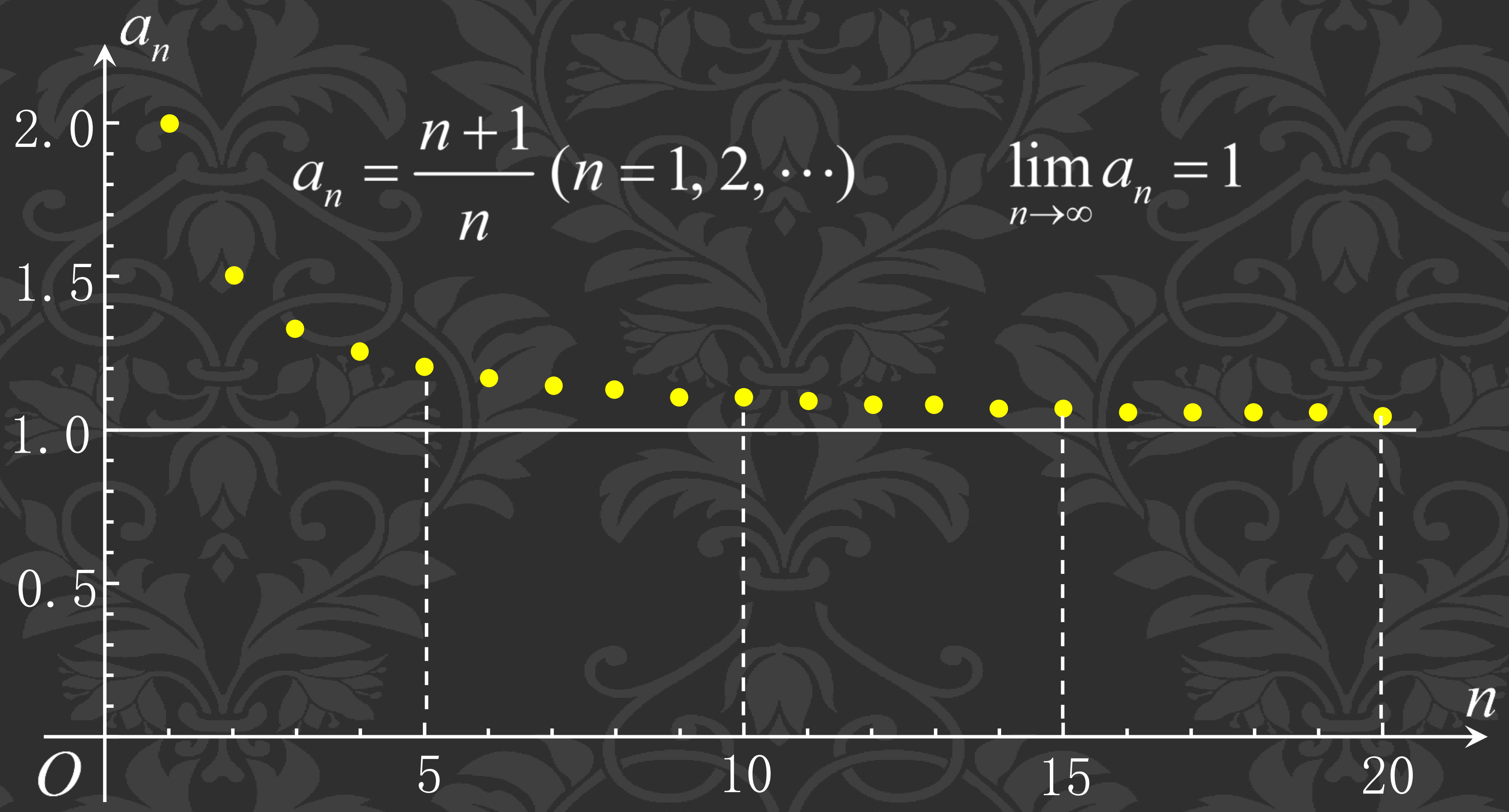
3 函数极限的概念

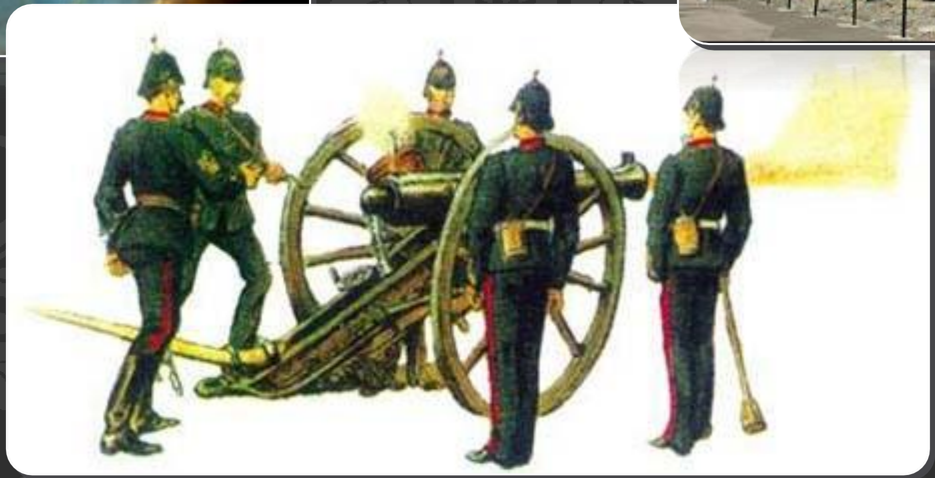
数列的极限



$a_n = \frac{n+1}{n} \quad (n = 1, 2, \cdots)$
$\lim_{n\to\infty} a_n = 1$
a_n
2. 0
1. 5
1. 0
0. 5
O
5
10
15
20
n

天体运动

航海



炮弹发射

连续变量的变化过程

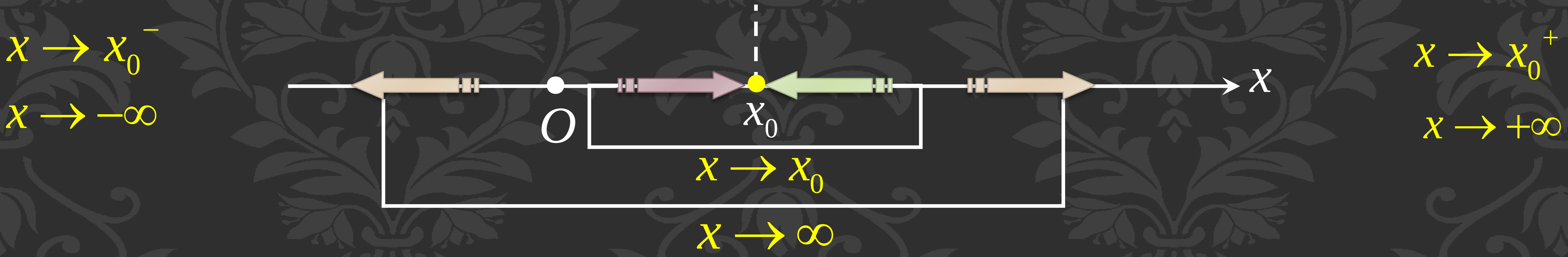
函数极限例子

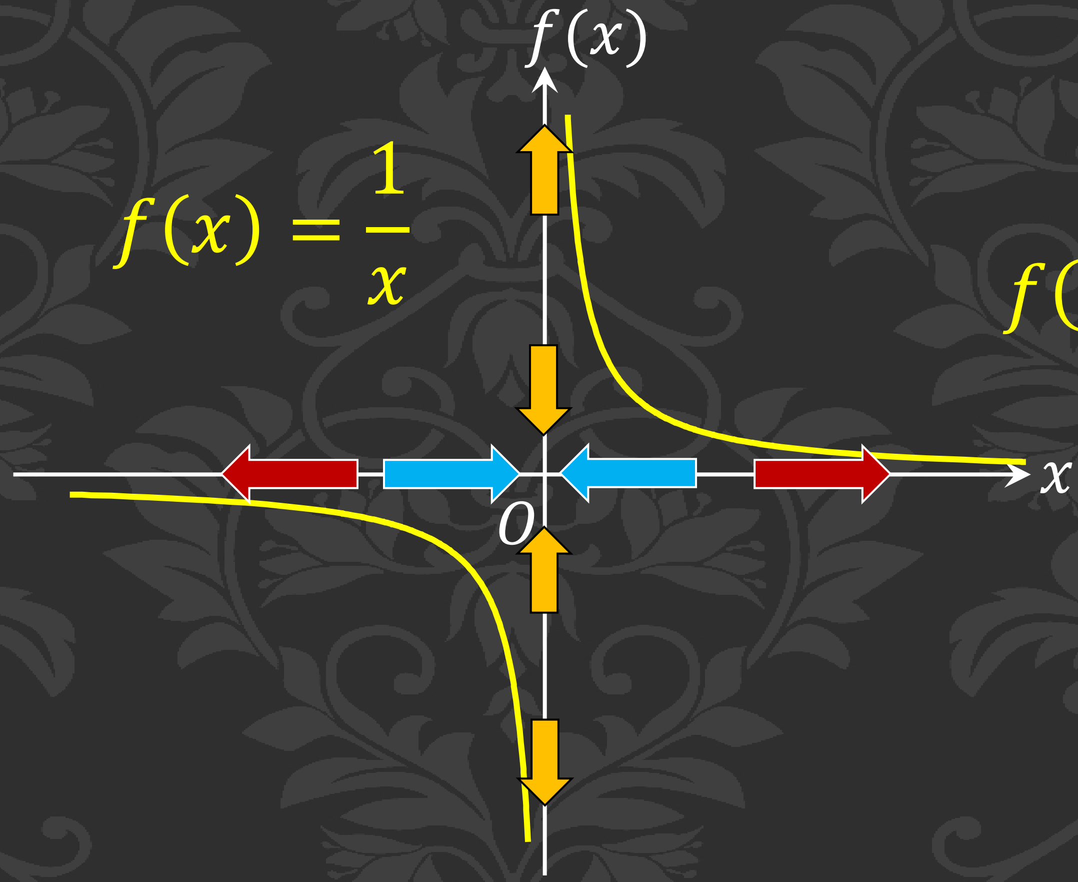
函数极限的定义

函数 $y=f(x)$ 自变量 x 变化过程有六种形式：

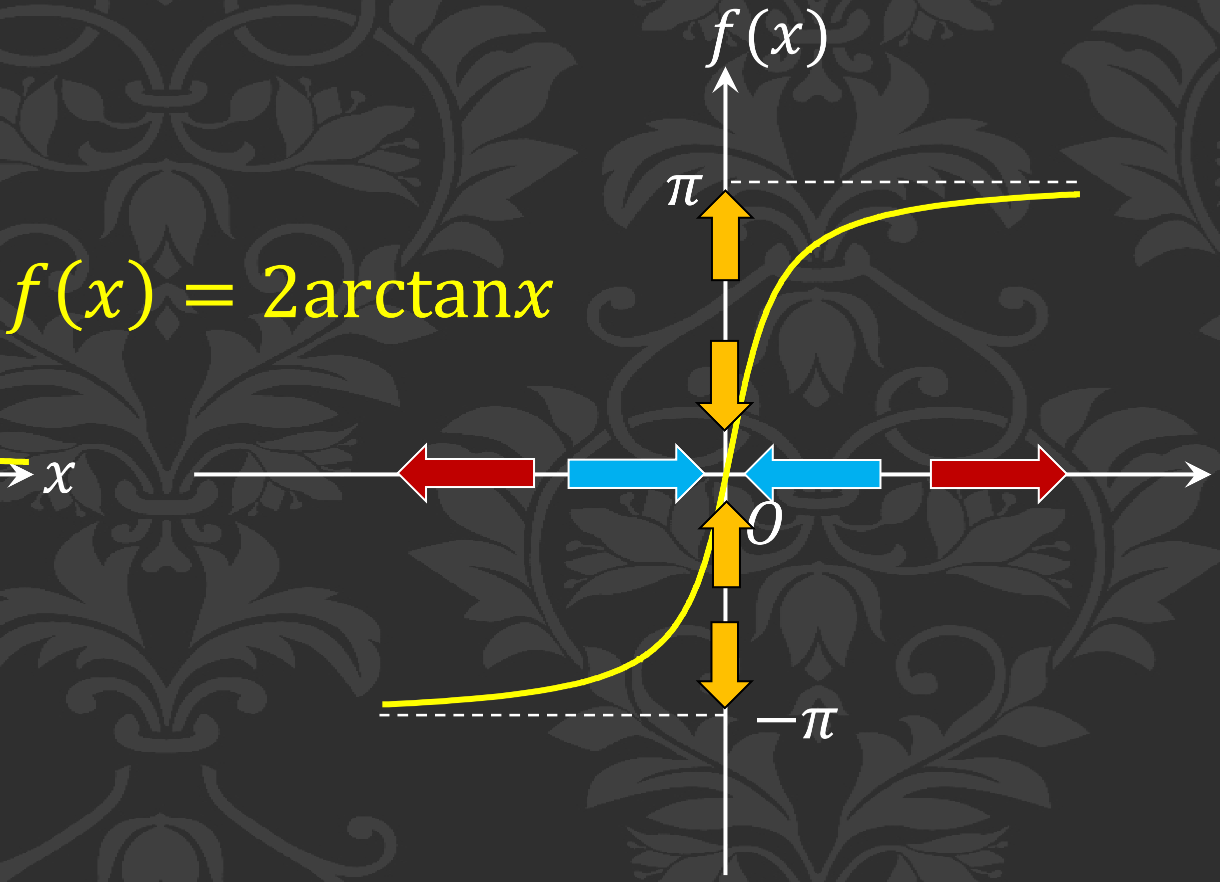
(1) $x \to -\infty$　(2) $x \to +\infty$　(3) $x \to \infty$

(4) $x \to x_0^-$　(5) $x \to x_0^+$　(6) $x \to x_0$





$f(x) = \frac{1}{x}$
$f(x)$
x
O



$f(x) = 2\arctan x$
$f(x)$
π
$-\pi$
x
O

函数关于过程$x \to +\infty$的描述性定义

描述性定义 当$x \to +\infty$时，函数$f(x)$无限接近于定值A，则A称为函数$f(x)$当$x \to +\infty$时的极限。

数列极限$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$的定义：对于任何给定的正数$\varepsilon$，存在正整数$N$，当$n > N$时，恒有$|a_n - a| < \varepsilon.$

函数关于过程$x \to +\infty$的极限定义

定义1 设函数$f(x)$在 x 大于某一正数时有定义，若存在常数A，使得对任意给定的正数 ε，存在正数X，当 $x > X$ 时，恒有

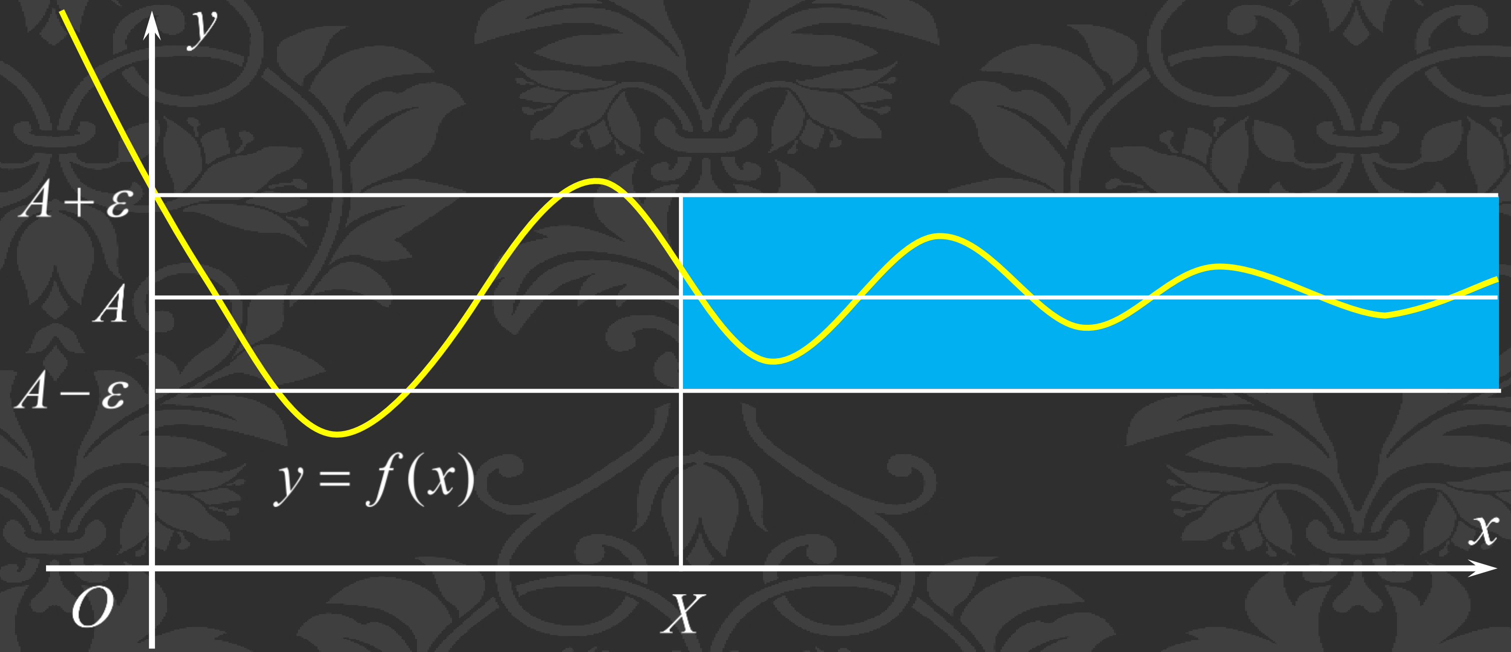
$$|f(x) - A| < \varepsilon,$$

则称函数$f(x)$当 自变量x趋于无穷大（即 $x \to +\infty$）时存在极限A，记为 $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = A$或$f(x) \to A$(当$x \to +\infty$).

极限 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A$ 定义简洁形式:

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0,\ \exists X > 0$, 当$x > X$ 时, 恒有$|f(x) - A| < \varepsilon$.

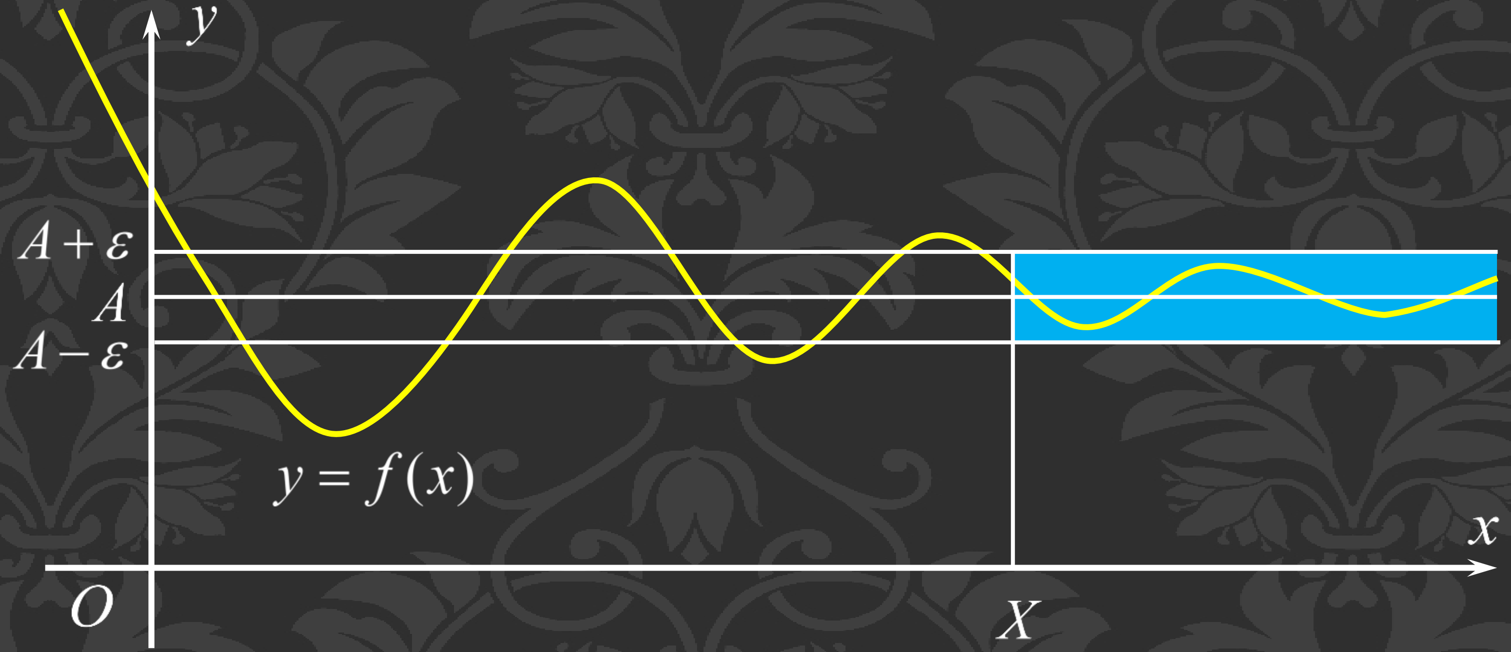
极限 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A$ 定义的几何解释



极限 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A$ 定义简洁形式：

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0,\ \exists X > 0$, 当$x > X$ 时, 恒有$|f(x) - A| < \varepsilon$.

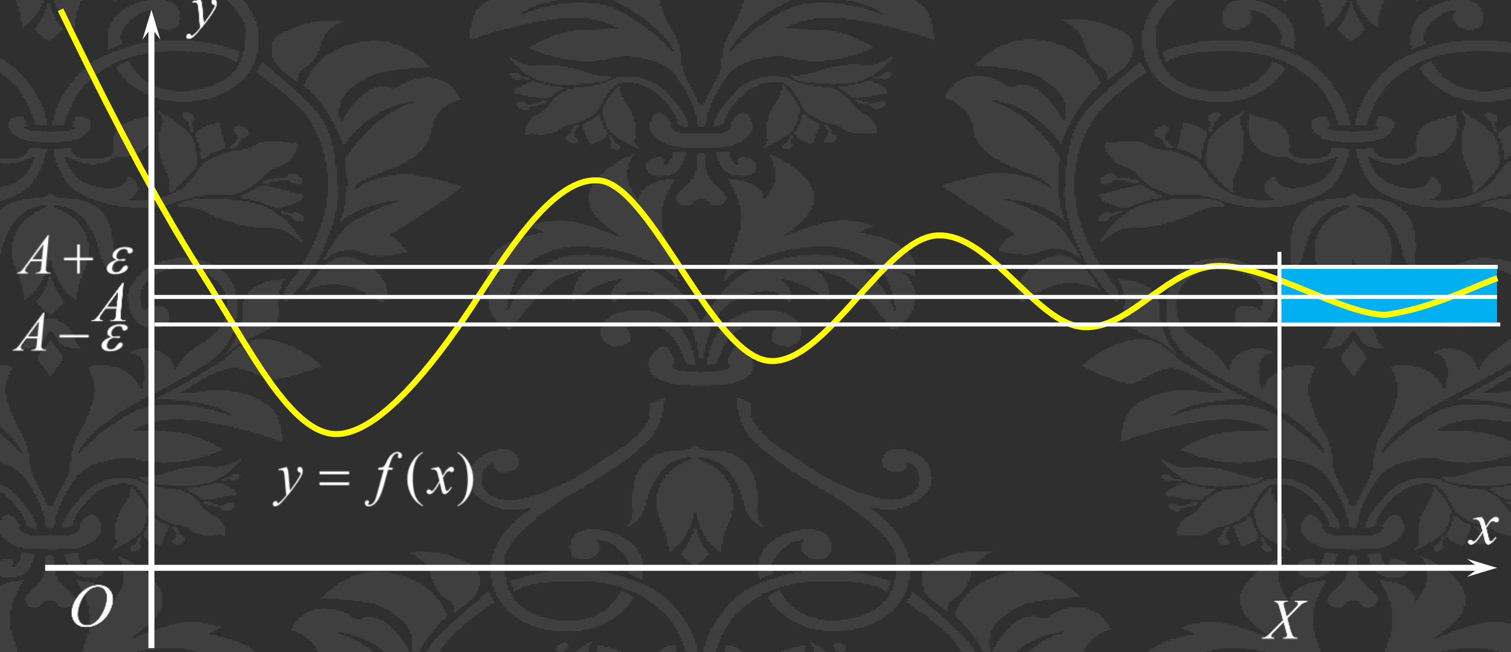
极限 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A$ 定义的几何解释



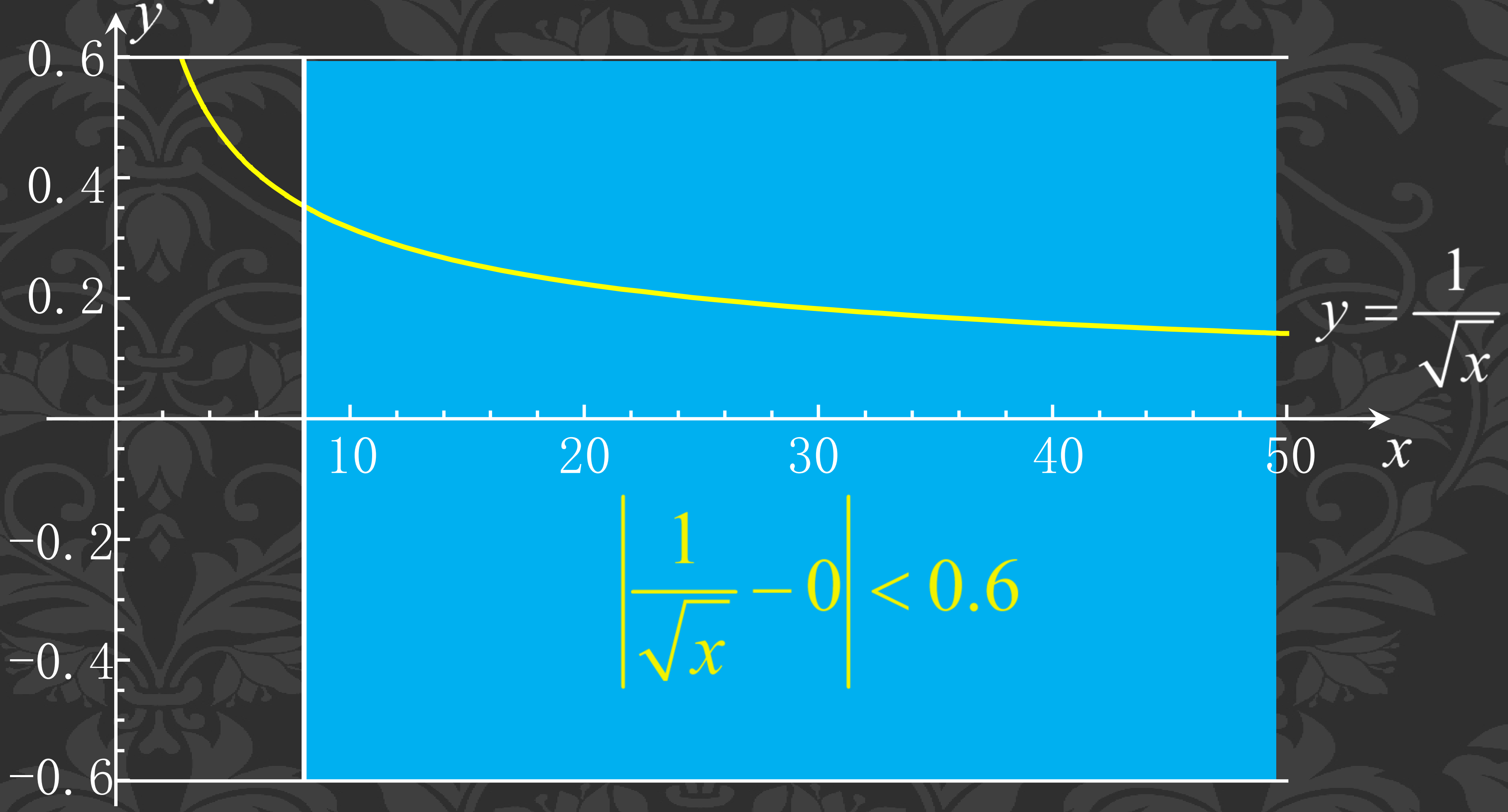
极限 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A$ 定义简洁形式：

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0,\ \exists X > 0,$ 当$x > X$ 时，恒有$|f(x) - A| < \varepsilon.$

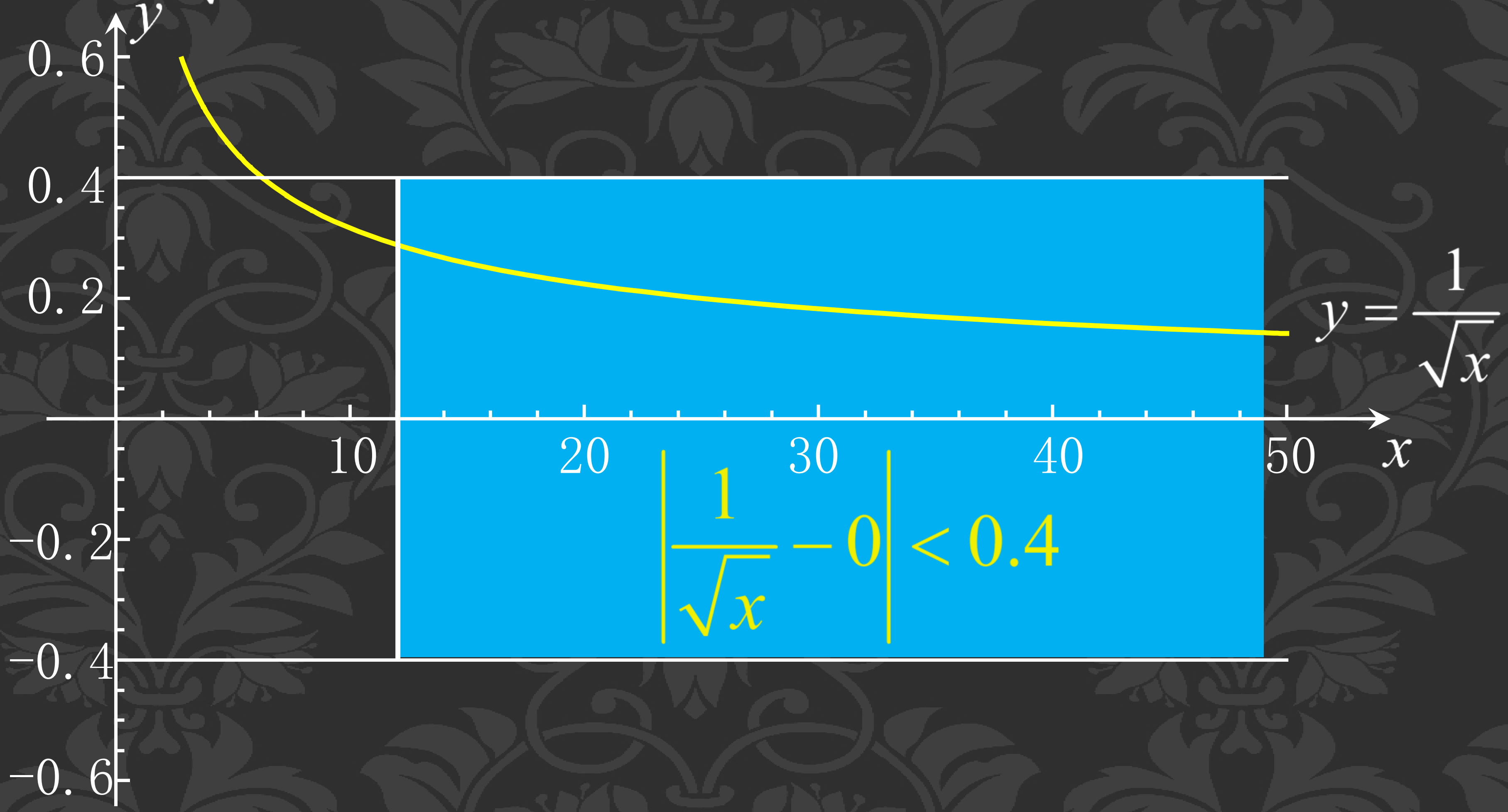
极限 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A$ 定义的几何解释



例1 证明 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}=0.$



例1 证明 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}=0.$



例2 证明 $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{1+x^2} = 0.$

例3 证明 $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} = 0\ .$

函数在无穷远处极限定义一览

极 限	定 义
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A$	$\forall\varepsilon > 0$，$\exists X > 0$，当 $x > X$ 时，$\lvert f(x) - A\rvert < \varepsilon$

函数在无穷远处极限定义一览

极　限	定　义
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$	$\forall\varepsilon>0$，$\exists X>0$，当 $x>X$ 时，$\lvert f(x)-A\rvert<\varepsilon$
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=A$	$\forall\varepsilon>0$，$\exists X>0$，当 $x<-X$ 时，$\lvert f(x)-A\rvert<\varepsilon$

函数在无穷远处极限定义一览

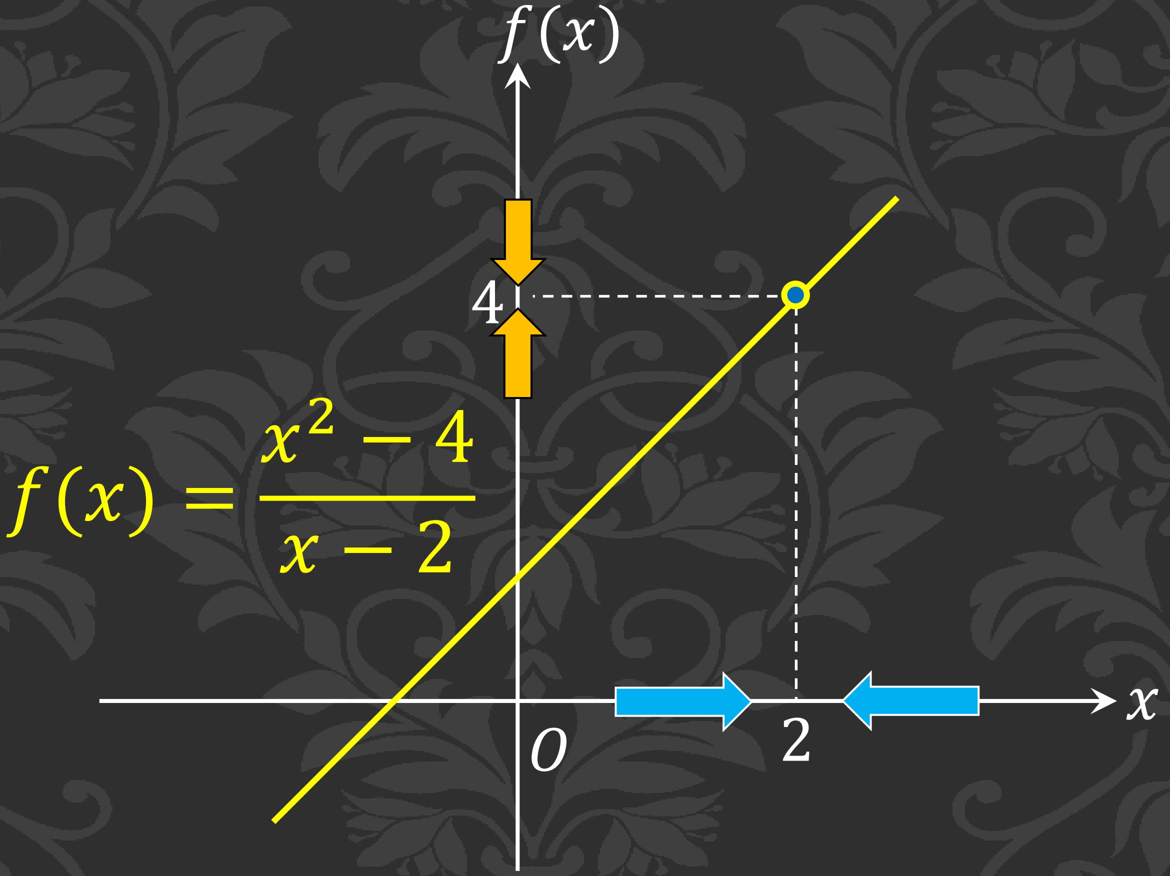
极 限	定 义
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$	$\forall\varepsilon>0$，$\exists X>0$，当 $x>X$ 时，$\lvert f(x)-A\rvert<\varepsilon$
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=A$	$\forall\varepsilon>0$，$\exists X>0$，当 $x<-X$ 时，$\lvert f(x)-A\rvert<\varepsilon$
$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A$	$\forall\varepsilon>0$，$\exists X>0$，当 $\lvert x\rvert>X$ 时，$\lvert f(x)-A\rvert<\varepsilon$

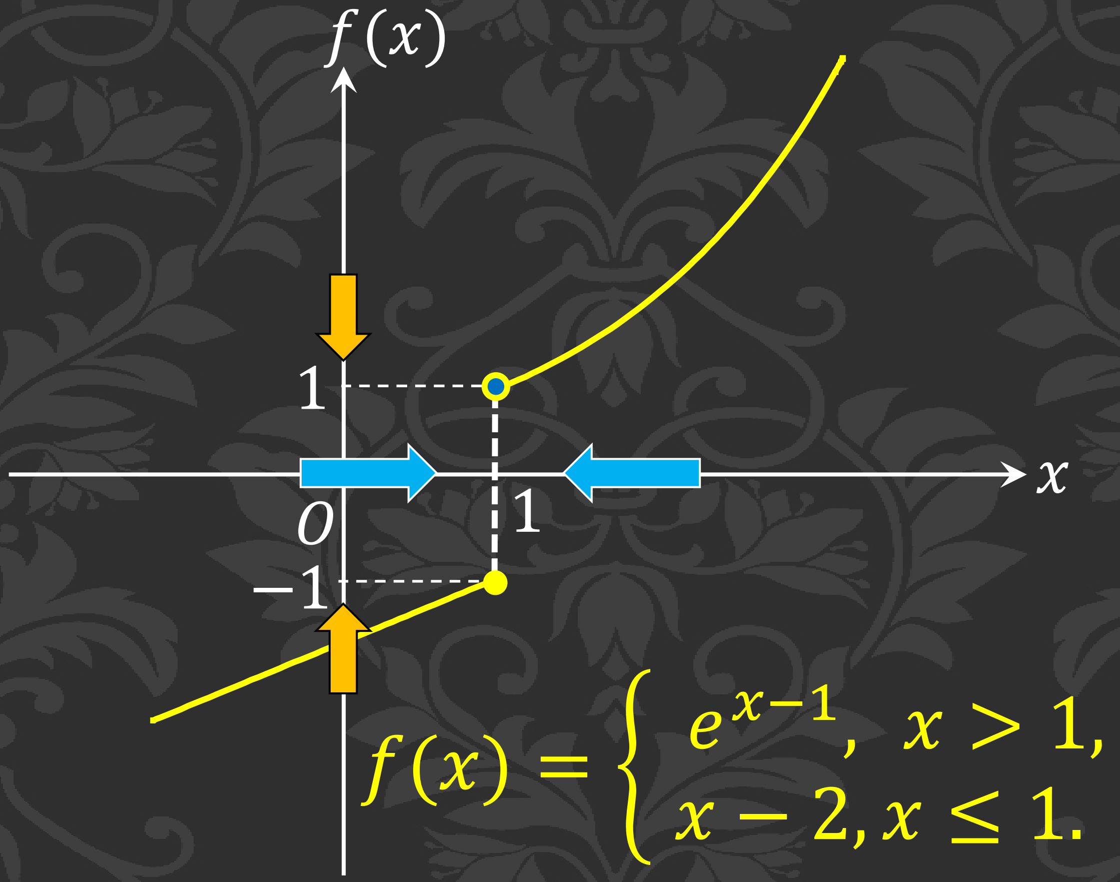
函数在无穷远处极限定义一览

极 限	定 义
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A$	$\forall\varepsilon > 0$，$\exists X > 0$，当 $x > X$ 时，$\lvert f(x) - A\rvert < \varepsilon$
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = A$	$\forall\varepsilon > 0$，$\exists X > 0$，当 $x < -X$ 时，$\lvert f(x) - A\rvert < \varepsilon$
$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A$	$\forall\varepsilon > 0$，$\exists X > 0$，当 $\lvert x\rvert > X$ 时，$\lvert f(x) - A\rvert < \varepsilon$

性质（函数单边极限与双边极限的关系）

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = A \Leftrightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = A$$


$f(x)$
4
$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$
O
2
x


$f(x)$
1
O
1
x
-1
$f(x) = \begin{cases} e^{x-1}, & x > 1, \\ x - 2, & x \le 1. \end{cases}$

$x \to x_0$时函数极限的描述性定义

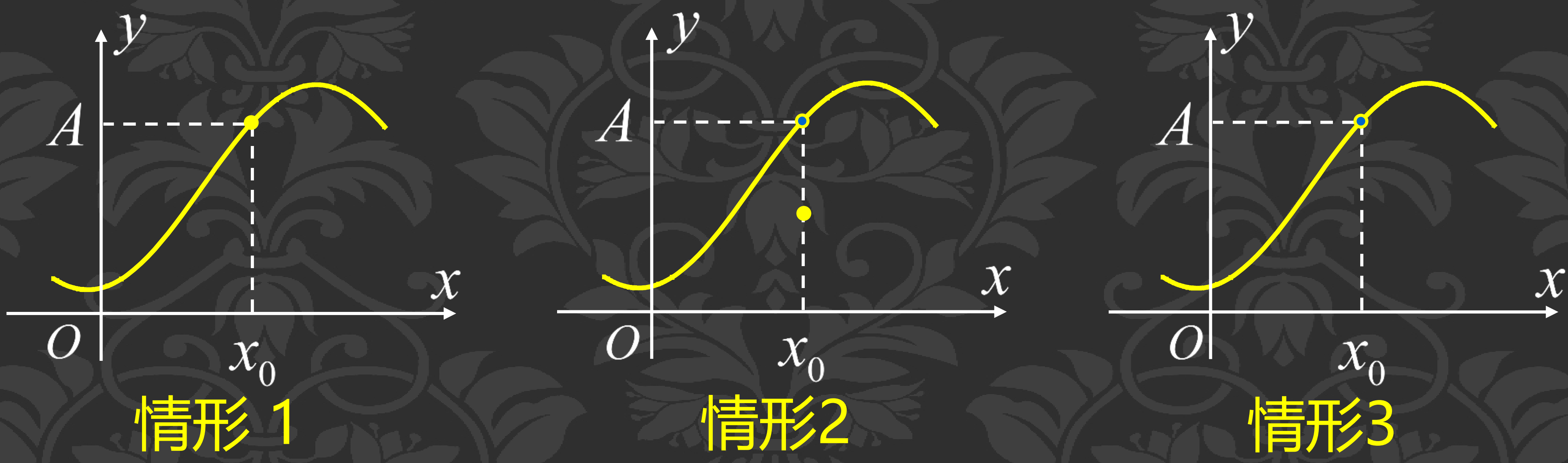
描述性定义 当x充分接近x_0时，函数$f(x)$无限接近于常数A.

分析：1） $f(x)$无限接近于常数A:

$$任给\varepsilon,使得|f(x)-A|<\varepsilon$$

2） x充分接近x_0:

类似于数列极限中N的趋势以及自变量趋于无穷时的X的趋势，重点在于描述一个过程。注意x不必等于x_0。



情形1：$f(x_0)$有定义且 $A = f(x_0)$

情形2：$f(x_0)$有定义但 $A \neq f(x_0)$

情形3：$f(x_0)$无定义

$x \to x_0$时函数极限的定义

定义2 设函数$f(x)$在x_0的某去心邻域内$U_0(x_0, r)$有定义，若存在常数A, 使得对任意给定的正数 ε，存在正数$\delta(\delta < r)$，当$0 < |x - x_0| < \delta$时，恒有

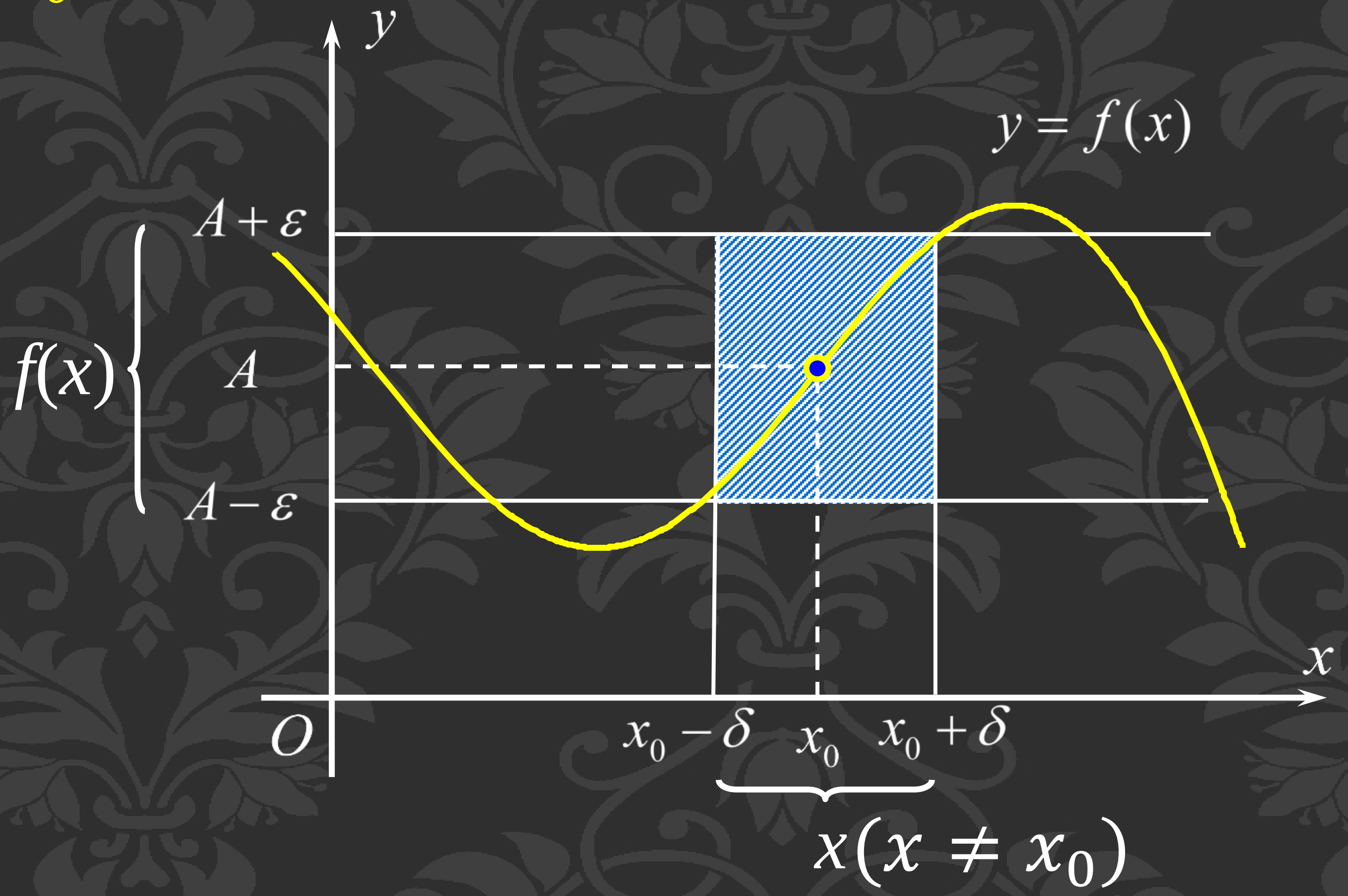
$$|f(x) - A| < \varepsilon,$$

则称函数$f(x)$当自变量 x趋于x_0 (即 $x \to x_0$)时存在极限A, 记为

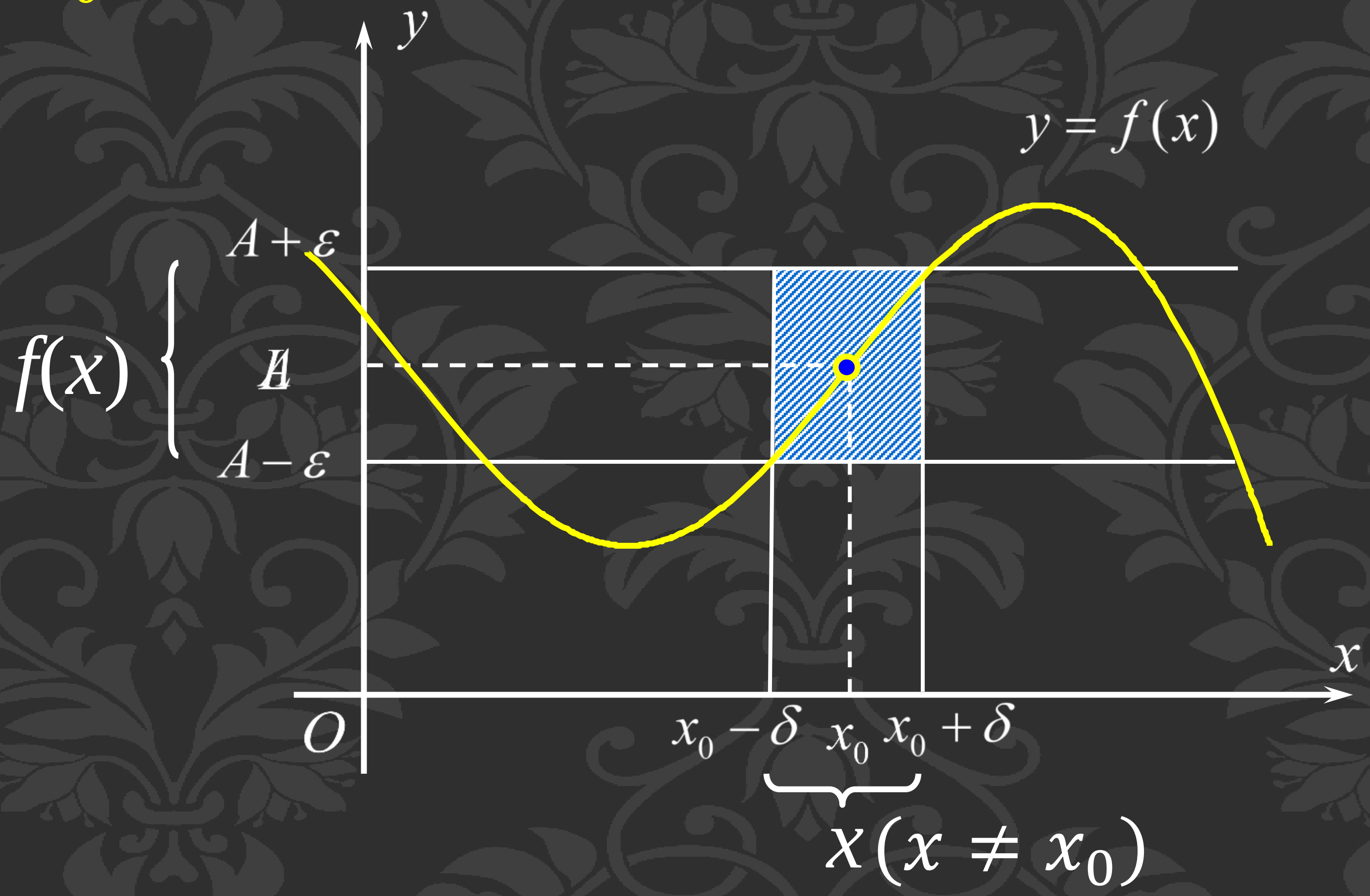
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A \text{ 或 } f(x) \to A(x \to x_0).$$

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$,当$0 < |x - x_0| < \delta$时，有$|f(x) - A| < \varepsilon$.

极限 $\lim_{x \to x_0} f(x) = A$的几何解释：



极限 $\lim_{x \to x_0} f(x) = A$ 的几何解释:

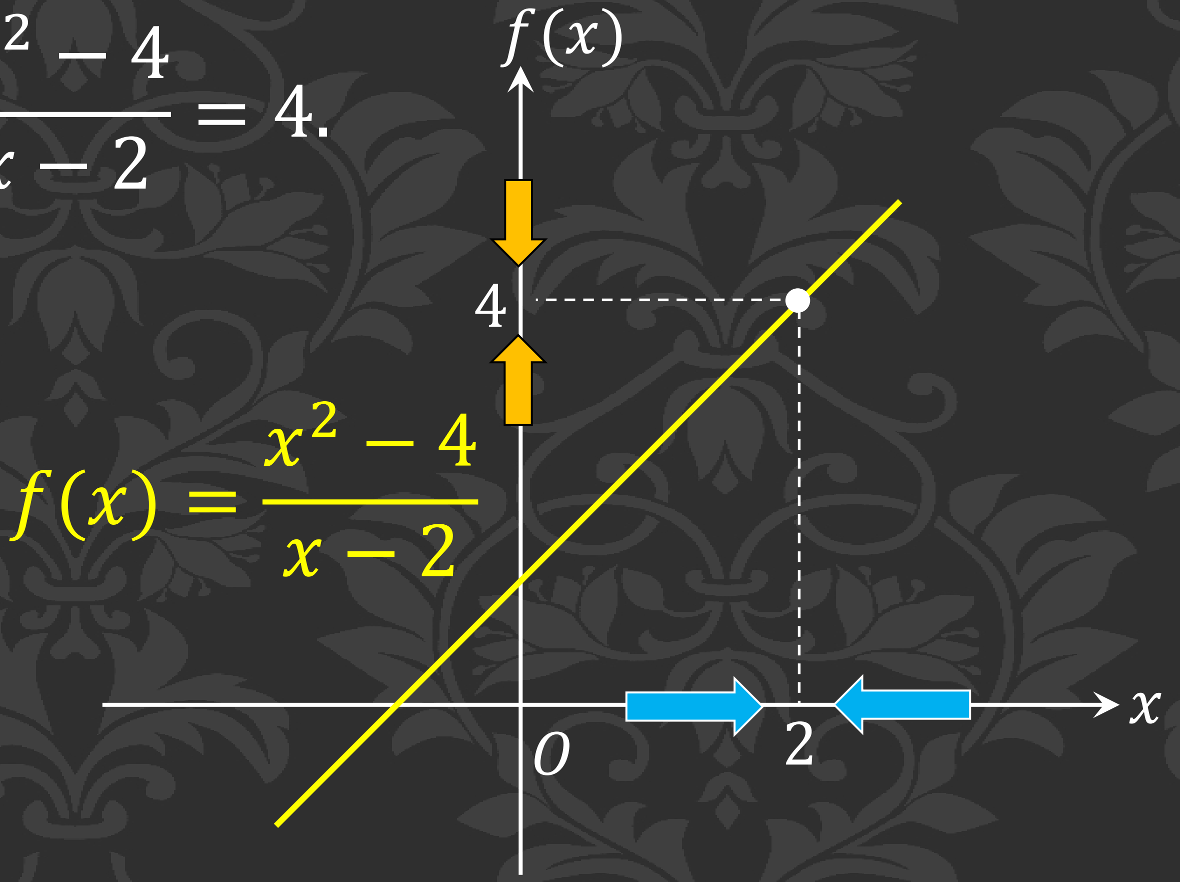


例3 用定义验证函数极限 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x-2}=4.$

例4 设x_0为任意实数，试用定义验证函数极限：

$$\lim_{x\to x_0}\sin x=\sin x_0.$$

例5证明 $\lim\limits_{x\to 2}x^2=4$



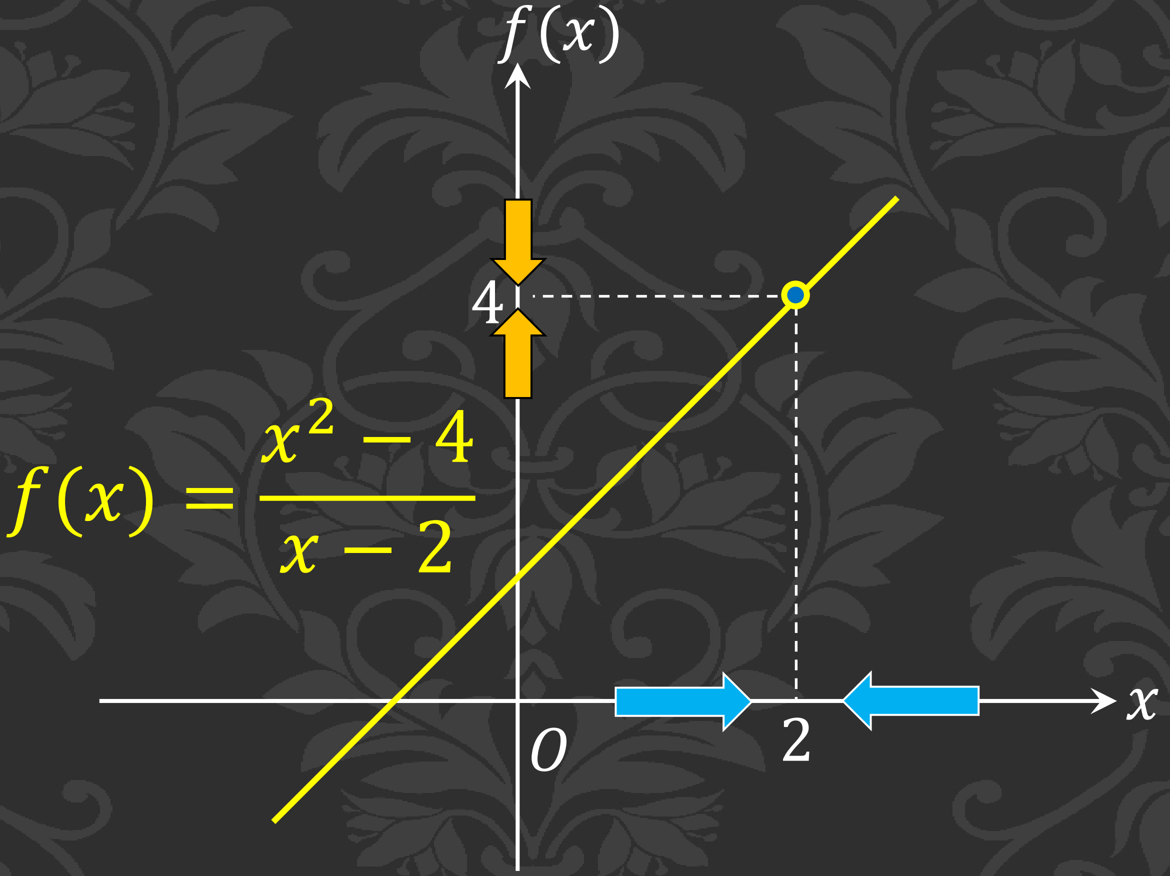
单侧极限

- 左极限：任给ε，存在δ，当$x_0-\delta<x<x_0$时，$|f(x)-A|<\varepsilon$.

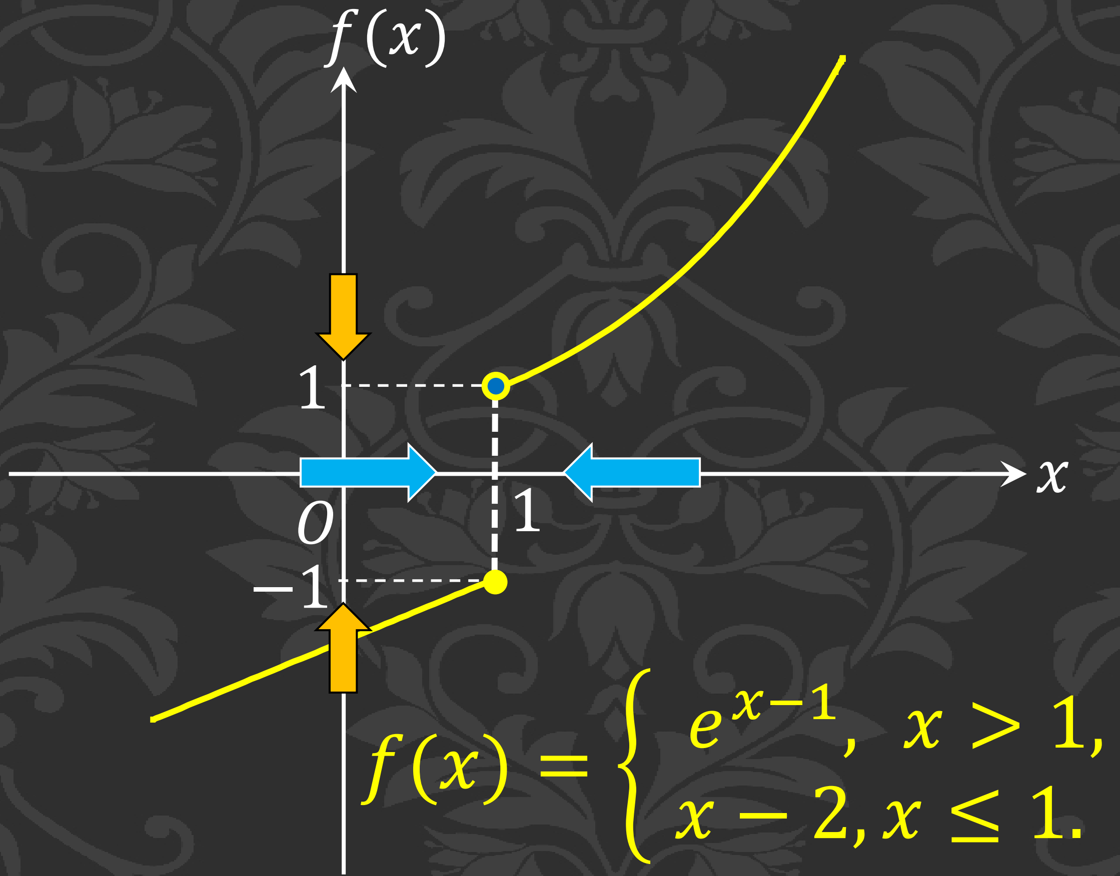
记为$f(x_0-0)=\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=A$

- 右极限：任给ε，存在δ，当$x_0<x<x_0+\delta$时，$|f(x)-A|<\varepsilon$.

记为$f(x_0+0)=\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=A$



$f(x)$
4
$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$
O
2
x



$f(x)$
1
x
O
1
−1
$f(x) = \begin{cases} e^{x-1}, & x > 1, \\ x - 2, & x \le 1. \end{cases}$

性质（单侧极限与双侧极限的关系）

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0^+} f(x)=\lim_{x\to x_0^-} f(x)=A$$

例6 讨论函数 $f(x)=\frac{|x|}{x}\ (x\neq 0)$ 当$x\to 0$时极限的存在性．

例7 设$f(x)=\begin{cases} x^2, x>-1, \\ x+a, x<-1, \end{cases}$ 试确定常数a 使 $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$存在．

例8 讨论函数 $f(x)=[x]$ 当$x=\frac{1}{2}$，$x=1$时极限．

定理1（唯一性） 设 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$，则极限值$A$惟一.

定理2（局部有界性） 设 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$，则存在$\delta > 0$，使$f(x)$在去心邻域 $0 < |x - x_0| < \delta$ 中有界.

定理3（局部保序性） 设 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A < B = \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$，则存在 $\delta > 0$，使当$0 < |x - x_0| < \delta$ 时，$f(x) < g(x)$.

定理4（局部保号性） 设 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$，且$A > 0$，则存在 $\delta > 0$，使当$0 < |x - x_0| < \delta$ 时，$f(x) > 0$. $\left(f(x) > \frac{A}{2} \right)$

推论 设 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$，存在 $\delta > 0$，使当$0 < |x - x_0| < \delta$ 时，有 $f(x) \geq 0$，则有$A \geq 0$.

定理5（Heine原理） $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ 的充要条件是 $x_n \to x_0$ $(n \to \infty)$，$x_n \neq x_0$，有 $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = A$.

例9 证明 $\lim\limits_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$ 不存在