

# 现代控制理论

第一章	绪论	第六章	传递函数的状态空间实现
第二章	系统的状态空间模型	第七章	状态反馈与状态观测器
第三章	状态空间方程的解	第八章	最优性原理与动态规划
第四章	系统的稳定性	第九章	极小值原理
第五章	能控性与能观性	第十章	二次型指标的线性最优控制

中国科学技术大学 自动化系

2020.2.-6.

## 本课程的篇章结构

建模	直接获取	第2章 系统的状态空间模型
	模型转换	第2章 系统的状态空间模型 第6章 传递函数矩阵的状态空间实现
分析	定量分析	第3章 状态空间方程的解
	定性分析	第4章 系统的稳定性 第5章 能控性和能观性
设计	常规控制	第7章 状态反馈和状态观测器
	最优控制	第8章 最优性原理与动态规划 第9章 极小值原理 第10章 二次型指标的线性最优控制

# 第三章 状态空间方程的解

## § 3.1 矩阵指数

## § 3.2 状态空间方程的解

## § 3.3 预解矩阵及频域求解

本章的主要目的是——求解状态空间方程：

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \\ \mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u} \end{cases}$$

已知的 $\mathbf{A}$ 、 $\mathbf{B}$ 、 $\mathbf{C}$ 、 $\mathbf{D}$ 、 $\mathbf{x}(0)$ 、 $\mathbf{u}(\cdot)$ ，求  $\mathbf{x}(t)$ 、 $\mathbf{y}(t)$

拟从考察已知初态的线性定常系统零输入响应开始

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, \quad \mathbf{u} \equiv \mathbf{0}$$

即齐次状态方程的求解：

$$\begin{array}{ccc} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} & & \\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 & \longrightarrow & \mathbf{x}(t) = ? \end{array}$$

# 第三章 状态空间方程的解

## § 3.1 矩阵指数

### 3.1.1 状态转移矩阵

### 3.1.2 矩阵指数的定义和性质

### 3.1.3 矩阵指数的求取

### 3.1.4 模态与模态分解

## § 3.2 状态空间方程的解

## § 3.3 预解矩阵及频域求解

## § 3.1 矩阵指数

### 3.1.1 状态转移矩阵

定义3.1：若线性系统的齐次状态方程

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$$

的解可写作

$$\mathbf{x}(t, t_0) = \Phi(t, t_0)\mathbf{x}_0$$

则称矩阵  $\Phi(t, t_0)$  为该系统的状态转移矩阵。

对于线性定常系统，因总可以将初始时间平移至  $t_0 = 0$ ，故其状态转移矩阵是时间  $t$  的单变量函数，在不致产生误解时，通常直接简写为  $\Phi(t)$ 。

## § 3.1 矩阵指数

### 3.1.1 状态转移矩阵

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \longrightarrow \mathbf{x}(t) = ?$$

试着用熟知的拉氏变换法解之：

$$s\hat{\mathbf{x}}(s) - \mathbf{x}(0) = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}(s) \Rightarrow (s\mathbf{I} - \mathbf{A})\hat{\mathbf{x}}(s) = \mathbf{x}_0 \Rightarrow \hat{\mathbf{x}}(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{x}_0$$

$$\mathbf{x}(t) = L^{-1}[(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}] \mathbf{x}_0$$

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t) \mathbf{x}_0$$

在得到线性定常系统的零输入响应（齐次状态方程的解、自由运动的解）的同时，也得到该系统状态转移矩阵的拉氏反变换表示形式：

$$\Phi(t) = L^{-1}[(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}]$$

### 3.1.1 状态转移矩阵

为进一步揭示线性定常系统状态转移矩阵

$$\Phi(t) = L^{-1}[(sI - A)^{-1}]$$

的本质，注意到对于标量系统

$$\phi(t) = L^{-1}\left[\frac{1}{s-a}\right] = e^{at} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (at)^k = 1 + at + \frac{1}{2!} (at)^2 + \frac{1}{3!} (at)^3 + \dots$$

于是，我们非常希望能够定义一个矩阵函数  $f(A, t) = e^{At}$  使

$$\Phi(t) = L^{-1}[(sI - A)^{-1}] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (At)^k = e^{At}$$

显然，需要对这个指数为方阵的矩阵函数给予更数学化的定义：



# 第三章 状态空间方程的解

## § 3.1 矩阵指数

### 3.1.1 状态转移矩阵

### 3.1.2 矩阵指数的定义和性质

### 3.1.3 矩阵指数的求取

### 3.1.4 模态与模态分解

## § 3.2 状态空间方程的解

## § 3.3 预解矩阵及频域求解

# § 3.1 矩阵指数

## 3.1.2 矩阵指数的定义和性质

定义3.2（矩阵指数） 对方阵  $S$ ，其矩阵指数定义为

$$e^S = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} S^k = I + S + \frac{1}{2!} S^2 + \frac{1}{3!} S^3 + \dots$$

因线性定常系统的状态转移矩阵（它还是时间  $t$  的函数）是最常见的矩阵指数，故在控制理论的书籍中，经常把

$$e^{At} = \exp(At) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k t^k = I + At + \frac{1}{2!} A^2 t^2 + \frac{1}{3!} A^3 t^3 + \dots$$

就默认为矩阵指数的定义式。以下，尤其是关于矩阵指数的性质的讨论，也将在此基础上展开。同学们自当可以辨别。

## § 3.1 矩阵指数

### 3.1.2 矩阵指数的定义和性质

#### 一、矩阵指数（状态转移矩阵）定义

$$e^{At} = \exp(At) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k t^k = I + At + \frac{1}{2!} A^2 t^2 + \frac{1}{3!} A^3 t^3 + \dots$$

#### 二、状态转移矩阵的性质

性质1:  $\Phi(t) = e^{At} = L^{-1}[(sI - A)^{-1}]$

性质2:  $\Phi(0) = e^{A0} = I$

性质3:  $\dot{\Phi}(t) = A\Phi(t) = \Phi(t)A \quad \frac{d}{dt}(e^{At}) = Ae^{At} = e^{At}A$

## 3.1.2 矩阵指数的定义和性质

### 二、状态转移矩阵的性质

$$\Phi(t) = e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (At)^k$$

性质4:  $\Phi(t)\Phi(\tau) = \Phi(t + \tau)$

$$e^{At}e^{A\tau} = e^{A(t+\tau)}$$

推论1: 状态转移矩阵是可逆阵, 且总有

$$[\Phi(t)]^{-1} = \Phi(-t)$$

$$[e^{At}]^{-1} = e^{-At}$$

推论2: 对一切整数 $k$ , 总有

$$[\Phi(t)]^k = \Phi(kt)$$

$$[e^{At}]^k = e^{Akt}$$

易见, 性质4是熟知的标量指数的一般规则  $e^{at}e^{a\tau} = e^{a(t+\tau)}$  的简单推广。于是, 我们立刻想到并希望, 上述规则的另一个写法  $e^{at}e^{bt} = e^{(a+b)t}$  能简单地推广至矩阵情形, 非常遗憾的是, 这个推广一般而言不能成立!

## 3.1.2 矩阵指数的定义和性质

### 二、状态转移矩阵的性质

$$\Phi(t) = e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (At)^k$$

**性质5:**  $AB = BA \Leftrightarrow e^{At} e^{Bt} = e^{(A+B)t}$

**推论3:** 若对标量  $\sigma$  和方阵  $B$ , 有  $A = \sigma I + B$  则:

$$e^{At} = e^{\sigma t} e^{Bt}$$

**性质6:** 对任一非奇异矩阵  $P$  有

$$e^{P^{-1}APt} = P^{-1} e^{At} P$$

# 第三章 状态空间方程的解

## § 3.1 矩阵指数

3.1.1 状态转移矩阵

3.1.2 矩阵指数的定义和性质

3.1.3 矩阵指数的求取

3.1.4 模态与模态分解

## § 3.2 状态空间方程的解

## § 3.3 预解矩阵及频域求解

## § 3.1 矩阵指数

### 3.1.3 矩阵指数的求取

#### 一、直接计算法

$$e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k t^k$$

- 若矩阵 $A$ 呈对角线形, 即:  $A = \text{diag}(a_1, a_2, \dots, a_m)$  则

$$e^{At} = \text{diag}(e^{a_1 t}, e^{a_2 t}, \dots, e^{a_m t})$$

- 若矩阵 $A$ 呈对角块形, 即:  $A = \text{Diag}(A_1, A_2, \dots, A_m)$  则

$$e^{At} = \text{Diag}(e^{A_1 t}, e^{A_2 t}, \dots, e^{A_m t})$$

### 3.1.3 矩阵指数的求取

#### 一、直接计算法

$$e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k t^k$$

【例3.1】求以下方阵的矩阵指数  $e^{At}$

$$A_1 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



### 3.1.3 矩阵指数的求取

#### 二、拉氏变换法 $e^{At} = L^{-1}[(sI - A)^{-1}]$

【例3.2】：已知  $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$ ，试求  $e^{At}$

$$(sI - A)^{-1} = \begin{bmatrix} s & -1 \\ 2 & s+3 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{s^2 + 3s + 2} \begin{bmatrix} s+3 & 1 \\ -2 & s \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} e^{At} &= L^{-1}[(sI - A)^{-1}] = L^{-1} \left( \begin{bmatrix} \frac{s+3}{(s+1)(s+2)} & \frac{1}{(s+1)(s+2)} \\ \frac{-2}{(s+1)(s+2)} & \frac{s}{(s+1)(s+2)} \end{bmatrix} \right) \\ &= L^{-1} \left( \begin{bmatrix} \frac{2}{(s+1)} - \frac{1}{(s+2)} & \frac{1}{(s+1)} - \frac{1}{(s+2)} \\ \frac{-2}{(s+1)} + \frac{2}{(s+2)} & \frac{-1}{(s+1)} + \frac{2}{(s+2)} \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ -2e^{-t} + 2e^{-2t} & -e^{-t} + 2e^{-2t} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

### 3.1.3 矩阵指数的求取

#### 三、标准型法

$$e^{At} = \mathbf{Q} e^{(\mathbf{Q}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{Q})t} \mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{Q} e^{\Lambda t} \mathbf{Q}^{-1}$$

当矩阵  $\mathbf{A}$  有  $n$  个互不相关的特征向量时，可以通过相似变换将  $\mathbf{A}$  变换为对角线形。

【例3.3】用标准型法重做例3.2

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} & \mathbf{A} &= \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q}^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \\ e^{At} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} e^{-t} & e^{-2t} \\ -e^{-t} & -2e^{-2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2e^{-2t} - e^{-2t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ -2e^{-t} + 2e^{-2t} & -e^{-t} + 2e^{-2t} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

### 3.1.3 矩阵指数的求取

#### 三、标准型法

$$e^{At} = Q e^{(Q^{-1}AQ)t} Q^{-1} = Q e^{Jt} Q^{-1}$$

一定存在相似变换，化方阵 $A$ 为约当型。

注意：对角线形是约当型的一个特殊形式(所有约当块均为一阶)。在使用标准型法求取约当矩阵的矩阵指数时，需记忆如下结论(以五阶为例)：

$$A = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad e^{At} = e^{\lambda t} \begin{bmatrix} 1 & t & \frac{1}{2}t^2 & \frac{1}{3!}t^3 & \frac{1}{4!}t^4 \\ 0 & 1 & t & \frac{1}{2}t^2 & \frac{1}{3!}t^3 \\ 0 & 0 & 1 & t & \frac{1}{2}t^2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

### 3.1.3 矩阵指数的求取

#### 三、标准型法

$$e^{At} = \mathbf{Q} e^{(\mathbf{Q}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{Q})t} \mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{Q} e^{\mathbf{A}t} \mathbf{Q}^{-1}$$

【例3.4】已知  $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & -5 & 4 \end{bmatrix}$ ，用标准型法求  $e^{At}$

$$|\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}| = \lambda^3 - 4\lambda^2 + 5\lambda - 2 = (\lambda - 1)^2(\lambda - 2)$$

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ \lambda_1 & 1 & \lambda_2 \\ \lambda_1^2 & 2\lambda_1 & \lambda_2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -2 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{A} = \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad e^{\mathbf{A}t} = \begin{bmatrix} e^t & te^t & 0 \\ 0 & e^t & 0 \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{bmatrix}$$

$$e^{At} = \mathbf{Q} e^{\mathbf{A}t} \mathbf{Q}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^t & te^t & 0 \\ 0 & e^t & 0 \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -2 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2te^t + e^{2t} & (3t+2)e^t - 2e^{2t} & -(t+1)e^t + e^{2t} \\ -2(t+1)e^t + 2e^{2t} & (3t+5)e^t - 4e^{2t} & -(t+2)e^t + 2e^{2t} \\ -2(t+2)e^t + 4e^{2t} & (3t+8)e^t - 8e^{2t} & -(t+3)e^t + 4e^{2t} \end{bmatrix}$$

### 3.1.3 矩阵指数的求取

#### 四、待定系数法

$$e^{At} = \sum_{m=0}^{n-1} \alpha_m(t) A^m$$

凯利-哈密尔顿定理：方阵满足自身的特征方程。  
(*Cayley Hamilton*)

对于  $n \times n$  矩阵  $A$ ，设其特征多项式为

$$f(\lambda) = |\lambda I - A| = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0$$

则凯利-哈密尔顿定理保证如下的矩阵方程成立

$$f(A) = a_0 I + a_1 A + a_2 A^2 + \cdots + a_{n-1} A^{n-1} + A^n = \mathbf{0}$$

推论：若  $A \in R^{n \times n}$  则对任意自然数  $k$  总有  $A^k = \sum_{m=0}^{n-1} \beta_m A^m$   
更进一步：

$$e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k t^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \sum_{m=0}^{n-1} \beta_m A^m = \sum_{m=0}^{n-1} \alpha_m(t) A^m$$

## 四、待定系数法

$$e^{At} = \sum_{m=0}^{n-1} \alpha_m(t) A^m$$

结论：已知某函数  $f(\lambda)$  和一方阵  $A$ ，若多项式  $g(\lambda)$  在  $A$  的谱 (*spectrum*) 上与  $f(\lambda)$  相等，则矩阵函数  $f(A) = g(A)$ 。

若方阵  $A$  有  $n$  个互不相同的特征值  $\lambda_i (i=1,2,\cdots,n)$ ，则函数  $f(\lambda)$  与  $g(\lambda)$  在矩阵  $A$  的谱上相等可理解为如下  $n$  个等式：

$$f(\lambda_i) = g(\lambda_i), \quad (i=1,2,\cdots,n)$$

$$e^{\lambda_i t} = \sum_{m=0}^{n-1} \alpha_m(t) \lambda_i^m$$

若方阵  $A$  有  $m$  个互不相同的特征值，其第  $k$  个特征值为  $l_k$  重，则函数  $f(\lambda)$  与多项式函数  $g(\lambda)$  在矩阵  $A$  的谱上相等可理解为：

$$\left. \frac{d^{(i)}}{d\lambda^i} f(\lambda) \right|_{\lambda=\lambda_k} = \left. \frac{d^{(i)}}{d\lambda^i} g(\lambda) \right|_{\lambda=\lambda_k} \quad (i=0,1,2,\cdots,l_k-1; \quad k=1,2,\cdots,m)$$

## 四、待定系数法

$$e^{At} = \sum_{m=0}^{n-1} \alpha_m(t) A^m$$

【例3.5】：已知  $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$ ，求  $e^{At}$

解： $A$  特征多项式为： $|\lambda I - A| = \lambda^2 + 3\lambda + 2 = (\lambda + 1)(\lambda + 2)$

即特征值为  $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -2$ 。

设  $f(\lambda) = e^{\lambda t}$ ， $g(\lambda) = \alpha_0 + \alpha_1 \lambda$  则

$$e^{At} = \alpha_0(t)I + \alpha_1(t)A$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad e^{-t} &= \alpha_0(t) + \alpha_1(t)(-1) & \text{得} \quad \alpha_0(t) &= 2e^{-t} - e^{-2t} \\ e^{-2t} &= \alpha_0(t) + \alpha_1(t)(-2) & \alpha_1(t) &= e^{-t} - e^{-2t} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{所以} \quad e^{At} &= (2e^{-t} - e^{-2t}) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + (e^{-t} - e^{-2t}) \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2e^{-2t} - e^{-2t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ -2e^{-t} + 2e^{-2t} & -e^{-t} + 2e^{-2t} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

## 四、待定系数法

【例3.6】：已知  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ，求  $A^{100}$

解： $A$  特征多项式为： $|\lambda I - A| = (\lambda - 1)^2$  即特征值为  $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ 。

取  $f(\lambda) = \lambda^{100}$ ,  $g(\lambda) = g_0 + g_1\lambda$   $A^{100} = g_0 I + g_1 A$

解  $\lambda = 1$ :  $f(\lambda) = g(\lambda)$ ,  $f'(\lambda) = g'(\lambda)$

即  $\lambda = 1$ :  $\lambda^{100} = g_0 + g_1\lambda \Rightarrow 1 = g_0 + g_1$   $g_0 = -99$

$\lambda = 1$ :  $100\lambda^{99} = g_1 \Rightarrow 100 = g_1$  ➡  $g_1 = 100$

得  $g(\lambda) = g_0 + g_1\lambda = -99 + 100\lambda$

所以

$$A^{100} = f(A) = g(A) = 100A - 99I = 100 \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - 99 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 200 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$



## 四、待定系数法

$$e^{At} = \sum_{m=0}^{n-1} \alpha_m(t) A^m$$

【例3.7】：已知  $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & -5 & 4 \end{bmatrix}$ ，求  $e^{At}$

解： $A$  特征多项式为： $|\lambda I - A| = \lambda^3 - 4\lambda^2 + 5\lambda - 2 = (\lambda - 1)^2(\lambda - 2)$

故若设  $e^{At} = \alpha_0(t)I + \alpha_1(t)A + \alpha_2(t)A^2$

则可解得

$$\begin{bmatrix} \alpha_0(t) \\ \alpha_1(t) \\ \alpha_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 \\ 0 & 1 & 2\lambda_1 \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} \\ te^{\lambda_1 t} \\ e^{\lambda_2 t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} e^t \\ te^t \\ e^{2t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2te^t + e^{2t} \\ (3t+2)e^t - 2e^{2t} \\ -(t+1)e^t + e^{2t} \end{bmatrix}$$

所以

$$\begin{aligned} e^{At} &= (-2te^t + e^{2t}) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + [(3t+2)e^t - 2e^{2t}] \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & -5 & 4 \end{bmatrix} + [-(t+1)e^t + e^{2t}] \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & -5 & 4 \\ 8 & -18 & 11 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -2te^t + e^{2t} & (3t+2)e^t - 2e^{2t} & -(t+1)e^t + e^{2t} \\ -2(t+1)e^t + 2e^{2t} & (3t+5)e^t - 4e^{2t} & -(t+2)e^t + 2e^{2t} \\ -2(t+2)e^t + 4e^{2t} & (3t+8)e^t - 8e^{2t} & -(t+3)e^t + 4e^{2t} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

# 第三章 状态空间方程的解

## § 3.1 矩阵指数

3.1.1 状态转移矩阵

3.1.2 矩阵指数的定义和性质

3.1.3 矩阵指数的求取

3.1.4 模态与模态分解

## § 3.2 状态空间方程的解

## § 3.3 预解矩阵及频域求解

## § 3.1 矩阵指数

### 3.1.4 模态与模态分解

考察齐次状态空间方程的解，以互不相同特征值为例：

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= e^{At} \mathbf{x}_0 = e^{(Q\Lambda Q^{-1})t} \mathbf{x}_0 = \mathbf{Q}e^{At}\mathbf{Q}^{-1} \mathbf{x}_0 \\ &= [\mathbf{q}_1 \ \mathbf{q}_2 \ \cdots \ \mathbf{q}_n] \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & & & \\ & e^{\lambda_2 t} & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{p}_1 \\ \mathbf{p}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{p}_n \end{bmatrix} \mathbf{x}_0 = [e^{\lambda_1 t} \mathbf{q}_1 \ e^{\lambda_2 t} \mathbf{q}_2 \ \cdots \ e^{\lambda_n t} \mathbf{q}_n] \begin{bmatrix} \mathbf{p}_1 \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{p}_2 \mathbf{x}_0 \\ \vdots \\ \mathbf{p}_n \mathbf{x}_0 \end{bmatrix} \\ &= (\mathbf{p}_1 \mathbf{x}_0) e^{\lambda_1 t} \mathbf{q}_1 + (\mathbf{p}_2 \mathbf{x}_0) e^{\lambda_2 t} \mathbf{q}_2 + \cdots + (\mathbf{p}_n \mathbf{x}_0) e^{\lambda_n t} \mathbf{q}_n \end{aligned}$$

【注意】：式中， $\mathbf{p}$ 为行向量， $\mathbf{q}$ 、 $\mathbf{x}$ 为列向量， $(\mathbf{p}\mathbf{x})$ 为标量

对于一个给定的线性定常系统，不论进行怎样的状态变换，系统矩阵 $\mathbf{A}$ 的特征值及其相应的特征向量是不会改变的。

由于  $e^{\lambda_i t}$  体现了系统的固有属性，一般将  $e^{\lambda_i t}$ , ( $i=1,2,\cdots,n$ ) 称作系统的模态，或者称作振荡振型，简称振型。也称将系统矩阵约当化的状态变换阵 $\mathbf{Q}$ 为该系统的模态矩阵，称该状态变换过程及结果为模态分解。

# 第三章 状态空间方程的解

## § 3.1 矩阵指数

## § 3.2 状态空间方程的解

### 3.2.1 非齐次状态方程的解

### 3.2.2 状态空间方程的解

### 3.3.3 状态空间方程的离散化

## § 3.3 预解矩阵及频域求解

## § 3.2 状态空间方程的解

### 3.2.1 线性定常非齐次状态方程的解

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$$

两端同时左乘  $e^{-\mathbf{A}t}$  并移项  $e^{-\mathbf{A}t}\dot{\mathbf{x}}(t) - e^{-\mathbf{A}t}\mathbf{A}\mathbf{x}(t) = e^{-\mathbf{A}t}\mathbf{B}\mathbf{u}(t)$

此即

$$\frac{d}{dt}\left(e^{-\mathbf{A}t}\mathbf{x}(t)\right) = e^{-\mathbf{A}t}\mathbf{B}\mathbf{u}(t)$$

对此式从0至  $t$  积分

$$e^{-\mathbf{A}t}\mathbf{x}(t) - e^0\mathbf{x}(0) = \int_0^t e^{-\mathbf{A}\tau}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau$$

移项、等式两边同时左乘  $e^{\mathbf{A}t}$

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}_0 + \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau$$

变量代换后  $\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}_0 + \int_0^t e^{\mathbf{A}\tau}\mathbf{B}\mathbf{u}(t-\tau)d\tau$

### 3.2.1 线性定常非齐次状态方程的解

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$$

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t} \mathbf{x}_0 + \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)} \mathbf{B}\mathbf{u}(\tau) d\tau \quad \mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t} \mathbf{x}_0 + \int_0^t e^{\mathbf{A}\tau} \mathbf{B}\mathbf{u}(t-\tau) d\tau$$

即使是定常系统，也会遇到初始时刻非零的问题。此时

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}(t-t_0)} \mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)} \mathbf{B}\mathbf{u}(\tau) d\tau$$

$$\mathbf{x}(t_0) = e^{\mathbf{A}t_0} \mathbf{x}_0 + \int_0^{t_0} e^{\mathbf{A}(t_0-\tau)} \mathbf{B}\mathbf{u}(\tau) d\tau$$

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= e^{\mathbf{A}(t-t_0+t_0)} \mathbf{x}_0 + \int_0^{t_0} e^{\mathbf{A}(t-t_0+t_0-\tau)} \mathbf{B}\mathbf{u}(\tau) d\tau + \int_{t_0}^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)} \mathbf{B}\mathbf{u}(\tau) d\tau \\ &= \left[ e^{\mathbf{A}(t-t_0)} e^{\mathbf{A}t_0} \mathbf{x}_0 + e^{\mathbf{A}(t-t_0)} \int_0^{t_0} e^{\mathbf{A}(t_0-\tau)} \mathbf{B}\mathbf{u}(\tau) d\tau \right] + \int_{t_0}^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)} \mathbf{B}\mathbf{u}(\tau) d\tau \\ &= e^{\mathbf{A}(t-t_0)} \mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)} \mathbf{B}\mathbf{u}(\tau) d\tau \end{aligned}$$

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}(t-t_0)} \mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^t e^{\mathbf{A}\tau} \mathbf{B}\mathbf{u}(t-\tau) d\tau$$

### 3.2.1 线性定常非齐次状态方程的解

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$$

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t} \mathbf{x}_0 + \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)} \mathbf{B}u(\tau) d\tau \quad \mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t} \mathbf{x}_0 + \int_0^t e^{\mathbf{A}\tau} \mathbf{B}u(t-\tau) d\tau$$

【例3.9】 已知单输入线性定常系统的状态方程是  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u$  ,  
试综合以下的条件确定矩阵 $\mathbf{A}$ 和向量 $\mathbf{b}$

(1) 当  $\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ ,  $u(t) \equiv 0$  时,  $\mathbf{x}(t) = e^{-t} \mathbf{x}(0)$ ;

(2) 当  $\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ ,  $u(t) \equiv 0$  时,  $\mathbf{x}(t) = e^{-2t} \mathbf{x}(0)$ ;

(3) 当  $\mathbf{x}(0) = \mathbf{0}$ ,  $u(t)$  为单位阶跃信号时,  $\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} 1 - e^{-t} \\ -1 + e^{-t} \end{bmatrix}$

# 第三章 状态空间方程的解

## § 3.1 矩阵指数

## § 3.2 状态空间方程的解

### 3.2.1 非齐次状态方程的解

### 3.2.2 状态空间方程的解

### 3.3.3 状态空间方程的离散化

## § 3.3 预解矩阵及频域求解



## § 3.2 状态空间方程的解

### 3.2.2 状态空间方程的解

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \\ \mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u} \end{cases} \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$$

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t} \mathbf{x}_0 + \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)} \mathbf{B}\mathbf{u}(\tau) d\tau = e^{\mathbf{A}t} \mathbf{x}_0 + \int_0^t e^{\mathbf{A}\tau} \mathbf{B}\mathbf{u}(t-\tau) d\tau$$

$$\begin{aligned} \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}e^{\mathbf{A}t} \mathbf{x}_0 + \mathbf{C} \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)} \mathbf{B}\mathbf{u}(\tau) d\tau + \mathbf{D}\mathbf{u} \\ &= \mathbf{C}e^{\mathbf{A}t} \mathbf{x}_0 + \mathbf{C} \int_0^t e^{\mathbf{A}\tau} \mathbf{B}\mathbf{u}(t-\tau) d\tau + \mathbf{D}\mathbf{u} \end{aligned}$$

# 第三章 状态空间方程的解

## § 3.1 矩阵指数

## § 3.2 状态空间方程的解

3.2.1 非齐次状态方程的解

3.2.2 状态空间方程的解

3.3.3 状态空间方程的离散化

## § 3.3 预解矩阵及频域求解

## § 3.2 状态空间方程的解

### 3.2.3 状态空间方程的离散化

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \\ \mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u} \end{cases} \quad \begin{cases} \mathbf{x}[k+1] = \mathbf{F}\mathbf{x}[k] + \mathbf{H}\mathbf{u}[k] \\ \mathbf{y}[k] = \mathbf{C}_d\mathbf{x}[k] + \mathbf{D}_d\mathbf{u}[k] \end{cases}$$

设  $\mathbf{u}(t)$  分段定常, 且 (采样  $T$ 、保持、计算机控制) 对所有的  $k = 0, 1, 2, \dots$

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}(kT) =: \mathbf{u}[k] \quad \forall kT \leq t < (k+1)T$$

以  $kT$  时刻为时间起点应用状态方程解的公式:

$$\mathbf{x}((k+1)T) = e^{\mathbf{A}T} \mathbf{x}(kT) + \int_{kT}^{(k+1)T} e^{\mathbf{A}((k+1)T-\tau)} \mathbf{B}\mathbf{u}(\tau) d\tau$$

$$\mathbf{x}[k+1] = e^{\mathbf{A}T} \mathbf{x}[k] + \int_{kT}^{(k+1)T} e^{\mathbf{A}((k+1)T-\tau)} d\tau \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{u}[k]$$

而  $\int_{kT}^{(k+1)T} e^{\mathbf{A}((k+1)T-\tau)} d\tau \cdot \mathbf{B} = -\int_T^0 e^{\mathbf{A}\alpha} d\alpha \cdot \mathbf{B} = \int_0^T e^{\mathbf{A}\tau} d\tau \cdot \mathbf{B} \quad \alpha = (k+1)T - \tau$

$$\mathbf{F} = e^{\mathbf{A}T} \quad \mathbf{H} = \left( \int_0^T e^{\mathbf{A}\tau} d\tau \right) \mathbf{B} \quad \mathbf{C}_d = \mathbf{C} \quad \mathbf{D}_d = \mathbf{D}$$

### 3.2.3 状态空间方程的离散化

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u \\ \mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}u \end{cases} \quad \longrightarrow \quad \begin{cases} \mathbf{x}[k+1] = \mathbf{F}\mathbf{x}[k] + \mathbf{H}u[k] \\ \mathbf{y}[k] = \mathbf{C}\mathbf{x}[k] + \mathbf{D}u[k] \end{cases}$$

$$\mathbf{F} = e^{\mathbf{A}T} \quad \mathbf{H} = \left( \int_0^T e^{\mathbf{A}\tau} d\tau \right) \mathbf{B}$$

【例3.10】若 $\mathbf{A}$ 非奇异，证明： $\mathbf{H} = \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{e}^{\mathbf{A}T} - \mathbf{I})\mathbf{B}$

证明：令方阵函数 $\mathbf{M}(t) = \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{e}^{\mathbf{A}t} - \mathbf{I})$ ，则 $\mathbf{M}(0) = \mathbf{O}$ 且

$$\frac{d}{dt}\mathbf{M}(t) = \frac{d}{dt}(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{e}^{\mathbf{A}t} - \mathbf{A}^{-1}) = \mathbf{A}^{-1}\frac{d}{dt}(\mathbf{e}^{\mathbf{A}t}) = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A}\mathbf{e}^{\mathbf{A}t} = \mathbf{e}^{\mathbf{A}t}$$

于是：

$$\begin{aligned} \mathbf{H} &= \int_0^T \mathbf{e}^{\mathbf{A}\tau} d\tau \cdot \mathbf{B} = \int_0^T \left( \frac{d}{d\tau} \mathbf{M}(\tau) \right) d\tau \cdot \mathbf{B} \\ &= [\mathbf{M}(T) - \mathbf{M}(0)]\mathbf{B} = \mathbf{M}(T)\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{e}^{\mathbf{A}T} - \mathbf{I})\mathbf{B} \end{aligned}$$

【例3-11】（本校2007年硕士研究生招生考试试题）对线性定常系统

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u, \quad y = \mathbf{c}\mathbf{x}$$

若 $\mathbf{A}$ 非奇异，证明：系统在零初态条件下的单位阶跃响应是

$$y(t) = \mathbf{c}\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{e}^{\mathbf{A}t} - \mathbf{I})\mathbf{b}$$

证明：系统的状态方程的解为

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{e}^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0) + \int_0^t \mathbf{e}^{\mathbf{A}\tau}\mathbf{b}u(t-\tau)d\tau$$

当初态为零且输入为单位阶跃信号时

$$\mathbf{x}(t) = \int_0^t \mathbf{e}^{\mathbf{A}\tau}\mathbf{b}d\tau$$

对时间求微分并与状态方程联立

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{e}^{\mathbf{A}t}\mathbf{b} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}$$

因此（注意后一等号），当 $\mathbf{A}$ 可逆时，系统的输出响应是

$$y(t) = \mathbf{c}\mathbf{x} = \mathbf{c} \cdot \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{e}^{\mathbf{A}t}\mathbf{b} - \mathbf{b}) = \mathbf{c}\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{e}^{\mathbf{A}t} - \mathbf{I})\mathbf{b}$$

# 第三章 状态空间方程的解

§ 3.1 矩阵指数

§ 3.2 状态空间方程的解

§ 3.3 预解矩阵及频域求解

# § 3.1 预解矩阵及频域求解

(自学)

## 习题： p118-121

**3.7, 3.8, 3.9, 3.12, 3.13,**

**3.11(c)** 改为 “...单位冲激相应和单位阶跃相应”

**3.14(ab)** 删去 “...用频域法...”

**3.19**

补1：证明：

$$\exp\left(\begin{bmatrix} \sigma & \omega \\ -\omega & \sigma \end{bmatrix} t\right) = e^{\sigma t} \begin{bmatrix} \cos \omega t & \sin \omega t \\ -\sin \omega t & \cos \omega t \end{bmatrix}$$

补2：对  $n \times n$  矩阵  $A$ ，证明：对所有自然数  $k$

$$A^k = \sum_{m=0}^{n-1} \alpha_m A^m$$