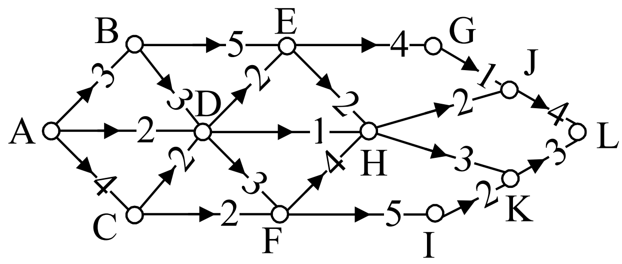
4.1 如图所示天然气管道图，求 A 到 L 的最大流通能力及相应的最优路径。（参考 P130，4.1.1）



解:　理解不同，求解答案也不同。

动态规划法：逆序计算递推

(1) 求和的最大值：即从 A 到 L 所流经管道流通能力和的最大值。

① $f\ \ J\ \ =3$ 路径 $\mathrm{J}\to\mathrm{L}$

$f\ \ K\ \ =4$ 路径 $K\to \mathrm{L}$

② $f\ \ G\ \ =d(G\to J)+f(J)=1+4=5 \quad G\to J\to L$

$f\ \ H\ \ =\max\{d(H\to J)+f(J),d(H\to K)+f(K)\}$
$=\max\{2+4,3+3\}=6$

$\mathrm{H}\to\mathrm{J}\to\mathrm{L}$ 或 $H\to K\to \mathrm{L}$

$f\ \ I\ \ =d(I\to K)+f(K)=2+3=5 \quad I\to K\to L$

③ $f\ \ E\ \ =\max\{4+5,2+6\}=9 \quad E\to G\to J\to L$

$f\ \ F\ \ =\max\{4+6,5+5\}=10 \quad F\to H\to J(K)\to L$

$F\to I\to K\to L$

④ $f\ \ D\ \ =\max\{2+9,1+6,3+10\}=13 \quad D\to F\to H\to J(K)\to L$

$D\to F\to I\to K\to L$

⑤ $f\ \ B\ \ =\max\{5+9,3+13\}=16 \quad B\to D\to F\to H\to J(K)\to L$

$B\to D\to F\to I\to K\to L$

⑥ $f\ \ C\ \ =\max\{2+13,2+10\}=15 \quad C\to D\to F\to H\to J(K)\to L$

$C\to D\to F\to I\to K\to L$

⑦ $f\ \ A\ \ =\max\{3+16,2+13,4+15\}=19$ 最大流通能力为 19

最优路径为以下的任一种

$\mathrm{A}\to\mathrm{B}\to\mathrm{D}\to\mathrm{F}\to\mathrm{H}\to\mathrm{J}\to\mathrm{L}$,

$\mathrm{A}\to\mathrm{B}\to\mathrm{D}\to\mathrm{F}\to\mathrm{H}\to\mathrm{K}\to\mathrm{L}$,

$\mathrm{A}\to\mathrm{B}\to\mathrm{D}\to\mathrm{F}\to\mathrm{I}\to\mathrm{K}\to\mathrm{L}$,

$\mathrm{A}\to\mathrm{C}\to\mathrm{D}\to\mathrm{F}\to\mathrm{H}\to\mathrm{J}\to\mathrm{L}$,

$\mathrm{A}\to\mathrm{C}\to\mathrm{D}\to\mathrm{F}\to\mathrm{H}\to\mathrm{K}\to\mathrm{L}$,

$A \to C \to D \to F \to I \to K \to L$，

(2) 选择流通能力最大的管道经过（流通能力以该通道上最小流通能力的路线决定）。
$A \to B \to D \to F \to H \to K \to L$，最大流通能力 3。

4.4 二阶离散系统： $\begin{matrix} x_1(k+1) = 2x_1(k) + u(k) & x_1(0) = 1 \\ x_2(k+1) = x_1(k) + x_2(k) & x_2(0) = 0 \end{matrix}$ **，试求性能指标极小值时的最优控制** $u^*(k)$ **和最优轨线** $x^*(k)$ **：** $J = \sum_{k=0}^{1}[2x_2^2(k+1) + 2u^2(k)]$ **（参考 P137，例题 4-1）**

解： 后段代价函数

$$J_1 = 2x_2^2(2) + 2u^2(1) = 2(x_1(1) + x_2(1))^2 + 2u^2(1)$$
$$= 2x_1^2(1) + 2x_2^2(1) + 4x_1(1)x_2(1) + 2u^2(1)$$

由极值条件知，$\dfrac{\partial J_1}{\partial u(1)} = 0 \Rightarrow u(1) = 0$

$$J_1^* = 2x_1^2(1) + 2x_2^2(1) + 4x_1(1)x_2(1)$$

$$J_0 = 2x_2^2(1) + 2u^2(0) + J_1^*$$
$$= 2x_1^2(1) + 4x_2^2(1) + 4x_1(1)x_2(1) + 2u^2(0)$$
$$= 20x_1^2(0) + 4x_2^2(0) + 16x_1(0)x_2(0) + 4u^2(0) + 12x_1(0)u(0) + 4x_2(0)u(0)$$

极值条件 $\dfrac{\partial J_2}{\partial u(0)} = 0 \Rightarrow 8u(0) + 4x_2(0) + 12x_1(0) = 0 \Rightarrow u^*(0) = -\dfrac{3}{2}$

$$\therefore J^* = J_0^* = 11$$

$\therefore$ 最优控制 $u^*(0) = -\dfrac{3}{2}$，$u^*(1) = 0$，最优轨线 $x(1) = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1 \end{bmatrix}$，$x(2) = \begin{bmatrix} 1 \\ 3/2 \end{bmatrix}$

4.7 一阶离散系统 $x(k+1) = x(k)u(k) + u(k), \quad x(0) = 1$ **，控制约束** $u(k) \in \Omega = \{-1, 0, 1\}$ **，求使性能泛函** $J = \sum_{k=0}^{2}\{|x(k)| + 3|u(k)+1|\} + |x(3)| \geq 0$ **极小的最优控制序列。**

解：

$$J_3 = |x(3)| = |x(2)+1| \cdot |u(2)|$$

(1) $u^*(2) = -1 or 1, \qquad J_3^* = |x(2)+1|$

(2) $u^*(2) = 0, \qquad J_3^* = 0$

$J_2 = |x(2)| + 3|u(2)+1| + J_3^*$，分为 3 种情况：

(1) $u^*(2)=-1,\qquad J_{21}^*=|x(2)|+|x(2)+1|$

(2) $u^*(2)=0,\qquad J_{22}^*=|x(2)|+3$

(3) $u^*(2)=1,\qquad J_{23}^*=|x(2)|+|x(2)+1|+6>J_{21}^*$,舍去$u^*(2)=1$

$J_1=|x(1)|+3|u(1)+1|+J_2^*$，分四种情况:

(1) $u^*(2)=-1,u^*(1)=-1,\qquad J_{11}^*=2|x(1)|+|x(1)+1|$

(2) $u^*(2)=0,\quad u^*(1)=-1,\qquad J_{12}^*=|x(1)|+|x(1)+1|+3\qquad J_{11}^*<J_{12}^*$ 舍去

(3) $u^*(2)=-1,\ u^*(1)=0,\qquad J_{13}^*=|x(1)|+4$

(4) $u^*(2)=0,\quad u^*(1)=0,\qquad J_{14}^*=|x(1)|+6$ 舍去

$J_0=|x(0)|+3|u(0)+1|+J_{1*}^*\quad x(1)=2u(0)$

(1) $u^*(2)=-1,u^*(1)=-1,u^*(0)=0,\qquad J^*=5$

(2) $u^*(2)=-1,u^*(1)=-1,\ u^*(0)=-1,\qquad J^*=6$

(3) $u^*(2)=-1,u^*(1)=-1,\ u^*(0)=1,\qquad J^*=14$

(4) $u^*(2)=-1,u^*(1)=0,u^*(0)=-1,\qquad J^*=6$

(5) $u^*(2)=-1,u^*(1)=0,u^*(0)=0,\qquad J^*=8$

(6) $u^*(2)=-1,u^*(1)=0,u^*(0)=1,$ 舍去

最优控制序列 $u^*(0)=0\quad u^*(1)=-1\quad u^*(2)=-1\quad J^*=5$

最优轨迹 $x^*(0)=1\quad x^*(1)=0\quad x^*(2)=-1\quad x^*(3)=0$

最优控制第三章

书 p73

表 3-1　定常系统极小值原理

末端时刻	性能指标	末端状态	正则方程	极小值条件	边界条件	H 变化律
t_f 固定	$J=\varphi[\boldsymbol{x}(t_f)]$	末端自由	$\dot{\boldsymbol{x}}=\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{\lambda}}$，$\dot{\boldsymbol{\lambda}}=-\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{x}}$，式中 $H=\boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})$	$H^*=H(\boldsymbol{x}^*,\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{u}^*)=\min\limits_{\boldsymbol{u}\in U}H(\boldsymbol{x}^*,\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{u})$	$\boldsymbol{x}(t_0)=\boldsymbol{x}_0$，$\boldsymbol{\lambda}(t_f)=\frac{\partial \varphi}{\partial \boldsymbol{x}(t_f)}$	$H^*(t)=H^*(t_f)=\mathrm{const}$
		末端约束			$\boldsymbol{x}(t_0)=\boldsymbol{x}_0$，$\boldsymbol{\psi}[\boldsymbol{x}(t_f)]=\boldsymbol{0}$，$\boldsymbol{\lambda}(t_f)=\left[\frac{\partial \varphi}{\partial \boldsymbol{x}}+\frac{\partial \boldsymbol{\psi}^{\mathrm{T}}}{\partial \boldsymbol{x}}\boldsymbol{\nu}\right]_{t_f}$	$H^*(t)=H^*(t_f)=\mathrm{const}$
	$J=\int_{t_0}^{t_f}L(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})\mathrm{d}t$	末端固定	$\dot{\boldsymbol{x}}=\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{\lambda}}$，$\dot{\boldsymbol{\lambda}}=-\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{x}}$，式中 $H=L(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})+\boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})$		$\boldsymbol{x}(t_0)=\boldsymbol{x}_0$，$\boldsymbol{x}(t_f)=\boldsymbol{x}_f$（$\boldsymbol{\lambda}(t_f)$未知）	$H^*(t)=H^*(t_f)=\mathrm{const}$
		末端自由			$\boldsymbol{x}(t_0)=\boldsymbol{x}_0$，$\boldsymbol{\lambda}(t_f)=\boldsymbol{0}$	
		末端约束			$\boldsymbol{x}(t_0)=\boldsymbol{x}_0$，$\boldsymbol{\psi}[\boldsymbol{x}(t_f)]=\boldsymbol{0}$，$\boldsymbol{\lambda}(t_f)=\left[\frac{\partial \boldsymbol{\psi}^{\mathrm{T}}}{\partial \boldsymbol{x}}\boldsymbol{\nu}\right]_{t_f}$	
	$J=\varphi[\boldsymbol{x}(t_f)]+\int_{t_0}^{t_f}L(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})\mathrm{d}t$	末端自由			$\boldsymbol{x}(t_0)=\boldsymbol{x}_0$，$\boldsymbol{\lambda}(t_f)=\frac{\partial \varphi}{\partial \boldsymbol{x}(t_f)}$	$H^*(t)=H^*(t_f)=\mathrm{const}$
		末端约束			$\boldsymbol{x}(t_0)=\boldsymbol{x}_0$，$\boldsymbol{\psi}[\boldsymbol{x}(t_f)]=\boldsymbol{0}$，$\boldsymbol{\lambda}(t_f)=\left[\frac{\partial \varphi}{\partial \boldsymbol{x}}+\frac{\partial \boldsymbol{\psi}^{\mathrm{T}}}{\partial \boldsymbol{x}}\boldsymbol{\nu}\right]_{t_f}$	
t_f 自由	$J=\varphi[\boldsymbol{x}(t_f)]$	末端自由	$\dot{\boldsymbol{x}}=\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{\lambda}}$，$\dot{\boldsymbol{\lambda}}=-\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{x}}$，式中 $H=\boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})$	$H^*=H(\boldsymbol{x}^*,\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{u}^*)=\min\limits_{\boldsymbol{u}\in U}H(\boldsymbol{x}^*,\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{u})$	$\boldsymbol{x}(t_0)=\boldsymbol{x}_0$，$\boldsymbol{\lambda}(t_f)=\frac{\partial \varphi}{\partial \boldsymbol{x}(t_f)}$	$H^*(t_f)=0$
		末端约束			$\boldsymbol{x}(t_0)=\boldsymbol{x}_0$，$\boldsymbol{\psi}[\boldsymbol{x}(t_f)]=\boldsymbol{0}$，$\boldsymbol{\lambda}(t_f)=\left[\frac{\partial \varphi}{\partial \boldsymbol{x}}+\frac{\partial \boldsymbol{\psi}^{\mathrm{T}}}{\partial \boldsymbol{x}}\boldsymbol{\nu}\right]_{t_f}$	$H^*(t_f)=0$
	$J=\int_{t_0}^{t_f}L(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})\mathrm{d}t$	末端固定	$\dot{\boldsymbol{x}}=\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{\lambda}}$，$\dot{\boldsymbol{\lambda}}=-\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{x}}$，式中 $H=L(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})+\boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})$		$\boldsymbol{x}(t_0)=\boldsymbol{x}_0$，$\boldsymbol{x}(t_f)=\boldsymbol{x}_f$（$\boldsymbol{\lambda}(t_f)$未知）	$H^*(t_f)=0$
		末端自由			$\boldsymbol{x}(t_0)=\boldsymbol{x}_0$，$\boldsymbol{\lambda}(t_f)=\boldsymbol{0}$	
		末端约束			$\boldsymbol{x}(t_0)=\boldsymbol{x}_0$，$\boldsymbol{\psi}[\boldsymbol{x}(t_f)]=\boldsymbol{0}$，$\boldsymbol{\lambda}(t_f)=\left[\frac{\partial \boldsymbol{\psi}^{\mathrm{T}}}{\partial \boldsymbol{x}}\boldsymbol{\nu}\right]_{t_f}$	
	$J=\varphi[\boldsymbol{x}(t_f)]+\int_{t_0}^{t_f}L(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})\mathrm{d}t$	末端自由			$\boldsymbol{x}(t_0)=\boldsymbol{x}_0$，$\boldsymbol{\lambda}(t_f)=\frac{\partial \varphi}{\partial \boldsymbol{x}(t_f)}$	$H^*(t_f)=0$
		末端约束			$\boldsymbol{x}(t_0)=\boldsymbol{x}_0$，$\boldsymbol{\psi}[\boldsymbol{x}(t_f)]=\boldsymbol{0}$，$\boldsymbol{\lambda}(t_f)=\left[\frac{\partial \varphi}{\partial \boldsymbol{x}}+\frac{\partial \boldsymbol{\psi}^{\mathrm{T}}}{\partial \boldsymbol{x}}\boldsymbol{\nu}\right]_{t_f}$	

3-8　设一阶系统

$$\dot{x}(t)=u(t)-x(t),\quad x(0)=2$$

控制约束为 $|u(t)|\leqslant 1$，试确定最优控制 $u^*(t)$，使性能指标

$$J=\int_0^1[2x(t)-u(t)]\mathrm{d}t$$

为极小值。

3.8 参考书 P.52，例题 3-1 。分析：末端时刻 t_f 固定，性能指标为第二种，末端状态自由，控制有约束。

解：

1. 引入 λ 构造哈密顿函数：$H(x,u,\lambda,t)=2x-u+\lambda(u-x)=(2-\lambda)x+(\lambda-1)u$

2. 最优控制律（控制有约束，故取哈密顿函数为强极小）：$u^*(t)=\begin{cases}-1 & \lambda>1\\ +1 & \lambda<1\end{cases}$

3. 正则方程：$\begin{cases}\dot{x}=u-x & (1)\\ \dot{\lambda}=-\dfrac{\partial H}{\partial x}=\lambda-2 & (2)\end{cases}\Rightarrow \dot{\lambda}-\lambda+2=0\Rightarrow \lambda(t)=Ce^t+2$

4. 横截条件：$\lambda(1)=Ce+2=0$，$C=-\dfrac{2}{e}$

   解方程可以得到：$\lambda(t)=-2e^{t-1}+2$

   代入最优控制律，有：$u^*(t)=\begin{cases}-1 & 0\le t<1-\ln 2\\ +1 & 1\ge t>1-\ln 2\end{cases}$

   将 $u^*(t)$ 代入状态方程：$\dot{x}(t)=\begin{cases}-1-x(t) & 0\le t<1-\ln 2\\ +1-x(t) & 1\ge t>1-\ln 2\end{cases}$

   解得：$x(t)=\begin{cases}C_1e^{-t}-1 & 0\le t<1-\ln 2 & (3)\\ C_2e^{-t}+1 & 1\ge t>1-\ln 2 & (4)\end{cases}$

   对于（3），代入 $x(0)=2$，求出 $C_1=3\Rightarrow x^*(t)=3e^{-t}-1$ 。

   再求切换点状态：令 $t=1-\ln 2$，$x(1-\ln 2)=3e^{\ln 2}-1=\dfrac{6}{e}-1$

   对（4），求得 $C_2=3-e\Rightarrow x^*(t)=(3-e)e^{-t}+1$

   所以最优性能指标为：

$$J^*=\int_0^1[2x^*(t)-u^*(t)]dt=\int_0^{1-\ln 2}(6e^{-t}-1)dt+\int_{1-\ln 2}^1[(6-2e)e^{-t}+1]dt=3-\frac{6}{e}+2\ln 2$$

3-9　设系统状态方程

$$\dot{x}_1(t)=x_2(t),\quad x_1(0)=0$$
$$\dot{x}_2(t)=-x_2(t)+u(t),\quad x_2(0)=0$$

性能指标

$$J=\frac{1}{2}[x_1(2)-5]^2+\frac{1}{2}[x_2(2)-2]^2+\frac{1}{2}\int_0^2 u^2(t)\mathrm{d}t$$

末端约束条件

$$x_1(2)+5x_2(2)=15$$

试求使 J 极小的最优控制 $u^*(t)$。

3.9 参考书 P.68，定理 3-4 。分析：末端时刻 t_f 固定，性能指标为第三种，末端状态有约束，控制无约束。

解：

1. 引入 λ 构造哈密顿函数：$H(x,u,\lambda,t)=\frac{1}{2}u^2(t)+\lambda_1 x_2+\lambda_2(-x_2+u)$

2. 最优控制律（控制无约束，偏微分为零）：由 $\frac{\partial H}{\partial u}=u+\lambda_2=0\Rightarrow u^*(t)=-\lambda_2$

3. 正则方程：
$$\begin{cases}\dot{x}_1(t)=x_2(t)\\ \dot{x}_2(t)=-x_2(t)+u(t)\\ \dot{\lambda}_1=-\frac{\partial H}{\partial x_1}=0\\ \dot{\lambda}_2=-\frac{\partial H}{\partial x_2}=\lambda_2-\lambda_1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\lambda_1=C\\ \lambda_2=C_1e^t+C\\ x_1=(-\frac{1}{2}C_1-C)e^{-t}-\frac{1}{2}C_1e^t-Ct+C_1+C\\ x_2=(\frac{1}{2}C_1+C)e^{-t}-\frac{1}{2}C_1e^t-C\end{cases}$$

代入末端约束：$C_1(2e^{-2}-3e^2+1)+C(4e^{-2}-6)=15$　（1）

4. 横截条件：

$$\underline{\lambda}(2)=\frac{\partial\varphi[\underline{x}(2)]}{\partial\underline{x}(2)}+\frac{\partial\psi^T[\underline{x}(2)]}{\partial\underline{x}(2)}r(2)=\begin{pmatrix}x_1(2)-5\\ x_2(2)-2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\ 5\end{pmatrix}r(2)=\begin{pmatrix}C\\ C_1e^2+C\end{pmatrix}$$

联立上面两个等式，消去 $r(2)$ 有：$C_1(3e^{-2}+e^2-5)+C(6e^{-2}+8)=-23$　（2）

联立方程（1）、（2）解得：$\begin{cases}C=-2.5976\\ C_1=-0.0393\end{cases}$

所以 $u^*(t)=-C_1e^t-C=0.0393e^t+2.5976$

3-11 已知系统状态方程

$$\dot{x}_1(t)=x_2(t),\quad x_1(0)=0$$
$$\dot{x}_2(t)=x_3(t),\quad x_2(0)=0$$
$$\dot{x}_3(t)=u(t),\quad x_3(0)=0$$

试写出在控制约束 $|u(t)|\leqslant 1$ 条件下，使系统由已知初态转移到目标集

$$x_1(t_f)=t_f^2$$
$$x_2(t_f)=x_3^2(t_f)$$

且使性能指标

$$J=t_f x_2(t_f)+\int_0^{t_f}u^2(t)\mathrm{d}t$$

为最小的必要条件，其中 t_f 自由。

3.11 分析：末端时刻 t_f 自由，性能指标为第三种，末端状态有约束，控制有约束。

解：

1. 引入 λ 并构造哈密顿函数：

$$H=u^2+\lambda_1x_2+\lambda_2x_3+\lambda_3u=\left(u+\frac{\lambda_3}{2}\right)^2+\lambda_1x_2+\lambda_2x_3-\frac{\lambda_3^2}{4}$$

2. 最优控制律（控制有约束，故取哈密顿函数为强极小）：$u^*(t)=\begin{cases}-1, & \lambda_3(t)>2\\ -\frac{1}{2}\lambda_3, & |\lambda_3(t)|\leq 2\\ 1, & \lambda_3(t)<-2\end{cases}$

3. 正则方程：$\begin{cases}\dot{x}_1(t)=x_2(t)\\ \dot{x}_2(t)=x_3(t),\\ \dot{x}_3(t)=u(t)\end{cases}$ $\begin{cases}\dot{\lambda}_1=-\frac{\partial H}{\partial x_1}=0\\ \dot{\lambda}_2=-\frac{\partial H}{\partial x_2}=-\lambda_1\\ \dot{\lambda}_3=-\frac{\partial H}{\partial x_3}=-\lambda_2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\lambda_1=C_1\\ \lambda_2=-C_1t+C_2\\ \lambda_3=\frac{1}{2}C_1t^2-C_2t+C_3\end{cases}$

4. 横截条件：

$$\underline{\lambda}(t_f)=\frac{\partial\varphi[\underline{x}(t_f)]}{\partial\underline{x}(t_f)}+\frac{\partial\psi^T[\underline{x}(t_f)]}{\partial\underline{x}(t_f)}r(t_f)=\begin{pmatrix}0\\ t_f\\ 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ 0 & -2x_3(t_f)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}r_1(t_f)\\ r_2(t_f)\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}r_1(t_f)\\ t_f+r_2(t_f)\\ -2x_3(t_f)r_2(t_f)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}C_1\\ -C_1t_f+C_2\\ 1/2C_1t_f^2-C_2t_f+C_3\end{pmatrix}$$

再加上初始值条件，即可联立上述方程，即为该极小值问题的必要条件。

3.22 分析：离散时间系统，末端序列 $k=4$ 固定，末端状态无约束，控制有约束。

解：由题，先将标准的问题描述写出来：

$f[x,u,k]=0.5x(k)+0.3u(k)$, $k=1,2,3,4$，初始条件 $x(1)$ 已知，

$J=y(1)+y(2)+y(3)+y(4)=\sum_{k=1}^{4}(3x(k)-u(k))$，即 $L(x,u,k)=3x(k)-u(k)$

1. 引入 $\lambda(k)$ 序列并构造哈密顿函数：

$$H(k)=3x(k)-u(k)+\lambda(k+1)[0.5x(k)+0.3u(k)],\ k=1,2,3,4$$

2. 正则方程：
$$\begin{cases} x(k+1)=\dfrac{\partial H(k)}{\partial \lambda(k+1)}=0.5x(k)+0.3u(k) & (1) \\ \lambda(k)=\dfrac{\partial H(k)}{\partial x(k)}=3+0.5\lambda(k+1) & (2) \end{cases}$$

3. 横截条件：$\lambda(5)=0$（由于从性能指标可见 $\varphi[x(N),N]=0$）

根据横截条件，带入公式（2）可得到 $\lambda(k)$ 序列表达式：

$\lambda(5)=0,$

$\lambda(4)=3+0.5\lambda(5)=3,\qquad \lambda(3)=3+0.5\lambda(4)=4.5,$

$\lambda(2)=3+0.5\lambda(3)=5.25,\quad \lambda(1)=3+0.5\lambda(2)=5.625$

4. 极值条件（最优控制序列）：由于有控制约束，故而极值条件为取哈密顿函数为强极小。从时序顺序开始讨论：

① $k=1$ 时：$\begin{aligned}H(1)&=3x(1)-u(1)+\lambda(2)[0.5x(1)+0.3u(1)]\\&=5.625x(1)+0.575u(1)\end{aligned}$，由于暗含条件 $x(1)\ge 0$，故有 $u^*(1)=0\Rightarrow x(2)=0.5x(1)+0.3u^*(1)=0.5x(1)\ge 0$

② $k=2$ 时：$\begin{aligned}H(2)&=3x(2)-u(2)+\lambda(3)[0.5x(2)+0.3u(2)]\\&=0.35x(2)+5.25u(2)\end{aligned}$，故有 $u^*(2)=0$

$\Rightarrow x(3)=0.5x(2)+0.3u^*(2)=0.25x(1)\ge 0$

③ $k=3$ 时：$\begin{aligned}H(3)&=3x(3)-u(3)+\lambda(4)[0.5x(3)+0.3u(3)]\\&=-0.1x(3)+4.5u(3)\end{aligned}$，故有

$u^*(3)=x(3)=0.25x(1)\Rightarrow x(4)=0.5x(3)+0.3u^*(3)=0.2x(1)\ge 0$

④ $k=4$ 时：$H(4)=3x(4)-u(4)+\lambda(5)[0.5x(4)+0.3u(4)]=3x(4)-u(4)$，

故有 $u^*(4)=x(4)=0.2x(1)$

✧ 综上，最优控制序列为 $u^*(k)=\{0,0,0.25x(1),0.2x(1)\}$，

✧ 最优轨线为 $x^*(k)=\{x(1),0.5x(1),0.25x(1),0.2x(1)\}$，

✧ 最优性能指标为 $J^*=\sum_{k=1}^{4}(3x(k)-u(k))=5.4x(1)$。

3.31 分析：线性定常系统，控制有约束，末端时刻t_f自由，末端状态约束

解：

1. 构造哈密顿函数：$H=1+\lambda_1 x_2+\lambda_2(-x_2+u)$
2. 正则方程：$\begin{cases}\dot{x}_1=x_2\\ \dot{x}_2=-x_2+u\end{cases}$，$\begin{cases}\dot{\lambda}_1=0\\ \dot{\lambda}_2=\lambda_2-\lambda_1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\lambda_1=C_1\\ \lambda_2=C_2e^t+C_1\end{cases}$
3. 最优控制律：$u^*=-\mathrm{sgn}(\lambda_2)=\begin{cases}1 & \lambda_2=C_2e^t+C_1\le 0\\ -1 & \lambda_2=C_2e^t+C_1>0\end{cases}$

讨论不同的C_1、C_2取值对最优控制律的影响：

① $C_1\le 0,C_2\le 0$则有$\lambda_2\le 0$恒成立，则最优控制律$u^*(t)\equiv 1$

② $C_1\ge 0,C_2\ge 0$且不同时为 0，则有$\lambda_2>0$恒成立，则最优控制律$u^*(t)\equiv -1$

③ $C_1>0,C_2<0$，有$u^*(t)=\begin{cases}1 & t\ge\ln\left(-\dfrac{C_2}{C_1}\right)\triangleq t_c\\ -1 & 0\le t<t_c\end{cases}$

④ $C_1<0,C_2>0$，有$u^*(t)=\begin{cases}1 & 0\le t<t_c\\ -1 & t\ge t_c\end{cases}$

之后根据$u(t)$的不同取值讨论系统的轨线：

a) $u(t)=1$时$\begin{cases}\dot{x}_1=x_2\\ \dot{x}_2=-x_2+1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1(t)=t-C_3e^{-t}+C_4\\ x_2(t)=1+C_3e^{-t}\end{cases}$

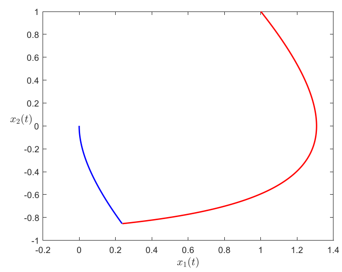
b) $u(t)=-1$时$\begin{cases}\dot{x}_1=x_2\\ \dot{x}_2=-x_2-1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1(t)=-t-C_5e^{-t}+C_6\\ x_2(t)=-1+C_5e^{-t}\end{cases}$

对情况①进行可行性分析：代入初始值，发现对$x_2(t)$无解，故该情况不成立；

对情况②进行分析：代入初始值可解得：$C_5=2,C_6=3$，但代入末端约束发现状态空间方程有矛盾，故该情况不成立；

对情况③进行分析：通过代入初始值、末端约束以及切换点约束（切换点状态不会突变），

$$\begin{cases}t_s-C_3e^{-t_s}+C_4=-t_s-2e^{-t_s}+3\\ 1+C_3e^{-t_s}=2e^{-t_s}-1\end{cases}\&\begin{cases}t_f-C_3e^{-t_f}+C_4=0\\ 1+C_3e^{-t_f}=0\end{cases}$$



解方程可以解得：$\begin{cases}t_c=2.617\\ t_f=3.235\end{cases}$。

相应的参数为$C_3=-25.381$，$C_4=-4.235$，$C_5=2$，$C_6=3$。

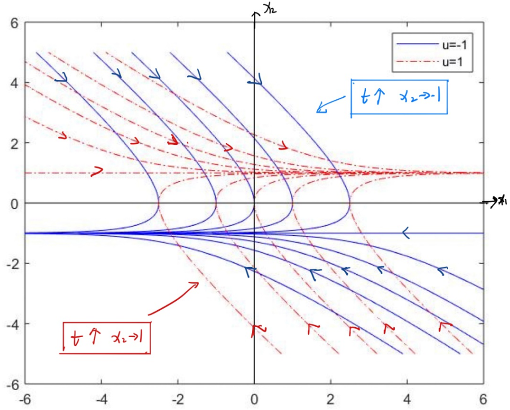
对情况④进行分析：方程无解（解得的时间为负，不符合实际情况），故该情况不成立。

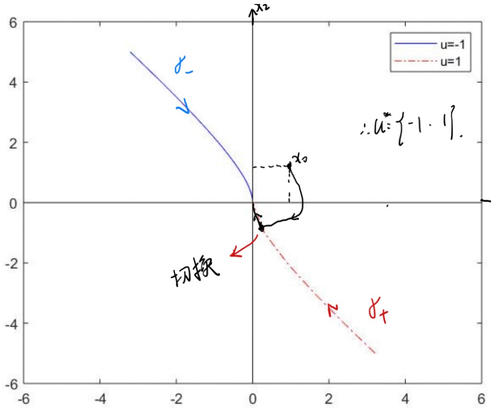
综合上述讨论可知只有情况③是成立的，最优控制律为：$u^*(t)=\begin{cases}-1 & 0\le t<2.617\\ 1 & t\ge 2.617\end{cases}$。

开关曲线的绘制：

- 当$u=1$时，由动态方程可以求出：$\begin{cases} x_1 = t - C_1 e^{-t} + C_2 \\ x_2 = 1 + C_1 e^{-t} \end{cases}$.
- 当$u=-1$时，由动态方程可以求出：$\begin{cases} x_1 = -t - C_1 e^{-t} + C_2 \\ x_2 = -1 + C_1 e^{-t} \end{cases}$.

开关曲线绘制为：





由此也可以通过开关曲线判断出最优控制律为$u^* = \{-1, 1\}$.

3.42 分析：时间燃料最优控制，末端时刻t_f固定，性能指标为第二种，末端状态有约束，控制有约束。（课本例 3.10，详细讨论见问题 3.8）

解：

1. 构造哈密顿函数：$H = 1 + |u(t)| + \lambda_1 u(t) + \lambda_2 x_1(t)$

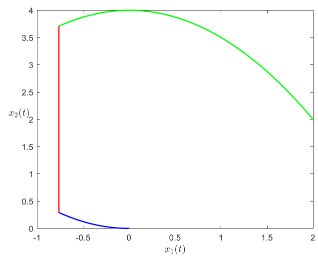
2. 正则方程：$\begin{cases} \dot{x}_1 = u \\ \dot{x}_2 = x_1 \end{cases}$，$\begin{cases} \dot{\lambda}_1 = -\lambda_2 \\ \dot{\lambda}_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = C_1 t + C_2 \\ \lambda_2 = C_1 \end{cases}$

3. 最优控制律：$u^* = \begin{cases} -1 & \lambda_1 = C_1 t + C_2 > 1 \\ 0 & |\lambda_1| = |C_1 t + C_2| \le 1 \\ 1 & \lambda_1 = C_1 t + C_2 < -1 \end{cases}$

根据边界条件初态$(x_1(0), x_2(0)) = (2,2)$ 故最优控制取：$u^* = \{-1, 0, 1\}$。

根据$u(t)$的不同取值讨论系统的轨线：

a) $u(t) = -1$时$\begin{cases} \dot{x}_1 = -1 \\ \dot{x}_2 = x_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1(t) = -t + C_3 \\ x_2(t) = -\frac{1}{2}t^2 + C_3 t + C_4 \end{cases}$



b) $u(t) = 0$时$\begin{cases} \dot{x}_1 = 0 \\ \dot{x}_2 = x_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1(t) = C_5 \\ x_2(t) = C_5 t + C_6 \end{cases}$

c) $u(t) = 1$时$\begin{cases} \dot{x}_1 = 1 \\ \dot{x}_2 = x_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1(t) = t + C_7 \\ x_2(t) = \frac{1}{2}t^2 + C_7 t + C_8 \end{cases}$

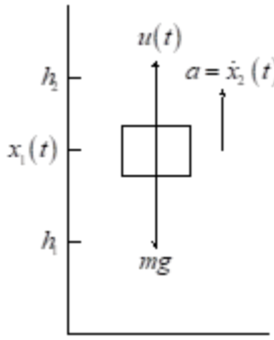
设切换时间分别为t_1，t_2，由初始值、终端值以及切换点约束解方程，解得：$t_1 = 2.764$，$t_2 = 7.236$，相应参数值为$C_3 = 2$，$C_4 = 2$，$C_5 = -0.764$，$C_6 = 5.82$，$C_7 = -8$，$C_8 = 32$。

综合上述讨论，只有情况③是成立的，最优控制律为 $u^* = \begin{cases} -1 & 0 \le t < 2.764 \\ 0 & 2.764 \le t < 7.236 \\ 1 & 7.236 \le t \le 8 \end{cases}$，最优

性能指标：$J^* = \int_0^{2.764} 2\mathrm{d}t + \int_{2.764}^{7.236} 1\mathrm{d}t + \int_{7.236}^{8} 2\mathrm{d}t = 11.528$。

补充题：电梯最速下降/上升问题。问题描述：拉力$|u|\le u_{\max}$，高度$h_1<h_2$，总质量m。

解：考虑电梯上升问题：定义向上方向为正，定义状态$x_1(t)$为电梯在t时刻的高度，$x_2(t)$为电梯在t时刻的向上速度，列写受力方程并转化为状态空间方程：



$\begin{cases}\dot{x}_1(t)=x_2(t)\\ \dot{x}_2(t)=-g+\dfrac{1}{m}u(t)\end{cases}$，$\begin{cases}x_1(0)=h_1\\ x_2(0)=0\end{cases}$，$\begin{cases}x_1(t_f)=h_2\\ x_2(t_f)=0\end{cases}$，$t_f$末端约束，控制约束$|u(t)|\le u_{\max}$，性能指标$J=\int_0^{t_f}1dt=t_f$。

1. 构造哈密顿函数：$H=1+\lambda_1x_2+\lambda_2\left(-g+\dfrac{1}{m}u\right)$

2. 正则方程：$\begin{cases}\dot{x}_1=x_2\\ \dot{x}_2=-g+\dfrac{1}{m}u\end{cases}$，$\begin{cases}\dot{\lambda}_1=-\dfrac{\partial H}{\partial x_1}=0\\ \dot{\lambda}_2=-\dfrac{\partial H}{\partial x_2}=-\lambda_1\end{cases}$ $\Rightarrow\begin{cases}\lambda_1(t)=C_1\\ \lambda_2(t)=-C_1t+C_2\end{cases}$

3. 最优控制律（控制有约束，故取哈密顿函数为强极小）：

   $u^*(t)=\begin{cases}-u_{\max} & \lambda_2=-C_1t+C_2\ge 0\\ +u_{\max} & \lambda_2=-C_1t+C_2<0\end{cases}$，若$C_1$、$C_2$不同号，该两不等式总有一个会不成立，和实际情况相违背，故C_1、C_2同号。且根据实际情况可知当上升情况时同为负号

4. 横截条件：$\underline{\lambda}(t_f)=\dfrac{\partial\psi^T[\underline{x}(t_f)]}{\partial\underline{x}(t_f)}r(t_f)=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}r_1(t_f)\\ r_2(t_f)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}r_1(t_f)\\ r_2(t_f)\end{pmatrix}$

设系统切换时间为t_s，即有上升问题中的最优控制为$u^*(t)=\begin{cases}+u_{\max} & 0\le t<t_s\\ -u_{\max} & t_s\le t\le t_f\end{cases}$

切换前：$\begin{cases}\dot{x}_1(t)=x_2(t)\\ \dot{x}_2(t)=-g+\dfrac{1}{m}u_{\max}\end{cases}$，解得：$\begin{cases}x_1(t)=\dfrac{1}{2}\left(-g+\dfrac{1}{m}u_{\max}\right)t^2+C_3t+C_4\\ x_2(t)=\left(-g+\dfrac{1}{m}u_{\max}\right)t+C_3\end{cases}$

带入初始条件$\begin{cases}x_1(0)=h_1\\ x_2(0)=0\end{cases}$可解得：

$$\begin{cases}C_3=0\\ C_4=h_1\end{cases}\tag{1}$$

切换后：$\begin{cases}\dot{x}_1(t)=x_2(t)\\ \dot{x}_2(t)=-g-\dfrac{1}{m}u_{\max}\end{cases}$，解得：$\begin{cases}x_1(t)=\dfrac{1}{2}\left(-g-\dfrac{1}{m}u_{\max}\right)t^2+C_5t+C_6\\ x_2(t)=\left(-g-\dfrac{1}{m}u_{\max}\right)t+C_5\end{cases}$

带入末端约束$\begin{cases} x_1\left(t_f\right)=h_2 \\ x_2\left(t_f\right)=0 \end{cases}$可解得：$\begin{cases} C_5=\left(g+\dfrac{1}{m}u_{\max}\right)t_f \\ C_6=h_2-\dfrac{1}{2}\left(g+\dfrac{1}{m}u_{\max}\right)t_f^2 \end{cases}$ （2）

切换点处：$\begin{cases} x_1\left(t_s\right)=\dfrac{1}{2}\left(-g+\dfrac{1}{m}u_{\max}\right){t_s}^2+C_3t_s+C_4=\dfrac{1}{2}\left(-g-\dfrac{1}{m}u_{\max}\right){t_s}^2+C_5t_s+C_6 \\ x_2\left(t_s\right)=\left(-g+\dfrac{1}{m}u_{\max}\right)t_s+C_3=\left(-g-\dfrac{1}{m}u_{\max}\right)t_s+C_5 \end{cases}$

和等式（1）（2）联立可解得：$\begin{cases} t_s=\sqrt{\dfrac{\left(h_2-h_1\right)m\left(u_{\max}+mg\right)}{u_{\max}\left(u_{\max}-mg\right)}} \\ t_f=2\sqrt{\dfrac{\left(h_2-h_1\right)u_{\max}m}{\left(u_{\max}-mg\right)\left(u_{\max}+mg\right)}} \end{cases}$

故最优控制为$u^*(t)=\begin{cases} +u_{\max} & 0\le t<t_s \\ -u_{\max} & t_s\le t\le t_f \end{cases}$，最优性能指标$J^*=t_f$。相应的最优轨线同样可以写出。