§5.1 平稳过程的基本概念

- 一、平稳过程
- 二、宽平稳过程
- 三、联合平稳过程

一、平稳过程

1. 严平稳过程定义

定义1.1　设{X (t) ,t $\in$T}为一随机过程，若对任意整数n，任意的

$$t_1, t_2, \cdots, t_n \in T,\quad t_1+\varepsilon, t_2+\varepsilon, \cdots, t_n+\varepsilon \in T$$

其n维分布函数相等，即

$$F_n(x_1,x_2,\cdots,x_n;t_1,t_2,\cdots,t_n)=F(x_1,x_2,\cdots,x_n;t_1+\varepsilon,t_2+\varepsilon,\cdots,t_n+\varepsilon)$$

则称此随机过程为严平稳过程，或称强（狭义）平稳过程。上式称之为平移不变性或严平稳性。

易见，严平稳过程的概率特性不随时间的平移而改变

例1.1 设{X (n),n≥1}为一随机过程，其中X (n), n=1,2,…相互独立且同分布，则此随机过程为严平稳过程。

这是因为对于任意的m及k

$$(X(n_1), X(n_2), \cdots, X(n_m))$$

与$(X(n_1+k), X(n_2+k), \cdots, X(n_m+k))$具有相同分布

如令X (n)=第n次投掷一枚硬币正面出现次数, 则{X (n),n≥1}构成一严平稳随机过程

又如令X (n)=测试同类型同一批次的第n只灯泡的寿命,则{X (n),n≥1}构成一严平稳随机过程

注1 一般来说，用定义去判断某个随机过程是否具有严平稳性是很困难的。若在实际问题中产生随机过程的主要物理条件在时间进行中保持不变，则可认为此过程就是严平稳的。

例如，一个工作在稳定状态下的接收机，其输出噪声就可以认为是严平稳的随机过程

又如，自由电子的不规则运动（热运动）引起电路中的电压或电流的随机波动(热扰动)，其概率特性可视为不随时间推移而变化，故此波动过程就是严平稳随机过程

另外，如某个地理位置上海浪的波高过程,照明用的电网中电压的波动过程，以及各种噪声和干扰的变化过程等等，在工程上都近似认为是严平稳的。

注2　严平稳性过程的所有样本曲线都在某一水平直线上下随机波动。

注3 当参数集T为离散时，严平稳过程称为严平稳序列,如例1.1中{X (n),n≥1}的即为严平稳序列。

2. 严平稳过程的基本性质

(1) 严平稳过程的一维分布函数与时间**t**无关

因为其一维分布函数为 $F(x,t)=F(x,t+\varepsilon)$

若令 ε =-t代入可得　$F(x,t)=F(x,0)=F(x)$

即严平稳过程的一维分布函数与时间t无关，此时其一维概率密度为 $f(x,t)=f(x)$

(2) 严平稳过程的二维分布与时间起点无关，只与时间间隔有关。

因为严平稳过程的二维分布函数为

$$F(x_1,x_2,t_1,t_2)=F(x_1,x_2,t_1+\varepsilon,t_2+\varepsilon)$$

若令 ε =-t_1代入可得

$$F(x_1,x_2,t_1,t_2)=F(x_1,x_2,0,t_2-t_1)=F(x_1,x_2,t_2-t_1)$$

其二维密度函数为

$$f(x_1,x_2,t_1,t_2)=f(x_1,x_2,t_2-t_1)$$

由上述性质易得严平稳过程的数字特征的相关性质

3. 严平稳过程的数字特征

(1)均值函数 $m_X(t) = E[X(t)]$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x,t)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \text{常数} = m_X$$

（2）均方值函数

$$\psi_X^2(t) = E[X^2(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x,t)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx = \text{常数}$$

（3）方差函数

$$D_X(t) = D[X(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - m_X)^2 f(x,t)dx$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} (x - m_X)^2 f(x)dx = \text{常数}$$

（4）自相关函数

$$\forall t_1,t_2 \in T \quad R_X(t_1,t_2)=E[X(t_1)X(t_2)]$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x_1x_2 f(x_1,x_2,t_1,t_2)dx_1dx_2$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x_1x_2 f(x_1,x_2,t_2-t_1)dx_1dx_2$$

$$=R_X(t_2-t_1)$$

即自相关函数与时间起点t_1无关，只与时间间隔 t_2-t_1有关。

（5）自协方差函数

$$C_X(t_1,t_2)=Cov(X(t),X(t_2))=R_X(t_1,t_2)-m_X(t_1)m_X(t_2)$$

$$=R_X(t_2-t_1)-m_Xm_X=C_X(t_2-t_1)$$

二、宽平稳过程

1. 宽平稳过程定义

定义1.2 设{X (t) ,t ∈T }为复（或实）随机过程，若满足条件

(1) $E[|X(t)|^2] < +\infty$

(2) $m_X(t) = E[X(t)] =$ 常数

(3) $R_X(t_1,t_2) = E[X(t_1)\overline{X(t_2)}] = R_X(t_2 - t_1)$

则称该过程为宽（或弱，广义）平稳过程。

即宽平稳过程是其均值函数为常数，且自相关函数仅与时间间隔有关的二阶矩过程。

例1.2 设随机过程{X (n) ,n=±1,±2,...}为实的互不相关随机变量序列，且 $E[X(n)]=0,\ D[X(n)]=\sigma^2$

其自相关函数为

$$E[X(n)X(m)]=\begin{cases}\sigma^2 & \text{当}n=m\text{时}\\ 0 & \text{当}n\neq m\text{时}\end{cases}$$

易见此过程为一宽平稳过程。

这个平稳序列称为离散白噪声 .

若再有$X(n)\sim N(0,\sigma^2)$, 则称其为正态白噪声。

例1.3 (随机相位周期过程)设s (t)是一个周期为2T的连续函数,Y是服从区间[-T,T]上均匀分布的随机变量.定义X (t)=s (t +Y)为随机相位周期过程,试讨论其平稳性.

解 (1) 连续的周期函数为有界函数,故X (t) 二阶矩有限

(2) X (t)的均值函数为

$$m_X(t)=E[X(t)]=E[s(t+Y)]=\int_{-\infty}^{+\infty}s(t+y)f_Y(y)dy$$

$$=\int_{-T}^{T}s(t+y)\frac{1}{2T}dy=\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}s(t+y)dy=\frac{1}{2T}\int_{-T+t}^{T+t}s(u)du$$

$$=\frac{1}{2T}\int_{-T+t}^{T+t}s(u)du=\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}s(u)du=\text{与}t\text{无关的常数}$$

（3）$R_X(t_1,t_2)=E[X(t_1)X(t_2)]$

$$=E[s(t_1+Y)s(t_2+Y)]=\int_{-\infty}^{+\infty}s(t_1+y)s(t_2+Y)f_Y(y)dy$$

$$=\frac{1}{2T}\int_{-T}^{+T}s(t_1+y)s(t_2+Y)dy=\frac{1}{2T}\int_{-T+t}^{+T+t}s(u)s(u+t_2-t_1)du$$

$$=\frac{1}{2T}\int_{-T+t}^{+T+t}s(u)s(u+t_2-t_1)du=\frac{1}{2T}\int_{-T}^{+T}s(u)s(u+\tau)du$$

即$R_X(t_1,t_2)$的值只与$\tau=t_2-t_1$有关，而与t_1无关。

因此随机相位周期过程X (t)=s (t +Y)为宽平稳过程.

例如X (t)=Sin (t +Y), X (t)=Cos (t +Y)等均为宽平稳随机过程.

例1.5 （随机电报信号过程）设随机过程

{X (t),t$\in[0,+\infty)\}$为 $X(t)=X(0)(-1)^{N(t)}$

其中$P(X(0)=1)=P(X(0)=-1)=\dfrac{1}{2}$,$\{N(t),t\in[0,+\infty)\}$为泊松过程

且$N(t)$和$X(0)$相互独立，试X (t)讨论的平稳性。

解 （1）因为$P(X(t)=1)=P(X(t)=-1)=1/2$

故$E[|X(t)|^2]=E[X^2(0)]=1^2\times\dfrac{1}{2}+(-1)^2\times\dfrac{1}{2}=1<+\infty$

（2）$m_X(t)=E[X(t)]=1\times\frac{1}{2}+(-1)\times\frac{1}{2}=0$

（3）$\forall t_1<t_2$

$$R_X(t_1,t_2)=E[X(t_1)X(t_2)]=E[X^2(0)(-1)^{N(t_1)+N(t_2)}]$$

$$=E[(-1)^{N(t_1)+N(t_2)}]=E[(-1)^{2N(t_1)+N(t_2)-N(t_1)}]=E[(-1)^{N(t_2-t_1)}]$$

$$=P(N(t_2-t_1)=\text{偶数})-P(N(t_2-t_1)=\text{奇数})$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{[\lambda(t_2-t_1)]^{2k}}{(2k)!}e^{-\lambda(t_2-t_1)}-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{[\lambda(t_2-t_1)]^{2k+1}}{(2k+1)!}e^{-\lambda(t_2-t_1)}$$

$$=e^{-\lambda(t_2-t_1)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{[-\lambda(t_2-t_1)]^k}{k!}=e^{-2\lambda(t_2-t_1)}$$

当$t_2<t_1$时，亦有 $R_X(t_1,t_2)=e^{-2\lambda(t_1-t_2)}$

故 $R_X(t_1,t_2)=e^{-2\lambda|t_1-t_2|}=R_X(t_2-t_1)$

因而X (t)为宽平稳随机过程.

2. 宽平稳过程的数字特征

设{X (t) ,t ∈T }为一宽平稳过程，则

（1）均值函数与时间t无关,即 $m_X(t)=m_X$ =常数

（2）均方值函数有限,即 $\psi_X^2(t)=E[|X(t)|^2]<+\infty$

（3）方差函数有限,即

$$D_X(t)=D[X(t)]=\psi_X^2(t)-|m_X(t)|^2<+\infty$$

（4）自相关函数 $R_X(t_1,t_2)==E\left[X(t_1)\overline{X(t_2)}\right]=R_X(t_2-t_1)$

具有下述性质：

1) $R_X(0)\geq 0$ 这因为 $R_X(0)=E\left[X(t)\overline{X(t)}\right]=E\left[|X(t)|^2\right]\geq 0$

2) $R_X(-\tau)=\overline{R_X(\tau)}$

因为$\overline{R_X(\tau)}=\overline{E\left[X(t)\overline{X(t+\tau)}\right]}=E\left[\overline{X(t)}X(t+\tau)\right]$

$$=E\left[X(t+\tau)\overline{X(t)}\right]=E(X(s)\overline{X(s-\tau)}]=R_X(-\tau)$$

3) $|R_X(\tau)|\le R_X(0)$

因为$|R_X(\tau)|^2=|R_X(t,t+\tau)|^2=|E(X(t)\overline{X(t+\tau)})|^2$

$$\le E[|X(t)|^2]E[|X(t+\tau)|^2]=R_X^2(0)$$

4) $R_X(\tau)$非负定

对于任意的自然数n，任意的$t_1,t_2,\cdots,t_n\in T$

及任意复数$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}\alpha_k\overline{\alpha_l}R_x(t_l-t_k)=\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}\alpha_k\overline{\alpha_l}E[X(t_k)X\overline{(t_l)}]$$

$$=E\left[\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}\alpha_k\overline{\alpha_l}X(t_k)\overline{X(t_l)}\right]=E\left[\left|\sum_{k=1}^{n}\alpha_k X(t_k)\right|^2\right]\geq 0$$

5) $|m_X(t)|^2\leq R_X(0)$

因为 $R_X(0)=E\left[X(t)\overline{X(t)}\right]$

$$=E\left[(X(t)-m_X(t))\overline{(X(t)-m_X(t))}\right]+|m_X(t)|^2$$

$$=D[X(t)]+|m_X(t)|^2\geq|m_X(t)|^2$$

（5）自协方差函数

$$C_X(t_1,t_2)=E\left[(X(t_1)-m_X(t_1))\overline{(X(t_2)-m_X(t_2))}\right]$$

$$=C_X(\tau)\quad(\tau=t_2-t_1)$$

具有与$R_X(t_1,t_2)$类似的性质

1） $C_X(\tau)\geq 0$

2） $C_X(-\tau)=\overline{C_X(\tau)}$

$3) |C_X(\tau)| \le C_X(0)$　　4） $C_X(\tau)$非负定

3. 宽平稳过程的简单性质

（1）设{X (t) ,t ∈(-∞ ,+∞)}为零均值的宽平稳过程，$R_X(\tau)$为其自相关函数，则X (t)为*k*（正整数）次均方可导的充分条件是$R_X(\tau)$在 τ =0处2*k*次可导且连续，此时$R_X(\tau)$ 2*k*次可微，且

$$E\left[X^{(l)}(t_1)\overline{X^{(m)}(t_2)}\right]=(-1)^l R_X^{(l+m)}(\tau) \quad (\tau=t_2-t_1)$$

（2）设{X (t) ,t ∈T }为均方可微的实宽平稳过程，则有

$$E[X(t)X'(t)]=0$$ 即 $X(t)$与 $X'(t)$互不相关

证 $$E\left[X(t_1)X'(t_2)\right]=\frac{\partial}{\partial t_2}EX(t_1)X(t_2)=\frac{\partial}{\partial t_2}R_X(t_2-t_1)$$

$$= R'_X(t_2 - t_1) = R'_X(\tau) \quad (\tau = t_2 - t_1)$$

而实平稳过程的自相关函数有性质 $R_X(\tau) = R_X(-\tau)$

故有 $R'_X(\tau) = -R'_X(-\tau)$

令 $\tau = 0$，即得 $R'_X(0) = -R'_X(0)$ 故此 $R'_X(0) = 0$

（3）如果宽平稳过程X (t) 满足条件：X (t)=X (t +L)，则称它为周期平稳过程，*L*为过程的周期。

周期平稳过程的自相关函数必为周期函数，且其周期与平稳过程的周期相同。即

$$R_X(\tau) = R_X(\tau + L)$$

证 $R_X(\tau + L) = E\left[X(t)\overline{X(t+\tau+L)}\right]$

$$= E\left[X(t)\overline{X(t+\tau)}\right] = R_X(\tau)$$

（4）设{X (t) ,t ∈(-∞ ,+∞)}为宽平稳过程

若当$\tau \to \infty$，$X(t)$与$X(t+\tau)$相互独立时,则有

$$\lim_{|\tau|\to\infty} C_X(\tau) = 0$$

因为$\lim\limits_{|\tau|\to\infty} R_X(\tau) = \lim\limits_{|\tau|\to\infty} E\left[X(t)\overline{X(t+\tau)}\right] = |m_X(t)|^2$

故有$\lim\limits_{|\tau|\to\infty} C_X(\tau) = \lim\limits_{|\tau|\to\infty} R_X(\tau) - |m_X(t)|^2 = 0$

例1.7 设实宽平稳过程{X (t) ,t ∈T }的自相关函数为

$$R_X(\tau) = 25 + \frac{4}{1+6\tau^2}$$

试求$X(t)$的均值与方差。

解 由$\lim\limits_{|\tau|\to\infty} R_X(\tau) = 25 = |m_X(t)|^2$ 知 $|m_X(t)| = 5$

即此实宽平稳过程的均值为 $m_X(t) = \pm 5$

故$D_X(t)=D[X(t)]=\psi_X^2(t)-m_X^2(t)$

$$=R_X(0)-m_X^2(t)=29-25=4$$

4. 严平稳过程与宽平稳过程的关系

（1）若X (t)是严平稳过程，若其二阶绝对原点矩有限，即$E\left[|X(t)|^2\right]<+\infty$，则X (t)必为宽平稳过程；

（2）若X (t)为宽平稳过程，它不一定是严平稳过程，但若X (t)为宽平稳的正态过程，则它必为严平稳过程。

这是因为正态过程的有限维分布完全由其自协方差函数决定，而自协方差只与时间间隔有关，而与时间起点无关，故宽平稳正态过程的有限维分布亦只与时间间隔有关，与时间起点无关，此即严平稳性，故宽平稳正态过程为严平稳过程。

易见,Wiener过程不是严平稳过程,但Wiener过程的增量过程却为严平稳过程:

例1.8 设{W(t),t⩾0}是参数为σ [2]的Wiener过程,a为正实数,令

$$X(t)=W(t+a)-W(t),\qquad t\geq 0$$

试证明{X(t),t⩾0}是严平稳的正态过程.

证 因为$X(t)=W(t+a)-W(t)$服从正态分布$N(0,a\sigma^2)$

故$m_X(t)=E[X(t)]=E[W(t+a)-W(t)]=0$

又因为$\forall t_1,t_2>0, R_W(s,t)=\sigma^2\min(t_1,t_2)$

所以 $\forall t_1<t_2 \quad R_X(t_1,t_2)=E[X(t_1)[X(t_2)]$

$$=E[(W(t_1+a)-W(t_1))(W(t_2+a)-W(t_2))]$$

$$=R_W(t_1+a,t_2+a)-R_W(t_1+a,t_2)-R_W(t_1,t_2+a)+R_W(t_1,t_2)$$

$$=\sigma^2\min(t_1+a,t_2+a)-\sigma^2\min(t_1,t_2+a)-\sigma^2\min(t_1+a,t_2)+\sigma^2\min(t_1,t_2)$$

$$=\sigma^2(t_1+a)-\sigma^2 t_1-\sigma^2\min(t_1+a,t_2)+\sigma^2 t_1$$

$$=\sigma^2(t_1+a)-\sigma^2\min(t_1+a,t_2)$$

$$R_X(t_1,t_2)=\begin{cases}\sigma^2(t_1+a)-\sigma^2(t_1+a)=0 & \text{如果} t_1+a<t_2\\ \sigma^2(t_1+a)-\sigma^2 t_2=\sigma^2[a-(t_2-t_1)] & \text{如果} t_1+a>t_2\end{cases}$$

同理可得 $\forall t_1>t_2$时，有

$$R_X(t_1,t_2)=\begin{cases}\sigma^2(t_1+a)-\sigma^2(t_1+a)=0 & \text{如果} t_1+a<t_2\\ \sigma^2(t_1+a)-\sigma^2 t_2=\sigma^2[a-(t_2-t_1)] & \text{如果} t_1+a>t_2\end{cases}$$

即得 $R_X(t_1,t_2)=\begin{cases}0 & \text{如果} t_2-t_1>a\\ \sigma^2[a-|t_2-t_1|] & \text{如果} t_2-t_1<a\end{cases}=R_X(t_2-t_1)$

因此,此X(t)是宽平稳的正态过程，即是严平稳的过程.

三、联合平稳过程

1 联合平稳过程定义

定义1.3 设{X (t) ,t ∈T }与{Y(t) ,t ∈T }为两个平稳过程，若对于任意的*t*，t+ τ ∈ T,满足条件：

$$E\left[X(t)\overline{Y(t+\tau)}\right]=R_{XY}(\tau)$$

则称*X* (*t*)与*Y* (*t*)平稳相关。或称*X* (*t*)、*Y* (*t*)为联合平稳过程。

易见，只当两个平稳过程的互相关函数只依赖于时间间隔τ，不依赖于时间起点*t*时，它们才是平稳相关的。

例1.9 设有两个随机过程：

$$\{X(t)=A\cos\omega t+B\sin\omega t,\quad t\in(-\infty,+\infty)\}$$

$$\{Y(t)=-A\sin\omega t+B\cos\omega t,\quad t\in(-\infty,+\infty)\}$$

其中A、B为不相关随机变量，$E(A)=E(B)=0, D(A)=D(B)=\sigma^2$

试讨论它们的平稳性.

解：由题设条件可知

$$m_X(t)=E[X(t)]=E[A\cos\omega t+B\sin\omega t]$$

$$=E(A)\cos\omega t+E(B)\sin\omega t=0$$

$$R_X(t,t+\tau)=E\left[X(t)X(t+\tau)\right]$$

$$=E\left[(A\cos\omega t+B\sin\omega t)(A\cos\omega(t+\tau)+B\sin\omega(t+\tau))\right]$$

$$=E(A^2)\cos\omega t\cos\omega(t+\tau)+E(B^2)\sin\omega t\sin\omega(t+\tau)$$

$$=\sigma^2\cos\omega\tau=R_X(\tau)$$

同理有 $m_Y(t)=0$ $R_Y(\tau)=\sigma^2\cos\omega\tau$

易见，此$X(t)$, $Y(t)$均为平稳过程。

又$X(t)$与$Y(t)$的互相关函数为

$$R_{XY}(t,t+\tau)=E\left[X(t)Y(t+\tau)\right]$$

$$=E\left[(A\cos\omega t+B\sin\omega t)(-A\sin\omega(t+\tau)+B\cos\omega(t+\tau))\right]$$

$$=-E(A^2)\cos\omega t\sin\omega(t+\tau)+E(B^2)\sin\omega t\cos\omega(t+\tau)$$

$$=-\sigma^2\sin\omega\tau=R_{XY}(\tau)$$

即$\{X(t)\}$与$\{Y(t)\}$是平稳相关的。

2 联合平稳过程的互相关函数的性质

(1) $R_{XY}(0) = R_{YX}(0)$

(2) $R_{XY}(-\tau) = \overline{R_{YX}(\tau)}$

(3) $|R_{XY}(\tau)|^2 \le R_X(0)R_Y(0), |R_{YX}(\tau)|^2 \le R_X(0)R_Y(0)$

(4) $2|R_{XY}(\tau)| \le R_X(0) + R_Y(0)$

3 平稳过程的和与积

（1）若$X(t)$与$Y(t)$平稳相关，则对于任意的复常数α、β， $\alpha X(t)+\beta Y(t)$亦为平稳过程，其相关函数为：

$$R_{\alpha X(t)+\beta Y(t)}(\tau) = |\alpha|^2 R_X(\tau) + \alpha\overline{\beta}R_{XY}(\tau) + \overline{\alpha}\beta R_{YX}(\tau) + |\beta|^2 R_Y(\tau)$$

（2）若$X(t)$与$Y(t)$相互独立，则$W(t)=X(t)Y(t)$亦为平稳过程，其相关函数为 $R_W(\tau) = R_X(\tau)R_Y(\tau)$