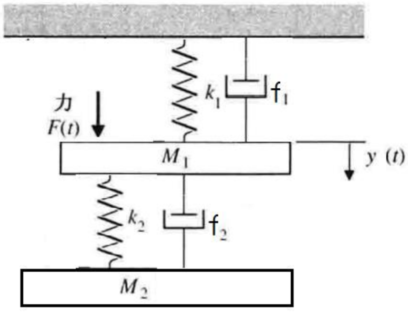
22-23 现控回忆版

一、给出系统的运动方程、状态空间、输入输出的传递函数



二、$G(s)=\frac{s+\beta}{s^3+3s^2+2s}$

1、能控标准型实现

2、对于上述能控性实现，判断

（1）能控性　　（2）能观性　　（3）李雅普诺夫稳定性　　（4）BIBO 稳定性

3、BIBO 稳定时，求能控又能观的实现

三、（15%）对线性定常系统，试证明以下结论

1．输出反馈不改变系统的能观性；

2．对单输入-单输出线性定常系统$\{\boldsymbol{A},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\}$，若$\{\boldsymbol{A},\boldsymbol{b}\}$能控，则一定存在行向量 c，使系统$\{\boldsymbol{A},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\}$能观。

四、（30%）已知系统的状态空间方程为

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}2 & 1\\ -1 & 4\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}6\\ -3\end{bmatrix}u \quad x(0)=\begin{bmatrix}-1\\ 2\end{bmatrix} \qquad y=\begin{bmatrix}2 & 1\end{bmatrix}x-2u$$

1．求状态变量、输出变量的表达式，并求出 y 取极值的时刻。

2．若有可能，设计状态反馈，使系统的两个闭环极点均位于$-3\pm 3j$；

3．若有可能，设计极点位于-5 处的最小维状态观测器；

4．用第 3 小题得到的观测状态来实现第 2 小题的状态反馈，写出复合系统的（增广的）状态空间方程。

五、（12%）

$$x[k+1]=x[k]+0.1x^2[k]+0.1u[k] \quad x[0]=3$$

控制约束是 u 只取整数，

$$J=\sum_{I=0}^{2}|x[i]-3u[i]|$$

求最优控制序列和最优性能指标

六、(15%) 已知一阶系统

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}u \quad x(0)=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$$

其控制无约束，终端无约束，且性能指标$J=\frac{1}{2}\int_0^{\infty}e^{2t}[x_2^2(t)+4u^2(t)]dt$

求性能指标极小的最优控制$u^*(t)$、最优轨线、最优性能指标。

参考答案

一、略

二、

1.能控标准型实现

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & -2 & -3\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}u$$

$$y=\begin{bmatrix}\beta & 1 & 0\end{bmatrix}x$$

2. 对于上述能控性实现:

(1) 能控性: β取任意值

(2) 能观性:

$$\rho(Mo)=3,\text{即}\rho\begin{bmatrix}\beta & 1 & 0\\ 0 & \beta & 1\\ 0 & -2 & \beta-3\end{bmatrix}=3$$

,

$$\det\begin{vmatrix}\beta & 1 & 0\\ 0 & \beta & 1\\ 0 & -2 & \beta-3\end{vmatrix}\neq 0\Rightarrow \beta(\beta^2-3\beta+2)\neq 0$$

$$\Rightarrow \beta\neq 0,\beta\neq -1,\beta\neq -2$$

(3)

$$\because A=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & -2 & -3\end{bmatrix},\det\left|sI-A\right|=0\Rightarrow \det\begin{vmatrix}s & -1 & 0\\ 0 & s & -1\\ 0 & 2 & s+3\end{vmatrix}=0$$

求得A的特征值为s=0, s=-1, s=-2

所以是李雅普诺夫意义下的稳定，不是渐近稳定的。

(4) β=0 时，上述实现为 BIBO 稳定的

3、BIBO 稳定时，β=0 。所以原传递函数为 $\hat{g}(s)=\frac{1}{s^2+3s+2}=\frac{1}{s+1}-\frac{1}{s+2}$

约当型实现为: $A=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -2\end{bmatrix}, b=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}, c=\begin{bmatrix}1 & -1\end{bmatrix}$

即: $\dot{x}=Ax+bu=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -2\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}u$ 或者为 $\dot{x}=Ax+bu=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -2\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}u$

$y=cx=\begin{bmatrix}1 & -1\end{bmatrix}x$ $y=cx=\begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}x$

两个实现都是既能控又能观的。

(**注**: 能控型实现 5 分, 第二题每问 2 分, 第三小题实现 3 分, 能控性和能观性各 1 分。)

三、

解答:

1. 对线性定常系统

$$S_1:\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}=A\boldsymbol{x}+Bu\\ y=C\boldsymbol{x}\end{cases}$$

引入输出反馈

$$u=r-Hy=r-HC\boldsymbol{x}$$

3%

得

$$S_2:\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}=(A-BHC)\boldsymbol{x}+Br\\ y=C\boldsymbol{x}\end{cases}$$

1%

系统S_1能观性矩阵$M_{o1}=\begin{bmatrix}C\\CA\\CA^2\\\vdots\\CA^{n-1}\end{bmatrix}$, 系统$S_2$能观性矩阵$M_{o2}=\begin{bmatrix}C\\C(A-BHC)\\C(A-BHC)^2\\\vdots\\C(A-BHC)^{n-1}\end{bmatrix}$ 2%

由数学归纳法可证明

$$M_{o2}=F\cdot M_{o1}$$

其中

$$F=\begin{bmatrix}I & & & & & \\ -CBH & I & & & & \\ -CDBH & -CBH & I & & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ -CD^{n-2}BH & \cdots & \cdots & -CDBH & -CBH & I\end{bmatrix},\quad D=A-BHC$$

2%

可见F非奇异, 故

$$rank(M_{o2})=rank(F\cdot M_{o1})=rank(M_{o1})$$

2. 设系统$\{A, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}\}$的能控标准型为$\{\bar{A}, \bar{\boldsymbol{b}}, \bar{\boldsymbol{c}}\}$，变换矩阵为$Q$，其传递函数为

$$g(s) = \frac{b_{n-1}s^{n-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0}$$

3%

则

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix}, \quad \bar{\boldsymbol{b}} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \bar{\boldsymbol{c}} = \begin{bmatrix} b_0 & b_1 & \cdots & b_{n-1} \end{bmatrix}$$

3%

取$\bar{\boldsymbol{c}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$，则有

$$\bar{M}_o = \begin{bmatrix} \bar{c} \\ \bar{c}\bar{A} \\ \vdots \\ \bar{c}\bar{A}^{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

即系统$\{\bar{A}, \bar{\boldsymbol{b}}, \bar{\boldsymbol{c}}\}$能观性矩阵满秩，系统能观，因此系统$\{A, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}\}$也能观。 4%

四、略

五、

解:

(1) $\because J_0 = |x[0] - 3u[0]|, x[0] = 3, u[0] \in \mathbb{Z}$

$\therefore$ 取$\tilde{u}[0] = 1, \tilde{J}_0 = 0, x[1] = x[0] + 0.1x^2[0] + 0.1\tilde{u}[0] = 4$ …… 3 分

(2) $\because J_1 = |x[1] - 3u[1]|, x[1] = 4, u[1] \in \mathbb{Z}$

$\therefore$ 取$\tilde{u}[1] = 1, \tilde{J}_1 = 1, x[2] = 5.7$ …‥ 3 分

(3) $\because J_2 = |x[2] - 3u[2]|, x[2] = 5.7, u[2] \in \mathbb{Z}$

$\therefore$ 取$\tilde{u}[2] = 2, \tilde{J}_2 = 0.3$ …… 3 分

$\therefore \tilde{J} = \tilde{J}_0 + \tilde{J}_1 + \tilde{J}_2 = 1.3$ …… 1 分

下面证明$\tilde{u}[0], \tilde{u}[1], \tilde{u}[2]$为最优控制序列：

(1) 若$u[0] \neq 1$，则$J \geq J_0 \geq 3 > \tilde{J}$，故$u^*[0] = \tilde{u}[0] = 1$

(2) 若$u[1] \neq 1$，则$J \geq J_1 \geq 2 > \tilde{J}$，故$u^*[1] = \tilde{u}[1] = 1$ …… 4 分

(3) 若$u[2] \neq 2$，则$J \geq J_2 \geq 2.7 > \tilde{J}$，故$u^*[2] = \tilde{u}[2] = 2$

综上可知，最优控制序列为{1,1,2}，最优性能指标为 1.3 …… 1 分

六、

先做划归代换

定义 $\hat{\boldsymbol{x}}(t)=e^{\alpha t}\boldsymbol{x}(t),\quad \hat{\boldsymbol{u}}(t)=e^{\alpha t}\boldsymbol{u}(t)$

则 $\dot{\hat{\boldsymbol{x}}}=\frac{d}{dt}[e^{\alpha t}\boldsymbol{x}]=\alpha e^{\alpha t}\boldsymbol{x}+e^{\alpha t}[\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}]=(\alpha\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A})\cdot e^{\alpha t}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{B}\cdot e^{\alpha t}\boldsymbol{u}$

即状态方程及初态变为 $\dot{\hat{\boldsymbol{x}}}=(\alpha\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A})\hat{\boldsymbol{x}}+\boldsymbol{B}\hat{\boldsymbol{u}}$， $\hat{\boldsymbol{x}}(0)=\boldsymbol{x}_0$

此时，最优性能指标变为 $J=\int_0^\infty[\hat{\boldsymbol{x}}^T(t)\boldsymbol{Q}\hat{\boldsymbol{x}}(t)+\hat{\boldsymbol{u}}^T(t)\boldsymbol{R}\hat{\boldsymbol{u}}(t)]\,dt$

与典型的无限时间定常调节器问题对照，这里仅是状态方程中的系统矩阵由 $\boldsymbol{A}$ 变成了 $\boldsymbol{A}+\alpha\boldsymbol{I}$，其它的都没有变化。

而 $(\boldsymbol{A}+\alpha\boldsymbol{I},\boldsymbol{B})$ 能控、$(\boldsymbol{A}+\alpha\boldsymbol{I},\boldsymbol{H})$ 能观 $(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$ 能控、$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{H})$ 能观自然结论

然后按无限时间无约束问题做，后略