练习九

解：由　$p\{XY=0\}=1$ 有 $P\{XY\neq 0\}=0$。即 $P\{X=-1,Y=1\}=P\{X=1,Y=1\}=0$

于是　X，Y 的联合分布有如下结构

Y \ X	-1	0	1	Pr
0	P_{11}	P_{21}	P_{31}	0.5
1	0	P_{22}	0	0.5
P_X	0.25	0.5	0.25	

于是 X 和 Y 的联合分布规律为

Y \ X	-1	0	1	Σ
0	0.25	0	0.25	0.5
1	0	0.5	0	0.5
Σ	0.25	0.5	0.25	

练习十

1 解：首先画出 D 的图形,并求出 D 的面积

$$S_D=\int_1^{e^2}\frac{1}{x}dx=2,$$

(X，Y)的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{2}, & (x,y)\in D\\ 0, & 其他\end{cases}$$

关于 X 的边缘密度

$$fx^{(x,y)}=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\begin{cases}\int_0^{\frac{1}{X}}\frac{1}{2}dy=\frac{1}{2x}, & 1<X<e^2\\ 0, & 其他\end{cases}$$

2 解:(1)由题设,(X,Y)的概率密度　$\varphi(x,y)=\dfrac{\partial^2F(x,y)}{\partial x\partial y}$

代入分布函数公式 F(x,y)=　$\int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x}\varphi(x,y)dxdy=A\left(\arctan\frac{x}{2}+\frac{\pi}{2}\right)+\left(\arctan\frac{y}{2}+\frac{\pi}{2}\right)$

由于 $F((+\infty,+\infty)=1$,得$A=\frac{1}{\pi^2}$，$B=C=\frac{\pi}{2}$.

(2) (X,Y)的概率密度$\varphi(x,y)=\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x\partial y}=\frac{6}{\pi^2(4+x^2)(9+y^2)}$.

(3)边缘分布密度$\varphi X^{(x)}=\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x,y)dy=\frac{2}{\pi(4+x^2)}$

$\varphi Y^{(y)}=\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x,y)dx=\frac{3}{\pi(9+y^2)}$

4.答案:(1)C=$\frac{3}{\pi^2}$;(2)$\frac{1}{2}$

练习十一

1 解:(1)P$\{X=i,Y=k\}=\frac{1}{10}\times\frac{1}{10}=0.01,P\{Y=k\}=\frac{1}{10}$

P{X=I|Y=k}=$\frac{P\{X=i,Y=k\}}{P\{Y=K\}}=0.1,i=0,1,...,9$

(2)P(X=I,=k)=$\frac{1}{10}\times\frac{1}{9}=\frac{1}{90}$(当$i\neq k$时）

当$i=k$时，$P\{X=i,Y=k\}=0,P\{Y=k\}=1/10$，从而

$$P\{X=i|Y=k\}=\frac{P\{X=i,Y=k\}}{P\{Y=k\}}=\begin{cases}\frac{1}{9},i\neq k23\\0,i=k\end{cases}\quad i=0,1,\ldots 9$$

2 解: $f_x(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\int_0^x 3xdy=3x^2,0\le x<1$

即 $f_x(x)=\begin{cases}3x^2,0\le x<1,\\0,其它\end{cases}$，从而

$f_{Y|X}(y|x)=\frac{f(x,y)}{fx(x)}=\begin{cases}\frac{1}{x},0\le y<x\\0,其它\end{cases}$于是

$f_{r|x}$（y$\Big|$x=$\frac{1}{4}$）$=\begin{cases}4，0\le y <\frac{1}{4}，从而\\0，其它\end{cases}$

$$P\,P\left\{Y\le\frac{1}{8}\middle|X=\frac{1}{4}\right\}=\int_{-\infty}^{\frac{1}{8}}f_{Y|X}(y|x=\frac{1}{4})dy=\int_0^{\frac{1}{8}}4dy=0.5$$

3.解：（1） $F_X(x)=F(x,+\infty)=\begin{cases}1-e^{-0.5x}, x\ge 0\\ 0, x<0\end{cases}, F_Y(y)=F(+\infty,y)=\begin{cases}1-e^{-0.5y}, y\ge 0\\ 0, y<0\end{cases}$

由 $F_X(x)F_y(y)=F(x,y)$ 知，X 和 Y 独立。

（2） $a=P\{X>0.1,Y>0.1\}=P\{X>0.1\}P\{Y>0.1\}=\left[1-P\{X\le 0.1\}\right]\left[1-P\{Y\le 0.1\}\right]$

$=\left[1-F_X(0.1)\right]\left[1-F_y(0.1)\right]=e^{-0.05}e^{-0.05}=e^{-0.1}$

4．解：由公式可得，X 的边缘分布密度为 $\varphi_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x,y)dy$

$$=\begin{cases}\int_{-\sqrt{R^2-X^2}}^{\sqrt{R^2-X^2}}\frac{1}{\pi R^2}dy=\dfrac{2}{\pi R^2}\sqrt{R^2-X^2}, 当|x|\le R\\ 0, 当|x|>R\end{cases}$$

$$\vartheta Y(y)=\begin{cases}\dfrac{2}{\pi R^2}\sqrt{R^2-Y^2}, 当|y|\le R\\ 0, 当|\mathrm{y}|>R\end{cases}$$

X=x 时 Y 的条件分布密度 $\vartheta(y|x)=\dfrac{\vartheta(x,y)}{\vartheta x(y)}=\begin{cases}\dfrac{1}{2\sqrt{R^2-x^2}}, 当|y|\le\sqrt{R^2-x^2}\\ 0, 当|\mathrm{y}|>\sqrt{R^2-x^2}\end{cases}$

同理，Y=y 时，X 的条件分布密度 $\vartheta(x|y)==\begin{cases}\dfrac{1}{2\sqrt{R^2-y^2}}, 当|x|\le\sqrt{R^2-y^2}\\ 0, 当|\mathrm{x}|>\sqrt{R^2-y^2}\end{cases}$

由于条件分布密度与边缘分布密度不相等，X 和 Y 是不独立的。

5．解：由于 $\{Z=1\}=\{X=1,Y=1\}\cup\{X=0,Y=0\}$

$\{Z=0\}=\{X=0,Y=1\}\cup\{X=1,Y=0\}$

因此 $P\{X=1,Z=1\}=P\{X=1,Y=1\}=P\{X=1\}P\{Y=1\}=P^2$

$P\{X=1,Z=0\}=P\{X=1,Y=0\}=P\{X=1\}P\{Y=0\}=pq$

$P\{X=0,Z=1\}=P\{X=0,Y=0\}=P\{X=0\}P\{Y=0\}=q^2$

$P\{X=0,Z=0\}=P\{X=0,Y=1\}=P\{X=0\}P\{Y=1\}=pq$

又有 $P\{X=0\}=q, P\{X=1\}=p, P\{Z=0\}=2pq, P\{Z=1\}=p^2+q^2$

为使 X 和 Z 相互独立，只需

$$\begin{cases} 2pq.q = pq \\ (p^2+q^2).q = q^2 \\ 2pq.p = pq \\ (p^2+q^2).p = p^2 \end{cases}$$

解得 p=$\frac{1}{2}$

练习十二

1．解：（1）设钻头的寿命为 X，只需一根钻头的概率为

$$P\left\{X \ge 2000\right\} = \int_{2000}^{+\infty} 0.001e^{-0.001x}dx = e^{-2}$$

（2）设两根钻头的寿命分别为 X 和 Y，它们是相互独立的，其联合分布密度函数为

$$g(x,y) = \begin{cases} 0.001^2 e^{-0.001(x+y)}, x>0, y>0 \\ 0, 其它 \end{cases}$$

于是恰好用两根钻头的概率为

$$P\left\{X<2000, X+Y \ge 2000\right\} = \int_0^{2000} dx \int_{2000-x}^{+\infty} 0.001^2 e^{-0.001(x+y)}dy = 2e^{-2}$$

2、解：（X，Y）的联合概率密度为$\varphi(x,y) = \begin{cases} 1/2, (x,y) \in G \\ 0, (x,y) \notin G \end{cases}$

设$F(s) = P\{S \le s\}$为 S 的分布函数，则

$s \le 0$ 时，$F(s) = 0, s \ge 2$时，地 F（s）=1

0<s<2 时，$F(s) = p\{S \le s\} = 1 - P\{XY > s\} = 1 - \iint\limits_{xy>s} \varphi(x,y)dxdy$

$$= 1 - \iint\limits_{xy>s} \frac{1}{2}dxdy = 1 - \frac{1}{2}\int_s^2 dx \int_{\frac{s}{x}}^1 dy = \frac{s}{2}(1 - \ln 2 - \ln s)$$

于是，$f(s) = F'(s) = \begin{cases} 1/2(-\ln 2 - \ln s), 0<s<2 \\ 0, 其他 \end{cases}$

3、答案：

Y \ X	0	1	2
0	0.16	0.08	0.01
1	0.32	0.16	0.02
2	0.16	0.08	0.01

4、解：由$P\{Z=i\} = \sum_{k=0}^{i} P\{X=k, Y=i-k\} = \sum_{k=0}^{i} P\{X=k\}P\{Y=i-k\}$

$= p^i(1-p)^{n1+n2-i}\sum_{k=0}^{i} C_{n1}^k C_{n2}^{i-k} = C_{n1+n2}^i p^i (1-p)^{n1+n2-i}, i = 0,1,\ldots, n1+n2$ 故，Z＝X＋Y～

B（N1＋N2，P）

5、解：z<0 时，$F_Z(z)=0$

$0\le z\le 1$时，F_Z（z）＝P｛X－Y ≤ Z｝＝P｛X－Y＞Z｝＝1－$\iint\limits_{\substack{0<x<1\\0<y<x\\x-y>z}}3x\,dx$

$$1-\int_z^1 dx\int_0^{x-z}3xdy=\frac{3}{2}z-\frac{1}{2}z^3$$

z≥1 时，$F_z(z)=1$,所以有 $P_z(z)=\frac{d}{dz}F_z(z)=\begin{cases}\frac{3}{2}(1-z^2),0\le z\le 1\\0，其它\end{cases}$

6、解： $F_z(z)=\iint\limits_{x+2y\le z}f(x,y)dxdy=\begin{cases}0,z\le 0\\\int_0^z dx\int_0^{\frac{z-x}{2}}2e^{-(x+2y)}dy,z>0\end{cases}$

$$=\begin{cases}0,z\le 0\\1-e^{-z}-ze^{-z},z>0\end{cases}$$

练习十三

1。、解：令 $A_i=\{第i个部件需要调整\}$，$i=1,2,3$ 考虑随机变量 $X_i=\begin{cases}1,若A_i出现\\0若A_i不出现\end{cases}$，

$i=1,2,3$ 则 X_i 服从（0－1）分布，从而 $E(X_i)=P(A_i),D(X_i)=P(A_i[1-P(A_i)]$，$X=X_1+X_2+X_3$，

由于 X_1,X_2,X_3 相互独立，所以 $E(X)=E(X_1)+E(X_2)+E(X_3)=P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)=0.1+0.2+0.3=0.6$，

$D(X)=D(X_1)+D(X_2)+D(X_3)=0.1*0.9+0.2*0.8+0.3*0.7=0.46$

2 解：Y 的分布函数为 $F(y)=\begin{cases}1-e^{-y},y>0\\0,y\le 0\end{cases}$，$X_1=\begin{cases}0Y\le 1\\1Y>1\end{cases}$ $X_2=\begin{cases}0Y\le 2\\1Y>2\end{cases}$

（1）$(X_{1,}X_2)$ 有四个可能取值（0，0）（0，1）（1，0）（1，1）

$$P\{X_1=0,X_2=0\}=P\{Y\le 1,Y\le 2\}=P\{Y\le 1\}=F(1)=1-e^{-1}$$

$$P\{X_1=0,X_2=1\}=P\{Y\le 1,Y>2\}=0$$

$$P\{X_1=0,X_2=0\}=P\{Y\le 1,Y\le 2\}=P\{Y\le 1\}=F(1)=1-e^{-1}$$

$$P\{X_1=1,X_2=1\}=P\{Y>1,Y>2\}=P\{Y>2\}=1-P(Y\le 2)=1-F(2)=e^{-2}$$

即得和 X_1 和 X_2 的联合分布

（2）$E(X_1+X_2)=E(X_1)+E(X_2)=e^{-1}+e^{-2}$　其中

$E(X_1)=0\times(1-e^{-1})+1\times e^{-1}=e^{-1}$　　　　$E(X_2)=0\times(1-e^{-2})+1\times e^{-2}=e^{-2}$

3 解：$P(X=k)=C_{10}^{k}0.4^{k}(1-0.4)^{10-k}, k=0,1,\ldots\ldots10, E(X^2)=\sum_{k=0}^{10}k^2P(X=k)$

4 解：因为 $EX^2-3EX+1=0$, 又 $\mathrm{EX}=\lambda$, $\mathrm{EX}^2=DX+(EX)^2=\lambda+\lambda^2$, 代入得 $\lambda=1$

5 解：X-Y～N（0，2）

$$E\left|X-Y\right|=\int_{-\infty}^{\infty}\left|X\right|\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{X^2}{4}}dx=\frac{4}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{\infty}e^{-\frac{X^2}{4}}d\frac{X^2}{4}=\frac{4}{\sqrt{2\pi}}$$