2-5 题解：由题意可知： $OB=\sqrt{x^2+H^2}$

∴ 吊桶上升运动：$S=OB-H=\sqrt{x^2+H^2}-H$

将 $x=V_b t$ 代入并对 S 求时间导数

$$V_A=\dot{S}=\frac{d}{dt}\left(\sqrt{x^2+H^2}-H\right)=\frac{d}{dt}\left(\sqrt{(V_b t)^2+H^2}-H\right)$$

$$=\frac{{V_b}^2 t}{\sqrt{(V_b t)^2+H^2}}=\frac{V_b\cdot x}{\sqrt{x^2+H^2}}$$

加速度 $a_A=\dfrac{dV_A}{dt}=\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{{V_b}^2 t}{\sqrt{(V_b t)^2+H^2}}\right)$

$$=\frac{{V_b}^2\sqrt{x^2+H^2}-\dfrac{{V_b}^2x^2}{\sqrt{x^2+H^2}}}{x^2+H^2}=\frac{{V_b}^2H^2}{(x^2+H^2)^{3/2}}$$

2-6 题解：

$$\rho=le^{\varphi k}$$

（1） $v_\rho=le^t$， $v_\varphi=\dfrac{l}{k}e^t$

$$a_\rho=le^t(1-\frac{1}{k^2}),\quad a_\varphi=2\frac{l}{k}e^t$$

$$\rho=l(1+\cos\varphi)$$

$$v_\rho=-l\omega\sin\omega t,\quad v_\varphi=l\omega(1+\cos\omega t)$$

（2） $a_\rho=-l\omega^2(1+2\cos\omega t)$

$$a_\varphi=-2l\omega^2\sin\omega t$$

$$\rho=l\sqrt{2\cos 2\varphi}$$

$$v_\rho=\frac{-l\sin t}{\sqrt{2\cos t}},\quad v_\varphi=\frac{l}{2}\sqrt{2\cos t}$$

（3） $a_\rho=-l(1+2\cos^2 t)\ (2\cos t)^{-3/2}$,

$$a_\varphi=-l\sin t/\sqrt{2\cos t}$$

$$\rho=l(\sin\varphi\cdot tg\varphi-\cos\varphi)$$

（4） $v_\rho=\dfrac{lt(t^2+3)}{(t^2+1)^{3/2}}$， $v_\varphi=\dfrac{t^2-1}{(1+t^2)\sqrt{t^2+1}}$

$$a_\rho=\frac{4l(1-t^2)}{(t^2+1)^{5/2}},\quad a_\varphi=\frac{8lt}{(1+t^2)^{5/2}}$$

2－14 题解： 由 $a=-f(t)$ 并设初速度为 v_0

则

$$v(t)=v_0-\int_0^t f(t)\,dt$$

$$v(T)=v_0-\int_0^T f(t)\,dt=0$$

$$ds=v\cdot dt$$

∴ $$s=\int_0^T\left[v_0-\int_0^t f(t)\,dt\right]dt$$

$$=v_0T-\int_0^T\left(\int_0^t f(t)\,dt\right)dt$$

而 $\int_0^T[\int_0^t f(t)\,dt\,]dt$ 采用分步积分法，

$$\int_0^T(\int_0^t f(t)\,dt)dt=t\int_0^t f(t)\,dt\Big|_0^T-\int_0^T t\cdot d\left(\int_0^t f(t)\,dt\right)$$

$$s=v_0T-t\int_0^t f(t)\,dt\Big|_0^T+\int_0^T t\cdot d\left(\int_0^t f(t)\,dt\right)$$

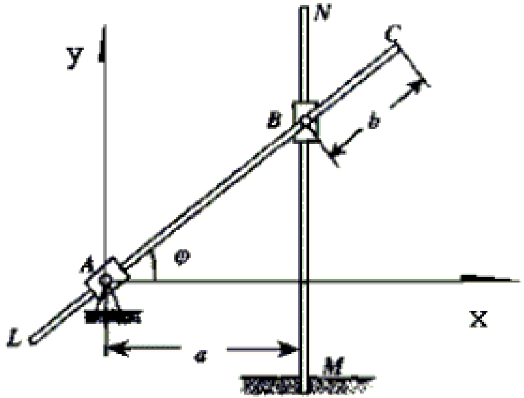
$$v_0T-T\int_0^T f(t)\,dt=(v_0-\int_0^T f(t)\,dt\,)\cdot T$$

$$=v(T)\cdot T=0$$

∴ $$s=\int_0^T t\cdot f(t)\,dt$$

2-15 题解：

建立图示参考坐标系 Axy。写出 C 点的运动规律为：



$$x_c=b\cos\varphi+a=b\cos\omega t+a$$

$$y_c=b\sin\varphi+atg\varphi=b\sin\omega t+atg\omega t$$

C 点的速度 v_x， v_y 分别为：

$$v_x=\dot{x}_c=-b\omega\sin\omega t$$

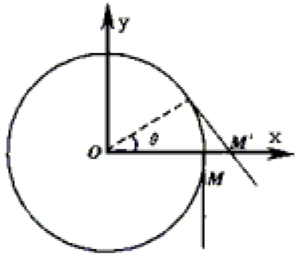
$$v_y=\dot{y}_c=b\omega\cos\omega t+a\omega/\cos^2\omega t$$

C 点的加速度 a_x， a_y 分别为：

$$a_x=\ddot{x}_c=-b\omega^2\cos\omega t$$

$$a_y=\ddot{y}_c=(-b\omega^2+2a\omega^2/\cos^3\omega t)\sin\omega t$$

2-16. 解：设此固定轮的半径为 R. 初始位于 x 轴上（R,0），任一时刻 M 点的坐标为 (x,y)



当圆心角为 θ 时，利用渐开线公式，易得：

$$\begin{cases} x = \dfrac{R}{\cos\theta} - (Rtg\theta - R\theta)\sin\theta = R\cos\theta + R\theta\sin\theta \\ y = R\sin\theta - R\theta\cos\theta \end{cases}$$

$$\frac{ds}{d\theta} = ((\frac{dx}{d\theta})^2 + (\frac{dy}{d\theta})^2)^{1/2}$$

$$= \left[(R\theta\cos\theta)^2 + (R\theta\sin\theta)^2 \right]^{1/2} = R\theta$$

$$S = \int_0^{\theta} R\theta d\theta = \frac{1}{2}R\theta^2$$

即： $S(\theta) = \dfrac{1}{2}R\theta^2$

2-17 题解：

设上岸地在距 A 处 x 公里的 E 处。

由 A 处出发经 E 到 B 处用时为 T

$$T = \frac{x}{5.4} + \sqrt{(l-x)^2 + 9^2} \Big/ 4.32 = T(x)$$

$$l = \sqrt{41*41 - 9^2}$$

求最少用时，即求 T 的最小值

$$\frac{dT}{dx} = 0, \qquad \frac{4.32}{5.4} = \frac{(l-x)}{\sqrt{(l-x)^2 + 9^2}}$$

求得：

$$x = 28 \text{公里处。}$$

2－20 题解：

∵ A，B 两点在垂直于 AB 连线的速度分量是相等的。

∴ AB 之间的连线始终平行于原来的连线。

A 沿直线运动. 即 φ_1 恒定 （V_2，V_2 恒定)

又∵ $V_1\sin\varphi_1 = V_2\sin\varphi_2$ ∴ φ_2 恒定

即 B 也一定沿直线运动.

$$B\begin{cases} x_B = V_2\sin\varphi_2\cdot t \\ y_B = V_2\cos\varphi_2\cdot t \end{cases} \qquad t=0 \text{ 时} \quad s_B = 0$$

$$\therefore \quad \frac{ds_B}{dt} = \left(\dot{x}_B{}^2 + \dot{y}_B{}^2\right)^{1/2} = V_2 \qquad \therefore s = \int_0^t V_2 dt = V_2 t$$

对于 $$A\begin{cases} x_A = V_1\sin\varphi_1 t \\ y_A = V_1\cos\varphi_1 t \end{cases}$$

$$\therefore \quad AB = r_0 + y_A - y_B = r_0 + V_1 t\cos\varphi_1 - V_2 t\cos\varphi_2$$

$AB = 0$ 时相遇 此时 $y_B = r_0 + y_A$

即 $V_2 t\cos\varphi_2 = V_1 t\cos\varphi_1 + r_0$

$$\therefore \quad t = \frac{r_0}{V_2\cos\varphi_2 - V_1\cos\varphi_1}$$

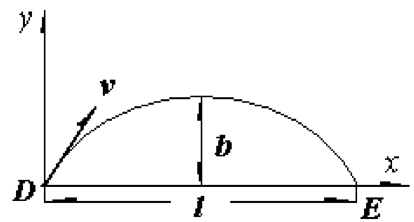
2－35 题解

解。当小球以高为 H 处滑下时，小球在 D 点的速度为 v

则由动能定理 $$mgH = \frac{1}{2}mv^2 \qquad (1)$$

∵ 要求最小高度 H，应使 v 最小而使小球正好落在 E 点，

以 D 为原点，$\overline{DE}$ 为 x 轴建立坐标系如图示。



由几何关系，$\vec{v}$ 与 x 轴的夹角为 45^0

$$\therefore \quad \vec{v} = \frac{\sqrt{2}}{2}v(\vec{i} + \vec{j})$$

设经 t 秒由 D 到 E，则 $\frac{t}{2}$ 时 $v_y = 0$， $\Rightarrow$ $$\frac{\sqrt{2}}{2}v = g\frac{t}{2} \qquad (2)$$

$$l = \frac{\sqrt{2}}{2}vt \qquad (3)$$

$$b = \frac{1}{2}g\left(\frac{t}{2}\right)^2 \qquad (4)$$

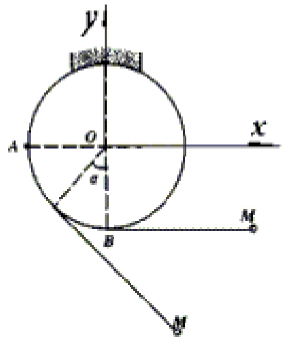
连立求解（1)，(2)，(3)，(4) 可得

$$H_{min} = \frac{1}{2}l = 20\,cm$$

$$h = b = \frac{1}{4}l = 10\,cm$$

2—36 题解

解. 建立如图所示的坐标系



$$\overline{AB}=\frac{\pi}{2}R=\frac{\pi}{2}\times 20=10\pi cm$$

$$BM=l-\overline{AB}=36.9cm$$

$t=0$ 时，M 点的初位置

$(36.9cm,-20cm)$ $v=0$

当转动角度为 α 时，M 点坐标

$$\begin{cases}x=(R\alpha+36.9)\cos\alpha-R\sin\alpha\\ y=-(R\alpha+36.9)\sin\alpha-R\cos\alpha\end{cases}$$

$\therefore$ $\alpha=60°$ 即 $\alpha=\frac{\pi}{3}$ 时，代入得

$$\begin{cases}x=11.58cm\\ y=-60.06cm\end{cases}$$

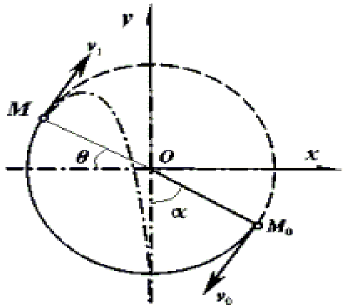
在此过程中只有重力做功，机械能守恒

$$\therefore \quad \frac{1}{2}mv^2=mg(y_0-y)=mg(-20+60.06)\times 10^{-2}$$

$$v=2.83m/s$$

2－38 题解

解（1）建立 Oxy 坐标系，利用机械能守恒（绳的拉力与运动方向竖直，不做功）可得



$$-mgR(\sin\theta+\cos\alpha)=\frac{1}{2}m(v_1^2-v_0^2)$$

$$mg\sin\theta=\frac{mv_1^2}{R}$$

解方程组，得 $v_1=1.57\ m/s$， $\theta=30°$

M 点的坐标为 $(-\frac{\sqrt{3}}{4},\ \frac{1}{4})$

（2）之后，小球以初速度 v_1 作斜上抛运动，一直到小球到达最低点，绳子又重新拉直。设当小球运动到任一位置 (x,y) 有

$$x=x_0+v_1\sin\theta\cdot t=-R\cos\theta+v_1\sin\theta\cdot t$$

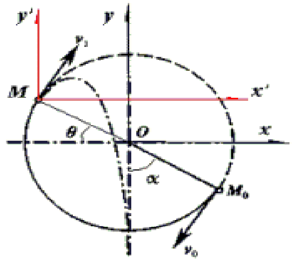
$$y=y_0+v_1\cos\theta-\frac{1}{2}gt^2=R\sin\theta+v_1\cos\theta-\frac{1}{2}gt^2$$

代入数值得轨迹参数方程 $\begin{cases}x=-0.433+0.783t\\ y=0.250+1.356t-4.900t^2\end{cases}$

走完这段轨迹时 $x^2+y^2=R^2=0.25$

将轨迹方程代入求得 t=0.55 (s)。

或取 M 点为新坐标原点，在 Mx'y' 坐标系中描写以后的运动：



$$x'=v_1\sin\theta\cdot t$$

$$y'=v_1\cos\theta-\frac{1}{2}gt^2$$

老坐标的原点为（$\frac{\sqrt{3}}{2}l,-\frac{l}{2}$），当绳子再拉直的时候一定在园上，有

$$(x'-\frac{\sqrt{3}}{2}l)^2+(y'+\frac{l}{2})^2=l^2$$

代入 $x'y'$ 并利用 $t\neq 0$ 得： $\frac{1}{2}g^2t^2-\frac{\sqrt{3}}{2}v_1gt+(v_1^2-\frac{1}{2}gl)=0$

解得 $t\doteq 55\ s$

3.2 解

(a)刚体 B 既受到绳的柔性约束，又受到墙壁的面约束，同时刚体 B 上各质点之间存在着刚性约束;其特征是：柔性约束不可伸长、刚性约束两点间距离不变、面约束是面接触。

(b)杆 BE 既受到绳 AB 的柔性约束，又受到点 E 的柱铰链约束，同时杆 BE 上各质点之间存在着刚性约束，其特征是：柔性约束不可伸长、刚性约束两点间距离不变、柱铰链约束限制杆 BE 在 BDE 平面内运动;刚体 D 只受到绳的柔性约束，同时刚体 D 上各质点之间存在着刚性约束，其特征是柔性约束不可伸长、刚性约束两点间距离不变。

(c)杆 BE 既受到墙角 E 的点约束和刚体 A 的线约束，又受到点 B 的球铰链约束，同时杆 BE 上各质点之间存在着刚性约束，其特征是：点约束是点接触、线约束是线接触、球铰链约束限制杆的自由端只能在以 B 为中心以杆长为半径的球面上的运动、刚性约束是杆上两点间距离不变;刚体 A 受到杆 BE 的线约束和墙壁的面约束，同时刚体 A 上各质点之间存在着刚性约束，其特征是：线约束是线接触、面约束是面接触、刚性约束两点间距离不变。

(d)质点 D 只受到绳的柔性约束，其特征是不可伸长；动滑轮只受到绳的线约束，其特征是线接触；定滑轮既受到绳的线约束又受到点 E 的柱铰链约束，其特征是：线约束是线接触、柱铰链约束限制滑轮在某一平面内运动；同时作为刚体，两滑轮上各质点间存在刚性约束，其特征是两点间距离不变

3.4 解

注：1，每一自由刚体在平面内有三个自由度；

2，平面内两个刚体有一公共节点，则存在两个约束方程

3，每一铰链约束对刚体有两个约束方程

本系统有三个刚体，若不考虑约束，系统有 9 个自由度，实际上系统受到两个铰链约束，两个节点，故系统有 9-2x2-2x2=1 个自由度，其广义坐标可选择 AC 和 AB 的连线的夹角 α 。

3.6 解

系统共有三个刚体，若不考虑约束系统有 9 个自由度，实际上系统受到一个铰链约束、两个节点约束、滑块受到一个位移约束和一个转动约束，故系统有 9-2-2x2-1-1=1 个自由度，其广义坐标可选择 OA 与水平线的夹角α。

3.12 解

如图所示，将 V_B在 OB 以及在与 OB 垂直的方向分解，有

$$V_B \sin\varphi = \omega \cdot OB$$

$$OB = h/\sin\varphi$$

$$\therefore \quad \omega = v\sin^2\varphi/h = \frac{1}{9}\sin^2\varphi \qquad (1/s)$$

$$\therefore \varepsilon = \dot{\omega} = v^2\sin 2\varphi\sin^2\varphi/h^2$$

$$= \sin^2\varphi\sin 2\varphi/81h^2 \qquad (1/s^2)$$

3.15 解

如图，设$\angle OCB = \theta$，并以 CB 与 CO 重合时θ为零，有

$$r/\sin\varphi = h/\sin(\pi - \theta - \varphi)$$

$$\Rightarrow r/\sin\varphi = h/\sin(\theta + \varphi)$$

$$\Rightarrow tg\varphi = r\sin\theta/(h - r\cos\theta)$$

又 $\theta = \omega_0 t$

$$\Rightarrow \varphi = artg\left[\frac{r\sin\theta}{h - r\cos\theta}\right]$$

3.16 解

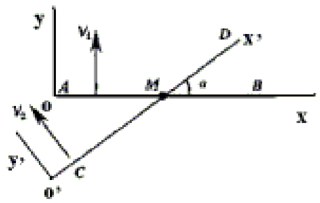
解：　任一瞬时在两轮啮合处总有 $v_1 = v_2$

$$\Rightarrow \omega_1 r = \omega_2 R$$

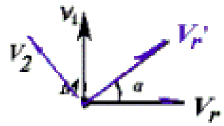
又 $\omega_1 = \omega_0 + \varepsilon_1 t$

$$\Rightarrow \omega_2 = \frac{(\omega_0 + \varepsilon_1 t) r}{R}$$

3－19. 解：建立固连在 AB 杆上的平动坐标系 xoy 固连在 CD 杆上的平动坐标系 $x'o'y'$，在 xoy 中



$\vec{V}_M = \vec{V}_e + \vec{V}_r = \vec{V}_1 + \vec{V}_r$，在 $x'o'y'$ 中



$\vec{V}_M = \vec{V}_e + \vec{V}_r{}' = \vec{V}_2 + \vec{V}_r{}'$

即　$\vec{V}_1 + \vec{V}_r = \vec{V}_2 + \vec{V}_r{}'$

在 oy, ox 方向上投影，得

$$V_1 = V_2 \cos\alpha + V_r' \sin\alpha \qquad (1)$$

$$V_r = V_r' \cos\alpha - V_2 \sin\alpha \qquad (2)$$

由(1)式，可得　$V_r' = -(V_2 \cos\alpha - V_1)\ /\sin\alpha$

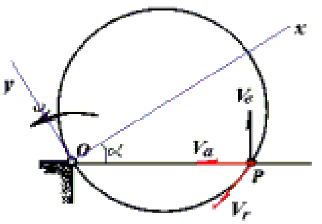
$$\therefore \qquad \vec{V}_M = \vec{V}_2 + \vec{V}_r' = \vec{V}_2 - \vec{V}_2 ctg\,\alpha + \frac{\vec{V}_1}{\sin\alpha}$$

$$V_M = \sqrt{(\vec{V}_2^2) + (\vec{V}_r')^2} = \frac{1}{\sin\alpha}\sqrt{V_1^2 + V_2^2 - 2V_1V_2\cos\alpha}$$

设 V_M 与 x' 轴的夹角为 β，则　$\sin\beta = \dfrac{V_2}{V_M}$

3－21 题解.

P 点沿直线 AB 运动为定系中的运动 V_p. P 点相对圆环的运动是动系中的相对运动 V_r，如右图，设 OP 的长度为 2d 如右图， 建立定轴转动坐标系 $x'o'y'$ 则 P 点运动



$\vec{V}_p = \vec{V}_a = \vec{V}_e + \vec{V}_r$ 沿 OP 和垂直 OP 方向投影有：

$$V_p = V_r \sin\alpha, \qquad V_e = V_r \cos\alpha$$

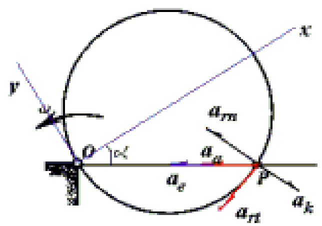
$$V_r = \frac{V_e}{\cos\alpha} = \frac{2d\omega}{r/d} = 2r\omega$$

$$V_p = V_r \sin\alpha = 2r\omega \frac{\sqrt{r^2 - d^2}}{r} = 2\omega \cdot \sqrt{r^2 - d^2}$$

下面求 P 点的加速度 $\vec{a}_p$，

$$\vec{a}_p = \vec{a}_e + \vec{a}_{rn} + \vec{a}_{rt} + \vec{a}_k$$

$$a_{rn} = \frac{V_r^2}{r}, \quad a_k = 2\omega V_r = 4r\omega^2$$



沿垂直 OP 方向投影有：

$$\therefore \quad 0 = a_{rn} \sin\alpha + a_{rt} \cos\theta - a_k \sin\theta \qquad \Rightarrow a_{rt} = 0$$

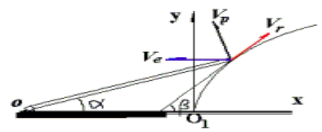
沿 OP 方向投影有：

$$a_p = a_e + a_{rn} \cos\alpha - a_k \cos\alpha, \qquad \Rightarrow a_p = a_e = 2d\omega^2$$

$$a_r = \sqrt{a_{rn}^2 + a_{rt}^2} = 4r\omega^2$$

3－27 题解：

平动坐标系 o_1xy 中， 牵连速度 $V_e = V_0$ P 点相对于 O 点作定轴转动 则 $V_p \perp OP$ 轴。 P 点的相对速度沿 $y = f(x)$ 的切线如图, $OP = l$， 任一时刻 t， P 点所在位置 x 有： $\overline{V_p} = \overline{V_0} + \overline{V_r}$， $V_p = l\omega$



在水平和竖直方向上投影得

$$\begin{cases} V_p \sin\alpha = -V_r \cos\beta + V_0 \\ V_p \cos\alpha = V_r \sin\beta \end{cases}$$

$$\sin\alpha = f(x)/l, \quad tg\beta = f'(x)$$

$$\sin\beta = f'/\sqrt{f'^2+1}\ , \qquad \cos\beta = 1/\sqrt{f'^2+1}$$

代入， 得

$$V_p = V_0(+\cos\alpha \cdot \mathrm{ctg}\beta + \sin\alpha)^{-1} = V_0\left(\cos\alpha/f' + \sin\alpha\right)^{-1}$$

$$\omega = \frac{V_p}{l} = \frac{V_0}{l(\sin\alpha + \cos\alpha\mathrm{ctg}\beta)}$$

当 $\omega = \omega_0$ 是常数时. 即 $\sin\alpha + \cos\alpha\mathrm{ctg}\beta$ 是常数

即 $V_0/(\omega_0 l) = \sin\alpha + \cos\alpha\mathrm{ctg}\beta$ 恒成立.

$$\left(\frac{V_0}{\omega_0 l} - \sin\alpha\right)\frac{df}{dx} = \cos\alpha$$

$$\sin\alpha = \frac{f}{l} \qquad \cos\alpha = \frac{\sqrt{l^2 - f^2}}{l}$$

或 $$\left(\frac{V_0}{\omega_0 l} - \frac{y}{l}\right)\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{l^2 - y^2}}{l}$$

∴ $$\left(\frac{V_0}{\omega_0\sqrt{l^2 - y^2}} - \frac{y}{\sqrt{l^2 - y^2}}\right)dy = dx$$

积分得 $$\frac{V_0}{\omega_0} arc\sin\frac{y}{l} - \sqrt{l^2 - y^2} = x + c$$

$f(0) = 0$ 得 $c = -l$ ∴ 轮廓方程为

$$\frac{V_0}{\omega_0} arc\sin\frac{y}{l} + \sqrt{l^2 - y^2} - x + l = 0$$

3－29 题解：取定轴转动的动坐标系 xoy

$$V_e=\omega r \qquad V_r=\dot r$$

$\therefore \qquad \overrightarrow{V_p}=\omega r\vec e_\varphi+\dot r\vec e_r$ 又 $\because V_p=c$ 为一常数

即 $\qquad \omega^2r^2+\dot r^2=c^2$

设 $t=0$ 时 $r=0$， $\dot r=c=v_0$

$\therefore \qquad \dfrac{dr}{\sqrt{c^2-\omega^2r^2}}=dt$ 积分得 $\dfrac{1}{\omega}\arcsin\dfrac{\omega r}{c}=t+c_2$

由 $t=0$ 时 $r=0,\ \Rightarrow c_2=0$

$$r=\frac{c}{\omega}\sin\omega t \qquad 其中\quad c=v_0 \qquad \Rightarrow r=\frac{v_0}{\omega}\sin\omega t$$

由 $\operatorname{tg}\varphi=\dfrac{\omega r}{\dot r}=\dfrac{\omega\dfrac{c}{\omega}\sin\omega t}{\omega\dfrac{c}{\omega}\cos\omega t}=\operatorname{tg}\omega t \qquad \Rightarrow \varphi=\omega t$

$\therefore \qquad r=\dfrac{v_0}{\omega}\sin\varphi$ 是 P 点的轨迹方程。

$$\vec a=\left(\ddot r-r\dot\varphi^2\right)\vec e_r+\left(r\ddot\varphi+2\dot r\dot\varphi\right)\vec e_\varphi$$
$$=-2v_0\sin\omega t\vec e_r+2\omega v\cos\omega t\,\vec e_\varphi$$

是 P 点的加速度

3－33 题解

三角形转过一周用时 $t=\dfrac{2\pi}{\omega}$，因为匀速，所以

$v_r=\dfrac{a}{t}=\dfrac{a\omega}{2\pi}$ 假定从 A 向 B 运动

在 A 点时 $v_e=AO\cdot\omega=\sqrt2 a\omega$ 方向垂直于 AO

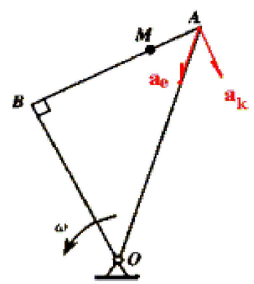
$$\therefore \quad \vec v=\vec v_r+\vec v_e=(v_e+v_r\sin45^\circ)\vec\tau-v_r\cos45^\circ\vec n$$

$$=\left(\sqrt2 a\omega+\frac{a\omega}{2\pi}\times\frac{\sqrt2}{2}\right)\vec\tau-\frac{a\omega}{2\pi}\times\frac{\sqrt2}{2}\vec n$$

$$=a\omega\left(\sqrt2+\frac{\sqrt2}{4\pi}\right)\vec\tau-\frac{\sqrt2 a\omega}{4\pi}\vec n$$

$$|\vec v|=a\omega\sqrt{2+\frac{1}{4\pi^2}+\frac{1}{\pi}}=\frac{a\omega}{2\pi}\sqrt{8\pi^2+4\pi+1}$$

求加速度时，以 O 为基点求 $\overrightarrow{a_e}$



$$\overrightarrow{a_e}=-\omega^2\overrightarrow{OA}=-\sqrt2 a\omega^2\vec n$$

$$\vec a_k=2\vec\omega\times\vec v_r \quad \Rightarrow |\vec a_k|=2\omega\cdot\frac{a\omega}{2\pi}=a\omega^2/\pi$$

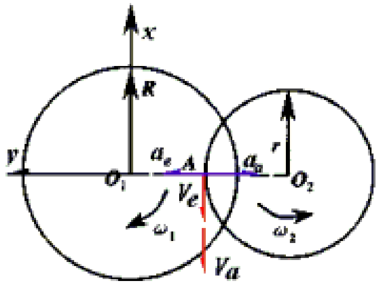
$$\vec a=\vec a_e+\vec a_r+\vec a_k$$

$$=-a_k\sin45^\circ\vec\tau+(a_e+a_k\cos45^\circ)\vec n$$

$$=-\frac{\sqrt2}{2\pi}a\omega^2\vec\tau+a\omega^2\left(\sqrt2+\frac{\sqrt2}{2\pi}\right)\vec n$$

$$|\vec a|=a\omega^2\sqrt{2+\frac{1}{\pi^2}+\frac{2}{\pi}}$$

3—35 题解



动系间在盘 O_1 上，盘 O_2 边缘上的点 A 的绝对速度，绝对加速度已知

$\vec{v}_a = \vec{v}_e + \vec{v}_r$，

绝对速度 $v_a = \omega_2 r$

（方向垂直于 O_1O_2 杆向下）， 牵连速度 $v_e = (l-r)\omega_1$

方向垂直于 O_1O_2 杆向下，

$\therefore \quad v_r = v - v_e = -(l-r)\omega_1 + r\omega_2 = r(\omega_1 + \omega_2) - l\omega_1$

绝对加速度 $a = \omega_2^2 r$ 方向指向 O_2

牵连加速度 $a_e = \omega_1^2(l-r)$ 方向指向 O_1

$$a_k = 2\omega_1 v_r = 2\omega_1[-(l-r)\omega_1 + r\omega_2]$$

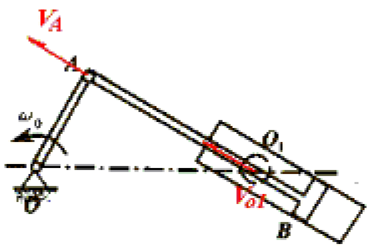
设 v_r 的方向与 v_a 相同，即 $\dfrac{r}{l} > \dfrac{\omega_1}{\omega_1 + \omega_2}$， a_k 指向 O_1，

由 $\vec{a} = \overrightarrow{a_e} + \overrightarrow{a_2} + \overrightarrow{a_k}$ 取 $\overrightarrow{O_1O_2}$ 为正方向

$$a_r = a - a_e - a_k = \omega_2^2 r + \omega_1^2(l-r) + 2\omega_1[r\omega_2 - (l-r)\omega_1]$$

$$= \omega_2^2 r - \omega_1^2(l-r) + 2r\omega_1 \cdot \omega_2$$

3－40 解：



如图示，V_A 垂直于 OA 沿着 AB，AB 杆上 O1 点的速度必沿着 AB，所以 AB 刚体瞬时平动。

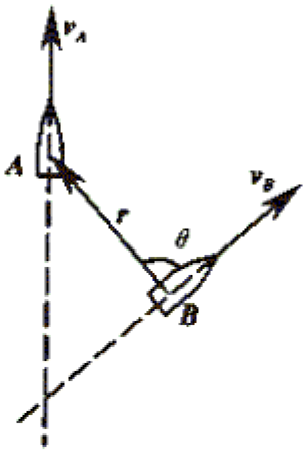
活塞的速度 $\vec{V}_B = \vec{V}_A$，汽缸的角速度等于 AB 杆的角速度。

$$\omega = \omega_{AB} = 0$$

$$V_B = OA\omega_0 = 225 \quad cm/s$$

3－42 题解

证明 以观察点为极点，船 B 的速度 v_B 的方向为极轴，建立动极坐标系，因为 v_B 的方向不变，动系为平动坐标系 $\vec{a}_k=0$，



又 v_B 作匀直线速航行 $\vec{a}_e=0$

∴ $\vec{a}_A=\vec{a}_e+\vec{a}_r+\vec{a}_k$

观察 A 点时，A 船以 v_A 作匀速直线航行 $\vec{a}_A=0$

∴ $\vec{a}_r=0$

即 $(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2)\vec{e}_r+(r\ddot{\theta}+2\dot{r}\dot{\theta})\vec{e}_\varphi=0$

于是有 $\ddot{r}=r\dot{\theta}^2$ $\ddot{\theta}=-\dfrac{2\dot{r}\dot{\theta}}{r}$

4－1 题解:

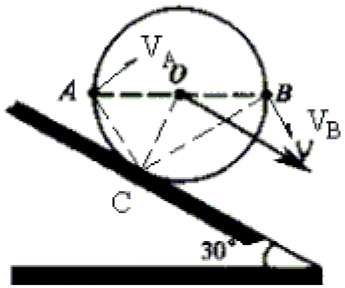
只要写出 C 点的运动规律 $x_c(t)$, $y_c(t)$ 以及 $\angle OBA$ 的变化规律 $\varphi(t)$ 就是写出了刚体 AB 的运动方程。

∵ $OC=CB=r$ ∴ $\angle COB=\angle CBO$

∴ AB 杆平面运动的运动方程

$$\begin{cases} x_c=r\cos\varphi \\ y_c=r\sin\varphi \\ \varphi=\varphi_0+\omega_0 t \end{cases}$$

解 4.2　轮子沿斜面滚下,斜面倾角为 30°,轮心速度 v=2m/s, 速度瞬心为 C，A，B 点的速度如图示，设轮半径为 r，轮子角速度为：



$$\omega = \frac{v}{r}$$

则：$\overline{AC} = r$,　　$\overline{BC} = r\sqrt{3}$

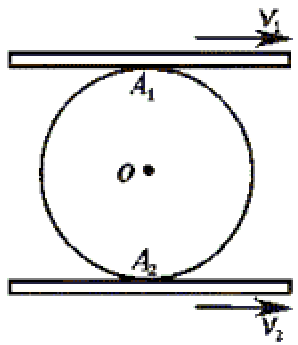
$$V_A = \overline{AC} \cdot \omega, \qquad V_B = \overline{BC} \cdot \omega$$

$$V_A = v, \qquad V_B = \sqrt{3}\, v$$

4－6 题解：

对两个接触点 A_1、A_2 它们绝对速度的大小分别是

$|v_1| = 6\ m/s$　$|v_2| = 2\ m/s$



以 A_2 为基点分析 A_1 点，A_1 的速度为：

$$v_1 = v_2 + 2a\omega, \quad \therefore \omega = \frac{v_1 -}{2\ell}$$

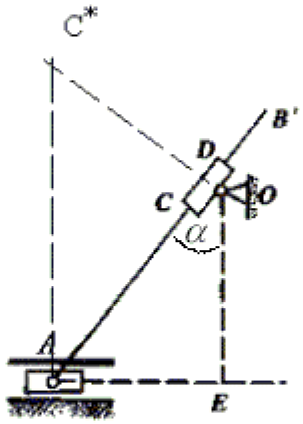
以 A_2 为基点分析 O 点

$$v_o = v_2 + a\omega = 4\ m/s$$

∴　圆柱的角速度 $\omega = \dfrac{2}{a}$　(rad/s)，

圆柱中心 O 的速度 $v_o = 4\quad m/s$

4.10 解： AB 杆在套筒处的速度方向已知, A 点的速度和速度方向已知，可找出瞬心如图，求得 AB 杆的角速度为：

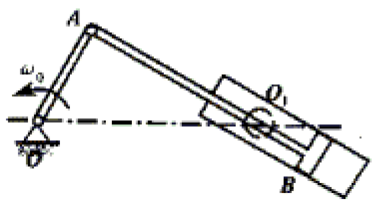


$$AC = \frac{OE}{\sin 60^0},$$

$$AC^* = \frac{AC}{\cos 30^0} = \frac{OE}{(\cos 30^0)^2},$$

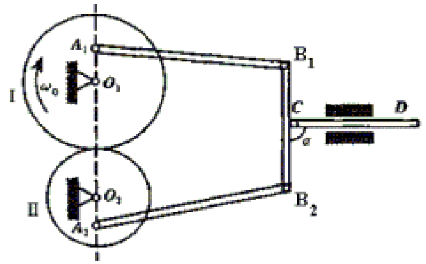
$$\omega_{AB} = \frac{v_A}{AC^*} = \frac{80}{\frac{4\times 30}{3}} = 2$$

4-13 解：因为曲柄垂直于连杆，A 点的速度沿着 AB，而 O_1 处的速度也是沿着连杆,所以连杆 AB 瞬时平动，



$$v_B = v_A = \overline{OA}\cdot\omega_0$$
$$= 15\times 15 = 225 \quad cm/s$$
$$\omega_{AB} = 0$$

4－15 解：如右图 A_1 的速度方向为水平向右



$$v_{A_1}=\omega_0 a$$

Ⅰ 以 ω_0 为角速度匀速转动时Ⅱ 也等角速转动 ω_2

$$\omega_2 r_2=\omega_0 r_1 \quad 即 \quad \omega_2=\frac{\omega_0 r_1}{r_2}$$

则 v_{A_2} 也是水平向右 $v_{A_2}=\omega_2 a=\frac{\omega_0 r_1}{r_2}a$

C 点的速度为水平向右 $\alpha=90^\circ$

对刚杆 B_1CB_2 由速度投影定理可知 V_{B1},V_{B2} 必水平向右

对刚杆 A_2B_2， 有 $V_{A2}\cos\theta_1=V_{B2}\cos\theta_2$， $\theta_1=\theta_2$ 可知 $V_{A2}=V_{B2}=\frac{\omega_0 r_1}{r_2}a$， 同理可知 $V_{A1}=V_{B1}=\omega_0 a$

以刚杆 B_1CB_2 为研究对象，

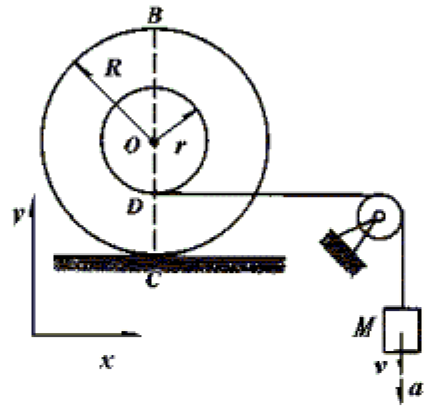
$$\omega_{B1CB2}=\frac{V_{B2}-V_{B1}}{|B_1B_2|}=\frac{V_{B2}-V_{B1}}{|B_1C|+|CB_2|}$$

又∵ $CB_1=CB_2$ 即

$$V_c=\frac{V_{B_2}+V_{B_1}}{2}$$

$$V_C=\frac{\omega_0 a(r_1+r_2)}{2r_2}$$

4-21 由题意可得



$$R\omega-rw=V$$

$$R\varepsilon-r\varepsilon=\alpha$$

$$\Rightarrow \omega=\frac{v}{R-r}.\varepsilon$$

$$=\frac{\alpha}{R-r}$$

$$\vec{\alpha}_o=R\varepsilon\vec{i}=\frac{\alpha R}{R-r}\vec{i}$$

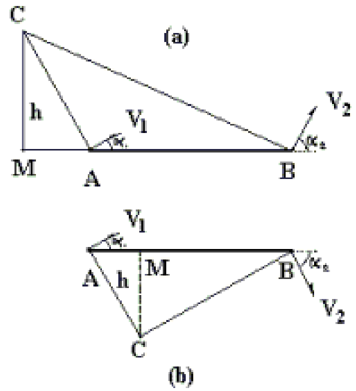
$$\vec{\alpha}_B=\vec{\alpha}_o+R.\varepsilon\vec{i}-R\omega^2\vec{j}=\frac{2\alpha R}{R-r}\vec{i}-\frac{Rv^2}{(R-r)^2}\vec{j}$$

$$\vec{\alpha}_c=\vec{\alpha}_o-R.\varepsilon\vec{i}+R\omega^2\vec{j}=\frac{RV^2}{(R-r)^2}\vec{j}$$

$$\vec{\alpha}_o=\vec{\alpha}_o-r.\varepsilon\vec{i}+r\omega^2\vec{j}=\alpha\vec{i}+\frac{rv^2}{(R-r)^2}\vec{j}$$

4-22 解：

不失一般性，设 AB 两点间的距离为 L，AB 两点的速度有图示两种情况，即在 AB 的同侧和 AB 的不同侧两种情况，C 为瞬心。



对（a）种情况：

设 $CA = l_1$， $CB = l_2$

$$\omega = (V_2 \sin\alpha_2 - V_1 \sin\alpha_1)/\overline{AB}$$
$$= (V_2 \sin\alpha_2 - V_1 \sin\alpha_1)/L$$

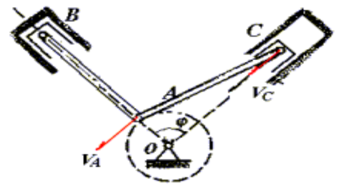
$$\left.\begin{aligned} l_1 \cos\alpha_1 &= h \\ l_2 \cos\alpha_2 &= h \\ l_2 \sin\alpha_2 - l_1 \sin\alpha_1 &= L \end{aligned}\right. \quad \Rightarrow \quad h = \frac{L}{tg\alpha_2 - tg\alpha_1}$$

同理对（b）有

$$\omega = (V_2 \sin\alpha_2 + V_1 \sin\alpha_1)/\overline{AB}$$
$$= (V_2 \sin\alpha_2 + V_1 \sin\alpha_1)/L$$

$$\left.\begin{aligned} l_1 \cos\alpha_1 &= h \\ l_2 \cos\alpha_2 &= h \\ l_2 \sin\alpha_2 + l_1 \sin\alpha_1 &= L \end{aligned}\right. \quad \Rightarrow \quad h = \frac{L}{tg\alpha_2 + tg\alpha_1}$$

4－24. 解：由题意，当 $\angle AOC = \varphi = 90^\circ$ 时，整个装置如右图所示 A 点在 OB 上，（∵ $\angle BOC = 90^\circ$）C 点速度沿着 OC 轴线，V_A 垂直于 AO 可知 $V_A // V_C$ ，即 $V_A \cos\alpha = V_C \cos\alpha$



$$\therefore \quad V_C = V_A = \omega_0 \cdot AO = 10 \times 0.1 = 1 m/s$$

以 A 点作为基点，则 $\overline{V_C} = \overline{V_A} + \omega_{AC} \cdot \overline{AC}$ 且 $\overline{V_A} = \overline{V_C}$

$$\therefore \quad \omega_{AC} = 0$$

先下面分析 C 点的加速度

$$\sin\alpha = \frac{AO}{AC} = \frac{10}{10\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \qquad \alpha = \frac{\pi}{4}$$

$$\overline{a_C} = \overline{a_A} + \overline{\varepsilon_{AC}} \times \overline{AC} + \overline{\omega_{AC}} \times \left(\overline{\omega_{AC}} \times \overline{AC}\right)$$
$$= \overline{a_A} + \overline{\varepsilon_{AC}} \times \overline{AC}$$

沿着 AC 杆的方向分解，得 $a_C \cos\alpha = a_A \sin\alpha$

$$a_C = a_A \mathrm{tg}\,\alpha = a_A \mathrm{tg}\frac{\pi}{4} = a_A = \omega_0^2 r = 10 \quad m/s^2$$

V_B 沿着 AB 杆. $V_A \perp AB$ 杆，由速度投影定理，

可知 $V_B = 0$ 即 AB 杆的速度瞬心是 B

$$\omega_{AB} = \frac{V_A}{AB} = \frac{\omega_0 AO}{AB} = 5\sqrt{2}\ rad/s$$

以 A 为基点分析 B 点的加速度

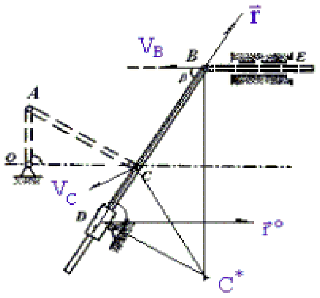
$$\overline{a_B} = \overline{a_A} + \overline{\varepsilon_{AB}} \times \overline{AB} + \overline{\omega_{AB}} \times \left(\overline{\omega_{AB}} \times \overline{AB}\right)$$

沿着 AB 杆的方向分解，得

$$a_B = a_A + \omega_{AB}^2\,\overline{AB}$$
$$= 10 + \left(5\sqrt{2}\right)^2 \times 10\sqrt{2} \times 10^{-2} = \left(10 + 5\sqrt{2}\right) \quad m/s^2$$

4—26 解：BE 刚体平动，只要求 B 点的速度和加速度即可。

先分析 BCD 刚体如图，由 B，D 处的速度方向已知可求的瞬心 C*，因此可决定 C 处的速度 V_C 方向，由 A 点的速度大小和方向已知，AC 刚体，利用速度投影定理可求得 V_C 的大小



$$V_A\cos30^0 = V_C\cos60^0$$

$$V_C = 2V_A\cos30^0$$

$$\omega_{AC} = (V_C\cos30^0 - V_A\sin30^0)/\overline{AC}$$

由 V_C 可求得 BCD 杆得角速度 ω_{BD}，也就可求得 B 点的速度 V_B

$$\omega_{BD} = \frac{V_C}{\overline{CC^*}},\qquad V_B = \omega_{BD}\cdot\overline{C^*B}$$

由几何关系可得：$\overline{CC^*} = 2r$，　$\overline{C^*B} = 2\sqrt{3}\,r$

加速度分析,以 A 为基点分析 C 点和在套筒上建立的极坐标分析 C

$$\dot{\rho} = -V_B\sin30^0 = -V_C\sin60^0$$

点的加速度为：$\vec{a}_C = \vec{a}_A + \vec{\varepsilon}_{AC}\times\overline{AC} - \omega_{AC}^2\overline{AC}$

$$\vec{a}_C = (\ddot{\rho} - \rho\omega_{BC}^2)\vec{e}_r + (\rho\varepsilon_{BC} + 2\dot{\rho}\omega_{BC})\vec{e}_\varphi$$

即

$$\vec{a}_A + \vec{\varepsilon}_{AC}\times\overline{AC} - \omega_{AC}^2\overline{AC}$$
$$= (\ddot{\rho} - \dot{\rho}\omega_{BC}^2)\vec{e}_r + (\rho\varepsilon_{BC} + 2\dot{\rho}\omega_{BC})\vec{e}_\varphi$$

$$-a_A\sin30^0 + \omega_{AC}^2\overline{AC} = \rho\varepsilon_{BC} + 2\dot{\rho}\omega_{BC}$$

在 AC 方向投影：$\varepsilon_{BC} = (\omega_{AC}^2\overline{AC} - a_A\sin30^0 - 2\dot{\rho}\omega_{BC})/\rho$

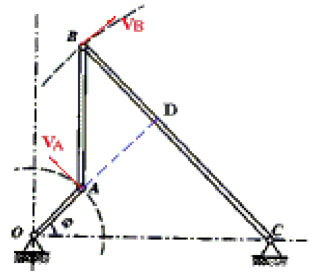
$$\rho = r$$

B 点的加速度为：$\rho = 3r$

$$a_B\sin60^0 = \rho\varepsilon_{BC} + 2\dot{\rho}\omega_{BC}$$

$$a_B = (\rho\varepsilon_{BC} + 2\dot{\rho}\omega_{BC})/\sin60^0$$

4.27 解：



当 $\varphi = 45° \Rightarrow \overline{AC}^2 = 612$

$\Rightarrow \angle ABC = \dfrac{\pi}{4}$

同 样 经 过 几 何 证 明 知 $BA\perp OC$

$\Rightarrow OA$ 延长线 $\perp BC$ 于 D

$$\angle ABD = \angle BAD = \frac{\pi}{4} \Rightarrow AD = BD$$

又。刚体 AB 的速度瞬心恰好在 D

$\Rightarrow V_B = V_A = 6\sqrt{2}\pi$　V_B 方向如图示。

$$\omega_{AB} = \frac{-6\sqrt{2}\pi}{BD} = \frac{-6\sqrt{2}\pi}{9\sqrt{2}} = \frac{-2}{3}\pi$$

$$\omega_{CB} = \frac{-6\sqrt{2}\pi}{24\sqrt{2}} = -\frac{\pi}{4}$$

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{\varepsilon}_{AB}\times\overrightarrow{AB} + \vec{\omega}_{AB}\times\left(\vec{\omega}_{AB}\times\overrightarrow{AB}\right) \qquad (1)$$

$$\vec{a}_B = \vec{a}_C + \vec{\varepsilon}_{BC}\times\overrightarrow{BC} + \vec{\omega}_{BC}\times\left(\vec{\omega}_{BC}\times\overrightarrow{BC}\right) \qquad (2)$$

(1)和(2) 在 AB 方向投影 ，则有

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\varepsilon_{CB}CB + \frac{\sqrt{2}}{2}\omega_{CB}^2CB = \frac{\sqrt{2}}{2}\alpha_A + \omega_{AB}^2AB$$

$\Rightarrow \varepsilon_{CB} = \dfrac{25\pi^2}{48}$ 方向逆时针

(1) 和(2) 在垂直于 AB 方向投影 ，则有

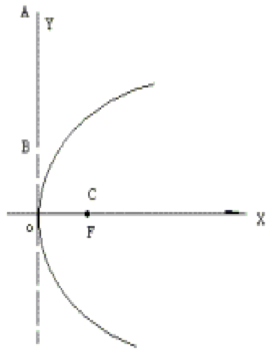
$$\frac{\sqrt{2}}{2}\varepsilon_{CB}CB - \frac{\sqrt{2}}{2}\omega_{CB}^2CB = \frac{\sqrt{2}}{2}\alpha_A + \varepsilon_{AB}AB$$

$\Rightarrow \varepsilon_{AB} = \dfrac{5\pi^2}{18}$ 方向逆时针

$$\Rightarrow \alpha_B = \frac{3\sqrt{2}}{2}\pi^2\vec{n} + \frac{25}{2}\sqrt{2}\pi^2\vec{\tau}$$

4.28 解：

假定作平面运动的刚体 AB 的运动已知，不失一般性，假定ω不为零。因此可找到速度瞬心 C，过 C 点作 AB 的垂线交于 O，以 OC 为 X 轴并作 Y 轴如右图，以瞬心为焦点



$$F(\frac{p}{2}, \quad 0), \quad p = 2\cdot\overline{OC}$$

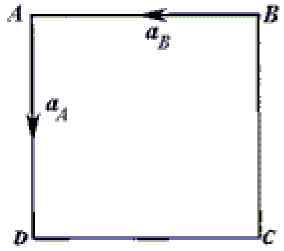
可作抛物线方程

$$y^2 = 2px$$

由抛物线性质 4 可知：从焦点 F 作抛物线在 M 点（M 为任一点）的垂线，则垂足的轨迹为在顶点的切线。

在我们的图中就是 Y 轴，也就是 AB 刚体，也就是说，而 AB 刚体上任一点速度和该点与瞬心的连线垂直，也就一定和抛物线相切。

4-29 解：



以 A 为基点分析 B 的加速度

$$\vec{\alpha}_B = \vec{\alpha}_A + \vec{\alpha}_r^\tau + \vec{\alpha}_r^n$$

分别向 AB方向和垂直AB方向投影

$$a_B = a_r^n, \qquad 0 = -a_A + a_r^\tau$$

$$\Rightarrow \alpha_r^n = \alpha_B = 10cm/s^2 \qquad \Rightarrow \omega^2 = \frac{\alpha_r^n}{AB} = 1$$

$$\alpha_r^\tau = AB\varepsilon = \alpha_A = 10cm/s^2 \qquad \Rightarrow \varepsilon = \frac{a_A}{AB} = 1$$

$$tg\varphi = \frac{\varepsilon}{\omega^2} = 1 \qquad \varphi = 45^\circ$$

将 AD 逆时针旋转 45°。BA 逆时针旋转 45°交于 0。而 0 是正方形的中心。所以

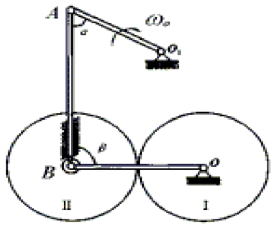
α_D，α_C 方向一定分别沿 DC, CB 方向。由对称性可知

$$\alpha_D = \alpha_C = 10cm/s^2$$

4.30 解：

$v_A = \omega_O\, O_1A = 450 cm/s$

以 A 点分析 B 点速度



$\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{\omega}_{AB} \times \vec{A\mathbf{B}}$ 沿垂直 AB 方向投影

$$V_A \sin 30° = \omega_{AB} AB$$

$$\Rightarrow \omega_{AB} = 1.5 (rad/s) \quad 方向与 \vec{\omega}_o 一致$$

$$\omega_{OB} = \frac{V_B}{2r} = \frac{15}{4} (rad/s)$$

$$\vec{\alpha}_B = \vec{\alpha}_A^{\tau} + \vec{\alpha}_A^{n} + \vec{\alpha}_{AB}^{\tau} + \vec{\alpha}_{AB}^{n}$$

$$\vec{\alpha}_B = \vec{\alpha}_{BO}^{\tau} + \vec{\alpha}_{BO}^{n}$$

$$\Rightarrow \vec{\alpha}_A^{\tau} + \vec{\alpha}_A^{n} + \vec{\alpha}_{AB}^{\tau} + \vec{\alpha}_{AB}^{n} = \vec{\alpha}_{BO}^{\tau} + \vec{\alpha}_{BO}^{n} \qquad （1）$$

（1）式沿 AB 方向投影

$$\omega_o{}^2 .OA \sin 30° - \omega_{AB}^2 .AB = \varepsilon_{BO} .BO$$

$$\Rightarrow \varepsilon_{BO} = \frac{\omega_o{}^2 .OA \sin 30° - \omega_{AB}^2 .AB}{2r} = \frac{45\sqrt{3}}{8} rad/s^2$$

方向与 $\vec{\omega}_o$ 方向相反，（1）式沿 BO 方向投影

$$\Rightarrow \varepsilon_{AB} = \frac{\omega_o^2 OA \cos 30° - \omega_{OB}^2 OB}{AB} = \frac{27\sqrt{3}}{8} rad/s^2$$

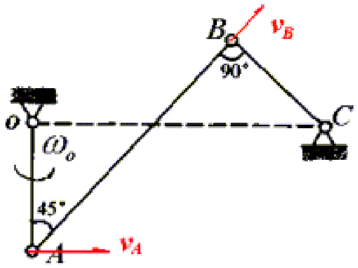
方向与 $\vec{\omega}_o$ 方向一致。设两齿轮接触点为 E，由上面求

得 $V_B = 225\sqrt{3} (cm/s)$

$$\vec{a}_E \cdot \overline{AB} / \left|\overline{AB}\right| = r\varepsilon_I, \quad 即 \quad \varepsilon_I = 2\varepsilon_{BO} + \varepsilon_{AB}$$

$$\varepsilon_I = \frac{117\sqrt{3}}{8} rad/s^2 \quad 方向与 \vec{\omega}_o 方向相反$$

4—32 解：分析 B 点速度。$\vec{V}_B$ 垂直 BC，沿 AB 方向 由投影定理 $V_A . \cos 45° = V_B$



$$V_A = \omega .OA = \omega_o .OA$$

$$\therefore V_B = \omega_o .OA \cos 45°, \quad \omega_{BC} = \frac{V_B}{BC} = \omega_o \cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}\omega_o$$

$$\omega_{AB} = v_A \sin 45^0 / AB = \frac{(2-\sqrt{2})\omega_0}{2}$$

分别以 A,C 分析 B 的加速度

$$\vec{\alpha}_{\mathbf{B}} = \vec{\alpha}_A^{n} + \vec{\varepsilon}_{AB} \times \vec{AB} - \omega_{AB}^2 \vec{AB},$$

$$\vec{\alpha}_B = \vec{\varepsilon}_{BC} \times \vec{BC} - \omega_{BC}^2 \vec{BC}$$

$$\therefore \alpha_A^n + \vec{\varepsilon}_{AB} \times \vec{AB} - \omega_B^2 \vec{AB} = \vec{\varepsilon}_{BC} \times \vec{BC} - \omega_{BC}^2 \vec{BC}$$

沿 AB 方向投影

$$\omega_o{}^2 .OA \cos 45° - \omega_{AB}{}^2 .AB = \varepsilon_{BC} .BC$$

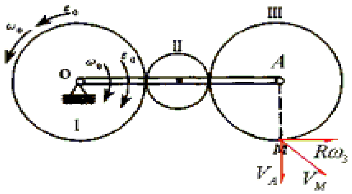
求得： $\varepsilon_{BC} = \dfrac{\omega_o{}^2}{2}$

4－36 解：

设轮 I, II, III 的角速度分别为 $\omega_1, \omega_2, \omega_3$，角加速度为 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$，取固连在 OA 上的动系 OXY，轮子相对动系的角速度分别为 $\omega_{r1}, \omega_{r2}, \omega_{r3}$，相对角加速度为 $\varepsilon_{r1}, \varepsilon_{r2}, \varepsilon_{r3}$，取逆时针转动为正方向，有：

$$R\omega_{r1} = -\frac{R}{2}\omega_{r2} = R\omega_{r3}$$

$$R\varepsilon_{r1} = -\frac{R}{2}\varepsilon_{r2} = R\varepsilon_{r3}$$

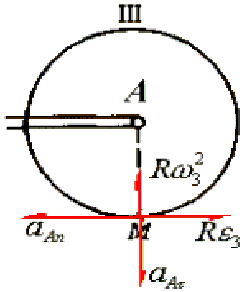


对轮 I 有：
$$\omega_0 = -\omega_0 + \omega_{r1}$$
$$\varepsilon_0 = -\varepsilon_0 + \varepsilon_{r1}$$

对轮 III 有：
$$\omega_3 = -\omega_0 + \omega_{r3}$$
$$\varepsilon_3 = -\varepsilon_0 + \varepsilon_{r3}$$

有此可解得：$\omega_3 = \omega_0$， $\varepsilon_3 = \varepsilon_0$

M 点的速度分析如上图：



$$\vec{V}_M = \vec{V}_A + \vec{\omega}_3 \times \overline{AM}$$

$$V_A = 3R\omega_0, \qquad \left|\vec{\omega}_3 \times \overline{AM}\right| = R\omega_0$$

$$V_M = \sqrt{10}R\omega_0$$

M 点的加速度分析如图示：$\vec{a}_M = \vec{a}_A + \vec{\varepsilon}_3 \times \overrightarrow{AM} - \omega_3^2 \overrightarrow{AM}$

在水平方向和垂直方向投影有：

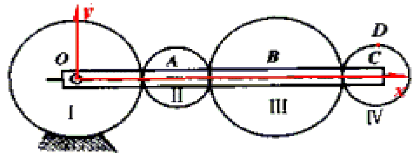
$$a_{Mx} = a_{An} - R\varepsilon_0 = 3R\omega_0^2 - R\varepsilon_0$$

$$a_{My} = a_{M\tau} - R\omega_3^2 = 3R\varepsilon_0 - R\omega_0^2$$

$$a_M = \sqrt{a_{Mx}^2 + a_{My}^2} = \sqrt{10R^2\omega_0^4 - 12R^2\omega_0^2\varepsilon_0 + 10R^2\varepsilon_0^2}$$

$$= R\sqrt{10\omega_0^4 - 12\omega_0^2\varepsilon_0 + 10\varepsilon_0^2}$$

4.39 解：如图所示，定坐标系与地面固联，动坐标系与杆 OA 固联。则牵连角速度 $\omega_e = \omega_0$，且设为逆时针方向。



轮 1 固定不动，故 $\omega_1 = 0$，

又 $\omega_1 = \omega_e + \omega_{1r} \quad \Rightarrow \omega_{1r} = -\omega_0$

在动坐标系中，轮 1 与轮 2 外啮合，故 $\omega_{2r}r = -\omega_{1r}R$

$$\Rightarrow \omega_{2r} = -\frac{\omega_{1r}R}{r} = \frac{\omega_0 R}{r}$$

$$\Rightarrow \omega_2 = \omega_{2r} + \omega_e = \frac{\omega_0 R}{r} + \omega_0 = \frac{R+r}{r}\omega_0$$

同理，轮 2 与轮 3 外啮合，故 $\omega_{2r}r = -\omega_{3r}R$

$$\Rightarrow \omega_{3r} = -\frac{\omega_{2r}r}{R} = -\omega_0$$

$$\Rightarrow \omega_3 = \omega_{3r} + \omega_e = -\omega_0 + \omega_0 = 0$$

同理，轮 3 与轮 4 外啮合，故 $\omega_{3r}R = -\omega_{4r}r$

$$\Rightarrow \omega_{4r} = -\frac{\omega_{3r}R}{r} = \frac{\omega_0 R}{r}$$

$$\Rightarrow \omega_4 = \omega_{4r} + \omega_e = \frac{\omega_0 R}{r} + \omega_0 = \frac{R+r}{r}\omega_0$$

又 $\quad \vec{V}_D = \vec{V}_C + \vec{\omega}_4 \times \overline{CD}$

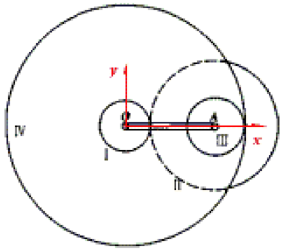
且 $\quad v_C = 3(R+r)\omega_0 \qquad \left|\vec{\omega}_4 \times \overline{CD}\right| = (R+r)\omega_0$

$$\Rightarrow v_D = \sqrt{10(R+r)^2\omega_0^2} = \sqrt{10}(R+r)\omega_0$$

设 $\vec{V}_D$ 方向与 $\vec{V}_C$ 方向夹角为 θ，则

$$\cos\theta = \frac{v_C}{v_D} = \frac{3\sqrt{10}}{10}$$

4.40 解：设 1、2、3、4 轮的半径分别为



r_1、r_2、r_3、r_4，则有

$$r_4 = r_1 + r_2 + r_3$$

$$\Rightarrow z_4 = z_1 + z_2 + z_3 = 180$$

设定坐标系与地面固联，动坐标系与杆 OA 固联。

则牵连角速度 $\omega_e = \omega_0$，且设为逆时针方向

由 $\quad \omega_4 = \omega_{4r} + \omega_0 \qquad \Rightarrow w_{4r} = \omega_4 - \omega_0$

又在动坐标系中，轮 2 与轮 1 外啮合，轮 3 与轮 4 内啮合，有：

$$\omega_{2r} r_2 = -\omega_{1r} r_1 \quad ; \quad \omega_{3r} r_3 = \omega_{4r} r_4$$

且 $\quad \omega_{2r} = \omega_{3r}$； $\quad \omega_{1r} = \dfrac{(\omega_0 - \omega_4) r_2 r_4}{r_1 r_3}$

$$\omega_1 = \omega_0 + \omega_{1r} = \omega_0 + \frac{(\omega_0 - \omega_4) r_2 r_4}{r_1 r_3}$$

又 $\omega_0 = \dfrac{30 \cdot 2\pi}{60} = \pi$ (rad/s)； $\omega_4 = -\dfrac{20 \cdot 2\pi}{60} = -\dfrac{2}{3}\pi$ (rad/s)

$$\frac{r_2 r_4}{r_1 r_3} = \frac{z_2 z_4}{z_1 z_3} = 12 \quad \Rightarrow \omega_1 = \pi + 12\left(\pi + \frac{2}{3}\pi\right) = 21\pi$$

则轮 1 转速为 $\quad n_1 = \dfrac{21\pi \cdot 60}{2\pi} = 630 \quad$ (r/min)

5.1 解

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} = 25\left(0\vec{i} + \frac{3}{5}\vec{j} + \frac{4}{5}\vec{k}\right) \times (3\vec{i} + 7\vec{j} + 6\vec{k})$$

$$= 25\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ 3 & 3 & 6 \end{vmatrix} = -50\vec{i} + 60\vec{j} - 45\vec{k}$$

5.4 解 $\vec{\omega}=\omega\left(\frac{\sqrt{3}}{15}\vec{i}+\frac{\sqrt{3}}{3}\vec{j}+\frac{7\sqrt{3}}{15}\vec{k}\right)$

$$\vec{\omega}\times\overrightarrow{oM}=\omega\left(\frac{\sqrt{3}}{15}\vec{i}+\frac{\sqrt{3}}{3}\vec{j}+\frac{7\sqrt{3}}{15}\vec{k}\right)\times(2\vec{i}+2\vec{j}+3\vec{k})$$

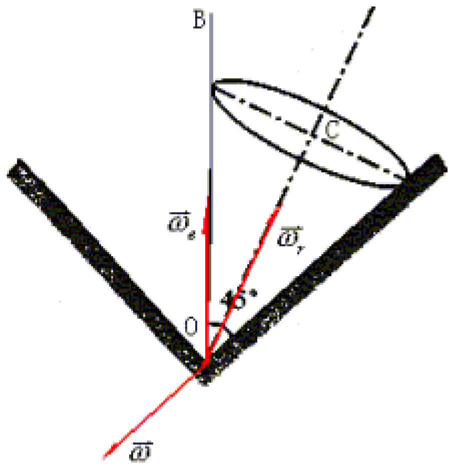
已知 $v_{Mx}=1$, 则 $\omega\left(\sqrt{3}-\frac{14}{15}\sqrt{3}\right)=1$

∴对 N 点 (a,b,c)

$$\overrightarrow{v_N}=\vec{\omega}\times\overrightarrow{oN}$$

$$=5\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{15}\vec{i}+\frac{\sqrt{3}}{3}\vec{j}+\frac{7\sqrt{3}}{15}\vec{k}\right)\times(a\vec{i}+b\vec{j}+c\vec{k})$$

$$=(5c-7b)\vec{i}-(c-7a)\vec{j}+(b-5a)\vec{k}$$



5.7 解 进动角速度 ω_e 即 OC 绕 OB 转动之角速度

$$\omega_e=\frac{2\pi}{T}=\frac{2\pi}{0.5s}=4\pi\ red/s$$

自转角速度 ω_r 为圆锥绕其自轴旋转之角速度

全角速度 $\vec{\omega}=\overrightarrow{\omega_e}+\overrightarrow{\omega_r}$ 由 A 点纯滚动知 $\vec{\omega}$ 沿 OA，方向矢量合成由正弦定理

$$\frac{\omega_r}{\sin 135^\circ}=\frac{\omega_e}{\sin 22.5^\circ}=\frac{\omega}{\sin 22.5^\circ}$$

∴ $\omega_r=7.39\pi\ rad/s$

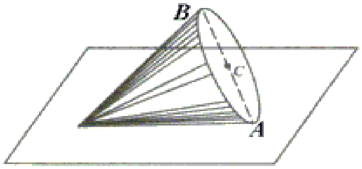
$$\omega_e=\omega=4\pi\ rad/s$$

规则进动，角加速度

$$\vec{\varepsilon}=\overrightarrow{\omega_e}\times\overrightarrow{\omega_r}=\omega_e\cdot\omega_r\cdot\sin 157.5^\circ\vec{k}$$

$$\varepsilon=111.66\ red/s$$

5.9 **解**　进动角速度



$$\omega_e=\frac{v_c}{\overline{OC}\cdot\cos\alpha}=\frac{v_c}{\overline{OA}\cdot\cos^2\alpha}$$

$$=\frac{30cm/s}{\frac{40}{\sqrt{3}}cm\times\cos^2 30^\circ}=\sqrt{3}\ rad/s$$

∴　角速度　　$\omega=\sqrt{3}\omega_e=3\quad rad/s$

自转角速度　　$\omega_r=2\omega_e=2\sqrt{3}red/s$

A 点速度　　$\overline{v_A}=\vec{\omega}\times\overline{r_{OA}}=0$

$$\overline{a_A}=\vec{\varepsilon}\times\overline{r_{OA}}+\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\overline{r_{OA}})=\vec{\varepsilon}\times\overline{r_{OA}}$$

角加速度　　$\vec{\varepsilon}=\overline{\omega_e}\times\overline{\omega_r}=\sqrt{3}\vec{j}\times(-3\vec{i}-\sqrt{3}\vec{j})=3\sqrt{3}\vec{k}$

∴　　$\overline{a_A}=3\sqrt{3}\vec{k}\times\frac{40}{\sqrt{3}}\vec{i}=120\vec{j}(cm/s^2)$

B 点速度　$\overline{v_B}=\vec{\omega}\times\overline{r_{OB}}=(-3\vec{i})\times\left(\frac{40}{\sqrt{3}}\cos 60^\circ\vec{i}+\frac{40}{\sqrt{3}}\sin 60^\circ\vec{j}\right)$

$$=-60\vec{k}(cm/s)$$

B 点的加速度　$\overline{a_B}=\vec{\varepsilon}\times\overline{r_{OB}}+\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\overline{r_{OB}})$

$$=3\sqrt{3}\vec{k}\times\left(\frac{20}{\sqrt{3}}\vec{i}+20\vec{j}\right)-9(20\vec{j})$$

$$=-60(\sqrt{3}\vec{i}+2\vec{j})\quad cm/s^2$$

5.13 **解**

$$\vec{\omega}=(\dot{\psi}\sin\theta\sin\varphi+\dot{\theta}\cos\varphi)\vec{i}+(\dot{\psi}\sin\theta\cos\varphi-\dot{\theta}\sin\varphi)\vec{j}$$

$$+(\dot{\psi}\cos\theta+\dot{\varphi})\vec{k}=-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 6t\vec{i}-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 6t\vec{j}+\frac{11}{2}\vec{k}$$

θ 不变，则

$$\dot{\omega}_x=\ddot{\psi}\sin\theta\sin\varphi+\dot{\psi}\dot{\varphi}\sin\theta\cos\varphi-\dot{\theta}\dot{\varphi}\sin\varphi$$

$$=-3\sqrt{3}\sin 6t$$

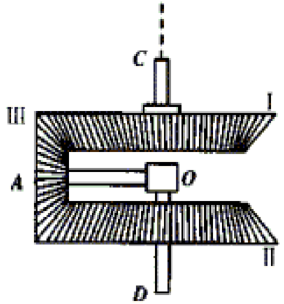
$$\dot{\omega}_y=\ddot{\psi}\sin\theta\cos\varphi-\dot{\psi}\dot{\varphi}\sin\theta\sin\varphi=3\sqrt{3}\sin 6t$$

$$\dot{\omega}_z=\ddot{\psi}\cos\theta-\dot{\psi}\dot{\theta}\sin\theta+\ddot{\varphi}=0$$

$$\vec{\varepsilon}=\dot{\omega}_x\vec{i}+\dot{\omega}_y\vec{j}+\dot{\omega}_z\vec{k}$$

（$\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ 为随体坐标系各坐标轴上的单位矢量）

5.14 **解** 不妨设上下两齿轮分别作逆时针转动，行星齿轮上 A 上顶底 B 、C 两点速度方向相同



$v_B = \omega_1 R \qquad v_C = \omega_2 R$

$= 35cm/s \qquad = 21cm/s$

则 $\omega_r = \dfrac{v_B - v_C}{2r} = 3.5rad/s$

A 点速度为

$$v_A = \frac{v_C + v_B}{2} = 28\,cm/s$$

OA的角速度为：$\omega_e = v_A / R = 4$

另解：A 刚体绕 OA 轴转动，OA 轴绕 CD 固定轴转动，刚体是规则进动，则：行星齿轮 A 的角速度为：

$\vec{\omega} = \vec{\omega}_e + \vec{\omega}_r$ 且$\vec{\omega}_e$ 垂直 $\vec{\omega}_r$

$v_A - r\omega_r = v_B = 35$

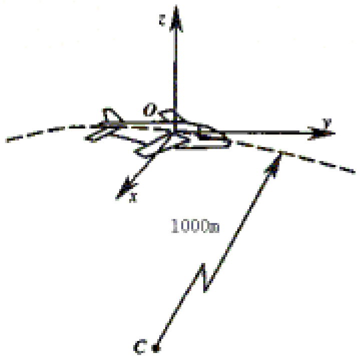
$v_A + r\omega_r = v_C = 21$

$v_A = R\omega_e$

解得：$v_A = 28\,cm/s; \qquad \omega_r = -3.5\,rad/s$

5.18 **解**：设 R＝1000 m

重心 O 速度为 200 m/s



$\vec{\omega} = \omega_x \vec{i} + \omega_y \vec{j} + \omega_z \vec{k}$

$= 0.1\vec{i} + 0.15\vec{j} - 0.2\vec{k}$

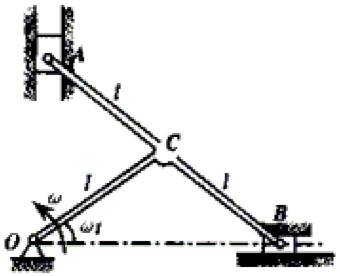
∴ $\vec{\varepsilon} = \dot{\vec{\omega}} = 0; \qquad \vec{a}_0 = 40\vec{i}$

飞行员加速度 $\overrightarrow{a_p} = \overrightarrow{a_0} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \overrightarrow{Op})$

求得： $\vec{a}_p = 40.03\vec{i} - 0.1\vec{j} - 0.06\vec{k}$

6－3 题

解： AB 杆是对称的，则 AB 杆的质心在 C 点．且 $V_C=\omega l$



∴ $P_1=mV_C=2\left(m_1+m_2\right)\omega l$

OC 杆也是均质的，其质心在 OC 的中点

$$V_C'=\frac{l}{2}m \qquad \therefore \quad P_2=m_1 V_C'=\frac{1}{2}m_1\omega l$$

且 P_1,P_2 的方向相同， 垂直于 OC 杆向上

$$\therefore \quad \begin{aligned}P&=P_1+P_2\\&=2\left(m_1+m_2\right)\omega l+\frac{1}{2}m_1\omega l=\frac{1}{2}\omega l\left(5m_1+4m_2\right)\end{aligned}$$

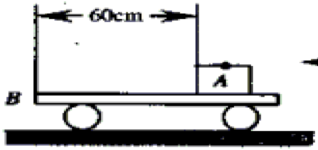
6-4 解：

质心距 AC 转轴的距离为 AB/3，所以动量 P 的大小为：

$$p=\frac{1}{3}\overline{AB}\cdot\omega\cdot m=\frac{0.49}{3}*3\pi*\frac{20}{9.8}=\pi$$

6—8 题.

解：子弹射进 A 的瞬间，水平方向上．子弹 A 组成的系统不受力，水平方向上动量守恒



∴

$$m_1V_1=\left(m_1+m_A\right)V_A$$

∴ $$V_A=\frac{m_1V_1}{m_1+m_A}=\frac{0.3\times500}{45+0.3}\approx\frac{10}{3}m/s$$

之后：子弹与 A 作为一个整体向左运动．取小车、子弹、 A 组成的整体为对象，在水平方向上不受力，动量守恒，取向左为正向．

$$\left(m_1+m_A\right)V_A=\left(m_1+m_A\right)V_2+m_{车}V_3$$

单独取小车为研究对象 $f=uN_1=ug\left(m_1+m_A\right)$

∴ $$fs_1=\frac{1}{2}m_{车}V_3^2$$ 联立

$$\begin{cases}m_1V_1=\left(m_1+m_A\right)V_2+m_{车}V_3 & (1)\\ fs_1=\frac{1}{2}m_{车}V_3^2 & (2)\end{cases}$$

当 f 消失时，即车与 A 上一个具有相同的未速度 $u=V_2=V_3$ ．

代入(1)得

$$u=\frac{m_1V_1}{m_1+m_A+m_{车}}=\frac{0.3\times500}{0.3+45+35}=1.87m/s$$

将 u 代入(2)，得

$$s_1=\frac{m_{车}u^2}{2f}=\frac{35\times1.87^2}{2\times0.5\times9.8\times(4.5+0.3)}\approx27.7\text{cm}$$

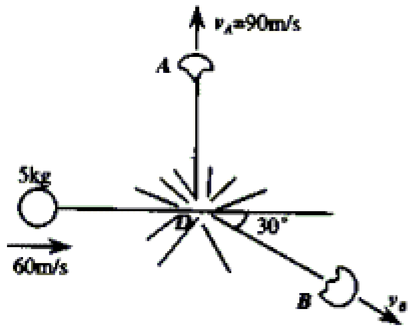
同理，算出 A 与子弹的相对位移

$$s_2=\frac{\frac{1}{2}\left(m_A+m_1\right)V_A^2-\frac{1}{2}\left(m_A+m_1\right)u^2}{0.5\times9.8\times(4.5+0.3)}\approx76.9\text{cm}$$

∴ 车与物体的未速度 $u=1.87m/s$ 距 B 端的最终距离为 $s_1+l-s_2=10.8\text{cm}$

6—9 解：

如图弹头两片为系统，不考虑外力作用，系统动量守恒，有 ：



$$m_A*0+m_BV_B\cos30^0=5*60 \quad (1)$$

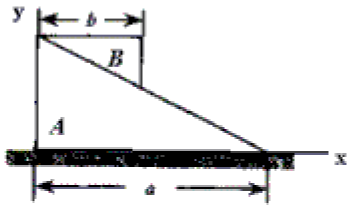
$$m_A*90-m_BV_B\sin30^0=0 \quad (2$$

∵ $m_A+m_B=5$

连立求解可得： $$m_A=\frac{10}{9}\sqrt{3},$$ $$V_B=\frac{360}{3\sqrt{3}-2}$$

6－11 题解.

设 B 的质量为 m． A 的质量为 $3m$．以 A, B 组成的系统为研究对象，此质心系在水平方向上不受力即 x 方向动量守恒．设开始时坐标如图



A, B 质心的坐标分别是 $x_A=\dfrac{a}{3}$ $x_B=\dfrac{2b}{3}$

∴ 此质系的质心位置

$$x_C=\frac{m_A x_A+m_B x_B}{m_A+m_B}=\frac{3m x_A+m x_B}{4m}=\frac{3x_A+x_B}{4}$$

当 B 滑至水平面时 A 移动了 S_A，则 B 为 $S_B=S_A+a-b$

∴ 质系的质心位置 x_C 不变

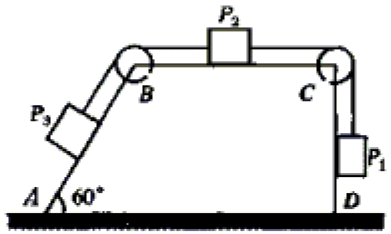
$$\frac{a+\dfrac{2b}{3}}{4}=\frac{3m\left(\dfrac{a}{3}+s_A\right)+m\left(\dfrac{2b}{3}+s_A+a-b\right)}{4m}$$

∴ $$s_A=-\frac{1}{4}(a-b)$$

即三菱柱 A 的位移大小为 $\dfrac{1}{4}(a-b)$，方向向左。

6－12 解

因为系统在水平方向上不受力，假定初始静止。质心位置不变，设四菱柱的位移为 S



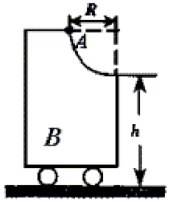
∴ $$O=m_4 s+m_1 s+m_2(s+1)+m_3(s+\cos 60^\circ)$$
$$(m_1+m_2+m_3+m_4)s=-(m_2+m_3\cos 60^\circ)$$

求得 $$S=-\frac{m_2+\dfrac{1}{2}m_3}{m_1+m_2+m_3+m_4}=-0.138m$$

即：四棱柱向左移动了 0.138 米。

6—14 解

系统在水平方向上不受力，假定初始静止。质心位置不变，设 x 坐标原点在起始小球 A 处，小车的质心位置位 e，当小球到最低位置时的位移为 s，小球得位移为



s_A则： $$m_B e = m_A(s+\frac{1}{2}) + m_B(e+s)$$

求得 $s = -\frac{1}{6}$

小球的位移为 $s_A = s + \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$

由 x 方向的动量守恒 $m_B v_B + m_A(v_B + v_r) = 0$ (1)

机械能守恒：$\frac{1}{2}m_B v_B^2 + \frac{1}{2}m_A(v_B+v_r)^2 = m_A g\cdot R$ (2)

解得：

$$v_B = -\sqrt{\frac{g}{6}}, \qquad v_r = 3\sqrt{\frac{g}{6}}$$

$$v_A = v_B + v_r = 2\sqrt{\frac{g}{6}}$$

小球下落 h 用时 $t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$

小球 x 方向总的位移 $x_t = s_A + v_A t = \frac{1}{3}(1+2\sqrt{3h})$

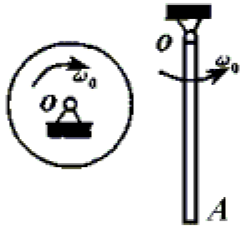
圆弧面对小球的法向反力为：

$$\frac{m_A v_r^2}{R} = N - m_A g; \qquad \Rightarrow N = \frac{7}{4}g$$

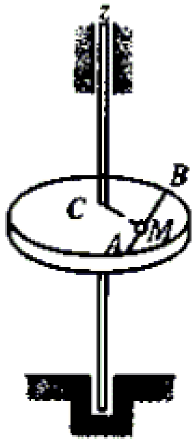
6—15 题解

(1) $H = J_0\cdot\omega = \frac{1}{2}mR^2\omega_0$

(2) $H = J_0\cdot\omega = \frac{1}{3}ml^2\omega_0$



6、18 解：取圆盘和质点 M 为系统，则系统所受的外力矩在 Z 轴上的投影为 0，故关于 Z 轴动量矩守恒



M 在 A 处时，动量矩为：

$$H_Z=(\frac{P}{2g}r^2+\frac{Q}{g}r^2)\omega_0$$

当 M 点离中心 C 的距离 a 最小时，不难看出 M 应在 AB 的中点，设此时圆盘的角速度为ω，则有：

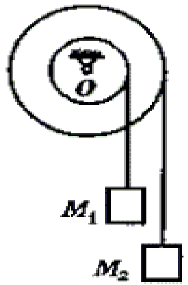
$$v_M=\omega\cdot a+u$$

动量矩为： $$H'z=\frac{1}{2}\cdot\frac{P}{g}r^2\cdot\omega+\frac{Q}{g}(\omega\cdot a+u)\cdot a$$

由于： $$H_C=H'c$$

$$\Rightarrow\omega=\frac{(\frac{P}{2}+Q)\omega_0 r^2-Qua}{\frac{P}{2}r^2+Qa^2}$$

6.19 解：取整个系统为研究对象，并设系统绕 O 轴的转动惯量为 I_O，角加速度为 ε



由对 O 轴的动量矩定理：

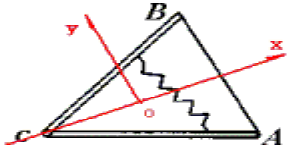
$$I_O\varepsilon=P_1r_1+P_2r_2$$

又

$$I_O=\frac{1}{2}\cdot\frac{Q_1}{g}r_1^2+\frac{1}{2}\cdot\frac{Q_2}{g}r_2^2+\frac{P_1}{g}r_1^2+\frac{P_2}{g}r_2^2$$

$$\Rightarrow\varepsilon=\frac{2g(P_1r_1+P_2r_2)}{(Q_1+2P_1)r_1^2+(Q_2+2P_2)r_2^2}$$

6.21 解：取整个系统为研究对象，设系统的质心为 O 点，过质心建立坐标系如图，整个系统放在光滑水平面上，故动量守恒，又系统初始静止，故质心位置不变。



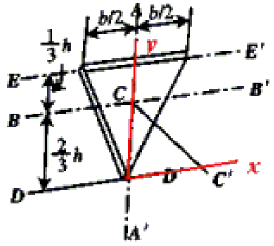
由于对称性，C 点一定沿 x 轴运动，且 A、C 两点的 X 坐标绝对值相等。

设 A 点坐标为（x,y）,则 C 点坐标为（-x,0）,AC 长为 $2l$

则有：$$[x-(-x)]^2+(y-0)^2=(2l)^2$$

即 A 点运动轨迹为：$4x^2+y^2=4l^2$

6、31 解：



1）建立如图所示坐标系，在三角形面内任取一面元 $dxdy$，不难求得三角形的两腰边所在直线为 $y=\pm\frac{2h}{b}x,or,x=\pm\frac{b}{2h}y$，又面元的质量为 $\frac{2m}{bh}dxdy$，

则板对 AA'轴（即 y 轴）的转动惯量为：

$$I_{AA'}=\int_0^h\int_{-\frac{b}{2h}y}^{\frac{b}{2h}y}\frac{2m}{bh}x^2dxdy=\frac{1}{24}mb^2$$

板对 x 轴的转动惯量为：

$$I_x=2\int_0^{\frac{b}{2}}\int_{\frac{2h}{b}x}^{h}\frac{2m}{bh}y^2dxdy=\frac{1}{2}mh^2$$

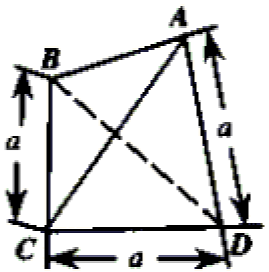
又 BB'轴过质心 C，由平行轴定理可知

$$I_{BB'}=I_x-m(\frac{2}{3}h)^2=\frac{1}{18}mh^2$$

2）由 1）的结果可知

$$I_C=I_{AA'}+I_{BB'}=\frac{m}{72}(3b^2+4h^2)$$

6、33 解：建立如图所示直角坐标系，z 轴向下，则任一等边三角形的高为 $\frac{\sqrt{3}}{2}a$，四面体的高为 $\frac{\sqrt{6}}{3}a$，体积为 $v=\frac{\sqrt{2}}{12}a^3$，

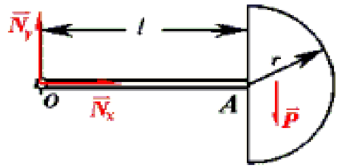


在四面体中任取体积元其高为 dh，体积元的边长为 $\frac{3}{\sqrt{6}}h$ 则体积元的面积为 $\frac{\sqrt{3}}{4}l^2=\frac{3\sqrt{3}}{8}h^2$，在结合 6.31 题中的结论，有：

$$I=\int_0^{\frac{\sqrt{6}}{3}a}\frac{m}{\frac{\sqrt{2}}{12}a^3}\cdot\frac{3\sqrt{3}}{8}h^2dh\cdot\frac{1}{72}\left[3\cdot\left(\frac{3}{\sqrt{6}}h\right)^2+4\cdot\left(\frac{3}{\sqrt{6}}h\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\right]$$

$$=\frac{1}{20}ma^2$$

6、41 解：系统绕 O 点转动，取整体分析，根据动量距定理



$$I_o\varepsilon=P.(\ell+x_c)$$

$$I_o=\frac{1}{2}mr^2-mx_c^2+m(\ell+x_c)^2$$

$$x_c=\frac{\iint xdm}{m}$$

$$=\frac{\iint\rho r^2\sin\theta dr d\theta}{\rho\pi r^2/2}=\frac{4r}{3\pi}$$

$$\Rightarrow\varepsilon=\frac{p(l+x_c)}{I_o}$$

$$=\frac{2g(3\pi l+4r)}{(6\pi l^2+16\pi lr+3\pi r^2)}$$

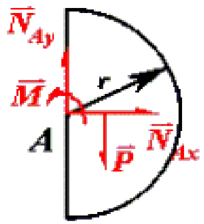
再取半圆盘为对象分析

$$N_{Ax}=m\ddot{x}_c=0$$

$$P-N_{Ay}.=m\ddot{y}_c$$

$$I_C\varepsilon=N_y.x_c-M$$

$$\ddot{y}_c=\varepsilon(l+x_c)$$



解以上方程

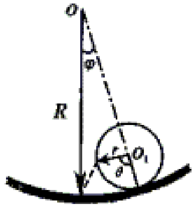
$$\Rightarrow N_{Ay}=\frac{P(9\pi^2-32)r^2}{9\pi^2r^2+18\pi^2l^2+48\pi rl}$$

竖直向上

$$N_{Ax}=0$$

$$M=\frac{-Pl(9\pi^2-32)r^2}{9\pi^2r^2+18\pi^2l^2+48\pi rl}$$

6、45 解：如图,对圆柱体进行受力分析,设最低位置时圆柱体的角速度为 ω，角加速度为 ε，



质心的速度为 v_1，圆柱体对质心的转动惯量为 I_{O_1}，则 $I_{O_1}=\frac{1}{2}mr^2$

圆柱体作纯滚动，故 $v_1=\omega\cdot r$

运动过程中只有重力做功，机械能守恒，有

$$mg(R-r)(\cos\varphi-\cos\varphi_0)=\frac{1}{2}mv_1^2+\frac{1}{2}\cdot I_{O_1}\omega^2$$

$$\frac{mv_1^2}{R-r}=\frac{4mg(\cos\varphi-\cos\varphi_0)}{3}$$ 当 $\varphi=0$ 时有

$$\Rightarrow \frac{mv_1^2}{R-r}=\frac{4mg(1-\cos\varphi_0)}{3}; \quad \varepsilon=0$$

圆柱受到圆槽的约束反力为：$N=mg+\frac{4mg(1-\cos\varphi_0)}{3}$

$$=\frac{7}{3}mg-\frac{4}{3}mg\cos\varphi_0$$

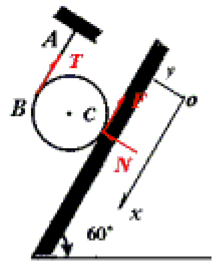
即圆柱对圆槽的压力为：

$N'=N=\frac{7}{3}mg-\frac{4}{3}mg\cos\varphi_0$，　方向垂直向下。

又在最低位置时 $\varepsilon=0$，设摩擦力为 f，

由关于质心动量矩定理：　$I_{O_1}\varepsilon=fr$　　$\Rightarrow f=0$

6.46 解：如图示，建立坐标系，并对圆柱体进行受力分析，设圆柱体的角加速度为 ε（顺时针），则有：



$$m\ddot{x}_c=mg\sin 60^0-T-F \qquad 1)$$

$$m\ddot{y}_c=N-mg\cos 60^0 \qquad 2)$$

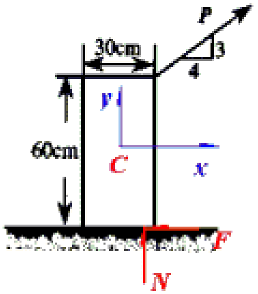
$$I_c\varepsilon=Tr-Fr \qquad 3)$$

补充方程：　$F=fN$，　$\ddot{x}_c=r\varepsilon$，　$\ddot{y}_c=0$

代入方程，联立求解

$$a_c=\ddot{x}_c=\frac{(3\sqrt{3}-2)g}{9}$$

6.47 解：长方体受力分析如图，质心为 C，建立坐标系



1） 由质心动量矩定理，有

$$I_C\varepsilon=\frac{3}{5}P\cdot 15+N\cdot x-f\cdot 30-\frac{4}{5}P\cdot 30$$

又有条件：

$$\varepsilon=0,\quad N=(mg-\frac{3}{5}P),\quad f=\mu\cdot N,$$

$$\mu=0.2,\quad g=9.8kg\cdot m/s^2$$

解得：$\Rightarrow P=\dfrac{490(x-6)}{11.4+0.6x}\qquad (0\le x\le 15)$

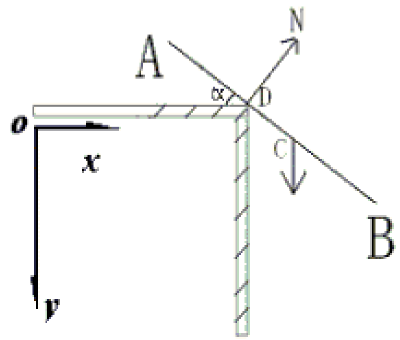
可知，当 $x=15$ 时，$P_{\max}=216.2$ N

2)设质心加速度为 a_{cx}

$$ma_{cx}=\frac{4}{5}P_{\max}-f=100.9$$

$$\Rightarrow a_{cx}=2.02m/s^2$$

6.49 解：如图示，建立坐标系，并对杆进行受力分析，设杆的角加速度为 ε，在刚释放的瞬时，由动量和动量矩定理：



$$m\ddot{x}_c=N\sin\alpha$$

$$m\ddot{y}_c=mg-N\cos\alpha$$

$$J_C\varepsilon=Nb$$

$$J_C=\frac{1}{12}ml^2$$

$$\ddot{x}_c\sin\alpha-\ddot{y}_c\cos\alpha+b\varepsilon=0$$

联立求解

$$\varepsilon=\frac{12gb\cos\alpha}{l^2+12b^2}\quad;\qquad N=\frac{mgl^2s\cos\alpha}{l^2+12b^2}$$

$$\ddot{x}_c=\frac{gl^2\cos\alpha\sin\alpha}{l^2+12b^2}\quad;\quad \ddot{y}_c=g-\frac{gl^2\cos^2\alpha}{l^2+12b^2}$$

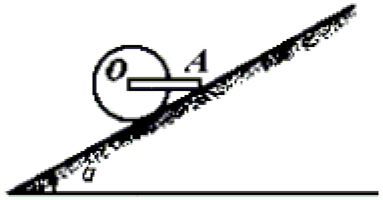
$$\vec{a}_c=\frac{gl^2\cos\alpha\sin\alpha}{l^2+12b^2}\vec{i}+(g-\frac{gl^2\cos^2\alpha}{l^2+12b^2})\vec{j}$$

6．54 解：

滚子做纯滚动。

∵摩擦力不作动

∴滚子与手柄组成的系统机械能守衡



$$ph+Qh=\frac{1}{2}I\cdot\omega^2+\frac{1}{2}\frac{p}{g}v_o^2+\frac{1}{2}\frac{Q}{g}v_A^2$$

∵OA 平动 $\Rightarrow V_o=V_A$

又∵滚子做纯滚动

$$V_o=\omega\cdot r \quad \Rightarrow \omega=\frac{V_o}{r}$$

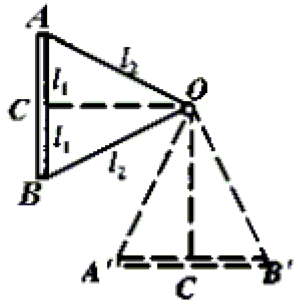
$$I_o=\frac{1}{2}\frac{p}{g}r^2$$

$$\sin\alpha=\frac{h}{S} \qquad \Rightarrow h=S\cdot\sin\alpha$$

代入方程解得

$$S=\frac{(3p+2Q)V^2}{4g(p+Q)\sin\alpha}$$

6、59 解：杆绕轴转动时机械能守衡。



$$mg\sqrt{\ell_2^{\,2}-\ell_1^{\,2}}=\frac{1}{2}mV_c^{\,2}+\frac{1}{2}I\omega^2$$

$$I=\frac{1}{12}m(2\ell_1)^2 \quad =\frac{m\ell_1^{\,2}}{3}$$

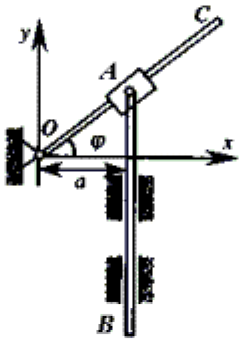
$$V_c=\omega\sqrt{\ell_2^{\,2}-\ell_1^{\,2}}$$

$$\Rightarrow \omega=\frac{V_c}{\sqrt{\ell_2^{\,2}-\ell_1^{\,2}}}$$

代入以上方程

$$\Rightarrow V_c=\sqrt{\frac{6g\left(\ell_2^{\,2}-\ell_1^{\,2}\right)^{3/2}}{3\ell_2^{\,2}-2\ell_1^{\,2}}}$$

6、60 解：在连杆机构运动过程中机械能守衡



$$P_1\frac{\ell}{2}\sin\varphi_o+P_2 atg\varphi_o$$

$$=\frac{1}{2}I_1\omega^2+\frac{1}{2}\frac{p_2}{g}V^2$$

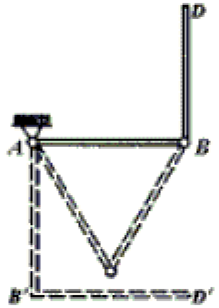
$$I_1=\frac{1}{3}\frac{p_1}{g}\ell^2$$

$V=a\omega$

解以上方程得

$$\omega=\sqrt{\frac{3gP_1\ell\sin\alpha_o+6gP_2atg\alpha_o}{P_1\ell^2+3P_2a^2}}$$

6.65 解：



如有图所示，当 BD 水平时，D 点速度为竖直方向。有投影定理知$\vec{v}_B=0$（B 绕 A 作定轴转动，它只能由垂直 AB 方向的速度）这一瞬时，D 绕 B 作定轴转动，

有动能定理，有

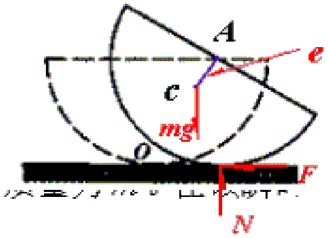
$$P_1\cdot\frac{l}{2}+P_2\cdot\frac{3l}{2}=\frac{1}{2}I\omega^2-0$$

即 $$P\cdot 2l=\frac{1}{2}\cdot\frac{Pl^2}{3g}\omega^2$$

∴ $$\omega l=\sqrt{12\,\mathrm{lg}}=10.8m/s$$

即 $$v_D=10.8m/s$$

6．67 解：如图示，设圆盘的偏角为 φ，圆盘的角加速度为 $\ddot{\varphi}$。



在接触点 B 处，圆盘在地面上只滚不滑，是理想约束，主动力有势，机械能守恒：

设质心位置为 C，则 AC 为

$$AC = e = \frac{\int_0^{\pi}\int_0^{R}\frac{m}{\frac{1}{2}\pi R^2} r dr d\theta \cdot r\sin\theta}{m} = \frac{4R}{3\pi}$$

$$J_A = \frac{1}{2}mR^2$$

$$\Rightarrow J_C = \frac{1}{2}mR^2 - me^2$$

由机械能守恒（φ =0 处为势能零点）

$$\frac{1}{2}mg(R^2+e^2 2eR\cos\varphi)\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}J_C\dot{\varphi}^2 = emg(\cos\varphi - \cos\varphi_0)$$

且在微小摆动时，φ，$\dot{\varphi}$ 是小量，$\cos\varphi \approx 1, \sin\varphi \approx \varphi$，

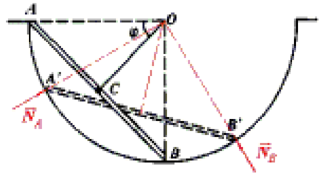
上式对时间求导后略去高阶小量得：

$$[mg(R^2+e^2-2Re)+J_C]\ddot{\varphi} + mge\varphi = 0$$

即 $$\omega = \sqrt{\frac{mge}{mg(R^2+e^2-2\mathrm{Re})+J_C}}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{mg(R^2+e^2-2\mathrm{Re})+J_C}{mge}}$$

6．69 解：如图。棒下滑过程中机械能守衡



$$Pa\sin\varphi - Pa\sin\varphi_0$$

$$= \frac{1}{2}\frac{P}{g}V_c^2 + \frac{1}{2}I_0\omega^2$$

$$\omega \cdot a = V_c$$

$$I_0 = \frac{P(2a)^2}{12g}, \quad \Rightarrow \quad \omega = \dot{\varphi} = \sqrt{\frac{3g\left(\sin\varphi - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{2a}}$$

对杆作受力分析如图

$$\frac{P}{g}a_\tau = \frac{\sqrt{2}}{2}N_A + P\cos\varphi - \frac{\sqrt{2}}{2}N_B$$

$$\frac{P}{g}a_n = \frac{\sqrt{2}}{2}(N_A + N_B) - P\sin\varphi$$

$$I\varepsilon = \frac{\sqrt{2}}{2}N_A.a + \frac{\sqrt{2}}{2}N_B.a$$

$$I = \frac{1}{12}m(2a)^2, \quad a_\tau = \varepsilon \cdot a, \quad a_n = \omega^2 a$$

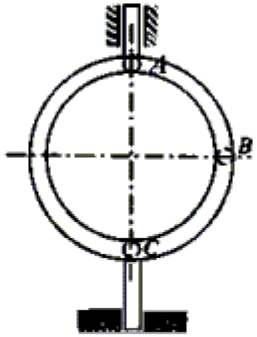
解以上方程得

$$N_B = P\left(\frac{\sqrt{2}\cos\varphi}{8} + \frac{5\sqrt{2}\sin\varphi}{4} - \frac{3}{4}\right)$$

$$N_A = P\left(\frac{5\sqrt{2}\sin\varphi}{4} - \frac{\sqrt{2}\cos\varphi}{8} - \frac{3}{4}\right)$$

6、70 解：

因为外力对 AC 轴的矩为，有关于 AC 轴的动量矩守恒，又因为约束理想，整个过程有机械能守恒



$$I\omega_B + mr^2\omega_B = I\omega$$

$$\Rightarrow \omega_B = \frac{I\omega}{I+mr^2}$$

$$\frac{1}{2}I\omega^2 + mgr = \frac{1}{2}I\omega_B^2 + \frac{1}{2}mv_B^2$$

$$\Rightarrow \quad v_B = \sqrt{2gr + \frac{I\omega^2}{m} - \frac{I^3\omega^2}{m(I+mr^2)^2}}$$

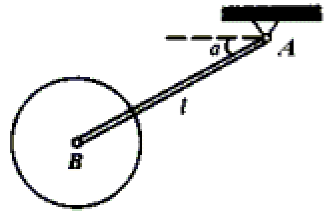
$$I\omega_c = I\omega \qquad \Rightarrow \omega_c = \omega$$

$$2mgr + \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}mv_c^2 + \frac{1}{2}I\omega_c^2$$

$$\Rightarrow \quad v_c = 2\sqrt{gr}$$

6.71 解：

1）固结在一起，圆盘与杆具有相同的角速度，运动过程中机械能守衡



$$m_1 g\frac{l}{2}(1-\sin\alpha) + m_2 gl(1-\sin\alpha)$$

$$= \frac{1}{2}I_A\omega_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_B^2 + \frac{1}{2}I_C\omega_1^2$$

$$v_B = \omega_1 l \Rightarrow \omega_1 = \frac{v_B}{l}$$

$$\Rightarrow \quad v_B = 1.52m/s \qquad \omega = 6.33rad/s$$

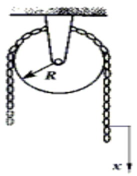
2）不固结时，由于 B 盘外力对质心的矩为零，故 B 盘不转动，运动过程中机械能守衡

$$m_1 g\frac{l}{2}(1-\sin\alpha) + m_2 gl(1-\sin\alpha) = \frac{1}{2}I_A\omega_2^2 + \frac{1}{2}m_2 v_B^2$$

$$v_B = \omega_2 l \quad \Rightarrow \quad \omega_2 = \frac{v_B}{l}$$

$$\Rightarrow \quad v_B = 1.58m/s \qquad \omega = 6.60rad/s$$

6．73 解：如图示，平衡时为 x 原点建立坐标系，一、（1）对 O 点取动量矩定理有：



$$\rho l R^2 \ddot{\varphi} = 2x\rho g R$$

$$x = R\varphi; \quad \dot{x} = R\dot{\varphi}$$

当 $x \le \dfrac{l-\pi R}{2}$ 时成立。

解得：$\dot{\varphi} = \sqrt{\dfrac{2g}{2}}\varphi, \quad v = \sqrt{\dfrac{2g}{2}}x$

当 $x = \dfrac{l-\pi R}{2}$ 时，$v = v_1 = \sqrt{\dfrac{2g}{l}}\dfrac{l-\pi R}{2}$

（2）由于约束是理想的，主动力有势，可用动能定理或机械能守恒：

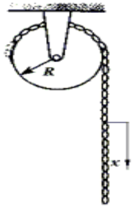
$$\frac{1}{2}\rho l \dot{x}^2 = -(l-\pi R-2x)\rho g\frac{1}{2}(\frac{l-\pi R}{2}+x)+(l-\pi R)\rho g(\frac{l-\pi R}{4})$$

解得：$\dot{x} = \sqrt{\dfrac{2g}{l}}x$

当 $x = \dfrac{l-\pi R}{2}$ 时，$v_1 = \dot{x} = \sqrt{\dfrac{2g}{l}}\dfrac{l-\pi R}{2}$

二、当 $\dfrac{l-\pi R}{2} < x \le \dfrac{l}{2}$ 和 $\dfrac{l}{2} < x \le \dfrac{l+\pi R}{2}$ 将分别计算。

（1） 当 $\dfrac{l-\pi R}{2} < x \le \dfrac{l}{2}$ 时



$$\rho l R^2\ddot{\varphi} = (l-\pi R)\rho g R + \rho g R^2\varphi + \int_0^{\varphi}\rho g R^2\cos\varphi d\varphi$$

$$\varphi \le \frac{\pi}{2}$$

$$lR^2\ddot{\varphi} = gRl - \pi g R^2 + gR^2\varphi + gR^2\sin\varphi$$

$$R^2\dot{\varphi}^2 - R^2\dot{\varphi}_0^2 = [2gRl\varphi - 2gR^2(\pi\varphi - \frac{\varphi^2}{2} + \cos\varphi - 1)]/l$$

$$v^2 = v_1^2 + [2gRl\varphi - 2gR^2(\pi\varphi - \frac{\varphi^2}{2} + \cos\varphi - 1)]/l$$

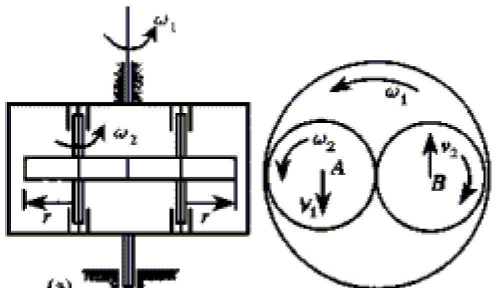
$$v = \left\{v_1^2 + [2gRl\varphi - 2gR^2(\pi\varphi - \frac{\varphi^2}{2} + \cos\varphi - 1)]/l\right\}^{1/2}$$

当 $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$ 时 $v = v_2$

$$v_2 = [v_1^2 + gR\pi - gR^2\frac{3\pi^2-8}{4l}]^{1/2}$$

（2） $\dfrac{l}{2} < x \le \dfrac{l+\pi R}{2}$ 情况可类似计算。。。。。。

6、74 解：如图示。



(a) (b)

动量 $\vec{p} = 0$

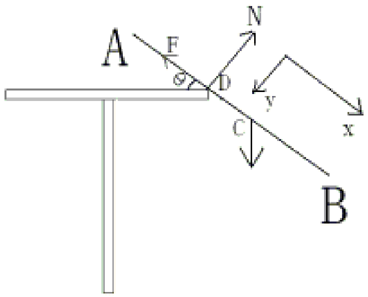
关于 Z 轴的动量矩为：

$$H_Z = 3mr^2\omega_1$$

系统的动能：

$$T = \frac{3}{2}mr^2\omega_1^2 + \frac{1}{2}mr^2\omega_2^2$$

6．78 解：如图示，建立坐标系，并对杆进行受力分析，设杆的角加速度为 ε。C 为质心、杆长为 l、质量为 m。在该瞬时杆可看成绕 D 点的定轴转动，由动量矩定理则有：



$$I_D\varepsilon = mgCD\cos\theta$$

又
$$I_D = \frac{1}{12}ml^2 + m\left(\frac{l}{2}-\frac{l}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}ml^2$$

$$\Rightarrow \varepsilon = \frac{3g\cos\theta}{2l}$$

又由质心动量矩定理有：

$$I_C\varepsilon = N\cdot CD \qquad \Rightarrow N = \frac{3}{4}mg\cos\theta$$

$$m\ddot{x}_c = -F + mg \qquad \Rightarrow m\omega^2\cdot CD = -mg\sin\theta + F$$

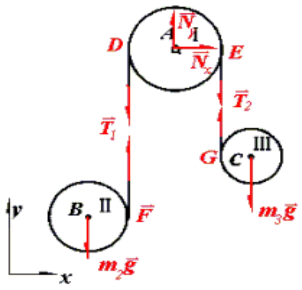
又系统只有重力做功，由能量守恒

$$\frac{1}{2}I_c\omega^2 + \frac{1}{2}m\omega^2\cdot CD^2 = mgCD\sin\theta$$

$$\Rightarrow \omega^2 = \frac{3g\sin\theta}{l} \qquad \Rightarrow fN = F = mg\sin\theta + m\omega^2 CD$$

$$\Rightarrow f = 2tg\theta$$

6．80 解：设 A,B,C 的角加速度分别为 ε$_1$， ε$_2$， ε$_3$，方向均为逆时针方向。研究 D、E、F、G 这四点的运动状态。



$$\overline{a_F} = \overline{a_D} = \overline{\varepsilon_1}\times\overline{AD} \;;$$

$$\overline{a_G} = \overline{a_E} = \overline{\varepsilon_1}\times\overline{AE}$$

以 F 为基分析 B：

$$\overline{a_B} = \overline{a_F} + \overline{\varepsilon_2}\times\overline{FB}$$

写成标量形式： $a_B = -\varepsilon_1 r_1 - \varepsilon_2 r_2$ (1)

以 G 为基分析 C： $\overline{a_C} = \overline{a_G} + \overline{\varepsilon_3}\times\overline{GC}$

写成标量形式： $a_C = \varepsilon_1 r_1 + \varepsilon_3 r_3$ （2）

对轮 II 用动量定理： $T_1 - m_2 g = m_2 a_B$ （3）

动量矩定理： $T_1 r_2 = \frac{1}{2}m_2 r_2^2\varepsilon_2$ （4）

对轮 III 用动量定理： $T_2 - m_3 g = m_3 a_C$ （5）

动量矩定理： $-T_2 r_3 = \frac{1}{2}m_3 r_3^2\varepsilon_3$ （6）

对轮 I 用角动量定理： $T_1 r_1 - T_2 r_1 = \frac{1}{2}m_1 r_1^2\varepsilon_1$ （7）

联立（1）～（7）式，解得：

$$\varepsilon_1 = \frac{2(m_2 - m_3)g}{(3m_1 + 2m_2 + 2m_3)r_1}$$

$$a_B = -\frac{2(3m_1 + 3m_2 + m_3)}{3(3m_1 + 2m_2 + 2m_3)}g$$

$$a_C = -\frac{2(3m_1 + m_2 + 3m_3)}{3(3m_1 + 2m_2 + 2m_3)}g$$

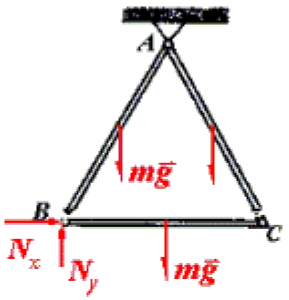
（负号表示与 y 方向相反）

6、82 解：

1）对 AC 杆分析

$$mg\sin 30^{\circ}\cdot l/2 = I\varepsilon_{AC}$$

$$\varepsilon_{AC} = \frac{4mgl}{I} = \frac{3g}{4l} \quad (\text{顺时针})$$



2）对 BC 杆分析

$$m\ddot{x}_p = N_x$$

$$m\ddot{y}_p = mg - N_y$$

$$I_2\varepsilon_2 = N_y \cdot l/2$$

对 AB 杆分析

$$I_1\varepsilon_1 = mgl/4 + N_y \cdot l/2 - N_x\frac{\sqrt{3}}{2}l$$

$$\ddot{x}_p = \ddot{x}_B = \varepsilon_1 l\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\ddot{y}_p = \ddot{y}_B + \varepsilon_2 l/2 = \frac{\varepsilon_1+\varepsilon_2}{2}l$$

解以上方程得：

$$\varepsilon_1 = \frac{18g}{55l} \qquad (\text{逆时针})$$

$$\varepsilon_2 = \frac{69g}{55l} \qquad (\text{顺时针})$$

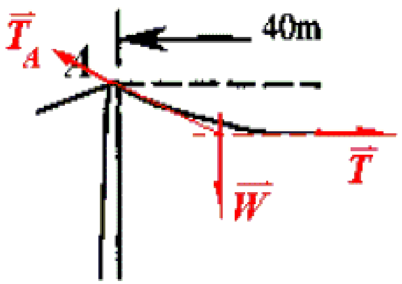
由对称性，在电线中点断开，受力分析如图示

$$T_A\sin\alpha = W$$

$$T_A\cos\alpha = T$$

$$tg^{-1} = \frac{1}{10}$$

W=200



所以 $T = 10W = 2000 \quad (N)$

7-17 解：

设

$a = 0.03;\quad b = 0.25;\quad \theta = 53.13$

则

$$L = (a^2 + b^2 - 2ab\cos(\pi - \theta))^{1/2}$$

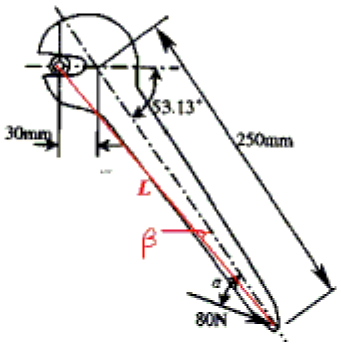
$$\frac{a}{\sin\beta} = \frac{L}{\sin\theta} \quad \Rightarrow \sin\beta = \frac{a}{L}\sin\theta$$

$$\beta = \sin^{-1}(\frac{a}{L}\sin\theta)$$

当 $\alpha - \beta = 0$ 时，力矩最小 $M_{\min} = 0$

当 $\alpha - \beta = 90^0$ 时，力矩最大

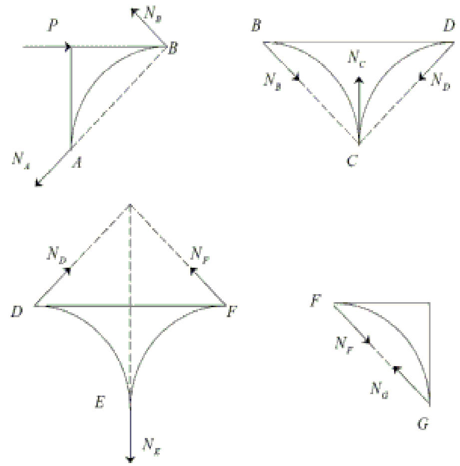
$M_{\max} = 80L$



7.19　解：原题有误。

这里给出将 E 处约束和 C 处约束交换一下后的解答。

各件的受力分析如图所示。



对第一个元件，有

$$\Sigma X = 0：\ P - \frac{\sqrt{2}}{2}N_A - \frac{\sqrt{2}}{2}N_B = 0$$

$$\Sigma Y = 0：\ \frac{\sqrt{2}}{2}N_B - \frac{\sqrt{2}}{2}N_A = 0$$

解得 $N_A = N_B = \frac{\sqrt{2}}{2}P$

对第二个元件，有

$$\Sigma X = 0：\ \frac{\sqrt{2}}{2}N_D - \frac{\sqrt{2}}{2}N_B = 0$$

$$\Sigma Y = 0：\ N_C - \frac{\sqrt{2}}{2}N_B - \frac{\sqrt{2}}{2}N_D = 0$$

解得 $N_C = P$，$N_D = \frac{\sqrt{2}}{2}P$

对第三个元件，有

$$\Sigma X = 0：\ \frac{\sqrt{2}}{2}N_D - \frac{\sqrt{2}}{2}N_F = 0$$

$$\Sigma Y = 0：\ \frac{\sqrt{2}}{2}N_D + \frac{\sqrt{2}}{2}N_F - N_E = 0$$

解得 $N_E = P$，$N_F = \frac{\sqrt{2}}{2}P$

对最后一个元件，有

$$N_G = N_F = \frac{\sqrt{2}}{2}P$$

7-38 解:

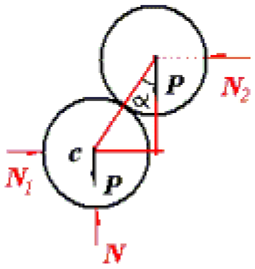
由球受力分析图可知

$$N_2 = N_1$$

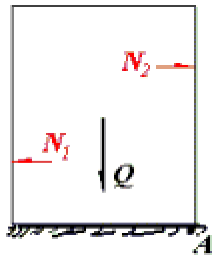
对 c 取矩心， $L_c = 0$

$$N_2 2r\cos\alpha = P2r\sin\alpha$$

$$N_2 = Ptg\alpha$$



分析圆筒受力如图，筒要倾倒的临界条件为约束反力集中在 A 处，对 A 取矩心， $L_A = 0$

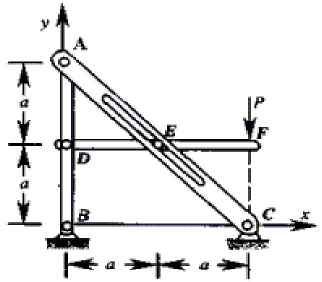


$$N_2 2r\cos\alpha - QR = 0$$

$$Q = \frac{2r}{R}N_2\cos\alpha = \frac{2r}{R}P\sin\alpha$$

$$Q = \frac{2r}{R}P\frac{R-r}{r} = \frac{2(R-r)}{R}P$$

7—39 题解



解 当 $\vec{P}$ 为铅垂方向且过 C 点时，整个系统对 C 点取矩 $L_c = 0$，

$$N_{By} = 0$$

由图可知 ABC 为等腰直角三角形 $\overrightarrow{N_E} \perp AC$ 对 DF 杆对 D 点取矩， $L_D = 0$

$$\therefore\quad N_E a\sin 45^\circ = 2Pa \qquad \Rightarrow N_E = \frac{2P}{\sin 45^\circ} = 2\sqrt{2}P$$

由主向量 $\vec{R} = 0$ 得:

$$\begin{cases} N_E\cos 45^\circ - N_D\cos\alpha = 0 \\ N_E\sin 45^\circ - P - N_D\sin\alpha = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow N_D\cos\alpha = 2P \qquad \mathrm{tg}\alpha = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow N_D\sin\alpha = P \qquad N_D = \sqrt{5}P$$

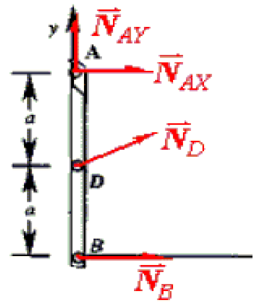
可见 N_D 沿着水平方向斜向上方向且成 $\mathrm{arc\,tg}\,\alpha = \frac{1}{2}$ 角，N_D 的大小为 $\sqrt{5}P$；对 ADB 杆， $L_A = 0$; $\vec{R} = 0$ 有

$$\begin{cases} N_B 2a + N_D\cos\alpha\cdot a = 0 \\ N_{AX} - N_D\cos\alpha - N_B = 0 \\ N_{AY} - N_D\sin\alpha = 0 \end{cases}$$

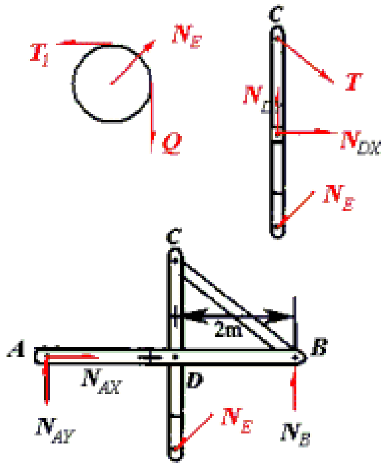
$$\Rightarrow N_B = P$$

$$\Rightarrow N_{AX} = 3P$$

$$\Rightarrow N_{AY} = P$$



7-40 解：由受力分析图可知，CD 杆是二力构件，拉力为 T，分析圆轮受力如图示：



$$N_E \sin 45^0 = Q$$

$$N_E = \sqrt{2}Q$$

整体分析对 A 取矩心，

$L_A = 0$

$$4N_B - (1.5+2)N_E\cos 45^0 = 0$$

$$4N_B = \frac{7}{2\sqrt{2}}\sqrt{2}Q$$

$$N_B = \frac{7}{8}Q$$

$$R_X = 0 \quad \Rightarrow N_{AX} = N_E\cos 45^0 = Q$$

$$R_Y = 0 \quad \Rightarrow N_{AY} + N_B = N_E\cos 45^0$$

$$N_{AY} = \frac{1}{8}Q$$

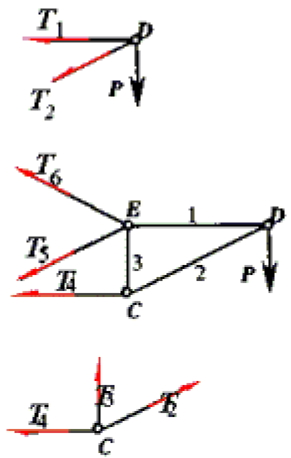
分析 CE 杆受力如图，对 D 取矩心， $L_D = 0$

$$N_E\cos 45^0 + T\sin 45^0 = 0$$

$$T = -N_E = -\sqrt{2}Q$$

说明 CD 杆是受压。

7-41 解：由受力分析图可知，D 是汇交力系平衡，拉力为 T，分析圆轮受力如图示：



$$T_2 \sin\alpha + P = 0$$

$$T_1 = T_2\cos\alpha$$

$$T_1 = 2P$$

$$T_2 = \sqrt{5}P$$

截面法分析 T_4，T_5，T_6，

$$L_B = 0 \quad \Rightarrow \frac{a}{2}T_6\cos\alpha - 2aP = 0$$

$$T_6 = 2\sqrt{5}P$$

$$L_E = 0 \quad \Rightarrow \frac{a}{2}T_4 + aP = 0 \qquad T_4 = 2P$$

$$L_C = 0 \quad \Rightarrow \frac{a}{2}(T_5 + T_6)\cos\alpha - aP = 0; \qquad T_5 = -\sqrt{5}P$$

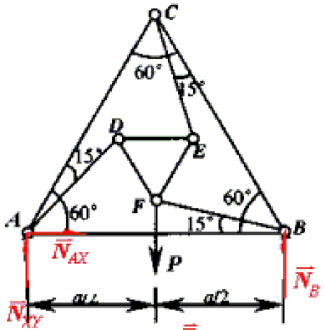
分析 C 节点的受力如图，

$$T_3 + T_2\sin\alpha = 0$$

$$T_3 = -P$$

说明 EC 杆是受压。

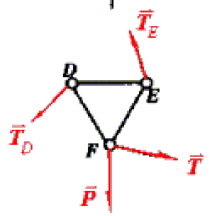
7-43 解：如图整体分析求 B 处的约束反力



$$L_A = 0$$

$$N_B = 0.5P$$

截面法分析三角形 DEF，设边长 DE＝l



$$L_D = 0:$$

$$T_E l \sin 75^0 - P\frac{l}{2} + T\cos 15^0 l \sin 60^0 - T\frac{l}{2}\sin 15^0 = 0$$

$$L_E = 0:$$

$$T_D l \sin 45^0 + P\frac{l}{2} + T\cos 15^0 l \sin 60^0 + T\sin 15^0\frac{l}{2} = 0$$

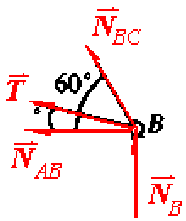
$$L_F = 0:$$

$$T_E l\cos 45^0 + T_D l\cos 15^0 = 0$$

求得

$$T \doteq -0.165P$$

再分析 B 节点汇交力系:

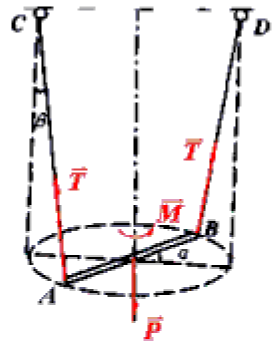


$$N_B + N_{BC}\sin 60^0 + T\sin 15^0 = 0$$

$$N_{AB} + N_{BC}\cos 60^0 + T\cos 15^0 = 0$$

$$N_{AB} = 0.42P$$

7-55 解：如图受力分析，关于垂直轴 Z 的力矩平衡



$$L_Z = 0$$

$$M - T2r\sin\beta = 0$$

再由 $R_Z = 0$ 得：

$$2T\cos\beta - P = 0$$

再假定 $l >> r$，由几何关系：

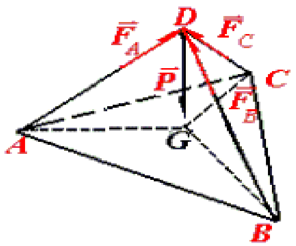
$$\sin\beta = 2r\sin(\frac{\alpha}{2})/l$$

$$\cos\beta = \sqrt{1-\sin^2\beta} = \sqrt{1-\frac{4r^2}{l}\sin^2(\frac{\alpha}{2})}$$

解得：

$$T = \frac{P}{2\sqrt{1-\frac{2r}{l}\sin(\frac{\alpha}{2})}};\quad M = \frac{2P\frac{r^2}{l}\sin(\frac{\alpha}{2})}{\sqrt{1-\frac{2r}{l}\sin(\frac{\alpha}{2})}}$$

7-57 解：四球心连线构成一正四面体，边长为 2r＝R，A，B，C 三点是下面三球的球心连线，G 是三角形的中心，D 是顶球的球心，受力分析如图示。



设 $\overrightarrow{AD}=\vec{r}_A$，$\overrightarrow{BD}=\vec{r}_B$，$\overrightarrow{CD}=\vec{r}_C$

$\overrightarrow{GD}=h\vec{k}$

$$\vec{r}_A=h\vec{k}+\overrightarrow{AG},\ \vec{r}_B=h\vec{k}+\overrightarrow{BG},\ \vec{r}_C=h\vec{k}+\overrightarrow{CG},$$

由对称性可知，$\vec{F}_A$，$\vec{F}_B$，$\vec{F}_C$ 的大小相同，方向不同，所以：

$$\vec{F}_A=F\vec{r}_A/R;\quad \vec{F}_B=F\vec{r}_B/R;\quad \vec{F}_C=F\vec{r}_C/R;$$

由汇交力系平衡条件:

$$\vec{F}_A+\vec{F}_B+\vec{F}_C+\vec{P}=0$$

$$(3F\frac{h}{R}-P)\vec{k}+(\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})\frac{F}{R}=0$$

因为后三项之和三角形 ABC 平面内，和 $\vec{k}$ 无关，所以得到

$$(3F\frac{h}{R}-P)=0$$

$$(\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})\frac{F}{R}=0$$

解得：

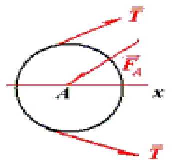
$$F=\frac{RP}{3h}=\frac{2rP}{3h}$$

由几何关系可知：

$$h=\sqrt{(2r)^2-(\frac{2}{3}2r\cos30^0)^2}=\frac{2}{3}\sqrt{6}r$$

DAG 角为

$$\sin\alpha=\frac{h}{2r};\quad \cos\alpha=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

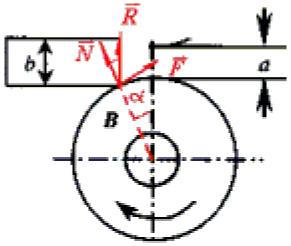


对 A 球的受力分析如图，由水平面内 x 方向受力平衡得：

$$-F\cos\alpha+2T\cos30^0=0$$

$$T=\frac{2rp\cos\alpha}{6h\cos30^0}=\frac{\sqrt{6}}{18}P$$

7-63 解：受力分析如图示板材总的受力 $\vec{R}$ 必须向右，图示是极限情况。α 必须小于最大摩擦角。可得：



$$\sin\alpha=\frac{\sqrt{(\frac{d}{2})^2-(\frac{d}{2}-(\frac{b-a}{2}))^2}}{\frac{d}{2}}$$

$$\cos\alpha=\frac{\frac{d}{2}-(\frac{b-a}{2})}{\frac{d}{2}}$$

由几何关系可知：

$$\frac{\sqrt{(\frac{d}{2})^2-(\frac{d}{2}-(\frac{b-a}{2}))^2}}{\frac{d}{2}-(\frac{b-a}{2})}=tg\alpha\le0.1$$

$$(\frac{d}{2})^2-(\frac{d}{2}-\frac{b-a}{2})^2=0.01(\frac{d}{2}-\frac{b-a}{2})^2$$

$$b=a+(\sqrt{1.01}-1)d$$

即要求：

$$a<b\le a+(\sqrt{1.01}-1)d$$

7-67 解：极限分析，受力分析如图示，先总体分析知 T＝G，再分析 H 点可求出 N，

$$N = G$$

由对称性分析重物可知

$$F_F = G/2$$

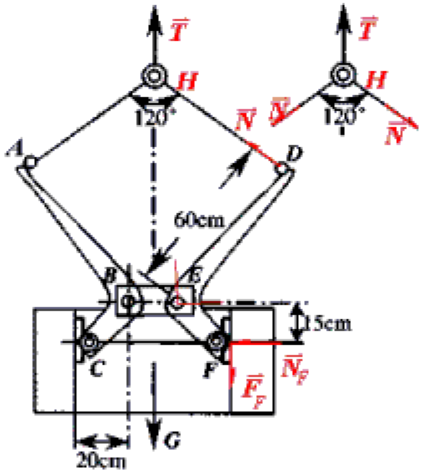
再分析 DEF 曲臂来决定摩擦系数 f。假定绳的作用力 N 垂直于 DE，取 E 为矩心，

$$fN_F 20 + N_F 15 = 60N = 60G$$

$$fN_F = G/2$$

求得：f ＝0 .15

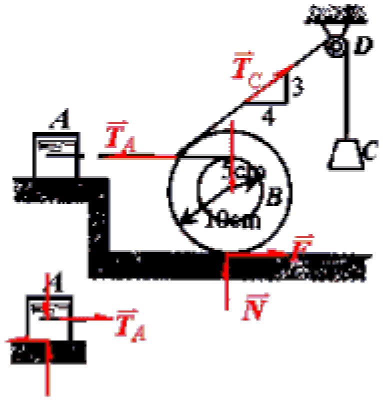
即摩擦系数要大于 0.15



7-69 解：受力分析如图所示，A 块重 500N，轮轴 B 重 1000 N，分析 A 重块可知最大摩擦力

$$F_A = T_A = 0.5*500 = 250$$

假定 A 处先达到最大摩擦力时分析 B 轮，求出 C 重物的重量　$W_C = T_C$



$$T_C(10+10\frac{4}{5}) = 15T_A = 15*250$$

$$T_C = 208.4$$

再假定 B 轮先达到最大摩擦力，求 T_C，以水平绳和原轮接触点为矩心有

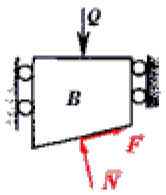
$$10F = 2N = (10-5*\frac{4}{5})T_C = 6T_C$$

$$\frac{3}{4}T_C + N - 1000 = 0$$

求得　$T_C \doteq 266.7$

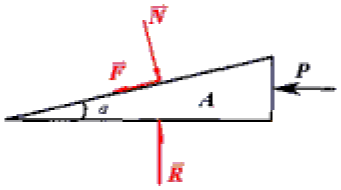
所以，能保持平衡的 C 重物的最大重量为 208.4N

7-71 解：受力分析如图所示，在 B 块不下落的临界条件下，B 块的垂直方向的平衡方程为：



$$N\cos\alpha + F\sin\alpha - Q = 0$$

$$F = fN$$



可求得：

$$N = \frac{Q}{(\cos\alpha + f\sin\alpha)}$$

$$F = \frac{fQ}{(\cos\alpha + f\sin\alpha)}$$

分析 A 重块水平方向平衡条件，可求得最小推力 $P_{\min}$

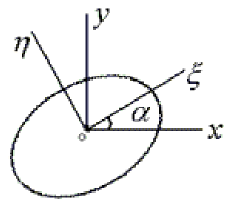
$$N\sin\alpha - F\cos\alpha - P_{\min} = 0$$

$$P_{\min} = Q\frac{\sin\alpha - f\cos\alpha}{\cos\alpha + f\sin\alpha}$$

同样的分析对 B 不被上推的临界情况时，F 改变了方向，相当于把 f 改为 $-f$ 就可求得 $P_{\max}$，即

$$P_{\max} = Q\frac{\sin\alpha + f\cos\alpha}{\cos\alpha - f\sin\alpha}$$

8.1 **解** 建立图示 oxy，$o\xi\eta$ 坐标系，在 $o\xi\eta$ 坐标系里的基矢和 oxy 坐标系基矢的关系为



$$\begin{bmatrix}\vec{i}' \\ \vec{j}' \\ \vec{k}'\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\vec{i} \\ \vec{j} \\ \vec{k}\end{bmatrix}$$

$$\vec{r} = \begin{bmatrix}x & y & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\vec{i} \\ \vec{j} \\ \vec{k}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}x & y & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\vec{i}' \\ \vec{j}' \\ \vec{k}'\end{bmatrix}$$

$$= (x\cos\alpha + y\sin\alpha)\vec{i}' + (y\cos\alpha - x\sin\alpha)\vec{j}'$$

$$\therefore\quad J_{\xi\eta} = \sum m_i\xi_i\eta_i =$$

$$\sum m_i(x_i\cos\alpha + y_i\sin\alpha)(y_i\cos\alpha - x_i\sin\alpha) = 0$$

即 ：

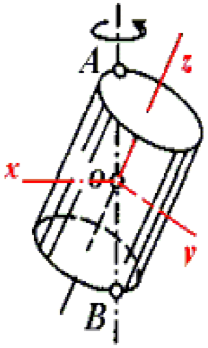
$$\sum m_i x_i y_i(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) - (\sum m_i x_i - \sum m_i y_i)\sin\alpha\cos\alpha = 0$$

$$I_{xy}\cos 2\alpha = \frac{1}{2}(I_y - I_x)\sin 2\alpha$$

$$tg2\alpha = \frac{2I_{xy}}{I_y - I_x}$$

即： $\alpha = \frac{1}{2}arctg(\frac{2I_{xy}}{I_y - I_x})$

8.4 **解**　建立图示 oxy 坐标系



显然　oxy 是中心主坐标，

$$I_x = I_y = \frac{1}{4}ma^2 + \frac{1}{12}mh^2$$

AB 的方向于：

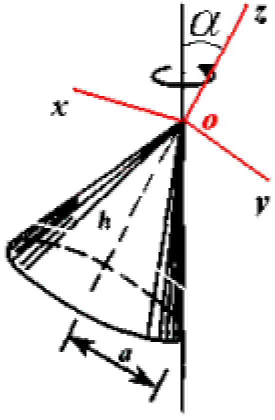
$$\cos\alpha = 0,\quad \cos\beta = \frac{2a}{\sqrt{4a^2+h^2}},\quad \cos\gamma = \frac{h}{\sqrt{4a^2+h^2}}$$

$$J_{AB} = I_x\cos^2\alpha + I_y\cos^2\beta + I_z\cos^2\gamma$$

所以：

$$= \frac{ma^2}{6}\frac{6a^2+5h^2}{4a^2+h^2}$$

8.5 **解**　建立图示 $oxyz$ 坐标系，显然



$oxyz$ 是主坐标，

$$I_x = I_y = \frac{3}{5}\left(\frac{a^2}{4} + h^2\right)m$$

$$I_z = \frac{3}{10}ma^2$$

母线的方向和 Z 轴的夹角 α：

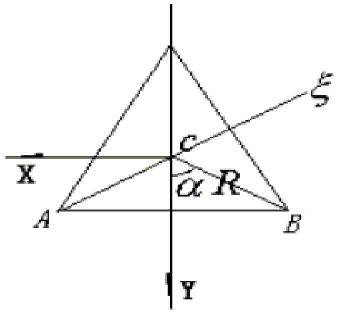
$$\cos\alpha = 0,\quad \cos\beta = \frac{a}{\sqrt{a^2+h^2}},\quad \cos\gamma = \frac{h}{\sqrt{a^2+h^2}}$$

$$J_l = I_x\cos^2\alpha + I_y\cos^2\beta + I_z\cos^2\gamma$$

所以：

$$= \frac{ma^2}{20}\frac{(3a^2+18h^2)}{(a^2+h^2)}$$

8.6 解 建立图示 cXY 坐标系，可以证明 X,Y 是惯性主轴，且



$$J_X = J_Y$$

$\because$ y 轴是对称轴，

$\therefore$ $J_{XY} = J_{ZY} = 0$ ，又因为

xy 平面是对称面，所以

$J_{XZ} = J_{YZ} = 0$ ， XY 轴是

主轴。再证明 $J_X = J_Y$

设 J_Y 已求得，则由对称性知 $J_\xi = J_Y$ ，在 cXY 平面内，

$$J_Y = J_\xi = J_X \cos^2\alpha + J_Y \sin^2\beta = J_X \cos^2\alpha + J_Y \sin^2\alpha$$

$$J_Y(1-\sin^2\alpha) = J_X \cos^2\alpha \quad \Rightarrow \quad J_X = J_Y$$

由此可见，求得 J_Y 就是过质心任一轴的转动惯量。

计算正 n 边形内任一三角形 ACB 的 J_x， J_y

$$J_x = \int_0^{R\cos\alpha} y^2 \rho 2x dy = \frac{m}{2n} R^2 \cos^2(\frac{\pi}{n})$$

$$J_y = \int_0^{R\cos\alpha} \frac{1}{12} \rho 2x (2x)^2 dy = \frac{m}{6n} R^2 \sin^2(\frac{\pi}{n})$$

由平面薄板 $J_z = J_x + J_y$， 正 n 边形对过质心 C 的整体 J_Z 有

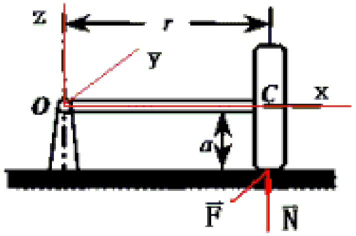
$$J_Z = \sum J_z = n(J_x + J_y)$$

$$J_Z = J_X + J_Y = 2J_Y = n(J_x + J_y)$$

$$J_Y = \frac{n}{2}(J_x + J_y) = \frac{n}{2}(\frac{m}{2n} R^2 \cos^2(\frac{\pi}{n}) + \frac{m}{6n} R^2 \sin^2(\frac{\pi}{n}))$$

即 $J_Y = \dfrac{m}{12} R^2 (2 + \cos\dfrac{2\pi}{n})$

8.7 解 建立图示 oxy 坐标系



显然 oxy 是主坐标，

$$I_x = m\rho^2$$

$$I_z = I_y = \frac{1}{4} m a^2 + m r^2$$

关于 y 轴的外力矩 $L_y = -Nr + pr$

欧拉动力学方程在 y 轴上的投影为：

$$I_y \varepsilon_y - (I_z - I_x)\omega_x \omega_z = L_y \qquad (1)$$

刚体作规则进动：$\vec{\omega} = -\dfrac{r}{a}\Omega\vec{i} + \Omega\vec{k}$， $\vec{\varepsilon} = \vec{\omega}_e \times \vec{\omega}_r = -\dfrac{r}{a}\Omega^2\vec{j}$

代入欧拉动力学方程

$$-I_y \frac{r}{a}\Omega^2 + (I_z - I_x)\frac{r}{a}\Omega\Omega = -Nr + pr$$

化简得： $$-\frac{\Omega^2}{a} m\rho^2 = p - N$$

$$\therefore N = p + \frac{\Omega^2}{a} m\rho^2 \doteq 2.69\times 10^4$$

8.9 **解** 在主坐标下表示角速度，角加速度，动量矩和动能：

$$\vec{\omega} = \omega_x \vec{i} + \omega_y \vec{j} + \omega_z \vec{k}$$

$$\vec{\varepsilon} = \dot{\omega}_x \vec{i} + \dot{\omega}_y \vec{j} + \dot{\omega}_z \vec{k}$$

$$\vec{H}_0 = J_x \omega_x \vec{i} + J_y \omega_y \vec{j} + J_z \omega_z \vec{k}$$

$$T = \frac{1}{2}(J_x \omega_x^2 + J_y \omega_y^2 + J_z \omega_z^2)$$

动量矩矢量和角加速度矢量垂直有：

$$\vec{H}_0 \cdot \vec{\varepsilon} = 0 = J_x \omega_x \dot{\omega}_x + J_y \omega_y \dot{\omega}_y + J_z \omega_z \dot{\omega}_z$$

动能的变化率： $\dfrac{dT}{dt} = J_x \omega_x \dot{\omega}_x + J_y \omega_y \dot{\omega}_y + J_z \omega_z \dot{\omega}_z = 0$

即动能 T 为常数

8.10 **解** 在随体 $o$xyz 主坐标下，规则进动时：

$\dot{\theta} = 0$, $\dot{\psi} = \Omega$, $\dot{\varphi} = \omega$ 且 Ω, ω 为常数. 角速度在随体系上的投影为：

$$\begin{aligned} \omega_x &= \dot{\psi}\sin\theta\sin\varphi & & \dot{\omega}_x = \omega\omega_y \\ \omega_y &= \dot{\psi}\sin\theta\cos\varphi & \Rightarrow \quad & \dot{\omega}_y = -\omega\omega_x \\ \omega_z &= \dot{\psi}\cos\theta + \omega & & \dot{\omega}_z = 0 \end{aligned}$$

因为 z 为对称轴有：$I_x = I_y = I_1$， $I_z = I_3$

由欧拉动力学方程
$$\begin{aligned} I_1\dot{\omega}_x - (I_1 - I_3)\omega_y\omega_z &= L_x \\ I_1\dot{\omega}_y - (I_3 - I_1)\omega_x\omega_z &= L_y \\ I_3\dot{\omega}_z = L_z &= 0 \end{aligned}$$

得：

$$L_x = I_3\dot{\omega}_x + (I_3 - I_1)(\omega_y\omega_z - \dot{\omega}_x) = I_3\dot{\omega}_x(1 + \frac{I_3 - I_1}{I_3}\frac{\Omega}{\omega}\cos\theta)$$

$$L_y = I_3\dot{\omega}_y + (I_3 - I_1)(-\omega_x\omega_z - \dot{\omega}_y) = I_3\dot{\omega}_y(1 + \frac{I_3 - I_1}{I_3}\frac{\Omega}{\omega}\cos\theta)$$

$$L_y = I_3\dot{\omega}_z(1 + \frac{I_3 - I_1}{I_3}\frac{\Omega}{\omega}\cos\theta) = 0$$

$$\therefore \quad \vec{L} = L_x\vec{i} + L_y\vec{j} + L_z\vec{k} = I_3(1 + \frac{I_3 - I_1}{I_3}\frac{\Omega}{\omega}\cos\theta)\vec{\varepsilon}$$

$$\therefore \quad \vec{L} = I_3(\vec{\Omega}\times\vec{\omega})(1 + \frac{I_3 - I_1}{I_3}\frac{\Omega}{\omega}\cos\theta) \quad \text{得证}$$

8.12 解由欧拉动力学方程：

$$I_1\dot{\omega}_\xi + (I_3 - I_1)\omega_\eta\omega_\zeta = -\lambda I_3\omega_\xi \qquad (1)$$

$$I_2\dot{\omega}_\eta + (I_1 - I_3)\omega_\xi\omega_\zeta = -\lambda I_3\omega_\eta \qquad (2)$$

$$I_3\dot{\omega}_\zeta = -\lambda I_3\omega_\zeta \qquad (3)$$

由（3）得：$\dfrac{d\omega_\zeta}{\omega_\zeta} = -\lambda dt$ 且 t＝0 时，$\omega_\zeta = \omega_{\zeta 0}$

$$\therefore \omega_\zeta = \omega_{\zeta 0}e^{-\lambda t} \qquad (4)$$

将（4）代入（1）（2）得：

$$\frac{d\omega_\xi}{dt} = \frac{I_1 - I_3}{I_1}\omega_\eta\omega_{\zeta 0}e^{-\lambda t} - \lambda\frac{I_3}{I_1}\omega_\xi \qquad (5)$$

$$\frac{d\omega_\eta}{dt} = -\frac{I_1 - I_3}{I_1}\omega_\xi\omega_{\zeta 0}e^{-\lambda t} - \lambda\frac{I_3}{I_1}\omega_\eta \qquad (6)$$

$$\frac{(5)}{\omega_\eta} + \frac{(6)}{\omega_\xi} \quad \Rightarrow \omega_\xi\frac{d\omega_\xi}{dt} + \omega_\eta\frac{d\omega_\eta}{dt} = -\lambda\frac{I_3}{I_1}(\omega_\xi^2 + \omega_\eta^2)$$

即 $d(\omega_\xi^2 + \omega_\eta^2) = -2\lambda\dfrac{I_3}{I_1}(\omega_\xi^2 + \omega_\eta^2)dt$

$\therefore \quad \omega_\xi^2 + \omega_\eta^2 = Ae^{-\frac{\lambda I_3}{I_1}t}$ A 为常数

设
$$\omega_\xi = \sqrt{A}e^{-\frac{\lambda I_3}{I_1}t}\sin\varphi(t)$$
$$\omega_\eta = \sqrt{A}e^{-\frac{\lambda I_3}{I_1}t}\cos\varphi(t) \qquad （7）$$

（7）代入（5）式化简得：

$$\dot{\varphi} = \frac{I_3 - I_1}{I_1}\omega_{\zeta 0}e^{-\lambda t}$$

令 $n = \dfrac{I_3 - I_1}{I_1}\omega_{\zeta 0}$

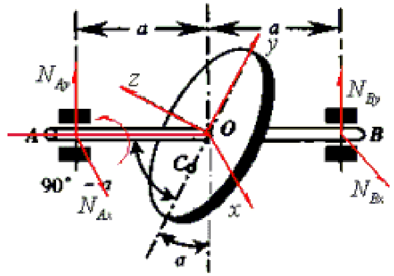
$$\therefore \quad \varphi = -\frac{I_3 - I_1}{\lambda I_1}\omega_{\zeta 0}e^{-\lambda t} + \varepsilon$$

则 $\varphi = \dfrac{n}{\lambda}e^{-\lambda t} + \varepsilon$ （ε 为常数）记 $a = \sqrt{A}$

$$\omega_\xi = a\exp(-\frac{\lambda I_3}{I_1}t)\sin(\frac{n}{\lambda}e^{-\lambda t} + \varepsilon)$$

即
$$\omega_\eta = a\exp(-\frac{\lambda I_3}{I_1}t)\cos(\frac{n}{\lambda}e^{-\lambda t} + \varepsilon)$$
$$\omega_\zeta = \omega_{\zeta 0}e^{-\lambda t}$$

8.21 解 建立图示随体坐标 $oxyz$ 坐标系，重力引起的约束反力为非动约束反力，只分析动约束反力且在随体标架中分解



$$N_{Ax}, N_{Bx}, N_{Ay}, N_{By}$$

x, y, z 都是惯性主轴：

$$I_z = \frac{1}{2}Mr^2 + Me^2,\ I_x = \frac{1}{4}Mr^2 + Me^2,\ I_y = \frac{1}{4}Mr^2$$

$\omega_x = 0,\ \omega_y = -\omega\sin\alpha,\ \omega_z = \omega\cos\alpha$ 且为常数

代入欧拉动力学微分方程：

$$-(I_y - I_z)\omega_y\omega_z = (N_{By} - N_{Ay})a$$
$$0 = (N_{Ax} - N_{Bx})a\cos\alpha$$
$$0 = (N_{Ax} - N_{Bx})a\sin\alpha$$

由质心动量定理：

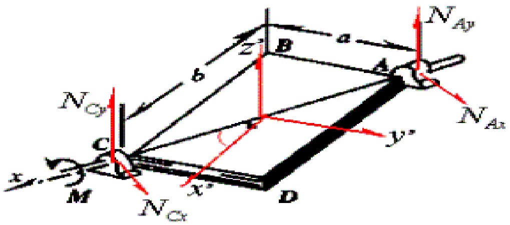
$$Me\sin\alpha\omega^2 = N_{Ay} + N_{By}$$
$$N_{Ax} + N_{Bx} = 0$$

可求得：$N_{Ax} = N_{Bx} = 0$

$$N_{By} = \frac{1}{2}Me\sin\alpha\omega^2 + \frac{\omega^2\sin 2\alpha}{16a}M(r^2 + 4e^2)$$

$$N_{Ay} = \frac{1}{2}Me\sin\alpha\omega^2 - \frac{\omega^2\sin 2\alpha}{16a}M(r^2 + 4e^2)$$

8.22 解 建立如图示固结在板的质心上的中心主坐标 $ox'y'z'$



$$I_x = \frac{1}{12}ma^2$$

$$I_y = \frac{1}{12}mb^2$$

$$I_z = \frac{1}{12}m(a^2+b^2)$$

A,C 处的约束反力如图分解为垂直于 X 轴的

N_{Ay}, N_{Ax}, N_{Cy}, N_{Cx}

平板关于 AC 轴的转动惯量为

$$J_{AB} = I_x\cos^2\alpha + I_y\sin^2\alpha$$

$$= \frac{1}{12}ma^2\frac{b^2}{a^2+b^2} + \frac{1}{12}mb^2\frac{a^2}{a^2+b^2} = \frac{ma^2b^2}{6(a^2+b^2)}$$

转动角加速度和角速度以及在随体坐标中的分量

$$\varepsilon = \frac{M}{J_{AB}} = \frac{6(a^2+b^2)M}{ma^2b^2};\quad \bar{\varepsilon} = \varepsilon\cos\alpha\bar{i} + \varepsilon\sin\alpha\bar{j}$$

$$\omega = \frac{6(a^2+b^2)M}{ma^2b^2}t;\quad \bar{\omega} = \omega\cos\alpha\bar{i} + \omega\sin\alpha\bar{j}$$

由质心的动量定理和欧拉动力学微分方程（不考虑静反力）：

$$0 = N_{Ax} + N_{Cx}$$

$$0 = N_{Ay} + N_{Cy}$$

$$I_x\varepsilon\cos\alpha = (N_{Ay} - N_{Cy})\frac{a}{2} + M\cos\alpha$$

$$-I_y\varepsilon\sin\alpha = (N_{Ay} - N_{Cy})\frac{b}{2} - M\sin\alpha$$

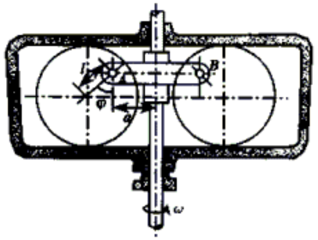
$$(I_x - I_y)\omega^2\sin\alpha\cos\alpha = (N_{Cx} - N_{Ax})\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}$$

求得：
$$N_{Ay} = -N_{Cy} = \frac{M(a^2-b^2)}{2ab\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$N_{Cx} = -N_{Ax} = \frac{m}{24}\omega^2\sin 2\alpha\frac{a^2-b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

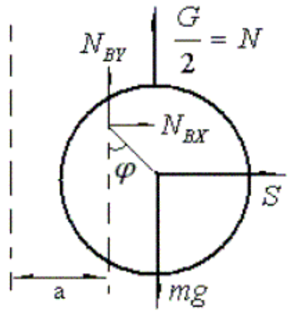
题目

9.3 调速器由两个质量为 m 的均质圆盘构成，圆盘偏心地铰接于距转轴为 a 的 A，B 两点．调速器绕铅垂轴以等角速 ω 转动，两圆盘中心到悬挂点的距离为 l．调速器壳重为 G，并放在两盘上，如不计摩擦，试求角速度 ω 与圆盘中心偏离铅垂位置引起的偏角 φ 的关系．



答案

9.3 解 主动力、约束力和惯性力分析如右图

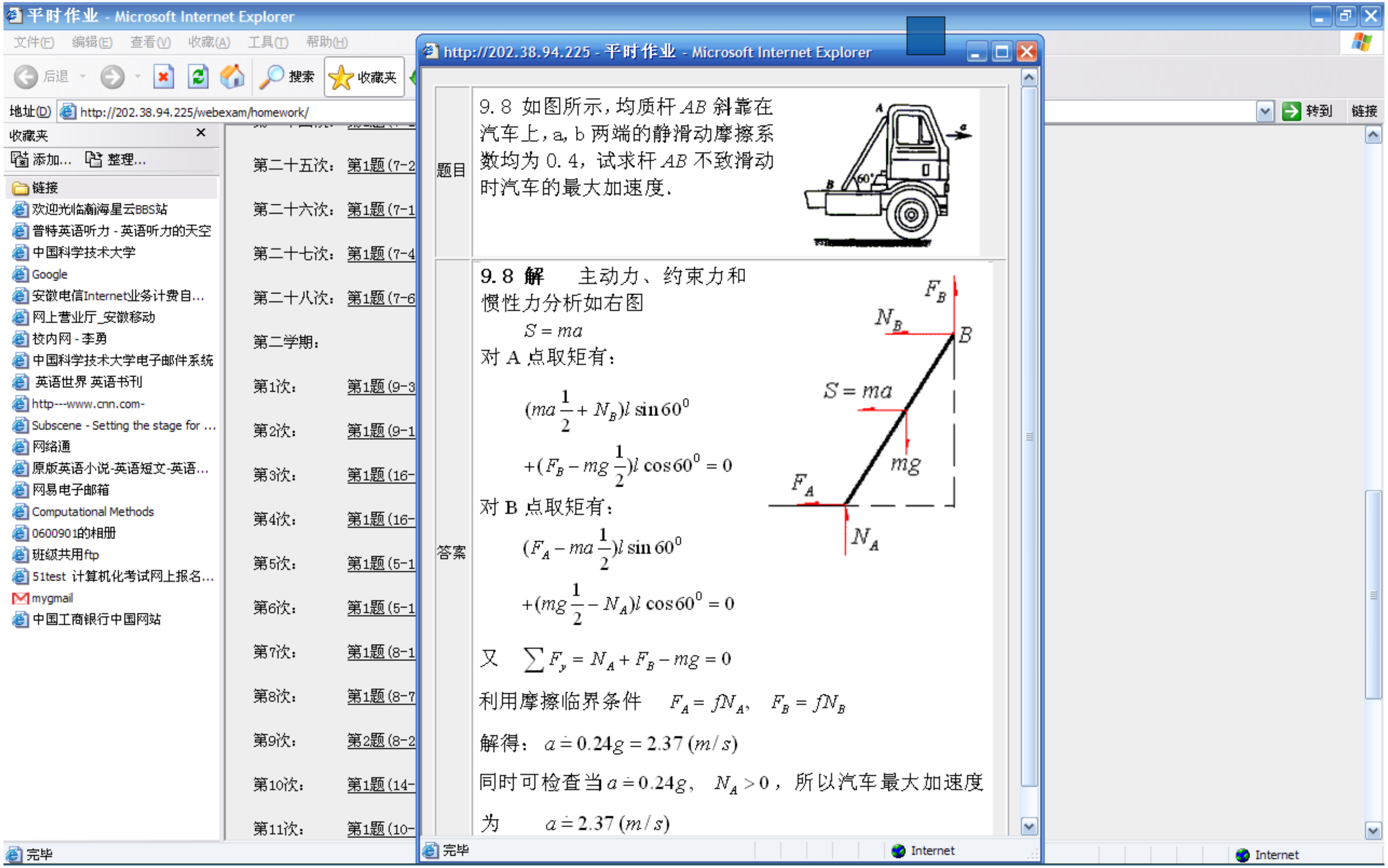


$$S=m\omega^2(a+l\sin\varphi)$$

对 B 点取矩有：

$$\left(\frac{G}{2}+mg\right)l\sin\varphi=m\omega^2(a+l\sin\varphi)l\cos\varphi$$

$$\therefore\quad \omega=\sqrt{\frac{\left(\frac{G}{2}+mg\right)}{m(a+l\sin\varphi)}tg\,\varphi}$$



9.8 如图所示，均质杆 AB 斜靠在汽车上，a, b 两端的静滑动摩擦系数均为 0.4，试求杆 AB 不致滑动时汽车的最大加速度.

9.8 解　主动力、约束力和惯性力分析如右图

$S = ma$

对 A 点取矩有：

$$(ma\frac{1}{2} + N_B)l\sin 60^0$$

$$+(F_B - mg\frac{1}{2})l\cos 60^0 = 0$$

对 B 点取矩有：

$$(F_A - ma\frac{1}{2})l\sin 60^0$$

$$+(mg\frac{1}{2} - N_A)l\cos 60^0 = 0$$

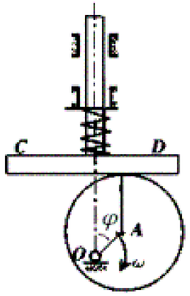
又　$\sum F_y = N_A + F_B - mg = 0$

利用摩擦临界条件　$F_A = fN_A$，　$F_B = fN_B$

解得：　$a \doteq 0.24g = 2.37\,(m/s)$

同时可检查当 $a \doteq 0.24g$，　$N_A > 0$，所以汽车最大加速度为　$a \doteq 2.37\,(m/s)$

9.9 **解：** 导板 CD 的主动力、约束力和惯性力分析如右图，O 到 CD 的距离为

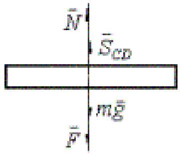


$$y = r + e\cos\varphi$$

$$\ddot{y} = -e\omega^2\cos\varphi$$

惯性力：$S_{CD} = me\omega^2\cos\varphi$

弹簧的作用力：



$$F = k(b - (r + e - (r + e\cos\varphi)) = k(b - e(1 - \cos\varphi))$$

平衡方程　$N + S_{CD} - F - mg = 0$

$$N = k(b - e(1 - \cos\varphi)) + mg - me\omega^2\cos\varphi$$

若要 CD 始终和偏心圆盘接触，则要 N>0，

$$k(b - e(1 - \cos\varphi)) \ge me\omega^2\cos\varphi - mg$$

$$k \ge \frac{m(e\omega^2\cos\varphi - g)}{b - e(1 - \cos\varphi)},$$

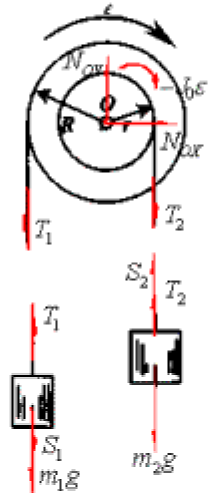
只讨论 $b > 2e$ 的情况：

（1） $b > 2e$, $e\omega^2 > g$ 的情况， $\varphi = 0$ 时要满足

$$k \ge \frac{m(e\omega^2 - g)}{b}$$ 就能满足所有其他 φ 时的条件。

（2） $b > 2e$, $e\omega^2 < g$ 任意弹簧刚度多能满足条件。

9.10 **解：** 主动力、约束力和惯性力分析如右图，对圆盘 O 取矩有



$$-J_0\varepsilon - T_1R + T_2r = 0 \qquad (1)$$

对左边重物：$S_1 = m_1R\varepsilon$

$\therefore\quad T_1 = m_1g + m_1R\varepsilon$

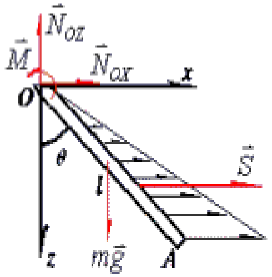
对右边重物：$S_2 = m_2r\varepsilon$

$\therefore\quad T_2 = m_2g + m_2r\varepsilon$

T_1, T_2 代入方程（1）圆盘的角加速度

$$\varepsilon = \frac{(m_2r - m_1R)g}{J_0 + m_2r^2 + m_1R^2}$$

9.11 **解**：主动力、约束力和惯性力分析和简化如右图。惯性力作用点在距 0 点 $2l/3$



$$S = \frac{1}{2} l \sin\theta \, m\omega^2$$

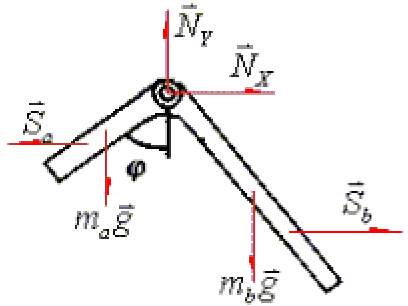
对 O 点取矩：

$$M - mg\frac{1}{2}\sin\theta + S\frac{2}{3}l\cos\theta = 0$$

解得：

$$M = mg\frac{l}{2}\sin\theta - \frac{1}{6}ml^2\omega^2\sin 2\theta$$

9.13 **解**：主动力、约束力和惯性力分析和简化如右图。杆上简化惯性力的作用点分别在距 0 点的 $2a/3$ 和 $2b/3$ 处



$$S_b = m_b\frac{b}{2}\cos\varphi\,\omega^2$$

$$S_a = m_a\frac{a}{2}\sin\varphi\,\omega^2$$

平衡方程取对 O 点取矩：

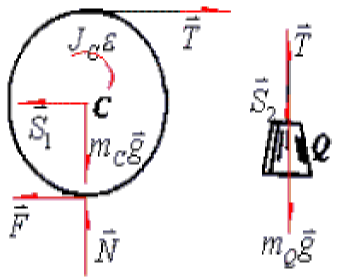
$$m_a\vec{g}\frac{a}{2}\sin\varphi - m_b\vec{g}\frac{b}{2}\cos\varphi + S_b\frac{2}{3}b\sin\varphi - S_a\frac{2}{3}a\cos\varphi = 0$$

解得：

$$\omega = \sqrt{\frac{3g(b^2\cos\varphi - a^2\sin\varphi)}{(b^3 - a^3)\sin 2\varphi}}$$

9.16 **解**：设重物下落的加速度为 a_Q，由圆柱只滚不滑的条件可得：$a_Q = a_C + r\varepsilon$

a_C, ε 分别是柱心的加速度和圆柱的角加速度，主动力、约束力和惯性力分析和简化如右图。



$$S_1 = m_C a_C \qquad S_2 = m_Q a_Q$$

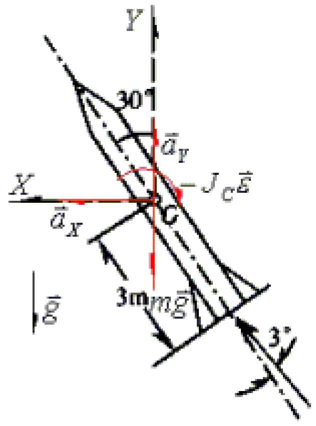
对圆柱列平衡方程：
$$T - m_C a_C - F = 0$$
$$(T+F)r - J_C\varepsilon = 0$$

对重物列平衡方程：$T + m_Q a_Q - m_Q g = 0$

解得圆柱的角加速度：

$$\varepsilon = \frac{m_Q g}{(\frac{3}{4}m_C + 2m_Q)r} = \frac{2g}{7r}$$

9.17 **解**：主动力、约束力和惯性力分析和简化如右图。



$$\vec{S}_X = -m\vec{a}_X, \quad \vec{S}_Y = -m\vec{a}_Y$$

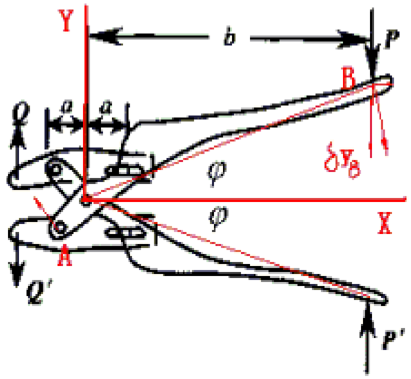
对火箭列平衡方程：

$$T\sin 33^0 - ma_X = 0$$
$$T\cos 33^0 - ma_Y - mg = 0$$
$$-J_C\varepsilon + 3T\sin 3^0 = 0$$

解得：

$$a_X = 7.26 \quad m/s^2$$
$$a_X = 1.38 \quad m/s^2$$
$$\varepsilon = \frac{628}{J_C} \quad rad/s^2$$

10. 1 解 Q 作用力处的虚位移和 A 处相同，如图示。由对称性只要分析 A，B 两处的虚位移。取 φ 为广义坐标



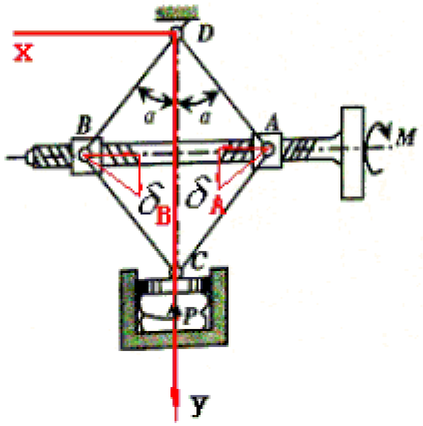
$$\delta y_B = b\delta\varphi$$
$$\delta y_A = a\delta\varphi \qquad (1)$$

由虚位移原理：

$$2p\delta y_B - 2Q\delta y_A = 0 \qquad (2)$$

由（1）（2）可解得： $Q = \frac{b}{a}p$

10.2 解 机械只有一个自由度，取广义坐标为轮轴转角 φ，若转过角度 $\delta\varphi$，则 A 点的虚位移如图



$$\delta x_A = \frac{h\delta\varphi}{2\pi},$$

$$\delta\alpha = \frac{\delta x_A}{a\cos\alpha} = \frac{h\delta\varphi}{2\pi a\cos\alpha}$$

C 点虚位移

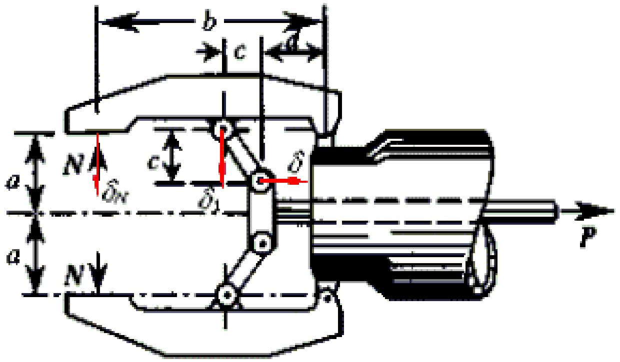
$$\delta y_c = 2a\sin\alpha\delta\alpha = \frac{2a\sin\alpha h\delta\varphi}{2\pi a\cos\alpha}$$

$$= \frac{h}{\pi}tg\,\varphi\delta\varphi$$

由虚位移原理

$$M\cdot\delta\varphi - p\delta y_c = 0$$

$$p = \frac{M\delta\varphi}{\delta y_c} = \frac{M\delta\varphi}{\frac{h}{\pi}tg\,\alpha\delta\varphi} = \frac{M\pi ctg\,\alpha}{h}$$



10.3 解 用虚速度法分析如上图所示

$$\delta=\delta_1=(c+d)\delta\varphi,$$

$$\delta_N=b\delta\varphi$$

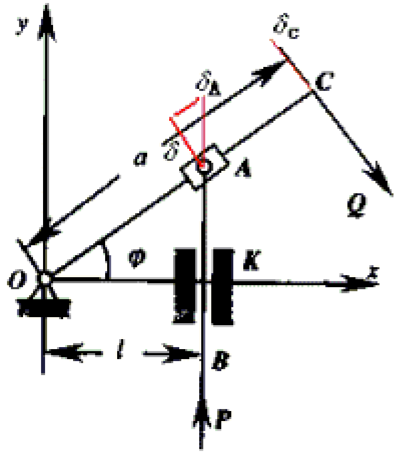
由对称性和虚位移原理：

$$P\cdot\delta-2N\cdot\delta_N=0$$

$$P(c+d)\delta\varphi-2Nb\delta\varphi=0$$

$$N=\frac{c+d}{2b}P$$

10.5 解 虚速度法分析如图示



$$\delta_A=\delta/\cos\varphi=\frac{l}{\cos^2\varphi}\delta\varphi,$$

$$\delta_C=a\delta\varphi$$

$$\delta_B=\delta_A$$

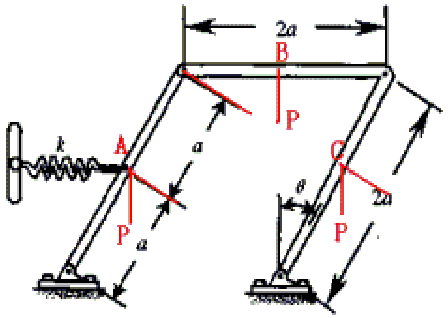
由虚位移原理：

$$P\cdot\delta_A-Q\cdot\delta_C=0$$

$$P\frac{l}{\cos^2\varphi}\delta\varphi-Qa\delta\varphi=0$$

$$P=\frac{a}{l}Q\cos^2\varphi$$

10.10 解 虚速度法分析如图示



$$\delta_A = a\delta\theta = \delta_C,$$

$$\delta_B = 2a\delta\theta$$

由虚位移原理：

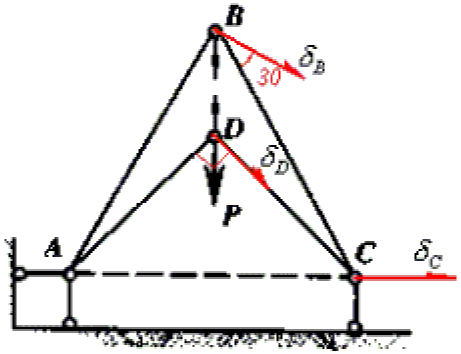
$$-ka\sin\theta\cdot\delta_A\cos\theta + 2P\cdot\delta_A\sin\theta + P\delta_C\sin\theta = 0$$

$$-ka\cdot\delta_A\cos\theta + 4P\cdot\delta_A = 0$$

$$\cos\theta = \frac{4P}{ka}$$

代如具体数值得：$\theta \doteq 11.48^0$

10. 11 解 取δ_C为 C 点的虚位移表示 B，D 处的虚位移如图示。



$$\delta_B\cos30^0 = \delta_C\cos60^0$$

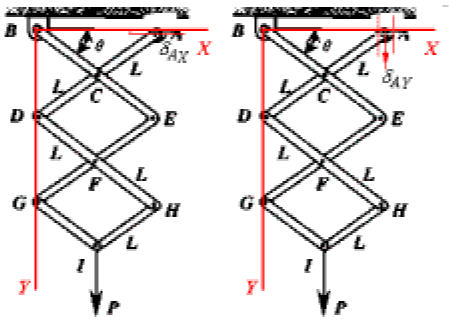
$$\delta_D = \delta_C\cos45^0$$

$$\delta_D = \frac{\sqrt{2}}{2}\delta_C, \quad \delta_B = \frac{\sqrt{3}}{3}\delta_C$$

则由虚位移原理 $(P-F)\delta_D\cos45^0 + F\delta_B\cos60^0 = 0$

解得： $F = \dfrac{3+\sqrt{3}}{2}P$

10.15 解　取 θ 为广义坐标，解除 A 处 X 方向的约束，$\delta X_A, \delta Y_I$，表示 A 和 I 处的虚位移如图示。



$$X_A = 2L\cos\theta$$
$$Y_I = 5L\sin\theta$$
$$\delta X_A = -2L\sin\theta\delta\theta$$
$$\delta Y_I = 5L\cos\theta\delta\theta$$

则由虚位移原理　$P\delta Y_I + N_{AX}\delta X_A = 0$

$$P5L\cos\theta - N_{AX}2L\sin\theta = 0$$

得：

$$N_{AX} = \frac{5}{2}ctg\theta \cdot P$$

同理解除 A 处 Y 方向的约束，$\delta Y_A, \delta Y_I$，表示 A 和 I 处的虚位移如图示。$\delta Y_A = 2L\cos\theta\delta\theta$，　$\delta Y_I = L\cos\theta\delta\theta$

$$P\delta Y_I + N_{AY}\delta Y_A = 0$$

则由虚位移原理

$$N_{AY} = -\frac{P}{2}$$

由对称性可得：$N_{BY} = N_{AY}$，　$N_{BX} = -N_{AX}$

10.17 解　定常、完整、理想约束，系统主动力重力为有势力，可应用势能原理，轻分析，系统自由度为 3，取 3 个广义坐标　θ_1, θ_3，x_A 以 AD 面为零势能面，且假定 $x_A = 0$

则　$y_{O_1} = -\frac{L_1}{2}\sin\theta_1$，　$y_{O_2} = -L_1\sin\theta_1 - \frac{L_2}{2}\sin\theta_2$

$$y_{O_3} = y_{O_2} - \frac{L_2}{2}\sin\theta_2 + \frac{1}{2}L_3\sin\theta_3$$
$$= -L_1\sin\theta_1 - L_2\sin\theta_2 + \frac{1}{2}L_3\sin\theta_3$$

系统总势能

$$V = mg\cdot y_{O_1} + mg\cdot y_{O_2} + mg\cdot y_{O_3}$$

利用　$\sin\theta_2 = \dfrac{L_3\sin\theta_3 - L_1\sin\theta_1}{L_2}$

得　$V = -mg(L_1\sin\theta_1 + L_3\sin\theta_3)$

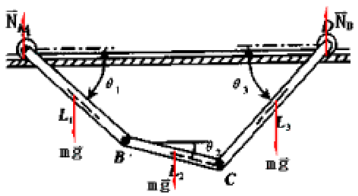
平衡状态　$\dfrac{\partial V}{\partial\theta_1} = 0,$　$\dfrac{\partial V}{\partial\theta_3} = 0$

得　$\theta_1 = 90^\circ$，$\theta_3 = 90^\circ$　$\theta_2 = \arcsin\dfrac{|l_3 - l_1|}{l_2}$

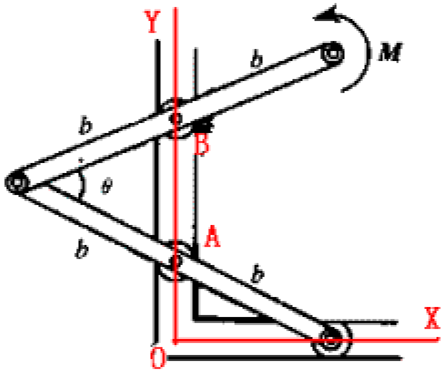
解法二：由静力学分析，AB，CD 杆都是三力平衡，从图可见。仅当

$$\theta_1 = \theta_3 = \frac{\pi}{2}$$

AB，CD 杆才能平衡。此时 $\theta_3 = \arcsin\dfrac{|L_3 - L_1|}{L_2}$



10.23 **解**　如图建立坐标系，取θ为广义坐标，则



$$y_A = b\sin\frac{\theta}{2}$$

$$y_B = 3b\sin\frac{\theta}{2}$$

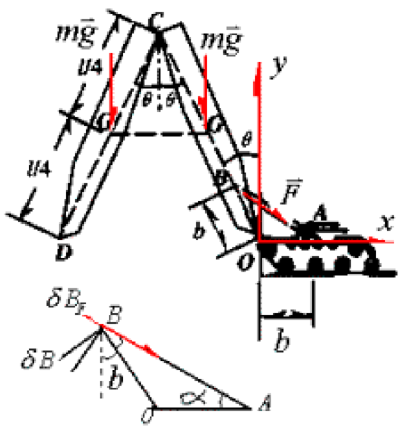
$$\therefore \quad \begin{aligned} \delta y_A &= \frac{b}{2}\cos\frac{\theta}{2}\,\delta\theta \\ \delta y_B &= \frac{3b}{2}\cos\frac{\theta}{2}\,\delta\theta \end{aligned} \qquad (1)$$

由虚位移原理：$-(mg\,\delta y_A + mg\,\delta y_B) + M\,\dfrac{1}{2}\,\delta\theta = 0$　　（2）

将（1）代入（2）得　$2mgb\cos\dfrac{\theta}{2} = \dfrac{M}{2}$

解得：　$\theta = 2\,\mathrm{arc}\cos(\dfrac{M}{4mgb})$

10.24 **解**　如图建立坐标系，取θ为广义坐标，并假定 C 处机构的内力的虚功可以忽略，$\vec{F}$为活塞的作用力，和 OC 杆的夹角为α，则



$$y_G = \frac{l}{4}\cos\theta$$

$$\delta y_G = -\frac{l}{4}\sin\theta\,\delta\theta$$

$$\delta B = b\delta\theta, \qquad \delta B_F = \delta B\sin\alpha = b\delta\theta\sin\alpha$$

$$\alpha = \frac{90^0 - \theta}{2}$$

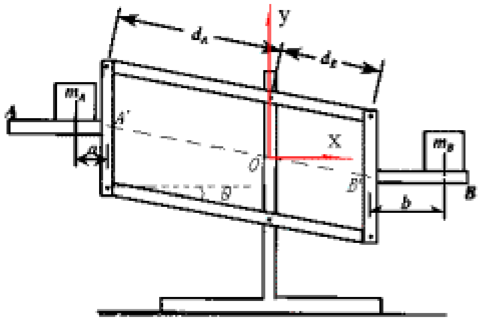
$$\therefore \quad \delta B_F = b\sin(45^0 - \frac{\theta}{2})$$

由虚位移原理得：　$-2mg\,\delta y_G - F\,\delta B_F = 0$

$$\frac{l}{2}mg\sin\theta - b\sin(45^0 - \frac{\theta}{2})F = 0$$

$$\therefore \quad F = \frac{mgl\sin\theta}{2b\sin(45^0 - \frac{\theta}{2})}$$

10.26 解 如图建立坐标系，取θ为广义坐标，AA’和 BB’ 刚体是平动刚体，所以有



$$y_A = y_{A'} = d_A \sin\theta$$

$$y_B = y_{B'} = d_B \sin\theta$$

$$\delta y_A = d_A \cos\theta\ \delta\theta$$

$$\delta y_B = -d_B \cos\theta\ \delta\theta$$

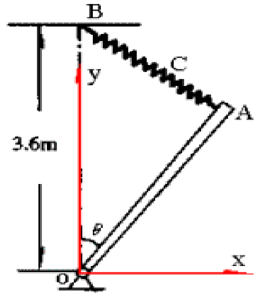
由虚位移原理：

$$-m_A g\delta y_A - m_A g\delta y_B = 0$$

$$\therefore\quad -m_A g d_A \cos\theta\delta\theta + m_B g d_B \cos\theta\delta\theta = 0$$

即 $\qquad m_A d_A = m_B d_B \qquad$ 命题得证

10.27 解 如图建立坐标系，取θ为广义坐标，OX 所在水平面为零势能面，弹簧原长为势能零点，则总势能为：



$$V = mg\frac{l}{2}\cos\theta + \frac{1}{2}k(\overline{AB} - 1.2)^2$$

代入数据 $m = 2kg, l = 3m, k = 4N/m$

$$V = 9.8\times 3\cos\theta + 2(\overline{AB} - 1.2)^2 \quad (1)$$

$$\overline{AB}^2 = 9 + 3.6^2 - 6\times 3.6\cos\theta$$

$$\overline{AB} = \sqrt{21.96 - 21.6\cos\theta}$$

代入（1）化简可得

$$V = 46.8 - 13.8\cos\theta - 4.8\sqrt{21.96 - 21.6\cos\theta}$$

由势能原理：

$$\frac{\partial V}{\partial\theta} = 0 \quad \text{求的平衡位形}$$

$$13.8\sin\theta - \frac{2.4\times 21.6\sin\theta}{\sqrt{21.96 - 21.6\cos\theta}} = 0$$

解得： $\theta = 0^0$， $\theta = \pi$， $\theta = \text{arc}\cos(0.3633)$

又 $$\frac{\partial^2 V}{\partial\theta^2} = 13.8\cos\theta - 51.84\left(\frac{\cos\theta}{\overline{AB}} - \frac{10.8\sin\theta}{\overline{AB}^{3/2}}\right) \quad (2)$$

将 $\cos\theta = o.3633$ 代入（2）得： $\frac{\partial^2 V}{\partial\theta^2} \doteq 9.15 > 0$

所以 $\theta = \arccos(0.3633) \doteq 68.7^0$ 时，所以平衡是稳定的。

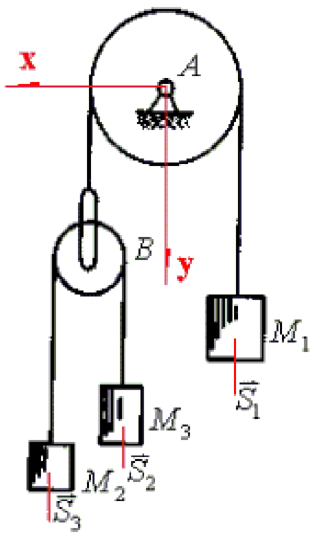
将 $\theta = 0$ 代入（2）显然 $\partial^2 V/\partial\theta^2 < 0$，

所以 $\theta = 0$ 时平衡是不稳定的。

将 $\theta = \pi$ 代入（2）得 $\partial^2 V/\partial\theta^2 = -5.95 < 0$，

所以 $\theta = \pi$ 时平衡是不稳定的。

11.5 解 取图示坐标，y_1, y_2, y_3 分别是 M_1, M_2, M_3 的坐标，系统有约束方程：



$$y_1 + y_B = const$$

$$y_2 - y_B + y_3 - y_B = const$$

所以 $$\begin{aligned}\delta y_1 &= -\delta y_B \\ \delta y_2 + \delta y_3 &= 2\delta y_B\end{aligned} \qquad (1)$$

同理：$a_1 = -a_B$， $a_2 + a_3 = 2a_B$ （2）

根据动力学普遍方程：

$$(M_1 g - M_1 a_1)\delta y_1 + (M_2 g - M_2 a_2)\delta y_2 + (M_3 g - M_3 a_3)\delta y_3 = 0$$

（1）代入上式得： $$\begin{aligned}M_1(g - a_1) - 2M_2(g - a_2) &= 0 \qquad (3)\\ M_1(g - a_1) - 2M_3(g - a_3) &= 0 \qquad (4)\end{aligned}$$

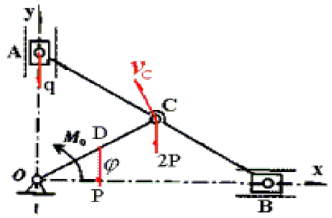
由（2）（3）（4）联立求解得：

$$a_1 = \frac{M_1(M_2 + M_3) - 4M_2M_3}{M_1(M_2 + M_3) + 4M_2M_3} g$$

要使 M_1 向下运动，则要 $a_1 > 0$，所以 M_1, M_2, M_3 要满足

$$M_1 > \frac{4M_2M_3}{M_2 + M_3}$$

11.8 解 系统约束是定常、完整，理想的，一个自由度，取 φ 为广义坐标， 由速度分析得：



$$\omega_{AB} = \dot{\varphi} = \frac{v_c}{a}$$

$$v_C = a\dot{\varphi}, \quad v_D = \frac{a}{2}\dot{\varphi}$$

$$v_A = 2a\cos\varphi\dot{\varphi}, \quad v_B = 2a\sin\varphi$$

由虚速度分析法可知 A，C，D 处的虚位移为：

$$\delta y_C = a\cos\varphi\delta\varphi, \quad \delta y_A = 2a\cos\varphi\delta\varphi, \quad \delta y_D = \frac{a}{2}\cos\varphi\delta\varphi$$

主动力的虚功为：

$$\delta W = M_0\delta\varphi - P\frac{a}{2}\cos\varphi\delta\varphi - 2Pa\cos\varphi\delta\varphi - q2a\cos\varphi\delta\varphi$$

$$= (M_0 - (\frac{5}{2}P + 2q)a\cos\varphi)\delta\varphi$$

系统动能：$$T = \frac{1}{2}\frac{q}{g}v_B^2 + \frac{1}{2}\frac{q}{g}v_A^2 + \frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\frac{P}{g}a^2\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}\frac{2P}{g}a^2\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}\times\frac{1}{12}\frac{2P}{g}(2a)^2\dot{\varphi}^2$$

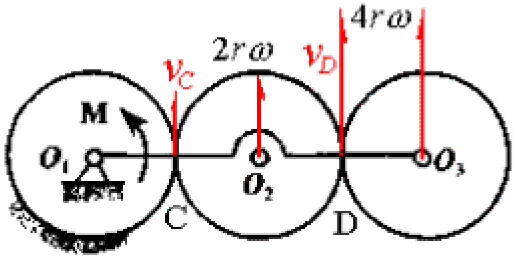
化简得： $$T = \frac{3P + 4q}{2g}a^2\dot{\varphi}^2$$

由第二类拉格朗日方程 $$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial T}{\partial\varphi} = Q_\varphi$$

$$\frac{a^2}{g}(3P + 4q)\ddot{\varphi} = M_0 - \frac{5P + 4q}{2}a\cos\varphi$$

$$\therefore \quad \ddot{\varphi} = \frac{2M_0 - (5P - 4q)a\cos\varphi}{2a^2(3P + 4q)}g$$

11.9 解 约束完整、理想，自由度为 1，取广义坐标为 φ，由速度分析知：



$$v_{O_2}=2r\dot{\varphi}$$

$$v_{O_3}=4r\dot{\varphi}=v_D$$

$$v_C=0$$

$$\omega_2=\frac{2r\dot{\varphi}}{r}=2\dot{\varphi};\qquad \omega_3=0$$

∴ 系统动能 $T=\frac{1}{2}mv_{O_2}^2+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}mr^2\cdot\omega_2^2+\frac{1}{2}mv_{O_3}^2=11mr^2\dot{\varphi}^2$

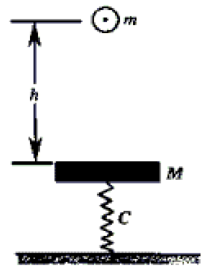
∵ $\delta W=M\delta\varphi;$ ∴ $Q_\varphi=M$

由 $$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{\varphi}}\right)-\frac{\partial T}{\partial\varphi}=Q_\varphi$$

$$22mr^2\ddot{\varphi}=M$$

$$\ddot{\varphi}=\frac{M}{22mr^2}$$

13—1 题解 ：



(1) 小球从高度 h 处自由下落，由机械能守恒.

$$mgh=\frac{1}{2}mV_1^2$$

可得 $V_1=\sqrt{2gh}$

(2) 小球以速度 V_1 与 M 进行碰撞，由碰撞恢复系数 k，可得

碰后小球的速度 $u_1=\dfrac{m-kM}{m+M}V_1$

碰后物体的速度 $u_2=\dfrac{m(1+k)}{m+M}V_1$

当 $k=m/M$ 时，碰撞后小球 $u_1=0$

(3) 之后，木板以速度 u_2 向下运动，直弹受压缩最大量时，木板的速度为 0 。由机械能守恒得：

$$\frac{1}{2}Mu_2^2+MgS=\int_{x_0}^{x_0+s}cx\,dx \qquad 其中 \quad cx_0=Mg$$

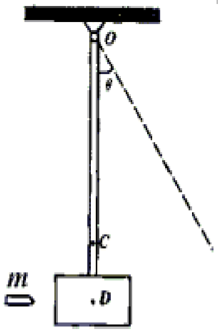
$$\frac{1}{2}M\left(\frac{m(1+k)}{m+M}V_1\right)^2+MgS=\frac{1}{2}c[(x_0+S)^2-x_0^2]$$

即得 $$\frac{1}{2}cs^2=\frac{Mm^2(1+k)^2}{(m+M)^2}gh$$

解得 $$S=\sqrt{\frac{2Mgh}{c}}\frac{m(1+k)}{m+M}$$

13—15 题解 ：

（1）系统关于 O 点动量矩守恒：



$$mv_0h = mvh + Mhl\omega$$

$$v = h\omega$$

可得 $$\omega = \frac{mv_0}{mh + Ml}$$

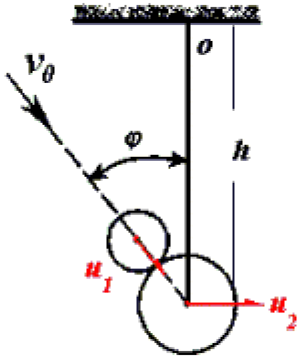
(2) 以后的运动过程机械能守恒：

$$Mgl(1-\cos\theta) + mgh(1-\cos\theta) = \frac{1}{2}J_0\omega^2 + \frac{1}{2}mv^2$$

解得 $$v_0 = \frac{(Ml + mh)\sqrt{2hg(1-\cos\theta)}}{mh}$$

13—18 题解 ：

（1）系统关于 O 点动量矩守恒有：



$$mv_0h\sin\varphi = mu_1h\sin\varphi + Mu_2h$$

恢复系数定义：

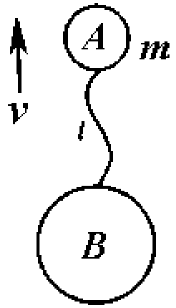
$$u_2\sin\varphi - u_1 = kv_0$$

连立求解可得：

$$u_1 = \frac{v_0(m\sin^2\varphi - kM)}{m\sin^2\varphi + M}$$

$$u_2 = \frac{mv_0\sin\varphi(1+k)}{m\sin^2\varphi + M}$$

13.22 解：以物体 A 为研究对象。



(1) 如果$\frac{1}{2}mv_0^2 \le mgl$，即 A 物体上升的最大高度不超过$l$，绳子未拉直，则

由$\frac{1}{2}mv_0^2 = mgh$，得$h = \frac{v_0^2}{2g}$

(2) 如果$\frac{1}{2}mv_0^2 > mgl$，则 A 物体达到高度l时的上升速度为

$$v_1 = \sqrt{v_0^2 - 2gl}$$

此后 A 物体带动 B 物体一起运动，由动量守恒得

$$mv_1 = (M+m)v_2$$

设 AB 共同上升的高度为h'，则

$$\frac{1}{2}(M+m)v_2^2 = (M+m)gh'$$

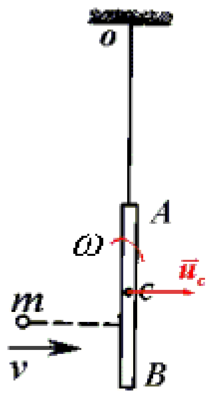
解得

$$h' = \frac{m^2}{(M+m)^2}(\frac{v_0^2}{2g} - l)$$

所以 A 物体上升的最大高度为

$$H = l + h' = \frac{m^2}{(M+m)^2}\frac{v_0^2}{2g} + \frac{M^2+2Mm}{(M+m)^2}l$$

13—23 题解 ：



（1）系统关于 O 点动量矩守恒有：

$$0.9m_2u_c + \frac{1}{12}m_2 0.6^2\omega + m_1u_1 = m_1v_0$$

(2)水平方向动量守恒：

$$m_2u_c + m_1u_1 = m_1v_0$$

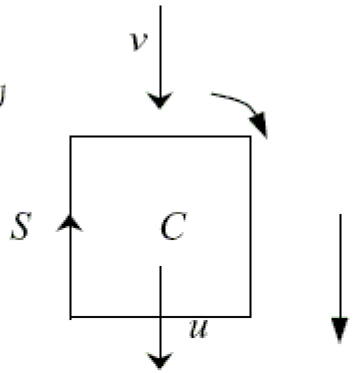
（3）$k=0$ 的恢复系数定义：

$$u_c + 0.1\omega = u_1$$

$m_2 = 80/g$;　$m_1 = 0.5/g$　代入连立求解可得：

$$u_c = 3.1m/s;\quad \omega = 10.0;\quad u_A = 0.1m/s$$

13.25 解：设物块碰撞后的速度为 u，角速度为 ω，则物块的动力学方程为



$$m(u-v)=-S$$

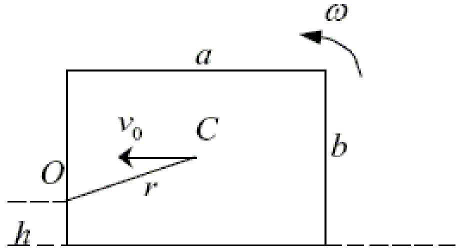
$$I_C\omega=S\cdot\frac{a}{2}$$

由于碰撞是完全弹性的，故

$$\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}mu^2+\frac{1}{2}I_C\omega^2$$

解得 $u=\dfrac{v}{5}$， $\omega=\dfrac{12v}{5a}$

13.28 解：



设凸台高 h （$h<\dfrac{b}{2}$），因为 $k=0$，则物体在 O 处突加约束。

物体关于质心 C 的转动惯量

$$I_C=\iint_S\frac{m}{ab}dxdy\cdot(\sqrt{x^2+y^2})^2=$$

$$\frac{m}{ab}\int_{-a/2}^{a/2}dx\int_{-b/2}^{b/2}(x^2+y^2)dy=\frac{1}{12}m(a^2+b^2)$$

设 O 点到质心 C 的距离为 r，则物体关于 O 点的转动惯量为

$$I_O=I_C+mr^2=\frac{1}{12}m(a^2+b^2)+mr^2$$

由碰撞过程中动量矩守恒，得

$$mv_0(\frac{b}{2}-h)=I_O\omega$$

由机械能守恒，得

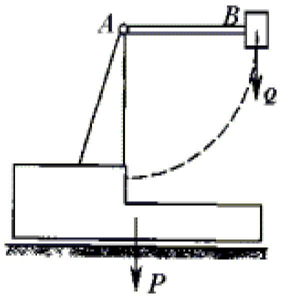
$$\frac{1}{2}I_O\omega^2+mg(\frac{b}{2}-h)=mgr$$

当 $b\gg h$ 时， h 可忽略， $r^2=\dfrac{a^2+b^2}{4}$

由以上方程，可解出

$$v_{\min}=v_0=\frac{2}{\sqrt{3b}}\sqrt{(\sqrt{a^2+b^2}-b)(a^2+b^2)g}$$

13－30 解：B 自由下落与板相碰之前，板与地面没有相对滑动，即地面提供的是静摩擦力. 系统的机械能守恒



$$mgR=\frac{1}{2}mV^2$$

∴ $$V=\sqrt{2gR}$$

水平向左，为 B 碰撞前的速度。
碰撞是非弹性的. 恢复系数为 k ＝0。
则系统水平方向动量守恒，碰撞后的系统速度 u

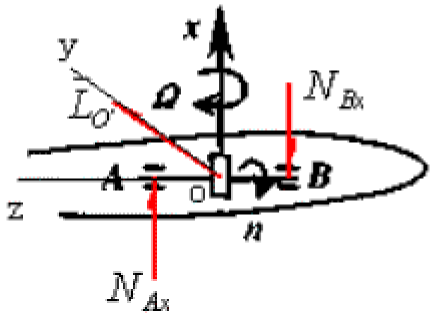
$$u=\frac{PV}{P+Q}$$

系统的动能 $T=\frac{1}{2}Mu^2=\frac{1}{2}\frac{P+Q}{g}(\frac{PV}{P+Q})^2=\frac{P^2R}{P+Q}$

由 $$Fs=f(P+Q)s=\frac{Q^2R}{P+Q}$$

移动距离 S $$s=\frac{Q^2R}{(P+Q)^2f}$$

14.2 解 受力分析如图



$\overline{H_0}=-I_Z\omega\bar{k}$,

$\omega=\frac{18000\cdot 2\pi}{60}=600\pi$

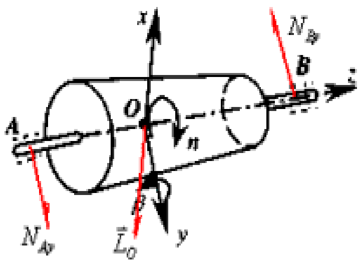
陀螺力矩：

$$\bar{L}_O=\overline{H_0}\times\overline{\Omega}=I\omega\Omega\bar{j}$$

$$L_O=12.3\times 600\pi\times 0.3\doteq 6955.5$$

$$N_{Ax}=N_{Bx}=L_O/l=6955.5/0.8\doteq 8694\ (N)$$

14.6 解 $\overline{H_0} = I_z \omega \bar{k}$



$$\bar{\Omega} = \dot{\beta}\bar{j} = \frac{2\pi}{\tau}\beta_0 \cos\frac{2\pi}{\tau}t\,\bar{j}$$

$$\bar{L}_O = -\bar{\Omega}\times\bar{H}_O$$

$$= -\frac{2\pi}{\tau}I_z\omega\beta_0\cos(\frac{2\pi}{\tau}t)\bar{i}$$

最大陀螺力矩

$$L_{o\max} = \frac{2\pi}{\tau}I_z\omega\beta_0 = \frac{2\pi}{\tau}m\rho^2\omega\beta_0$$

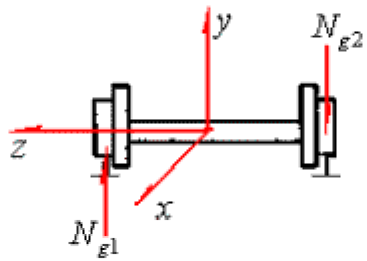
$$= \frac{2\pi}{6}\times 2500\times 0.9^2\times\frac{1200\times 2\pi}{60}\times\frac{6}{180}\times\pi$$

$$= 2.79\times 10^4\ (N\cdot m)$$

最大动压力

$$N_{\max} = \frac{L_{o\max}}{l} = \frac{2.79\times 10^4}{1.9} = 14.7 \quad (kN)$$

14.10 解 应用陀螺近似理论



$$\overline{H_0} = I_z\omega\bar{k} = 0.55mr\bar{k}$$

$$\bar{\omega} = \frac{v}{r}\bar{k} = \frac{720}{36\times 0.75}\bar{k} \doteq 26.7\bar{k}$$

$$\Omega = \frac{v}{r_1}\bar{k} = \frac{720}{36\times 200}\bar{k} = 0.1\bar{k}$$

回转力矩 $\bar{L}_O = -\bar{\Omega}\times\bar{H}_O = -0.55mr\omega\Omega\bar{i} \doteq -1542\bar{i}$

回转力矩引起的动压力

$$N_{g1} = \frac{L_o}{l} = \frac{1542}{1.5} \doteq 1028 \quad (N)$$

车轮的重量引起的压力

$$N_p = \frac{mg}{2} \doteq 6860(N)$$

所以 $N_{g2} = 7888\ (N)$, $N_{g1} = 5832\ (N)$

15.1 解 设火箭运动方向为 x 的正方向，则运动方程为：

$$m\frac{dv}{dt} = -fmg - u\frac{dm}{dt}$$

$$\frac{(a+fg)}{u}dt = -\frac{dm}{m}$$

$$\frac{(a+fg)}{u}T = \ln\frac{(1+k)m_s}{m_s}$$

$$T = \frac{u}{a+fg}\ln(1+k)$$

15.6 解 由变质量物体的动量定理 $M\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} + \vec{v}_r\frac{dM}{dt}$

取向上为运动的正方向，则 $Ma = -Mg - u\frac{dM}{dt}$

即

$$M(a+g)dt = -udM \quad \Rightarrow (a+g)dt = -u\frac{dM}{M}$$

对上式求积分，得 $\int_0^t (a+g)dt = \int_{m_1}^{m_2} u\frac{dM}{M}$

即 $(a+g)t = u\ln\frac{M_1}{M_2}$

当 $M_2 = \frac{1}{3}M_1$ 时

$$t = \frac{u\ln 3}{(a+g)} = \frac{2.5\times10^3\times\ln 3}{4g+g} = 56\ (s)$$

15.9 解 由变质量物体的动量定理

$$\frac{dm\vec{v}}{dt}-\vec{u}\frac{dm}{dt}=\vec{F}=(mg\sin\beta-mgf\cos\beta)\vec{i}$$

取下滑方向为运动的正方向，则

$$\frac{d(mv)}{dt}=mg\sin\beta-mgf\cos\beta$$

即 $$v_0dm=(mg\sin\beta-mgf\cos\beta)dt$$

$$\frac{dm}{m}=\frac{g(\sin\beta-f\cos\beta)}{v_0}dt=\alpha dt$$

即 $$m(t)=m_0e^{-\alpha t}$$

15-12 解 设取地面向上为正方向，建立坐标系，此时，已拉起长度为 x 的绳子，，绳子即将并入时的速度为 0

$$\therefore \quad m\frac{dv}{dt}+v\frac{dm}{dt}=R-Q^{'}+F$$

$$\therefore \quad m\ddot{x}+\frac{1}{g}\dot{x}\gamma\, dx/dt=R-Q^{'}-\beta\dot{x}^2$$

其中 $$m=\frac{Q}{g}+\frac{1}{g}\gamma x \qquad Q^{'}=mg=Q+\gamma x$$

$$\left(\frac{Q}{g}+\frac{1}{g}\gamma x\right)\ddot{x}+\frac{\dot{x}^2\gamma}{g}=R-Q-\gamma x-\beta\dot{x}^2$$

$$\frac{Q+\gamma x}{g}\ddot{x}+\frac{\gamma\dot{x}^2}{g}=R-Q-\gamma x-\beta\dot{x}^2$$

$$\therefore \quad (Q+\gamma x)\ddot{x}+(\gamma+\beta g)\dot{x}^2+\gamma gx+(Q-R)g=0$$

15-15 解 设初速度为 0，重力加速度为 9.8 m/s，由燃料消耗量可知推力作用时间 45 秒。

由变质量体运动微分方程 $m\dfrac{dv}{dt}=-mg+v_r\dfrac{dm}{dt}$

得： $dv=-gdt+v_r\,dm/m$

积分可得：$v_1=2100\ln\dfrac{1000}{550}-9.8\times45=814.5\ m/s$

$$v_2=v_1+2100\ln\frac{500}{50}-9.8\times45\doteq5208.9\ m/s$$

16.8 解（1）方法一：由 $m\bar{a}_r=\bar{S}_e+\bar{S}_k+\bar{F}$

$$\bar{F}=\bar{0}$$

将上式在 $\overline{v_r}$ 方向上投影得

$$m\frac{dv_r}{dt}=S_e\cos\theta \qquad \because(\bar{S}_k\perp\bar{v}_r)$$

又 $\overline{v_r}=\dot{r}\overline{e_r}+r\dot{\varphi}\overline{e_\varphi}$

$\therefore$ $\cos\theta=\dfrac{\dot{r}}{v_r}$

$$m\frac{dv_r}{dt}=\frac{\dot{r}}{v_r}\cdot mr\omega^2$$

积分得 $\dfrac{1}{2}v_r^2=\dfrac{1}{2}\omega^2r^2+c$

$$v_r^2-\omega^2r^2=\text{常量}$$

即 $\dot{x}^2+\dot{y}^2-\omega^2(x^2+y^2)=\text{常量}$

(1)方法二：由科氏惯性力不作功，牵连惯性力可看成有势力，势函数为：

$$V=-\frac{1}{2}m\omega^2(x^2+y^2)$$

非惯性系中机械能守恒：

$$\frac{1}{2}mv^2-\frac{1}{2}m\omega^2(x^2+y^2)=E$$

即 $\dot{x}^2+\dot{y}^2-\omega^2(x^2+y^2)=\text{常量}$

（2）方法一：由非惯性系中的动量矩定理

$$\frac{d}{dt}(m\bar{r}\times\overline{v_r})=\bar{r}\times\overline{S_e}+\bar{r}\times\overline{S_k}=\bar{r}\times\overline{S_k}$$

$$S_k=-2m\omega v_r$$

$$\bar{r}\times\overline{S_k}=2m\omega rv_r\cos\theta\bar{k}=-2m\omega r\dot{r}\bar{k}$$

$\therefore$ $\dfrac{d}{dt}(\bar{r}\times\overline{v_r})=-2\omega\dot{r}r\bar{k}$

$$d(\bar{r}\times\overline{v_r})=-2\omega rdr\bar{k}$$

$$\bar{r}=x\bar{i}+y\bar{j};\quad \overline{v_r}=\dot{x}\bar{i}+\dot{y}\bar{j}$$

$\therefore$ $\bar{r}\times\overline{v_r}=-(y\dot{x}-x\dot{y})\bar{k}$

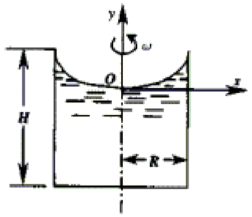
$\therefore$ $d(y\dot{x}-x\dot{y}-\omega r^2)=0$

$$y\dot{x}-x\dot{y}-\omega(x^2+y^2)=\text{常数}$$

（2）方法二：直角坐标直接投影方程积分。。。。。。

16.12 证明：

（1）取动坐标系oxy为参考系，取水面上一质点m分析



由于 $v_r=0$ $\therefore$ $a_r=0$ $S_k=0$

$$\therefore \qquad o=\vec{S}_e+\vec{p}+m\vec{g}$$

（假设其他质点对其作用力垂直于表面）

于是有 $S_e\cos\theta=mg\sin\theta$， $S_e=m\omega^2x$

$$\therefore \qquad \mathrm{tg}\theta=\frac{x\omega^2}{g}=\frac{dy}{dx}$$

积分得 $y=\frac{1}{2}x^2\omega^2/g+c$

解：$x=0$时$y=0$ $\therefore$ $c=0$

$y=\frac{1}{2}x^2\omega^2/g$ 为所求曲线

（2） 令$x=R$，则 $y=\frac{1}{2}R^2\omega^2/g$

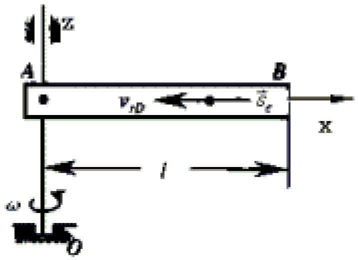
设 注入液体最大高度H'，则

$$\pi R^2H-\pi R^2H'=\int_0^y dy\cdot\pi x^2$$

$$H'=H-\frac{R^2\omega^2}{4g}$$

16.16 解：

取动坐标系oxz，分析质点m受力如图



$$S_e=mx\omega^2$$

（光滑约束力和重力不影响X方向的运动）

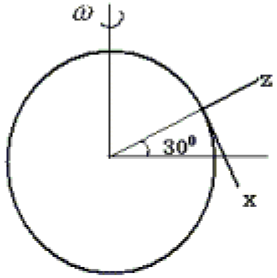
于是有 $$m\frac{dv_r}{dt}=m\omega^2x$$

$$\therefore \qquad \int_{-v_{r0}}^{0}v_rdv_r=\int_{l}^{0}x\omega^2dx$$

积分得 $v_{r0}=l\omega$ 即小球应有的初速度.

16. 29 **解**：

取动坐标系 $oxyz$ 南东天系，y 坐标指向东，由题可知

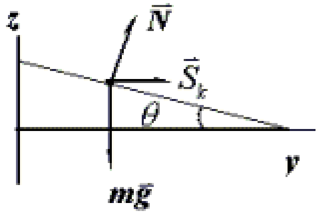


$$\vec{v} = 5\vec{i}$$

$$\vec{\omega} = -\omega\cos 30^0 \vec{i} + \omega \sin 30^0 \vec{k}$$

$$\vec{S}_k = -2m\vec{\omega}\times\vec{v} = -5m\omega\vec{j}$$

分析水面质点受力如图示，



于是有 $$tg\theta = \frac{S_k}{mg} = \frac{5\omega}{g}$$

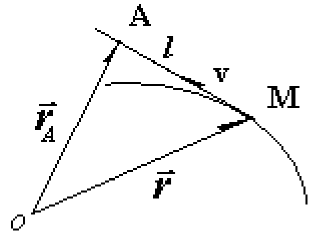
$$\doteq 3.71\times 10^{-5}$$

$$\frac{h}{500} = tg\theta = 3.71\times 10^{-5}$$

$$h \doteq 0.019(m)$$

即东西水面的高差.

证明：如右图示



$$\vec{r}_A = \vec{r} + l\vec{\tau}$$

$$l = -\vec{r}\cdot\vec{\tau}$$

$$r_A = -\vec{r}\cdot\vec{n}$$

$$\vec{v}_A = \frac{d}{dt}(\vec{r} + l\vec{\tau}) = \vec{v} + \dot{l}\vec{\tau} + l\dot{\vec{\tau}}$$

$$\dot{l} = -\vec{v}\cdot\vec{\tau} + \vec{r}\cdot\dot{\vec{\tau}} = -v - \vec{r}\cdot\frac{v}{\rho}\vec{n}$$

$$\therefore \quad \vec{v}_A = \vec{v} + (-v - \frac{v}{\rho}\vec{r}\cdot\vec{n})\vec{\tau} + l\,\frac{v}{\rho}\vec{n} = \frac{v}{\rho}(r_A\vec{\tau} + l\vec{n})$$

$$\because \quad r^2 = r_A^2 + l^2$$

$$\therefore \quad v_A^2 = \frac{v^2}{\rho^2}(r_A^2 + l^2) = \frac{r^2 v^2}{\rho^2}$$

$$v_A = \frac{rv}{\rho}$$