§6.1 马尔可夫过程概念

- 一、马尔可夫过程的数学定义
- 二、满足马氏性的随机过程
- 三、马氏过程的分类
- 四、马氏过程的有限维分布族

一、马尔可夫过程的数学定义

马尔可夫过程是具有所谓马尔可夫性的一类特殊的随机过程.

1 马尔可夫特性

若当某随机过程$\{X(t),t\in T\}$在某时刻t_k所处的状态已知的条件下，过程在时刻$t(t>t_k)$处的状态只会与过程在t_k时刻的状态有关，而与过程在t_k以前所处的状态无关。这种特性即称为马尔可夫性,亦称之为无后效性。

例如:假设一部电梯是由进入电梯内的人自行操纵的，那么电梯下一步会运行到何处，只依赖于当前在电梯内的人的意图，而与过去电梯从何而来是无关的;

又如:某电话交换台在时段$[0,t_k)$内收到x_k次呼唤，则在时段内$[0,t)(t>t_k)$收到的呼唤次数$X(t)$为在$[0,t_k)$内收到的呼唤次数与$[t_k,t)$内收到的呼唤次数之和，其中x_k为确定已知时，这个数$X(t)$就与t_k以前呼唤的历史情况无关.

2 马尔可夫过程的数学定义

定义1.1 设$\{X(t),t\in T\}$为一随机过程，E为其状态空间，若对任意的$t_1<t_2<\ldots<t_n<t$，任意的$x_1,x_2,\ldots,x_n,x\in E$，随机变量$X(t)$在已知条件$X(t_1)=x_1, X(t_2)=x_2,\ldots, X(t_n)=x_n$下的条件分布函数若只与$X(t_n)=x_n$有关，而与$X(t_{n-1})=x_{n-1},\ldots, X(t_2)=x_2, X(t_1)=x_1$无关，即条件分布函数满足等式:

此式即为马尔可夫性的数学表示

$$F(x,t \mid x_n, x_{n-1}, \cdots, x_2, x_1, t_n, t_{n-1}, \cdots, t_2, t_1) = F(x,t \mid x_n, t_n)$$

即$P(X(t) \le x \mid X(t_n) \le x_n, \cdots, X(t_1) \le x_1) = P(X(t) \le x \mid X(t_n) \le x_n)$

则称此过程为**马尔可夫过程**，简称为**马氏过程**。

注1 若X(t)为离散型随机变量时,上式即为

$$P\{X(t) = x \mid X(t_n) = x_n, \cdots, X(t_1) = x_1\} = P\{X(t) = x \mid X(t_n) = x_n)$$

注2 若X(t)为连续型随机变量时,上式即为

$$f(x,t \mid x_1, \cdots, x_n, t_1, \cdots, t_n) = f(x,t \mid x_n, t_n)$$

注3 马氏过程的参数集T常用的有两种情形:具连续的区间参数集的马氏过程,具可列参数集的马氏链.

3 马尔可夫特性的数学解释

若把时刻t_n视作“现在”，而$t>t_n$，故视t为“将来”，自然视时刻$t_1<t_2<\ldots<t_{n-1}$为“过去”，因此上述定义中的条件可表述为：在t_n时刻过程$X(t)$处于$X(t_n)=x_n$的状态条件下，$X(t)$的“将来”状态只与“现在”状态有关，而与“过去”状态无关。

也可以说，过程X(t)的“将来”只通过“现在”与“过去”发生联系，一旦“现在”已经确定，则“将来”与过去无关。

所以有人形象地将马氏过程戏称为一个“健忘”过程，即指它是一个只注重现在，而把过去经历统统忘却的一类特殊的随机过程。

[redacted] $(t) \le x \mid X\ t_n) = x_n\}$

例1.1 [redacted]程，其中X(n)如下定义

$$X(n) = \begin{cases} 1 & \text{第}n\text{次投掷一硬币出现正面朝上} \\ 0 & \text{否} \end{cases}$$

由于n次投掷同一枚硬币时，每一次投掷与其它各次投掷是相互独立的，故而为一独立随机过程，故知它是马氏过程。

例1.2 设X(n)为第*n*次投掷一骰子出现朝上的点数，X(n)的参数空间T={n,n≥1},状态空间E={1,2,…,6},且对于任意的n≠m ,X(n)与$X(m)$ 相互独立的，即此X(n)是一独立随机过程，亦为一马氏过程。

注意：独立过程为马氏过程，但马氏过程不一定为独立过程，马氏过程只是满足马氏性的特殊随机过程。

例1.4 （二项过程）设在每次试验中，事件A发生的概率为$p(0<p<1)$，独立地重复进行这项试验，以$X(n)$表示到第n次为止事件A发生的次数，则$\{X(n), n=1,2,...\}$是一个平稳独立增量过程。

实际上，由二项分布知识可知，$X(n)$服从二项分布$B(n, p)$，故称此为二项过程。若令增量为

$$Y_n = X(n) - X(n-1), n = 1,2,\cdots$$

显见Y_n是第n次试验中事件A发生的次数：

$$P\{Y_n = 0\} = 1 - p,\ P\{Y_n = 1\} = p,\ n = 1, 2, \cdots$$

且$X(n+m) - X(n) \sim B(m, p),\ n = 1, 2, \cdots$

即为一平稳独立增量过程，亦为一马氏过程。

例1.5 设一质点自坐标原点出发在数轴上作随机游动，每隔1秒以概率p向右移动1单位距离，以概率$q=1-p$向左移动1单位距离，以$X(n)$表示质点在第n秒至第$n+1$秒期间的坐标，则{X(n),n≥1}是一个平稳的独立增量过程。$X(n)$的概率分布为：

$$P\{X(n)=k\}=\begin{cases} C_n^{\frac{n+k}{2}} p^{\frac{n+k}{2}} q^{\frac{n-k}{2}}, & \text{当}|k|\le n,\text{且}\dfrac{n+k}{2}\text{为整数} \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

实际上，若设质点每次移动的距离为Y_k，则有

$$P(Y_k=1)=p,\quad P(Y_k=-1)=1-p,\quad k=1,2,\cdots$$

于是有 $X(n)=\sum_{k=1}^{n} Y_k$

又因质点每次游动Y_k与该质点所处的位置无关,即$Y_1,Y_2,\ldots$是相互独立的随机变量,容易求出

$$P(X(1)=1)=P(Y_1=1)=p$$

$$P(X(1)=-1)=P(Y_1=-1)=1-p$$

而当n=2时,X(2)可能取值为2,0,-2,相应的概率为

$$P(X(2)=2)=P(Y_1=1,Y_2=1)=P(Y_1=1)P(Y_2=1)=p^2$$

$$P(X(2)=-2)=P(Y_1=-1,Y_2=-1)=P(Y_1=-1)P(Y_2=-1)=(1-p)^2$$

$$P(X(2)=0)=P(Y_1=1,Y_2=-1)+P(Y_1=-1,Y_2=1)$$

$$=P(Y_1=1)P(Y_2=-1)+P(Y_1=-1,Y_2=1)=2pq$$

依次类推,即得X(n)的概率分布。

例1.6 泊松过程为一马氏过程。这是因为泊松过程是具有平稳独立增量的随机过程。

三、马氏过程的分类

马氏过程亦可根据参数空间与状态空间的离散与连续类型分为以下四种类型：

（1）离散参数集，离散状态集马氏过程；
（2）离散参数集，连续状态集马氏过程；
（3）连续参数集，离散状态集马氏过程；
（4）连续参数集，连续状态集马氏过程.

其中第一种类型，即离散参数集，离散状态集的马氏过程，称之为马尔可夫链，简称马氏链。

如:例1.1与例1.2,例1.4,例1.5均为马尔可夫链,例1.3,例1.6为连续时间参数集马尔可夫过程.

例1.7 若每隔一分钟观察噪声电压，以$X(n)$表示第n分钟观察噪声电压所得结果，则$X(n)$为一随机变量，$\{X(n),n\geqslant 1\}$为一随机过程，此过程是马氏过程吗？

实际上,每隔一分钟观察所得噪声电压值相互并不影响,且$X(n)$为一连续型随机变量,因而$\{X(n),n\geqslant 1\}$是独立同分布的连续型随机变量列,故知它为离散参数集,连续状态集的马尔可夫过程.

四、马氏过程的有限维分布族

马氏过程的n维分布函数是由一些条件分布函数与初始时刻对应的随机变量的分布函数的乘积得出。

实际上,若X(t)为马尔可夫过程,对于任意的$n, t_1 < t_2 < \ldots < t_n$,对应的随机变量$X(t_1)$, $X(t_2)$,… ,$X(t_n)$,的联合变量$(X(t_1), X(t_2), \ldots, X(t_n))$的分布函数为

$$
\begin{aligned}
& F_n(x_1, x_2, \cdots, x_n, t_1, t_2, \cdots, t_n) \\
&= P\{X(t_1) \le x_1, X(t_2) \le x_2, \cdots, X(t_n) \le x_n\} \\
&= P\{X(t_1) \le x_1\} P\{X(t_2) \le x_2 \mid X(t_1) \le x_1\} \cdots P\{X(t_n) \le x_n \mid X(t_{n-1}) \le x_{n-1}, \\
&\quad X(t_{n-2}) \le x_{n-2}, \cdots, X(t_2) \le x_2, X(t_1) \le x_1\} \\
&= P\{X(t_1) \le x_1\} P\{X(t_2) \le x_2 \mid X(t_1) \le x_1\} \cdots P\{X(t_n) \le x_n \mid X(t_{n-1}) \le x_{n-1}\} \\
&= F(x_1, t_1) F(x_2, t_2 \mid x_1, t_1) \cdots F(x_n, t_n \mid x_{n-1}, t_{n-1})
\end{aligned}
$$

（1）若$X(t)$为连续型随机变量时，马氏过程的有限维密度函数为

$$f_n(x_1,x_2,\cdots,x_n,t_1,t_2,\cdots,t_n)$$
$$=f_1(x_1,t_1)f(x_2,t_2\mid x_1,t_1)\cdots f_n(x_n,t_n\mid x_{n-1},t_{n-1})$$

即此时马氏过程的有限维概率密度函数等于一些条件概率密度与初始时刻t_1对应的随机变量的概率密度函数的乘积，上式中的条件概率密度常称为转移概率密度。

（2）若$X(t)$为离散型随机变量时，马氏过程的有限维概率分布为 $P\{X(t_1)=x_1,X(t_2)=x_2,\cdots,X(t_n)=x_n\}$

$$=P\{X(t_1)=x_1\}P\{X(t_2)=x_2\mid X(t_1)=x_1\}\cdots P\{X(t_n)=x_n\mid X(t_{n-1})=x_{n-1}\}$$

即此时，马氏过程的有限维概率分布可表示为一些条件概率与初始时刻对应的随机变量的概率分布的乘积，上式中的条件概率常称为转移概率。