试卷编号 2022XXX： 概率论与数理统计 课程试卷 （期中测试卷）

姓名：________________ 学号：________________ 单位：________________

注意事项：

1. 本试卷共三大题 17 小题，满分 100 分，考试时间 120 分钟，考核方式为闭卷，本场考试允许考生携带的物品为：笔、橡皮；
2. 严禁考生携带课程考核规定以外的任何书籍纸张、各种通讯工具，以及有液晶显示或存储功能的手表、电子辞典等，考试中不得相互借用任何考试用品，学员证须放置于桌面；
3. 《学员学籍管理实施细则》规定：考试作弊将给予开除学籍处分。

一、选择题（每题3分，共15分）

1. 设事件A与事件B互不相容, 则 (　　)

A. $P(\bar{A}\bar{B})=0$　　B. $P(AB)=P(A)P(B)$

C. $P(A)=1-P(B)$　　D. $P(\bar{A}\cup\bar{B})=1$

【解析】选D. 因为A , B互不相容, 所以$P(AB)=0$, 则

$$P(\bar{A}\cup\bar{B})=1-P(AB)=1.$$

2. 设随机变量X,Y相互独立, $X\sim N(0,\sigma_1^2)$, $Y\sim N(0,\sigma_2^2)$, 则概率$P\{|X-Y|<1\}$ (　　)

A. 随σ_1与σ_2的减少而减少

B. 随σ_1与σ_2的增加而增加

C. 随σ_1的增加而减少, 随σ_2的减少而增加

D. 随σ_1的增加而增加, 随σ_2的减少而减少

【解析】选C. 由$X\sim N\left(0,\sigma_1^2\right)$, $Y\sim N\left(0,\sigma_2^2\right)$, X与Y相互独立知:

$$E(X-Y)=E(X)-E(Y)=0,\quad D(X-Y)=D(X)+D(Y)=\sigma_1^2+\sigma_2^2.$$

即：$X-Y\sim N(0,\sigma_1^2+\sigma_2^2)$, 故

$$P\{|X-Y|<1\}=P\left\{\left|\frac{X-Y}{\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}}\right|<\frac{1}{\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}}\right\}=2\Phi\left(\frac{1}{\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}}\right)-1.$$

即: 随着σ_1的增加而减少, 随着σ_2的减少而增加.

3. 设连续型随机变量X_1与X_2相互独立, 方差均存在, X_1与X_2的概率密度分别为$f_1(x)$与$f_2(x)$, 随机变量Y_1的概率密度为$f_{Y_1}(y)=\frac{1}{2}(f_1(y)+f_2(y))$, 随机变量$Y_2=\frac{1}{2}(X_1+X_2)$, 则(　　)

A. $EY_1>EY_2, DY_1>DY_2$　　B. $EY_1=EY_2, DY_1=DY_2$

C. $EY_1 = EY_2, DY_1 < DY_2$　　　D. $EY_1 = EY_2, DY_1 > DY_2$

【解析】选D. 因为 $f_{Y_1}(y) = \frac{1}{2}(f_1(y) + f_2(y))$ 且

$$E(X_1) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_1(x)\mathrm{d}x, \qquad E(X_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_2(x)\mathrm{d}x.$$

所以

$$E(Y_1) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} y(f_1(y) + f_2(y))\,\mathrm{d}y = \frac{1}{2}(E(X_1) + E(X_2)) = E(Y_2).$$

$$E(Y_1^2) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} y^2(f_1(y) + f_2(y))\,\mathrm{d}y = \frac{1}{2}E\left(X_1^2\right) + \frac{1}{2}E\left(X_2^2\right).$$

故

$$\begin{aligned} D(Y_1) =& E\left(Y_1^2\right) - [E(Y_1)]^2 \\ =& \frac{1}{2}\left(E\left(X_1^2\right) + E\left(X_2^2\right)\right) - \frac{1}{4}[E(X_1) + E(X_2)]^2 \\ =& \frac{1}{4}D(X_1) + \frac{1}{4}D(X_2) + \frac{1}{4}E(X_1 - X_2)^2 \\ \geq& \frac{1}{4}D(X_1) + \frac{1}{4}D(X_2) = D(Y_2). \end{aligned}$$

设$Y = X_1 - X_2$的概率密度为$f(y)$, 则:

$$E(X_1 - X_2)^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} y^2 f(y)\mathrm{d}y, \text{ 其中} y^2 f(y) \geq 0, \text{ 且} y^2 f(y) \text{不恒为} 0.$$

由定积分的性质知: $E(X_1 - X_2)^2 > 0$, 故$D(Y_1) > D(Y_2)$.

4. 设随机变量$X_1, \cdots, X_n (n > 1)$独立同分布且其方差为$\sigma^2 > 0$. 令$Y = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$, 则(　　)

A. $\mathrm{Cov}(X_1, Y) = \frac{\sigma^2}{n}$　　　B. $\mathrm{Cov}(X_1, Y) = \sigma^2$

C. $D(X_1 + Y) = \frac{n+2}{n}\sigma^2$　　　D. $D(X_1 - Y) = \frac{n+1}{n}\sigma^2$

【解析】选A. 本题用方差和协方差的运算性质直接计算.

$$\mathrm{Cov}(X_1, X_i) = 0, \quad i = 2, 3, \cdots, n.$$

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathrm{Cov}\left(X, \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n}\mathrm{Cov}(X_1, X_1) + \frac{1}{n}\sum_{i=2}^{n}\mathrm{Cov}(X, X_i) = \frac{1}{n}D(X_1) = \frac{1}{n}\sigma^2.$$

$$D(X_1 + Y) = D\left(\frac{n+1}{n}X_1 + \frac{1}{n}X_2 + \cdots + \frac{1}{n}X_n\right) = \frac{(n+1)^2}{n^2}\sigma^2 + \frac{n-1}{n^2}\sigma^2 = \frac{n+3}{n}\sigma^2.$$

$$D(X_1 - Y) = D\left(\frac{n-1}{n}X_1 + \frac{1}{n}X_2 + \cdots + \frac{1}{n}X_n\right) = \frac{(n-1)^2}{n^2}\sigma^2 + \frac{n-1}{n^2}\sigma^2 = \frac{n-1}{n}\sigma^2.$$

5. 设随机变量$X \sim N(0,1)$, $Y \sim N(1,4)$, 相关系数$\rho_{XY}=1$, 则　　(　　)

A. $P\{Y=-2X-1\}=1$　　B. $P\{Y=2X+1\}=1$

C. $P\{Y=-2X+1\}=1$　　D. $P\{Y=2X-1\}=1$

【解析】选B. 用排除法. 设$Y=aX+b$, 由$\rho_{XY}=1$知, X,Y正相关, 故$a>0$, 排除A, C选项. 由$X \sim N(0,1)$, $Y \sim N(1,4)$知, $E(X)=0, E(Y)=1$.

$$E(Y)=E(aX+b)=aE(X)+b,\ \text{即}\ 1=a\times 0+b \ \Rightarrow\ b=1.$$

从而排除D选项.

二、填空题（每题3分，共15分）

6. 设$P(A)=a$, $P(B)=0.3$, $P\left(\bar{A}\cup B\right)=0.7$. 若事件$A$与$B$互不相容, 则$a=$_______.

【解析】$a=0.3$.

$P\left(\bar{A}\cup B\right)=P(\bar{A})+P(B)-P(\bar{A}B)=P(\bar{A})+P(B)-(P(B)-P(AB))=1-P(A)+P(AB)$.

由题意知: $0.7=1-a+P(AB)=1-a$, 故$a=0.3$.

7. 设随机变量X与Y相互独立且都服从区间$[0,3]$上的均匀分布, 则$P\left\{\max\{X,Y\}\le 1\right\}=$_______.

【解析】$P\left\{\max\{X,Y\}\le 1\right\}=\dfrac{1}{9}$. 由题意知, X与Y具有相同的概率密度

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{3}, & 0\le x\le 3,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

则$P\{X\le 1\}=P\{Y\le 1\}=\dfrac{1}{3}$. 由$X,Y$独立性可知:

$$P\{\max\{X,Y\}\le 1\}=P\{X\le 1, Y\le 1\}=P\{X\le 1\}P\{Y\le 1\}=\frac{1}{9}.$$

8. 已知随机变量X与Y相互独立且都服从正态分布$N\left(\mu,\dfrac{1}{2}\right)$, 如果$P\{X+Y\le 1\}=\dfrac{1}{2}$, 则$\mu=$_______.

【解析】$\mu=\dfrac{1}{2}$. 由$X\sim N\left(\mu,\dfrac{1}{2}\right)$, $Y\sim N\left(\mu,\dfrac{1}{2}\right)$, 以及$X$与$Y$相互独立知:

$$X+Y\sim N\left(2\mu,1\right).$$

因此,

$$P\{X+Y\le 1\}=P\left\{\frac{X+Y-2\mu}{1}\le\frac{1-2\mu}{1}\right\}=\Phi\left(\frac{1-2\mu}{1}\right)=\frac{1}{2}.$$

$$\Rightarrow 1-2\mu=0\ \Rightarrow\ \mu=\frac{1}{2}.$$

9. 随机变量$(X,Y)\sim N(0,0,1,4,\rho)$, $D(2X-Y)=1$, 则$\rho=$_______.

【解析】$\rho=\frac{7}{8}$. 因为$(X,Y)\sim N(0,0,1,4,\rho)$, 所以

$$E(X)=0,\ \ E(Y)=0,\ \ D(X)=1,\ \ D(Y)=4.$$

又$D(2X-Y)=4D(X)+D(Y)-4\mathrm{Cov}(X,Y)=1$, 因此, $\mathrm{Cov}(X,Y)=\frac{7}{4}$. 则

$$\rho_{XY}=\frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}=\frac{\frac{7}{4}}{2}=\frac{7}{8}.$$

10. 设随机变量X服从参数为1的泊松分布, 则$P\left\{X=E\left(X^2\right)\right\}=$_______.

【解析】$P\left\{X=E\left(X^2\right)\right\}=\frac{1}{2\mathrm{e}}$. 因为$X\sim\pi(1)$, 所以$E(X)=D(X)=1$,

$$E\left(X^2\right)=D(X)+(E(X))^2=2.$$

故

$$P\left\{X=E\left(X^2\right)\right\}=P\{X=2\}=\frac{1^2\cdot\mathrm{e}^{-1}}{2}=\frac{1}{2\mathrm{e}}.$$

三、解答题（每题10分，共70分）

11. 高射炮对一架飞机进行三次独立射击, 每次射击的命中率为0.6, 而飞机中一弹、中两弹、中三弹被击落的概率分别为0.2、0.6、1.
(1)求射击三次后, 飞机被击落的概率.
(2)已知飞机被击落, 求飞机恰好中两弹的概率.

【解析】(1) 设事件A_i表示飞机被击中i弹 $(i=0,1,2,3)$. 事件B表示飞机被击落. 则

$P(A_0)=(1-0.6)^3=0.064,\qquad P(B|A_0)=0,$ ······ $2'$

$P(A_1)=C_3^1\times0.6\times(1-0.6)^2=0.288,\qquad P(B|A_1)=0.2,$ ······ $3'$

$P(A_2)=C_3^2\times0.6^2\times(1-0.6)=0.432,\qquad P(B|A_3)=0.6,$ ······ $4'$

$P(A_3)=0.6^3=0.216,\qquad P(B|A_3)=1.$ ······ $5'$

则飞机被击落的概率为:

$$P(B) = P(A_0)\times P(B|A_0) + P(A_1)\times P(B|A_1) + P(A_2)\times P(B|A_2) + P(A_3)\times P(B|A_3)$$
$$= 0.5328. \cdots\cdots 7'$$

(2)已知飞机被击落, 则飞机恰好中两弹的概率为:

$$P(A_2|B) = \frac{P(A_2)\times P(B|A_2)}{P(B)} = \frac{0.432\times 0.6}{0.5328} = \frac{54}{111} \approx 0.4865. \cdots\cdots 10'$$

12. 设某班车起点上车人数X服从参数为$\lambda(\lambda>0)$的泊松分布, 每位乘客在中途下车的概率为$p(0<p<1)$, 且中途下车与否相互独立. 以Y表示在中途下车的人数. 求:
(1)在发车时有n个乘客的条件下, 中途有m人下车的概率.
(2)二维随机变量(X,Y)的联合分布律.

【解析】(1)乘客是否下车相互独立, 在有n个乘客的条件下, 中途m个人下车的概率为:

$$P\{Y=m|X=n\} = C_n^m p^m (1-p)^{n-m},\ \ 0\le m\le n,\ \ n=0,1,\cdots. \cdots\cdots 4'$$

(2) 由$X\sim\pi(\lambda)$知,

$$P\{X=n\} = \frac{\lambda^n}{n}\mathrm{e}^{-\lambda},\quad n=0,1,\cdots. \qquad \cdots\cdots 6'$$

利用乘法公式$P(AB)=P(A)P(B|A)$, 二维随机变量(X,Y)的联合分布律为:

$$P\{X=n,Y=m\} = P\{X=n\}P\{Y=m|X=n\} = \frac{\lambda^n}{n}\mathrm{e}^{-\lambda}\cdot C_n^m p^m(1-p)^{n-m},$$

$$0\le m\le n,\quad n=0,1,2,\cdots. \qquad \cdots\cdots 10'$$

13. 设二维随机变量(X,Y)的概率密度为

$$f(x,y) = \begin{cases} k(6-x-y), & 0<x<2, 2<y<4 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

(1)确定常数k; (2) 求$P\{X<1.5\}$; (3)求$P\{X+Y\le 4\}$.

【解析】(1)由概率的规范性知:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^2 \mathrm{d}x\int_2^4 k(6-x-y)\mathrm{d}y = 8k = 1 \ \ \Rightarrow\ \ k=\frac{1}{8}. \cdots\cdots 2'$$

(2)

$$P\{X<1.5\} = \int_{-\infty}^{1.5}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x = \int_0^{1.5}\left[\int_2^4 \frac{1}{8}(6-x-y)\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x = \frac{27}{32}. \cdots\cdots 6'$$

(3)

$$P\{X+Y\le 4\}=\iint\limits_{x+y\le 4} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^2\left[\int_2^{4-x}\frac{1}{8}(6-x-y)\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x=\frac{2}{3}.\cdots\cdots\cdots\cdots 10'$$

14. 设随机变量X的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\cos\left(\dfrac{x}{2}\right), & 0\le x<\pi\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

对X独立重复观察4次, 用Y表示观察值大于$\dfrac{\pi}{3}$的次数. 求:
(1)Y的分布; (2) Y^2的数学期望.

【解析】(1)由于

$$P\left\{X>\frac{\pi}{3}\right\}=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}\frac{1}{2}\cos\left(\frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{2},\quad Y\sim b\left(4,\frac{1}{2}\right)\cdots\cdots\cdots\cdots 4'$$

因此, Y的分布律为:

Y	0	1	2	3	4
P	$\frac{1}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{6}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{1}{16}$

$\cdots\cdots\cdots\cdots 6'$

(2)**方法一**: 因为

$$E(Y)=4\times\frac{1}{2}=2,\quad D(Y)=4\times\frac{1}{2}\times\left(1-\frac{1}{2}\right)=1.\cdots\cdots\cdots\cdots 8'$$

所以, Y^2的数学期望为:

$$E\left(Y^2\right)=D(Y)+(E(Y))^2=1+2^2=5.\cdots\cdots\cdots\cdots 10'$$

方法二: Y^2的数学期望为:

$$E\left(Y^2\right)=\sum_{k=1}^{4}k^2P\{Y=k\}=0^2\times\frac{1}{16}+1^2\times\frac{4}{16}+2^2\times\frac{6}{16}+3^2\times\frac{4}{16}+4^2\times\frac{1}{16}=5.\cdots\cdots 10'$$

15. 设二维随机变量(X,Y)的联合概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}(x+y)\mathrm{e}^{-(x+y)}, & x>0,y>0\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

求关于X的边缘概率密度, 并判断X与Y是否相互独立.

【解析】(1)当$x>0$时, X的边缘概率密度为:

$$
\begin{aligned}
f_X(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}y = \int_0^{+\infty} \frac{1}{2}(x+y)\,\mathrm{e}^{-(x+y)}\mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{2}(x+y)\left(-\mathrm{e}^{-(x+y)}\right)\Big|_{y=0}^{y=+\infty} + \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-(x+y)}\mathrm{d}(x+y) \\
&= \frac{1}{2}x\mathrm{e}^{-x} - \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-(x+y)}\Big|_{y=0}^{y=+\infty} \\
&= \frac{x+1}{2}\mathrm{e}^{-x}. \cdots\cdots 4'
\end{aligned}
$$

故X得概率密度为

$$
f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{x+1}{2}\mathrm{e}^{-x}, & x>0, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases} \cdots\cdots 6'
$$

(2) 同理可得, Y的概率密度为:

$$
f_Y(y) = \begin{cases} \dfrac{y+1}{2}\mathrm{e}^{-y}, & y>0, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases} \cdots\cdots 8'
$$

因为

$$
f_X(x)f_Y(y) \neq f(x,y), \cdots\cdots 9'
$$

所以, X与Y不相互独立. $\cdots\cdots$ 10′

16. 设随机变量X服从几何分布, 其分布律为

$$
P\{X=k\} = p(1-p)^{k-1}, \quad k=1,2,\cdots, \text{其中} 0<p<1 \text{是常数},
$$

求$E(X), D(X)$.

【解析】

$$
E(X) = \sum_{k=1}^{+\infty} k\cdot p(1-p)^{k-1} \xlongequal{q=1-p} p\sum_{n=1}^{+\infty} kq^{k-1} = p\left(\sum_{i=1}^{+\infty} q^k\right)' = p\cdot\frac{1}{(1-q)^2} = \frac{1}{p} \cdots\cdots 5'
$$

$$
\begin{aligned}
E(X^2) &= \sum_{k=1}^{+\infty} k^2\cdot p(1-p)^{k-1} = p\sum_{k=1}^{+\infty} k^2\cdot(1-p)^{k-1} \\
&= p\sum_{k=1}^{+\infty}\left((k+1)k(1-p)^{k-1} - k(1-p)^{k-1}\right) \\
&\xlongequal{q=1-p} p\left(\sum_{k=1}^{+\infty} q^{k+1}\right)'' - E(X) \\
&= \frac{2}{p^2} - \frac{1}{p} \cdots\cdots 9'
\end{aligned}
$$

X的方差为

$$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\frac{2}{p^2}-\frac{1}{p}-\frac{1}{p^2}=\frac{1-p}{p^2}. \cdots\cdots\cdots\cdots 10'$$

17. 对于一个学生而言，来参加家长会的家长人数是一个随机变量. 设一个学生无家长、有1名家长、有2名家长来参加会议的概率分别为0.1, 0.7, 0.2. 若学校共有400名学生, 设各学生参加会议的家长人数相互独立, 且服从同一分布. 求:
(1)参加会议的家长人数X超过452的概率.
(2)有1名家长参加会议的学生人数不多于300的概率.

注：本题可能会用到这些数据, 供参考.
$\Phi(1.1142)=0.8674$, $\Phi(1.1422)=0.8733$, $\Phi(2.0756)=0.9810$, $\Phi(2.1822)=0.9855$.

【解析】(1)以$X_k(k=1,2,\cdots,400)$记第k个学生参加会议的家长人数, 则X_k的分布律为

X_k	0	1	2
P	0.1	0.7	0.2

故

$$E(X_k)=1.1,\quad D(X_k)=0.29, k=1,2,\cdots,400. \quad \cdots\cdots\cdots\cdots 2'$$

又$X=\sum\limits_{k=1}^{400}X_k$, 由独立同分布的中心极限定理知, 随机变量

$$\frac{\sum\limits_{k=1}^{400}X_k-400\times 1.1}{\sqrt{400}\sqrt{0.29}}=\frac{X-400\times 1.1}{\sqrt{400}\sqrt{0.29}}$$

近似服从正态分布$N(0,1)$, 于是

$$\begin{aligned}P\{X>452\}&=P\left\{\frac{X-400\times 1.1}{\sqrt{400}\sqrt{0.29}}>\frac{452-400\times 1.1}{\sqrt{400}\sqrt{0.29}}\right\}\\&=1-P\left\{\frac{X-400\times 1.1}{\sqrt{400}\sqrt{0.29}}\le 1.1142\right\}\\&\approx 1-\Phi\left(1.1142\right)\\&=0.1326. \quad \cdots\cdots\cdots\cdots 6'\end{aligned}$$

(2) 以Y记有1名家长参加会议的学生人数, 则$Y\sim b(400,0.7)$, 由棣莫弗-拉普拉斯定理知,

$$\begin{aligned}P\{Y\le 300\}&=P\left\{\frac{Y-400\times 0.7}{\sqrt{400\times 0.7\times 0.3}}\le\frac{300-400\times 0.7}{\sqrt{400\times 0.7\times 0.3}}\right\}\\&=P\left\{\frac{Y-400\times 0.8}{\sqrt{400\times 0.7\times 0.3}}\le 2.1822\right\}\\&\approx\Phi(2.1822)\\&=0.9855. \quad \cdots\cdots\cdots\cdots 10'\end{aligned}$$