工程数学 II（矩阵理论） 第 2 次作业

矩阵相似标准形 + 矩阵分解

（上交截止日期：**200 年 12 月 8 日下午 5:00**）

矩阵相似标准形（40 分）

1. (9 分)已知矩阵 A 和向量 α， β 分别为

$$A=\begin{bmatrix}3&1&1\\1&2&0\\1&0&2\end{bmatrix},\quad \alpha=\begin{bmatrix}\mathbf{1}\\\mathbf{-1}\\\mathbf{1}\end{bmatrix},\quad \beta=\begin{bmatrix}\mathbf{1}\\\mathbf{2}\\\mathbf{2}\end{bmatrix}$$

（1）求 A 的特征值和特征向量；

（2）A 是否可以对角化？若可以，求出 P 使 $P^{-1}AP$ 为对角矩阵；

（3）计算 $A^{100}\alpha$ 及 $A^{100}\beta$（提示：利用$AX=\lambda X$）。

2. (7 分)判断下列两个λ矩阵是否等价:

$$A(\lambda)=\begin{bmatrix}3\lambda+1&\lambda&4\lambda-1\\1-\lambda^2&\lambda-1&\lambda-\lambda^2\\\lambda^2+\lambda+2&\lambda&\lambda^2+2\lambda\end{bmatrix}$$

$$B(\lambda)=\begin{bmatrix}\lambda+1&\lambda-2&\lambda^2-2\lambda\\2\lambda&2\lambda-3&\lambda^2-2\lambda\\-2&1&1\end{bmatrix}$$

3. (9 分)求下列λ矩阵的史密斯标准型：

（1）$\begin{bmatrix}-\lambda+1&2\lambda-1&\lambda\\\lambda&\lambda^2&-\lambda\\\lambda^2+1&\lambda^2+\lambda-1&-\lambda^2\end{bmatrix}$

（2）$\begin{bmatrix}\lambda^2&0\\0&(\lambda-1)^2\end{bmatrix}$

（3）$\begin{bmatrix}0&0&1&\lambda+4\\0&1&\lambda+4&0\\1&\lambda+4&0&0\\\lambda+4&0&0&0\end{bmatrix}$

4. (8 分)求下列矩阵的各阶行列式因子，不变因子，初等因子及 Jordan 标准形：

(1) B=$\begin{bmatrix} 17 & 0 & -25 \\ 0 & 3 & 0 \\ 9 & 0 & -13 \end{bmatrix}$ (2) D =$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

5. (7 分)用波尔曼法求矩阵的 Jordan 标准形。

$$\begin{bmatrix} 4 & 5 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

矩阵分解(60 分)

1.（8 分）求矩阵$A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & -4 \\ 2 & 1 & -2 \\ -4 & -2 & 5 \end{bmatrix}$的 LU，LDU，Doolittle 和 Crout 分解。

2. （8 分）已知

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & -3 & -1 & -5 \\ 3 & 1 & 2 & 11 \end{bmatrix}, \ b = \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

求 A 的 LU 分解，并利用它求解线性方程组$Ax = b$.

3. （8 分）用 Schmidt 正交化法求矩阵$A = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{bmatrix}$的 QR 分解。

4. （7 分）用初等旋转变换求矩阵$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 5 \\ 0 & 3 & 4 \\ 4 & 0 & 5 \end{bmatrix}$的 QR 分解。

5. （7 分）用初等反射变换求矩阵$A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$的 QR 分解。

6. （7 分）求矩阵$A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 0\\ 1 & 2 & 1 & 1\end{bmatrix}$的一个满秩分解。

7. （7 分）求矩阵$A=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}$的奇异值分解。

8. （8 分）设矩阵$A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & -2\\ -1 & 1 & -3\end{bmatrix}$,证明 A 为可对角化矩阵，并求 A 的谱分解式。