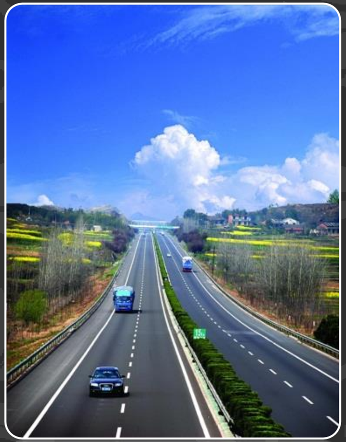
高等数学

3.1 微分中值定理

基础部数学教研室

郑治中



一位驾驶员在某高速公路出口处领到一张超速行驶罚单．理由是从七点进入高速到九点到达出口行驶了240km，而该路段的限速为110km/h. 试问该罚单是否合理?

平均速度 $\bar{v}=\dfrac{240}{9-7}=120\ (\mathrm{km/h})$

问题：是否存在某一时刻的瞬时速度恰好是平均速度?

北京某过街天桥上的公式

$$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$$

$$f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

路程函数 $s=f(t)$

$$f'(\xi)=\frac{f(9)-f(7)}{9-7}$$

$$=\frac{240}{2}=120$$

费马引理

罗尔定理

拉格朗日中值定理

微分中值定理应用

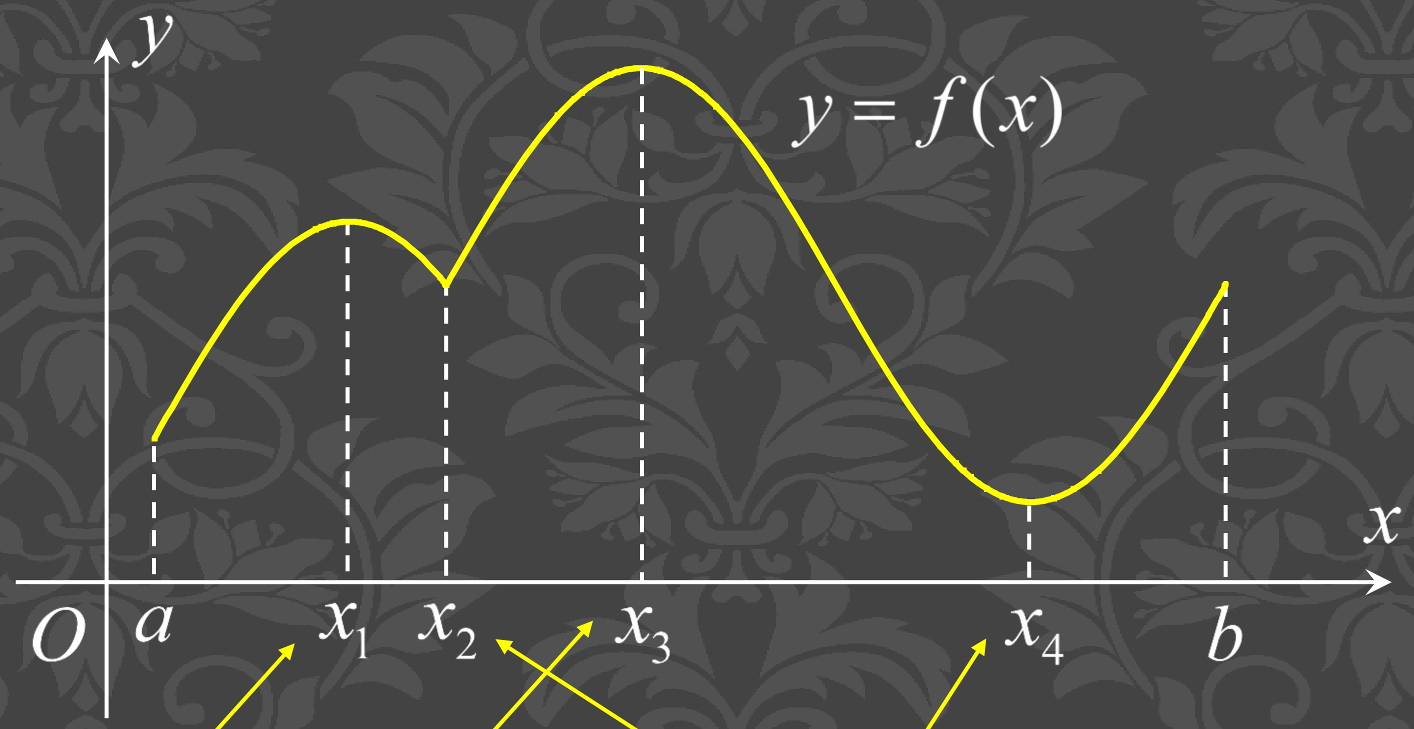
定义 1 设函数 $f(x)$在x_0 的某邻域 $(x_0-\delta, x_0+\delta)$内有定义，如果对于该邻域内异于 x_0的点 x，恒有

$$f(x) < f(x_0),$$

那么就称$f(x_0)$是函数$f(x)$的一个极大值，x_0称为函数$f(x)$的极大值点.

类似可定义函数的极小值和极小值点. $f(x) > f(x_0)$

函数的极大值与极小值统称为函数的极值，使函数取得极值的点称为极值点.



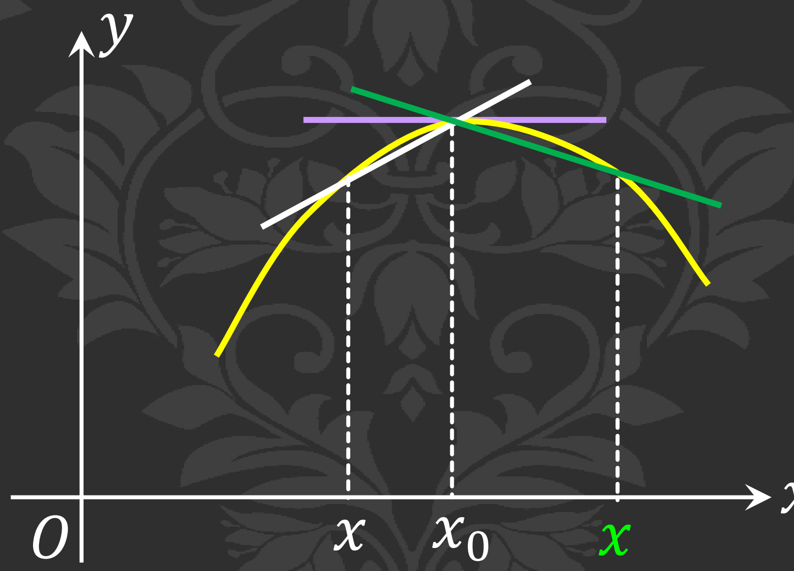
极大值点　　极小值点

极值是一个局部概念，最值是一个全局概念

定理 1 设函数 $f(x)$在 x_0 点处可导，且存在 x_0 的 δ 邻域 $U(x_0,\delta)$，使得当 $x\in U(x_0,\delta)$时，恒有

$$f(x)\geq f(x_0)\ (\text{或} f(x)\leq f(x_0)\ ),$$

那么$f'(x_0)=0$. ——**费马引理**



导数等于零的点称为函数的**驻点**，或**稳定点**.

我从费马的切线作法中得到这种方法的启示，我推广了它，把它直接地并且反过来用于抽象方程。

—— 牛顿

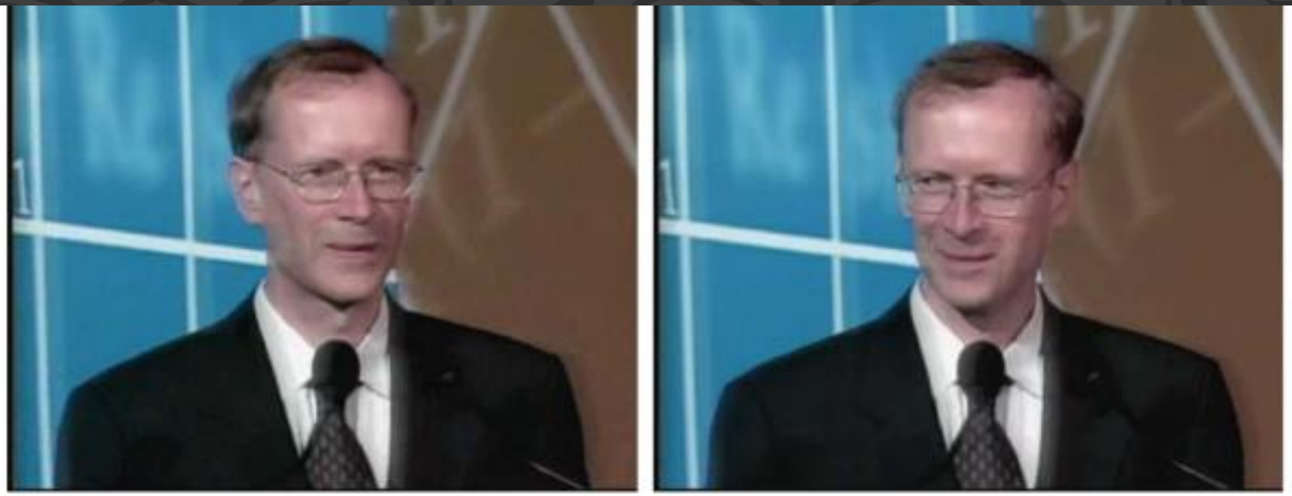
将一个立方数分成两个立方数，一个四次幂分成两个四次幂，或者一般地，将一个高于二次的幂分成两个同次幂，这是不可能的。关于此，我发现一种美妙的方法，但这里的页边太窄写不下。

费马在丢翻图《算术》上的批注

费马[法]
Pierre de Fermat
1601—1665

怀尔斯[英]
(Andrew Wiles)

尝试利用费马大定理证明$\sqrt[3]{2}$是无理数。



传说中的意气风发大概就是这样吧（Wiles）

Wiles 证明的细节发表在如下两篇经典文章中

1. **Andrew Wiles, "Modular elliptic curves and Fermat's last theorem"**
2. **Andrew Wiles and Richard Taylor, "Ring-theoretic properties of certain Hecke algebras"**

定理1 (罗尔定理)

如果函数$f(x)$ 满足下列条件:

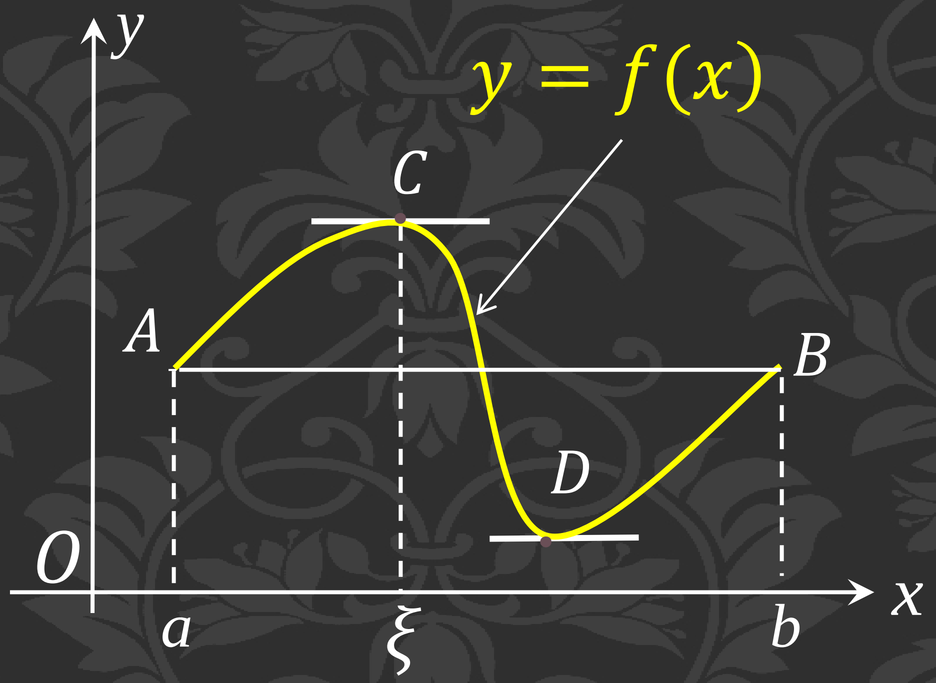
(1) 在$[a,b]$上连续;

(2) 在(a,b)内可导;

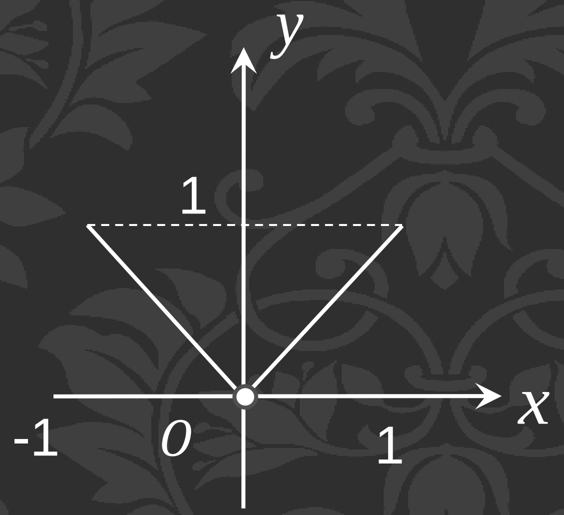
(3) $f(a)=f(b)$,

那么至少存在一点$\xi\in(a,b)$，使得

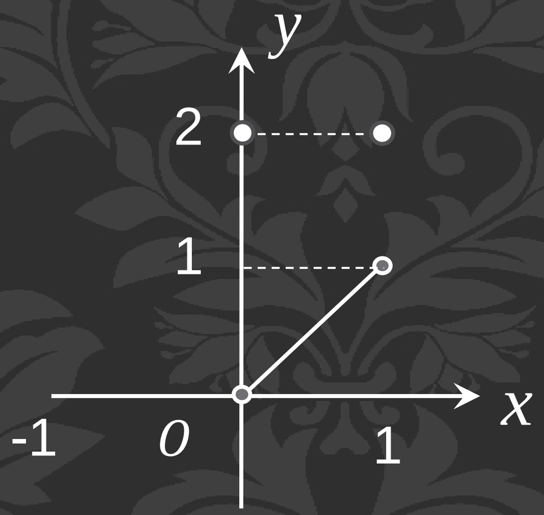
$$f'(\xi)=0.$$



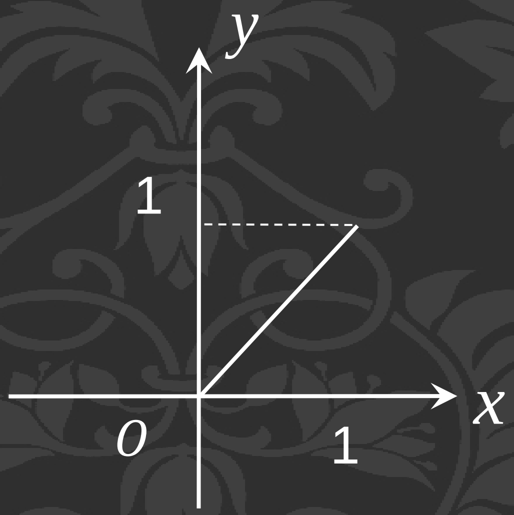
注: 定理条件只是充分的， 罗尔定理的三个假设条件缺一不可.



$y = |x|, x \in [-1,1]$



$$y = \begin{cases} 2, & x = 0 \\ x, & 0 < x < 1 \\ 2, & x = 1 \end{cases}$$



$y = x, x \in [0,1]$

例2 求证$4ax^3+3bx^2+2cx=a+b+c$在（0,1）内至少有一实根.

例3 若$a_0+\frac{a_1}{2}+\cdots+\frac{a_n}{n+1}=0$，求证$a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n=0$在(0,1)内至少有一实根.

例4 $f(x)=x(x-1)(x-2)(x-3)$,求证$f'(x)=0$在（0,3）内有三个实根.

例5 设 $f(x)$ 在 $[0,3]$上连续，$(0,3)$内可导，且$f(0)+f(1)+f(2)=3, f(3)=1$,证明存在 $\xi\in(0,3)$,使得$f'(\xi)=0$.

例6 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$上连续，$(0,1)$内可导，$f(1)=0$,证明存在 $\xi\in(0,1)$,使得 $\xi f'(\xi)+f(\xi)=0$.

例7 设$f(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)上可导，$f(a)=f(b)=0$, 证明：对任意的点$\alpha\in\mathbb{R}$，存在$\xi\in(a,b)$, 使$\alpha f(\xi)=f'(\xi)$.

例8 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$上二阶可导，且$f(a)=f(b)=f'(b)=0$,证明存在 $\xi\in(a,b)$,使得$f''(\xi)=0$.

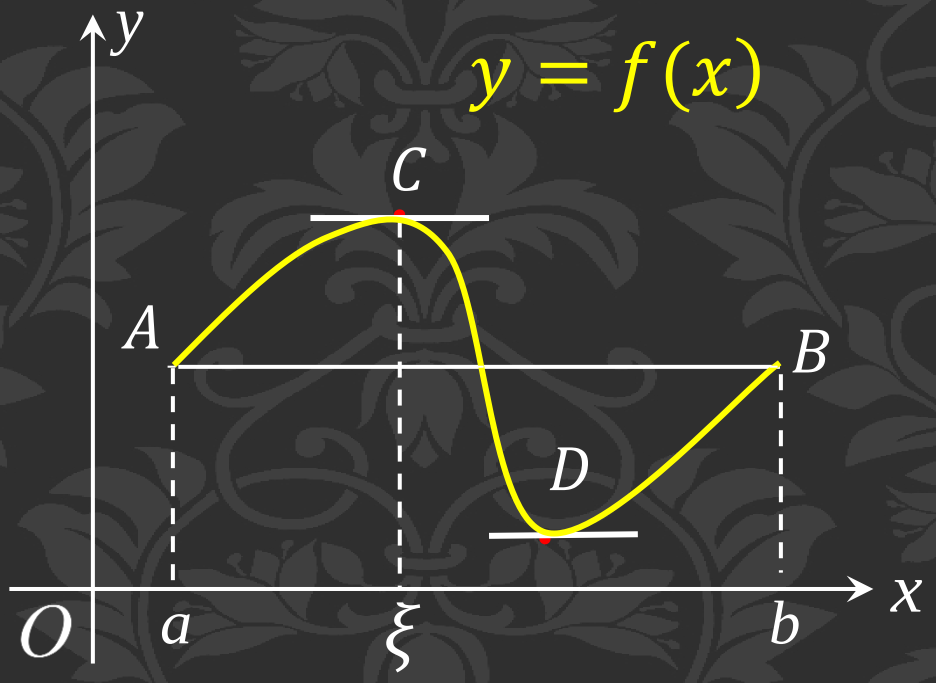
例9 设 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ 其中 a,b,c,d是常数，$a\neq 0$，证明$f(x)$有三个实根的必要条件是$b^2-3ac>0$.

例10 设 $f(x)$二阶可导，且$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=0$，$f(1)=0$, 证明至少存在一点$\xi\in(0,1)$，使得$f''(\xi)=0$.

例11 设$f(x),g(x)$在$[a,b]$上具有二阶导数，并且$g''(x)\neq 0$，$f(a)=f(b)=g(a)=g(b)=0$，试证明:

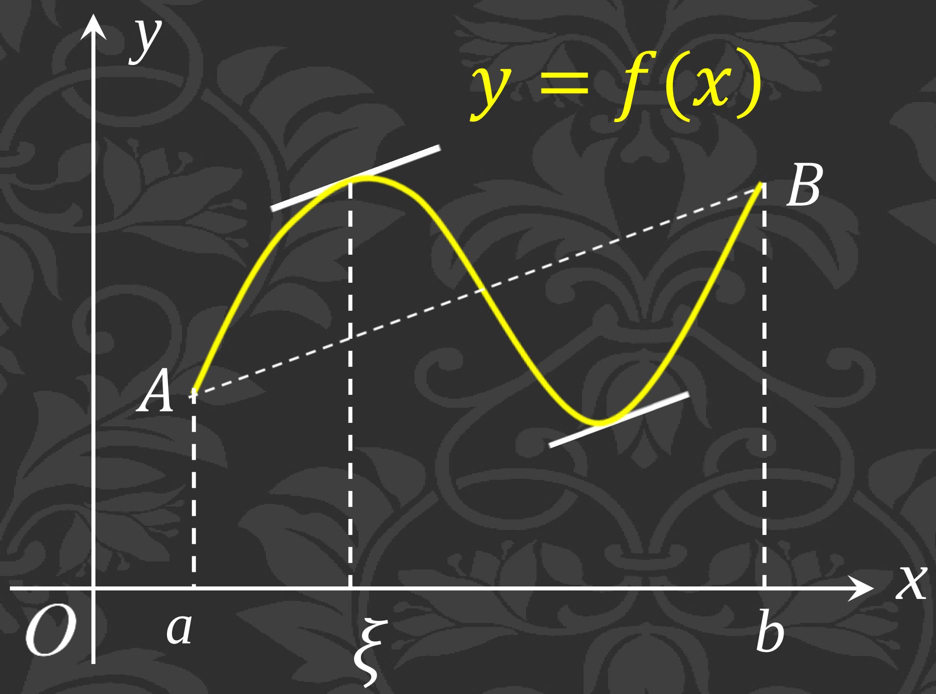
（1）在开区间(a,b)内，$g(x)\neq 0$

（2）在开区间(a,b)内至少存在一点ξ，使得$\frac{f(\xi)}{g(\xi)}=\frac{f''(\xi)}{g''(\xi)}$



罗尔定理

$$f'(\xi) = 0$$



拉格朗日中值定理

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

定理2 (拉格朗日中值定理)

如果函数$f(x)$ 满足下列条件：

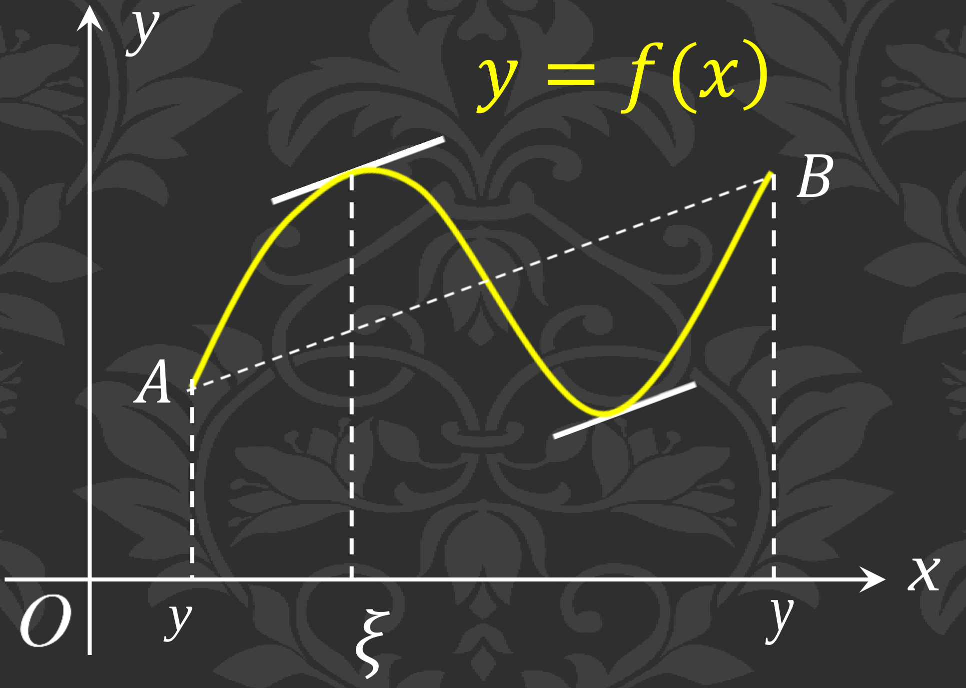
(1) 在$[a,b]$上连续；

(2) 在(a,b)内可导；

那么至少存在一点$\xi \in (a,b)$，使得

x

$$f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$



拉格朗日中值定理的其他形式

(1) 拉格朗日中值公式等价于

$$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a), a<\xi<b.$$

(2) 在以x和$x+\Delta x$为端点的小区间上应用拉格朗日中值定理, 有

$$f(x+\Delta x)-f(x)=f'(x+\theta\Delta x)\cdot\Delta x,\quad 0<\theta<1.$$

上式等价于

$$\Delta y=f'(x+\theta\Delta x)\cdot\Delta x,\quad 0<\theta<1.$$

有限增量公式

拉格朗日中值定理也叫做有限增量定理.

注意：函数微分的定义（近似值）

$$\Delta y=\mathrm{d}y+o(\Delta x)=f'(x)\Delta x+o(\Delta x)\approx f'(x)\Delta x.$$

公式$\Delta y=f'(x+\theta\Delta x)\cdot\Delta x$给出了自变量取得有限增量$\Delta x$时，函数增量的准确表达式.

例12 设 $f(x)=px^2+qx+r, p\neq 0, x\in[a,b]$，证明：

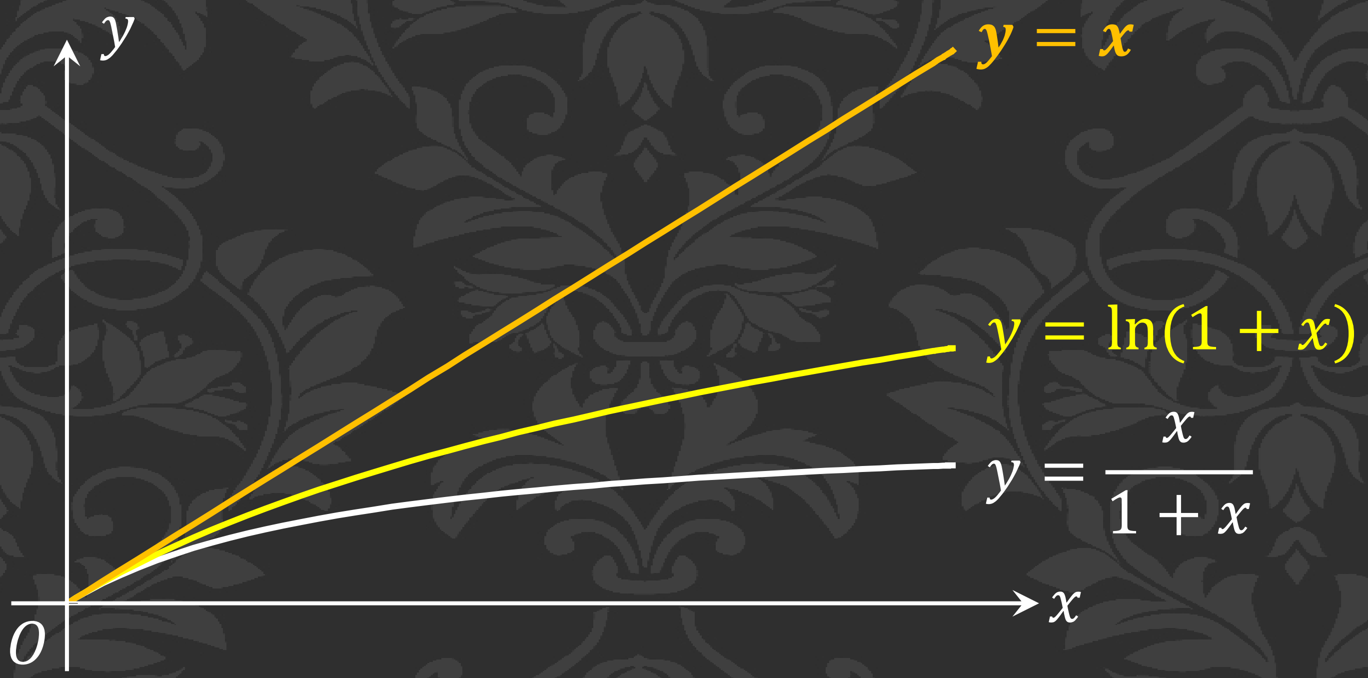
$f(b)-f(a)=f'(\frac{a+b}{2})(b-a).$

例13 设$e<a<b<e^2$，证明$\ln^2 b-\ln^2 a>\frac{4}{e^2}(b-a).$

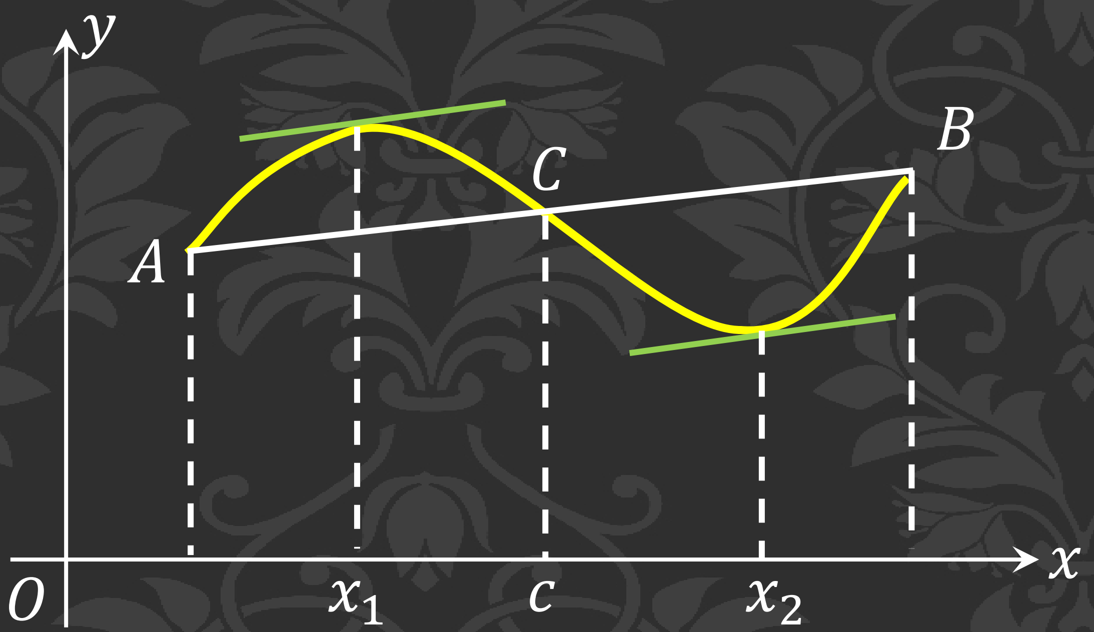
例14 设 $f(x)$ 在 (a,b)内可导，且$f'(x)$恒为零，证明 $f(x)$ 在 (a,b)内恒为常数.

例15 证明等式 $\arctan x + \operatorname{arccot} x = \dfrac{\pi}{2}$.

例16 证明不等式$\dfrac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x,\ x > 0.$



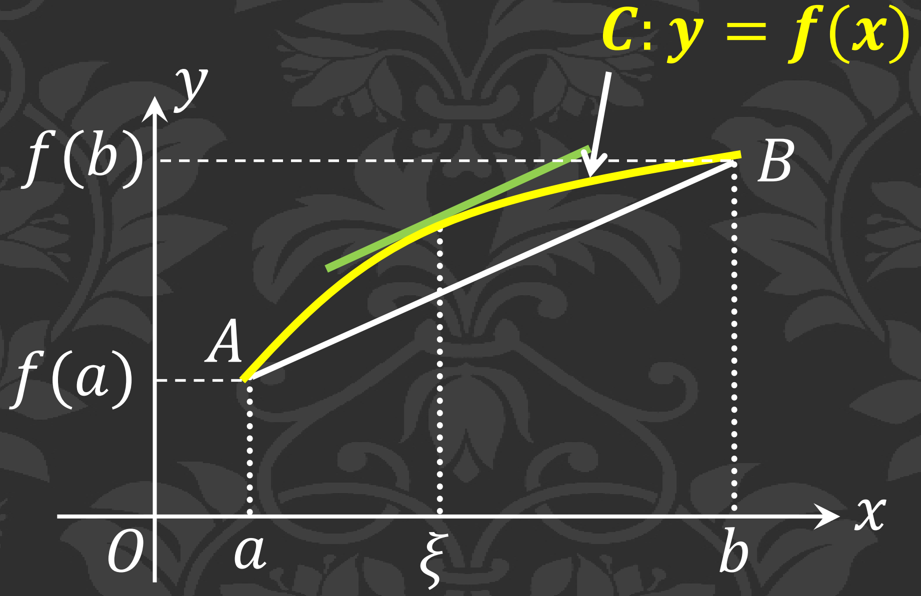
例17　设$f(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)内二阶可导，又若$f(x)$的图形与联结 $A\big(a,f(a)\big),B\big(b,f(b)\big)$ 两点的弦交于点$C(c,f(c))$ $(a<c<b)$. 证明在(a,b)内至少存在一点ξ，使得$f''(\xi)=0$.



拉格朗日中值定理

如果函数$f(x)$ 在$[a,b]$上连续，在(a,b)内可导，那么至少存在一点$\xi \in (a,b)$，使得

$$f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = k_{AB} \ .$$



$$C:\begin{cases} x = G(t), \\ y = F(t). \end{cases} (\alpha \le t \le \beta)$$

考虑拉格朗日中值定理的参数方程情形.

拉格朗日中值定理

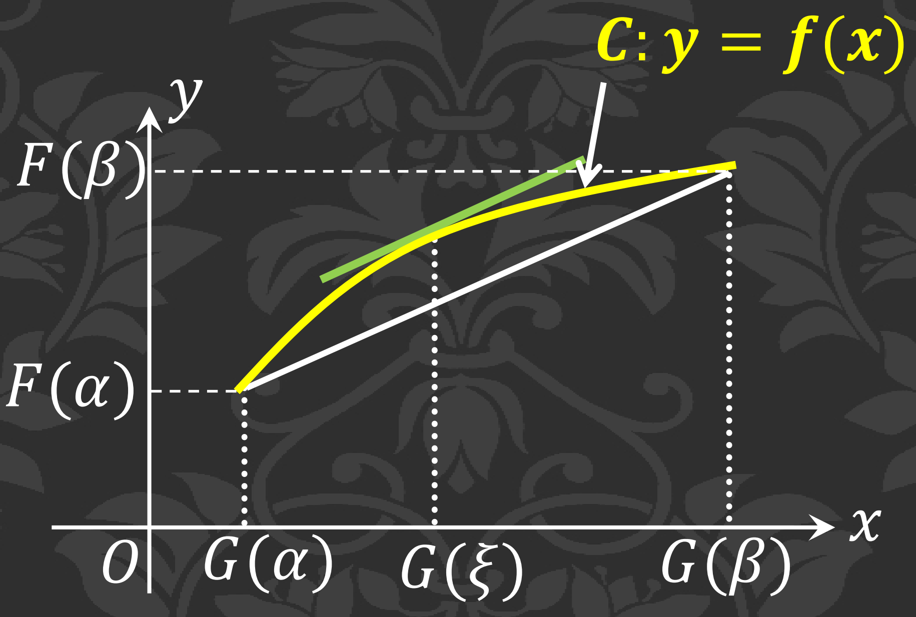
$$k_{AB}=\frac{f(b)-f(a)}{b-a},$$

$$k_{AB}=f'(\xi)$$

$$f'(x)=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{F'(t)}{G'(t)}$$

$$\boxed{\frac{F(\beta)-F(\alpha)}{G(\beta)-G(\alpha)}=\frac{F'(\xi)}{G'(\xi)}.}$$

柯西中值定理



$$C:\begin{cases}x=G(t),\\ y=F(t).\end{cases}\ (\alpha\le t\le\beta)$$

定理1 (柯西中值定理) 如果函数 $f(x)$和$g(x)$满足

(1) 在闭区间$[a,b]$上连续;

(2) 在区间 (a,b)内可导, 且 $g'(x) \neq 0,\ a < x < b$;

那么至少存在一点$\xi \in (a,b)$, 使

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

例17 设$f(x)$在$[0,1]$上连续，在$(0,1)$内可导，证明：至少存在一点$\xi \in (0,1)$，使$f'(\xi) = 2\xi[f(1) - f(0)]$.

例18 设$f(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)上可导，证明：至少存在一点$\xi \in (a,b)$，使$(b^2 - a^2)f'(\xi) = 2\xi[f(b) - f(a)]$.

例19 设$a, b > 0$，证明：存在$\xi \in (a, b)$，使

$$ae^b - be^a = (1 - \xi)e^{\xi}(a - b)$$

例20 设$f(x), g(x)$在$[a, b]$上连续，在(a, b)内可导，且$g'(x) \neq 0$, 证明：存在一点$\xi \in (a, b)$，使$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(\xi) - f(a)}{g(b) - g(\xi)}$.

例21 设 $f(x) \in C[0,1], f(x) \in D(0,1), f(0) = 0, f(1) =$1, 证明:

(1)存在一点$\xi \in (0,1)$，使$f(\xi) = 1 - \xi$.

(2)存在η, θ $(\eta \neq 0)$，使得$f'(\eta)f'(\theta) = 1$.