§4.3 其它计数过程

一、非平稳（非齐次）泊松过程

二、更新过程

返回

一、非平稳（非齐次）泊松过程

1 非平稳（非齐次）泊松过程概念

定义**3.1** 若计数过程{N(t),t⩾0}满足下述条件

（1）$N(0)=0$（零初值性）；

（2） {N(t),t⩾0}为独立增量过程 ；

（3）对于足够小的时间Δt，有

$$P(N(t+\Delta t)-N(t)=1)=\lambda(t)\Delta t+o(\Delta t)$$

$$P(N(t+\Delta t)-N(t)\equiv 2)=o(\Delta t)$$

$$P(N(t+\Delta t)-N(t)=0)=1-\lambda(t)\Delta t+o(\Delta t)$$

则称此N（t)是非平稳泊松过程。

注1：定义3.1中增量仅具有相互独立性，而不具备增量平稳性，故谓之非平稳，或非齐次。即此处强度 $\lambda = \lambda(t)$ 与时间 t 有关，意味着这样的计数过程一定与时间起点有关，或者说在等长的时间间隔里，由于时间起点不同，计数过程的概率特性也有所不同，因此这种计数过程不再具有增量平稳性。

注2：在定义3.1中令 $\lambda = \lambda(t) =$ 常数，且增加计数过程的增量平稳性，则化为泊松过程（或称平稳(齐次)泊松过程）定义。

2 非平稳（非齐次）泊松过程的强度

定理3.1 若N (t)为非平稳泊松过程，则在时间间隔[t, t+ Δt)内出现*k*个质点的概率为

$$P(N(t+\Delta t)-N(t)=k)$$
$$=\frac{[m(t+\Delta t)-m(t)]^k}{k!}e^{-[m(t+\Delta t)-m(t)]} \qquad k=0,1,2,\cdots$$

其中$m(t)=\int_0^t \lambda(s)ds$ 称为非平稳泊松过程的强度.

若用N (t)表示[0,t)内到达的质点数,则m (t)就是[0,t)内平均到达的质点数.

易见,在上式中取t=0, Δt=t,即得

$$P(N(t)=k)=\frac{[m(t)]^k}{k!}e^{-[m(t)]}, k=0,1,2,\cdots$$

3 非平稳（非齐次）泊松过程的均值与方差

设N (t)是强度为m (t)的非平稳泊松过程，由于泊松分布的均值与方差相等,因此有

$$E[N(t)] = D[N(t)] = m(t)$$

例**3.1** 设{N(t),t⩾0}是一个非齐次泊松过程，其强度为

$$\lambda(t) = \frac{1}{2}(1 + \cos\omega t) \qquad t \geq 0$$

试求 （1）增量N (t+ Δt)-N (t)的概率分布；

（2） E [N (t)]和D[N (t)] 。

解：（1）由定理3.1知，增量

N（t，t+ Δt）=N（t+ Δt)-N（t）

的概率分布为

$$P(N(t+\Delta t)-N(t)=k)$$

$$=\frac{[m(t+\Delta t)-m(t)]^k}{k!}e^{-[m(t+\Delta t)-m(t)]} \qquad k=0,1,2,\cdots$$

其中$m(t)=\int_0^t \lambda(s)ds=\int_0^t \frac{1}{2}(1+\cos\omega\ s)ds$

$$=\frac{1}{2}(t+\frac{1}{\omega}\sin\omega\ t)$$

故$m(t+\Delta t)-m(t)=\frac{1}{2}(t+\Delta t+\frac{1}{\omega}\sin\omega(t+\Delta t))-\frac{1}{2}(t+\frac{1}{\omega}\sin\omega\ t)$

$$=\frac{1}{2}\Delta t+\frac{1}{2\omega}[\sin\omega(t+\Delta t)-\sin\omega\, t]$$

$$=\frac{1}{2}\Delta t+\frac{1}{\omega}\cos\omega(t+\frac{\Delta t}{2})\sin\frac{\omega\Delta t}{2}$$

(2) 因为N (t)服从参数为

$$m(t)=\int_0^t\lambda(s)ds=\frac{1}{2}(t+\frac{1}{\omega}\sin\omega\, t)$$

的泊松分布。故有

$$E[N(t)]=m(t)=D[N(t)]=\frac{1}{2}(t+\frac{1}{\omega}\sin\omega\, t)$$

二、更新过程

1. 更新过程概念

定义3.2 设$\{N(t),t\geqslant 0\}$是一计数过程，$\{T_n,n\geqslant 1\}$是一独立同分布随机过程，令

$$\tau_1=T_1,\tau_2=T_1+T_2,\cdots,\tau_n=\sum_{i=1}^{n}T_i,\cdots$$

且满足条件 $\{N(t)<n\}=\{\tau_n>t\}$ $\quad(t>0,n=1,2,\cdots)$

即有 $\{N(t)=n\}=\{\tau_{n+1}\geq t>\tau_n\}$

则称N (t)是一更新过程，称τ_n为第n个更新时刻，T_n为第n个更新间距。

注　　若N (t)为更新过程，且更新间距相互独立且同一指数分布时，即为前述的泊松过程，此时即 τ_n为前述的第n个质点的到达时间或等候时间，T_n则为前述中的第n-1个质点与第n个质点到达时间间隔。即泊松过程是一类特殊的更新过程.

更新过程在研究随机服务系统与系统可靠性理论方面起着非常重要的作用。

例3.2 考虑一个设备更新问题。假定从某一时刻（不妨设t=0开始）安装了某种设备，它一直使用到失效，并被另一个同类设备所替换，第*i*个设备的使用寿命为T_i, i=1,2,...，同类设备意味着$T_i(i\geqslant 1)$具有同一分布，再设任意设备的寿命不受任何其它设备的影响，此即意味着$T_i(i\geqslant 1)$相互独立，令

$$\tau_n=\sum_{i=1}^{n}T_i,\qquad n=1,2,\cdots$$

它表示被更换的*n*个设备的寿命总和，若用N（t）(t>0)表示在[0, *t*)时段内被更换的设备个数，显见$\{N(t)<n\}=\{\tau_n>t\}$成立，则此随机过程$\{N(t),t\geqslant 0\}$即为一个更新过程。

2 更新过程的分布

通过更新间距T_n的分布可以获得更新过程的一维分布函数,因为N (t)的一维分布函数

$$F_{N(t)}(n) = P(N(t) < n)$$

$$= P(\tau_n > t) = 1 - P(\tau_n \le t)$$

$$= 1 - F_{\tau_n}(t)$$

而$\tau_n = \sum_{i=1}^{n} T_i = T_1 + T_2 + \cdots + T_n$

由T_i, i=1,2,…的相互独立性,概率论中独立且同分布的随机变量的和的分布知识，可求得的N (t)的一维分布函数 $F_{N(t)}(n) = 1 - F_{\tau_n}(t) = 1 - P(\tau_n \le t)$

3. 更新过程的均值函数

设N (t)为更新过程，T_n为更新间距，τ_n为更新时刻，则$N(t)$的均值函数为

$$m_N(t)=\sum_{k=1}^{\infty}F_{\tau_k}(t) \qquad (t\ge 0)$$

因为$m_N(t)=E[N(t)]=\sum_{k=0}^{\infty}kP(N(t)=k) \quad (t\ge 0)$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}k[P(N(t)\ge k)-P(N(t)\ge k+1)]$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}k[P(\tau_n\le t)-P(\tau_{k+1}\le t)]=\sum_{k=0}^{\infty}k\left[F_{\tau_k}(t)-F_{\tau_{k+1}}(t)\right]$$

如果$F_{\tau_k}(t)$的一阶导数存在，即τ_k为连续型随机变量，其概率密度为 $f_{\tau_k}(t)$ $k=1,2,\cdots$

则此更新过程的更新强度为

$$\lambda(t)=\frac{d}{dt}m(t)=\sum_{k=1}^{\infty}f_{\tau_k}(t) \qquad (t\geq 0)$$

例**3.3** 设$\{N(t),t\geqslant 0\}$为一更新过程，其更新间距T_i，$i=1,2,\ldots$相互独立，且均服从同一$\Gamma(\alpha,\beta)$分布，即其概率密度为

$$f_{T_k}(t)=f(t)=\begin{cases}\dfrac{\beta}{\Gamma(\alpha)}(\beta t)^{\alpha-1}e^{-\beta t} & t>0\\ 0 & t\leq 0\end{cases}$$

试求$N(t)$的概率分布与均值函数。

解：由题设条件，更新时刻τ_k的分布由更新间距T_i，$i=1,2,\ldots$的和的分布确定，仍为Γ分布，即

$$\tau_n \sim \Gamma(n\alpha, \beta)$$

其概率密度为

$$f_{\tau_n}(t) = f(t) = \begin{cases} \dfrac{\beta}{\Gamma(n\alpha)}(\beta t)^{n\alpha-1} e^{-\beta t} & t > 0 \\ 0 & t \le 0 \end{cases}$$

故其分布函数为

$$F_{\tau_n}(t) = P(\tau_n \le t) = \begin{cases} \displaystyle\int_0^t \frac{\beta}{\Gamma(n\alpha)}(\beta t)^{n\alpha-1} e^{-\beta t} & t > 0 \\ 0 & t \le 0 \end{cases}$$

因为$P(N(t)=k)=P(N(t)\geq n)-P(N(t)\geq n+1)$

$$=P(\tau_n\leq t)-P(\tau_{n+1}\leq t)$$

$$=F_{\tau_n}(t)-F_{\tau_{n+1}}(t)$$

所以其均值函数为

$$m(t)=E[N(t)]=\sum_{k=1}^{\infty}F_{\tau_k}(t)$$

更新强度为 $\lambda(t)=\sum_{k=1}^{\infty}f_{\tau_k}(t)$

将相应的分布函数与密度函数代入即可.

上一节

特别的,当 $\alpha=\beta=1$时,更新间距T_i, i=1,2,…服从指数分布,故N (t)为泊松过程.