§5.2 平稳过程的遍历性

一、时平均与时相关函数

二、遍历性（各态历经性）

§4.2 平稳过程的遍历性

返回

一、时平均与时相关函数

定义2.1 设$\{X(t), t\in(-\infty,+\infty)\}$是一均方连续平稳过程。

(1)若均方极限 $\lim\limits_{T\to+\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}X(t)dt$存在,

则称它为$X(t)$在$(-\infty,+\infty)$上的时平均，记为$<X(t)>$，即

$$<X(t)>=\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}X(t)dt$$

（2）若均方极限 $\lim\limits_{T\to+\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}X(t)\overline{X(t+\tau)}dt$存在

则称它为$X(t)$在$(-\infty,+\infty)$上的时相关函数，记为$<X(t)X(t+\tau)>$,即

$$<X(t)X(t+\tau)>=\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}X(t)\overline{X(t+\tau)}dt$$

相对地,称$m_X(t)=EX(t)$与$R_X(\tau)$分别为$X(t)$的集平均与集相关函数。

例**2.1** 设随机相位过程为

$$\{X(t)=a\cos(\omega t+X),\ t\in(-\infty,\ +\infty)\}$$

其中，a、ω为常数，$X\sim U(0,2\pi)$，试求其时平均与时相关函数

解 $$<X(t)>=\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}X(t)dt=\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}a\cos(\omega t+X)dt$$

$$= \lim_{T\to+\infty} \frac{a}{2T}\int_{-T}^{T}(\cos\omega t\cos X - \sin\omega t\sin X)dt$$

注意sin ω t为奇函数,在对称区间积分为0

$$= \lim_{T\to+\infty} \frac{a}{2T}\cos X\int_{-T}^{T}\cos\omega t dt = \lim_{T\to+\infty}\frac{a\cos X}{2T\cdot\omega}2\cdot\sin\omega T = 0$$

$$< X(t)X(t+\tau) >= \lim_{T\to+\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} X(t)\overline{X(t+\tau)}dt$$

$$= \lim_{T\to+\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} a\cos(\omega t + X)a\cos(\omega(t+\tau)+X)dt$$

$$= \lim_{T\to+\infty}\frac{a^2}{2T}\frac{1}{2}\int_{-T}^{T}[\cos(2\omega t+\omega\tau+2X)+\cos\omega\tau]dt$$

$$= \frac{a^2}{2}\cos\omega\tau$$

例**2.2** 设$X(t)=Y$，Y为非单点分布的随机变量，显然$\{X(t), t\in(-\infty, +\infty)\}$是一平稳随机过程，试求$X(t)$的时平均与时相关函数。

解
$$<X(t)>=\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}X(t)dt$$
$$=\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}Ydt=Y$$
$$<X(t)X(t+\tau)>=\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}X(t)X(t+\tau)dt$$
$$=\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}Y\cdot Ydt=Y^2$$

二、遍历性（各态历经性）

1 遍历性（各态历经性）的定义

定义**2.2** 设{X (t) ,t ∈(-∞ ,+∞)}为一均方连续的平稳过程。

(1)若 $<X(t)>=E[X(t)]=m_X(t)$依概率1成立，即

$$\lim_{\varepsilon\to 0} P\{|<X(t)>-m_X(t)|\le\varepsilon\}=1$$

则称$X(t)$的均值具有遍历性；

(2) 若$<X(t)X(t+\tau)>=R_X(\tau)=E[X(t)\overline{X(t+\tau)}]$

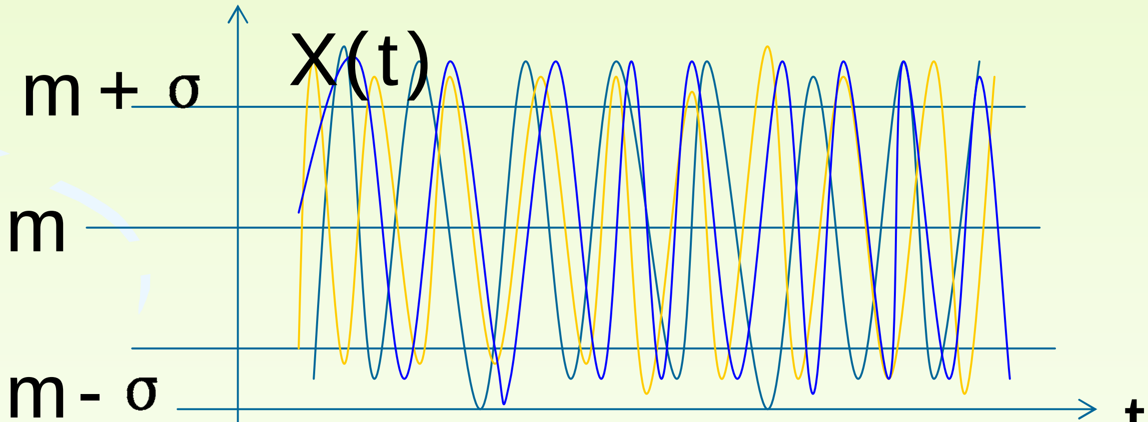
依概率1成立，即对任意的 ε ，有

$$\lim_{\varepsilon \to 0} P(|< X(t)X(t+\tau) > -R_X(\tau)| \le \varepsilon) = 1$$

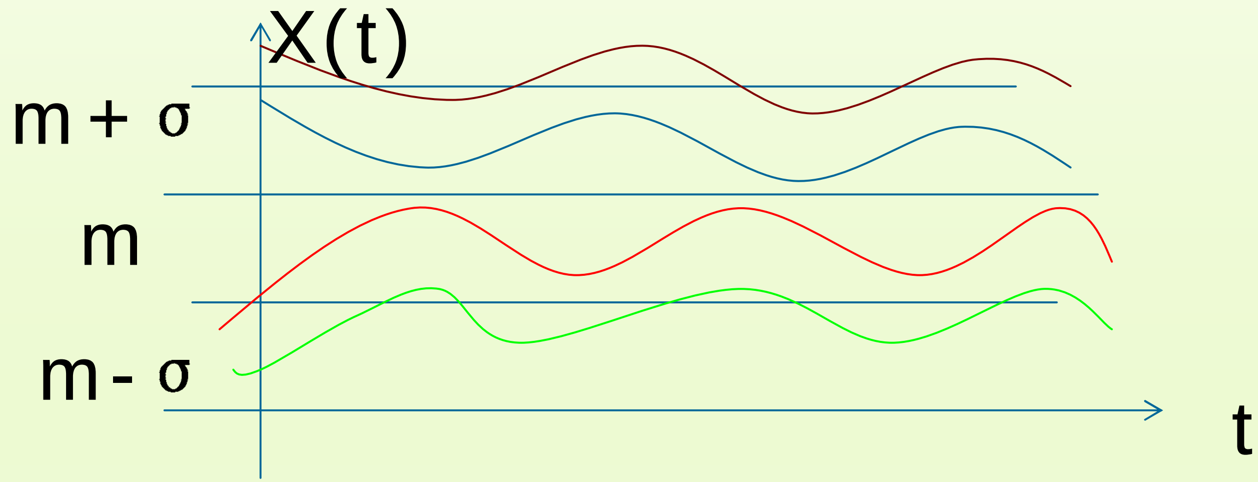
则称$X(t)$的自相关函数具有遍历性。

易见，对平稳过程的一个样本函数取时间平均,当对平稳过程观察的时间充分长时,这个时间平均将从概率意义上趋近于它的统计平均.这样的过程$X(t)$的均值具有遍历性,也就是各态历经过程.

各态历经过程的每个样本都经历了随机过程的各种可能状态,任何一个样本都能充分地代表随机过程的统计特性;



若没有一个样本能代表随机过程的统计特性,则这样的过程虽然是平稳的,也不是各态历经过程.



例**2.3** （续例2.1）讨论随机相位过程X(t)的遍历性。

$$\{X(t) = a\cos(\omega t + X),\ t \in (-\infty,\ +\infty)\}$$

解 因为$E[X(t)] = \int_0^{2\pi} a\cos(\omega t + x)\frac{1}{2\pi}dx = 0 = < X(t) >$

所以此$X(t)$的均值具有遍历性。

又 $$E[X(t)X(t+\tau)]=\int_0^{2\pi} a\cos(\omega t+x)a\cos(\omega(t+\tau)+x)\frac{1}{2\pi}dx$$

$$=\frac{a^2}{2}\cos\omega\tau=<X(t)X(t+\tau)>$$

因此 $X(t)$的自相关函数亦具有遍历性。

例2.4 （续例2.2）讨论X(t)=Y（Y为非单点分布随机变量）的遍历性.

解 因为$m_X(t)=E[X(t)]=E(Y)$

而Y非单点分布随机变量，故Y‡E(Y),所以$X(t)$的均值不具备遍历性。

又 $R_X(\tau)=E[X(t)X(t+\tau)]=E(Y^2)\neq Y^2$

所以$X(t)$的自相关函数也不具备遍历性。

2　均值遍历性的必要条件与充分条件

设$\{X(t), t\in(-\infty, +\infty)\}$为均方连续的平稳过程

(1)均值遍历性的充要条件为

$$\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{2T}\int_{-2T}^{2T}\left(1-\frac{|\tau|}{2T}\right)C_X(\tau)d\tau=0$$

其中 $C_X(\tau)=R_X(\tau)-m_X^2$ 是$X(t)$的自协方差函数。

证：只须证下列两条成立即可

$$1^\circ\quad E[<X(t)>]=E[X(t)]=m_X$$

$$2^\circ\quad D[<X(t)>]=0$$

因为这两条成立时,由方差性质知以概率1成立等价式:

$$D[<X(t)>]=0 \Leftrightarrow <X(t)>=m_X$$

$$1^\circ \quad E[<X(t)>]=E\left[\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}X(t)dt\right]$$

$$=\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}E[X(t)]dt$$

$$=\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}m_X\,dt=m_X$$

$$2^\circ \quad D[<X(t)>]=D\left[\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}X(t)dt\right]$$

$$=\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{4T^2}D\left[\int_{-T}^{T}X(t)dt\right]$$

又 $D\left[\int_{-T}^{T} X(t)dt\right] = E\left[\left|\int_{-T}^{T} X(t)dt - m_X\right|^2\right]$

$$= E\left[\int_{-T}^{T}(X(t_1)-m_X)dt_1\int_{-T}^{T}\overline{(X(t_2)-m_X)}dt_2\right]$$

$$= E\left[\int_{-T}^{T}\int_{-T}^{T}(X(t_1)-m_X)\overline{(X(t_2)-m_X)}dt_1dt_2\right]$$

$$= \int_{-T}^{T}\int_{-T}^{T} C_X(t_2-t_1)dt_1dt_2$$

再作换元 $u = t_2 - t_1, \quad v = t_2 + t_1$,即得

$$D\left[\int_{-T}^{T} X(t)dt\right] = \iint_{\substack{-2T\le v-u\le 2T \\ -2T\le v+u\le 2T}} C_X(u)\left|-\frac{1}{2}\right|dudv$$

$$=\frac{1}{2}\left[\int_{-2T}^{0}du\int_{-2T-u}^{2T+u}C_X(u)dv+\int_{0}^{2T}du\int_{-2T+u}^{2T-u}C_X(u)dv\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\int_{-2T}^{0}(4T+2u)C_X(u)du+\int_{0}^{2T}(4T-2u)C_X(u)du\right]$$

$$=2T\left[\int_{-2T}^{2T}\left(1-\frac{|u|}{2T}\right)C_X(u)du\right]$$

故 $D[<X(t)>]=\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{4T^2}D\left[\int_{-T}^{T}X(t)dt\right]$

$$=\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{2T}\int_{-2T}^{2T}\left(1-\frac{|u|}{2T}\right)C_X(u)du$$

因此 $<X(t)>=m_X$ 的充要条件得证。

(2) 实平稳过程的均值具有遍历性的充要条件是：

$$\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{T}\int_0^{2T}\left(1-\frac{\tau}{2T}\right)C_X(\tau)d\tau=0$$

因为实平稳过程满足条件 $R_X(-\tau)=R_X(\tau)$

再由(1)的结果,利用积分性质可知其结论正确.

(3) 若有$\int_{-\infty}^{+\infty}|C_X(\tau)|d\tau<+\infty$,

则实平稳过程$X(t)$的均值具有遍历性。

这因 $\left|\frac{1}{T}\int_0^{2T}(1-\frac{\tau}{2T})C_X(\tau)\right|<\frac{1}{T}\int_0^{2T}|C_X(\tau)|d\tau\xrightarrow{T\to+\infty}0$

满足(1)中条件,故其均值具有遍历性。

(4)若 $\lim\limits_{\tau\to\infty} C_X(\tau)=0$ 则实平稳过程$X(t)$的均值具有遍历性。

因为 $\lim\limits_{\tau\to\infty} C_X(\tau)=0$，即$\lim\limits_{\tau\to\infty} R_X(\tau)=m_X^2$

故 $\forall\varepsilon>0,\exists T_1>0,\forall\tau>T_1$时由极限的定义有

$$|C_X(\tau)|=|R_X(\tau)-m_X^2|<\varepsilon$$

因此 $\left|\frac{1}{T}\int_0^{2T}(1-\frac{\tau}{2T})C_X(\tau)d\tau\right|\le\frac{1}{T}\int_0^{2T}\left|\left(1-\frac{\tau}{2T}\right)C_X(\tau)\right|d\tau$

$$\le\frac{1}{T}\int_0^{T_1}|C_X(\tau)|d\tau+\frac{1}{T}\int_{T_1}^{2T}|C_X(\tau)|d\tau$$

$$\le\frac{T_1}{T}C_X(0)+\frac{1}{T}\varepsilon(2T-T_1)<\frac{T_1}{T}C_X(0)+2\varepsilon$$

若令 $\frac{T_1}{T} C_X(0) < \varepsilon$，则当 $T > \frac{T_1 C_X(0)}{\varepsilon}$ 时有

$$\left| \frac{1}{T} \int_0^{2T} \left(1 - \frac{\tau}{2T} \right) C_X(\tau) d\tau \right| < 3\varepsilon$$

此即 $\frac{1}{T} \int_0^{2T} \left(1 - \frac{\tau}{2T} \right) C_X(\tau) d\tau \to 0$

注 设{X(t),t≥0}是一均方连续的平稳过程,则X(t)的均值遍历性定义可改为

$$< X(t) > \overset{\Delta}{=} \underset{T \to +\infty}{l \cdot i \cdot m} \frac{1}{T} \int_0^T X(t) dt = m_X$$

则X(t)的均值遍历性的充要条件也可改为

$$\lim_{T \to +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \left(1 - \frac{\tau}{T} \right) C_X(\tau) d\tau = 0$$

例2.5 设均方连续的平稳随机过程为

$$\{X(t)=A\cos\omega t+B\sin\omega t \quad t\in(-\infty,+\infty)\}$$

其中ε为常数，A, B为相互独立的随机变量，

且 $E(A)=E(B)=0$，$D(A)=D(B)=\sigma^2>0$

试讨论$X(t)$的均值遍历性。

解 因为$m_X=0$,故$C_X(\tau)=R_X(\tau)=\sigma^2\cos\omega\tau$

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-2T}^{2T}\left(1-\frac{|\tau|}{2T}\right)C_X(\tau)d\tau=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-2T}^{2T}\left(1-\frac{|\tau|}{2T}\right)\sigma^2\cos\omega\tau d\tau$$

$$=\lim_{T\to\infty}\frac{\sigma^2(1-\cos 2\omega t)}{2T^2\omega^2}=0$$

例**2.6** 试讨论随机电报信号过程 $X(t)=X(0)(-1)^{N(t)}$ 的均值遍历性。其中 $P(X(0)=1)=P(X(0)=-1)=1/2,$ $N(t)$与$X(0)$相互独立，且$N(t)$为泊松过程.

解：由计算得知其自相关函数为 $R_X(\tau)=e^{-2\lambda|\tau|}$

显然当$\tau\to 0$时，$R_X(\tau)\to 0$，又因有$m_X=0$，

故当$\tau\to 0$时，$C_X(\tau)\to 0$，

所以由结论(4)知此X(t)的均值具有遍历性。

3 相关函数遍历性的充要条件

设{X (t) ,t ∈(-∞ ,+∞)}是均方连续的平稳过程，且对固定的τ, $Z(t)=X(t)X(t+\tau)$ 也是均方连续的平稳过程，则有

(1) $X(t)$的自相关函数具有遍历性的充要条件是

$$\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{2T}\int_{-2T}^{2T}\left(1-\frac{|\tau_1|}{2T}\right)\left(R_Z(\tau_1)-|R_X(\tau)|^2\right)d\tau_1=0$$

其中 $R_Z(\tau_1)=E\left[X(t)\overline{X(t+\tau)X(t+\tau_1)}X(t+\tau_1+\tau)\right]$

因为若令 $Z(t)=X(t)\overline{X(t+\tau)}$时，$X(t)$的自相关函数即为$Z(t)$的均值函数，由均值遍历性充要条件知，$Z(t)$具备均值遍历性的充要条件是

$$0=\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{2T}\int_{-2T}^{2T}\left(1-\frac{|\tau_1|}{2T}\right)C_Z(\tau_1)d\tau_1$$

$$=\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{2T}\int_{-2T}^{2T}\left(1-\frac{|\tau_1|}{2T}\right)\left(R_Z(\tau_1)-|m_Z|^2\right)d\tau_1$$

$$= \lim_{T\to+\infty}\frac{1}{2T}\int_{-2T}^{2T}\left(1-\frac{|\tau_1|}{2T}\right)\left(R_Z(\tau_1)-|R_X(\tau)|^2\right)d\tau_1$$

(2) 实均方连续的平稳过程$X(t)$的自相关函数具有遍历性的充要条件是

$$\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{T}\int_0^{2T}(1-\frac{\tau_1}{2T})(R_Z(\tau_1)-|R_X(\tau)|^2)d\tau_1$$

其中$R_Z(\tau_1)$的定义同上，且注意$R_Z(-\tau_1)=R_Z(\tau_1)$，

由（1）条立得此结论。

注 设{X(t),t≥0}是均方连续的平稳过程，且对固定的τ，$Z(t)=X(t)X(t+\tau)$ 也是均方连续平稳过程，则$X(t)$的自相关函数的遍历性定义可改写为

$$< \overline{X(t)X(t+\tau)} > \stackrel{\Delta}{=} \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T}\int_0^T \overline{X(t)X(t+\tau)}dt$$

且此时$X(t)$的自相关函数具备遍历性的充要条件为

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T\left(1-\frac{\tau_1}{T}\right)(R_Z(\tau_1)-|R_X(\tau)|^2)d\tau_1$$

4 均值函数与相关函数的估计式

从上述结果可知，如果平稳过程具备遍历性，则求其均值与自相关函数，不必利用平稳过程的一维及二维分布，只需利用样本函数求其时平均与时相关函数即可得到，这在实际应用中是非常有效的。

例如，设$X(t)$为某电阻两端的噪声电压，在固定的条件下，每隔一定时间（如Δt）测量一次，若在

若在时段内测量了n次，获得n个观测值，$x_1, x_2, \cdots, x_n$

则时平均近似值 $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k$ 可作为集平均的估计值，即

$$E[X(t)] = < X(t) > \approx \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k$$

类似的 $D[X(t)] = < X^2(t) > - < X(t) >^2$

$$\approx \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k^2 - \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^2$$

$$R_Z(\tau) = < X(t)X(t+\tau) > \approx \frac{1}{n-r}\sum_{k=1}^{n-r} x_k x_{k+r}$$