ELTE TTK

Az általános relativitáselmélet alapjai

készült az előadások alapján, írta:

Olar Alex

oktató

Dávid Gyula, *dgy*

2016/2017

Bevezetés

Ez a jegyzet *Dávid Gyula előadássorozata alapján készült a 2016/17-es tanév második félévében. A jegyzet bővítése tervben van. Az előadássorozat 3 féléven keresztül végig kíséri a most II. évfolyamot egészen a BSc végéig. Ezen összefoglaló célja számomra az ismétlés, majd közkinccsé tétel.*

Tartalomjegyzék

1. Jelölések

A speciális relativitáselmélet kurzusról ismert jelölésekhez hasonlóan felső és alsó indexeket használunk majd. Ha az index az angol ABC betűje, akkor az 0-3 közötti számozást jelent, ha a görög ABC betűje, akkor csak 1-3 között indexel.

$$x^k = \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad x_k = \begin{pmatrix} ct \\ -x \\ -y \\ -z \end{pmatrix} \quad x^\alpha = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad x_\alpha = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

A tenzorok indexelése hasonlóan felső, alsó, vegyes indexekkel történik.

$$\Lambda^{ij} \quad \Lambda_{ij} \quad \Lambda^i_j$$

2. Speciális relativitás elmélet - áttekintés

Minden objektum szimmetria csoportjába tartozó transzformációk a:

- eltolás $\rightarrow$ impulzus megmaradás
- Lorentz-boost
- időbeli eltolás $\rightarrow$ energia megmaradás
- forgatás $\rightarrow$ impulzusmomentum megmaradás

Az x^k koordináták transzformációja ezen szimmetriák alkalmazása.

$$x'^k = \Lambda^k_l x^l + a^k$$

Ahol a^k egy konstans eltolás, míg a két indexes tenzor a Lorentz-transzformációt írja le, a következő alakban:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & \\ 0 & & I & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & \\ 0 & & F & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cosh\chi & -\underline{\tilde{n}}\sinh\chi \\ -\underline{n}\sinh\chi & I + (\cosh\chi - 1)\underline{n}\circ\underline{n} \end{pmatrix}$$

Ahol I, F rendre a 3 dimenziós egység és forgás mátrixok.
A speciális relativitáselméletben a metrikus tenzor rendezi át az indexeket. Ezzel értelmezett a skaláris szorzás is a négyesvektorok között.

$$x_k = g_{kl}x^l \quad x^k = g^{kl}x_l \quad g^{kl}g_{lm} = \delta^k_m$$

A speciális relativitáselméletben a metrikus tenzor saját magának az inverze, konstans.

$$g_{kl} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Az ezzel definiált skalárszorzás pedig.

$$x^k x_k = g_{kl}x^k x^l = (ct)^2 - x^2 - y^2 - z^2$$

Az általános relativitáselmélet célja, hogy lokálisan teljesítse a speciális relativitáselméletet, viszont globálisan egy új leírást adjon a világra.

3. Newtoni - gravitáció

A newtoni gravitáció elmélete az évszázadok során beleivódott minden ember tudatába. A távolba hatás, a távoli testek által egymásra kifejtett erő mind-mind alapfogalmak a fizika tanulás kezdetén.
A mozgásegyenletekben szereplő arányossági tényezők egyenlősége komoly mérési eljárások kidolgozásra révén volt bizonyítható, súlyos tömeg, tehetetlen tömeg.

$$m_t\vec{a} = m_s\vec{g}(\vec{r},t)$$

Kísérleti tény az is, hogy zárt görbén a gravitációs erőnek nincsen munkája. Azaz:

$$\oint_\gamma \vec{g}(\vec{r},t)\, d\vec{r} = 0 = \int_F (\nabla \times \vec{g})d\vec{F} = 0 \qquad \rightarrow \qquad \nabla \times \vec{g} = \vec{0}$$

Ebből következik, hogy $\vec{g}$ egy skalármező negatív gradienseként előállítható. Így:

$$\oint_{\partial V} \vec{g}d\vec{F} = \int \nabla\vec{g}dV = -4\pi G \int \rho(\vec{r})dV \quad \rightarrow \quad \nabla\vec{g} = -4\pi G\rho(\vec{r})$$

Így látható, hogy folytonos tömegeloszlásra a Newton-féle gravitációs törvény a következő alakot ölti.

$$\vec{g} = -\nabla\Phi \quad \rightarrow \quad \triangle\Phi = 4\pi G\rho(\vec{r})$$

Az utóbbi lényegében a gravitációra felírt Poisson-egyenlet.
Áttérve a speciális relativitáselméletre a gravitációs erő általánosítása a következő egyenlet lenne:

$$\frac{d}{d\tau}(Mu_k) = M\partial_k\Phi$$

A sajátidő (τ) szerinti deriválást elvégezve és kihasználva, hogy a négyessebesség $u_k u^k = c^2$ a következő összefüggést kapjuk:

$$\frac{dM}{d\tau}c^2 = \frac{\partial\Phi}{\partial x^k}\frac{dx^k}{d\tau}M = \frac{d\Phi}{d\tau}M$$

Ezt nevezhetjük a Novobátzky-effektus speciális esetének. Mivel ez egy szeparálható differenciál egyenlet, a megoldása előáll

$$M = me^{\frac{\Phi(x^k)}{c^2}}$$

Ezt pedig 1911-ben Nordström vezette le. Lényegében ez volt a legjobb gravitáció elmélet amit a speciális relativitás elmélet előállított. A korábbiak alapján a mozgásegyenlet is előállítható, ha a kezdeti egyenletbe visszahelyettesítjük a $\frac{dM}{d\tau}$ tagot.

$$\frac{dM}{d\tau} = \frac{1}{c^2}Mu^l\partial_l\Phi \quad \rightarrow \quad (\delta_k^l - \frac{u^k u_l}{c^2})\partial_l\Phi = \frac{du_k}{d\tau}$$

Jól látható, hogy a potenciál gradiense előtt álló operátor egy, a négyessebességre merőleges vetítést hajt végre.

4. Alapfogalmak

Az első féléves mechanika és az Elméleti mechanika tárgyak szerves részét képezi a gyorsuló koordináta-rendszerek vizsgálata. Mind ismerjük a kulcsfogalmakat. Szükség van egy rögzített koordináta-rendszerre amihez képest egy másik origója a_0 gyorsulással transzlációt végezhet és foroghat. A forgás leírására a koordináta-rendszerek közötti ortogonális transzformációt használjuk, ahol az ortogonális mátrixok időfüggőek.

$$\underline{\underline{\dot{O}}}\,\underline{\underline{O}}^T = \underline{\underline{\Omega}} = \underline{\omega}\times$$

A mozgásegyenlet pedig a következőképen transzformálódik:

$$m\underline{a} = \underline{F} + m\underline{a}_0 + m\underline{\omega} \times (\underline{\omega} \times \underline{r}) + 2m\underline{\omega} \times \underline{\dot{r}} + m\underline{\dot{\omega}} \times \underline{r}$$

Einstein arra jött rá, hogy a gravitáció sem erő, hanem egy koordináta transzformációval eltüntethető jelenség. Ennek leírására segítséget kért egy Magyarországon született, matematikus barátjától, Marcell Grossmanntól. Együtt dolgozták ki az általános relativitáselmélet matematikáját a Riemann-féle differenciálgeometria alapján.

A kulcsgondolatok:

- Nincs globális koordináta-rendszer amihez viszonyítani lehetne a lokális rendszereinket.
- Lokális rendszereink Minkowski-geometriájúak, azaz lokálisan a speciális relativitáselmélet teljesül.

Ennek precíz matematikai leírásához a következő gondolati lépesek lennének szükségesek:

1. halmaz $\to$ ezen értelmezett folytonosság, differenciálhatóság
2. konnexió (kapcsolat a topologikus tér és a metrikus tér között)
3. metrika

A leíráshoz a sokaságok elméletét fogjuk alapul venni. Ezek közül is nekünk a differenciálható részsokaságok egy speciális részhalmaza kell majd a tér-idő leíráshoz. Hiszen mit tud egy fizikus? Deriválni.

4.a. Affin tér:

Egy affin tér egy (V, **V**, **-**) hármas, ahol:

- V nem üres halmaz
- **V** vektortér
- "**-**" leképezés pedig V $\times$ V $\to$ **V**, amit (x,y) $\mapsto$ x-y $= \vec{a}$ alakban írunk

Axiómái a következők:

- (x-y) + (y-z) + (z-x) $= \vec{0}$
- az affin tér és az alul fekvő vektortér dimenziója azonos
- $\vec{a}$ = A **-** o leképezést az affin tér o középpontú ortogonalizációjának nevezzük

A tér-időről kezdetben csak annyit feltételezünk, hogy az egy 4 dimenziós affin tér, amely lokálisan Minkowski-struktúrával van ellátva. Ezeket a különböző rendszereket kell majd valahogy összefésülni.

4.b. Metrika

Legyenek a,b egy M halmaz elemei. Ekkor a $\rho : M \times M \to R$ hozzárendelést metrikának nevezzük, ha:

- $\rho(a,b) \geq 0$, valamint akkor és csak akkor 0, ha $a = b$
- $\rho(a,b) = \rho(b,a)$
- $\rho(a,b) \leq \rho(b,c) + \rho(c,a)$

A sokaságok leírásához viszont egyenlőre nem metrikát használunk. Mások lesznek az alapfogalmaink. A NYÍLT HALMAZok lesznek az alapfogalmaink. Erre építünk majd mindent, még ha nem is a lehető legprecízebb módon. Az *Analízis I.* kurzusról már ismeretesek a nyílt halamzokra vonatkozó alapállítások:

- Végtelen sok nyílt halmaz uniója nyílt.
- Véges sok nyílt halmaz metszete is nyílt.

Legyen X egy halmaz, ennek nyílt részhalmazai B-k. Az ezeket tartalmzó struktúrát ekkor TOPOLOGIKUS TÉRnek nevezzük, ha tartalmazza X-et, az üres halmazt, valamint a nyílt halmazok végtelen unióját és véges metszetét. A topologikus tér ezáltal egy olyan halmaz, amin a folytonosság értelmezve van, hiszen tudunk közelséget/szomszédságot definiálni. Gyakorlatban persze a fizikus nem absztrahál ennyire, visszanyúl a koordinátázáshoz.

Vegyükn egy sokaságot, legyen ez M. Ennek két részhalmazát U,V, melyek metszete nem üres képezzük le egy rendre p,q: $M \to R^n$ paraméterezésekkel. Ekkor a közös metszes leképződött R^n két részhalmazára amik között értelmezhető egy $F : R^n \to R^n$ leképezés, amit kiterjeszthetünk U-ról, V-re, feltéve, hogy a paraméterezések invertálhatóak. Tehát $F \circ q^{-1} \circ p : U \to V$ függvény már a sokaságon értelmezett. Megmutatható, hogy ez a paraméterezéstől független.

Az ilyen leképzesésekkel értelmezhető az absztrakt sokaságon a foyltonosság és deriválhatóság, hiszen F-en már ezeket könyedén tudjuk értelmezni. A keletkezett téképlapok maguk fölé definiálnak egy sokaságot. Ezt nevezzük ALGEBRAI TOPOLÓGIÁNAK, értelmezhetővé válik a differenciálható sokaság fogalom. Tartsuk szemelőtt, hogy *továbbra sincsen beágyazó tér* (matematikusok belátták, hogy nem triviális módon értelmezhető olyan tér, amibe beágyazható egy ilyen struktúra, de ez közelében sincs a hétköznapi fogalmainknak).

Eljutottunk tehát oda, hogy ki tudjuk mondani, hogy a TÉRIDŐ MODELL*ünk egy olyan 4 dimenziós differenciálható sokaság, amely lokálisan Minkowski-tér.*

Az általános relativitáselméletben csakis felső indexes "vektrok" lesznek, mivel ezek a görbevonalú koordinátázáshoz képest, nem vektrokomponensek, hanem pusztán KOORDINÁTÁK. Tehát nem transzformálódnak homogén lineáris módon.

Már értelmezhetünk skalármezőt is. Általánosságban csak mezőket tudunk majd értelmezni amúgy is, hiszen az elmélet csak minden a sokaság minden pontjában értelmezett objektumokat enged meg. Legyen tehát $\Phi : M \to R$, mivel P pont kölcsönös egyértelmű viszonyba hoszható a térképzeésen egy x^k koordinátával így a (fizikus módon ugyan azzal a betűvel jelölve) $\Phi : R^n \to R^n$ függvény már egy skalármezőt definiál M-n is.

Einstein célja a gyorsuló koordinátákra való kovariáns áttérés matematikai leírása és fizikai megalapozása volt.

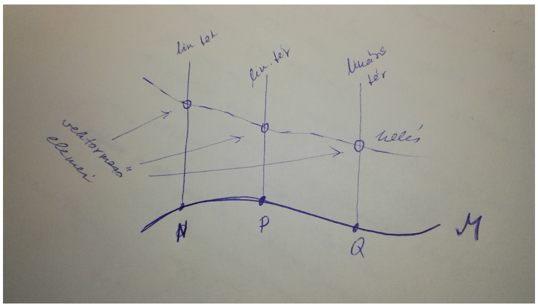
Ha ugyan arról a részsokaságról készítünk különböző térképzeéseket, akkor azok között léteznie kell egy folytonos, differenciállható és invertálható leképzésnek, ami ezeket egymásba transzformálja.

5. Topológia, derivációk, metrika

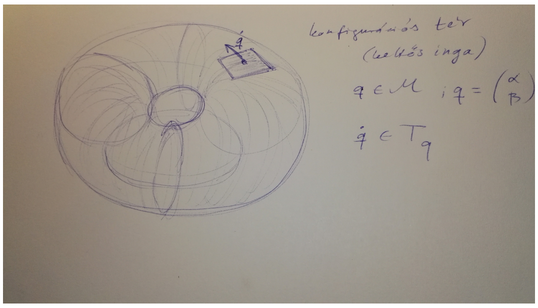
Legyen a sokaság minden pontjában értelmezve egy T_p vektortér (- érintőtér -), ami független a paraméterezéstől mégis annak segítségével definiálhatjuk, hiszen ezeket a paraméterezés deriváltjának az értékkészletének egy részén értelmezhetjük:

$$T_P(M) := Ran_{Dp(p^{-1}(x))} \tag{1}$$

Az ezen pontokban vett érintőterek unióját TANGENS NYALÁBnak nevezzük. Ennek *szelése* egy vektormező, ami lényegében egy olyan művelet, ami minden ponthoz hozzárendel az adott pontban vett érintőtérből egy elemet. Mivel a vektromező minden egyes eleme más halamzból került ki, így a különböző lineáris terek közötti átszámítás nem triviális. Egy szemléltetést segítő ábra erről:



1. ábra. Szelés szemléltetése



2. ábra. Konfigurációs tér

Ahol az utóbbi a kettős inga konfigurációs terén értelmezett érintőtér, vagyis az általános koordináták deriváltja. Tehát lényegében a Lagrange-függvény a konfigurációs tér érintőterén értelmezett függvény.

A sokaság lokálisan *homeomorf* R^n-el. Azaz kölcsönösen egyértelműen és folytonos leképezhető, persze csak akkor ha n véges. A sokaság olyan topologikus tér, amely mindenhol lokálisan homeomorf R^n-el. Topologikus struktúránk tehát már van, de távolság fogalom még mindig nincs a sokaságon értelmezve.

5.a. Duális terek fogalma

Legyenek (V_S,+,*), valamint (W_S,+,*) vektorterek ugyanazon skalártest felett és $A : V \to W$ lineáris leképezés. Ezeken értelmezett az összeadás és a számmal szorzás így lineáris teret alkotnak az operátorok is. Mi most egy speciális esetet vizsgálunk, amikor is $W_S = S$, mivel ekkor a lineáris leképezéseink funkcionálok, vagyis egy vektortérből skalárhalmazba képező függvények (lineritás továbbra is fennáll természetesen).

A továbbiakban S megegyezik a valós számok halmazával. Mostantól pedig a teret, amelyben a funkcionáljaink laknak hívjuk a V-hez tartozó V^* duális térnek, vagy röviden V duálisának. A funkcionálok lineáris teret alkotnak:

- $\varphi, \psi \in V^*$, valamint $x \in V$ és $\alpha \in R$

- $(\varphi + \psi)x = \varphi x + \psi x$
- $(\alpha\varphi)x = \alpha(\varphi x)$

Ahhoz, hogy erről a duális térről megállapítsuk, hogy hány dimenziós válasszunk benne egy bázist. Legyenek $\{\vec{e}_k\}_{k=1}^{n} \in V$. Bármelyik $\vec{a} \in V$ előáll ezek lineárkombinációjaként. Ekkor:

$$\varphi\vec{a} = \varphi(a^k\vec{e}_k) = a^k\varphi\vec{e}_k \qquad a^k \in R$$
$$\varphi\vec{e}_k = \varphi_k \in R$$

tehát a funcionált is n darab adattal tudjuk reprezentálni. Bevezetve speciális $\epsilon^k \in V^*$ olyan, hogy $\epsilon^k\vec{e}_l = \delta_l^k$. Ha előállítunk egy $\Phi \in V^*$ funkcionált a következő módon:

$$\Phi = \varphi_k\epsilon^k \in V^*$$
$$\Phi\vec{a} = \varphi_k\epsilon^k\vec{a} = \varphi_k a^k = \varphi\vec{a}$$
$$\rightarrow \Phi = \varphi \in V^*$$

Vagyis ez azt jelenti, hogy véges dimenziós esetben a vektortér bázisai kölcsönösen megfeleltethetőek a duális térben ϵ^k bázisoknak így $dimV = dimV^*$ feltétel teljesül. Emelett elfogadjuk, hogy egy vektortér duálisának a duálisa a kezdeti vektortér, valamint, hogy egy vektortér és duálisa izomorfak.