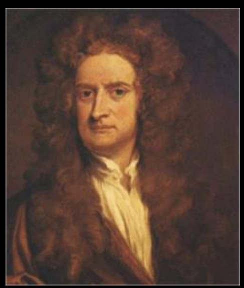
高等数学



§1.6 极限存在准则一　重要极限一

夹逼定理

重要极限一及其应用

思考题 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\cdots+\frac{n}{n^2}\right)=(\quad)$.

A. 0 B. $\frac{1}{2}$ C. 不存在 D. 无法确定

分析: $n\to\infty$ 时, 上式为无限个无穷小之和.

极限加法的运算法则不适用!

解:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\cdots+\frac{n}{n^2}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}(1+2+\cdots+n)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{2n^2}$$

$$=\frac{1}{2}.$$

思考题　求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2+1}+\frac{2}{n^2+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n}\right).$

对比分析：$\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\cdots+\frac{n}{n^2}) = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}(1+2+\cdots+n) = \frac{1}{2}.$

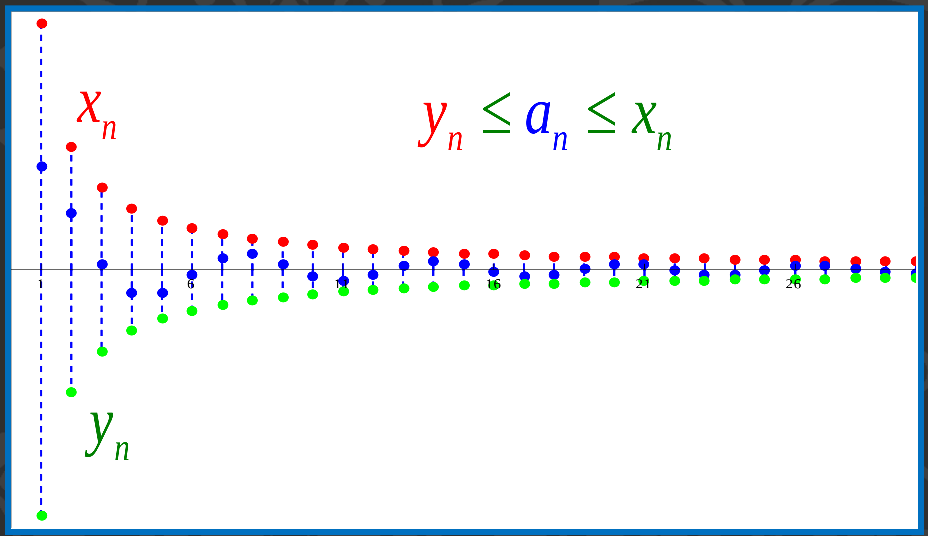
$$\frac{1}{n^2+n}(1+2+\cdots+n) \le \frac{1}{n^2+1}+\frac{2}{n^2+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n} \le \frac{1}{n^2+1}(1+2+\cdots+n)$$

$$=\frac{n^2+1}{2(n^2+n)} \to \frac{1}{2}\ (n\to\infty) \qquad\qquad =\frac{n^2+n}{2(n^2+1)} \to \frac{1}{2}$$

思考：$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2+1}+\frac{2}{n^2+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n}\right) = \frac{1}{2}$

定理1（夹逼准则）设 $y_n \le a_n \le x_n \ (n = n_0, n_0+1, \cdots)$ 且数列 $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$ 收敛到相同极限，则数列 $\{a_n\}$ 收敛，且

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n.$$



- 夹逼准则既能得到**定性结论**, 又可得到**定量结论**.
- 应用关键：通过**放缩**要找到**合适的**上界数列和下界数列.

思考题 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2+1}+\dfrac{2}{n^2+2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n}\right).$

解: $\dfrac{n^2+1}{2(n^2+n)}\le\dfrac{1}{n^2+1}+\dfrac{2}{n^2+2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n}\le\dfrac{n^2+1}{2(n^2+1)}=\dfrac{1}{2}$

由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2+1}{2(n^2+n)}=\dfrac{1}{2}$

由夹逼准则知 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2+1}+\dfrac{2}{n^2+2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n}\right)=\dfrac{1}{2}$

进一步思考: $\dfrac{n}{n^2+1}\le\dfrac{1}{n^2+1}+\dfrac{2}{n^2+2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n}\le\dfrac{n^2}{n^2+n}$ 可行否?

例1 证明： $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})=0$.

例2 求极限： $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)$.

例3 设 $a>1$ 为常数，证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$.

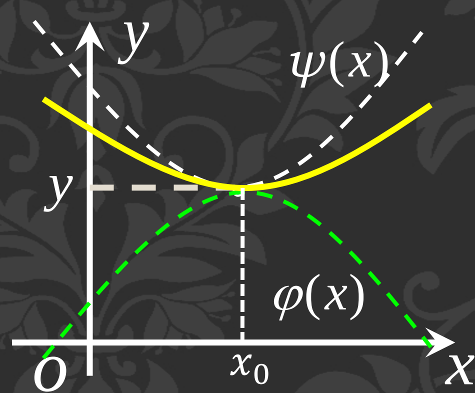
例4 求极限：$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}$.

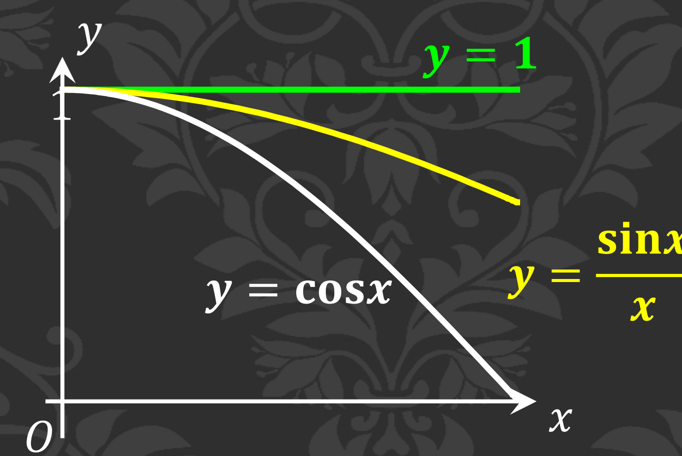
例 求极限: $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+2^n+3^n}$.

例 求极限: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!}{n^n}$.

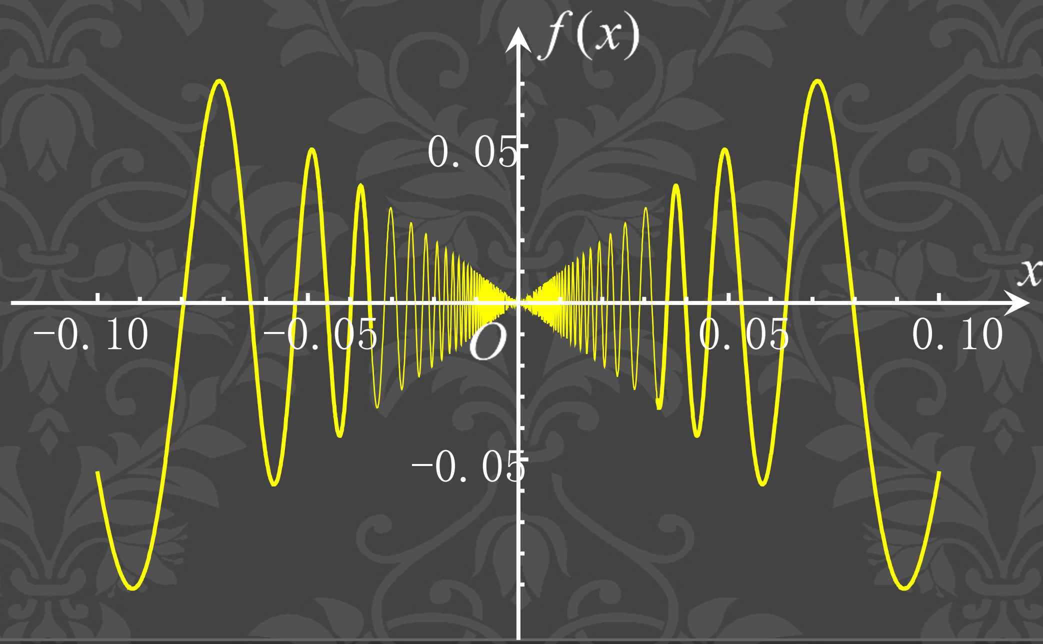
定理2(夹逼准则) 设 $f(x)$，$\varphi(x)$，$\psi(x)$ 在 x_0 的去心邻域 $U_0(x_0,\delta_0)$ 中满足 $\varphi(x) \le f(x) \le \psi(x)$，且 $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)$和 $\lim\limits_{x\to x_0}\psi(x)$ 存在且相等，则 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$存在，且

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0}\varphi(x) = \lim_{x\to x_0}\psi(x).$$

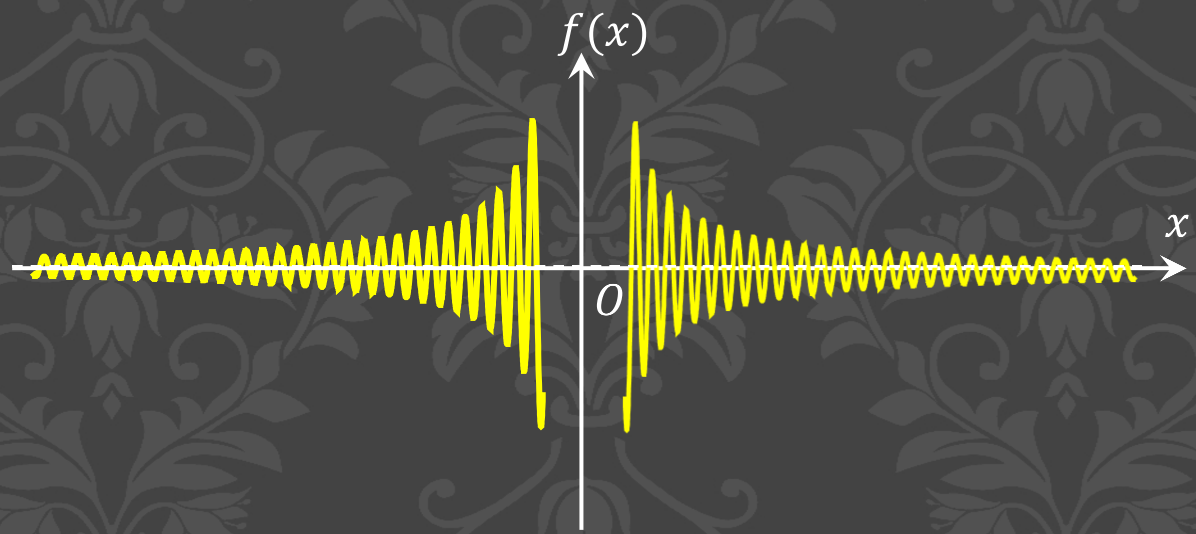




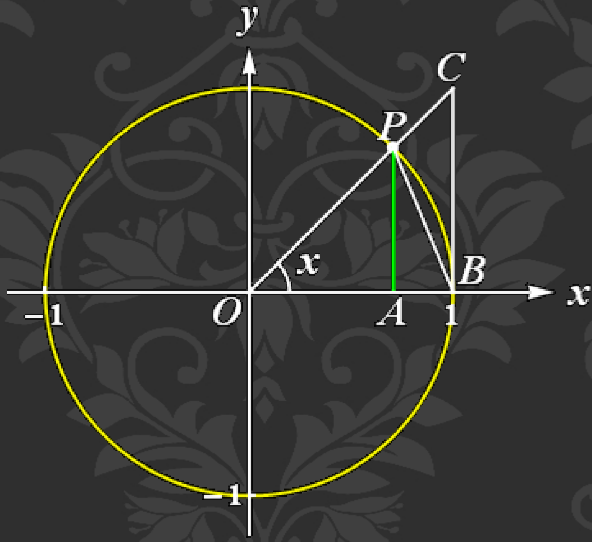
极限 $\lim\limits_{x \to 0} x\sin\dfrac{1}{x}$.（无穷小与有界函数之积）

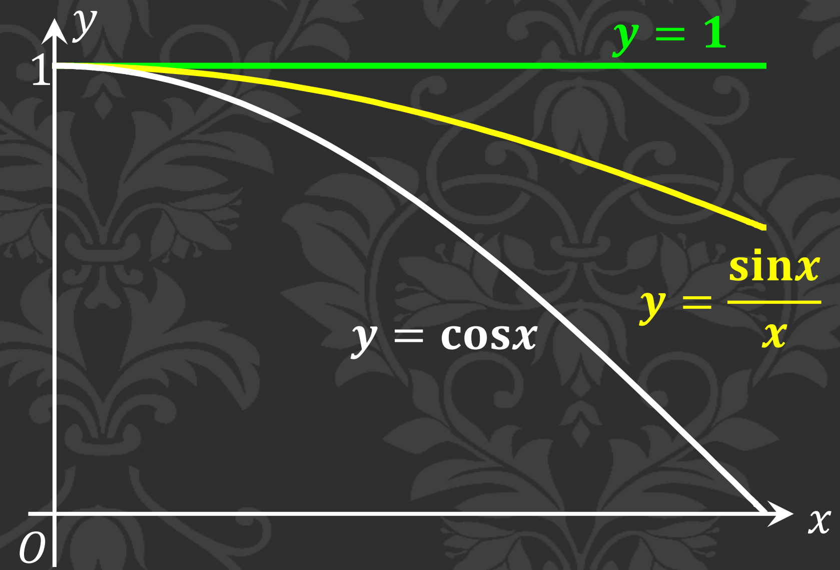


求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}$.　(无穷小与有界函数之积)



例5 (重要极限之一) 证明: $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1.$ $\dfrac{0}{0}$ 型未定式





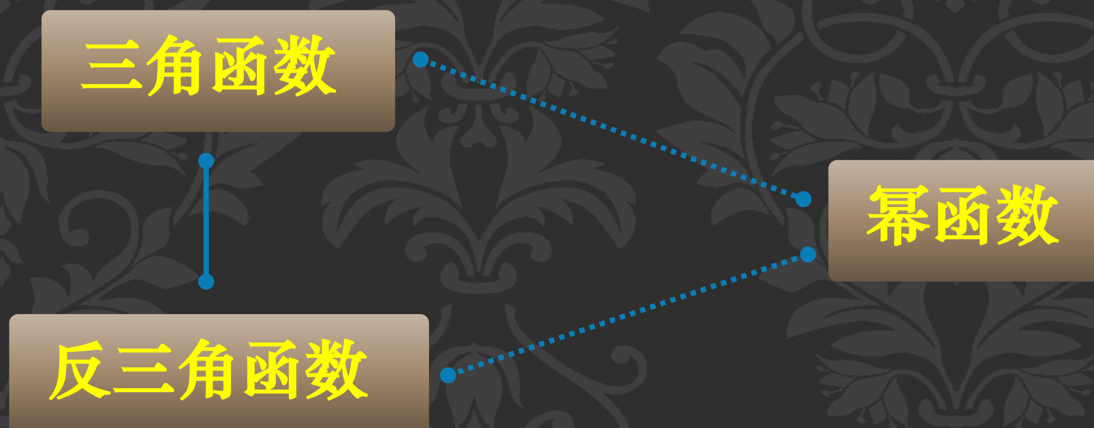
例6 求极限： $\lim_{x \to 0} \frac{\tan x}{x}$

例7 求极限： $\lim_{x \to 0} \frac{\arctan x}{x}$

总结

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.$$

此公式建立了三角函数、反三角函数与幂函数之间的极限关系.



$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1 \Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{ax}=1 \quad (\text{其中}a\text{为非零常数})$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to x_0}\frac{\sin f(x)}{f(x)}=1 \quad (\text{其中}f(x)\text{为}x\to x_0\text{时的无穷小})$$

例8 计算下列极限 (1) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\sin 3x}$ (2) $\lim_{x\to 1}\frac{\sin(x-1)}{x^2-1}$

例9 求极限： $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x}{x^2}$.

例10 求极限： $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x - \sin 2x}{x + \tan 3x}$.

总结

- 此公式适用于求含三角函数的 $\frac{0}{0}$ 型未定式的极限.

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\sin\boxed{\varphi(x)}}{\boxed{\varphi(x)}} \overset{u=\varphi(x)}{=} \lim_{u\to 0}\frac{\sin u}{u}=1$$

特点： (1) 含正弦函数的 $\frac{0}{0}$ 型未定式

(2) 所有用 $\boxed{}$ 框住的位置形式一致

(3) 当 $x\to x_0$ 时，$\varphi(x)\to 0$

例11 求极限： $\lim\limits_{n\to\infty} 2^n \sin\dfrac{3}{2^n}$. $\dfrac{\mathbf{0}}{\mathbf{0}}$ 型未定式

例12 求极限： $\lim\limits_{x\to\pi} \dfrac{1+\cos x}{(\pi-x)^2}$. $\dfrac{\mathbf{0}}{\mathbf{0}}$ 型未定式