中国科学技术大学考试试卷

考试科目：理论力学（期中）　　开课院系：自动化系　　考试日期：2024 年 4 月

学生所在系：__________　　姓名：__________　　学号：__________

一.〖20分〗现有质量为 m、底面半径为 r、高为 h 的均质圆锥体，求：(1) 圆锥相对于中心轴的转动惯量 I_1；(2) 圆锥相对于底面任一直径的转动惯量 I_2.

解: 取一薄圆片, 半径为 x, 高为 dy, 则

$\frac{x}{r} = \frac{h-y}{h}, x = (1-\frac{y}{h})r, dm = \rho \cdot \pi x^2 dy$

相对中心轴:$dI_1 = \frac{1}{2}x^2 dm$

相对直径由平行轴定理:$dI_2 = \frac{1}{4}x^2 dm + y^2 dm$

(注意: 正交轴定理只对平面图形成立, 计算 I_2 时不可用)

$$
\begin{aligned}
I_1 &= \int_0^h \frac{1}{2}\rho\pi x^4 dy \\
&= \int_0^h \frac{\rho\pi r^4}{2h^4}(h-y)^4 dy \\
&= \frac{\rho\pi r^4}{2h^4}\int_0^h y^4 dy \\
&= \frac{\rho\pi r^4 h}{10} \\
&= \frac{3}{10}(\frac{1}{3}\rho\pi r^2 h)r^2 \\
&= \frac{3}{10}mr^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
I_2 &= \int_0^h \frac{1}{4}\rho\pi x^4 dy + \int_0^h y^2 \cdot \rho\pi x^2 dy \\
&= \frac{I_1}{2} + \frac{\rho\pi r^2}{h^2}\int_0^h y^2(h-y)^2 dy \\
&= \frac{I_1}{2} + \frac{\rho\pi r^2}{h^2}\int_0^h (h^2y^2 - 2hy^3 + y^4) dy \\
&= \frac{I_1}{2} + \rho\pi r^2 h^3 \cdot (\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5}) \\
&= \frac{I_1}{2} + \frac{1}{10}(\frac{1}{3}\rho\pi r^2 h)h^2 \\
&= \frac{3}{20}mr^2 + \frac{1}{10}mh^2
\end{aligned}
$$

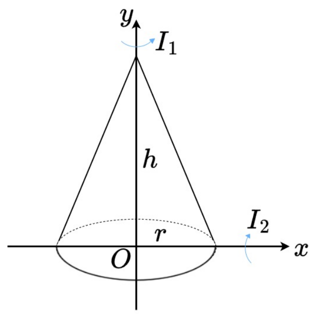


图 1: 圆锥体

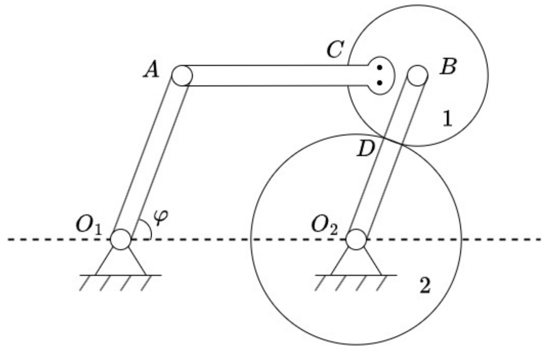


图 2: 齿轮连杆

二.〖16分〗图示机构中齿轮 1 紧固在杆 AC 上,$AB = O_1O_2$, 齿轮 1 和半径为 r_2 的齿轮 2 啮合，啮合点为 D 点. 齿轮 2 可绕 O_2 轴转动且和曲柄 O_2B 没有联系. 设 $O_1A = O_2B = l, \varphi = b\sin\omega t$, 试确定 $t = \frac{\pi}{2\omega}$ 时, 轮 2 的角速度和角加速度.

解: 啮合点 D 与 A 有相同的速度、加速度,

$v_D = v_A = \omega \cdot |O_1A| = \frac{d\varphi}{dt} \cdot |O_1A| = \omega bl\cos\omega t$

$a_A^t = \frac{d^2\varphi}{dt^2} \cdot |O_1A| = -\omega^2 lb\sin\omega t$

此时 $\omega t = \frac{\pi}{2}$

则轮 2 的角速度为 $\omega_2 = \frac{v_D}{r_2} = \frac{\omega bl\cos\omega t}{r_2} = 0$

角加速度为 $\alpha_2 = \frac{a_A^t}{r_2} = -\frac{\omega^2 lb\sin\omega t}{r_2} = -\frac{lb\omega^2}{r_2}$

三.〖16分〗图示两盘匀速转动的角速度分别为 $\omega_1 = 1\ rad/s, \omega_2 = 2\ rad/s$, 两盘半径均为 $R = 50mm$, 两盘转轴距离 $l = 250mm$. 图示瞬时, 两盘位于同一平面内. 求此时盘 2 上的点 A 相对于盘 1 的速度和加速度.

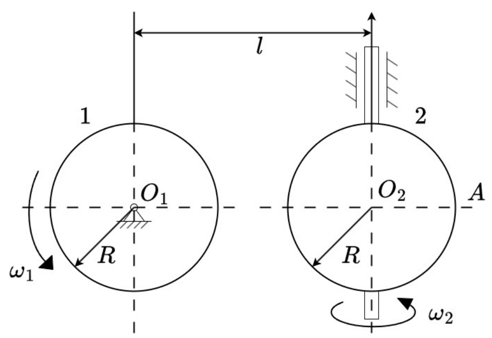


图 3: 双圆盘转动机构

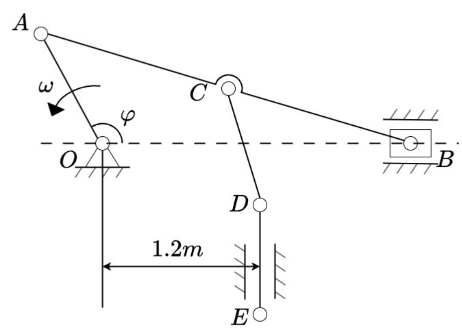
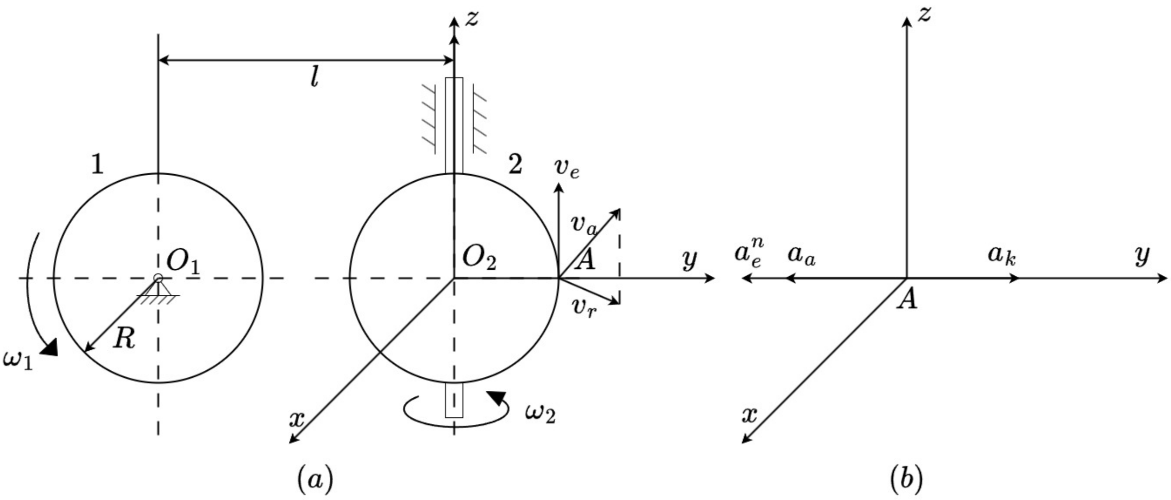


图 4: 多杆配汽机构



解: 以点 A 为动点, 动系建立在圆盘 1 上如图 (a),$\vec{v}_a=\vec{v}_e+\vec{v}_r$

$v_a=\omega_2 R=100mm/s$

$v_e=\omega_1(l+R)=300mm/s$

则 $v_r=\sqrt{v_e^2+v_a^2}=316.2mm/s$

加速度分解如图 (b)

$\vec{a}_a=\vec{a}_e^n+\vec{a}_r+\vec{a}_k$

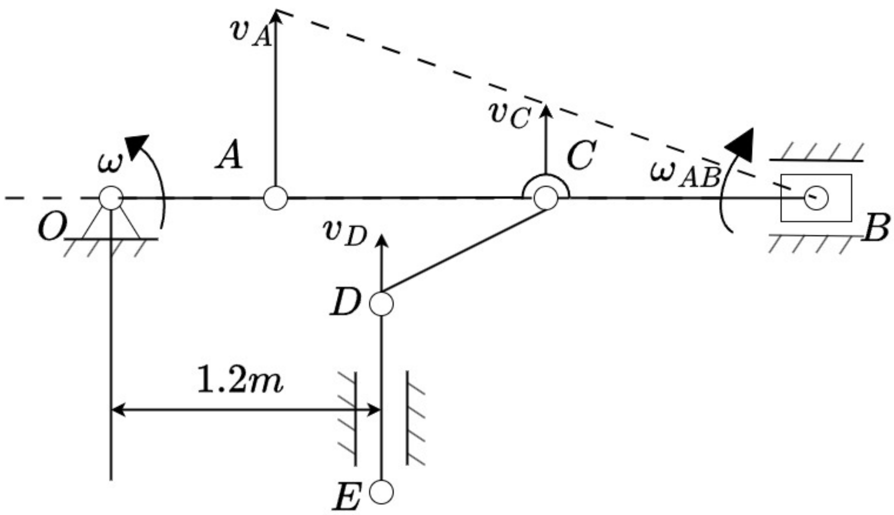
沿 y 向投影:$a_a=a_e^n+a_r-a_k$

其中,$a_a=\omega_2^2 R=200mm/s^2$

$a_e^n=\omega_1^2(R+l)=300mm/s^2$

$a_k=|2\vec{\omega}_e\times\vec{v}_r|=|2\vec{\omega}_1\times v_r|=2\omega_1 v_e=600mm/s^2$

四.〖16分〗图示配汽机构中, 曲柄 OA 的角速度 $\omega=20\ rad/s$, 为常量. 已知 $OA=0.4m, AC=BC=0.2\sqrt{37}m$. 求当 $\varphi=0$ 时, 配汽机构中气阀推杆 DE 的速度.



解: 已知 $v_A = OA \cdot \omega = 0.4 \times 20m/s = 8m/s$

$\varphi = 0$ 时如图应用速度瞬心法有

$\omega_{AB} = \frac{v_A}{AB} = \frac{20}{\sqrt{37}} rad/s$

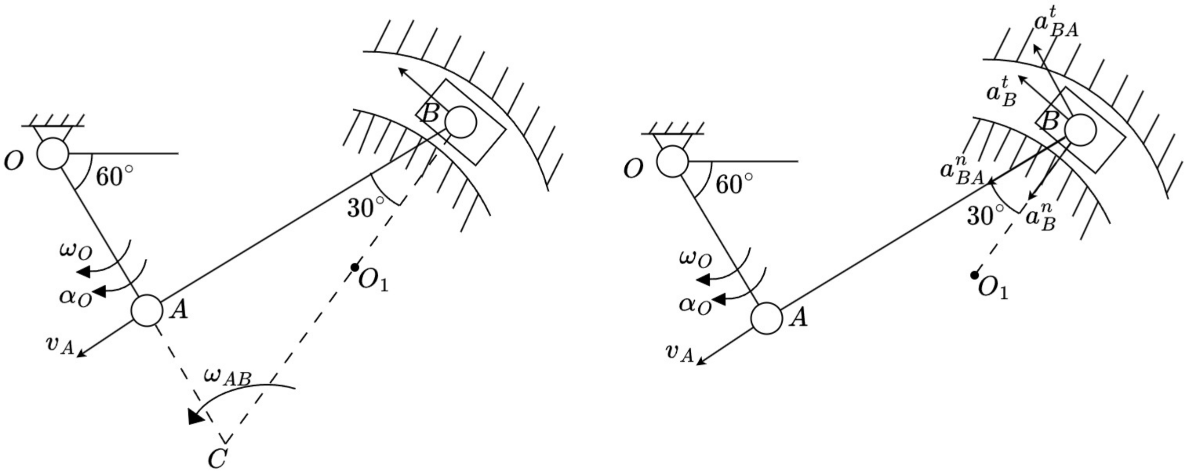
$v_C = BC \cdot \omega_{AB} = 0.2\sqrt{37} \times \frac{20}{\sqrt{37}} m/s = 4m/s$

由于 CD 杆作瞬时平移,DE 杆作平移, 故

$v_C = v_D = v_{DE} = 4m/s$

配汽机构中气阀推杆 DE 的速度为 4m/s.

五.〖16分〗在图示曲柄连杆机构中, 曲柄 OA 绕 O 轴转动, 其角速度为 ω_O, 角加速度为 α_O. 在某瞬时曲柄与水平线间成 $60°$ 角, 而连杆 AB 与曲柄 OA 垂直. 滑块 B 在圆形槽内滑动, 此时半径 O_1B 与连杆 AB 间成 $30°$ 角. 如 $OA = r, AB = 2\sqrt{3}r, O_1B = 2r$, 求在该瞬时, 滑块 B 的切向和法向加速度.



(a) (b)

解: 首先求杆 AB 转动角速度及 B 点速度,

(1) 速度瞬心法: 速度分解如图 (a) 所示,AB 作平面运动, 其速度瞬心位于 C,

已知 A 点的速度 $v_A = OA \cdot \omega_O = \omega_O r$

应用速度瞬心法, 有:

$\omega_{AB} = \frac{v_A}{AC} = \frac{v_A}{AB \tan 30°} = \frac{\omega_O}{2}$

$v_B = BC \cdot \omega_{AB} = \frac{AB}{\cos 30°} \cdot \omega_{AB} = 2\omega_O r$

(2) 基点法:$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{\omega}_{AB} \times \vec{AB}$

已知 v_B 方向, 投影可得 ω_{AB} 及 v_B, 过程略.

基点法对 B 点加速度进行分解如图 (b) 所示,B 点法向加速度为:

$a^n_B = \frac{v_B^2}{O_1B} = 2\omega_O^2 r$

$\vec{a}^t_B + \vec{a}^n_B = \vec{a}^t_A + \vec{a}^n_A + \vec{a}^t_{BA} + \vec{a}^n_{BA}$ ①

其中 $a_A^t = \alpha_O r$

$a_{BA}^n = AB \cdot \omega_{AB}^2 = \frac{\sqrt{3}}{2}\omega_O^2 r$

将①式向 AB 方向投影, 有

$a_B^t \sin 30^\circ + a_B^n \cos 30^\circ = a_A^t + a_{BA}^n$

$\frac{1}{2}a_B^t + 2\omega_O^2 r \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \alpha_O r + \frac{\sqrt{3}}{2}\omega_O^2 r$

所以 B 点的切向加速度为

$a_B^t = (2\alpha_O - \sqrt{3}\omega_O^2)r$

六.〖16分〗均质细杆 OA 可绕水平轴 O 转动, 另一端铰接一均质圆盘, 圆盘可绕铰 A 在铅垂面内自由旋转, 如图所示. 已知杆 OA 长 l, 质量为 m_1; 圆盘半径为 R, 质量为 m_2. 摩擦不计, 初始时杆 OA 水平, 杆和圆盘静止. 求杆与水平线成 θ 角的瞬时, 杆的角速度和角加速度.

解: 以整个系统为研究对象, 在运动过程中只有重力做功, 故可应用动能定理, 求出有关的速度和加速度.

初始时, 系统静止, 初动能为 $T_1 = 0$

圆盘和杆 OA 间可相对运动, 它们不是一个刚体, 分别分析运动情况,

对圆盘应用相对质心的动量矩定理有

$I_C\alpha = \sum M_C(\vec{F}) = 0$

作用在圆盘上的外力对质心主矩为 0, 故圆盘相对质心的角加速度 $\alpha = 0$, 又因初始时 $\omega = 0$, 故圆盘作平动.

杆 OA 作定轴转动, 杆与水平线成 θ 角的瞬时, 系统动能为:

$T_2 = \frac{1}{2}I_O\omega^2 + \frac{1}{2}m_2 v_A^2$

其中杆 OA 相对水平轴 O 的转动惯量 $I_O = \frac{1}{3}m_1 l^2$

$v_A = \omega l, T_1 = 0$

外力对系统所做的功为:

$\sum W_{12} = m_1 g \cdot \frac{l}{2}\sin\theta + m_2 g l \sin\theta$

根据动能定理 $T_2 - T_1 = \sum W_{12}$, 有:

$\frac{1}{6}m_1 l^2\omega^2 + \frac{1}{2}m_2 l^2\omega^2 = m_1 g \cdot \frac{l}{2}\sin\theta + m_2 g l \sin\theta$ ①

由此解得杆的角速度为:

$\omega = \dot{\theta} = \sqrt{\frac{3m_1+6m_2}{m_1+3m_2}\frac{g}{l}\sin\theta}$

将①式对时间求导, 并消去 $\dot{\theta} = \omega$, 得:

$\frac{1}{3}m_1 l^2\alpha + m_2 l^2\alpha = m_1 g \cdot \frac{l}{2}\cos\theta + m_2 g l \cos\theta$

由此解得杆的角加速度为:

$\alpha = \frac{3m_1+6m_2}{m_1+3m_2}\frac{g}{2l}\cos\theta$

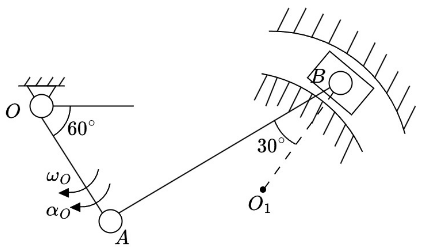


图 5: 滑块连杆

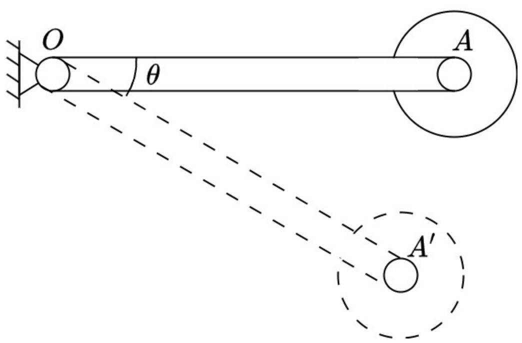


图 6: 圆盘连杆