MPRO 2024-2025
PROJ

Buzet Quentin, Dzik Eliel

1 Modélisation statique

$$
\begin{aligned}
&\min \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} t_{ij} \cdot x_{ij}^k \\
&s.t. \\
&\quad (1) \quad \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} d_i \cdot x_{ij}^k \leq D \cdot y^k \quad \forall k \in [1, n] \\
&\quad (2) \quad \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_{ij}^k = 1 \quad \forall i \in [2, n] \\
&\quad (3) \quad \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} x_{ij}^k = 1 \quad \forall j \in [2, n] \\
&\quad (4) \quad u_j^k \geq u_i^k + 1 - M(1 - x_{ij}^k) \quad \forall i, j, k \in [1, n] \\
&\quad (5) \quad \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=2}^{n} x_{1j}^k = \sum_{k=1}^{n} y^k \\
&\quad (6) \quad \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=2}^{n} x_{i1}^k = \sum_{k=1}^{n} y^k \\
&\quad (7) \quad y^k \in \{0, 1\}, \quad x_{ij}^k \in \{0, 1\}, \quad u_i^k \in [1, n] \quad \forall i, j, k \in [1, n]
\end{aligned}
$$

Pour l'équation (4), on peut prendre $M = n$.

Cette modélisation comprends $O(n^3)$ variables et contraintes.

2 Modélisation robuste

$$\min_{x,y,u} \quad \max_{\delta^1,\delta^2} \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(t_{ij} + \delta^1_{ij}(\hat{t}_i + \hat{t}_j) + \delta^2_{ij}(\hat{t}_i \cdot \hat{t}_j)) \cdot x^k_{ij}$$

$$s.t.$$

$$(1) \quad \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} d_i \cdot x^k_{ij} \leq D \cdot y^k \quad \forall k \in [1, n]$$

$$(2) \quad \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x^k_{ij} = 1 \quad \forall i \in [2, n]$$

$$(3) \quad \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} x^k_{ij} = 1 \quad \forall j \in [2, n]$$

$$(4) \quad u^k_j \geq u^k_i + 1 - M(1 - x^k_{ij}) \quad \forall i, j, k \in [1, n]$$

$$(5) \quad \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=2}^{n} x^k_{1j} = \sum_{k=1}^{n} y^k$$

$$(6) \quad \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=2}^{n} x^k_{i1} = \sum_{k=1}^{n} y^k$$

$$(7) \quad y^k \in \{0, 1\}, \quad x^k_{ij} \in \{0, 1\}, \quad u^k_i \in [1, n] \quad \forall i, j, k \in [1, n]$$

$$(8) \quad \sum_{i,j} \delta^1_{ij} \leq T$$

$$(9) \quad \sum_{i,j} \delta^2_{ij} \leq T^2$$

$$(10) \quad 0 \leq \delta^1_{ij} \leq 1, \quad 0 \leq \delta^2_{ij} \leq 2 \quad \forall i, j \in A$$

3 Résolution par plans coupants et LazyCallback

a) On introduit une nouvelle variable z.

$$
\begin{aligned}
&\min_{x,y,u,z} z\\
&\quad s.t.\\
&\qquad (0)\quad z \geq \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(t_{ij} + \delta^1_{ij}(\hat{t}_i + \hat{t}_j) + \delta^2_{ij}(\hat{t}_i \cdot \hat{t}_j)) \cdot x^k_{ij} \quad \forall i,j \in A\\
&\qquad (1)\quad \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} d_i \cdot x^k_{ij} \leq D \cdot y^k \quad \forall k \in [1,n]\\
&\qquad (2)\quad \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x^k_{ij} = 1 \quad \forall i \in [2,n]\\
&\qquad (3)\quad \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} x^k_{ij} = 1 \quad \forall j \in [2,n]\\
&\qquad (4)\quad u^k_j \geq u^k_i + 1 - M(1 - x^k_{ij}) \quad \forall i,j,k \in [1,n]\\
&\qquad (5)\quad \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=2}^{n} x^k_{1j} = \sum_{k=1}^{n} y^k\\
&\qquad (6)\quad \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=2}^{n} x^k_{i1} = \sum_{k=1}^{n} y^k\\
&\qquad (7)\quad y^k \in \{0,1\}, \quad x^k_{ij} \in \{0,1\}, \quad u^k_i \in [1,n] \quad \forall i,j,k \in [1,n]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&(8)\quad \sum_{i,j} \delta^1_{ij} \leq T\\
&(9)\quad \sum_{i,j} \delta^2_{ij} \leq T^2\\
&(10)\quad 0 \leq \delta^1_{ij} \leq 1, \quad 0 \leq \delta^2_{ij} \leq 2 \quad \forall i,j \in A
\end{aligned}
$$

b) On peut choisir $U^*_{init} = \{t = (t_{ij})_{ij \in A}\} = \{(\delta^1 = 0, \delta^2 = 0)\}$, les temps des trajets sans prendre en compte les incertitudes.

c) On résout le problème maître, cela fournit un x^*, y^*, u^* et z^*.

$$
(SP_0)\ \max_{\delta^1,\delta^2}\ \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(t_{ij} + \delta^1_{ij}(\hat{t}_i + \hat{t}_j) + \delta^2_{ij}(\hat{t}_i \cdot \hat{t}_j)) \cdot x^{k*}_{ij}
$$

$$
\begin{aligned}
&s.t.\\
&\quad (8)\quad \sum_{i,j} \delta^1_{ij} \leq T\\
&\quad (9)\quad \sum_{i,j} \delta^2_{ij} \leq T^2\\
&\quad (10)\quad 0 \leq \delta^1_{ij} \leq 1, \quad 0 \leq \delta^2_{ij} \leq 2 \quad \forall i,j \in A
\end{aligned}
$$

La résolution de (SP_0) fournit δ^{1*} et δ^{2*}.

d) Le problème maître est optimal si

$$(0) \quad z^* \geq \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(t_{ij} + \delta_{ij}^{1*}(\hat{t}_i + \hat{t}_j) + \delta_{ij}^{2*}(\hat{t}_i \cdot \hat{t}_j)) \cdot x_{ij}^{k*} \quad \forall i, j \in A$$

e) Si

$$(0) \quad z^* \leq \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(t_{ij} + \delta_{ij}^{1*}(\hat{t}_i + \hat{t}_j) + \delta_{ij}^{2*}(\hat{t}_i \cdot \hat{t}_j)) \cdot x_{ij}^{k*} \quad \forall i, j \in A,$$

on ajoute une coupe

$$z \geq \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(t_{ij} + \delta_{ij}^{1*}(\hat{t}_i + \hat{t}_j) + \delta_{ij}^{2*}(\hat{t}_i \cdot \hat{t}_j)) \cdot x_{ij}^{k} \quad \forall i, j \in A.$$

On a donc une famille de coupes, qui remplace (0) :

$$z \geq \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(t_{ij} + \delta_{ij}^{1'}(\hat{t}_i + \hat{t}_j) + \delta_{ij}^{2'}(\hat{t}_i \cdot \hat{t}_j)) \cdot x_{ij}^{k} \quad \forall (\delta^{1'}, \delta^{2'}) \in U^*.$$

Initialement, $U^* = U^*_{init}$, puis à chaque ajoute de coupe, on fait $U^* \leftarrow U^* \cup \{(\delta^{1*}, \delta^{2*})\}$.
On écrit dont le problème maître comme :

$$
\begin{aligned}
&(MP) \ \min_{x,y,u,z} z \\
&\quad s.t. \\
&\quad (0') \quad z \geq \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(t_{ij} + \delta_{ij}^{1'}(\hat{t}_i + \hat{t}_j) + \delta_{ij}^{2'}(\hat{t}_i \cdot \hat{t}_j)) \cdot x_{ij}^{k} \quad \forall (\delta^{1'}, \delta^{2'}) \in U^* \\
&\quad (1) \quad \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} d_i \cdot x_{ij}^k \leq D \cdot y^k \quad \forall k \in [1, n] \\
&\quad (2) \quad \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_{ij}^k = 1 \quad \forall i \in [2, n] \\
&\quad (3) \quad \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} x_{ij}^k = 1 \quad \forall j \in [2, n] \\
&\quad (4) \quad u_j^k \geq u_i^k + 1 - M(1 - x_{ij}^k) \quad \forall i, j, k \in [1, n] \\
&\quad (5) \quad \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=2}^{n} x_{1j}^k = \sum_{k=1}^{n} y^k \\
&\quad (6) \quad \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=2}^{n} x_{i1}^k = \sum_{k=1}^{n} y^k \\
&\quad (7) \quad y^k \in \{0, 1\}, \quad x_{ij}^k \in \{0, 1\}, \quad u_i^k \in [1, n] \quad \forall i, j, k \in [1, n]
\end{aligned}
$$

4 Résolution par dualisation

a) La fonction objectif peut se décomposer comme suit :

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(t_{ij}+\delta^1_{ij}(\hat{t}_i+\hat{t}_j)+\delta^2_{ij}(\hat{t}_i\cdot\hat{t}_j))\cdot x^k_{ij} = \sum_{k=1}^{n}(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} t_{ij}\cdot x^k_{ij} + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}((\hat{t}_i+\hat{t}_j)\cdot\sum_{k=1}^{n} x^k_{ij})\delta^1_{ij} + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}((\hat{t}_i\hat{t}_j)\cdot\sum_{k=1}^{n} x^k_{ij})\delta^2_{ij})$$

b) Le problème interne associé aux variables δ^1, δ^2 s'écrit :

$$\begin{aligned}
&\max_{\delta^1,\delta^2} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}((\hat{t}_i+\hat{t}_j)\cdot\sum_{k=1}^{n} x^k_{ij})\delta^1_{ij} + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}((\hat{t}_i\hat{t}_j)\cdot\sum_{k=1}^{n} x^k_{ij})\delta^2_{ij}\\
&s.t\\
&(1)\quad \sum_{i,j}\delta^1_{ij}\le T\\
&(2)\quad \sum_{i,j}\delta^2_{ij}\le T^2\\
&(3)\quad \delta^1_{ij}\le 1,\quad \delta^2_{ij}\le 2\quad \forall i,j\in A
\end{aligned}$$

c) Le dual du problème ci-dessus est :

$$\begin{aligned}
&\min\quad T\cdot\lambda^1 + T^2\cdot\lambda + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\alpha_{i,j}+2\beta_{i,j}\\
&s.t.\\
&\quad (1)\quad (\hat{t}_i+\hat{t}_j)\cdot\sum_{k=1}^{n} x^k_{ij}\ge\lambda^1+\alpha_{i,j}\quad \forall i,j\in A\\
&\quad (2)\quad (\hat{t}_i\cdot\hat{t}_j)\cdot\sum_{k=1}^{n} x^k_{ij}\ge\lambda^2+\beta_{i,j}\quad \forall i,j\in A\\
&\quad (3)\quad \lambda^1,\lambda^2,\alpha_{i,j},\beta_{i,j}\ge 0\quad \forall i,j\in A
\end{aligned}$$

d) On obtient le PLNE suivant :

$$\min \quad T \cdot \lambda^1 + T^2 \cdot \lambda + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(\alpha_{i,j} + 2\beta_{i,j} + \sum_{k=1}^{n}(t_{ij} \cdot x_{ij}^k))$$

$s.t.$

$$(1) \quad \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} d_i \cdot x_{ij}^k \leq D \cdot y^k \quad \forall k \in [1, n]$$

$$(2) \quad \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_{ij}^k = 1 \quad \forall i \in [2, n]$$

$$(3) \quad \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} x_{ij}^k = 1 \quad \forall j \in [2, n]$$

$$(4) \quad u_j^k \geq u_i^k + 1 - M(1 - x_{ij}^k) \quad \forall i, j, k \in [1, n]$$

$$(5) \quad \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=2}^{n} x_{1j}^k = \sum_{k=1}^{n} y^k$$

$$(6) \quad \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=2}^{n} x_{i1}^k = \sum_{k=1}^{n} y^k$$

$$(7) \quad y^k \in \{0, 1\}, \quad x_{ij}^k \in \{0, 1\}, \quad u_i^k \in [1, n] \quad \forall i, j, k \in [1, n]$$

$$(8) \quad (\hat{t}_i + \hat{t}_j) \cdot \sum_{k=1}^{n} x_{ij}^k \geq \lambda^1 + \alpha_{i,j} \quad \forall i, j \in A$$

$$(9) \quad (\hat{t}_i \cdot \hat{t}_j) \cdot \sum_{k=1}^{n} x_{ij}^k \geq \lambda^2 + \beta_{i,j} \quad \forall i, j \in A$$

$$(10) \quad \lambda^1, \lambda^2, \alpha_{i,j}, \beta_{i,j} \geq 0 \quad \forall i, j \in A$$

où :

λ^1 est la variable duale de la contrainte : $\sum_{i,j} \delta_{ij}^1 \leq T$

λ^2 est la variable duale de la contrainte : $\sum_{i,j} \delta_{ij}^2 \leq T^2$

α_{ij} est la variable duale de la contrainte : $\delta_{ij}^1 \leq 1$

β_{ij} est la variable duale de la contrainte : $\delta_{ij}^2 \leq 2$

On reste comme dans le cas statique en $O(n^3)$, bien que l'on ait ajouté des variables et des contraintes.