

Az Einstein-egyenletek Schwarzschild-megoldása

Olar Alex

Eötvös Loránd Tudományegyetem
Fizika BSc III.

A klasszikus térelmélet elemei szeminárium, 2017. december

Vázlat

- Történeti bevezető
- A probléma megfogalmazása
- Számolás
- Összefoglalás
- Hivatkozások

Történeti bevezető

Karl

Schwarzschild (1873 - 1916) német fizikus volt. Ő állt elő az Einstein-egyenletek első egzakt megoldásával, méghozzá a gömbszimmetrikus, M tömegű, R sugarú, nyugalomban lévő testre vonatkozólag oldotta meg a téregyenleteket. Mindezt az első világháború alatt, a frontszolgálat közben sikerült kiviteleznie.

ábra: Karl Schwarzschild



A probléma megfogalmazása

Milyen metrikájú a téridő egy gömbszimmetrikus, R sugarú, M tömegű, sztatikus testen kívül?

A gömbkoordinátákkal kifejezve az ívemelem négyzet Minkowski-térben a következő alakot ölti ($c = 1$):

$$ds^2 = dt^2 - dr^2 - r^2 d\vartheta^2 - r^2 \sin^2 \vartheta d\varphi^2$$

Azaz a síkban vett metrikus tenzor a következő:

$$\eta = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -r^2 & \\ & & & -r^2 \sin^2 \vartheta \end{pmatrix}$$

Ahol figyelni kell arra, hogy a szignatúra $(+,-,-,-)$ legyen.

A probléma megfogalmazása

Most ezt kellene a megfelelő módon módosítani:

$$g = \begin{pmatrix} U & & & \\ & -V & & \\ & & -Wr^2 & \\ & & & -Xr^2 \sin^2 \vartheta \end{pmatrix}$$

Ahol kezdetben U, V, W, X függvények az $(r, \vartheta, \varphi, t)$ változók általános függvényei. Felhasználva a probléma speciális tulajdonságait:

- gömbszimmetria alatt azt lehet érteni, hogy a metrikus tenzorban kiemelt U, V, W, X függvények nem függnek (ϑ, φ) változóktól, tehát csakis az r mennyiség függvénye, valamint az.
- sztatikus problémáról van szó, így feltehető, hogy az időfüggés elhagyható

A probléma megfogalmazása

- a vákuum-megoldás keresése közben, az objektumon kívül az energia-impulzus tenzor azonosan nulla : $T_{kl} \equiv 0$
- Schwarzschild eredetileg nem így írta fel az egyenleteket. Ő módosított gömbipolár-koordinátákat vezetett be

$$x^1 = \frac{r^3}{2} \quad x^2 = -\cos\vartheta \quad x^3 = \varphi \quad x^4 = t$$

- az ebből ds^2 -re kapott egyenletből származtatható a mostani esetre vonatkoztatva, hogy elegendő a $W = X = 1$ esetet vizsgálni
- azaz az ívelemnégyzetre a következő kifejezést kapjuk

$$ds^2 = U(r)dt^2 - V(r)dr^2 - r^2d\vartheta^2 - r^2\sin^2\vartheta d\varphi^2$$

A probléma megfogalmazása

Ahol a metrikus tenzor inverze a következő (az inverz jelölése ugyanaz):

$$g = G = \begin{pmatrix} \frac{1}{U} & & & \\ & -\frac{1}{V} & & \\ & & -\frac{1}{r^2} & \\ & & & -\frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \end{pmatrix}$$

Hiszen a $g_{kl}g^{kl} = 4$ egyenlet teljesül, ahol a latin ábécé betűivel nullától háromig lévő indexeket jelölöm, míg a görög ábécé betűivel az egytől háromig terjedőeket, tehát $k \in \{0, 1, 2, 3\}$, $\alpha \in \{1, 2, 3\}$

A továbbiakban is mindig ezt a konvenciót használja a prezentáció.

A probléma megfogalmazása

A megoldandó probléma tehát az Einstein-egyenletek (a kozmológiai állandó zérus) megoldása egy gömbszimmetrikus, sztatikus objektumon kívül.

$$E_{kl} = G_{kl} = R_{kl} - \frac{R}{2}g_{kl} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{kl} = 0$$

Amely egyenletben c^4 tag csak hagyománytiszteletből szerepel ($c = 1$). R_{kl} a Ricci-tenzor, amit a Riemann-féle görbületi tenzorból származtatható (első és harmadik index összeajtásával például), R pedig a Ricci-skalár mennyiség, amely a Ricci-tenzor spurja.

E_{kl} vagy az irodalomban gyakrabban G_{kl} az Einstein-tenzor, G pedig a Newton féle gravitációs konstans.

A probléma megfogalmazása

Ahol a metrikus tenzor inverze a következő (az inverz jelölése ugyanaz):

$$g = G = \begin{pmatrix} \frac{1}{U} & & & \\ & -\frac{1}{V} & & \\ & & -\frac{1}{r^2} & \\ & & & -\frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \end{pmatrix}$$

Hiszen a $g_{kl}g^{kl} = 4$ egyenlet teljesül, ahol a latin ábécé betűivel nullától háromig lévő indexeket jelölöm, míg a görög ábécé betűivel az egytől háromig terjedőeket, tehát $k \in \{0, 1, 2, 3\}$, $\alpha \in \{1, 2, 3\}$

A továbbiakban is mindig ezt a konvenciót használja a prezentáció.

A probléma megfogalmazása

■ Riemann - tenzor

$$\square R_{lmp}^k = \partial_m \Gamma_{lp}^k - \partial_p \Gamma_{lm}^k + \Gamma_{lp}^q \Gamma_{qm}^k - \Gamma_{lm}^q \Gamma_{qp}^k$$

■ Ricci - tenzor

$$\square R_{lsp}^s = R_{lp} = \partial_s \Gamma_{lp}^s - \partial_p \Gamma_{ls}^s + \Gamma_{lp}^q \Gamma_{qs}^s - \Gamma_{ls}^q \Gamma_{qp}^s$$

■ Ricci - skalár

$$\square g^{kl} R_{kl} = R_k^k$$

Ezeket felül még ki kell használni, hogy a Christoffel-szimbólumokat a metrikus tenzorból kapható.

$$\Gamma_{lm}^k = \frac{1}{2} g^{ks} (\partial_m g_{sl} + \partial_l g_{sm} - \partial_s g_{lm})$$

A későbbiekben felhasználásra kerül, hogy a Γ mennyiségek az alsó két indexükben torzió mentesek, azaz szimmetrikusak.

Számolás

Meg kell határozni a Γ mennyiségek (nem tenzor) minden komponensét. Ez rengeteg számítást igényelne (64 elem, ha nem vesszük a torziómentességet), tehát vagy gondolkozunk vagy használunk egy szimbolikus nyelvet, amely képes ilyen számolásokra (Wolfram Mathematica).

A következőket kell figyelembe venni:

- torziómentesség $\Gamma_{ik}^l = \Gamma_{ki}^l$
- minden ∂_0 deriváltja a metrikus tenzornak azonosan nulla $\partial_0 g_{ik} \equiv 0$
- a metrikus tenzor nem diagonális elemei azonosan nullát adnak

Ezen információk birtokában...

Számolás

$$k = 0 \rightarrow \Gamma_{lm}^0 = \frac{1}{2} g^{0s} (\partial_m g_{sl} + \partial_l g_{sm} - \partial_s g_{lm})$$

Ezután, mivel a metrikus tenzor diagonális csak $s = 0$ esetben nem azonosan nulla megoldást kapunk.

$$\Gamma_{lm}^0 = \frac{1}{2} g^{00} (\partial_m g_{0l} + \partial_l g_{0m} - \partial_0 g_{lm}) \rightarrow \partial_0 g_{lm} \equiv 0$$

$$l = 0 \rightarrow \Gamma_{0m}^0 = \frac{1}{2} g^{00} (\partial_m g_{00} + \partial_0 g_{0m}) \partial_0 g_{0m} \equiv 0$$

$$\Gamma_{0m}^0 = \delta_m^1 \frac{1}{2} g^{00} \partial_1 g_{00} = \delta_m^1 \frac{1}{2} \frac{1}{U} \partial_r U$$

Azaz az első két nem nulla elem

$$\Gamma_{01}^0 = \Gamma_{10}^0 = \frac{U'}{2U}$$

$$\Gamma_{ij}^0 \equiv 0 \quad \text{amikor} \quad \{i, j\} \neq \{0, 1\} \quad \text{vagy} \quad \{1, 0\}$$

Számolás

$$k = 1 \rightarrow \Gamma_{lm}^1 = \frac{1}{2}g^{1s}(\partial_m g_{sl} + \partial_l g_{sm} - \partial_s g_{lm})$$

Ezután, mivel a metrikus tenzor diagonális csak $s = 1$ esetben nem azonosan nulla megoldást kapunk.

$$\Gamma_{lm}^1 = \frac{1}{2}g^{11}(\partial_m g_{1l} + \partial_l g_{1m} - \partial_1 g_{lm})$$

$$l = 0 \rightarrow \Gamma_{0m}^1 = -\frac{1}{2}g^{11}(\partial_1 g_{0m}) = -\delta_0^m \frac{1}{2}g^{11}\partial_m g_{00}$$

$$l = 1 \rightarrow \Gamma_{1m}^1 = \frac{1}{2}g^{11}(\partial_m g_{11} + \partial_1 g_{1m} - \partial_1 g_{1m}) = \delta_1^m \frac{1}{2}g^{11}\partial_m g_{11}$$

$$l = 2 \quad \Gamma_{2m}^1 = \frac{1}{2}g^{11}(\partial_m g_{12} + \partial_2 g_{1m} - \partial_1 g_{2m}) \rightarrow -\delta_2^m \frac{1}{2}g^{11}\partial_m g_{22}$$

$$l = 3 \quad \Gamma_{3m}^1 = \frac{1}{2}g^{11}(\partial_m g_{13} + \partial_3 g_{1m} - \partial_1 g_{3m}) \rightarrow -\delta_3^m \frac{1}{2}g^{11}\partial_m g_{33}$$

$$\Gamma_{00}^1 = \frac{U'}{2V} \quad \Gamma_{11}^1 = \frac{V'}{2V} \quad \Gamma_{22}^1 = -\frac{r}{V} \quad \Gamma_{33}^1 = -\frac{r\sin^2\vartheta}{V}$$

Számolás

$$k = 2 \rightarrow \Gamma_{lm}^2 = \frac{1}{2}g^{2s}(\partial_m g_{sl} + \partial_l g_{sm} - \partial_s g_{lm})$$

Ezután $s = 2$

$$\Gamma_{lm}^2 = \frac{1}{2}g^{11}(\partial_m g_{2l} + \partial_l g_{2m} - \partial_2 g_{lm})$$

$$l = 2 \rightarrow \Gamma_{2m}^2 = \frac{1}{2}g^{22}(\partial_m g_{22}) = -\delta_1^m \frac{1}{2}g^{22}\partial_m g_{00}$$

$$l = 1 \rightarrow \Gamma_{1m}^1 = \frac{1}{2}g^{11}(\partial_m g_{11} + \partial_1 g_{1m} - \partial_1 g_{1m}) = \delta_m^1 \frac{1}{2}g^{11}\partial_1 g_{11}$$

$$\Gamma_{21}^2 = \Gamma_{12}^2 = \frac{1}{r}$$

Az első képletben látható, hogy a többi esetben csak az utolsó tag marad meg ahol $\partial_2 = \partial_\vartheta$ - től csak g_{33} függ, tehát:

$$l = 3 \quad m = 3 \rightarrow \Gamma_{33}^2 = \frac{1}{2}g^{22}(\partial_3 g_{33}) = -\sin\vartheta \cos\vartheta$$

Számolás

$$k = 3 \rightarrow \Gamma_{lm}^3 = \frac{1}{2} g^{3s} (\partial_m g_{sl} + \partial_l g_{sm} - \partial_s g_{lm})$$

Ezután $s = 3$

$$\Gamma_{lm}^3 = \frac{1}{2} g^{33} (\partial_m g_{3l} + \partial_l g_{3m} - \partial_3 g_{lm})$$

$$l = 3 \rightarrow \Gamma_{3m}^3 = \frac{1}{2} g^{33} (\partial_m g_{33}) \rightarrow \frac{1}{2} g^{33} \partial_1 g_{33} \quad \text{vagy} \quad \frac{1}{2} g^{33} \partial_2 g_{33}$$

$$\Gamma_{31}^3 = \Gamma_{13}^3 = \frac{1}{r}$$

$$\Gamma_{32}^3 = \Gamma_{23}^3 = \frac{1}{tg\vartheta}$$

A többi tag mind nulla, mivel az első egyenletre visszanézve látható, hogy ∂_3 -tól egyik tag sem függhet, valamint a többi tag pedig figyelembe lett

Számolás

Szerencsére 'csak' ennyi tag nem nulla, mint ahogy az látható volt, ezeket összefoglalva:

$$\begin{aligned}\Gamma_{00}^1 &= \frac{U'}{2V} & \Gamma_{11}^1 &= \frac{V'}{2V} \\ \Gamma_{22}^1 &= -\frac{r}{V} & \Gamma_{33}^1 &= -\frac{r \sin^2 \vartheta}{V} \\ \Gamma_{21}^2 &= \Gamma_{12}^2 = \frac{1}{r} & \Gamma_{33}^2 &= -\sin \vartheta \cos \vartheta \\ \Gamma_{31}^3 &= \Gamma_{13}^3 = \frac{1}{r} & \Gamma_{32}^3 &= \Gamma_{23}^3 = \frac{1}{\tan \vartheta} \\ \Gamma_{01}^0 &= \Gamma_{10}^0 = \frac{U'}{2U}\end{aligned}$$

Ez 13 tag, most ezeknek a segítségével kell kiszámolni a Ricci-tenzort.

Számolás

Korábban láttuk

$$R_{lsp}^s = R_{lp} = \partial_s \Gamma_{lp}^s - \partial_p \Gamma_{ls}^s + \Gamma_{lp}^q \Gamma_{qs}^s - \Gamma_{ls}^q \Gamma_{qp}^s$$

Most $l \neq p$ esetek:

$$l = 0 \quad p = \alpha \rightarrow R_{0\alpha} = \partial_s \Gamma_{0\alpha}^s - \partial_\alpha \Gamma_{0s}^s + \Gamma_{0\alpha}^q \Gamma_{qs}^s - \Gamma_{0s}^q \Gamma_{q\alpha}^s \rightarrow \partial_\alpha \Gamma_{0s}^s \equiv 0$$

$$R_{0\alpha} = \partial_1 \Gamma_{0\alpha}^1 + \partial_2 \Gamma_{0\alpha}^2 + \Gamma_{0\alpha}^1 \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{0\alpha}^1 \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{0\alpha}^1 \Gamma_{10}^0 + \Gamma_{0\alpha}^2 \Gamma_{23}^3 + \Gamma_{0\alpha}^1 \Gamma_{13}^3 + \\ - \Gamma_{00}^1 \Gamma_{1\alpha}^0 - \Gamma_{01}^1 \Gamma_{0\alpha}^1$$

$$R_{0\alpha} = \Gamma_{0\alpha}^1 (\Gamma_{11}^1 + \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{13}^3) + \partial_1 \Gamma_{0\alpha}^1 - \Gamma_{00}^1 \Gamma_{1\alpha}^0 \equiv 0$$

Az utolsó ekvivalencia azért áll, mert $\alpha = 0$ eseten kívül, ami nem megengedett, a szereplő tagok mind zérusok. Továbbá:

$$R_{00} = \Gamma_{00}^1 (\Gamma_{11}^1 + \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{13}^3) + \partial_1 \Gamma_{00}^1 - \Gamma_{00}^1 \Gamma_{10}^0$$