1

Liczby rzeczywiste

W rozdziale tym przedstawimy definicję, konstrukcję oraz podstawowe własności liczb rzeczywistych.

1.1 Liczby naturalne, całkowite i wymierne

Zbiór liczb naturalnych oznaczamy jako $\mathbb{N}$ i jego definicja jest jak następuje

$$\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \ldots\}.$$

Liczby całkowite oznaczamy jako $\mathbb{Z}$ i definiujemy jako sume liczb naturalnych, liczb przeciwnych do naturalnych oraz zera

$$\mathbb{Z} := \mathbb{N} \cup \{a| - a \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}.$$

Liczby wymierne oznaczamy jako $\mathbb{Q}$ i definiujemy następująco

$$p \in \mathbb{Q} \iff p = \frac{n}{m} \quad \text{gdzie} \quad n, m \in \mathbb{Z}, m \neq 0.$$

1.1.1 Własności liczb wymiernych

Poniżej wypiszemy podstawowe własności liczb wymiernych

1. prawo przemienności: $\forall p, q \in \mathbb{Q}$

$$p + q = q + p, \quad p \cdot q = q \cdot p$$

2. prawo łączności: $\forall p, q, r \in \mathbb{Q}$

$$(p + q) + r = p + (q + r)$$
$$(p \cdot q) \cdot r = q \cdot (q \cdot r)$$

3. prawo rozdzielności dodawania względem mnożenia: $\forall p, q, r \in \mathbb{Q}$
$$(p + q) \cdot r = p \cdot r + q \cdot r$$
4. relacja porządku $\forall p, q \in \mathbb{Q}$
$$p = q \vee p < q \vee p > q$$
5. węwnętrzność działania dodawania i mnożenia dla liczb dodatnich Niech $p > 0 \wedge q > 0$, wówczas
$$\begin{aligned} p + q &> 0 \\ p \cdot q &> 0 \end{aligned}$$
6. warunek równości dwóch liczb wymiernych Niech $a, b \in \mathbb{Q}$ oraz niech $a = \frac{p}{q}$ oraz $b = \frac{p'}{q'}$, wówczas
$$a = b \iff p \cdot q' = p' \cdot q$$
Ponadto, zakładając $q, q' > 0$ otrzymujemy
$$\begin{aligned} a < b &\iff p \cdot q' < p' \cdot q \\ a > b &\iff p \cdot q' > p' \cdot q \end{aligned}$$

1.1.2 Niewymierność $\sqrt{2}$

Pokażemy, że pierwiastek z dwóch nie jest liczbą wymierną, tj. $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Dowód. Dowód będziemy prowadzić nie wprost. Przypuśćmy nie wprost, że $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$, wówczas muszą istnieć $p, q \in \mathbb{N}$, że
$$\sqrt{2} = \frac{p}{q},$$
a ułamek ten jest nieskracalny.

Równoważnie możemy napisać
$$\begin{aligned} q\sqrt{2} &= p \quad \text{podnosząc do kwadratu stronami} \\ 2q^2 &= p^2 \end{aligned}$$
Zauważmy, że wynika stąd, że p^2 jest parzyste, to oznacza, że także p jest parzyste, czyli $\exists n \in \mathbb{N}$, że $p = 2n$. Wstawiając, otrzymujemy
$$\begin{aligned} 2q^2 &= 4n^2 \\ q^2 &= 2n^2 \end{aligned}$$
Stosując powyższe rozumowanie otrzymujemy, że $\exists m \in \mathbb{N}$, że $q = 2m$. Widzimy więc sprzeczność z założeniem, że ułamek $\frac{p}{q}$ był nieskracalny (jako, że zarówno licznik jak i mianownik są podzielne przez 2). Sprzeczność ta dowodzi tezy. $\square$

1.1.3 Niewymierność $\log_{10} 5$

Pokażemy, że liczba $\log_{10} 5$ jest niewymierna. Podobnie jak powyżej, dowód będzie prowadzony nie wprost.

Dowód. Przypuśćmy, że $\log_{10} 5 = \frac{p}{q}$, gdzie $p, q \in \mathbb{N}$. Jest to równoważne następującemu wyrażeniu

$$\begin{aligned} 5 &= 10^{\frac{p}{q}} \\ 5^q &= 10^p. \end{aligned}$$

Zauważmy, że powyższa równość jest niemożliwa pośród liczb naturalnych (ze względu na podzielność przez 2).

□

1.2 Przekroje

Niech A, B będą zbiorami liczb. Niech a, b, p, q będą liczbami, elementami zbiorów.

Równość zbiorów A i B definiujemy następująco

$$A = B \iff (a \in A \implies a \in B) \wedge (a \in B \implies a \in A),$$

mówimy, że dwa zbiory nie są równe, gdy

$$A \neq B \iff \exists a \in A | a \notin B \vee \exists a \in B | a \notin A$$

Niech A będzie zbiorem liczb wymiernych mniejszych niż $\sqrt{2}$, zauważmy, że wówczas

$$\begin{aligned} A &= \{p \in \mathbb{Q} | p < \sqrt{2}\} \text{ nie ma liczby największej} \\ B &= \{p \in \mathbb{Q} | p > \sqrt{2}\} \text{ nie ma liczby najmniejszej.} \end{aligned}$$

Dowód. Pokażemy najpierw, że nie może w A istnieć element największy. Niech $p \in A$, pokażemy, że istnieje $k > 0$, że $(p + k) \in A$.

Zauważmy, że biorąc $k < \min\left(1, \frac{2-p^2}{2p+1}\right)$ otrzymujemy

$$\begin{aligned} (p+k)^2 &< 2 \\ p^2 + 2pk + k^2 &< 2 \\ p^2 + k(2p+k) &< p^2 + \frac{2-p^2}{2p+1}(2p+1) = p^2. \end{aligned}$$

Pokażemy teraz, że dla $q \in B$ znajdziemy takie $h > 0$, że $q - h \in B$. Weźmy $h = \frac{q^2-2}{2q}$. Łatwo możemy zauważyć, że $h \in \mathbb{Q}$ (jako iloraz dwóch liczb wymiernych).

Policzmy wartość

$$(q-h)^2 = q^2 - 2\frac{q^2-2}{2q}q + h^2 = 2 + h^2 > 2.$$

Tak więc dobierając h w zadany sposób możemy zawsze wskazać liczbę mniejszą $q-h$, która także należy do B. □

1.2.1 Gęstość liczb wymiernych

Pomiędzy dwiema dowolnymi liczbami wymiernymi zawsze znajdziemy liczbę wymierną.

Dowód. Niech $p, q \in \mathbb{Q}$ wówczas

$$p < \frac{p+q}{2} < q$$

oraz

$$\frac{p+q}{2} \in \mathbb{Q}.$$

□

1.2.2 Metoda przekrojów Dedekinda

Definicja 1. *Zbiór α liczb wymiernych nazywamy przekrojem, jeżeli:*

a) α nie zawiera wszystkich liczb wymiernych oraz α zawiera co najmniej 1 liczbę wymierną,

b) $p \in \alpha, q < p \implies q \in \alpha$,

c) α nie ma liczby największej.

Przekrojem jest na przykład zbiór A z poprzedniego przykładu.

Twierdzenie 1. *Jeżeli $p \in \alpha \wedge q \notin \alpha$, to $p < q$ dla $q \in \text{ıı}$.*

Dowód. Przypuśćmy nie wprost, że $q < p$, na mocy warunku b) z definicjji przekroju wnioskujemy, że $q \in \alpha$, co jest sprzeczne z założeniem. □

Twierdzenie 2. *Niech $r \in \mathbb{Q}$ oraz $\alpha = \{p \in \mathbb{Q} | \, p < r\}$ - wtedy α jest przekrojem.*

Dowód. Warunki a), b) są spełnione w sposób oczywisty.

Warunek c) - niech $p \in \alpha$ czyli $p < r$. Wtedy $p < \frac{p+r}{2} < r$ oraz $\frac{p+r}{2} \in \alpha$. □

Definicja 2. *Przekrój zadany jak w powyższym twierdzenimu nazywamy przekrojem wymiernym.*

Zauważmy, że zbiór $\mathbb{Q}/\alpha$ ma liczbę najmniejszą r.

Definicja 3. *Niech α, β będą przekrojami.*

$$\begin{aligned}
\alpha = \beta &\iff p \in \alpha \iff p \in \beta \\
\alpha < \beta &\iff \exists p \in B : p \notin \alpha \\
\alpha > \beta &\iff \exists q \in \alpha : q \notin B \\
\alpha \leq \beta &\iff \alpha < \beta \vee \alpha = \beta \\
0^* &= \{p \in \mathbb{Q} : p < 0\}
\end{aligned}$$

Mówimy, że

α jest dodatni, jeżeli $\alpha > 0^*$,

α jest ujemny, jeżeli $\alpha < 0^*$,

α jest niejemny, jeżeli $\alpha \geq 0^*$,

α jest niedodatni, jeżeli $\alpha \leq 0^*$.

Twierdzenie 3. *Niech α, β będą przekrojami. Wtedy*

$$\alpha = \beta \quad \textit{albo} \quad \alpha < \beta \quad \textit{albo} \quad \alpha > \beta.$$

Dowód. Rozważmy dwa przypadki. Jeżeli każdy element α jest elementem β i na odwrót to w oczywisty sposób przekroje te muszą być równe.

W przeciwnym przypadku istnieje element, który nie należy do jednego z przekrojów, pokażemy, że nie może wówcas równocześnie zachodzić, że $\alpha > \beta \wedge \beta > \alpha$.

Dowód prowadzimy nie wprost

Niech α będzie zbiorem liczb mniejszych od p, a β mniejszych od q. Wówczas

(1) $\alpha > \beta \Rightarrow \exists p' \in \alpha : p' \notin \beta$

(2) $\beta > \alpha \Rightarrow \exists q' \in \beta : q' \notin \alpha$

(1) $\implies p' \in \beta \Rightarrow p' < q \wedge q' \notin \beta \implies q' > q \implies p' < q'$

(2) $\implies q' \in \alpha \implies q' < p \wedge p' \notin \alpha \implies p' > p \implies q' < p'$.

Stąd otrzymujemy, że $p' < q' < p' \implies p' < p'$ co jest sprzeczne. □

1.3 Section heading

rodzial0X-podrozdzial03