1.7 证明相似矩阵有相同的特征多项式和相同的特征值。提示：应用公式 $\det \boldsymbol{AB}=\det \boldsymbol{A} \det \boldsymbol{B}$。

1.7 《线代》书 P177 命题 6.4.1 ∵ B与A相似 ∴ ∃可逆矩阵 T. s.t. $B=T^{-1}AT$

$$\det(\lambda I-B)=\det(\lambda I-T^{-1}AT)=\det[T^{-1}(\lambda I-A)T]=\det(\lambda I-A).$$

其中用到了 P97 定理 4.3.6 $\det(AB)=\det(A)\det(B)$

$$\det[T^{-1}(\lambda I-A)T]=\det(T^{-1})\det(\lambda I-A)\cdot\det(T)=\det(\lambda I-A)$$

1.8 设 A 是 n 阶实方阵，如果存在 n 维实向量 $\boldsymbol{b}$ 使得 $\boldsymbol{b}, A\boldsymbol{b}, \cdots, A^{n-1}\boldsymbol{b}$ 彼此线性无关，且 $A^n\boldsymbol{b}+\alpha_{n-1}A^{n-1}\boldsymbol{b}+\alpha_{n-2}A^{n-2}\boldsymbol{b}+\cdots+\alpha_1 A\boldsymbol{b}+\alpha_0\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$，则 A 相对于基 $E=(\boldsymbol{b}, A\boldsymbol{b}, \cdots, A^{n-1}\boldsymbol{b})$ 的表达式为 $\bar{A}$

$$\bar{A}=\begin{bmatrix} 0 & & & & -\alpha_0 \\ 1 & \cdot & & & -\alpha_1 \\ & \cdot & \cdot & & \cdot \\ & & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & 1 & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix}$$

1.8 线性变换在不同基下的矩阵

$(\underrightarrow{b}, A\underrightarrow{b}, \cdots A^{n-1}\underrightarrow{b}) = (\underrightarrow{e_1}, \underrightarrow{e_2}, \cdots \underrightarrow{e_n})\cdot T$ 即 $E=I\cdot T=T$

$\therefore$ 从自然基到新基 E 的过渡矩阵即为 E.

$\therefore \quad \bar{A}=E^{-1}AE$. （运用 P170 定理 6.3.1）

即证 $E\bar{A}=AE$.

$$E\bar{A}=(\underrightarrow{b}, A\underrightarrow{b} \cdots A^{n-1}\underrightarrow{b})\begin{pmatrix} 0 & & & -\alpha_0 \\ 1 & & & -\alpha_1 \\ & \ddots & & \vdots \\ & & 1 & -\alpha_{n-1} \end{pmatrix} = (A\underrightarrow{b}, A^2\underrightarrow{b} \cdots A^{n-1}\underrightarrow{b}, \underrightarrow{m})$$

其中 $\underrightarrow{m} = -\alpha_0\underrightarrow{b} - \alpha_1 A\underrightarrow{b} - \cdots - \alpha_{n-1}A^{n-1}\underrightarrow{b} = -A^n\underrightarrow{b}$

$\therefore E\bar{A} = AE = (A\underrightarrow{b}, A^2\underrightarrow{b} \cdots A^{n-1}\underrightarrow{b}, A^n\underrightarrow{b})$

1.11　求下面矩阵的 Jordan 形矩阵

$$A_1=\begin{bmatrix}1&4&10\\0&2&0\\0&0&3\end{bmatrix},\qquad A_4=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\4&-4&-3&4\end{bmatrix},$$

1.11 法一：无需求变换矩阵 Q 及 Q^{-1} 按照几何重数判断若尔当形式

对应于某一特征值的几何重数 m_i = 该特征值的若尔当块数

= 线性无关的特征向量数

$m_i = \dim(X) = n - \mathrm{rank}(\lambda_i I - A)$ 为 $(\lambda_i I - A)\underset{\rightarrow}{x} = \underset{\rightarrow}{0}$ 的解空间的维数

$P_{A_1}(\lambda) = \det(\lambda I - A_1) = (\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)$

A_1 有3个互不相等的特征根，即 $\lambda_1=1$，$\lambda_2=2$，$\lambda_3=3$.

P180 引理 6.5.1 不同特征值的特征向量线性无关

P181 定理 6.5.1 n阶方阵相似于对角矩阵的充要条件为有n个线性无关的特征向量。

$\therefore$ A_1 可对角化 其若尔当标准型为 $\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & 3 \end{pmatrix}$

$P_{A_4}(\lambda) = \det(\lambda I - A_4) = (\lambda-1)(\lambda+1)(\lambda-2)^2$ 即 $\lambda_1=1$，$\lambda_2=-1$ $\lambda_3=\lambda_4=2$

$\lambda=2$ 对应的几何重数 $m = n - \mathrm{rank}(2I-A) = 4-3=1 \Rightarrow$ 一块若尔当块

$\therefore$ A_4 的若尔当标准形为 $\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & 2 & 1 \\ & & & 2 \end{pmatrix}$

法二：求出变换矩阵Q

对于$\lambda=2$的特征值，其代数重数$u=2$,由$(\lambda I-A_4)q=0$计算其对应的特征向量

$q_3=\begin{bmatrix}1\\2\\4\\8\end{bmatrix}$,计算出一个特征向量，即几何重数$\xi=1<u=2$,个数小于代数重数，

即标准型中存在一个$\lambda=2$对应的约当块，约当块的阶数即$\lambda=2$的指数$\eta=2$.

注意rank$(A_4-2I)=3$，才能得出标准型为Λ_4

可以利用P18的1.68式计算$\lambda=2$的广义特征向量q_4,由$(\lambda I-A_4)q_4=q_3\Rightarrow$

$$q_4=c\cdot q_3-\begin{bmatrix}0\\1\\4\\12\end{bmatrix},取q_4=\begin{bmatrix}0\\1\\4\\12\end{bmatrix},\therefore Q=[q_1\quad q_2\quad q_3\quad q_4]=\begin{bmatrix}1&1&1&0\\1&-1&2&1\\1&1&4&4\\1&-1&8&12\end{bmatrix}$$

$$\therefore\Lambda_4=Q^{-1}A_4Q=\begin{bmatrix}1&&&\\&-1&&\\&&2&1\\&&&2\end{bmatrix}$$

注：若由$(\lambda I-A_4)q=0$计算出其对应有两个互不相关的的特征向量，则说明$\lambda=2$的特征值对应有两个约当块，其约当标准型为$\Lambda_4=\begin{bmatrix}1&&&\\&-1&&\\&&2&\\&&&2\end{bmatrix}$

1.12 证明 Vandermonde 矩阵

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_n \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \cdots & \lambda_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{bmatrix}$$

的行列式等于

$$\prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (\lambda_j - \lambda_i)$$

线代102页
例4.3.11

例 4.3.11 计算 Vandermonde 行列式

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & \cdots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & \cdots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

解法一 从行列式的第 n 列开始至第 2 列, 依次把各列减去前一列的 a_n 倍, 得

$$\Delta_n(a_1, a_2, \cdots, a_n) = \begin{vmatrix} 1 & a_1 - a_n & \cdots & a_1^{n-2}(a_1 - a_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_{n-1} - a_n & \cdots & a_{n-1}^{n-2}(a_{n-1} - a_n) \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{n-1} \begin{vmatrix} a_1 - a_n & a_1(a_1 - a_n) & \cdots & a_1^{n-2}(a_1 - a_n) \\ a_2 - a_n & a_2(a_2 - a_n) & \cdots & a_2^{n-2}(a_2 - a_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n-1} - a_n & a_{n-1}(a_{n-1} - a_n) & \cdots & a_{n-1}^{n-2}(a_{n-1} - a_n) \end{vmatrix}$$

$$= \prod_{i=1}^{n-1}(a_n - a_i) \cdot \Delta_{n-1}(a_1, a_2, \cdots, a_{n-1}).$$

易知 $\Delta_1 = 1, \Delta_2(a_1, a_2) = a_2 - a_1$. 利用数学归纳法可得

$$\Delta_n(a_1, a_2, \cdots, a_n) = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (a_j - a_i).$$

法二：

$$\begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & \lambda_2-\lambda_1 & \lambda_3-\lambda_1 & \lambda_4-\lambda_1 & \cdots & \lambda_n-\lambda_1 \\ 0 & \lambda_2^2-\lambda_1\lambda_2 & \lambda_3^2-\lambda_1\lambda_3 & \lambda_4^2-\lambda_1\lambda_4 & \cdots & \lambda_n^2-\lambda_1\lambda_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \end{matrix}$$

从第2行，每行减第一行×λ_1

$$\Downarrow$$

$$\begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & \lambda_2-\lambda_1 & \lambda_3-\lambda_1 & \lambda_4-\lambda_1 & & \lambda_n-\lambda_1 \\ 0 & 0 & (\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_2) & * & & * \\ \vdots & \vdots & & \ddots & & \\ \vdots & \vdots & & & \ddots & \end{matrix}$$

1.13 证明矩阵

$$
A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & & \\ & \cdot & \cdot & & & \\ & & \cdot & \cdot & & \\ & & & \cdot & \cdot & \\ & & & & 0 & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & \cdots & -\alpha_{n-2} & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix}
$$

的特征多项式 $\det(sI-A)$ 有下面表达式

$$
\Delta(s) = \det(sI - A) = s^n + \alpha_{n-1}s^{n-1} + \alpha_{n-2}s^{n-2} + \cdots + \alpha_2 s^2 + \alpha_1 s + \alpha_0
$$

如果 $s=\lambda_1$ 是 A 的特征值，即 $\Delta(\lambda_1)=0$，则

$$
\begin{bmatrix} 1 \\ \lambda_1 \\ \lambda_1^2 \\ \vdots \\ \lambda_1^{n-1} \end{bmatrix}
$$

是伴随特征值 λ_1 的特征向量。

$$\det(sI-A)=\begin{bmatrix} s & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & s & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & & -1 \\ a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & s+a_{n-1} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} s & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & s & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & & -1 \\ 0 & a_1+\frac{a_0}{s} & a_2 & \cdots & s+a_{n-1} \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} s & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & s & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & & -1 \\ 0 & 0 & a_2+\frac{a_1}{s}+\frac{a_0}{s^2} & \cdots & s+a_{n-1} \end{bmatrix}=\cdots=\begin{bmatrix} s & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & s & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & s+a_{n-1}+\frac{a_{n-2}}{s}+\cdots+\frac{a_0}{s^{n-1}} \end{bmatrix}$$

$$=s^{n-1}\left(s+a_{n-1}+\frac{a_{n-2}}{s}+\cdots+\frac{a_0}{s^{n-1}}\right)=s^n+a_{n-1}s^{n-1}+a_{n-2}s^{n-2}+\cdots+a_1s+a_0$$

$s=\lambda_1$是A的特征值，则$\det(\lambda_1 I-A)=0\Rightarrow \lambda_1^n+a_{n-1}\lambda_1^{n-1}+a_{n-2}\lambda_1^{n-2}+\cdots+a_1\lambda_1+a_0=0$

$\Rightarrow \lambda_1^n=-a_0-a_1\lambda_1-\cdots-a_{n-1}\lambda_1^{n-1}$

证特征向量只需证明$A\begin{bmatrix} 1 \\ \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_1^{n-1} \end{bmatrix}=\lambda_1\begin{bmatrix} 1 \\ \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_1^{n-1} \end{bmatrix}$即可。

1.14 证明习题 1.13 中矩阵 **A** 非奇异的充要条件是 $\alpha_0 \neq 0$，并且 **A** 的逆如下

$$
\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} -\alpha_1/\alpha_0 & -\alpha_2/\alpha_0 & \cdots & -\alpha_{n-1}/\alpha_0 & -1/\alpha_0 \\ 1 & 0 & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & 0 \end{bmatrix}
$$

DATE S M T W T F S

1.14 可逆 $\Leftrightarrow$ 行列式 $\neq 0$ $\Leftrightarrow$ $\alpha_0 \neq 0$ （行列式为 $(-1)^n \alpha_0$）

$$
\det(A) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & \cdots & \cdots & -\alpha_{n-1} \end{vmatrix} = (-1)^{n+1}(-\alpha_0) \begin{vmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{vmatrix} = (-1)^n \alpha_0
$$

∴ 当且仅当 $\alpha_0 \neq 0$ 时 $\det(A) \neq 0$ 即矩阵非奇异

再验证 $AA^{-1} = I$ （$\alpha_0 \neq 0$ 时）

! 注意，不能先验证 $A^{-1} \cdot A = I$ 再说明 $\alpha_0 \neq 0$

内容回顾：

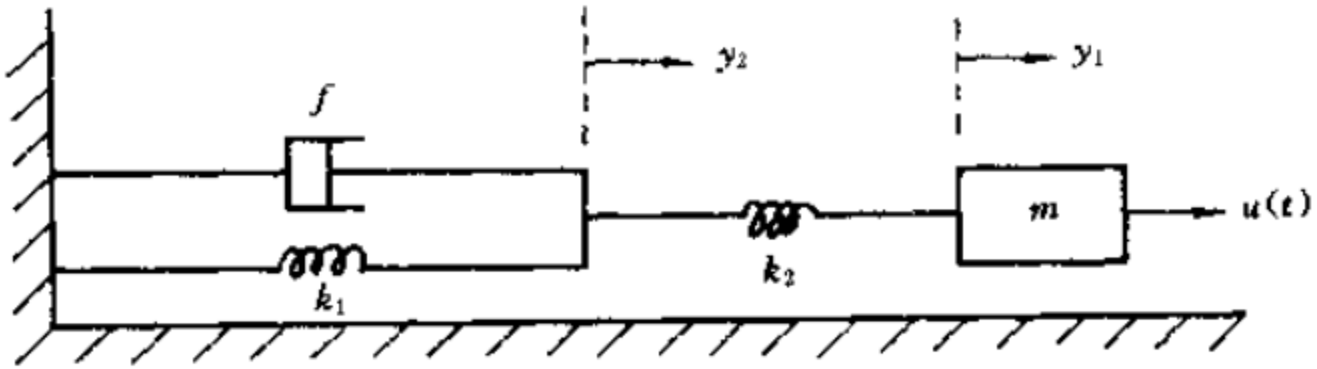
1. 状态的定义：不要最少
2. 状态空间模型：系统矩阵，输入（控制）矩阵，输出矩阵，直传矩阵，注意：只有线性系统可以写成矩阵表达形式；当然对于非线性系统，显然不能写成矩阵表达的形式。
3. 对于状态空间的建模问题：选取状态变量一般要写成一阶微分方程的形式，因此在实际物理系统中，状态变量一般选取积分/储能器件

4. 给微分方程求状态空间模型：直接先求 Laplace 变换，再根据传递函数直接写出能控能观标准型，或者串并联实现等等即可，尤其是带有控制量微分的情形

5. 对于给出框图求解状态空间模型的，直接把每个一阶滤波器件的输出设置为状态变量即可求解，简单方便；

6. 对于竖立的弹簧阻尼系统，在建模时不需要额外考虑重力问题，假设是从平衡位置开始的即可，因为是线性系统。

2.1 试列写出图题 2.1 中机械系统输入-输出描述式和状态空间描述式，其中 f 是缓冲器的粘滞摩擦系数，k_1 和 k_2 分别为弹簧的弹性系数，m 为质量，y_1 和 y_2 表示位移为输出量，$u(t)$ 为外力。



2.1 解：列出力学方程：
$$\begin{cases} m\ddot{y}_1 = u - k_2(y_1 - y_2) \\ k_2(y_1 - y_2) = f\,\dot{y}_2 + k_1 y_2 \end{cases}$$

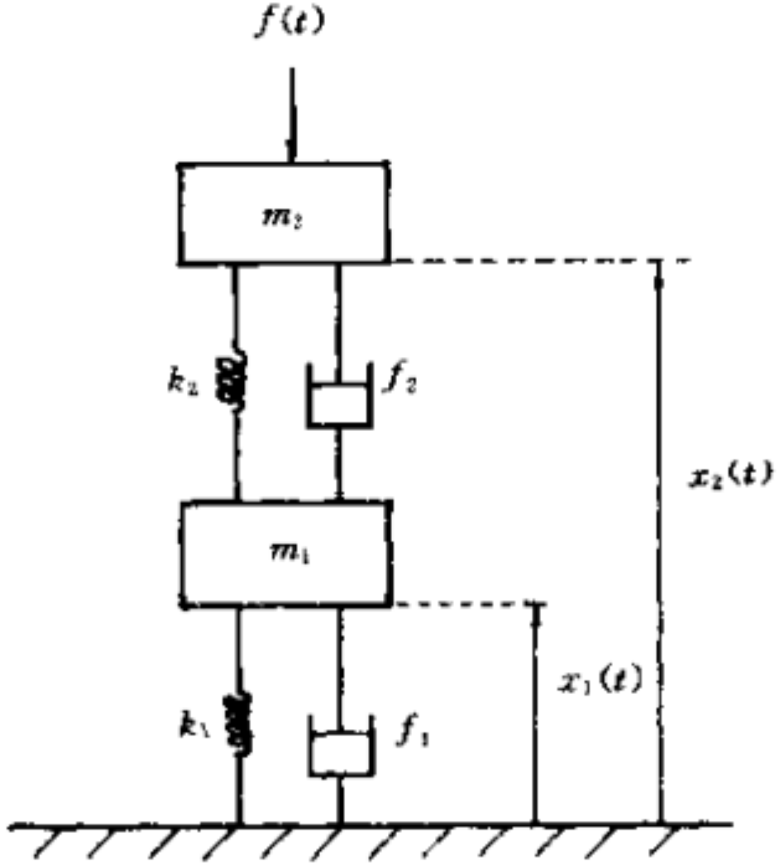
令 $x_1 = y_1$，$x_2 = \dot{y}_1$，$x_3 = y_2$，则状态空间方程为：

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\dfrac{k_2}{m} & 0 & \dfrac{k_2}{m} \\ \dfrac{k_2}{f} & 0 & -\dfrac{k_1+k_2}{f} \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{m} \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\mathbf{x},$$

输入输出描述式：$$y(s) = \begin{bmatrix} y_1(s) \\ y_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{k_1 + k_2 + fs}{ms^2(k_1 + k_2 + fs) + k_2 fs + k_1 k_2} \\ \dfrac{k_2}{ms^2(k_1 + k_2 + fs) + k_2 fs + k_1 k_2} \end{bmatrix} u(s)$$

2.2 试列写出图题 2.2 中机械系统的输入-输出描述式和状态空间描述式。和题 2.1 一样，f_1 和 f_2 分别是两个缓冲器的粘滞摩擦系数，k_1 和 k_2 分别为两个弹簧的弹性系数，m_1 和 m_2 分别为两个物体的质量，$f(t)$ 为外力，以两个物体的位移作为输出量。



2.2 解：列出力学方程：$\begin{cases} m_1\ddot{x}_1 = k_2(x_2 - x_1) + f_2(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) - k_1x_1 - f_1\dot{x}_1 \\ m_2\ddot{x}_2 = -k_2(x_2 - x_1) - f_2(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) - f \end{cases}$

令 $\bar{x}_1 = x_1$，$\bar{x}_2 = \dot{x}_1$，$\bar{x}_3 = x_2$，$\bar{x}_4 = \dot{x}_2$，$u = f$，则状态空间方程为：

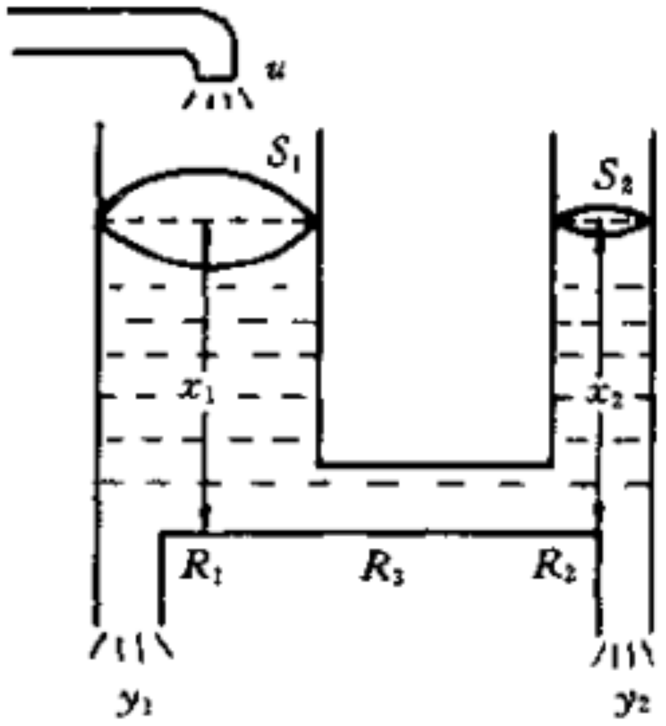
$$\dot{\bar{\mathbf{x}}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{k_1 + k_2}{m_1} & -\frac{f_1 + f_2}{m_1} & \frac{k_2}{m_1} & \frac{f_2}{m_1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{k_2}{m_2} & \frac{f_2}{m_2} & -\frac{k_2}{m_2} & -\frac{f_2}{m_2} \end{bmatrix} \bar{\mathbf{x}} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{m_2} \end{bmatrix} u$$

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \bar{\mathbf{x}}$$

输入输出描述式：

$$y(s) = \begin{bmatrix} y_1(s) \\ y_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{k_2 + f_2 s}{(f_2 s + k_2)^2 - [m_1 s^2 + (f_1 + f_2)s + k_1 + k_2](m_2 s^2 + f_2 s + k_2)} \\ \dfrac{m_1 s^2 + (f_1 + f_2)s + k_1 + k_2}{(f_2 s + k_2)^2 - [m_1 s^2 + (f_1 + f_2)s + k_1 + k_2](m_2 s^2 + f_2 s + k_2)} \end{bmatrix} u(s)$$

2.5 图题 2.5 为两个水槽及连通管示意图。已知水槽 1 的断面积为 s_1，水位为 x_1，水槽 2 的断面积为 s_2，水位为 x_2，R_1、R_2 和 R_3 分别为三条管道的阻力，u 为单位时间的注入量，y_1 和 y_2 为两条管道各自的单位时间流出量，求以 x_1，x_2 为状态变量的状态方程，和单位时间总流出量为输出 y 的输出方程。提示：$y_i = x_i / R_i$，$i=1,2,3$。



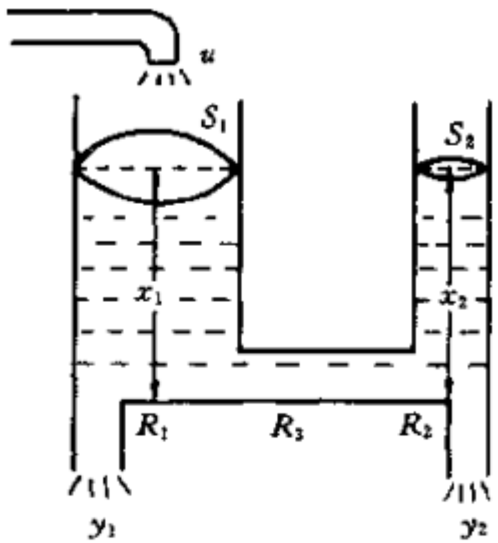
2.5 解：模型方程：

$$\begin{cases} S_1\dot{x}_1 = u - y_1 - y_3 = u - \dfrac{x_1}{R_1} - \dfrac{x_1 - x_2}{R_3} \\ S_2\dot{x}_2 = y_3 - y_2 = \dfrac{x_1 - x_2}{R_3} - \dfrac{x_2}{R_2} \\ y = y_1 + y_2 \end{cases}$$

，则状态空间方程为：

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -\dfrac{1}{S_1}(\dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_3}) & \dfrac{1}{S_1R_3} \\ \dfrac{1}{S_2R_3} & -\dfrac{1}{S_2}(\dfrac{1}{R_2} + \dfrac{1}{R_3}) \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} \dfrac{1}{S_1} \\ 0 \end{bmatrix}u$$

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{R_1} & \dfrac{1}{R_2} \end{bmatrix}\mathbf{x}$$



2.6 根据下列系统的输入-输出描述式导出它们的状态空间描述式

(a) $\ddot{y}(t)+5\dot{y}(t)+6y(t)=u(t)$

(b) $\ddot{y}(t)+2\dot{y}(t)+y(t)=\dot{u}(t)+3u(t)$

(c) $\ddot{y}_1(t)+3\dot{y}_1(t)+y_2(t)=2\dot{u}_1(t)+3u_2(t)+\dot{u}_2(t)$

$\ddot{y}_2(t)+4\dot{y}_2(t)+y_1(t)=\dot{u}_2(t)+3u_1(t)$

(d) $m_1\ddot{y}_1(t)+2ky_1(t)-ky_2(t)=u(t)$

$m_2\ddot{y}_2(t)+2ky_2(t)-ky_1(t)=0$

(e) $\ddot{y}_1(t)+e^{-t^2}\dot{y}(t)+e^{t}y(t)=u(t)$

2.6 解：(a)令 $x_1 = y$，$x_2 = \dot{y}$，则状态空间方程为

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -6 & -5 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

(b) $\ddot{y}(t)+2\dot{y}(t)+y(t)=\dot{u}(t)+3u(t)$

DATE

2.6 输入函数有导数

(b) 两边做 Laplace 变换 $s^2\hat{y}(s)+2s\hat{y}(s)+\hat{y}(s)=s\hat{u}(s)+3\hat{u}(s)$

传函数 $\hat{g}(s)=\dfrac{\hat{y}(s)}{\hat{u}(s)}=\dfrac{s+3}{s^2+2s+1}$

令 $\hat{v}(s)=\dfrac{1}{s^2+2s+1}\hat{u}(s)$ 即 $s^2\hat{v}(s)+2s\hat{v}(s)+\hat{v}(s)=\hat{u}(s)$

且 $\hat{y}(s)=(s+3)\hat{v}(s)=s\hat{v}(s)+3\hat{v}(s)$

定义状态变量 $x(t)=\begin{bmatrix} v(t) \\ \dot{v}(t) \end{bmatrix}$ 得 $\dot{x}_1=x_2$

$\dot{x}_2=-x_1-2x_2+u$

状态空间方程 $\dot{x}=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}x+\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}u$

$y=\begin{bmatrix} 3 & 1 \end{bmatrix}x$

$$\text{(c)}\quad \ddot{y}_1(t)+3\dot{y}_1(t)+y_2(t)=2\dot{u}_1(t)+3u_2(t)+\dot{u}_2(t)$$

$$\ddot{y}_2(t)+4\dot{y}_2(t)+y_1(t)=\dot{u}_2(t)+3u_1(t)$$

- 方法1：利用传递函数求状态空间方程：

做拉式变换：

$$y_1(s)=\frac{2s^3+8s^2-3}{s^4+7s^3+12s^2-1}u_1(s)+\frac{s^3+7s^2+11s}{s^4+7s^3+12s^2-1}u_2(s)$$

$$y_2(s)=\frac{3s^2+7s}{s^4+7s^3+12s^2-1}u_1(s)+\frac{s^3+3s^2-s-3}{s^4+7s^3+12s^2-1}u_2(s)$$

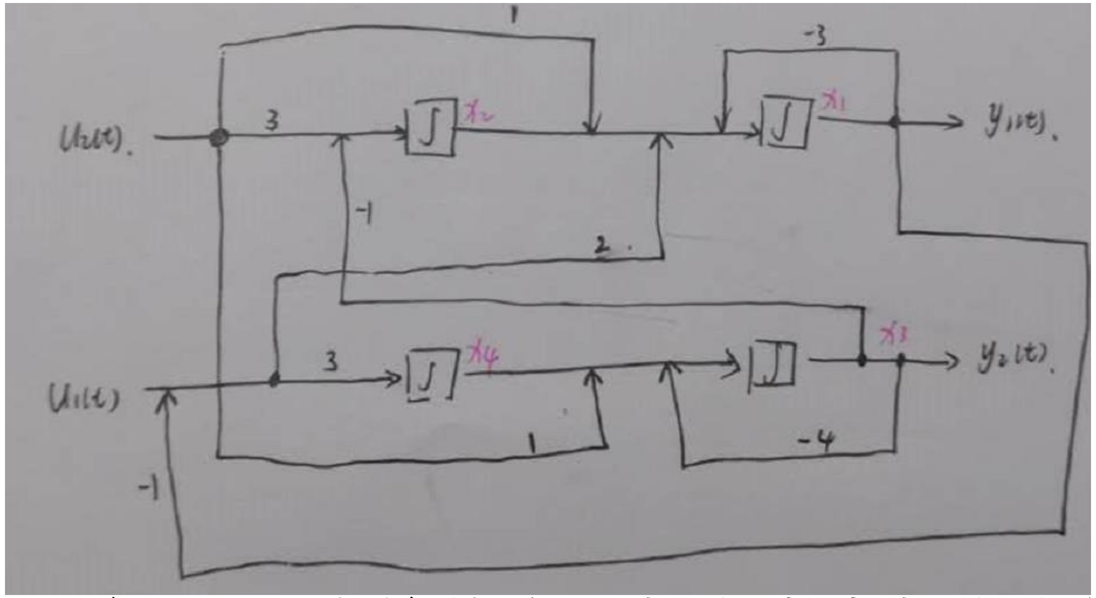
令 $v_1(s)=\dfrac{1}{s^4+7s^3+12s^2-1}u_1(s)$， $v_2(s)=\dfrac{1}{s^4+7s^3+12s^2-1}u_2(s)$，

$\mathrm{x}=[\mathrm{v}_1 \quad \dot{\mathrm{v}}_1 \quad \ddot{\mathrm{v}}_1 \quad \dddot{\mathrm{v}}_1 \quad \mathrm{v}_2 \quad \dot{\mathrm{v}}_2 \quad \ddot{\mathrm{v}}_2 \quad \dddot{\mathrm{v}}_2]^T$，则状态空间方程为：

$$\dot{x}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & & & & \\ 0 & 0 & 1 & 0 & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & & & & \\ 1 & 0 & -12 & -7 & & & & \\ & & & & 0 & 1 & 0 & 0 \\ & & & & 0 & 0 & 1 & 0 \\ & & & & 0 & 0 & 0 & 1 \\ & & & & 1 & 0 & -12 & -7 \end{bmatrix}x+\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}u$$

$$y=\begin{bmatrix} -3 & 0 & 8 & 2 & 0 & 11 & 7 & 1 \\ 0 & 7 & 3 & 0 & -3 & -1 & 3 & 1 \end{bmatrix}x$$

- 方法2：利用动态结构图求状态空间方程：
- 绘制结构图为



依据图中的状态选取，可以构造状态空间方程为：

$$\dot{x}=\begin{pmatrix}3&1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&-4&1\\-1&0&0&0\end{pmatrix}x+\begin{pmatrix}2&1\\0&3\\1&0\\3&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix}$$

$$y=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}x$$

- 方法3：直接找合适状态来求状态空间方程：

选取状态变量为：

$$x=\begin{bmatrix}y_1\\\dot{y}_1-2u_1-u_2\\y_2\\\dot{y}_2-u_2\end{bmatrix}，则：\dot{x}=\begin{bmatrix}\dot{y}_1\\\ddot{y}_1-2\dot{u}_1-\dot{u}_2\\\dot{y}_2\\\ddot{y}_2-\dot{u}_2\end{bmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&-3&-1&0\\0&0&0&1\\-1&0&0&-4\end{pmatrix}x+\begin{pmatrix}2&1\\-6&0\\0&1\\3&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix}\quad y=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}x$$

(d) $m_1\ddot{y}_1(t)+2ky_1(t)-ky_2(t)=u(t)$

$m_2\ddot{y}_2(t)+2ky_2(t)-ky_1(t)=0$

(e) $\ddot{y}_1(t)+e^{-t^2}\dot{y}(t)+e^{t}y(t)=u(t)$

(d) 令 $x_1=y_1$，$x_2=\dot{y}_1$，$x_3=y_2$，$x_4=\dot{y}_2$，则状态空间方程为:

$$\dot{\mathbf{x}}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ -\dfrac{2k}{m_1} & 0 & \dfrac{k}{m_1} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ \dfrac{k}{m_2} & 0 & -\dfrac{2k}{m_2} & 0\end{bmatrix}\mathbf{x}+\begin{bmatrix}0\\ \dfrac{1}{m_1}\\ 0\\ 0\end{bmatrix}u$$

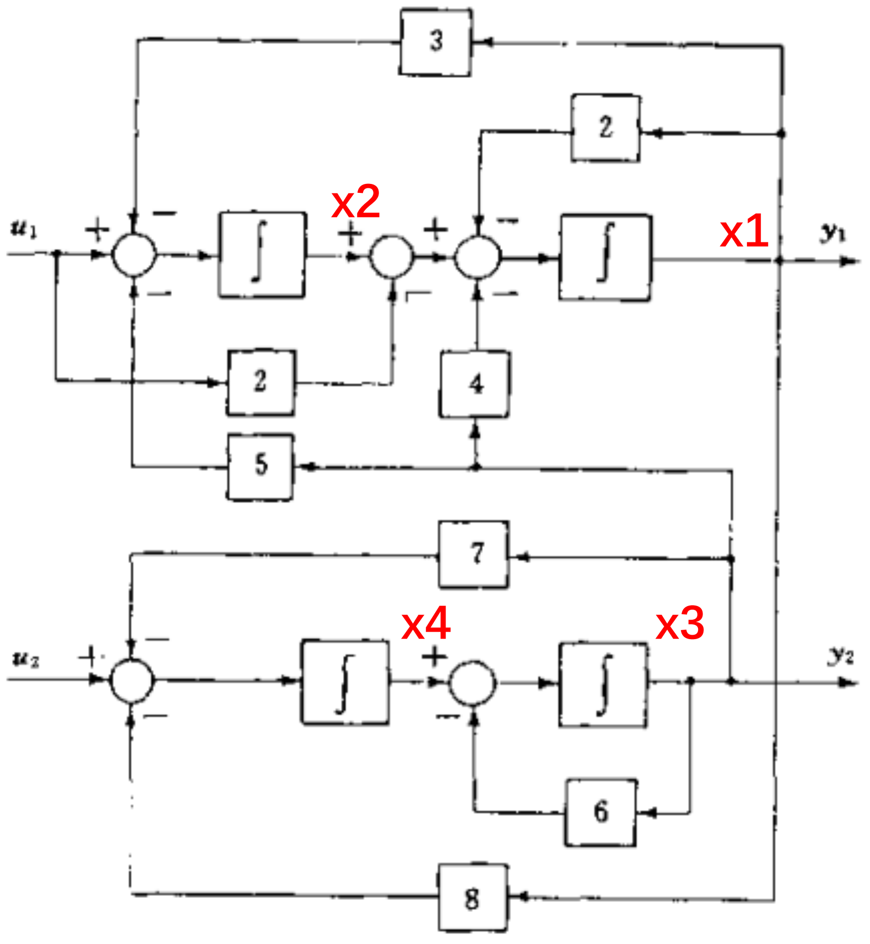
$$\mathbf{y}=\begin{bmatrix}y_1\\ y_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix}\mathbf{x}$$

(e) 令 $x_1=y$，$x_2=\dot{y}$，则状态空间方程为:

$$\dot{\mathbf{x}}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -e^{t} & -e^{-t^2}\end{bmatrix}\mathbf{x}+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}u$$

$$\mathbf{y}=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\mathbf{x}$$

2.7　根据图题 2.7 中系统的模拟框图写出它们的动态方程。

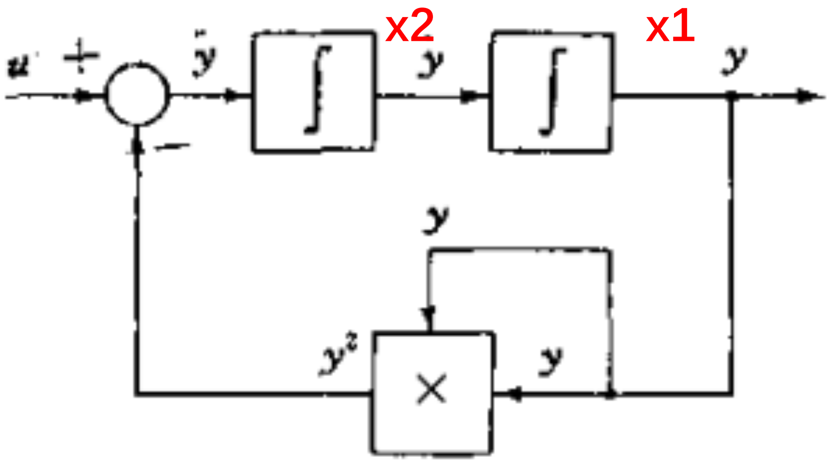


(b)

(b)选积分号后面的状态为 x_1，x_2，x_3，x_4 (顺序不同影响结果，

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & -4 & 0 \\ -3 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 1 \\ -8 & 0 & -7 & 0 \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}u$$

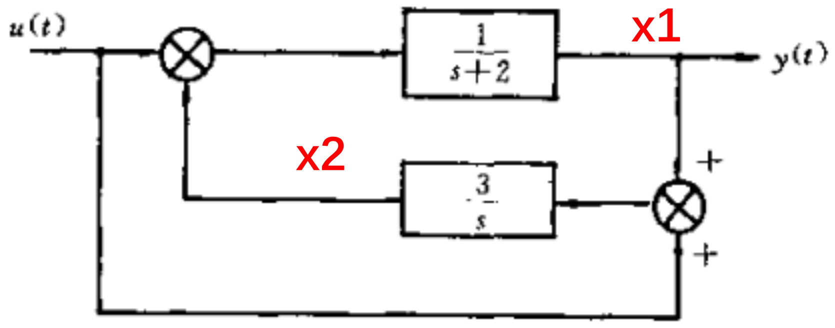
$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\mathbf{x}$$



(c)

(c)非线性方程:

$$\begin{cases}\dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = u - x_1^2\end{cases} \qquad \mathbf{y} = \begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\mathbf{x}$$



(d)

(d)方法一：先求传递函数 $G(s)=\dfrac{s+3}{s^2+2s-3}$，由上面的方法写出状态空间方程：

$$\dot{\mathbf{x}}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 3 & -2\end{bmatrix}\mathbf{x}+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}u$$

$$\mathbf{y}=\begin{bmatrix}3 & 1\end{bmatrix}\mathbf{x}$$

按减号时，也可以 $G(s)=\dfrac{s-3}{s^2+2s+3}$

$$\dot{\mathbf{x}}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -3 & -2\end{bmatrix}\mathbf{x}+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}u$$

$$\mathbf{y}=\begin{bmatrix}-3 & 1\end{bmatrix}\mathbf{x}$$

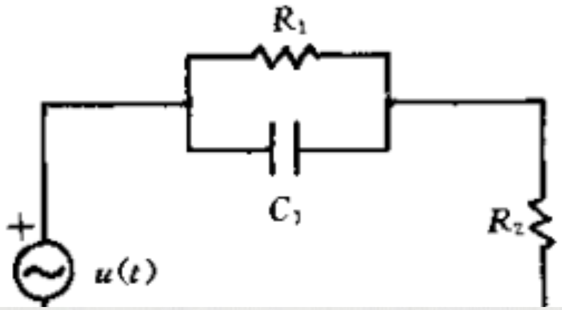
方法二：选取 1/(s+2)和 3/s 后面为变量 x1 和 x2

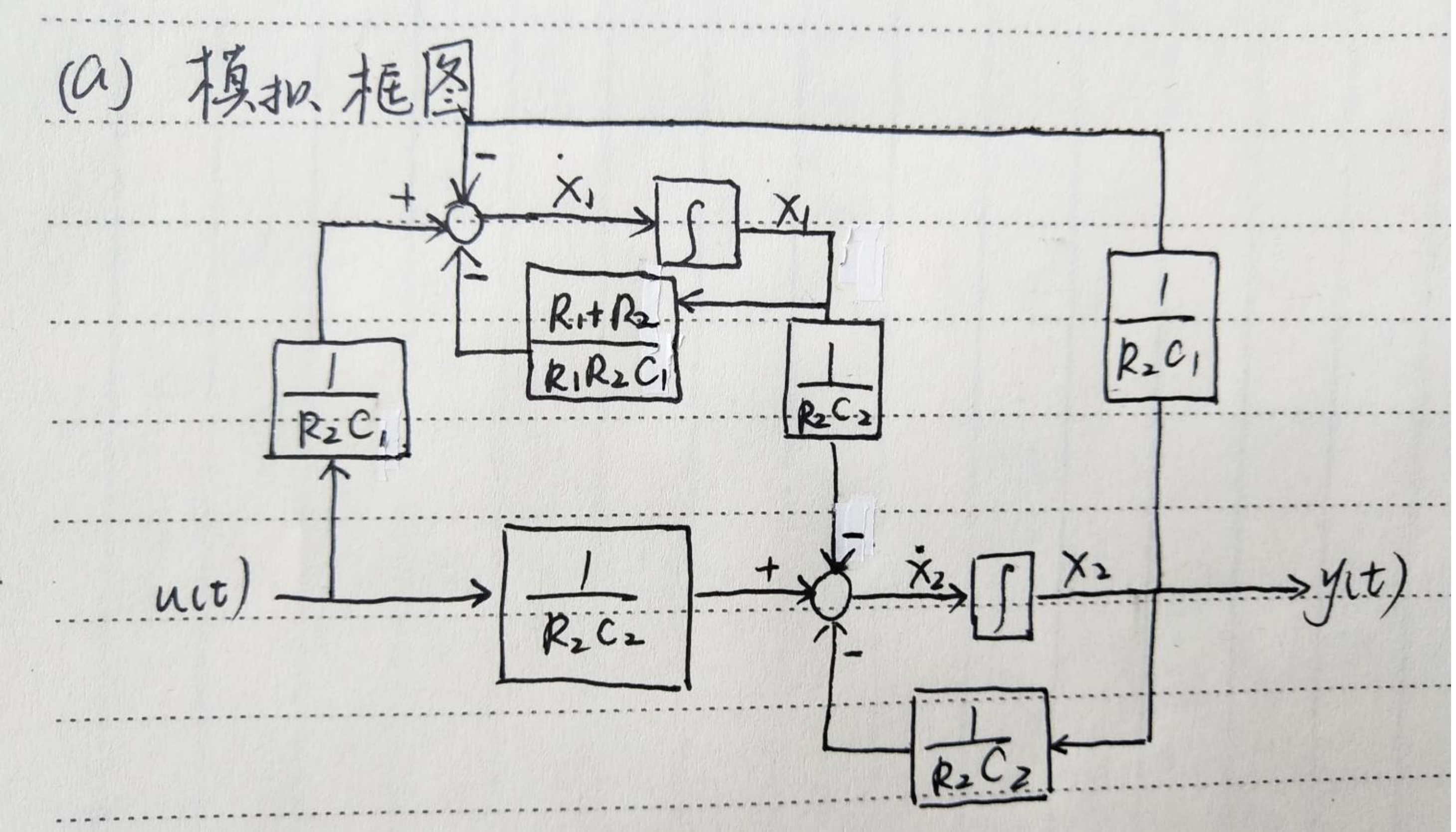
设 $\begin{cases}(u+x_2)\cdot\dfrac{1}{s+2}=x_1\Rightarrow sx_1=-2x_1+x_2+u\\ \dfrac{3}{s}\cdot(x_1+u)=x_2\Rightarrow sx_2=3x_1+3u\end{cases}$，则状态空间方程可为：

$$\dot{\mathbf{x}}=\begin{bmatrix}-2 & 1\\ 3 & 0\end{bmatrix}\mathbf{x}+\begin{bmatrix}1\\ 3\end{bmatrix}u$$

$$\mathbf{y}=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\mathbf{x}$$

2.8 试导出图题 2.8 中电路的状态方程并画出其模拟框图。注意，图题 2.8(c)中 k 表示理想电压放大器，即 $v_2=kv_1$，输入阻抗无限大，输出阻抗为零。





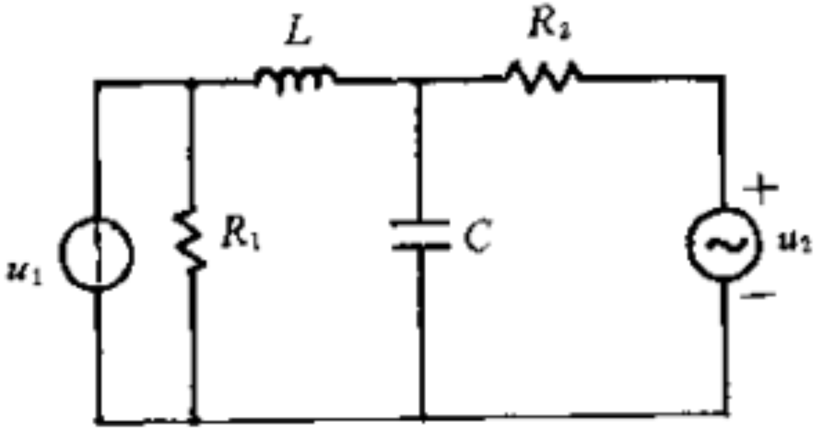
2.8 解：(a)设 C_1，C_2 两端电压为 x_1，x_2，如图，列出模型方

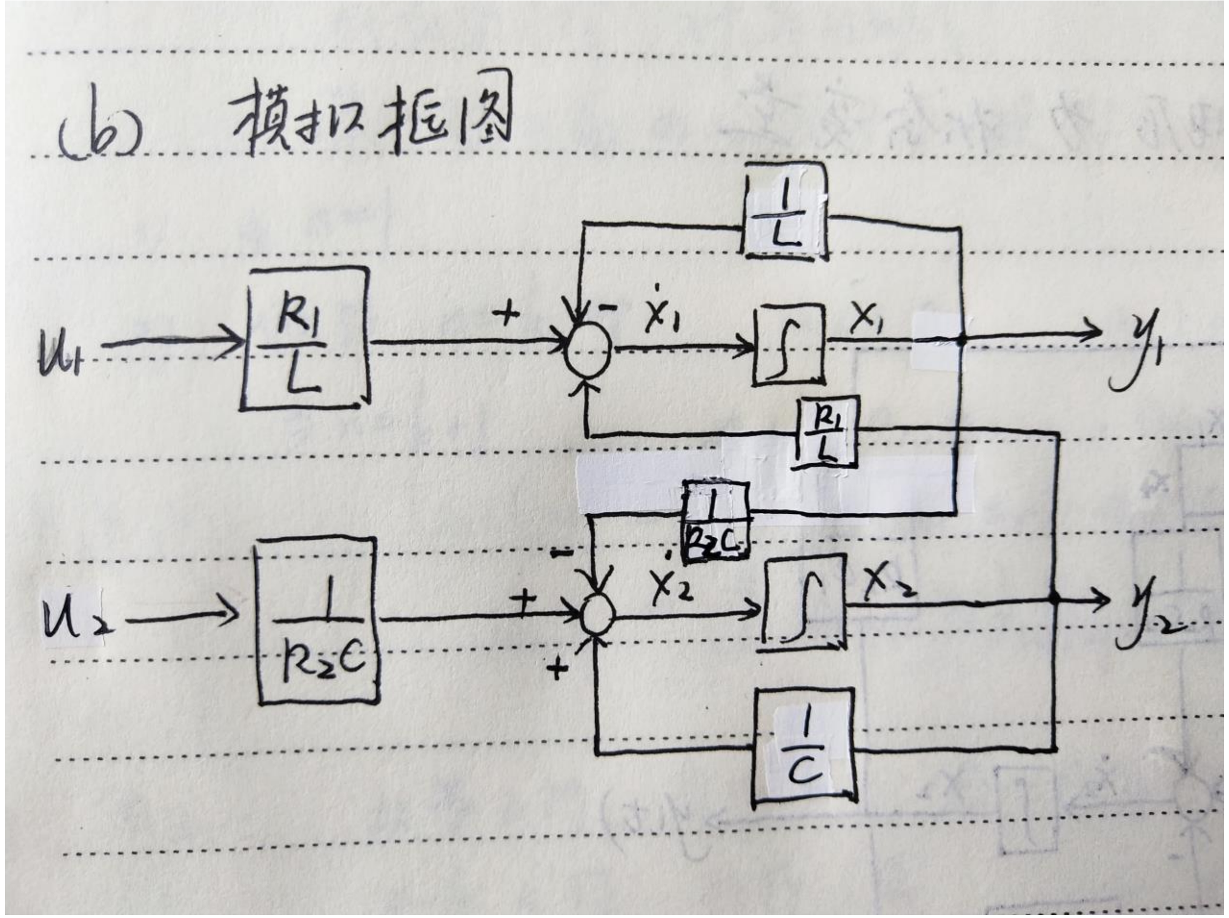
$$\begin{cases} c_1\dot{x}_1+\dfrac{x_1}{R_1}=c_2\dot{x}_2 \\ u=x_1+x_2+R_2c_2\dot{x}_2 \end{cases}$$

，状态空间方程：

$$\dot{\mathbf{x}}=\begin{bmatrix} -\dfrac{R_1+R_2}{R_1R_2c_1} & -\dfrac{1}{R_2c_1} \\ -\dfrac{1}{R_2c_2} & -\dfrac{1}{R_2c_2} \end{bmatrix}\mathbf{x}+\begin{bmatrix} \dfrac{1}{R_2c_1} \\ \dfrac{1}{R_2c_2} \end{bmatrix}u$$

$$\mathbf{y}=[-1 \quad 0]x+u$$



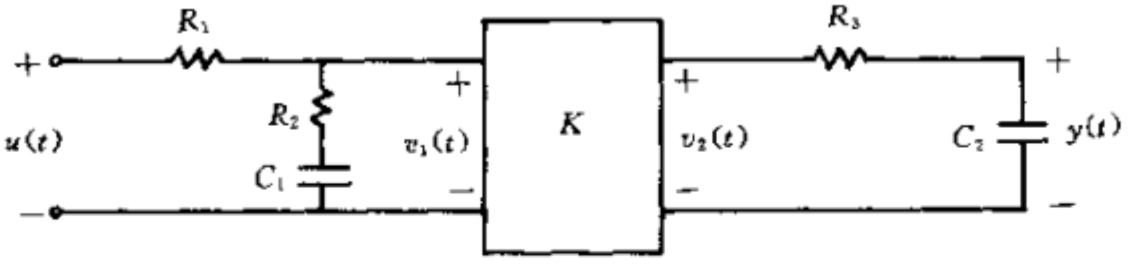


(b) 设C，L上电压和电流分别为x_1，x_2，

$$\begin{cases} R_1(x_2-u_1)+L\dot{x}_2+x_1=0 \\ \dfrac{1}{R_2}(u_2-x_1)+x_2=C\dot{x}_1 \end{cases}$$

，状态空间方程：

$$\dot{\mathbf{x}}=\begin{bmatrix} -\dfrac{1}{R_2C} & \dfrac{1}{C} \\ -\dfrac{1}{L} & -\dfrac{R_1}{L} \end{bmatrix}\mathbf{x}+\begin{bmatrix} 0 & \dfrac{1}{R_2C} \\ \dfrac{R_1}{L} & 0 \end{bmatrix}u$$

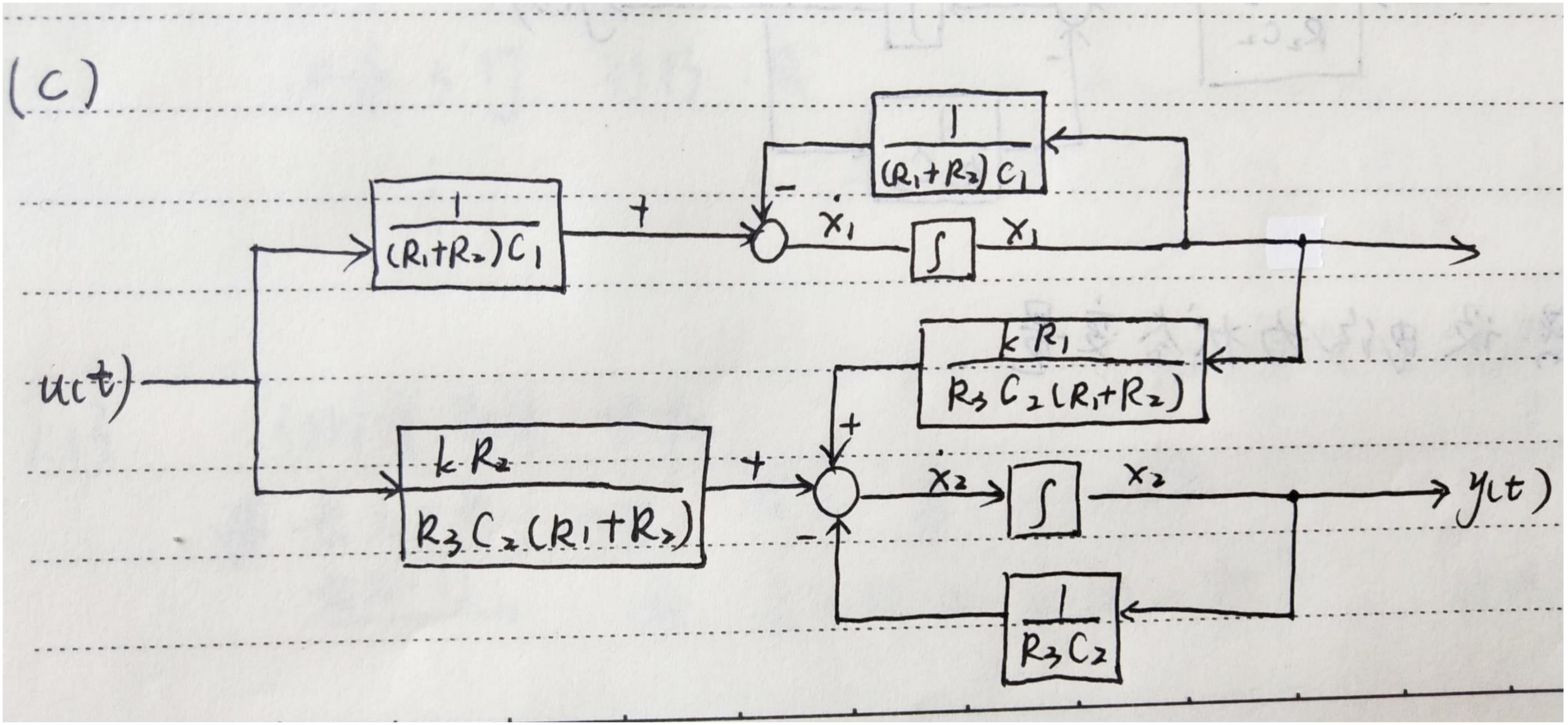


(c)

(c)模型方程为：$\begin{cases} v_2 = x_2 + R_3C_2\dot{x}_2 \\ v_1 = x_1 + R_2C_1\dot{x}_1 \\ v_2 = kv_1 \end{cases}$ ，v_1，v_2 设为 x_1，x_2：

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -\dfrac{1}{(R_1+R_2)C_1} & 0 \\ \dfrac{kR_1}{R_3(R_1+R_2)C_2} & -\dfrac{1}{R_3C_2} \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} \dfrac{1}{(R_1+R_2)C_1} \\ \dfrac{kR_2}{R_3(R_1+R_2)C_2} \end{bmatrix} u$$

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}\mathbf{x}$$



2.9 设某人第 k 月初在银行存款总数为 $x(k)$。第 k 月取款为 $t(k)$，存款为 $s(k)$。试写出描述他存款情况的差分方程。

2.9 解：$x(k+1)=x(k)-t(k)+s(k)$

2.10 已知离散系统的输入-输出描述式如下：

$$y_1(k+3)+6[y_1(k+2)-y_3(k+2)]+2y_1(k+1)+y_2(k+1)+ y_1(k)-2y_3(k)=u_1(k)+u_2(k+1)$$

$$y_2(k+2)+3y_2(k+1)-y_1(k+1)+5y_2(k)+y_3(k) =u_1(k)+u_2(k)+u_3(k)$$

$$y_3(k+1)+2y_3(k)-y_2(k)=u_3(k)-u_2(k)+7u_3(k+1)$$

应用单位延迟器、乘法器和加法器组成这一离散系统的仿真系统，挑选状态变量写出它的状态空间描述式。

2.10

法一：做z变换

2.10

$$y_1(z)(z^3+6z^2+2z+1)+zy_2(z)+y_3(z)(-6z^2-2)=u_1+zu_2$$

$$-zy_1(z)+y_2(z)(z^2+3z+5)+y_3(z)=u_1+u_2+u_3$$

$$-y_2(z)+y_3(z)(z+2)=-u_2+(1+7z)u_3$$

$$\Rightarrow$$

$$y_1(z)=\frac{(z^3+10z^2+9z+13)u_1+(-5z^4-13z^3-16z^2+2z-8)u_2+(42z^5+132z^4+242z^3+86z^2+75z+12)u_3}{z^6+11z^5+43z^4+83z^3+95z^2+31z+11}$$

$$y_2(z)=\frac{(z^4+8z^3+15z^2+7z+2)u_1+(z^4+4z^3+22z^2+5z+3)u_2+(36z^4-29z^3+8z^2-2z+1)u_3}{z^6+11z^5+43z^4+83z^3+95z^2+31z+11}$$

$$y_3(z)=\frac{(z^3+6z^2+3z+1)u_1+(-z^5-9z^4-24z^3-31z^2-11z-4)u_2+(-13z^5-117z^4-289z^3-530z^2-167z-71)u_3}{z^6+11z^5+43z^4+83z^3+95z^2+31z+11}+7u_3$$

设 $v_1=\dfrac{1}{z^6+11z^5+43z^4+83z^3+95z^2+31z+11}u_1$

$$v_2=\frac{1}{z^6+11z^5+43z^4+83z^3+95z^2+31z+11}u_2$$

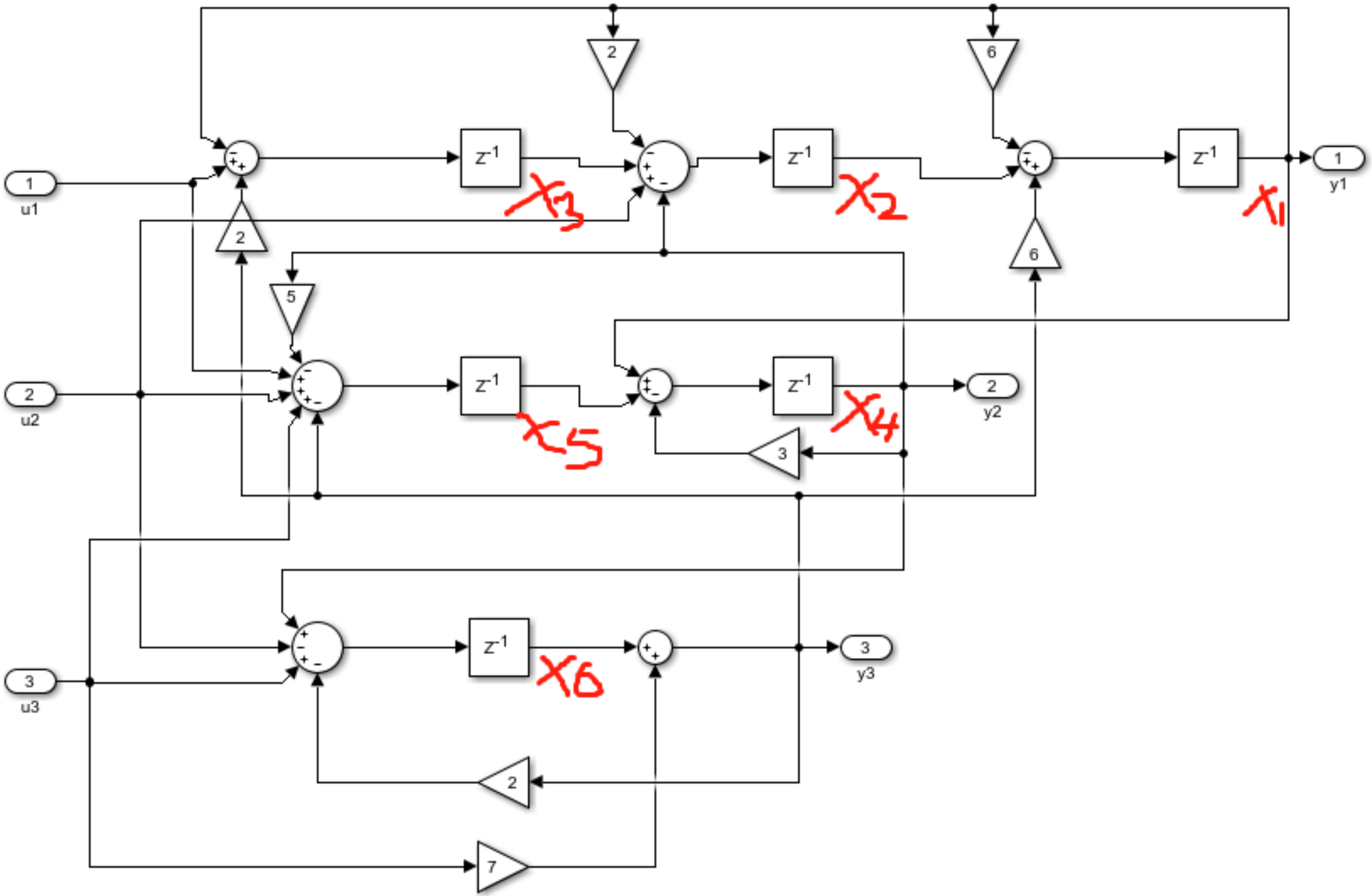
$$v_3=\frac{1}{z^6+11z^5+43z^4+83z^3+95z^2+31z+11}u_3$$

$$x=\begin{bmatrix} v_1 & \dot{v}_1 & \ddot{v}_1 & v_1^{(3)} & v_1^{(4)} & v_1^{(5)} & v_2 & \dot{v}_2 & \ddot{v}_2 & v_2^{(3)} & v_2^{(4)} & v_2^{(5)} & v_3 & \dot{v}_3 & \ddot{v}_3 & v_3^{(3)} & v_3^{(4)} & v_3^{(5)} \end{bmatrix}^T$$

$$
x[k+1] = \begin{bmatrix}
0 & 1 \\
 & 0 & 1 \\
 & & 0 & 1 \\
 & & & 0 & 1 \\
 & & & & 0 & 1 \\
-11 & -31 & -95 & -83 & -43 & -11 \\
 & & & & & & 0 & 1 \\
 & & & & & & & 0 & 1 \\
 & & & & & & & & 0 & 1 \\
 & & & & & & & & & 0 & 1 \\
 & & & & & & & & & & 0 & 1 \\
 & & & & & & -11 & -31 & -95 & -83 & -43 & -11 \\
 & & & & & & & & & & & & 0 & 1 \\
 & & & & & & & & & & & & & 0 & 1 \\
 & & & & & & & & & & & & & & 0 & 1 \\
 & & & & & & & & & & & & & & & 0 & 1 \\
 & & & & & & & & & & & & & & & & 0 & 1 \\
 & & & & & & & & & & & & -11 & -31 & -95 & -83 & -43 & -11
\end{bmatrix} x[k] + \begin{bmatrix}
0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1
\end{bmatrix} u[k]
$$

$$
y[k] = \begin{bmatrix}
13 & 9 & 10 & 1 & 0 & 0 & -8 & 2 & -16 & -13 & 5 & 0 & 12 & 75 & 86 & 242 & 132 & 42 \\
2 & 7 & 15 & 8 & 1 & 0 & 3 & 5 & 22 & 4 & 1 & 0 & 1 & -2 & 8 & -29 & 36 & 0 \\
1 & 3 & 6 & 1 & 0 & 0 & -4 & -11 & -31 & -24 & -9 & -1 & -71 & -167 & -530 & -289 & -117 & -13
\end{bmatrix} x[k] + \begin{bmatrix}
0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 7
\end{bmatrix} u[k]
$$

法二：根据题目要求画出结构图：



- 根据结构图可得:

$$x[k+1]=\begin{bmatrix}-6 & 1 & 0 & 0 & 0 & 6\\ -2 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\\ 1 & 0 & 0 & -3 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -5 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2\end{bmatrix}x[k]+\begin{bmatrix}0 & 0 & 42\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 14\\ 0 & 0 & 0\\ 1 & 1 & -6\\ 0 & -1 & -13\end{bmatrix}u[k]$$

$$y[k]=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}x[k]+\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 7\end{bmatrix}u[k]$$

补充：求相似变换使如下矩阵等价为约当规范型和模式规范型

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

补充：

$$\lambda I - A = \begin{bmatrix} \lambda & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & -1 \\ -1 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

$$\det(\lambda I - A) = (\lambda+1)(\lambda-1)(\lambda+j)(\lambda-j)$$

$\lambda_1 = 1$，$\lambda_2 = -1$　$\lambda_3 = j$　$\lambda_4 = -j$

∴矩阵的约当标准形　$J = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & j & \\ & & & -j \end{bmatrix}$

$\lambda_1 = 1 \qquad A\underline{q_1} = \lambda_1 \underline{q_1} \qquad$ 取 $\underline{q_1} = [1 \ 1 \ 1 \ 1]^T$

$\lambda_2 = -1 \qquad \underline{q_2} = [1 \ -1 \ 1 \ -1]^T$

$\lambda_3 = j \qquad \underline{q_3} = [j \ -1 \ -j \ 1]^T$

$\lambda_4 = -j \qquad \underline{q_4} = [j \ 1 \ -j \ -1]^T$

记 $Q = [q_1 \ q_2 \ q_3 \ q_4] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & j & j \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -j & -j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ 有 $Q^{-1}AQ = \Lambda$

令变换矩阵为 $\bar{Q} = Q \begin{bmatrix} 1 & 0 & & \\ 0 & 1 & & \\ & & 0.5 & -j0.5 \\ & & 0.5 & j0.5 \end{bmatrix}$ 令 $P = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 0.5 & -j0.5 \\ & & 0.5 & j0.5 \end{bmatrix}$

则 $\bar{\Lambda} = \bar{Q}^{-1} A \bar{Q} = P^{-1} \Lambda P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & & \\ 0 & 1 & & \\ & & 1 & 1 \\ & & j & -j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & j & \\ & & & -j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 0.5 & -j0.5 \\ & & 0.5 & j0.5 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$