力学测试参考答案

1.

解：（1）如图所示，容易得

$$\vec{r} = R\cos\theta\,\vec{\imath} + R\sin\theta\,\vec{\jmath},$$
$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = R\omega(-\sin\theta\,\vec{\imath} + \cos\theta\,\vec{\jmath}),$$
$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = R\alpha(-\sin\theta\,\vec{\imath} + \cos\theta\,\vec{\jmath}) + R\omega^2(-\cos\theta\,\vec{\imath} - \sin\theta\,\vec{\jmath})$$
（3 分）

其中$\omega = \frac{d\theta}{dt}$是角速度，而$\alpha = \frac{d\omega}{dt}$是角加速度。

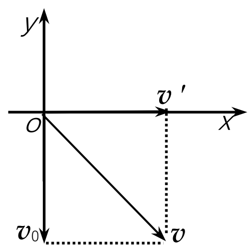
（2）图略，其中切向单位矢量沿着切线方向向上，而法向单位矢量沿着半径方向且指向圆心。容易得到图中位置的切向单位矢量和法向单位矢量分别为

$$\vec{e}_t = -\sin\theta\,\vec{\imath} + \cos\theta\,\vec{\jmath}, \qquad \vec{e}_n = -\cos\theta\,\vec{\imath} - \sin\theta\,\vec{\jmath}$$
（画图 1 分）+（4 分）

（3）利用上面得到的表达式直接求导即可

$$\frac{d\vec{e}_t}{dt} = \frac{d\theta}{dt}(-\cos\theta\vec{\imath} - \sin\theta\vec{\jmath}) = \omega\,\vec{e}_n,$$
$$\frac{d\vec{e}_n}{dt} = \frac{d\theta}{dt}(\sin\theta\vec{\imath} - \cos\theta\vec{\jmath}) = -\omega\,\vec{e}_t$$
（2 分）

2. 如图所示，由题意可知，已知牵连速率 v_0 为 36 km · h^{-1}（即 10 m · s^{-1}），



相对速率 v'为 10 m · s^{-1}，

根据伽利略速度变换 $\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{v}'$ （2 分）

绝对速率 v 为 14.14 m · s^{-1}（或 50.9 km · h^{-1}） （6 分）

方向指向东南。(2 分)

3. 解：已知：$\frac{dv}{dt} = -kv^2$ （2 分）

对上式分离变量 $\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt} = v\frac{dv}{dx}$ （2 分）

得到 $$v\frac{dv}{dx} = -kv^2$$ （2 分）

$$dx = -\frac{dv}{kv}$$

两边积分 $$\int_0^x dx = \int_{v_0}^{v} -\frac{dv}{kv}$$ （2 分）

得 $$x = -\frac{1}{k}(\ln v - \ln v_0) = -\frac{1}{k}\ln\frac{v}{v_0}$$

$$v = v_0 e^{-kx}$$ （2 分）

4. 由牛顿第二定律，有：

$$m\frac{dv}{dt} = F_0(2 - \frac{t}{T}),$$ （2 分）

$$dv = \frac{F_0}{m}(2 - \frac{t}{T})dt,$$ （4 分）

两边积分得： $$v = \int_0^{2T}\frac{F_0}{m}(2 - \frac{t}{T})dt = \frac{2F_0T}{m}$$ （4 分）

5. 解：铁丝的线密度 $\lambda=\dfrac{M}{\pi R}$ （1 分）

$$x_C=\frac{1}{M_{总}}\int x\,\mathrm{d}m=\frac{1}{M}\int_0^{\pi}R\cos\theta\cdot\lambda R\mathrm{d}\theta=0$$ （4 分）

$$y_C=\frac{1}{M_{总}}\int y\,\mathrm{d}m=\frac{1}{M}\int_0^{\pi}R\sin\theta\cdot\lambda R\mathrm{d}\theta=\frac{2}{\pi}R$$ （4 分）

质心位置（0，$\frac{2R}{\pi}$） （1 分）

6. （1）以炮弹和炮车为系统，选地面为参考系，系统在水平方向上动量守恒

$$Mv_{车地}+mv_{弹地x}=0$$ （2 分）

$$v_{弹地x}=v_{弹车x}+v_{车地}=u\cos\theta+v_{车地}$$ （2 分）

$$\therefore v_{车地}=-\frac{m}{m+M}u\cos\theta$$ （2 分）

（2）在发射炮弹的过程中的任意时刻t

$$v_{车地}(t)=-\frac{m}{m+M}u(t)\cos\theta$$

在发射炮弹的过程中，炮车的位移

$$\Delta x=\int_0^t v_{车地}(t)\mathrm{d}t=-\frac{m\cos\theta}{m+M}\int_0^t u(t)\mathrm{d}t=-\frac{ml\cos\theta}{m+M}$$ （4 分）

7. 在链条下落的过程中，链条受到重力和桌面摩擦力的作用，这两个外力都对链条做功。建立如图的坐标系，设链条的下端点的坐标为y，链条下落dy过程中重力的元功为

$$\mathrm{d}W=\frac{m}{l}yg\mathrm{d}y$$

因此链条完全离开桌面时重力所做的功为

$$W_G=\int_a^l\frac{m}{l}yg\mathrm{d}y=\frac{mg}{2l}(l^2-a^2)$$ （3分）

同理，摩擦力在此过程中所做的功为

$$W_f=-\int_a^l\mu\frac{m}{l}(l-y)g\mathrm{d}y=-\frac{\mu mg}{2l}(l-a)^2$$ （3分）

链条开始时静止，动能为零，根据动能定理，链条完全离开桌面时的动能等于外力所的做功之和

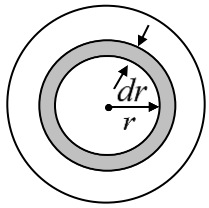
$$E_k=\frac{1}{2}mv^2=W_G+W_f=\frac{mg}{2l}[l^2-a^2-\mu(l-a)^2]$$ （2分）

由此式解得链条完全离开桌面时的速度

$$v=\sqrt{gl[1-(a/l)^2-\mu(1-a/l)^2]}$$ （2 分）

8. 薄圆盘在转动过程受到摩擦力矩 M 的作用，产生一个与旋转方向相反的角加速度α，先求摩擦力矩 M。

薄圆盘的面密度为$\sigma=\dfrac{m}{\pi R^2}$，如下图，在距圆盘中心为 r 处，选一宽为 dr 的圆环，则该圆环所受的摩擦力矩为



$$\mathrm{d}M=\mu\cdot 2\pi r\mathrm{d}r\sigma g\cdot r=\frac{2\pi mg}{R^2}r^2\mathrm{d}r \quad （2 分）$$

整个圆盘所受的合力矩为

$$M=\int \mathrm{d}M=\int_0^R\frac{2\pi mg}{R^2}r^2\mathrm{d}r=\frac{2}{3}\mu mgR \quad （4 分）$$

根据刚体定轴转动定律，得到角加速度α

$$\alpha=\frac{M}{J}=\frac{\frac{2}{3}\mu mgR}{\frac{1}{2}mR^2}=\frac{4\mu g}{3R} \quad （2 分）$$

因角加速度α是常量，故圆盘作匀加速转动，满足${\omega_0}^2-\omega^2=2\alpha\theta$，式中$\omega=0$为末角速度，$\theta$为转角（弧度）。所以圆盘停止前转过的角度

$$\theta=\frac{{\omega^2}_0}{2\alpha}=\frac{{\omega_0}^2}{2\times(4\mu g)/(3R)}=\frac{3R{\omega_0}^2}{8\mu g} \quad （2 分）$$

9. 在 m_2 由静止下落 h 距离的过程中机械能守恒，因此有

$$m_2gh=\frac{1}{2}(m_1+m_2)v^2+\frac{1}{2}J\omega^2+\frac{1}{2}kh^2+m_1gh\sin\theta \quad （6 分）$$

式中$\omega=\dfrac{v}{r}$，解得 m_2 由静止下落 h 距离时的速率

$$v=\sqrt{\frac{2(m_2-m_1\sin\theta)gh-kh^2}{m_1+m_2+J/r^2}} \quad （2 分）$$

m_2 下降到最低时，m_1、m_2 速率为零，代入上式，得到 m_2 下降的最大距离

$$h_{\max}=\frac{2}{k}(m_2-m_1\sin\theta)g \quad （2 分）$$

10. 碰撞过程，子弹-木杆系统角动量守恒

$$Lmv_0=J\omega+Lmv \quad （2 分）$$

$$J=\frac{1}{3}ML^2,\quad v=L\omega$$

$$\therefore\omega=\frac{3m}{3m+M}\cdot\frac{v_0}{L} \quad （2 分）$$

碰后上摆过程，子弹-木杆-地球系统机械能守恒，取最低点为重力势能零点

$$\frac{1}{2}J\omega^2+\frac{1}{2}mv^2+Mg\frac{L}{2}=mgL(1-\cos\theta)+Mg(L-\frac{L}{2}\cos\theta) \quad （4 分）$$

$$\therefore\theta=\arccos[1-\frac{3m^2v_0^2}{(3m+M)(2m+M)gL}] \quad （2 分）$$