# 工程数学 II（矩阵理论） 第 1 次作业

## 矩阵基础与线性空间

（上交截止日期：**2020 年 10 月 27 日上课时提交**，不接受补交作业，

注意：分数按照步骤计算，对于只写结果的作业将会标记抄袭）

1. (8 分)设 V 是有序实数对的集合：V={(a，b)|a，b∈R},规定如下的加法与数乘运算：

$(1)(a,b)\oplus(c,d)=(a+c,b+d)$与$k\circ(a,b)=(k^2a,k^2b)$;

$(2)(a,b)\oplus(c,d)=(a+c,b+d+ac)$与$k\circ(a,b)=(ka,kb+\dfrac{k(k-1)}{2}a^2)$.

其中$k\in R$。请问 $V$ 对于以上两种运算是否构成 $R$ 上的线性空间。

2. (7 分)U 为实数域上多项式空间 $F[x]_4$ 的子空间

$$U=\{f(x)\mid f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3, a_0+a_1+a_2=0, a_1+a_2+a_3=0\}$$

求它的基与维数，并求 $-2x^3+4x^2-2x-2$在此基下的坐标。

3. (8 分)设线性空间 $V^4$ 的基（I）$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$和基（II）$(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4)$满足

$$\begin{cases}\alpha_1+2\alpha_2=\beta_3\\ \alpha_2+2\alpha_3=\beta_4\\ \beta_1+2\beta_2=\alpha_3\\ \beta_2+2\beta_3=\alpha_4\end{cases}$$

（1）求由基（I）变到基（II）的过渡矩阵；

（2）求向量 $a=2\beta_1-\beta_2+\beta_3+\beta_4$在基（I）下的坐标；

（3）判断是否存在非零元素 $b\in V^4$，使得 b 在基（I）和（II）下的坐标相同。

4. （8 分）在 $R^{2X2}$ 中，求由基（I）:

$$A1=\begin{bmatrix}2&1\\0&1\end{bmatrix},\quad A2=\begin{bmatrix}0&1\\2&2\end{bmatrix},\quad A3=\begin{bmatrix}-2&1\\1&2\end{bmatrix},\quad A4=\begin{bmatrix}1&3\\1&2\end{bmatrix}$$

到基（II）:

B1=$\begin{bmatrix}1 & 2\\ -1 & 0\end{bmatrix}$，B2=$\begin{bmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{bmatrix}$，B3=$\begin{bmatrix}-1 & 2\\ 1 & 1\end{bmatrix}$，B4=$\begin{bmatrix}-1 & -1\\ 0 & 1\end{bmatrix}$

的过渡矩阵。

5. （8 分）$R^4$ 中，设

$\alpha_1$=(1，2，2，3）$^T$, $\alpha_2$=(1，1，2，3)$^T$,

$\alpha_3$=(-1，1，-4，-5)$^T$, $\alpha_4$=(1，-3，6，7)$^T$。

（1）矩阵 **A**=($\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$)，求 *N*(**A**)的基及维数（其中 *N*(**A**)为矩阵 **A** 的零空间，即为齐次线性方程组 **Ax=0** 的解空间）

（2）记$\mathrm{R}(\mathbf{A})=\{\mathbf{y}|\mathbf{y}=\mathbf{Ax},\forall\mathbf{x}\in\mathrm{R}^4\}$为 A 的相空间，求 R(**A**)的基和维数。

6. （7 分）求在 $R^4$ 中由向量组$\{\alpha_i\}$生成的子空间与由向量组$\{\beta_j\}$生成的子空间的交与和的基及维数：

$$\begin{cases}\alpha_1=(2,1,3,1)^T\\ \alpha_2=(1,2,0,1)^T\end{cases}, \qquad \begin{cases}\beta_1=(-1,1,-3,1)^T\\ \beta_2=(1,1,1,1)^T\end{cases}$$

7. （8 分）设任一矩阵 **A**$\in P^{nxn}$，又给定矩阵 **C**$\in P^{nxn}$，定义变换 T 如下：T(A)= **CA**-**AC**. 证明：

（1）T 是 $P^{nxn}$ 中的线性变换；

（2）对任意 **A,B**$\in P^{nxn}$，有 T(**AB**)=T(**A**)**B** + **A**T(**B**).

8. （8 分）设 $R^3$ 中，线性变换 T 为：$\mathrm{T}(\alpha_i)=\beta_i$，i=1,2,3,其中

$\alpha_1$=(1,0，-1)$^T$, $\alpha_2$=(2,1,1)$^T$，$\alpha_3$=(1,1,1)$^T$

$\beta_1$=(0,1,1)$^T$, $\beta_2$=(-1,1,0)$^T$，$\beta_3$ =(1,2,1)$^T$，

（1）求 T 在基$\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}$下的矩阵；

（2）求 T 在标准基$\varepsilon_1=(1,0,0)^T,\varepsilon_2=(0,1,0)^T,\varepsilon_3=(0,0,1)^T$下的矩阵。

9. （7 分）在 $R^{2X2}$ 中定义下列线性变换：

$$T(A)=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}A$$

其中 $A\in R^{2X2}$,a,b,c,d 都是实数。

求 T 在基 $\mathbf{E}_{ij}$(第 i 行,第 j 列元素为 1，其余为 0 的二阶方阵)下的矩阵

10. （8 分）$\mu=(x_1,x_2),v=(y_1,y_2)$，验证$(\mu,v)=x_1y_1-x_1y_2-x_2y_1+3x_2y_2$是$R^2$中的内积。

11. （8 分）设欧式空间 $P[x]_2$ 中的内积定义为

$$(f,g)=\int_{-1}^{1}f(x)g(x)dx$$

（1）求基 1，x，$x^2$ 的度量矩阵；

（2）用坐标与度量矩阵乘积的形式计算$f(x)=1-x+x^2$与$g(x)=1-4x-5x^2$的内积。

12. （7 分）求齐次线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1+x_2-x_3+x_4-3x_5=0 \\ x_1+x_2-x_3+x_5=0 \end{cases}$$

的解空间（作为 $R^5$ 的子空间）的一组标准正交基。

13. （8 分）设 $e_1,e_2,e_3,e_4,e_5$ 是欧式空间 $V^5$ 的一组标准正交基， $V_1$=Span($\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$)，其中$\alpha_1=e_1+e_5$，$\alpha_2=e_1-e_2+e_4$，$\alpha_3=2e_1+e_2+e_3$，

求$V_1$的一组标准正交基。