§2.2 随机过程的分布与数字特征

- 一、随机过程的分布函数族
- 二、随机过程的数字特征与特征函数
- 三、复随机过程
- 四、二维随机过程

由于随机过程X (t)在任一时刻*t* 的状态是随机变量，所以可以利用随机变量（一维和多维）的分布和数字特征来描述随机过程的统计特性。

我们主要讨论随机过程X (t)的五大数字特征

(1) 均值函数

(2) 均方值函数

(3) 方差函数

(4) 自相关函数

(5) 自协方差函数

及随机变量的特征函数与

随机过程X (t)的特征函数

一、随机过程的分布函数族

定义2.1 设X (t)为随机过程，对任意固定的t，及实数x，称

$$F_1(x,t) \overset{\Delta}{\equiv} P(X(t) \le x) \quad t \in T$$

为随机过程的一维分布函数,而

$$\{F(x,t),\ \ x \in R, t \in T\}$$

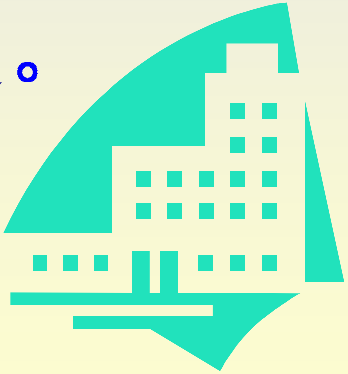
称为此随机过程的一维分布函数族.

例2.1

- 考虑随机过程

$$X(t)=X\cos\omega t,\ \ t\in T$$

- 此处ω为常数，**X**服从标准正态分布。试求**X (t)**的一维概率密度。



例2.1解答

在一个给定时刻t_0，随机变量$X(t_0)$为X的线性函数，而X服从标准正态分布N(0, 1)，由概率论知$X(t_0)$服从正态分布

$$N(0, \cos^2 \omega\, t_0)$$

故其一维概率密度为

$$f_1(x,t_0) = \frac{1}{|\cos\omega\, t_0|} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\cos\omega\, t_0}\right)^2\right\} \qquad (\cos\omega\, t_0 \neq 0)$$

例2.2

设随机过程为

$$Y(t) = te^{X}, \quad (t > 0)$$

其中*X*服从参数为λ的指数分布，

试求*Y*(*t*)的一维概率密度。

例2.2解答

- 因为 X ～Z(λ),即其概率为密度

$$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}\quad(\lambda>0)$$

而对于固定的t > 0，Y(t)的一维分布函数

$$F_1(y,t)=P(Y(t)\le y)=P(te^{X}\le y)$$

$$=\begin{cases}F_X(\ln\frac{y}{t}) & y>t\\ 0 & y\le t\end{cases}$$

二维分布函数族

- 定义2.2 设X(t)为随机过程，对于任意两个时刻t_1, t_2，及实数x_1, x_2，称

$$F_2(x_1,x_2,t_1,t_2)=P(X(t_1)\le x_1, X(t_2)\le x_2)$$

- 为随机过程的二维分布函数,而

$$\{F(x_1,x_2,t_1,t_2),\ \ x_1,x_2\in R, t_1,t_2\in T\}$$

- 称为此随机过程的二维分布函数族.

n维分布函数族

- **定义2.3** 设X (t)为随机过程，对于任意n个时刻 $t_1,t_2,\cdots,t_n \in T$，及实数 $x_1,x_2,\cdots,x_n \in R$，称

$$F_n(x_1,x_2,\cdots,x_n,t_1,t_2,\cdots,t_n)=P(X(t_1)\le x_1, X(t_2)\le x_2,\cdots, X(t_n)\le x_n)$$

为随机过程的n维分布函数。称关于随机过程X (t)的所有有限维分布函数的集合

$$\{F_n(x_1,x_2,\cdots,x_n,t_1,t_2,\cdots,t_n),t_1,t_2,\cdots,t_n \in T,n\ge 1\}$$

为X (t)的有限维分布函数族。

随机过程X (t)的有限维分布函数族的意义何在?

随机过程的n维分布函数（或概率密度）能够近似地描述随机过程的统计特性，而且，n越大，则n维分布函数越趋完善地描述随机过程的统计特性。所以有很多数学家研究了随机过程X (t)与其有限维分布函数族的关系，1931年，苏联数学家柯尔莫哥洛夫证明了关于有限维分布函数族的重要性的定理：

定理2.1(存在定理)

设$F=\{F_n(x_1,x_2,\cdots,x_n,t_1,t_2,\cdots,t_n),\ n\geq 1,\ t_i\in T\}$满足

（1）对称性：对于(1, 2, ..., n)的任一排列$i_1,i_2,\ldots,i_n$，有

$$F_n(x_{i_1},x_{i_2},\cdots,x_{i_n},t_{i_1},t_{i_2},\cdots,t_{i_n})=F(x_1,x_2,\cdots,x_n,t_1,t_2,\cdots,t_n)$$

（2）相容性，对于任意自然数$m<n$，随机过程的m维分布函数与n维分布函数之间有关系：

$$F_m(x_1,x_2,\cdots,x_m,t_1,t_2,\cdots,t_m)=F_n(x_1,x_2,\cdots,x_m,+\infty,\cdots,+\infty,t_1,t_2,\cdots,t_n)$$

则F必为某个随机过程的有限维分布族。即

$$F_n(x_1,x_2,\cdots,x_n,t_1,t_2,\cdots,t_n)=P(X_1(t)\leq x_1,X(t_2)\leq x_2,\cdots,X(t_n)\leq x_n)$$

例2.3　设 $X(t)=A+Bt,\ 0<a\le t\le b$ 为随机过程，其中A和B为随机变量, 相互独立,均服从正态分布N(0, 1) 。试求X (t)的n维分布函数。

解：因为A和B都服从标准正态分布，且相互独立，所以它们的线性组合也服从正态分布，且易知$X(t_1),\dots,X(t_n)$的任意线性组合均服从一维正态分布，故n元函数$(X(t_1),\dots,X(t_n))$服从n维正态分布.对于正态分布，只要知道它们的数学期望与协方差就可完全确定它们的分布，故此处只需求得X (t)的一阶矩和二阶矩即可。

对固定的t, EX(t)=E(A +Bt),而E(A)=E(B)=0,
故有EX(t)=0.

对固定的$t_1,\ldots,t_n$, $X(t_i)$与$X(t_j)$,i ,j=1,…,n 的协方差为

$$Cov(X(t_i),X(t_j))=E(X(t_i)-EX(t_j)(X(t_j)-EX(t_j))$$

$$=E(A+Bt_i)(A+Bt_j)$$

$$=E(A^2)+E(B^2)t_it_j=1+t_it_j$$

- 方差函数为

$$D[X(t_i)]=D[A+Bt_i]=1+t_i^2$$

因此, $(X(t_1),\ldots,X(t_n))$ 的概率密度,即$X(t)$的有限维概率密度为

$$f_n(x_1,x_2,\cdots,x_n,t_1,t_2,\cdots,t_n)=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}|C|^{\frac{1}{2}}}\exp\{-\frac{1}{2}x'C^{-1}x\}$$

- 其中

$$C=(1+t_it_j)_{n\times n} \qquad x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)'$$

二、随机过程的数字特征与特征函数

- **1. 随机过程的数字特征**
- 　　对于随机过程X (t)，固定时刻t，则X (t)为随机变量，它应具有相应的数字特征，我们据此定义随机过程的相应数字特征。
- （1）若对于任意给定的t，E X (t)存在，则称它为随机过程的均值函数，记为

$$m_X(t) = EX(t)$$

（2）若对于任意给定的t，$EX^2(t)$存在，则称 它为随机过程的均方值函数，记为

$$\psi_X^2(t)=EX^2(t)$$

（3）若对于任意给定的t，$E(X(t)-m_X(t))^2$存在，则称它为随机过程的方差函数，记为

$$D_X(t)=E(X(t)-m_X(t))^2$$

（4）若对于任意给定的t_1,t_2, $E[X(t_1)X(t_2)]$存在，则称它为随机过程的自相关函数,记为

$$R_X(t_1,t_2)=E[X(t_1)X(t_2)]$$

（5）若对于任意给定的t_1,t_2，存在

$E[(X(t_1)-m_X(t_1))(X(t_2)-m_X(t_2))]$

则称它为随机过程的自协方差函数，记为

$$C_X(t_1,t_2)=E[(X(t_1)-m_X(t_1))(X(t_2)-m_X(t_2))]$$

- 均值函数，均方值函数与方差函数是刻画随机过程在某个孤立时刻状态的数字特征，而自相关函数与自协方差函数则是刻画随机过程自身在两个不同时刻状态之间的线性依从关系的数字特征。

数字特征之间具有如下关系

$$\psi_X^2(t) = E[X^2(t)] = R_X(t,t)$$

$$C_X(t_1,t_2) = R_X(t_1,t_2) - m_X(t_1)m_X(t_2)$$

$$D_X(t) = C_X(t,t) = R_X(t,t) - m_X^2(t)$$

$$= \psi_X^2(t) - m_X^2(t)$$

例2.4 试求随机相位余弦波

$$X(t) = a\cos(\omega t + \Theta)$$

的均值函数，方差函数和自相关函数。 其中，a, ω为常数，Θ是在(0, 2π)上均匀分布的随机变量。

解: 因为 $\Theta \sim U(0, 2\pi)$ 其概率密度为

$$f(\theta) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi} & 0 < \theta < 2\pi \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

故有 $m_X(t) = E[X(t)] = E[a\cos(\omega t + \Theta)]$

$$=\int_0^{2\pi} a\cos(\omega t+\theta)\frac{1}{2\pi}\mathrm{d}\theta=0$$

$$R_X(t_1t_2)=E[X(t_1)X(t_2)]=E[a\cos(\omega t_1+\Theta)a\cos(\omega t_2+\Theta)]$$

$$=a^2E[\cos(\omega t_1+\Theta)\cos(\omega t_2+\Theta)]$$

$$=a^2\int_0^{2\pi}\cos(\omega t_1+\theta)\cos(\omega t_2+\theta)\frac{1}{2\pi}d\theta$$

$$=a^2\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}[\sin(\omega t_1+\omega t_2+2\theta)+\cos\omega(t_1-t_2)]\frac{1}{2\pi}d\theta$$

$$=\frac{a^2}{2}\cos\omega(t_2-t_1)$$

- 特别地，令$t_1=t_2=t$,即得 方差函数为

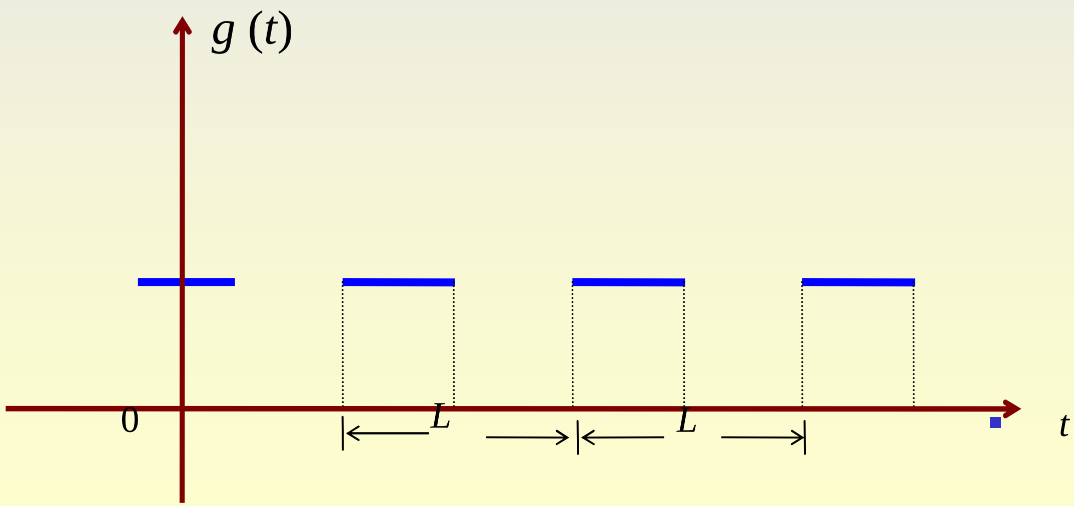
$$D_X(t)=R_X(t,t)-m_X^2(t)=\frac{a^2}{2}$$

例2.5 设g (t)是以L为周期的矩形波函数，如下图，X为服从两点分布的随机变量，其分布律为P(X= -1)=P(X=1)=1/2

令随机过程 Y (t)=g(t)X, 试求

$$m_Y(t), R_Y(t_1,t_2), C_Y(t_1,t_2), D_Y(t)$$

其中*g* (*t*)的图形为



解 因为 $E(X)=-1\times P(X=-1)+1\times P(X=1)=0$

$$E(X^2)=(-1)^2\times P(X=-1)+1^2\times P(X=1)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$$

$$m_Y(t)=E[Y(t)]=E[g(t)X]=g(t)E(X)=0$$

故有

$$R_Y(t_1,t_2)=E[Y(t_1)Y(t_2)]=E[g(t_1)X\times g(t_2)X]$$

$$=g(t_1)g(t_2)E(X^2)=g(t_1)g(t_2)$$

$$C_Y(t_1,t_2)=R_Y(t_1,t_2)-m_Y(t_1)m_Y(t_2)$$

$$=g(t_1)g(t_2)$$

$$D[Y(t)]=C_Y(t,t)=g(t)g(t)=g^2(t)$$

2° k维随机变量$Y_k=(X_1,X_2,\cdots,X_k)$的特征函数为

$$\varphi_{Y_k}(t_1,t_2,\cdots,t_k)=\varphi_{Y_n}(t_1,t_2,\cdots,t_k,0,\cdots,0)$$

3° 又设X_k的特征函数为$\varphi_k(t)$，且$X_1,X_2,\cdots,X_n$相互独立，

$$\varphi(t_1,t_2,\cdots,t_n)=\prod_{k=1}^{n}\varphi_k(t)$$

4° 多维分布函数与其特征函数一一对应，（唯一性）。

因此,可以借助特征函数来区别不同类型的随机变量.从而,我们讨论随机变量可从分布函数,数字特征与特征函数来开展随机变量的研究.

2　随机过程的特征函数定义

设有随机过程X(t)，对于每一个固定的t，X (t)为随机变量，依照随机变量的特征函数的定义，可知X (t)的特征函数记为

$$\varphi_X(t,v)=\varphi_{X(t)}(v)=E[e^{ivX(t)}]$$

我们称此为随机过程*X* (*t*)的一维特征函数。若*X* (*t*)为连续型随机变量，即具有一维概率密度函数$f_1(x,t)$，则其一维特征函数为

$$\varphi_{X(t)}(v)=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{ivx}f_1(x,t)dx$$

例2.6 试求随机过程 $X(t)=X_1+X_2t$ 的一维特征函数,其中X_1与X_2相互独立，且均服从正态分布 $N(0,\sigma^2)$。

解
$$\varphi_{x(t)}(v)=E[e^{ivX(t)}]=E[e^{iv(X_1+X_2t)}]$$
$$=E[e^{ivX_1}\cdot e^{ivX_2t}]$$

因X_1与X_2相互独立，且均服从正态分布

$N(0,\sigma^2)$ 因此有

$$\boxed{\varphi_{X(t)}(v)=E[e^{ivX_1}]\cdot E[e^{ivX_2t}]}\ \boxed{=\varphi_{X_1}(v)\varphi_{X_2}(tv)}$$

$$=e^{-\frac{\sigma^2v^2}{2}}\cdot e^{-\frac{\sigma^2(tv)^2}{2}}=e^{-\frac{\sigma^2v^2(1+t^2)}{2}}$$

注：$X\sim N(\mu,\ \sigma^2)$

则 $\varphi_X(v)=e^{iv\mu-\frac{\sigma^2v^2}{2}}$

随机过程X (t)的n维特征函数定义为：

$$\varphi_X(t_1,t_2,\cdots,t_n,\nu_1,\nu_2,\cdots,\nu_n)=E[e^{i[\nu_1X(t_1)+\nu_2X(t_2)+\cdots\nu_nX(t_n)]}]$$

随机过程X (t)的一维，二维，…，n维特征函数的全体

$$\{\varphi_X(t_1,\cdots,t_n,\nu_1,\cdots,\nu_n),\ \ t_1,\cdots,t_n\in T,\ \ n\geq 1\}$$

称为随机过程的有限维特征函数族。随机过程的特征函数族也能较全面描述该过程的统计特性，并具有与随机变量的特征函数相类似的性质。

三、复随机过程

定义2.4 设X (t)与Y (t)为二个实随机过程。则称

$$\{Z(t)=X(t)+iY(t),t\in T\}$$

为一复随机过程， 其中$i=\sqrt{-1}$为虚数单位

1. 复随机过程的分布函数

定义2.5 设Z(t)=X (*t*)+iY (*t*)) 为复随机过程，称 (*X* (*t*), *Y* (*t*))的联合分布函数为*Z* (*t*)的分布函数。即对于任意给定的$t_1, t_2,\ldots,t_n\in T$,

$$F(x_1,x_2,\cdots,x_n,y_1,y_2,\cdots,y_n,t_1,t_2,\cdots,t_n)$$

$$=P(X(t_1)\le x_1,\cdots,X(t_n)\le x_n,Y(t_1)\le y_1,\cdots,Y(t_n)\le y_n)$$

为Z (t)的2n维分布函数，而

$$\{F(x_1,x_2,\cdots;x_n,y_1,y_2,\cdots;y_n,t_1,t_2,\cdots;t_n),\quad t_1,t_2,\cdots;t_n\in T,n\geq 1)\}$$

称为Z (t)的有限维分布族。

2. 复随机过程的数字特征

定义2.6 复随机过程 $\{Z(t)=X(t)+iY(t),t\in T\}$ 的数字特征定义如下：

(1)对于任意t, $Z(t)$的均值函数为

$$m_Z(t)=E[Z(t)]=E[X(t)]+iE[Y(t)]=m_X(t)+im_Y(t)$$

（2）对于任意的t, Z (t)的均方值函数为

$$\psi_Z^2(t) = E[Z(t)\overline{Z(t)}]$$

（3）对于任意的t, Z (t)的方差函数为

$$D_Z(t) = D[(Z(t)] = E[(Z(t) - m_Z(t))\overline{(Z(t) - m_Z(t))}$$

（4）对于任意的t_1, t_2, Z (t)的自相关函数为

$$R_Z(t_1, t_2) = E[Z(t_1)\overline{Z(t_2)}]$$

（5）对于任意的t_1, t_2, Z (t)的自协方差函数为

$$C_Z(t_1, t_2) = E[(Z(t_1) - m_Z(t_1))\overline{Z(t_2) - m_Z(t_2))}]$$

Z (t)的数字特征之间有如下关系

$$\psi_Z^2(t)=E[Z(t)\overline{Z(t)}]=E[(X(t)+iY(t))\ \overline{(X(t)+iY(t))}]$$

$$=E[X^2(t)+Y^2(t)]=E[X^2(t)]+E[Y^2(t)]=\psi_X^2(t)+\psi_Y^2(t)$$

$$D_Z(t)=D[Z(t)]=E\{[(X(t)-m_X(t))+i(Y(t)-m_Y(t))]\times \overline{[(X(t)-m_X(t))+i(Y(t)-m_Y(t))]}\}$$

$$=E\{(X(t)-m_X(t))^2+(Y(t)-m_Y(t))^2\}$$

$$=D_X(t)+D_Y(t)$$

$$R_Z(t_1,t_2)=E[(X(t_1)+iY(t_1))\overline{(X(t_2)+iY(t_2))}]$$

$$=E[(X(t_1)+iY(t_1))(X(t_2)-iY(t_2))]$$

$$=E[(X(t_1)X(t_2)+iY(t_1)X(t_2)-iX(t_1)Y(t_2)-Y(t_1)Y(t_2)]$$

$$=R_X(t_1,t_2)+iR_{YX}(t_1,t_2)-iR_{XY}(t_1,t_2)+R_Y(t_1,t_2)$$

$$C_Z(t_1,t_2)=E[(Z(t_1)-m_Z(t_1))\overline{(Z(t_2)-m_Z(t_2))}]$$

$$=E[Z(t_1)\overline{Z(t_2)}-m_Z(t_1)\overline{Z(t_2)}-\overline{m_Z(t_2)}Z(t_1)+m_Z(t_1)\overline{m_Z(t_2)}]$$

$$=R_Z(t_1,t_2)-m_Z(t_1)\overline{m_Z(t_2)}$$

例2.7 设复随机过程为 $Z(t)=\sum_{k=1}^{n} A_k e^{i\omega_k t}$ A_k，k=1,…,n 为相互独立且服从正态分布 $N(0,\sigma_k^2)$ 的实随机变量，ω_k 为常数，试求 $m_Z(t), R_Z(t_1,t_2)$ 及 $C_Z(t_1,t_2)$

解：

$$m_Z(t)=E[Z(t)]=E[\sum_{k=1}^{n} A_k e^{i\omega_k t}]=\sum_{k=1}^{n} E(A_k)e^{i\omega_k t}=0$$

$$C_Z(t_1,t_2)=R_Z(t_1,t_2)-m_Z(t_1)\overline{m_Z(t_2)}$$

$$=R_Z(t_1,t_2)=E[Z(t_1)\overline{Z(t_2)}]$$

$$=E[(\sum_{k=1}^{n} A_k e^{i\omega_k t})(\overline{\sum_{l=1}^{n} A_l e^{i\omega_l t}})]$$

$$=E\left[\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} A_k A_l e^{i(\omega_k t_1-\omega_l t_2)}\right]$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\sigma_k^2(\cos\omega_k(t_1-t_2)+i\sin\omega_k(t_1-t_2))]$$

四、二维随机过程

定义2.7 设X (t)与Y (t)为二个随机过程，则 (X (t) ,Y (t))称为二维随机过程。对于任意给定的 $t_1,\ldots,t_n$及 $s_1,\ldots,s_m$，称n +m个随机变量 $X(t_1),\ldots,X(t_n),Y(s_1),\ldots,Y(s_m)$的联合分布函数

$$F_{n+m}(x_1,\cdots;x_n,t_1,\cdots;t_n,y_1,\cdots;y_m,s_1,\cdots;s_m)$$

为二维随机过程(X (t) ,Y (t))的 n +m 维分布函数。

二个随机过程的相互独立性

定义2.8 对于任意正整数n和m，以及任意给定的 $t_1,\ldots,t_n$及 $s_1,\ldots,s_m$,若二随机过程X (t)与Y (t)的联合分布函数恒为

$$F_{n+m}(x_1,\cdots,x_n,t_1,\cdots,t_n,y_1,\cdots,y_m,s_1,\cdots,s_m)$$

$$=F_n(x_1,\cdots,x_n,t_1,\cdots,t_n)F_m(y_1,\cdots,y_m,s_1,\cdots,s_m)$$

则称此二随机过程$X(t)$与$Y(t)$是相互独立的。

二随机过程的相关性

定义2.9　若X (t)与Y (t)为二个随机过程,则称

$$R_{XY}(t_1,t_2)=E[X(t_1)Y(t_2)]$$

为随机过程$X(t)$与$Y(t)$的互相关函数;

$$C_{XY}(t_1,t_2)=E\{[X(t_1)-m_X(t_1)][Y(t_2)-m_Y(t_2)]\}$$

为随机过程$X(t)$与$Y(t)$的互协方差函数。

特别地，若$C_{XY}(t_1,t_2)=0$，则称此二随机过程互不相关。