§4.1 泊松过程概念

§4.1 泊松过程概念

一、泊松过程的定义

1 随机点过程

我们常常会遇到这样一类随机现象，它们发生的地点、时间以及相联系的某种属性，常归结为某一空间E中的点的随机发生或随机到达情况，例如某电话交换台在一天内收到用户的呼唤情况，若令$X(n)$为第n次呼唤发生的时间，则$X(n)$是一随机变量，视作为一随机质点。因而$\{X(n), n=1,2\cdots\}$构成一随机过程，这样的随机过程我们称之为随机点过程，或称为随机质点流。

- 一般说来，随机质点或事件的出现或到达情况形成一个随机质点流，记X (n)为第n个质点或事件出现或到达的时间,则{X（n）,n=1,2…}是一个随机点过程，通常称在单位时间内平均出现的质点的个数为随机流的强度，记为λ，即称此随机点过程是强度为λ的随机流。

- 随机质点流示例

- 商店接待的顾客流
- 等候公共汽车的乘客流
- 要求在机场降落的飞机流
- 经过天空等区域的流星流
- 纺纱机上纱线断头形成的断头流
- 放射性物质不断放射出的质点形成的质点流
- 数字通信中已编码信号的误码流

2 计数过程

- 若用*N* (*t*) (t≥0)表示到时刻t为止时随机质点出现（或到达）的个数，则*N* (*t*)也是一个随机过程，我们常称之为伴随随机点过程的**计数过程**.
- 计数过程*N* (*t*)应满足如下条件：
- 1° *N* (*t*)取非负整数值
- 2° 对于任意两个时刻, $t_1 \le t_2$, 有 $N(t_1) \le N(t_2)$
- 3° 对于任意两个时刻 $t_1 \le t_2, N(t_1, t_2) = N(t_2) - N(t_1)$
- 等于在时间间隔$[t_1, t_2)$内随机点出现（或到达）的个数，称为**增量**。

- 若在不相交的时间区间内发生的事件个数是独立的,则称此计数过程有独立增量.
- 即时刻t已发生的事件个数$N(t)$必须独立于时刻t与t +s之间所发生的事件个数$N(t, s)$.
- 若在任意时间区间内发生事件个数的分布只依赖于时间区间的长度,则称此计数过程有平稳增量.
- 即对一切$t_1<t_2$,且$s>0$,在区间$(t_1+s, t_2+s]$内发生事件的个数$N(t_1+s, t_2+s)$与在区间$(t_1, t_2]$内发生事件的个数$N(t_1, t_2)$有相同的分布,则此计数过程有平稳增量.

3 泊松过程的定义

定义1.1 设{$N(t)$, t≥0}为一计数过程，若满足条件：

（1）$N(0)=0$ （零初值性）；

（2）对任意的s≥t≥0, Δt >0， 增量N (t+ Δt, s+ Δt)与N (t, s)具有相同的分布函数（增量平稳性或齐次性）；

（3）对任意的正整数n，任意的非负实数,$0\le t_0 \le t_1 <\cdots\le t_n$

增量$N(t_1)-N(t_0), N(t_2)-N(t_1), \cdots, N(t_n)-N(t_{n-1})$

相互独立（增量独立性）；

（4）对于足够小的时间 Δt ,有

$$P(N(\Delta t)=1)=\lambda\Delta t+o(\Delta t)$$

$$P(N(\Delta t)=0)=1-\lambda\Delta t+o(\Delta t)$$

$$P(N(\Delta t)\geq 2)=o(\Delta t)$$

则称{$N(t)$, t≥0}是强度为λ的泊松过程。

从定义1.1可见，若{$N(t)$, t≥0}为一泊松过程，$N(t)$ 表示[0, t)时段内出现的质点数，则

条件（1）表明在初始时刻无质点出现。实际上从概率计算意义来说，只需满足条件P (N (t)=0)=1 即可。

条件（2）表明在时段出现的质点数的分布只与时间间隔有关，而与时间起点无关。

- 条件（3）说明为一独立增量过程，即任意多个不相重叠的时间间隔内出现的质点数相互独立。
- 条件（4）则表明在足够小的时间内出现一个质点的概率与时间成正比，而在很短的时间内出现的质点数不少于2个的概率是关于时间的高阶无穷小，这与实际情况是相吻合的，即在足够短的时间内，同时出现2个以上质点的事件应视为小概率事件。

例1.1 设$N(t)$为$[0,t)$ $(t\geqslant 0)$时段内某电话交换台收到的呼叫次数，$N(t)$的状态空间为$\{0, 1, 2, \ldots\}$，且具有如下性质

（1）$N(0)=0$，即初始时刻未收到任何呼叫

（2）在$[t, s)$这段时间内收到的呼叫次数只与时间隔$s-t$有关，而与起点时间t无关；

（3）在任意多个不相重叠的时间间隔内收到的呼叫次数相互独立；

（4）在足够小的时间间隔内

$$P(\text{在}\Delta t\text{时间间隔内无呼叫}) = P(N(\Delta t)=0) = 1-\lambda\Delta t + o(\Delta t)$$

$$P(\text{在}\Delta t\text{时间间隔内有一次呼叫}) = P(N(\Delta t)=1) = \lambda\Delta t + o(\Delta t)$$

$$P(\text{在}\Delta t\text{时间间隔内有2次以上呼叫}) = P(N(\Delta t)\geq 2) = o(\Delta t)$$

易见此计数过程$\{N(t), t\geqslant 0\}$是强度为λ的泊松过程。

定理1.1 设是$\{N(t), t\geqslant 0\}$一个强度为λ的泊松过程，则对任意固定的t, $N(t)$服从泊松分布，即

$$P(N(t)=k) = \frac{(\lambda t)^k}{k!}e^{-\lambda t} \qquad k=0,1,2,\cdots$$

证　令$p_k(t)=P(N(t)=k),\ k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots$

则　1）$p_0(t+\Delta t)=P(N(t+\Delta t)=0)$

$$=P(N(t)=0,\ N(t,t+\Delta t)=0)$$

$$=P(N(t)=0)P(N(t,t+\Delta t)=0\,|\,N(t)=0)$$

$$=P(N(t)=0)P(N(t,t+\Delta t)=0)$$

$$=\ p_0(t)[1-\lambda\Delta t+o(\Delta t)]$$

$$=\ p_0(t)-\lambda p_0(t)\Delta t+p_0(t)0(\Delta t)$$

故$p_0(t+\Delta t)-p_0(t)=-\lambda p_0(t)\Delta t+p_0(t)o(\Delta t)$

两端同除以Δt, 并令$\Delta t\to 0$，则有 $\boxed{\dfrac{dp_0(t)}{dt}=-\lambda p_0(t)}$

注意到$p_0(0)=P(N(0)=0)=1$

解此微分方程，即得 $p_0(t)=e^{-\lambda t}=\dfrac{(\lambda t)^0}{0!}e^{-\lambda t}$

2) 假设 $p_{k-1}(t)=\dfrac{(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!}e^{-\lambda t} \quad k=2,3,\cdots$ 成立

3） $p_k(t+\Delta t)=P(N(t+\Delta t)=k)$

$$=P(N(t)=k,N(t,t+\Delta t)=0)+P(N(t)=k-1,N(t,t+\Delta t)=1)$$

$$+\sum_{i=2}^{k}P(N(t)=k-i,N(t,t+\Delta t)=i)$$

$$=P(N(t)=k)P(N(t,t+\Delta t)=0)+P(N(t)=k-1)P(N(t,t+\Delta t)=1)$$

$$+\sum_{i=2}^{k}P(N(t)=k-i)P(N(t,t+\Delta t)=i)$$

$$= p_k(t)[1 - \lambda\Delta t + o(\Delta t)] + p_{k-1}(t)[\lambda\Delta t + o(\Delta t)]$$

$$+ \left[\sum_{i=2}^{k} p_{k-i}(t)\right] o(\Delta t)$$

$$= p_k(t) - \lambda p_k(t)\Delta t + \lambda p_{k-1}(t)\Delta t + o(\Delta t)$$

因此$p_k(t+\Delta t) - p_k(t) = -\lambda p_k(t)\Delta t + \lambda p_{k-1}(t)\Delta t + o(\Delta t)$

两端同除以Δt，再令$\Delta t \to 0$，可得

$$\boxed{\frac{dp_k(t)}{dt} = -\lambda p_k(t) + \lambda p_{k-1}(t)}$$

代入归纳假设2),且注意初始条件$p_k(0)=0$,解此微分方程,即得

$$p_k'(t) = -\lambda p_k(t) + \lambda p_{k-1}(t) = -\lambda p_k(t) + \frac{\lambda(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!}e^{-\lambda t}$$

两边同乘以e$^{\lambda t}$，可得

$$e^{\lambda t}p_k'(t)+\lambda e^{\lambda t}p_k(t)=\frac{\lambda(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!}$$

即 $$\left[e^{\lambda t}p_k(t)\right]'=\frac{\lambda(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!}$$

故有 $$e^{\lambda t}p_k(t)=\int_0^t\frac{\lambda(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!}dt=\frac{(\lambda t)^k}{k!}$$

即对所有的自然数成立

$$\boxed{p_k(t)=\frac{(\lambda t)^k}{k!}e^{-\lambda t}\quad k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots}$$

由数学归纳法知定理结论正确.

利用定理1.1可得泊松过程的另一定义

定义1.2 设$\{N(t), t\geqslant 0\}$为一计数过程，满足条件

（1）$N(0)=0$；

（2）$N(t)$是独立增量过程；

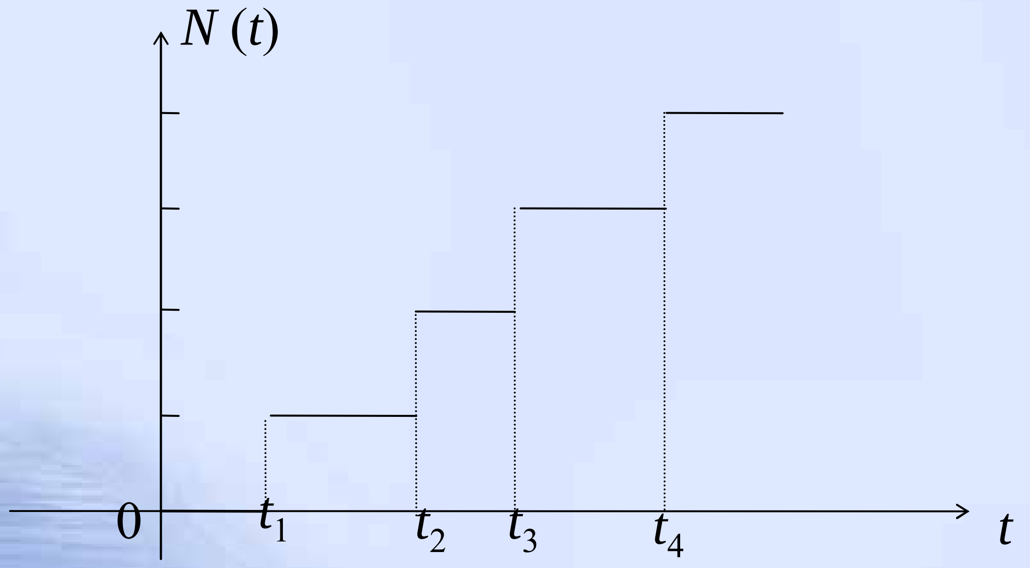
（3）对任意的$0\leqslant t_1\leqslant t_2$，对应的增量$N(t_1,t_2)$服从参数为$\lambda(t_2-t_1)$的泊松分布，即

$$P(N(t_1,t_2)=k)=\frac{[\lambda(t_2-t_1)]^k}{k!}e^{-\lambda(t_2-t_1)}\quad k=0,1,2,\cdots,\lambda>0$$

则称$\{N(t), t\geqslant 0\}$是强度为λ的泊松过程。

4 泊松过程的样本函数

泊松过程的样本函数是一条阶梯曲线，若用时刻t_i表示第i个质点（如到达的顾客，出现的呼叫，误码，到达计数器的α粒子等）出现的时间，那么在时刻t_i，阶梯曲线上跳一个单位；而在任何一个有限的区间[0, t)内这种跳跃的次数是有限的。



二、泊松过程的数字特征与特征函数

1. 泊松过程的均值函数

$$m_N(t) = E[N(t)] = \lambda t$$

2. 泊松过程的方差函数

$$D_N(t) = D[N(t)] = \lambda t$$

3. 泊松过程的均方值函数

$$\psi_N^2(t) = E[N^2(t)] = D_N(t) + m_N^2(t) = \lambda t + (\lambda t)^2$$

4. 泊松过程的自相关函数

$$R_N(t_1,t_2)=E[N(t_1)N(t_2)]=\lambda\min(t_1,t_2)+\lambda^2 t_1 t_2$$

5. 泊松过程的自协方差函数

$$C_N(t_1,t_2)=\lambda\min(t_1,t_2)$$

例1.2 设粒子按平均率为每分钟4个的泊松过程到达某记数器，*N* (*t*)表示在[0, *t*)内到达计数器的粒子个数，试求：

（1）*N* (*t*)的均值，方差，自相关函数与自协方差函数；

（2）在第3分钟到第5分钟之间到达计数器的粒子个数的概率分布。

（3）在2分钟内至少有6个粒子到达计数器的概率。

解：（1）依题意$N(t)$为一泊松过程，固定t，$N(t)$服从参数为λ的泊松分布，且知平均每分钟到达4个粒子，即强度λ =4, 由此可知$N(t)\sim\pi(4t)$,所以有

$$m_N(t)=4t=D_N(t)$$

$$R_N(t_1,t_2)=4\min(t_1,t_2)+16t_1t_2,\quad t_1,t_2\in T$$

$$C_N(t_1,t_2)=4\min(t_1,t_2)$$

（2）第3分钟到第5分钟之间到达计数器的粒子个数为的分布律为

$$P(N(3,5)=k)=P(N(5)-N(3)=k)$$

$$=P(N(5-3)=k)=P(N(2)=k)=\frac{(4\times 2)^k e^{-4\times 2}}{k!}=\frac{8^k e^{-8}}{k!}\quad k=0,1,2,\cdots$$

（3） 固定t时, $N(t) \sim \pi(4t)$, 即

$$P(N(t)=k)=\frac{(4t)^k e^{-4t}}{k!} \qquad k=0,1,2,\cdots$$

故 P(2分钟内至少到达6个粒子）

$$=P(N(2)\ge 6)=\sum_{k=6}^{\infty}\frac{(4\times 2)^k e^{-4\times 2}}{k!}$$

$$=\sum_{k=6}^{\infty}\frac{8^k e^{-8}}{k!}=1-\sum_{k=0}^{5}\frac{8^k e^{-8}}{k!}$$

$$=1-e^{-8}\left[1+8+\frac{8^2}{2!}+\frac{8^3}{3!}+\frac{8^4}{4!}+\frac{8^5}{5!}\right]=0.8088$$

6. 泊松过程的特征函数

$$\varphi_N(t,v) = e^{\lambda t(e^{iv}-1)}$$

因为 $\varphi_N(t,v) = \varphi_{N(t)}(v) = E[e^{iv\ N(t)}]$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} e^{ivk} \cdot \frac{(\lambda t)^k e^{-\lambda t}}{k!}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda t e^{iv})}{k!} \cdot e^{-\lambda t} = e^{\lambda t e^{iv}} \cdot e^{-\lambda t} = e^{\lambda t(e^{iv}-1)}$$

例1.3 （续例1.2）当N(t) 服从强度为4的泊松过程时，其特征函数为 $\varphi_N(t,v) = e^{4t(e^{iv}-1)}$

三、复合（广义）泊松过程

1. 复合泊松过程定义

定义1.2 设{$N(t)$, t≥0}是一强度为λ的泊松过程，

{X (n) ,n=1,2,…}是独立同分布随机变量列，且N (t)与X (n)相互独立。若令

$$Y(t)=\sum_{n=1}^{N(t)}X(n)\qquad (t\geq 0)$$

则称{$Y(t)$, t≥0}是一由{$N(t)$, t≥0}复合而成的复合泊松过程。

例1.4 保险公司保险金储备问题：

设某保险公司人寿保险者在时刻t_1, t_2, …时死亡，其中$0<t_1<t_2<\ldots<t_n<\ldots$是随机变量（因投保者在何时死亡，预先是不得而知的），在t_n时刻死亡者的家属持保险单可索取保险金$X(n)$。设

$\{X(n), n=1,2,\ldots\}$是一独立同分布随机变量列，令$N(t)$表示在$[0, t)$内死亡的人数，则$\{N(t), t\geqslant 0\}$是一强度为λ的泊松过程，故此保险公司在$[0, t)$时间内应该准备支付的保险金总额即为

$$Y(t)=\sum_{n=1}^{N(t)} X(n), \qquad (t\geq 0)$$

显然它是一复合泊松过程。

2. 复合泊松过程的性质

（1） $\{Y(t), t\geqslant 0\}$是一独立增量过程；

（2） $\{Y(t), t\geqslant 0\}$的增量具有平稳性，即增量的分布只与时间间隔有关，而与时间起点无关；

（3） $\{Y(t), t\geqslant 0\}$的特征函数为

$$\varphi_{Y(t)}(v)=e^{\lambda t[\varphi_{X(1)}(v)-1]}$$

这由条件期望性质可知

$$\varphi_{Y(t)}(v)=\sum_{k=0}^{\infty}E[e^{iv\sum_{n=1}^{N(t)}X(n)}\mid N(t)=k]\cdot P(N(t)=k)$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}E[e^{iv\sum_{n=1}^{k}X(n)}]P(N(t)=k)$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\prod_{n=1}^{k}E[e^{i\nu X(n)}]\cdot P(N(t)=k)$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}[\varphi_{X(1)}(\nu)]^k\frac{(\lambda t)^k e^{-\lambda t}}{k!}=e^{-\lambda t}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{[\lambda t\varphi_{X(1)}(\nu)]^k}{k!}$$

$$=e^{-\lambda t}\cdot e^{\lambda t\varphi_{X(1)}(\nu)}=e^{\lambda t[\varphi_{X(1)}(\nu)-1]}$$

（4）若$E|X(1)|^2<+\infty$，则$\{Y(t), t\geqslant 0\}$的均值函数为

$$m_Y(t)=E[Y(t)]=\lambda tE[X(1)]$$

这因为 $\varphi_{Y(t)}(\nu)=e^{\lambda t[\varphi_{X(1)}(\nu)-1]}$ 及特征函数性质

$\boxed{\varphi_X^{(k)}(0)=i^k E(X^k)}$ 可知

$$m_Y(t)=E[Y(t)]=\frac{\varphi'_{Y(t)}(0)}{i}=(-i)[\lambda t\varphi'_{X(1)}(\nu)\cdot e^{\lambda t[\varphi_{X(1)}(\nu)-1]}]\Big|_{\nu=0}$$

而 $(-i)\varphi'_{X(1)}(\nu)\big|_{\nu=0}=E[X(1)]$ $\qquad \varphi_{X(1)}(\nu)\big|_{\nu=0}=1$

代入即得 $\qquad m_Y(t)=\lambda tE[X(1)]$

（5）若$E|X(1)|^2<+\infty$，则$\{Y(t), t\geqslant 0\}$的方差函数为

$$D_Y(t)=\lambda tE[X^2(1)]$$

因为 $D_Y(t)=D[Y(t)]=E[Y^2(t)]-m_Y^2(t)$

而 $E[Y^2(t)]=(-i)^2\varphi''_{Y(t)}(\nu)\big|_{\nu=0}$

$$=-\left\{\left[\lambda t\varphi'_{X(1)}(\nu)\right]^2 e^{\lambda t[\varphi_{X(1)}(\nu)-1]}+\lambda t\varphi''_{X(1)}(\nu)e^{\lambda t[\varphi_{X(1)}(\nu)-1]}\right\}\Big|_{\nu=0}$$

将 $(-i)^2\varphi''_{X(1)}(\nu)\big|_{\nu=0}=E[X^2(1)],\varphi_{X(1)}(\nu)\big|_{\nu=0}=1$

$(-i)\varphi'_{X(1)}(\nu)\big|_{\nu=0}=E[X(1)]$ 代入上式即得

$$E[Y^2(t)]=-[\lambda tE[X(1)]]^2+\lambda tE[X^2(1)]$$

故有 $D_Y(t)=\lambda tE[X^2(1)]$

例1.5 保险公司保险金储备问题.设寿命投保人的死亡数是一个强度为λ的泊松过程，X (n) (n=1,2,…)表示第*n*个死亡者的死亡赔偿金额，它们是相互独立且具有相同分布的随机变量，其概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\alpha e^{-\alpha x} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}\qquad(\alpha>0)$$

令$Y(t)$表示在[0, t)时段内，保险公司支付的全部赔偿费。试求：

（1）在[0, t)时段内保险公司平均支付的赔偿费；

（2）D [Y (t)]。

解：设N (t)表示[0, t)时段内死亡人数，则

$$Y(t)=\sum_{n=1}^{N(t)} X(n)$$

是一复合泊松过程，由复合泊松过程性质知

（1）$E[Y(t)]=\lambda t\cdot E[X(1)]$

而 $E[X(1)]=\int_0^{+\infty} xf(x)dx=\int_0^{+\infty} x\alpha e^{-\alpha x}dx=\dfrac{1}{\alpha}$

故在[0, t)时段内保险公司平均支付的赔偿费为

$$E[Y(t)] = \lambda t \cdot \frac{1}{\alpha} = \frac{\lambda t}{\alpha}$$

（2）因为$E[X^2(1)] = \int_0^{+\infty} x^2 \cdot ae^{-\alpha x} dx = \dfrac{2}{\alpha^2}$

所以有 $D[Y(t)] = \lambda t E[X^2(1)] = \dfrac{2\lambda t}{\alpha^2}$

四、泊松过程的叠加与分解

1.泊松过程的叠加

定理1.2 设$\{N_1(t), t\geq 0\}$与$\{N_2(t), t\geq 0\}$为相互独立且强度分别为λ_1, λ_2的泊松过程，对于任意给定的t，$\{N(t)=N_1(t)+N_2(t), t\geq 0\}$ 仍为泊松过程。即两个相互独立的泊松过程的叠加仍为泊松过程，且其强度为二泊松过程的强度之和$\lambda=\lambda_1+\lambda_2$。

证 检查$N_1(t)+N_2(t)$,是否满足泊松过程的定义1.2

(1) $N(0)=N_1(0)+N_2(0)=0$

(2) $N_1(t)$,, $N_2(t)$, 为独立增量过程，其和亦为独立增量过程，即$N(t)$ 亦为独立增量过程；

（3）对任意的0≤t_1<t_2，增量N(t_1,t_2)的概率分布为

$$P(N(t_1,t_2)=m)=P(N_1(t_1,t_2)+N_2(t_1,t_2)=m)$$

$$=\sum_{k=0}^{m}P(N_1(t_1,t_2)=k,N_2(t_1,t_2)=m-k)$$

$$=\sum_{k=0}^{m}P(N_1(t_1,t_2)=k,N_2(t_1,t_2)=m-k)$$

$$=\sum_{k=0}^{m}\frac{[\lambda_1(t_2-t_1)]^k e^{-\lambda_1(t_2-t_1)}}{k!}\cdot\frac{[\lambda_2(t_2-t_1)]^{m-k} e^{-\lambda_2(t_2-t_1)}}{(m-k)!}$$

$$=e^{-(\lambda_1+\lambda_2)(t_2-t_1)}\cdot\sum_{k=0}^{m}\frac{m!}{k!(m-k)}[\lambda_1(t_2-t_1)]^k[\lambda_2(t_2-t_1)]^{m-k}\cdot\frac{1}{m!}$$

$$=\frac{[(\lambda_1+\lambda_2)(t_2-t_1)]^m}{m!}e^{-(\lambda_1+\lambda_2)(t_2-t_1)} \quad m=0,1,2,\cdots$$

故知$N(t)=N_1(t)+N_2(t)$,是强度为$\lambda=\lambda_1+\lambda_2$的泊松过程。

一般的,若$\{N_k(t), t\geqslant 0\}$,k=1,2,…,n为n个相互独立,其强度分别为λ_k的泊松过程，则

$$N(t)=\sum_{k=1}^{n}N_k(t) \quad (t\geq 0)$$

是强度为$\lambda=\sum_{k=1}^{n}\lambda_k$的泊松过程。

例1.6 设乘客从南北两个方向在[0, t)时段内到达同一飞机场的人数为$N_1(t)$, $N_2(t)$, 分别服从强度为λ_1与λ_2的泊松过程，试求在[0, t)时段内到达机场的人数的平均值。

解：依题意, $N_k(t) \sim \pi(\lambda_k t)$ $(k=1,2)$且相互独立，到达机场的总人数即为$N(t)=N_1(t)+N_2(t)$,服从强度为$\lambda=\lambda_1+\lambda_2$的泊松过程，故在[0, t)时段内到达机场的人数均值为

$$E[N(t)]=(\lambda_1+\lambda_2)t$$

2. 泊松过程的分解

定理1.3 设$\{N(t), t\geqslant 0\}$是强度为λ的泊松过程， $N_1(t)$,为进入子系统A的质点数， $N_2(t)$为进入系统B的质点数，则$N(t)$的分解过程$N_1(t)$, $N_2(t)$相互独立，分别服从强度为λ_1与λ_2的泊松过程。

证：设{$N(t)$, $t\geqslant 0$}是强度为λ的泊松过程，由$N(t)$表示在[0, t)时段内进入仅含两个子系统A、B的系统L的质点数， $N_1(t)$, $N_2(t)$,分别表示[0, t)时段内分别以概率p, $(1-p)$进入子系统A, B的质点数，且每个质点进入子系统A或B是相互独立的，故由定义1.2知

(1) 由 $0=N(0)=N_1(0)+N_2(0)$可得$N_1(0)=N_2(0)=0$

(2) 由$N(t)$的独立增量性及$N(t)=N_1(t)+N_2(t)$,易知, $N_1(t)$, $N_2(t)$,亦具备独立增量性。

(3) 对任意的$0\leqslant t_1<t_2$, $N_1(t_1, t_2)$的概率分布为

$$P(N_1(t_1,t_2)=k_1)$$

$$=\sum_{m=0}^{\infty}P(N(t_1,t_2)=m)P(N_1(t_1,t_2)=k_1 \mid N(t_1,t_2)=m)$$

$$=\sum_{m=k_1}^{\infty}P(N(t_1,t_2)=m)P(N_1(t_1,t_2)=k_1\mid N(t_1,t_2)=m)$$

$$=\sum_{m=k_1}^{\infty}\frac{[\lambda(t_2-t_1)]^m}{m!}e^{-\lambda(t_2-t_1)}\cdot C_m^{k_1}p^{k_1}(1-p)^{m-k_1}$$

$$=\sum_{m=k_1}^{\infty}\frac{[\lambda(t_2-t_1)]^m}{m!}e^{-\lambda(t_2-t_1)}\cdot\frac{m!}{k_1!(m-k_1)!}p^{k_1}(1-p)^{m-k_1}$$

$$=\frac{[\lambda p(t_2-t_1)]^{k_1}}{k_1!}e^{-\lambda(t_2-t_1)}\sum_{m=k_1}^{\infty}\frac{[\lambda(1-p)(t_2-t_1)]^{m-k_1}}{(m-k_1)!}$$

$$=\frac{[\lambda p(t_2-t_1)]^{k_1}}{k_1!}e^{-\lambda(t_2-t_1)}\cdot e^{\lambda(1-p)(t_2-t_1)}$$

$$=\frac{[\lambda p(t_2-t_1)]^{k_1}}{k_1!}e^{-\lambda p(t_2-t_1)}\qquad k_1=0,1,2,\cdots$$

因此，$N_1(t)$,是强度为λp的泊松过程。

同理可得$N_2(t)$,是强度为$\lambda(1-p)$的泊松过程。

(4) 证明$N_1(t)$与$N_2(t)$的独立性

因为 $P(N_1(t)=k_1, N_2(t)=k_2)$

$$= P(N_1(t)=k_1, N(t)=k_1+k_2)$$

$$= P(N(t)=k_1+k_2)P(N_1(t)=k_1 \mid N(t)=k_1+k_2)$$

$$= \frac{(\lambda t)^{k_1+k_2}}{(k_1+k_2)!}e^{-\lambda t} \cdot C_{k_1+k_2}^{k_1} p^{k_1}(1-p)^{k_2}$$

$$= \frac{(\lambda t)^{k_1+k_2}}{(k_1+k_2)!}e^{-\lambda t} \cdot \frac{(k_1+k_2)!}{k_1! \cdot k_2!} p^{k_1}(1-p)^{k_2}$$

$$= \frac{(\lambda t)^{k_1+k_2}}{k_1!k_2!} e^{-\lambda t} p^{k_1} (1-p)^{k_2}$$

$$= \frac{(\lambda pt)^{k_1}}{k_1!} e^{-\lambda pt} \cdot \frac{[\lambda(1-p)t]^{k_2}}{k_2!} e^{-\lambda(1-p)t}$$

$$= P(N_1(t) = k_1)P(N_2(t) = k_2)$$

由独立性定义知$N_1(t)$与$N_2(t)$相互独立,定理得证。

一般的,设$N(t)$表示在$[0, t)$时段内进入含有n个子系统的系统L的随机质点个数，每个质点独立地以概率p_k ($\Sigma p_k=1$)进入L的第k个子系统，用$N_k(t)$表示在$[0, t)$时段内进入第k个子系统的随机质点个数，若$N(t)$服从强度为λ的泊松过程，则$N_k(t)$, $k=1,2,\ldots,n$相互独立，且是强度为λp_k的泊松过程。

例1.7 设某个汽车站有*A*、*B*两辆跑同一路线的长途汽车。设到达该站的旅客数是一泊松过程，平均每10分钟到达15位旅客，而每个旅客进入*A*车或*B*车的概率分别为2/3与1/3。试求进入*A*车与进入*B*车的旅客数的概率分布。

解：由平均10分钟内到达车站15位旅客知，到达旅客的强度λ=15/10=1.5（人/分），故在[0, *t*)时段内进入该汽车站的旅客数N (t)的分布为

$$P(N(t)=k)=\frac{(\lambda t)^k}{k!}e^{-\lambda t}=\frac{(1.5t)^k}{k!}e^{-1.5t}\quad k=0,1,2,\cdots$$

由定理1.3知，在[0, *t*)时段内进入A车的旅客数$N_A(t)$也是一个泊松过程，且其强度为λp=1.5·(2/3)=1（人/分）。

因此$P(N_A(t)=k_1)=\frac{(\lambda pt)^{k_1}}{k_1!}e^{-\lambda pt}=\frac{t^{k_1}}{k_1!}e^{-t}\quad k_1=0,1,2,\cdots$

同理，进入*B*车的旅客数N $_B$ (t)也是一个泊松过程，且有

$$P(N_2(t)=k_2)=\frac{[\lambda(1-p)t]^{k_2}}{k_2!}e^{-\lambda(1-p)}$$

$$=\frac{(t/2)^{k_2}}{k_2!}e^{-\frac{t}{2}}\qquad k_2=0,1,2,\cdots$$

返回

下一节