

高等数学



4.3 分部积分



基础部数学教研室

郑治中

问题1: 试计算 $\int \sqrt{a^2 + x^2} dx$.

$$\int \sqrt{a^2 + x^2} dx \stackrel{x=atant}{=} \int a \sec t \cdot a \sec^2 t dt = a^2 \int \sec^3 t dt = ?$$

问题2: 试计算 $\int e^{\sqrt{x}} dx \stackrel{\sqrt{x}=t}{=} 2 \int t e^t dt = ?$

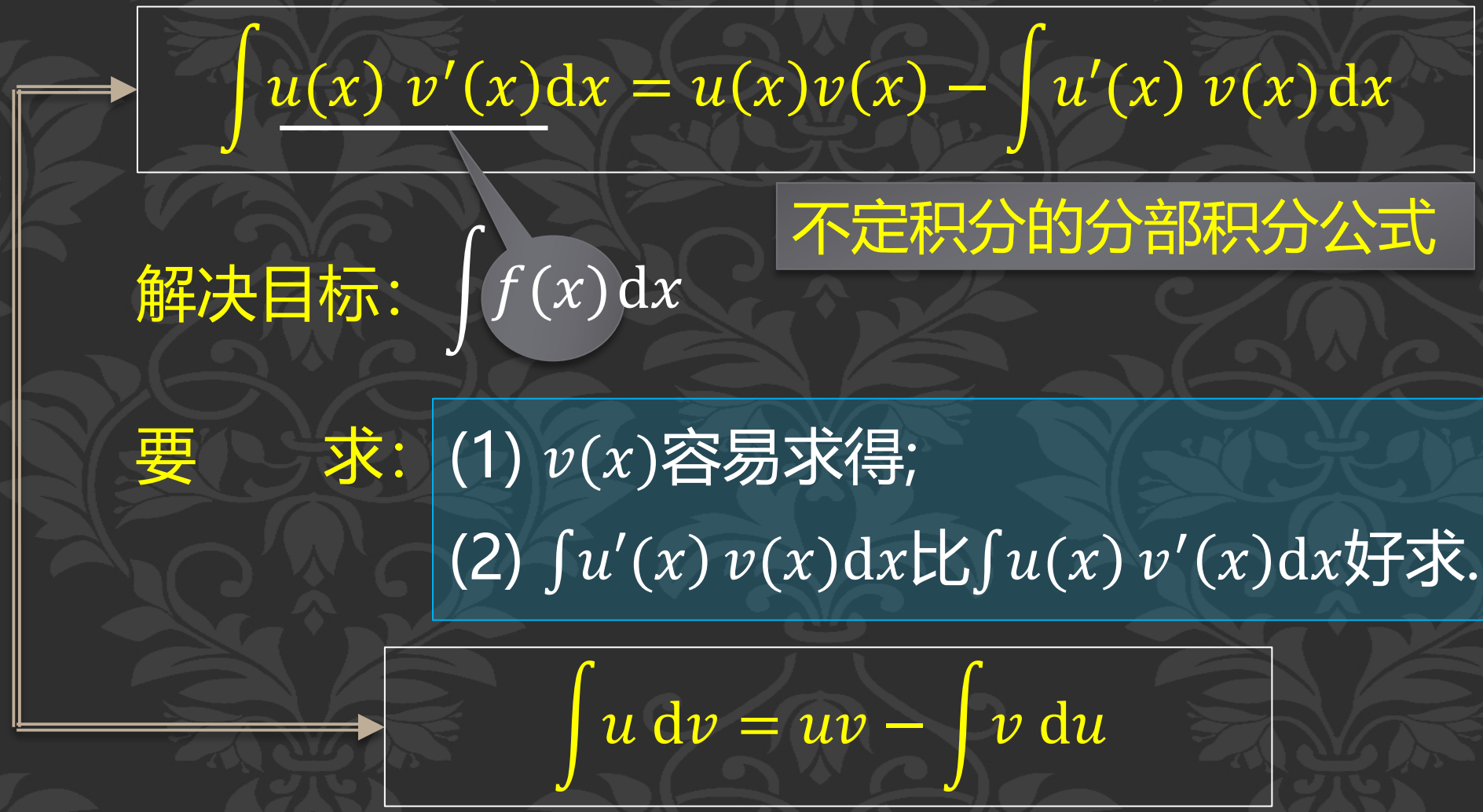
$$\int x \sin x dx = ?$$

$$\int x \ln x dx = ?$$

$$\int e^x \sin x dx = ?$$

不定积分的分部积分法




$$\int \underline{u(x) v'(x)} dx = u(x)v(x) - \int u'(x) v(x) dx$$

不定积分的分部积分公式

解决目标: $\int f(x) dx$

要求: (1) $v(x)$ 容易求得;
(2) $\int u'(x) v(x) dx$ 比 $\int u(x) v'(x) dx$ 好求.

$$\int u dv = uv - \int v du$$

例3 求下列不定积分：

$$(1) \int x e^x dx; \quad (2) \int x^2 e^x dx; \quad (3) \int x \sin 2x dx.$$

1. 如何确定 u 和 v 的取值
2. 多次分部积分如何求解

$$\int u(x) v^{(n)}(x) dx$$

左导

右积

$$u(x)$$

$$u'(x)$$

$$u''(x)$$

\vdots

$$u^{(n-1)}(x)$$

$$u^{(n)}(x)$$

+

-

+

$(-1)^{n-1}$

$(-1)^n$

$$v^{(n)}(x)$$

$$v^{(n-1)}(x)$$

$$v^{(n-2)}(x)$$

\vdots

$$v'(x)$$

$$v(x)$$

★ 斜线：两数相乘

做几次分部积分就有几条斜线

★ 横线：两数相乘再积分

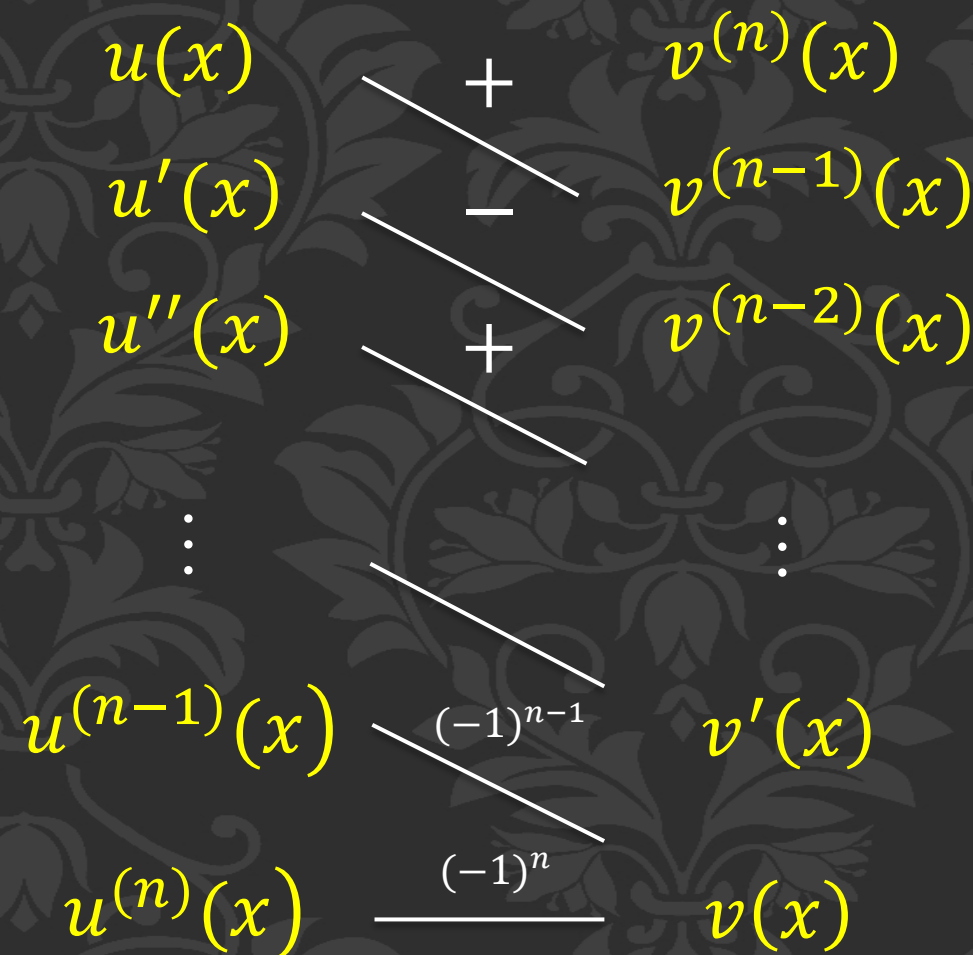
仅有一条横线

★ 符号起始+，交错往下

左导

右积

$$\begin{aligned} \int u(x) v^{(n)}(x) dx = & \\ & u(x)v^{(n-1)} - u'(x)v^{(n-2)}(x) \\ & + \cdots + \\ & + (-1)^{n-1} u^{(n-1)}(x)v(x) \\ & + (-1)^n \int u^{(n)}(x)v(x) dx \end{aligned}$$



例3 求下列不定积分:

$$(1) \int x e^x dx; \quad (2) \int x^2 e^x dx; \quad (3) \int x \sin 2x dx.$$

例 求 $\int \sec^3 t \, dt$

例 求 $\int \sqrt{x^2 - a^2} \, dx \quad (a > 0).$ ($x = a \sec t$)

例4 求下列不定积分:

$$(1) \int \sqrt{a^2 + x^2} \, dx \quad (2) \int \arcsin x \, dx$$

例5 求下列不定积分:

$$(1) \int e^x \sin x \, dx \quad (2) \int \cos \alpha x \cos \beta x \, dx$$

例6 求不定积分 $\int x \ln x \, dx$

例7 求不定积分 $\int \frac{\ln x}{\sqrt{1+x}} \, dx$

例8 求不定积分 $\int \frac{\arctan e^x}{e^{2x}} \, dx$

例9 求不定积分:

$$\int \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) dx$$

$$\int e^{-\frac{x}{2}} \frac{\cos x - \sin x}{\sqrt{\sin x}} dx$$

$$\int \arcsin \sqrt{x} dx$$

$$\int \frac{\ln^3 x}{x^2} dx$$

$$\int \cos \ln x dx$$

$$\int e^{ax} \cos bx dx$$

例10 已知 $\ln(x + \sqrt{1 + x^2})$ 是 $f(x)$ 的原函数, 求 $\int x f'(x) dx$

例11 已知 $\frac{\sin x}{x}$ 是 $f(x)$ 的原函数, 求 $\int x^3 f'(x) dx$

例12 设 $f(\ln x) = \frac{\ln(1+x)}{x}$, 求 $\int f(x) dx$

例13 求下列不定积分 $I_n = \int \frac{dx}{(a^2 + x^2)^n}$, 其中 n 为正整数且 $a > 0$.

$$I_n = \frac{1}{2a^2(n-1)} \cdot \frac{x}{(a^2 + x^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2a^2(n-1)} I_{n-1} \quad (n \geq 1)$$

$$I_1 = \int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C$$

$$I_2 = \frac{1}{2a^2} \cdot \frac{x}{a^2 + x^2} + \frac{1}{2a^2} I_1$$

$$= \frac{1}{2a^2} \cdot \frac{x}{a^2 + x^2} + \frac{1}{2a^3} \arctan \frac{x}{a} + C$$