第四章　功和能

一 选择题

1. 一辆汽车从静止出发，在平直公路上加速前进时，若发动机功率恒定，则正确的结论为：（　　　）

A. 加速度不变　　　　　　　　　B. 加速度随时间减小

C. 加速度与速度成正比　　　　　D. 速度与路径成正比

解：答案是 B。

简要提示：在平直公路上，汽车所受阻力恒定，设为 F_f。发动机功率恒定，则 $P=Fv$，其中 F 为牵引力。由牛顿运动定律得 $F-F_f=ma$，即：$ma=P/v-F_f$。所以，汽车从静止开始加速，速度增加，加速度减小。

2. 下列叙述中正确的是：　(　　　　)

A. 物体的动量不变，动能也不变.

B. 物体的动能不变，动量也不变.

C. 物体的动量变化，动能也一定变化.

D. 物体的动能变化，动量却不一定变化.

解：答案是 A。

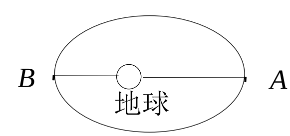
3. 一颗卫星沿椭圆轨道绕地球旋转，若卫星在远地点 A 和近地点 B 的角动量与动能分别为 L_A、E_{kA} 和 L_B、E_{kB}，则有：（　　　　）

A.　$L_B > L_A$，　$E_{kB} > E_{kA}$

B.　$L_B > L_A$，　$E_{kB} = E_{kA}$

C.　$L_B = L_A$，　$E_{kB} > E_{kA}$

D.　$L_B = L_A$，　$E_{kB} = E_{kA}$



选择题 3 图

解：答案是 C。

简要提示：由角动量守恒，得 $v_B > v_A$，故 $E_{kB} > E_{kA}$。

4. 对功的概念有以下几种说法：

(1) 保守力作正功时，系统内相应的势能增加.

(2) 质点运动经一闭合路径，保守力对质点作的功为零.

(3) 作用力和反作用力大小相等、方向相反，所以两者所作功的代数和必为零.

在上述说法中：　(　　　　)

A. (1)、(2)是正确的；　　　B. (2)、(3)是正确的；

C. 只有(2)是正确的；　　　D. 只有(3)是正确的.

解：答案是 C。

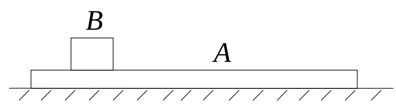
5. 如图所示，足够长的木条 A 置于光滑水平面上，另一木块 B 在 A 的粗糙平面上滑动，则 A、B 组成的系统的总动能：（　　）

A.　不变

B.　增加到一定值

C.　减少到零

D.　减小到一定值后不变



选择题 5 图

解：答案是 D。

简要提示：B 在 A 的粗糙平面上滑动，摩擦力最终使 B 相对于 A 静止下来，根据质点系的动能原理，它做的功使系统的总动能减少。当 B 相对于 A 不动时，摩擦力就不再做功，系统的总动能也就不再变化。

6. 人造卫星绕地球作圆周运动，由于受到稀薄空气的摩擦阻力，人造卫星的速度和轨道半径的变化趋势应为：（　　　）

A.　速度减小，半径增大　　　B.　速度减小，半径减小

C.　速度增大，半径增大　　　D.　速度增大，半径减小

解：答案是 D。

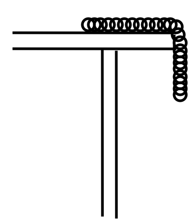
简要提示：系统机械能 $E=-\dfrac{GMm}{2r}$，由于阻力做负功，根据功能原理可知系统的机械能将减少。因此 r 将减小。

再根据圆周运动方程为 $\dfrac{mv^2}{r}=\dfrac{GMm}{r^2}$，$v^2=\dfrac{GM}{r}$，因此速度将增大。

7. 一条长为 L 米的均质细链条，如图所示，一半平直放在光滑的桌面上，另一半沿桌边自由下垂，开始时是静止的，当此链条末端滑到桌边时（桌高大于链条的长度），其速率应为：（　　）

A．$\sqrt{gL}$　　　B．$\sqrt{2gL}$

C．$\sqrt{3gL}$　　　D．$\dfrac{1}{2}\sqrt{3gL}$



选择题 7 图

解：答案是 D。

简要提示：运动过程中机械能守恒，则以桌面为零势能点，初始时机械能为 $-\dfrac{1}{8}mgL$，其中 m 为链条的质量；链条末端滑到桌边时机械能为

$\frac{1}{2}mv^2-\frac{1}{2}mgL$。两者相等，得：$v=\frac{1}{2}\sqrt{3gL}$

8． 一竖直悬挂的轻弹簧下系一小球，平衡时弹簧伸长量为d．现用手将小球托住，使弹簧不伸长，然后将其释放，不计一切摩擦，则弹簧的最大伸长量：（ ）

A． d B． $d/2$； C. $2d$； D． 条件不足无法判定．

解：答案是 C。

简要提示：设弹簧的最大伸长量为 x，由机械能守恒，有

$$mgx=\frac{1}{2}kx^2$$

由： $$mg=kd$$

所以有： $$x=2d$$

二 填空题

1. 质量m＝1 kg 的物体，在坐标原点处从静止出发在水平面内沿x 轴运动，其所受合力方向与运动方向相同，合力大小为F ＝3＋2x (SI单位)，那么，物体在开始运动的3 m 内，合力所作的功W ＝________________；且x＝3 m 时，其速率 v ＝________________________.

解：答案是 18 J ； $6\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$

简要提示：合力所作的功为：

$$W=\int_0^3 F\mathrm{d}x=\int_0^3(3+2x)\mathrm{d}x=18\mathrm{J}$$

由动能定理

$$W=\frac{1}{2}mv^2$$

$$v=6\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$$

2. 一颗速率为700 $\mathrm{m\cdot s^{-1}}$的子弹，打穿一块木板后，速率降到500 $\mathrm{m\cdot s^{-1}}$。如果让它继续穿过厚度和阻力均与第一块完全相同的第二块木板，则子弹的速率将降到________________________________. （空气阻力忽略不计）

答案是 100 $\mathrm{m\cdot s^{-1}}$

简要提示：由动能定理，木板对子弹所作的功为：

$$W=\frac{1}{2}mv_2^2-\frac{1}{2}mv_1^2$$

设子弹穿透第二块木板的速率为 v，有：

$$W=\frac{1}{2}mv^2-\frac{1}{2}mv_2^2$$

所以

$$v=\sqrt{2v_2^2-v_1^2}=100\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$$

3. 将一劲度系数为 k 的轻弹簧竖直放置，下端悬一质量为 m 的小球，开始时使弹簧为原长而小球恰好与桌面接触，今将弹簧上端缓慢地提起，直到小球刚能脱离桌面为止，在此过程中外力作功为______________。

解：答案是 $\dfrac{m^2g^2}{2k}$

4. 质量分别为 m 和 m'的两个粒子开始处于静止状态，且彼此相距无限远，在以后任一时刻，当它们相距为 d 时，则该时刻彼此接近的相对速率为______________。

解：答案是 $\sqrt{\dfrac{2G(m+m')}{d}}$

简要提示：设质量为 m 和 m' 的两个粒子当它们相距为 d 时的速率分别为 v_1 和 v_2，显然速度的方向相反。在它们运动过程中只受到相互间的万有引力作用，因此系统的机械能和动量均守恒。根据题意，相距无限远时系统的总能量为零。因此有

$$\frac{1}{2}mv_1^2+\frac{1}{2}m'v_2^2-\frac{Gmm'}{d}=0$$

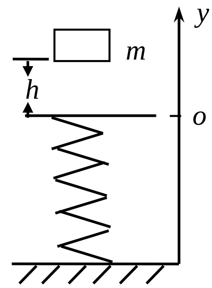
$$mv_1=m'v_2$$

从以上两式解出 $$v_1=\sqrt{\frac{2Gm'^2}{d(m+m')}}$$

因此两个粒子彼此接近的相对速率为

$$v_1 + v_2 = v_1 + \frac{m}{m'}v_1 = \frac{m+m'}{m'}v_1 = \frac{m+m'}{m'}\sqrt{\frac{2Gm'^2}{d(m+m')}} = \sqrt{\frac{2G(m+m')}{d}}$$

5. 如图所示，一质量为 m 的物体位于质量可以忽略的直立弹簧上方高度为 h 处，该物体从静止开始落向弹簧，设弹簧的劲度系数为 k，若不考虑空气阻力，则物体可能获得的最大动能为__________________。



填空题 5 图

解：答案是 $E_{\mathrm{kmax}} = mgh + \frac{m^2g^2}{2k}$

简要提示：以弹簧的原长位置为原点，选该点为重力势能零点，则物体初始的机械能为 mgh。物体与弹簧接触后，弹簧被压缩，物体的机械能守恒：

$$-mgy + \frac{1}{2}ky^2 + E_{\mathrm{k}} = mgh$$

由 $\frac{\mathrm{d}E_{\mathrm{k}}}{\mathrm{d}y} = 0$，得：　$y = \frac{mg}{k}$；　$E_{\mathrm{kmax}} = mgh + \frac{m^2g^2}{2k}$

6. 逃逸速率大于真空中光速的天体称为黑洞，设黑洞的质量等于太阳的质量，为 2.0×10^{30}kg，引力常数为 $G = 6.67\times10^{-11}\mathrm{N\cdot m^2\cdot kg^{-1}}$，真空光速 $c = 3.0\times10^8\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$，则按经典理论该黑洞可能的最大半径为__________m。

解：答案是 2.96×10^3m

简要提示：由第二宇宙速度公式，物体要脱离太阳引力所需的速度为：

$v_2 = \sqrt{\frac{2Gm_0}{R}}$，其中 m_0 为太阳的质量。令 v_2 等于光速 c，得到

$$R = 2Gm_0/c^2 = 2.96\times10^3\,\mathrm{m}$$

7. 一质量为 2kg 的物体与另一原来静止的物体发生弹性碰撞后仍沿原方向继续运动，但速率仅为原来的四分之一，则被碰撞物体的质量为___________。

解：答案是 1.2 kg

简要提示：由弹性碰撞的速度公式：$v_1 = \frac{(m_1 - m_2)v_{10} + 2m_2v_{20}}{m_1 + m_2}$

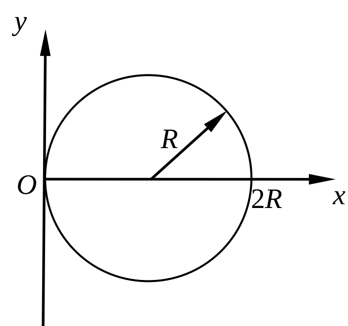
得：　　$m_2 = \frac{3}{5} m_1 = 1.2\text{kg}$

三 计算题

1. 如图，一质点在平面内作圆周运动，有一力 $\boldsymbol{F} = F_0(x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j})$ 作用在质点上。在该质点从坐标原点(0，0）运动到（2R，0）位置过程中，求此力对质点所作的功。

解 根据式（4.1.4），有

$$W_{ab} = \int_a^b (F_x \mathrm{d}x + F_y \mathrm{d}y) = \int_0^{2R} F_0 x \mathrm{d}x + \int_0^0 F_0 y \mathrm{d}y = \frac{1}{2} F_0 x^2 \Big|_0^{2R} = 2F_0 R^2$$



计算题 1 图

2. 用铁锤把钉子水平敲入木板，设钉子受到的阻力与钉子打入的深度成正比。第一次打击，能把钉子打入木板 1cm，如第二次打击时，保持第一次打击钉子时的速度，求第二次钉子打入的深度。

解：阻力与深度成正比，有 $F = kx$，两次敲击钉子的条件相同，钉子获得的动能也相同，所以阻力对钉子作的功相同：

$$\int_0^{0.01} kx\mathrm{d}x = \int_{0.01}^{0.01+\Delta x} kx\mathrm{d}x$$

得：　　$\Delta x = 0.0041\text{m} = 0.41\text{cm}$

3 质量为 m=2kg 的物体沿 x 轴作直线运动，所受力沿 x 轴方向，大小为 $F = 10 + 6x^2$ (SI 单位)。如果在 x=0 处速度为 v_0=0，试求该物体从 x=0 处运动到

x=4m 时速度的大小。

解　力做的功为

$$W=\int_0^4 F\mathrm{d}x=\int_0^4(10+6x^2)\mathrm{d}x=(10x+2x^3)\Big|_0^4=168\mathrm{J}$$

根据动能定理，等于动能的增量，即

$$W=\frac{1}{2}mv^2-\frac{1}{2}mv_0^2=\frac{1}{2}mv^2$$

$$v=\sqrt{\frac{2W}{m}}=\sqrt{\frac{2\times168}{2}}\approx13\ \ \mathrm{m/s}$$

4. 一质量为 m 的质点在沿 x 轴方向的力 $F=F_0\mathrm{e}^{-kx}$ 作用下（其中 F_0、k 为正的常量），从 x=0 处自静止出发，求它沿 x 轴运动时所能达到的最大速率。

解　力做的功为

$$W=\int_0^x F\mathrm{d}x=\int_0^x F_0e^{-kx}\mathrm{d}x=\frac{F_0}{k}(1-e^{-kx})$$

根据动能定理，上述等于动能的增量，即

$$\frac{F_0}{k}(1-e^{-kx})=\frac{1}{2}mv^2-\frac{1}{2}mv_0^2=\frac{1}{2}mv^2$$

解出

$$v=\sqrt{\frac{2F_0}{km}(1-e^{-kx})}$$

当 $x\to\infty$时，v 达到最大速率 $v_{max}=\sqrt{\dfrac{2F_0}{km}}$ 。

5. 质量为 2×10^{-3}kg 的子弹以 500 $\mathrm{m\cdot s^{-1}}$ 的速率水平飞出，射入质量为 1kg 的静止在水平面上的木块，子弹从木块穿出后的速率为 100 $\mathrm{m\cdot s^{-1}}$，子弹穿出后木块向前滑行了 0.2m。求：

（1）木块与平面间的滑动摩擦因数；

（2）子弹动能和动量的减少量。

解：（1）设子弹和木块的质量分别为 m 和 m_0，根据系统动量守恒 $mv_0=m_0V+mv$，得木块在子弹穿出后的速率为

$$V=\frac{m(v_0-v)}{m_0}=\frac{2\times10^{-3}\times(500-100)}{1}=0.8\,(\mathrm{m\cdot s^{-1}})$$

由动能原理，木块与平面间的滑动摩擦力作的功等于木块损失的动能，即

$$-F_{\mathrm{f}}x=-\mu m_0gx=\Delta E_{\mathrm{k}m_0}=0-\frac{1}{2}m_0V^2$$

得
$$\mu=\frac{V^2}{2gx}=\frac{0.64}{2\times9.8\times0.2}=0.163$$

（2）子弹动能减少

$$\Delta E_{\mathrm{k}m}=\frac{1}{2}m(v_0^2-v^2)=\frac{1}{2}\times2\times10^{-3}\times(500^2-100^2)=240\,(\mathrm{J})$$

子弹动量减少

$$\Delta p=m(v_0-v)=2\times10^{-3}\times(500-100)=0.8\,(\mathrm{kg\cdot m\cdot s^{-1}})$$

6. 以线密度为λ 的细线弯成半径为 R 的圆环，将一质量为 m_0 的质点放在环中心点时，求圆环和质点的引力势能。

解 将圆环分成无限多个线元，在圆环上任取一个线元，长 dl，则其质量为

$$\mathrm{d}m=\lambda\cdot\mathrm{d}\,l=\lambda\cdot R\mathrm{d}\theta$$

线元 dm 和质点 m_0 之间的引力势能为

$$\mathrm{d}E_{\mathrm{p}}=-\frac{Gm_0\mathrm{d}m}{R}=-Gm_0\lambda\mathrm{d}\theta$$

圆环和质点 m 之间的引力势能为

$$E_{\mathrm{p}}=\int\mathrm{d}E_{\mathrm{p}}=\int_0^{2\pi}-Gm_0\lambda\mathrm{d}\theta=-2\pi Gm_0\lambda$$

如圆环的质量为 m，则可写作

$$E_{\mathrm{p}}=-2\pi Gm_0\lambda=-\frac{Gm_0m}{R}$$

7. 一颗质量为 m 的人造地球卫星，沿半径为 R_1 圆形轨道运动，由于微小阻力，使其轨道半径收缩到 R_2。设地球质量为 m_{E}，试计算：（1）卫星动能、势能和机械能的变化；（2）引力作的功；（3）阻力作的功。

解 （1）卫星所受的地球引力提供其作圆周运动的向心力，则

$$\frac{Gmm_{\mathrm{E}}}{R^2}=\frac{mv^2}{R}$$

由此得卫星的动能为

$$E_{\mathrm{k}}=\frac{1}{2}mv^2=\frac{Gmm_{\mathrm{E}}}{2R}$$

动能的变化为

$$\Delta E_{\mathrm{k}}=\frac{Gmm_{\mathrm{E}}}{2R_2}-\frac{Gmm_{\mathrm{E}}}{2R_1}$$

势能的变化为

$$\Delta E_{\mathrm{p}}=(-\frac{Gmm_{\mathrm{E}}}{R_2})-(-\frac{Gmm_{\mathrm{E}}}{R_1})=-(\frac{Gmm_{\mathrm{E}}}{R_2}-\frac{Gmm_{\mathrm{E}}}{R_1})$$

上式表明：$\Delta E_{\mathrm{p}}=-2\Delta E_{\mathrm{k}}$。

机械能的变化

$$\Delta E=\Delta E_{\mathrm{k}}+\Delta E_{\mathrm{p}}=-\Delta E_{\mathrm{k}}=\frac{Gmm_{\mathrm{E}}}{2R_1}-\frac{Gmm_{\mathrm{E}}}{2R_2}$$

（2）引力是保守内力，它作的功等于势能的减少，即

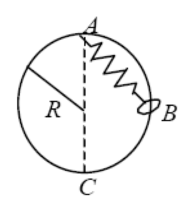
$$W_G=-\Delta E_{\mathrm{p}}=2\Delta E_{\mathrm{k}}=(\frac{Gmm_{\mathrm{E}}}{R_2}-\frac{Gmm_{\mathrm{E}}}{R_1})$$

（3）根据系统的功能原理，阻力作的功等于系统机械能的变化，即

$$W_{F_f}=\Delta E=-\Delta E_{\mathrm{k}}=\frac{Gmm_{\mathrm{E}}}{2R_1}-\frac{Gmm_{\mathrm{E}}}{2R_2}$$

我们可以看到，在这个过程中空气阻力作负功，地球引力作正功，且其值为阻力所作负功的绝对值的两倍。尽管系统机械能减少，但是卫星的动能增加了。

8. 弹簧原长等于光滑圆环半径R．当弹簧下端悬挂质量为m 的小环状重物时，弹簧的伸长也为R．现将弹簧一端系



计算题 8 图

于竖直放置的圆环上顶点A，将重物套在圆环的B 点，AB 长为 $1.6R$，如图所示．放手后重物由静止沿圆环滑动．求当重物滑到最低点C 时，重物的加速度和对圆环压力的大小．

解：重物沿圆环滑动过程中，只有重力和弹力做功，所以机械能守恒，如图所示，有：

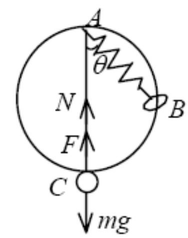
$$\frac{1}{2}k\Delta {l_B}^2 + mg(2R - 1.6R\cos\theta) = \frac{1}{2}k\Delta {l_C}^2 + \frac{1}{2}mv_C^2$$

其中 $\Delta l_B = 0.6R$， $\Delta l_C = R$， $\cos\theta = 1.6R/2R = 0.8$ 。

由题意可知：

$$mg = kR，即 k = mg/R$$

所以有：
$$v_C^2 = 0.8gR$$



重物在圆环C处所受的力为重力、弹力F和环的支持力N，都沿着竖直方向，所以重物在 C 点的加速度为：

$$a_C = \frac{v_C^2}{R}$$

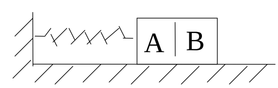
由牛顿第二定律有：

$$N + F - mg = ma_C = m\frac{v_C^2}{R}$$

其中 $F = kR = mg$ ，因此 $N = m\frac{v_C^2}{R}$ 。代入 v_C，可得 $a_C = 0.8g$

$$N = 0.8mg$$

9. 劲度系数为 360 $\mathrm{N\cdot m^{-1}}$ 的弹簧，右端系一质量为 0.25kg 的物体 A，左端固定于墙上，置于光滑水平台面上，物体 A 右方放一质量为 0.15kg 的物体 B，将 A、B 和弹簧一同压缩 0.2m，然后除去外力，求：(1) A、B 刚脱离时 B 的速度；(2) A、B 脱离后，A 继续向右运动的最大距离。



计算题 9 图

解：(1) 物体 AB 一起运动，机械能守恒，当两物体运动到弹簧原长位置时，两物体将要分离，此时两物体的速度 v 满足

$$\frac{1}{2}kx_1^2 = \frac{1}{2}(m_\mathrm{A} + m_\mathrm{B})v^2 \qquad v = x_1\sqrt{\frac{k}{(m_\mathrm{A} + m_\mathrm{B})}} = 6.0\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$$

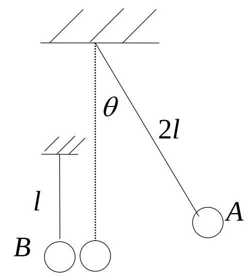
(2) 物体 A 向右运动的最大距离 x_2 满足

$$\frac{1}{2}kx_2^2=\frac{1}{2}m_{\mathrm{A}}v^2 \qquad\qquad x_2=v\sqrt{\frac{m_{\mathrm{A}}}{k}}=0.158\,\mathrm{m}$$

10. 如图所示，两根绳上分别挂有质量相等的两个小球，两球碰撞时的恢复系数 e = 0.5。球 A 由如图所示的静止状态释放，撞击球 B，刚好使球 B 到达绳成水平的位置，试证明球 A 释放前的张角 θ 应满足 $\cos\theta = 1/9$。

证：设球到达最低点速率为 v，则有

$$\frac{1}{2}mv^2=mg2l(1-\cos\theta)$$



计算题 10 图

得到

$$v=\sqrt{4gl(1-\cos\theta)}$$

设碰撞后两球速率为 v_A 、v_B，则有

$$e=\frac{v_B-v_A}{v}=0.5$$

$$v_B-v_A=\frac{v}{2}$$

由动量守恒

$$mv_B+mv_A=mv$$

由以上两式联立解得

$$v_B=\frac{3}{4}v$$

B 在碰撞后的运动中机械能守恒

$$\frac{1}{2}mv_B{}^2=mgl$$

即

$$\frac{1}{2}m\times\frac{9}{16}\times4gl(1-\cos\theta)=mgl$$

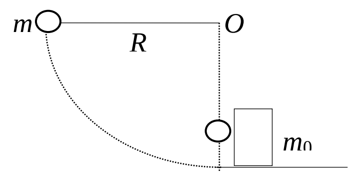
解得

$$\cos\theta=\frac{1}{9}$$

11. 如图所示，一质量为 m 的钢球，系在一长为 R 的绳一端，绳另一端固定，现将球由水平位置静止下摆，当球到达最低点时与质量为 m_0，静止于水平面上的钢块发生弹性碰撞，求碰撞后 m 和 m_0 的速率。

解：球下摆过程中机械能守恒　　$mgR = mv^2/2$

球速率



计算题 11 图

$$v=\sqrt{2gR}$$

碰撞前后动量守恒，设碰撞后 m 和 m_0 的速率分别为 v_1 和 v_2，所以

$$mv=mv_1+m_0v_2$$

因为发生弹性碰撞，所以碰撞中动能是守恒的

$$\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}mv_1{}^2+\frac{1}{2}m_0v_2{}^2$$

联之解得 $$v_1=\frac{m-m}{m+m_0}v=\frac{m-m_0}{m+m_0}\sqrt{2gR}$$

$$v_2=\frac{2mv}{m+m_0}=\frac{2m}{m+m_0}\sqrt{2gR}$$

12. 一质量为 m 的运动粒子与一质量为 km 的静止靶粒子作弹性对心碰撞，求靶粒子获得最大动能时的 k 值。

解：根据动量守恒 $mv_0=mv_1+kmv_2$ （1）

根据动能守恒 $\frac{1}{2}mv_0{}^2=\frac{1}{2}mv_1{}^2+\frac{1}{2}kmv_2{}^2$ （2）

由（1）式得到 $v_1=v_0-kv_2$，代入（2）式

$$v_0{}^2=(v_0-kv_2)^2+kv_2{}^2$$

$$v_2=\frac{2v_0}{k+1}$$

靶粒动能 $$E_k=\frac{1}{2}km\left(\frac{2v_0}{k+1}\right)^2$$

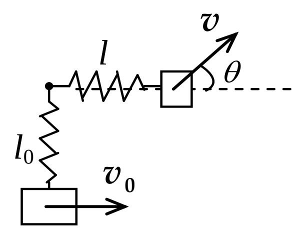
要使 E_k 最大，则 $$\frac{dE_k}{dk}=0$$

则有当 k=1 时，E_k 最大。

13. 在一光滑水平面上，有一轻弹簧，一端固定，一端连接一质量 m = 1 kg 的滑块，如图（俯视图）所示．弹簧自然长度 l_0= 0.2 m，劲度系数 k =100 N·m^{-1}. 设 t = 0 时，弹簧长度为 l_0，滑块速度 v_0 = 5 m·s^{-1}，方向与弹簧垂直．以后某一时刻，弹簧长度 l =0.5 m．求该时刻滑块速度的大小和夹角 θ .

解：滑块在运动过程中受到指向固定端的弹性力作用，因而它关于固定端的角动量守恒

$$mv_0 l_0 = mvl\sin\theta$$



计算题 13 图

同时，滑块与弹簧系统的机械能守恒

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}k(l-l_0)^2$$

联立解一时两式得到

$$v = \sqrt{v_0^2 - \frac{k(l-l_0)^2}{m}} = 4\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$$

$$\theta = \arcsin(\frac{v_0 l_0}{vl}) = 30°$$