第三章　二阶矩过程的均方微积分

返回

第二章 基本要求

- 1、了解均方极限的概念，了解均方极限的简单性质，会求简单的随机过程的均方极限；
- 2、了解均方连续性的概念，了解均方连续性的简单性质，会确定简单的随机过程的均方连续性；
- 3、了解均方导数的概念，了解均方导数的简单性质，会求简单的随机过程的均方导数，及了解均方导数的简单性质；
- 4、了解均方积分的概念，了解均方积分的简单性质，会求简单的随机过程的均方积分，及了解均方积分的简单性质；
- 5、了解正态过程的均方微积分性质。

- 为了深入地研究随机过程，如要讨论随机信号的线性变换，就必须借助于随机过程的微分与积分知识，因此，有必要将高等数学中有关连续，微分和积分等概念在均方极限意义上加以进行推广，根据需要，我们这里引入建立在随机极限上的均方连续、均方可微和均方可积等等概念。
- 由于讨论的是均方极限，所以假定本节讨论的随机过程的一阶矩、二阶矩均存在，如无特别指明, 本章以下讨论的均是二阶矩过程。

§2.1 随机变量序列的均方极限

一 均方极限的概念

二 随机变量序列的均方极限

均方极限是均方微积分的基础,是均方收敛意义下的样本函数的极限.

一　均方极限的概念

1 二阶矩变量空间

定义1.1 二阶矩存在的随机变量的全体组成的集合

$$H=\{X \mid E(|X|^2)<+\infty\}$$

我们称为二阶矩变量空间.

这个空间是一线性空间,具有以下性质

2 二阶矩变量空间的性质

(1) 设 $X,Y\in H$,则对于任意的复数 a,b

$$aX+bY\in H$$

(2) $\forall\ X,Y\in H,\ \left|E(X\overline{Y})\right|\le\|X\|\bullet\|Y\|$

(3) $\forall\ X\in H\quad \left|E(X)\right|\le E(\left|X\right|)\le\|X\|$

其中$\|X\|=[E(\left|X\right|^2)]^{\frac{1}{2}}$,为$X$的范数,具有范数的正定性，齐次性与三角不等式等性质

二　随机变量序列的均方极限

1 均方极限的定义

定义1.1 设随机变量序列{X $_n$, n=1,2,…}和随机变量*X*的二阶矩有限，即 $E|X_n|^2<\infty, \ E|X|^2<\infty$ ，

若有 $\lim\limits_{n\to\infty} E|X_n - X|^2 = 0$, 即 $\lim\limits_{n\to\infty} \|X_n - X\| = 0$

则称*X n*依均方收敛于*X*，称*X*为*X* $_n$的均方极限，记作

$$\underset{n\to\infty}{L\cdot i\cdot m}\, X_n = X$$

2 均方极限的性质

1）若随机变量序列$\{X_n\}$依均方收敛于随机变量X，则它必定也依概率收敛于X。这由切比雪夫不等式可知.

$$\forall \varepsilon > 0,\ P(|X_n - X| > \varepsilon) \le \frac{E[|X_n - X|^2]}{\varepsilon^2}$$

2)若 $\underset{n\to\infty}{L\cdot i\cdot m} X_n = X$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} E(X_n) = E(X)$

即有

$$\lim_{n\to\infty} E(X_n) = E(\underset{n\to\infty}{L\cdot i\cdot m} X_n)$$

因为 $D(Y)=E|Y|^2-|E(Y)|^2$,

$$|E(Y)|^2=E|Y|^2-D(Y)\le E|Y|^2$$

所以$|E(X_n)-E(X)|=|E(X_n-X)|\le\sqrt{E|X_n-X|^2}$

故当$E|X_n-X|^2\to 0$时,

$$有\ |E(X_n)-E(X)|\xrightarrow{n\to\infty}0$$

3)如果 $\underset{m\to\infty}{L\cdot i\cdot m}X_m=X$ 且 $\underset{n\to\infty}{L\cdot i\cdot m}Y_n=Y$ 则

$$\lim_{\substack{m\to\infty\\ n\to\infty}}E(X_m\overline{Y_n})=E(X\overline{Y})=E[(\underset{m\to\infty}{L\cdot i\cdot m}X_m)(\underset{n\to\infty}{L\cdot i\cdot m}\overline{Y_n})]$$

这因为 $|E(X_mY_n)-E(XY)|=E(X_mY_n-XY)|$

$$=|E[(X_m - X)(Y_n - Y) + X(Y_n - Y) + (X_m - X)Y]|$$

$$\le E|(X_m - X)(Y_n - Y)| + E|X(Y_n - Y)| + E|(X_m - X)Y|$$

利用柯西一许瓦兹不等式 $|E(XY)| \le \sqrt{E(X)^2}\sqrt{E(|Y|^2)}$

可得 $|E(X_m Y_n) - E(XY)| \le \sqrt{E|X_m - X|^2}\sqrt{E|Y_n - Y|^2}$

$$+\sqrt{E|X|^2}\sqrt{E|Y_n - Y|^2} + \sqrt{E|X_n - X|^2}\sqrt{E|Y|^2}$$

由条件 $E|X_m - X|^2 \xrightarrow{m\to\infty} 0,\ E|Y_n - Y|^2 \xrightarrow{n\to\infty} 0$

易见 $|E(X_m Y_n) - E(XY)| \to 0 \quad (m \to \infty, n \to \infty)$

4)若 $\underset{n\to\infty}{\mathrm{L \cdot i \cdot m}}\ X_n = X$,则有 $\lim\limits_{n\to\infty} E(|X_n|^2) = E(|X|^2)$

5)若 $L\cdot i\cdot mX_n = X$,且$L\cdot i\cdot mY_n = Y$, 则对任意常数a， b 有 $L\cdot i\cdot m(aX_n + bY_n) = aX + bY$

6）若数列$\{a_n, n=1,2,\cdots\}$有极限 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$,又X是随机变量，则 $L\cdot i\cdot m(a_n X) = 0$

7) 若 $L\cdot i\cdot mX_n = X$,且$L\cdot i\cdot mX_n = Y$,

则有 $P(X = Y) = 1$

8)若 $\underset{n\to\infty}{\mathrm{L\cdot i\cdot m}}\ X_n = X$,则有

$$L\cdot i\cdot mD(X_n) = D(L\cdot i\cdot mX_n) = D(X)$$

9)若X $_n$和X为实随机变量,且 $\underset{n\to\infty}{\mathrm{L\cdot i\cdot m}}\ X_n = X$

则有 $$L\cdot i\cdot mE[e^{itX_n}] = E[e^{itX}]$$

10) （判别准则）均方极限存在的充要条件是

$$\underset{\substack{m\to\infty \\ n\to\infty}}{L\cdot i\cdot m}(X_m - X_n) = 0$$ 即 $$\underset{\substack{m\to\infty \\ n\to\infty}}{Lim}E|X_m - X_n|^2 = 0$$

11)(均方收敛准则）{X $_n$}均方收敛的充要条件上为极限 $LimE[X_m\overline{X_n}]$存在

12）（均方极限下的大数定理）设{X $_n$}是相互独立同分布的随机变量序列，E (X $_n$)=a, n=1,2,…则有：

$$L\cdot i\cdot m\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k=a$$

均方极限的性质给出了均方极限的基本运算关系与判别准则，与普通极限有类似的运算关系与判别准则。由此可定义均方极限意义下的均方连续性,均方导数与均方积分.

下一节