1.3 随机变量的特征函数

在一般情况下，随机变量的数学期望与方差只能粗略地反映分布函数的某些特征性质，不能完整地刻画分布函数，因此，为深入研究随机变量的分布特性，产生了特征函数的概念。可以证明，不同的分布函数对应着不同的特征函数，而特征函数具有简单实用的特点，例如，矩的计算对分布函数是积分，对特征函数则是微分，求独立随机变量和的分布时，用分布函数需求卷积，用特征函数则化为简单的乘法。因此，在研究随机变量的分布特性时，特征函数起着重要的工具作用。

关于随机变量的特征函数定义及性质,我们主要介绍以下几方面内容:

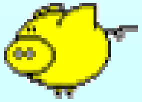
一　复随机变量定义

二　特征函数的定义

三　常见分布的特征函数

四　特征函数的基本性质

五　**n** 维随机变量的特征函数



一 复随机变量定义

定义3.1 若X与Y为实随机变量，则称Z=X+iY为复随机变量，其中$i=\sqrt{-1}$ 。

由于复随机变量与二维随机变量(X, Y)紧密相关，故其相关概率特性如下定义：

定义3.2 若二维随机变量$(X_1,Y_1),\ (X_2,Y_2),\ \cdots,\ (X_n,Y_n)$相互独立，则称复随机变量

$$Z_1=X_1+iY_1, Z_2=X_2+iY_2,\cdots,Z_n=X_n+iY_n$$

是相互独立的。

定义3.3 若E(X), E(Y)存在，则称

$$E(Z)=E(X)+iE(Y)$$

为复随机变量Z的数学期望。

例3.1 设复随机变量 $Z=2X+iY^2$

其中X, Y均服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$

试求E(2Z)。

解：$E(2Z)=2E(Z)=2(E(2X)+iE(Y^2))$

$$=4E(X)+2iE(Y^2)$$

$$=4\mu+2i(D(Y)+(E(Y))^2)$$

$$=4\mu+2i(\sigma^2+\mu^2)$$

二 特征函数的定义

定义3.4 设X为随机变量，称复随机变量e^{itX}的数学期望为X的特征函数，记为，即

$$\boxed{\varphi_X(t)=E(e^{itX}) \qquad t\in(-\infty,+\infty)}$$

由于对任意的实数t，总有$|e^{itX}|=1$，所以对一切随机变量，其特征函数总是存在的。

易见，若X为离散型随机变量，概率分布为

$$P(X=x_k)=p_k \qquad k=1,2,\cdots$$

则其特征函数为

$$\boxed{\varphi_X(t)=E(e^{itX})=\sum_{k=1}^{\infty}e^{itx_k}p_k}$$

若X为连续型随机变量，概率密度为f(x)，则其特征函数为

$$\boxed{\varphi_X(t)=E(e^{itX})=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{itx}f(x)dx}$$

例3.2 设随机变量X具有概率分布为

X	0	1	2
p_k	1/2	1/3	1/6

试求其特征函数 $\varphi_X(t)$

解： $$\varphi_X(t)=E(e^{itX})=e^{it\cdot 0}\cdot\frac{1}{2}+e^{it\cdot 1}\cdot\frac{1}{3}+e^{it\cdot 2}\cdot\frac{1}{6}$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}e^{it}+\frac{1}{6}e^{2it}$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\cos t+\frac{1}{6}\cos 2t+i\left(\frac{1}{3}\sin t+\frac{1}{6}\sin 2t\right)$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\cos t+\frac{1}{6}\cos 2t+\frac{i}{3}\sin t(1+\cos t)$$

例3.3 设随机变量X具有概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}2x & 0\le x<1\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

试求X的特征函数$\varphi_X(t)$

解：$\varphi_X(t)=E(e^{itX})=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{itx}f(x)dx$

$$=\int_0^1 e^{itx}\cdot 2xdx=2x\cdot\frac{1}{it}e^{itx}\Big|_0^1-2\frac{1}{it}\int_0^1 e^{itx}dx$$

$$=\frac{2}{it}e^{it}-\frac{2}{(it)^2}(e^{it}-1)$$

$$=2\left[\frac{-ie^{it}}{t}+\frac{1}{t^2}(e^{it}-1)\right]=\frac{2}{t^2}\left[-ite^{it}+e^{it}-1\right]$$

$$=\frac{2}{t^2}\left[-it(\cos t+i\sin t)+(\cos t+i\sin t-1)\right]$$

$$=\frac{2}{t^2}\left[(t\sin t+\cos t-1)+i(-t\cos t+\sin t)\right]$$

三 常见分布的特征函数

两点分布((0-1)分布)

设X服从(0-1)分布，则其概率分布为

$$P(X=k)=p^k(1-p)^{1-k}\qquad k=0,1\qquad 0<p<1$$

其特征函数为 $\boxed{\varphi_X(t)=1-p+pe^{it}}$

因为 $\varphi_X(t)=E(e^{itX})=e^{it\cdot 0}(1-p)+e^{it\cdot 1}\cdot p$

二项分布 B(n,p)

设X服从B(n,p)分布，则其概率分布为

$$P(X=k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k},\quad k=0,\ 1,\ \cdots,\ n.\quad 0<p<1$$

其特征函数为 $\boxed{\varphi_X(t)=(pe^{it}+1-p)^n}$

因为 $\varphi_X(t)=E(e^{itX})=\sum_{k=0}^{n} e^{itk} C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$

$$=\sum_{k=0}^{n} C_n^k (pe^{it})^k (1-p)^{n-k}$$

泊松分布 $\pi(\lambda)$

设X服从 $\pi(\lambda)$分布，则其概率分布为

$$P(X=k)=\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} \quad k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\quad \lambda>0$$

其特征函数为 $\boxed{\varphi_X(t)=e^{\lambda(e^{it}-1)}}$

因为 $\varphi_X(t)=E(e^{itX})=\sum_{k=0}^{\infty}e^{itx}\cdot\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$

$$=e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\lambda e^{it})^k}{k!}=e^{-\lambda}\cdot e^{\lambda e^{it}}=e^{\lambda(e^{it}-1)}$$

均匀分布 U(a,b)

设X服从U(a,b) 分布，则其概率分布为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a} & a<x<b\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

其特征函数为

$$\boxed{\varphi_X(t)=\frac{i}{(b-a)t}(\cos ta-\cos tb)-\frac{(\sin ta-\sin tb)}{(b-a)t}}$$

因为 $\varphi_X(t)=E(e^{itX})=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{itx}f(x)dx$

$$=\int_a^b e^{itx}\frac{1}{b-a}dx=\frac{1}{b-a}\cdot\frac{1}{it}e^{itx}\Big|_a^b=\frac{1}{(b-a)t}\cdot(e^{ita}-e^{itb})$$

指数分布 Z(α)

设X服从Z(α)分布，则其概率分布为

$$f(x)=\begin{cases}\alpha e^{-\alpha x} & x>0 \quad \alpha>1\\ 0 & x\le 0\end{cases}$$

其特征函数为 $$\boxed{\varphi_X(t)=\frac{\alpha^2}{\alpha^2+t^2}+i\frac{\alpha t}{\alpha^2+t^2}}$$

因为 $\varphi_X(t)=E(e^{itX})=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{itx}f(x)dx$

$$=\int_0^{+\infty}e^{itx}\cdot\alpha e^{-\alpha x}dx=\frac{\alpha}{it-\alpha}e^{(it-\alpha)x}\Big|_0^{+\infty}$$

$$=\frac{\alpha}{\alpha-it}=\frac{\alpha(\alpha+it)}{\alpha^2+t^2}$$

标准正态分布N(0,1)

设X服从N(0,1)分布，则其概率分布为

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$$

其特征函数为

$$\boxed{\varphi_X(t)=e^{-\frac{t^2}{2}}}$$

因为 $\varphi_X(t)=E(e^{itX})=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{itx}f(x)dx$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{itx}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{itx-\frac{x^2}{2}}dx$$

而导数 $\frac{d}{dt}(e^{itx-\frac{x^2}{2}}) = ixe^{itx-\frac{x^2}{2}}$

且有 $\left| ixe^{itx-\frac{x^2}{2}} \right| \le |x| e^{-\frac{x^2}{2}}$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x| e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 2\int_0^{+\infty} xe^{-\frac{x^2}{2}} dx = 2(-e^{-\frac{x^2}{2}})\Big|_0^{+\infty} = 2 < +\infty$$

即 $e^{itx-\frac{x^2}{2}}$ 绝对可积分。

再注意 $\varphi_X'(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} ixe^{itx-\frac{x^2}{2}} dx$

$$it\varphi_X(t)+i\varphi_X'(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}(it-x)e^{itx-\frac{x^2}{2}}dy=$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(e^{itx-\frac{x^2}{2}}\right)\Big|_{-\infty}^{+\infty}=0$$

故需解微分方程 $\boxed{t\varphi(t)+\varphi'(t)=0}$

易得带有任意常数形式的解 $\boxed{\varphi_X(t)=Ce^{-\frac{t^2}{2}}}$

此时代入初始条件 $\varphi_X(0)=E(e^{i\cdot o\cdot X})=E(1)=1$

得C=1, 代入可得标准正态分布的特征函数。

对于一般的正态分布的特征函数,我们是利用特征函数的特殊性质去得到的.

四 特征函数的基本性质

设$\varphi_X(t)=E(e^{itX})$ 为随机变量X的特征函数，则它具有以下性质：

$$1^\circ\ \varphi_X(0)=1,\quad |\varphi_X(t)|\le\varphi_X(0),\quad \varphi_X(-t)=\overline{\varphi_X(t)}$$

显然，$\varphi_X(0)=E(e^0)=1$ 而对于任意的t，$|e^{itx}|=1$

不妨设X具有概率密度f(x)，则有

$$|\varphi_X(t)|=|E(e^{itX})|=\left|\int_{-\infty}^{+\infty}e^{itx}f(x)dx\right|$$

$$\le\int_{-\infty}^{+\infty}|e^{itx}|f(x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=1=\varphi_X(0)$$

$$\varphi_X(-t)=E(e^{-itX})=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-itx}f(x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}\overline{e^{itx}}f(x)dx$$

$$=\overline{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} f(x)dx} = \overline{\varphi_X(t)}$$

2° $\varphi_X(t)$为（$-\infty,+\infty$)上的连续函数；

3° 设a, b为常数，则Y=aX+b的特征函数为

$$\boxed{\varphi_Y(t) = e^{ibt}\varphi_X(at)}$$

因为$\varphi_Y(t) = E(e^{itY}) = E(e^{it(aX+b)}) = E(e^{itaX+itb})$

$$= e^{ibt}E(e^{i(at)X}) = e^{ibt}\varphi_X(at)$$

例3.4 设X～N(μ, σ²)，试求X的特征函数。

解：设$Y = \dfrac{X-\mu}{\sigma}$ 则Y～N(0, 1)，故其特征函数为

$$\varphi_Y(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}$$ 因为$X = \sigma Y + \mu$

由上述性质可得X的特征函数为

$$\boxed{\varphi_X(t) = e^{i\mu t}\varphi_Y(\sigma t) = e^{i\mu t} \cdot e^{-\frac{\sigma^2 t^2}{2}} = e^{i\mu t - \frac{\sigma^2 t^2}{2}}}$$

4° 若随机变量X与Y相互独立，则有

$$\boxed{\varphi_{X+Y}(t) = \varphi_X(t)\varphi_Y(t)}$$

这由于X与Y相互独立，因此其函数e^{itX}与e^{itY}也相互独立，故由数学期望的性质知

$$\varphi_{X+Y}(t) = E(e^{it(X+Y)}) = E(e^{itX} \cdot e^{itY}) = E(e^{itX})E(e^{itY})$$

$$= \varphi_X(t)\varphi_Y(t)$$

一般地，若$X_1, X_2, \cdots, X_n$相互独立，则和$Y_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$

的特征函数等于各个特征函数的乘积:

$$\boxed{\varphi_{Y_n}(t) = \varphi_{X_1}(t)\varphi_{X_2}(t)\cdots\varphi_{X_n}(t)}$$

5° 若随机变量X的n阶矩存在，则它的特征函数可微分n次，且当1≤k≤n时，有

$$\boxed{\varphi_X^{(k)}(0) = i^k E(X^k)}$$

因为: 若设X为连续型随机变量，其概率密度f(x)，则其特征函数为

$$\varphi(t) = E(e^{itX}) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} f(x)dx$$

而 $\left|\frac{d^k}{dt^k}(e^{itx})\right| = |i^k x^k e^{itx}| \leq |x|^k$

且由条件 $E(X^k)$ 存在，知 $\int_{-\infty}^{+\infty} |x|^k f(x)dx < +\infty$

因而特征函数的k (1≤k≤n)阶导数存在，且有

$$\varphi^{(k)}(t) = \frac{d^k}{dt^k}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} f(x)dx\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^k}{dt^k}(e^{itx}) f(x)dx$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} i^k x^k e^{itx} f(x)dx = i^k \int_{-\infty}^{+\infty} x^k e^{itx} f(x)dx$$

当t=0时,即有 $\varphi^{(k)}(0) = i^k E(X^k) \quad (1 \leq k \leq n)$

这样由此性质，若已知X的特征函数，就可通过微分运算方便地求出X的k阶矩：

$$\boxed{E(X^k)=\frac{\varphi^{(k)}(0)}{i^k}=(-i)^k\varphi^{(k)}(0)}$$

特别地，当k=1时，X的数学期望 $\boxed{E(X)=-i\varphi'(0)}$

当k=2时,X的二阶矩为 $\boxed{E(X^2)=-\varphi''(0)}$

例3.5 设随机变量X的特征函数为 $\varphi(t)=\dfrac{1}{1-it}$

试求X的数学期望E(X)与方差D(X)。

解：因为$\varphi'(t)=-\dfrac{1}{(1-it)^2}\cdot(-i)=\dfrac{i}{(1-it)^2}$

故$E(X)=-i\varphi'(0)=-i\cdot\dfrac{i}{(1-0)^2}=-i^2=1$

又因为$\varphi''(t)=-\dfrac{2i}{(1-it)^3}\cdot(-i)=\dfrac{2i^2}{(1-it)^3}=\dfrac{-2}{(1-it)^3}$

得$\varphi''(0)=-2$　　故得$E(X^2)=-\varphi''(0)=2$

因此可得$D(X)=E(X^2)-(E(X))^2=2-1^2=1$

6° 随机变量的分布函数与其特征函数一一对应。

特征函数与分布函数F (x)满足下述逆转公式：

$$\frac{F(x_2+0)+F(x_2-0)}{2}-\frac{F(x_1+0)+F(x_1-0)}{2}$$

$$=\frac{1}{2\pi}\lim_{\iota\to\infty}\int_{-\iota}^{\iota}\frac{e^{itx_1}-e^{itx_2}}{it}\varphi(t)dt$$

例3.6 设随机变量X_k,k=1,2,⋯相互独立，且均服从相同的两点分布，即其分布律为

$$P(X_k = 0) = 1 - p, \quad P(X_k = 1) = p, \quad 0 < p < 1$$

试利用特征函数与分布函数的唯一性证明

$$Y_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$$ 服从二项分布 B(n,p)

证：因为$P(X_k = 0) = 1 - p, P(X_k = 1) = p$

故其特征函数为

$$\varphi_{X_k}(t) = E(e^{itX_k}) = pe^{it} + 1 - p \quad k = 1, 2, \cdots, n$$

则 Y_n的特征函数为

$$\boxed{\varphi_{Y_n}(t) = E(e^{itY_n}) = E(e^{it\sum_{k=1}^{n} X_k})}$$

$$=\prod_{k=1}^{n} E(e^{itX_k}) = \prod_{k=1}^{n} (pe^{it}+1-p) = (pe^{it}+1-p)^n$$

由唯一性可知, $Y_n=\sum_{k=1}^{n} X_k$ 服从二项分布 B(n,p).

例3.7 考虑一维对称流动过程 Y_n, 其中$Y_0=0$,

$$\boxed{Y_n=\sum_{k=1}^{n} X_k}$$

随机变量X_k, k=1,2,…相互独立，且均服从相同的分布，即其分布律为

$$P(X_k=-1)=P(X_k=1)=1/2$$

试利用特征函数求出Y_n的概率分布.

解: 因为Y_n的特征函数为

$$\boxed{\varphi_{Y_n}(t)=E(e^{itY_n})=E(e^{it\sum_{k=1}^{n} X_k})}$$

而随机变量 X_k, k=1,2,…相互独立，

因此 X_k的函数 e^{itX_k}, k=1,2,…亦相互独立，

$$\boxed{\varphi_{Y_n}(t)=\prod_{k=1}^{n}E(e^{itX_k})=\prod_{k=1}^{n}\varphi_{X_k}(t)}$$

$$\varphi_{X_k}(t)=E(e^{itX_k})=e^{it\times(-1)}\times\frac{1}{2}+e^{it\times 1}\times\frac{1}{2},$$

$$=\frac{1}{2}(e^{-it}+e^{it}),\quad k=1,2,\cdots,n$$

易见，$\forall\ k\ (1\le k\le n)$，$\varphi_{X_k}(t)=\frac{1}{2}(e^{-it}+e^{it})$,与$k$无关。

$$\varphi_{Y_n}(t) = \prod_{k=1}^{n} \varphi_{X_k}(t) = \prod_{k=1}^{n} \left[\frac{1}{2}(e^{-it} + e^{it}) \right]$$

$$= \left[\frac{1}{2}(e^{-it} + e^{it}) \right]^n = \left(\frac{1}{2} \right)^{\mathrm{n}} \left[(e^{-it} + e^{it}) \right]^n$$

再将此二项式展开

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{\mathrm{n}}} C_n^k e^{-itk} e^{it(n-k)}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} e^{it(n-2k)} \frac{1}{2^{\mathrm{n}}} C_n^k \qquad \boxed{= \sum_{k=1}^{\infty} e^{itx_k} p_k}$$

对照得知: $x_k = n - 2k, \quad k = 0,1,2,\cdots,n$

$$p_k = \frac{1}{2^n} C_n^k, \quad k = 0,1,2,\cdots,n$$

即：$P\{X = n-2k\} = \frac{1}{2^n} C_n^k, \quad k = 0,1,2,\cdots,n$

五 n 维随机变量的特征函数

定义3.5 设$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$为n维随机变量

$$\varphi(t_1, t_2, \cdots, t_n) = E(e^{i(t_1X_1+t_2X_2+\cdots+t_nX_n)})$$

称为其特征函数.

1° 若$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$的特征函数为 $\varphi(t_1, t_2, \cdots, t_n)$

则$Y = \sum_{k=1}^{n} a_k X_k + b$ 的特征函数为

$$\varphi_Y(t) = e^{itb}\varphi(a_1t, a_2t, \cdots, a_nt)$$

2° k维随机变量$Y_k=(X_1,X_2,\cdots,X_k)$的特征函数为

$$\varphi_{Y_k}(t_1,t_2,\cdots,t_k)=\varphi_{Y_n}(t_1,t_2,\cdots,t_k,0,\cdots,0)$$

3° 又设X_k的特征函数为$\varphi_k(t)$，且$X_1,X_2,\cdots,X_n$相互独立，

$$\varphi(t_1,t_2,\cdots,t_n)=\prod_{k=1}^{n}\varphi_k(t)$$

4° 多维分布函数与其特征函数一一对应，（唯一性）。

因此,可以借助特征函数来区别不同类型的随机变量.从而,我们讨论随机变量可从**分布函数**，**数字特征**与**特征函数**来开展随机变量的研究。