§6.3 切普曼—柯尔莫哥洛夫方程

- 一、*n*步转移概率
- 二、切普曼——柯尔莫哥洛夫方程（*C*－*K*方程）
- 三、初始分布与绝对分布

返回

切普曼—柯尔莫哥洛夫方程，简称*C*—*K*方程，是马尔可夫过程的一个重要的概率特性，它揭示了状态之间转移的统计规律。为介绍*C*—*K*方程，我们首先引入*n*步转移概率概念。

一、*n* 步转移概率

1 *n*步转移概率的概念

马氏过程在时刻*m*时处于状态*i*，再经*n*步转移到状态*j*的*n*步转移概率，表示为在 X(m)=i的条件下, X(m+n)=j的条件概率

$$p_{ij}^{(n)}(m)=P\{X(m+n)=j\mid X(m)=i\}$$

易见,此条件概率不仅与转移步数n有关，也与时间起点*m*有关。

通常，我们规定0步转移概率为

$$\boxed{p_{ij}^{(0)}(m)=\delta_{ij}=\begin{cases}1 & i=j\\ 0 & i\neq j\end{cases},\quad m\geq 0}$$

这表示,马氏过程在时刻*m*时处于状态*i*，停留在原状态*i*的概率为1,而转移到别的状态 $j\neq i$ 的概率为0.

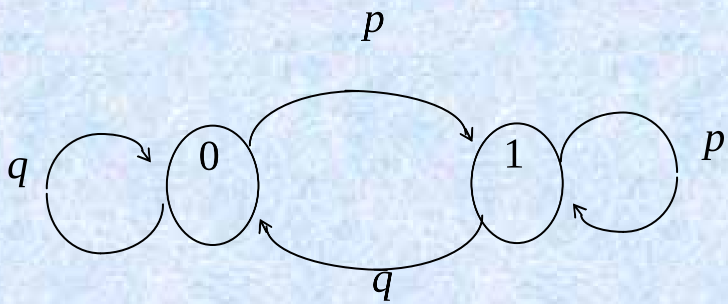
特别的,当n=1时,即为马氏过程的一步转移概率

$$\boxed{p_{ij}^{(1)}(m)=P\{X(m+1)=j\mid X(m)=i\}=p_{ij}(m)}$$

当n=2时,即为马氏过程的二步转移概率

$$\boxed{p_{ij}^{(2)}(m)=P\{X(m+2)=j\mid X(m)=i\}}$$

例**3.1** 在例2.3中齐次马氏链的概率转移图为



试求其2步转移概率:

$$p_{00}^{(2)}(0), p_{01}^{(2)}(0), p_{10}^{(2)}(0), p_{11}^{(2)}(0)。$$

解 因为其一步转移概率为

$$P(X(1)=0 \mid X(0)=0)=q \quad P(X(1)=1 \mid X(0)=0)=p$$

$$P(X(1)=0 \mid X(0)=1)=q \quad P(X(1)=1 \mid X(0)=1)=p$$

因此$p_{00}^{(2)}(0)=P(X(2)=0 \mid X(0)=0)=\dfrac{P(X(2)=0, X(0)=0)}{P(X(0)=0)}$

$$=\frac{P(X(2)=0, X(1)=0, X(0)=0)+P(X(2)=0, X(1)=1, X(0)=0)}{P(X(0)=0)}$$

$$=\frac{P(X(1)=0,X(0)=0)P(X(2)=0\mid X(1)=0,X(0)=0)}{P(X(0)=0)}+$$

$$\frac{P(X(1)=1,X(0)=0)P(X(2)=0\mid X(1)=1,X(0)=0)}{P(X(0)=0)}$$

$$=P(X(1)=0\mid X(0)=0)P(X(2)=0\mid X(1)=0)+$$

$$P(X(1)=1\mid X(0)=0)P(X(2)=0\mid X(1)=1)$$

$$=q\times q+p\times q=q^2+pq$$

类似可求出其余3个2步转移概率:

$$p_{01}^{(2)}(0)=pq+p^2,\ p_{10}^{(2)}(0)=q^2+pq,\ p_{11}^{(2)}(0)=pq+p^2$$

也可类似求出2步转移概率:

$$p_{00}^{(2)}(1),\ p_{01}^{(2)}(1),\ p_{10}^{(2)}(1),\ p_{11}^{(2)}(1)。$$

2 n步转移概率的性质

(1) $p_{ij}^{(n)}(m) \geq 0 \qquad i, j \in E$

(2) $\sum_{j\in E} p_{ij}^{(n)}(m) = 1 \quad i \in E$

由概率定义，第一条性质是显然的，第二条性质可借助于全概率公式加以证明，实际上

$$\sum_{j\in E} p_{ij}^{(n)}(m) = \sum_{j\in E} P\{X(m+n) = j \mid X(m) = i)$$

$$= \sum_{j\in E} \frac{P\{X(m+n) = j, X(m) = i\}}{P(X(m) = i)}$$

$$= \frac{1}{P\{X(m) = i\}} \sum_{j\in E} P\{X(m+n) = j, X(m) = i\}$$

$$= \frac{1}{P\{X(m)=i\}} P\left(\bigcup_{j\in E} \{X(m+n)=j, X(m)=i\} \right)$$

$$= \frac{1}{P\{X(m)=i\}} P\{X(m)=i\} = 1$$

其实际意义是,当马氏过程在时刻*m*时从状态*i*出发，经*n*步必然转移到状态空间E中的某个状态*j*.

特别的,当n=2时,即为 $\sum_{j\in E} p_{ij}^{(2)}(m) = 1 \quad i \in E$

如在例3.1中有:E={0,1}

$$\sum_{j\in E} p_{0j}^{(2)}(m) = p_{00}(2) + p_{01}(2) = (q^2 + pq) + (pq + p^2) = 1$$

$$\sum_{j\in E} p_{1j}^{(2)}(m) = p_{10}(2) + p_{11}(2) = (q^2 + pq) + (pq + p^2) = 1$$

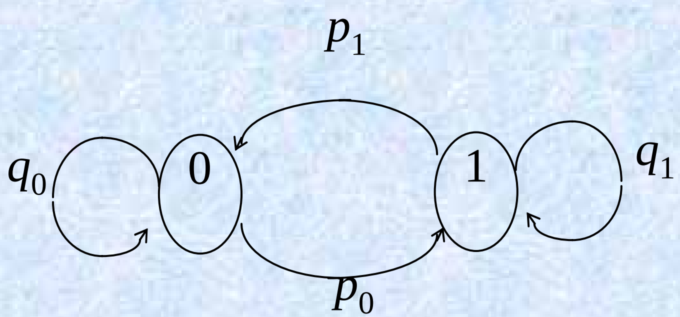
3　n步转移概率矩阵

马氏过程的n步转移概率构成的矩阵，称为n步转移概率矩阵，表示为

$$P^{(n)}(m)=\begin{pmatrix} p_{11}^{(n)}(m) & p_{12}^{(n)}(m) & \cdots & p_{1j}^{(n)}(m) & \cdots \\ p_{21}^{(n)}(m) & p_{22}^{(n)}(m) & \cdots & p_{2j}^{(n)}(m) & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{i1}^{(n)}(m) & p_{i2}^{(n)}(m) & \cdots & p_{ij}^{(n)}(m) & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}=\left(p_{ij}^{(n)}(m)\right)$$

例**3.2**　设{X(n),n=0,1,2,...}是状态空间为E={0,1}的马氏链，其中0, 1分别表示系统故障或工作，若系统今天是工作的，明天仍工作或故障的概率为q_1和p_1，若系统今天为故障，明天仍故障或工作的概率

分别是q_0和p_0，其概率转移图如下



其中$p_0+q_0=1,\ p_1+q_1=1$

若不考虑绝对时间，试求此马氏链所表示系统的一步、二步转移概率矩阵。

解：若不考虑绝对时间，故$X(n)$是齐次的，令X(0)=i表示系统今天的状态，i=0,1，则系统的一步转移概率为

$$p_{00}=P\{X(1)=0\,|\,X(0)=0\}=q_0$$

$$p_{01}=P\{X(1)=1\,|\,X(0)=0\}=p_0$$

$$p_{10}=P\{X(1)=0\,|\,X(0)=1\}=p_1$$

$$p_{11}=P\{X(1)=1\,|\,X(1)=1\}=q_1$$

一步转移概率矩阵 $P=\begin{pmatrix} q_0 & p_0 \\ p_1 & q_1 \end{pmatrix}$

二步转移概率

$$p_{00}^{(2)} = P\{X(2)=0 \mid X(0)=0\}$$

$$= P\left(\{X(2)=0\} \cap \left[\{X(1)=0\} \cup \{X(1)=1\}\right] \mid X(0)=0\right)$$

$$= P\{X(2)=0, X(1)=0 \mid X(0)=0\} + P\{X(2)=0, X(1)=1 \mid X(0)=0\}$$

$$= \frac{P\{X(2)=0, X(1)=0, X(0)=0\}}{P\{X(0)=0\}} + \frac{P\{X(2)=0, X(1)=1, X(0)=0\}}{P\{X(0)=0\}}$$

$$= P\{X(1)=0 \mid X(0)=0)P(X(2)=0 \mid X(1)=0\} +$$

$$P\{X(1)=1 \mid X(0)=0)P(X(2)=0 \mid X(1)=1\}$$

$$= p_{00}p_{00} + p_{01}p_{10} = q_0^2 + p_0 p_1$$

类似可得其它两步转移概率

$$p_{01}^{(2)} = p_{00}p_{01} + p_{01}p_{11} = q_0p_0 + p_0q_1$$

$$p_{10}^{(2)} = p_{10}p_{00} + p_{11}p_{10} = p_1q_0 + q_1p_1$$

$$p_{11}^{(2)} = p_{10}p_{01} + p_{11}p_{11} = p_1p_0 + q_1^2$$

故得二步转移矩阵为

$$\boxed{P^{(2)} = \begin{pmatrix} q_0^2 + p_0p_1 & q_0p_0 + p_0q_1 \\ p_1q_0 + q_1p_1 & p_1p_0 + q_1^2 \end{pmatrix}}$$

从上述推导可看出，此二步转移矩阵，实际上可由一步转移矩阵相乘得出，即

$$\boxed{P^{(2)} = P \times P = \begin{pmatrix} q_0 & p_0 \\ p_1 & q_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} q_0 & p_0 \\ p_1 & q_1 \end{pmatrix}}$$

类似可推得三步转移概率矩阵 $\boxed{P^{(3)} = P^{(2)} \cdot P = P^3}$

例**3.3** 设{X(n),n=0,1,2,…}为齐次马尔可夫链，状态空间为E={1,2,3}，其一步转移概率矩阵为

$$P = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0.5 \\ 0.75 & 0.25 & 0 \end{pmatrix}$$

试求其二步及三步转移概率矩阵.

解 $P^{(2)} = P \times P$

$$= \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0.5 \\ 0.75 & 0.25 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0.5 \\ 0.75 & 0.25 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.25 & 0.5 & 0.25 \\ 0.375 & 0.375 & 0.25 \\ 0.375 & 0.5 & 0.125 \end{pmatrix}$$

$$P^{(3)} = P^{(2)} \times P$$

$$= \begin{pmatrix} 0.25 & 0.5 & 0.25 \\ 0.375 & 0.375 & 0.25 \\ 0.375 & 0.5 & 0.125 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0.5 \\ 0.75 & 0.25 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.3125 & 0.4375 & 0.25 \\ 0.375 & 0.4375 & 0.1875 \\ 0.28125 & 0.46875 & 0.25 \end{pmatrix}$$

一般地，若状态空间E={1,2,…,r}，已知齐次马氏链{X(n),n=0,1,2,…}的一步转移概率矩阵为

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1r} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2r} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{r1} & p_{r2} & \cdots & p_{rr} \end{pmatrix}$$

它与时间起点无关，即

$$p_{ij}(m) = p_{ij}, i.j \in E$$

则由全概率公式可得，其二步转移概率为

$$p_{ij}^{(2)} = P\{X(2)=j \mid X(0)=i\}$$

$$= p_{i1}\cdot p_{1j} + p_{i2}\cdot p_{2j} + \cdots + p_{ir}\cdot p_{rj}$$

$$= \sum_{k=1}^{r} p_{ik}\,p_{kj} \qquad i\cdot j = 1,2,\cdots,r$$

二步转移概率矩阵为 $\boxed{P^{(2)} = \left(p_{ij}^{(2)}\right) = P\cdot P = P^2}$

即二步转移概率矩阵恰好等于两个一步转移概率矩阵的乘积，类似可推导出三步转移概率矩阵恰好为一个二步转移概率矩阵与一个一步转移概率矩阵的乘积:

$$\boxed{P^{(3)} = \left(p_{ij}^{(3)}\right) = P^{(2)}\cdot P = P^3}$$

利用数学归纳法可以证明齐次马氏链的*n*步转移概率矩阵等于一个*n*－1步转移概率矩阵与一个一步转移概率矩阵的乘积，即

$$P^{(n)}=\left(p_{ij}^{(n)}\right)=P^{(n-1)}\cdot P=P^{n}$$

其中n步转移概率为

$$p_{ij}^{(n)}=p_{i1}^{(n-1)}\cdot p_{1j}+p_{i2}^{(n-1)}\cdot p_{2j}+\cdots+p_{ir}^{(n-1)}\cdot p_{rj}=\sum_{k=1}^{r}p_{ik}^{(n-1)}p_{kj}$$

此式表明,若质点从i点出发，经n-1步必到达状态空间E中之一点k的事件为必然事件， n步转移概率的值可视作质点从i点出发，经$n-1$步到达E中一点k，再经一步由k点到达j点的概率之和。

利用这个思想，我们还可得到比上述n步转移概率与n步转移概率矩阵的更一般的等式,以及有关n步转移概率及其转移概率矩阵的重要性质，这就是下面要叙述的$C-K$方程，它在马氏链，特别是齐次马氏链的研究中占有极其重要的地位。

二、切普曼—柯尔莫哥洛夫方程（C－K方程）

定理3.1 设{X(n),n=0,1,2,...}为一马氏链，状态空间E={0,±1,±2,...}或有限子集，则其*n*步转移概率满足下述等式：

$$p_{ij}^{(n)}(r)=\sum_{k\in E}p_{ik}^{(m)}(r)\ p_{kj}^{(n-m)}(r+m)\qquad i,j\in E,\quad 1\le m\le n$$

对应的*n*步转移概率矩阵为

$$P^{(n)}(r)=P^{(m)}(r)P^{(n-m)}(r+m)$$

即n步转移概率矩阵等于一个m步转移概率矩阵与一个n-m步转移概率矩阵的乘积.

证：利用全概率公式，概率加法公式以及马氏性可以证明这个结论.实际上，时间起点为r的n步转移概率为

$$p_{ij}^{(n)}(r) = P\{X(r+n) = j \mid X(r) = i\}$$

$$= P\left\{ (X(r+n) = j) \left[\bigcup_{k\in E} (X(r+m) = k) \right] \middle| X(r) = i \right\}$$

$$= P\left\{ \bigcup_{k\in E} (X(r+n) = j, X(r+m) = k) \middle| X(r) = i \right\}$$

$$= \sum_{k\in E} P\{X(r+n) = j, X(r+m) = k \mid X(r) = i\}$$

$$= \sum_{k\in E} P\{X(r+m) = k \mid X(r) = i\} P\{X(r+n) = j \mid X(r+m) = k, X(r) = i\}$$

$$= \sum_{k\in E} p_{ik}^{(m)}(r) \cdot p_{kj}^{(n-m)}(r+m)$$

再由矩阵运算可得，$P^{(n)}(r)$的第i行，j行的元素，恰好等于$P^{(m)}(r)$的第i行元素与$P^{(n-m)}(r+m)$的第i列元素相乘并求和而得。

例如E={1,2,…,k},则有

$$P^{(n)}(r)=$$

$$\begin{pmatrix} p_{11}^{(m)}(r) & p_{12}^{(m)}(r) & \cdots & p_{1k}^{(m)}(r) \\ p_{21}^{(m)}(r) & p_{22}^{(m)}(r) & \cdots & p_{2r}^{(m)}(r) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{k1}^{(m)}(r) & p_{k2}^{(m)}(r) & \cdots & p_{kk}^{(m)}(r) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{11}^{(n-m)}(r+m) & p_{12}^{(n-m)}(r+m) & \cdots & p_{1k}^{(n-m)}(r+m) \\ p_{21}^{(n-m)}(r+m) & p_{22}^{(n-m)}(r+m) & \cdots & p_{2r}^{(n-m)}(r+m) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{k1}^{(n-m)}(r+m) & p_{k2}^{(n-m)}(r+m) & \cdots & p_{kk}^{(n-m)}(r+m) \end{pmatrix}$$

由上述结论可得以下几个推论:

推论3.1 若{X(n),n=0,1,2,…} 为一齐次马氏链，状态空间E={0,±1, ±2,…}，或有限子集，则其n步转移概率有类似等式:

$$p_{ij}^{(n)} = \sum_{k\in E} p_{ik}^{(m)} \cdot p_{kj}^{(n-m)}$$ $$P^{(n)} = P^{(m)} \times P^{(n-m)}$$

这是因为齐次马氏链的一步转移概率与时间起点无关，如定理3.1推导，可知上两式成立。

推论3.2 若{X(n),n=0,1,2,…}为一齐次马氏链，状态空间E={0,±1, ±2,…}，或有限子集，则有

$$p_{ij}^{(n+m)} = \sum_{k\in E} p_{ik}^{(n)} \cdot p_{kj}^{(m)}$$ $$P^{(n+m)} = P^{(n)} \times P^{(m)}$$

推论3.3 若{X(n),n=0,1,2,…}为一齐次马氏链，状态空间E={0,±1, ±2,…}，或有限子集，则有

$$p_{ij}^{(n)} = \sum_{k_1\in E}\sum_{k_2\in E}\cdots\sum_{k_{n-1}\in E} p_{ik_1}\cdot p_{k_1k_2}\cdots p_{k_{n-1}j}$$ $$P^{(n)} = P^{n}$$

上述定理与推论中所得的等式

$$p_{ij}^{(n)}(r)=\sum_{k\in E}p_{ik}^{(m)}(r)\ \ p_{kj}^{(n-m)}(r+m)\quad 1\le m\le n$$

$$p_{ij}^{(n)}=\sum_{k\in E}p_{ik}^{(m)}\cdot p_{kj}^{(n-m)}\qquad 1\le m\le n$$

$$p_{ij}^{(n+m)}=\sum_{k\in E}p_{ik}^{(n)}\cdot p_{kj}^{(m)}$$

$$p_{ij}^{(n)}=\sum_{k_1\in E}\sum_{k_2\in E}\cdots\sum_{k_{n-1}\in E}p_{ik_1}\cdot p_{k_1k_2}\cdots p_{k_{n-1}j}$$

$$P^{(n)}(r)=P^{(m)}(r)P^{(n-m)}(r+m)\qquad 1\le m\le n$$

$$P^{(n)}=P^{(m)}\times P^{(n-m)}\qquad 1\le m\le n$$

$$P^{(n+m)}=P^{(n)}\times P^{(m)}$$

$$P^{(n)}=P\times P^{(n-1)}=P^{n}$$

均称为

C-K方程

例3.4 设{X(n),n⩾1}为齐次马氏链，E={1,2,…5} 为其状态空间，一步转移概率为

$$p_{12}=1,\ p_{54}=1,\quad p_{i\ i+1}=p_{ii}=p_{ii-1}=\frac{1}{3},\quad i=2,3,4$$

其余为0，试求：

（1）两步转移概率矩阵；

（2）从状态3经过两步到达状态3的概率；

（3）从状态3经过四步到达状态5的概率。

解：由所给条件得{X(n),n⩾1}的一步转移概率矩阵为：

$$P=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

（1）由齐次性及C-K方程得两步转移概率矩阵

$$P^{(2)}=P\cdot P=\begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 & 0 \\ 1/9 & 5/9 & 2/9 & 1/9 & 0 \\ 1/9 & 2/9 & 1/3 & 2/9 & 1/9 \\ 0 & 1/9 & 2/9 & 5/9 & 1/9 \\ 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

（2）由可知 $p_{33}^{(2)}=1/3$

（3）再由C-K方程计算四步转移概率：

$$p_{35}^{(4)}=\sum_{k\in E}p_{3k}^{(2)}p_{k5}^{(2)}$$

$$=p_{31}^{(2)}\cdot p_{15}^{(2)}+p_{32}^{(2)}\cdot p_{25}^{(2)}+p_{33}^{(2)}\cdot p_{35}^{(2)}+p_{34}^{(2)}\cdot p_{45}^{(2)}+p_{35}^{(2)}\cdot p_{55}^{(2)}$$

$$=\frac{1}{9}\times 0+\frac{2}{9}\times 0+\frac{1}{3}\times\frac{1}{9}+\frac{2}{9}\times\frac{1}{9}+\frac{1}{9}\times\frac{1}{3}=\frac{8}{81}$$

三、初始分布与绝对分布

1 初始分布与初始概率

定义**3.1** 设$\{X(n),n\geqslant 0\}$为一马氏链，$E=\{0,\pm 1,\pm 2,\ldots\}$或有限子集为其状态空间，令

$$p_i(0)=P\{X(0)=i\} \quad i\in E$$

且对于任意的$i\in E$，均有

$$\text{(i)} \quad p_i(0)\geq 0 \qquad \text{(ii)} \quad \sum_{i\in E} p_i(0)=1$$

则称此为该马氏链的初始分布，或称初始概率。实际上，初始概率就是马氏链在初始时刻$n=0$时处于状态i的概率。

例**3.5** 设$\{X(n),n\geqslant 0\}$为一马氏链， $E=\{1,2,3\}$为状态空间,则 $p_i(0)=1/3,i\in E$, 就构成该马氏链的初始分布。

2 绝对分布与绝对概率

定义**3.1** 设$\{X(n),n\geqslant 0\}$为一马氏链，$E=\{0,\pm 1,\pm 2,\ldots\}$或有限子集为其状态空间，令

$$p_i(n)=P\{X(n)=i\} \qquad i\in E$$

且对于任意的$i\in E$，均有

$$\text{(i)} \quad p_i(n)\geq 0 \qquad \text{(ii)} \quad \sum_{i\in E} p_i(n)=1$$

则称$\{p_i(n),i\in E,n\geqslant 1\}$为该马氏链的绝对分布，或称绝对概率。

马氏链的绝对概率与初始概率的关系由如下定理给出:

定理3.1 马氏链的绝对概率由其初始分布及相应的转移概率唯一确定。

证：设{X(n),n≥0}为一马氏链，*E*为状态集，则对任意的j∈E, n=1时,马氏链处于状态*j*的概率

$$p_j(1) = P\{X(1)=j\} = P\left\{(X(1)=j)\cdot\left[\bigcup_{i\in E} X(0)=i\right]\right\}$$

$$= P\left\{\bigcup_{i\in E}(X(1)=j, X(0)=i\right\}$$

$$= \sum_{i\in E} P\{X(1)=j, X(0)=i\}$$

$$= \sum_{i\in E} P\{X(0)=i\}P\{X(1)=j \mid X(0)=i\} \boxed{= \sum_{i\in E} p_i \cdot p_{ij}(0)}$$

一般地，当n≥2时，绝对概率

$$
\begin{aligned}
p_j(n) &= P\{X(n)=j\} \\
&= P\left\{(X(n)=j)\cdot\left[\bigcup_{i\in E}(X(0)=i)\right]\right\} \\
&= P\left\{\bigcup_{i\in E}(X(n)=i, X(0)=i\right\} = \sum_{i\in E} P\{X(n)=j, X(0)=i\} \\
&= \sum_{i\in E} P\{X(0)=i\}P\{X(n)=j \mid X(0)=i\} \boxed{=\sum_{i\in E} p_i \cdot p_{ij}^{(n)}(0)}
\end{aligned}
$$

推论3.4 马氏链的绝对概率由其初始分布及一步转移概率唯一确定。

这由定理3.1结论知 $\boxed{P(n)=P(0)\cdot P^{(n)} = P(0)\cdot P^n}$

其中$P(n)=[p_1(n), p_2(n),\cdots p_i(n),\cdots, i\in E]$为绝对概率行矩阵

$P(0)=\left[p_1(0), p_2(0), \cdots p_i(0), \cdots, i \in E\right]$为初始概率行矩阵

定理3.3 马氏链的有限维概率分布由其初始分布及一步转移概率唯一确定。

证： 设{X(n),n≥0}为一马氏链，*E*为其状态空间，初始分布为$p_j(0)$,j∈E，则对于任意的*k*及*k*个非负整数$0<n_1<n_2<\ldots<n_{k-1}<n_k$及任意数$i_j\in E$,j=1,2,…,k,随机变量$X(n_1),X(n_2),\ldots,X(n_k)$的联合概率分布为

$$P\left\{X(n_1)=i_1, X(n_2)=i_2, \cdots, X(n_k)=i_k\right\}$$

$$=P\left\{X(n_1)=i_1\right\}P\left\{X(n_2)=i_2 \middle| X(n_1)=i_1\right\}P\left\{X(n_3)=i_3 \middle| X(n_2)=i_2, X(n_1)=i_1\right\}$$

$$\cdots P\left\{X(n_k)=i_k \middle| X(n_{k-1})=i_{k-1}, \cdots, X(n_1)=i_1\right\}$$

$$=P\left\{X(n_1)=i_1\right\}P\left\{X(n_2)=i_2 \middle| X(n_1)=i_1\right\}P\left\{X(n_3)=i_3 \middle| X(n_2)=i_2\right\}\cdots$$

$$P\left\{X(n_k)=i_k \middle| X(n_{k-1})=i_{k-1}\right\}$$

$$= p_{i_1}(n_1)\, p_{i_1 i_2}^{(n_2-n_1)}(n_1)\, p_{i_2 i_3}^{(n_3-n_2)}(n_2)\cdots p_{i_{k-1} i_k}^{(n_k-n_{k-1})}(n_{k-1})$$

(1) 当n_1=0时，联合分布律就由初始分布$p_{i_1}(0)$与多步转移概率 $p_{i_1 i_2}^{(n_2-n_1)}(n_1),\ p_{i_2 i_3}^{(n_3-n_2)}(n_2),\cdots,p_{i_{k-1} i_k}^{(n_k-n_{k-1})}(n_{k-1})$ 唯一确定.且多步转移概率又由其一步转移概率确定，故知定理3.3结论成立；

(2) 当n_1>0时，其联合分布律由绝对概率 $p_{i_1}(n_1)$与多步转移概率 $p_{i_1 i_2}^{(n_2-n_1)}(n_1),\ p_{i_2 i_3}^{(n_3-n_2)}(n_2),\cdots,p_{i_{k-1} i_k}^{(n_k-n_{k-1})}(n_{k-1})$ 唯一确定.且由定理3.2知绝对概率由其初始分布及一步转移概率唯一确定.故知结论正确.

由定理3.2与3.3知，马氏链的初始分布与一步转移概率唯一确定了其概率特性，因此讨论初始分布与一步转移概率对马氏链研究是非常重要的。

例**3.6**　某计算机房的一台计算机经常出故障，研究者每隔15分钟观察一次计算机的运行状态，收集了24小时的数据（共作了97次观察）。用1表示正常状态，用0表示不正常状态，所得数据序列如下：

1 1 1 0 0 1 0 0 1 1 1 1 1 1 1 0 0 1 1 1 1 0 1 1 1 1 1 1
0 0 1 1 1 1 1 1 1 1 1 0 0 0 1 1 0 1 1 0 1 1 1 1 0 1 1 0
1 1 0 1 0 1 1 1 1 0 1 1 1 0 1 1 1 1 0 1 1 1 1 1 1 0 0 1
1 0 1 1 1 1 1 1 0 0 1 1 1

设$X(n)$为n(n=1,2,…,97)个时段的计算机状态，可以认为它是一个齐次马氏链。

（1）试求其一步转移概率；

（2）若计算机在前一时段（15分钟）的状态为0，那么从本时段起，此计算机能连续正常工作一小时（4个时段）的概率是多少？

解：如在概率论中一样，我们可将0或1出现的频率近似作为0或1出现的概率，这样{X(n),n⩾0}为一齐次马氏链，状态空间为E={0,1}，且其绝对概率

$$p_0 = P\{X(n)=0\} = \frac{26}{96} \quad p_1 = P\{X(n)=1\} = \frac{70}{96} \qquad n = 1,2\cdots$$

（1）由题设知，96次状态转移过程为：

i) 从状态0转移到状态0共有8次，故相应转移概率

$$p_{00} = P\{X(n+1)=0 \mid X(n)=0\} = \frac{8/96}{26/96} = \frac{8}{26} = \frac{4}{13}$$

ii) 从状态0转移到状态1共有18次，故相应转移概率为

$$p_{01} = P\{X(n+1)=1 \mid X(n)=0\} = \frac{18}{26} = \frac{9}{13}$$

iii) 从状态1转移到0共有18次，故相应转移概率为

$$p_{10}=P\{X(n+1)=0|X(n)=1\}=\frac{18}{70}=\frac{9}{35}$$

iv) 从状态1转移到状态1共有52次，故相应转移概率为

$$p_{11}=P\{X(n+1)=1|X(n)=1\}=\frac{52}{70}=\frac{26}{35}$$

即得此马氏链的一步转移矩阵为 $P=\begin{pmatrix} 4/13 & 9/13 \\ 9/35 & 26/35 \end{pmatrix}$

（2）由题意，前一时段的状态为0，意味着初始分布为P(X(0)=0)=1,计算机能连续正常工作4个时段的概率为

$$P\{X(0)=0, X(1)=1, X(2)=1, X(3)=1, X(4)=1\}$$

$$=p_0(0)\cdot p_{01}(0)p_{11}(1)p_{11}(2)p_{11}(3)=1\times\frac{9}{13}\times\frac{26}{35}\times\frac{26}{35}\times\frac{26}{35}=0.2838$$

例**3.7** 设{X(n),n⩾0}是具有三个状态0, 1, 2的齐次马氏链，其一步转移概率矩阵为

$$P=\begin{pmatrix} 3/4 & 1/4 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 3/4 & 1/4 \end{pmatrix}$$

初始分布为

$$p_i(0)=P\{X(0)=i\}=\frac{1}{3}, i=0,1,2$$

试求 （1） $P\{X(0)=0, X(2)=1\}$;（2） $P\{X(2)=1\}$

（3） $P\{X(0)=1, X(1)=1, X(3)=1, X(5)=1\}$;

解（1） $P\{X(0)=0, X(2)=1\}$

$$=P\{X(0)=0\}P\{X(2)=1|X(0)=0\}=p_0(0)p_{01}^{(2)}$$

而$p_0(0)=\dfrac{1}{3}$ 利用二步转移矩阵可获 得$p_{01}^{(2)}$

而二步转移矩阵则为两个一步转移矩阵的乘积，即

$$P^{(2)} = P \cdot P = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{8} & \frac{5}{16} & \frac{1}{16} \\ \frac{5}{16} & \frac{1}{2} & \frac{3}{16} \\ \frac{3}{16} & \frac{9}{16} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

$p_{01}^{(2)} = \frac{5}{16}$即为所求。

故有$P\{X(0)=0, X(2)=1\} = p_0(0)p_{01}^{(2)} = \frac{1}{3} \times \frac{5}{16} = \frac{5}{48}$

(2) $p_1(2) = P\{X(2)=1\}$

$$= p_0(0)p_{01}^{(2)} + p_1(0)p_{11}^{(2)} + p_2(0)p_{21}^{(2)}$$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{5}{16} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \times \frac{9}{16} = \frac{11}{24}$$

(3) $P\{X(0)=1, X(1)=1, X(3)=1, X(5)=1\}$

$$= P\{X(0)=1\}P\{X(1)=1 | X(0)=1\}P\{X(3)=1 | X(1)=1\}\cdot$$

$$P\{X(5)=1 | X(3)=1\}$$

$$= p_1(0)p_{11}(0)p_{11}^{(2)}(1)p_{11}^{(2)}(3) = \frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2} = \frac{1}{24}$$