【例 2】 指出下列哪些是无穷小量，哪些是无穷大量.

(1) $\frac{1}{x}$，当 $x\to0$ 时； (2) $\frac{\sin x}{1+\cos x}$，当 $x\to0$ 时；

(3) $\frac{x+1}{x^2-4}$，当 $x\to2$ 时； (4) $\frac{x^4+2x^2-3}{x^2-3x+2}$，当 $x\to1$ 时.

分析 由定义判定无穷小或无穷大需要判断其极限是零还是∞.

解 (1) $\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{x}=\infty\Rightarrow$当 $x\to0$ 时，$\frac{1}{x}$为无穷大量.

(2) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{1+\cos x}=0\Rightarrow$当 $x\to0$ 时，$\frac{\sin x}{1+\cos x}$为无穷小量.

(3) $\lim\limits_{x\to2}\frac{x+1}{x^2-4}=\lim\limits_{x\to2}\frac{x+1}{(x-2)(x+2)}=\infty\Rightarrow$当 $x\to2$ 时，$\frac{x+1}{x^2-4}$是无穷大量.

(4) $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^4+2x^2-3}{x^2-3x+2}=\lim\limits_{x\to1}\frac{(x^2-1)(x^2+3)}{(x-1)(x-2)}=\lim\limits_{x\to1}\frac{(x+1)(x^2+3)}{x-2}=-8\Rightarrow$当 $x\to1$ 时，$\frac{x^4+2x^2-3}{x^2-3x+2}$既不是无穷大量也不是无穷小量.

方法总结

无穷小是一个变量，“0”是唯一的无穷小常数，任何一个绝对值很小很小的非零常数都不是无穷小.

习题 1—4 解答

1. 两个无穷小的商是否一定是无穷小？举例说明之.

解 不一定. 例如 $\alpha(x)=2x$ 与 $\beta(x)=3x$ 都是当 $x\to0$ 时的无穷小，但$\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\frac{2}{3}$却不是当$x\to0$时的无穷小.

*2. 根据定义证明：

(1) $y=\frac{x^2-9}{x+3}$为当 $x\to3$ 时的无穷小. (2) $y=x\sin\frac{1}{x}$为当 $x\to0$ 时的无穷小.

证 (1)因为$\left|\frac{x^2-9}{x+3}\right|=|x-3|$，所以$\forall\varepsilon>0$，取 $\delta=\varepsilon$，则当 $0<|x-3|<\delta$ 时，就有$\left|\frac{x^2-9}{x+3}\right|<\varepsilon$，即$\frac{x^2-9}{x+3}$为当 $x\to3$ 时的无穷小.

(2)因为$\left|x\sin\frac{1}{x}\right|\leqslant|x|$，所以$\forall\varepsilon>0$，取 $\delta=\varepsilon$，则当 $0<|x|<\delta$ 时，就有$\left|x\sin\frac{1}{x}\right|<\varepsilon$，

即 $x\sin\frac{1}{x}$为当 $x\to0$ 时的无穷小.

*3. 根据定义证明：函数 $y=\frac{1+2x}{x}$为当 $x\to0$ 时的无穷大. 问 x 应满足什么条件，能使 $|y|>10^4$？

证 因为$\left|\frac{1+2x}{x}\right|=\left|\frac{1}{x}+2\right|\geqslant\left|\frac{1}{x}\right|-2$，要使$\left|\frac{1+2x}{x}\right|>M$，只要$\left|\frac{1}{x}\right|-2>M$，即 $|x|<\frac{1}{M+2}$，所以$\forall M>0$，取 $\delta=\frac{1}{M+2}$，则当 $0<|x-0|<\delta$ 时，就有$\left|\frac{1+2x}{x}\right|>M$，即$\frac{1+2x}{x}$为当 $x\to0$ 时的无穷大.

令 $M=10^4$，取 $\delta=\frac{1}{10^4+2}$，当 $0<|x-0|<\frac{1}{10^4+2}$时，就能使$\left|\frac{1+2x}{x}\right|>10^4$.

评注：在本题的证明中，采取先将$|f(x)|=\left|\frac{1+2x}{x}\right|$等价变形，然后适当缩小，使缩小后的量大于$M$，从而求出$\delta$．这种方法在按定义证明函数在某个变化过程中为无穷大时，也是经常采用的．

4．求下列极限并说明理由：

(1)$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x+1}{x}$；　　(2)$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-x^2}{1-x}$．

解　(1)$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x+1}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(2+\frac{1}{x}\right)=2$．

理由：由定理2，$\frac{1}{x}$为当$x\to\infty$时的无穷小；再由定理1，$\lim\limits_{x\to\infty}\left(2+\frac{1}{x}\right)=2$．

(2)$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-x^2}{1-x}=\lim\limits_{x\to 0}(1+x)=1$．理由：由定理1，$\lim\limits_{x\to 0}(1+x)=1$．

5．根据函数极限或无穷大定义，填写下表：

	$f(x)\to A$	$f(x)\to\infty$	$f(x)\to+\infty$	$f(x)\to-\infty$
$x\to x_0$	$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$，使当$0<\|x-x_0\|<\delta$时，即有$\|f(x)-A\|<\varepsilon$	$\forall M>0,\exists\delta>0$，使当$0<\|x-x_0\|<\delta$时，即有$\|f(x)\|>M$	$\forall M>0,\exists\delta>0$，使当$0<\|x-x_0\|<\delta$时，即有$f(x)>M$	$\forall M>0,\exists\delta>0$，使当$0<\|x-x_0\|<\delta$时，即有$f(x)<-M$
$x\to x_0^+$	$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$，使当$0<x-x_0<\delta$时，即有$\|f(x)-A\|<\varepsilon$	$\forall M>0,\exists\delta>0$，使当$0<x-x_0<\delta$时，即有$\|f(x)\|>M$	$\forall M>0,\exists\delta>0$，使当$0<x-x_0<\delta$时，即有$f(x)>M$	$\forall M>0,\exists\delta>0$，使当$0<x-x_0<\delta$时，即有$f(x)<-M$
$x\to x_0^-$	$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$，使当$0>x-x_0>-\delta$时，即有$\|f(x)-A\|<\varepsilon$	$\forall M>0,\exists\delta>0$，使当$0>x-x_0>-\delta$时，即有$\|f(x)\|>M$	$\forall M>0,\exists\delta>0$，使当$0>x-x_0>-\delta$时，即有$f(x)>M$	$\forall M>0,\exists\delta>0$，使当$0>x-x_0>-\delta$时，即有$f(x)<-M$
$x\to\infty$	$\forall\varepsilon>0,\exists X>0$，使当$\|x\|>X$时，即有$\|f(x)-A\|<\varepsilon$	$\forall M>0,\exists X>0$，使当$\|x\|>X$时，即有$\|f(x)\|>M$	$\forall M>0,\exists X>0$，使当$\|x\|>X$时，即有$f(x)>M$	$\forall M>0,\exists X>0$，使当$\|x\|>X$时，即有$f(x)<-M$
$x\to+\infty$	$\forall\varepsilon>0,\exists X>0$，使当$x>X$时，即有$\|f(x)-A\|<\varepsilon$	$\forall M>0,\exists X>0$，使当$x>X$时，即有$\|f(x)\|>M$	$\forall M>0,\exists X>0$，使当$x>X$时，即有$f(x)>M$	$\forall M>0,\exists X>0$，使当$x>X$时，即有$f(x)<-M$
$x\to-\infty$	$\forall\varepsilon>0,\exists X>0$，使当$x<-X$时，即有$\|f(x)-A\|<\varepsilon$	$\forall M>0,\exists X>0$，使当$x<-X$时，即有$\|f(x)\|>M$	$\forall M>0,\exists X>0$，使当$x<-X$时，即有$f(x)>M$	$\forall M>0,\exists X>0$，使当$x<-X$时，即有$f(x)<-M$

6．函数$y=x\cos x$在$(-\infty,+\infty)$内是否有界？这个函数是否为$x\to\infty$时的无穷大？为什么？

6题视频解析

解　因为$\forall M>0$，总有$x_0\in(M,+\infty)$，使$\cos x_0=1$，从而$y=x_0\cos x_0=x_0>M$，所以$y=x\cos x$在$(-\infty,+\infty)$内无界．又因为$\forall M>0,X>0$，总有$x_0\in(X,+\infty)$，使

$\cos x_0=0$，从而 $y=x_0\cos x_0=0<M$，所以 $y=x\cos x$ 不是当 $x\to+\infty$ 时的无穷大.

*7. 证明：函数在 $y=\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}$ 区间 $(0,1]$ 上无界，但这函数不是 $x\to0^+$ 时的无穷大.

7 题视频解析

证 先证函数 $y=\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}$ 在区间 $(0,1]$ 上无界.

因为 $\forall M>0$，取 $x_0=\dfrac{1}{2([M]+1)\pi+\frac{\pi}{2}}\in(0,1]$，则 $f(x_0)=2([M]+1)\pi+\frac{\pi}{2}>M$.

所以 $y=\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}$ 在 $(0,1]$ 上无界.

再证函数 $y=f(x)=\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}$ 不是 $x\to0^+$ 时的无穷大.

因为取 $M=1$. 对 $\forall\delta>0$. 取 $x_0=\frac{1}{2k\pi}\left(k>\frac{1}{2\delta\pi}\right)$，

则 $0<x_0=\frac{1}{2k\pi}<\delta$，但有 $f(x_0)=2k\pi\sin 2k\pi=0<M$.

所以 $y=\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}$ 不是 $x\to0^+$ 时的无穷大.

8. 求函数 $f(x)=\frac{4}{2-x^2}$ 的图形的渐近线.

解 因为 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=0$，所以 $y=0$ 是函数图形的水平渐近线.

因为 $\lim\limits_{x\to-\sqrt{2}}f(x)=\infty$，$\lim\limits_{x\to\sqrt{2}}f(x)=\infty$，所以 $x=-\sqrt{2}$ 及 $x=\sqrt{2}$ 都是函数图形的铅直渐近线.

第五节　极限运算法则

一、主要内容归纳

1. 函数极限的四则运算法则

以下运算法则对 $x\to x_0$ 和 $x\to\infty$ 均成立.

设 $\lim f(x)=A$，$\lim g(x)=B$ (A、B 均为常数)，则

$$\lim[f(x)\pm g(x)]=\lim f(x)\pm\lim g(x)=A\pm B$$

$$\lim[f(x)\cdot g(x)]=\lim f(x)\cdot\lim g(x)=A\cdot B$$

$$\lim\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim f(x)}{\lim g(x)}=\frac{A}{B}\ (B\neq0)$$

以上结论对数列也成立，且上述法则成立的条件是各自的极限都存在，否则不可以进行极限的四则运算.

2. 无穷小运算法则

(1)有限多个无穷小的代数和仍是无穷小；

(2)有限多个无穷小之积仍是无穷小；

(3)有界函数与无穷小的乘积仍是无穷小