# 矩阵理论与方法

## Chapter 3-Matrix Factorization

Dr.Gongchao Su

College of Electrical and Information Engineering

Shenzhen University

gcsu@szu.edu.cn

Fall 2021

# 本章概要


1 矩阵三角分解

2 QR分解
- Householder矩阵
- Givens矩阵

3 矩阵的满秩分解

4 奇异值分解

5 矩阵的谱分解

# 矩阵三角分解 LU Factorization

**Lemma 1（高斯消元法的条件）**

如果n阶矩阵A的前n-1阶顺序主子式(前k行k列子矩阵行列式)皆不为0,则仅通过将某一行的倍数加到另一行上作初等行变化,可以将A化为1个上三角矩阵$A^{n-1}$ ($a_{k*}^{(k-1)}$:第k次消元时的基准行)

$$A^{n-1} = \begin{bmatrix} a_{11}^0 & a_{12}^0 & \cdots & a_{1n}^0 \\ & a_{22}^1 & \cdots & a_{2n}^1 \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn}^{n-1} \end{bmatrix}$$

将前n-1列下对角线元素通过行变换变为0,等于乘以n-1个行变换矩阵

$$L^{n-1}L^{n-2}\cdots L_1 A = A^{n-1}$$

$L_i, i = 1, \cdots, n-1$ 是消去第i列下三角元素的行变换矩阵

# 矩阵三角分解 LU Factorization

将矩阵第一行乘以系数$c_{21},\cdots,c_{n1}$去减后续n-1行以消去第一列下三角元素：

$$L_1=\begin{bmatrix}1&&&\\-c_{21}&1&&\\\cdots&&&\\-c_{n1}&&&1\end{bmatrix}\xrightarrow{L_1 invertible}L_1^{-1}=\begin{bmatrix}1&&&\\c_{21}&1&&\\\cdots&&&\\c_{n1}&&&1\end{bmatrix}$$

$$L_2=\begin{bmatrix}1&&&&\\&1&&&\\&-c_{32}&1&&\\\cdots&&&&\\&-c_{n2}&&&1\end{bmatrix}\xrightarrow{L_2 invertible}L_2^{-1}=\begin{bmatrix}1&&&&\\&1&&&\\&c_{32}&1&&\\\cdots&&&&\\&c_{n2}&&&1\end{bmatrix}$$

# 矩阵三角分解 LU Factorization

$$L_{n-1}L_{n-2}\cdots L_1 A = A^{n-1} \to A = \underbrace{L_1^{-1}L_2^{-1}\cdots L_n^{-1}}_{lowertriangular} \underbrace{A^{n-1}}_{uppertriangular} = LU$$

$$L_1^{-1}L_2^{-1}\cdots L_{n-1}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ c_{21} & 1 & & \\ \cdots & & \ddots & \\ c_{n1} & & c_{n,n-1} & 1 \end{bmatrix} = L$$

应用：求解线性方程组

$Ax = b \to LUx = b \xrightarrow{Ux=y} Ly = b, Ux = y$

Step 1：求解$Ly = b$，用向前消去法，求出$y_1, y_2, \cdots, y_n$

Step 2： 求解$Ux = y$，用向后回代法，求出$x_n, \cdots, x_2, x_1$

# 矩阵三角分解 LU Factorization

## Definition 1 (LU,LDU)

1. 如果$n$阶方阵$A$ 可以分解成一个下三角矩阵$K$ 和一个上三角矩阵$U$的乘积，$A=KU$,则 $A$可做三角分解
2. 如果$K$是单位下三角阵(对角线元素全为1),记为$L$，$A=LU$，$A$可做$LU$分解
3. 如果$A=LDU$，$D$为对角线矩阵,$L$,$U$为单位三角阵,则$A$可做$LDU$分解

## Example 1

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{LU} \begin{bmatrix} 1 & & \\ 0.5 & 1 & \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 2.5 & -0.5 \\ & & \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{LDU} \begin{bmatrix} 1 & & \\ 0.5 & 1 & \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & & \\ & 2.5 & \\ & & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -0.5 & 1.5 \\ & 1 & -0.2 \\ & & 1 \end{bmatrix}$$

# 矩阵三角分解 LU Factorization

## 三角分解不唯一性

KU分解是不唯一的. 任取一个对角阵$\Lambda$,则

$A = KU = K\Lambda\Lambda^{-1}U = K^{'}U^{'}$.并且不是所有的矩阵都有三角分解.

## Lemma 2 (LDU唯一性)

$n$阶方阵$A$可以唯一分解为$A = LDU$的充要条件是其前$n$-$1$个顺序主子式$\Delta_k \neq 0, k = 1, \cdots, n-1$. $L$,$U$为单位三角阵,$D$为对角阵,

$D = diag(d_1, d_2, \cdots, d_n)$,$d_1 = \Delta_1$,$d_k = \frac{\Delta_k}{\Delta_{k-1}}$

## Lemma 3 (LU分解唯一性)

$n$阶方阵$A$有唯一$LDU$分解$\leftrightarrow$ $A$有唯一$LU$分解

# 矩阵三角分解

$$\text{LU中的}U=\begin{bmatrix} a_{11}^{0} & a_{12}^{0} & \cdots & a_{1n}^{0} \\ & a_{22}^{1} & \cdots & a_{2n}^{1} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn}^{(n-1)} \end{bmatrix} \quad \text{LDU中的}U=\begin{bmatrix} 1 & \frac{a_{12}^{0}}{d_1} & \cdots & \frac{a_{1n}^{0}}{d_1} \\ & 1 & \cdots & \frac{a_{2n}^{1}}{d_2} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

$$d_1=a_{11}^{0}=\Delta_1,\ d_k=a_{kk}^{(k-1)}=\frac{\Delta_k}{\Delta_{k-1}}$$

**Lemma 4（LU分解充要条件）**

*$n$阶方阵$A$有$LU$分解的充要条件是前$n$-1个顺序主子式都不为0.*

**Lemma 5（三角分解充要条件）**

*$n$阶方阵$A$都有三角分解的充要条件是前$n$-1个顺序主子式都不为0.*

# 矩阵三角分解

**Lemma 6 (LU分解唯一性)**

如果$n$阶矩阵$A$非奇异, $rank(A) = n$, 则$LU$分解 ($LDU$分解) 一定是唯一的

**Proof.**

假设非奇异矩阵A有两个LU分解 $A = L_1U_1 = L_2U_2$, 显然L, U都可逆, $L_2^{-1}L_1 = U_2U_1^{-1}$. 左边为单位下三角阵, 右边为上三角阵, 等式成立的唯一可能是 $L_2^{-1}L_1 = U_2U_1^{-1} = I$. 因此$L_1 = L_2, U_1 = U_2$. □

如果A不满秩呢? $rank(A) = r < n, det(A) = 0$?

**Lemma 7 (降秩矩阵LU分解)**

$n$阶降秩矩阵$A$的$LU$或$LDU$分解不唯一. (不能保证唯一性)

Proof: 教材P60.

## Example 2

求矩阵$A=\begin{bmatrix}2 & -1 & 3\\ 1 & 2 & 1\\ 2 & 4 & 2\end{bmatrix}$的LU和LDU分解

Solution: 顺序主子式$\Delta_1=2,\Delta_2=5$.有LU和LDU分解.做2轮消元,消除第一列下三角元素的$L_1=\begin{bmatrix}1 & & \\ -0.5 & 1 & \\ -1 & 0 & 1\end{bmatrix}$ 逆矩阵$L_1^{-1}=\begin{bmatrix}1 & & \\ 0.5 & 1 & \\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}$,第1轮消元后的$A^{(1)}=L_1A=\begin{bmatrix}2 & -1 & 3\\ 0 & 2.5 & -0.5\\ 0 & 5 & -1\end{bmatrix}$ 第2轮消元的$L_2=\begin{bmatrix}1 & & \\ 0 & 1 & \\ 0 & -2 & 1\end{bmatrix}$.

$A^{(2)}=L_2A^1=\begin{bmatrix}2 & -1 & 3\\ 0 & 2.5 & -0.5\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\xrightarrow{DU}\begin{bmatrix}2 & & \\ & 2.5 & \\ & & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -0.5 & 1.5\\ 0 & 1 & -0.2\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$. $L=L_1^{-1}L_2^{-1}=\begin{bmatrix}1 & & \\ 0.5 & 1 & \\ 1 & 2 & 1\end{bmatrix}$.因此LU分解$A=\begin{bmatrix}1 & & \\ 0.5 & 1 & \\ 1 & 2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & -1 & 3\\ 0 & 2.5 & -0.5\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$,LDU分解 $A=\begin{bmatrix}1 & & \\ 0.5 & 1 & \\ 1 & 2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & & \\ & 2.5 & \\ & & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -0.5 & 1.5\\ 0 & 1 & -0.2\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$

**Example 3 ($LDL^T$)**

求矩阵$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$的LU和LDU分解.

Solution:同理求出$A = LU = \begin{bmatrix} 1 & & \\ 0.5 & 1 & \\ 0.5 & 0.6 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2.5 & 1.5 \\ 0 & 0 & 0.6 \end{bmatrix}$

$$A = LDU = \begin{bmatrix} 1 & & \\ 0.5 & 1 & \\ 0.5 & 0.6 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & & \\ & 2.5 & \\ & & 0.6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0.5 & 0.5 \\ & 1 & 0.6 \\ & & 1 \end{bmatrix}.$$

**Lemma 8 ($LDL^T$)**

若$A$是对称矩阵且有$LU$分解,则$A = LDL^T$

Proof: $A = LU \rightarrow L^{-1}AL^{-T}$是对称阵,$L^{-1}AL^{-T} = L^{-1}LUL^{-T} = \underbrace{U}_{uppertriangle} \underbrace{L^{-T}}_{uppertriangle}$, $UL^{-T}$ 上三角且对称,一定为对角阵D.则$A = LDL^T$.

**Definition 2 (置换矩阵 Permutation Matrix)**

将单位矩阵$I$的列向量任意排列,得到的矩阵称为置换矩阵$P$.

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow$$ PA:A第1行和第2行互换; $$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow$$

PA:原A的第3,1,2行

# LU分解,置换矩阵

**Lemma 9 (置换矩阵性质)**

$P$的逆矩阵仍然为置换矩阵,多个置换矩阵的乘积仍是置换矩阵.

**Lemma 10**

若$A$是$n$阶非奇异矩阵,则存在置换矩阵$P$使得$PA$的前$n$个顺序主子式均不为$0$

**Lemma 11**

若$A$是$n$阶非奇异矩阵,则存在置换矩阵$P$使得$PA = L\widehat{U} = LDU$.

# LU分解的应用

求解$Ax=b$,若A不满秩,则$A^{-1}$不存在,不能得到$x=A^{-1}b$.此时可以用LU分解. $LUx=Pb \xrightarrow{Ux=y} Ly=Pb, y=L^{-1}Pb$.再解$Ux=y$.
若U可逆,则 $x=U^{-1}L^{-1}Pb$.

**Example 4**

求解线性方程组

$$\begin{cases} x_1+4x_2+7x_3=1 \\ 2x_1+5x_2+8x_3=1 \\ 3x_1+6x_2+11x_3=1 \end{cases}$$

# LU分解的应用

Solution: $A=\begin{bmatrix}1&4&7\\2&5&8\\3&6&11\end{bmatrix}, \Delta_1=1, \Delta_2=-3$,有LU分解.

$$A=\begin{bmatrix}1&&\\2&1&\\3&2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&4&7\\0&-3&-6\\0&0&2\end{bmatrix}\quad y=L^{-1}b\ \rightarrow\ y=(1,-1,0)^T\ \rightarrow$$

$$Ux=y\ \rightarrow\ x=U^{-1}y=(\tfrac{-1}{3},\tfrac{1}{3},0)^T.$$

**Definition 3 (Doolittle和Crout分解)**

若$n$阶方阵$A$有$LDU$分解,$A$=$LDU$, 则$A=L(DU)=LU'$称为*Doolittle*分解($L$是单位三角阵,就是$LU$分解),$A=(LD)U=L'U$称为*Crout*分解($U$是单位三角阵)

# QR分解

**Definition 4 (QR分解)**

如果复矩阵(实矩阵)$A$可以分解为一个酉矩阵(正交矩阵)和一个复(实)上三角矩阵$R$的乘积,则$A=QR$. 称为$A$的$QR$分解.

**Lemma 12 (方阵的QR分解)**

一个非奇异的方阵$A$存在一个酉矩阵(正交矩阵)$Q$和一个正线(对角线元素全为正数)的上三角矩阵$R$,使得$A=QR$.

Proof: A非奇异,因此A的列向量组$\xi_1, \cdots, \xi_n$线性无关,用Schmidt正交法可求出一组正交基$\beta_1, \cdots, \beta_n$. $\beta_1 = \xi_1, \beta_2 = \xi_2 - k_{21}\beta_1, \cdots$,则可以将向量组$\xi$用正交向量组$\beta$ 表示, $[\xi_1|\xi_2|\cdots|\xi_n] = [\beta_1|\beta_2|\cdots|\beta_n]\begin{bmatrix} 1 & k_{21} & \cdots & k_{n1} \\ & 1 & \cdots & \\ & & \ddots & k_{n,n-1} \\ & & & 1 \end{bmatrix}$.

# QR分解

将$\beta$单位化后得到单位正交基$\gamma$,则

$$A=[\gamma_1|\gamma_2|\cdots|\gamma_n]diag(\|\beta_1\|,\|\beta_2\|,\cdots,\|\beta_n\|)\begin{bmatrix}1 & k_{21} & \cdots & k_{n1}\\ & 1 & \cdots & \\ & & \ddots & k_{n,n-1}\\ & & & 1\end{bmatrix}$$

其中$k_{ij}=\frac{(\xi_i,\beta_j)}{(\beta_j,\beta_j)}$.显然结论成立.并且Q就是一组$span(\xi_1,\cdots,\xi_n)$的标准正交基组成的正交矩阵.

# QR分解

**Lemma 13（列满秩长方矩阵的QR分解）**

$A \in C^{n\times r}, rank(A) = r$. 则存在$n$阶酉矩阵$Q$和$r$阶正线上三角矩阵$R$,使得$A = Q\begin{bmatrix} R \\ 0 \end{bmatrix}$.

Proof:设$A = [\xi_1|\xi_2|\cdots|\xi_r]$,则存在n-r个向量$\xi_{r+1},\cdots,\xi_n$使得$\xi_1,\cdots,\xi_n$是$R^n$的一组基.则 $A' = [A|A_1] = QR_1 = Q\begin{bmatrix} \overbrace{R}^{r\times r} & C \\ & \underbrace{R_0}_{n-r\times n-r} \end{bmatrix}$

则$A = Q\begin{bmatrix} R \\ 0 \end{bmatrix}$

**Example 5**

用Schmidt正交法求矩阵$A=\begin{bmatrix}3&4&19\\6&43&3\\6&22&15\end{bmatrix}$的QR分解.

Solution: 列向量$\xi_1=(3,6,6)^T$,$\xi_2=(4,43,22)^T$,$\xi_3=(19,3,15)^T$.

$rank(A)=3$. 直接用Schmidt正交法求正交基$\beta_1,\beta_2,\beta_3$.

$\beta_1=(3,6,6)^T$,$\beta_2=(-2,11,10)^T$,$\beta_3=\frac{1}{5}(14,-2,-5)^T$.

$\|\beta_1\|=9$,$\|\beta_2\|=15$,$\|\beta_3\|=3$. $\frac{(\xi_2,\beta_1)}{\|\beta_1\|}=48$,$\frac{(\xi_3,\beta_1)}{\|\beta_1\|}=15$,$\frac{(\xi_3,\beta_2)}{\|\beta_2\|}=-9$.

单位正交基$\gamma_1=\frac{1}{3}(1,2,2)^T$,$\gamma_2=\frac{1}{15}(-2,11,10)^T$,$\gamma_3=\frac{1}{15}(14,-2,-5)^T$. 因此 $Q=[\gamma_1|\gamma_2|\gamma_3]\begin{bmatrix}9&48&15\\&15&-9\\&&3\end{bmatrix}$

# 初等反射矩阵

**Example 6 (旋转矩阵)**

设正交矩阵$Q \in R^2 = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$，显然$Q^T = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$，$QQ^T = Q^TQ = I$. 并且$y = Q^Tx$ 即是将x逆时针旋转$\theta$角度.

**Example 7 (反射矩阵)**

设正交矩阵$Q \in R^2 = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{bmatrix}$,显然$Q = Q^T, QQ^T = I$. 并且$y = Qx = Q^Tx$ 是将x沿线$s = span\left\{\begin{bmatrix} \cos\frac{\theta}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2} \end{bmatrix}\right\}$进行反射.

**Definition 5**

Householder矩阵 令$\mu \in R^n$是单位列向量$(\mu,\mu)=1$,,$n$阶方阵$H=I-2\mu\mu^T$称为初等反射矩阵,也称为Householder矩阵.它是对称矩阵,正交矩阵.

Proof: $H^T=(I-2\mu\mu^T)^T=I-2\mu\mu^T=H$.
$H^TH=(I-2\mu\mu^T)(I-2\mu\mu^T)=I-4\mu\mu^T+4\mu\mu^T=I$.

**Definition 6**

令$\gamma \in R^n$, $H=I-\frac{2}{(\gamma,\gamma)}\gamma\gamma^T=I-\frac{2\gamma\gamma^T}{\gamma^T\gamma}$是householder矩阵

注: 令$\mu=\frac{\gamma}{\|\gamma\|}$即可.

**Lemma 14 (Householder矩阵物理意义)**

令非零向量$x=(x_1,\cdots,x_n)^T\in R^n$,单位向量$e_1=(1,0,\cdots,0)^T$,则存在Householder矩阵$H=I-2\mu\mu^T$使得 $Hx=\|x\|\varepsilon_1=\begin{bmatrix}\|x\|\\0\\\dots\end{bmatrix}$

**Proof.**

$Hx=(I-\frac{2\mu\mu^T}{\mu^T\mu})x\xrightarrow{\mu\mu^Tx=\mu^Tx\mu}=x-\frac{2\mu^Tx}{\mu^T\mu}\mu$ 要使得Hx是$e_1$的倍数,则$\mu\in span\{x,e1\}$.令$\mu=x+\alpha e_1$,有$\mu^Tx=x^Tx+\alpha x_1$,$\mu^T\mu=x^Tx+2\alpha x_1+\alpha^2$. 则

令$\alpha=\pm\|x\|$,有$\mu=x\pm\|x\|e_1$,$Hx=(I-2\frac{\mu\mu^T}{\mu^T\mu})x=\mp\|x\|e_1$. □

这意味着,按照和高斯消元法类似的做法,可以将矩阵下对角线元素逐列全部清零,从而得到上三角矩阵R.

**Lemma 15 (QR分解)**

$A \in R^n$为非奇异矩阵,则存在有限个$Householder$矩阵乘积构成的正交矩阵$Q$和一个实上三角矩阵$R$,使得$A$=$QR$.

**Lemma 16 (长方矩阵QR分解)**

$A \in R^{m\times n}$,则存在$m$阶正交矩阵$Q$和$m \times n$阶上三角矩阵$R$使得$A$=$QR$.

**Example 8**

用初等反射矩阵求矩阵$A=\begin{bmatrix}3 & 14 & 9\\ 6 & 43 & 3\\ 6 & 22 & 15\end{bmatrix}$的QR分解

Step 1: 求各列的Householder矩阵.

第1列:$x_1=(3,6,6)^T$,则$\mu=x_1-\|x_1\|e_1$,单位化后得

到$\mu=\frac{1}{\sqrt{3}}(-1,1,1)^T$.则 $H_1=I-2\mu\mu^T=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}1 & 2 & 2\\ 2 & 1 & -2\\ 2 & -2 & 1\end{bmatrix}$. 则第1列

消元后$A_1=H_1A=\begin{bmatrix}9 & 48 & 15\\ 0 & 9 & -3\\ 0 & -12 & 9\end{bmatrix}$. 对$A_1=\begin{bmatrix}9 & -3\\ -12 & 9\end{bmatrix}$消元.

同理可得单位化后的$\mu = -\frac{1}{\sqrt{5}}(1,2)^T$.则

$$H_2' = I - 2\mu\mu^T = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -4 & -3 \end{bmatrix}. \quad 则 H_2 = \begin{bmatrix} 1 & \\ & H_2' \end{bmatrix} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -4 \\ 0 & -4 & -3 \end{bmatrix}$$

Step 2: $R = H_2 H_1 A = \begin{bmatrix} 9 & 48 & 15 \\ 0 & 15 & -9 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$.

$$Q = H_1^{-1} H_2^{-1} = H_1^T H_2^T = \frac{1}{15}\begin{bmatrix} 5 & -2 & -14 \\ 10 & 11 & 2 \\ 10 & -10 & 5 \end{bmatrix}$$

**Definition 7 (Givens矩阵)**

$c, s \in R$ , $c^2 + s^2 = 1$ , 矩阵 $G_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & c & \cdots & s & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & -s & \cdots & c & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$ , $c$在第 $i$行第 $i$列和第 $j$行第 $j$列, $s$:第 $i$行第 $j$列, $-s$:第 $j$行第 $i$列, $i<j$,其余为单位阵.称为Givens矩阵,即初等旋转矩阵.

# 初等旋转矩阵Givens矩阵

**Givens Rotations**

设$c=\cos\theta, s=\sin\theta$,则$G_{ij}$可以表示为$G(i,j,\theta)$.

**Lemma 17 (Givens Rotations性质)**

(1)$G_{ij}$是正交矩阵.

(2)$x\in R^n$,则$y=(y_1,\cdots,y_n)=G_{ij}x$,其中

$$y_k=\begin{cases} cx_i+sx_j, k=i \\ -sx_i+cx_j, k=j \\ x_j, k=i=j \end{cases}, k=1,\cdots,n$$

若$c=\frac{x_i}{\sqrt{x_i^2+x_j^2}}$,$s=\frac{x_j}{\sqrt{x_i^2+x_j^2}}$,则有$y_j=0$,$y_i=\sqrt{x_i^2+x_j^2}$.

显然通过Givens rotations可以将向量指定元素清零.

# 初等旋转矩阵Givens矩阵

**Lemma 18 (Givens Rotations)**

设$A$为$n$阶非奇异矩阵,则存在有限个初等旋转矩阵的乘积构成的正交矩阵$Q$和一个实上三角矩阵$R$,使得$A = QR$.

**Example 9**

用初等旋转矩阵求矩阵A的QR分解. $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Solution: Step 1: 将第1列第2行元素清零.

j=2,则i=1,$c=\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}}=0$,$s=\frac{x_2}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}}=1$, $G_{12}=\begin{bmatrix} \underline{0} & \underline{1} & 0 \\ \underline{-1} & \underline{0} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$,此时第一列

改变第1行元素清零了第2行元素; Step 2: 此时第1列

为$G_{12}b^{(1)}=(1,0,1)^T$,将其第3行元素清零. 选择Givens矩阵$G_{13}$,保留

第2行,$c=\frac{1}{\sqrt{2}}=s$, $G_{13}=\begin{bmatrix} \underline{\frac{1}{\sqrt{2}}} & 0 & \underline{\frac{1}{\sqrt{2}}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \underline{-\frac{1}{\sqrt{2}}} & 0 & \underline{\frac{1}{\sqrt{2}}} \end{bmatrix}$, $G_{13}G_{12}b^{(1)}=(\sqrt{2},0,0)^T$,

$$G_1=G_{13}G_{12}=\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \quad G_1A=\begin{bmatrix} \sqrt{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

Step 3: 处理第2列.和高斯消元法相似, $A^{(1)} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$.

第1列$b^{(1)} = (-1, -\frac{1}{\sqrt{2}})^T$. 则i=1,j=2,$c = -\sqrt{\frac{2}{3}}$,$s = -\frac{1}{\sqrt{3}}$.

$$G_{12} = \begin{bmatrix} -\sqrt{\frac{2}{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\sqrt{\frac{2}{3}} \end{bmatrix} \quad G_2 = \begin{bmatrix} 1 & \\ & G_{12} \end{bmatrix},$$

$$G = G_2 G_1 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} \quad R = GA = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ & \frac{3}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ & & -\frac{3}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$$

$Q = G^T$.

**Definition 8 (满秩分解)**

满值分解：将矩阵$A$分解为行满秩矩阵和列满秩矩阵的乘积.即$A \in R^{m\times n} = C \in R^{m\times r} \times D \in R^{r\times n}, rank(A) = rank(C) = rank(D) = r$.

**Example 10**

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{rank(A)=2} A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

**Lemma 19 (满秩分解存在性)**

任何一个非零矩阵都存在满秩分解.

Proof:按高斯消元法, $PA = B = \begin{bmatrix} \underbrace{D}_{r\times n\text{行满秩}} \\ \underbrace{0}_{m-r\times n} \end{bmatrix}$. $P \in R^{m\times m}$一定可逆,则

有 $A = P^{-1}B = P^{-1}\begin{bmatrix} D \\ 0 \end{bmatrix} = [\underbrace{C}_{m\times r\text{且一定列满秩}} | M]\begin{bmatrix} D \\ 0 \end{bmatrix} = CD.$

# 矩阵的满秩分解

## Example 11

求矩阵$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$的满秩分解.

Solution:求出初等变换矩阵即可求解.则增广矩阵$[A|I] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ & & & & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = [B|P]. \quad \text{则} P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix},$$

$rank(A) = 2, C = P^{-1}(:, 1:2), D = B(1:2, :)$, $A = CD = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

**Lemma 20 (标准形求满秩分解)**

设$A \in R^{m\times n}$, $rank(A) = r < \min(m,n)$. 设$A$的Hermite标准形为$B = \begin{bmatrix} D \\ 0 \end{bmatrix}$, $D \in r \times n$ ,$D$的$i_1, \cdots, i_r$列是单位矩阵$I_r$ 的第$1, \cdots, r$列,则$C = [\alpha_{i_1}|\cdots|\alpha_{i_r}]$, $A=CD$为满秩分解.

证明过程见教材P.72-73.

解法2:用矩阵Hermite标准形直接求.Hermite标准形$A' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0.5 & -0.5 \\ & & & \end{bmatrix}$. 先导列在第1,2列,因此$C = A(:, 1:2), D = A'(1:2, :)$.

# 矩阵的满秩分解

**Example 12**

求矩阵$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 6 & 1 & 0 & 7 \\ 3 & 9 & 3 & 1 & 11 \end{bmatrix}$的满秩分解.

Solution: Hermite标准形: $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{10}{3} \\ 0 & 1 & 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ & & & & \end{bmatrix}$ 先导列

第1,3列, $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{10}{3} \\ 0 & 1 & 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$

**Lemma 21 （秩的性质）**

$A \in C^{m\times n}$, $rank(A) = r$，则
(1) $A^HA, AA^H$都是半正定的Hermite矩阵，即$(A^HA)^H = A^HA$, $(AA^H)^H = AA^H$, $x^HAA^Hx \geq 0$, $x^HA^HAx \geq 0$
(2) $rank(AA^H) = rank(A^HA) = rank(A)$

Proof：(1)两者显然都是Hermite矩阵. $x^HA^HAx = (Ax, Ax) = \|Ax\|^2 \geq 0$. (2)证明$A^HAx = 0$与$Ax = 0$同解. 若x是$Ax = 0$的解，显然是$A^HAx = 0$的解. 反之，若x是$A^HAx = 0$的解，则$x^HA^HAx = 0 = (Ax, Ax)$，必有$Ax = 0$.

**Lemma 22 (Hermite矩阵与半正定矩阵的特征值)**

*Hermite矩阵的特征值是实数,半正定矩阵的特征值非负.*

Proof: (1)设Hermite矩阵A的特征值为$\lambda$,则$\lambda x = Ax \rightarrow \lambda^* x^H = x^H A^H = x^H A$,并且$\lambda x^H x = x^H Ax$. $\rightarrow \lambda x^H x = \lambda^* x^H x \rightarrow \lambda \in R$. (2)$\lambda x = Ax \rightarrow \lambda(x, x) = (x, \lambda x) = (x, Ax) = x^H Ax \geq 0$. $\rightarrow \lambda \geq 0$.

**Definition 9 (左逆与右逆矩阵)**

$A \in R^{m\times n}$,若$A_L^{-1} A = I_n$,则$A_L^{-1}$为$A$的左逆矩阵;若$AA_R^{-1} = I_m$,则$A_R^{-1}$为$A$的右逆矩阵.

# 矩阵的满秩分解

**Lemma 23（满秩矩阵左右逆矩阵）**

$A \in C^{m\times n}$,若$m<n$,则$A$存在右逆矩阵的充要条件是$A$行满秩;

若$m>n$,则$A$存在左逆矩阵的充要条件是$A$列满秩

思考： 若m>n,是否存在右逆矩阵? $\times$

$rank(AB) \le \min(rank(A), rank(B)) \le n < m$. $AB \ne I_m$ 若m>n,是否存在左逆矩阵? $\times$.

**Lemma 24（求解左右逆矩阵）**

若$A$有左逆矩阵,则$A^HA \in C^{n\times n}$且可逆,$rank(A^HA) = n$,$A_L^{-1} = (A^HA)^{-1}A^H$.若$A$有右逆矩阵,则$AA^H$可逆,$rank(AA^H) = m$, $A_R^{-1} = A^H(AA_H)^{-1}$.

# Schur分解 Schur Decomposition

**Lemma 25 (Schur Decomposition)**

$A \in C^{n\times n}$,则存在酉矩阵$Q \in C^{n\times n}$和上三角矩阵$T$,使得

$$Q^H A Q = T, A = QTQ^H$$

Proof: $\underbrace{A = PJP^{-1}}_{\text{方阵A有Jordan标准形}} \xrightarrow{\text{P有QR分解,P=QR,R可逆}}$

$$A = QRJ(QR)^{-1} = QRJR^{-1}Q^H \xrightarrow[RJR^{-1}\text{一定是上三角}]{\text{上三角矩阵逆矩阵仍是上三角}} A = QTQ^H.$$

并且$T \sim J$, T的特征值(三角矩阵特征值就是对角线元素)与J相同,而J为A 的Jordan 标准形,也与A 的特征值相同.

# 奇异值分解 Singular Value Decomposition

**Lemma 26 (Hermite矩阵Schur分解)**

$A \in C^{n\times n}$为Hermite矩阵,则存在酉矩阵$Q$和对角矩阵$D$,使得

$$Q^HAQ = D, A = QDQ^H, D = diag(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$$

Proof: $A = QTQ^H \to A^H = QT^HQ^H \xrightarrow{A=A^H} T^H = T$

$\xrightarrow[T\text{upper triangular}]{T^H\text{lower triangular}}$ T 为D, 并且D 上全是特征值.

**Definition 10 (奇异值 Singular Value)**

$A \in R^{m\times n}, rank(A) = r$. $A^HA$的特征值$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_r > \lambda_{r+1} = \cdots = \lambda_n = 0$,则定义$\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}, i = 1, \cdots, n$,为$A$的奇异值.

Note: $A^HA$特征值非负, $rank(A^HA) = rank(A) = r$

**Definition 11 (酉相抵)**

$A, B \in C^{m\times n}$.若存在酉矩阵$U \in C^{m\times m}$,$V \in C^{n\times n}$使得 $A = UBV^H$,则$A$与$B$酉相抵，且奇异值相同

Proof: $A^HA = VB^HU^HUBV^H = VB^HBV^H$, $A^HA \sim B^HB$,特征值相同,故A,B奇异值相同.

**Lemma 27 (方阵的奇异值分解)**

$A \in C^{n\times n}$,则存在酉矩阵$U \in C^{m\times m}$,$V \in C^{n\times n}$使得$A = U\Sigma V^H$,$\Sigma = diag(\sigma_1, \cdots, \sigma_n)$, $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_n$为$A$的奇异值.

# 奇异值分解 Singular Value Decomposition

**Definition 12 (奇异向量)**

$n$阶方阵有奇异值分解$A=U\Sigma V^H$,则$U$的每列是$AA^H$的特征向量,称为左奇异向量,$V$的每列为$A^HA$的特征向量,称为右奇异向量.

Proof: $A^HA=V\Sigma^2V^H \rightarrow (A^HA)V=V\Sigma^2 \rightarrow$ V各列是$A^HA$的特征向量, $AA^H=U\Sigma^2U^H \rightarrow (AA^H)U=U\Sigma^2 \rightarrow$ U各列是$AA^H$的特征向量.

**Lemma 28 (长方矩阵奇异值分解)**

$A\in C^{m\times n}, rank(A)=r$.则存在酉矩阵$U\in C^{m\times m}, V\in C^{n\times n}$使得$A=U\begin{bmatrix}\Sigma_r & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}V^H, \Sigma_r=diag(\sigma_1,\cdots,\sigma_r), \sigma_1\geq\sigma_2\geq\cdots\geq\sigma_r>0$.

Proof:教材P.80.

奇异值分解求解步骤:分别求出$V,\Sigma,U$

(1)求Σ,V. 计算$A^HA$的n个特征值$\lambda_i$和n个特征向量(对于多重特征值,分别选择线性无关的基础解),并由这组特征向量单位化后得到单位正交向量组$v_i$

(2)由$\lambda_i$得到奇异值$\sigma_i$,由非零的$\sigma_i$从大到小排列成对角矩阵得到$\Sigma=\begin{bmatrix}\Sigma_r & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$,由$v_i$得到正交矩阵$V=[v_1|\cdots|v_n]$;

(3)由$v_i,\sigma_i$求$u_i$,由$U\Sigma=AV$得$u_i=\frac{Av_i}{\sigma_i},i=1,\cdots,m$.若m>n导致$u_i$不足m个,则扩充成m个标准正交基,得到$U=[u_1|\cdots|u_m]$

(4)验证$A=U\Sigma V^H$

## Example 13

求矩阵A的奇异值分解$A=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}$

Solution: (1)$A^TA=\begin{bmatrix}2 & 2\\ 2 & 2\end{bmatrix}$;$|\lambda I-A^TA|=\lambda(\lambda-4)$.$\lambda_1=0,\lambda_2=4$.
属于$\lambda_2=0$的基础解系$(-1,1)^T$,单位化后的特征向量$v_2=(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})^T$.
$\lambda_2=4$,对应基础解系$(-1,-1)^T$,单位化后特征向量
$v_1=(-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}})^T$. (2)写出Σ. $rank(A)=1$,

$\sigma_1=2,\sigma_2=0,\Sigma=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$ (3)$\sigma_1=2$.则$u_1=\frac{Av_1}{\sigma_1}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}}\\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\\ 0\end{bmatrix}$.

仅有1个u,则需要扩充2个正交基:$u_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, u_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$(有多个选择,符合正交基要求就行).则$U = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$,

$V = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$. $\Sigma = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$(4) 验证$A = U\Sigma V^H$

## Example 14

求矩阵A的奇异值分解 $A=\begin{bmatrix}1&0&0\\2&0&0\end{bmatrix}$

Solution:(1)$A^TA=\begin{bmatrix}5&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$. $\lambda_1=5,\lambda_2=\lambda_3=0$.对应的特征向量分别为 $v_1=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},v_2=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix},v_3=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$ 单位正交,因此$V=I_3$.(2)$\sigma_1=\sqrt{5},\Sigma=\begin{bmatrix}\sqrt{5}&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$.(3)需要2个u.$u_1=\frac{Av_1}{\sqrt{5}}=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix},u_2=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix}-2\\1\end{bmatrix}$.因此$U=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{5}}&-\frac{2}{\sqrt{5}}\\\frac{2}{\sqrt{5}}&\frac{1}{\sqrt{5}}\end{bmatrix}$ (4)验证$A=U\Sigma V^H$

# 谱分解

矩阵特征值的集合叫做矩阵的**谱**(spectrum),谱分解(spectral decomposition)也称为特征分解(eigen decomposition).只有可以对角化的矩阵才可以做谱分解.

**Definition 13 (矩阵的谱)**

设$A$可以对角化,则$A = P\Lambda P^{-1} = (x_1, \cdots, x_n) diag(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \begin{bmatrix} y_1^T \\ \vdots \\ y_n^T \end{bmatrix}$
$= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i y_i^T = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i P_i$. 其中$x_i$为$P$的列向量,$y_i^T$是$P^{-1}$的行向量.从而$A$成为$n$个矩阵$P_i$之和.其组合系数$\lambda$ 称为矩阵$A$的谱.

# 谱分解

对于标量$y_i^T x_j$

$$I = P^{-1}P = \begin{bmatrix} y_1^T \\ \vdots \\ y_n^T \end{bmatrix} (x_1, \cdots, x_n) = \begin{bmatrix} y_1^T x_1 & \cdots & y_1^T x_n \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ y_n^T x_1 & \cdots & y_n^T x_n \end{bmatrix}$$

则$y_i^T x_j = \begin{cases} 1, i = j \\ 0, i \neq j \end{cases}$.对于矩阵$P_i = x_i y_i^T$,有

**Lemma 29 ($P_i$的性质)**

(1)$P_iP_j = 0, i \neq j. P_i^2 = P_i$

(2)$\sum_{i=1}^n P_i = I$

Proof： (1)

$$P_iP_j = (x_i{y_i}^T)(x_j{y_j}^T) = x_i\underbrace{({y_i}^T x_j)}_{scalar}{y_j}^T = x_i\delta_{ij}{y_j}^T = \begin{cases} x_i{y_i}^T = P_i, i = j \\ 0, i \neq j \end{cases}$$

(2)

$$I = PP^{-1} = [x_1|x_2|\cdots|x_n]\begin{bmatrix} {y_1}^T \\ {y_2}^T \\ \vdots \\ {y_n}^T \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{n} x_i{y_i}^T = \sum_{i=1}^{n} P_i$$

# 谱分解

**Example 15**

求矩阵$A=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 4 & 1\end{bmatrix}$的谱分解.

Solution:先求特征值. $|\lambda I-A|=(\lambda-3)(\lambda+1)$, $\lambda_1=3,\lambda_2=-1$.特征向量$x_1=(1,2)^T$, $x_2=(1,-2)^T$. 显然由于$A=P\Lambda P^{-1}\rightarrow$

$$AP=P\Lambda \xrightarrow{\text{P的列向量就是特征值}} P=[x_1|x_2]=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 2 & -2\end{bmatrix}\rightarrow$$

$$P^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{4}\\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{4}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}y_1^T\\ y_2^T\end{bmatrix}\rightarrow P_1=x_1y_1^T=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{4}\\ 1 & \frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

$$,P_2=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{1}{4}\\ -1 & \frac{1}{2}\end{bmatrix}$$,谱分解$A=\lambda_1P_1+\lambda_2P_2=3P_1-P_2$.

# 谱分解

**Lemma 30 (正规矩阵)**

设$A$是$n$阶正规矩阵(满足$A^HA = AA^H$),则$A$酉相抵与特征值对角阵,$A = U\Lambda U^T$.并且 $A^HA = U\Lambda U^T U\Lambda U^T = U\Lambda^2 U^T$, $A^HA$的特征值$\lambda = \Lambda^2$,则$A$的奇异值$\sigma = |\Lambda|$,即特征值的$L_1$范数.

Read the Matlab documentation for further information on the following commands:

lu(LU factorization),chol(Cholesky Factorization),qr(QR factorization),svd(Singular Value Decomposition).