1}{n}(1+x)^{\frac{1}{n}-1}\Big|_{x=0}\cdot x=1+\frac{1}{n}x.$

(4) $e^x\approx e^x\Big|_{x=0}+(e^x)'\Big|_{x=0}\cdot x=1+x.$

$\tan 45'=\tan 0.013\,09\approx 0.013\,09$, $\ln(1.002)\approx 0.002.$

10. 计算下列各根式的近似值：

(1) $\sqrt[3]{996}$； (2) $\sqrt[6]{65}$.

解 由 $\sqrt[n]{1+x}\approx 1+\frac{x}{n}$ 知

(1) $\sqrt[3]{996}=\sqrt[3]{1\,000-4}=10\sqrt[3]{1-\frac{4}{1\,000}}\approx 10\left[1+\frac{1}{3}\left(-\frac{4}{1\,000}\right)\right]\approx 9.986\,7.$

(2) $\sqrt[6]{65}=\sqrt[6]{64+1}=2\sqrt[6]{1+\frac{1}{64}}\approx 2\left(1+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{64}\right)\approx 2.005\,2.$

*11. 计算球体体积时，要求精确度在 2%以内. 问这时测量直径 D 的相对误差不能超过多少？

解 由 $V=\frac{1}{6}\pi D^3$ 知 $dV=\frac{\pi}{2}D^2\Delta D$,

于是由 $\left|\frac{dV}{V}\right|=\left|\frac{\frac{\pi}{2}D^2\Delta D}{\frac{1}{6}\pi D^3}\right|=3\left|\frac{\Delta D}{D}\right|\leqslant 2\%$，知 $\left|\frac{\Delta D}{D}\right|\leqslant\frac{0.02}{3}\approx 0.667\%$.

*12. 某厂生产如图 2—6 所示的扇形板，半径 $R=200$mm，要求中心角 α 为 $55°$. 产品检验时，一般用测量弦长 l 的办法来间接测量圆心角 α. 如果测量弦长 l 时的误差 $\delta_l=0.1$mm，问由此而引起的圆心角测量误差 δ_α 是多少？

解 如图 2—6，由 $\frac{l}{2}=R\sin\frac{\alpha}{2}$ 得 $\alpha=2\arcsin\frac{l}{2R}=2\arcsin\frac{l}{400}$,

故 $\delta_\alpha=|\alpha_l'|\delta_l=\frac{2}{\sqrt{1-\left(\frac{l}{400}\right)^2}}\cdot\frac{1}{400}\cdot\delta_l.$

当 $\alpha=55°$ 时，$l=2R\sin\frac{\alpha}{2}=400\sin 27.5°\approx 184.7.$

将 $l\approx 184.7$，$\delta_l=0.1$ 代入上式得

$$\delta_\alpha\approx\frac{2}{\sqrt{1-\left(\frac{184.7}{400}\right)^2}}\times\frac{1}{400}\times 0.1\approx 0.000\,56(\text{弧度})=1'55''.$$

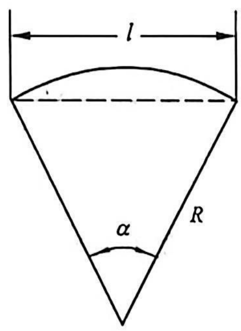

图 2—6