高等数学

§1.4 无穷小与无穷大

- 第一次数学危机 —— 无理数的发现
- 第二次数学危机 —— 微积分的逻辑基础

问题：一质点做直线运动，在时刻t距离出发点的距离为 $s=t^2$，求质点在 t_0 时刻的速度.

考虑 t_0 后的极短瞬间Δt，质点在该瞬间走过的路程为

$$\Delta s=(t_0+\Delta t)^2-t_0^2 \quad =2t_0\Delta t+\Delta t^2$$

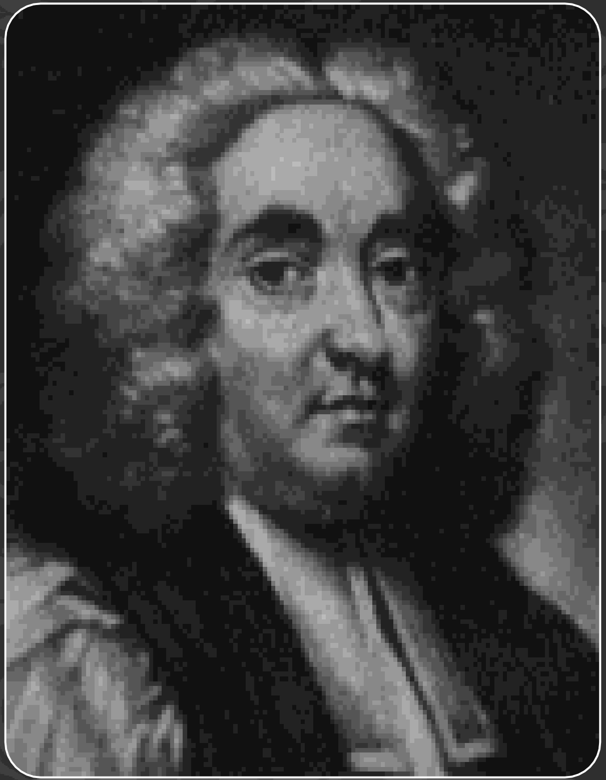
质点在该瞬间的速度为 $\dfrac{\Delta s}{\Delta t}=2t_0+\Delta t=2t_0$

- 第一次数学危机 —— 无理数的发现
- 第二次数学危机 —— 微积分的逻辑基础

“无穷小量是已死量的幽灵.”

自然与自然的规律隐藏在茫茫黑夜中，
上帝说“让牛顿降生吧”，
于是一片光明。

亚历山大·蒲柏



乔治·贝克莱
(George Berkeley)

- 无穷小的概念与例子
- 无穷小的性质
- 无穷大与铅直渐近线
- 极限的四则运算法则

无穷小

定义1 若 $\lim\limits_{x\to x^*} f(x)=0$，则称函数$f(x)$是过程$x\to x^*$的无穷小.

其中 $x\to x^*$ 表示连续变量的六种变化过程之一.

思考：无穷小是不是一个数？0是不是无穷小？10^{-10}是不是无穷小？

说明： (1) 除 0 以外任何很小的常数都不是无穷小；

(2) 称一个函数是无穷小时必须同时指明自变量的变化过程.

例如，因为 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$，所以 $\frac{1}{x}$ 是过程 $x\to\infty$ 的无穷小.

因为 $\lim\limits_{x\to 0}x^2=0, \lim\limits_{x\to 0}\sin x=0, \lim\limits_{x\to 0}\ln(1+x)=0$,

所以 $x^2, \sin x, \ln(1+x)$ 都是过程 $x\to 0$ 的无穷小.

因为 $\lim\limits_{x\to 0^+}\sqrt{x}=0$，所以 $\sqrt{x}$ 是过程 $x\to 0^+$ 的无穷小.

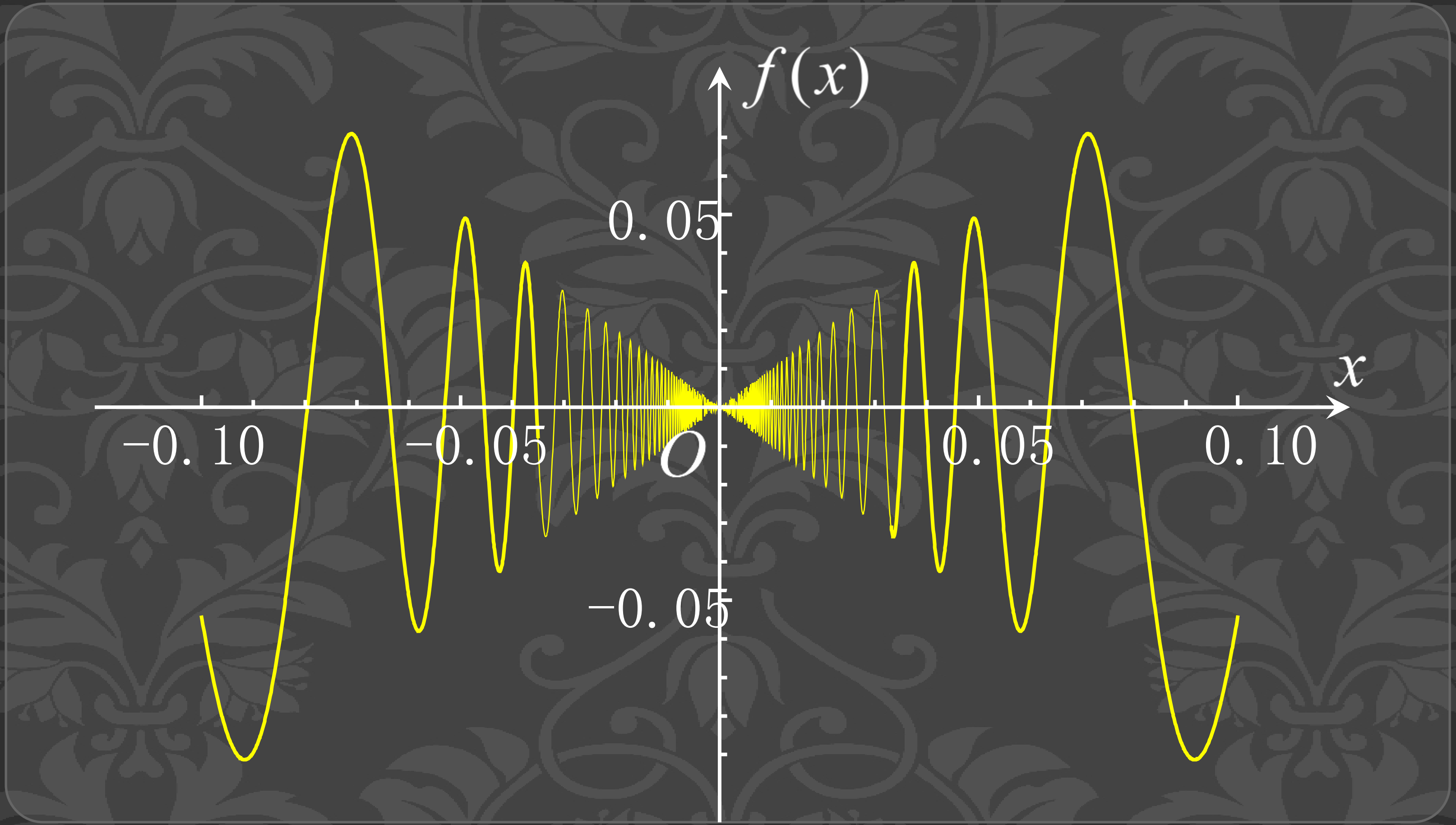
$\cdots\cdots$

- 有限个无穷小之和仍是无穷小.
- 有限个无穷小之积仍是无穷小.
- 无穷小与有界函数之积是无穷小.

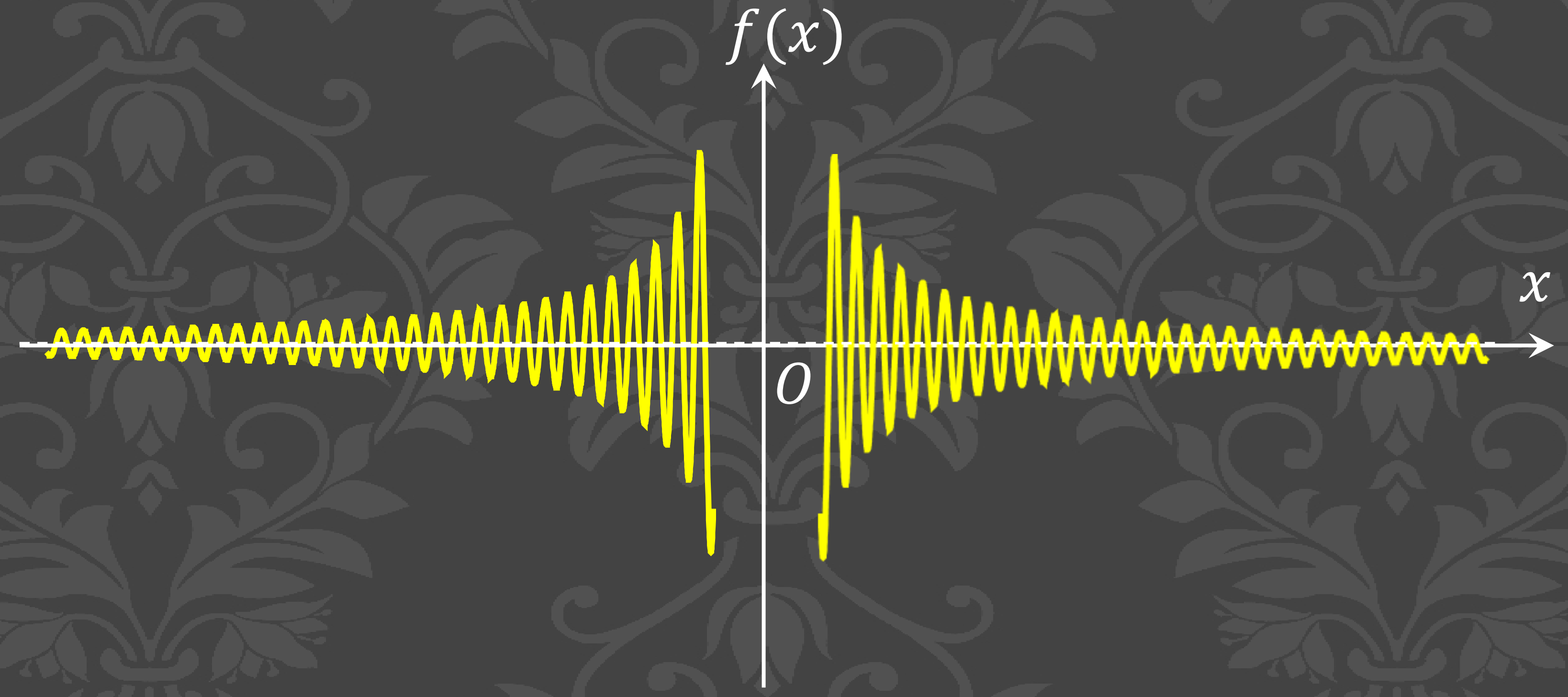
注意：同一命题所对应的过程相同

定理1　设$f(x)$为过程 $x \to x^*$ 的无穷小，$g(x)$在x^* 的某个去心邻域中有界，则 $f(x)g(x)$ 也是过程 $x \to x^*$ 的无穷小.

例1　求极限 $\lim\limits_{x \to 0} x\sin\frac{1}{x}$.（无穷小与有界函数之积）



例2 求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}$. （无穷小与有界函数之积）



定理 2(无穷小与函数极限的关系)

$\lim\limits_{x \to x^*} f(x) = A \rightleftarrows f(x) = A + \alpha(x)$, 其中$\alpha(x)$为 $x \to x^*$ 时的无穷小量 .

- 函数与其极限相差相应过程的无穷小.

无穷大

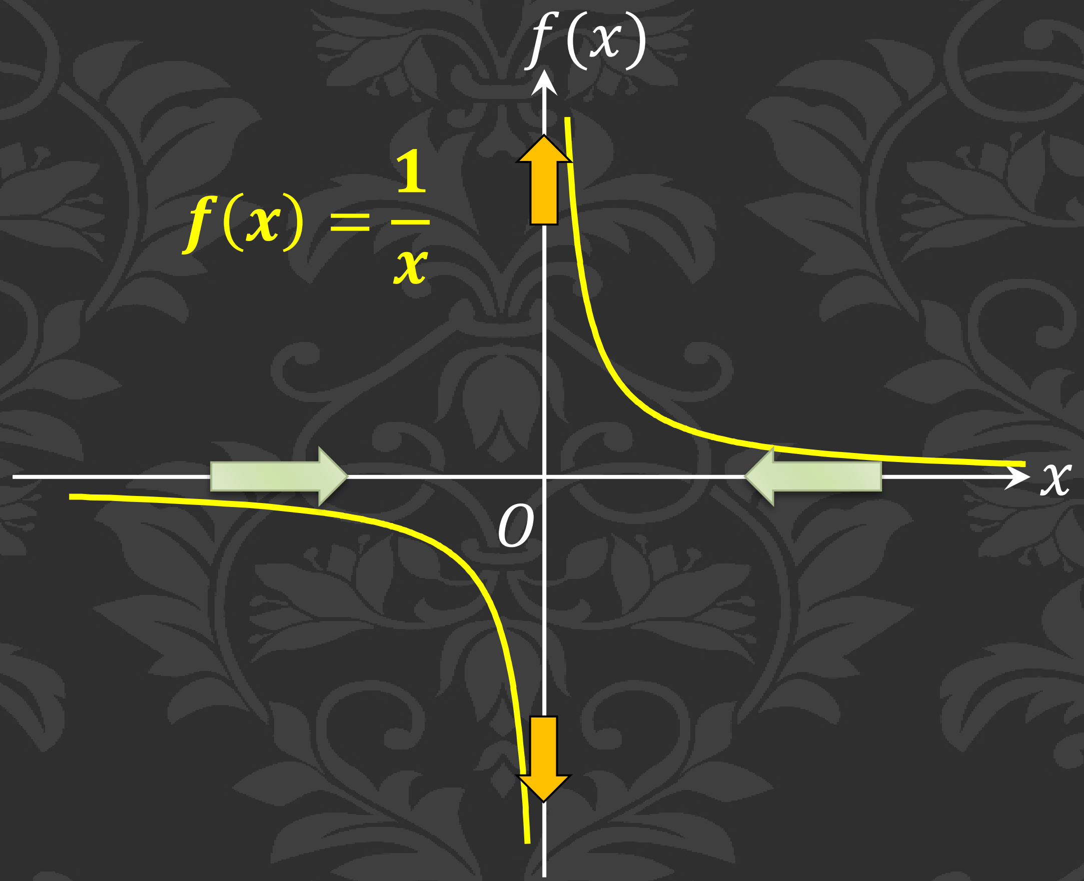
定义2 若$\forall M>0, \exists\delta>0$, 当$0<|x-x_0|<\delta$ 时，有 $|f(x)|>M$, 则称函数$f(x)$为过程$x\to x_0$的无穷大，记为

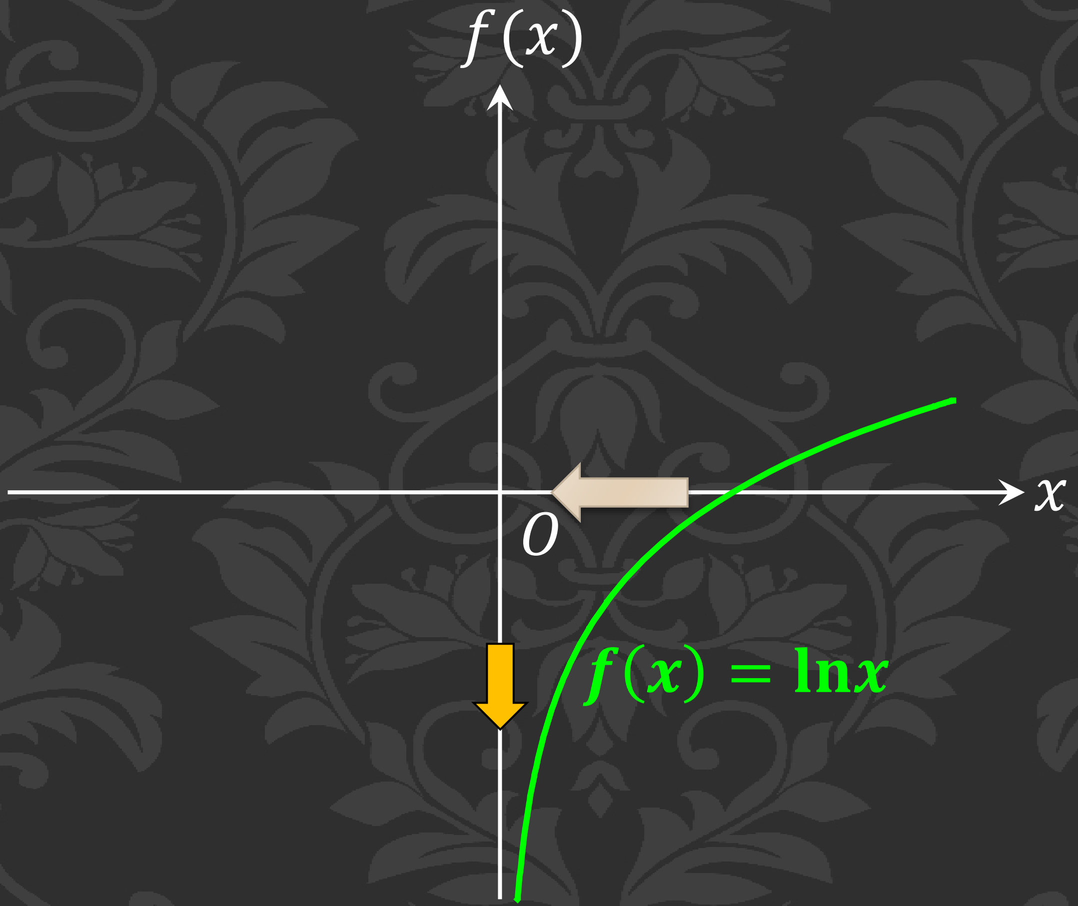
$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\infty .$$

注1：∞不是一个具体的数，不是一个很大的数。

注2：无穷大和无界的区别。

注3：此时称 $x=x_0$ 为函数 $y=f(x)$ 图形的铅直渐近线.





$x=0$为$f(x)=\frac{1}{x}$铅直渐近线　　$x=0$为$f(x)=\ln x$铅直渐近线

无穷大与无穷小的关系

定理3（1） 若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$，则 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{1}{f(x)}=0$;

（2）若 $f(x)$ 在 x_0 的某去心邻域内非零，且 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$，则

$$\lim_{x\to x_0}\frac{1}{f(x)}=\infty.$$

例3 证明：$f(x)=x+\sin x$ 是过程 $x\to\infty$ 的无穷大.

用“0”和“∞”分别表示同一过程的无穷小和无穷大，则无穷大与无穷小的关系可表示为“$\infty=\frac{1}{0}$”.

思考：下面哪些结果是确定的？

$$0+0\,,\ 0\cdot 0\,,\ \frac{0}{0}\,,\ 0+\infty\,,\ 0\cdot\infty\,,\ \frac{\infty}{\infty}\,.$$

定理4（四则运算的极限）假定下面考虑的都是对自变量 x 的同一变化过程的极限．设 $\lim f(x)$ 和 $\lim g(x)$ 存在，则

(1) $\lim[f(x) \pm g(x)] = \lim f(x) \pm \lim g(x)$;

(2) $\lim[f(x)g(x)] = \lim f(x)\lim g(x)$;

(3) $\lim \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim f(x)}{\lim g(x)} \quad (\lim g(x) \neq 0)$.

特别，$\lim[C f(x)] = C \lim f(x)$，其中 C 为常数

$\lim[f(x)]^n = [\lim f(x)]^n$，其中 n 为正整数

例4 设n 次多项式$P_n(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$, $x_0\in\mathbb{R}$，则
$$\lim_{x\to x_0}P_n(x)=P_n(x_0).$$

例5 设 $R(x)=\dfrac{x^2-4x+3}{x^2-9}$, 试求$\lim\limits_{x\to 2}R(x)$, $\lim\limits_{x\to 3}R(x)$.

例6 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{a_0x^m+a_1x^{m-1}+\cdots+a_m}{b_0x^n+b_1x^{n-1}+\cdots+b_n}$，其中$a_0b_0\neq 0$，$m,n$为正整数.

例7 求 $\lim\limits_{x\to 2}\left(\frac{1}{x-2}-\frac{4}{x^2-4}\right)$.

例8 求 $\lim\limits_{x\to 3}\sqrt{\frac{x-3}{x^2-9}}$.

$$\lim_{x\to 3}\frac{x-3}{x^2-9}=\frac{1}{6}$$

$$\boxed{\lim_{u\to 1/6}\sqrt{u}=\frac{1}{\sqrt{6}}}$$

$$y=\sqrt{\frac{x-3}{x^2-9}} \Longleftrightarrow y=\sqrt{u},\ u=\frac{x-3}{x^2-9}$$

定理5 (复合函数的极限) 设函数$u = g(x)$在x_0去心邻域$\mathring{U}(x_0, \delta_0)$内有定义, $g(x) \neq u_0$，且$\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = u_0$. 又 $y = f(u)$ 在 u_0的去心邻域$\mathring{U}(u_0)$内有定义，且$\lim\limits_{u \to u_0} f(u) = A$, 则极限$\lim\limits_{x \to x_0} f[g(x)]$存在，且

$$\lim_{x \to x_0} f[g(x)] = \lim_{u \to u_0} f(u) = A.$$