§2.3 随机过程的分类

一、按参数集与状态集分类

二、按随机过程的概率结构来分类

对一般随机过程进行研究是十分困难的，因为实际问题产生的随机过程总可以归结为一些特殊的随机过程，所以我们有必要对随机过程进行分类，以方便实际应用与研究需要。基于出发点的不同，可产生许多不同的分类方法，本节仅介绍两类典型的分类方法:

即按参数集与状态集分类方法,和按随机过程的概率结构来分类方法,并介绍一些常见的随机过程,如二阶矩过程, 独立随机过程,独立增量随机过程,不相关增量过程 正交增量过程 平稳增量过程, 正态过程及维纳(Wiener)随机过程等.

一、按参数集与状态集分类

随机过程的参数集或参数空间*T* 可分为离散集与连续集，状态集或状态空间*E* 亦可分为离散集与连续集，这样，我们将随机过程分为以下四类：

随机过程

- 离散参数集，离散状态集随机过程
- 离散参数集，连续状态集随机过程
- 连续参数集，离散状态集随机过程
- 连续参数集，连续状态集随机过程

我们通常称状态空间离散的随机过程为链，参数空间离散的随机过程为随机（时间）序列。

上述分类法是按随机过程的物理架构来分类，是比较肤浅的，更重要，更深入的分类，是按随机过程的概率结构来分类,也就是按照随机过程的某项概率特征来分类,这种分类是可以重叠的。

二、按随机过程的概率结构来分类

这种分类是按随机过程的概率特性来分类，实质上就是按随机过程的分布函数的特性分类。

1. 二阶矩过程

定义3.1 设X (t)为实随机过程，若其均方值函数 $EX^2(t)$，对于任意的t都存在，则称此 $X(t)$为实二阶矩过程；若Z (t)为复随机过程，对于任意的t,其均方值函数 $\psi_Z^2(t)=E(|Z(t)|^2)$ 都存在，则称此Z (t)为复二阶矩过程。

例3.1 试问随机过程 $\{X(t)=X\cos\omega t\ \ t\in T\}$ 在下列两种情况下是否为二阶矩过程?

i) $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，ω 为常数;

ii）X具有概率密度 $f(x)=\dfrac{1}{\pi^2(1+x^2)}$。

解 i）$\boxed{\forall t,\psi_X^2(t)=E[X^2(t)]=E[X^2\cos^2\omega t]}$

$$=E(X^2)\cos^2\omega t$$

$$=(\sigma^2+\mu^2)\cos^2\omega t<+\infty$$

所以,此X (t)为二阶矩过程。

解 ii）

$$\forall t \in T, \psi_X^2 = E[X^2(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 \cos^2 \omega t}{\pi^2 (1+x^2)} dx = \infty$$

即其二阶矩不是有限的,所以此$X(t)$不是一个二阶矩过程。

二阶矩过程的简单性质

(1) 二阶矩过程的均值函数和自相关函数必然存在

因为若Z (t)为复二阶矩过程,由Schwarz不等式可得:

$$E[|X(t)|] \le E[\sqrt{X^2(t)+Y^2(t)}] \le [E(|Z(t)|^2)]^{\frac{1}{2}}$$

$$E[|Y(t)|] \le E[\sqrt{X^2(t)+Y^2(t)}] \le [E(|Z(t)|^2)]^{\frac{1}{2}}$$

故EX(t)和 EY(t) 均存在,从而 EZ(t)亦存在.

且有 $\left|E[Z(s)\overline{Z(t)}]\right|^2 \le E[|Z(s)|^2|Z(t)|^2]$

因此自相关函数$R_Z(s,t)$也存在.

(2)自相关函数$R_Z(s,t)$具有Hermite性质,即

$$\overline{R_Z(s,t)} = R_Z(t,s) \qquad s,t \in T$$

实际上

$$\overline{R_Z(s,t)} = \overline{E[Z(s)\overline{Z(t)}]}$$

$$= E[\overline{Z(s)}\overline{\overline{Z(t)}}] = E[\overline{Z(s)}Z(t)]$$

$$= R_Z(t,s)$$

(3) 自相关函数$R_Z(s,t)$具有非负定性,即对于对于任意的正整数n，任意的$t_1,\ldots,t_n$和任意的n个复数$a_1,\ldots,a_n$,有

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} R_Z(t_i,t_k)a_i\overline{a_k} \geq 0}$$

因为 $$\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} R_Z(t_i,t_k)a_i\overline{a_k} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} E[Z(t_i)\overline{Z(t_k)}]a_i\overline{a_k}$$

$$= E[\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} Z(t_i)\overline{Z(t_k)}a_i\overline{a_k}] = E[\left|\sum_{i=1}^{n} Z(t_i)a_i\right|^2] \geq 0$$

二阶矩过程的存在性定理

设T为实参数集,R (s ,t)为定义在T上的二元非负函数,则必存在一个二阶矩过程X (t), 此R (s ,t)为其相关函数.且当R (s ,t)为实值二元非负函数时, X (t)是一个实二阶矩过程.

2. 独立随机过程

定义3.2　设$X(t)$为一随机过程。若对于任意的正整数n，任意的 $t_1,\ldots,t_n$, n个随机变量$X(t_1),\ldots,X(t_n)$相互独立，则称$X(t)$为独立随机过程。

独立随机过程是随机过程之中的一类最简单且应用较广的过程。

例3.2 设 $X_n = \begin{cases} 1 & \text{第}n\text{次投掷硬币出现正面} \\ -1 & \text{第}n\text{次投掷硬币出现反面} \end{cases}$

显然,此X (n)为一个独立过程.

独立过程X (t)的数字特征

$$m_X(t) = E[X(t)]$$

$$R_X(s,t) = m_X(s) m_X(t)$$

$$C_X(s,t) = 0$$

3. 独立增量随机过程

定义3.3 设X (t)为一随机过程，对于任意的*n*及$t_1<t_2<\ldots<t_n$, $X(t_i, t_j)=X(t_j)-X(t_i)$ $(i<j)$为X (t)在t_i, t_j处的增量, 若$X(t_1, t_2)$, $X(t_2, t_3)$,…, $X(t_{n-1}, t_n)$相互独立，则称X (*t*)为独立增量随机过程（亦称为可加过程）。

例3.2 设{X n, n=1,2,…}为一独立过程，则

$$\{Y_n=\sum_{k=1}^{n}X_k,\ \ n=1,2,\cdots\}$$

必为一独立增量过程。

独立增量随机过程X (t) 的简单性质

（1）设T=[a ,b], 则Y (t)=X (t)-X (a) 仍为一独立增量过程。

（2）设增量Y (t ,s)=X (s)-X (t) (t<s)的分布函数为F (x ,t ,s),则对于任意的$t_1<t_2<t_3$，总有

$$F(x, t_1, t_3) = F(x, t_1, t_2) * F(x, t_2, t_3)$$

其中 * 表示卷积.

由此可推知,独立增量过程的有限维分布函数族由其一维分布和增量的分布确定.

4. 不相关增量过程 正交增量过程 平稳增量过程

定义3.4 设X (t)为一随机过程，若对于 $t \in T, E|X(t)|^2$存在，且对于任意的 $t_1 < t_2 \le t_3 < t_4 \in T$ 满足等式

$$E\{[X(t_2)-X(t_1)]\overline{[X(t_4)-X(t_3)]}\}$$

$$=E[X(t_2)-X(t_1)]E\overline{[X(t_4)-X(t_3)]}$$

则称此X (*t*)为不相关增量过程。

若有 $E\{[X(t_2)-X(t_1)]\overline{[X(t_4)-X(t_3)]}\}=0$

则称X (*t*)为正交增量过程。

若对于任意的s<t，X (t)-X (s) 的分布仅依赖于t –s,则称此X (t)为平稳(齐次)增量过程.进而, 若它还是独立增量过程,则称之为平稳独立增量过程.

例3.3 设X (t)表示电话交换台在[0,t)时段内接到的呼叫次数,则可验证 $\{X(t),t\geq 0\}$为一个随机过程,且是一个平稳独立增量过程.

正交增量过程的性质

设 $\{X(t), t\in[a,b]\}$ 为一正交增量过程，且 $X(a)=0$, $C_X(s,t)$ 和D $_X$(t)分别为X (t)的协方差函数与方差函数，则有

(1) $$R_X(s,t)=\psi_X^2[\min(s,t)]=E[|X(\min(s,t))|^2]$$

$$C_X(s,t)=D_X[\min(s,t)]+|m_X[\min(s,t)]|^2-m_X(s)\overline{m_X(t)}$$

(2) R $_X$ (t ,t)是[a, b]上的单调不减函数

证　令　$t_1 = a < t_2 = t_3 = s < t_4 = t$

$$E\{[X(s)-X(a)]\overline{[X(t)-X(s)]}\}$$

$$= E\{[X(s)]\overline{[X(t)-X(s)]}\} = 0$$

则有　$R_X(s,t) = E[X(s)\overline{X(t)}]$

$$= E\{X(s)[\overline{X(t)-X(s)} + \overline{X(s)}]\}$$

$$= E\{X(s)\overline{[X(t)-X(s)]}\} + E|X(s)|^2$$

$$= R_X(s,s) = \psi_X^2(s)$$

同理，当$t<s$时有 $R_X(s,t)=R_X(t,t)=\psi_X^2(t)$

所以 $R_X(s,t)=R_X[\min(s,t),\min(s,t)]$

再由$C_X(s,t)=R_X(s,t)-m_X(s)\overline{m_X(t)}$知结论正确。

特别地,当$m_X(t)=0$时,有 $C_X(s,t)=D_X[\min(s,t)]$

(2) 设 $t_1=a<t_2=t_3=s<t_4=t$

则有 $0\le E[|X(t)-X(s)|^2]=E[(X(t)-X(s))\overline{(X(t)-X(s))}]$

$=E[|X(t)|^2]-E[X(t)\overline{X(s)}]-E[X(s)\overline{X(t)}]+E[|X(s)|^2]$

$=R_X(t,t)-R_X(s,s)-R_X(s,s)+R_X(s,s)$

$=R_X(t,t)-R_X(s,s)$ 即$R_X(s,s)\le R_X(t,t)$

5. 正态随机过程

定义3.5 设X (t)为随机过程，若对任意的n及任意的$t_1,\ldots,t_n$，n维随机变量$(X(t_1),\ldots,X(t_n))$服从n维正态分布，即其概率密度为

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n,t_1,t_2,\cdots,t_n)=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}|C|^{\frac{1}{2}}}e^{-\frac{1}{2}(x-\mu)'C^{-1}(x-\mu)}$$

$$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)',\mu=(m_X(t_1),m_X(t_2),\cdots,m_X(t_n))'$$

$$C=(C_{ij})_{n\times n},C_{ij}=C_X(t_i,t_j)=\mathrm{Cov}(X(t_i),X(t_j)),$$

$i,\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ n$ 则称它为正态过程或<u>高斯</u>过程

易见，正态过程的有限维分布均为正态分布，n维正态分布由其协方差阵C唯一确定，故正态过程的有限维分布由$X(t)$的协方差函数$\{C_X(t_i, t_j), i, j=1,2,\ldots,n\}$唯一确定。

例3.4 试证随机过程

$$X(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$$

为一正态随机过程，其中A,B为相互独立同服从$N(0, \sigma^2)$分布的随机变量，ω为一实常数。

证 由于A,B为相互独立的正态随机变量,故其线性组合亦服从正态分布.任取

$$t_1, t_2, \cdots, t_n \in T, X(t_i) = A\cos\omega t_i + B\sin\omega t_i, i = 1, 2, \cdots, n$$

取任意常数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 则X (t_1),…,X (t_n)的线性组合

$$\sum_{i=1}^{n} a_i X(t_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i (A\cos\omega t_i + B\sin\omega t_j)$$

$$= (\sum_{i=1}^{n} a_i \cos\omega\, t_i)A + (\sum_{i=1}^{n} a_i \sin\omega\, t_i)B$$

仍为A与B的线性变换,故服从一维正态分布,从而知 *n*维随机变量(**X(t_1),…,X (t_n)**)服从*n*维正态分布, 所以X (t)为正态过程.

定理　*n*维随机变量(X_1,…,X_n)服从*n*维正态分布的充要条件是*n*个随机变量X_1,…,X_n的任意线性组合均服从一维正态分布.

定义3.6 设X (t)与Y (t)为实正态随机过程，则称Z (t)=X (t)+ iY (t)为复正态随机过程。

例3.5 复随机过程

$$\{Z(t)=\sum_{k=1}^{n}A_k e^{i\omega_k t}, t\in R\}$$

其中A_k, k=1,2,…,n相互独立，且均服从正态分布N(0, σ^2) , ω_k, k=1,2,…,n为实常数,则此复随机过程Z (t)即为复正态随机过程 。

6. 维纳(Wiener)随机过程

定义3.7 设$\{X(t),t\geq 0\}$为一随机过程，若满足

(1) $P(X(0)=0)=1$;

(2) $\{X(t),t\geq 0\}$ 是一齐次独立增量过程;

(3)对任意的 $0\leq t_1<t_2$ ，

$$X(t_1,t_2)=X(t_2)-X(t_1)\sim N(0,\sigma^2(t_2-t_1))$$

其中$\sigma>0$为常数。

则称此随机过程为维纳过程或布朗运动过程,

当 $\sigma=1$ 时,称为标准维纳过程。

维纳过程的简单性质

(1)维纳过程的均值函数、方差函数、协方差函数与相关函数为

$$m_X(t) = EX(t) = 0$$

$$D_X(t) = D(X(t)) = \sigma^2 t \quad (t > 0)$$

$$C_X(t_1, t_2) = R_X(t_1, t_2) = E[X(t_1)X(t_2)] = \sigma^2 \min(t_1, t_2)$$

(2) 维纳过程是具有齐次独立增量的正态过程