§3.3　随机过程的均方导数

一　二阶矩过程的均方导数概念

二　均方导数的性质

返回

一 二阶矩过程的均方导数概念

1 均方导数定义

定义3.1 随机过程在t_0处下述均方极限

$$\underset{\Delta t\to 0}{L\cdot i\cdot m}\frac{X(t_0+\Delta t)-X(t_0)}{\Delta t}$$

存在，则称此极限为$X(t)$在t_0处的均方导数，记为

$X'(t_0)$ 或 $\left.\frac{dX(t)}{dt}\right|_{t=t_0}$ 此时称$X(t)$在t_0处均方可导。

若$X(t)$在T的每一点t处均方可导，则称$X(t)$在T上均方可导或可微，此时均方导数记为 $X'(t)$ 或 $\frac{dX(t)}{dt}$，是一个新的随机过程。

例3.1 试求随机过程X (t)=At +B的均方导数，其中 A，B为相互独立的随机变量。

解

$$X'(t) = \underset{\Delta t \to 0}{L \cdot i \cdot m} \frac{X(t+\Delta t) - X(t)}{\Delta t}$$

$$= \underset{\Delta t \to 0}{L \cdot i \cdot m} \frac{A(t+\Delta t) + B - (At + B)}{\Delta t}$$

$$= \underset{\Delta t \to 0}{L \cdot i \cdot m}\, A$$

且 $E\left|\frac{X(t+\Delta t)-X(t)}{\Delta t}-A\right|^2=E|A-A|^2=0$

故由定义3.1知 $X'(t)=A$ 。

类似地，可以定义二阶矩过程X (t)的二阶均方导数与 *n*阶均方导数为

$$X''(t)=\lim_{h\to 0}\frac{X'(t+h)-X'(t)}{h}$$

$$X^{(n)}(t)=\lim_{h\to 0}\frac{X^{(n-1)}(t+h)-X^{(n-1)}(t)}{h}\quad (n=1,2,\cdots)$$

2 广义二阶导数定义

定义3.2 设 $f(s,t)$ 为普通二元函数，若存在极限

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h'\to 0}} \frac{1}{hh'}[f(s+h,t+h')-f(s+h,t)-f(s,t+h')+f(t,t)]$$

则称 $f(s,t)$在(s, t)处广义二阶可导或可微，此极限称为在(s, t)处的广义二阶导数，记为

$$\frac{\partial^2 f(s,t)}{\partial s \partial t}$$

注 如果 $f(s,t)$ 关于s ,t的一阶偏导数存在,二阶混合偏导数存在且连续,则 $f(s,t)$ 一定是广义可微的,且广义二阶导数为 $f_{st}^{''}(s,t)=f_{ts}^{''}(s,t)$ 若二阶混合偏导数存在但不连续时,即使 $f_{st}^{''}(s,t)$ 和 $f_{ts}^{''}(s,t)$ 均存在,其广义二阶导数也不一定存在.

借助此广义二阶导数概念容易建立均方可微的准则

3 均方可微准则

定理3.1 （均方可微准则）二阶矩过程X (t) 在*t*处均方可微的充要条件是相关函数R $_X$ (s ,t)在(*t*, *t*)处广义二阶可微。

证 充分性：设R $_X$ (s ,t)在(t, t)处广义二阶可微，即

$$\frac{\partial^2 R_X(s,t)}{\partial s \partial t} = \lim_{\substack{h\to 0\\ h'\to 0}} \frac{1}{hh'}[R_X(s+h,t+h')-R_X(s+h,t)-R_X(s,t+h')+R_X(t,t)]$$

由收敛准则$E\left|\dfrac{X(t+h)-X(t)}{h}-\dfrac{X(t+h')-X(t)}{h'}\right|^2$

$$=E\left|\frac{X(t+h)-X(t)}{h}\right|^2+E\left|\frac{X(t+h')-X(t)}{h'}\right|^2-2E\left|\frac{X(t+h)-X(t)}{h}\cdot\frac{X(t+h')-X(t)}{h'}\right|$$

其中 $E\left|\dfrac{X(t+h)-X(t)}{h}\cdot\dfrac{X(t+h')-X(t)}{h'}\right|$

$$=\frac{1}{hh'}[R_X(t+h,t+h')-R_X(t+h,t)-R_X(t,t+h')+R_X(t,t)]\xrightarrow{h\to 0,h'\to 0}\frac{\partial^2 R_X(t,t)}{\partial t\partial t}$$

$$E\left|\frac{X(t+h)-X(t)}{h}\right|^2=\frac{1}{h^2}[R_X(t+h,t+h)-2R_X(t+h,t)+R_x(t,t)]\xrightarrow{h\to 0}\frac{\partial^2 R_X(t,t)}{\partial t\partial t}$$

同理 $$E\left|\frac{X(t+h')-X(t)}{h'}\right|^2\xrightarrow{h'\to 0}\frac{\partial^2 R_X(t,t)}{\partial t\partial t}$$

故得 $$\underset{\substack{h\to 0\\ h'\to 0}}{Lim}\,E\left|\frac{X(t+h)-X(t)}{h}-\frac{X(t+h')-X(t)}{h'}\right|^2=0$$

此式等价于 $\underset{h\to 0}{L\cdot i\cdot m}\dfrac{X(t+h)-X(t)}{h}$ 存在，充分性得证。

必要性　设 $X'(t)=\underset{h\to 0}{L\cdot i\cdot m}\dfrac{X(t+h)-X(t)}{h}$ 存在

则由均方极限性质及上述证明知

$$E[X'(t)X'(t)] = \lim_{\substack{h\to 0 \\ h'\to 0}} E\left[\frac{X(t+h)-X(t)}{h}\,\frac{X(t+h')-X(t)}{h'}\right]$$

$$= \frac{\partial^2 R_X(t,t)}{\partial t \partial t}$$

即必要性得证。

推论3.1 若$R_X(s,t)$的广义二阶导数在对角线(t, t)处存在，则其在任意点(s, t)处亦存在，且有

$$\frac{\partial^2 R_X(s,t)}{\partial s \partial t} = E[X'(s)X'(t)]$$

若$\frac{\partial}{\partial s}R_X(s,t),\frac{\partial}{\partial t}R_X(s,t),\frac{\partial^2}{\partial s\partial t}R_X(s,t),\frac{\partial^2}{\partial t\partial s}R_X(s,t)$都存在，

则有

(1) $$E[X'(s)X(t)]=\frac{\partial}{\partial s}R_X(s,t)$$

(2) $$E[X(s)X'(t)]=\frac{\partial}{\partial t}R_X(s,t)$$

(3) $$E[X'(s)X'(t)]=\frac{\partial^2}{\partial s\partial t}R_X(s,t)$$

(4) $$E[X'(t)X'(s)]=\frac{\partial^2}{\partial t\partial s}R_X(s,t)$$

二　均方导数的性质

性质1：若*X* (*t*)在*t*处均方可导，则*X*(*t*)在*t*处均方连续。

性质2：若*X* (*t*), *Y* (*t*)在*t*处均方可导，对于任意常数*a*, *b*，有

$$[aX(t)+bY(t)]'=aX'(t)+bY'(t)$$

性质3：*X* (*t*)的均方导数的数学期望是

$$m_{X}(t)=E[X'(t)]=\frac{d}{dt}E[X(t)]=m'_{X}(t)$$

性质4：*X* (*t*)的均方导数的相关函数是

$$R_{X'}(s,t)=E[X'(s)X'(t)]=\frac{\partial^2}{\partial s\partial t}R_X(s,t)=\frac{\partial^2}{\partial s\partial t}R_X(t,s)$$

性质5：若两个随机过程的均方导数相等，则它们只相差一个随机变量（也可是常数）。

特别的,若X为一个随机变量,则其均方导数为零

性质6 设$f(t)$是普通可微函数，$X(t)$为均方可微过程，则$f(t)X(t)$也是均方可微过程，且有

$$[f(t)X(t)]' = f'(t)X(t) + f(t)X'(t)$$

例**3.2** 设随机过程$X(t)$的均值与相关函数为

$$m_X(t) = 5\sin t \quad R_X(t,s) = 3e^{-0.5(s-t)^2}$$

试求 $Y(t) = X'(t)$ 的均值与协方差。

解 $m_Y(t)=m'_X(t)=[5\sin t]'=5\cos t$

$$R_Y(t,s)=R_{X'}(t,s)=\frac{\partial^2}{\partial t\partial s}R_X(t,s)=\frac{\partial^2}{\partial t\partial s}\left[3e^{-0.5(s-t)^2}\right]$$

$$=\frac{\partial}{\partial t}\left[3(-0.5)e^{-0.5(s-t)^2}\cdot 2(s-t)\right]=\frac{\partial}{\partial t}\left[3e^{-0.5(s-t)^2}(t-s)\right]$$

$$=3(-0.5)e^{-0.5(s-t)^2}(-1)(-2)(s-t)^2+3e^{-0.5(s-t)^2}$$

$$=3e^{-0.5(s-t)^2}[1-(s-t)^2]$$

故 $C_Y(t,s)=R_Y(t,s)-m_Y(t)m_Y(s)$

$$=3e^{-0.5(s\cdot t)^2}[1-(s-t)^2]-25\sin t\sin s$$