§4.2 随机质点的到达时间与时间间隔

一、随机质点的到达时间分布

二、随机质点的到达时间间隔的分布

一、随机质点的到达时间分布

1 随机质点的到达时间(等待时间)

设$\{N(t), t \geqslant 0\}$是一泊松过程，若用$N(t)$表示在

[0, t)时段内到达某“服务台”或“观测站”的“随机质点”数，以τ_n, $n=1,2,\ldots$表示第n个质点到达“服务台”的时刻，因为到达时间是随机发生的，故τ_n是随机变量

如第n位顾客在某时刻τ_n到达服务台

第n位旅客在时刻τ_n到达飞机场

易见 $\{N(t),t\geqslant 0\}$是连续时间参数计数过程，故此得出的到达时间 τ_n为连续型随机变量，它具有确定的分布函数与概率密度.

2 随机质点的到达时间的分布函数与概率密度

设$\{N(t),t\geqslant 0\}$是一泊松过程，$N(t)$表示$[0, t)$内随机质点出现的个数，τ_n 表示第n个质点到达服务点的时刻, n=1,2,...,由概率论定义，可知其分布函数为

$$F_{\tau_n}(t)=\begin{cases}1-\sum\limits_{k=0}^{n-1}\dfrac{(\lambda t)^k}{k!}e^{-\lambda t} & t>0\\ 0 & t\leq 0\end{cases}$$

其概率密度函数为

$$f_{\tau_n}(t)=\begin{cases}\dfrac{\lambda(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}e^{-\lambda t} & t>0\\ 0 & t\le 0\end{cases}$$

这种分布通常称为参数为n,λ的Γ分布Γ (n,λ)，或称为埃尔朗(Erlang)分布。

这是因为 $F_{\tau_n}(t)=P(\tau_n\le t)$

$$=P(N(t)\ge n)=\sum_{k=n}^{\infty}\frac{(\lambda t)^k}{k!}e^{-\lambda t}\quad (t\ge 0)$$

$$=1-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(\lambda t)^k}{k!}e^{-\lambda t}\qquad t>0$$

为 τ_n的分布函数 .

于是第n个随机质点到达时间 τ_n的概率密度为

$$f_{\tau_n}(t) = -\frac{d}{dt}\left[e^{-\lambda t}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(\lambda t)^k}{k!}\right]$$

$$= -\frac{d}{dt}\left[e^{-\lambda t}\left(1+\lambda t+\frac{(\lambda t)^2}{2!}+\cdots+\frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}\right)\right]$$

$$= \lambda e^{-\lambda t}\left[1+\lambda t+\frac{(\lambda t)^2}{2!}+\cdots+\frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}\right] - e^{-\lambda t}\left[\lambda+\frac{\lambda^2 t}{1!}+\cdots+\frac{\lambda^{n-1}\cdot t^{n-2}}{(n-2)!}\right]$$

$$= \frac{\lambda(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}e^{-\lambda t} = \lambda e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!} \quad t \geq 0$$

3 随机质点的到达时间的期望与方差

$$\boxed{(1)\quad E[\tau_n]=\frac{n}{\lambda}}\qquad \boxed{(2)\quad D[\tau_n]=\frac{n}{\lambda^2}}$$

(1) 因为 $E[\tau_n]=\int_0^{+\infty} tf_{\tau_n}(t)dt=\int_0^{+\infty} t\frac{\lambda(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}e^{-\lambda t}dt$

$$=-\frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}te^{-\lambda t}\Big|_0^{+\infty}+n\int_0^{+\infty}\frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}e^{-\lambda t}dt$$

$$=\frac{n}{\lambda}\int_0^{+\infty}\frac{\lambda(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}e^{-\lambda t}dt=\frac{n}{\lambda}$$

即第n个随机质点到达的平均等待时间$E(\tau_n)$等于n/λ.

(2) 由于$E[\tau_n^2]=\int_0^{+\infty} t^2 f_{\tau_n}(t)dt=\int_0^{+\infty} t^2 \frac{\lambda(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}e^{-\lambda t}dt$

$$=-\frac{(\lambda t)^{n-1}t^2}{(n-1)!}e^{-\lambda t}\bigg|_0^{+\infty}+\frac{(n+1)}{\lambda}\int_0^{+\infty}\frac{\lambda(\lambda t)^{n-1}t}{(n-1)!}e^{-\lambda t}dt$$

$$=\frac{(n+1)}{\lambda}E(\tau_n)=\frac{n(n+1)}{\lambda^2}$$

所以 $D[\tau_n]=E[\tau_n^2]-[E(\tau_n)]^2=\frac{n(n+1)}{\lambda^2}-\frac{n^2}{\lambda^2}=\frac{n}{\lambda^2}$

可见，若已知质点到达过程是强度为λ的泊松过程时，则等待的质点越多，波动值D(τ_n)也越大。

例2.1 设某个汽车站有A、B两辆跑同一路线的长途汽车。设到达该站的旅客数是一泊松过程，平均每10分钟到达15位旅客，而每个旅客进入A车或B车的概率分别为2/3与1/3。再设A车旅客数达到10位即开车，B车旅客数达到10位即开车，试求：

（1）A车与B车的等候时间分布；

（2）A车、B车的平均等候时间。

解：（1）由例1.12结果知，进入A车的旅客数是强度为1的泊松过程，其等待时间τ_{An}服从参数为n，$\lambda_A=1$的$\Gamma(n,1)$分布，其分布函数为

$$F_{\tau_{An}}(t)=\begin{cases}1-\sum_{k=0}^{n-1}\dfrac{t^k}{k!}e^{-t} & t>0\\ 0 & t\le 0\end{cases}$$

其密度函数为

$$f_{\tau_{An}}(t)=\begin{cases}\dfrac{t^{n-1}}{(n-1)!} & t\geq 0\\ 0 & t<0\end{cases}$$

类似可得B车的等候时间 τ_{Bn}的分布函数为

$$F_{\tau_{Bn}}(t)=\begin{cases}1-\sum_{k=0}^{n-1}\dfrac{(0.5t)^k}{k!}e^{-0.5t} & t>0\\ 0 & t\leq 0\end{cases}$$

其密度函数为

$$f_{\tau_{Bn}}(t)=\begin{cases}0.5\dfrac{(0.5t)^{n-1}}{(n-1)!}e^{-0.5t} & t>0\\ 0 & t\leq 0\end{cases}$$

（2）A车到达$n = 10$位旅客就开车的平均等候时间为

$$E(\tau_{An}) = \frac{n}{\lambda_A} = \frac{10}{1} = 10(\text{分钟})$$

B车到达$n = 10$位旅客就开车的平均等候时间为

$$E(\tau_{Bn}) = \frac{n}{\lambda_B} = \frac{10}{0.5} = 20\quad(\text{分钟})$$

易见,到达A车的强度是到达B车的强度的两倍时,则A车的平均等待时间只是B车的平均等待时间的一半.

二、随机质点到达时间间隔的分布

1 随机质点到达的时间间隔

设随机质点以强度为λ的泊松过程到达，$N(t)$表示在时段[0,t)内随机质点到达“服务台”的个数，

(1)用τ_i，i=1,2,...表示第i个随机质点到达服务台的时刻，其分布由前段结果可知

(2)用$T_i=\tau_i-\tau_{i-1}$表示第i-1个质点与第i个质点到达的时间间隔，可见,其分布可利用等待时间分布得出

特别令$\tau_0=0$，则$T_1=\tau_1$，表示第一个质点到达的时间，显然，T_i,i=1,2,..都是随机变量。

2 泊松过程与质点到达时间间隔的关系

定理2.1 计数过程为泊松过程的充要条件，是其质点到达时间间隔相互独立且服从相同的指数分布：

即 如果 $P(N(t)=k)=\dfrac{(\lambda t)^k}{k!}e^{-\lambda t} \qquad (\lambda>0)$

则每两个质点到达的时间间隔

$$T_1=\tau_1, T_2=\tau_2-\tau_1, \cdots, T_n=\tau_n-\tau_{n-1}, \cdots$$

相互独立且均服从参数为λ的指数分布，即其密度为

$$f(t)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda t} & t>0\\ 0 & t\le 0\end{cases} \qquad (\lambda>0)$$

反之亦然。

证：必要性： 设N (t)为一泊松过程，往证质点到达时间间隔相互独立且服从相同的指数分布

（1）先求$T_1=\tau_1$的分布

因为对于任意的t,事件$\{T_1>t\}$表示第一个质点在t时刻尚未到达，故应有

$$\{T_1>t\}=\{N(t)=0\},$$

故其概率为 $P(T_1>t)=P(N(t)=0)=e^{-\lambda t} \qquad t>0$

因而T_1的分布函数为

$$F(T_1\le t)=\begin{cases}1-e^{-\lambda t} & t>0\\ 0 & t\le 0\end{cases} \qquad (\lambda>0)$$

即T_1服从参数为λ的指数分布

（2）T_2的分布

设第一个质点到达时间为s_1，对于任意的t，由于平稳增量性,故落于区间$[s_1, s_1+t)$中的随机点的个数只与时间间隔有关,而与时间的起点无关,即条件概率

$$P(T_2 > t \mid T_1 = s_1) = P(N(s_1+t) - N(s_1) = 0)$$

$$= P(N(t) = 0) = e^{-\lambda t} \qquad (t > 0)$$

与s_1无关,所以T_2服从参数为λ的指数分布

又因为 $P(T_2 > t \mid T_1 = s_1) = P(T_2 > t) = P(N(t) = 0)$

故T_1与T_2相互独立（条件分布与无条件分布相等）。

（3） T_n的分布

实际上，对于 $n > 2$和 $t, s_1, s_2, \cdots, s_{n-1} \geq 0$,有

$$P(T_n > t \mid T_1 = s_1, T_2 = s_2, \cdots, T_{n-1} = s_{n-1})$$

$$= P(N(t + s_1 + s_2 + \cdots + s_{n-1}) - N(s_1 + s_2 + \cdots + s_{n-1}) = 0)$$

$$= P(N(t) = 0) = e^{-\lambda t}$$

所以T_n服从参数为λ的指数分布,且与T_1, T_2,… T_{n-1}相互独立. 由于n是任意的正整数,故任意的T_n服从参数为λ指数分布.且{T_n, n=1,2,...}相互独立.

再证充分性:设T_n服从参数为λ的指数分布,且与T_1, T_2,… ,相互独立,由 $T_n = \tau_n - \tau_{n-1}$ 及 $\tau_0 = 0$

得$\tau_n = (\tau_n - \tau_{n-1}) + (\tau_{n-1} - \tau_{n-2}) + \cdots + (\tau_2 - \tau_1) + (\tau_1 - \tau_0)$

$$= T_n + T_{n-1} + \cdots + T_2 + T_1 = \sum_{i=1}^{n} T_i$$

即为相互独立且同指数分布的随机变量之和.

(1)由概率论知识可得T_1+T_2的概率密度函数为

$$f_{T_1+T_2}(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_{T_1}(x)f_{T_2}(t-x)dx$$

$$=\int_0^t \lambda e^{-\lambda x}\cdot\lambda e^{-\lambda(t-x)}dx=\lambda^2\int_0^t e^{-\lambda t}dx=\lambda^2 te^{-\lambda t}$$

即其概率密度为$f_{T_1+T_2}(t)=\begin{cases}\lambda\dfrac{(\lambda t)^1}{1!}e^{-\lambda t} & t>0\\ 0 & t\le 0\end{cases}$

(2)假设$T_1+T_2+\ldots+T_{n-1}$的概率密度为

$$f_{\sum_{i=1}^{n-1}T_i}(t)=\begin{cases}\dfrac{\lambda(\lambda t)^{n-2}}{(n-2)!}e^{-\lambda t} & t>0\\ 0 & t\le 0\end{cases}$$

(3)则$T_1+T_2+\ldots+T_n$的概率密度为

$$f_{\sum_{i=1}^{n}T_i}(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_{\sum_{i=1}^{n-1}T_i}(x)f_{T_n}(t-x)dx$$

$$=\int_0^t\frac{\lambda(\lambda x)^{n-2}}{(n-2)!}e^{-\lambda x}\cdot\lambda e^{-\lambda(t-x)}dx$$

$$=\int_0^t\frac{\lambda^n\cdot x^{n-2}}{(n-2)!}e^{-\lambda t}dx=\frac{\lambda(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}e^{-\lambda t}$$

此即*Erlang*分布密度 $f_{\sum_{i=1}^{n}T_i}(t)=\begin{cases}\dfrac{\lambda(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}e^{-\lambda t} & t>0\\ 0 & t\le 0\end{cases}$

由归纳法知，一般地，τ_n服从参数为n，λ的埃尔朗分布.

又因事件$\{\tau_n<t\}$表示第n个质点在时刻t之前到达，这意味着$[0, t)$时段内至少到达n个质点，于是有

$$P(\tau_n \le t) = P(N(t) \ge n)$$

故得$N(t)$的概率分布为

$$\begin{aligned}
P(N(t)=k) &= P(N(t) \ge k) - P(N(t) \ge k+1) \\
&= P(\tau_k \le t) - P(\tau_{k+1} \le t) \\
&= \sum_{i=k}^{\infty} \frac{(\lambda t)^i}{i!} e^{-\lambda t} - \sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{(\lambda t)^i}{i!} e^{-\lambda t} \\
&= \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} \qquad k = 0,1,2,\cdots
\end{aligned}$$

由定义可知此N (t)是一强度为λ的泊松过程,定理得证.

例2.2 研究一机械装置，设它在[0, t)内发生的“震动”次数$N(t)$是强度为5（次/小时）的泊松过程，并且当第100次“震动”发生时，此机械装置发生故障，试求：

（1）这一装置寿命的概率密度；

（2）这一装置的平均寿命；

（3）两次“震动”时间间隔的概率密度；

（4）相邻两次“震动”的平均时间间隔。

解：（1）依题意，这一装置的寿命为τ_{100}，即第100次“震动”的等候时间，它服从参数为100，$\lambda=5$的埃尔朗分布，即寿命的概率密度为

$$f_{\tau_{100}}(t)=\begin{cases}\dfrac{5(5t)^{99}e^{-5t}}{99!} & t>0\\ 0 & t\le 0\end{cases}$$

(2) $E[\tau_{100}]=\dfrac{100}{5}=20$(小时） 为其平均寿命

（3）由定理2.1知，任意两次“震动”的时间间隔

$$T_n=\tau_n-\tau_{n-1}(n=1,2,\cdots)$$

服从参数为 λ 的指数分布，其密度为

$$\boxed{f_{T_n}(t)=\begin{cases}5e^{-5t} & t>0\\ 0 & t\le 0\end{cases}}$$

（4）相邻两次“震动”的平均时间间隔为

$$E[T_n]=\int_0^{+\infty}t\cdot 5e^{-5t}dt=\frac{1}{5}\ \text{(小时)}$$

3 查验计数过程是否泊松过程的统计方法

由定理2.1提供了一个查验计数过程是否泊松过程的统计方法,其检验步骤为

（1）用统计方法检验质点到达的时间间隔，是否相互独立；

（2）用假设检验方法检验假设

$$H_0: T_i = \tau_i - \tau_{i-1} \sim f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t} & t > 0 \\ 0 & t \le 0 \end{cases}$$

只要（1），（2）条成立，则可认定与时间t有关的质点流到达服务台的质点个数是一强度为λ的泊松过程。

Forward