因此该曲线方程为 $y=\ln|x|+1$.

方法总结

由题意列出函数导数的方程，再由不定积分解之，这事实上是微分方程问题. 关于该问题在第 7 章中还有介绍.

习题 4—1 解答

1. 利用求导运算验证下列等式：

(1) $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}dx=\ln(x+\sqrt{x^2+1})+C$;

(2) $\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2-1}}dx=\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}+C$;

(3) $\int \frac{2x}{(x^2+1)(x+1)^2}dx=\arctan x+\frac{1}{x+1}+C$;

(4) $\int \sec x dx=\ln|\tan x+\sec x|+C$;

(5) $\int x\cos x dx=x\sin x+\cos x+C$;

(6) $\int e^x\sin x dx=\frac{1}{2}e^x(\sin x-\cos x)+C$.

解 (1) $\frac{d}{dx}[\ln(x+\sqrt{x^2+1})+C]=\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\cdot\left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$.

(2) $\frac{d}{dx}\left(\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}+C\right)=\frac{\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\cdot x-\sqrt{x^2-1}}{x^2}=\frac{1}{x^2\sqrt{x^2-1}}$.

(3) $\frac{d}{dx}\left(\arctan x+\frac{1}{x+1}+C\right)=\frac{1}{x^2+1}-\frac{1}{(x+1)^2}=\frac{2x}{(x^2+1)(x+1)^2}$.

(4) $\frac{d}{dx}(\ln|\tan x+\sec x|+C)=\frac{1}{\tan x+\sec x}\cdot(\sec^2 x+\sec x\tan x)=\sec x$.

(5) $\frac{d}{dx}(x\sin x+\cos x+C)=\sin x+x\cos x-\sin x=x\cos x$.

(6) $\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{2}e^x(\sin x-\cos x)+C\right]=\frac{1}{2}e^x(\sin x-\cos x)+\frac{1}{2}e^x(\cos x+\sin x)=e^x\sin x$.

2. 求下列不定积分：

(1) $\int \frac{dx}{x^2}$;

(2) $\int x\sqrt{x}\,dx$;

(3) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}}$;

(4) $\int x^2\sqrt[3]{x}\,dx$;

(5) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x}}$;

(6) $\int \sqrt[m]{x^n}\,dx$;

(7) $\int 5x^3dx$;

(8) $\int (x^2-3x+2)dx$;

(9) $\int \frac{dh}{\sqrt{2gh}}$（$g$ 是常数）;

(10) $\int (x^2+1)^2dx$;

(11) $\int(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x^3}-1)\mathrm{d}x$；　　(12) $\int\frac{(1-x)^2}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$；

(13) $\int\left(2\mathrm{e}^x+\frac{3}{x}\right)\mathrm{d}x$；　　(14) $\int\left(\frac{3}{1+x^2}-\frac{2}{\sqrt{1-x^2}}\right)\mathrm{d}x$；

(15) $\int\mathrm{e}^x\left(1-\frac{\mathrm{e}^{-x}}{\sqrt{x}}\right)\mathrm{d}x$；　　(16) $\int 3^x\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$；

(17) $\int\frac{2\times3^x-5\times2^x}{3^x}\mathrm{d}x$；　　(18) $\int\sec x(\sec x-\tan x)\mathrm{d}x$；

(19) $\int\cos^2\frac{x}{2}\mathrm{d}x$；　　(20) $\int\frac{\mathrm{d}x}{1+\cos 2x}$；

(21) $\int\frac{\cos 2x}{\cos x-\sin x}\mathrm{d}x$；　　(22) $\int\frac{\cos 2x}{\cos^2 x\sin^2 x}\mathrm{d}x$；

(23) $\int\cot^2 x\mathrm{d}x$；　　(24) $\int\cos\theta(\tan\theta+\sec\theta)\mathrm{d}\theta$；

(25) $\int\frac{x^2}{x^2+1}\mathrm{d}x$；　　(26) $\int\frac{3x^4+2x^2}{x^2+1}\mathrm{d}x$.

解 (1) $\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2}=\int x^{-2}\mathrm{d}x=\frac{1}{-2+1}x^{-2+1}+C=-\frac{1}{x}+C.$

(2) $\int x\sqrt{x}\mathrm{d}x=\int x^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}x=\frac{1}{\frac{3}{2}+1}x^{\frac{3}{2}+1}+C=\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}+C.$

(3) $\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}=\int x^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}x=\frac{1}{-\frac{1}{2}+1}x^{-\frac{1}{2}+1}+C=2\sqrt{x}+C.$

(4) $\int x^2\sqrt[3]{x}\mathrm{d}x=\int x^{\frac{7}{3}}\mathrm{d}x=\frac{1}{\frac{7}{3}+1}x^{\frac{7}{3}+1}+C=\frac{3}{10}x^{\frac{10}{3}}+C.$

(5) $\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{x}}=\int x^{-\frac{5}{2}}\mathrm{d}x=\frac{1}{-\frac{5}{2}+1}x^{-\frac{5}{2}+1}+C=-\frac{2}{3}x^{-\frac{3}{2}}+C.$

(6) $\int\sqrt[m]{x^n}\mathrm{d}x=\frac{1}{\frac{n}{m}+1}x^{\frac{n}{m}+1}+C=\frac{m}{m+n}x^{\frac{m+n}{m}}+C.$

(7) $\int 5x^3\mathrm{d}x=\frac{5}{3+1}x^{3+1}+C=\frac{5}{4}x^4+C.$

(8) $\int(x^2-3x+2)\mathrm{d}x=\int x^2\mathrm{d}x-3\int x\mathrm{d}x+2\int\mathrm{d}x=\frac{x^3}{3}-\frac{3}{2}x^2+2x+C.$

(9) $\int\frac{\mathrm{d}h}{\sqrt{2gh}}=\frac{1}{\sqrt{2g}}\int h^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}h=\frac{1}{\sqrt{2g}}\times2\sqrt{h}+C=\sqrt{\frac{2h}{g}}+C.$

(10) $\int(x^2+1)^2\mathrm{d}x=\int(x^4+2x^2+1)\mathrm{d}x=\int x^4\mathrm{d}x+2\int x^2\mathrm{d}x+\int\mathrm{d}x=\frac{x^5}{5}+\frac{2}{3}x^3+x+C.$

(11) $$\int(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x^3}-1)\mathrm{d}x=\int(x^2+x^{\frac{3}{2}}-x^{\frac{1}{2}}-1)\mathrm{d}x=\int x^2\mathrm{d}x+\int x^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}x-\int x^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x-\int\mathrm{d}x$$
$$=\frac{x^3}{3}+\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}-\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-x+C.$$

(12) $$\int\frac{(1-x)^2}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x=\int(x^{\frac{3}{2}}-2x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}})\mathrm{d}x=\int x^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}x-2\int x^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x+\int x^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}x$$
$$=\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}-\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}+2x^{\frac{1}{2}}+C.$$

(13) $\int\left(2e^x+\frac{3}{x}\right)dx=2\int e^x dx+3\int\frac{dx}{x}=2e^x+3\ln|x|+C.$

(14) $\int\left(\frac{3}{1+x^2}-\frac{2}{\sqrt{1-x^2}}\right)dx=3\int\frac{dx}{1+x^2}-2\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=3\arctan x-2\arcsin x+C.$

(15) $\int e^x\left(1-\frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\right)dx=\int e^x dx-\int x^{-\frac{1}{2}}dx=e^x-2x^{\frac{1}{2}}+C.$

(16) $\int 3^x e^x dx=\int(3e)^x dx=\frac{(3e)^x}{\ln(3e)}+C=\frac{3^x e^x}{\ln 3+1}+C.$

(17) $\int\frac{2\times 3^x-5\times 2^x}{3^x}dx=2\int dx-5\int\left(\frac{2}{3}\right)^x dx=2x-\frac{5}{\ln\frac{2}{3}}\left(\frac{2}{3}\right)^x+C$

$$=2x-\frac{5}{\ln 2-\ln 3}\left(\frac{2}{3}\right)^x+C.$$

(18) $\int\sec x(\sec x-\tan x)dx=\int\sec^2 x dx-\int\sec x\tan x dx=\tan x-\sec x+C.$

(19) $\int\cos^2\frac{x}{2}dx=\int\frac{1+\cos x}{2}dx=\frac{x+\sin x}{2}+C.$

(20) $\int\frac{dx}{1+\cos 2x}=\int\frac{\sec^2 x}{2}dx=\frac{\tan x}{2}+C.$

(21) $\int\frac{\cos 2x}{\cos x-\sin x}dx=\int\frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{\cos x-\sin x}dx=\sin x-\cos x+C.$

(22) $\int\frac{\cos 2x}{\cos^2 x\sin^2 x}dx=\frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{\cos^2 x\sin^2 x}dx=\int(\csc^2 x-\sec^2 x)dx=\int\csc^2 x dx-\int\sec^2 x dx$

$=-(\cot x+\tan x)+C.$

(23) $\int\cot^2 x dx=\int\csc^2 x dx-\int dx=-\cot x-x+C.$

(24) $\int\cos\theta(\tan\theta+\sec\theta)d\theta=\int\sin\theta d\theta+\int d\theta=-\cos\theta+\theta+C.$

(25) $\int\frac{x^2}{x^2+1}dx=\int dx-\int\frac{1}{x^2+1}dx=x-\arctan x+C.$

(26) $\int\frac{3x^4+2x^2}{x^2+1}dx=\int 3x^2 dx-\int dx+\int\frac{1}{x^2+1}dx=x^3-x+\arctan x+C.$

3. 含有未知函数的导数的方程称为微分方程，例如方程$\frac{dy}{dx}=f(x)$，其中$\frac{dy}{dx}$为未知函数的导数，$f(x)$为已知函数. 如果将函数$y=\varphi(x)$代入微分方程，使微分方程成为恒等式，那么函数$y=\varphi(x)$就称为该微分方程的解. 求下列微分方程满足所给条件的解：

(1) $\frac{dy}{dx}=(x-2)^2$，$y\big|_{x=2}=0$；

(2) $\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{2}{t^3}$，$\frac{dx}{dt}\Big|_{t=1}=1$，$x\big|_{t=1}=1$.

解 (1) $y=\int(x-2)^2dx=\frac{1}{3}(x-2)^3+C$，由$y\big|_{x=2}=0$，得$C=0$，于是所求的解为$y=\frac{1}{3}(x-2)^3$.

(2) $\frac{dx}{dt}=\int\frac{2}{t^3}dt=-\frac{1}{t^2}+C_1$，由$\frac{dx}{dt}\Big|_{t=1}=1$，得$C_1=2$，故$\frac{dx}{dt}=-\frac{1}{t^2}+2$，

$$x=\int\left(-\frac{1}{t^2}+2\right)dt=\frac{1}{t}+2t+C_2,$$

由$x\big|_{t=1}=1$，得$C_2=-2$，于是所求的解为$x=\frac{1}{t}+2t-2$.

4. 汽车以 20m/s 速度沿直线行驶，刹车后匀减速行驶了 50m 停住，求刹车加速度. 可执行下列步骤：

(1)求微分方程 $\frac{d^2s}{dt^2}=-k$ 满足条件 $\left.\frac{ds}{dt}\right|_{t=0}=20$ 及 $s|_{t=0}=0$ 的解；

(2)求使 $\frac{ds}{dt}=0$ 的 t 值及相应的 s 值；

(3)求使 $s=50$ 的 k 值.

解 (1) $\frac{ds}{dt}=\int(-k)dt=-kt+C_1$，

由 $\left.\frac{ds}{dt}\right|_{t=0}=20$，得 $C_1=20$，故 $\frac{ds}{dt}=-kt+20$，$s=\int(-kt+20)dt=-\frac{1}{2}kt^2+20t+C_2$，

由 $s|_{t=0}=0$，得 $C_2=0$，于是所求的解为 $s=-\frac{1}{2}kt^2+20t$.

(2)令 $\frac{ds}{dt}=0$，解得 $t=\frac{20}{k}$. 此时

$$s=-\frac{1}{2}kt^2+20t=-\frac{1}{2}k\cdot\left(\frac{20}{k}\right)^2+20\cdot\frac{20}{k}=-\frac{1}{2}k\cdot\frac{400}{k^2}+\frac{400}{k}=\frac{200}{k}(\text{m})$$

(3)根据题意，当 $t=\frac{20}{k}$，$s=50$，即 $-\frac{1}{2}k\left(\frac{20}{k}\right)^2+\frac{400}{k}=50$，

解得 $k=4$，即得刹车加速度为 -4m/s^2.

5. 一曲线通过点 $(e^2,3)$，且在任一点处的切线的斜率等于该点横坐标的倒数，求该曲线的方程.

5 题视频解析

解 设曲线方程为 $y=f(x)$，则点 (x,y) 处的切线斜率为 $f'(x)$，由条件得 $f'(x)=\frac{1}{x}$，

因此 $f(x)$ 为 $\frac{1}{x}$ 的一个原函数，故有 $f(x)=\int\frac{1}{x}dx=\ln|x|+C$.

又，根据条件曲线过点 $(e^2,3)$，有 $f(e^2)=3$ 解得 $C=1$，即得所求曲线方程为

$$y=\ln x+1.$$

6. 一物体沿直线由静止开始运动，经 ts 后的速度是 $3t^2$m/s，问

(1)3s 后物体离开出发点的距离是多少？

(2)物体走完 360m 需要多少时间？

解 (1)设此物体自原点沿横轴正向由静止开始运动，位移函数为 $s=s(t)$，则

$$s(t)=\int v(t)dt=\int 3t^2dt=t^3+C,$$

于是由假设可知 $s(0)=0$，故 $s(t)=t^3$，所求距离为 $s(3)=27$(m).

(2)由 $t^3=360$，得 $t=\sqrt[3]{360}\approx7.11$(s).

7. 证明函数 $\arcsin(2x-1)$，$\arccos(1-2x)$ 和 $2\arctan\sqrt{\frac{x}{1-x}}$ 都是 $\frac{1}{\sqrt{x-x^2}}$ 的原函数.

7 题视频解析

证 $[\arcsin(2x-1)]'=\frac{1}{\sqrt{1-(2x-1)^2}}\cdot2=\frac{1}{\sqrt{x-x^2}}$，

$[\arccos(1-2x)]'=-\frac{1}{\sqrt{1-(1-2x)^2}}\cdot(-2)=\frac{1}{\sqrt{x-x^2}}$，

$$\left[2\arctan\sqrt{\frac{x}{1-x}}\right]'=2\frac{1}{1+\frac{x}{1-x}}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1-x}{x}}\cdot\frac{1}{(1-x)^2}=\frac{1}{\sqrt{x-x^2}}.$$

故结论成立.