

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ПРАКТИКУМ
7 семестр
2020 г.

Численное моделирование
нестационарного одномерного течения газа
с использованием неявных разностных схем

Попов А.В.

Содержание

1	Введение	2
2	Начально-краевая задача	5
3	Основные обозначения в теории разностных схем	7
4	Задание 1: Отладочный тест	8
5	Задание 2: Тесты с негладкими начальными данными	9
6	Задание 3: Задача о стабилизации осциллирующей функции	10
7	Задание 4: Задача „протекания“	10
8	Задания практикума и содержание отчета	10
9	Схема с центральными разностями (ρ, u)	12
10	Схема с центральными разностями (ρ, u) (последовательная)	13
11	Схема с центральными разностями (u, ρ) (последовательная)	14
12	Схема с центральными разностями (ρ, u) (параллельная)	14
13	Схема с односторонними разностями (ρ, u) (последовательная)	15
14	Схема с односторонними разностями (u, ρ) (последовательная)	15
15	Схема с односторонними разностями (ρ, u) (параллельная)	15
16	Схема с центральными разностями $(\rho, \rho u)$ (последовательная)	16
17	Схема с односторонними разностями $(\rho, \rho u)$ (последовательная)	16
18	Схема с центральными разностями $(\log(\rho), u)$	17

19	Схема с центральными разностями $(\log(\rho), u)$ (последовательная)	18
20	Схема с центральными разностями $(u, \log(\rho))$ (последовательная)	18
21	Схема с центральными разностями $(\log(\rho), u)$ (параллельная)	19
22	Схема с односторонними разностями $(\log(\rho), u)$	19
23	Схема с односторонними разностями $(\log(\rho), u)$ (последовательная)	19
24	Схема с односторонними разностями $(u, \log(\rho))$ (последовательная)	20
25	Схема с односторонними разностями $(\log(\rho), u)$ (параллельная)	20
26	Разностная схема А.Г.Соколова $(\rho, \rho u)$	21
27	Разностная схема А.Г.Соколова (ρ, u)	22
28	Разностная схема А.Г.Соколова (u, ρ)	22
29	Разностная схема А.Г.Соколова (ρ, u) (параллельная)	22
30	Прогонка	22
31	Существование и единственность	22
32	Невязкое линейное уравнение Бюргерса	22
33	Уравнение теплопроводности с переменным коэффициентом	25
34	Нелинейное уравнение Бюргерса	26
35	Общие замечания по РС	26
36	Общие замечания по структуре программы	28

1 Введение

Математическое моделирование еще в XX веке прочно заняло свое лидирующее место среди инструментов, используемых при анализе и верификации новых сложных и дорогостоящих проектов в самых различных прикладных областях. Одним из основных способов математического описания разного рода процессов являются дифференциальные уравнения. За прошедшие годы накоплен огромный опыт записи в дифференциальной форме различных законов, действующих в естественных науках, в экономике и других далеких от физики сферах деятельности человечества. Конечно, прежде всего для этого применяются обыкновенные дифференциальные уравнения, но все больше встречается научных направлений, где требуется использование уравнений в частных производных (УрЧП).

Математические модели, которые содержат уравнения (или системы уравнений) в частных производных, давно являются предметом научного интереса математиков. С математической точки зрения произведена классификация основных уравнений, выписаны постановки и обоснованы разрешимость и корректность ряда начально-краевых задач, у части задач найдены способы их точного решения. Эта работа требует очень высокой математической подготовки исследователя и осложнена разнообразием и сложностью встречающихся задач, прежде всего их нелинейностью. Следствием этого является то, что строгая законченная математическая теория на сегодняшний день существует далеко не для всех моделей.

Учитывая важность и насущность прикладных задач, поиск решений разного рода дифференциальных задач продолжается даже при отсутствии теорем об их разрешимости. Для этого применяются самые разнообразные методы начиная от классических, разработанных в теории дифференциальных уравнений типа разделения переменных, асимптотических и многих других и до численных методов решения. Идея свести поиск приближенных решений дифференциальных задач к решению последовательности чисто алгебраических конечномерных задач возникла еще в XIX веке. С появлением ЭВМ этот способ стал еще привлекательнее, а применимость вполне доступной для очень широкого круга ученых и инженеров, если отбросить вопросы строго математического обоснования подобных методов.

Одним из подходов приближенного решения дифференциальных уравнений является метод разностных схем (РС). Он является очень наглядным, а его алгоритм может быть применен для решения как уже известных уравнений, так и адаптирован под новые задачи. Построение РС для новых сложных задач требует знания и опыта использования этого метода при решении более простых, уже исследованных уравнений подобного класса, называемых модельными задачами. Ответы на вопросы о сходимости и устойчивости РС, предлагаемых для решения сложных задач, как правило, не удается получить в разумные сроки без привлечения специалистов очень высокой квалификации. Поэтому эти РС должны строиться исходя из опыта решения модельных задач и исследоваться на устойчивость и сходимость, с использованием практических критериев.

Предлагаемый практикум предназначен для обучения применения РС на примере сложной нелинейной системы УрЧП составного типа, описывающей движение вязкого баротропного газа. На примере этой системы демонстрируется, как для решения нелинейной системы УрЧП можно предложить РС, которая приводит к последовательному решению систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ). В практикуме рассматриваются как простейшая краевая задача „прилипания“ газа к границе области, так и более сложная задача „протекания“, когда на части границы необходимо задавать не только скорость, но и плотность газа. Изучение свойств численного алгоритма и создание его программной реализации начинается с наиболее простых задач с постепенным их усложнением.

В основе практикума лежат два подхода для построения РС. Первый способ — плотность и скорость газа определяются в одних и тех же узлах [1], второй подход — скорость задается в целых узлах, а плотность в полуцелых [2]. В обоих случаях сотрудниками кафедры вычислительной математики механико-математического факультета МГУ были построены РС, для которых было проведено их обоснование. В целях увеличения числа различных РС (каждый студент получает свою РС), в эти схемы были внесены изменения, которые сохранили основные свойства этих схем.

Одним из этих самых важных свойств является факт сохранения положительности зна-

чений сеточной функции плотности с течением времени. РС практикума можно разделить на три части. Для одних РС это достигается особой аппроксимацией конвективных членов. В других схемах — за счет непрямого вычисления функции плотности ρ , а нахождения функции $g = \ln \rho$ из разностной аппроксимации преобразованного уравнения неразрывности. В оставшихся схемах это свойство выполняется условно, если удовлетворяются условия априорной оценки ошибки вычисления плотности в норме C и предположение, что функция ρ , задающая распределение плотности газа, всегда положительна.

Рассматриваемые РС либо безусловно устойчивы, либо условие устойчивости не является слишком обременительным. В целях построения РС, обладающих минимальными условиями устойчивости, в практикуме используются лишь неявные РС. Как показывают различные исследования (прежде всего модельных задач), вынесение аппроксимаций пространственных производных на верхний слой является необходимым условием избавления от зависимости временного шага от шага по пространственной переменной. Опыт применения РС показывает, что такой подход позволяет, если не полностью избавиться от подобных ограничений на шаги сетки, то максимально их ослабить. Неявные разностные схемы приводят в общем случае к системам нелинейных алгебраических уравнений, но в практикуме используются только линеаризованные РС. Это сделано в целях облегчения заданий, поскольку в этом случае поиск сеточных решений происходит без использования итерационных методов решения нелинейных систем.

Поскольку все задачи одномерные, то СЛАУ, которые приходится решать, в ряде схем являются трехдиагональными. В этом случае для их решения можно применять метод прогонки 30. В более сложных случаях, когда матрицы СЛАУ обладают более широкой лентой, предлагается применять метод бисопряженных градиентов [5]. При этом требуется написать как свою подпрограмму, реализующую один из алгоритмов этого метода, так и использовать подпрограмму из пакета *Laspac*, применяющую тот же метод. В результате можно сравнить, насколько собственная реализация, адаптированная под конкретный вид матрицы СЛАУ, будет быстрее работать чем пакетная (выполняя задание студенты учатся подключать к своим программам внешние пакеты). В виду вышесказанного вопрос о существовании и единственности решений РС очень важен. Его решение для РС, используемых в практикуме, приведено в параграфе 31.

Практическая оценка точности численных решений в отсутствии априорных оценок или в случаях, когда проверка условий выполнения таких оценок затруднена, всегда очень актуальна. В заданиях практикума такая оценка проводится общепризнанным методом сравнения получаемых решений на вложенных сетках. Безусловно, нужно отметить, что этот способ позволяет оценить точность получаемых решений лишь снизу. Другим возможным способом практической оценки точности служит сравнение численных решений, полученных с использованием разных методов. В предлагаемом практикуме такими методами могут служить схема Соколова и схема для $g = \ln \rho$. На практике проверку нового метода часто проводят, сравнивая его решения с решениями, полученными по хорошо зарекомендовавшему себя известному методу. И, наконец, если известно точное решение какой-то задачи (пусть и не совсем той, для решения которой был предназначен исследуемый метод), то имеет смысл адаптировать программу под расчет этого решения и оценить разность между точным и численным решениями.

Важным свойством РС является их консервативность. Проверка выполнения закона сохранения массы входит в одно из заданий практикума. Не для всех схем практикума это свойство выполняется даже теоретически, но контроль за степенью его выполнения необходим в качестве косвенной оценки точности получаемых решений.

Отдельный вопрос, как находить ошибки (опечатки) в программе. Для этого служат разного рода отладчики, позволяющие выполнять пошагово запрограммированный алгоритм. Хорошим тестом для отлова ошибок может быть расчет первого временного слоя с последующим поточечным анализом полученного решения. Можно брать особые начальные условия для того, чтобы решение становилось проще. Например, ставить такие условия, чтобы плотность или скорость были константами на первом слое. Заключительным этапом верификации программы служит расчет точного гладкого решения с ненулевой правой частью. В качестве этого решения берутся гладкие функции, удовлетворяющие краевым условиям, и вычисляется правая часть решаемой системы, при которой выбранные функции являются точным решением. Это делается простой подстановкой этих функций в левую часть системы. После чего проводится расчет численного решения с использованием в качестве начальных данных РС значений точного гладкого решения в узлах нулевого слоя. Расчеты проводятся при различных шагах, ошибка (разность между численным и точным решениями в узлах сетки) вычисляется в различных нормах на последнем временном слое, результаты заносятся в таблицу (см. параграф 4). Поскольку для гладкого точного решения сходимость всех схем доказана в норме $\|\cdot\|_{L_2^h}$ с порядком аппроксимации, то данные в таблице должны удовлетворять условию сходимости. При этом наличие условия на шаги в теореме о сходимости должно явно проявляться в таблице (если условие на шаги не выполнено, то в соответствующих ячейках должны быть достаточно большие числа или программа просто не досчитает до конца из-за переполнения памяти). Сходимость в более сильных нормах ($\|\cdot\|_{C^h}$ и $\|\cdot\|_{W_2^{1h}}$) для некоторых схем отсутствует, либо имеет порядок меньший, чем порядок аппроксимации РС. Но для ряда схем сходимость в этих нормах доказана с порядком аппроксимации. Поэтому, если для этих схем данные таблиц с сильными нормами не стремятся к нулю с порядком аппроксимации, то можно утверждать, что в программе есть ошибки и скорее всего они допущены в дополнительных слагаемых, обеспечивающих повышенную аппроксимацию на границе.

Задачи практикума обладают решениями, выходящими на стационар. Одним из пунктов заданий является определение времени стабилизации и его зависимости от параметров дифференциальной задачи, вида начальной функции и шагов сетки.

Конечным этапом выполнения практикума является составление отчета. Для наглядности полученных результатов отчет включает в себя многочисленные таблицы и графики. Для построения графиков предлагается использовать пакет GNUPLOT [3].

2 Начально-краевая задача

В практикуме рассматриваются РС для решения начально-краевых задач для системы уравнений, описывающей нестационарное одномерное движение вязкого баротропного газа

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{\partial \rho u^2}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial x} &= \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \rho f, \\ p &= p(\rho). \end{aligned} \tag{2.1}$$

Выше через μ обозначен коэффициент вязкости газа, который будем считать известной положительной константой.

Неизвестные функции: плотность ρ и скорость u являются функциями переменных Эйлера

$$(t, x) \in Q = [0, T] \times [0, X].$$

В уравнения входят еще две известные функции: давление газа p , зависящее от плотности, и вектор внешних сил f , являющийся функцией переменных Эйлера. Зависимость $p = p(\rho)$ часто называют уравнением состояния газа. В практикуме используются две возможные зависимости: $p = C_\rho \rho$, где C_ρ — положительная константа, или $p = \rho^\gamma$, где $\gamma = 1, 4$. Если константа $C_\rho \gg 1$, то газ называют слабосжимаемым.

Про систему (2.1) говорят, что она записана в дивергентном виде. Такой вид получается сразу после перехода от интегральных уравнений, получающихся после записи законов сохранения, к их дифференциальной форме. Первое уравнение системы называется уравнением неразрывности и является записью закона сохранения массы. Второе уравнение получается из закона сохранения импульса. Вторые слагаемые в этих уравнениях появляются вследствие движения элементарных объемов сплошной среды и называются конвективными слагаемыми.

Часто систему (2.1) записывают в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} &= 0, \\ \rho \frac{\partial u}{\partial t} + \rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial x} &= \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \rho f, \\ p &= p(\rho). \end{aligned} \tag{2.2}$$

Эта система в случае гладких функций ρ и u эквивалентна системе (2.1). Такую форму записи можно получить, если первые два слагаемые левой части второго уравнения системы (2.1) записать, применив формулу дифференцирования произведения двух функций, и заметить, что сумма двух из четырех получившихся слагаемых равна нулю вследствие уравнения неразрывности. Заметим, что, как показала практика, для расчета разрывных решений лучше работают алгоритмы, которые аппроксимируют систему, записанную в дивергентном виде. Однако, для задач, обладающих достаточно гладким решением, РС, построенные для системы (2.2) или других недивергентных аналогов системы (2.1), могут оказаться более эффективными.

В начальный момент времени задаются функции, значениями которых являются плотность и скорость газа в точках отрезка $[0, X]$:

$$(\rho, u)|_{t=0} = (\rho_0, u_0), \quad x \in [0, X]. \tag{2.3}$$

Простейшими граничными условиями являются условия „прилипания“ (непротекания)

$$u(t, 0) = u(t, X) = 0, \quad t \in [0, T]. \tag{2.4}$$

В этом случае граничные условия на плотность газа не ставятся.

Более сложными являются задачи, когда скорость на границе не задана нулевой. В практикуме рассматривается задача „протекания“. В ней в точках границы, где скорость направлена во внутрь области, считается известным скорость течения. В этих точках необходимо еще задавать краевое условие в виде известного значения плотности потока. В точках, где скорость направлена из области, граничное условие на скорость задается в виде нормальной производной равной нулю. В этих точках условие на плотность отсутствует.

Важными требованиями к вычислительным алгоритмам являются выполнение аналогов интегральных законов сохранения массы и импульса для сеточных функций. Численные методы, для которых выполняются один или несколько законов сохранения (но не все), называют консервативными. Если выполняются все законы сохранения, то метод называют полностью консервативным.

Еще одним важным свойством является выполнение условия неотрицательности функции плотности. В практикуме для части используемых схем это условие выполняется автоматически. Для этого использовано два альтернативных подхода. Первый – это замена поиска функции ρ на функцию $g = \ln(\rho)$. Во втором применяется специальная аппроксимация уравнения неразрывности, предложенная А.Г.Соколовым.

Хороший обзор результатов по поводу обоснования начально-краевых задач механики жидкости и газа можно найти в [6].

3 Основные обозначения в теории разностных схем

В заданиях практикума рассматривается пространственная область в виде отрезка $\bar{\Omega} = [0; X]$, где вводится равномерная сетка с шагом h : $\bar{\omega}_h = \{mh \mid m = 0, \dots, M\}$, где $Mh = X$. На временном интервале $[0; T]$ также используется равномерная сетка: $\bar{\omega}_\tau = \{n\tau \mid n = 0, \dots, N\}$, где $N\tau = T$. В результате в области Q вводится сетка $\bar{Q}_{\tau h} = \bar{\omega}_\tau \times \bar{\omega}_h$. Узлы сетки $\bar{\omega}_h$, попадающие на границу области ω , обозначим γ_h (граничные узлы), а попадающие во внутрь области Ω через ω_h (внутренние узлы). Узлы $x = 0$ и $x = X$ будем обозначать γ_h^- и γ_h^+ соответственно.

Кроме сетки ω_h в ряде схем используются сдвинутые сетки с полуцелыми узлами. Через $\omega_h^{1/2}$ будем обозначать сетку $\omega_h^{1/2} = \{mh + h/2 \mid m = 0, \dots, M-1\}$, а через $Q_{\tau h}^{1/2} = \bar{\omega}_\tau \times \omega_h^{1/2}$.

Значение функции g , определенной на сетке $Q_{\tau h}$ (или на сетке $Q_{\tau h}^{1/2}$), в узле (n, m) будем обозначать через g_m^n . Если индексы будут опущены, то это означает, что они равны n и m . Для сокращения записи значений функции g в узлах, соседних с узлом (n, m) , используются следующие обозначения:

$$g_m^{n+1} = \hat{g}, \quad g_{m\pm 1}^n = g^{\pm 1}.$$

Введем обозначения для среднего значения величин сеточной функции в двух соседних узлах

$$g_s = \frac{g_{m+1}^n + g_m^n}{2}, \quad g_{\bar{s}_k} = \frac{g_m^n + g_{m-1}^n}{2}.$$

Для разностных операторов применяются следующие обозначения, принятые в [4]:

$$g_t = \frac{g_m^{n+1} - g_m^n}{\tau}, \quad g_x = \frac{g_{m+1}^n - g_m^n}{h}, \quad g_x^\circ = \frac{g_{m+1}^n - g_{m-1}^n}{2h}, \quad \bar{g}_x = \frac{g_m^n - g_{m-1}^n}{h}.$$

Для приближения конвективных слагаемых в дифференциальных операторах в ряде схем будут использоваться разностные аппроксимации против потока. Для этих выражений введем обозначения

$$\delta\{W, V\} = \frac{V + |V|}{2}W_{\bar{x}} + \frac{V - |V|}{2}W_x = \begin{cases} VW_{\bar{x}}, & \text{если } V \geq 0, \\ VW_x, & \text{если } V < 0; \end{cases} \quad (3.1)$$

$$\delta_1\{W, V\} = \begin{cases} (VW)_{\bar{x}}, & \text{если } V \geq 0, \\ (VW)_x, & \text{если } V < 0. \end{cases} \quad (3.2)$$

В схеме А.Г.Соколова в конвективных слагаемых узел шаблона, в котором нужно брать значение сеточной функции F , зависит от знака компоненты вектора скорости V . Для этих выражений используется обозначение

$$\sigma\{F, V\} = F \frac{|V| - V}{2|V|} + F^{(-1)} \frac{|V| + V}{2|V|} = \begin{cases} F, & \text{если } V < 0, \\ F^{(-1)}, & \text{если } V \geq 0, \end{cases} \quad (3.3)$$

Определим используемые ниже скалярные произведения и нормы сеточных функций, заданных на сетке $\bar{\omega}_h$:

$$(v, u) = h \sum_{x_m \in \bar{\omega}_h} v_m u_m, \quad [u, v] = (u, v) + 0, 5h \sum_{x_m \in \gamma_h} v_m u_m,$$

$$\|v\|_{C_h} = \max_{x_m \in \bar{\omega}_h} |v_m|, \quad \|v\| = \sqrt{(v, v)}, \quad \|v\|_{L_{2,h}} = |[v]| = \sqrt{[v, v]}, \quad \|v\|_2^1 = \sqrt{[v]^2 + |v|_1^2},$$

где через $|v|_1$ обозначена полунорма, задаваемая следующим образом:

$$|v|_1 = \sqrt{h \sum_{x_m \in \omega_h \cup \gamma_h^-} (v_x)^2}.$$

4 Задание 1: Отладочный тест

Зададим функции

$$\begin{aligned} \tilde{\rho}(t, x) &= e^t (\cos(\pi x/10) + 1.5), \\ \tilde{u}(t, x) &= \cos(2\pi t) \sin(\pi(x/10)^2). \end{aligned} \quad (4.1)$$

Определим функции f_0 (отличную от нуля правую часть уравнения неразрывности) и f так, чтобы функции $(\tilde{\rho}, \tilde{u})$ удовлетворяли системе (2.2) с правой частью, составленной из этих функций

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{\rho} \tilde{u}}{\partial x} &= f_0, \\ \tilde{\rho} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} + \tilde{\rho} \tilde{u} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial x} &= \mu \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2} + f, \\ p &= p(\tilde{\rho}). \end{aligned} \quad (4.2)$$

Таким образом, дифференциальная задача для системы (2.2) с начальными и граничными условиями

$$\begin{aligned} \tilde{\rho}(0, x) &= \cos(\pi x/10) + 1.5, \quad \mathbf{x} \in [0, 10], \\ \tilde{u}(0, x) &= \sin(\pi(x/10)^2), \quad \mathbf{x} \in [0, 10], \\ \tilde{u}(t, 0) &= u(t, 10) = 0, \quad t \in [0, 1], \end{aligned} \quad (4.3)$$

имеет гладкое точное решение в области $Q = [0, 1] \times [0, 10]$, задаваемое функциями (4.1).

Теоретические оценки для схем практикума показывают сходимость численного решения к точному гладкому решению с порядком аппроксимации в норме L_2^h (а для некоторых схем и в нормах C^h и $W_2^{1,h}$) [2, 1]. Сходимость может быть как безусловной (т.е.

иметь место при любых шагах сетки), так и условной (т.е. иметь место лишь при определенных соотношениях шагов). В задачах практикума для диапазона исследуемых параметров μ и функций $p(\rho)$, а также диапазона шагов сетки сходимость должна быть либо безусловной, либо условной при условии, что $\tau \leq Ch$.

Проверить программу, реализующую схему из практикума, на наличие ошибок можно с помощью задачи (4.2)-(4.3) (или аналогичной ей). Для этого нужно провести расчеты при различных шагах сетки (τ, h) и вычислить для каждого расчета нормы разности между разностным решением и точным решением дифференциальной задачи (ошибки численного интегрирования) на последнем временном слое. Результаты записываются в таблицу следующего вида

$\tau \setminus h$	0.1	0.01	0.001	0.0001
0.1	$5.9886e-01$	$6.6761e+02$	$5.7184e+01$	$6.3142e+02$
0.01	$6.7929e-02$	$5.4731e-02$	$1.2791e+03$	$5.0707e+03$
0.001	$9.1116e-02$	$4.8983e-03$	$5.4157e-03$	$5.4212e-03$
0.0001	$9.4484e-02$	$6.3704e-04$	$5.3546e-04$	$5.4098e-04$

Приведенная таблица содержит результаты расчетов по одной из схем практикума для определенного набора параметров дифференциальной задачи. Из нее можно сделать вывод, что сходимость имеет место с порядком $\tau + h^2$ при условии $\tau \leq Ch$ (из данных таблицы следует, что константа C может быть положена равной 1). Этот вывод полностью совпадает с теоретическими оценками, что говорит о том, что программа, реализующая разностную схему, на данном тесте работает верно. Для надежности проверки следует привести подобные таблицы при различных параметрах дифференциальной задачи и вычислять норму ошибки в различных пространствах: L_2^h , C^h и W_2^{1h} .

5 Задание 2: Тесты с негладкими начальными данными

Для системы (2.1) зададим две задачи, начальные и граничные условия которых определяются следующим образом.

$$\begin{aligned}
 \rho_0(x) &= 1, & x < 4,5 \text{ или } x > 5,5, \\
 \rho_0(x) &= 2, & x \in [4,5; 5,5], \\
 u_0(x) &\equiv 0, & x \in [0,10], \\
 u(t,0) &= u(t,10) = 0, & t \in [0,T].
 \end{aligned} \tag{5.1}$$

$$\begin{aligned}
 u_0(x) &= 0, & x < 4,5 \text{ или } x > 5,5, \\
 u_0(x) &= 1, & x \in [4,5; 5,5], \\
 \rho_0(x) &\equiv 1, & x \in [0,10], \\
 u(t,0) &= u(t,10) = 0, & t \in [0,T].
 \end{aligned} \tag{5.2}$$

Функция f из правой части системы (2.1) считается равной нулю в обеих задачах.

6 Задание 3: Задача о стабилизации осциллирующей функции

Для системы (2.1) зададим две задачи, начальные и граничные условия которых определяются следующим образом.

$$\begin{aligned}\rho_0(x) &= 2 + \sin(N\pi x), & u_0(x) &= 0, & x &\in [0, 1], \\ u(t, 0) &= u(t, 1) = 0, & t &\in [0, T].\end{aligned}\tag{6.1}$$

$$\begin{aligned}\rho_0(x) &= 1, & u_0(x) &= \sin(N\pi x), & x &\in [0, 1], \\ u(t, 0) &= u(t, 1) = 0, & t &\in [0, T].\end{aligned}\tag{6.2}$$

Функция f из правой части системы (2.1) считается равной нулю в обеих задачах. Число N , задающее число колебаний начальной функции, является натуральным и для численного эксперимента выбирается из диапазона от 1 до $M/10$, где $Mh = 1$. Такой выбор максимального N обеспечивает достаточную аппроксимацию р.с.

7 Задание 4: Задача „протекания“

Для системы (2.1) зададим начальные и граничные условия, которые определяют задачу „протекания“

$$\begin{aligned}\rho_0(x) &= 1, & u_0(x) &= 0, & x &\in [0, X], \\ u(t, 0) &= v, & \rho(t, 0) &= \tilde{\rho}, & \frac{\partial u}{\partial x}|_{x=X} &= 0 & t \in [0, T],\end{aligned}\tag{7.1}$$

где $X = 10$.

Параметры v ($v > 0$) и $\tilde{\rho}$ ($\tilde{\rho} \geq 1$) задают скорость и плотность „набегающего“ потока. Функция f из правой части системы (2.1) считается равной нулю.

Замечание. Корректная постановка граничных условий для системы (2.1) заключается в задании на всей границе условия для функции скорости u , а граничное условие на функцию ρ ставится лишь в тех точках границы, где вектор скорости направлен внутрь области, т.е. только в тех точках, где газ втекает в область.

8 Задания практикума и содержание отчета

Практикум состоит из четырех заданий, по результатам выполнения которых составляется итоговый отчет.

Задание I.

Первое задание заключается в написании программы, реализующей разностную схему, и проверке ее на наличие ошибок с помощью задачи, имеющей точное гладкое решение. Тесты следует провести при различных параметрах μ (0,1; 0,01; 0,001) и C_ρ (1; 10; 100), если используется функция $p = C_\rho \rho$. Отлаженную в этом задании программу следует использовать при выполнении заданий II-IV.

Задание II.

Второе задание состоит в решении задач (5.1) и (5.2). Вычисления следует проводить до времени T_{st} , при котором решение перестает зависеть от времени (выходит на стационар). Критерием выхода на стационар можно считать выполнение условия

$$\|(\rho^n, v^n) - (\rho^{n-1}, v^{n-1})\|_C \leq \varepsilon$$

с некоторого слоя с номером n . Время T_{st} полагают равным $n\tau$. Величина ε является достаточно малой и определяется опытным путем.

Задание III.

Третье задание представляет собой исследование зависимости времени стабилизации от параметров дифференциальной задачи и частоты колебания волны в начальном условии.

Задание IV.

Четвертое задание заключается в расчете задачи „протекания“.

В итоговый отчет должны быть включены следующие пункты.

1. Общая постановка дифференциальной задачи.
 2. Подробное описание алгоритма разностной схемы. В том числе обязательно должны быть приведены поточечная запись разностных уравнений и выражений, задающих элементы матриц и правых частей алгебраических задач, которые требуется решить.
 3. Отчет о выполнении задания I.
 - а) Функции из правой части дифференциальной системы (4.2), для которых проводились расчеты и точное решение с этой правой частью.
 - б) Таблицы норм ошибок при различных параметрах дифференциальной задачи;
 - в) Выводы о порядке сходимости и условиях сходимости.
 4. Отчет о выполнении задания II.
 - а) Дифференциальная постановка задач.
 - б) Таблицы, содержащие величины норм разности между приближенными решениями, вычисленными на вложенных сетках, для времен $T_{st}/4$, $T_{st}/2$, $3T_{st}/4$ и T_{st} . На основании этих таблиц требуется сделать выводы о зависимости точности получаемых решений от параметров дифференциальной задачи, времени t и шагов сетки.
 - в) Проверка выполнения закона сохранения массы для исследуемой р.с.
- График функции $\Delta M = \Delta M(t)$, со значениями разности общей массы газа в момент времени t и массы в начальный момент времени. На основе таблицы, в ячейки которой занесены значения ΔM в моменты времени t_k ($t_k = kT_{st}/5$, $k=5, 4, 3, 2, 1$) и значения шагов сетки, при которых проводился расчет, должен быть сделан вывод о консервативности изучаемой разностной схемы. Для установления зависимости выполнения закона сохранения массы от значений параметров дифференциальной задачи такие таблицы должны быть представлены для всех наборов этих параметров.
- г) Представление динамики процессов в виде графиков функций плотности и скорости в различные моменты времени вплоть до выхода на стационар. Частота временных срезов должна отражать развитие процесса вплоть до момента установления.
 - д) Изучение цикличности решения. Изображение цветной проекции одной из компонент решения на плоскость (t, x) (пример цветной проекции приведен на рис. (1)) и

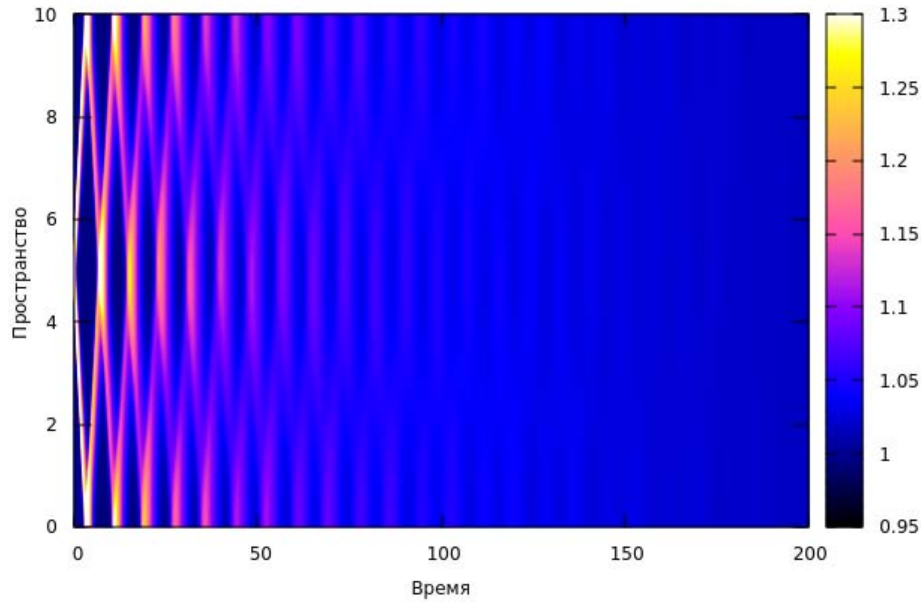


Рис. 1: Цикличность изменения плотности

оценка времени цикла. Выводы о зависимости длительности циклов от параметров дифференциальной задачи и шагов сетки.

е) Таблица, иллюстрирующая зависимость времен стабилизации от параметров дифференциальной задачи и шагов сетки. Выводы о характере этой зависимости.

5. Отчет о выполнении задания III.

а) Постановка задачи.

б) Таблица времен стабилизации при различных параметрах дифференциальной задачи и частоты колебаний в начальном условии.

в) Выводы о зависимости времени стабилизации от параметров дифференциальной задачи и частоты колебания волны в начальном условии.

6. Отчет о выполнении задания IV.

а) Постановка задачи.

б) Таблица времен стабилизации при различных параметрах дифференциальной задачи и амплитуд скачков скорости v и плотности $\tilde{\rho}$ в граничном условии.

в) Выводы о зависимости времени стабилизации от параметров дифференциальной задачи и амплитуд скачков скорости и плотности в граничном условии.

9 Схема с центральными разностями (ρ, u)

Для поиска численного решения задачи (2.1),(2.3),(2.4) можно использовать РС, в которой при аппроксимации конвективных членов используются центральные разности

$$\begin{aligned}
H_t + 0.5 (V \hat{H}_0 + (V \hat{H})_0 + H \hat{V}_0) &= 0, \quad x \in \omega_h, \\
H_{t,0} + 0.5 ((V \hat{H})_{x,0} + H \hat{V}_{x,0}) - \\
- 0.5h((HV)_{x\bar{x},1} - 0.5(HV)_{x\bar{x},2} + H(V_{x\bar{x},1} - 0.5V_{x\bar{x},2})) &= 0, \\
H_{t,M} + 0.5 ((V \hat{H})_{\bar{x},M} + H \hat{V}_{\bar{x},M}) + \\
+ 0.5h((HV)_{x\bar{x},M-1} - 0.5(HV)_{x\bar{x},M-2} + H(V_{x\bar{x},M-1} - 0.5V_{x\bar{x},M-2})) &= 0, \\
V_t + \frac{1}{3}(V \hat{V}_0 + (V \hat{V})_0) + \tilde{p}'(H) \hat{H}_0 &= \tilde{\mu} \hat{V}_{x\bar{x}} - \left(\tilde{\mu} - \frac{\mu}{H} \right) V_{x\bar{x}} + f, \quad x \in \omega_h,
\end{aligned} \tag{9.1}$$

где $\tilde{p}'(H) = \frac{p'_\rho(H)}{H}$ и $\tilde{\mu} = \max_m \frac{\mu}{H}$.

Для поиска решения РС (9.1) на каждом слое приходится решать СЛАУ с пятидиагональной матрицей, т.е. значения неизвестных функций \hat{H} и \hat{V} ищутся одновременно.

В целях существования и единственности разностного решения на $(n+1)$ -ом временном слое лишь при одном условии, что на сеточная плотность H имеет положительные значения во всех узлах на n -ом слое (смотри параграф 31), выписанная выше РС аппроксимирует эквивалентную систему (при условии гладкости решения) системе (2.1), уравнения которой выглядят следующим образом

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{2} \left(u \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \rho \frac{\partial u}{\partial x} \right) &= 0, \\
\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2} \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u^2}{\partial x} \right) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} &= \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f.
\end{aligned} \tag{9.2}$$

10 Схема с центральными разностями (ρ, u) (последовательная)

Для поиска численного решения задачи (2.1),(2.3),(2.4) можно использовать РС, в которой при аппроксимации конвективных членов используются центральные разности, но аппроксимация не всех производных вынесена на верхний временной слой. Поэтому решение на каждом слое ищется путем последовательного обращения двух СЛАУ с трехдиагональными матрицами, для чего рекомендуется использовать метод „прогонки“. Первая СЛАУ служит для определения функции \hat{H} . После того как \hat{H} найдена, из второй СЛАУ ищется функция \hat{V}

$$\begin{aligned}
H_t + 0.5 (V \hat{H}_0 + (V \hat{H})_0 + H \hat{V}_0) &= 0, \quad x \in \omega_h, \\
H_{t,0} + 0.5 ((V \hat{H})_{x,0} + H_0 \hat{V}_{x,0}) - \\
- 0.5h((HV)_{x\bar{x},1} - 0.5(HV)_{x\bar{x},2} + H_0(V_{x\bar{x},1} - 0.5V_{x\bar{x},2})) &= 0, \\
H_{t,M} + 0.5 ((V \hat{H})_{\bar{x},M} + H_M \hat{V}_{\bar{x},M}) + \\
+ 0.5h((HV)_{x\bar{x},M-1} - 0.5(HV)_{x\bar{x},M-2} + H_M(V_{x\bar{x},M-1} - 0.5V_{x\bar{x},M-2})) &= 0, \\
V_t + \frac{1}{3}(V \hat{V}_0 + (V \hat{V})_0) + \frac{p(\hat{H})_0}{\hat{H}} &= \tilde{\mu} \hat{V}_{x\bar{x}} - \left(\tilde{\mu} - \frac{\mu}{\hat{H}} \right) V_{x\bar{x}} + f, \quad x \in \omega_h,
\end{aligned} \tag{10.1}$$

где $\tilde{\mu} = \max_m \frac{\mu}{\hat{H}}$.

Разностные уравнения схемы (10.1) аппроксимируют уравнения системы (9.2).

11 Схема с центральными разностями (u, ρ) (последовательная)

Для поиска численного решения задачи (2.1),(2.3),(2.4) можно использовать РС, в которой при аппроксимации конвективных членов используются центральные разности, но аппроксимация не всех производных вынесена на верхний временной слой. Поэтому решение на каждом слое ищется путем последовательного обращения двух СЛАУ с трехдиагональными матрицами, для чего рекомендуется использовать метод „прогонки“. Первая СЛАУ служит для определения функции \hat{V} . После того как \hat{V} найдена, из второй СЛАУ ищется функция \hat{H}

$$\begin{aligned} V_t + \frac{1}{3}(V\hat{V}_x + (V\hat{V})_x) + \frac{p(H)_x}{H} &= \tilde{\mu}\hat{V}_{x\bar{x}} - \left(\tilde{\mu} - \frac{\mu}{H}\right)V_{x\bar{x}} + f, & x \in \omega_h, \\ H_t + 0.5(\hat{V}\hat{H}_x + (\hat{V}\hat{H})_x + H\hat{V}_x) &= 0, & x \in \omega_h, \\ H_{t,0} + 0.5((\hat{V}\hat{H})_{x,0} + H_0\hat{V}_{x,0}) - & \\ -0.5h((HV)_{x\bar{x},1} - 0.5(HV)_{x\bar{x},2} + H_0(V_{x\bar{x},1} - 0.5V_{x\bar{x},2})) &= 0, \\ H_{t,M} + 0.5((\hat{V}\hat{H})_{\bar{x},M} + H_M\hat{V}_{\bar{x},M}) + & \\ +0.5h((HV)_{x\bar{x},M-1} - 0.5(HV)_{x\bar{x},M-2} + H_M(V_{x\bar{x},M-1} - 0.5V_{x\bar{x},M-2})) &= 0, \end{aligned} \quad (11.1)$$

где $\tilde{\mu} = \max_m \frac{\mu}{H}$.

Разностные уравнения схемы (11.1) аппроксимируют уравнения системы (9.2).

12 Схема с центральными разностями (ρ, u) (параллельная)

Для поиска численного решения задачи (2.1),(2.3),(2.4) можно использовать РС, в которой при аппроксимации конвективных членов используются центральные разности, но аппроксимация не всех производных вынесена на верхний временной слой. Поэтому решение на каждом слое ищется путем обращения двух СЛАУ с трехдиагональными матрицами, для чего рекомендуется использовать метод „прогонки“. Первая СЛАУ служит для определения функции \hat{H} , вторая — \hat{V} . Системы решаются независимо друг от друга

$$\begin{aligned} H_t + 0.5(V\hat{H}_x + (V\hat{H})_x + H\hat{V}_x) &= 0, & x \in \omega_h, \\ H_{t,0} + 0.5((V\hat{H})_{x,0} + H_0\hat{V}_{x,0}) - & \\ -0.5h((HV)_{x\bar{x},1} - 0.5(HV)_{x\bar{x},2} + H_0(V_{x\bar{x},1} - 0.5V_{x\bar{x},2})) &= 0, \\ H_{t,M} + 0.5((V\hat{H})_{\bar{x},M} + H_M\hat{V}_{\bar{x},M}) + & \\ +0.5h((HV)_{x\bar{x},M-1} - 0.5(HV)_{x\bar{x},M-2} + H_M(V_{x\bar{x},M-1} - 0.5V_{x\bar{x},M-2})) &= 0, \\ V_t + \frac{1}{3}(V\hat{V}_x + (V\hat{V})_x) + \frac{p(H)_x}{H} &= \tilde{\mu}\hat{V}_{x\bar{x}} - \left(\tilde{\mu} - \frac{\mu}{H}\right)V_{x\bar{x}} + f, & x \in \omega_h, \end{aligned} \quad (12.1)$$

где $\tilde{\mu} = \max_m \frac{\mu}{H}$.

Разностные уравнения схемы (12.1) аппроксимируют уравнения системы (9.2).

13 Схема с односторонними разностями (ρ, u) (последовательная)

Для поиска численного решения задачи (2.1),(2.3),(2.4) можно использовать р.с., в которой при аппроксимации конвективных членов используются односторонние разности

$$\begin{aligned} H_t + \delta_1 \{\hat{H}, V\} &= 0, & x \in \omega_h, \\ H_{t,0} + (\hat{H}V)_{x,0} &= 0, \\ H_{t,M} + (\hat{H}V)_{\bar{x},M} &= 0, \\ \hat{H}V_t + \delta \{\hat{V}, \hat{H}V\} + p(\hat{H})_x^0 &= \mu \hat{V}_{x\bar{x}} + \hat{H}f. & x \in \omega_h, \end{aligned} \quad (13.1)$$

Решение РС ищется по временным слоям, на каждом из которых последовательно решаются две СЛАУ с трехдиагональными матрицами. Первая служит для определения \hat{H} , вторая — \hat{V} . РС (13.1) аппроксимирует систему (2.2).

14 Схема с односторонними разностями (u, ρ) (последовательная)

Для поиска численного решения задачи (2.1),(2.3),(2.4) можно использовать р.с., в которой при аппроксимации конвективных членов используются односторонние разности

$$\begin{aligned} HV_t + \delta \{\hat{V}, HV\} + p(H)_x^0 &= \mu \hat{V}_{x\bar{x}} + Hf, & x \in \omega_h, \\ H_t + \delta_1 \{\hat{H}, \hat{V}\} &= 0, & x \in \omega_h, \\ H_{t,0} + (\hat{H}\hat{V})_{x,0} &= 0, \\ H_{t,M} + (\hat{H}\hat{V})_{\bar{x},M} &= 0. \end{aligned} \quad (14.1)$$

Решение РС ищется по временным слоям, на каждом из которых последовательно решаются две СЛАУ с трехдиагональными матрицами. Первая служит для определения \hat{V} , вторая — \hat{H} . РС (14.1) аппроксимирует систему (2.2).

15 Схема с односторонними разностями (ρ, u) (параллельная)

Для поиска численного решения задачи (2.1),(2.3),(2.4) можно использовать р.с., в которой при аппроксимации конвективных членов используются односторонние разности

$$\begin{aligned} H_t + \delta_1 \{\hat{H}, V\} &= 0, & x \in \omega_h, \\ H_{t,0} + (\hat{H}V)_{x,0} &= 0, \\ H_{t,M} + (\hat{H}V)_{\bar{x},M} &= 0, \\ HV_t + \delta \{\hat{V}, HV\} + p(H)_x^0 &= \mu \hat{V}_{x\bar{x}} + Hf, & x \in \omega_h, \end{aligned} \quad (15.1)$$

Решение РС ищется по временным слоям, на каждом из которых решаются две СЛАУ с трехдиагональными матрицами. Первая служит для определения \hat{H} , вторая — \hat{V} , которые решаются независимо друг от друга. РС (15.1) аппроксимирует систему (2.2).

16 Схема с центральными разностями $(\rho, \rho u)$ (последовательная)

Для поиска численного решения задачи (2.1),(2.3),(2.4) можно использовать РС, в которой при аппроксимации конвективных членов используются центральные разности, но аппроксимация не всех производных вынесена на верхний временной слой. Поэтому решение на каждом слое ищется путем последовательного обращения двух СЛАУ с трехдиагональными матрицами, для чего рекомендуется использовать метод „прогонки“. Первая СЛАУ служит для определения функции \hat{H} . После того как \hat{H} найдена, из второй СЛАУ ищется функция \hat{V}

$$\begin{aligned}
 H_t + 0.5(V\hat{H}_0 + (V\hat{H})_0 + H\hat{V}_0) &= 0, \quad x \in \omega_h, \\
 H_{t,0} + 0.5((V\hat{H})_{x,0} + \hat{H}_0 V_{x,0}) - \\
 - 0.5h((HV)_{x\bar{x},1} - 0.5(HV)_{x\bar{x},2} + H_0(V_{x\bar{x},1} - 0.5V_{x\bar{x},2})) &= 0, \\
 H_{t,M} + 0.5((V\hat{H})_{\bar{x},M} + H_M V_{\bar{x},M}) + \\
 + 0.5h((HV)_{x\bar{x},M-1} - 0.5(HV)_{x\bar{x},M-2} + H_M(V_{x\bar{x},M-1} - 0.5V_{x\bar{x},M-2})) &= 0, \\
 (HV)_t + \frac{2}{3}(\hat{H}V\hat{V})_0 + \frac{2}{3}\hat{H}V\hat{V}_0 + \frac{V^2}{3}\hat{H}_0 + p(\hat{H})_0 &= \mu\hat{V}_{x\bar{x}} + \hat{H}f, \quad x \in \omega_h,
 \end{aligned} \tag{16.1}$$

В целях существования и единственности разностного решения на $(n+1)$ -ом временном слое лишь при одном условии, что на сеточная плотность H имеет положительные значения во всех узлах на n -ом слое (смотри параграф 31), выписанная выше РС аппроксимирует эквивалентную систему (при условии гладкости решения) системе (2.1), уравнения которой выглядят следующим образом

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{2} \left(u \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \rho \frac{\partial u}{\partial x} \right) &= 0, \\
 \frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{1}{3} \left(2 \frac{\partial \rho u^2}{\partial x} + 2 \rho u \frac{\partial u}{\partial x} + u^2 \frac{\partial \rho}{\partial x} \right) + \frac{\partial p}{\partial x} &= \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \rho f.
 \end{aligned} \tag{16.2}$$

17 Схема с односторонними разностями $(\rho, \rho u)$ (последовательная)

Для поиска численного решения задачи (2.1),(2.3),(2.4) можно использовать р.с., в которой при аппроксимации конвективных членов используются односторонние разности

$$\begin{aligned}
 H_t + \delta_1 \{\hat{H}, V\} &= 0, \quad x \in \omega_h, \\
 H_{t,0} + (\hat{H}V)_{x,0} &= 0, \\
 H_{t,M} + (\hat{H}V)_{\bar{x},M} &= 0, \\
 (HV)_t + \delta_1 \{\hat{V}, \hat{H}V\} + p(\hat{H})_0 &= \mu\hat{V}_{x\bar{x}} + \hat{H}f, \quad x \in \omega_h,
 \end{aligned} \tag{17.1}$$

Решение РС ищется по временным слоям, на каждом из которых последовательно решаются две СЛАУ с трехдиагональными матрицами. Первая служит для определения \hat{H} , вторая — \hat{V} . РС (17.1) аппроксимирует непосредственно систему (2.1).

18 Схема с центральными разностями $(\log(\rho), u)$

Для автоматического обеспечения условия положительности функции плотности заменим вычисление H на вычисление функции $G = \ln H$. Для этого преобразуем систему (2.2) следующим образом. Раскроем конвективное слагаемое, используя формулу дифференцирования произведения функций, и поделим получившееся уравнение на ρ

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{u}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial x} = 0.$$

Обозначив $g = \ln \rho$, получим

$$\frac{\partial g}{\partial t} + u \frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0.$$

Для того, что бы РС всегда имела единственное решение (см. параграф 31), преобразуем его к виду

$$\frac{\partial g}{\partial t} + \frac{1}{2} \left(u \frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial u g}{\partial x} + (2 - g) \frac{\partial u}{\partial x} \right) = 0. \quad (18.1)$$

Второе уравнение системы (2.2) поделим на ρ и конвективный член перепишем аналогично проделанному с первым уравнением

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{3} \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u^2}{\partial x} \right) + \tilde{p}'(g) \frac{\partial g}{\partial x} = \mu e^{-g} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f, \quad (18.2)$$

где $\tilde{p}'(g) = \frac{dp}{d\rho}(e^g)$.

Для полученной системы, состоящей из уравнений (18.1)-(18.2) рассмотрим те же начально-краевые задачи, что и для системы (2.1).

Для поиска численного решения задачи (18.1), (18.2), (2.3), (2.4) можно использовать РС, в которой при аппроксимации конвективных членов используются центральные разности

$$\begin{aligned} G_t + 0.5(V\hat{G}_0 + (V\hat{G})_{\hat{x},0} + 2\hat{V}_0 - GV_0) &= 0, \quad x \in \omega_h, \\ G_{t,0} + 0.5((V\hat{G})_{x,0} + 2\hat{V}_{x,0} - G_0V_{x,0}) - \\ - 0.5h((GV)_{x\bar{x},1} - 0.5(GV)_{x\bar{x},2} + (2 - G_0)(V_{x\bar{x},1} - 0.5V_{x\bar{x},2})) &= 0, \\ G_{t,M} + 0.5((V\hat{G})_{\bar{x},M} + 2\hat{V}_{\bar{x},M} - G_MV_{\bar{x},M}) + \\ + 0.5h((GV)_{x\bar{x},M-1} - 0.5(GV)_{x\bar{x},M-2} + (2 - G_M)(V_{x\bar{x},M-1} - 0.5V_{x\bar{x},M-2})) &= 0, \\ V_t + \frac{1}{3}(V\hat{V}_0 + (V\hat{V})_0) + \tilde{p}'(G)\hat{G}_0 &= \tilde{\mu}\hat{V}_{x\bar{x}} - (\tilde{\mu} - \mu e^{-G})V_{x\bar{x}} + f, \quad x \in \omega_h, \end{aligned} \quad (18.3)$$

где $\tilde{\mu} = \mu \|e^{-G}\|_C$.

В качестве значений разностного решения на нулевом слое берутся проекции на сетку $\bar{\omega}_h$ функций $\ln(\rho_0)$ и u_0 :

$$G_m^0 = \ln((\rho_0)_m), \quad \mathbf{V}_m^0 = (u_0)_m, \quad m = 0, 1, \dots, M. \quad (18.4)$$

Граничные значения функции скорости равны нулю:

$$V_0^n = V_M^n = 0, \quad n = 1, \dots, N. \quad (18.5)$$

В РС (18.3)-(18.5) функции \hat{G} и \hat{V} ищутся из одной СЛАУ. Поэтому для уменьшения ширины ленты матрицы вектор неизвестных нужно формировать следующим образом

$$(\hat{G}_0, \hat{V}_0, \hat{G}_1, \hat{V}_1, \hat{G}_2, \hat{V}_2, \dots, \hat{G}_M, \hat{V}_M).$$

В этом случае матрица СЛАУ получается пятидиагональной.

19 Схема с центральными разностями $(\log(\rho), u)$ (последовательная)

Для поиска численного решения задачи (18.1), (18.2), (2.3), (2.4) можно использовать РС, в которой при аппроксимации конвективных членов используются центральные разности, но аппроксимация не всех производных вынесена на верхний временной слой. Поэтому решение на каждом слое ищется путем последовательного обращения двух СЛАУ с трехдиагональными матрицами, для чего рекомендуется использовать метод „прогонки“. Первая СЛАУ служит для определения функции \hat{G} . После того как \hat{G} найдена, из второй СЛАУ ищется функция \hat{V}

$$\begin{aligned} G_t + 0.5(V\hat{G}_0^x + (\hat{V}\hat{G})_0^x + (2 - G)V_0^x) &= 0, \quad x \in \omega_h, \\ G_{t,0} + 0.5((V\hat{G})_{x,0} + (2 - G_0)V_{x,0}) - \\ - 0.5h((GV)_{x\bar{x},1} - 0.5(GV)_{x\bar{x},2} + (2 - G_0)(V_{x\bar{x},1} - 0.5V_{x\bar{x},2})) &= 0, \\ G_{t,M} + 0.5((V\hat{G})_{\bar{x},M} + (2 - G_M)V_{\bar{x},M}) + \\ + 0.5h((GV)_{x\bar{x},M-1} - 0.5(GV)_{x\bar{x},M-2} + (2 - G_M)(V_{x\bar{x},M-1} - 0.5V_{x\bar{x},M-2})) &= 0, \\ V_t + \frac{1}{3}(V\hat{V}_0^x + (V\hat{V})_0^x) + \tilde{p}'(\hat{G})\hat{G}_0^x &= \tilde{\mu}\hat{V}_{x\bar{x}} - (\tilde{\mu} - \mu e^{-\hat{G}})V_{x\bar{x}} + f, \quad x \in \omega_h, \end{aligned} \quad (19.1)$$

где $\tilde{\mu} = \mu \|e^{-\hat{G}}\|_C$.

Начальные и граничные условия следует брать согласно формулам (18.4)-(18.5).

20 Схема с центральными разностями $(u, \log(\rho))$ (последовательная)

Для поиска численного решения задачи (18.1), (18.2), (2.3), (2.4) можно использовать РС, в которой при аппроксимации конвективных членов используются центральные разности, но аппроксимация не всех производных вынесена на верхний временной слой. Поэтому решение на каждом слое ищется путем последовательного обращения двух СЛАУ с трехдиагональными матрицами, для чего рекомендуется использовать метод „прогонки“. Первая СЛАУ служит для определения функции \hat{V} . После того как \hat{V} найдена, из второй СЛАУ ищется функция \hat{G}

$$\begin{aligned} V_t + \frac{1}{3}(V\hat{V}_0^x + (V\hat{V})_0^x) + \tilde{p}'(G)G_0^x &= \tilde{\mu}\hat{V}_{x\bar{x}} - (\tilde{\mu} - \mu e^{-G})V_{x\bar{x}} + f, \quad x \in \omega_h, \\ G_t + 0.5(\hat{V}\hat{G}_0^x + (\hat{V}\hat{G})_0^x + (2 - G)\hat{V}_0^x) &= 0, \quad x \in \omega_h, \\ G_{t,0} + 0.5((\hat{V}\hat{G})_{x,0} + (2 - G_0)\hat{V}_{x,0}) - \\ - 0.5h((GV)_{x\bar{x},1} - 0.5(GV)_{x\bar{x},2} + (2 - G_0)(V_{x\bar{x},1} - 0.5V_{x\bar{x},2})) &= 0, \\ G_{t,M} + 0.5((\hat{V}\hat{G})_{\bar{x},M} + (2 - G_M)\hat{V}_{\bar{x},M}) + \\ + 0.5h((GV)_{x\bar{x},M-1} - 0.5(GV)_{x\bar{x},M-2} + (2 - G_M)(V_{x\bar{x},M-1} - 0.5V_{x\bar{x},M-2})) &= 0, \end{aligned} \quad (20.1)$$

где $\tilde{\mu} = \mu \|e^{-G}\|_C$.

Начальные и граничные условия следует брать согласно формулам (18.4)-(18.5).

21 Схема с центральными разностями $(\log(\rho), u)$ (параллельная)

Для поиска численного решения задачи (18.1), (18.2), (2.3), (2.4) можно использовать РС, в которой при аппроксимации конвективных членов используются центральные разности, но аппроксимация не всех производных вынесена на верхний временной слой. Поэтому решение на каждом слое ищется путем обращения двух СЛАУ с трехдиагональными матрицами, для чего рекомендуется использовать метод „прогонки“. Первая СЛАУ служит для определения функции \hat{G} , вторая — \hat{V} . Системы решаются независимо друг от друга

$$\begin{aligned} G_t + 0.5(V\hat{G}_0 + (\hat{V}\hat{G})_0 + (2 - G)V_0) &= 0, \quad x \in \omega_h, \\ G_{t,0} + 0.5((V\hat{G})_{x,0} + (2 - G_0)V_{x,0}) - \\ - 0.5h((GV)_{x\bar{x},1} - 0.5(GV)_{x\bar{x},2} + (2 - G_0)(V_{x\bar{x},1} - 0.5V_{x\bar{x},2})) &= 0, \\ G_{t,M} + 0.5((V\hat{G})_{\bar{x},M} + (2 - G_M)V_{\bar{x},M}) + \\ + 0.5h((GV)_{x\bar{x},M-1} - 0.5(GV)_{x\bar{x},M-2} + (2 - G_M)(V_{x\bar{x},M-1} - 0.5V_{x\bar{x},M-2})) &= 0, \\ V_t + \frac{1}{3}(V\hat{V}_0 + (\hat{V}\hat{V})_0) + \tilde{p}'(G)G_0 &= \tilde{\mu}\hat{V}_{x\bar{x}} - (\tilde{\mu} - \mu e^{-G})V_{x\bar{x}} + f, \quad x \in \omega_h, \end{aligned} \quad (21.1)$$

где $\tilde{\mu} = \mu \|e^{-G}\|_C$.

Начальные и граничные условия следует брать согласно формулам (18.4)-(18.5).

22 Схема с односторонними разностями $(\log(\rho), u)$

Решение разностной схемы (18.3)-(18.5) вследствие использования центральных разностей не является строго монотонным, а имеет незначительные осцилляции. Для их устранения можно использовать схему с разностями против потока

$$\begin{aligned} G_t + \delta\{\hat{G}, V\} + \hat{V}_0 &= 0, \quad m = 1, \dots, M-1; \\ G_t + \hat{V}_x &= 0, \quad m = 0; \\ G_t + \hat{V}_{\bar{x}} &= 0, \quad m = M; \\ V_t + \delta\{\hat{V}, V\} + \tilde{p}'(G)\hat{G}_0 &= \tilde{\mu}\hat{V}_{x\bar{x}} - (\tilde{\mu} - \mu e^{-G})V_{x\bar{x}} + f, \quad m = 1, \dots, M-1; \\ \hat{V} &= 0, \quad m = 0, M; \end{aligned} \quad (22.1)$$

где $\tilde{\mu} = \mu \|e^{-G}\|_C$.

В РС (22.1) функции \hat{G} и \hat{V} ищутся из одной СЛАУ. Поэтому для уменьшения ширины ленты матрицы вектор неизвестных нужно формировать следующим образом

$$(\hat{G}_0, \hat{V}_0, \hat{G}_1, \hat{V}_1, \hat{G}_2, \hat{V}_2, \dots, \hat{G}_M, \hat{V}_M).$$

В этом случае матрица СЛАУ получается пятидиагональной.

Начальные и граничные условия следует брать согласно формулам (18.4)-(18.5).

23 Схема с односторонними разностями $(\log(\rho), u)$ (последовательная)

Для поиска численного решения задачи (18.1), (18.2), (2.3), (2.4) можно использовать РС, в которой при аппроксимации конвективных членов используются односторонние разности, но аппроксимация не всех производных вынесена на верхний временной слой. Поэтому решение на каждом слое ищется путем последовательного обращения двух СЛАУ

с трехдиагональными матрицами, для чего рекомендуется использовать метод „прогонки“. Первая СЛАУ служит для определения функции \hat{G} . После того как \hat{G} найдена, из второй СЛАУ ищется функция \hat{V}

$$\begin{aligned}
G_t + \delta\{\hat{G}, V\} + V_0 &= 0, \quad m = 1, \dots, M-1; \\
G_t + V_x &= 0, \quad m = 0; \\
G_t + V_{\bar{x}} &= 0, \quad m = M; \\
V_t + \delta\{\hat{V}, V\} + \tilde{p}'(\hat{G})\hat{G}_0 &= \tilde{\mu}\hat{V}_{x\bar{x}} - (\tilde{\mu} - \mu e^{-\hat{G}})V_{x\bar{x}} + f, \quad m = 1, \dots, M-1; \\
\hat{V} &= 0, \quad m = 0, M;
\end{aligned} \tag{23.1}$$

где $\tilde{\mu} = \mu \|e^{-\hat{G}}\|_C$.

Начальные и граничные условия следует брать согласно формулам (18.4)-(18.5).

24 Схема с односторонними разностями $(u, \log(\rho))$ (последовательная)

Для поиска численного решения задачи (18.1), (18.2), (2.3), (2.4) можно использовать РС, в которой при аппроксимации конвективных членов используются односторонние разности, но аппроксимация не всех производных вынесена на верхний временной слой. Поэтому решение на каждом слое ищется путем последовательного обращения двух СЛАУ с трехдиагональными матрицами, для чего рекомендуется использовать метод „прогонки“. Первая СЛАУ служит для определения функции \hat{V} . После того как \hat{V} найдена, из второй СЛАУ ищется функция \hat{G}

$$\begin{aligned}
V_t + \delta\{\hat{V}, V\} + \tilde{p}'(G)G_0 &= \tilde{\mu}\hat{V}_{x\bar{x}} - (\tilde{\mu} - \mu e^{-G})V_{x\bar{x}} + f, \quad m = 1, \dots, M-1; \\
\hat{V} &= 0, \quad m = 0, M; \\
G_t + \delta\{\hat{G}, \hat{V}\} + \hat{V}_0 &= 0, \quad m = 1, \dots, M-1; \\
G_t + \hat{V}_x &= 0, \quad m = 0; \\
G_t + \hat{V}_{\bar{x}} &= 0, \quad m = M;
\end{aligned} \tag{24.1}$$

где $\tilde{\mu} = \mu \|e^{-G}\|_C$.

Начальные и граничные условия следует брать согласно формулам (18.4)-(18.5).

25 Схема с односторонними разностями $(\log(\rho), u)$ (параллельная)

Для поиска численного решения задачи (18.1), (18.2), (2.3), (2.4) можно использовать РС, в которой при аппроксимации конвективных членов используются односторонние разности, но аппроксимация не всех производных вынесена на верхний временной слой. Поэтому решение на каждом слое ищется путем обращения двух СЛАУ с трехдиагональными матрицами, для чего рекомендуется использовать метод „прогонки“. Первая СЛАУ служит для определения функции \hat{G} , вторая — \hat{V} . Системы решаются независимо

друг от друга

$$\begin{aligned}
G_t + \delta\{\hat{G}, V\} + V_0 &= 0, \quad m = 1, \dots, M-1; \\
G_t + V_{\mathbf{x}} &= 0, \quad m = 0; \\
G_t + V_{\bar{\mathbf{x}}} &= 0, \quad m = M; \\
V_t + \delta\{\hat{V}, V\} + \tilde{p}'(G)G_0 &= \tilde{\mu}\hat{V}_{x\bar{x}} - (\tilde{\mu} - \mu e^{-G})V_{x\bar{x}} + f, \quad m = 1, \dots, M-1; \\
\hat{V} &= 0, \quad m = 0, M;
\end{aligned} \tag{25.1}$$

где $\tilde{\mu} = \mu \|e^{-G}\|_C$.

Начальные и граничные условия следует брать согласно формулам (18.4)-(18.5).

26 Разностная схема А.Г.Соколова $(\rho, \rho u)$

Функции H (сеточная плотность), заданная в узлах сетки $\omega_h^{1/2}$, и V (сеточная скорость), заданная в узлах сетки ω_h , ищутся по схеме, аппроксимирующей систему (2.1)

$$\begin{aligned}
H_t + (\sigma\{\hat{H}, V\}V)_x &= 0, \quad 0 \leq m < M, \quad n \geq 0, \\
(H_{\bar{s}}V)_t + \frac{1}{2} \left((\sigma\{\hat{H}\hat{V}, V\}V)_x + (\sigma\{\hat{H}\hat{V}^{(+1)}, V\}V)_{\bar{x}} \right) + \frac{\gamma}{\gamma-1} \hat{H}_{\bar{s}}((\hat{H})^{\gamma-1})_{\bar{x}} &= \\
= \mu \hat{V}_{x\bar{x}} + \hat{H}_{\bar{s}}f, \quad \text{при } \hat{H}_{\bar{s}} \neq 0, \\
\hat{V} &= 0, \quad \text{при } \hat{H}_{\bar{s}} = 0, \\
0 < m < M, \quad n \geq 0, \\
\hat{V}_0 = \hat{V}_M &= 0.
\end{aligned} \tag{26.1}$$

Разностные уравнения (26.1) в индексах имеют вид

$$\begin{aligned}
& \frac{H_m^{n+1} - H_m^n}{2h} + \\
& + \frac{(V_{m+1}^n - |V_{m+1}^n|)H_{m+1}^{n+1} + (V_{m+1}^n + |V_{m+1}^n| - V_m^n + |V_m^n|)H_m^{n+1} - (V_m^n + |V_m^n|)H_{m-1}^{n+1}}{2h} = 0, \\
& 0 \leq m < M, \quad n \geq 0, \\
& \frac{(H_{m-1}^{n+1} + H_m^{n+1})V_m^{n+1} - (H_{m-1}^n + H_m^n)V_m^n}{2\tau} - \\
& - \frac{((|V_{m-1}^n| + V_{m-1}^n)H_{m-2}^{n+1} + (|V_m^n| + V_m^n)H_{m-1}^{n+1})V_{m-1}^{n+1}}{4h} + \\
& + \frac{((|V_{m-1}^n| - V_{m-1}^n + |V_m^n| + V_m^n)H_{m-1}^{n+1} + (|V_{m+1}^n| + V_{m+1}^n + |V_m^n| - V_m^n)H_m^{n+1})V_m^{n+1}}{4h} - \\
& - \frac{((|V_m^n| - V_m^n)H_m^{n+1} + (|V_{m+1}^n| - V_{m+1}^n)H_{m+1}^{n+1})V_{m+1}^{n+1}}{4h} + \\
& + \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{H_m^{n+1} + H_{m-1}^{n+1}}{2} \frac{(H_m^{n+1})^{\gamma-1} - (H_{m-1}^{n+1})^{\gamma-1}}{h} = \\
& = \mu \frac{V_{m-1}^{n+1} - 2V_m^{n+1} + V_{m+1}^{n+1}}{h^2} + \frac{H_{m-1}^{n+1} + H_m^{n+1}}{2} f_m^{n+1}, \\
& \text{при } H_{m-1}^{n+1} + H_m^{n+1} \neq 0, \\
& V_m^{n+1} = 0, \quad \text{при } H_{m-1}^{n+1} + H_m^{n+1} = 0, \\
& 0 < m < M, \quad n \geq 0, \\
& V_0^{n+1} = V_M^{n+1} = 0.
\end{aligned} \tag{26.2}$$

27 Разностная схема А.Г.Соколова (ρ, u)

В схеме (26.1) можно поменять второе уравнение так, чтобы оно аппроксимировало соответствующее уравнение системы (2.2). В результате получим следующую схему

$$\begin{aligned} H_t + (\sigma\{\hat{H}, V\}V)_x &= 0, \quad 0 \leq m < M, \quad n \geq 0, \\ \hat{H}_{\bar{s}}V_t + \hat{H}_{\bar{s}}\delta\{\hat{V}, V\} + \frac{\gamma}{\gamma-1}\hat{H}_{\bar{s}}((\hat{H})^{\gamma-1})_{\bar{x}} &= \mu\hat{V}_{x\bar{x}} + \hat{H}_{\bar{s}}f, \quad \text{при } \hat{H}_{\bar{s}} \neq 0, \\ \hat{V} &= 0, \quad \text{при } \hat{H}_{\bar{s}} = 0, \\ 0 < m < M, \quad n &\geq 0, \\ \hat{V}_0 &= \hat{V}_M = 0. \end{aligned} \quad (27.1)$$

28 Разностная схема А.Г.Соколова (u, ρ)

$$\begin{aligned} H_{\bar{s}}V_t + H_{\bar{s}}\delta\{\hat{V}, V\} + \frac{\gamma}{\gamma-1}H_{\bar{s}}((H)^{\gamma-1})_{\bar{x}} &= \mu\hat{V}_{x\bar{x}} + H_{\bar{s}}f, \quad \text{при } H_{\bar{s}} \neq 0, \\ \hat{V} &= 0, \quad \text{при } H_{\bar{s}} = 0, \\ 0 < m < M, \quad n &\geq 0, \\ \hat{V}_0 &= \hat{V}_M = 0, H_t + (\sigma\{\hat{H}, \hat{V}\}\hat{V})_x = 0, \quad 0 \leq m < M, \quad n \geq 0, \end{aligned} \quad (28.1)$$

29 Разностная схема А.Г.Соколова (ρ, u) (параллельная)

$$\begin{aligned} H_t + (\sigma\{\hat{H}, V\}V)_x &= 0, \quad 0 \leq m < M, \quad n \geq 0, \\ H_{\bar{s}}V_t + H_{\bar{s}}\delta\{\hat{V}, V\} + \frac{\gamma}{\gamma-1}H_{\bar{s}}((H)^{\gamma-1})_{\bar{x}} &= \mu\hat{V}_{x\bar{x}} + H_{\bar{s}}f, \quad \text{при } H_{\bar{s}} \neq 0, \\ \hat{V} &= 0, \quad \text{при } H_{\bar{s}} = 0, \\ 0 < m < M, \quad n &\geq 0, \\ \hat{V}_0 &= \hat{V}_M = 0. \end{aligned} \quad (29.1)$$

$$\begin{aligned} \hat{V}_t + (\sigma\{\hat{H}, \hat{V}\}\hat{V})_x &= 0, \quad 0 \leq m < M, \quad n \geq 0, \\ \hat{H}_{\bar{s}}\hat{V}_t + \hat{H}_{\bar{s}}\delta\{\hat{H}, \hat{V}\} &+ \frac{\gamma}{\gamma-1}\hat{H}_{\bar{s}}((\hat{H})^{\gamma-1})_{\bar{x}} = \mu\hat{H}_{x\bar{x}} + \hat{H}_{\bar{s}}f, \quad \text{при } \hat{H}_{\bar{s}} \neq 0, \\ \hat{H} &= 0, \quad \text{при } \hat{H}_{\bar{s}} = 0, \\ 0 < m < M, \quad n &\geq 0, \\ \hat{H}_0 &= \hat{H}_M = 0. \end{aligned} \quad (29.2)$$

30 Прогонка

31 Существование и единственность

32 Невязкое линейное уравнение Бюргера

Законы сохранения, которые лежат в основе дифференциальных уравнений, чаще всего приводят к дивергентной форме записи конвективной части дифференциального оператора. Поэтому рассмотрим уравнение переноса с переменным коэффициентом (его часто называют линейным невязким уравнением Бюргера) в следующем виде

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial(a(t, x)u)}{\partial x} = 0 \quad (32.1)$$

в области $Q = [0, T] \times [0, 1]$ с начальным условием

$$u(0, x) = u_0(x). \quad (32.2)$$

Пусть коэффициент a при всех t удовлетворяет условиям

$$a(t, 0) = a(t, 1) = 0.$$

В этом случае краевые условия на функцию u задавать не нужно. Далее будем предполагать достаточную гладкость коэффициента a .

Запишем уравнение (32.1) в виде

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial(a(t, x)u)}{\partial x} + \frac{a(t, x)}{2} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{a'(t, x)}{2} u = 0. \quad (32.3)$$

НЕЯВНАЯ Р.С. С ЦЕНТРАЛЬНЫМИ РАЗНОСТЯМИ

Для задачи (32.3), (32.2) рассмотрим р.с.

$$\begin{aligned} v_{t,0} + \frac{1}{2}(\hat{a}\hat{v})_{x,0} + \frac{1}{2}a'_0 v_0 - \frac{h}{2} \left((av)_{x\bar{x},1} - \frac{1}{2}(av)_{x\bar{x},2} \right) &= 0, \\ v_t + \frac{1}{2}(\hat{a}\hat{v})_x + \frac{1}{2}\hat{a}\hat{v}_x + \frac{1}{2}a'v &= 0, \quad 0 < m < M, \\ v_{t,M} + \frac{1}{2}(\hat{a}\hat{v})_{\bar{x},M} + \frac{1}{2}a'_M v_M + \frac{h}{2} \left((av)_{x\bar{x},M-1} - \frac{1}{2}(av)_{x\bar{x},M-2} \right) &= 0, \\ v_m^0 &= u_0(mh), \quad 0 \leq m \leq M. \end{aligned} \quad (32.4)$$

Поиск решения этой р.с. приводит к необходимости искать на каждом временном слое решение СЛАУ, задаваемой следующими уравнениями

$$\begin{aligned} \hat{v}_0 + \frac{\tau}{2h} \hat{a}_1 \hat{v}_1 &= \left(1 - \frac{\tau}{2} a'_0 \right) v_0 - \frac{5\tau}{2h} a_1 v_1 + \frac{2\tau}{h} a_2 v_2 - \frac{\tau}{2h} a_3 v_3, \\ -\frac{\tau}{4h} (\hat{a}_{m-1} + \hat{a}_m) \hat{v}_{m-1} + \hat{v}_m + \frac{\tau}{4h} (\hat{a}_{m+1} + \hat{a}_m) \hat{v}_{m+1} &= \left(1 - \frac{\tau}{2} a'_m \right) v_m, \quad 1 \leq m \leq M, \\ \hat{v}_M - \frac{\tau}{2h} \hat{a}_{M-1} \hat{v}_{M-1} &= \left(1 - \frac{\tau}{2} a'_M \right) v_M + \frac{5\tau}{2h} a_{M-1} v_{M-1} - \frac{2\tau}{h} a_{M-2} v_{M-2} + \frac{\tau}{2h} a_{M-3} v_{M-3}. \end{aligned} \quad (32.5)$$

Матрица A этой СЛАУ является суммой диагональной матрицы A_1 и двухдиагональной кососимметрической матрицы A_2 . У матрицы A_1 в первой и последней строках на диагонали стоят элементы равные $1/2$, а остальные элементы диагонали равны 1. Поскольку в силу кососимметричности $(A_2 v, v) = 0$, то

$$(Av, v) = (A_1 v, v) > 0$$

для любой $v \neq 0$, поэтому решение р.с. (32.4) всегда существует и единственно. Найти его можно, используя метод прогонки.

ЛИНЕЙНОЕ УРАВНЕНИЕ БЮРГЕРСА С ВЯЗКОСТЬЮ

Линейное уравнение Бюргерса с вязкостью является простейшим представителем уравнений, которых учитываются как конвективные, так и диссипативные процессы

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial(a(t, x)u)}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (32.6)$$

Уравнение будем рассматривать в области $Q = [0, T] \times [0, 1]$ с начальным условием

$$u(0, x) = u_0(x) \quad (32.7)$$

и простейшими граничными условиями

$$u(t, 0) = u_l(t), \quad u(t, 1) = u_r(t). \quad (32.8)$$

Для решения задачи (32.6)-(32.8) рассмотрим разностную схему

$$\begin{aligned} v_t + \frac{1}{2}(\hat{a}\hat{v})_x + \frac{1}{2}\hat{a}\hat{v}_x + \frac{1}{2}a_0v &= \mu\hat{v}_{x\bar{x}}, \quad 0 < m < M, \\ \hat{v}_0 &= u_l((n+1)\tau), \quad \hat{v}_M = u_r((n+1)\tau), \\ v_m^0 &= u_0(mh), \quad 0 \leq m \leq M. \end{aligned} \quad (32.9)$$

Для нахождения решения разностной схемы (32.9) на каждом временном слое требуется решать СЛАУ

$$A\hat{v} = b,$$

где $A = E + \frac{\tau}{4h}A_1 + \frac{\tau\mu}{h^2}A_2$.

Матрица A_1 кососимметричная

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & \hat{a}_1 + \hat{a}_2 & 0 & \dots & 0 \\ -\hat{a}_1 - \hat{a}_2 & 0 & \hat{a}_2 + \hat{a}_3 & 0 & \dots \\ 0 & -\hat{a}_2 - \hat{a}_3 & 0 & \hat{a}_3 + \hat{a}_4 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}.$$

Симметричная трехдиагональная матрица A_2 — матрица второй разностной производной, по диагонали которой стоят 2, а на двух побочных — -1. Поэтому

$$(Av, v) = (v, v) + \frac{\tau}{4h}(A_1v, v) + \frac{\tau\mu}{h^2}(A_2v, v) \geq \|v\|^2.$$

Следовательно, матрица A является невырожденной и разностная схема (32.9) всегда имеет решение.

Вектор правой части b задается следующим образом

$$\begin{pmatrix} v_1 - \frac{\tau}{2}a_{0,x,1}v_1 + \frac{\tau}{4h}(\hat{a}_0 + \hat{a}_1)\hat{u}_l \\ \dots \\ v_m - \frac{\tau}{2}a_{0,x,m}v_m \\ \dots \\ v_{M-1} - \frac{\tau}{2}a_{0,x,M-1}v_1 + \frac{\tau}{4h}(\hat{a}_{M-1} + \hat{a}_M)\hat{u}_r \end{pmatrix}$$

33 Уравнение теплопроводности с переменным коэффициентом

Уравнение теплопроводности с переменным коэффициентом является модельным как для процессов, для которых этот коэффициент зависит от термодинамических параметров по известному закону, так и для некоторых "искусственных" случаев записи уравнений с целью построить численный метод решения, обладающий нужными свойствами. Чтобы не выходить за рамки темы лекции про линейные уравнения будем считать, что коэффициент теплопроводности является заданной функцией от координат t и x , обладает необходимой гладкостью и принимает положительные значения, отделенные от нуля величиной δ_μ .

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu(t, x) \frac{\partial u}{\partial x} \right). \quad (33.1)$$

Уравнение будем рассматривать в области $Q = [0, T] \times [0, 1]$ с начальным условием

$$u(0, x) = u_0(x) \quad (33.2)$$

и простейшими граничными условиями

$$u(t, 0) = u_l(t), \quad u(t, 1) = u_r(t). \quad (33.3)$$

Для решения задачи (33.1)-(33.3) рассмотрим разностную схему

$$\begin{aligned} v_t &= \tilde{\mu} \hat{v}_{x\bar{x}} + ((\mu^{+1/2} - \tilde{\mu})v_x)_{\bar{x}}, \quad 0 < m < M, \\ \hat{v}_0 &= u_l((n+1)\tau), \quad \hat{v}_M = u_r((n+1)\tau), \\ v_m^0 &= u_0(mh), \quad 0 \leq m \leq M, \end{aligned} \quad (33.4)$$

где $\tilde{\mu}^n = \max_{m=0}^{M-1} \mu(n\tau, (m+1/2)h)$. В уравнении (33.4) обозначение $\mu^{+1/2}$ означает, что значение коэффициента берется в точке $(n\tau, (m+1/2)h)$.

УТВЕРЖДЕНИЕ. Решение разностной схемы (33.4) существует и единственно. Порядок аппроксимации на гладких решениях задачи (33.1)-(33.3) $u \in C^{2,4}(Q)$ равен $\tau + h^2$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Разностная схема (33.4) использует значение коэффициента теплопроводности с нижнего временного слоя. В случае нелинейных задач, когда μ зависит от решения, такой способ аппроксимации не всегда является правильным. Бывает так, что значения μ необходимо брать с верхнего временного слоя.

34 Нелинейное уравнение Бюргерса

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u^2}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (34.1)$$

в области $Q = [0, T] \times [0, 1]$ с начальными и граничными условиями

$$u(0, x) = u_0(x), \quad (34.2)$$

$$u(t, 0) = u(t, 1) = 0. \quad (34.3)$$

Для построения разностной схемы перепишем уравнение (34.1) в виде

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{2}{3} \frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{2}{3} u \frac{\partial u}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (34.4)$$

НЕЯВНАЯ РАЗНОСТНАЯ СХЕМА С ЦЕНТРАЛЬНЫМИ РАЗНОСТЯМИ

Для задачи (34.4),(34.2),(34.3) рассмотрим р.с.

$$\begin{aligned} v_t + \frac{2}{3}(v\hat{v})_x + \frac{2}{3}v\hat{v}_x &= \mu\hat{v}_{x\bar{x}}, \quad 0 < m < M, \\ \hat{v}_0 &= \hat{v}_M = 0, \\ v_m^0 &= u_0(mh), \quad 0 \leq m \leq M. \end{aligned} \quad (34.5)$$

Для нахождения решения разностной схемы (34.5) на каждом временном слое требуется решать СЛАУ

$$A\hat{v} = b,$$

где $A = E + \frac{\tau}{6h}A_1 + \frac{\tau\mu}{h^2}A_2$.

Матрица A_1 кососимметричная

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & v_1 + v_2 & 0 & \dots & 0 \\ -v_1 - v_2 & 0 & v_2 + v_3 & 0 & \dots \\ 0 & -v_2 - v_3 & 0 & v_3 + v_4 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}.$$

Симметричная трехдиагональная матрица A_2 — матрица второй разностной производной, по диагонали которой стоят 2, а на двух побочных — -1. Поэтому

$$(Av, v) = (v, v) + \frac{\tau}{6h}(A_1v, v) + \frac{\tau\mu}{h^2}(A_2v, v) \geq \|v\|^2.$$

Следовательно, решение разностной схемы (34.5) всегда существует и единственно.

35 Общие замечания по РС

По РС, предназначенным для решения задачи (2.1),(2.3),(2.4), ищутся сеточные функции H и V , задающие приближенное значение плотности ρ и скорости u в узлах сетки. В большинстве РС эти функции заданы на одной сетке $\bar{Q}_{\tau h}$. Исключение составляют схемы

из параграфов 26-29. В схемах из этих параграфов функция H вычисляется в узлах сетки $\bar{Q}_{\tau h}^{1/2}$, функция V — в узлах $\bar{Q}_{\tau h}$.

В качестве значений разностного решения на нулевом слое для первой группы схем берутся проекции на сетку $\bar{\omega}_h$ функций ρ_0 и u_0

$$H_m^0 = \rho_{0m}, \quad V_m^0 = (u_0)_m, \quad x_m \in \bar{\omega}_h. \quad (35.1)$$

Во второй группе значения H^0 задаются на сетке $\omega_h^{1/2}$, а V^0 на сетке ω_h

$$H_m^0 = \rho_{0m}, \quad x_m \in \bar{\omega}_h^{1/2}, \quad V_m^0 = \rho_{0m}, \quad x_m \in \bar{\omega}_h. \quad (35.2)$$

В РС из параграфов 18-25 используется функция

$$G = \ln(H),$$

заданная также как и функция H на сетке $\bar{Q}_{\tau h}$.

Для задачи „прилипания“ граничные значения функции скорости равны нулю

$$V_0^n = V_M^n = 0, \quad n = 1, \dots, N. \quad (35.3)$$

Эти граничные условия и уравнения любой из РС образуют СЛАУ (или две последовательно решаемых СЛАУ) в количестве равном числу неизвестных на верхнем временном слое. Однозначная разрешимость получающихся алгебраических задач обсуждается в параграфе 31. В следующих параграфах все РС будут адаптированы для расчета задачи „прилипания“. Ниже будет объяснено, как их следует поменять для задачи „протекания“.

В случае задачи „протекания“(7.1) граничные условия на скорость меняются на следующие

$$V_0^n = v, \quad V_M^n = V_{M-1}^n \quad n = 1, \dots, N. \quad (35.4)$$

Уравнения на плотность в узлах с $m=0$ меняются на равенства

$$H_0^n = \tilde{\rho} \quad n = 1, \dots, N, \quad (35.5)$$

Чуть более сложно решается вопрос об уравнении на плотность в узлах с $m=M$. Например, РС (9.1) аппроксимирует уравнение неразрывности, записанное в виде

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{2} \left(u \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \rho \frac{\partial u}{\partial x} \right) = 0.$$

Тогда нужное разностное уравнение выглядит так

$$H_{t,M} + V_M \hat{H}_{\bar{x},M} + \frac{h}{2} \left(V_M (H_{x\bar{x},M-1} - \frac{1}{2} H_{x\bar{x},M-2}) + (VH)_{x\bar{x},M-1} - \frac{1}{2} (VH)_{x\bar{x},M-2} \right) = 0.$$

Аналогично этот вопрос решается и для других РС.

36 Общие замечания по структуре программы

Сформулируем тезисы, исходя из которых были написаны приведенные ниже рекомендации по структуре и организации памяти программ.

I. Для достижения наибольшей точности приближенных решений требуется проводить расчеты с минимально возможными шагами сетки.

II. При прочих равных условиях программа работает быстрее, если под нее требуется отводить меньше памяти.

III. Идентификаторы переменных должны ассоциироваться с теми величинами, которые они обозначают.

Решением нестационарных задач являются функции, зависящие от двух типов переменных: времени и пространственной координаты (координат). Дискретизация по времени приводит к вычислению приближенного решения лишь в отдельные моменты времени, которые называются временными слоями. В практикуме используются РС, которые связывают численное решение на двух последовательных временных слоях n -ом и $(n+1)$ -ом, называемыми нижним и верхним временными слоями соответственно. Такие РС называют двухслойными. Эта связь может быть записана в виде СЛАУ

$$Az^{n+1} = d, \quad n = 0, \dots, N-1, \quad (36.1)$$

где z^{n+1} — разностное решение на $(n+1)$ -ом временном слое, а матрица A и вектор правой части d определяются используемой РС и ее параметрами, параметрами решаемой дифференциальной задачи и решением на n -ом временном слое. Решение $z^{n=1}$ при определенных условиях существует и единственно. Поскольку решение z^0 считается известным, то алгоритм поиска численного решения сводится к последовательному решению N СЛАУ.

В целях экономии выделяемой памяти практически никогда не создают массив, для хранения разностного решения на всех временных слоях одновременно. Выделяют лишь память требуемую для хранения решения на одном временном слое в виде массива z . Используя значения решения с n -го слоя, вычисляют элементы матрицы A и правой части d . После чего находят решение на $(n+1)$ -ом слое, сохраняя его в массиве z . В ряде случаев требуется хранить информацию о решении с нижнего слоя, когда часть решения на верхнем слое уже найдена. Это приводит к необходимости отводить дополнительную память под часть решения с верхнего слоя, а затем копировать его в массив z . Но в любом случае отводимая память существенно меньше, нежели та, которая была бы необходима для хранения решения на всех временных слоях.

Общее число временных слоев может существенно превышать необходимое количество, которое требуется для полноценного ответа на решаемые вопросы. Это связано с аппроксимацией и устойчивостью используемой РС. Поэтому для дальнейшей обработки сохраняют в файле с результатами только те временные слои, информация о которых необходима.

Для выполнения заданий практикума требуется написать несколько программ, которые будут давать ответы на поставленные задачи. Каждая программа достаточно объемная, но в них есть очень много повторяющихся (или почти повторяющихся) подпрограмм, отладка которых происходит один раз, а дальше они используются в других программах. Опишем эти подпрограммы. Заметим, что предлагаемые идентификаторы переменных и структуры допускают простое обобщение на многомерный по пространс-

венной переменной случай, что обеспечивает более простое выполнение заданий весеннего семестра.

Главная программа (хранится в файле `gas_one.c`).

Главная программа — это набор команд, которые обеспечивают выполнение соответствующего задания. В ней должны задаваться параметры дифференциальной задачи, наборы параметров РС, для которых проводится численный эксперимент (задание сетки, величин ее шагов и т.д.), определяться пути вывода информации, которую требуется сохранить, вызываться расчетный модуль, а также осуществляться другие необходимые действия общего характера.

Параметры дифференциальной задачи для удобства задания и передачи в подпрограммы хранятся в структуре *P_gas*.

```
typedef struct
{
    double Segm_T;
    double Segm_X;
    double p_ro;
    double p_gamma;
    double mu;
} P_gas;
```

В ней хранятся следующие величины.

1) Параметры, задающие расчетную область Q. В случае прямоугольной области достаточно задать длины ее сторон и временного промежутка. В одномерном случае эти параметры обозначены через *Segm_X* и *Segm_T* соответственно.

2) Параметры, задающие свойства газа. В случае рассматриваемой модели это вязкость газа μ (обозначается *mu*) и функция $p = p(\rho)$. В практикуме используется либо простейшая линейная зависимость $p = p'_\rho \rho$. Для ее определения требуется задать константу p'_ρ , которая характеризует сжимаемость газа и в программе обозначается *p_ro*. Либо используется нелинейная зависимость вида $p = \rho^\gamma$, где степень γ является известной константой.

Всем этим переменным сразу присваиваются значения в процедуре

```
void param_dif(P_gas *p_d)
```

Для хранения параметров схемы используется структура *P_she*:

```
typedef struct
{
    int M_x;
    int N;
    int Dim;
    double h_x;
    double tau;
    double eta;
} P_she;
```

В одномерном случае задание равномерной сетки требует минимальной информации: числа разбиений по пространственной (*M_x*) и временной (*N*) переменным. Для удобства в этой структуре еще хранятся переменные:

- Dim , задающая общее число узлов по пространственной переменной и равная $M_x + 1$;
 - h_x и tau — шаги сетки, равные $Segm_X/M_x$ и $Segm_T/N$ соответственно;
 - eta — параметр пропорциональности искусственной вязкости.
- Структура P_{she} задается в подпрограмме

*void param_she(P_she * p_s, P_dif * p_d)*

В цикле, организованном для расчета всех тестов, каждый раз выполняются следующие действия.

- 1) Определяются параметры дифференциальной задачи (процедура *param_dif*).
- 2) Определяются параметры схемы (процедура *param_she*).
- 2) Вызывается подпрограмма расчета разностного решения (процедура *Shema*).

IY) Процедура *Shema*

В процедуре

*void Sxema(P_she * p_s, P_dif * p_d)*

реализован алгоритм разностной схемы, который позволяет найти сеточное решение начально-краевой задачи, поставленной для системы (2.1), в момент времени T . Параметры сетки и дифференциальной задачи передаются в структурах P_{she} и P_{dif} .

Численное решение РС, используемых в практикуме, на очередном временном слое ищется в виде решения СЛАУ (36.1). Все РС можно условно разделить на два типа. К первому типу отнесем РС, для которых СЛАУ (36.1) распадается на две подсистемы, которые могут быть решены либо в произвольном порядке, либо в строго определенном, но при этом решение одной системы задает функцию скорости, а решение другой системы задает функцию плотности на $(n+1)$ -ом временном слое. При этом матрицы этих подсистем являются трехдиагональными и их решения могут быть найдены методом прогонки. Ко второму типу относятся РС, для которых СЛАУ (36.1) не допускает расщепления на две отдельные СЛАУ, решением которых служили бы функции плотности и скорости на верхнем слое. У РС второго типа матрица A системы (36.1) является сильноразреженной, но ширина ее ленты больше 2. Для решения этих систем рекомендуется использовать метод бисопряженных градиентов, поскольку разностное решение с предыдущего временного слоя может служить хорошим начальным приближением.

Для хранения решения на текущем временном слое для РС первого типа можно использовать два массива размерности Dim , в одном из которых хранится скорость, а в другом плотность. При последовательном решении подсистем, на которые распадается СЛАУ (36.1) РС этого типа, необходимо отводить память в виде четырех векторов размерности Dim . В трех из них хранятся диагонали трехдиагональной матрицы системы, а в четвертом правая часть. Для корректного задания элементов СЛАУ второй подсистемы может требоваться еще один вектор размерности Dim для сохранения копии либо функции плотности, либо функции скорости с нижнего слоя.

В случае использования РС второго типа для уменьшения ширины матрицы A СЛАУ (36.1) приходится заводить массив размерности $2Dim$, котором чередуются значения плотности и скорости. Матрицу A можно хранить в MSR формате (Modified Sparse Row), что позволяет применять пакетные реализации метода бисопряженных градиентов.

В целях еще более радикальной экономии памяти, отводимой под хранение матрицы A , заметим, что все используемые РС второго типа приводят к СЛАУ, которые состоят из разностных уравнений, аппроксимирующих уравнения неразрывности и сохранения импульса. Как было уже отмечено выше для ускорения скорости сходимости требуется чередовать эти уравнения, но для экономного в смысле памяти хранения матрицы рассмотрим перегруппировку этих уравнений: сначала запишем уравнения относящиеся к уравнению неразрывности, а затем к уравнению сохранения импульса. Эти группы уравнений не допускают расщепления на две подсистемы, как это было в РС первого типа, но каждая из них задает свою часть строк матрицы A . Тем самым получаем разделение матрицы A на две прямоугольные сильноразреженные подматрицы прямоугольного типа размера $Dim \times 2Dim$. Каждая из этих подматриц является пяти или шестидиагональной и поэтому для хранения матрицы A требуется всего два комплекта по пять векторов размерности Dim . Далее нетрудно заметить, что часть из этих диагоналей состоит из одних и тех же чисел, поэтому соответствующие вектора можно заменить на скалярные переменные. Справедливости ради необходимо отметить, что при такой организации хранения ненулевых элементов матрицы A по сравнению с MSR форматом, текст программы тяжелее адаптировать к решению задач, в которых уравнения системы (2.1) заменяются более сложными.

Память под массивы переменных, используемых для хранения разностного решения, матрицы A и правой части d , отводится динамически. Все они имеют размерность, зависящую от Dim .

Теперь объясним смысл рекомендуемых к использованию идентификаторов скалярных переменных. Эти обозначения существенно облегчают написание и отладку программы за счет своей наглядности особенно в многомерном случае, но привыкать к ним естественно лучше уже при создании одномерной программы.

Рассмотрим более сложный случай использования РС второго типа. Пусть разностное решение на n -ом временном слое состоит из сеточных функций H и V , которые хранятся в одномерном массиве RES размерности $2Dim$ в следующем порядке

$$(H_0, V_0, H_1, V_1, H_2, V_2, \dots, H_{M-x}, V_{M-x}).$$

Для поиска решения на $(n+1)$ -ом временном слое, состоящего из сеточных функций \hat{H} и \hat{V} требуется решить СЛАУ (36.1), состоящую из уравнений двух типов:

$$\begin{aligned} & a_{2m,2m-2}\hat{H}_{m-1} + a_{2m,2m-1}\hat{V}_{m-1} + a_{2m,2m}\hat{H}_m + \\ & + a_{2m,2m+1}\hat{V}_m + a_{2m,2m+2}\hat{H}_{m+1} + a_{2m,2m+3}\hat{V}_{m+1} = d_{2m} \end{aligned} \quad (36.2)$$

и

$$\begin{aligned} & a_{2m+1,2m-2}\hat{H}_{m-1} + a_{2m+1,2m-1}\hat{V}_{m-1} + a_{2m+1,2m}\hat{H}_m + \\ & + a_{2m+1,2m+1}\hat{V}_m + a_{2m+1,2m+2}\hat{H}_{m+1} + a_{2m+1,2m+3}\hat{V}_{m+1} = d_{2m+1}. \end{aligned} \quad (36.3)$$

Уравнения (36.2) и (36.3) аппроксимируют уравнения неразрывности и сохранения импульса соответственно. Коэффициенты a_{kl} и d_k ($k = m, m+1$; $l = 2m-2, \dots, 2m+3$) являются функциями, зависящими от значений $H_{m-1}, H_m, H_{m+1}, V_{m-1}, V_m, V_{m+1}$ и параметров дифференциальной задачи и разностной схемы.

Для определения коэффициентов a_{kl} и d_k многократно используются значения решения с n -го временного слоя, поэтому для ускорения работы программы имеет смысл считывать нужные для очередного уравнения значения из массива RES во вспомогательные переменные и уже эти переменные подставлять в формулы.

Ошибки, совершаемые студентами при выполнении практикума, начинаются на этапе определения номера в массиве *RES* различных значений сеточных функций *H* или *V*. Поэтому сначала нужно в наглядном виде задать эти номера. Для этого используются следующие идентификаторы

$$HmL, Hm0, HmR, VmL, Vm0, VmR.$$

Переменные, которыми обозначены эти идентификаторы, задают целочисленные номера в массиве *RES* значений функций *H* и *V* в узлах шаблона сетки, равные

$$2m - 2, 2m, 2m + 2, 2m - 1, 2m + 1, 2m + 3$$

соответственно. Начальная буква в идентификаторе задает название функции, буква *m* означает, что переменная задает номер, а третья буква задает узел шаблона: *L* означает левый узел с номером $m - 1$, *0* — центральный узел с номером *m* и *R* — правый узел с номером $m + 1$.

После чего значения функций в узлах шаблона записываются в скалярные действительные переменные

$$HL, H0, HR, VL, V0, VR,$$

где суффикс у заглавной буквы означает узел шаблона, в котором берется значение соответствующей функции.

После введения этих переменных формулы для вычисления коэффициентов a_{kl} и d_k становятся гораздо нагляднее и ошибки в их наборе находятся гораздо легче.

Еще один совет состоит в том, что лучше заранее вычислить несколько часто встречающихся в формулах констант, значения которых определяются входными параметрами процедуры, и потом много раз использовать при определении коэффициентов матрицы и правой части СЛАУ.

Для удобства работы с процедурой *Shema* текст ее программы разбивают на относительно небольшие блоки, которые собираются в единое целое при помощи операции *include*.

Список литературы

- [1] Попов А.В., Жуков К.А. Неявная разностная схема для нестационарного движения вязкого баротропного газа. //Вычислительные методы и программирование. т.14, 2013 г. N 2. с. 516-523.
- [2] Имранов Ф.Б., Кобельков Г.М., Соколов А.Г. О разностной схеме баротропного газа. Доклады РАН, т.478, 2018 г., N 4, 388-391.
- [3] Попов А.В. Gnuplot и его приложения. М.: Изд-во попечительского совета механико-математического факультета МГУ, 2015. graphics/gnuplot/docs/gdoc.pdf
- [4] Самарский А.А. Теория разностных схем. М.: Наука, 1983.
- [5] Saad Y. Iterative methods for sparse linear systems. SIAM, 2ed., 2003.
- [6] Антонцев С.Н., Кажихов А.В., Монахов В.Н. Краевые задачи механики жидкостей и газов. Новосибирск: Наука, 1983, 320 с.

- [7] Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы М.: Лаборатория Базовых Знаний, 2000 г. - 624 с.