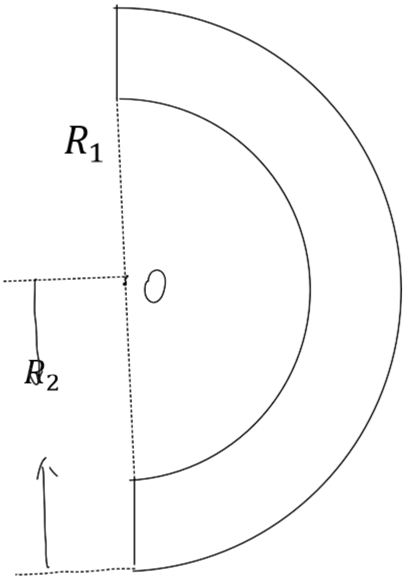
一、 求解下列物体的转动惯量

1. 质量为m的半圆环薄片以环心O为轴的转动惯量



解答:

先考虑圆环的转动惯量:

$$J_{圆环} = \int_{R_1}^{R_2} \rho \overbrace{2\pi r \cdot dr \cdot h}^{dV} \cdot r^2 = \rho \cdot 2\pi h \tfrac{1}{4} r^4 |_{R_1}^{R_2} = \tfrac{1}{2}\rho\pi h(R_2^4 - R_1^4)$$

$$= \tfrac{1}{2}\overbrace{\rho\pi h(R_2^2 - R1^2)}^{V}(R_2^2 + R_1^2) = \tfrac{m}{2}(R_2^2 + R_1^2)$$

圆环的一半:

$$J_{半圆环} = \frac{m}{4}(R_2^2 + R_1^2)$$

2. 求解质量为M的均匀半圆薄片（面密度为常数μ）对于其直径边的转动惯量

解：如图建立坐标系，

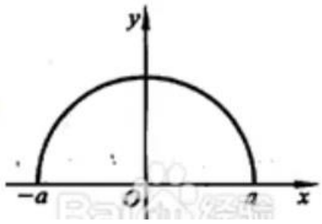
则薄片所占区域 $D=\{(x,y)|x^2+y^2\leqslant a^2, y\geqslant 0\}$，

利用公式计算薄片对x轴的转动惯量，

得 $I_x = \iint\limits_D \mu y^2 d\sigma = \mu \iint\limits_D \rho^3 \sin^2\theta d\rho d\theta = \mu \int_0^\pi d\theta \int_0^a \rho^3 \sin^2\theta d\rho$

$= \mu \cdot \frac{a^4}{4} \int_0^\pi \sin^2\theta d\theta = \frac{1}{4}\mu a^4 \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{1}{4}Ma^2$

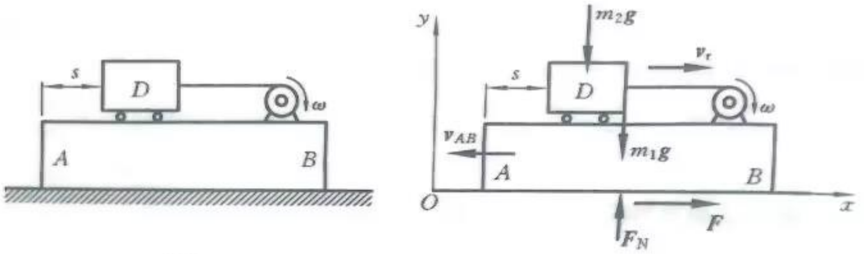
其中 $M=\frac{1}{2}\pi a^2\mu$ 为半圆薄片的质量。



二、

【11-8】 题11-8图(a)所示质量为m_1的平台AB，放于水平面上，平台与水平面间的动滑动摩擦因数为f。质量为m_2的小车D，由绞车拖动，相对于平台的运动规律为$s=\frac{1}{2}bt^2$，其中b为已知常数。不计绞车的质量，求平台的加速度。

解法一 取整体为研究对象，建立直角坐标系Oxy，其受力分析和运动分析如题11-8图(b)所



(a) (b)

示。本题已知小车的运动规律，求平台AB的加速度，为此须先求得作用于平台的水平摩擦力，可应用质点系动量定理来求解。

小车的绝对速度$v_a=v_r+v_e$，设其方向与x轴正向一致。$v_r=\frac{ds}{dt}=bt$，$v_e=v_{AB}$，则$v_a=v_r-v_e=bt-v_{AB}$。由质点系动量定理投影式

$$\frac{d}{dt}(\sum mv_x)=\sum F_x^{(e)},\quad \frac{d}{dt}(\sum mv_y)=\sum F_y^{(e)}$$

得
$$\frac{d}{dt}[(-m_1v_{AB})+m_2(bt-v_{AB})]=F \quad ①$$

$$0=F_N-m_1g-m_2g \quad ②$$

由库仑定律，有
$$F=fF_N \quad ③$$

将③式代入②式得
$$F=fF_N=fg(m_1+m_2)$$

将F代入①式，得
$$-m_1a_{AB}+m_2(b-a_{AB})=fg(m_1+m_2)$$

故平台的加速度为
$$a_{AB}=\frac{m_2b-fg(m_1+m_2)}{m_1+m_2}$$

若系统初始静止，v_{AB}设为向左，平台向左运动的条件是a_{AB}与v_{AB}必须方向一致，即$a_{AB}>0$，则

$$b>\frac{fg(m_1+m_2)}{m_2}$$

若b不满足上述条件，则平台静止，作用在平台上的将是静摩擦力。

解法二 用质心运动定理求解。假设平台的加速度方向为水平向左，则小车的绝对加速度$a_a=a_r-a_e=\frac{d^2s}{dt^2}-a_{AB}=b-a_{AB}$，将质心运动定理公式分别向$x$、$y$轴投影，有

$$ma_{Cx}=\sum m_ia_{ix}=\sum F_x^{(e)},\quad ma_{Cy}=\sum m_ia_{iy}=\sum F_y^{(e)}$$

将$\sum m_ia_{ix}=-m_1a_{AB}+m_2(b-a_{AB})$，$\sum F_x^{(e)}=F$，$\sum m_ia_{iy}=0$，$\sum F_y^{(e)}=F_N-(m_1+m_2)g$，代入以上两式，得

$$-m_1a_{AB}+m_2(b-a_{AB})=F \quad ④$$

$$0=F_N-(m_1+m_2)g \quad ⑤$$

由库仑定律有
$$F=fF_N \quad ⑥$$

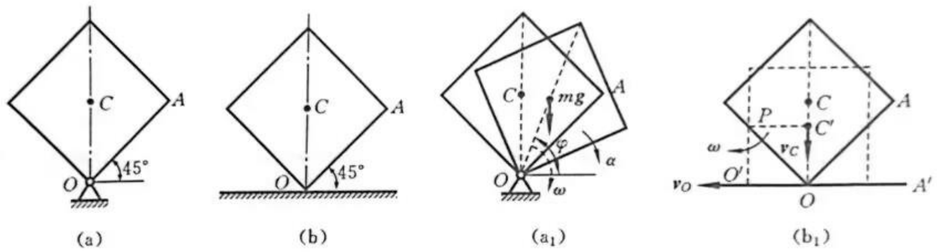
联立④、⑤、⑥式，求得平台运动的加速度为

$$a_{AB}=\frac{m_2b-fg(m_1+m_2)}{m_1+m_2}$$

对由多个刚体组成的系统，运用质心运动定理解题时，有一种更简便的方法，即由各刚体的动量为m_iv_{iC}，求得刚体系的动量$p=\sum m_iv_{iC}$，代入质点系动量定理的矢量式$\frac{d}{dt}p=\sum F^{(e)}$中，得$\sum m_ia_{iC}=\sum F^{(e)}$或$\sum m_ia_i=\sum F^{(e)}$，这样做，可以不必先求质点系的质心位置。

三、

题 13-14 图(a)、(b)所示为在铅垂面内两种支持情况的均质正方形板，边长均为a，质量均为m，初始时均处于静止状态。受某干扰后均沿顺时针方向倒下，不计摩擦，求当OA边处于水平位置时，两方板的角速度。



题 13-14 图

解 (a) 正方形木板作定轴转动，初始时板静止，$T_1=0$。设OA边转到水平位置时，板的角速度为ω，则末动能$T_2=\frac{1}{2}J_O\omega^2$。选点$O$为零势点，则由机械能守恒定律得

$$T_1+V_1=T_2+V_2,\quad 0+mg\frac{\sqrt{2}}{2}a=\frac{1}{2}J_O\omega^2+mg\frac{a}{2}$$

式中，$J_O=J_C+m\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)^2=\frac{1}{6}ma^2+\frac{1}{2}ma^2=\frac{2}{3}ma^2$，代入上式求得板的角速度

$$\omega=\sqrt{\frac{3(\sqrt{2}/2-1/2)g}{a}}\ \text{rad/s}=\frac{2.469}{\sqrt{a}}\ \text{rad/s}$$

也可用刚体绕定轴转动微分方程求板的角速度，如题 13-14 图(a)所示。选板为研究对象，有

$$J_O\alpha=mg\times\frac{\sqrt{2}}{2}a\cos\varphi$$

将$J_O=\frac{2}{3}ma^2$代入上式，得 $\alpha=\frac{3\sqrt{2}}{4a}g\cos\varphi$

注意到ω为正值时，φ角减小，即$\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}=-\omega$，所以

$$\alpha=\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}\varphi}\times\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}=-\omega\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}\varphi}=\frac{3\sqrt{2}}{4a}g\cos\varphi-\omega\mathrm{d}\omega=\frac{3\sqrt{2}}{4a}g\cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi$$

将上式两边积分得 $-\int_0^{\omega}\omega\mathrm{d}\omega=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{3\sqrt{2}}{4a}g\cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi$

$$\omega=\sqrt{\frac{3\sqrt{2}\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)g}{2a}}\ \text{rad/s}=\frac{2.469}{\sqrt{a}}\ \text{rad/s}$$

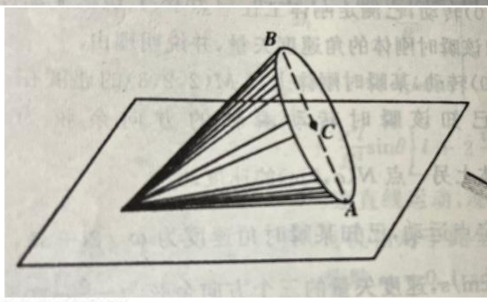
(b) 板初始时静止，$T_1=0$。设OA边转至水平时，板角速度为ω。由于正方形木板在水平方向上 不受外力，由质心运动守恒定律可知，板质心铅垂下落OA边着地时，点P为速度瞬心，如题 13-14图(b)所示。板的末动能$T_2=\frac{1}{2}J_P\omega^2$，$J_P=J_C+m\left(\frac{a}{2}\right)^2=\frac{1}{6}ma^2+\frac{1}{4}ma^2=\frac{5}{12}ma^2$。选取地面为重力势能零势面，由机械能守恒定律得

$$T_1+V_1=T_2+V_2,\quad 0+mg\frac{\sqrt{2}}{2}a=\frac{1}{2}\times\frac{5}{12}ma^2\omega^2+mg\frac{a}{2}$$

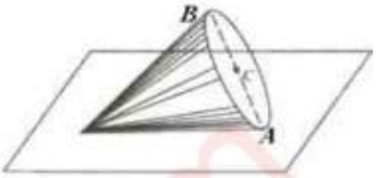
解上式，得方板的角速度

四、 60°

5.9 正圆锥的顶角为 $2\alpha=60°$，其母线长 $\frac{40}{\sqrt{3}}$ cm，在水平面上滚动而不滑动. 已知锥底中心点 C 的速度为 30cm/s，并为常数，求底面上最低点 A 和最高点 B 的速度和加速度.



5.9 解 进动角速度



$$\omega_e=\frac{v_c}{\overline{OC}\cdot\cos\alpha}=\frac{v_c}{\overline{OA}\cdot\cos^2\alpha}$$

$$=\frac{30cm/s}{\frac{40}{\sqrt{3}}cm\times\cos^2 30°}=\sqrt{3}\ rad/s$$

∴ 角速度 $\omega=\sqrt{3}\omega_e=3\quad rad/s$

自转角速度 $\omega_r=2\omega_e=2\sqrt{3}red/s$

A 点速度 $\overline{v_A}=\overline{\omega}\times\overline{r_{OA}}=0$

$$\overline{a_A}=\vec{\varepsilon}\times\overline{r_{OA}}+\overline{\omega}\times(\overline{\omega}\times\overline{r_{OA}})=\vec{\varepsilon}\times\overline{r_{OA}}$$

角加速度 $\vec{\varepsilon}=\overline{\omega_e}\times\overline{\omega_r}=\sqrt{3}\vec{j}\times(-3\vec{i}-\sqrt{3}\vec{j})=3\sqrt{3}\vec{k}$

∴ $\overline{a_A}=3\sqrt{3}\vec{k}\times\frac{40}{\sqrt{3}}\vec{i}=120\vec{j}(cm/s^2)$

B 点速度 $\overline{v_B}=\overline{\omega}\times\overline{r_{OB}}=(-3\vec{i})\times\left(\frac{40}{\sqrt{3}}\cos 60°\vec{i}+\frac{40}{\sqrt{3}}\sin 60°\vec{j}\right)$

$$=-60\vec{k}(cm/s)$$

B 点的加速度 $\overline{a_B}=\vec{\varepsilon}\times\overline{r_{OB}}+\overline{\omega}\times(\overline{\omega}\times\overline{r_{OB}})$

$$=3\sqrt{3}\vec{k}\times\left(\frac{20}{\sqrt{3}}\vec{i}+20\vec{j}\right)-9(20\vec{j})$$

$$=-60(\sqrt{3}\vec{i}+2\vec{j})\quad cm/s^2$$

五、

【12-21】 题12-21图(a)所示均质圆柱体的质量为m,半径为r,放在倾角为60°的斜面上。一细绳缠绕在圆柱体上,其一端固定于点A,此绳与点A相连部分与斜面平行。若圆柱体与斜面间的摩擦因数$f=\dfrac{1}{3}$,求其中心沿斜面落下的加速度a_C。

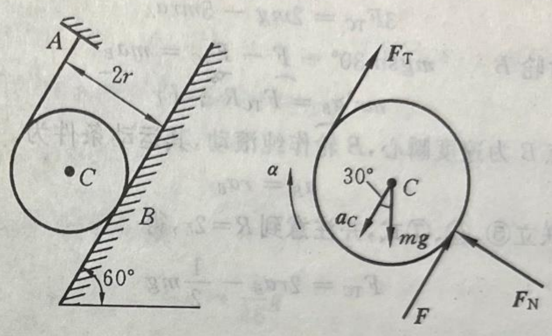
解法一 应用刚体平面运动微分方程。

取圆柱体为研究对象,受力分析和运动分析如题12-21图(b)所示。圆柱体作平面运动,由刚体平面运动微分方程有

$$ma_C=-F-F_T+mg\sin 60° \qquad ①$$

$$0=F_N-mg\cos 60° \qquad ②$$

$$J_C\alpha=\frac{1}{2}mr^2\alpha=F_Tr-Fr \qquad ③$$



(a) (b)

题12-21图

补充摩擦力方程 $F=fF_N$ ④

和运动学关系(因点D为速度瞬心)

$$a_C=r\alpha \qquad ⑤$$

由②、④式,得

$$F=fmg\cos 60° \qquad ⑥$$

将⑤、⑥式代入①、③式并相加,得

$$\frac{3}{2}r\alpha=g(\sin 60°-2f\cos 60°)$$

解上式得圆柱体沿斜面落下的加速度

$$a_C=r\alpha=\frac{2}{3}(\sin 60°-2f\cos 60°)g$$

$$=\frac{2}{3}(\sin 60°-2\times\frac{1}{3}\times\cos 60°)\times 9.81\ \mathrm{m/s^2}=3.484\ \mathrm{m/s^2}$$

讨论:为使圆柱体沿斜面下落,必须$a_C>0$,即

$$\sin 60°-2f\cos 60°>0,\quad f<\frac{1}{2}\tan 60°=0.866$$

解法二 应用相对于动点的动量矩定理

点D为圆柱体的速度瞬心,由相对于动点的动量矩定理,有

$$J_D\alpha=-F\times 2r+(mg\sin 60°)r$$

将$J_D=\dfrac{1}{2}mr^2+mr^2=\dfrac{3}{2}mr^2$代入上式,得

$$\frac{3}{2}mr\alpha=mg\sin 60°-2F \qquad ⑦$$

将⑥式代入⑦式,得

$$\frac{3}{2}r\alpha=g(\sin 60°-2f\cos 60°)$$

余下步骤同解法一。

六、　图示雷达在距离火箭发射台为l的O处观察铅直上升的火箭发射，测得角θ的规律为$\theta = kt$（k为常数)。试写出火箭的运动方程，并计算当$\theta = \frac{\pi}{6}$和$\frac{\pi}{3}$时，火箭的速度和加速度。

解：火箭的运动方程

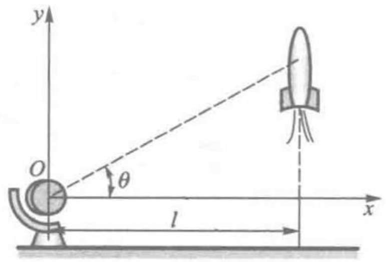
$$x = l, \qquad y = l\tan\theta = l\tan kt$$

速度

$$\dot{x} = 0, \qquad \dot{y} = l\sec^2\theta \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = lk\sec^2\theta$$

加速度

$$\ddot{x} = 0, \qquad \ddot{y} = 2lk^2\sec^2\theta\tan\theta$$



当 $\theta = \dfrac{\pi}{6}$时

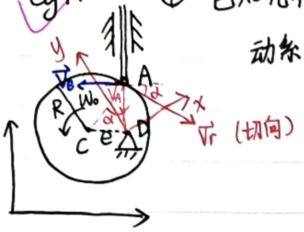
$$v = \dot{y} = \frac{4}{3}lk, \qquad a = \ddot{y} = \frac{8\sqrt{3}}{9}lk^2$$

当 $\theta = \dfrac{\pi}{3}$时

$$v = 4lk, \qquad a = 8\sqrt{3}\,lk^2$$

七、　偏心轮 C 以角速度w_0绕 D 点逆时针旋转，圆 C 的半径为R，D 点与圆心 C 的距离为e，在图示位置，CD水平，AD与CD垂直，求此时 A 点的速度。

eg1. 法① 已知几何关系，w_0，求 $\vec{V_A}$.



动系 Dxy 与轮固连.

绝对运动：直线 $\vec{V_A}$.

相对运动：圆. $\vec{V_r}$

牵连运动：坐标系定轴转动 $\vec{V_e}$

偏心轮，绕 D 转.

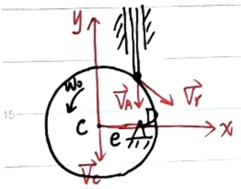
$|\vec{V_e}| = W_0 \cdot DA = W_0\sqrt{R^2-e^2}$.　　$\cos\alpha = \frac{\sqrt{R^2-e^2}}{R}$

$\overset{?\ \checkmark}{\vec{V_A}} = \overset{?\ \checkmark}{\vec{V_r}} + \overset{\checkmark\ \checkmark}{\vec{V_e}}$.

水平投影：$0 = V_r\cos\alpha - W_0\sqrt{R^2-e^2}$　　$V_r = \frac{W_0\sqrt{R^2-e^2}}{\cos\alpha} = W_0R$

垂直投影：$V_A = V_r\sin\alpha \Rightarrow V_A = W_0 e$

法②



☆ 取平动系 Cxy.

绝对运动：直线 $\vec{V_A}$

相对运动：圆 $\vec{V_r}$

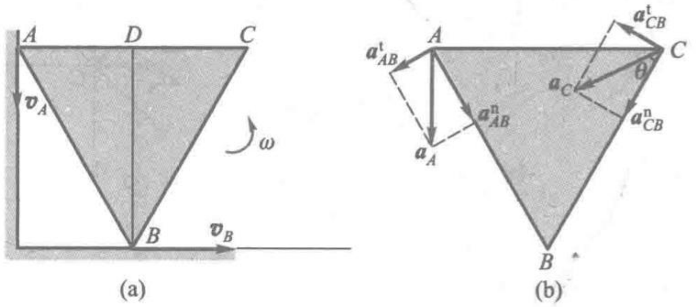
牵连运动：平动 $\vec{V_e} = \vec{V_c}$　　$|\vec{V_c}| = W_0 e$

$\vec{V_A} = \vec{V_e} + \vec{V_r}$.

x 投影：$0 = 0 + V_r\cos\theta$　　$V_r = 0$

y 投影：$V_A = V_e = W_0 e$

八、 三角板在滑动过程中，其顶点 A 和 B 始终与铅垂墙面以及水平地面相接触。已知 $AB = BC = AC = b$，$v_B = v_0$为常数，在图示位置，AC水平。求此时顶点 C 的加速度。



解：三角板 ABC 作平面运动，瞬心为 D 点

$$\omega = \frac{v_B}{DB} = \frac{2\sqrt{3}v_0}{3b}$$

取点 B 为基点，作 A 点的加速度图(图 b)

$$\boldsymbol{a}_A = \boldsymbol{a}_B + \boldsymbol{a}_{AB}^t + \boldsymbol{a}_{AB}^n$$

$$a_{AB}^t = a_{AB}^n \tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}\omega^2 b = \frac{4\sqrt{3}}{9}\frac{v_0^2}{b}$$

$$\alpha = \frac{a_{AB}^t}{b} = \frac{4\sqrt{3}}{9}\frac{v_0^2}{b^2}$$

取点 B 为基点，作 C 点的加速度图(图 b)

$$\boldsymbol{a}_C = \boldsymbol{a}_B + \boldsymbol{a}_{CB}^t + \boldsymbol{a}_{CB}^n$$

$$a_C = b\sqrt{\omega^4 + \alpha^2} = \frac{8\sqrt{3}}{9}\frac{v_0^2}{b}$$

注：加速度分解。

九、　在图示机构中，曲柄OA长为r，绕轴O以等角速度w_0转动，$AB = 6r, BC = 3\sqrt{3}r$ 。求图示位置时，滑块 C 的速度和加速度。

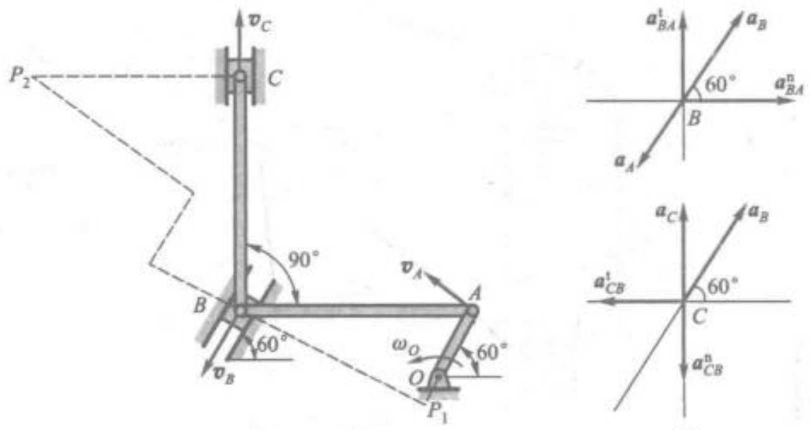
解：杆 AB 作平面运动，瞬心为 P_1 点

$$\omega_{AB} = \frac{v_A}{P_1A} = \frac{r\omega_O}{AB\cos 60^\circ} = \frac{\omega_O}{3}$$

$$v_B = \omega_{AB} \cdot P_1B = \omega_{AB} \cdot AB\sin 60^\circ = \sqrt{3}r\omega_O$$

杆 BC 作平面运动，瞬心为 P_2 点

$$\omega_{BC} = \frac{v_B}{P_2B} = \frac{\sqrt{3}r\omega_O}{BC}\cos 60^\circ = \frac{\omega_O}{6}$$



(a)　(b)

$$v_C = \omega_{BC} \cdot P_2C = \omega_{BC} \cdot BC\tan 60^\circ = \frac{3}{2}r\omega_O$$

取 A 为基点

$$\boldsymbol{a}_B = \boldsymbol{a}_A + \boldsymbol{a}_{BA}^t + \boldsymbol{a}_{BA}^n$$

沿 $\boldsymbol{a}_{BA}^n$ 方向投影(图 b)

$$a_B\cos 60^\circ = - a_A\cos 60^\circ + a_{BA}^n$$

$$a_B = - a_A + 2\omega_{AB}^2 \cdot AB = \frac{1}{3}r\omega_O^2$$

取 B 为基点

$$\boldsymbol{a}_C = \boldsymbol{a}_B + \boldsymbol{a}_{CB}^t + \boldsymbol{a}_{CB}^n$$

沿 $\boldsymbol{a}_C$ 方向投影

$$a_C = a_B\sin 60^\circ - a_{CB}^n$$

$$a_C = \frac{\sqrt{3}}{2}a_B - \omega_{BC}^2 \cdot BC = \frac{\sqrt{3}}{12}r\omega_O^2$$