ELTE TTK

Az általános relativitáselmélet alapjai

készült az előadások alapján, írta:

Olar Alex

oktató

Dávid Gyula, *dgy*

2016/2017

Bevezetés

Ez a jegyzet *Dávid Gyula előadássorozata alapján készült a 2016/17-es tanév második félévében. A jegyzet bővítése tervben van. Az előadássorozat 3 féléven keresztül végig kíséri a most II. évfolyamot egészen a BSc végéig. Ezen összefoglaló célja számomra az ismétlés, majd közkinccsé tétel.*

Tartalomjegyzék

1. Jelölések

A speciális relativitáselmélet kurzusról ismert jelölésekhez hasonlóan felső és alsó indexeket használunk majd. Ha az index az angol ABC betűje, akkor az 0-3 közötti számozást jelent, ha a görög ABC betűje, akkor csak 1-3 között indexel.

$$x^k = \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad x_k = \begin{pmatrix} ct \\ -x \\ -y \\ -z \end{pmatrix} \quad x^\alpha = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad x_\alpha = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

A tenzorok indexelése hasonlóan felső, alsó, vegyes indexekkel történik.

$$\Lambda^{ij} \quad \Lambda_{ij} \quad \Lambda^i_j$$

2. Speciális relativitás elmélet - áttekintés

Minden objektum szimmetria csoportjába tartozó transzformációk a:

- eltolás $\rightarrow$ impulzus megmaradás
- Lorentz-boost
- időbeli eltolás $\rightarrow$ energia megmaradás
- forgatás $\rightarrow$ impulzusmomentum megmaradás

Az x^k koordináták transzformációja ezen szimmetriák alkalmazása.

$$x'^k = \Lambda_l^k x^l + a^k$$

Ahol a^k egy konstans eltolás, míg a két indexes tenzor a Lorentz-transzformációt írja le, a következő alakban:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & \\ 0 & & I & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & \\ 0 & & F & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cosh\chi & -\underline{\tilde{n}}\sinh\chi \\ -\underline{n}\sinh\chi & I + (\cosh\chi - 1)\underline{n}\circ\underline{n} \end{pmatrix}$$

Ahol I, F rendre a 3 dimenziós egység és forgás mátrixok.
A speciális relativitáselméletben a metrikus tenzor rendezi át az indexeket. Ezzel értelmezett a skaláris szorzás is a négyesvektorok között.

$$x_k = g_{kl}x^l \quad x^k = g^{kl}x_l \quad g^{kl}g_{lm} = \delta_m^k$$

A speciális relativitáselméletben a metrikus tenzor saját magának az inverze, konstans.

$$g_{kl} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Az ezzel definiált skalárszorzás pedig.

$$x^k x_k = g_{kl}x^k x^l = (ct)^2 - x^2 - y^2 - z^2$$

Az általános relativitáselmélet célja, hogy lokálisan teljesítse a speciális relativitáselméletet, viszont globálisan egy új leírást adjon a világra.

3. Newtoni - gravitáció

A newtoni gravitáció elmélete az évszázadok során beleivódott minden ember tudatába. A távolba hatás, a távoli testek által egymásra kifejtett erő mind-mind alapfogalmak a fizika tanulás kezdetén.
A mozgásegyenletekben szereplő arányossági tényezők egyenlősége komoly mérési eljárások kidolgozásra révén volt bizonyítható, súlyos tömeg, tehetetlen tömeg.

$$m_t\vec{a} = m_s\vec{g}(\vec{r}, t)$$

Kísérleti tény az is, hogy zárt görbén a gravitációs erőnek nincsen munkája. Azaz:

$$\oint_\gamma \vec{g}(\vec{r}, t)\, d\vec{r} = 0 = \int_F (\nabla \times \vec{g})d\vec{F} = 0 \qquad \rightarrow \qquad \nabla \times \vec{g} = \vec{0}$$

Ebből következik, hogy $\vec{g}$ egy skalármező negatív gradienseként előállítható. Így:

$$\oint_{\partial V} \vec{g}d\vec{F} = \int \nabla\vec{g}dV = -4\pi G \int \rho(\vec{r})dV \quad \rightarrow \quad \nabla\vec{g} = -4\pi G\rho(\vec{r})$$

Így látható, hogy folytonos tömegeloszlásra a Newton-féle gravitációs törvény a következő alakot ölti.

$$\vec{g} = -\nabla\Phi \quad \rightarrow \quad \triangle\Phi = 4\pi G\rho(\vec{r})$$

Az utóbbi lényegében a gravitációra felírt Poisson-egyenlet.
Áttérve a speciális relativitáselméletre a gravitációs erő általánosítása a következő egyenlet lenne:

$$\frac{d}{d\tau}(Mu_k) = M\partial_k\Phi$$

A sajátidő (τ) szerinti deriválást elvégezve és kihasználva, hogy a négyessebesség $u_k u^k = c^2$ a következő összefüggést kapjuk:

$$\frac{dM}{d\tau}c^2 = \frac{\partial\Phi}{\partial x^k}\frac{dx^k}{d\tau}M = \frac{d\Phi}{d\tau}M$$

Ezt nevezhetjük a NOVOBÁTZKY-EFFEKTUS speciális esetének. Mivel ez egy szeparálható differenciál egyenlet, a megoldása előáll

$$M = me^{\frac{\Phi(x^k)}{c^2}}$$

Ezt pedig 1911-ben NORDSTRÖM vezette le. Lényegében ez volt a legjobb gravitáció elmélet amit a speciális relativitás elmélet előállított. A korábbiak alapján a mozgásegyenlet is előállítható, ha a kezdeti egyenletbe visszahelyettesítjük a $\frac{dM}{d\tau}$ tagot.

$$\frac{dM}{d\tau} = \frac{1}{c^2}Mu^l\partial_l\Phi \quad \rightarrow \quad (\delta_k^l - \frac{u^k u_l}{c^2})\partial_l\Phi = \frac{du_k}{d\tau}$$

Jól látható, hogy a potenciál gradiense előtt álló operátor egy, a négyessebességre merőleges vetítést hajt végre.

4. Alapfogalmak

Az első féléves mechanika és az Elméleti mechanika tárgyak szerves részét képezi a gyorsuló koordináta-rendszerek vizsgálata. Mind ismerjük a kulcsfogalmakat. Szükség van egy rögzített koordináta-rendszerre amihez képest egy másik origója a_0 gyorsulással transzlációt végezhet és foroghat. A forgás leírására a koordináta-rendszerek közötti ortogonális transzformációt használjuk, ahol az ortogonális mátrixok időfüggőek.

$$\underline{\underline{\dot{O}}}\,\underline{\underline{O}}^T = \underline{\underline{\Omega}} = \underline{\omega}\times$$

A mozgásegyenlet pedig a következőképen transzformálódik:

$$m\underline{a} = \underline{F} + m\underline{a}_0 + m\underline{\omega} \times (\underline{\omega} \times \underline{r}) + 2m\underline{\omega} \times \underline{\dot{r}} + m\underline{\dot{\omega}} \times \underline{r}$$

Einstein arra jött rá, hogy a gravitáció sem erő, hanem egy koordináta transzformációval eltüntethető jelenség. Ennek leírására segítséget kért egy Magyarországon született, matematikus barátjától, Marcell Grossmanntól. Együtt dolgozták ki az általános relativitáselmélet matematikáját a Riemann-féle differenciálgeometria alapján.

A kulcsgondolatok:

- Nincs globális koordináta-rendszer amihez viszonyítani lehetne a lokális rendszereinket.
- Lokális rendszereink Minkowski-geometriájúak, azaz lokálisan a speciális relativitáselmélet teljesül.

Ennek precíz matematikai leírásához a következő gondolati lépesek lennének szükségesek:

1. halmaz $\rightarrow$ ezen értelmezett folytonosság, differenciálhatóság
2. konnexió (kapcsolat a topologikus tér és a metrikus tér között)
3. metrika

A leíráshoz a sokaságok elméletét fogjuk alapul venni. Ezek közül is nekünk a differenciálható részsokaságok egy speciális részhalmaza kell majd a tér-idő leíráshoz. Hiszen mit tud egy fizikus? Deriválni.

4.a. Affin tér:

Egy affin tér egy (V, **V**, **-**) hármas, ahol:

- V nem üres halmaz
- **V** vektortér
- "**-**" leképezés pedig V $\times$ V $\rightarrow$ **V**, amit (x,y) $\mapsto$ x-y $= \vec{a}$ alakban írunk

Axiómái a következők:

- (x-y) + (y-z) + (z-x) $= \vec{0}$
- az affin tér és az alul fekvő vektortér dimenziója azonos
- $\vec{a}$ = A **-** o leképezést az affin tér o középpontú ortogonalizációjának nevezzük

A tér-időről kezdetben csak annyit feltételezünk, hogy az egy 4 dimenziós affin tér, amely lokálisan Minkowski-struktúrával van ellátva. Ezeket a különböző rendszereket kell majd valahogy összefésülni.

4.b. Metrika