1

Funkcje

W tym rozdziale przedstawione zostaną funkcje oraz pewne ich własności.

1.1 Odwzorowania i ich własności

Definicja 1. *Niech A, B będą danymi zbiorami. Przyporządkowanie każdemu elementowi x ze zbioru A dokładnie jednego elementu y ze zbioru B nazywamy odwzorowaniem, bądź funkcją, ze zbioru A w zbiór B. Zależność tą oznaczamy w następujący sposób:*

$$f(x) = y$$

Definicja 2. *Elementy ze zbioru A, z definicji 1 nazywamy argumentami funkcji f.*

Definicja 3. *Zbiór argumentów funkcji f nazywamy dziedziną funkcji f.*

Definicja 4. *Zbiór B, z definicji 1 nazywamy przeciwdziedziną funkcji f.*

Przydatne będzie następujące oznaczenie:

Definicja 5. *Niech f będzie funkcją określoną jak w definicji 1. Ponadto, niech $C \subset A$, wtedy:*

$$f(C) = \{f(c) \in B : c \in C\}$$

Zbiór ten nazywamy, obrazem zbioru C.

Definicja 6. *Niech f będzie funkcją określoną jak w definicji 1. Wtedy zbiór*

$$Y = f(A)$$

nazywamy zbiorem wartości funkcji.

Uwaga 1. *Na ogół terminy: zbiór wartości funkcji oraz przeciwdziedzina uznaje się za równoważne.*

Definicja 7. *Niech f będzie funkcją określoną jak w definicji 1. Ponadto, niech $D \subset B$, wtedy:*

$$f^{-1}(D) = \{a \in A : f(a) \in D\}$$

Zbiór ten nazywamy, przeciwobrazem zbioru D.

Definicja 8. *Wykresem odwzorowania $f : X \to Y$ nazywamy zbiór $\Gamma_f = \{(x, y) : x \in X \wedge y = f(x)\}$*

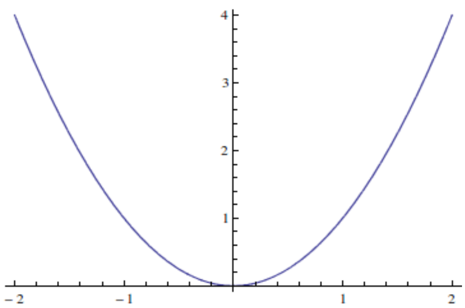
Teraz zobaczmy kilka przykładów zastosowania powyższych definicji w praktyce. Będziemy używali oznaczeń takich jak w definicji 1.

Przykład 1. *Niech*

$$y = f(x) = x^2$$

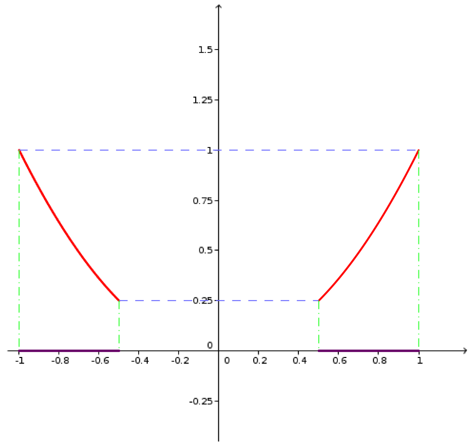
$$A =< -1; 1 >$$

$$B =< 0; 1 >$$



Rysunek 1.1: Wykres funkcji $y = x^2$

Jak wygląda przeciwobraz zbioru $< \frac{1}{4}, 1 >$?

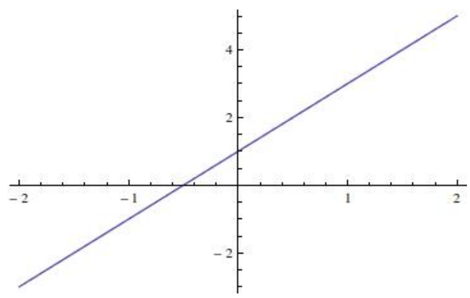


Rysunek 1.2: Odczytywanie przeciwobrazu zbioru $< \frac{1}{4}, 1 >$ względem odwzorowania $y = x^2$

Stąd widać, że $f^{-1}(< \frac{1}{4}, 1 >) =< -1, -\frac{1}{2} > \cup < \frac{1}{2}, 1 >$.
Podobnie, łatwo odczytujemy, że $f^{-1}(< 0, 1 >) =< -1, 1 >$.

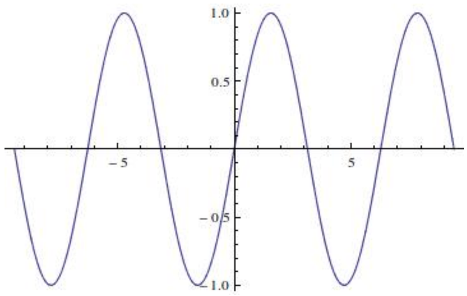
Teraz sprwdźmy jak to wygląda dla funkcji liniowych.

Przykład 2. $y = 2x + 1$,
Tutaj z kolei mamy $A = \mathbb{R}$, *oraz* $B = \mathbb{R}$.



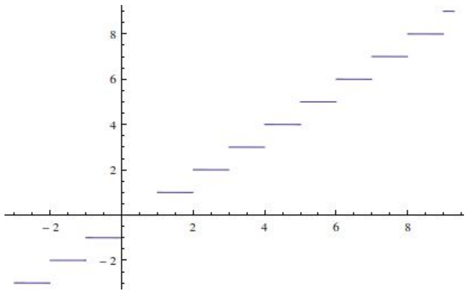
Rysunek 1.3: Wykres funkcji $y = 2x + 1$

Przykład 3. $y = \sin(x)$,
Tutaj z kolei mamy $A = \mathbb{R}$, *oraz* $B =< -1, 1 >$.



Rysunek 1.4: Wykres funkcji $y = \sin(x)$

Przykład 4. *$y = [x]$ - funkcja ta każdej liczbie x przyporządkowuje największą liczbę całkowitą, nie większą od x.*
Tutaj z kolei mamy $A = \mathbb{R}$, oraz $B = \mathbb{Z}$.



Rysunek 1.5: Wykres funkcji $y = [x]$

Definicja 9. *Złożeniem odwzorowań $f : X \to Y$ i $g : Y \to Z$ nazywamy odwzorowanie $h = g \circ f : X \to Z$ takie, że dla każdego $x \in X$, zachodzi $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.*

Definicja 10. *Niech $f : X \to Y \wedge A \subset X$. Odwzorowanie $g : A \to Y$ nazywamy zawężeniem (restrykcją) funkcji f do zbioru A, jeśli dla każdego $x \in A$ zachodzi równość $g(x) = f(x)$.*

Definicja 11. *Niech $f : X \to Y$. Odwzorowanie f nazywamy injekcją, jeżeli*

$$\forall x_1, x_2 \in X : x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2).$$

Oznaczenie 1. *Zamiast pojęcia injekcja, często można spotkać się z nazwami takim jak: odwzorowanie jednokrotne lub różnowartościowe. Wszystkie te pojęcia są równoważne.*

Definicja 12. *Niech $f : X \to Y$. Odwzorowanie f nazywamy surjekcją (lub ódwzorowaniem na"), jeżeli $f(X) = Y$.*

Definicja 13. *Jeśli odwzorwanie f jest surjekcją oraz injekcją, to f nazywamy bijekcją albo odwzorowaniem wzajemnie jednoznacznym.*

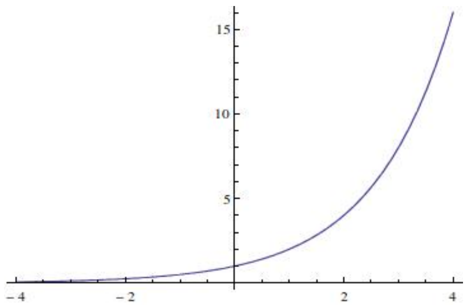
Przykład 5. *Niech $A = A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$. Zdefiniujmy następujące odwzorowania:*

$$P_j : A \to A_j : P_j(a_1, a_2, \ldots, a_n) = a_j \ , \ dla \ j = 1, \ldots, n.$$

Funkcję taką nazywamy projekcją zbioru A na zbiór A_j.

P_j jest surjekcją na A_j, jeśli $A_j \neq \emptyset$.

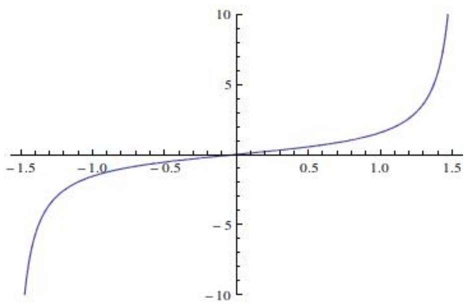
Przykład 6. *Weźmy $f(x) = 2^x$, $x \in \mathbb{R}$.*



Rysunek 1.6: Wykres funkcji $y = 2^x$

To odwzorowanie jest injekcją.

Przykład 7. *Weźmy $f(x) = \tan(x)$, $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.*



Rysunek 1.7: Wykres funkcji $y = \tan(x)$

Mamy tutaj $f((-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})) = \mathbb{R}$, zatem odwzorowanie to jest surjekcją. Łatwo zauważyć, że przy tak dobranej dziedzinie, odwzorowanie to jest również injekcją. Stąd f jest surjekcją.

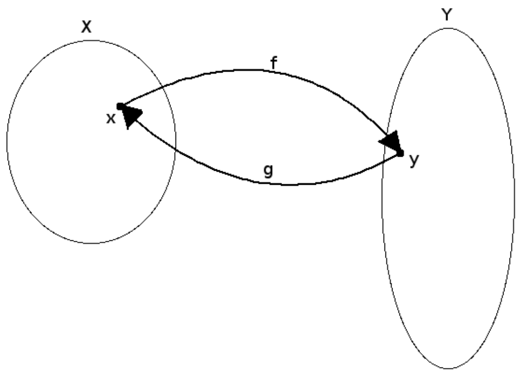
Oznaczenie 2. *Niech $f : X \to Y$. Przez I_X oznaczamy odwzorowanie identycznościowe w zbiorze X, tzn., że $I_X : X \to X$ oraz dla każdego $x \in X$ zachodzi : $I_X(x) = x$. Analogicznie definiujemy identyczność w Y*

Definicja 14. *Jeśli odwzorowania $f : X \to Y$, $g : Y \to X$, spełniają warunki:*

- $g \circ f = I_X$, *tzn.* $g(f(x)) = x$, *dla każdego* $x \in X$,
- $f \circ g = I_Y$, *tzn.* $f(g(y)) = y$, *dla każdego* $y \in Y$,

to odwzorowanie g nazywamy odwrotnym do f i na odwrót.

Można to zobrazować za pomocą następującego rysunku:



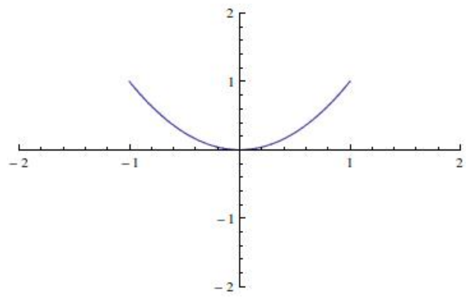
Rysunek 1.8: Zależność pomiędzy funkcją, a jej odwrotnością.

Oznaczenie 3. *Odwzorowanie odwrotne do f oznacza się jako f^{-1}.*

Oznaczenie to mocno kojarzy się z przeciwobrazem zbioru poprzez funkcję. Te pojęcia są ze sobą związane. Żeby zapoznać się z pojęciem odwzorowanie odwrotnego oraz dostrzec pewne różnice między nimi, przeanalizujmy przykłady.

Przykład 8. $f : X \to X$, *gdzie* $f = I_X$,
Tutaj $f^{-1} = I_X$.

Przykład 9. $f : [-1; 1] \to [0; 1]$, *gdzie* $f = x^2$,
Tutaj z kolei f^{-1} nie istnieje!. Wynika to z faktu, że f nie jest odwzorowaniem różnowartościowym.



Rysunek 1.9: Wykres funkcji $y = \sin(x)$

Rzeczywiście, jedynym kandydatem na funkcję odwrotną wydaje się funkcja $g(y) = \sqrt{y}$, *bo mamy:*

$$f \circ g(y) = y,$$

jednak z drugiej strony, mamy:

$$g \circ f(x) \neq x \ \ dla\ x < 0,$$

zatem pierwszy warunek z definicji 14, nie jest spełniony.

1.2 Section heading

rodzial0X-podrozdzial02

1.3 Section heading

rodzial0X-podrozdzial03