

高等数学



2.2 导数的计算



基础部数学教研室

郑治中

求导法则

基本初等函数求导公式

导数综合计算



函数运算——四则运算、求反函数运算、复合运算

- 四则运算的求导法则
- 反函数的求导法则
- 复合函数的求导法则

● 四则运算的求导法则

定理1 设函数 $u(x), v(x)$ 均在点 x 处可导, 则 $u(x) \pm v(x)$ 、 $u(x)v(x)$ 和 $\frac{u(x)}{v(x)}$ ($v(x) \neq 0$) 均在点 x 处可导, 且有

$$(1) \quad [u(x) \pm v(x)]' = u'(x) \pm v'(x);$$

$$(2) \quad [u(x)v(x)]' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x);$$

$$(3) \quad \left[\frac{u(x)}{v(x)} \right]' = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)} \quad (v(x) \neq 0).$$

● 四则运算的求导法则

$$(4) [Cu(x)]' = Cu'(x) \quad (C \text{ 为常数}) ;$$

$$(5) [\alpha u(x) \pm \beta v(x)]' = \alpha u'(x) \pm \beta v'(x);$$

$$(6) \left[\frac{1}{v(x)} \right]' = -\frac{v'(x)}{v^2(x)} \quad (v(x) \neq 0);$$

$$(7) [u(x) + v(x) + w(x)]' = u'(x) + v'(x) + w'(x)$$

例1 求函数 $\tan x$, $\cot x$, $\sec x$, $\csc x$ 的导数.

- 反函数的求导法则

定理2 设函数 $y = f(x)$ 为函数 $x = \varphi(y)$ 的反函数, 若 $x = \varphi(y)$ 在区间上单调可导, 且 $\varphi'(y) \neq 0$, 则函数 $f(x)$ 在对应区间内可导, 且有

$$f'(x) = \frac{1}{\varphi'(y)} \quad \text{或写作} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}.$$

例2 求反正弦函数 $y = \arcsin x$ 的导数.

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$(\operatorname{arccot} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$$

例3 求函数 $y = \log_a x$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$) 的导数.

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$$

● 复合函数的求导法则

定理3 设有复合函数 $y = f[\varphi(x)]$ 若函数 $u = \varphi(x)$ 在 x 处可导, 函数 $y = f(u)$ 在 $u = \varphi(x)$ 处可导, 则复合函数 $y = f[\varphi(x)]$ 在 x 处可导, 且有

$$y'_x = f'(u)\varphi'(x) \quad \text{或} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

复合函数的导数, 等于函数对中间变量的导数乘以中间变量对自变量的导数. —— 链式法则

复合函数求导法则可以推广到多重复合的情形.

如三个可导函数 $y = f(u)$, $u = \psi(v)$ 和 $v = \varphi(x)$ 的复合得复合函数 $y = f\{\psi[\varphi(x)]\}$, 则该复合函数可导, 且有

$$y'_x = f'(u)\psi'(v)\varphi'(x)$$

或记作 $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dv} \cdot \frac{dv}{dx}$

链式法则

(沿线相乘)

$$y \xrightarrow{y'_u} u \xrightarrow{u'_v} v \xrightarrow{v'_x} x$$

例4 求函数 $y = e^{x^2}$ 的导数.

例5 求函数 $y = x^a$ ($a \in \mathbb{R}$) 的导数.

$$\left(x^a\right)' = a x^{a-1}$$

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$$

$$\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)' = -\frac{3}{2} \frac{1}{x\sqrt{x}}$$

● 基本初等函数的求导公式

- 常值函数的导数 $(C)' = 0$

- 幂函数的导数 $(x^a)' = a x^{a-1}$

- 指数函数的导数

$$(a^x)' = a^x \ln a \quad (a > 0, a \neq 1)$$

$$(e^x)' = e^x$$

- 对数函数的导数

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

- 三角函数的导数

$$(\sin x)' = \cos x$$

$$(\cos x)' = -\sin x$$

$$(\tan x)' = \sec^2 x$$

$$(\cot x)' = -\csc^2 x$$

$$(\sec x)' = \sec x \tan x$$

$$(\csc x)' = -\csc x \cot x$$

- 反三角函数的导数

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$(\operatorname{arccot} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$$

例6 求下列函数的导数：

$$(1) \quad y = e^{\tan \frac{1}{x}}$$

$$(2) \quad y = \sqrt{x + \sqrt{x}}$$

$$(3) \quad y = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$$

$$(4) \quad y = \frac{\sec x}{1 + \tan x}$$

$$(5) \quad y = \arctan (1 - 2x)^2$$

$$(6) \quad y = \arcsin \frac{1-x}{1+x}$$

$$(7) \quad y = \ln \tan x$$

幂指函数的导数: $f(x) = u(x)^{v(x)}$

1. 用 e^{\ln} 形式将函数转化为复合函数形式

2. 利用复合函数求导法则计算即可得

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(u(x)^{v(x)} \right)' = e^{v(x)\ln u(x)} [v(x)\ln u(x)]' \\ &= u(x)^{v(x)} \left[v' \ln u + \frac{v}{u} \right] \end{aligned}$$