2110436170 杨博

1、

(1) 令 $|A-\lambda I|=0$ 得: $\begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 2-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix}=0$. 化简得: $\begin{vmatrix} 1 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & \lambda^2-5\lambda+5 & -1 \\ 0 & 2-\lambda & \lambda-2 \end{vmatrix}=0$.

$\therefore (\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-4)=0$. 特征值 $\lambda_1=1$, $\lambda_2=2$, $\lambda_3=4$.

分别把 $\lambda=1,2,4$ 代入 $\begin{bmatrix} 3-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 2-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 2-\lambda \end{bmatrix}\xi=0$ 得特征向量:

$\xi_1=(-1,1,1)^T$, $\xi_2=(0,-1,1)$, $\xi_3=(2,1,1)$

(2) A可以对角化: $P=(\xi_1,\xi_2,\xi_3)=\begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

且 $P^{-1}AP=\begin{bmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & 4 \end{bmatrix}$

(3) 对于特征值特征向量分别为 λ, ξ 的矩阵A.

则 $A^n=A^{n-1}\lambda\xi=\lambda^n\xi$, 特征值为 λ^n, 特征向量为 ξ。

而 $\alpha=-\xi_1$, $\therefore A^{100}\alpha=-A^{100}\xi_1=-\lambda_1^{100}\xi_1=(1,-1,-1)^T$

$\beta=(\xi_3+\xi_1)$, $\therefore A^{100}\beta=A^{100}\xi_3+A^{100}\xi_1=\lambda_3^{100}\xi_3+\lambda_1^{100}\xi_1=\begin{bmatrix} 2\times4^{100}-1 \\ 4^{100}+1 \\ 4^{100}+1 \end{bmatrix}$

2、

$A(\lambda)=\begin{bmatrix} 3\lambda+1 & \lambda & 4\lambda-1 \\ 1-\lambda^2 & \lambda-1 & \lambda-\lambda^2 \\ \lambda^2+\lambda+2 & \lambda & \lambda^2+2\lambda \end{bmatrix}\xrightarrow[r_3-r_1]{c_1-c_3}\begin{bmatrix} -\lambda+2 & \lambda & 4\lambda-1 \\ 1-\lambda & \lambda-1 & \lambda-\lambda^2 \\ 0 & 0 & \lambda^2-2\lambda+1 \end{bmatrix}\xrightarrow[r_2+r_3]{r_1-r_2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & \lambda^2+3\lambda-1 \\ 1-\lambda & \lambda-1 & 1-\lambda \\ 0 & 0 & (\lambda-1)^2 \end{bmatrix}$

$\xrightarrow[c_3-c_2,\ \frac{1}{2}c_1]{c_1+c_2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & \lambda^2+3\lambda-1 \\ 0 & \lambda-1 & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda-1)^2 \end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda-1 & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda-1)^2 \end{bmatrix}$

不变因子: 1, $\lambda-1$, $(\lambda-1)^2$.

$B(\lambda)=\begin{bmatrix} \lambda+1 & \lambda-2 & \lambda^2-2\lambda \\ 2\lambda & 2\lambda-3 & \lambda^2-2\lambda \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}\xrightarrow[c_1-c_2]{r_2-r_1}\begin{bmatrix} 3 & \lambda-2 & \lambda^2-2\lambda \\ 0 & \lambda-1 & 0 \\ -3 & 1 & 1 \end{bmatrix}\xrightarrow[r_3+r_2,\ \frac{1}{3}c_1]{r_3+r_1}\begin{bmatrix} 1 & \lambda-2 & \lambda^2-2\lambda \\ 0 & \lambda-1 & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda-1)^2 \end{bmatrix}$

$\downarrow$

$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda-1 & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda-1)^2 \end{bmatrix}$

不变因子: 1, $(\lambda-1)$, $(\lambda-1)^2$

$A(\lambda)$, $B(\lambda)$ 不变因子相同, 所以它们等价.

2110436170 杨博

3. (1) $\begin{bmatrix} -\lambda+1 & 2\lambda-1 & \lambda \\ \lambda & \lambda^2 & -\lambda \\ \lambda^2+1 & \lambda^2+\lambda-1 & -\lambda^2 \end{bmatrix} \xrightarrow[r_1-r_3]{c_1+c_3} \begin{bmatrix} 1 & 2\lambda-1 & \lambda \\ 0 & \lambda^2 & -\lambda \\ 0 & \lambda^2-\lambda & -\lambda^2-\lambda \end{bmatrix} \xrightarrow{r_2-r_3} \begin{bmatrix} 1 & 2\lambda-1 & \lambda \\ 0 & \lambda & \lambda^2 \\ 0 & \lambda^2 & -\lambda \end{bmatrix}$

$\xrightarrow[-r_3]{r_3-\lambda r_2} \begin{bmatrix} 1 & 2\lambda-1 & \lambda \\ 0 & \lambda & \lambda^2 \\ 0 & 0 & \lambda(\lambda^2+1) \end{bmatrix} \longrightarrow \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & & \\ & \lambda & \\ & & \lambda(\lambda^2+1) \end{bmatrix}$

(2). $D_2(\lambda)=\lambda^2(\lambda-1)^2$, $D_1(\lambda)=1$

$\therefore$ $d_1(\lambda)=D_1(\lambda)=1$, $d_2(\lambda)=\dfrac{D_2(\lambda)}{D_1(\lambda)}=\lambda^2(\lambda-1)^2$

史密斯标准型为 $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda^2(\lambda-1)^2 \end{bmatrix}$

(3). $D_1(\lambda)=1$, $D_2(\lambda)=1$, $D_3(\lambda)=1$, $D_4(\lambda)=(\lambda+4)^4$

$\therefore$ $d_1(\lambda)=d_2(\lambda)=d_3(\lambda)=1$, $d_4(\lambda)=\dfrac{D_4(\lambda)}{D_3(\lambda)}=(\lambda+4)^4$

$\therefore$ 史密斯标准型为 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (\lambda+4)^4 \end{bmatrix}$

4. (1) $|\lambda I-B|=\begin{vmatrix} \lambda-17 & 0 & 25 \\ 0 & \lambda-3 & 0 \\ -9 & 0 & \lambda+13 \end{vmatrix}=(\lambda-3)(\lambda-2)^2$, $\therefore$ $D_3(\lambda)=(\lambda-3)(\lambda-2)^2$.

$D_2(\lambda)=D_1(\lambda)=1$, $d_1(\lambda)=d_2(\lambda)=1$, $d_3(\lambda)=\dfrac{D_3(\lambda)}{D_2(\lambda)}=(\lambda-3)(\lambda-2)^2$

$\therefore$ B 的 Jordan 标准形为: $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ 初等因子组为: $\lambda-3$, $(\lambda-2)^2$.

(2). $|\lambda I-B|=\begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 4 & \lambda-4 & 0 \\ 2 & -1 & \lambda-2 \end{vmatrix}=(\lambda-2)^3$, $\therefore$ $D_3(\lambda)=(\lambda-2)^3$

$D_2(\lambda)=\lambda-2$, $D_1=1$, $\therefore$ $d_1(\lambda)=1$, $d_2(\lambda)=\dfrac{D_2(\lambda)}{D_1(\lambda)}=\lambda-2$, $d_3(\lambda)=(\lambda-2)^2$

初等因子组为 $\lambda-2$, $(\lambda-2)^2$

$\therefore$ D 的 Jordan 标准形为: $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

5、第1步：求特征值：

$$|\lambda I-A| = \begin{vmatrix} \lambda-4 & -5 & 2 \\ 2 & \lambda+2 & -1 \\ 1 & 1 & \lambda-1 \end{vmatrix} = (\lambda-1)^3, \quad \lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=1.$$

第二步：求 $r(\lambda_i I-A)^j$：

$$r_1(1) = r(I-A) = r\begin{bmatrix} -3 & -5 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = 2$$

$$r_2(1) = r(I-A)^2 = r\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{bmatrix} = 1$$

$$r_3(1) = r(I-A)^3 = 0. \qquad r_4(1) = r(I-A)^4 = 0.$$

第三步：求Jordan块个数、阶数：

$$b_1(1) = n-2r_1(1)+r_2(1) = 0$$

$$b_2(1) = r_3(1)-2r_2(1)+r_1(1) = 0$$

$$b_3(1) = r_4(1)-2r_3(1)+r_2(1) = 1$$

∴A的Jordan形为 $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

矩阵分解

1、

$$L_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{2}{5} & 1 & 0 \\ \frac{4}{5} & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A^{(1)} = L_1A^{(0)} = \begin{bmatrix} 5 & 2 & -4 \\ 0 & \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} \\ 0 & -\frac{2}{5} & \frac{9}{5} \end{bmatrix}$$

$$L_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad U = A^{(2)} = L_2A^{(1)} = \begin{bmatrix} 5 & 2 & -4 \\ 0 & \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

LU分解：

$$L = L_1^{-1}L_2^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{2}{5} & 1 & 0 \\ -\frac{4}{5} & -2 & 1 \end{bmatrix}, \quad A = LU = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{2}{5} & 1 & 0 \\ -\frac{4}{5} & -2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & 2 & -4 \\ 0 & \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

∴LDU分解：

$$A = LDU = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{2}{5} & 1 & 0 \\ -\frac{4}{5} & -2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & \frac{2}{5} & -\frac{4}{5} \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Doolittle分解：

$$A = L(DU) = L\hat{U} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{2}{5} & 1 & 0 \\ -\frac{4}{5} & -2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & 2 & -4 \\ 0 & \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Crout分解：

$$A = (LD)U = \hat{L}D = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 2 & \frac{1}{5} & 0 \\ -4 & -\frac{2}{5} & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & \frac{2}{5} & -\frac{4}{5} \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2、A的顺序主子式 $\Delta_1=1$，$\Delta_2=1$，$\Delta_3=-13$ 都不为0，A存在LU分解。

$$A^{(1)}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\-1&1&0&0\\-2&0&1&0\\-3&0&0&1\end{bmatrix}A=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\0&1&-2&3\\0&-5&-3&-7\\0&-2&-1&8\end{bmatrix}$$

$$A^{(2)}=L_2A^{(1)}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&5&1&0\\0&2&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&1&1\\0&1&-2&3\\0&-5&-3&-7\\0&-2&-1&8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\0&1&-2&3\\0&0&-13&8\\0&0&-5&14\end{bmatrix}$$

$$A^{(3)}=L_3A^{(2)}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&-\frac{5}{13}&1\end{bmatrix}A^{(2)}=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\0&1&-2&3\\0&0&-13&8\\0&0&0&\frac{142}{13}\end{bmatrix}$$

$$L=L_1^{-1}L_2^{-1}L_3^{-1}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\1&1&0&0\\2&-5&1&0\\3&-2&\frac{5}{13}&1\end{bmatrix}$$

∴A的LU分解：$A=LU=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\1&1&0&0\\2&-5&1&0\\3&-2&\frac{5}{13}&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&1&1\\0&1&-2&3\\0&0&-3&8\\0&0&0&\frac{142}{13}\end{bmatrix}$

解方程组 $\begin{cases}Ly=b\\Ux=y\end{cases}$ 得：

$\begin{bmatrix}1&0&0&0\\1&1&0&0\\2&-5&1&0\\3&-2&\frac{5}{13}&1\end{bmatrix}y=\begin{bmatrix}5\\-2\\-2\\0\end{bmatrix}$，$y=(5,-7,-47,-\frac{142}{13})^T$

$\begin{bmatrix}1&1&1&1\\0&1&-2&3\\0&0&-3&8\\0&0&0&\frac{142}{13}\end{bmatrix}x=\begin{bmatrix}5\\-7\\-47\\-\frac{142}{13}\end{bmatrix}$，$x=(1,2,3,-1)^T$.

∴原方程解为：$x=(1,2,3,-1)^T$

3. 将A列向量 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 正交化得：$\beta_1=\alpha_1=(0,1,0)^T$

$\beta_2=\alpha_2-\beta_1=(4,0,3)^T$，$\beta_3=\alpha_3-\frac{2}{5}\beta_2-\beta_1=\frac{1}{5}(-3,0,4)^T$.

∴$\|\beta_1\|=1$，$\|\beta_2\|=5$，$\|\beta_3\|=1$，单位化得：$\gamma_1=(0,1,0)^T$.

$\gamma_2=\frac{1}{5}(4,0,3)^T$，$\gamma_3=\frac{1}{5}(-3,0,4)^T$.

∴得到正交矩阵：$Q=(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3)=\begin{bmatrix}0&\frac{4}{5}&-\frac{3}{5}\\1&0&0\\0&\frac{3}{5}&\frac{4}{5}\end{bmatrix}$

并由 $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&\frac{2}{5}\\0&0&1\end{bmatrix}$

得：$R=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&5&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&\frac{2}{5}\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1&1\\0&5&2\\0&0&1\end{bmatrix}$

∴ A的QR分解为：$A=QR=\begin{bmatrix}0&\frac{4}{5}&-\frac{3}{5}\\1&0&0\\0&\frac{3}{5}&\frac{4}{5}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&1\\0&5&2\\0&0&1\end{bmatrix}$

4. 对A的第一列 $\alpha_1=(3,0,4)^T$，取 $c=\frac{\sqrt{x_1^2+x_2^2}}{\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}}=\frac{3}{5}$，$s=\frac{x_3}{\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}}=\frac{4}{5}$

作 $T_{13}=\begin{bmatrix}\frac{3}{5}&0&\frac{4}{5}\\0&1&0\\-\frac{4}{5}&0&\frac{3}{5}\end{bmatrix}=\frac{1}{5}\begin{bmatrix}3&0&4\\0&5&0\\-4&0&3\end{bmatrix}$，则有 $T_{13}\alpha_1=(5,0,0)^T$

令 $T_1=T_{13}$，∴ $T_1A=\begin{bmatrix}5&3&7\\0&3&4\\0&-4&-1\end{bmatrix}$，取 T_1A 右下子块 $A^{(1)}=\begin{bmatrix}3&4\\-4&-1\end{bmatrix}$ 第一列 $\alpha_1^{(1)}=\begin{bmatrix}3\\-4\end{bmatrix}$，

取 $c=\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}}=\frac{3}{5}$，$s=\frac{x_2}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}}=-\frac{4}{5}$

作 $T_2=T_{23}=\frac{1}{5}\begin{bmatrix}3&-4\\3&3\end{bmatrix}$，$T_2A^{(1)}=\begin{bmatrix}5&\frac{16}{5}\\0&\frac{13}{5}\end{bmatrix}$.

令 $T=\begin{bmatrix}1&0\\0&T_2\end{bmatrix}T_1=\frac{1}{25}\begin{bmatrix}15&0&20\\16&15&-12\\-12&20&9\end{bmatrix}$，∴ $R=TA=\begin{bmatrix}5&3&7\\0&5&\frac{16}{5}\\0&0&\frac{13}{5}\end{bmatrix}$

且正交矩阵 $Q=T^{-1}=T^T=\frac{1}{25}\begin{bmatrix}15&16&-12\\0&15&20\\20&-12&9\end{bmatrix}$

∴ A有QR分解：$A=QR=\frac{1}{25}\begin{bmatrix}15&16&-12\\0&15&20\\20&-12&9\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5&3&7\\0&5&\frac{16}{5}\\0&0&\frac{13}{5}\end{bmatrix}$

5、对A第一列 $\alpha_1=(0,0,2)^T$，$\|\alpha_1\|=2$，$\alpha_1-\|\alpha_1\|\varepsilon_1=2(-1,0,1)^T$，

取单位向量 $u=\frac{\alpha_1-\|\alpha_1\|\varepsilon_1}{\|\alpha_1-\|\alpha_1\|\varepsilon_1\|}=\frac{1}{\sqrt{2}}(-1,0,1)^T$

作 $H_1=I_3-2uu^T=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}$，则 $H_1\alpha_1=(2,0,0)^T=\|\alpha_1\|\varepsilon_1$，

∴ $H_1A=\begin{bmatrix}2&1&2\\0&4&-2\\0&3&1\end{bmatrix}$，对 H_1A 右下方子块 $A^{(1)}=\begin{bmatrix}4&-2\\3&1\end{bmatrix}$ 第一列 $\alpha_1^{(1)}=\begin{bmatrix}4\\3\end{bmatrix}$，

~~$\alpha_1^{(1)}$~~ $\alpha_1^{(1)}-\|\alpha_1^{(1)}\|\varepsilon_1=\begin{bmatrix}-1\\3\end{bmatrix}$，取单位向量 $u=\frac{\alpha_1^{(1)}-\|\alpha_1^{(1)}\|\varepsilon_1}{\|\alpha_1^{(1)}-\|\alpha_1^{(1)}\|\varepsilon_1\|}=\frac{1}{\sqrt{10}}\begin{bmatrix}-1\\3\end{bmatrix}$

作 $H_2=I_2-2uu^T=\frac{1}{5}\begin{bmatrix}4&3\\3&-4\end{bmatrix}$，则 $H_2A=\begin{bmatrix}5&-1\\0&-2\end{bmatrix}$

2110436170 杨博

令 $H=\begin{bmatrix}1&0\\0&H_2\end{bmatrix}H_1=\frac{1}{5}\begin{bmatrix}0&0&5\\3&4&0\\-4&3&0\end{bmatrix}$，∴ 上三角矩阵 $R=HA=\begin{bmatrix}2&1&2\\0&5&-1\\0&0&-2\end{bmatrix}$

正交矩阵 $Q=H^{-1}=H^{T}=\frac{1}{5}\begin{bmatrix}0&3&-4\\0&4&3\\5&0&0\end{bmatrix}$.

∴ A有QR分解：$A=QR=\frac{1}{5}\begin{bmatrix}0&3&-4\\0&4&3\\5&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&1&2\\0&5&-1\\0&0&-2\end{bmatrix}$

6、

$A=\begin{bmatrix}1&1&0&1\\0&1&1&0\\1&2&1&1\end{bmatrix}\xrightarrow[r_3-r_2]{r_3-r_1}\begin{bmatrix}1&1&0&1\\0&1&1&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}D\\0\end{bmatrix}=B$

由 $i_1=1$, $i_2=3$, 取 $C=[\alpha_1,\alpha_3]=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\\1&1\end{bmatrix}$ 得：

$A=CD=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\\1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&0&1\\0&1&1&0\end{bmatrix}$

7、∵ $A^TA=\begin{bmatrix}1&0&-2\\0&1&0\\-2&0&4\end{bmatrix}$，求 A^TA 特征值得 $\lambda_1=5$, $\lambda_2=1$, $\lambda_3=0$,

对应的特征向量为：$\alpha_1=(1,0,-2)^T$, $\alpha_2=(0,1,0)^T$, $\alpha_3=(2,0,1)^T$

得到正交矩阵：$V=\frac{1}{5}\begin{bmatrix}1&0&2\\0&\sqrt5&0\\-2&0&1\end{bmatrix}$ 使得：

$V^T(A^TA)V=\begin{bmatrix}5&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}$

∵ $rank(A)=rank(A^TA)=2$，A的奇异值 $\sigma_1=\sqrt5$，$\sigma_2=1$，$\sigma_3=0$，

$\Sigma=\begin{bmatrix}\sqrt5&0\\0&1\end{bmatrix}$，$U_1=AV_1\Sigma^{-1}=\begin{bmatrix}-1&0&2\\0&1&0\end{bmatrix}\frac{1}{\sqrt5}\begin{bmatrix}1&0\\0&\sqrt5\\-2&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\0&\sqrt5\\-2&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt5}&0\\0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&0\\0&1\end{bmatrix}$.

令正交矩阵 $U=U_1$，∴ A的奇异值分解为：

$A=U[\Sigma\ 0]V^T=\begin{bmatrix}-1&0\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sqrt5&0&0\\0&1&0\end{bmatrix}\frac{1}{\sqrt5}\begin{bmatrix}1&0&-2\\0&\sqrt5&0\\2&0&1\end{bmatrix}$

2110436170 杨博

8\. $\because |\lambda I - A| = (\lambda-1)(\lambda+1)(\lambda+2)$，$\therefore \lambda_1 = 1$，$\lambda_2 = -1$，$\lambda_3 = -2$．$\therefore$ A可对角化．

令 $\varphi_1(\lambda) = (\lambda+1)(\lambda+2)$，$\varphi_2(\lambda) = (\lambda-1)(\lambda+2)$，$\varphi_3(\lambda) = (\lambda-1)(\lambda+1)$

$$\therefore \quad P_1 = \frac{\varphi_1(A)}{\varphi_1(\lambda_1)} = \frac{(A+I)(A+2I)}{2\times 3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$P_2 = \frac{\varphi_2(A)}{\varphi_2(\lambda_2)} = \frac{(A-I)(A+2I)}{(-2)\times 1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$P_3 = \frac{\varphi_3(A)}{\varphi_3(\lambda_3)} = \frac{(A-I)(A+I)}{(-3)\times(-1)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$\therefore$ A的谱分解为：

$$A = \sum_{i=1}^{3} \lambda_i P_i = 1\times\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + (-1)\times\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} + (-2)\times\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$