现代控制理论

中国科学技术大学 自动化系

2020.2.-6.

本课程的篇章结构

建模	直接获取	第2章 系统的状态空间模型
	模型转换	第2章 系统的状态空间模型 第6章 传递函数的状态空间实现
分析	定量分析	第3章 状态空间状态方程的解
	定性分析	第4章 系统的稳定性 第5章 能控性和能观性
设计	常规控制	第7章 状态反馈和状态观测器
	最优控制	第8章 最优性原理与动态规划 第9章 极小值原理 第10章 二次型指标的最优线性系统

第九章 极小值原理

§9.1 静态最优化问题及解

9.1.1 一元函数的极值

设：$J = f(u) \to [a,b]$ 上的单值连续可微函数，则

1) $f'(u)|_{u=u^*} = 0$ & $f''(u)|_{u=u^*} > 0 \Leftrightarrow f(u)$ 在$u = u^*$处取极小值

2) $f'(u)|_{u=u^*} = 0$ & $f''(u)|_{u=u^*} < 0 \Leftrightarrow f(u)$ 在$u = u^*$处取极大值

最小(大)值：$[a,b]$上极小(大)值中的最小(大)值

$$J^* = f(u^*) = \min_{u\in[a,b]} \left[f(u) \right]$$

§9.1 静态最优化问题及解

9.1.2 多元函数的极值

设： $J = f(\boldsymbol{u}), \quad \boldsymbol{u} = [\, u_1 \;\; u_2 \;\; \cdots \;\; u_n \,]^T$

则 J 取极值的必要条件与充分条件分别是

1）必要条件：

$$\left.\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{u}}\right|_{u=u^*} = \boldsymbol{0}$$

2）充分条件：

$$\left.\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{u}}\right|_{u=u^*} = \boldsymbol{0} \quad \& \quad \left.\frac{\partial^2 f}{\partial \boldsymbol{u} \partial \boldsymbol{u}^T}\right|_{u=u^*} > O$$

§9.1 静态最优化问题及解

9.1.3 具有等式约束的条件极值

设连续可微的目标泛函： $J = f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})$

等式约束条件： $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{0}$

【例9-1】用一定面积的铁皮作圆柱形罐头盒，要求罐头盒容积为最大。

设铁皮总面积为A，罐头盒高为 l，半径为 r，则：

目标函数：$J = v(r,l) = \pi r^2 l$

等式约束：$g(r,l) = (2\pi r^2 + 2\pi rl) - A = 0$

§9.1 静态最优化问题及解

9.1.3 具有等式约束的条件极值

一、嵌入法（消元法）

从约束条件等式中解出某些变量，使问题变为无约束的极值问题。

【例9.1】 $J=v(r,l)=\pi r^2 l$ ， $g(r,l)=(2\pi r^2+2\pi rl)-A=0$

【解1】

$$l=\frac{A-2\pi r^2}{2\pi r} \quad \Rightarrow \quad J=v(r)=\frac{rA}{2}-\pi r^3$$

$$\frac{dJ}{dr}=0 \quad \Rightarrow \quad r^*=\sqrt{\frac{A}{6\pi}},\quad l^*=\sqrt{\frac{2A}{3\pi}}=2r,\quad J^*=\frac{\sqrt{6}}{18}A^{2/3}=2\pi r^3$$

因 $\dfrac{d^2v(r)}{dr}=-6\pi r<0$，故本极值问题为极大值。

§9.1 静态最优化问题及解

9.1.3 具有等式约束的条件极值

二、拉格朗日乘子法（增元法）

将约束条件式乘以乘子λ，与目标函数试相加，构成一个新的泛函，使问题变为无约束的极值问题。

【例9.1】 $J = v(r,l) = \pi r^2 l \quad , \quad g(r,l) = (2\pi r^2 + 2\pi rl) - A = 0$

【解2】 $H = J + \lambda g(r,l) = \pi r^2 l + \lambda(2\pi r^2 + 2\pi rl - A)$

令 $\dfrac{\partial H}{\partial l} = 0, \quad \dfrac{\partial H}{\partial r} = 0, \quad \dfrac{\partial H}{\partial \lambda} = 0$ ，可同样解得

$$r^* = \sqrt{\frac{A}{6\pi}}, \quad l^* = \sqrt{\frac{2A}{3\pi}} = 2r, \quad \lambda^* = -\sqrt{\frac{A}{24\pi}} = -\frac{r^*}{2}, \quad J^* = \frac{\sqrt{6}}{18} A^{2/3} = 2\pi r^3$$

对具有等式约束的条件极值问题，嵌入法只适用于较简单的情况，而拉格朗日乘子法具有普遍意义

§9.1 静态最优化问题及解

9.1.3 具有等式约束的条件极值

拉格朗日乘子法的一般形式

设连续可微的目标泛函： $J = f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})$

等式约束条件： $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{0}$

构造拉格朗日函数：

$$H = J + \boldsymbol{\lambda}^T \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u}) = f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u}) + \boldsymbol{\lambda}^T \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})$$

式中，$\boldsymbol{\lambda}$—乘子矢量，与 $\boldsymbol{g}$ 同维列向量

这样，就可以按无约束条件的多元函数极值的方法求解。

§ 9.1 静态最优化问题及解

9.1.3 具有等式约束的条件极值

拉格朗日乘子法的一般形式

$$J = f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u}) \qquad \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{0} \qquad H = f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u}) + \boldsymbol{\lambda}^T \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})$$

$$\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{x}} = \boldsymbol{0}, \quad \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{u}} = \boldsymbol{0}, \quad \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{\lambda}} = \boldsymbol{0}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{x}} + \left(\frac{\partial \boldsymbol{g}}{\partial \boldsymbol{x}}\right)^T \boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{0}, \quad \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{u}} + \left(\frac{\partial \boldsymbol{g}}{\partial \boldsymbol{u}}\right)^T \boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{0}, \quad \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{0}$$

$$\left(\frac{\partial \boldsymbol{g}}{\partial \boldsymbol{x}}\right)^T = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial g_1}{\partial \boldsymbol{x}} & \cdots & \dfrac{\partial g_n}{\partial \boldsymbol{x}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial g_1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial g_n}{\partial x_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial g_1}{\partial x_n} & \cdots & \dfrac{\partial g_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

回顾一下向量、矩阵的导数定义

1、向量（矩阵）对标量的导数：

结果是一个同维向量（矩阵），即各元素在原有的位置上对该标量求导数。

2、标量对向量的导数：

结果是一个同维向量，即该标量对向量各分量在原有的位置上求导数。

3、列向量函数对向量自变量的导数：

m维列向量函数 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ 对 n 维向量 $\boldsymbol{x}$ (自变量)求导，结果是一个m行n列的矩阵，即函数 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$下标表现在行上，自变量 $\boldsymbol{x}$下标表现在列上。

$$\frac{d\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})}{d\boldsymbol{x}} = \frac{d\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})}{d\boldsymbol{x}^T} = \begin{bmatrix} \dfrac{df_1}{d\boldsymbol{x}} \\ \vdots \\ \dfrac{df_m}{d\boldsymbol{x}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{df_1}{dx_1} & \cdots & \dfrac{df_1}{dx_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{df_m}{dx_1} & \cdots & \dfrac{df_n}{dx_n} \end{bmatrix}$$

回顾一下向量、矩阵的导数定义

4、行向量函数对向量自变量的导数：

m维行向量函数 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ 对 n 维向量 $\boldsymbol{x}$ (自变量)求导，结果是一个 n 行 m 列的矩阵，即行向量函数 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$下标表现在列上，自变量 $\boldsymbol{x}$下标表现在行上。

$$\frac{d\boldsymbol{f}^T(\boldsymbol{x})}{d\boldsymbol{x}} = \left[\frac{d\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})}{d\boldsymbol{x}^T}\right]^T = \begin{bmatrix} \frac{df_1}{d\boldsymbol{x}} & \frac{df_2}{d\boldsymbol{x}} & \cdots & \frac{df_m}{d\boldsymbol{x}} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{df_1}{dx_1} & \frac{df_2}{dx_1} & \cdots & \frac{df_m}{dx_1} \\ \frac{df_1}{dx_2} & \frac{df_2}{dx_2} & \cdots & \frac{df_m}{dx_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{df_1}{dx_n} & \frac{df_2}{dx_n} & \cdots & \frac{df_m}{dx_n} \end{bmatrix} = \left[\frac{d\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})}{d\boldsymbol{x}}\right]^T$$

9.1.3 具有等式约束的条件极值

拉格朗日乘子法（将条件极值转化成无约束问题）

$$H = f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u}) + \boldsymbol{\lambda}^T \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})$$

则H取极值的必要条件

$$\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{x}} = \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{x}} + \left(\frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{x}}\right)^T \boldsymbol{\lambda} = 0$$

$$\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{u}} = \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{u}} + \left(\frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{u}}\right)^T \boldsymbol{\lambda} = 0$$

$$\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{\lambda}} = g(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u}) = 0$$

其中

$$\left(\frac{\partial \boldsymbol{g}}{\partial \boldsymbol{x}}\right)^T = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial g_1}{\partial \boldsymbol{x}} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial g_n}{\partial \boldsymbol{x}} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial g_1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial g_n}{\partial x_1} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \dfrac{\partial g_1}{\partial x_n} & \cdots & \dfrac{\partial g_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

§9.2 泛函极值与变分法

9.2.1 几个重要的数学概念

一. 距离空间与距离：非空 X 称为是距离空间是指：

$\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in X$, 存在实值泛函 $d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ 满足

1. $d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \geq 0, \forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in X;\ d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$

2. $d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = d(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})$

3. $d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \leq d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) + d(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{y})$

式中 $d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ 称为是距离空间 X 上的距离。

距离可由范数导出：$d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|$

§9.2 泛函极值与变分法

二、泛函的极值(自变量为函数)

若泛函 J 在任何一条与 $y(x)$ 接近的曲线上都有：

$$\Delta J = J[y(x)] - J[y_0(x)] \geq 0$$

$\rightarrow J$在$y_0(x)$上达到极小值。

若$\Delta J = J[y(x)] - J[y_0(x)] \leq 0$

$\rightarrow J$在$y_0(x)$上达到极大值。

9.2.2 变分法的基本概念

求泛函的极值问题称为变分问题，其方法为变分法。

2. 泛函的变分

1). 函数的微分

设函数 $y=f(x)$ 则其微分：$dy=f'(x)dx$

求极值必要条件：$dy=0$

2). 泛函的变分

设泛函 $J[y(x)]$ 则其增量：

$$\Delta J = J[y(x)+\Delta y(x)]-J[y(x)]$$
$$= L[y(x),\Delta y(x)]+R[y(x),\Delta y(x)]$$

$$\Delta J = J\left[y(x)+\Delta y(x)\right] - J\left[y(x)\right]$$

$$= \underbrace{L\left[y(x),\Delta y(x)\right]}_{\Delta y(x)\text{的线性连续函数}} + \underbrace{R\left[y(x),\Delta y(x)\right]}_{\Delta y(x)\text{的高阶无穷小项}}$$

泛函的一阶变分为： $\delta J = L\left[y(x),\delta y(x)\right]$

【例9.1】 求泛函的一阶变分： $J[x]=\int_0^1 x^2(t)dt$

$$\Delta J[x]=\int_0^1 [x(t)+\Delta x]^2 dt-\int_0^1 x^2(t)dt=\int_0^1 2x(t)\Delta x dt+\int_0^1 [\Delta x]^2 dt$$

$$\therefore\ \delta J = \int_0^1 2x(t)\delta x dt$$

3). 泛函变分的计算

a. 利用定义式计算

$$\Delta J = J[y(x)+\delta y(x)] - J[y(x)]$$
$$= L[y(x),\delta y(x)] + R[y(x),\delta y(x)]$$
$$= \delta J + R[y(x),\delta y(x)]$$

b. 利用下式计算

$$\delta J = \frac{\partial}{\partial a} J[y(x)+a\delta y(x)]\Big|_{a=0} = \frac{\partial}{\partial y} J[y(x)]\delta y(x)$$

例9. 1（续） $J[x] = \int_0^1 x^2(t)dt$

则 $\delta J = \frac{\partial}{\partial a} J[y(x)+a\delta y(x)]\Big|_{a=0}$

$$= \frac{\partial}{\partial a}\int_0^1 [x(t)+a\delta x(t)]^2 dt\Big|_{a=0} = \int_0^1 2x(t)\delta x(t)dt$$

证明： $\Delta J = J[y(x)+a\delta y(x)] - J[y(x)]$

$$= \underbrace{L[y(x), a\delta y(x)]}_{a\delta y(x)\text{的线性连续函数}} + \underbrace{R[y(x), a\delta y(x)]}_{a\delta y(x)\text{的高阶无穷小项}}$$

$$\therefore L[y(x), a\delta y(x)] = aL[y(x), \delta y(x)]$$

$$\therefore \lim_{a\to 0} \frac{R[y(x), a\delta y(x)]}{a} = 0$$

$$\therefore \frac{\partial}{\partial a} J[y(x)+a\delta y(x)]\Big|_{a=0} = \lim_{a\to 0} \frac{J[y(x)+a\delta y(x)] - J[y(x)]}{a}$$

$$= \lim_{a\to 0} \frac{L[y(x), a\delta y(x)] + R[y(x), a\delta y(x)]}{a} = L[y(x), \delta y(x)] = \delta J$$

3. 泛函的极值

可微泛函 $J[y(x)]$在$y_0(x)$上达到极值的必要条件：

$$\delta J = 0$$

$$\Delta J = J[y(x)] - J[y_0(x)] \geq 0 \quad \text{极小值}$$

$$\Delta J = J[y(x)] - J[y_0(x)] \leq 0 \quad \text{极大值}$$

多元泛函的极值

设多元泛函为 $J[y_1(x), \; y_2(x), \cdots y_n(x)]$

则同样其取极值的必要条件为：$\delta J = 0$

多元泛函的变分

$$\delta J = \frac{\partial}{\partial a} J[y_1 + a\delta y_1, y_2 + a\delta y_2, \cdots, y_n + a\delta y_n]\Big|_{a=0}$$

$$= \frac{\partial J}{\partial y_1}\delta y_1 + \frac{\partial J}{\partial y_2}\delta y_2 + \cdots + \frac{\partial J}{\partial y_n}\delta y_n = \sum \delta J_{y_i}$$

9.2.3 泛函极值的必要条件——欧拉方程

设泛函 $J(x)=\int_{t_0}^{t_f} L[x(t),\dot{x}(t),t]dt$

在 $[t_0,t_f]$ 上 $L[x,\dot{x},t]$ 二次连续可微，且

$$x(t_0)=x_0 \qquad x(t_f)=x_f$$

求极值轨线 $x^*(t) \Rightarrow J=min$

极值的必要条件： $\delta J=0 \quad (\delta J=\delta J_x+\delta J_{\dot{x}})$

即泛函的一阶变分：

$$\delta J=\int_{t_0}^{t_f}\left[\left(\frac{\partial L}{\partial x}\right)\delta x+\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)\delta \dot{x}\right]dt=0$$

$$\delta J=\int_{t_0}^{t_f}\left[\left(\frac{\partial L}{\partial x}\right)\delta x+\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)\delta\dot{x}\right]dt=0$$

其中： $$\int_{t_0}^{t_f}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)\delta\dot{x}dt=\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)\delta x\Big|_{t_0}^{t_f}-\int_{t_0}^{t_f}\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)\delta x dt$$

分部积分：

$$\int uv'dx=uv-\int vu'dx$$

$$\therefore \delta J=\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)\delta x\Big|_{t_0}^{t_f}+\int_{t_0}^{t_f}\left(\frac{\partial L}{\partial x}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)\delta x dt=0$$

$$\delta J=\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)\delta x\Big|_{t_0}^{t_f}+\int_{t_0}^{t_f}\left(\frac{\partial L}{\partial x}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)\delta x dt=0$$

$x(t) \longrightarrow$ 不受约束　　$\delta x \longrightarrow$ 任意

故泛函 J 取极值的必要条件：

1) $\dfrac{\partial L}{\partial x}-\dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}}=0$　　欧拉方程

$$\because L=L(x,\dot{x},t)$$

$$\therefore \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}=\frac{\partial}{\partial \dot{x}}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)\frac{d\dot{x}}{dt}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)\frac{dx}{dt}+\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)\frac{dt}{dt}$$

$$=\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}^2}\ddot{x}+\frac{\partial^2 L}{\partial x\partial \dot{x}}\dot{x}+\frac{\partial^2 L}{\partial t\partial \dot{x}}$$

$$2)\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)\delta x\Big|_{t_0}^{t_f}=0$$ 横截条件

展开上式：$\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)\Big|_{t_f}\delta x(t_f)-\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)\Big|_{t_0}\delta x(t_0)=0$

a.固定端点：　$\delta x(t_f)=0$　　$\delta x(t_0)=0$

$\rightarrow$　$x(t_0)=x_0$　　$x(t_f)=x_f$

b.自由端点：

始端自由：　$\delta x(t_f)=0$　　$\delta x(t_0)\neq 0$

$\rightarrow$　$\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)\Big|_{t_0}=0$　　$x(t_f)=x_f$

终端自由：　$\delta x(t_f)\neq 0$　　$\delta x(t_0)=0$

$\rightarrow$　$\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)\Big|_{t_f}=0$　　$x(t_0)=x_0$

两端自由：　$\delta x(t_f) \neq 0$　　$\delta x(t_0) \neq 0$

$$\rightarrow \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)\bigg|_{t_0} = 0 \qquad \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)\bigg|_{t_f} = 0$$

例9.2：如图求平面上两固定点连线最短的曲线。

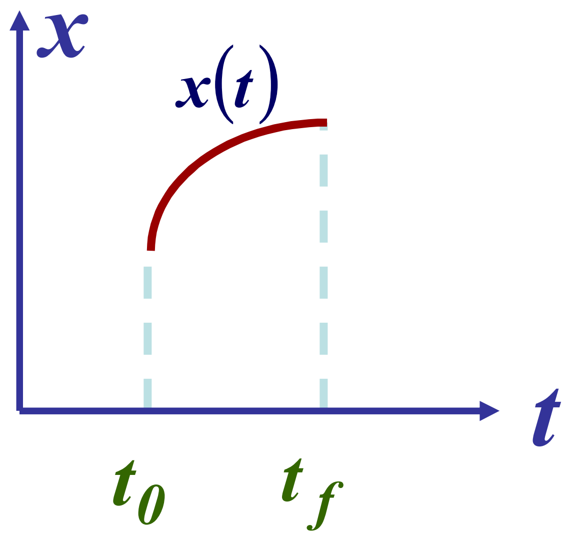
解：$(ds)^2 = (dx)^2 + (dt)^2$

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dt)^2}$$

则$J = \int ds = \int \sqrt{(dx)^2 + (dt)^2}$

$$= \int_{t_0}^{t_f} \sqrt{1 + \dot{x}^2}\, dt$$

令$L = \sqrt{1 + \dot{x}^2(t)}$



令$L=\sqrt{1+\dot{x}^2(t)}$

1). 欧拉方程 $\underbrace{\frac{\partial L}{\partial x}}_{\nearrow 0}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}=0 \longrightarrow \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}=C$

即$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}=\frac{\dot{x}}{\sqrt{1+\dot{x}^2}}=C$

$\therefore \quad \dot{x}(t)=a \longrightarrow x(t)=at+b$

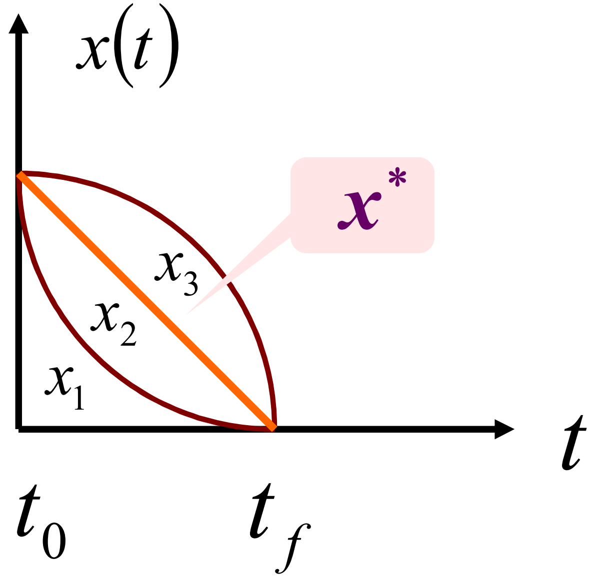
a,b ⇨ 由边界条件确定。

四种边界条件：

a. 固定端点：

$\delta x(t_f)=0 \qquad \delta x(t_0)=0$

$\rightarrow x(t_0)=x_0 \qquad x(t_f)=x_f$



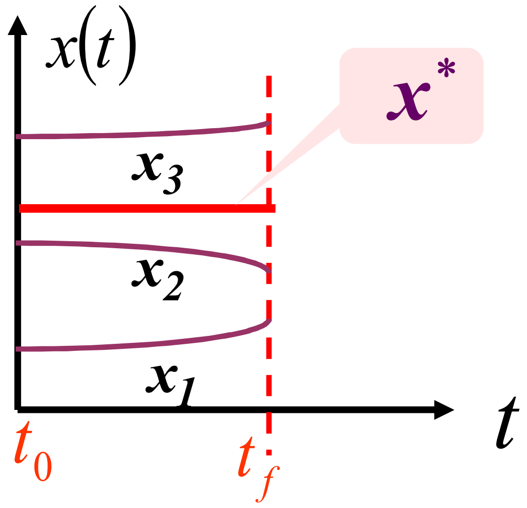
b. 两端自由：

$$\delta x(t_f)\neq 0 \qquad \delta x(t_0)\neq 0$$

$$\rightarrow \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)\bigg|_{t_0}=0 \qquad \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)\bigg|_{t_f}=0$$

$$\left.\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right|_{t_0}=\left.\frac{\dot{x}}{\sqrt{1+\dot{x}^2}}\right|_{t_0}=C=0$$

$$\dot{x}\big|_{t_0}=0\rightarrow x(t_0)=k$$

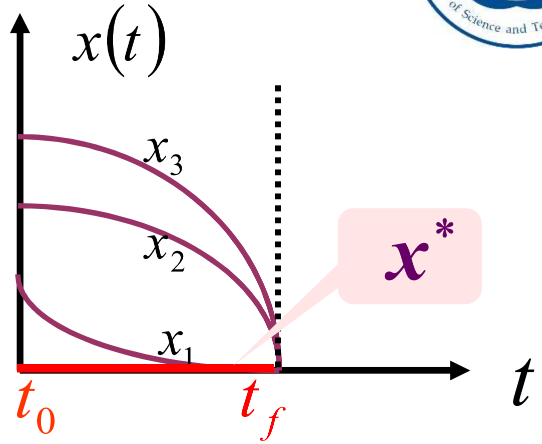


同理：$\dot{x}\big|_{t_f}=0\rightarrow x(t_f)=k$

c. 始端自由：

$$\delta x(t_f)=0 \qquad \delta x(t_0)\neq 0$$

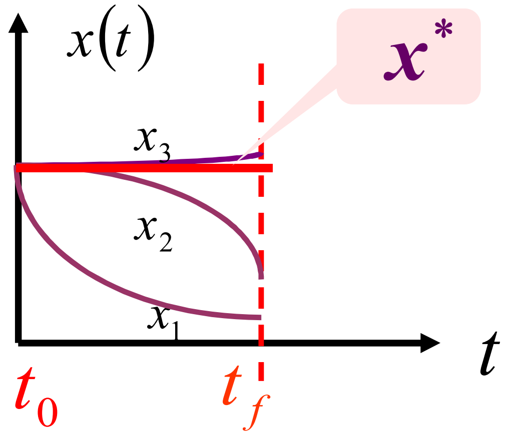
$$\rightarrow \left.\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)\right|_{t_0}=0 \qquad x(t_f)=x_f$$



d. 终端自由：

$$\delta x(t_f)\neq 0 \qquad \delta x(t_0)=0$$

$$\rightarrow \left.\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)\right|_{t_0}=0 \qquad x(t_0)=x_0$$



说明：

1. 欧拉方程和横截条件只是泛函存在的必要条件，至于所求极值是极大值还是极小值应由充分条件来定。

2. 对于多数工程问题，可根据实际问题的物理含义直接作出判断。

9.2.4 多元函数的极值条件

设泛函 $J(x)=\int_{t_0}^{t_f} L[x(t),\dot{x}(t),t]dt$

在 $[t_0,t_f]$ 上 $L[x,\dot{x},t]$ 二次连续可微，且

$$x(t_0)=x_0 \qquad x(t_f)=x_f \qquad x\in R^n$$

$x \to n$维向量

求极值轨线 $x^*(t) \Rightarrow J=min$

故泛函 J 取极值的必要条件：

1. 欧拉方程 $\dfrac{\partial L}{\partial x}-\dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}}=0 \to$ 向量形式

其中：$L=[x_1,x_2\cdots,x_n;\dot{x}_1,\dot{x}_2\cdots\dot{x}_n;t]$,

$$x=[x_1,x_2\cdots,x_n]^T$$

展开：$\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = 0 \rightarrow$

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} = 0$$

$$\vdots$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_n} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_n} = 0$$

2. 横截条件 $\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)^T \delta x \Big|_{t_0}^{t_f} = 0 \longrightarrow$ 分四种情况（略）

9.2.5 可变端点问题

设泛函 $J(x)=\int_{t_0}^{t_f} L[x(t),\dot{x}(t),t]dt$

在 $[t_0,t_f]$上 $L[x,\dot{x},t]$ 二次连续可微，已知

$x(t_0)=x_0$ （固定始端）

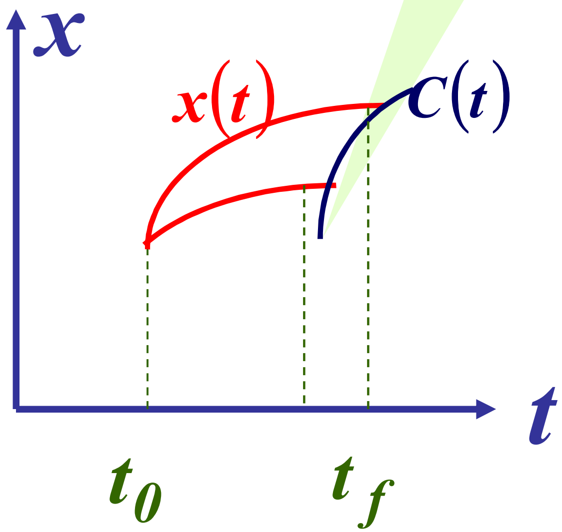
终端 $[t_f,x(t_f)]$ 可沿着靶线 $C(t)$ 变动，

且 $C(t)$ 具有连续的一阶导数。

求极值轨线 $x^*(t)\Rightarrow J=min$

待求量

拦截问题



求极值轨线 $x^*(t) \Rightarrow J=min$ $J(x)=\int_{t_0}^{t_f} L[x(t),\dot{x}(t),t]dt$

故泛函 J 取极值的必要条件：

待求量

$$\delta J=\delta J_x+\delta J_{\dot{x}}+\delta J_{t_f}=0$$

$$\delta J_x+\delta J_{\dot{x}}=\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)\delta x\Big|_{t_0}^{t_f}+\int_{t_0}^{t_f}\left(\frac{\partial L}{\partial x}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)\delta x dt$$

$$\delta J_{t_f}=L(x,\dot{x},t)\big|_{t_f}\cdot\delta t_f$$

$$\therefore \delta J=\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)\delta x\Big|_{t_0}^{t_f}+\int_{t_0}^{t_f}\left(\frac{\partial L}{\partial x}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)\delta x dt+L(x,\dot{x},t)\big|_{t_f}\cdot\delta t_f$$

$$\delta J=\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)\delta x\Big|_{t_0}^{t_f}+\int_{t_0}^{t_f}\left(\frac{\partial L}{\partial x}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)\delta x dt+L(x,\dot{x},t)\Big|_{t_f}\cdot\delta t_f=0$$

1). 欧拉方程 $\frac{\partial L}{\partial x}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}=0$

2). 横截条件

固定始端 $x(t_0)=x_0$

终端横截条件 $\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)\delta x\Big|_{t_0}^{t_f}+L(x,\dot{x},t)\Big|_{t_f}\cdot\delta t_f=0$

展开得: $\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)\Big|_{t_f}\cdot\delta x(t_f)-\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)\Big|_{t_0}\cdot\delta x(t_0)+L(x,\dot{x},t)\Big|_{t_f}\cdot\delta t_f$

$$=\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)\Big|_{t_f}\cdot\underbrace{\delta x(t_f)+L(x,\dot{x},t)\Big|_{t_f}\cdot\delta t_f}_{\text{二者关系}}=0$$

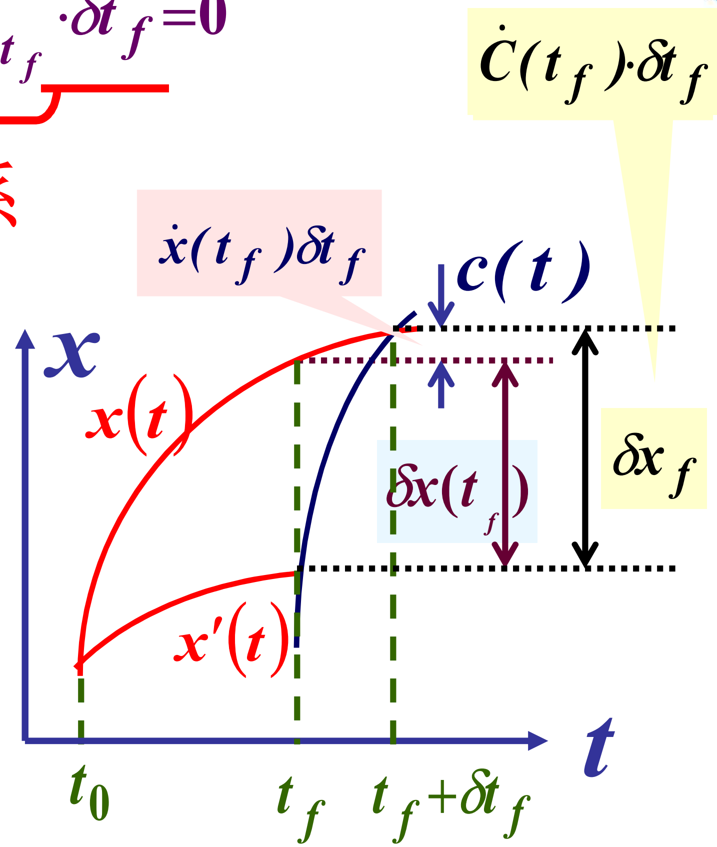
$$\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)\Bigg|_{t_f} \cdot \underbrace{\delta x(t_f) + L(x,\dot{x},t)\Big|_{t_f} \cdot \delta t_f}_{\text{二者关系}} = 0$$

$$\delta x(t_f) \approx \delta x_f - \dot{x}(t_f)\delta t_f$$

$$\approx \dot{C}(t_f)\delta t_f - \dot{x}(t_f)\delta t_f$$

终端横截条件：

$$\left\{ L + \left[\dot{C}(t) - \dot{x}(t)\right]\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)\right\}_{t=t_f} = 0$$



终端横截条件：

$$\left\{L+\left[\dot{C}(t)-\dot{x}(t)\right]\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)\right\}_{t=t_f}=0$$

分析：

a. 若靶线 $C(t)$ 为平行于t轴的直线，即 $\dot{C}(t)=0$

则上式为：$\left\{L-\dot{x}(t)\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)\right\}_{t=t_f}=0$

b. 若靶线 $C(t)$ 为垂直于t轴的直线，即 $\dot{C}(t)\to\infty$

则上式为：$\frac{L(t_f)}{\dot{C}(t_f)-\dot{x}(t_f)}+\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)_{t=t_f}=0 \longrightarrow \left.\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)\right|_{t_f}=0$

3). 若终端固定，始端沿给定曲线$D(t)$变动，则有

$$\left\{L-\left[\dot{x}(t)-\dot{D}(t)\right]\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)\right\}_{t=t_0}=0$$

a. 若$D(t)$为平行于t轴的直线，即 $\dot{D}(t)=0$

则上式为：$\left\{L-\dot{x}(t)\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)\right\}_{t=t_0}=0$

b. 若$D(t)$为垂直于t轴的直线，即 $\dot{D}(t)\to\infty$

则上式为：$\left.\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)\right|_{t_0}=0$

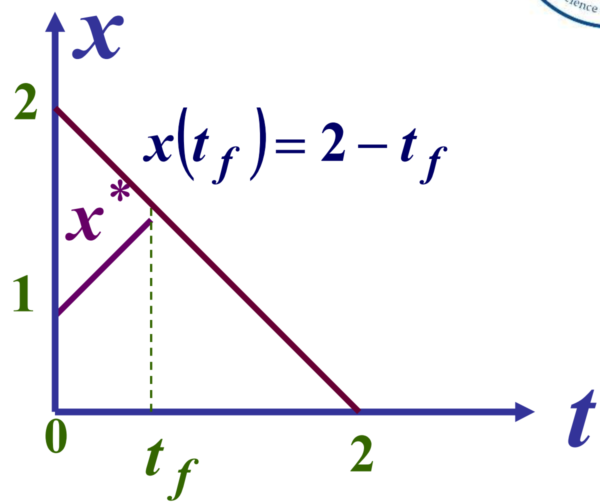
4). 同理对多变量泛函，有矢量形式：

欧拉方程 $$\frac{\partial L}{\partial x}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}=0$$

终端横截条件 $$\left\{L+\left[\dot{C}(t)-\dot{x}(t)\right]^T\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)\right\}_{t=t_f}=0$$

终端约束曲面

例：求从$x(0)=1$ 到直线$x(t)=2-t$ 距离最短的曲线。



解：$J=\int ds=\int_0^{t_f}\sqrt{(dx)^2+(dt)^2}$

$$=\int_0^{t_f}\sqrt{1+\dot{x}^2}\,dt$$

令$L=\sqrt{1+\dot{x}^2(t)}$

1）. 欧拉方程 $\frac{\partial L}{\partial x}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}=0$ $\quad \therefore \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}=\frac{\dot{x}}{\sqrt{1+\dot{x}}}=C$

$$\dot{x}(t)=a \longrightarrow x(t)=at+b$$

2). 终端横截条件：　$C(t)=2-t$

$$\left\{L+\left[\dot{C}(t)-\dot{x}(t)\right]\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)\right\}_{t=t_f}=0$$

$$\therefore\ \left\{\sqrt{1+\dot{x}^2}+\left[-1-\dot{x}\right]\frac{\dot{x}}{\sqrt{1+\dot{x}}}\right\}_{t=t_f}=0\rightarrow\dot{x}=1$$

$$x(t)=at+b \longrightarrow a=1$$

3). 初始条件

$$x(0)=1 \longrightarrow b=1$$

最优轨线：　$x^*(t)=t+1$

最优终端时刻：$t^*_f=\dfrac{1}{2}$

9.2.6　具有综合型性能泛函的情况

综合型性能指标

积分型性能指标

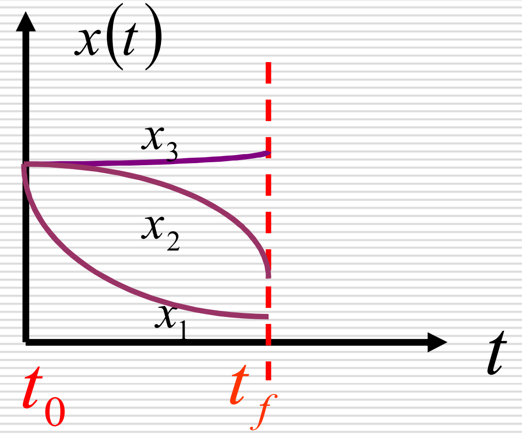
$$J=\Phi\left[x(t_f)\right]+\int_{t_0}^{t_f} L\left[x(t),\dot{x}(t),t\right]dt$$

终端型性能指标

状态矢量

固定始端　$x(t_0)=x_0$

自由终端　$t=t_f$ 一定，x_f 任意



求极值轨线 $x^*(t) \Rightarrow J=min$

泛函 J 取极值的必要条件：

$$\delta J = 0$$

泛函 J 取极值的必要条件：$\delta J = 0$

综合型性能指标 $J=\Phi\left[x(t_f)\right]+\int_{t_0}^{t_f} L\left[x(t),\dot{x}(t),t\right]dt$

$$\delta J_x+\delta J_{\dot{x}}=\int_{t_0}^{t_f}\left[\left(\frac{\partial L}{\partial x}\right)^T \delta x+\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)^T \delta \dot{x}\right]dt$$

分部积分：

$\int uv'dx=uv-\int vu'dx$

其中：$$\int_{t_0}^{t_f}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)^T \delta \dot{x}dt=\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)^T \delta x\Big|_{t_0}^{t_f}-\int_{t_0}^{t_f}\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)^T \delta x dt$$

$$\delta J_x+\delta J_{\dot{x}}=\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)^T \delta x\Big|_{t_0}^{t_f}+\int_{t_0}^{t_f}\left(\frac{\partial L}{\partial x}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)^T \delta x dt$$

综合型性能指标 $J=\Phi\left[x(t_f)\right]+\int_{t_0}^{t_f} L\left[x(t),\dot{x}(t),t\right]dt$

$$\delta J_x+\delta J_{\dot{x}}=\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)^T \delta x\Big|_{t_0}^{t_f}+\int_{t_0}^{t_f}\left(\frac{\partial L}{\partial x}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)^T \delta x dt$$

$$\delta J_{x_f}=\left\{\frac{\partial \Phi\left[x(t_f)\right]}{\partial x(t_f)}\right\}^T \delta x(t_f)$$

1). 欧拉方程 $\frac{\partial L}{\partial x}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}=0$

2). 横截条件　　固定始端　$x(t_0)=x_0$

终端条件　$\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)\Big|_{t=t_f}=-\frac{\partial \Phi\left[x(t_f)\right]}{\partial x(t_f)}$　自由终端

9.2.7 用变分法求解连续系统最优控制问题
——有约束条件的泛函极值

一、拉格朗日问题

设系统 $\dot{x}(t)=f(x,u,t)$ 其中 $x\in R^n$ $u\in R^r$

$f(x,u,t) \longrightarrow$ n维连续可微的矢量函数

设性能泛函 $J=\int_{t_0}^{t_f} L(x,u,t)dt$

$x(t_0)=x_0$（固定始端）终端状态 $x(t_f)$ 自由

求 $u^* \longrightarrow J=min(max)$

有约束条件的泛函极值分析思路：

利用拉格朗日乘子法 →

将有约束条件的泛函极值问题 →

转换为无约束条件的泛函极值问题

有约束条件的泛函极值分析方法：

1. 写出约束方程：

$$f(x,u,t)-\dot{x}(t)=0$$

2. 构造增广泛函：

$$J'=\int_{t_0}^{t_f}\left\{L(x,u,t)+\lambda^T\left[f(x,u,t)-\dot{x}\right]\right\}dt$$

2. 构造增广泛函：

$$J' = \int_{t_0}^{t_f} \Big\{ L(x,u,t) + \lambda^T \underbrace{\big[f(x,u,t) - \dot{x} \big]}^{\text{状态方程约束}} \Big\} dt$$

式中：$\lambda(t) = [\lambda_1 \quad \lambda_2 \quad \cdots \quad \lambda_n]^T$ 拉格朗日乘子矢量

令： $H(x,u,\lambda,t) = L(x,u,t) + \lambda^T f(x,u,t)$

哈密顿函数

则： $J' = \int_{t_0}^{t_f} \big\{ H(x,u,\lambda,t) - \lambda^T \dot{x} \big\} dt = \int_{t_0}^{t_f} \overline{H}(x,\dot{x},u,\lambda,t) dt$

$\longrightarrow$ 无约束条件的泛函极值问题

3. 泛函极值的必要条件 $\delta J'=0$

$$J'=\int_{t_0}^{t_f}\left\{H(x,u,\lambda,t)-\lambda^T\dot{x}\right\}dt$$

$$\delta J'=\int_{t_0}^{t_f}\left[\left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)^T\delta x+\left(\frac{\partial H}{\partial u}\right)^T\delta u-\lambda^T\delta\dot{x}\right]dt=0$$

其中：$$-\int_{t_0}^{t_f}\lambda^T\delta\dot{x}dt=-\delta x^T\lambda\Big|_{t_0}^{t_f}+\int_{t_0}^{t_f}\dot{\lambda}^T\delta x dt$$

故 $$\delta J'=-(\delta x)^T\lambda\Big|_{t_0}^{t_f}+\int_{t_0}^{t_f}\left[\left(\frac{\partial H}{\partial x}+\dot{\lambda}\right)^T\delta x++\left(\frac{\partial H}{\partial u}\right)^T\delta u\right]dt=0$$

故 $\delta J' = -(\delta x)^T \lambda \Big|_{t_0}^{t_f} + \int_{t_0}^{t_f} \left[\left(\frac{\partial H}{\partial x} + \dot{\lambda} \right)^T \delta x + + \left(\frac{\partial H}{\partial u} \right)^T \delta u \right] dt = 0$

$H(x,u,\lambda,t) = L(x,u,t) + \lambda^T f(x,u,t)$ 哈密顿函数

1) 哈密顿正则方程

$$\begin{cases} \dot{x} = \dfrac{\partial H(x,u,\lambda,t)}{\partial \lambda} & \text{状态方程} \\ \dot{\lambda} = -\dfrac{\partial H(x,u,\lambda,t)}{\partial x} & \text{伴随方程(协态方程)} \end{cases}$$

2) 控制方程 $\dfrac{\partial H(x,u,\lambda,t)}{\partial u} = 0$ 控制方程(U不受约束)

受约束极小值原理

3)边界条件 $-(\delta x)^T\lambda\Big|_{t_0}^{t_f}=-(\delta x)^T\lambda\Big|_{t_f}+(\delta x)^T\lambda\Big|_{t_0}=0$

a. 固定端点：

$$\delta x(t_f)=0 \qquad \delta x(t_0)=0$$

$$\rightarrow x(t_0)=x_0 \qquad x(t_f)=x_f$$

b. 自由端点：

终端自由 $\delta x(t_0)=0 \qquad \delta x(t_f)\neq 0$

$$x(t_0)=x_0 \qquad \lambda(t_f)=0$$

两端自由 $\lambda\Big|_{t_0}^{t_f}=0$ 横截条件

横截条件常应用于补充边界条件

4. 求最优控制的步骤：

1) 构造增广泛函：

$$J' = \int_{t_0}^{t_f} \left\{ H(x,u,\lambda,t) - \lambda^T \dot{x} \right\} dt$$

$$H(x,u,\lambda,t) = L(x,u,t) + \lambda^T f(x,u,t)$$ 哈密顿函数

2) 由控制方程：$\dfrac{\partial H(x,u,\lambda,t)}{\partial u} = 0 \rightarrow u^*(x,\lambda)$;

3) 将u^*带入哈密顿正则方程$\rightarrow x^*, \lambda^*$;

4)利用边界条件定解。

波尔扎问题

状态约束

设系统 $\dot{x}(t)=f(x,u,t)$ $x\in R^n$ $u\in R^r$

$f(x,u,t)\longrightarrow n$维连续可微的矢量函数

设性能泛函

$$J=\Phi[x(t_f),t_f]+\int_{t_0}^{t_f}L(x,u,t)dt \rightarrow \text{综合型}$$

Φ,L 均为连续可微的函数

终端边界约束

$x(t_0)=x_0$(固定始端)

终端状态$x(t_f)$满足:$N[x(t_f),t_f]=0$

$N\rightarrow q(q\le n)$维矢量函数, t_f待求终端时间。

求$u^*\longrightarrow J=min(max)$

1. 构造增广泛函：

$$J' = \Phi\left[x(t_f),t_f\right] + \mu^T N\left[x(t_f),t_f\right] + \int_{t_0}^{t_f} \left\{L(x,u,t) + \lambda^T\left[f(x,u,t) - \dot{x}\right]\right\} dt$$

终端边界约束

状态方程约束

式中：$\lambda(t) = [\lambda_1 \quad \lambda_2 \quad \cdots \quad \lambda_n]^T$ 拉格朗日乘子矢量

$\mu = [\mu_1 \quad \mu_2 \quad \cdots \quad \mu_q]^T$ 终端乘子矢量

令： $H(x,u,\lambda,t) = L(x,u,t) + \lambda^T f(x,u,t)$

哈密顿函数

$$J' = \Phi\left[x(t_f),t_f\right] + \mu^T N\left[x(t_f),t_f\right] + \int_{t_0}^{t_f} \left\{H(x,u,\lambda,t) - \lambda^T \dot{x}\right\} dt$$

2. 泛函极值的必要条件 $\delta J'=0$

$$J'=\Phi\left[x(t_f),t_f\right]+\mu^T N\left[x(t_f),t_f\right]+\int_{t_0}^{t_f}\left\{H(x,u,\lambda,t)-\lambda^T\dot{x}\right\}dt$$

$$\delta J'=\delta J'_u+\delta J'_x+\delta J'_{\dot{x}}+\delta J'_{t_f}+\delta J'_{x_f}=0$$

$$\delta J'_x+\delta J'_{\dot{x}}+\delta J'_u=\int_{t_0}^{t_f}\left[\left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)^T\delta x+\left(\frac{\partial H}{\partial u}\right)^T\delta u-\lambda^T\delta\dot{x}\right]dt$$

分部积分

$$=-(\delta x)^T\lambda\Big|_{t_0}^{t_f}+\int_{t_0}^{t_f}\left[\left(\frac{\partial H}{\partial x}+\dot{\lambda}\right)^T\delta x++\left(\frac{\partial H}{\partial u}\right)^T\delta u\right]dt$$

$$=-[\delta x(t_f)]^T\lambda(t_f)+\int_{t_0}^{t_f}\left[\left(\frac{\partial H}{\partial x}+\dot{\lambda}\right)^T\delta x+\left(\frac{\partial H}{\partial u}\right)^T\delta u\right]dt$$

$$J' = \Phi[x(t_f), t_f] + \mu^T N[x(t_f), t_f] + \int_{t_0}^{t_f} \{H(x,u,\lambda,t) - \lambda^T \dot{x}\} dt$$

$$\delta J_{t_f} = \frac{\partial}{\partial t_f} \left\{ \Phi + \mu^T N + \int_{t_0}^{t_f} \{H(x,u,\lambda,t) - \lambda^T \dot{x}\} dt \right\}_{t=t_f} \delta t_f$$

$$= \left[\frac{\partial \Phi}{\partial t_f} + \frac{\partial N^T}{\partial t_f} \mu + \left(H - \lambda^T \dot{x} \right) \right]\Bigg|_{t=t_f} \delta t_f \qquad \dot{x}(t_f)\delta t_f \approx \delta x_f - \delta x(t_f)$$

$$= \left[\frac{\partial \Phi}{\partial t_f} + \frac{\partial N^T}{\partial t_f} \mu + H \right]\Bigg|_{t=t_f} \delta t_f - \lambda^T(t_f) \underline{\dot{x}(t_f)\delta t_f}$$

$$= \left[\frac{\partial \Phi}{\partial t_f} + \frac{\partial N^T}{\partial t_f} \mu + H \right]\Bigg|_{t=t_f} \delta t_f - \lambda^T(t_f)\delta x_f + \lambda^T(t_f)\delta x(t_f)$$

$$\delta J_{x_f} = \left(\delta x_f\right)^T \frac{\partial}{\partial x_f}\left\{\Phi + \mu^T N\right\}_{t=t_f}$$

$$= \left[\frac{\partial \Phi}{\partial x_f} + \frac{\partial N^T}{\partial x_f}\mu\right]^T\Bigg|_{t=t_f} \delta x_f$$

$$\delta J' = \delta J'_u + \delta J'_x + \delta J'_{\dot{x}} + \delta J'_{t_f} + \delta J'_{x_f} = 0$$

$$\cancel{-\left[\delta x(t_f)\right]^T \lambda(t_f)} + \int_{t_0}^{t_f}\left[\left(\frac{\partial H}{\partial x} + \dot{\lambda}\right)^T \delta x + \left(\frac{\partial H}{\partial u}\right)^T \delta u\right]dt$$

$$+\left[\frac{\partial \Phi}{\partial t_f} + \frac{\partial N^T}{\partial t_f}\mu + H\right]\Bigg|_{t=t_f} \delta t_f - \lambda(t_f)^T \delta x_f + \cancel{\lambda(t_f)^T \delta x(t_f)}$$

$$+\left[\frac{\partial \Phi}{\partial x_f} + \frac{\partial N^T}{\partial x_f}\mu\right]^T\Bigg|_{t=t_f} \delta x_f \quad = 0$$

2. 泛函极值的必要条件

哈密顿正则方程

$$\dot{x}=\frac{\partial H(x,u,\lambda,t)}{\partial \lambda}$$ 状态方程

$$-\dot{\lambda}=\frac{\partial H(x,u,\lambda,t)}{\partial x}$$ 伴随方程

$$\frac{\partial H(x,u,\lambda,t)}{\partial u}=0$$ 控制方程

边条与横截条件： $x(t_0)=x_0$ 固定始端

终端条件 $\lambda(t_f)=\left[\frac{\partial \Phi}{\partial x}+\left(\frac{\partial N^T(x)}{\partial x}\right)\mu\right]\bigg|_{t=t_f}$ x_f固定时不存在

$$N[x(t_f)]=0$$

终端时刻　　t_f固定时不存在

$$H\left[x(t_f),u(t_f),\lambda(t_f),t_f\right]+\left[\frac{\partial\Phi}{\partial t}+\left(\frac{\partial N^T(x)}{\partial t}\right)\mu\right]\Bigg|_{t=t_f}=0$$

例：给定系统　$\dot{x}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & -1\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}u$

且初始状态$x(0)=0$

终端约束：$x_1(2)+5x_2(2)=15$

$$J=\frac{1}{2}[x_1(2)-5]^2+\frac{1}{2}[x_2(2)-2]^2+\frac{1}{2}\int_0^2 u^2(t)dt$$

求令 $J=min$ 的 u^* ,x^*

解：t_f 给定，终端约束

解： t_f 给定，终端约束

1. 构造增广泛函：

$$J' = \Phi\left[x(t_f), t_f\right] + \mu^T N\left[x(t_f), t_f\right] + \int_{t_0}^{t_f} \left\{H(x,u,\lambda,t) - \lambda^T \dot{x}\right\} dt$$

令 $\lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix}$， $\mu = [\mu]$

则 $H(x,u,\lambda,t) = L(x,u,t) + \lambda^T f(x,u,t)$

$$= \frac{1}{2}u^2 + (\lambda_1 - \lambda_2)x_2 + \lambda_2 u$$

其中 $\dot{x} = f = \begin{bmatrix} x_2 \\ -x_2 + u \end{bmatrix}$

$$\Phi\left[x(t_f), t_f\right] = \frac{1}{2}[x_1(2) - 5]^2 + \frac{1}{2}[x_2(2) - 2]^2$$

$$N = x_1(2) + 5x_2(2) - 15 = 0$$

2. 据泛函极值的必要条件

$$H=\frac{1}{2}u^2+(\lambda_1-\lambda_2)x_2+\lambda_2 u$$

1） 正则方程

$$\dot{x}=\frac{\partial H(x,u,\lambda,t)}{\partial \lambda}$$

$$\dot{x}_1=x_2$$

$$\dot{x}_2=-x_2+u$$

$$\dot{\lambda}=-\frac{\partial H(x,u,\lambda,t)}{\partial x}$$

$$\dot{\lambda}_1=-\frac{\partial H}{\partial x_1}=0$$

$$\dot{\lambda}_2=-\frac{\partial H}{\partial x_2}=\lambda_2-\lambda_1$$

$$\therefore \lambda_1(t)=c_1$$

$$\lambda_2(t)=c_2e^t+c_1$$

2)控制方程

$$\frac{\partial H(x,u,\lambda,t)}{\partial u}=0 \rightarrow \quad u+\lambda_2=0$$

$$\therefore u(t)=-\lambda_2(t)=-c_2e^t-c_1$$

$$x_1(t)=-c_3e^{-t}-\frac{1}{2}c_2e^{t}-c_1t+c_4$$

$$x_2(t)=c_3e^{-t}-\frac{1}{2}c_2e^{t}-c_1 \qquad \therefore u(t)=-\lambda_2(t)=-c_2e^{t}-c_1$$

3)边条与横截条件： $x(t_0)=x_0 \rightarrow x_1(0)=x_2(0)=0$

$$\lambda_1(t_f)=\left[\frac{\partial\Phi}{\partial x_1}+\left(\frac{\partial N^T(x_1)}{\partial x_1}\right)\mu\right]\Bigg|_{t=t_f}$$

$$\lambda(t_f)=\left[\frac{\partial\Phi}{\partial x}+\left(\frac{\partial N^T(x)}{\partial x}\right)\mu\right]\Bigg|_{t=t_f}$$

$$N\left[x(t_f)\right]=0$$

$$\lambda_2(t_f)=\left[\frac{\partial\Phi}{\partial x_2}+\left(\frac{\partial N^T(x_2)}{\partial x_2}\right)\mu\right]\Bigg|_{t=t_f}$$

$$\Rightarrow \quad c_1=-0.73 \quad c_2=-0.13$$

$$\therefore u(t)=-\lambda_2(t)=-c_2e^{t}-c_1=-0.13e^{t}-0.73$$

第九章 极小值原理

§9.3 连续系统的最小值原理

用变分法求解最优控制问题的局限性

- 要求控制量 $\boldsymbol{u}(\cdot)$ 没有约束
  - 控制量有不等式约束 $|u(t)| \le u_{\max}$
  - 控制量仅为孤立点集
- 要求 $\partial H / \partial \boldsymbol{u}$ 存在且连续
  - 最少燃料问题 $J = \int_{t_0}^{t_f} |u(t)|\, dt$

列夫·塞万诺维奇·庞特里亚金

Лев Семёнович Понтрягин

(Pontryagin, Lev Semionovich)

庞特里亚金 (1908.9.3.-1988.5.3.)　苏联数学家，极大值原理的创始人。出生于莫斯科。13岁因爆炸事故双目失明，母亲 Tatyana Andreevna 为他阅读数学书籍，帮助他自学数学。

庞特里亚金1925年进入莫斯科大学数学力学系。1929年毕业后成为拓扑学家Л.С.亚历山德罗夫的研究生。1935年留校任教。1939年到斯捷克洛夫数学研究所从事数学研究，同年被选为苏联科学院通讯院士。1958年当选为苏联科学院院士。

庞特里亚金是匈牙利科学院名誉院士、英国数学会名誉会员、国际宇航学会名誉会员、国际数学联合会副主席（1970～1974）。他还是苏联社会主义劳动英雄，曾获苏联国家奖金、列宁奖金、3枚列宁勋章等多枚勋章和奖章。

列夫·塞万诺维奇·庞特里亚金

Лев Семёнович Понтрягин

(Pontryagin, Lev Semionovich)

庞特里亚金早期的研究工作集中在拓扑学方面。他在拓扑学领域内发现了一般对偶定理（拓扑群的庞特里亚金对偶定理），建立了连续群特征理论，1940年左右在同伦理论中得到了庞特里亚金示性类等一系列结果。50年代开始研究振动理论和最优控制理论，在振动理论中对弛张振荡渐近特性得到了重要结果。在其学术生涯后期他研究了优化控制理论。他因提出庞特里亚金极大值原理而成为最优控制的数学理论的创始人。对控制理论和变分学的发展起了重要作用。他在微分对策理论方面也做了很多奠基性工作。

他的主要著作有：《连续群》、《拓扑群》(1957出中译本)、《组合拓扑基础》、《常微分方程》、《最优过程的数学理论》等等。

极大值原理的诞生趣闻

1953年，苏联开了一个自动控制方面的学术会议，会上著名工程师费尔德鲍曼 (A.A.Feldbaum) 提出了最优控制基本思想，即Bang-Bang (开关) 控制。会后，庞特里亚金把费尔德鲍曼请到他所在的数学所做讲座，就讲最优控制。听过讲座并进行了较深入的交流沟通以后，庞特里亚金对相关内容进行了深入研究，1956年证明了并发表了极大值原理。

目前学术界一般都改称为极小值原理。

§9.3 连续系统的极小值原理

9.3.1 问题的描述

运动方程： $\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}[\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t), t]$

边界条件： $\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0 \qquad \psi(\boldsymbol{x}_f, t_f) = \boldsymbol{0}$

控制约束： $\boldsymbol{u}(t) \in \Omega$，分段连续

性能指标： $J = \varphi(\boldsymbol{x}_f, t_f) + \int_{t_0}^{t_f} L(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, t)\, dt$

末端时刻 t_f 固定、或自由

末端状态 $\boldsymbol{x}_f$ 固定、自由、或受约束

向量函数 $\boldsymbol{f}(\cdot)$ 在 $[t_0, t_f]$ 上连续且可微

标量函数 $\varphi(\cdot), L(\cdot)$ 在 $[t_0, t_f]$ 上连续且二次可微

求：

最优控制 $\boldsymbol{u}^*(t)$

最优轨线 $\boldsymbol{x}^*(t)$

最优指标 J^*

§9.3 连续系统的极小值原理

9.3.2 最优解

一、最优解的表述

最优控制使哈密顿函数取强极小

哈密顿函数

$$H(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},\lambda,t)=L(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},t)+\lambda^T\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},t)$$

极小值问题的最优解是

$$H^*=H(\boldsymbol{x}^*,\boldsymbol{u}^*,\lambda,t)=\min_{u\in\Omega}H(\boldsymbol{x}^*,\boldsymbol{u},\lambda,t)$$

§9.3 连续系统的极小值原理

9.3.2 最优解

二、最优解的求取

1.正则方程

$$H(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},\boldsymbol{\lambda},t) = L(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},t) + \boldsymbol{\lambda}^T \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},t)$$

状态方程 $$\dot{\boldsymbol{x}} = \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{\lambda}} = \boldsymbol{f}[\boldsymbol{x}(t),\boldsymbol{u}(t),t]$$

协态方程 $$\dot{\boldsymbol{\lambda}} = -\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{x}}$$

9.3.2 最优解

二、最优解的求取（ 1.正则方程）

2、边界条件（由微分方程式给出的也叫横截条件）

除初态 $\boldsymbol{x}(t_0)=\boldsymbol{x}_0$ 之外，视不同的末端情况有如下的横截条件方程

A. 末端固定： $\boldsymbol{x}(t_f)=\boldsymbol{x}_f$

B. 末端自由： $\boldsymbol{\lambda}(t_f)=\dfrac{\partial\varphi}{\partial \boldsymbol{x}_f}$， φ 是性能指标中的末值项

C. 末端受约束： $\boldsymbol{\lambda}(t_f)=\dfrac{\partial\varphi}{\partial \boldsymbol{x}_f}+\dfrac{\partial \boldsymbol{\psi}^T}{\partial \boldsymbol{x}_f}\boldsymbol{\gamma}(t_f)$， $\boldsymbol{\psi}$ 是末端约束 $\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{x}_f,t_f)=\boldsymbol{0}$

式中 $\boldsymbol{\gamma}(t_f)$ 是关于末端约束的拉格朗日乘子

3、极值条件

9.3.2 最优解

二、最优解的求取

1.正则方程，**2.**边界条件

3.极值条件

A．对于定常系统：H^*为常数，特别当末端时刻 t_f 自由时常值为零：$H^*(t)=0$

记得在变分法里，曾导出：$\dfrac{dH}{dt}=\dfrac{\partial H}{\partial t}$

B．对于时变系统：

t_f 固定：$$H^*(t)=H^*(t_f)-\int_t^{t_f}\frac{\partial H(\tau)}{\partial \tau}d\tau$$

t_f 自由：$$H^*(t_f)=-\frac{\partial \varphi}{\partial t_f}-\frac{\partial \psi^T}{\partial t_f}\gamma(t_f)$$

极小值原理的问题、结论与求解

基本问题

状态方程：$\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{f}[\boldsymbol{x}(t),\boldsymbol{u}(t),t]$

边界条件：$\boldsymbol{x}(t_0)=\boldsymbol{x}_0$； $\psi(\boldsymbol{x}_f,t_f)=\boldsymbol{0}$

控制约束：$\boldsymbol{u}(t)\in\Omega$，分段连续

性能指标：$J=\varphi(\boldsymbol{x}_f,t_f)+\int_{t_0}^{t_f}L(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},t)\,dt$

求： $\boldsymbol{u}^*(t)$、 $\boldsymbol{x}^*(t)$、J^*

补充说明

末端时刻t_f固定、或自由

末端状态$\boldsymbol{x}_f$固定、自由、或受约束

$\varphi(\cdot),L(\cdot)$在$[t_0,t_f]$上连续且二次可微

$\boldsymbol{f}(\cdot)$在$[t_0,t_f]$上连续且可微

基本结论

最优控制使哈密顿函数取强极小

哈密顿函数：

$$H(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},\boldsymbol{\lambda},t)=L(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},t)+\boldsymbol{\lambda}^T\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},t)$$

最优解：

$$H^*=H(\boldsymbol{x}^*,\boldsymbol{u}^*,\boldsymbol{\lambda},t)=\min_{\boldsymbol{u}\in\Omega}H(\boldsymbol{x}^*,\boldsymbol{u},\boldsymbol{\lambda},t)$$

最优解的求取（必要条件）

1. 正则方程

协态方程：$\dot{\boldsymbol{\lambda}}=-\dfrac{\partial H}{\partial \boldsymbol{x}}$

状态方程：$\dot{\boldsymbol{x}}=\dfrac{\partial H}{\partial \boldsymbol{\lambda}}=\boldsymbol{f}[\boldsymbol{x}(t),\boldsymbol{u}(t),t]$

2. 边界条件

始端：$\boldsymbol{x}(t_0)=\boldsymbol{x}_0$

末端：$\boldsymbol{\lambda}(t_f)=\dfrac{\partial\varphi}{\partial\boldsymbol{x}_f}+\dfrac{\partial\boldsymbol{\psi}^T}{\partial\boldsymbol{x}_f}\boldsymbol{\gamma}(t_f)$

$\boldsymbol{x}(t_f)=\boldsymbol{x}_f$(固定)， $\boldsymbol{\lambda}(t_f)=\dfrac{\partial\varphi}{\partial\boldsymbol{x}_f}$(自由)

3. 极值条件

A. 对于定常系统：H^*为常数

特别当末端时刻t_f自由时 $H^*(t)\equiv 0$；

B. 对于时变系统：

t_f固定：$H^*(t)=H^*(t_f)-\int_t^{t_f}\dfrac{\partial H(\tau)}{\partial\tau}d\tau$

t_f自由：$H^*(t_f)=-\dfrac{\partial\varphi}{\partial t_f}-\dfrac{\partial\boldsymbol{\psi}^T}{\partial t_f}\boldsymbol{\gamma}(t_f)$

§9.3 连续系统的极小值原理

极小值原理的意义：

1. 容许控制的条件放宽了；
2. 最优控制使得哈密顿函数取得强极小；
3. 不要求哈密顿函数对控制函数的可微性；
4. 给出了最优控制的必要而非充分条件。

极小值原理的证明

（自学）

习题

3-8，3-9，3-11，3-31，3-42

【例 9.3】设一阶线性系统 $\dot{x}(t)=x(t)-u(t)$, $x(0)=5$

已知控制约束为 $0.5\le u(t)\le 1$

试求使性能指标 $J=\int_0^1[x(t)+u(t)]dt$

为极小时的最优控制 $u^*(t)$ 及相应的最优性能指标 J^*。

解：对照前述极小值原理的陈述，可依次得到

①哈密顿函数：

$$H=L+\lambda\cdot f=(x+u)+\lambda(x-u)=(1+\lambda)x+(1-\lambda)u$$

②极值条件：

$$H^*=H(\boldsymbol{x}^*,\boldsymbol{u}^*,\boldsymbol{\lambda},t)=\min_{u\in\Omega}H(\boldsymbol{x}^*,\boldsymbol{u},\boldsymbol{\lambda},t)$$

即最优控制使哈密顿函数取强极小。显而易见对于本题，有

$$u^*(t)=\begin{cases}1, & \lambda>1\\ 0.5, & \lambda<1\end{cases}$$

现在剩下的问题当然就是求出 $\lambda(t)$，进而确定何时 $\lambda>1$，何时 $\lambda<1$

$$H = L + \lambda \cdot f = (1+\lambda)x + (1-\lambda)u$$

末端自由： $\lambda(t_f) = \dfrac{\partial \varphi}{\partial \boldsymbol{x}_f}$， φ 是性能指标中的末值项

③由正则方程之协态方程： $\dot{\lambda} = -\dfrac{\partial H}{\partial x} = -(1+\lambda)$

解之得： $\lambda(t) = e^{-t}\lambda_0 + \int_0^t e^{-\tau}(-1)d\tau = (\lambda_0 - 1)e^{-t} - 1 = ce^{-t} - 1$

因末端自由且性能指标中不包含末值项，故 $\lambda(t_f) = 0$，即

$$\lambda(1) = ce^{-1} - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad c = e \quad \Rightarrow \quad \lambda(t) = e^{1-t} - 1$$

令 $\lambda > 1$，可立即解得： $t < 1 - \ln 2 \approx 0.307$ 。于是最优控制是

$$u^*(t) = \begin{cases} 1, & 0 \le t < 1 - \ln 2 \\ 0.5, & t > 1 - \ln 2 \end{cases}$$

$$\dot{x}(t)=x(t)-u(t),\qquad x(0)=5\ ,\qquad 0.5\le u(t)\le 1$$

$$J=\int_0^1[x(t)+u(t)]dt\ ，\ 求\ u^*(t)\ 及\ J^*$$

为进一步求出最优性能指标，还需要求出最优轨线：

$$x^*(t)=e^t x_0+\int_0^t e^\tau(-1)d\tau=(x_0-1)e^t+1=4e^t+1,\qquad 0<t\le 1-\ln 2$$

特别，当 $t_1=1-\ln 2$ 时，$x(t_1)=2e+1$，此后

$$x^*(t)=e^{t-t_1}x(t_1)+\int_{t_1}^t e^{t-\tau}(-0.5)d\tau=(2e+1)e^{t-t_1}+0.5(1-e^{t-t_1})$$

$$=(2e+0.5)\cdot 2e^{-1}e^t+0.5=(4+e^{-1})e^t+0.5,\qquad t>1-\ln 2$$

把最优控制 $u^*(t)$ 可最优轨线 $x^*(t)$ 代入性能指标定义式 J，可得

$$J^*=\int_0^{1-\ln 2}(4e^t+2)\,dt+\int_{1-\ln 2}^1[(4+e^{-1})e^t+1]dt$$

$$=4(e^{1-\ln 2}-1)+2(1-\ln 2)+(4+e^{-1})(e-e^{1-\ln 2})+\ln 2$$

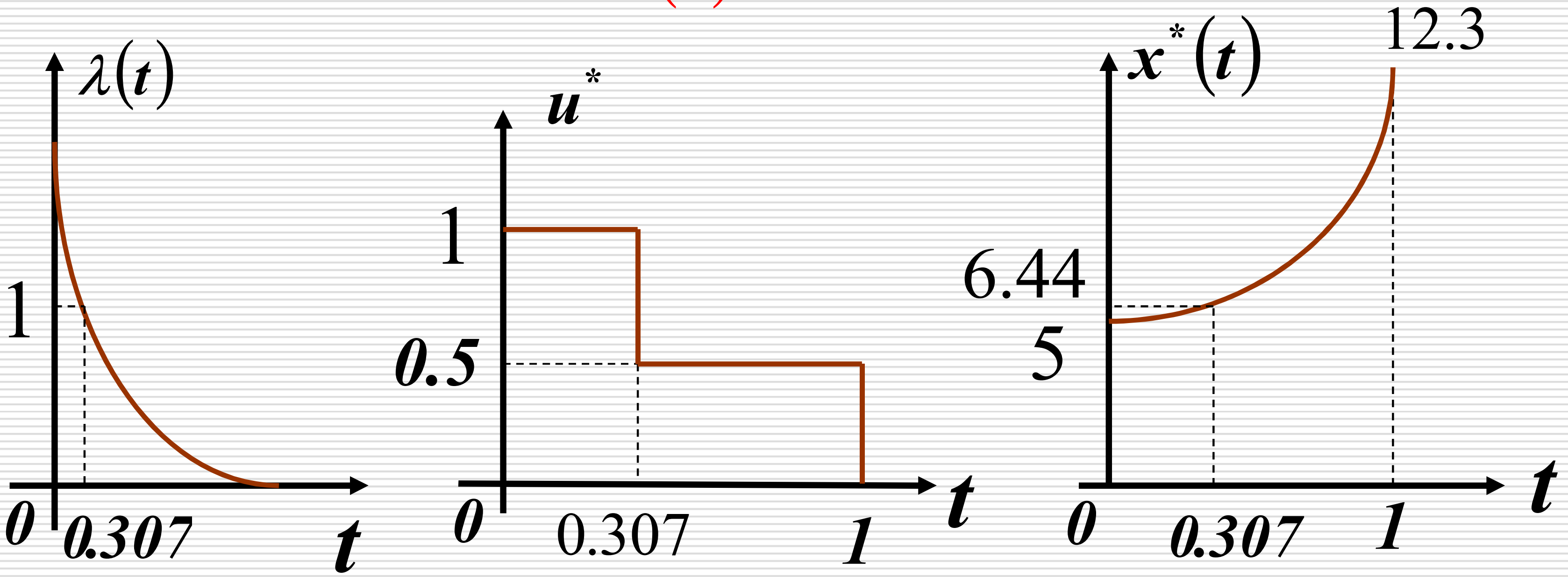
$$=4e-1.5-\ln 2\approx 8.68$$

最终：$x^* = \begin{cases} 4e^t + 1 & 0 \le t \le 0.307 \\ 4.37e^t + 0.5 & 0.307 \le t \le 1 \end{cases}$

$J^* = 4e - 1.5 - \ln 2 \approx 8.68$

$u^*(t) = \begin{cases} 1 & 0 \le t \le 0.307 \\ 0.5 & 0.307 \le t \le 1 \end{cases}$

$$\lambda(t) = e^{1-t} - 1$$



极小值原理的问题、结论与求解

基本问题

状态方程： $\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}[\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t), t]$

边界条件： $\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0$； $\psi(\boldsymbol{x}_f, t_f) = \boldsymbol{0}$

控制约束： $\boldsymbol{u}(t) \in \Omega$，分段连续

性能指标： $J = \varphi(\boldsymbol{x}_f, t_f) + \int_{t_0}^{t_f} L(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, t)\, dt$

求： $\boldsymbol{u}^*(t)$ 、 $\boldsymbol{x}^*(t)$ 、 J^*

补充说明

末端时刻 t_f 固定、或自由

末端状态 $\boldsymbol{x}_f$ 固定、自由、或受约束

$\varphi(\cdot), L(\cdot)$ 在 $[t_0, t_f]$ 上连续且二次可微

$\boldsymbol{f}(\cdot)$ 在 $[t_0, t_f]$ 上连续且可微

基本结论

最优控制使哈密顿函数取强极小

哈密顿函数：

$$H(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{\lambda}, t) = L(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, t) + \boldsymbol{\lambda}^T \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, t)$$

最优解：

$$H^* = H(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{u}^*, \boldsymbol{\lambda}, t) = \min_{\boldsymbol{u} \in \Omega} H(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{\lambda}, t)$$

最优解的求取（必要条件）

1. 正则方程

协态方程： $\dot{\boldsymbol{\lambda}} = -\dfrac{\partial H}{\partial \boldsymbol{x}}$

状态方程： $\dot{\boldsymbol{x}} = \dfrac{\partial H}{\partial \boldsymbol{\lambda}} = \boldsymbol{f}[\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t), t]$

2. 边界条件

始端： $\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0$

末端： $\boldsymbol{\lambda}(t_f) = \dfrac{\partial \varphi}{\partial \boldsymbol{x}_f} + \dfrac{\partial \boldsymbol{\psi}^T}{\partial \boldsymbol{x}_f} \gamma(t_f)$

$\boldsymbol{x}(t_f) = \boldsymbol{x}_f$ (固定)， $\boldsymbol{\lambda}(t_f) = \dfrac{\partial \varphi}{\partial \boldsymbol{x}_f}$ (自由)

3. 极值条件

A. 对于定常系统： H^*为常数

特别当末端时刻 t_f 自由时 $H^*(t) \equiv 0$；

B. 对于时变系统：

t_f 固定： $H^*(t) = H^*(t_f) - \int_t^{t_f} \dfrac{\partial H(\tau)}{\partial \tau} d\tau$

t_f 自由： $H^*(t_f) = -\dfrac{\partial \varphi}{\partial t_f} - \dfrac{\partial \boldsymbol{\psi}^T}{\partial t_f} \gamma(t_f)$

【例9.4】已知系统 $\dot{x}_1(t) = -x_1(t) + u(t) \quad x_1(0) = 1$

$$\dot{x}_2(t) = x_1(t) \qquad x_2(0) = 0$$

其中 $|u(t)| \le 1$，若 $x(t_f)$自由，求$u^*(t)$使

$$J = x_2(1) = \min$$

解: 定常系统、终端性能指标、t_f固定，x_f自由，u受约束情况。

(1)设$\lambda(t)=[\lambda_1 \quad \lambda_2]^T$,引入哈密尔顿函数

$$H(x,u,\lambda,t)=\lambda^T f(x,u,t)$$

$$=[\lambda_1 \quad \lambda_2]\begin{bmatrix} -x_1(t)+u(t) \\ x_1(t) \end{bmatrix}=\lambda_1(-x_1+u)+\lambda_2 x_1$$

即$H=-\lambda_1 x_1+\lambda_1 u+\lambda_2 x_1$

（2）列写正则方程：

$$\dot{x}=\frac{\partial H}{\partial \lambda}=f(x,u,t) \longrightarrow \begin{aligned}&\dot{x}_1(t)=-x_1(t)+u(t)\\&\dot{x}_2(t)=x_1(t)\end{aligned}$$

$$\dot{\lambda}=-\frac{\partial H}{\partial x} \longrightarrow \begin{aligned}&\dot{\lambda}_1=-\frac{\partial H}{\partial x_1}=\lambda_1-\lambda_2\\&\dot{\lambda}_2=-\frac{\partial H}{\partial x_2}=0\end{aligned}$$

$$\therefore \lambda_2(t)=c_2 \qquad \lambda_1(t)=c_1e^t+c_2$$

（3） $$\min_{u\in U} H\left(x^*,\lambda^*,u,t\right)=H\left(x^*,\lambda^*,u^*,t\right)$$

(3) $\min\limits_{u\in U} H\left(x^*,\lambda^*,u,t\right)=H\left(x^*,\lambda^*,u^*,t\right)$

$$H=-\lambda_1 x_1+\lambda_1 u+\lambda_2 x_1$$

$$\lambda(t_f)=\frac{\partial\varphi}{\partial \boldsymbol{x}_f}+\frac{\partial \boldsymbol{\psi}^T}{\partial \boldsymbol{x}_f}\boldsymbol{\gamma}(t_f)$$

$$\therefore u^*(t)=-sgn(\lambda_1)=\begin{cases}-1 & \lambda_1>0\\ 1 & \lambda_1<0\end{cases}$$

(4) 据横截和边界条件求解 u^*, x^*

$$\lambda(t_f)=\left[\frac{\partial\Phi}{\partial \boldsymbol{x}(t_f)}+\left(\frac{\partial\Psi^T}{\partial \boldsymbol{x}(t_f)}\right)\mu\right]\Bigg|_{t=t_f}=\left[\frac{\partial\Phi}{\partial \boldsymbol{x}(t_f)}\right]_{t=1}$$

$$\because \Phi=x_2(1) \longrightarrow \begin{aligned}\lambda_1(1)&=\left[\frac{\partial \Phi}{\partial x_1(1)}\right]_{t=1}=0\\ \lambda_2(1)&=\left[\frac{\partial \Phi}{\partial x_2(1)}\right]_{t=1}=1\end{aligned}$$

$\therefore \lambda_2(t)=c_2 \longrightarrow c_2=1$

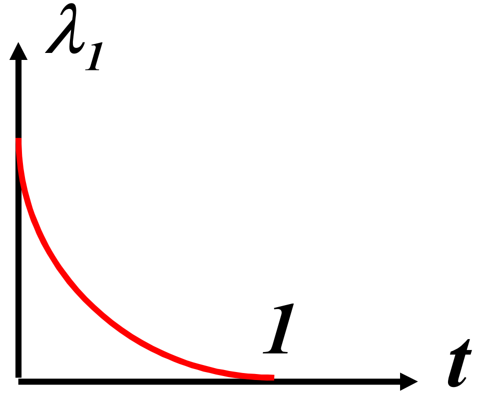
$\lambda_1(t)=c_1e^t+c_2 \longrightarrow c_1=-e^{-1}$

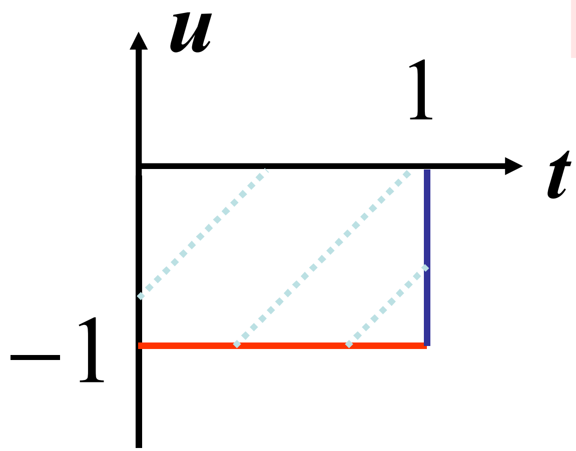
$\therefore \lambda_1(t)=1-e^{t-1} \qquad \lambda_2(t)=1$

$\because \lambda_1=0$为u^*的切换点$\rightarrow \therefore \lambda_1(t_s)=1-e^{t_s-1}=0$

得$t_s=1 \longrightarrow u^*(t)=\begin{cases}-1 & 0\le t<1\\ 0 & t=1\end{cases}$

t_f





第九章 极小值原理

§9.4 极小值原理的应用

一、时间最优控制（梆梆控制，Bang Bang）

- 控制矢量的各分量均取控制域的边界值
- 控制量可不断从一个边值变换到另一个边值
- 性能指标简单：$J = t_f$ 或 $J = \int_0^{t_f} dt$

极小值原理求解的一种特殊情况

基本问题：线性定常系统的时间最优控制

$$\dot{x}(t)=Ax(t)+Bu(t)$$

其中：$x(0)=x_0, x(t_f)=0, t_f$待求

性能指标：$\min\limits_{u} J=\int_0^{t_f} dt=t_f$

控制约束： $-1\le u_i(t)\le 1$

或 $|u_i(t)|\le 1 \qquad i=1,2\cdots,r$

求 $u^* \longrightarrow J=min$

即在最短时间内将初态 $x(0)=x_0 \rightarrow x(t_f)=0$

取哈密尔顿函数：

$$H(x,u,t)=1+\lambda^T(Ax+Bu)=1+x^TA^T\lambda+u^TB^T\lambda$$

由 $\min_{u\in U} H\left(x^*,\lambda^*,u,t\right)=H\left(x^*,\lambda^*,u^*,t\right)$

$$\min_{u\in U} H \longrightarrow \min u^TB^T\lambda$$

得：

$$u^*(t)=-SGN(B^T\lambda)$$

$$u_i^*(t)=-sgn\left[(B^T\lambda)\right]_i, i=1,2,\cdots,r$$

其中函数 $sgn\, a=\begin{cases}+1 & a>0\\ 0 & a=0\\ -1 & a<0\end{cases}$ a为向量时用SGN表示。

由正则方程组 $\dot{x} = Ax + Bu$

$$\dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial x} = -A^T\lambda$$

$$\longrightarrow \lambda(t) = e^{-A^T t}\lambda(0) = e^{-A^T t}\lambda_0$$

$$\therefore u^*(t) = -SGN(B^T\lambda) = -SGN(B^T e^{-A^T t}\lambda_0)$$

1. 时间控制是Bang-Bang控制, 即开关控制;

2. 最优控制 u^*是唯一的:

定理: 线性定常系统$\sum(A,B,C)$, 若存在时间最优控制u^*, 则该最优控制 $u_i^*(t), i = 1,2,\cdots,r$是唯一的。 (证明略)

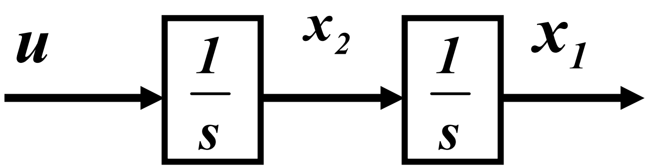
3. 最优控制的开关次数：

定理：线性定常系统 $\sum(A,B,C)$, 若存在时间最优控制 u^* 满足 $|u_i(t)| \le 1, \quad (i=1,2\cdots,r)$ 且矩阵 A 的特征值均为实数。则每一个 $u_i^*(t)$ 都是Bang-Bang控制， 且在两个边界值之间最多切换 $n-1$ 次。

问题：双积分系统的时间最优控制

设双积分系统：$\dot{x}_1(t)=x_2(t)$

$$\dot{x}_2(t)=u(t)$$



矩阵形式：$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}u$

其中：$x(t_0)=x_0, x(t_f)=0, t_f$待求

控制约束为：$-1\le u(t)\le 1$，$(t_0<t<t_f)$

性能指标：$\min\limits_{u} J=\int_0^{t_f}dt=t_f$　令$t_0=0$

求$u^* \longrightarrow J=\min$

根据极小值原理确定最优控制

1. 取哈密尔顿函数：

$$H(x,u,t)=1+\lambda^T(Ax+Bu)=1+\lambda_1 x_2+\lambda_2 u$$

2. 列写正则方程组：

$$\dot{x}=\frac{\partial H}{\partial \lambda}=f(x,u,t) \longrightarrow \begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}u=\begin{bmatrix}x_1\\ u\end{bmatrix}$$

$$\dot{\lambda}=-\frac{\partial H}{\partial x}=-A^T\lambda \longrightarrow \begin{bmatrix}\dot{\lambda}_1\\ \dot{\lambda}_2\end{bmatrix}=-\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}^T\begin{bmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ -\lambda_1\end{bmatrix}$$

3. 对于最优控制 u^*，H取绝对极小值：

$$\min_{u\in U} H\left(x^*,\lambda^*,u,t\right)=H\left(x^*,\lambda^*,u^*,t\right) \qquad \min_{u\in U} H \longrightarrow \min \lambda_2 u$$

得： $u^*(t)=-sgn\,\lambda_2(t)$

$$\dot{\lambda}_1 = 0 \rightarrow \lambda_1 = \lambda_{10}$$

直线

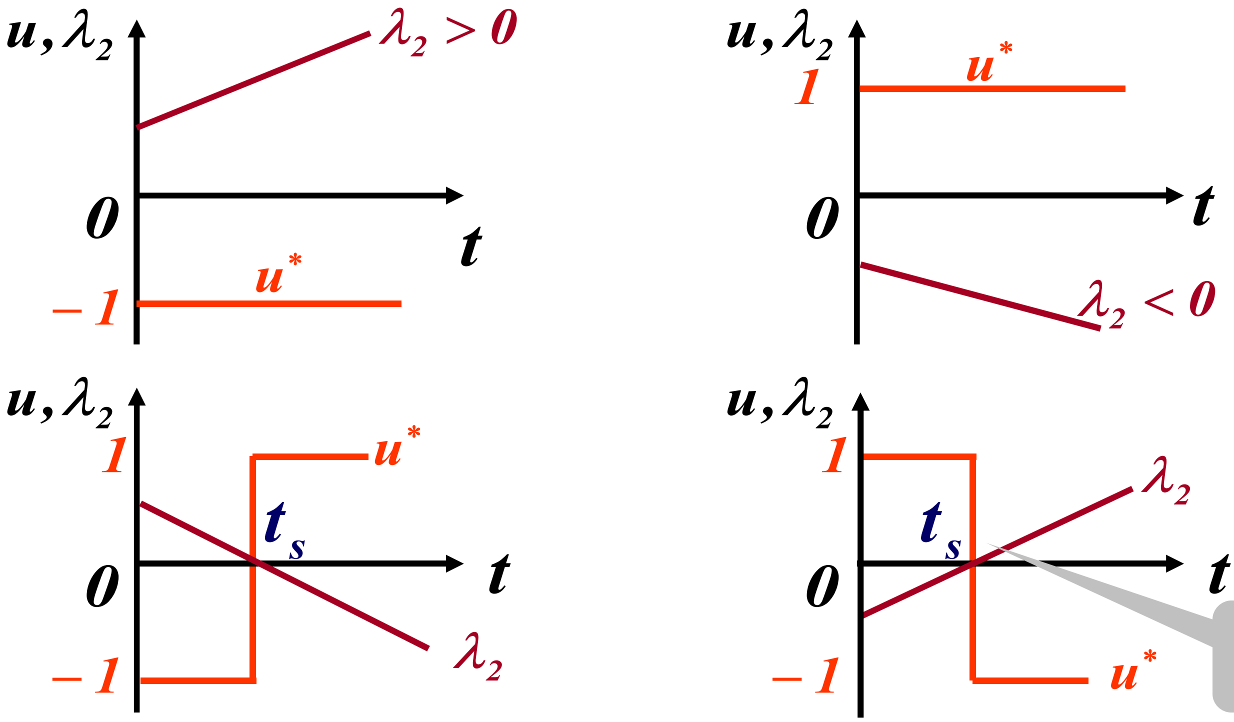
$$\dot{\lambda}_2 = -\lambda_1 \rightarrow \lambda_2 = \lambda_{20} - \lambda_{10} t$$

Bang-Bang控制

$$\therefore u^*(t) = -\,sgn\,\lambda_2(t)$$

$$= -\,sgn(\lambda_{20} - \lambda_{10} t) = \begin{cases} -1 & \lambda_2 > 0 \\ 1 & \lambda_2 < 0 \end{cases}$$

4.$\lambda(t)$与$u(t)$的对应关系



切换时刻

$$t_s = \frac{\lambda_{20}}{\lambda_{10}}$$

切换一次

状态轨线及开关曲线

系统： $\dot{x}_1(t)=x_2(t),\ \ \dot{x}_2(t)=u(t)$

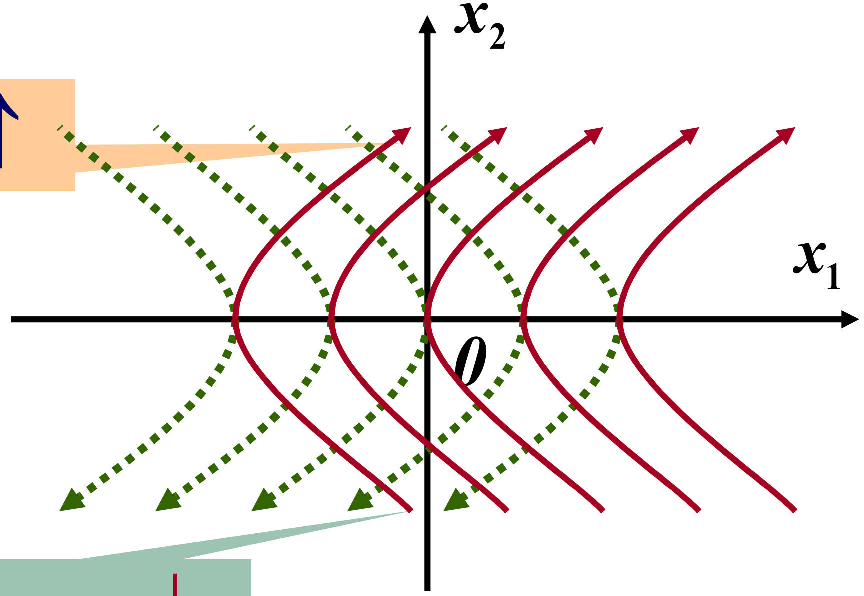
1. $u=+1$时，有

$$x_2(t)=t+x_{20}$$

$$x_1(t)=\frac{1}{2}t^2+x_{20}t+x_{10}$$

$$\longrightarrow\quad x_1(t)=\frac{1}{2}x_2^2(t)+C$$

$t\uparrow\Rightarrow x_2\uparrow$



2. $u=-1$时，有

$$x_2(t)=-t+x_{20}$$

$$x_1(t)=-\frac{1}{2}x_2^2(t)+C$$

$t\uparrow\Rightarrow x_2\downarrow$

3.开关曲线

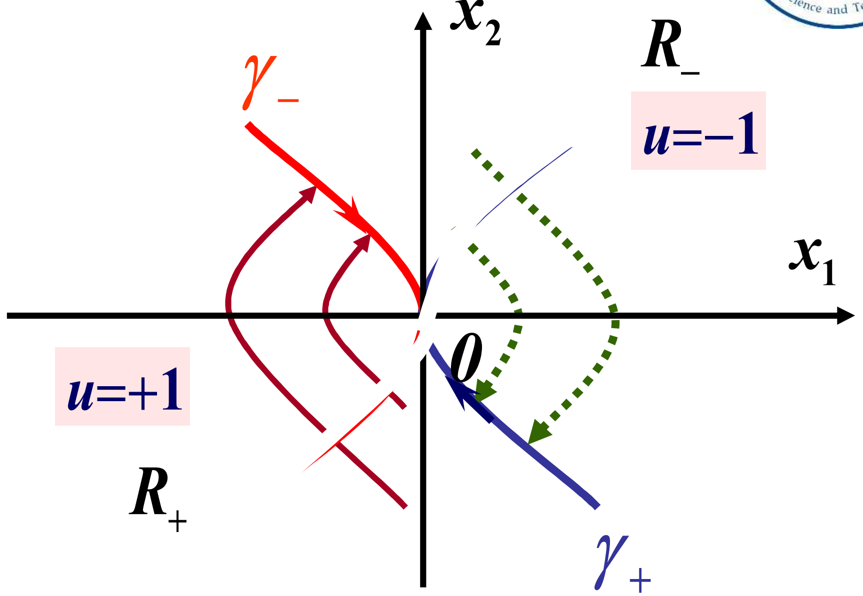
通向原点的曲线：

$u=+1$时

$x_1(t)=\frac{1}{2}x_2^2(t) \quad x_2\le 0 \rightarrow \gamma_+$

$u=-1$时

$x_1(t)=-\frac{1}{2}x_2^2(t) \quad x_2\ge 0 \rightarrow \gamma_-$



$\longrightarrow$ 开关曲线 γ

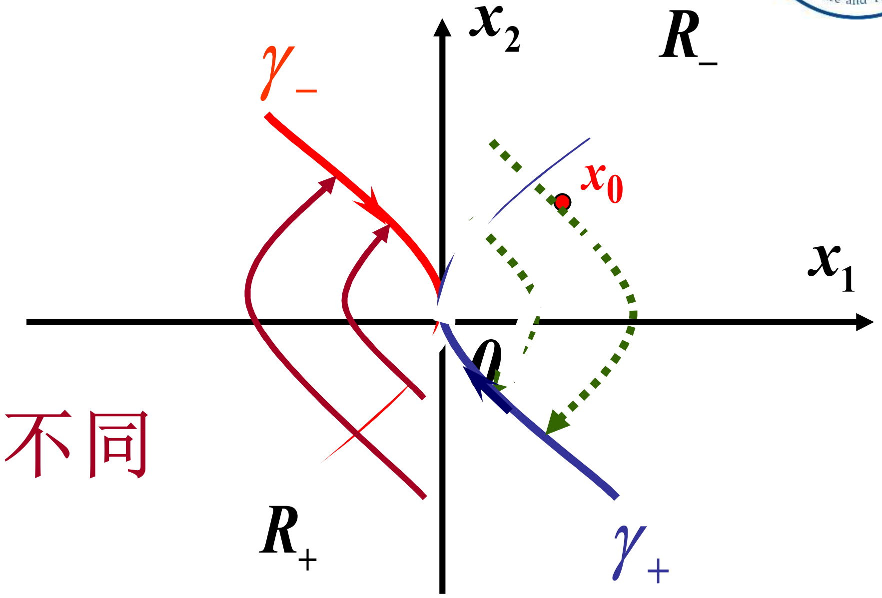
$$x_1(t)=-\frac{1}{2}x_2(t)|x_2(t)| \quad \begin{cases} R_- & x_1(t)>-\frac{1}{2}x_2(t)|x_2(t)| \\ R_+ & x_1(t)<-\frac{1}{2}x_2(t)|x_2(t)| \end{cases}$$

最优控制律

目的求 u^*：

将 $x(t_0)=x_0 \rightarrow x(t_f)=0$

使 $J=\int_0^{t_f} dt = t_f \rightarrow \min\limits_u$



由图知：x_0 位置不同 $\rightarrow u^*$ 不同

1.在 γ_- 上：　$u^* = \{-1\}$

2.在 R_- 内：　$u^* = \{-1, \quad +1\}$

3.在 γ_+ 上：　$u^* = \{+1\}$

4.在 R_+ 内：　$u^* = \{+1, -1\}$

最优控制律

5.到达原点：　$u^* = 0$

$$x_1(t)=-\frac{1}{2}x_2(t)|x_2(t)| \begin{cases} R_- & x_1(t)>-\frac{1}{2}x_2(t)|x_2(t)| \rightarrow u^*=-1 \\ R_+ & x_1(t)<-\frac{1}{2}x_2(t)|x_2(t)| \rightarrow u^*=+1 \end{cases}$$

令$h(x_1,x_2)=x_1+\frac{1}{2}x_2|x_2|$　开关函数

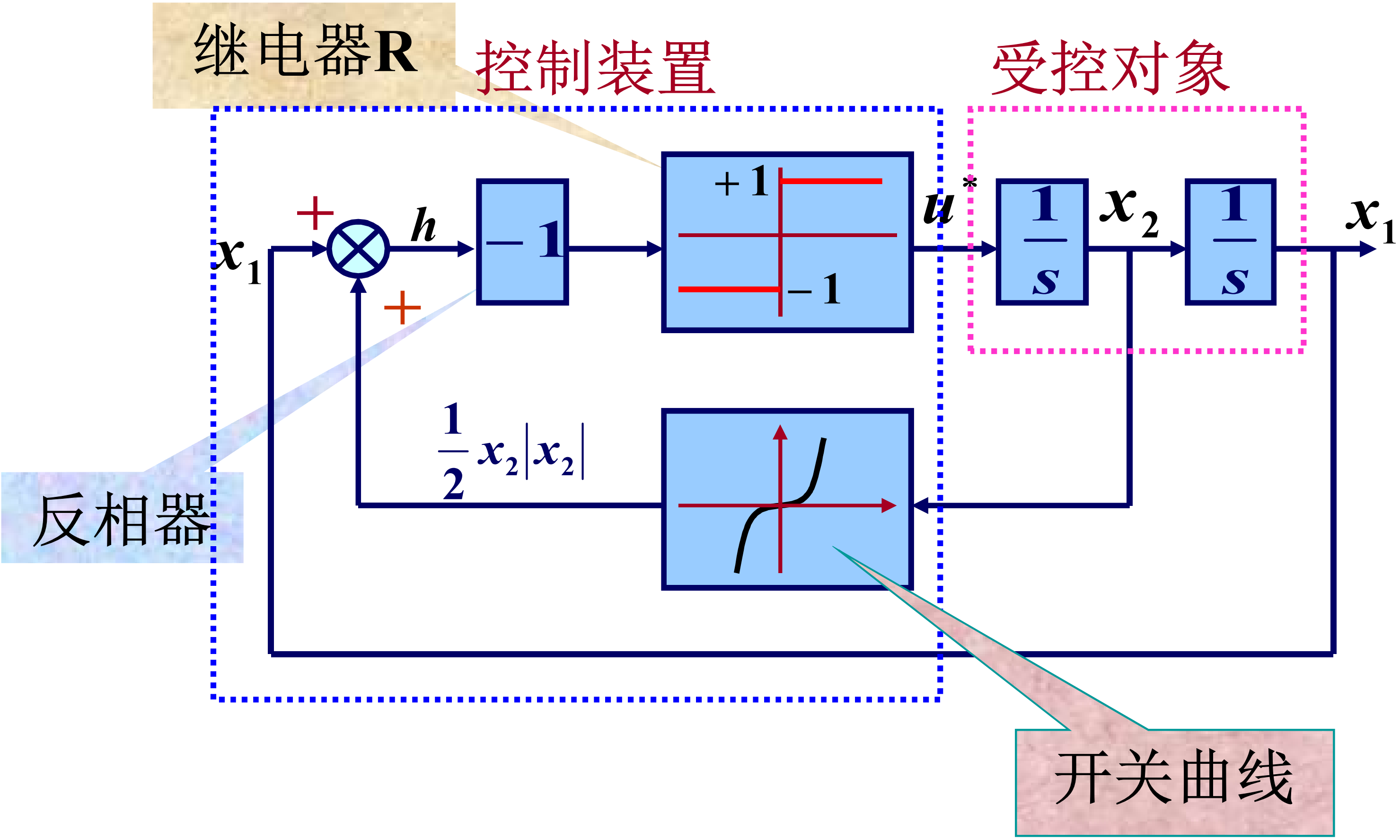
则最优控制律可简写为：

$$u^*(t)=\begin{cases} -1 & \text{当} h(x_1,x_2)>0 \\ -sgn[x_2(t)] & \text{当} h(x_1,x_2)=0 \rightarrow \gamma \\ +1 & \text{当} h(x_1,x_2)<0 \end{cases}$$

最优控制律的工程实现

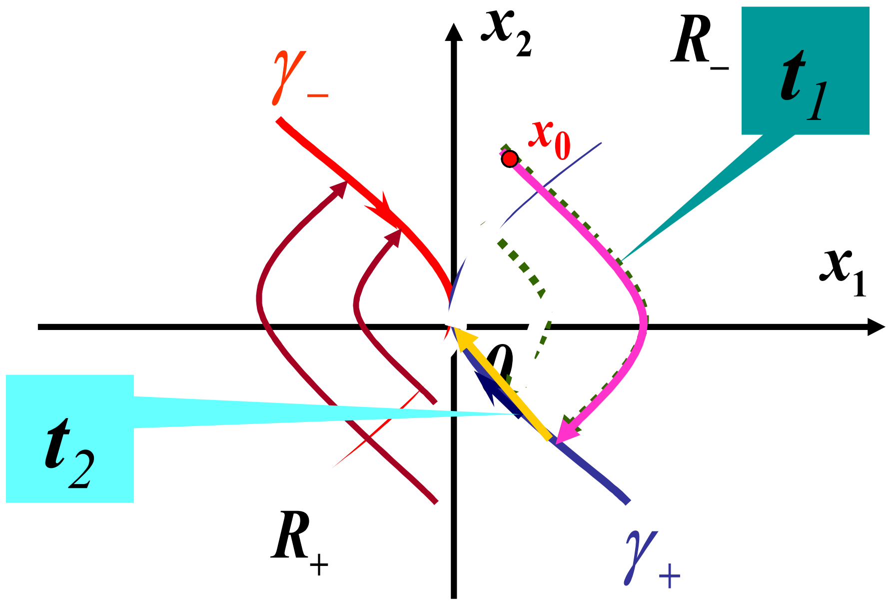
$$u^*(t)=\begin{cases}-1 & \text{当} h(x_1,x_2)>0 \\ -sgn\left[x_2(t)\right] & \text{当} h(x_1,x_2)=0 \\ +1 & \text{当} h(x_1,x_2)<0\end{cases}$$

$$h(x_1,x_2)=x_1+\frac{1}{2}x_2|x_2|$$



最优时间计算

设$x(t_0)=(x_{10},x_{20})$



$$t = t_1 + t_2$$

$$= \begin{cases} x_2 + \sqrt{4x_1 + 2x_2^2} & 当(x_1, x_2) \in R_- \\ -x_2 + \sqrt{-4x_1 + 2x_2^2} & 当(x_1, x_2) \in R_+ \end{cases}$$

第九章 极小值原理

§9.4 极小值原理的应用

一、时间最优控制

$$J=\int_0^{t_f}dt=t_f$$

二、燃料最优控制

$$J=\int_0^{t_f}\left|\sqrt{\boldsymbol{u}^T(t)\boldsymbol{R}\,\boldsymbol{u}(t)}\right|dt=\int_0^{t_f}\sum_{j=1}^{m}\left|c_j u_j(t)\right|dt$$

三、时间-燃料最优控制

（复合指标）

第九章 极小值原理

§9.5 离散时间极小值原理

（自学）

习题：**3-22**