解 $\int_2^{+\infty}\frac{\mathrm{d}\ln x}{(\ln x)^{\alpha+1}}=-\frac{1}{\alpha}\frac{1}{(\ln x)^{\alpha}}\Big|_2^{+\infty}\xlongequal{\text{当}\alpha>0\text{时}}\frac{1}{\alpha}\frac{1}{(\ln 2)^{\alpha}}$.

$f'(\alpha)=-\frac{1}{(\ln 2)^{\alpha}}\cdot\frac{1}{\alpha^2}-\frac{\ln\ln 2}{(\ln 2)^{\alpha}}\cdot\frac{1}{\alpha}=-\frac{1}{\alpha}\frac{1}{(\ln 2)^{\alpha}}\left(\frac{1}{\alpha}+\ln\ln 2\right)\xlongequal{\text{令}}0$.

$\alpha_0=-\frac{1}{\ln\ln 2}>0$.

又当 $0<\alpha<\alpha_0$ 时，$f'(\alpha)<0$，当 $\alpha>\alpha_0$ 时，$f'(\alpha)>0$，所以 $x=\alpha_0$ 为唯一极小值点，必为最小值点.

故应选(A).

* 习题 5—5 解答

1. 判定下列反常积分的收敛性：

(1) $\int_0^{+\infty}\frac{x^2}{x^4+x^2+1}\mathrm{d}x$； (2) $\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt[3]{x^2+1}}$； (3) $\int_1^{+\infty}\sin\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x$；

(4) $\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x|\sin x|}$； (5) $\int_1^{+\infty}\frac{x\arctan x}{1+x^3}\mathrm{d}x$； (6) $\int_1^{2}\frac{\mathrm{d}x}{(\ln x)^3}$；

(7) $\int_0^{1}\frac{x^4\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^4}}$； (8) $\int_1^{2}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{x^2-3x+2}}$.

解 (1)由于 $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2\cdot\frac{x^2}{x^4+x^2+1}\mathrm{d}x=1$，因此 $\int_0^{+\infty}\frac{x^2}{x^4+x^2+1}\mathrm{d}x$ 收敛.

(2)由于 $\lim\limits_{x\to+\infty}x^{\frac{5}{3}}\cdot\frac{1}{x\sqrt[3]{x^2+1}}=1$，因此 $\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt[3]{x^2+1}}$收敛.

(3)由于 $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2\cdot\sin\frac{1}{x^2}=1$，因此 $\int_1^{+\infty}\sin\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x$ 收敛.

(4)由于当 $x\geqslant0$ 时，$\frac{1}{1+x|\sin x|}\geqslant\frac{1}{1+x}$且 $\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x}$发散，因此 $\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x|\sin x|}$发散.

(5)由于 $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2\cdot\frac{x\arctan x}{1+x^3}=\frac{\pi}{2}$，因此 $\int_1^{+\infty}\frac{x\arctan x}{1+x^3}\mathrm{d}x$ 收敛.

(6)$x=1$ 是被积函数的瑕点，由于 $\lim\limits_{x\to1^+}(x-1)\cdot\frac{1}{(\ln x)^3}=+\infty$，因此 $\int_1^{2}\frac{\mathrm{d}x}{(\ln x)^3}$发散.

(7)$x=1$ 是被积函数的瑕点，由于 $\lim\limits_{x\to1^-}(1-x)^{\frac{1}{2}}\cdot\frac{x^4}{\sqrt{1-x^4}}=\frac{1}{2}$，因此 $\int_0^{1}\frac{x^4\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^4}}$收敛.

(8)被积函数有两个瑕点：$x=1$，$x=2$.

由于 $\lim\limits_{x\to1^+}(x-1)^{\frac{1}{3}}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{x^2-3x+2}}=-1$，因此 $\int_1^{1.5}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{x^2-3x+2}}$收敛；

又因为 $\lim\limits_{x\to2^-}(x-2)^{\frac{1}{3}}\frac{1}{\sqrt[3]{x^2-3x+2}}=1$，因此 $\int_{1.5}^{2}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{x^2-3x+2}}$收敛，故 $\int_1^{2}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{x^2-3x+2}}$ 收敛.

2. 设反常积分 $\int_1^{+\infty}f^2(x)\mathrm{d}x$ 收敛，证明反常积分 $\int_1^{+\infty}\frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x$ 绝对收敛.

2 题视频解析

解 因为 $\left|\frac{f(x)}{x}\right|\leqslant\frac{f^2(x)+\frac{1}{x^2}}{2}$，由于 $\int_1^{+\infty}f^2(x)\mathrm{d}x$ 收敛，$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x$ 也收敛，

因此 $\int_1^{+\infty}\left|\frac{f(x)}{x}\right|\mathrm{d}x$ 收敛. 即 $\int_1^{+\infty}\frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x$ 绝对收敛.

3. 用 Γ 函数表示下列积分，并指出这些积分的收敛范围：

(1) $\int_0^{+\infty} e^{-x^n}\,dx(n>0)$；(2) $\int_0^1 \left(\ln\frac{1}{x}\right)^p dx$；(3) $\int_0^{+\infty} x^m e^{-x^n}\,dx(n\neq 0)$.

3 题视频解析

解 (1)令 $u=x^n$，即 $x=u^{\frac{1}{n}}$，$\int_0^{+\infty} e^{-x^n}\,dx=\frac{1}{n}\int_0^{+\infty} e^{-u}u^{\frac{1}{n}-1}\,du=\frac{1}{n}\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)$，

当 $n>0$ 时都收敛.

(2)令 $u=\ln\frac{1}{x}$，即 $x=e^{-u}$，$\int_0^1 \left(\ln\frac{1}{x}\right)^p dx=\int_{+\infty}^0 -u^p e^{-u}\,du=\int_0^{+\infty} u^p e^{-u}\,du=\Gamma(p+1)$，

当 $p>-1$ 时收敛.

(3)令 $u=x^n$，即 $x=u^{\frac{1}{n}}$.

当 $n>0$ 时，$\int_0^{+\infty} x^m e^{-x^n}\,dx=\int_0^{+\infty} \frac{1}{n}u^{\frac{m+1}{n}-1}e^{-u}\,du=\frac{1}{n}\Gamma\left(\frac{m+1}{n}\right)$，

当 $n<0$ 时，$\int_0^{+\infty} x^m e^{-x^n}\,dx=\int_{+\infty}^0 \frac{1}{n}u^{\frac{m+1}{n}-1}e^{-u}\,du=-\frac{1}{n}\Gamma\left(\frac{m+1}{n}\right)$，

故 $\int_0^{+\infty} x^m e^{-x^n}\,dx=\frac{1}{|n|}\Gamma\left(\frac{m+1}{n}\right)$，当 $\frac{m+1}{n}>0$ 时收敛.

4. 证明 $\Gamma\left(\frac{2k+1}{2}\right)=\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdot(2k-1)\sqrt{\pi}}{2^k}$，其中 $k\in\mathbf{N}_+$.

证 $\Gamma\left(\frac{2k+1}{2}\right)=\frac{2k-1}{2}\Gamma\left(\frac{2k-1}{2}\right)=\frac{2k-1}{2}\cdot\frac{2k-3}{2}\Gamma\left(\frac{2k-3}{2}\right)$

$$=\frac{2k-1}{2}\cdot\frac{2k-3}{2}\cdot\cdots\cdot\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdot(2k-1)}{2^k}\sqrt{\pi}.$$

5. 证明以下各式(其中 $n\in\mathbf{N}_+$)：

(1) $2\cdot 4\cdot 6\cdot\cdots\cdot(2n)=2^n\Gamma(n+1)$；

(2) $1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdot(2n-1)=\frac{\Gamma(2n)}{2^{n-1}\Gamma(n)}$；

(3) $\sqrt{\pi}\Gamma(2n)=2^{2n-1}\Gamma(n)\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)$(勒让德(Legendre)倍量公式).

证 (1) $2\cdot 4\cdot 6\cdot\cdot(2n)=2^n n!=2^n\Gamma(n+1)$.

(2) $1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdot(2n-1)=\frac{(2n-1)!}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\cdots\cdot(2n-2)}=\frac{\Gamma(2n)}{2^{n-1}(n-1)!}=\frac{\Gamma(2n)}{2^{n-1}\Gamma(n)}$.

(3)因为 $\sqrt{\pi}\Gamma(2n)=(2n-1)!\sqrt{\pi}$，

$$\Gamma(n)\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)=(n-1)!\,\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdot(2n-1)\sqrt{\pi}}{2^n}$$

$$=\frac{2\cdot 4\cdot 6\cdot\cdots\cdot(2n-2)}{2^{n-1}}\cdot\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdot(2n-1)\sqrt{\pi}}{2^n}=\frac{(2n-1)!}{2^{2n-1}}\sqrt{\pi},$$

因此结论成立.