§6.4 马氏链的遍历性与平稳分布

- 一 齐次马氏链的遍历性
- 二 齐次马氏链的平稳分布

返回

我们注意到，齐次马氏链的n步转移概率当n趋于无穷时,即过程的转移无限进行下去时,其极限可能存在，而且也可能与起始状态i无关，例如只有两个状态的马氏链，其一步转移概率矩阵为

$$P=\begin{pmatrix} p & q \\ p & q \end{pmatrix}$$

易知其任意步转移概率矩阵为 $P^{(n)}=P=\begin{pmatrix} p & q \\ p & q \end{pmatrix} \xrightarrow{n\to\infty} P=\begin{pmatrix} p & q \\ p & q \end{pmatrix}$

即$\lim p_{ij}^{(n)}=p_{ij}$存在。

又如一齐次马氏链，状态空间为E={1,2,3}，其一步转移概率矩阵,二步,三步转移概率矩阵...为

$$P=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4}\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\quad P^{(2)}=\begin{pmatrix}\frac{1}{4} & \frac{3}{8} & \frac{3}{8}\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix},P^{(3)}=\begin{pmatrix}\frac{1}{16} & \frac{15}{32} & \frac{15}{32}\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix},\cdots$$

于是由此可推测 $\lim\limits_{n\to\infty}P^{(n)}=\begin{pmatrix}0 & 1/2 & 1/2\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$

因此,一般来说，通常讨论关于齐次马氏链的n步转移概率的两方面问题，一是其极限是否存在？二是如果此极限存在，那么它是否与现在所处状态i无关，在马氏链理论中，有关这两方面问题的定理，统称为遍历性定理。

一 齐次马氏链的遍历性

定义4.1 设齐次马氏链的状态空间为E={1,2,…}，若对于E中所有的状态 *i,j*，存在不依赖于*i*的常数 π_j，为其转移概率的极限，即

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = \pi_j, \quad i,j \in E}$$

其相应的转移矩阵有

$$P^{(n)} = P^n = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1j} & \cdots \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2j} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{i1} & p_{22} & \cdots & p_{ij} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix} \xrightarrow{n\to\infty} \begin{pmatrix} \pi_1 & \pi_2 & \cdots & \pi_j & \cdots \\ \pi_1 & \pi_2 & \cdots & \pi_j & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \pi_1 & \pi_2 & \cdots & \pi_j & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$$

则称此齐次马氏链具有遍历性，并称 π_j为状态*j*的稳态概率。

定理4.1 设齐次马氏链{X(n),n≥1}的状态空间为E={1,2,…}，若存在正整数*m*，使对任意的i,j∈E，其*m*步转移概率均大于0, 即

$$p_{ij}^{(m)} > 0 \qquad i, j \in E$$

则此马氏链具有遍历性；且各状态的稳态概率满足下列方程组

$$\pi_j = \sum_{i=1}^{N} \pi_i p_{ij} \qquad j = 1,2,\cdots N$$

及概率分布条件

i) $\pi_j > 0 \qquad j = 1,2,\cdots N$

ii) $\sum_{j=1}^{N} \pi_j = 1$

注1　判断马氏链的遍历性有很多方法,本定理只是其中一个较为简单的方法.

注2　本定理不仅给出了判断马氏链的遍历性的方法,也给出了求其稳态概率的方法.

例**4.1**　设齐次马氏链的状态空间E={1,2,3}，其一步转移概率为

$$P=\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

试问此链是否具有遍历性?若有,试求其稳态概率.

解：注意到

$$P^{(2)}=P^2=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

即知其所有的二步转移概率均大于0，由定理4.1知，此链具有遍历性.

再由转移概率与稳态概率满足的方程组得

$$\begin{cases} \pi_1 = \pi_1 \cdot \frac{1}{2} + \pi_2 \cdot \frac{1}{2} + \pi_3 \cdot 0 = \frac{1}{2}\pi_1 + \frac{1}{2}\pi_2 \\ \pi_2 = \pi_1 \cdot \frac{1}{2} + \pi_2 \cdot 0 + \pi_3 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\pi_1 \qquad + \frac{1}{2}\pi_3 \\ \pi_3 = \pi_1 \cdot 0 + \pi_2 \cdot \frac{1}{2} + \pi_3 \cdot \frac{1}{2} = \qquad + \frac{1}{2}\pi_2 + \frac{1}{2}\pi_3 \end{cases}$$

及$\pi_i > 0, i = 1,2,3, \ \sum_{i=1}^{3} \pi_i = 1$

解之可得稳态概率为 $\pi_1 = \pi_2 = \pi_3 = \frac{1}{3}$

例**4.2**　设齐次马氏链的状态空间E={1,2}，其一步转移概率矩阵为

$$P=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

试讨论该链的遍历性.

解：容易计算得出，该链的其n步转移矩阵与其一步转移矩阵P相同，即

$$\boxed{P^{(n)}=P}\qquad \text{因此}\lim_{n\to\infty}P^{(n)}=P$$

但是 $p_{11}^{(n)}=p_{22}^{(n)}=1,\qquad p_{12}^{(n)}=p_{21}^{(n)}=0$

$$\text{即}\lim_{n\to\infty}p_{11}^{(n)}=1\neq 0=\lim_{n\to\infty}p_{21}^{(n)},$$

$$\lim_{n\to\infty}p_{12}^{(n)}=0\neq 1=\lim_{n\to\infty}p_{22}^{(n)},$$

故由定义4.1知，此链不具有遍历性,也不存在稳态概率。

二 齐次马氏链的平稳分布

定义4.2 设{X(n),n≥0}是一齐次马氏链，若存在实数集合$\{r_j, j\in E\}$，满足

(1) $r_j \geq 0 \qquad j\in E$

(2) $\sum_{j\in E} r_j = 1$

(3) $r_j = \sum_{i\in E} r_i p_{ij} \qquad j\in E$

则称{X(n),n≥0}是一平稳齐次马氏链， 称$\{r_j, j\in E\}$为该过程的一个平稳分布。

例4.3 已知{X(n),n≥0}的初始分布为

$$P(0) = (p_1(0), p_2(0), p_3(0)) = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

其一步转移矩阵为

$$P=\begin{pmatrix} 0.3 & 0.4 & 0.3 \\ 0.4 & 0.3 & 0.3 \\ 0.3 & 0.3 & 0.4 \end{pmatrix}$$

试说明此马氏链是平稳的,且其初始分布为其平稳分布.

解　由平稳分布满足的方程组注意到

$$\frac{1}{3}=p_1(0)=\sum_{i=1}^{3}p_i(0)p_{i1}=\frac{1}{3}\times 0.3+\frac{1}{3}\times 0.4+\frac{1}{3}\times 0.3$$

$$\frac{1}{3}=p_2(0)=\sum_{i=1}^{3}p_i(0)p_{i2}=\frac{1}{3}\times 0.4+\frac{1}{3}\times 0.3+\frac{1}{3}\times 0.3$$

$$\frac{1}{3}=p_3(0)=\sum_{i=1}^{3}p_i(0)p_{i3}=\frac{1}{3}\times 0.3+\frac{1}{3}\times 0.3+\frac{1}{3}\times 0.4$$

即此初始分布满足定义4.2中条件，故具有上述转移概率的齐次马氏链为一平稳齐次马氏链，初始分布为其一个平稳分布。

定理4.2 设{X(n),n≥0}是一平稳齐次马氏链，若其初始分布$P(0)=\{p_1(0)$，$p_2(0),\ldots,p_j(0),\ldots\}$ 为此链的平稳分布时，则对任何n≥1，绝对概率等于初始概率，即：

$$\boxed{p_j(n)=p_j(0) \qquad j\in E}$$

证 若平稳齐次马氏链的初始分布为平稳分布 时,则有

$$p_j(0)=\sum_{i\in E}p_i(0)p_{ij}^{(1)}=\sum_{i\in E}p_i(0)p_{ij}$$

而齐次马氏链的绝对概率为其初始分布与转移概率确定

$$\boxed{p_j(n)=P(X(n)=j)=\sum_{i\in E}p_i(0)\times p_{ij}^{(n)}=\sum_{i\in E}p_i(k)\times p_{ij}^{(n-k)}}$$

当$n=1$时，$p_j(1)=\sum_{i\in E}p_i(0)p_{ij}^{(1)}(1)=\sum_{i\in E}p_i(0)p_{ij}^{(1)}=p_j(0)$

由此知$\{p_1(1),p_2(1),\cdots\}$是一个平稳分布,且$\{p_j(1),j\in E\}$与$\{p_j(0),j\in E\}$相同。

当$n=2$时，$p_j(2)=\sum_{i\in E} p_i(0)p_{ij}^{(2)}=\sum_{i\in E} p_i(0)p_{ij}^{(2)}$

$$=\sum_{i\in E} p_i(0)\sum_{k\in E} p_{ik}p_{kj}=\sum_{i\in E}\sum_{k\in E} p_i(0)p_{ik}p_{kj}=\sum_{i\in E}(\sum_{k\in E} p_i(0)p_{ik})p_{kj}$$

$$=\sum_{k\in E} p_k(1)p_{kj}=p_j(1)=p_j(0)$$ （因为$\{p_j(1), j\in E\}$为平稳分布）

类似可得$p_j(n)=p_j(n-1)=\cdots=p_j(1)=p_j(0)\quad j\in E$

由此可见，当我们能判定齐次马氏链的初始分布是一平稳分布时，则该马氏链在任何时刻的绝对概率分布都与初始分布相同。事实上，平稳分布就是不因转移步数变化而改变的分布。此时马氏链处于状态j的概率与时间推移无关，即具有平稳性。

注1 一般来说，平稳齐次马氏链的平稳分布并不唯一.

注2 在定理4.1条件下,平稳齐次马氏链的稳态概率即为其平稳分布。

例**4.4** 设齐次马氏链的状态空间为E={1,2},其一步转移概率矩阵为

$$P=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

由例4.2知,此齐次马氏链不是遍历的,其稳态概率不存在,

但有$(\pi_1,\pi_2)=(\pi_1,\pi_2)\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ $\pi_1+\pi_2=1,\ 0<\pi_1=\pi_2<1$

可见其平稳分布是存在的，且具有无穷多个.

$(\pi_1,\pi_2)=(\lambda,\ 1-\lambda),0<\lambda<1$ 均为其平稳分布。