习　　题

一　选择题

1. 在坐标原点放一正+Q，它在 P 点(x=+1，y=0)产生的电场为 $\boldsymbol{E}$。现在，另外有一个负电荷–2Q，试问应将它放在什么位置才能使 P 点的电场强度为零？(　　)

A. x 轴上 x>1。　　B. x 轴上 x<0。　　C. x 轴上 0<x<1。

D. y 轴上 y>0。

解：根据电场叠加原理，应选（B）。

2. 下列说法中哪一个是正确的？(　　)

A. 电场中某点场强的方向，就是将点电荷放在该点所受的电场力的方向。

B. 在以点电荷为中心的球面上，该电荷产生的场强处处相同。

C. 场强方向可由 $\boldsymbol{E}=\dfrac{\boldsymbol{F}}{q}$ 定出，其中 q 为试验电荷的电量，$\boldsymbol{F}$ 为试验电荷所受的电场力。

D. 以上说法都不正确。

解：根据电场强度的定义应选(C)

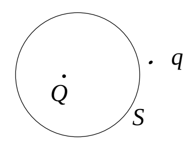
3. 如图，电量为 Q 的点电荷被曲面 S 所包围，从无穷远处引另一电量为 q 的点电荷至曲面外一点，则：(　　)

A．穿过曲面 S 的 $\boldsymbol{E}$ 通量不变，曲面上各点场强不变

B．穿过曲面 S 的 $\boldsymbol{E}$ 通量变化，曲面上各点场强不变

C．穿过曲面 S 的 $\boldsymbol{E}$ 通量变化，曲面上各点场强变化

D．穿过曲面 S 的 $\boldsymbol{E}$ 通量不变，曲面上各点场强变化



选择题 3 图

解：根据高斯定理，应选(D)。

4. 两个同心均匀带电球面，半径分别为 R_a 和 R_b(R_a<R_b)，所带电量分别为 Q_a 和 Q_b，设某点与球心相距 r，当 $R_a<r<R_b$ 时，该点的电场强度的大小为：(　　)

A. $\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\dfrac{Q_a+Q_b}{r^2}$　　B. $\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\dfrac{Q_a-Q_b}{r^2}$

C. $\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\dfrac{Q_a}{r^2}+\dfrac{Q_b}{R_b^2}\right)$　　D. $\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\dfrac{Q_a}{r^2}$

解：取介于两球面间且与内球面同心的球面为高斯面，高斯面内所包围电荷仅是内球面所带电荷，故选（D）。

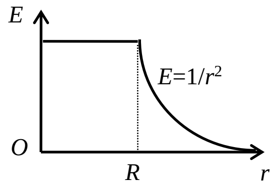
5. 图示为一具有球对称性分布的静电场的 E–r 关系曲线，请指出该静电场

是由下列哪种带电体产生的。(　　)

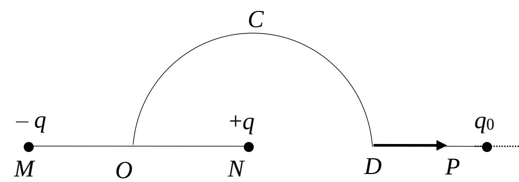
A． 半径为 R 的均匀带电球面　　　　B． 半径为 R 的均匀带电球体

C． 半径为 R、电荷体密度 $\rho=Ar$(A 为常数)的非均匀带电球体

D． 半径为 R、电荷体密度 $\rho=A/r$(A 为常数)的非均匀带电球体



选择题 5 图



选择题 6 图

解：取与球同心的高斯面，则 $\oint \vec{E}\cdot d\vec{S}=E\cdot 4\pi r^2$，题中球内场强均匀，根据高斯定理，有 $\int \rho dV=\int \rho 4\pi r^2 dr \propto r^2$，即 $\rho \propto \dfrac{1}{r}$，因此该电场为半径为 R、电荷体密度 $\rho=A/r$（A 为常数）的非均匀带电球体所产生，故选（D）。

6. 如图示，直线 MN 长为 $2l$，弧 OCD 是以 N 点为中心，l 为半径圆弧，N 点有正电荷 $+q$，M 点有负电荷 $-q$，今将一试验电荷 $+q_0$ 从 O 点出发沿路径 $OCDP$ 移到无穷远处，设无穷远处电势为零，则电场力作功(　　)

(A)　$W<0$ 且为有限常量；　　　(B) $W>0$ 且为有限常量；

(C)　$W=\infty$　　　　　　　　(D) $W=0$

解：O 点的电势为零，O 点与无穷远处的电势差为零，所以将试验电荷 $+q_0$ 从 O 点出发沿任意路径移到无穷远处，电场力作功为零，故本题应选（D）。

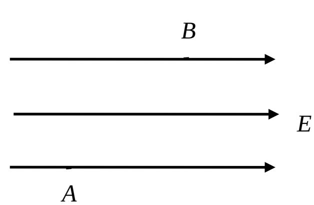
7. 在匀强电场中，将一负电荷从 A 移到 B，如图所示，则：(　　)

A. 电场力作正功，负电荷的电势能减少；

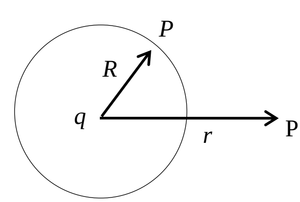
B. 电场力作正功，负电荷的电势能增加；

C. 电场力作负功，负电荷的电势能减少；

D. 电场力作负功，负电荷的电势能增加



选择题 7 图



选题 8 图

解：根据图示，A 点的电势高于 B 点的电势，所以负电荷在 B 点的电势能高于 A 点的电势能，电场力作负功。应选（D。）

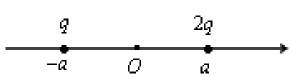
8. 在点电荷 q 的电场中，选取以 q 为中心、R 为半径的球面上一点 P 处作电势零点，则与点电荷 q 距离为 r 的 P 点的电势为（　　）

A. $\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$　　B. $\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\dfrac{1}{r}-\dfrac{1}{R}\right)$　　C. $\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0(r-R)}$　　D. $\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\dfrac{1}{R}-\dfrac{1}{r}\right)$

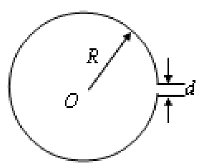
解：根据电势的定义可计算出 P 点的电势应为 $\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\dfrac{1}{r}-\dfrac{1}{R}\right)$，故选（B）。

二 填空题

1. 位于 x 轴上的两个点电荷，分别带电量 $2q$ 和 q，坐标分别为 a 和 $-a$。第三个点电荷 q_0 放在 x=__________________处，它所受合力为零。



填空题 1 图



填空题 2 图

解：第三个点电荷所在处场强为零，设该点的坐标为 x，根据题意，$-a<x<0$，

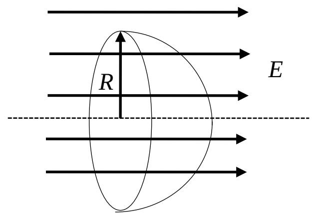
则 $\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0(x+a)^2}=\dfrac{2q}{4\pi\varepsilon_0(a-x)^2}$，由此解得：

$$x=-\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}a=-(3-2\sqrt{2})a$$

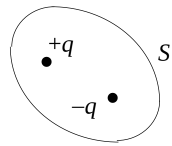
2. 一半径为 R 的带有一缺口的细圆环，缺口长度为 d (d<<R)环上均匀带正电，总电量为 q，如图所示，则圆心 o 处的场强大小 E = ____________，场强方向为________________。

解：圆心处的场强可看成是均匀带正电的完整圆环电荷与缺口处和与圆环电荷密度相同的负电荷共同激发，均匀带正电的完整圆环电荷在圆心处激发的场强为零，故 $E=\dfrac{\dfrac{q}{(2\pi R-d)}d}{4\pi\varepsilon_o R^2}\approx\dfrac{qd}{8\pi^2\varepsilon_0 R^3}$，场强方向为从 o 点指向缺口中心点。

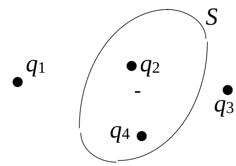
3. 半径为 R 的半球面置于场强为 $\boldsymbol{E}$ 均匀电场中，其对称轴与场强方向一致，如图所示，则通过该半球面的 $\boldsymbol{E}$ 通量为__________。



填空题 3 图



填空题 4 图



填空题 5 图

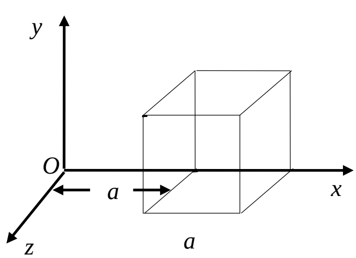
解： $\pi R^2 E$

4. 如图，点电荷 q 和 $-q$ 被包围在高斯面 S 内，则通过该高斯面的 $\boldsymbol{E}$ 通量 $\oint\!\!\oint_S \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}=$____，式中 $\boldsymbol{E}$ 为______________的场强。

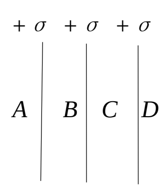
解：0；高斯面 S 上面积元 $\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ 处。

5. 点电荷 q_1，q_2，q_3 和 q_4 在真空中的分布如图所示，图中 S 为高斯面，则通过该高斯面的 $\boldsymbol{E}$ 通量 $\oint\!\!\oint_S \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}=$______，式中的 $\boldsymbol{E}$ 是高斯面上任一点的场强，它等于点电荷______单独存在时在该点产生场强的矢量和。

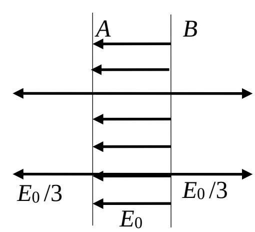
解：$(q_2+q_4)/\varepsilon_0$， q_1, q_2, q_3, q_4



填空题 6 图



填空题 7 图



填空题 8 图

6. 图中电场强度分量为 $E_x = b\,x^{1/2}$，$E_y = E_z = 0$，正立方体的边长为 a，则通过这正立方体的 $\boldsymbol{E}$ 通量 $\Phi=$__________，正方体内的总电荷 $Q=$____________。

解：$(\sqrt{2}-1)ba^{\frac{5}{2}}$；$(\sqrt{2}-1)\varepsilon_o ba^{\frac{5}{2}}$

7. 三个平行的“无限大”均匀带电平面，其电荷面密度是$+\sigma$,则 A，B，C，

D 四个区域的电场强度分别为：E_A =________，E_B =_______，E_C =________，E_D =________。(设方向向右为正)

解：每个无限大均匀带电平面产生的场强为$\sigma/(2\varepsilon_0)$，根据场强的叠加原理可得：$E_A=-3\sigma/(2\varepsilon_0)$；$E_B=-\sigma/(2\varepsilon_0)$；$E_C=\sigma/(2\varepsilon_0)$；$E_D=3\sigma/(2\varepsilon_0)$

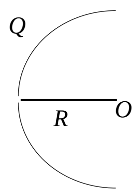
8. A、B 为真空中两个平行的“无限大”均匀带电平面，已知两平面间的电场强度大小为 E_0，两平面外侧电场强度大小都为 $E_0/3$，方向如图。则 A、B 两平面上电荷面密度分别为σ_A =___________ ，σ_B =_____________。

解：根据上题可得：$\dfrac{\sigma_B-\sigma_A}{2\varepsilon_0}=E_0,\dfrac{\sigma_B+\sigma_A}{2\varepsilon_0}=\dfrac{1}{3}E_0$，解得：

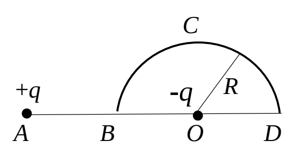
$\sigma_A=-2\varepsilon_0E_0/3$ ；$\sigma_B=4\varepsilon_0E_0/3$

9. 真空中有一半径为 R 的半圆细环，均匀带电 Q，如图所示，设无穷远处为电势零点，则圆心 o 点的处的电势 V_0 = _________，若将一带电量为 q 的点电荷从无穷远处移到圆心 o 点，则电场力做功 W=____________。

解：$V_0=Q/(4\pi\varepsilon_0R)$；$W=-qQ/(4\pi\varepsilon_0R)$



填空题 9 图



填空题 10 图

10. 图示 BCD 是以 o 点为圆心，以 R 为半径的半圆弧，在 A 点有一电量为 $+q$ 的点电荷，o 点有一电量为$-q$ 的点电荷，线段 $BA=R$，现将一单位正电荷从 B 点沿半径圆弧轨道 BCD 移到 D 点，则电场力所作的功为_____________。

解：$$V_B=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0R}-\frac{q}{4\pi\varepsilon_0R}=0$$

$$V_D=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0(3R)}-\frac{q}{4\pi\varepsilon_0R}=-\frac{q}{6\pi\varepsilon_0R}$$

$$V_{BD}=V_B-V_D=\frac{q}{6\pi\varepsilon_0R}$$

$$\therefore W_{BD}=\frac{q}{6\pi\varepsilon_0R}$$

11. 质量为 m 电量为 q 的小球从电势为 V_A 的 A 点运动到电势为 V_B 的 B 点，

如果小球在 B 点的速率为 v_B，则小球在 A 点的速率 v_A=________________。

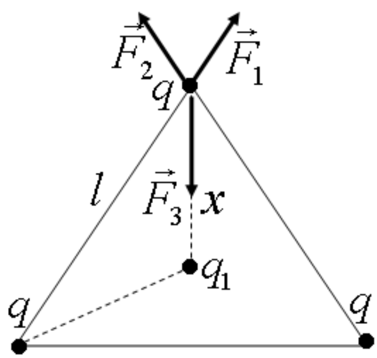
解：由能量守恒 （$\frac{1}{2}mv_A^2 + qV_A = \frac{1}{2}mv_B^2 + qV_B$）

解得 $v_A=[\frac{mv_B^2 - 2q(V_A - V_B)}{m}]^{\frac{1}{2}}$

三 计算题

1．电量为 q 的三个正点电荷分别位于一等边三角形的三个顶点上，为不使它们由于斥力作用而散开，在该等边三角形的中心放一异号点电荷 $q_1(q_1<0)$，试求 q_1。

解：如下图所示，由对称性只需求顶点处 q 受合力为零即可



计算题1图

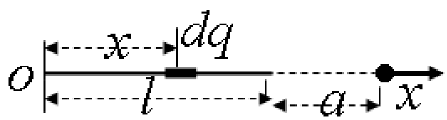
依题意：

$F_1\cos 30^0 + F_2\cos 30^0 = F_3$，其中 $F_1 = F_2 = k\frac{q^2}{l^2}$，$F_3 = k\frac{q|q_1|}{x^2}$，且

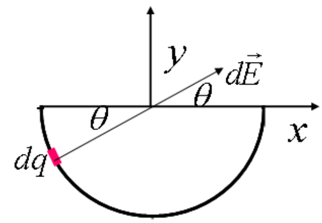
$2x\cos 30^0 = l$，解得：$|q_1| = \frac{\sqrt{3}q}{3}$

2．一长为 l 的均匀带电直线，其线电荷密度为 λ。试求导线延长线上距离导线近端为 a 处一点的电场强度。

解：建如图所示的坐标系，$dq=\lambda dl=\lambda dx$ 则有，$dE_x=\dfrac{\lambda dx}{4\pi\varepsilon_0(a+l-x)^2}$



计算题2图



计算题3

$$E_x=\int_0^l dE_x=\int_0^l\frac{\lambda dx}{4\pi\varepsilon_0(a+l-x)^2}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 a(a+l)}$$

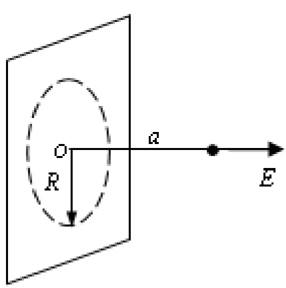
3.半径为 R 的半圆细环上均匀分布电荷 Q，求环心处的电场强度。

解：建如图所示的坐标系，由对称性可知，场强在 x 轴上分量为 0。

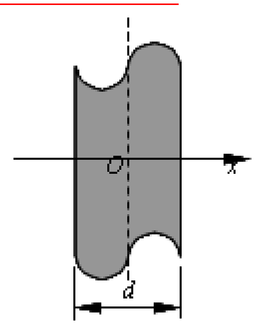
$$\lambda=\frac{Q}{\pi R},dq=\lambda dl=\lambda Rd\theta$$

$$dE=\frac{\lambda Rdl}{4\pi\varepsilon_0 R^2}=\frac{\lambda d\theta}{4\pi\varepsilon_0 R}，\quad dE_y=\frac{\lambda d\theta}{4\pi\varepsilon_0 R}\sin\theta$$

$$E_y=\int_0^\pi\frac{\lambda d\theta}{4\pi\varepsilon_0 R}\sin\theta=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 R}=\frac{Q}{2\varepsilon_0\pi^2R^2}$$



计算题 4 图



计算题6图

4. 一电荷面密度为σ 的“无限大”平面，在距离平面 a 米远处的一点的场强大小的一半是由平面上一个半径为 R 的圆面积范围内的电荷所产生的，试求该圆半径的大小。

解：电荷面密度为σ 的无限大均匀带电平面在任意点的场强大小为

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

由例题 9. 5，半径为 R 的均匀带电圆盘轴线上距盘心 a 的场强为

$$E_1 = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}(1 - \frac{a}{\sqrt{a^2 + R^2}})$$

根据题意，令 $E_1 = \frac{E}{2} = \sigma/(4\varepsilon_0)$，得到：$R = \sqrt{3}a$

5. 实验证明，地球表面上方电场不为零，晴天大气电场的平均强度为 120V/m，方向向下，这意味着地球表面上有多少过剩电荷？试以每平方厘米的额外电子数来表示。

解：设想地球为一均匀带电球面，总面积为 S，则它所带总电量为

$$q = \varepsilon_0 \oiint_S \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \varepsilon_0 ES$$

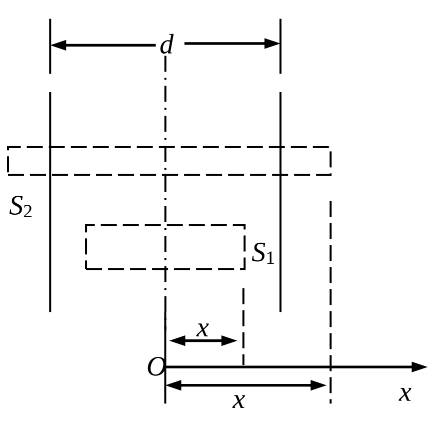
单位面积上所带电量为：$\sigma = \frac{q}{S} = \varepsilon_0 E$

额外电子数为：$n = \frac{\sigma}{e} = \frac{\varepsilon_0 E}{e} = 6.64 \times 10^5 (个 \cdot \mathrm{cm}^{-2})$

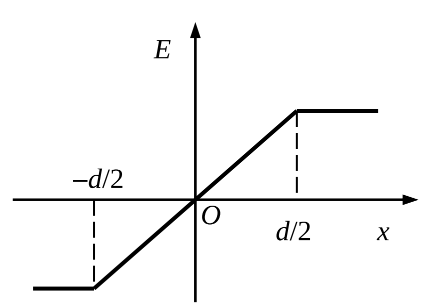
6. 图示一厚度为 d 的“无限大”均匀带电平板，电荷体密度为ρ。试求板内外的电场强度分布，并画出电场强度随坐标 x 变化的图线，即 E～x 图线（设原点在带电平板的中央平面上，Ox 轴垂直于平板）。

解：作圆柱高斯面 S_1、S_2，如图 1，由高斯定理得

平板内区域（$|x|<d/2$）：$2E_1 \cdot \Delta S = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho \cdot 2d_1 \Delta S$，$E_1 = \frac{\rho x}{\varepsilon_0}$



计算题 6 解图 1



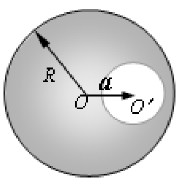
计算题 6 解图 2

平板外区域（$|x|>d/2$）： $2|E_2|\cdot\Delta S=\dfrac{1}{\varepsilon_0}\rho\cdot 2d\cdot\Delta S$

即 $x>d/2$ 时 $E_2=\dfrac{\rho d}{2\varepsilon_0}$，$x<-d/2$ 时 $E_2=-\dfrac{\rho d}{2\varepsilon_0}$

场强度随坐标 x 变化的图线见图 2。

7. 一个电荷体密度为 ρ（常量）的球体。（1）证明球内距球心 r 处一点的电场强度为 $\boldsymbol{E}=\dfrac{\rho}{3\varepsilon_0}\boldsymbol{r}$；（2）若在球内挖去一个小球，如题图所示，证明小球空腔内的电场是匀强电场 $\boldsymbol{E}=\dfrac{\rho}{3\varepsilon_0}\boldsymbol{a}$，式中 $\boldsymbol{a}$ 是球心到空腔中心的距离矢量。



计算题7图

证明：（1）作与球体同心的球面为高斯面，根据高斯定理

$\oint_S \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}=\dfrac{1}{\varepsilon_0}\int_V \rho \mathrm{d}V$ 即 $E\cdot 4\pi r^2=\dfrac{\rho}{\varepsilon_0}\cdot\dfrac{4}{3}\pi r^3$

$\therefore E=\dfrac{\rho}{3\varepsilon_0}r$ 矢量式 $\boldsymbol{E}=\dfrac{\rho}{3\varepsilon_0}\boldsymbol{r}$ 得证

（2）填充法：设在空腔中填充电荷密度分别为ρ和$-\rho$的电荷球体，形成电荷密度分别为ρ和$-\rho$的大球体和小球体。

对腔内任一点 $\boldsymbol{P}$，由（1）的结果有

大球 $\boldsymbol{E}_{1P}=\dfrac{\rho}{3\varepsilon_0}\boldsymbol{r}$； 小球 $\boldsymbol{E}_{2P}=-\dfrac{\rho}{3\varepsilon_0}\boldsymbol{r}'$

$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}_{1P}+\boldsymbol{E}_{2P}=\dfrac{\rho}{3\varepsilon_0}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')=\dfrac{\rho}{3\varepsilon_0}\boldsymbol{a}$ 得证

8.. 在盖革计数器中有一半径为 R_2 的金属圆筒，在圆筒轴线上有一条半径为 R_1 的导线，$R_1<R_2$。如果在导线与圆筒之间加上 U 的电压，试分别求（1）导线表面处（2）圆筒表面处的电场强度的大小。

解：设导线上的电荷密度为λ，与导线同轴作单位长度、半径为 r（$R_1<r<R_2$）的高斯圆柱面，按高斯定理有

$$2\pi r E=\lambda/\varepsilon_0$$

得到 $E=\lambda/(2\pi\varepsilon_0 r)$ $(R_1<r<R_2)$

方向沿半径指向圆筒，导线与圆筒之间的电势差：

$$U=\int_{R_1}^{R_2}\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\int_{R_1}^{R_2}\frac{\mathrm{d}r}{r}=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{R_2}{R_1}$$

则 $$E=\frac{U}{r\ln(R_2/R_1)}$$

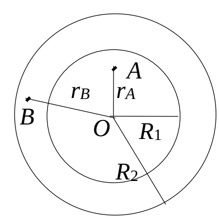
导线表面处 $$E_1=\frac{U}{R_1\ln(R_2/R_1)}$$

圆筒表面处 $$E_2=\frac{U}{R_2\ln(R_2/R_1)}$$

9.如题图所示，一个均匀分布的带正电球层，电荷密度为 ρ，球层内表面半径为 R_1，球层外表面半径为 R_2，求 A 点和 B 点的电势（其分别到球心的距离为 r_A 和 r_B）。

解：以 r 表示到球心的距离，则电荷的分布情况如下：

$$\begin{cases} q_1=0 & r<R_1 \\ q_2=\dfrac{4}{3}\pi\rho(r^3-R_1^3) & R_1\le r<R_2 \\ q_3=\dfrac{4}{3}\pi\rho(R_2^3-R_1^3) & r\ge R_2 \end{cases}$$



计算题 9 图

按高斯定理，可得各区域的场强情况

$$\begin{cases} E_1=0 & r<R_1 \\ E_2=\dfrac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}=\dfrac{\rho}{3\varepsilon_0 r^2}(r^3-R_1^3) & R_1\le r<R_2 \\ E_3=\dfrac{q_3}{4\pi\varepsilon_0 r^2}=\dfrac{\rho}{3\varepsilon_0 r^2}(R_2^3-R_1^3) & r\ge R_2 \end{cases}$$

取无穷远为电势零点，由 $V_P=\int_P^\infty \boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}$,可得

$$V_A=\int_{r_A}^\infty E\mathrm{d}r=\int_{r_A}^{R_1}0\cdot\mathrm{d}r+\int_{R_1}^{R_2}\frac{\rho}{3\varepsilon_0 r^2}(r^3-R_1^3)\mathrm{d}r+\int_{R_2}^\infty\frac{\rho}{3\varepsilon_0 r^2}(R_2^3-R_1^3)\mathrm{d}r$$

$$=\frac{\rho}{2\varepsilon_0}(R_2^2-R_1^2)$$

$$V_B=\int_{r_B}^{\infty}E\mathrm{d}r=\int_{r_B}^{R_2}\frac{\rho}{3\varepsilon_0 r^2}(r^3-R_1^3)\mathrm{d}r+\int_{R_2}^{\infty}\frac{\rho}{3\varepsilon_0 r^2}(R_2^3-R_1^3)\mathrm{d}r=\frac{\rho}{6\varepsilon_0}(3R_2^2-r_B^2-\frac{2R_1^3}{r_B})$$

或解：先求 B 点的电势。设 B 点的半径为 r（$R_1<r<R_2$），B 点处的电势等于以 r 为半径的球面内的电荷和该球面外的电荷产生，

$$V_B=\frac{\frac{4\pi}{3}(r^3-R_1^3)\rho}{4\pi\varepsilon_0 r}+\int_r^{R_2}\frac{\rho\cdot 4\pi r'^2\mathrm{d}r'}{4\pi\varepsilon_0 r'}$$

$$=\frac{\rho}{6\varepsilon_0}(3R_2^2-r^2-\frac{2R_1^3}{r})$$

A 点的电势与内球面的电势相等，即在上式中取 $r=R_1$，即

$$V_A=\frac{\rho}{2\varepsilon_0}(R_2^2-R_1^2)$$