(4)一些函数在特殊点处或无穷远处，如 $\cot x$ 在 $x=0$ 处，$\tan x$ 在 $x=\frac{\pi}{2}$ 处；$a^x(a>0,a\neq1)$，e^x，$\arctan x$，$\operatorname{arccot} x$ 当 $x\to\infty$时，应特别注意事实：$\lim\limits_{x\to0^+}a^{\frac{1}{x}}=+\infty$，$\lim\limits_{x\to0^-}a^{\frac{1}{x}}=0\ (a>1)$.

例如，若 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{3^{\frac{1}{x}}-1}{3^{\frac{1}{x}}+1}, & x\neq0,\\ 2, & x=0,\end{cases}$ 则$\lim\limits_{x\to0}f(x)$不存在.

事实上，$f(0^+)=\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{3^{\frac{1}{x}}-1}{3^{\frac{1}{x}}+1}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1-\dfrac{1}{3^{\frac{1}{x}}}}{1+\dfrac{1}{3^{\frac{1}{x}}}}=1$，

$$f(0^-)=\lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^-}\frac{3^{\frac{1}{x}}-1}{3^{\frac{1}{x}}+1}=\lim_{x\to0^-}\frac{0-1}{0+1}=-1.$$

习题 1—3 解答

1. 对图 1—8 所示的函数 $f(x)$，求下列极限，如极限不存在，说明理由.

(1) $\lim\limits_{x\to-2}f(x)$；　(2) $\lim\limits_{x\to-1}f(x)$；　(3) $\lim\limits_{x\to0}f(x)$.

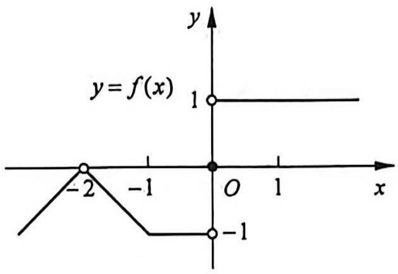

图 1—8

解　(1) $\lim\limits_{x\to-2})f(x)=0$.

(2) $\lim\limits_{x\to-1}f(x)=-1$

(3) $\lim\limits_{x\to0}f(x)$不存在，因为 $f(0^+)\neq f(0^-)$.

2. 对图 1—9 所示的函数 $f(x)$，下列陈述中哪些是对的，哪些是错的？

(1) $\lim\limits_{x\to0}f(x)$不存在；　(2) $\lim\limits_{x\to0}f(x)=0$；

(3) $\lim\limits_{x\to0}f(x)=1$；　(4) $\lim\limits_{x\to1}f(x)=0$；

(5) $\lim\limits_{x\to1}f(x)$不存在；

(6) 对每个 $x_0\in(-1,1)$，$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$存在.

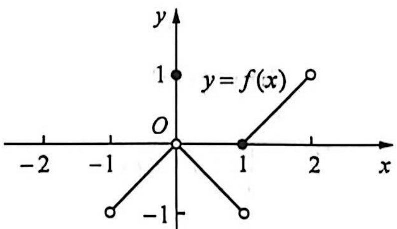

图 1—9

解　(1)错，$\lim\limits_{x\to0}f(x)$存在与否，与 $f(0)$的值无关.

(2)对，因为 $f(0^+)=f(0^-)=0$.

(3)错，$\lim\limits_{x\to0}f(x)$的值与 $f(0)$ 的值无关.

(4)错，$f(1^+)=0$，但 $f(1^-)=-1$，故$\lim\limits_{x\to1}f(x)$不存在

(5)对，因为 $f(1^-)\neq f(1^+)$.

(6)对.

3. 对图 1—10 所示的函数，下列陈述中哪些是对的，哪些是错的？

(1) $\lim\limits_{x\to-1^+}f(x)=1$；　(2) $\lim\limits_{x\to-1^-}f(x)$不存在；

(3) $\lim\limits_{x\to0}f(x)=0$；　(4) $\lim\limits_{x\to0}f(x)=1$；

(5) $\lim\limits_{x\to1^-}=1$；　(6) $\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=0$；

(7) $\lim\limits_{x\to2^-}f(x)=0$；　(8) $\lim\limits_{x\to2}f(x)=0$.

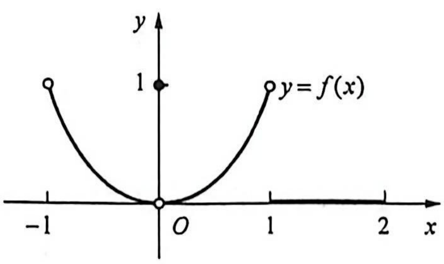

图 1—10

解　(1)对.

(2)对,因为当 $x<-1$ 时, $f(x)$无定义.

(3)对,因为 $f(0^+)=f(0^-)=0$.

(4)错, $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$的值与 $f(0)$ 的值无关.

(5)对.

(6)对.

(7)对.

(8)错,因为当 $x>2$ 时, $f(x)$无定义, $f(2^+)$不存在.

4.求 $f(x)=\dfrac{x}{x}$, $\varphi(x)=\dfrac{|x|}{x}$,当 $x\to 0$ 时的左、右极限,并说明它们在 $x\to 0$ 时的极限是否存在.

解 $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}1=1$, $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{x}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}1=1$.

因为, $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=1=\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)$,所以$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=1$.

$$\lim_{x\to 0^+}\varphi(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{|x|}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{x}=1,\quad \lim_{x\to 0^-}\varphi(x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{|x|}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{-x}{x}=-1.$$

因为 $\lim\limits_{x\to 0^+}\varphi(x)\neq\lim\limits_{x\to 0^-}\varphi(x)$,所以$\lim\limits_{x\to 0}\varphi(x)$不存在.

*5.根据函数极限的定义证明:

(1)$\lim\limits_{x\to 3}(3x-1)=8$; (2)$\lim\limits_{x\to 2}(5x+2)=12$; (3) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2-4}{x+2}=-4$; (4) $\lim\limits_{x\to -\frac{1}{2}}\dfrac{1-4x^2}{2x+1}=2$.

解 (1)因为$|(3x-1)-8|=|3x-9|=3|x-3|$,要使$|(3x-1)-8|<\varepsilon$,只要$|x-3|<\dfrac{\varepsilon}{3}$,所以$\forall\varepsilon>0$,取 $\delta=\dfrac{\varepsilon}{3}$,则当 $0<|x-3|<\delta$ 时,就有$|(3x-1)-8|<\varepsilon$,即$\lim\limits_{x\to 3}(3x-1)=8$.

(2)因为$|(5x+2)-12|=|5x-10|=5|x-2|$,要使$|(5x+2)-12|<\varepsilon$,只要$|x-2|<\dfrac{\varepsilon}{5}$,所以$\forall\varepsilon>0$,取 $\delta=\dfrac{\varepsilon}{5}$,则当 $0<|x-2|<\delta$ 时,就有$|(5x+2)-12|<\varepsilon$,即$\lim\limits_{x\to 2}(5x+2)=12$.

(3)因为 $x\to-2$, $x\neq-2$, $\left|\dfrac{x^2-4}{x+2}-(-4)\right|=|x-2-(-4)|=|x+2|=|x-(-2)|$,

要使$\left|\dfrac{x^2-4}{x+2}-(-4)\right|<\varepsilon$,只要$|x-(-2)|<\varepsilon$,所以$\forall\varepsilon>0$,取 $\delta=\varepsilon$,则当 $0<|x-(-2)|<\delta$ 时,

就有$\left|\dfrac{x^2-4}{x+2}-(-4)\right|<\varepsilon$,即 $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x^2-4}{x+2}=-4$.

(4)因为 $x\to-\dfrac{1}{2}$, $x\neq-\dfrac{1}{2}$, $\left|\dfrac{1-4x^2}{2x+1}-2\right|=|1-2x-2|=2\left|x-\left(-\dfrac{1}{2}\right)\right|$,

要使 $\left|\dfrac{1-4x^2}{2x+1}-2\right|<\varepsilon$, 只要 $\left|x-\left(-\dfrac{1}{2}\right)\right|<\dfrac{\varepsilon}{2}$, 所以 $\forall\varepsilon>0$, 取 $\delta=\dfrac{\varepsilon}{2}$, 则当 $0<\left|x-\left(-\dfrac{1}{2}\right)\right|<\delta$ 时,就有$\left|\dfrac{1-4x^2}{2x+1}-2\right|<\varepsilon$,即 $\lim\limits_{x\to-\frac{1}{2}}\dfrac{1-4x^2}{2x+1}=2$.

*6.根据函数极限的定义证明:

(1)$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+x^3}{2x^3}=\dfrac{1}{2}$; (2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}=0$.

证 (1)因为$\left|\dfrac{1+x^3}{2x^3}-\dfrac{1}{2}\right|=\dfrac{1}{2|x|^3}$.要使$\left|\dfrac{1+x^3}{2x^3}-\dfrac{1}{2}\right|<\varepsilon$,只要$\dfrac{1}{2|x|^3}<\varepsilon$,即$|x|>\dfrac{1}{\sqrt[3]{2\varepsilon}}$,所以$\forall\varepsilon>0$,取 $X=\dfrac{1}{\sqrt[3]{2\varepsilon}}$,则当$|x|>X$ 时,就有$\left|\dfrac{1+x^3}{2x^3}-\dfrac{1}{2}\right|<\varepsilon$,即$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+x^3}{2x^3}=\dfrac{1}{2}$.

(2)因为$\left|\dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}-0\right|\leqslant\dfrac{1}{\sqrt{x}}$,要使$\left|\dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}-0\right|<\varepsilon$,只要$\dfrac{1}{\sqrt{x}}<\varepsilon$,即$x>\dfrac{1}{\varepsilon^2}$,所以$\forall\varepsilon>0$,取$X=\dfrac{1}{\varepsilon^2}$,则当$x>X$时,就有$\left|\dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}-0\right|<\varepsilon$,即$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}=0$.

*7. 当$x\to2$时,$y=x^2\to4$.问δ等于多少,使当$|x-2|<\delta$时,$|y-4|<0.001$?

解 由于$x\to2$,$|x-2|\to0$,不妨设$|x-2|<1$,即$1<x<3$.

要使$|x^2-4|=|x+2||x-2|<5|x-2|<0.001$,只要$|x-2|<\dfrac{0.001}{5}=0.000\,2$;

取$\delta=0.000\,2$,则当$0<|x-2|<\delta$时,就有$|x^2-4|<0.001$.

> **评注**:先限定$|x-2|<1$,其目的是在$|x^2-4|=|x+2||x-2|$中,将$|x+2|$放大为5,从而去掉因子$|x+2|$,再令$5|x-2|<\varepsilon$,由此可以求出$|x-2|<\dfrac{\varepsilon}{5}$,从而找到$\delta$.这在按定义证明极限时,也是经常采用的一种方法.

*8. 当$x\to\infty$时,$y=\dfrac{x^2-1}{x^2+3}\to1$.问$X$等于多少,使当$|x|>X$时,$|y-1|<0.01$?

解 因为$\left|\dfrac{x^2-1}{x^2+3}-1\right|=\dfrac{4}{x^2+3}<\dfrac{4}{x^2}$,要使$\left|\dfrac{x^2-1}{x^2+3}-1\right|<0.01$,只要$\dfrac{4}{x^2}<0.01$,即$|x|>20$,取$X=20$,则当$|x|>X$时,就有$|y-1|<0.01$.

*9. 证明函数$f(x)=|x|$当$x\to0$时极限为零.

证 因为$||x|-0|=|x|=|x-0|$,所以$\forall\varepsilon>0$,取$\delta=\varepsilon$,则当$0<|x-0|<\delta$时,就有$||x|-0|<\varepsilon$,即$\lim\limits_{x\to0}|x|=0$.

*10. 证明:若$x\to+\infty$及$x\to-\infty$时,函数$f(x)$的极限都存在且都等于A,则$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$.

证 因为$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$,所以$\forall\varepsilon>0$,$\exists X_1>0$,当$x>X_1$时,就有$|f(x)-A|<\varepsilon$.

又因为$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$,所以对上面的$\varepsilon>0$,$\exists X_2>0$,当$x<-X_2$时,就有$|f(x)-A|<\varepsilon$.

取$X=\max\{X_1,X_2\}$,则当$|x|>X$,即$x>X$或$x<-X$时,就有$|f(x)-A|<\varepsilon$,即$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$.

*11. 根据函数极限的定义证明:函数$f(x)$当$x\to x_0$时极限存在的充分必要条件是左极限、右极限各自存在并且相等.

11 题视频解析

证 必要性 若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$,则$\forall\varepsilon>0$,$\exists\delta>0$,当$0<|x-x_0|<\delta$时,就有$|f(x)-A|<\varepsilon$.

特别,当$0<x-x_0<\delta$时,有$|f(x)-A|<\varepsilon$,即$\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=A$;当$0<x_0-x<\delta$时,有$|f(x)-A|<\varepsilon$,即$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=A$.

充分性 若$\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=A=\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$,则$\forall\varepsilon>0$,$\exists\delta_1>0$,当$0<x-x_0<\delta_1$时,就有$|f(x)-A|<\varepsilon$;又$\exists\delta_2>0$,当$0<x_0-x<\delta_2$时,就有$|f(x)-A|<\varepsilon$,取$\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$,则当$0<|x-x_0|<\delta$时,就有$|f(x)-A|<\varepsilon$,即$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$.

*12. 试给出$x\to\infty$时函数极限的局部有界性的定理,并加以证明.

12 题视频解析

解 局部有界性定理 如果$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$,那么存在常数$M>0$和$X>0$,使得当$|x|>X$时,有$|f(x)|\leqslant M$.

证明如下:因为$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$,所以对$\varepsilon=1>0$,$\exists X>0$,当$|x|>X$时,就有$|f(x)-A|<1$,从而$|f(x)|\leqslant|f(x)-A|+|A|<1+|A|$,

取$M=|A|+1$,即有当$|x|>X$时,$|f(x)|\leqslant M$.