

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕСТАЦИОНАРНОГО ОДНОМЕРНОГО ТЕЧЕНИЯ ГАЗА С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ НЕЯВНОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОЙ РАЗНОСТНОЙ СХЕМЫ С ОДНОСТОРОННИМИ РАЗНОСТЯМИ (u , $\ln \rho$)

Алексей А. Исмагилов, 410 группа

Содержание

1 Постановка задачи	2
2 Основные обозначения	2
3 Описание схемы	3
3.1 Описание схемы	3
3.2 Координатная запись уравнений	3
4 Отладочный тест	5
4.1 Постановка задачи	5
4.2 Численные эксперименты	6
4.3 Вывод	11
5 Тесты с негладкими начальными данными	11
5.1 Постановка задачи	11
5.2 Численные эксперименты	12
5.3 Численные эксперименты первой задачи	12
5.4 Время стабилизации	29
5.5 Вывод	30
5.6 Численные эксперименты второй задачи	30
5.7 Время стабилизации	47
5.8 Вывод	47
6 Задача о стабилизации осциллирующей функции	47
6.1 Постановка задачи	47
6.2 Численные эксперименты	48
6.3 Численные эксперименты первой задачи	48
6.4 Вывод	48
6.5 Численные эксперименты второй задачи	48
6.6 Вывод	49
7 Задача «протекания»	49
7.1 Постановка задачи	49
7.2 Численные эксперименты	50
7.3 Вывод	50

1 Постановка задачи

Рассмотрим систему уравнений, описывающую нестационарное одномерное движение взякого баротропного газа

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} = f_0; \\ \rho \frac{\partial u}{\partial t} + \rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \rho}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \rho f; \\ p = p(\rho). \end{cases} \quad (1)$$

Через μ обозначен коэффициент вязкости газа, который считаем известной неотрицательной величиной. Известными также будем считать функцию давления газа p (уравнение состояния газа) и вектор внешних сил f , являющийся функцией переменных Эйлера $(t, x) \in Q = \Omega_t \times \Omega_x = [0; T] \times [0; X]$. Зависимость $p = p(\rho)$ часто называют уравнением состояния газа. Мы будем рассматривать две возможные зависимости: $p(\rho) = C\rho$, где C — положительная константа, или $p(\rho) = \rho^{1.4}$. Неизвестными же будут функции плотности ρ и скорости u .

Систему (1) можно переписать в виде (см. [1])

$$\begin{cases} \frac{\partial g}{\partial t} + u \frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} = f_0; \\ \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \tilde{p}'(g) \frac{\partial g}{\partial x} = \mu e^{-g} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f; \\ \tilde{p}'(g) = \frac{\partial p}{\partial \rho}(e^g); \\ g = \ln \rho; \\ p = p(\rho). \end{cases} \quad (2)$$

Дополним систему (1) начальными и граничными условиями

$$\begin{aligned} (\rho, u)|_{t=0} &= (\rho_0, u_0), \quad x \in \Omega_x \\ u(t, 0) &= u(t, X) = 0, \quad t \in \Omega_t \end{aligned} \quad (3)$$

2 Основные обозначения

Введем на Ω_x и Ω_t сетки $\omega_x = \{mh : m = 0, \dots, M\}$ и $\omega_t = \{n\tau : n = 0, \dots, N\}$ соответственно, где $h = X/M$ и $\tau = T/N$.

Для сокращения записи значение для произвольной функции g в узле (n, m) обозначим через g_m^n . Упростим обозначения и обозначим g_m^n и g_m^{n+1} через g и \hat{g} . Введем также обозначения для разностных операторов:

$$\begin{aligned} g_t &= \frac{g_m^{n+1} - g_m^n}{\tau}, \\ g_x &= \frac{g_{m+1}^n - g_m^n}{h}, \\ g_{\bar{x}} &= \frac{g_m^n - g_{m-1}^n}{h}, \\ g_{\dot{x}} &= \frac{g_{m+1}^n - g_{m-1}^n}{2h}, \\ g_{x\bar{x}} &= \frac{g_{m-1}^n - 2g_m^n + g_{m+1}^n}{h^2}. \end{aligned}$$

Для приближения конвективных слагаемых в дифференциальных операторах введем обозначение

$$\delta\{W, V\} = \frac{V + |V|}{2} W_{\bar{x}} + \frac{V - |V|}{2} W_x.$$

Введем нормы для произвольной сеточной функции v :

$$\|v\| = \max_{x \in \omega_x} |v(x)| = \max_{0 \leq m \leq M} |v(mh)|;$$

3 Описание схемы

3.1 Описание схемы

Обозначим через H и V приближенные значения функций ρ и u соответственно. Положим $G = \ln H$.

Для поиска численного решения задачи (2) с начальными условиями (3) можно использовать разностную схему, в которой для приближения конвективных членов использующая односторонние разности, а функции G и V на верхнем слое ищутся путем решения системы

$$\begin{cases} V_t + \delta\{\widehat{V}, V\} + \tilde{p}'(G) G_{\dot{x}} = \tilde{\mu} \widehat{V}_{x\bar{x}} - (\tilde{\mu} - \mu e^{-G}) V_{x\bar{x}} + f, & m = 1, \dots, M-1; \\ \widehat{V} = 0, & m = 0, M; \\ G_t + \delta\{\widehat{G}, \widehat{V}\} + \widehat{V}_{\dot{x}} = f_0, & m = 1, \dots, M-1; \\ G_t + \widehat{V}_x = f_0, & m = 0; \\ G_t + \widehat{V}_{\bar{x}} = f_0, & m = M, \end{cases} \quad (4)$$

где

$$\tilde{\mu} = \mu \|\exp(-G^n)\|_C = \mu \max_{1 \leq m \leq M} |\exp(-G_m^n)| = \mu \exp\left(-\min_{1 \leq m \leq M} G_m^n\right).$$

В качестве значений разностного решения на нулевом слое берутся проекции на сетку ω_x функций $\ln \rho_0$ и u_0 :

$$G_m^0 = \ln \rho_0(hm), \quad V_m^0 = u_0(hm), \quad m = 0, \dots, M,$$

а граничные значения скорости полагаются равными нулю (второе уравнение в (4)):

$$V_0^n = V_M^n = 0, \quad n = 1, \dots, N.$$

3.2 Координатная запись уравнений

Используя обозначения из раздела 2 перепишем систему (4).

3.2.1 Первое уравнение

$$m = 1, \dots, M-1.$$

$$V_t + \delta\{\widehat{V}, V\} + \tilde{p}'(G) G_{\dot{x}} = \tilde{\mu} \widehat{V}_{x\bar{x}} - (\tilde{\mu} - \mu e^{-G}) V_{x\bar{x}} + f$$

$$\begin{aligned} \frac{V_m^{n+1} - V_m^n}{\tau} + \frac{V_m^n + |V_m^n|}{2} \cdot \frac{V_m^{n+1} - V_{m-1}^{n+1}}{h} + \frac{V_m^n - |V_m^n|}{2} \cdot \frac{V_{m+1}^{n+1} - V_m^{n+1}}{h} + \tilde{p}'(G_m^n) \frac{G_{m+1}^n - G_{m-1}^n}{2h} = \\ = \tilde{\mu}^n \frac{V_{m-1}^{n+1} - 2V_m^{n+1} + V_{m+1}^{n+1}}{h^2} - (\tilde{\mu}^n - \mu \exp(-G_m^n)) \frac{V_{m-1}^n - 2V_m^n + V_{m+1}^n}{h^2} + f_m^n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(-\frac{V_m^n + |V_m^n|}{2h} - \frac{1}{h^2} \tilde{\mu}^n \right) V_{m-1}^{n+1} + \left(\frac{1}{\tau} + \frac{|V_m^n|}{h} + \frac{2}{h^2} \tilde{\mu}^n \right) V_m^{n+1} + \left(\frac{V_m^n - |V_m^n|}{2h} - \frac{1}{h^2} \tilde{\mu}^n \right) V_{m+1}^{n+1} = \\ = \frac{V_m^n}{\tau} - \tilde{p}'(G_m^n) \frac{G_{m+1}^n - G_{m-1}^n}{2h} - (\tilde{\mu}^n - \mu \exp(-G_m^n)) \frac{V_{m-1}^n - 2V_m^n + V_{m+1}^n}{h^2} + f_m^n. \quad (5) \end{aligned}$$

3.2.2 Второе уравнение

$m = 0, M.$

$$\widehat{V} = 0;$$

$$V_m^{n+1} = 0;$$

$$V_0^{n+1} = V_M^{n+1} = 0. \quad (6)$$

3.2.3 Третье уравнение

$m = 1, \dots, M-1.$

$$G_t + \delta \{\widehat{G}, \widehat{V}\} + \widehat{V}_{\dot{x}} = f_0;$$

$$\frac{G_m^{n+1} - G_m^n}{\tau} + \frac{V_m^{n+1} + |V_m^{n+1}|}{2} \cdot \frac{G_m^{n+1} - G_{m-1}^{n+1}}{h} + \frac{V_m^{n+1} - |V_m^{n+1}|}{2} \cdot \frac{G_{m+1}^{n+1} - G_m^{n+1}}{h} + \frac{V_{m+1}^{n+1} - V_{m-1}^{n+1}}{2h} = (f_0)_m^n;$$

$$\begin{aligned} \left(-\frac{V_m^{n+1} + |V_m^{n+1}|}{2h} \right) G_{m-1}^{n+1} + \left(\frac{1}{\tau} + \frac{|V_m^{n+1}|}{h} \right) G_m^{n+1} + \left(\frac{V_m^{n+1} - |V_m^{n+1}|}{2h} \right) G_{m+1}^{n+1} = \\ = (f_0)_m^n + \frac{G_m^n}{\tau} - \frac{V_{m+1}^{n+1} - V_{m-1}^{n+1}}{2h}. \end{aligned} \quad (7)$$

3.2.4 Четвертое уравнение

$m = 0.$

$$G_t + \widehat{V}_x = f_0;$$

$$\frac{G_m^{n+1} - G_m^n}{\tau} + \frac{V_{m+1}^{n+1} - V_m^{n+1}}{h} = (f_0)_m^n;$$

$$G_m^{n+1} = \tau (f_0)_m^n + G_m^n - \tau \frac{V_{m+1}^{n+1} - V_m^{n+1}}{h};$$

$$G_0^{n+1} = \tau (f_0)_0^n + G_0^n - \tau \frac{V_1^{n+1} - V_0^{n+1}}{h}. \quad (8)$$

3.2.5 Пятое уравнение

$m = M.$

$$G_t + \widehat{V}_{\bar{x}} = f_0;$$

$$\frac{G_m^{n+1} - G_m^n}{\tau} + \frac{V_m^{n+1} - V_{m-1}^{n+1}}{h} = (f_0)_M^n;$$

$$G_m^{n+1} = \tau (f_0)_m^n + G_m^n - \tau \frac{V_m^{n+1} - V_{m-1}^{n+1}}{h};$$

$$G_M^{n+1} = \tau (f_0)_M^n + G_M^n - \tau \frac{V_M^{n+1} - V_{M-1}^{n+1}}{h}. \quad (9)$$

3.2.6 Итоговая система

Собрав воедино уравнения (5), (6), (7), (8) и (9) получим следующую систему (эквивалентную (4)):

$$\left\{ \begin{array}{l} A_V V_{m-1}^{n+1} + B_V V_m^{n+1} + C_V V_{m+1}^{n+1} = D_V, \quad \text{где} \\ A_V = -\frac{V_m^n + |V_m^n|}{2h} - \frac{1}{h^2} \tilde{\mu}^n, \\ B_V = \frac{1}{\tau} + \frac{|V_m^n|}{h} + \frac{2}{h^2} \tilde{\mu}^n, \\ C_V = \frac{V_m^n - |V_m^n|}{2h} - \frac{1}{h^2} \tilde{\mu}^n, \\ D_V = \frac{V_m^n}{\tau} - \tilde{p}'(G_m^n) \frac{G_{m+1}^n - G_{m-1}^n}{2h} - \\ \quad - (\tilde{\mu}^n - \mu \exp(-G_m^n)) \frac{V_{m-1}^n - 2V_m^n + V_{m+1}^n}{h^2} + f_m^n, \quad m = 1, \dots, M-1; \\ V_0^{n+1} = V_M^{n+1} = 0; \\ A_G G_{m-1}^{n+1} + B_G G_m^{n+1} + C_G G_{m+1}^{n+1} = D_G, \quad \text{где} \\ A_G = -\frac{V_m^{n+1} + |V_m^{n+1}|}{2h}, \\ B_G = \frac{1}{\tau} + \frac{|V_m^{n+1}|}{h}, \\ C_G = \frac{V_m^{n+1} - |V_m^{n+1}|}{2h}, \\ D_G = (f_0)_m^n + \frac{G_m^n}{\tau} - \frac{V_{m+1}^{n+1} - V_{m-1}^{n+1}}{2h}, \quad m = 1, \dots, M-1; \\ G_0^{n+1} = \tau (f_0)_0^n + G_0^n - \tau \frac{V_1^{n+1} - V_0^{n+1}}{h}; \\ G_M^{n+1} = \tau (f_0)_M^n + G_M^n - \tau \frac{V_M^{n+1} - V_{M-1}^{n+1}}{h}. \end{array} \right. \quad (10)$$

Далее из 1–2 уравнений системы (10) ищутся значения V_m^{n+1} , $m = 0, \dots, M$, а после из уравнений 3–5 ищутся значения G_m^{n+1} , $m = 0, \dots, M$. В обоих случаях получается система из $M+1$ линейного алгебраического уравнения $Ax = b$ с трехдиагональной матрицей A .

4 Отладочный тест

4.1 Постановка задачи

Рассмотрим $Q = [0; 1] \times [0; 10]$. Зададим функции

$$\begin{aligned} \tilde{\rho}(t, x) &= e^t \left(\cos\left(\frac{\pi x}{10}\right) + \frac{3}{2} \right), \\ \tilde{u}(t, x) &= \cos(2\pi t) \sin\left(\frac{\pi x^2}{100}\right). \end{aligned} \quad (11)$$

Определим функции f_0 (отличную от нуля правую часть уравнения неразрывности) и f так, чтобы функции ρ и u удовлетворяли системе (2) с правой частью, составленной из этих функций

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{g}}{\partial t} + \tilde{u} \frac{\partial \tilde{g}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} &= f_0; \\ \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} + \tilde{u} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + \tilde{p}'(\tilde{g}) \frac{\partial \tilde{g}}{\partial x} &= \mu e^{-\tilde{g}} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2} + f, \end{aligned}$$

где, согласно (11),

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial t} &= e^t \left(\cos\left(\frac{\pi x}{10}\right) + \frac{3}{2} \right) = \tilde{\rho}, \\
\frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial x} &= -\frac{1}{10} \pi e^t \sin\left(\frac{\pi x}{10}\right), \\
\frac{\partial \tilde{g}}{\partial t} &= \frac{\partial \ln \tilde{\rho}}{\partial t} = \frac{1}{\tilde{\rho}} \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial t} = \frac{1}{\tilde{\rho}} \tilde{\rho} = 1, \\
\frac{\partial \tilde{g}}{\partial x} &= \frac{\partial \ln \tilde{\rho}}{\partial x} = \frac{1}{\tilde{\rho}} \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial x}, \\
\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} &= -2\pi \sin(2\pi t) \sin\left(\frac{\pi x^2}{100}\right), \\
\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} &= \frac{1}{50} \pi x \cos(2\pi t) \cos\left(\frac{\pi x^2}{100}\right), \\
\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2} &= -\frac{\pi \cos(2\pi t) \left(\pi x^2 \sin\left(\frac{\pi x^2}{100}\right) - 50 \cos\left(\frac{\pi x^2}{100}\right) \right)}{2500}.
\end{aligned}$$

Так как основной целью является программа, реализующая разностную схему, то выписывание явного вида $f(t, x)$ и $f_0(t, x)$ для задачи (11) не имеет смысла, ведь намного проще реализовать отдельные функции для вычисления $\tilde{\rho}$, \tilde{u} , $\partial \tilde{\rho} / \partial t$, $\partial \tilde{\rho} / \partial x$, $\partial \tilde{g} / \partial t$, $\partial \tilde{g} / \partial x$, $\partial \tilde{u} / \partial t$, $\partial \tilde{u} / \partial x$, $\partial^2 \tilde{u} / \partial x^2$ и, что самое главное, при таком подходе сложнее ошибиться.

Таким образом, дифференциальная задача для системы (2) с начальными и граничными условиями

$$\begin{aligned}
\tilde{\rho}(0, x) &= \cos\left(\frac{\pi x}{10}\right) + \frac{3}{2}, \\
\tilde{u}(0, x) &= \sin\left(\frac{\pi x^2}{100}\right), \\
\tilde{u}(t, 0) &= \tilde{u}(t, 10) = 0
\end{aligned} \tag{12}$$

имеет гладкое точное решение в области Q , задаваемое функциями (11).

Первое условие из (12) переписывается в виде

$$\tilde{g}(0, x) = \ln \tilde{\rho}(0, x) = \ln \left(\cos\left(\frac{\pi x}{10}\right) + \frac{3}{2} \right).$$

4.2 Численные эксперименты

Рассмотрим зависимость $p(\rho) = C\rho$. Тогда

$$\tilde{p}'(g) = \frac{\partial p}{\partial \rho}(e^g) = C(e^g) = C.$$

Далее приведены результаты численных экспериментов (нормы разности между разностным решением и точным решением дифференциальной задачи на последнем временном слое). Для

$$(\mu, C) \in \{10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3}\} \times \{10^0, 10^1, 10^2\}$$

приведены таблицы ошибок для

$$(\tau, h) \in \{10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3}, 10^{-4}\}^2$$

или, что эквивалентно, для

$$(N, M) \in \{10^1, 10^2, 10^3, 10^4\} \times \{10^2, 10^3, 10^4, 10^5\}.$$

4.2.1 Таблицы для V

$\tau \backslash h$	0.1	0.01	0.001	0.0001
0.1	1.776371e-02	1.792118e-02	1.793893e-02	1.794073e-02
0.01	1.033849e-03	1.127919e-03	1.149413e-03	1.151704e-03
0.001	7.036494e-04	9.332583e-05	1.095605e-04	1.124012e-04
0.0001	7.776899e-04	7.012179e-05	9.230439e-06	1.093235e-05

Таблица 1: Ошибка решения для V при $\mu = 10^{-1}$ и $C = 10^0$

$\tau \backslash h$	0.1	0.01	0.001	0.0001
0.1	4.399207e-02	1.185801e+00	1.384241e+00	2.599553e+00
0.01	4.322844e-03	5.492934e-03	5.840878e-03	5.875582e-03
0.001	3.878637e-03	4.556023e-04	5.653966e-04	6.005636e-04
0.0001	4.425673e-03	3.417239e-04	4.580453e-05	5.670171e-05

Таблица 2: Ошибка решения для V при $\mu = 10^{-1}$ и $C = 10^1$

$\tau \backslash h$	0.1	0.01	0.001	0.0001
0.1	2.752726e+01	1.132738e+01	2.141446e+00	2.673113e+00
0.01	4.136422e-02	9.496613e+00	1.088641e+01	4.089251e+00
0.001	8.944684e-03	4.284132e-03	3.809615e-03	3.763111e-03
0.0001	5.705826e-03	9.406657e-04	4.299503e-04	3.817897e-04

Таблица 3: Ошибка решения для V при $\mu = 10^{-1}$ и $C = 10^2$

$\tau \backslash h$	0.1	0.01	0.001	0.0001
0.1	1.741141e-02	4.021459e-01	1.602475e-01	2.696695e-01
0.01	9.535861e-04	1.029440e-03	1.049607e-03	1.051778e-03
0.001	7.375905e-04	8.552499e-05	9.899144e-05	1.017440e-04
0.0001	8.024121e-04	7.293841e-05	8.919708e-06	9.868414e-06

Таблица 4: Ошибка решения для V при $\mu = 10^{-2}$ и $C = 10^0$

$\tau \backslash h$	0.1	0.01	0.001	0.0001
0.1	6.766099e+00	3.845721e+00	1.850371e+00	7.349061e+00
0.01	4.305475e-03	1.025152e+00	5.171592e+00	3.677853e+00
0.001	3.942757e-03	4.542268e-04	5.887119e-04	6.248701e-04
0.0001	4.512567e-03	3.457915e-04	4.567094e-05	5.903717e-05

Таблица 5: Ошибка решения для V при $\mu = 10^{-2}$ и $C = 10^1$

$\tau \backslash h$	0.1	0.01	0.001	0.0001
0.1	1.657973e+02	nan	nan	nan
0.01	4.149111e-02	2.777533e+01	1.554029e+01	1.630884e+00
0.001	8.961424e-03	4.299043e-03	1.198326e+01	9.635401e+00
0.0001	5.715811e-03	9.438675e-04	4.314629e-04	3.833744e-04

Таблица 6: Ошибка решения для V при $\mu = 10^{-2}$ и $C = 10^2$

$\tau \backslash h$	0.1	0.01	0.001	0.0001
0.1	1.737624e-02	2.760807e+00	1.899677e+00	1.893982e+00
0.01	9.455470e-04	1.019453e-03	7.087007e-01	1.693596e+00
0.001	7.413623e-04	8.591923e-05	9.791370e-05	1.006527e-04
0.0001	8.051984e-04	7.326239e-05	8.974897e-06	9.759848e-06

Таблица 7: Ошибка решения для V при $\mu = 10^{-3}$ и $C = 10^0$

$\tau \backslash h$	0.1	0.01	0.001	0.0001
0.1	1.565398e+01	2.660015e+00	nan	nan
0.01	4.303988e-03	4.897880e+00	5.174811e+00	1.197923e+00
0.001	3.954101e-03	4.540920e-04	2.948090e+00	4.329198e+00
0.0001	4.526209e-03	3.463324e-04	4.565770e-05	5.927166e-05

Таблица 8: Ошибка решения для V при $\mu = 10^{-3}$ и $C = 10^1$

$\tau \backslash h$	0.1	0.01	0.001	0.0001
0.1	2.552366e+02	9.271213e+00	7.675318e-01	nan
0.01	4.150407e-02	2.601907e+01	nan	nan
0.001	8.960919e-03	4.300547e-03	nan	1.930723e+01
0.0001	5.717606e-03	9.441975e-04	4.316153e-04	1.324616e+01

Таблица 9: Ошибка решения для V при $\mu = 10^{-3}$ и $C = 10^2$

4.2.2 Таблицы для G

$\tau \backslash h$	0.1	0.01	0.001	0.0001
0.1	1.974472e-02	1.880217e-02	1.871573e-02	1.870716e-02
0.01	2.353269e-03	6.329728e-04	5.256517e-04	5.150854e-04
0.001	2.054368e-03	2.302165e-04	5.840437e-05	4.918189e-05
0.0001	2.036429e-03	2.099195e-04	2.298219e-05	5.885503e-06

Таблица 10: Ошибка решения для G при $\mu = 10^{-1}$ и $C = 10^0$

$\tau \backslash h$	0.1	0.01	0.001	0.0001
0.1	3.202333e-02	4.286540e+00	2.689328e+00	9.246981e+00
0.01	3.127735e-03	2.324002e-03	2.232669e-03	2.223756e-03
0.001	1.246010e-03	3.419812e-04	2.242385e-04	2.144671e-04
0.0001	1.070381e-03	1.649492e-04	3.454901e-05	2.234277e-05

Таблица 11: Ошибка решения для G при $\mu = 10^{-1}$ и $C = 10^1$

$\tau \backslash h$	0.1	0.01	0.001	0.0001
0.1	2.974329e+01	1.610268e+02	3.786377e+01	1.393500e+01
0.01	5.667082e-03	1.172591e+00	8.079072e+00	1.784594e+01
0.001	4.223137e-04	6.057931e-04	6.410856e-04	6.441292e-04
0.0001	8.820525e-04	5.311691e-05	6.097839e-05	6.403384e-05

Таблица 12: Ошибка решения для G при $\mu = 10^{-1}$ и $C = 10^2$

$\tau \backslash h$	0.1	0.01	0.001	0.0001
0.1	1.897387e-02	1.676375e+00	2.885702e+00	4.860422e+00
0.01	2.135532e-03	4.747359e-04	3.830838e-04	3.739176e-04
0.001	1.969499e-03	2.066437e-04	5.145556e-05	4.245203e-05
0.0001	1.965634e-03	2.009619e-04	2.060778e-05	5.202369e-06

Таблица 13: Ошибка решения для G при $\mu = 10^{-2}$ и $C = 10^0$

$\tau \backslash h$	0.1	0.01	0.001	0.0001
0.1	2.613810e+00	6.199472e+01	2.403819e+01	4.292141e+03
0.01	3.007791e-03	4.185274e-01	1.825095e+00	1.397148e+01
0.001	1.230608e-03	3.302029e-04	2.144745e-04	2.050559e-04
0.0001	1.064707e-03	1.631198e-04	3.337949e-05	2.136453e-05

Таблица 14: Ошибка решения для G при $\mu = 10^{-2}$ и $C = 10^1$

$\tau \backslash h$	0.1	0.01	0.001	0.0001
0.1	2.077003e+02	nan	nan	nan
0.01	5.718407e-03	3.720926e+01	2.553248e+02	2.069227e+02
0.001	4.199080e-04	6.106317e-04	1.493316e+00	2.530082e+00
0.0001	8.625245e-04	5.290572e-05	6.145411e-05	6.464748e-05

Таблица 15: Ошибка решения для G при $\mu = 10^{-2}$ и $C = 10^2$

$\tau \backslash h$	0.1	0.01	0.001	0.0001
0.1	1.889935e-02	3.617057e+01	1.769183e+01	9.085153e+02
0.01	2.115682e-03	4.669005e-04	7.080491e-01	4.604447e+00
0.001	1.962499e-03	2.045508e-04	5.078172e-05	4.181436e-05
0.0001	1.959896e-03	2.000810e-04	2.038803e-05	5.136368e-06

Таблица 16: Ошибка решения для G при $\mu = 10^{-3}$ и $C = 10^0$

$\tau \backslash h$	0.1	0.01	0.001	0.0001
0.1	3.883810e+00	2.545349e+02	nan	nan
0.01	3.000058e-03	3.144075e+00	8.168784e+01	1.519417e+02
0.001	1.228908e-03	3.276843e-04	1.612864e+00	3.344046e+00
0.0001	1.063995e-03	1.616176e-04	3.311753e-05	2.126514e-05

Таблица 17: Ошибка решения для G при $\mu = 10^{-3}$ и $C = 10^1$

$\tau \backslash h$	0.1	0.01	0.001	0.0001
0.1	2.072080e+02	2.257687e+02	8.763410e+01	nan
0.01	5.722928e-03	1.269512e+02	nan	nan
0.001	4.207105e-04	6.107477e-04	nan	1.245015e+02
0.0001	8.591815e-04	5.285617e-05	6.145856e-05	2.652507e+00

Таблица 18: Ошибка решения для G при $\mu = 10^{-3}$ и $C = 10^2$

4.3 Вывод

Анализируя таблицы ошибок, можно сделать вывод, что система (4) сходится в зависимости от параметров μ и C , причем сходимость имеет место с порядком $\tau + h$. Кроме того, при уменьшении параметра μ или увеличении параметра C решение разностных схем начинает расходиться.

5 Тесты с негладкими начальными данными

5.1 Постановка задачи

Пусть $\Omega_x = [0; 10]$. Для системы (1) зададим две задачи, начальные и граничные условия которых определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} \rho(0, x) &= \begin{cases} 2, & \text{если } x \in [4.5; 5.5]; \\ 1, & \text{иначе;} \end{cases} \\ u(0, x) &= 0; \\ u(t, 0) &= u(t, 10) = 0; \end{aligned} \tag{13}$$

и

$$\begin{aligned} \rho(0, x) &= 1; \\ u(0, x) &= \begin{cases} 1, & \text{если } x \in [4.5; 5.5]; \\ 0, & \text{иначе;} \end{cases} \\ u(t, 0) &= u(t, 10) = 0. \end{aligned} \tag{14}$$

Положим также $f_0 \equiv 0$ и $f \equiv 0$.

Суть эксперимента состоит в решении задач (13) и (14), причем вычисления следует проводить до момента времени $N_0\tau$, для которого

$$R(N_0) \leq \varepsilon,$$

где

$$R(n) = \|(G^n, V^n) - (G^{n-1}, V^{n-1})\| = \max\{|G_0^n - G_0^{n-1}|, \dots, |G_M^n - G_M^{n-1}|, |V_0^n - V_0^{n-1}|, \dots, |V_M^n - V_M^{n-1}|\} \quad (15)$$

и величина ε является достаточно малой и определяется опытным путем.

Кроме того для проверки консервативности системы определим массу газа на шаге n , как

$$m(n) = h \sum_{m=0}^M H_m^n = h \sum_{m=0}^M \exp(G_m^n)$$

и введем функцию

$$\Delta_m(n) = \frac{m(n) - m(0)}{m(0)}.$$

5.2 Численные эксперименты

Как было отмечено выше, для малых μ и больших C имеет место расходность схем. В результате численных экспериментов имела место расходимость для $\mu = 10^{-3}$ или $C = 10^2$. Далее, если не оговорено иное, предполагается, что

$$(\mu, C) \in \{10^{-1}, 10^{-2}\} \times \{10^0, 10^1\}.$$

5.3 Численные эксперименты первой задачи

5.3.1 Точность решения

Зафиксируем $\varepsilon = 0.001$, $\tau = h = 0.01$. Проведем численные эксперименты для сеток

$$\Omega_{\tau, h} = \omega_\tau \times \omega_h, \quad \Omega_{\tau, h/2} = \omega_\tau \times \omega_{h/2}, \quad \Omega_{\tau/2, h} = \omega_{\tau/2} \times \omega_h, \quad \Omega_{\tau/2, h/2} = \omega_{\tau/2} \times \omega_{h/2}.$$

Далее приведены таблицы значений $R(n)$ для $n = N_0/4, N_0/2, 3N_0/4, N_0$ (в каждой ячейке таблицы приведены значения для сеток $\Omega_{\tau, h}, \Omega_{\tau, h/2}, \Omega_{\tau/2, h}$ и, соответственно, $\Omega_{\tau/2, h/2}$).

C	$N_0\tau$	$n = N_0/4$	$n = N_0/2$	$n = 3N_0/4$	$n = N_0$
10^0	335.58	1.284834e-01	2.328182e-02	6.338955e-03	9.959398e-04
	375.55	2.147580e-01	3.273563e-02	7.405225e-03	9.989927e-04
	300.445	6.588570e-02	1.605243e-02	4.003216e-03	9.971934e-04
	335.56	1.302593e-01	2.335870e-02	6.442840e-03	9.982431e-04
10^1	365.86	4.846448e-01	9.009140e-02	1.249391e-02	9.996682e-04
	405.08	5.555323e-01	7.023216e-02	8.754156e-03	9.962574e-04
	331.015	1.022292e-01	6.481713e-02	1.010336e-02	9.992069e-04
	370.235	4.237818e-01	4.625921e-02	1.597907e-02	9.871886e-04

Таблица 19: Точности решения для при $\mu = 10^{-1}$

C	$N_0\tau$	$n = N_0/4$	$n = N_0/2$	$n = 3N_0/4$	$n = N_0$
10^0	2277.31	3.160791e-02	1.135792e-02	3.756217e-03	9.999327e-04
	2662.27	6.115504e-02	1.628305e-02	4.333744e-03	9.997448e-04
	1909.68	1.931057e-02	6.597284e-03	2.523379e-03	9.978361e-04
	2294.64	3.306247e-02	9.165653e-03	4.017015e-03	9.997787e-04
10^1	96287.38	1.285957e-02	2.598975e-03	1.444286e-03	9.999999e-04
	77204.79	5.045969e-03	2.149424e-03	1.365529e-03	9.999999e-04
	2030.79	4.523006e-02	7.037620e-03	2.729990e-03	9.987485e-04
	2399.17	3.595052e-02	3.056085e-02	7.136665e-03	9.988984e-04

Таблица 20: Точности решения для при $\mu = 10^{-2}$

Приведены также и графики.

Примечание. Значения большие 1 были заменены на 1; значения меньшие -1 были заменены на -1 .

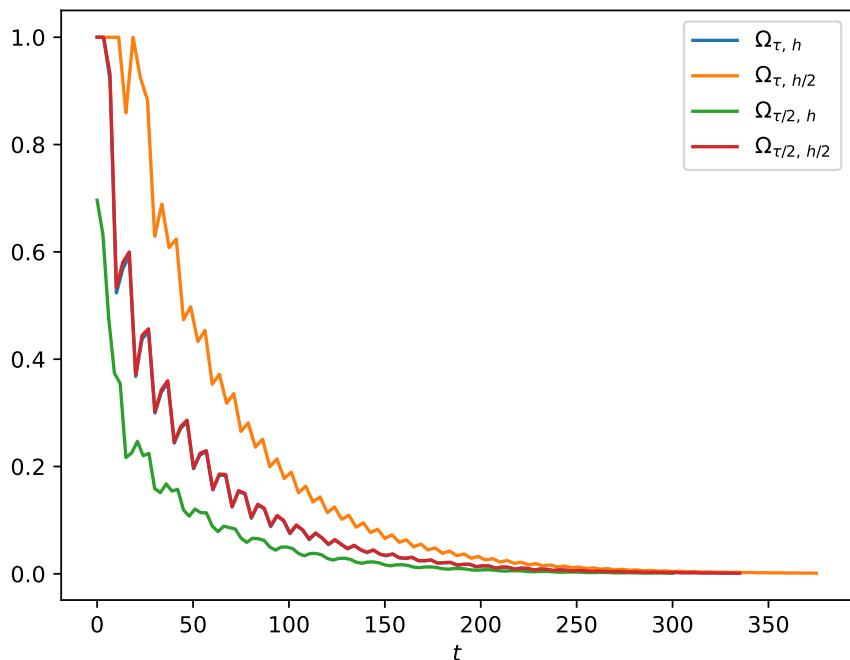


Рис. 1: Графики функций R для $\mu = 10^{-1}$ и $C = 10^0$

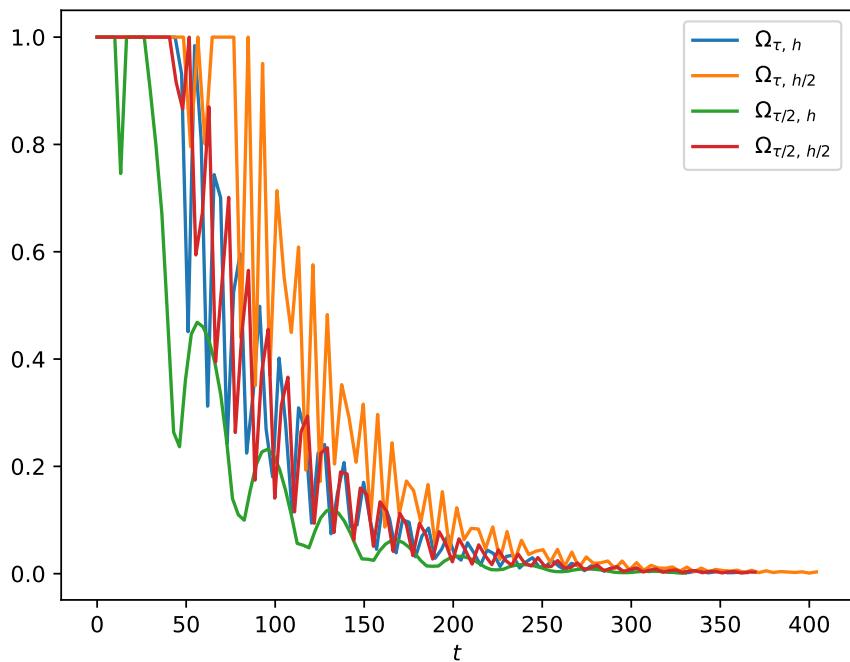


Рис. 2: Графики функций R для $\mu = 10^{-1}$ и $C = 10^1$

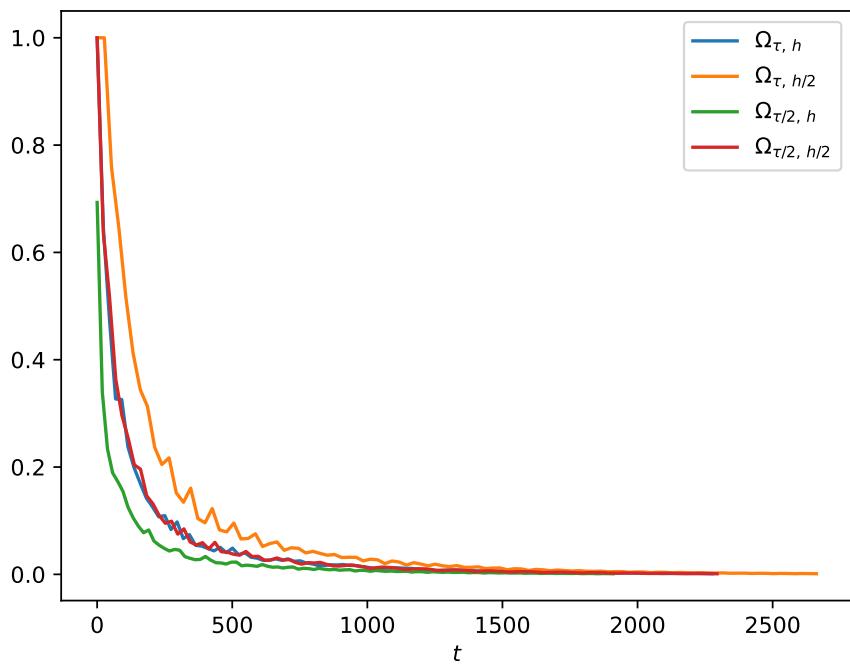


Рис. 3: Графики функций R для $\mu = 10^{-2}$ и $C = 10^0$

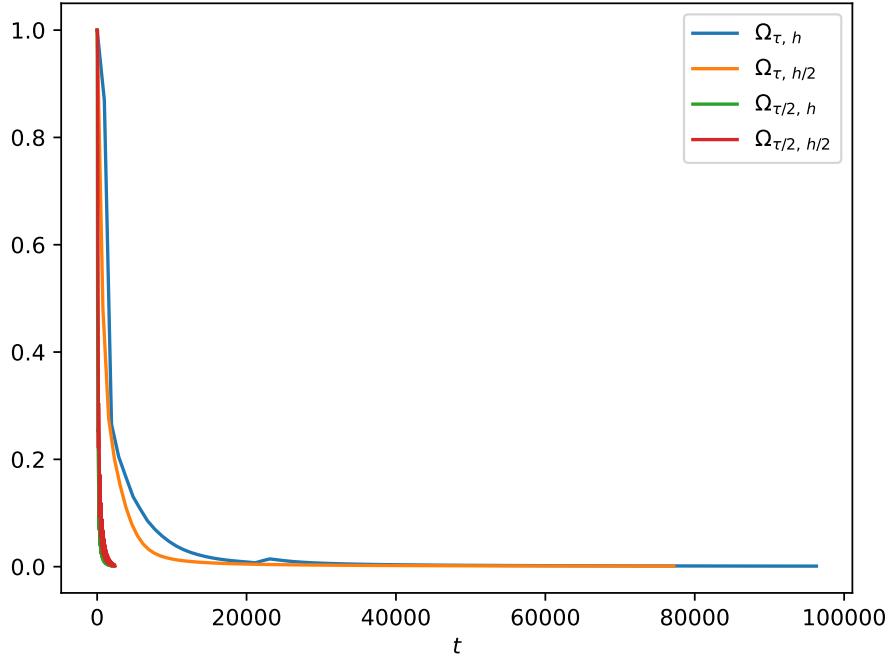


Рис. 4: Графики функций R для $\mu = 10^{-2}$ и $C = 10^1$

5.3.2 Вывод

С уменьшением шага разбиения времени τ сходимость решения улучшается, чего сказать нельзя для шага разбиения пространства h .

5.3.3 Консервативность системы

Далее приведены таблицы значений $\Delta_m(n)$ для $n = N_0/5, 2N_0/5, 3N_0/5, 4N_0/5, N_0$ (в каждой ячейке таблицы приведены значения для сеток $\Omega_{\tau, h}, \Omega_{\tau, h/2}, \Omega_{\tau/2, h}$ и, соответственно, $\Omega_{\tau/2, h/2}$).

C	$n = N_0/5$	$n = 2N_0/5$	$n = 3N_0/5$	$n = 4N_0/5$	$n = N_0$
10^0	-3.178478e-03	-3.184570e-03	-3.201284e-03	-3.201189e-03	-3.199974e-03
	-2.699507e-03	-2.739484e-03	-2.735419e-03	-2.736803e-03	-2.736480e-03
	-2.202233e-03	-2.185961e-03	-2.177244e-03	-2.174149e-03	-2.173099e-03
	-1.675934e-03	-1.678989e-03	-1.687461e-03	-1.687446e-03	-1.686824e-03
10^1	-1.844530e-02	-1.848627e-02	-1.849140e-02	-1.849257e-02	-1.849277e-02
	-1.765946e-02	-1.769145e-02	-1.769439e-02	-1.769401e-02	-1.769410e-02
	-1.181300e-02	-1.182864e-02	-1.182659e-02	-1.182556e-02	-1.182528e-02
	-1.070781e-02	-1.074085e-02	-1.073965e-02	-1.074019e-02	-1.074017e-02

Таблица 21: Разность масс для при $\mu = 10^{-1}$

C	$n = N_0/5$	$n = 2N_0/5$	$n = 3N_0/5$	$n = 4N_0/5$	$n = N_0$
10^0	-2.161896e-02	-2.164183e-02	-2.164395e-02	-2.164359e-02	-2.164430e-02
	-1.929262e-02	-1.931087e-02	-1.931345e-02	-1.931336e-02	-1.931316e-02
	-1.615400e-02	-1.618235e-02	-1.618907e-02	-1.619086e-02	-1.619028e-02
	-1.308671e-02	-1.309253e-02	-1.309230e-02	-1.309202e-02	-1.309198e-02
10^1	-5.057097e-01	-5.057182e-01	-5.057191e-01	-5.057195e-01	-5.057196e-01
	-7.342026e-01	-7.342033e-01	-7.342034e-01	-7.342035e-01	-7.342036e-01
	-4.550408e-02	-4.552133e-02	-4.552067e-02	-4.552187e-02	-4.552169e-02
	-4.519953e-02	-4.520692e-02	-4.520811e-02	-4.520846e-02	-4.520840e-02

Таблица 22: Разность масс для при $\mu = 10^{-2}$

Приведены также и графики.

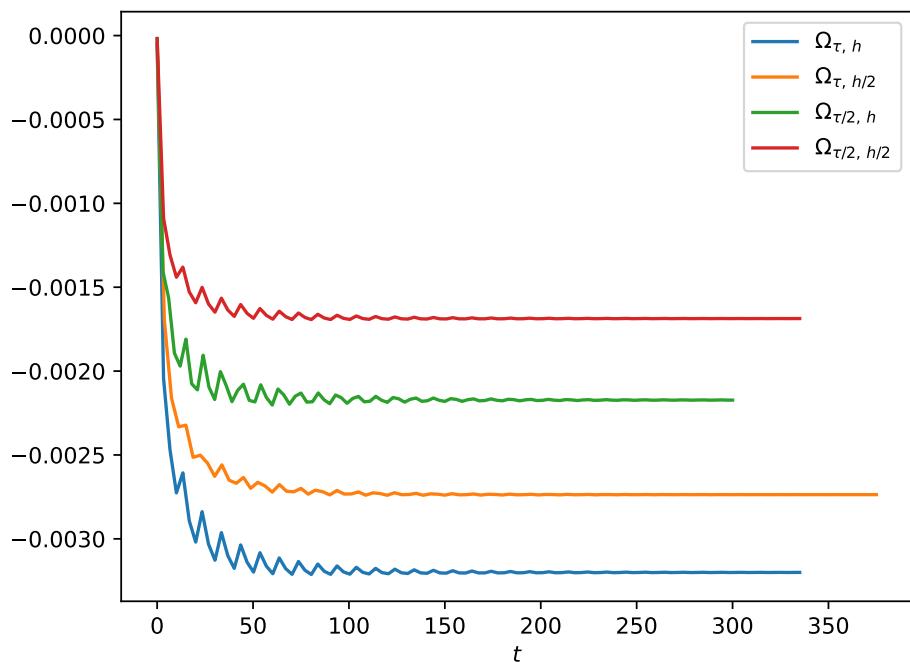


Рис. 5: Графики функций Δ_m для $\mu = 10^{-1}$ и $C = 10^0$

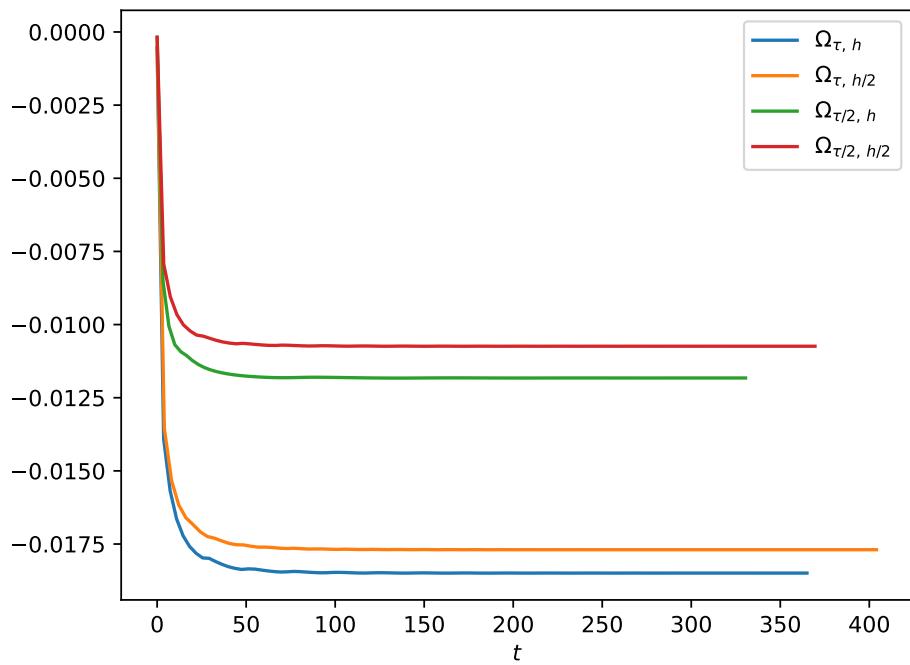


Рис. 6: Графики функций Δ_m для $\mu = 10^{-1}$ и $C = 10^1$

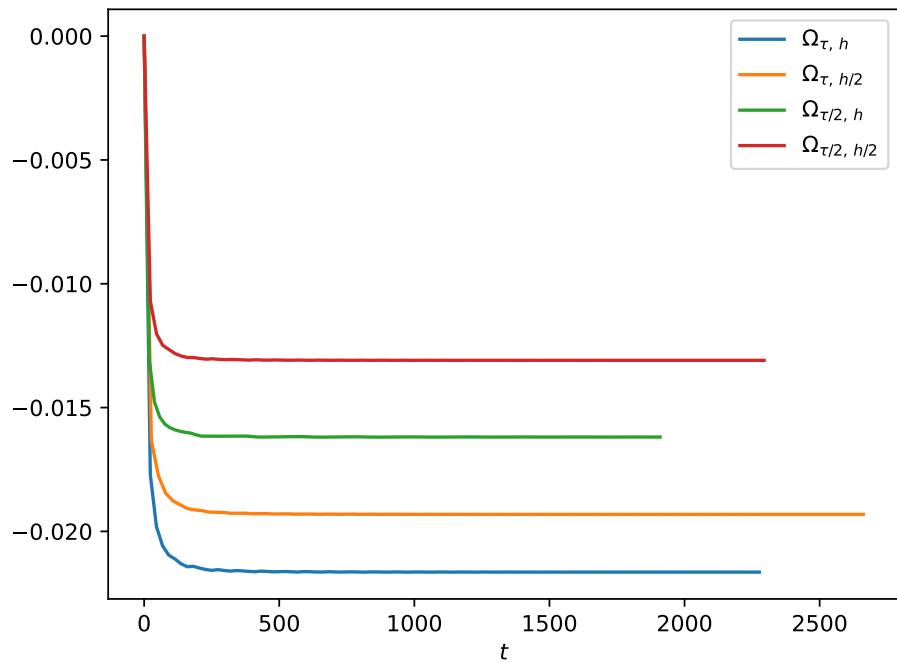


Рис. 7: Графики функций Δ_m для $\mu = 10^{-2}$ и $C = 10^0$

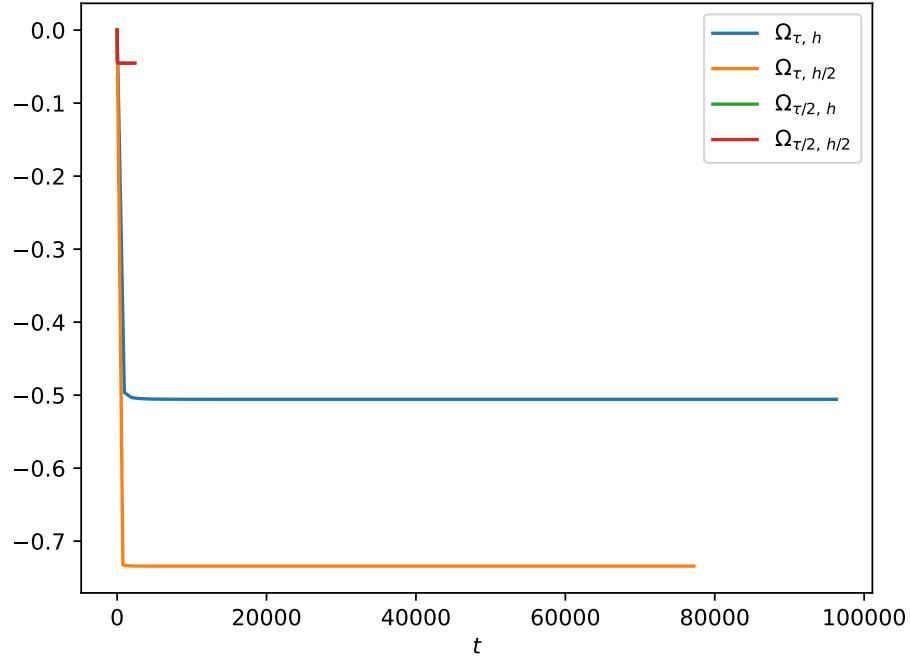


Рис. 8: Графики функций Δ_m для $\mu = 10^{-2}$ и $C = 10^1$

5.3.4 Вывод

Из последнего графика видно, что для малых μ и больших C необходимо брать достаточно мелкую сетку, иначе не возможно наблюдать консервативность системы. Потери массы составляют менее 5%. Из чего можно сделать вывод, что система является консервативной.

5.3.5 Динамика процесса

Рассмотрим случай $\mu = 0.1$, $C = 1$, $\tau = h = 0.1$, $\varepsilon = 0.001$. Далее приведены графики V и G (динамика процесса) в разные моменты времени.

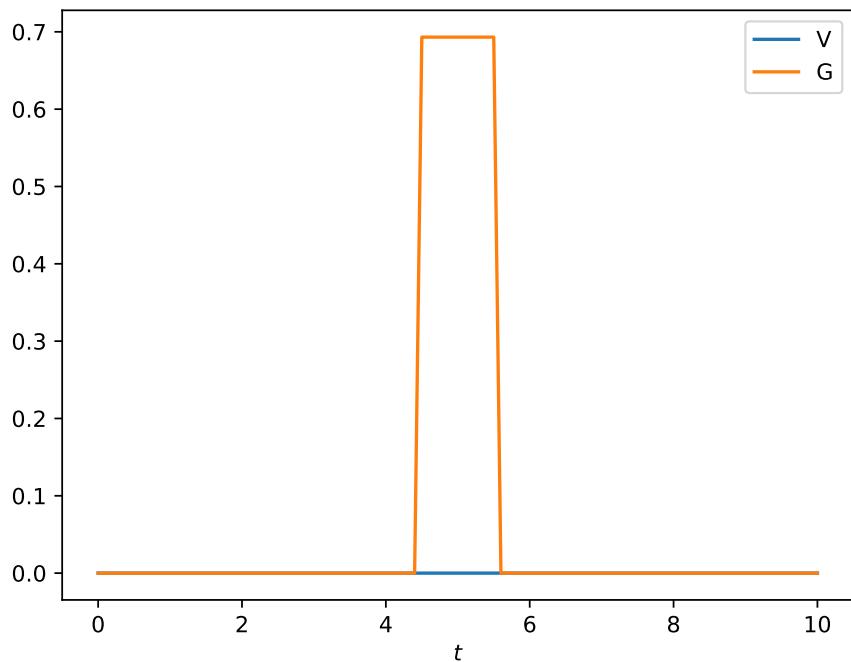


Рис. 9: Срез для $t = 0$

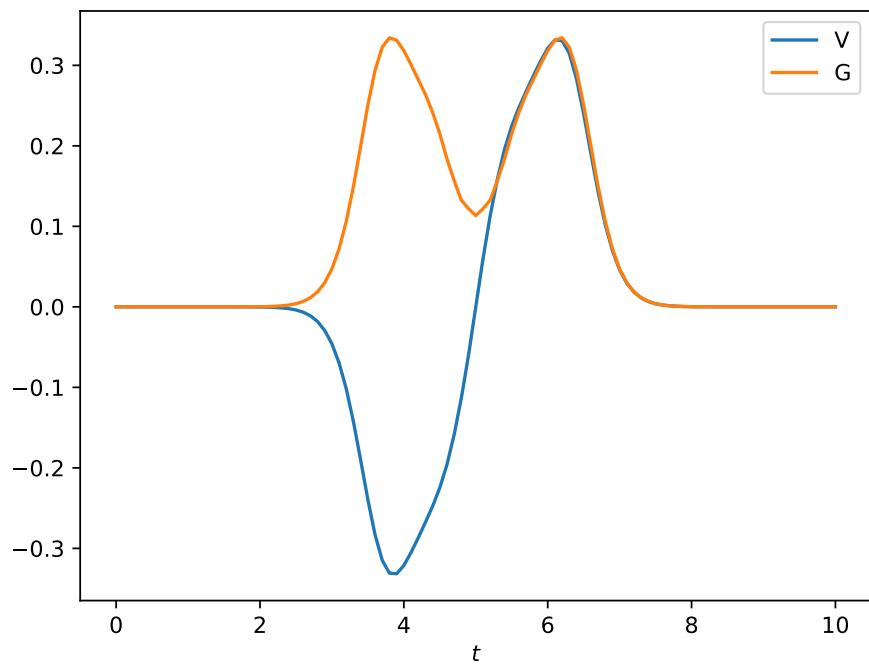


Рис. 10: Срез для $t = 1$

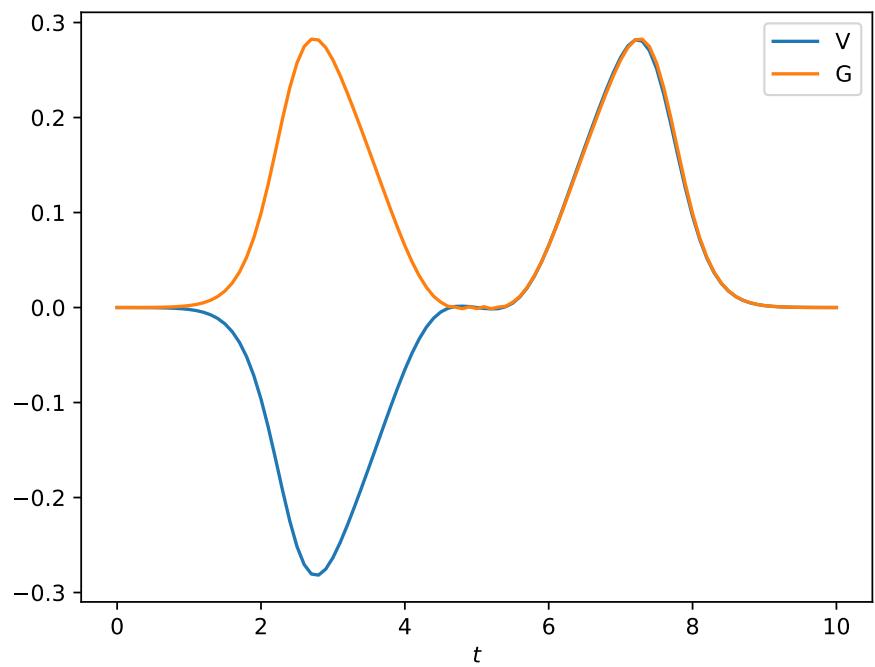


Рис. 11: Срез для $t = 2$

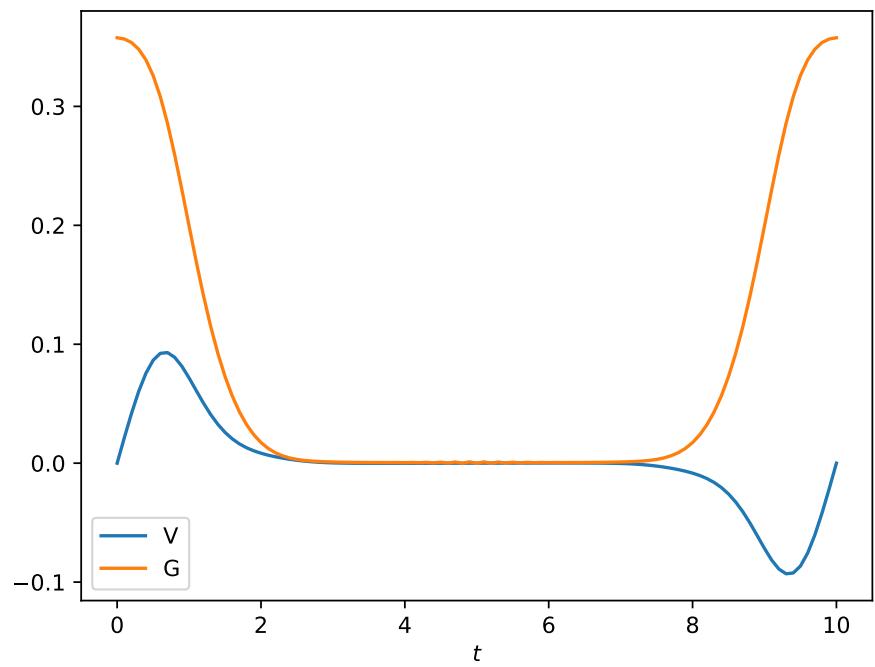


Рис. 12: Срез для $t = 5$

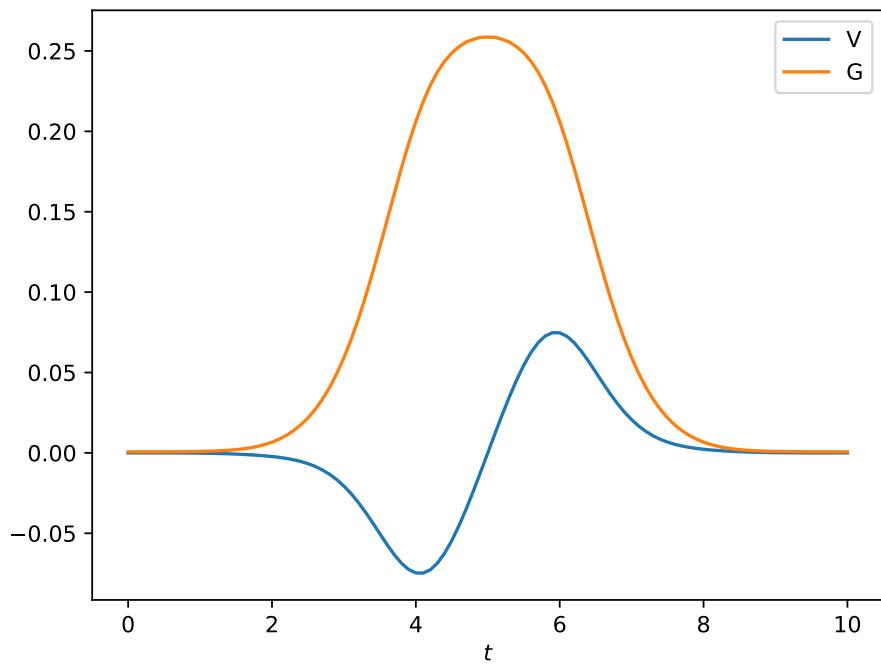


Рис. 13: Срез для $t = 10$

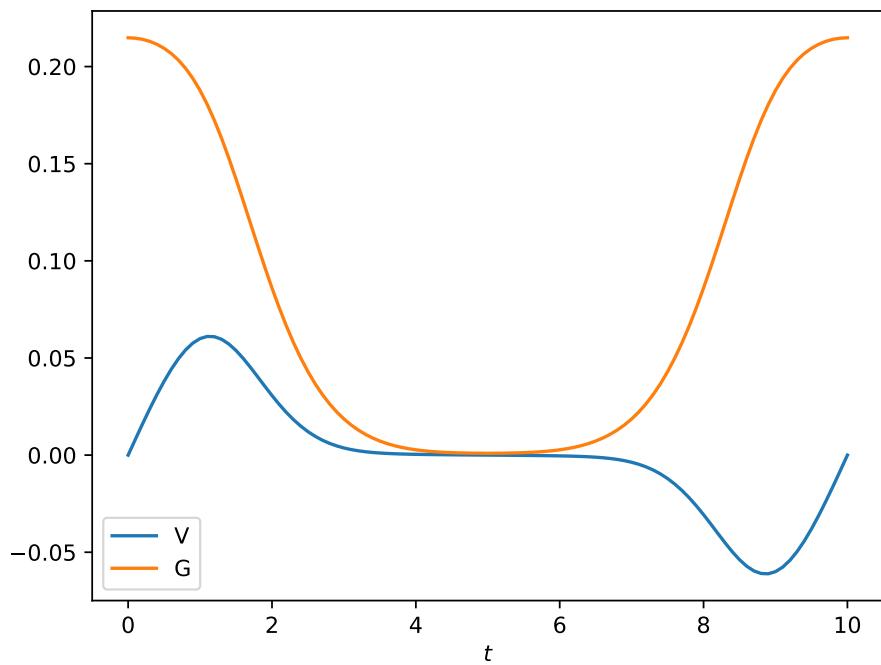


Рис. 14: Срез для $t = 15$

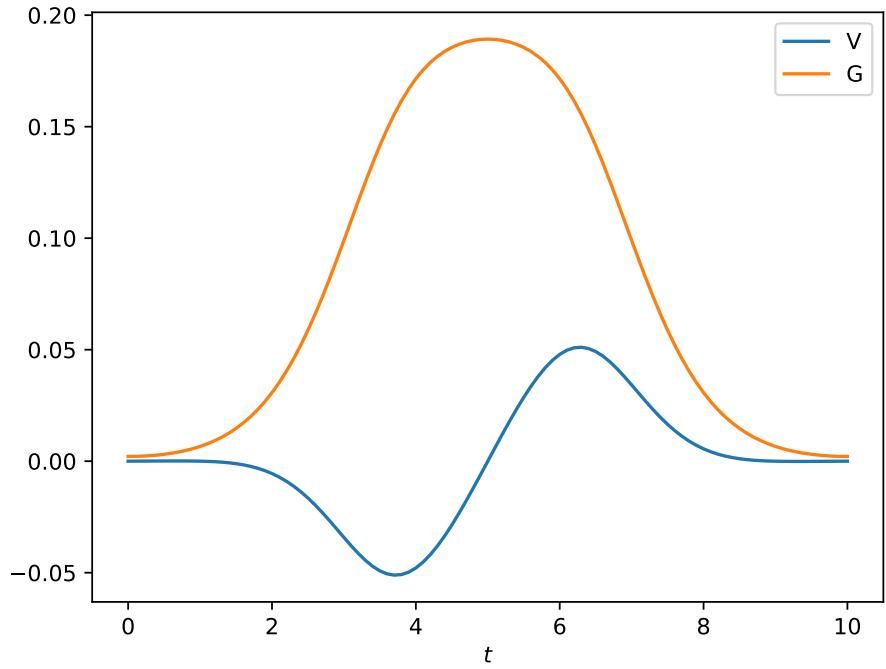


Рис. 15: Срез для $t = 20$

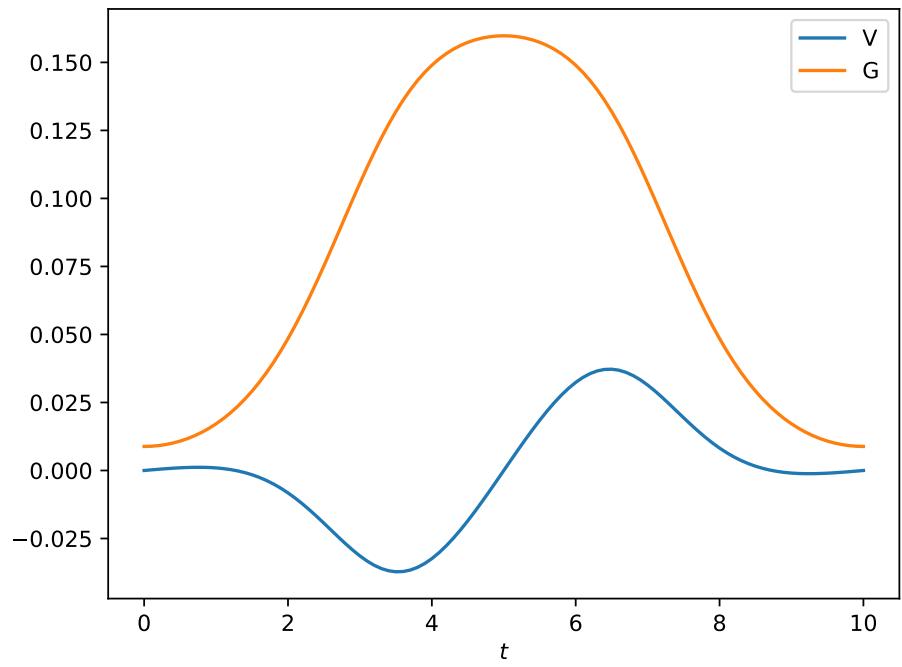


Рис. 16: Срез для $t = 30$

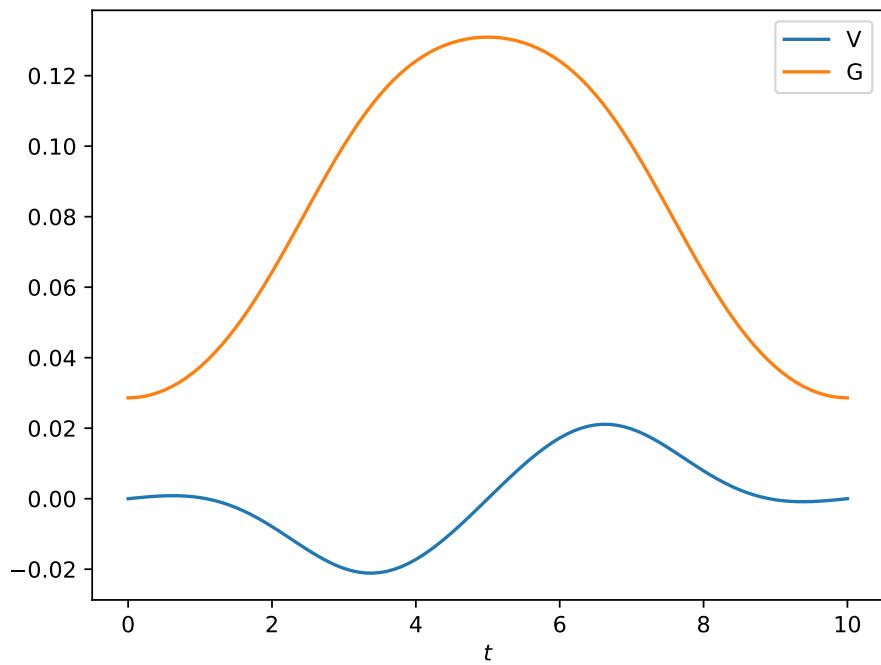


Рис. 17: Срез для $t = 50$

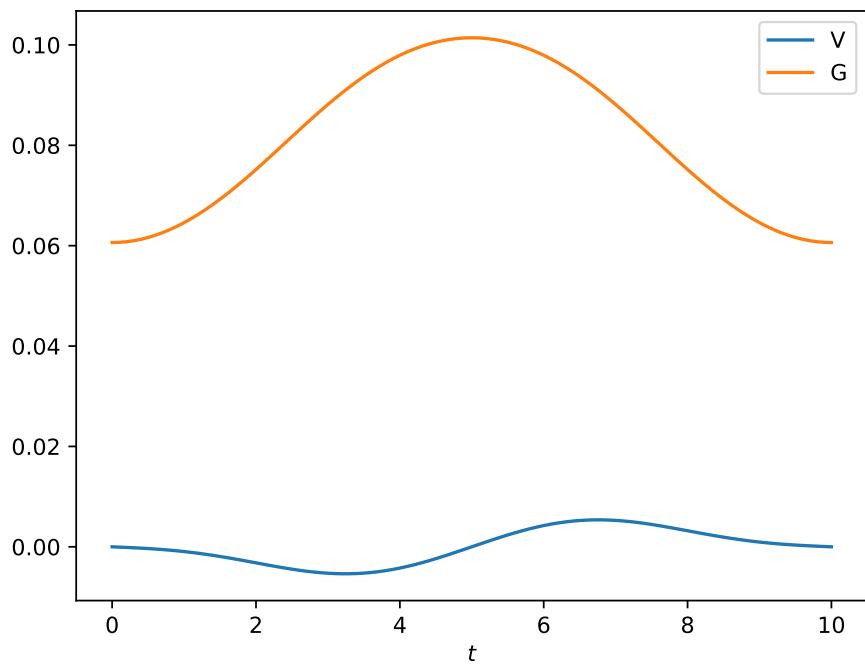


Рис. 18: Срез для $t = 100$

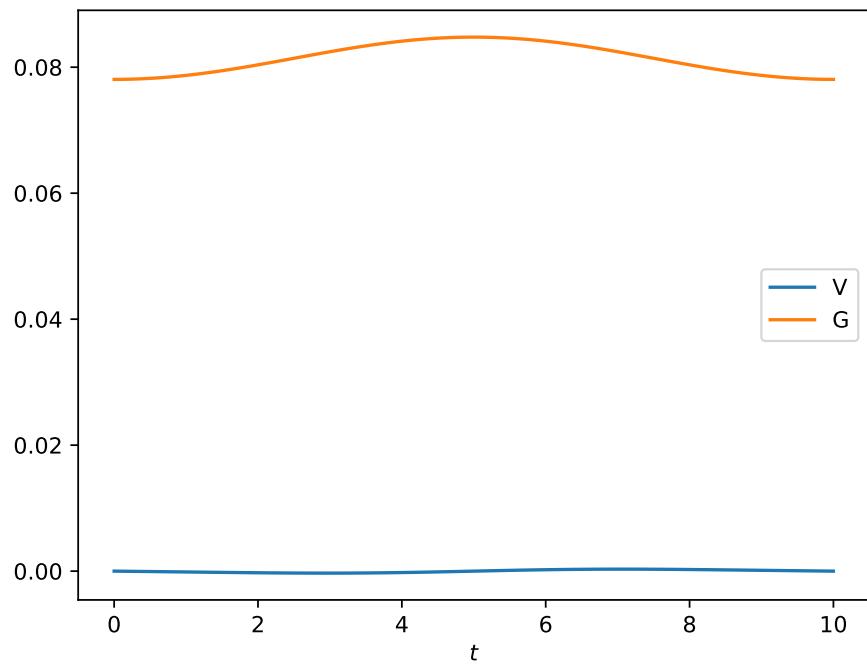


Рис. 19: Срез для $t = 200$

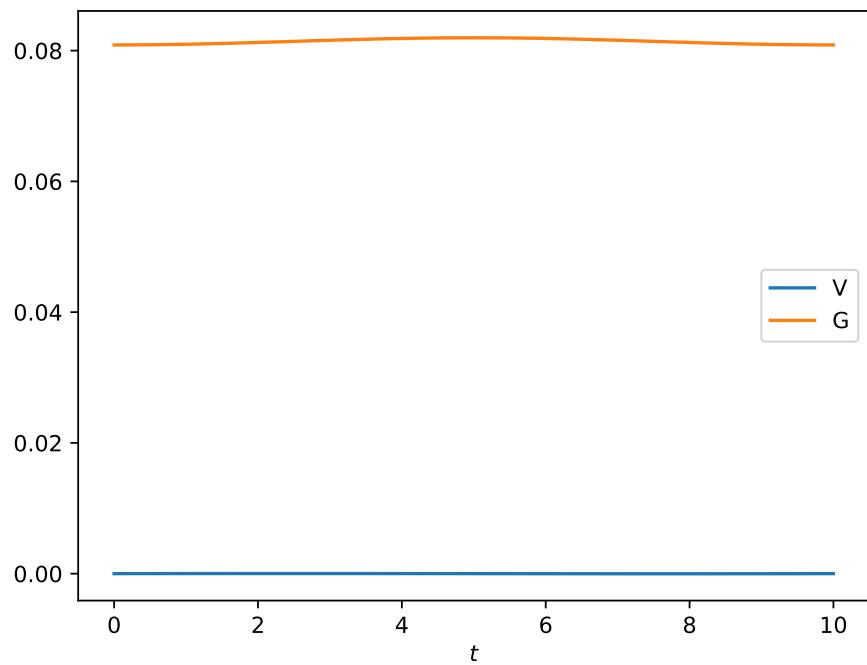


Рис. 20: Срез для $t = 300$

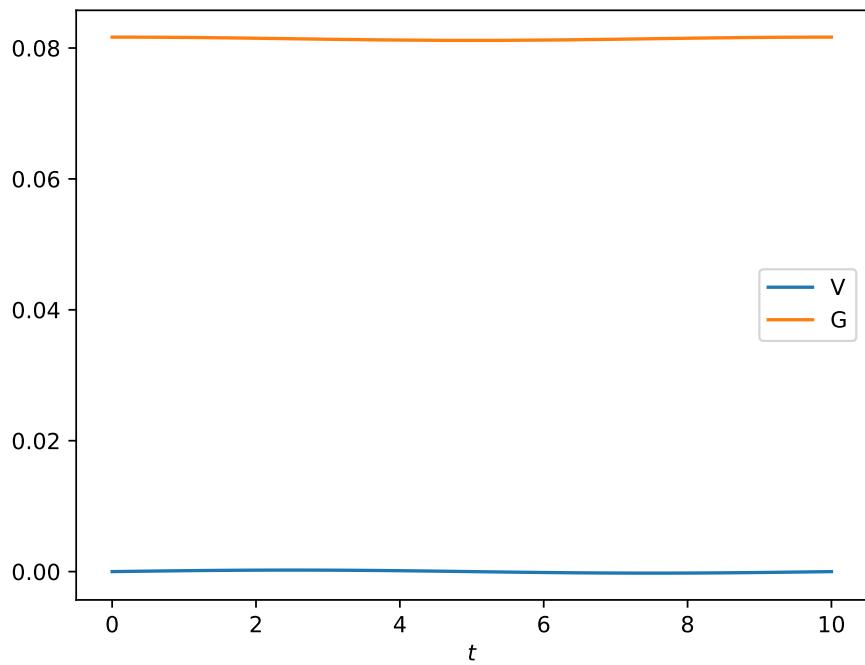


Рис. 21: Срез для $t = 326.3$

Рассмотрим общую картину динамики процесса. Для наглядности зафиксируем $\tau = h = 0.1$, $\varepsilon = 0.001$.

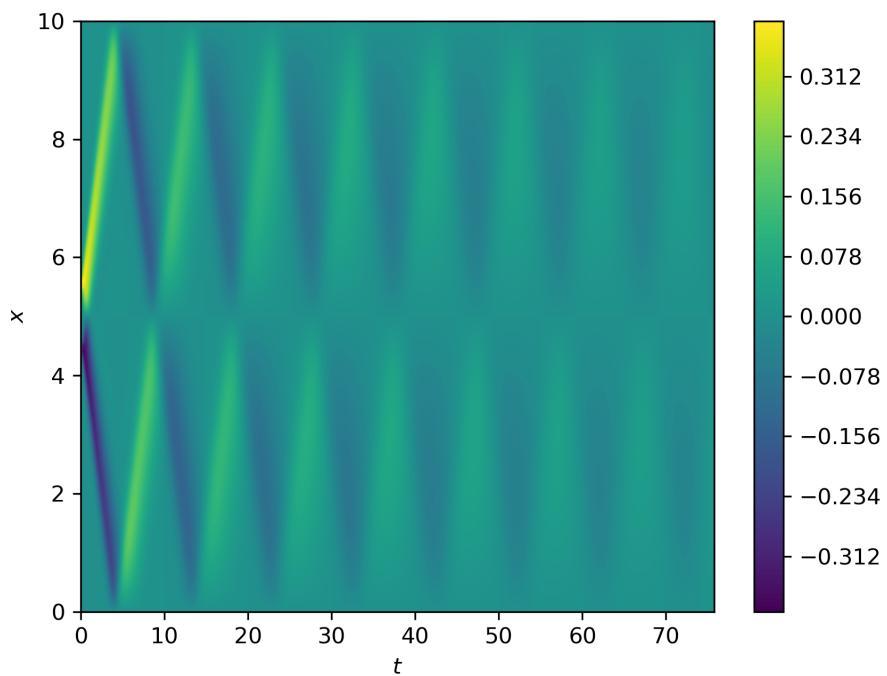


Рис. 22: Вид сверху для графика V при $\mu = 0.1$ и $C = 1$

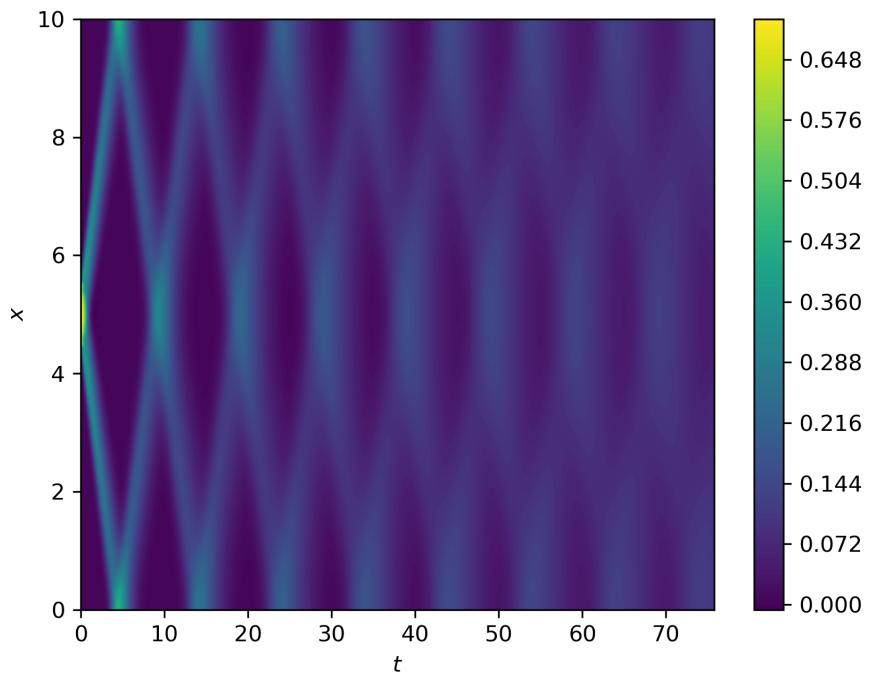


Рис. 23: Вид сверху для графика G при $\mu = 0.1$ и $C = 1$

Для изучения зависимости периода от параметров μ и C рассмотрим динамику первых 1000 шагов процесса при различных значениях этих параметров (здесь $\tau = h = 0.1$).

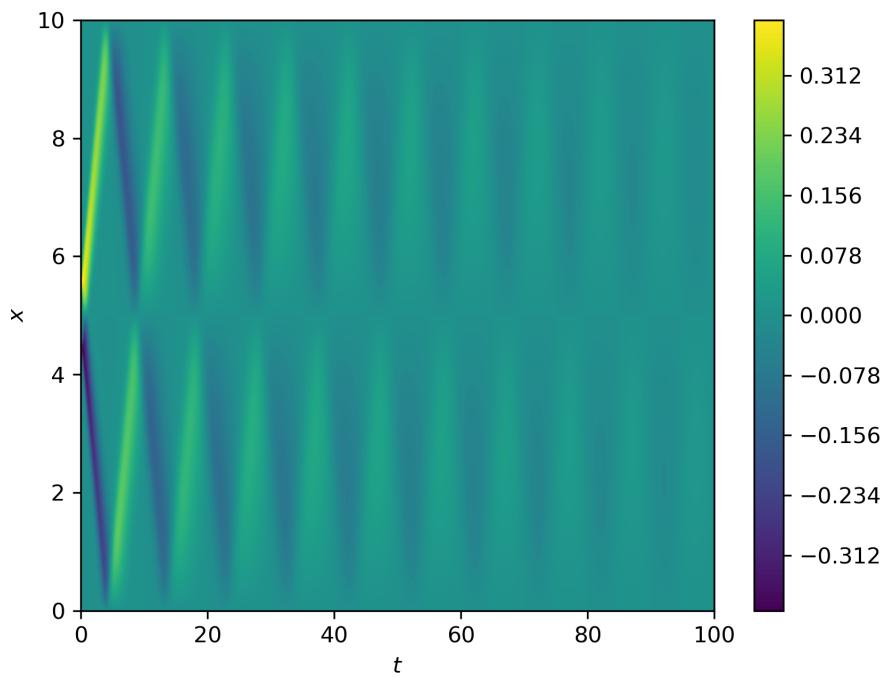


Рис. 24: Вид сверху первых 1000 шагов для графика V при $\mu = 0.1$ и $C = 1$

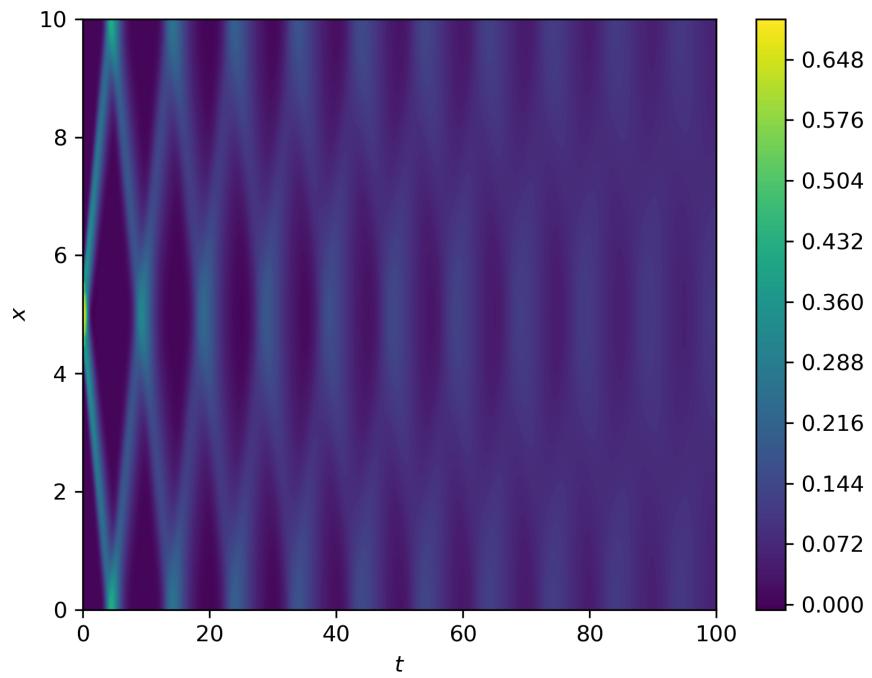


Рис. 25: Вид сверху первых 1000 шагов для графика G при $\mu = 0.1$ и $C = 1$

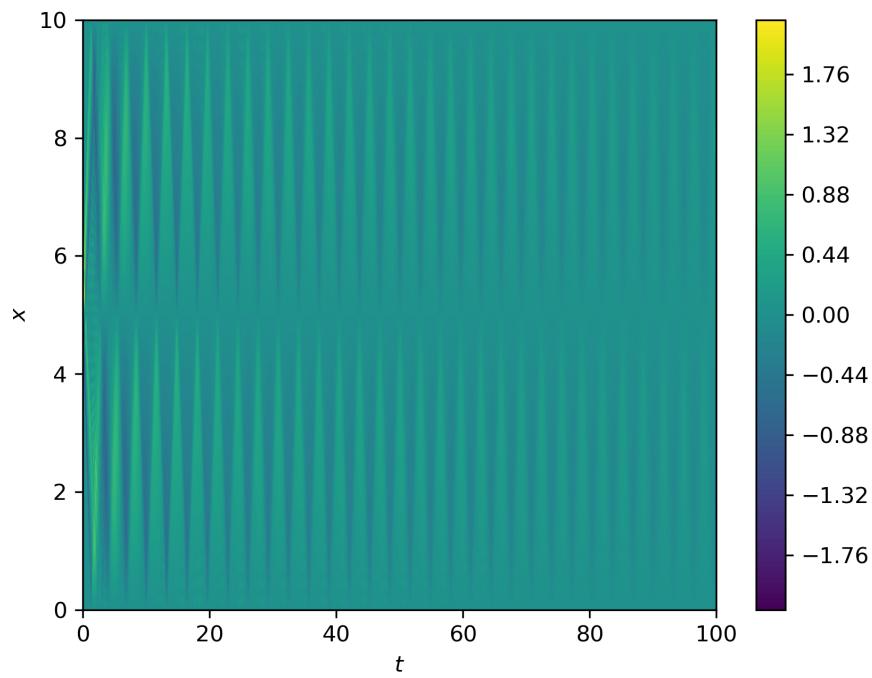


Рис. 26: Вид сверху первых 1000 шагов для графика V при $\mu = 0.1$ и $C = 10$

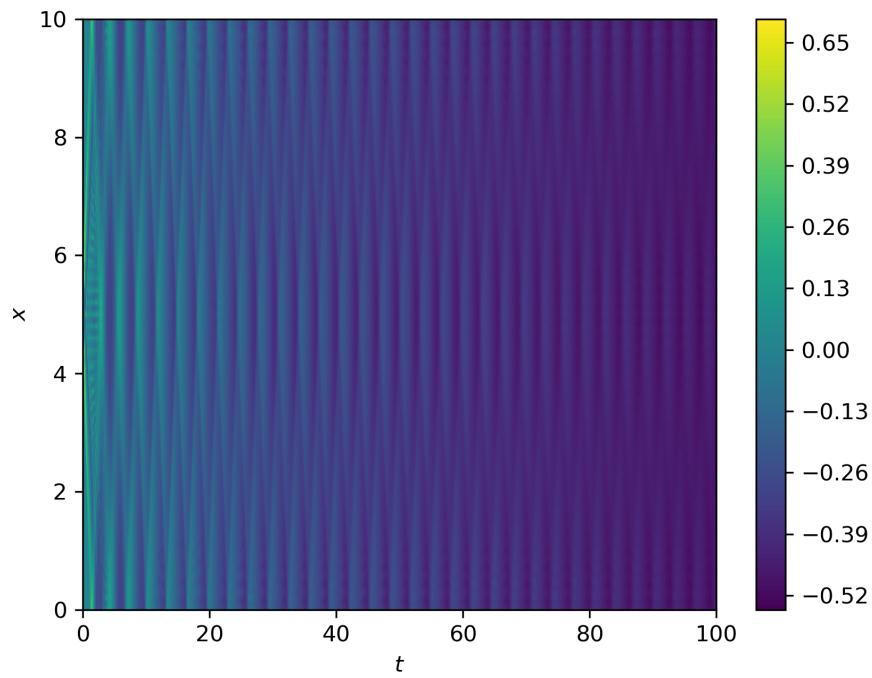


Рис. 27: Вид сверху первых 1000 шагов для графика G при $\mu = 0.1$ и $C = 10$

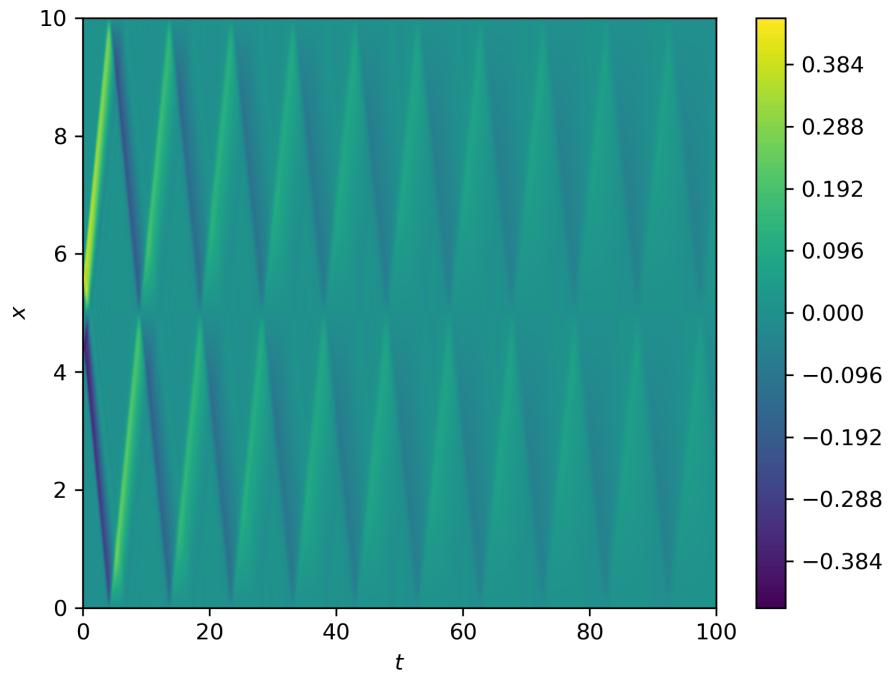


Рис. 28: Вид сверху первых 1000 шагов для графика V при $\mu = 0.01$ и $C = 1$

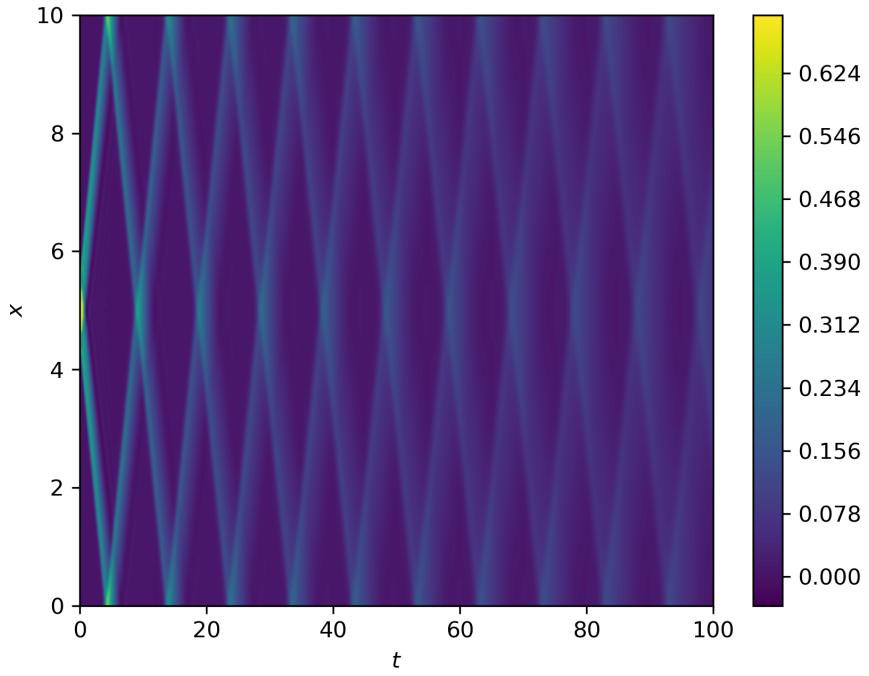


Рис. 29: Вид сверху первых 1000 шагов для графика G при $\mu = 0.01$ и $C = 1$

5.3.6 Вывод

Период колебаний не зависит от μ , однако зависит от C , а именно с увеличением C уменьшается период.

5.4 Время стабилизации

Рассмотрим таблицу зависимости времени стабилизации от параметров дифференциальной задачи и от выбора сетки (в каждой ячейке таблицы приведены значения N_0 для сеток $\Omega_{\tau,h}$, $\Omega_{\tau,h/2}$, $\Omega_{\tau/2,h}$ и, соответственно, $\Omega_{\tau/2,h/2}$).

$\mu \backslash C$	10^0	10^1
10^{-1}	335.58	365.86
	375.55	405.08
	300.445	331.015
	335.56	370.235
10^{-2}	2277.31	96287.38
	2662.27	77204.79
	1909.68	2030.79
	2294.64	2399.17

5.5 Вывод

При уменьшении параметра μ или увеличении параметра C затухание происходит медленнее. Это также подтверждают графики из подсекции 5.3.5.

5.6 Численные эксперименты второй задачи

5.6.1 Точность решения

Зафиксируем $\varepsilon = 0.001$, $\tau = h = 0.01$. Проведем численные эксперименты для сеток

$$\Omega_{\tau, h} = \omega_\tau \times \omega_h, \quad \Omega_{\tau, h/2} = \omega_\tau \times \omega_{h/2}, \quad \Omega_{\tau/2, h} = \omega_{\tau/2} \times \omega_h, \quad \Omega_{\tau/2, h/2} = \omega_{\tau/2} \times \omega_{h/2}.$$

Далее приведены таблицы значений $R(n)$ для $n = N_0/4, N_0/2, 3N_0/4, N_0$ (в каждой ячейке таблицы приведены значения для сеток $\Omega_{\tau, h}$, $\Omega_{\tau, h/2}$, $\Omega_{\tau/2, h}$ и, соответственно, $\Omega_{\tau/2, h/2}$).

C	$N_0\tau$	$n = N_0/4$	$n = N_0/2$	$n = 3N_0/4$	$n = N_0$
10^0	967.06	4.133410e-02	1.424182e-02	4.439787e-03	9.982678e-04
	1107.06	6.691909e-02	2.018186e-02	5.308603e-03	9.998559e-04
	826.96	2.461478e-02	1.018222e-02	3.767589e-03	9.995556e-04
	966.965	4.058790e-02	1.443651e-02	4.457808e-03	9.990523e-04
10^1	1027.56	9.726449e-02	4.087646e-02	1.007836e-02	9.910725e-04
	1166.71	1.599392e-01	5.804000e-02	1.203042e-02	9.972600e-04
	888.325	6.407787e-02	2.902184e-02	8.334449e-03	9.868431e-04
	1027.465	1.042529e-01	4.115951e-02	9.964390e-03	9.978522e-04

Таблица 23: Точности решения для при $\mu = 10^{-1}$

C	$N_0\tau$	$n = N_0/4$	$n = N_0/2$	$n = 3N_0/4$	$n = N_0$
10^0	5640.95	1.265405e-02	4.983540e-03	2.204683e-03	9.982187e-04
	7021.05	2.179593e-02	6.921976e-03	2.616534e-03	9.971854e-04
	4044.87	9.136844e-03	4.461926e-03	2.222741e-03	9.989442e-04
	5359.77	1.057648e-02	4.271413e-03	2.022338e-03	9.998065e-04
10^1	89618.75	7.072897e-03	2.339856e-03	1.401172e-03	9.999999e-04
	77190.95	5.035490e-03	2.147741e-03	1.364947e-03	1.000000e-03
	5004.445	2.231019e-02	7.330073e-03	6.063691e-03	9.992205e-04
	6376.945	3.779530e-02	9.945111e-03	2.331357e-03	9.999307e-04

Таблица 24: Точности решения для при $\mu = 10^{-2}$

Приведены также и графики.

Примечание. Значения большие 1 были заменены на 1; значения меньшие -1 были заменены на -1.

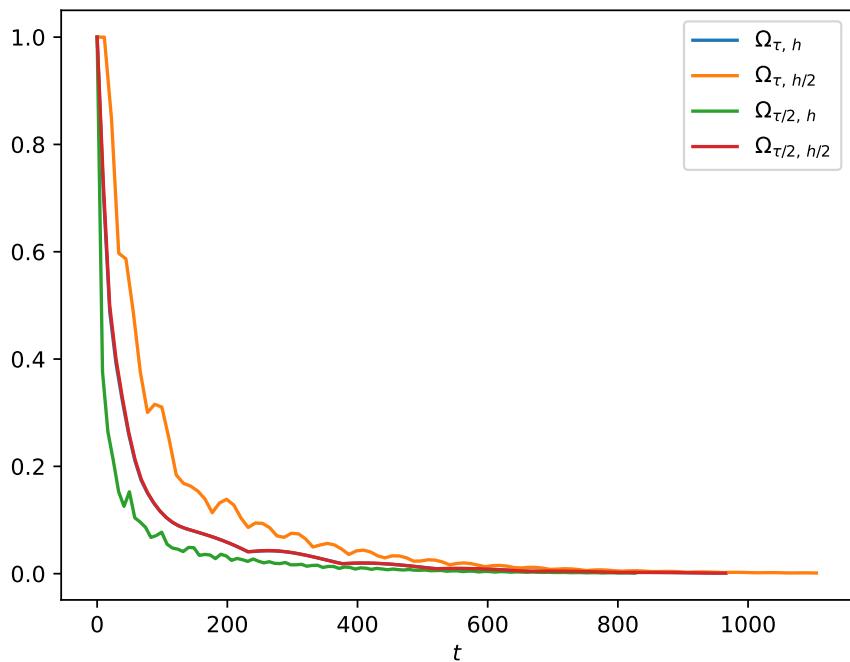


Рис. 30: Графики функций R для $\mu = 10^{-1}$ и $C = 10^0$

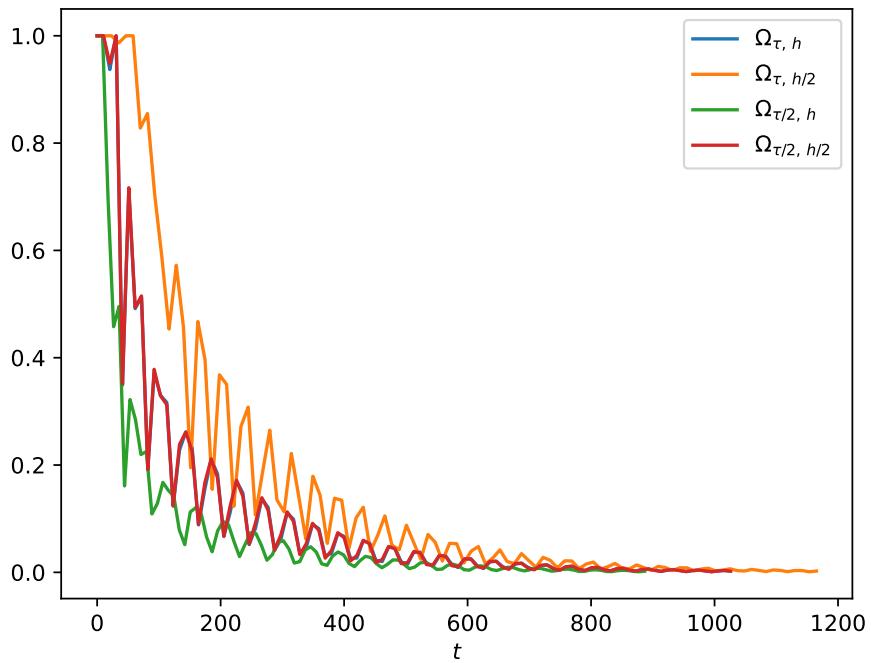


Рис. 31: Графики функций R для $\mu = 10^{-1}$ и $C = 10^1$

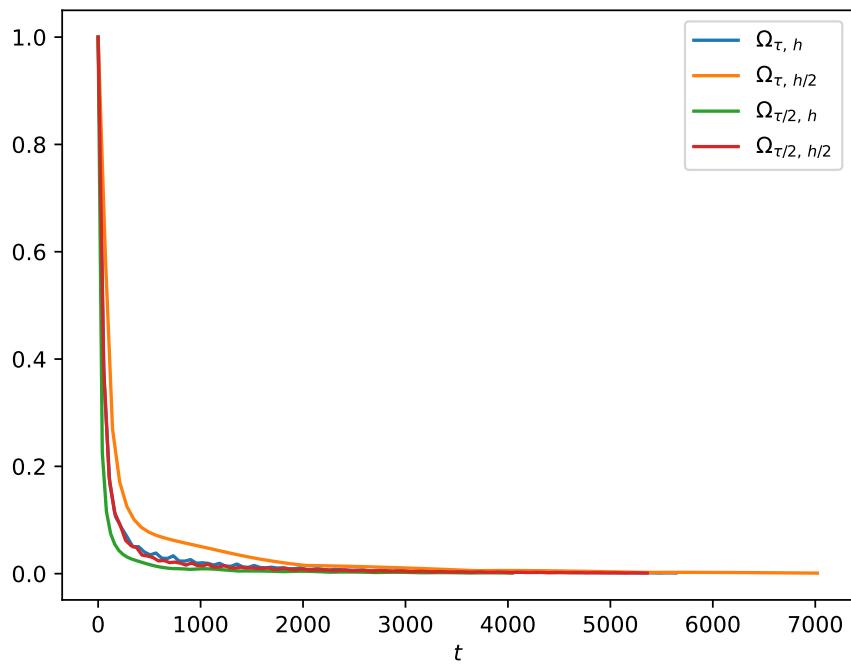


Рис. 32: Графики функций R для $\mu = 10^{-2}$ и $C = 10^0$

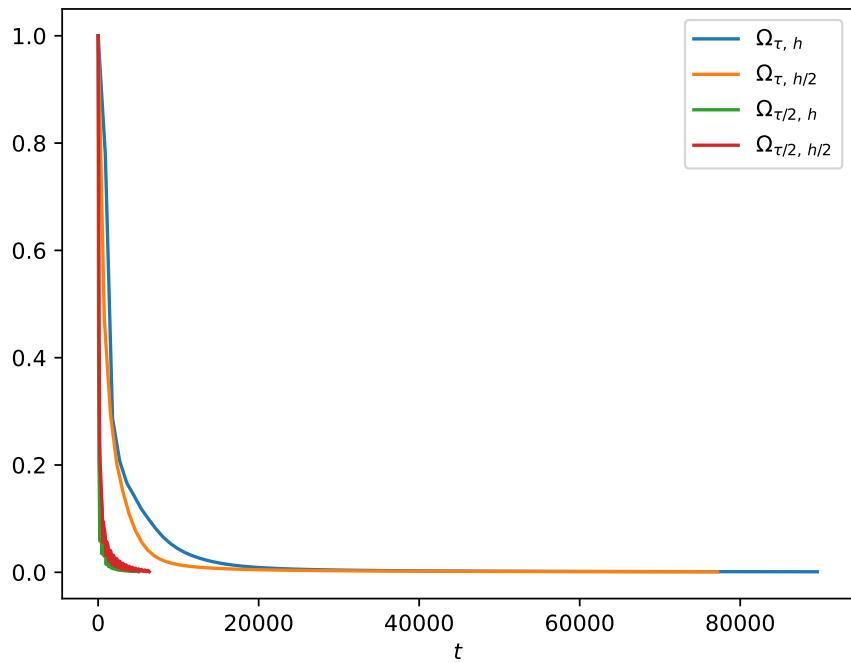


Рис. 33: Графики функций R для $\mu = 10^{-2}$ и $C = 10^1$

5.6.2 Вывод

С уменьшением шага разбиения времени τ сходимость решения улучшается, чего сказать нельзя для шага разбиения пространства h .

5.6.3 Консервативность системы

Далее приведены таблицы значений $\Delta_m(n)$ для $n = N_0/5, 2N_0/5, 3N_0/5, 4N_0/5, N_0$ (в каждой ячейке таблицы приведены значения для сеток $\Omega_{\tau,h}, \Omega_{\tau,h/2}, \Omega_{\tau/2,h}$ и, соответственно, $\Omega_{\tau/2,h/2}$).

C	$n = N_0/5$	$n = 2N_0/5$	$n = 3N_0/5$	$n = 4N_0/5$	$n = N_0$
10^0	-3.467615e-03	-3.488528e-03	-3.489029e-03	-3.489295e-03	-3.489349e-03
	-3.133984e-03	-3.146569e-03	-3.147820e-03	-3.147940e-03	-3.147950e-03
	-2.236207e-03	-2.240705e-03	-2.243836e-03	-2.243713e-03	-2.243850e-03
	-1.843090e-03	-1.853541e-03	-1.853783e-03	-1.853922e-03	-1.853949e-03
10^1	-2.365933e-03	-2.377562e-03	-2.378802e-03	-2.378958e-03	-2.378978e-03
	-2.389801e-03	-2.398047e-03	-2.398809e-03	-2.398893e-03	-2.398901e-03
	-1.242226e-03	-1.253363e-03	-1.254916e-03	-1.255100e-03	-1.255119e-03
	-1.236577e-03	-1.242510e-03	-1.243142e-03	-1.243221e-03	-1.243231e-03

Таблица 25: Разность масс для при $\mu = 10^{-1}$

C	$n = N_0/5$	$n = 2N_0/5$	$n = 3N_0/5$	$n = 4N_0/5$	$n = N_0$
10^0	-1.896403e-02	-1.897347e-02	-1.897596e-02	-1.897669e-02	-1.897681e-02
	-2.024399e-02	-2.025173e-02	-2.025275e-02	-2.025289e-02	-2.025296e-02
	-1.311345e-02	-1.311456e-02	-1.311494e-02	-1.311525e-02	-1.311552e-02
	-1.296620e-02	-1.296910e-02	-1.297008e-02	-1.297040e-02	-1.297046e-02
10^1	-4.558411e-01	-4.558459e-01	-4.558467e-01	-4.558470e-01	-4.558472e-01
	-7.075033e-01	-7.075041e-01	-7.075042e-01	-7.075043e-01	-7.075044e-01
	-8.674364e-03	-8.684883e-03	-8.685979e-03	-8.686483e-03	-8.686553e-03
	-1.094887e-02	-1.095347e-02	-1.095433e-02	-1.095451e-02	-1.095454e-02

Таблица 26: Разность масс для при $\mu = 10^{-2}$

Приведены также и графики.

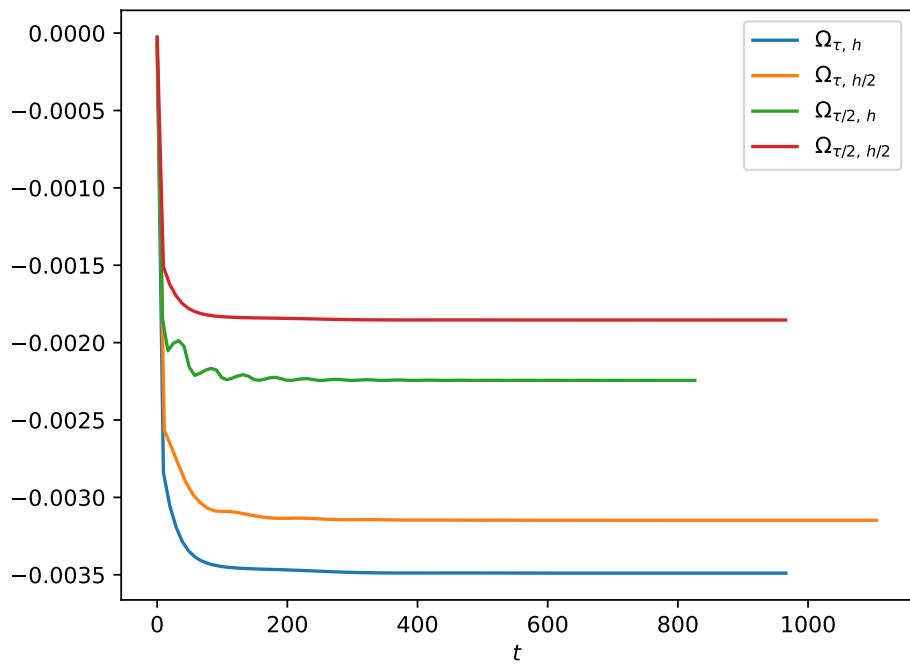


Рис. 34: Графики функций Δ_m для $\mu = 10^{-1}$ и $C = 10^0$

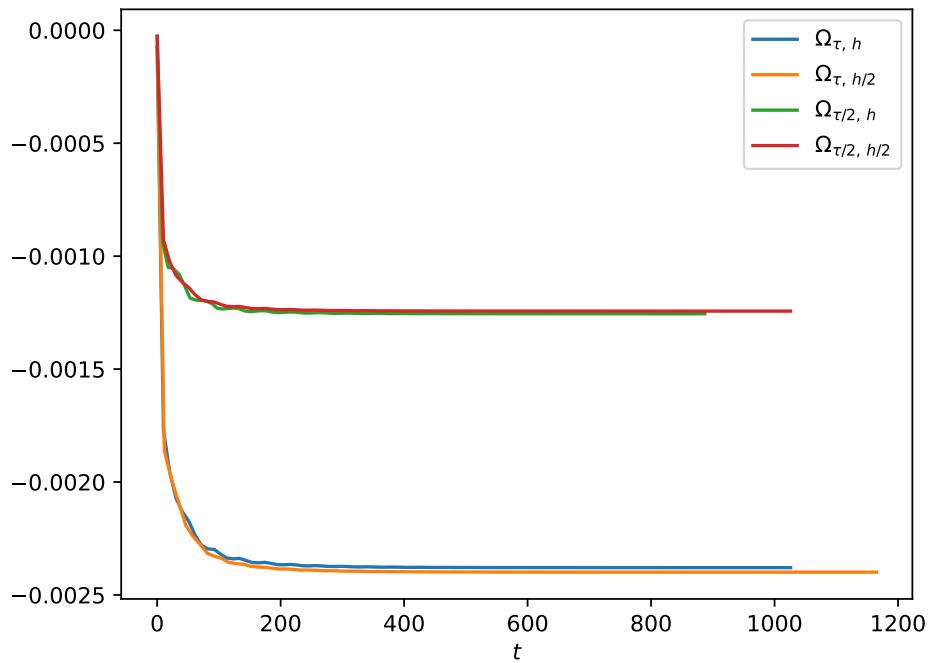


Рис. 35: Графики функций Δ_m для $\mu = 10^{-1}$ и $C = 10^1$

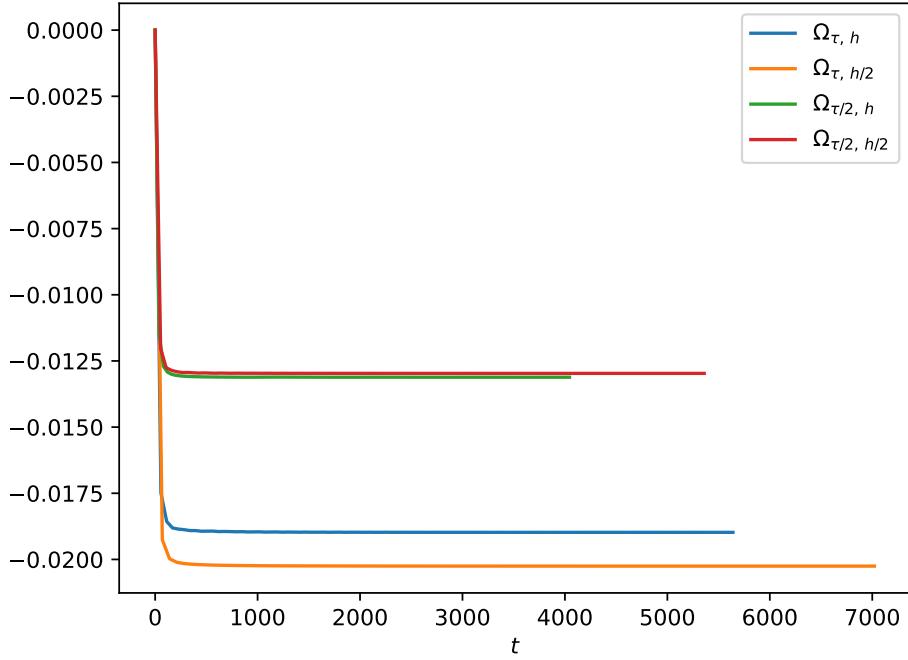


Рис. 36: Графики функций Δ_m для $\mu = 10^{-2}$ и $C = 10^0$

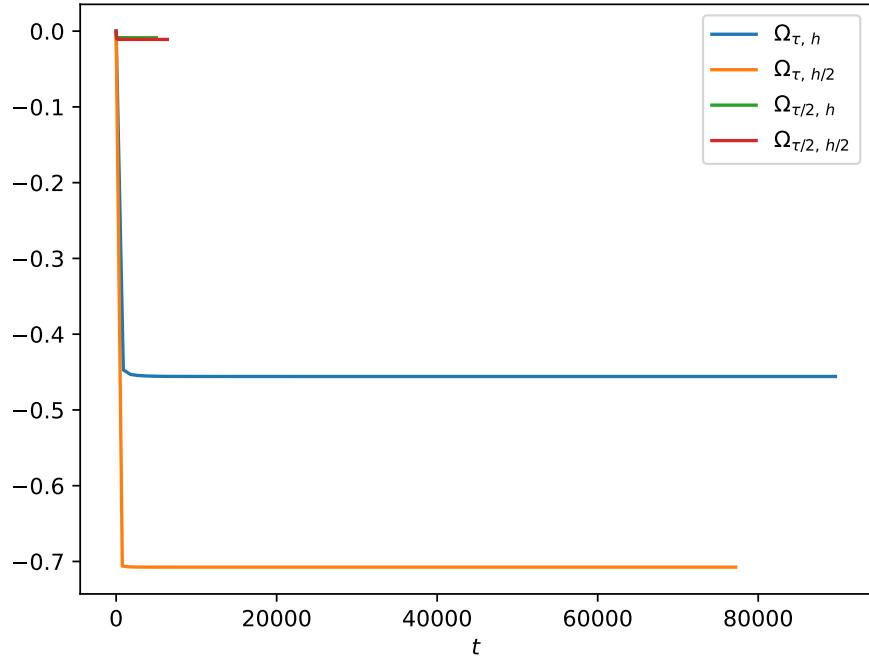


Рис. 37: Графики функций Δ_m для $\mu = 10^{-2}$ и $C = 10^1$

5.6.4 Вывод

Из последнего графика видно, что для малых μ и больших C необходимо брать достаточно мелкую сетку, иначе не возможно наблюдать консервативность системы. Потери массы составляют менее 2%. Из чего можно сделать вывод, что система является консервативной.

5.6.5 Динамика процесса

Рассмотрим случай $\mu = 0.1$, $C = 1$, $\tau = h = 0.1$, $\varepsilon = 0.001$. Далее приведены графики V и G в разные моменты времени.

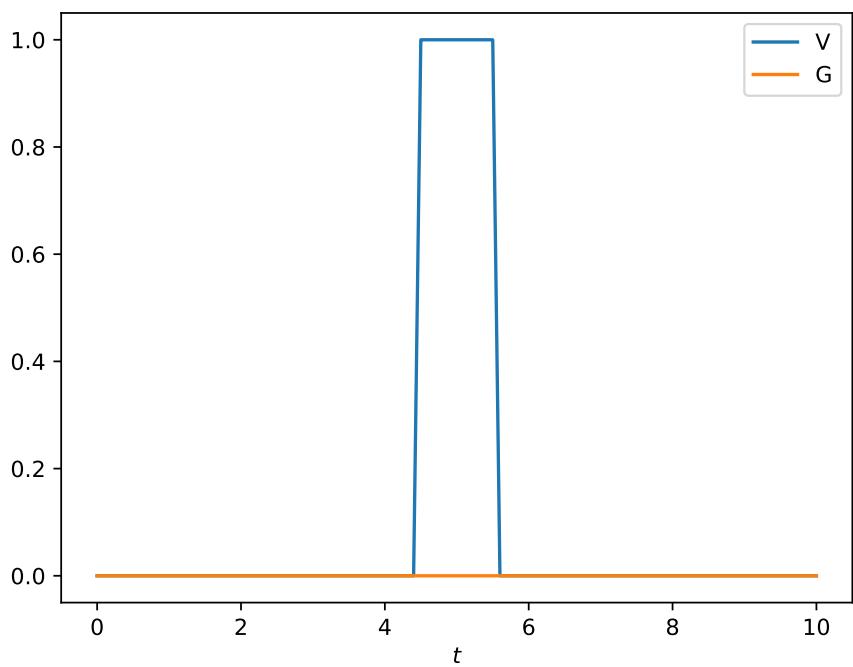


Рис. 38: Срез для $t = 0$

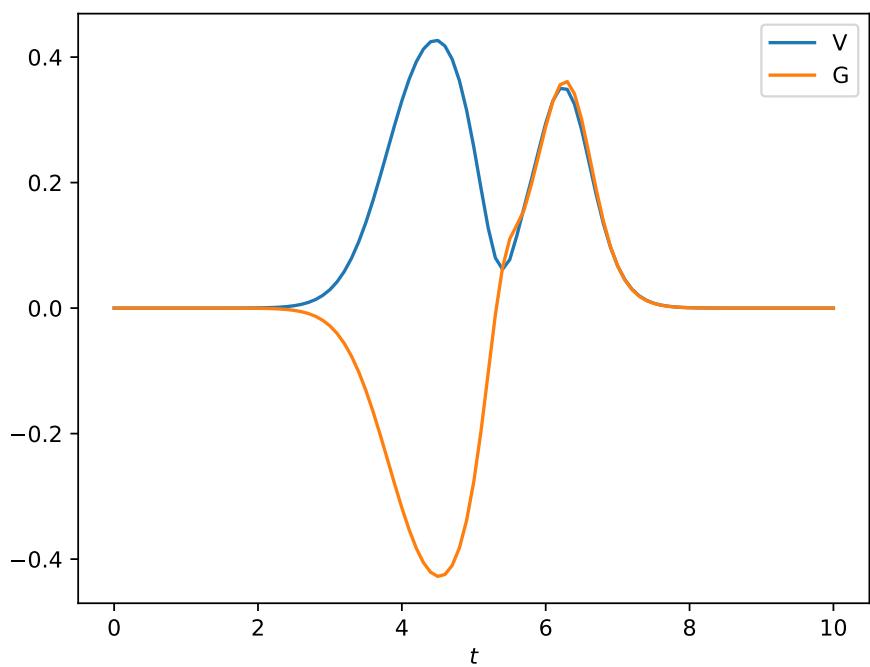


Рис. 39: Срез для $t = 1$

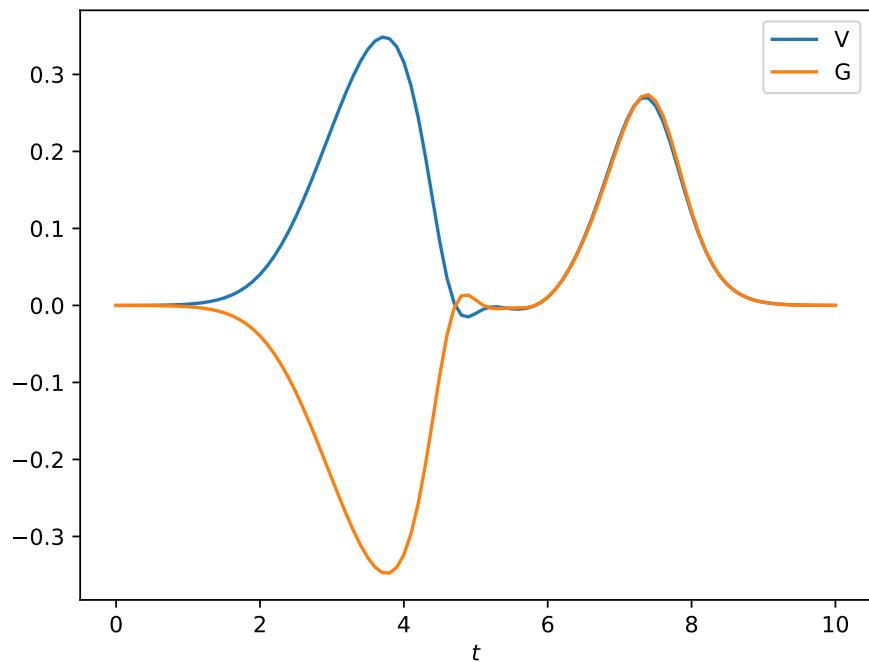


Рис. 40: Срез для $t = 2$

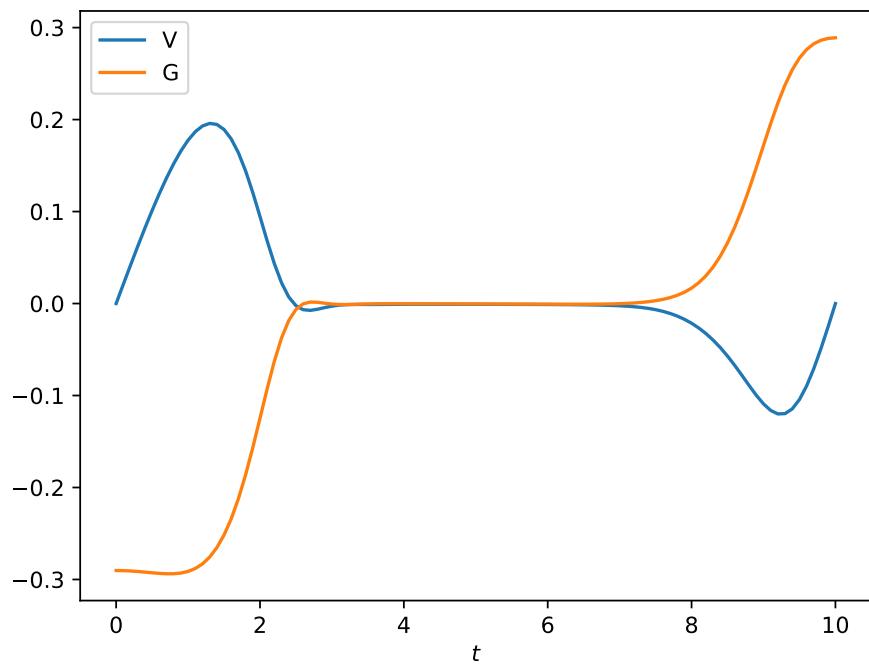


Рис. 41: Срез для $t = 5$

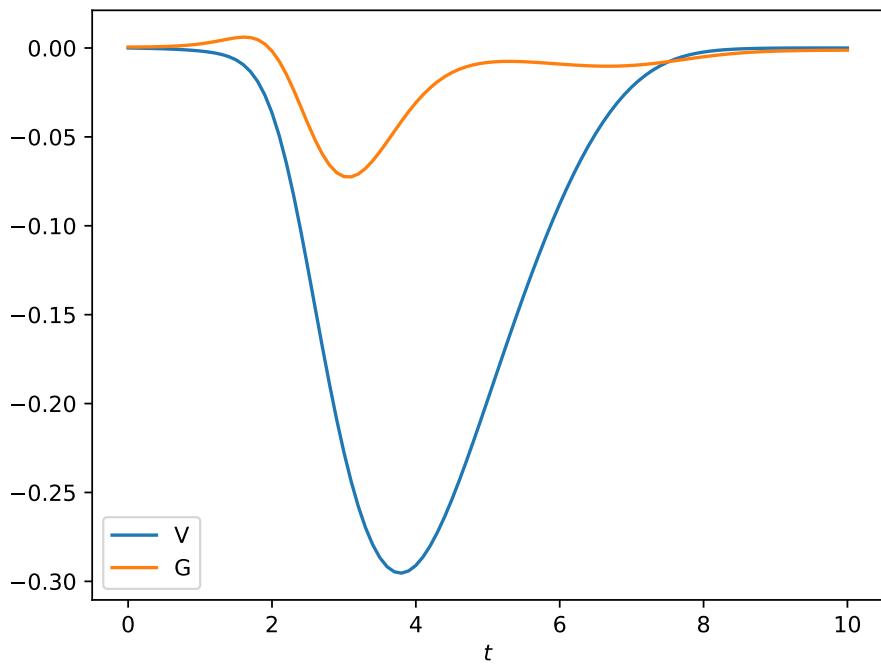


Рис. 42: Срез для $t = 10$

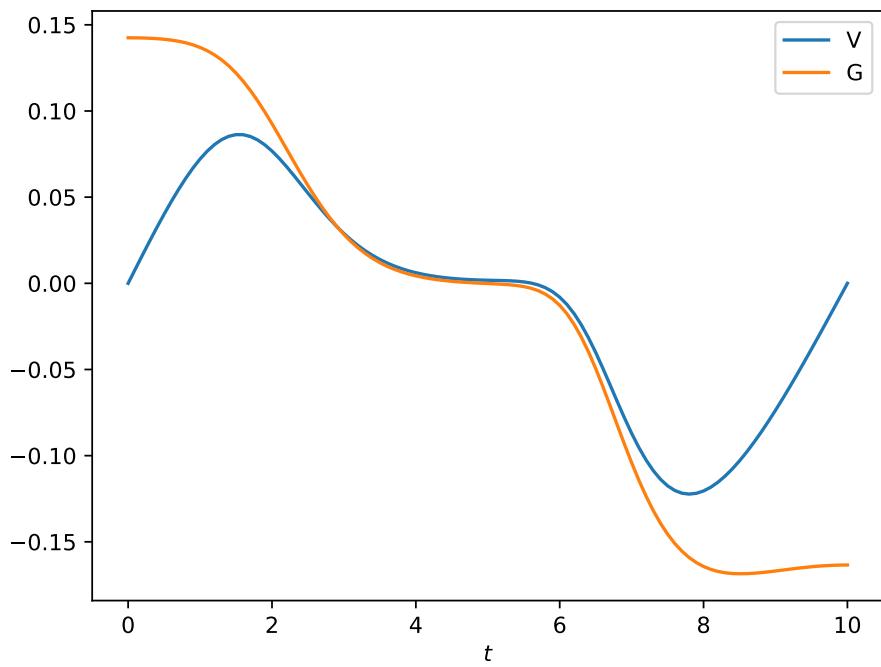


Рис. 43: Срез для $t = 15$

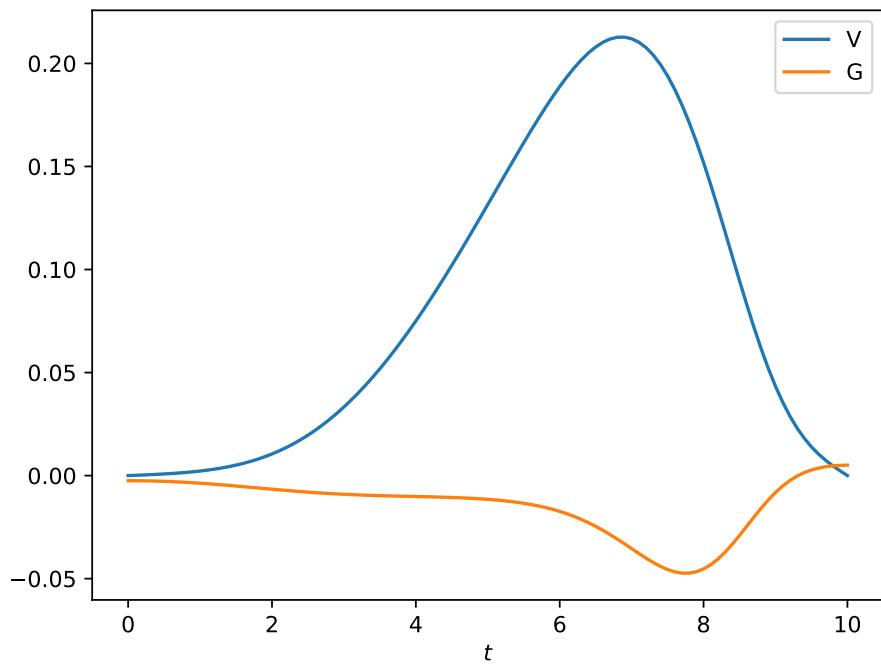


Рис. 44: Срез для $t = 20$

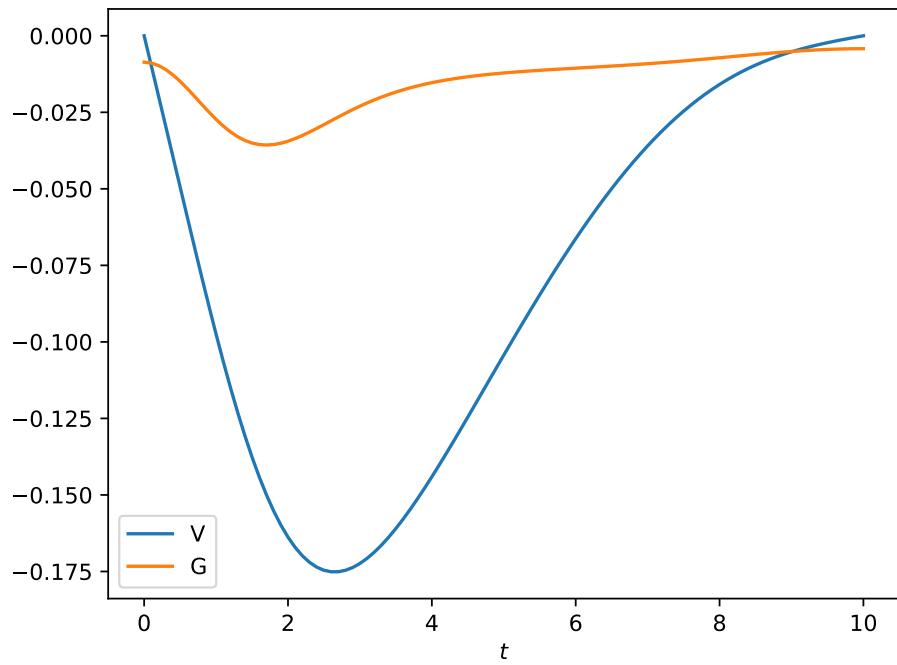


Рис. 45: Срез для $t = 30$

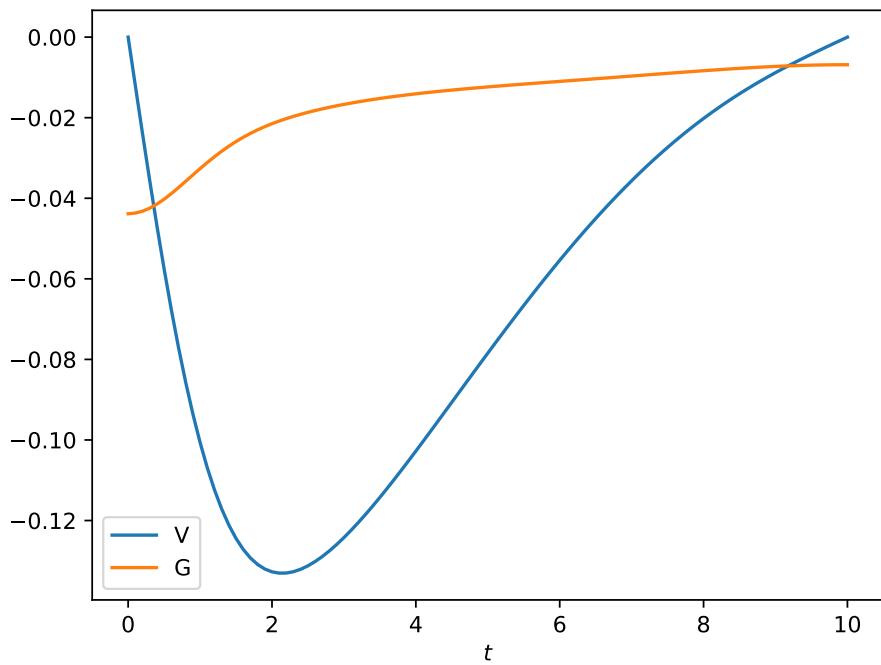


Рис. 46: Срез для $t = 50$

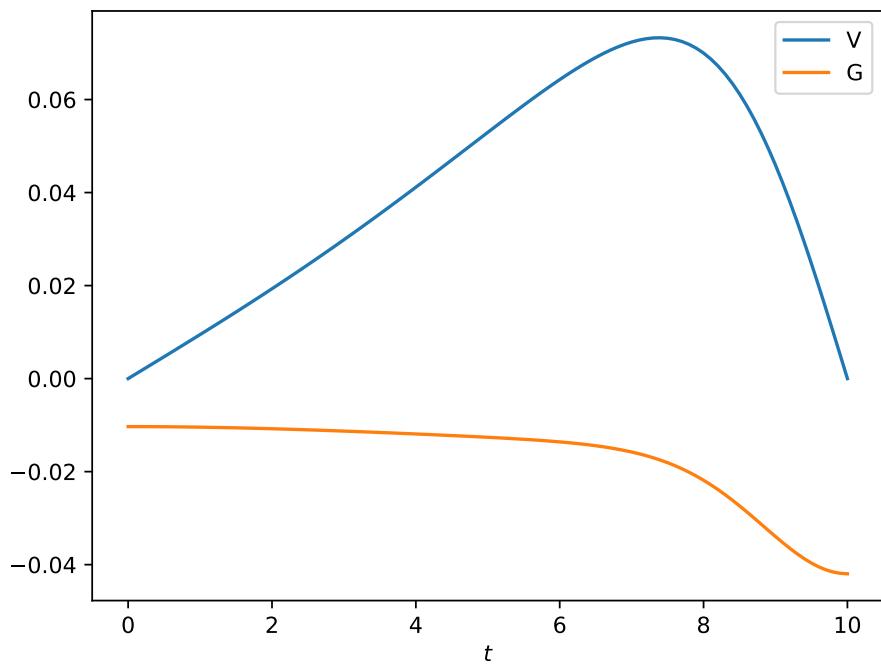


Рис. 47: Срез для $t = 100$

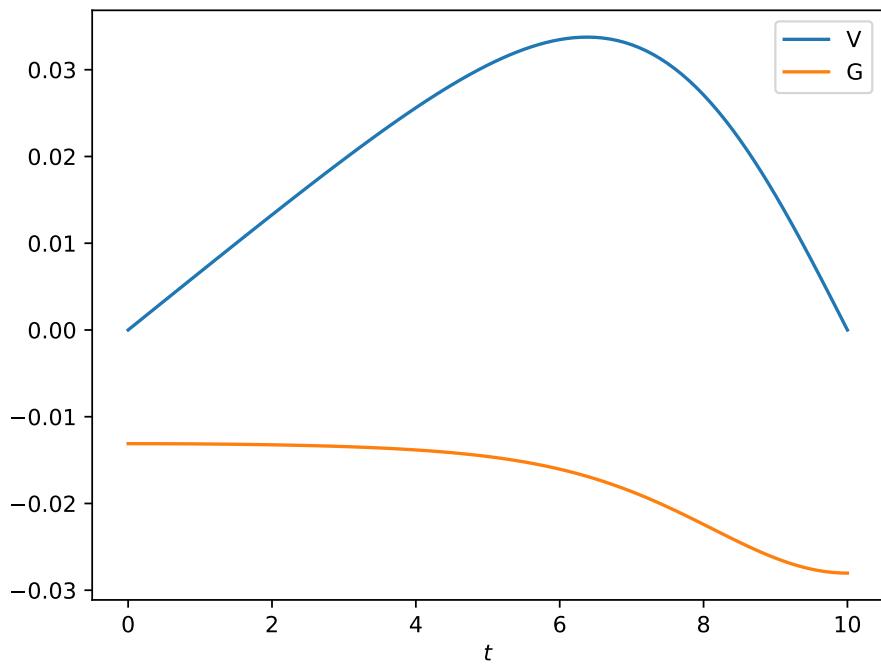


Рис. 48: Срез для $t = 200$

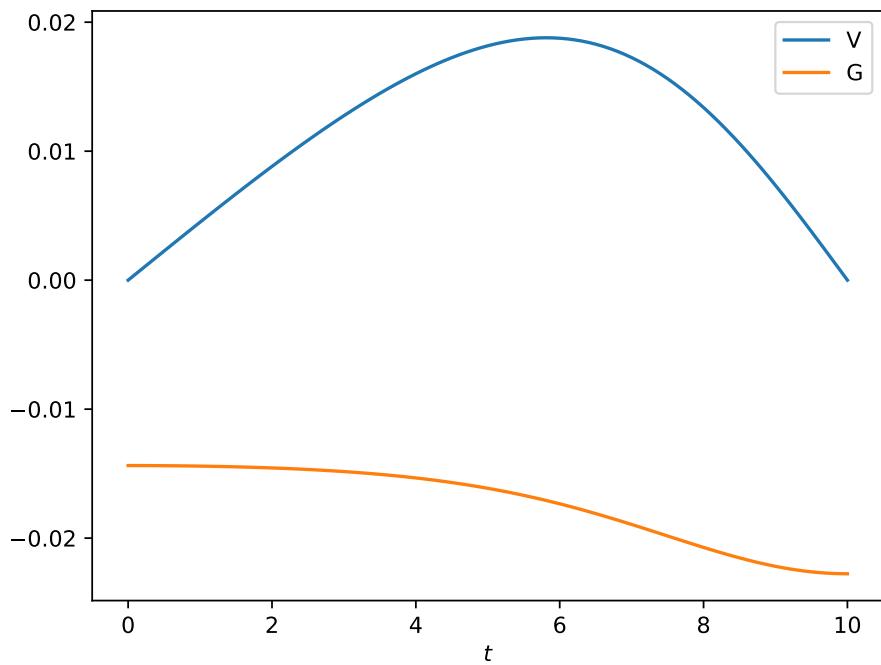


Рис. 49: Срез для $t = 300$

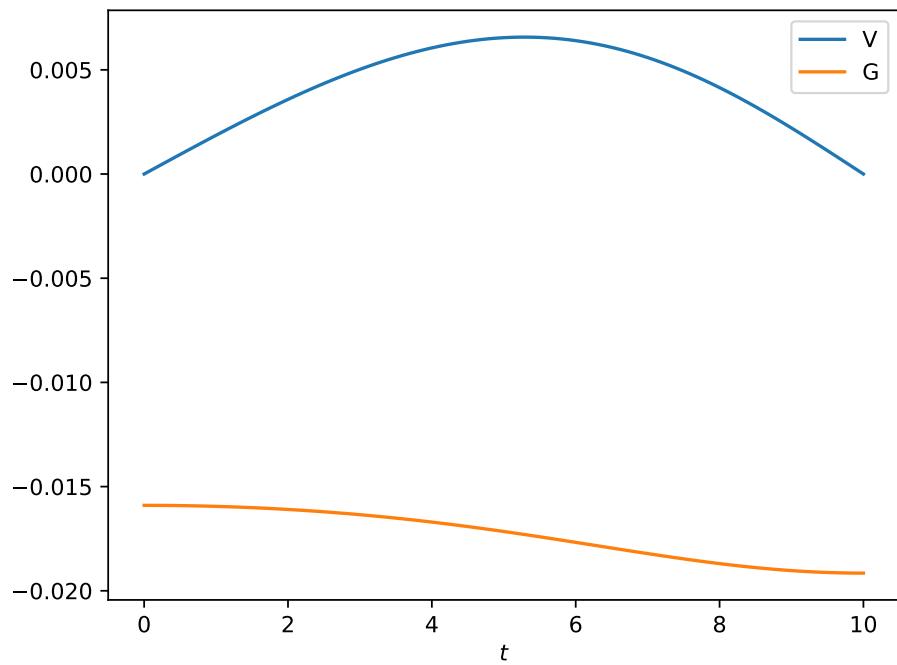


Рис. 50: Срез для $t = 500$

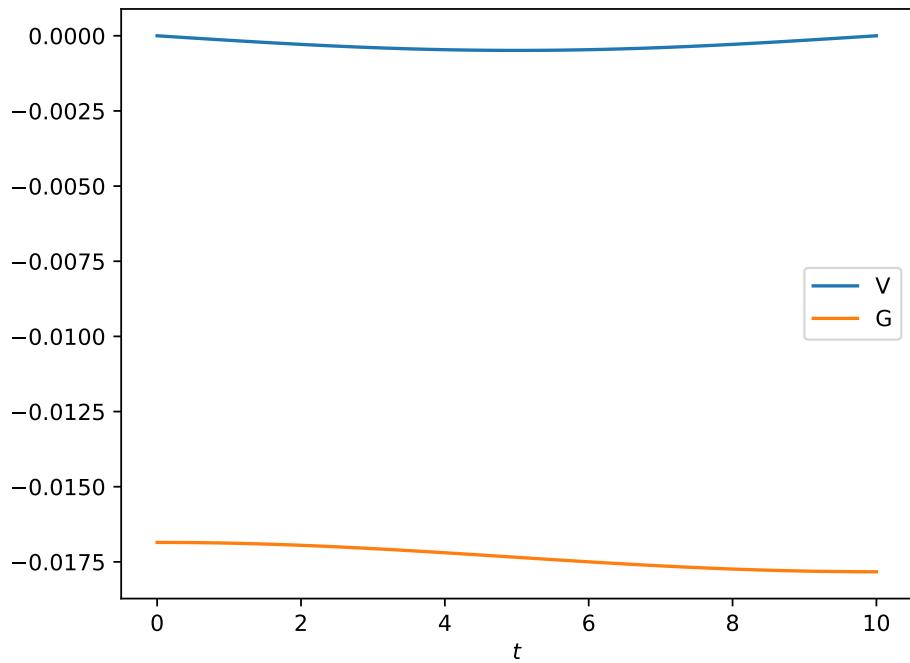


Рис. 51: Срез для $t = 953.5$

Рассмотрим общую картину динамики процесса. Для наглядности зафиксируем $\tau = h = 0.1$, $\varepsilon = 0.001$.

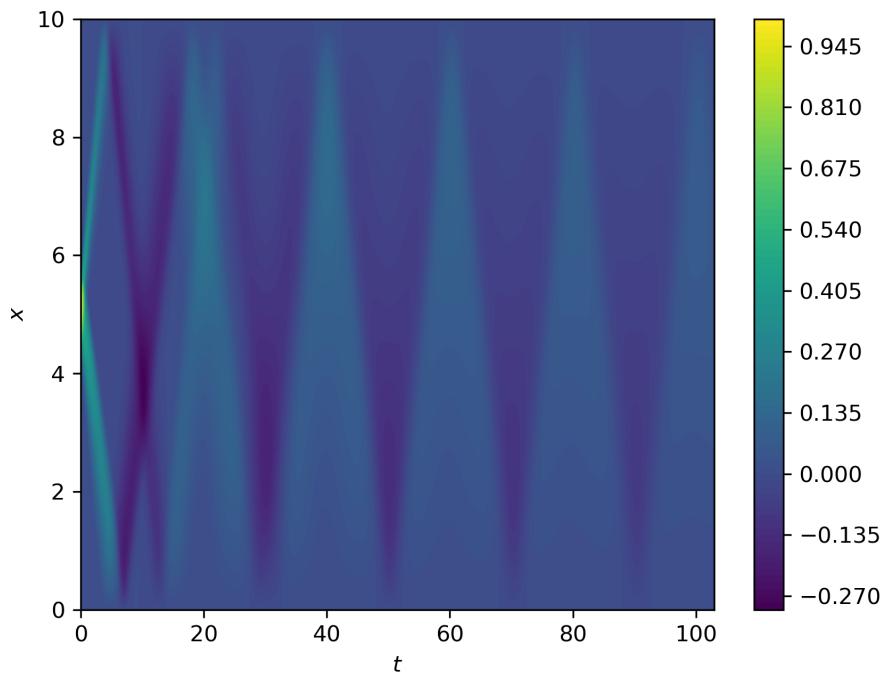


Рис. 52: Вид сверху для графика V при $\mu = 0.1$ и $C = 1$

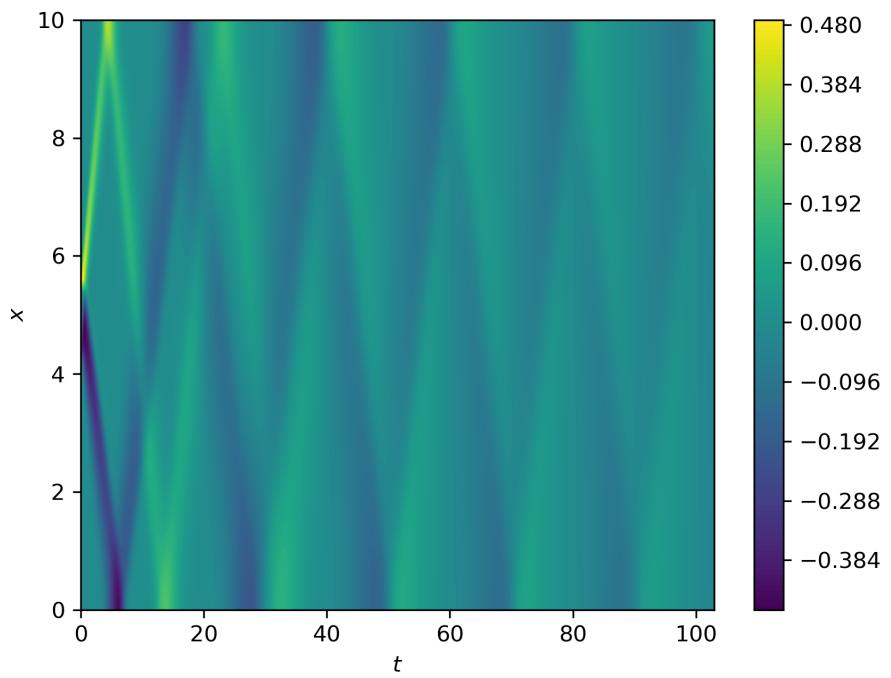


Рис. 53: Вид сверху для графика G при $\mu = 0.1$ и $C = 1$

Для изучения зависимости периода от параметров μ и C рассмотрим динамику первых 1000 шагов процесса при различных значениях этих параметров (здесь $\tau = h = 0.1$).

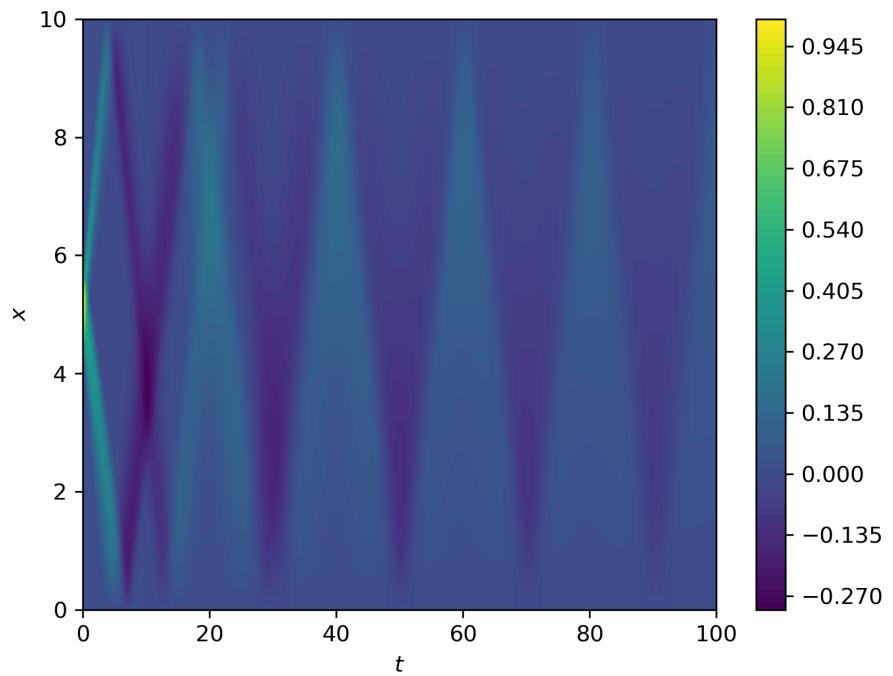


Рис. 54: Вид сверху первых 1000 шагов для графика V при $\mu = 0.1$ и $C = 1$

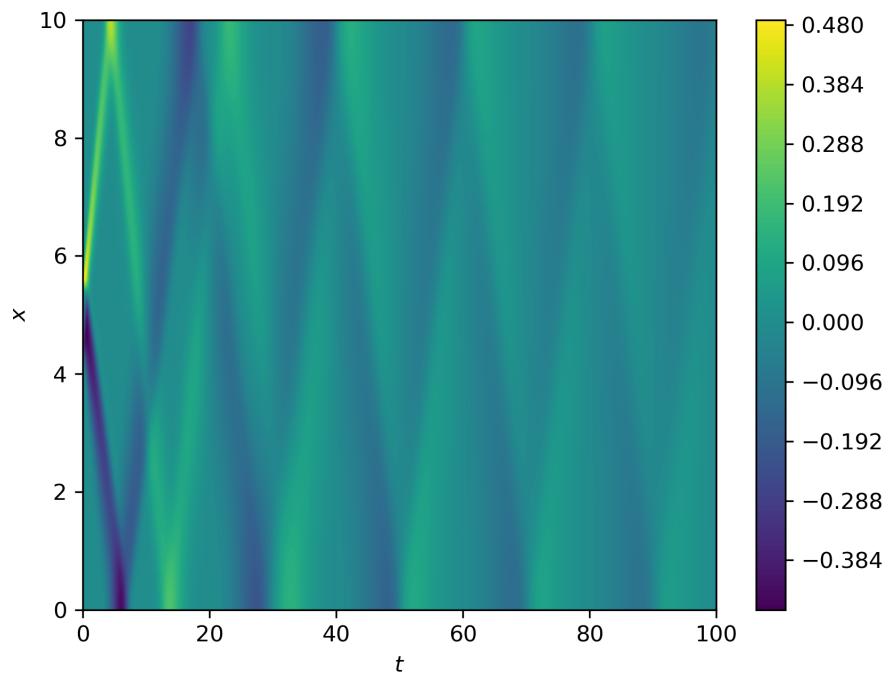


Рис. 55: Вид сверху первых 1000 шагов для графика G при $\mu = 0.1$ и $C = 1$

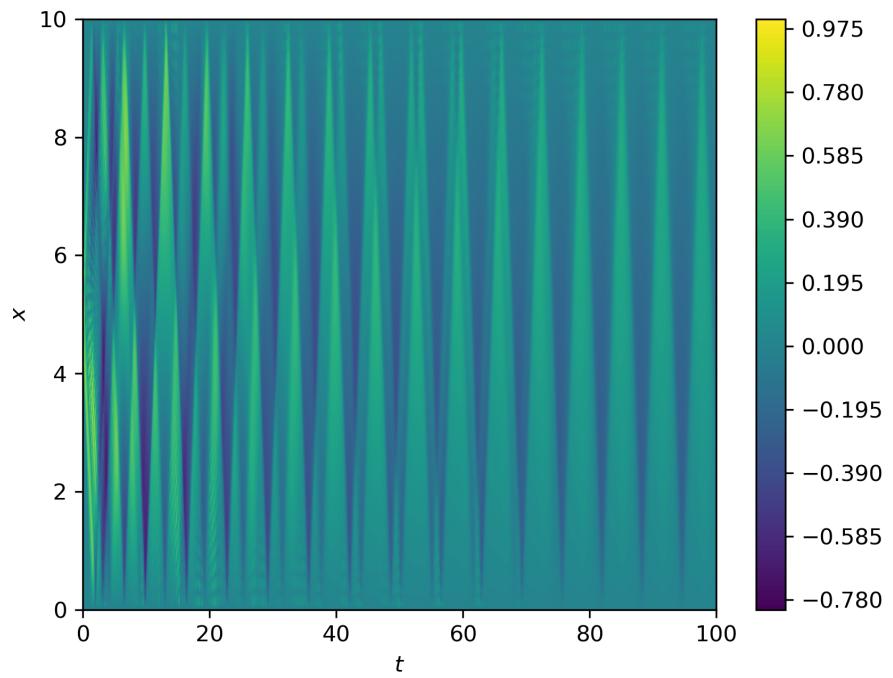


Рис. 56: Вид сверху первых 1000 шагов для графика V при $\mu = 0.1$ и $C = 10$

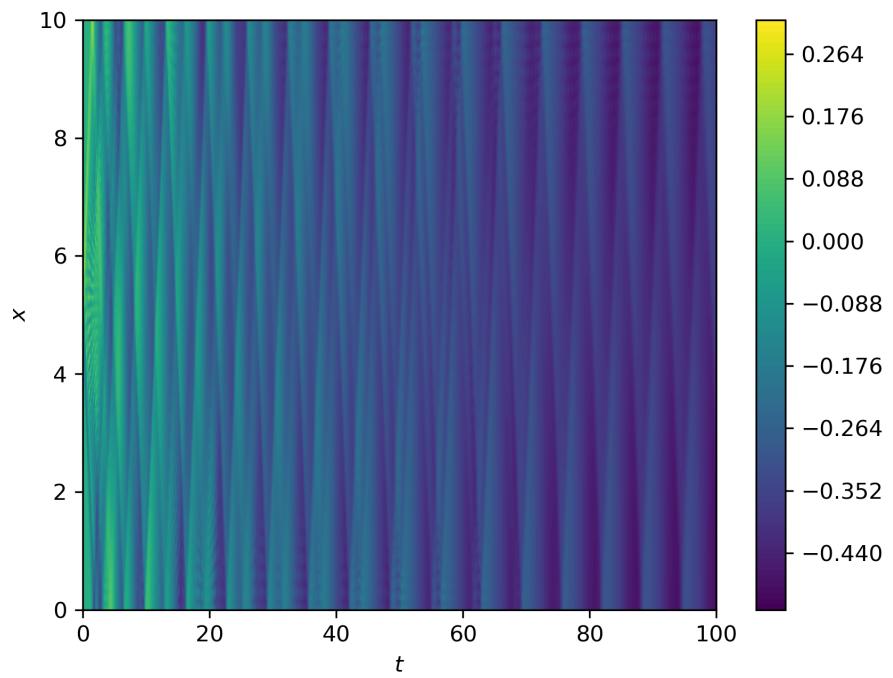


Рис. 57: Вид сверху первых 1000 шагов для графика G при $\mu = 0.1$ и $C = 10$

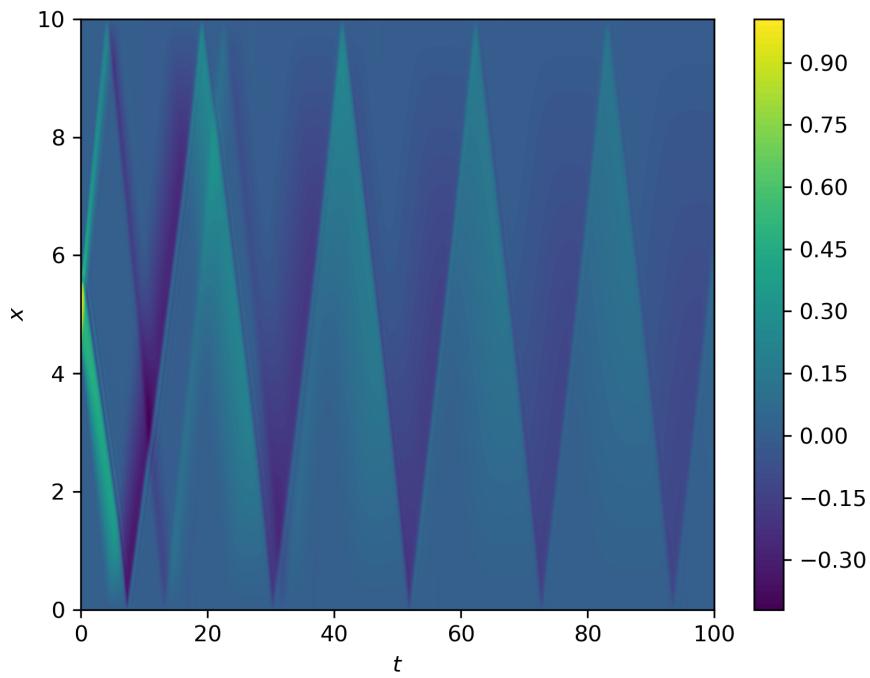


Рис. 58: Вид сверху первых 1000 шагов для графика V при $\mu = 0.01$ и $C = 1$

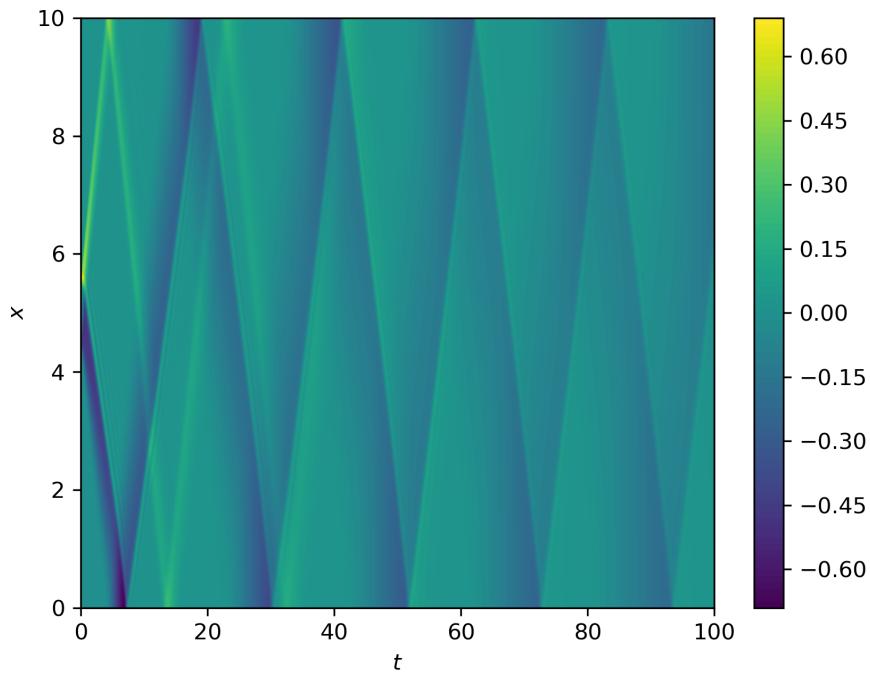


Рис. 59: Вид сверху первых 1000 шагов для графика G при $\mu = 0.01$ и $C = 1$

5.6.6 Вывод

Период колебаний не зависит от μ , однако зависит от C , а именно с увеличением C уменьшается период.

5.7 Время стабилизации

Рассмотрим таблицу зависимости времени стабилизации от параметров дифференциальной задачи и от выбора сетки (в каждой ячейке таблицы приведены значения N_0 для сеток $\Omega_{\tau, h}$, $\Omega_{\tau, h/2}$, $\Omega_{\tau/2, h}$ и, соответственно, $\Omega_{\tau/2, h/2}$).

$\mu \backslash C$	10^0	10^1
10^{-1}	967.06	1027.56
	1107.06	1166.71
	826.96	888.325
	966.965	1027.465
10^{-2}	5640.95	89618.75
	7021.05	77190.95
	4044.87	5004.445
	5359.77	6376.945

5.8 Вывод

При уменьшении параметра μ или увеличении параметра C затухание происходит медленнее. Это также подтверждают графики из подсекции 5.6.5.

6 Задача о стабилизации осциллирующей функции

6.1 Постановка задачи

Пусть $\Omega_x = [0; 1]$. Для системы (1) зададим две задачи, начальные и граничные условия которых определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} \rho(0, x) &= 2 + \sin(K\pi x); \\ u(0, x) &= 0; \\ u(t, 0) &= u(t, 1) = 0; \end{aligned} \tag{16}$$

и

$$\begin{aligned} \rho(0, x) &= 1; \\ u(0, x) &= \sin(K\pi x); \\ u(t, 0) &= u(t, 1) = 0; \end{aligned} \tag{17}$$

где N натуральное число. Для численных экспериментов желательно брать $10Kh \leq 1$. Положим также $f_0 \equiv 0$ и $f \equiv 0$.

Суть эксперимента состоит в решении задач (16) и (17), причем вычисления следует проводить до момента времени $N_0\tau$, для которого

$$R(N_0) \leq \varepsilon,$$

(определение R см. (15)) где величина ε является достаточно малой и определяется опытным путем.

6.2 Численные эксперименты

Для анализа зависимости времени стабилизации от параметров дифференциальной задачи достаточно рассмотреть

$$(\mu, C) \in \{10^{-1}, 10^{-2}\} \times \{10^0, 10^1\}.$$

6.3 Численные эксперименты первой задачи

Зафиксируем $\varepsilon = 0.001$, $\tau = h = 0.01$. Далее приведена таблица зависимости времени стабилизации ($N_0\tau$) от параметров μ , C и K .

K	$\mu = 10^{-1}$ и $C = 10^0$	$\mu = 10^{-2}$ и $C = 10^0$	$\mu = 10^{-1}$ и $C = 10^1$
1	8.56	71.56	10.19
2	25.4	174.01	27.2
3	7.82	62.11	8.92
4	22.35	161.91	25.53
5	6.76	58.23	7.93
6	20.37	158.89	24.31
7	6.24	54.45	7.31
8	19.34	157.37	23.36
9	5.75	51.94	6.97
10	18.34	154.36	22.67

6.4 Вывод

На время стабилизации влияет четность K : для четных K стабилизации наступает в разы быстрее. При увеличении параметра C время стабилизации уменьшается. При уменьшении параметра μ время стабилизации возрастает.

6.5 Численные эксперименты второй задачи

Зафиксируем $\varepsilon = 0.001$, $\tau = h = 0.01$. Далее приведена таблица зависимости времени стабилизации ($N_0\tau$) от параметров μ , C и K .

K	$\mu = 10^{-1}$ и $C = 10^0$	$\mu = 10^{-2}$ и $C = 10^0$	$\mu = 10^{-1}$ и $C = 10^1$
1	14.32	94.85	14.890000
2	4.02	29.95	4.180000
3	2.04	14.83	2.060000
4	1.25	9.02	1.250000
5	0.87	6.13	0.830000
6	0.67	4.38	0.650000
7	0.62	3.41	0.520000
8	0.67	2.69	0.420000
9	0.7	4.41	0.350000
10	0.71	1.82	0.320000

6.6 Вывод

При увеличении параметра K уменьшается время стабилизации. При увеличении параметра C время стабилизации уменьшается. При уменьшении параметра μ время стабилизации возрастает.

7 Задача «протекания»

7.1 Постановка задачи

Пусть $\Omega_x = [0; 10]$. Для системы (1) заменим уравнение

$$u(t, X) = 0$$

на

$$\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=X} = 0$$

и зададим начальные и граничные условия следующим образом:

$$\begin{aligned} \rho(0, x) &= 1; \\ u(0, x) &= 0; \\ \rho(t, 1) &= \tilde{\rho}; \\ u(t, 0) &= \tilde{v}, \end{aligned} \tag{18}$$

где $\tilde{\rho} \geq 1$ и $\tilde{v} > 0$. Положим также $f_0 \equiv 0$ и $f \equiv 0$.

Суть эксперимента состоит в решении задачи (18), причем вычисления следует проводить до момента времени $N_0\tau$, для которого

$$R(N_0) \leq \varepsilon,$$

(определение R см. (15)) где величина ε является достаточно малой и определяется опытным путем.

7.2 Численные эксперименты

Для анализа зависимости времени стабилизации от параметров $\tilde{\rho}$ и \tilde{v} зафиксируем параметры $\varepsilon = 0.001$, $\tau = h = 0.01$, $\mu = 0.1$, $C = 1$. Далее приведена таблица зависимости времени стабилизации от параметров $\tilde{g} = \ln \tilde{\rho}$ и \tilde{v} .

\tilde{g} \ \tilde{v}	1	2	3	4
1	168.52	14.38	7.29	4.98
2	212.26	11.64	6.31	4.54
3	216.43	11.67	5.99	4.25
4	217.95	11.6	6.03	4.21

7.3 Вывод

При увеличении параметра \tilde{v} время стабилизации уменьшается. Можно наблюдать небольшой скачок времени сходимости при переходе от $\tilde{g} = 1$ к $\tilde{g} = 2$, однако для $\tilde{g} \geq 2$ зависимость от \tilde{g} практически отсутствует.

Список литературы

- [1] Попов А. В. Численное моделирование нестационарного одномерного течения газа с использованием неявных разностных схем.