数字信号处理 II 作业（一） 姓名 杨博 2110436170 成绩

**作业要求：文字用五号宋体，图形应清晰可辨、坐标标注清楚准确。文档排版整洁美观。可以相互讨论，但编程和写作应独立完成。截止日期：2021-11-26**

请完成教材《数字信号处理——原理、算法与应用》P377 页，习题 7.32.

要求：有推导和结合 Matlab 结果图的分析。即：需要图形展示的地方，用图来说明理论结果或用理论来说明图的结果的合理性。

7.32

(a)

∵ $$Y(j\Omega)=\frac{1}{2\pi}P(j\Omega)*X(j\Omega)$$

$$=\frac{1}{2\pi}\left(T_0\frac{\sin\frac{\Omega T_0}{2}}{\frac{\Omega T_0}{2}}e^{-j\frac{\Omega T_0}{2}}\right)*[2\pi\delta(\Omega-\Omega_0)]$$

$$=\left(T_0\frac{\sin\frac{\Omega T_0}{2}}{\frac{\Omega T_0}{2}}e^{-j\frac{\Omega T_0}{2}}\right)*\delta(\Omega-\Omega_0)$$

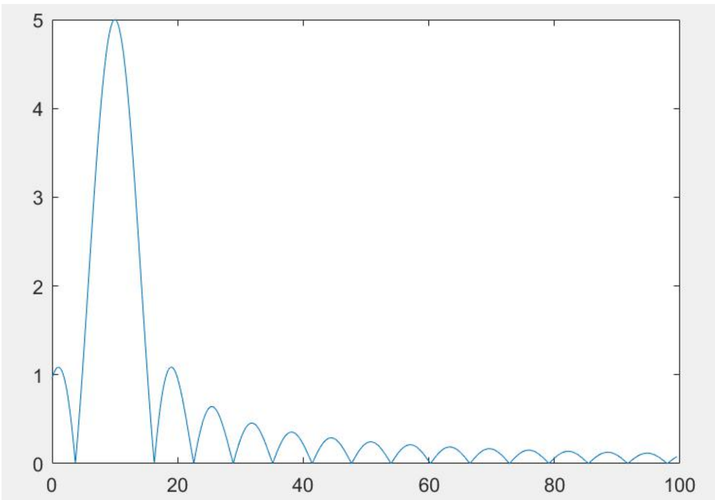
∴根据冲激函数 δ (t)的性质可得：

$$Y(j\Omega)=T_0\frac{\sin\frac{T_0(\Omega-\Omega_0)}{2}}{\frac{T_0(\Omega-\Omega_0)}{2}}e^{-j\frac{T_0(\Omega-\Omega_0)}{2}}$$

|Y(jΩ)|作图如下：

```
W = 20;
W0 = 2;
T0 = 5;
fs = 100;    % 采样频率
w = 0:1/fs:W-0.1;
l = length(w);
Y1 = T0*sinC(0.5*T0.*(w-W0));
plot(w*fs/W,abs(Y1));

function x = sinC(a)
    if(a==0)
        x=1;
    else
        x = sin(a)./a;
    end
end
```




(b)

∵x(n)是周期为 P 的周期序列，

∴ $\omega_0 P=2\pi k$ ， $k = 0, 1, 2, 3...$

即 $$\omega_0=\frac{2k}{\mathrm{P}}\pi$$

(c)

$$\because \quad y(n)=e^{j\omega_0 n}, 0\le n<N-1$$

$$\therefore \quad Y(\omega)=\sum_{n=0}^{N-1} e^{j\omega_0 n} e^{-j\omega n}$$

$$=\sum_{n=0}^{N-1} e^{-j(\omega-\omega_0)n}$$

$$=\frac{e^{-j(\omega-\omega_0)N}-1}{e^{-j(\omega-\omega_0)}-1}$$

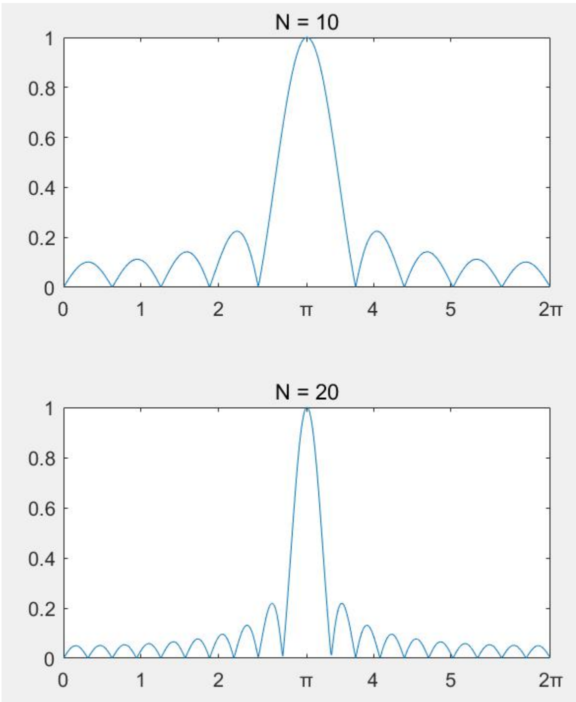
$$=\frac{\left(e^{-j\frac{(\omega-\omega_0)}{2}N}-e^{j\frac{(\omega-\omega_0)}{2}N}\right)}{\left(e^{-j\frac{(\omega-\omega_0)}{2}}-e^{j\frac{(\omega-\omega_0)}{2}}\right)}\cdot\frac{e^{-j\frac{(\omega-\omega_0)}{2}N}}{e^{-j\frac{(\omega-\omega_0)}{2}}}$$

$$=\frac{\sin\frac{N}{2}(\omega-\omega_0)}{\sin\frac{(\omega-\omega_0)}{2}}\cdot e^{-j\frac{N-1}{2}(\omega-\omega_0)}$$

根据 Y(ω)画出|Y(ω)|如下：
可以看到，当 N 越大时，|Y(ω)|的主瓣越窄；类似的，T0 对于 Y(jΩ)也有同样的效果。

```
N1 = 10;
N2 = 20;
W0 = pi;
fs = 100;      % 采样频率
w = 0:1/fs:2*pi;
subplot(211)
Y1 = sinC(N1,(w-W0)/2);
plot(w,abs(Y1/N1));title("N = 10");
axis([0 2*pi 0 1]);
subplot(212)
Y2 = sinC(N2,(w-W0)/2);
plot(w,abs(Y2/N2));title("N = 20");
axis([0 2*pi 0 1]);

function x = sinC(N,a)
    if(a == 0)
        x=N;
    else
        x = sin(N*a)./sin(a);
    end
end
```




(d)

$$\because\ y(n)=e^{j\frac{2\pi l}{N}n}, 0\le n<N-1$$

∴有

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Y}(k) &= Y(\omega)\big|_{\omega=\frac{2\pi}{N}k} \\
&= \sum_{n=0}^{\mathrm{N}-1} e^{j\frac{2\pi l}{N}n} \cdot e^{-j\frac{2\pi k}{N}n} \\
&= \frac{\sin \pi(k-l)}{\sin \dfrac{\pi(k-l)}{N}} \cdot e^{-j\frac{N-1}{N}\pi(k-l)}
\end{aligned}
$$

$$
\therefore \quad |\mathrm{Y(k)}| = \frac{|\sin \pi(k-l)|}{\left|\sin \dfrac{\pi(k-l)}{N}\right|}
$$

∵ *1, k, N∈Z,*

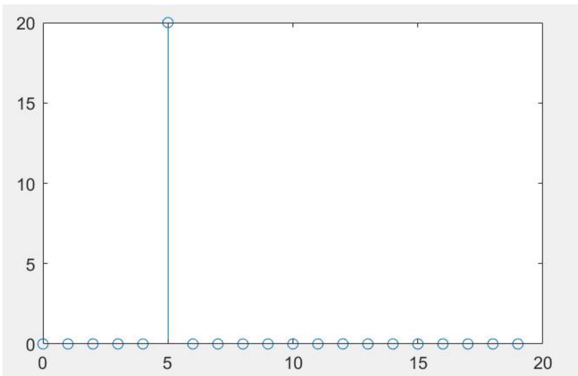
$$\therefore \sin \pi(k-l) \equiv 0, \sin \frac{\pi(k-l)}{N} \geq 0\text{，当且仅当}k-l=0\text{时}\sin \frac{\pi(k-l)}{N}=0$$

当 k-l=0 时，由 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{\sin \dfrac{x}{N}} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\dfrac{x}{N}} = N$ 得：

$$|\mathrm{Y(k)}| = \mathrm{N}\delta(\mathrm{k-l})$$

作图如下，当 k=l=N/P=5 时，Y(k)=N。

```
P = 4;
N = 20;
% l = N/P;
w = ones(1,N); % 长度为 N 的矩形序列
n = 0:N-1;
x = exp(1i*2*pi/P*n);
y = w.*x;
Y = fft(y);
stem(n,abs(Y));
```




(e)

不能从(d)中|Y(k)|获得|Y(ω)|的大致近似，一种近似|Y(ω)|的方法是把样本频率落在Y(ω)的零点上。例如，通过采样增加两倍，

$$\mathrm{Y}(\omega)\big|_{\omega=\frac{2\pi}{2N}k=\frac{\pi}{N}k,\ \mathrm{k}=0,1,\ldots 2N-1}$$