

第十八章 光的衍射

一 选择题

1. 平行单色光垂直入射到单缝上, 观察夫朗和费衍射。若屏上 P 点处为第 2 级暗纹, 则单缝处波面相应地可划分为几个半波带 ()

- A. 一个 B. 两个 C. 三个 D. 四个

解: 暗纹条件: $a \sin \theta = \pm (2k \frac{\lambda}{2})$, $k = 1, 2, 3, \dots$, $k=2$, 所以 $2k=4$ 。

故本题答案为 D。

2. 波长为 λ 的单色光垂直入射到狭缝上, 若第 1 级暗纹的位置对应的衍射角为 $\theta = \pm \pi/6$, 则缝宽的大小为 ()

- A. $\lambda/2$ B. λ C. 2λ D. 3λ

解: $a \sin \theta = \pm (2k \frac{\lambda}{2})$, $k = 1, 2, 3, \dots$ $k=1$, $\theta = \pm \frac{\pi}{6}$, 所以 $a \sin(\pm \frac{\pi}{6}) = \pm 2 \times \frac{\lambda}{2}$, $\therefore a = 2\lambda$ 。

故本题答案为 C。

3. 一宇航员在 160km 高空, 恰好能分辨地面上两个发射波长为 550nm 的点光源, 假定宇航员的瞳孔直径为 5.0mm, 此两点光源的间距为 ()

- A. 21.5m B. 10.5m C. 31.0m D. 42.0m

解: $\theta_1 = 1.22 \frac{\lambda}{D} = \frac{\Delta x}{h}$, $\therefore \Delta x = 1.22 \frac{\lambda}{D} h = 21.5\text{m}$ 。

本题答案为 A。

4. 波长 $\lambda=550\text{nm}$ 的单色光垂直入射于光栅常数 $d=2 \times 10^{-4}\text{cm}$ 的平面衍射光栅上, 可能观察到的光谱线的最大级次为 ()

- A. 2 B. 3 C. 4 D. 5

解: $d \sin \theta = k\lambda$, $k = \frac{d \sin \theta}{\lambda} = 3.64$ 。 k 的可能最大值对应 $\sin \theta = 1$, 所以 $[k] = 3$ 。

故本题答案为 B。

5. 一束单色光垂直入射在平面光栅上, 衍射光谱中共出现了 5 条明纹。若已知此光栅缝宽度与不透明宽度相等, 那么在中央明纹一侧的第二条明纹是第几级? ()

- A. 1 级 B. 2 级 C. 3 级 D. 4 级

解: $d \sin \theta = \pm k\lambda$, $\frac{a+b}{a} = 2$, 因此 $\pm 2, \pm 4, \pm 6, \dots$ 等级缺级。衍射光谱中共出现了 5 条明纹,

所以 $k = \pm 3, \pm 1, 0$, 那么在中央明纹一侧的第二条明纹是第 3 级。

故本题答案为 C。

6. 一束白光垂直照射在一光栅上, 在形成的同一级光栅光谱中, 偏离中央明纹最远的是 ()

- A. 紫光 B. 绿光 C. 黄光 D. 红光

解：本题答案为 D

7. 测量单色光的波长时，下列方法中哪一种最为准确（ ）

- A. 光栅衍射 B. 单缝衍射 C. 双缝干涉 D. 牛顿环

解：本题答案为 A

8. X 射线投射到间距为 d 的平行点阵平面的晶体中，发生布拉格晶体衍射的最大波长为（ ）

- A. $d/4$ B. $d/2$ C. d D. $2d$

解：最大波长对应最大掠射角 90° 和最小级数 $k=1$ 。根据布拉格公式易知：

本题答案为 D

二 填空题

1. 波长为 λ 的单色光垂直照射在缝宽为 $a=4\lambda$ 的单缝上，对应 $\theta=30^\circ$ 衍射角，单缝处的波面可划分为_____半波带，对应的屏上条纹为_____纹。

解： $a \sin \theta = 4\lambda \sin 30^\circ = 2\lambda = 4 \times \frac{\lambda}{2}$ ，所以可划分为 4 个半波带，且为暗纹。

2. 在单缝衍射中，衍射角 θ 越大，所对应的明条纹亮度_____，衍射明条纹的角宽度_____（中央明条纹除外）。

解：越小；不变。

3. 平行单色光垂直入射在缝宽为 $a=0.15\text{mm}$ 的单缝上，缝后有焦距 $f=400\text{mm}$ 的凸透镜，在其焦平面上放置观察屏幕，现测得屏幕中央明条纹两侧的两个第 3 级暗纹之间的距离为 8mm ，则入射光的波长为 $\lambda =$ _____。

解： $a \sin \theta = 2k \frac{\lambda}{2}, k=3, \sin \theta = \frac{3\lambda}{a} = \frac{x}{f}$

$$\lambda = \frac{ax}{3f} = \frac{1.5 \times 10^{-4} \times 4 \times 10^{-3}}{3 \times 400 \times 10^{-3}} = 500 \text{ nm}$$

4. 在单缝实验中，如果上下平行移动单缝的位置，衍射条纹的位置_____。

解：衍射条纹的位置是由衍射角决定的，因此上下移动单缝，条纹位置不会变化。

5. 一个人在夜晚用肉眼恰能分辨 10 公里外的山上的两个点光源（光源的波长取为 $\lambda=550\text{nm}$ ）。假定此人眼瞳孔直径为 5.0mm ，则此两点光源的间距为_____。

解： $\theta_1 = 1.22 \frac{\lambda}{D} = \frac{\Delta x}{h}$

$$\text{所以 } \Delta x = 1.22 \frac{\lambda}{D} h = \frac{1.22 \times 550 \times 10^{-9} \times 10 \times 10^3}{5.0 \times 10^{-3}} = 1.342 \text{ m}.$$

6. 已知天空中两颗星相对于一望远镜的角距离为 $4.84 \times 10^{-6} \text{ rad}$ ，它们发出的光波波长为 550nm ，为了能分辨出这两颗星，望远镜物镜的口径至少应为 0.139m 。

解: $D = 1.22 \frac{\lambda}{\theta_1} = 0.139 \text{ m}$

7. 平行单色光垂直入射到平面衍射光栅上, 若增大光栅常数, 则衍射图样中明条纹的间距将_____, 若增大入射光的波长, 则明条纹间距将_____。

解: $d \sin \theta = \pm k \lambda, \theta \sim \sin \theta \sim \tan \theta \sim \frac{x}{f}$

所以 d 增大, θ 变小, 间距变小; λ 增大, θ 变大, 间距变大。

8. 波长为 500 nm 的平行单色光垂直入射在光栅常数为 $2 \times 10^{-3} \text{ mm}$ 的光栅上, 光栅透光缝宽度为 $1 \times 10^{-3} \text{ mm}$, 则第_____级主极大缺级, 屏上将出现_____条明条纹。

解: $a = 1 \times 10^{-3} \text{ mm}, d = 2 \times 10^{-3} \text{ mm}, \frac{d}{a} = 2$; 故第 2 级主极大缺级;

$d \sin \theta = k \lambda$, 当 $\sin \theta = 1$ 时, $k_{\max} = \frac{d}{\lambda} = 4$; 故屏上将出现 $k=0, \pm 1, \pm 3$ 共 5 条明条纹。

9. 一束具有两种波长的平行光入射到某个光栅上, $\lambda_1 = 450 \text{ nm}$, $\lambda_2 = 600 \text{ nm}$, 两种波长的谱线第二次重合时 (不计中央明纹), λ_1 的光为第_____级主极大, λ_2 的光为第_____级主极大。

解: 重合时, $d \sin \theta = k_1 \lambda_1 = k_2 \lambda_2, \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{k_2}{k_1} = \frac{3}{4}$

k_1, k_2 为整数又是第 2 次重合, 所以 $k_1 = 8, k_2 = 6$ 。

10. 用 X 射线分析晶体的晶格常数, 所用 X 射线波长为 0.1 nm 。在偏离入射线 60° 角方向上看到第 2 级反射极大, 则掠射角为_____, 晶格常数为_____。

解: 30° ; 0.2 nm

三 计算题

1. 在单缝衍射实验中, 透镜焦距为 0.5 m , 入射光波长 $\lambda = 500 \text{ nm}$, 缝宽 $a = 0.1 \text{ mm}$ 。求: (1) 中央明条纹宽度; (2) 第 1 级明条纹宽度。

解: (1) 中央明条纹宽度

$$\Delta x_0 = 2f \tan \theta_0 \approx 2f \frac{\lambda}{a} = \frac{2 \times 0.5 \times 500 \times 10^{-9}}{0.1 \times 10^{-3}} = 5 \times 10^{-3} \text{ m} = 5 \text{ mm}$$

(2) 第 1 级明条纹宽度为第 1 级暗条纹和第 2 级暗条纹间的距离

$$\Delta x_1 = f \tan \theta_2 - f \tan \theta_1 = f \left(\frac{2\lambda}{a} - \frac{\lambda}{a} \right) = \frac{f\lambda}{a} = 2.5 \text{ mm}$$

2. 在单缝夫琅禾费衍射实验中, 第 1 级暗条纹的衍射角为 0.4° , 求第 2 级亮条纹的衍射角。

解: 由亮条纹条件 $a \sin \theta_2 = (2k+1) \lambda / 2$ 和 $k=2$ 得

$$a \sin \theta_2 = 5\lambda / 2$$

由暗条纹条件 $a \sin \theta_1 = (2k) \lambda / 2$ 和 $k=1$ 得

$$a \sin \theta_1 = \lambda$$

故

$$\sin \theta_2 / \sin \theta_1 = 5/2$$

衍射角一般很小, $\sin \theta \approx \theta$, 得 $\theta_2 = 5/2 \theta_1 = 1^\circ$

3. 假若侦察卫星上的照相机能清楚地识别地面上汽车的牌照号码。如果牌照上的笔划间的距离为 4cm, 在 150km 高空的卫星上的照相机的最小分辨角应多大? 此照相机的孔径需要多大? 光波的波长按 500nm 计算。

解: 最小分辨角应为

$$\theta_1 = \frac{d}{l} = \frac{4 \times 10^{-2}}{150 \times 10^3} = 2.67 \times 10^{-7} \text{ rad}$$

照相机的孔径为

$$D = 1.22 \frac{\lambda}{\theta_1} = 1.22 \times \frac{500 \times 10^{-9} \text{ m}}{2.67 \times 10^{-7}} = 2.28 \text{ m}$$

4. 毫米波雷达发出的波束比常用的雷达波束窄, 这使得毫米波雷达不易受到反雷达导弹的袭击。(1) 有一毫米波雷达, 其圆形天线直径为 55cm, 发射波长为 1.36mm 的毫米波, 试计算其波束的角宽度。(2) 将此结果与普通船用雷达的波束的角宽度进行比较, 设船用雷达波长为 1.57cm, 圆形天线直径为 2.33m。

(提示: 雷达发射的波是由圆形天线发射出去的, 可以将之看成是从圆孔衍射出去的波, 其能量主要集中在艾里斑的范围内, 故雷达波束的角宽度就是艾里斑的角宽度。)

解: (1) 根据提示, 雷达波束的角宽度就是艾里斑的角宽度。根据(18.3.3)式, 艾里斑的角宽度为

$$2\theta_1 = 2.44 \frac{\lambda_1}{D_1} = 2.44 \times \frac{1.36 \times 10^{-3} \text{ m}}{0.55} = 0.00603 \text{ rad}$$

(2) 同理可算出船用雷达波束的角宽度为

$$2\theta_1 = 2.44 \frac{\lambda_2}{D_2} = 2.44 \times \frac{1.57 \times 10^{-2} \text{ m}}{2.33} = 0.0164 \text{ rad}$$

对比可见, 尽管毫米波雷达天线直径较小, 但其发射的波束角宽度仍然小于厘米波雷达波束的角宽度, 原因就是毫米波的波长较短。

5. 一束具有两种波长 λ_1 和 λ_2 的平行光垂直照射到一个衍射光栅上, 测得波长 λ_1 的第 3 级主极大与 λ_2 的第 4 级主极大衍射角均为 30° , 已知 $\lambda_1 = 560 \text{ nm}$, 求: (1) 光栅常数 d ; (2) 波长 λ_2 。

解: (1) 由光栅衍射明纹公式

$$d \sin \theta = k \lambda$$

$$d = k \lambda / \sin \theta = 3 \times 5.6 \times 10^{-7} \text{ m} / \sin 30^\circ = 3.36 \times 10^{-6} \text{ m}$$

$$(2) \quad d \sin 30^\circ = 4 \lambda_2$$

$$\lambda_2 = d \sin 30^\circ / 4 = 420 \text{ nm}$$

6. 一个每毫米 500 条缝的光栅, 用钠黄光垂直入射, 观察衍射光谱, 钠黄光包含两条谱线, 其波长分别为 589.6nm 和 589.0nm。求第 2 级光谱中这两条谱线互相分离的

角度。

解：光栅公式： $d \sin \theta = k \lambda$

$$d = 1 \text{ mm} / 500 = 2 \times 10^{-3} \text{ mm}$$

$$\lambda_1 = 589.6 \text{ nm} = 5.896 \times 10^{-4} \text{ mm}$$

$$\lambda_2 = 589.0 \text{ nm} = 5.890 \times 10^{-4} \text{ mm}$$

因为 $k = 2$

$$\text{所以 } \sin \theta_1 = k \lambda_1 / d = 0.5896$$

$$\theta_1 = \sin^{-1} 0.5896 = 36.129^\circ$$

$$\sin \theta_2 = k \lambda / d = 0.5890$$

$$\theta_2 = \sin^{-1} 0.5890 = 36.086^\circ$$

$$\text{所以 } \Delta \theta = \theta_1 - \theta_2 = 0.043^\circ$$

7. 平行光含有两种波长 $\lambda_1 = 400.0 \text{ nm}$, $\lambda_2 = 760.0 \text{ nm}$, 垂直入射在光栅常数 $d = 1.0 \times 10^{-3} \text{ cm}$ 的光栅上, 透镜焦距 $f = 50 \text{ cm}$, 求屏上两种光第 1 级衍射明纹中心之间的距离。

解：由光栅衍射主极大的公式

$$d \sin \theta_1 = k \lambda_1 = 1 \lambda_1$$

$$d \sin \theta_2 = k \lambda_2 = 1 \lambda_2$$

$$x_1 = f \tan \theta_1 \approx f \sin \theta_1 = f \lambda_1 / d$$

$$x_2 = f \tan \theta_2 \approx f \sin \theta_2 = f \lambda_2 / d$$

$$\Delta x = x_2 - x_1 = 1.8 \text{ cm}$$

8. 波长 $\lambda = 700 \text{ nm}$ 的单色光, 垂直入射在平面透射光栅上, 光栅常数为 $3 \times 10^{-6} \text{ m}$, 试问：(1) 最多能看到第几级衍射明条纹？(2) 若缝宽 0.001 mm , 第几级条纹缺级？

解：(1) 由光栅方程 $d \sin \theta = k \lambda$ 可得： $k = d \sin \theta / \lambda$

可见 k 的可能最大值对应 $\sin \theta = 1$ 。将 d 及 λ 值代入上式, 并设 $\sin \theta = 1$, 得

$$k = \frac{3 \times 10^{-6}}{700 \times 10^{-9}} = 4.28$$

k 只能取整数, 故取 $k = 4$, 即垂直入射时最多能看到第 4 级条纹。

(2) 当 d 和 a 的比为整数比 $\frac{d}{a} = \frac{k}{k'}$ 时, k 级出现缺级。题中 $d = 3 \times 10^{-6} \text{ m}$, $a = 1 \times$

10^{-6} m , 因此 $d/a = 3$, 故缺级的级数为 3, 6, 9...

又因 $k \leq 4$, 所以实际上只能观察到第 3 级缺级。

9. 白光 ($\lambda_{\text{紫}} = 400.0 \text{ nm}$, $\lambda_{\text{红}} = 760.0 \text{ nm}$) 垂直入射到每厘米有 4000 条缝的光栅, 试求利用此光栅可以产生多少级完整的光谱？

解：对第 k 级光谱, 角位置的范围从 $\theta_{k \text{ 紫}}$ 到 $\theta_{k \text{ 红}}$, 要产生完整的光谱, 即要求 $\lambda_{\text{紫}}$ 的第 $(k+1)$ 级纹在 $\lambda_{\text{红}}$ 的第 k 级条纹之后, 亦即

$$\theta_{k \text{ 红}} < \theta_{(k+1) \text{ 紫}}$$

根据光栅方程 $d \sin \theta = k \lambda$, 得

$$d \sin \theta_{k \text{ 红}} = k \lambda_{\text{红}}$$

$$d \sin \theta_{(k+1)\text{紫}} = (k+1) \lambda_{\text{紫}}$$

由以上三式得到

$$k\lambda_{\text{红}} < (k+1) \lambda_{\text{紫}}$$

$$760k < 400(k+1)$$

所以只有 $k=1$ 才满足上式，所以只能产生一级完整的可见光谱，而第 2 级和第 3 级光谱即有重叠出现。