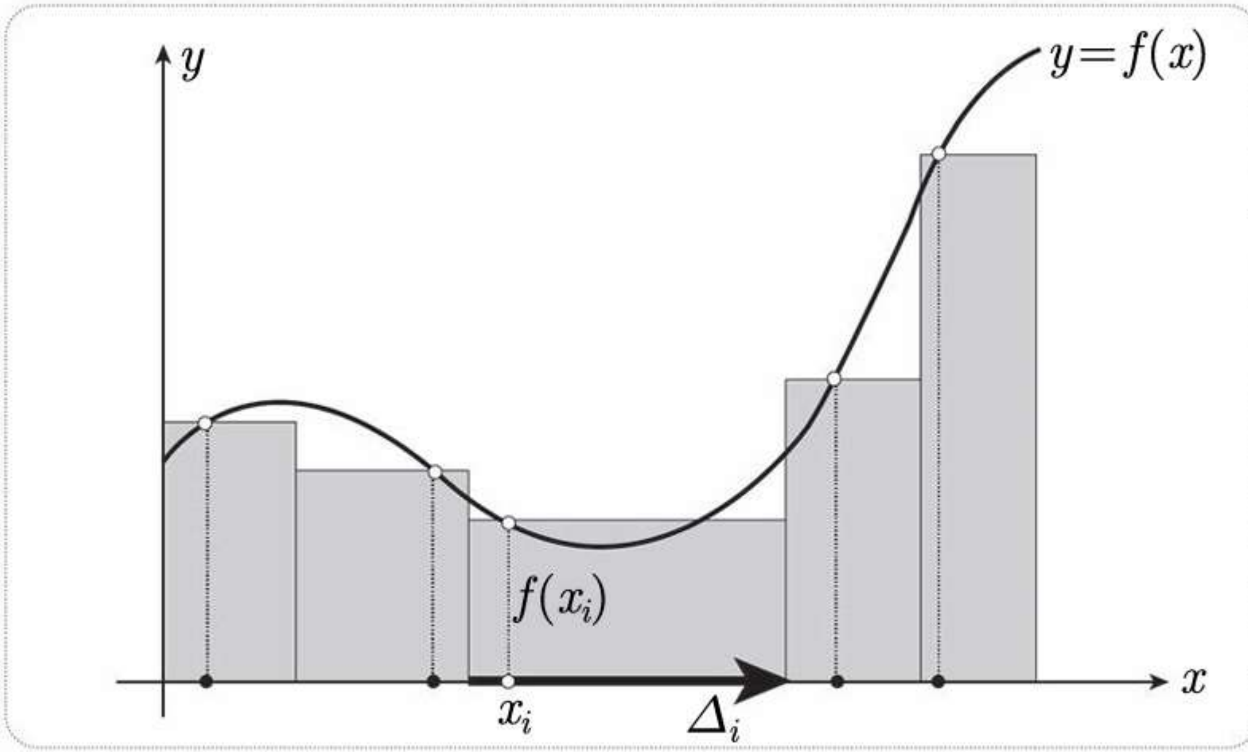
第一节 复变函数积分的概念

- 一、积分的定义
- 二、积分存在的条件及其计算法
- 三、积分的性质
- 四、小结与思考



$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta_i$$

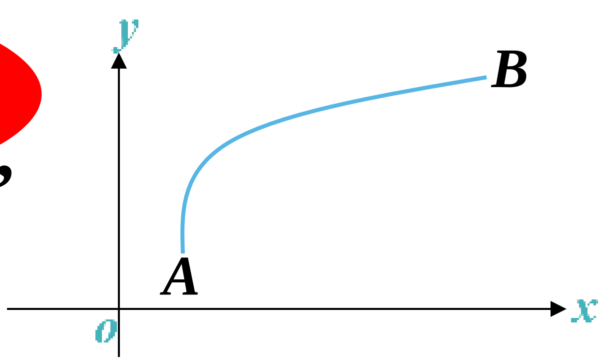
无限细分+无限求和

1. 有向曲线：

设C为平面上给定的一条光滑（或按段光滑）曲线，如果选定C的两个可能方向中的一个作为正方向（或正向），那么我们就把C理解为带有方向的曲线，称为**有向曲线**.

通常记起点到终点为曲线正向

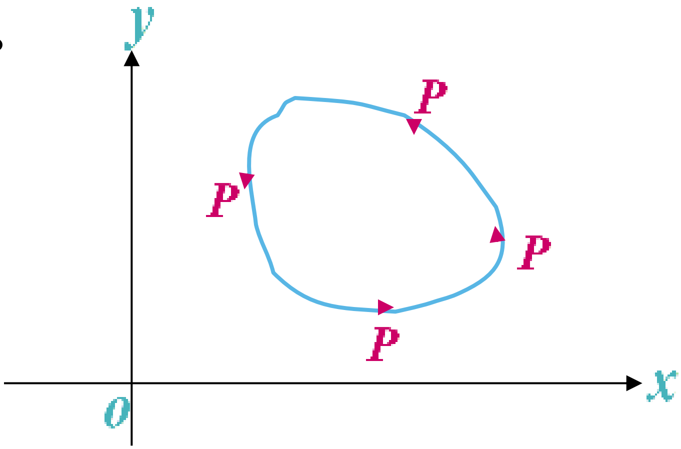
记为C^{-}.



逆时针

简单闭曲线正向的定义:

简单闭曲线C的正向是指当曲线上的点P顺此方向前进时, 邻近P点的曲线的内部始终位于P点的左方.



与之相反的方向就是曲线的负方向.

2. 积分的定义:

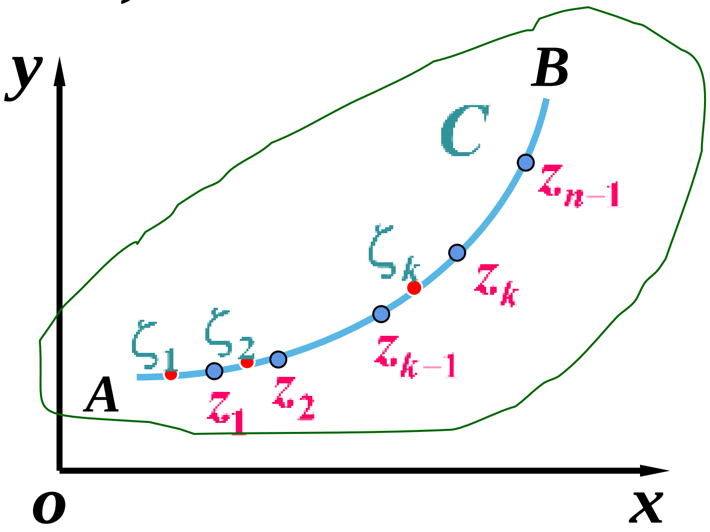
设函数 $w = f(z)$ 定义在区域 D 内, C 为区域 D 内起点为 A 终点为 B 的一条光滑的有向曲线, 把曲线 C 任意分成 n 个弧段, 设分点为

$$A = z_0, z_1, \cdots, z_{k-1}, z_k, \cdots, z_n = B,$$

在每个弧段 $\overset{\frown}{z_{k-1}z_k}$

$(k = 1,2,\cdots,n)$

上任意取一点 ζ_k,



作和式 $S_n = \sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\cdot(z_k - z_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\cdot\Delta z_k$,

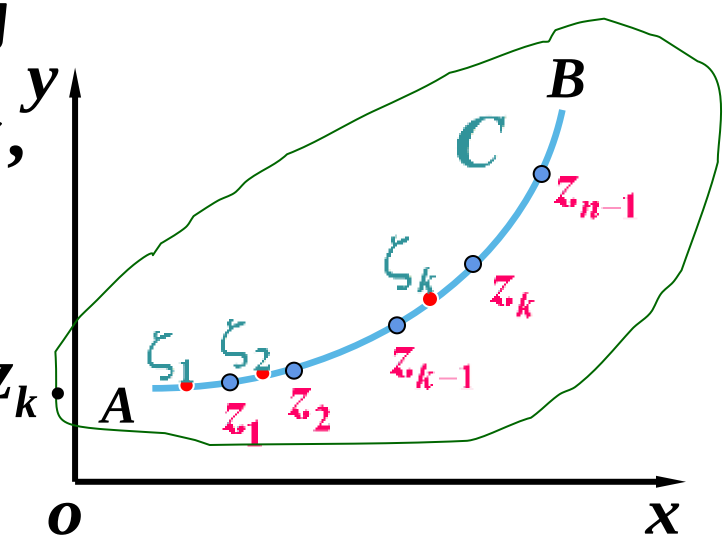
这里 $\Delta z_k = z_k - z_{k-1}$, $\Delta s_k = \overset{\frown}{z_{k-1}z_k}$的长度,

记 $\delta = \max\limits_{1\le k\le n}\{\Delta s_k\}$, 当 n 无限增加且 $\delta \to 0$ 时,

如果不论对 C 的分法及 ζ_k 的取法如何, S_n 有唯一极限,那么称这极限值为函数 $f(z)$ 沿曲线 C 的积分,

记为

$$\int_C f(z)\mathrm{d}z = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\cdot\Delta z_k.$$



注:

(1) 如果 C 是闭曲线, 那么沿此闭曲线的积分

记为 $\oint_C f(z)\mathrm{d}z$.

(2) 如果 C 是 x 轴上的区间 $a \le x \le b$, 而 $f(z) = u(x)$, 这个积分定义就是一元实变函数定积分的定义.

二、积分存在的条件及其计算法

1. 存在的条件

如果 $f(z)$ 是连续函数而 C 是光滑曲线时，积分 $\int_C f(z)\mathrm{d}z$ 一定存在.

证 设光滑曲线 C 的参数方程为

$$z = z(t) = x(t) + i\,y(t), \quad \alpha \le t \le \beta$$

并且 $z'(t) \neq 0, \quad \alpha < t < \beta,$

定义正方向为参数增加的方向,

参数 α 及 β 对应于起点 A 及终点 B,

如果 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 在 D 内处处连续,

那么 $u(x,y)$ 和 $v(x,y)$ 在 D 内均为连续函数,

设 $\zeta_k=\xi_k+i\eta_k$,

因为 $\Delta z_k=z_k-z_{k-1}=x_k+iy_k-(x_{k-1}+iy_{k-1})$

$$=(x_k-x_{k-1})+i(y_k-y_{k-1})$$

$$=\Delta x_k+i\Delta y_k,$$

所以 $\sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\cdot\Delta z_k$

$$=\sum_{k=1}^{n}[u(\xi_k,\eta_k)+iv(\xi_k,\eta_k)](\Delta x_k+i\Delta y_k)$$

$$=\sum_{k=1}^{n}[u(\xi_k,\eta_k)\Delta x_k-v(\xi_k,\eta_k)\Delta y_k]$$

$$+i\sum_{k=1}^{n}[v(\xi_k,\eta_k)\Delta x_k+u(\xi_k,\eta_k)\Delta y_k]$$

由于 u,v 都是连续函数,根据线积分的存在定理,

当 n 无限增大而弧段长度的最大值趋于零时，不论对 C 的分法任何，点 (ξ_k,η_k) 的取法如何，下式两端极限存在，

$$\sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\Delta z_k = \sum_{k=1}^{n}[u(\xi_k,\eta_k)\Delta x_k - v(\xi_k,\eta_k)\Delta y_k] + i\sum_{k=1}^{n}[v(\xi_k,\eta_k)\Delta x_k + u(\xi_k,\eta_k)\Delta y_k]$$

$$\int_C f(z)\mathrm{d}z = \int_C u\mathrm{d}x - v\mathrm{d}y + i\int_C v\mathrm{d}x + u\mathrm{d}y$$

公式 $\boxed{\int_C f(z)\mathrm{d}z = \int_C u\mathrm{d}x - v\mathrm{d}y + i\int_C v\mathrm{d}x + u\mathrm{d}y}$

在形式上可以看成是

$f(z) = u + iv$ 与 $\mathrm{d}z = \mathrm{d}x + i\mathrm{d}y$ 相乘后求积分得到:

$$\int_C f(z)\mathrm{d}z = \int_C (u + iv)(\mathrm{d}x + i\mathrm{d}y)$$

$$= \int_C u\mathrm{d}x + iv\mathrm{d}x + iu\mathrm{d}y - v\mathrm{d}y$$

$$= \int_C u\mathrm{d}x - v\mathrm{d}y + i\int_C v\mathrm{d}x + u\mathrm{d}y.$$

2. 积分的计算法

$\int_C f(z)\mathrm{d}z$ 可以通过两个二元实变函数的线积分来计算.

$$\int_C f(z)\mathrm{d}z = \int_\alpha^\beta \{u[x(t),y(t)]x'(t) - v[x(t),y(t)]y'(t)\}\mathrm{d}t$$

$$+ i\int_\alpha^\beta \{v[x(t),y(t)]x'(t) + u[x(t),y(t)]y'(t)\}\mathrm{d}t$$

$$= \int_\alpha^\beta \{u[x(t),y(t)] + iv[x(t),y(t)]\}\{x'(t) + iy'(t)\}\mathrm{d}t$$

$$= \int_\alpha^\beta f[z(t)]z'(t)\mathrm{d}t.$$

$$\int_C f(z)\mathrm{d}z = \int_\alpha^\beta f[z(t)]z'(t)\mathrm{d}t$$

1、找出积分路径的参数方程

2、化复变函数积分为一元函数定积分

如果 C 是由 $C_1, C_2, \cdots, C_n$ 等光滑曲线依次相互连接所组成的按段光滑曲线,则

$$\int_C f(z)\mathrm{d}z = \int_{C_1} f(z)\mathrm{d}z + \int_{C_2} f(z)\mathrm{d}z + \cdots + \int_{C_n} f(z)\mathrm{d}z.$$

例1 计算 $\int_C \mathbf{z}\mathrm{d}\mathbf{z}$, C : 从原点到点 $3+4i$ 的直线段.

解 直线方程为 $\begin{cases} x = 3t, \\ y = 4t, \end{cases}$ $0 \le t \le 1,$

在 C 上, $z = (3+4i)t,$ $\mathrm{d}z = (3+4i)\mathrm{d}t,$

$$\int_C \mathbf{z}\mathrm{d}\mathbf{z} = \int_0^1 (3+4i)^2 t\mathrm{d}t = (3+4i)^2 \int_0^1 t\mathrm{d}t$$

$$= \frac{(3+4i)^2}{2}.$$

又因为 $\int_C z\mathrm{d}z = \int_C (x+iy)(\mathrm{d}x + i\mathrm{d}y)$

$$\int_C z\mathrm{d}z = \underline{\underline{\int_C x\mathrm{d}x - y\mathrm{d}y}} + i\underline{\underline{\int_C y\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y}}$$

这两个积分都与路线C 无关

所以不论C 是怎样从原点连接到点$3+4i$的曲线,

$$\int_C z\mathrm{d}z = \frac{(3+4i)^2}{2}.$$

例2 计算 $\int_C \mathrm{Re}\, z\mathrm{d}z$, 其中 C 为:

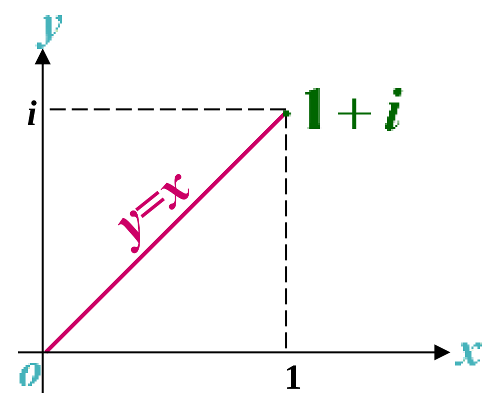
(1)从原点到点 $1+i$ 的直线段;

(2) 抛物线 $y=x^2$ 上从原点到点 $1+i$ 的弧段;

(3) 从原点沿 x 轴到点 1 再到 $1+i$ 的折线.

解 (1) 积分路径的参数方程为

$$z(t)=t+it \quad (0\le t\le 1),$$



于是 $\mathrm{Re}\, z=t,\quad \mathrm{d}z=(1+i)\mathrm{d}t,$

$$\int_C \mathrm{Re}\, z\mathrm{d}z=\int_0^1 t(1+i)\mathrm{d}t=\frac{1}{2}(1+i);$$

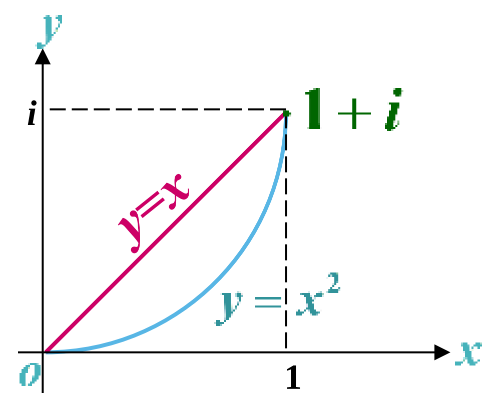
(2) 积分路径的参数方程为

$$z(t)=t+it^2 \quad (0\le t\le 1),$$

于是 $\mathrm{Re}\,z=t,\quad \mathrm{d}z=(1+2ti)\mathrm{d}t,$

$$\int_C \mathrm{Re}\,z\mathrm{d}z=\int_0^1 t(1+2it)\mathrm{d}t$$

$$=\left(\frac{t^2}{2}+\frac{2i}{3}t^3\right)\Bigg|_0^1=\frac{1}{2}+\frac{2}{3}i;$$



(3) 积分路径由两段直线段构成

x轴上直线段的参数方程为 $z(t)=t \quad (0\le t\le 1)$,

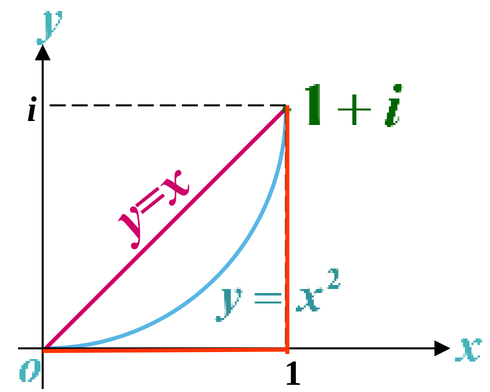
于是 $\mathrm{Re}\,z=t,\quad \mathrm{d}z=\mathrm{d}t$,

1到1+i直线段的参数方程为$z(t)=1+it\ (0\le t\le 1)$,

于是 $\mathrm{Re}\,z=1,\quad \mathrm{d}z=i\mathrm{d}t$,

$$\int_C \mathrm{Re}\,z\mathrm{d}z=\int_0^1 t\mathrm{d}t+\int_0^1 1\cdot i\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{2}+i.$$



$$\int_C f(z)\mathrm{d}z = \int_C u\mathrm{d}x - v\mathrm{d}y + i\int_C v\mathrm{d}x + u\mathrm{d}y$$

在形式上可以看成是

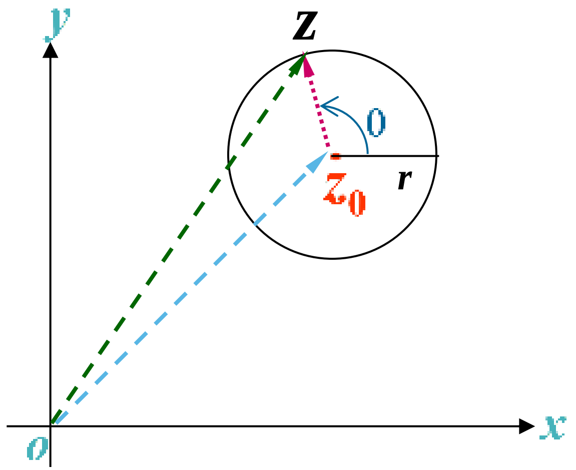
$f(z)=u+iv$ 与 $\mathrm{d}z=\mathrm{d}x+i\mathrm{d}y$ 相乘后求积分得到:

$$\int_C f(z)\mathrm{d}z = \int_C (u+iv)(\mathrm{d}x+i\mathrm{d}y)$$

$$= \int_C u\mathrm{d}x + iv\mathrm{d}x + iu\mathrm{d}y - v\mathrm{d}y$$

$$= \int_C u\mathrm{d}x - v\mathrm{d}y + i\int_C v\mathrm{d}x + u\mathrm{d}y.$$

例4 求 $\oint_C \frac{1}{(z-z_0)^{n+1}}\mathrm{d}z$，$C$ 为以 z_0 为中心，r 为半径的正向圆周，n 为整数.



解 积分路径的参数方程为

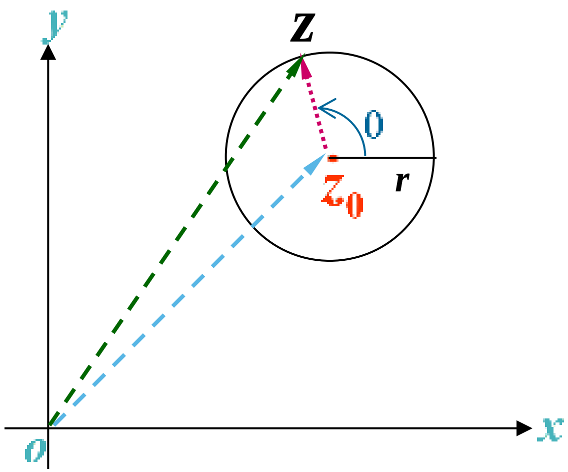
$$z = z_0 + re^{i\theta} \quad (0 \le \theta \le 2\pi),$$

$$\oint_C \frac{1}{(z-z_0)^{n+1}}\mathrm{d}z = \int_0^{2\pi} \frac{ire^{i\theta}}{r^{n+1}e^{i(n+1)\theta}}\mathrm{d}\theta$$

$$= \frac{i}{r^n}\int_0^{2\pi} e^{-in\theta}\mathrm{d}\theta,$$

当 $n=0$ 时,

$$\oint_C \frac{1}{(z-z_0)^{n+1}}\mathrm{d}z = i\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta = 2\pi i;$$



当 $n\neq 0$ 时,

$$\oint_C \frac{1}{(z-z_0)^{n+1}}\mathrm{d}z = \frac{i}{r^n}\int_0^{2\pi}(\cos n\theta - i\sin n\theta)\mathrm{d}\theta = 0;$$

所以 $$\boxed{\oint_{|z-z_0|=r} \frac{1}{(z-z_0)^{n+1}}\mathrm{d}z = \begin{cases} 2\pi i, & n=0, \\ 0, & n\neq 0. \end{cases}}$$

重要结论：积分值与路径圆周的中心和半径无关.

复积分与实变函数的定积分有类似的性质.

$$(1)\ \int_C f(z)\mathrm{d}z = -\int_{C^-} f(z)\mathrm{d}z;$$

$$(2)\ \int_C kf(z)\mathrm{d}z = k\int_C f(z)\mathrm{d}z; \quad (k\text{为常数})$$

$$(3)\ \int_C [f(z)\pm g(z)]\mathrm{d}z = \int_C f(z)\mathrm{d}z \pm \int_C g(z)\mathrm{d}z;$$

(4) 设曲线 C 的长度为 L, 函数 $f(z)$ 在 C 上满足

$|f(z)| \le M$, 那么 $\boxed{\left|\int_C f(z)\mathrm{d}z\right| \le \int_C |f(z)|\mathrm{d}s \le ML.}$

估值不等式

性质(4)的证明：

因为$|\Delta z_k|$是z_k与z_{k-1}两点之间的距离，

Δs_k为这两点之间弧段的长度，

所以 $\left|\sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\cdot\Delta z_k\right| \le \sum_{k=1}^{n} |f(\zeta_k)\cdot\Delta z_k| \le \sum_{k=1}^{n} |f(\zeta_k)|\cdot\Delta s_k$

两端取极限得 $\left|\int_C f(z)\mathrm{d}z\right| \le \int_C |f(z)|\mathrm{d}s.$

因为 $\sum_{k=1}^{n} |f(\zeta_k)|\cdot\Delta s_k \le M\sum_{k=1}^{n}\Delta s_k = ML,$

所以$\left|\int_C f(z)\mathrm{d}z\right| \le \int_C |f(z)|\mathrm{d}s \le ML.$

例5 设 C 为从原点到点 $3+4i$ 的直线段,

试求积分 $\int_C \frac{1}{z-i}\mathrm{d}z$ 绝对值的一个上界.

解 C 的参数方程为 $z=(3+4i)t$, $(0\le t\le 1)$

根据估值不等式知

$$\left|\int_C \frac{1}{z-i}\mathrm{d}z\right| \le \int_C \left|\frac{1}{z-i}\right|\mathrm{d}s$$

因为在 C 上, $\left|\frac{1}{z-i}\right| = \frac{1}{|3t+(4t-1)i|}$

$$=\frac{1}{\sqrt{(3t)^2+(4t-1)^2}}=\frac{1}{\sqrt{25\left(t-\frac{4}{25}\right)^2+\frac{9}{25}}}\leq\frac{5}{3},$$

$$从而\ \left|\int_C\frac{1}{z-i}\mathrm{d}z\right|\leq\frac{5}{3}\underbrace{\int_C \mathrm{d}s}_{=5}=\frac{25}{3}$$

$$故\ \left|\int_C\frac{1}{z-i}\mathrm{d}z\right|\leq\frac{25}{3}.$$