(3)令 $y=0$，从上式中解出 x，就得到切线与 x 轴交点的横坐标为 $x_1=x_0-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$，它比 x_0 更接近方程的根 ξ.

(4)再在点$(x_1,f(x_1))$作切线，可得根的近似值 x_2，如此继续，在点$(x_{n-1},f(x_{n-1}))$作切线，得根的近似值 $x_n=x_{n-1}-\frac{f(x_n-1)}{f'(x_n-1)}$.

如果 $f(b)$与 $f''(x)$同号，切线作在端点 B(如图 3—16)可记 $x_0=b$，仍按公式 x_n 计算切线与 x 轴交点的横坐标.

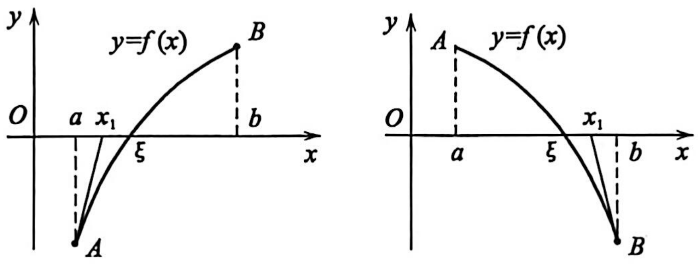

图 3—16

二、经典例题解析及解题方法总结(略)

习题 3—8 解答

1. 试证明方程 $x^3-3x^2+6x-1=0$ 在区间(0,1)内有唯一的实根，并用二分法求这个根的近似值，使误差不超过 0.01.

解 设函数 $f(x)=x^3-3x^2+6x-1$，$f(x)$在$[0,1]$上连续，且 $f(0)=-1<0$，$f(1)=3>0$ 由零点定理知至少存在一点 $\xi\in(0,1)$，使 $f(\xi)=0$，即方程 $x^3-3x^2+6x-1=0$ 在(0,1)内至少有一个实根.

又 $f'(x)=3x^2-6x+6=3(x-1)^2+3>0$，故函数 $f(x)$在$[0,1]$上单调增加，从而方程$f(x)=0$，即 $x^3-3x^2+6x-1=0$ 在(0,1)内至多有一个实根. 因此方程 $x^3-3x^2+6x-1=0$ 在(0,1)内有唯一的实根.

现用二分法求这个实根的近似值：

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
a_n	0	0	0	0.125	0.125	0.157	0.173	0.180	0.180	0.182	0.183
b_n	1	0.5	0.25	0.25	0.188	0.188	0.188	0.188	0.184	0.184	0.184
中点 x_n	0.5	0.25	0.125	0.188	0.157	0.173	0.180	0.184	0.182	0.183	0.183
$f(x_n)$符号	+	+	−	+	−	−	−	+	−	+	+

故使误差不超过 0.01 的根的近似值为 $\xi=0.183$.

2. 试证明方程 $x^5+5x+1=0$ 在区间(−1,0)内有唯一的实根，并用切线法求这个根的近似值，使误差不超过 0.01.

解 设函数 $f(x)=x^5+5x+1$. $f(x)$在$[-1,0]$上连续，且 $f(-1)=-5<0$，$f(0)=1>0$. 由零点定理知至少存在一点 $\xi\in(-1,0)$，使 $f(\xi)=0$，即方程 $x^5+5x+1=0$ 在区间(−1,0)内至少有一实根.

又 $f'(x)=5x^4+5>0$，故函数 $f(x)$在$[-1,0]$上单调增加，从而方程 $f(x)=0$，即 $x^5+5x+1=0$ 在(−1,0)内至多有一个实根. 因此方程 $x^5+5x+1=0$ 在区间(−1,0)内有唯一的实根.

现用切线法求这个实根的近似值：

由 $f''(x)=20x^3$，$f''(-1)=-20<0$ 知取 $x_0=-1$，利用递推公式 $x_n=x_{n-1}-\dfrac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}$，得：

$$x_1=x_0-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}=-1-\frac{f(-1)}{f'(-1)}=-0.5,$$

$$x_2=x_1-\frac{f(x_1)}{f'(x_1)}=-0.5-\frac{f(-0.5)}{f'(-0.5)}=-0.26,$$

$$x_3=x_2-\frac{f(x_2)}{f'(x_2)}=-0.26-\frac{f(-0.26)}{f'(-0.26)}\approx-0.20,$$

$$x_4=x_3-\frac{f(x_3)}{f'(x_3)}=-0.20-\frac{f(-0.20)}{f'(-0.20)}\approx-0.20,$$

故使误差不超过 0.01 的根的近似值为 $\xi=-0.20$.

3. 用割线法求方程 $x^3+3x-1=0$ 的近似根，使误差不超过 0.01.

解 设函数 $f(x)=x^3+3x-1$，$f(x)$在$[0,1]$上连续，且 $f(0)=-1<0$，$f(1)=3>0$，由零点定理知至少存在一点 $\xi\in(0,1)$，使 $f(\xi)=0$，即方程 $x^3+3x-1=0$ 在区间$(0,1)$内至少有一实根.

又 $f'(x)=3x^2+3>0$，故函数 $f(x)$在$[0,1]$上单调增加，从而方程 $f(x)=0$，即 $x^3+3x-1=0$ 在$(0,1)$内至多有一实根. 因此方程 $x^3+3x-1=0$ 在区间$(0,1)$内有唯一的实根.

现用割线法求这个根的近似值：

由 $f''(x)=6x$，$f''(1)=6>0$ 知取 $x_0=1$. 又取 $x_1=0.8$，利用递推公式 $x_{n+1}=x_n-\dfrac{x_n-x_{n-1}}{f(x_n)-f(x_{n-1})}\cdot f(x_n)$，得：

$$x_2=x_1-\frac{x_1-x_0}{f(x_1)-f(x_0)}\cdot f(x_1)=0.8-\frac{0.8-1}{f(0.8)-f(1)}\cdot f(0.8)\approx0.449,$$

$$x_3=x_2-\frac{x_2-x_1}{f(x_2)-f(x_1)}\cdot f(x_2)=0.449-\frac{0.449-0.8}{f(0.449)-f(0.8)}\cdot f(0.449)\approx0.345,$$

$$x_4=x_3-\frac{x_3-x_2}{f(x_3)-f(x_2)}\cdot f(x_3)=0.345-\frac{0.345-0.449}{f(0.345)-f(0.449)}\cdot f(0.345)\approx0.323,$$

$$x_5=x_4-\frac{x_4-x_3}{f(x_4)-f(x_3)}\cdot f(x_4)=0.323-\frac{0.323-0.345}{f(0.323)-f(0.345)}\cdot f(0.323)\approx0.322.$$

至此，计算无需再继续，因 x_4 与 x_5 的前两位小数相同，故以 0.32 作为根的近似值，其误差小于 0.01.

4. 求方程 $x\lg x=1$ 的近似根，使误差不超过 0.01.

解 设函数 $f(x)=x\lg x-1$. $f(x)$在$[1,3]$上连续，且

$$f(1)=-1<0,\qquad f(3)=3\lg3-1>0,$$

由零点定理知至少存在一点 $\xi\in(1,3)$，使 $f(\xi)=0$，即方程 $x\lg x=1$ 在区间$(1,3)$内至少有一实根.

又 $f'(x)=\lg x+x\cdot\dfrac{1}{x\ln 10}=\lg x+\dfrac{1}{\ln 10}>0\ (x\geqslant1)$，故函数 $f(x)$在$[1,3]$上单调增加，从而方程 $f(x)=0$，即 $x\lg x=1$ 在$(1,3)$内至多有一实根. 因此方程 $x\lg x=1$ 在$(1,3)$内有唯一的实根.

现用二分法求这个根的近似值：

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9
a_n	1	2	2.50	2.50	2.50	2.50	2.50	2.50	2.50
b_n	3	3	3	2.75	2.63	2.57	2.53	2.52	2.51
中点 x_n	2	2.50	2.75	2.63	2.57	2.53	2.52	2.51	2.51
$f(x_n)$符号	−	−	+	+	+	+	+	+	+

故误差不超过 0.01 的根的近似值为 $\xi=2.51$.