§6.2 马尔可夫链

- 一、马氏链的定义
- 二、齐次马氏链
- 三、转移图（状态传递图与概率转移图）

★ 参数集为离散集，状态集亦为离散集的马氏过程谓之马尔可夫链。此时参数集常当作为时间集，即取$T=\{0,1,2,\ldots\}$,其中$t=0$称为初始时刻，且其状态集E为简单计，常取作整数集$\{0,\pm 1,\pm 2,\ldots\}$，或正整数的子集$\{0,1,2,\ldots\}$,整数子集$\{i_0,i_1,i_2,\ldots\}$，或有限子集$\{0,1,2,\ldots,n\}$ 等。

此时马氏链$\{X(t),t\in T\}$表示为随机序列

$$\{X(n),n\geqslant 0\}，或 \{X_n,n\geqslant 0\},$$

按照马氏过程的定义1.1，容易得到马氏链的定义.以下将陆续介绍马氏链的定义,马氏链的有限维分布,转移概率,转移概率矩阵,齐次马氏链,概率转移图等等有关马氏链的基本概念.

一、马氏链的定义

1 可列状态与有限状态马氏链

定义2.1 设$\{X(n),n\geq 0\}$为一随机序列，其状态集为$E=\{i_0,i_1,i_2,\ldots\}$，若对于任意的n，及$i_0,i_1,i_2,\ldots i_{n+1}$，对应的随机变量$X(0),X(1),X(2),\ldots,X(n+1)$满足

$$P\{X(n+1)=j\mid X(n)=i_n,X(n-1)=i_{n-1},\cdots,X(1)=i_1,X(0)=i_0\}$$
$$=P\{X(n+1)=j\mid X(n)=i_n)$$

则称此随机序列为一马尔可夫链，简称马氏链。

上式即为马氏性，它表明在$X(0),X(1),X(2),\ldots,X(n)$状态已知的条件下，$X(n+1)$的条件概率与过去状态无关，而仅与$X(n)$所处状态有关。

注 若马氏链的状态空间E为可列集{0,±1, ±2,…}, 或{0,1,2,…},，则称之可列状态的马氏链;

若E ={0,1,2,…,n} 中状态是有限多个，则常称之为有限状态的马氏链。

2 马氏链的有限维概率分布

若{X(n),n≥0} 是一个马尔可夫链，则其n+2维变量(X(0),X(1),X(2),…,X(n+1))的概率分布为

$$P\{X(0)=i_0, X(1)=i_1,\cdots,X(n)=i_n, X(n+1)=i_{n+1}\}$$

$$=P\{X(n+1)=i_{n+1}\mid X(0)=i_0,X(1)=i_1,\cdots,X(n)=i_n\}P\{X(0)=i_0, X(1)=i_1,\cdots,X(n)=i_n\}$$

$$=P\{X(n+1)=i_{n+1}\mid X(n)=i_n\}P\{X(0)=i_0,X(1)=i_1,\cdots,X(n)=i_n\}$$

$$=\cdots$$

$$=P\{X(n+1)=i_{n+1} \mid X(n)=i_n\}P\{X(n)=i_n \mid X(n-1)=i_{n-1}\}\cdots$$

$$P\{X(2)=i_2 \mid X(1)=i_1\}P\{X(1)=i_1 \mid X(0)=i_0\}P\{X(0)=i_0\}$$

$$=p_{i_n i_{n+1}}(n)p_{i_{n-1}i_n}(n-1)\cdots p_{i_1 i_2}(1)p_{i_0 i_1}(0)p_{i_0}(0)$$

其中条件概率 $P\{X(k+1)=j \mid X(k)=i\}=p_{ij}(k)$

称为转移概率, $p_{i_0}=P\{X(0)=i_0\}$称为初始分布

易见,马氏链的有限维分布律是由一些条件分布与初始分布的乘积而得, 因此讨论马氏链的概率特性,将重点讨论马氏链的转移概率与初始分布.

3 马氏链的转移概率

我们称马氏链在时刻k时所处状态i, 而下一步将处于状态j的一步转移概率为

$$P\{X(k+1)=j \mid X(k)=i\}=p_{ij}(k) \qquad k=0,1,2,\cdots$$

即此条件概率表示马氏链在时刻k时取i值的条件下，在下一时刻(下一步)取j值的概率。

它具有下述两个性质：

1) $p_{ij}(k)\ge 0 \qquad \forall\, i,j\in E$

2) $\sum_{j\in E} p_{ij}(k)=1 \qquad \forall i\in E$

第1)条性质是由概率定义所决定的;

第2)条性质利用全概率公式可知其正确性，实际上

$$\forall i\in E,\ \sum_{j\in E} p_{ij}(k)=\sum_{j\in E} P\{X(k+1)=j \mid X(k)=i\}$$

$$=\frac{1}{P\{X(k)=i\}}\sum_{j\in E} P\{X(k+1)=j, X(k)=i\}$$

$$=\frac{1}{P\{X(k)=i\}}P\left\{\bigcup_{j\in E}(\{X(k+1)=j,X(k)=i\})\right\}$$

$$=\frac{1}{P\{X(k)=i\}}P\left\{(\bigcup_{j\in E}\{X(k+1)=j\})\bigcap\{X(n)=i\}\right\}$$

$$=\frac{1}{P\{X(k)=i\}}P\big(S\bigcap\{X(k)=i\}\big)=\frac{P\{X(k)=i\}}{P\{X(k)=i\}}=1$$

上式表明马氏链在时刻k处于状态i的条件下，下一步到达状态集E中之一状态的概率为1.

例2.1 设{X(n),n≥0}是一独立随机变量序列，则它为一马氏过程，若其状态空间E为可列集{0,1,2,...}，或为有限集{0,1,2,...,n},时，它就成为一个马尔可夫链。且其一步转移概率与过去及现在状态都无关，即

$$p_{ij}(k)=P\{X(k+1)=j\,|\,X(k)=i\}=P\{X(k+1)=j\}$$

例2.2 设{X(n),n≥0}为相互独立且同分布随机变量序列，且 $P\{X(0)=i_0\}=1$ ，并令

$$Y(n)=\sum_{k=1}^{n}X(k) \qquad n=0,1,2,\cdots$$

则Y(n)为一独立增量过程，因而也是马氏过程。再若$X(n)$的状态空间E为可列集或有限集时，则此Y(n)就成为马尔可夫链。其一步转移概率为

$$p_{ij}(k)=P(Y(k+1)=j\,|\,Y(k)=i)$$

$$=P(Y(k+1)-Y(k)=j-i\,|\,Y(k)=i)$$

$$=P(X(k+1)=j-i)=P(X(1)=j-i)$$

易见,此概率与绝对时间k无关.

例2.3 试写出可列多次相互独立的打靶试验的一步转移概率。

解：可列多次相互独立的打靶试验定义了一个离散时间，离散状态的随机过程{X(n),n≥1}，对应的试验结果若为“中”与“不中”，记

$$X(n)=\begin{cases}1 & \text{第}n\text{次射击中靶}\\ 0 & \text{否}\end{cases} \qquad n=1,2,\cdots$$

则X(1),X(2),…,X(n)相互独立且同分布，由例2.1知{X(n),n≥1}是有限状态为E={0,1}的马氏链,且其一步转移概率且与过去及现在状态均无关，即

$$p_{ij}(k)=P\{X(k+1)=j\mid X(k)=i\}=P\{X(k+1)=j\}$$

而 $P\{X(k)=1\}=p,(0<p<1) \quad P\{X(k)=0\}=1-p=q,$

故 $p_{ij}(k)=\begin{cases} p & i=0, j=1;\text{或} i=j=1 \\ q & i=j=0;\text{或} i=1, j=0 \end{cases} \quad k=1,2,\cdots$

一般地，若记随机变量

$$X(n)=\begin{cases} 1 & \text{第}n\text{次独立试验事件}A\text{发生} \\ 0 & \text{第}n\text{次独立试验事件}\bar{A}\text{发生} \end{cases}$$

则{X(n),n≥1}为一马氏链，它描述了独立试验序列，即贝努利试验序列的概率特性，其一步转移概率同上所述。

注意上述例子中转移概率$p_{ij}(k)$与绝对时间k无关，这就是所谓的马氏链的齐次性，具有齐次性或时齐性的马氏链是实际中运用最广且最重要的一类马氏链.

二、齐次马氏链

1 齐次马氏链（时齐马氏链）定义

定义2.2 设$\{X(n),n\geqslant 1\}$是一马氏链，状态空间为$E=\{0,1,2,\ldots\}$，若其一步转移概率与马氏链现在所在时刻无关，即满足等式

$$P\{X(k+1)=j \mid X(k)=i\}=p_{ij},\ \forall k\in T$$

则称此马氏链为齐次马氏链（或时齐马氏链），亦称之具有平稳转移概率的马氏链。

不是齐次的马氏链称为非齐次马氏链。

注意：齐次马氏链从i状态转移到j状态的转移概率只与现在所处状态i有关，而与现在所在时刻k，即绝对时间k无关。

例2.4 从1，2，3，4，5，6等6个数中等可能地任意取出一数，取后还原，如此不断地连续取下去，如在前n次中所取得的最大数为j，则称质点在第n步时的位置处于状态j，试问这样的质点运动是否构成马氏链？是否为齐次的？

解： 令$X(n)$=前n次取得的最大数，$n=1,2,\ldots,$则$X(n)$的可能取值为1，2，3，4，5，6，即状态空间$E=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$，，设$X(n)$取值为i，而$X(n+1)$取值为j，且$j \geqslant i \in E$.

因为前$n+1$次取得最大数j,只与前n次所取最大数i有关，即若第$n+1$次取得的数小于i, 则$X(n+1)$仍取i值；若第$n+1$次取得的数大于i时, 则$X(n+1)$就取第$n+1$次所取得的数值,因此$X(n)$为马氏链.

而前n次中所取得的最大数为i 条件下,前$n+1$次中所取得的最大数为j的转移概率为

$$P\{X(n+1)=j\,|\,X(n)=i\}=p_{ij}(n)$$

由实际情况可知，此$X(n+1)$处于状态j=1,2,...,6的概率只与上一时刻所处状态i有关，而与上一时刻为何值，即绝对时间n是无关的，因此$X(n)$是齐次马氏链。即有

$$P\{X(n+1)=j\,|\,X(n)=i\}=p_{ij}$$

而当X(n)=1 ，即前n次均取到数1，则前n+1次的最大数为何，决定于第n+1次的任意抽取，因为是等可能抽取，故第n次等可能的从状态空间E中任意抽取一数，因此可得在X(n)=1的条件下X(n+1)=j的条件概率为

$$p_{1j} = P\{X(n+1) = j \mid X(n) = 1\} = \frac{1}{6}, \quad j = 1, 2, \cdots, 6$$

而又当X(n)=2时，由题意应知条件概率

$$p_{21} = P\{X(n+1) = 1 \mid X(n) = 2\} = 0$$

$$p_{2j} = \frac{1}{6}, \; j = 3, 4, 5, 6$$

而当X(n)=2条件下， X(n+1)=2 ，即表明第n次所取的数小于或等于2，而第n+1次所取的数恰等于2，故其相应概率应为2/6,即p_{22}= 2/6.

如此类推可得

$$p_{ij} = \begin{cases} 0 & j < i \\ j/6 & j = i \\ 1/6 & j > i \end{cases} \qquad i, j = 1, 2, \cdots, 6$$

2 齐次马氏链的转移概率矩阵

若将齐次马氏链的所有一步转移概率

$$P\{X(n+1)=j \mid X(n)=i\}=p_{ij}, \quad i,j=0,1,\cdots$$

表示为矩阵的形式，则有

$$P=\begin{pmatrix} p_{00} & p_{01} & p_{02} & \cdots \\ p_{10} & p_{11} & p_{12} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{i0} & p_{i1} & p_{i2} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}, \quad E=\{0,1,2,\cdots\}$$

则称P为马氏链的一步转移概率矩阵，其中p_{ij}为P的腹元.

由齐次马氏链的一步转移概率的性质1

$$p_{ij}=p_{ij}^{(1)}\geq 0,\quad \forall i,j\in E$$

可知,转移概率矩阵*P*的腹元均大于零.

又由转移概率的性质2 $\sum_{j\in E}p_{ij}=\sum_{j\in E}p_{ij}^{(1)}=1\quad \forall i\in E$

表明,转移概率矩阵*P*的每一行元素数值之和均为1.
易见,一步转移概率矩阵*P*完整的描述了齐次马氏链的的状态之间的一步转移特性,因此讨论齐次马氏链,必须讨论一步转移概率矩阵,它同时也为讨论多步转移特性提供了基础.

续例2.1　若其中马氏链{X(n),n≥1}相互独立且同分布,则它为齐次的，且其一步转移概率与时刻无关，且与现在状态*i*也无关，即

$$p_{ij}=p_j,\ \forall j\in E,\ \sum_{j\in E}p_j=1$$

故它的一步转移概率矩阵为

$$P=\begin{pmatrix} p_{00} & p_{01} & p_{02} & \cdots \\ p_{10} & p_{11} & p_{12} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots \\ p_{i0} & p_{i1} & p_{22} & \cdots \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} p_0 & p_1 & p_2 & \cdots \\ p_0 & p_1 & p_2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots \\ p_0 & p_1 & p_2 & \cdots \end{pmatrix}$$

续例2.3　中马氏链亦是齐次的，因为其一步转移概率矩阵为

$$P=\begin{pmatrix} q & p \\ q & p \end{pmatrix}$$

续例2.4 中中马氏链亦是齐次的,因为其一步转移概率与绝对时间无关,其一步转移矩阵为

$$P=\begin{pmatrix}1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6\\ 0 & 2/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6\\ 0 & 0 & 3/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6\\ 0 & 0 & 0 & 4/6 & 1/6 & 1/6\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5/6 & 1/6\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

例2.5 随机游动模型：设一质点在数轴的整数点上作随机游动，如果某时刻质点位于i，则在下一步质点以概率p运动到i-1，而以概率$q=1-p$运动到i+1，特别地，若p=q=1/2时，这种情形称为对称随机游动。以$X(n)$表示质点在时刻n所处的位置，即状态，则$X(n)$=i时，$X(n+1)$处于何位置仅与$X(n)$=i有关，而与质点在n时刻以前如何到达i无关，且质点在i位置时，它下一步向其它点转移的概率与绝对时间n是无关的，即质点在第k步到达i，而k+1步转移向j点

的概率与质点在第$n(\neq k)$步到达i，而下一步n+1时质点转移向j点的概率是相同的，故此$X(n)$不仅为马氏链，且为齐次的，即为齐次马氏链。这种随机游动的概率特性是由它在边界的行为所决定，常见有下列几种类型:

（1）自由随机游动：此时状态空间为

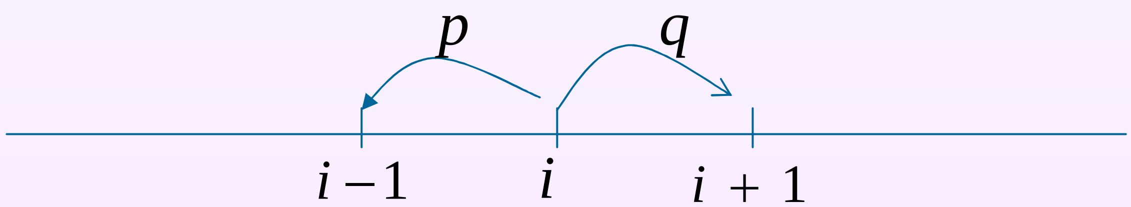
E={0，±1,±2,...}，这种随机游动无边界限制，即没有不可越壁，弹射壁或吸收壁的随机游动。其一步转移概率与矩阵为

$$p_{ij}=\begin{cases} p & j=i-1, \\ q & j=i+1, \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

$$i,j=0,\pm 1,\pm 2,\cdots$$

$$P=\begin{pmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & 0 & p & 0 & q & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \cdots & 0 & 0 & p & 0 & q & 0 & 0 & \cdots \\ & 0 & 0 & 0 & p & 0 & q & 0 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$$

示意图为：

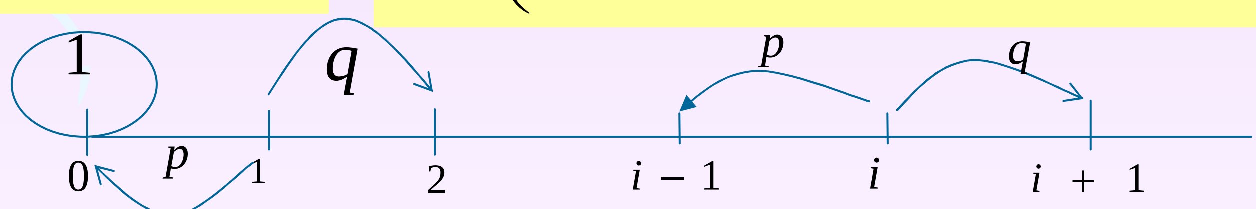


（2）有一个吸收壁（状态0）的随机游动：此时状态空间为E={0,1,2,...}，当质点移动前处于状态0时，则以概率1停留在原点，质点移动前处于其它状态i(≠0)时，移动规则同(1)，则其一步转移概率与矩阵为

$$p_{ij}=\begin{cases}1 & i=j=0\\ p & j=i-1,\ i\geq 1\\ q & j=i+1,\ i\geq 1\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

$$P=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots\\ p & 0 & q & 0 & 0 & \cdots\\ 0 & p & 0 & q & 0 & \cdots\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\end{pmatrix}$$

示意图为：



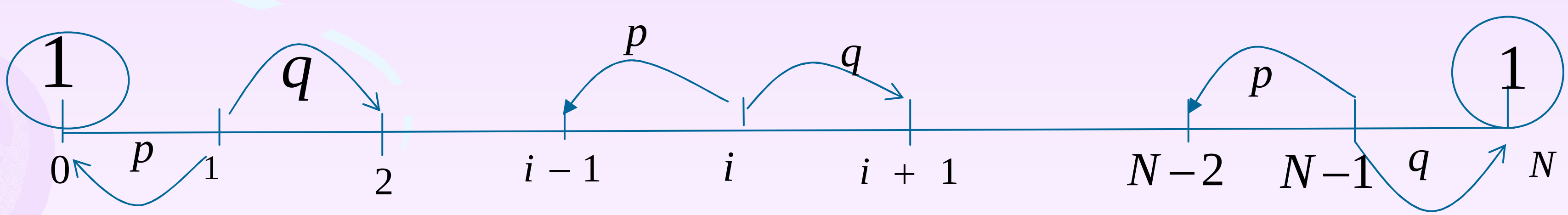
（3）有两个吸收壁的随机游动：此时状态空间为有限集E={0,1,2,…,N}，且质点移动的一步转移概率为

$$p_{ij}=\begin{cases}1 & j=i=0\text{或}N\\ p & j=i-1,1\le i\le N-1\\ q & j=i+1,1\le i\le N-1\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

一步转移矩阵为

$$P=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0&\cdots&0&0&0&0\\ p&0&q&0&0&\cdots&0&0&0&0\\ 0&p&0&q&0&\cdots&0&0&0&0\\ \cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&0&\cdots&\cdots&\cdots\\ 0&0&0&0&0&\cdots&0&p&0&q\\ 0&0&0&0&0&\cdots&0&0&0&1\end{pmatrix}$$

示意图为：



（4）有一个反射壁（状态0）的随机游动：此时状态空间为E＝{0,1,2,…}，

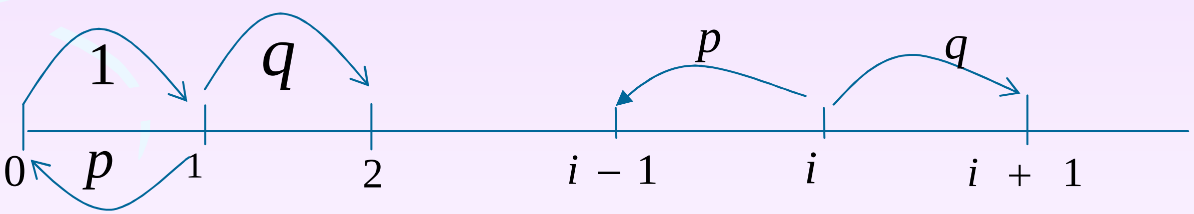
其一步转移概率为

$$p_{ij}=\begin{cases}1 & i=0,\ j=1\\ p & j=i-1,\ i\geq 1\\ q & j=i+1,\ i\geq 1\\ 0 & 其它\end{cases}$$

其一步转移概率矩阵为

$$P=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots\\ p & 0 & q & 0 & 0 & \cdots\\ 0 & p & 0 & q & 0 & \cdots\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\end{pmatrix}$$

示意图为：



（5）有两个反射壁的随机游动：此时状态空间为有限集E={0,1,2,...,N}，

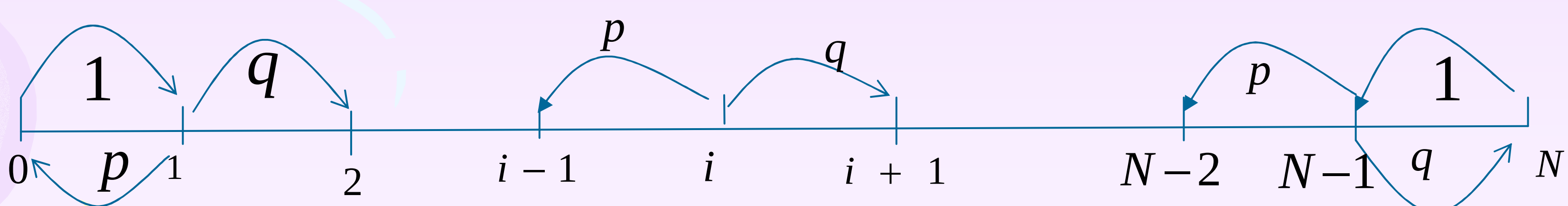
其一步转移概率为

$$p_{ij}=\begin{cases}1 & i=0,j=1\\ 1 & i=N,j=N-1\\ p & j=i-1,1\le i\le N-1\\ q & j=i+1,1\le i\le N-1\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

其一步转移概率矩阵为

$$P=\begin{pmatrix}0&1&0&0&0&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&0\\ p&0&q&0&0&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&0\\ 0&p&0&q&0&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&0\\ \cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\ 0&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&0&p&0&q\\ 0&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&0&0&1&0\end{pmatrix}$$

示意图为



（6）有一个弹射壁（状态0）的随机游动：其状态空间为E={0,1,2,…}，

一步转移概率为

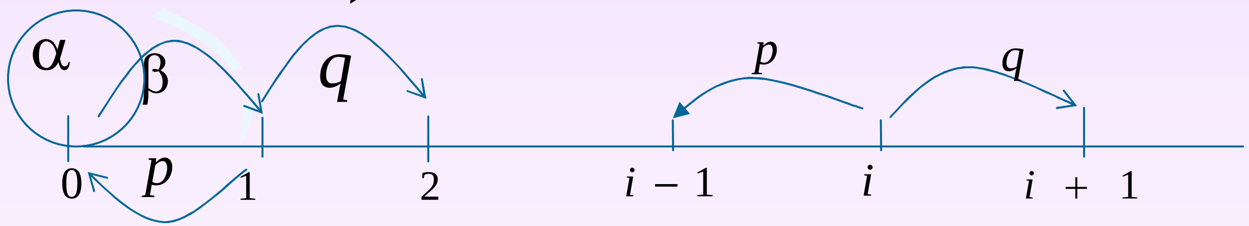
$$p_{ij}=\begin{cases}\alpha & i=j=0\\ \beta & i=0,j=1\\ p & j=i-1,i\geq 1\\ q & j=i+1,i\geq 1\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

$$(\alpha+\beta=1,\ 0<\alpha<1)$$

其一步转移概率矩阵为

$$P=\begin{pmatrix}\alpha & \beta & 0 & 0 & 0 & \cdots\\ p & 0 & q & 0 & 0 & \cdots\\ 0 & p & 0 & q & 0 & \cdots\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\end{pmatrix}$$

示意图为



（7）有两个弹射壁的随机游动：

$E=\{0,1,2,\ldots N\}$，

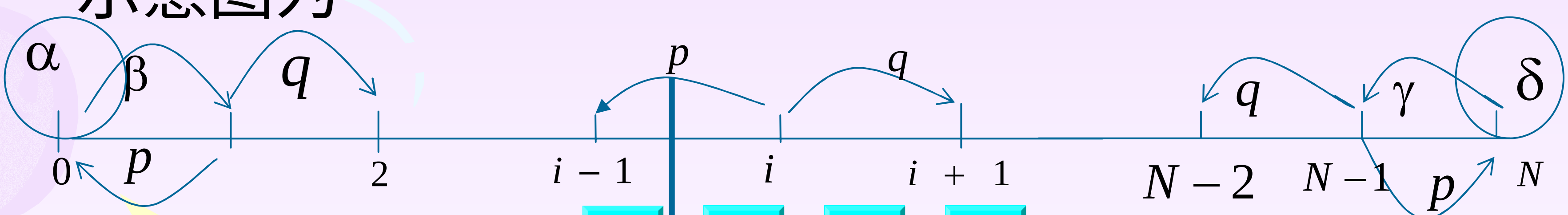
一步转移概率为

$$p_{ij}=\begin{cases}\alpha, & i=0,\ j=0\\ \beta, & i=0,\ j=1\\ p, & j=i-1,\ 1\le i\le N-1\\ q, & j=i+1,\ 1\le i\le N-1\\ \gamma, & i=N,\ j=N-1\\ \delta, & i=N,\ j=N\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

一步转移概率矩阵为

$$\begin{pmatrix} & & 0 & 0 & 0 & & & & & 0\\ p & 0 & q & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0\\ & p & 0\,0 & q & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0\,0 & p & 0 & q\\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & & \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

示意图为



(8) 有反射壁与弹射壁的随机游动:其状态空间为有限集E={0,1,2,...N},

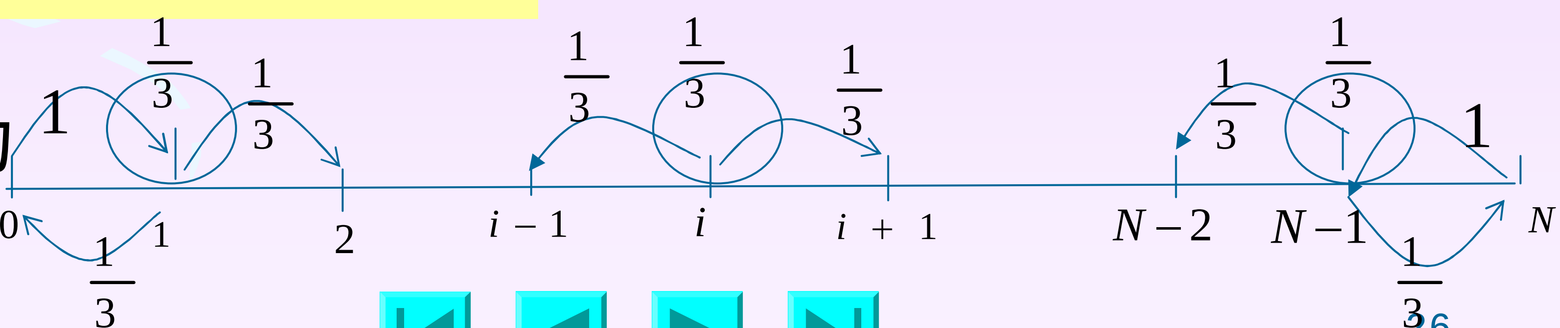
一步转移概率为

$$p_{ij}=\begin{cases}0 & i=j=0,\text{或}i=j=N\\ 1 & i=0,j=1\\ 1/3 & j=i-1,i\ge 1\\ 1/3 & j=i,i\ge 1\\ 1/3 & j=i+1,i\ge 1\\ 1 & i=N,j=N-1\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

一步转移概率矩阵为

$$P=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0\\ 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 & \cdots & \cdots & 0\\ 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 0\\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3\\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

示意图为



三、转移图（状态传递图与概率转移图）

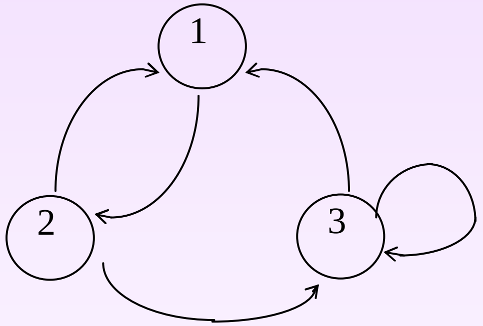
为了能更加直观形象地表现马氏链的状态转移过程及状态转移的概率特性，我们借助于转移图与标明转移概率的概率转移图加以描述。

1　马氏链的状态传递图

若将马氏链所具有的各个状态用数字一一标出，并用标有箭头的连线将各状态连接起来，箭头所指的状态，就是箭尾所连状态一步能到达的状态，这样描绘的图形称为马氏链的状态转移图.

如下状态转移图表示

此马氏链包含1,2,3等3个状态，即其状态空间为E＝{1,2,3}



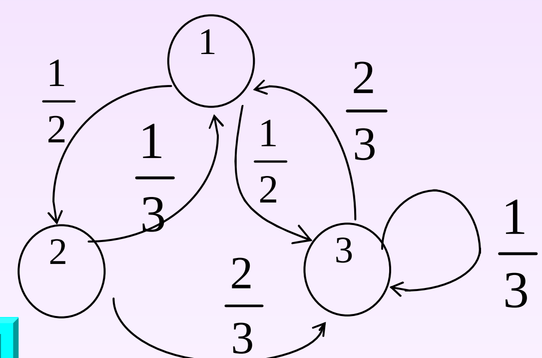
且可看出,从状态1可一步到达状态2，经状态2两步到达状态3，再由状态3可一步返回到状态1；从状态2又可一步到达状态1，也可一步到达状态3；从状态3出发可一步到达状态1，也可经一步又返回到自身的状态的传递特性。

2　马氏链的概率传递图

　　若在马氏链的状态转移图的状态之间的连线上再标出相应的一步转移概率，这样所得的图形称为马氏链的概率转移图.

例如,在上图中状态转移的连线上,添加相应的一步转移概率,即为

$$p_{11} = 0, p_{12} = \frac{1}{2}, p_{13} = \frac{1}{2}$$



$$p_{21}=\frac{1}{3},p_{22}=0,p_{23}=\frac{2}{3}\qquad p_{31}=\frac{2}{3},p_{32}=0,p_{33}=\frac{1}{3}$$

故其一步转移概率矩阵为

$$P=\begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/3 & 0 & 2/3 \\ 2/3 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}$$

由此可看出,若已知马氏链的一步转移概率矩阵,容易画出其概率转移图;若已给出马氏链的概率转移图,容易得出其一步转移概率矩阵.且概率转移图表示马氏链的概率特征比较直观.这给我们研究状态的相通性、可达性、常返性及马氏链的可约性等概念提供了许多方便。

例2.6 试画出例2.3中齐次马氏链的概率转移图。

解：由例2.3知，马氏链{X(n),n≥1}的一步转移概率矩阵为

$$P=\begin{pmatrix} q & p \\ q & p \end{pmatrix}$$

状态空间E={0,1}，包括两个状态，故其概率转移图为