

---

# ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕСТАЦИОНАРНОГО ОДНОМЕРНОГО ТЕЧЕНИЯ ГАЗА С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ НЕЯВНОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОЙ РАЗНОСТНОЙ СХЕМЫ С ОДНОСТОРОННИМИ РАЗНОСТЯМИ ( $u$ , $\ln \rho$ )

---

АЛЕКСЕЙ А. ИСМАГИЛОВ  
410 ГРУППА

МГУ  
2020

---

# Содержание

<b>1 Постановка задачи</b>	<b>3</b>
<b>2 Основные обозначения</b>	<b>3</b>
<b>3 Описание схемы</b>	<b>4</b>
3.1 Описание схемы . . . . .	4
3.2 Координатная запись уравнений . . . . .	4
<b>4 Отладочный тест</b>	<b>6</b>
4.1 Постановка задачи . . . . .	6
4.2 Численные эксперименты . . . . .	7
<b>5 Тесты с негладкими начальными данными</b>	<b>14</b>
5.1 Постановка задачи . . . . .	14
5.2 Численные эксперименты . . . . .	14
5.3 Численные эксперименты первой задачи . . . . .	15
5.4 Численные эксперименты второй задачи . . . . .	45
<b>6 Задача о стабилизации осциллирующей функции</b>	<b>78</b>
6.1 Постановка задачи . . . . .	78
6.2 Численные эксперименты . . . . .	78
6.3 Численные эксперименты первой задачи . . . . .	78
6.4 Численные эксперименты второй задачи . . . . .	89
<b>7 Задача «протекания»</b>	<b>100</b>
7.1 Постановка задачи . . . . .	100
7.2 Разностная схема . . . . .	101
7.3 Численные эксперименты . . . . .	101

# 1 Постановка задачи

Рассмотрим систему уравнений, описывающую нестационарное одномерное движение вязкого баротропного газа

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} = \rho f_0; \\ \rho \frac{\partial u}{\partial t} + \rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \rho f; \\ p = p(\rho). \end{cases} \quad (1)$$

Через  $\mu$  обозначен коэффициент вязкости газа, который считаем известной неотрицательной величиной. Известными также будем считать функцию давления газа  $p$  (уравнение состояния газа) и вектор внешних сил  $f$ , который является функцией переменных Эйлера  $(t, x) \in Q = \Omega_t \times \Omega_x = [0; T] \times [0; X]$ . Зависимость  $p = p(\rho)$  часто называют уравнением состояния газа. Мы будем рассматривать две возможные зависимости:  $p(\rho) = C\rho$ , где  $C$  — положительная константа, и  $p(\rho) = \rho^{1/4}$ . Неизвестными же будут функция плотности  $\rho$  и функция скорости  $u$ .

Сделав замену  $g = \ln \rho$ , систему (1) можно переписать в виде (см. [1])

$$\begin{cases} \frac{\partial g}{\partial t} + u \frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} = f_0; \\ \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + p_\rho(e^g) \frac{\partial g}{\partial x} = \mu e^{-g} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f; \\ p_\rho(e^g) = \frac{\partial p}{\partial \rho}(e^g); \\ p = p(\rho). \end{cases} \quad (2)$$

Дополним систему (1) начальными и граничными условиями

$$\begin{aligned} (\rho, u)|_{t=0} &= (\rho_0, u_0), \quad x \in \Omega_x \\ u(t, 0) &= u(t, X) = 0, \quad t \in \Omega_t \end{aligned} \quad (3)$$

# 2 Основные обозначения

Введем на  $\Omega_x$  и  $\Omega_t$  сетки  $\omega_x = \{mh : m = 0, \dots, M\}$  и  $\omega_t = \{n\tau : n = 0, \dots, N\}$  соответственно, где  $h = X/M$  и  $\tau = T/N$ . Обозначим через  $\Omega_{\tau, h}$  сетку  $\omega_\tau \times \omega_h$ .

Для сокращения записи значение для произвольной функции  $g$  в узле  $(n, m)$  обозначим через  $g_m^n$ . Для простоты вместо  $g_m^n$  и  $g_m^{n+1}$  будем писать  $g$  и  $\hat{g}$  соответственно. Введем также обозначения для разностных операторов:

$$\begin{aligned} g_t &= \frac{g_m^{n+1} - g_m^n}{\tau}, \\ g_x &= \frac{g_{m+1}^n - g_m^n}{h}, \\ g_{\bar{x}} &= \frac{g_m^n - g_{m-1}^n}{h}, \\ g_{\hat{x}} &= \frac{g_{m+1}^n - g_{m-1}^n}{2h}. \end{aligned}$$

Нетрудно видеть, что

$$g_{x\bar{x}} = (g_x)_{\bar{x}} = \frac{g_{m-1}^n - 2g_m^n + g_{m+1}^n}{h^2}.$$

Для приближения конвективных слагаемых в дифференциальных операторах введем обозначение

$$\delta\{W, V\} = \frac{V + |V|}{2} W_{\bar{x}} + \frac{V - |V|}{2} W_x.$$

Введем норму для произвольной сеточной функции  $v$ :

$$\|v\| = \max_{x \in \omega_x} |v(x)| = \max_{0 \leq m \leq M} |v(mh)|.$$

### 3 Описание схемы

#### 3.1 Описание схемы

Обозначим через  $G$  и  $V$  приближенные значения функций  $\ln \rho$  и  $u$  соответственно. Положим  $G = \ln H$ .

Для поиска численного решения задачи (2) с начальными условиями (3) можно использовать разностную схему, в которой для приближения конвективных членов используются односторонние разности, а функции  $G$  и  $V$  на верхнем слое ищутся путем решения системы

$$\begin{cases} V_t + \delta\{\widehat{V}, V\} + p_\rho(e^G) G_{\dot{x}} = \tilde{\mu} \widehat{V}_{x\bar{x}} - (\tilde{\mu} - \mu e^{-G}) V_{x\bar{x}} + f, & m = 1, \dots, M-1; \\ \widehat{V} = 0, & m = 0, M; \\ G_t + \delta\{\widehat{G}, \widehat{V}\} + \widehat{V}_{\dot{x}} = f_0, & m = 1, \dots, M-1; \\ G_t + \widehat{V}_x = f_0, & m = 0; \\ G_t + \widehat{V}_{\bar{x}} = f_0, & m = M, \end{cases} \quad (4)$$

где

$$\tilde{\mu} = \mu \|\exp(-G^n)\| = \mu \max_{0 \leq m \leq M} |\exp(-G_m^n)| = \mu \exp\left(-\min_{0 \leq m \leq M} G_m^n\right).$$

В качестве значений разностного решения на нулевом слое берутся проекции на сетку  $\omega_x$  функций  $\ln \rho_0$  и  $u_0$ :

$$G_m^0 = \ln \rho_0(hm), \quad V_m^0 = u_0(hm), \quad m = 0, \dots, M,$$

а граничные значения скорости полагаются равными нулю (второе уравнение в (4)):

$$V_0^n = V_M^n = 0, \quad n = 1, \dots, N.$$

Для  $p(\rho) = C\rho^\gamma$  имеем:

$$p_\rho(e^g) = C\gamma e^{(\gamma-1)g}.$$

#### 3.2 Координатная запись уравнений

Используя обозначения из раздела 2, перепишем систему (4).

##### 3.2.1 Первое уравнение

$$m = 1, \dots, M-1.$$

$$V_t + \delta\{\widehat{V}, V\} + p_\rho(e^G) G_{\dot{x}} = \tilde{\mu} \widehat{V}_{x\bar{x}} - (\tilde{\mu} - \mu e^{-G}) V_{x\bar{x}} + f$$

$$\begin{aligned} \frac{V_m^{n+1} - V_m^n}{\tau} + \frac{V_m^n + |V_m^n|}{2} \cdot \frac{V_m^{n+1} - V_{m-1}^{n+1}}{h} + \frac{V_m^n - |V_m^n|}{2} \cdot \frac{V_{m+1}^{n+1} - V_m^{n+1}}{h} + p_\rho(\exp(G_m^n)) \frac{G_{m+1}^n - G_{m-1}^n}{2h} = \\ = \tilde{\mu}^n \frac{V_{m-1}^{n+1} - 2V_m^{n+1} + V_{m+1}^{n+1}}{h^2} - (\tilde{\mu}^n - \mu \exp(-G_m^n)) \frac{V_{m-1}^n - 2V_m^n + V_{m+1}^n}{h^2} + f_m^n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left( -\frac{V_m^n + |V_m^n|}{2h} - \frac{1}{h^2} \tilde{\mu}^n \right) V_{m-1}^{n+1} + \left( \frac{1}{\tau} + \frac{|V_m^n|}{h} + \frac{2}{h^2} \tilde{\mu}^n \right) V_m^{n+1} + \left( \frac{V_m^n - |V_m^n|}{2h} - \frac{1}{h^2} \tilde{\mu}^n \right) V_{m+1}^{n+1} = \\ = \frac{V_m^n}{\tau} - p_\rho(\exp(G_m^n)) \frac{G_{m+1}^n - G_{m-1}^n}{2h} - (\tilde{\mu}^n - \mu \exp(-G_m^n)) \frac{V_{m-1}^n - 2V_m^n + V_{m+1}^n}{h^2} + f_m^n. \end{aligned} \quad (5)$$

### 3.2.2 Второе уравнение

$m = 0, M.$

$$\widehat{V} = 0;$$

$$V_m^{n+1} = 0;$$

$$V_0^{n+1} = V_M^{n+1} = 0. \quad (6)$$

### 3.2.3 Третье уравнение

$m = 1, \dots, M-1.$

$$G_t + \delta \{\widehat{G}, \widehat{V}\} + \widehat{V}_{\dot{x}} = f_0;$$

$$\frac{G_m^{n+1} - G_m^n}{\tau} + \frac{V_m^{n+1} + |V_m^{n+1}|}{2} \cdot \frac{G_m^{n+1} - G_{m-1}^{n+1}}{h} + \frac{V_m^{n+1} - |V_m^{n+1}|}{2} \cdot \frac{G_{m+1}^{n+1} - G_m^{n+1}}{h} + \frac{V_{m+1}^{n+1} - V_{m-1}^{n+1}}{2h} = (f_0)_m^n;$$

$$\left( -\frac{V_m^{n+1} + |V_m^{n+1}|}{2h} \right) G_{m-1}^{n+1} + \left( \frac{1}{\tau} + \frac{|V_m^{n+1}|}{h} \right) G_m^{n+1} + \left( \frac{V_m^{n+1} - |V_m^{n+1}|}{2h} \right) G_{m+1}^{n+1} = (f_0)_m^n + \frac{G_m^n}{\tau} - \frac{V_{m+1}^{n+1} - V_{m-1}^{n+1}}{2h}. \quad (7)$$

### 3.2.4 Четвертое уравнение

$m = 0.$

$$G_t + \widehat{V}_x = f_0;$$

$$\frac{G_m^{n+1} - G_m^n}{\tau} + \frac{V_{m+1}^{n+1} - V_m^{n+1}}{h} = (f_0)_m^n;$$

$$G_m^{n+1} = \tau (f_0)_m^n + G_m^n - \tau \frac{V_{m+1}^{n+1} - V_m^{n+1}}{h};$$

$$G_0^{n+1} = \tau (f_0)_0^n + G_0^n - \tau \frac{V_1^{n+1} - V_0^{n+1}}{h}. \quad (8)$$

### 3.2.5 Пятое уравнение

$m = M.$

$$G_t + \widehat{V}_{\bar{x}} = f_0;$$

$$\frac{G_m^{n+1} - G_m^n}{\tau} + \frac{V_m^{n+1} - V_{m-1}^{n+1}}{h} = (f_0)_m^n;$$

$$G_m^{n+1} = \tau (f_0)_m^n + G_m^n - \tau \frac{V_m^{n+1} - V_{m-1}^{n+1}}{h};$$

$$G_M^{n+1} = \tau (f_0)_M^n + G_M^n - \tau \frac{V_M^{n+1} - V_{M-1}^{n+1}}{h}. \quad (9)$$

### 3.2.6 Итоговая система

Собрав воедино уравнения (5), (6), (7), (8) и (9), получим следующую систему (эквивалентную (4)):

$$\left\{ \begin{array}{l} A_V V_{m-1}^{n+1} + B_V V_m^{n+1} + C_V V_{m+1}^{n+1} = D_V, \quad \text{где} \\ A_V = -\frac{V_m^n + |V_m^n|}{2h} - \frac{1}{h^2} \tilde{\mu}^n, \\ B_V = \frac{1}{\tau} + \frac{|V_m^n|}{h} + \frac{2}{h^2} \tilde{\mu}^n, \\ C_V = \frac{V_m^n - |V_m^n|}{2h} - \frac{1}{h^2} \tilde{\mu}^n, \\ D_V = \frac{V_m^n}{\tau} - p_\rho(\exp(G_m^n)) \frac{G_{m+1}^n - G_{m-1}^n}{2h} - \\ \quad - (\tilde{\mu}^n - \mu \exp(-G_m^n)) \frac{V_{m-1}^n - 2V_m^n + V_{m+1}^n}{h^2} + f_m^n, \quad m = 1, \dots, M-1; \\ V_0^{n+1} = V_M^{n+1} = 0; \\ A_G G_{m-1}^{n+1} + B_G G_m^{n+1} + C_G G_{m+1}^{n+1} = D_G, \quad \text{где} \\ A_G = -\frac{V_m^{n+1} + |V_m^{n+1}|}{2h}, \\ B_G = \frac{1}{\tau} + \frac{|V_m^{n+1}|}{h}, \\ C_G = \frac{V_m^{n+1} - |V_m^{n+1}|}{2h}, \\ D_G = (f_0)_m^n + \frac{G_m^n}{\tau} - \frac{V_{m+1}^{n+1} - V_{m-1}^{n+1}}{2h}, \quad m = 1, \dots, M-1; \\ G_0^{n+1} = \tau (f_0)_0^n + G_0^n - \tau \frac{V_1^{n+1} - V_0^{n+1}}{h}; \\ G_M^{n+1} = \tau (f_0)_M^n + G_M^n - \tau \frac{V_M^{n+1} - V_{M-1}^{n+1}}{h}. \end{array} \right. \quad (10)$$

Далее из 1–2 уравнений системы (10) ищутся значения  $V_m^{n+1}$ ,  $m = 0, \dots, M$ , а после из уравнений 3–5 ищутся значения  $G_m^{n+1}$ ,  $m = 0, \dots, M$ . В обоих случаях получается система из  $M + 1$  линейного алгебраического уравнения  $Ax = b$  с трехдиагональной матрицей  $A$ .

## 4 Отладочный тест

### 4.1 Постановка задачи

Рассмотрим  $Q = [0; 1] \times [0; 10]$ . Зададим функции

$$\begin{aligned} \tilde{\rho}(t, x) &= e^t \left( \cos\left(\frac{\pi x}{10}\right) + \frac{3}{2} \right), \\ \tilde{u}(t, x) &= \cos(2\pi t) \sin\left(\frac{\pi x^2}{100}\right). \end{aligned} \quad (11)$$

Определим функции  $f_0$  (отличную от нуля правую часть уравнения неразрывности) и  $f$  так, чтобы функции  $\rho$  и  $u$  удовлетворяли системе (2) с правой частью, составленной из этих функций

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{g}}{\partial t} + \tilde{u} \frac{\partial \tilde{g}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} &= f_0; \\ \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} + \tilde{u} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + \tilde{p}'(\tilde{g}) \frac{\partial \tilde{g}}{\partial x} &= \mu e^{-\tilde{g}} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2} + f, \end{aligned}$$

где, согласно (11),

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial t} &= e^t \left( \cos\left(\frac{\pi x}{10}\right) + \frac{3}{2} \right) = \tilde{\rho}, \\
\frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial x} &= -\frac{1}{10} \pi e^t \sin\left(\frac{\pi x}{10}\right), \\
\frac{\partial \tilde{g}}{\partial t} &= \frac{\partial \ln \tilde{\rho}}{\partial t} = \frac{1}{\tilde{\rho}} \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial t} = \frac{1}{\tilde{\rho}} \tilde{\rho} = 1, \\
\frac{\partial \tilde{g}}{\partial x} &= \frac{\partial \ln \tilde{\rho}}{\partial x} = \frac{1}{\tilde{\rho}} \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial x}, \\
\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} &= -2\pi \sin(2\pi t) \sin\left(\frac{\pi x^2}{100}\right), \\
\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} &= \frac{1}{50} \pi x \cos(2\pi t) \cos\left(\frac{\pi x^2}{100}\right), \\
\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2} &= -\frac{\pi \cos(2\pi t) \left( \pi x^2 \sin\left(\frac{\pi x^2}{100}\right) - 50 \cos\left(\frac{\pi x^2}{100}\right) \right)}{2500}.
\end{aligned}$$

Так как основной целью является программа, реализующая разностную схему, то выписывание явного вида  $f(t, x)$  и  $f_0(t, x)$  для задачи (11) не имеет смысла, ведь намного проще реализовать отдельные функции для вычисления  $\tilde{\rho}$ ,  $\tilde{u}$ ,  $\partial \tilde{\rho} / \partial t$ ,  $\partial \tilde{\rho} / \partial x$ ,  $\partial \tilde{g} / \partial t$ ,  $\partial \tilde{g} / \partial x$ ,  $\partial \tilde{u} / \partial t$ ,  $\partial \tilde{u} / \partial x$ ,  $\partial^2 \tilde{u} / \partial x^2$  и, что самое главное, при таком подходе сложнее ошибиться.

Таким образом, дифференциальная задача для системы (2) с начальными и граничными условиями

$$\begin{aligned}
\tilde{\rho}(0, x) &= \cos\left(\frac{\pi x}{10}\right) + \frac{3}{2}, \\
\tilde{u}(0, x) &= \sin\left(\frac{\pi x^2}{100}\right), \\
\tilde{u}(t, 0) &= \tilde{u}(t, 10) = 0
\end{aligned} \tag{12}$$

имеет гладкое точное решение в области  $Q$ , задаваемое функциями (11).

Первое условие из (12) переписывается в виде

$$\tilde{g}(0, x) = \ln \tilde{\rho}(0, x) = \ln \left( \cos\left(\frac{\pi x}{10}\right) + \frac{3}{2} \right).$$

## 4.2 Численные эксперименты

Далее приведены таблицы значений норм разности между разностным решением и точным решением дифференциальной задачи на последнем временном слое, то есть величины

$$\max_{0 \leq m \leq M} |V_m^N - \tilde{u}(T, mh)|$$

и

$$\max_{0 \leq m \leq M} |G_m^N - \ln \tilde{\rho}(T, mh)|.$$

Для

$$(\mu, C) \in \{10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3}\} \times \{10^0, 10^1, 10^2\}$$

приведены таблицы ошибок для

$$(\tau, h) \in \{10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3}, 10^{-4}\}^2.$$

#### 4.2.1 Таблицы невязок для $V$

$\tau \backslash h$	$10^{-1}$	$10^{-2}$	$10^{-3}$	$10^{-4}$
$10^{-1}$	1.776371e-02	1.792118e-02	1.793893e-02	1.794073e-02
$10^{-2}$	1.033849e-03	1.127919e-03	1.149413e-03	1.151704e-03
$10^{-3}$	7.036494e-04	9.332583e-05	1.095605e-04	1.124012e-04
$10^{-4}$	7.776899e-04	7.012179e-05	9.230439e-06	1.093235e-05

Таблица 1: Ошибка решения для  $V$  при  $p(\rho) = 10^0\rho$  и  $\mu = 10^{-1}$

$\tau \backslash h$	$10^{-1}$	$10^{-2}$	$10^{-3}$	$10^{-4}$
$10^{-1}$	1.741141e-02	4.021459e-01	1.602475e-01	2.696695e-01
$10^{-2}$	9.535861e-04	1.029440e-03	1.049607e-03	1.051778e-03
$10^{-3}$	7.375905e-04	8.552499e-05	9.899144e-05	1.017440e-04
$10^{-4}$	8.024121e-04	7.293841e-05	8.919708e-06	9.868414e-06

Таблица 2: Ошибка решения для  $V$  при  $p(\rho) = 10^0\rho$  и  $\mu = 10^{-2}$

$\tau \backslash h$	$10^{-1}$	$10^{-2}$	$10^{-3}$	$10^{-4}$
$10^{-1}$	1.737624e-02	2.760807e+00	1.899677e+00	1.893982e+00
$10^{-2}$	9.455470e-04	1.019453e-03	7.087007e-01	1.242061e+00
$10^{-3}$	7.413623e-04	8.591923e-05	9.791370e-05	1.006527e-04
$10^{-4}$	8.051984e-04	7.326239e-05	8.974897e-06	9.759848e-06

Таблица 3: Ошибка решения для  $V$  при  $p(\rho) = 10^0\rho$  и  $\mu = 10^{-3}$

$\tau \backslash h$	$10^{-1}$	$10^{-2}$	$10^{-3}$	$10^{-4}$
$10^{-1}$	4.399207e-02	1.185801e+00	1.384241e+00	2.599553e+00
$10^{-2}$	4.322844e-03	5.492934e-03	5.840878e-03	5.875582e-03
$10^{-3}$	3.878637e-03	4.556023e-04	5.653966e-04	6.005636e-04
$10^{-4}$	4.425673e-03	3.417239e-04	4.580453e-05	5.670171e-05

Таблица 4: Ошибка решения для  $V$  при  $p(\rho) = 10^1\rho$  и  $\mu = 10^{-1}$

$\tau \backslash h$	$10^{-1}$	$10^{-2}$	$10^{-3}$	$10^{-4}$
$10^{-1}$	6.766099e+00	3.845721e+00	1.850371e+00	7.349061e+00
$10^{-2}$	4.305475e-03	1.025152e+00	8.320098e+00	3.677854e+00
$10^{-3}$	3.942757e-03	4.542268e-04	5.887119e-04	6.248701e-04
$10^{-4}$	4.512567e-03	3.457915e-04	4.567094e-05	5.903717e-05

Таблица 5: Ошибка решения для  $V$  при  $p(\rho) = 10^1\rho$  и  $\mu = 10^{-2}$

$\tau \backslash h$	$10^{-1}$	$10^{-2}$	$10^{-3}$	$10^{-4}$
$10^{-1}$	1.565398e+01	2.660015e+00	nan	nan
$10^{-2}$	4.303988e-03	4.806442e+00	5.174811e+00	1.197923e+00
$10^{-3}$	3.954101e-03	4.540920e-04	2.991933e+00	4.367503e+00
$10^{-4}$	4.526209e-03	3.463324e-04	4.565770e-05	5.927166e-05

Таблица 6: Ошибка решения для  $V$  при  $p(\rho) = 10^1\rho$  и  $\mu = 10^{-3}$

$\tau \backslash h$	$10^{-1}$	$10^{-2}$	$10^{-3}$	$10^{-4}$
$10^{-1}$	2.752726e+01	1.132738e+01	2.141446e+00	2.673113e+00
$10^{-2}$	4.136422e-02	9.496613e+00	1.884955e+01	4.089251e+00
$10^{-3}$	8.944684e-03	4.284132e-03	3.809615e-03	3.763111e-03
$10^{-4}$	5.705826e-03	9.406657e-04	4.299503e-04	3.817897e-04

Таблица 7: Ошибка решения для  $V$  при  $p(\rho) = 10^2\rho$  и  $\mu = 10^{-1}$

$\tau \backslash h$	$10^{-1}$	$10^{-2}$	$10^{-3}$	$10^{-4}$
$10^{-1}$	1.657973e+02	nan	nan	nan
$10^{-2}$	4.149111e-02	2.777533e+01	1.554029e+01	1.630884e+00
$10^{-3}$	8.961424e-03	4.299043e-03	1.201143e+01	1.096345e+01
$10^{-4}$	5.715811e-03	9.438675e-04	4.314629e-04	3.833744e-04

Таблица 8: Ошибка решения для  $V$  при  $p(\rho) = 10^2\rho$  и  $\mu = 10^{-2}$

$\tau \backslash h$	$10^{-1}$	$10^{-2}$	$10^{-3}$	$10^{-4}$
$10^{-1}$	2.552366e+02	9.271213e+00	7.675318e-01	nan
$10^{-2}$	4.150407e-02	2.601907e+01	nan	nan
$10^{-3}$	8.960919e-03	4.300547e-03	nan	1.930723e+01
$10^{-4}$	5.717606e-03	9.441975e-04	4.316153e-04	1.291908e+01

Таблица 9: Ошибка решения для  $V$  при  $p(\rho) = 10^2\rho$  и  $\mu = 10^{-3}$

$\tau \backslash h$	$10^{-1}$	$10^{-2}$	$10^{-3}$	$10^{-4}$
$10^{-1}$	2.080146e-02	2.106478e-02	2.109317e-02	2.109602e-02
$10^{-2}$	1.465900e-03	1.606185e-03	1.636241e-03	1.639437e-03
$10^{-3}$	1.101759e-03	1.398801e-04	1.573119e-04	1.607127e-04
$10^{-4}$	1.187065e-03	1.011432e-04	1.391879e-05	1.570057e-05

Таблица 10: Ошибка решения для  $V$  при  $p(\rho) = \rho^{1.4}$  и  $\mu = 10^{-1}$

$\tau \backslash h$	$10^{-1}$	$10^{-2}$	$10^{-3}$	$10^{-4}$
$10^{-1}$	2.059689e-02	1.433695e+00	8.544195e-01	4.204920e-01
$10^{-2}$	1.416240e-03	1.544652e-03	1.573852e-03	1.576969e-03
$10^{-3}$	1.132265e-03	1.345107e-04	1.507675e-04	1.540829e-04
$10^{-4}$	1.209169e-03	1.041625e-04	1.337789e-05	1.504221e-05

Таблица 11: Ошибка решения для  $V$  при  $p(\rho) = \rho^{1.4}$  и  $\mu = 10^{-2}$

$\tau \backslash h$	$10^{-1}$	$10^{-2}$	$10^{-3}$	$10^{-4}$
$10^{-1}$	2.057645e-02	9.483568e+00	2.701256e+00	1.992414e+00
$10^{-2}$	1.411441e-03	1.538425e-03	7.427930e+00	9.219663e-01
$10^{-3}$	1.135673e-03	1.339826e-04	1.501040e-04	1.534083e-04
$10^{-4}$	1.211706e-03	1.045017e-04	1.332460e-05	1.497545e-05

Таблица 12: Ошибка решения для  $V$  при  $p(\rho) = \rho^{1.4}$  и  $\mu = 10^{-3}$

#### 4.2.2 Таблицы невязок для $G$

$\tau \backslash h$	$10^{-1}$	$10^{-2}$	$10^{-3}$	$10^{-4}$
$10^{-1}$	1.974472e-02	1.880217e-02	1.871573e-02	1.870716e-02
$10^{-2}$	2.353269e-03	6.329728e-04	5.256517e-04	5.150854e-04
$10^{-3}$	2.054368e-03	2.302165e-04	5.840437e-05	4.918189e-05
$10^{-4}$	2.036429e-03	2.099195e-04	2.298219e-05	5.885503e-06

Таблица 13: Ошибка решения для  $G$  при  $p(\rho) = 10^0\rho$  и  $\mu = 10^{-1}$

$\tau \backslash h$	$10^{-1}$	$10^{-2}$	$10^{-3}$	$10^{-4}$
$10^{-1}$	1.897387e-02	1.676375e+00	2.885702e+00	4.860422e+00
$10^{-2}$	2.135532e-03	4.747359e-04	3.830838e-04	3.739176e-04
$10^{-3}$	1.969499e-03	2.066437e-04	5.145556e-05	4.245203e-05
$10^{-4}$	1.965634e-03	2.009619e-04	2.060778e-05	5.202369e-06

Таблица 14: Ошибка решения для  $G$  при  $p(\rho) = 10^0\rho$  и  $\mu = 10^{-2}$

$\tau \backslash h$	$10^{-1}$	$10^{-2}$	$10^{-3}$	$10^{-4}$
$10^{-1}$	1.889935e-02	3.617057e+01	1.769183e+01	9.085153e+02
$10^{-2}$	2.115682e-03	4.669005e-04	7.080491e-01	1.305671e+01
$10^{-3}$	1.962499e-03	2.045508e-04	5.078172e-05	4.181436e-05
$10^{-4}$	1.959896e-03	2.000810e-04	2.038803e-05	5.136368e-06

Таблица 15: Ошибка решения для  $G$  при  $p(\rho) = 10^0\rho$  и  $\mu = 10^{-3}$

$\tau \backslash h$	$10^{-1}$	$10^{-2}$	$10^{-3}$	$10^{-4}$
$10^{-1}$	3.202333e-02	4.286540e+00	2.689328e+00	9.246981e+00
$10^{-2}$	3.127735e-03	2.324002e-03	2.232669e-03	2.223756e-03
$10^{-3}$	1.246010e-03	3.419812e-04	2.242385e-04	2.144671e-04
$10^{-4}$	1.070381e-03	1.649492e-04	3.454901e-05	2.234277e-05

Таблица 16: Ошибка решения для  $G$  при  $p(\rho) = 10^1\rho$  и  $\mu = 10^{-1}$

$\tau \backslash h$	$10^{-1}$	$10^{-2}$	$10^{-3}$	$10^{-4}$
$10^{-1}$	2.613810e+00	6.199472e+01	2.403819e+01	4.292141e+03
$10^{-2}$	3.007791e-03	4.185274e-01	6.258601e+00	1.397149e+01
$10^{-3}$	1.230608e-03	3.302029e-04	2.144745e-04	2.050559e-04
$10^{-4}$	1.064707e-03	1.631198e-04	3.337949e-05	2.136453e-05

Таблица 17: Ошибка решения для  $G$  при  $p(\rho) = 10^1\rho$  и  $\mu = 10^{-2}$

$\tau \backslash h$	$10^{-1}$	$10^{-2}$	$10^{-3}$	$10^{-4}$
$10^{-1}$	3.883810e+00	2.545349e+02	nan	nan
$10^{-2}$	3.000058e-03	3.600093e+00	8.168784e+01	1.519417e+02
$10^{-3}$	1.228908e-03	3.276843e-04	1.602587e+00	3.268317e+00
$10^{-4}$	1.063995e-03	1.616176e-04	3.311753e-05	2.126514e-05

Таблица 18: Ошибка решения для  $G$  при  $p(\rho) = 10^1\rho$  и  $\mu = 10^{-3}$

$\tau \backslash h$	$10^{-1}$	$10^{-2}$	$10^{-3}$	$10^{-4}$
$10^{-1}$	2.974329e+01	1.610268e+02	3.786377e+01	1.393500e+01
$10^{-2}$	5.667082e-03	1.172591e+00	1.577998e+01	1.784594e+01
$10^{-3}$	4.223137e-04	6.057931e-04	6.410856e-04	6.441292e-04
$10^{-4}$	8.820525e-04	5.311691e-05	6.097839e-05	6.403384e-05

Таблица 19: Ошибка решения для  $G$  при  $p(\rho) = 10^2\rho$  и  $\mu = 10^{-1}$

$\tau \backslash h$	$10^{-1}$	$10^{-2}$	$10^{-3}$	$10^{-4}$
$10^{-1}$	2.077003e+02	nan	nan	nan
$10^{-2}$	5.718407e-03	3.720926e+01	2.553248e+02	2.069227e+02
$10^{-3}$	4.199080e-04	6.106317e-04	1.590452e+00	2.588025e+00
$10^{-4}$	8.625245e-04	5.290572e-05	6.145411e-05	6.464748e-05

Таблица 20: Ошибка решения для  $G$  при  $p(\rho) = 10^2\rho$  и  $\mu = 10^{-2}$

$\tau \backslash h$	$10^{-1}$	$10^{-2}$	$10^{-3}$	$10^{-4}$
$10^{-1}$	2.072080e+02	2.257687e+02	8.763410e+01	nan
$10^{-2}$	5.722928e-03	1.269512e+02	nan	nan
$10^{-3}$	4.207105e-04	6.107477e-04	nan	1.245015e+02
$10^{-4}$	8.591815e-04	5.285617e-05	6.145856e-05	2.629371e+00

Таблица 21: Ошибка решения для  $G$  при  $p(\rho) = 10^2\rho$  и  $\mu = 10^{-3}$

$\tau \backslash h$	$10^{-1}$	$10^{-2}$	$10^{-3}$	$10^{-4}$
$10^{-1}$	2.031658e-02	1.957867e-02	1.951204e-02	1.950546e-02
$10^{-2}$	2.219200e-03	5.601706e-04	4.844406e-04	4.772424e-04
$10^{-3}$	1.931577e-03	2.171986e-04	5.385508e-05	4.784180e-05
$10^{-4}$	1.914917e-03	1.989586e-04	2.168427e-05	5.373976e-06

Таблица 22: Ошибка решения для  $G$  при  $p(\rho) = \rho^{1.4}$  и  $\mu = 10^{-1}$

$\tau \backslash h$	$10^{-1}$	$10^{-2}$	$10^{-3}$	$10^{-4}$
$10^{-1}$	1.966651e-02	8.866155e+00	1.308827e+01	5.831663e+00
$10^{-2}$	1.989438e-03	4.833653e-04	4.293834e-04	4.295738e-04
$10^{-3}$	1.840562e-03	1.925954e-04	4.608118e-05	4.434512e-05
$10^{-4}$	1.838843e-03	1.910288e-04	1.925362e-05	4.595026e-06

Таблица 23: Ошибка решения для  $G$  при  $p(\rho) = \rho^{1.4}$  и  $\mu = 10^{-2}$

$\tau \backslash h$	$10^{-1}$	$10^{-2}$	$10^{-3}$	$10^{-4}$
$10^{-1}$	1.960433e-02	8.165685e+01	2.843338e+02	7.181079e+01
$10^{-2}$	1.966511e-03	4.759071e-04	1.400547e+02	5.210761e+01
$10^{-3}$	1.828685e-03	1.897439e-04	4.530005e-05	4.399657e-05
$10^{-4}$	1.828448e-03	1.905255e-04	1.897911e-05	4.516714e-06

Таблица 24: Ошибка решения для  $G$  при  $p(\rho) = \rho^{1.4}$  и  $\mu = 10^{-3}$

#### 4.2.3 Вывод

Анализируя таблицы ошибок, можно сделать вывод, что разностная схема (4) сходится в зависимости от параметров  $\mu$  и  $C$ , причем сходимость имеет место с порядком  $\tau + h$ . При больших  $\mu$  и малых  $C$  сходимость безусловная; при уменьшении  $\mu$  или увеличении  $C$  появляется условие сходимости  $\tau \leq h$ .

Нетрудно видеть, что если взять

$$(\tau, h) \in \{(10^{-2}, 10^{-1})\} \cup \{10^{-3}, 10^{-4}\} \times \{10^{-1}, 10^{-2}\} \cup \{(10^{-4}, 10^{-3})\},$$

то для

$$(\mu, C) \in \{10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3}\} \times \{10^0, 10^1, 10^2\}$$

имеет место сходимость разностной схемы. В дальнейших расчетах используется преимущественно  $(\tau, h) = (10^{-4}, 10^{-2})$ , так как для данной пары время проведения численных экспериментов является не сильно большим, а результат достаточно наглядным.

## 5 Тесты с негладкими начальными данными

### 5.1 Постановка задачи

Пусть  $\Omega_x = [0; 10]$ . Для системы (1) зададим две задачи, начальные и граничные условия которых определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} \rho(0, x) &= \begin{cases} 2, & \text{если } x \in [4.5; 5.5]; \\ 1, & \text{иначе;} \end{cases} \\ u(0, x) &= 0; \\ u(t, 0) &= u(t, 10) = 0; \end{aligned} \quad (13)$$

и

$$\begin{aligned} \rho(0, x) &= 1; \\ u(0, x) &= \begin{cases} 1, & \text{если } x \in [4.5; 5.5]; \\ 0, & \text{иначе;} \end{cases} \\ u(t, 0) &= u(t, 10) = 0. \end{aligned} \quad (14)$$

Положим также  $f \equiv 0$  и  $f_0 \equiv 0$ .

Суть эксперимента состоит в решении задач (13) и (14), причем вычисления следует проводить до момента времени  $T = N_0 \tau$ , для которого

$$\|V^{N_0}\| = \max_{0 \leq m \leq M} |V_m^{N_0}| \leq \varepsilon,$$

где величина  $\varepsilon$  является достаточно малой и определяется опытным путем.

Кроме того, для проверки консервативности системы определим массу газа на шаге  $n$

$$m(n) = h \sum_{m=0}^M H_m^n = h \sum_{m=0}^M \exp(G_m^n)$$

и введем функцию

$$\Delta_m(n) = \frac{m(n) - m(0)}{m(0)}.$$

### 5.2 Численные эксперименты

Как было отмечено выше, для сходимости схемы необходимо брать малые значения  $\tau$  и  $h$ . При этом сильно возрастает время работы программы. Можно также заметить, что при уменьшении  $\mu$  или увеличении  $C$  падает скорость сходимости алгоритма, то есть увеличивается время его работы. В связи с этим численные эксперименты не проводились (за исключением таблицы времен стабилизации) для  $\mu = 10^{-3}$  или  $C = 10^2$ . Далее предполагается, что

$$(\mu, C) \in \{10^{-1}, 10^{-2}\} \times \{10^0, 10^1\}.$$

## 5.3 Численные эксперименты первой задачи

### 5.3.1 Точность решения

Зафиксируем  $\varepsilon = 10^{-3}$ ,  $\tau = 10^{-4}$  и  $h = 10^{-2}$ . Далее приведены таблицы значений  $\|V^n\|$  для  $n = N_0/4$ ,  $N_0/2$ ,  $3N_0/4$ ,  $N_0$  (в каждой ячейке таблицы приведены значения для сеток  $\Omega_{\tau,h}$ ,  $\Omega_{\tau,h/2}$ ,  $\Omega_{\tau/2,h}$  и, соответственно,  $\Omega_{\tau/2,h/2}$ ).

$\mu$	$N_0\tau$	$n = N_0/4$	$n = N_0/2$	$n = 3N_0/4$	$n = N_0$
$10^{-1}$	129.2153	9.434593e-02	1.754027e-02	2.665647e-02	9.995244e-04
	129.2078	9.449293e-02	1.781728e-02	2.673922e-02	9.996498e-04
	129.2151	9.435466e-02	1.754499e-02	2.665866e-02	9.996876e-04
	129.2076	9.450191e-02	1.782197e-02	2.674145e-02	9.998475e-04
$10^{-2}$	863.274	3.614491e-02	1.275980e-02	4.850039e-03	9.997969e-04
	868.2174	2.601592e-02	9.098794e-03	7.917029e-03	9.999106e-04
	863.27245	3.614744e-02	1.253102e-02	4.693891e-03	9.999850e-04
	868.2158	2.554531e-02	9.106796e-03	8.004507e-03	9.999097e-04

Таблица 25: Нормы скорости при  $p(\rho) = 10^0\rho$

$\mu$	$N_0\tau$	$n = N_0/4$	$n = N_0/2$	$n = 3N_0/4$	$n = N_0$
$10^{-1}$	148.1726	1.336338e-01	3.295760e-02	2.943716e-02	9.988611e-04
	148.1645	1.331850e-01	3.382698e-02	2.951248e-02	9.986479e-04
	148.172	1.254997e-01	3.300836e-02	2.874000e-02	9.993030e-04
	148.16385	1.250178e-01	3.387948e-02	2.875903e-02	9.997959e-04
$10^{-2}$	856.4441	2.704332e-02	8.862064e-03	8.313331e-03	9.997042e-04
	862.7344	2.551499e-02	9.841511e-03	7.756439e-03	9.997702e-04
	856.4407	2.695174e-02	8.914165e-03	8.300622e-03	9.999596e-04
	862.73015	2.686582e-02	9.178056e-03	8.053379e-03	9.999258e-04

Таблица 26: Нормы скорости при  $p(\rho) = 10^1\rho$

$\mu$	$N_0\tau$	$n = N_0/4$	$n = N_0/2$	$n = 3N_0/4$	$n = N_0$
$10^{-1}$	135.943	1.004730e-01	4.522973e-02	1.400106e-02	9.994277e-04
	135.9269	1.011702e-01	4.522698e-02	1.384687e-02	9.993292e-04
	135.94225	9.938215e-02	4.594758e-02	1.470446e-02	9.999856e-04
	135.92615	1.000926e-01	4.596491e-02	1.455561e-02	9.998351e-04
$10^{-2}$	812.9889	2.428766e-02	8.532164e-03	3.213316e-03	9.999602e-04
	816.2835	3.273101e-02	1.132980e-02	4.268854e-03	9.998602e-04
	812.96925	2.482653e-02	8.584610e-03	3.425508e-03	9.999472e-04
	816.25945	3.246923e-02	1.102674e-02	4.209350e-03	9.999508e-04

Таблица 27: Нормы скорости при  $p(\rho) = \rho^{1.4}$

Приведены также и графики.

Примечание. Значения, которые больше 0.1, были заменены на 0.1.

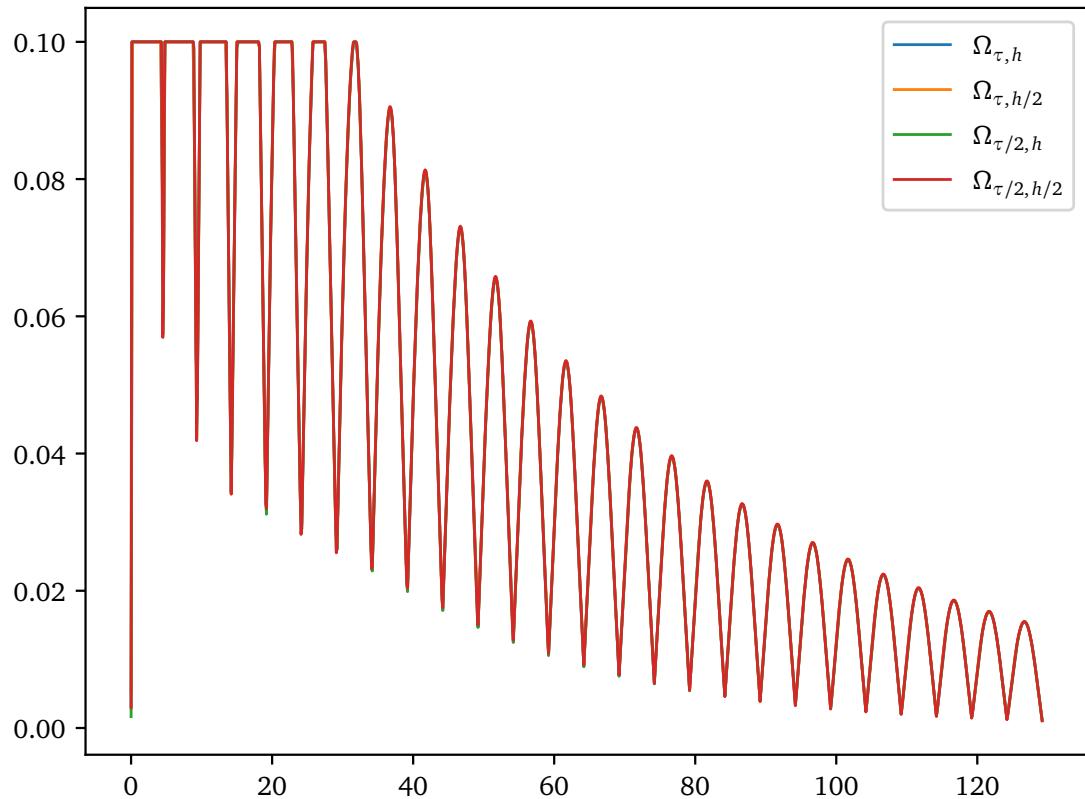


Рис. 1: Графики функций  $\|\mathbf{V}\|$  для  $p(\rho) = 10^0 \rho$  и  $\mu = 10^{-1}$

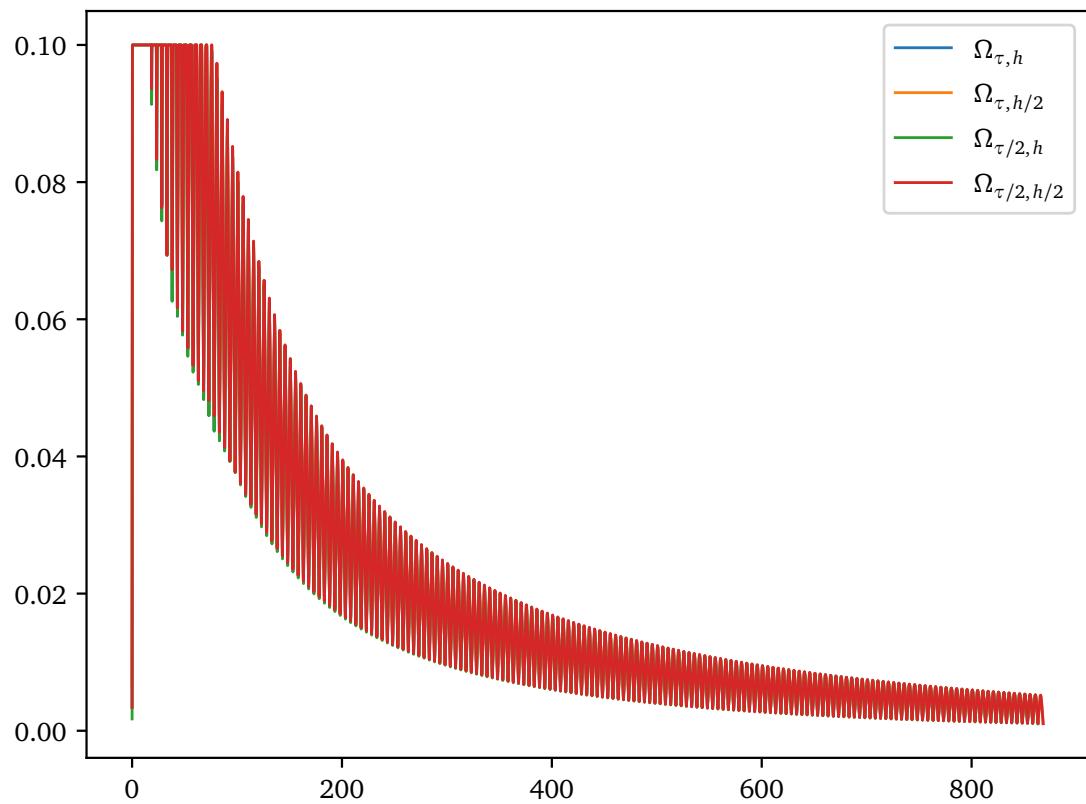


Рис. 2: Графики функций  $\|V\|$  для  $p(\rho) = 10^0\rho$  и  $\mu = 10^{-2}$

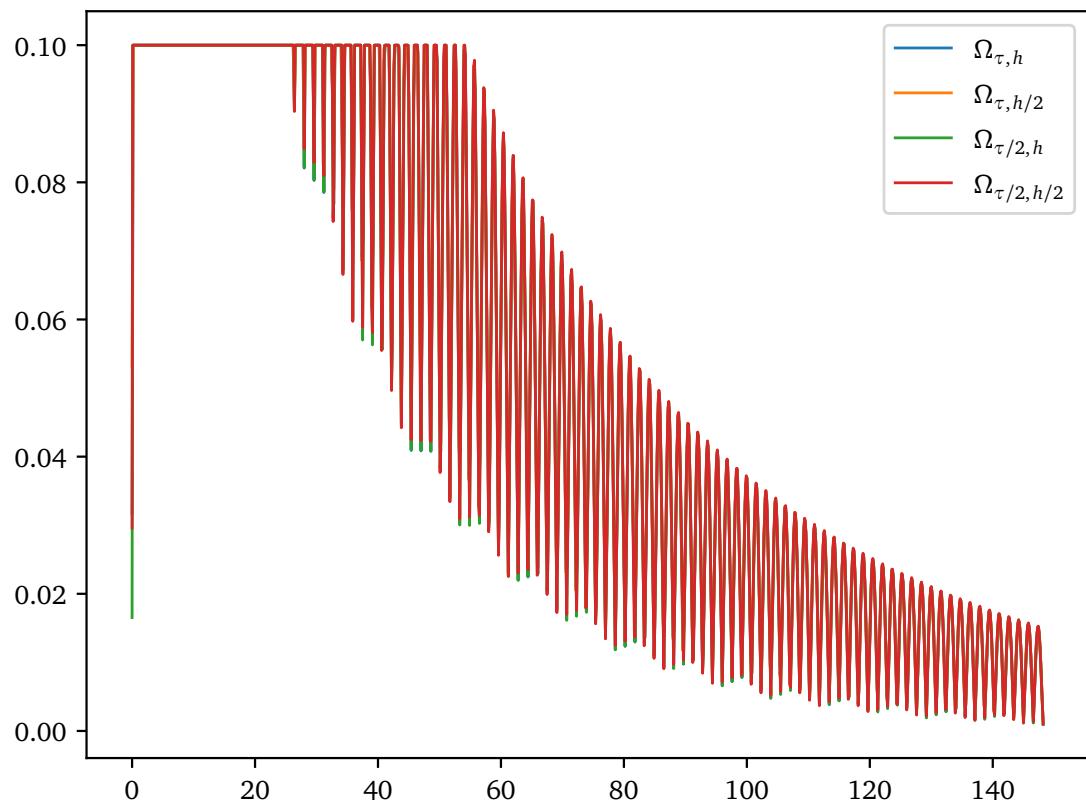


Рис. 3: Графики функций  $\|V\|$  для  $p(\rho) = 10^1\rho$  и  $\mu = 10^{-1}$

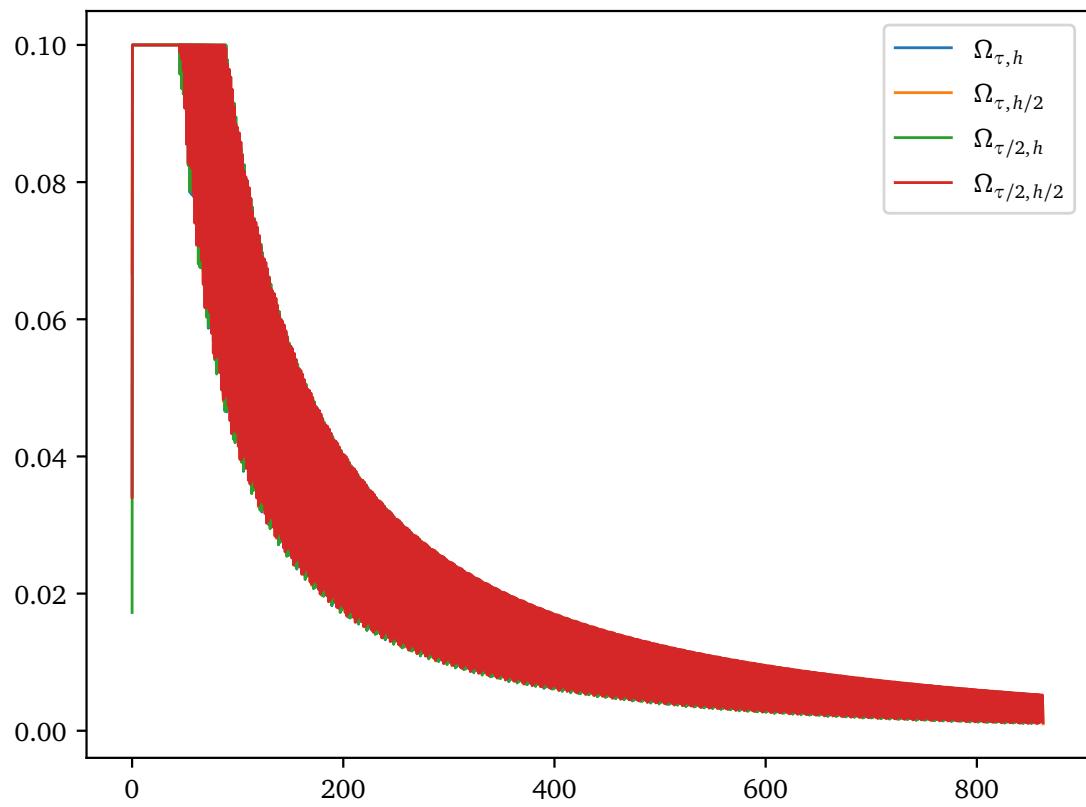


Рис. 4: Графики функций  $\|V\|$  для  $p(\rho) = 10^1\rho$  и  $\mu = 10^{-2}$

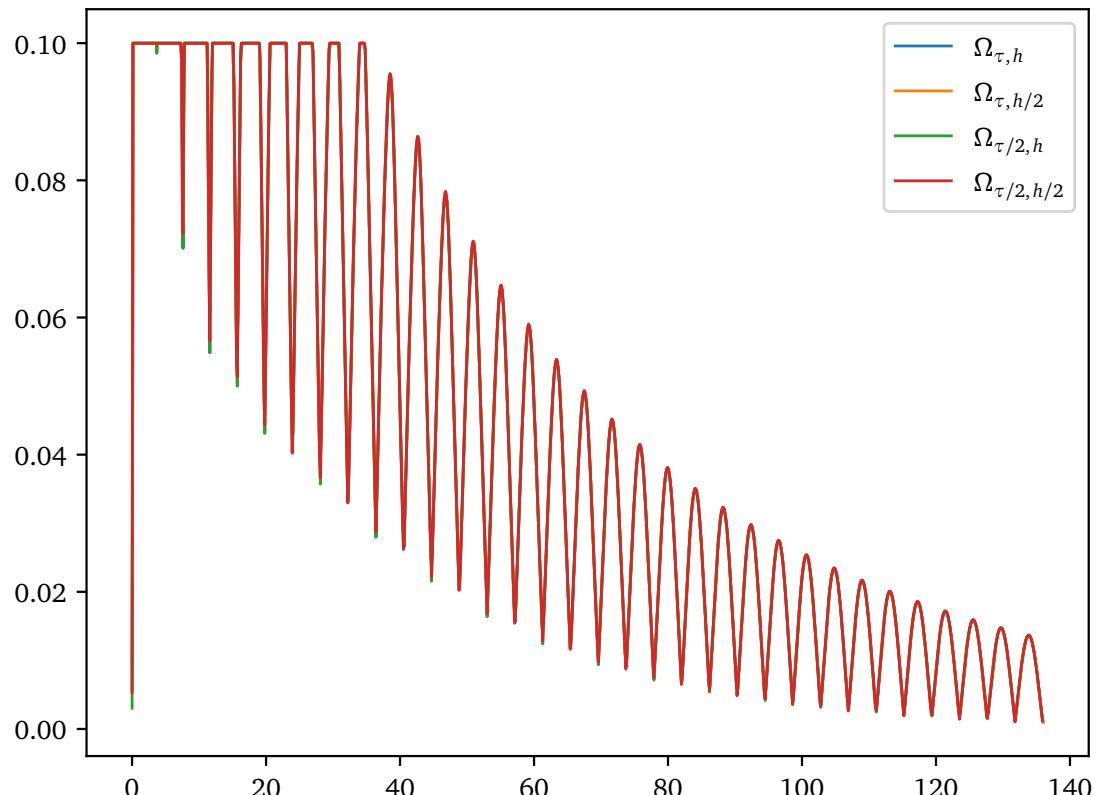


Рис. 5: Графики функций  $\|V\|$  для  $p(\rho) = \rho^{1.4}$  и  $\mu = 10^{-1}$

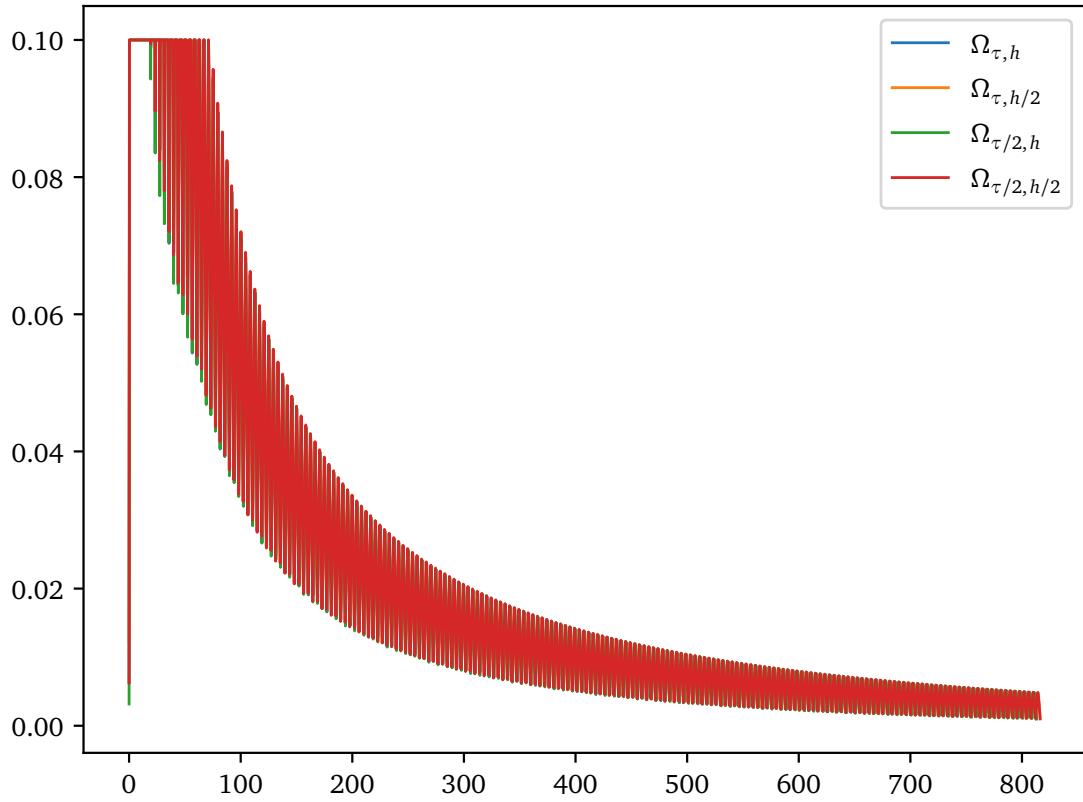


Рис. 6: Графики функций  $\|V\|$  для  $p(\rho) = \rho^{1.4}$  и  $\mu = 10^{-2}$

### 5.3.2 Вывод

При достаточно мелких сетках решение перестает зависеть от этих сеток.

### 5.3.3 Консервативность системы

Зафиксируем  $\varepsilon = 10^{-3}$ ,  $\tau = 10^{-4}$  и  $h = 10^{-2}$ . Далее приведены таблицы значений  $\Delta_m(n)$  для  $n = N_0/5$ ,  $2N_0/5$ ,  $3N_0/5$ ,  $4N_0/5$ ,  $N_0$  (в каждой ячейке таблицы приведены значения для сеток  $\Omega_{\tau,h}$ ,  $\Omega_{\tau,h/2}$ ,  $\Omega_{\tau/2,h}$  и, соответственно,  $\Omega_{\tau/2,h/2}$ ).

$\mu$	$n = N_0/5$	$n = 2N_0/5$	$n = 3N_0/5$	$n = 4N_0/5$	$n = N_0$
$10^{-1}$	-1.075927e-03	-1.146547e-03	-1.153627e-03	-1.117894e-03	-1.154876e-03
	-6.009946e-04	-6.366803e-04	-6.407338e-04	-6.227519e-04	-6.413875e-04
	-1.069306e-03	-1.136164e-03	-1.143889e-03	-1.107266e-03	-1.144230e-03
	-5.926204e-04	-6.260977e-04	-6.303804e-04	-6.119212e-04	-6.305366e-04
$10^{-2}$	-9.420322e-03	-9.460492e-03	-9.471468e-03	-9.465316e-03	-9.459049e-03
	-5.257195e-03	-5.277631e-03	-5.272367e-03	-5.272203e-03	-5.276177e-03
	-9.344364e-03	-9.383098e-03	-9.394092e-03	-9.387700e-03	-9.381425e-03
	-5.167583e-03	-5.186790e-03	-5.180975e-03	-5.181158e-03	-5.185111e-03

Таблица 28: Разность масс при  $p(\rho) = 10^0\rho$

$\mu$	$n = N_0/5$	$n = 2N_0/5$	$n = 3N_0/5$	$n = 4N_0/5$	$n = N_0$
$10^{-1}$	-3.390702e-03	-3.462987e-03	-3.452136e-03	-3.447684e-03	-3.457655e-03
	-1.884016e-03	-1.922391e-03	-1.916997e-03	-1.915084e-03	-1.920092e-03
	-3.295712e-03	-3.367325e-03	-3.354609e-03	-3.350647e-03	-3.360028e-03
	-1.783574e-03	-1.820503e-03	-1.813989e-03	-1.812277e-03	-1.816970e-03
$10^{-2}$	-2.348784e-02	-2.350099e-02	-2.350490e-02	-2.350674e-02	-2.350741e-02
	-1.498949e-02	-1.498912e-02	-1.499285e-02	-1.499112e-02	-1.499309e-02
	-2.308994e-02	-2.310219e-02	-2.310604e-02	-2.310788e-02	-2.310866e-02
	-1.436907e-02	-1.436738e-02	-1.437110e-02	-1.436921e-02	-1.437117e-02

Таблица 29: Разность масс при  $p(\rho) = 10^1\rho$

$\mu$	$n = N_0/5$	$n = 2N_0/5$	$n = 3N_0/5$	$n = 4N_0/5$	$n = N_0$
$10^{-1}$	-1.382683e-03	-1.500008e-03	-1.542476e-03	-1.523163e-03	-1.508343e-03
	-7.579809e-04	-8.183129e-04	-8.397406e-04	-8.298979e-04	-8.225949e-04
	-1.369308e-03	-1.482194e-03	-1.525273e-03	-1.507249e-03	-1.491602e-03
	-7.429697e-04	-8.007719e-04	-8.224091e-04	-8.131858e-04	-8.054541e-04
$10^{-2}$	-1.237383e-02	-1.236318e-02	-1.238019e-02	-1.237120e-02	-1.238051e-02
	-7.011336e-03	-7.004576e-03	-7.013895e-03	-7.010938e-03	-7.008285e-03
	-1.226372e-02	-1.225216e-02	-1.226920e-02	-1.226015e-02	-1.226943e-02
	-6.875751e-03	-6.868043e-03	-6.877023e-03	-6.874238e-03	-6.871546e-03

Таблица 30: Разность масс при  $p(\rho) = \rho^{1.4}$

Для сеток  $\Omega_{\tau, h}$ ,  $\Omega_{\tau, h/2}$ ,  $\Omega_{\tau/2, h}$ ,  $\Omega_{\tau/2, h/2}$  и  $\Omega_{\tau/16, h/2}$  приведены графики.

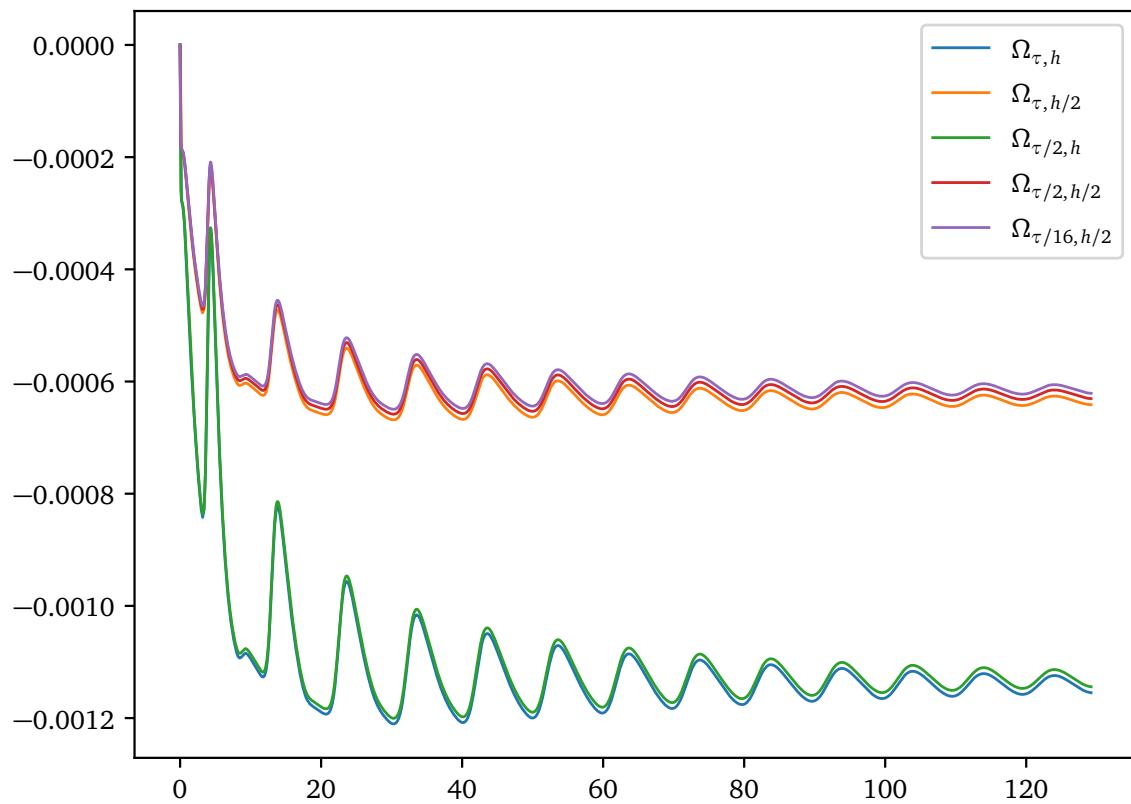


Рис. 7: Графики функций  $\Delta_m$  для  $p(\rho) = 10^0\rho$  и  $\mu = 10^{-1}$

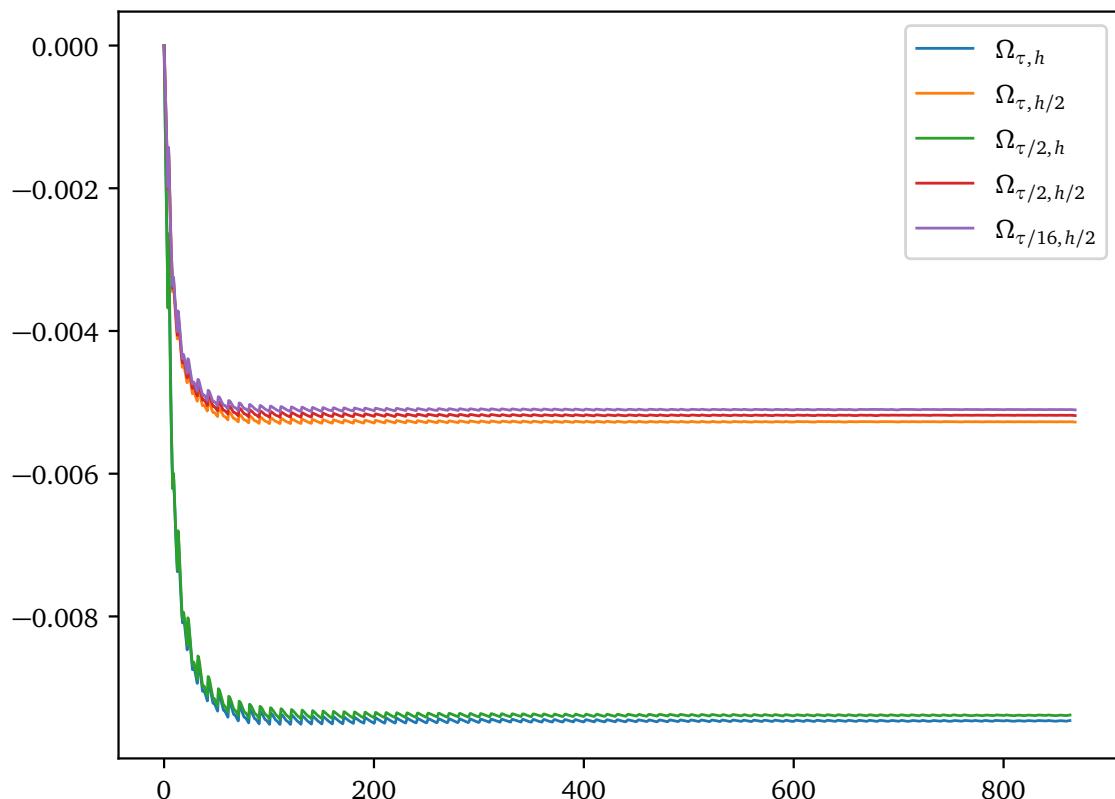


Рис. 8: Графики функций  $\Delta_m$  для  $p(\rho) = 10^0\rho$  и  $\mu = 10^{-2}$

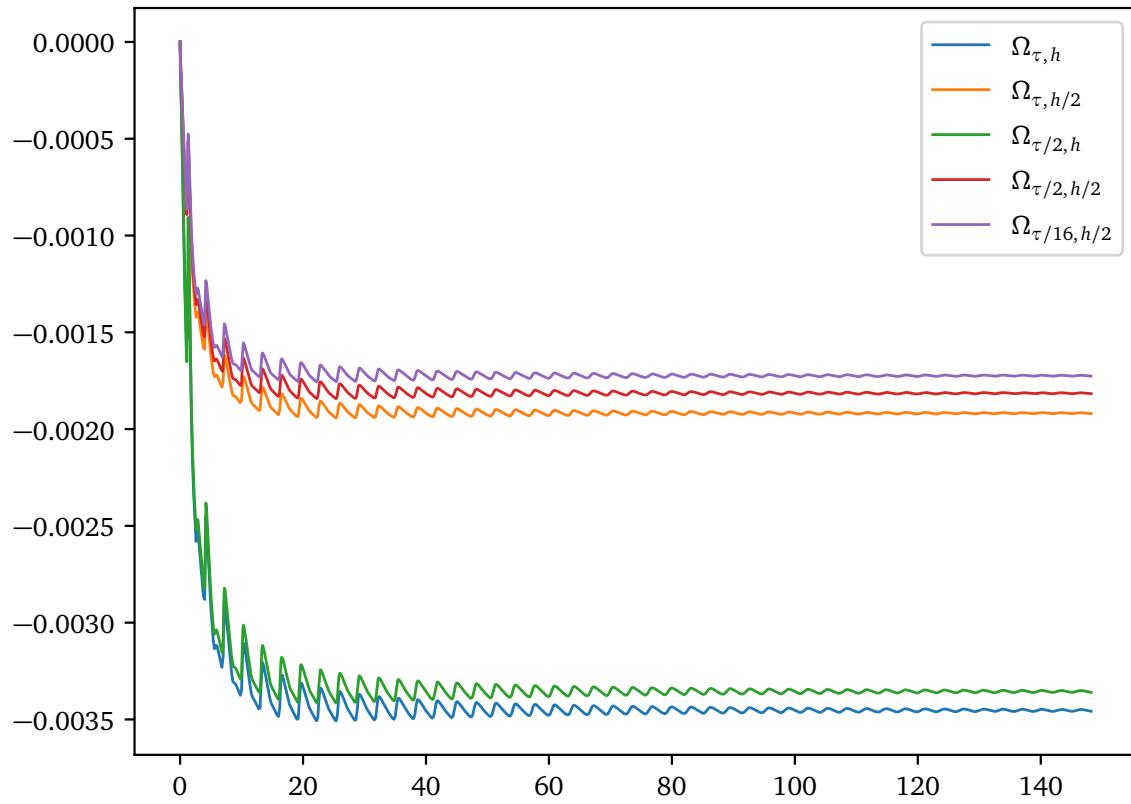


Рис. 9: Графики функций  $\Delta_m$  для  $p(\rho) = 10^1 \rho$  и  $\mu = 10^{-1}$

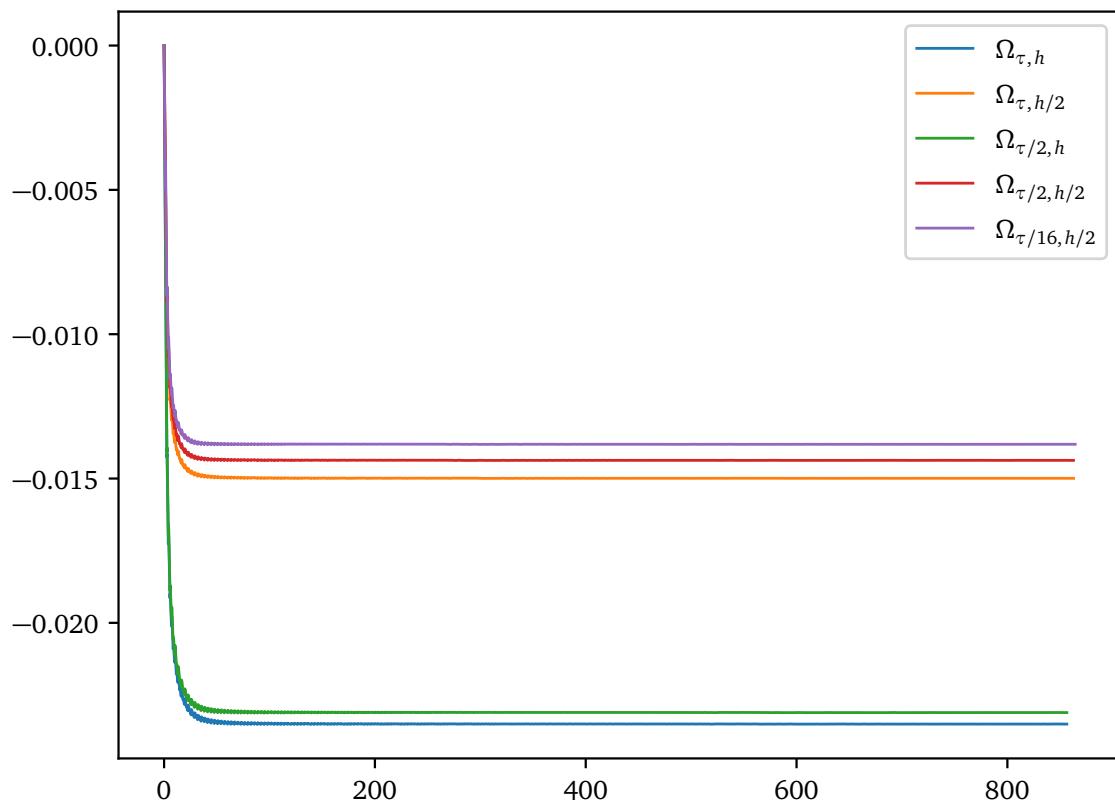


Рис. 10: Графики функций  $\Delta_m$  для  $p(\rho) = 10^1 \rho$  и  $\mu = 10^{-2}$

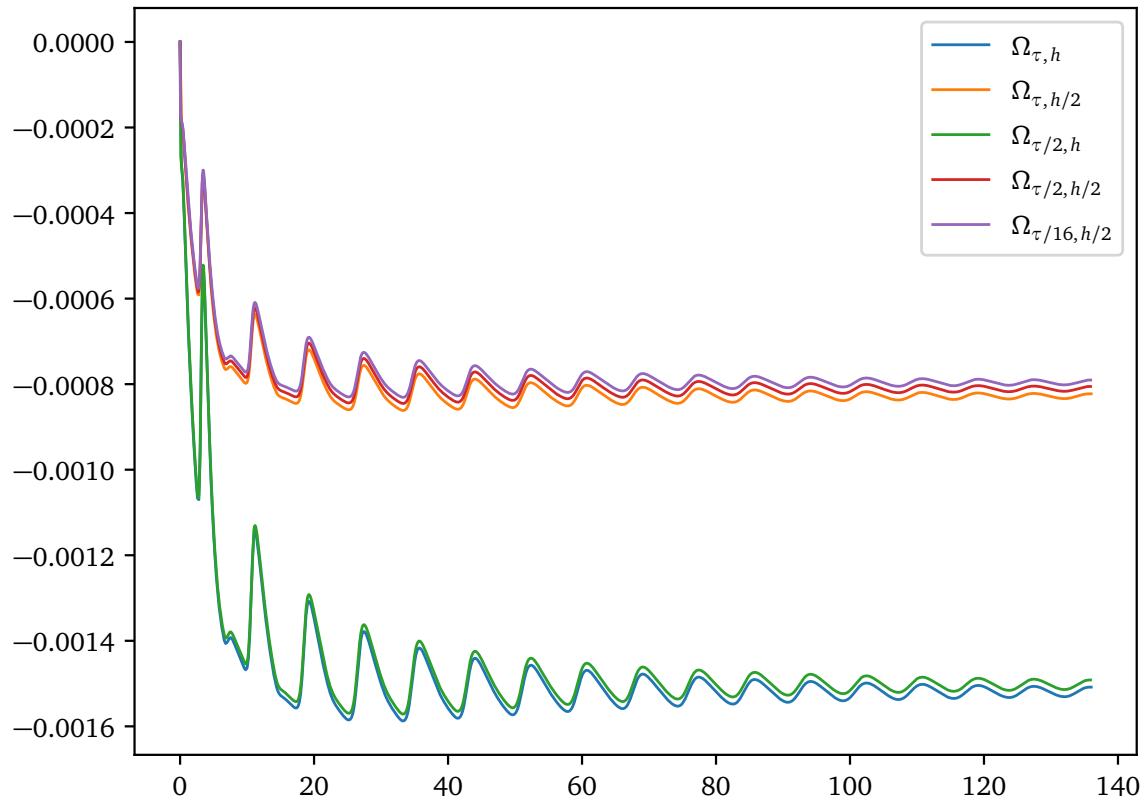


Рис. 11: Графики функций  $\Delta_m$  для  $p(\rho) = \rho^{1.4}$  и  $\mu = 10^{-1}$

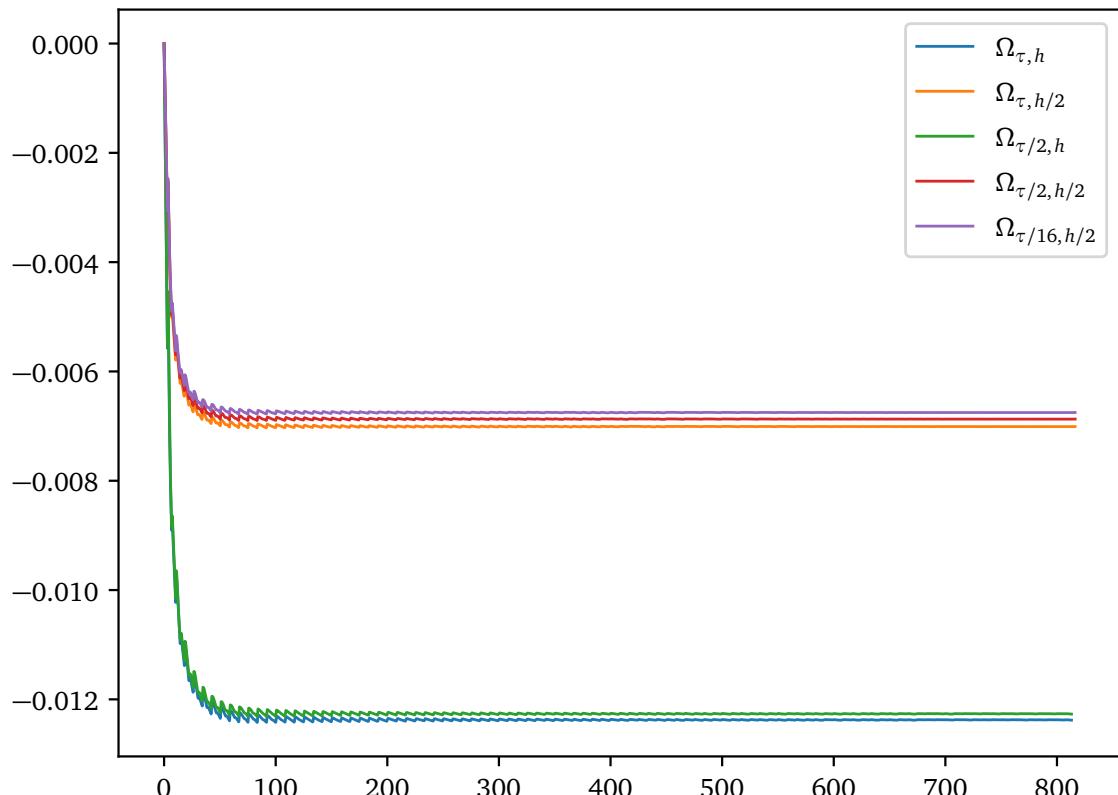


Рис. 12: Графики функций  $\Delta_m$  для  $p(\rho) = \rho^{1.4}$  и  $\mu = 10^{-2}$

### 5.3.4 Вывод

Потери массы составляют менее 2%. Из этого можно сделать вывод, что закон сохранения массы выполняется с «хорошой» точностью. При этом зависимость  $\Delta_m$  от  $\tau$  незначительна, а от  $h$  линейная.

### 5.3.5 Динамика процесса

Рассмотрим случай  $\mu = 0.1$ ,  $p(\rho) = 10^0 \rho$ ,  $\tau = h = 10^{-2}$ ,  $\varepsilon = 10^{-3}$ . Далее приведены срезы графиков  $V$  и  $G$  (динамика процесса) в разные моменты времени.

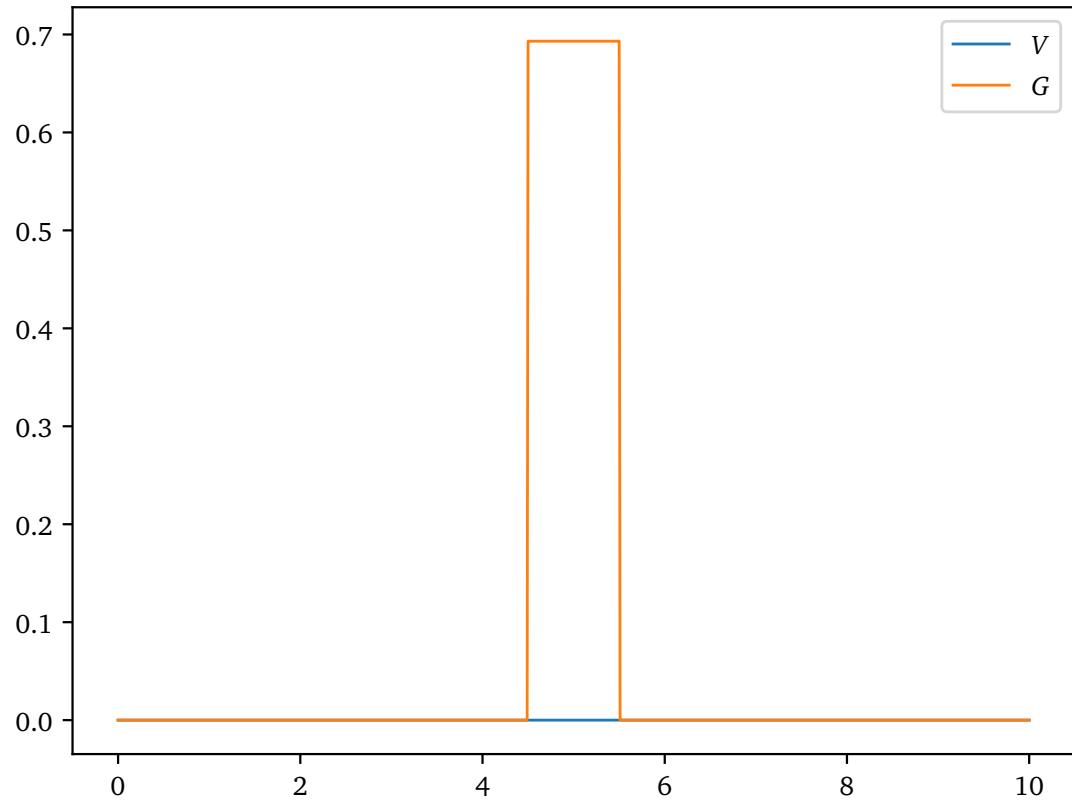


Рис. 13: Срез для  $t = 0.0$

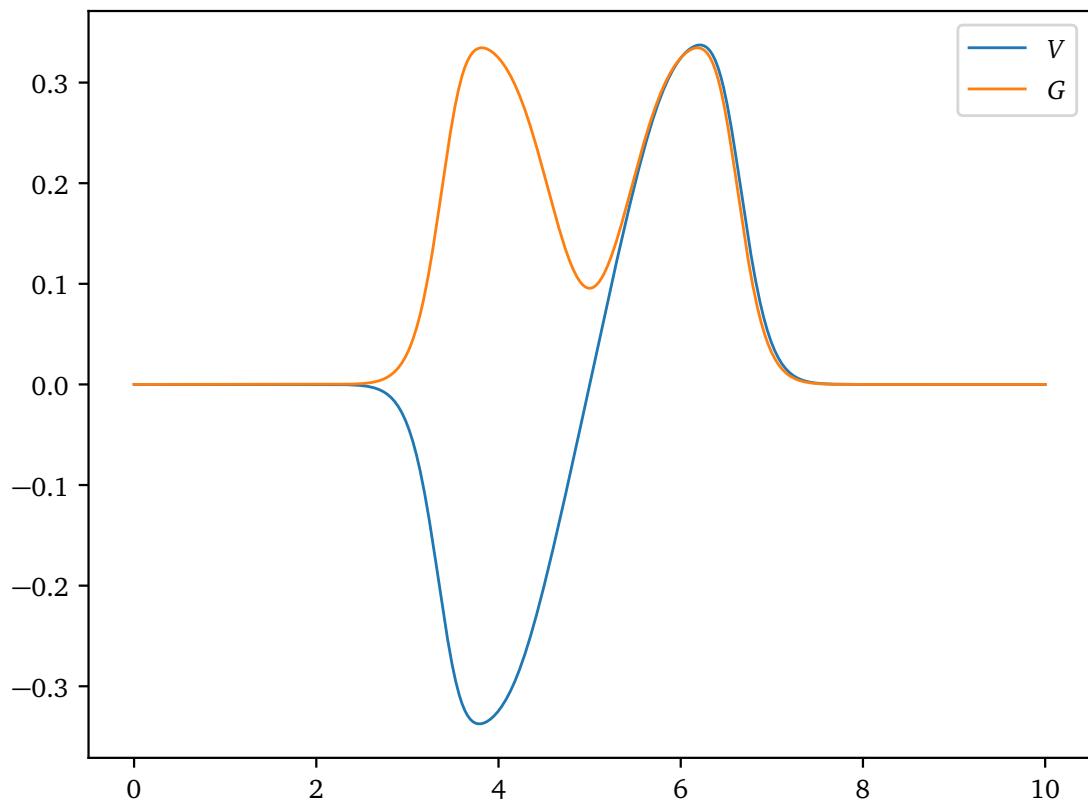


Рис. 14: Срез для  $t = 1.0$

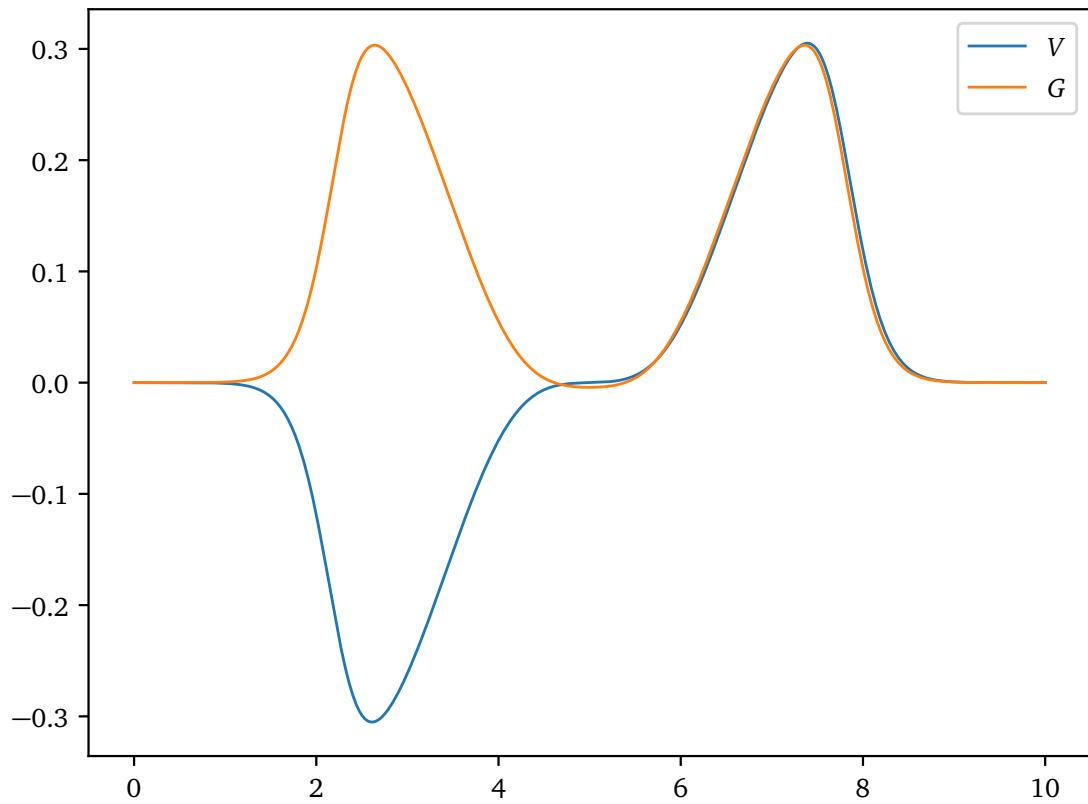


Рис. 15: Срез для  $t = 2.0$

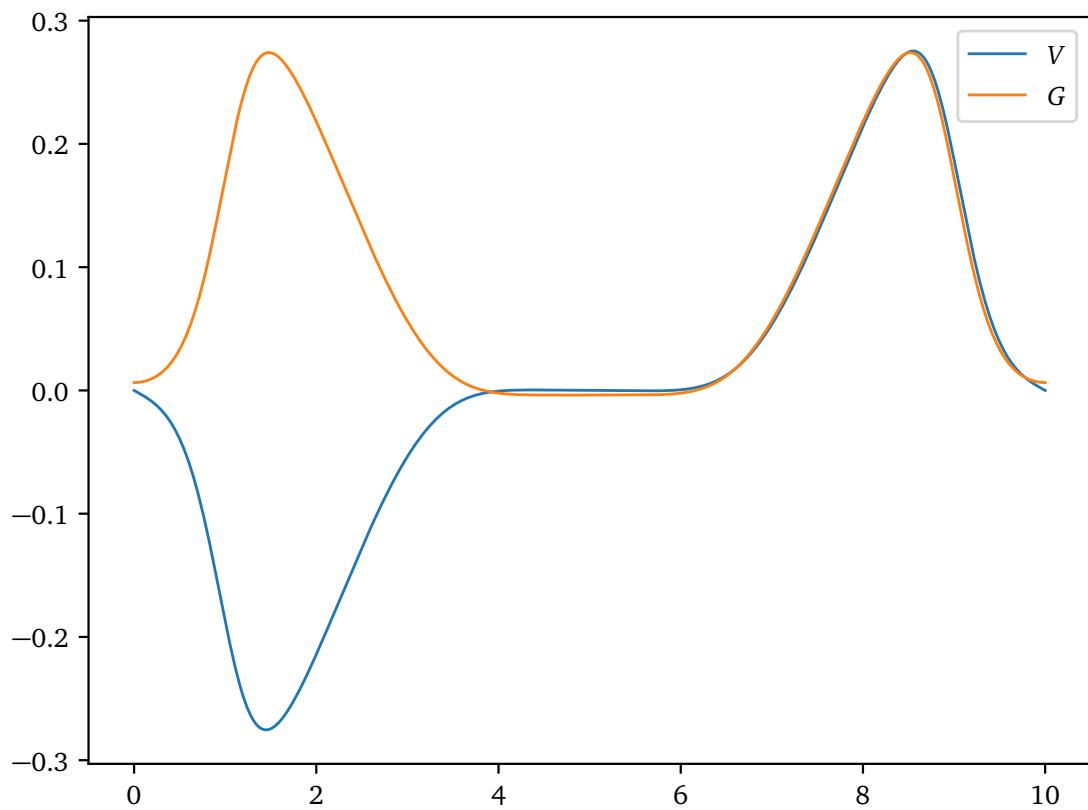


Рис. 16: Срез для  $t = 3.0$

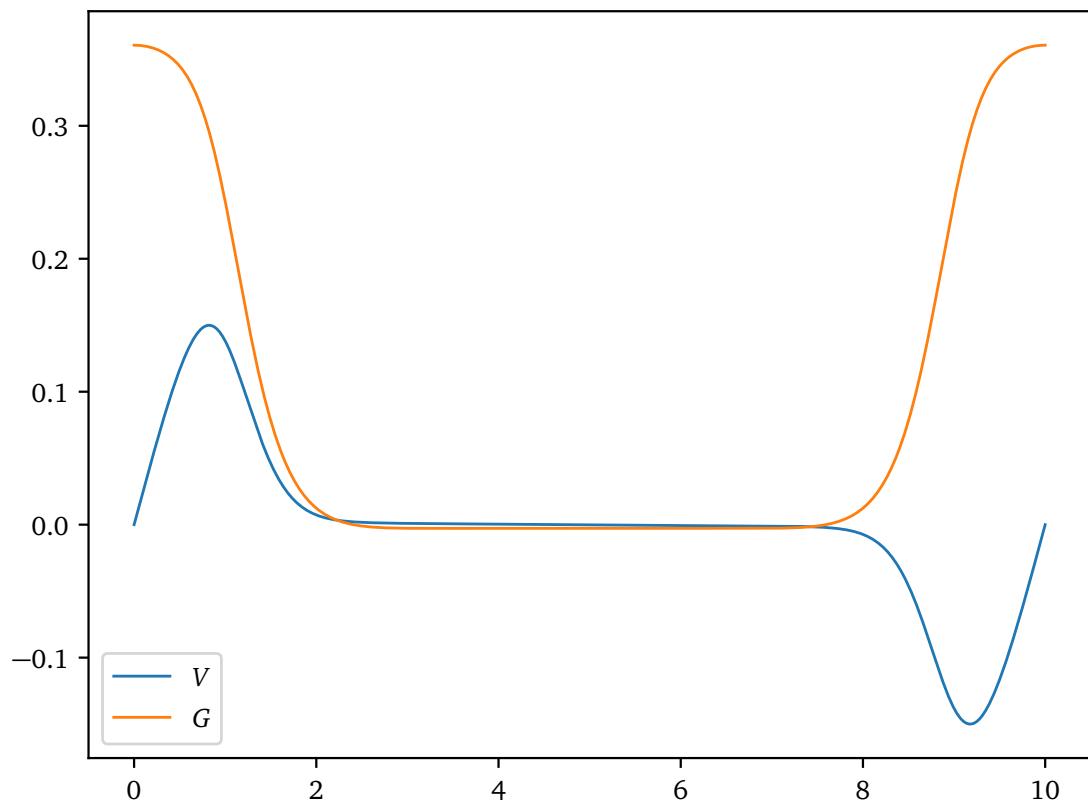


Рис. 17: Срез для  $t = 5.0$

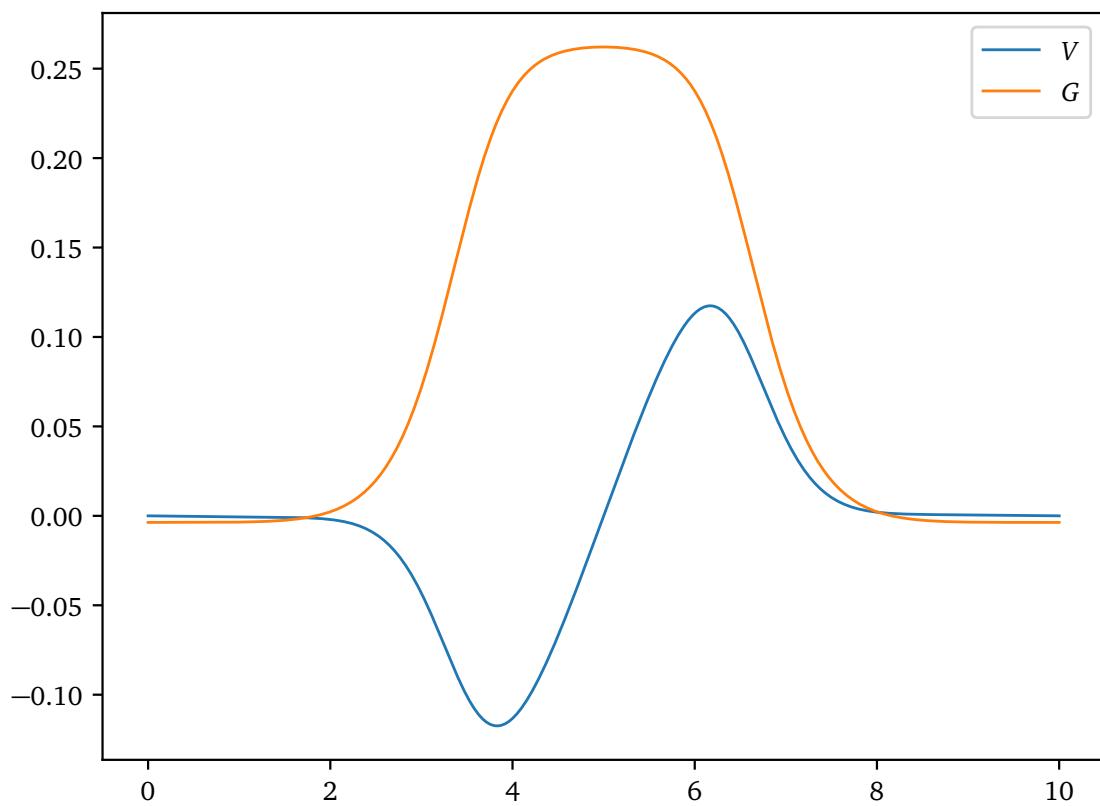


Рис. 18: Срез для  $t = 10.0$

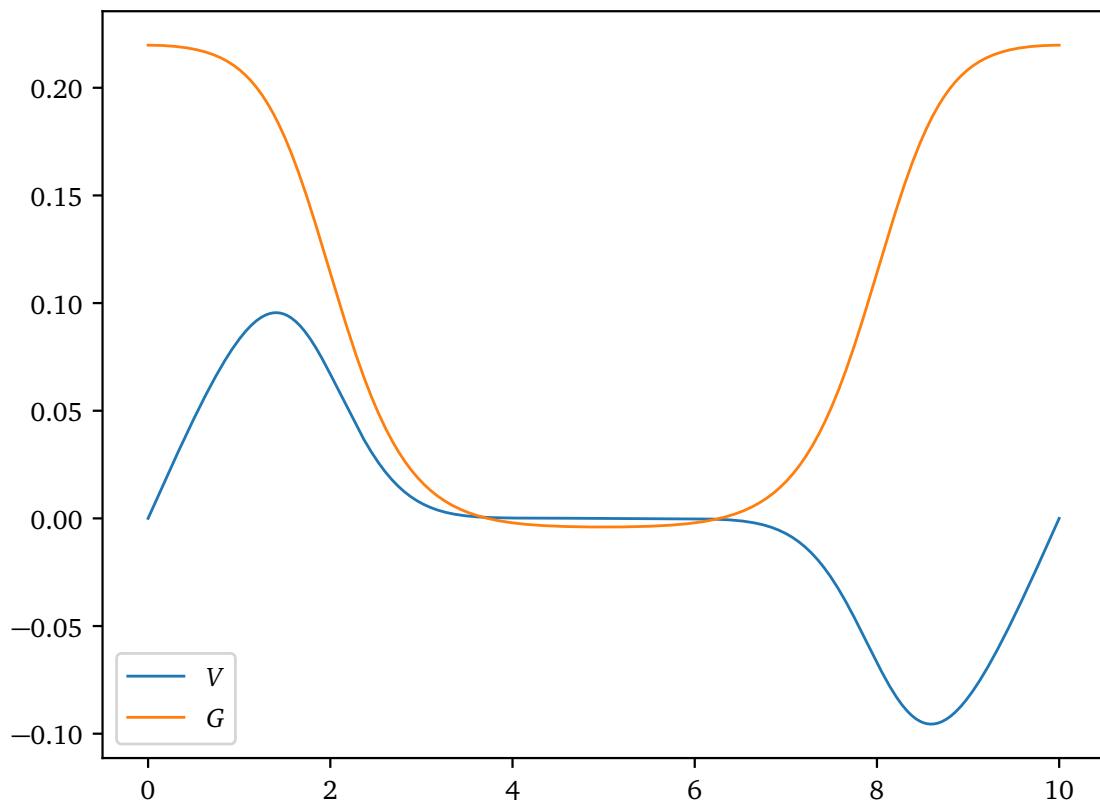


Рис. 19: Срез для  $t = 15.0$

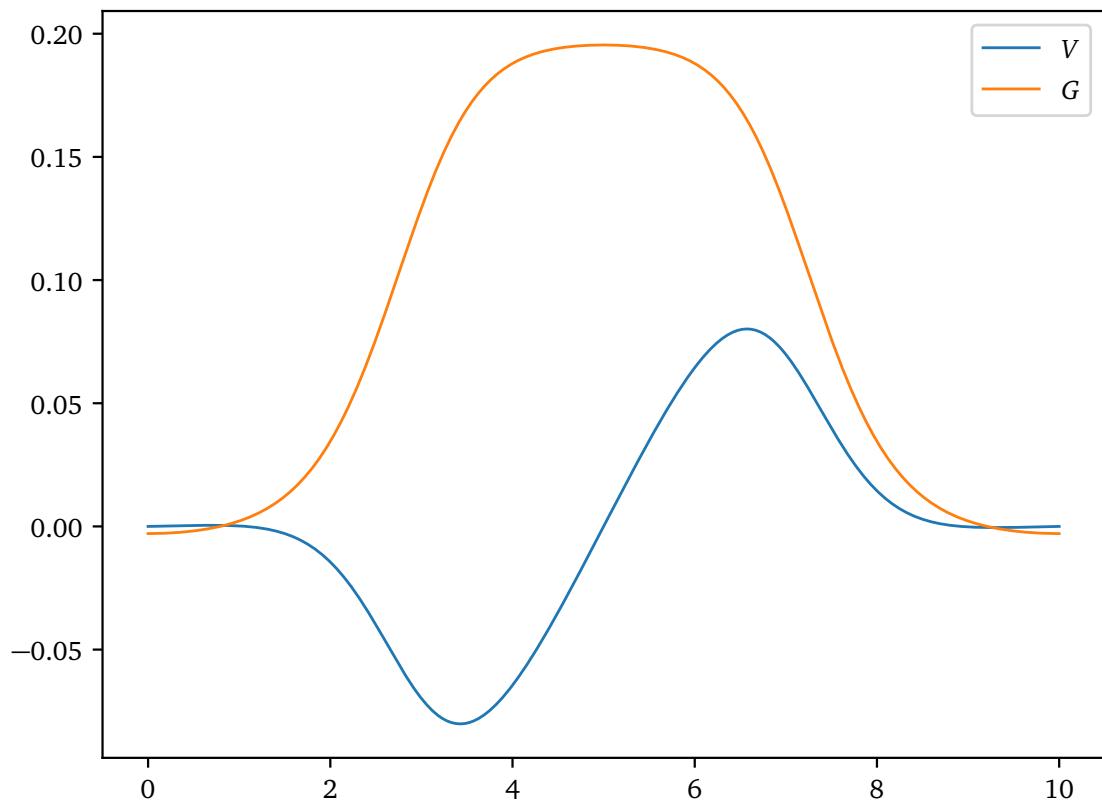


Рис. 20: Срез для  $t = 20.0$

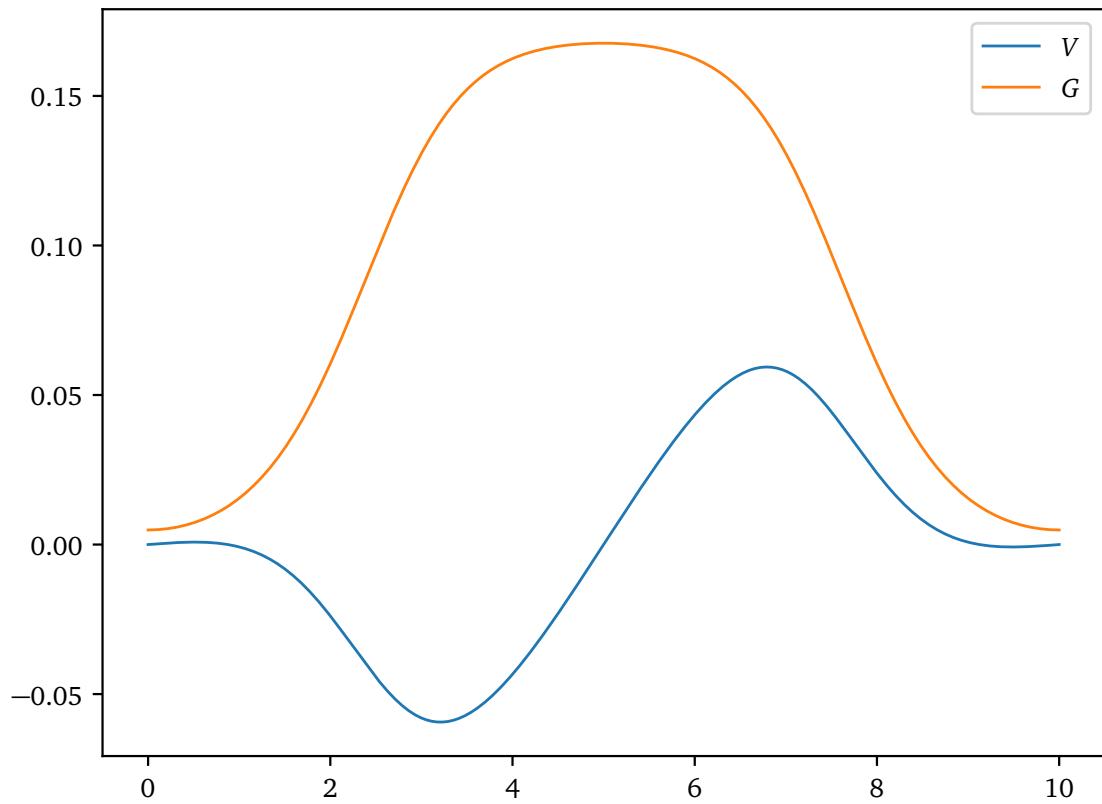


Рис. 21: Срез для  $t = 30.0$

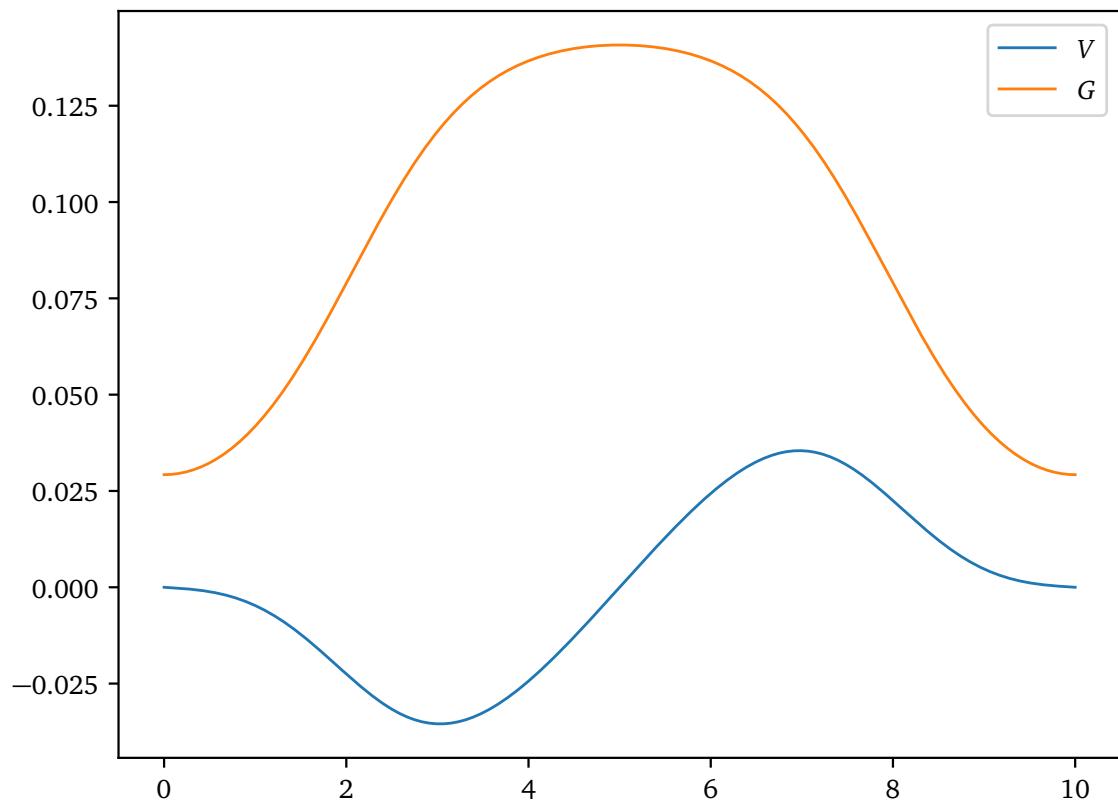


Рис. 22: Срез для  $t = 50.0$

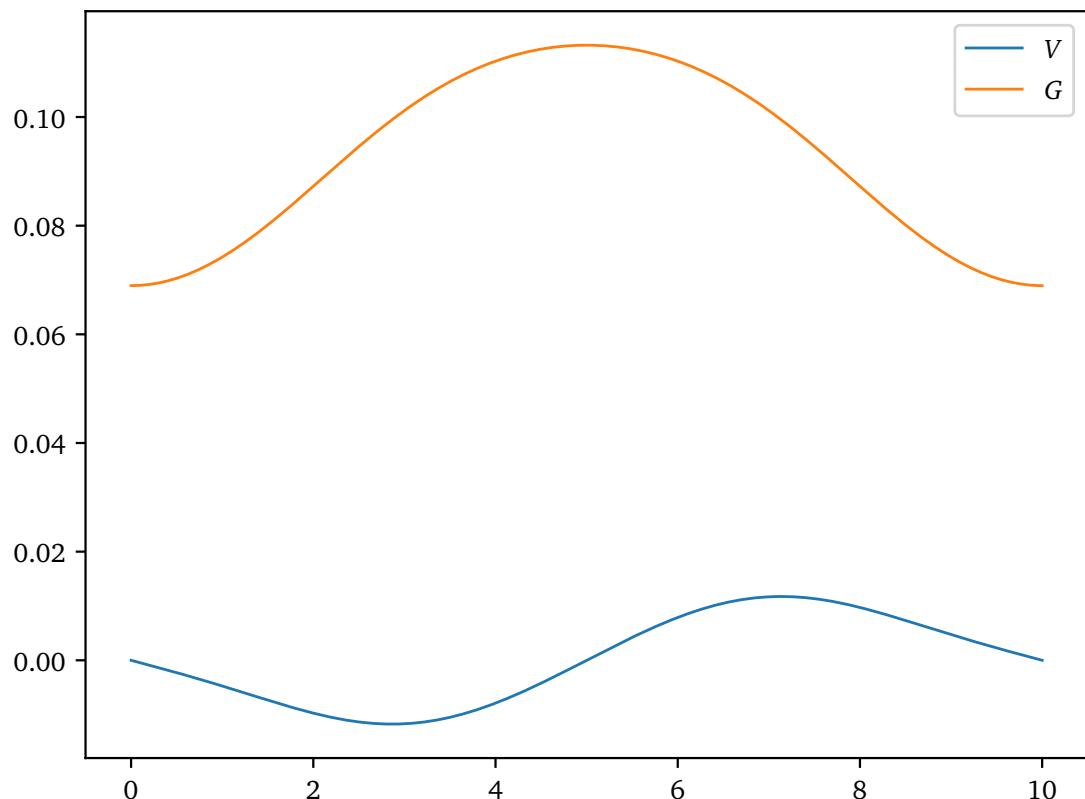


Рис. 23: Срез для  $t = 100.0$

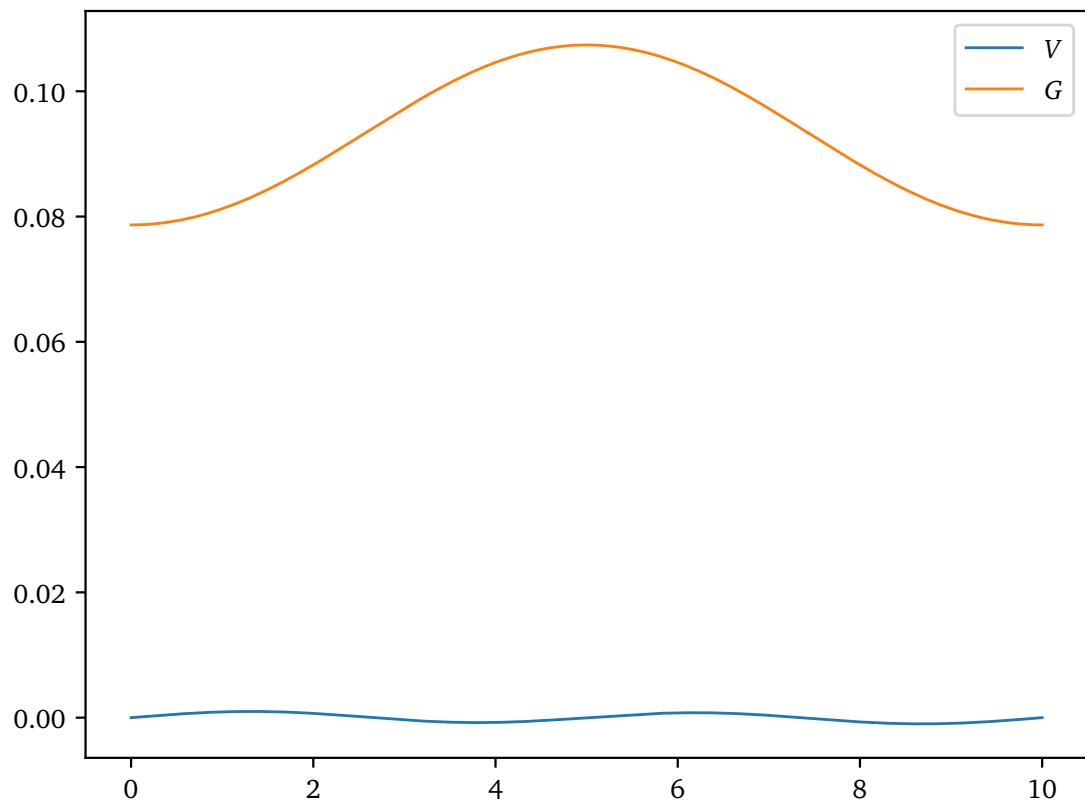


Рис. 24: Срез для  $t = 129.25$

Рассмотрим графики  $V$  и  $G$ .

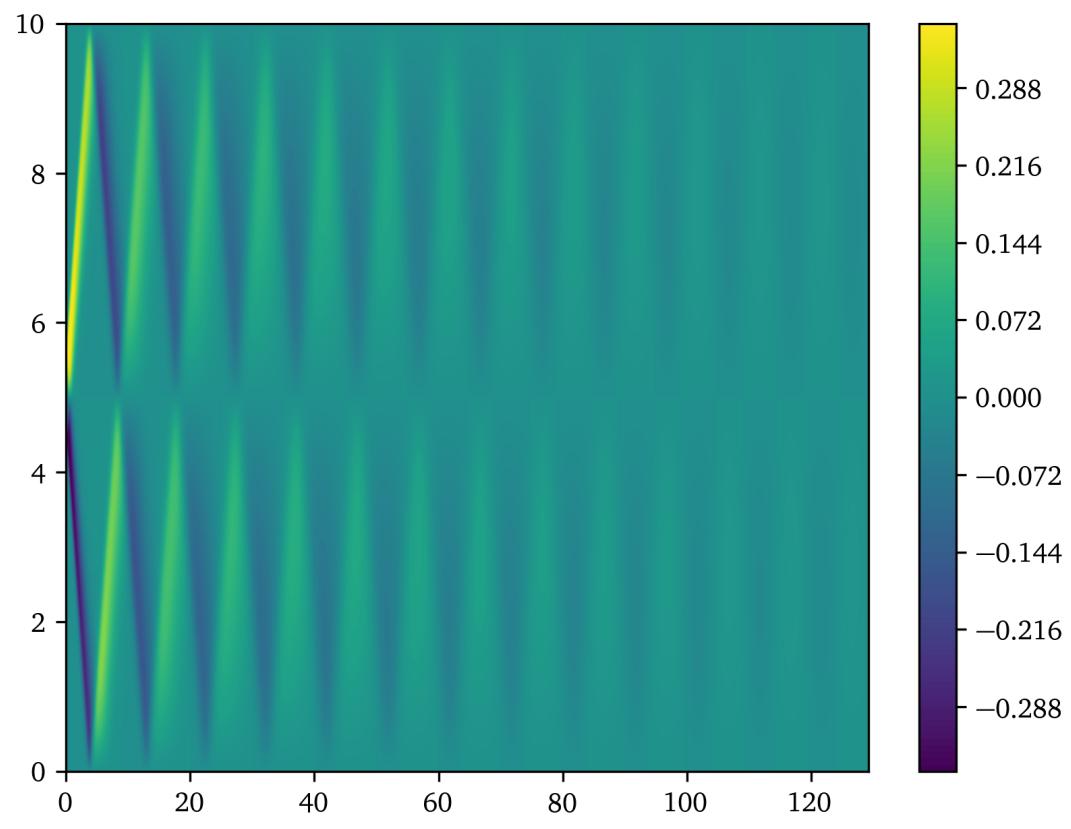


Рис. 25: График  $V$  для  $T = N_0\tau$  при  $p(\rho) = 10^0\rho$  и  $\mu = 10^{-1}$

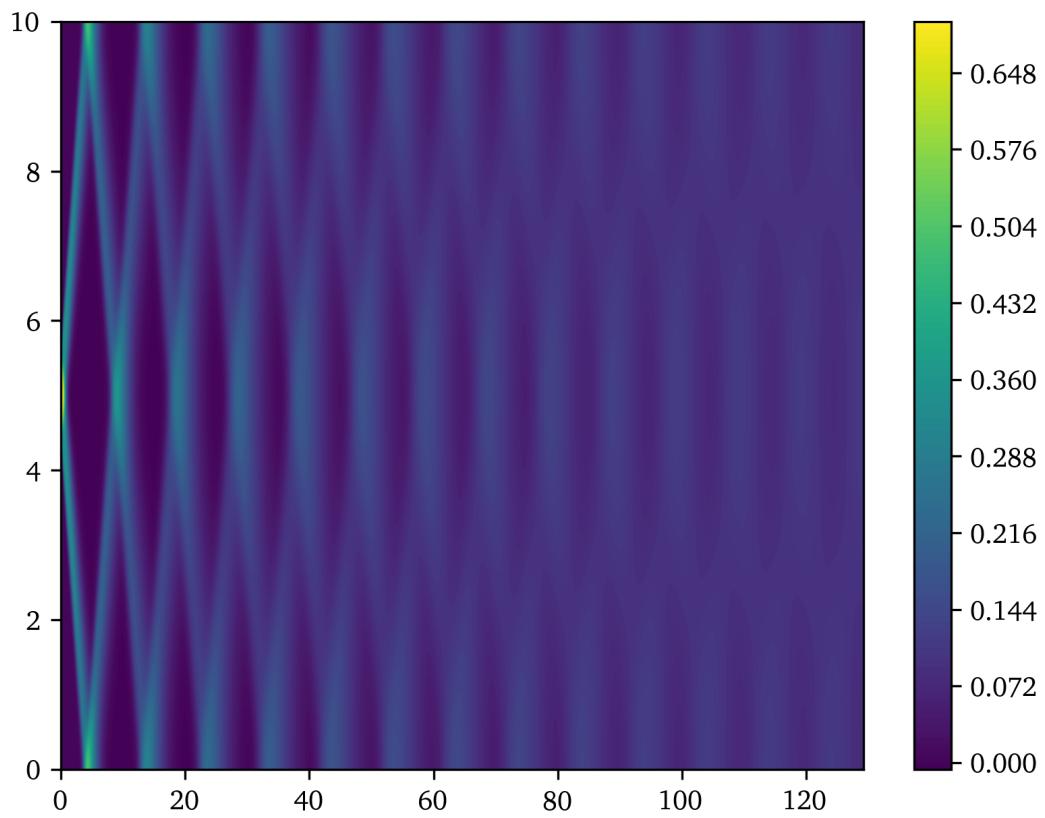


Рис. 26: График  $G$  для  $T = N_0\tau$  при  $p(\rho) = 10^0\rho$  и  $\mu = 10^{-1}$

Для изучения зависимости периода от параметров  $\mu$  и  $C$  рассмотрим графики  $V$  и  $G$  для  $T = 100.0$  при различных его значениях.

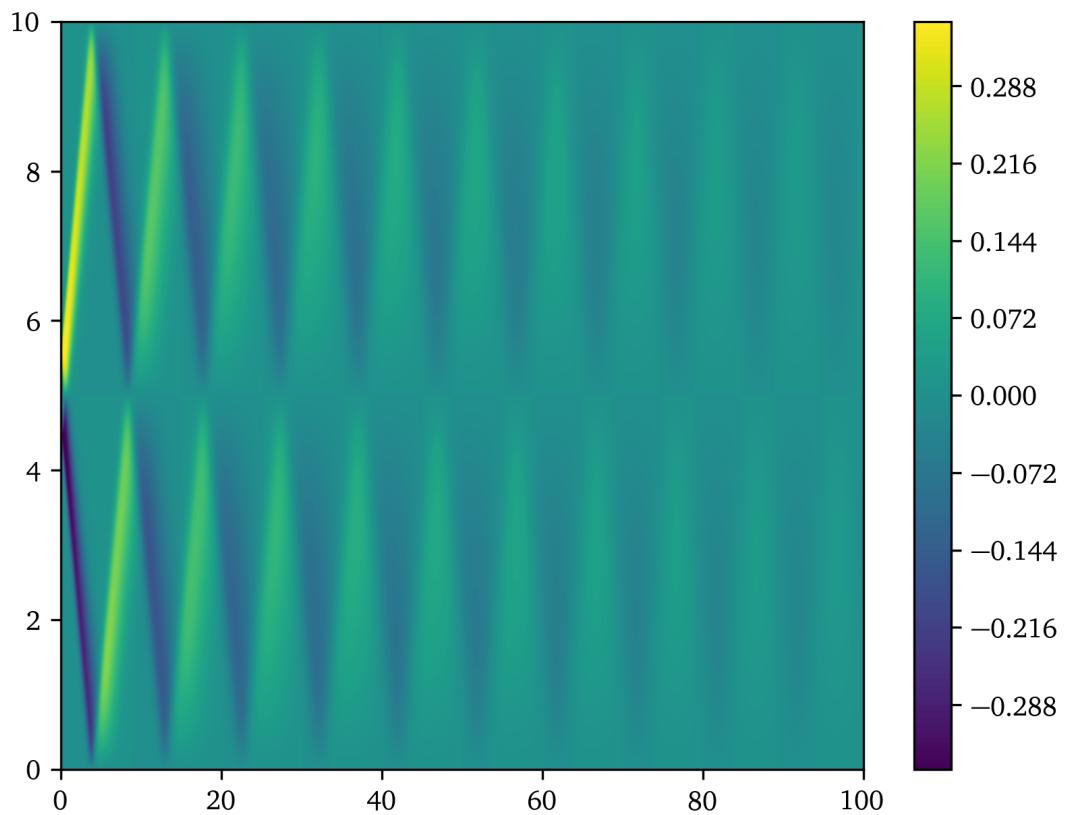


Рис. 27: График  $V$  для  $T = 100.0$  при  $p(\rho) = 10^0\rho$  и  $\mu = 10^{-1}$

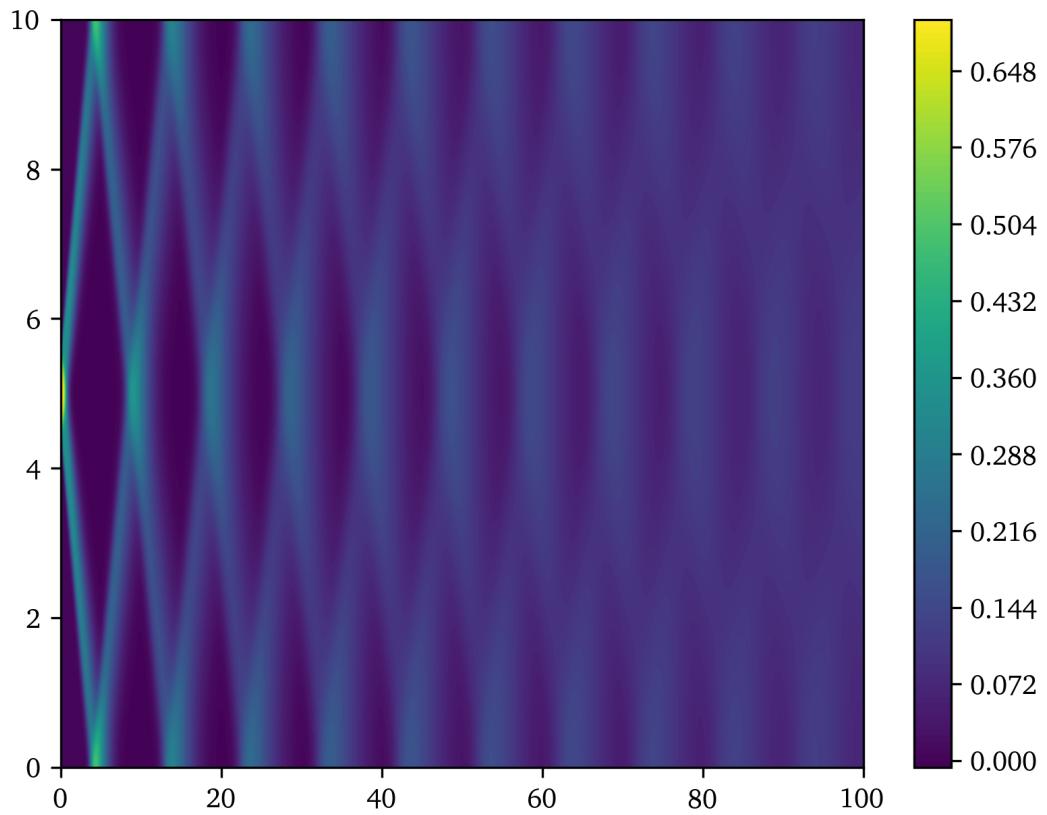


Рис. 28: График  $G$  для  $T = 100.0$  при  $p(\rho) = 10^0\rho$  и  $\mu = 10^{-1}$

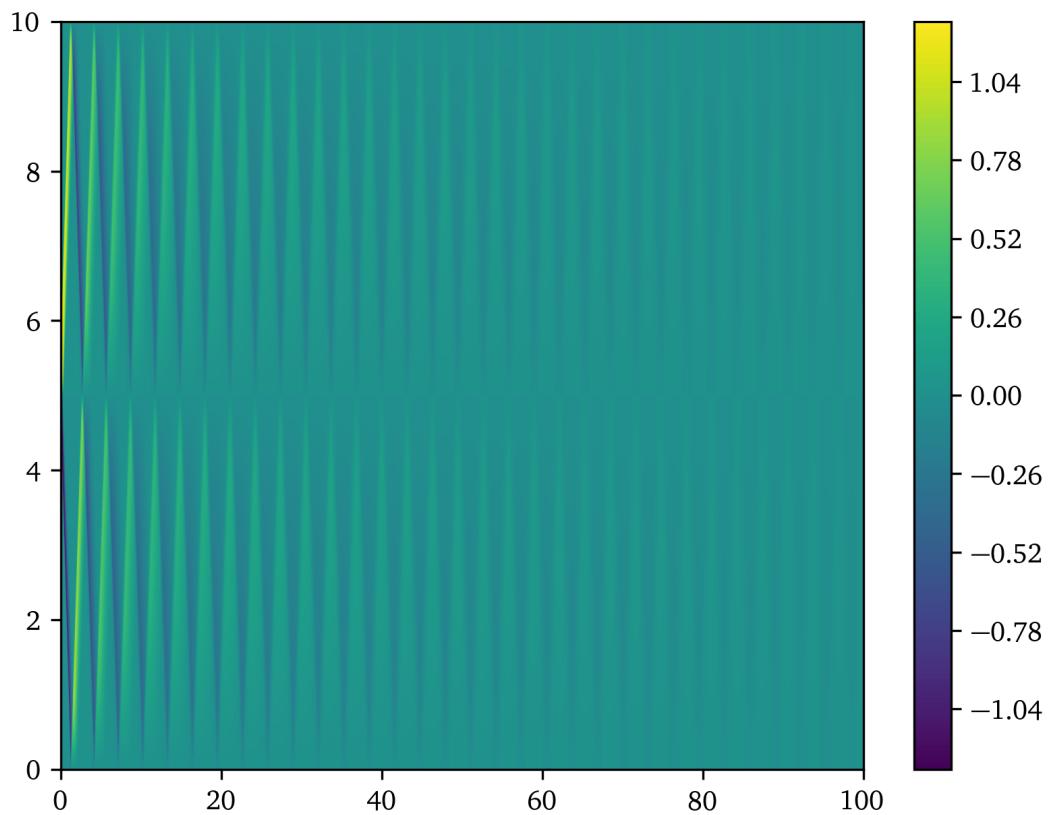


Рис. 29: График  $V$  для  $T = 100.0$  при  $p(\rho) = 10^1\rho$  и  $\mu = 10^{-1}$

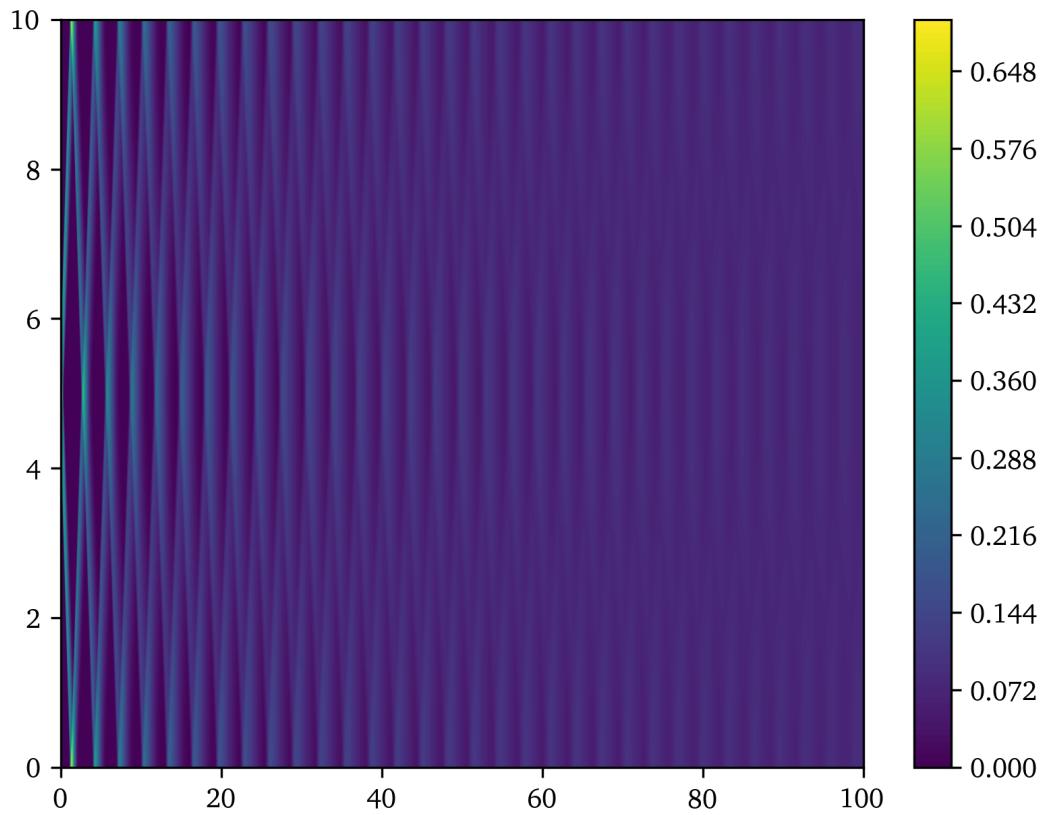


Рис. 30: График  $G$  для  $T = 100.0$  при  $p(\rho) = 10^1\rho$  и  $\mu = 10^{-1}$

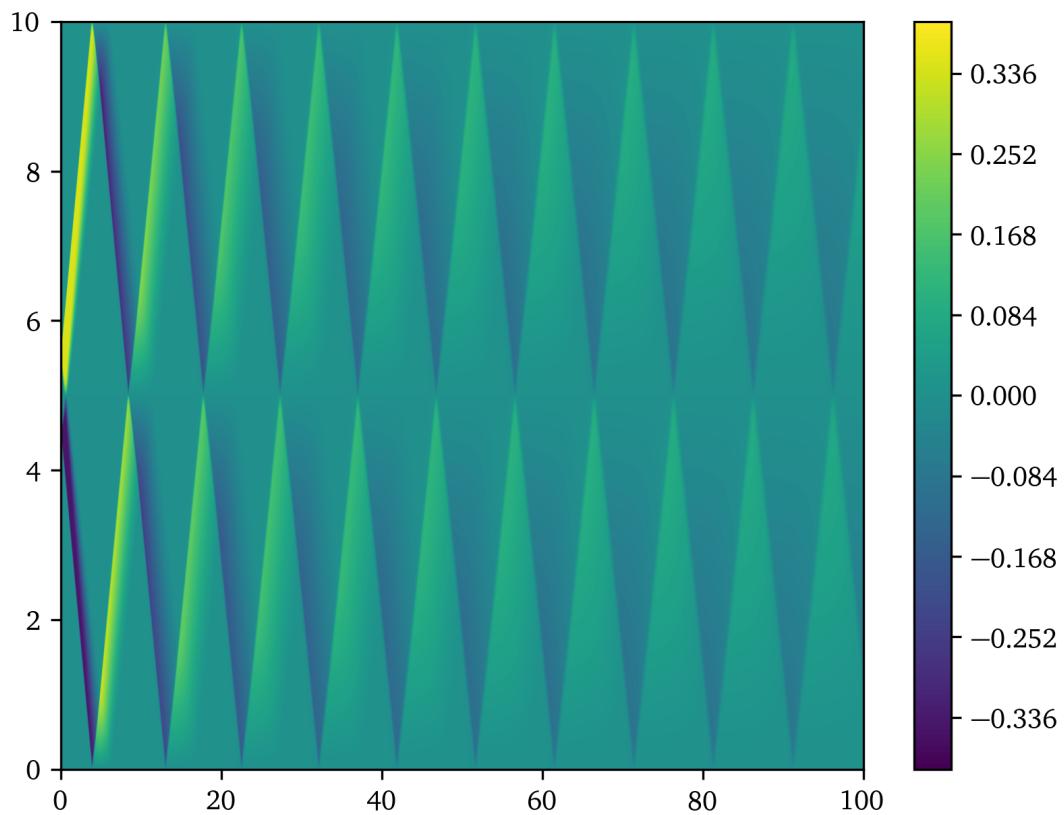


Рис. 31: График  $V$  для  $T = 100.0$  при  $p(\rho) = 10^0\rho$  и  $\mu = 10^{-2}$

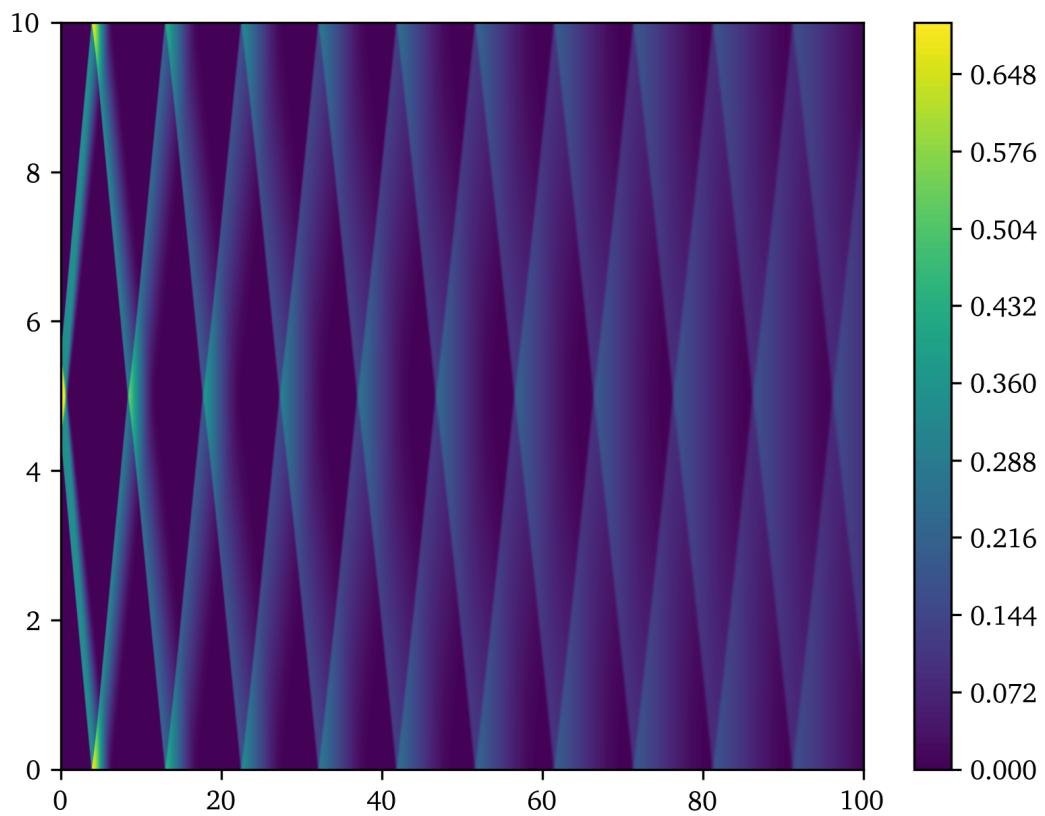


Рис. 32: График  $G$  для  $T = 100.0$  при  $p(\rho) = 10^0\rho$  и  $\mu = 10^{-2}$

Рассмотрим случай  $\mu = 0.1$ ,  $p(\rho) = \rho^{1.4}$ ,  $\tau = h = 10^{-2}$ ,  $\varepsilon = 10^{-3}$ . Далее приведены срезы графиков  $V$  и

$G$  (динамика процесса) в разные моменты времени.

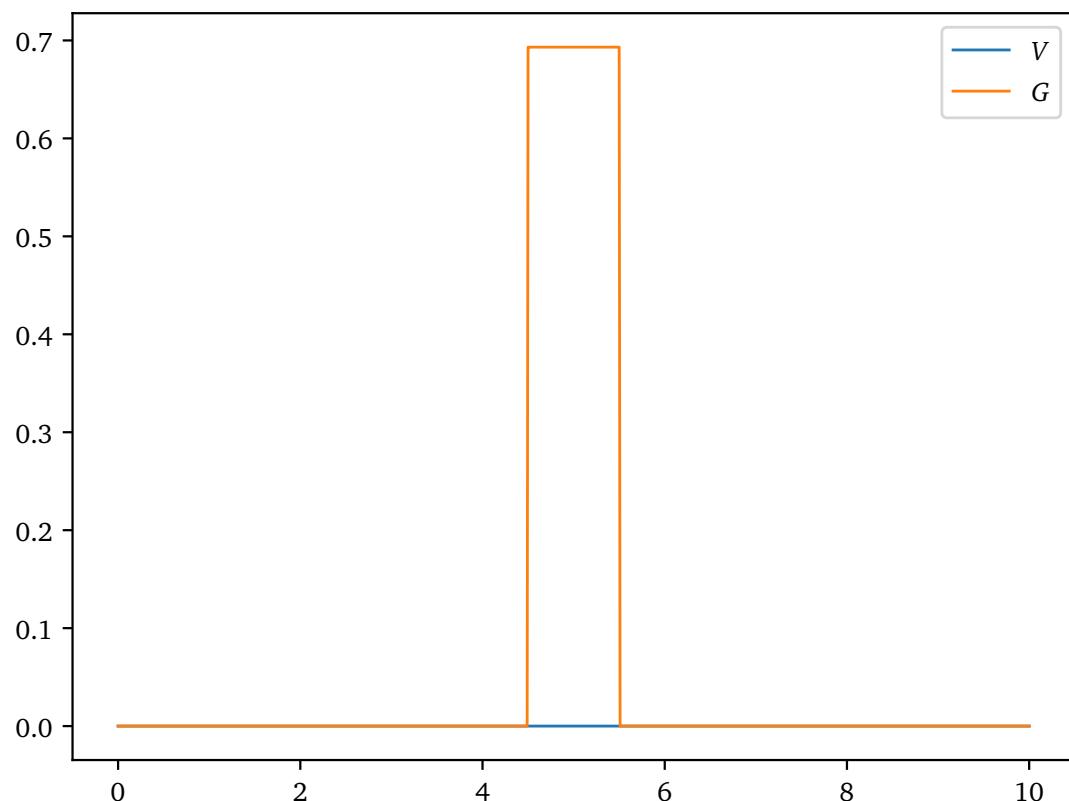


Рис. 33: Срез для  $t = 0.0$

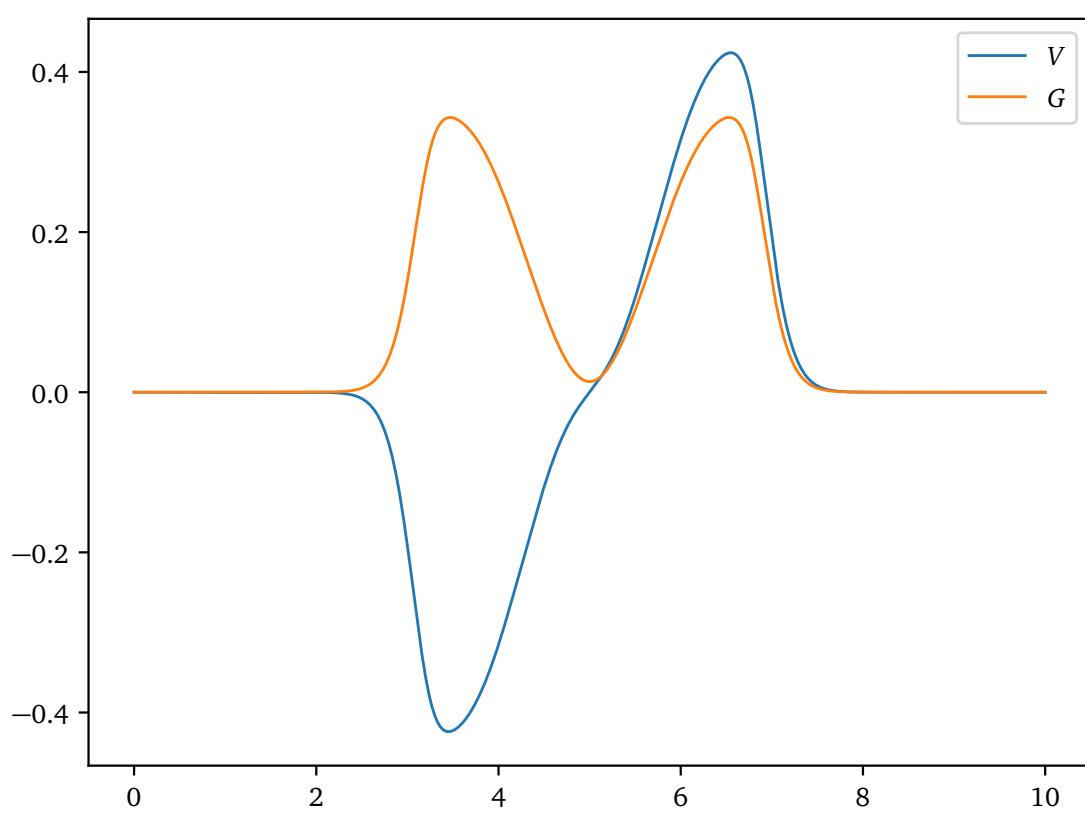


Рис. 34: Срез для  $t = 1.0$

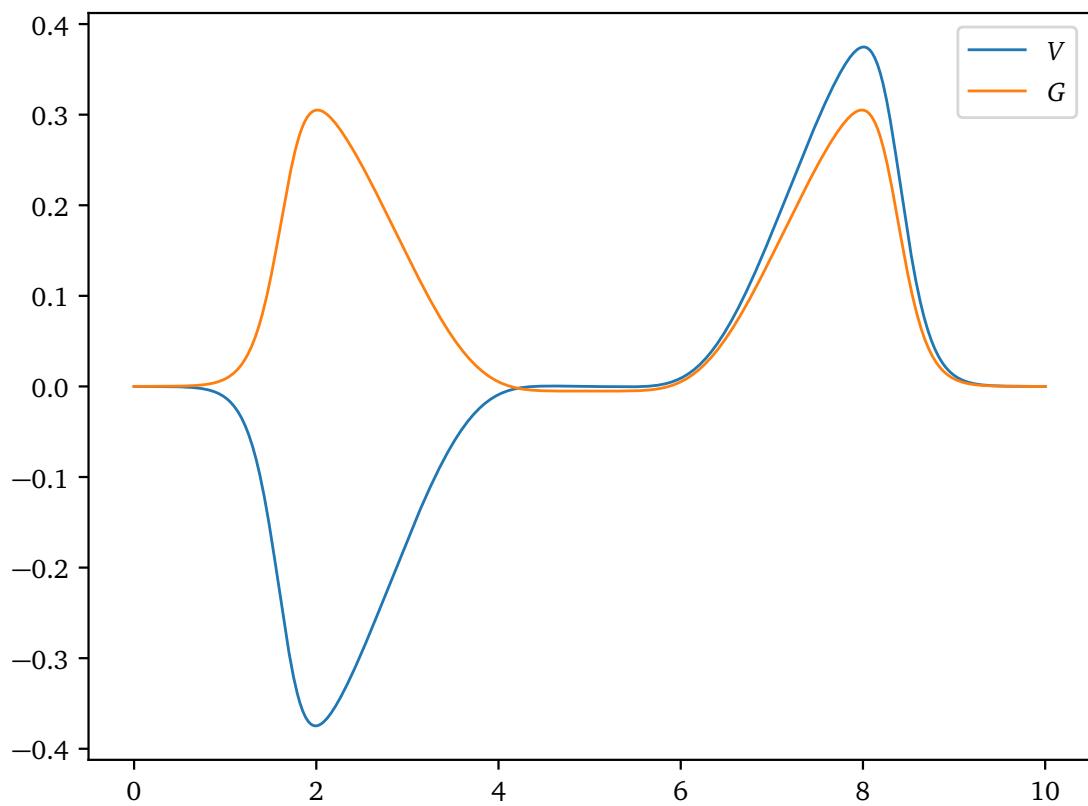


Рис. 35: Срез для  $t = 2.0$

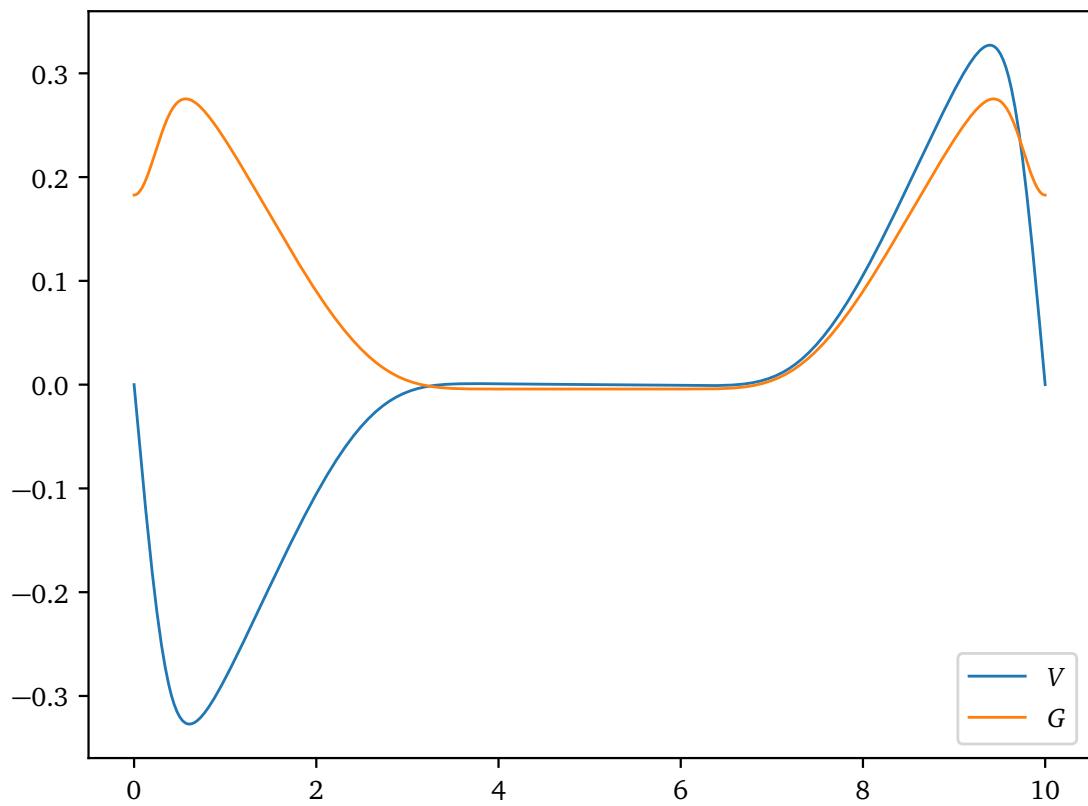


Рис. 36: Срез для  $t = 3.0$

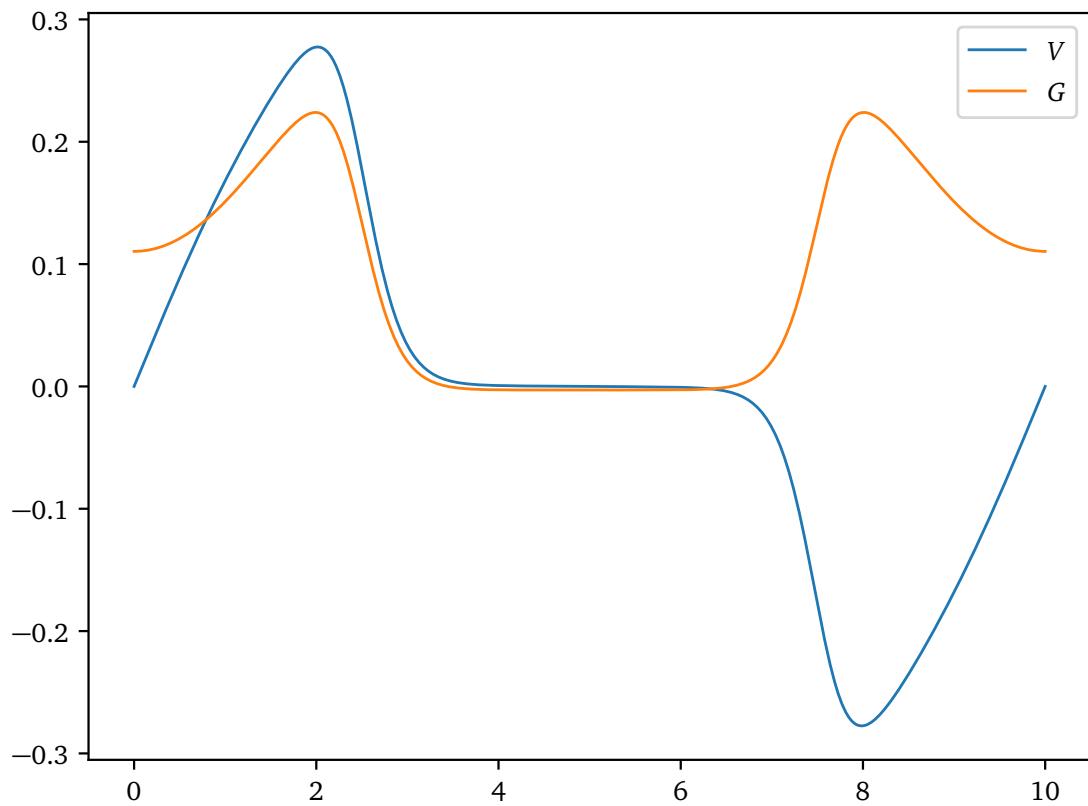


Рис. 37: Срез для  $t = 5.0$

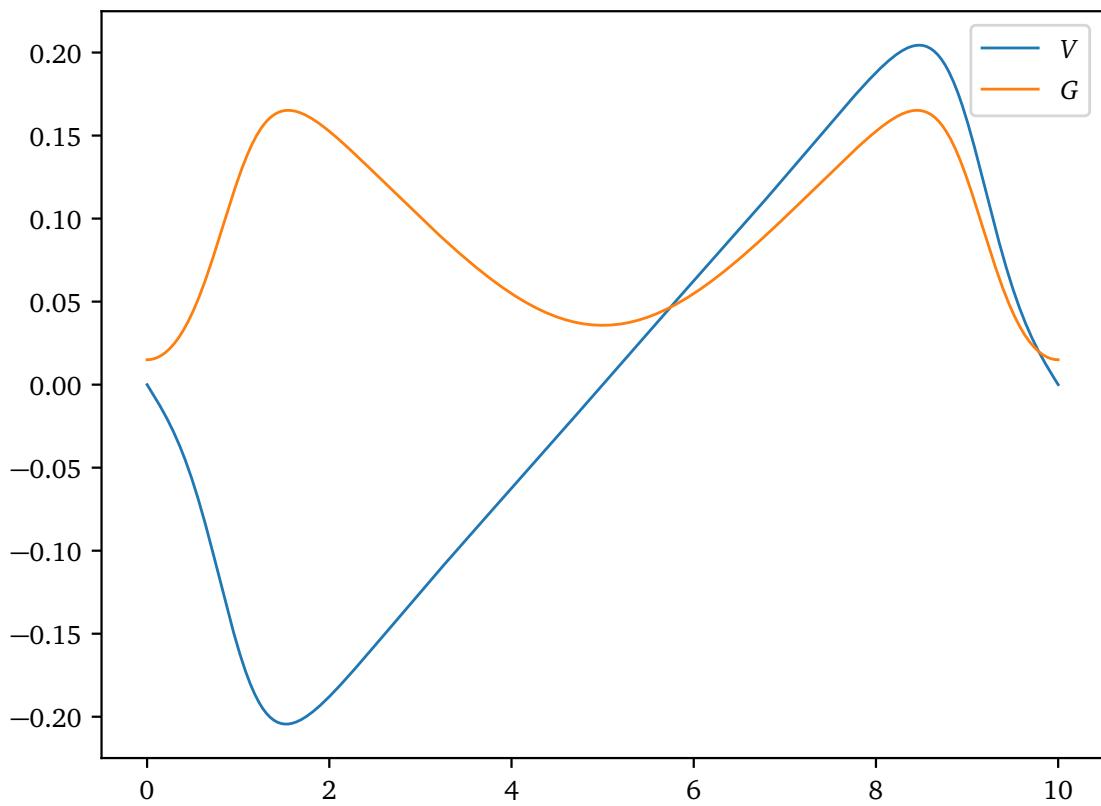


Рис. 38: Срез для  $t = 10.0$

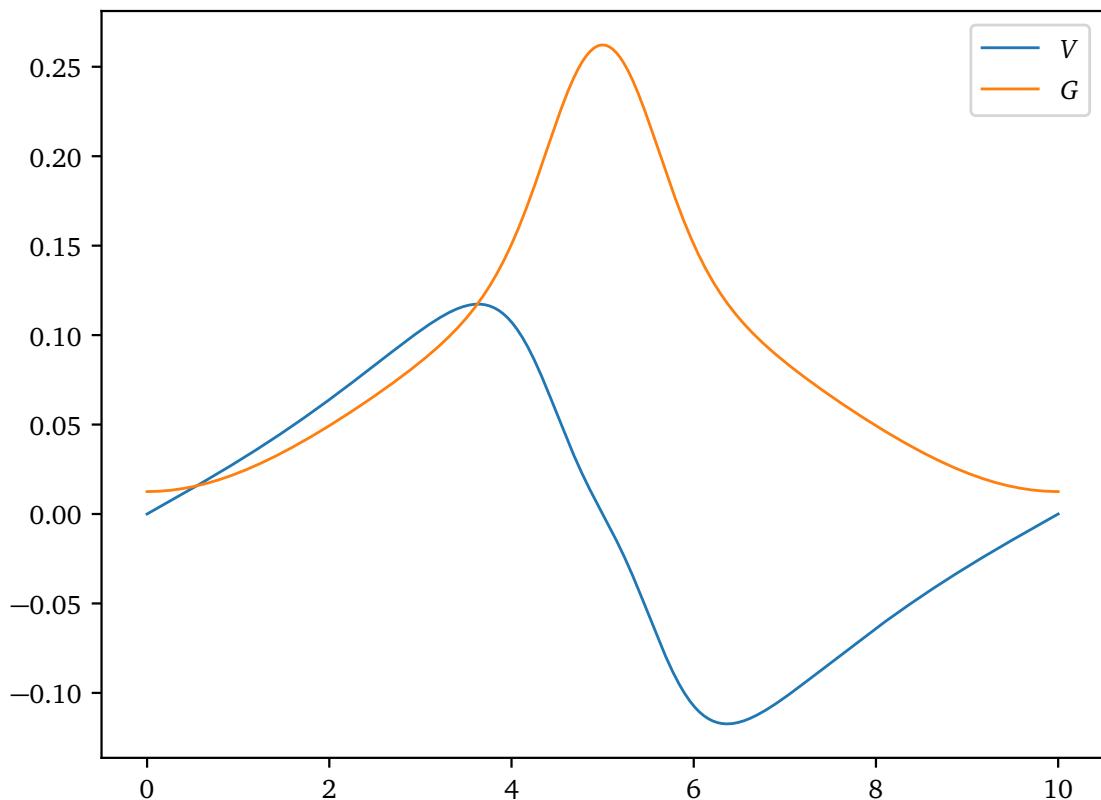


Рис. 39: Срез для  $t = 15.0$

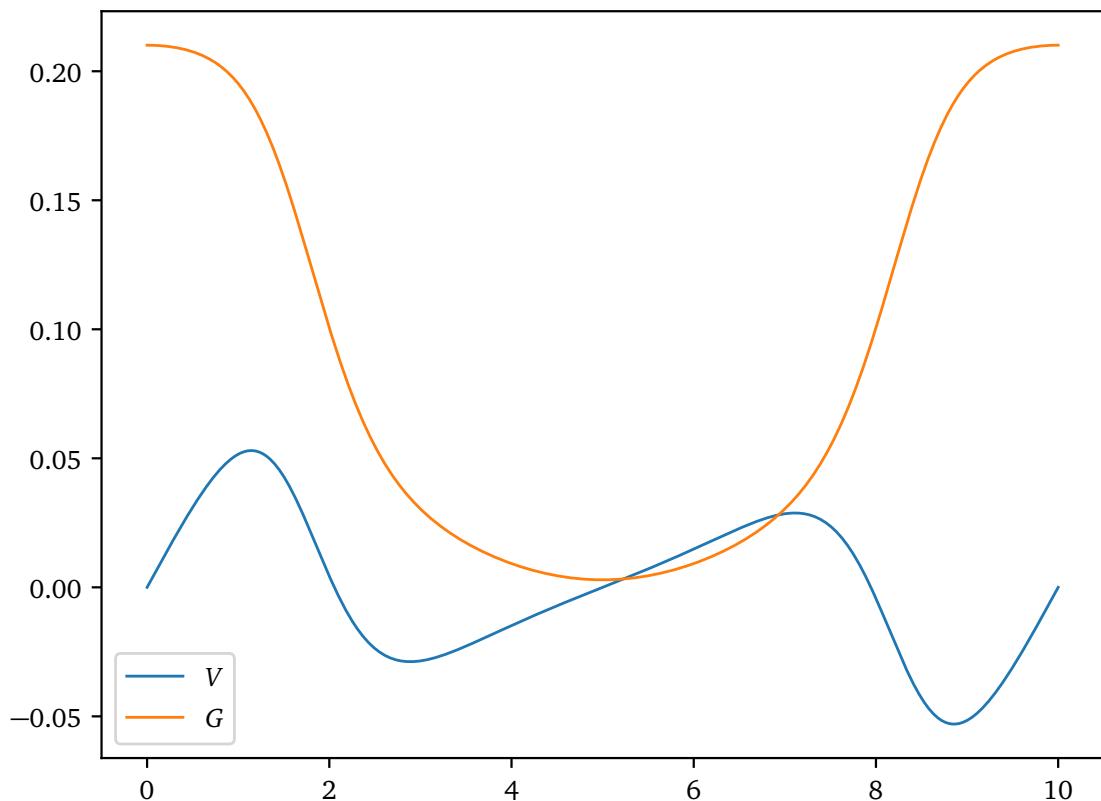


Рис. 40: Срез для  $t = 20.0$

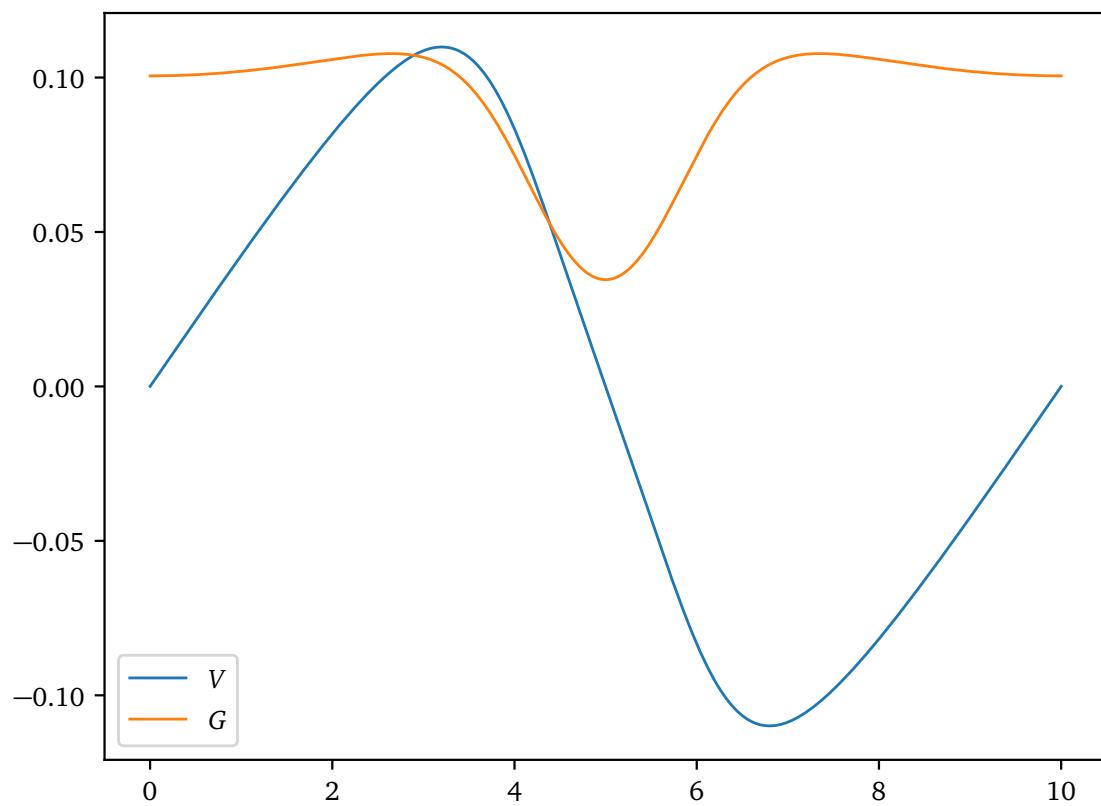


Рис. 41: Срез для  $t = 30.0$

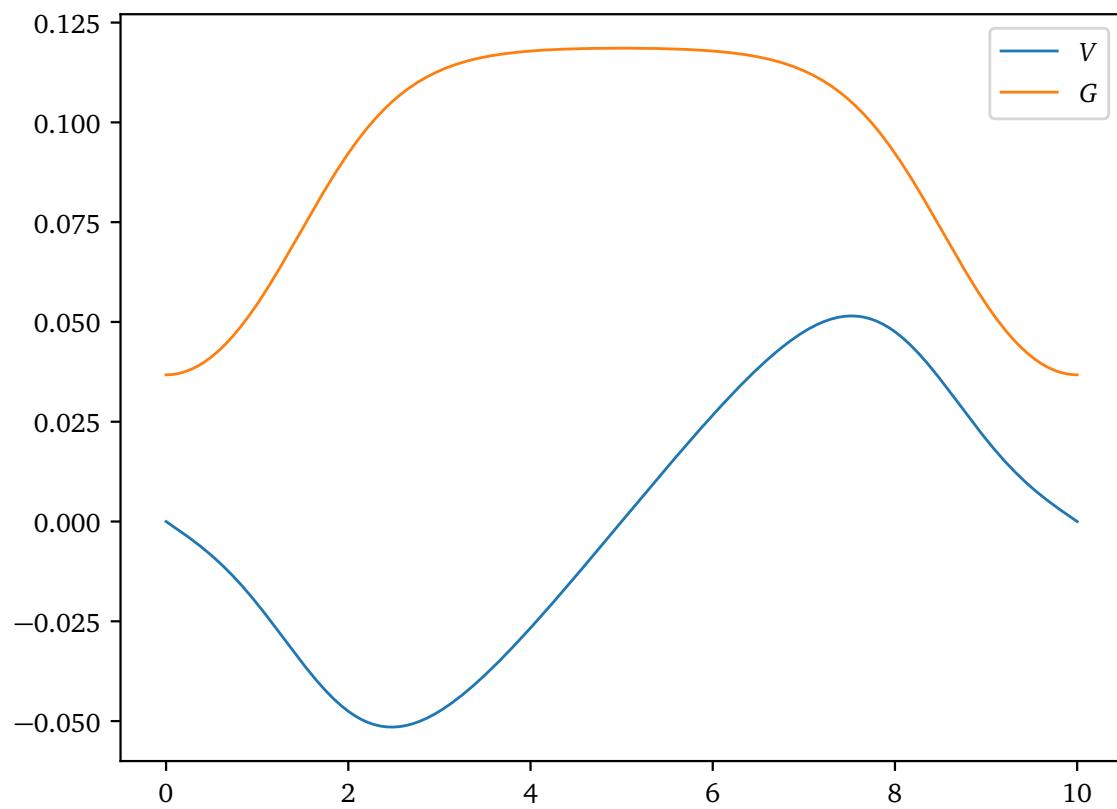


Рис. 42: Срез для  $t = 50.0$

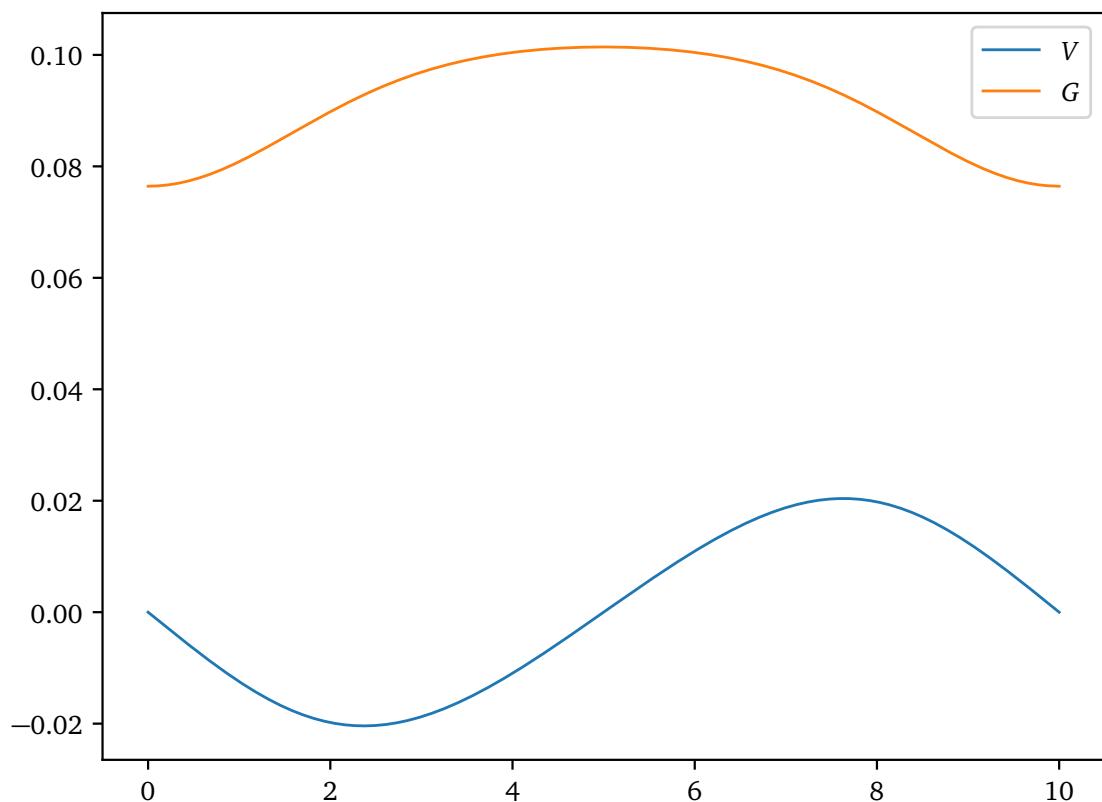


Рис. 43: Срез для  $t = 100.0$

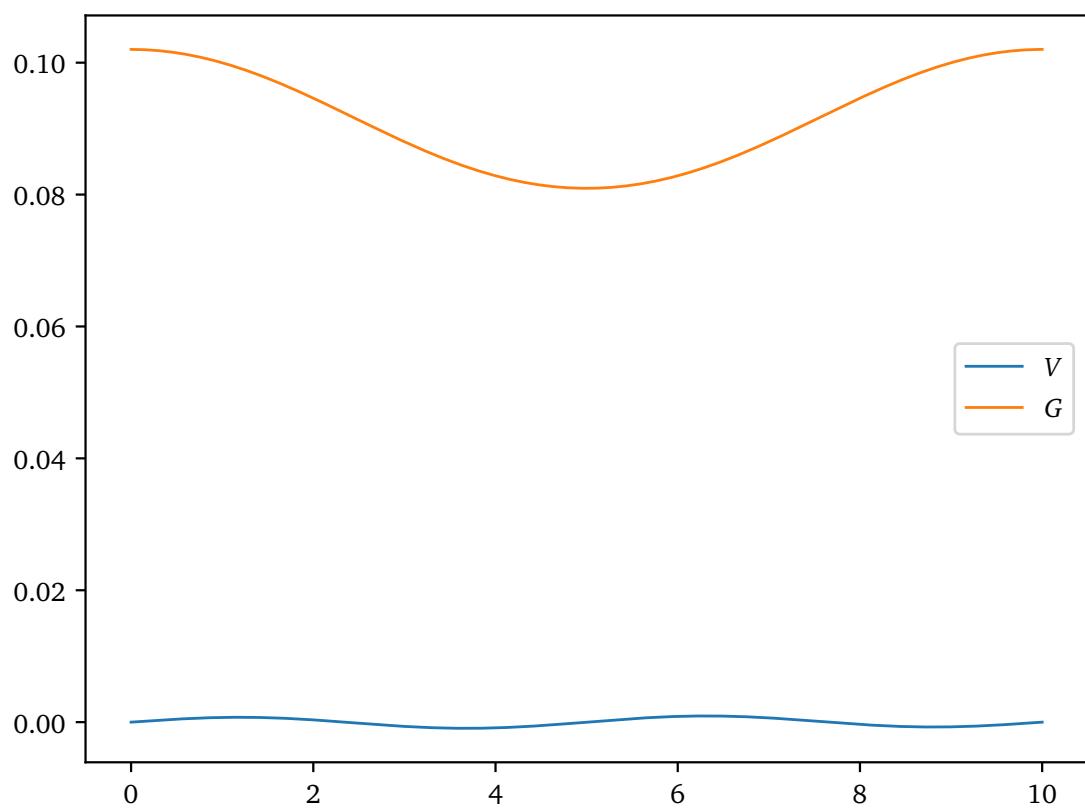


Рис. 44: Срез для  $t = 136.08$

Рассмотрим графики  $V$  и  $G$ .

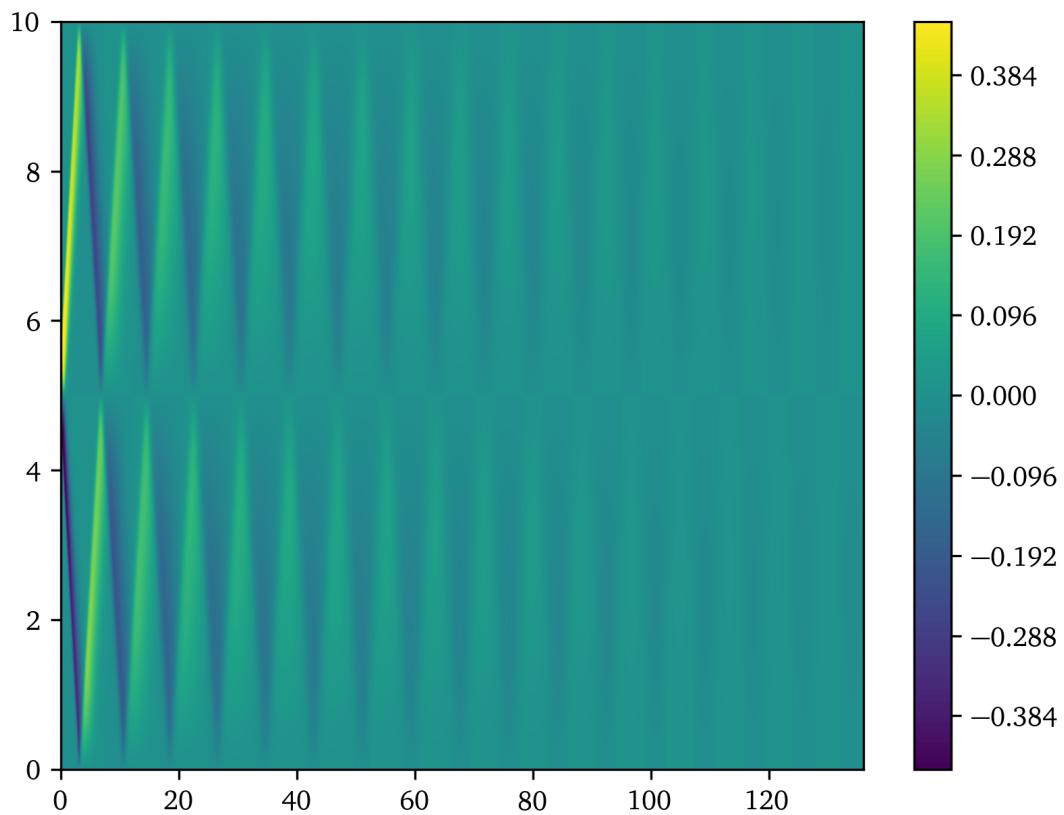


Рис. 45: График  $V$  для  $T = N_0\tau$  при  $p(\rho) = \rho^{1.4}$  и  $\mu = 10^{-1}$

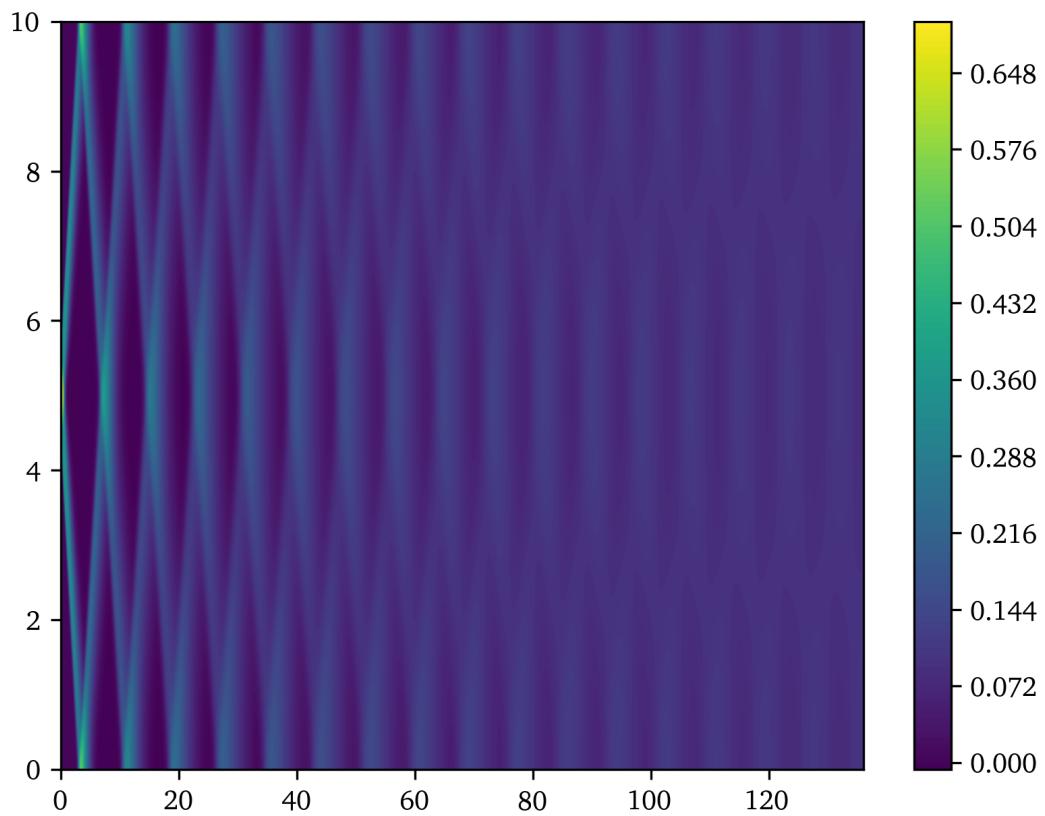


Рис. 46: График  $G$  для  $T = N_0\tau$  при  $p(\rho) = \rho^{1.4}$  и  $\mu = 10^{-1}$

Для изучения зависимости периода от параметра  $\mu$  рассмотрим графики  $V$  и  $G$  для  $T = 100.0$  при

различных его значениях.

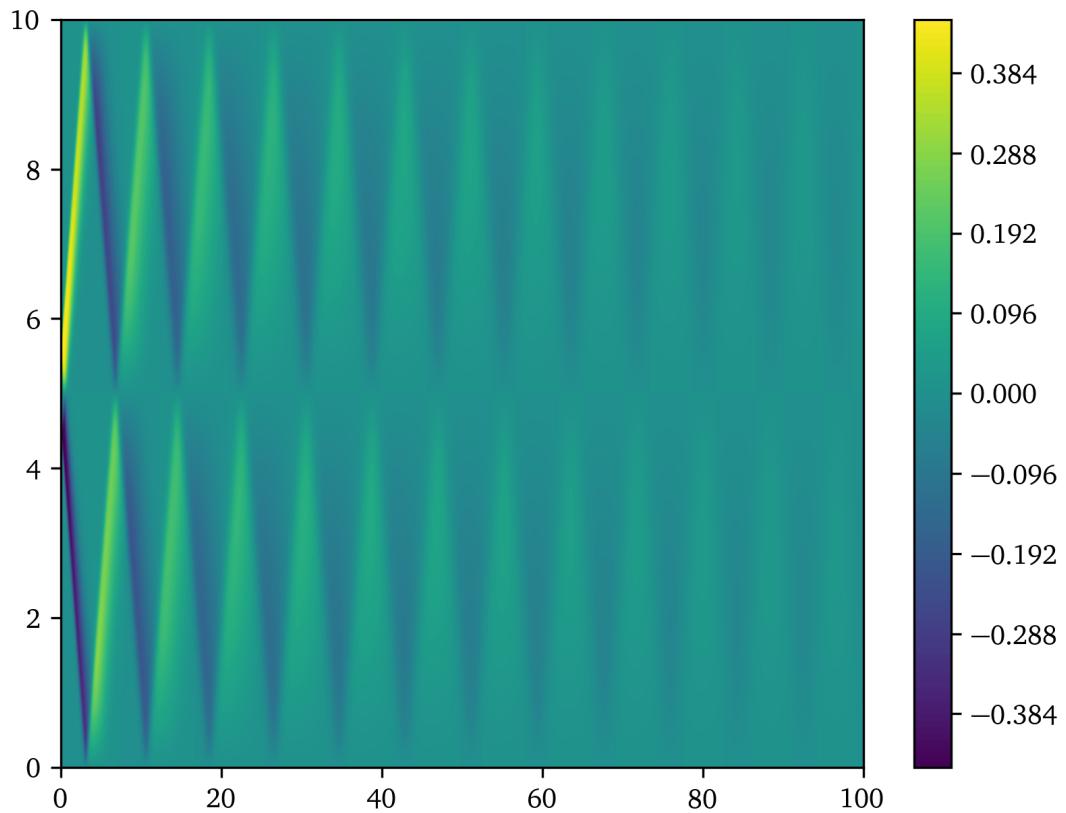


Рис. 47: График  $V$  для  $T = 100.0u$  при  $p(\rho) = \rho^{1.4}$  и  $\mu = 10^{-1}$

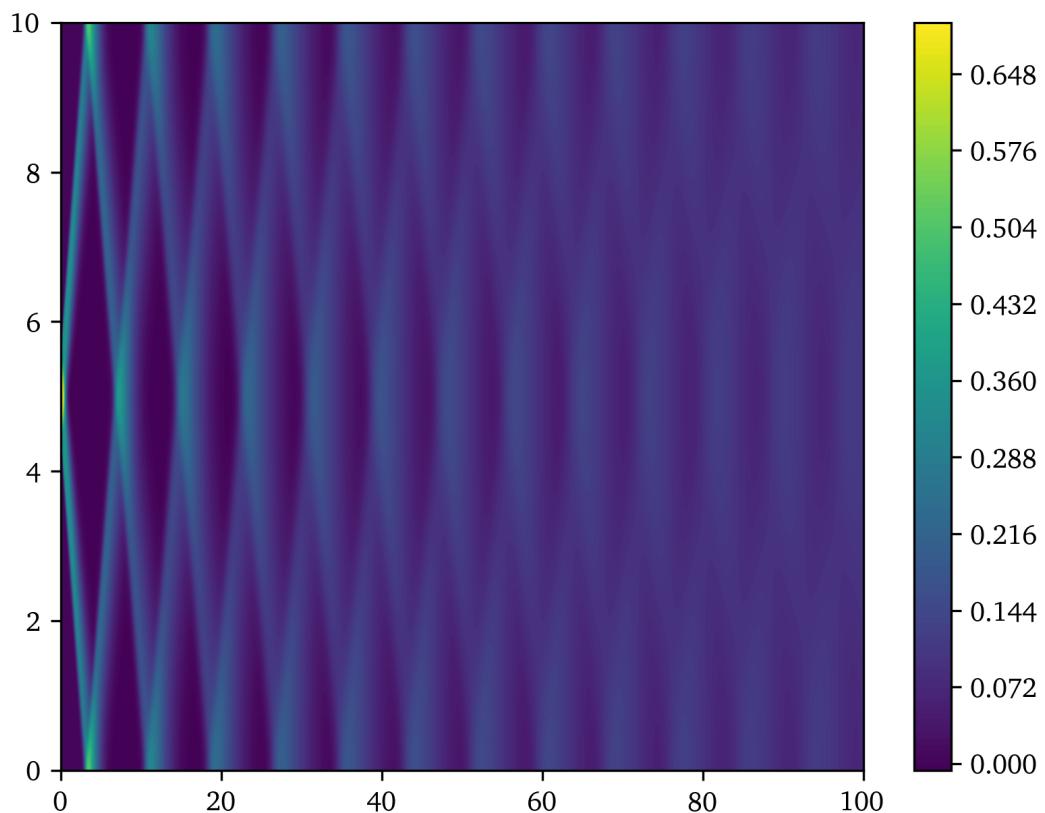


Рис. 48: График  $G$  для  $T = 100.0$  при  $p(\rho) = \rho^{1.4}$  и  $\mu = 10^{-1}$

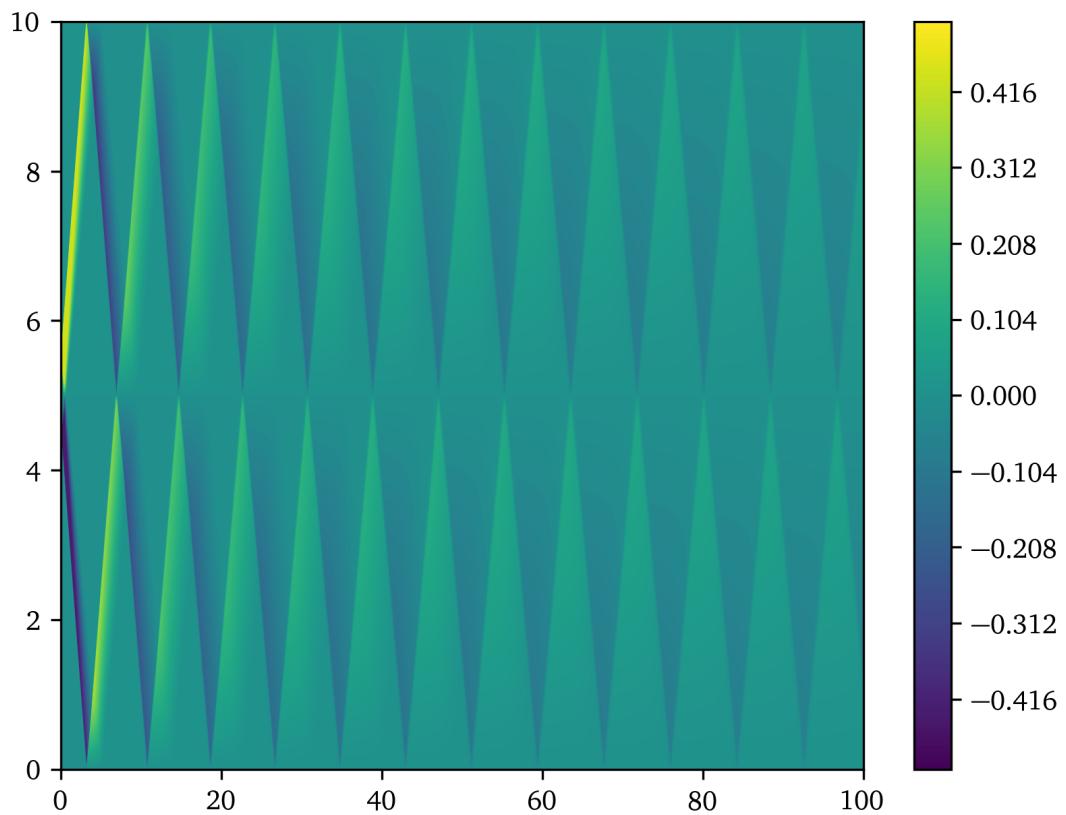


Рис. 49: График  $V$  для  $T = 100.0$  при  $p(\rho) = \rho^{1.4}$  и  $\mu = 10^{-2}$

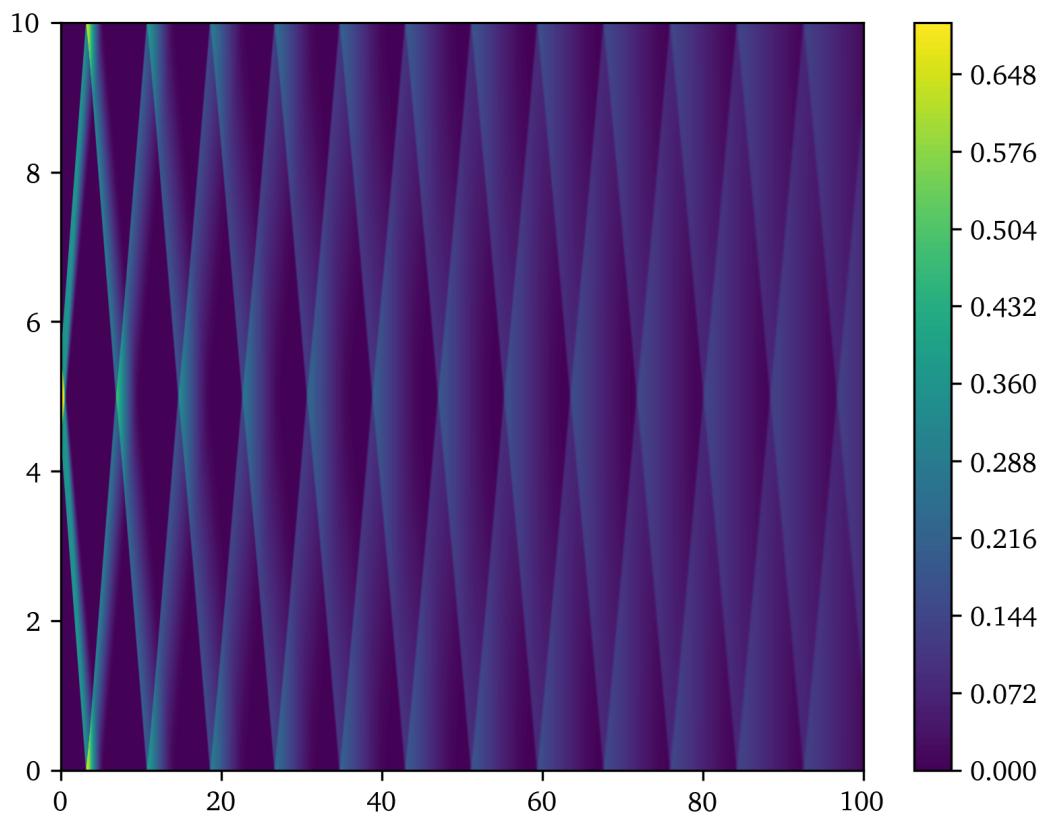


Рис. 50: График  $G$  для  $T = 100.0$  при  $p(\rho) = \rho^{1.4}$  и  $\mu = 10^{-2}$

### 5.3.6 Вывод

Период колебаний не зависит от  $\mu$ , однако зависит от  $C$ , а именно с увеличением  $C$  уменьшается период. При уменьшении  $\mu$  «рисунок» становится более четким, что говорит о более медленном затухании, то есть о большем времени стабилизации.

### 5.3.7 Время стабилизации

Зафиксируем  $\varepsilon = 10^{-3}$ ,  $\tau = 10^{-4}$  и  $h = 10^{-2}$ . Далее приведена таблица зависимости времени стабилизации от параметров дифференциальной задачи и от выбора сетки (в каждой ячейке таблицы приведены значения  $N_0$  для сеток  $\Omega_{\tau,h}$ ,  $\Omega_{\tau,h/2}$ ,  $\Omega_{\tau/2,h}$  и, соответственно,  $\Omega_{\tau/2,h/2}$ ).

$\mu \backslash p$	$10^0\rho$	$10^1\rho$	$10^2\rho$	$\rho^{1.4}$
$10^{-1}$	129.2153	148.1726	149.8312	135.943
	129.2078	148.1645	150.3257	135.9269
	129.2151	148.172	149.8297	135.9423
	129.2076	148.1638	150.324	135.9262
$10^{-2}$	863.274	856.4441	845.3668	812.9889
	868.2174	862.7344	850.8486	816.2835
	863.2725	856.4407	845.8614	812.9692
	868.2158	862.7302	852.3408	816.2595
$10^{-3}$	2883.516	2893.173	2903.978	2550.506
	2898.323	2882.019	2885.957	2558.378
	2883.51	2893.165	2904.968	2550.443
	2898.314	2882.006	2887.442	2562.399

Сравним также полученные времена с «точным» решением (подразумевается решение, полученное на достаточно мелкой сетке, а именно на сетке с  $\tau = 10^{-5}$  и  $h = 10^{-4}$ ). В силу большого времени проведения расчетов случай  $\mu = 10^{-2}$  не рассматривается.

$p(\rho) = 10^0\rho$	129.20044
$p(\rho) = 10^1\rho$	148.15538
$p(\rho) = 10^2\rho$	151.31652
$p(\rho) = \rho^{1.4}$	135.90793

### 5.3.8 Вывод

При уменьшении параметра  $\mu$  или увеличении параметра  $C$  затухание происходит медленнее, причем на время стабилизации параметр  $\mu$  влияет значительно, а параметр  $C$  — нет. Это также подтверждают графики из подсекции 5.3.5.

## 5.4 Численные эксперименты второй задачи

### 5.4.1 Точность решения

Зафиксируем  $\varepsilon = 10^{-3}$ ,  $\tau = 10^{-4}$  и  $h = 10^{-2}$ . Далее приведены таблицы значений  $\|V^n\|$  для  $n = N_0/4$ ,  $N_0/2$ ,  $3N_0/4$ ,  $N_0$  (в каждой ячейке таблицы приведены значения для сеток  $\Omega_{\tau,h}$ ,  $\Omega_{\tau,h/2}$ ,  $\Omega_{\tau/2,h}$  и, соответственно,  $\Omega_{\tau/2,h/2}$ ).

$\mu$	$N_0\tau$	$n = N_0/4$	$n = N_0/2$	$n = 3N_0/4$	$n = N_0$
$10^{-1}$	414.3976	3.414389e-02	2.533585e-02	1.675315e-02	9.998672e-04
	414.3702	3.392048e-02	2.553754e-02	1.670471e-02	9.998792e-04
	414.39665	3.413641e-02	2.534220e-02	1.675157e-02	9.998869e-04
	414.3692	3.391265e-02	2.554410e-02	1.670304e-02	9.999475e-04
$10^{-2}$	1913.6806	1.659643e-02	6.657185e-03	3.140069e-03	9.999875e-04
	2062.5864	1.307111e-02	4.587587e-03	5.562045e-03	9.999309e-04
	1913.63765	1.667100e-02	6.723625e-03	3.193054e-03	9.999850e-04
	2072.5457	1.673192e-02	7.676878e-03	3.590581e-03	9.999721e-04

Таблица 31: Нормы скорости при  $p(\rho) = 10^0\rho$

$\mu$	$N_0\tau$	$n = N_0/4$	$n = N_0/2$	$n = 3N_0/4$	$n = N_0$
$10^{-1}$	409.4508	4.001611e-02	2.436912e-02	1.736108e-02	9.997582e-04
	409.4481	3.998522e-02	2.443041e-02	1.734551e-02	9.992647e-04
	409.4499	3.851491e-02	2.438587e-02	1.773946e-02	9.999405e-04
	409.44715	3.848606e-02	2.444762e-02	1.772626e-02	9.996632e-04
$10^{-2}$	1936.8498	1.566099e-02	6.047530e-03	2.885088e-03	9.999123e-04
	1936.7269	1.509610e-02	5.597184e-03	2.532493e-03	9.999835e-04
	1936.80105	1.543926e-02	5.873041e-03	2.745717e-03	9.999744e-04
	1939.831	9.132476e-03	6.390743e-03	5.004628e-03	9.999351e-04

Таблица 32: Нормы скорости при  $p(\rho) = 10^1\rho$

$\mu$	$N_0\tau$	$n = N_0/4$	$n = N_0/2$	$n = 3N_0/4$	$n = N_0$
$10^{-1}$	392.4749	4.042816e-02	1.980899e-02	1.604618e-02	9.998312e-04
	392.4267	4.078459e-02	1.957161e-02	1.616142e-02	9.998843e-04
	392.4728	4.044215e-02	1.945466e-02	1.616288e-02	9.999546e-04
	392.42455	4.079909e-02	1.956201e-02	1.616648e-02	9.999618e-04
$10^{-2}$	1829.617	1.238841e-02	4.434290e-03	2.166887e-03	9.999570e-04
	2039.7565	8.646455e-03	7.588757e-03	4.450464e-03	9.999481e-04
	1838.0084	8.202368e-03	6.722226e-03	4.517946e-03	9.999666e-04
	2056.5915	1.514325e-02	7.601470e-03	3.537721e-03	9.999726e-04

Таблица 33: Нормы скорости при  $p(\rho) = \rho^{1.4}$

Приведены также и графики.

Примечание. Значения, которые больше 0.1, были заменены на 0.1.

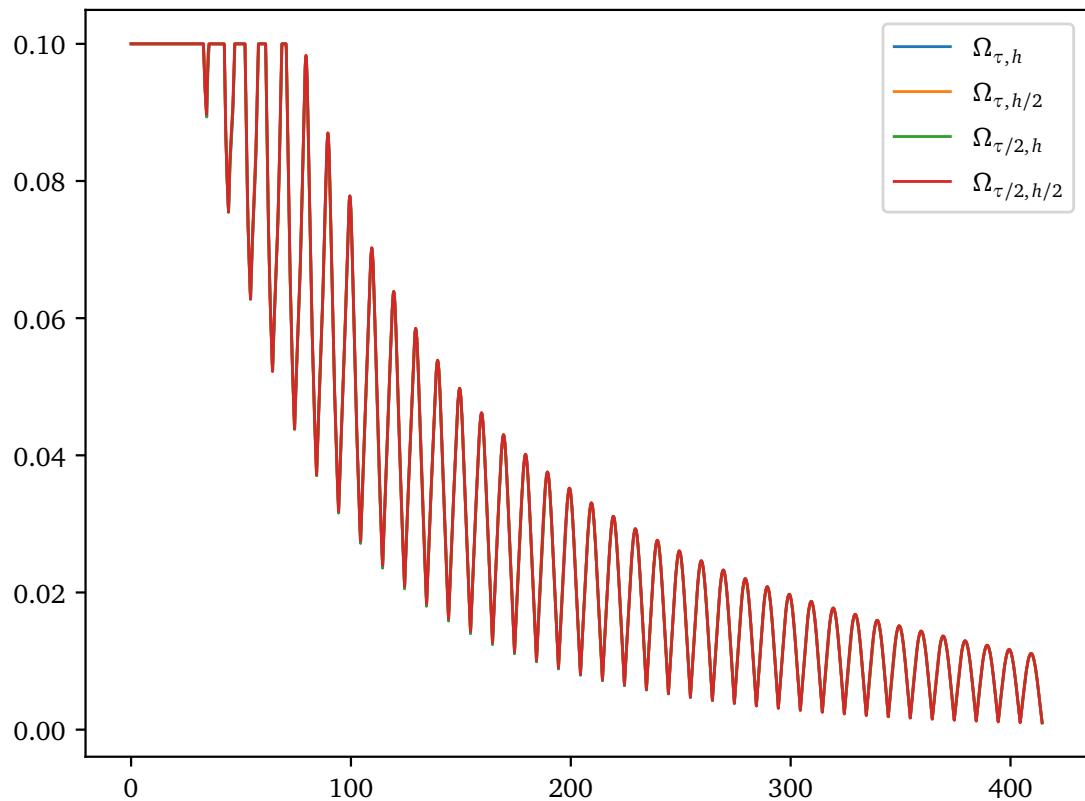


Рис. 51: Графики функций  $\|V\|$  для  $p(\rho) = 10^0\rho$  и  $\mu = 10^{-1}$

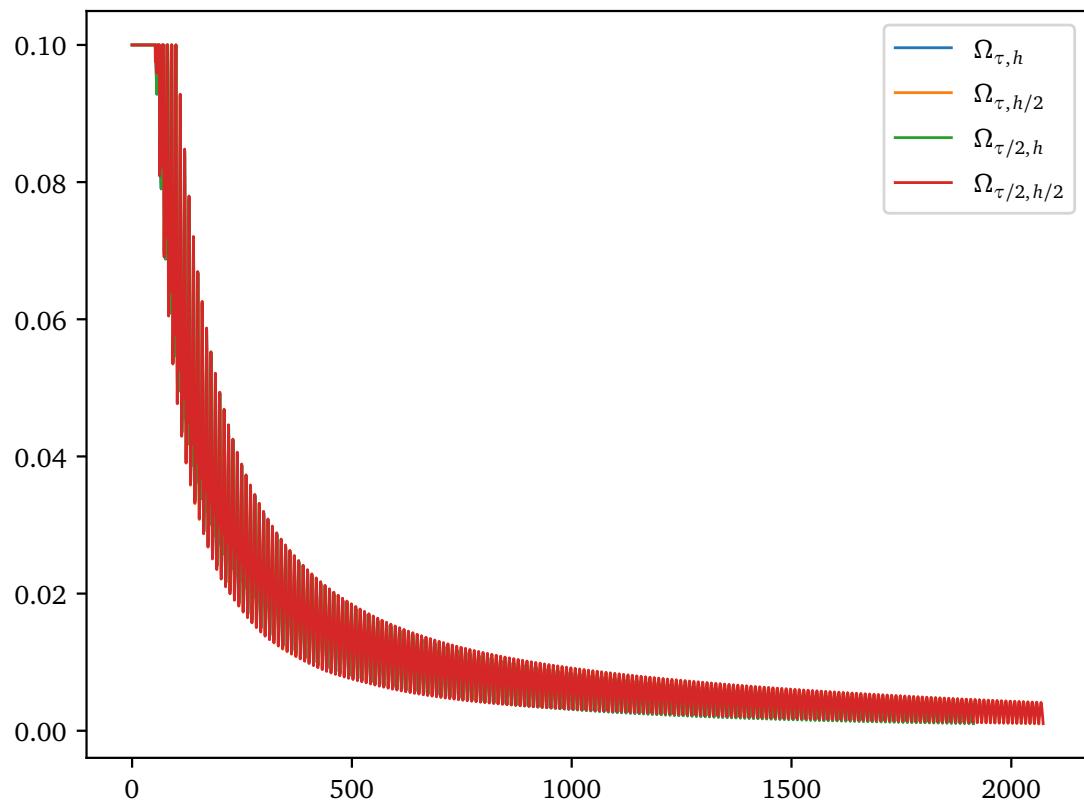


Рис. 52: Графики функций  $\|V\|$  для  $p(\rho) = 10^0\rho$  и  $\mu = 10^{-2}$

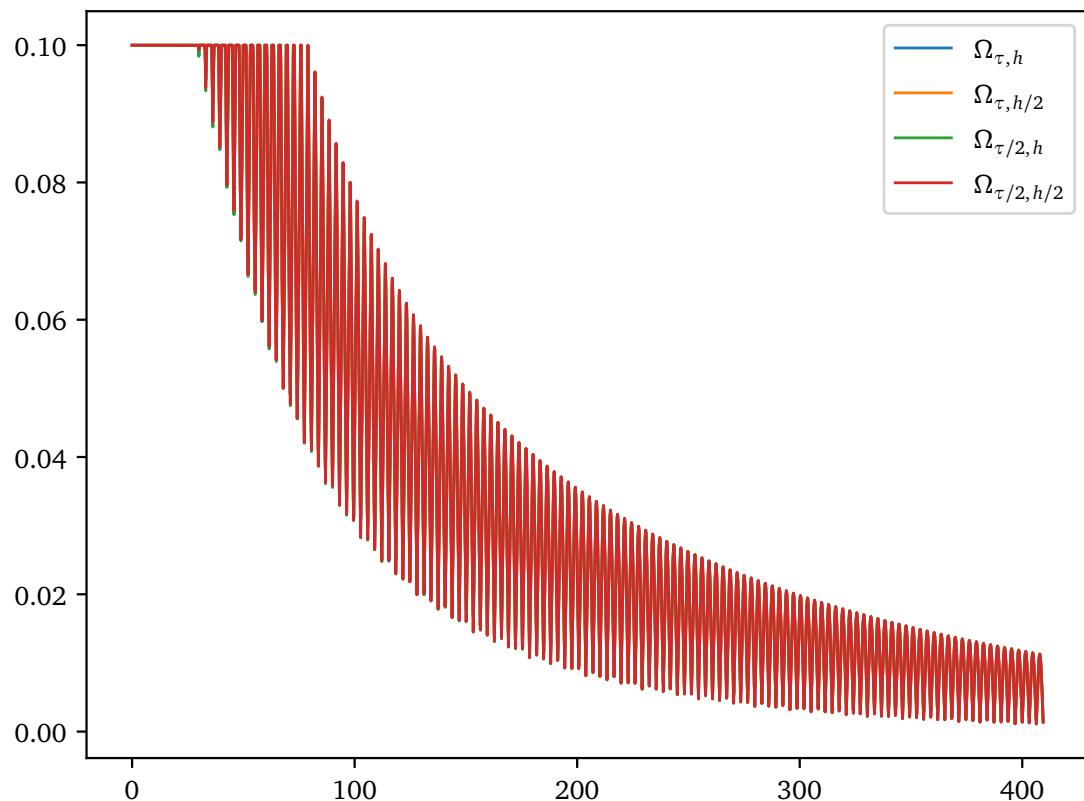


Рис. 53: Графики функций  $\|V\|$  для  $p(\rho) = 10^1\rho$  и  $\mu = 10^{-1}$

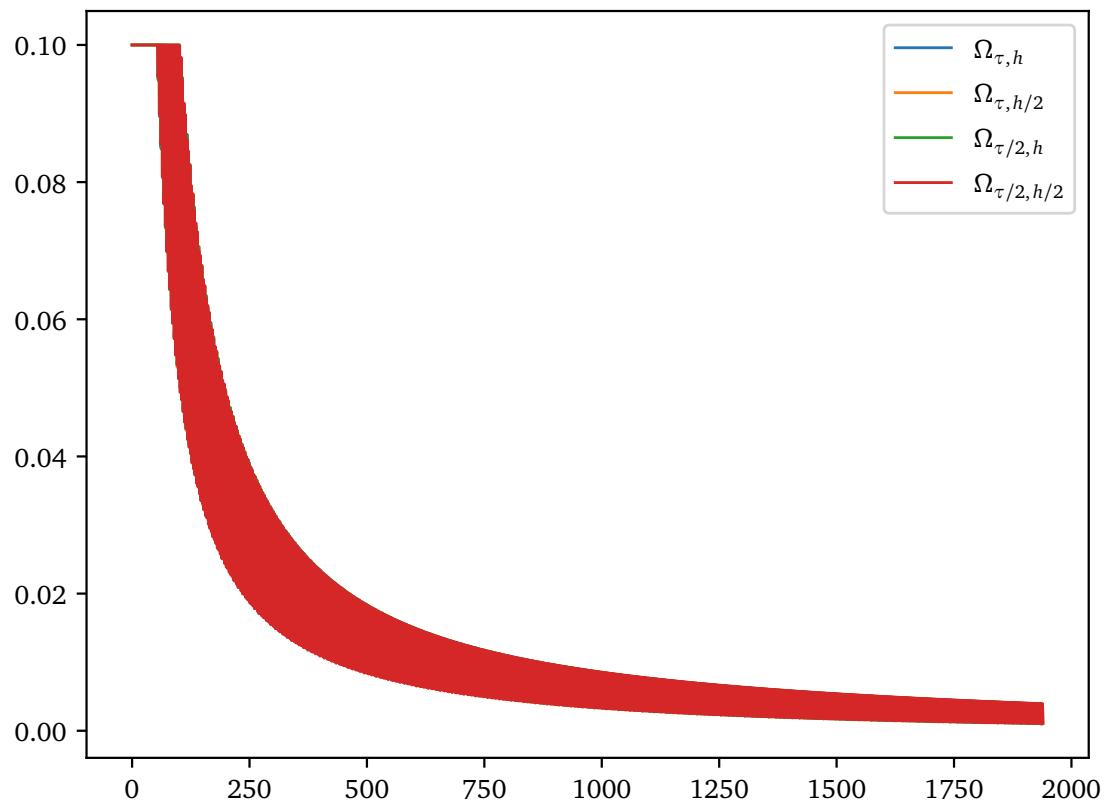


Рис. 54: Графики функций  $\|V\|$  для  $p(\rho) = 10^1\rho$  и  $\mu = 10^{-2}$

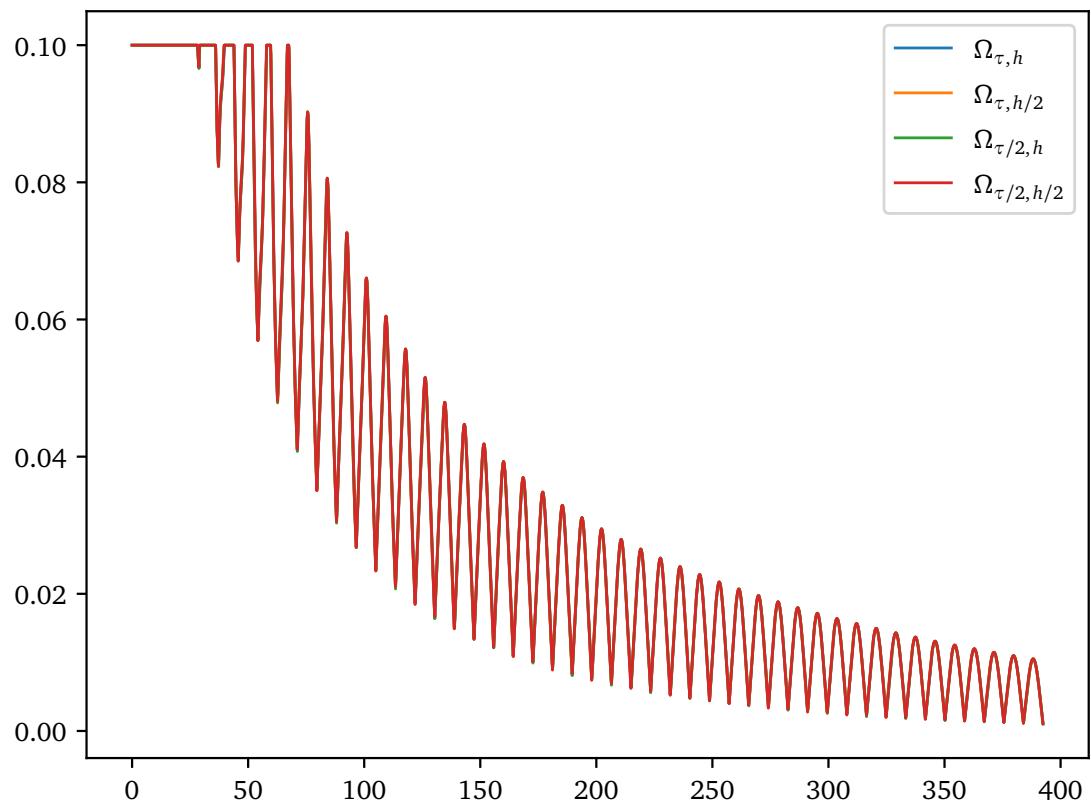


Рис. 55: Графики функций  $\|V\|$  для  $p(\rho) = \rho^{1.4}$  и  $\mu = 10^{-1}$

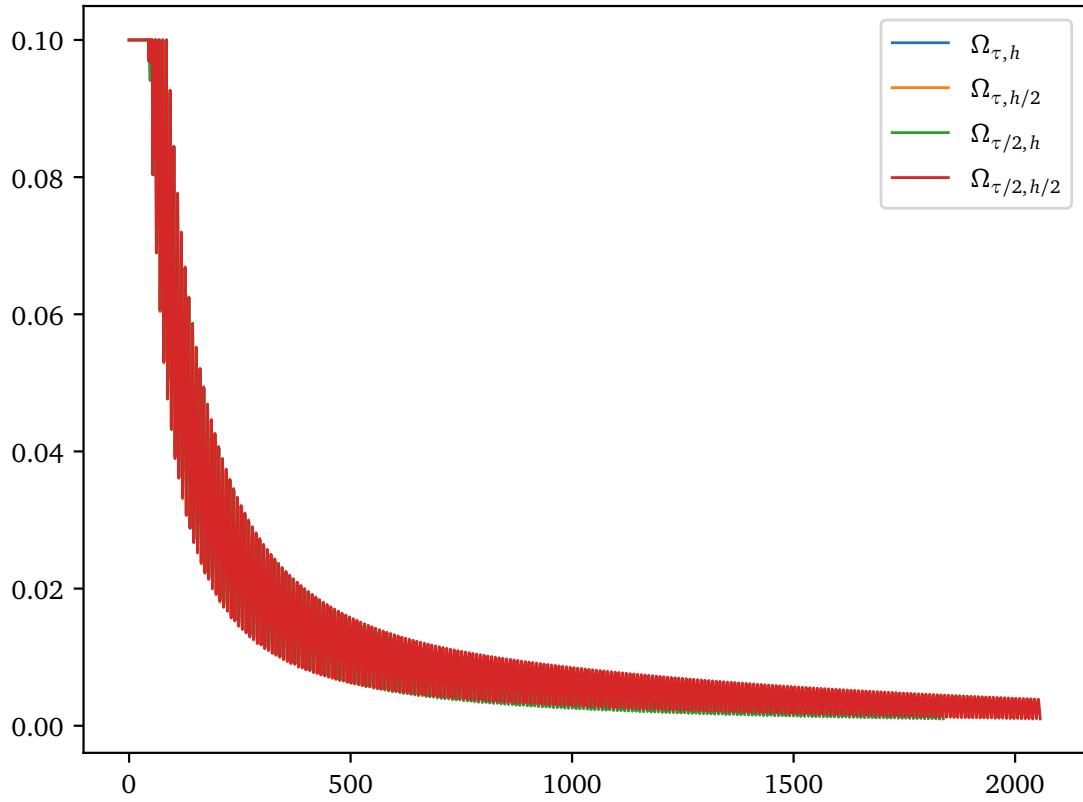


Рис. 56: Графики функций  $\|V\|$  для  $p(\rho) = \rho^{1.4}$  и  $\mu = 10^{-2}$

#### 5.4.2 Вывод

При достаточно мелких сетках решение перестает зависеть от этих сеток.

#### 5.4.3 Консервативность системы

Зафиксируем  $\varepsilon = 10^{-3}$ ,  $\tau = 10^{-4}$  и  $h = 10^{-2}$ . Далее приведены таблицы значений  $\Delta_m(n)$  для  $n = N_0/5$ ,  $2N_0/5$ ,  $3N_0/5$ ,  $4N_0/5$ ,  $N_0$  (в каждой ячейке таблицы приведены значения для сеток  $\Omega_{\tau,h}$ ,  $\Omega_{\tau,h/2}$ ,  $\Omega_{\tau/2,h}$  и, соответственно,  $\Omega_{\tau/2,h/2}$ ).

$\mu$	$n = N_0/5$	$n = 2N_0/5$	$n = 3N_0/5$	$n = 4N_0/5$	$n = N_0$
$10^{-1}$	-9.104596e-04	-9.513025e-04	-9.486827e-04	-9.438312e-04	-9.457882e-04
	-4.868550e-04	-5.077054e-04	-5.063692e-04	-5.039857e-04	-5.049850e-04
	-8.977960e-04	-9.379793e-04	-9.350070e-04	-9.301322e-04	-9.320804e-04
	-4.733254e-04	-4.936860e-04	-4.921387e-04	-4.897310e-04	-4.907212e-04
$10^{-2}$	-6.418393e-03	-6.430170e-03	-6.430889e-03	-6.427727e-03	-6.429204e-03
	-4.165461e-03	-4.172175e-03	-4.172217e-03	-4.170987e-03	-4.171743e-03
	-6.340509e-03	-6.352328e-03	-6.352939e-03	-6.349738e-03	-6.351219e-03
	-4.062599e-03	-4.063877e-03	-4.065851e-03	-4.065655e-03	-4.065730e-03

Таблица 34: Разность масс при  $p(\rho) = 10^0\rho$

$\mu$	$n = N_0/5$	$n = 2N_0/5$	$n = 3N_0/5$	$n = 4N_0/5$	$n = N_0$
$10^{-1}$	-1.250036e-04	-1.202740e-04	-1.180893e-04	-1.170475e-04	-1.166235e-04
	-7.605229e-05	-7.401384e-05	-7.299411e-05	-7.249762e-05	-7.229392e-05
	-1.143884e-04	-1.084704e-04	-1.060985e-04	-1.050326e-04	-1.046521e-04
	-6.462376e-05	-6.182282e-05	-6.067230e-05	-6.015075e-05	-5.996360e-05
$10^{-2}$	-7.965375e-04	-7.974063e-04	-7.973195e-04	-7.973368e-04	-7.973656e-04
	-5.855505e-04	-5.860394e-04	-5.862183e-04	-5.862597e-04	-5.862762e-04
	-7.229813e-04	-7.234540e-04	-7.235312e-04	-7.235230e-04	-7.235287e-04
	-4.923825e-04	-4.914279e-04	-4.914687e-04	-4.920667e-04	-4.918221e-04

Таблица 35: Разность масс при  $p(\rho) = 10^1\rho$

$\mu$	$n = N_0/5$	$n = 2N_0/5$	$n = 3N_0/5$	$n = 4N_0/5$	$n = N_0$
$10^{-1}$	-6.490664e-04	-6.797865e-04	-6.769043e-04	-6.729474e-04	-6.747045e-04
	-3.495414e-04	-3.652076e-04	-3.637000e-04	-3.617804e-04	-3.626774e-04
	-6.362697e-04	-6.667360e-04	-6.637872e-04	-6.598134e-04	-6.615634e-04
	-3.359508e-04	-3.515383e-04	-3.501655e-04	-3.481653e-04	-3.490469e-04
$10^{-2}$	-4.648660e-03	-4.658448e-03	-4.659049e-03	-4.656759e-03	-4.657953e-03
	-3.007884e-03	-3.012876e-03	-3.012500e-03	-3.011717e-03	-3.012344e-03
	-4.577300e-03	-4.579449e-03	-4.581636e-03	-4.581666e-03	-4.581607e-03
	-2.909985e-03	-2.909503e-03	-2.908897e-03	-2.910559e-03	-2.909948e-03

Таблица 36: Разность масс при  $p(\rho) = \rho^{1.4}$

Для сеток  $\Omega_{\tau, h}$ ,  $\Omega_{\tau, h/2}$ ,  $\Omega_{\tau/2, h}$ ,  $\Omega_{\tau/2, h/2}$  и  $\Omega_{\tau/16, h/2}$  приведены графики.

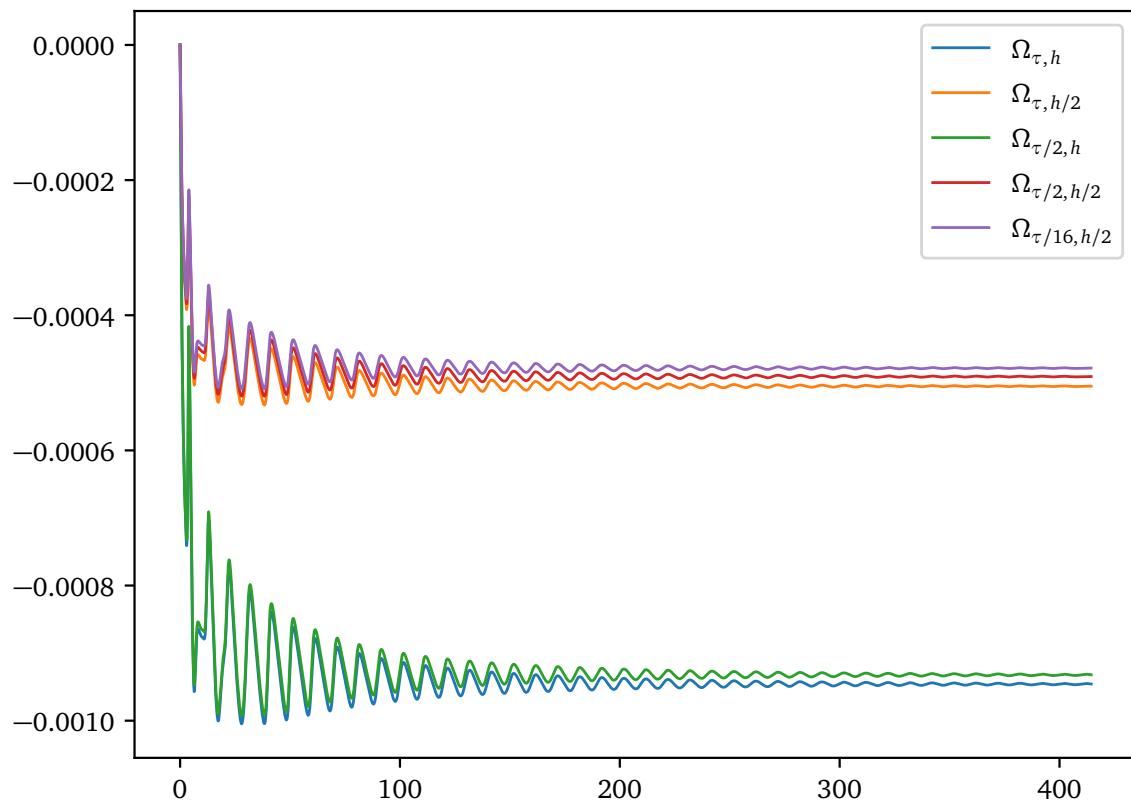


Рис. 57: Графики функций  $\Delta_m$  для  $p(\rho) = 10^0 \rho$  и  $\mu = 10^{-1}$

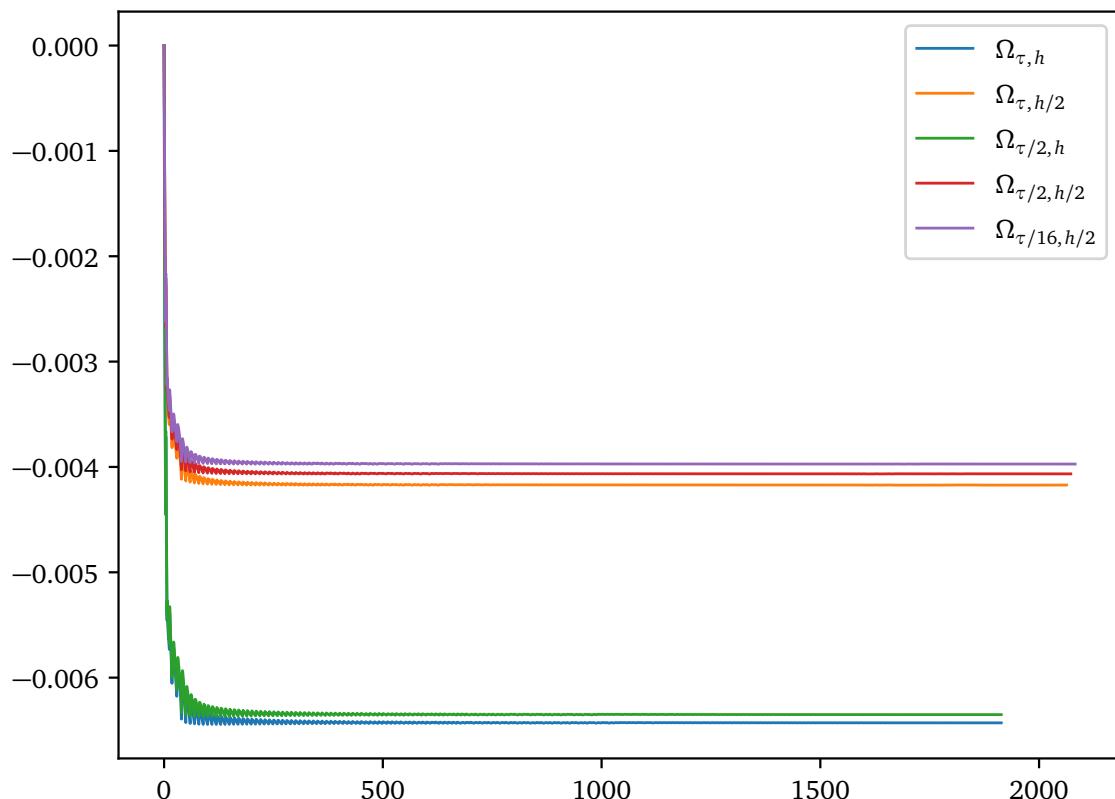


Рис. 58: Графики функций  $\Delta_m$  для  $p(\rho) = 10^0 \rho$  и  $\mu = 10^{-2}$

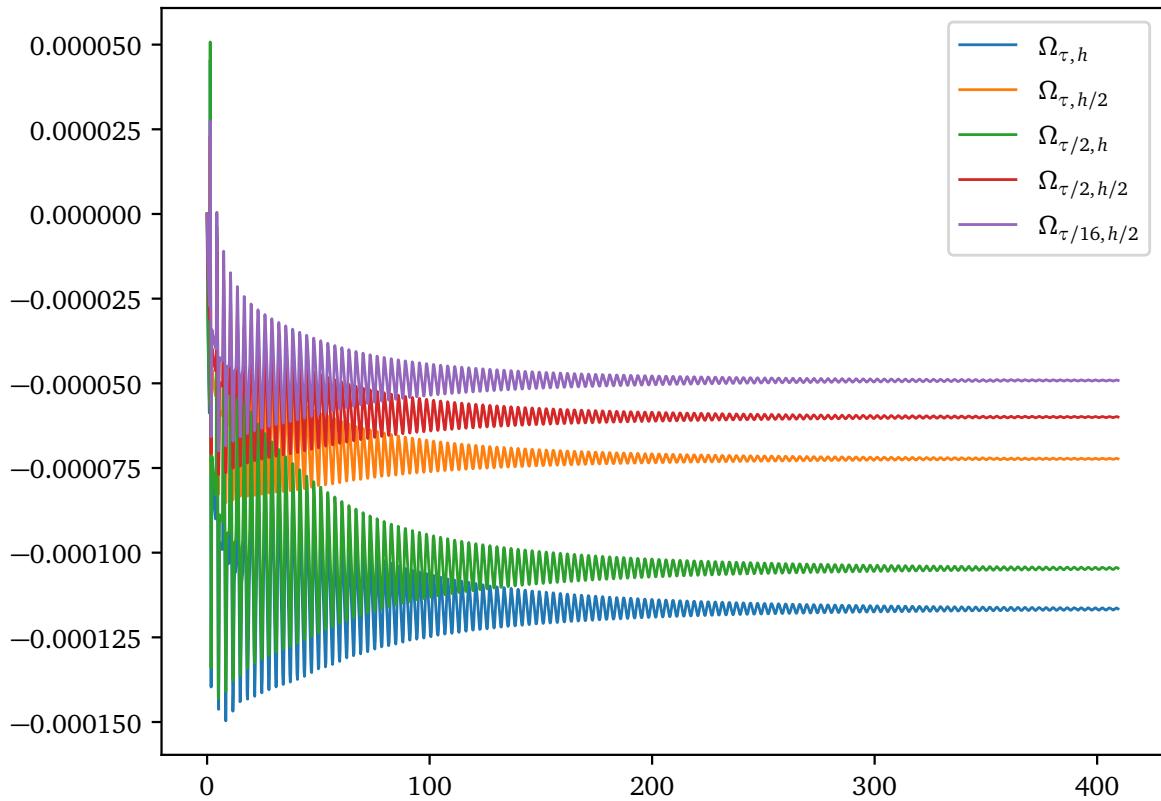


Рис. 59: Графики функций  $\Delta_m$  для  $p(\rho) = 10^1\rho$  и  $\mu = 10^{-1}$

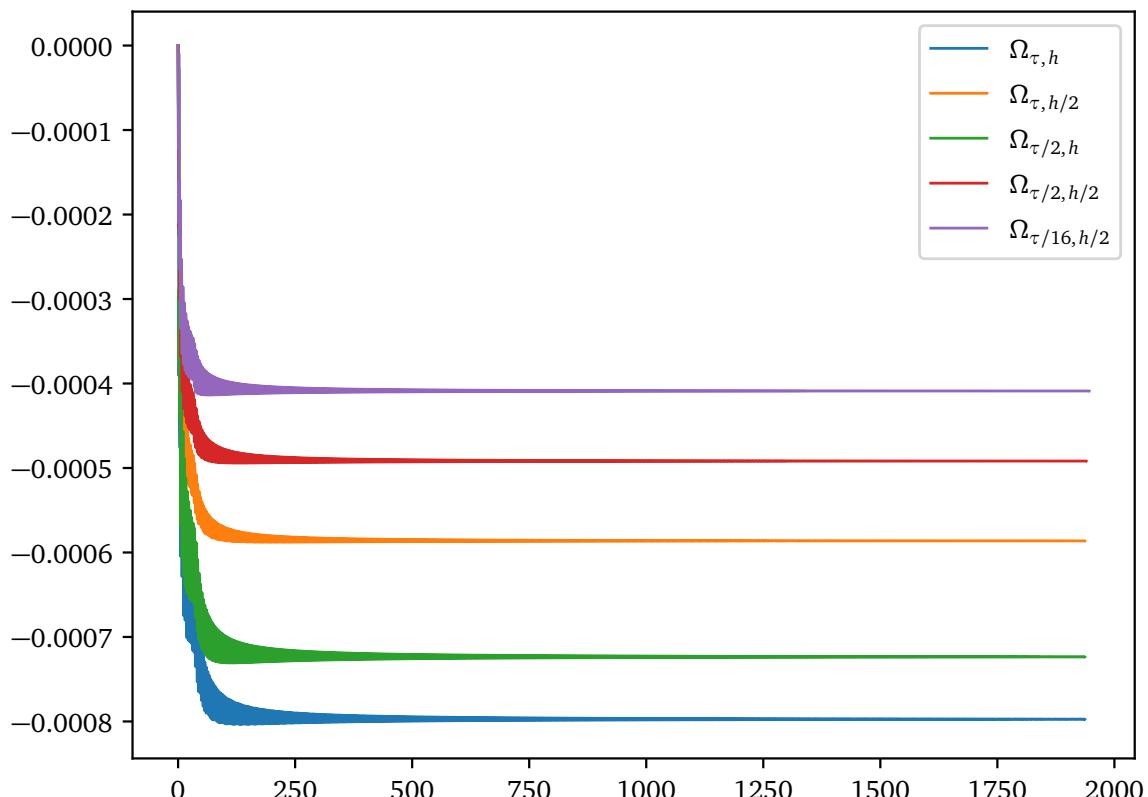


Рис. 60: Графики функций  $\Delta_m$  для  $p(\rho) = 10^1\rho$  и  $\mu = 10^{-2}$

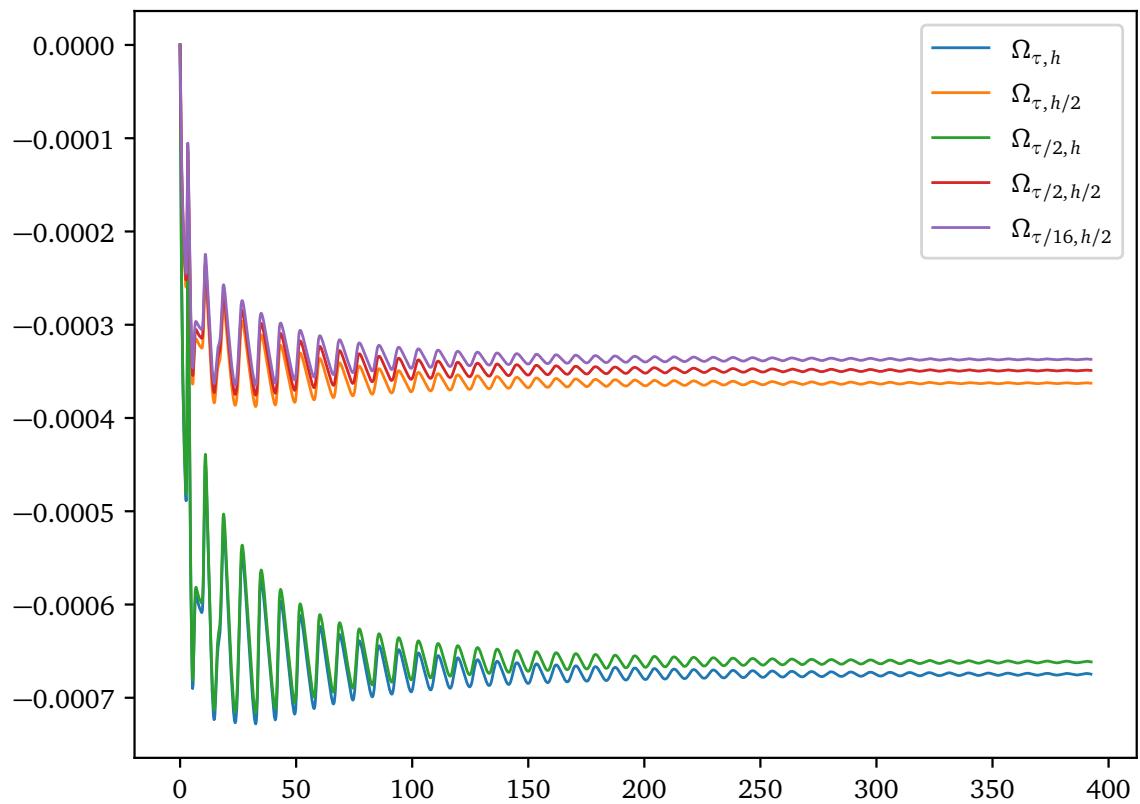


Рис. 61: Графики функций  $\Delta_m$  для  $p(\rho) = \rho^{1.4}$  и  $\mu = 10^{-1}$

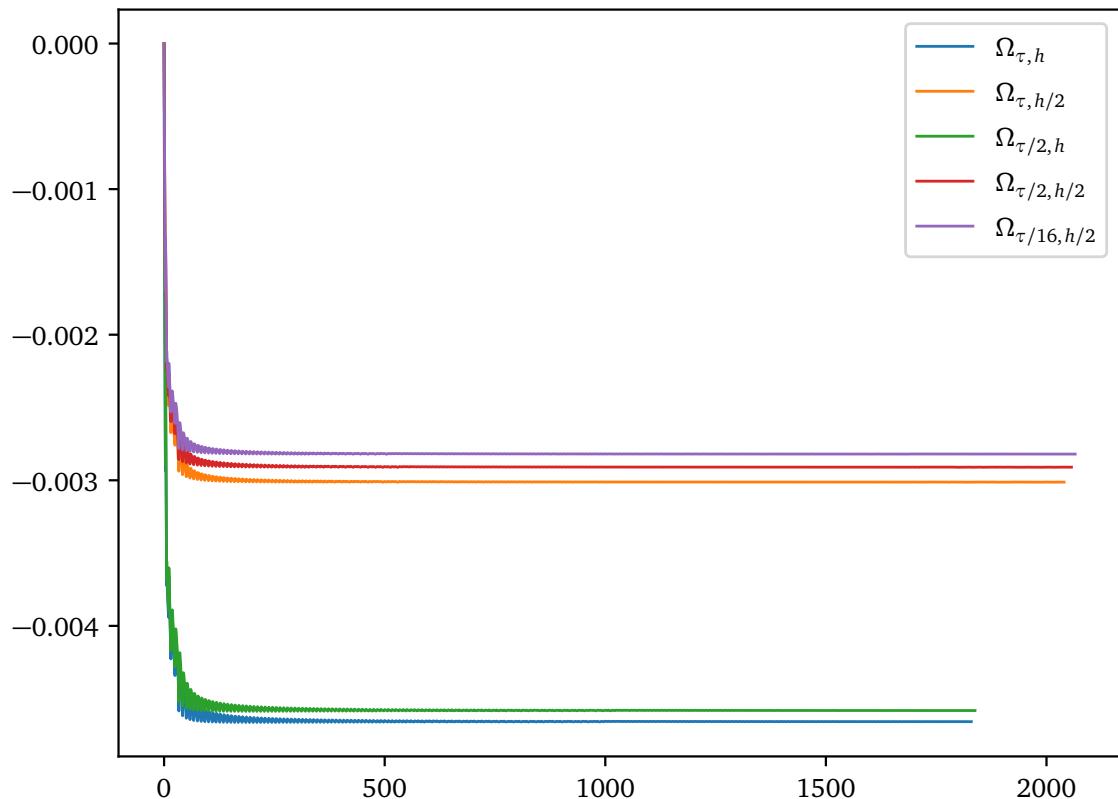


Рис. 62: Графики функций  $\Delta_m$  для  $p(\rho) = \rho^{1.4}$  и  $\mu = 10^{-2}$

#### 5.4.4 Вывод

Потери массы составляют менее 1%. Из этого можно сделать вывод, что закон сохранения массы выполняется с «хорошой» точностью. При этом зависимость  $\Delta_m$  от  $\tau$  незначительна, а от  $h$  линейная.

#### 5.4.5 Динамика процесса

Рассмотрим случай  $\mu = 0.1$ ,  $p(\rho) = 10^0 \rho$ ,  $\tau = h = 10^{-2}$ ,  $\varepsilon = 10^{-3}$ . Далее приведены срезы графиков  $V$  и  $G$  (динамика процесса) в разные моменты времени.

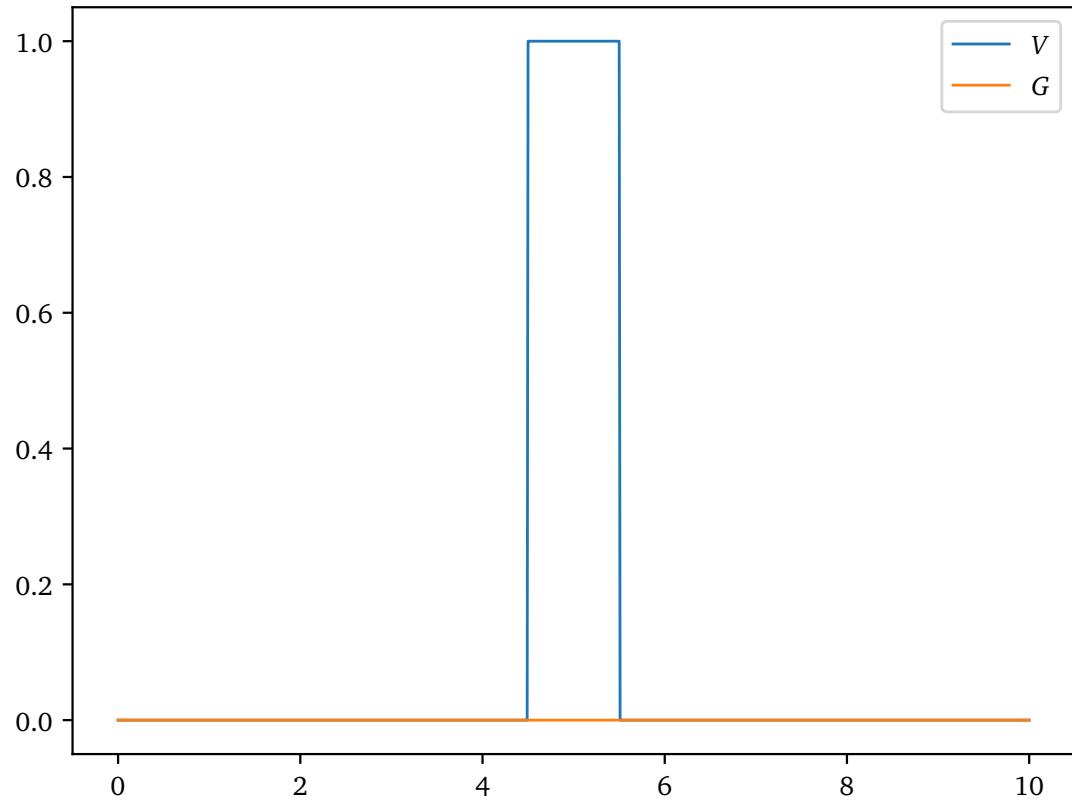


Рис. 63: Срез для  $t = 0.0$

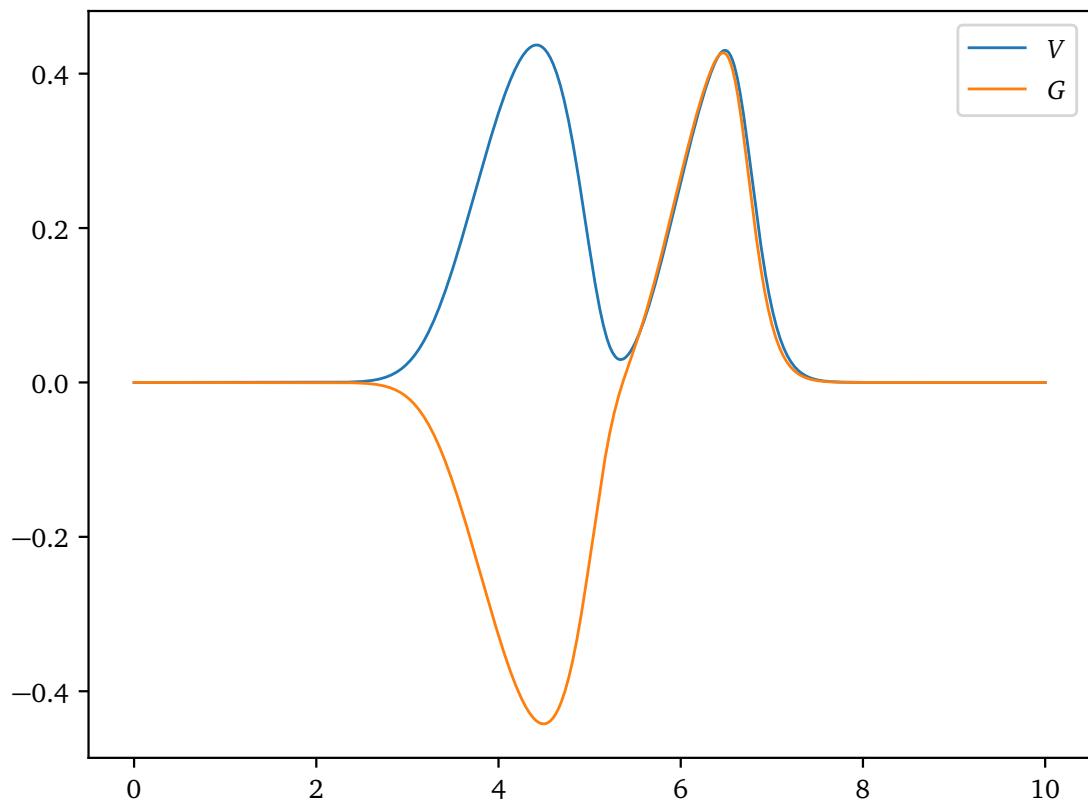


Рис. 64: Срез для  $t = 1.0$

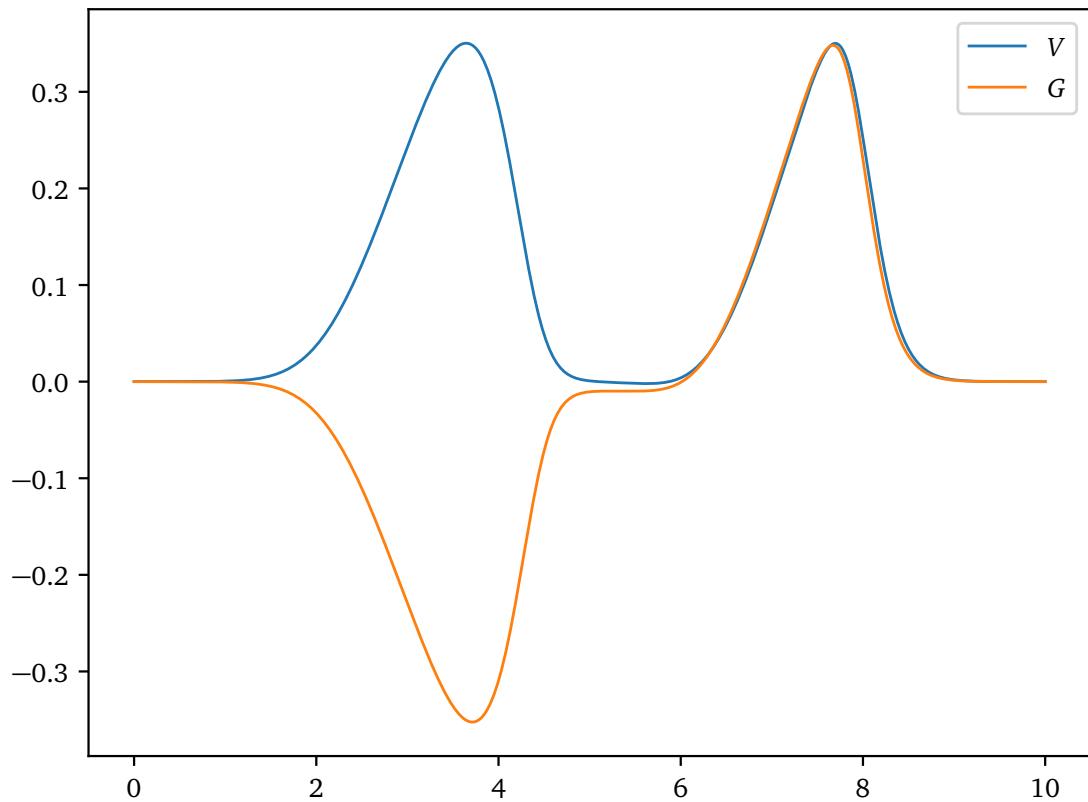


Рис. 65: Срез для  $t = 2.0$

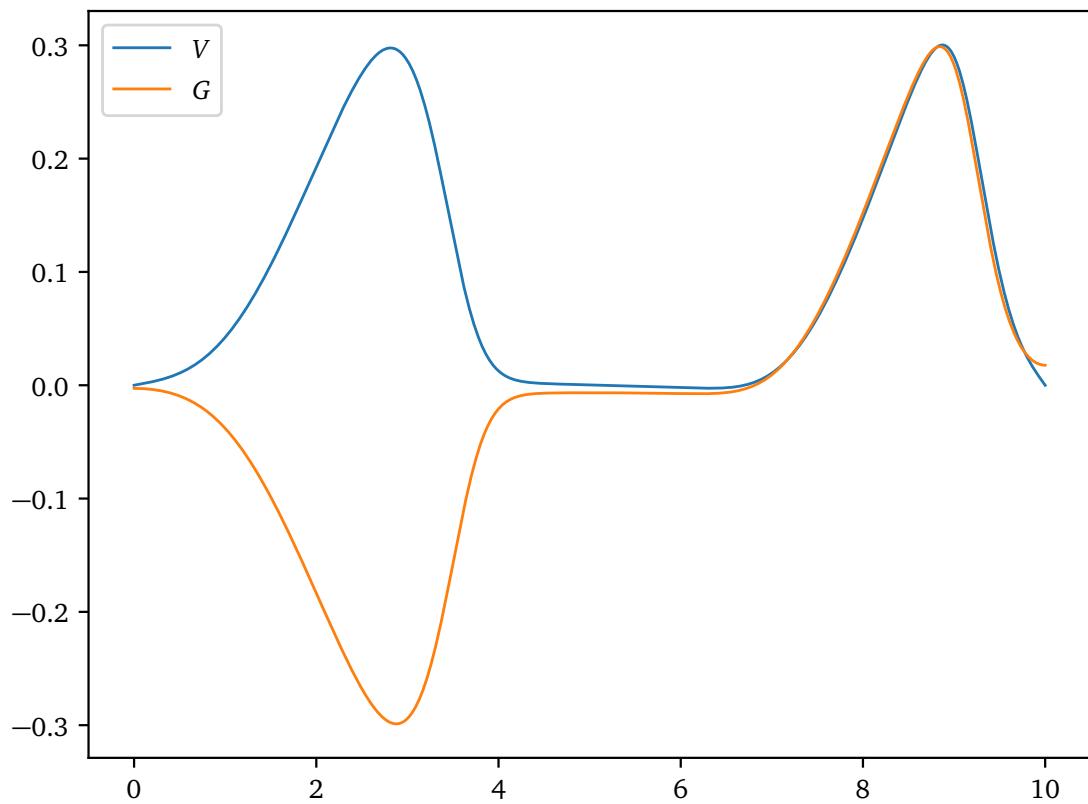


Рис. 66: Срез для  $t = 3.0$

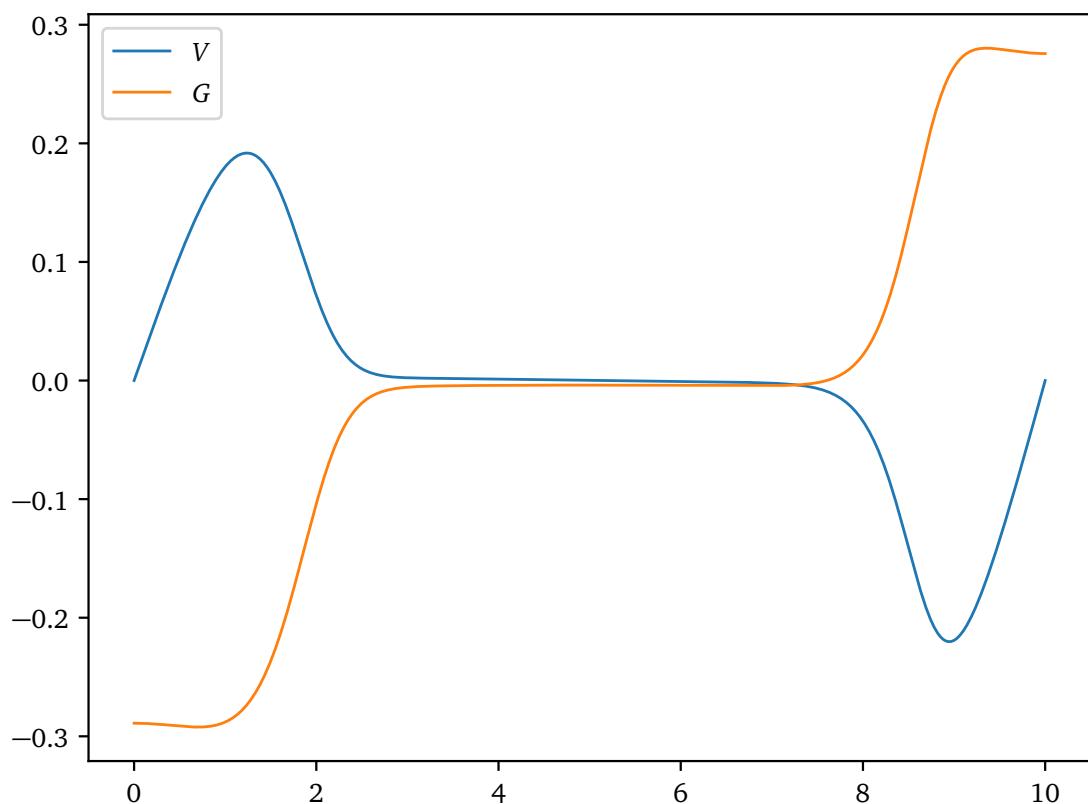


Рис. 67: Срез для  $t = 5.0$

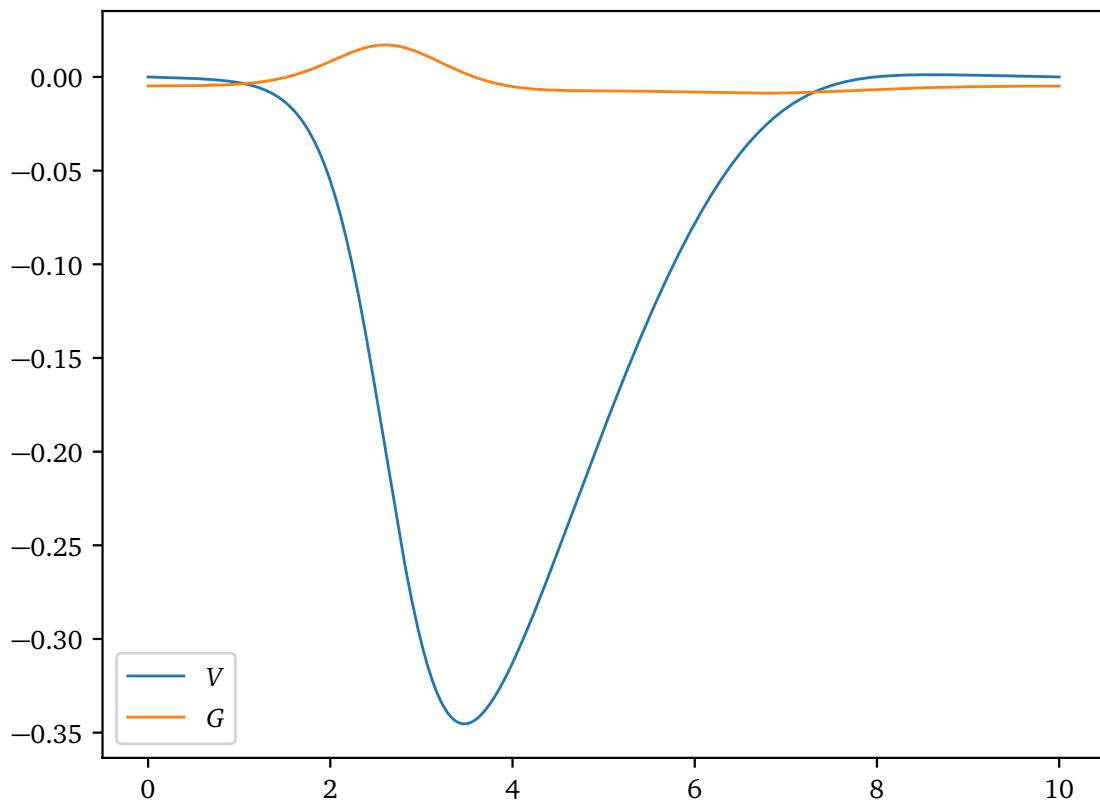


Рис. 68: Срез для  $t = 10.0$

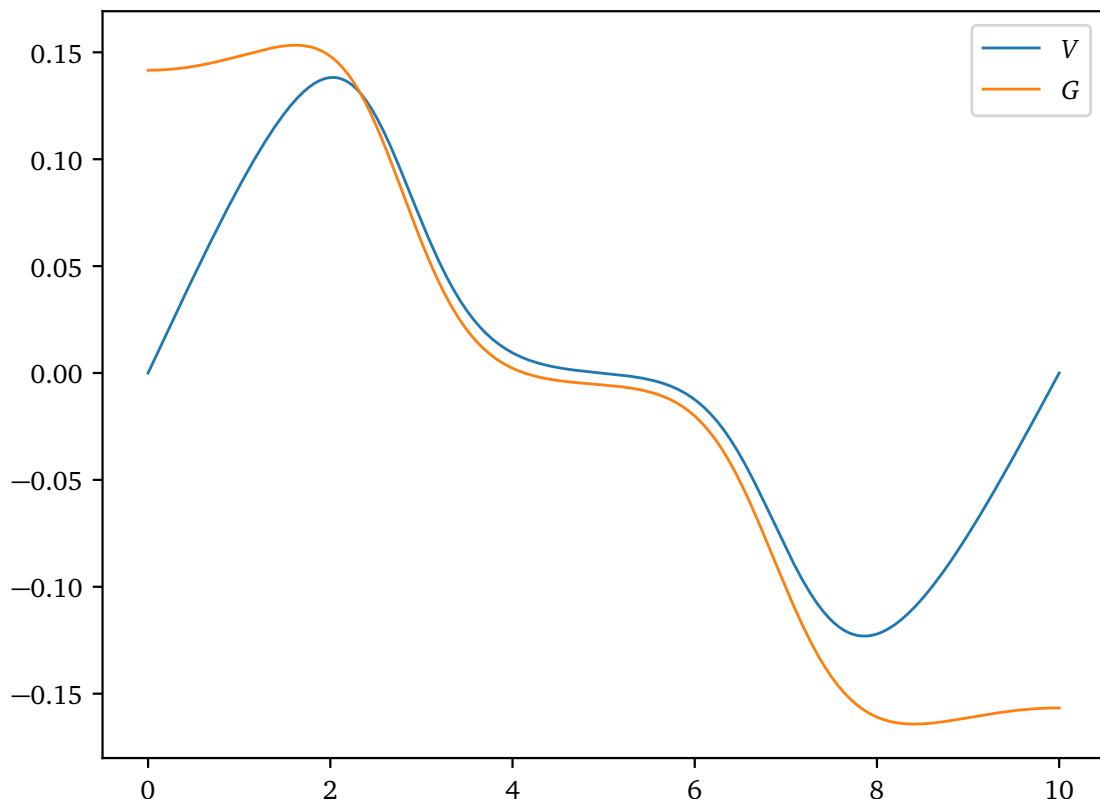


Рис. 69: Срез для  $t = 15.0$

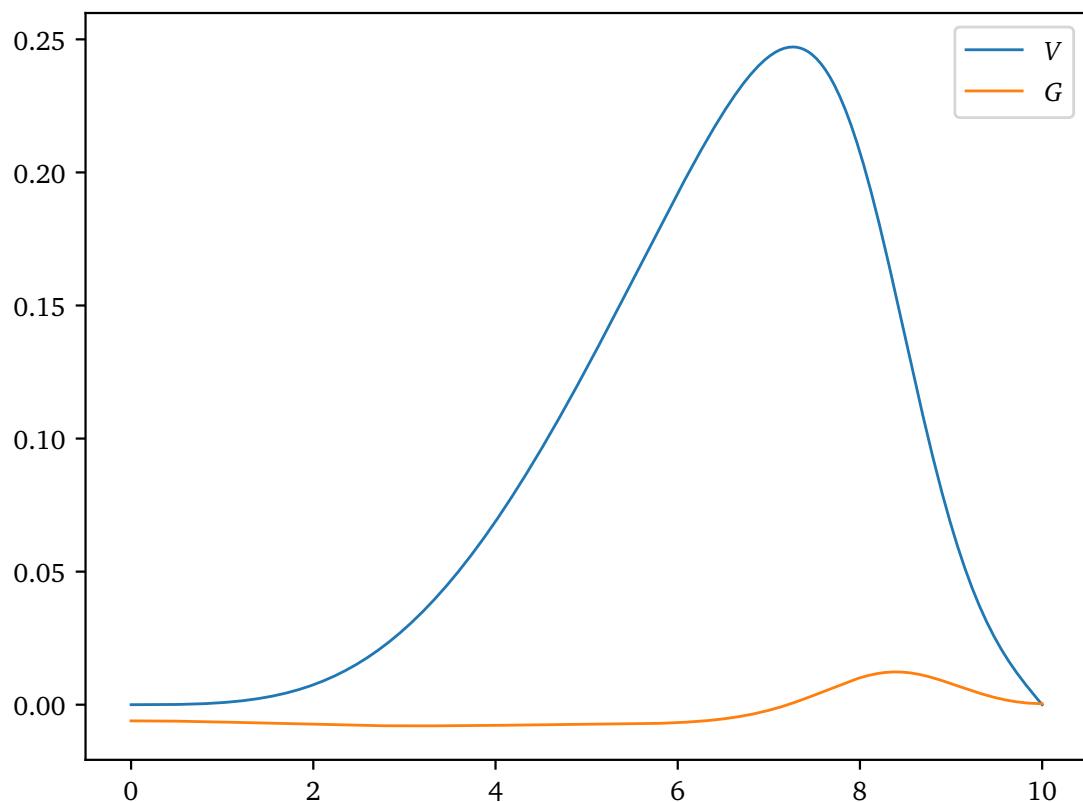


Рис. 70: Срез для  $t = 20.0$

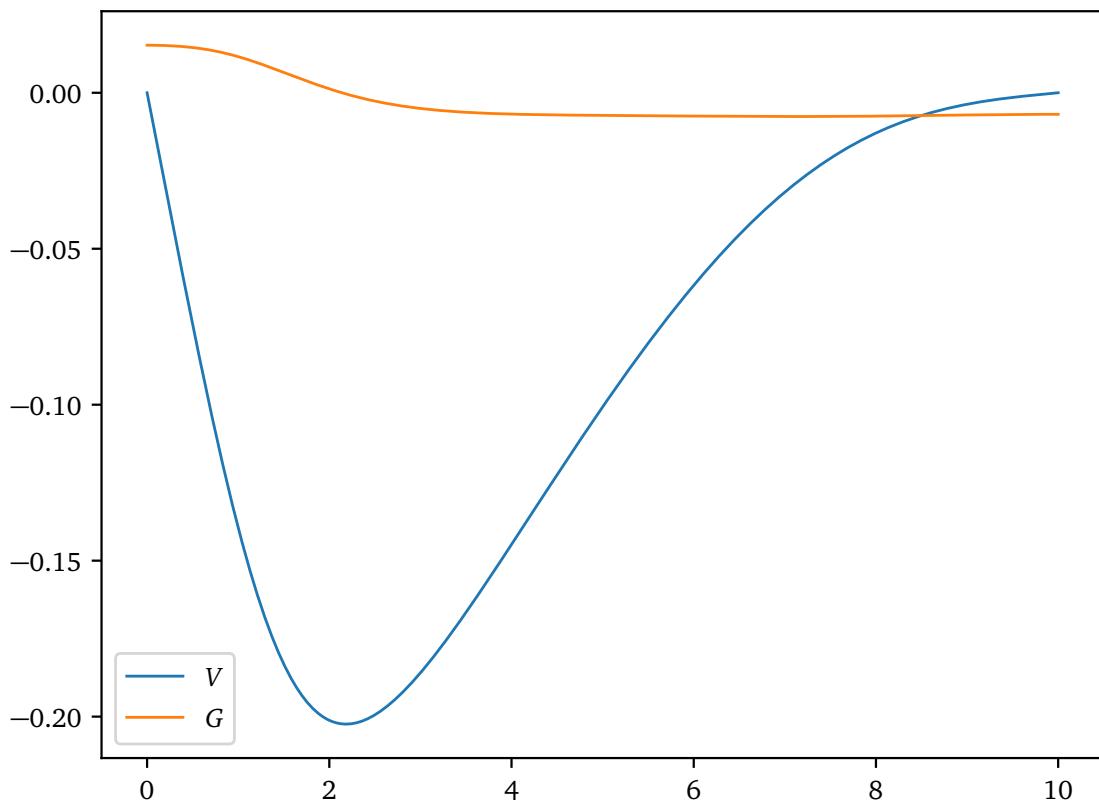


Рис. 71: Срез для  $t = 30.0$

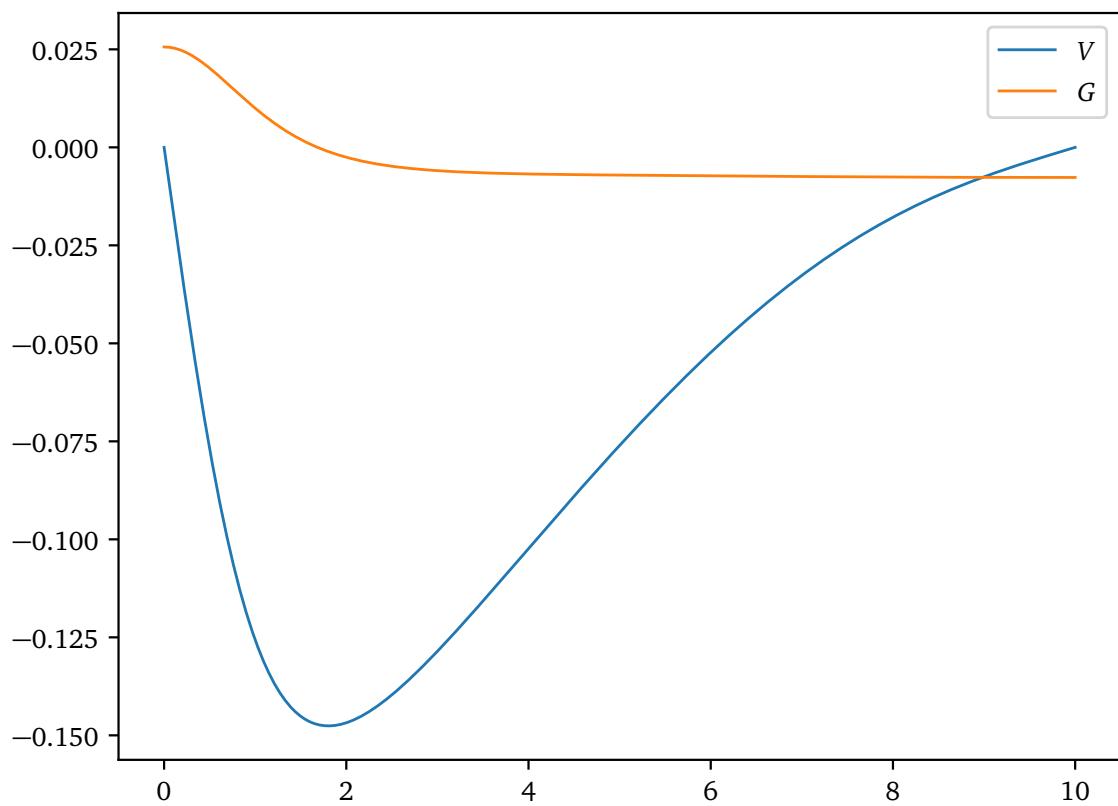


Рис. 72: Срез для  $t = 50.0$

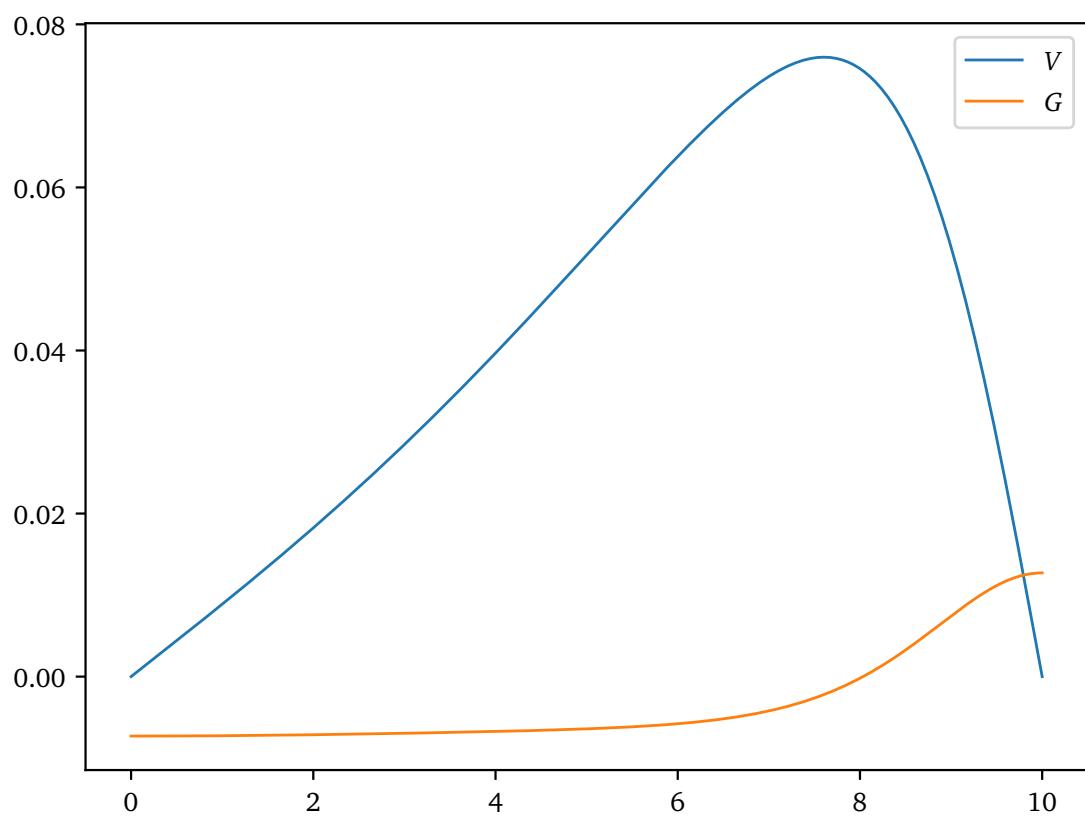


Рис. 73: Срез для  $t = 100.0$

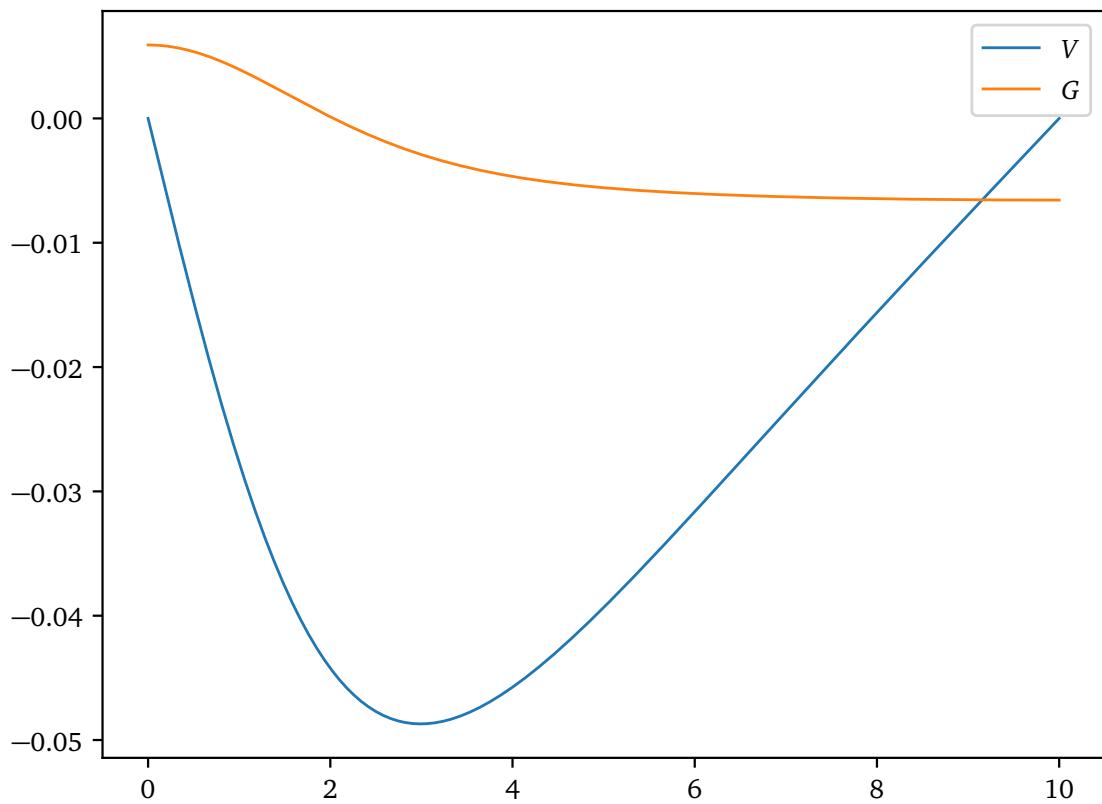


Рис. 74: Срез для  $t = 150.0$

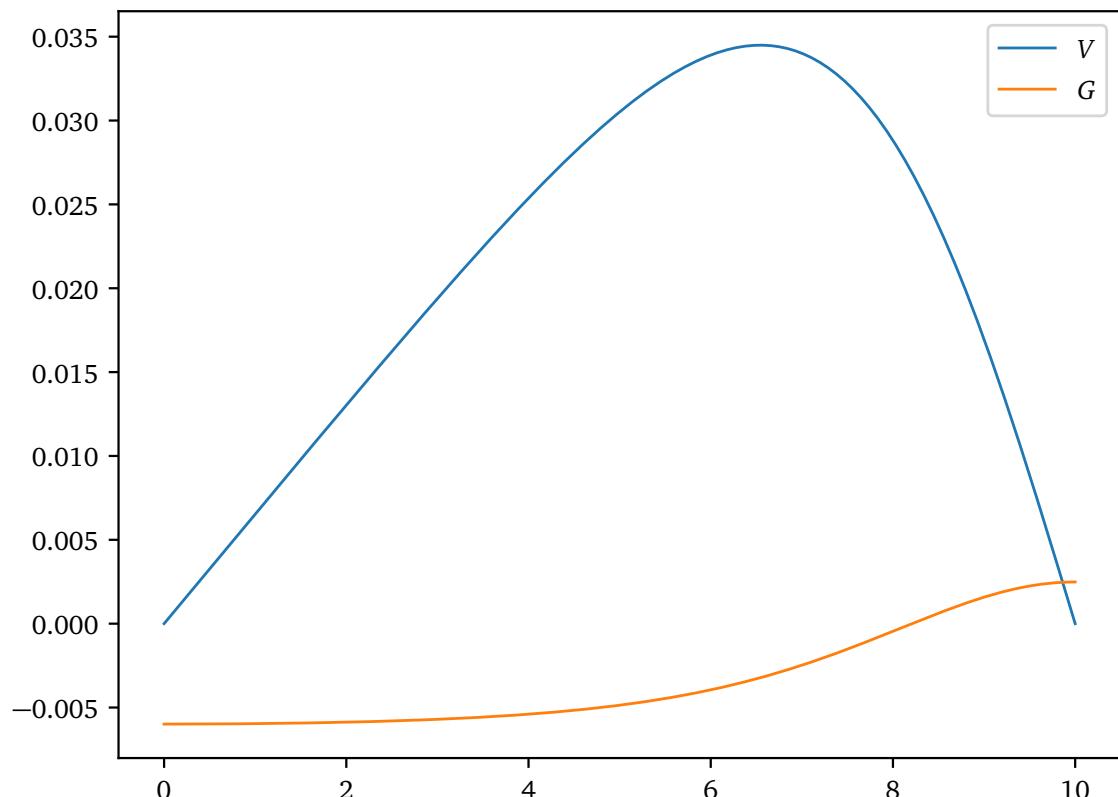


Рис. 75: Срез для  $t = 200.0$

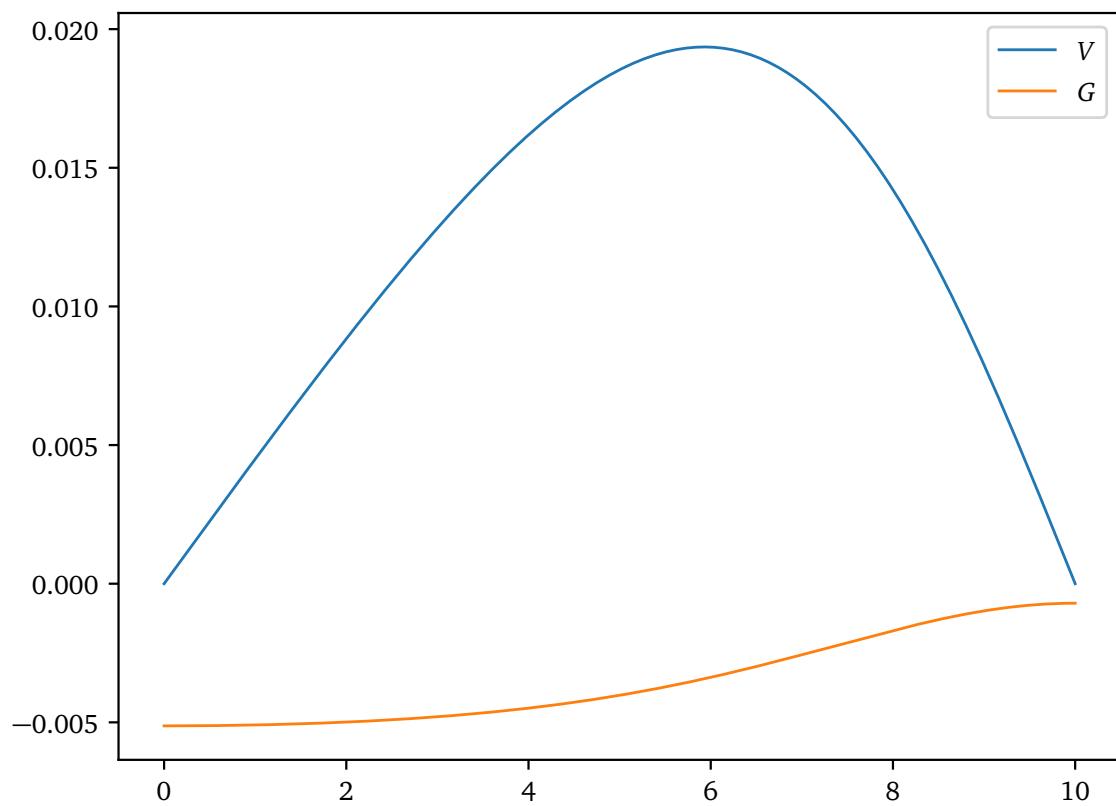


Рис. 76: Срез для  $t = 300.0$

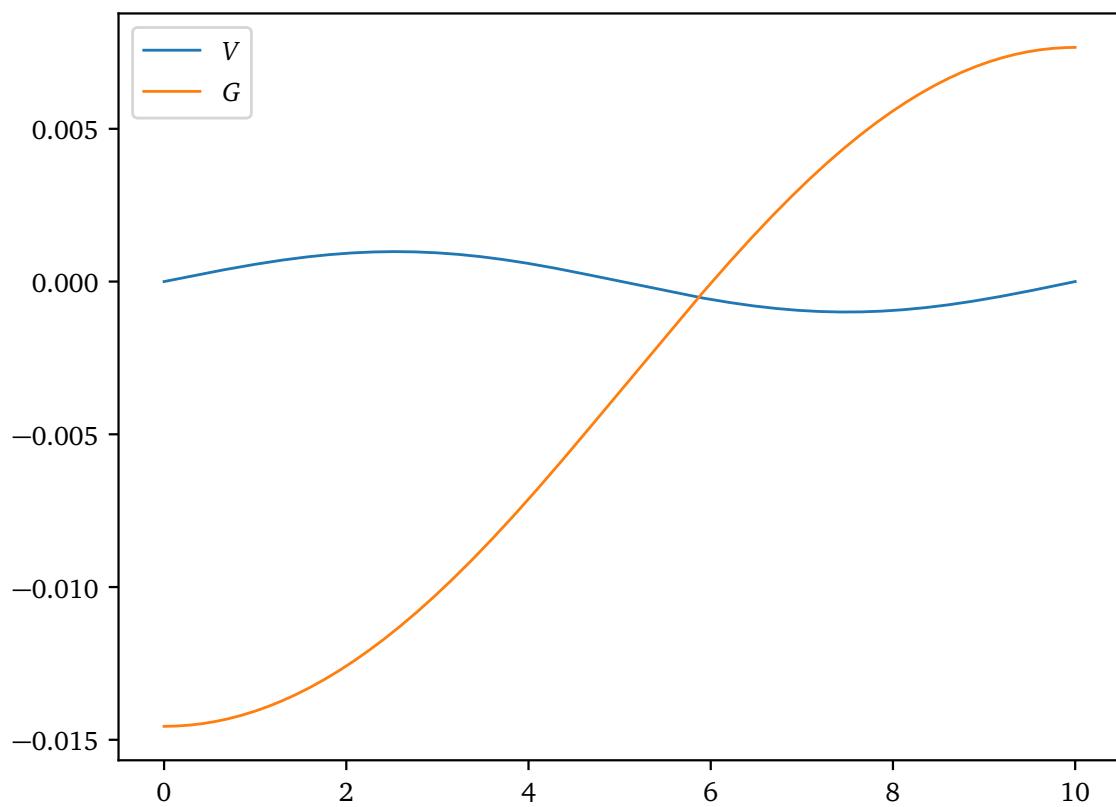


Рис. 77: Срез для  $t = 404.62$

Рассмотрим графики  $V$  и  $G$ .

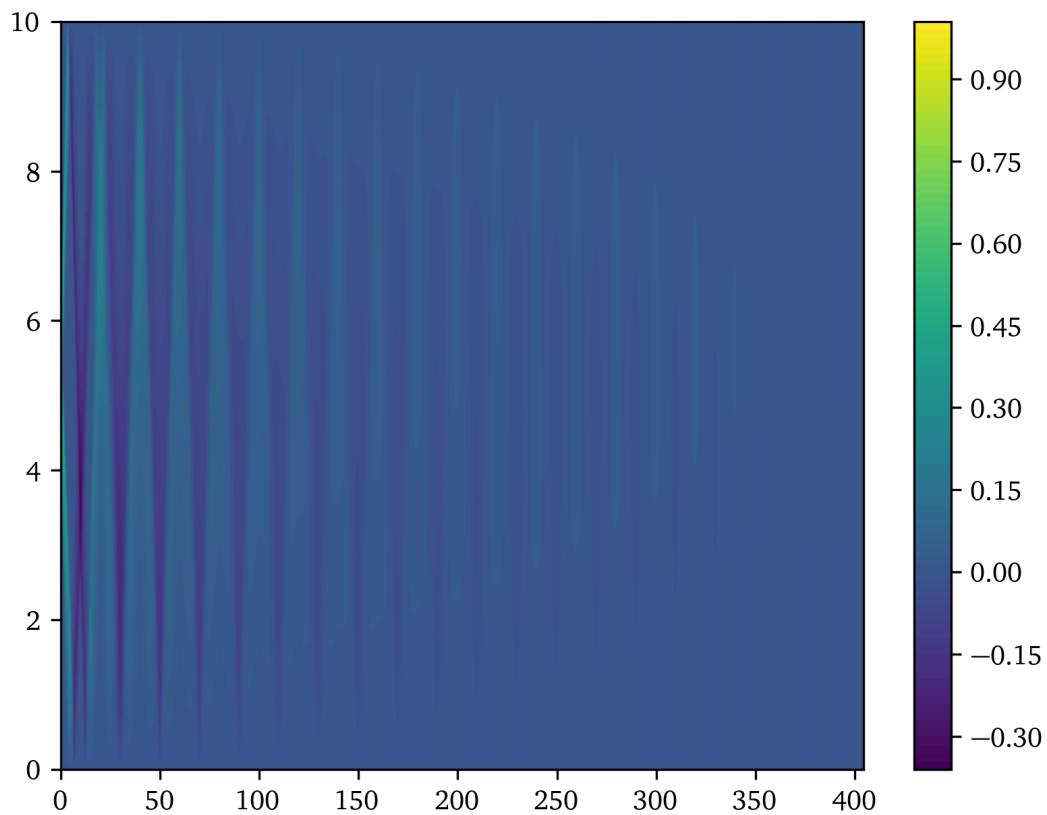


Рис. 78: График  $V$  для  $T = N_0\tau$  при  $p(\rho) = 10^0\rho$  и  $\mu = 10^{-1}$

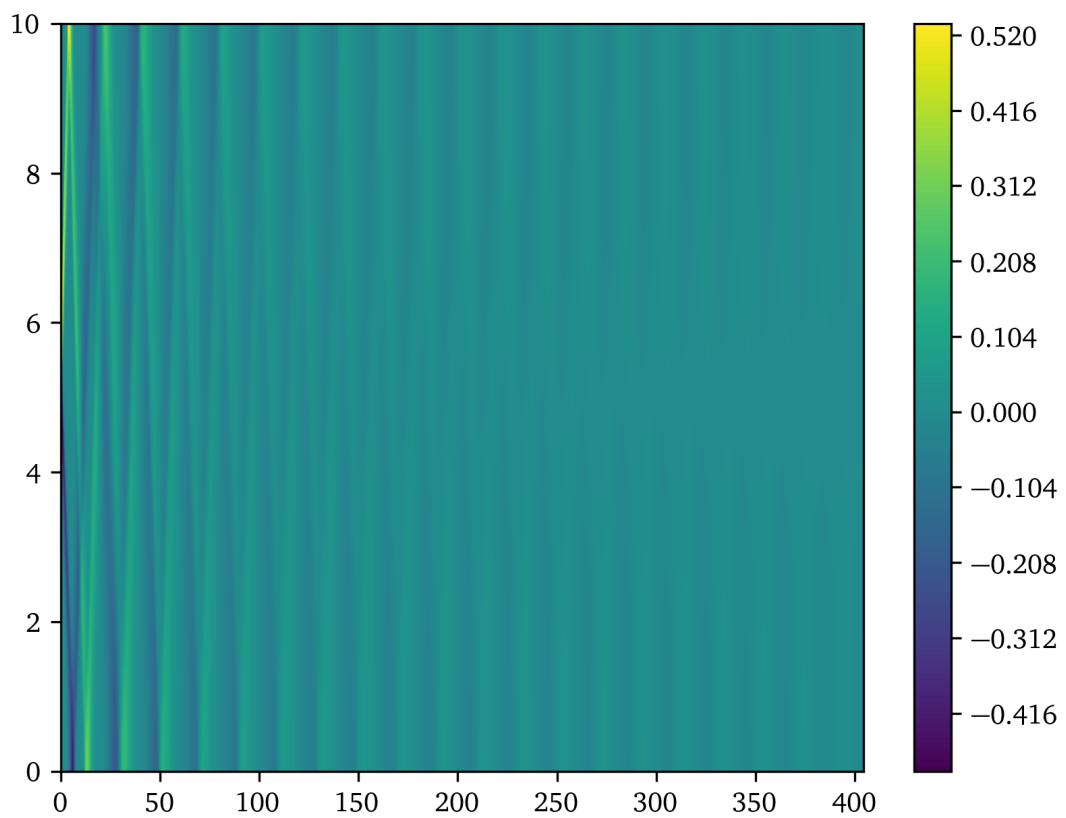


Рис. 79: График  $G$  для  $T = N_0\tau$  при  $p(\rho) = 10^0\rho$  и  $\mu = 10^{-1}$

Для изучения зависимости периода от параметров  $\mu$  и  $C$  рассмотрим графики  $V$  и  $G$  для  $T = 100.0$

при различных их значениях.

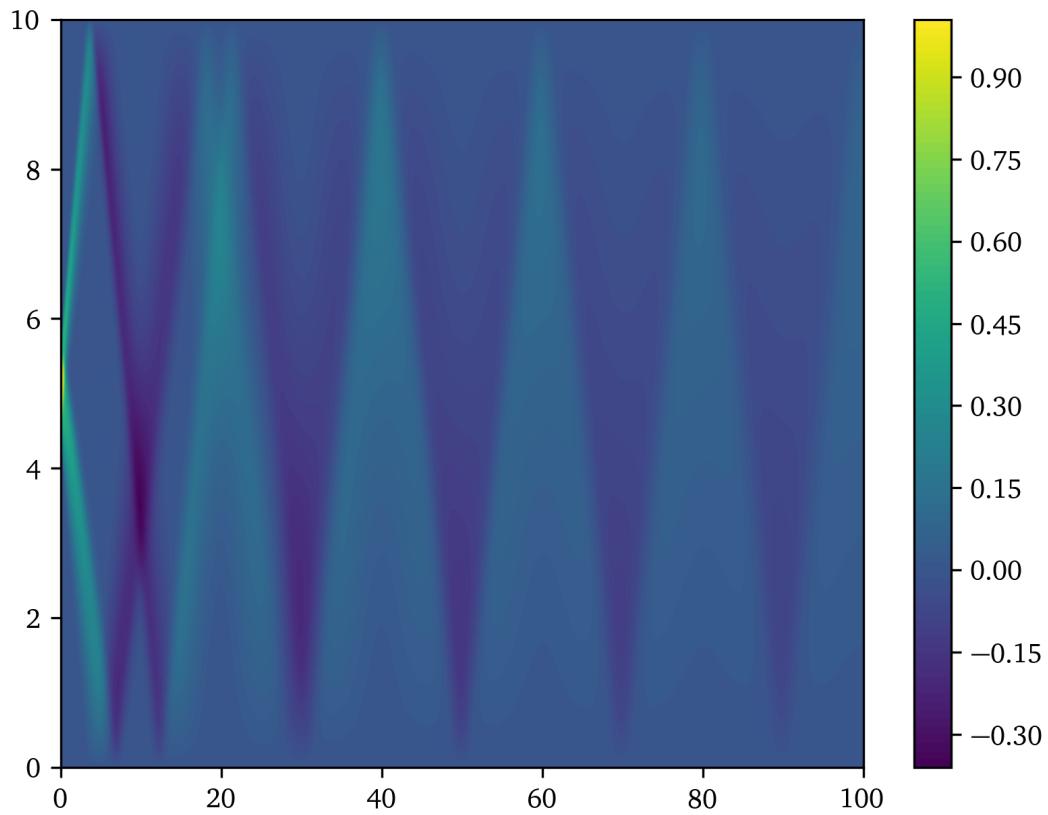


Рис. 80: График  $V$  для  $T = 100.0$  при  $p(\rho) = 10^0 \rho$  и  $\mu = 10^{-1}$

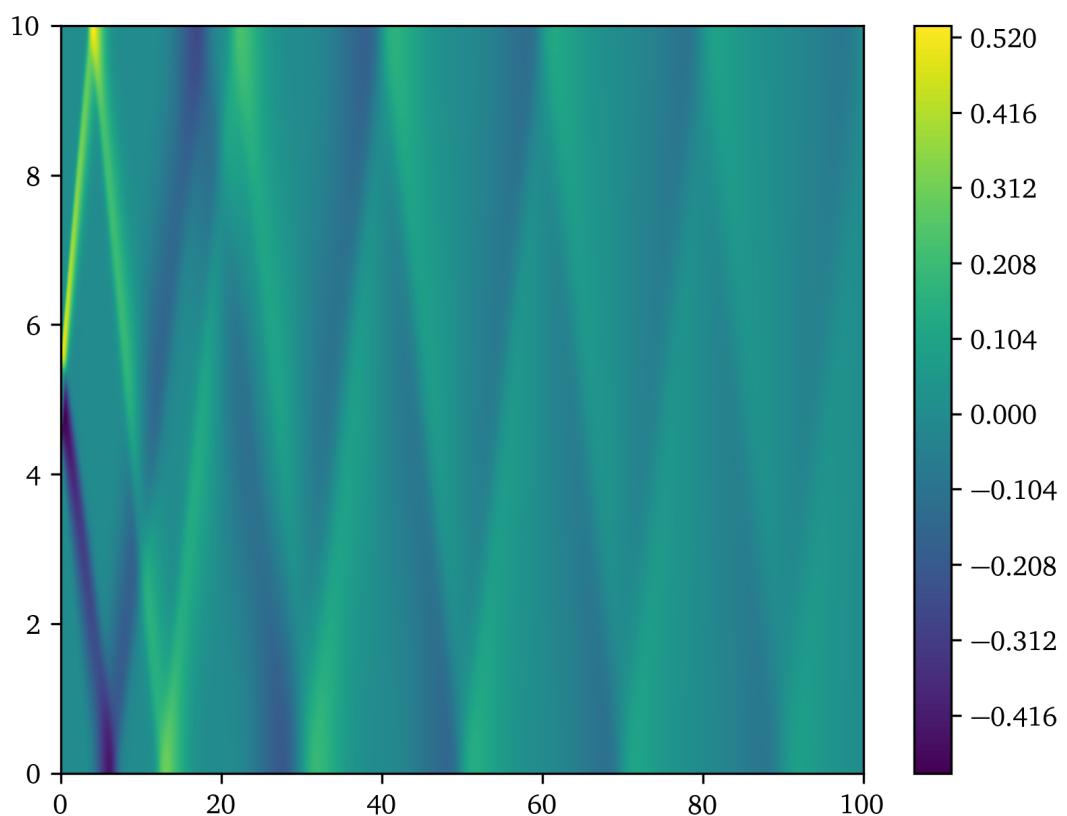


Рис. 81: График  $G$  для  $T = 100.0$  при  $p(\rho) = 10^0 \rho$  и  $\mu = 10^{-1}$

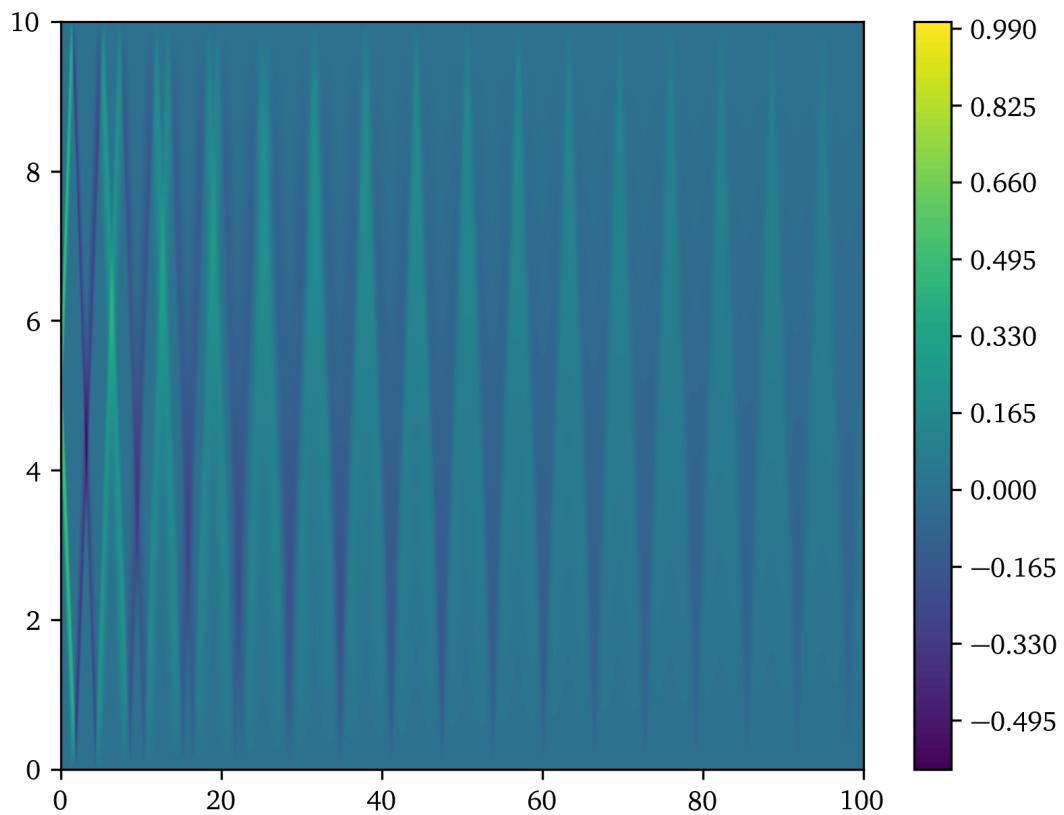


Рис. 82: График  $V$  для  $T = 100.0$  при  $p(\rho) = 10^1\rho$  и  $\mu = 10^{-1}$

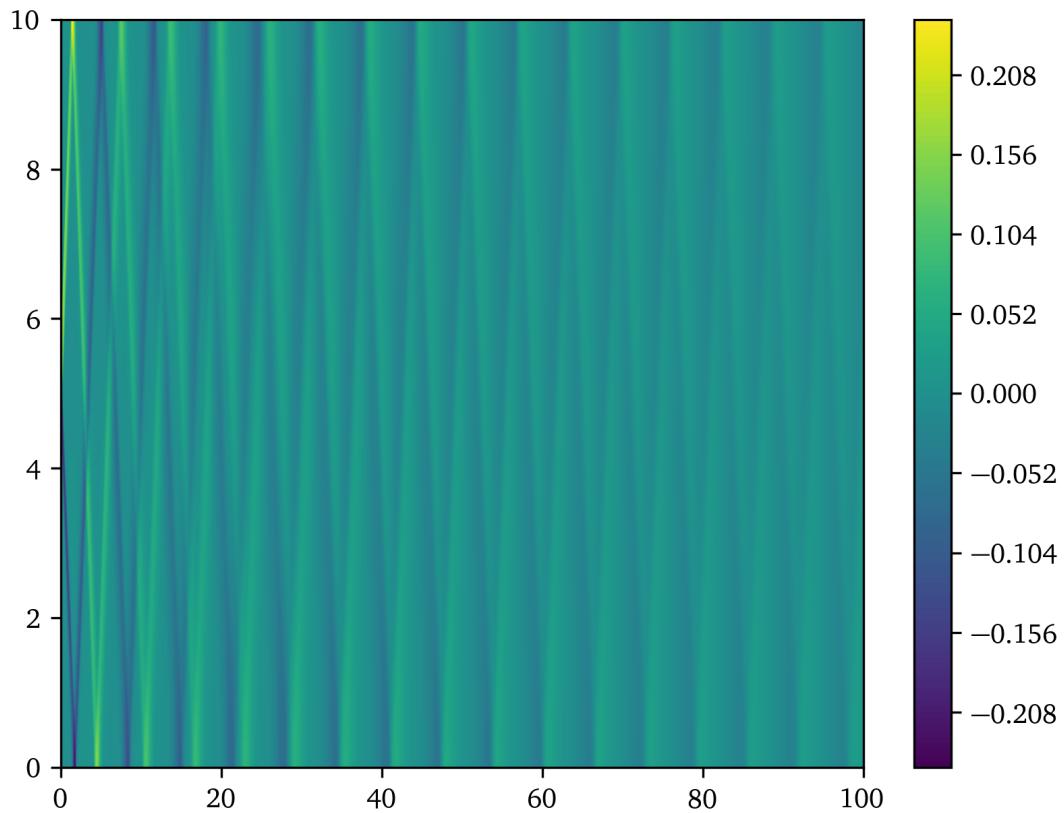


Рис. 83: График  $G$  для  $T = 100.0$  при  $p(\rho) = 10^1\rho$  и  $\mu = 10^{-1}$

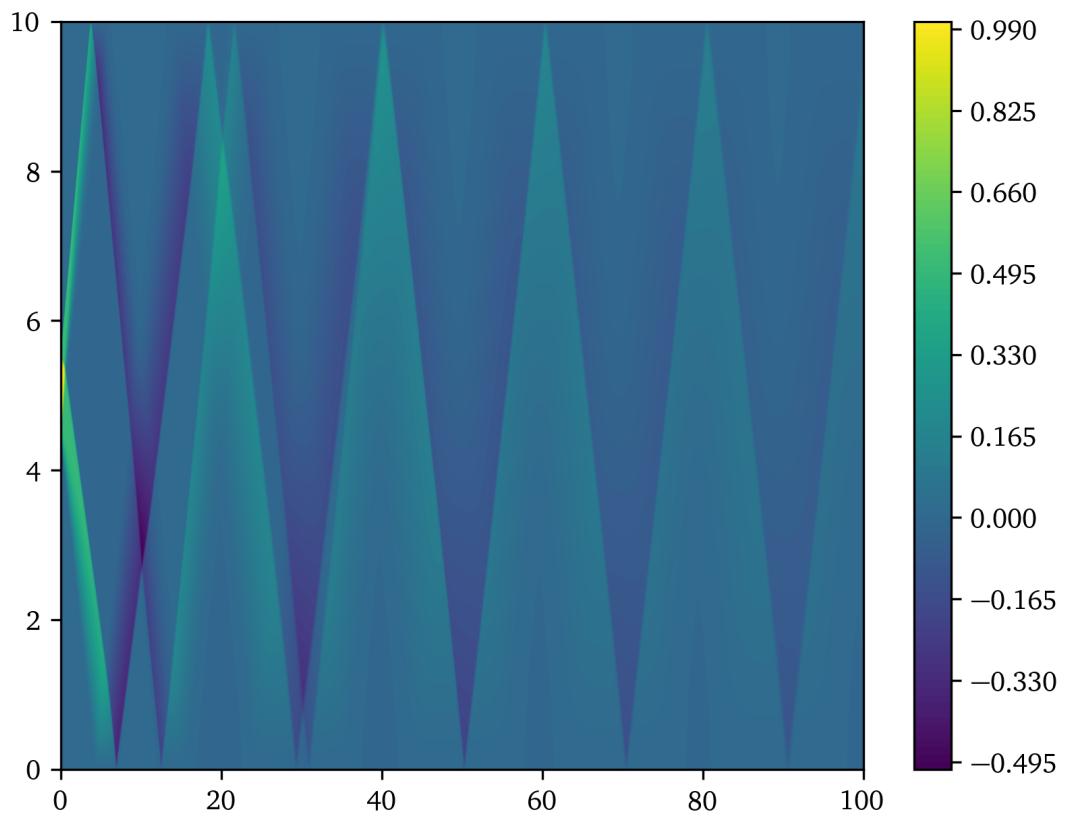


Рис. 84: График  $V$  для  $T = 100.0$  при  $p(\rho) = 10^0\rho$  и  $\mu = 10^{-2}$

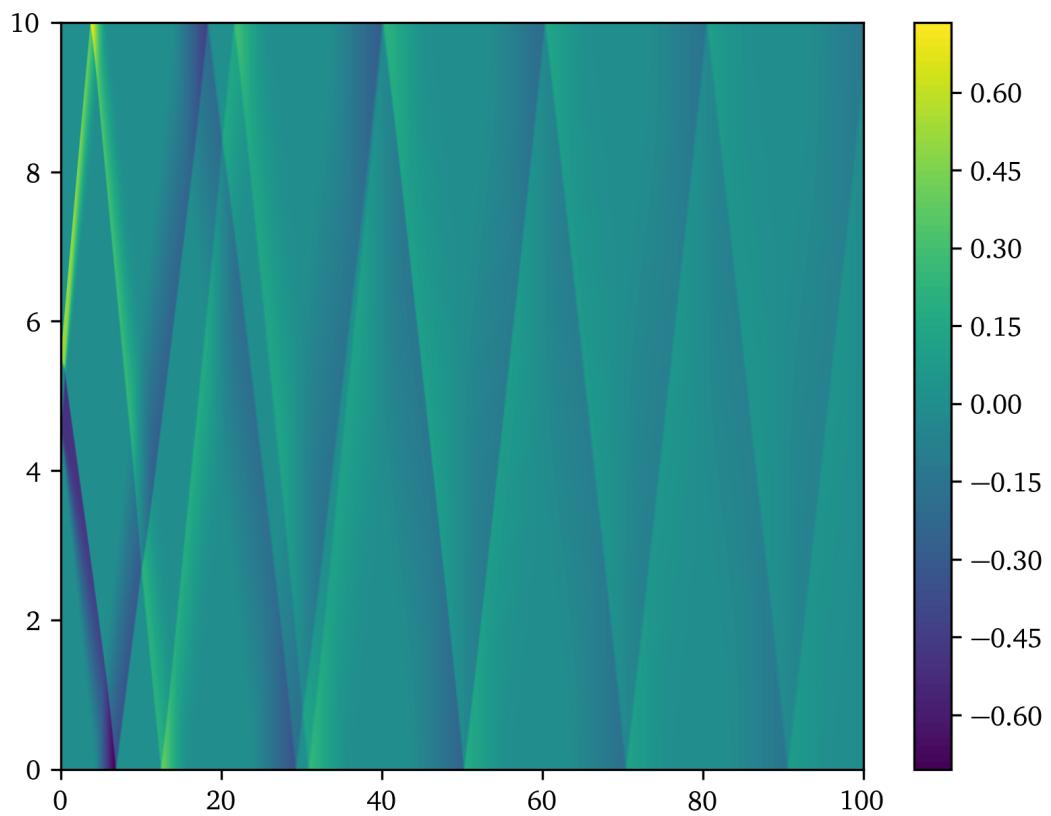


Рис. 85: График  $G$  для  $T = 100.0$  при  $p(\rho) = 10^0\rho$  и  $\mu = 10^{-2}$

Рассмотрим случай  $\mu = 0.1$ ,  $p(\rho) = \rho^{1.4}$ ,  $\tau = h = 10^{-2}$ ,  $\varepsilon = 10^{-3}$ . Далее приведены срезы графиков  $V$  и

$G$  (динамика процесса) в разные моменты времени.

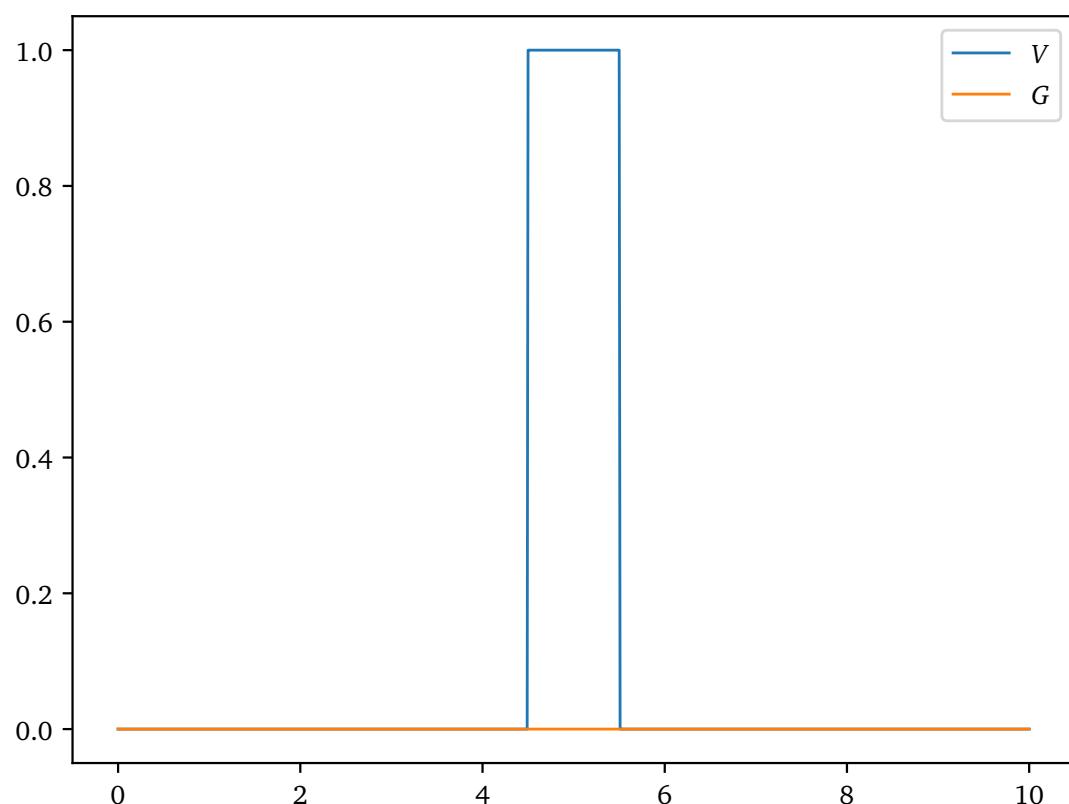


Рис. 86: Срез для  $t = 0.0$

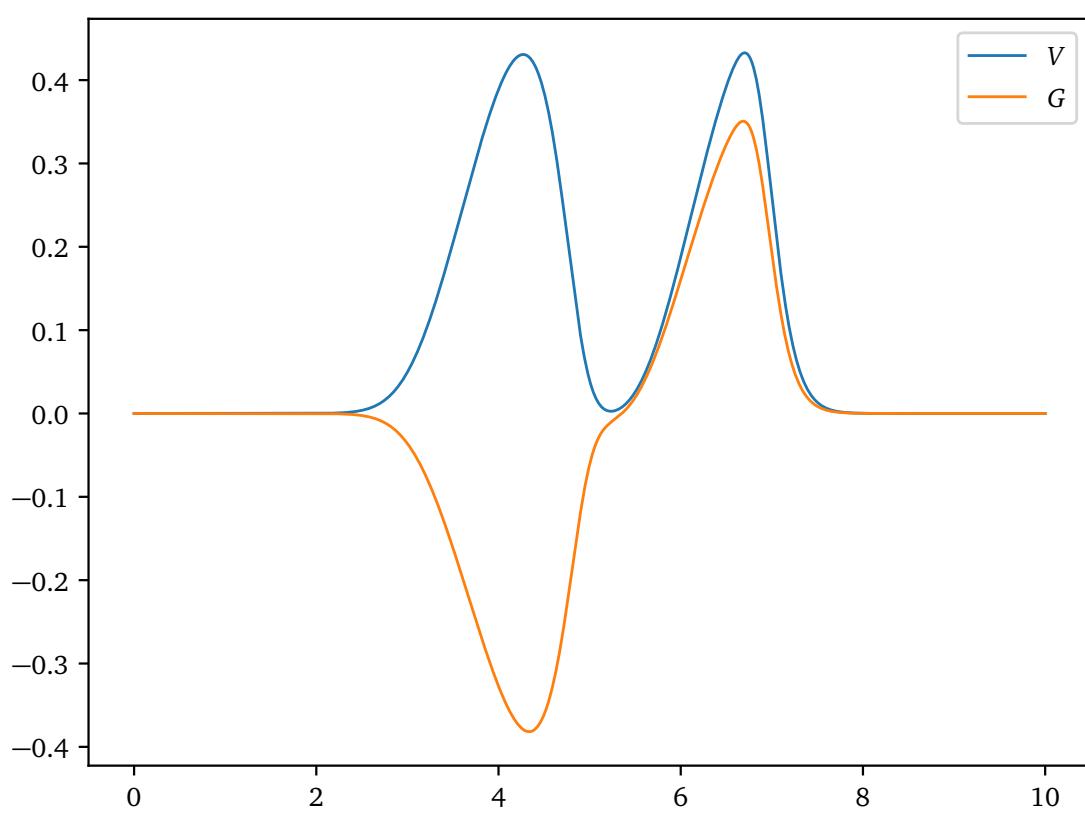


Рис. 87: Срез для  $t = 1.0$

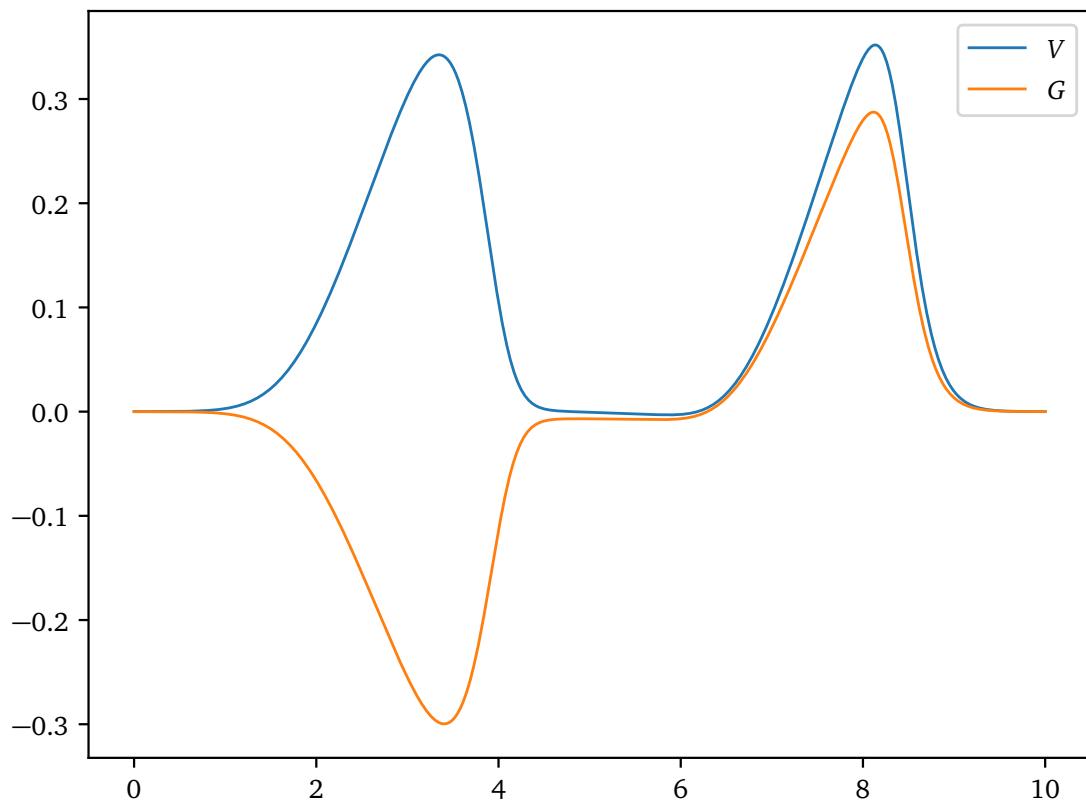


Рис. 88: Срез для  $t = 2.0$

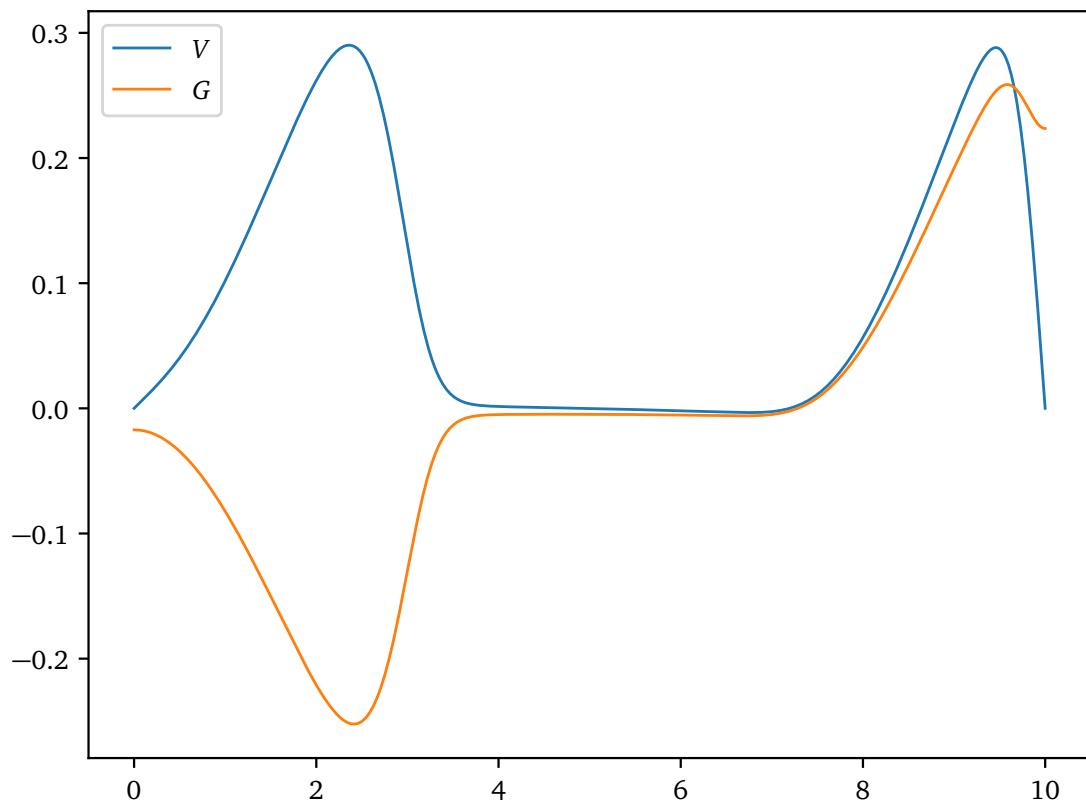


Рис. 89: Срез для  $t = 3.0$

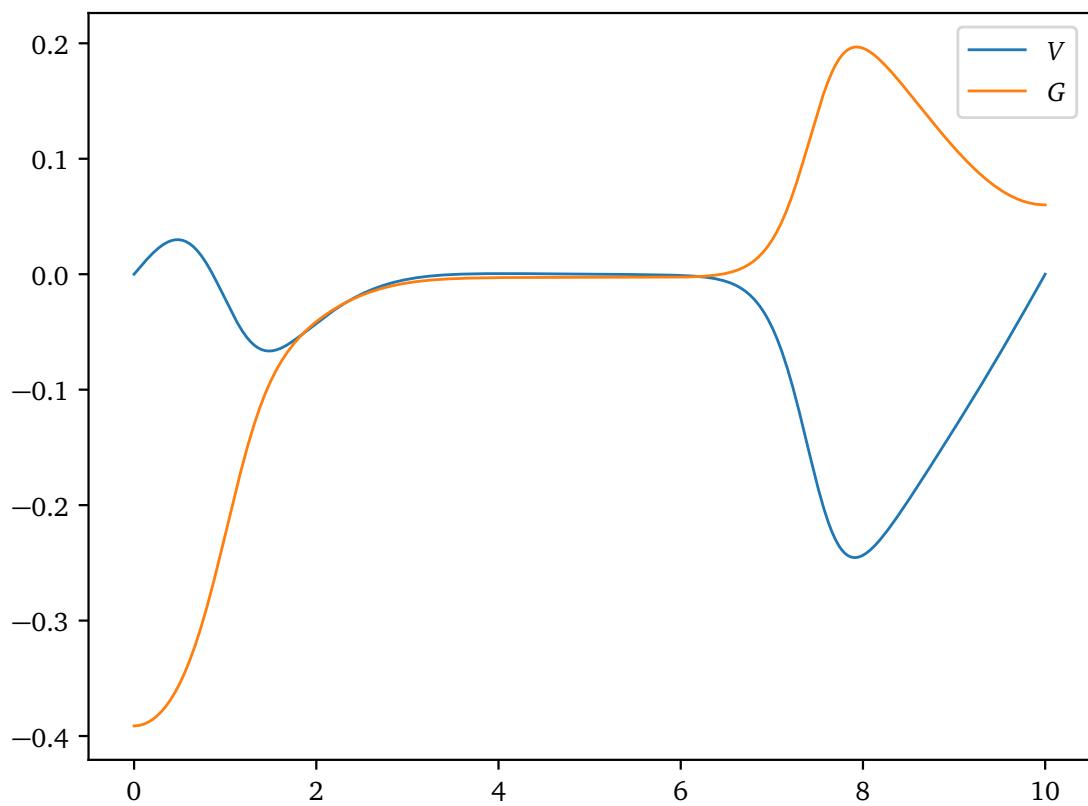


Рис. 90: Срез для  $t = 5.0$

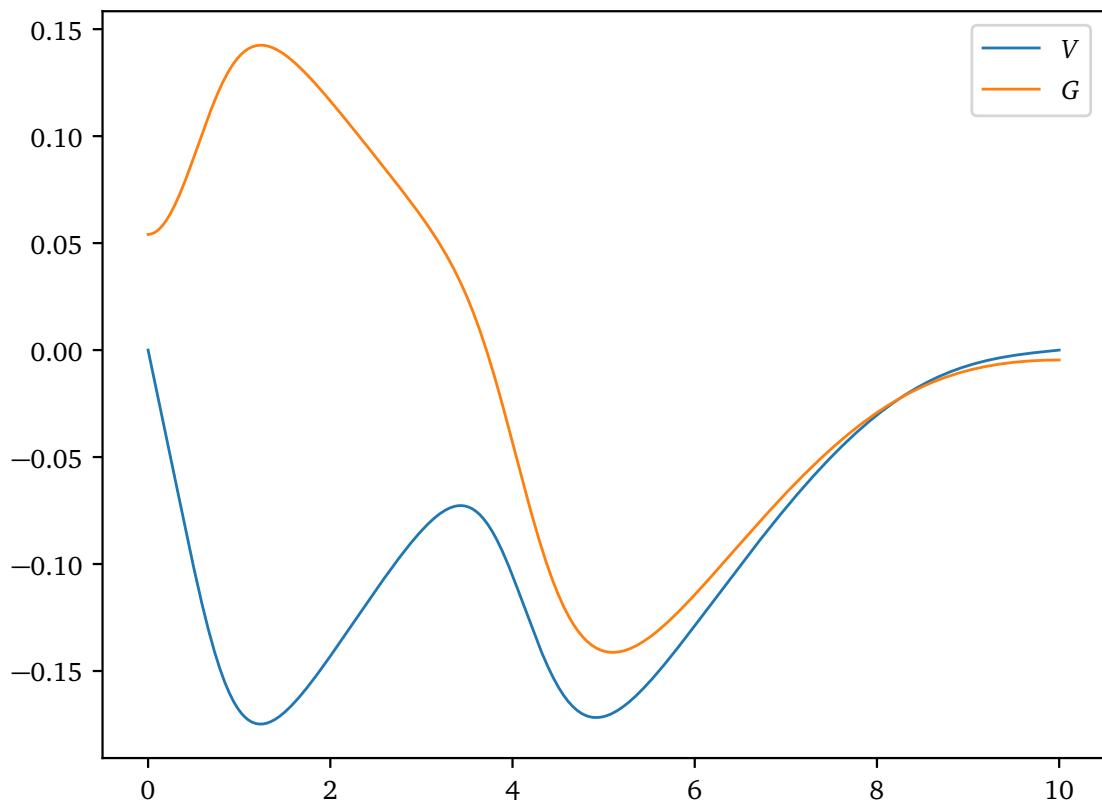


Рис. 91: Срез для  $t = 10.0$

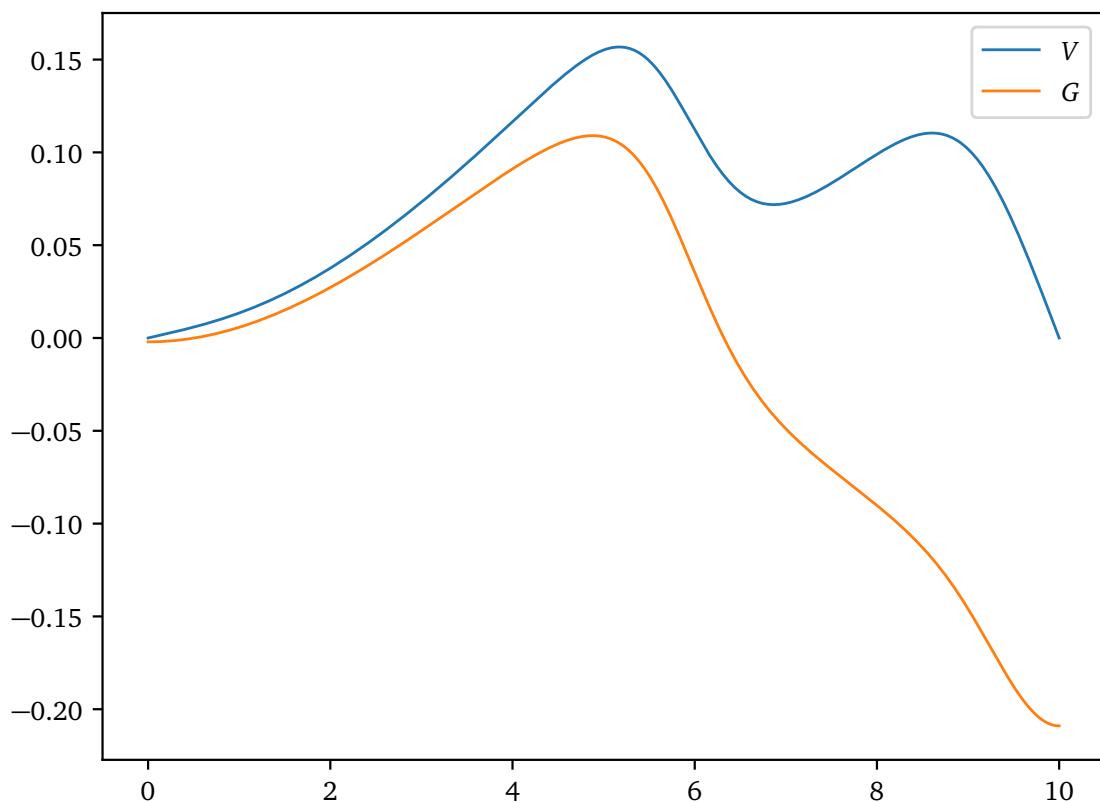


Рис. 92: Срез для  $t = 15.0$

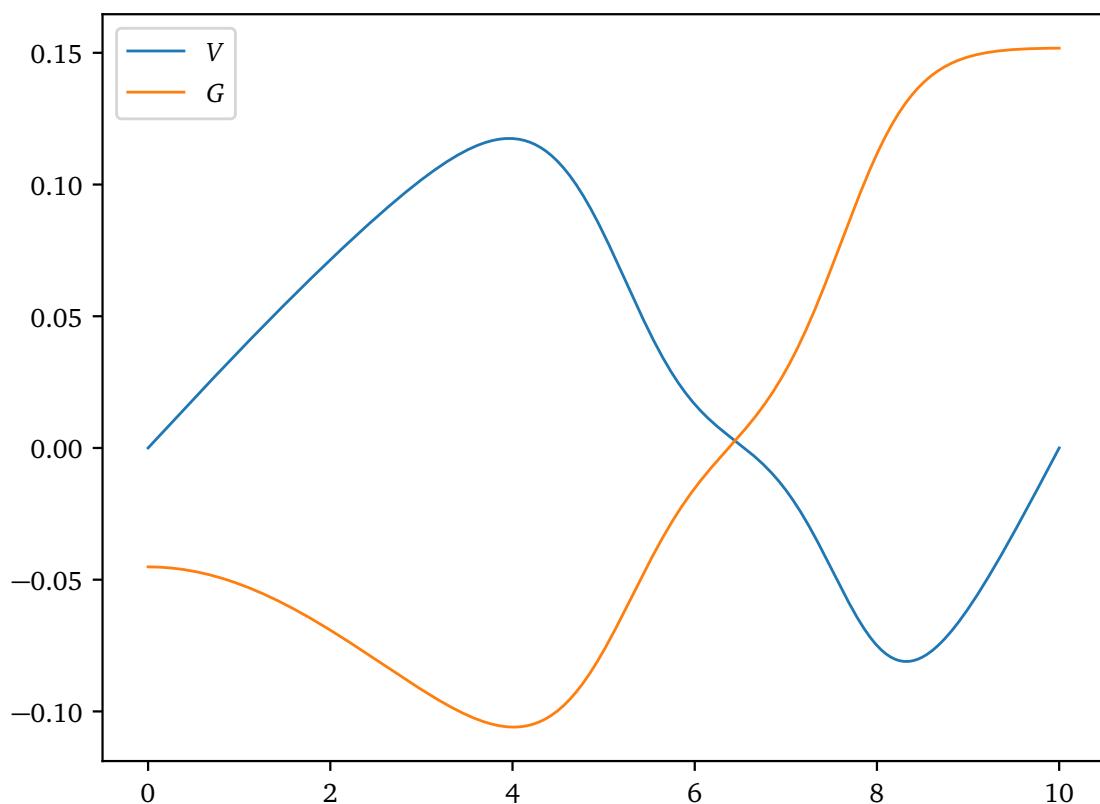


Рис. 93: Срез для  $t = 20.0$

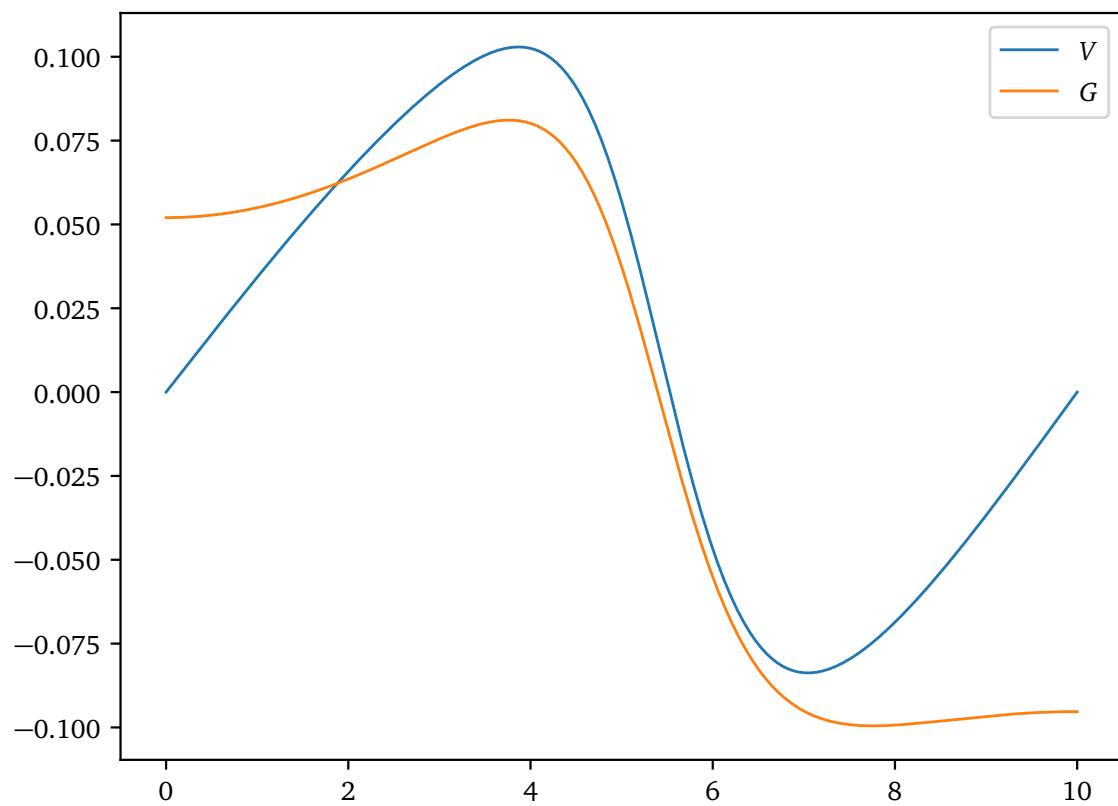


Рис. 94: Срез для  $t = 30.0$

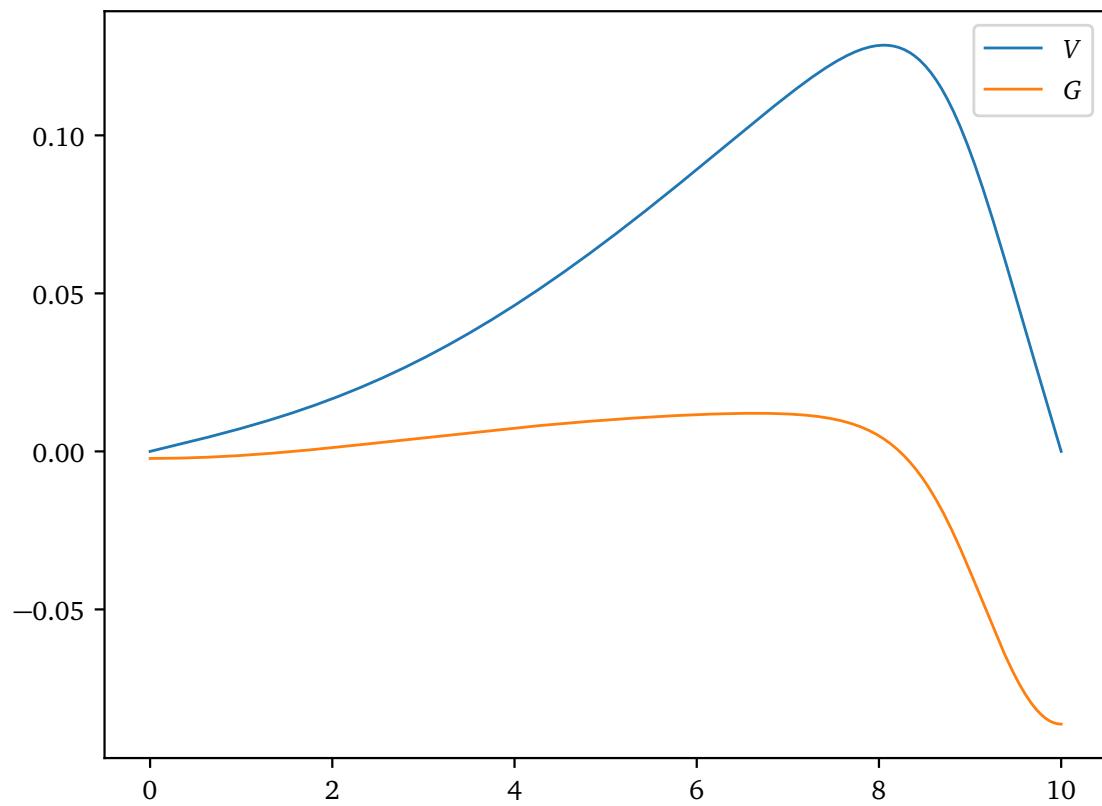


Рис. 95: Срез для  $t = 50.0$

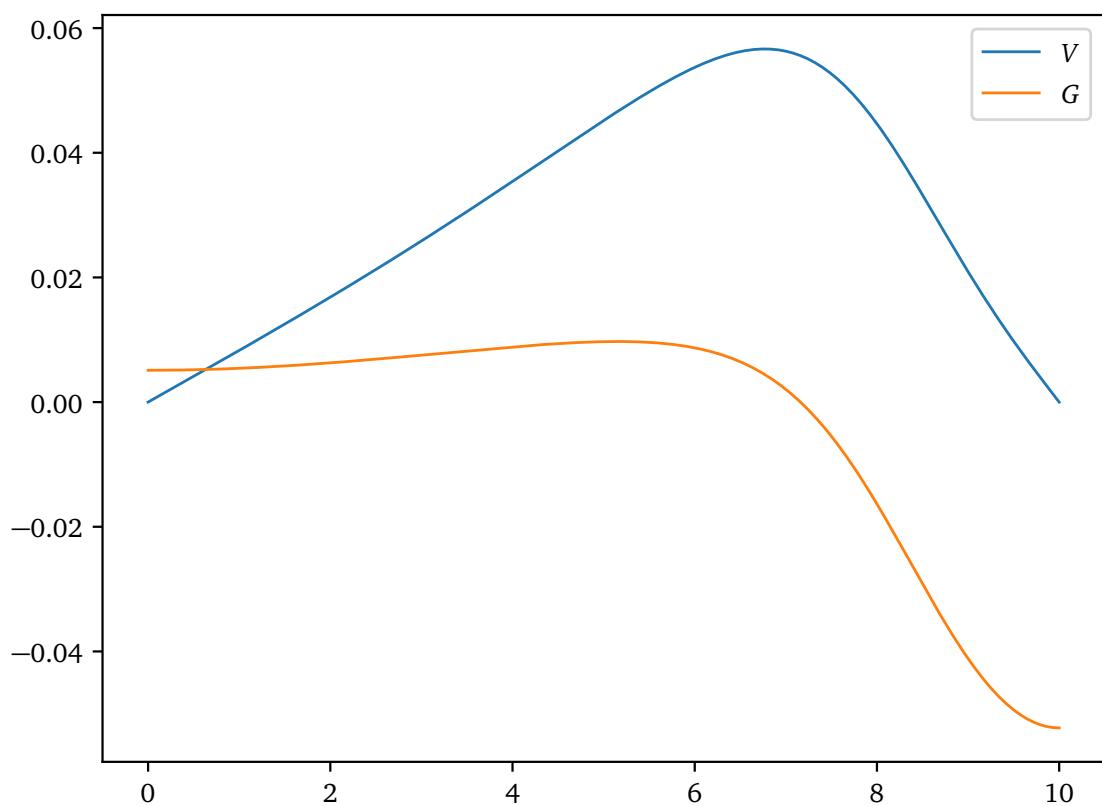


Рис. 96: Срез для  $t = 100.0$

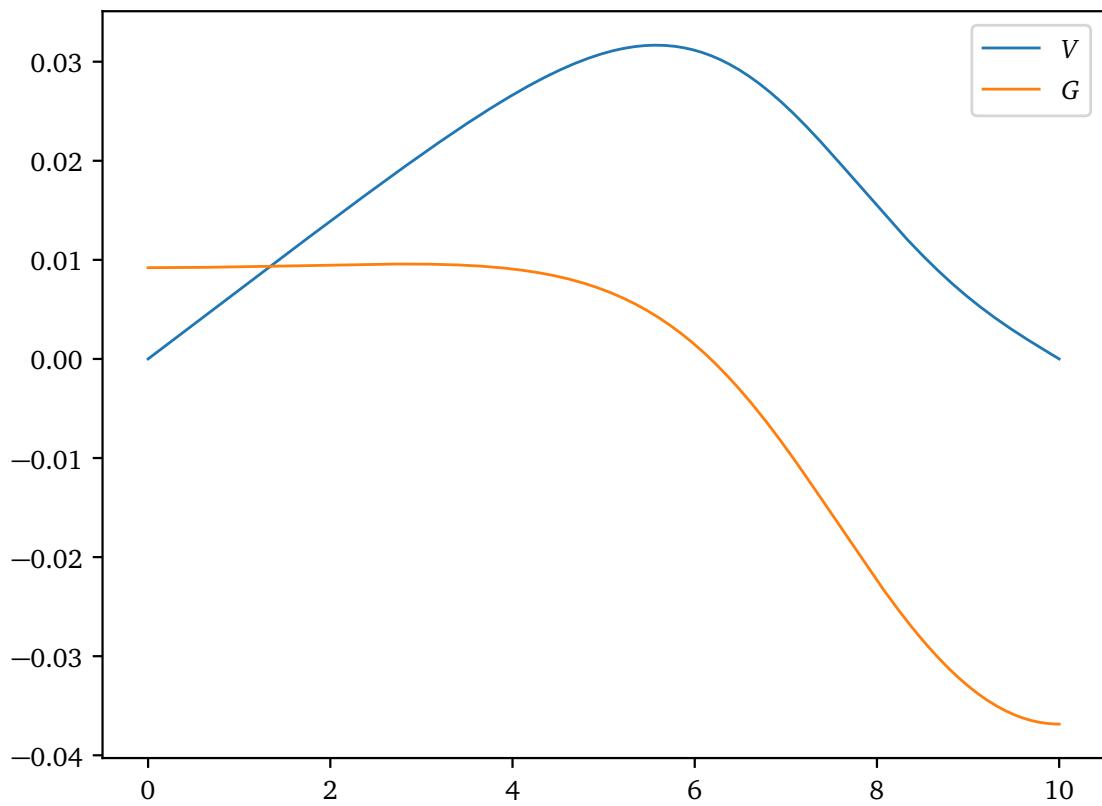


Рис. 97: Срез для  $t = 150.0$

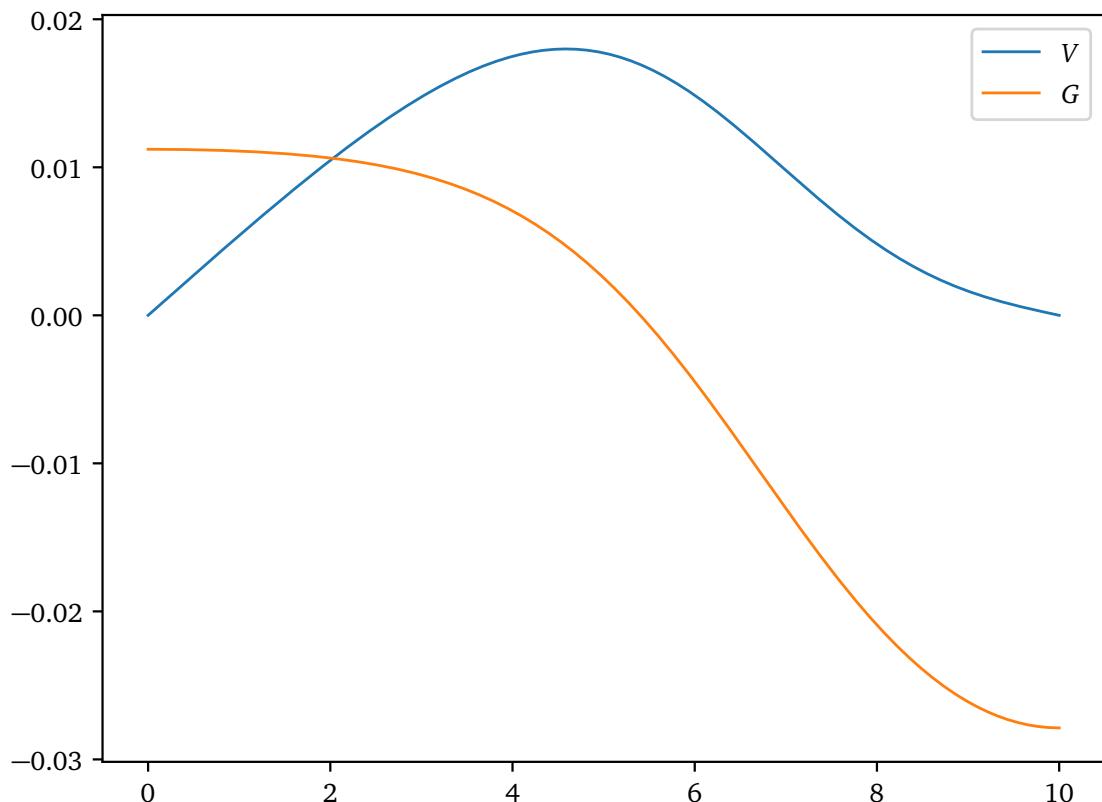


Рис. 98: Срез для  $t = 200.0$

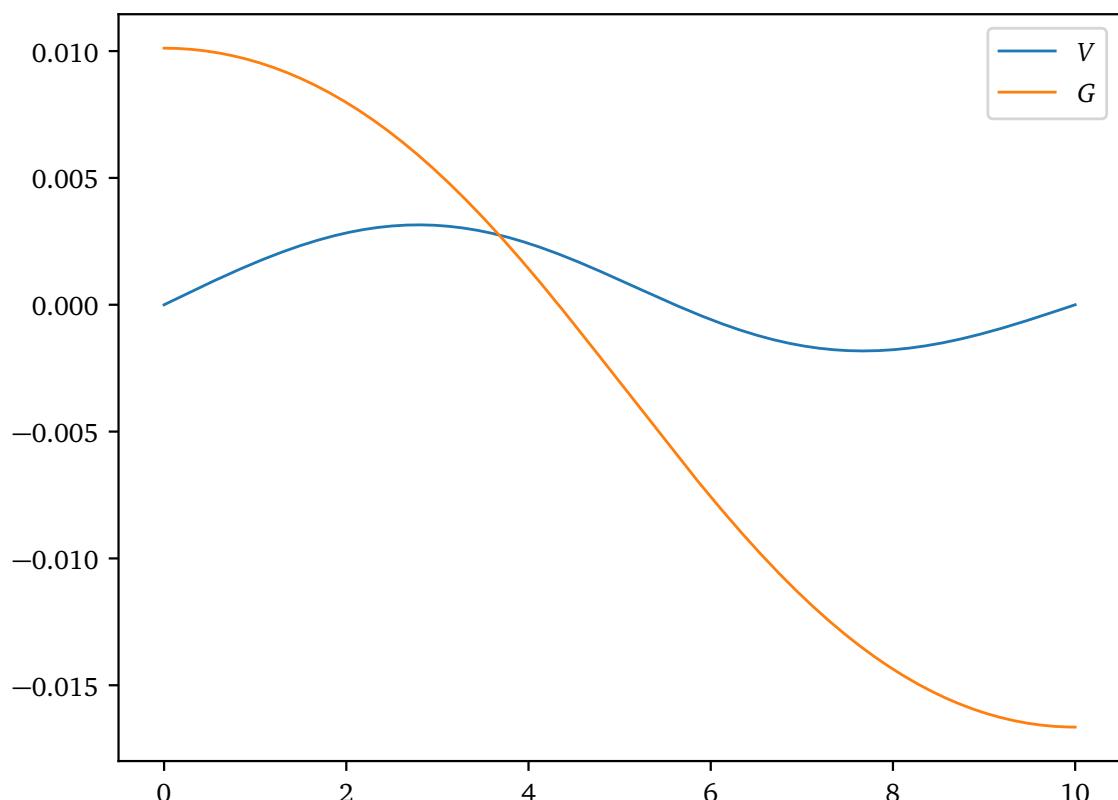


Рис. 99: Срез для  $t = 300.0$

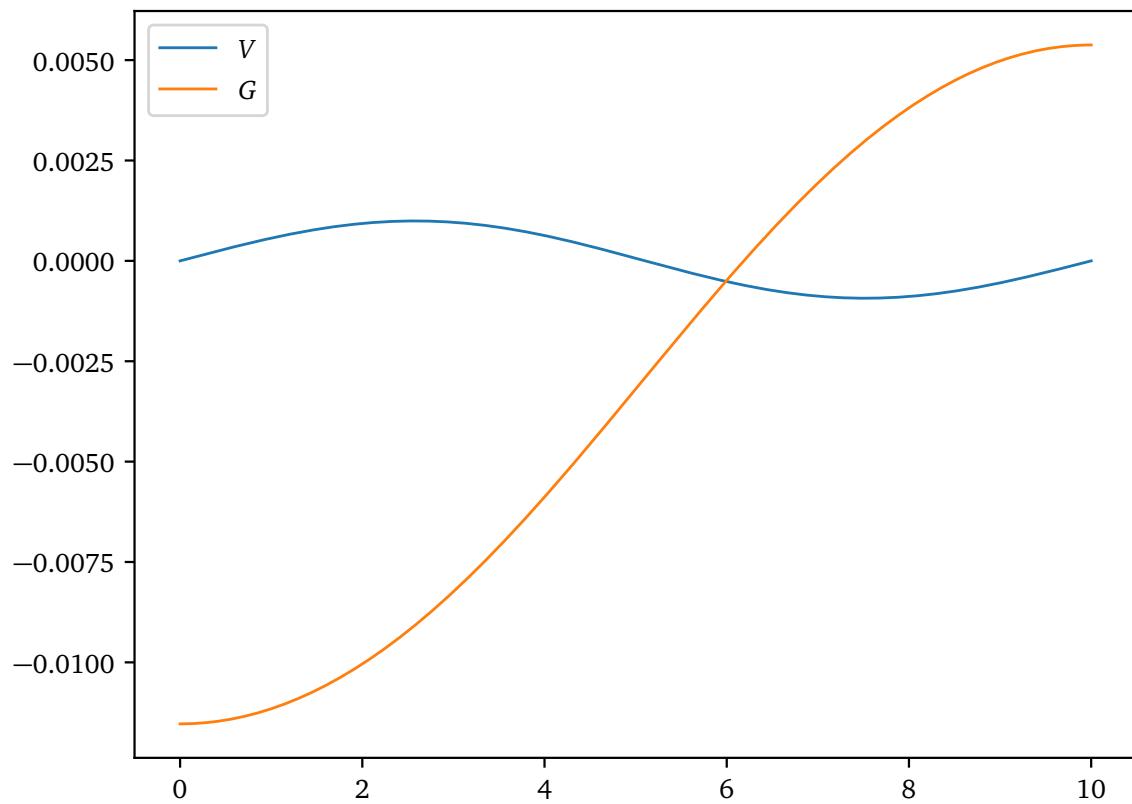


Рис. 100: Срез для  $t = 392.86$

Рассмотрим графики  $V$  и  $G$ .

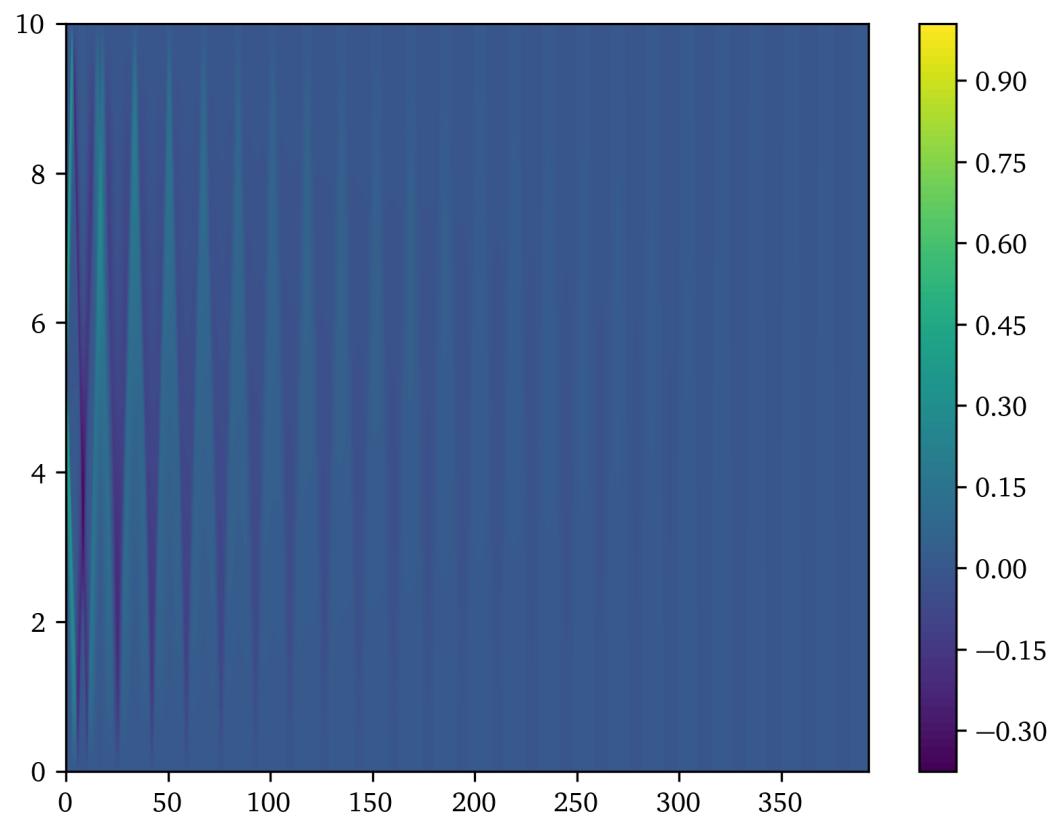


Рис. 101: График  $V$  для  $T = N_0\tau$  при  $p(\rho) = \rho^{1.4}$  и  $\mu = 10^{-1}$

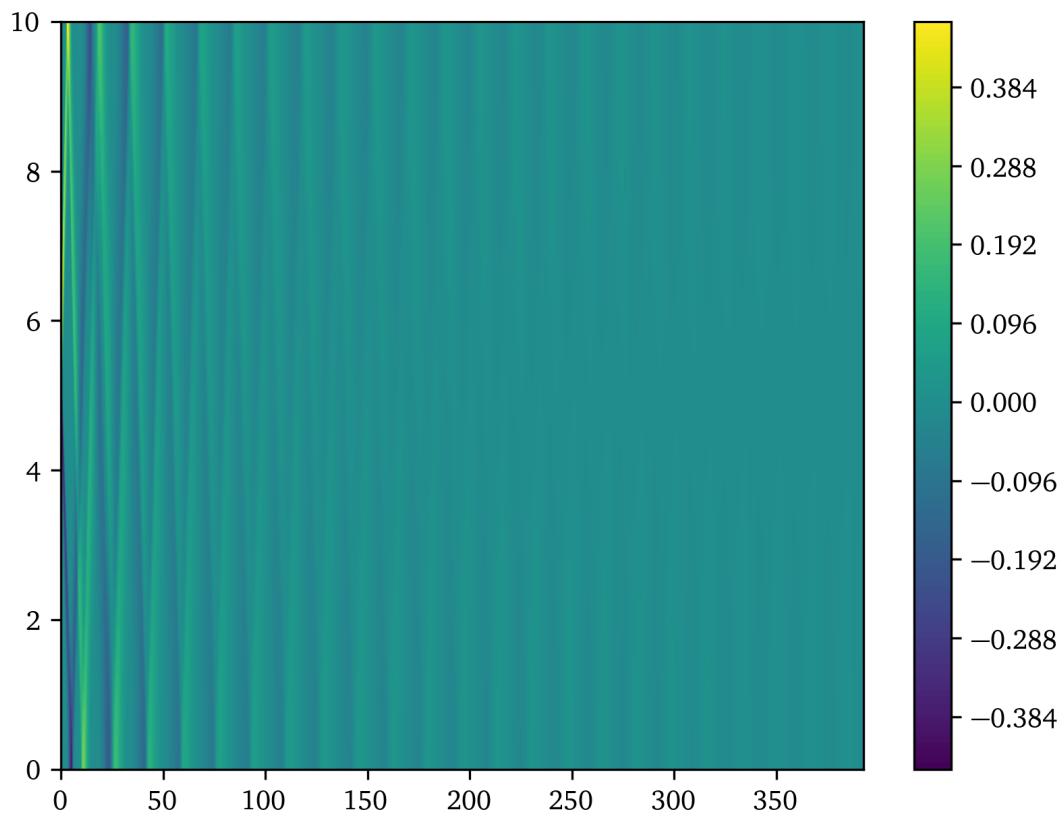


Рис. 102: График  $G$  для  $T = N_0\tau$  при  $p(\rho) = \rho^{1.4}$  и  $\mu = 10^{-1}$

Для изучения зависимости периода от параметра  $\mu$  рассмотрим графики  $V$  и  $G$  для  $T = 10000\tau$  при различных его значениях.

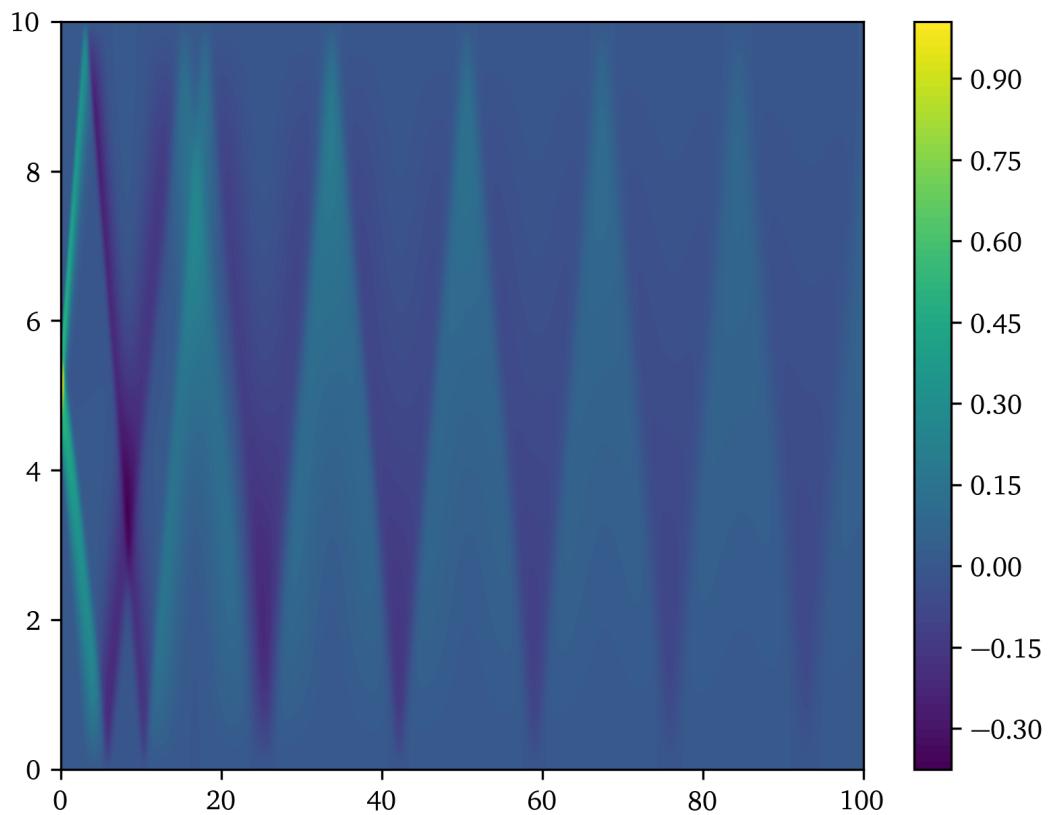


Рис. 103: График  $V$  для  $T = 10000\tau$  при  $p(\rho) = \rho^{1.4}$  и  $\mu = 10^{-1}$

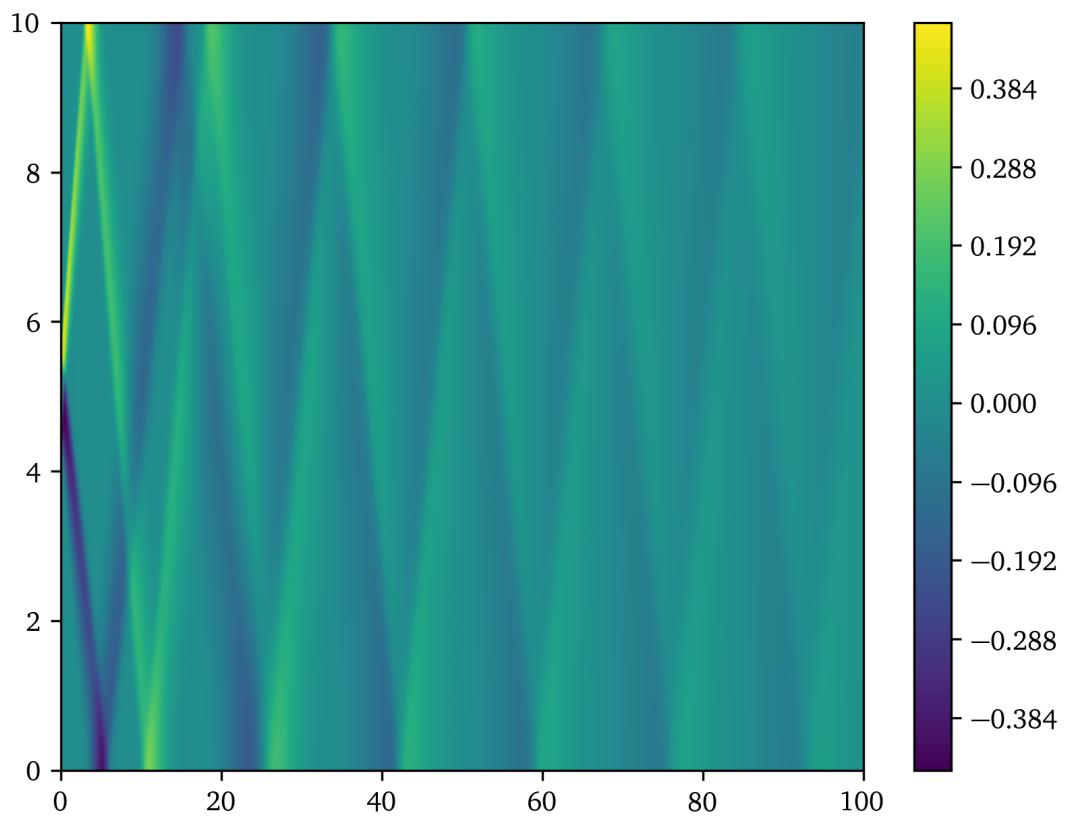


Рис. 104: График  $G$  для  $T = 10000\tau$  при  $p(\rho) = \rho^{1.4}$  и  $\mu = 10^{-1}$

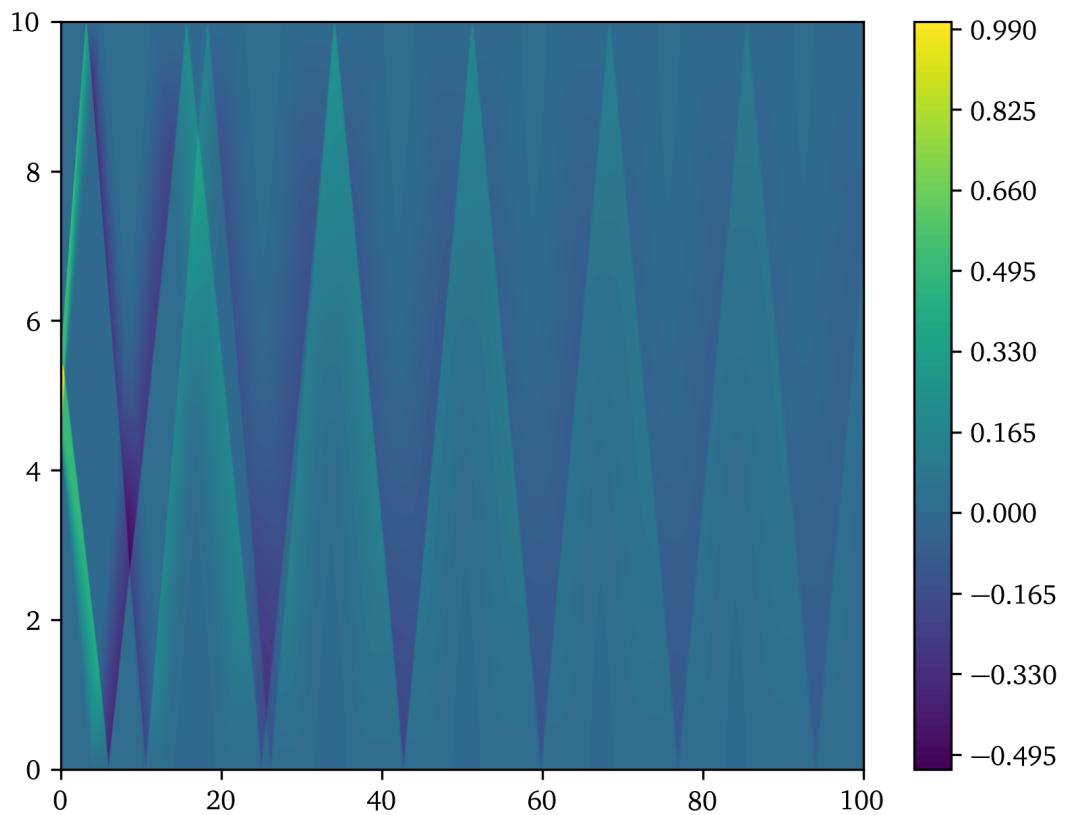


Рис. 105: График  $V$  для  $T = 10000\tau$  при  $p(\rho) = \rho^{1.4}$  и  $\mu = 10^{-2}$

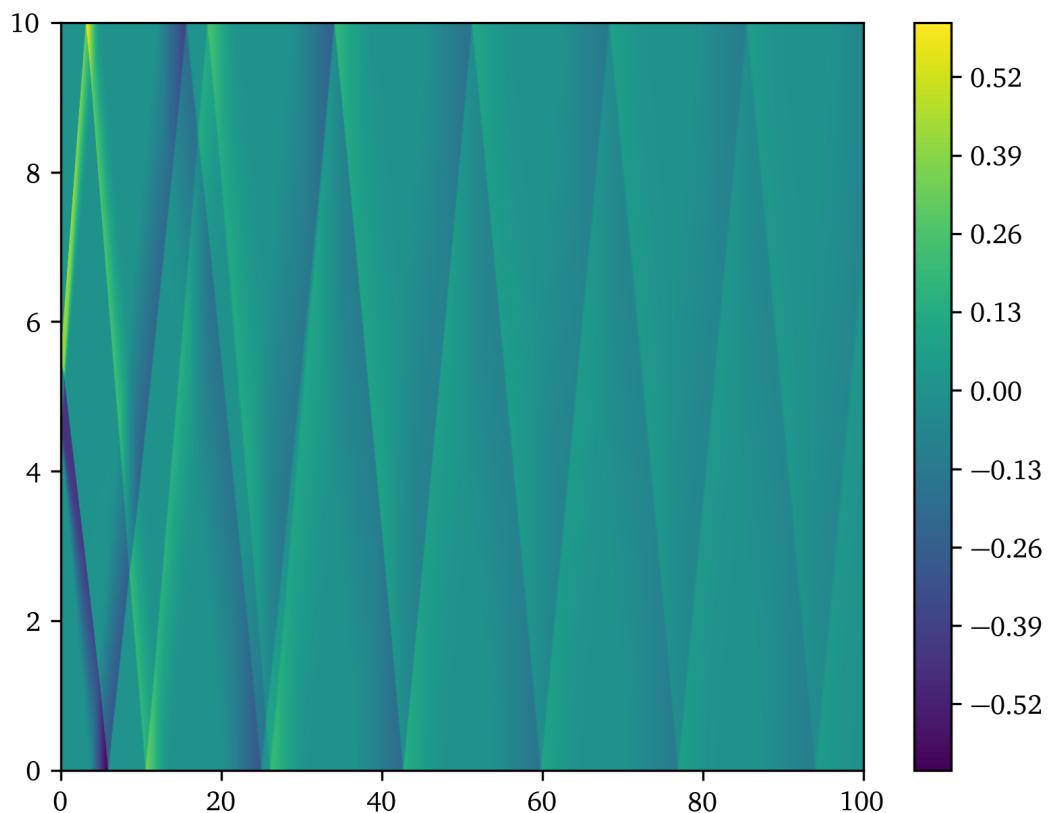


Рис. 106: График  $G$  для  $T = 10000\tau$  при  $p(\rho) = \rho^{1.4}$  и  $\mu = 10^{-2}$

#### 5.4.6 Вывод

Период колебаний не зависит от  $\mu$ , однако зависит от  $C$ , а именно с увеличением  $C$  уменьшается период. При уменьшении  $\mu$  «рисунок» становится более четким, что говорит о более медленном затухании, то есть о большем времени стабилизации.

#### 5.4.7 Время стабилизации

Зафиксируем  $\varepsilon = 10^{-3}$ ,  $\tau = 10^{-4}$  и  $h = 10^{-2}$ . Далее приведена таблица зависимости времени стабилизации от параметров дифференциальной задачи и от выбора сетки (в каждой ячейке таблицы приведены значения  $N_0$  для сеток  $\Omega_{\tau,h}$ ,  $\Omega_{\tau,h/2}$ ,  $\Omega_{\tau/2,h}$  и, соответственно,  $\Omega_{\tau/2,h/2}$ ).

$\mu \backslash p$	$10^0\rho$	$10^1\rho$	$10^2\rho$	$\rho^{1.4}$
$10^{-1}$	414.3976	409.4508	408.4951	392.4749
	414.3702	409.4481	408.4948	392.4267
	414.3967	409.4499	408.4942	392.4728
	414.3692	409.4472	408.4939	392.4246
$10^{-2}$	1913.681	1936.85	1969.604	1829.617
	2062.586	1936.727	1957.59	2039.757
	1913.638	1936.801	1948.557	1838.008
	2072.546	1939.831	1939.532	2056.591
$10^{-3}$	6919.225	6982.138	7195.96	6035.591
	6879.106	6937.832	6991.97	6004.517
	6919.216	6982.125	7193.945	6026.945
	6869.088	6925.165	6986.953	5995.742

Сравним также полученные времена с «точным» решением (подразумевается решение, полученное на достаточно мелкой сетке, а именно на сетке с  $\tau = 10^{-5}$  и  $h = 10^{-4}$ ). В силу большого времени проведения расчетов случай  $\mu = 10^{-2}$  не рассматривается.

$p(\rho) = 10^0\rho$	414.33966
$p(\rho) = 10^1\rho$	409.44353
$p(\rho) = 10^2\rho$	408.49284
$p(\rho) = \rho^{1.4}$	392.37237

#### 5.4.8 Вывод

При уменьшении параметра  $\mu$  или увеличении параметра  $C$  затухание происходит медленнее, причем на время стабилизации параметр  $\mu$  влияет значительно, а параметр  $C$  — нет. Это также подтверждают графики из подсекции 5.4.5.

## 6 Задача о стабилизации осциллирующей функции

### 6.1 Постановка задачи

Пусть  $\Omega_x = [0; 1]$ . Для системы (1) зададим две задачи, начальные и граничные условия которых определяются следующим образом:

$$\begin{aligned}\rho(0, x) &= 2 + \sin(K\pi x); \\ u(0, x) &= 0; \\ u(t, 0) &= u(t, 1) = 0;\end{aligned}\tag{15}$$

и

$$\begin{aligned}\rho(0, x) &= 1; \\ u(0, x) &= \sin(K\pi x); \\ u(t, 0) &= u(t, 1) = 0;\end{aligned}\tag{16}$$

где  $N$  натуральное число. Для численных экспериментов желательно брать  $10Kh \leq 1$ . Положим также  $f \equiv 0$  и  $f_0 \equiv 0$ .

Суть эксперимента состоит в решении задач (15) и (16), причем вычисления следует проводить до момента времени  $N_0\tau$ , для которого

$$\|V^{N_0}\| = \max_{0 \leq m \leq M} |V_m^{N_0}| \leq \varepsilon,$$

где величина  $\varepsilon$  является достаточно малой и определяется опытным путем.

### 6.2 Численные эксперименты

Для анализа зависимости времени стабилизации от параметров дифференциальной задачи достаточно рассмотреть

$$(\mu, C) \in \{10^{-1}, 10^{-2}\} \times \{10^0, 10^1\}.$$

### 6.3 Численные эксперименты первой задачи

Зафиксируем  $\varepsilon = 10^{-3}$ ,  $\tau = 10^{-4}$  и  $h = 10^{-2}$ . Далее приведены таблицы зависимости времени стабилизации ( $N_0\tau$ ) от параметров  $\mu$ ,  $C$  и  $K$ .

$K$	$p(\rho) = 10^0\rho$ и $\mu = 10^{-1}$	$p(\rho) = 10^1\rho$ и $\mu = 10^{-1}$	$p(\rho) = 10^0\rho$ и $\mu = 10^{-2}$
1	2.5192	3.6438	27.0308
2	11.0383	12.6573	83.0179
3	2.5465	3.4969	25.5682
4	8.0246	10.7596	70.0296
5	1.5116	2.687	22.9709
6	6.0184	9.8106	67.0403
7	1.0046	2.2122	19.4597
8	5.0125	8.8609	65.043
9	1.0022	1.8965	16.4645
10	4.0096	8.2267	63.0396

$K$	$p(\rho) = \rho^{1.4}$ и $\mu = 10^{-1}$	$p(\rho) = \rho^{1.4}$ и $\mu = 10^{-2}$
1	2.7986	27.1752
2	11.7908	78.7717
3	2.9202	24.9027
4	8.8474	67.0256
5	1.0925	23.585
6	7.3738	64.834
7	0.7284	21.4715
8	6.6344	64.1058
9	0.7288	19.3298
10	5.1642	63.3756

### 6.3.1 Вывод

На время стабилизации влияет четность  $K$ : для четных  $K$  стабилизация наступает в разы быстрее. При увеличении параметра  $C$  время стабилизации увеличивается незначительно. При уменьшении параметра  $\mu$  время стабилизации увеличивается значительно.

### 6.3.2 Динамика процесса

Для наглядности далее приведены графики  $V$  и  $G$  для  $T = 5$  при различных значениях параметра  $K$  для  $p(\rho) = \rho^{1.4}$ ,  $\mu = 10^{-1}$ ,  $\tau = 10^{-3}$  и  $h = 10^{-2}$  (даные параметры были подобраны опытным путем).

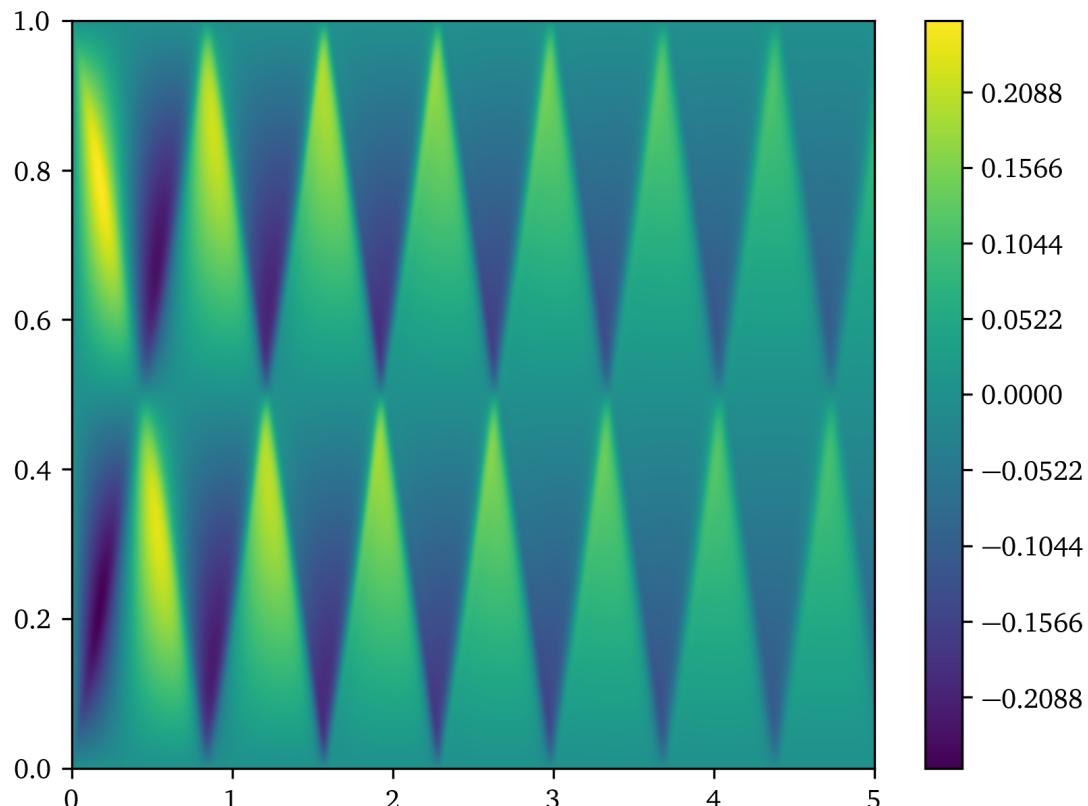


Рис. 107: График  $V$  для  $T = 5$  для  $K = 1$

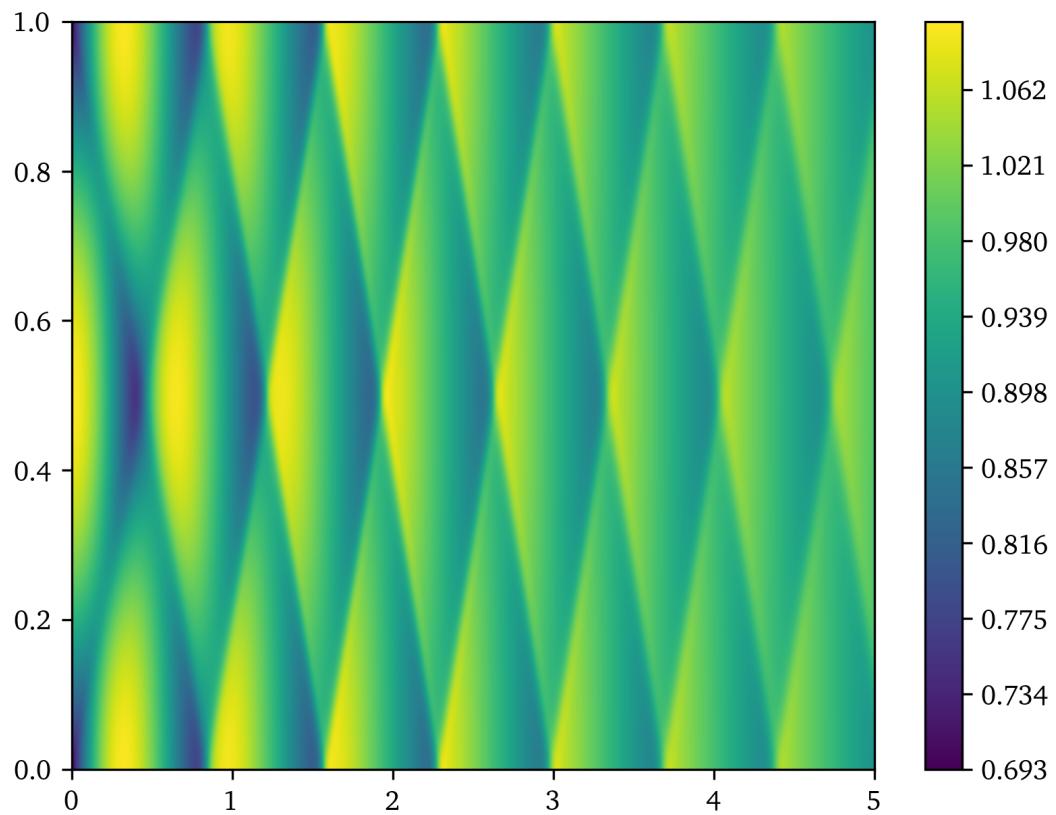


Рис. 108: График  $G$  для  $T = 5$  для  $K = 1$

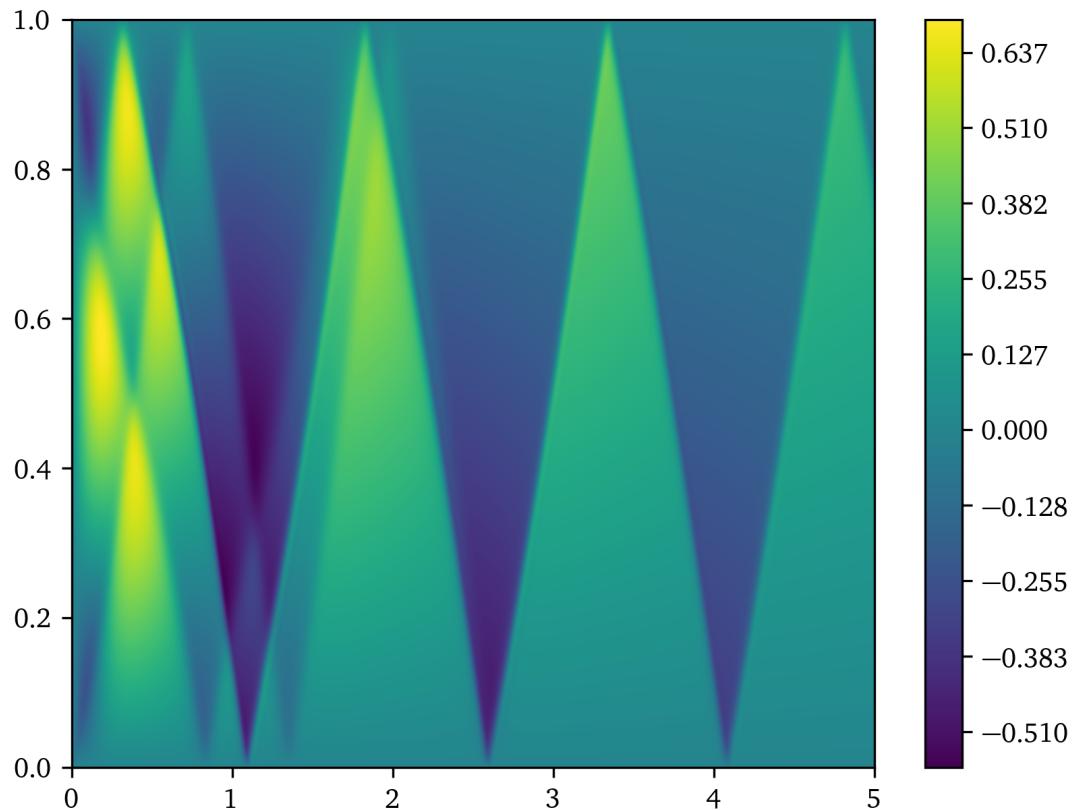


Рис. 109: График  $V$  для  $T = 5$  для  $K = 2$

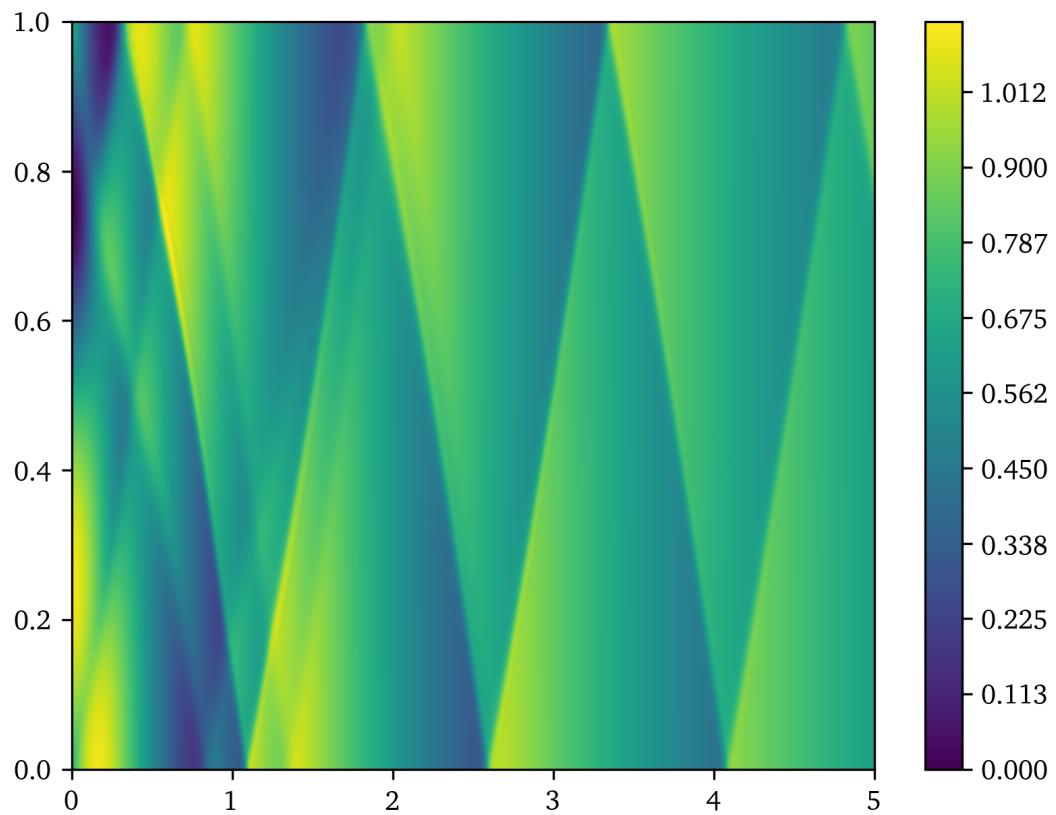


Рис. 110: График  $G$  для  $T = 5$  для  $K = 2$

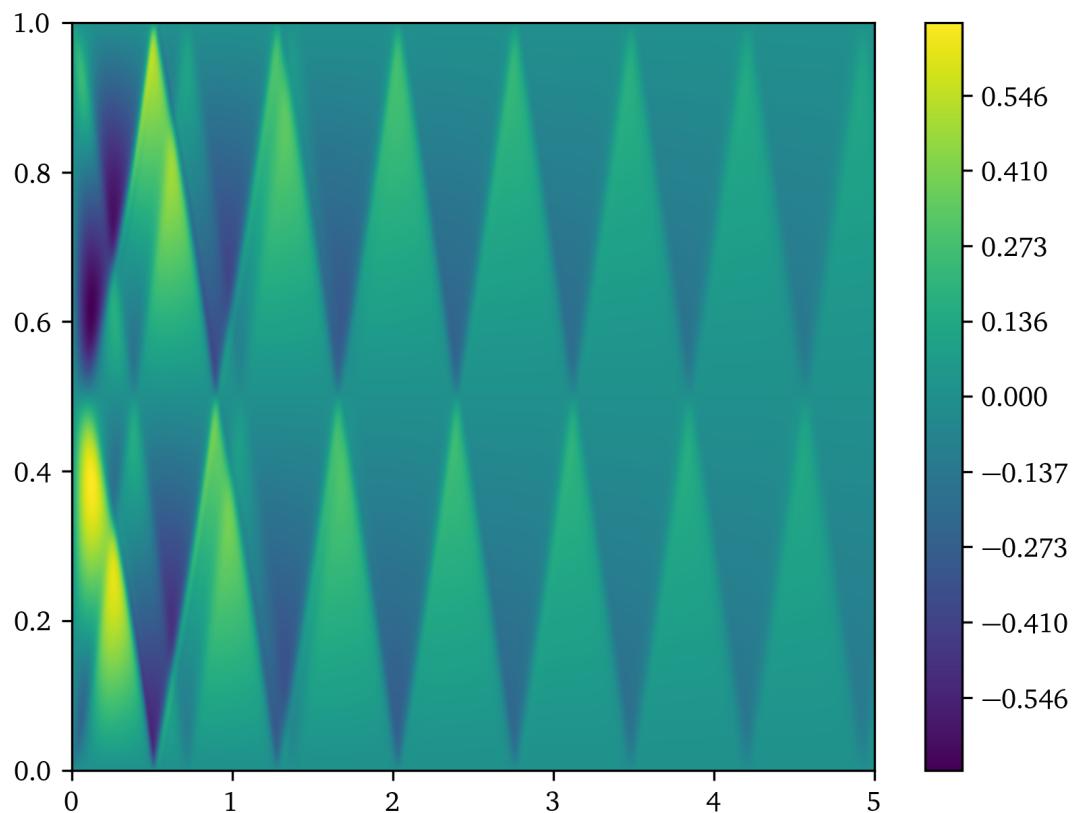


Рис. 111: График  $V$  для  $T = 5$  для  $K = 3$

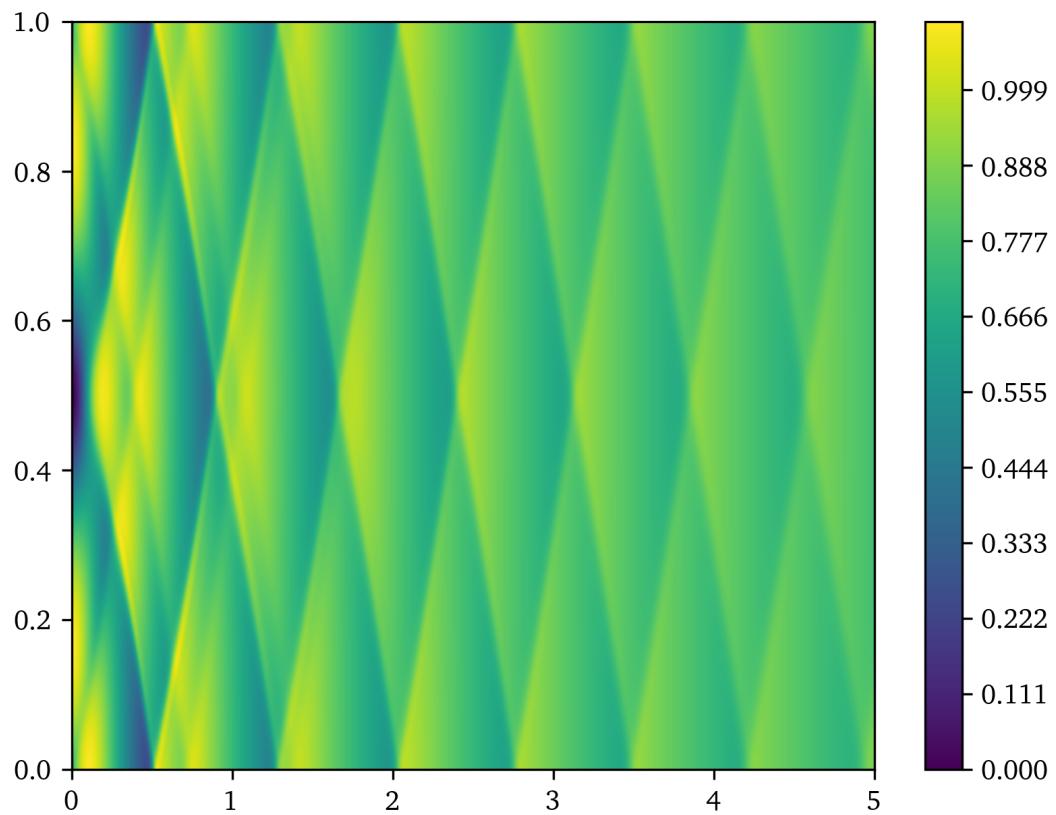


Рис. 112: График  $G$  для  $T = 5$  для  $K = 3$

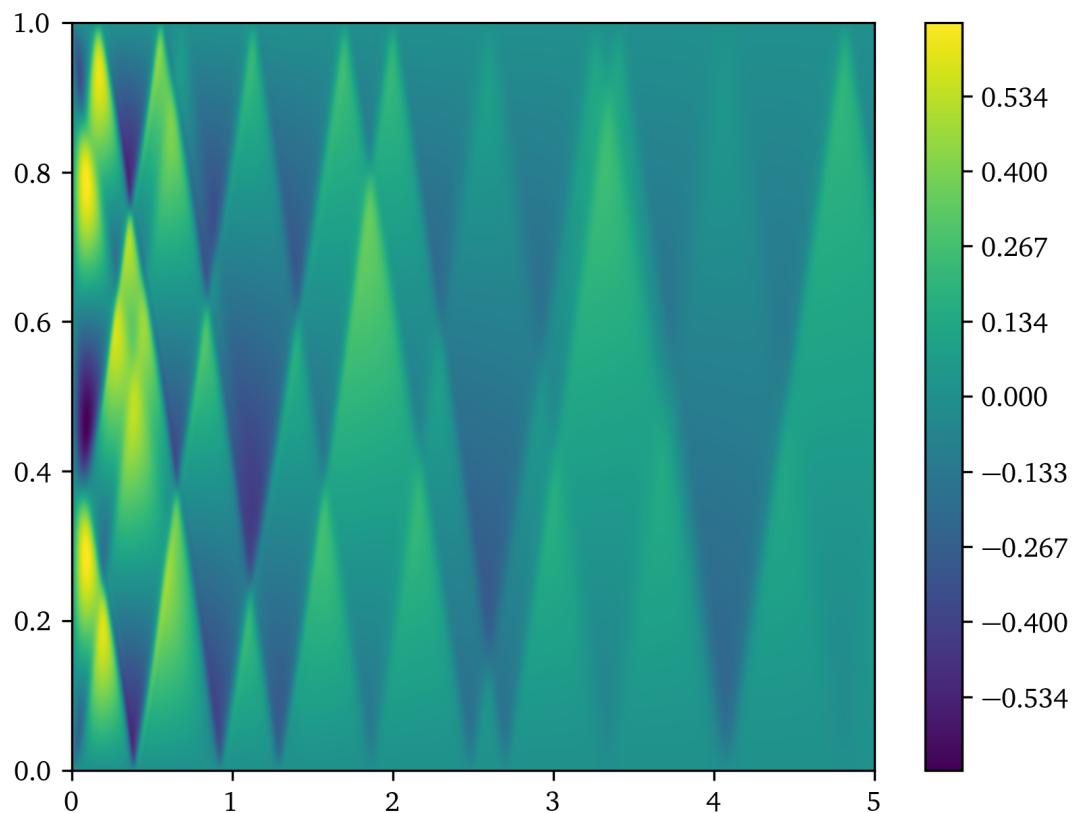


Рис. 113: График  $V$  для  $T = 5$  для  $K = 4$

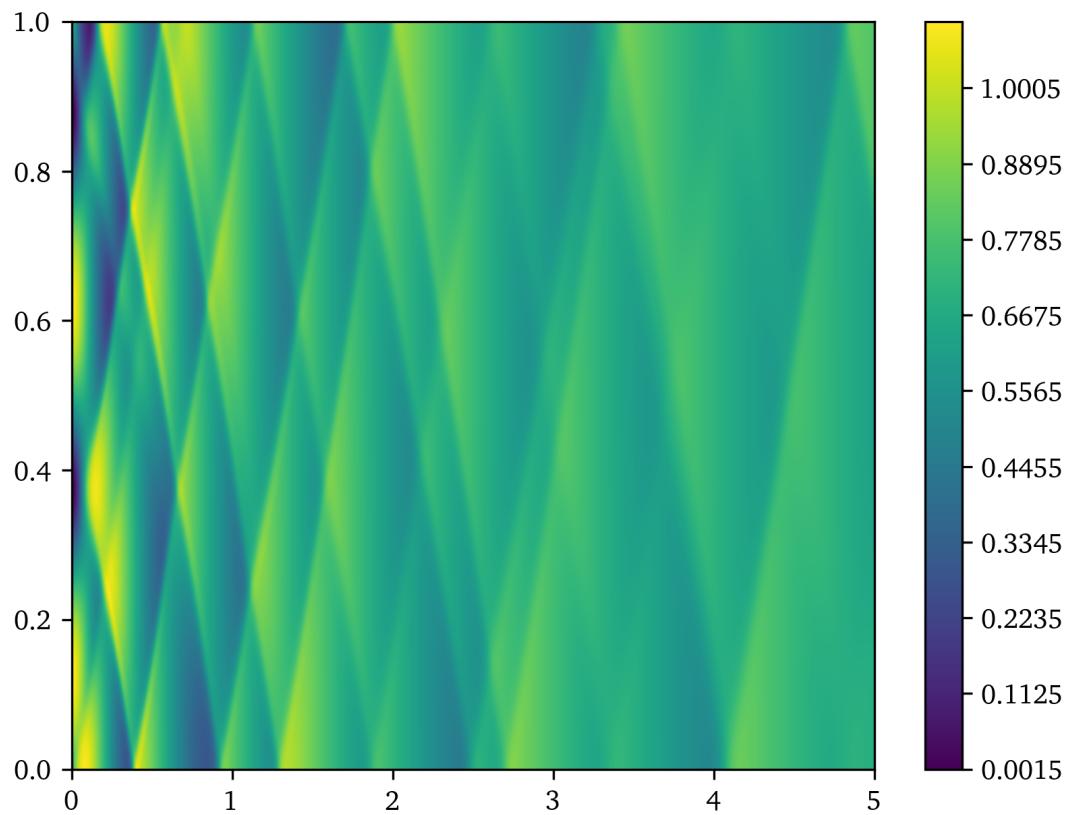


Рис. 114: График  $G$  для  $T = 5$  для  $K = 4$

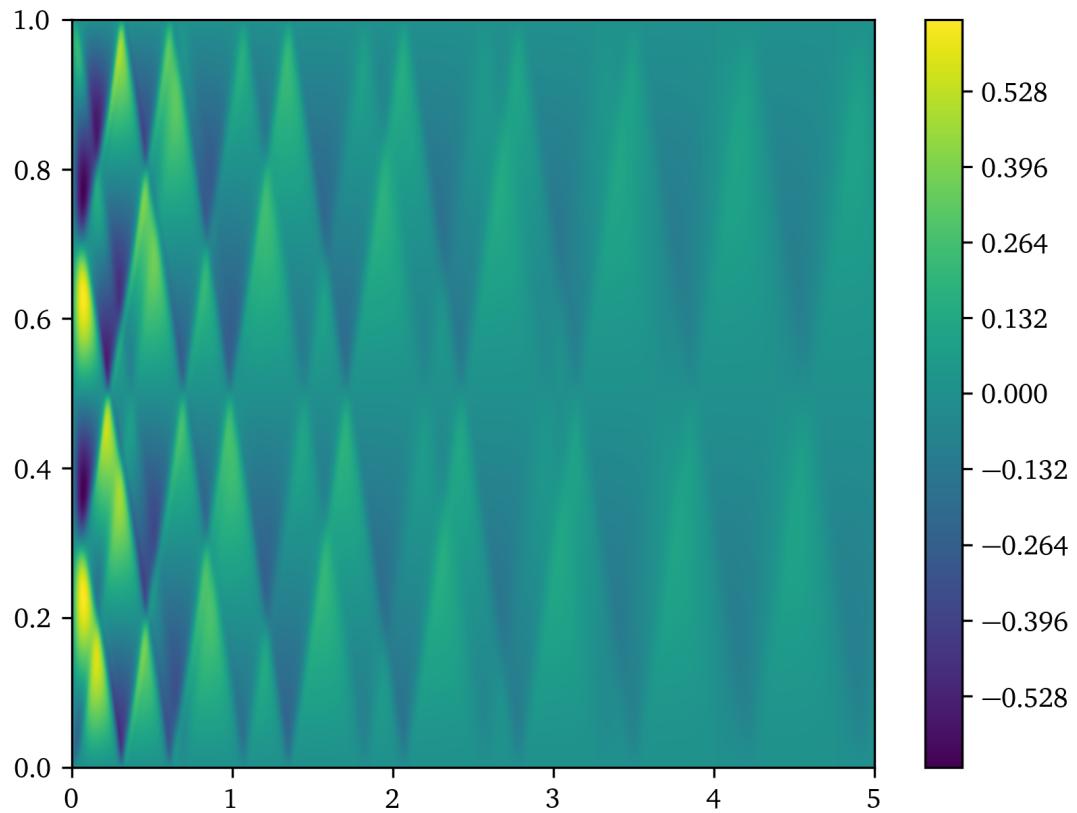


Рис. 115: График  $V$  для  $T = 5$  для  $K = 5$

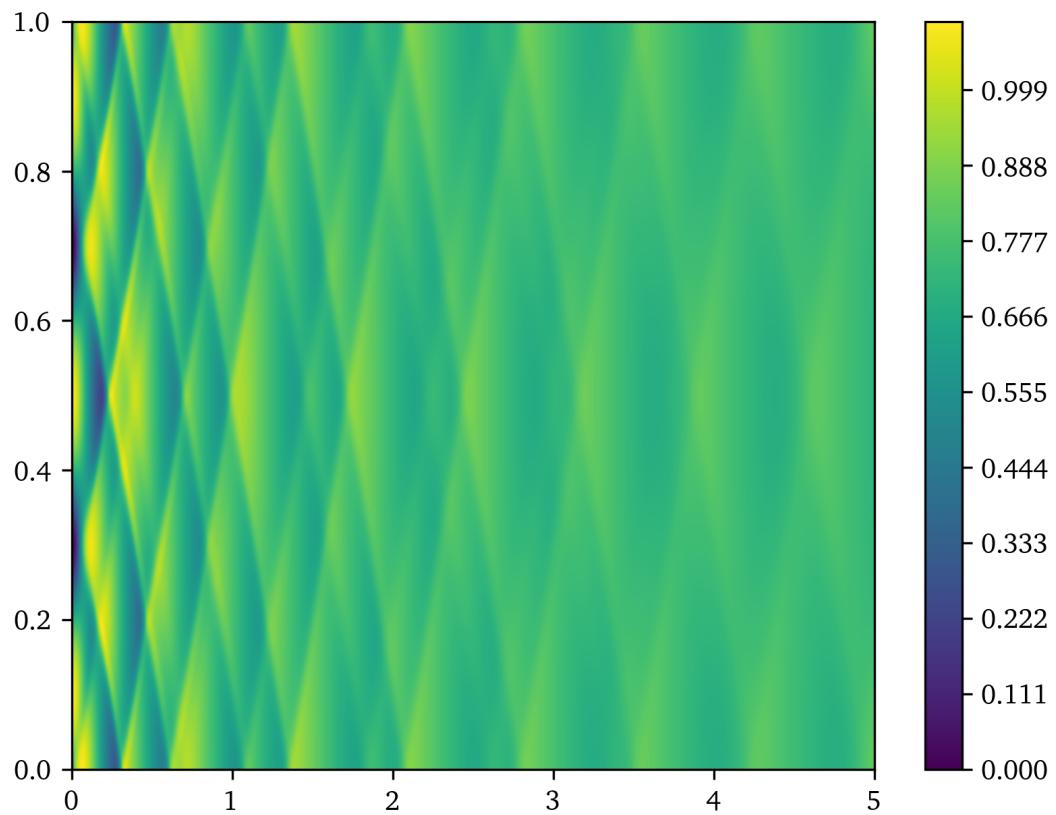


Рис. 116: График  $G$  для  $T = 5$  для  $K = 5$

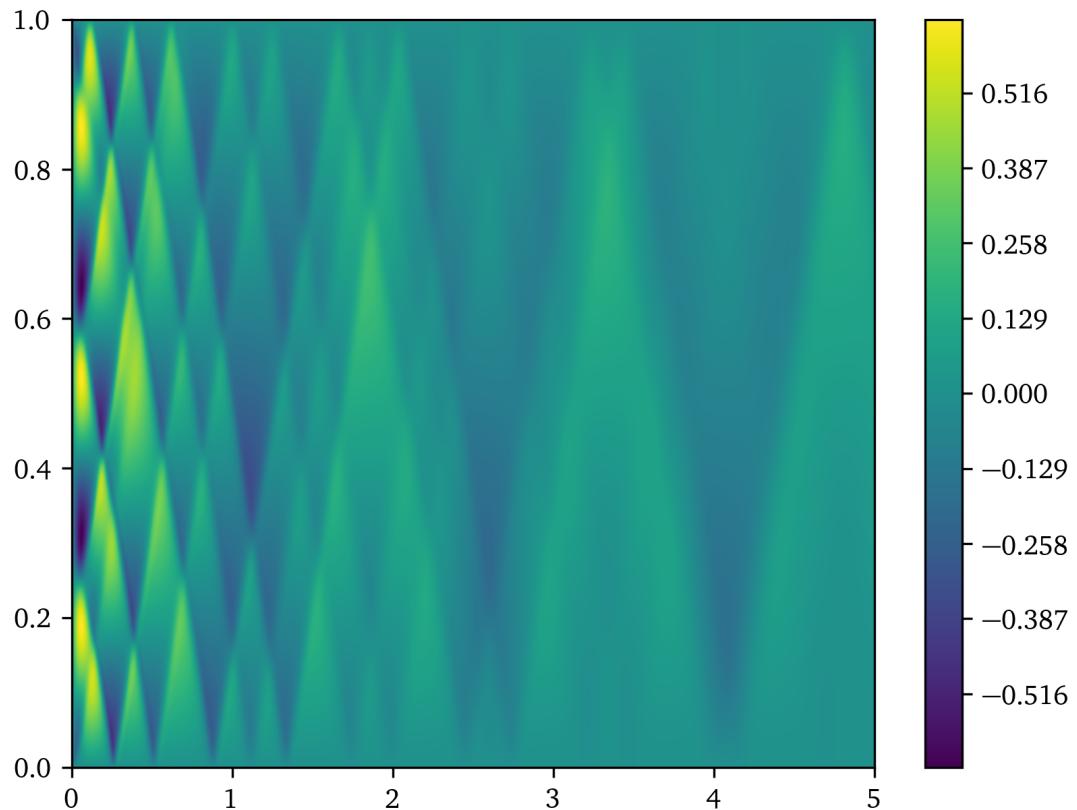


Рис. 117: График  $V$  для  $T = 5$  для  $K = 6$

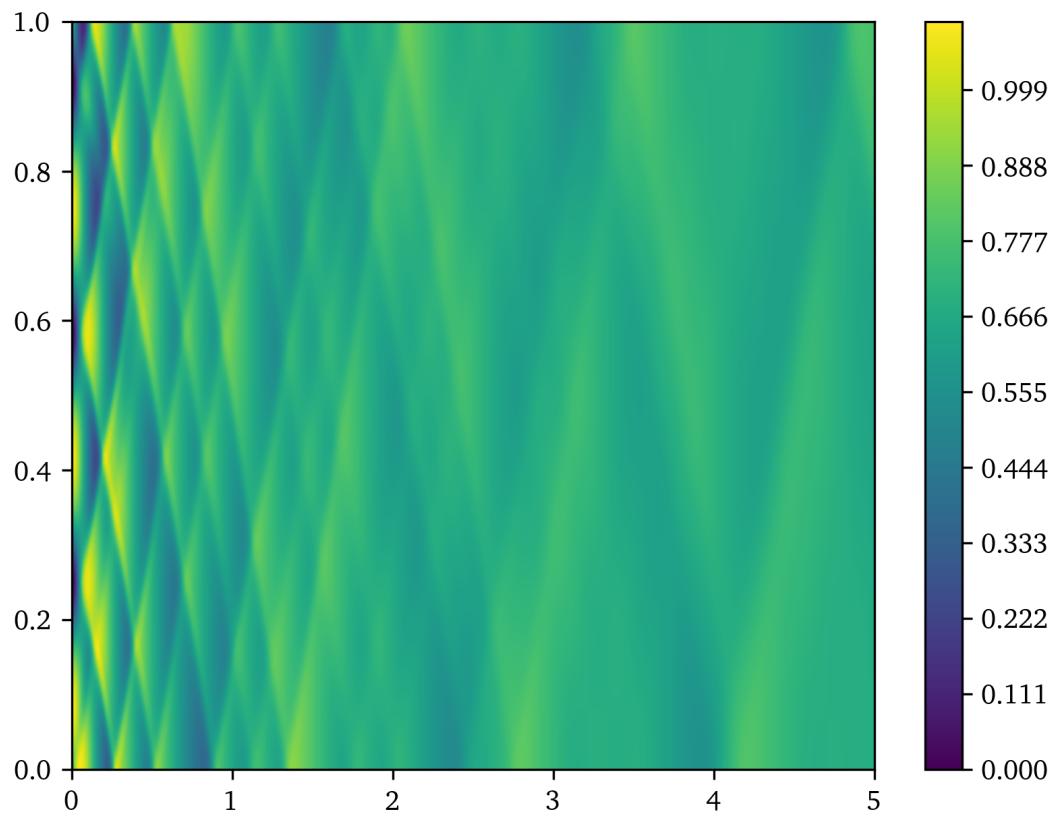


Рис. 118: График  $G$  для  $T = 5$  для  $K = 6$

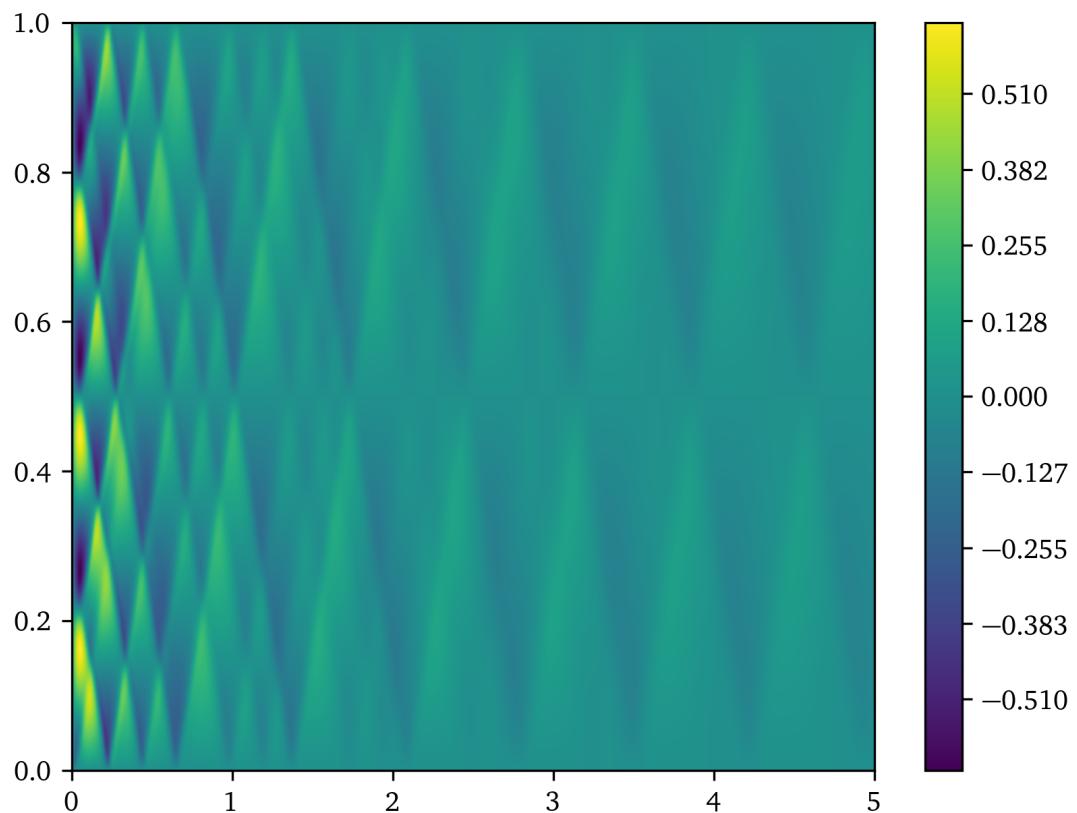


Рис. 119: График  $V$  для  $T = 5$  для  $K = 7$

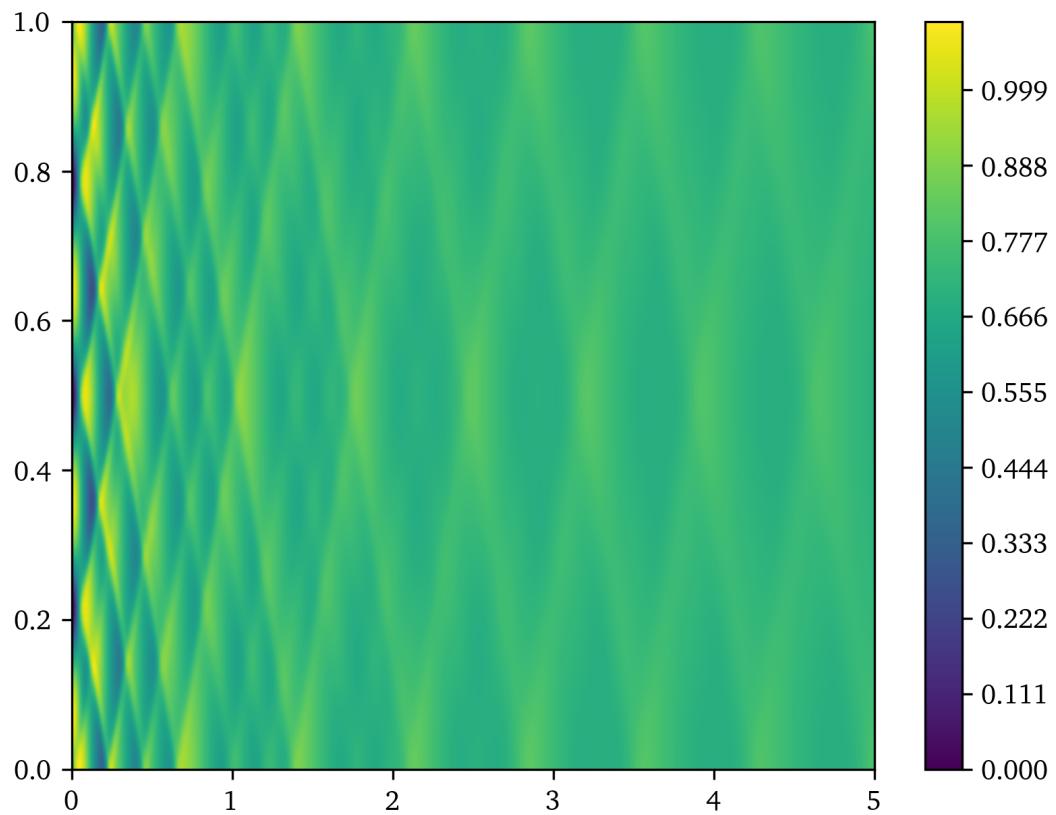


Рис. 120: График  $G$  для  $T = 5$  для  $K = 7$

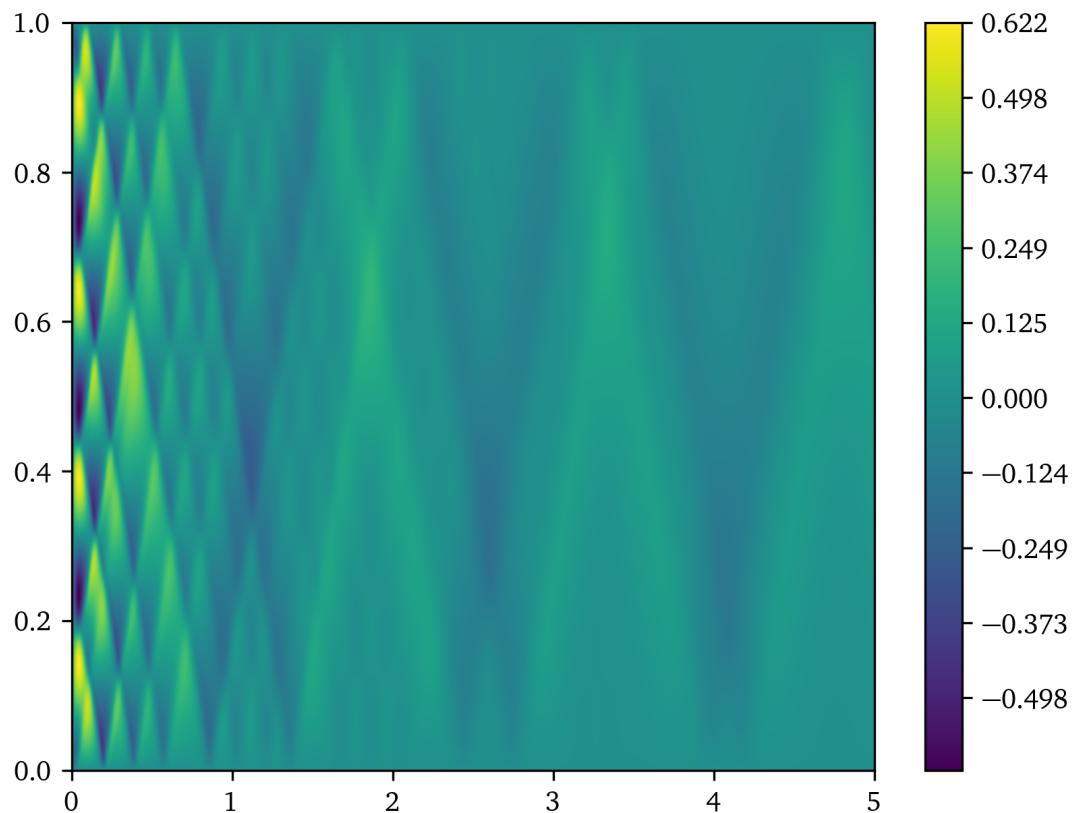


Рис. 121: График  $V$  для  $T = 5$  для  $K = 8$

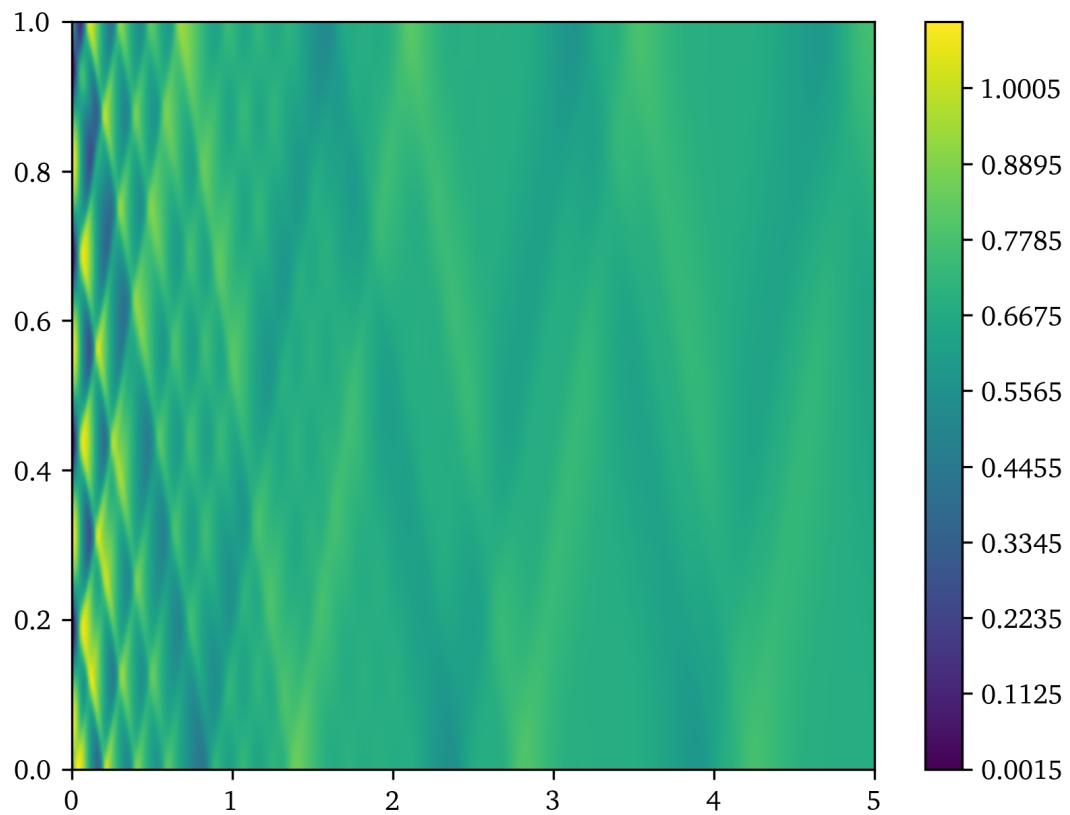


Рис. 122: График  $G$  для  $T = 5$  для  $K = 8$

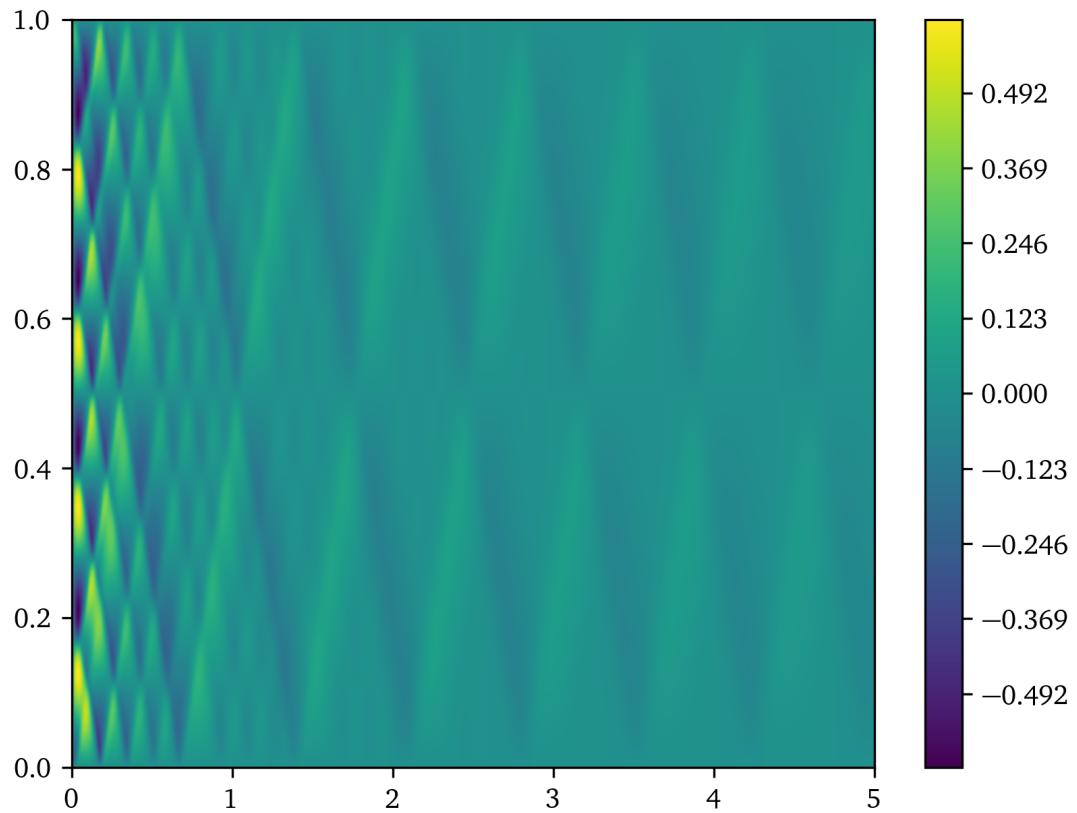


Рис. 123: График  $V$  для  $T = 5$  для  $K = 9$

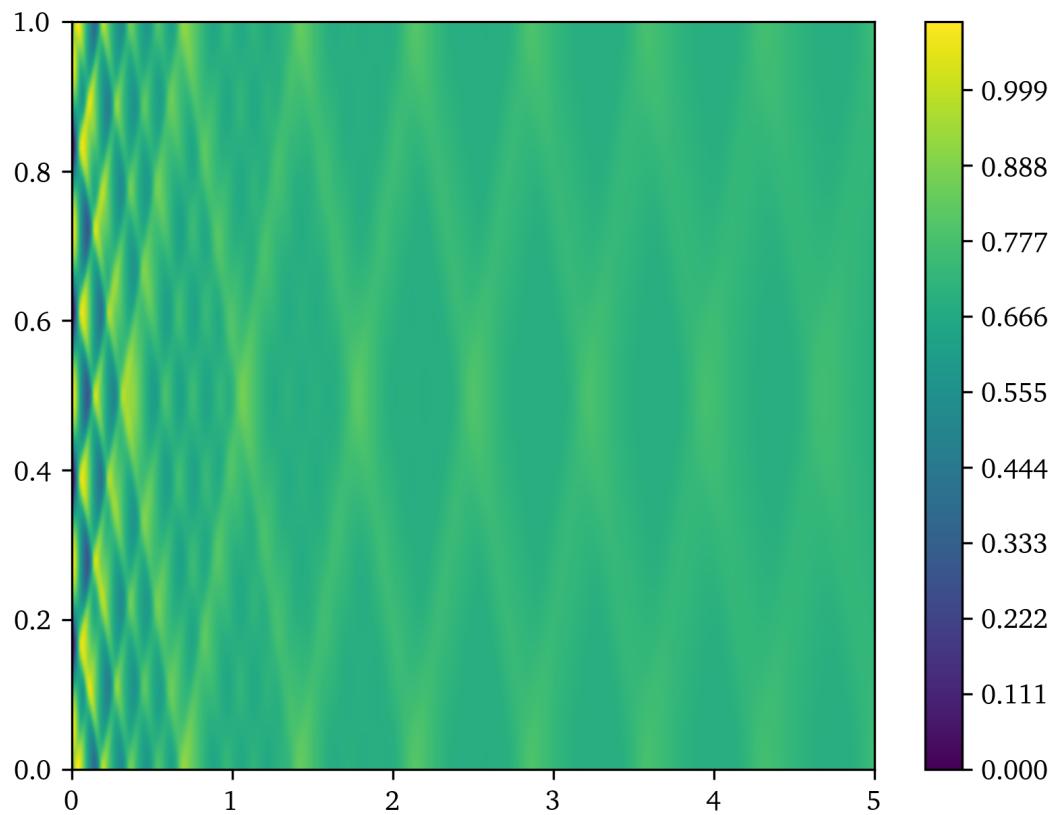


Рис. 124: График  $G$  для  $T = 5$  для  $K = 9$

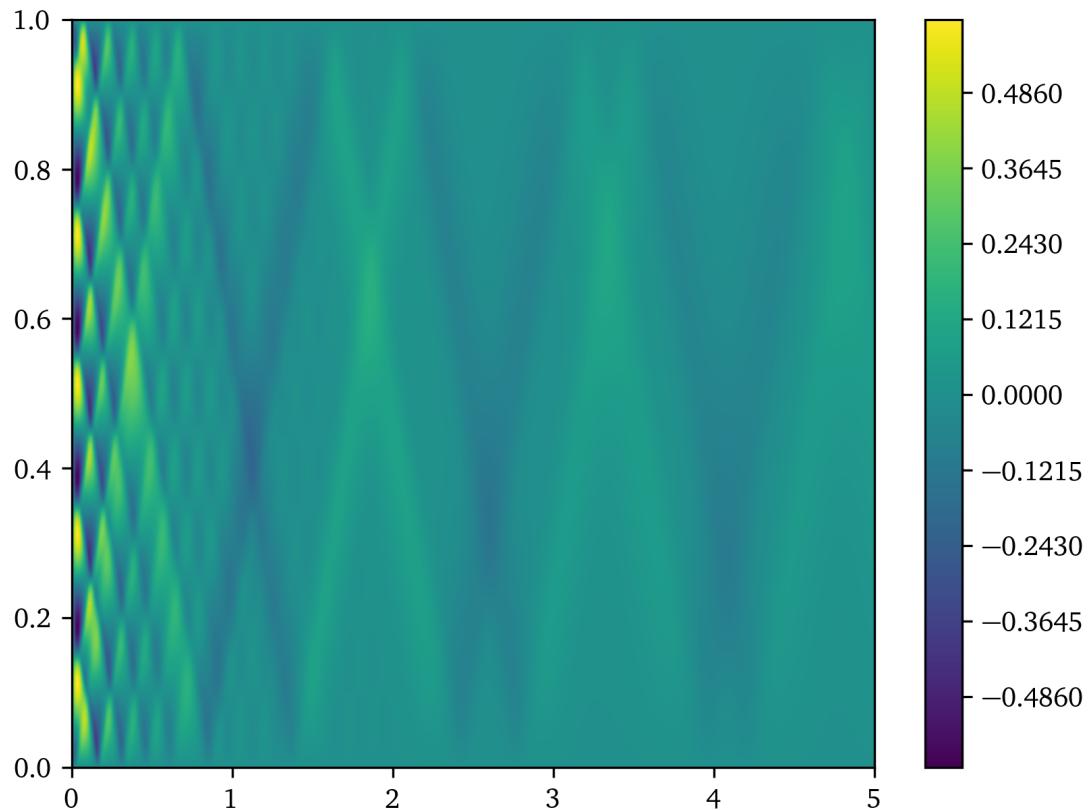


Рис. 125: График  $V$  для  $T = 5$  для  $K = 10$

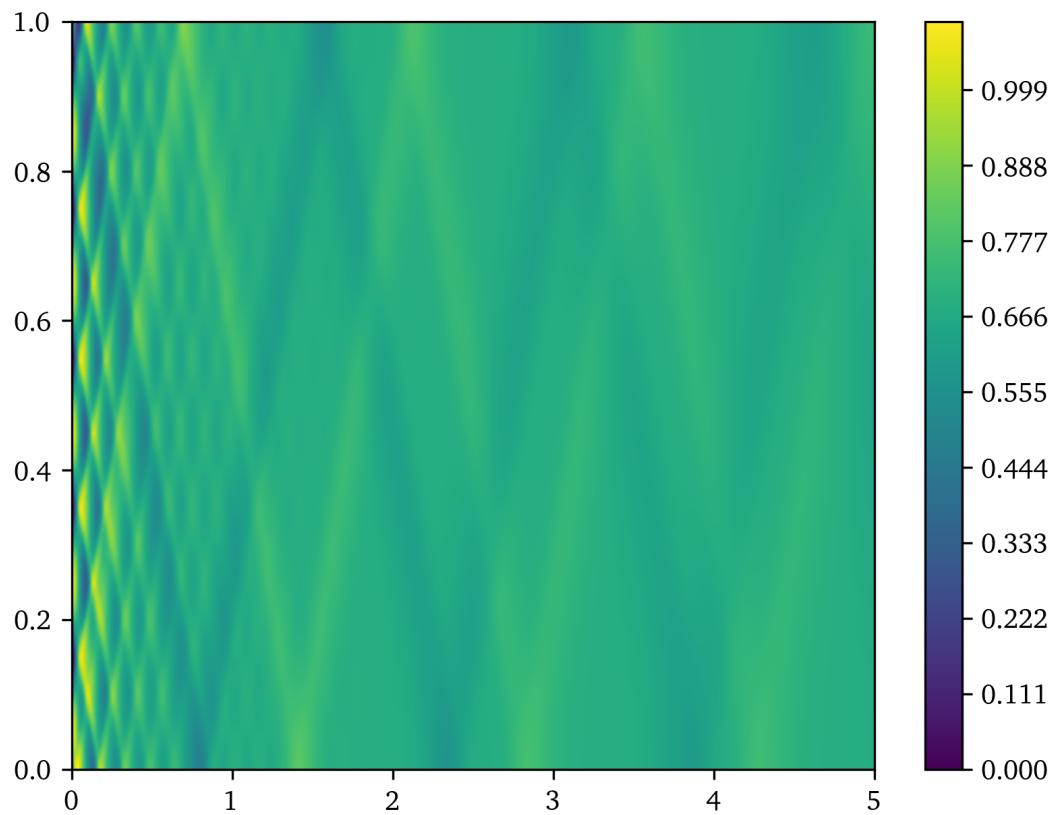


Рис. 126: График  $G$  для  $T = 5$  для  $K = 10$

#### 6.4 Численные эксперименты второй задачи

Зафиксируем  $\varepsilon = 10^{-3}$ ,  $\tau = 10^{-4}$  и  $h = 10^{-2}$ . Далее приведены таблицы зависимости времени стабилизации ( $N_0\tau$ ) от параметров  $\mu$ ,  $C$  и  $K$ .

$K$	$p(\rho) = 10^0\rho$ и $\mu = 10^{-1}$	$p(\rho) = 10^1\rho$ и $\mu = 10^{-1}$	$p(\rho) = 10^0\rho$ и $\mu = 10^{-2}$
1	6.4621	6.4621	47.3838
2	1.768	1.768	13.2052
3	0.5011	0.5011	6.4773
4	0.7092	0.7092	3.6144
5	0.3895	0.3895	2.4959
6	0.4357	0.4357	1.7508
7	0.4668	0.4668	1.3616
8	0.4666	0.4666	0.9428
9	0.4597	0.4597	0.8424
10	0.4473	0.4473	0.6589

$K$	$p(\rho) = \rho^{1.4}$ и $\mu = 10^{-1}$	$p(\rho) = \rho^{1.4}$ и $\mu = 10^{-2}$
1	6.3021	46.1054
2	1.4807	12.8935
3	0.7194	6.0585
4	0.5701	3.6997
5	0.4889	2.2855
6	0.2812	1.625
7	0.3105	1.2747
8	0.3329	0.9049
9	0.3371	0.8073
10	0.3332	0.557

#### 6.4.1 Вывод

При увеличении параметра  $K$  уменьшается время стабилизации. При увеличении параметра  $C$  время стабилизации уменьшается. При уменьшении параметра  $\mu$  время стабилизации увеличивается значительно для малых  $K$  и незначительно для больших  $K$ .

#### 6.4.2 Динамика процесса

Для наглядности далее приведены графики  $V$  и  $G$  для  $T = 5$  при различных значениях параметра  $K$  для  $p(\rho) = \rho^{1.4}$ ,  $\mu = 10^{-1}$ ,  $\tau = 10^{-3}$  и  $h = 10^{-2}$  (даные параметры были подобраны опытным путем).

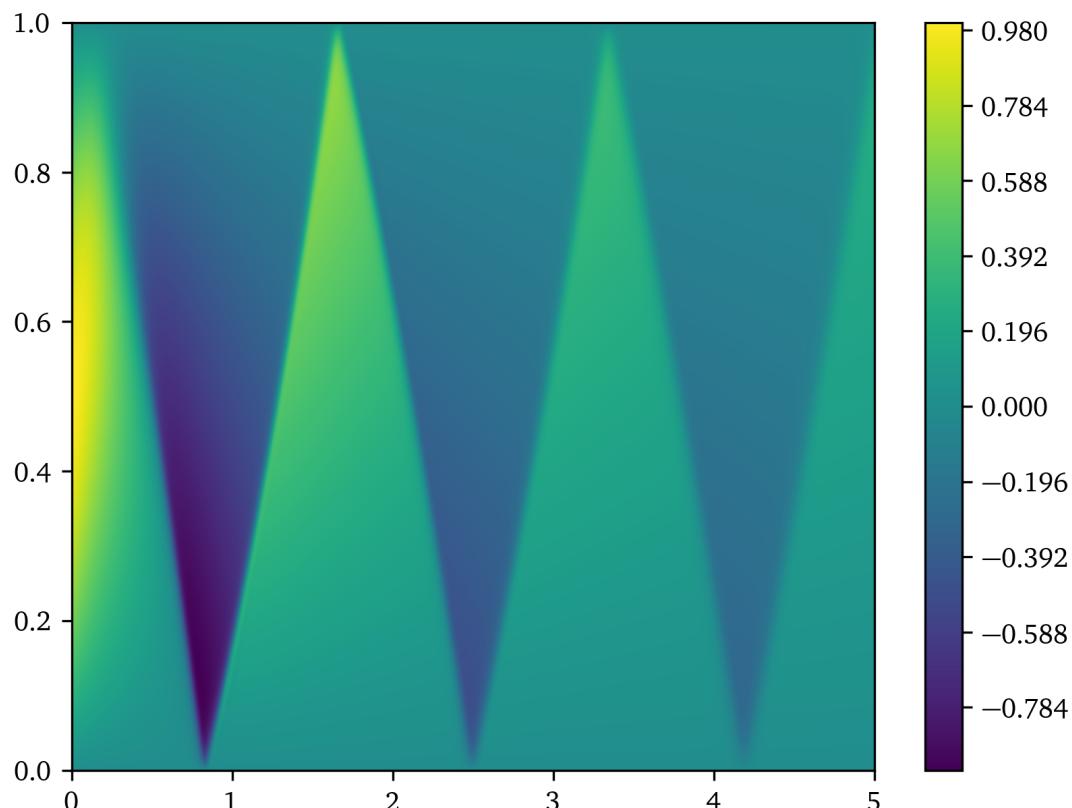


Рис. 127: График  $V$  для  $T = 5$  для  $K = 1$

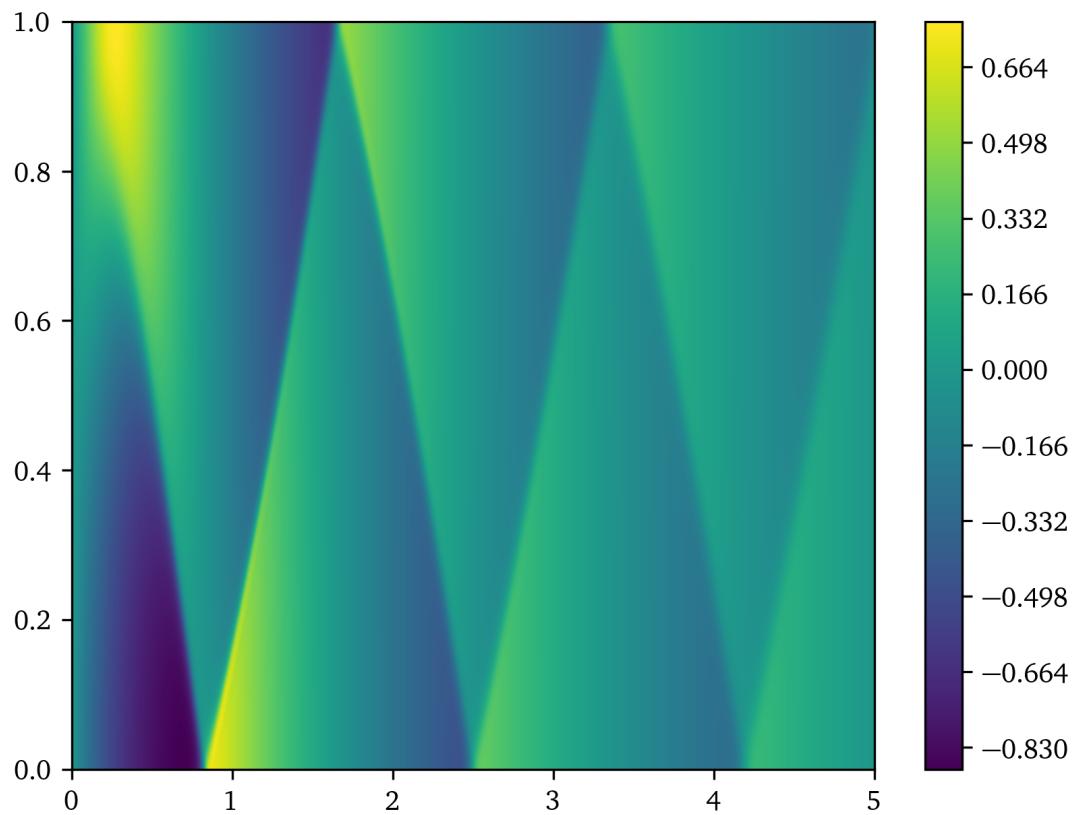


Рис. 128: График  $G$  для  $T = 5$  для  $K = 1$

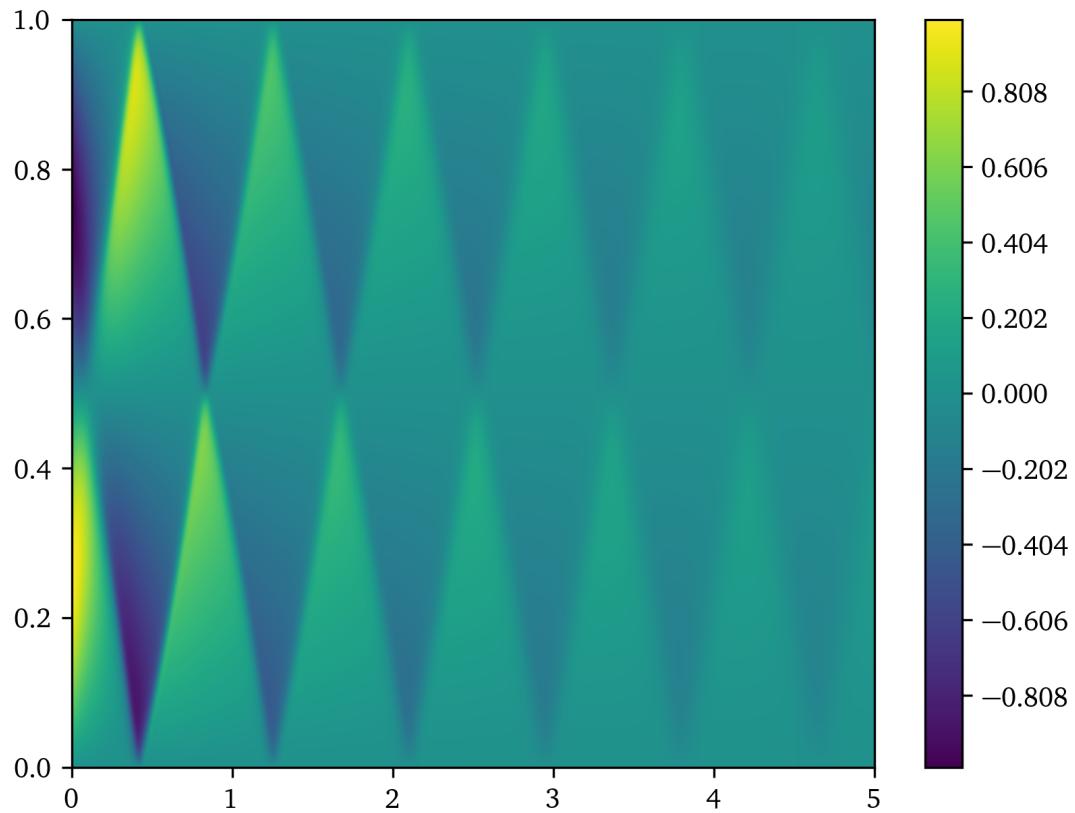


Рис. 129: График  $V$  для  $T = 5$  для  $K = 2$

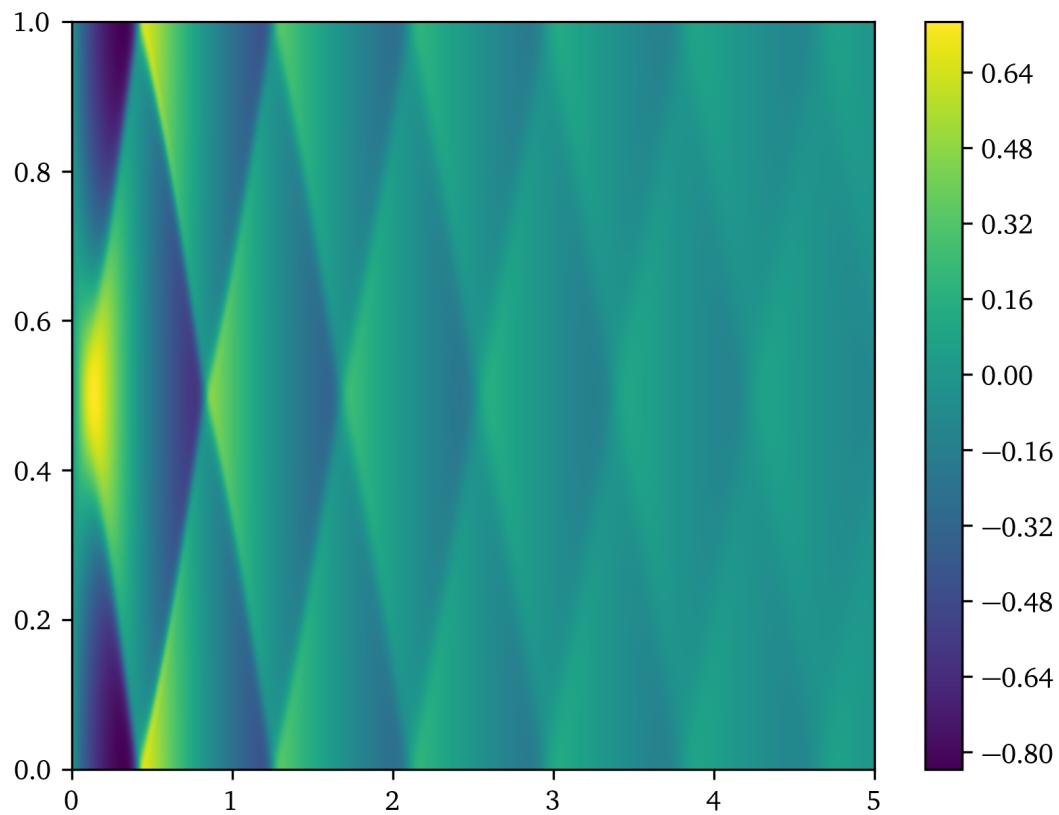


Рис. 130: График  $G$  для  $T = 5$  для  $K = 2$

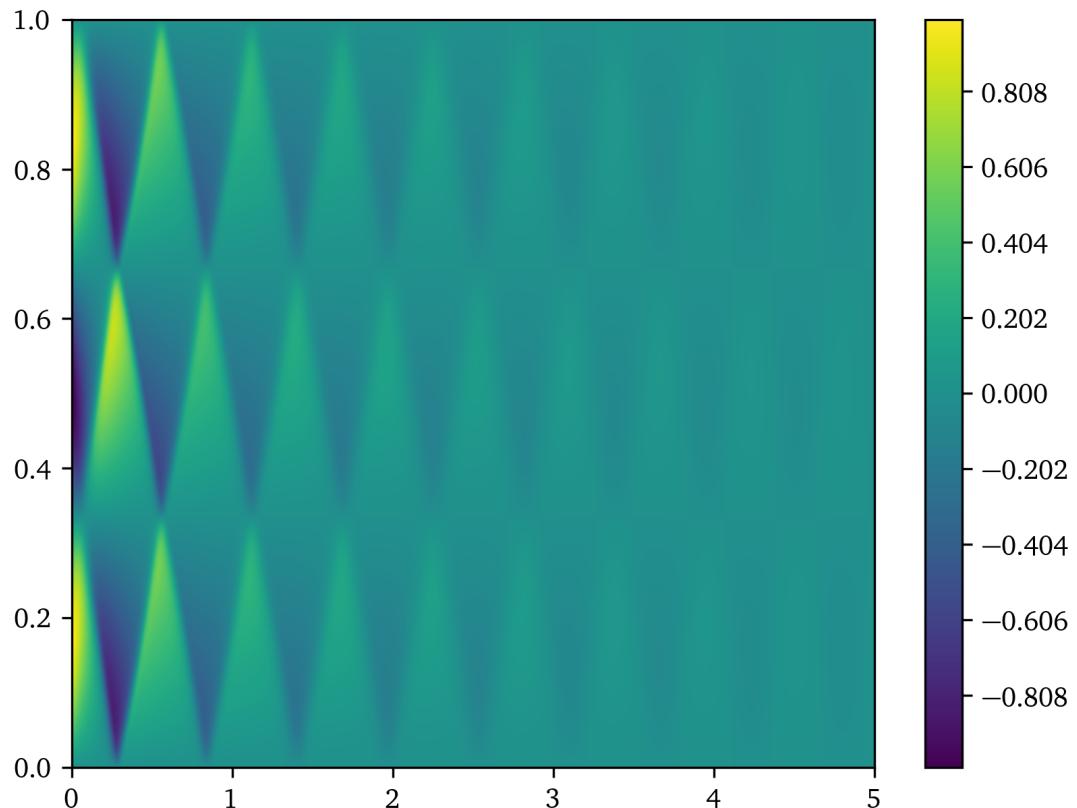


Рис. 131: График  $V$  для  $T = 5$  для  $K = 3$

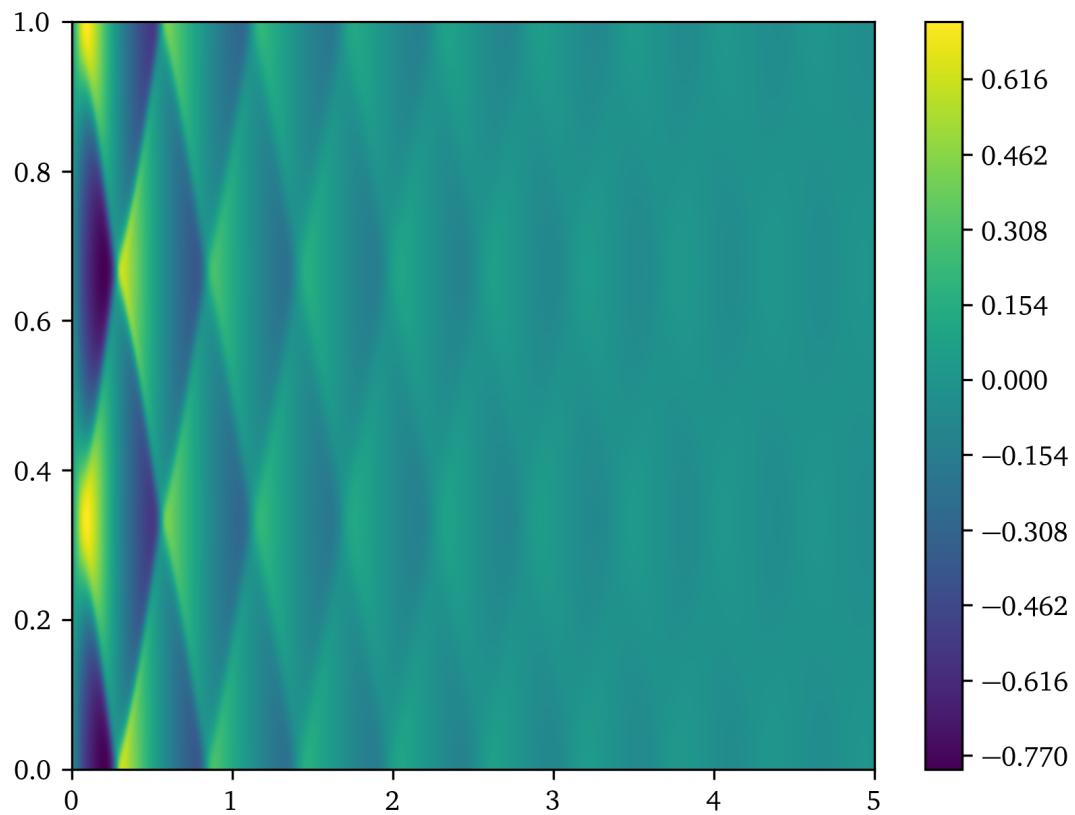


Рис. 132: График  $G$  для  $T = 5$  для  $K = 3$

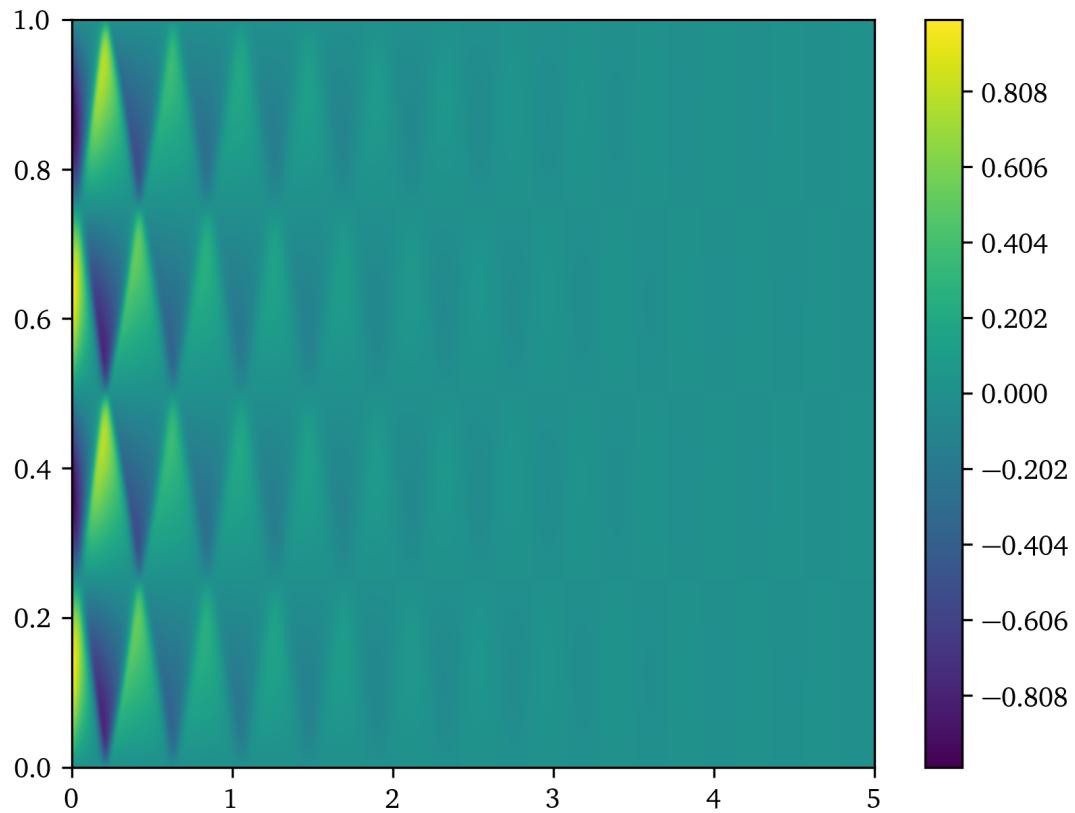


Рис. 133: График  $V$  для  $T = 5$  для  $K = 4$

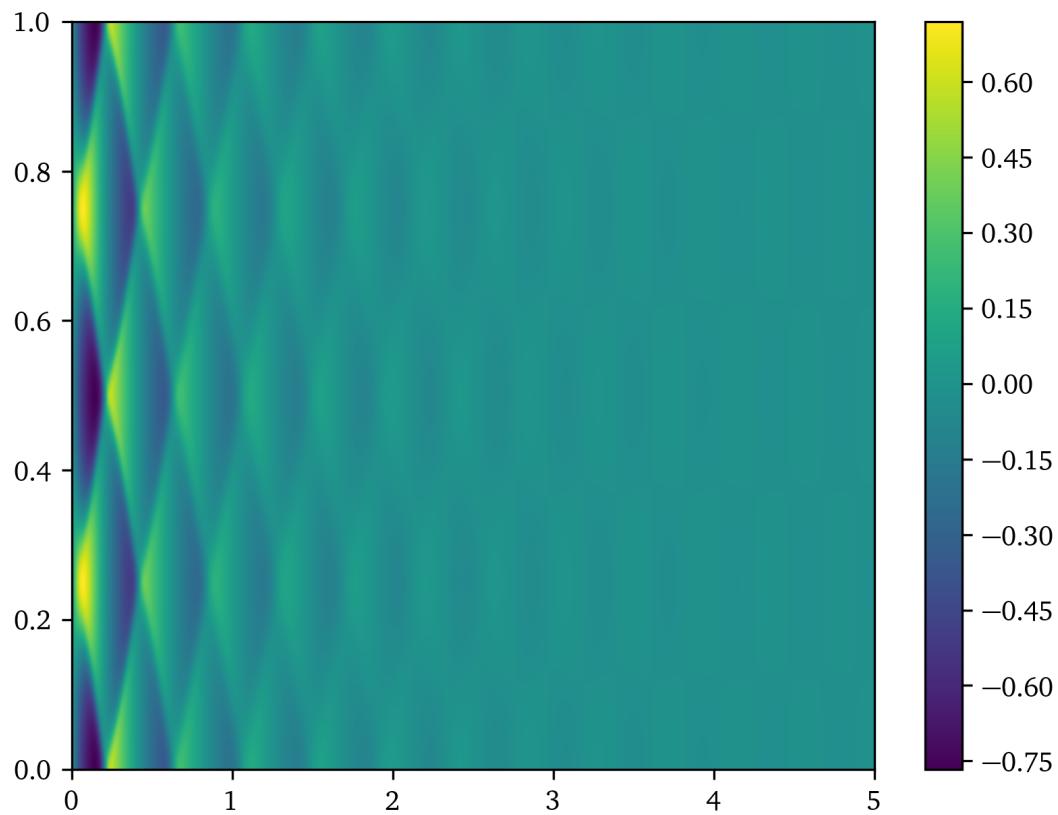


Рис. 134: График  $G$  для  $T = 5$  для  $K = 4$

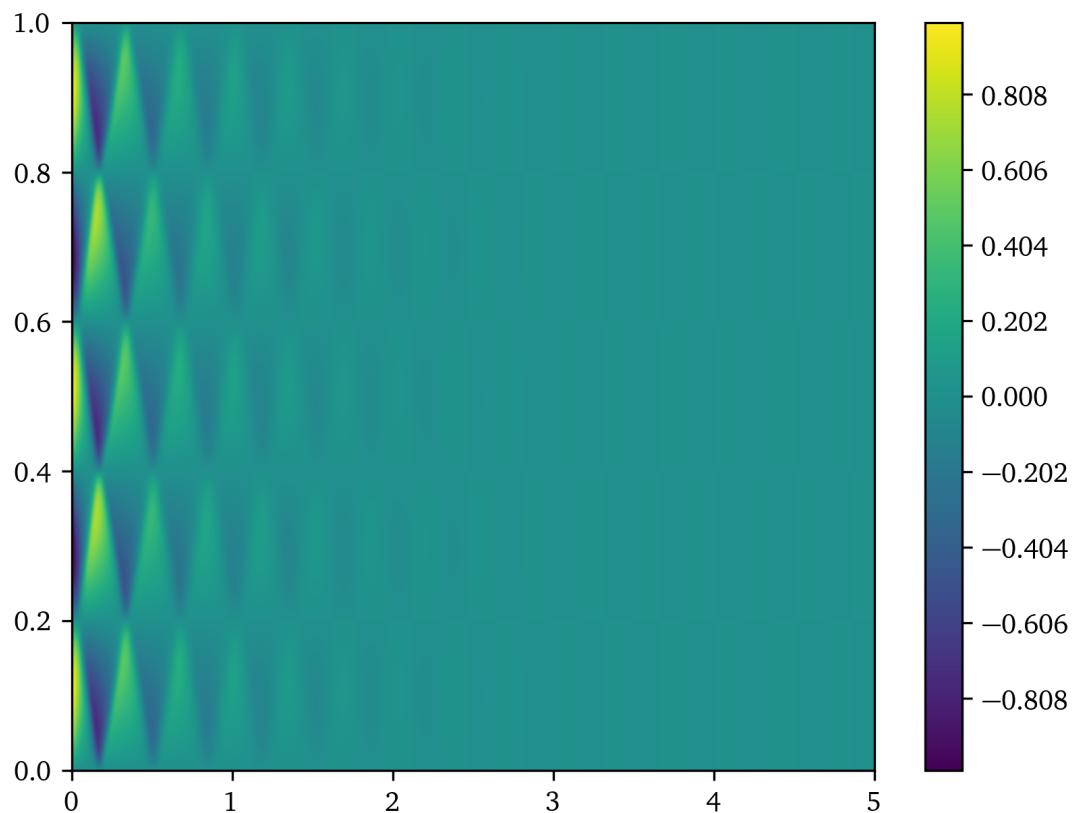


Рис. 135: График  $V$  для  $T = 5$  для  $K = 5$

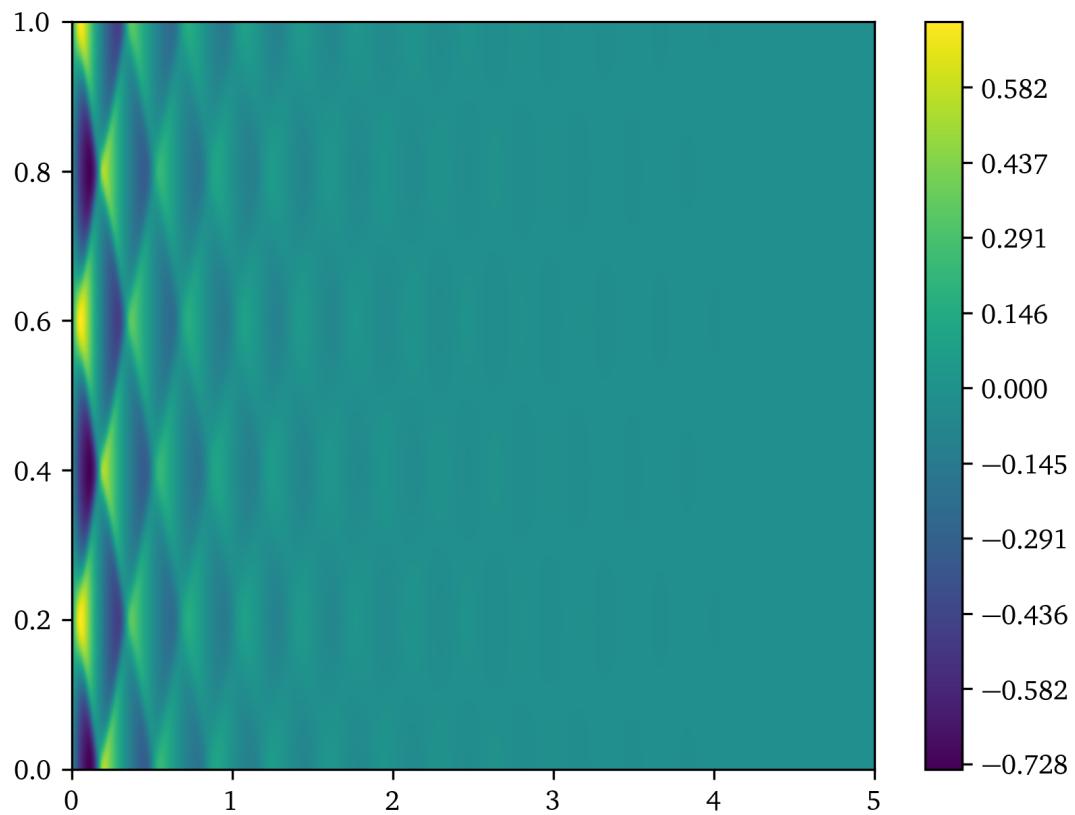


Рис. 136: График  $G$  для  $T = 5$  для  $K = 5$

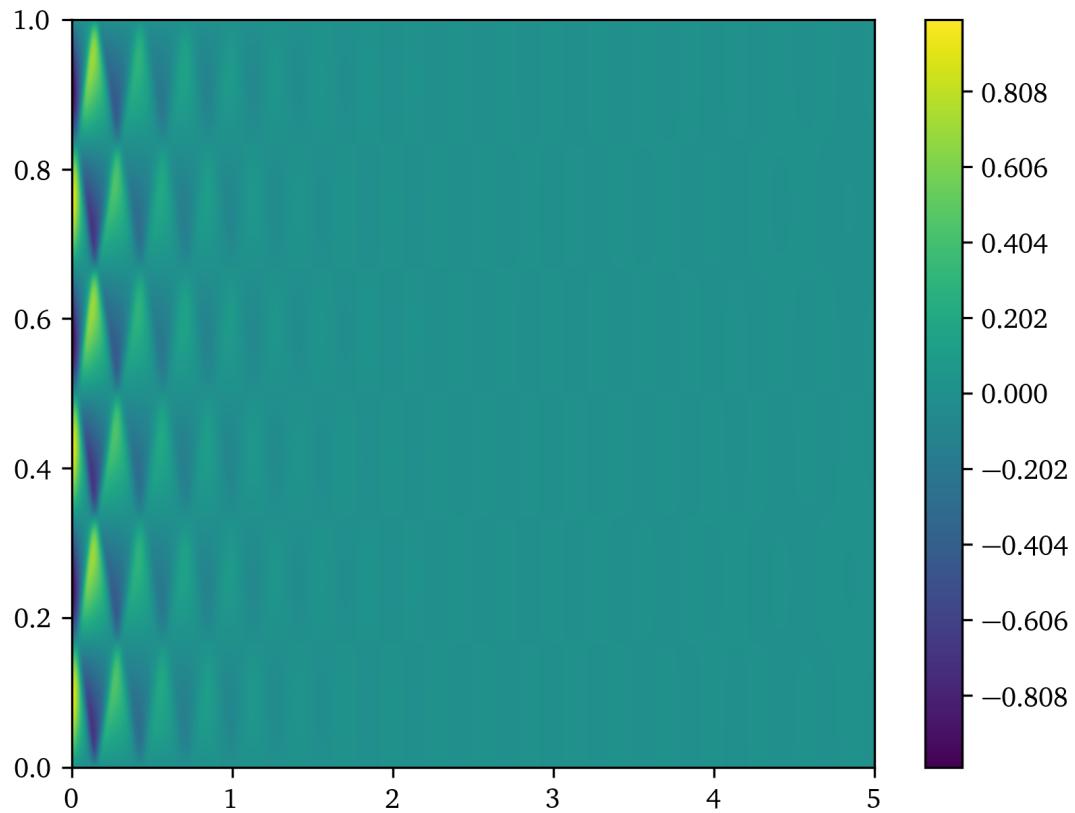


Рис. 137: График  $V$  для  $T = 5$  для  $K = 6$

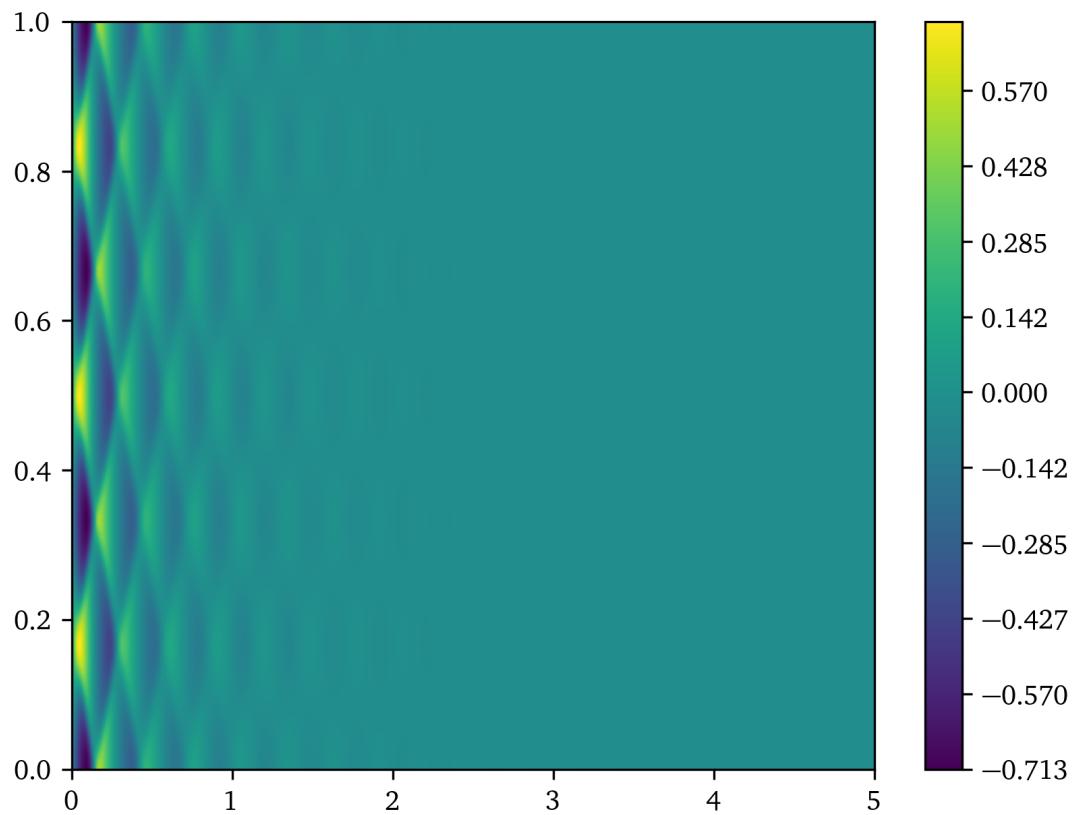


Рис. 138: График  $G$  для  $T = 5$  для  $K = 6$

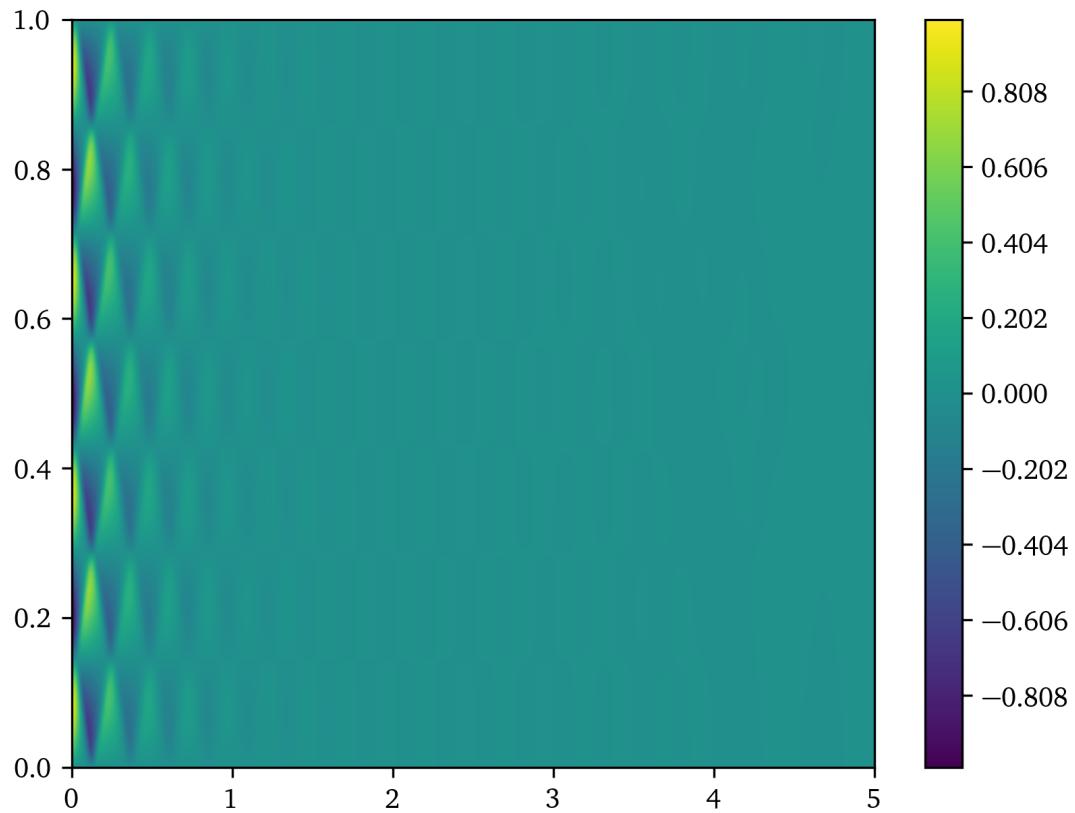


Рис. 139: График  $V$  для  $T = 5$  для  $K = 7$

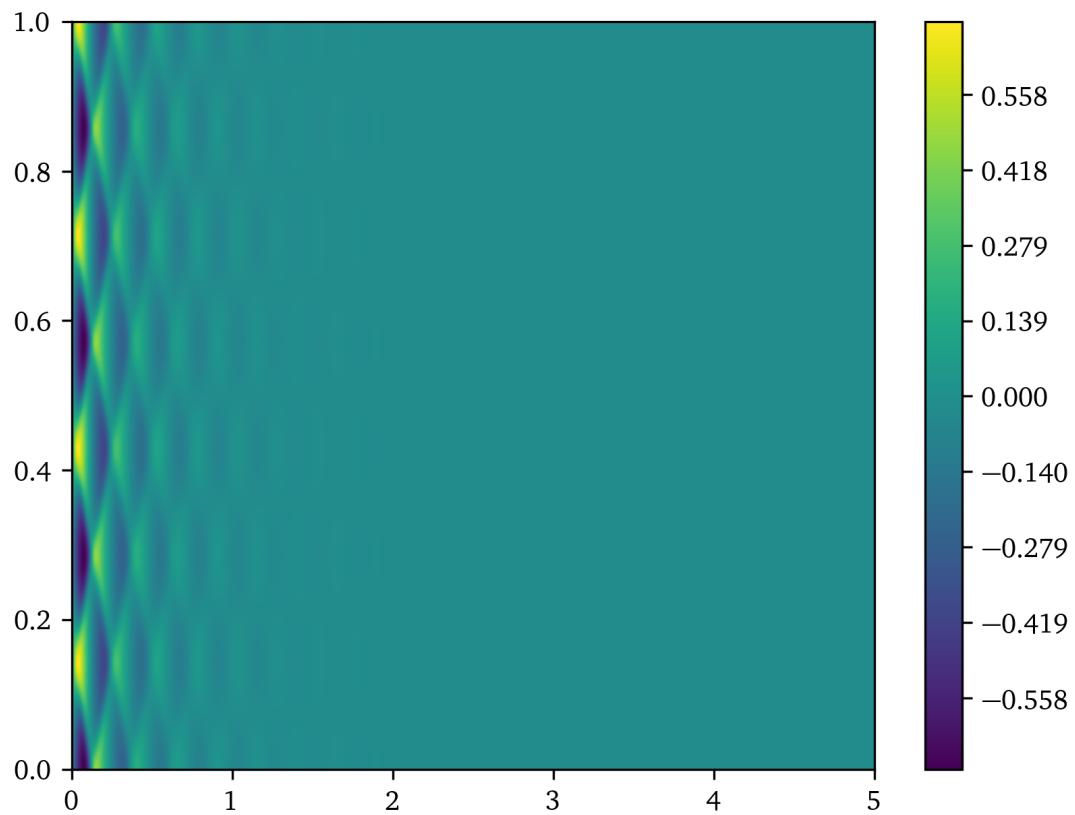


Рис. 140: График  $G$  для  $T = 5$  для  $K = 7$

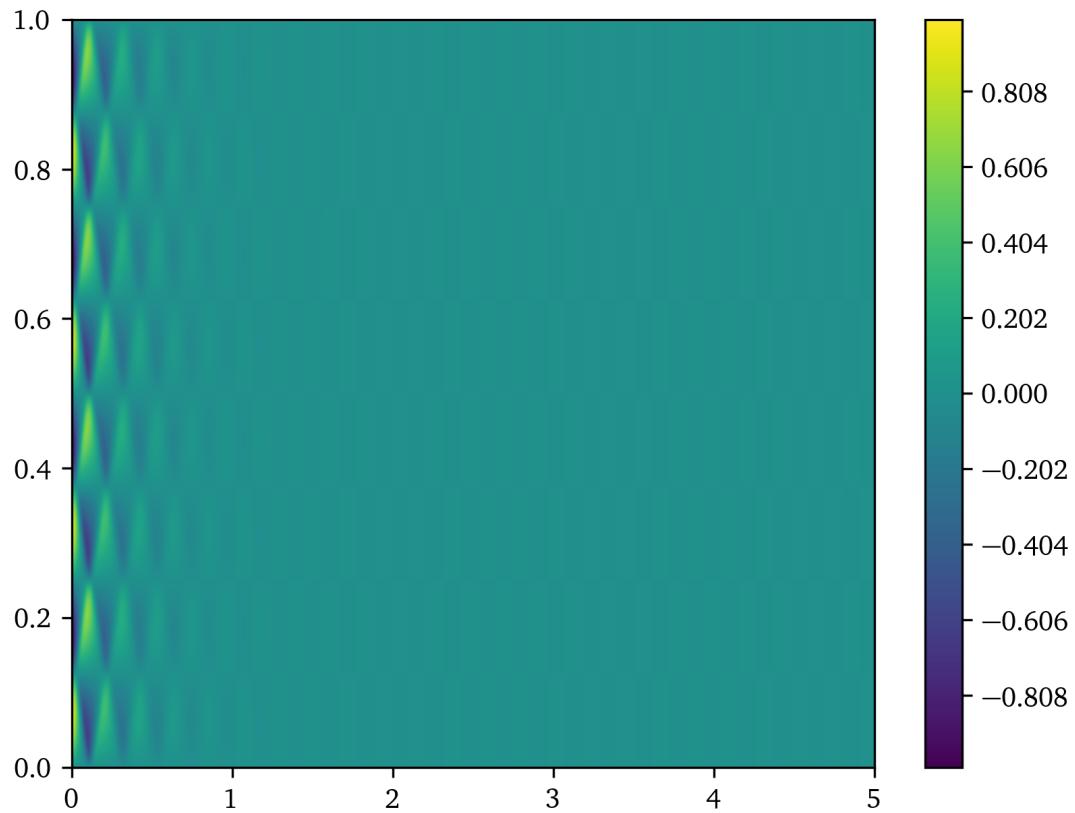


Рис. 141: График  $V$  для  $T = 5$  для  $K = 8$

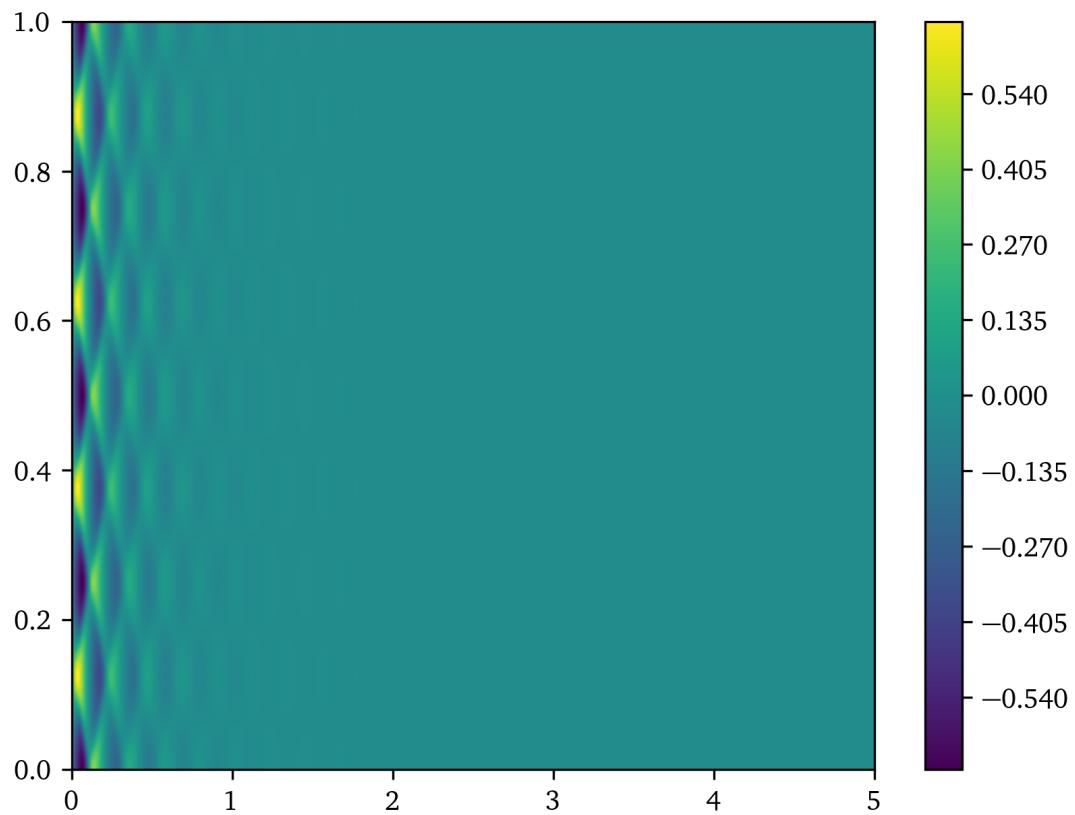


Рис. 142: График  $G$  для  $T = 5$  для  $K = 8$

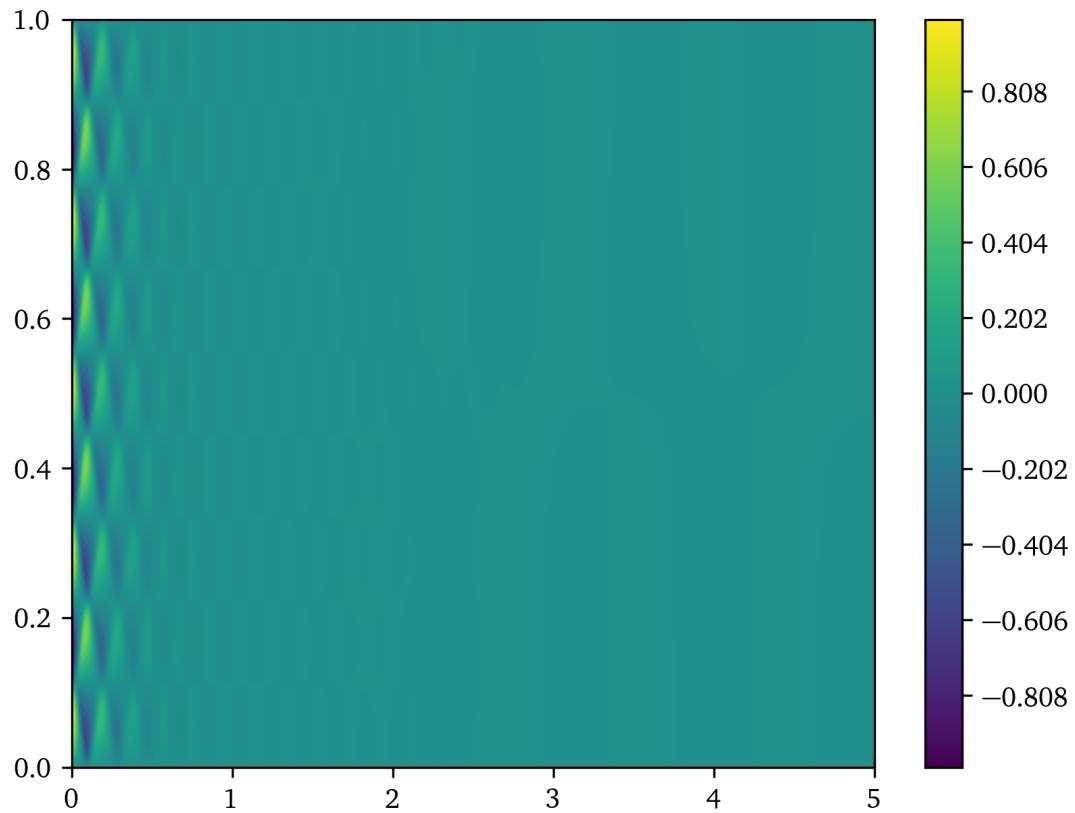


Рис. 143: График  $V$  для  $T = 5$  для  $K = 9$

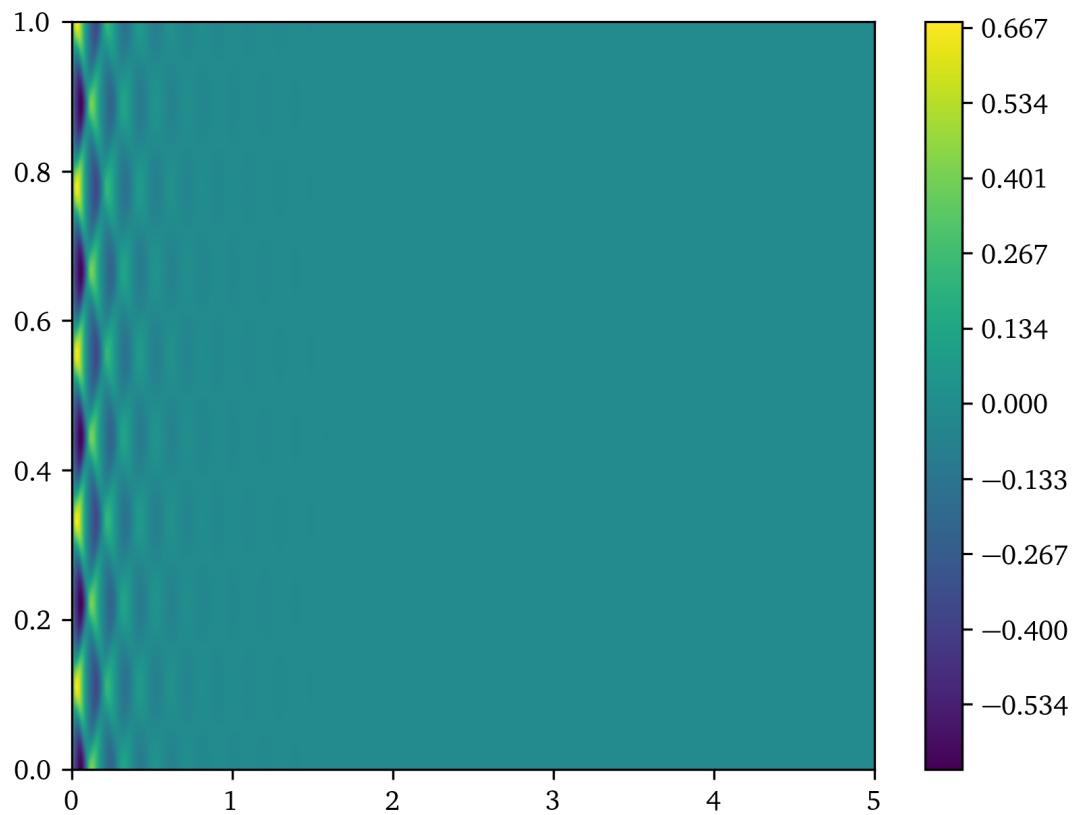


Рис. 144: График  $G$  для  $T = 5$  для  $K = 9$

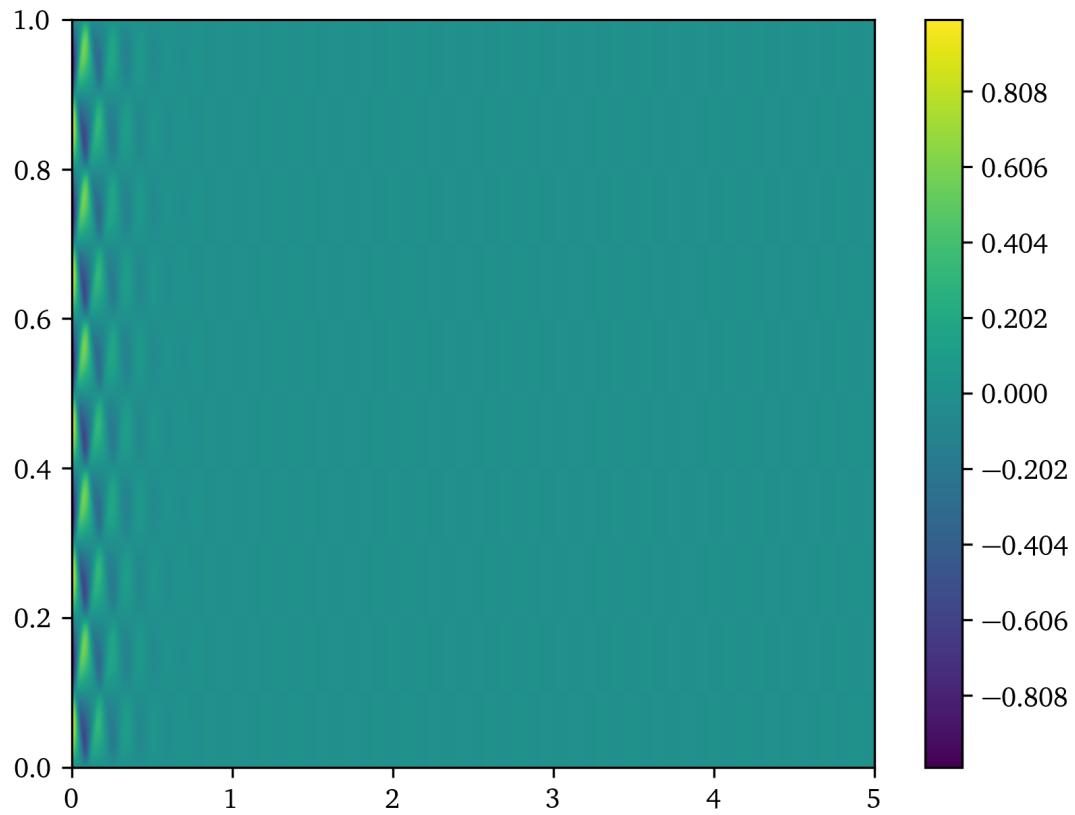


Рис. 145: График  $V$  для  $T = 5$  для  $K = 10$

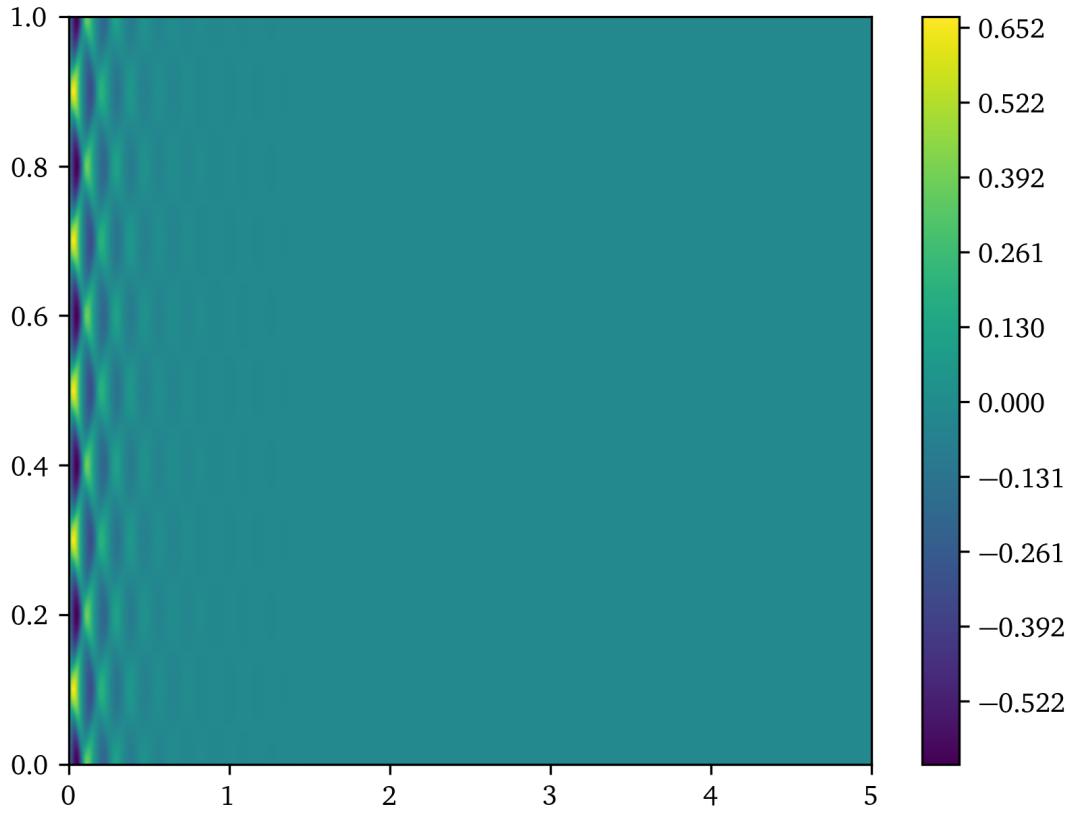


Рис. 146: График  $G$  для  $T = 5$  для  $K = 10$

## 7 Задача «протекания»

### 7.1 Постановка задачи

Пусть  $\Omega_x = [0; 10]$ . Для системы (1) заменим уравнение

$$u(t, X) = 0$$

на

$$\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=X} = 0, \quad (17)$$

и зададим начальные и граничные условия следующим образом:

$$\begin{aligned} \rho(0, x) &= 1; \\ u(0, x) &= 0; \\ \rho(t, 0) &= \tilde{\rho}; \\ u(t, 0) &= \tilde{v}, \end{aligned} \quad (18)$$

где  $\tilde{\rho} \geq 1$  и  $\tilde{v} > 0$ . Положим также  $f \equiv 0$  и  $f_0 \equiv 0$ .

Зафиксируем положительную константу  $T_0$  такую, что  $k = T_0/\tau$  натуральное. Суть эксперимента состоит в решении задачи (18), причем вычисления следует проводить до момента времени  $N_0 k \tau$ , для которого

$$\|V^{N_0 k} - V^n\| = \max_{0 \leq m \leq M} |V_m^{N_0 k} - V_m^n| \leq \varepsilon$$

для всех  $n \in \{N_0(k-1), N_0(k-1)+1, \dots, N_0 k-1\}$ , где величина  $\varepsilon$  является достаточно малой и определяется опытным путем.

## 7.2 Разностная схема

Для решения данной задачи необходимо модифицировать схему. Первое уравнение системы (2)

$$\frac{\partial g}{\partial t} + u \frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} = f_0$$

в случае граничного условия  $u(t, X) = 0$  при  $x = X$  принимает вид

$$\frac{\partial g}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = f_0,$$

и этому равенству в разностной схеме соответствует уравнение

$$G_t + \widehat{V}_{\bar{x}} = f_0.$$

Однако в силу условия (17) при  $x = X$  первое уравнение системы (2) принимает вид

$$\frac{\partial g}{\partial t} + u \frac{\partial g}{\partial x} = f_0.$$

Для численных экспериментов этому равенству в разностной схеме сопоставим уравнение

$$G_t + \widehat{V} \widehat{G}_{\bar{x}} = f_0.$$

Распишем данное уравнение:

$$\frac{G_M^{n+1} - G_M^n}{\tau} + V_M^{n+1} \frac{G_M^{n+1} - G_{M-1}^{n+1}}{h} = (f_0)_M^n$$

$$\left( -\frac{V_M^{n+1}}{h} \right) G_{M-1}^{n+1} + \left( \frac{1}{\tau} + \frac{V_M^{n+1}}{h} \right) G_M^{n+1} = (f_0)_M^n + \frac{G_M^n}{\tau}.$$

Аналогично уравнение

$$V_M^{n+1} = 0$$

заменяется на

$$\widehat{V}_{\bar{x}} = 0,$$

то есть

$$V_M^{n+1} - V_{M-1}^{n+1} = 0.$$

## 7.3 Численные эксперименты

Для анализа зависимости времени стабилизации от параметров  $\tilde{g} = \ln \tilde{\rho}$  и  $\tilde{v}$  зафиксируем  $\varepsilon = 10^{-3}$ ,  $\tau = 10^{-4}$ ,  $h = 10^{-2}$ ,  $T_0 = 0.1$  и  $\mu = 10^{-1}$ . Далее приведены таблицы зависимости времени стабилизации от параметров  $\tilde{g}$  и  $\tilde{v}$ .

$\tilde{g} \setminus \tilde{v}$	1	2	3	4
1	571.5	14.5	7.3	4.9
2	711.6	12.0	6.1	7.2
3	709.3	11.8	5.9	3.9
4	708.7	11.7	5.9	3.9

Таблица 37: Времена сходимости для  $p(\rho) = 10^0 \rho$

$\tilde{g}$	$\tilde{v}$	1	2	3	4
1		113.1	29.3	9.9	6.0
2		670.8	55.8	9.9	5.5
3		658.4	664.5	14.5	6.5
4		657.1	659.1	34.7	8.9

Таблица 38: Времена сходимости для  $p(\rho) = \rho^{1.4}$

### 7.3.1 Вывод

Для  $p(\rho) = C\rho$ . При увеличении параметра  $\tilde{v}$  времена стабилизации уменьшаются. При увеличении параметра  $\tilde{g}$  времена стабилизации увеличиваются.

Для  $p(\rho) = \rho^{1.4}$ . При увеличении параметров  $\tilde{v}$  и  $\tilde{g}$  времена стабилизации увеличиваются.

### 7.3.2 Динамика процесса

Рассмотрим случай  $\mu = 0.1$ ,  $p(\rho) = \rho^{1.4}$ ,  $\tau = 10^{-3}$ ,  $h = 10^{-2}$ ,  $\varepsilon = 10^{-3}$ ,  $\tilde{v} = 1$ ,  $\tilde{g} = 1$ . Далее приведены срезы графиков  $V$  и  $G$  (динамика процесса) в разные моменты времени.

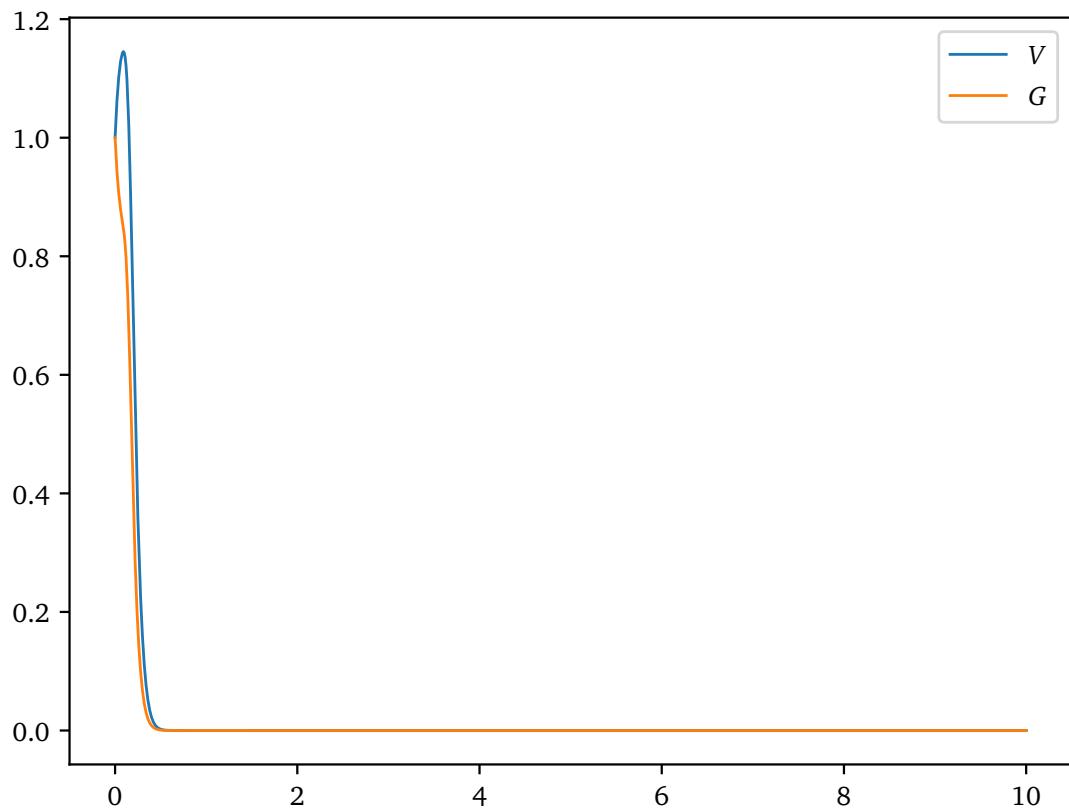


Рис. 147: Срез для  $t = 0.1$

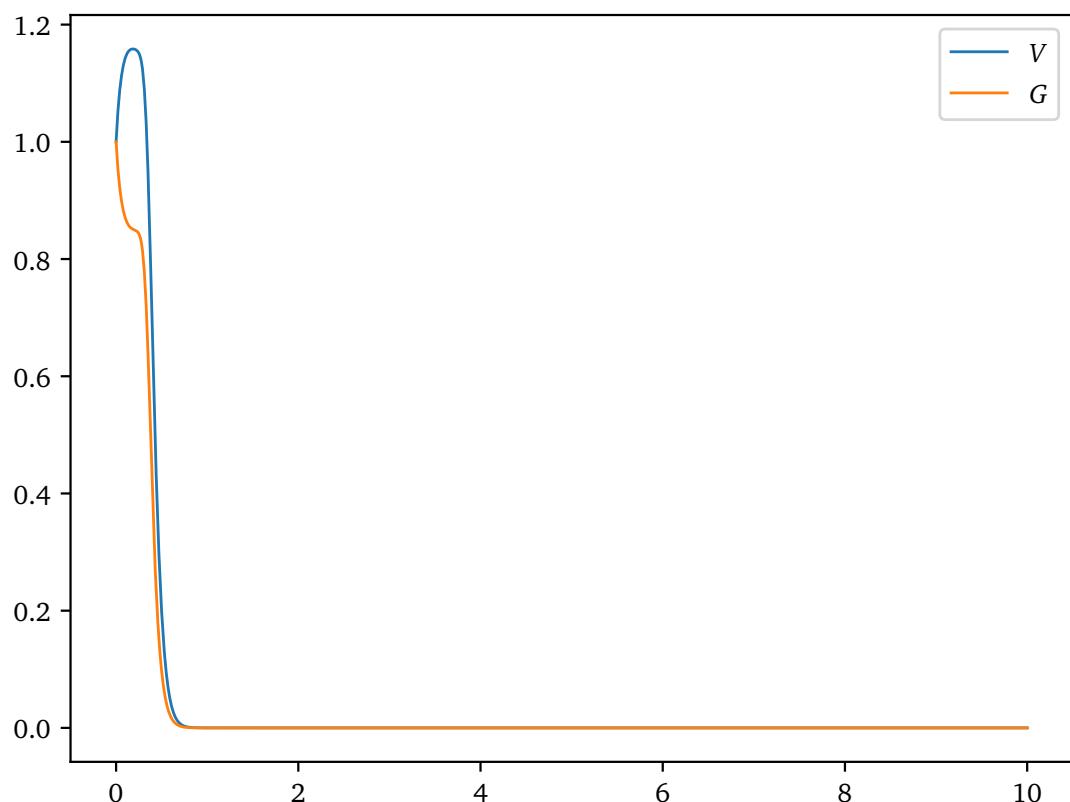


Рис. 148: Срез для  $t = 0.2$

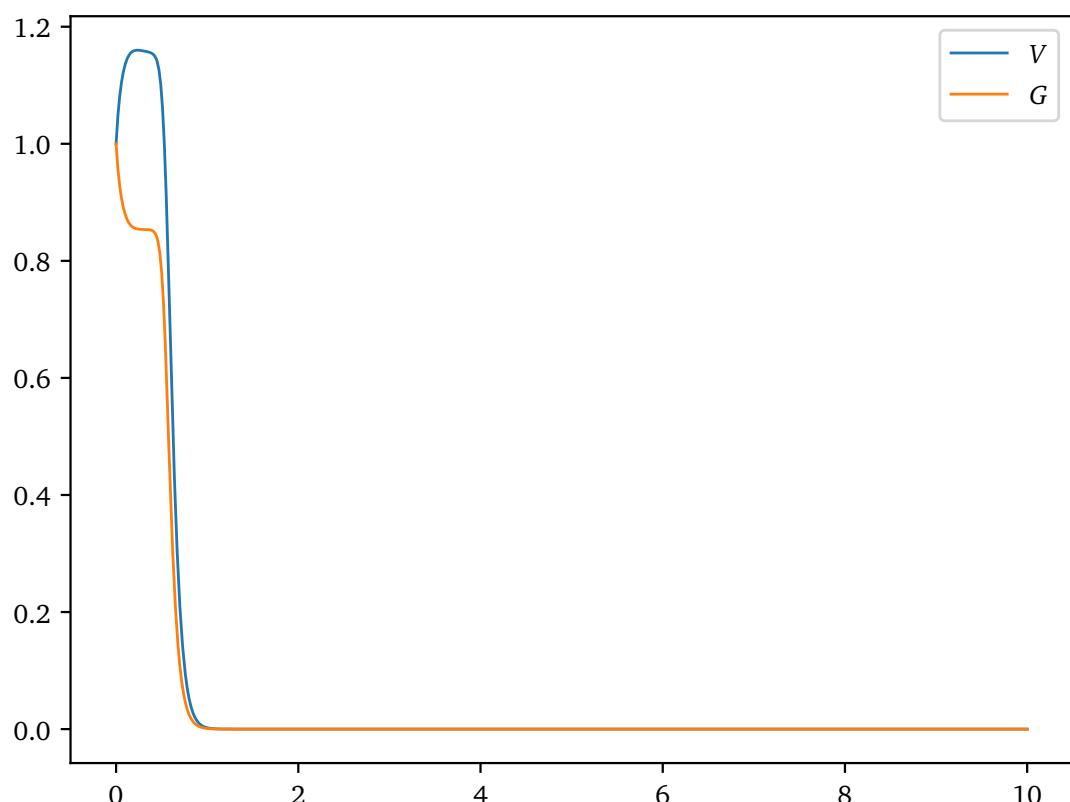


Рис. 149: Срез для  $t = 0.3$

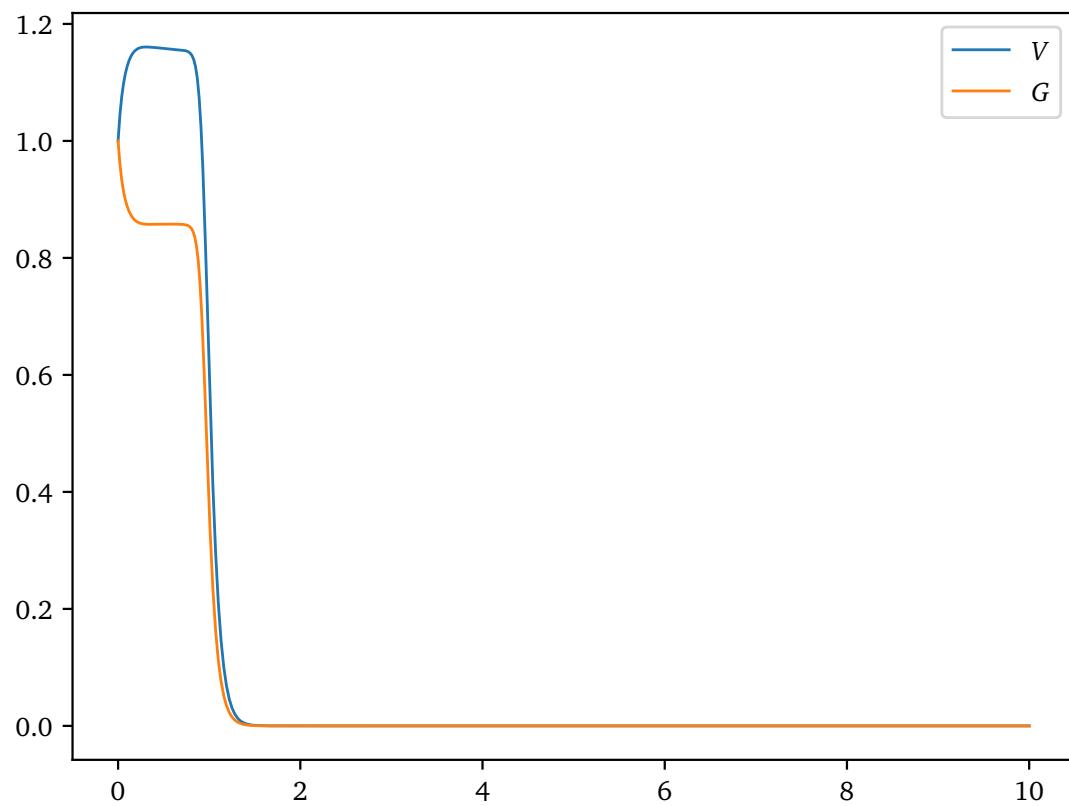


Рис. 150: Срез для  $t = 0.5$

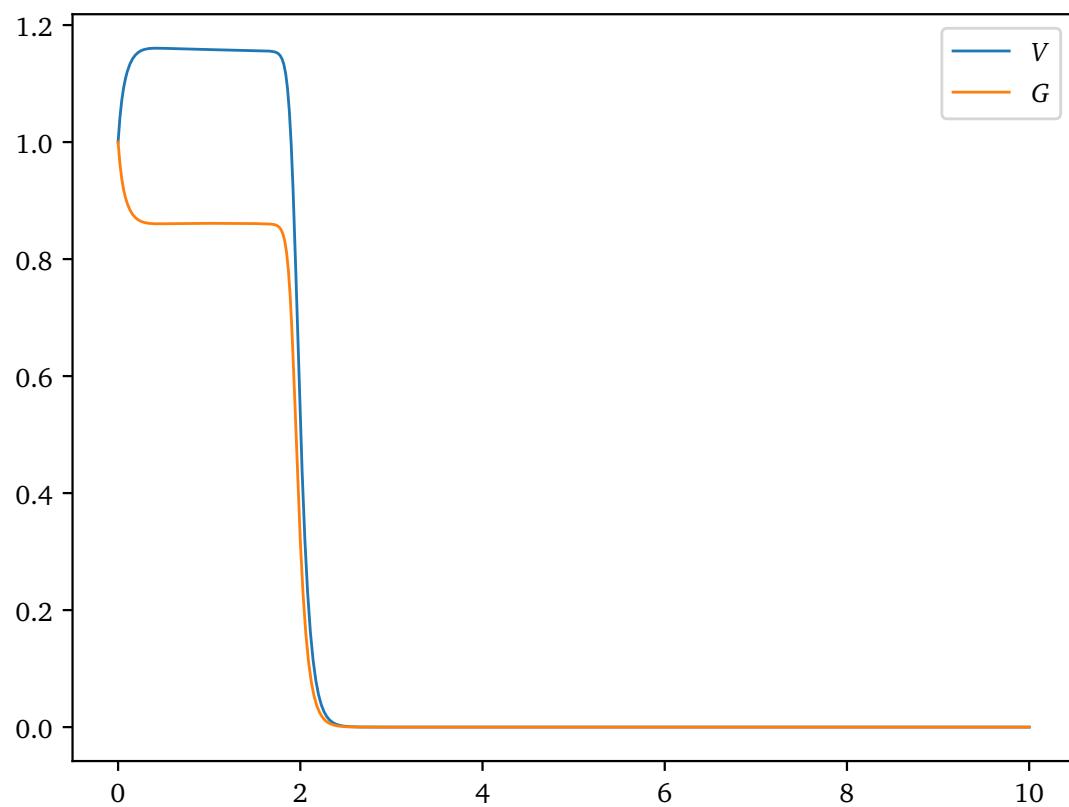


Рис. 151: Срез для  $t = 1.0$

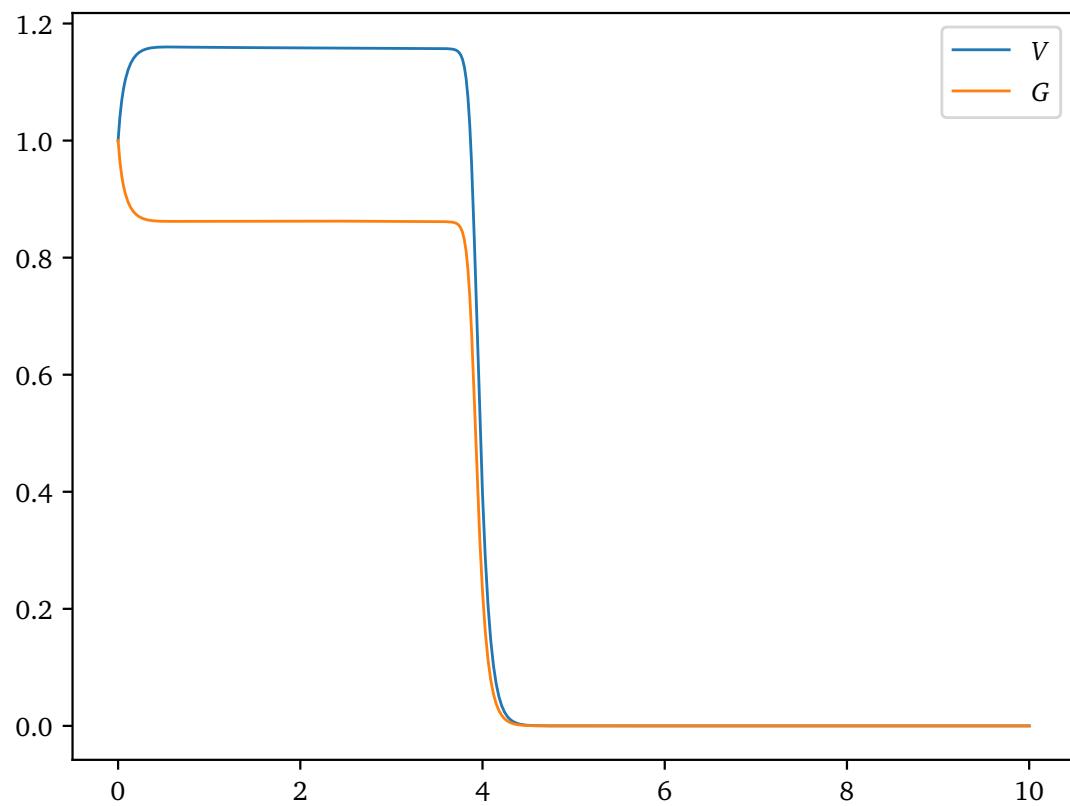


Рис. 152: Срез для  $t = 2.0$

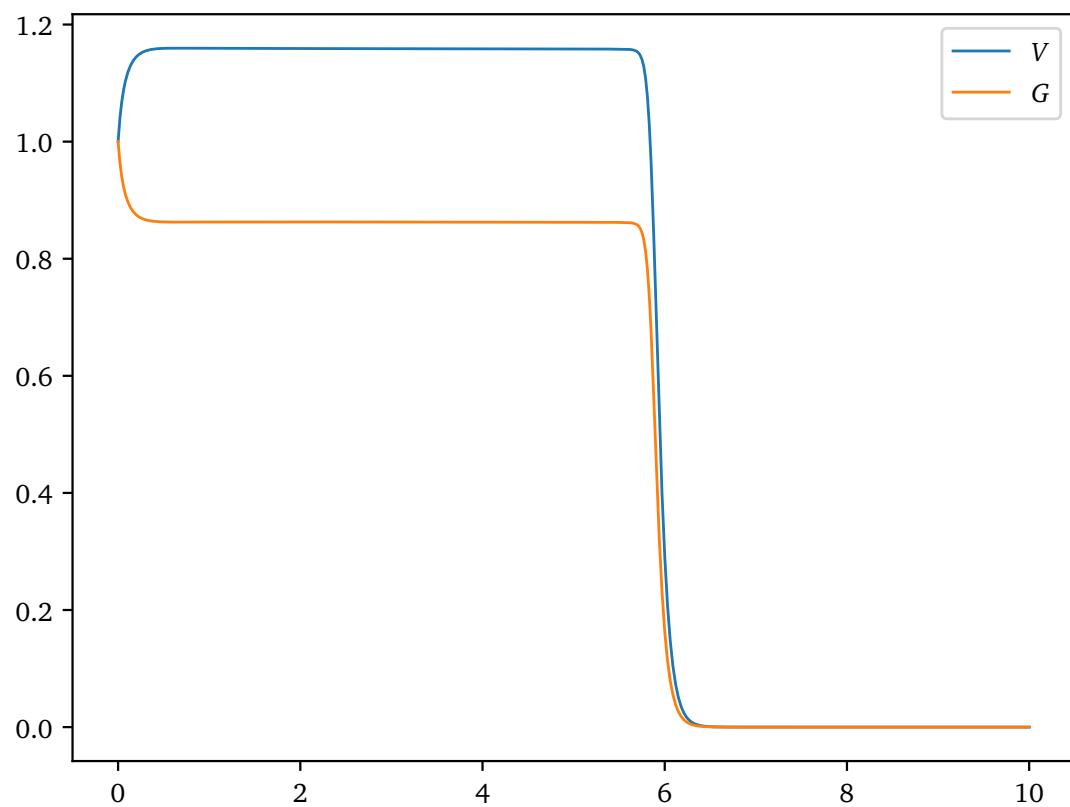


Рис. 153: Срез для  $t = 3.0$

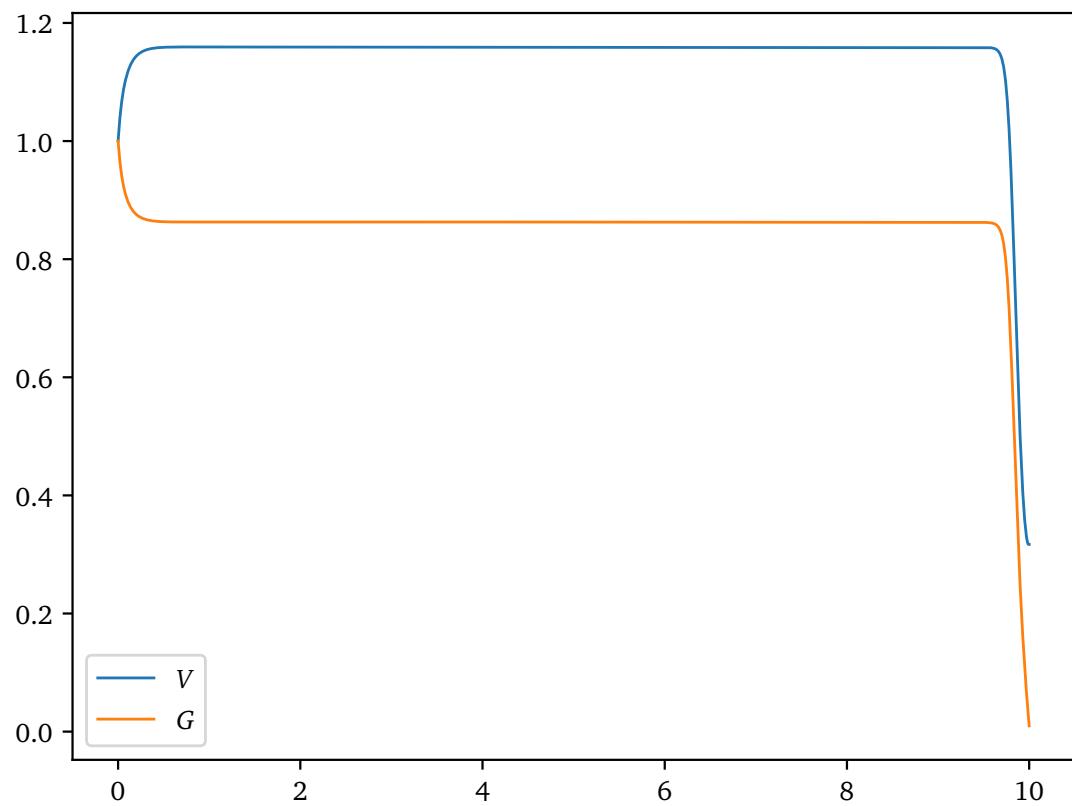


Рис. 154: Срез для  $t = 5.0$

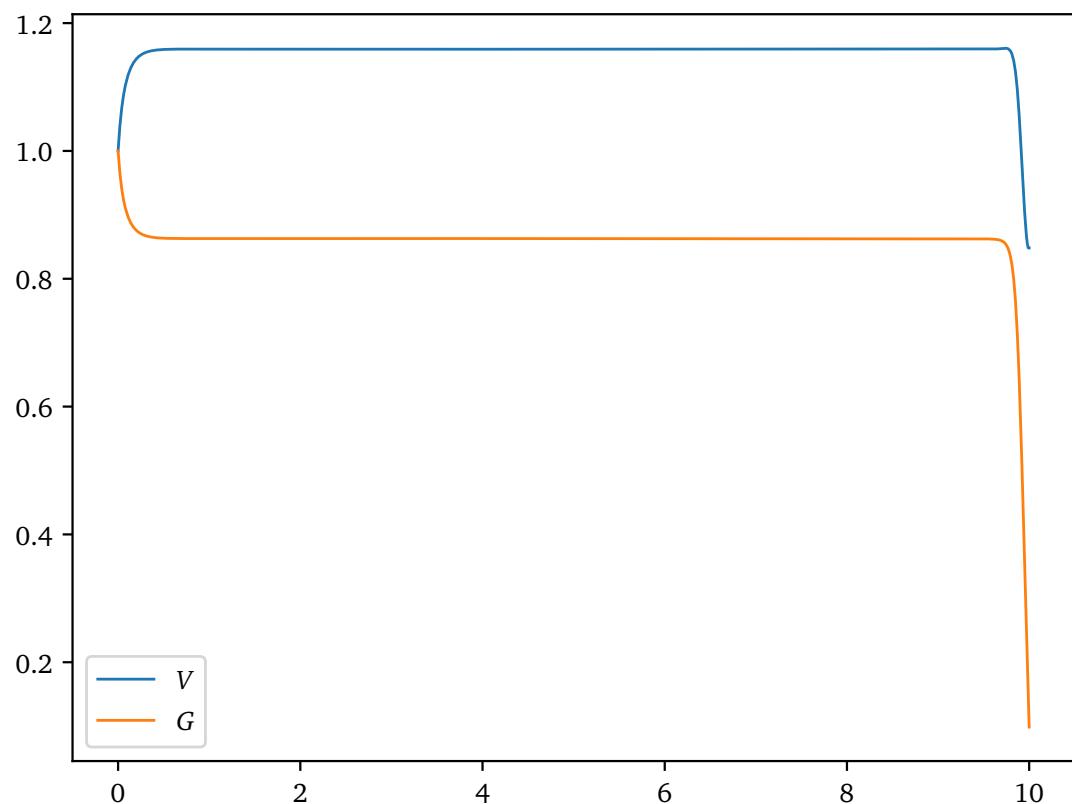


Рис. 155: Срез для  $t = 5.05$

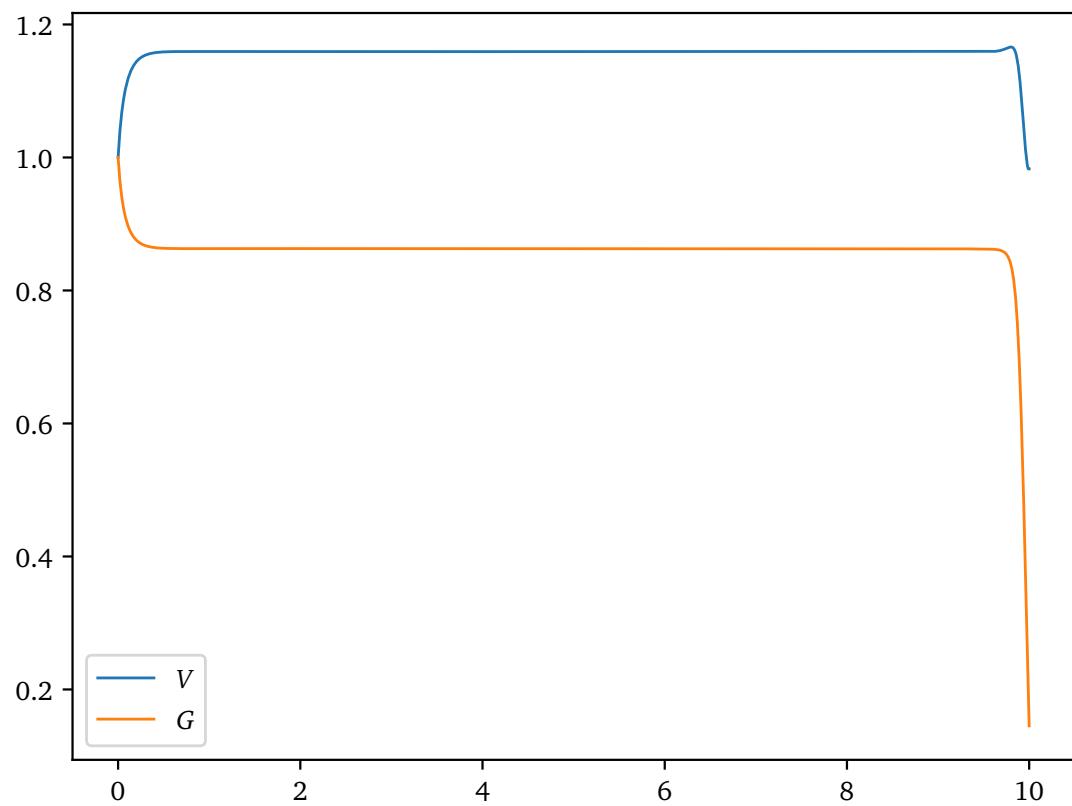


Рис. 156: Срез для  $t = 5.06$

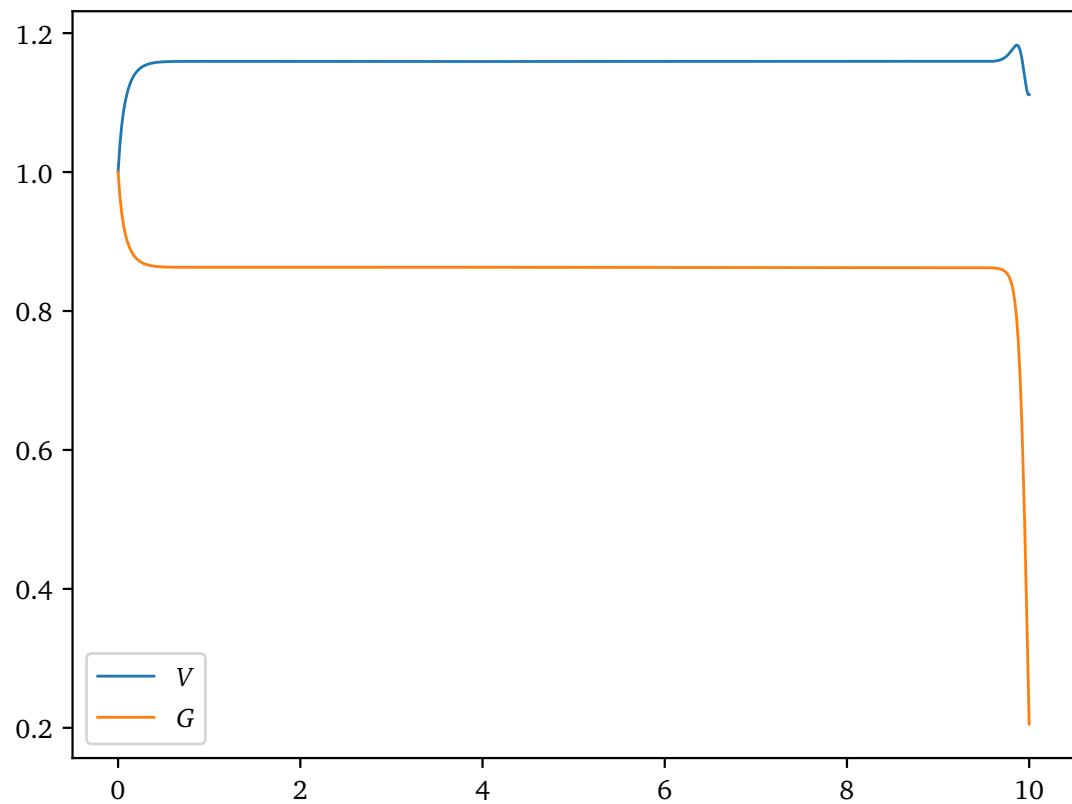


Рис. 157: Срез для  $t = 5.07$

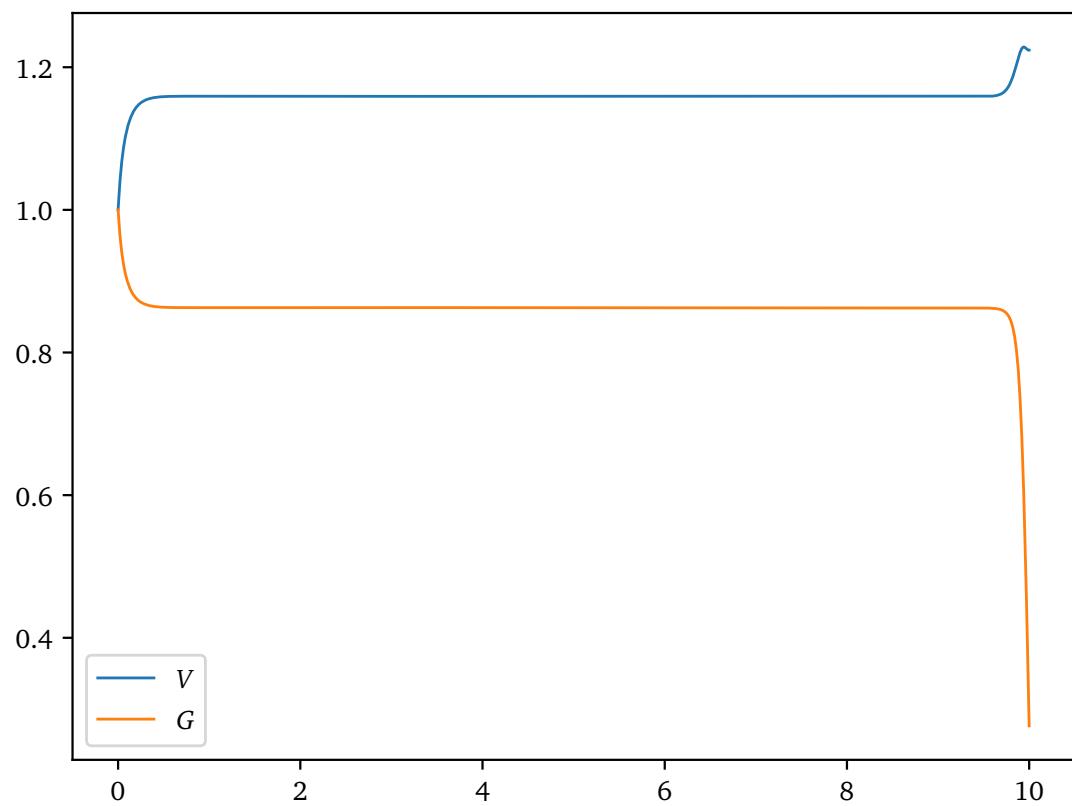


Рис. 158: Срез для  $t = 5.08$

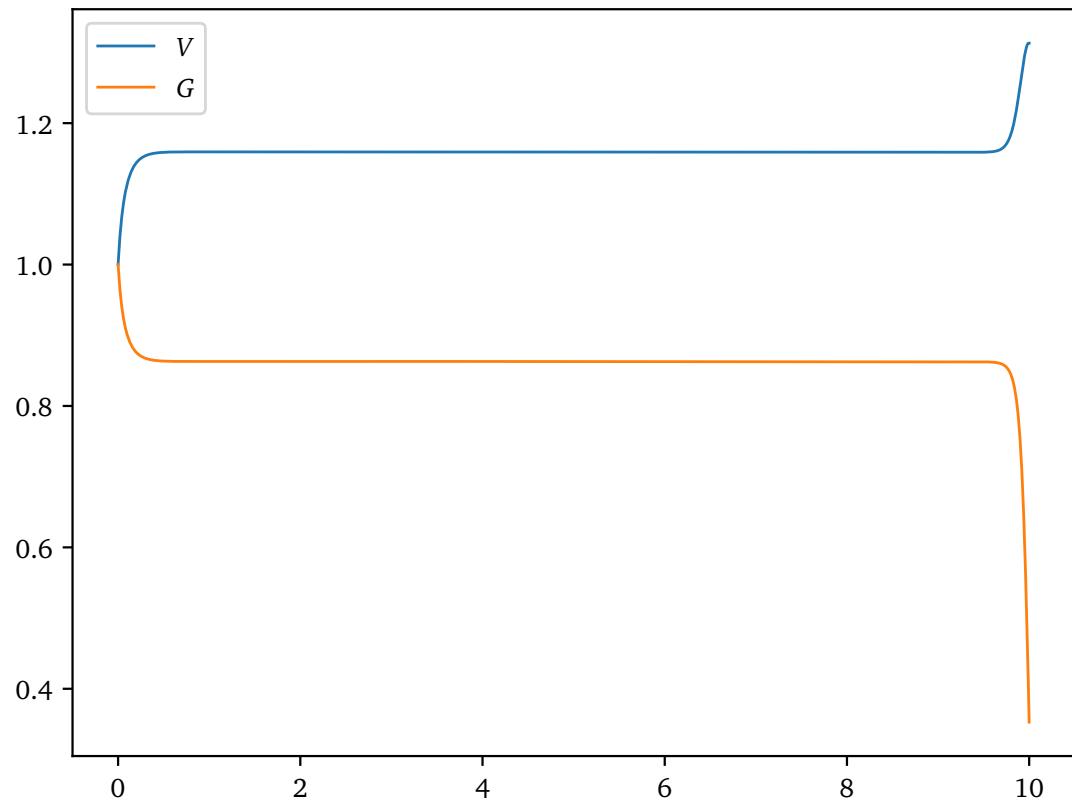


Рис. 159: Срез для  $t = 5.09$

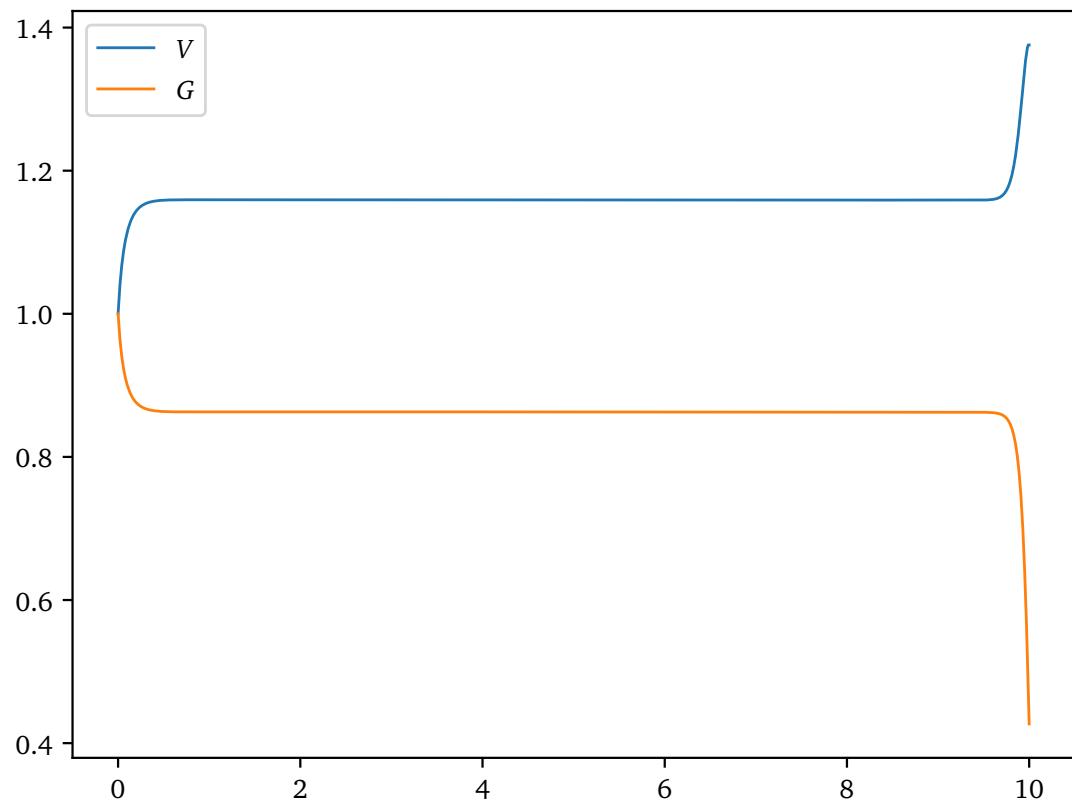


Рис. 160: Срез для  $t = 5.1$

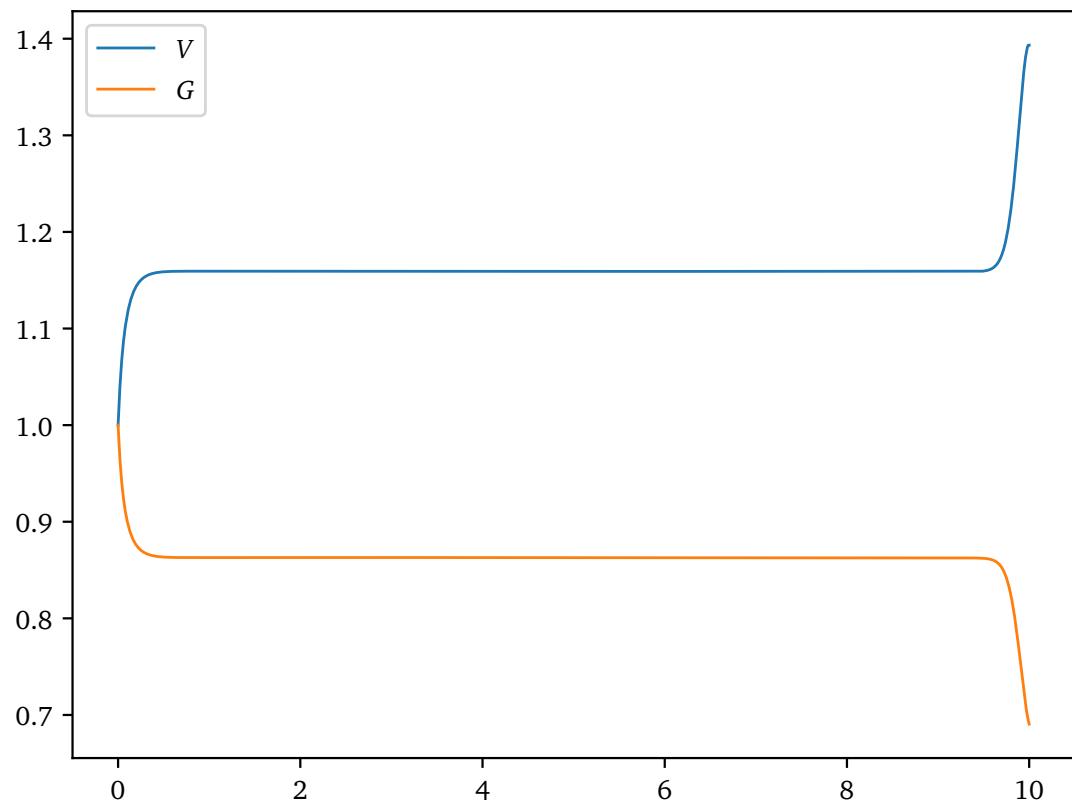


Рис. 161: Срез для  $t = 5.2$

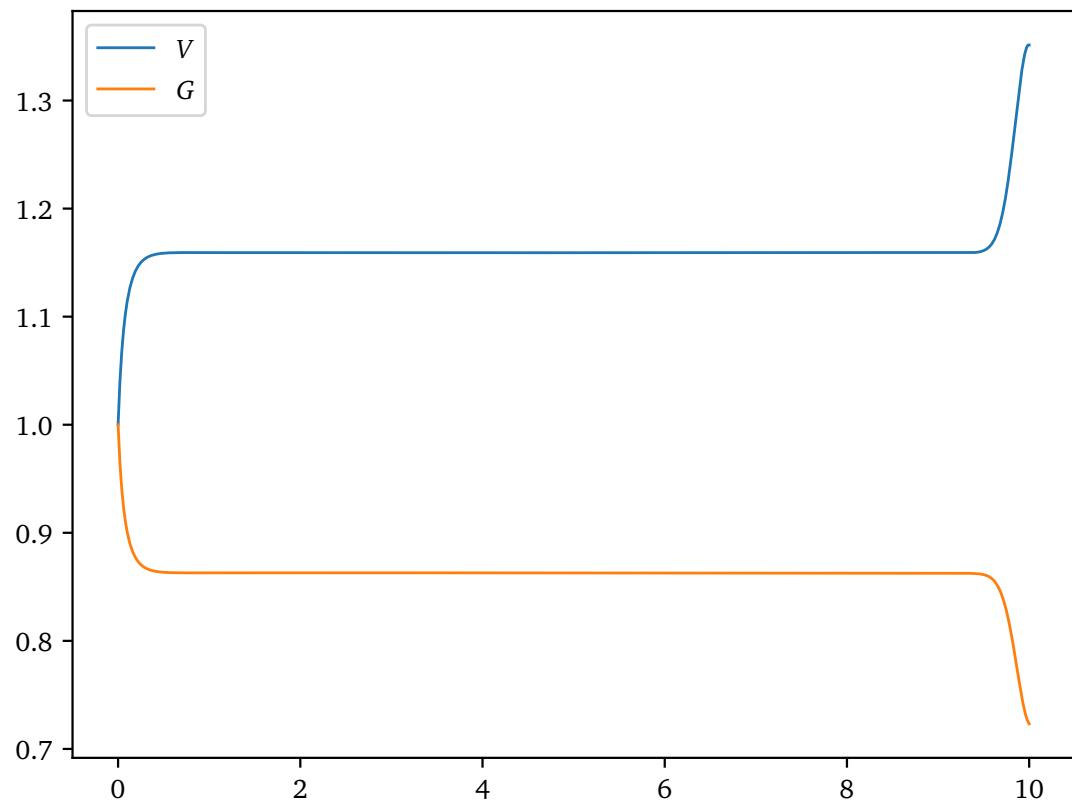


Рис. 162: Срез для  $t = 5.3$

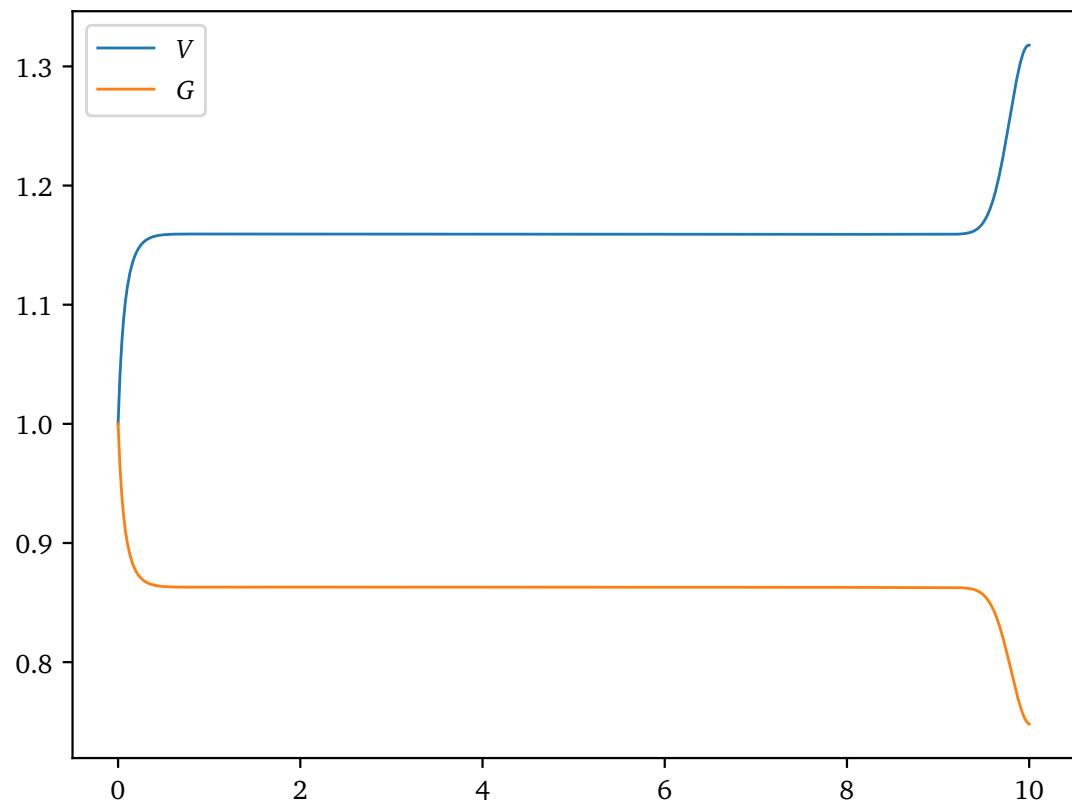


Рис. 163: Срез для  $t = 5.5$

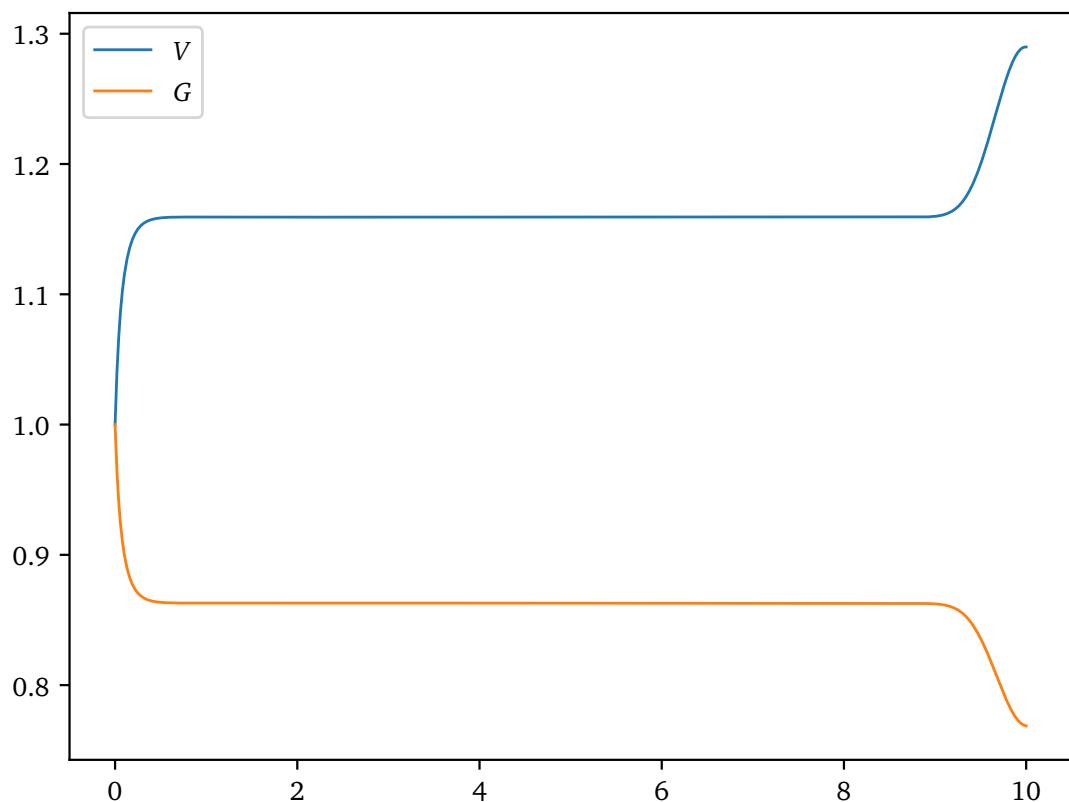


Рис. 164: Срез для  $t = 6.0$

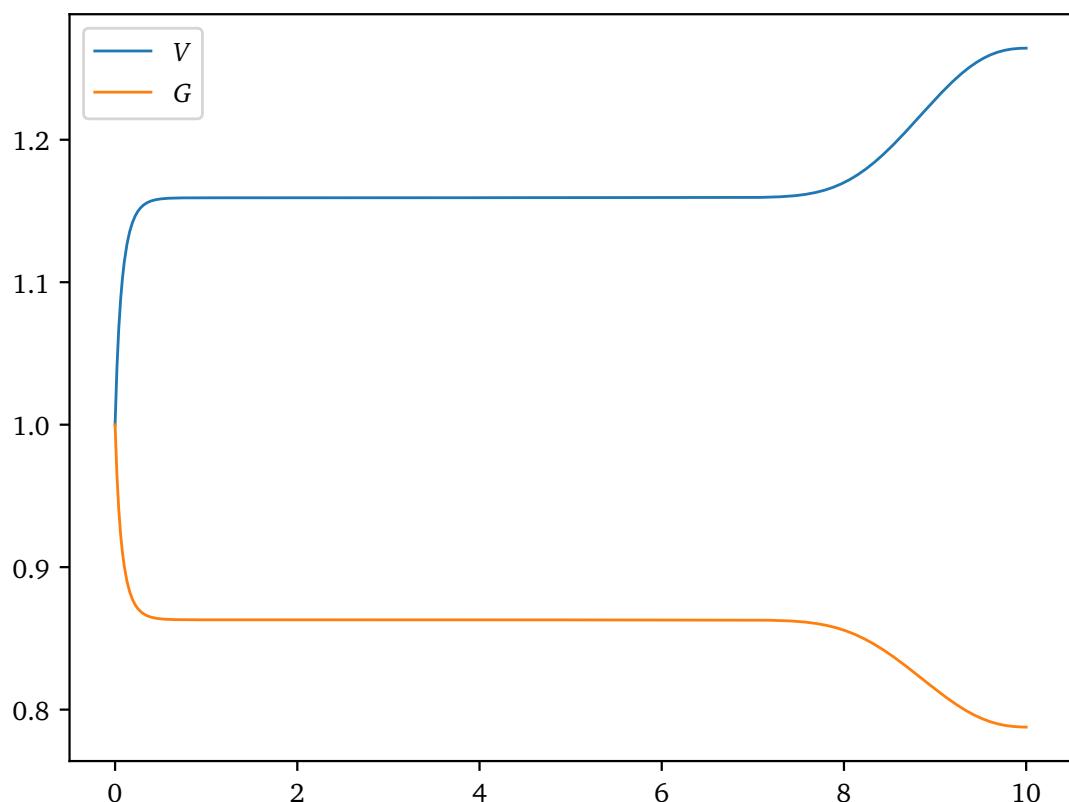


Рис. 165: Срез для  $t = 10.0$

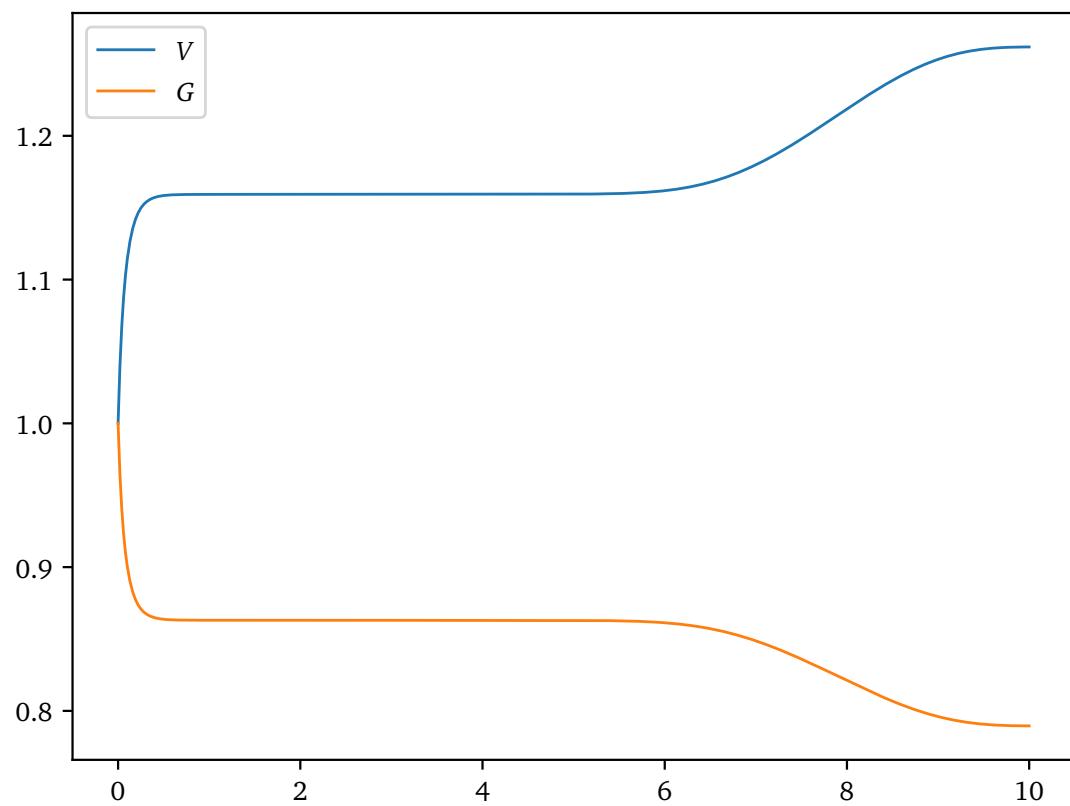


Рис. 166: Срез для  $t = 15.0$

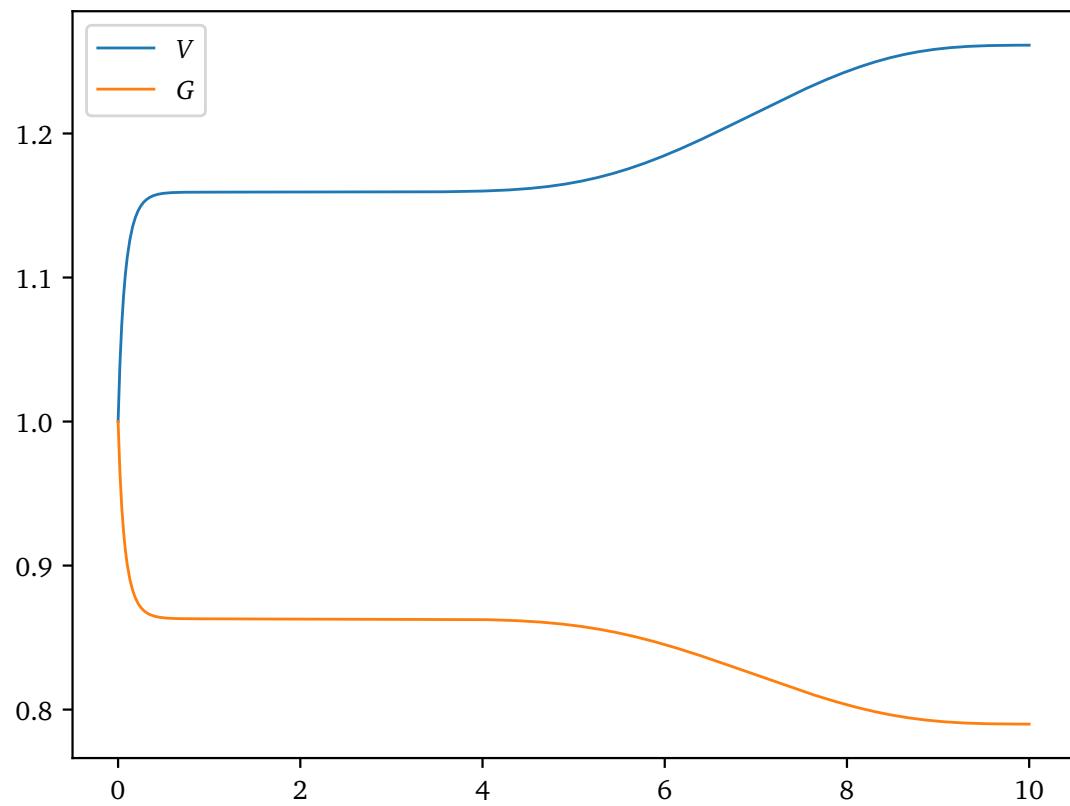


Рис. 167: Срез для  $t = 20.0$

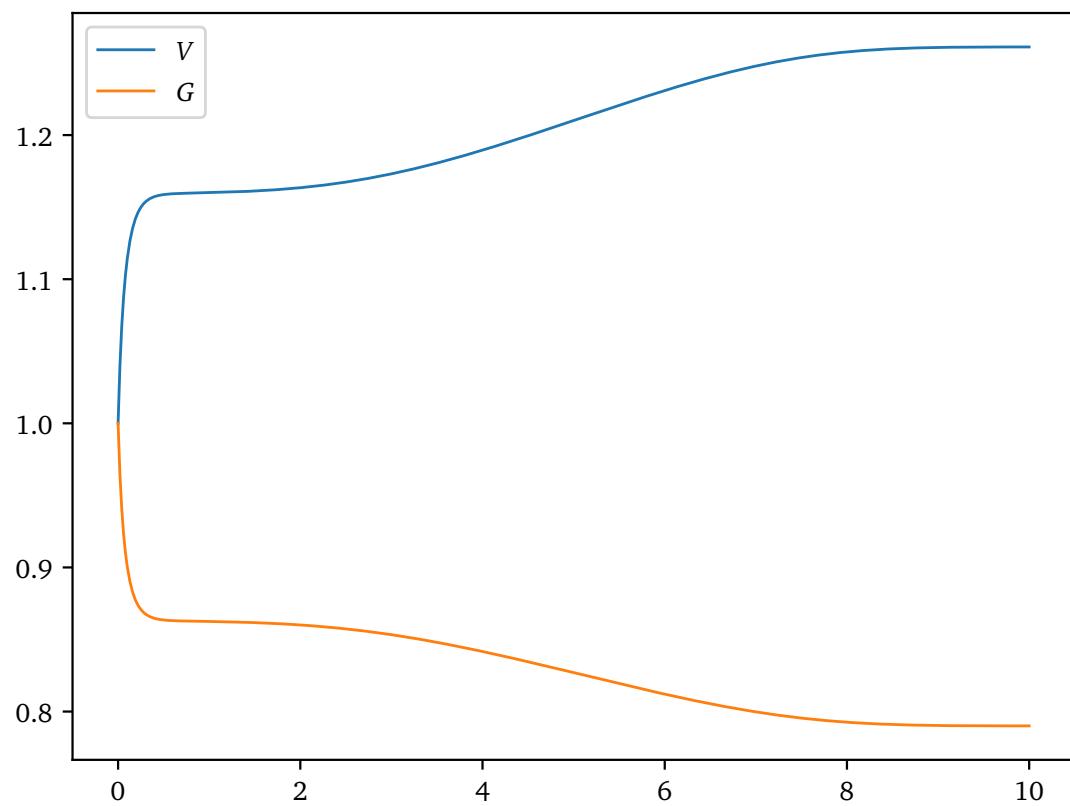


Рис. 168: Срез для  $t = 30.0$

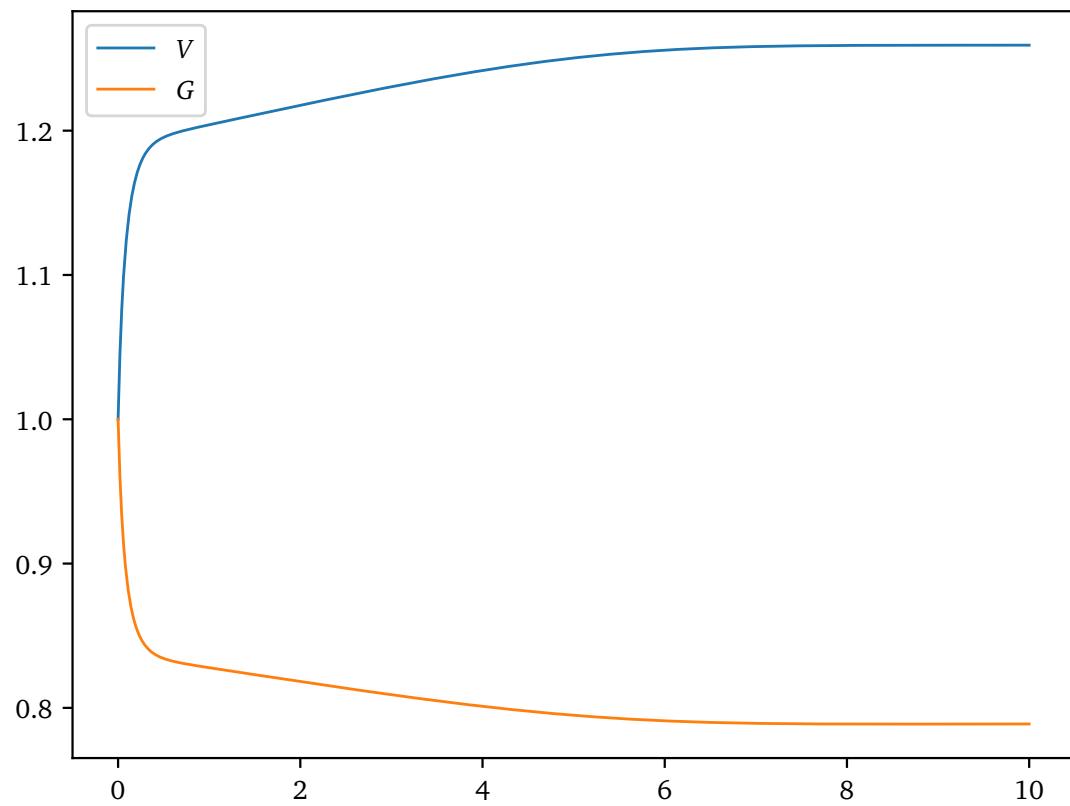


Рис. 169: Срез для  $t = 50.0$

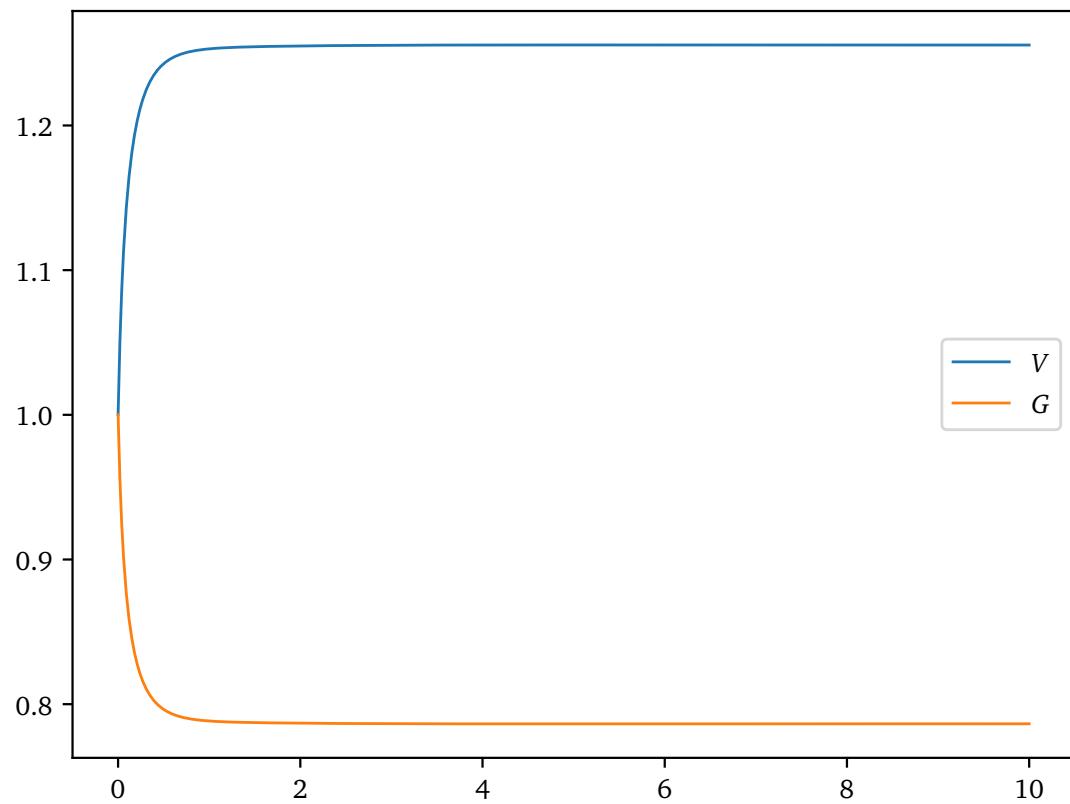


Рис. 170: Срез для  $t = 100.0$

Рассмотрим графики  $V$  и  $G$ .

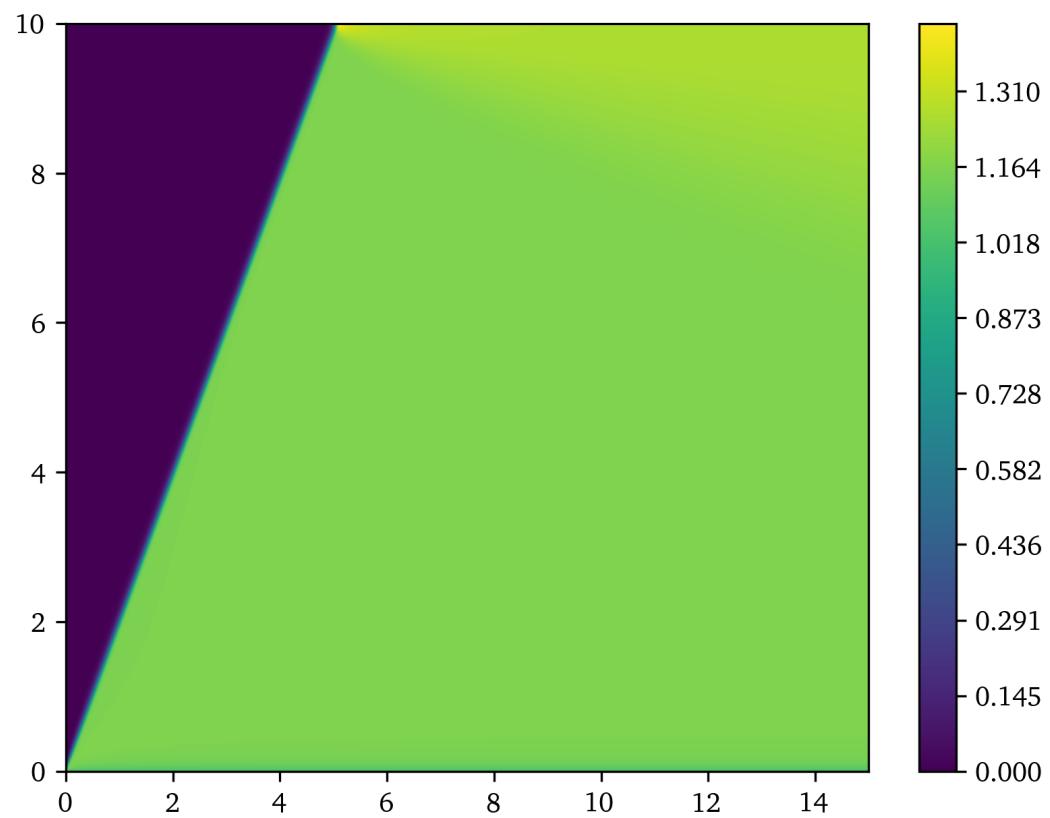


Рис. 171: График  $V$  для  $T = 15$

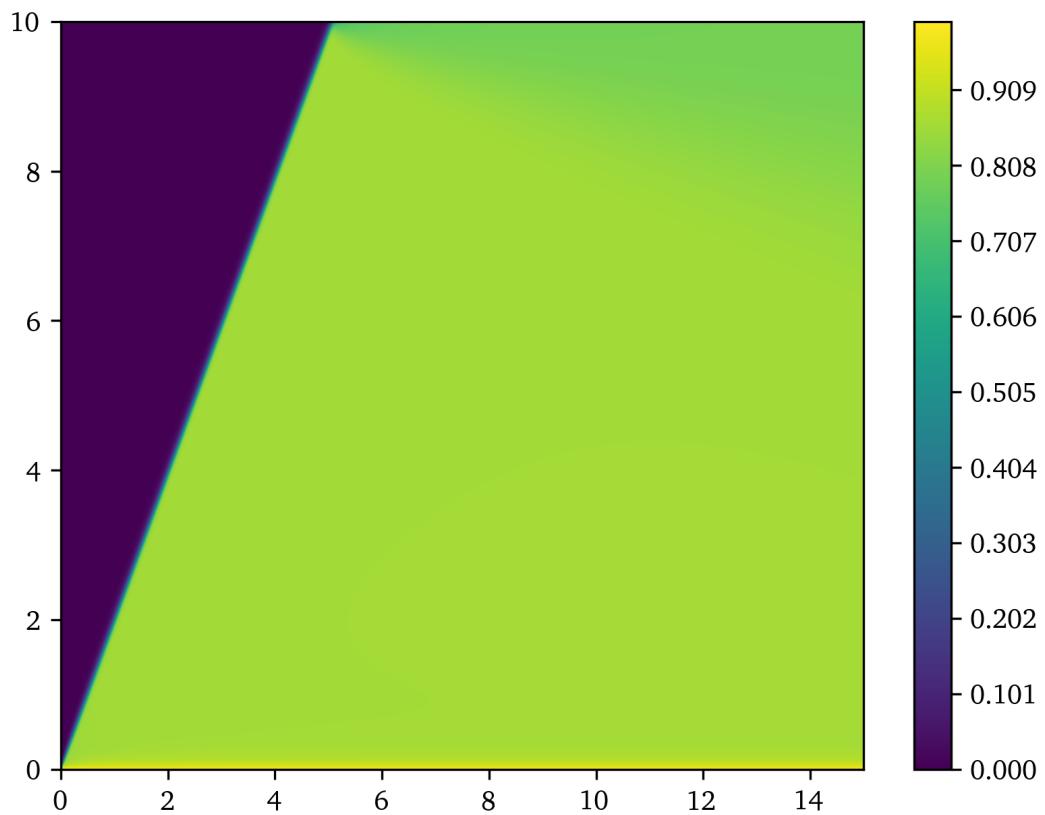


Рис. 172: График  $G$  для  $T = 15$

Отметим, что близ  $x = 0$  наблюдается «скачок» значений  $V$  и  $G$ .

## Список литературы

- [1] Попов А. В. Численное моделирование нестационарного одномерного течения газа с использованием неявных разностных схем.