第三章　习题课

1. 内容总结
2. 典型例题
3. 能力拓展

1. 内容总结

随机事件 → 随机变量 → 二维随机变量 → n维随机变量

1. 内容总结

二维随机变量

1 (X,Y)的概率分布

- 联合分布函数
- 联合分布律
- 联合概率密度

2 X和Y各自的概率分布

- 边缘分布函数
- 边缘分布律
- 边缘概率密度

3 X和Y之间关系

- 条件分布函数
- 条件分布律
- 条件概率密度
- 独立性

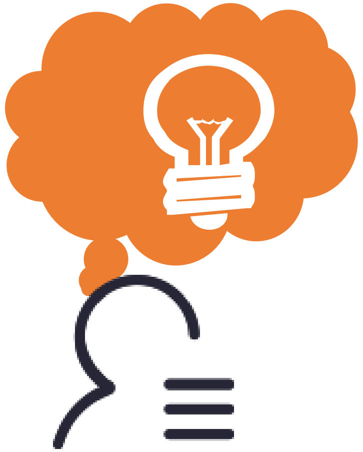
4 X和Y函数的分布

- 和的分布
- 最值的分布
- 一般函数的分布

1. 内容总结

二维随机变量的**联合**分布、**边缘**分布、**条件**分布之间存在怎样的关系？

二维**正态分布**的边缘、条件分布是正态分布；两个边缘分布是正态分布的随机变量，它们的联合分布一定是二维正态随机变量吗？



怎样求二维随机变量的函数分布？

两个**随机变量**相互独立判定的充要条件？满足**可加性**的分布有哪些？

2. 典型例题–计算概率

例1. 设二维随机变量(X,Y)的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases} k(6-x-y), 0<x<2, 2<y<4, \\ 0, \quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad 其它. \end{cases}$$

(1) 确定常数k. (2) 求 $P\{X<1,Y<3\}$. (3) 求 $P\{X<1.5\}$. (4) 求 $P\{X+Y\leq 4\}$.

分析： 关键是确定出k的值.

1) 根据题目条件确定出分布中的未知参数的值；

2) 根据分布求出所需的概率值.

2. 典型例题-求边缘和条件概率密度

例2 设二维随机变量(X,Y)的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases} cx^2y, & x^2\le y\le 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

(1)求条件概率密度$f_{Y|X}(y|x)$，特别地求出当$X=\frac{1}{2}$时，Y的条件概率密度；

(2)求条件概率 $P\left\{Y\ge\frac{1}{4}\middle|X=\frac{1}{2}\right\}$.

分析：关键是确定出c的值，条件概率注意取值区间.

练习十一

例3 设二维随机变量(X,Y)的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}1, & |y|<x,0<x<1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

(1) 求条件概率密度 $f_{Y|X}(y|x), f_{X|Y}(x|y)$.

(2) 问X与Y是否相互独立, 为什么?

练习十二

例4 设 X 和 Y 是两个相互独立的随机变量，其概率密度分别为

$$f_X(x)=\begin{cases}1, & 0\le x\le 1,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}\qquad f_Y(y)=\begin{cases}e^{-y}, & y>0,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

求随机变量 $Z=X+Y$ 的概率密度.

例5 二维随机变量 (X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}2-x-y, & 0<x<1,0<y<1,\\ 0\ , & \text{其它}.\end{cases}$$

求 (1) $P\{X>2Y\}$.

(2) $Z=X+Y$ 的概率密度函数. （2007 年考研试题）

例6 二维随机变量(X,Y)的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}2e^{-(x+2y)}, & x>0,y>0,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

求$Z=X+2Y$的分布函数.

连续型随机变量和的分布

- 分布函数法
- 一般公式法
- 卷积公式法（独立）

2. 典型例题-随机变量函数的分布

➢ **涉及二重积分时应注意的重点** **二重积分关键：定限**

1）对积分区域务必画图；

2）对积分的定限方法：

先积后定限；

后积先定限；

限内画一线.

例7

设二维离散型随机向量 (X, Y) 具有下列联合分布律，试求 $M = \max(X, Y)$，$N = \min(X, Y)$ 的分布律。

$Y \backslash X$	1	2	3
1	1/9	0	0
2	2/9	1/9	0
3	2/9	2/9	1/9

M	1	2	3
P	1/9	3/9	5/9

卷积公式的方法推广——混合型

例8 设 $X \sim \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0.5 & 0.5 \end{pmatrix}$，$Y$ 的概率密度为 $f(y)=\begin{cases} 2y, & 0<y<1 \\ 0, & else \end{cases}$，

X 与 Y 相互独立，求 $Z=X+Y$ 概率密度。

$$G(z)=P\{X+Y\le z\}$$

$$P(B)=P(A_1)P(B|A_1)+P(A_2)P(B|A_2)$$

$$G(z)=0.5F(z)+0.5F(z-2)$$

$$g(z)=0.5f(z)+0.5f(z-2)=\begin{cases} z, & 0<z<1 \\ z-2, & 2<z<3 \\ 0, & else \end{cases}$$

卷积公式的理论推广 1——$Z = aX + bY$

设(X,Y)是二维独立连续型随机变量，其概率密度函数为$f(x,y)$，试求$Z = aX + bY$的概率密度.

$$F_Z(z) = P\{Z \le z\}$$

$$= \iint\limits_G f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{\frac{z-by}{a}} f(x,y)\,\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y$$

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f_X\left(\frac{z-by}{a}\right) f_Y(y)}{|a|}\,\mathrm{d}y$$

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f_X(x) f_Y\left(\frac{z-bx}{a}\right)}{|b|}\,\mathrm{d}x$$

3. 能力拓展

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\,f_Y(z-x)\,dx$$

正态分布的可加性

如果随机变量 X 与 Y 相互独立，且 $X \sim N\left(\mu_1,\ \sigma_1^2\right)$ $Y \sim N\left(\mu_2,\ \sigma_2^2\right)$

则 $Z = X + Y \sim N\left(\mu_1 + \mu_2,\ \sigma_1^2 + \sigma_2^2\right)$

一般地，如果随机变量 $X_1,\ X_2,\ \cdots,\ X_n$ 相互独立，

$X_i \sim N\left(\mu_i,\ \sigma_i^2\right),(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$，$k_1, k_2, \cdots, k_n$ 为实常数，

则 $Z = \sum_{i=1}^{n} k_i X_i \sim N\left(\sum_{i=1}^{n} k_i \mu_i,\ \sum_{i=1}^{n} k_i^2 \sigma_i^2\right)$

3. 能力拓展

$$X_i \sim N\left(\mu_i, \sigma_i^2\right) \text{ 且独立}$$

$$a_1X_1 + a_2X_2 + \cdots + a_nX_n \sim N\left(a_1\mu_1 + a_2\mu_2 + \cdots + a_n\mu_n,\quad a_1^2\sigma_1^2 + a_2^2\sigma_2^2 + \cdots + a_n^2\sigma_n^2\right)$$

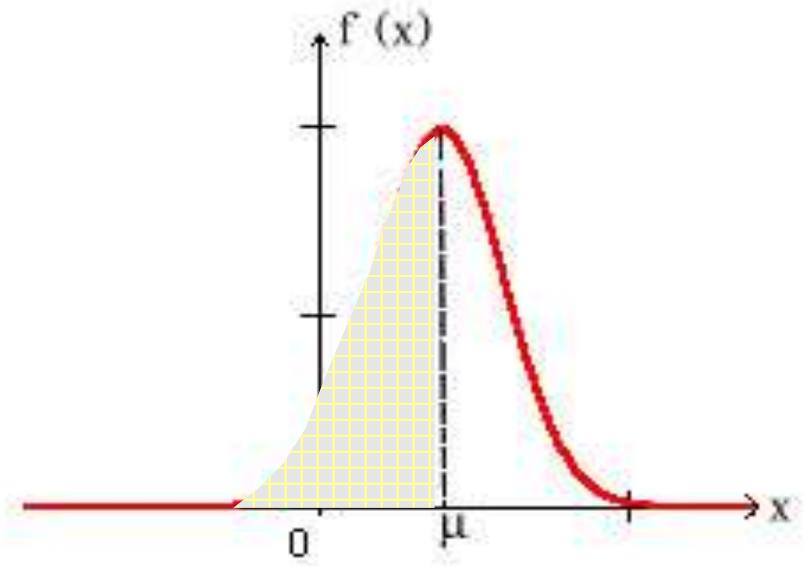
例9 设相互独立的随机变量X和Y分别服从正态分布$N(0,1)$和$N(1,1)$，则

(A) $P\{X+Y\le 0\}=\dfrac{1}{2}$

(B) $P\{X+Y\le 1\}=\dfrac{1}{2}$

(C) $P\{X-Y\le 0\}=\dfrac{1}{2}$

(D) $P\{X-Y\le 1\}=\dfrac{1}{2}$



3. 能力拓展

卷积公式的理论推广 2——$T = X + Y + Z$

设 (X,Y,Z) 是三维连续型随机变量，其概率密度函数为 $f(x, y, z)$，试求 $T = X + Y + Z$ 的概率密度。

$$f_T(t) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) f_Y(y) f_z(t-x-y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$f_T(t) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) f_Y(t-x-z) f_Z(z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}z$$

$$f_T(t) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t-y-z) f_Y(y) f_Z(z)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

3. 能力拓展

卷积公式的理论推广 3——$T = X_1 + X_2 + \ldots + Xn$

设 $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ 是n维连续型随机变量，其概率密度函数为 $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$，试求$T = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ 的概率密度。

- 傅里叶变换
- 中心极限定理