高等数学

4.1不定积分的概念与性质

基础部数学教研室

郑治中

曲线方程 $y = f(x)$ $\underset{?}{\overset{求导}{\rightleftarrows}}$ 曲线斜率 $k(x) = f'(x)$

位移方程 $s = s(t)$ $\underset{?}{\overset{求导}{\rightleftarrows}}$ 瞬时速度 $v(t) = s'(t)$

问题：已知 $F'(x) = f(x)$ 或者 $\mathrm{d}F(x) = f(x)\,\mathrm{d}x$，其中$f(x)$为已知，求未知函数$F(x)$.

原函数

不定积分的概念与性质

不定积分基本公式

不定积分的简单应用

例如：一个质量为m的质点，在变力$F = A\sin t$的作用下沿直线运动，试求质点的运动速度$v(t)$.

根据牛顿第二定律，有 $a(t) = \dfrac{F}{m} = \dfrac{A}{m}\sin t.$

因此问题转化为：已知 $v'(t) = \dfrac{A}{m}\sin t$，求 $v(t) = ?$.

定义1 若在区间 I 上定义的两个函数 $F(x)$ 及 $f(x)$ 满足

$$F'(x) = f(x) \text{ 或 } \mathrm{d}F(x) = f(x)\mathrm{d}x,$$

则称 $F(x)$ 为 $f(x)$ 在区间 I 上的一个原函数.

例如，

$$\left(-\frac{A}{m}\cos t\right)' = \frac{A}{m}\sin t \Rightarrow -\frac{A}{m}\cos t\text{是}\frac{A}{m}\sin t\text{的一个原函数.}$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}\ (x > 0) \Rightarrow \ln x\text{是}(0, +\infty)\text{上}\frac{1}{x}\text{的一个原函数.}$$

几类常见基本初等函数的原函数：零，非零常数，幂函数等

如果$F(x)$是$f(x)$的一个原函数，则$F(x)+C$(其中C为任意常数)也是$f(x)$的一个原函数.

原函数族

原函数存在定理：若函数$f(x)$在区间 I 上连续，则$f(x)$在区间 I上存在原函数 .

定义2 函数$f(x)$在区间 I 上所有原函数的一般表达式称为$f(x)$在 I 上的不定积分，记作

$$\int f(x)\mathrm{d}x$$

其中符号$\int$称为积分号，函数$f(x)$称为被积函数，$f(x)\mathrm{d}x$称为被积表达式.

若$F'(x)=f(x)$，则

$$\int f(x)\mathrm{d}x=F(x)+C$$（其中C称为积分常数或任意常数）

例如：$\int 2x\mathrm{d}x=x^2+C$　　$\int e^x\,\mathrm{d}x=e^x+C$

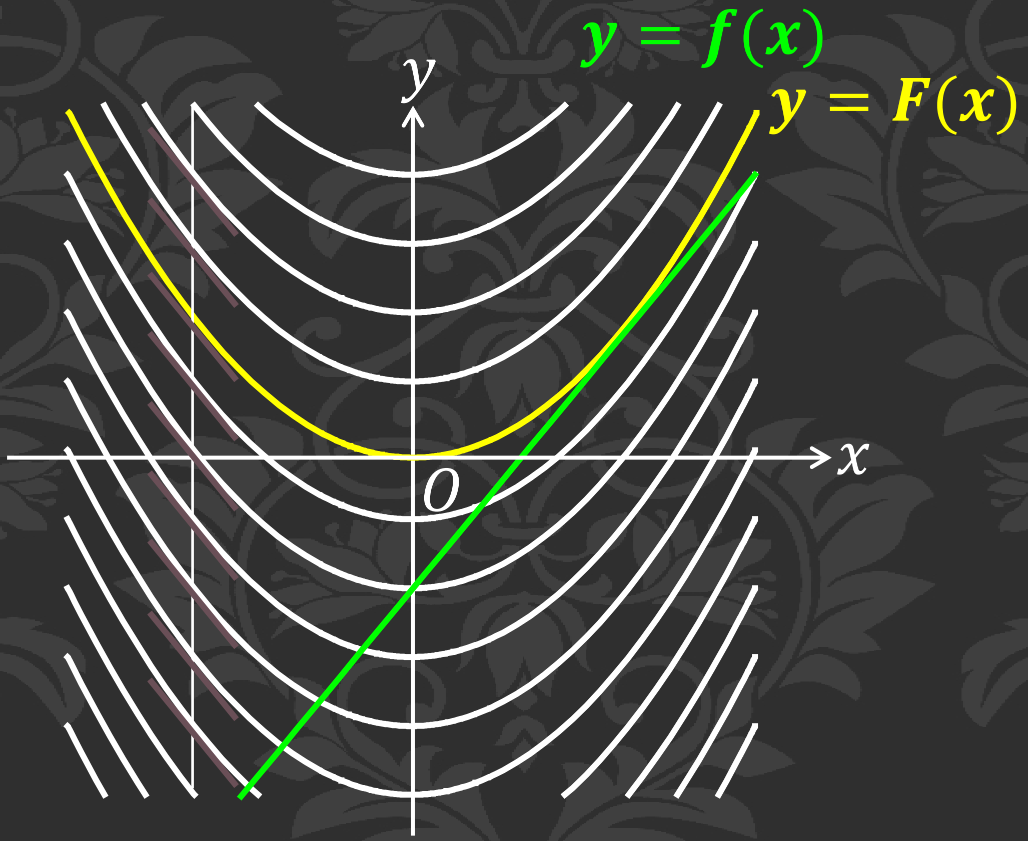
$$\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x=\ln x+C,\ x>0$$

$$\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x=\ln|x|+C,\ x\neq 0$$

不定积分的几何意义

$f(x)$的原函数$F(x)$的图形称为$f(x)$的**积分曲线**.

$\int f(x)\,\mathrm{d}x$ 的图形是由积分曲线$F(x)+C$构成的**积分曲线族**.



不定积分基本性质

性质1

(1) $\left(\int f(x)\mathrm{d}x\right)' = f(x)$ 或 $\mathrm{d}\left[\int f(x)\mathrm{d}x\right] = f(x)\mathrm{d}x$;

(2) $\int f'(x)\mathrm{d}x = f(x) + C$ 或 $\int \mathrm{d}f(x) = f(x) + C$.

问题：1. $\int f'(x)dx$与$(\int f(x)dx)'$是否相同?

2. 若$f(x) \le g(x)$,则$\int f(x)dx \le \int g(x)dx$?

基本积分公式

$$(1)\ \int k\mathrm{d}x = kx + C \qquad (2)\ \int \frac{1}{x}\mathrm{d}x = \ln|x| + C\ (x \neq 0)$$

$$(3)\ \int x^{\mu}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\mu+1}x^{\mu+1} + C \quad (\mu \neq -1\text{为常数})$$

$$(4)\ \int \cos x\mathrm{d}x = \sin x + C \qquad (5)\ \int \sin x\mathrm{d}x = -\cos x + C$$

$$(6)\ \int \sec^2 x\mathrm{d}x = \tan x + C \qquad (7)\ \int \csc^2 x\mathrm{d}x = -\cot x + C$$

$$(8)\ \int e^{x}\,\mathrm{d}x = e^{x} + C \qquad (9)\ \int a^{x}\,\mathrm{d}x = \frac{a^{x}}{\ln a} + C$$

例1 求幂函数的不定积分：

(1) $\int x^2\sqrt{x}\,\mathrm{d}x$;　　(2) $\int \frac{1}{x\sqrt[3]{x}}\mathrm{d}x$.

例2 求指数函数的不定积分：

(1) $\int 4^x/9^x\,\mathrm{d}x$;　　(2) $\int 2^x 3^{2x}\,\mathrm{d}x$.

不定积分的线性运算法则

性质2 设函数$f(x)$与$g(x)$的原函数存在，则

$$\int[\alpha f(x)+\beta g(x)]\mathrm{d}x=\alpha\int f(x)\mathrm{d}x+\beta\int g(x)\mathrm{d}x.$$

其中α和β为常数.

特别，有

$$\int[f(x)+g(x)]\mathrm{d}x=\int f(x)\mathrm{d}x+\int g(x)\mathrm{d}x,$$

$$\int\alpha f(x)\mathrm{d}x=\alpha\int f(x)\mathrm{d}x.$$

例3 利用不定积分的线性运算法则计算下列不定积分：

(1) $\int (x^2+1)^2\,\mathrm{d}x$ (2) $\int \frac{(x+1)^3}{x^2}\,\mathrm{d}x$

例4 利用三角公式变形，计算下列不定积分：

(1) $\int \frac{1}{1+\cos 2x}\,\mathrm{d}x$ (2) $\int \tan^2 x\,\mathrm{d}x$

例5 求积分

(1) $\displaystyle\int \frac{x^2}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$

(2) $\displaystyle\int \frac{1}{\sin^2 x\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$

(3) $\displaystyle\int \frac{1+x+x^2}{x(1+x^2)}\,\mathrm{d}x$

(4) $\displaystyle\int \frac{x^4}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$

例6 求积分$\int |x-1|dx$

未知

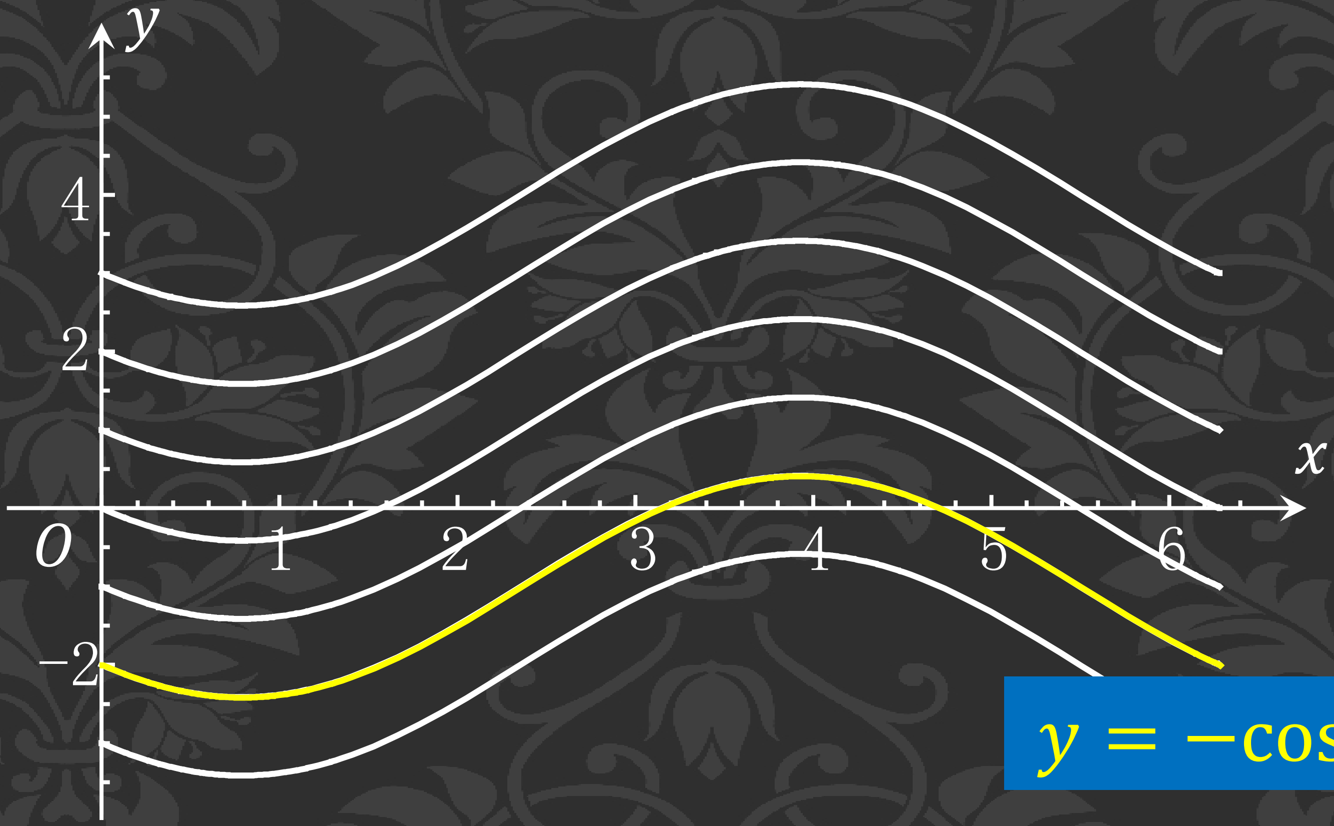
微分方程: $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x)$ 已知

$$y = \int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C$$ ⇒ 微分方程的通解

初始条件: $y(x_0) = y_0$

$$\boxed{y = y(x)}$$ ⇒ 微分方程的特解

例7 已知曲线在点 (x, y) 处的斜率为 $\sin x-\cos x$, 且曲线过点 $(\pi, 0)$，求该曲线的方程.



$y=-\cos x-\sin x-1$