



ELTE TTK
FIZIKA SZAK

SZAKDOLGOZAT

KOALESZCENCIA MODELL KIDOLGOZÁSA
TRANSPORTMODELLEKHEZ

Olar Alex

témavezető
Wolf György

2018

Kivonat

Egy nehézion ütközésben résztvevő alkotó elemek száma néhány ezerig terjed legfeljebb, így a kidolgozott néhány-test elméletek, mint a három-test problémára kidolgozott Fagyeyev-egyenletek, nem alkalmazhatóak, de az alkotóelemek alacsony száma miatt még a statisztikus fizikai modellek sem használhatóak, ráadásul nem is egyensúlyi reakciókról van szó az esetek többségében.

A rendelkezésre álló számítási kapacitás lehetővé tette, egy-egy ilyen nem-egyensúlyi reakció teljes vizsgálatát, mikroszkópikus transzport-modellek segítségével. Egy ilyen modell a Boltzmann-Uehling-Uhlenbeck elmélet (BUU), ami fázistérben leírja adott részecskék között az ütközéseket és figyelembe veszi az azok között ható kölcsönhatást, egy időfüggő, átlagtér potenciállal. Korai modellek a részecskéket szabadnak tekintették, amikor azok nem vettek részt ütközésekben.

Az én célom, hogy egy, a BUU-ra épülő szimulációhoz kidolgozzak egy olyan programot, ami a kölcsönható részecskéket, esetemben főként nukleonokat, klaszterezi, azaz csomósodásokat keres különböző távolság definíciók mellett (térben, impulzustérben, stb.). Ennek fontos szerepe lehet a detektor válasz meghatározásakor, valamint a darmstadti, CBM/FAIR projekt keretében szükség lesz az egyszeres és kétszeres ritkaságú magok keltésének vizsgálatára. Egyszeresen ritka magokat már találtak, de a kétszeres ritkaságúak modellezése nagyon fontos lehet a jövőben.

Tartalomjegyzék

I. Elméleti áttekintés	3
I.1. Bevezető	3
II. Transzport-egyenletek	3
II.1. Numerikus megoldás	5
III. Koaleszcencia	6
III.1. Szélességi bejárás - Breadth First Traversal (BFS)	7
III.2. Implementáció	8
IV. Mérési adatok	9
V. Eredmények	12
V.1. Klaszterező paraméter	12
V.2. Közepes fragmentumok	13
V.2.1. Különböző p_0 paraméterek	14
V.2.2. Különböző események, azonos p_0	14
V.3. FOPI mérések reprodukálása	15
V.3.1. Koaleszcencia különböző energiákon	15
V.3.2. Kis rendszámú magok	16
V.3.3. Izotróp robbanás	17
V.3.4. Kis rendszámú magok kinetikus energiája	19

I. Elméleti áttekintés

I.1. Bevezető

Egy nehézion ütközés erősen nem egyensúlyi, erősen kölcsönható rendszer. A statisztikus fizikában 10^{23} részecskére jól kidolgozott, statisztikus modell áll rendelkezésünkre, továbbá jól tudjuk magyarázni a néhányrészecske rendszereket is, azonban például egy $Au + Au$ ütközésben a részecskék száma még és már nem kezelhető a korábbi modellekkel.

Kezdetben a folyamat leírására termodinamikai modelleket állítottak fel, amelyekben különböző hipotéziseket tettek fel a nem egyensúlyi rendszerre. Ezek közé tartozott, hogy a részecskék gyorsan termalizálódnak és kialakul egy globális egyensúly, és már egyensúlyi állapotukban detektáljuk őket. Ezután hidrodinamikai modellekhez folyamodtak amelyekben már nem volt globális, csak lokális termodinamikai egyensúly.

Azonban egy prominensebb ága a nehézion ütközések leírásának a nemegyensúlyi, mikroszkopikus transzport-modellek. Először kaszkád elméleteket dolgoztak ki, amelyben a részecskék csak ütközéskor hatottak kölcsön, később azonban hosszú hatótávolságú erőket és nukleáris potenciálokat is figyelembe vettek.

II. Transzport-egyenletek

A nehézion ütközések dinamikáját transzport egyenletek segítségével lehet vizsgálni. Ennek két fő irányzata van, az egyik a Boltzmann-modellre épülő hidrodinamikai megközelítés, ami szerint

$$N = \int d^n \vec{p} \int d^n \vec{q} \ f(\vec{q}, \vec{p}, t) \quad (1)$$

ahol N a részecskék száma, míg $f(\vec{q}, \vec{p}, t)$ a fázistérben vett sűrűség függvény. Mivel a fázistérfogatelem ($d^n \vec{p} \cdot d^n \vec{q}$) állandó, azonban ütközés során a részecske sűrűség változik, így az csak a fázissűrűségen keresztül változhat. Így tehát kapjuk a Boltzmann-egyenletet, amit a Liouville-tételből származtathatunk

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{dp_i}{dt} + \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{dq_i}{dt} \right) = I_{coll} \quad (2)$$

Ezt pedig a szokott alakra hozva, bevezethetünk egy I_{coll} ütközési integrált, amire különböző hipotéziseket tehetünk majd fel.

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) = I_{coll} \quad (3)$$

Ez még természetesen csak az alapvető fizikai modell, a transzport-modellhez az úgynevezett Boltzmann-Uehling-Uhlenbeck egyenleteket használják. Tehát az előbbi egyenletbe bevezetnek egy impulzusfüggő átlagtérét $U(\vec{q}, \vec{p})$. Alacsony energiákon a rugalmatlan ütközések elhanyagolhatóak, a rendszer csak nukleonokból áll.

$$m^*(\vec{q}, \vec{p}) = m_N + U(\vec{q}, \vec{p}) \quad E^2 = m^{*2} + p^2 \quad (4)$$

$$\frac{\partial H}{\partial q_i} = -\frac{dp_i}{dt} \quad \frac{\partial H}{\partial p_i} = \frac{dq_i}{dt} \quad (5)$$

Ahol tömeghéjon lévő kvázi-részecske közelítéssel élve az egyenlet átfogalmazható, felhasználva a Hamilton-egyenleteket:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial \vec{p}} \left(-\frac{m^*}{E} \nabla_{\vec{q}} U \right) + \frac{\partial f}{\partial \vec{r}} \left(\frac{\vec{p}}{E} + \frac{m^*}{E} \nabla_{\vec{p}} U \right) = I_{coll} \quad (6)$$

Az ütközési integrál (I_{coll}) kvantumos jelenségek közül csak a Pauli-elvet veszi figyelembe, így jelentős részben klasszikus fizikán alapszik. Az így kapott egyenletet (6) Boltzmann-Uehling-Uhlenbeck-egyenletnek nevezik, ha az ütközési integrállal feltesszük, hogy az $f(\vec{q}, \vec{p}, t)$ függvény időfejlődését írja le kéttest kölcsönhatások hatására.

Az $f(\vec{r}_1, \vec{p}_1, t)$ függvényt véve, valamint a $\vec{p}_1 + \vec{p}_2 \longleftrightarrow \vec{p}_3 + \vec{p}_4$ ütközést vizsgálva az ütközési integrál a következő alakot veszi fel:

$$\begin{aligned}
I_{coll} = \frac{g}{(2\pi)^3} \int d^3p_2 \int d^3p_3 \int \Omega_4 v_{12} \frac{d\sigma_{12 \rightarrow 34}}{d\Omega} \delta(\vec{p}_1 + \vec{p}_2 - \vec{p}_3 - \vec{p}_4) \cdot \\
\cdot (f_3(\vec{r}, \vec{p}_3, t) f_4(\vec{r}, \vec{p}_4, t) \bar{f}_1(\vec{r}, \vec{p}_1, t) \bar{f}_2(\vec{r}, \vec{p}_2, t) \\
- f_1(\vec{r}, \vec{p}_1, t) f_2(\vec{r}, \vec{p}_2, t) \bar{f}_3(\vec{r}, \vec{p}_3, t) \bar{f}_4(\vec{r}, \vec{p}_4, t))
\end{aligned} \tag{7}$$

Ahol $\frac{d\sigma_{12 \rightarrow 34}}{d\Omega}$ a differenciális nukleon-nukleon hatáskeresztmetszet közegben, v_{12} a nukleonok közötti relatív sebesség, valamint \bar{f} függvényeje a Pauli-kizárási faktorok $1 - f$ módon állnak elő. Az integrál lényegében azt fejezi ki, hogy az p_1, p_2 impulzusú nukleonok, haütköznek, akkor hogyan változhat meg az impulzusok p_3, p_4 -re és fordítva. A harmadik, $d\Omega_4$ -re vett integrál lényegében $d^3p_4 d\Omega$ integrál, csak a differenciális hatáskeresztmetszet a szemléletes kép miatt le van választva.

II.1. Numerikus megoldás

A témavezetőm szimulációs kódja a szokásos módszerrel áll neki ennek az integro-differenciál egyenlet megoldásának. A folytonos eloszlásfüggvény helyettesíthető véges számú pontrészekkével, matematikailag Dirac-delta disztribúciókkal. A fluktuációk simítása érdekében N párhuzamos eseményt vizsgálva az eloszlás függvény A nukleonra:

$$f(\vec{r}, \vec{p}, t) = \frac{1}{N} \sum_i^{N \times A} \delta(\vec{r} - \vec{r}_i(t)) \delta(\vec{p} - \vec{p}_i(t)) \tag{8}$$

Ezt bevezetve látható, hogy a modell leegyszerűsödött pontrészekként mozgására. A mozgásegyenletek a Hamilton-egyenletekből kaphatóak, amelyeket a (6)-ben is felhasználtam. A potenciál, sűrűségek és a Pauli-effektus számolásánál a pontrészek Gauss-eloszlásokkal vannak helyettesítve.

A transzport-modell nem tartalmaz szabad paramétereket. A deriváltakat differenciálok váltják fel. Az egyrészeske mozgásegyenlet megoldásához a prediktor-korrektor módszer a következő:

$$\vec{p}_i^{pr} = \vec{p}_i - \Delta t \frac{\partial H}{\partial \vec{r}_i} \quad \vec{r}_i^{pr} = \vec{r}_i + \Delta t \frac{\partial H}{\partial \vec{p}_i} \quad (9)$$

Ahol pr jelöli a prediktált helyet és impulzust. Ez még korrekcióra szorul, ehhez ki kell számolni az prediktált helyen a Hamilton-függvény értékét, majd a helyet és momentumot annak megfelelően léptetni

$$\vec{p}_i^{co} = \vec{p}_i - \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\partial H}{\partial \vec{r}_i} + \frac{\partial H^{pr}}{\partial \vec{r}_i^{pr}} \right) \quad \vec{r}_i^{co} = \vec{r}_i + \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\partial H}{\partial \vec{p}_i} + \frac{\partial H^{pr}}{\partial \vec{p}_i^{pr}} \right) \quad (10)$$

Az átlagtér potenciált úgy kell választani, hogy az anyag összenyomhatóságát jól jellemezze. Néha, az eredményekkel való összehasonlítási céllal ki szokták hagyni az impulzus függést is.

III. Koaleszcencia

Az én feladatom a kimeneten szolgáltatott, térbeli és impulzustérbeli részecskeeloszlások alapján az volt, hogy egy olyan eljárást dolgozzak ki, amivel vizsgálható lesz a detektorválasz és a későbbiekben akár egyszeresen és kétszeresen ritka magok keltése. Lévéen, hogy nukleonokra koncentráltam, a kimenetek közül is egyenlőre ezeket vizsgáltam. A koaleszcencia modell lényege, hogy a nukleonok ha elegendően közel kerülnek egymáshoz impulzustérben, akkor bizonyos valószínűséggel összetapadnak és a detektorban már csak egy beütés észlelhető így, több összetapadt, töltéssel rendelkező részecske esetén.

A mechanizmust amely a nehézionütközések után kialakuló közepes méretű magokat leírja többen is megpróbálták leírni. A koaleszcencia modell részletes leírása deuteron esetén megtalálható *J.I.Kapusta* cikkében. A szakirodalom a közepes magokkal foglalkozik ($Z \leq 15$), ezeket az angol rövidítés alapján IMF^1 -nek nevezem majd.

Kapusta arról ír, hogy bármikor, amikor egy neutron és proton kellően közel

¹intermediate fragments

kerül egymáshoz, azaz impulzusok egy p_0 gömbön belül van, valamint a megfelelő spinállapotban vannak, akkor összetepadnak. A spin- és izospinállapotokat figyelmen kívül hagyva, én is a minimális távolság alapján implementáltam a koaleszcenciát. A modell térben és impulzustérben is tud, külön-külön, a kettő együttesét a mérési adatokra megfelelően választott súlyfaktorokkal lehet implementálni.

Azért a deuteronra került a legnagyobb hangsúly, mert lényegében csak az ütközés termékeként keletkezhet és nem lökődik ki a keletkezett magokból, mint például az α -részecske. Tehát az esemény (nehézion-ütközés) dinamikája lényegében megmutatkozik a deuteron magokban. A cikkben lényegében a deuteronok számsűrűségére a következő feltevéseket teszik

- legyen $\gamma \frac{d^3 n_N}{dp^3}$ a relativisztikusan invariants impulzustérbeli sűrűség nukleonokra
- protonokra és neutronokra ugyan azt a sűrűséget tételezi fel, de könnyen módosítható nem azonos sűrűségekre
- \vec{p} impulzus körül egy p_0 sugarú gömbben egy nukleon megtalálásának valószínűsége $P = \frac{1}{M} \frac{4\pi}{3} p_0^3 \gamma \frac{d^3 n_N}{dp^3}$, ahol M a nukleonok átlagos száma
- ha ez a valószínűség kicsi, és M kellően nagy, akkor a deuteronra (binomiális statisztika miatt) $\gamma \frac{d^3 n_d}{dp^3} = \frac{1}{2} \frac{4\pi}{3} p_0^3 (\gamma \frac{d^3 n_N}{dp^3})^2$

Itt p_0 később a klaszterező paraméterem lesz, melynek értékét a klaszterek számának változásából fogom meghatározni. Ahol a klaszterek száma drasztikusan csökkenni kezd, olyan tartományban érdemes majd az IMF -eket keresni. Ezen koaleszcenciának nagy előnye, hogy rendkívül általános és nem tételez fel semmit a rendszer mechanizmusairól.

III.1. Szélességi bejárás - Breadth First Traversal (BFS)

A szélességi bejárás egy jól ismert gráf algoritmus az informatikában. Az algoritmus lényege, hogy egy gráfban adott tulajdonságú pontot keresve kiválogassa azt, biztosítva, hogy minden csúcsot leellenőrzött. Én nem egészen erre használom, mivel nekem klaszterezésre van szükségem, tehát nem adott tulajdonság alapján kell kiválogatnom csúcsokat, hanem egy nem összefüggő gráfot kellett darabjaira szétszednem.

Így az algoritmust kicsit módosítanom kellett. Hasznos tulajdonságai közé tartozik, hogy gyors, és biztosítja, hogy minden elemén egy gráfnak végigmegy. Így tehát addig kell ismételnem az algoritmust egy nem összefüggő gáron míg annak vannak csúcsai összefüggő részgráfokban.

Az algoritmus kiválaszt egy kezdőcsúcsot, majd a csúcsokat látogatottság szerint besorolja. Ezután egy szomszédsági lista szerint végigjárja az adott csúcs szomszédait. Lényegében ez a klaszterek megkeresésének módja. Hiszen miután kifogy a szomszédsági lista, kiválasztható random egy újabb csúcs, amin elindulva szintén megtalálhatóak annak szomszédai.

A pszeudó-kódot mellékelem, hiszen az alapimplementáció C++, majd Fortran nyelveken valósul(t) meg.

Algorithm 1 BFS klaszerező függvény

```

visitedVertices = vector(bool)[FALSE]
startingVertex = 0
while allVerticesVisited(visitedVertices) do
    cluster = vector()
    visitedVertices[startingVertex] = TRUE
    queuedVertices = Queue()
    queuedVertices.Queue(startingVertex)
    while queueIsNotEmpty(queuedVertices) do
        currentVertex = queuedVertices.Front()
        for all element of adjacencyList[currentVertex] do
            if isNotVisited(element) then
                visitedVertices[element] = TRUE
                queuedVertices.Queue(element)
            end if
        end for
        saveCluster(cluster)
        startingVertex = findFirstNotVisited(visitedVertices)
    end while
end while

```

III.2. Implementáció

Mint ahogy az előző pontban említettem az algoritmushoz egy gráf szükséges. A szimuláció kimenetén a nehézion-ütközésekből nyert nukleonon hely- és impulzuseloszlását kapom meg. Mivel egy ütközés parallel N -szer lefut, egymás után pedig

ez M -szer ismétlődik meg, így egy szimuláció során $N \cdot M$ kiértékelhető adatsort kapok, amikből már kellően nagy N, M esetén már jó statisztikát lehet készíteni. Az eloszlások alapján térben és impulzustérben is szükségem van egy r_0 és egy p_0 klaszterező méretre. A bemeneti adataim fm és GeV/c nagyságrendűek. Egy klaszterdefiniálásánál kihasználom a négyesimpulzusmegmaradást,

$$E = \sum_i E_i \quad \vec{p} = \sum_i \vec{p}_i \quad (11)$$

ahol az összegzés a klaszterekben lévő részecskékre megy. Itt nem veszem figyelembe, hogy kötési energia szabadul fel, csak egy közelítést szeretnék adni a majdani sebességre

$$p = \frac{v}{c} E \quad E = \sqrt{M^2 + p^2} \quad (12)$$

A M tömeg tisztán a klaszterben lévő nukleonok tömege, ahol a proton tömegét $0.938 \text{ GeV}/c$ -nek, míg a neutron tömegét közelítőleg $0.939 \text{ GeV}/c$ -nek vettem. Az impulzus a fentebbi képlet alapján adott volt. Az irodalomban több helyen is elhanyagolják teljes mértékben a térbeli koaleszcenciát lévén, hogy relativisztikus részecskékről van szó, és az impulzustérbeli szomszédság.

A programom beolvassa az K számú adatfájlt, melyekből klasztereket csinál a *BFS* algoritmus segítségével, valamint elvégzi a szükséges számításokat és ezek után egy fájlban a kidobja a klaszterméretet, energiát, sebességet, impulzuseloszlást és a kirepülő részecske polárszögét érdemes vizsgálni.

$$\varphi = \arccos \left(\frac{p_x}{\sqrt{p_x^2 + p_y^2}} \right) \quad (13)$$

IV. Mérési adatok

A centrális arany-arany ütközéseket többek között a GSI-ben, Darmstadtban is vizsgálták a FOPI kollaboráció keretében. A név egy 4π ('four pi') térszögű detektorra utal. Azaz ebben az elrendezésben a fragmentáció nagyon jól vizsgálható, hiszen minden irányban detektálni lehet a nehézion ütközések utána részecskéket. A

FOPI-nál vizsgált nehézion nyalábot egy, a detektorban található céltárgyra bocsátották. Az általam használt szimulációban én be tudtam állítani, hogy az ütközésem centrális legyen, azonban a detektálás során ezeket az eseményeket szűrni kellett, hiszen átlagosan 1%-át képviselték az összes ütközésnek.

Erre találták ki az *ERAT* nevezetű mennyiséget. Ezt a következőképpen definiálták

$$ERAT = \frac{E_t}{E_l} = \frac{\sum_i p_{t,i}^2 / (m_i + E_i)}{\sum_i p_{l,i}^2 / (m_i + E_i)} \quad (14)$$

ahol l, t indexek longitudinális és transzverzális energiákra és impulzusokra vonatkoznak. Az ütközés z -irányú, az összegzés a létrejött magokra megy. Az elv az, hogy feltételezik, hogy transzverz energia túlnyomó többségében nukleon-nukleon kölcsönhatásból származik, és akkor maximális ha az ütközésben résztvevő magok a lehető legjobban átfednek, azaz ha centrális az ütközés. Ezt a mennyiséget nekem nem volt célszerű használnom, hiszen a generált eseményeim mind centrálisak voltak. Azonban jó indikátora lehet általános ütközéseknél.

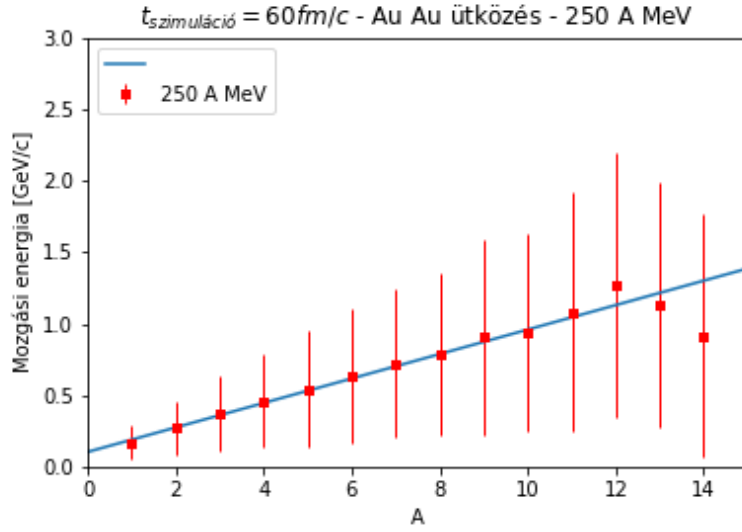
Egy kizárólag termikus modell egy T hőmérsékletű tágulás során tömegszám függvényében konstans energiát jósolnak ($\frac{3}{2}k_B T$), azonban, ha feltételezzük, hogy ütközés után egy izotróp robbanás megy végbe (az őszrobbanás analogonjára), akkor az egyes kirepülő nukleonoknak, egyenként van $\frac{3}{2}k_B T$ mozgási energiája, míg ha összetapadnak, akkor ez az energia a tömegszámmal kell arányos legyen

$$\langle E_{kin} \rangle = a + b \cdot A_f \quad (15)$$

E [A MeV]	b [GeV/c]	a [GeV/c]	Δb [GeV/c]	Δa [Gev/c]
250	0.056	0.179	0.004	0.060

Az alábbi ábrán látható, hogy csak $[0;15]$ tömegszám intervallumban ábrázoltam a klaszterezett magokat, hiszen a FOPI mérés alapján ezek, az úgynevezett közepes magok (IMF) összehasonlíthatóak az én eredményeimmel is. A FOPI mérés adatait ² alapján tudtam összehasonlítani a sajátommal.

²cikk - forrás



1. ábra. 60 fm/c szimulációs idő, a vízszintes tengelyen a klaszterezett magok tömegszáma, míg a függőleges tengelyen a számolt mozgási energiájuk, $p_0 = 70 \text{ MeV}/c$ klaszterező paraméteren

A készített ábráim és adataim az ő mérési és szimulációs eredményeiket akarja reprodukálni, hogy később ezt be lehessen építeni a hazai kódba. Így a detektor válasz nagyban jósolható lesz bizonyos atommagok ütközése esetén.

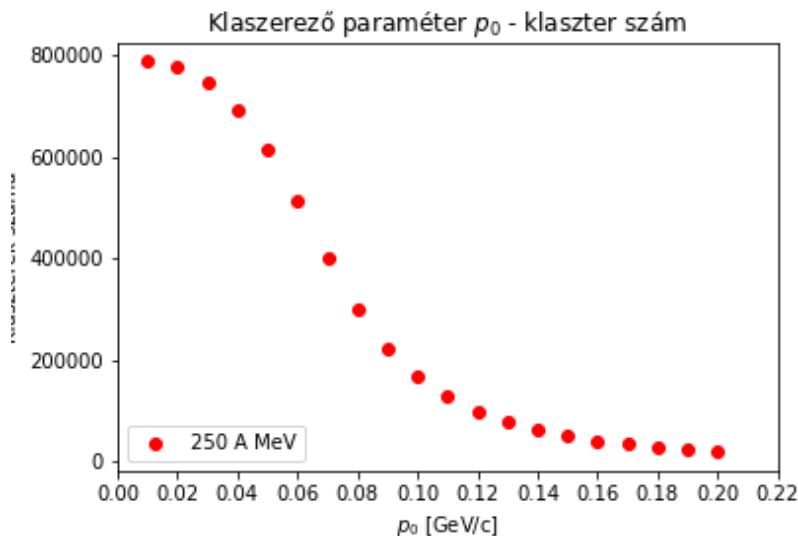
A FOPI-nál 150, 250 és 400 MeV -en végeztek méréseket és modellezték azokat. Az eredményeik között multiplicitáseloszlást vizsgáltak, nagyon kis renszámú magok energiáit ($Z = 1, 2$), a kirepülő fragmentumok szögeloszlását, energiaeloszlását, valamint különböző polárszögeknél tömegszám szerinti eloszlásokat is, hogy ezekből jóslást tudjanak adni az ütközés dinamikájára. Ezen kívül vizsgáltak még a kirepülő klaszterek kémiai összetételét is.

V. Eredmények

V.1. Klaszterező paraméter

Először is fontos vizsgálni, hogy milyen klaszterező méretet érdemes venni, amelyet általánosan használni lehet a különböző energiákon. Mivel a klaszterezést impulzus térben végeztem, p_0 értékét ($10 - 200$) MeV/c közé becsültem. Lényegesen e felett a klaszterezés nem működik, hiszen minden részecske elég közel van egymáshoz ahhoz, hogy összetapadjanak.

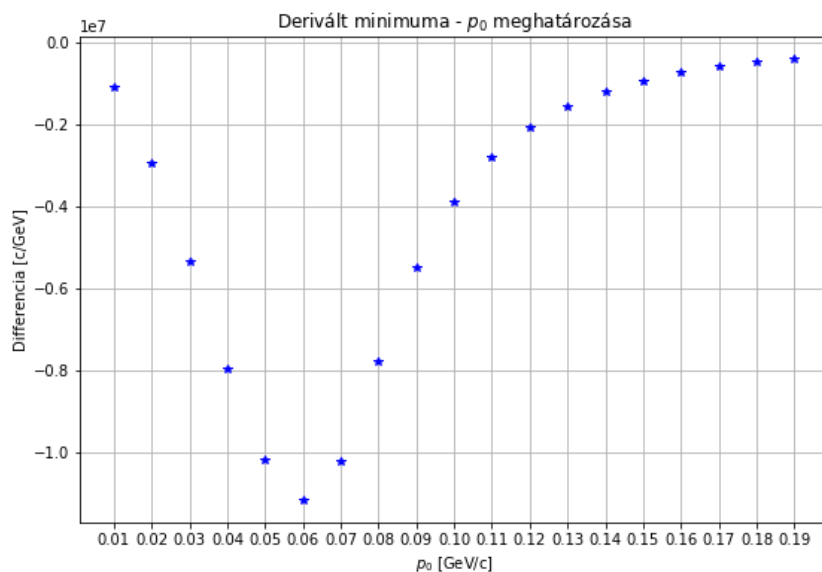
Az alábbi ábrán jól látható, hogy az érdekes tartomány, ahol kirtelen elkezd leesni a klaszterek száma ($0.03 - 0.09$) GeV/c környékén keresendő. Fontos megjegyezni, hogy egy részecske, akkor tekinthető a klaszter elemének, ha valamely eleméhez p_0 -nál közelebb van. Ez a BFS klaszterezésből egyértelműen következik.



2. ábra. 250 A MeV-en, 2000 Au Au ütközésből készített klasztereken, különböző p_0 paraméterrel futtatott koaleszcencia

Kis p_0 paraméternél a klaszterek nagyon magas száma azért van, mert az algoritmusban nem szűröm ki az 1 nukleont tartalmazó 'klasztereket', hiszen később használok majd az adatokat. Nagy p_0 esetén viszont látható, hogy néhány ezer klaszter van csak, ami természetes, hiszen néhány ezer magot ütköztetünk kezdetben.

A legjobb p_0 paraméter kiválasztásához a fentebbi adatsort lederiválva, azaz véve a diszkrét differencia értékeket a különböző klaszterező paraméterekre, azt a klaszterező paramétert választottam, ahol a 'legmeredekebb' az előző pontsorozat. Így itt most a derivált minimumát keressük. Az alábbi ábrán jól látható, hogy ez $p_0 = 0.06 \text{ GeV}/c$ -nél van. A továbbiakban, hacsak külön ki nem emelem, akkor ezt fogom használni minden esetben. Természetesen ez egy szabad paramétere az algoritmusnak, így majd a tényleges gyakorlatban azt a p_0 paramétert kell venni, ami a legjobban visszaadja majd a kísérleti adatokat.



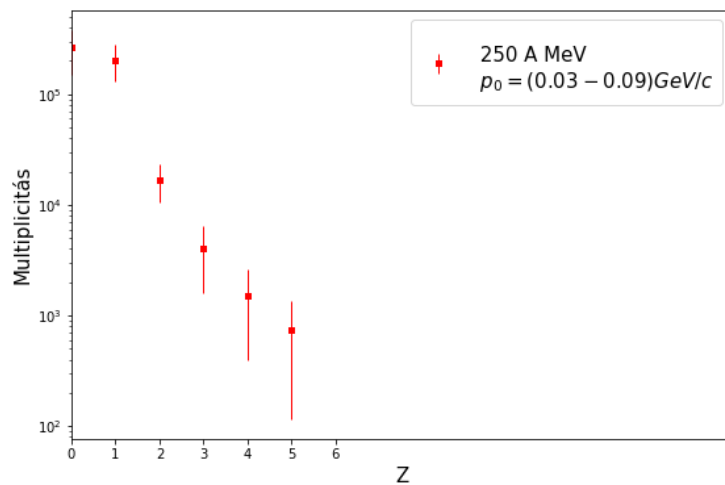
3. ábra. 250 A MeV-en, 2000 Au Au ütközésből készített klasztereken, különböző p_0 paraméterrel futtatott koaleszcencia, jól látható, hogy a minimum $0.06 \text{ GeV}/c$ -nél van

V.2. Közepes fragmentumok

A FOPI által vizsgált $Z \in [0; 15]$ az én statisztikáimban nem túl jó, hiszen én sokkal kisebb (1000-2000) körüli eseményszámmal dolgozom, míg náluk volt másodikpercenként 10^5 nehézion ütközés, melynek 1%-át centrálisnak becsülték, azaz másodikpercenként kaptam annyi adatot, mint amennyit én használtam. Azonban az én ütközéseim a szimuláció miatt biztosan centrálisak, ők viszont csak az *ERAT* paraméterrel tudták a legbiztosabban besorolni az ütközéseket.

V.2.1. Különböző p_0 paraméterek

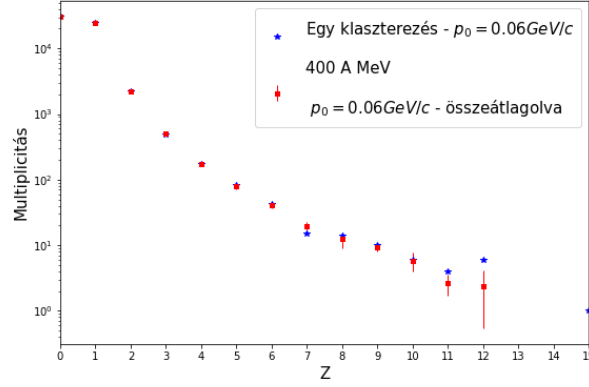
A lenti ábrán jól látható, hogy ugyan azon az Au-Au ütközésen, különböző p_0 mellett futtatott klaszterezések során nincs $Z = 5$ -nél nagyobb rendszámú mag, amely minden futtatás után biztosan jelen van. Látszik az is, hogy a klaszterek száma egyre jobban szór Z növekedtével, azaz lényegében látszik, hogy a nagyobb magok kialakulása centrális ütközésekben egyre valószínűtlenebb.



4. ábra. 250 A MeV-en, 2000 Au-Au ütközésből készített klasztereken, $p_0 = (30 - 90) \text{ MeV}/c$ paraméterrel futtatott koaleszcencia

V.2.2. Különböző események, azonos p_0

Ugyanolyan energiájú, centrális, azonos klaszterező paraméterű $Au - Au$ magok ütközése esetén viszont már sokkal megnyugtatóbb eredményt kaptam. Hiszen az előbb a klaszterező paramétertől való függés igen jelentős volt, azonban most, a klaszterek számának szórása és eloszlása nem változik jelentős mértékben különböző eseményekre.



5. ábra. 400 A MeV-en, 5*200 Au Au ütközésből készített klasztereken, $p_0 = 60 \text{ MeV}/c$ paraméterrel futtatott koaleszcencia, látható egy (csillag) ütközésre vett klaszterek eloszlása és 5 esemény összeátlagolva (négyzet)

V.3. FOPI mérések reprodukálása

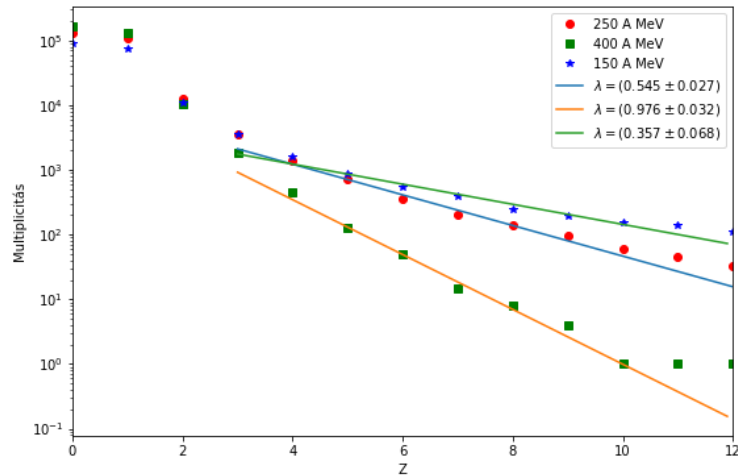
V.3.1. Koaleszcencia különböző energiákon

Először ábrázoltam a multiplicitásokat, azonos klaszterező paraméter mellett, ez természetesen az előbb meghatározott $p_0 = 60 \text{ MeV}/C$, különböző ütközési energiákon. A legkisebb magokat kivéve $Z = 0, 1, 2, 3$ az adatsorból, a rendszám-multiplicitás párokra egy exponenciális függvényt illesztettem

$$M = N \cdot e^{-\lambda \cdot Z}$$

E [A MeV]	N	λ	ΔN	$\Delta \lambda$
150	5131	0.357	1885	0.068
250	10807	0.55	1604	0.027
400	17127	0.976	2823	0.032

Az illesztés csak $Z = 12$ -ig megy, mivel ekkor tudtam a legszebb illstést produkálni. A kisebb magok között és a nagyobb magok között is, nálam lehetnek számottevően neutrontöbbletes magok, melyeket én nem zárok ki a koaleszcencia során. Ez okozhatja, hogy az illesztés csak viszonylag kis tartományra működik jól.



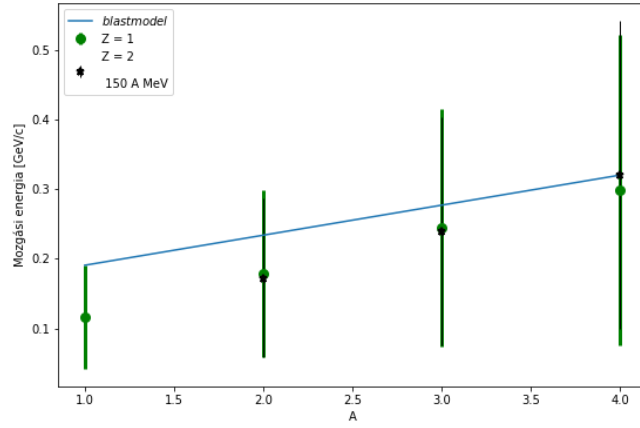
6. ábra. 150, 250 és 400 A MeV-en vett klaszterezésekre illesztett exponenciális függvények az adatosorokon, a λ paraméter fel van tüntetve az illesztett függvényeken, $t_{\text{szimuláció}} = 60 \text{ fm}/c$

V.3.2. Kis rendszámú magok

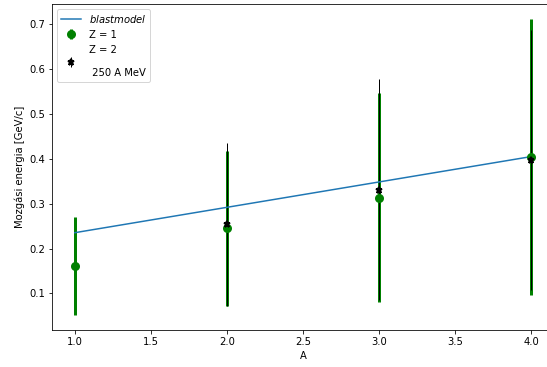
A kis rendszámú magok, ezek között túlnyomó többségben, ${}^4\text{He}$, ${}^2\text{H}$, ${}^3\text{He}$, ${}^1\text{H}$, jól jellemzik a folyamatot. A koaleszcencia-modell is lényegében kis rendszámú magokra van kimondva és elméletileg indokolva, csak ezt a felvetést próbáljuk minél szélesebben alkalmazni.

A következő ábrák adott ütközésen belül keletkezett összes $Z = 1, 2$ magok eloszlását mutatja. Az ábrákon jelöltem adott energián az átlagos számát a részecskének és azok szórását is. Csak $\varphi \in [60^\circ; 90^\circ]$ polárszög közötti részecskéket vettem figyelembe, hogy összevethető legyen a munkám a *[cikk]*-ben szereplő adatokkal és ábrákkal.

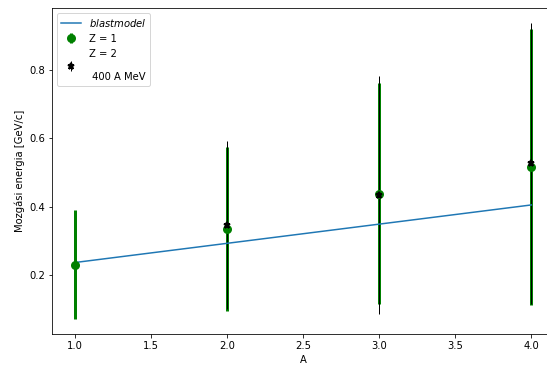
Az ábrákon látható függvény a korábbi, mozgási energiára illesztett egyenes, amit ide áthoztam, hogy szemléltesse, hogy milyen mértékben térnek el a legkönnyebb magok mozgási energiája.



7. ábra. 150 A MeV-en vett könnyű magok eloszlása, $\varphi \in [60^\circ; 90^\circ]$



8. ábra. 250 A MeV-en vett könnyű magok eloszlása, $\varphi \in [60^\circ; 90^\circ]$

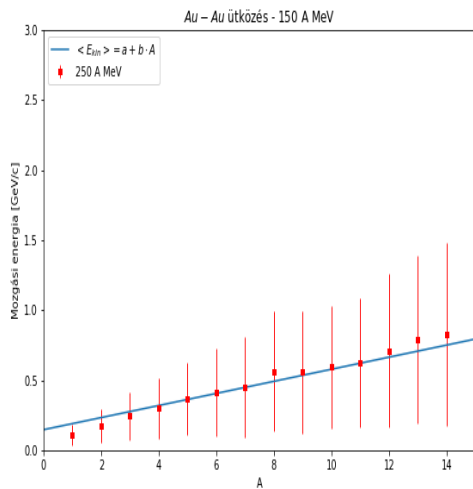


9. ábra. 400 A MeV-en vett könnyű magok eloszlása, $\varphi \in [60^\circ; 90^\circ]$

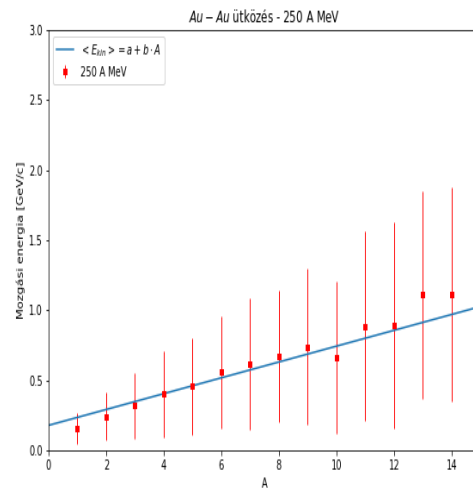
V.3.3. Izotróp robbanás

Ahogy már a Mérési adatok című fejezetben már beszéltem róla, egy izotróp robbanásként kezelhető az ütközés utáni folyamat, ahol minden nukleonra $\frac{3}{2}k_B T$ energia

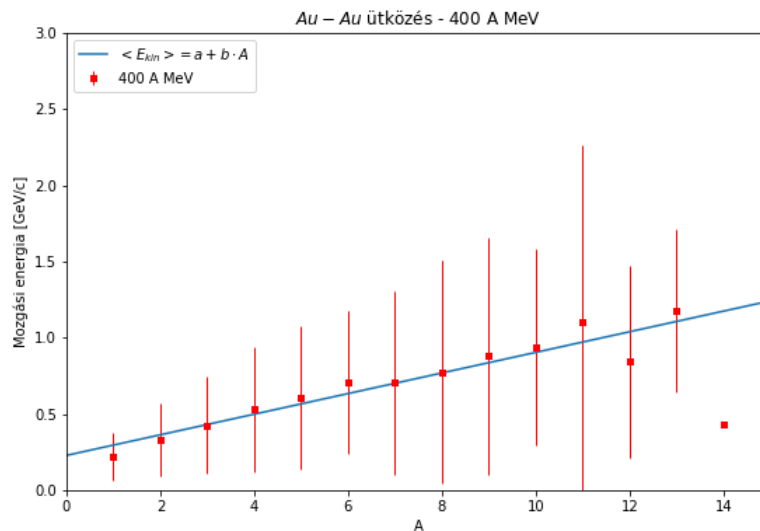
jut, így a koaleszcencia után egyértelműen a tömegszámmal arányos kinetikus energiát vártam. Ezt szemlélteti a három ábrám, különböző energiákon. A pontok az egyes klaszterek átlagos energiáit jelölik, míg a függőleges vonalak azok szórását. Az illesztési paramétereket utána prezentálom, a (15)-as egyenlet alapján.



10. ábra. 150 A MeV, $p_0 = 60 \text{ MeV}/c$



11. ábra. 250 A MeV, $p_0 = 60 \text{ MeV}/c$



12. ábra. 400 A MeV, $p_0 = 60 \text{ MeV}/c$, itt már a nagyobb magok kialakulás kisebb mértékű és a szórások is jócskán megnövekedtek

Az ábrák $\varphi \in [25^\circ; 45^\circ]$ polár-szöget közötti magokat ábrázolnak. A [hivatkozás] cikkben ugyanezek megtalálhatóak. Az illesztési adatok pedig a következők:

E [A MeV]	b [GeV]	a [GeV]	Δb [GeV]	Δa [GeV]
150	0.043	0.148	0.001	0.016
250	0.056	0.179	0.004	0.060
400	0.068	0.228	0.006	0.046

Az a paraméter értéke különösen érdekes. Míg $E = 150 \text{ A MeV}$ -nél közel vissza-kapjuk az egy nukleonra jutó kezdeti mozgási energiát ($\approx 148 \text{ MeV}$) addig a nagyobb energiás esetekben már hibahatáron belül sem kapjuk ezeket vissza, azonban szigorúan monoton energiánövekedés megfigyelhető. Ennek oka az lehet, hogy (???)

V.3.4. Kis rendszámú magok kinetikus energiája