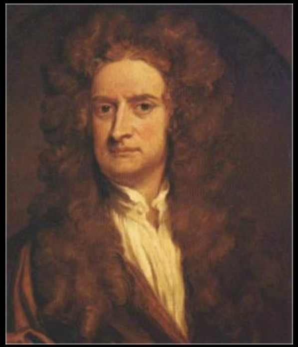
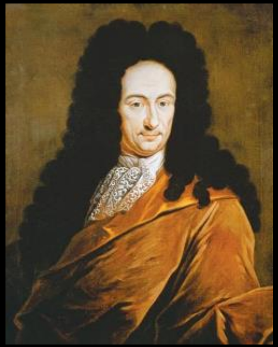
高等数学





3.2 洛必达法则

基础部数学教研室

郑治中

不定式极限的计算

$$\lim[f(x)-g(x)]=\infty-\infty \qquad \lim[f(x)g(x)]=0\cdot\infty$$

$$\lim\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{0}{0} \qquad \lim\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\infty}{\infty}$$

$\frac{0}{0}$ 型不定式极限 $\quad \lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1 \qquad \lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}=?$

$\frac{\infty}{\infty}$ 型不定式极限 $\quad \lim\limits_{x\to \infty}\frac{x+\sin x}{x-\sin x}=1 \qquad \lim\limits_{x\to +\infty}\frac{\ln x}{x}=?$

买论文?

洛必达

约翰•伯努利

柯西中值定理

洛必达法则

(柯西中值定理) 如果函数 $f(x)$和$\varphi(x)$满足

(1) 在闭区间$[a,b]$上连续;

(2) 在区间 (a,b)内可导, 且 $\varphi'(x) \neq 0,\ a < x < b$;

那么至少存在一点$\xi \in (a,b)$, 使

$$\frac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)} = \frac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)}.$$

求 $\frac{0}{0}$ 型不定式极限的洛必达法则

定理 1 设函数 $f(x), g(x)$ 在区间$(a, a+\delta)$ 内满足:

(1) $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \lim\limits_{x\to a^+} g(x) = 0$;

(2) $f(x), g(x)$ 在$(a, a+\delta)$ 内可导，且 $g'(x) \neq 0$;

(3) $\lim\limits_{x\to a^+} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在 (或 $\lim\limits_{x\to a^+} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \infty$) ;

则 $$\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} \left(或 \lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty\right).$$

注: (1) 对于 $x \to a^-$, $x \to a$ 的情形, 也有相应结论;

(2) 当 $x \to +\infty$ 时, 令 $t = \dfrac{1}{x}$,

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{t\to0^+}\frac{f\left(\frac{1}{t}\right)}{g\left(\frac{1}{t}\right)} = \lim_{t\to0^+}\frac{f'\left(\frac{1}{t}\right)\cdot\left(-\frac{1}{t^2}\right)}{g'\left(\frac{1}{t}\right)\cdot\left(-\frac{1}{t^2}\right)} = \lim_{t\to0^+}\frac{f'\left(\frac{1}{t}\right)}{g'\left(\frac{1}{t}\right)}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

对自变量变化的六种过程都成立

对于$x \to -\infty$, $x \to \infty$ 也有相应结论.

- 若 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=A$ 是否一定有 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=A$ ？

$$\lim_{x\to 0}\frac{(x+1)'}{x'}=1 \qquad \lim_{x\to 0}\frac{x+1}{x}=\infty$$

- 若 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ 不存在，能否得到 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 不存在

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(x^2\sin\frac{1}{x})'}{x'}$ 不存在 $\qquad \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\sin\frac{1}{x}}{x}$ 存在

例1 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}$ $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin x-\sin a}{x-a}$

例2 若 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-x}{x^2\sin x}$

例3 若 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\arctan x}{x^k}=c$ ，其中k,c为常数，且$c\neq 0$

求k,c值

例4 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3}{e^x}$ 及 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^n}{e^{\lambda x}}$ (n 为正整数，$\lambda>0$).

例5 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}$ 及 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln^3(x)}{x^\alpha}$ $(\alpha>0)$

例5 求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(a+x)^x-a^x}{x^2}$

例6 求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}-2x}{\tan^3 x}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{xe^{2x}+xe^x-2e^{2x}+2e^x}{(\mathrm{e}^x-1)^3}$$

例7 求 $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\frac{\ln\sin x}{(\pi-2x)^2}$

其他不定式极限的计算

其他不定式：$0\cdot\infty,\ \infty-\infty,\ 0^0,\ 1^\infty.$

例8 求下列极限

（1）$\lim\limits_{x\to1}(1-x^2)\tan\frac{\pi}{2}x$ $0\cdot\infty$

（2）$\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x\tan x}\right)$ $\infty-\infty$

（3）$\lim\limits_{x\to0^+}x^x$ 0^0

（4）$\lim\limits_{x\to0}(x^2+2^x)^{\frac{1}{x}}$ 1^∞

例9　求下列极限

（1）$\lim\limits_{x\to 0} e^{-\frac{1}{x^2}}x^{-100}$

（2）$\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)$

（3）$\lim\limits_{x\to 1}(2-x)^{\tan\frac{\pi}{2}x}$

（4）$\lim\limits_{x\to\infty}(\tan\frac{\pi x}{2x+1})^{\frac{1}{x}}$

例10 若$f''(a)$存在，求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(a+x)+f(a-x)-2f(a)}{x^2}$

例11 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{[\sin x-\sin(\sin x)]\sin x}{x^4}$

例12 若 $\{x_n\}$ 满足 $0<x_1<\pi, x_{n+1}=\sin x_n$

(1)证明 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在，并求该极限

(2)求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{x_{n+1}}{x_n}\right)^{\frac{1}{x_n^2}}$