工程数学 II（矩阵理论） 第 2 次作业

矩阵相似标准形 + 矩阵分解

矩阵相似标准形（40 分）

1. (9 分)已知矩阵 A 和向量 α， β 分别为

$$A=\begin{bmatrix}3&1&1\\1&2&0\\1&0&2\end{bmatrix},\quad \alpha=\begin{bmatrix}\mathbf{1}\\-\mathbf{1}\\-\mathbf{1}\end{bmatrix},\quad \beta=\begin{bmatrix}\mathbf{1}\\\mathbf{2}\\\mathbf{2}\end{bmatrix}$$

（1）求 A 的特征值和特征向量；

（2）A 是否可以对角化？若可以，求出 P 使 $P^{-1}AP$ 为对角矩阵；

（3）计算 $A^{100}\alpha$ 及 $A^{100}\beta$（提示：利用$AX=\lambda X$）。

解：（1）$|\lambda I-A|=(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-4)=0$，得特征值为$\lambda_1=1$，$\lambda_2=2$，$\lambda_3=4$，对应的线性无关的特征向量分别为

$$\xi_1=\begin{bmatrix}1\\-1\\-1\end{bmatrix},\ \xi_2=\begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix},\ \xi_3=\begin{bmatrix}2\\1\\1\end{bmatrix}$$

（2）A 可对角化，因为特征值无重根，

$$P=(\xi_1,\xi_2,\xi_3)=\begin{bmatrix}1&0&2\\-1&1&1\\-1&-1&1\end{bmatrix},P^{-1}AP=\begin{bmatrix}1&&\\&2&\\&&4\end{bmatrix}$$

（3）因为$\alpha=\xi_1$，所以$A^{100}\alpha=\lambda_1^{100}\xi_1=\begin{bmatrix}1\\-1\\-1\end{bmatrix}$；又因为$\boldsymbol{\beta}=\begin{bmatrix}1\\2\\2\end{bmatrix}=\xi_3-\xi_1$所以

$$A^{100}\beta=A^{100}\xi_3-A^{100}\xi_1=\lambda_3^{100}\xi_3-\lambda_1^{100}\xi_1=\begin{bmatrix}2.4^{100}-1\\4^{100}+1\\4^{100}+1\end{bmatrix}$$

2. (7 分)判断下列两个λ矩阵是否等价:

$$A(\lambda)=\begin{bmatrix}3\lambda+1&\lambda&4\lambda-1\\1-\lambda^2&\lambda-1&\lambda-\lambda^2\\\lambda^2+\lambda+2&\lambda&\lambda^2+2\lambda\end{bmatrix}$$

$$B(\lambda)=\begin{bmatrix}\lambda+1&\lambda-2&\lambda^2-2\lambda\\2\lambda&2\lambda-3&\lambda^2-2\lambda\\-2&1&1\end{bmatrix}$$

解：因为A(λ)，B(λ)的不变因子为 1，$\lambda-1$，$(\lambda-1)^2$,所以它们等价

3． (9 分)求下列λ矩阵的史密斯标准型：

（1）$\begin{bmatrix} -\lambda+1 & 2\lambda-1 & \lambda \\ \lambda & \lambda^2 & -\lambda \\ \lambda^2+1 & \lambda^2+\lambda-1 & -\lambda^2 \end{bmatrix}$

（2）$\begin{bmatrix} \lambda^2 & 0 \\ 0 & (\lambda-1)^2 \end{bmatrix}$

（3）$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & \lambda+4 \\ 0 & 1 & \lambda+4 & 0 \\ 1 & \lambda+4 & 0 & 0 \\ \lambda+4 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

解：（1）初等行变换法：

$$\begin{bmatrix} -\lambda+1 & 2\lambda-1 & \lambda \\ \lambda & \lambda^2 & -\lambda \\ \lambda^2+1 & \lambda^2+\lambda-1 & -\lambda^2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2\lambda-1 & \lambda \\ 0 & \lambda^2 & -\lambda \\ 0 & \lambda^2-\lambda & -\lambda^2-\lambda \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & & \\ & \lambda & \\ & & \lambda（\lambda^2+1） \end{bmatrix}$$

（2）行列式因子法

首先求出$D_1(\lambda)=1$，$D_2(\lambda)=(\lambda-1)^2\lambda^2$

于是

$d_1(\lambda)=D_1(\lambda)=1, d_2(\lambda)=\frac{D_2(\lambda)}{D_1(\lambda)}=(\lambda-1)^2\lambda^2$

从而其史密斯标准型为

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (\lambda-1)^2\lambda^2 \end{bmatrix}$$

（3）$D_4(\lambda)=(\lambda+4)^4$，$D_3(\lambda)=D_2(\lambda)=D_1(\lambda)=1$，于是

$$d_1(\lambda)=d_2(\lambda)=d_3(\lambda)=1，d_4(\lambda)=(\lambda+4)^4$$

从而其史密斯标准型为

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (\lambda+4)^4 \end{bmatrix}$$

4． (8 分)求下列矩阵的各阶行列式因子，不变因子，初等因子及 Jordan 标准形：

(1) B= $\begin{bmatrix} 17 & 0 & -25 \\ 0 & 3 & 0 \\ 9 & 0 & -13 \end{bmatrix}$ (2) D = $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

解：（1）$\lambda I - B = \begin{bmatrix} \lambda-17 & 0 & 25 \\ 0 & \lambda-3 & 0 \\ -9 & 0 & \lambda+13 \end{bmatrix}$的行列式因子$D_3(\lambda) = |\lambda I - B| =$（$\lambda-3$）$(\lambda-2)^2$观察所有的二阶子行列式可知$D_2(\lambda) = 1.$显然$D_1(\lambda) = 1$，不变因子为$d_1(\lambda) = 1$，$d_2(\lambda) = 1$，$d_3(\lambda) = (\lambda-3)(\lambda-2)^2$。初等因子组为$(\lambda-3)$，$(\lambda-2)^2$。从而 B 的 Jordan 标准形为

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

（2）$\lambda I - D = \begin{bmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 4 & \lambda-4 & 0 \\ 2 & -1 & \lambda-2 \end{bmatrix}$的行列式因子$D_3(\lambda) = |\lambda I - D| = (\lambda-2)^3, D_2(\lambda) = (\lambda-2)$，$D_1(\lambda) = 1$ ， 不变因子为$d_1(\lambda) = 1$，$d_2(\lambda) = \lambda-2$，$d_3(\lambda) = (\lambda-2)^2$。初等因子组为 $\lambda-2$，$(\lambda-2)^2$；D 的Jordan 标准形为

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

5． (7 分)用波尔曼法求矩阵的 Jordan 标准形。

$$\begin{bmatrix} 4 & 5 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

解：

A=$\begin{bmatrix}4 & 5 & -2\\ -2 & -2 & 1\\ -1 & -1 & 1\end{bmatrix}$为三阶矩阵。$|\lambda I-A|=(\lambda-1)^3$，$\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=1.$

$$r_1(1)=r(I-A)=r\begin{bmatrix}-3 & -5 & 2\\ 2 & 3 & -1\\ 1 & 1 & 0\end{bmatrix}=2$$

$$r_2(1)=r(I-A)^2=r\begin{bmatrix}1 & 2 & -1\\ -1 & -2 & 1\\ -1 & -2 & 1\end{bmatrix}=1$$

$$r_3(1)=r(I-A)^3=0$$

$$b_1(1)=n-2r_1(1)+r_2(1)=3-2X2+1=0$$

$$b_2(1)=r_3(1)-2r_2(1)+r_1(1)=0-2X1+2=0$$

这说明 A 的 Jordan 标准形没有关于$\lambda=1$的一阶或二阶的 Jordan 块，则必存在一个三阶的 Jordan 块，即 J=$\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$·

矩阵分解（60 分）

1. (8 分)求矩阵$A=\begin{bmatrix}5 & 2 & -4\\ 2 & 1 & -2\\ -4 & -2 & 5\end{bmatrix}$的 LU，LDU，Doolittle 和 Crout 分解。

解：因为顺序主子式$\Delta_1=5$，$\Delta_2=1$皆不为零，所求分解存在。对 A 的各列依次用消元程序化 A 为上三角矩阵。即用初等矩阵之积L_2L_1左乘 A。事实上是对 A 的行进行“上行的倍数加到下行的对应元上”的消元变换：

$$(A,I_3)=\begin{bmatrix}5 & 2 & -4 & \vdots & 1 & 0 & 0\\ 2 & 1 & -2 & \vdots & 0 & 1 & 0\\ -4 & -2 & 5 & \vdots & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}5 & 2 & -4 & \vdots & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1/5 & -2/5 & \vdots & -2/5 & 1 & 0\\ 0 & -2/5 & 9/5 & \vdots & 4/5 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$\to\begin{bmatrix}5 & 2 & -4 & \vdots & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1/5 & -2/5 & \vdots & -2/5 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 0 & 2 & 1\end{bmatrix}=(U,P)$$

这里$P=L_2L_1,U=L_2L_1A.$于是 $L=P^{-1}={L_1}^{-1}{L_2}^{-1}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 2/5 & 1 & 0\\ -4/5 & -2 & 1\end{bmatrix}$,从而得到 A

到 LU 分解

$$A = LU = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2/5 & 1 & 0 \\ -4/5 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 2 & -4 \\ 0 & 1/5 & -2/5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

这就求出 A 的 LDU 分解为

$$A = LDU = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2/5 & 1 & 0 \\ -4/5 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2/5 & -4/5 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A 的 Doolittle 分解为

$$A = L(DU) = L\widehat{U} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2/5 & 1 & 0 \\ -4/5 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 2 & -4 \\ 0 & 1/5 & -2/5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A 的 Crout 分解为

$$A = (LD)U = \hat{L}U = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 2 & 1/5 & 0 \\ -4 & -2/5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2/5 & -4/5 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2.（8 分）已知 1

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & -3 & -1 & -5 \\ 3 & 1 & 2 & 11 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

求 A 的 LU 分解，并利用它求解线性方程组$Ax = b$.

解：A 的顺序主子式$\Delta_1 = 1$，$\Delta_2 = 1$，$\Delta_3 = -13$皆不为零，A 的 LU 分解存在并用 gauss 消元程序求：

$$A^{(1)} = L_1 A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & -3 & -1 & -5 \\ 3 & 1 & 2 & 11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & -5 & -3 & -7 \\ 0 & -2 & -1 & 8 \end{bmatrix}$$

$$A^{(2)} = L_2 A^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & -5 & -3 & -7 \\ 0 & -2 & -1 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & -13 & 8 \\ 0 & 0 & -5 & 14 \end{bmatrix}$$

$$A^{(3)} = L_3 A^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -5/13 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & -13 & 8 \\ 0 & 0 & -5 & 14 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & -13 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 142/13 \end{bmatrix}$$

于是得到

$$L = {L_1}^{-1} {L_2}^{-1} {L_3}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5/13 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -5 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 5/13 & 1 \end{bmatrix}$$

从而求出 A 的 LU 分解

$$\mathrm{A} = \mathrm{LU} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -5 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 5/13 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & -13 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 142/13 \end{bmatrix}$$

此时解线性方程组$\mathrm{Ax} = \mathrm{b}$ 等价于解方程组

$$\begin{cases} Ly = b \\ Ux = y \end{cases}$$

先解$Ly = b$，即解$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -5 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 5/13 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$，得$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -7 \\ -47 \\ -\frac{142}{13} \end{bmatrix}$。再求方程组$Ux = y$的解，即解

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & -13 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 142/13 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -7 \\ -47 \\ -\frac{142}{13} \end{bmatrix}。$$

解得$x_4 = -1$，$x_3 = 3$，$x_2 = 2$，$x_1 = 1$，故原线性方程组$Ax = b$的解为$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$

3.（8 分）用 Schmidt 正交化法求矩阵$A=\begin{bmatrix}0&4&1\\1&1&1\\0&3&2\end{bmatrix}$的 QR 分解。

解：将 A 的列向量α_1，α_2，α_3正交化

$\beta_1=\alpha_1=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$，$\beta_2=\alpha_2-\beta_1=\begin{bmatrix}4\\0\\3\end{bmatrix}$，$\beta_3=\alpha_3-\frac{2}{5}\beta_2-\beta_1=\frac{1}{5}\begin{bmatrix}-3\\0\\4\end{bmatrix}$

由$\left\|\beta_1\right\|=1$，$\left\|\beta_2\right\|=5$，$\left\|\beta_3\right\|=1$，将β_1，β_2，β_3单位化得

$$\gamma_1=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}，\gamma_2=\frac{1}{5}\begin{bmatrix}4\\0\\3\end{bmatrix}，\gamma_3=\frac{1}{5}\begin{bmatrix}-3\\0\\4\end{bmatrix}$$

因此得正交矩阵

$$Q=[\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3]=\begin{bmatrix}0&4/5&-3/5\\1&0&0\\0&3/5&4/5\end{bmatrix}$$

并由

$$[\alpha_1，\alpha_2，\alpha_3]=(\beta_1，\beta_2，\beta_3)\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&2/5\\0&0&1\end{bmatrix}$$

推知

$$R=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&5&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&2/5\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1&1\\0&5&2\\0&0&1\end{bmatrix}$$

故 A 的 QR 分解

$$A=QR=\begin{bmatrix}0&4/5&-3/5\\1&0&0\\0&3/5&4/5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&1\\0&5&2\\0&0&1\end{bmatrix}$$

4.（7 分）用初等旋转变换求矩阵$A=\begin{bmatrix}3&5&5\\0&3&4\\4&0&5\end{bmatrix}$的 QR 分解。

解：对 A 的第一列$\alpha_1=\begin{bmatrix}3\\0\\4\end{bmatrix}$，取 $c=\frac{\sqrt{x_1{}^2+x_2{}^2}}{\sqrt{x_1{}^2+x_2{}^2+x_3{}^2}}=\frac{3}{5}, s=\frac{x_3}{\sqrt{x_1{}^2+x_2{}^2+x_3{}^2}}\frac{4}{5}$,作

$$T_{13}=\frac{1}{5}\begin{bmatrix}3&0&4\\0&5&0\\-4&0&3\end{bmatrix}，则T_{13}\alpha_1=\begin{bmatrix}5\\0\\0\end{bmatrix}。$$

令$T_1=T_{13}$，则$T_1A=\begin{bmatrix}5&3&7\\0&3&4\\0&-4&-1\end{bmatrix}$。对$T_1A$的右下方子块$A^{(1)}=\begin{bmatrix}3&4\\-4&-1\end{bmatrix}$的第一列$\alpha_1{}^{(1)}=\begin{bmatrix}3\\-4\end{bmatrix}$，取 $c=\frac{x_1}{\sqrt{x_1{}^2+x_2{}^2}}=\frac{3}{5}, s=\frac{x_2}{\sqrt{x_1{}^2+x_2{}^2}}=-\frac{4}{5}$，做$T_2=T_{23}=\frac{1}{5}\begin{bmatrix}3&-4\\4&3\end{bmatrix}$，$T_2A^{(1)}=\begin{bmatrix}5&\frac{16}{5}\\0&\frac{13}{5}\end{bmatrix}$.

令$T=\begin{bmatrix}1&0\\0&T_2\end{bmatrix}T_1=\frac{1}{25}\begin{bmatrix}15&0&20\\16&15&-12\\-12&20&9\end{bmatrix}$，于是得到上三角矩阵 $R=TA=\begin{bmatrix}5&3&7\\0&5&16/5\\0&0&13/5\end{bmatrix}$

和正交矩阵$Q=T^{-1}=T^T$，使得 A 有分解

$$A=QR=\frac{1}{25}\begin{bmatrix}15&16&-12\\0&15&20\\20&-12&9\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5&3&7\\0&5&16/5\\0&0&13/5\end{bmatrix}$$

5.（7 分）用初等反射变换求矩阵$A=\begin{bmatrix}0&3&1\\0&4&-2\\2&1&2\end{bmatrix}$的 QR 分解。

解：对 A 的第一列$\alpha_1=\begin{bmatrix}0\\0\\2\end{bmatrix}$，$\|\alpha_1\|=2$，由$\alpha_1-\|\alpha_1\|\varepsilon_1=2\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}$取单位向量 $u=\frac{\alpha_1-\|\alpha_1\|\varepsilon_1}{\|\alpha_1-\|\alpha_1\|\varepsilon_1\|}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}$，作 $H_1=I_3-2\,uu^T=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}$，则 $H_1\alpha_1=\begin{bmatrix}2\\0\\0\end{bmatrix}=\|\alpha_1\|\varepsilon_1$，并且有$H_1A=\begin{bmatrix}2&1&2\\0&4&-2\\0&3&1\end{bmatrix}$。

对 H_1A 右下方子块 $A^{(1)}=\begin{bmatrix}4&-2\\3&1\end{bmatrix}$ 的第一列 $\alpha_1{}^{(1)}=\begin{bmatrix}4\\3\end{bmatrix}$, $\|\alpha_1{}^{(1)}\|=5$, 由$\alpha_1{}^{(1)}-\|\alpha_1{}^{(1)}\|\varepsilon_1=\begin{bmatrix}-1\\3\end{bmatrix}$取单位向量 $u=\frac{\alpha_1{}^{(1)}-\|\alpha_1{}^{(1)}\|\varepsilon_1}{\|\alpha_1{}^{(1)}-\|\alpha_1{}^{(1)}\|\varepsilon_1\|}=\frac{1}{\sqrt{10}}\begin{bmatrix}-1\\3\end{bmatrix}$

做$H_2=I_2-2\,uu^T=\frac{1}{5}\begin{bmatrix}4&3\\3&-4\end{bmatrix}$则$H_2A^{(1)}=\begin{bmatrix}5&-1\\0&-2\end{bmatrix}$.

令 $H=\begin{bmatrix}1&0\\0&H_2\end{bmatrix}H_1=\frac{1}{5}\begin{bmatrix}0&0&5\\3&4&0\\-4&3&0\end{bmatrix}$，于是得到上三角矩阵 $R=HA=\begin{bmatrix}2&1&2\\0&5&-1\\0&0&-2\end{bmatrix}$

和正交矩阵 $Q = H^{-1} = H^T$, 使得 A 有分解

$$A = QR = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 0 & 3 & -4 \\ 0 & 4 & 3 \\ 5 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

6.（7 分）求矩阵$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$的一个满秩分解。

解：对 A 施行初等行变换化为

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D \\ 0 \end{bmatrix} = B$$

由$i_1 = 1, i_2 = 3$, 取 $C = [\alpha_1, \alpha_3] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, 就得到 A 的一个满秩分解

$$A = CD = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

7. （7 分）求矩阵$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$的奇异值分解。

解：先求

$A^T A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$的特征值，得到$\lambda_1 = 5$，$\lambda_2 = 1$，$\lambda_3 = 0$，其对应的特征向量是

$$\rho_{1=}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}, \ \rho_{2=}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \ \rho_{3=}\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

进而可得正交矩阵

$$V = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & \sqrt{5} & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

使得

$$V^T(A^T A)V = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

并且 rank(A)=rank($A^T A$)=2,A 的奇异值$\sigma_1 = \sqrt{5}$，$\sigma_2 = 1$，$\sigma_3 = 0$，及 $\Sigma = \begin{bmatrix} \sqrt{5} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

再计算

$$U_1=AV_1\Sigma^{-1}=\begin{bmatrix}-1&0&2\\0&1&0\end{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix}1&0\\0&\sqrt{5}\\-2&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\0&\sqrt{5}\\-2&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{5}}&0\\0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&0\\0&1\end{bmatrix}$$

令正交矩阵 U=U_1。于是 A 的奇异值分解为

$$\mathrm{A}=\mathrm{U}[\Sigma\ \ \mathrm{O}]V^T=\begin{bmatrix}-1&0\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sqrt{5}&0&0\\0&1&0\end{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix}1&0&-2\\0&\sqrt{5}&0\\2&0&1\end{bmatrix}$$

8.（8 分）设矩阵$\mathrm{A}=\begin{bmatrix}1&0&0\\1&0&-2\\-1&1&-3\end{bmatrix}$,证明 A 为可对角化矩阵，并求 A 的谱分解式。

解：易知$|\lambda I_3-A|=(\lambda-1)(\lambda+1)(\lambda+2)$,所以 A 的特征值为$\lambda_1=1$，$\lambda_2=-1$，$\lambda_3=-2$.因此 A 的三个特征值互异，故 A 可对角化，为求 A 的谱分解，构造

$$\varphi_1(\lambda)=(\lambda+1)(\lambda+2),\varphi_2(\lambda)=(\lambda-1)(\lambda+2),\varphi_3(\lambda)=(\lambda-1)(\lambda+1)$$

于是

$$P_1=\frac{\varphi_1(A)}{\varphi_1(\lambda_1)}=\frac{(A+I)(A+2I)}{2\times 3}=\begin{bmatrix}1&0&0\\1&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$

$$P_2=\frac{\varphi_2(A)}{\varphi_2(\lambda_2)}=\frac{(A-I)(A+2I)}{(-2)\times 1}=\begin{bmatrix}0&0&0\\-2&2&-2\\-1&1&-1\end{bmatrix}$$

$$P_3=\frac{\varphi_3(A)}{\varphi_3(\lambda_3)}=\frac{(A-I)(A+I)}{(-3)\times(-1)}=\begin{bmatrix}0&0&0\\1&-1&2\\1&-1&2\end{bmatrix}$$

故 A 的谱分解式为

$$\mathrm{A}=\sum_{i=1}^{3}\lambda_i P_i=1\times\begin{bmatrix}1&0&0\\1&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}+(-1)\times\begin{bmatrix}0&0&0\\-2&2&-2\\-1&1&-1\end{bmatrix}+(-2)\times\begin{bmatrix}0&0&0\\1&-1&2\\1&-1&2\end{bmatrix}$$