1

Rozdział

rozdzial0X

1.1 Section heading

rodzial00-podrozdzial01

1.2 Section heading

rodzial0X-podrozdzial02

1.3 Section heading

rodzial0X-podrozdzial03

2

Liczby rzeczywiste

W rozdziale tym przedstawimy definicję, konstrukcję oraz podstawowe własności liczb rzeczywistych.

2.1 Liczby naturalne, całkowite i wymierne

Zbiór liczb naturalnych oznaczamy jako $\mathbb{N}$ i jego definicja jest jak następuje

$$\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \ldots\}.$$

Liczby całkowite oznaczamy jako $\mathbb{Z}$ i definiujemy jako sume liczb naturalnych, liczb przeciwnych do naturalnych oraz zera

$$\mathbb{Z} := \mathbb{N} \cup \{a | -a \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}.$$

Liczby wymierne oznaczamy jako $\mathbb{Q}$ i definiujemy następująco

$$p \in \mathbb{Q} \iff p = \frac{n}{m} \quad \text{gdzie} \quad n, m \in \mathbb{Z}, m \neq 0.$$

2.1.1 Własności liczb wymiernych

Poniżej wypiszemy podstawowe własności liczb wymiernych

1. prawo przemienności: $\forall p, q \in \mathbb{Q}$

$$p + q = q + p, \quad p \cdot q = q \cdot p$$

2. prawo łączności: $\forall p, q, r \in \mathbb{Q}$

$$(p + q) + r = p + (q + r)$$
$$(p \cdot q) \cdot r = q \cdot (q \cdot r)$$

3. prawo rozdzielności dodawania względem mnożenia: $\forall p, q, r \in \mathbb{Q}$

$$(p+q) \cdot r = p \cdot r + q \cdot r$$

4. relacja porządku $\forall p, q \in \mathbb{Q}$

$$p = q \vee p < q \vee p > q$$

5. węwnętrzność działania dodawania i mnożenia dla liczb dodatnich Niech $p > 0 \wedge q > 0$, wówczas

$$\begin{aligned} p + q &> 0 \\ p \cdot q &> 0 \end{aligned}$$

6. warunek równości dwóch liczb wymiernych Niech $a, b \in \mathbb{Q}$ oraz niech $a = \frac{p}{q}$ oraz $b = \frac{p'}{q'}$, wówczas

$$a = b \iff p \cdot q' = p' \cdot q$$

   Ponadto, zakładając $q, q' > 0$ otrzymujemy

$$\begin{aligned} a < b &\iff p \cdot q' < p' \cdot q \\ a > b &\iff p \cdot q' > p' \cdot q \end{aligned}$$

2.1.2 Niewymierność $\sqrt{2}$

Pokażemy, że pierwiastek z dwóch nie jest liczbą wymierną, tj. $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Dowód. Dowód będziemy prowadzić nie wprost. Przypuśćmy nie wprost, że $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$, wówczas muszą istnieć $p, q \in \mathbb{N}$, że

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q},$$

a ułamek ten jest nieskracalny.

Równoważnie możemy napisać

$$\begin{aligned} q\sqrt{2} &= p \quad \text{podnosząc do kwadratu stronami} \\ 2q^2 &= p^2 \end{aligned}$$

Zauważmy, że wynika stąd, że p^2 jest parzyste, to oznacza, że także p jest parzyste, czyli $\exists n \in \mathbb{N}$, że $p = 2n$. Wstawiając, otrzymujemy

$$\begin{aligned} 2q^2 &= 4n^2 \\ q^2 &= 2n^2 \end{aligned}$$

Stosując powyższe rozumowanie otrzymujemy, że $\exists m \in \mathbb{N}$, że $q = 2m$. Widzimy więc sprzeczność z założeniem, że ułamek $\frac{p}{q}$ był nieskracalny (jako, że zarówno licznik jak i mianownik są podzielne przez 2). Sprzeczność ta dowodzi tezy. □

2.1.3 Niewymierność $\log_{10} 5$

Pokażemy, że liczba $\log_{10} 5$ jest niewymierna. Podobnie jak powyżej, dowód będzie prowadzony nie wprost.

Dowód. Przypuśćmy, że $\log_{10} 5 = \frac{p}{q}$, gdzie $p, q \in \mathbb{N}$. Jest to równoważne następującemu wyrażeniu

$$\begin{aligned} 5 &= 10^{\frac{p}{q}} \\ 5^q &= 10^p. \end{aligned}$$

Zauważmy, że powyższa równość jest niemożliwa pośród liczb naturalnych (ze względu na podzielność przez 2).

□

2.2 Przekroje

Niech A, B będą zbiorami liczb. Niech a, b, p, q będą liczbami, elementami zbiorów.

Równość zbiorów A i B definiujemy następująco

$$A = B \iff (a \in A \implies a \in B) \wedge (a \in B \implies a \in A),$$

mówimy, że dwa zbiory nie są równe, gdy

$$A \neq B \iff \exists a \in A | a \notin B \vee \exists a \in B | a \notin A$$

Niech A będzie zbiorem liczb wymiernych mniejszych niż $\sqrt{2}$, zauważmy, że wówczas

$$\begin{aligned} A &= \{p \in \mathbb{Q} | p < \sqrt{2}\} \text{ nie ma liczby największej} \\ B &= \{p \in \mathbb{Q} | p > \sqrt{2}\} \text{ nie ma liczby najmniejszej.} \end{aligned}$$

Dowód. Pokażemy najpierw, że nie może w A istnieć element największy. Niech $p \in A$, pokażemy, że istnieje $k > 0$, że $(p + k) \in A$.

Zauważmy, że biorąc $k < \min\left(1, \frac{2-p^2}{2p+1}\right)$ otrzymujemy

$$\begin{aligned} (p + k)^2 &< 2 \\ p^2 + 2pk + k^2 &< 2 \\ p^2 + k(2p + k) &< p^2 + \frac{2 - p^2}{2p + 1}(2p + 1) = p^2. \end{aligned}$$

Pokażemy teraz, że dla $q \in B$ znajdziemy takie $h > 0$, że $q - h \in B$. Weźmy $h = \frac{q^2-2}{2q}$. Łatwo możemy zauważyć, że $h \in \mathbb{Q}$ (jako iloraz dwóch liczb wymiernych).

Policzmy wartość

$$(q-h)^2 = q^2 - 2\frac{q^2-2}{2q}q + h^2 = 2 + h^2 > 2.$$

Tak więc dobierając h w zadany sposób możemy zawsze wskazać liczbę mniejszą $q-h$, która także należy do B. $\square$

2.2.1 Gęstość liczb wymiernych

Pomiędzy dwiema dowolnymi liczbami wymiernymi zawsze znajdziemy liczbę wymierną.

Dowód. Niech $p, q \in \mathbb{Q}$ wówczas

$$p < \frac{p+q}{2} < q$$

oraz

$$\frac{p+q}{2} \in \mathbb{Q}.$$

$\square$

2.2.2 Metoda przekrojów Dedekinda

Definicja 1. *Zbiór α liczb wymiernych nazywamy przekrojem, jeżeli:*

a) α nie zawiera wszystkich liczb wymiernych oraz α zawiera co najmniej 1 liczbę wymierną,

b) $p \in \alpha, q < p \implies q \in \alpha$,

c) α nie ma liczby największej.

Przekrojem jest na przykład zbiór A z poprzedniego przykładu.

Twierdzenie 1. *Jeżeli $p \in \alpha \wedge q \notin \alpha$, to $p < q$ dla $q \in \shortparallel$.*

Dowód. Przypuśćmy nie wprost, że $q < p$, na mocy warunku b) z definicjji przekroju wnioskujemy, że $q \in \alpha$, co jest sprzeczne z założeniem. $\square$

Twierdzenie 2. *Niech $r \in \mathbb{Q}$ oraz $\alpha = \{p \in \mathbb{Q} | \, p < r\}$ - wtedy α jest przekrojem.*

Dowód. Warunki a), b) są spełnione w sposób oczywisty.

Warunek c) - niech $p \in \alpha$ czyli $p < r$. Wtedy $p < \frac{p+r}{2} < r$ oraz $\frac{p+r}{2} \in \alpha$. $\square$

Definicja 2. *Przekrój zadany jak w powyższym twierdzenimu nazywamy przekrojem wymiernym.*

Zauważmy, że zbiór $\mathbb{Q}/\alpha$ ma liczbę najmniejszą r.

Definicja 3. *Niech α, β będą przekrojami.*

$$\begin{aligned}
\alpha = \beta &\iff p \in \alpha \iff p \in \beta \\
\alpha < \beta &\iff \exists p \in B \,:\, p \notin \alpha \\
\alpha > \beta &\iff \exists q \in \alpha \,:\, q \notin B \\
\alpha \leq \beta &\iff \alpha < \beta \vee \alpha = \beta \\
0^* &= \{p \in \mathbb{Q} \,:\, p < 0\}
\end{aligned}$$

Mówimy, że

α jest dodatni, jeżeli $\alpha > 0^*$,

α jest ujemny, jeżeli $\alpha < 0^*$,

α jest niejemny, jeżeli $\alpha \geq 0^*$,

α jest niedodatni, jeżeli $\alpha \leq 0^*$.

Twierdzenie 3. *Niech α, β będą przekrojami. Wtedy*

$$\alpha = \beta \quad \textit{albo} \quad \alpha < \beta \quad \textit{albo} \quad \alpha > \beta.$$

Dowód. Rozważmy dwa przypadki. Jeżeli każdy element α jest elementem β i na odwrót to w oczywisty sposób przekroje te muszą być równe.

W przeciwnym przypadku istnieje element, który nie należy do jednego z przekrojów, pokażemy, że nie może wówcas równocześnie zachodzić, że $\alpha > \beta \wedge \beta > \alpha$.

Dowód prowadzimy nie wprost

Niech α będzie zbiorem liczb mniejszych od p, a β mniejszych od q. Wówczas
(1) $\alpha > \beta \Rightarrow \exists p' \in \alpha \,:\, p' \notin \beta$
(2) $\beta > \alpha \Rightarrow \exists q' \in \beta \,:\, q' \notin \alpha$
(1) $\implies p' \in \beta \Rightarrow p' < q \wedge q' \notin \beta \implies q' > q \implies p' < q'$
(2) $\implies q' \in \alpha \implies q' < p \wedge p' \notin \alpha \implies p' > p \implies q' < p'$.

Stąd otrzymujemy, że $p' < q' < p' \implies p' < p'$ co jest sprzeczne. □

2.3 Section heading

rodzial0X-podrozdzial03

3

Funkcje

W tym rozdziale przedstawione zostaną funkcje oraz pewne ich własności.

3.1 Odwzorowania i ich własności

Definicja 4. *Niech A, B będą danymi zbiorami. Przyporządkowanie każdemu elementowi x ze zbioru A dokładnie jednego elementu y ze zbioru B nazywamy odwzorowaniem, bądź funkcją, ze zbioru A w zbiór B. Zależność tą oznaczamy w następujący sposób:*

$$f(x) = y$$

Definicja 5. *Elementy ze zbioru A, z definicji 4 nazywamy argumentami funkcji f.*

Definicja 6. *Zbiór argumentów funkcji f nazywamy dziedziną funkcji f.*

Definicja 7. *Zbiór B, z definicji 4 nazywamy przeciwdziedziną funkcji f.*

Przydatne będzie następujące oznaczenie:

Definicja 8. *Niech f będzie funkcją określoną jak w definicji 4. Ponadto, niech $C \subset A$, wtedy:*

$$f(C) = \{f(c) \in B : c \in C\}$$

Zbiór ten nazywamy, obrazem zbioru C.

Definicja 9. *Niech f będzie funkcją określoną jak w definicji 4. Wtedy zbiór*

$$Y = f(A)$$

nazywamy zbiorem wartości funkcji.

Uwaga 1. *Na ogół terminy: zbiór wartości funkcji oraz przeciwdziedzina uznaje się za równoważne.*

Definicja 10. *Niech f będzie funkcją określoną jak w definicji 4. Ponadto, niech $D \subset B$, wtedy:*

$$f^{-1}(D) = \{a \in A : f(a) \in D\}$$

Zbiór ten nazywamy, przeciwobrazem zbioru D.

Definicja 11. *Wykresem odwzorowania $f : X \to Y$ nazywamy zbiór $\Gamma_f = \{(x, y) : x \in X \wedge y = f(x)\}$*

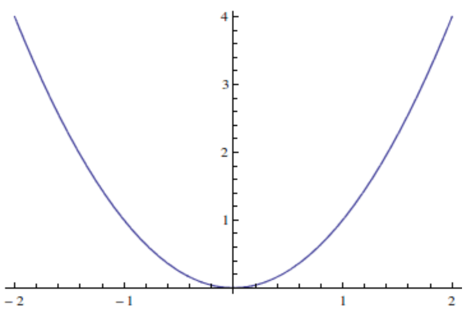
Teraz zobaczmy kilka przykładów zastosowania powyższych definicji w praktyce. Będziemy używali oznaczeń takich jak w definicji 4.

Przykład 1. *Niech*

$$y = f(x) = x^2$$

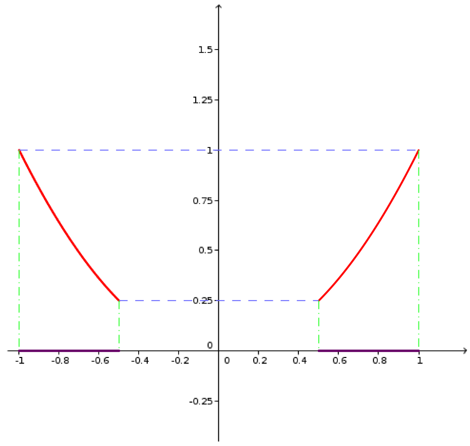
$$A =< -1; 1 >$$

$$B =< 0; 1 >$$



Rysunek 3.1: Wykres funkcji $y = x^2$

Jak wygląda przeciwobraz zbioru $< \frac{1}{4}, 1 >$?

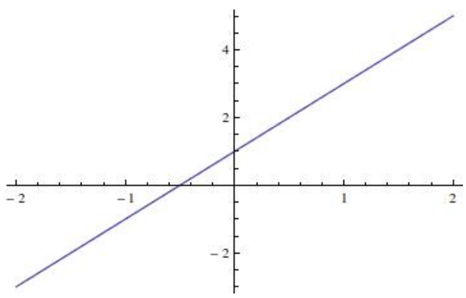


Rysunek 3.2: Odczytywanie przeciwobrazu zbioru $< \frac{1}{4}, 1 >$ względem odwzorowania $y = x^2$

Stąd widać, że $f^{-1}(< \frac{1}{4}, 1 >) =< -1, -\frac{1}{2} > \cup < \frac{1}{2}, 1 >$.
Podobnie, łatwo odczytujemy, że $f^{-1}(< 0, 1 >) =< -1, 1 >$.

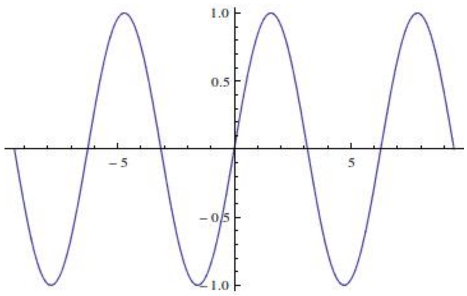
Teraz sprwdźmy jak to wygląda dla funkcji liniowych.

Przykład 2. $y = 2x + 1$,
Tutaj z kolei mamy $A = \mathbb{R}$, *oraz* $B = \mathbb{R}$.



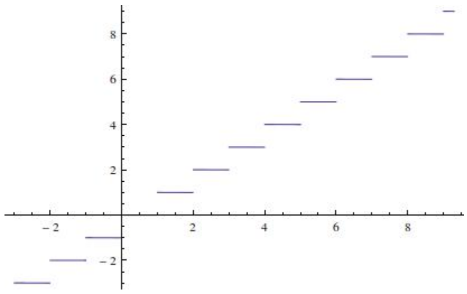
Rysunek 3.3: Wykres funkcji $y = 2x + 1$

Przykład 3. $y = \sin(x)$,
Tutaj z kolei mamy $A = \mathbb{R}$, *oraz* $B =< -1, 1 >$.



Rysunek 3.4: Wykres funkcji $y = \sin(x)$

Przykład 4. *$y = [x]$ - funkcja ta każdej liczbie x przyporządkowuje największą liczbę całkowitą, nie większą od x.*
Tutaj z kolei mamy $A = \mathbb{R}$, oraz $B = \mathbb{Z}$.



Rysunek 3.5: Wykres funkcji $y = [x]$

Definicja 12. *Złożeniem odwzorowań $f : X \to Y$ i $g : Y \to Z$ nazywamy odwzorowanie $h = g \circ f : X \to Z$ takie, że dla każdego $x \in X$, zachodzi $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.*

Definicja 13. *Niech $f : X \to Y \wedge A \subset X$. Odwzorowanie $g : A \to Y$ nazywamy zawężeniem (restrykcją) funkcji f do zbioru A, jeśli dla każdego $x \in A$ zachodzi równość $g(x) = f(x)$.*

Definicja 14. *Niech $f : X \to Y$. Odwzorowanie f nazywamy injekcją, jeżeli*

$$\forall x_1, x_2 \in X : x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2).$$

Oznaczenie 1. *Zamiast pojęcia injekcja, często można spotkać się z nazwami takim jak: odwzorowanie jednokrotne lub różnowartościowe. Wszystkie te pojęcia są równoważne.*

Definicja 15. *Niech $f : X \to Y$. Odwzorowanie f nazywamy surjekcją (lub ódwzorowaniem na"), jeżeli $f(X) = Y$.*

Definicja 16. *Jeśli odwzorwanie f jest surjekcją oraz injekcją, to f nazywamy bijekcją albo odwzorowaniem wzajemnie jednoznacznym.*

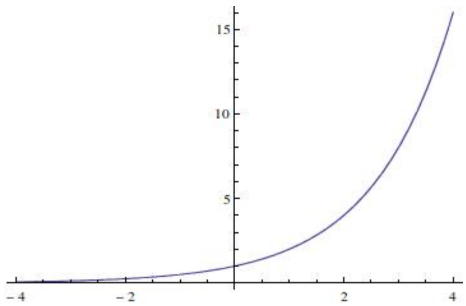
Przykład 5. *Niech $A = A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$. Zdefiniujmy następujące odwzorowania:*

$$P_j : A \to A_j : P_j(a_1, a_2, \ldots, a_n) = a_j \text{ , dla } j = 1, \ldots, n.$$

Funkcję taką nazywamy projekcją zbioru A na zbiór A_j.

P_j jest surjekcją na A_j, jeśli $A_j \neq \emptyset$.

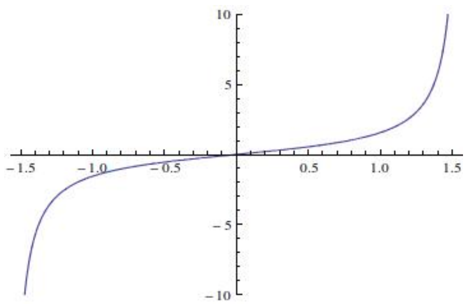
Przykład 6. *Weźmy $f(x) = 2^x$, $x \in \mathbb{R}$.*



Rysunek 3.6: Wykres funkcji $y = 2^x$

To odwzorowanie jest injekcją.

Przykład 7. *Weźmy $f(x) = \tan(x)$, $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.*



Rysunek 3.7: Wykres funkcji $y = \tan(x)$

Mamy tutaj $f((-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})) = \mathbb{R}$, zatem odwzorowanie to jest surjekcją. Łatwo zauważyć, że przy tak dobranej dziedzinie, odwzorowanie to jest również injekcją. Stąd f jest surjekcją.

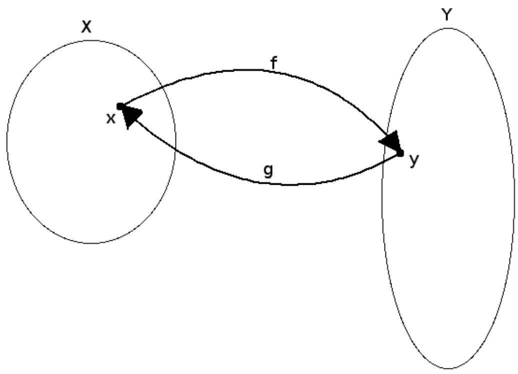
Oznaczenie 2. *Niech $f : X \to Y$. Przez I_X oznaczamy odwzorowanie identycznościowe w zbiorze X, tzn., że $I_X : X \to X$ oraz dla każdego $x \in X$ zachodzi : $I_X(x) = x$. Analogicznie definiujemy identyczność w Y*

Definicja 17. *Jeśli odwzorowania $f : X \to Y$, $g : Y \to X$, spełniają warunki:*

- $g \circ f = I_X$, *tzn.* $g(f(x)) = x$, *dla każdego* $x \in X$,
- $f \circ g = I_Y$, *tzn.* $f(g(y)) = y$, *dla każdego* $y \in Y$,

to odwzorowanie g nazywamy odwrotnym do f i na odwrót.

Można to zobrazować za pomocą następującego rysunku:



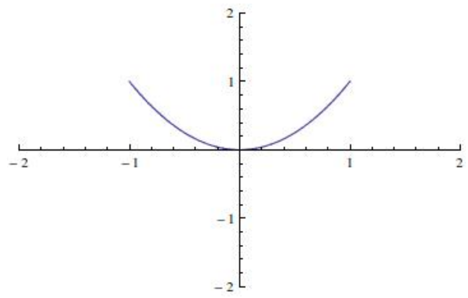
Rysunek 3.8: Zależność pomiędzy funkcją, a jej odwrotnością.

Oznaczenie 3. *Odwzorowanie odwrotne do f oznacza się jako f^{-1}.*

Oznaczenie to mocno kojarzy się z przeciwobrazem zbioru poprzez funkcję. Te pojęcia są ze sobą związane. Żeby zapoznać się z pojęciem odwzorowanie odwrotnego oraz dostrzec pewne różnice między nimi, przeanalizujmy przykłady.

Przykład 8. $f : X \to X$, *gdzie* $f = I_X$,
Tutaj $f^{-1} = I_X$.

Przykład 9. $f : [-1; 1] \to [0; 1]$, *gdzie* $f = x^2$,
Tutaj z kolei f^{-1} nie istnieje!. Wynika to z faktu, że f nie jest odwzorowaniem różnowartościowym.



Rysunek 3.9: Wykres funkcji $y = \sin(x)$

Rzeczywiście, jedynym kandydatem na funkcję odwrotną wydaje się funkcja $g(y) = \sqrt{y}$*, bo mamy:*

$$f \circ g(y) = y,$$

jednak z drugiej strony, mamy:

$$g \circ f(x) \neq x \ \textit{dla} \ x < 0,$$

zatem pierwszy warunek z definicji 17, nie jest spełniony.

3.2 Section heading

rodzial0X-podrozdzial02

3.3 Section heading

rodzial0X-podrozdzial03

4

Ciągi liczbowe

4.1 Ciągi liczbowe

W tym rozdziale, zajmiemy się szczególną klasą funkcji, jaką stanowią ciągi liczbowe. Wprowadzimy pojęcie granicy ciągu oraz przedstawimy najważniejsze twierdzenia dotyczące tego tematu. Zaprezentujemy również przykłady, ilustrujące liczenie granic zarówno w oparciu o definicję, jak i poznane twierdzenia.
Na początku, zdefiniujmy pojęcie ciągu liczbowego.

Definicja 18. *Funkcję* $a : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ *nazywamy nieskończonym ciągiem liczbowym. Wartości tej funkcji oznaczamy przez* $a_j = a(j)$, $j \in \mathbb{N}$, *zaś cały ciąg w skrócie zapisywać będziemy jako* $\{a_j\}_{j=1}^{\infty}$ *lub* $\{a_j\}$ *.*

Przykład 10. *Ciągami są:*

1. $\{\frac{1}{n}\}$, *o początkowych wyrazach* $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$
2. $\{n\}$, *o początkowych wyrazach* $1, 2, 3, 4, \ldots$
3. $\{(-1)^n\}$, *o początkowych wyrazach* $-1, 1, -1, 1, \ldots$

Ciągi możemy definiować też w sposób rekurencyjny, to znaczy nie poprzez podanie jawnego wzoru na $n-$ty wyraz, lecz zależności pozwalającej na obliczenie wartości danego elementu w ciągu na podstawie informacji o poprzedzających go wyrazach.

Przykład 11. *Niech* $a_1 = \sqrt{2}$. *Określamy* $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$, $n \geq 1$.
Na podstawie powyższej zależności, możemy obliczyć:
$a_2 = \sqrt{2 + \sqrt{2}}$
$a_3 = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}$
itd.

Niezwykle ważnym pojęciem, opisującym zachowanie nieskończonych ciągów liczbowych, jest pojęcie granicy ciągu. Intuicyjnie, jest to taka wartość, w której dowolnym otoczeniu znajdują się prawie wszystkie (to znaczy wszystkie, poza skończoną ilością) wyrazy ciągu. Formalna definicja pochodzi od francuskiego matematyka Augustina Cauchy'ego i brzmi ona następująco:

Definicja 19. *Mówimy, że ciąg $\{a_n\}$ ma granicę g (jest zbieżny do g) i zapisujemy $\lim_{n\to\infty} a_n = g$, jeżeli*

$$\forall_{\varepsilon>0}\exists_{\delta>0}\forall_{n>\delta}\ |a_n - g| < \varepsilon \tag{4.1}$$

Ciąg, który nie posiada granicy skończonej, nazywamy rozbieżnym.

Przykład 12. *Ciąg $\{a_n\}$, dany wzorem $a_n = \frac{1}{n}$, ma granicę równą 0. Wstawiając ciąg $\{\frac{1}{n}\}$ i $g = 0$ do warunku (4.1), dostajemy:*

$$\forall_{\varepsilon>0}\exists_{\delta>0}\forall_{n>\delta}\ \frac{1}{n} < \varepsilon$$

Jak łatwo zauważyć, powyższe zdanie jest prawdziwe - wystarczy bowiem, przy ustalonym ε, przyjąć $\delta = \frac{1}{\varepsilon}$ i ostatnia nierówność będzie spełniona.

Przykład 13. *Pokażemy, że $\lim_{n\to\infty}(1 + \frac{(-1)^n}{n}) = 1$.
Wstawiając $a_n = 1 + \frac{(-1)^n}{n}$ oraz $g = 1$ do warunku (4.1), dostajemy:*

$$\forall_{\varepsilon>0}\exists_{\delta>0}\forall_{n>\delta}\ |1 + \frac{(-1)^n}{n} - 1| < \varepsilon,$$

a po uproszczeniu:

$$\forall_{\varepsilon>0}\exists_{\delta>0}\forall_{n>\delta}\ \frac{1}{n} < \varepsilon$$

Powyższy warunek zachodzi, tak jak w przykładzie 12.

Przykład 14. *Ciąg stały $a_n = 1$ ma granicę równą 1.
Analogicznie jak w powyższych przykładach, wstawiając $a_n = 1$ i $g = 1$ do warunku z definicji 19, dostajemy*

$$\forall_{\varepsilon>0}\exists_{\delta>0}\forall_{n>\delta}\ 0 < \varepsilon$$

Powyższe zdanie, jest prawdziwe niezależnie od wyboru δ, możemy więc przyjąć dowolne $\delta > 0$.

Przykład 15. *Ciąg $a_n = i^n$, gdzie $i^2 = -1$, nie ma granicy.
Aby to udowodnić, zobaczmy najpierw, jak zachowują się kolejne wyrazy ciągu.*
$a_1 = i$
$a_2 = i^2 = -1$

$a_3 = i^3 = -i$
$a_4 = i^4 = 1$
$a_5 = i^5 = i$
...
Widzimy, że ciąg przyjmuje tylko cztery wartości: i, -1, $-i$, 1, które powtarzają się cyklicznie. Ponieważ każda z nich występuje w ciągu nieskończenie wiele razy, tylko wśród nich możemy szukać granicy a_n.
Zauważmy jednak, że dla $\varepsilon < \frac{1}{2}$, warunek $|i^n - 1| < \varepsilon$ nie jest spełniony dla nieskończonej ilości wyrazów, bowiem odległość każdej z liczb: i, -1, $-i$ od 1 na płaszczyźnie zespolonej jest większa od 1. To samo zachodzi w przypadku, gdy po lewej stronie nierówności, liczbę 1 zastąpimy którąkolwiek z pozostałych możliwych granic. Oznacza to, że $\lim\limits_{n\to\infty} i^n$ nie istnieje.

W analizie często używa się też pojęcia ciągu ograniczonego, którego definicja wydaje się być zgodna z intuicją.

Definicja 20. *Ciąg $\{a_n\}$ nazywamy ograniczonym z góry, gdy*

$$\exists_{M>0}\forall_{n\in\mathbb{N}}\ a_n \leq M.$$

Analogicznie definiujemy ciąg ograniczony z dołu.
Ciąg, który jest ograniczony z góry i dołu, nazywamy ograniczonym.

Dla pewnych rozbieżnych ciągów nieograniczonych, wprowadza się pojęcie granicy niewłaściwej w $+\infty$ lub $-\infty$.

Definicja 21. *Niech będzie dany ciąg liczb rzeczywistych $\{a_n\}$. Wtedy:*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty :\iff \forall_{M>0}\exists_{\delta>0}\forall_{n>\delta}\ a_n > M$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty :\iff \forall_{M<0}\exists_{\delta>0}\forall_{n>\delta}\ a_n < M$$

Przykład 16. *Ciąg $a_n = n^2$ nie jest ograniczony.*
Rzeczywiście, dla dowolnego $M > 0$, istnieje $n \in \mathbb{N}$ takie, że $n^2 > M$.
Co więcej, $\lim\limits_{n\to\infty} n^2 = +\infty$

Poniższa uwaga jest oczywistą konsekwencją przyjętej definicji granicy i może być przydatna w dalszych rozważaniach na temat ciągów liczbowych.

Uwaga 2. *Ciąg $\{a_n\}$ ma granicę g wtedy, i tylko wtedy gdy ciąg $\{a_n - g\}$ ma granicę 0.*

Przejdziemy teraz do udowodnienia twierdzeń podających podstawowe własności granic oraz kryteria zbieżności ciągów.

Twierdzenie 4. *1. Ciąg zbieżny nie może mieć dwóch różnych granic.*

2. *Jeżeli prawie wszystkie wyrazy ciągu* $\{a_n\}$ *spełniają nierówność:* $a_n \leq M$ *i* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = g$*, to* $g \leq M$*.*
   Analogicznie, gdy prawie wszystkie wyrazy ciągu $a_n \geq M$*, wtedy* $g \geq M$*.*

3. $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = 0$ *wtedy, i tylko wtedy, gdy* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

Dowód. 1. Przeprowadzimy dowód metodą nie-wprost.
Przypuśćmy, że istnieją g i g' takie, że $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = g$ i $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = g'$ oraz $g \neq g'$.
Oznacza to, że prawdziwe są następujące warunki:
$\forall_{\varepsilon>0}\exists_{\delta_1>0}\forall_{n>\delta_1}\ |a_n - g| < \varepsilon$
$\forall_{\varepsilon>0}\exists_{\delta_2>0}\forall_{n>\delta_2}\ |a_n - g'| < \varepsilon$
Biorąc $\varepsilon = \frac{|g-g'|}{2}$, dostajemy:
$|g - g'| = |g - a_n + a_n - g'| \leq |a_n - g| + |a_n - g'|$, co dla $n > \max\{\delta_1, \delta_2\}$ pociąga za sobą nierówność: $|g - g'| < \frac{|g-g'|}{2} + \frac{|g-g'|}{2}' = |g - g'|$.
Ta sprzeczność kończy dowód faktu 1.

2. Podobnie jak w punkcie 1., dowód przeprowadzimy metodą nie-wprost. Niech $a_n \leq M$ dla prawie wszystkich wyrazów a_n, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = g$ i niech $g > M$. Wówczas, biorąc w definicji granicy $0 < \varepsilon_0 < g-M$, dostajemy, że dla $n > \delta = \delta(\varepsilon_0)$ zachodzi $a_n > -\varepsilon_0 + g > M$, co jest sprzeczne z założeniem, że $a_n \leq M$ dla prawie wszystkich wyrazów a_n.

3. Równoważność przedstawionych warunków, wynika natychmiast z faktu, że $||a_n| - 0| = |a_n|$.

□

W kontekście badania zbieżności ciągów liczbowych, ważnym problemem jest ich monotoniczność.

Definicja 22. *Ciąg* $\{a_n\}$*,* $a_n \in \mathbb{R}$*,* $n = 1, 2, 3, \ldots$ *nazywamy:*

1. *rosnącym, gdy* $a_{n+1} \geq a_n$
2. *malejącym, gdy* $a_{n+1} \leq a_n$
3. *silnie rosnącym, gdy* $a_{n+1} > a_n$
4. *silnie malejącym, gdy* $a_{n+1} < a_n$

Mówimy, że ciąg jest monotoniczny, jeżeli jest rosnący lub malejący.

Następne twierdzenie ukazuje związek pomiędzy własnościami ciągów, takimi jak ograniczoność i monotoniczność, a ich zbieżnością. Ponadto, dostarcza ono praktycznej informacji, ułatwiającej wyznaczenie granic ciągów przy pomocy pewnych oszacowań ich wyrazów przez ciągi o łatwych do policzenia granicach.

Twierdzenie 5. *(Kryteria zbieżności ciągów)*

1. *Każdy ciąg monotoniczny i ograniczony jest zbieżny.*
2. *Jeżeli* $a_n \leq b_n \leq c_n$ *dla* $n \geq n_0$ *oraz* $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = g$, *to* $\lim_{n\to\infty} b_n = g$.[1]
3. *Każdy ciąg zbieżny jest ograniczony.*

Dowód. 1. Niech ciąg $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ będzie ciągiem rosnącym i ograniczonym z góry (dowód dla ciągu malejącego i ograniczonego z dołu, przeprowadza się analogicznie). Pokażemy, że ciąg $\{a_n\}$ jest zbieżny do swojego kresu górnego, czyli że $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} a_n = g$. Z definicji kresu górnego otrzymujemy od razu, że:
$\forall_{\varepsilon>0}\forall_{n\in\mathbb{N}}\ a_n < g+\varepsilon$,
a także:
$\forall_{\varepsilon>0}\exists_{n_0\in\mathbb{N}}\ g-\varepsilon < a_{n_0}$.
Z faktu, że ciąg jest rosnący dostajemy natomiast, że dla $n > n_0$:
$g-\varepsilon < a_{n_0} \leq a_n < g+\varepsilon$.
W konsekwencji, $|a_n - g| < \varepsilon$ dla $n > n_0$, co dowodzi zbieżności ciągu a_n.

2. Niech $a_n \leq b_n \leq c_n$ dla $n \geq n_0$ i niech $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = g$.
Stosując definicję granicy do ciągów a_n, c_n, dostajemy:
$\forall_{\varepsilon>0}\exists_{\delta_1>0}\forall_{n>\delta_1}\ |a_n - g| < \varepsilon$
$\forall_{\varepsilon>0}\exists_{\delta_2>0}\forall_{n>\delta_2}\ |c_n - g| < \varepsilon$.
Stąd, dla $n > \max\{\delta_1, \delta_2, n_0\}$ zachodzi:
$g-\varepsilon < a_n \leq b_n \leq c_n < g+\varepsilon$.
Ostatecznie, $|b_n - g| < \varepsilon$ dla dostatecznie dużych n i ciąg b_n jest zbieżny do g.

3. Niech ciąg $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ będzie zbieżny oraz niech $\varepsilon = 1$. Wtedy istnieje takie δ, że dla $n > \delta$ zachodzi $g - 1 < a_n < g + 1$, czyli
$\min\{a_1, a_2, \ldots, a_{n_0}, g-1\} \leq a_n \leq \max\{a_1, a_2, \ldots, a_{n_0}, g+1\}$,
gdzie $n_0 \leq \delta$ i $n_0 + 1 > \delta$. Oznacza to, że ciąg jest ograniczony z góry przez $M = \max\{a_1, a_2, \ldots, a_{n_0}, g+1\}$, a z dołu przez
$m = \min\{a_1, a_2, \ldots, a_{n_0}, g-1\}$.

□

Przykład 17. *Rozważmy ciąg* $s_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}$.
Jak łatwo zauważyć, ciąg ten jest rosnący, bowiem dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$, $s_{n+1} - s_n = \frac{1}{(n+1)!} > 0$.
Dowodzi się również, że dla każdego n, $s_n < 3$, *a więc ciąg jest ograniczony.*
Na mocy punktu 1. *z twierdzenia 5, możemy wnioskować, że ciąg* s_n *jest zbieżny.*

[1]Twierdzenie to nazywane jest twierdzeniem o trzech ciągach

Ponieważ granica powyższego ciągu jest liczbą, mającą szczególne znaczenie w analizie matematycznej, wprowadza się dla niej szczególne oznaczenie.

Definicja 23. *Liczbą Eulera e, nazywamy liczbę*

$$e := \lim_{n\to\infty} s_n,$$

gdzie $s_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}$.

Przykład 18. *Korzystając z twierdzenia o trzech ciągach, pokażemy, że* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} = 0$.
Niech $b_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$, $a_n = 0$, $c_n = \frac{1}{n}$. *Wówczas, dla wszystkich* $n \in \mathbb{N}$, *zachodzą nierówności* $a_n \leq b_n \leq c_n$.
Ponadto, na podstawie przykładu 12 wiemy, że $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = 0$ *i z oczywistych względów* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. *Oznacza to, że ciąg* b_n *zbiega do tej samej granicy, a więc* $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$.

Rozważmy teraz ciąg, na który składają się elementy wybrane z innego ciągu zbieżnego, z zachowaniem kolejności, w jakiej występują w ciągu oryginalnym. Następne twierdzenie dostarcza nam informacji na temat zbieżności tak utworzonego ciągu.

Definicja 24. *Niech będzie dany ciąg* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *i niech* $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ *będzie silnie rosnącym ciągiem liczb naturalnych. Wtedy ciąg* $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ *nazywamy podciągiem ciągu* $\{a_n\}$.

Twierdzenie 6. *Każdy podciąg ciągu zbieżnego jest zbieżny do tej samej granicy.*

Dowód. Niech ciąg $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ma granicę g oraz niech $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ będzie dowolnym silnie rosnącym ciągiem liczb naturalnych. Korzystając z definicji granicy do ciągu a_n, dostajemy, że:
$\forall_{\varepsilon>0}\exists_{\delta>0}\forall_{n>\delta}\ |a_n - g| < \varepsilon$
Zauważmy, że ciąg $\{n_k\}$ nie jest ograniczony z góry, dlatego możemy wskazać takie k_0, że $n_{k_0} > \delta$. Z faktu, że ciąg $\{n_k\}$ jest silnie rosnący wynika, że dla każdego $k > k_0$ zachodzi $n_k > n_{k_0}$. Oznacza to, że:
$\forall_{\varepsilon>0}\exists_{k_0>0}\forall_{k>k_0}\ |a_{n_k} - g| < \varepsilon$,
czyli $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = g$. □

Powyższe twierdzenie mówi nam, że zbieżność danego ciągu liczbowego pociąga za sobą zbieżność każdego z jego podciągów do tej samej granicy. Oczywiście, na podstawie faktu, że pewien podciąg posiada granicę skończoną, nie możemy wnioskować, że ma ją również cały ciąg. Dla wyróżnienia granic poszczególnych podciągów, wprowadza się pojęcie punktu skupienia ciągu, będące pewnym uogólnieniem pojęcia granicy.

Definicja 25. *Liczbę s nazywamy punktem skupienia ciągu $\{a_n\}$, jeśli*

$$\forall_{\varepsilon>0}\exists_{n_0}\ |a_{n_0} - s| < \varepsilon.$$

Uwaga 3. *Liczba s jest punktem skupienia ciągu $\{a_n\}$ wtedy, i tylko wtedy, gdy istnieje podciag $\{a_{n_k}\}$ ciągu $\{a_n\}$ taki, że $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = s$.*

Pojęcie punktu skupienia zilustrujemy na przykładzie dwóch prostych ciągów.

Przykład 19. *Rozważmy ciąg $\{a_n\}$ zadany wzorem $a_n = (-1)^n$. Jego wyrazy przyjmują tylko dwie wartości: -1, w przypadku wyrazów o numerach nieparzystych oraz 1, dla wyrazów o parzystych numerach. Możemy więc, z powyższego ciągu, wybrać dwa podciągi: $\{a_{2n-1}\}$ oraz $\{a_{2n}\}$, zbieżne do dwóch różnych granic: -1 i 1. Oznacza to, że liczby -1 i 1 są punktami skupienia ciągu a_n na mocy uwagi 3. Co więcej, ponieważ nie istnieje podciąg zbieżny do innej granicy, są to jedyne punkty skupienia rozważanego ciągu.*

Przykład 20. *Powróćmy do ciągu $\{i^n\}$ o wartościach zespolonych, rozważanego w przykładzie 15. Jak pamiętamy, wyrazy tego ciągu należały do zbioru $\{1, i, -1, -i\}$. Rozważając więc stałe podciągi:*
$a_{4n} = 1$
$a_{4n+1} = i$
$a_{4n+2} = -1$
$a_{4n+3} = -i$
oraz ich granice, dostajemy natychmiast, że punktami skupienia ciągu $\{i^n\}$ są liczby: $1, i, -1, -i$.

rodzial0X-podrozdzial01

4.2 Section heading

rodzial0X-podrozdzial02

4.3 Section heading

rodzial0X-podrozdzial03