第一章 概率论基础

- 1.1 随机变量及其分布
- 1.2 随机变量的数字特征
- 1.3 随机变量的特征函数

Welcome

1.1 随机变量及其分布

随机变量的引入是人类对随机事件统计规律认识的一大飞跃，随机变量及其分布理论的建立，使概率论真正成为一门数学学科。 随机变量知识是现代概率论的基础，也是随机过程论的基础。这一节我们将复习了解一维与多维随机变量的分布、分布函数与函数的分布知识。

一 随机变量概念

定义1.1 设E为随机试验，e为试验E的一个可能结果， E的全部可能结果的集合S={e}为其样本空间，若对于每一个e，均有一个实数X(e)与之对应，这样一个定义在样本空间S上的单值实函数 X=X(e)称为建立在S上的一维随机变量，其值域为实数集合。

若X=X(e)与Y=Y(e)为在S上的两个随机变量，则由它们构成的联合变量（X，Y）称为二维随机变量或二维随机向量。

同理可定义多维随机变量。

二、分布函数

定义1.2　设X、Y是两个随机变量，x，y是任意实数，

X的分布函数为 $F_X(x)=P(X\le x)$ $=F(x,+\infty)$

Y的分布函数为 $F_Y(x)=P(Y\le y)$ $=F(+\infty,y)$

X与Y的联合分布函数为 $F(x,y)=P(X\le x,Y\le y)$

三、离散型随机变量

定义1.3　若随机变量X的可能取值仅有有限或可列多个，则称此随机变量为一维离散型随机变量；若二维随机变量（X，Y）的所有可能取的值是有限对或可列多时，则称此随机变量为二维离散型随机变量。

定义1.4 设离散型随机变量X的所有可能取值为x_k，且X取值为x_k的概率，即事件 $\{X = x_k\}$ 的概率

$$P\{X = x_k\} = p_k \qquad k = 1,2,\cdots$$

称为X的概率分布（概率函数），或分布律（列），

若其满足条件 $p_k \geq 0; \quad \sum_{k=1}^{\infty} p_k = 1$

则X的分布函数为 $F(x) = \sum_{x_k \leq x} P\{X = x_k\} = \sum_{x_k \leq x} p_k$

对于二维离散型随机变量（X，Y）所有可能取的值为 (x_i, y_j)，即事件 $\{X = x_i, Y = y_j\}$ 的概率

$$p_{ij} = P\{X = X_i, Y = y_j\} \quad i, j = 1,2,\cdots$$

为二维离散型随机变量（X，Y）的概率分布或分布律，或称为随机变量X和Y的联合分布律或联合概率分布，

若其满足条件 $p_{ij} \geq 0$ ；$\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} p_{ij} = 1$

则(X，Y)的分布函数为

$$F(x,y) = P\{X \leq x, Y \leq y\} = \sum_{x_i \leq x}\sum_{y_i \leq y} P\{X = x_i, Y = y_i\}$$

四 连续型随机变量

定义1.5 如果对于随机变量X的分布函数，存在非负函数 $f(x)$，使对于任意实数x均有

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t$$

则称X为连续型随机变量，

其中函数 $f(x)$ 称为X的概率密度函数，简称概率密度。

对于二维连续型随机变量（X，Y），若存在一个非负可积的二元函数 $f(x,y)$，使它对于任意实数x，y都有

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

则称（X，Y）是二维连续型随机变量，$f(x,y)$ 函数称为二维随机变量（X，Y）的概率密度，或称为随机变量X与Y的联合概率密度。