

现代控制理论14-15学年第二学期考试参考答案

一、（15%）已知两单输入单输出系统的状态空间方程分别是

$$S_1 : \begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_1 = A_1 \mathbf{x}_1 + b_1 u_1 \\ y_1 = c_1 \mathbf{x}_1 + d_1 u_1 \end{cases}$$

$$S_2 : \begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_2 = A_2 \mathbf{x}_2 + b_2 u_2 \\ y_2 = c_2 \mathbf{x}_2 + d_2 u_2 \end{cases}$$

将它们负反馈联接，即：\$u_2 = y_1\$，\$u_1 = v - y_2\$，试以\$v\$为输入，\$y = y_1\$为输出，\$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \end{bmatrix}\$为状态，求反馈系统的状态空间方程。

解答：

(1). 消去\$u_1\$，\$u_2\$，\$y_2\$，可得

$$y_1 = c_1 \mathbf{x}_1 + d_1 v - d_1 c_2 \mathbf{x}_2 - d_1 d_2 y_1$$

从而

$$y_1 = \frac{c_1}{1 + d_1 d_2} \mathbf{x}_1 - \frac{d_1 c_2}{1 + d_1 d_2} \mathbf{x}_2 + \frac{d_1}{1 + d_1 d_2} v$$

4%

(2). 将\$y_1\$代入原状态空间方程并化简，可得

$$\dot{\mathbf{x}}_1 = (A_1 - \frac{b_1 d_2 c_1}{1 + d_1 d_2}) \mathbf{x}_1 - \frac{b_1 c_2}{1 + d_1 d_2} \mathbf{x}_2 + \frac{b_1}{1 + d_1 d_2} v$$

4%

$$\dot{\mathbf{x}}_2 = \frac{b_2 c_1}{1 + d_1 d_2} \mathbf{x}_1 + (A_2 - \frac{b_2 d_1 c_2}{1 + d_1 d_2}) \mathbf{x}_2 + \frac{b_2 d_1}{1 + d_1 d_2} v$$

4%

(3). 综上可得反馈系统状态空间方程为

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} A_1 - \frac{b_1 d_2 c_1}{1 + d_1 d_2} & -\frac{b_1 c_2}{1 + d_1 d_2} \\ \frac{b_2 c_1}{1 + d_1 d_2} & A_2 - \frac{b_2 d_1 c_2}{1 + d_1 d_2} \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} \frac{b_1}{1 + d_1 d_2} \\ \frac{b_2 d_1}{1 + d_1 d_2} \end{bmatrix} v \\ y = \begin{bmatrix} \frac{c_1}{1 + d_1 d_2} & -\frac{d_1 c_2}{1 + d_1 d_2} \end{bmatrix} \mathbf{x} + \frac{d_1}{1 + d_1 d_2} v \end{cases}$$

3%

二、（18%）已知系统的状态空间方程为

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & -5 & 4 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + u(t)\end{aligned}$$

1. 求系统的传递函数；
2. 当系统的初态为 $\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}^T$ 时，求该系统在单位阶跃信号作用下的输出响应式。

解答：

1. 系统传递函数

$$g(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$$

2%

其中

$$(sI - A)^{-1} = \begin{bmatrix} s & -1 & 0 \\ 0 & s & -1 \\ -2 & 5 & s-4 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{(s-1)^2(s-2)} \begin{bmatrix} s^2-4s+5 & s-4 & 1 \\ 2 & s^2-4s & s \\ 2s & 2-5s & s^2 \end{bmatrix}$$

3%

故

$$g(s) = \frac{-5s+2}{s^2-3s+2} + 1 = \frac{s^2-8s+4}{s^2-3s+2}$$

3%

2. 系统状态响应

$$\mathbf{x}(t) = e^{At}\mathbf{x}(0) + \int_0^t e^{A\tau}Bu(t-\tau)d\tau$$

2%

其中

$$e^{At} = \begin{bmatrix} e^{2t} - 2te^t & -2e^{2t} + 3te^t + 2e^t & e^{2t} - te^t - e^t \\ 2e^{2t} - 2te^t - 2e^t & -4e^{2t} + 3te^t + 5e^t & 2e^{2t} - te^t - 2e^t \\ 4e^{2t} - 2te^t - 4e^t & -8e^{2t} + 3te^t + 8e^t & 4e^{2t} - te^t - 3e^t \end{bmatrix}$$

4%

故

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} e^{2t} - 2te^t - e^t + 1 \\ 2e^{2t} - 2te^t - 3e^t + 1 \\ 4e^{2t} - 2te^t - 5e^t \end{bmatrix}$$

2%

从而可得系统输出响应为

$$y(t) = C\mathbf{x}(t) + u(t) = -4e^{2t} + 6e^t + 2, \quad t \geq 0$$

2%

三、（20%）对线性定常系统，试证明以下结论

1. 输出反馈不改变系统的能观性；
2. 对单输入-单输出线性定常系统 $\{A, b, c\}$ ，若 $\{A, b\}$ 能控，则一定存在行向量 c ，使系统 $\{A, b, c\}$ 能观。

解答：

1. 对线性定常系统

$$S_1 : \begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases}$$

引入输出反馈

$$u = r - Hy = r - HCx$$

2%

得

$$S_2 : \begin{cases} \dot{x} = (A - BHC)x + Br \\ y = Cx \end{cases}$$

2%

$$\text{系统 } S_1 \text{ 能观性矩阵 } M_{o1} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}, \text{ 系统 } S_2 \text{ 能观性矩阵 } M_{o2} = \begin{bmatrix} C \\ C(A - BHC) \\ C(A - BHC)^2 \\ \vdots \\ C(A - BHC)^{n-1} \end{bmatrix}$$

2%

由数学归纳法可证明

$$M_{o2} = F \cdot M_{o1}$$

其中

$$F = \begin{bmatrix} I & & & & & \\ & -CBH & I & & & \\ & -CDBH & -CBH & I & & \\ & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots \\ -CD^{n-2}BH & \dots & \dots & -CDBH & -CBH & I \end{bmatrix}, \quad D = A - BHC$$

2%

可见 F 非奇异，故

$$\text{rank}(M_{o2}) = \text{rank}(F \cdot M_{o1}) = \text{rank}(M_{o1})$$

故输出反馈不改变系统的能观性。

2%

2. 设系统 $\{A, b, c\}$ 的能控标准型为 $\{\bar{A}, \bar{b}, \bar{c}\}$, 变换矩阵为 Q , 其传递函数为

$$g(s) = \frac{b_{n-1}s^{n-1} + \cdots + b_1s + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1s + a_0}$$

3%

则

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix}, \quad \bar{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \bar{c} = [b_0 \quad b_1 \quad \cdots \quad b_{n-1}]$$

3%

取 $\bar{c} = [1 \quad 0 \quad \cdots \quad 0]$, 则有

$$\bar{M}_o = \begin{bmatrix} \bar{c} \\ \bar{c}\bar{A} \\ \vdots \\ \bar{c}\bar{A}^{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

即系统 $\{\bar{A}, \bar{b}, \bar{c}\}$ 能观性矩阵满秩, 系统能观, 因此系统 $\{A, b, c\}$ 也能观。

4%

四、(20%) 已知系统的状态空间方程为

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 + 2x_2 + u \\ \dot{x}_2 = 3x_1 + 4x_2 - u \\ y = 3x_1 - 2x_2 \end{cases}$$

1. 判断系统的渐近稳定性和BIBO稳定性;
2. 设计状态反馈, 使系统的闭环极点位于 $-1 \pm j$;
3. 设计特征值均为-5的最小维状态估计器;
4. 用估计状态进行状态反馈, 试列写该复合系统的增广状态空间方程。

解答:

1.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad C = [3 \quad -2]$$

系统特征多项式

$$\Delta(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \lambda^2 - 5\lambda - 2$$

1%

因此系统特征值为

$$\lambda_1 = \frac{5 + \sqrt{33}}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{5 - \sqrt{33}}{2}$$

可见 $Re\{\lambda_1\} > 0$, 因此系统不是渐近稳定。

1%

系统传递函数

$$g(s) = \frac{5s - 26}{s^2 - 5s - 2}$$

1%

可见系统极点并不全位于 s 左半平面, 因此系统不是BIBO稳定。

1%

2. 系统能控性矩阵

$$M_c = \begin{bmatrix} B & AB \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

满秩, 故系统能控, 可以任意配置极点。

1%

设计状态反馈

$$u = r - kx, \quad k = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \end{bmatrix}$$

1%

则系统特征多项式变为

$$\widetilde{\Delta}(\lambda) = \det[\lambda I - (A - Bk)] = \lambda^2 - (5 - k_1 + k_2)\lambda - 6k_1 + 4k_2 - 2 = \lambda^2 + 2\lambda + 2$$

1%

解得

$$k_1 = -16, \quad k_2 = -23$$

2%

故状态反馈为

$$u = r + \begin{bmatrix} 16 & 23 \end{bmatrix} x$$

1%

3. 系统能观性矩阵

$$M_o = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}$$

满秩, 故系统能观, 可以设计任意极点状态观测器。又 $rank(C) = 1$, 故最小维状态观测器应为1维, 取

1%

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}, \quad Q \triangleq P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

1%

则

$$\bar{A} = PAQ = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -6 & 1 \end{bmatrix}, \quad \bar{B} = PB = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad \bar{C} = CQ = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$$

1%

构造观测器

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}}_1 &= (A_{11} - lA_{21})\hat{x}_1 + (A_{12}y + B_1u) + l(\dot{y} - A_{22}y - B_2u) \\ &= (4 + 6l)\hat{x}_1 + (-y + u) + l(\dot{y} - y - 5u)\end{aligned}$$

1%

由观测器极点 $4 + 6l = -5$, 得

$$l = -\frac{3}{2}$$

1%

为消去微分项, 取 $z = \hat{x}_1 - ly$, 得

$$\dot{z} = -5z + 8.5u + 8y$$

1%

从而

$$\hat{\mathbf{x}} = Q \begin{bmatrix} z + ly \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1.5 \end{bmatrix} z - \begin{bmatrix} 1.5 \\ 2.75 \end{bmatrix} y$$

2%

4. 由下列诸式

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} u \\ y &= \begin{bmatrix} 3 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{x} \\ u &= r + \begin{bmatrix} 16 & 23 \end{bmatrix} \mathbf{x} \\ \dot{z} &= -5z + 8.5u + 8y \\ \hat{\mathbf{x}} &= \begin{bmatrix} 1 \\ 1.5 \end{bmatrix} z - \begin{bmatrix} 1.5 \\ 2.75 \end{bmatrix} y\end{aligned}$$

可得复合系统的增广状态空间方程为

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{z} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -260.75 & 176.5 & 50.5 \\ 264.75 & -170.5 & 50.5 \\ -2200.875 & 1467.25 & 429.25 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 8.5 \end{bmatrix} r \\ y &= \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ z \end{bmatrix}\end{aligned}$$

2%

五、(12%) 陈述线性定常系统、无限时间、二次型性能指标、控制无约束的最优调节器问题, 最优解以及最优解存在的条件。

解答:

对线性定常系统

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$$

1%

以及二次型性能指标

$$J = \int_0^{\infty} [\mathbf{x}^T(t) \mathbf{Q} \mathbf{x}(t) + \mathbf{u}^T(t) \mathbf{R} \mathbf{u}(t)] dt$$

1%

若 $\{A, B\}$ 能控, $\{A, D\}$ 能观, 其中 $DD^T = Q$ 且 D 任意, 则存在唯一的最优控制

2%

$$\mathbf{u}^* = -\mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \bar{\mathbf{P}} \mathbf{x}(t)$$

3%

使得最优性能指标

$$J^* = \frac{1}{2} \mathbf{x}_0^T \bar{\mathbf{P}} \mathbf{x}_0$$

2%

其中 $\bar{\mathbf{P}}$ 满足黎卡提代数方程

$$\bar{\mathbf{P}} \mathbf{A} + \mathbf{A}^T \bar{\mathbf{P}} - \bar{\mathbf{P}} \mathbf{B} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \bar{\mathbf{P}} + \mathbf{Q} = 0$$

3%

六、(15%) 已知一阶系统

$$\dot{x}(t) = x(t) - u(t), \quad x(0) = 5$$

其控制约束为 $-1 \leq u \leq 2$, 试求使性能指标

$$J = x(1) + \int_0^1 [x(t) + u(t)] dt$$

为极小的最优控制 $u^*(t)$, 以及最优性能指标 J^* 。

解答:

Hamilton函数

$$H = x + u + \lambda(x - u) = (1 + \lambda)x + (1 - \lambda)u$$

2%

所以

$$u^* = \begin{cases} -1, & \lambda < 1 \\ 2, & \lambda > 1 \end{cases}$$

2%

由正则方程

$$\dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial x} = -(1 + \lambda)$$

2%

以及边界条件

$$\lambda(t_f) = \frac{\partial \varphi(t_f)}{\partial x(t_f)}, \quad t_f = 1$$

2%

可得

$$\lambda(t) = 2e^{1-t} - 1$$

2%

可见当 $0 \leq t \leq 1$ 时, $\lambda(t) \geq 1$, 所以

$$u^*(t) = 2$$

3%

从而

$$x^*(t) = 3e^t + 2$$

$$J^* = 6e + 3$$

2%

说明：学生在解答中体现的思路和方法为评分主要权重。另外，某一道题若有多种解法，评卷后都会加到本参考答案中。