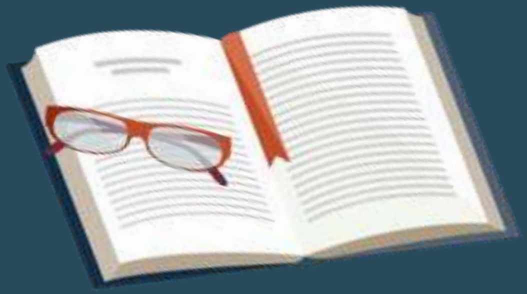
§3.2　二维离散型随机变量



1. 什么是二维离散型随机变量？
2. 边缘分布律
3. 条件分布律

1. 什么是二维离散型随机变量？

定义

如果二维随机变量（X，Y）所有可能取的值是有限对或可列无限多对，则称(X，Y)是**二维离散型随机变量**。

类比一维

1. 什么是二维离散型随机变量？

联合分布律

$$p_{ij} = P\{ X = x_i, Y = y_j \}$$

$Y \backslash X$	x_1	x_2	$\cdots$	x_i	$\cdots$
y_1	p_{11}	p_{21}	$\cdots$	p_{i1}	$\cdots$
y_2	p_{12}	p_{22}	$\cdots$	p_{i2}	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	
y_j	p_{1j}	p_{2j}	$\cdots$	p_{ij}	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	

1. 什么是二维离散型随机变量？

例题 1

设随机变量 X 在1, 2, 3, 4 四个整数中等可能地取值,另一个随机变量 Y 在 $1\sim X$ 中等可能地取一整数值。试求：

（1）(X, Y) 的分布律；

（2）概率 $P\{X > Y\}$。

$$p_{ij} = P\{X = i, Y = j\} = P\{X = i\} P\{Y = j \mid X = i\}$$

$$= 1/4 \cdot 1/i \quad（j \le i = 1，2，3，4）$$

Y \ X	1	2	3	4
1	1/4	1/8	1/12	1/16
2	0	1/8	1/12	1/16
3	0	0	1/12	1/16
4	0	0	0	1/16

联合分布律的基本性质

（1） $p_{ij} \geq 0 \quad (i, j = 1, 2, \cdots)$ （非负性）

（2） $\sum\sum p_{ij} = 1$ （正则性）

1. 什么是二维离散型随机变量？

联合分布律与
联合分布函数间的关系

$$F(x,y)=\sum_{x_i\le x}\sum_{x_j\le y}P\{X=x_i,Y=y_j\}$$

$$=\sum_{x_i\le x}\sum_{x_j\le y}p_{ij}$$

2. 什么是边缘分布律？

定义

设 $p_{ij}=P\{X=x_i, Y=y_j\}$ $(i, j=1,2,\cdots)$ 是二维离散型随机变量 (X, Y) 的分布律，则随机变量 X 和 Y 各自的分布律

$$P\{X=x_i\} \quad (i=1,2,\cdots)$$

$$P\{Y=y_j\} \quad (j=1,2,\cdots)$$

依次称为二维离散型随机变量 (X, Y) 关于 X 和关于 Y 的边缘分布律。

2. 边缘分布律

边缘分布律与联合分布律间的关系

$$P\{X=x_i\}$$

$$=P\{X=x_i,\ -\infty<Y<\infty\}$$

$$=P\{X=x_i,\ \bigcup_{j=1}^{\infty}(Y=y_j)\}$$

$$=P\{\bigcup_{j=1}^{\infty}(X=x_i,\ Y=y_j)\}$$

$$=\sum_{j=1}^{\infty}P\{X=x_i,\ Y=y_j\}=\sum_{j=1}^{\infty}p_{ij}$$

2. 什么是边缘分布律？

（1）(X, Y)关于 X 的**边缘分布律**

$$P\{X=x_i\}=\sum_{j=1}^{\infty} p_{ij}=p_{i\bullet}$$

（2）(X, Y)关于 Y 的**边缘分布律**

$$P\{Y=y_j\}=\sum_{i=1}^{\infty} p_{ij}=p_{\bullet j}$$

2. 什么是边缘分布律？

注 记

二维离散型随机变量(X, Y)的联合分布律

$p_{ij}=P\{X=x_i, Y=y_j\}$ $(i, j=1,2,\cdots)$可以决定

它关于 X 和关于 Y 的边缘分布律

$$p_{i\cdot}=P\{X=x_i\} \quad (i=1,2,\cdots)$$

$$p_{\cdot j}=P\{Y=y_j\} \quad (j=1,2,\cdots)$$

即联合分布律决定边缘分布律，反之，不一定。

2. 什么是边缘分布律？

例题 2

设随机变量 X 在1, 2, 3, 4四个整数中等可能地取值,另一个随机变量 Y 在 $1\sim X$ 中等可能地取一整数值。试求：

（1）(X, Y) 的分布律；

（2）(X, Y)关于 X 和关于Y的边缘分布律。

$Y \backslash X$	1	2	3	4	$p_{\cdot j}$
1	1/4	1/8	1/12	1/16	25/48
2	0	1/8	1/12	1/16	13/48
3	0	0	1/12	1/16	7/48
4	0	0	0	1/16	3/48
$p_{i\cdot}$	1/4	1/4	1/4	1/4	

2. 什么是边缘分布律？

例题 3

已知随机变量 X，Y的分布律分别为

X	-1	0	1
P	1/4	1/2	1/4

Y	0	1
P	1/2	1/2

且$P\{XY=0\}=1$，试求 X和Y 的联合分布律。

3.什么是条件分布律？

若对固定的j，若 $P\{Y=y_j\}>0$，

设 $p_{ij}=P\{X=x_i, Y=y_j\}$（$i, j=1, 2, \cdots$）是二维离散型随机变量(X, Y)的联合分布律，则在事件$\{Y=y_j\}$已发生的条件下，事件$\{X=x_i\}$发生的条件概率

$$P\{X=x_i \mid Y=y_j\} \quad (i=1, 2, \cdots)$$

称为在 $Y=y_j$ 的条件下随机变量 X 的**条件分布律**。

在事件$\{X=x_i\}$已发生的条件下，事件$\{Y=y_j\}$发生的条件概率

$$P\{Y=y_j \mid X=x_i\} \quad (j=1, 2, \cdots)$$

称为在 $X=x_i$ 的条件下随机变量 Y 的**条件分布律**。

3.什么是条件分布律？

条件分布律的计算公式

在 $Y=y_j$ 的条件下随机变量 X 的条件分布律

$$P\{X=x_i \mid Y=y_j\}=\frac{P\{X=x_i,Y=y_j\}}{P\{Y=y_j\}}=\frac{p_{ij}}{p_{\bullet j}}\quad (i=1,2,\cdots)$$

在 $X=x_i$ 的条件下随机变量 Y 的条件分布律

$$P\{Y=y_j \mid X=x_i\}=\frac{P\{X=x_i,Y=y_j\}}{P\{X=x_i\}}=\frac{p_{ij}}{p_{i\bullet}},\ j=1,2,\cdots$$

3.什么是条件分布律？

注 记

（1）条件分布律计算公式成立的条件。

（2）条件分布律由联合分布律确定。

（3）联合分布律由边际分布律和条件分布律确定。

$$P\{X=x_i,Y=y_j\}=P\{X=x_i\}P\{Y=y_j\mid X=x_i\}$$

$$P\{X=x_i,Y=y_j\}=P\{Y=y_j\}P\{X=x_i\mid Y=y_j\}$$

3.什么是条件分布律？

例题 3

一射手进行射击，击中目标的概率为 p（$0<p<1$），射击到击中目标两次为止，设 X 以表示首次击中目标所进行的射击次数，以 Y 表示总共进行的射击次数，试求 X 和 Y 的联合分布律、边缘分布律及条件分布律。

$Y \backslash X$	1	2	3	4	$\cdots$
2	p^2	0	0	0	$\cdots$
3	$p^2(1-p)$	$p^2(1-p)$	0	0	$\cdots$
4	$p^2(1-p)^2$	$p^2(1-p)^2$	$p^2(1-p)^2$	0	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	

作　业

练习十　　A类　1，2

练习十一　A类　4