R·T·P - 运筹学基础

曲凛ruin @quycruin

注：本材料制作意在自用复习，不关注内容的全面性，建议辅以PPT使用

注2：本课程内容更主要部分在题目，知识梳理只作为框架辅助

第一章 绪论

1.1 运筹学模型

- 决策变量，约束条件，目标函数

1.2 解决问题的步骤

- 问题定义和数据收集，建模构造，模型求解，模型验证，应用准备和具体实施

1.3 关于课程

- 线性规划
- 非线性规划
- 动态规划
- 决策分析和对策论

第二章 线性规划

2.1 图解法

- 可行解，可行解空间，最优解，最优目标函数值，线性
- 步骤
  - 确定可行解空间
  - 在可行解空间中确定最优解
- 穷举角点

2.2 线性规划模型

- 约束条件满足：
  - 所有约束都是等式，且右端非负
  - 所有变量非负
- 模型
- $$\begin{gathered} max或min \quad z = c^T x \\ s.t. \quad Ax = b, \quad b \geq 0 \\ x \geq 0 \end{gathered}$$
- 松弛变量和剩余变量
- 决策变量改写：满足非负性条件

- $$x_i^{'} = -x_i$$ $$x_i^{+} - x_i^{-} = x_i$$

2.3 单纯形法

- 算法思想的几何解释：从可行解空间的一个角点移动到另一个更好的角点，直到发现最优角点
- 基解（角点的代数定义）
  - $rank(A) = m, m < n$ 的条件下，令x中n-m个变量为0，其余的有m个变量的m个方程有唯一解
  - 非基变量，基变量
  - 相邻基解，进基变量，离基变量
- 进基准则：单纯形表z行中具有最负系数的非基变量
- 离基准测：具有严格正分母的且有最小非负比的基变量
- 最优性条件：z行中所有非基变量的系数非负
- 极小值，加负号变成最大值问题，进基准则变成最正的，离基不变，最优性是所有z行系数非正
- 无界解：无法选择离基变量

2.4 人工初始解

- 大M法：约束中引入人工变量，目标函数中引入惩罚项
  - 初始单纯形表需要修正
  - 大M的取值相对初始目标函数中的系数必须充分大，才能起到惩罚的作用,但也不能太大,以免引起严重的舍入误差.
  - 若原问题有可行解,惩罚的结果体现在最优解中人工变量取零值,若无可行解,惩罚项不能迫使最优单纯形表中人工变量取零值(无可行解的判别准则)
- 两阶段法
  - 阶段一：得到初始基可行解
    - 实质是处理原问题的约束方程，若存在基可行解可以找到
  - 阶段二：求解原问题
    - 将上一步的最优基可行解作为原问题的初始基可行解，用单纯形法求解原问题

2.5 单纯性法中解的特殊情况

- 退化解
  - 最小非负比出现多处，则有至少一个基变量取零值
- 无穷多最优解
  - 目标函数平行于非冗余的起作用约束
  - Z行中存在非基变量系数为0的情况
- 无界解
  - 可以无限制增加变量值而不破坏任何约束
- 无可行解
  - 无可行解检验：两个方法的最优单纯形表中，存在人工变量取正值，则无可行解。

2.6 单纯形法的原理

- 矩阵表示　暂时不管
- 逆矩阵
- 证明

第三章 高级线性规划

3.1 对偶

- 对偶问题的构造
  - 原始问题:
  - $$\begin{aligned} max \quad & z = c^T x \\ s.t. \quad & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$
  - 对偶问题:
  - $$\begin{aligned} min \quad & w = y^T b \\ s.t. \quad & y^T A \geq c^T \end{aligned}$$
  - 对偶问题的对偶问题是自己
- 对偶定理
  - 弱对偶定理
    - 对于任意的可行解对（x，y），有$w \geq z$
    - 若在(x^*, y^*)处有$z^* = w^*$,此时的x和y分别是两个问题的最优解
  - 对偶定理
    - 若原始问题有无界解，则对偶定理无可行解 （反之不正确）
    - 若原始问题有最优解x^*，则对偶问题的最优解为$y^* = B^{-T} c_B$，最优目标函数值相等
  - 若x^*和y^*分别是原始问题和对偶问题的最优解，它们是最优解的充要条件：对所有的j有：
    - $x_j^* > 0 \quad$ 则$y^{*T} a_j = c_j$
    - $y^{*T} a_j > c_j \quad$ 则$x_j^* = 0$
    - 总结：$x_j^*(y^{*T} a_j - c_j) = 0$

3.2 其它单纯形法

- 原始单纯形法
- 对偶单纯形法
  - 思想：从一组满足最优性条件但不满足可行性条件的基解开始，进行一次迭代后，新的基解在保持最优性的同时朝可行性方向移动，最终满足可行性条件。
  - 标准型
    - 所有约束类型是小于等于
    - 目标函数的系数满足单纯形法的最优性条件

$$\begin{aligned} \max \quad & z = \mathbf{c}^\mathsf{T} \mathbf{x} \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}, \ \mathbf{c} \leq \mathbf{0} \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0}. \end{aligned} \qquad \text{或者} \qquad \begin{aligned} \min \quad & z = \mathbf{c}^\mathsf{T} \mathbf{x} \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}, \ \mathbf{c} \geq \mathbf{0} \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0}. \end{aligned}$$

  - 离基准则：取最负值的基变量

- 进基准则：

  设 x_i 是离基变量，c_j 是非基变量 x_j 的目标行系数，a_{ij} 是 x_i 行中 x_j 的系数．如果存在 $a_{ij} < 0$，则进基变量选取为具有最小比 $\min\left\{\left|\frac{c_j}{a_{ij}}\right| \mid x_j \text{ 非基}, a_{ij} < 0\right\}$ 的非基变量．多个时任选一．

- 可行性检验：所有的基变量都是非负的，此时可行性条件恢复，算法结束
- 无可行解检验：对所有非基变量x_j有$a_{ij} \geq 0$成立，此时无可行解

* 广义单纯形法
  - 用对偶单纯形法恢复解的可行性
  - 用原始单纯形法恢复解的最优性

3.3 后最优分析

*

感觉出不来啥难题先放一放

第四章 非线性规划理论

4.1 无约束问题

* 泰勒定理 梯度向量 海森矩阵 方向导数 正定矩阵

4.2 约束问题

* 极大值问题的KKT必要条件：

  假设在 $\mathbf{x}_0$ 处，向量组 $\{\nabla g_i(\mathbf{x}_0) : i \in I\}$ 线性无关，$I = \{i \mid g_i(\mathbf{x}_0) = 0, i = 1, \ldots, m\}$．则 $\mathbf{x}_0$ 是不等式约束问题极大值点的必要条件是：存在实数 $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ 使得

* (1) $g_i(\mathbf{x}_0) \leq 0,\ i = 1, 2, \ldots, m;$

  (2) $\nabla f(\mathbf{x}_0) - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \nabla g_i(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0};$

  (3) $\lambda_i g_i(\mathbf{x}_0) = 0,\ i = 1, 2, \ldots, m;$

  (4) $\lambda_i \geq 0,\ i = 1, 2, \ldots, m.$

4.3 凸规划问题

* 凸集上求凸函数的极小值或凹函数的极大值
  - 有局部极值点是全局极值点，KKT必要条件同时又是充分条件

第五章 非线性规划算法

5.1 无约束规划算法

5.2 有约束规划算法

第六章 动态规划

6.1 动态规划的基本概念

- 将问题分为有个阶段，每个阶段对应一个子问题
- 决策变量：
  - 每个阶段需要作出一个决策，x_i 表示第i阶段的决策变量，决策变量的取值范围称作允许决策集合
- 状态变量：
  - s_i 表示第i阶段的状态变量，状态变量的取值范围称为状态的可达状态集合
  - 无后效性，状态选定之后，当前及之后阶段的发展不受之前状态的影响
  - 最优性原理：状态确定后，之后的最优策略和之前无关，即当前阶段的最优策略取决于当前阶段的状态，与怎样到达无关，每阶段的决策是该阶段的函数，$x_i(s_i)$
- 状态转移方程
  - $$s_{i+1} = T_i(s_i，\ x_i)$$
- 后向递归方程（逆序法）
- 阶段指标函数，记为$v_i(s_i, x_i)$

6.2 确定型动态规划

- 背包模型
- 劳动力规划模型
- 设备更新模型
- 投资模型

6.3 维度问题

- 维度灾难：状态是多维时，动态规划的计算量离谱

6.4 随机型动态规划

- 投机者的游戏   优化期望
- 投资问题 优化期望
- 极大化事件发生的概率 优化概率

第七章 决策分析与对策论

7.1 确定型决策

- 层次分析法原理
  - 单准则就是加权计算复合权重
  - 多准则层是多层加权
- 比较矩阵

- 比较矩阵 $A=(a_{ij})\in\mathbb{R}^{n\times n}$，且满足：(1) $a_{ii}=1$，(2) $a_{ji}=\frac{1}{a_{ij}}$.

    a_{ij} 表示比较对象 i 比比较对象 j 重要 a_{ij} 倍.
  - 标准化，看行平均
- 比较矩阵的一致性
  - 始终满足$a_{ij}a_{jk}=a_{ik}$
  - 若是一致的，则任何两列线性相关，即 rank(A)=1
- 刻画不一致程度
  - 用A的具有最大模的实特征根接近n的程度刻画
    - $$CR=\frac{CI}{CR}$$
      $$CI=\frac{\lambda_{max}-n}{n-1}$$
    - CI是一致性指数，RI是随机一致性指数，一致性比CR若小于等于0.1则可以接受
  - 计算λ_{max}
    - 估算w
    - $$\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}w_j\right)=\lambda_{\max}\sum_{i=1}^{n}w_i=\lambda_{\max}.$$

7.2 风险型决策

- 决策树分析
  - 寻求期望利润的极大化或费用极小化，假定每个决策方案导致的损益值随机
- 贝叶斯分析
  - 计算期望时，用后验概率替换先验概率
- 效用理论
  - 同等数额的真实货币值对不同决策者的效用不同，计算期望时用货币的效用值替换货币的真实值

7.3 不确定型决策

- 自然状态的概率分布未知，不同决策者有不同的决策态度
- 等可能性准则　状态发生的可能性相同
- 悲观主义原则　假设最坏情况发生，极小化极大值
- 最小遗憾原则　假设最大遗憾情况发生了，先求遗憾矩阵，再应用悲观主义准则
- 折中主义原则　假设在最好和最坏之间，乐观指数

7.4 二人零和对策

- 二人零和对策的纯策略解
  - 都使用悲观主义准则来选取最优策略
  - 纯策略意义下的鞍点　若存在，为对策的值
- 二人零和对策的混合策略
  - 纳什均衡局势
  - 二人零和对策一定存在纳什均衡局势
- 二人零和对策混合策略的求解

    - 优超策略
    - 图解法（适用于2 * n或n * 2对策）
    - 线性规划解法