

# 中国科学技术大学考试试卷

考试科目：理论力学（A 卷）

开课院系：自动化系

考试日期：2023 年 6 月

学生所在系：\_\_\_\_\_ 姓名：\_\_\_\_\_ 学号：\_\_\_\_\_

## 一. [30分] 简要回答下述问题：

1. 刚体上力系何时为等效的？说明力系可简化为力螺旋的场合.
2. 什么是理想约束？什么是完整约束？分别举例说明.
3. 什么是虚位移？试简述虚功原理.
4. 什么是向量的相对导数与随体导数？写出它们之间的关系式.
5. 坐标变换如何用旋转矩阵表示？写出旋转矩阵、角速度矩阵与角速度矢量之间的关系.
6. 写出刚体平面运动的达朗伯原理和第二类拉格朗日方程.

## 二. [14分] 半径为 $r$ 的圆盘由电机带动绕 $OC$ 轴以角速度 $\omega$ 匀速转动, $OC$ 轴与 $AB$ 轴固连相交成 $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ 角并绕 $AB$ 轴以角速度 $\Omega$ 匀速转动, 如图 1 所示. 设 $\overline{OC} = l$ , 求圆盘最高点 $M$ 和最低点 $N$ 的速度与加速度.

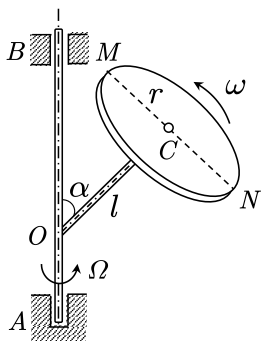


图 1: 旋转圆盘

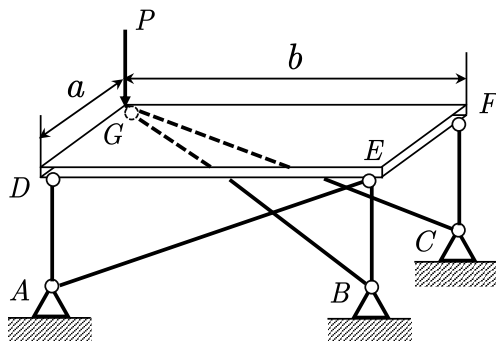


图 2: 受力水平板

## 三. [14分] 一长宽分别为 $a, b$ 的水平板由六根杆铰接支撑, 如图 2 所示, 在板角处受铅垂力 $P$ 作用, 水平板与杆的重量均不计, 求各杆的内力.

## 四. [14分] 长为 $l$ , 质量为 $m$ 的均质杆, 一端置于车厢的粗糙地面上, 另一端斜靠在光滑竖直壁上, 如图 3 所示. 设车以加速度 $a$ 向前行驶, 地面摩擦系数为 $\mu$ , 求杆在车厢内的平衡条件.

## 五. [14分] 考查旋转平移振荡器 (图 4). 一个质量为 $M$ 的小车通过刚度系数为 $k$ 的线性弹簧连接在固定墙上, 小车被限制只作一维运动. 一根轻质杆的一端链接一个质量为 $m$ 的球, 该球对球心的转动惯量为 $J$ , 轻质杆另一端铰接于小车上某点并可绕该点转动, 球心离转轴的距离为 $e$ . 小车受到水平作用力 $F$ , 旋转杆受到扭力矩 $T$ . 不计杆的质量、不计小车水平摩擦力, 试求出振荡器的动力学微分方程.

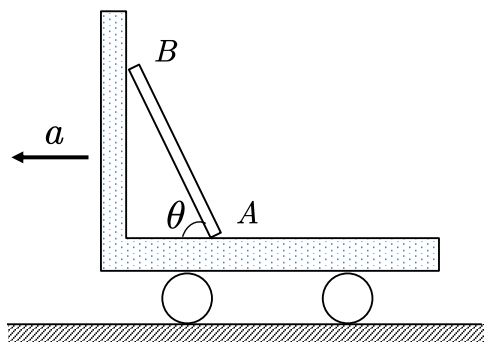


图 3: 小车与杆

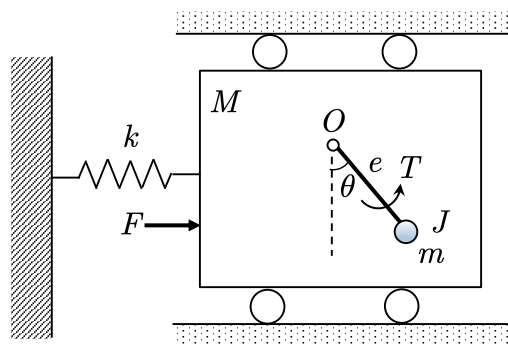


图 4: RTAC 振荡器

六. [14分] 考查对称重刚体定点运动 (图 5).  $Oxyz$  为主轴坐标系,  $O\xi\eta\zeta$  为固定坐标系, 刚体质心  $C$  处于对称轴  $z$  上, 绕  $x$  与  $y$  的转动惯量相等 ( $J_x = J_y$ ), 转动中心  $O$  与质心  $C$  的距离为  $\overline{OC} = l$ , 刚体质量为  $m$ . 试以 Euler 角  $\psi, \theta, \varphi$  为广义坐标, 写出对称刚体定点运动的 Lagrange 函数、Hamilton 函数、Hamilton 正则方程及其首次积分.

注: Euler 运动学方程如下

$$\begin{cases} \omega_x = \dot{\psi} \sin \theta \sin \varphi + \dot{\theta} \cos \varphi \\ \omega_y = \dot{\psi} \sin \theta \cos \varphi - \dot{\theta} \sin \varphi \\ \omega_z = \dot{\psi} \cos \theta + \dot{\varphi} \end{cases}$$

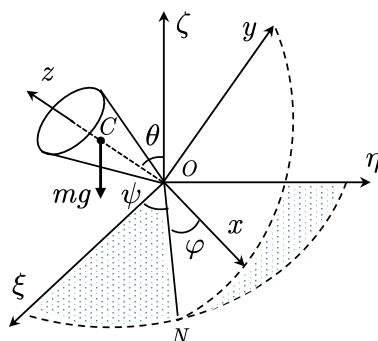


图 5: 对称重刚体