现代控制理论14-15学年第二学期考试参考答案

一、（**15%**）已知两单输入单输出系统的状态空间方程分别是

$$S_1:\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}_1 = A_1\boldsymbol{x}_1 + b_1u_1\\ y_1 = c_1\boldsymbol{x}_1 + d_1u_1\end{cases}$$

$$S_2:\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}_2 = A_2\boldsymbol{x}_2 + b_2u_2\\ y_2 = c_2\boldsymbol{x}_2 + d_2u_2\end{cases}$$

将它们负反馈联接，即：$u_2 = y_1$，$u_1 = v - y_2$，试以v为输入，$y = y_1$为输出，$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix}\boldsymbol{x_1}\\ \boldsymbol{x_2}\end{bmatrix}$为状态，求反馈系统的状态空间方程。

解答:

(1). 消去u_1，u_2，y_2，可得

$$y_1 = c_1\boldsymbol{x}_1 + d_1v - d_1c_2\boldsymbol{x}_2 - d_1d_2y_1$$

从而

$$y_1 = \frac{c_1}{1+d_1d_2}\boldsymbol{x}_1 - \frac{d_1c_2}{1+d_1d_2}\boldsymbol{x}_2 + \frac{d_1}{1+d_1d_2}v$$

4%

(2). 将y_1代入原状态空间方程并化简，可得

$$\dot{\boldsymbol{x}}_1 = (A_1 - \frac{b_1d_2c_1}{1+d_1d_2})\boldsymbol{x}_1 - \frac{b_1c_2}{1+d_1d_2}\boldsymbol{x}_2 + \frac{b_1}{1+d_1d_2}v$$

4%

$$\dot{\boldsymbol{x}}_2 = \frac{b_2c_1}{1+d_1d_2}\boldsymbol{x}_1 + (A_2 - \frac{b_2d_1c_2}{1+d_1d_2})\boldsymbol{x}_2 + \frac{b_2d_1}{1+d_1d_2}v$$

4%

(3). 综上可得反馈系统状态空间方程为

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix}A_1 - \frac{b_1d_2c_1}{1+d_1d_2} & -\frac{b_1c_2}{1+d_1d_2}\\ \frac{b_2c_1}{1+d_1d_2} & A_2 - \frac{b_2d_1c_2}{1+d_1d_2}\end{bmatrix}\boldsymbol{x} + \begin{bmatrix}\frac{b_1}{1+d_1d_2}\\ \frac{b_2d_1}{1+d_1d_2}\end{bmatrix}v\\ y = \begin{bmatrix}\frac{c_1}{1+d_1d_2} & -\frac{d_1c_2}{1+d_1d_2}\end{bmatrix}\boldsymbol{x} + \frac{d_1}{1+d_1d_2}v\end{cases}$$

3%

二、（**18%**）已知系统的状态空间方程为

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & -5 & 4 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}(t) + \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}(t) + u(t)$$

1．求系统的传递函数；

2．当系统的初态为$\boldsymbol{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}^T$时，求该系统在单位阶跃信号作用下的输出响应式。

解答：

1. 系统传递函数

$$g(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$$

2%

其中

$$(sI - A)^{-1} = \begin{bmatrix} s & -1 & 0 \\ 0 & s & -1 \\ -2 & 5 & s-4 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{(s-1)^2(s-2)} \begin{bmatrix} s^2-4s+5 & s-4 & 1 \\ 2 & s^2-4s & s \\ 2s & 2-5s & s^2 \end{bmatrix}$$

3%

故

$$g(s) = \frac{-5s+2}{s^2-3s+2} + 1 = \frac{s^2-8s+4}{s^2-3s+2}$$

3%

2. 系统状态响应

$$\boldsymbol{x}(t) = e^{At}\boldsymbol{x}(0) + \int_0^t e^{A\tau}Bu(t-\tau)dt$$

2%

其中

$$e^{At} = \begin{bmatrix} e^{2t}-2te^t & -2e^{2t}+3te^t+2e^t & e^{2t}-te^t-e^t \\ 2e^{2t}-2te^t-2e^t & -4e^{2t}+3te^t+5e^t & 2e^{2t}-te^t-2e^t \\ 4e^{2t}-2te^t-4e^t & -8e^{2t}+3te^t+8e^t & 4e^{2t}-te^t-3e^t \end{bmatrix}$$

4%

故

$$\boldsymbol{x}(t) = \begin{bmatrix} e^{2t}-2te^t-e^t+1 \\ 2e^{2t}-2te^t-3e^t+1 \\ 4e^{2t}-2te^t-5e^t \end{bmatrix}$$

2%

从而可得系统输出响应为

$$y(t) = C\boldsymbol{x}(t) + u(t) = -4e^{2t} + 6e^t + 2, \quad t \ge 0$$

2%

三、（**20%**）对线性定常系统，试证明以下结论

1．输出反馈不改变系统的能观性；

2．对单输入-单输出线性定常系统$\{\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}\}$，若$\{\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}\}$能控，则一定存在行向量$\boldsymbol{c}$，使系统$\{\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}\}$能观。

解答：

1. 对线性定常系统

$$S_1 : \begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x} + Bu \\ y = C\boldsymbol{x} \end{cases}$$

引入输出反馈

$$u = r - Hy = r - HC\boldsymbol{x}$$

3%

得

$$S_2 : \begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}} = (A - BHC)\boldsymbol{x} + Br \\ y = C\boldsymbol{x} \end{cases}$$

1%

系统S_1能观性矩阵$M_{o1} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$，系统$S_2$能观性矩阵$M_{o2} = \begin{bmatrix} C \\ C(A-BHC) \\ C(A-BHC)^2 \\ \vdots \\ C(A-BHC)^{n-1} \end{bmatrix}$ 2%

由数学归纳法可证明

$$M_{o2} = F \cdot M_{o1}$$

其中

$$F = \begin{bmatrix} I & & & & & \\ -CBH & I & & & & \\ -CDBH & -CBH & I & & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ -CD^{n-2}BH & \cdots & \cdots & -CDBH & -CBH & I \end{bmatrix}, \quad D = A - BHC$$

2%

可见F非奇异，故

$$rank(M_{o2}) = rank(F \cdot M_{o1}) = rank(M_{o1})$$

故输出反馈不改变系统的能观性。 2%

2. 设系统$\{A, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}\}$的能控标准型为$\{\bar{A}, \bar{\boldsymbol{b}}, \bar{\boldsymbol{c}}\}$，变换矩阵为$Q$，其传递函数为

$$g(s) = \frac{b_{n-1}s^{n-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0}$$

3%

则

$$\overline{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix}, \quad \bar{\boldsymbol{b}} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \bar{\boldsymbol{c}} = \begin{bmatrix} b_0 & b_1 & \cdots & b_{n-1} \end{bmatrix}$$

3%

取$\bar{\boldsymbol{c}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$，则有

$$\bar{M}_o = \begin{bmatrix} \bar{\boldsymbol{c}} \\ \bar{\boldsymbol{c}}\overline{A} \\ \vdots \\ \bar{\boldsymbol{c}}\overline{A}^{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

即系统$\{\bar{A}, \bar{\boldsymbol{b}}, \bar{\boldsymbol{c}}\}$能观性矩阵满秩，系统能观，因此系统$\{A, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}\}$也能观。 4%

四、（**20%**）已知系统的状态空间方程为

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 + 2x_2 + u \\ \dot{x}_2 = 3x_1 + 4x_2 - u \\ \ y = 3x_1 - 2x_2 \end{cases}$$

1．判断系统的渐近稳定性和BIBO稳定性；
2．设计状态反馈，使系统的闭环极点位于$-1 \pm j$；
3．设计特征值均为-5的最小维状态估计器；
4．用估计状态进行状态反馈，试列写该复合系统的增广状态空间方程。

解答：

1.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 3 & -2 \end{bmatrix}$$

系统特征多项式

$$\Delta(\lambda) = det(\lambda I - A) = \lambda^2 - 5\lambda - 2$$

1%

因此系统特征值为

$$\lambda_1 = \frac{5 + \sqrt{33}}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{5 - \sqrt{33}}{2}$$

可见$Re\{\lambda_1\} > 0$, 因此系统不是渐近稳定。 1%

系统传递函数

$$g(s) = \frac{5s-26}{s^2-5s-2}$$

1%

可见系统极点并不全位于s左半平面，因此系统不是BIBO稳定。 1%

2. 系统能控性矩阵

$$M_c = \begin{bmatrix} B & AB \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

满秩，故系统能控，可以任意配置极点。 1%

设计状态反馈

$$u = r - \boldsymbol{k}\boldsymbol{x}, \quad \boldsymbol{k} = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \end{bmatrix}$$

1%

则系统特征多项式变为

$$\widetilde{\Delta}(\lambda) = det[\lambda I - (A - Bk)] = \lambda^2 - (5 - k_1 + k_2)\lambda - 6k_1 + 4k_2 - 2 = \lambda^2 + 2\lambda + 2$$

1%

解得

$$k_1 = -16, \quad k_2 = -23$$

2%

故状态反馈为

$$u = r + \begin{bmatrix} 16 & 23 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}$$

1%

3. 系统能观性矩阵

$$M_o = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}$$

满秩，故系统能观，可以设计任意极点状态观测器。又$rank(C) = 1$，故最小维状态观测器应为1维，取 1%

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}, \quad Q \triangleq P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

1%

则

$$\bar{A} = PAQ = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -6 & 1 \end{bmatrix}, \quad \bar{B} = PB = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad \bar{C} = CQ = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$$

1%

构造观测器

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}}_1 &= (A_{11} - lA_{21})\hat{x}_1 + (A_{12}y + B_1u) + l(\dot{y} - A_{22}y - B_2u)\\ &= (4+6l)\hat{x}_1 + (-y+u) + l(\dot{y} - y - 5u)\end{aligned}$$

1%

由观测器极点$4+6l=-5$，得

$$l = -\frac{3}{2}$$

1%

为消去微分项，取$z = \hat{\boldsymbol{x}}_1 - ly$，得

$$\dot{z} = -5z + 8.5u + 8y$$

1%

从而

$$\hat{\boldsymbol{x}} = Q\begin{bmatrix} z+ly \\ y\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix} z \\ y\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1.5\end{bmatrix} z - \begin{bmatrix} 1.5 \\ 2.75\end{bmatrix} y$$

2%

4. 由下列诸式

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{x}} &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4\end{bmatrix}\boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ -1\end{bmatrix} u\\ y &= \begin{bmatrix} 3 & -2\end{bmatrix}\boldsymbol{x}\\ u &= r + \begin{bmatrix} 16 & 23\end{bmatrix}\boldsymbol{x}\\ \dot{z} &= -5z + 8.5u + 8y\\ \hat{\boldsymbol{x}} &= \begin{bmatrix} 1 \\ 1.5\end{bmatrix} z - \begin{bmatrix} 1.5 \\ 2.75\end{bmatrix} y\end{aligned}$$

可得复合系统的增广状态空间方程为

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{z}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -260.75 & 176.5 & 50.5 \\ 264.75 & -170.5 & 50.5 \\ -2200.875 & 1467.25 & 429.25\end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ z\end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 8.5\end{bmatrix}$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ z\end{bmatrix}$$

2%

五、（**12%**）陈述线性定常系统、无限时间、二次型性能指标、控制无约束的最优调节器问题，最优解以及最优解存在的条件。

解答：

对线性定常系统

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = A\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t), \quad \boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0$$

1%

以及二次型性能指标

$$J=\int_0^{\infty}[\boldsymbol{x}^T(t)Q\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{u}^T(t)R\boldsymbol{u}(t)]dt$$

1%

若$\{A,B\}$能控，$\{A,D\}$能观，其中$DD^T=Q$且D任意，则存在唯一的最优控制 2%

$$\boldsymbol{u}^*=-R^{-1}B^T\bar{P}\boldsymbol{x}(t)$$

3%

使得最优性能指标

$$J^*=\frac{1}{2}\boldsymbol{x_0}^T\bar{P}\boldsymbol{x_0}$$

2%

其中$\bar{P}$满足黎卡提代数方程

$$\bar{P}A+A^T\bar{P}-\bar{P}BR^{-1}B^T\bar{P}+Q=0$$

3%

六、（**15%**）已知一阶系统

$$\dot{x}(t)=x(t)-u(t),\quad x(0)=5$$

其控制约束为$-1\le u\le 2$，试求使性能指标

$$J=x(1)+\int_0^1[x(t)+u(t)]dt$$

为极小的最优控制$u^*(t)$，以及最优性能指标J^*。

解答：

Hamilton函数

$$H=x+u+\lambda(x-u)=(1+\lambda)x+(1-\lambda)u$$

2%

所以

$$u^*=\begin{cases}-1, & \lambda<1\\ 2, & \lambda>1\end{cases}$$

2%

由正则方程

$$\dot{\lambda}=-\frac{\partial H}{\partial x}=-(1+\lambda)$$

2%

以及边界条件

$$\lambda(t_f)=\frac{\partial\varphi(t_f)}{\partial x(t_f)},\quad t_f=1$$

2%

可得

$$\lambda(t) = 2e^{1-t} - 1$$

2%

可见当$0 \le t \le 1$时，$\lambda(t) \ge 1$，所以

$$u^*(t) = 2$$

3%

从而

$$x^*(t) = 3e^t + 2$$

$$J^* = 6e + 3$$

2%