即函数$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上有原函数$F(x)$，但由于函数$f(x)$在$x=0$的任一邻域内无界，故函数$f(x)$在包含$x=0$的区间上不可积.

习题 5—2 解答

1. 试求函数$y=\int_0^x \sin t\mathrm{d}t$当$x=0$及$x=\frac{\pi}{4}$时的导数.

解 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\sin x$，因此$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}=0$，$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=\frac{\pi}{4}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

2. 求由参数表达式$x=\int_0^t \sin u\mathrm{d}u$，$y=\int_0^t \cos u\mathrm{d}u$所确定的函数对$x$的导数$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

解 $$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\frac{\cos t}{\sin t}=\cot t.$$

3. 求由$\int_0^y \mathrm{e}^t\mathrm{d}t+\int_0^x \cos t\mathrm{d}t=0$所确定的隐函数对$x$的导数$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

解 方程两端分别对x求导，得$\mathrm{e}^y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\cos x=0$，故$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\mathrm{e}^{-y}\cos x$.

4. 当x为何值时，函数$I(x)=\int_0^x t\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t$有极值?

解 容易知道$I(x)$可导，而$I'(x)=x\mathrm{e}^{-x^2}=0$只有唯一解$x=0$. 当$x<0$时$I'(x)<0$，当$x>0$时$I'(x)>0$，故$x=0$为函数$I(x)$的唯一的极值点(极小值点).

5. 计算下列各导数：

(1)$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^{x^2}\sqrt{1+t^2}\,\mathrm{d}t$；　(2)$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{x^2}^{x^3}\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+t^4}}$；　(3)$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{\sin x}^{\cos x}\cos(\pi t^2)\mathrm{d}t$.

5 题视频解析

解 (1)$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^{x^2}\sqrt{1+t^2}\,\mathrm{d}t=2x\sqrt{1+x^4}$.

(2)$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{x^2}^{x^3}\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+t^4}}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\int_0^{x^3}\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+t^4}}-\int_0^{x^2}\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+t^4}}\right)=\frac{3x^2}{\sqrt{1+x^{12}}}-\frac{2x}{\sqrt{1+x^8}}.$$

(3)$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{\sin x}^{\cos x}\cos(\pi t^2)\mathrm{d}t=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\int_0^{\cos x}\cos(\pi t^2)\mathrm{d}t-\int_0^{\sin x}\cos(\pi t^2)\mathrm{d}t\right]$$
$$=-\sin x\cos(\pi\cos^2 x)-\cos x\cos(\pi\sin^2 x)=-\sin x\cos(\pi-\pi\sin^2 x)-\cos x\cos(\pi\sin^2 x)$$
$$=(\sin x-\cos x)\cos(\pi\sin^2 x).$$

6. 证明$f(x)=\int_1^x\sqrt{1+t^3}\,\mathrm{d}t$在$[-1,+\infty)$上是单调增加函数，并求$(f^{-1})'(0)$.

证 显然$f(x)$在$[-1,+\infty)$上可导，且当$x>-1$时，$f'(x)=\sqrt{1+x^3}>0$，因此$f(x)$在$[-1,+\infty)$是单调增加函数.

注意到$f(1)=0$，故$(f^{-1})'(0)=\frac{1}{f'(1)}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

6 题视频解析

7. 设$f(x)=\int_0^x\left(\int_{\sin t}^1\sqrt{1+u^4}\,\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}t$，求$f''\left(\frac{\pi}{3}\right)$.

解 $f'(x)=\int_{\sin x}^1\sqrt{1+u^4}\,\mathrm{d}u$，$f''(x)=-\sqrt{1+\sin^4 x}\cdot\cos x$，

故$f''\left(\frac{\pi}{3}\right)=-\sqrt{1+\sin^4\frac{\pi}{3}}\cdot\cos\frac{\pi}{3}=-\frac{5}{8}$.

7 题视频解析

8. 设 $f(x)$ 具有三阶连续导数，$y=f(x)$ 的图形如图 5—11 所示. 问下列积分中的哪一个积分值为负？

(A) $\int_{-1}^{3} f(x)\mathrm{d}x$　　(B) $\int_{-1}^{3} f'(x)\mathrm{d}x$

(C) $\int_{-1}^{3} f''(x)\mathrm{d}x$　　(D) $\int_{-1}^{3} f'''(x)\mathrm{d}x$

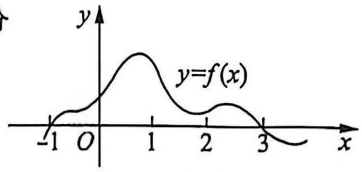

图 5—11

解 根据 $y=f(x)$ 的图形可知，在区间 $[-1,3]$ 上 $f(x)\geqslant 0$，且 $f(-1)=f(3)=0$，$f'(-1)>0$，$f''(-1)<0$，$f'(3)<0$，$f''(3)>0$. 因此 $\int_{-1}^{3} f(x)\mathrm{d}x>0$，$\int_{-1}^{3} f'(x)\mathrm{d}x=f(3)-f(-1)=0$，$\int_{-1}^{3} f''(x)\mathrm{d}x=f'(3)-f'(-1)<0$，$\int_{-1}^{3} f'''(x)\mathrm{d}x=f''(3)-f''(-1)>0$. 故选(C).

9. 计算下列各定积分：

(1) $\int_{0}^{a}(3x^2-x+1)\mathrm{d}x$；　　(2) $\int_{1}^{2}\left(x^2+\frac{1}{x^4}\right)\mathrm{d}x$；

(3) $\int_{4}^{9}\sqrt{x}(1+\sqrt{x})\mathrm{d}x$；　　(4) $\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$；

(5) $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$；　　(6) $\int_{0}^{\sqrt{3}a}\frac{\mathrm{d}x}{a^2+x^2}$；

(7) $\int_{0}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{4-x^2}}$；　　(8) $\int_{-1}^{0}\frac{3x^4+3x^2+1}{x^2+1}\mathrm{d}x$；

(9) $\int_{-e-1}^{-2}\frac{\mathrm{d}x}{1+x}$；　　(10) $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\tan^2\theta\mathrm{d}\theta$；

(11) $\int_{0}^{2\pi}|\sin x|\mathrm{d}x$；　　(12) $\int_{0}^{2} f(x)\mathrm{d}x$，其中 $f(x)=\begin{cases}x+1, & x\leqslant 1,\\ \frac{1}{2}x^2, & x>1.\end{cases}$

解 (1) $\int_{0}^{a}(3x^2-x+1)\mathrm{d}x=\left[x^3-\frac{1}{2}x^2+x\right]_0^a=a^3-\frac{1}{2}a^2+a.$

(2) $\int_{1}^{2}\left(x^2+\frac{1}{x^4}\right)\mathrm{d}x=\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{3x^3}\right]_1^2=\frac{21}{8}.$

(3) $\int_{4}^{9}\sqrt{x}(1+\sqrt{x})\mathrm{d}x=\int_{4}^{9}(\sqrt{x}+x)\mathrm{d}x=\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+\frac{x^2}{2}\right]_4^9=\frac{271}{6}.$

(4) $\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}=\left[\arctan x\right]_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}}=\frac{\pi}{6}.$

(5) $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}=\left[\arcsin x\right]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}=\frac{\pi}{3}.$

(6) $\int_{0}^{\sqrt{3}a}\frac{\mathrm{d}x}{a^2+x^2}=\left[\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}\right]_0^{\sqrt{3}a}=\frac{\pi}{3a}.$

(7) $\int_{0}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{4-x^2}}=\left[\arcsin\frac{x}{2}\right]_0^1=\frac{\pi}{6}.$

(8) $\int_{-1}^{0}\frac{3x^4+3x^2+1}{x^2+1}\mathrm{d}x=\int_{-1}^{0}\left(3x^2+\frac{1}{x^2+1}\right)\mathrm{d}x=\left[x^3+\arctan x\right]_{-1}^{0}=1+\frac{\pi}{4}.$

(9) $\int_{-e-1}^{-2}\frac{\mathrm{d}x}{1+x}=\left[\ln|1+x|\right]_{-e-1}^{-2}=-1.$

(10) $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\tan^2\theta\mathrm{d}\theta=\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}(\sec^2\theta-1)\mathrm{d}\theta=\left[\tan\theta-\theta\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=1-\frac{\pi}{4}.$

(11) $\int_{0}^{2\pi}|\sin x|\mathrm{d}x=\int_{0}^{\pi}\sin x\mathrm{d}x+\int_{\pi}^{2\pi}(-\sin x)\mathrm{d}x=\left[-\cos x\right]_0^{\pi}+\left[\cos x\right]_{\pi}^{2\pi}=4.$

(12) $\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 (x+1)\mathrm{d}x+\int_1^2 \frac{1}{2}x^2\mathrm{d}x=\left[\frac{x^2}{2}+x\right]_0^1+\left[\frac{x^3}{6}\right]_1^2=\frac{8}{3}$.

10. 设 $k\in\mathbf{N}_+$，试证下列各题：

(1) $\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx\mathrm{d}x=0$；　(2) $\int_{-\pi}^{\pi} \sin kx\mathrm{d}x=0$；　(3) $\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 kx\mathrm{d}x=\pi$；　(4) $\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 kx\mathrm{d}x=\pi$.

解 (1) $\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx\mathrm{d}x=\left[\frac{1}{k}\sin kx\right]_{-\pi}^{\pi}=0$.

(2) $\int_{-\pi}^{\pi} \sin kx\mathrm{d}x=\left[-\frac{1}{k}\cos kx\right]_{-\pi}^{\pi}=0$.

(3) $\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 kx\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} (1+\cos 2kx)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}x=\pi$，其中由(1)得到 $\int_{-\pi}^{\pi} \cos 2kx\mathrm{d}x=0$.

(4) $\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 kx\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} (1-\cos 2kx)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}x=\pi$，其中由(1)得到 $\int_{-\pi}^{\pi} \cos 2kx\mathrm{d}x=0$.

11. 设 $k,l\in\mathbf{N}_+$，且 $k\neq l$，证明：

(1) $\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx\sin lx\mathrm{d}x=0$；　(2) $\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx\cos lx\mathrm{d}x=0$；　(3) $\int_{-\pi}^{\pi} \sin kx\sin lx\mathrm{d}x=0$.

解 (1)
$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx\sin lx\mathrm{d}x&=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} [\sin(k+l)x-\sin(k-l)x]\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \sin(k+l)x\mathrm{d}x-\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \sin(k-l)x\mathrm{d}x=0,\end{aligned}$$

其中由上一题 $\int_{-\pi}^{\pi} \sin(k+l)x\mathrm{d}x=0$，$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(k-l)x\mathrm{d}x=0$.

(2)
$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx\cos lx\mathrm{d}x&=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} [\cos(k+l)x+\cos(k-l)x]\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(k+l)x\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(k-l)x\mathrm{d}x=0,\end{aligned}$$

其中由上一题 $\int_{-\pi}^{\pi} \cos(k+l)x\mathrm{d}x=0$，$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(k-l)x\mathrm{d}x=0$.

(3)
$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} \sin kx\sin lx\mathrm{d}x&=-\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} [\cos(k+l)x-\cos(k-l)x]\mathrm{d}x\\&=-\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(k+l)x\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(k-l)x\mathrm{d}x=0,\end{aligned}$$

其中由上一题 $\int_{-\pi}^{\pi} \cos(k+l)x\mathrm{d}x=0$，$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(k-l)x\mathrm{d}x=0$.

12. 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x \cos t^2\mathrm{d}t}{x}$；　(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(\int_0^x \mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t\right)^2}{\int_0^x t\mathrm{e}^{2t^2}\mathrm{d}t}$.

12 题视频解析

解 (1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x \cos t^2\mathrm{d}t}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x^2}{1}=1$.

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(\int_0^x \mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t\right)^2}{\int_0^x t\mathrm{e}^{2t^2}\mathrm{d}t}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\mathrm{e}^{x^2}\int_0^x \mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t}{x\mathrm{e}^{2x^2}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\int_0^x \mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\mathrm{e}^{x^2}}{1}=2$.

13. 设 $f(x)=\begin{cases}x^2, & x\in[0,1),\\ x, & x\in[1,2].\end{cases}$

求 $\Phi(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 在$[0,2]$上的表达式，并讨论 $\Phi(x)$ 在$(0,2)$内的连续性.

解 当 $x\in[0,1)$时，$\Phi(x)=\int_0^x t^2\mathrm{d}t=\dfrac{x^3}{3}$；

当 $x\in[1,2]$时，$\Phi(x)=\int_0^1 t^2\mathrm{d}t+\int_1^x t\mathrm{d}t=\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{1}{6}$，即 $\Phi(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3}{3}, & x\in[0,1),\\ \dfrac{x^2}{2}-\dfrac{1}{6}, & x\in[1,2].\end{cases}$

由于 $\lim\limits_{x\to1^-}\Phi(x)=\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{x^3}{3}=\dfrac{1}{3}$， $\lim\limits_{x\to1^+}\Phi(x)=\lim\limits_{x\to1^+}\left(\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{1}{6}\right)=\dfrac{1}{3}$，

且 $\Phi(1)=\dfrac{1}{3}$，故函数 $\Phi(x)$在 $x=1$ 处连续，而在其他点处显然连续，因此函数 $\Phi(x)$在区间$(0,2)$内连续.

> **评注**：事实上，由于 $f(x)$在$(0,2)$内连续，故 $\Phi(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 在$(0,2)$内可导，因此 $\Phi(x)$必在$(0,2)$内连续. 我们甚至有以下更强的结论：
>
> 若 $f(x)$在$[a,b]$上有界并可积，则 $\Phi(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 在$[a,b]$上连续. 按照连续函数定义不难证明这一结论.

14. 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\sin x, & 0\leqslant x\leqslant\pi,\\ 0, & x<0 \text{ 或 } x>\pi.\end{cases}$ 求 $\Phi(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 在$(-\infty,+\infty)$内的表达式.

14 题视频解析

解 当 $x<0$ 时，$\Phi(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=0$；

当 $0\leqslant x\leqslant\pi$ 时，$\Phi(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=\int_0^x \dfrac{1}{2}\sin t\mathrm{d}t=\dfrac{1-\cos x}{2}$；

当 $x>\pi$ 时，$\Phi(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=\int_0^\pi f(t)\mathrm{d}t+\int_\pi^x f(t)\mathrm{d}t=\int_0^\pi \dfrac{1}{2}\sin t\mathrm{d}t=1$.

即
$$\Phi(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ \dfrac{1-\cos x}{2}, & 0\leqslant x\leqslant\pi,\\ 1, & x>\pi.\end{cases}$$

15. 设 $f(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)内可导且 $f'(x)\leqslant0$，$F(x)=\dfrac{1}{x-a}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$. 证明在$(a,b)$内有 $F'(x)\leqslant0$.

15 题视频解析

证
$$\begin{aligned}F'(x)&=\frac{1}{(x-a)^2}\left[(x-a)f(x)-\int_a^x f(t)\mathrm{d}t\right]\\&=\frac{1}{(x-a)^2}[(x-a)f(x)-(x-a)f(\xi)]\quad(\xi\in(a,x)\subset[a,b])\\&=\frac{x-\xi}{x-a}f'(\eta)\quad(\eta\in(\xi,x)\subset(a,b)),\\&\leqslant0.\end{aligned}$$

16. 以下积分上限的函数：$S(x)=\int_0^x \sin\dfrac{\pi t^2}{2}\mathrm{d}t$，$x\in(-\infty,+\infty)$ 称为菲涅耳(Fresnel)积分，在光学中有重要应用.

(1) 证明：$S(x)$ 为奇函数；(2) 求出 $S(x)$ 的极小值点.

16 题视频解析

证 (1) $S(-x)=\int_0^{-x}\sin\dfrac{\pi t^2}{2}\mathrm{d}t\xlongequal{t=-u}-\int_0^x\sin\dfrac{\pi u^2}{2}\mathrm{d}u=-S(x)$，所以 $S(x)$ 为奇函数.

(2) $S'(x)=\sin\frac{\pi x^2}{2}$，令 $S'(x)=0$ 得 $\frac{\pi x^2}{2}=k\pi, x^2=2k, x=\pm\sqrt{2k}\,(k\in\mathbf{N}^+)$，$S''(x)=\pi x\cos\frac{\pi x^2}{2}$，

① 若 $x=\sqrt{2k}$，则 $S''(\sqrt{2k})=\sqrt{2k}\pi\cdot\cos k\pi=(-1)^k\cdot\pi\sqrt{2k}$，因为是极小值点，所以 $S''(\sqrt{2k})>0$，故 $k=2m$. 即 $x=\sqrt{4m}=2\sqrt{m}\,(m\in\mathbf{N}^+)$ 为极小值点.

② 若 $x=-\sqrt{2k}$，则 $S''(-\sqrt{2k})=\pi\cdot(-\sqrt{2k})\cdot\cos k\pi=(-1)^{k+1}\sqrt{2k}\pi>0$，所以 $k=2m-1$ $(m\in\mathbf{N}^+)$.

综上极值点为 $x=2\sqrt{m}$ 及 $x=-\sqrt{4m-2}\,(m\in\mathbf{N}^+)$.

17. 设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 内连续，且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=1$. 证明函数 $y=\mathrm{e}^{-x}\int_0^x \mathrm{e}^t f(t)\mathrm{d}t$ 满足方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+y=f(x)$，并求 $\lim\limits_{x\to+\infty}y(x)$.

17 题视频解析

证 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\mathrm{e}^{-x}\int_0^x \mathrm{e}^t f(t)\mathrm{d}t+\mathrm{e}^{-x}\cdot\mathrm{e}^x f(x)=-y+f(x)$，

因此 $y(x)$ 满足方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+y=f(x)$.

由条件 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=1$，从而存在 $X_0>0$，当 $x>X_0$ 时，有 $f(x)>\frac{1}{2}$.

因此，
$$\begin{aligned}\int_0^x \mathrm{e}^t f(t)\mathrm{d}t&=\int_0^{X_0}\mathrm{e}^t f(t)\mathrm{d}t+\int_{X_0}^x \mathrm{e}^t f(t)\mathrm{d}t\geqslant\int_0^{X_0}\mathrm{e}^t f(t)\mathrm{d}t+\int_{X_0}^x\frac{1}{2}\mathrm{e}^{X_0}\mathrm{d}t\\&=\int_0^{X_0}\mathrm{e}^t f(t)\mathrm{d}t+\frac{1}{2}\mathrm{e}^{X_0}(x-X_0),\end{aligned}$$

故当 $x\to+\infty$ 时，$\int_0^x \mathrm{e}^t f(t)\mathrm{d}t\to+\infty$，从而利用洛必达法则，有

$$\lim_{x\to+\infty}y(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x \mathrm{e}^t f(t)\mathrm{d}t}{\mathrm{e}^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^x f(x)}{\mathrm{e}^x}=1.$$

第三节　定积分的换元法和分部积分法

一、主要内容归纳

1. 换元积分法　若函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续；函数 $x=\varphi(t)$ 在区间 $[\alpha,\beta]$ 上单调且具有连续导数，当 $\alpha\leqslant t\leqslant\beta$ 时，$a\leqslant\varphi(t)\leqslant b$，且 $\varphi(\alpha)=a,\varphi(\beta)=b$，则有定积分的换元公式

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)\mathrm{d}t.$$

2. 分部积分法　设函数 $u(x),v(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上具有连续导数 $u'(x)$、$v'(x)$，则有定积分的分部积分公式 $\int_a^b u(x)v'(x)\mathrm{d}x=\left[u(x)v(x)\right]\Big|_a^b-\int_a^b v(x)u'(x)\mathrm{d}x$.

3. 常用公式　设 $f(x)$ 为连续函数