

MPRO 2024-2025

PROJ

Buzet Quentin, Dzik Eliel

1 Modélisation statique

$$\begin{aligned} \min & \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n t_{ij} \cdot x_{ij}^k \\ \text{s.t.} & \\ (1) & \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n d_i \cdot x_{ij}^k \leq D \cdot y^k \quad \forall k \in [1, n] \\ (2) & \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n x_{ij}^k = 1 \quad \forall i \in [2, n] \\ (3) & \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n x_{ij}^k = 1 \quad \forall j \in [2, n] \\ (4) & u_j^k \geq u_i^k + 1 - M(1 - x_{ij}^k) \quad \forall i, j, k \in [1, n] \\ (5) & \sum_{k=1}^n \sum_{j=2}^n x_{1j}^k = \sum_{k=1}^n y^k \\ (6) & \sum_{k=1}^n \sum_{i=2}^n x_{i1}^k = \sum_{k=1}^n y^k \\ (7) & y^k \in \{0, 1\}, \quad x_{ij}^k \in \{0, 1\}, \quad u_i^k \in [1, n] \quad \forall i, j, k \in [1, n] \end{aligned}$$

Pour l'équation (4), on peut prendre $M = n$.

Cette modélisation comprends $O(n^3)$ variables et contraintes.

2 Modélisation robuste

$$\begin{aligned}
& \min_{x,y,u} \quad \max_{\delta^1, \delta^2} \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (t_{ij} + \delta_{ij}^1(\hat{t}_i + \hat{t}_j) + \delta_{ij}^2(\hat{t}_i \cdot \hat{t}_j)) \cdot x_{ij}^k \\
& \quad s.t. \\
& (1) \quad \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n d_i \cdot x_{ij}^k \leq D \cdot y^k \quad \forall k \in [1, n] \\
& (2) \quad \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n x_{ij}^k = 1 \quad \forall i \in [2, n] \\
& (3) \quad \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n x_{ij}^k = 1 \quad \forall j \in [2, n] \\
& (4) \quad u_j^k \geq u_i^k + 1 - M(1 - x_{ij}^k) \quad \forall i, j, k \in [1, n] \\
& (5) \quad \sum_{k=1}^n \sum_{j=2}^n x_{1j}^k = \sum_{k=1}^n y^k \\
& (6) \quad \sum_{k=1}^n \sum_{i=2}^n x_{i1}^k = \sum_{k=1}^n y^k \\
& (7) \quad y^k \in \{0, 1\}, \quad x_{ij}^k \in \{0, 1\}, \quad u_i^k \in [1, n] \quad \forall i, j, k \in [1, n] \\
& (8) \quad \sum_{i,j} \delta_{ij}^1 \leq T \\
& (9) \quad \sum_{i,j} \delta_{ij}^2 \leq T^2 \\
& (10) \quad 0 \leq \delta_{ij}^1 \leq 1, \quad 0 \leq \delta_{ij}^2 \leq 2 \quad \forall i, j \in A
\end{aligned}$$

3 Résolution par plans coupants et LazyCallback

a) On introduit une nouvelle variable z .

$$\min_{x,y,u,z} z$$

s.t.

$$(0) \quad z \geq \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (t_{ij} + \delta_{ij}^1(\hat{t}_i + \hat{t}_j) + \delta_{ij}^2(\hat{t}_i \cdot \hat{t}_j)) \cdot x_{ij}^k \quad \forall i, j \in A$$

$$(1) \quad \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n d_i \cdot x_{ij}^k \leq D \cdot y^k \quad \forall k \in [1, n]$$

$$(2) \quad \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n x_{ij}^k = 1 \quad \forall i \in [2, n]$$

$$(3) \quad \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n x_{ij}^k = 1 \quad \forall j \in [2, n]$$

$$(4) \quad u_j^k \geq u_i^k + 1 - M(1 - x_{ij}^k) \quad \forall i, j, k \in [1, n]$$

$$(5) \quad \sum_{k=1}^n \sum_{j=2}^n x_{1j}^k = \sum_{k=1}^n y^k$$

$$(6) \quad \sum_{k=1}^n \sum_{i=2}^n x_{i1}^k = \sum_{k=1}^n y^k$$

$$(7) \quad y^k \in \{0, 1\}, \quad x_{ij}^k \in \{0, 1\}, \quad u_i^k \in [1, n] \quad \forall i, j, k \in [1, n]$$

$$(8) \quad \sum_{i,j} \delta_{ij}^1 \leq T$$

$$(9) \quad \sum_{i,j} \delta_{ij}^2 \leq T^2$$

$$(10) \quad 0 \leq \delta_{ij}^1 \leq 1, \quad 0 \leq \delta_{ij}^2 \leq 2 \quad \forall i, j \in A$$

b) On peut choisir $U_{init}^* = \{t = (t_{ij})_{ij \in A}\} = \{(\delta^1 = 0, \delta^2 = 0)\}$, les temps des trajets sans prendre en compte les incertitudes.

c) On résout le problème maître, cela fournit un x^*, y^*, u^* et z^* .

$$(SP_0) \max_{\delta^1, \delta^2} \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (t_{ij} + \delta_{ij}^1(\hat{t}_i + \hat{t}_j) + \delta_{ij}^2(\hat{t}_i \cdot \hat{t}_j)) \cdot x_{ij}^{k*}$$

s.t.

$$(8) \quad \sum_{i,j} \delta_{ij}^1 \leq T$$

$$(9) \quad \sum_{i,j} \delta_{ij}^2 \leq T^2$$

$$(10) \quad 0 \leq \delta_{ij}^1 \leq 1, \quad 0 \leq \delta_{ij}^2 \leq 2 \quad \forall i, j \in A$$

La résolution de (SP_0) fournit δ^{1*} et δ^{2*} .

d) Le problème maître est optimal si

$$(0) \quad z^* \geq \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (t_{ij} + \delta_{ij}^{1*}(\hat{t}_i + \hat{t}_j) + \delta_{ij}^{2*}(\hat{t}_i \cdot \hat{t}_j)) \cdot x_{ij}^{k*} \quad \forall i, j \in A$$

e) Si

$$(0) \quad z^* \leq \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (t_{ij} + \delta_{ij}^{1*}(\hat{t}_i + \hat{t}_j) + \delta_{ij}^{2*}(\hat{t}_i \cdot \hat{t}_j)) \cdot x_{ij}^{k*} \quad \forall i, j \in A,$$

on ajoute une coupe

$$z \geq \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (t_{ij} + \delta_{ij}^{1*}(\hat{t}_i + \hat{t}_j) + \delta_{ij}^{2*}(\hat{t}_i \cdot \hat{t}_j)) \cdot x_{ij}^k \quad \forall i, j \in A.$$

On a donc une famille de coupes, qui remplace (0) :

$$z \geq \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (t_{ij} + \delta_{ij}^{1'}(\hat{t}_i + \hat{t}_j) + \delta_{ij}^{2'}(\hat{t}_i \cdot \hat{t}_j)) \cdot x_{ij}^k \quad \forall (\delta^{1'}, \delta^{2'}) \in U^*.$$

Initialement, $U^* = U_{init}^*$, puis à chaque ajoute de coupe, on fait $U^* \leftarrow U^* \cup \{(\delta^{1'}, \delta^{2'})\}$.

On écrit donc le problème maître comme :

$$(MP) \quad \min_{x,y,u,z}$$

$$s.t.$$

$$(0') \quad z \geq \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (t_{ij} + \delta_{ij}^{1'}(\hat{t}_i + \hat{t}_j) + \delta_{ij}^{2'}(\hat{t}_i \cdot \hat{t}_j)) \cdot x_{ij}^k \quad \forall (\delta^{1'}, \delta^{2'}) \in U^*$$

$$(1) \quad \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n d_i \cdot x_{ij}^k \leq D \cdot y^k \quad \forall k \in [1, n]$$

$$(2) \quad \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n x_{ij}^k = 1 \quad \forall i \in [2, n]$$

$$(3) \quad \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n x_{ij}^k = 1 \quad \forall j \in [2, n]$$

$$(4) \quad u_j^k \geq u_i^k + 1 - M(1 - x_{ij}^k) \quad \forall i, j, k \in [1, n]$$

$$(5) \quad \sum_{k=1}^n \sum_{j=2}^n x_{1j}^k = \sum_{k=1}^n y^k$$

$$(6) \quad \sum_{k=1}^n \sum_{i=2}^n x_{i1}^k = \sum_{k=1}^n y^k$$

$$(7) \quad y^k \in \{0, 1\}, \quad x_{ij}^k \in \{0, 1\}, \quad u_i^k \in [1, n] \quad \forall i, j, k \in [1, n]$$

4 Résolution par dualisation

a) La fonction objectif peut se décomposer comme suit :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (t_{ij} + \delta_{ij}^1 (\hat{t}_i + \hat{t}_j) + \delta_{ij}^2 (\hat{t}_i \cdot \hat{t}_j)) \cdot x_{ij}^k &= \sum_{k=1}^n \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n t_{ij} \cdot x_{ij}^k \right. \\ &\quad + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n ((\hat{t}_i + \hat{t}_j) \cdot \sum_{k=1}^n x_{ij}^k) \delta_{ij}^1 \\ &\quad \left. + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n ((\hat{t}_i \hat{t}_j) \cdot \sum_{k=1}^n x_{ij}^k) \delta_{ij}^2 \right) \end{aligned}$$

b) Le problème interne associé aux variables δ^1, δ^2 s'écrit :

$$\begin{aligned} \max_{\delta^1, \delta^2} \quad & \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n ((\hat{t}_i + \hat{t}_j) \cdot \sum_{k=1}^n x_{ij}^k) \delta_{ij}^1 + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n ((\hat{t}_i \hat{t}_j) \cdot \sum_{k=1}^n x_{ij}^k) \delta_{ij}^2 \\ \text{s.t.} \quad & \\ (1) \quad & \sum_{i,j} \delta_{ij}^1 \leq T \\ (2) \quad & \sum_{i,j} \delta_{ij}^2 \leq T^2 \\ (3) \quad & \delta_{ij}^1 \leq 1, \quad \delta_{ij}^2 \leq 2 \quad \forall i, j \in A \end{aligned}$$

c) Le dual du problème ci-dessus est :

$$\begin{aligned} \min \quad & T \cdot \lambda^1 + T^2 \cdot \lambda^2 + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_{i,j} + 2\beta_{i,j} \\ \text{s.t.} \quad & \\ (1) \quad & (\hat{t}_i + \hat{t}_j) \cdot \sum_{k=1}^n x_{ij}^k \leq \lambda^1 + \alpha_{i,j} \quad \forall i, j \in A \\ (2) \quad & (\hat{t}_i \cdot \hat{t}_j) \cdot \sum_{k=1}^n x_{ij}^k \leq \lambda^2 + \beta_{i,j} \quad \forall i, j \in A \\ (3) \quad & \lambda^1, \lambda^2, \alpha_{i,j}, \beta_{i,j} \geq 0 \quad \forall i, j \in A \end{aligned}$$

d) On obtient le PLNE suivant :

$$\min \quad T \cdot \lambda^1 + T^2 \cdot \lambda + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (\alpha_{i,j} + 2\beta_{i,j} + \sum_{k=1}^n (t_{ij} \cdot x_{ij}^k))$$

s.t.

- (1) $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n d_i \cdot x_{ij}^k \leq D \cdot y^k \quad \forall k \in [1, n]$
- (2) $\sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n x_{ij}^k = 1 \quad \forall i \in [2, n]$
- (3) $\sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n x_{ij}^k = 1 \quad \forall j \in [2, n]$
- (4) $u_j^k \geq u_i^k + 1 - M(1 - x_{ij}^k) \quad \forall i, j, k \in [1, n]$
- (5) $\sum_{k=1}^n \sum_{j=2}^n x_{1j}^k = \sum_{k=1}^n y^k$
- (6) $\sum_{k=1}^n \sum_{i=2}^n x_{i1}^k = \sum_{k=1}^n y^k$
- (7) $y^k \in \{0, 1\}, \quad x_{ij}^k \in \{0, 1\}, \quad u_i^k \in [1, n] \quad \forall i, j, k \in [1, n]$

- (8) $(\hat{t}_i + \hat{t}_j) \cdot \sum_{k=1}^n x_{ij}^k \leq \lambda^1 + \alpha_{i,j} \quad \forall i, j \in A$
- (9) $(\hat{t}_i \cdot \hat{t}_j) \cdot \sum_{k=1}^n x_{ij}^k \leq \lambda^2 + \beta_{i,j} \quad \forall i, j \in A$
- (10) $\lambda^1, \lambda^2, \alpha_{i,j}, \beta_{i,j} \geq 0 \quad \forall i, j \in A$

où :

$$\lambda^1 \text{ est la variable duale de la contrainte : } \sum_{i,j} \delta_{ij}^1 \leq T$$

$$\lambda^2 \text{ est la variable duale de la contrainte : } \sum_{i,j} \delta_{ij}^2 \leq T^2$$

$$\alpha_{ij} \text{ est la variable duale de la contrainte : } \delta_{ij}^1 \leq 1$$

$$\beta_{ij} \text{ est la variable duale de la contrainte : } \delta_{ij}^2 \leq 2$$

On reste comme dans le cas statique en $O(n^3)$, bien que l'on ait ajouté des variables et des contraintes.