方法总结

幂指函数求极限常用对数法，即

$$\lim_{x\to 0} f(x)^{g(x)}=\exp(\lim_{x\to 0} g(x)\cdot\ln f(x)).$$

【例 5】 (2016 数学二，4 分)设 $a_1=x(\cos\sqrt{x}-1)$，$a_2=\sqrt{x}\ln(1+\sqrt[3]{x})$，$a_3=\sqrt[3]{x+1}-1$. 当 $x\to 0^+$ 时，以上 3 个无穷小量按照从低阶到高阶排序是________.

(A)a_1,a_2,a_3　　(B)a_2,a_3,a_1　　(C)a_2,a_1,a_3　　(D)a_3,a_2,a_1

解　$x\to 0^+$ 时，有 $a_1\sim x\cdot\left(-\frac{1}{2}x\right)=-\frac{1}{2}x^2$，$a_2\sim\sqrt{x}\cdot\sqrt[3]{x}=x^{\frac{5}{6}}$，$a_3\sim\frac{1}{3}x$，

故以上 3 个无穷小量从低阶到高阶的次序为 a_2,a_3,a_1.

故应选(B).

【例 6】 (2014 数学二，4 分)当 $x\to 0^+$ 时，若 $\ln^{\alpha}(1+2x)$，$(1-\cos x)^{\frac{1}{\alpha}}$ 均是比 x 高阶的无穷小量，则 α 的取值范围是________.

(A)$(2,+\infty)$　　(B)$(1,2)$　　(C)$\left(\frac{1}{2},1\right)$　　(D)$\left(0,\frac{1}{2}\right)$

解　当 $x\to 0^+$ 时，$\ln^{\alpha}(1+2x)\sim(2x)^{\alpha}$，$(1-\cos x)^{\frac{1}{\alpha}}\sim\left(\frac{x^2}{2}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$.

由题设得 $\alpha>1$ 且 $\frac{2}{\alpha}>1$，即 $1<\alpha<2$.

故应选(B).

习题 1—7 解答

1. 当 $x\to 0$ 时，$2x-x^2$ 与 x^2-x^3 相比，哪一个是高阶无穷小？

解　因为 $\lim\limits_{x\to 0}(2x-x^2)=0$，$\lim\limits_{x\to 0}(x^2-x^3)=0$，

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2-x^3}{2x-x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x-x^2}{2-x}=0,$$

所以当 $x\to 0$ 时，x^2-x^3 是比 $2x-x^2$ 高阶的无穷小.

2. 当 $x\to 0$ 时，$(1-\cos x)^2$ 与 $\sin^2 x$ 相比，哪一个是高阶无穷小？

解　因为 $\lim\limits_{x\to 0}(1-\cos x)^2=0$，$\lim\limits_{x\to 0}\sin^2 x=0$，$\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)^2}{\sin^2 x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\left(\frac{1}{2}x^2\right)^2}{x^2}=0$，

所以当 $x\to 0$ 时，$(1-\cos x)^2$ 是比 $\sin^2 x$ 高阶的无穷小.

3. 当 $x\to 1$ 时，无穷小 $1-x$ 和(1)$1-x^3$，(2)$\frac{1}{2}(1-x^2)$是否同阶？是否等价？

解　(1)$\frac{1-x}{1-x^3}=\frac{1-x}{(1-x)(1+x+x^2)}=\frac{1}{1+x+x^2}\to\frac{1}{3}(x\to 1)$，同阶，不等价.

(2)$\frac{1-x}{\frac{1}{2}(1-x^2)}=\frac{1-x}{\frac{1}{2}(1-x)(1+x)}=\frac{2}{1+x}\to 1(x\to 1)$，同阶，等价.

4. 证明：当 $x\to0$ 时，有

(1) $\arctan x\sim x$； (2) $\sec x-1\sim\dfrac{x^2}{2}$.

4 题视频解析

证 (1) 令 $x=\tan t$，即 $t=\arctan x$，当 $x\to0$ 时，$t\to0$.

因为 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\arctan x}{x}=\lim\limits_{t\to0}\dfrac{t}{\tan t}=1$， 所以 $\arctan x\sim x\ (x\to0)$.

(2) 因为 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sec x-1}{\frac{x^2}{2}}=\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1-\cos x}{\frac{x^2}{2}}\cdot\dfrac{1}{\cos x}\right)=\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{2\sin^2\frac{x}{2}}{\frac{x^2}{2}}\cdot\dfrac{1}{\cos x}\right)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin^2\frac{x}{2}}{\left(\frac{x}{2}\right)^2}\cdot\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{\cos x}=1$，

所以 $\sec x-1\sim\dfrac{x^2}{2}\ (x\to0)$.

5. 利用等价无穷小的性质，求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan 3x}{2x}$； (2) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin(x^n)}{(\sin x)^m}$ (n、m 为正整数)；

(3) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x-\sin x}{\sin^3 x}$； (4) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x-\tan x}{(\sqrt[3]{1+x^2}-1)(\sqrt{1+\sin x}-1)}$.

5 题视频解析

解 (1) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan 3x}{2x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3x}{2x}=\dfrac{3}{2}$.

(2) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin(x^n)}{(\sin x)^m}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^n}{x^m}=\begin{cases}0, & n>m,\\ 1, & n=m,\\ \infty, & n<m.\end{cases}$

(3) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x-\sin x}{\sin^3 x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sec x-1}{\sin^2 x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{x^2}{2}}{x^2}=\dfrac{1}{2}$.

> **评注**：在用等价无穷小的代换求极限时，可以对分子或分母中的一个或若干个因子作代换，但一般不能对分子或分母中的某个加项作代换. 例如，本题中若将分子中的 $\tan x$、$\sin x$ 均换成 x，那么分子成为 0，得出极限为 0，这就导致错误的结果.

(4) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x-\tan x}{(\sqrt[3]{1+x^2}-1)(\sqrt{1+\sin x}-1)}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x(1-\sec x)}{\frac{1}{3}x^2\cdot\frac{1}{2}\sin x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{-\frac{1}{2}x^2}{\frac{1}{6}x^2}=-3$.

6. 证明无穷小的等价关系具有下列性质：

(1) $\alpha\sim\alpha$（自反性）； (2) 若 $\alpha\sim\beta$，则 $\beta\sim\alpha$（对称性）； (3) 若 $\alpha\sim\beta$，$\beta\sim\gamma$，则 $\alpha\sim\gamma$（传递性）.

证 (1) 因为 $\lim\dfrac{\alpha}{\alpha}=1$，所以 $\alpha\sim\alpha$；

(2) 因为 $\alpha\sim\beta$，即 $\lim\dfrac{\alpha}{\beta}=1$，所以 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=1$，即 $\beta\sim\alpha$；

(3) 因为 $\alpha\sim\beta$，$\beta\sim\gamma$，即 $\lim\dfrac{\alpha}{\beta}=1$，$\lim\dfrac{\beta}{\gamma}=1$ 所以 $\lim\dfrac{\alpha}{\gamma}=\lim\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\cdot\dfrac{\beta}{\gamma}\right)=\lim\dfrac{\alpha}{\beta}\cdot\lim\dfrac{\beta}{\gamma}=1$，

即 $\alpha\sim\gamma$.