

Az Einstein-egyenletek Schwarzschild-megoldása

Olar Alex

Eötvös Loránd Tudományegyetem
Fizika BSc III.

A klasszikus térelmélet elemei szeminárium, 2017. december

Vázlat

- Történeti bevezető
- A probléma megfogalmazása
- Számolás
- Összefoglalás
- Hivatkozások

Történeti bevezető

Karl

Schwarzschild (1873 - 1916) német fizikus volt. Ő állt elő az Einstein-egyenletek első egzakt megoldásával, méghozzá a gömbszimmetrikus, M tömegű, R sugarú, nyugalomban lévő testre vonatkozólag oldotta meg a téregyenleteket. Mindezt az első világháború alatt, a frontszolgálat közben sikerült kiviteleznie.

ábra: Karl Schwarzschild



A probléma megfogalmazása

Milyen metrikájú a téridő egy gömbszimmetrikus, R sugarú, M tömegű, sztatikus testen kívül?

A gömbkoordinátákkal kifejezve az ívemelem négyzet Minkowski-térben a következő alakot ölti ($c = 1$):

$$ds^2 = dt^2 - dr^2 - r^2 d\vartheta^2 - r^2 \sin^2 \vartheta d\varphi^2$$

Azaz a síkban vett metrikus tenzor a következő:

$$\eta = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -r^2 & \\ & & & -r^2 \sin^2 \vartheta \end{pmatrix}$$

Ahol figyelni kell arra, hogy a szignatúra $(+,-,-,-)$ legyen.

A probléma megfogalmazása

Most ezt kellene a megfelelő módon módosítani:

$$g = \begin{pmatrix} U & & & \\ & -V & & \\ & & -Wr^2 & \\ & & & -Xr^2 \sin^2 \vartheta \end{pmatrix}$$

Ahol kezdetben U, V, W, X függvények az $(r, \vartheta, \varphi, t)$ változók általános függvényei. Felhasználva a probléma speciális tulajdonságait:

- gömbszimmetria alatt azt lehet érteni, hogy a metrikus tenzorban kiemelt U, V, W, X függvények nem függnek (ϑ, φ) változóktól, tehát csakis az r mennyiség függvénye, valamint az.
- sztatikus problémáról van szó, így feltehető, hogy az időfüggés elhagyható

A probléma megfogalmazása

- a vákuum-megoldás keresése közben, az objektumon kívül az energia-impulzus tenzor azonosan nulla : $T_{kl} \equiv 0$
- Schwarzschild eredetileg nem így írta fel az egyenleteket. Ő módosított gömbipolár-koordinátákat vezetett be

$$x^1 = \frac{r^3}{2} \quad x^2 = -\cos\vartheta \quad x^3 = \varphi \quad x^4 = t$$

- az ebből ds^2 -re kapott egyenletből származtatható a mostani esetre vonatkoztatva, hogy elegendő a $W = X = 1$ esetet vizsgálni
- azaz az ívelemnégyzetre a következő kifejezést kapjuk

$$ds^2 = U(r)dt^2 - V(r)dr^2 - r^2d\vartheta^2 - r^2\sin^2\vartheta d\varphi^2$$

A probléma megfogalmazása

Ahol a metrikus tenzor inverze a következő (az inverz jelölése ugyanaz):

$$g = G = \begin{pmatrix} \frac{1}{U} & & & \\ & -\frac{1}{V} & & \\ & & -\frac{1}{r^2} & \\ & & & -\frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \end{pmatrix}$$

Hiszen a $g_{kl}g^{kl} = 4$ egyenlet teljesül, ahol a latin ábécé betűivel nullától háromig lévő indexeket jelölöm, míg a görög ábécé betűivel az egytől háromig terjedőeket, tehát $k \in \{0, 1, 2, 3\}$, $\alpha \in \{1, 2, 3\}$

A továbbiakban is mindig ezt a konvenciót használja a prezentáció.

A probléma megfogalmazása

A megoldandó probléma tehát az Einstein-egyenletek (a kozmológiai állandó zérus) megoldása egy gömbszimmetrikus, sztatikus objektumon kívül.

$$E_{kl} = G_{kl} = R_{kl} - \frac{R}{2}g_{kl} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{kl} = 0$$

Amely egyenletben c^4 tag csak hagyománytiszteletből szerepel ($c = 1$). R_{kl} a Ricci-tenzor, amit a Riemann-féle görbületi tenzorból származtatható (első és harmadik index összeejtésével például), R pedig a Ricci-skalár mennyiség, amely a Ricci-tenzor spurja.

E_{kl} vagy az irodalomban gyakrabban G_{kl} az Einstein-tenzor, G pedig a Newton féle gravitációs konstans.

A probléma megfogalmazása

Ahol a metrikus tenzor inverze a következő (az inverz jelölése ugyanaz):

$$g = G = \begin{pmatrix} \frac{1}{U} & & & \\ & -\frac{1}{V} & & \\ & & -\frac{1}{r^2} & \\ & & & -\frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \end{pmatrix}$$

Hiszen a $g_{kl}g^{kl} = 4$ egyenlet teljesül, ahol a latin ábécé betűivel nullától háromig lévő indexeket jelölöm, míg a görög ábécé betűivel az egytől háromig terjedőeket, tehát $k \in \{0, 1, 2, 3\}$, $\alpha \in \{1, 2, 3\}$

A továbbiakban is mindig ezt a konvenciót használja a prezentáció.

A probléma megfogalmazása

■ Riemann - tenzor

$$\square R_{lmp}^k = \partial_m \Gamma_{lp}^k - \partial_p \Gamma_{lm}^k + \Gamma_{lp}^q \Gamma_{qm}^k - \Gamma_{lm}^q \Gamma_{qp}^k$$

■ Ricci - tenzor

$$\square R_{lsp}^s = R_{lp} = \partial_s \Gamma_{lp}^s - \partial_p \Gamma_{ls}^s + \Gamma_{lp}^q \Gamma_{qs}^s - \Gamma_{ls}^q \Gamma_{qp}^s$$

■ Ricci - skalár

$$\square g^{kl} R_{kl} = R_k^k$$

Ezeket felül még ki kell használni, hogy a Christoffel-szimbólumokat a metrikus tenzorból kapható.

$$\Gamma_{lm}^k = \frac{1}{2} g^{ks} (\partial_m g_{sl} + \partial_l g_{sm} - \partial_s g_{lm})$$

A későbbiekben felhasználásra kerül, hogy a Γ mennyiségek az alsó két indexükben torzió mentesek, azaz szimmetrikusak.

Számolás

Meg kell határozni a Γ mennyiségek (nem tenzor) minden komponensét. Ez rengeteg számítást igényelne (64 elem, ha nem vesszük a torziómentességet), tehát vagy gondolkozunk vagy használunk egy szimbolikus nyelvet, amely képes ilyen számolásokra (Wolfram Mathematica).

A következőket kell figyelembe venni:

- torziómentesség $\Gamma_{ik}^l = \Gamma_{ki}^l$
- minden ∂_0 deriváltja a metrikus tenzornak azonosan nulla $\partial_0 g_{ik} \equiv 0$
- a metrikus tenzor nem diagonális elemei azonosan nullát adnak

Ezen információk birtokában...

Számolás

$$k = 0 \rightarrow \Gamma_{lm}^0 = \frac{1}{2} g^{0s} (\partial_m g_{sl} + \partial_l g_{sm} - \partial_s g_{lm})$$

Ezután, mivel a metrikus tenzor diagonális csak $s = 0$ esetben nem azonosan nulla megoldást kapunk.

$$\Gamma_{lm}^0 = \frac{1}{2} g^{00} (\partial_m g_{0l} + \partial_l g_{0m} - \partial_0 g_{lm}) \rightarrow \partial_0 g_{lm} \equiv 0$$

$$l = 0 \rightarrow \Gamma_{0m}^0 = \frac{1}{2} g^{00} (\partial_m g_{00} + \partial_0 g_{0m}) \partial_0 g_{0m} \equiv 0$$

$$\Gamma_{0m}^0 = \delta_m^1 \frac{1}{2} g^{00} \partial_1 g_{00} = \delta_m^1 \frac{1}{2} \frac{1}{U} \partial_r U$$

Azaz az első két nem nulla elem

$$\Gamma_{01}^0 = \Gamma_{10}^0 = \frac{U'}{2U}$$

$$\Gamma_{ij}^0 \equiv 0 \quad \text{amikor} \quad \{i, j\} \neq \{0, 1\} \quad \text{vagy} \quad \{1, 0\}$$

Számolás

$$k = 1 \rightarrow \Gamma_{lm}^1 = \frac{1}{2}g^{1s}(\partial_m g_{sl} + \partial_l g_{sm} - \partial_s g_{lm})$$

Ezután, mivel a metrikus tenzor diagonális csak $s = 1$ esetben nem azonosan nulla megoldást kapunk.

$$\Gamma_{lm}^1 = \frac{1}{2}g^{11}(\partial_m g_{1l} + \partial_l g_{1m} - \partial_1 g_{lm})$$

$$l = 0 \rightarrow \Gamma_{0m}^1 = -\frac{1}{2}g^{11}(\partial_1 g_{0m}) = -\delta_0^m \frac{1}{2}g^{11}\partial_m g_{00}$$

$$l = 1 \rightarrow \Gamma_{1m}^1 = \frac{1}{2}g^{11}(\partial_m g_{11} + \partial_1 g_{1m} - \partial_1 g_{1m}) = \delta_1^m \frac{1}{2}g^{11}\partial_m g_{11}$$

$$l = 2 \quad \Gamma_{2m}^1 = \frac{1}{2}g^{11}(\partial_m g_{12} + \partial_2 g_{1m} - \partial_1 g_{2m}) \rightarrow -\delta_2^m \frac{1}{2}g^{11}\partial_m g_{22}$$

$$l = 3 \quad \Gamma_{3m}^1 = \frac{1}{2}g^{11}(\partial_m g_{13} + \partial_3 g_{1m} - \partial_1 g_{3m}) \rightarrow -\delta_3^m \frac{1}{2}g^{11}\partial_m g_{33}$$

$$\Gamma_{00}^1 = \frac{U'}{2V} \quad \Gamma_{11}^1 = \frac{V'}{2V} \quad \Gamma_{22}^1 = -\frac{r}{V} \quad \Gamma_{33}^1 = -\frac{r\sin^2\vartheta}{V}$$

Számolás

$$k = 2 \rightarrow \Gamma_{lm}^2 = \frac{1}{2}g^{2s}(\partial_m g_{sl} + \partial_l g_{sm} - \partial_s g_{lm})$$

Ezután $s = 2$

$$\Gamma_{lm}^2 = \frac{1}{2}g^{11}(\partial_m g_{2l} + \partial_l g_{2m} - \partial_2 g_{lm})$$

$$l = 2 \rightarrow \Gamma_{2m}^2 = \frac{1}{2}g^{22}(\partial_m g_{22}) = -\delta_1^m \frac{1}{2}g^{22}\partial_m g_{00}$$

$$l = 1 \rightarrow \Gamma_{1m}^1 = \frac{1}{2}g^{11}(\partial_m g_{11} + \partial_1 g_{1m} - \partial_1 g_{1m}) = \delta_m^1 \frac{1}{2}g^{11}\partial_1 g_{11}$$

$$\Gamma_{21}^2 = \Gamma_{12}^2 = \frac{1}{r}$$

Az első képletben látható, hogy a többi esetben csak az utolsó tag marad meg ahol $\partial_2 = \partial_\vartheta$ - től csak g_{33} függ, tehát:

$$l = 3 \quad m = 3 \rightarrow \Gamma_{33}^2 = \frac{1}{2}g^{22}(\partial_3 g_{33}) = -\sin\vartheta \cos\vartheta$$

Számolás

$$k = 3 \rightarrow \Gamma_{lm}^3 = \frac{1}{2}g^{3s}(\partial_m g_{sl} + \partial_l g_{sm} - \partial_s g_{lm})$$

Ezután $s = 3$

$$\Gamma_{lm}^3 = \frac{1}{2}g^{33}(\partial_m g_{3l} + \partial_l g_{3m} - \partial_3 g_{lm})$$

$$l = 3 \rightarrow \Gamma_{3m}^3 = \frac{1}{2}g^{33}(\partial_m g_{33}) \rightarrow \frac{1}{2}g^{33}\partial_1 g_{33} \quad \text{vagy} \quad \frac{1}{2}g^{33}\partial_2 g_{33}$$

$$\Gamma_{31}^3 = \Gamma_{13}^3 = \frac{1}{r}$$

$$\Gamma_{32}^3 = \Gamma_{23}^3 = \frac{1}{tg\vartheta}$$

A többi tag mind nulla, mivel az első egyenletre visszanézve látható, hogy ∂_3 -tól egyik tag sem függhet, valamint a többi tag pedig figyelembe lett

Számolás

Szerencsére 'csak' ennyi tag nem nulla, mint ahogy az látható volt, ezeket összefoglalva:

$$\begin{aligned}\Gamma_{00}^1 &= \frac{U'}{2V} & \Gamma_{11}^1 &= \frac{V'}{2V} \\ \Gamma_{22}^1 &= -\frac{r}{V} & \Gamma_{33}^1 &= -\frac{r \sin^2 \vartheta}{V} \\ \Gamma_{21}^2 &= \Gamma_{12}^2 = \frac{1}{r} & \Gamma_{33}^2 &= -\sin \vartheta \cos \vartheta \\ \Gamma_{31}^3 &= \Gamma_{13}^3 = \frac{1}{r} & \Gamma_{32}^3 &= \Gamma_{23}^3 = \frac{1}{\tan \vartheta} \\ \Gamma_{01}^0 &= \Gamma_{10}^0 = \frac{U'}{2U}\end{aligned}$$

Ez 13 tag, most ezeknek a segítségével kell kiszámolni a Ricci-tenzort.

Számolás

Korábban láttuk

$$R_{lsp}^s = R_{lp} = \partial_s \Gamma_{lp}^s - \partial_p \Gamma_{ls}^s + \Gamma_{lp}^q \Gamma_{qs}^s - \Gamma_{ls}^q \Gamma_{qp}^s$$

Most $l \neq p$ esetek, off-diagonális esetek:

$$l = 0 \quad p = \alpha \rightarrow R_{0\alpha} = \partial_s \Gamma_{0\alpha}^s - \partial_\alpha \Gamma_{0s}^s + \Gamma_{0\alpha}^q \Gamma_{qs}^s - \Gamma_{0s}^q \Gamma_{q\alpha}^s \rightarrow \partial_\alpha \Gamma_{0s}^s \equiv 0$$

$$R_{0\alpha} = \partial_1 \Gamma_{0\alpha}^1 + \partial_2 \Gamma_{0\alpha}^2 + \Gamma_{0\alpha}^1 \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{0\alpha}^1 \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{0\alpha}^1 \Gamma_{10}^0 + \Gamma_{0\alpha}^2 \Gamma_{23}^3 + \Gamma_{0\alpha}^1 \Gamma_{13}^3 + \\ - \Gamma_{00}^1 \Gamma_{1\alpha}^0 - \Gamma_{01}^1 \Gamma_{0\alpha}^1$$

$$R_{0\alpha} = \Gamma_{0\alpha}^1 (\Gamma_{11}^1 + \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{13}^3) + \partial_1 \Gamma_{0\alpha}^1 - \Gamma_{00}^1 \Gamma_{1\alpha}^0 \equiv 0$$

Az utolsó ekvivalencia azért helyes, mert $\alpha = 0$ eseten kívül, ami nem megengedett, a szereplő tagok mind zérusok. Továbbá:

$$R_{00} = \Gamma_{00}^1 (\Gamma_{11}^1 + \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{13}^3) + \partial_1 \Gamma_{00}^1 - \Gamma_{00}^1 \Gamma_{10}^0$$

Számolás...

$$R_{\alpha\beta[\neq\alpha]} = \partial_s \Gamma_{\alpha\beta}^s - \partial_\beta \Gamma_{\alpha s}^s + \Gamma_{\alpha\beta}^q \Gamma_{qs}^s - \Gamma_{\alpha s}^q \Gamma_{q\beta}^s$$

$$\begin{aligned} R_{\alpha\beta[\neq\alpha]} = & \partial_1 \Gamma_{\alpha\beta}^1 + \partial_2 \Gamma_{\alpha\beta}^2 - \partial_\beta (\Gamma_{\alpha 0}^0 + \Gamma_{\alpha 1}^1 + \Gamma_{\alpha 2}^2 + \Gamma_{\alpha 3}^3) + \Gamma_{\alpha\beta}^1 (\Gamma_{10}^0 + \Gamma_{11}^1 + \\ & + \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{13}^3) + \Gamma_{\alpha\beta}^2 (\Gamma_{20}^0 + \Gamma_{21}^1 + \Gamma_{22}^2 + \Gamma_{23}^3) + \Gamma_{\alpha\beta}^3 (\Gamma_{30}^0 + \Gamma_{31}^1 + \Gamma_{32}^2 + \Gamma_{33}^3) + \\ & - \Gamma_{\alpha 0}^0 \Gamma_{0\beta}^0 - \Gamma_{\alpha 1}^0 \Gamma_{0\beta}^1 - \Gamma_{\alpha 2}^0 \Gamma_{0\beta}^2 - \Gamma_{\alpha 3}^0 \Gamma_{0\beta}^3 - \Gamma_{\alpha 0}^1 \Gamma_{1\beta}^0 - \Gamma_{\alpha 1}^1 \Gamma_{1\beta}^1 - \Gamma_{\alpha 2}^1 \Gamma_{1\beta}^2 - \Gamma_{\alpha 3}^1 \Gamma_{1\beta}^3 + \\ & - \Gamma_{\alpha 0}^2 \Gamma_{1\beta}^0 - \Gamma_{\alpha 1}^1 \Gamma_{1\beta}^1 + \Gamma_{\alpha 2}^1 \Gamma_{1\beta}^2 - \Gamma_{\alpha 0}^2 \Gamma_{2\beta}^0 - \Gamma_{\alpha 1}^2 \Gamma_{2\beta}^1 - \Gamma_{\alpha 2}^2 \Gamma_{2\beta}^2 - \Gamma_{\alpha 3}^2 \Gamma_{2\beta}^3 - \Gamma_{\alpha 0}^3 \Gamma_{3\beta}^0 + \\ & - \Gamma_{\alpha 1}^3 \Gamma_{3\beta}^1 - \Gamma_{\alpha 2}^3 \Gamma_{3\beta}^2 - \Gamma_{\alpha 3}^3 \Gamma_{3\beta}^3 \end{aligned}$$

$$R_{\alpha\beta[\neq\alpha]} = \partial_1 \Gamma_{\alpha\beta}^1 + \partial_2 \Gamma_{\alpha\beta}^2 - \partial_\beta (\dots) + \Gamma_{\alpha\beta}^1 (\dots) + \Gamma_{\alpha\beta}^3 \Gamma_{31}^1 - \Gamma_{\alpha 3}^3 \Gamma_{3\beta}^3 + \Gamma_{\alpha\beta}^2 \Gamma_{23}^3$$

$$R_{\alpha\beta[\neq\alpha]} = \begin{cases} \alpha = 1, & \beta = 2 : & -\Gamma_{13}^3 \Gamma_{32}^3 + \Gamma_{12}^2 \Gamma_{23}^3 \\ \alpha = 2, & \beta = 1 : & -\Gamma_{23}^3 \Gamma_{31}^3 + \Gamma_{21}^2 \Gamma_{13}^3 \end{cases}$$

$$R_{\alpha\beta[\neq\alpha]} = \begin{cases} \alpha = 1, & \beta = 2 : & -\frac{1}{r} \frac{1}{th\vartheta} + \frac{1}{r} \frac{1}{tg\vartheta} = 0 \\ \alpha = 2, & \beta = 1 : & -\frac{1}{r} \frac{1}{th\vartheta} + \frac{1}{r} \frac{1}{tg\vartheta} = 0 \end{cases} \equiv 0 \quad \square.$$

Számolás...

Vége áttérhetünk a diagonális elemekre, mivel az összes off-diagonális elem zérus. R_{00} tagra vonatkozó összefüggés már korábban szerepelt, azt felhasználva:

$$\begin{aligned} R_{00} &= \Gamma_{00}^1(\Gamma_{11}^1 + \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{13}^3) + \partial_1 \Gamma_{00}^1 - \Gamma_{00}^1 \Gamma_{10}^0 = \dots \\ &= \frac{1}{2V} U' \left(\frac{1}{2V} V' + \frac{1}{r} + \frac{1}{r} \right) + \partial_r \left(\frac{1}{2V} U' \right) - \frac{1}{2V} U' \frac{1}{2U} U' \\ R_{00} &= \frac{1}{2V} U'' - \frac{1}{4UV} U'^2 - \frac{1}{4V^2} U' V' + \frac{1}{rV} U' \end{aligned}$$

A többi tag kiszámításához visszak kell térni a definiáló mennyiséghez:

$$\begin{aligned} R_{11} &= \partial_s \Gamma_{11}^s - \partial_1 \Gamma_{1s}^s + \Gamma_{11}^q \Gamma_{qs}^s - \Gamma_{1s}^q \Gamma_{q1}^s = \partial_1 \Gamma_{11}^1 - \partial_1 (\Gamma_{11}^1 + \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{13}^3 + \Gamma_{10}^0) + \\ &\quad \Gamma_{11}^1 (\Gamma_{10}^0 + \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{13}^3) - \Gamma_{10}^0 \Gamma_{01}^0 - \Gamma_{1\alpha}^\beta \Gamma_{\beta 1}^\alpha = \dots \end{aligned}$$

Számolás...

$$\begin{aligned}
 \dots &= -\partial_1(\Gamma_{12}^2 + \Gamma_{13}^3 + \Gamma_{10}^0) + \Gamma_{11}^1(\Gamma_{10}^0 + \Gamma_{13}^3) - \Gamma_{10}^0\Gamma_{01}^0 - \Gamma_{12}^2\Gamma_{12}^2 - \Gamma_{13}^3\Gamma_{13}^3 = \\
 &= -\partial_r\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r} + \frac{1}{2U}U'\right) + \frac{1}{2V}V'\left(\frac{1}{2U}U' + \frac{1}{r} + \frac{1}{r}\right) - \frac{1}{2U}U'\frac{1}{2U}U' - \frac{1}{r}\frac{1}{r} - \frac{1}{r}\frac{1}{r} = \\
 &\dots = \frac{1}{4U^2}U'^2 - \frac{1}{2U}U'' + \frac{1}{4UV}U'V' + \frac{1}{rV}V'
 \end{aligned}$$

R_{22} -t hasonlóan felírva, mint az előbbieket:

$$\begin{aligned}
 R_{22} &= \partial_s\Gamma_{22}^s - \partial_2\Gamma_{2s}^s + \Gamma_{22}^q\Gamma_{qs}^s - \Gamma_{2s}^q\Gamma_{q2}^s = \partial_1\Gamma_{22}^1 - \partial_2\Gamma_{23}^3 + \Gamma_{22}^1(\Gamma_{10}^0 + \Gamma_{11}^1 + \\
 &+ \Gamma_{13}^3) - \Gamma_{21}^2\Gamma_{22}^1 - \Gamma_{23}^3\Gamma_{32}^3 = \partial_r\left(-\frac{r}{V}\right) - \left(-\frac{r}{V}\right)\left(\frac{1}{2U}U' + \frac{1}{2V}V' + \frac{1}{r}\right) - \frac{1}{r}\left(-\frac{r}{V}\right) + \\
 &\quad -\partial_\vartheta\left(\frac{1}{tg\vartheta}\right) - \frac{1}{tg\vartheta}\frac{1}{tg\vartheta} = \dots
 \end{aligned}$$

Számolás...

$$\begin{aligned}
 R_{22} &= 1 - \frac{1}{V} + \frac{r}{2V^2} V' - \frac{r}{2UV} U' \\
 R_{33} &= \partial_s \Gamma_{33}^s - \partial_3 \Gamma_{3s}^s + \Gamma_{33}^q \Gamma_{qs}^s - \Gamma_{3s}^q \Gamma_{q3}^s = \partial_1 \Gamma_{33}^1 + \partial_2 \Gamma_{33}^2 + \Gamma_{33}^1 (\Gamma_{10}^0 + \Gamma_{11}^1 + \\
 &\quad + \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{13}^3) - \Gamma_{33}^1 \Gamma_{13}^3 - \Gamma_{33}^2 \Gamma_{23}^3 - \Gamma_{31}^3 \Gamma_{13}^1 - \Gamma_{32}^3 \Gamma_{23}^2 = \partial_r \left(-\frac{r}{V} \sin^2 \vartheta \right) + \\
 &\quad + \partial_\vartheta (-\sin \vartheta \cos \vartheta) + \left(-\frac{r}{V} \sin^2 \vartheta \right) \left(\frac{1}{2U} U' + \frac{1}{2V} V' + \frac{1}{r} + \frac{1}{r} \right) + \\
 &\quad - \left(-\frac{r}{V} \sin^2 \vartheta \right) \frac{1}{r} - (-\sin \vartheta \cos \vartheta) \frac{1}{\operatorname{tg} \vartheta} - \frac{1}{r} \left(-\frac{r}{V} \sin^2 \vartheta \right) + \\
 &\quad - \frac{1}{\operatorname{tg} \vartheta} (-\sin \vartheta \cos \vartheta) = \dots \\
 R_{33} &= \sin^2 \vartheta \left(1 + \frac{r}{2V^2} V' - \frac{r}{2UV} U' - \frac{1}{V} \right) = \sin^2 \vartheta R_{22}
 \end{aligned}$$

Számolás...

- A Ricci-skalár kiszámításához a korábbi képletet kell használni:

- $R = g^{kl} R_{kl} = R_k^k = g^{00} R_{00} + g^{11} R_{11} + g^{22} R_{22} + g^{33} R_{33}$

Ez már egyértelműen csak néhány behelyettesítés és egyszerűsítés, végül:

$$R = \frac{U''}{UV} - \frac{U'V'}{2UV^2} - \frac{U'^2}{2U^2V} - \frac{2V'}{rV+2} + \frac{2}{r^2}\left(\frac{1}{V} - 1\right) + \frac{2U'}{rUV}$$

Ezután következhet a behelyettesítés az Einstein-egyenletekbe. Az első egyenlet a következő:

$$R_{00} - \frac{g_{00}}{2} R = 0$$

Amiből a következő összefüggést kapjuk:

$$\frac{V'}{V} = \frac{1}{r}(1 - V)$$

Számolás...

A következő egyenletek rendre:

$$\begin{aligned}R_{11} - \frac{g_{11}}{2}R &= 0 \quad \rightarrow \quad \frac{1}{r}(1 - V) + \frac{U'}{U} = 0 \\R_{22} - \frac{g_{22}}{2}R &= 0 \quad \rightarrow \quad \frac{U'}{U} + \frac{rU''}{U} - \frac{rU'V'}{2UV} - \frac{rU'^2}{2U^2} - \frac{V'}{V} = 0 \\R_{33} - \frac{g_{33}}{2}R &= R_{22}\sin^2\vartheta - \frac{g_{22}\sin^2\vartheta}{2}R \equiv R_{22} - \frac{g_{22}}{2}R = 0 \quad \rightarrow \quad \dots\end{aligned}$$

A kapott differenciál-egyenletek megoldási menete. Először az első egyenletből kapott egyenletből meghatározható $V(r)$ függvény, mivel az egy elsőrendő, szeparálható differenciál-egyenlet, ezután ez behelyettesíthető a második egyenletbe, amiből ezáltal megkapható $U(r)$ függvény, mivel az utóbbi differenciál-egyenlet is szeparálható elsőrendűvé redukálódik. Az utolsó egyenletet ellenőrzésre lehet használni. Ezt mellőzve az irodalommal vethetőek össze az eredmények.

Megoldás

$$\begin{aligned}\frac{V'}{V} &= \frac{1}{r}(1 - V) \\ \int \frac{1}{r} dr &= \int \frac{1}{V - V^2} dV \\ \ln(r) + \ln(C') &= \ln\left(\frac{V}{1 - V}\right) \\ \rightarrow V(r) &= \frac{1}{1 - \frac{C}{r}}\end{aligned}$$

Ahol C -t pozitív mennyiség. Az eredményt behelyettesítve az alábbi egyenletbe

$$\frac{1}{r}(1 - V) + \frac{U'}{U} = 0$$

Megoldás

$$\begin{aligned}\frac{1}{r}\left(1 - \frac{1}{1 - \frac{C}{r}}\right) + \frac{U'}{U} &= 0 \\ \int \frac{C}{r^2 - Cr} dr &= \int \frac{1}{U} dU \\ \rightarrow U &= 1 - \frac{C}{r}\end{aligned}$$

Azaz eljutottunk a célig. Felírva az ívelemnégyszetet, most már csak a C mennyiséget kell meghatározni, mivel az egyenletben nem lehet szabad paraméter.

$$ds^2 = \left(1 - \frac{C}{r}\right) dt^2 - \left(\frac{1}{1 - \frac{C}{r}}\right) dr^2 - r^2 d\vartheta^2 - r^2 \sin^2 \vartheta d\varphi^2$$

Megoldás

Ha M nagyon kicsi, akkor feltételezhető, hogy a metrikus tenzor csak infinitezimálisan tér el a Minkowski-síkban értelmezett metrikus tenzortól

$$g_{kl} = \eta_{kl} - h_{kl}$$

ahol h_{kl} minden tagja infinitezimális.

Vegyünk egy nagyon lassan mozgó részecskét, amelyre $\frac{dx^i}{d\tau} \ll \frac{dt}{d\tau}$, ekkor a geodetikusra felírt egyenlet:

$$\begin{aligned}\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} - \Gamma_{00}^\mu \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 &= 0 \\ \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} - \frac{1}{2} g^{\mu\lambda} (\partial_0 g_{\lambda 0} + \partial_0 g_{\lambda 0} - \partial_\lambda g_{00}) \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 &= 0\end{aligned}$$

Alkalmazva a közelítést $g^{\mu\lambda} \rightarrow \eta^{\mu\lambda}$ és $\mu = 0$ - ra felírva az egyenletet szimplán az kapható, hogy $\frac{d^2 t}{d\tau^2} = 0$ azaz a τ szerinti első deriváltja konstans a nulladik koordinátának.

Megoldás

A többi esetben:

$$\frac{d^2 x^\alpha}{d\tau^2} + \frac{1}{2} \eta^{\alpha\beta} \partial_\beta \partial_\beta h_{00} \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^2 = 0$$

Ahol $\eta^{\alpha\beta}$ a Minkowski-síkban vett metrikus tenzor 3×3 -as, azaz a 3×3 -as egységmátrix (-1) -szerese. Ekkor az egyenlet ide egyszerűsödik:

$$\frac{d^2 x^\alpha}{d\tau^2} = \frac{1}{2} \partial_\alpha h_{00} \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^2 \quad \sim \quad \ddot{x} = -\nabla \Phi$$

Látjuk, hogy majdcsak nem visszakaptuk a Newton-törvényt, ebből feltételezhetjük, hogy M esetén $h_{00} = -2\Phi$, ahol Φ a Newton-féle gravitációs potenciál, azaz $\Phi = -\frac{GM}{r}$.

Mivel $g_{00} = 1 - \frac{c}{r} = 1 - h_{00} = 1 + 2\Phi = 1 - \frac{2GM}{r}$, ebből következik, hogy ($c = 1$):

$$C = R_s = \frac{2GM}{c^2}$$

Megoldás

Az előbb kapott R_s mennyiség a Schwarzschild-sugár. Ezzel felírva az ívelemnégyzetet:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{R_s}{r}\right) dt^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{R_s}{r}} - r^2 d\vartheta^2 - r^2 \sin^2 \vartheta d\varphi^2$$

Jól látható, hogy $r \rightarrow +\infty$ -nél visszkapjuk, a Minkowski-sík megoldást. \square

Eddington-Finkelstein metrika

A cél, hogy analitikusan elfolytassuk a megoldást az R sugáron belül is (nullához tartva), ehhez definálva r^* változót a következő módon:

$$r^* = \int \frac{1}{1 - \frac{R_s}{r}}$$

és legyen itt $x = r - R_s$, ekkor az integrálra

$$r^* = r - R_s + R_s \ln(r - R_s)$$

ebből $-R_s$ konstans elhagyva (avagy a megoldást választva, ahol $+C$ éppen kiejti). Ekkor

$$r^* = r + R_s \ln(r - R_s)$$

Bevezetve a $v = ct - r^* = t - r^*$ avanzsált koordinátát

$$dv = dt - dr + R_s \frac{1}{r - R_s} dr$$

Eddington-Finkelstein metrika

Az előbbi dv mennyiséggel felírva az ívelemnégyszetet, egyszerűsítések után:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{R_s}{r}\right)dv^2 - \frac{4R_s}{r}drdv + 2\left(1 - \frac{R_s}{r}\right)drdv - r^2d\vartheta^2 - r^2\sin^2\vartheta d\varphi^2$$