# 现代控制理论




中国科学技术大学 自动化系


2020.2.-6.

# 本课程的篇章结构

| | | |
|---|---|---|
| **建模** | 直接获取 | 第2章 系统的状态空间模型 |
| | 模型转换 | 第2章 系统的状态空间模型<br>第6章 传递函数的状态空间实现 |
| **分析** | 定量分析 | 第3章 状态空间状态方程的解 |
| | 定性分析 | 第4章 系统的稳定性<br>第5章 能控性和能观性 |
| **设计** | 常规控制 | 第7章 状态反馈和状态观测器 |
| | 最优控制 | 第8章 最优性原理与动态规划<br>第9章 极小值原理<br>第10章 二次型指标的最优线性系统 |

# 第八章 最优性原理与动态规划

## §8.1 最优控制问题

【例8-1】1969年7月21日美国航天员**尼尔·奥尔登·阿姆斯特朗**(Neil Alden Armstrong )与同伴**巴兹·奥尔德林**驾驭由阿波罗11号飞船分离出来的“鹰”号登月舱，踏上了荒芜的月面，实现了人类的首次登月。

最优控制的任务是：寻求发动机推力的变化规律，在安全完成任务的前提下，使登月仓的整个软着陆过程消耗的燃料最少。

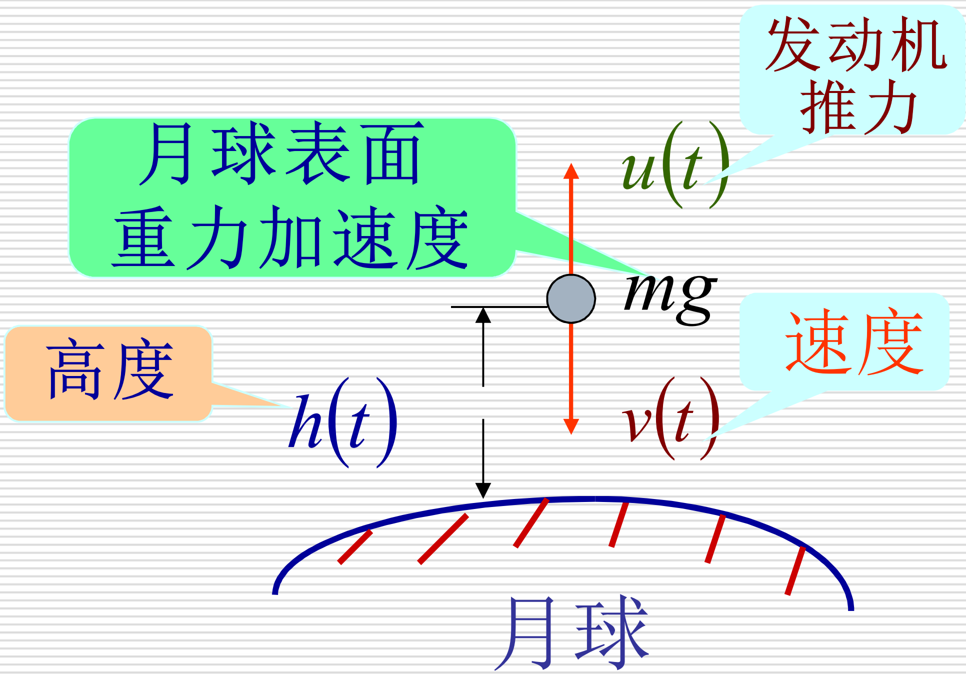
登月舱软着陆的最优控制问题。在月球表面着陆时速度、高度必须为零；由对发动机的推力控制完成

问题：

如何选择发动机推力的变化规律

$$u(t)$$

使燃料消耗最少



# 最优的概念与描述

**最高、最快、最重、最贵……**

**最值、最发达、最先进……**

**最美、最棒、最舒服……**

如何用数学描述？

# 最优的概念与描述

末值型性能指标 —— 迈耶尔问题

$$J = \varphi[\boldsymbol{x}(t_f), t_f]$$

积分型性能指标 —— 拉格朗日问题

$$J = \int_{t_0}^{t_f} L[\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t), t]dt$$

复合型性能指标 —— 波尔扎问题

$$J = \varphi[\boldsymbol{x}(t_f), t_f] + \int_{t_0}^{t_f} L[\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t), t]dt$$

# 登月舱软着陆的最优控制问题的数学描述

软着陆过程登月仓应满足的动力学方程：

$$\dot{h}(t)=v(t)\text{；}\quad \dot{v}(t)=\frac{u(t)}{m(t)}-g\text{；}\quad \dot{m}(t)=-k\cdot u(t)$$

软着陆的初始条件：

初始时刻 $t_0$、高度 $h(t_0)$、速度 $v(t_0)$、质量 $m(t_0)$

软着陆的完成条件：

末态时刻 $t_f$ 自由、$h(t_f)=0$、速度 $v(t_f)=0$

发动机推力的变化应在其能力允许的范围之内

$$u_{\min}\le u(t)\le u_{\max}$$

燃料消耗最少的含义：

$m(t_f)$ 最大。

# 最优控制问题的提法

运动方程（系统的数学模型）微分方程或差分方程

$$\dot{x}(t) = f[x(t), u(t), t]$$

边界条件（初始条件和目标）目标集多是等式约束

$$x(t_0) = x_0, \qquad \psi[x(t_f), t_f] = 0$$

控制约束（容许控制）通常是不等式约束

$$g[x(t), u(t), t] \geq 0$$

性能指标（最优的含义）一般含有末值项和过程项

$$J = \varphi[x(t_f), t_f] + \int_{t_0}^{t_f} L[x(t), u(t), t]\,dt$$

# 最优控制问题的提法

**运动方程**（系统的数学模型）微分方程或差分方程

$$\boldsymbol{x}[k+1]=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}[k],\boldsymbol{u}[k],k)$$

**边界条件**（初始条件和目标）目标集多是等式约束

$$\boldsymbol{x}[k_0]=\boldsymbol{x}_0 \qquad \psi(\boldsymbol{x}[k_f],k_f)=\boldsymbol{0}$$

**控制约束**（容许控制）通常是不等式约束

$$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}[k],\boldsymbol{u}[k],k)\geq\boldsymbol{0}$$

**性能指标**（最优的含义）一般含有末值项和过程项

$$J=\varphi(\boldsymbol{x}[k_f],k_f)+\sum_{k=0}^{k_f-1}L(\boldsymbol{x}[k],\boldsymbol{u}[k],k)$$

# 最常见的最优控制

1. 最少时间控制 $$J = \int_{t_0}^{t_f} dt = t_f - t_0$$

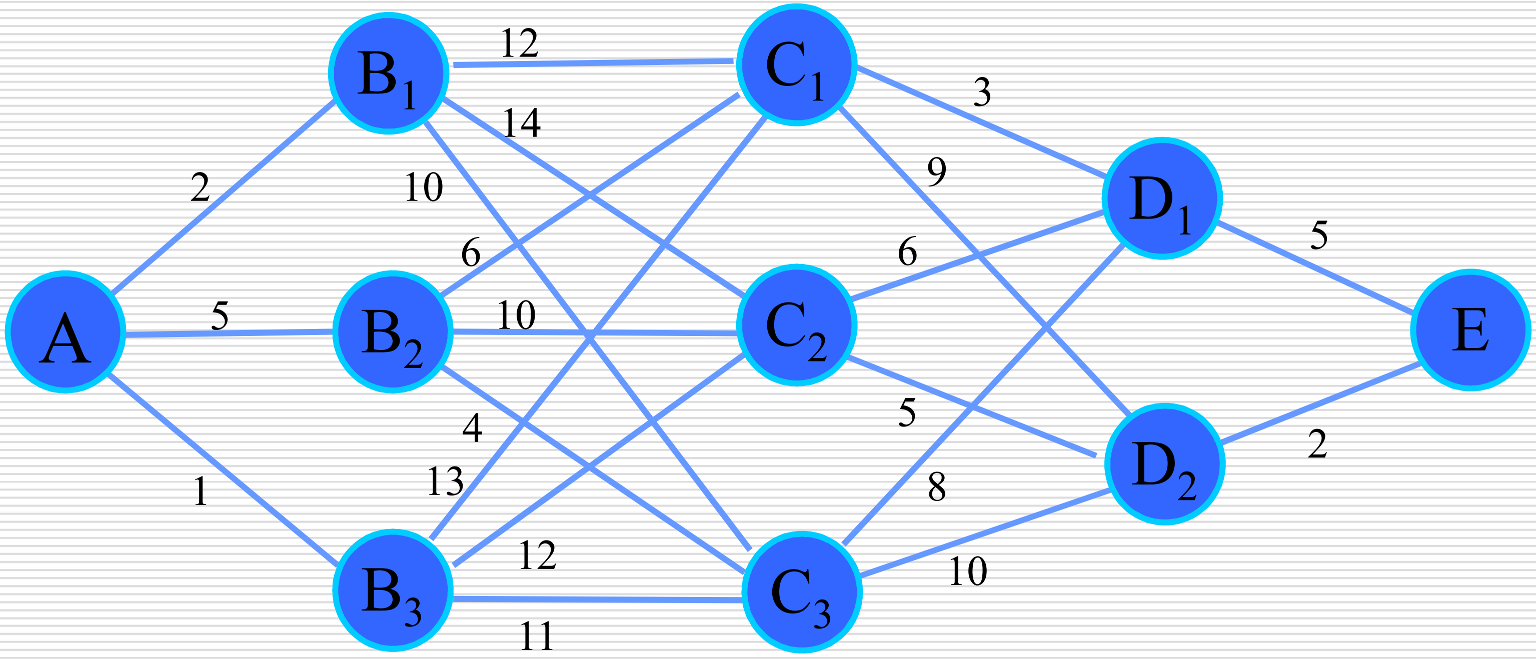
2. 最少燃料控制 $$J = \int_{t_0}^{t_f} \sum_{j=1}^{m} \left| u_j(t) \right| dt$$

3. 最少能量控制 $$\boldsymbol{J = \int_{t_0}^{t_f} u^T(t) u(t) dt}$$

# §8.2 多阶段决策问题及最优性原理

## 8.2.1 多阶段决策问题

【例8.2】如图，求从A到E的最短路径



# 8.2.2 最优性原理

穷举法：18条可能的路线，72次加法，比较17次

动态规划法：逆序计算法，最优性原理

## 最优性原理（多级决策过程的最优策略）

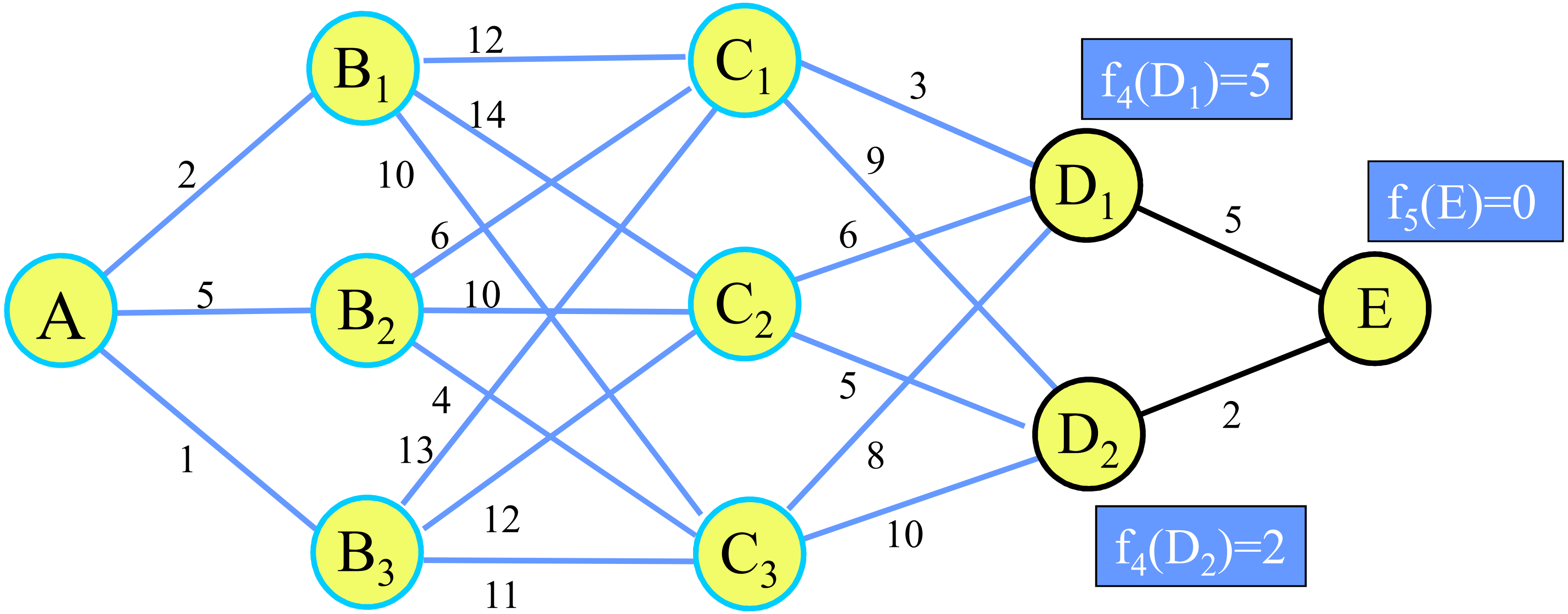
**不论初始状态和初始决策如何，当把其中的任何一级及其状态再作为初始状态时，其余的决策对此必定也是一个最优策略。**

——*Richard Ernest Bellman*

# 理查德·贝尔曼（Richard  Ernest Bellman）

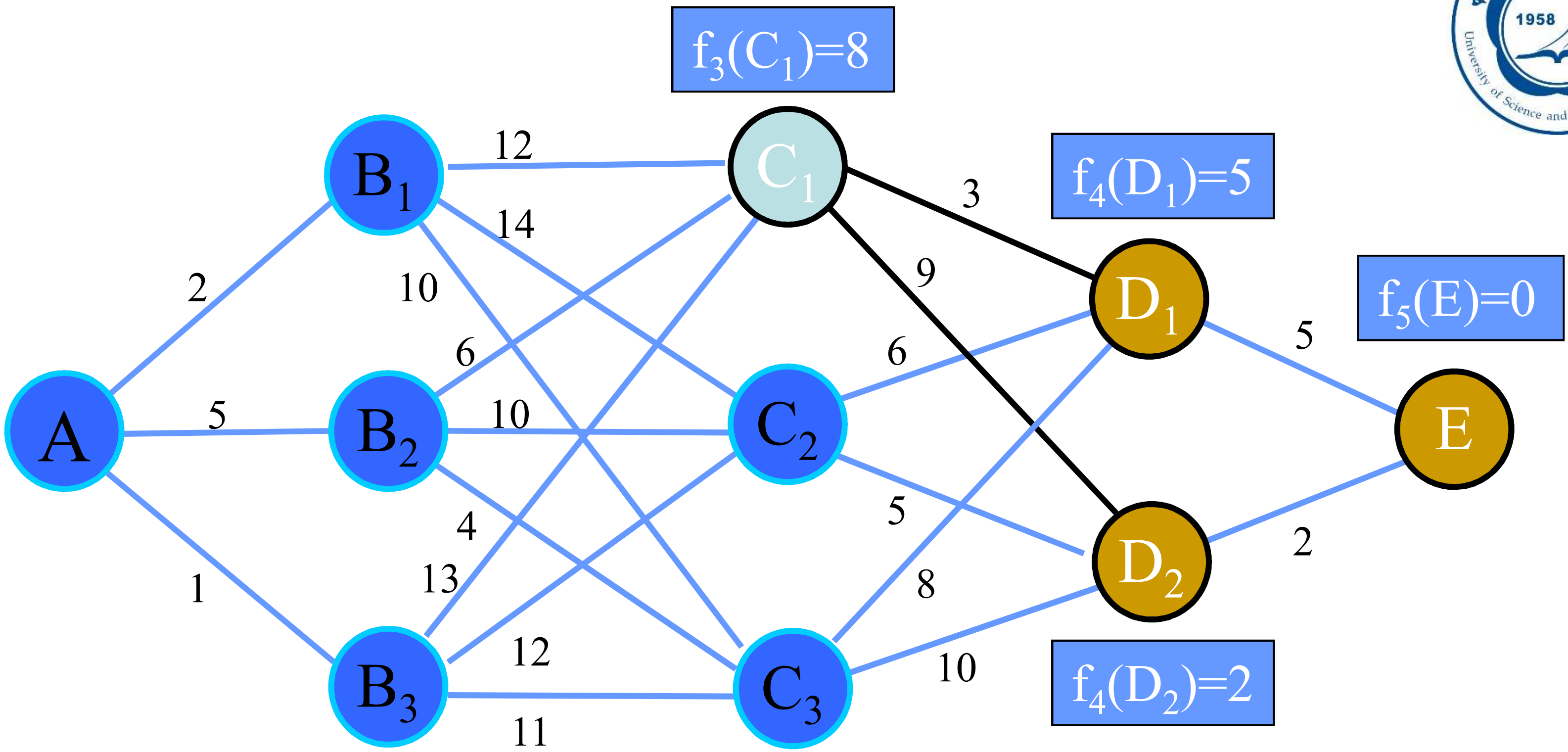
贝尔曼（ 1920.8.26.－1984.3.19.） 美国数学家，美国国家科学院院士，动态规划理论的创始人。贝尔曼先后在布鲁克林学院和威斯康星大学学习数学。随后他在洛斯·阿拉莫斯为一个理论物理部门的团体工作。于1946年获得普林斯顿大学博士学位。贝尔曼曾是南加州大学教授，美国艺术与科学研究院（1975年）以及美国国家工程院院士（1977年）。由于在决策过程和控制系统理论方面的贡献，特别是动态规划的发展和应用，他在1979年被授予电气电子工程师协会奖。

# 动态规划法求解过程



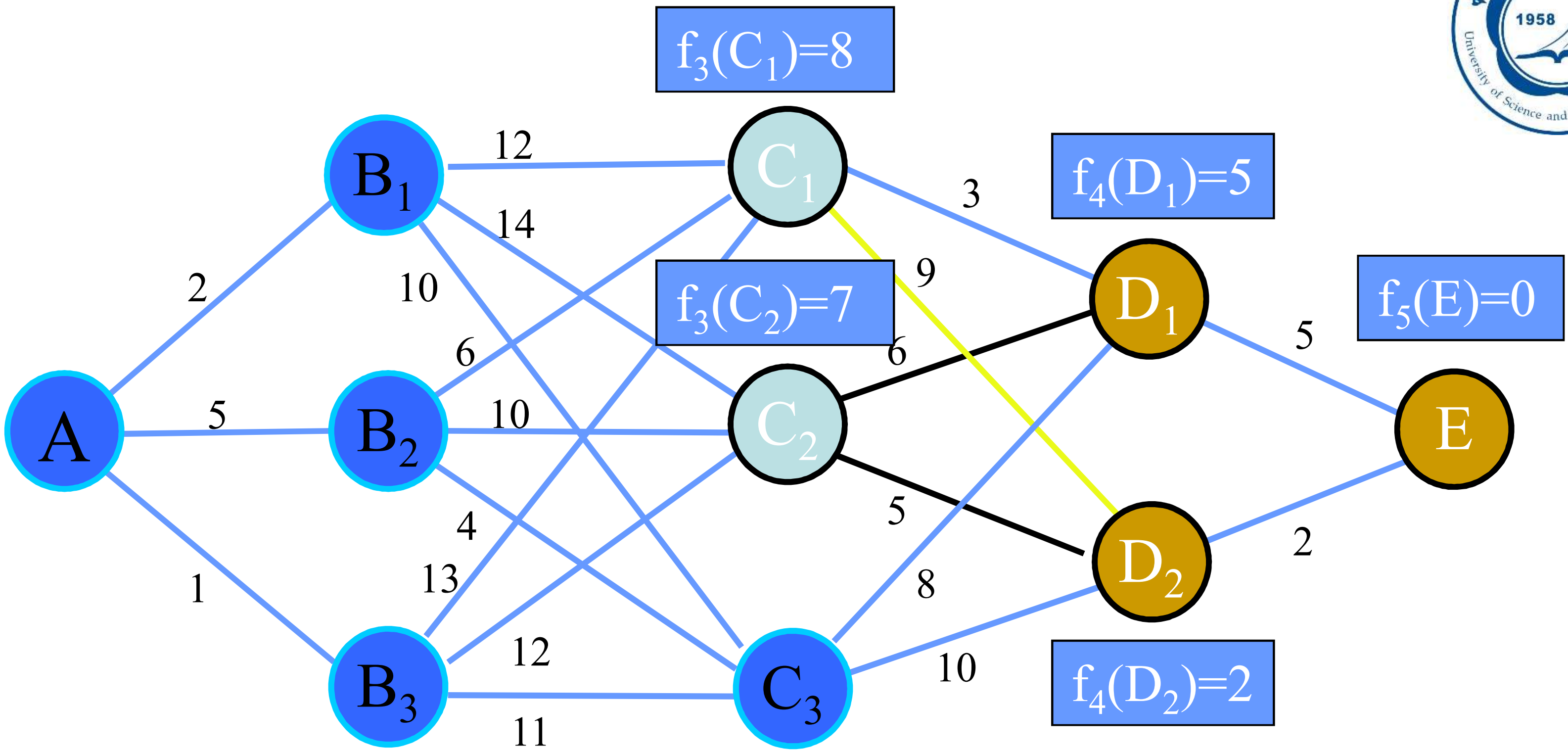

$$f_4(D_1) = d(D_1 \to E) + f_5(E) = 5 + 0 = 5$$

$$f_4(D_2) = d(D_2 \to E) + f_5(E) = 2 + 0 = 2$$



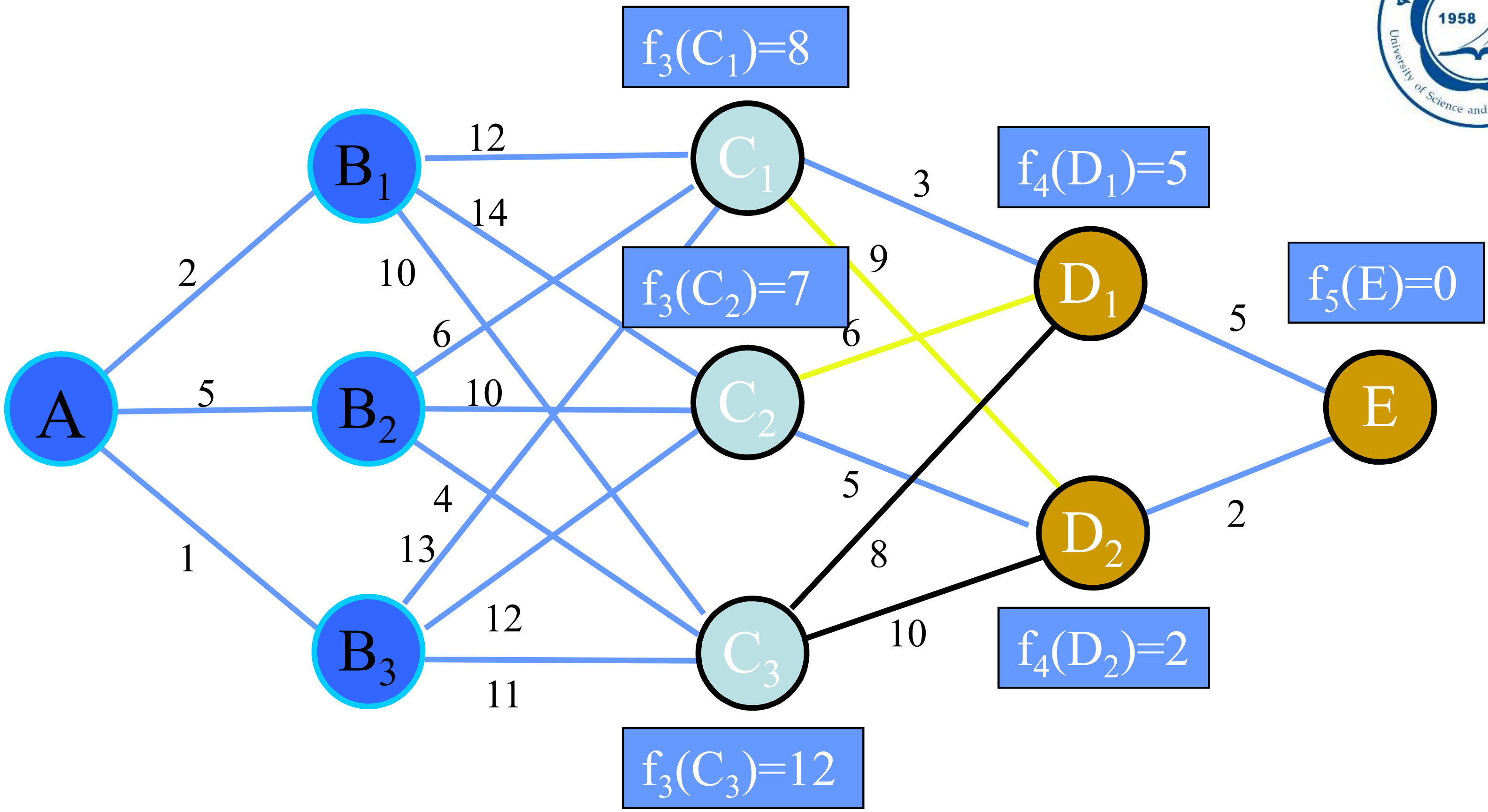

$$f_3(C_1) = \min\begin{Bmatrix}(C_1, D_1) + f_4(D_1) \\ (C_1, D_2) + f_4(D_2)\end{Bmatrix}$$

$$= \min\begin{Bmatrix}3+5 \\ 9+2\end{Bmatrix} = \min\begin{Bmatrix}8 \\ 11\end{Bmatrix} = 8 \quad \text{最优决策} C_1 \rightarrow D_1$$



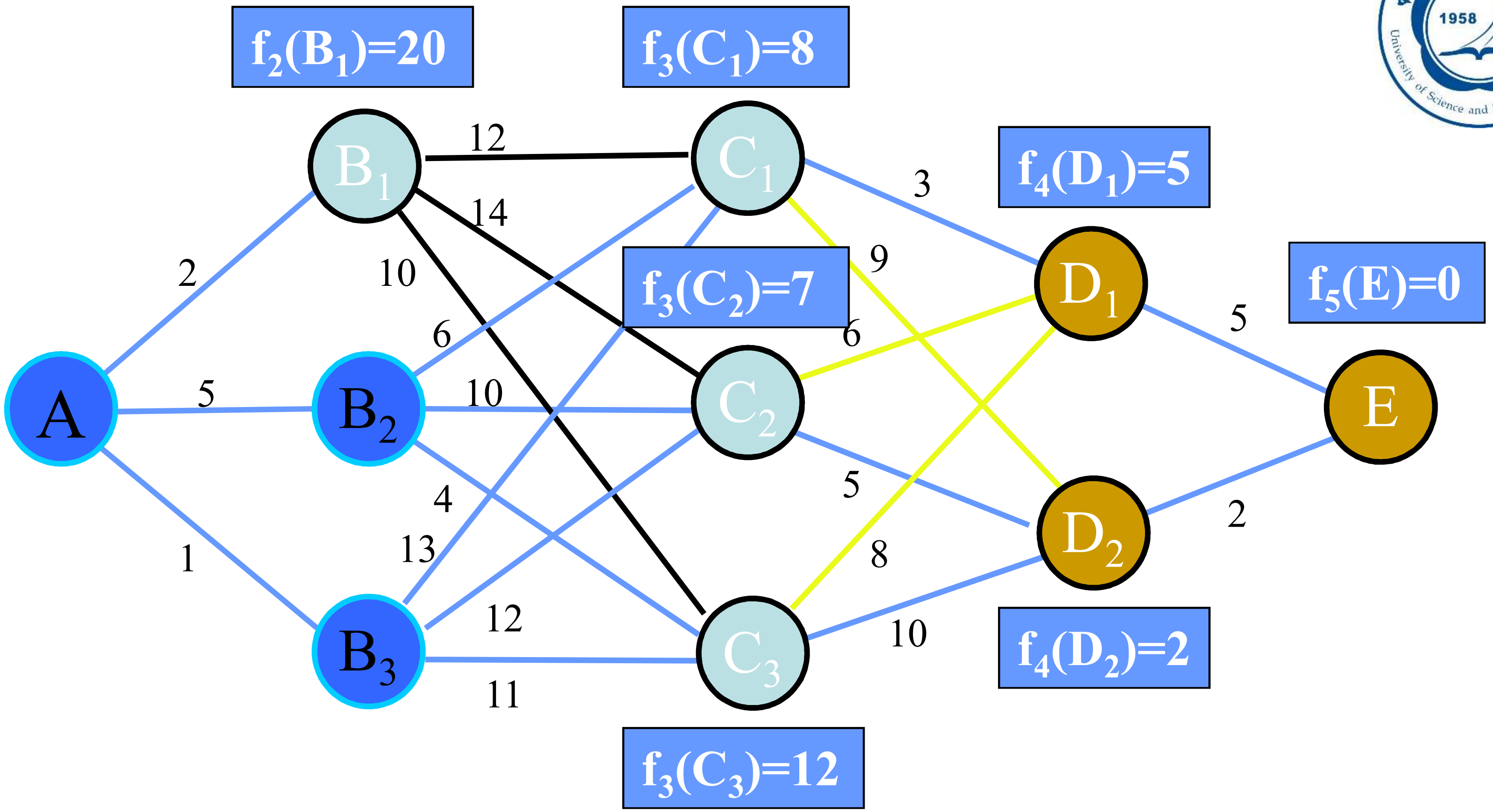

$$f_3(C_2) = \min\begin{Bmatrix}(C_2, D_1) + f_4(D_1) \\ (C_2, D_2) + f_4(D_2)\end{Bmatrix}$$

$$= \min\begin{Bmatrix}6+5 \\ 5+2\end{Bmatrix} = \min\begin{Bmatrix}11 \\ 7\end{Bmatrix} = 7 \quad \text{最优决策} C_2 \to D_2$$



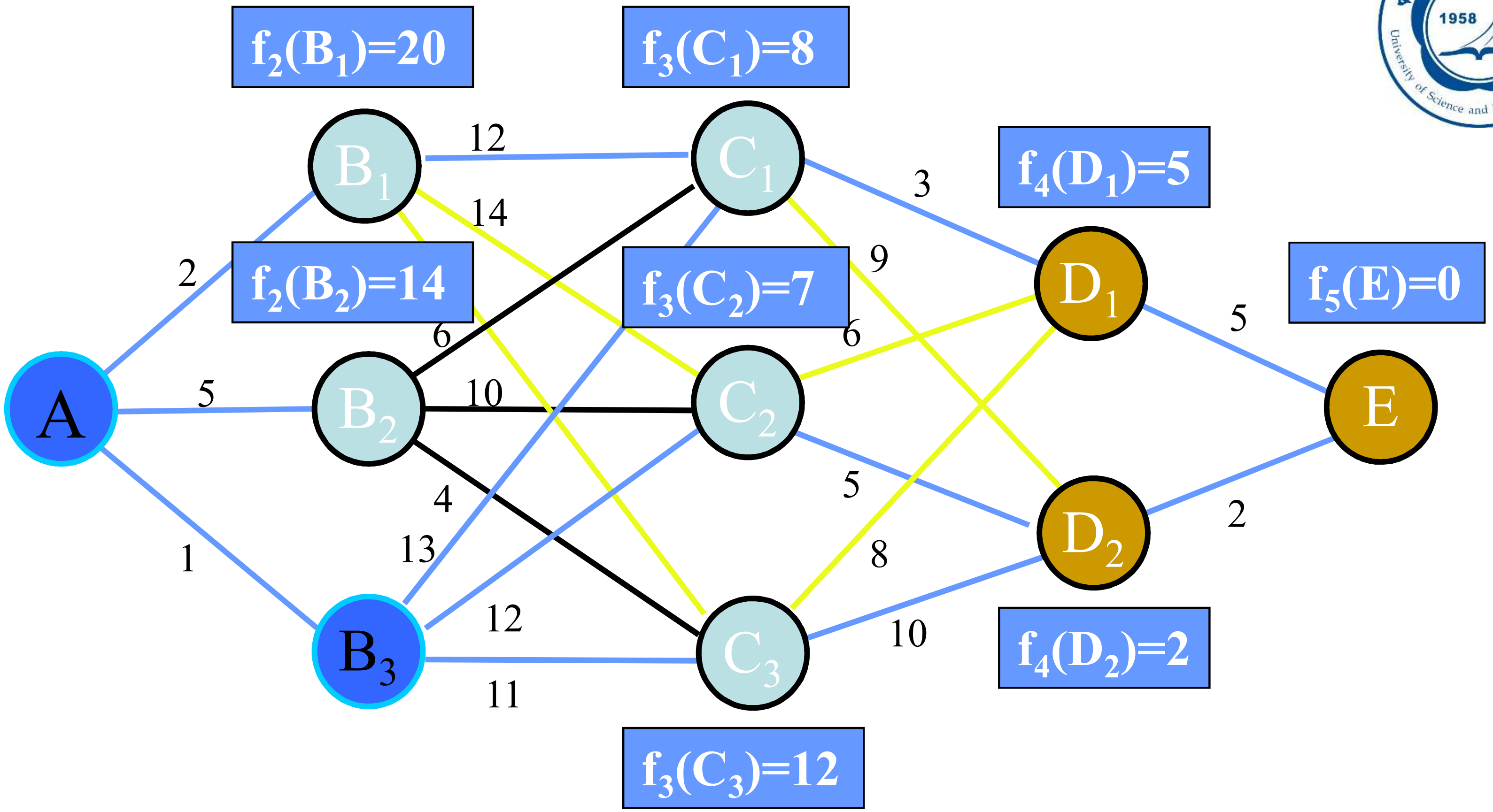

$$f_3(C_3) = \min\begin{Bmatrix} (C_3, D_1) + f_4(D_1) \\ (C_3, D_2) + f_4(D_2) \end{Bmatrix}$$

$$= \min\begin{Bmatrix} 8+5 \\ 10+2 \end{Bmatrix} = \min\begin{Bmatrix} 13 \\ 12 \end{Bmatrix} = 12 \quad \text{最优决策} C_3 \to D_2$$



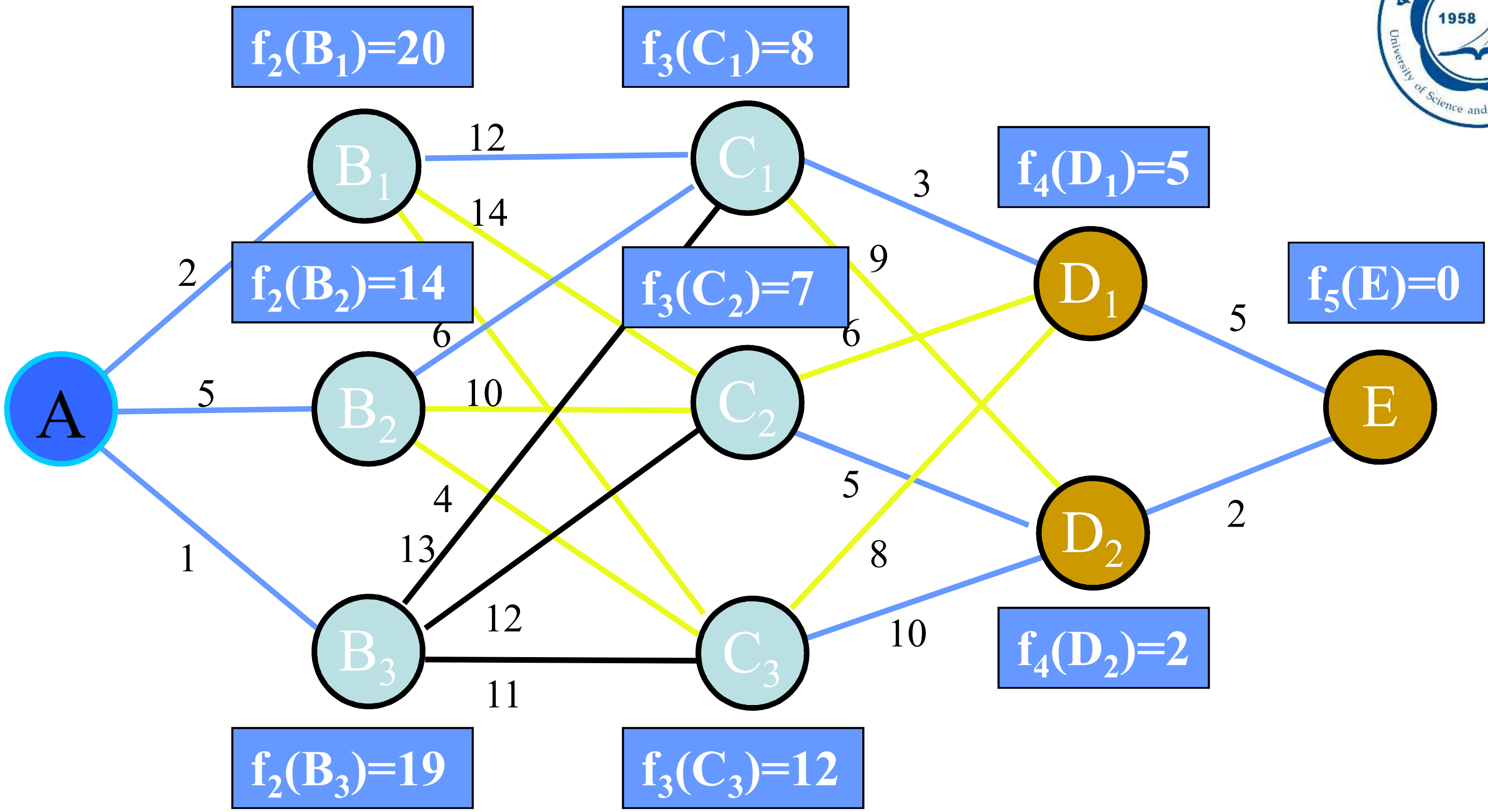

$$f_2(B_1)=\min\begin{Bmatrix}(B_1,C_1)+f_3(C_1)\\(B_1,C_2)+f_3(C_2)\\(B_1,C_3)+f_3(C_3)\end{Bmatrix}=\min\begin{Bmatrix}12+8\\14+7\\10+12\end{Bmatrix}=\min\begin{Bmatrix}20\\21\\22\end{Bmatrix}=20$$

最优决策$B_1 \rightarrow C_1$



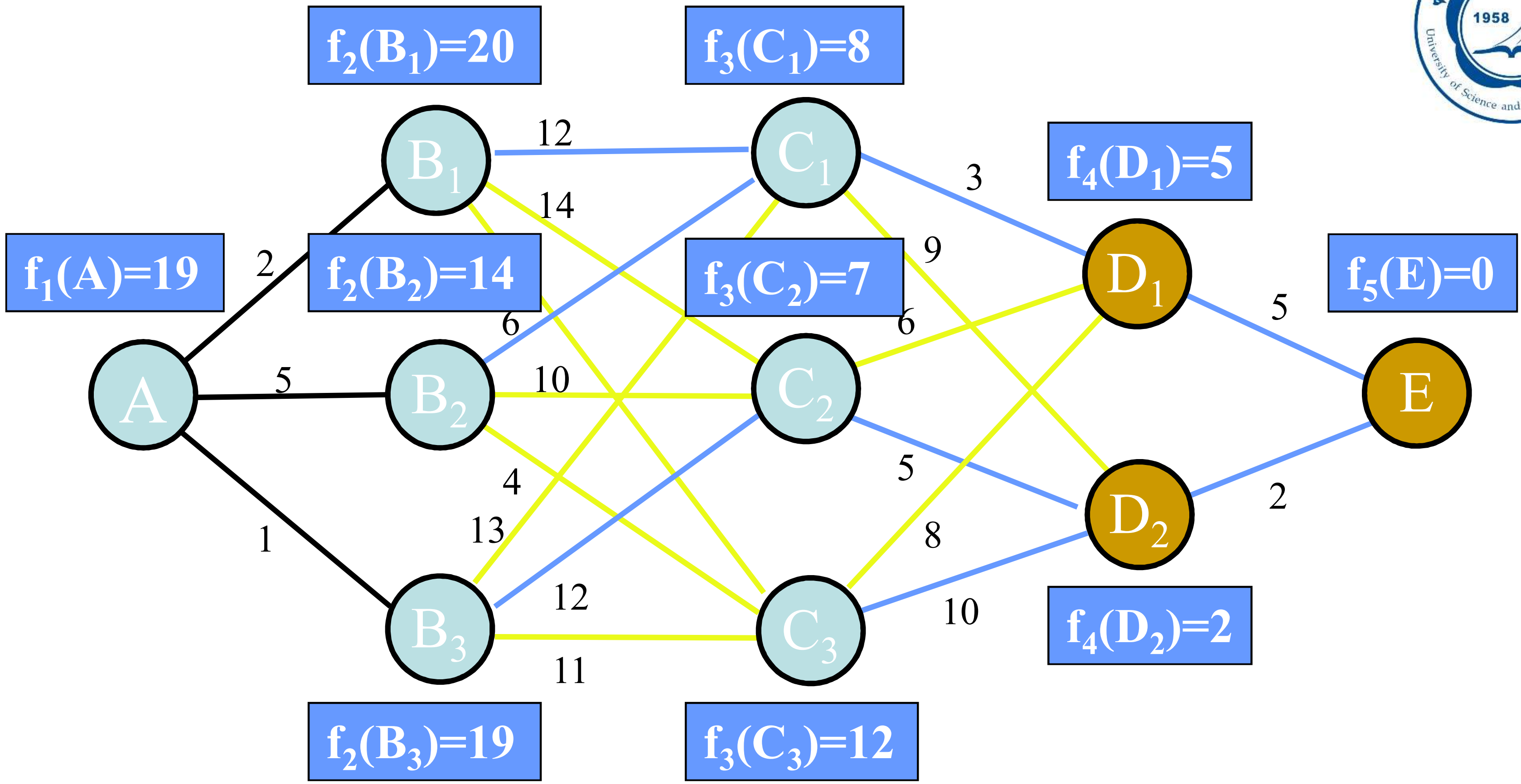

$$f_2(B_2)=\min\begin{Bmatrix}(B_2,C_1)+f_3(C_1)\\(B_2,C_2)+f_3(C_2)\\(B_2,C_3)+f_3(C_3)\end{Bmatrix}=\min\begin{Bmatrix}6+8\\10+7\\4+12\end{Bmatrix}=\min\begin{Bmatrix}14\\17\\16\end{Bmatrix}=14$$

最优决策$B_2 \rightarrow C_1$



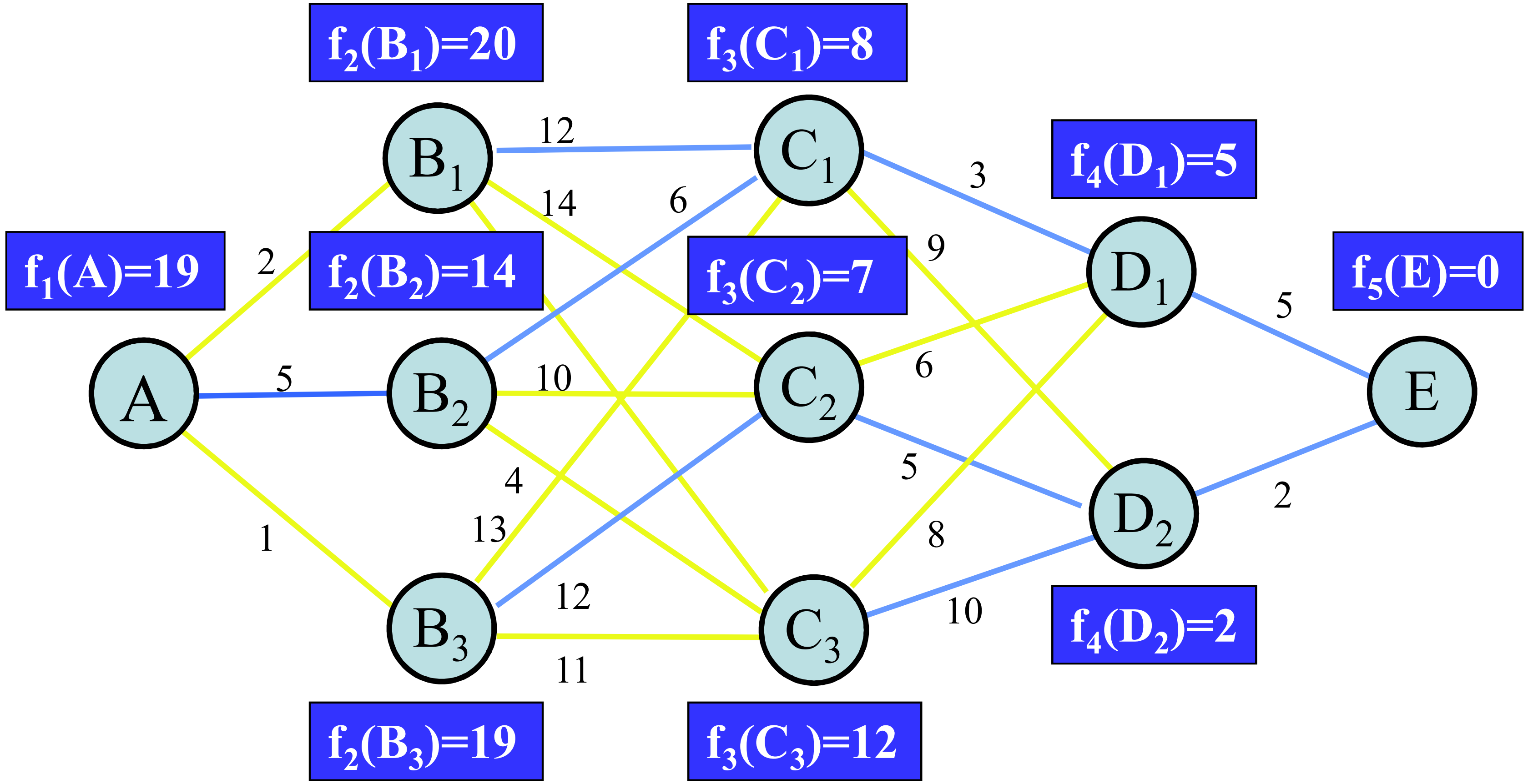

$$f_2(B_3)=\min\begin{Bmatrix}(B_3,C_1)+f_3(C_1)\\(B_3,C_2)+f_3(C_2)\\(B_3,C_3)+f_3(C_3)\end{Bmatrix}=\min\begin{Bmatrix}13+8\\12+7\\11+12\end{Bmatrix}=\min\begin{Bmatrix}21\\19\\23\end{Bmatrix}=19$$

最优决策$B_3 \rightarrow C_2$

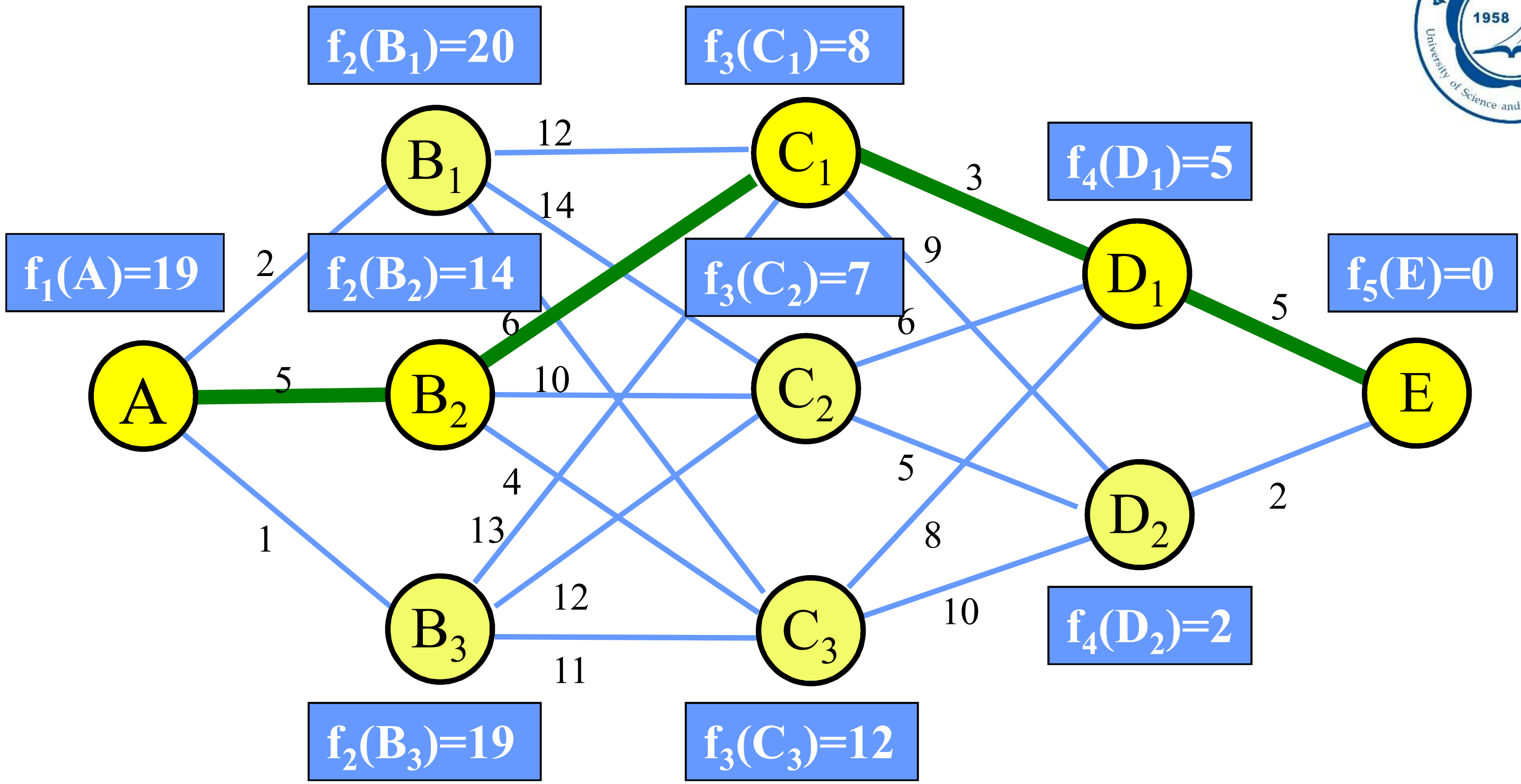



$$f_1(A) = \min \begin{Bmatrix} (A, B_1) + f_2(B_1) \\ (A, B_2) + f_2(B_2) \\ (A, B_3) + f_2(B_3) \end{Bmatrix} = \min \begin{Bmatrix} 2+20 \\ 5+14 \\ 1+19 \end{Bmatrix} = \min \begin{Bmatrix} 22 \\ 19 \\ 20 \end{Bmatrix} = 19$$

最优决策$A \to B_2$

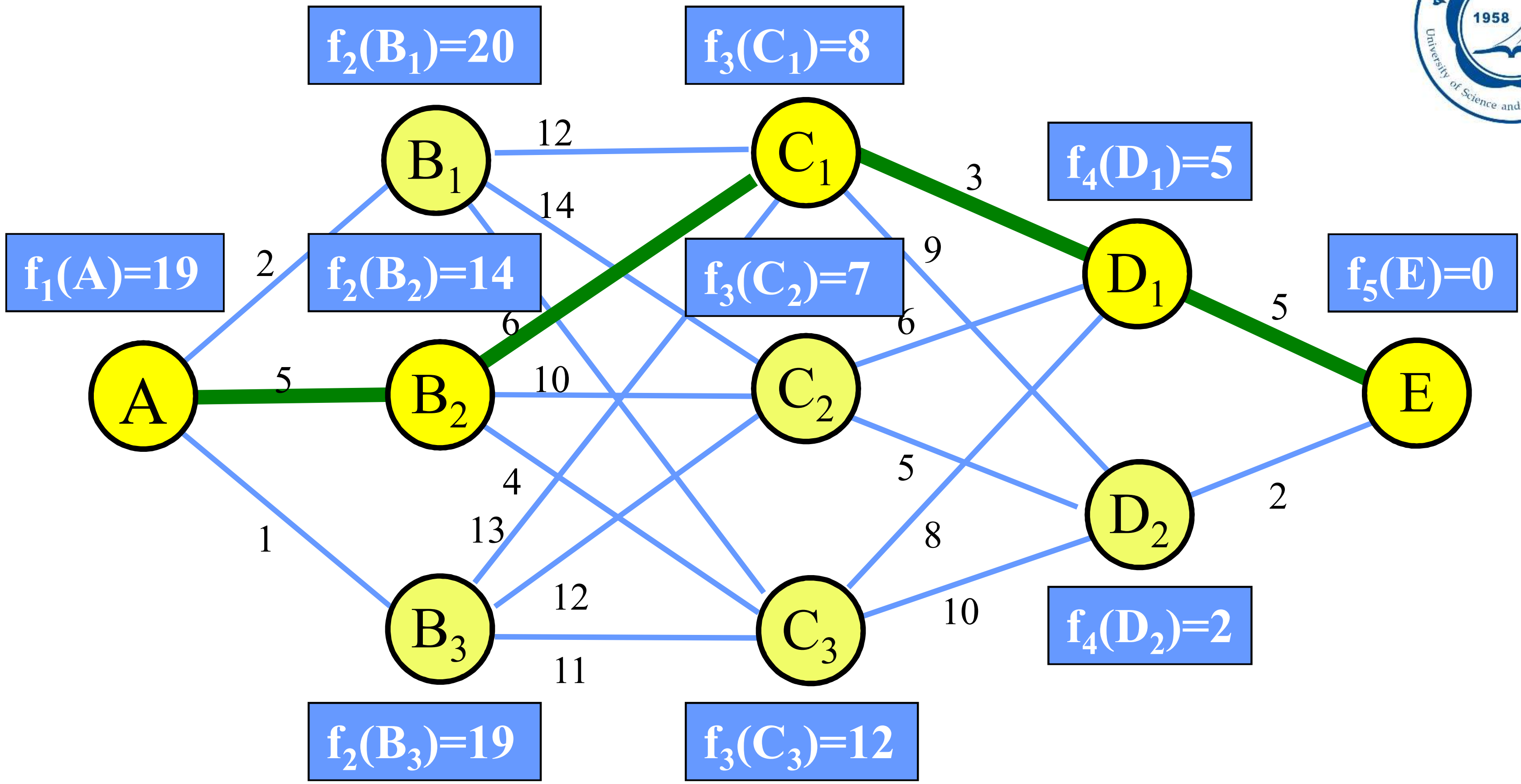


$f_2(B_1)=20$
$f_3(C_1)=8$
$B_1$
12
$C_1$
3
$f_4(D_1)=5$
14
6
9
$f_1(A)=19$
2
$f_2(B_2)=14$
$f_3(C_2)=7$
$D_1$
5
$f_5(E)=0$
A
5
$B_2$
10
$C_2$
6
E
4
5
13
1
8
$D_2$
2
12
$B_3$
$C_3$
10
11
$f_4(D_2)=2$
$f_2(B_3)=19$
$f_3(C_3)=12$




| 状态 | 最优决策 | 状态 | 最优决策 | 状态 | 最优决策 | 状态 | 最优决策 | 状态 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | （A，$B_2$） | $B_2$ | （$B_2$，$C_1$） | $C_1$ | （$C_1$，$D_1$） | $D_1$ | （$D_1$，E） | E |

从A到E的最短路径为19，路线为$A \rightarrow B_2 \rightarrow C_1 \rightarrow D_1 \rightarrow E$




从A到E的最短路径为19，路线为$A \rightarrow B_2 \rightarrow C_1 \rightarrow D_1 \rightarrow E$

穷　举　法：18条可能的路线，72次加法，比较17次

动态规划法：20次加法，比较11次

# §8.3 离散动态规划

## 8.3.1 离散时间最优控制问题

**运动方程**（系统的数学模型）微分方程或差分方程

$$\boldsymbol{x}[k+1]=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}[k],\boldsymbol{u}[k],k)$$

**边界条件**（初始条件和目标）目标集多是等式约束

$$\boldsymbol{x}[k_0]=\boldsymbol{x}_0 \qquad \psi(\boldsymbol{x}[k_f],k_f)=\boldsymbol{0}$$

**控制约束**（容许控制）通常是不等式约束

$$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}[k],\boldsymbol{u}[k],k)\geq\boldsymbol{0}$$

**性能指标**（最优的含义）一般含有末值项和过程项

$$J=\varphi(\boldsymbol{x}[k_f],k_f)+\sum_{k=0}^{k_f-1}L(\boldsymbol{x}[k],\boldsymbol{u}[k],k)$$

# 8.3.2 离散时间最优控制问题的动态规划解

【例 8.3】已知离散系统方程

$$x[k+1]=2x[k]+u[k],\quad x[0]=1$$

及代价函数

$$J=x^2[3]+\sum_{k=0}^{2}(x^2[k]+u^2[k])$$

系统的状态 $x[k]$ 和控制 $u[k]$ 均不受约束。试求最优控制序列

$$\{u^*[k],k=0,1,2\}$$

使代价函数最小。

**3级最优决策问题，依最优性原理，保证后段决策最优**

# 8.3.2 离散时间最优控制问题的动态规划解

状态方程及初态

$$x[k+1]=2x[k]+u[k],\quad x[0]=1$$

代价函数

$$J=x^2[3]+\sum_{k=0}^{2}(x^2[k]+u^2[k])$$

后段代价函数

$$J_3=x^2[3]$$

$$J_2=x^2[2]+u^2[2]+J_3$$

$$J_1=x^2[1]+u^2[1]+J_2$$

$$J_0=J=x^2[0]+u^2[0]+J_1$$

**注意到$x[k+1]$仅与$x[k]$及$u[k]$有关，于是可依次得到**

$$J_2=x^2[2]+u^2[2]+x^2[3]=x^2[2]+u^2[2]+(2x[2]+u[2])^2$$

# 8.3.2 离散时间最优控制问题的动态规划解

$$J_2 = x^2[2] + u^2[2] + x^2[3] = x^2[2] + u^2[2] + (2x[2] + u[2])^2$$

**为使 $J_2$ 达到最优，注意到控制无约束，立即有**

$$\frac{\partial J_2}{\partial u[2]} = 2u[2] + 2(2x[2] + u[2]) = 0$$

**于是**

$$u^*[2] = -x[2]$$

$$J_2^* = x^2[2] + (u^*[2])^2 + (2x[2] + u^*[2])^2 = 3x^2[2]$$

# 8.3.2 离散时间最优控制问题的动态规划解

**以此为基点再考查**

$$J_1 = x^2[1] + u^2[1] + 3x^2[2] = x^2[1] + u^2[1] + 3(2x[1] + u[1])^2$$

**同样**

$$\frac{\partial J_1}{\partial u[1]} = 2u[1] + 6(2x[1] + u[1]) = 0 \longrightarrow u^*[1] = -1.5x[1]$$

$$J_1^* = x^2[1] + (u^*[1])^2 + 3(2x[1] + u^*[1])^2 = 4x^2[1]$$

**循此法再继续做下去，注意到系统的初始条件** $x[0] = 1$

## 8.3.2 离散时间最优控制问题的动态规划解

$$J_0 = x^2[0] + u^2[0] + J_1 = x^2[0] + u^2[0] + 4x^2[1]$$

$$J = J_0 = x^2[0] + u^2[0] + 4(2x[0] + u[0])^2$$

$$\frac{\partial J^*}{\partial u[0]} = 2u[0] + 8(2x[0] + u[0]) = 0$$

$$u^*[0] = -1.6x[0] \xrightarrow{x[0]=1} u^*[0] = -1.6$$

**这就是最初的最优控制，同时最终的代价函数是**

$$J = x^2[0] + u^2[0] + 4(2x[0] + u[0])^2 = 4.2$$

# 8.3.2 离散时间最优控制问题的动态规划解

**将前面得到最优控制关系代入系统的状态方程**

$$x[k+1]=2x[k]+u[k],\quad x[0]=1$$

$$u^*[2]=-x[2]\qquad u^*[1]=-1.5x[1]\qquad u^*[0]=-1.6x[0]=-1.6$$

**可依次得到**

$$x^*[1]=2x[0]+u^*[0]=0.4,\qquad u^*[1]=-1.5x^*[1]=-0.6$$

$$x^*[2]=2x[1]+u^*[1]=0.2,\qquad u^*[2]=-x^*[2]=-0.2$$

$$x^*[3]=2x[2]+u^*[2]=0.2$$

得到本例题要求的最优控制序列、最优轨线和最优的代价函数是:

$$u^*=\{-1.6,\ -0.6,\ -0.2\},\qquad x^*=\{1,\ 0.4,\ 0.2,\ 0.2\},\qquad J^*=4.2$$

# 8.3.2 离散时间最优控制问题的动态规划解

**将前面得到最优控制关系代入系统的状态方程**

$$x[k+1]=2x[k]+u[k],\quad x[0]=1$$

$$u^*[2]=-x[2]\qquad u^*[1]=-1.5x[1]\qquad u^*[0]=-1.6x[0]=-1.6$$

**可依次得到**

$$x^*[1]=2x[0]+u^*[0]=0.4,\qquad u^*[1]=-1.5x^*[1]=-0.6$$

$$x^*[2]=2x[1]+u^*[1]=0.2,\qquad u^*[2]=-x^*[2]=-0.2$$

$$x^*[3]=2x[2]+u^*[2]=0.2$$

得到本例题要求的最优控制序列、最优轨线和最优的代价函数是:

$$u^*=\{-1.6,\ -0.6,\ -0.2\},\qquad x^*=\{1,\ 0.4,\ 0.2,\ 0.2\},\qquad J^*=4.2$$

# §8.4 连续动态规划

（自学）

习题

**4-1，4-4，4-7**