第十五章　机械振动

一　选择题

1. 对一个作简谐振动的物体，下面哪种说法是正确的？(　　　)

A.　物体在运动正方向的端点时，速度和加速度都达到最大值；

B.　物体位于平衡位置且向负方向运动时，速度和加速度都为零；

C.　物体位于平衡位置且向正方向运动时，速度最大，加速度为零；

D.　物体处负方向的端点时，速度最大，加速度为零。

解：根据简谐振动的速度和加速度公式分析。

答案选 C。

2.下列四种运动（忽略阻力）中哪一种不是简谐振动？（　　）

A. 小球在地面上作完全弹性的上下跳动；

B. 竖直悬挂的弹簧振子的运动；

C. 放在光滑斜面上弹簧振子的运动；

D. 浮在水里的一均匀球形木块，将它部分按入水中，然后松开，使木块上下浮动。

解：A 中小球没有受到回复力的作用。

答案选 A。

3.　一个轻质弹簧竖直悬挂，当一物体系于弹簧的下端时，弹簧伸长了 l 而平衡。则此系统作简谐振动时振动的角频率为（　　　）

A. $\dfrac{g}{l}$　　　B. $\sqrt{\dfrac{g}{l}}$　　　C. $\dfrac{l}{g}$　　　D. $\sqrt{\dfrac{l}{g}}$

解　由 $kl=mg$ 可得 $k=mg/l$，系统作简谐振动时振动的固有角频率为 $\omega=\sqrt{\dfrac{k}{m}}=\sqrt{\dfrac{g}{l}}$ 。

故本题答案为 B。

4. 一质点作简谐振动（用余弦函数表达），若将振动速度处于正最大值的某时刻取作 t=0，则振动初相位 φ 为（　　　）

A. $-\dfrac{\pi}{2}$　　　B. 0　　　C. $\dfrac{\pi}{2}$　　　D. π

解　由 $x=A\cos(\omega t+\varphi)$ 可得振动速度为 $v=\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=-\omega A\sin(\omega t+\varphi)$ 。速度正最大时有 $\cos(\omega t+\varphi)=0$， $\sin(\omega t+\varphi)=-1$，若 t=0，则 $\varphi=-\dfrac{\pi}{2}$ 。

故本题答案为 A。

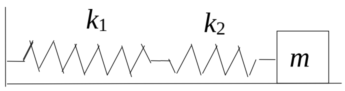
5. 如图所示，质量为 m 的物体，由劲度系数为 k_1 和 k_2 的两个轻弹簧连接，在光滑导轨上作微小振动，其振动频率为　(　　　)

A. $\nu = 2\pi\sqrt{\dfrac{k_1 k_2}{m}}$

B. $\nu = 2\pi\sqrt{\dfrac{k_1 + k_2}{m}}$

C. $\nu = \dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{k_1 + k_2}{m k_1 . k_2}}$

D. $\nu = \dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{k_1 . k_2}{m(k_1 + k_2)}}$



选择题 5 图

解：设当 m 离开平衡位置的位移为 x，时，劲度系数为 k_1 和 k_2 的两个轻弹簧的伸长量分别为 x_1 和 x_2，显然有关系

$$x_1 + x_2 = x$$

此时两个弹簧之间、第二个弹簧与和物体之间的作用力相等。因此有

$$k_1 x_1 = k_2 x_2$$

$$m\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = -k_1 x_1$$

由前面二式解出 $x_1 = \dfrac{k_2 x}{k_1 + k_2}$，将 x_1 代入第三式，得到

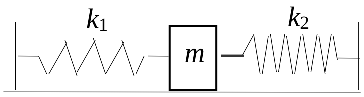
$$m\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}x$$

将此式与简谐振动的动力学方程比较，并令 $\omega^2 = \dfrac{k_1 . k_2}{m(k_1 + k_2)}$，即得振动频率

$$\nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k_1 . k_2}{m(k_1 + k_2)}}\text{。}$$

所以答案选 D。

6. 如题图所示，质量为 m 的物体由劲度系数为 k_1 和 k_2 的两个轻弹簧连接，在光滑导轨上作微小振动，则该系统的振动频率为 (　　)



选择题 6 图

A. $\nu = 2\pi\sqrt{\dfrac{k_1 k_2}{m}}$　　　　B. $\nu = \dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{k_1 + k_2}{m}}$

C. $\nu = \dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{k_1 + k_2}{m k_1 . k_2}}$　　　　D. $\nu = \dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{k_1 . k_2}{m(k_1 + k_2)}}$

解：设质点离开平衡位置的位移是 x，假设 $x>0$，则第一个弹簧被拉长 x，而第二个弹簧被压缩 x，作用在质点上的回复力为 $-(k_1 x + k_2 x)$。因此简谐振动的动力学方程

$$m\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}=-(k_1+k_2)x$$

令 $\omega^2=\dfrac{k_1+k_2}{m}$，即 $\nu=\dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{k_1+k_2}{m}}$

所以答案选 B 。

7. 弹簧振子在光滑水平面上作简谐振动时，弹性力在半个周期内所作的功为 (　　)

A. kA^2　　B. $(1/2\,)kA^2$　　C. $(1/4)kA^2$　　D. 0

解：每经过半个周期，弹簧的弹性势能前后相等，弹性力的功为 0，故答案选 D。

8. 一弹簧振子作简谐振动，总能量为 E，若振幅增加为原来的 2 倍，振子的质量增加为原来的 4 倍，则它的总能量为　　(　　)

A. $2E$　　B. $4E$　　C. E　　D. $16E$

解：因为 $E=\dfrac{1}{2}kA^2$，所以答案选 B。

9. 已知有同方向的两简谐振动，它们的振动表达式分别为

$$x_1=5\cos(10t+0.75\pi)\text{cm}；\ x_2=6\cos(10t+0.25\pi)\text{cm}$$

则合振动的振幅为　　(　　)

A. $\sqrt{61}$cm　　B. $\sqrt{11}$cm　　C. 11cm　　D. 61cm

解　$A=\sqrt{A_1^2+A_2^2+2A_1A_2\cos(\varphi_2-\varphi_1)}$

$$=\sqrt{5^2+6^2+2\times5\times6\times\cos(0.25\pi-0.75\pi)}=\sqrt{61}$$

所以答案选 A。

10. 一振子的两个分振动方程为 $x_1=4\cos 3t$，$x_2=2\cos(3t+\pi)$，则其合振动方程应为：(　　)

A. $x=4\cos(3t+\pi)$　　B. $x=4\cos(3t-\pi)$

C. $x=2\cos(3t-\pi)$　　D. $x=2\cos 3t$

解：$x=x_1+x_2=4\cos 3t+2\cos(3t+\pi)=4\cos 3t-2\cos 3t=2\cos 3t$

所以答案选 D。

11. 为测定某音叉C的频率，可选定两个频率已知的音叉 A和B；先使频率为800Hz的音叉 A 和音叉 C 同时振动，每秒钟听到两次强音；再使频率为 797Hz 音叉 B 和 C 同时振动，每秒钟听到一次强音，则音叉 C 的频率应为：　(　　)

A. 800 H z　　B. 799 H z　　C. 798 H z　　D. 797 H z

解：拍的频率是两个分振动频率之差。由题意可知：音叉 A 和音叉 C 同时振动时，拍的频率是 2 H z，音叉 B 和音叉 C 同时振动时，拍的频率是 1H z，显然音叉 C 的频率应为 798 H z。

所以答案选 C。

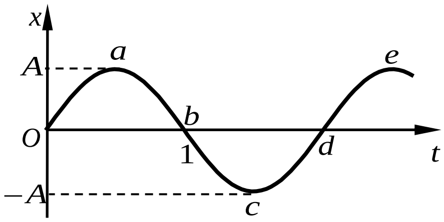
二　填空题

1. 一质量为 m 的质点在力 $F = -\pi^2 x$ 作用下沿 x 轴运动，其运动的周期为____________　。

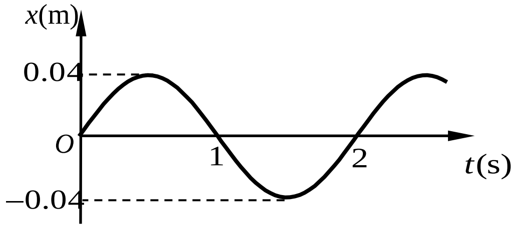
解：$T = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{\pi^2}} = 2\sqrt{m}$ 。

2. 如图，一水平弹簧简谐振子振动曲线如图所示，振子处在位移为零，速度为$-\omega A$、加速度为零和弹性力为零的状态，对应曲线上的________点，振子处在位移的绝对值为A、速度为零、加速度为 $-\omega^2 A$ 和弹性力为 $-kA$ 的状态，则对于曲线上的_______点。

解：b ； a、e 。



填空题 2 图



填空题 3 图

3. 一简谐振动的振动曲线如图所示，相应的以余弦函数表示的该振动方程为

x =____________________ m。

解：$0.04\cos(\pi t - \dfrac{\pi}{2})$ 。

4. 一物体作简谐振动，其振动方程为 $x = 0.04\cos(5\pi t/3 - \pi/2)$　m。

(1)　此简谐振动的周期 T = _______。

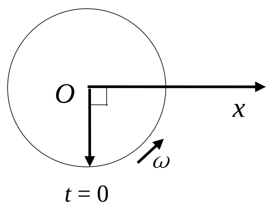
(2)　当 t = 0.6 s 时，物体的速度 v =________________。

解：（1）由 $5\pi/3 = 2\pi/T$，得到 T= 1.2s；（2）$v = -0.04\times 5\pi/3\times\sin(5\pi t/3 - \pi/2)$，当 t = 0.6 s 时，$v = -0.209\ \mathrm{m\,.\,s^{-1}}$。

5. 一质点沿 x 轴做简谐振动，振动中心点为 x 轴的原点。已知周期为 T，振幅为 A，(1)若 t =0 时刻质点过 x=0 处且向 x 轴正方向运动，则振动方程为_______；(2)若 t =0 时质点位于 x=A/2 处且向 x 轴负方向运动，则振动方程为_______。

解：（1） $x = A\cos(2\pi\dfrac{t}{T} - \pi/2)$；（2）　$A\cos(2\pi\dfrac{t}{T} + \dfrac{\pi}{3})$

6. 图中用旋转矢量法表示了一个简谐振动，旋转矢量的长度为 0.04m，旋转角速度 ω = 4π rad/s，此简谐振动以余弦函数表示的振动方程为 x =________________ 。



填空题 6 图

解：t=0 时 x=0，v>0，所以振动的初相位是$-\pi/2$。故 x

$=0.04\cos(4\pi t-\frac{\pi}{2})$。

7. 质量为 m 的物体和一个弹簧组成的弹簧振子，其固有振动周期为 T，当它作振幅为 A 的简谐振动时，此系统的振动能量 $E=$ ______________ 。

解：因为 $k=m\omega^2=m\frac{4\pi^2}{T^2}$，所以 $E=\frac{1}{2}kA^2=2\pi^2 m\frac{A^2}{T^2}$。

8. 将质量为 0.2 kg 的物体，系于劲度系数 k = 19 N/m 的竖直悬挂的弹簧的下端。假定在弹簧原长处将物体由静止释放，然后物体作简谐振动，则振动频率为__________，振幅为____________。

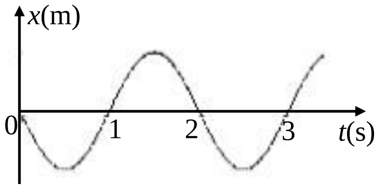
解： 1.55 Hz； $A=\sqrt{x_0^2+\frac{v_0^2}{\omega^2}}$=0.103 m

9. 已知一简谐振动曲线如图所示，由图确定：

（1） 在_______________s 时速度为零；

（2） 在_______________s 时动能最大；

（3） 在_______________s 时加速度取正的最大值。



填空题 9 图

解：（1）0.5(2n+1)， n=0,1,2,3⋯；

（2）n，n=0,1,2,3⋯；

（3）0.5(4n+1)，n=0,1,2,3⋯。

10. 一质点作简谐振动，振幅为 A，当它离开平衡位置的位移为 $x=\frac{A}{2}$ 时，其动能 E_k 和势能 E_p 的比值 $\frac{E_k}{E_p}$ =__________。

解 势能 $E_p=\frac{1}{2}kx^2=\frac{1}{8}kA^2$ ，总机械能为 $E=\frac{1}{2}kA^2$，动能 $E_k=\frac{3}{8}kA^2$ 。故 $\frac{E_k}{E_p}=3$。

11. 两个同方向同频率简谐振动的表达式分别为

$x_1=6.0\times10^{-2}\cos(\frac{2\pi}{T}t+\frac{\pi}{4})$ (SI)， $x_2=4.0\times10^{-2}\cos(\frac{2\pi}{T}t-\frac{\pi}{4})$ (SI)，则其合振动的表达式为________________(SI)。

解 本题为个同方向同频率简谐振动的合成。

(1) 解析法 合振动为 $x=x_1+x_2$，

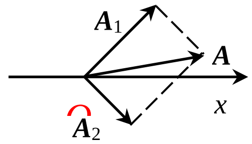
$$x=6.0\times10^{-2}\cos(\frac{2\pi}{T}t+\frac{\pi}{4})+4.0\times10^{-2}\cos(\frac{2\pi}{T}t-\frac{\pi}{4})$$

$$=\sqrt{2}\times10^{-2}[5\cos(\frac{2\pi}{T}t)-\sin(\frac{2\pi}{T}t)]=7.2\times10^{-2}\cos(\frac{2\pi}{T}t+\varphi)$$

其中　　$\varphi = 11.3°$

(2) 旋转矢量法　如图所示，用旋转矢量 $\boldsymbol{A}_1$ 和 $\boldsymbol{A}_2$ 分别表示两个简谐振动 x_1 和 x_2，合振动为 $\boldsymbol{A}_1$ 和 $\boldsymbol{A}_2$ 的合矢量 $\boldsymbol{A}$，按矢量合成的平行四边形法则

$$A = 10^{-2} \times \sqrt{6^2 + 4^2} = 7.2 \times 10^{-2}\,\text{m},$$



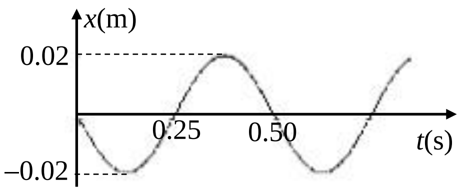
$$\tan\varphi = \frac{A_1 \sin\varphi_1 + A_2 \sin\varphi_2}{A_1 \cos\varphi_1 + A_2 \cos\varphi_2} = \frac{1}{5}, \varphi = 11.3°$$

故合振动的表达式为 $x = 7.2 \times 10^{-2} \cos(\frac{2\pi}{T} t + 11.3°)$

三　计算题

1. 已知一个简谐振动的振幅 A = 2 cm，圆频率 ω= 4π s^{-1}，以余弦函数表达运动规律时的初相位 φ= π / 2。试画出位移和时间的关系曲线（振动曲线）。

解：圆频率 ω= 4π s^{-1}，故周期 T=2π / ω= 2π/4π =0.5s，又知初相位 φ= π / 2，故位移和时间的关系为 x = 0.02cos（4πt + π / 2）m，振动曲线如下图所示。



2. 一质量为 0.02kg 的质点作简谐振动，其运动方程为 $x = 0.60 \cos(5t - \pi/2)$　m。求：（1）质点的初速度；（2）质点在正向最大位移一半处所受的力。

解：（1）

$$v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -3.0\sin(5t - \frac{\pi}{2})$$

$$v_0 = -3.0\sin(-\frac{\pi}{2}) = 3.0 \text{ m/s}$$

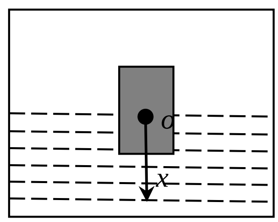
（2）

$$F = ma = -m\omega^2 x$$

$x=A/2=0.3$ m 时，$F = -0.02 \times 5^2 \times 0.3 = -0.15$ N。

3. 一立方形木块浮于静水中，其浸入部分高度为 a。今用手指沿竖直方向将其慢慢压下，使其浸入水中部分的高度为 b，然后放手让其运动。试证明：若不计水对木块的粘滞阻力，木块的运动是简谐振动并求出周期及振幅。

证明：选如图坐标系:，静止时：$mg = \rho gaS$ ----(1)



任意位置时的动力学方程为：$mg - \rho gxS = m\frac{\mathrm{d}x^2}{\mathrm{d}t^2}$ -------(2)

将(1)代入(2)得 $-\rho gS(x-a) = m\frac{\mathrm{d}x^2}{\mathrm{d}t^2}$

令 $y = x - a$，则 $\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}$，上式化为：$-\rho gSy = m\frac{\mathrm{d}y^2}{\mathrm{d}t^2}$

令 $\omega^2=\dfrac{\rho gS}{m}$ 得: $\dfrac{\mathrm{d}y^2}{\mathrm{d}t^2}+\omega^2 y=0$------(3)

上式是简谐振动的微分方程,它的通解为: $y=A\cos(\omega t+\varphi_0)$

所以木块的运动是简谐振动.

振动周期: $T=\dfrac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\dfrac{m}{\rho gS}}=2\pi\sqrt{\dfrac{a}{g}}$

$t=0$ 时, $x_0=b$, $y_0=b-a$, $v_0=0$ 振幅: $A=\sqrt{y_0^2+\dfrac{v_0^2}{\omega^2}}=b-a$

4. 在一轻弹簧下悬挂 m_0=100g 的物体时，弹簧伸长 8cm。现在这根弹簧下端悬挂 m=250g 的物体，构成弹簧振子。将物体从平衡位置向下拉动 4cm，并给以向上的 21cm/s 的初速度（令这时 t=0）. 选 x 轴向下，求振动方程

解：在平衡位置为原点建立坐标，由初始条件得出特征参量。

弹簧的劲度系数 $k=m_0 g/\Delta l$ 。

当该弹簧与物体 m 构成弹簧振子，起振后将作简谐振动，可设其振动方程为：

$$x=A\cos[\omega t+\varphi]$$

角频率为 $\omega=\sqrt{k/m}$ 代入数据后求得 $\omega=7\ \ \mathrm{rad\cdot s^{-1}}$

以平衡位置为原点建立坐标，有：

$$x_0=0.04\ \ \mathrm{m},\ \ v_0=-0.21\ \ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$$

据 $A=\sqrt{x_0{}^2+(v_0/\omega)^2}$ 得： $A=0.05\ \ \mathrm{m}$

据 $\varphi=\pm\cos^{-1}\dfrac{x_0}{A}$ 得 $\varphi=\pm0.64\ \ \mathrm{rad}$, 由于 $v_0<0$, 应取 $\varphi=0.64\ \ \mathrm{rad}$

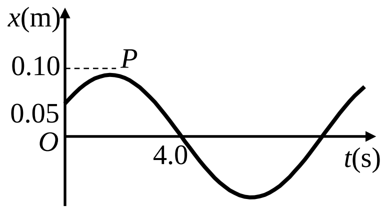
于是，所求方程为： $x=0.05cos(7t+0.64)\ \ \mathrm{m}$

5. 已知某质点作简谐运动，振动曲线如题图所示，试根据图中数据，求（1）振动表达式，（2）与 P 点状态对应的相位，（3）与 P 点状态相应的时刻。

解 （1）设振动表达式为

$x=A\cos(\omega t+\varphi)$

由题图可见，A=0.1m，当 $t=0$ 时，有 $x_0=0.1\cos\varphi=0.05\,\mathrm{m}$，这样得到 $\varphi=\pm\dfrac{\pi}{3}$。由振



计算题 5 图

动曲线可以看到，在 t = 0 时刻曲线的斜率大于零，故 t =0 时刻的速度大于零，由振动表达式可得

$$v_0 = -0.1\omega \sin \varphi > 0$$

即 $\sin \varphi < 0$，由此得到初相位 $\varphi = -\frac{\pi}{3}$。

类似地，从振动曲线可以看到，当 t=4s 时有

$$x_4 = 0.1\cos(4\omega - \frac{\pi}{3}) = 0$$

$$v_4 = -0.1\omega \sin(4\omega - \frac{\pi}{3}) < 0$$

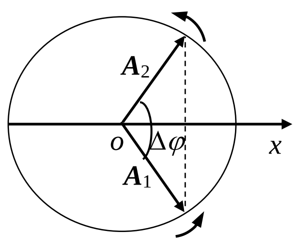
联立以上两式解得 $4\omega - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2}$，则 $\omega = \frac{5}{24}\pi \ \ \mathrm{rad \cdot s^{-1}}$，因此得到振动表达式

$$x = 0.10\cos(\frac{5}{24}\pi t - \frac{\pi}{3}) \ \ \mathrm{m}$$

（2）在 P 点，$x = 0.10\cos(\frac{5}{24}\pi t - \frac{\pi}{3}) = 0.1$，因此相位 $(\frac{5}{24}\pi t - \frac{\pi}{3}) = 0$。

（3）由 $(\frac{5}{24}\pi t - \frac{\pi}{3}) = 0$，解出与 P 点状态相应的时刻 t = 1.6 s。

6. 两个质点在同方向作同频率、同振幅的简谐振动。在振动过程中，每当它们经过振幅一半的地方时相遇，而运动方向相反。求它们的相位差，并画出相遇处的旋转矢量图。



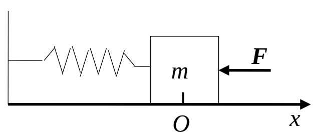
解：因为 $\frac{A}{2} = A\cos(\omega t + \varphi_1) = A\cos(\omega t + \varphi_2)$，所以

$$\omega t + \varphi_1 = \pm\frac{\pi}{3}, \omega t + \varphi_2 = \pm\frac{\pi}{3},$$

故 $\Delta\varphi = 0$ 或 $\frac{2\pi}{3}$，取 $\Delta\varphi = \frac{2\pi}{3}$。

旋转矢量图如左。

7. 如图，有一水平弹簧振子，弹簧的劲度系数 k = 24N/m，重物的质量 m = 6kg，重物静止在平衡位置上，设以一水平恒力 F = 10 N 向左作用于物体（不计摩擦），使之由平衡位置向左运动了 0.05m，此时撤去力 F，当重物运动到左方最远位置时开始计时，求物体的运动方程。



计算题 7 图

解：设物体振动方程为：$x = A\cos(\omega t + \varphi)$，恒外力所做的功即为弹簧振子的能量 E：

$$E = F \times 0.05 = 0.5 \text{ J}$$

当物体运动到左方最远位置时，弹簧的最大弹性势能即为弹簧振子的能量 E：

$$kA^2 / 2 = 0.5$$

由此球出振幅 A = 0.204 m 。

根据 $\omega^2 = k / m = 24/6 = 4 \ \ (\mathrm{rad/s})^2$，求出 $\omega = 2\ \mathrm{rad/s}$ 。

按题中所述时刻计时，初相位为$\varphi = \pi$。所以物体运动方程为

$$x = 0.204\cos(2t+\pi) \quad \text{m}$$

8. 一水平放置的弹簧系一小球在光滑的水平面作简谐振动。已知球经平衡位置向右运动时，$v = 100\ \text{cm}\cdot\text{s}^{-1}$，周期 $T = 1.0\text{s}$，求再经过 1/3 秒时间，小球的动能是原来的多少倍？弹簧的质量不计。

解：设小球的速度方程为：

$$v = v_m\cos(2\pi t/T+\varphi)$$

以经过平衡位置的时刻为 $t = 0$，根据题意 $t = 0$ 时 $v = v_0 = 100\ \text{cm s}^{-1}$，且 $v>0$。所以

$$v_m = v_0，\ \varphi = 0$$

此时小球的动能 $E_{k0} = m v_0^2 / 2$。

经过 1 / 3 秒后，速度为 $v = v_0\cos[2\pi/(3T)] = -v_0/2$。其动能

$$E_k = m v^2 / 2 = m v_0^2 / 8$$

所以 $E_k / E_0 = 1/4$，即动能是原来的 1/ 4 倍。

9. 一质点作简谐振动，其振动方程为：$x = 6.0\times10^{-2}\cos(\pi t/3-\pi/4)$ m。

（1）当 x 值为多大时，系统的势能为总能量的一半？

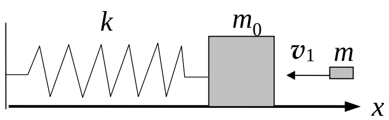
（2）质点从平衡位置移动到此位置所需最短时间为多少？

解：（1）势能 $E_p= kx^2/2$，总能量 $E = kA^2/2$。根据题意，$kx^2/2 = kA^2/4$，得到 $x = \pm A/\sqrt{2} = \pm 4.24\times10^{-2}\ \text{m}$，此时系统的势能为总能量的一半。

(2) 简谐振动的周期 $T = 2\pi/\omega = 6\ \text{s}$，根据简谐振动的旋转矢量图，易知从平衡位置运动到 $x = \pm A/\sqrt{2}$ 的最短时间 t 为 $T/8$，所以

$$t = 6/8 = 0.75\ \text{s}$$

10. 如图所示，劲度系数为 k，质量为 m_0 的弹簧振子静止地放置在光滑的水平面上，一质量为 m 的子弹以水平速度 v_1 射入 m_0 中，与之一起运动。选 m、m_0 开始共同运动的时刻为 $t = 0$，求振动的固有角频率、振幅和初相位。



计算题 10 图

解：碰后振子的质量为 $m+m_0$，故角频率 $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m_0+m}}$。

设碰撞后系统的速度为 v_0，碰撞过程中动量守恒，故得到 $v_0 = \dfrac{mv_1}{m_0+m}$。系统的初始动能为 $\dfrac{1}{2}(m_0+m)v_0^2$，在最大位移处全部转换为弹性势能 $\dfrac{1}{2}kA^2$，即振幅

$$A = \sqrt{\frac{m_0+m}{k}}v_0 = \sqrt{\frac{m^2}{k(m_0+m)}}\,v_1 = \frac{mv_1}{\sqrt{k(m_0+m)}}$$

令振动方程为 $x = A\cos(\omega t + \varphi)$，则速度 $v = \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -\omega A\sin(\omega\ t + \varphi)$。

当 t=0 时，$A\cos\varphi = x = 0, v = -\omega_0 A\sin\varphi = v_0 < 0$，可解出初相位 $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$。

11. 一个劲度系数为 k 的弹簧所系物体质量为 m_0，物体在光滑的水平面上作振幅为 A 的简谐振动时，一质量为 m 的粘土从高度 h 处自由下落，正好在（a）物体通过平衡位置时，（b）物体在最大位移处时，落在物体 m_0 上。分别求：（1）振动的周期有何变化？（2）振幅有何变化？

解：（1）物体的原有周期为 $T_0 = 2\pi\sqrt{m_0/k}$，粘土附上后，振动周期变为 $T = 2\pi\sqrt{(m_0+m)/k}$，显然周期增大。不管粘土是在何时落在物体上的，这一结论都正确。

（2） 设物体通过平衡位置时落下粘土，此时物体的速度从 v_0 变为 v，根据动量守恒定律，得到

$$v = \frac{m_0}{m_0 + m} v_0$$

又设粘土附上前后物体的振幅由 A_0 变为 A，则有

$$\frac{1}{2} m_0 v_0^2 = \frac{1}{2} k A_0^2$$

$$\frac{1}{2}(m_0 + m) v^2 = \frac{1}{2} k A^2$$

由以上三式解出 $A = \sqrt{\dfrac{m_0}{m_0 + m}} A_0$，即振幅减小。

物体在最大位移处时落下粘土，$\dfrac{1}{2}kA_0^2 = \dfrac{1}{2}kA^2$，此时振幅不变。

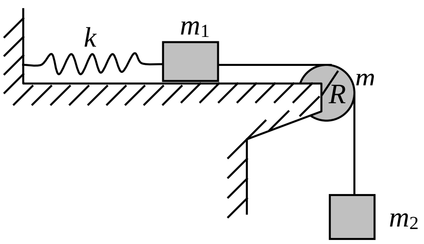
12. 如题图所示，一劲度系数为 k 的轻弹簧，一端固定在墙上，另一端连结一质量为 m_1 的物体，放在光滑的水平面上。将一质量为 m_2 的物体跨过一质量为 m，半径为 R 的定滑轮与 m_1 相连，求其系统的振动圆频率。

解　方法一：以弹簧的固有长度的端点为坐标原点，向右为正建立坐标 S。对 m_1 和 m_2 应用牛顿第二定律、对 m 应用刚体定轴转动定律，得到

$$T_1 - kS = m_1 a = m_1 \frac{\mathrm{d}^2 S}{\mathrm{d}t^2}$$

$$m_2 g - T_2 = m_2 a = m_2 \frac{\mathrm{d}^2 S}{\mathrm{d}t^2}$$

$$(T_2 - T_1)R = J\alpha = \frac{1}{2} m R^2 \alpha$$



计算题12图

加速度和角加速度之间具有关系

$$\alpha = \frac{a}{R} = \frac{1}{R}\frac{\mathrm{d}^2 S}{\mathrm{d}t^2}$$

解上面的方程组得

$$(m_1 + m_2 + \frac{1}{2}m)\frac{\mathrm{d}^2 S}{\mathrm{d}t^2} + k(S - \frac{m_2 g}{k}) = 0$$

令 $x = S - \frac{m_2 g}{k}$，上式简化为标准的振动方程

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + \frac{k}{m_1 + m_2 + m/2}x = 0$$

系统的振动圆频率

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m_1 + m_2 + m/2}}$$

方法二：在该系统的振动过程中，只有重力和弹簧的弹性力做功，因此该系统的机械能守恒。

$$\frac{1}{2}kS^2 + \frac{1}{2}m_1 v^2 + \frac{1}{2}J\omega^2 + \frac{1}{2}m_2 v^2 - m_2 gS = 0$$

将$\omega = \frac{v}{R}$和$J = \frac{1}{2}mR^2$代入，得到

$$\frac{1}{2}kS^2 + \frac{1}{2}(m_1 + m_2 + \frac{m}{2})(\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t})^2 - m_2 gS = 0$$

将上式对时间求一阶导数，得到

$$(m_1 + m_2 + \frac{1}{2}m)\frac{\mathrm{d}^2 S}{\mathrm{d}t^2} + k(S - \frac{m_2 g}{k}) = 0$$

上式和解法一的结果一样。同样，圆频率为

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m_1 + m_2 + m/2}}$$

13. 一物体同时参与两个同方向的简谐振动：$x_1 = 0.04\cos(2\pi t + \pi/2)$ m；$x_2 = 0.03\cos(2\pi t + \pi)$ m 。求此物体的振动方程。

解：这是两个同方向同频率的简谐振动的合成，合成后的振动仍为同频率的简谐振动。设合成运动的振动方程为：

$$x = A\cos(\omega t + \varphi)$$

则

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1)$$

式中$\varphi_2 - \varphi_1 = \pi - \pi/2 = \pi/2$。代入上式得

$$A=\sqrt{4^2+3^2}=5\ \text{cm}$$

又

$$\tan\varphi=\frac{A_1\sin\varphi_1+A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1+A_2\cos\varphi_2}=\frac{4}{3}$$

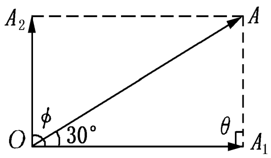
根据两个分振动的初相位，可知合振动的初相位是

$$\varphi\approx180°-53.13°\approx2.21\ \text{rad}$$

故此物体的振动方程

$$x=0.05\cos(2\pi t+2.21)\ \text{m}$$

14. 有两个同方向、同频率的简谐振动，其合振动的振幅为2m，相位与第一振动的相位差为 $\frac{\pi}{6}$，已知第一振动的振幅为1.73m，求第二个振动的振幅以及第一、第二两振动的相位差。



解：由题意可做出旋转矢量图.

由图知

$$\begin{aligned}A_2^2&=A_1^2+A^2-2A_1A\cos30°\\&=(1.73)^2+(2)^2-2\times1.73\times2\times\sqrt{3}/2\\&=1\end{aligned}$$

所以

$$A_2=1\text{m}$$

设角 AA_1O为θ，则

$$A^2=A_1^2+A_2^2-2A_1A_2\cos\theta$$

即
$$\begin{aligned}\cos\theta&=\frac{A_1^2+A_2^2-A^2}{2A_1A_2}=\frac{(1.73)^2+1^2-2^2}{2\times1.73\times1}\\&=0\end{aligned}$$

即 $\theta=\frac{\pi}{2}$，这说明，A_1 与 A_2 间夹角为 $\frac{\pi}{2}$，即二振动的相位差为 $\frac{\pi}{2}$。

15. 一质量为 2.5kg 的物体与一劲度系数为 $1250\text{N}\cdot\text{m}^{-1}$ 的弹簧相连作阻尼振动，阻力系数 η 为 $50.0\text{kg}\cdot\text{s}^{-1}$，求阻尼振动的角频率。

解：准周期振动的角频率为

$$\omega=\sqrt{\omega_0^2-\gamma^2}=\sqrt{k/m-(\eta/2m)^2}=\sqrt{1250/2.5-(50/(2\times2.5))^2}=20\ \ \text{rad/s}$$

16. 一质量为 1.0kg 的物体与一劲度系数为 $900\text{N}\cdot\text{m}^{-1}$ 的弹簧相连作阻尼振动，阻尼

因子γ 为 10.0·s^{-1}。为了使振动持续，现给振动系统加上一个周期性的外力 $F = 100\cos 30t$ (N)。求：（1）振动物体达到稳定状态时的振动角频率；（2）若外力的角频率可以改变，则当其值为多少时系统出现共振现象？（3）共振的振幅多大？

解：（1）振动物体达到稳定状态时的振动角频率就是驱动力的频率$\omega = 30$ rad/s。

（2）动频率ω 等于

$$\omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2} = \sqrt{k/m - 2\gamma^2} = \sqrt{900/1.0 - 2\times 10^2} = 26.5 \ \text{rad/s}。$$

（3）共振的振幅 $A_r = \dfrac{F_0/m}{2\gamma\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}} = \dfrac{100/1.0}{2\times 10\sqrt{900/1.0 - 10^2}} = 0.177\,\text{m}$