第二章 物体机械运动的基本规律

一、知识点总结

1. 描述运动的两种方法 1)拉格朗日方法——通过对物体中各个质点运动状态的研究，达到对物体整体运动的了解；2)欧拉方法——通过各个空间局部位置上的研究达到对整个介质运动的了解。

2. 路程、位移、轨迹、速度和加速度之间的关系

矢径：在一确定坐标系中表示物体位置的固定矢量，通常为时间 t 的连续矢量函数 $\vec{r}=\vec{r}(t)$，该矢量函数描述了整个运动过程中动点空间位置的变化规律，称为动点的运动方程。

轨迹：动点在空间走过的路程，动点轨迹方程通常为运动曲线的方程。

位移：$\Delta\vec{r}=\vec{r}(t+\Delta t)-\vec{r}(t)$　　$|\Delta\vec{r}|\approx\Delta s$

运动点在瞬时 t 的瞬时速度 $\vec{v}=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}=\frac{d\vec{r}}{dt}$

动点在瞬时 t 的瞬时加速度 $\vec{a}=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}=\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$

3. 牛顿运动定律：物体动量的变化与作用力成正比，并发生在力的作用线上，即

$$\frac{d}{dt}(m\vec{v})=\vec{F}\Leftrightarrow m\vec{a}=\vec{F}$$

独立作用原理：在多个力作用下，牛顿运动定律形式为 $m\vec{a}=m\sum\limits_{i=1}^{n}\vec{a}_i=\sum\limits_{i=1}^{n}\vec{F}_i$

4. 力、冲量和功

在有限的时间间隔 (t_2-t_1) 内，变力 $\vec{F}$ 对时间的积累效果为

$$\vec{I}=\int_{t_1}^{t_2}\vec{F}\cdot dt$$

$\vec{I}$ 为力 $\vec{F}$ 在 (t_2-t_1) 内的冲量。

在物体由点 M_1 到点 M_2 的运动过程中，力 $\vec{F}$ 作用的积累效果为

$$W=\int_{\widehat{M_1M_2}}\vec{F}\cdot d\vec{r}$$

W 为力 $\vec{F}$ 在轨迹 $\widehat{M_1M_2}$ 上对物体 M 所做的功。

5. 质量 动量、动量矩和动能

物体的动量：$\vec{p}=m\vec{v}$，表征物体传递机械运动能力的物理量

微分形式的动量定理：$d(m\vec{v})=\vec{F}\cdot dt$

积分形式的动量定理：$\int_{\vec{v}_0}^{\vec{v}} d(m\vec{v})=\int_{t_0}^{t}\vec{F}\cdot dt$

物体的动量矩：$\vec{m}_o(m\vec{v})=\vec{r}\times m\vec{v}$ 表征转动物体传递机械运动能力的物理量.

动量矩定理：$\frac{d}{dt}(\vec{r}\times m\vec{v})=\vec{r}\times\vec{F}$

微分形式的动能定理：$d(\frac{1}{2}mv^2)=\vec{F}\cdot d\vec{r}$

积分形式的动能定理：$\frac{1}{2}mv^2-\frac{1}{2}mv_0^2=\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}}\vec{F}\cdot d\vec{r}$.

6. 守恒定律

动量守恒定律：若作用在物体上的力$\vec{F}$为零时，有$\frac{d}{dt}(m\vec{v})=0$，即$m\vec{v}=\vec{c}$.

注意其投影形式

动量矩守恒定律：若作用在物体所有的力对空间某固定点的力矩$\vec{r}\times\vec{F}=0$，则

$$\frac{d}{dt}(\vec{r}\times m\vec{v})=0 \Rightarrow \vec{r}\times m\vec{v}=\vec{c}$$

机械能守恒定律：$T+V=c$（物体的势能为V，动能为T）

物体在保守力的作用下，机械能守恒.

第三章 刚体运动学基础

一、知识点总结

1. 约束和约束方程.

① 几何约束和运动约束
② 稳定约束和非稳定约束
③ 单面约束和双面约束
④ 完整约束和非完整约束

2. 自由度和广义坐标

3. 刚体的平动与定轴转动

(1) 平动：平动刚体上各点的速度和加速度都相同，即 $\vec{v}_A=\vec{v}_B$，$\vec{a}_A=\vec{a}_B$（A.B 为刚体上任意两点）

(2) 定轴转动.

$\vec{v}=\vec{\omega}\times\vec{R}$　　$\vec{a}=\frac{d\vec{v}}{dt}=\vec{\varepsilon}\times\vec{R}+\vec{\omega}\times\vec{v}$

4. 动点的绝对运动，相对运动和牵连运动

注：在所考虑的瞬时，与动点相重合的动参考系上那一点的速度和加速度称为牵连速度和牵连加速度.

速度合成定理：$\vec{v}_a=\vec{v}_e+\vec{v}_r$

加速度合成定理：$\vec{a}_a=\vec{a}_e+\vec{a}_r+\vec{a}_k=\vec{a}_e+\vec{a}_r+2\vec{\omega}\times\vec{v}_r$

当动参考系有转动时，将出现科氏加速度.

第四章 刚体的平面运动

一、知识点总结

1. 基点法：平面图形上任一点 M 的速度等于基点 A 给出的牵连速度和绕基点 A 的相对速度 $\vec{v}=\vec{\omega}\times\vec{AM}$ 的矢量和.

2. 速度投影定理：刚体在运动中任意两点的速度矢量在这两点连线方向的投影相等，即
$$\vec{v}_B\cdot\vec{AB}=\vec{v}_A\cdot\vec{AB}$$

3. 加速度分布的基点法：若选平面图形上 A 为基点，则 B 点的绝对加速度 $\vec{a}_B$ 应该为
$$\vec{a}_B=\vec{a}_A+\vec{\varepsilon}\times\vec{AB}+\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{AB})$$
$$=\vec{a}_A+\vec{a}_{B/A}$$
为 A 点加速度及 B 相对于 A 加速度的合成.

4. 速度瞬心：在平面图形的运动中，任何瞬时只要转动角速度 $\omega\neq0$，平面图形上总存在一点 C，使 $\vec{v}_C=0$。平面图形的速度分布相当于以角速度 ω 绕点 C 转动的速度分布，称 C 点为速度瞬心，注意速度瞬心的求法，不同的瞬时，速度瞬心也是不同的.

5. 加速度瞬心：在平面图形的运动中，任何瞬时只要转动角速度 ω 和角加速度 ε 不全为零，在平面图形上总存在一点 C^*，其加速度 $a_{C^*}=0$，平面图形的加速度分布相当于图形以角速度 ω 和角加速度 ε 绕点 C^* 转动时的加速度分布，称 C 点为加速度瞬心。注意加速度瞬心的求法，不同的瞬时，加速度瞬心也是不同的。

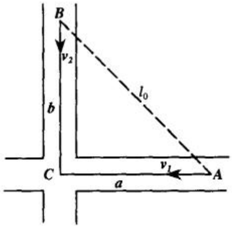
6. 刚体绕平行轴转动的合成

① 绕平行轴同向转动时，平面图形的角速度等于牵连角速度与相对角速度之和，其转动方向与牵连角速度相同.

② 绕平行轴反向转动时，平面图形角速度等于牵连角速度与相对角速度之差，其转向与较大的角速度相同.

第二章讨论题

2.12 两条直线公路正交于点 C. 两辆车子从 A,B 两点各以匀速 v_1,v_2 驶向 C 点. 求:(1) 两车距离 l 为最小的瞬时 t_1;(2) 两车距离又等于 l_0 的瞬时 t_2. 设 $AC=a$,$BC=b$.



题 2.12 图

解: 两车距离 $l=\sqrt{(a-v_1t)^2+(b-v_2t)^2}$

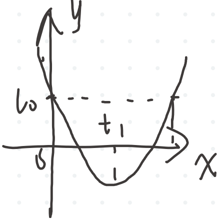
$$\frac{dl}{dt}=0 \Rightarrow t_1=\frac{av_1+bv_2}{v_1^2+v_2^2}$$

即当 $t_1=$ .. 时 l 最小

(2) 对于 $l^2=(a-v_1t)^2+(b-v_2t)^2=(v_1^2+v_2^2)t^2-2(av_1+bv_2)t+(a^2+b^2)$

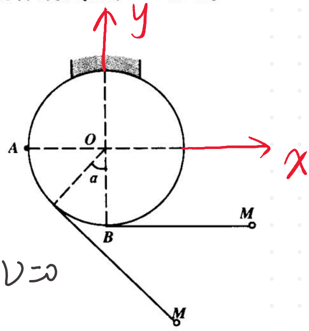
是二次函数

对称轴 $t_2=\frac{av_1+bv_2}{v_1^2+v_2^2}=t_1$



∴ 当 $t=2t_1$ 时两车距离又等于 l_0

2.36 固定圆柱半径为 20cm，轴线水平，如图所示. 在圆柱的水平直径的 A 端固结一长为 68.3cm 的无重绳，绳绕过四分之一圆弧 $\overset{\frown}{AB}$，其余部分平直地位于水平方向，末端固连一质点 M. 把 M 无初速度释放，求当 $\alpha=60°$ 时点 M 的速度.



题 2.36 图

$$\overline{AB} = R\frac{\pi}{2} = 10\pi \ (cm)$$

$$\overline{BM} = l - \overline{AB} = 36.9 \ (cm)$$

$t=0$ 时 M 坐标 $(\underbrace{36.9}_{x_0}, \underbrace{-20}_{y_0})$，$v=0$

当转动 α 角时 M 坐标为

$$\begin{cases} x = -R\sin\alpha + (R\alpha + 36.9)\cos\alpha \\ y = -R\cos\alpha - (R\alpha + 36.9)\cdot\sin\alpha \end{cases}$$

$$\alpha = 60° \Rightarrow \begin{cases} x = 11.58 \ cm \\ y = -60.06 \ cm \end{cases}$$

过程中只有重力做功

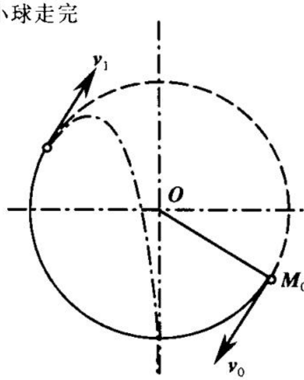
$$mg(y_0 - y) = \frac{1}{2}mv_0^2 - 0$$

$$\Rightarrow v = 2.83 \ m/s$$

2.38 质量为 1kg 的小球系于长 0.5m 且一端固定的细绳上. 小球开始时处于 M_0 位置，它与铅垂线成 60°角. 令小球在铅垂平面内有一初速度 $v_0=3.5\text{m/s}$，其方向垂直于绳且指向向下. 求：

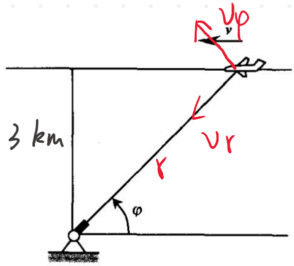
(1) 绳中张力等于零时小球的位置 M 及重物在此位置时速度 v_1；

(2) 此后小球的运动轨迹(直到线重新受到张力为止)，再求出小球走完这段轨迹所需的时间.



题 2.38 图

3.12 一架飞机沿水平直线轨道匀速飞行，速度为每小时 1200 公里；地面上一摄影机要跟踪该飞机拍摄飞行情况. 已知摄影机距飞机飞行轨道的最近距离为 3 公里，求摄影机镜头转动的角速度和角加速度.



题 3.12 图

建立极坐标系 (r, φ)

则 $\omega = \dot{\varphi}$ $\quad \begin{cases} v_\varphi = \dot{\varphi} r = v\sin\varphi & \cdots\cdots ① \\ v_r = \dot{r} = v\cos\varphi & \cdots\cdots ② \end{cases}$

$v = 1200\ \text{km/h} = \frac{1}{3}\ \text{km/s}$

代入 ①

$$v_\varphi = \dot{\varphi} r = \omega \cdot \frac{3}{\sin\varphi} = v\sin\varphi$$

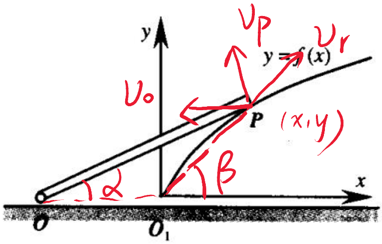
$$\Rightarrow \omega = \frac{1}{9}\sin^2\varphi$$

$$\varepsilon = \dot{\omega} = \frac{2}{9}\sin\varphi\cos\varphi \quad \dot{\varphi}(t)$$

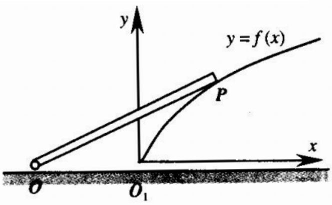
$$= \frac{1}{9}\sin 2\varphi \cdot \omega = \frac{1}{9}\sin 2\varphi \cdot \frac{1}{9}\sin^2\varphi$$

$$= \frac{1}{81}\sin 2\varphi \cdot \sin^2\varphi$$

3.27　凸轮以等速 v_0 自右向左移动，对于固结在凸轮上的坐标系 O_1xy，凸轮的形廓方程为 $y=f(x)$. 长 l 的直杆 OP 的一端铰接于 O_1x 轴上的某定点 O，另一端靠在凸轮上. 求 OP 杆的角速度 ω. 若已知 OP 杆的角速度为常数 ω_0，求凸轮的形廓方程.



题 3.27 图



题 3.27 图

v_p是绝对速度，v_r沿f(x)切线方向，v_0水平向左

$\vec{v_p} = \vec{v_0} + \vec{v_r}$ ……①

$v_p = \omega l$

对①式在水平、竖直方向投影

$$\begin{cases} v_p \sin\alpha = -v_r \cos\beta + v_0 \\ v_p \cos\alpha = v_r \sin\beta \end{cases}$$

α: ∵ $\sin\alpha = \dfrac{f(x)}{l}$　　$\tan\beta = f'(x)$

$\Rightarrow \sin\beta = \dfrac{f'}{\sqrt{f'^2+1}}$　　$\cos\beta = \dfrac{1}{\sqrt{f'^2+1}}$

代入可解得

$$v_p = \frac{v_0}{\cos\alpha \cot\beta + \sin\alpha} = \frac{v_0}{\cos\alpha / f' + \sin\alpha}$$

$$\Rightarrow \omega = \frac{v_p}{l} = \frac{v_0}{l(\cos\alpha/f' + \sin\alpha)}$$

~~当~~当 $\omega = \omega_0$ 为常数时，

即 $\frac{\cos\alpha}{f'} + \sin\alpha$ 是常数

即 $\frac{v_0}{\omega_0 l} = \sin\alpha + \frac{\cos\alpha}{f'}$ 恒成立

$$\Rightarrow \left(\frac{v_0}{\omega_0 l} - \sin\alpha\right)\frac{df}{dx} = \cos\alpha$$

$$\Rightarrow \left(\frac{v_0}{\omega_0 l} - \frac{y}{l}\right)\frac{df}{dx} = \frac{\sqrt{l^2-y^2}}{l}$$

$$\therefore \left(\frac{v_0}{\omega_0\sqrt{l^2-y^2}} - \frac{y}{\sqrt{l^2-y^2}}\right)dy = dx$$

积分可得

$$\frac{v_0}{\omega_0}\cdot \arcsin\frac{y}{c} - \sqrt{l^2-y^2} = x + c$$

$$f(0) = 0 \Rightarrow c = -l$$

$\therefore$ 轮廓方程为 $\frac{v_0}{\omega_0}\arcsin\frac{y}{l} + \sqrt{l^2-y^2} - x + l = 0$

3.29 一线段以等角速度 ω 在一固定平面内绕其端点 O 转动，当它位于 Ox 位置时，有一质点 P 开始从点 O 沿该线段运动. 若要使点 P 之绝对速度 v 的大小为常数，该点应按何规律沿该线段运动？又求点 P 之轨迹及其加速度.

$v_e = \omega r \qquad v_r = \dot{r}$

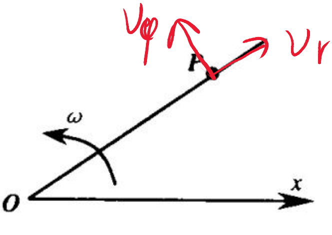


图 3.29

$\vec{v}_p = \omega r \cdot \vec{e}_\varphi + \dot{r}\vec{e}_r$

又∵ $|\vec{v}_p| = C$

$\Rightarrow \omega^2 r^2 + \dot{r}^2 = c^2$

$t=0$ 时 $r=0$ 则 $\dot{r} = c = v_0$

$\therefore \frac{dr}{\sqrt{c^2-\omega^2 r^2}} = dt \overset{\text{积分}}{\Rightarrow} \frac{1}{\omega}\arcsin\frac{\omega r}{c} = t + C_2$

由 $t=0$ 时 $r=0$ 可得 $C_2=0$

$\therefore \frac{1}{\omega}\,\mathrm{arc}\,\frac{\omega r}{c} = t \Rightarrow r = \frac{c}{\omega}\sin\omega t$

其中 $c = v_0 \Rightarrow r = \frac{v_0}{\omega}\sin\omega t$

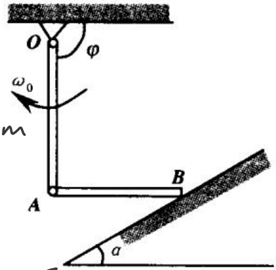
由 $\tan\varphi = \frac{\omega r}{\dot{r}} = \frac{\omega\frac{c}{\omega}\sin\omega t}{\omega\cdot\frac{c}{\omega}\cos\omega t} = \tan\omega t$

$\Rightarrow \varphi = \omega t$

$\therefore r = \frac{v_0}{\omega}\sin\varphi$ 是 P 的轨迹方程

代入极坐标 a 的公式即可

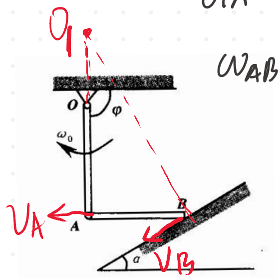
4.17 OA 杆可绕固定点 O 转动，OA 与 AB 铰接，AB 的端点 B 沿与水平面成 30°夹角的斜面运动. OA 长 0.6m，AB 长 0.4m. OA 角速度为 $\omega_0 = \pi\text{rad/s}$（常数）. 当 AB 杆位于水平位置时，$OA \perp AB$. 求点 B 的速度和加速度.



题 4.17 图

先找速度瞬心 O_1

$\overline{O_1A} = 0.4\sqrt{3}$ m，$\overline{O_1B} = 0.8$ m

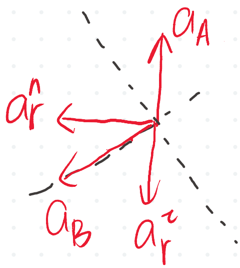


题 4.17 图

$$\omega_{AB} = \frac{v_A}{\overline{O_1A}} = \frac{\omega_0 \cdot \overline{OA}}{\overline{O_1A}} = \frac{\pi \times 0.6}{0.4\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}\pi \text{ rad/s}$$

$$v_B = \omega_{AB} \cdot \overline{O_1B} = \frac{\sqrt{3}}{2}\pi \times 0.8 \text{ m/s} = 0.4\sqrt{3}\pi \text{ m/s}$$

以 A 为基点分析 B 加速度.



$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_r^\tau + \vec{a}_r^n$$

$$\vec{a}_r^n = \frac{(v_B \sin\alpha)^2}{\overline{AB}} = 0.3\pi^2 \text{ m/s}^2$$

$$\vec{a}_A = \omega_0^2 \, \overline{OA} = 0.6\pi^2 \text{ m/s}$$

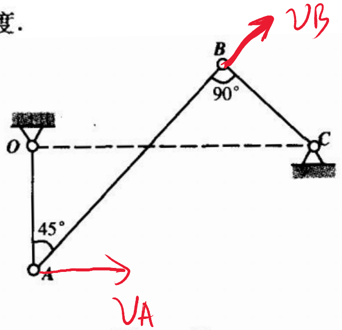
将 $\vec{a}_r^n$，$\vec{a}_r^\tau$，$\vec{a}_A$ 沿垂直斜面方向投影

$$a_r^n \sin\alpha + a_A \cos\alpha - a_r^\tau \cos\alpha = 0$$

$$\Rightarrow a_r^\tau = 0.3\pi^2\left(2 + \frac{\sqrt{3}}{3}\right) \text{ m/s}^2$$

$a_B =$

4.32　反平行四边形机构中，主动杆 OA 以等角速度 ω_0 绕固定轴 O 转动。杆 CB 可绕固定轴 C 转动。设 $OA=CB$。在某瞬时 $\angle AOC=90^\circ$，$\angle BAO=\angle BCO=45^\circ$，求该瞬时 BC 杆的角速度和角加速度。



题 4.32 图

$\vec{v}_A$，$\vec{v}_B$ 方向如图

由投影定理

$$v_A\cos45^\circ = v_B$$

而 $v_A = \omega\cdot\overline{OA} = \omega_0\,OA$

$$\therefore v_B = \omega_0\cdot\overline{OA}\cdot\cos45^\circ$$

$$\omega_{BC} = \frac{v_B}{\overline{BC}} = \omega_0\cdot\cos45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}\omega_0$$

$$\vec{v}_A = \vec{v}_B + \omega_{AB}\times\vec{AB} \Rightarrow \omega_{AB} = \frac{v_A\sin45^\circ}{AB} = \frac{2-\sqrt{2}}{2}\omega_0$$

分别以A、C为基点分析B的加速度

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{\varepsilon}_{AB}\times\vec{AB} - \omega_{AB}^2\cdot\vec{AB}$$

$$\vec{a}_B = \vec{\varepsilon}_{BC}\times\vec{BC} - \omega_{BC}^2\cdot\vec{BC}$$

$$\therefore \vec{a}_A + \vec{\varepsilon}_{AB}\times\vec{AB} - \omega_{AB}^2\cdot\vec{AB} = \vec{\varepsilon}_{BC}\times\vec{BC} - \omega_{BC}^2\,\vec{BC}$$

往AB方向上投影

$$\omega_0^2\cdot OA\cdot\cos45^\circ - \omega_{AB}^2\,AB = \varepsilon_{BC}\cdot BC$$

$$\Rightarrow \varepsilon_{BC} =$$