矩阵理论与方法

Chapter 2-Matrix Normal Form

Dr.Gongchao Su

College of Electrical and Information Engineering

Shenzhen University

gcsu@szu.edu.cn

Fall 2021

本章概要

1. 相似矩阵
   - 矩阵的特征值,特征变量
   - 相似矩阵
   - 初等因子
   - Jordan标准形

特征值与特征向量

Definition 1 (特征值与特征向量)

令$A=(a_{ij})\in R^{n\times n}$. A的特征矩阵$\lambda I-A$的行列式

$$det(\lambda I-A)=\begin{vmatrix} \lambda-a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{n1} \\ -a_{21} & \lambda-a_{22} & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a_{n1} & \cdots & \cdots & \lambda-a_{nn} \end{vmatrix}$$

为A的特征多项式,$\varphi(\lambda)=det(\lambda I-A)$. $\varphi(\lambda)=0$的根称为A的特征值,所有满足

$$\lambda x=Ax\rightarrow(\lambda I-A)x=0$$

的非零解$x\in R^n$称为A的属于特征值λ的特征向量.

Example 1

线性变化T在3维线性空间V下的基为ξ_1,ξ_2,ξ_3.在该基下的矩阵为$\begin{bmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{bmatrix}$.求$A$的特征值与特征向量.

Solution: $\varphi(\lambda)=0\rightarrow\begin{vmatrix}\lambda-1&-2&-2\\2&\lambda-1&-2\\-2&-2&\lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda+1)^2(\lambda-5)=0$，特征值$\lambda_1=-1$(二重)，$\lambda_2=-5$. 当$\lambda=-1$时，$(\lambda I-A)x=0$的基础解系$x_1=(1,0,-1)^T$，$x_2=(0,1,-1)^T$.因此特征向量为$k_1x_1+k_2x_2$.

当$\lambda=5$时，$(\lambda I-A)x=0$的基础解系$x_1=(1,1,1)^T$.因此特征向量为k_1x_1.

Lemma 1 (特征值的性质)

设$A\in C^{n\times n}$的特征值为$\lambda_1,\cdots,\lambda_n$.则

1. $tr(A)=\sum_{i=1}^n a_{ii}=\sum_{i=1}^n \lambda_i$
2. $det(A)=\prod_{i=1}^n \lambda_i$
3. A^T的特征值为$\lambda_1,\cdots,\lambda_n$,$A^H$的特征值$\overline{\lambda_1},\cdots,\overline{\lambda_n}$

Definition 2 (相似矩阵)

令$A,B\in R^{n\times n}$,若存在可逆矩阵P,使得$B=P^{-1}AP$,则A与B相似,$A\sim B$. 并且满足自反性$(A\sim A)$,对称性$(A\sim B\rightarrow B\sim A)$,传递性$(A\sim B, B\sim C\rightarrow A\sim C)$.

相似矩阵

Lemma 2（与一个对角矩阵相似的条件）

设$A \in R^{n\times n}$.

1. A有n个线性无关的特征向量$\leftrightarrow$ A与对角矩阵相似
2. A有n个不同的特征值$\rightarrow$必有n个线性无关的特征向量$\leftrightarrow$ A与对角矩阵相似
3. A与对角矩阵相似$\leftrightarrow$对于A的任何一个k重特征值λ, $rank(\lambda I - A) = n - k \rightarrow$ 对于λ恰有k个线性无关的特征向量

Proof: (1)特征值$x_1, \cdots, x_n, Ax_i = \lambda_i x_i$.令$X = \{x_1|x_2|\cdots|x_n\}$,则$AX = Xdiag(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$. X可逆，因此$X^{-1}AX = diag(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) = B$.

Example 2

判断矩阵$A=\begin{bmatrix}3 & 1 & 0\\ -4 & -1 & 0\\ 4 & -8 & -2\end{bmatrix}$是否能和对角矩阵相似.

Solution: $\varphi\lambda=|\lambda I-A|=(\lambda-1)^2(\lambda+2)$,对于$\lambda_1=\lambda_2=1$,$\lambda I-A=\begin{bmatrix}-2 & -1 & 0\\ 4 & 2 & 0\\ -4 & 8 & 3\end{bmatrix}\rightarrow$
$\begin{bmatrix}-2 & -1 & 0\\ 0 & 10 & 3\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$,$rank(\lambda I-A)=2$,只有一个线性无关的特征向量，故不能与对角阵相似.

相似矩阵

$$A = P^{-1}\Lambda P \to A^2 = P^{-1}\Lambda P P^{-1}\Lambda P = P^{-1}\Lambda^2 P = P^{-1}diag(\lambda_1^2, \cdots, \lambda_n^2)P$$

$$A^k = P^{-1}diag(\lambda_1^k, \cdots, \lambda_n^k)P$$

Definition 3 (λ 矩阵)

以λ 多项式为元素的矩阵.A特征矩阵$\lambda I - A$就是一个λ 矩阵.n阶λ 矩阵 $A(\lambda)$不为零的子式的最高阶数r 称为λ 矩阵的秩.

若$rank(A(\lambda)) = n$,则λ 矩阵满秩或者非奇异.

$$A(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \to \text{二阶子式不为0} \to rank(A(\lambda)) = 2,$$

$$A(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda & \lambda - 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \to \text{1阶子式不为0} \to rank(A(\lambda)) = 1$$

Definition 4 (λ 矩阵等价)

若$A(\lambda)$经过若干次初等变换后化作$B(\lambda)$,则两者等价,$A(\lambda) \simeq B(\lambda)$.并且满足自反性($A(\lambda) \simeq A(\lambda)$),对称性($A(\lambda) \simeq B(\lambda) \to B(\lambda) \simeq A(\lambda)$),传递性($A(\lambda) \simeq B(\lambda), B(\lambda) \simeq C(\lambda) \to A(\lambda) \simeq C(\lambda)$)

Definition 5 (λ 矩阵逆矩阵)

若对于n阶λ 矩阵$A(\lambda)$,存在n阶λ 矩阵 $B(\lambda)$使得$A(\lambda)B(\lambda) = B(\lambda)A(\lambda) = I$,则$A(\lambda)$可逆,$A(\lambda)^{-1} = B(\lambda)$.

Lemma 3 (λ 矩阵可逆)

n阶矩阵$A(\lambda)$可逆的充要条件是$|A(\lambda)| = d \neq 0$，d为常数.

Proof:必要性: $A(\lambda)A(\lambda)^{-1} = I \to |A(\lambda)||A(\lambda)^{-1}| = 1$. 由于$A(\lambda)$的行列式必为多项式(阶数大于等于0),故只能为0阶,必为常数. 充分性证明略.

Definition 6 (Smith标准形 Smith Normal Form)

对角λ 矩阵$D(\lambda) = diag(d_1(\lambda), \cdots, d_r(\lambda), 0, \cdots, 0)$若满足:

(1)$d_i(\lambda)$首项系数为1,$i = 1, \cdots, r$;

(2)$d_{i+1}(\lambda)$ 能被$d_i(\lambda)$ 整除,$d_i(\lambda)|d_{i+1}(\lambda)$,$i = 1, \cdots, r-1$; 则$D(\lambda)$称为$\lambda$ 矩阵的Smith标准形(Smith Normal Form).

Lemma 4 (Smith标准形)

任何一个λ矩阵都可以经过若干次初等变换化作Smith标准形,即一定可以与某个Smith标准形等价.

可做用于λ矩阵的初等变化:行(列)互换;行(列)放大k倍;行(列)放大$f(\lambda)$倍后与另一行(列)相加. 行列变换可以同时进行.

Example 3

将$A(\lambda)=\begin{bmatrix} 1-\lambda & \lambda^2 & \lambda \\ \lambda & \lambda & -\lambda \\ 1+\lambda^2 & \lambda^2 & -\lambda^2 \end{bmatrix}$化为标准形

Smith标准形

Solution 4

$$A(\lambda)=\begin{bmatrix}1-\lambda & \lambda^2 & \lambda\\ \lambda & \lambda & -\lambda\\ 1+\lambda^2 & \lambda^2 & -\lambda^2\end{bmatrix}\xrightarrow{col1+col3}\begin{bmatrix}1 & \lambda^2 & \lambda\\ 0 & \lambda & -\lambda\\ 1 & \lambda^2 & -\lambda^2\end{bmatrix}\xrightarrow{row3-row1}$$

$$\begin{bmatrix}1 & \lambda^2 & \lambda\\ 0 & \lambda & -\lambda\\ 0 & 0 & -\lambda^2-\lambda\end{bmatrix}\xrightarrow{row1-\lambda row2,\ row1+row3}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda & -\lambda\\ 0 & 0 & -\lambda^2-\lambda\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{col3+col2,\ -row3}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda & 0\\ 0 & 0 & \lambda^2+\lambda\end{bmatrix}$$

行列式因子与不变因子

Definition 7 (行列式因子)

$A(\lambda)$的秩为r,$D_k(\lambda), 1 \leq k \leq r$ 表示$A(\lambda)$的k阶子式中首系数为1的最大公因式.则$D_k(\lambda)$为$A(\lambda)$的k阶行列式因子.

Definition 8

$rank(A(\lambda)) = r$,则$A(\lambda)$有r个不为0的行列式因子$D_i(\lambda), i = 1, \cdots, r$.并且$D_{i-1}(\lambda)|D_i(\lambda)$,因此

$$d_1(\lambda) = D_1(\lambda), d_2(\lambda) = \frac{D_2(\lambda)}{D_1(\lambda)}$$

$$\cdots, d_r(\lambda) = \frac{D_r(\lambda)}{D_{r-1}(\lambda)}$$

$d_i(\lambda), i = 1, \cdots, r$称为$A(\lambda)$的不变因子.

不变因子

Example 5

求$A(\lambda)=\begin{bmatrix}\lambda^3+1 & & \\ & \lambda & \\ & & \lambda^2-1\end{bmatrix}$的行列式因子,不变因子.

Solution 6

行列式因子：3阶子式只有一个,$D_3(\lambda)=\lambda(\lambda^2-1)(\lambda^3+1)$;2阶子式有3个,最大公因式$D_2(\lambda)=\lambda+1$;1阶子式有3个,最大公因式$D_1(\lambda)=1$.故不变因子:$d_1(\lambda)=1$; $d_2(\lambda)=\lambda+1$; $d_3(\lambda)=\lambda(\lambda+1)(\lambda^3+1)$.

不变因子

Lemma 5 (不变因子与标准形)

若$D(\lambda)=diag(d_1(\lambda),\cdots,d_r(\lambda),0,\cdots,0)$为$A(\lambda)$的标准形，则$d_i(\lambda)$恰为$A(\lambda)$的$r$个不变因子

Lemma 6

若$A(\lambda)\simeq B(\lambda)$，则它们有相同的不变因子和行列式因子.

Lemma 7

2个λ 矩阵等价的充要条件是它们有相同的行列式因子或者不变因子.

不变因子

Example 7

求$A(\lambda)=\begin{bmatrix}0 & \lambda^2-\lambda & 0\\ \lambda & 0 & \lambda+1\\ 0 & 0 & -\lambda+2\end{bmatrix}$的标准形.

Solution:先求行列式因子.1个3阶子式,
$D_3(\lambda)=(\lambda-1)\lambda^2(\lambda-2)$.有4个2阶非零子式,最大公因式$D_2(\lambda)=\lambda$.4个1阶非零子式，最大公因式$D_1(\lambda)=1$.因此不变因子$d_1(\lambda)=1, d_2(\lambda)=\lambda, d_3(\lambda)=\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)$.

$$D(\lambda)=\begin{bmatrix}1 & & \\ & \lambda & \\ & & \lambda(\lambda-1)(\lambda-2)\end{bmatrix}.$$

Example 8

求 $\begin{bmatrix} \lambda - a & b_1 & & & \\ & \lambda - a & b_2 & & \\ & \cdots & & & \\ & & & & b_{n-1} \\ & & & & \lambda - a \end{bmatrix}$ 的标准形.

Solution:观察可知任意k阶子式必为2种形式的三角阵,对角线$diag(\lambda - a, \cdots, \lambda - a)$,$diag(b_1, \cdots, b_k)$.因此最大公因子为1.故$D_1(\lambda) = \cdots = D_{n-1}(\lambda) = 1, D_n(\lambda) = (\lambda - a)^n$,得到$d_i(\lambda)$,因此$D(\lambda) = diag(1, 1, \cdots, 1, (\lambda - a)^n)$.

初等因子

Definition 9 (初等因子)

将不变因子做多项式因式分解,$d_i(\lambda) = (\lambda-\lambda_1)^{k_{i1}}\cdots(\lambda-\lambda_s)^{k_{is}}$,$i = 1,\cdots,r$, $rank(A(\lambda)) = r$,
$\lambda_1,\cdots,\lambda_r$为$r$个互不相同的特征值.由于不变因子依次整除,$k_{1j} \le k_{2j}\cdots \le k_{rj}$,所有的$(\lambda-\lambda_i)^{k_{ij}}, k_{ij} > 0$,这样的因子都是初等因子. 显然不变因子唯一确定了初等因子,反之亦然.

Example 9

$A(\lambda)$的不变因子如下.求初等因子.

$$d_1(\lambda) = 1, d_2(\lambda) = 2, d_3(\lambda) = \lambda),$$

$$d_4(\lambda) = \lambda^2(\lambda+2)(\lambda-1), d_5(\lambda) = \lambda^3(\lambda+2)^3(\lambda-1)$$

初等因子

Solution: $d_1 \to$ 无; $d_2 \to$ 无; $d_3 \to \lambda; d_4 \to \lambda^2, \lambda+2, \lambda-1$; $d_5 \to \lambda^3, (\lambda+2)^3, (\lambda-1)$. 按不同特征根升序排列，初等因子组$\lambda,\lambda^2,\lambda^3,\lambda+2,(\lambda+2)^3,\lambda-1,\lambda-1$.

Example 10 (初等因子求不变因子)

$A(\lambda)$是6阶λ 矩阵,$rank(A(\lambda)) = 5$,初等因子组$\lambda,\lambda^2,\lambda^3,\lambda+2,(\lambda+2)^3,\lambda-1,\lambda-1$.求不变因子.

Solution:可用矩阵排列法. $rank = 5$,因此有5个不变因子.有3个不同的特征值,因此排列一个3×5的矩阵,每行放同一个特征值的初等因子,从左到右降幂排列,不足补1.

$$\begin{array}{ccccc} \lambda^3 & \lambda^2 & \lambda & 1 & 1 \\ (\lambda+2)^2 & \lambda+2 & 1 & 1 & 1 \\ \lambda-1 & \lambda-1 & 1 & 1 & 1 \end{array}$$

按列相乘,第一列为d_5,最后一列为d_1.

对于对角矩阵$A(\lambda)$可不计算不变因子而直接求初等因子组.

Lemma 8

秩为r的对角矩阵$A(\lambda)=diag(f_1(\lambda),f_2(\lambda),\cdots,f_r(\lambda),0,\cdots,0)$, $f_i(\lambda)$ 为首系数为1的多项式.则将$f_i(\lambda)$分解为方幂后即为初等因子.

Example 11

$$A(\lambda)=\begin{bmatrix}\lambda^2+\lambda & & \\ & \lambda & \\ & & (\lambda+1)^2\end{bmatrix}\to \text{初等因子}\lambda,\ \lambda,\lambda+1,(\lambda+1)^2.$$

注:此时$A(\lambda)$并不是Smith标准形.

初等因子→ 不变因子→ 得到Smith标准形

Example 12

$$A(\lambda)=\begin{bmatrix}\lambda^3+1 & & \\ & \lambda & \\ & & \lambda^2-1\end{bmatrix}.$$ 求Smith标准形.

Solution: 先求初等因子,因为是对角阵,$(\lambda+1)^3=(\lambda+1)(\lambda-\frac{1+\sqrt{3}i}{2})(\lambda-\frac{1-\sqrt{3}i}{2})$, $\lambda^2-1=(\lambda+1)(\lambda-1)$,因此初等因子组$\lambda+1$,$\lambda-\frac{1+\sqrt{3}i}{2}$,$\lambda-\frac{1-\sqrt{3}i}{2}$,$\lambda+1$,$\lambda-1$,$\lambda$. 用矩阵排列法求不变因子,$rank(A(\lambda))=3$,5个不同的特征值,排列$5\times 3$矩阵

初等因子

$$\begin{array}{ccc} \lambda+1 & \lambda+1 & 1 \\ \lambda-1 & 1 & 1 \\ \lambda & 1 & 1 \\ \lambda-\frac{1-\sqrt{3}i}{2} & 1 & 1 \\ \lambda-\frac{1+\sqrt{3}i}{2} & 1 & 1 \end{array} \to \text{不变因子}(\lambda-1)\lambda(\lambda^3+1), \lambda+1, 1. \quad \to$$

Smith标准形 $\begin{bmatrix} 1 & & \\ & \lambda+1 & \\ & & (\lambda-1)\lambda(\lambda^3+1) \end{bmatrix}$

初等因子

Lemma 9 (分块对角λ 矩阵的初等因子)

分块对角矩阵$A(\lambda) = \begin{bmatrix} A_1(\lambda) & & \\ & \ddots & \\ & & A_k(\lambda) \end{bmatrix}$, $A_1(\lambda), \cdots, A_k(\lambda)$的初等因子全体就是$A(\lambda)$的初等因子.

Example 13

$$A(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda - 1 & & & \\ \lambda + 7 & (\lambda+2)^2 & & \\ & & 2\lambda - 1 & (\lambda-1)^2 \\ & & (\lambda-2)(\lambda-5) & \end{bmatrix}$$ 求初等因子与Smith标准形.

初等因子

Solution 14

$A_1(\lambda)=\begin{bmatrix}\lambda-1 & \\ \lambda+7 & (\lambda+2)^2\end{bmatrix}$,先求行列式因子再求不变因子,得到初等因子$\lambda-1,(\lambda+2)^2$; $A_1(\lambda)=\begin{bmatrix}2\lambda-1 & (\lambda-1)^2\\ (\lambda-2)(\lambda-5) & \end{bmatrix}$,得到初等因子$\lambda-2,\lambda-5,(\lambda-1)^2$. $A(\lambda)$初等因子$\lambda-1$,$(\lambda-1)^2$,$\lambda-2$,$\lambda-5$,$(\lambda+2)^2$.按矩阵排列法求出不变因子

$$\begin{bmatrix}(\lambda-1)^2 & \lambda-1 & 1 & 1\\ \lambda-2 & 1 & 1 & 1\\ \lambda-5 & 1 & 1 & 1\\ (\lambda+2)^2 & 1 & 1 & 1\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \lambda-1 & \\ & & & (\lambda-2)(\lambda-5)(\lambda-1)^2(\lambda+2)^2\end{bmatrix}$$

矩阵的初等因子

Definition 10 (矩阵的初等因子)

$A \in R^{n\times n}$. A的特征矩阵$\lambda I - A$的行列式因子称为A的行列式因子,$\lambda I - A$的不变因子称为A的不变因子,$\lambda I - A$ 的初等因子称为A的初等因子.

Lemma 10 (Jordan标准形存在性)

1个n阶矩阵(方阵)A一定可以相似于1个Jordan矩阵J,称为矩阵A的Jordan标准形(Jordan Form)

Jordan矩阵

Definition 11 (Jordan矩阵)

*Jordan*矩阵是由*Jordan*块构成的直和，$J = \begin{bmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ \cdots & & & \\ & & & J_s \end{bmatrix}$.每个$J_i$是对应于特征值$\lambda_i$ 的m_i阶双对角线矩阵(*Jordan*块). *Jordan*矩阵是分块对角线矩阵.

Definition 12 (Jordan块)

$$J_i(\lambda_i) = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & & \\ & \lambda_i & 1 & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_i \end{bmatrix}$$

这样的m_i方阵称为m_i阶*Jordan*块.

Jordan矩阵

$$J=\begin{bmatrix} 2 & & & & & \\ & -1 & 1 & & & \\ & & -1 & & & \\ & & & 3 & 1 & \\ & & & & 3 & 1 \\ & & & & & 3 \end{bmatrix}$$ 由1个1阶,1个2阶,1个3阶Jordan块构成,

$\lambda_1=2,\lambda_2=-1,\lambda_3=3.$

Definition 13 (Jordan块初等因子)

m_i阶$Jordan$块$J_i(\lambda_i)=\begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & & \\ & \lambda_i & 1 & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_i \end{bmatrix}_{m_i}$ 只有一个初等因子$(\lambda-\lambda_i)^{m_i}$.

Lemma 11 (Jordan矩阵初等因子)

Jordan矩阵J的初等因子组为$(\lambda-\lambda_1)^{m_1},\cdots,(\lambda-\lambda_s)^{m_s}$

Lemma 12 (唯一性)

任何一个n阶复矩阵A都和一个Jordan矩阵相似,并且如果不计对角线上各字块的顺序,J是唯一的.

Lemma 13 (充要条件)

一个方阵A与一个Jordan矩阵相似的充要条件是它们的特征矩阵等价,$\lambda I-A\simeq\lambda I-J$.或者初等因子相同.

Lemma 14 (充要条件)

2个n阶方阵相似的充要条件是它们的初等因子相同.

求方阵A的Jordan标准形方法一:初等因子法. 写出$\lambda I - A$ $\rightarrow$ 求$\lambda I - A$的全部初等因子 $\rightarrow$ 写出每个初等因子对应的Jordan块 $\rightarrow$ 写出标准形.

Example 15

求矩阵$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$的Jordan标准形

Solution: $\lambda I - A = \begin{bmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 4 & \lambda - 4 & 0 \\ 2 & -1 & \lambda - 2 \end{bmatrix}$.行列式因子$D_3 = (\lambda - 2)^3$, $D_2 = \lambda - 2$, $D_1 = 1$,则不变因子 $d_3 = (\lambda - 2)^2$, $d_2 = \lambda - 2$, $d_1 = 1$, 初等因子组:$(\lambda - 2)^2$, $\lambda - 2$. 1个1阶Jordan块,1个2阶Jordan块. $J = \begin{bmatrix} 2 & & \\ & 2 & 1 \\ & & 2 \end{bmatrix}$.

法二:波尔曼法.只需要知道对于每个λ_i的Jordan块有多少阶，有多少个即可写出J. (1)求出全部特征值

(2)对每一个特征值λ_i,求$(\lambda_i I - A)^j, j = 1, \cdots, n$的秩 $rank((\lambda_i I - A)^j) = r_j(\lambda_i)$ 计算时若对于某个j_0有$r_{j_0}(\lambda_i) = r_{j_0+1}(\lambda_i) = r$,则后续所有$r_j(\lambda_i) = r, j \geq j_0$.

(3)对于每一个特征值λ_i,求对应的Jordan块的阶数j和个数$b_j(\lambda_i)$. 例如$b_2(\lambda_i) = 2$代表有2个2阶的λ_i的Jordan块.满足如下公式:

$$b_1(\lambda_i) = n - 2r_1(\lambda_i) + r_2(\lambda_i)$$

$$b_j(\lambda_i) = r_{j+1}(\lambda_i) - 2r_j(\lambda_i) + r_{j-1}(\lambda_i)$$

(4)写出Jordan标准形

Example 16

用波尔曼法求矩阵$A=\begin{bmatrix}-1 & -2 & 6\\ -1 & 0 & 3\\ -1 & -1 & 4\end{bmatrix}$的Jordan标准形

Solution: (1)Step 1: $|\lambda I-A|=0\rightarrow$ 特征值$\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=1$

(2)Step 2:$(\lambda_i I-A)^j$的秩.$rank(I-A)=rank(\begin{bmatrix}2 & 2 & -6\\ 1 & 1 & -3\\ 1 & 1 & -3\end{bmatrix})=1$, $rank((I-A)^2)$=0,当然$rank((I-A)^3)$必为0. 因此$r_1(1)=1, r_2(1)=r_3(1)=0.$

(3)Step 3: Jordan块个数:$b_1(1)=3-2+0=1$, $b_2(1)=0+1-0=1$,1阶,2阶Jordan块各1个.

(4)Step 4: $J\rightarrow\begin{bmatrix}1 & & \\ & 1 & 1\\ & & 1\end{bmatrix}$

Jordan标准形

Lemma 15 (Jordan块的幂)

特征值λ对应的m阶$Jordan$块的n次幂 $J_m(\lambda)^n$满足

$$J_m(\lambda)^n = \begin{bmatrix} C_n^0\lambda^n & C_n^1\lambda^{n-1} & \cdots & C_n^{m-1}\lambda^{n-m+1} \\ & C_n^0\lambda^n & \cdots & C_n^{m-2}\lambda^{n-m+2} \\ & & \ddots & \\ & & & C_n^0\lambda^n \end{bmatrix}$$

Lemma 16 (Jordan矩阵的幂)

$Jordan$矩阵J的n次幂是其$Jordan$块n次幂的直和.

Lemma 17 (矩阵的幂与Jordan标准形)

方阵矩阵A相似于某个Jordan矩阵J，即存在可逆矩阵P使得$J = P^{-1}AP$

$\rightarrow$ $A = PJP^{-1}$. 则 $A^n = P^n J^n P^{-n}$.

Example 17

$A = \begin{bmatrix} 8 & -4 \\ 9 & -4 \end{bmatrix}$. 求$A^n$.

Solution:显然$rank(A) = 1$,不能对角线化,则用Jordan标准形. 特征值$\lambda_1 = \lambda_2 = 2$.得到标准形$\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ & 2 \end{bmatrix}$.利用$PJ = AP$,求解 $P = \begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 9 & 0 \end{bmatrix}$,则

$$A^n = \begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 9 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ & 2 \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 9 & 0 \end{bmatrix}^{-1}$$

Jordan标准形

$$
\begin{aligned}
&= -\frac{1}{9}\begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 9 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2^n & n2^{n-1} \\ & 2^n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -9 & 6 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} (3n+1)2^n & -n2^{n+1} \\ 9n2^{n-1} & (1-3n)2^n \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

本章总结

计算矩阵的特征值和特征向量

判断矩阵是否与一对角阵相似

初等变换求λ矩阵的标准形

求λ矩阵的k阶行列式因子和不变因子

通过求不变因子得到标准形

求λ矩阵的初等因子

通过求"初等因子"得到标准形

对角形和分块λ矩阵的初等因子

Jordan矩阵的存在性与唯一性定理

任意两个矩阵相似的充分必要条件

Jordan标准形的初等因子和波尔曼求法

Further Reading

Read the Matlab documentation for further information on the following commands:

(1)rref(Gaussian Elimination with partial pivoting)

(2)eig (eigenvalues and eigenvectors)

(3)rank (rank of matrix), adjoint(adjoint of a symbolic square matrix),det(matrix determinant)

(4)smithForm (Smith normal form of a symbolic matrix)

(5)jordan (Jordan form of matrix)