Az Einstein-egyenletek Schwarzschild-megoldása

Olar Alex

Eötvös Loránd Tudományegyetem
Fizika BSc III.

A klasszikus térelmélet elemei szeminárium, 2017. december

Vázlat

- Történeti bevezető
- A probléma megfogalmazása
- Számolás
- Összefoglalás
- Hivatkozások

Történeti bevezető

Karl
Schwarzschild (1873 - 1916) német fizikus volt. Ő állt elő az Einstein-egyenletek első egzakt megoldásával, méghozzá a gömbszimmetrikus, M tömegű, R sugarú, nyugalomban lévő testre vonatkozólag oldotta meg a téregyenleteket.
Mindezt az első világháború alatt,
a frontszolgálat közben sikerült kiviteleznie.

ábra: Karl Schwarzschild

A probléma megfogalmazása

`Milyen metrikájú a téridő egy gömbszimmetrikus, R sugarú, M tömegű, sztatikus testen kívül?`

A gömbkoordinátákkal kifejezve az ívemelem négyzet Minkowski-térben a következő alakot ölti (c = 1):

$$ds^2 = dt^2 - dr^2 - r^2 d\vartheta^2 - r^2 sin^2\vartheta d\varphi^2$$

Azaz a síkban vett metrikus tenzor a következő:

$$\eta = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -r^2 & \\ & & & -r^2 sin^2\vartheta \end{pmatrix}$$

Ahol figyelni kell arra, hogy a szignatúra (+,-,-,-) legyen.

A probléma megfogalmazása

Most ezt kellene a megfelelő módon módosítani:

$$g = \begin{pmatrix} U & & & \\ & -V & & \\ & & -Wr^2 & \\ & & & -Xr^2 sin^2\vartheta \end{pmatrix}$$

Ahol kezdetben U,V,W,X függvények az $(r, \vartheta, \varphi, t)$ változók általános függvényei. Felhasználva a probléma speciális tulajdonságait:

- gömbszimmetria alatt azt lehet érteni, hogy a metrikus tenzorban kiemelt U,V,W,X függvények nem függnek (ϑ, φ) változóktól, tehát csakis az r mennyiség függvénye, valamint az.
- sztatikus problémáról van szó, így feltehető, hogy az időfüggés elhagyható

A probléma megfogalmazása

- a vákuum-megoldás keresése közben, az objektumon kívül az energia-impulzus tenzor azonosan nulla : $T_{kl} \equiv 0$
- Schwarzzschild eredetileg nem így írta fel az egyenleteket. Ő módosított gömbipolár-koordinátákat vezetett be

$$x^1 = \frac{r^3}{2} \quad x^2 = -cos\vartheta \quad x^3 = \varphi \quad x^4 = t$$

  - az ebből ds^2-re kapott egyenletből származtatható a mostani esetre vonatkoztatva, hogy elegendő a $W = X = 1$ esetet vizsgálni
- azaz az ívelemnégyzetre a következő kifejezést kapjuk

$$ds^2 = U(r)dt^2 - V(r)dr^2 - r^2 d\vartheta^2 - r^2 sin^2\vartheta d\varphi^2$$

A probléma megfogalmazása

Ahol a metrikus tenzor inverze a következő (az inverz jelölése ugyanaz):

$$g = G = \begin{pmatrix} \frac{1}{U} & & & \\ & -\frac{1}{V} & & \\ & & -\frac{1}{r^2} & \\ & & & -\frac{1}{r^2 sin^2 \vartheta} \end{pmatrix}$$

Hiszen a $g_{kl}g^{kl} = 4$ egyenlet teljesül, ahol a latin ábécé betűivel nullától háromig lévő indexeket jelölöm, míg a görög ábécé betűivel az egytől háromig terjedőeket, tehát $k \in \{0, 1, 2, 3\}$, $\alpha \in \{1, 2, 3\}$

A továbbiakban is mindig ezt a konvenciót használja a prezentáció.

A probléma megfogalmazása

A megoldandó probléma tehát az Einstein-egyenletek (a kozmológiai állandó zérus) megoldása egy gömbszimmetrikus, sztatikus objektumon kívül.

$$E_{kl} = G_{kl} = R_{kl} - \frac{R}{2} g_{kl} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{kl} = 0$$

Amely egyenletben c^4 tag csak hagyománytiszteletből szerepel (c = 1). R_{kl} a Ricci-tenzor, amit a Riemann-féle görbületi tenzorból származtatható (első és harmadik index összeejtésével például), R pedig a Ricci-skalár mennyiség, amely a Ricci-tenzor spurja.

E_{kl} vagy az irodalomban gyakrabban G_{kl} az Einstein-tenzor, G pedig a Newton féle gravitációs konstans.

A probléma megfogalmazása

Ahol a metrikus tenzor inverze a következő (az inverz jelölése ugyanaz):

$$g = G = \begin{pmatrix} \frac{1}{U} & & & \\ & -\frac{1}{V} & & \\ & & -\frac{1}{r^2} & \\ & & & -\frac{1}{r^2 sin^2 \vartheta} \end{pmatrix}$$

Hiszen a $g_{kl} g^{kl} = 4$ egyenlet teljesül, ahol a latin ábécé betűivel nullától háromig lévő indexeket jelölöm, míg a görög ábécé betűivel az egytől háromig terjedőeket, tehát $k \in \{0, 1, 2, 3\}$, $\alpha \in \{1, 2, 3\}$

A továbbiakban is mindig ezt a konvenciót használja a prezentáció.

A probléma megfogalmazása

- Riemann - tenzor
  - $R^k_{lmp} = \partial_m \Gamma^k_{lp} - \partial_p \Gamma^k_{lm} + \Gamma^q_{lp}\Gamma^k_{qm} - \Gamma^q_{lm}\Gamma^k_{qp}$
- Ricci - tenzor
  - $R^s_{lsp} = R_{lp} = \partial_s \Gamma^s_{lp} - \partial_p \Gamma^s_{ls} + \Gamma^q_{lp}\Gamma^s_{qs} - \Gamma^q_{ls}\Gamma^s_{qp}$
- Ricci - skalár
  - $g^{kl}R_{kl} = R^k_k$

Ezeken felül még ki kell használni, hogy a Christoffel-szimbólumokat a metrikus tenzorból kapható.

$$\Gamma^k_{lm} = \frac{1}{2} g^{ks}(\partial_m g_{sl} + \partial_l g_{sm} - \partial_s g_{lm})$$

A későbbiekben felhasználásra kerül, hogy a Γ mennyiségek az alsó két indexükben torzió mentesek, azaz szimmetrikusak.

Számolás

`Meg kell határozni a` Γ `mennyiségek (nem tenzor) minden komponensét.` Ez rengeteg számítást igényelne (64 elem, ha nem vesszük a torziómentességet), tehát vagy gondolkozunk vagy használunk egy szimbolikus nyelvet, amely képes ilyen számolásokra (Wolfram Mathematica).
A következőket kell figyelembe venni:

- torziómentesség $\Gamma^l_{ik} = \Gamma^l_{ki}$
- minden ∂_0 deriváltja a metrikus tenzornak azonosan nulla $\partial_0 g_{ik} \equiv 0$
- a metrikus tenzor nem diagonális elemei azonosan nullát adnak

Ezen információk birtokában...

Számolás

$$k = 0 \rightarrow \Gamma^0_{lm} = \frac{1}{2} g^{0s}(\partial_m g_{sl} + \partial_l g_{sm} - \partial_s g_{lm})$$

Ezután, mivel a metrikus tenzor diagonális csak $s = 0$ esetben nem azonosan nulla megoldást kapunk.

$$\Gamma^0_{lm} = \frac{1}{2} g^{00}(\partial_m g_{0l} + \partial_l g_{0m} - \partial_0 g_{lm}) \rightarrow \partial_0 g_{lm} \equiv 0$$

$$l = 0 \rightarrow \Gamma^0_{0m} = \frac{1}{2} g^{00}(\partial_m g_{00} + \partial_0 g_{0m})\partial_0 g_{0m} \equiv 0$$

$$\Gamma^0_{0m} = \delta^1_m \frac{1}{2} g^{00} \partial_1 g_{00} = \delta^1_m \frac{1}{2} \frac{1}{U} \partial_r U$$

Azaz az első két nem nulla elem

$$\Gamma^0_{01} = \Gamma^0_{10} = \frac{U'}{2U}$$

$$\Gamma^0_{ij} \equiv 0 \quad amikor \quad \{i, j\} \neq \{0, 1\} \quad vagy \quad \{1, 0\}$$

Számolás

$$k = 1 \rightarrow \Gamma^1_{lm} = \frac{1}{2} g^{1s} (\partial_m g_{sl} + \partial_l g_{sm} - \partial_s g_{lm})$$

Ezután, mivel a metrikus tenzor diagonális csak $s = 1$ esetben nem azonosan nulla megoldást kapunk.

$$\Gamma^1_{lm} = \frac{1}{2} g^{11} (\partial_m g_{1l} + \partial_l g_{1m} - \partial_1 g_{lm})$$

$$l = 0 \rightarrow \Gamma^1_{0m} = -\frac{1}{2} g^{11} (\partial_1 g_{0m}) = -\delta^m_0 \frac{1}{2} g^{11} \partial_m g_{00}$$

$$l = 1 \rightarrow \Gamma^1_{1m} = \frac{1}{2} g^{11} (\partial_m g_{11} + \partial_1 g_{1m} - \partial_1 g_{1m}) = \delta^m_1 \frac{1}{2} g^{11} \partial_m g_{11}$$

$$l = 2 \quad \Gamma^1_{2m} = \frac{1}{2} g^{11} (\partial_m g_{12} + \partial_2 g_{1m} - \partial_1 g_{2m}) \rightarrow -\delta^m_2 \frac{1}{2} g^{11} \partial_m g_{22}$$

$$l = 3 \quad \Gamma^1_{3m} = \frac{1}{2} g^{11} (\partial_m g_{13} + \partial_3 g_{1m} - \partial_1 g_{3m}) \rightarrow -\delta^m_3 \frac{1}{2} g^{11} \partial_m g_{33}$$

$$\Gamma^1_{00} = \frac{U'}{2V} \quad \Gamma^1_{11} = \frac{V'}{2V} \quad \Gamma^1_{22} = -\frac{r}{V} \quad \Gamma^1_{33} = -\frac{r sin^2 \vartheta}{V}$$

Számolás

$$k = 2 \rightarrow \Gamma^2_{lm} = \frac{1}{2} g^{2s}(\partial_m g_{sl} + \partial_l g_{sm} - \partial_s g_{lm})$$

Ezután $s = 2$

$$\Gamma^2_{lm} = \frac{1}{2} g^{11}(\partial_m g_{2l} + \partial_l g_{2m} - \partial_2 g_{lm})$$

$$l = 2 \rightarrow \Gamma^2_{2m} = \frac{1}{2} g^{22}(\partial_m g_{22}) = -\delta^m_1 \frac{1}{2} g^{22} \partial_m g_{00}$$

$$l = 1 \rightarrow \Gamma^1_{1m} = \frac{1}{2} g^{11}(\partial_m g_{11} + \partial_1 g_{1m} - \partial_1 g_{1m}) = \delta^1_m \frac{1}{2} g^{11} \partial_1 g_{11}$$

$$\Gamma^2_{21} = \Gamma^2_{12} = \frac{1}{r}$$

Az első képleten látható, hogy a többi esetben csak az utolsó tag marad meg ahol $\partial_2 = \partial_\vartheta$ - tól csak g_{33} függ, tehát:

$$l = 3 \quad m = 3 \rightarrow \Gamma^2_{33} = \frac{1}{2} g^{22}(\partial_3 g_{33}) = -sin\vartheta cos\vartheta$$

Számolás

$$k = 3 \to \Gamma^3_{lm} = \frac{1}{2} g^{3s}(\partial_m g_{sl} + \partial_l g_{sm} - \partial_s g_{lm})$$

Ezután $s = 3$

$$\Gamma^3_{lm} = \frac{1}{2} g^{33}(\partial_m g_{3l} + \partial_l g_{3m} - \partial_3 g_{lm})$$

$$l = 3 \to \Gamma^3_{3m} = \frac{1}{2} g^{33}(\partial_m g_{33}) \to \frac{1}{2} g^{33}\partial_1 g_{33} \quad vagy \quad \frac{1}{2} g^{33}\partial_2 g_{33}$$

$$\Gamma^3_{31} = \Gamma^3_{13} = \frac{1}{r}$$

$$\Gamma^3_{32} = \Gamma^3_{23} = \frac{1}{tg\vartheta}$$

A többi tag mind nulla, mivel az első egyenletre visszanézve látható, hogy ∂_3-tól egyik tag sem függhet, valamint a többi tag pedig figyelembe lett véve.

Számolás

Szerencsére 'csak' ennyi tag nem nulla, mint ahogy az látható volt, ezeket összefoglalva:

$$\Gamma^1_{00} = \frac{U'}{2V} \qquad \Gamma^1_{11} = \frac{V'}{2V}$$

$$\Gamma^1_{22} = -\frac{r}{V} \qquad \Gamma^1_{33} = -\frac{rsin^2\vartheta}{V}$$

$$\Gamma^2_{21} = \Gamma^2_{12} = \frac{1}{r} \quad \Gamma^2_{33} = -sin\vartheta cos\vartheta$$

$$\Gamma^3_{31} = \Gamma^3_{13} = \frac{1}{r} \qquad \Gamma^3_{32} = \Gamma^3_{23} = \frac{1}{tg\vartheta}$$

$$\Gamma^0_{01} = \Gamma^0_{10} = \frac{U'}{2U}$$

Ez 13 tag, most ezeknek a segítségével kell kiszámolni a Ricci-tenzort.

Számolás

Korábban láttuk

$$R^s_{lsp} = R_{lp} = \partial_s \Gamma^s_{lp} - \partial_p \Gamma^s_{ls} + \Gamma^q_{lp}\Gamma^s_{qs} - \Gamma^q_{ls}\Gamma^s_{qp}$$

Most $l \neq p$ esetek, off-diagonális esetek:

$$l = 0 \quad p = \alpha \to R_{0\alpha} = \partial_s \Gamma^s_{0\alpha} - \partial_\alpha \Gamma^s_{0s} + \Gamma^q_{0\alpha}\Gamma^s_{qs} - \Gamma^q_{0s}\Gamma^s_{q\alpha} \to \partial_\alpha \Gamma^s_{0s} \equiv 0$$

$$R_{0\alpha} = \partial_1 \Gamma^1_{0\alpha} + \partial_2 \Gamma^2_{0\alpha} + \Gamma^1_{0\alpha}\Gamma^1_{11} + \Gamma^1_{0\alpha}\Gamma^2_{12} + \Gamma^1_{0\alpha}\Gamma^0_{10} + \Gamma^2_{0\alpha}\Gamma^3_{23} + \Gamma^1_{0\alpha}\Gamma^3_{13} +$$

$$-\Gamma^1_{00}\Gamma^0_{1\alpha} - \Gamma^1_{01}\Gamma^1_{0\alpha}$$

$$R_{0\alpha} = \Gamma^1_{0\alpha}(\Gamma^1_{11} + \Gamma^2_{12} + \Gamma^3_{13}) + \partial_1 \Gamma^1_{0\alpha} - \Gamma^1_{00}\Gamma^0_{1\alpha} \equiv 0$$

Az utolsó ekvivalencia azért helyes, mert $\alpha = 0$ eseten kívül, ami nem megengedett, a szereplő tagok mind zérusok. Továbbá:

$$R_{00} = \Gamma^1_{00}(\Gamma^1_{11} + \Gamma^2_{12} + \Gamma^3_{13}) + \partial_1 \Gamma^1_{00} - \Gamma^1_{00}\Gamma^0_{10}$$

Számolás...

$$R_{\alpha\beta[\neq\alpha]} = \partial_s \Gamma^s_{\alpha\beta} - \partial_\beta \Gamma^s_{\alpha s} + \Gamma^q_{\alpha\beta}\Gamma^s_{qs} - \Gamma^q_{\alpha s}\Gamma^s_{q\beta}$$

$$\begin{gathered}
R_{\alpha\beta[\neq\alpha]} = \partial_1 \Gamma^1_{\alpha\beta} + \partial_2 \Gamma^2_{\alpha\beta} - \partial_\beta(\Gamma^0_{\alpha 0} + \Gamma^1_{\alpha 1} + \Gamma^2_{\alpha 2} + \Gamma^3_{\alpha 3}) + \Gamma^1_{\alpha\beta}(\Gamma^0_{10} + \Gamma^1_{11} + \\
+\Gamma^2_{12} + \Gamma^3_{13}) + \Gamma^2_{\alpha\beta}(\Gamma^0_{20} + \Gamma^1_{21} + \Gamma^2_{22} + \Gamma^3_{23}) + \Gamma^3_{\alpha\beta}(\Gamma^0_{30} + \Gamma^1_{31} + \Gamma^2_{32} + \Gamma^3_{33}) + \\
-\Gamma^0_{\alpha 0}\Gamma^0_{0\beta} - \Gamma^0_{\alpha 1}\Gamma^1_{0\beta} - \Gamma^0_{\alpha 2}\Gamma^2_{0\beta} - \Gamma^0_{\alpha 3}\Gamma^3_{0\beta} - \Gamma^1_{\alpha 0}\Gamma^0_{1\beta} - \Gamma^1_{\alpha 1}\Gamma^1_{1\beta} - \Gamma^1_{\alpha 2}\Gamma^2_{1\beta} - \Gamma^1_{\alpha 3}\Gamma^3_{1\beta} + \\
-\Gamma^2_{\alpha 0}\Gamma^0_{1\beta} - \Gamma^1_{\alpha 1}\Gamma^1_{1\beta} + \Gamma^1_{\alpha 2}\Gamma^2_{1\beta} - \Gamma^2_{\alpha 0}\Gamma^0_{2\beta} - \Gamma^2_{\alpha 1}\Gamma^1_{2\beta} - \Gamma^2_{\alpha 2}\Gamma^2_{2\beta} - \Gamma^2_{\alpha 3}\Gamma^3_{2\beta} - \Gamma^3_{\alpha 0}\Gamma^0_{3\beta} + \\
-\Gamma^3_{\alpha 1}\Gamma^1_{3\beta} - \Gamma^3_{\alpha 2}\Gamma^2_{3\beta} - \Gamma^3_{\alpha 3}\Gamma^3_{3\beta}
\end{gathered}$$

$$R_{\alpha\beta[\neq\alpha]} = \partial_1 \Gamma^1_{\alpha\beta} + \partial_2 \Gamma^2_{\alpha\beta} - \partial_\beta(\ldots) + \Gamma^1_{\alpha\beta}(\ldots) + \Gamma^3_{\alpha\beta}\Gamma^1_{31} - \Gamma^3_{\alpha 3}\Gamma^3_{3\beta} + \Gamma^2_{\alpha\beta}\Gamma^3_{23}$$

$$R_{\alpha\beta[\neq\alpha]} = \begin{cases} \alpha = 1, \quad \beta = 2: & -\Gamma^3_{13}\Gamma^3_{32} + \Gamma^2_{12}\Gamma^3_{23} \\ \alpha = 2, \quad \beta = 1: & -\Gamma^3_{23}\Gamma^3_{31} + \Gamma^2_{21}\Gamma^3_{23} \end{cases}$$

$$R_{\alpha\beta[\neq\alpha]} = \begin{cases} \alpha = 1, \quad \beta = 2: & -\frac{1}{r}\frac{1}{th\vartheta} + \frac{1}{r}\frac{1}{tg\vartheta} = 0 \\ \alpha = 2, \quad \beta = 1: & -\frac{1}{r}\frac{1}{th\vartheta} + \frac{1}{r}\frac{1}{tg\vartheta} = 0 \end{cases} \quad \equiv \quad 0 \quad \square.$$