解题的关键是要根据要证的结论作适当的辅助函数，把不等式的证明转化为利用导数来研究函数的特征，因此用导数证明不等式的本质是构造法.

【例 6】 讨论曲线 $y=4\ln x+k$ 与 $y=4x+\ln^4 x$ 的交点个数.

解 问题等价于讨论方程 $\ln^4 x-4\ln x+4x-k=0$ 有几个不同的实根.

设 $\varphi(x)=\ln^4 x-4\ln x+4x-k$，则有 $\varphi'(x)=\dfrac{4(\ln^3 x-1+x)}{x}$. 不难看出，$x=1$ 是 $\varphi(x)$ 的驻点.

当 $0<x<1$ 时，$\varphi'(x)<0$，即 $\varphi(x)$ 单调减少；

当 $x>1$ 时，$\varphi'(x)>0$，即 $\varphi(x)$ 单调增加，故 $\varphi(1)=4-k$ 为函数 $\varphi(x)$ 的最小值.

当 $k<4$，即 $4-k>0$ 时，$\varphi(x)=0$ 无实根，即两条曲线无交点.

当 $k=4$，即 $4-k=0$ 时，$\varphi(x)=0$ 有唯一实根，即两条曲线只有一个交点.

当 $k>4$，即 $4-k<0$ 时，由于

$$\lim_{x\to0^+}\varphi(x)=\lim_{x\to0^+}[\ln x(\ln^3 x-4)+4x-k]=+\infty,$$

$$\lim_{x\to+\infty}\varphi(x)=\lim_{x\to+\infty}[\ln x(\ln^3 x-4)+4x-k]=+\infty,$$

故 $\varphi(x)=0$ 有两个实根，分别位于 $(0,1)$ 与 $(1,+\infty)$ 内，即两条曲线有两个交点.

【例 7】 (2020 数学二，4 分)设函数 $f(x)$ 在区间 $[-2,2]$ 上可导，且 $f'(x)>f(x)>0$，则________.

(A) $\dfrac{f(-2)}{f(-1)}>1$　　(B) $\dfrac{f(0)}{f(-1)}>\mathrm{e}$

(C) $\dfrac{f(1)}{f(-1)}<\mathrm{e}^2$　　(D) $\dfrac{f(2)}{f(-1)}<\mathrm{e}^3$

解 令辅助函数 $F(x)=\dfrac{f(x)}{\mathrm{e}^x}$，则

$F'(x)=\dfrac{f'(x)\mathrm{e}^x-f(x)\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{2x}}=\dfrac{f'(x)-f(x)}{\mathrm{e}^x}>0$，故 $F(x)$ 单调增加.

于是，$F(0)>F(-1)$，即 $\dfrac{f(0)}{\mathrm{e}^0}>\dfrac{f(-1)}{\mathrm{e}^{-1}}$，又 $f(x)>0$，则 $\dfrac{f(0)}{f(-1)}>\mathrm{e}$.

故应选(B).

习题 3－4 解答

1. 判定函数 $f(x)=\arctan x-x$ 的单调性.

解 $f'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}-1=-\dfrac{x^2}{1+x^2}\leqslant0$ 且 $f'(x)=0$ 仅在 $x=0$ 时成立. 因此函数 $f(x)=\arctan x-x$ 在

$(-\infty,+\infty)$内单调减少.

2. 判定函数 $f(x)=x+\cos x$ 的单调性.

解 $f'(x)=1-\sin x\geqslant 0$,且当 $x=2n\pi+\frac{\pi}{2}(n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$时,$f'(x)=0$. 可以看出在$(-\infty,+\infty)$的任一有限子区间上,使 $f'(x)=0$ 的点只有有限个. 因此函数 $f(x)=x+\cos x$ 在$(-\infty,+\infty)$内单调增加.

3. 确定下列函数的单调区间:

(1)$y=2x^3-6x^2-18x-7$;　　(2)$y=2x+\frac{8}{x}\ (x>0)$;

(3)$y=\frac{10}{4x^3-9x^2+6x}$;　　(4)$y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$;

(5)$y=(x-1)(x+1)^3$;　　(6)$y=\sqrt[3]{(2x-a)(a-x)^2}\ (a>0)$;

(7)$y=x^n e^{-x}(n>0,x\geqslant 0)$;　　(8)$y=x+|\sin 2x|$.

解 (1)函数的定义域为$(-\infty,+\infty)$,在$(-\infty,+\infty)$内可导,且

$$y'=6x^2-12x-18=6(x-3)(x+1).$$

令 $y'=0$ 得驻点 $x_1=-1$, $x_2=3$,这两个驻点把$(-\infty,+\infty)$分成三个部分区间$(-\infty,-1)$,$(-1,3)$,$(3,+\infty)$.

当$-\infty<x<-1$及$3<x<+\infty$时,$y'>0$,因此函数在$(-\infty,-1]$,$[3,+\infty)$上单调增加;

当$-1<x<3$时,$y'<0$,因此函数在$[-1,3]$上单调减少.

(2)函数的定义域为$(0,+\infty)$,在$(0,+\infty)$内可导,且

$$y'=2-\frac{8}{x^2}=\frac{2x^2-8}{x^2}=\frac{2(x-2)(x+2)}{x^2}.$$

令 $y'=0$,得驻点 $x_1=-2$(舍去),$x_2=2$. 它把$(0,+\infty)$分成两个部分区间$(0,2)$,$(2,+\infty)$.

当$0<x<2$时,$y'<0$ 因此函数在$(0,2]$上单调减少;

当$2<x<+\infty$时,$y'>0$ 因此函数在$[2,+\infty)$上单调增加.

(3)函数除 $x=0$ 外处处可导,且

$$y'=\frac{-10(12x^2-18x+6)}{(4x^3-9x^2+6x)^2}=\frac{-120\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-1)}{(4x^3-9x^2+6x)^2}.$$

令 $y'=0$,得驻点 $x_1=\frac{1}{2}$, $x_2=1$. 这两个驻点及点 $x=0$ 把区间$(-\infty,+\infty)$分成四个部分区间$(-\infty,0)$,$\left(0,\frac{1}{2}\right)$,$\left(\frac{1}{2},1\right)$,$(1,+\infty)$.

当$-\infty<x<0$, $0<x<\frac{1}{2}$, $1<x<+\infty$时,$y'<0$,因此函数在$(-\infty,0)$, $\left(0,\frac{1}{2}\right]$, $[1,+\infty)$内单调减少;

当$\frac{1}{2}<x<1$时,$y'>0$,因此函数在$\left[\frac{1}{2},1\right]$上单调增加.

(4)函数在$(-\infty,+\infty)$内可导,且

$$y'=\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\left(1+\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}\right)=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}>0,$$

因此函数在$(-\infty,+\infty)$内单调增加.

(5)函数在$(-\infty,+\infty)$内可导,且

$$y'=(x+1)^3+(x-1)\cdot 3(x+1)^2=(x+1)^2(4x-2)=4(x+1)^2\left(x-\frac{1}{2}\right).$$

令 $y'=0$,得驻点 $x_1=-1$, $x_2=\frac{1}{2}$,这两个驻点把区间$(-\infty,+\infty)$分成三个部分区间$(-\infty,$

$-1),(-1,\frac{1}{2})$及$(\frac{1}{2},+\infty)$.

当$-\infty<x<-1$及$-1<x<\frac{1}{2}$时，$y'<0$因此函数在$(-\infty,\frac{1}{2}]$上单调减少；

当$\frac{1}{2}<x<+\infty$时，$y'>0$，因此函数在$[\frac{1}{2},+\infty)$上单调增加.

(6)函数在$x_1=\frac{a}{2}$，$x_2=a$处不可导且在$(-\infty,\frac{a}{2})$，$(\frac{a}{2},a)$，$(a,+\infty)$内可导

$$y'=\frac{1}{3}\cdot\frac{4a-6x}{\sqrt[3]{(2x-a)^2(a-x)}}.$$

令$y'=0$，得驻点$x_3=\frac{2a}{3}$，这个驻点及$x_1=\frac{a}{2}$，$x_2=a$把区间$(-\infty,+\infty)$分成四个部分区间$(-\infty,\frac{a}{2})$，$(\frac{a}{2},\frac{2}{3}a)$，$(\frac{2}{3}a,a)$，$(a,+\infty)$.

当$-\infty<x<\frac{a}{2}$及$\frac{a}{2}<x<\frac{2}{3}a$，$a<x<+\infty$时，$y'>0$，因此函数在$(-\infty,\frac{2}{3}a]$，$[a,+\infty)$上单调增加；

当$\frac{2}{3}a<x<a$时，$y'<0$，因此函数在$[\frac{2}{3}a,a]$上单调减少.

(7)函数在$[0,+\infty)$内可导，且

$$y'=nx^{n-1}e^{-x}-x^ne^{-x}=x^{n-1}e^{-x}(n-x).$$

令$y'=0$，得驻点$x_1=n$，这个驻点把区间$[0,+\infty)$分成两个部分区间$[0,n]$，$[n,+\infty)$.

当$0<x<n$时，$y'>0$因此函数在$[0,n]$上单调增加；

当$n<x<+\infty$时，$y'<0$，因此函数在$[n,+\infty)$上单调减少.

(8)函数的定义域为$(-\infty,+\infty)$，且

$$y=\begin{cases}x+\sin 2x, & n\pi\leqslant x\leqslant n\pi+\frac{\pi}{2},\\ x-\sin 2x, & n\pi+\frac{\pi}{2}<x\leqslant(n+1)\pi\end{cases}\quad(n=0,\pm1,\pm2,\cdots),$$

$$y'=\begin{cases}1+2\cos 2x, & n\pi<x<n\pi+\frac{\pi}{2},\\ 1-2\cos 2x, & n\pi+\frac{\pi}{2}<x<(n+1)\pi\end{cases}\quad(n=0,\pm1,\pm2,\cdots),$$

令$y'=0$，得驻点$x=n\pi+\frac{\pi}{3}$及$x=n\pi+\frac{5\pi}{6}$，按照这些驻点将区间$(-\infty,+\infty)$分成下列部分区间

$$\left(n\pi,n\pi+\frac{\pi}{3}\right),\left(n\pi+\frac{\pi}{3},n\pi+\frac{\pi}{2}\right),\left(n\pi+\frac{\pi}{2},n\pi+\frac{5\pi}{6}\right),\left(n\pi+\frac{5\pi}{6},(n+1)\pi\right)\quad(n=0,\pm1,\pm2,\cdots).$$

当$n\pi<x<n\pi+\frac{\pi}{3}$时，$y'>0$，因此函数在该区间内单调增加；

当$n\pi+\frac{\pi}{3}<x<n\pi+\frac{\pi}{2}$时，$y'<0$，因此函数在该区间内单调减少；

当$n\pi+\frac{\pi}{2}<x<n\pi+\frac{5\pi}{6}$时，$y'>0$，因此函数在该区间内单调增加；

当$n\pi+\frac{5\pi}{6}<x<(n+1)\pi$时，$y'<0$，因此函数在该区间内单调减少.

综上可知，函数在$[\frac{k\pi}{2},\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{3}]$上单调增加，在$[\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{3},\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{2}]$上单调减少（$k=0,\pm1,\pm2,\cdots$）.

4. 设函数 $f(x)$ 在定义域内可导，$y=f(x)$ 的图形如图 3－1 所示，则导函数 $f'(x)$ 的图形为图 3－2 中所示的四个图形中的哪一个？

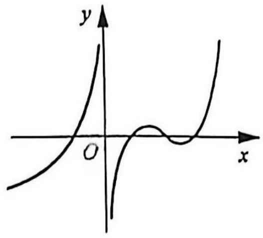

图 3－1

解 由所给图形知，当 $x<0$ 时，$y=f(x)$ 单调增加，从而 $f'(x)\geqslant 0$，故排除(A)，(C)；当 $x>0$ 时，随着 x 增大，$y=f(x)$ 先单调增加，然后单调减少，再单调增加，因此随着 x 增大，先有 $f'(x)\geqslant 0$，然后 $f'(x)\leqslant 0$，继而又有 $f'(x)\geqslant 0$，故应选(D)。

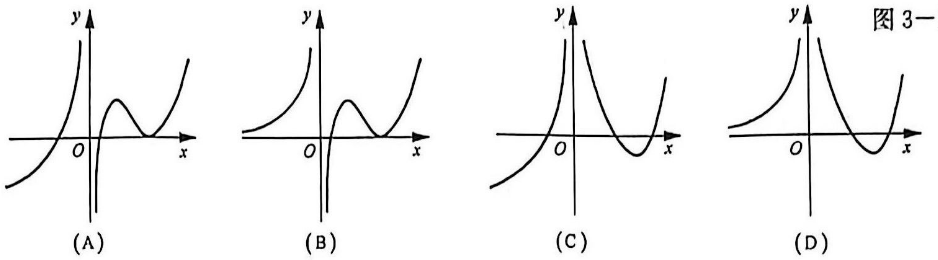

图 3－2

5. 证明下列不等式：

(1) 当 $x>0$ 时，$1+\frac{1}{2}x>\sqrt{1+x}$；

(2) 当 $x>0$ 时，$1+x\ln(x+\sqrt{1+x^2})>\sqrt{1+x^2}$；

(3) 当 $0<x<\frac{\pi}{2}$ 时，$\sin x+\tan x>2x$；

(4) 当 $0<x<\frac{\pi}{2}$ 时，$\tan x>x+\frac{1}{3}x^3$；

(5) 当 $x>4$ 时，$2^x>x^2$。

解 (1) 取 $f(t)=1+\frac{1}{2}t-\sqrt{1+t}$，$t\in[0,x]$。

$$f'(t)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2\sqrt{1+t}}=\frac{\sqrt{1+t}-1}{2\sqrt{1+t}}>0,\quad t\in(0,x).$$

因此，函数 $f(x)$ 在 $[0,x]$ 上单调增加，故当 $x>0$ 时，$f(x)>f(0)$。即

$$1+\frac{1}{2}x-\sqrt{1+x}>1+\frac{1}{2}\cdot 0-\sqrt{1+0}=0.$$

亦即 $1+\frac{x}{2}>\sqrt{1+x}\quad(x>0)$。

(2) 取 $f(t)=1+t\ln(t+\sqrt{1+t^2})-\sqrt{1+t^2}$，$t\in[0,x]$。

$$f'(t)=\ln(t+\sqrt{1+t^2})+\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}-\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}=\ln(t+\sqrt{1+t^2})>0,\ t\in(0,x).$$

因此，函数 $f(t)$ 在 $[0,x]$ 上单调增加，故当 $x>0$ 时，$f(x)>f(0)$，即

$$1+x\ln(x+\sqrt{1+x^2})-\sqrt{1+x^2}>1+0-1=0,$$

亦即 $1+x\ln(x+\sqrt{1+x^2})>\sqrt{1+x^2}\quad(x>0)$。

(3) 取 $f(x)=\sin x+\tan x-2x$，$x\in(0,\frac{\pi}{2})$。

$$f'(x)=\cos x+\sec^2x-2,$$

$$f''=-\sin x+2\sec^2x\tan x=\sin x(2\sec^3x-1)>0,\ x\in(0,\frac{\pi}{2}).$$

因此，$f'(x)$ 函数在 $[0,\frac{\pi}{2}]$ 上单调增加，故当 $x\in(0,\frac{\pi}{2})$ 时，$f'(x)>f'(0)=0$，从而 $f(x)$ 在 $[0,$

$\frac{\pi}{2}]$上单调增加，即 $f(x)>f(0)=0$，亦即 $\sin x+\tan x-2x>0$，　$x\in(0,\frac{\pi}{2})$，

所以 $\sin x+\tan x>2x$，　$x\in(0,\frac{\pi}{2})$.

(4)取$f(x)=\tan x-x-\frac{1}{3}x^3$，$x\in[0,\frac{\pi}{2}]$.

$$f'(x)=\sec^2 x-1-x^2=\tan^2 x-x^2=(\tan x-x)(\tan x+x).$$

由 $g'(x)=(\tan x-x)'=\sec^2 x-1=\tan^2 x>0$

知 $g(x)=\tan x-x$ 在$[0,x]$上单调增加，即 $g(x)=\tan x-x>g(0)=0$.

故 $f'(x)>0$，$x\in(0,\frac{\pi}{2})$.

从而 $f(x)$在$[0,\frac{\pi}{2}]$上单调增加，因此 $f(x)>f(0)$，$x\in(0,\frac{\pi}{2})$.

即当 $0<x<\frac{\pi}{2}$时，$\tan x-x-\frac{1}{3}x^3>0$. 从而 $\tan x>x+\frac{1}{3}x^3$　　$(0<x<\frac{\pi}{2})$.

(5)取$f(t)=t\ln 2-2\ln t$，$t\in[4,x]$.

$$f'(t)=\ln 2-\frac{2}{t}=\frac{\ln 4}{2}-\frac{2}{t}>\frac{\ln e}{2}-\frac{2}{4}=0,$$

故当 $x>4$ 时，$f(x)$单调增加，从而 $f(x)>f(4)=0$，即 $x\ln 2-2\ln x>0$，

亦即 $2^x>x^2$　$(x>4)$.

6. 讨论方程 $\ln x=ax$（其中 $a>0$）有几个实根.

6 题视频解析

解　令 $f(x)=\ln x-ax$，$x\in(0,+\infty)$，则 $f'(x)=\frac{1}{x}-a$.

令 $f'(x)=0$，得驻点 $x=\frac{1}{a}$.

当 $0<x<\frac{1}{a}$时，$f'(x)>0$，因此函数 $f(x)$在$(0,\frac{1}{a})$内单调增加；

当$\frac{1}{a}<x<+\infty$时，$f'(x)<0$，因此函数 $f(x)$在$(\frac{1}{a}+\infty)$内单调减少.

从而 $f(\frac{1}{a})$为最大值，又 $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=-\infty$，$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$，

故当 $f(\frac{1}{a})=\ln\frac{1}{a}-1=0$，即 $a=\frac{1}{e}$时，曲线 $y=\ln x-ax$ 与 x 轴仅有一个交点，这时，原方程有唯一实根.

当 $f(\frac{1}{a})=\ln\frac{1}{a}-1>0$，即 $0<a<\frac{1}{e}$时，曲线 $y=\ln x-ax$ 与 x 轴有两个交点，这时，原方程有两个实根.

当 $f(\frac{1}{a})=\ln\frac{1}{a}-1<0$，即 $a>\frac{1}{e}$时，曲线 $y=\ln x-ax$ 与 x 轴没有交点，这时，原方程没有实根.

7. 单调函数的导函数是否必为单调函数？研究下面这个例子：

$$f(x)=x+\sin x.$$

解　单调函数的导函数不一定是单调函数. 例如函数 $f(x)=x+\sin x$，由于 $f'(x)=1+\cos x\geqslant 0$，且 $f'(x)$在任何有限区间内只有有限个零点，因此函数 $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内为单调增加函数，但它的导函数 $f'(x)=1+\cos x$ 在$(-\infty,+\infty)$内却不是单调函数.

8. 设 I 为任一无穷区间，函数 $f(x)$在区间 I 上连续，I 内可导，试证明：如果 $f(x)$在 I 的任一有限的子区间上 $f'(x)\geqslant 0$（或 $f'(x)\leqslant 0$），且等号仅在有限多个点处成立，那么 $f(x)$在区间 I 上单调增加（或单调减少）.

证 在 I 内任取两点 x_1、x_2，不妨设 $x_1<x_2$. 在 $[x_1,x_2]$ 上应用拉格朗日中值定理，得到

$$f(x_2)-f(x_1)=f'(\xi)(x_2-x_1)\geqslant 0 \quad (\text{或}\leqslant 0),$$

其中 $\xi\in(x_1,x_2)$，即 $f(x_2)\geqslant f(x_1)$（或 $f(x_2)\leqslant f(x_1)$），因此，$f(x)$ 在 I 上单调不减（或单调不增），从而对任一 $x\in[x_1,x_2]$，有

$$f(x_2)\geqslant f(x)\geqslant f(x_1) \quad (\text{或 } f(x_2)\leqslant f(x)\leqslant f(x_1)).$$

若 $f(x_1)=f(x_2)$，则有 $f(x)\equiv f(x_1)$，$x\in[x_1,x_2]$，故 $f'(x)\equiv 0$，$x\in[x_1,x_2]$，这与 $f'(x)=0$ 在 I 的任一有限子区间上仅在有限多个点处成立的假定相矛盾，因此 $f(x_2)>f(x_1)$（或 $f(x_2)<f(x_1)$），即 $f(x)$ 在区间 I 上单调增加（或单调减少）.

9. 判定下列曲线的凹凸性：

(1) $y=4x-x^2$； (2) $y=\operatorname{sh}x$；

(3) $y=x+\dfrac{1}{x}\ (x>0)$； (4) $y=x\arctan x$.

解 (1) $y'=4-2x$，$y''=-2<0$. 故曲线 $y=4x-x^2$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内是凸的.

(2) $y'=\operatorname{ch}x$，$y''=\operatorname{sh}x$，令 $y''=0$，得 $x=0$.

当 $-\infty<x<0$ 时，$y''<0$，因此曲线 $y=\operatorname{sh}x$ 在 $(-\infty,0]$ 内是凸的.

当 $0<x<+\infty$ 时，$y''>0$，因此曲线 $y=\operatorname{sh}x$ 在 $[0,+\infty)$ 内是凹的.

(3) $y'=1-\dfrac{1}{x^2}$，$y''=\dfrac{2}{x^3}>0\ (x>0)$，故曲线 $y=x+\dfrac{1}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 内是凹的.

(4) $y'=\arctan x+\dfrac{x}{1+x^2}$，$y''=\dfrac{1}{1+x^2}+\dfrac{1+x^2-x\cdot 2x}{(1+x^2)^2}=\dfrac{2}{(1+x^2)^2}>0$，

故曲线 $y=x\arctan x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内是凹的.

10. 求下列函数图形的拐点及凹或凸的区间：

(1) $y=x^3-5x^2+3x+5$； (2) $y=xe^{-x}$；

(3) $y=(x+1)^4+e^x$； (4) $y=\ln(x^2+1)$；

(5) $y=e^{\arctan x}$； (6) $y=x^4(12\ln x-7)$.

解 (1) $y'=3x^2-10x+3$，$y''=6x-10$，令 $y''=0$ 得 $x=\dfrac{5}{3}$.

当 $-\infty<x<\dfrac{5}{3}$ 时，$y''<0$，因此曲线在 $\left(-\infty,\dfrac{5}{3}\right]$ 上是凸的；

当 $\dfrac{5}{3}<x<+\infty$ 时，$y''>0$，因此曲线在 $\left[\dfrac{5}{3},+\infty\right)$ 上是凹的.

故点 $\left(\dfrac{5}{3},\dfrac{20}{27}\right)$ 为拐点.

(2) $y'=e^{-x}-xe^{-x}=(1-x)e^{-x}$，$y''=-e^{-x}+(1-x)(-e^{-x})=e^{-x}(x-2)$，

令 $y''=0$，得 $x=2$.

当 $-\infty<x<2$ 时，$y''<0$，因此曲线在 $(-\infty,2]$ 上是凸的；

当 $2<x<+\infty$ 时，$y''>0$，因此曲线在 $(2,+\infty)$ 上是凹的.

故点 $\left(2,\dfrac{2}{e^2}\right)$ 为拐点.

(3) $y'=4(x+1)^3+e^x$，$y''=12(x+1)^2+e^x>0$，因此曲线在 $(-\infty,+\infty)$ 内是凹的，曲线没有拐点.

(4) $y'=\dfrac{2x}{x^2+1}$，$y''=\dfrac{2(x^2+1)-2x\cdot 2x}{(x^2+1)^2}=\dfrac{-2(x-1)(x+1)}{(x^2+1)^2}$. 令 $y''=0$，得 $x_1=-1$，$x_2=1$.

当 $-\infty<x<-1$ 时，$y''<0$，因此曲线在 $(-\infty,-1]$ 上是凸的；

当 $-1<x<1$ 时，$y''>0$，因此曲线在 $[-1,1]$ 上是凹的；

当 $1<x<+\infty$ 时，$y''<0$，因此曲线在 $[1,+\infty)$ 上是凸的.

曲线有两个拐点，分别为 $(-1,\ln 2)$，$(1,\ln 2)$.

(5) $y'=e^{\arctan x}\frac{1}{1+x^2}$， $y''=\frac{-2e^{\arctan x}\left(x-\frac{1}{2}\right)}{(1+x^2)^2}$，令 $y''=0$，得 $x=\frac{1}{2}$.

当 $-\infty<x<\frac{1}{2}$ 时，$y''>0$，因此曲线在 $[-\infty,\frac{1}{2}]$ 上是凹的；

当 $\frac{1}{2}<x<+\infty$ 时，$y''<0$，因此曲线在 $[\frac{1}{2},+\infty)$ 上是凸的.

故点 $(\frac{1}{2},e^{\arctan\frac{1}{2}})$ 为拐点.

(6) $y'=4x^3(12\ln x-7)+x^4\cdot\frac{12}{x}=4x^3(12\ln x-4)$，

$y''=12x^2(12\ln x-4)+4x^3\cdot\frac{12}{x}=144x^2\ln x\ (x>0)$.

令 $y''=0$，得 $x=1$.

当 $0<x<1$ 时，$y''<0$，因此曲线在 $(0,1]$ 上是凸的；

当 $1<x<+\infty$ 时，$y''>0$，因此曲线在 $[1,+\infty)$ 上是凹的.

故点 $(1,-7)$ 为拐点.

11. 利用函数图形的凹凸性，证明下列不等式：

(1) $\frac{1}{2}(x^n+y^n)>\left(\frac{x+y}{2}\right)^n\quad(x>0,y>0,x\neq y,n>1)$；

(2) $\frac{e^x+e^y}{2}>e^{\frac{x+y}{2}}\quad(x\neq y)$；

(3) $x\ln x+y\ln y>(x+y)\ln\frac{x+y}{2}\quad(x>0,y>0,x\neq y)$；

(4) $\sin x>\frac{2x}{\pi}(0<x<\frac{\pi}{2})$.

11题(1)(4)视频解析

证 (1) 取函数 $f(t)=t^n$，$t\in(0,+\infty)$.

$$f'(t)=nt^{n-1},\qquad f''(t)=n(n-1)t^{n-2},\ t\in(0,+\infty).$$

当 $n>1$ 时，$f''(t)>0$，$t\in(0,+\infty)$，因此 $f(t)=t^n$ 在 $(0,+\infty)$ 内图形是凹的，故对任意 $x>0$，$y>0$，$x\neq y$，恒有 $\frac{1}{2}[f(x)+f(y)]>f\left(\frac{x+y}{2}\right)$，

即 $\frac{1}{2}(x^n+y^n)>\left(\frac{x+y}{2}\right)^n\quad(x>0,y>0,x\neq y,n>1)$.

(2) 取函数 $f(t)=e^t$，$t\in(-\infty,+\infty)$，$f'(t)=e^t$，$f''(t)=e^t>0$，$t\in(-\infty,+\infty)$.

因此 $f(t)=e^t$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内图形是凹的，故对任何 $x,y\in(-\infty,+\infty)$，$x\neq y$，恒有

$\frac{1}{2}[f(x)+f(y)]>f\left(\frac{x+y}{2}\right)$，即 $\frac{1}{2}(e^x+e^y)>e^{\frac{x+y}{2}}\quad(x\neq y)$.

(3) 取函数 $f(t)=t\ln t$，$t\in(0,+\infty)$，$f'(t)=\ln t+1$，$f''(t)=\frac{1}{t}>0$，$t\in(0,+\infty)$.

因此 $f(t)=t\ln t$ 在 $(0,+\infty)$ 内图形是凹的，故对任何 $x,y\in(0,+\infty)$，$x\neq y$，恒有

$\frac{1}{2}[f(x)+f(y)]>f\left(\frac{x+y}{2}\right)$，即 $\frac{1}{2}(x\ln x+y\ln y)>\frac{x+y}{2}\ln\frac{x+y}{2}$，

亦即 $x\ln x+y\ln y>(x+y)\ln\frac{x+y}{2}\quad(x\neq y)$.

(4) 令 $f(x)=\sin x-\frac{2}{\pi}x,x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，则 $f'(x)=\cos x-\frac{2}{\pi}$，$f''(x)=-\sin x<0,x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

所以 $f(x)$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上是凸的，因而 $f(x)>\min\left\{f(0),f\left(\frac{\pi}{2}\right)\right\}=0$，即 $\sin x>\frac{2}{\pi}x,x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

·12. 试证明曲线 $y=\dfrac{x-1}{x^2+1}$ 有三个拐点位于同一直线上.

证 $y'=\dfrac{(x^2+1)-2x(x-1)}{(x^2+1)^2}=\dfrac{-x^2+2x+1}{(x^2+1)^2}$,

$y''=\dfrac{(-2x+2)(x^2+1)^2-2(x^2+1)\cdot 2x(-x^2+2x+1)}{(x^2+1)^4}=\dfrac{2x^3-6x^2-6x+2}{(x^2+1)^3}$

$=\dfrac{2(x+1)[x-(2-\sqrt{3})][x-(2+\sqrt{3})]}{(x^2+1)^3}$.

令 $y''=0$,得 $x_1=-1$, $x_2=2-\sqrt{3}$, $x_3=2+\sqrt{3}$.

当 $-\infty<x<-1$ 时,$y''<0$,因此曲线在 $(-\infty,-1]$ 上是凸的;

当 $-1<x<2-\sqrt{3}$ 时,$y''>0$,因此曲线在 $[-1,2-\sqrt{3}]$ 上是凹的;

当 $2-\sqrt{3}<x<2+\sqrt{3}$ 时,$y''<0$ 因此曲线在 $[2-\sqrt{3},2+\sqrt{3}]$ 上是凸的;

当 $2+\sqrt{3}<x<+\infty$ 时,$y''>0$ 因此曲线在 $[2+\sqrt{3},+\infty)$ 上是凹的.

故曲线有三个拐点,分别为 $(-1,-1)$, $\left(2-\sqrt{3},\dfrac{1-\sqrt{3}}{4(2-\sqrt{3})}\right)$, $\left(2+\sqrt{3},\dfrac{1+\sqrt{3}}{4(2+\sqrt{3})}\right)$.

由于 $\dfrac{\dfrac{1-\sqrt{3}}{4(2-\sqrt{3})}-(-1)}{2-\sqrt{3}-(-1)}=\dfrac{\dfrac{1+\sqrt{3}}{4(2+\sqrt{3})}-(-1)}{2+\sqrt{3}-(-1)}=\dfrac{1}{4}$,故这三个拐点在一条直线上.

13. 问 a,b 为何值时,点 $(1,3)$ 为曲线 $y=ax^3+bx^2$ 的拐点?

13 题视频解析

解 $y'=3ax^2+2bx$, $y''=6ax+2b$.

由 $(1,3)$ 在曲线上,有 $a+b=3$.

再由 $y''(1)=0$,得 $6a+2b=0$,解得 $a=-\dfrac{3}{2}$,$b=\dfrac{9}{2}$. 且此时容易验证当 $x<1$ 时,$y''>0$,曲线在 $(-\infty,1]$ 上是凹的. 当 $x>1$ 时,$y''<0$,曲线在 $[1,+\infty)$ 上是凸的. 即点 $(1,3)$ 为拐点.

14. 试决定曲线 $y=ax^3+bx^2+cx+d$ 中的 a,b,c,d,使得 $x=-2$ 处曲线有水平切线,$(1,-10)$ 为拐点,且点 $(-2,44)$ 在曲线上.

解 $y'=3ax^2+2bx+c$, $y''=6ax+2b$.

根据题意有 $y(-2)=44$, $y'(-2)=0$, $y(1)=-10$, $y''(1)=0$. 即

$$\begin{cases}-8a+4b-2c+d=44,\\12a-4b+c=0,\\a+b+c+d=-10,\\6a+2b=0.\end{cases}$$

解得 $a=1,b=-3,c=-24,d=16$.

15. 试决定 $y=k(x^2-3)^2$ 中 k 的值,使曲线的拐点处的法线通过原点.

解 $y'=2k(x^2-3)\cdot 2x=4kx(x^2-3)$,

$y''=4k(x^2-3)+4kx\cdot 2x=12k(x-1)(x+1)$.

令 $y''=0$, 得 $x_1=-1$, $x_2=1$.

当 $-\infty<x<-1$ 时, $y''>0$,因此曲线在 $(-\infty,-1]$ 上是凹的;

当 $-1<x<1$ 时, $y''<0$,因此曲线在 $[-1,1]$ 上是凸的;

当 $1<x<+\infty$ 时,$y''>0$,因此曲线在 $[1,+\infty)$ 上是凹的,从而知 $(-1,4k)$,$(1,4k)$ 为曲线的拐点.

由 $y'\big|_{x=-1}=8k$ 知过点 $(-1,4k)$ 的法线方程为 $Y-4k=-\dfrac{1}{8k}(X+1)$

要使该法线过原点,则 $(0,0)$ 应满足方程,将 $X=0,Y=0$ 代入上式,得 $k=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{8}$.

由 $y'|_{x=1}=-8k$ 知过点$(-1,4k)$的法线方程为 $Y-4k=\dfrac{1}{8k}(X-1)$.

同理，要使该法线过原点，故将 $X=0,Y=0$ 代入上式得 $k=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{8}$.

所以，当 $k=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{8}$时，该曲线拐点处的法线通过原点.

*16. 设 $y=f(x)$在 $x=x_0$ 的某邻域内具有三阶连续导数，如果 $f''(x_0)=0$，而 $f'''(x_0)\neq 0$，试问$(x_0,f(x_0))$是不是拐点？为什么？

16 题视频解析

解 已知 $f'''(x_0)\neq 0$，不妨设 $f'''(x_0)>0$，由于 $f'''(x)$在 $x=x_0$ 的某个邻域内连续，因此必存在 $\delta>0$，当 $x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$时，$f'''(x)>0$，故在$(x_0-\delta,x_0+\delta)$内 $f''(x)$单调增加.

又已知 $f''(x_0)=0$，从而当 $x\in(x_0-\delta,x_0)$时，$f''(x)<f''(x_0)=0$，即函数 $f(x)$在$(x_0-\delta,x_0)$内的图形是凸的，当 $x\in(x_0,x_0+\delta)$时，$f''(x)>f''(x_0)=0$，即函数 $f(x)$在$(x_0,x_0+\delta)$内的图形是凹的，所以点$(x_0,f(x_0))$为曲线的拐点.

第五节　函数的极值与最大值最小值

一、主要内容归纳

1. 函数的极值

极值的定义　设函数 $f(x)$在 x_0 点的某个邻域内有定义，对于该邻域内异于 x_0 的点 x，如果恒有 $f(x)<f(x_0)$，则称 $f(x_0)$为 $f(x)$的极大值，而称 x_0 为 $f(x)$的极大值点；如果恒有 $f(x)>f(x_0)$，则称 $f(x_0)$为 $f(x)$的极小值，而称 x_0 为 $f(x)$的极小值点.

极大值与极小值统称为极值，极大值点与极小值点

极值的必要条件　设函数 $f(x)$在 x_0 点可导 ，则必有 $=0$.

2. 极值第一判别法

设函数 $f(x$ 可导 么

(1)若当 $x<x_0$ 时，$f'(x)>0$， 则