矩阵理论与方法

Chapter 1-An Introduction

Dr.Gongchao Su

College of Electrical and Information Engineering

Shenzhen University

gcsu@szu.edu.cn

Fall 2021

本章概要

1. 矩阵线性代数基础
   - 线性代数是什么
   - 矩阵的运算
   - 线性方程组与线性空间
2. 线性空间与线性变换
   - 线性空间
   - 线性空间的基、维数与坐标
   - 基变换与坐标变换
   - 线性子空间
   - 线性变换

线性代数是什么

引入矩阵求解线性方程组$Ax = b$

Remark

此线性方程组解的存在性取决于系数矩阵A 与增广矩阵(A, b) 的秩相等与否.

Remark

非齐次线性方程组的通解=齐次线性方程组的通解+非齐次线性方程组的一个特解.

线性代数是什么

利用线性方程组来研究矩阵(特征值,特征向量，奇异值等)

Remark

将矩阵化为比较简单的形态.

矩阵的乘法

共轭矩阵与共轭转置矩阵

$A=(a_{ij})\in C^{m\times n}$,将$A$的每个元素取共轭,得到$A$的共轭矩阵,$\overline{A}=(\overline{a_{ij}})_{m\times n}$. 再转置得到共轭转置矩阵$\overline{A}^T=\overline{A^T}$,记为$A^H=\overline{A}^T$.(H代表Hermite).

基本矩阵

E_{ij}:第i行第j列元素为1,其他皆为0的$m\times n$矩阵。任意$m\times n$矩阵均能表示为基本矩阵的线性组合。

Example 1

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}=a_{11}E_{11}+\cdots+a_{mn}E_{mn}=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}E_{ij} \tag{1}$$

矩阵乘法

For $A \in \mathbf{R}^{m\times p}, B \in \mathbf{R}^{p\times n}$, we have

$$
\begin{aligned}
AB &= (\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{p} a_{ij}E_{ij})(\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{n} b_{ij}E_{ij}) \\
&= \sum_{i,j,k,l} a_{ij}b_{kl}E_{ij}E_{kl} = \sum_{i,j,k,l} a_{ij}b_{kl}\delta_{jk}E_{il} (\texttt{Note that } E_{ij}E_{kl} = 0 \texttt{ if } j \neq k) \\
&= \sum_{i=1}^{m}\sum_{l=1}^{n}(\sum_{j=1}^{p} a_{ij}b_{jl})E_{il}
\end{aligned} \tag{2}
$$

矩阵乘法的左行右列规则

即矩阵乘积AB的第i行第j列元素为$\sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj}$.

矩阵乘以列向量

得到的列向量是矩阵各列向量的线性组合.

For $A \in R^{m \times n}$,$x \in R^{n}$,let $A_j = A(:,j)$,

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n \end{pmatrix} \tag{3}$$

$$= x_1A_1 + x_2A_2 + \cdots + x_nA_n$$

矩阵乘法

行向量乘以矩阵

得到的行向量是矩阵各行向量的线性组合.

For $A \in R^{m\times n}$, $y \in R^m$, let $A^j = A(j,:)$,

$$\begin{bmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = y_1 A^1 + y_2 A^2 + \cdots + y_m A^m \tag{4}$$

矩阵乘法

For $A \in \mathbf{R}^{m\times p}, B \in \mathbf{R}^{p\times n}$, let $C = AB$,

$$C_j = AB_j \tag{5}$$

$$C^j = A^j B \tag{6}$$

矩阵乘法的行列结构

C的第j列是A的列向量的线性组合，系数为B的第j列对应元素，C的第j行是B的行向量的线性组合，系数为A的第j行对应元素。

矩阵乘法

Example 2

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & x \\ 0 & y & 0 \\ z & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \tag{7}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ x & y & 0 \\ 0 & 1 & z \end{pmatrix} \tag{8}$$

Use row manipulation and column manipulation.

$AB=0$的意义

$AB=0 \rightarrow AB_j=0 \rightarrow B_j$是线性方程组$Ax=0$的解向量．如果$A$是方阵，$Ax=\lambda x$,显然非零的$B_j$是$\lambda=0$对应的特征向量．$A^iB=0 \rightarrow A^i$是$y^TB=0$的解向量$\rightarrow B^Ty=0$的解向量的转置．

线性方程组

$Ax=b$有解$\Leftrightarrow$ 线性方程组相容，否则不相容（矛盾）．

$Ax=b$有解$\Leftrightarrow$ b是A列向量的线性组合$\Leftrightarrow$ $rank(A,b)=rank(A)$ $\Leftrightarrow$ 增广矩阵的秩与A相同。

$Ax=0$有非零解 $\Leftrightarrow$ A的列向量线性相关；否则线性无关。

方阵的迹

A is square, $tr(A)=\sum_{i=1}^{n} a_{ii}$, sum of diagonal entries.

Theorem 1

Let $A, B \in C^{n\times n}, \lambda \in C$, *we have*

1. $tr(A+B)=tr(A)+tr(B)$;
2. $tr(\lambda A)=\lambda tr(A)$;
3. $tr(AB)=tr(BA)$;
4. $tr(A^T)=tr(A)$;
5. $tr(AA^H)=\sum_{i,j=1}|a_{ij}|^2$;

Proof of (5): $(AA^H)_{ii}=\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|^2$.

秩rank

Definition 1

矩阵A所有不为零的子式的最高阶数称为矩阵的秩，$rank(A)$.

$rank(0) = 0$.

Definition 2

方阵A去掉第i行第j列元素后剩下的n-1阶方阵的行列式称为a_{ij}的余子式M_{ij}.$A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$ 称为a_{ij}对应的代数余子式。

Definition 3

$$\begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{n1} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{1n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix} = adj(A)$$,称为方阵A的伴随矩阵.

Theorem 2

$Aadj(A) = adj(A)A = det(A)I$

Proof.

$$(Aadj(A))_{ii} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij} = det(A)$$

$$(Aadj(A))_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{jk} = 0, \forall i \neq j$$

Thus we conclude $Aadj(A) = det(A)I$ □

秩的性质

Theorem 3

We say $A \in C^{n\times n}$ is invertible if and only if $rank(A) = n$ or A is nonsingular. Let A^{-1} be the inverse of A,

1. $A^{-1} = \frac{1}{det(A)} adj(A), (A^{-1})^{-1} = A$;
2. $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$;
3. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$;
4. *for* $\lambda \in C \neq 0$, *we have* $(\lambda A)^{-1} = \lambda^{-1}A^{-1}$;
5. $det(A^{-1}) = det(A)^{-1}$;
6. *Let* $A \in C^{m\times n}$, $P \in C^{m\times m}, Q \in C^{n\times n}$. *Suppose* P, Q *are invertible. Then*

   $rank(A) = rank(PA) = rank(AQ) = rank(PAQ)$.

秩为1的矩阵

如果矩阵A秩为1，则A的所有列为某列α的线性组合，所有行为某行β^T的线性组合,则

$$
\begin{aligned}
A &= \alpha\beta^T \\
A \in C^{n\times n}, A^2 &= \alpha\beta^T\alpha\beta^T = (\beta^T\alpha)\alpha\beta^T \\
A^m &= (\beta^T\alpha)^{m-1}\alpha\beta^T
\end{aligned}
$$

Note that $\beta^T\alpha$ is a scalar.

秩的不等式

Theorem 4 (inequalities on matrix ranks)

(1)$rank(A+B) \leq rank(A) + rank(B)$

(2)Let $A \in C^{m\times p}, B \in C^{p\times n}$. We have

$rank(A) + rank(B) - p \leq rank(AB) \leq \min\{rank(A), rank(B)\}$.

Proof.

(1) is obvious. To prove (2),recall that each column of AB is a linear combination of A's columns, $rank(AB) \leq rank(A)$.Similarly, each row of AB is a combination of B's rows, $rank(AB) \leq rank(B)$. □

秩的不等式

Proof of (2) continued.

$$rank(A)+rank(B)=rank\left(\begin{pmatrix}A & 0\\ 0 & B\end{pmatrix}\right)\le rank\left(\begin{pmatrix}A & 0\\ E_p & B\end{pmatrix}\right) \text{左半边满秩}$$

$$\begin{pmatrix}E_m & -A\\ 0 & E_p\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A & 0\\ E_p & B\end{pmatrix}\begin{pmatrix}E_p & -B\\ 0 & E_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & -AB\\ E_p & B\end{pmatrix}\begin{pmatrix}E_p & -B\\ 0 & E_n\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}0 & -AB\\ E_p & 0\end{pmatrix}$$

$$rank\left(\begin{pmatrix}A & 0\\ E_p & B\end{pmatrix}\right)=rank\left(\begin{pmatrix}0 & -AB\\ E_p & 0\end{pmatrix}\right)$$
$$=rank(AB)+rank(E_p)$$
$$=rank(AB)+p$$

分块矩阵block matrix

最简单的分块矩阵是分块对角矩阵

$$\begin{pmatrix} A_1 & 0 & \cdots \\ \vdots & A_2 & \vdots \\ 0 & \cdots & A_n \end{pmatrix} = A_1 \oplus A_2 \oplus \cdots \oplus A_n = \sum_{j=1}^{n} A_j$$

称为矩阵的直和.

$$A = A_1 \oplus A_2, B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} A_1 B_{11} & A_1 B_{12} \\ A_2 B_{21} & A_2 B_{22} \end{pmatrix}, BA = \begin{pmatrix} B_{11} A_1 & B_{12} A_2 \\ B_{21} A_1 & B_{22} A_2 \end{pmatrix}$$

齐次线性方程组

齐次线性方程组(System of homogeneous linear equations):

$Ax = 0$

如果线性方程组$Ax = b$有解x_0,则该方程组转为$A(x - x_0) = 0$，因此求解线性方程组的关键在于齐次线性方程组。

Lemma 1（$Ax = 0$的解的结构）

设α,β是$Ax = 0$的两个解向量，$\lambda \in \mathbb{C}$，则

1. $\alpha + \beta$也是$Ax = 0$的解
2. $\lambda\alpha$也是$Ax = 0$的解

线性相关性

Definition 4 (线性相关与线性无关)

设$S=\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s\}$是$\mathbb{C}^n$上的一组向量，如果线性方程组$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_s\alpha_s$只有零解，则向量组$S$是线性无关的，否则$S$是线性相关的。

显然齐次线性方程组的任意解的线性组合都是方程组的解，因此最好能找到能表示所有解的一组向量，这就是极大线性无关组。

极大线性无关组

Definition 5 (极大线性无关组)

设$S=\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s\}$是$\mathbb{C}^n$上的一组向量，其中部分向量组$M=\{\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_r}\}$满足以下条件：

1. M是线性无关的
2. S中的任何向量都可以用M来线性表示

则M是S的一个极大线性无关组。齐次线性方程组$Ax=0$的解集的一个极大线性无关组称为该方程组的基础解系。

Remark

向量组的极大线性无关组可能不是唯一的，但每个极大无关组包含的向量个数相同，称为该向量组的秩。矩阵的行向量组和列向量组的秩称为矩阵的行秩和列秩，它们与矩阵的秩相同。

Theorem 5 (齐次线性方程组的解)

齐次线性方程组$A_{m\times n}x=0$的任何一个基础解系都恰好包含$n-rank(A)$个解向量，它的全体解为

$$x=c_1\alpha_1+c_2\alpha_2+\cdots+c_{n-r}\alpha_{n-r}$$

其中$c_1,c_2,\cdots,c_{n-r}$为常数，$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n-r}$为基础解系。

Theorem 6 (线性方程组的解)

设线性方程组$A_{m\times n}x=b$有解，则它的全体解为

$$x=x_0+c_1\alpha_1+c_2\alpha_2+\cdots+c_{n-r}\alpha_{n-r}$$

其中x_0为它的任意一个解,称为特解,$c_1,c_2,\cdots,c_{n-r}$为常数,
$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n-r}$为基础解系

高斯消元法Gaussian Elimination

高斯消元法利用初等变换来求解线性方程组和矩阵的秩。初等变换可以用以下初等矩阵实现:

1. 重排变换:交换第i行(列)和第j行(列),对应初等矩阵为:$I - E_{ii} - E_{jj}$(第i,j行清零)$+ E_{ij} + E_{ji}$(第j行放到第i行,第i行放到第j行)
2. 第i行(列)乘以非零常数α,对应初等矩阵为:$I + (\alpha - 1)E_{ii}$
3. 第j行(列)的α倍加到第i行(列),对应初等矩阵为:$I + \alpha E_{ij}$

Remark

1. 矩阵行变换:矩阵A左乘初等矩阵P:PA
2. 矩阵列变换:矩阵A右乘初等矩阵Q:AQ

矩阵的标准形Hermite Normal Form

通过高斯消元法将矩阵化为最简形式，即该矩阵的Hermite标准形。

Definition 6 (Hermite标准形)

设$m \times n$阶矩阵H的秩为r并且满足以下条件：

1. 非零行恰为前r行，并且这r行的第一个非零元素(称为该行的先导元素)为1
2. 非零行的先导元素列标随行标严格递增，如第r行的先导元素出现在第j_r列，则$j_1 < j_2 < j_3 \cdots < j_r$
3. 非零行先导元素所在的其他位置元素均为0

注：此时Hermite标准形呈现一种“上三角"形态

Theorem 7

任意矩阵A都可以通过行初等变换化为标准形，且相应的线性方程组同解，即若$H = PA$,则$Ax = b$与$Hx = Pb$ 同解。

矩阵的标准形Hermite Normal Form

Example 3

$$B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \texttt{Hermite?}, \surd$$

$$B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \texttt{Hermite?}, \surd$$

Example 4

求矩阵A的Hermite标准形

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 & 2 & 5 \\ 5 & -3 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & -3 & -5 & 0 & 7 \\ 2 & -2 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Hint:用初等变换，按列处理，先处理第1列，然后处理去掉第一行第一列后子矩阵的第一列，etc.

Solution.

$$A=\begin{pmatrix}3&-1&3&2&5\\5&-3&2&3&4\\1&-3&-5&0&7\\2&-2&-1&1&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}0&8&18&2&26\\0&12&27&3&39\\1&-3&-5&0&7\\0&4&9&1&13\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&-3&-5&0&7\\0&4&9&1&13\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&\frac{7}{4}&\frac{3}{4}&\frac{11}{4}\\0&1&\frac{9}{4}&\frac{1}{4}&\frac{13}{4}\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

□

矩阵的标准形Hermite Normal Form

求解$Ax = b$

1. 将增广矩阵(A, b)化为Hermite标准形
2. 依次令第i个非先导元素列对应的变量$= 1$，其他非先导变量$= 0$，求由$N - r$个向量组成的$Ax = 0$基础解系
3. 令非先导元素的列对应的变量$= 0$，求得$Ax = b$的1个特解
4. $x =$特解 $+$基础解系的任意线性组合

矩阵的标准形Hermite Normal Form

Example 5

求解非齐次线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 0 \\ 5x_1 - x_2 + 11x_3 + 2x_4 = 4 \\ 3x_1 - x_2 - 5x_3 - 3x_4 = 6 \\ x_1 - x_2 + 11x_3 + 7x_4 = -6 \end{cases}$$

Solution:写出增广矩阵

$$(A|b)=\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 3 & 2 & 0\\ 5 & -1 & 11 & 2 & 4\\ 3 & -1 & -5 & -3 & 6\\ 1 & -1 & 11 & 7 & 6 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{-40}{32} & \frac{40}{16}\\ 0 & 1 & 0 & \frac{-99}{32} & \frac{59}{16}\\ 0 & 0 & 1 & \frac{15}{32} & \frac{-7}{16}\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

显然rank(A)=3,只有一个基础解系。考察$PAx=Pb$,增广矩阵标准形:(PA|Pb)

通解:只有一个非先导列第4列，令$x_4=1$,求出$Ax=0$基础解系

$$x_1=\frac{1}{32}\begin{pmatrix}40\\99\\-15\\32\end{pmatrix}$$

令非先导列变量$x_4=0$，得到特解

$$x_0=\frac{1}{16}\begin{pmatrix}40\\59\\-7\\0\end{pmatrix}$$

得到通解

$$x=x_0+cx_1$$

线性空间

Definition 7 (线性空间的定义)

线性空间：设V是非空集合，F是数域（实数域R或复数域C），在V中定义了加法和数乘两种代数运算，如果加法和乘法满足规则，则V是数域F上的线性空间。

加法的规则

给定了一个法则$+$,对于任意$\alpha, \beta \in V$,均存在$\gamma \in V$使得$\alpha + \beta = \gamma$.加法满足一下4条规则：

1. 交换律，$\alpha + \beta = \beta + \alpha$.
2. 结合律,$(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$.
3. 存在零元素$0 \in V$,使得对于任意$\alpha \in V$,$\alpha + 0 = \alpha$.
4. 使得对于任意$\alpha \in V$,都存在一个负元素$\beta \in V$,使得$\alpha + \beta = 0$.

乘法的规则

给定一个“乘法”法则，使得对于任意$\alpha \in V$,任意数$k \in F$,在V中均有一个唯一的元素$\delta \in V$,使得 $\delta = k\alpha = \alpha k$.乘法满足以下规则:

1. 1的数乘:$1\alpha = \alpha$.
2. 结合律：$k(l\alpha) = l(k\alpha)$
3. 数因子分配率:$(k + l)\alpha = l\alpha + k\alpha$
4. 元素分配率：$k(\alpha + \beta) = k\alpha + k\beta$

线性空间

如何验证一个集合构成线性空间

1. 验证集合是否是非空
2. 验证所规定的加法和数乘运算是否封闭
3. 检验8种运算规则是否满足,是否存在零元素与负元素

常见的线性空间

实向量空间($V = R^n, F = R$);复向量空间($V = C^n, F = C$),矩阵空间($V = F^{m\times n}$),按矩阵加法和常见数乘;函数空间

Example 6

1. 全体实上三角形矩阵所构成的集合U，对通常的矩阵加法和数乘，是否构成实数域上的线性空间？ $\surd$
2. 全体二阶方阵
$$\begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & b \end{pmatrix}$$
3. $Ax = b, b \neq 0$的解集合

proof of (2)and (3).

对于(2),任取2个二阶矩阵$A_1, A_2 \in V$,显然V非空,加法是否封闭？$(A_1 + A_2 \in V?)$, $\surd$. 是否满足4条加法规则？ $\surd$.乘法是否封闭？$(kA_1 \in V?)$, $\surd$.是否满足4条乘法规则？ $\surd$.因此构成线性空间.

对于(3),显然加法不封闭(不存在零元素),乘法不封闭$0A_1$.因此不构成

Example 7

设R是实数域，R^+是正实数的全体集合，在R^+中定义元素加法$\oplus$和元素数乘$\circ$。

$$a \oplus b = ab, k \circ a = a^k, a, b \in R^+, k \in R$$

证明R^+按上述加法和乘法运算构成线性空间

Proof: Step 1: 对于$a, b \in R^+, k \in R$,验证封闭性,$a \oplus b = ab \in R^+, k \circ a = a^k \in R^+$.成立.

Step 2: 验证加法4条规则,找到零元素"0","0" $\oplus a = a$?"0" $= 1$;负元素$b \oplus a =$ "0"?$b = \frac{1}{a}$.

$a \oplus b = ab = ba = b \oplus a; (a \oplus b) \oplus c = ab \oplus c = abc = a(bc) = a \oplus (b \oplus c)$

"0" $\oplus a = a; \frac{1}{a} \oplus a =$ "0".同理验证乘法.证明完成.

Example 8

设V是有序实数对的集合$V=\{(a,b)|a,b\in R\}$,规定加法与数乘运算

$$\begin{aligned}(a,b)\oplus(c,d) &= (a+c,b+d), k\circ(a,b)=(ka,b)\\(a,b)\oplus(c,d) &= (a,b), k\circ(a,b)=(ka,kb)\end{aligned}$$

请问以上两个V关于加法与数乘的运算是否构成R上的线性空间。

Solution:显然运算是封闭的，零元素和负元素都存在。那么检查乘法和加法规则 对

于$k\circ(a,b)=(ka,b)$,$k\circ(a,b)\oplus l\circ(a,b)=((k+l)a,2b)\neq(k+l)\oplus(a,b)$.

对于$(a,b)\oplus(c,d)=(a,b)$,显然$(c,d)\oplus(a,b)=(c,d)$,因此两者都不是线性空间.

基、维数与坐标

Definition 8 (线性无关)

在线性空间V中对于向量组$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$,若存在不全为$0$的$m$个数$k_1, k_2, \cdots, k_m$,使得

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_m\alpha_m = 0$$

则向量组$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$线性相关，否则线性无关.

Definition 9 (基,维数,坐标)

令$\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$是线性空间$V$中$n$个线性无关的向量，且$V$中任意向量$\alpha$均满足$\alpha = a_1\xi_1 + \cdots + a_n\xi_n$,则 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$是$V$中的一个基，向量$(a_1, \cdots, a_n)^T$是$\alpha$ 在该基的坐标，基所包含的基向量个数是V的维数，$dim(V) = n$.

Example 9

证明$x^2+x, x^2-x, x+1$是线性空间$P[x]_2$(x次数小于2的全体实系数多项式组成的空间)的一组基，并求出$2x^2+7x+3$在此基底下的坐标。

Solution: 先证明线性无关. $k_1(x^2+x)+k_2(x^2-x)+k_3(x+1)=0 \to (k_1+k_2)x^2+(k_1-k_2+k_3)x+k_3=0$. 显然当且仅当$k_1=k_2=k_3=0$时成立，故线性无关，并

且$k_1+k_2=2, k_1-k_2+k_3=7, k_3=3$. 因此坐标为$(3,-1,3)$

Definition 10 (矩阵的解空间，零空间)

令$A \in C^{m\times n}$,齐次线性方程组Ax=0的所有解(包括0)集合构成了C上的线性空间,称为$Ax=0$的解空间,也称为矩阵A的核空间或者零空间$\mathcal{N}(A)$.

Example 10

求线性方程组的解空间V的维数与基。

$$\begin{aligned} x_1+x_2-3x_3-x_4 &= 0 \\ 3x_1-x_2-3x_3+4x_4 &= 0 \\ x_1+5x_2-9x_3-8x_4 &= 0 \end{aligned}$$

Solution 11

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 & -1 \\ 3 & -1 & -3 & 4 \\ 1 & 5 & -9 & -8 \end{bmatrix}$$

. 显然$Ax = 0$的基础解系是解空间的一组基.因此求解该方程组，按照矩阵标准形转化，得到基础解系

$x^{(1)} = (1.5, 1.5, 1, 0)^T, x^{(2)} = (-3/4, 7/4, 0, 1)^T$,因此维数为$2$.

过渡矩阵

Definition 11

设$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$和$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n$是$n$维线性空间的2个基．这2组基向量之间满足

$$\begin{cases} \beta_1 = a_{11}\alpha_1 + a_{21}\alpha_2 + \cdots + a_{n1}\alpha_n \\ \beta_2 = a_{12}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 + \cdots + a_{n2}\alpha_n \\ \vdots \\ \beta_n = a_{1n}\alpha_1 + a_{2n}\alpha_2 + \cdots + a_{nn}\alpha_n \end{cases}$$

用矩阵方式表达为

$$[\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n] = [\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n]P, P = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

坐标变换

P称为$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$到$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$的过渡矩阵.显然$P$是可逆的.

Lemma 2

令n维线性空间V中的向量α 在2个基$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$和$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$下的坐标分别为$(x_1,\cdots,x_n)^T$和 $(y_1,\cdots,y_n)^T$,则坐标间的变换公式为

$$\begin{aligned}(x_1,\cdots,x_n)^T &= P(y_1,\cdots,y_n)^T\\ (y_1,\cdots,y_n)^T &= P^{-1}(x_1,\cdots,x_n)^T\end{aligned}$$

Proof.

$$\begin{aligned}\alpha=(\xi_1,\cdots,\xi_n)(x_1,\cdots,x_n)^T &= (\beta_1,\cdots,\beta_n)P^{-1}(x_1,\cdots,x_n)^T\\ &= (\beta_1,\cdots,\beta_n)(y_1,\cdots,y_n)^T\end{aligned}$$

坐标变换

Example 12

在R^4上有2组基a, b.

$$\begin{aligned} a_1 &= (1,0,0,0), & a_2 &= (0,1,0,0), a_3 = (0,0,1,0), a_4 &&= (0,0,0,1) \\ b_1 &= (2,1,-1,1), & b_2 &= (0,3,1,0), b_3 = (5,3,2,1), b_4 &&= (6,6,1,3) \end{aligned}$$

1. 求从a到b的基过渡矩阵
2. 向量在基a下的坐标为(c_1, c_2, c_3, c_4),求其在基b下的坐标
3. 求在两组基中有相同坐标的非零向量

Solution 13

(1)求过渡矩阵，两种方法

1. 直接有定义出发,求解系数对应的线性方程组，得到P
2. $A = I$,是单位阵，显然$B = AP, P = B$

(2)坐标变换,$(y_1, y_2, y_3, y_4) = P^{-1}(c_1, c_2, c_3, c_4)$. P^{-1}可以用增广矩阵初等变换求$(P|I) \to (I|P^{-1})$

(3)坐标相同,$x = y \to x = P^{-1}x \to (I - P^{-1})x = 0 \to$ 求解该线性方程组得到坐标x,进而得到向量$z = Ax$.

Example 14 (中介基法找过渡矩阵)

已知矩阵向量空间$R^{2\times 2}$中的2个

基$S=(A_1,A_2,A_3,A_4), S^*=(B_1,B_2,B_3,B_4)$

$$A_1=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}, A_2=\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}, A_3=\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}, A_4=\begin{bmatrix}0&1\\-1&0\end{bmatrix}$$

$$B_1=\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix}, B_2=\begin{bmatrix}1&1\\1&0\end{bmatrix}, B_3=\begin{bmatrix}1&1\\0&0\end{bmatrix}, B_4=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}$$

求S到S^*的过渡矩阵.

Solution 15

采用中介基法,*Step 1*:找一个简单基

$$E_1=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix},E_2=\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix},E_3=\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix},E_4=\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}$$

求基*1*和基*2*到简单基的过渡矩阵P_1和P_2.显然$P_1,P_2\in R^{4\times4}$.

$$(A_1,A_2,A_3,A_4)=(E_1,E_2,E_3,E_4)P_1,(B_1,B_2,B_3,B_4)=(E_1,E_2,E_3,E_4)P_2$$

不难看出P_1第一列正好是A_1各行元素串成的列向量, 以此类推.因此

$$P_1=\begin{bmatrix}1&1&0&0\\0&0&1&1\\0&0&1&-1\\1&-1&0&0\end{bmatrix},P_2=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&0\\1&1&0&0\\1&0&0&0\end{bmatrix}$$

$(B_1,B_2,B_3,B_4)=(E_1,E_2,E_3,E_4)P_2=(A_1,A_2,A_3,A_4)P_1^{-1}P_2$ 过渡矩阵为$P_1^{-1}P_2$

坐标变换

Example 16

设$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$是3维线性空间$V$中的一个基,已知

$$\begin{aligned}\beta_1 &= -\alpha_1+\alpha_3\\ \beta_2 &= \alpha_1+\alpha_2\\ \beta_3 &= -\alpha_1-\alpha_2+\alpha_3\end{aligned}$$

1. 证明β_1,β_2,β_3也是V中的一个基
2. 求β_1,β_2,β_3到$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$的过渡矩阵
3. 求向量$\eta=\alpha_1+2\alpha_2+4\alpha_3$在$\beta_1,\beta_2,\beta_3$下的坐标

Solution 17

容易得到$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$到$\beta_1,\beta_2,\beta_3$的变换矩阵

$$(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)P=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{bmatrix}-1 & 1 & -1\\ 0 & 1 & -1\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

P可逆,因此β_1,β_2,β_3线性无关，是一组基.β_1,β_2,β_3到$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$的过渡矩阵为$P^{-1}$

$$P^{-1}=\begin{bmatrix}-1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & -1 & 1\end{bmatrix},\eta=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{bmatrix}1\\ 2\\ 4\end{bmatrix}=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)P^{-1}\begin{bmatrix}1\\ 2\\ 4\end{bmatrix}$$

线性子空间

Definition 12 (线性子空间)

设U是数域F上的n维线性空间V的一个非空子集,若对于U中的任意元素α, β以及F中的任意数k，满足

$$\alpha + \beta \in U$$

$$k\alpha \in U$$

则U构成数域F上的一个线性空间.称为U是V上的一个线性子空间.并且线性子空间的维数U不超过V的维数.$dim(U) \leq dim(V)$.

线性子空间

V中的任意S个向量的线性组合$U = \{k_1\alpha_1 + \cdots + k_s\alpha_s\}$是V中的线性子空间.也称为由该向量组生成的子空间.

$$U = L(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s) = span\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s\}$$

Lemma 3

$dim(L(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s)) = dim(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s)$

Definition 13 (矩阵的零空间与值空间)

设$A \in C^{m\times n}$.齐次线性方程组$Ax=0$的所有解构成的线性空间称为A的核空间或者零空间$\mathcal{N}(A)$(或者写成$null(A)$).Ax确定的所有m维向量 称为A的值空间$R(A)$(或者写成$range(A)$).即

$$\mathcal{N}(A)=\{x|Ax=0,x\in C^n\},R(A)=\{y|y=Ax,y\in C^m\}$$

Lemma 4

$dim(R(A))+dim(\mathcal{N}(A))=n, dim(R(A))=rank(A)$

Lemma 5 (维数公式)

设U_1,U_2是V中的2个线性子空间.定义它们的交空间$U_1\cap U_2=\{\alpha|\alpha\in U_1,\alpha\in U_2\}$，和空间$U_1+U_2=\{\gamma|\gamma=\alpha+\beta,\alpha\in U_1,\beta\in U_2\}$.显然它们都是$V$的线性子空间,并且

$$dim(U_1\cap U_2)+dim(U_1+U_2)=dim(U_1)+dim(U_2)$$

Proof:见教材P10.

Definition 14 (子空间直和与互补)

设U_1,U_2是V中的2个线性子空间.若$U_1\cap U_2=0$,则U_1+U_2称为直和,$U_1\oplus U_2$.若此时再满足 $U_1\oplus U_2=V$,则称为V上的一对互补空间.

Example 18

设$\alpha_1=(1,2,1,0)^T,\alpha_2=(-1,1,1,1)^T,\beta_1=(2,-1,0,1)^T,\beta_2=(1,-1,3,7)^T$. $V_1=span\{\alpha_1,\alpha_2\}$，$V_2=span\{\beta_1,\beta_2\}$.求

1. V_1+V_2的基和维数
2. $V_1\cap V_2$的基和维数

Solution: (1) $V_1+V_2=span\{\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2\}$.(定理1.2.5).再确定该向量组的极大无关组.观察标准型

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

则$\alpha_1, \alpha_2, \beta_1$是一组基，维数为3． (2)由维数公式知道$dim(V_1 \cap V_2) = 2 + 2 - 3 = 1$.并且$V_1 \cap V_2$的基$\alpha$必定可以由$V_1$的基张开,也可以由$V_2$的基张开,因此

$$\alpha = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 = k_3\beta_1 + k_4\beta_2 \rightarrow k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 - k_3\beta_1 - k_4\beta_2 = 0$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & -7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \\ k_4 \end{bmatrix} = 0$$

求解得到$\alpha = (-5, 2, 3, 4)^T$.

Example 19

求由向量α 生成的子空间和β 生成的子空间的和以及交的基和维数。

$$\alpha_1=(1,2,-1,-2)^T,\alpha_2=(3,1,1,1)^T,\alpha_3=(-1,0,1,-1)^T$$
$$\beta_1=(2,5,-6,-5)^T,\beta_2=(-1,2,-7,3)^T$$

Solution:对于子空间和的基,不难证明$\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1,\beta_2\}$的极大无关组为$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_2$. 维数为4, 对于子空间交的基,求解$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_4-k_4\beta_1-k_5\beta_2=0$,得到基础解系$(3,-1,-2,1,0)^T$,进而$\alpha=-\beta_1$

线性子空间

Example 20

设U_1和U_2分别是下面2个R上的齐次线性方程组的解空间

$$(1)x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0(2)x_1 = x_2 = \cdots = x_n$$

证明$U_1 \oplus U_2 = R^n$

Solution: 2个方程组的系数矩阵

$$A_1^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots \\ 1 & 0 & -1 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 0 & \cdots & -1 \end{bmatrix}$$

$rank(A_1) = 1, rank(A_2) = n - 1$.求出基础解系作为基,可以得知$U_1 + U_2 = R^n, dim(U_1 + U_2) = n$,又因为$dim(U_1) = n - 1, dim(U_2) = 1$, 因此$dim(U_1 \cap U_2) = 0$.是直和.

线性变换

Definition 15 (线性变换)

设V与W是2个线性空间,若一个从V到W的变换$T: V \to W$具有以下性质

$$T(\alpha+\beta) = T(\alpha) + T(\beta), \alpha, \beta \in V$$
$$T(k\alpha) = kT(\alpha), \alpha \in V, k \in F$$

则称T是从V到W的一个线性变换.

有以下简单性质

1. $T(0) = 0$, $T(-\alpha) = -T(\alpha)$
2. $\beta = k_1\alpha_1 + \cdots + k_m\alpha_m \to T(\beta) = k_1 T(\alpha_1) + \cdots + k_m T(\alpha_m)$
3. $\alpha_1, \cdots, \alpha_m$线性相关$\to$ $T(\alpha_1), \cdots, T(\alpha_m)$线性相关

Definition 16 (线性变换的运算)

设T_1, T_2, T是线性空间V中的线性变换,$k \in F$,则

1. $T_1(\alpha) = T_2(\alpha), \forall\alpha \in V. \rightarrow T_1 = T_2$
2. $T_1(\alpha) + T_2(\alpha) = T(\alpha), \forall\alpha \in V. \rightarrow T = T_1 + T_2$
3. $T(\alpha) = k(T_1(\alpha)), \forall\alpha \in V. \rightarrow T = kT_1$
4. $(-T)(\alpha) = -T(\alpha), \forall\alpha \in V. \rightarrow -T$为负变换
5. $T(\alpha) = T_1(T_2(\alpha)), \forall\alpha \in V. \rightarrow T = T_1T_2$,积
6. $T_1T_2(\alpha) = T_2T_1(\alpha) = I(\alpha), \forall\alpha \in V. \rightarrow T_1^{-1} = T_2$,互逆

Example 21

已知$x=(x_1,x_2)$,证明$T_1(x)=(x_2,-x_1)$和$T_2(x)=(x_1,-x_2)$是2个线性变换,并求T_1+T_2, T_1T_2, T_2T_1.

Proof.

按照定义来证明. $T_1(kx)=(kx_2,-kx_1)=kT_1(x)$.

$T_1(x+y)=T_1(\{x_1+y_1,x_2+y_2\})=(x_2+y_2,-x_1-y_1)=(x_2,-x_1)+(y_2,-y_1)=$

同理证明T_2

$$(T_1+T_2)(x)=T_1(x)+T_2(x)=(x_2+x_1,x_1-x_2)$$

$$T_1T_2(x)=T_1((x_1,-x_2))=(-x_2,-x_1)$$

$$T_2T_1(x)=T_2((x_2,-x_1))=(x_2,x_1)\neq T_1T_2(x)$$

Definition 17

设T是n维线性空间V的一个变换,$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$是$V$的一个基.并满足

$$\begin{aligned}
T(\alpha_1) &= a_{11}\alpha_1 + a_{21}\alpha_2 + \cdots + a_{n1}\alpha_n \\
T(\alpha_2) &= a_{12}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 + \cdots + a_{n2}\alpha_n \\
&\cdots \\
T(\alpha_n) &= a_{1n}\alpha_1 + a_{2n}\alpha_2 + \cdots + a_{nn}\alpha_{nn}
\end{aligned}$$

$$T(\alpha_1,\cdots,\alpha_n) = (T(\alpha_1),\cdots,T(\alpha_n)) = (\alpha_1,\cdots,\alpha_n)A$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots\cdots & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

A称为线性变换T在基$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$下的矩阵

Lemma 6

设A和B分别是T_1, T_2在基$\xi_1, \cdots, \xi_n$下的矩阵,则在这个基下

1. $T_1 + T_2$的矩阵是$A + B$
2. kT_1的矩阵是kA
3. $T_1 T_2$的矩阵是AB
4. 若T_1可逆,则T_1^{-1}的矩阵是A^{-1}

Lemma 7 ((教材P16.lemma 1.3.2))

设向量α及其像$T(\alpha)$在基$\xi_1, \cdots, \xi_n$下的坐标分别为$(x_1, \cdots, x_n)$,$(y_1, \cdots, y_n)$,则

$$(y_1, \cdots, y_n)^T = A(x_1, \cdots, x_n)^T$$

Example 22

在二次多项式的线性空间$P[x]_2$中，线性变换T在基$\alpha = (1, x, x^2)$下的矩阵为

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

求$g = 2 + 4x - 7x^2$的像和坐标

Solution:原坐标$(2, 4, -7)^T$，因此新坐标$A(2, 4, -7)^T = (-1, -3, -7)^T$，像

$T(g) = (1, 1, x^2)(-1, -3, -7)^T = -1 - 3x - 7x^2$

Lemma 8 (定理1.3.3)

设线性变换T在线性空间V中的2个基$\xi = \{\xi_1, \cdots, \xi_n\}$和$\beta = \{\beta_1, \cdots, \beta_n\}$下的矩阵分别为$A$和$B$.$\xi$到$\beta$的过渡矩阵为$P$. 则$B = P^{-1}AP$.

Proof.

令向量z在这个基下的坐标分别为x和y.

$$z = \xi x = \beta y \to T(z) = T(\xi)x = T(\beta)y \to \xi Ax = \beta By$$

$$\because x = Py, \xi = \beta P^{-1}, \therefore \xi APy = \beta By \to \beta P^{-1}APy = \beta By \to B = P^{-1}AP$$

$\square$

Example 23

设R^3上的变换

$$T(x,y,z)=\begin{bmatrix} x+y+z \\ 2x-y+z \\ y-z \end{bmatrix}$$

1. 求T在基$\xi_1=(1,0,0),\xi_2=(0,1,0),\xi_3=(0,0,1)$下的矩阵$A$
2. 求T在基$\beta_1=(1,1,1),\beta_2=(1,-1,2),\beta_3=(0,1,1)$下的矩阵$B$

(1)$T(\xi_1,\xi_2,\xi_3)=(T(\xi_1),T(\xi_2),T(\xi_3))=(\xi_1,\xi_2,\xi_3)A$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}A$$

(2)方法一:同(1).

$$T(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=(T(\beta_1),T(\beta_2),T(\beta_3))=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)B$$
$$\begin{bmatrix}3&2&2\\2&5&0\\0&-3&0\end{bmatrix}=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)B.$$

方法二:

$$B=P^{-1}AP,(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=(\xi_1,\xi_2,\xi_3)P,$$
$$P=\begin{bmatrix}1&1&0\\1&-1&1\\1&2&1\end{bmatrix}$$

既然线性变换用矩阵来表达,那么线性变换也有值域和零域(核)

Definition 18

T是n维线性空间V中的线性变换,T的所有像组成的集合称为值域$R(T)$,被T变换成零向量的向量构成的集合称为零域$\mathcal{N}(T)$

$$R(T) = TV = \{\beta | \beta = T(\alpha), \alpha \in V\}$$

$$\mathcal{N}(T) = \{\alpha | T(\alpha) = 0, \alpha \in V\}$$

Lemma 9

$dim(R(T)) + dim(\mathcal{N}(T)) = n$

Example 24

设T为实数域R上的4次多项式线性空间$P[x]_4$上的线性变换,其中$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$在$T$下的像为

$$T(f(x)) = (a_0 - a_1) + (a_1 - a_2)x + (a_2 - a_3)x^2 + (a_3 - a_0)x^3$$

求$R(T)$与$N(T)$的基与维数

Solution:考虑$P[x]_4$的简单基,找到T的变换矩阵.$P[x]_4$的简单基$\xi = (1, x, x^2, x^3)$,则

$$T(\xi) = (1 - x^3, x - 1, x^2 - x, x^3 - x^2) = \xi \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \xi A$$

不变子空间

$rank(A) = 3 = dim(R(A)) = dim(R(T))$,

$dim(\mathcal{N}(T)) = 4 - dim(R(T)) = 1$, $R(T)$的基为$1 - x^3, x - 1, x^2 - x$

$Ax = 0 \rightarrow$ 基础解系$\gamma = (1,1,1,1)$, $\mathcal{N}(T)$基$1 + x + x^2 + x^3$

Definition 19 (不变子空间)

设T是线性空间V中的线性变换,W是V的子空间,如果对于$\forall \xi \in W$,均有$T(\xi) \in W$,则子空间W是线性变换T的不变子空间.

Lemma 10

$R(T)$和$\mathcal{N}(T)$都是T上的不变子空间

Proof: $\xi \in R(T) \rightarrow T(\xi) \in R(T); \beta \in \mathcal{N}(T) \rightarrow T(\beta) = 0 \in \mathcal{N}(T)$

Definition 20 (欧式空间Euclidean Space)

设V是实数域R上的线性空间,$\forall \alpha, \beta \in V, \exists c = (\alpha, \beta) \in R$,并满足

1. $(\alpha, \beta) = (\beta, \alpha)$
2. $(k\alpha, \beta) = k(\alpha, \beta), k \in R$
3. $(\alpha + \beta, \gamma) = (\alpha, \gamma) + (\beta, \gamma)$
4. $(\alpha, \alpha) \geq 0.$ *and* $(\alpha, \alpha) = 0$ *if and only if* $\alpha = 0$

(α, β)称为向量α和β的内积.定义在内积上的实线性空间称为欧式空间(*Euclidean Space*)

Example 25

对于n维线性空间R^n,$\alpha = (a_1, \cdots, a_n)$,$\beta = (b_1, \cdots, b_n)$,定义内积$(\alpha, \beta) = a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n$,定义在此内积上的$R^n$ 是欧氏空间

Example 26

$C[a, b]$为$[a, b]$区间上由全体实函数组成的线性空间,对于$f(x), g(x) \in C[a, b]$,定义内积$[f(x), g(x)] = \int_a^b f(x)g(x)dx$, $C[a, b]$为欧氏空间

Example 27

$A, B \in R^{n\times n}$, $A = \{a_{ij}\}, B = \{b_{ij}\}$,定义内积$(A, B) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}b_{ij} = tr(AB^T)$,则此线性空间$R^{n\times n}$为欧氏空间

Proof:

1. $(A, B) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}b_{ij} = \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}a_{ij} = tr(BA^T) = (B, A)$
2. $(kA, B) = tr(kAB^T) = ktr(AB^T) = k(A, B)$
3. $(A + B, C) = \sum_{i,j=1}^{n}(a_{ij} + b_{ij})c_{ij} = tr(AC^T + BC^T) = (A, C) + (B, C)$
4. $(A, A) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^2 \geq 0$, $(A, A) = 0$ if and only if $A = 0$

Definition 21 (度量矩阵)

设$\xi_1, \cdots, \xi_n$是n维欧氏空间V的一组基,$\alpha, \beta \in V$,并

且$\alpha = x_1\xi_1 + \cdots + x_n\xi_n$,$\beta = y_1\xi_1 + \cdots + y_n\xi_n$,则

$$(\alpha, \beta) = (\sum_{i=1}^{n} x_i\xi_i, \sum_{j=1}^{n} y_j\xi_j) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i y_j(\xi_i, \xi_j)$$

令$a_{ij} = (\xi_i, \xi_j) = a_{ji}, A = \{a_{ij}\}$,则

$$(\alpha, \beta) = x^T Ay, A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

A称为基ξ的度量矩阵

正定矩阵

Definition 22 (正定,半正定,负定,半负定矩阵)

$A \in R^{n \times n}$.若$\forall x \neq 0 \in R^n, x^T Ax > 0 \rightarrow A$是正定矩阵(*positive definite*). $x^T Ax \geq 0 \rightarrow A$半正定(*positive semidefinite*),同理定义负定和半负定

Lemma 11

度量矩阵是正定矩阵.

度量矩阵

Lemma 12

α,β是n维欧氏空间V的两组基，度量矩阵分别为A,B，若α到β的过渡矩阵为P，则 $B=P^TAP$.

Proof.

取V中两个向

量$z_1,z2$.$\rightarrow z_1=\alpha x_1=\beta y_1, z_2=\alpha x_2=\beta y_2, x_1=Py_1, x_2=Py_2$

$\rightarrow (z_1,z_2)=x_1^TAx_2=y_1^TP^TAPy_1=y_1^TBy_1\rightarrow B=P^TAP$ □

欧氏空间向量

Definition 23 (长度与夹角)

设α为n维欧氏空间V中的任意向量,则

1. $\|\alpha\| = \sqrt{(\alpha, \alpha)}$,称为向量的长度
2. $\forall \alpha, \beta \in V, \theta = \arccos \frac{(\alpha,\beta)}{\|\alpha\|\|\beta\|}$,称为两个向量的夹角

Definition 24 (正交)

设$\xi_1, \cdots, \xi_n$是V中的一组基.若$(\xi_i, \xi_j) = 0, \forall i \neq j$,则该向量组为正交向量组.由正交向量组组成的基为正交基,若正交基满足 $(\xi_i, \xi_i) = 1$,则称为V的一组标准正交基.

求解标准正交基的步骤:(1)找到正交基 (2)再单位化成标准正交基.

Lemma 13 (Schmidt施密特正交法)

设$\alpha_1,\cdots,\alpha_n$是欧氏空间V中的一组线性无关的向量,则正交基β 满足

$$\begin{aligned}
\beta_1 &= \alpha_1 \\
\beta_2 &= \alpha_2 - \frac{(\beta_1,\alpha_2)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1 \\
&\cdots \\
\beta_n &= \alpha_n - \frac{(\beta_1,\alpha_n)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1 - \cdots - \frac{(\beta_{n-1},\alpha_n)}{(\beta_{n-1},\beta_{n-1})}\beta_{n-1}
\end{aligned}$$

单位化 $\beta_i' = \frac{\beta_i}{\|\beta_i\|}$

正交基

Example 28

设V是2维欧氏空间，一个基为$\xi_1=(1,0),\xi_2=(1,-1)$，若按照某种内积定义的该基的度量矩阵$A=\begin{bmatrix}2 & 2\\ 2 & 5\end{bmatrix}$，求由$\xi$得到的标准正交基.

Solution:由度量矩阵

知$(\xi_1,\xi_1)=2,(\xi_1,\xi_2)=2,(\xi_2,\xi_2)=5$.用Schmidt正交法求解再单位化.

$$\alpha_1=\xi_1=(1,0)\to\beta_1=\frac{\alpha_1}{\|\alpha_1\|}=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0)$$

$$\alpha_2=\xi_2-\xi_1=(0,-1)\to(\alpha_2,\alpha_2)=(\xi_2-\xi_1,\xi_2-\xi_1)=3\to$$

$$\beta_2=\frac{1}{\sqrt{3}}(0,-1)$$

标准正交基

Lemma 14 (标准正交基下的向量内积)

在标准正交基$\eta_1, \cdots, \eta_n$下,向量α, β的内积

$$\alpha = x_1\eta_1 + \cdots + x_n\eta_n$$

$$\beta = y_1\eta_1 + \cdots + y_n\eta_n$$

$$(\alpha, \beta) = x_1y_1 + \cdots + x_ny_n$$

Lemma 15 (标准正交基的矩阵)

设$\xi_1, \cdots, \xi_n$和$\eta_1, \cdots, \eta_n$是两组标准正交基,则ξ到η的过渡矩阵A为正交矩阵,即$A^TA = AA^T = I$.

Proof:$\eta = \xi A \to I = \eta^T\eta = A^T\xi^T\xi A = A^TA$

酉空间

Definition 25 (酉空间)

定义了内积之后的复线性空间称为酉空间,其中内积交换律满足$(\alpha,\beta)=\overline{(\beta,\alpha)}$

Definition 26 (酉矩阵)

$A\in C^{n\times n}$, 若$A^HA=AA^H=I$,则A称为酉矩阵;若$A^H=A$,则称为*Hermite*矩阵,若$A^H=-A$,则称为反*Hermite*矩阵.

Lemma 16

设$\xi_1,\cdots,\xi_n$和$\eta_1,\cdots,\eta_n$是酉空间两组标准正交基,则ξ到η的过渡矩阵A为酉矩阵,即$A^HA=AA^H=I$.

酉空间正交基同样用Schmidt正交法求.

Example 29

3维复空间C^3一组基$\xi_1=(1,0,-i),\xi_2=(0,1,0),\xi_3=(2+i,0,1)$,求标准正交基

Solution: $\beta_1=\xi_1,\beta_2=\xi_2$,$\beta_3=\xi_3-\frac{2+2i}{2}\xi_1-0\xi_2$. 内积$(\beta_1,\beta_1)=\sqrt{2},(\beta_2,\beta_2)=1,(\beta_3,\beta_3)=\sqrt{2}$.单位化即可.

本章总结

验证一个变换是否是线性变换

求线性变换在一个基下的矩阵

求线性变换的像在一个基下的坐标

求线性变换T的值域和核的基

判断定义的内积是否构成欧氏空间

度量矩阵：基于向量坐标的内积计算

欧氏空间中向量的长度和夹角

施密特标准正交化

正交矩阵和性质

酉空间和酉矩阵