§3.4 随机过程的均方积分

一 二阶矩过程的均方积分概念

二 二阶矩过程的均方积分性质

返回

一 二阶矩过程的均方积分概念

1 二阶矩过程的均方积分定义

定义4.1 设随机过程为

$$\{X(t), t \in T = [a,b]\}$$

$f(t), t \in T$ 为任意普通函数；

1）分割T=[a, b]：将[a, b]分成n个子区间，分点为

$$a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b \quad \Delta_n = \max_{1\le k\le n}(t_k - t_{k-1}) = \max_{1\le k\le n} \Delta t_k$$

2）作和式 $Y_n = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k) X(\xi_k)(t_k - t_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k) X(\xi_k) \Delta t_k$

其中$t_{k-1} \le \xi_k \le t_k \quad 1 \le k \le n$

3）如果在 $\Delta_n \to 0$ 时，Y_n均方收敛于Y（此极限不依赖于分点与ξ_k的取法）

则称$f(t)X(t)$在$T=[a, b]$上均方可积，并称Y_n的极限Y为$f(t)X(t)$在$[a, b]$上的均方积分，记作

$$Y = \int_a^b f(t)X(t)dt = \underset{\Delta_n \to 0}{L \cdot i \cdot m} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)X(\xi_k)\Delta t_k$$

特别的，若 $f(t) \equiv 1$ 时，即有

$$\int_a^b X(t)dt = \underset{\Delta_n \to 0}{L \cdot i \cdot m} \sum_{k=1}^{n} X(\xi_k)\Delta t_k$$

2 二阶矩过程的均方积分存在性

1) （均方可积准则）设$f(t)$为普通函数， X (t)为随机过程,则$f(t)$ X (t)在[a, b]上均方可积的充要条件是下面的普通二重积分

$$\int_a^b\int_a^b f(s)f(t)R_X(s,t)dsdt$$ 存在

且有$E\left|\int_a^b f(t)X(t)dt\right|^2=\int_a^b\int_a^b f(s)f(t)R_X(s,t)dsdt$

2)如果随机过程在[a, b]上均方连续，则$X(t)$在[a, b]上均方可积。

二　二阶矩过程的均方积分性质

性质1:(唯一性)若$Y_1=\int_a^b f(t)X(t)dt, Y_2=\int_a^b f(t)X(t)dt$

则有 $Y_1=Y_2$

性质2：（线性性）

$$\int_a^b [c_1X(t)+c_2Y(t)]dt=c_1\int_a^b X(t)dt+c_2\int_a^b Y(t)dt$$

性质3：（可加性）对于任意的有

$$\int_a^b X(t)dt=\int_a^c X(t)dt+\int_c^b X(t)dt$$

性质4：若$Y(t)=\int_a^t X(t)dt$，$t\in[a,b]$，

则$Y'(t)=X(t)$　即$\left[\int_a^t X(t)dt\right]'=X(t)$

性质5：（牛顿一莱布尼兹公式） 设$X(t)$在$[a, b]$上均方可导，且$X'(t)$在$[a, b]$上均方连续，则有

$$\int_a^b X'(t)dt = X(b) - X(a)$$

性质6：设$X(t)$在$[a, b]$均方可积，则有

$$E\left[\int_a^b X(t)dt\right] = \int_a^b EX(t)dt$$

性质7：设$X(t)$在$[a, b]$上均方连续，则

$$E\left[\int_a^b X(t)dt\right]^2 \le M(b-a)^2$$

其中$M = \max\limits_{a \le t \le b} EX^2(t)$

例4.1 设随机过程的均值函数为

$$m_X(t)=t^2+1$$

试求$Y(s)=\int_0^s X(t)dt$的均值函数。

解：由性质6知

$$EY(s)=\int_0^s EX(t)dt=\int_0^s (t^2+1)dt=\frac{s^2}{3}+s$$

例4.2 设随机过程X (t)的协方差函数为

$$C_X(t_1,t_2)=(1+t_1t_2)\sigma^2$$

试求 $Y(s)=\int_0^s X(t)dt$ 的协方差函数与方差函数。

解 $C_Y(s_1,s_2)=E\{[Y(s_1)-EY(s_1)][Y(s_2)-EY(s_2)]\}$

$$=E\{[\int_0^{s_1}[X(t_1)-EX(t_1)dt_1][\int_0^{s_2}[X(t_2)-EX(t_2)]dt_2]\}$$

$$=\int_0^{s_1}\int_0^{s_2} E[(X(t_1)-EX(t_1)][X(t_2)-EX(t_2)]dt_1dt_2$$

$$=\int_0^{s_1}\int_0^{s_2} C_X(t_1,t_2)dt_1dt_2$$

$$=\int_0^{s_1}\int_0^{s_2}(1+t_1t_2)\sigma^2 dt_1dt_2$$

$$=\int_0^{s_1}\int_0^{s_2}\sigma^2 dt_1dt_2+\int_0^{s_1}\int_0^{s_2}t_1t_2\sigma^2 dt_1dt_2$$

$$=\sigma^2 s_1s_2+\sigma^2\cdot\frac{s_1^2}{2}\cdot\frac{s_2^2}{2}=\sigma^2 s_1s_2(1+\frac{1}{4}s_1s_2)$$

$$D_Y(s)=C_Y(s_1,s_2)|_{s_1=s_2=s}=\sigma^2 s^2(1+\frac{s^2}{4})$$

上一节 下一节