矩阵理论与方法

Chapter 4-Matrix Norm

Dr.Gongchao Su

College of Electrical and Information Engineering

Shenzhen University

gcsu@szu.edu.cn

Fall 2021

本章概要

1. 向量范数
2. 矩阵范数
3. 谱半径估计
4. 向量序列收敛

Definition 1 (向量范数)

设V^n是n维线性空间,若对于任意$x \in V^n$都存在一个实数$\|x\|$与x对应,并且满足:

(1)非负性:$\|x\| \geq 0, \|x\| = 0$ *if and only if* $x = 0$.

(2)齐次性: $\forall k \in R, \|kx\| = |k|\|x\|$.

(3)三角不等式: $\forall x, y \in V^n, \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

则$\|x\|$称为V^n中向量x的范数,即向量范数. V^n称为向量赋范空间,在此空间内向量x与y的距离可定义为范数$\|x - y\|$.

Example 1

$x \in C^n = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$,定义$\|x\| = |x_1| + \cdots + |x_n|$. 证明$\|.\|$是$C^n$上的向量范数.

Proof: 验证3条性质.非负性显然满足. 齐次性:
$\|kx\| = |kx_1| + \cdots + |kx_n| = |k|\|x\|$. 三角不等式:
$\|x + y\| = \sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i| \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i| + \sum_{i=1}^{n} |x_i| = \|x\| + \|y\|$. Note:
此范数称为1-范数(L_1 Norm),记为$\|.\|_1$.

向量范数 Vector Norm

Example 2

$x \in C^n = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$,定义$\|x\| = \max_i |x_i|$. 证明$\|.\|$是$C^n$上的向量范数.

Proof:非负性,齐次性显然满足.三角不等式:

令$j = \arg\max_i |x_i + y_i|$,则$\|x + y\| = |x_j + y_j| \le |x_j| + |y_j| \le \max_i |x_i| + \max_i |y_i| = \|x\| + \|y\|$.

Note:该范数称为∞-范数(L_∞ Norm),记为$\|.\|_\infty$.

向量范数 Vector Norm

Definition 2 (p-范数 L_p Norm)

$x \in C^n = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$,定义$\|x\|_p = (\sum_{i=1}^n |x_i|^p)^{\frac{1}{p}}$,$1 \leq p < \infty$，称为向量$x$的$p$-范数.

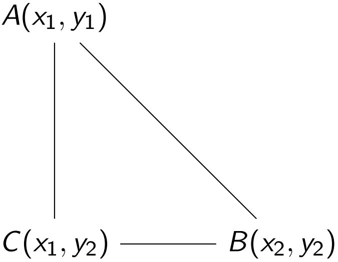
Example 3

(1)$p = 1 \to \sum_{i=1}^n |x_i| = \|x\|_1$;

(2)$p = 2 \to \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2} \to \|x\|_2$,2-范数($L_2$ Norm)

(3)$p = \infty, \lim_{p\to\infty} \|x\|_p = \max_i |x_i| \to \|x\|_\infty$.

向量范数 Vector Norm



常见的距离度量:

(1)欧氏距离:$|AB| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} = \|A - B\|_2$

(2)$|AB| = \max\{|y_2 - y_1|, |x_2 - x_1|\} = \|A - B\|_\infty$. AC,BC最长的一边

(3)$|AB| = |y_2 - y_1| + |x_2 - x_1| = \|A - B\|_1$

Example 4

证明上述定义的p-范数是C^n上的向量范数:证明过程见教材p.119

向量范数 Vector Norm

Lemma 1 (Cauchy-Schwarz Inequality)

$(\sum_{i=1}^n x_i y_i)^2 \leq (\sum_{i=1}^n x_i^2)(\sum_{i=1}^n y_i^2) \rightarrow (x, y) \leq \|x\|_2 \|y\|_2$

Lemma 2 (Minkowski Inequality)

$(\sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^p)^{\frac{1}{p}} \leq (\sum_{i=1}^n |x_i|^p)^{\frac{1}{p}} + (\sum_{i=1}^n |y_i|^p)^{\frac{1}{p}}, \forall p \geq 1$

Lemma 3 (Hölder Inequality)

$\sum_{i=1}^n |x_i y_i| \leq (\sum_{i=1}^n |x_i|^p)^{\frac{1}{p}} (\sum_{i=1}^n |y_i|^q)^{\frac{1}{q}}, \forall p, q > 1, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

Example 5

证明$\lim_{p\to\infty}\|x\|_p=\|x\|_\infty$.

Proof： 首先证明$\|x\|_p\geq\|x\|_\infty$.

$\because \|x\|_p=(\sum_{i=1}^n|x_i|^p)^{\frac{1}{p}}\geq((\max_i|x_i|)^p)^{\frac{1}{p}}=\|x\|_\infty$. 另一方面，

$(\sum_{i=1}^n|x_i|^p)^{\frac{1}{p}}\leq(n\max_i|x_i|^p)^{\frac{1}{p}}\leq n^{\frac{1}{p}}\|x\|_\infty$

$\xrightarrow{\lim_{p\to\infty}n^{\frac{1}{p}}=1}\|x\|_\infty\leq\lim_{p\to\infty}\|x\|_p\leq\|x\|_\infty$.

Lemma 4（向量范数的性质）

(1)if $\|x\| \neq 0$, *then* $\|\frac{x}{\|x\|}\| = 1$.

(2)$\forall x \in V, \|-x\| = \|x\|$.

(3)$|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|$.

(4)$|\|x\| - \|y\|| \leq \|x + y\|$.

Proof of (3):

$\|x\| = \|x - y + y\| \leq \|x - y\| + \|y\| \to \|x\| - \|y\| \leq \|x - y\|$,

$\|y\| = \|y - x + x\| \leq \|y - x\| + \|x\| \to \|x\| - \|y\| \geq -\|x - y\|$.

$\therefore |\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|$.

Example 6

$x=\begin{bmatrix} 4i \\ 1-3i \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix}$.求$\|x\|_1, \|x\|_2, \|x\|_\infty$.

Solution: $\|x\|_1 = |4i| + |1-3i| + 6 = 10 + \sqrt{10}$; $\|x\|_2 = \sqrt{16+10+36} = \sqrt{62}$; $\|x\|_\infty = \max\{4, \sqrt{10}, 6\} = 6$;

Lemma 5

$A \in C^{m\times n}, rank(A) = n$. $\|.\|_\alpha$是C^n上的某种向量范数. 对于任意$x \in C^n$,则 $\|x\|_\beta = \|Ax\|_\alpha$也是$C^m$上的范数.

向量范数 Vector Norm

Proof:齐次性显而易见.非负性:$\|x\|_\beta = \|Ax\|_\alpha \geq 0$. 并且若$\|Ax\|_\alpha = 0 \rightarrow Ax = 0 \xrightarrow{\text{A列满秩,列向量线性无关}} x = 0$. 三角不等式:$\|x+y\|_\beta = \|Ax+Ay\|_\alpha \leq \|Ax\|_\alpha + \|Ay\|_\alpha = \|x\|_\beta + \|y\|_\beta$.

可以利用这条性质由一个向量范数来构造另一个向量范数.

Example 7

若$A = diag(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$,$\alpha_i > 0$. 则可以构造新范数:

$\|Ax\|_1 = \sum_{i=1}^n a_i|x_i|$; $\|Ax\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2|x_i|^2}$; $\|Ax\|_\infty = \max_i a_i|x_i|$

向量范数 Vector Norm

Lemma 6 (向量范数连续性)

设$\|x\|_\alpha$,$\|x\|_\beta$是V中的2种任意向量范数,则一定存在两个与x无关的正常数c_1, c_2使得

$$c_1\|x\|_\beta \leq \|x\|_\alpha \leq c_2\|x\|_\beta$$

Proof: 教材P.121.

Definition 3 (向量范数等价)

设$\|x\|_\alpha$,$\|x\|_\beta$是V中的2种任意向量范数,若存在两个与x无关的正常数c_1, c_2使得$c_1\|x\|_\beta \leq \|x\|_\alpha \leq c_2\|x\|_\beta$,则$\|x\|_\alpha$与$\|x\|_\beta$等价.

Lemma 7 (向量范数等价性)

n维线性空间V上的任意两个不同的向量范数都是等价的.例如$\|.\|_1, \|.\|_2, \|.\|_\infty$都是两两等价的.

矩阵范数 Matrix Norm

Definition 4 (矩阵范数)

设$A \in C^{m\times n}$. 定义一个实值函数$\|.\|$,满足以下性质:

(1)非负性: $\|A\| \geq 0$, $\|A\| = 0$ *if and only if A=0.*

(2)齐次性: $\forall\lambda \in C, \|\lambda A\| = |\lambda|\|A\|$.

(3)三角不等式: $\forall A, B \in C^{m\times n}, \|A+B\| \leq \|A\| + \|B\|$.

(4)相容性: $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|, \forall A \in C^{m\times p}, B \in^{p\times n}$.

Example 8 (常见的矩阵范数)

$A \in C^{n\times n}, \|A\|_{m_1} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{ij}|; \|A\|_{m_2} = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2}$ (Frobenius Norm); $\|A\|_{m_\infty} = n \max_{i,j} |a_{ij}|$.

Example 9

验证 $\|A\|_{m_1} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$ 是矩阵范数.

Proof: 非负性,齐次性, 三角不等式显而易见. 相容性:

$$\begin{aligned}
\|AB\|_{m_1} &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |\sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}| \le \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (\sum_{k=1}^n |a_{ik}||b_{kj}|) \\
&\le \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n ((\sum_{k=1}^n |a_{ik}|)(\sum_{k=1}^n |b_{kj}|) \\
&\le (\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n |a_{ik}|)(\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n |b_{kj}|) \\
&= \|A\|_{m_1} \|B\|_{m_1}
\end{aligned}$$

Example 10

$A \in C^{n\times n}$,验证$\|A\|_{m_\infty} = n \max_{i,j} |a_{ij}|$是矩阵范数.

Proof: 非负性,齐次性, 三角不等式显而易见. 相容性:

$\|AB\|_{m_\infty} = n \max_{i,j} |\sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}| \le n \max_{i,j} \sum_{k=1}^{n} |a_{ik}||b_{kj}|$

$\le n \max_{i,k} |a_{ik}| \max_j \sum_{k=1}^{n} |b_{kj}| = \|A\|_{m_\infty} \max_j \sum_{k=1}^{n} |b_{kj}|$

$\le \|A\|_{m_\infty} n \max_{k,j} |b_{kj}| = \|A\|_{m_\infty} \|B\|_{m_\infty}$

Example 11

$A\in C^{m\times n}$,证明 $\|A\|_{m_\infty}=\sqrt{mn}\max_{i,j}|a_{ij}|$为矩阵范数.

Proof: 非负性,齐次性, 三角不等式显而易见. 相容性:

设$A\in C^{m\times p}$, $B\in C^{p\times n}$ such that $AB\in C^{m\times n}$.

$\|AB\|_{m_\infty}=\sqrt{mn}\max_{i,j}|\sum_{k=1}^{p}a_{ik}b_{kj}|\le\sqrt{mnp}\max_{i,k}|a_{ik}|\max_{k,j}|b_{kj}|$

$=\sqrt{mp}\max_{i,k}|a_{ik}|\sqrt{pn}\max_{k,j}|b_{kj}|=\|A\|_{m_\infty}\|B\|_{m_\infty}$

Definition 5 (矩阵范数与向量范数的相容性)

设$\|.\|_m$是$C^{n\times n}$上的矩阵范数,$\|.\|_v$是C^n上的向量范数,如果对于$\forall A\in C^{n\times n}$和$x\in C^n$ 都有 $\|Ax\|_v\le\|A\|_m\|x\|_v$, 则矩阵范数$\|.\|_m$ 与向量范数$\|.\|_v$ 相容.

1个矩阵范数可以和多个向量范数相容,如m_∞范数与$1,2,\infty$ 范数都相容.

Example 12

证明$c^{n\times n}$上的矩阵范数$\|.\|_{m_1}$和 F范数分别与c^n上的1-范数和2-范数相容.

Proof: Let $A\in C^{n\times n}, x\in C^n$.

则$\|Ax\|_1=\sum_{i=1}^n|\sum_{k=1}^n a_{ik}x_k|\leq\sum_{i=1}^n(\sum_{k=1}^n|a_{ik}x_k|)\xrightarrow{Minkowski Inequality}$
$\leq\sum_{i=1}^n(\sum_{k=1}^n|a_{ik}|)(\sum_{k=1}^n|x_k|)=(\sum_{i=1}^n\sum_{k=1}^n|a_{ik}|)(\sum_{k=1}^n|x_k|)=$
$\|A\|_{m_1}\|x\|_1$.

再证明矩阵F范数和向量2-范数相容. $\|Ax\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n |\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j|^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^n (\sum_{j=1}^n |a_{ij}||x_j|)^2}$ $\xrightarrow{Cauchy-SchwartzInequality} (\sum_{j=1}^n |a_{ij}x_j|^2) \le \sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2 \sum_{j=1}^n |x_j|^2 \to$ $\le \sqrt{(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2)(\sum_{j=1}^n |x_j|^2)} = \|A\|_F \|x\|_2.$

Lemma 8

$\|A\|_F \ge \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2}$

矩阵范数 Matrix Norm

如何构造与向量范数相容的矩阵范数：

Lemma 9 (存在性)

$\|\cdot\|_\alpha$ 是C^n 上的向量范数,$A \in R^{n\times n}$,则必存在与该向量范数相容的矩阵范数$\|A\|_M$，并且可以定义为

$$\|A\|_M = \max_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|_\alpha}{\|x\|_\alpha}$$

$\|A\|_M$称为从属于向量范数$\|x\|_\alpha$ 的方阵范数.

对于任意向量范数$(1,2,p,\infty)$,都可定义从属的矩阵范数,即

$$\|A\|_{m_p} = \max_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|_p}{\|x\|_p} = \max_{x\neq 0} \|A\frac{x}{\|x\|_p}\|_p = \max_{\|x\|_p=1} \|Ax\|_p.$$

矩阵范数 Matrix Norm

Lemma 10

任意的从属范数都是范数,即对于$\forall A, B \in C^{m\times n}, C \in C^{n\times p}, \lambda \in C$, 满足:

(1)非负性:$\|A\| \geq 0, \|A\| = 0$ *if and only if* $A = 0$.

(2)齐次性: $\|\lambda A\| = |\lambda|\|A\|$.

(3)三角不等式:$\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$.

(4)相容性: $\|AC\| \leq \|A\|\|C\|$

Proof of (4):

$$\|AC\| = \max_{\|x\|_p=1} \|ACx\|_p \xrightarrow{A\text{是从属范数}} \leq \max_{\|x\|_p=1} \|A\|\|Cx\|_p = \|A\| \max_{\|x\|_p=1} \|Cx\|_p$$

$$= \|A\|\|C\|$$

矩阵范数 Matrix Norm

Example 13 (常见的从属范数)

$A \in C^{m\times n}$. 由向量范数$\|.\|_1, \|.\|_2, \|.\|_\infty$ 导出的矩阵范数分别为:

(1)$\|A\|_1 = \max_j \sum_{k=1}^m |a_{kj}|$. 即矩阵的列向量最大1范数. 称为A的1-范数或者列和范数.

(2)$\|A\|_2 = [\lambda_{max}(A^H A)]^+$, 即$\sqrt{\sigma_1}$,方阵$A^H A$的最大奇异值. 称为A的2-范数.

(3)$\|A\|_\infty = \max_i \sum_{k=1}^n |a_{ik}|$. 即矩阵的行向量的最大1范数. 称为A的$\infty$ 范数或者 行和范数.

Example 14

求$A=[-1,2,1], B=\begin{bmatrix} -i & 2 & 3 \\ 1 & 0 & i \end{bmatrix}$的$\|.\|_1, \|.\|_2, \|.\|_\infty$范数.

Solution: $\|A\|_1 = |-1| + |2| + |1| = 4$; $\|A\|_2 = \sqrt{1+1+4} = \sqrt{6}$; $\|A\|_\infty = \max\{1,2,1\} = 2$; $\|B\|_1 = \max\{|-i|+1, |2|, |i|+3\} = 4$; $\|B\|_2 \xrightarrow{\lambda_{max}(B^TB)} = \sqrt{8+2\sqrt{13}} = \sqrt{8+2\sqrt{13}}$;
$\|B\|_\infty = \max\{|-i|+2+3, 1+|i|\} = 6$

矩阵范数 Matrix Norm

Example 15 (常见的长方阵范数)

$A \in C^{m\times n}$. 常见的矩阵范数包括:

(1) $\|A\|_{m_1} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|$

(2) $\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|^2}$, Frobenius Norm

(3) $\|A\|_M = \max\{m,n\}\max_{i,j}|a_{ij}|$,M范数或者最大范数

(4) $\|A\|_G = \sqrt{mn}\max_{i,j}|a_{ij}|$,G范数或者几何范数

Example 16

$x=[-1,i,0,1]$. 求$\|x\|_1, \|x\|_2, \|x\|_\infty$, $\|x^Tx\|_{m_1}, \|x^Tx\|_F, \|x^Tx\|_{m_\infty}, \|x^Tx\|_\infty$.

Solution: $\|x\|_1 = 1+1+0+1=3$;

$\|x\|_2=\sqrt{1+1+0+1}=\sqrt{3}, \|x\|_\infty=\max\{1,1,0,1\}=1$;

$$x^Tx=\begin{bmatrix}1 & -i & 0 & -1\\ -i & -1 & 0 & i\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ -1 & i & 0 & 1\end{bmatrix}. \quad \|x^Tx\|_{m_1}=9,$$

$\|x^Tx\|_F=\sqrt{9}=3, \|x^Tx\|_{m_\infty}=4\max_{i,j}|a_{ij}|=4$,

$\|x^Tx\|_\infty=\max\{3,3,0,3\}=3$.

范数的应用-谱半径估计

Definition 6 (谱半径)

设n阶方阵A的特征值为$\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ ，则称$\rho(A) = \max_i |\lambda_i|$ 为A的谱半径.

Lemma 11 (谱半径上限)

$\rho(A) \leq \|A\|_m$. $\|A\|_m$ 为任一矩阵范数.

Proof: 由相容性,$\xrightarrow{\lambda x = Ax} |\lambda| \|x\| = \|Ax\| \leq \|A\| \|x\| \rightarrow |\lambda| \leq \|A\|$. 因此可以通过任一矩阵范数来估计谱半径.

范数的应用-谱半径估计

Example 17

已知$A = \begin{bmatrix} 0 & 0.2 & 0.1 \\ -0.2 & 0 & 0.2 \\ -0.1 & -0.2 & 0 \end{bmatrix}$.试估计A的谱半径.

Solution: $\|A\|_1 = \|A\|_\infty = 0.4$; $\|A\|_{m_1} = 1$; $\|A\|_{m_\infty} = 3 \times 0.2 = 0.6$; $\|A\|_F = \sqrt{0.18} \approx 0.42$. 因此谱半径不超过0.4. 实际为0.3

Lemma 12 (向量序列的收敛性)

对于任意的初始向量$x^{(1)} \in C^n$ 和常数b 构建向量序列

$$x^{(k+1)} = Ax^{(k)} + b$$

则向量序列$\{x^{(k)}\}$收敛的充要条件是$\rho(A) < 1$. 若$\|A\| < 1$,则该序列必定收敛.

向量序列收敛

物理意义：设$\{x^{(k)}\}$收敛于x^*． 则

$x^* = Ax^* + b \to x^{(k)} - x^* = Ax^{(k-1)} + b - Ax^* - b \to x^{(k)} - x^* = Ax^{(k-1)} - Ax^* \to \|x^{(k)} - x^*\| = \|Ax^{(k-1)} - Ax^*\| \leq \|A\|\|x^{(k-1)} - x^*\|$,即每次迭代与$x^*$的距离至少以$\|A\|$的比例缩小．该比例接近与$\rho(A)$．

收敛条件

$x^{(k+1)} = A^k x^{(1)} + (A^{k-1} + \cdots + A + I)b$． 可以看出收敛应具备以下条件：

(1) $A^k x^{(1)} \to 0$，$\forall x^{(1)} \to A^k \to 0$,A要幂收敛于0

(2) $A^{k-1} + \cdots + A + I$应幂级数收敛．

向量序列收敛

Lemma 13

设A^k为n阶已知的方阵序列，则$\lim_{k\to\infty} A^k = 0_{n\times n}$的充要条件是$A$的谱半径$\rho(A) < 1$.

Proof:教材P.138

Lemma 14

设标量幂级数$\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$的收敛半径为$r$($|z| < r$时收敛)，则对于一个谱半径为$\rho(A)$的方阵$A$

(1)当$\rho(A) < r$时 $\sum_{k=0}^{\infty} a_k A^k$ 绝对收敛.

(2)当$\rho(A) > r$时 $\sum_{k=0}^{\infty} a_k A^k$ 绝对发散.

Proof:教材P.163

Example 18

求下列方阵的幂是否收敛.(1)$A=\begin{bmatrix}0.2 & 0.1 & 0.2\\ 0.5 & 0.5 & 0.4\\ 0.1 & 0.3 & 0.2\end{bmatrix}$

(2)$A=\begin{bmatrix}\frac{1}{6} & -\frac{4}{3}\\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{6}\end{bmatrix}$.

Solution:只需验证谱半径是否小于1.(1)观察1-范数或者∞ 范数.$\|A\|_1=0.9$ (2)因有元素大于1,故计算谱半径,特征值$\frac{5}{6},-\frac{1}{2}$.故谱半径 $\frac{5}{6}$. 两者均收敛.

向量序列收敛

Example 19

以下方阵幂级数$\sum_{k=1}^{\infty} kA^k$ 是否收敛? $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$

Solution:先计算标量级数的收敛半径再计算矩阵谱半径.$\sum_{k=1}^{\infty} kz^k$ 收敛半径为r=1. $\rho(A) = \max\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\} = \frac{1}{2}$. $\rho(A) < r$. 收敛.

Lemma 15

向量序列$x^{(k+1)} = Ax^{(k)} + b$ 收敛的条件: *(1)A*幂收敛于*1*,则$\rho(A) < 1$. *(2)*A^k 幂级数收敛,则$\rho(A) < r$,r为标量幂级数收敛半径.显然标量幂级数 $\sum_{k=0}^{\infty} z^k$的收敛半径为*1*. 因此$\rho(A) < 1$是向量序列$x^{(k+1)} = Ax^{(k)} + b$ 收敛的条件.

Example 20

向量序列$x^{k+1} = Bx^k + g$. 其中$B = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{12} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{12} & 0 & -\frac{3}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 \end{bmatrix}$ $g = \begin{bmatrix} \frac{1}{12} \\ \frac{1}{6} \\ -1 \end{bmatrix}$

Solution: 先通过谱半径以判断收敛性.显然$\|B\|_\infty = \frac{5}{6}, \rho(B) \le \frac{5}{6} < 1$，因此收敛.稳定解应满足$x^* = Bx^* + g$,则$(I - B)x^* = g \to x^* = (I - B)^{-1}g$

本章总结

向量范数和向量的距离

向量范数的判别

p-范数

构造向量范数

矩阵范数和矩阵的距离

矩阵范数相容性的证明

常见矩阵范数

矩阵范数和向量范数的相容性

由矩阵范数构造相容的向量范数

从属范数：由向量范数构造矩阵范数

范数的应用：谱半径估计

矩阵幂和矩阵幂级数的收敛性

向量序列的收敛性