ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК, 2018, том 478, № 4, с. 388–391

МАТЕМАТИКА

УДК 519.6

О РАЗНОСТНОЙ СХЕМЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ БАРОТРОПНОГО ГАЗА

© 2018 г. Ф. Б. Имранов[1,*], Г. М. Кобельков[2,**], А. Г. Соколов[2,***]

Представлено академиком РАН Е. Е. Тыртышниковым 15.09.2017 г.

Поступило 22.09.2017 г.

Для системы уравнений, описывающих течение баротропного газа, предложена разностная схема, обеспечивающая положительность плотности и выполнение энергетического неравенства и закона сохранения массы. Уравнение неразрывности при этом аппроксимируется неявным образом. Доказано существование решения получающейся системы нелинейных уравнений при любых шагах сетки по времени и пространству. Предложен итерационный процесс для решения полученной системы на временном шаге.

DOI: 10.7868/S0869565218040035

Построению разностных схем для уравнений газовой динамики и использованию этих схем для численного моделирования течений сжимаемого идеального (вязкого) газа посвящено огромное количество публикаций (см., например, [1, 2] и цитированную литературу). При этом какие-либо теоретические исследования практически отсутствуют. Так, например, естественный вопрос – а обеспечивает ли разностная схема положительность плотности (что следует из физики), остаётся открытым. Исключение составляет монография [3], где для уравнений вязкого сжимаемого газа в одномерном случае доказана положительность плотности, и работы А. А. Злотника (см., например, [4]), где система уравнений преобразуется в предположении положительности плотности, и для неё строится разностная схема, обеспечивающая положительность плотности.

В настоящей работе предложена разностная схема, аппроксимирующая систему уравнений газовой динамики, которая обеспечивает положительность плотности и сохранение баланса массы. Аппроксимация уравнения неразрывности имеет неявный вид по отношению к плотности. Кроме этого, доказано существование решения разностной задачи при любых соотношениях шагов сетки по времени и пространству, а также выполнение энергетического неравенства. Предложен итерационный процесс для решения системы нелинейных уравнений, возникающих на временном шаге.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И АПРИОРНЫЕ ОЦЕНКИ

Система уравнений, описывающая течения идеального баротропного сжимаемого газа, имеет вид (см., например, [5])

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{(\rho u^2)}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial x} = 0, \tag{1}$$

$$p = a\rho^{\gamma}, \quad \gamma = \mathrm{const} > 1.$$

Для простоты в дальнейшем полагаем $a = 1$. Уравнения (1) рассматриваются в цилиндре $Q_T = [0, 1] \times [0, T]$ и дополняются краевыми и начальными условиями

$$u(0, t) = u(1, t) = 0, \quad u(x, 0) = u_0(x), \quad \rho(x, 0) = \rho_0(x) > 0. \tag{2}$$

Умножая первое уравнение (1) (уравнение неразрывности) скалярно на $-\frac{1}{2}u^2$, а второе уравнение (1) – скалярно на u, после сложения результатов получим

$$-\frac{1}{2}(\rho_t, u^2) - \frac{1}{2}((\rho u)_x, u^2) + ((\rho u)_t, u) + ((\rho u^2)_x, u) + (p_x, u) = 0.$$

[1] Институт физики Национальной академии наук Азербайджана, Баку

[2] Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

*E-mail: farizimranov@yandex.ru

**E-mail: kobelkov@dodo.inm.ras.ru

***E-mail: shurunya@mtu-net.ru

После несложных преобразований и последующего интегрирования по времени, имеем “энергетическое тождество” [6]:

$$\frac{1}{2}\int_0^1 \rho(t)u^2(x,t)dx + \frac{1}{\gamma-1}\int_0^1 p(x,t))dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 \rho_0 u_0^2 dx + \frac{1}{\gamma-1}\int_0^1 p_0(x)dx. \qquad (3)$$

Отметим, что термин “энергетическое тождество” взят в кавычки, поскольку не доказана положительность плотности.

Примечание. В случае наличия вязких членов в уравнении движения (второе уравнение (1)), равенство (3) становится неравенством.

Наша цель – построить разностную схему, аппроксимирующую задачу (1), (2) и удовлетворяющую следующим условиям:

1. Если в начальный момент времени плотность ρ в узлах сетки положительна, то во все последующие моменты времени это свойство будет выполняться.

2. Соотношение (3) при условии положительности плотности означает, что нормы $\| \rho(t) \|_{L_1[0,1]}, \| \rho^{1/2}(t)u(t) \|_{L_2[0,1]}$ равномерно ограничены по времени. Поэтому от решения сеточной задачи потребуем, чтобы оно также было равномерно ограничено по времени.

3. Должен выполняться сеточный аналог закона сохранения массы.

4. Решение разностной схемы должно существовать.

2. АППРОКСИМАЦИЯ УРАВНЕНИЯ НЕРАЗРЫВНОСТИ

Введём на прямой равномерную сетку с шагом $h = \frac{1}{N}$, $x_i = ih$ и пусть τ – шаг по времени. Определим сеточные функции ρ_i^n, $0 \le i \le N-1$; u_i^n, $0 \le i \le N$, $u_0^n = u_N^n = 0$. Будем считать, что за границами указанных индексов по пространству сеточные функции доопределены нулём. Как обычно, будем использовать обозначения

$$v_x = \frac{v_{i+1} - v_i}{h}, \quad v_{\bar{x}} = \frac{v_i - v_{i-1}}{h}, \quad v_t = \frac{v^{n+1} - v^n}{\tau}.$$

Аппроксимируем нелинейный член в уравнении неразрывности (первое уравнение (1)) в i-м узле следующим образом:

$$(\rho u)_x \sim A(u)\rho \equiv$$

$$\equiv \begin{cases} \dfrac{\rho_i u_{i+1} - \rho_{i-1}u_i}{h}, & \text{если } u_i,\ u_{i+1} > 0, \\ \dfrac{\rho_{i+1} u_{i+1} - \rho_i u_i}{h}, & \text{если } u_i,\ u_{i+1} < 0, \\ \dfrac{\rho_i (u_{i+1} - u_i)}{h}, & \text{если } u_i < 0,\ u_{i+1} > 0, \\ \dfrac{\rho_{i+1} u_{i+1} - \rho_{i-1}u_i}{h}, & \text{если } u_i > 0,\ u_{i+1} < 0 \end{cases} \qquad (4)$$

Непосредственным образом можно проверить, что на гладких функциях эта аппроксимация имеет порядок $O(h)$.

Рассмотрим двухслойную по времени неявную разностную схему, аппроксимирующую уравнение неразрывности. Будем использовать стандартные обозначения: $\rho^n = \rho$, $\rho^{n+1} = \hat{\rho}$ и $\rho_t = \frac{\hat{\rho} - \rho}{\tau}$, где τ – шаг по времени. Аппроксимируем первое уравнение (1) следующим образом:

$$\rho_t + A(u)\hat{\rho} = 0. \qquad (5)$$

Запишем (5) в более удобном виде:

$$\frac{\rho_i^{n+1} - \rho_i^n}{\tau} + \frac{-\rho_{i+1}^{n+1}(-u_{i+1} + |u_{i+1}|) + \rho_i^{n+1}(u_{i+1} + |u_{i+1}| - u_i + |u_i|) - \rho_{i-1}^{n+1}(u_i + |u_i|)}{2h} = 0,$$
$$0 \le i \le N-1, \quad n \ge 0. \qquad (6)$$

Напомним, что сеточная функция ρ_i^{n+1} доопределена нулем при $i = -1$, $i = N$.

Уравнение (6) неявно по $\hat{\rho}$. Выпишем матрицу оператора A. Имеем $\left(\text{с точностью до множителя } \frac{1}{2h}\right)$

$$A = \begin{pmatrix} u_1+|u_1| & u_1-|u_1| & 0 & \dots & 0 \\ -u_1-|u_1| & u_2+|u_2|-u_1+|u_1| & u_2-|u_2| & 0 & \dots \\ 0 & -u_2-|u_2| & u_3+|u_3|-u_2+|u_2| & u_3-|u_3| & 0 \\ 0 & \dots & -u_3-|u_3| & \ddots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \ddots & A_{N-2,\ N-1} \\ 0 & \dots & 0 & A_{N-1,\ N-2} & A_{N-1,\ N-1} \end{pmatrix}.$$

Матрица A обладает следующими свойствами: 1) элементы на диагонали неотрицательны; 2) элементы вне диагонали неположительны; 3) сумма элементов по столбцу равна нулю.

Из (5) следует $(I + \tau A(u))\hat{\rho} = \tau\rho$. Тогда матрица $I + \tau A(u)$ является M-матрицей для любой сеточной функции u, поэтому у обратной к ней матрицы все элементы будут неотрицательны, а диагональные элементы строго положительны. Отсюда следует

Теорема 1. *Пусть* $\rho_j^0 > 0, j = 0, 1, \dots, N-1$. *Тогда при любом* $n > 0$ *имеет место неравенство* $\rho_j^n > 0$, *т.е. аппроксимация уравнения неразрывности* (5) *обеспечивает положительность плотности.*

Из вида матрицы A следует

Теорема 2. *Аппроксимация* (5) *уравнения неразрывности обеспечивает выполнение закона сохранения массы в сеточном случае. А именно, имеет место равенство*

$$\sum_{j=0}^{N-1} h\rho_j^n = \sum_{j=0}^{N-1} h\rho_j^0. \qquad (7)$$

Доказательство. Умножая скалярно (8) (см. следующий раздел) на единичную сеточную функцию, пользуясь формулой суммирования по частям и условиями непротекания на границе $u_0^n = u_N^n = 0$, получим условие сохранения массы на каждом шаге, откуда следует утверждение теоремы.

3. АППРОКСИМАЦИЯ УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ

Введём другую форму записи аппроксимации уравнения неразрывности. А именно, положим

$$\{\rho\} = [\rho_i] - \frac{h}{2}\rho_{\bar{x}}\operatorname{sign}(u), \quad \text{где } [\rho_i] = \frac{\rho_i + \rho_{i-1}}{2};$$

заметим, что оператор $\{\cdot\}$ зависит от сеточной функции u, и если не оговорено особо, то этот оператор определяется функцией $\hat{u}$. По аналогии с (5) полностью неявная разностная схема для уравнения неразрывности примет вид

$$\rho_t + (\{\hat{\rho}\}u)_x = 0, \quad x = ih, \quad i = 0, 1, \dots, N-1. \qquad (8)$$

Поскольку

$$-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial(\rho u)}{\partial x},\ u^2\right) + \left(\frac{\partial(\rho u^2)}{\partial x},\ u\right) = 0, \qquad (9)$$

то потребуем, чтобы аппроксимация члена $\dfrac{\partial(\rho u^2)}{\partial x}$ в уравнении движения сохраняла сеточный аналог (9) при условии, что аппроксимация $\dfrac{\partial(\rho u)}{\partial x}$ соответствует (8). Введём обозначение $u_i^+ = u_{i+1}$ и аппроксимируем выражение

$$I \equiv \partial_x(\rho u^2) = \partial_x(\rho u)u + \rho u \partial_x u$$

следующим образом [7]:

$$I \sim (\{\rho\}u)_x u + \frac{1}{2}[\{\rho\}u \cdot u_{\bar{x}} + \{\rho\}^+ u^+ \cdot u_x]. \qquad (10)$$

Непосредственным образом можно проверить, что для такой аппроксимации выполняется сеточный аналог (9). Тогда аппроксимация уравнения движения полностью неявной разностной схемой примет вид

$$(\rho u)_t + (\{\hat{\rho}\}\hat{u})_x \hat{u} + \frac{1}{2}[\{\hat{\rho}\}\hat{u}\cdot \hat{u}_{\bar{x}} +$$
$$+ \{\hat{\rho}\}^+ \hat{u}^+ \cdot \hat{u}_x] + \frac{\gamma}{\gamma-1}\{\hat{\rho}\}(\hat{\rho}^{\gamma-1})_{\bar{x}} = 0, \qquad (11)$$
$$x = ih, \ i = 1, 2, \dots, N-1.$$

Неизвестными в уравнениях (8), (11) являются функции $\hat{\rho}$ и $\hat{u}$, т.е. эта система уравнений содержит $2N-1$ уравнений и такое же количество неизвестных. Докажем равномерную ограниченность норм $\|(\rho^n)^{1/2}u^n\|$. Введём скалярное произведение (напомним, что функции ρ и u продолжены нулём на всю сеточную область) по формуле $(u,v) = \sum_{i=0}^{N} h u_i v_i$.

Умножим (8) скалярно на $\frac{\tau}{2}\hat{u}^2$, а (11) – скалярно на $\tau\hat{u}$. Вычитая из второго соотношения первое, после ряда преобразований получим

$$\frac{1}{2}\Big[(\hat{\rho}, \hat{u}^2) - (\rho, u^2)\Big] + \frac{\tau^2}{2}(\rho, u_t^2) + \\ + \frac{\tau\gamma}{\gamma-1}\left(\{\hat{\rho}\}(\hat{\rho}^{\gamma-1})_{\bar{x}},\ \hat{u}\right) = 0. \tag{12}$$

Поскольку

$$\frac{\tau\gamma}{\gamma-1}(\{\hat{\rho}\}(\hat{\rho}^{\gamma-1})_{\bar{x}},\ \hat{u}) \geq \frac{1}{\gamma-1}[(\hat{p},\ 1) - (p,\ 1)],$$

то из (12) следует

Теорема 3. *Для решения разностной схемы* (8), (11) *справедлива оценка*

$$\frac{1}{2}(\rho^n,\ (u^n)^2) + \frac{1}{\gamma-1}(p^n,\ 1) \leq \\ \leq \frac{1}{2}(\rho^0,\ (u^0)^2) + \frac{1}{\gamma-1}(p^0,\ 1). \tag{13}$$

4. СУЩЕСТВОВАНИЕ РЕШЕНИЯ РАЗНОСТНОЙ СХЕМЫ

Докажем, что решение (8), (11) при любых шагах сетки τ и h всегда существует. Введём новую переменную $v = \rho u$. Тогда уравнения (8), (11) примут вид

$$\hat{\rho} = \rho - \tau\left(\frac{\{\hat{\rho}\}\hat{v}}{\hat{\rho}}\right)_x \equiv F_1(\hat{\rho}, \hat{v}),$$

$$\hat{v} = v - \tau\left(\frac{\{\hat{\rho}\}\hat{v}}{\hat{\rho}}\right)_x \frac{\hat{v}}{\hat{\rho}} - \\ - \frac{\tau}{2}\left[\frac{\{\hat{\rho}\}\hat{v}}{\hat{\rho}} \cdot \left(\frac{\hat{v}}{\hat{\rho}}\right)_{\bar{x}} + \frac{\{\hat{\rho}\}^+\hat{v}^+}{\hat{\rho}^+} \cdot \left(\frac{\hat{v}}{\hat{\rho}}\right)_x\right] - \\ - \tau\frac{\gamma}{\gamma-1}\{\hat{\rho}\}(\hat{\rho}^{\gamma-1})_{\bar{x}} \equiv F_2(\hat{\rho}, \hat{v}). \tag{14}$$

Существование решения (14) следует из теоремы 3 и теоремы Лере–Шаудера (см., например, [7]). Таким образом, доказана

Теорема 4. *Решение задачи* (8), (11) *при любых* τ *и* h *существует*.

Отметим, что по доказанному ранее $\hat{\rho} > 0$, поэтому $\hat{u} = \frac{\hat{v}}{\hat{\rho}}$ также существует.

Для нахождения решения ρ^{n+1}, u^{n+1} задачи (8), (11) может быть использован следующий линейный итерационный процесс, в котором оператор скобок $\{\cdot\}$ определяется функцией u^k:

$$\frac{\rho^{k+1} - \rho^n}{\tau} + (\{\rho^{k+1}\}u^k)_x = 0, \tag{15}$$

$$\frac{\rho^{k+1}u^{k+1} - \rho^n u^n}{\tau} + (\{\rho^{k+1}\}u^k)_x u^{k+1} + \\ + \frac{1}{2}[\{\rho^{k+1}\}u^k \cdot u^{k+1}_{\bar{x}} + \{\rho^{k+1}\}^+(u^k)^+ \cdot u^{k+1}_x] + \\ + \frac{\gamma}{\gamma-1}\{\rho^{k+1}\}((\rho^{k+1})^{\gamma-1})_{\bar{x}} = 0, \quad u^k|_{k=0} = u^n;$$

здесь $k = 0, 1, \ldots$ – номер итерации.

Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ (проект 17–01–838) и Программы ОМН РАН “Современные проблемы теоретической математики” (“Оптимальные методы решения задач математической физики”).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Белоцерковский О.М., Васильев М.О., Ведерников А.Б., Дымников В.П., Замышляев Б.В., Крысанов Б.Ю., Ковшов Н.В., Куницын В.Е., Молоков Е.А., Репин А.Ю., Сидоренкова Н.А., Ступицкий Е.Л., Холодов Я.А., Холодов А.С.* О численном моделировании некоторых задач взаимодействия литосферы, гидросферы и атмосферы Земли. В кн.: Фрагменты истории и достижения ИАП РАН. 1986–2011. М.: ИАП РАН / ООО ИЦ “Полет Джонатана”, 2011. С. 14–71.
2. *Попов И.В., Фрязинов И. В.* Метод адаптивной искусственной вязкости численного решения уравнений газовой динамики. М., 2015.
3. *Антонцев С.Н., Кажихов А.В., Монахов В. Н.* Краевые задачи механики неоднородных жидкостей. Новосибирск: Наука, 1983.
4. *Амосов А.А., Злотник А.А.* Разностные схемы второго порядка точности для уравнений одномерного движения вязкого газа // ЖВМиМФ. 1987. Т. 27. № 7. С. 1032–1049.
5. *Куликовский А.Г., Погорелов Н.В., Семенов А.Ю.* Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений. М.: Наука, 2001.
6. *Lions P.-L.* Mathematical Topics in Fluid Mechanics. V. 2. Compressible Models. Oxford Lecture Series in Mathematics and Its Applications. Oxford: Clarendon Press, 1998.
7. *Ладыженская О.А.* Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1970.