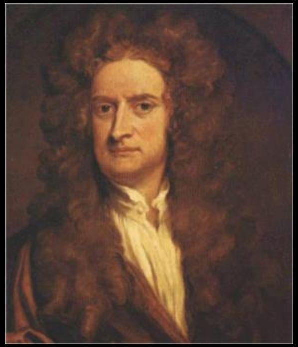
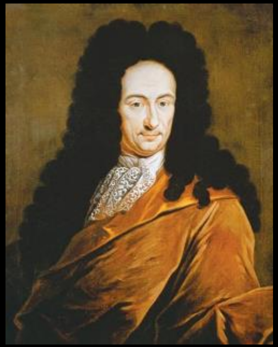
高等数学





4.4 有理、三角与无理函数积分

基础部数学教研室

郑治中

有理函数的积分

形如 $R(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}=\dfrac{a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n}{b_0+b_1x+\cdots+b_mx^m}$ 称为有理函数

注意：当$n<m$时，真分式；当$n>m$时，假分式。

例如：$\dfrac{x^2}{x+1}$ 是假分式

$\dfrac{x+1}{x^2+x+1}$ 是真分式

- 第一类积分

$$\int \frac{dx}{x^2+px+q} = I$$

当 $p^2-4q<0$

$$I = \int \frac{dx}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + \left(\frac{4q-p^2}{4}\right)}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{4q-p^2}} \arctan \frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{\frac{4q-p^2}{4}}} + C$$

- 第一类积分

$$\int \frac{dx}{x^2+px+q} = I$$

当 $p^2-4q>0$

$$I = \int \frac{dx}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{p^2-4q}{4}\right)}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{p^2-4q}} \ln \left| \frac{x+\frac{p}{2}-\sqrt{\frac{p^2-4q}{4}}}{x+\frac{p}{2}+\sqrt{\frac{p^2-4q}{4}}} \right| + C$$

- 第一类积分

$$\int \frac{dx}{x^2 + px + q} = I$$

当 $p^2 - 4q = 0$ $\quad I = \int \frac{dx}{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2} = -\frac{1}{x + \frac{p}{2}} + C$

练习：

$$\int \frac{dx}{x^2 + 2x + 2} \qquad \int \frac{dx}{x^2 + 2x + \frac{1}{2}} \qquad \int \frac{dx}{x^2 + 2x + 1}$$

- 第二类积分

$$\int \frac{mx+n}{x^2+px+q}dx$$

$$= \int \frac{\frac{m}{2}(2x+p)}{x^2+px+q}dx + \int \frac{n-\frac{mp}{2}}{x^2+px+q}dx$$

$$= \int \frac{\frac{m}{2}}{x^2+px+q}d(x^2+px) + \int \frac{n-\frac{mp}{2}}{x^2+px+q}dx$$

这样后一个积分可以转化为第一类积分！

根据多项式理论：

任一多项式$Q(x)$在实数范围内可以分解为一次因式和二次因式的乘积，即

$$Q(x) = b_0 + b_1 x + \cdots + b_m x^m$$

$$= b_{\mathrm{m}}(x-a)^{\alpha} \cdots (x-b)^{\beta} (x^2+px+q)^{\lambda} \cdots (x^2+rx+s)^{\mu}$$

因此$R(x)$可以分解为如下形式之和

$$\frac{A}{x-a}, \cdots, \frac{A_\alpha}{(x-a)^{\alpha}}, \cdots, \frac{m_1 x + n_1}{x^2+px+q}, \cdots, \frac{m_\lambda x + n_\lambda}{(x^2+px+q)^{\lambda}}, \cdots$$

$$
\begin{aligned}
R(x) = {} & \frac{A_1}{(x-a)^1} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \cdots + \frac{A_\alpha}{(x-a)^\alpha} + \cdots \\
& + \frac{B_1}{(x-b)^1} + \frac{B_2}{(x-b)^2} + \cdots + \frac{B_\beta}{(x-b)^\beta} + \cdots \\
& + \frac{m_1 x + n_1}{(x^2 + px + q)^1} + \frac{m_2 x + n_2}{(x^2 + px + q)^2} + \cdots + \frac{m_\lambda x + n_\lambda}{(x^2 + px + q)^\lambda} + \cdots \\
& + \frac{d_1 x + e_1}{(x^2 + rx + s)^1} + \frac{d_2 x + e_2}{(x^2 + rx + s)^2} + \cdots + \frac{d_\mu x + e_\mu}{(x^2 + rx + s)^\mu}
\end{aligned}
$$

1. 积分$\int\frac{dx}{x^2+px+q}$的求法 (考虑p^2-4q的符号)，例如

$$\int\frac{dx}{x^2+2x+2},\int\frac{dx}{x^2+2x+\frac{1}{2}},\int\frac{dx}{x^2+2x+1}$$

2. 积分$\int\frac{mx+n}{x^2+px+q}dx$的求法 (考虑$mx+n=\frac{m}{2}(2x+p)+(n-\frac{mp}{2})$)

$$\int\frac{mx+n}{x^2+px+q}dx=\int\frac{\frac{m}{2}d(x^2+px)}{x^2+px+q}+\int\frac{\left(n-\frac{mp}{2}\right)dx}{x^2+px+q}$$

例1 $$\int \frac{x+3}{x^2-5x+6}dx$$

例2 $$\int \frac{x-3}{x^2+2x+3}dx$$

例3 $\displaystyle\int \frac{x^2}{(x^2-1)^2}dx$

例4 $\displaystyle\int \frac{1}{(x^2+1)(x^2+x+1)}dx$

三角函数的积分

形如$R(\sin x,\cos x)$ 称为三角函数，其中$R(u,v)$是u,v的有理函数

万能公式法：$u=\tan\frac{x}{2}$， $\sin x=\frac{2u}{1+u^2}$， $\cos x=\frac{1-u^2}{1+u^2}$

$$dx=\frac{2}{1+u^2}du$$

例5 $\displaystyle\int\frac{dx}{3+\cos x}$ $\displaystyle\int\frac{1+\sin x}{1+\cos x}dx$

无理函数的积分

形如$R\left(x,\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)$称为无理函数

一般，令$t=\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$，将无理函数积分转化为有理函数积分

例6 $\int\frac{\sqrt{x-1}}{x}dx$ $\quad\int\frac{dx}{1+\sqrt[3]{x+2}}$ $\quad\int\frac{dx}{\sqrt{9x^2+12x-5}}$

例7 $$\int \frac{dx}{(1+\sqrt[3]{x})\sqrt{x}}$$ $$\int \frac{dx}{x-\sqrt[3]{3x+2}}$$

例8 $$\int \frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1}dx$$ $$\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}$$

例9 $\int \frac{\sqrt{1-x}}{x\sqrt{1+x}}dx$