

弦理论基础

© 黄晨[†]

[†] Mathematical Sciences and STAG Research Centre
University of Southampton
chen.huang@soton.ac.uk

弦理论基础

黄晨

9th February 2025

to someone

黄晨

前言

当前版本为测试版, 不代表最终质量, 部分内容翻译自 Oliver Schlotterer, David Tong, Polchinski, Blumenhagen Lüst Theisen 的弦论教材. 时间有限, 部分内容可能存在语病或笔误, 如发现错误欢迎联系作者 (chen.huang@soton.ac.uk) 改正, 感激不尽.

黄晨

Acknowledgement

感谢 Oliver Schlotterer 教授精彩的课程与讲义, 此外, 本讲义编写过程中获得了我的许多老师及同学的宝贵意见与建议, 他们是 (以姓氏拼音为序): 安宇森, 杜一剑, 何颂, 李佳润, 李想, 苗雨禅, 聂俊雄, 欧满谦, 沈陈君, 苏华美, 唐一朝, 陶一笑, 徐九赐, 魏皓文, 王凌云, 郑卜凡等. 此处尤其感谢陶一笑同学

黄晨

Contents

1	绪论	1
1.1	弦论的主要特征与问题	2
1.2	弦理论发展史简述	4
2	相对论性点粒子与闭弦	5
2.1	点粒子作用量等价于世界线长度	5
2.2	点粒子的量子化	8
2.3	弦的作用量与世界面面积等价	11
2.4	可量子化的弦作用量	16
2.4.1	泊里雅科夫作用量的对称性	17
2.5	共形规范的固定	19
2.5.1	运动方程与能动张量	21
2.6	振动模式的展开	23
2.6.1	再谈限制条件	25
3	弦的量子化	29
3.1	协变量子化基础	29
3.2	协变量子化中的限制条件	32
3.3	光锥规范	34
3.4	光锥量子化	39
3.4.1	洛伦兹代数法	43
4	开玻色弦与 D 膜	45
4.1	迪利克雷 (Dirichlet) 与纽曼 (Neumann) 边界条件及其对应的展开	45
4.2	开弦量子化和质量谱	49

4.3	膜的动力学: 狄拉克作用量 (Dirac action)	53
4.4	D 膜与非阿贝尔规范场	54
5	共形场论简介	57
5.1	一般维数下的共形对称性	59
5.2	经典层面	61
5.2.1	能动张量	61
5.3	量子层面	66
5.3.1	算符乘积展开	66
5.3.2	主场 (primary field) 与 主算符 (primary operator)	70
5.4	以自由标量场为例	75
5.4.1	二维不存在戈德斯坦玻色子 (Goldstone boson)	77
5.4.2	能动张量与主算符	78
5.5	中心荷 (Central charge)	80
5.5.1	外尔反常 (Weyl Anomaly)	83
5.5.2	中心荷的物理含义	87
5.6	维拉索罗代数 (Virasoro Algebra)	90
5.6.1	径向量子化 (Radial Quantization)	90
5.6.2	么正性的影响	96
5.7	态与算符之间的映射	97
5.7.1	再谈自由标量场	101
5.8	带边界的共形场论	103
6	泊里雅科夫路径积分与 b, c 鬼场	107
6.1	自由玻色子关联函数的路径积分方法	108
6.2	泊里雅科夫路径积分与 b, c 鬼场	110
6.2.1	法捷耶夫-波波夫方法	111
6.2.2	FP 行列式	113
6.2.3	鬼场与格拉斯曼变量 (Grassmann variables)	114
6.3	鬼场的共形场论	122
6.3.1	b, c 鬼场的能动张量	122
6.3.2	鬼场对真空态的影响	128
6.4	弦理论的维数限制	133
6.4.1	泊里雅科夫非临界弦 (non-critical strings)	134

7	BRST 量子化与顶角算符	137
7.1	BRST 对称性	137
7.2	弦的 BRST 量子化	141
7.2.1	无质量开弦态	144
7.3	顶角算符	147
8	弦的相互作用	153
8.1	弦振幅的基本思想	154
8.1.1	温伯格-威滕定理 (Weinberg-Witten theorem)	155
8.1.2	对拓扑结构的求和	158
8.2	闭弦的树级振幅	161
8.2.1	冗余规范对称性: $SL(2; \mathbb{C})$	162
8.2.2	维拉索罗-夏皮罗振幅 (Virasoro-Shapiro Amplitude)	164
8.3	开弦的树级振幅	170
8.3.1	韦内齐亚诺振幅 (Veneziano amplitude)	173
8.3.2	三胶子振幅	175
8.3.3	D -膜的张力	177
8.4	利用开弦的叠合 (double copy) 重构闭弦	177
8.4.1	四点 KLT 关系 (Kawai-Lewellen-Tye relation)	180
8.4.2	置换不变性 (permutation invariance) 与单值关系 (monodromy relation)	186
8.5	弦振幅的低能展开	189
8.5.1	四点 α' 展开	191
8.5.2	更高阶	192
8.5.3	顶角算符与振幅的归一化	193
8.6	弦振幅的高能极限	194
8.7	一圈弦振幅	198
8.7.1	环面的模空间 (moduli space)	198
8.7.2	一圈配分函数	202
8.7.3	弦配分函数的含义	205
8.7.4	非微扰弦论简介	208
9	非平凡靶空间中的弦	211
9.1	爱因斯坦方程	212
9.1.1	β 函数	213

9.1.2	里奇流 (Ricci Flow)	216
9.2	B 场与伸缩子	217
9.2.1	带荷的弦与 B 场	217
9.2.2	伸缩子	218
9.2.3	β 函数	220
9.3	低能有效作用量	220
9.3.1	弦标架 (String Frame) 与爱因斯坦标架 (Einstein Frame)	221
9.3.2	对爱因斯坦方程的修正	223
9.4	D-膜与背景规范场	223
9.4.1	β 函数	224
9.4.2	波恩-英费尔德作用量 (Born-Infeld Action)	227
9.5	狄拉克-波恩-英费尔德作用量 (Dirac-Born-Infeld Action)	228
9.5.1	与闭弦场的耦合	229
9.6	杨-米尔斯作用量	231
9.7	紧致化 (compactification)	234
9.7.1	靶空间视角	235
9.7.2	世界面视角	237
9.8	T 对偶 (T duality)	241
9.8.1	T 对偶的路径积分推导	243
9.8.2	开弦的 T 对偶	244
9.8.3	超弦的 T 对偶	245
9.8.4	镜像对称 (Mirror Symmetry) 简介	245
10	RNS 超弦 (RNS superstring) 简介	247
10.1	超共形场论 (superconformal Field Theory)	247
10.1.1	物质场 $(X; \Psi)$ 的超共形场论	248
10.1.2	世界面超对称	255
10.1.3	鬼场 $(b, c; \beta, \gamma)$ 的 SCFT	256
10.2	闭超弦 (closed superstring) 的 RNS 表述	260
10.2.1	纳维-施瓦兹部分与拉蒙部分	260
10.2.2	纳维-施瓦兹真空与拉蒙真空	262
10.2.3	协变量子化	265
10.2.3.1	限制条件	266
10.2.3.2	质量谱	269
10.2.4	光锥量子化	271

10.2.4.1 限制条件	271
10.2.4.2 光锥中的 NS 能谱	272
10.2.4.3 光锥中的 R 能谱	274
10.3 开超弦 (open superstring) 的边界条件	274
10.4 GSO 投影	276
11 超对称基础	283
11.1 庞加莱对称性	284
11.1.1 洛伦兹群的性质	284
11.1.2 $SL(2, \mathbb{C})$ 群的表示与不变张量	286
11.1.3 $SL(2, \mathbb{C})$ 的生成元	288
11.1.4 外尔旋量积	289
11.1.5 庞加莱群的表示	290
11.2 四维靶空间的基本超对称 (simple SUSY)	291
11.2.1 无质量多重态	295
11.2.2 有质量多重态	296
11.3 四维靶空间的扩张超对称 (extended SUSY)	298
11.3.1 无质量多重态	299
11.3.2 有质量多重态	302
11.3.2.1 零中心荷 ($Z^{AB} = 0$)	302
11.3.2.2 非零中心荷 ($Z^{AB} \neq 0$)	302
11.4 超空间与超场	305
11.4.1 超空间基础	305
11.4.1.1 群与商空间	305
11.4.1.2 标量超场的定义与变换	307
11.5 手性超场	310
11.6 矢量超场	313
11.6.1 矢量超场的定义与变换	313
11.6.2 威斯-朱米诺规范 (Wess–Zumino gauge)	315
11.6.2.1 阿贝尔场强	315
11.6.2.2 非阿贝尔场强	316
11.7 高维超对称	317
11.7.1 高维中的旋量	317
11.7.1.1 偶数维 $D = 2n$ 中的旋量表示	317
11.7.1.2 奇数维 $D = 2n + 1$ 中的旋量表示	319

11.7.1.3 Majorana 旋量	320
11.7.2 高维中的超对称代数	320
11.7.2.1 超对称代数在高维度中的表示	321
11.7.3 维数约化	324
11.8 十维靶空间的超对称	325
11.8.1 十维 SYM	325
11.8.1.1 非线性运动方程	326
11.8.1.2 规范不变性	326
11.8.1.3 非线性运动方程	327
11.8.2 线性化超场	328
11.8.2.1 超场的 θ 展开	328
11.8.3 更高量纲的超场	329
12 RNS 超弦的靶空间超对称	331
12.1 开超弦与靶空间超对称	331
12.2 II 型超弦 (Type II Superstring) 与靶空间超对称	334
12.2.1 再谈 GSO 投影	334
12.2.2 闭超弦	336
12.2.2.1 IIA 型闭超弦	337
12.2.2.2 IIB 型闭超弦	340
12.2.2.3 拉蒙-拉蒙势 (Ramond-Ramond potentials)	341
12.3 超弦之间的关系	345
13 超弦的纯旋量表述 (pure spinor formulation)	349
13.1 格林-施瓦兹 (GS) 表述的协变量子化疑难	349
13.2 西格尔 (Siegel) 对 GS 表述的改进	351
13.2.1 西格尔方法的困难	352
13.3 纯旋量表述基础	354
13.3.1 $U(5)$ 分解	355
13.3.2 纯旋量的鬼场	358
13.3.3 纯旋量表述的作用量	360
13.3.4 算符的乘积展开	362
13.4 纯旋量表述的顶角算符	363
13.4.1 无质量态的顶角算符	363
13.4.2 积分顶角算符与无积分顶角算符的联系	365

14 超弦的相互作用	367
14.1 树级超弦振幅	367
14.1.1 开超弦低点树级振幅	368
14.1.2 开超弦无质量 n -点树级振幅	371
14.1.3 闭超弦树级振幅	372
14.2 圈级超弦振幅	374
14.2.1 一圈超弦振幅	374
14.2.2 一圈超弦振幅的 α' 展开	374
14.2.3 高圈弦振幅	374
14.2.4 多重 ζ 函数与单值映射 (single value map)	374
14.2.5 高圈弦振幅的模空间疑难	374
14.2.6 圈级弦振幅的 KLT 关系	375
A 量子场论中的引力问题	377
A.1 爱因斯坦-希尔伯特作用量 (Einstein-Hilbert action)	377
A.2 引力问题的微扰法	383
B Z 积分的相关问题	387
B.1 积分与伽玛函数 (Gamma functions)	387
C 弦对偶简介	391
D 非自由场的 OPE	393
D.1 复合算符的 OPE	393
D.1.1 平面波基底下超场的算符积展开	395
D.2 纯旋量表述中的 OPE	397
D.2.1 正规排序括号的重排	397
D.2.2 正规排序的恒等式	398
E «蒲公英少女 (The Dandelion Girl)»	401

Chapter 1

绪论

弦理论是一个极具野心的物理理论, 尝试将所有相互作用 (包括引力) 统一在一套量子化的系统中. 弦论的思想是将量子场论中点粒子的基本概念替换为弦 (具备另一参数). 从这一出发点, 我们可以推导出各种物理理论, 例如广义相对论, 电动力学, Yang-Mills 规范理论等. 在量子场论中我们一般讨论的问题直接由点粒子描述, 例如费曼图中的相互作用表示为外腿相连的顶角. 量子场论中粒子的传播由时空图中的 1-维世界线表示, 而弦理论对于基本粒子的传播则由时空图中的二维世界面表示 (世界面的两个参数一个与世界线的本征时相同, 另一个则是弦长参数)

粗略地讲, 不同的基本粒子 (例如夸克, 轻子, 规范玻色子, 引力子, 以及其他更高自旋对应的激发态等) 在弦理论中被描述为弦的不同震动模式.

- 无质量的闭弦激发态包含自旋为 2 的粒子, 这与度规的微扰 (带两个洛伦兹指标表明自旋为 2.) 相对应. 且为微分同胚不变量, 这表明无质量闭弦的激发态对应于引力子, 也表明弦理论是一个量子引力理论.
- 无质量的开弦激发态则对应于阿贝尔或非阿贝尔的规范玻色子. 因此弦理论可以给出标准模型中的规范相互作用.
- 开弦与闭弦均有无穷多的高自旋大质量激发态, 每个质量均对应多个自旋态, 不同的自旋态处于不同的轨道 (trajectory) 而最大自旋态 (leading trajectory) 对应的自旋与质量平方呈线性函数.

与物理系所学的大多数其他课程不同的是, 弦理论是一个基于猜测的理论, 我们目前并

没有找到任何证明弦论正确性的实验证据, 并且可预期的未来人们也将很难找到直接的实验证据. 因此, 我们有必要了解一下学习弦论的理由:

1.1 弦论的主要特征与问题

与量子场论相比, 弦论额外的参数引入了十分有趣的物理构造, 并且可以解决一些量子场论中无法解决的问题:

- 弦理论是引力量子化的备选理论. 无论弦理论正确与否, 我们总可以利用弦理论的框架讨论黑洞的奇点, 信息悖论, 熵等问题¹. 粗略地说, 弦理论为现实物理提供了自洽的数学框架. 在低能情况, 它自然会产生广义相对论, 规范理论, 标量场和手性费米子. 换句话说, 它涵盖标准模型与引力的基本成分. 它还为宇宙常数的值提供了目前唯一可信的解释. 然而另一方面, 部分学者对这种解释存在分歧, 以至于物理学家在这些解释对这些问题是好是坏之间存在相当有趣的分歧. 此外, 弦理论包含了几个尚未有实验证据但被认为可能是标准模型之外的物理理论, 例如超对称和轴子. 其中弦论的紧致化 (如卡拉比-丘流形紧致化) 虽要求 10 维超对称, 但紧致化后的 4 维物理是否保留超对称则取决于紧致化流形的特殊性质.
- 量子场论对于基本相互作用的描述依赖于费曼图, 引力相互作用在纯引力的情况下单圈可重整化, 二圈以上会出现重整化困难, 当引力与其他粒子耦合时, 单圈不可重整化. 这一问题由引力在动量趋于无限大的物理构型带来, 动量趋于无限大对应于空间上的尺度趋于无限小 (即费曼图中顶角相互作用的构型). 因此量子场论对引力小尺度的相互作用的描述出现问题, 弦理论的相互作用则由与费曼图相似的世界面图来表示, 弦的微扰则由世界面图的不同拓扑结构表征, 相互作用由于弦长参数的出现不在局限于某点而是分布在一定的区域中, 因此弦相互作用原则上可以规避由点相互作用带来的紫外发散.
- 相互作用的开弦 (尤其是圈图) 会给出闭弦的结构. 这表明开弦不能独立于闭弦存在, 而闭弦可以独立存在. 因此, 在弦的无质量激发态中的规范玻色子和引力子存在上述联系.
- 弦理论对时空的维数 D 存在要求, 弦论的自洽性要求玻色弦所在的时空维数必须为 $D = 26$, 而超弦必为 $D = 10$. 我们所观测到的 $D = 4$ 维时空则可以理解为超弦理论的十维时空紧致化额外维度 (认为额外维度尺度极小) 和 D 膜结构共同造成的结果, 与其他理论不同的是, 弦论将要求特定的维数, 有望解释为什么我们的世界是

¹弦论对黑洞熵的微观态计数主要适用于超对称黑洞 (如极端莱斯特诺斯特朗黑洞 (Reissner-Nordström blackhole)), 例如对 D -膜态密度的计算与贝肯斯坦-霍金熵成功匹配. 然而, 非超对称黑洞的微观机制仍需依赖 AdS/CFT 对偶或模空间量子化等工具, 其一般性描述仍待完善. 而信息悖论本质源于量子力学么正性与广义相对论因果律的冲突. 弦论通过全息原理 (如 AdS/CFT 对偶) 暗示信息可能在高维时空边界以么正方式保存, 但具体机制 (如黑洞蒸发末态的信息恢复问题) 尚未完全解决.

四维的, 而四维中出现 $3 + 1$ 维的结构目前仍没有合适的解释, 通常作为讨论的默认前提出现.

- 弦理论可以将标准模型的规范群 ($SU(3) \times SU(2) \times U(1)$), 相互作用强度, 夸克的代以及轻子的代几何化.
- 与标准模型所需的二十余个参数不同的是, 弦理论只需要一个基本参数 $\alpha' = l_{string}^2$, 通常被称为“弦长参数”, “弦张力”的倒数或者“雷吉斜率 (Regge slope)”. 它起到微扰弦相互作用的耦合常数的作用, 用于衡量不同世界面拓扑构型的权重. 这一参数可以由闭弦的无质量标量场 (即对应时空背景的伸缩子 (dilaton)) 的真空期望值 (VEV) 确定. 此外, 诸如额外维的尺度等几何量也可以归结为某些标量场的真空期望.
- 弦论中包含丰富的数学结构:
 1. 超弦引入了卡拉比丘流形 (对六个实的时空维数或三个复的时空维数的某种紧致化) 之间的镜像对称, 作为映射它可以在卡拉比丘流形之间映射拓扑信息. 这一对称性来自于 IIA 型超弦与 IIB 型超弦之间的对偶.
 2. 弦振幅关于 α' 的展开会在树级弦振幅引入场振幅中仅在圈级出现的特殊函数 (例如 ζ 函数等), 而弦的圈级振幅则会引入以上的椭圆推广.
- 弦理论可以将规范理论与引力理论彼此联系:
 1. 在弱耦合的情况下, 引力的微扰散射振幅可以被规范理论振幅的平方构造出来. 这种振幅层面上的关联也常常被写作 $gravity = (gauge\ theory)^2$. 这一振幅关系在树级可以由弦论给出漂亮的推导过程. 而在树级以上, 场论的圈级振幅则在被积函数的层面上观察到了类似的关系, 相似地, 这也可以在弦论圈级振幅的手性分解中初见端倪.
 2. 根据马尔达西纳 (Maldacena) 的 AdS/CFT 对偶, 在 AdS_{d+1} 时空中的弦理论与其 d 维边界上的共形规范理论存在对偶关系. 这一对偶也被称作规范-引力 (gauge-gravity) 对偶. 它可以将理论的强耦合与弱耦合彼此联系, 因此我们可以进行一些较容易的计算来给出一些原本计算十分困难的结果. 然而, 对于弦论语境下的全息对偶, 目前主要研究的背景主要包括 $AdS_5 \times S^5$, $AdS_4 \times CP^3$, $AdS_3 \times S^3 \times T^4$ 等少数具体类型, 并非任意维数 d 都存在良好的全息弦论对偶. 一般而言, 任意维数 d 的 AdS/CFT 研究主要属于场论层面, 而非严格的弦论框架. AdS/CFT 对偶是全息原理的一种体现, 揭示了高维信息如何在低维理论中有所体现, 这也是该对偶的重要应用之一.

弦理论作为一个物理论仍有不完善的地方:

- 弦理论作为一个物理论虽然大致框架尚可, 但其更精细的细节还有待明确. 弦理论并没有为低能物理学提供明确的预测, 而是提供了一系列令人眼花缭乱的备选方案,

主要取决于隐藏在额外维度中的结构. 在某种程度上, 这个问题是任何量子引力理论都难以避免的.

- 尽管在引入对偶后超弦理论是唯一的, 但这一理论仍有许多可能的解, 原则上可以存在极大数量的真空态 (取决于计算解数量的方式) 例如 10^{500} . 由于存在如此多的物理构型, 重构标准模型理论原则上十分困难.
- 理论的一致性要求存在时空超对称, 一种庞加莱对称性 (由洛伦兹群与平移群的半直积描述) 的推广, 它可以将玻色子与费米子相互转换. 这种对称性对能量的要求极高² (例如普朗克能标 $\sqrt{\frac{\hbar c}{G_N}} \sim 10^{19} \text{GeV}$.) 但 LHC 所能达到的能标始终低于这一要求 (约为 10^4GeV .) 这也解释了为什么人类目前为止还没有发现超对称量子场论乃至弦理论存在的实验证据
- 我们对于弦理论的理解并不完善:
 1. 除去对特殊边界条件构造的 AdS/CFT 以外, 我们仍没能从弦的非微扰形式中推导出微扰弦理论, 甚至除去这些特殊情况我们仍没有一个一般的非微扰弦论的定义.
 2. D 膜是时空中的超曲面, D 膜的动力学性质只能从非微扰理论中得到, 因为在弱耦合下, D 膜的质量趋于无穷大, 其动力学性质是不可见的.

1.2 弦理论发展史简述

- 60 年代末, 人们在研究强子谱与强子相互作用时发现了弦理论. 而韦内齐亚诺振幅 (Veneziano amplitude) (1968) 被认为是弦理论的第一个公式.
- 1974 年, 舍尔克 (Scherk) 与施瓦兹 (Schwartz) 认为闭弦的无质量自旋-2 激发态可以被视作引力子, 弦理论因此成为备选的量子引力理论之一
- 1984 年, 格林 (Green) 和施瓦兹证明了 I 型超弦的规范反常 (gauge anomalies) 在合适的规范群下会被抵消. 而在此之前人们认为这一反常会不可避免地破坏弦理论的自洽性. 他们的突出贡献也常常被称作第一次弦论革命
- 1995 年, 威腾 (Witten) 解释了五种已知的弦理论如何通过对偶彼此联系, 引发了第二次弦论革命. 弦论理应给出一种唯一的量子引力理论, 但是人们却发现了看起来截然不同的五种弦理论 ($I, IIA, IIB, het_{SO(32)}, het_{E_8 \times E_8}$), 分别为: I 型, IIA 型, IIB 型, 以及分别对应于 $SO(32)$ 与 $E_8 \times E_8$ 的两种杂化弦, 这与人们期望的唯一性不符. 由于威腾的工作, 这五种弦理论可以被表示为唯一的“M 理论”的五种不同的相.
- 1998 年, 马尔达西纳 (Maldacena) 发现了 AdS/CFT 对偶.

²也有观点认为超对称能标略高于希格斯粒子能标从而解释规范等级问题.

Chapter 2

相对论性点粒子与闭弦

我们首先考虑 D 维闵氏时空 $\mathbb{R}^{1,D-1}$ 背景下的弦. $t = X^0$, 度规 $\eta_{\mu\nu}$ 则取为: $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, +1, \dots, +1)$. 洛伦兹指标 (Lorentz indices) 从希腊字母表中部开始取: $\mu, \nu, \lambda, \dots = 0, 1, \dots, D-1$. 此外, 我们在本书中始终取自然单位制: $c = \hbar = 1$.

2.1 点粒子作用量等价于世界线长度

当我们取 $X^\mu = (t, \vec{x})$ 坐标系时, 考虑如下作用量:

$$S_{old} = -m \int dt \sqrt{1 - \dot{\vec{x}} \cdot \dot{\vec{x}}}. \quad (2.1. 1)$$

我们可以用如下的方法证明其正确性: 计算与 \vec{x} 共轭的动量 \vec{p} , 以及能量 E 亦即哈密顿量:

$$\vec{p} = \frac{m\dot{\vec{x}}}{\sqrt{1 - \dot{\vec{x}} \cdot \dot{\vec{x}}}} \quad E = \sqrt{m^2 + \vec{p}^2} \quad (2.1. 2)$$

这与我们在狭义相对论中所学的内容一致.

我们可以将 $\dot{\vec{x}}$ 改记为 \vec{v} , 于是

$$\dot{X}^\mu = \left(\frac{dt}{d\tau}, \frac{dt}{d\tau} \frac{d\vec{x}}{dt} \right)^\mu = \frac{dt}{d\tau} (1, \vec{v})^\mu \quad (2.1. 3)$$

作用量可以改写为:

$$S_{old} = -m \int dt \sqrt{1 - \dot{\vec{x}} \cdot \dot{\vec{x}}} = -m \int dt \sqrt{1 - \vec{v} \cdot \vec{v}} = \int dt \left(-m + \frac{m}{2} \vec{v}^2 + O(\vec{v}^4) \right) \quad (2.1. 4)$$

我们在最后一步的计算中用到了非相对论极限 $|\vec{v}| \ll 1$, 可以从非相对论拉格朗日量中得到动能 $E_{kin} = \frac{1}{2} m \vec{v}^2$ 以及势能 $E_{pot} = mc^2$ (此处注意我们已取 $c = 1$),

$$S_{non-rel} = \int dt L_{non-rel}, \quad L_{non-rel} = E_{kin} - E_{pot} + O(\vec{v}^4) \quad (2.1. 5)$$

我们便复现了非相对论极限下的结果.

eq. (2.1. 2) 中时间和空间并非平权的, 而这也是给出共轭动量所必然出现的困难, 我们在理论力学与狭义相对论中已经认识到了这一点.

尽管 eq. (2.1. 1) 中的拉氏量正确, 但这里的时间 t 与空间 \vec{x} 的地位完全不同. 空间坐标 \vec{x} 是体系的动力学自由度. 而时间 t 仅仅作为参数出现. 尽管洛伦兹变换会混合 t 与 \vec{x} , 但这一对称性在 eq. (2.1. 1) 中并不显然. 那么我们能否找到一个时空平权的作用量呢?

我们首先可以将时间和空间都当做坐标参数处理, 这将给出场论的结构. 而在弦理论中, 我们考虑另外一种可能性: 将时空均作为体系的动力学自由度. 但这会带来一个问题, 我们不能主观地在给定的物理体系中加入新的自由度. 换句话讲, 粒子在空间中可以自由地运动, 但时间上却不允许出现这种情况, 粒子必须相对时间运动 (以某种方式经过时间而非只在固定的某个瞬时出现). 因此我们的做法是将时间也升格为动力学自由度, 但不能让它真正成为动力学自由度. 这听起来似乎有些矛盾, 但我们后面会看到, 规范对称性可以帮助我们解决这一问题.

我们考虑相对论性点粒子在时空中的传播, 利用时空中世界线来描述这一过程, 由世界线本征时 τ 进行参数化, $\dot{X}^\mu \equiv \frac{dX^\mu}{d\tau}$. 作用量泛函应当是洛伦兹变化下的不变标量, 而在时空图中, 有一个很明显的不变标量, 即世界线的线长. 因此我们可以利用世界线的线长写出作用量:

$$S_{old}[X] = -m \int d\tau \sqrt{-\frac{dX^\mu}{d\tau} \frac{dX^\nu}{d\tau} \eta_{\mu\nu}}. \quad (2.1. 6)$$

我们引入了一个新的参数 τ , 这一参数给出了世界线上的位置, 而作用量 S_{old} 实际上就是沿世界线的本征时长度 $\int ds$.

我们的体系现在看似有 D 而非 $D - 1$ 个动力学自由度. 因为如前所述, 时间 $X^0 \equiv t$ 现在作为动力学自由度出现: $X^0 = X^0(\tau)$. 这其实是一个假象, 为了看出这一点我们需要

首先说明 eq. (2.1. 6) 的特殊性质: 重参数化不变性. 作用量 eq. (2.1. 6) 在单调重参数化映射:

$$\tilde{\tau} = \tilde{\tau}(\tau) \rightarrow d\tilde{\tau} = \frac{d\tilde{\tau}}{d\tau} d\tau, \quad \dot{X}^\mu = \frac{dX^\mu}{d\tilde{\tau}} \frac{d\tilde{\tau}}{d\tau} \quad (2.1. 7)$$

前后不变. 我们在作用量的具体表达式 eq. (2.1. 6) 中可以很清楚地看到 $\frac{dX^\mu}{d\tau}$ 的重参数化变换因子与积分变量重参数化变换因子抵消, 进而可以将作用量写成与 eq. (2.1. 6) 相同形式, 仅将 τ 换为 $\tilde{\tau}$ 的表达式:

$$S_{old} = -m \int d\tilde{\tau} \sqrt{-\frac{dX^\mu}{d\tilde{\tau}} \frac{dX^\nu}{d\tilde{\tau}} \eta_{\mu\nu}}.$$

这也就表明我们可以相当任意地取一个世界线上由单调映射 $\tilde{\tau} = \tilde{\tau}(\tau)$ 与 τ 相联系的不同参数 $\tilde{\tau}$ 作为体系的新参数, 世界线长 τ 的选取没有实际的物理意义. 于是我们可以得知, 并非所有的 D 个动力学自由度 X^μ 都是物理自由度, 它们中的一个假的自由度: 例如, 当你找到一个体系的解, 则你可以确定 X^0, X^1, \dots, X^{D-1} 关于 τ 演化的方式. 但这些信息并非全有意义, 因为 τ 的选取没有物理意义. 特别地, 我们甚至可以进行特殊的 $\tilde{\tau}$ 的选取, 来使得 $X^0(\tilde{\tau}) = \tilde{\tau}$, 改记为:

$$\tau = X^0(\tau) \equiv t \quad (2.1. 8)$$

将这一特殊重参数化应用到 eq. (2.1. 6) 我们将会重新得到 eq. (2.1. 1). 重参数化不变性是体系的规范对称性, 与其他的规范对称性一样, 这实际上并不是体系本身的对称性, 而是我们的描述所导致的冗余.

我们也可以从另一个角度说明这件事: 我们考虑动量

$$p_\mu = \frac{\partial L}{\partial \dot{X}^\mu} = \frac{m \dot{X}^\nu \eta_{\mu\nu}}{\sqrt{-\dot{X}^\lambda \dot{X}^\rho \eta_{\lambda\rho}}}, \quad (2.1. 9)$$

其满足如下条件 (质壳条件):

$$p_\mu p^\mu + m^2 = 0, \quad (2.1. 10)$$

这是我们所考虑的质量为 m 的粒子物理体系的限制条件. 从世界线的角度, 这说明粒子不允许在闵氏时空中固定不动, 而应当沿类光或类时测地线 $(p^0)^2 \geq m^2$ 运动.

eq. (2.1. 6) 式的一大优点便是粒子的庞加莱 (Poincaré) 对称性得到保证, 它作为世界线的全局对称性出现:

$$X^\mu \rightarrow \Lambda^\mu_\nu X^\nu + c^\mu, \quad (2.1. 11)$$

其中 Λ 是满足 $\Lambda^\mu_\nu \eta^{\nu\rho} \Lambda^\sigma_\rho = \eta^{\mu\sigma}$ 的齐次洛伦兹变换, 而 c^μ 则对应于平移变换. 我们令体系保持这些对称性的代价是在体系中引入规范对称性. 而在弦理论中, 相似的规范对称性也会出现. 本书中的很大一部分内容将会用来讨论规范所带来的后果.

应当注意的是, $X^\mu = X^\mu(\tau)$ 应当被理解为"世界线上的场", 或者理解为世界线向 $\mathbb{R}^{1,D-1}$ 的嵌入映射. 后文中为简化记号, 我们常常用点来代表洛伦兹指标的缩并, 例如, 对背景时空中的矢量 $A^\mu B^\nu$, 其内积可以写为: $A^\mu B^\nu \eta_{\mu\nu} = A \cdot B$

2.2 点粒子的量子化

量子化这一作用量比较平凡. 我们首先引入波函数 $\Psi(X)$, 其满足薛定谔方程:

$$i \frac{\partial \Psi}{\partial \tau} = H \Psi. \quad (2.2. 12)$$

我们可以计算体系的哈密顿量 $H = \dot{X}^\mu p_\mu - L$. 不难发现, 体系的哈密顿量为 0: $H = 0$. 这表明波函数不依赖于 τ . 因为波函数是实际的物理量, 而 τ 则仅仅是人为选取的参数. 这两者彼此互不依赖是很正常的. 但我们应当注意, 这并不意味着时间不出现在我们所考虑的问题中. 相反的是, 在相对论的语境下, 时间实际上是一个算符, 正如空间坐标 \vec{X} 一样. 这表明波函数 Ψ 同时是时间与空间的函数. 它在量子力学中对应的不是与时间无关的态矢, 它更像是非相对论薛定谔方程的积分解.

经典体系中存在限制条件 eq. (2.1. 10). 而在量子理论中, 我们则将这一限制作为算符等式作用在波函数上, 如 $(p^\mu p_\mu + m^2)\Psi = 0$. 利用坐标表象下的动量算符形式 $p_\mu = -i\partial/\partial X^\mu$, 我们不难发现这一限制正是克莱因-戈尔登 (Klein-Gordon) 方程:

$$\left(-\frac{\partial}{\partial X^\mu} \frac{\partial}{\partial X^\nu} \eta^{\mu\nu} + m^2 \right) \Psi(X) = 0. \quad (2.2. 13)$$

尽管这一方程与量子场论中出现的方程高度一致, 我们仍应当意识到它们的解释实际上是不同的. 在相对论性的量子场论中, 克莱因-戈尔登方程是标量场所满足的运动方程. 而在相对论性的量子力学中, 这是波函数所满足的等式. 在量子场论发展的早期阶段, 两个等式形式上一致这一点让很多人认为我们应当将波函数看作标量场并进行所谓"二次量子化". 这个观点实际上并不正确, 但是由于历史原因, 我们并没有对称谓进行改变. 现在我们一般将点粒子观点称为一次量子化, 场论的观点称为二次量子化.

目前为止我们讨论了自由点粒子, 那么我们如何才能将相互作用纳入其中呢? 首先我们应当考虑我们允许什么样的相互作用: 一个点粒子可能分裂为两个, 或者与另一个融合

成为新的粒子？当然，我们实际上有很多选择。然后我们应当给这些过程搭配适当的振幅，而振幅存在一定的限制，例如么正性 (unitary) 等要求会给出诸如反粒子存在的必要性等结论。然后我们就可以针对不同的相互作用画出图。一步一步地我们便可以得到在量子场论中所学的费曼图展开。在量子化过程中处理路径积分将会遇到指数上作用量形式的泛函积分，而我们目前的作用量的形式是 eq. (2.1. 6)，其中的根号会给计算带来极大的麻烦，这一点可以从如下的计算中看出：首先考虑二次型作用量：

$$S_{quad}[X] = \int d\tau X^\mu(\tau) D_{\mu\nu} X^\nu(\tau), \quad (2.2. 14)$$

其中 $D_{\mu\nu}$ 为可能包含任意数量的关于 τ 导数的线性算符。于是我们可以将路径积分改写为：

$$\int \mathcal{D}[X] \exp \{-S_{quad}[X]\} = \int \mathcal{D}[X] \exp \left\{ - \int d\tau X^\mu(\tau) D_{\mu\nu} X^\nu(\tau) \right\}, \quad (2.2. 15)$$

这实际上就是高斯积分 $\int_{-\infty}^{\infty} d^n x e^{-\vec{x} D \vec{x}} = \sqrt{\frac{\pi}{\det D}}$ 的连续化推广。但是，根号形式的作用量 eq. (2.1. 6) 给出的路径积分：

$$\int \mathcal{D}[X] \exp \{-S_{old}[X]\} = \int \mathcal{D}[X] \exp \left\{ m \int d\tau \sqrt{-\dot{X}^2(\tau)} \right\}, \quad (2.2. 16)$$

在有限情况下 $\int_{-\infty}^{\infty} d^n x e^{-\sqrt{\vec{x} A \vec{x}}}$ 已经十分复杂。

于是我们希望能够写出一个与旧的作用量 eq. (2.1. 6) 等价，但是形式上则为 X 的二次的新的作用量。我们的构造方法如下：

在世界线上引入另一个新的场， $e(\tau)$ ，考虑如下作用量：

$$S_{new} = \frac{1}{2} \int d\tau \left(e^{-1} \dot{X}^2 - e m^2 \right), \quad (2.2. 17)$$

其中 $\dot{X}^2 = \dot{X}^\mu \dot{X}^\nu \eta_{\mu\nu}$ 。本书之后的内容里诸如 X^2 及 $A \cdot B$ 均表示与时空指标在闵氏度规下缩并。

这一作用量在形式上等同于将世界线与一维引力耦合，我们引入的新场 $e(\tau)$ 实际上是作为一标架 (德语为 einbein) 出现¹。我们可以将作用量 eq. (2.2. 17) 改写为：

$$S_{new} = -\frac{1}{2} \int d\tau \sqrt{-g_{\tau\tau}} \left(g^{\tau\tau} \dot{X}^2 + m^2 \right). \quad (2.2. 18)$$

¹与广义相对论中引入的四标架 (tetrad, 德语为 vierbein) 相对应，所谓的四标架实际上是流形切丛上的任一截面，例如在流形上局域定义的任意的四个线性独立矢量场的集合。对于更一般的维数下的 (广义) 黎曼空间我们也可以做类似的操作来构造标架 (德语为 vielbein)。

这便得到了与引力耦合的结构. 其中 $g_{\tau\tau} = (g^{\tau\tau})^{-1}$ 是世界线上的度规 $e = \sqrt{-g_{\tau\tau}}$, 它原则上作为张量出现, 但仅有一个分量, 因此可以放在根号内.

接下来我们要说明 eq. (2.2. 17) 与前面得到的 eq. (2.1. 6) 等价. 首先我们可以从 eq. (2.2. 17) 得到 e 的运动方程:

$$\frac{\delta S_{new}[X, e]}{\delta e(\tau)} = -\frac{1}{2e^2} \left(\frac{1}{e} \dot{X}^2 - em^2 \right) = 0, \quad (2.2. 19)$$

我们用 $e_{class} = \sqrt{-\frac{\dot{X}^2}{m^2}}$ (下标表示"经典构型", 指未对 e 进行正则量子化, 没有对应的正则动量等概念) 来表示 $\frac{\delta S_{new}[X, e]}{\delta e(\tau)} = 0$ 的解, 我们将它代回 eq. (2.2. 17), 我们就可以得到:

$$\begin{aligned} S_{new}[X, e_{class}] &= \frac{1}{2} \int d\tau \left(\frac{1}{\sqrt{-\frac{\dot{X}^2}{m^2}}} \dot{X}^2 - \sqrt{-\frac{\dot{X}^2}{m^2}} m^2 \right) \\ &= -m \int d\tau \sqrt{-\dot{X}^2} = S_{old}[X]. \end{aligned} \quad (2.2. 20)$$

尽管我们的作用量在形式上有一个新的自由度, e , 我们仍可以用如下的方式得到 eq. (2.1. 6) 与 eq. (2.2. 17) 对应的 X 运动方程相同:

$$\frac{\delta S_{new}[X, e_{class}]}{\delta X_\mu(\tau)} = \frac{\delta S_{old}[X]}{\delta X_\mu(\tau)} = -\frac{d}{d\tau} \frac{\dot{X}^\mu}{e_{class}} = -\frac{d}{d\tau} \frac{m\dot{X}^\mu}{\sqrt{-\dot{X}^2}} = 0 \quad (2.2. 21)$$

原因就是 e 的经典构型完全被运动方程 $\dot{X}^2 + e^2 m^2 = 0$ 完全固定.

于是我们证明了在 e 的经典构型下, eq. (2.2. 17) 与 eq. (2.1. 6) 等价, 但 eq. (2.2. 17) 的形式是 X 的二次型, 更利于我们进行路径积分量子化, 并且 eq. (2.2. 17) 可以描述无质量粒子.

另一个 S_{new} 的有趣性质是质壳条件现在被包含在运动方程中:

$$\begin{aligned} p_\mu &= \frac{\partial L_{new}}{\partial \dot{X}^\mu} = \frac{\dot{X}^\mu}{e} \\ p_\mu p^\mu|_{e_{class}} &= \frac{X^\mu X_\mu}{e_{class}^2} = -m^2 \end{aligned} \quad (2.2. 22)$$

与之前的作用量 eq. (2.1. 6) 相同的是, eq. (2.2. 17) 也满足重参数化不变性, 即一维微分同胚不变性. 我们考虑微分同胚 $\tau \rightarrow \tilde{\tau}$ 的无穷小形式 $\tilde{\tau} = \tau - \eta(\tau)$ 并取 $\eta(\tau)$ 的一阶. 这实际上是主动观点下的坐标变换, 即坐标基底不变, 而场在 τ 处的值改在

$\tilde{\tau} = \tau - \eta(\tau)$ 的值. 对于标量场, 我们有: $\tilde{X}^\mu(\tilde{\tau}) = X^\mu(\tau)$ ². 于是我们有 X^μ 的如下变换规则 (仅考虑 η 的一阶项):

$$\begin{aligned}\tilde{X}^\mu(\tau) &= \tilde{X}^\mu(\tilde{\tau} + \eta(\tau)) \\ \delta X^\mu(\tau) &= \tilde{X}^\mu(\tau) - X^\mu(\tau) = \frac{dX^\mu}{d\tau} \eta(\tau),\end{aligned}\tag{2.2. 23}$$

而一标架的变换规则需要从世界线度规的变换规则来导出, 世界线上的度规毫无疑问是一个张量, 尽管它仅有一个矩阵元³, 张量的变换律为 $\tilde{g}_{\mu\nu}(\tilde{\tau}) = \frac{\partial \tau_\mu}{\partial \tilde{\tau}_\mu} \frac{\partial \tau_\nu}{\partial \tilde{\tau}_\nu} g_{\mu\nu}(\tau)$ 而在我们考虑的问题中 $\mu\nu$ 必然相同 (因为是在世界线上的一维情况), 于是:

$$\tilde{e}(\tilde{\tau}) = \sqrt{-\tilde{g}_{\tilde{\tau}\tilde{\tau}}} = \sqrt{-\frac{\partial \tau}{\partial \tilde{\tau}} \frac{\partial \tau}{\partial \tilde{\tau}} g_{\tau\tau}} = \frac{\partial \tau}{\partial \tilde{\tau}} \sqrt{-g_{\tau\tau}} = \frac{\partial \tau}{\partial \tilde{\tau}} e(\tau),\tag{2.2. 24}$$

则 e 的无穷小变换为:

$$\delta e = \tilde{e}(\tau) - e(\tau) = \tilde{e}(\tilde{\tau} + \eta(\tau)) - e(\tau) = \frac{d}{d\tau}(\eta(\tau)e) = \eta\dot{e} + e\dot{\eta}.\tag{2.2. 25}$$

一标架 e 的变换规则与世界线上的密度一致, 而 X^μ 的变换则与世界线上的标量一致.

代回作用量中, 我们可以计算作用量在这一无穷小重参数化变化下的变化量 δS :

$$\delta S_{new}[X, e] = \frac{1}{2} \int d\tau \frac{d}{d\tau} \left(\frac{\eta}{e} \dot{X}^2 - \eta e m^2 \right) = 0,\tag{2.2. 26}$$

这一项为零用到了我们对物理体系的边界要求: 拉氏量在 $\tau \rightarrow \pm\infty$ 边界处为零.

于是, 新的作用量与旧的作用量在一标架的经典构型下等价, 均满足重参数化不变性. 但新的作用量 eq. (2.2. 17) 更容易进行量子化, 而且存在非平凡的无质量极限 $m \rightarrow 0$

2.3 弦的作用量与世界面面积等价

一个点粒子在闵氏时空中扫过一条世界线, 通过将点粒子推广至存在一定尺度的弦, 前面关于点粒子的讨论便可推广至由周期性类空参数 $\sigma \sim \sigma + 2\pi$ 描述的闭弦, 它没有自由端点, 因此要求其光滑连接, 这便是周期性边界的来源. 闭弦在闵氏时空中扫过一个二维世界面 Σ , 我们用一个类时坐标 τ 和一个类空坐标 σ 来对 Σ 进行参数化, σ 的取

²这里 X^μ 虽然带有洛伦兹指标但应被视为世界线上的标量场, 背景时空中的矢量的分量在世界线上实际上是 4 个标量.

³这里指取定参数 (坐标系) 后写出的分量式.

值范围是

$$\sigma \in [0, 2\pi) . \quad (2.3. 27)$$

我们也用 $\sigma^\alpha = (\tau, \sigma)$, $\alpha = 0, 1$ 的记号⁴ 将世界面的坐标写成统一的格式.

而 Σ 向所谓 "靶空间 (target space)"⁵ 的嵌入由嵌入映射 $X^\mu(\sigma, \tau) : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^{1, D-1}$ (其中 $\mu = 0, \dots, D-1$) 来描述, 对于闭弦 (类空参数 σ 周期化), 我们要求

$$X^\mu(\sigma, \tau) = X^\mu(\sigma + 2\pi, \tau) . \quad (2.3. 28)$$

我们需要一个作用量来描述弦的动力学. 而这一作用量的一个核心特征便是它不能依赖与人为选取的参数和坐标系, 即与 σ^α 无关. 换言之, 弦的作用量应当是重参数化不变的. 什么样的作用量满足这一特征呢? 我们已经知道对于点粒子, 重参数化不变的作用量正比于世界线长度. 那么对于弦来说, 作为点粒子的推广, 一个可能的答案便是: 弦的作用量正比于弦对应的世界面面积, A . 这便是南部-后藤作用量 (Nambu-Goto action) :

$$S_{NG}[X] = -T \int dA_{Mink} \quad (2.3. 29)$$

这是一个描述弦本身特征而非参数依赖的量.

那么我们应当如何用坐标 $X^\mu(\sigma, \tau)$ 给出弦的面积 A ? 我们可以首先考虑一个闵氏背景时空中嵌入的世界面的简单类比: 欧氏时空嵌入世界面的面积 A_{Eucl} (其中 $\vec{X}(\sigma, \tau) \in \mathbb{R}^D$). 我们用 τ 和 σ 来对世界面进行参数化, 那么欧氏空间的坐标就可以写为 $\vec{X}(\sigma, \tau)$. 边界上的切矢可以表示为:

$$\vec{dl}_1 = \frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma} d\sigma = \vec{X}' d\sigma, \quad \vec{dl}_2 = \frac{\partial \vec{X}}{\partial \tau} d\tau = \dot{\vec{X}} d\tau.$$

将这两个矢量的夹角取为 θ , 则面积 A_{Eucl} 可以表示为:

$$dA_{Eucl} = |\vec{dl}_1| |\vec{dl}_2| \sin \theta = d^2\sigma |\vec{X}'| |\dot{\vec{X}}| \sqrt{1 - \cos^2 \theta} = d^2\sigma \sqrt{|\vec{X}'|^2 |\dot{\vec{X}}|^2 - (\vec{X}' \cdot \dot{\vec{X}})^2} \quad (2.3. 30)$$

其中 $d^2\sigma = d\tau d\sigma$, θ 的余弦则可以表示为 X 导数的函数的形式, $\cos \theta = \frac{\vec{X}' \cdot \dot{\vec{X}}}{|\vec{X}'| |\dot{\vec{X}}|}$.

世界面是时空中的嵌入流形, 坐标本身就是一个嵌入映射, 那么我们可以利用这一嵌入映射定义拉回映射 (pull back) 来将靶空间 (target space) 上的闵氏度规或欧氏度规拉

⁴注意与靶空间的洛伦兹指标区分, 靶空间的洛伦兹指标从 μ 开始取, $\mu, \nu, \dots = 0, 1, 2, \dots$. 而世界面上的指标则是从 α 开始, $\alpha, \beta, \dots = 0, 1$.

⁵在这里实际上就是四维的闵氏时空.

回到嵌入子流形得到诱导度规 (induced metric) $\gamma_{\alpha\beta}$:

$$\gamma_{\alpha\beta} = \frac{\partial X^\mu}{\partial \sigma^\alpha} \frac{\partial X^\nu}{\partial \sigma^\beta} \eta_{\mu\nu}, \quad (\gamma_{\alpha\beta})_{Eucl} = \frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma^\alpha} \cdot \frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma^\beta} \quad (2.3. 31)$$

代回 eq. (2.3. 30), 我们可以得到

$$dA_{Eucl} = d^2\sigma \sqrt{\det \gamma_{Eucl}} \quad (2.3. 32)$$

于是在闵氏背景时空中的面元便可以表示为:

$$dA_{Mink} = d^2\sigma \sqrt{-\det \gamma} \quad (2.3. 33)$$

其中负号来自于度规的号差, 是为了保证根号内为正, 选取另一种度规便没有这一负号. 作用量借闵氏时空面元可以表示为:

$$S_{NG} = -T \int d^2\sigma \sqrt{-\det \gamma}. \quad (2.3. 34)$$

此处的 T 作为归一化常数出现, 为理解这一常数的意义, 我们可以取闵氏空间 $X^\mu = (t, \vec{x})$, $X^0 \equiv t = R\tau$, 其中 R 是用来平衡维数的常数, 我们稍后会看到, R 在最后结果中会抵消. 考虑某时刻满足 $d\vec{x}/d\tau = 0$ 的弦, 瞬时动能为 0. 计算 dt 区间内的作用量, 我们可以得到:

$$S = -T \int d\tau d\sigma R \sqrt{(d\vec{x}/d\sigma)^2} = -T \int dt (\text{类空弦长}). \quad (2.3. 35)$$

而当动能为 0 时, 作用量正比于势能的时间积分, 于是有:

$$\text{势能} = T \times (\text{类空弦长}).$$

我们发现 T 是单位长度的能量:

$$T = \frac{\text{势能}}{\text{类空长度}} = \text{张力} \quad (2.3. 36)$$

在经典力学中, 我们通常利用表达式:

$$T = \frac{1}{2\pi\alpha'} \quad (2.3. 37)$$

来表示张力 (胡克定律 (Hooke's law)), 于是我们将 T 类比为弦的张力. 而为了使能量

趋于最小, 弦的空间尺度总是趋于 0. 而我们后面在引入量子效应后就会发现, 由于零点能的存在, 弦长不可能完全为 0.

我们通常将张力写为:

$$T = \frac{1}{2\pi\alpha'}, \quad (2.3. 38)$$

其中 α' 原本是指"雷吉斜率 (Regge slope)"这一物理量.

目前我们得到的几个量的量纲分别为: 时空坐标量纲 $[X] = -1$. 不同的是, 世界面坐标无量纲, $[\sigma] = 0$. (从周期性条件 $\sigma \equiv \sigma + 2\pi$ 易得). 弦张力正比于单位长度下的质量, 因此量纲为 $[T] = 2$. 即, $[\alpha'] = -2$. 我们可以定义弦长 l_s :

$$\alpha' = l_s^2 \quad (2.3. 39)$$

弦长 l_s 是弦理论中自然出现的长度量, 实际上弦理论中唯一的参数就是弦长参数. 我们可以把南部-后藤作用量完整地写出来. 首先写出度规拉回映射后的分量形式:

$$\gamma_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} \dot{X}^2 & \dot{X} \cdot X' \\ \dot{X} \cdot X' & X'^2 \end{pmatrix}$$

其中 $\dot{X}^\mu = \partial X^\mu / \partial \tau$, $X'^\mu = \partial X^\mu / \partial \sigma$. 作用量于是为:

$$S_{NG} = -T \int d^2\sigma \sqrt{-(\dot{X})^2(X')^2 + (\dot{X} \cdot X')^2}. \quad (2.3. 40)$$

这就是弦的南部后藤作用量. 南部-后藤作用量存在两种对称性,

- 时空的庞加莱 (Poincaré) 对称性. 这一对称性在世界面的视角下是全局对称性, 即描述这一对称性的参数 Λ^μ_ν 及 c^μ 不依赖于弦的世界面坐标 σ^α .
- 重参数化不变性 $\sigma^\alpha \rightarrow \tilde{\sigma}^\alpha(\sigma)$. 对于点粒子来说, 这一对称性是规范对称性. 它反映了我们对物理体系描述上的冗余, 即世界面坐标 σ^α 没有物理意义.

可以证明, S_{NG} 的运动方程是重参数化不变的波动方程. 为得到南部-后藤弦的运动方

程, 我们首先计算拉氏量关于 X 的 σ 导数的偏导, 即正则动量 Π :

$$\begin{aligned}\Pi_\mu^\tau &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{X}^\mu} = -T \frac{(\dot{X} \cdot X')X'_\mu - (X'^2)\dot{X}_\mu}{\sqrt{(\dot{X} \cdot X')^2 - \dot{X}^2 X'^2}} \\ \Pi_\mu^\sigma &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X'^\mu} = -T \frac{(\dot{X} \cdot X')\dot{X}_\mu - (\dot{X}^2)X'_\mu}{\sqrt{(\dot{X} \cdot X')^2 - \dot{X}^2 X'^2}}.\end{aligned}$$

我们可以直接写出欧拉拉格朗日方程 (拉氏量关于 X 的偏导为 0) :

$$\frac{\partial \Pi_\mu^\tau}{\partial \tau} + \frac{\partial \Pi_\mu^\sigma}{\partial \sigma} = 0$$

稍加整理便可以得到:

$$\partial_\alpha (\sqrt{-\det \gamma} \gamma^{\alpha\beta} \partial_\beta X^\mu) = 0 \quad (2.3. 41)$$

我们还可以从 eq. (2.3. 34) 出发, 直接关于 X 做变分, 利用 $\delta\sqrt{-\gamma} = \frac{1}{2}\sqrt{-\gamma}\gamma^{\alpha\beta}\delta\gamma_{\alpha\beta}$ 以及 $\gamma_{\alpha\beta}$ 的定义, 我们可以直接得到运动方程:

$$\frac{\delta S_{NG}[X]}{\delta[X]} = T \partial_\alpha (\sqrt{-\det \gamma} \gamma^{\alpha\beta} \partial_\beta X^\mu) = 0 \quad (2.3. 42)$$

我们也可以将 $\gamma_{\alpha\beta}$ 全都展开为 X 的形式, 得到更直接的 X 所满足的方程, 但计算过程平凡, 且与前述结果等价, 留作习题.

基本弦与其他弦

有很多物理现象可以用弦来描述, 但是这里的弦与我们所讲的存在一定差别. 例如: 超导体中的磁流管, 宇宙弦 (宇宙学中的一个分支), 以及 QCD 中的一些问题都可以用带两个参数 (弦的张力 T 与弦的厚度 L) 的弦理论来描述. 当 L 相关的项极小时便退化到我们的单参数弦理论 (基本弦), 我们仍可以使用南部-后藤作用量 (或其非相对论极限) 作为体系的作用量.

然而, 在上述这些例子中, L 并不一定趋于 0, 这就导致南部-后藤作用量并不是合适的作用量, 我们需要补充与弦厚度 L 相关的项 (刚性项) :

$$L \int K^2 \quad (2.3. 43)$$

其中 K 是世界面的外曲率. 甚至还需要补充反映弦厚度的波动的项.

弦长参数 l_s , 或等价地, 弦张力参数 T 取决于我们考虑的具体问题. 本书中我们所考虑的均为 $L \rightarrow 0$ 的无厚度弦 (基本弦).

2.4 可量子化的弦作用量

与点粒子的情况类似, 带有平方根的作用量都是较难进行路径积分量子化的. 受到点粒子作用量一节的启发, 我们现在可以尝试仿照 $S_{old} \rightarrow S_{new}$ 的方法给出一个世界面上与南部-后藤作用量在经典构型下等价但为场 X 的平方形式的作用量. 这由泊里雅科夫 (Polyakov) 作用量 S_P 实现⁶. 与世界线作用量类似地, 我们需要以引入一个新的场 (世界面度规 $g_{\alpha\beta}(\theta)$) 的代价来消除平方根带来的困难:

$$S_P[X, g] = -\frac{1}{4\pi\alpha'} \int d^2\sigma \sqrt{-g} g^{\alpha\beta} \partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X^\nu \eta_{\mu\nu} \quad (2.4. 44)$$

其中 $g \equiv \det g_{\alpha\beta}$ ⁷. 从世界面的角度, $S_P[X, g]$ 利用 $g_{\alpha\beta}(\sigma)$ 描述了 D 个标量场 $X^\mu(\sigma)$ 与二维引力的耦合.

与点粒子一节中的一标架类似, $g^{\alpha\beta}$ 是单独引入的辅助场, 由其运动方程对场的位形进行约束:

$$\frac{\delta S}{\delta g^{\alpha\beta}} = -\frac{\sqrt{-g}}{4\pi\alpha'} \int d^2\sigma \left(\partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X^\nu \eta_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} (g^{\rho\sigma} \partial_\rho X \cdot \partial_\sigma X) \right) = 0. \quad (2.4. 45)$$

对应于运动方程解的 $g^{\alpha\beta}$ 被称作经典构型 (classical configuration) 世界面度规, 这与点粒子的一标架经典构型是一致的, 记作 g^{class} . 而从 D 维时空出发, 我们可以利用 D 维时空的度规诱导出世界面 (作为嵌入子流形看待) 上的度规 eq. (2.3. 31). 那么, 在世界面上我们便独立地定义出了两个截然不同的度规, 我们自然希望两者成正比, 有这等好事吗? 有的. 利用 $g^{\alpha\beta}$ 的运动方程 eq. (2.4. 45), 我们可以得到:

$$g_{\alpha\beta}^{class} = F(\sigma) \partial_\alpha X \cdot \partial_\beta X = F(\sigma) \gamma_{\alpha\beta} \quad (2.4. 46)$$

其中 $F(\sigma) = \frac{2}{g^{\rho\sigma} \partial_\rho X \cdot \partial_\sigma X} = \frac{2}{g^{\rho\sigma} \gamma_{\rho\sigma}}$ ⁸, 又由于 γ 的逆定义为 $\gamma^{\alpha\beta} \gamma_{\alpha\beta} = 2$, 我们可以得到:

$$g^{\alpha\beta} \sqrt{-g} = \gamma^{\alpha\beta} \sqrt{-\gamma} \quad (2.4. 47)$$

⁶实际上, 泊里雅科夫并不是这一作用量的发现者, 但他发现了在路径积分中应用这一作用量的方法, 人们为纪念他的贡献, 将这一作用量命名为泊里雅科夫作用量.

⁷我们今后采用简写: $g = \det g_{\alpha\beta}$ 以及 $g^{\alpha\beta} g_{\beta\gamma} = \delta^\alpha_\gamma$.

⁸此处及今后我们都将 τ 视为 σ^0 , 于是可以将 $F(\sigma, \tau)$ 简记为 $F(\sigma)$, 将 $X(\sigma, \tau)$ 简记为 $X(\sigma)$.

因此我们可以把 g 与 γ 的区别限制到仅差一个常数. $g^{\alpha\beta}$ 与诱导度规 $\gamma^{\alpha\beta}$ 的相似性实际上暗示了泊里雅科夫作用量可以退化为南部-后藤作用量. 具体的过程便是将 g^{class} 代回泊里雅科夫作用量即可重新生成南部-后藤作用量:

$$\begin{aligned} S_P[X, g^{class}] &= -\frac{1}{4\pi\alpha'} \int d^2\sigma \sqrt{-F^2\gamma} \frac{\gamma^{\alpha\beta}\gamma_{\alpha\beta}}{F} \\ &= -\frac{1}{2\pi\alpha'} \int d^2\sigma \sqrt{-\gamma} = S_{NG}[X] \end{aligned} \quad (2.4. 48)$$

我们现在可以引入世界面的能动张量:

$$\begin{aligned} T_{\alpha\beta} &= \frac{4\pi}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_P[X, g]}{\delta g^{\alpha\beta}} \\ &= -\frac{1}{\alpha'} \left(\partial_\alpha X \cdot \partial_\beta X - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} (g^{\rho\sigma} \partial_\rho X \cdot \partial_\sigma X) \right) \end{aligned} \quad (2.4. 49)$$

X 的运动方程为

$$\frac{\delta S_P[X, g]}{\delta X^\mu} = -\partial_\alpha \frac{\partial L_p}{\partial (\partial_\alpha X^\mu)} = \frac{1}{2\pi\alpha'} \partial_\alpha (\sqrt{-g} g^{\alpha\beta} \partial_\beta X^\mu) = 0 \quad (2.4. 50)$$

我们可以发现, $g_{\alpha\beta} \leftrightarrow \gamma_{\alpha\beta}$ 替换后即可给出南部-后藤作用量给出的 X 运动方程 eq. (2.3. 42):

$$\begin{aligned} \frac{\delta S_P[X, g]}{\delta X^\mu} &= \frac{1}{2\pi\alpha'} \partial_\alpha \left(\sqrt{-F^2\gamma} \frac{\gamma^{\alpha\beta}}{F} \partial_\beta X^\mu \right) \\ &= \frac{1}{2\pi\alpha'} \partial_\alpha (\sqrt{-\gamma} \gamma^{\alpha\beta} \partial_\beta X^\mu) = \frac{\delta S_{NG}}{\delta X^\mu} \end{aligned} \quad (2.4. 51)$$

这又一次说明了 S_P 与 S_{NG} 的等价性.

我们发现尽管 $g_{\alpha\beta}$ 与 eq. (2.3. 31) 诱导度规 $\gamma_{\alpha\beta}$ 之间相差 F 因子, 但这并不影响泊里雅科夫作用量与南部-后藤作用量的等价性. 这是因为因子 F 在运动方程 eq. (2.4. 50) 中完全被抵消: $\sqrt{-g}$ 项与 F 成比例放缩, 而 $g^{\alpha\beta}$ 与 F^{-1} 成比例放缩, 最终抵消. 于是得到南部-后藤作用量与泊里雅科夫作用量给出相同的 X 的运动方程.

2.4.1 泊里雅科夫作用量的对称性

eq. (2.4. 46) 中出现 $F(\sigma)$ 因子而不影响 X^μ 运动方程这一事实表明泊里雅科夫作用量存在额外的对称性. 首先, 泊里雅科夫作用量仍有南部-后藤作用量所满足的两条对称性:

- 世界面上的全局庞加莱对称性:

$$X^\mu \rightarrow \Lambda^\mu_\nu X^\nu + c^\mu .$$

其中 $\Lambda^\mu_\nu \in SO(1, D-1)$ 是 D 维时空中的洛伦兹变换. 我们应当注意, 此处的洛伦兹指标 μ, ν, \dots 从世界面的角度是内部指标, 这与标准模型中夸克的味荷在时空的角度是内部指标十分相似. 实际上这也正是庞加莱对称性属于世界面上的全局对称性的原因.

- 重参数化 (reparameterization) / 微分同胚 (diffeomorphism) 不变性. 这实际上是世界面上的规范对称性. 我们可以重定义世界面坐标 $\sigma^\alpha \rightarrow \tilde{\sigma}^\alpha(\sigma)$. X^μ 场以世界面标量的形式变换, 而 $g_{\alpha\beta}$ 以 2 维度规的形式变换:

$$\begin{aligned} X^\mu(\sigma) &\rightarrow \tilde{X}^\mu(\tilde{\sigma}) = X^\mu(\sigma) \\ g_{\alpha\beta}(\sigma) &\rightarrow \tilde{h}_{\alpha\beta}(\tilde{\sigma}) = \frac{\partial \sigma^\gamma}{\partial \tilde{\sigma}^\alpha} \frac{\partial \sigma^\delta}{\partial \tilde{\sigma}^\beta} g_{\gamma\delta}(\sigma). \end{aligned}$$

这一变换存在无穷小形式. 考虑无穷小坐标变换 $\sigma^\alpha \rightarrow \tilde{\sigma}^\alpha = \sigma^\alpha - \eta^\alpha(\sigma)$, 对于无穷小 η . 场的变换于是为:

$$\begin{aligned} \delta X^\mu(\sigma) &= \eta^\alpha \partial_\alpha X^\mu \\ \delta g_{\alpha\beta}(\sigma) &= \nabla_\alpha \eta_\beta + \nabla_\beta \eta_\alpha \end{aligned}$$

协变导数定义为 $\nabla_\alpha \eta_\beta = \partial_\alpha \eta_\beta - \Gamma_{\alpha\beta}^\sigma \eta_\sigma$ 其中列维-奇维塔 (Levi-Civita) 联络与度规的关系如下:

$$\Gamma_{\alpha\beta}^\sigma = \frac{1}{2} g^{\sigma\rho} (\partial_\alpha g_{\beta\rho} + \partial_\beta g_{\rho\alpha} - \partial_\rho g_{\alpha\beta})$$

除上述两种对称性外, 泊里雅科夫作用量存在另一种新的对称性, 它被称作外尔 (Weyl) 不变性 (注意其与微分同胚变换的区别):

- 外尔不变性. 这一对称性与 X^μ 无关, 即 $X^\mu(\sigma) \rightarrow X^\mu(\sigma)$, 而度规的变换为:

$$g_{\alpha\beta}(\sigma) \rightarrow \Omega^2(\sigma) g_{\alpha\beta}(\sigma) . \quad (2.4. 52)$$

我们可以利用指数形式来考虑无穷小变换 $\Omega^2(\sigma) = e^{2\phi(\sigma)}$. 对于无穷小 ϕ , X^μ 仍是不变的, 而度规的无穷小变换可以写为:

$$\delta g_{\alpha\beta}(\sigma) = 2\phi(\sigma) g_{\alpha\beta}(\sigma) .$$

泊里雅科夫作用量满足外尔不变性非常显然. 此处的因子 Ω^2 相消的方式与 eq. (2.4. 46) 中因子 F 被抵消的方式一致, 都是来自于 $\sqrt{-g}$ 与逆度规 $g^{\alpha\beta}$. 外尔不变性实际上是弦的规范对称性, 它指的是世界面度规 $g_{\alpha\beta}$ 在如下形式下的缩放:

$$g_{\alpha\beta} \rightarrow e^{2\omega(\tau,\sigma)} g_{\alpha\beta}. \quad (2.4. 53)$$

然而, 在确定世界面的嵌入方式 (即物理态) 的选取后, 世界面诱导度规 $\gamma_{\alpha\beta}$ 本身包含冗余的自由度, 可以通过外尔变换进行重新缩放. 但需要注意的是, 这一缩放并不会改变先前得到的关于 $\gamma_{\alpha\beta}$ 的约束, 因此, 外尔变换不会改变弦的嵌入方式这一物理本质, 而仅仅是度规的规范变换.

我们应当如何看待外尔不变性? 它实际上并不是一个坐标变换, 而是一个局域保角变换的不变性. 此外, 带这种特性的物理理论少之又少. 从前面的讨论中我们应当已经能发现 2 维对于外尔不变性是十分特殊的, 这是因为只有在 2 维时 $\sqrt{-g}$ 与逆度规给出的放缩因子可以互相抵消. 但即便是在二维下, 如果我们希望保留外尔不变性我们仍需要极大地限制作用量中可用的相互作用种类. 然而, 我们在点粒子世界线一节已经看到重参数化对称性对于辨别 X^μ 的物理自由度十分重要. 同样地, 世界面上作用量的局域对称性对接下来自由度的分析也十分重要. 因此我们不能在泊里雅科夫作用量 S_P 上加入会破坏外尔不变性与重参数化不变性的相互作用项. 例如, 不允许以世界面标量形式出现的势能项:

$$\int d^2\sigma \sqrt{-g} V(X),$$

或世界面宇宙常数项:

$$\mu \int d^2\sigma \sqrt{-g}.$$

这两种相互作用均会破坏掉外尔不变性. 我们在本书后面的内容中将会发现, 外尔不变性的需求在量子理论中会变得更加严格. 我们也会看到我们究竟可以在世界面上附加什么样的相互作用项, 实际上本书中的很大一部分都可以视为对具有外尔不变性的理论的研究.

2.5 共形规范的固定

我们接下来会看到, 我们可以利用泊里雅科夫作用量 S_P 的对称性局域地将度规进行规范固定 $g_{\alpha\beta} \rightarrow \eta_{\alpha\beta} = \text{diag}(-1, +1)$. 此前的运动方程 eq. (2.4. 50) 形式比较复杂. 然而, 我们可以利用规范对称性的冗余, 在消除冗余的同时选取使运动方程简化的坐标. 接下来我们考虑如何利用规范对称性做到这一点.

度规是非退化的对称二阶张量. 在二维的世界面上, 度规及其逆均为 2×2 矩阵, 由对称性 $g_{\alpha\beta} = g_{\beta\alpha}$, 矩阵形式的度规 $g_{\alpha\beta}$ 存在三个独立的矩阵元. 重参数化是微分同胚 $\sigma^\alpha \rightarrow \tilde{\sigma}^\alpha(\sigma)$, 其中 $\alpha = 0, 1$. 这两个独立的重参数化映射可以用于局域地固定度规中的两个矩阵元, 例如可以将非对角元取为 0 并给出两对角元之间的一个限制. 这种取法可以使得度规局域地平直, 即

$$g_{\alpha\beta} = e^{2\phi} \eta_{\alpha\beta}, \quad (2.5. 54)$$

实际上我们总可以局域地做到这一点. 即 eq. (2.5. 54) 给出的 $\sigma(\tilde{\sigma})$ 所满足的偏微分方程总是局域地存在解. $\phi(\sigma, \tau)$ 是世界面上的某一函数. 选取满足 eq. (2.5. 54) 形式的度规被称为共形规范 (conformal gauge).

我们为得到 eq. (2.5. 54) 仅仅使用了重参数化不变性, 还有外尔变换没有涉及. 显然, 我们可以利用外尔变换来去掉共形因子 $e^{2\phi}$. 即, 取 $\phi = 0$ 使得:

$$g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta}. \quad (2.5. 55)$$

最终我们得到了世界面上的闵氏度规.

得到闵氏形式的度规后我们仍有冗余的规范自由性: 具有外尔形式度规的一类微分同胚变换不变性. 为理解这一点我们可以在电动力学中麦克斯韦理论中找到类比: 在我们取洛伦兹规范 $\partial_\mu A^\mu = 0$ 后, A^μ 仍可以进行规范变换: $A^\mu \rightarrow A^\mu + \partial^\mu \Lambda$. 这样的规范变换后的 A^μ 仍满足无质量波方程 $\partial^2 A = 0$ 及洛伦兹规范. 与之类似的, 泊里雅科夫作用量的冗余规范自由度便体现在前后均满足波方程与规范方程的变换上, 具体来说就是对度规的作用可以被外尔变换复原的微分同胚变换, 这一变换也叫做共形变换.

平直度规的选取是坐标无关的

我们可以利用外尔不变性将任何二维度规平直化是一个很重要的结论, 我们可以在不依赖具体的坐标选取的前提下重新得出这一结论. 为避免号差带来的计算困难, 我们考虑二维欧氏空间中利用外尔变换彼此联系的度规 $g'_{\alpha\beta} = e^{2\phi} g_{\alpha\beta}$. 两度规对应的李奇标量之间的关系为:

$$\sqrt{g'} \mathcal{R}' = \sqrt{h} (\mathcal{R} - 2\nabla^2 \phi). \quad (2.5. 56)$$

在二维 (而非更高维) 情况下, 若李奇标量为 0 便可以说明度规平直, 这是由于二维指标的选取仅能为 1, 2 (闵氏则为 0, 1). 特别地, 黎曼张量指标的反对称性使得其在二维必须取如下形式:

$$\mathcal{R}_{\alpha\beta\gamma\delta} = \frac{\mathcal{R}}{2} (g_{\alpha\gamma} g_{\beta\delta} - g_{\alpha\delta} g_{\beta\gamma}).$$

即我们可以从李奇标量为 0 得到黎曼张量为 0, 因而流形平坦, 度规自然为平直度规.

接下来我们便可以求满足李奇标量 $\mathcal{R}' = 0$ 的 ϕ , 这实际上就是一个关于 ϕ 的微分方程, 至少局域有解. 我们可以发现, 我们在这里利用外尔不变性选取平直度规并没有使用重参数化不变性, 而 eq. (2.5. 55) 中使用重参数化不变性相当于是为了选取使平直度规为闵氏度规形式的特殊坐标, 实际上外尔对称性便已足够使度规平直化.

2.5.1 运动方程与能动张量

在 eq. (2.4. 49) 和 eq. (2.4. 50) 中我们已经得出了对于一般度规 $g_{\alpha\beta}$, 能动张量和 X^μ 所满足的运动方程的具体形式, 我们接下来考虑平直度规下的能动张量与运动方程. 取平直度规 eq. (2.5. 55), 泊里雅科夫作用量可以化简为:

$$S_{CG} = S_P[X, g_{\alpha\beta} = e^{2\phi}\eta_{\alpha\beta}] = -\frac{1}{4\pi\alpha'} \int d^2\sigma \partial_\alpha X \cdot \partial^\alpha X, \quad (2.5. 57)$$

我们还可将 X^μ 的运动方程简化为自由波方程:

$$\partial_\alpha \partial^\alpha X^\mu = 0. \quad (2.5. 58)$$

于是我们形式上将 eq. (2.4. 50) 变为了较简单的形式. 应当注意的是, 我们虽然选取了一种度规 $g_{\alpha\beta}$ 的规范, 却仍需要满足 $g_{\alpha\beta}$ 的运动方程. 实际上, 作用量关于度规求泛函导数会给出一个特殊的量, 能动张量:

$$T_{\alpha\beta} = \frac{4\pi}{\sqrt{-g}} \frac{\partial S}{\partial g^{\alpha\beta}}.$$

在 eq. (2.4. 45) 我们求出了泊里雅科夫作用量关于 $g_{\alpha\beta}$ 的泛函导数, 代回上式并取 $g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta}$ 便得到:

$$T_{\alpha\beta} = -\frac{1}{\alpha'} \left(\partial_\alpha X \cdot \partial_\beta X - \frac{1}{2} \eta_{\alpha\beta} (\eta^{\rho\sigma} \partial_\rho X \cdot \partial_\sigma X) \right). \quad (2.5. 59)$$

与度规 $g_{\alpha\beta}$ 关联的约束实际上是 $T_{\alpha\beta} = 0$. 分量形式为:

$$\begin{aligned} T_{01} &= \dot{X} \cdot X' = 0 \\ T_{00} &= T_{11} = \frac{1}{2} (\dot{X}^2 + X'^2) = 0. \end{aligned} \quad (2.5. 60)$$

称为维拉索罗约束 (Virasoro constrain) 于是我们可以得出结论, 弦的运动方程是受到 $T_{\alpha\beta} = 0$ 得到的 eq. (2.5. 60) 所限制的自由波方程 eq. (2.5. 58).

维拉索罗约束的物理意义

我们可以尝试给出维拉索罗约束对应的物理意义: eq. (2.5. 60) 中的第一个约束条件的含义实际上就是⁹: 我们需要选取常 σ 线与常 τ 线相互垂直的参数化. 满足这一约束的参数化很多, 我们甚至可以选取满足下式的所谓静态规范:

$$X^0 \equiv t = R\tau$$

于是 $(X^0)' = 0$ 且有 $\dot{X}^0 = R$, 其中 R 为带量纲的常数, 这样 τ 便是以实数形式出现的参数. 于是, 静态规范下我们可以将 X^μ 取为 $X^\mu = (t, \vec{x})$, 其空间分量的运动方程为自由波方程:

$$\ddot{\vec{x}} - \vec{x}'' = 0$$

维拉索罗约束则改为:

$$\begin{aligned} \dot{\vec{x}} \cdot \vec{x}' &= 0 \\ \dot{\vec{x}}^2 + \vec{x}'^2 &= R^2 \end{aligned} \quad (2.5. 61)$$

第一个约束表明弦的运动必须与弦自身的走向正交. 换言之, 弦的振动模式必然为横向. 弦的振动不存在纵向模式. 我们在讲到光锥量子化 (lightcone quantization) 3.3 节时会重新看到这一点.

而第二条约束可以让我们进一步了解 R 的物理含义: 在 $\dot{\vec{x}} = 0$ 时, R 与弦的长度有关:

$$\int d\sigma \sqrt{(d\vec{x}/d\sigma)^2} = 2\pi R .$$

假如弦在满足 $\dot{\vec{x}} = 0$ 的某时刻处于被拉长的状态, 那么在之后的时间里, 它会由于自身的张力收缩. 第二个约束条件此时发挥的作用便是将弦的瞬时速度与长度相互关联.

⁹在光锥量子化 (lightcone quantization) 3.3 一节中我们会进一步讨论这条限制的的意义.

2.6 振动模式的展开

进一步考虑运动方程与约束条件. 运动方程 eq. (2.5. 58) 很容易求解. 我们在世界面上引入光锥坐标 (lightcone coordinates) :

$$\sigma^\pm = \tau \pm \sigma, \quad \partial_\pm = \frac{\partial}{\partial \sigma^\pm} = \frac{1}{2}(\partial_\tau \pm \partial_\sigma), \quad \partial_\alpha \partial^\alpha = -4\partial_+ \partial_- \quad (2.6. 62)$$

在这种坐标系内, 度规 η 是非对角化的:

$$\begin{aligned} \eta_{++} &= \frac{\partial \sigma^\alpha}{\partial \sigma^+} \frac{\partial \sigma^\beta}{\partial \sigma^+} \eta_{\alpha\beta} = \frac{1}{4}(\eta_{00} + \eta_{11}) = 0 \\ \eta_{+-} &= \frac{\partial \sigma^\alpha}{\partial \sigma^+} \frac{\partial \sigma^\beta}{\partial \sigma^-} \eta_{\alpha\beta} = \frac{1}{4}(\eta_{00} - \eta_{11}) = -\frac{1}{2} \\ \eta_{-+} &= \frac{\partial \sigma^\alpha}{\partial \sigma^-} \frac{\partial \sigma^\beta}{\partial \sigma^+} \eta_{\alpha\beta} = \frac{1}{4}(\eta_{00} - \eta_{11}) = -\frac{1}{2} \\ \eta_{--} &= \frac{\partial \sigma^\alpha}{\partial \sigma^-} \frac{\partial \sigma^\beta}{\partial \sigma^-} \eta_{\alpha\beta} = \frac{1}{4}(\eta_{00} + \eta_{11}) = 0 \end{aligned}$$

即:

$$\eta_{\pm\pm} = \begin{pmatrix} 0 & -1/2 \\ -1/2 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.6. 63)$$

弦的运动方程为:

$$\partial_+ \partial_- X^\mu = 0$$

最一般形式的解为:

$$X^\mu(\sigma) = X_L^\mu(\sigma^+) + X_R^\mu(\sigma^-)$$

其中 X_L^μ 与 X_R^μ 为彼此独立的函数, 自变量分别为 σ^+ 和 σ^- . 他们分别描述向左与向右的波. 当然, 解必须遵守 eq. (2.5. 60) 中给出的限制条件. 对于闭弦, 还应当满足周期性边界条件¹⁰:

$$X^\mu(\sigma, \tau) = X^\mu(\sigma + 2\pi, \tau) . \quad (2.6. 64)$$

¹⁰对于开弦, 边界条件则不同, 具体将在开弦 4 一章中详细说明.

对于一般的性质较好的周期性函数, 其导数必然也是周期性函数, 于是我们可以对周期性函数 $\partial_+ X^\mu$ 和 $\partial_- X^\mu$ 进行离散的傅里叶展开 (Fourier expansion) ¹¹:

$$\begin{aligned}\partial_+ X^\mu &= \partial_+ X_L^\mu(\sigma^+) = \frac{l_s}{\sqrt{2}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \tilde{\alpha}_n^\mu e^{-in\sigma^+} \\ \partial_- X^\mu &= \partial_- X_R^\mu(\sigma^-) = \frac{l_s}{\sqrt{2}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha_n^\mu e^{-in\sigma^-} .\end{aligned}\quad (2.6. 65)$$

此处的 $\sqrt{2}$ 是为计算方便引入的常数, $l_s^2 = \alpha'$, l_s 是为平衡量纲而引入的. 我们于是可以得到 X_L 和 X_R 的展开式:

$$\begin{aligned}X_L^\mu(\sigma^+) &= x_L^\mu + \frac{l_s}{\sqrt{2}} \tilde{\alpha}_0^\mu \sigma^+ + i \frac{l_s}{\sqrt{2}} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \tilde{\alpha}_n^\mu e^{-in\sigma^+}, \\ X_R^\mu(\sigma^-) &= x_R^\mu + \frac{l_s}{\sqrt{2}} \alpha_0^\mu \sigma^- + i \frac{l_s}{\sqrt{2}} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \alpha_n^\mu e^{-in\sigma^-}, \\ X^\mu(\sigma^+, \sigma^-) &= (x_L + x_R)^\mu + \frac{l_s}{\sqrt{2}} (\alpha_0^\mu \sigma^- + \tilde{\alpha}_0^\mu \sigma^+) \\ &\quad + i \frac{l_s}{\sqrt{2}} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} (\alpha_n^\mu e^{-in\sigma^-} + \tilde{\alpha}_n^\mu e^{-in\sigma^+})\end{aligned}\quad (2.6. 66)$$

我们可以发现, X_L^μ, X_R^μ 作为独立的函数并不一定是 σ 的周期性函数, 而 X^μ 则必然是关于 σ 的周期函数, 于是我们可以得到 $\alpha_0^\mu \sigma^- + \tilde{\alpha}_0^\mu \sigma^+ = (\alpha_0^\mu + \tilde{\alpha}_0^\mu) \tau - (\alpha_0^\mu - \tilde{\alpha}_0^\mu) \sigma$ 是 X^μ 表达式中唯一与 σ 呈线性的项, 因此其系数一定为 0, 即:

$$\alpha_0^\mu = \tilde{\alpha}_0^\mu$$

因此我们可以得到:

$$X^\mu(\sigma^+, \sigma^-) = x^\mu + \sqrt{2} l_s \alpha_0^\mu \tau + i \frac{l_s}{\sqrt{2}} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} (\alpha_n^\mu e^{-in\sigma^-} + \tilde{\alpha}_n^\mu e^{-in\sigma^+})$$

我们期望 X^μ 为实函数, 因此从最后一项可以得到:

$$\alpha_n^\mu = (\alpha_{-n}^\mu)^* \quad \tilde{\alpha}_n^\mu = (\tilde{\alpha}_{-n}^\mu)^* .\quad (2.6. 67)$$

¹¹ 我们选取导函数而非直接对 X^μ 展开的原因在后文有所体现

我们可以进一步得到 $\delta X^\mu = b^\mu$ 所对应的守恒流及守恒荷:

$$\begin{aligned} j_\alpha^\mu &= \frac{1}{2\pi\alpha'} \partial_\alpha X^\mu, \\ p^\mu &= \int d\sigma j_0^\mu = \frac{1}{2\pi\alpha'} \int_0^{2\pi} d\sigma \partial_0 X^\mu = \frac{\sqrt{2}l_s\alpha_0^\mu}{\alpha'} = \sqrt{\frac{2}{\alpha'}} \alpha_0^\mu, \end{aligned} \quad (2.6.68)$$

其中最后一步用到了 $l_s^2 = \alpha'$. 最终我们得到了含 p^μ 形式的 X^μ :

$$X^\mu(\sigma^+, \sigma^-) = x^\mu + \alpha' p^\mu \tau + i \frac{l_s}{\sqrt{2}} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \left(\alpha_n^\mu e^{-in\sigma^-} + \tilde{\alpha}_n^\mu e^{-in\sigma^+} \right)$$

以上便是所谓振动模式展开. 它在我们考虑量子理论时非常重要.

2.6.1 再谈限制条件

能动张量取光锥坐标后的形式为:

$$\begin{aligned} T_{++} &= \frac{\partial\sigma^\alpha}{\partial\sigma^+} \frac{\partial\sigma^\beta}{\partial\sigma^+} T_{\alpha\beta} = \frac{1}{4} (T_{00} + 2T_{01} + T_{11}) = -\frac{1}{4\alpha'} \left((\partial_0 X)^2 + 2\partial_0 X \cdot \partial_1 X + (\partial_1 X)^2 \right) \\ &= -\frac{1}{4\alpha'} \left[((\partial_+ + \partial_-) X)^2 + 2 \left((\partial_+ X)^2 - (\partial_- X)^2 \right) + ((\partial_+ - \partial_-) X)^2 \right] = -\frac{1}{\alpha'} (\partial_+ X)^2 \\ T_{+-} &= T_{-+} = \frac{\partial\sigma^\alpha}{\partial\sigma^+} \frac{\partial\sigma^\beta}{\partial\sigma^-} T_{\alpha\beta} = \frac{1}{4} (T_{00} - T_{11}) \\ &= -\frac{1}{4\alpha'} \left((\partial_0 X)^2 - (\partial_1 X)^2 + 2\partial_0 X \cdot \partial_1 X \right) = 0 \\ T_{--} &= \frac{\partial\sigma^\alpha}{\partial\sigma^-} \frac{\partial\sigma^\beta}{\partial\sigma^-} T_{\alpha\beta} = \frac{1}{4} (T_{00} - 2T_{01} + T_{11}) = -\frac{1}{4\alpha'} \left((\partial_0 X)^2 - 2\partial_0 X \cdot \partial_1 X + (\partial_1 X)^2 \right) \\ &= -\frac{1}{4\alpha'} \left[((\partial_+ + \partial_-) X)^2 - 2 \left((\partial_+ X)^2 - (\partial_- X)^2 \right) + ((\partial_+ - \partial_-) X)^2 \right] = -\frac{1}{\alpha'} (\partial_- X)^2 \end{aligned}$$

而限制条件 eq. (2.5.60) 要求能动张量的每个分量都为 0, 在光锥坐标 σ^\pm 下的形式为:

$$(\partial_+ X)^2 = (\partial_- X)^2 = 0. \quad (2.6.69)$$

对 $\partial_\pm X$ 进行展开后, 限制条件在形式上会出现一些变化. 通过进行傅里叶展开 eq. (2.6.66), 上式可以给出动量 p^μ 与傅里叶系数 α_n^μ 和 $\tilde{\alpha}_n^\mu$ 所满足的限制条件. 与 eq. (2.6.68)

一同代回限制条件 eq. (2.6. 69) 便可得到:

$$\begin{aligned}
 (\partial_- X)^2 &= \frac{\alpha'}{2} \sum_{m,p} \alpha_m \cdot \alpha_p e^{-i(m+p)\sigma^-} \\
 &= \frac{\alpha'}{2} \sum_{m,n} \alpha_m \cdot \alpha_{n-m} e^{-in\sigma^-} \equiv \alpha' \sum_n L_n e^{-in\sigma^-} = 0 . \\
 (\partial_+ X)^2 &= \frac{\alpha'}{2} \sum_{m,p} \tilde{\alpha}_m \cdot \tilde{\alpha}_p e^{-i(m+p)\sigma^-} \\
 &= \frac{\alpha'}{2} \sum_{m,n} \tilde{\alpha}_m \cdot \tilde{\alpha}_{n-m} e^{-in\sigma^-} \equiv \alpha' \sum_n \tilde{L}_n e^{-in\sigma^-} = 0 .
 \end{aligned}$$

其中我们分别在最后一步定义了:

$$L_n = \frac{1}{2} \sum_m \alpha_{n-m} \cdot \alpha_m . \quad (2.6. 70)$$

与

$$\tilde{L}_n = \frac{1}{2} \sum_m \tilde{\alpha}_{n-m} \cdot \tilde{\alpha}_m . \quad (2.6. 71)$$

此处应用了 $\tilde{\alpha}_0^\mu = \alpha_0^\mu = \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} p^\mu$. 我们在上式中定义的 L_n 与 \tilde{L}_n 则是限制的傅里叶展开系数. 任何以 eq. (2.6. 66) 形式出现的弦的经典解必须遵循下述的无限多的限制:

$$L_n = \tilde{L}_n = 0 \quad n \in \mathbb{Z} .$$

在讨论共形场论时, 我们会更频繁地遇到 L_n 和 \tilde{L}_n .

当 $n = 0$ 时, 我们从 L_0 和 \tilde{L}_0 得到的限制条件存在一个特殊的解释, L_0 和 \tilde{L}_0 包含背景时空中动量 p^μ 的平方:

$$L_0 = \frac{\alpha'}{4} p^2 + \sum_{n>0} \alpha_{-n} \cdot \alpha_n \quad (2.6. 72)$$

$$\tilde{L}_0 = \frac{\alpha'}{4} p^2 + \sum_{n>0} \tilde{\alpha}_{-n} \cdot \tilde{\alpha}_n \quad (2.6. 73)$$

而背景时空中的动量平方对应于一个重要的物理量: 粒子质量的平方:

$$p_\mu p^\mu = -m_{class}^2 .$$

因此从 L_0 和 \tilde{L}_0 得到的限制条件可以将弦的有效质量表示为如下形式:

$$\begin{aligned} m_{class}^2 &= \frac{4}{\alpha'} \sum_{n>0} \alpha_n \cdot \alpha_{-n} \\ m_{class}^2 &= \frac{4}{\alpha'} \sum_{n>0} \tilde{\alpha}_n \cdot \tilde{\alpha}_{-n} \end{aligned} \quad (2.6. 74)$$

因为 $\alpha_0^\mu = \tilde{\alpha}_0^\mu = \sqrt{\alpha'/2} p^\mu$, 我们可以从 α_n^μ 与 $\tilde{\alpha}_n^\mu$ 入手分别给出弦的有效质量的表达式, 且这两个表达式必须相等. 这便是所谓的能级匹配条件 (level matching condition). 它在我们进行量子化时会起到非常重要的作用, 但应当注意的是, 当我们进行量子化时, α_n 与 $\tilde{\alpha}_n$ 会变为非对易算符, 那么能级匹配条件 eq. (2.6. 74) 中就要额外多一项来进行修正.

Chapter 3

弦的量子化

我们在本章中的目标是将弦进行量子化, 我们已经看到弦的作用涉及规范对称性, 我们对规范理论进行量子化的方法通常有很多, 一般归结为以下两种:

- 我们可以首先对物理体系进行量子化再引入由规范固定导致的限制条件, 即作用于物理态上的算符等式. 例如, 量子电动力学中在洛伦兹规范中所使用的的古普塔-布鲁勒 (Gupta-Bleuler) 量子化方法. 而在弦理论中, 这实际上就是先将所有的场 X^μ , 包括时间分量 X^0 当作算符处理再于物理态上引入限制方程 eq. (2.5. 60). 这种方法通常被称为协变量子化.
- 另一个方法便是首先求解系统的限制方程以得到物理上的经典解, 再进行量子化. 例如, 在量子电动力学中, 这就是我们在库伦规范中应用的方法. 本章中, 我们会看到对自由弦求解限制方程的方法.

当然, 如果我们处理得当, 这两种方法理应给出相同的结果. 两种方法会有各自的困难, 并且会针对相同的问题给出不同的观点. 在本章中我们会首先考虑协变量子化方法.

3.1 协变量子化基础

我们希望对 D 个自由标量场 X^μ 进行量子化, 其动力学演化由 eq. (2.5. 57) 描述. 量子化后再引入限制条件:

$$\dot{X} \cdot X' = \dot{X}^2 + X'^2 = 0 . \quad (3.1. 1)$$

首先, 利用关于 τ 的导数定义与 X^μ 互为共轭的正则动量 Π^μ . 在共形规范 $g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta}$ 下, Π^μ 定义为:

$$\Pi^\mu(\tau, \sigma) = \frac{\partial L_{CG}}{\partial \dot{X}_\mu} = \frac{1}{2\pi\alpha'} \dot{X}^\mu \quad (3.1. 2)$$

$$= \frac{p^\mu}{2\pi} + \frac{1}{2\pi\sqrt{2\alpha'}} \sum_{n \neq 0} \left(\tilde{\alpha}_n^\mu e^{-in\sigma^+} + \alpha_n^\mu e^{-in\sigma^-} \right) \quad (3.1. 3)$$

其中 $\sigma^\pm = \tau \pm \sigma$, 由于我们将 τ 与 σ 彼此区分开来, 世界面上的洛伦兹对称性受到破坏, 而时空洛伦兹对称性 (靶空间的洛伦兹对称性) 则得到保留. 且有等时对易关系:

$$\begin{aligned} [X^\mu(\sigma, \tau), \Pi_\nu(\sigma', \tau)] &= i\delta(\sigma - \sigma')\delta^\mu_\nu, \\ [X^\mu(\sigma, \tau), X^\nu(\sigma', \tau)] &= [\Pi_\mu(\sigma, \tau), \Pi_\nu(\sigma', \tau)] = 0. \end{aligned}$$

分别代入 X^μ 与 Π^μ 的展开式, 我们可以得到傅里叶系数作为算符的对易关系:

$$\begin{aligned} [x^\mu, p_\nu] &= i\delta^\mu_\nu \\ [x^\mu, x^\nu] &= [p_\mu, p_\nu] = 0 \\ [\alpha_n^\mu, \alpha_m^\nu] &= [\tilde{\alpha}_n^\mu, \tilde{\alpha}_m^\nu] = n\eta^{\mu\nu}\delta_{n+m, 0} \\ [\alpha_n^\mu, \tilde{\alpha}_m^\nu] &= 0 \end{aligned} \quad (3.1. 4)$$

x^μ 与 p^μ 为表征弦质心位置与动量的算符, 其对易关系与我们的期望一致. 而 α_n^μ 和 $\tilde{\alpha}_n^\mu$ 的对易关系实际上是谐振子产生湮灭算符的对易关系. 为了看出这一点, 我们只需要改记:

$$a_n^\mu = \frac{\alpha_n^\mu}{\sqrt{n}}, \quad a_n^{\nu\dagger} = \frac{\alpha_{-n}^\nu}{\sqrt{n}} \quad n > 0 \quad (3.1. 5)$$

于是, 对易关系 eq. (3.1. 4) 便可给出我们所熟知的 $[a_n, a_m^\dagger] = \delta_{mn}$ 关系.

考虑量子力学中的产生湮灭算符用以类比, 我们可以构造哈密顿量 (hamiltonian):

$$H_{QM} = \frac{1}{2} (a^\dagger a + a a^\dagger) = a^\dagger a + \frac{1}{2} \quad (3.1. 6)$$

此处我们对 a^\dagger 与 a 进行了正规排序, 湮灭算符 a 始终出现在左侧, 而产生算符 a^\dagger 出现在右侧. 产生与湮灭这一称呼来自于以下关系:

$$[H_{QM}, a^\dagger] = a^\dagger, \quad [H_{QM}, a] = -a \quad (3.1. 7)$$

得到哈密顿量后, 我们可以开始尝试构造福克 (Fock) 空间¹. 首先给出真空态 $|0\rangle$, 满足:

$$a|0\rangle = 0 \quad n > 0 \quad (3.1. 8)$$

而在弦理论中, 每个标量场都会给出两组无穷多的产生湮灭算符. α_n 在 $n > 0$ 时作为湮灭算符出现, 在 $n < 0$ 时作为产生算符出现. 两组算符 α_n^μ 表示向右的振动模式, 而 $\tilde{\alpha}_n^\mu$ 则表示向左的振动模式. 类比量子力学的计算过程, 我们可以构造哈密顿量:

$$\begin{aligned} H &= \int_0^{2\pi} d\sigma \left(\Pi_\mu(\tau, \sigma) \dot{X}^\mu(\tau, \sigma) - L_{CG}(\tau, \sigma) \right) \\ &= \frac{1}{4\pi\alpha'} \int_0^{2\pi} d\sigma \left(\dot{X}^2 + (X')^2 \right) \\ &= \frac{\alpha'}{2} p^2 + \frac{1}{2} \sum_{n>0} (\alpha_{-n} \cdot \alpha_n + \alpha_n \cdot \alpha_{-n} + (\alpha \leftrightarrow \tilde{\alpha})), \end{aligned} \quad (3.1. 9)$$

我们可以引入正规排序 $\alpha_n \cdot \alpha_{-n} = \alpha_{-n} \cdot \alpha_n + nD$ (其中 D 来自于 $\eta_{\mu\nu}\eta^{\mu\nu}$) 得到:

$$H = \frac{\alpha'}{2} p^2 + \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_{-n} \cdot \alpha_n + \tilde{\alpha}_{-n} \cdot \tilde{\alpha}_n) + D \sum_{n=1}^{\infty} n \quad (3.1. 10)$$

哈密顿量存在无穷大的零点能. 而 $\alpha_{n<0}^\mu$ 与 $\tilde{\alpha}_{n<0}^\mu$ 是上升算符, $\alpha_{n>0}^\mu$ 与 $\tilde{\alpha}_{n>0}^\mu$ 是下降算符. 其与哈密顿量的对易子为:

$$[H, \alpha_n^\mu] = -n\alpha_n^\mu, \quad [H, \tilde{\alpha}_n^\mu] = -n\tilde{\alpha}_n^\mu \quad (3.1. 11)$$

引入满足如下条件的真空态 $|0\rangle$:

$$\alpha_n^\mu|0\rangle = \tilde{\alpha}_n^\mu|0\rangle = 0 \quad n > 0, \quad (3.1. 12)$$

弦的真空态与量子场论中的真空态意义不同. 弦的真空态并不是时空的真空态, 而是单个弦的真空态. 出现这种现象的原因是算符 x^μ 与 p^μ 使真空态出现额外的结构. 实际上弦真正的基态则是上述的 $|0\rangle$ 与波函数 $\Psi(x)$ 的张量积. 或者, 考虑动量空间中重新考虑这一问题, 我们会发现弦的真空态额外附加了一个量子数 p^μ , 因此真空态应当写为 $|0; p\rangle$. 这正是动量算符的本征值, 本征方程为:

$$\hat{p}^\mu |0; p\rangle = p^\mu |0; p\rangle \quad (3.1. 13)$$

¹所谓福克空间实际上就是每个粒子数对应的希尔伯特 (Hilbert) 空间

此处我们在左侧用 \hat{p}^μ 表示算符, 用来区分右侧的本征值 p^μ .

真空态仍然满足 eq. (3.1. 12), 可以将其改写为:

$$\alpha_{n>0}^\mu |0; p\rangle = \tilde{\alpha}_{n>0}^\mu |0; p\rangle = 0 \quad n > 0, \quad (3.1. 14)$$

真空态归一化为:

$$\langle p'; 0 | 0; p \rangle = \delta^D(p - p'). \quad (3.1. 15)$$

我们可以将生成算符 $\alpha_{n<0}^\mu$ 与 $\tilde{\alpha}_{n<0}^\mu$ 作用于真空态上以构造弦的福克空间:

$$|phys\rangle \in \{(\alpha_{-1}^{\mu_1})^{n_{\mu_1}} (\alpha_{-2}^{\mu_2})^{n_{\mu_2}} \dots (\tilde{\alpha}_{-1}^{\nu_1})^{n_{\nu_1}} (\tilde{\alpha}_{-2}^{\nu_2})^{n_{\nu_2}} \dots |0; p\rangle\}$$

福克空间中的每个态均对应于弦的不同激发态. 每个都对应于时空中的不同粒子种类.

3.2 协变量子化中的限制条件

我们前述的讨论还有两个问题没有解决:

- 如何在量子理论中引入世界面能动张量为零的经典限制条件:

$$T_{\alpha\beta} = -\frac{1}{\alpha'} \left(\partial_\alpha X \cdot \partial_\beta X - \frac{1}{2} \eta_{\alpha\beta} (\eta^{\rho\sigma} \partial_\rho X \cdot \partial_\sigma X) \right) = 0. \quad (3.2. 16)$$

- 我们所构造的福克空间存在问题: 存在模非正的态, 这是因为我们的理论中存在标量场 X^0 , 它来自于 eq. (2.5. 57) 中的动能项. X^0 展开后的傅里叶系数对易子中存在闵氏度规:

$$[\alpha_n^\mu, \alpha_m^{\nu\dagger}] = n \eta^{\mu\nu} \delta_{n,m}.$$

那么态 $\{\alpha_{-1}^\lambda \tilde{\alpha}_{-1}^\rho |0; p\rangle\}$ 的模平方为:

$$\langle p'; 0 | \alpha_1^\mu \tilde{\alpha}_1^\nu \alpha_{-1}^\lambda \tilde{\alpha}_{-1}^\rho |0; p\rangle = \eta^{\mu\lambda} \eta^{\nu\rho} \delta^D(p - p')$$

若对存在奇数个类时谐振子激发的态求模平方, 例如:

$$\langle p'; 0 | \alpha_1^0 \tilde{\alpha}_1^3 \alpha_{-1}^0 \tilde{\alpha}_{-1}^3 |0; p\rangle = -\delta^D(p - p')$$

便会得到负的模平方, 这显然是非物理的.

有趣的是, 限制条件的傅里叶系数有无穷多个, 可以给出无穷多个限制方程. 而由于弦的激发态有无穷多, 上述负模平方的态也有无穷多个. 我们期望无穷多的限制方程刚好限制掉无穷多的非物理自由度. 这和我们在洛伦兹规范下考虑 QED 时通过规范固定去除负模平方非物理态的过程类似.

限制条件 $L_n = \tilde{L}_n = 0$ 中的 L_n 和 \tilde{L}_n 分别定义为:

$$L_n = \frac{1}{2} \sum_{l \in \mathbb{Z}} \alpha_{n-l} \cdot \alpha_l$$

$$\tilde{L}_n = \frac{1}{2} \sum_{l \in \mathbb{Z}} \tilde{\alpha}_{n-l} \cdot \tilde{\alpha}_l$$

当 $n \neq 0$ 时, α_{n-l} 与 α_l 对易, $\tilde{\alpha}_{n-l}$ 与 $\tilde{\alpha}_l$ 对易, 不存在歧义. L_n 和 \tilde{L}_n 作用到物理态上应当得到 0, 实际上引入一半的方程即可:

$$L_{n>0}|\text{phys}\rangle = \tilde{L}_{n>0}|\text{phys}\rangle = 0$$

这是因为 $(L_n)^\dagger = L_{-n}$, 给出上式后对于任何 $n \neq 0$ 均有:

$$\langle \text{phys}' | L_n | \text{phys} \rangle = \langle \text{phys}' | \tilde{L}_n | \text{phys} \rangle = 0$$

于是 L_n 和 \tilde{L}_n 关于物理态的矩阵元为 0.

而对于 L_0 和 \tilde{L}_0 , 我们并不知道 α_{n-l} 与 α_l 以及 $\tilde{\alpha}_{n-l}$ 与 $\tilde{\alpha}_l$ 正确的左右顺序. 两种顺序之间相差一个对易子, 我们总可以取湮灭算符 α_n^i , $n > 0$ 出现在右侧的正规排序来进行计算.:

$$L_0 = \frac{\alpha_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{-n} \cdot \alpha_n$$

$$\tilde{L}_0 = \frac{\tilde{\alpha}_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{\alpha}_{-n} \cdot \tilde{\alpha}_n$$

其中

$$\frac{\alpha_0^2}{2} = \frac{\tilde{\alpha}_0^2}{2} = \frac{\alpha'}{4} p^2 = -\frac{\alpha'}{4} m^2 \quad (3.2. 17)$$

这一选择可能会引入一个反映对易子贡献的常数, 但我们总可以在后续的计算中修改限

制条件为: L_0 与 \tilde{L}_0 减去上述常数后 作用到物理态上为零²:

$$(L_0 - a)|\text{phys}\rangle = (\tilde{L}_0 - a)|\text{phys}\rangle = 0 \quad (3.2. 18)$$

此处 L_0 与 \tilde{L}_0 减去的常数是相同的, 这实际上反映了能级匹配条件 $(L_0 - \tilde{L}_0)|\text{phys}\rangle = 0$.

与经典情况类似的是, L_0 与 \tilde{L}_0 均带有动量 $\alpha_0^\mu = \tilde{\alpha}_0^\mu = \sqrt{\alpha'/2} p^\mu$ 的二次形式, 因此在计算弦的质量谱的过程中起到了非常大的作用. 质量平方可以表示为:

$$m^2|\text{phys}\rangle = \frac{4}{\alpha'} \left(-a + \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_{-m} \cdot \alpha_m \right) |\text{phys}\rangle = \frac{4}{\alpha'} \left(-a + \sum_{m=1}^{\infty} \tilde{\alpha}_{-m} \cdot \tilde{\alpha}_m \right) |\text{phys}\rangle$$

我们引入的常数 a 存在非常直接的物理对应: 它改变了弦的质量谱.

我们先前提到的第一种方法, 即首先进行量子化再引入限制条件的计算到此先告一段落, 这一方法后续的计算需要一些共形场论的工具, 我们会在后面补充这一部分. 接下来我们会用限制条件下量子化的方法去除非物理态. 而没有非物理态这一要求会导致上述常数 $a = 1$. 此外, 没有非物理态这一要求会给出更强的结论: 我们所研究的理论中标量场的数量, 亦即靶空间的维数 $D = 26$.

3.3 光锥规范

现在我们使用在本章开始时提到的第二种量子化方法, 首先给出限制条件再对物理体系进行量子化. 我们首先尝试对弦的所有经典解找到合适的参数化. 这与找到我们所研究理论的经典相空间等价. 具体的做法是在经典理论中求解限制方程 eq. (3.1. 1). 这样便仅有物理自由度出现.

注意到, 进行了规范固定, 世界面上的度规现在为:

$$g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} .$$

规范固定后的体系仍有规范自由性, 正如 2.5 一节中提到的, 体现在度规上的作用为

$$\eta_{\alpha\beta} \rightarrow \Omega^2(\sigma) \eta_{\alpha\beta} , \quad (3.3. 19)$$

形式的坐标变换 $\sigma \rightarrow \tilde{\sigma}(\sigma)$ 对度规的作用可以被适当的外尔变换抵消. 这样的一系列坐标变换配合适当的外尔变换都能得到相同的满足规范固定的度规. 我们将这一冗余称

²此处的 a 还有另外一种解释, 它反映了鬼场对 L_0 的修正, 我们后面会具体说明这一点.

为规范自由性, 用共形基灵群描述 (Conformal Killing Group) 简记为 CKG. 这样的坐标变换利用光锥坐标:

$$\sigma^\pm = \tau \pm \sigma, \quad (3.3. 20)$$

更容易描述. 世界面上的平直度规可以表示为:

$$ds^2 = -d\sigma^+ d\sigma^-$$

在这种坐标下, 具有如下形式的坐标变换:

$$\sigma^+ \rightarrow \tilde{\sigma}^+(\sigma^+) \quad , \quad \sigma^- \rightarrow \tilde{\sigma}^-(\sigma^-), \quad (3.3. 21)$$

体现在度规上的作用便是增加了一个 eq. (3.3. 19) 中的系数, 如上述讨论可利用外尔变换抵消.

规范自由性

- 在 2.5 一节, 我们利用三个规范变换不变性限制方程 (两个来自重参数化变换, 一个来自外尔变换) 限制了世界面度规 $g_{\alpha\beta}$ 中的三个分量. 而规范自由性对这一论述存在影响吗? 为什么我们在限制了三个参数后还会有规范自由性? 实际上, $\tilde{\sigma}^\pm$ 在我们给定 eq. (3.3. 19) 中的 Ω 后这两个函数便被完全确定, 并不影响前面限制规范对称性的过程. 所以我们确实利用这三个限制方程固定了几乎全部的规范对称性. 而剩余的规范自由性相对于我们最开始考虑的全部规范对称性测度为 0.
- 剩余规范自由性中形如 eq. (3.3. 21) 的重参数化变换有重要的物理含义. 注意到, 运动方程解的形式为 $X_L^\mu(\sigma^+) + X_R^\mu(\sigma^-)$, 这是 D 个函数的形式构成的解, 并带有来自于能动张量的限制方程. 以 σ^\pm 为变量, 限制方程可以写为:

$$(\partial_+ X)^2 = (\partial_- X)^2 = 0, \quad (3.3. 22)$$

这使得函数的个数降为 $2(D-1)$. 最后, 规范自由性中的重参数化变换 eq. (3.3. 21) 表明 $2(D-1)$ 个自由度中有一些是来自于 σ^\pm 重参数化自由性的假自由度. 弦的真正的物理解实际上被 $2(D-2)$ 个函数描述. 这个数字代表弦的横向振动自由度.

- 我们在 2.5 一节曾借限制方程提到过弦的振动没有纵向模式. 在当时, 我们选取了特殊的静态规范: $X^0 = R\tau$. 利用重参数化 eq. (3.3. 21), 我们可以很容易地选取静态规范. 但是, 为了完全解决弦的限制问题, 下面将会讲到的光锥规范是相对更实用的规范选择.

我们希望固定剩余的重参数化 eq. (3.3. 21). 这一操作由光锥规范实现. 与世界面上选取光锥坐标类似, 我们在靶空间上也可以选取所谓的光锥坐标:

$$X^\pm = \sqrt{\frac{1}{2}}(X^0 \pm X^{D-1}). \quad (3.3. 23)$$

空间分量并不是一定要选取 $D - 1$, 也可以是其他分量, 此处我们与其他文献保持一致. 注意到这种选取方式将时间坐标和一个特定的空间坐标特殊化, 也就是说我们所做的包含 X^\pm 的任何计算都不是洛伦兹不变的. 一个有趣的问题是, 如果我们讨论的经典物理体系是洛伦兹不变的, 但量子化的过程会破坏洛伦兹不变性, 那么我们计算的最后结果是洛伦兹不变的吗? 不一定是. 这里的洛伦兹对称性实际上来自经典理论的对称性, 在进行量子化的过程中这一对称性的确有可能会消失, 换言之, 在我们进行了非协变的量子化后得到的非协变形式结果可能并不只是形式上看起来非协变, 而代表了其背后的物理过程是非协变的. 我们稍后会讨论在什么情况下量子理论会保留经典理论的洛伦兹对称性.

经过简单的计算我们可以证明光锥坐标下的度规为:

$$ds^2 = -2dX^+dX^- + \sum_{i=1}^{D-2} dX^i dX^i$$

写为矩阵形式后 \pm 分量对应的分块矩阵对角元为 0, 非对角元为 -1 . 于是, 指标升降的规则改为: $A_+ = -A^-$, $A_- = -A^+$ 以及 $A_i = A^i$. 而任意两个矢量 A 和 B 的缩并为: $A \cdot B = -A^+ B^- - A^- B^+ + A^i B^i$.

X^+ 运动方程的解为:

$$X^+ = X_L^+(\sigma^+) + X_R^+(\sigma^-).$$

我们现在可以利用重参数化不变性将 σ^\pm 进行重参数化来得到如下形式较为简单的 X^+ . 注意到, 我们对 σ^+ 进行重参数化并不影响 σ^- 对应的部分, 因此可以分别变化 X_L^+ 与 X_R^- ³:

$$X_L^+ = \frac{1}{2}x^+ + \frac{1}{2}\alpha'p^+\sigma^+, \quad X_R^+ = \frac{1}{2}x^+ + \frac{1}{2}\alpha'p^+\sigma^-, \quad X^+ = x^+ + \alpha'p^+\tau$$

我们希望 X^+ 及先前提到的与 X 相关的函数仍是关于 σ 的周期函数, 因此并没有让

³此处要注意区分世界面上坐标的 \pm 选取与靶空间上的 \pm 选取的区别.

p^+ 与 x^+ 全部消失, 而是保留了 X^+ 的如下形式:

$$X^+ = x^+ + \alpha' p^+ \tau. \quad (3.3. 24)$$

这就是所谓的光锥规范. 注意到, 只要 $p^+ \neq 0$, 我们便可以利用 τ 的变动来变动 x^+ .

光锥规范 eq. (3.3. 24) 实际上是将世界面的一个类时坐标认同为一个类光的时空坐标. 因此 X^- 中仍包含横向振动带来的贡献. 我们也可以把光锥规范看作一种将振动部分完全纳入 x^+ 或 x^- 中的特殊规范.

eq. (3.3. 24) 的选取固定了重参数化不变性 eq. (3.3. 21). 我们接下来会看到它同时也可以使运动方程变得平凡. 我们需要考虑的第一个问题便是新的规范固定会不会引入新的限制条件. 观察 X^+ 的运动方程:

$$\partial_+ \partial_- X^- = 0$$

与 X^+ 相似, 将 X^- 分解

$$X^- = X_L^-(\sigma^+) + X_R^-(\sigma^-).$$

代回能动张量为零的限制条件 eq. (3.3. 22), 可以得到:

$$0 = \partial_+ X \cdot \partial_+ X = -2\partial_+ X^- \partial_+ X^+ + \sum_{i=1}^{D-2} \partial_+ X^i \partial_+ X^i \quad (3.3. 25)$$

以及

$$0 = \partial_- X \cdot \partial_- X = -2\partial_- X^- \partial_- X^+ + \sum_{i=1}^{D-2} \partial_- X^i \partial_- X^i \quad (3.3. 26)$$

利用规范固定后的 eq. (3.3. 24), 我们可以得到 X^- 的如下表达式:

$$\partial_+ X_L^- = \frac{1}{\alpha' p^+} \sum_{i=1}^{D-2} \partial_+ X^i \partial_+ X^i. \quad (3.3. 27)$$

相似地,

$$\partial_- X_R^- = \frac{1}{\alpha' p^+} \sum_{i=1}^{D-2} \partial_- X^i \partial_- X^i. \quad (3.3. 28)$$

因此, $X^-(\sigma^+, \sigma^-)$ 被其他场完全确定至仅差一个积分常数的程度. 对 $X_{L/R}^-$ 振动模式

展开

$$X_L^-(\sigma^+) = \frac{1}{2}x^- + \frac{1}{2}\alpha'p^- \sigma^+ + i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \tilde{\alpha}_n^- e^{-in\sigma^+},$$

$$X_R^-(\sigma^-) = \frac{1}{2}x^- + \frac{1}{2}\alpha'p^- \sigma^- + i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \alpha_n^- e^{-in\sigma^-}.$$

其中 x^- 便是未定的积分常数, 而 p^- , α_n^- 和 $\tilde{\alpha}_n^-$ 由限制条件 eq. (3.3. 27) 与 eq. (3.3. 28) 进行固定. 例如, 谐振子振动模式 α_n^- 为:

$$\alpha_n^- = \sqrt{\frac{1}{2\alpha'}} \frac{1}{p^+} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{i=1}^{D-2} \alpha_{n-m}^i \alpha_m^i, \quad (3.3. 29)$$

一个特例是等式 $\alpha_0^- = \sqrt{\alpha'/2} p^-$ 代入上式得到:

$$\frac{\alpha' p^-}{2} = \frac{1}{2p^+} \sum_{i=1}^{D-2} \left(\frac{\alpha'}{2} p^i p^i + \sum_{n \neq 0} \alpha_n^i \alpha_{-n}^i \right). \quad (3.3. 30)$$

相似地, 我们可以从等式 eq. (3.3. 27) 中得到 $\tilde{\alpha}_0^-$ 的等式, 进而得到 p^- 的等式:

$$\frac{\alpha' p^-}{2} = \frac{1}{2p^+} \sum_{i=1}^{D-2} \left(\frac{\alpha'}{2} p^i p^i + \sum_{n \neq 0} \tilde{\alpha}_n^i \tilde{\alpha}_{-n}^i \right). \quad (3.3. 31)$$

利用这两个等式, 我们可以得到与 eq. (2.6. 74) 略有不同的能级匹配条件:

$$m^2 = 2p^+ p^- - \sum_{i=1}^{D-2} p^i p^i = \frac{4}{\alpha'} \sum_{i=1}^{D-2} \sum_{n>0} \alpha_{-n}^i \alpha_n^i = \frac{4}{\alpha'} \sum_{i=1}^{D-2} \sum_{n>0} \tilde{\alpha}_{-n}^i \tilde{\alpha}_n^i. \quad (3.3. 32)$$

不同之处便是现在仅关于 α^i 和 $\tilde{\alpha}^i$ 进行求和, 其中 $i = 1, \dots, D-2$. 虽然我们把它叫做横向谐振子, 但是弦实际上并不一定在 $X^0 - X^{D-1}$ 平面内演化, 因此这些算符不应理解为字面意义上的横向激发, 而应当理解为弦的物理激发. 此外, 我们在 eq. (2.6. 74) 后说明过, 在量子化过程中, 算符的非对异性会导致额外的常数修正, 也即 eq. (3.2. 18) 中的常数 a . 这里在量子化后也需要进行此修正. 我们之后会具体说明这一过程并固定修正的数值.

总结: 最一般的经典解由 $2(D-2)$ 个横向谐振模式 α_n^i 和 $\tilde{\alpha}_n^i$ 描述, 此外还有一系列描述弦质心与动量的零模式: x^i, p^i, p^+ 和 x^- . 但 x^+ 在 eq. (3.3. 24) 中可以被 τ 吸收. 而 p^- 受到限制以满足 eq. (3.3. 30) 和 eq. (3.3. 31). 实际上, p^- 可以被当作 (正比于) 光锥

哈密顿量.

3.4 光锥量子化

在上一节的经典计算中, 我们利用冗余规范自由性将 p^- , α_n^- 和 $\tilde{\alpha}_n^-$ 表示为 p^+ , p^i , α_n^i 和 $\tilde{\alpha}_n^i$ (其中 $i = 1, 2, \dots, D-2$) 的形式. 再加上 x^- 与 x^i , 我们便有了全部独立变量构成的集合. 仿照其他的量子化过程, 对这些变量定义对易关系:

$$[x^i, p^j] = i\delta^{ij} \quad (3.4. 33)$$

$$[x^-, p^+] = -i \quad (3.4. 34)$$

$$[\alpha_n^i, \alpha_m^j] = [\tilde{\alpha}_n^i, \tilde{\alpha}_m^j] = n\delta^{ij}\delta_{n+m,0} \quad (3.4. 35)$$

这一对易关系来自于我们在协变量子化中所用到的对易关系 eq. (3.1. 4)

我们如何看待 x^+ 和 p^- 呢? 我们可以把 p^- 视作作用于态上的哈密顿量算符. 实际上, 把 x^+ 和 p^- 都作为算符看待并引入对易关系:

$$[x^+, p^-] = -i. \quad (3.4. 36)$$

的做法形式上更优美, 但实际是等价的. 相当于非相对论量子力学中的 $[t, H] = -i$. 也就是说我们又可以如 eq. (3.1. 13) 一样将态选为 p^μ 的本征态了, 这里 $\mu = 0, \dots, D$, 但要注意, 关于 p^μ 的两个限制条件 eq. (3.3. 30) 和 eq. (3.3. 31) 必须以物理态上的算符等式的形式引入. 我们以后会谈及这一细节.

态的希尔伯特空间和协变量子化中描述的态非常相似. 定义真空态 $|0; p\rangle$ 使得:

$$\hat{p}^\mu |0; p\rangle = p^\mu |0; p\rangle, \quad \alpha_n^i |0; p\rangle = \tilde{\alpha}_n^i |0; p\rangle = 0 \quad \text{for } n > 0 \quad (3.4. 37)$$

我们通过将产生算符 α_{-n}^i and $\tilde{\alpha}_{-n}^i$ 作用到真空态 $|0; p\rangle$ 构造福克空间 (Fock space):

$$\{|phys\rangle\} \in \{\alpha_{-1}^{i_1} \alpha_{-1}^{i_2} \cdots \alpha_{-2}^{j_1} \cdots \tilde{\alpha}_{-1}^{k_1} \tilde{\alpha}_{-1}^{k_2} \cdots \tilde{\alpha}_{-2}^{l_1} \cdots |0; p\rangle\}. \quad (3.4. 38)$$

这里与协变量子化的区别就是我们只令带类空指标 $i = 1, \dots, D-2$ 的横向谐振子作用于真空态, 于是有 $\eta^{ij} = \delta^{ij} \geq 0$, 所以态的内积正定. 于是我们成功移除了模长负定的态. 而由于 p^- 在我们的理论中并非独立的变量, 我们此时需要手动引入限制条件 eq. (3.3. 30) 和 eq. (3.3. 31) 作为定义物理态的算符等式. 在经典理论中, 我们看到这

些限制条件的作用等同于质壳方程 eq. (3.3. 32). 而在我们现在讨论的量子化过程中, 我们需要在质量谱中引入 eq. (3.3. 32) 后提到的常数修正 $a \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned} m^2 &= 2p^+p^- - \sum_{i=1}^{D-2} p^i p^i = \frac{4}{\alpha'} \left(\sum_{i=1}^{D-2} \sum_{n>0} (\alpha_{-n}^i \alpha_n^i - a) \right) \\ &= \frac{4}{\alpha'} \left(\sum_{i=1}^{D-2} \sum_{n>0} (\tilde{\alpha}_{-n}^i \tilde{\alpha}_n^i - a) \right). \end{aligned} \quad (3.4. 39)$$

定义谐振子的能级数算符:

$$N = \sum_{i=1}^{D-2} \sum_{n>0} \alpha_{-n}^i \alpha_n^i, \quad \tilde{N} = \sum_{i=1}^{D-2} \sum_{n>0} \tilde{\alpha}_{-n}^i \tilde{\alpha}_n^i. \quad (3.4. 40)$$

我们可以写出能级匹配条件:

$$N - \tilde{N} = \sum_{i=1}^{D-2} \sum_{n>0} (\alpha_{-n}^i \alpha_n^i - \tilde{\alpha}_{-n}^i \tilde{\alpha}_n^i) = 0 \quad (3.4. 41)$$

这是对于 $\alpha_{-1}^{i_1} \alpha_{-1}^{i_2} \cdots \alpha_{-2}^{j_1} \cdots \tilde{\alpha}_{-1}^{k_1} \tilde{\alpha}_{-1}^{k_2} \cdots \tilde{\alpha}_{-2}^{l_1} \cdots$ 的谐振子数唯一的限制. 我们可以把 m^2 简写为:

$$m^2 = \frac{4}{\alpha'} (N - a) = \frac{4}{\alpha'} (\tilde{N} - a). \quad (3.4. 42)$$

我们接下来介绍固定常数 a 的两种途径:

物理学方法

所谓的物理学方法固定常数 a 实际上是应用洛伦兹不变性, 即要求引入光锥量子化后洛伦兹不变性不被破坏. 首先注意到, 基态 $|0; p\rangle$ 是 $m^2 = -\frac{4a}{\alpha'}$ 的洛伦兹标量. 而满足能级匹配条件的第一激发态为 $\alpha_{-1}^i \tilde{\alpha}_{-1}^j |0; p\rangle$, 满足 $m^2 = \frac{4}{\alpha'} (1 - a)$. i 与 j 的选取是彼此独立的, 因此第一激发态的总个数为 $(D-2)^2$, 再加上洛伦兹不变性便可得到 $a = 1$ 的结论, 具体论证过程如下:

- 首先复习一些庞加莱群表示的基础内容. 对于 $m \neq 0$ 的情况, 我们总可以找到一个参考系使得经过洛伦兹变换后, 动量满足 $p^\mu = (m, 0, \dots, 0)$. 因此有质量粒子构成小群 $SO(D-1)$ 的表示. 而对于无质量粒子, 我们通过参考系选取能够得到的动量则只能满足 $p^\mu = (E, 0, \dots, 0, E)$. 因此无质量粒子构成小群 $SO(D-2)$ 的表示.
- $\alpha_{-1}^i \tilde{\alpha}_{-1}^j |0; p\rangle$ 中的 $(D-2)^2$ 个态只能对应于 $SO(D-2)$ 的不可约表示, 而非 $SO(D-1)$. 这是因为 $SO(D)$ 的不可约表示的维数分别为: $\frac{(D+1)D}{2} - 1$ (对称无迹二阶张量),

$\frac{(D)(D-1)}{2}$ (反对称二阶张量), 和 1 (迹), 共 D^2 维, 因此 $(D-2)^2$ 一定对应于 $SO(D-2)$ 的二阶张量表示, 其对应于无质量粒子. 于是有:

$$m^2 \alpha_{-1}^i \tilde{\alpha}_{-1}^j |0; p\rangle \sim (1-a) = 0. \quad (3.4. 43)$$

因此, 常数 a 等于 1.

- 无质量态 $\alpha_{-1}^i \tilde{\alpha}_{-1}^j |0; p\rangle$ 本身并不是洛伦兹群的不可约表示. 前述的三个不可约表示均有物理意义, 分别对应于玻色弦无质量能级的三个物理构成:

$$\alpha_{-1}^i \tilde{\alpha}_{-1}^j = \alpha_{-1}^{(i} \tilde{\alpha}_{-1}^{j)} - \frac{1}{D-2} \delta^{ij} \alpha_{-1}^k \tilde{\alpha}_{-1}^k \oplus \alpha_{-1}^{[i} \tilde{\alpha}_{-1}^{j]} \oplus \frac{1}{D-2} \delta^{ij} \alpha_{-1}^k \tilde{\alpha}_{-1}^k \quad (3.4. 44)$$

第一部分是二阶张量的对称无迹部分 $\alpha_{-1}^{(i} \tilde{\alpha}_{-1}^{j)} - \frac{1}{D-2} \delta^{ij} \alpha_{-1}^k \tilde{\alpha}_{-1}^k$, 它对应于自旋为 2 的无质量粒子, 即引力子. 第二部分 $\alpha_{-1}^{[i} \tilde{\alpha}_{-1}^{j]}$ 对应于反对称部分, 称为 B -场. 第三部分 $\frac{1}{D-2} \delta^{ij} \alpha_{-1}^k \tilde{\alpha}_{-1}^k$ 不带洛伦兹指标, 对应于迹, 称为伸缩子 (dilaton).

- 应用上述 $a = 1$ 的选择后, 基态质量平方为负:

$$m^2 = \frac{4}{\alpha'} (0-1) = -\frac{4}{\alpha'} < 0. \quad (3.4. 45)$$

具有这样特征的态称为快子 (tachyon), 记作 T .

- 由 $a = 1$, 质量平方大于零的态是高于 $\alpha_{-1}^i \tilde{\alpha}_{-1}^j |0; p\rangle$ 的激发态, 例如:

$$(\alpha_{-2}^i \oplus \alpha_{-1}^i \alpha_{-1}^j) \otimes (\tilde{\alpha}_{-2}^k \oplus \tilde{\alpha}_{-1}^k \tilde{\alpha}_{-1}^l) |0; p\rangle \quad (3.4. 46)$$

独立分量数是 $(D-2) + \frac{(D-2)(D-1)}{2} - 1 + 1 = \frac{(D-1)D-1}{2}$, 对应于 $SO(D-1)$ 的二阶对称无迹张量维数. 具体可以利用杨图杨表进行计算.

- 我们可以利用杨图杨表法计算不同能级对应的表示维数:

数学方法

为固定常数 a , 我们整理一下限制条件:

$$\begin{aligned} \alpha' p^- &= \frac{1}{2p^+} \sum_{i=1}^{D-2} \left(\alpha' p^i p^i + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_{-n}^i \alpha_n^i + \alpha_n^i \alpha_{-n}^i) \right) \\ &= \frac{1}{2p^+} \sum_{i=1}^{D-2} \left(\alpha' p^i p^i + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_{-n}^i \alpha_n^i + \alpha_{-n}^i \alpha_n^i + n) \right) \end{aligned} \quad (3.4. 47)$$

能级	$\alpha'(m)^2$	独立态数	对应杨图	小群	对应的小群表示
0	-1	$ 0\rangle$ (1)	\bullet	$SO(D-1)$	\bullet (1)
1	0	$\alpha_{-1}^i 0\rangle$ (D-2)	\square	$SO(D-2)$	\square (D-2)
2	+1	$\alpha_{-2}^i 0\rangle$ (D-2) $\alpha_{-1}^i \alpha_{-1}^j 0\rangle$ $\frac{1}{2}(D-2)(D-1) - 1 + 1$	\square $\square\square + \bullet$	$SO(D-1)$	$\square\square$ $(\frac{1}{2}[(D-1)D] - 1)$
3	+2	$\alpha_{-3}^i 0\rangle$ (D-2) $\alpha_{-2}^i \alpha_{-1}^j 0\rangle$ $\frac{1}{2}(D-2)(D-3) + \frac{1}{2}(D-2)(D-1) - 1 + 1$ $\alpha_{-1}^i \alpha_{-1}^j \alpha_{-1}^k 0\rangle$ $\frac{1}{3 \times 2}(D-2)(D-1)D - (D-2) + (D-2)$	\square $\square + \square\square + \bullet$ $\square\square\square + \square$	$SO(D-1)$	$\square\square\square$ $(\frac{1}{3 \times 2}[(D-1)D(D+1)] - (D-1))$ $+\square$ $(\frac{1}{2}(D-1)(D-2))$

其中第一步我们按照如下方式改变了求和范围:

$$\sum_{n \neq 0} \alpha_{-n}^i \alpha_n^i = \sum_{n < 0} \alpha_{-n}^i \alpha_n^i + \sum_{n > 0} \alpha_{-n}^i \alpha_n^i = \sum_{n > 0} (\alpha_n^i \alpha_{-n}^i + \alpha_{-n}^i \alpha_n^i), \quad (3.4. 48)$$

并在第二步代入 α 的对易关系. 注意到我们仍有对 $i = 1, \dots, D-2$ 的求和,

$$\sum_{n < 0} \left(\sum_{i=1}^{D-2} \alpha_n^i \alpha_{-n}^i - n(D-2) \right) + \sum_{n > 0} \sum_{i=1}^{D-2} \alpha_{-n}^i \alpha_n^i = \sum_{n > 0} \sum_{i=1}^{D-2} \alpha_{-n}^i \alpha_n^i + \frac{D-2}{2} \sum_{n > 0} n. \quad (3.4. 49)$$

于是得到:

$$m^2 = 2p^+ p^- - \sum_{i=1}^{D-2} p^i p^i = \frac{4}{\alpha'} \left[\left(\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{D-2} \alpha_{-n}^i \alpha_n^i \right) + \frac{D-2}{2} \sum_{n=1}^{\infty} n \right]. \quad (3.4. 50)$$

最后一项 $\sum_{n=1}^{\infty} n$ 显然是发散的, 一般有两种方法说明 $\sum_{n=1}^{\infty} n$ 对应于 $-\frac{1}{12}$, 第一种是洛朗展开法:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n e^{-\epsilon n} = -\frac{\partial}{\partial \epsilon} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\epsilon n} = \frac{e^{-\epsilon}}{(1 - e^{-\epsilon})^2} = \frac{1}{\epsilon^2} - \frac{1}{12} + \frac{\epsilon^2}{240} + O(\epsilon^4) \quad (3.4. 51)$$

最后一步应用了洛朗展开. 在取 $\epsilon \rightarrow 0$ 极限后, 第一项是发散项, 第二项为有限, 第三项及之后为无穷小量. 因此我们说这一求和对应于 $-\frac{1}{12}$. 于是, 关于常数 a , 我们得到:

$$a = -\frac{D-2}{2} \sum_{n=1}^{\infty} n = \frac{D-2}{24}, \quad (3.4. 52)$$

于是在 $D = 26$ 维下, 与我们对无质量态 $\alpha_{-1}^i \tilde{\alpha}_{-1}^j |0; p\rangle$ 的分析得到的 $a = 1$ 相符. 第二种是 zeta 函数的正规化⁴. 对于 s 的实部大于 1, 即 $\text{Re}(s) > 1$ 时, 我们有求和关系:

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}. \quad (3.4. 53)$$

而 $\zeta(s)$ 可以进行解析延拓, 尽管延拓至负整数 s 后认为其仍与无穷求和取等在数学上并不严谨, 但延拓的结果给出我们期望的:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \rightarrow \zeta(-1) = -\frac{1}{12}. \quad (3.4. 54)$$

3.4.1 洛伦兹代数法

另一个可以得到 $a = 1$ 和 $D = 26$ 的方法来自于泊里雅科夫作用量的洛伦兹对称性的守恒荷:

$$J^{\mu\nu} = p^\mu x^\nu - p^\nu x^\mu + i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (\alpha_n^\nu \alpha_{-n}^\mu - \alpha_n^\mu \alpha_{-n}^\nu). \quad (3.4. 55)$$

它们应当满足洛伦兹代数:

$$[J^{\mu\nu}, J^{\lambda\rho}] = \eta^{\nu\lambda} J^{\mu\rho} - \eta^{\nu\rho} J^{\mu\lambda} - \eta^{\mu\lambda} J^{\nu\rho} + \eta^{\mu\rho} J^{\nu\lambda}, \quad (3.4. 56)$$

可以得到:

$$\begin{aligned} 0 = [J^{i,-}, J^{j,-}] &= \frac{2}{(p^+)^2} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\alpha_{-n}^i \alpha_n^j - \alpha_{-n}^j \alpha_n^i + (\alpha \leftrightarrow \tilde{\alpha}) \right] \\ &\times \left\{ \left(\frac{D-2}{24} - 1 \right) n + \left(a - \frac{D-2}{24} \right) \frac{1}{n} \right\} \end{aligned} \quad (3.4. 57)$$

对于 $n = 1$, $\{\dots\}$ 中的常数因子等于 $a - 1$, 对于 $n \neq 1$, 我们可以得到 $\frac{D-2}{24} = 1$, 这与我们先前得到的 a 与 D 的结果相符. 总结: 我们从不同的方法出发, 得到了关于玻色

⁴这种方法数学上实际并不严谨, ζ 函数可以进行解析延拓, 但无穷求和与 ζ 在延拓后不能取等.

弦光锥量子化自洽的要求: $a = 1$ 与 $D = 26$.

Chapter 4

开坡色弦与 D 膜

我们现在将之前应用于闭弦的工具应用于开弦. 开弦的一个重要特征就是开弦具有两个端点, 而本章的目的就是尝试理解这两个端点的物理含义.

4.1 迪利克雷 (Dirichlet) 与纽曼 (Neumann) 边界条件及其对应的展开

开弦的类空坐标 σ 按如下方式进行参数化:

$$\sigma \in [0, \pi] .$$

弦上的点对应的动力学只由其所在的局域的物理性质确定, 也就是说, 任取弦上一个一般的点, 它无法确定自己到底存在于开弦还是闭弦上. 因此开弦的动力学性质也应当由泊里雅科夫作用量描述, 但应附加与闭弦不同的用于描述端点行为的边界条件. 这里我们仍取共形规范来简化讨论:

$$S_{CG} = -\frac{1}{4\pi\alpha'} \int d^2\sigma \partial_\alpha X \cdot \partial^\alpha X .$$

与处理闭弦的过程一样, 我们通过对作用量进行变分来得到运动方程, 这一过程中我们需要使用分部积分:

$$\begin{aligned}\delta S_{CG} &= -\frac{1}{2\pi\alpha'} \int_{\Sigma} d^2\sigma \partial_{\alpha}(\delta X^{\mu})\partial^{\alpha}X_{\mu} \\ &= \frac{1}{2\pi\alpha'} \left\{ \int_{\Sigma} d^2\sigma \delta X^{\mu}\partial_{\alpha}\partial^{\alpha}X_{\mu} - \int_{\partial\Sigma} dn_{\alpha} \delta X^{\mu}\partial_{\alpha}X_{\mu} \right\}\end{aligned}\quad (4.1. 1)$$

其中第一项与闭弦一致, 第二项是只对开弦存在的新出现的项. 这里我们考虑一段有限的时间, 即弦从初始时刻 $\tau = \tau_i$ 到最终时刻 $\tau = \tau_f$ (均为有限, 且两时刻 X 固定, 即变分均为 0.) 之间的演化过程. 那么对于开弦, 由全导数项贡献的边界项可以写为:

$$\int_{\partial\Sigma} dn_{\alpha} \delta X^{\mu}\partial_{\alpha}X_{\mu} = - \left[\int_0^{\pi} d\sigma \dot{X} \cdot \delta X \right]_{\tau=\tau_i}^{\tau=\tau_f} + \left[\int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau X' \cdot \delta X \right]_{\sigma=0}^{\sigma=\pi} \quad (4.1. 2)$$

由于我们要求在 $\tau = \tau_i$ 和 τ_f 两时刻 $\delta X^{\mu} = 0$ 所以第一项消失. 但第二项相对比较新奇, 为了使它消失, 我们需要要求:

$$\partial_{\sigma}X^{\mu} \delta X_{\mu}|_{\sigma=0,\pi} = 0 \quad (4.1. 3)$$

这无非就是要求在 $\sigma = 0, \pi$ 处 δX^{μ} 或者 $\partial_{\sigma}X^{\mu}$ 等于零. 于是有两种不同的边界条件可以使这两种要求之一成立:

- 纽曼 (Neumann) 边界条件:

$$\partial_{\sigma}X^{\mu}|_{\sigma=0,\pi} = 0 \quad (4.1. 4)$$

其中 $0 \leq \mu \leq D-1$, 由于我们没有对 δX^{μ} 做出任何限制, 这一边界条件因此允许开弦的端点自由地进行移动. 为了观察这一点带来的结果, 我们重复我们处理闭弦的过程, 取静态规范, 即要求 $X^0 \equiv t = R\tau$, 与闭弦的静态规范相同, 这里的 R 也是带量纲常数. 于是, 与 eq. (2.5. 61) 同理, 限制条件为:

$$\begin{aligned}\dot{\vec{x}} \cdot \vec{x}' &= 0 \\ \dot{\vec{x}}^2 + \vec{x}'^2 &= R^2\end{aligned}\quad (4.1. 5)$$

但在弦的端点, $\vec{x}' = 0$. 因此第二个限制条件表明 $|d\vec{x}/dt| = 1$. 换句话说, 弦的端点以光速运动. 我们把取纽曼边界条件的坐标总个数记作 d_N

- 迪利克雷 (Dirichlet) 边界条件

$$\delta X^I|_{\sigma=0,\pi} = 0 \quad (4.1. 6)$$

其中 $1 \leq I \leq D-1$, 表明弦的端点处在空间中的固定位置:

$$X^I(\tau, \sigma = 0) = c^I, \quad X^I(\tau, \sigma = \pi) = d^I, \quad (4.1.7)$$

需要注意的是此处 I 通常不能取 0, 否则弦的端点在时间上也固定, 即只存在于一个瞬时, 我们稍后会说明时间上取迪利克雷边界条件的含义.

乍看上去, 迪利克雷边界条件似乎有些奇怪, 究竟为什么弦能够被固定在特定的点上? 这些点的特殊之处是什么? 在历史上人们因为这些问题很少考虑迪利克雷边界条件, 直到上世纪九十年代中期泊尔钦斯基 (Polchinski) 才对这些问题进行了解释.

现在令一些坐标带迪利克雷边界条件, 而另一些带纽曼边界条件. 于是在弦的两端点有以下等式:

$$\begin{aligned} \partial_\sigma X^i &= 0 & i &= 0, \dots, d_N - 1 \\ X^I &= c^I & I &= d_N, \dots, D-1 \end{aligned} \quad (4.1.8)$$

于是我们在 d_N 维超曲面上固定了弦的端点, 于是洛伦兹对称性 $SO(1, D-1)$ 被破坏为:

$$SO(1, D-1) \rightarrow SO(1, p) \times SO(D-p-1).$$

这一超平面称为 D 膜 (D -brane), 当我们需要指明其维数时, 也称之为 Dp 膜 (Dp -brane). 此处 D 是迪利克雷的缩写, p 则是膜的空间维数. Dp 膜的总维数与纽曼边界条件的维数一致, 一般是 $d_N = p+1$, 因为时间维通常带有纽曼边界条件从而占据 D 膜的一维 (我们稍后会提及例外情况). 为与动量的记号区分, 本书中只在 Dp 膜中使用 p , 而在其他部分均用 d_N 来表示 D 膜维数. 我们也可以把 $D0$ 膜视作点粒子, 把 $D1$ 膜本身视作弦, 以此类推. 膜的位置则由迪利克雷边界条件的常数 c^I 确定. 那么, D 膜这一超曲面的含义是什么?

事实证明, D 膜这一超曲面本身应被视为一个新的动力学对象. 这是一个概念上的飞跃. 事实上, 人们花了几十年时间才完全理解这一事实. 弦论实际上并不只包含弦本身: 它也包含更高维的膜. 在 9.4, 我们将简要介绍 D 膜的一些性质. 此外, 还有一些事情是值得注意的:

- 我们已经定义了空间中无限大的 D 膜. 不过, 我们也可以通过要求弦的端点落在封闭表面上来定义有限的 D 膜.
- 在很多情况下, 我们需要描述在各个方向上都具有纽曼边界条件的弦, 这意味着弦可以在整个时空中自由移动. 这种情况可以理解为 D 膜存在于全空间. 也就是说, 没有迪利克雷边界条件意味着 D 膜无处不在.

- 我们上面提及过, Dp 膜在 X^0 方向上总是具有纽曼边界条件. 那么在 X^0 方向上具有迪利克雷条件意味着什么呢? 根据定义, 这表明我们描述的对象现在被定位在一个固定的时间点上. 但我们仍可以描述这样一个物体: 它被称为瞬子 (instanton). 这种 "D-instanton" 通常被称为 $D(-1)$ -brane. 它与量子理论中的隧道效应有关.

开弦的模式展开

我们对弦进行与先前闭弦相似的模式展开, 令 $X^\mu = X_L^\mu(\sigma^+) + X_R^\mu(\sigma^-)$, 于是有:

$$\begin{aligned} X_L^\mu(\sigma^+) &= \frac{1}{2}x^\mu + \alpha' p_L^\mu \sigma^+ + i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \tilde{\alpha}_n^\mu e^{-in\sigma^+}, \\ X_R^\mu(\sigma^-) &= \frac{1}{2}x^\mu + \alpha' p_R^\mu \sigma^- + i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \alpha_n^\mu e^{-in\sigma^-}. \end{aligned} \quad (4.1. 9)$$

边界条件会得到作用于 $x^\mu, p_L^\mu, p_R^\mu, \alpha_n^\mu, \tilde{\alpha}_n^\mu$ 上的限制条件:

- 两端点 $\sigma = 0$ 和 $\sigma = \pi$ 均满足纽曼边界条件 $\partial_\sigma X^a|_{\sigma=0,\pi} = 0$ (NN) 时:

$$\begin{aligned} 0 &= \partial_\sigma X^\mu(\tau, \sigma)|_{\sigma=0,\pi} = \partial_+ X_L^\mu(\sigma^+) - \partial_- X_R^\mu(\sigma^-)|_{\sigma=0,\pi} \\ &= \alpha'(p_L^\mu - p_R^\mu) + \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n \neq 0} (\tilde{\alpha}_n^\mu - \alpha_n^\mu) e^{-in\tau} \times \begin{cases} 1 & \sigma = 0 \\ (-1)^n & \sigma = \pi \end{cases} \end{aligned} \quad (4.1. 10)$$

这一等式对任意 τ 始终成立的条件是对任意取纽曼边界条件的分量 μ 均满足:

$$p_L^\mu = p_R^\mu, \quad \tilde{\alpha}_n^\mu = \alpha_n^\mu \quad (4.1. 11)$$

代回 X^μ 的展开式, 我们得到:

$$X^\mu(\tau, \sigma)|_{NN} = x^\mu + 2\alpha' p^\mu \tau + 2i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \alpha_n^\mu e^{-in\tau} \cos(n\sigma) \quad (4.1. 12)$$

注意开弦和闭弦的一个区别就是闭弦第二项 $p^\mu \tau$ 的因子是 α' 而非 $2\alpha'$. 这一修正是为了保证守恒荷:

$$p^\mu = \frac{1}{2\pi\alpha'} \int_0^\pi d\sigma \dot{X}^\mu = \int_0^\pi d\sigma (P^\tau)^\mu \quad (4.1. 13)$$

可以成为平移的生成元.

- 两端点 $\sigma = 0$ 和 $\sigma = \pi$ 均满足迪利克雷边界条件 $\delta X^I|_{\sigma=0,\pi} = 0$ (DD) 时:

$$c^I = X^I(\tau, \sigma = 0), \quad d^I = X^I(\tau, \sigma = \pi) \quad (4.1. 14)$$

这让我们得到了如下关系:

$$x^I = c^I, \quad p_L^I = -p_R^I = \frac{d^I - c^I}{2\pi\alpha'}, \quad \tilde{\alpha}_n^I = -\alpha_n^I \quad (4.1. 15)$$

于是得到如下的解:

$$X^I(\tau, \sigma)|_{DD} = c^I + \frac{\sigma}{\pi}(d^I - c^I) - 2\sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \alpha_n^I e^{-in\tau} \sin(n\sigma) \quad (4.1. 16)$$

我们注意到没有正比于 τ 的项, 即没有反映动量 p^I 的项.

以上两种边界条件的选取. 当然, 我们也可以选取混合的边界条件. 例如, 在 $\sigma = 0$ 处取纽曼边界条件, 而在 $\sigma = \pi$ 处取迪利克雷边界条件

最后要强调的一点是, 对于上述两种边界条件, 我们只有一组独立的谐振子 $\alpha_n, \tilde{\alpha}_n$ 由边界条件要求, 被 α_n 固定. 这也就是说, 相对于闭弦, 开弦只有一半的谐振子自由度.

4.2 开弦量子化和质量谱

我们现在可以尝试对开弦进行量子化. 我们在 $0 \leq \mu \leq d_N - 1$ 的两端点 $\sigma = 0, \pi$ 取纽曼边界条件, 并在 $d_N \leq I \leq D - 1$ 的两端点取迪利克雷边界条件. 于是, 我们一共有 d_N 个纽曼方向和 $D - d_N$ 个迪利克雷方向. 于是我们把洛伦兹群 $SO(1, D - 1)$ 分解为 $SO(1, d_N - 1) \times SO(D - d_N)$. 此外, 有一个重要但很显然的点, 就是位置和动量自由度: x^μ 和 p^μ , 都取纽曼边界条件. 这表示空间中的波函数只依赖于膜上的而非全空间的坐标. 换句话讲, 对开弦进行量子化会得到被限制在膜上的态.

我们在纽曼方向取光锥规范:

$$X^\pm = \sqrt{\frac{1}{2}} (X^0 \pm X^{d_N-1}), \quad (4.2. 17)$$

同样地, 利用冗余规范自由度可以固定 $\partial_\pm X^+ = \alpha' p^+$, 与 eq. (3.3. 27) 和 eq. (3.3. 28)

类似地, 我们可以得到:

$$\partial_{\pm} X^{-} = \frac{1}{2\alpha' p^{+}} \left(\sum_{i=1}^{d_N-2} \partial_{\pm} X^i \partial_{\pm} X^i + \sum_{I=d_N}^{D-1} \partial_{\pm} X^I \partial_{\pm} X^I \right) \quad (4.2. 18)$$

其中 i 和 I 分别表示横向的纽曼方向与迪利克雷方向. 上式左侧等于 $\alpha' p^{-}$ 加谐振子, 而右侧等于第一项 (纽曼方向) 等于 $\alpha' p^i p^i$ 加谐振子, 第二项 (迪利克雷方向) 等于 $\frac{1}{4\pi^2} \sum_{I=d_N}^{D-1} (c^I - d^I)^2$ 加谐振子.

于是, 总的动力学自由度为:

- 纽曼方向中横向部分 $1 \leq i \leq d_N - 2$ 的 x^i , p^i 和 α_n^i
- 迪利克雷方向 $d_N \leq I \leq D - 1$ 的 α_n^I

对易关系与闭弦中的一致:

$$\begin{aligned} [x^i, p^j] &= i\delta^{ij} \\ [\alpha_n^i, \alpha_k^j] &= n\delta^{ij}\delta_{n+k,0} \\ [\alpha_n^I, \alpha_k^J] &= n\delta^{IJ}\delta_{n+k,0} \\ [\alpha_n^i, \alpha_m^J] &= 0 \end{aligned} \quad (4.2. 19)$$

物理态的福克空间由 $p^{\mu=0,1,\dots,d_N-1}$ 的本征态 $|0; p\rangle$ 构建, 且满足 $\alpha_{n>0}^{i,I} |0; p\rangle = 0$. 有:

$$\{|phys_{open}\rangle\} = \{\alpha_{-1}^{i_1} \alpha_{-1}^{i_2} \dots \alpha_{-2}^{j_1} \dots \alpha_{-1}^{I_1} \alpha_{-1}^{I_2} \dots \alpha_{-2}^{J_1} \dots |0; p\rangle\} \quad (4.2. 20)$$

我们仍可以像闭弦一样定义能动张量的傅里叶系数 L_n , 并由能动张量为零给出经典限制方程, 再由限制方程得到对应的质量谱¹ 为:

$$\begin{aligned} m^2 &= 2p^{+}p^{-} - \sum_{i=1}^{d_N-1} p^i p^i \\ &= \frac{1}{(2\pi\alpha')^2} \sum_{I=d_N}^{D-1} (c^I - d^I)^2 + \frac{1}{\alpha'} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^{p-1} \alpha_{-n}^i \alpha_n^i + \sum_{i=p+1}^{D-1} \alpha_{-n}^i \alpha_n^i \right) - a \right\} \end{aligned} \quad (4.2. 21)$$

迪利克雷与纽曼方向都带有和闭弦一样的正规排序常数 a :

$$a = -\frac{1}{2}(D-2) \sum_{n=1}^{\infty} n = \frac{D-2}{24} \quad (4.2. 22)$$

¹注意到与闭弦的区别, 开弦的弦长参数被放缩为 $\alpha' \rightarrow 4\alpha'$

以下几个小节补充了开弦的一些其他性质:

开弦与闭弦

在质量公式中, 我们再次遇到了正规排序常数 a . 与闭弦的处理方式一致, 纽曼方向 (此处包含 X^\pm) 的洛伦兹对称性 (这次是破缺后的对称性 $SO(1, p) \times SO(D - p - 1)$) 可以得到

$$D = 26 \quad \text{and} \quad a = 1.$$

这与我们在闭弦中得到的值一致. 因此我们可以把开弦和闭弦的激发态看作同一种物理理论中的态, 更确切地说, 开弦理论必然包含闭弦. 这是因为, 一旦我们考虑了相互作用, 开弦就可以将端点连接成闭弦. 我们将在 8 一节讨论相互作用. 至于这是否会反过来作用 (也就是闭弦理论是否需要开弦) 这个问题就比较复杂了. 实际上在超弦的语境中最容易说清楚. 对于二型超弦 (type II super string) 来说, 开弦和 D 膜是必要的组成部分. 对于杂化弦, 则似乎不会出现开弦和 D 膜. 对于玻色理论来说, 尽管没有什么有力的论据, 开弦仍似乎是必要的组成部分. 不过, 既然因为快子的缘故导致我们不确定该理论是否真的存在, 那么考虑这一点可能就没有意义了. 在本书的余下部分, 我们将以与二型超弦相同的方式来看待玻色弦, 并假设该理论既包括闭弦, 也包括开弦及其相关的 D 膜.

开弦的基态

开弦的基态定义为在 $\alpha_{n>0}^i$ 作用下消失的态, 即:

$$\alpha_n^i |0; p\rangle = 0 \quad n > 0$$

指标 i 的取值范围为 $i = 1, \dots, d_N - 2, d_N, \dots, D - 1$. 注意, 这是纽曼方向的横向部分和迪利克雷方向的集合. 基态的质量:

$$M^2 = -\frac{1}{\alpha'} \quad (4.2. 23)$$

这同样是一个快子, 它的质量是闭弦快子的二分之一. 正如我们在上文所说的, 这一次的快子被限制在了膜上. 与闭弦的快子相对照, 开弦的快子便相当容易理解了. 它的一个解释是, 膜并不稳定, 它会衰变, 就像场论中的共振态一样.

第一激发态: 光子态

开弦的第一激发态无质量, 它们分为两类:

- 垂直于膜的谐振子:

$$\alpha_{-1}^i |0; p\rangle \quad i = 1, \dots, d_N - 2$$

时空指标 i 的取值范围在膜内, 因此这种态在膜的洛伦兹群 $SO(1, d_N - 1)$ 下进行变换. 这是一个自旋为 1 的粒子, 换句话讲, 它是一个光子. 我们引入膜上的规范场 A_i , 其中 $i = 0, \dots, d_N - 1$.

- 平行于膜的谐振子:

$$\alpha_{-1}^I |0; p\rangle \quad I = d_N, \dots, D - 1$$

这些态在膜的洛伦兹群 $SO(1, d_N - 1)$ 衡量下为标量. 我们可以把它们看成是膜上的标量场 ϕ^I 产生的态. 这些标量场有一个很好的解释: 它们是膜在横向上的波动. 这是我们第一次暗示 D 膜是一个动力学对象. 需要注意的是, 尽管 ϕ^I 在膜的洛伦兹群 $SO(1, d_N - 1)$ 下作为标量场出现, 但它们确实在平行于膜的旋转群 $SO(D - d_N)$ 下以矢量形式变换. 它们作为膜的世界体 (worldvolume) (世界面的高维推广) 的全局对称性出现.

更高激发态与雷吉轨迹 (Regge trajectory)

N 能级下, 弦态的质量为:

$$m^2 = \frac{1}{\alpha'} (N - 1)$$

这些态中的最高自旋态由对称张量生成, 这一自旋为:

$$J_{max} = N = \alpha' m^2 + 1$$

这是一个线性关系. 如果我们把自旋和质量平方作为坐标轴将上式画出来, 我们会得到一条直线, 假如把非最高自旋态也画在图中, 我们可以得到称为雷吉轨迹 (Regge trajectories) 的多条直线. 现实世界里也存在类似的结构, 我们在介子和重子的能谱里可以找到类似的线性关系. 这些自旋与质量平方的线性关系暗示了介子的结构可能是由弦相连的夸克旋转形成的, 与强子谱相匹配所需的弦张力值是 $T \sim 1 \text{ GeV}$. (但实际上介子的质量平方与自旋的线性关系已经被量子色动力学成功解释, 这也宣告了弦理论解释重子结构的失败.), 强相互作用与开弦之间的这种关系是弦理论发展的最初动机之一. 也正是从这里开始, 参数 α' 被命名为 "雷吉斜率 (Regge slope)" (尽管我们现在很少使用这个名称). 在现代, 开弦与夸克之间的联系在 AdS/CFT 对应关系中得以延续.

4.3 膜的动力学: 狄拉克作用量 (Dirac action)

我们引入了 D 膜作为开弦的固定边界条件. 然而, 我们在前几节已经看到了 D 膜本身包含了动力学演化. 即, 无质量标量场的激发 ϕ^I 可以自然地解释为膜的横向波动. 事实上, 如果一个理论既包括开弦又包括闭弦, 那么 D 膜就必须是动态的, 因为在引力理论 (特指相对论) 中不存在刚体. 随着课程的深入, D 膜的动力学性质将变得更加清晰.

但是, 任何动态物体都应该有一个描述它如何运动的作用量, D 膜自然也不例外. 而且, 经过 2 节的讨论, 我们已经知道这一作用量的大致形式了. 仅从洛伦兹不变性和重参数化不变性的角度来看, 这个作用量一定是南部-后藤作用量的高维推广.

$$S_{Dp} = -T_p \int d^{p+1}\xi \sqrt{-\det\gamma} \quad (4.3. 24)$$

其中 T_p 是我们稍后将确定的 Dp 膜的张力, 而 $\xi^a, a = 0, \dots, p$ 是膜的世界体坐标. γ_{ab} 是背景时空上度规拉回到世界体的结果:

$$\gamma_{ab} = \frac{\partial X^\mu}{\partial \xi^a} \frac{\partial X^\nu}{\partial \xi^b} \eta_{\mu\nu} .$$

这被称为狄拉克作用量 (Dirac action). 它首次被狄拉克针对薄膜形式的物理体系写下, 之后才被南部和后藤在弦的背景下重新发现.

为了和 ϕ^I 场产生联系, 我们可以使用狄拉克作用量的重参数化不变性取静态规范. 例如, 对于平直无限大 Dp 膜, 我们可以选取:

$$X^a = \xi^a \quad a = 0, \dots, p .$$

横向运动的坐标与波动 ϕ^I 通过下式彼此认同:

$$X^I(\xi) = 2\pi\alpha' \phi^I(\xi) \quad I = p+1, \dots, D-1$$

然而, 狄拉克作用量描述的对象并不完整. 他可以描述 D 膜横向的波动, 但是与存在于 D 膜上的 $U(1)$ 规范场 A_μ 无关. 因此也必须有一个作用量来描述规范场的运动规律. 我们会在 9 章说明这一问题.

弦的特殊之处是什么？

我们可以用对弦的作用量进行量子化相同的方式对 D 膜的狄拉克作用量 eq. (4.3. 24) 进行量子化吗？目前来看，答案是不能。困难存在于两方面：技术上的困难与原理上的困难。技术困难很好解释，就是难以处理。比如，外尔不变性在处理弦的过程中至关重要。但对于更高维的对象，外尔不变性则不满足。

原理上的问题便是对二维膜或者更高维对象进行量子化无法得到态的分立能谱。而分立能谱是粒子所必须具有的性质。因此，膜和更高维对象与弦相比具有基本原理层面上的不同。

我们可以用静态规范下且未进行量子化的经典类比来直观地了解一下为什么会出现这种情况。弦的能量与长度成正比。也就是说弦的行为或多或少与我们熟悉的弹性绳相似。那么 $D2$ 膜呢？它的能量很显然应当与其面积成正比。于是人们可能会想到类似橡胶片的弹性二维物体，但受狄拉克作用量支配的膜和高维物体的行为实际上与我们想象的橡胶片并不一样。或者说，它们的弹性要更好。这是因为膜可以在保持面积不变的同时形成多种不同的形状。例如，长度为 L ，半径为 $1/L$ 的管状膜在所有 L 值下都具有相同的面积：无论它是粗短的，还是细长的。这意味着我们可以让膜形成细长的管，而不需要额外的能量成本。特别地，由细长管连接的物体，无论它们之间的距离如何，它们都具有相同的能量。而在量子化后，这一特性会产生连续的状态谱。量子化的膜或更高维度的物体并不像我们在弦上看到的那样具有单粒子的解释，因此我们期望量子膜能够描述多粒子态。

4.4 D 膜与非阿贝尔规范场

考虑两个平行的 Dp 膜。开弦现在有两种不同的边界选择：要么两端落在同一个膜上，要么两端分别落在两个不同的膜上。我们首先考虑两端落在两个不同的膜上的情况：

$$X^I(0, \tau) = c^I \quad \text{and} \quad X^I(\pi, \tau) = d^I$$

其中 c^I 和 d^I 为两个膜的位置。根据上节的模展开 eq. (4.1. 16)，我们有：

$$X^I = c^I + \frac{(d^I - c^I)\sigma}{\pi} + \dots$$

其中 \dots 略过的为谐振子部分. 由能动张量为零得到的经典限制方程与闭弦相似, 为:

$$\partial_+ X \cdot \partial_+ X = \alpha'^2 p^2 + \frac{|\vec{d} - \vec{c}|^2}{4\pi^2} + \dots = 0$$

同样, 我们略写了谐振子部分. 质量谱为 eq. (4.2. 21), 简写为:

$$m^2 = \frac{|\vec{d} - \vec{c}|^2}{(2\pi\alpha')^2} + \dots$$

第一项有一个显然的解释: 这是两个膜之间的弦在两个膜被拉远的过程中附加的能量, 与弹簧类似. 注意到 eq. (4.2. 21) 中存在正规排序常数 a , 我们便知道, 当 $|\vec{d} - \vec{c}|^2 < 4\pi^2\alpha'$ 弦的基态仍是类快子的. 或者换句话讲, 当膜与膜接近亚弦尺度, 膜之间的弦的基态是类快子的.

这一点显然可以推广到 N 平行膜的情况, 弦的每个端点都有 N 个可能的位置. 我们可以给每个端点标上一个数字 $m, n = 1, \dots, N$, 告诉我们它的端点在哪个膜上. 这个标记有时被称为詹-佩顿系数 (Chan-Paton factor).

现在考虑一下所有膜都位于时空中相同位置的情况. 每个端点可以位于 N 不同膜中的一个, 总共有 N^2 种可能. 这些弦中的每一根都具有开弦的质量谱, 这意味着现在每种类型的粒子都有 N^2 个. 于是我们可以自然地把相关的场安排在 $N \times N$ 厄米矩阵中. 这样我们就有了开弦快子 T^m_n 和两种如下无质量场:

$$(\phi^I)^m_n, \quad (A_a)^m_n \quad (4.4. 25)$$

在这里, 矩阵的分量告诉我们场来自哪条弦. 对角线分量来自两端都在同一膜上的弦.

规范场 A_a 尤其有趣. 以这种方式书写, 它看起来像一个 $U(N)$ 的规范联络. 我们稍后会看到事实的确如此. 我们可以证明, 当 N 膜重合时, 膜的 $U(1)^N$ 规范对称性会增强为 $U(N)$. 而标量场 ϕ^I 在这一对称性的伴随表示中变换.

Chapter 5

共形场论简介

这一章简要介绍弦论中常见的基本语言, 即二维共形场论¹. 除在弦论外, 共形场论在统计物理中也十分常用. 近年来, 由于 AdS/CFT 的发展, 共形场论也逐渐地受到越来越多的重视. 针对弦论学习而言, 我们学习二维共形场论的动机与目的是:

- 避免复杂的对易子运算, 例如 $[L_m, L_n] \leftrightarrow [\alpha_{m-p}\alpha_p, \alpha_{n-q}\alpha_q]$ 而从复分析方法入手, 计算诸如 $\oint_{B_\epsilon(0)} dz^n = \delta_{n,-1}$ 的复积分.
- 利用共形场论的方法我们可以以一个无穷维对称性的形式表征并去除冗余的 $Diff \times Weyl$ 对称性 $\sigma^+ \rightarrow f(\sigma^+)$ $\sigma^- \rightarrow g(\sigma^-)$, 并最终应用于弦的协变量子化过程与相互作用的计算中.

所谓共形变换实际上是一种坐标变换 $\sigma^\alpha \rightarrow \tilde{\sigma}^\alpha(\sigma)$ 使得度规以如下形式变换:

$$g_{ab}(\sigma) \rightarrow \Omega^2(\sigma)g_{ab}(\sigma) \quad (5.0. 1)$$

而共形场论 (Conformal Field Theory, 也常简写为 CFT) 是一种在上述变换下不变的场论. 这意味着这一理论考虑的物理在所有尺度上都是一样的. 换句话讲, 共形场论关心角度, 但不关心距离.

形如 eq. (5.0. 1) 的共形变换存在不同的物理解释, 这取决于我们考虑的是固定的背景

¹这一章中说明的内容很多在 Belavin, Polyakov 与 Zamalodchikov 的文章 “*Infinite Conformal Symmetry in Two-Dimensional Quantum Field Theory*”, Nucl. Phys. B241 (1984) 中首次出现. 而其在弦论中的应用则由 Friedan, Martinec 和 Shenker 在 “*Conformal Invariance, Supersymmetry and String Theory*”, Nucl. Phys. B271 (1986) 一文给出.

度规 g_{ab} , 还是动态背景度规. 当度规是动态的, 这一变换本质上就是一个微分同胚变换, 作为一种规范对称性出现. 而当背景是固定的时候, 这种变换则应该被确确实实地看作一种物理上的对称性, 它把点 σ^α 转换为点 $\tilde{\sigma}^\alpha$. 现在这一变换是一个具有相应守恒流的全局对称性.

在泊里雅科夫形式的弦理论中, 度规应被理解为是动态的, 而变换 eq. (5.0. 1) 则是冗余的规范变换, 即可以通过外尔变换来消除的微分同胚变换 (即前述的 CKG).

与在本章中我们也会简要介绍定义在固定背景上的共形场论. 除了少数说明的例外, 我们通常会考虑平直背景. 而这也是我们在研究量子场论时所习惯的情形.

当然, 我们也可以交替地认为理论定义在固定背景或波动背景上 (毕竟这只是物理解理解不同, 计算方式总是一致的). 首先, 当我们讨论的背景度规固定时, 我们可以发现: 任何同时具有微分同胚不变性和外尔不变性的二维引力理论, 在固定背景度规时我们可以去除规范冗余, 此时它将简化为一个保角不变理论. 而当我们讨论动态背景时, 任何保角不变理论也都可以与动态的背景, 即二维引力耦合, 从而产生同时满足微分同胚和外尔不变性的经典理论. 请注意 "经典" 一词! 在经典层面, 我们可以将微分同胚加外尔不变性与保角不变性来回切换, 但在量子层面, 情况变得更加复杂. 量子效应可能破坏外尔不变性, 即出现外尔反常 (Weyl anomaly). 例如, 在弦论中, 只有当维数为 26 (玻色弦) 或 10 (超弦) 时, 外尔不变性才能在量子层面保持, 否则会出现外尔反常. 这种反常直接影响了弦论的自治性, 也是量子引力研究的核心问题之一. 从某种意义上说, 弦理论这门课程的意义之一就在于理解最后这句话在量子层面何时也成立.

尽管共形场论是量子场论的一个子集, 但描述它们的语言却有些不同. 这是一定程度必要的. 只有当理论没有优先考虑不同尺度的区别时, 变换 eq. (5.0. 1) 下的不变性才能成立. 而这意味着理论中不可能存在质量或康普顿波长之类的东西. 换句话说, 共形场论只支持无质量激发. 我们提出的这些问题不是粒子和 S 矩阵的问题. 相反, 我们关注的是关联函数和不同算符在共形变换下的行为.

欧氏度规下的共形场论

虽然我们最终感兴趣的是带有闵氏号差的世界面, 但如果我们改用欧几里得世界面, 那就会简单得多. 而我们所做的一切也都可以用闵科夫斯基空间中重新表述. 因此我们取欧氏时间 $\sigma^0 = \tau = it$. 我们在前面光锥坐标引入了 σ^\pm , 这里我们基于 σ^\pm 定义欧氏世界面的坐标.

欧氏世界面的坐标为 $(\sigma^1, \sigma^2) = (\sigma^1, i\sigma^0)$, 我们可以引入如下复坐标:

$$z = -\sigma^- = \sigma^1 + i\sigma^2; \quad \bar{z} = \sigma^+ = \sigma^1 - i\sigma^2$$

这是光锥坐标在欧氏空间中的类比. 并且, 我们通常将全纯函数称为左行 (left moving) 的, 而将反全纯函数称为右行 (right moving) 的

关于复坐标的导数为:

$$\partial_z \equiv \partial = \frac{1}{2}(\partial_1 - i\partial_2); \quad \partial_{\bar{z}} \equiv \bar{\partial} = \frac{1}{2}(\partial_1 + i\partial_2), \quad (5.0. 2)$$

以及

$$\partial^z \equiv \bar{\partial} = \frac{1}{2}(\partial_1 + i\partial_2); \quad \partial^{\bar{z}} \equiv \partial = \frac{1}{2}(\partial_1 - i\partial_2), \quad (5.0. 3)$$

并满足 $\partial z = \bar{\partial} \bar{z} = 1$ 以及 $\partial \bar{z} = \bar{\partial} z = 0$. 我们默认在平直欧氏空间讨论问题, 于是度规为:

$$ds^2 = (d\sigma^1)^2 + (d\sigma^2)^2 = dz d\bar{z} \quad (5.0. 4)$$

写为分量形式为:

$$g_{zz} = g_{\bar{z}\bar{z}} = 0 \quad \text{and} \quad g_{z\bar{z}} = \frac{1}{2} \quad (5.0. 5)$$

在这种约定下, 积分测度的系数为 $dz d\bar{z} = 2d\sigma^1 d\sigma^2$, 我们重定义 δ 函数, 使得下述积分被归一化: $\int d^2 z \delta(z, \bar{z}) = 1$. 注意到我们同时有: $\int d^2 \sigma \delta(\sigma) = 1$, 这表明在两个 δ 函数之间存在一个系数 2 的区别. 协变矢量定义为: $v^z = (v^1 + iv^2)$ 和 $v^{\bar{z}} = (v^1 - iv^2)$. 逆变矢量则为: $v_z = \frac{1}{2}(v^1 - iv^2)$ 和 $v_{\bar{z}} = \frac{1}{2}(v^1 + iv^2)$.

最后, 在处理很多问题时, 将 z 和 \bar{z} 视为独立变量更为简单. 这实际上是将世界面从 \mathbb{R}^2 拓展为 \mathbb{C}^2 . 进而允许我们使用复分析中的方法. 但是, 我们做这样的操作时应当牢记, 我们最终的结果一定是出现在由 $\bar{z} = z^*$ 定义的实平面 $\mathbb{R}^2 \subset \mathbb{C}^2$ 上的.

5.1 一般维数下的共形对称性

在讨论弦论时, 我们一般只对世界面上的二维共形场论感兴趣, 而二维相对于更高维也的确是更加特殊的, 最主要的体现就在于二维共形场论中有无穷多种共形变换:

对于二维空间中的复欧氏坐标 z, \bar{z} , 平直时空的共形变换就是坐标的全纯与反全纯变换:

$$z \rightarrow z' = f(z); \quad \bar{z} \rightarrow \bar{z}' = \bar{f}(\bar{z})$$

在这一变换下, $ds^2 = dzd\bar{z} \rightarrow |df/dz|^2 dzd\bar{z}$, 的确会取到 eq. (5.0. 1) 的形式. 注意到我们有无穷多个可能的共形变换 (任何能取 $f(z)$ 形式的全纯变换均包含在内). 这只对二维共形场论成立.

在更高维下, 共形变换张成的空间对应于有限维的群. 对于定义于 $\mathbb{R}^{p,q}$ 上的共形场论, 在 $p+q > 2$ 时, 共形群为 $SO(p+1, q+1)$. 我们在完成整章的内容之后可以从生成元代数的角度证明这一点. 为简化讨论, 我们这里仅涉及 $\mathbb{R}^{1,d-1}$ 作为我们考虑的 d 维流形, 并在本节暂时不转化为欧氏号差. 于是共形变换被定义为在 $\mathbb{R}^{1,d-1}$ 上保角的微分同胚变换, 例如以如下形式放缩度规的 $x^\mu \rightarrow x'^\mu$:

$$\eta_{\mu\nu} \rightarrow g_{\mu\nu} = \frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\nu} \eta_{\lambda\rho} = \Omega^2(x) \eta_{\mu\nu}$$

其中, $\Omega(x)$ 被称为共形系数 (conformal factor). 以下是一些 d 维共形变换的例子:

变换种类	$x'^\mu(x)$	$\Omega^2(x)$
平移	$x^\mu + c^\mu$	1
洛伦兹变换	$\Lambda^\mu{}_\nu x^\nu, \quad \Lambda \in SO(1, d-1)$	1
伸缩变换 (dilatation)	λx^μ	$\frac{1}{\lambda^2}$
特殊共形变换	$\frac{x^\mu + x^2 b^\mu}{1 + 2b \cdot x + b^2 x^2}$	$(1 + 2b \cdot x + b^2 x^2)^2$

其中所谓特殊共形变换就是平移前后各进行一次取逆:

$$x'^\mu \rightarrow \frac{x^\mu}{x^2}, \quad \Omega^2(x) = (x^2)^2 \quad (5.1. 6)$$

取逆是离散变换, 从群流形的角度与单位元处于不同连通分支. 我们现在可以开始构造共形代数. 考虑无穷小共形变换:

$$x'^\mu = x^\mu + \omega_a \frac{\delta x}{\delta \omega_a} \quad (5.1. 7)$$

对应的群元作用于 x 上标量函数 $F(x)$ 的效应:

$$\delta_\omega F(x) \equiv F'(x) - F(x) \equiv F(x - \omega_a \frac{\delta x}{\delta \omega_a}) - F(x) \equiv -i\omega^a G_a F(x) \quad (5.1. 8)$$

这里指标 a 相当任意, 我们可以令 ω^a 带任意多个指标, 或规定其为标量. 于是有:

$$iG_a F(x) = \frac{\delta x^\mu}{\delta \omega^a} \partial_\mu F(x) \quad (5.1. 9)$$

便可计算生成元 G_μ , 对于上述共形变换, 我们有:

变换种类	无穷小微分同胚 ω^a	生成元
平移变换	c^μ	$P_\mu = -i\partial_\mu$
洛伦兹变换	$m^{[\mu\nu]}$	$J_{\mu\nu} = -i(x_\nu\partial_\mu - x^\mu\partial_\nu)$
伸缩变换	λ	$D = -ix_\mu\partial_\mu$
特殊共形变换	b^μ	$K_\mu = -ix^2\partial_\mu + 2ix_\mu x \cdot \partial$

于是我们得到了 $\mathbb{R}^{1,d-1}$ 空间中的共形代数: $\text{span}\{P_\mu, J_{\mu\nu}, D, K_\mu\}$. 易证, $\mathbb{R}^{1,d-1}$ 空间中的共形群的维数即共形代数的维数为 $\frac{1}{2}(d+1)(d+2)$, 我们也可以更进一步证明 $\mathbb{R}^{1,d-1}$ 中的共形代数同构于 $\mathbb{R}^{2,d}$ 中的洛伦兹代数, 即 $\mathcal{SO}(2, d)$, 留作习题.

5.2 经典层面

我们首先导出在共形变换 eq. (5.0. 1) 下保持不变的经典理论中的一些性质.

5.2.1 能动张量

在任一类场论中, 最重要的研究对象里总有能动张量 (energy-momentum tensor 或也称为 stress-energy tensor). 通常定义为由平移不变性对应的守恒流构成的矩阵,

$$\delta\sigma^\alpha = \epsilon^\alpha.$$

在上一节 5.1 中我们讲到, 在平直时空里, 平移变换就是一类特殊的共形变换

有一种得到能动张量的一般方法. 首先假设我们在平直时空 $g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta}$ 进行讨论. 注意到, 我们通常可以通过将对称性中出现的常数参数 ϵ 提升为时空坐标的函数来推导守恒流, 这样作用量的变化必须取如下的形式:

$$\delta S = \int d^2\sigma J^\alpha \partial_\alpha \epsilon \quad (5.2. 10)$$

对于场的任意函数 J^α , 上式表明当 ϵ 保持恒定时, 作用量的变分一定为 0. 当然, 这正是对称性的定义. 而当运动方程成立时, 我们对 $\epsilon(\sigma)$ 做任意变分 (而不仅仅是固定 ϵ), 作用量都不变, 即: $\delta S = 0$. 这也就意味着当运动方程成立时, J^α 必须满足:

$$\partial_\alpha J^\alpha = 0$$

方程 J^α 成为这一对称性对应的守恒流

接下来考虑如何把上面这一套做法应用于平移不变性. 如果我们把 ϵ 提升为世界面变量的函数, 那么作用量的变化必须取 eq. (5.2. 10) 的形式. 那么 J^α 是什么呢? 这里我们类比于先前的过程. 考虑相同的理论, 但与度规耦合的部分则改视作与动态的度规 $g_{\alpha\beta}(\sigma)$ 相耦合. 换句话说, 与引力耦合. 那么我们可以把变换:

$$\delta\sigma^\alpha = \epsilon^\alpha(\sigma)$$

视为微分同胚变换, 并且由微分同胚不变性, 只要我们对度规做出相应的变换:

$$\delta g_{\alpha\beta} = \partial_\alpha \epsilon_\beta + \partial_\beta \epsilon_\alpha .$$

该理论的作用量在这两个变换的作用下保持不变. 这意味着, 如果我们只对坐标进行变换, 作用量的变化一定与只对度规进行变换的结果相反. (因为同时进行这两种变换, 作用量是不变的, 可以视为两种变换分别的效应彼此抵消). 于是有:

$$\delta S = - \int d^2\sigma \frac{\delta S}{\delta g_{\alpha\beta}} \delta g_{\alpha\beta} = -2 \int d^2\sigma T^{\alpha\beta} \partial_\alpha \epsilon_\beta$$

其中 $\frac{\delta S}{\delta g_{\alpha\beta}}$ 是作用量关于度规的泛函微商, 在这里它与 $\frac{\partial S}{\partial g_{\alpha\beta}}$ 等价, 此后我们在不引起混乱的情况下, 也常用 $\frac{\delta S}{\delta g_{\alpha\beta}}$ 的记号. 现在我们有平移不变性产生的守恒流. 我们将再添加一个弦理论中的标准归一化常数 (在其他语境下可能有其他归一化), 最后定义能动张量为:

$$T_{\alpha\beta} = -\frac{4\pi}{\sqrt{g}} \frac{\delta S}{\delta g^{\alpha\beta}} \quad (5.2. 11)$$

如果世界面平坦, 我们在 $g_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta}$ 上求解 $T_{\alpha\beta}$, 得到的表达式满足 $\partial^\alpha T_{\alpha\beta} = 0$. 但如果我们研究的对象在弯曲的世界面上, 那么能动量张量在协变导数作用下为 0, 即 $\nabla^\alpha T_{\alpha\beta} = 0$, 这是从平直时空向弯曲时空自然的推广.

能动张量满足无迹条件

在共形场论中, $T_{\alpha\beta}$ 有一个非常重要的性质: 它的迹为 0. 为了方便地表现这一点, 让我们利用尺度变换来改变作用量, 尺度变换也是一种特定的共形变换:

$$\delta g_{\alpha\beta} = \epsilon g_{\alpha\beta} \quad (5.2. 12)$$

于是得到:

$$\delta S = \int d^2\sigma \frac{\delta S}{\delta g_{\alpha\beta}} \delta g_{\alpha\beta} = -\frac{1}{4\pi} \int d^2\sigma \sqrt{g} \epsilon T^\alpha{}_\alpha$$

因为尺度变换是一种共形变换, 而作用量在共形变换下保持不变. 因此, 上式中的作用量变分必须为 0, 所以:

$$T^\alpha{}_\alpha = 0$$

这是无论任何维度下共形场论都具备的关键特征. 许多理论在经典层面都具有这一特征, 包括四维时空中的麦克斯韦理论和杨-米尔斯理论. 然而, 在量子化后却往往很难保持这一特征. (杨-米尔斯 (Yang-Mills) 理论在量子层面上无法成为共形场论). 我们可以从理论本身的性质来理解: 杨-米尔斯理论的 β 函数在量子层面不为零, 这意味着其规范耦合常数 $g(\mu)$ 随着重整化标度 μ 变化, 从而引入了一个物理尺度. 例如, 在 $SU(N)$ 纯 Yang-Mills 理论中, 一圈 β 函数为:

$$\beta(g) = -\frac{b_0}{16\pi^2} g^3, \quad b_0 = \frac{11}{3}N.$$

由于 $b_0 > 0$, 理论具有渐近自由性 (asymptotic freedom), 即在高能极限下 $g(\mu)$ 变小, 而在低能极限下 $g(\mu)$ 变大, 最终导致一个动态生成的物理尺度:

$$\Lambda_{\text{YM}} \sim \mu \exp\left(-\frac{1}{b_0 g^2(\mu)}\right).$$

这个尺度 Λ_{YM} 代表了低能 QCD 中的禁闭效应, 表明理论在量子层面不再共形不变. 因此, 杨-米尔斯理论无法成为共形场论的根本原因, 是由于其 β 函数非零, 而不是因为计算过程中人为地引入了一个正则化尺度. 在某些特殊情况下, 例如 $\mathcal{N} = 4$ 的超杨-米尔斯理论 (super Yang-Mills, 通常简称为 SYM 理论), β 函数严格为零, 因而理论在所有能标下保持共形不变. 但一般而言, 非超对称杨-米尔斯理论都不满足共形不变性. 本书中, 我们将对在量子层面成功保持共形对称性的二维理论感兴趣. 而我们将在第 5.5.1 节看到, 即使共形不变性在二维量子理论中依然存在, 能动张量的无迹条件 $T^\alpha{}_\alpha = 0$ 也只会在平坦时空中成立.

复坐标中的能动张量

在复坐标 $z = \sigma^1 + i\sigma^2$ 中, 能动张量的无迹条件 $T^\alpha{}_\alpha = 0$ 变为:

$$T_{z\bar{z}} = 0$$

同时, 守恒方程 $\partial_\alpha T^{\alpha\beta} = 0$ 变为 $\partial T^{zz} = \bar{\partial} T^{\bar{z}\bar{z}} = 0$. 或者, 对带下标的 T 有:

$$\bar{\partial} T_{zz} = 0 \quad \text{and} \quad \partial T_{\bar{z}\bar{z}} = 0$$

换句话说, $T_{zz} = T_{zz}(z)$ 是全纯函数, 而 $T_{\bar{z}\bar{z}} = T_{\bar{z}\bar{z}}(\bar{z})$ 是反全纯函数. 我们经常使用如下简化符号:

$$T_{zz}(z) \equiv T(z) \quad \text{and} \quad T_{\bar{z}\bar{z}}(\bar{z}) \equiv \bar{T}(\bar{z})$$

诺特流

能动张量 $T_{\alpha\beta}$ 为平移对称性提供了诺特流. 那么, 与其他共形变换相关的流是什么? 考虑如下无穷小变换:

$$z' = z + \epsilon(z) \quad , \quad \bar{z}' = \bar{z} + \bar{\epsilon}(\bar{z})$$

其中, 与上面两个例子相关的是, 常数 ϵ 对应于平移, 而 $\epsilon(z) \sim z$ 则对应旋转和伸缩. 为了计算这两种对称性的流, 我们将使用之前看到的技巧: 将参数 ϵ 提升为世界面坐标相关的函数. 但是我们注意到它已经是一对世界面坐标中一半的函数了, 所以现在这意味着我们需要再次进行提升: $\epsilon(z) \rightarrow \epsilon(z, \bar{z})$. 然后我们可以再次利用我们可以对度规进行变换来补偿 ϵ 变换这一事实来计算作用量的变分:

$$\begin{aligned} \delta S &= - \int d^2\sigma \frac{\partial S}{\partial g^{\alpha\beta}} \delta g^{\alpha\beta} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int d^2\sigma T_{\alpha\beta} (\partial^\alpha \delta \sigma^\beta) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int d^2z \frac{1}{2} [T_{zz} (\partial^z \delta z) + T_{\bar{z}\bar{z}} (\partial^{\bar{z}} \delta \bar{z})] \\ &= \frac{1}{2\pi} \int d^2z [T_{zz} \partial_z \epsilon + T_{\bar{z}\bar{z}} \partial_{\bar{z}} \bar{\epsilon}] \end{aligned} \tag{5.2. 13}$$

首先注意到, 如果 ϵ 是全纯的, 而 $\bar{\epsilon}$ 是反全纯的, 那么我们马上就可以得到 $\delta S = 0$. 当然, 这其实就是在说我们找到了一个对称性. (其中在导出第三行的地方, 我们需要 $T_{z\bar{z}} = 0$, 也即使用了理论是共形的这一事实).

现在, 我们将 z 和 \bar{z} 视作独立变量分别进行分析. 也就是分别观察来自 z 和 \bar{z} 移动的流. 首先考虑如下对称性:

$$\delta z = \epsilon(z) \quad , \quad \delta \bar{z} = 0$$

我们可以利用上述让小量参数成为位置函数的标准技巧, 从 eq. (5.2. 13) 中读出守恒流. 由于 $\epsilon(z)$ 现在是坐标的函数, 这就意味着基于函数 f 进行推广: $\epsilon \rightarrow \epsilon(z)f(\bar{z})$, 然后观

察 $\bar{\partial}f$ 在 eq. (5.2. 13) 中所在的项, 并得到如下的流

$$J^z = 0 \quad \text{and} \quad \bar{J}^z = T_{zz}(z) \epsilon(z) \equiv T(z) \epsilon(z) \quad (5.2. 14)$$

重要的是, 我们发现流本身也是全纯的. 我们可以验证这确实是一个守恒流: 它应该满足 $\partial_\alpha J^\alpha = \partial_z J^z + \partial_{\bar{z}} \bar{J}^z = 0$. 但它实际上满足比这更强的条件: $\partial_{\bar{z}} \bar{J}^z = 0$.

同样, 我们可以看一下 $\delta \bar{z} = \bar{\epsilon}(\bar{z})$ 其中 $\delta z = 0$ 的变换. 我们可以得到反全纯流 \bar{J} :

$$\bar{J}^z = \bar{T}(\bar{z}) \bar{\epsilon}(\bar{z}) \quad \text{and} \quad \bar{J}^{\bar{z}} = 0 \quad (5.2. 15)$$

对自由标量场的应用

让我们用自由标量场来说明其中一些普遍存在于经典共形场论中的性质. 自由标量场的作用量

$$S = \frac{1}{4\pi\alpha'} \int d^2\sigma \partial_\alpha X \partial^\alpha X$$

注意到这与我们先前给出的作用量 eq. (2.5. 57) 相比没有整体的负号. 这是因为我们现在使用的是欧氏世界面度规. 当然, 自由标量场理论非常简单. 我们可以相对容易地在这个理论中计算任何我们感兴趣的的对象. 但是它仍然会给出足够的结构来为我们在共形场论中遇到的所有抽象概念提供一个简单范例.

首先, 让我们确认一下这个自由标量场的确是共形的. 比如, 我们可以观察放缩变换 $\sigma^\alpha \rightarrow \lambda \sigma^\alpha$. 从主动变换的意义上来看, 在这一变换下坐标保持不变, 但在 σ 处的场所取的值会被移动到 $\lambda \sigma$ 点. 也就是说:

$$X(\sigma) \rightarrow X(\lambda^{-1}\sigma) \quad \text{and} \quad \frac{\partial X(\sigma)}{\partial \sigma^\alpha} \rightarrow \frac{\partial X(\lambda^{-1}\sigma)}{\partial \sigma^\alpha} = \frac{1}{\lambda} \frac{\partial X(\tilde{\sigma})}{\partial \tilde{\sigma}}$$

其中我们定义了 $\tilde{\sigma} = \lambda^{-1}\sigma$. 来自拉格朗日量中两个导数的 λ^{-2} 因子抵消了来自积分测度 $d^2\sigma = \lambda^2 d^2\tilde{\sigma}$ 的雅可比因子 (Jacobian factor), 使得作用量整体不变. 需要注意的是, 任何关于 X 以多项式形式出现的相互作用项都会破坏共形不变性.

这个理论的能动张量是用 eq. (5.2. 11) 定义的:

$$T_{\alpha\beta} = -\frac{1}{\alpha'} \left(\partial_\alpha X \partial_\beta X - \frac{1}{2} \delta_{\alpha\beta} (\partial X)^2 \right), \quad (5.2. 16)$$

容易验证, 这一能动张量确实如同期望的一样, 满足 $T^\alpha_\alpha = 0$. 在复坐标中, 能动张量看

起来要简单得多. 易得 $T_{z\bar{z}} = 0$. 其他两个分量为:

$$T = -\frac{1}{\alpha'} \partial X \partial X \quad \text{and} \quad \bar{T} = -\frac{1}{\alpha'} \bar{\partial} X \bar{\partial} X$$

X 的运动方程为 $\partial \bar{\partial} X = 0$. 经典通解可以分解为:

$$X(z, \bar{z}) = X(z) + \bar{X}(\bar{z})$$

5.3 量子层面

到目前为止, 我们讨论的完全是经典理论. 现在我们转向量子理论. 我们要讨论的第一个概念实际上是任何量子场论的一个特征. 但在 CFT 的背景下, 它才真正发挥了它的作用. 它就是算符乘积展开 (operator product expansion 简称 OPE).

5.3.1 算符乘积展开

让我们先描述一下我们所说的共形场论中的局域算符是什么意思. 我们今后也将把这些对象称为场. 共形场论与更一般的量子场论在术语使用上略有不同. 通常在量子场论中, "场"一词是指出现在作用量中并在路径积分时被积的对象 ϕ . 与之相对的, 在共形场论中, "场"一词则指的是我们可以写下来的任何局域的表达式. 这里当然包括 ϕ , 也包括导数 $\partial^n \phi$ 或类似 $e^{i\phi}$ 的复合算符. 所有这些都被视为共形场论中不同的场. 由此可以看出, 共形场论中所有"场"的集合总是无限的. 如果你习惯于使用量子场论的语言, 你只会谈论有限数量的基本对象 ϕ , 但这没什么可怕的, 这只是所用语言的变化, 并不意味着我们的理论变得更难了.

我们现在定义算符乘积展开 (OPE). 它反映了局域算符相互接近时的效应. 其思想粗略来说就是当两个局域算符所处的点相近时, 这两个算符可以被处于其中一点的一串算符近似描述. 让我们用 \mathcal{O}_i 表示共形场论的所有局域算符, 其中 i 取遍所有算符构成的集合. 那么 OPE 为:

$$\mathcal{O}_i(z, \bar{z}) \mathcal{O}_j(w, \bar{w}) = \sum_k C_{ij}^k(z-w, \bar{z}-\bar{w}) \mathcal{O}_k(w, \bar{w}) \quad (5.3. 17)$$

这里, $C_{ij}^k(z-w, \bar{z}-\bar{w})$ 是一组函数. 基于平移不变性, 它们只取决于两个算符之间的距离. 我们会写出很多形如 eq. (5.3. 17) 的算符方程, 但真正重要的是要明确它们的确切含义: 它们始终应被理解为在时序关联函数中插入算符时成立的关系:

$$\langle \mathcal{O}_i(z, \bar{z}) \mathcal{O}_j(w, \bar{w}) \dots \rangle = \sum_k C_{ij}^k(z-w, \bar{z}-\bar{w}) \langle \mathcal{O}_k(w, \bar{w}) \dots \rangle$$

其中的 \dots 可以是我們选择的任何其他插入的算符. 显然继续写 $\langle \dots \rangle$ 非常繁琐, 所以我們不写. 而将它隐含在表达式中. 此外, 还有一些关于 OPE 的注意事项值得强调:

- 关联函数总是假定是时序的. (或者类似的排序, 具体细节我们将在 5.6.1 节中讨论). 这意味着, 就 OPE 而言, 一切都对易, 因为算符的排序无论如何都是在关联函数内部决定的. 所以我们一定有 $\mathcal{O}_i(z, \bar{z}) \mathcal{O}_j(w, \bar{w}) = \mathcal{O}_j(w, \bar{w}) \mathcal{O}_i(z, \bar{z})$ (这里需要注意的是, 如果算符是格拉斯曼的 (Grassmann), 即反对易. 那么即使是在时间有序乘积内部, 它们在交换时也总会多出一个负号.).
- 其他算符在关联函数中的插入 (上面用 \dots 表示) 是任意的. 只不过它们的距离应该大于 $|z-w|$. 事实证明, 在共形场论中, OPE 是精确的陈述, 其收敛半径等于与 OPE 处最近的其他算符插入处的距离. 我们将在 5.7 节详述这一点.
- 当 $z \rightarrow w$ 时, OPE 具有奇异行为. 而事实上, 这种奇异行为才是我们唯一关心的问题. 它将包含与对易关系相同的信息, 并可以告诉我们算符如何在对称性下变换. 事实上, 在绝大多数情况下, 我们只需在 OPE 中写入奇异项, 并将非奇异项表示为 $+\dots$ 即可.

沃德 (Ward) 恒等式

量子场论中, 诺特定理的思想被保留在称为沃德恒等式 (Ward identity) 的算符方程中. 在此, 我们推导与共形不变性相关的沃德恒等式. 我们首先考虑具有对称性的一般理论, 并在稍后将讨论限制到共形对称的范畴内.

从路径积分开始

借此机会, 我们将熟悉一些使用路径积分的基本技巧. 路径积分的结构形式为:

$$Z = \int \mathcal{D}\phi e^{-S[\phi]}$$

其中, 我们将所有场都统称为 ϕ (注意这里 ϕ 作为路径积分中泛函积分变量出现, 因此这里的场指上文所说的路径积分意义上的场, 而非共形场论意义上的场.). 我们考虑的量子的对称性体现在如下无穷小变换上:

$$\phi' = \phi + \epsilon \delta \phi$$

在这一变换下作用量与积分测度都保持不变:

$$S[\phi'] = S[\phi] \quad \text{and} \quad \mathcal{D}\phi' = \mathcal{D}\phi$$

(事实上, 我们只需要组合 $\mathcal{D}\phi e^{-S[\phi]}$ 不变即可, 但这个微妙之处在本课程中并不重要). 我们使用之前在经典理论中使用的相同技巧, 推广 ϵ 为坐标的函数: $\epsilon \rightarrow \epsilon(\sigma)$ 通常情况下, 改写 ϵ 为坐标函数后, 作用量和测度都不是不变的, 但是, 在 ϵ 的领头阶, 变化必须与 $\partial\epsilon$ 成比例. 我们有:

$$\begin{aligned} Z &\rightarrow \int \mathcal{D}\phi' \exp(-S[\phi']) \\ &= \int \mathcal{D}\phi \exp\left(-S[\phi] - \frac{1}{2\pi} \int J^\alpha \partial_\alpha \epsilon\right) \\ &= \int \mathcal{D}\phi e^{-S[\phi]} \left(1 - \frac{1}{2\pi} \int J^\alpha \partial_\alpha \epsilon\right) \end{aligned}$$

其中 $1/2\pi$ 只是一个约定, 而 \int 是 $\int d^2\sigma \sqrt{g}$ 的简写. 需要注意的是, 现在的 J^α 也可能有来自测度变换和作用量的贡献.

这里需要用到一点小技巧, 虽然积分变量发生了变化, 但配分函数 (partition function) 的实际值不可能有任何变化. 毕竟, 我们只是重新定义了一个虚拟的积分变量 ϕ . 所以上面的表达式一定等于原来的 Z . 或者, 换句话说:

$$\int \mathcal{D}\phi e^{-S[\phi]} \left(\int J^\alpha \partial_\alpha \epsilon \right) = 0$$

更重要的是, 上式必须对所有 ϵ 都成立. 这就给出了诺特定理的量子版本: 流的散度必须有为 0 的真空期望值:

$$\langle \partial_\alpha J^\alpha \rangle = 0.$$

我们可以重复这些技巧来推导出一些更有力的陈述. 现在推广到在路径积分中插入其他内容时的情况. 时序关联函数为:

$$\langle \mathcal{O}_1(\sigma_1) \dots \mathcal{O}_n(\sigma_n) \rangle = \frac{1}{Z} \int \mathcal{D}\phi e^{-S[\phi]} \mathcal{O}_1(\sigma_1) \dots \mathcal{O}_n(\sigma_n)$$

我们可以把这些算符看作插入平面上特定点的算符. 如上所述, 算符 \mathcal{O}_i 是我们从 ϕ 场中形成的任何一般表达式. 在我们感兴趣的对称性条件下, 算符会以某种方式发生变化, 例如:

$$\mathcal{O}_i \rightarrow \mathcal{O}_i + \epsilon \delta \mathcal{O}_i$$

我们再次推广 $\epsilon \rightarrow \epsilon(\sigma)$. 首先取一个简单的 ϵ , 让我们选择 $\epsilon(\sigma)$ 使它只有远离算符 \mathcal{O}_i 插入处的贡献, 那么:

$$\delta \mathcal{O}_i(\sigma_i) = 0$$

与上述推导完全相同, 得到:

$$\langle \partial_\alpha J^\alpha(\sigma) \mathcal{O}_1(\sigma_1) \dots \mathcal{O}_n(\sigma_n) \rangle = 0; \quad \sigma \neq \sigma_i$$

因为上式对任何异于 σ 的算符插入都是成立的, 所以根据 5.3.1 节的讨论, 我们有可以出算符方程:

$$\partial_\alpha J^\alpha = 0$$

但如果算符插入点与 J^α 位于同一点呢? 换句话说, 当 σ 接近其中一个插入点时, 会发生什么? 由此得出的公式称为沃德恒等式. 要推导出沃德恒等式, 让我们假设 $\epsilon(\sigma)$ 在某些包含点 σ_1 但不含其他点的区域非零, 最简单的选择是将 σ_1 某个不包含其他 σ 的邻域内的 $\epsilon(\sigma)$ 取为常数, 而将阴影区域外的 $\epsilon(\sigma)$ 取为零. 现在使用与之前相同的程序, 我们发现原本的关联函数现在等于:

$$\frac{1}{Z} \int \mathcal{D}\phi e^{-S[\phi]} \left(1 - \frac{1}{2\pi} \int J^\alpha \partial_\alpha \epsilon \right) (\mathcal{O}_1 + \epsilon \delta \mathcal{O}_1) \mathcal{O}_2 \dots \mathcal{O}_n$$

ϵ 的领头阶给出:

$$-\frac{1}{2\pi} \int_\epsilon \partial_\alpha \langle J^\alpha(\sigma) \mathcal{O}_1(\sigma_1) \dots \rangle = \langle \delta \mathcal{O}_1(\sigma_1) \dots \rangle \quad (5.3.18)$$

其中左侧的积分只涉及 ϵ 非零的区域. 这就是沃德恒等式.

共形变换的沃德恒等式

沃德恒等式对任何对称性都成立. 现在让我们来看看它们应用于共形变换时的结果. 在推导过程中还需要两个步骤. 第一个步骤很简单, 因为我们是在二维空间中工作, 我们可以使用斯托克斯定理将 eq. (5.3.18) 左侧的积分转换为围绕边界的线积分. 让 \hat{n}^α 成为边界的单位法向量. 对于任意向量 J^α , 我们有:

$$\int_\epsilon \partial_\alpha J^\alpha = \oint_{\partial\epsilon} J_\alpha \hat{n}^\alpha = \oint_{\partial\epsilon} (J_1 d\sigma^2 - J_2 d\sigma^1) = -i \oint_{\partial\epsilon} (J_z dz - J_{\bar{z}} d\bar{z})$$

其中我们分别用直角坐标 σ^α 和平面上的复数坐标给出表达式. 正如第 5 节所述, 带下指标的矢量的复数分量定义为: $J_z = \frac{1}{2}(J_1 - iJ_2)$ 和 $J_{\bar{z}} = \frac{1}{2}(J_1 + iJ_2)$. 那么, 第二步就

是将这一定义应用于沃德恒等式 eq. (5.3. 18), 我们会发现对于二维理论有:

$$\frac{i}{2\pi} \oint_{\partial\epsilon} dz \langle J_z(z, \bar{z}) \mathcal{O}_1(\sigma_1) \dots \rangle - \frac{i}{2\pi} \oint_{\partial\epsilon} d\bar{z} \langle J_{\bar{z}}(z, \bar{z}) \mathcal{O}_1(\sigma_1) \dots \rangle = \langle \delta \mathcal{O}_1(\sigma_1) \dots \rangle$$

到目前为止, 我们的推导适用于二维中的任何守恒流 J . 接下来, 我们专门研究共形变换 eq. (5.2. 14) 和 eq. (5.2. 15) 产生的流. 我们有进一步的简化, 因为 J_z 是全纯的, 而 $J_{\bar{z}}$ 是反全纯的. 这意味着围道积分只需取如下留数:

$$\frac{i}{2\pi} \oint_{\partial\epsilon} dz J_z(z) \mathcal{O}_1(\sigma_1) = -\text{Res}[J_z \mathcal{O}_1]$$

那么两个算符之间 OPE 的留数一定为:

$$J_z(z) \mathcal{O}_1(w, \bar{w}) = \dots + \frac{\text{Res}[J_z \mathcal{O}_1(w, \bar{w})]}{z - w} + \dots$$

于是, 我们找到了一种相当不错的方法来给出共形变换的沃德等式. 如果我们再把 z 和 \bar{z} 看作独立变量, 沃德恒等式就分成了两部分. 而从变化 $\delta z = \epsilon(z)$, 我们可以得到:

$$\delta \mathcal{O}_1(\sigma_1) = -\text{Res}[J_z(z) \mathcal{O}_1(\sigma_1)] = -\text{Res}[\epsilon(z) T(z) \mathcal{O}_1(\sigma_1)] \quad (5.3. 19)$$

其中, 在第二个等式中, 我们使用了共形对称的流的表达式 eq. (5.2. 14). 同时, 从变化 $\delta \bar{z} = \bar{\epsilon}(\bar{z})$ 中. 我们可以得到:

$$\delta \mathcal{O}_1(\sigma_1) = -\text{Res}[\bar{J}_{\bar{z}}(\bar{z}) \mathcal{O}_1(\sigma_1)] = -\text{Res}[\bar{\epsilon}(\bar{z}) \bar{T}(\bar{z}) \mathcal{O}_1(\sigma_1)]$$

这里的负号是由于 $\oint d\bar{z}$ 的边界积分取了相反的方向.

这个结果意味着, 如果我们知道一个算符与能动张量 $T(z)$ 和 $\bar{T}(\bar{z})$ 之间的 OPE, 那么我们马上就能知道这个算符在共形对称下是如何变换的. 或者, 反过来说, 如果我们知道算符如何变换, 那么我们至少知道它与 T 和 \bar{T} 之间的部分 OPE.

5.3.2 主场 (primary field) 与 主算符 (primary operator)

根据沃德恒等式, 我们可以通过研究算符如何在共形对称下变换, 开始拼凑一些 OPE. 虽然我们还不知道一般共形对称的作用, 但我们可以通过研究两个最简单的例子开始: **平移**: 如果 $\delta z = \epsilon$, 一个常数, 那么所有算符都会以如下形式变换:

$$\mathcal{O}(z - \epsilon) = \mathcal{O}(z) - \epsilon \partial \mathcal{O}(z) + \dots$$

用于平移的诺特流就是能动张量 T 。形如 eq. (5.3. 19) 的沃德恒等式告诉我们, 任何算符 \mathcal{O} 的 T 的 OPE 必须取如下形式:

$$T(z) \mathcal{O}(w, \bar{w}) = \dots + \frac{\partial \mathcal{O}(w, \bar{w})}{z - w} + \dots \quad (5.3. 20)$$

同样地, 与 \bar{T} 的 OPE 为:

$$\bar{T}(\bar{z}) \mathcal{O}(w, \bar{w}) = \dots + \frac{\bar{\partial} \mathcal{O}(w, \bar{w})}{\bar{z} - \bar{w}} + \dots \quad (5.3. 21)$$

转动与放缩: 转动与放缩变换可以写为:

$$z \rightarrow z + \epsilon z \quad \text{and} \quad \bar{z} \rightarrow \bar{z} + \bar{\epsilon} \bar{z} \quad (5.3. 22)$$

描述了 ϵ 纯虚数对应的旋转, 以及 ϵ 实数对应的的伸缩. 并非所有算符在这些变换下都具有良好的变换特性. 这实际上类似于量子力学中的说法, 即并非所有态都能在哈密顿量 H 和角动量算符 L 下具有良好变换性质. 然而, 在量子力学中, 我们知道可以选择 H 和 L 的本征态作为希尔伯特空间的基, 当然前提是 $[H, L] = 0$.

同样的说法也适用于共形场论中的算符: 我们可以选择一个在旋转和伸缩下具有良好变换性质的局域算符作为基. 事实上, 我们将在 5.7 节中看到, 关于局域算符的说法实际上是由关于态的说法推导出来的.

定义: 若算符 \mathcal{O} 在 $\delta z = \epsilon z$ 和 $\delta \bar{z} = \bar{\epsilon} \bar{z}$ 条件下以如下形式变换:

$$\delta \mathcal{O} = -\epsilon(h\mathcal{O} + z\partial\mathcal{O}) - \bar{\epsilon}(\tilde{h}\mathcal{O} + \bar{z}\bar{\partial}\mathcal{O}), \quad (5.3. 23)$$

则该算符 \mathcal{O} 被认为具有共形权 (h, \tilde{h}) . 这个表达式中的 $\partial\mathcal{O}$ 项对于任何算符都是存在的. 它们只是来自于 $\mathcal{O}(z - \epsilon z, \bar{z} - \bar{\epsilon} \bar{z})$ 的展开. 而需要注意的是 $h\mathcal{O}$ 和 $\tilde{h}\mathcal{O}$ 这两项对于作为伸缩和旋转本征态的算符来说是特殊的. 下面是一些重要的事实:

- h 和 \tilde{h} 都是实数. 在么正共形场论中, 所有算符都满足 $h, \tilde{h} \geq 0$. 我们将在 5.6.2 节说明这一点.
- 权并不像看起来那么陌生. 它们只是告诉我们算符在旋转和缩放时如何变换. 但我们在本科量子力学就已经有了这些概念的名称. 旋转群的本征值通常称为自旋量子数, 即 s , 用权值表示为:

$$s = h - \tilde{h}$$

同时, 算符的缩放量纲 (scaling dimension), 也称为共形量纲 (conformal dimension)

Δ 是

$$\Delta = h + \tilde{h}$$

- 为了解释这些定义, 我们不妨回顾一下旋转和缩放变换是如何作用于坐标的. 旋转由算符:

$$L = -i(\sigma^1 \partial_2 - \sigma^2 \partial_1) = z\partial - \bar{z}\bar{\partial}$$

而产生缩放的伸缩算符 D 则是

$$D = \sigma^\alpha \partial_\alpha = z\partial + \bar{z}\bar{\partial}$$

- 共形量纲是我们熟悉的 "量纲" 的推广, 我们通常通过量纲分析把它与场和算符的缩放性质联系起来. 例如, 世界面导数总是把算符的量纲加一: $\Delta[\partial] = +1$. 然而需要注意的是, 场在经典理论中呈现的缩放行为, 并不总是与量子理论中的缩放行为一致, 特别是当量子效应引入反常量纲时. 反常量纲本质上是一种重整化效应, 类似于质量重整化, 但它描述的是算符的缩放性质.

让我们来比较一下变换定律 eq. (5.3. 23) 以及沃德恒等式 eq. (5.3. 19). 旋转和缩放产生的诺特流 $\delta z = \epsilon z$ 在 eq. (5.2. 14) 中给出: $J(z) = zT(z)$. 这意味着 $J\mathcal{O}$ OPE 的留数将决定 $T\mathcal{O}$ OPE 中的 $1/z^2$ 项. 当然, 类似的论证也适用于 $\delta\bar{z} = \bar{\epsilon}\bar{z}$ 和 \bar{T} . 因此, 这样做的结果是, 对于权为 (h, \tilde{h}) 的算符 \mathcal{O} 来说, 带 T 和 \bar{T} 的 OPE 的形式为:

$$\begin{aligned} T(z) \mathcal{O}(w, \bar{w}) &= \dots + h \frac{\mathcal{O}(w, \bar{w})}{(z-w)^2} + \frac{\partial \mathcal{O}(w, \bar{w})}{z-w} + \dots \\ \bar{T}(\bar{z}) \mathcal{O}(w, \bar{w}) &= \dots + \tilde{h} \frac{\mathcal{O}(w, \bar{w})}{(\bar{z}-\bar{w})^2} + \frac{\bar{\partial} \mathcal{O}(w, \bar{w})}{\bar{z}-\bar{w}} + \dots \end{aligned}$$

主算符是指其与 T 和 \bar{T} OPE 的截断分别为 $(z-w)^{-2}$ 阶或 $(\bar{z}-\bar{w})^{-2}$ 阶的算子. 不能存在更高的奇点:

$$\begin{aligned} T(z) \mathcal{O}(w, \bar{w}) &= h \frac{\mathcal{O}(w, \bar{w})}{(z-w)^2} + \frac{\partial \mathcal{O}(w, \bar{w})}{z-w} + \dots \\ \bar{T}(\bar{z}) \mathcal{O}(w, \bar{w}) &= \tilde{h} \frac{\mathcal{O}(w, \bar{w})}{(\bar{z}-\bar{w})^2} + \frac{\bar{\partial} \mathcal{O}(w, \bar{w})}{\bar{z}-\bar{w}} + \dots \end{aligned}$$

由于我们现在知道了 $T\mathcal{O}$ OPE 中的所有奇点, 因此我们可以在所有共形变换下给出具体的变换形式. 而所谓的主算符的重要性就在于它们具有特别简单的变换性质. 以

$\delta z = \epsilon(z)$ 为中心, 我们有:

$$\delta \mathcal{O}(w, \bar{w}) = -\text{Res}[\epsilon(z) T(z) \mathcal{O}(w, \bar{w})] = -\text{Res} \left[\epsilon(z) \left(h \frac{\mathcal{O}(w, \bar{w})}{(z-w)^2} + \frac{\partial \mathcal{O}(w, \bar{w})}{z-w} + \dots \right) \right]$$

第二步代入的正是 $T\mathcal{O}$ 的 OPE. 由于我们要研究平滑的共形变换, 因此要求 $\epsilon(z)$ 本身在 $z = w$ 处没有奇点. 于是我们可以进行泰勒展开:

$$\epsilon(z) = \epsilon(w) + \epsilon'(w)(z-w) + \dots$$

将上式代回, 我们便得到了在一般共形变换 $\delta z = \epsilon(z)$ 下, 主算符的无穷小变化:

$$\delta \mathcal{O}(w, \bar{w}) = -h\epsilon'(w) \mathcal{O}(w, \bar{w}) - \epsilon(w) \partial \mathcal{O}(w, \bar{w}) \quad (5.3. 24)$$

这表明, 主算符的变化可拆解为如下两部分:

- 缩放项: $-h\epsilon'(z)\mathcal{O}(z, \bar{z})$, 它是不同主算符变换中的主要区别.
- 平移项: $-\epsilon(z)\partial \mathcal{O}(z, \bar{z})$, 这一项描述了主算符如何进行平移.

而反全纯变换也有类似的表达式 $\delta \bar{z} = \bar{\epsilon}(\bar{z})$.

eq. (5.3. 24) 一式对于无限小共形变换成立. 而要想知道主算符在有限共形变换下是如何变化的, 只需积分即可. 具体来说, 观察无穷小共形变换 $\delta z = \epsilon(z)$ 下的 $\delta \mathcal{O}(w, \bar{w})$, 我们现在关注第一项 (缩放项), 为了推广到有限变换, 我们引入变换参数 t , 并将 z 改记为变量 $\hat{z}(t)$, 为 t 的函数. 于是 t 成为一个描述物理体系演化的参数, 描述从初始坐标 $\hat{z}(0) = z$ 到最终坐标 $\hat{z}(T) = \bar{z}$ 的变换. 由 z 的无穷小变换形式, \hat{z} 在参数 t 的小变换下增长的小量 $d\hat{z}$ 为 $\epsilon(\hat{z}(t))$, 于是 ϵ 此时反应 $\hat{z}(t)$ 关于 t 的导数:

$$\frac{d}{dt} \hat{z}(t) = \epsilon(\hat{z}(t)). \quad (5.3. 25)$$

而算符 $\mathcal{O}(\hat{z}(t))$ 在这一参数描述下的变化率可以写为:

$$\frac{d}{dt} \mathcal{O}(\hat{z}(t)) = -h\epsilon'(\hat{z}(t)) \mathcal{O}(\hat{z}(t)). \quad (5.3. 26)$$

进行变量分离:

$$\frac{d\mathcal{O}}{\mathcal{O}} = -h\epsilon'(\hat{z}(t)) dt. \quad (5.3. 27)$$

分别将等号两侧对参数 t 从 0 到 T 积分:

$$\ln \frac{\mathcal{O}(\tilde{z})}{\mathcal{O}(z)} = -h \int_0^T \epsilon'(\hat{z}(t)) dt. \quad (5.3. 28)$$

我们希望将右侧的积分表达成 z 的函数. 具体的做法是利用链式法则:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \tilde{z}}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \frac{d\tilde{z}}{dt} = \epsilon'(\hat{z}) \cdot \frac{\partial \tilde{z}}{\partial z}. \quad (5.3. 29)$$

对 t 积分, 我们得到:

$$\int_0^T \epsilon'(\hat{z}(t)) dt = \ln \frac{\partial \tilde{z}}{\partial z}. \quad (5.3. 30)$$

两侧同时取指数, 我们有:

$$\frac{\partial \tilde{z}}{\partial z} = \exp\left\{\int_0^T \epsilon'(\hat{z}(t)) dt\right\} \quad (5.3. 31)$$

将其带回 eq. (5.3. 28), 我们便得到:

$$\ln \frac{\mathcal{O}(\tilde{z})}{\mathcal{O}(z)} = -h \ln \frac{\partial \tilde{z}}{\partial z}. \quad (5.3. 32)$$

最终得到:

$$\mathcal{O}(\tilde{z}) = \left(\frac{\partial \tilde{z}}{\partial z}\right)^{-h} \mathcal{O}(z). \quad (5.3. 33)$$

对于 \bar{z} 方向的讨论与之类似, 于是:

$$\mathcal{O}(\tilde{z}, \bar{\tilde{z}}) = \left(\frac{\partial \tilde{z}}{\partial z}\right)^{-h} \left(\frac{\partial \bar{\tilde{z}}}{\partial \bar{z}}\right)^{-\bar{h}} \mathcal{O}(z, \bar{z}). \quad (5.3. 34)$$

于是我们得到了主算符的一般变换:

$$\mathcal{O}(z, \bar{z}) \rightarrow \tilde{\mathcal{O}}(\tilde{z}, \bar{\tilde{z}}) = \left(\frac{\partial \tilde{z}}{\partial z}\right)^{-h} \left(\frac{\partial \bar{\tilde{z}}}{\partial \bar{z}}\right)^{-\bar{h}} \mathcal{O}(z, \bar{z}) \quad (5.3. 35)$$

事实将证明, 共形场论的主要关注对象之一就是主场的权 (h, \bar{h}) 谱. 这相当于计算量子场论中的粒子质量谱. 而在统计力学中, 主算符的权就是所谓的临界指数 (critical exponents).

5.4 以自由标量场为例

让我们来看看自由标量场是如何工作的. 首先熟悉一下使用路径积分的一些技巧. 作用量是:

$$S = \frac{1}{4\pi\alpha'} \int d^2\sigma \partial_\alpha X \partial^\alpha X \quad (5.4. 36)$$

经典的运动方程是 $\partial^2 X = 0$. 让我们先看看如何用路径积分推导出量子理论中的类似说法. 我们需要的关键事实是, 整体导数的路径积分为 0, 这就像整体导数在普通积分中为 0 一样. 由此我们可以得出:

$$0 = \int \mathcal{D}X \frac{\delta}{\delta X(\sigma)} e^{-S} = \int \mathcal{D}X e^{-S} \left[\frac{1}{2\pi\alpha'} \partial^2 X(\sigma) \right]$$

但这只不过是艾伦费斯特定理 (Ehrenfest theorem), 该定理认为算符的期望值服从经典运动方程:

$$\langle \partial^2 X(\sigma) \rangle = 0$$

传播子 (propogator)

接下来我们要做的是计算 X 的传播子, 也即两点关联函数. 我们当然可以用正则量子化来做这件事, 但用路径积分来达成这一目标也是很有帮助的. 观察:

$$0 = \int \mathcal{D}X \frac{\delta}{\delta X(\sigma)} [e^{-S} X(\sigma')] = \int \mathcal{D}X e^{-S} \left[\frac{1}{2\pi\alpha'} \partial^2 X(\sigma) X(\sigma') + \delta(\sigma - \sigma') \right]$$

于是有:

$$\langle \partial^2 X(\sigma) X(\sigma') \rangle = -2\pi\alpha' \delta(\sigma - \sigma') \quad (5.4. 37)$$

请注意, 如果我们用正则的方法来计算, 我们会发现相同的答案: 由于所有关联函数都是有时间顺序的, 因此在计算中会出现 δ 函数.

现在我们可以把 eq. (5.4. 37) 看作传播子 $\langle X(\sigma)X(\sigma') \rangle$ 的微分方程. 要解这个方程, 我们需要下面的标准结果

$$\partial^2 \ln(\sigma - \sigma')^2 = 4\pi\delta(\sigma - \sigma') \quad (5.4. 38)$$

既然这很重要, 我们就来快速验证一下它的正确性. 这其实就是是斯托克斯定理的一个简单应用. 取 $\sigma' = 0$ 并对 $\int d^2\sigma$ 进行积分. 很明显, 我们可以从等号右侧得到 4π , 而等

号左侧则会给出:

$$\int d^2\sigma \partial^2 \ln(\sigma_1^2 + \sigma_2^2) = \int d^2\sigma \partial^\alpha \left(\frac{2\sigma_\alpha}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} \right) = 2 \oint \frac{(\sigma_1 d\sigma^2 - \sigma_2 d\sigma^1)}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$$

转换到极坐标 $\sigma_1 + i\sigma_2 = re^{i\theta}$, 我们可以将该表达式重写为:

$$2 \int \frac{r^2 d\theta}{r^2} = 4\pi$$

于是便证实了 eq. (5.4. 38). 再再将这一结果应用到 eq. (5.4. 37) 一式中, 我们就得到了自由标量在二维空间的传播子, 也可以称为格林函数 (Green's function):

$$\langle X(\sigma)X(\sigma') \rangle = -\frac{\alpha'}{2} \ln(\sigma - \sigma')^2$$

这里需要注意一点, 我们在推导过程中刻意忽略了常数项. 换言之, 这一格林函数允许出现额外的常数项, 其对应于 X 的零模. 或者我们也可以通过在 X 做伸缩变换使得格林函数多出一个常数项, 事实上这也是对数 CFT 的重要特征. 但这在物理上其实并不重要, 因为真正有物理意义的传播子是产生湮灭算符给出的态之间的内积, 它们会对应 X 的导数项从而消去零模. 接下来我们观察这个对数函数, 其在 $\sigma \rightarrow \sigma'$ 时有一个奇点. 这是一个紫外发散, 是所有场论的共性. 它还有一个奇点是 $|\sigma - \sigma'| \rightarrow \infty$. 这告诉了我们一些重要的性质, 我们将在 5.4.1 节中详细解释.

最后, 我们可以重复在路径积分中观察整体导数的技巧, 现在在路径积分中插入其他算符 $\mathcal{O}_1(\sigma_1), \dots, \mathcal{O}_n(\sigma_n)$. 只要 $\sigma, \sigma' \neq \sigma_i$, 那么整个分析的过程就和以前完全一致. 我们通常使用这样的标准流程写出某些算符的乘积, 例如:

$$X(\sigma)X(\sigma') = -\frac{\alpha'}{2} \ln(\sigma - \sigma')^2 + \dots \quad (5.4. 39)$$

我们也可以在复坐标下表达上式. 经典运动方程 $\partial\bar{\partial}X = 0$ 允许我们将算符 X 分解为左行 (left moving) 和右行 (right moving) 部分:

$$X(z, \bar{z}) = X(z) + \bar{X}(\bar{z})$$

我们只关注左行这部分, 右行的部分则同理. 我们有算符乘积展开:

$$X(z)X(w) = -\frac{\alpha'}{2} \ln(z - w) + \dots$$

对数型的 OPE 意味着 $X(z)$ 在共形变换下性质很差. 因此, 在这个理论中最基本的构成 X 反而并不是我们真正感兴趣的对象. 不过, 我们可以看看 X 的导数. 它有一个相当漂亮的 OPE:

$$\partial X(z) \partial X(w) = -\frac{\alpha'}{2} \frac{1}{(z-w)^2} + \text{non-singular} \quad (5.4.40)$$

5.4.1 二维不存在戈德斯坦玻色子 (Goldstone boson)

传播子的红外发散具有重要的物理意义. 首先, 让我们指出量子力学和量子场论在 $d = 3 + 1$ 维上的一个重大区别. 由于描述这两种理论的语言相当不同, 很多人可能甚至没有意识到这种差异的存在.

考虑一维的量子力学. 这是一个自由标量场 X 的 $d = 0 + 1$ 维理论. 让我们把粒子制备在某种局域态, 例如高斯波函数 $\Psi(X) \sim \exp(-X^2/L^2)$ 中. 然后随着时间推移, 波函数开始向外扩散. 并且这种扩散不会停止. 实际上, 系统的基态之一正是一个无限宽的均匀波函数, 也就是平面波. 但这不是希尔伯特空间中的态, 因为它不能被归一化, 但我们在本科量子力学中的希尔伯特空间却将这一波函数作为基, 这一矛盾的解决依赖于希尔伯特空间自伴算符 (self-adjoint operator) 的谱 (可以理解为本征值的推广) 分解 (spectrum decomposition), 我们在这里不再赘述.

现在, 让我们将上述一维量子力学与 $d = 3 + 1$ 维场论中的自由标量场 X 的情况进行比较. 现在我们把它看成是一个没有势的标量. 物理上的情况非常不同: 场论有无限多的基态, 由期望值 $\langle X \rangle$ 决定. 围绕这个真空的小波动 (fluctuation) 是无质量的: 它们是被打破平移不变性 $X \rightarrow X + c$ 的戈德斯坦玻色子.

我们看到, 在 $d = 0 + 1$ 和 $d = 3 + 1$ 维中, 物理学原理截然不同. 在量子力学中, 波函数会扩散, 但在高维场论中没有这样的现象. 那么, 在 $d = 1 + 1$ 和 $d = 2 + 1$ 维中会发生什么呢? 事实证明, $d = 1 + 1$ 维的场论更像量子力学: 波函数扩散. 而维度为 $d = 2 + 1$ 或更高的理论则表现出相反的行为: 它们具有戈德斯坦玻色子. 传播子的计算中便可体现这一点. 在任意 d 维时空里, 传播子的形式为:

$$\langle X(r) X(0) \rangle \sim \begin{cases} 1/r^{d-2} & d \neq 2 \\ \ln r & d = 2 \end{cases}$$

上式只有在 $d = 1$ 和 $d = 2$ 时才会在较大 r 时发散. 如果我们用插入算符 $X(0)$ 的方式对真空进行轻微扰动, 那么这个关联函数直接反映了这种扰动是如何随着距离的增加而变化的. 低维度时的这种红外发散告诉我们波函数想要扩散.

由科尔曼-梅明-瓦格纳定理 (Coleman-Mermin-Wagner theorem), 波函数在低维度的扩散意味着不存在自发对称破缺, 也不存在戈德斯坦玻色子. 这通常被称为科尔曼-梅明-瓦格纳定理 (Coleman-Mermin-Wagner theorem). 不过需要注意的是, 它并不禁止二维中的无质量激发, 它只是禁止类似戈德斯坦玻色子的无质量激发.

5.4.2 能动张量与主算符

我们想计算 T 与其他算符的 OPE. 关于 T , 我们先前是在 eq. (5.2. 16) 中用经典理论计算过它:

$$T = -\frac{1}{\alpha'} \partial X \partial X \quad (5.4. 41)$$

但是, 我们需要注意这在量子理论中的含义. 它涉及定义在同一点的两个算符的乘积, 如果我们不小心处理, 这势必意味着发散. 在正则量子化中, 我们会希望通过把所有湮灭算子放到右边来进行正规排序. 这保证了真空能为零. 而在这里, 我们做了一些基本等价的事情, 但没有提及产生和湮灭算符:

$$T = -\frac{1}{\alpha'} : \partial X \partial X : \equiv -\frac{1}{\alpha'} \lim_{z \rightarrow w} (\partial X(z) \partial X(w) - \langle \partial X(z) \partial X(w) \rangle) \quad (5.4. 42)$$

这样构造便会自然地得到 $\langle T \rangle = 0$.

有了 T 的这个定义, 我们现在可以开始计算 OPE, 用以确定理论中的主场. 首先要计算的是几个重要的场的共形权:

首先是 ∂X , 这是一个共形权为 $(h, \tilde{h}) = (1, 0)$ 的主场. 为证明这一点我们需要先确定如何取正规排序算符的乘积.

$$T(z) \partial X(w) = -\frac{1}{\alpha'} : \partial X(z) \partial X(z) : \partial X(w)$$

其中等号左侧的算符是时序的 (因为这种类型的所有算符表达式都被认为存在于时序关联函数中). 与之相反的是, 等号右边则是正规排序算符的乘积. 但是我们知道如何将正规排序的乘积变为时间排序的乘积: 利用威克定理 (Wick theorem) 的内容. 尽管我们在 eq. (5.4. 42) 中定义了正规排序, 而没有提及产生和湮灭算符, 但威克定理仍然成立. 我们必须对算符对所有可能的缩并求和, 而这里的收缩是指我们用传播子代替算符对:

$$\underbrace{\partial X(z) \partial X(w)} = -\frac{\alpha'}{2} \frac{1}{(z-w)^2}$$

利用这一点, 我们有:

$$T(z)\partial X(w) = -\frac{2}{\alpha'} \partial X(z) \left(-\frac{\alpha'}{2} \frac{1}{(z-w)^2} + \dots \right)$$

这里的 \dots 部分包括完全正规排序项 $T(z)\partial X(w)$ 的贡献. 而我们感兴趣的只有奇异部分. 于是, 我们有:

$$T(z)\partial X(w) = \frac{\partial X(z)}{(z-w)^2} + \dots = \frac{\partial X(w)}{(z-w)^2} + \frac{\partial^2 X(w)}{z-w} + \dots$$

这确实是权为 $h = 1$ 的主算符的 OPE.

需要注意的是, 对于 $n > 1$ 的更高阶导数来说, $\partial^n X$ 不是主算符. 例如, $\partial^2 X$ 是权为 $(h, \tilde{h}) = (2, 0)$ 的算符, 但不是主算符. 其实这一点我们可以通过简单的 OPE 计算看出:

$$T(z)\partial^2 X(w) = \partial_w \left[\frac{\partial X(w)}{(z-w)^2} + \dots \right] = \frac{2\partial X(w)}{(z-w)^3} + \frac{2\partial^2 X(w)}{(z-w)^2} + \dots$$

场 $\partial^n X$ 的共形权为 $(h, \tilde{h}) = (n, 0)$ 这一事实符合我们的自然直觉: 每阶导数都提供了自旋 $s = 1$ 和量纲 $\Delta = 1$, 而场 X 似乎没有贡献, 或者说我们想当然地会认为这反映了它具有经典意义下的零量纲, 事实的确如此, 在经典理论中, 我们如果按照算符的共形权定义, 即观察算符与能动张量 OPE 来讨论 X 的共形权我们得到的确实是零, 这正是 [1] 中提到的结论. 然而, 在量子理论中, 说 X 的量纲为 0 则有待商榷: 其 OPE eq. (5.4.39) 的对数行为表明它不像通常具有良定义的共形量纲的共形场那样相互作用, 因此不能简单地赋予它一个固定的共形权, 或者不能简单将他作为权为零的场来看待, 这便是为什么 [2] 与许多其他教材 (包括本书) 声称它有一个定义不清的共形量纲.

我们接下来可以进一步得到: e^{ikX} 的共形权为 $(h, \tilde{h}) = (\alpha' k^2/4, \alpha' k^2/4)$, 且为主算符. 这两点都可以从 $:e^{ikX}:$ 与 T 的 OPE 得到, 与先前步骤一样, 我们先计算: e^{ikX} 与 ∂X 的 OPE. 有:

$$\begin{aligned} \partial X(z) : e^{ikX(w)} &:= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ik)^n}{n!} \partial X(z) : X(w)^n : \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(ik)^n}{(n-1)!} : X(w)^{n-1} : \left(-\frac{\alpha'}{2} \frac{1}{z-w} \right) + \dots \\ &= -\frac{i\alpha' k}{2} \frac{e^{ikX(w)}}{z-w} + \dots \end{aligned} \quad (5.4.43)$$

利用上式, 我们现在可以尝试计算与 T 的 OPE 了:

$$\begin{aligned} T(z) : e^{ikX(w)} &:= -\frac{1}{\alpha'} : \partial X(z) \partial X(z) : : e^{ikX(w)} : \\ &= \frac{\alpha' k^2}{4} \frac{: e^{ikX(w)} :}{(z-w)^2} + ik \frac{: \partial X(z) e^{ikX(w)} :}{z-w} + \dots \end{aligned}$$

其中第一项是进行两次缩并的结果, 而第二项则对应于进行一次缩并, $1/2$ 消失是由于对称性, 即选取任一 $\partial X(z)$ 参与缩并都等价. 将最后一项中绕 w 展开, 我们得到带奇点的项:

$$T(z) : e^{ikX(w)} := \frac{\alpha' k^2}{4} \frac{: e^{ikX(w)} :}{(z-w)^2} + \frac{\partial_w : e^{ikX(w)} :}{z-w} + \dots \quad (5.4. 44)$$

表明 $: e^{ikX(w)} :$ 确实是主算符. 我们以后会经常遇到这个算符, 但我们会选择简化符号, 去掉正规排序的冒号. 从现在起, 我们将默认使用正规排序.

最后, 让我们看看 T 与自身的 OPE. 这同样可以作为一个缩并的练习:

$$\begin{aligned} T(z) T(w) &= \frac{1}{\alpha'^2} : \partial X(z) \partial X(z) : : \partial X(w) \partial X(w) : \\ &= \frac{2}{\alpha'^2} \left(-\frac{\alpha'}{2} \frac{1}{(z-w)^2} \right)^2 - \frac{4}{\alpha'^2} \frac{\alpha'}{2} \frac{: \partial X(z) \partial X(w) :}{(z-w)^2} + \dots \end{aligned}$$

这里也存在上述对称性导致的系数, 第一项前面的系数 2 来自于两个缩并的两种方式. 第二项中的系数 4 则来自于单个缩并的多种方式. 于是:

$$\begin{aligned} T(z) T(w) &= \frac{1/2}{(z-w)^4} + \frac{2T(w)}{(z-w)^2} - \frac{2}{\alpha'} \frac{\partial^2 X(w) \partial X(w)}{z-w} + \dots \\ &= \frac{1/2}{(z-w)^4} + \frac{2T(w)}{(z-w)^2} + \frac{\partial T(w)}{z-w} + \dots \end{aligned} \quad (5.4. 45)$$

我们由上述讨论知道, 在自由标量场理论中, T 并非主算符. 它是共形权为 $(h, \tilde{h}) = (2, 0)$ 的算符. 但由于其与 T 的 OPE 中有 $(z-w)^{-4}$ 项, 它不满足主算符的定义. 而事实上, 能动张量的这一特性是所有 CFT 的普遍特征, 我们现在对它进行更详细的探讨.

5.5 中心荷 (Central charge)

在任何共形场论的算符中, 最显然的不属于主算符的例子就是能动张量本身.

对于自由标量场, 我们已经看到 T 的共形权为 $(h, \tilde{h}) = (2, 0)$. 但实际上这在任何共形

场论中都正确. 原因很简单: $T_{\alpha\beta}$ 的量纲为 $\Delta = 2$, 因为我们是通过积分来得到能量分量的. 并且它有自旋 $s = 2$, 这因为它是一个对称的二阶张量. 这两个信息等价于 T 是共形权为 $(2, 0)$ 的算符. 同理, \bar{T} 的共形权为 $(0, 2)$. 这表明 TT OPE 的形式一定为:

$$T(z)T(w) = \dots + \frac{2T(w)}{(z-w)^2} + \frac{\partial T(w)}{z-w} + \dots$$

$\bar{T}\bar{T}$ 的 OPE 与之类似. 在这个展开中还会有哪些项呢? 由于每个项的量纲都是 $\Delta = 4$, 所以出现在等号右侧的算符必须取如下形式:

$$\frac{\mathcal{O}_n}{(z-w)^n} \quad (5.5. 46)$$

其中, $\Delta[\mathcal{O}_n] = 4 - n$. 但是, 在共形场论中不存在 $h, \tilde{h} < 0$ 的算符 (我们稍后会证明这一点). 因此, 我们能得到的最奇异的项是阶为 $(z-w)^{-4}$ 的项. 而与这样的项一同出现的只能是常数. 于是:

$$T(z)T(w) = \frac{c/2}{(z-w)^4} + \frac{2T(w)}{(z-w)^2} + \frac{\partial T(w)}{z-w} + \dots$$

同理,

$$\bar{T}(\bar{z})\bar{T}(\bar{w}) = \frac{\tilde{c}/2}{(\bar{z}-\bar{w})^4} + \frac{2\bar{T}(\bar{w})}{(\bar{z}-\bar{w})^2} + \frac{\partial \bar{T}(\bar{w})}{\bar{z}-\bar{w}} + \dots$$

常数 c 和 \tilde{c} 被称为中心荷. (有时它们也被称为左行和右行中心荷). 它们也许是表征共形场论的最重要的数字. 我们已经可以对这两个数字所包含的信息有一些直观的认识. 在自由标量场 eq. (5.4. 45) 的例子中, 我们发现自由标量场有 $c = \tilde{c} = 1$. 而如果我们换成考虑 D 个不相互影响的自由标量场, 那么我们则会得到 $c = \tilde{c} = D$. 这给了我们一个提示: c 和 \tilde{c} 以某种方式描述了共形场论中的自由度数量. 这正是中心荷的深层含义, 不过 c 却不一定是整数.

此外, 还有一个问题没有解决: 为什么我们没有在 TT OPE 中加入 $(z-w)^{-3}$ 项? 原因在于, OPE 必须满足 $T(z)T(w) = T(w)T(z)$. 因为如前所述, 这些算符方程都是在时序关联函数中成立的. 因此, 答案就是 $(z-w)^{-3}$ 项在 $z \leftrightarrow w$ 下无法保持不变. 但是, $(z-w)^{-1}$ 项是如何逃过这一限制的? 答案如下:

$$T(w)T(z) = \frac{c/2}{(z-w)^4} + \frac{2T(z)}{(z-w)^2} + \frac{\partial T(z)}{w-z} + \dots$$

现在我们可以利用泰勒展开 $T(z) = T(w) + (z-w)\partial T(w) + \dots$ 和 $\partial T(z) = \partial T(w) + \dots$,

得到:

$$T(w)T(z) = \frac{c/2}{(z-w)^4} + \frac{2T(w) + 2(z-w)\partial T(w)}{(z-w)^2} - \frac{\partial T(w)}{z-w} + \dots = T(z)T(w)$$

于是, $(z-w)^{-1}$ 项被低一阶项的泰勒展开保护. 但对于 $(z-w)^{-3}$ 项, 低一阶项的常数则不起作用.

能动张量的变换规则

因此, 除非 $c = 0$, 否则 T 就不是主算符. 我们很快就会看到, 对所有理论都有 $c > 0$. 这对 T 的变换规则也存在着一影响:

$$\begin{aligned}\delta T(w) &= -\text{Res}[\epsilon(z)T(z)T(w)] \\ &= -\text{Res}\left[\epsilon(z)\left(\frac{c/2}{(z-w)^4} + \frac{2T(w)}{(z-w)^2} + \frac{\partial T(w)}{z-w} + \dots\right)\right]\end{aligned}$$

如果 $\epsilon(z)$ 不包含奇异项, 我们可以展开

$$\epsilon(z) = \epsilon(w) + \epsilon'(w)(z-w) + \frac{1}{2}\epsilon''(w)(z-w)^2 + \frac{1}{6}\epsilon'''(w)(z-w)^3 + \dots$$

于是有:

$$\delta T(w) = -\epsilon(w)\partial T(w) - 2\epsilon'(w)T(w) - \frac{c}{12}\epsilon'''(w) \quad (5.5. 47)$$

这是无限小的变换. 我们想知道, 在有限共形变换 $z \rightarrow \tilde{z}(z)$ 的作用下, T 会以什么方式变换. 答案是:

$$\tilde{T}(\tilde{z}) = \left(\frac{\partial \tilde{z}}{\partial z}\right)^{-2} \left[T(z) - \frac{c}{12}S(\tilde{z}, z)\right] \quad (5.5. 48)$$

其中, $S(\tilde{z}, z)$ 被称为施瓦兹导数 (Schwarzian derivative), 定义如下:

$$S(\tilde{z}, z) = \left(\frac{\partial^3 \tilde{z}}{\partial z^3}\right) \left(\frac{\partial \tilde{z}}{\partial z}\right)^{-1} - \frac{3}{2} \left(\frac{\partial^2 \tilde{z}}{\partial z^2}\right)^2 \left(\frac{\partial \tilde{z}}{\partial z}\right)^{-2} \quad (5.5. 49)$$

这个所谓的施瓦兹导数的来源是什么呢? 倘若没有施瓦兹导数项, 我们可以验证 T 便成为主算符, 这和我们先前得到的结论不符, 因此必须存在这一修正. 可以证明, 中心荷不参与全局共形变换 (也叫莫比乌斯变换 (Möbius transformation).), 因此施瓦兹导数在 \tilde{z} 和 z 以莫比乌斯变换相互联系的情况下为 0. 再由连续共形变换的群乘法 (两个相继的变换必然等价于一个变换), 便可以得到施瓦兹导数的具体形式. 我们可以很容易地检验出施瓦茨式具有正确的无穷小形式, 从而得到 eq. (5.5. 47).

5.5.1 外尔反常 (Weyl Anomaly)

弦理论的一个关键特征是, 它并非在所有时空背景下都自洽, 而仅在某些满足特定条件的背景下成立. 例如, 我们曾在第 3 章讨论过: 平坦时空中的玻色弦理论要求时空维数满足 $D = 26$. 而这一节让我们讨论另一个重要的现象: 外尔对称性的反常. 所谓外尔反常指的是能动量张量的迹 T^α_α 在经典理论中为零, 但在量子理论中不再为零的现象. 我们在量子场论中实际上已经接触过类似的反常现象, 尽管表述方式可能不同. 全局外尔变换 (即 $w(\sigma)$ 为常数的情况) 等价于对尺度的整体缩放. 我们在四维时空中的一些熟悉的相互作用 (如无质量 ϕ^4 理论和非阿贝尔规范理论) 在经典层面具有尺度不变性, 因为它们的拉格朗日量是尺度无关的, 所有参数均为无量纲参数 (例如耦合常数便是无量纲的). 然而, 量子理论中的发散会导致非零的重整化群 β 函数, 表明有效耦合常数实际上是和尺度有关的. 相应地, 能动量张量的迹在经典理论中为零, 但在量子效应下非零且正比于 β 函数.

在弦理论中外尔反常的形式与之类似, 同时还与中心荷有所联系. 具体来说在经典理论中, 共形场论的性质之一是能动张量的迹为 0.

$$T^\alpha_\alpha = 0$$

然而, 量子理论中的情况更为微妙. 虽然 $\langle T^\alpha_\alpha \rangle$ 在平直空间中确实为 0, 但如果我们把理论放在一个弯曲的背景上, 它就不再成立了. 而本节的目的便是要证明:

$$\langle T^\alpha_\alpha \rangle = -\frac{c}{12}R \quad (5.5. 50)$$

首先我们观察规范固定后的配分函数, 即真空路径积分 $Z[g]$ 是否与基准度规 g 的选择无关, 即需要验证

$$Z[g'] = Z[g] \quad (5.5. 51)$$

其中 g' 与 g 之间差一个外尔变换. 我们可以观察含任意插入算符的路径积分, 它们有如下形式:

$$\langle \cdots \rangle_g = \int [dX db dc] e^{-S[X, b, c, g]} \cdots, \quad (5.5. 52)$$

要求外尔不变性作为算符恒等式成立, 即

$$\langle \cdots \rangle_{e^{2w}g} = \langle \cdots \rangle_g. \quad (5.5. 53)$$

我们暂时不关注插入项本身的细节, 因为外尔反常讨论的内容对任意态均成立, 是时空

本身与弦的自身性质相关的内容, 与插入项无关. 也就是说, 我们要求外尔不变性作为算符方程成立.

能量-动量张量 T^{ab} 定义为路径积分关于度规的无穷小变分的响应, 即:

$$\delta\langle\cdots\rangle_g = -\frac{1}{4\pi} \int d^2\sigma g^{1/2} \delta g_{\alpha\beta} \langle T^{\alpha\beta} \cdots \rangle_g. \quad (5.5. 54)$$

经典理论中, T^{ab} 完全由作用量的变分给出, 这与诺特定理中关于守恒流的定义一致:

$$T^{ab}(\sigma) \xrightarrow{\text{classical}} \frac{4\pi}{g(\sigma)^{1/2}} \frac{\delta}{\delta g_{ab}(\sigma)} S \quad (5.5. 55)$$

此时若将 δg_{ab} 取为坐标变换, 那么路径积分的微分同胚不变性对应的诺特流 T^{ab} 守恒. 接下来, 我们将首先忽略边界效应, 对于外尔变换, T^{ab} 的定义 eq. (5.5. 54) 表明:

$$\delta_w\langle\cdots\rangle_g = -\frac{1}{2\pi} \int d^2\sigma g(\sigma)^{1/2} \delta\omega(\sigma) \langle T^\alpha_\alpha(\sigma) \cdots \rangle_g \quad (5.5. 56)$$

因此, 包含一般插入项 ... 的外尔不变性可表述为算符方程, 即能量-动量张量无迹:

$$T^\alpha_\alpha \stackrel{?}{=} 0. \quad (5.5. 57)$$

经典作用量具有外尔不变性, 但与我们本节开头提及的场论中的量子反常类似, 在量子化之后我们对体系的描述可能存在修正, 而在这里的体现就是能动张量的迹可能不为 0. 由于已保留微分同胚与庞加莱对称性, 能动张量的迹便必须满足这两种不变性, 且在平直情形下迹必须为零 (我们已知平直情形下共形不变, 因此不存在这一问题). 由此仅剩一种可能性:

$$T^\alpha_\alpha = a_1 R \quad (5.5. 58)$$

其中 a_1 为常数, R 为世界面里奇标量. 由于作用量中的量纲要求, 能动张量的迹中不能出现超过两个导数的项. 而 g_{ab} 和 X^μ 均与世界面的尺度无关, 因此 eq. (5.5. 58) 中的常数 a_1 同样与之无关.

总结一下前面的讨论, 因为 $\langle T^\alpha_\alpha \rangle$ 对任何态都具有相同的值, 所以它必须等于某种只取决于背景度规的量, 且由量纲限制, 它应当是局域的量纲为 2 的量. 在这其中满足庞加莱对称性和微分同胚对称性的唯一的候选者是里奇标量 R . 因此, 我们可以确定至仅差一个系数: $\langle T^\alpha_\alpha \rangle \sim R$. 那么, 系数是多少, 是否为 0? 在具体推导之前, 我们先介绍几个基本事实:

- eq. (5.5. 50) 一式适用于理论中的任何态, 包括但不限于真空态. 这反映它来自于对

整个理论的短程发散的调节, 而非针对某些态. 但是, 能量有限的态在短程下看起来大致相同.

- 通过对坐标的适当选择, 我们总是可以将任何二维度规表示为 $g_{\alpha\beta} = e^{2\omega} \delta_{\alpha\beta}$ 的形式. 在这样的坐标选取下, 里奇标量为:

$$R = -2e^{-2\omega} \partial^2 \omega \quad (5.5. 59)$$

显然是 ω 的函数. eq. (5.5. 50) 一式告诉我们, 任何 $c \neq 0$ 的共形理论都至少有一个物理可观测量 $\langle T_\alpha^\alpha \rangle$, 它在被外尔变换 ω 相互关联的背景上取不同的值. 这一结果被称为外尔反常, 有时也被称为迹反常.

- 高维共形场论也存在外尔反常现象. 例如, 4d CFT 由 a 和 c 两个数字表征. 它们作为系数出现在外尔反常中:

$$\langle T_\mu^\mu \rangle_{4d} = \frac{c}{16\pi^2} C_{\rho\sigma\kappa\lambda} C^{\rho\sigma\kappa\lambda} - \frac{a}{16\pi^2} \tilde{R}_{\rho\sigma\kappa\lambda} \tilde{R}^{\rho\sigma\kappa\lambda}$$

其中 C 是外尔张量, \tilde{R} 是黎曼张量的对偶.

- 我们在 eq. (5.5. 50) 里只涉及左行中心荷 c , 但其实左行部分并不特殊. 我们也有

$$\langle T^\alpha_\alpha \rangle = -\frac{\tilde{c}}{12} R$$

而在平直空间, 共形场论允许 c 和 \tilde{c} 不同. 而在固定的弯曲背景下, 如果我们希望这些理论是一致的便需要要求 $c = \tilde{c}$. 这正是引力反常的结论之一.

- 外尔不变性最终会要求 $c = 0$. 而这一事实在弦理论中至关重要, 它给出了对物理理论的限制条件, 我们只允许中心荷 $c = 0$ 的理论存在. 我们将在 6 一章再次讨论这个问题.

现在我们将证明外尔反常 eq. (5.5. 50). 首先, 我们需要推导一个中间步骤: $T_{z\bar{z}} T_{w\bar{w}}$ 的 OPE. 当然, 在经典理论中我们发现共形不变性要求 $T_{z\bar{z}} = 0$. 而现在我们将证明, 在量子理论中, 这一点是十分微妙的.

我们的出发点是能量守恒方程:

$$\partial T_{z\bar{z}} = -\bar{\partial} T_{zz}$$

这样, 我们就可以用我们熟悉的 TT OPE 来表达我们所需的 OPE.

$$\begin{aligned} \partial_z T_{z\bar{z}}(z, \bar{z}) \partial_w T_{w\bar{w}}(w, \bar{w}) &= \bar{\partial}_{\bar{z}} T_{zz}(z, \bar{z}) \bar{\partial}_{\bar{w}} T_{ww}(w, \bar{w}) \\ &= \bar{\partial}_{\bar{z}} \bar{\partial}_{\bar{w}} \left[\frac{c/2}{(z-w)^4} + \dots \right] \end{aligned} \quad (5.5. 60)$$

等号右侧为全纯函数的反全纯导数. 但这并不意味着等于 0, 因为函数在 $z = w$ 处存在奇点. 这与下面的例子相似:

$$\bar{\partial}_{\bar{z}} \partial_z \ln |z - w|^2 = \bar{\partial}_{\bar{z}} \frac{1}{z - w} = 2\pi \delta(z - w, \bar{z} - \bar{w}) \quad (5.5. 61)$$

上式的正确性已在 eq. (5.4. 38) 之后得到了验证. (与 eq. (5.4. 38) 相差系数 2 则来自于 5 节中为复数坐标定义的约定). 而 eq. (5.5. 61) 的中间步骤正是全纯函数的反全纯导数. 但我们已经看到结果不为 0. 由于奇点的存在, 这里有些微妙的事情. eq. (5.5. 61) 告诉我们, 函数 $1/z$ 隐含关于 \bar{z} 的依赖性. 利用这一结果, 我们可以写出:

$$\bar{\partial}_{\bar{z}} \bar{\partial}_{\bar{w}} \frac{1}{(z - w)^4} = \frac{1}{6} \bar{\partial}_{\bar{z}} \bar{\partial}_{\bar{w}} \left(\partial_z^2 \partial_w \frac{1}{z - w} \right) = \frac{\pi}{3} \partial_z^2 \partial_w \bar{\partial}_{\bar{w}} \delta(z - w, \bar{z} - \bar{w})$$

将其插入关联函数 eq. (5.5. 60), 去掉两边的 $\partial_z \partial_w$ 导数我们就得到了想要的结果:

$$T_{z\bar{z}}(z, \bar{z}) T_{w\bar{w}}(w, \bar{w}) = \frac{c\pi}{6} \partial_z \bar{\partial}_{\bar{w}} \delta(z - w, \bar{z} - \bar{w}) \quad (5.5. 62)$$

因此, $T_{z\bar{z}}$ 和 $T_{w\bar{w}}$ 的 OPE 几乎处处为 0, 但当 $z \rightarrow w$ 出现时, 会有一些奇怪的奇异行为, 这通常被称为算符之间的接触项 (contact term). 我们已经看到, 它直接来源于能量守恒. 而我们将会看到, 这个接触项也正是导致外尔反常的原因.

平直空间中 $\langle T^\alpha_\alpha \rangle = 0$. 现在尝试推导出接近平直空间的 $\langle T^\alpha_\alpha \rangle$ 的表达式. 首先, 考虑在度规 $\delta g_{\alpha\beta}$ 的一般变动下 $\langle T^\alpha_\alpha \rangle$ 的变化. 根据能量-动量张量的定义 eq. (5.2. 11), 我们可以得出:

$$\begin{aligned} \delta \langle T^\alpha_\alpha(\sigma) \rangle &= \delta \int \mathcal{D}\phi e^{-S} T^\alpha_\alpha(\sigma) \\ &= \frac{1}{4\pi} \int \mathcal{D}\phi e^{-S} \left(T^\alpha_\alpha(\sigma) \int d^2\sigma' \sqrt{g} \delta g^{\beta\gamma} T_{\beta\gamma}(\sigma') \right) \end{aligned}$$

如果我们现在将度规的变换限制为外尔变换, 那么平直度规的变化是 $\delta g_{\alpha\beta} = 2\omega \delta_{\alpha\beta}$, 而度规的逆的变化是 $\delta g^{\alpha\beta} = -2\omega \delta^{\alpha\beta}$. 由此得出:

$$\delta \langle T^\alpha_\alpha(\sigma) \rangle = -\frac{1}{2\pi} \int \mathcal{D}\phi e^{-S} \left(T^\alpha_\alpha(\sigma) \int d^2\sigma' \omega(\sigma') T^\beta_\beta(\sigma') \right) \quad (5.5. 63)$$

现在我们知道 eq. (5.5. 62) 中的 OPE 决定了外尔反常的原因了. 因为我们需要在复数坐标和笛卡尔坐标之间转换, 所以还要格外同时注意系数 2.

$$T^\alpha_\alpha(\sigma) T^\beta_\beta(\sigma') = 16 T_{z\bar{z}}(z, \bar{z}) T_{w\bar{w}}(w, \bar{w})$$

同时, 使用 5 节中的约定, 我们有 $8\partial_z\bar{\partial}_{\bar{w}}\delta(z-w, \bar{z}-\bar{w}) = -\partial^2\delta(\sigma-\sigma')$. 这样我们就得到了直角坐标下的 OPE:

$$T^\alpha_\alpha(\sigma) T^\beta_\beta(\sigma') = -\frac{c\pi}{3} \partial^2 \delta(\sigma - \sigma')$$

现在我们把它代回到 eq. (5.5. 63) 中, 利用分部积分把两个导数移到共形因子 ω 上, 剩下的就是:

$$\delta \langle T^\alpha_\alpha \rangle = \frac{c}{6} \partial^2 \omega \Rightarrow \langle T^\alpha_\alpha \rangle = -\frac{c}{12} R$$

其中最后一步使用了 eq. (5.5. 59). 由于我们计算的是无穷小变换, 我们可以进行替换: $e^{-2\omega} \approx 1$. 这就 (至少对于无限接近于平直空间的空间) 完成了外尔反常的证明. 而对于一般的二维世界面, 我们总可以利用重参数化不变性来得到共形平直的度规, 所以向一般二维世界面的推广平凡.

5.5.2 中心荷的物理含义

注意到, T 的变换 eq. (5.5. 48) 中的额外项并不取决于 T 本身. 它的值对所有态都是一样的, 只影响能量中的常数项, 即零模. 换句话说, 它就是系统的卡西米尔能 (Casimir energy).

让我们来看一个稍后会被证明对弦有用的例子. 考虑欧几里得空间中的圆柱体, 以如下形式参数化:

$$w = \sigma + i\tau, \quad \sigma \in [0, 2\pi)$$

我们可以通过以下共形变换将圆柱面变为复平面:

$$z = e^{-iw}$$

事实上, 圆柱面和平面是通过共形映射联系在一起的. 这意味着如果我们在圆柱面上理解了给定的共形场论, 那么在平面上我们也马上就能理解它, 反之亦然. 圆柱面上的等时线被映射为平面上的等半径圆. 而原点 $z = 0$ 则对应于无穷远过去 $\tau \rightarrow -\infty$.

在这种变换下 T 会发生什么变化? 我们可以很容易地计算出施瓦茨导数为 $S(z, w) = 1/2$. 因此我们得到:

$$T_{\text{cylinder}}(w) = -z^2 T_{\text{plane}}(z) + \frac{c}{24} \quad (5.5. 64)$$

假设当理论定义在平面上时, 基态能量消失: $\langle T_{\text{plane}} \rangle = 0$. 那么在圆柱体上会发生什么

呢? 计算哈密顿量:

$$H \equiv \int d\sigma T_{\tau\tau} = - \int d\sigma (T_{ww} + \bar{T}_{\bar{w}\bar{w}})$$

共形变换告诉我们, 圆柱体上的基态能量为:

$$E = -\frac{2\pi(c + \tilde{c})}{24}$$

这就是圆柱体上的卡西米尔能. 对于自由标量场, 我们有 $c = \tilde{c} = 1$ 和能量密度 $E/2\pi = -1/12$. 这与我们在 3.4 节中得到的结果是一样的, 但这次我们没有遇到无穷大的奇怪问题.

卡西米尔效应和外尔反常现象有着相似之处. 在二者中, 中心荷都为能量提供了额外的贡献. 我们现在展示中心荷的另一种含义: 它描述了高能态的密度.

我们将研究欧几里得环面上的共形场论. 保持先前定义 $\sigma \in [0, 2\pi)$, 但现在我们也把 τ 看成是周期性的, 位于以下范围内:

$$\tau \in [0, \beta)$$

欧氏时空中时间具有周期性的理论的配分函数有一个非常自然的解释: 它与温度 $T = 1/\beta$ 时理论的自由能有关.

$$Z[\beta] = \text{Tr } e^{-\beta H} = e^{-\beta F} \quad (5.5. 65)$$

在温度极低时 $\beta \rightarrow \infty$, 自由能由能量最低的态主导. 所有其他态都会受到指数级的抑制. 但我们在前文中看到, 圆柱体上的真空态具有卡西米尔能 $H = -c/12$. 因此, 在低温极限下, 配分函数近似为:

$$Z \rightarrow e^{c\beta/12} \quad \text{as } \beta \rightarrow \infty \quad (5.5. 66)$$

在欧几里得空间中, 环的两个方向是平等的. 我们完全可以改记 σ 为时间, 而 τ 是空间. 这不会改变配分函数的值. 交换之后与原来的配分函数相比, 我们希望空间方向的范围是 $[0, 2\pi)$. 而由于我们理论的共形性质, 我们可以通过如下缩放来实现这一点:

$$\tau \rightarrow \frac{2\pi}{\beta} \tau \quad , \quad \sigma \rightarrow \frac{2\pi}{\beta} \sigma$$

现在我们重新归一化空间的周期, 但时间方向的取值范围是 $\sigma \in [0, 4\pi^2/\beta)$. 这告诉我

们, 高温和低温配分函数是相关的:

$$Z[4\pi^2/\beta] = Z[\beta]$$

这被称为模不变性 (modular invariance). 我们会在 8.7 节再次提及这一问题. $\beta' = 4\pi^2/\beta$ 告诉了我们配分函数的极高温特性:

$$Z[\beta'] \rightarrow e^{c\pi^2/3\beta'} \quad \text{as } \beta' \rightarrow 0$$

但配分函数的极高温极限是对理论中所有态的采样. 而从熵的角度来看, 这种采样以高能态为主. 因此, 这种计算相当于是在告诉我们有多少高能态.

为了更清楚地了解这一点, 让我们来复习一下统计力学. 任何系统都有一个状态密度 $\rho(E) = e^{S(E)}$, 其中 $S(E)$ 是熵. 自由能的计算公式为:

$$e^{-\beta F} = \int dE \rho(E) e^{-\beta E} = \int dE e^{S(E) - \beta E}$$

二维空间中的物理体系都有一个熵, 而它在能量极大时为

$$S(E) \rightarrow N\sqrt{E} \quad (5.5.67)$$

系数 N 表示自由度的数量. $S \sim \sqrt{E}$ 等价于 $F \sim T^2$, 这符合空间维度为 1 的理論的能量密度. 要看到这一点, 我们只需要利用鞍点 $S'(E_*) = \beta$ 来对积分进行近似. 再利用 eq. (5.5.67) 便可以得到自由能:

$$F \sim N^2 T^2$$

现在我们可以把关于中心荷的部分说得更清楚了. 在共形场理论中, 高能态的熵由以下公式给出:

$$S(E) \sim \sqrt{cE}$$

这就是所谓的卡迪公式 (Cardy's formula)

扎马洛奇科夫 (Zamolodchikov) 提出的 c 定理进一步加强了理论中中心荷与自由度之间的联系. c 定理的思想是考察所有理论以及它们之间的重整化群流 (renormalization group (RG) flows).

共形场论非常特殊, 它们是重整化群的定点, 在所有尺度上都相同. 我们可以考虑在共

形场理论的作用量上增加一个额外项, 从而对其进行扰动:

$$S \rightarrow S + \alpha \int d^2\sigma \mathcal{O}(\sigma)$$

这里的 \mathcal{O} 是理论的局域算符, 而 α 是某个系数. 这些扰动分为三类, 取决于 \mathcal{O} 的量纲 Δ .

- 相关扰动 $\Delta < 2$: 在这种情况下, α 具有正量纲: $[\alpha] = 2 - \delta$. 这种变形被称为相关的 (relevant), 因为它们在红外区非常重要. 重整化群流会偏离原本的共形场论, 直至到达新的固定点, 即遇到一个新的共形场论 (可能是平凡的 $c = 0$) 时才会停止.
- 边际扰动 $\Delta = 2$: 常数 α 是无量纲的. 我们称其为边际变形 (marginal deformation). 但需注意, 仅当变形算符是严格边际 (即所有阶的 β 函数均为零) 时, 扰动后的理论才能保持共形不变性并定义新的共形场论. 因此, 这里的 $\Delta = 2$ 仅是保持共形对称性的必要条件, 而非充分条件².
- 无关扰动 $\Delta > 2$: 常数 α 具有负量纲. 这些变形被称为不相关的 (irrelevant), 用来表明这样的耦合常数在重整化群作用下最终为 0. 红外区的物理性质仍由原来的共形场论描述, 但紫外线物理却被改变了.

在重整化群流中, 当理论从紫外区流向红外区时, 通常会伴随信息的所谓 "粗粒化" 丢失. 这一现象可由 c 定理严格描述: 该定理指出, 在二维量子场论的理论空间上存在一个函数 c , 其沿重整化群流单调递减, 且在共形场论的固定点处, c 的取值等于该共形场论的中心荷. 需要注意的是, 尽管 c 定理最初针对共形场论提出, 但 c 函数的定义可扩展至非共形场论, 这是因为连接两个共形场论的重整化群流本身不要求保持共形对称性, 即中间理论可以是任意的量子场论. 而在连接两个共形固定点的中间理论 (可能非共形) 中 c 仍可定义并保持单调性.

5.6 维拉索罗代数 (Virasoro Algebra)

到目前为止, 我们的讨论仅限于共形场论的算符. 而没有详细介绍态. 现在我们来弥补这一点, 首先观察圆柱体和平面之间的映射.

5.6.1 径向量子化 (Radial Quantization)

要讨论量子场论中的态, 我们需要思考它们所处的空间以及演化规律. 例如, 考虑一个定义在平面上的二维量子场论. 在传统意义上, 在对这一理论进行量子化时, 我们用笛

²如某些情况下, 微扰可能导致非零 β 函数, 使出现的扰动实际为相关或无关的, 这种情形我们称之为边际相关 (marginally relevant) 和 边际无关 (marginally irrelevant)

卡尔坐标 (t, x) 对平面进行参数化, 分别称为时间和空间. 态生活在类空截面上. 而哈密顿量负责产生时间平移, 因而支配着态的演化.

然而, 圆柱体与平面之间的映射表明, 在平面上量子化共形场论有不同的方法. 圆柱体上的复数坐标是 w , 而平面上的坐标是 z . 它们之间有如下关系:

$$w = \sigma + i\tau, \quad z = e^{-iw}$$

在圆柱面上, 态存在于恒定 τ 的类空截面上, 并在哈密顿量的作用下演化:

$$H = \partial_\tau$$

映射到平面后, 哈密顿量变为伸缩算符:

$$D = z\partial + \bar{z}\bar{\partial}$$

圆柱面的类空截面对应于平面上半径恒定的圆. 它们的演化受伸缩算符 D 的支配. 这种构造方法被称为径向量子化.

通常在量子场论中, 我们对时序的关联函数感兴趣. 圆柱体上的时序变成了平面上按半径排序, 此后简称径序. 关联函数中的算符插入处半径越大的位置越靠左. 我们在 5.2 节中提及的共形变换守恒流对应的诺特荷现在可以写为:

$$T_{\epsilon(z)} = \oint_0 \frac{dz}{2\pi i} \epsilon(z) T^m(z) \quad (5.6. 68)$$

算符的共形变换由算符与共形变换对应的守恒荷给出:

$$\delta_\epsilon^c \phi(z) = -[T_\epsilon, \phi(z)] . \quad (5.6. 69)$$

维拉索罗生成元 (Virasoro Generators)

接下来观察平面上的能动张量 $T(z)$. 依然是在圆柱面上, 我们将用傅立叶展开法分解 T .

$$T_{\text{cylinder}}(w) = - \sum_{m=-\infty}^{\infty} L_m e^{imw} + \frac{c}{24}$$

经过平面变换 eq. (5.5. 64) 后, 就变成了洛朗 (Laurent) 展开式:

$$T(z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{L_m}{z^{m+2}}$$

与往常一样, 右行部分也有类似表达式:

$$\bar{T}(\bar{z}) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{\tilde{L}_m}{\bar{z}^{m+2}}$$

我们可以反转这些表达式, 用 $T(z)$ 表示 L_m . 我们需要一个合适的围道积分:

$$L_n = \frac{1}{2\pi i} \oint dz z^{n+1} T(z) \quad , \quad \tilde{L}_n = \frac{1}{2\pi i} \oint d\bar{z} \bar{z}^{n+1} \bar{T}(\bar{z}) \quad (5.6. 70)$$

而如果我们只想得到 L_n 或 \tilde{L}_n , 则必须确保在围道内没有其他算符.

在径向量子化中, L_n 是共形变换 $\delta z = z^{n+1}$ 对应的守恒荷. 这一点来自于 eq. (5.2. 14) 中给出的诺特流, 即: $J(z) = z^{n+1}T(z)$. 此外, 围道积分 $\oint dz$ 映射为圆柱面上绕类空截面的积分. 因此 L_n 是守恒荷. 这里的 "守恒" 是指它在圆柱面上的时间演化或平面上的径向演化中保持不变. 同理, \tilde{L}_n 是共形变换 $\delta \bar{z} = \bar{z}^{n+1}$ 对应的守恒荷.

在量子化后, 守恒荷就变成了变换的生成元. 因此, 算符 L_n 和 \tilde{L}_n 生成共形变换 $\delta z = z^{n+1}$ 和 $\delta \bar{z} = \bar{z}^{n+1}$. L_n 和 \tilde{L}_n 被称为维拉索罗生成元. 其中, 我们最感兴趣的三个共形变换是:

- L_{-1} 和 \tilde{L}_{-1} 生成平移变换.
- L_0 和 \tilde{L}_0 则生成放缩与旋转.
- L_{+1} 和 \tilde{L}_{+1} 则生成 5.1 节介绍的特殊共形变换.

系统的哈密顿量 (衡量圆柱面上态的能量的算符) 被映射成平面上的伸缩算符. 当作用于平面上的理论中的态时, 该算符表示为:

$$D = L_0 + \tilde{L}_0$$

此外, $L_{-1,0,1}$ 是定义在世界面全局的维拉索罗生成元, 相当于能动张量有全局定义的模. 于是, 与能动张量 OPE 不满足主算符要求的算符若与这三个生成元的对易子不存在高于二阶的奇点, 进而满足主算符定义 eq. (5.3. 24) 则被称为准主算符 (quasi-primary operator). 例如, 能动张量算符就是准主算符, 我们将 $L_{-1,0,1}$ 的定义代入 TT OPE

eq. (5.4. 45), 不难发现, 能动张量与 $L_{-1,0,1}$ 的对易子中不出现中心荷项, 最高为二阶奇点. 而既不是主算符也不是准主算符的例子也有很多, 例如反常鬼场流, 我们会在第 6 章详细讨论.

维拉索罗代数

如果我们有一定数量的守恒荷, 首先要做的就是计算它们的代数. 然后其表示可以对理论的态进行分类. (这正是我们在量子力学里看到的氢原子中的角动量的作用). 对于共形对称性, 我们要确定 L_n 生成元所满足的代数关系. 而一个好消息是 L_n 生成元的对易关系实际上隐含在 TT 的 OPE 中.

我们希望计算对易子 $[L_m, L_n]$. 让我们把 L_m 写成围道积分 $\oint dz$, 而把 L_n 写成围道积分 $\oint dw$, (注意到: 现在 z 和 w 都表示复平面上的坐标). 对易子现在完全写为如下积分的形式:

$$[L_m, L_n] = \left(\oint \frac{dz}{2\pi i} \oint \frac{dw}{2\pi i} - \oint \frac{dw}{2\pi i} \oint \frac{dz}{2\pi i} \right) z^{m+1} w^{n+1} T(z) T(w)$$

这具体是什么意思呢? 我们需要记住, 所有算符方程都应被视为存在于时序的关联函数中. 而现在我们是在 Z 平面上观察, 于是这句话转化成径序关联函数: 平面上从外到内的算符在关联函数里按从左到右排序.

计算对易子的方法是首先固定 w , 然后进行 $\oint dz$ 积分, 对围道稍加变形就得到围绕定点 w 进行 z 积分, 于是:

$$\begin{aligned} [L_m, L_n] &= \oint \frac{dw}{2\pi i} \oint_w \frac{dz}{2\pi i} z^{m+1} w^{n+1} T(z) T(w) \\ &= \oint \frac{dw}{2\pi i} \text{Res} \left[z^{m+1} w^{n+1} \left(\frac{c/2}{(z-w)^4} + \frac{2T(w)}{(z-w)^2} + \frac{\partial T(w)}{z-w} + \dots \right) \right] \end{aligned}$$

要计算 $z = w$ 处的留数, 我们首先需要对 z^{m+1} 围绕点 w 进行泰勒展开:

$$\begin{aligned} z^{m+1} &= w^{m+1} + (m+1)w^m(z-w) + \frac{1}{2}m(m+1)w^{m-1}(z-w)^2 \\ &\quad + \frac{1}{6}m(m^2-1)w^{m-2}(z-w)^3 + \dots \end{aligned}$$

然后, 三个项中的每一项都对留数提取一个贡献:

$$[L_m, L_n] = \oint \frac{dw}{2\pi i} w^{n+1} \left[w^{m+1} \partial T(w) + 2(m+1)w^m T(w) + \frac{c}{12} m(m^2-1)w^{m-2} \right]$$

最简单的方法是对第一项进行分部积分. 然后进行 w 积分. 对前两项加和, 得到形如 eq. (5.6. 70) 的表达式, 并给出 L_{m+n} . 而第三项由柯西定理, 仅在 $m = -n$ 时存在贡献. 最后, 我们得到:

$$[L_m, L_n] = (m - n)L_{m+n} + \frac{c}{12}m(m^2 - 1)\delta_{m+n,0}$$

这就是著名的维拉索罗代数. 与之对应的, \tilde{L}_n 有完全相同的代数, 除了 c 需要改为 \tilde{c} . 当然, L_n 与 \tilde{L}_n 的对易子 $[L_n, \tilde{L}_m] = 0$. 在维拉索罗代数中, c 作为一个额外项出现, 这就是它被称为 "中心荷" 的原因. 一般来说, 中心荷是指在一个代数中与其他所有项均对易的额外项.

我们可以为维拉索罗代数构建一些形象的类比. 我们知道 L_n 生成共形变换 $\delta z = z^{n+1}$. 与之相似地: 坐标变换 $\delta z = z^{n+1}$, 它们由如下向量场生成:

$$l_n = z^{n+1}\partial_z \quad (5.6. 71)$$

但是其对易子的计算比维拉索罗代数简单很多:

$$[l_n, l_m] = (m - n)l_{m+n}$$

这正是维拉索罗代数的第一项, 那么中心荷对应的项从何而来? 关键在于, 共形变换不仅仅是经典的坐标重参数化: 在量子理论中, 经典对称性可能因反常被破坏. 具体而言, 中心荷 c 是量子共形反常的体现, 它源于量子效应下无法完全保持坐标重参数化与外尔放缩的组合对称性. 在经典理论中, 生成元的对易子不含中心荷项 (即 $c = 0$), 但量子化后, 重整化效应或路径积分测度的非不变性会导致中心荷的出现. 因此, 中心荷的物理根源是量子反常.

维拉索罗代数的表示

有了守恒荷的代数, 我们现在就可以开始了解共形对称性是如何依据表示将态分类的.

假设我们有一些 L_0 和 \tilde{L}_0 的本征态 $|\psi\rangle$, 那么:

$$L_0 |\psi\rangle = h |\psi\rangle \quad , \quad \tilde{L}_0 |\psi\rangle = \tilde{h} |\psi\rangle$$

回到圆柱面上, 上式相当于指态具有能量:

$$\frac{E}{2\pi} = h + \tilde{h} - \frac{c + \tilde{c}}{24}$$

因此, 我们将本征值 h 和 \tilde{h} 称为态的能量. 通过与 L_n 算符的作用, 我们可以进一步得到更多本征态:

$$L_0 L_n |\psi\rangle = (L_n L_0 - n L_n) |\psi\rangle = (h - n) L_n |\psi\rangle$$

这告诉我们, L_n 是上升还是下降算符依赖于 n 的符号. 当 $n > 0$ 时, L_n 的作用是降低态的能量. 而 L_{-n} 则会提高态的能量. 如果能谱有下界, 就必须有一些态在 $n > 0$ 时被所有 L_n 和 \tilde{L}_n 湮灭. 这种态被称为主态, 它们满足:

$$L_{n>0} |\psi\rangle = \tilde{L}_{n>0} |\psi\rangle = 0 \quad (5.6. 72)$$

在表示论的语言里, 它们也被称为最高权态, 是能量最低的态.

现在, 我们取 $n > 0$, 并令提升算符 L_{-n} 作用于主态, 从而建立维拉索罗代数的表示. 这显然会产生一个无限大的态集合. 以这种方式得到的所有态称为子态 (descendants). 基于一个初始的主态 $|\psi\rangle$, 态集合可以写为:

$$\begin{aligned} & |\psi\rangle \\ & L_{-1} |\psi\rangle \\ & L_{-1}^2 |\psi\rangle, L_{-2} |\psi\rangle \\ & L_{-1}^3 |\psi\rangle, L_{-1} L_{-2} |\psi\rangle, L_{-3} |\psi\rangle \\ & \dots \end{aligned}$$

整个态的集合被称为维尔马模 (Verma module). 它们构成维拉索罗代数的不可约表示. 这意味着, 如果我们知道了主态的能谱, 那么我们就知道了整个理论的能谱.

一些性质:

- 真空态 $|0\rangle$ 的 $h = 0$ 。这种态满足:

$$L_n |0\rangle = 0 \quad \text{for all } n \geq 0 \quad (5.6. 73)$$

而这个态保留了最大数量的对称性: 像所有主态一样, 在 $n > 0$ 时被 L_n 湮灭, 特殊的是, 它也会被 L_0 湮灭. 这与我们的直觉一致, 即真空态应该在尽可能多的对称性下保持不变. 那么我们能要求真空态在所有 n 条件下都服从 $L_n |0\rangle = 0$ 吗? 答案是不行, 因为这与维拉索罗代数中的中心荷项矛盾. 实际上 eq. (5.6. 73) 已经是我们能做的最强的要求了.

- 我们在弦的协变量子化 3 一章中看到了与本节非常类似的东西, 在那里我们施加了

条件 eq. (3.2. 17) 作为约束, 与 eq. (5.6. 72) 一致. 而我们将在 6 节中看到主态与弦的能谱之间的联系.

- 有一个应当注意的微妙问题: 在么正共形场论中, 维尔马模中的态并不一定线性独立. 某些特定态的线性组合可能为 0. 这种线性组合被称为空态 (null state). 空态的存在取决于 h 和 c 的值. 例如, 假设我们令中心荷为 $c = 2h(5 - 8h)/(2h + 1)$, 其中 h 是主态 $|\psi\rangle$ 的能量, 那么很容易就能检验出下面的组合模平方为 0:

$$L_{-2}|\psi\rangle - \frac{3}{2(2h+1)}L_{-1}^2|\psi\rangle \quad (5.6. 74)$$

- 主态与 5.3.2 节中定义的主算符之间有着密切的关系. 事实上, 主态的能量 h 和 \tilde{h} 恰好就是 5.3.2 节中主算符的权. 我们会在 5.7 节中详细描述这种联系.

5.6.2 么正性的影响

有一个物理理论必须满足的性质我们至今都没有提到: 么正性 (unitarity). 他的含义是当我们处于闵氏号差时空时, 概率是守恒的. 如果我们有支配时间演化的哈密顿量, 那么么正性就会随之产生. 但到目前为止, 我们一直在讨论代数, 而没有引入这个条件, 现在我们就来补齐它:

我们将欧几里得圆柱面的讨论转移到闵科夫斯基圆柱面, 以便提出关于时间演化的问题. 在这里, 哈密顿量的形式是:

$$\mathcal{H} = T_{ww} + T_{\bar{w}\bar{w}} = \sum_n L_n e^{-in\sigma^+} + \tilde{L}_n e^{-in\sigma^-}$$

为保证哈密顿量是厄米的, 我们要求:

$$L_n = L_{-n}^\dagger$$

这一要求对 CFT 的结构施加了一些强有力的约束. 在此, 我们将探讨由于么正性导致的物理希尔伯特空间不含负模态的限制而产生的几个平凡但重要的要求:

- $h \geq 0$: 这个要求可以从下面的模中看出:

$$|L_{-1}|\psi\rangle|^2 = \langle\psi|L_{+1}L_{-1}|\psi\rangle = \langle\psi|[L_{+1}, L_{-1}]|\psi\rangle = 2h\langle\psi|\psi\rangle \geq 0$$

而唯一一个对应于 $h = 0$ 的态是真空态 $|0\rangle$.

- $c > 0$: 这个要求来自于:

$$|L_{-n}|0\rangle|^2 = \langle 0|[L_n, L_{-n}]|0\rangle = \frac{c}{12}n(n^2 - 1) \geq 0 \quad (5.6.75)$$

因此, $c \geq 0$. 如果 $c = 0$, 由真空态激发的一系列态中唯一的态就是真空本身. 这相当于整个理论中唯一的态就是真空本身. 于是我们说, 任何非平凡的共形场论都有 $c > 0$.

类似这样的制约物理理论的要求还有很多. 但是对于 $c < 1$ 的共形场论, 这些要求足以对所有理论进行严格分类与解析求解. 此结论源于共形场论中 "极小模型 (minimal models)" 的构造 [3], 其分类依赖于中心荷 c 和算符共形量纲的有理条件. 具体而言, 极小模型对应离散的 $c < 1$ 值, 其形式为:

$$c = 1 - \frac{6(p-q)^2}{pq}, \quad (5.6.76)$$

其中 $p, q \in \mathbb{Z}^+$, $p > q \geq 2$. 且所有物理算符的共形量纲由维拉索罗代数的表示完全确定.

5.7 态与算符之间的映射

本节我们将描述共形场论中态与局域算符之间的映射关系.

首先, 在量子场论中, 态和局域算符是截然不同的对象. 局域算符生活在时空中的一个点上, 而态则生活在整个类空截面上. 如果我们写下一个波函数 (场论里其实更应该称作波泛函), 便可以明白这一区别. $\Psi[\phi(\sigma)]$ 描述了在固定的时间, 空间中每个 σ 点出现每个 $\phi(\sigma)$ 构型的场的概率.

鉴于态和局域算符是截然不同的两种东西, 在共形场论中, 它们之间存在同构关系就有点令人惊讶了: 这就是态和算符之间的映射关系. 关键在于, 圆柱面上的无穷远过去被映射到复平面上的原点 $z = 0$. 因此, 在圆柱面上指定一个无穷远过去的态, 就相当于在复平面的原点指定一个局域的扰动.

为了准确说明这一点, 我们需要回顾一下如何使用路径积分来写波函数. 通过在泛函积分上设置不同的边界条件, 可以计算出不同的态. 让我们先回到量子力学, 回顾几个简单的事实: 描述粒子在时间 τ_i 时从位置 x_i 移动到时间 τ_f 时的位置 x_f 的传播子为

$$G(x_f, x_i) = \int_{x(\tau_i)=x_i}^{x(\tau_f)=x_f} \mathcal{D}x e^{iS}$$

这表明, 如果我们的系统一开始处于波函数 $\psi_i(x_i)$ 在时间 τ_i 时描述的某种态, 那么 (此处忽略整体归一化) 它会演化为这样的态:

$$\psi_f(x_f, \tau_f) = \int dx_i G(x_f, x_i) \psi_i(x_i, \tau_i)$$

从中我们可以得到两个启示. 首先, 为了确定波函数在给定点 x_f 的值, 我们要对满足 $x(\tau_f) = x_f$ 的路径进行路径积分. 其次, 初态 $\psi(x_i)$ 作为初始边界条件积分的系数出现, 为不同坐标点附加不同权重.

现在让我们在场论中写下同样的公式来处理波函数. 我们将在圆柱面上进行欧氏号差的路径积分. 如果从 τ_i 时刻的某个态 $\Psi_i[\phi_i(\sigma)]$ 开始, 那么它将演化为态:

$$\Psi_f[\phi_f(\sigma), \tau_f] = \int \mathcal{D}\phi_i \int_{\phi(\tau_i)=\phi_i}^{\phi(\tau_f)=\phi_f} \mathcal{D}\phi e^{-S[\phi]} \Psi_i[\phi_i(\sigma), \tau_i]$$

如何为映射到复平面后的态写出类似的表达式? 现在态定义在半径恒定的圆上, 比如 $|z| = r$, 态的演化受伸缩算符支配. 假设初始态定义在 $|z| = r_i$. 在路径积分中, 我们对边界条件固定为环形两边的 $\phi(r_i) = \phi_i$ 和 $\phi(r_f) = \phi_f$ 所有场进行积分:

$$\Psi_f[\phi_f(\sigma), r_f] = \int \mathcal{D}\phi_i \int_{\phi(r_i)=\phi_i}^{\phi(r_f)=\phi_f} \mathcal{D}\phi e^{-S[\phi]} \Psi_i[\phi_i(\sigma), r_i]$$

这是场论中定义态的传统方法, 不过因为我们是径向量子化中考虑问题, 所以略有变化. 我们看到, 初始态依然起到了对内环 $|z| = r_i$ 上的路径积分附加权重的作用

现在让我们看看, 当我们把初始态带回到遥远的过去, 并最终到无穷远 $z = 0$ 处时的结果. 现在我们必须对整个盘面 $|z| \leq r_f$ 而不是两圆环所夹的环面进行积分. 初始态的唯一影响是对 $z = 0$ 点的路径积分加权. 而这正对应于我们所说的在该点插入局域算符. 这意味着每个局域算符 $\mathcal{O}(z = 0)$ 在理论中定义了不同的态:

$$\Psi[\phi_f; r] = \int_{\phi(r)=\phi_f}^{\phi(r)=\phi_f} \mathcal{D}\phi e^{-S[\phi]} \mathcal{O}(z = 0)$$

我们现在对圆盘内的所有场构型进行积分, 包括在 $z = 0$ 时场的所有可能值, 这类似于在内圆上对边界条件 $\int \mathcal{D}\phi_i$ 进行积分.

- 在共形场理论中, 我们可以把圆柱面映射到平面上, 而态和算符之间的映射关系因而在么正共形场论中成立. 这其中也涵盖更高维度的共形场论 (其中 $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^{D-1}$ 可以映射到平面 \mathbb{R}^D). 而在非共形的一般场论中, 一个通常的局域算符会产生许多不同

的态.

- 共形场论的态-算符对应表明, 每个局域算符可通过径向量子化唯一关联一个量子态. 具体而言, 将算符插入原点并作用到真空态上便可生成对应的量子态 $|\mathcal{O}\rangle = \lim_{z \rightarrow 0} \mathcal{O}(z) |0\rangle$. 但是需要注意这只适用于局域算符, 通常情况下理论中会存在其他类型的非局域算符, 他们则不存在这样的对应关系.
- 我们需要做一个重要区分: 在自由场的正则量子化中, 我们曾通过产生算符在福克空间中产生态. 但这里的情况并非如此. 产生算符与局域算符相去甚远, 它们是局域算符的傅里叶变换.
- 我们可以用一种特殊方法创造真空态: 在路径积分中插入恒等算符 $\mathbb{1}$ 就会产生真空. 回到圆柱面的图像里, 这只是意味着我们将态传播回无穷远过去 $\tau = -\infty$. 这是欧氏号差下的路径积分中投影除基态之外的所有态的标准技巧. 因此, 真空有时也用算符符号表示为 $|\mathbb{1}\rangle$.

一些简单结果

让我们利用态与算符的映射关系来解决我们在共形场论中遗留的几个问题.

首先, 我们定义了主态和主算符两个 "主" 对象. 态与算符的映射可以将两者联系起来. 考虑主场 $\phi_{h,\bar{h}}$, 我们可以借此渐进地在 $z \rightarrow 0$ 定义入射态 $|h, \bar{h}\rangle$ 态:

$$|h, \bar{h}\rangle = \lim_{z, \bar{z} \rightarrow 0} \phi_{h,\bar{h}}(z, \bar{z}) |0\rangle$$

利用主算符的模式展开:

$$\begin{aligned} \phi_{h,\bar{h}}(z, \bar{z}) &= \sum_{m,n \in \mathbb{Z}} \phi_{m,n} z^{-m-h} \bar{z}^{-n-\bar{h}} \\ \phi_{m > -h, n} |0\rangle &= \phi_{m, n > -\bar{h}} |0\rangle = 0 \end{aligned} \quad (5.7.77)$$

于是主算符的只有一个模对 $|h, \bar{h}\rangle$ 态存在贡献:

$$|h, \bar{h}\rangle = \lim_{z, \bar{z} \rightarrow 0} \sum_{m,n \in \mathbb{Z}} \underbrace{z^{-m-h}}_{\text{for } m < -h} \underbrace{\bar{z}^{-n-\bar{h}}}_{=0 \text{ for } m > -h} \phi_{m,n} |0\rangle = \phi_{-h, -\bar{h}} |0\rangle \quad (5.7.78)$$

这里我们只对全纯部分进行了分析, 反全纯部分同理. 现在我们观察一下维拉索罗生成

元对主态 $|h, \bar{h}\rangle$ 的作用, 为简化讨论, 我们还是仅关注全纯部分:

$$\begin{aligned}
 L_m |h\rangle &= \lim_{w \rightarrow 0} \oint_{B_R(0)} \frac{dz}{2\pi i} z^{m+1} T(z) \phi_h(w) |0\rangle \\
 &= \lim_{w \rightarrow 0} \oint_{B_\epsilon(w)} \frac{dz}{2\pi i} \left(w^{m+1} + (m+1)(z-w)w^m + \dots \right) \\
 &\quad \times \left(\frac{h\phi_h(w)}{(z-w)^2} + \frac{\partial_w \phi_h(w)}{z-w} + \dots \right) |0\rangle \\
 &= \lim_{w \rightarrow 0} [(m+1)hw^m \phi_h(w) |0\rangle + w^{m+1} \partial_w \phi_h(w) |0\rangle] \\
 &= \lim_{w \rightarrow 0} \sum_{n \in \mathbb{Z}} [(m+1)hw^{m-n-h} + w^{m-n-h}(-n-h)] \phi_n |0\rangle
 \end{aligned} \tag{5.7. 79}$$

那么在这个表达式中, 路径积分 $\int \mathcal{D}\phi e^{-S[\phi]}$ 变成了什么? 答案是它仍然隐含在这里. 虽然像 eq. (5.6. 70) 的算符表达式只在关联函数中成立, 但是把一个算符放在关联函数中与把它放在路径积分中, 再用 $e^{-S[\phi]}$ 加权实际上是一回事.

从 eq. (5.7. 79), 我们可以看到各种维拉索罗生成元对态的影响:

- $L_{-1} |h\rangle = \partial_w \phi_h(w) |0\rangle$: 事实上, 不仅仅是主算符, 对所有算符我们都有这一性质. 这是因为 L_{-1} 对应平移生成元.
- $L_0 |h\rangle = h |h\rangle$: 对在放缩下有明确定义变换形式的任何算符都成立. 并且, 根据前述讨论, 这里主算符模展开中只有一个模 $n = -h$ 存在贡献.
- $L_{n>0} |h\rangle = 0$: 这里 w^{m-n-h} 在 $n < m-h$ 时为零, 而 $\phi_n |0\rangle$ 在 $n > -h$ 时为零, 因此整体恒为零. 要注意这只对主算符 $\phi_h(w)$ 适用. 此外, 我们要求 $|h\rangle$ 是一个主态.

这就产生了一个重要的结果. 我们前面说过, 在共形场论中, 最重要的计算之一就是主算符的权谱. 现在我们看到, 这有着更直接的物理意义. 它就是定义在圆柱面上的态的能量谱和角动量谱.

另一个未解决的问题: 在定义具有特定权的算符时, 我们曾说过, 我们总是可以以在 D 和 L 下具有特定本征值的算符作为基来研究问题. 这与我们总能在圆柱面上找到 H 和 L 的本征态作为基的说法是一脉相承的.

最后, 我们可以利用这种态与算符的映射关系的思想来理解为什么 OPE 在共形场论中如此有效. 假设我们对某个关联函数感兴趣. OPE 告诉我们, 我们可以用 $z=0$ 处的算符之和来替换积分围道内的两个算符, 而与围道外的情况无关. 这一关于算符的命题也可以通过计算围道内的路径积分进行验证. 此时两个算符的唯一作用就是确定我们的态. 由于相互等价的围道不能跨过奇点, 因此 OPE 在 CFT 中精确到收敛半径等于下

一个最近的插入点距离.

5.7.1 再谈自由标量场

让我们再次回到自由标量场来说明态与算符的映射关系. 在欧氏圆柱面上, 我们可以做如下模展开:

$$X(w, \bar{w}) = x + \alpha' p \tau + i \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} (\alpha_n e^{inw} + \alpha_n^\dagger e^{in\bar{w}})$$

其中我们保留了闵氏空间的实值要求, 也即 $\alpha_n^* = \alpha_{-n}$ 和 $(\alpha^\dagger)_n^* = \alpha_{-n}^\dagger$. 由于 X 始终为 z 与 \bar{z} 的二元函数, 我们今后用 $X(z)$ 简记. 我们在 5.4 节中看到, X 的共形特性不好, 在利用 $z = e^{-iw}$ 转换到复平面之前, 我们应该先处理圆柱面上的主场:

$$\partial_w X(w) = -\sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_n \alpha_n e^{inw}; \quad \alpha_0 \equiv i \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} p$$

由于 ∂X 是权重为 $h = 1$ 的主场, 它向复平面的变换由 eq. (5.3. 35) 给出:

$$\partial_z X(z) = \left(\frac{\partial z}{\partial w} \right)^{-1} \partial_w X(w) = -i \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_n \frac{\alpha_n}{z^{n+1}}$$

$\bar{\partial} X$ 同理. 求上式逆过程就得到了围道积分形式的 α_n :

$$\alpha_n = i \sqrt{\frac{2}{\alpha'}} \oint \frac{dz}{2\pi i} z^n \partial X(z) \quad (5.7. 80)$$

正如在上一节中, TT OPE 让我们确定了 $[L_m, L_n]$ 的对易关系, $\partial X \partial X$ 的 OPE 也包含了关于 $[\alpha_m, \alpha_n]$ 对易关系的信息:

$$\begin{aligned} [\alpha_m, \alpha_n] &= -\frac{2}{\alpha'} \left(\oint \frac{dz_1}{2\pi i} \oint \frac{dz_2}{2\pi i} - \oint \frac{dz_2}{2\pi i} \oint \frac{dz_1}{2\pi i} \right) (z_1)^m (z_2)^n \partial X(z_1) \partial X(z_2) \\ &= -\frac{2}{\alpha'} \oint \frac{dz_2}{2\pi i} \text{Res}_{z_1=z_2} \left[(z_1)^m (z_2)^n \left(\frac{-\alpha'/2}{(z_1 - z_2)^2} + \dots \right) \right] \\ &= m \oint \frac{dz_2}{2\pi i} (z_2)^{m+n-1} = m \delta_{m+n,0} \end{aligned} \quad (5.7. 81)$$

其中, 在从第二行到第三行的过程中, 我们进行了 z_1 在 z_2 处的泰勒展开. 最终结果与我们用正则量子化方法在弦理论中推导出的对易关系 eq. (3.1. 4) 一致.

自由标量场中态与算符的映射关系

现在让我们来看看态与局域算符之间的映射. 我们从正则量子化中知道, 福克空间是由 $m > 0$ 的产生算符 α_{-m} 作用于真空 $|0\rangle$ 而定义的. 真空态本身在 $m > 0$ 时服从 $\alpha_m|0\rangle = 0$. 最后, 零模 $\alpha_0 \sim p$ 为所有态提供了另一个量子数 p . 通常的态可以写为:

$$\prod_{m=1}^{\infty} \alpha_{-m}^{k_m} |0; p\rangle$$

态与算符的对应关系表明我们可以通过在路径积分中插入算符来复现这些态.

首先观察真空态. 在共形场论中, 真空态 $|0\rangle$ 被定义为满足以下条件的态:

$$\alpha_m|0\rangle = 0 \quad \forall m \geq 0, \quad (5.7. 82)$$

其中 α_m 为场的模展开系数. 我们尝试通过在路径积分中插入单位算符构造此态, 即在复平面上的圆 $|z| = r$ 处, 将真空态的波函数写为:

$$\Psi_0[X_f] = \int^{X_f(r)} \mathcal{D}X e^{-S[X]}, \quad (5.7. 83)$$

其中泛函积分的对象是所有满足边界条件 $X(|z| = r) = X_f$ 的场构型. 作用量 $S[X]$ 为自由标量场的作用量 eq. (5.4. 36). 这是我们基于态与算符映射关系所给出的猜想, 接下来我们验证这的确满足真空态的定义.

我们将算符 α_m 作用到波函数上, 这等价于在场构型中插入围道积分 eq. (5.7. 80)

$$\alpha_m \Psi_0[X_f] = \int^{X_f} \mathcal{D}X e^{-S[X]} \oint_{|w|<r} \frac{dw}{2\pi i} w^m \partial X(w). \quad (5.7. 84)$$

路径积分的权 $e^{-S[X]}$ 要求场构型在盘内 $|z| < r$ 光滑且无奇点 (否则作用量发散). 因此, 仅当 $\partial X(w)$ 在盘内解析时, 积分才有非零贡献.

对于解析函数 $\partial X(w)$, 其洛朗展开为:

$$\partial X(w) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha_n w^{-n-1}, \quad (5.7. 85)$$

围道积分中出现的是 $w^m \partial X(w)$ 的 w^{-1} 项系数. 由于 $m \geq 0$ 时, $w^m \cdot w^{-n-1}$ 的留数仅当 $n = m \geq 0$ 时非零, 但对 $n \geq 0$, ∂X 在圆盘内存在奇点, 已从讨论中去除. 因此, 盘

内 $|z| < r$ 光滑且无奇点的 ∂X 满足:

$$\oint \frac{dw}{2\pi i} w^m \partial X(w) = 0 \quad \forall m \geq 0. \quad (5.7.86)$$

表明我们通过态与算符对应关系猜想出的: 在路径积分中插入恒等算符 eq. (5.7.83) 中构造的 $\Psi_0[X_f]$ 满足真空态波函数的定义.

接下来讨论激发态. 例如 $\alpha_{-m}|0\rangle$, 这样的态对应在路径积分中插入什么算符呢? 一个自然的假设便是: $\alpha_{-m}|0\rangle = |\partial^m X\rangle$, 即 $\alpha_{-m}|0\rangle$ 可以由如下路径积分进行构造:

$$\alpha_{-m}|0\rangle = \int \mathcal{D}X e^{-S[X]} \partial^m X(z=0) \quad (5.7.87)$$

验证上式所给出的路径积分对应激发态实际上并不复杂, 我们可以用湮灭算符 α_n 作用于 $|\partial^m X\rangle$ 来验证这一点.

$$\alpha_n |\partial^m X\rangle \sim \int^{X_f(r)} \mathcal{D}X e^{-S[X]} \oint \frac{dw}{2\pi i} w^n \partial X(w) \partial^m X(z=0)$$

利用 OPE eq. (5.4.40) 进行化简, 先考虑算符围道积分的部分, 稍后再讨论路径积分. 我们可以得到:

$$\oint \frac{dw}{2\pi i} w^n \partial_z^{m-1} \frac{1}{(w-z)^2} \Big|_{z=0} = m! \oint \frac{dw}{2\pi i} w^{n-m-1} = 0 \quad \text{unless } m = n$$

这和 α_n 直接作用于 $\alpha_{-m}|0\rangle$ 得到的结果一致. 即 eq. (5.7.87) 成立.

最后, 看一下前述对应于动量的零模 $\alpha_0 \sim p$. 利用前述含 OPE eq. (5.4.43) 在内的一套方法易证, 态的动量是通过插入主算符 e^{ipX} 产生的. 例如:

$$|0; p\rangle \sim \int \mathcal{D}X e^{-S[X]} e^{ipX(z=0)}.$$

在第 6 章我们会看到, 这里的主算符 e^{ipX} 实际上是顶角算符 (vertex operator) 中的一种, 这是弦理论中一个非常重要的研究对象. 它的具体性质我们会逐步地进行分析.

5.8 带边界的共形场论

开弦定义在空间坐标为 $\sigma \in [0, \pi]$ 的无限长条带上. 我们在这里简述这种共形场论.

和之前一样, 我们定义复坐标 $w = \sigma + i\tau$ 并考虑共形映射:

$$z = e^{-iw}$$

这次的映射给出上半平面: $\text{Im}z \geq 0$. 弦的两端则被映射到实轴 $\text{Im}z = 0$.

很多我们之前讨论的方法仍可沿用, 但现在我们需要处理 $\text{Im}z = 0$ 处的边界条件. 首先讨论 $T_{\alpha\beta}$, 能动张量的存在是因为平移不变性. 在平行于边界的方向上, 我们仍然具有平移不变性, 我们称相关的切向量为 t^α . 而垂直于边界的平移不变性被破坏了, 我们称其为法向量 n^α . 这样做的结果仍能导出 $T_{\alpha\beta}t^\beta$ 是一个守恒流的结论

由于物理只存在于上半平面, 我们要求不能出现任何穿过边界的流:

$$T_{\alpha\beta}n^\alpha t^\beta|_{\text{Im}z=0} = 0$$

在复坐标下, 上式改写为:

$$T_{zz}|_{\text{Im}z=0} = T_{\bar{z}\bar{z}}|_{\text{Im}z=0}$$

有一种简单的方法可以实现这一点: 我们将 T_{zz} 的定义从上半平面扩展到整个复平面. 方法是, 定义:

$$T_{zz}(z) = T_{\bar{z}\bar{z}}(\bar{z})$$

上述条件也被称为粘接条件 (gluing condition). 对于闭弦, 在全平面上同时存在 T 和 \bar{T} 这两个函数. 但对于开弦, 在全平面上, T 和 \bar{T} 只有一个独立, 不失一般性, 取 T . 这与仅含上半平面但存在两个独立函数 T 与 \bar{T} 所包含的信息是一样的. 但是取全平面并且只关注 T 研究问题会更简单. 我们定义 T^{op} :

$$T^{op} = \begin{cases} T(z) : & \text{Im } z \geq 0 \\ \bar{T}(\bar{z}) : & \text{Im } z < 0 \end{cases} \quad (5.8. 88)$$

相应地, 我们现在也只有一组维拉索罗生成元, 同样用上标 op 表示, 于是有:

$$L_n^{op} = \oint \frac{dz}{2\pi i} z^{n+1} T^{op}(z)$$

而当谈及世界面上的自由标量场 X 时, 不同的边界条件选取则开始出现影响. 为了满

足前述粘接条件, $\partial_z X(z)$ 与 $\partial_{\bar{z}} X(\bar{z})$ 在 $z \in \mathbb{R}$ 的关系有两种可能:

$$\partial_z X^\mu(z) = \begin{cases} +\partial_{\bar{z}} X^\mu(\bar{z} \in \mathbb{R}) : & N \\ -\partial_{\bar{z}} X^\mu(\bar{z} \in \mathbb{R}) : & D \end{cases} \quad (5.8. 89)$$

上式中的 N 与 D 分别表示纽曼边界条件与迪利克雷边界条件. 我们可以和之前一样组合上半平面的 $\partial_z X_\mu(z)$ 与 $\partial_{\bar{z}} X_\mu(\bar{z})$, 对于开弦定义处在全平面上的 $\partial_z X_\mu^{op}(z)$, 并进行模展开, 给出 α_μ^{op} .

在计算开弦上自由标量场的传播子时需要用到闭弦的结果. 我们先前对于闭弦定义了如下格林函数:

$$\langle X^\mu(z) X^\nu(w) \rangle = \eta^{\mu\nu} G_{cl}(z, w)$$

其中 cl 的指标是临时的, 为了与开弦进行区分. 格林函数 $G_{cl}(z, w) = -\frac{\alpha'}{2} \ln |z - w|^2$ 满足 $\partial^2 G_{cl} = -2\pi\alpha' \delta(z - w)$. 开弦的特殊之处就是边界条件, 我们分别定义 G_{op}^N 和 G_{op}^D 表示纽曼与迪利克雷边界条件下的格林函数. 它们分别的边界条件为:

$$(\partial_z - \partial_{\bar{z}})G_{op}^N(z, w) = 0 = (\partial_z + \partial_{\bar{z}})G_{op}^D(z, w), \quad z \in \mathbb{R} \quad (5.8. 90)$$

解决方式就是我们在电磁学中所用到的电像法. 技巧就是在下半平面引入像电荷. 于是:

$$\begin{aligned} G_{op}^N(z, w) &= G_{cl}(z, w) + G_{cl}(z, \bar{w}) = -\left(\frac{\alpha'}{2} \ln |z - w|^2 + \frac{\alpha'}{2} \ln |z - \bar{w}|^2\right) \\ G_{op}^D(z, w) &= G_{cl}(z, w) - G_{cl}(z, \bar{w}) = -\frac{\alpha'}{2} \ln |z - w|^2 + \frac{\alpha'}{2} \ln |z - \bar{w}|^2 \end{aligned} \quad (5.8. 91)$$

当 z 和 w 均在边界上时, 通过上讨论, 经过简单计算我们可以得到开弦与闭弦格林函数之间的关系 $G_{op}^N|_{\mathbb{R}} = 2G_{cl}|_{\mathbb{R}}$, 我们后面会看到, 这个系数 2 反映了开弦闭弦质量谱之间的关系: $m_{cl}^2 = (2m_{op})^2$, 而这也是我们在光锥量子化 3.4 节的结论之一. 关于 CFT 的其余讨论大部分可以沿用, 只是细节略有不同. 不过, 有一点虽然简单, 但后面会有作用, 所以需要强调: 态与算符映射的映射关系是将某个时间的态传播回无穷远过去 $\tau \rightarrow -\infty$, 即复平面上的原点. 开弦的物理图像也是这样, 但要注意的是, 半平面的原点位于边界上. 换句话讲, 对于开弦, 态与算符的映射关系会将态与定义在边界上的局域算符联系起来.

这一事实保证了条带上的理论比圆柱面上的理论具有更少的态. 例如, 对于自由标量场, 纽曼边界条件要求在 $\text{Im}z = 0$ 时, $\partial X = \bar{\partial} X$ (这源于在条带上 $\sigma = 0, \pi$ 时, $\partial_\sigma X = 0$ 的要求). 在圆柱面上, 算符 ∂X 和 $\bar{\partial} X$ 会产生不同的态, 而在条带上, 它们则会产生相同

的态. 这也就反映了我们在开弦的量子化中看到的情况: 在开弦上, 边界条件意味着我们只有一半的模可以使用.

Chapter 6

泊里雅科夫路径积分与 b, c 鬼场

在上一章的开头, 我们曾强调共形对称有两种截然不同的解释. 取决于我们考虑的背景时空是固定的还是动态的. 在统计物理学中, 背景是固定的, 共形对称是全局对称. 相反, 在弦理论中, 背景是动态的. 共形对称是规范对称, 表现为微分同胚不变性和外尔不变性的冗余.

但要注意的是, 所谓的规范对称性并不是真正的对称性, 它们只是我们对系统描述的冗余. 因此, 我们不但不能去掉它们, 还必须确保它们不会在量子理论中出现反常. 存在规范反常的理论在最坏的情况下可能没有任何意义¹. 但即便是最好的情况下, 我们或许可以构造一个量子理论, 但几乎可以肯定的是, 它与我们最开始考虑的理论也是毫无关系的.

综合上一章的一些结果, 我们似乎遇到了麻烦. 我们看到, 外尔对称性带有反常, 因为在由外尔对称关联的背景上能动张量的期望值不同:

$$\langle T^\alpha_\alpha \rangle = -\frac{c}{12} R$$

在背景固定的情况下, 这是十分有趣的性质. 但在动态的背景下, 这是个致命的问题. 那么我们怎么解决这一问题呢? 似乎唯一的办法就是要求我们的理论满足 $c = 0$. 但我们已经看到, 对于所有非平凡的么正 CFT, 我们总有 $c > 0$. 我们在这里似乎遇到了矛盾, 但是在本节中, 我们会解决这个问题. 事实证明, 我们确实需要让 $c = 0$, 有一种方法可

¹例如, 由于这个原因我们不能构造仅与左手的基本费米子耦合的杨-米尔斯理论.

以合理地实现这一点.

6.1 自由玻色子关联函数的路径积分方法

首先考虑取定共形规范后的泊里雅科夫作用量 eq. (2.5. 57), 简记为 S :

$$S[X] = \frac{1}{\pi\alpha'} \int d^2z \partial_z X_\mu(z) \partial_{\bar{z}} X^\mu(z) \quad (6.1. 1)$$

我们以此为例介绍关联函数的路径积分方法. 首先引入配分函数 Z :

$$Z = \int \mathcal{D}[X] e^{-S[X]} \quad (6.1. 2)$$

令 $\phi_i(z_i)$ 表示任意由 $X^\mu(z, \bar{z})$ 及其导数构造的场 (并不一定是主场). 于是我们可以利用路径积分给出 n 点关联函数的定义:

$$\langle \phi_1(z_1) \phi_2(z_2) \dots \phi_n(z_n) \rangle = \frac{1}{Z} \int \mathcal{D}[X] \phi_1(z_1) \phi_2(z_2) \dots \phi_n(z_n) e^{-S[X]} \quad (6.1. 3)$$

其中 Z^{-1} 起到了归一化的作用, 用以保证 $\langle 1 \rangle = 1$. 而 $\partial_z X^\mu$ 和 $\partial_{\bar{z}} X^\mu$ 分别的共形权 (h, \bar{h}) 为: $(1, 0)$ 和 $(0, 1)$. 路径积分 $\int \mathcal{D}[X]$ 应当被视为对所有的 $X^\mu(z, \bar{z})$ 场构型进行积分. 在真正计算 $\langle \phi_1(z_1) \phi_2(z_2) \dots \phi_n(z_n) \rangle$ 之前我们需要另外的两条计算规则. 首先, 偏导数 ∂_{z_j} 与路径积分可交换. 第二, 泛函微商的路径积分为零:

$$0 = \int \mathcal{D}[X] \frac{\delta}{\delta X_\mu(z)} (\dots e^{-S[X]}) \quad (6.1. 4)$$

接下来, 我们通过在上式泛函微商的 \dots 处添加一些特定的内容便可以得到一些有趣的推论:

- 埃伦费斯特定理: 真空期望满足经典运动方程. 我们在 eq. (6.1. 4) 的 \dots 中插入单位 1, 得到:

$$0 = \int \mathcal{D}[X] \frac{\delta}{\delta X_\mu(z)} e^{-S[X]} = \int \mathcal{D}[X] \underbrace{\left(\frac{\delta S[X]}{\delta X_\mu(z)} \right)}_{= \frac{2}{\pi\alpha'} \partial_z \partial_{\bar{z}} X^\mu(z)} e^{-S[X]} \quad (6.1. 5)$$

于是我们得到:

$$\langle \partial_z \partial_{\bar{z}} X^\mu(z) \rangle = 0 \quad (6.1. 6)$$

- 可以复现我们先前利用算符计算得到的两点关联函数的拉普拉斯方程:

$$\begin{aligned} 0 &= \int \mathcal{D}[X] \frac{\delta}{\delta X_\mu(z)} \left(X^\nu(w) e^{-S[X]} \right) \\ &= \int \mathcal{D}[X] \left(\eta^{\mu\nu} \delta^2(z-w) + \frac{2}{\pi\alpha'} \partial_z \partial_{\bar{z}} X^\mu(z) X^\nu(w) \right) e^{-S[X]} \end{aligned} \quad (6.1. 7)$$

于是我们得到

$$\partial_z \partial_{\bar{z}} \langle X^\mu(z) X^\nu(w) \rangle = -\frac{\alpha'}{2} \pi \delta^2(z-w) \eta^{\mu\nu} \quad (6.1. 8)$$

我们接下来可以利用路径积分计算顶角算符 $V_p(z, \bar{z}) =: e^{ip \cdot X(z, \bar{z})} :$ 的 n 点关联函数. 我们已经知道, $: e^{ip \cdot X(z, \bar{z})} :$ 是共形权为 $(h, \bar{h}) = \left(\frac{\alpha'}{4} p^2, \frac{\alpha'}{4} p^2 \right)$ 的主场.

由于泊里雅科夫作用量是 X 的二次型函数, 于是包含 $e^{ip \cdot X(z, \bar{z})}$ 的关联函数路径积分形式的有限维微积分类比便是一个高斯型函数:

$$\int_{\mathbb{R}^n} d^n x e^{\vec{x} \cdot A \vec{x} + i \vec{b} \cdot \vec{x}} = e^{\frac{1}{4} \vec{b} \cdot A^{-1} \vec{b}} \int_{\mathbb{R}^n} d^n x e^{\vec{x} \cdot A \vec{x}} \quad (6.1. 9)$$

其中矩阵 A 可逆 (若要积分结果有限, A 的特征值则必须负定). 而由于矩阵 A 的路径积分类比是 $\partial_z \partial_{\bar{z}}$, A^{-1} 的路径积分类比则是格林函数. 即, $\partial_z \partial_{\bar{z}} g(z-w) = \delta^2(z-w)$ 的解. 于是我们可以将 $g(z-w) = \frac{1}{\pi} \ln(|z-w|^2)$ 视为 $(\partial_z \partial_{\bar{z}})^{-1}$ 的矩阵元.

我们接下来便可以用它来计算 $V_{p_j}(z_j, \bar{z}_j)$ 的 n 点关联函数:

$$\begin{aligned} \left\langle \prod_{j=1}^n : e^{i p_j \cdot X(z_j)} : \right\rangle &= \frac{1}{Z} \int \mathcal{D}[X] \exp \left(i \sum_{j=1}^n p_j \cdot X(z_j) + \int \frac{d^2 z}{\pi \alpha'} X_\mu(z) \partial_z \partial_{\bar{z}} X^\mu(z) \right) \\ &= \frac{1}{Z} \int \mathcal{D}[X] \exp \left\{ \int d^2 z \left[X_\mu(z) \frac{\partial_z \partial_{\bar{z}}}{\pi \alpha'} X^\mu(z) + i X_\mu(z) J^\mu(z) \right] \right\} \end{aligned}$$

其中 $J^\mu(z) = \sum_{j=1}^n p_j^\mu \delta^2(z-z_j)$. 我们注意到, $\int \mathcal{D}[X]$ 要对 X 的所有构型进行积分, 而我们知道, X 的模展开第一项是常数 x_0 , 对于常数项, $\frac{\partial_z \partial_{\bar{z}}}{\pi \alpha'}$ 得到 0, 因此不可逆. 因此, 常数项对路径积分的贡献为 $\delta^D \left(\sum_{j=1}^n p_j \right)$. 其余部分可以按照先前高斯型积分的连续化推广计算, 这里的 J^μ 便是 \vec{b} 的连续化推广. 我们最终便得到:

$$\begin{aligned} \left\langle \prod_{j=1}^n : e^{i p_j \cdot X(z_j)} : \right\rangle &= \delta^D \left(\sum_{j=1}^n p_j \right) \exp \left(\frac{\alpha'}{4} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^n p_i \cdot p_j \ln(|z_i - z_j|^2) \right) \\ &= \delta^D \left(\sum_{j=1}^n p_j \right) \prod_{1 \leq i \leq j}^n |z_i - z_j|^{\alpha' p_i \cdot p_j} \end{aligned} \quad (6.1. 10)$$

其中 $\prod_{1 \leq i \leq j}^n |z_i - z_j|^{\alpha' p_i \cdot p_j}$ 被称为科巴-尼尔森因子 (Koba-Nielsen factor), 简称 K-N 因子. 三点的 K-N 因子与我们先前得到的共形权为 $(h_j, \bar{h}_j) = \left(\frac{\alpha'}{4} p_j^2, \frac{\alpha'}{4} p_j^2\right)$ 的三个共形主算符 (用 $j = 1, 2, 3$ 表示) 的关联函数是一致的. 首先, 我们有:

$$\left\langle \prod_{j=1}^3 : e^{i p_j \cdot X(z_j)} : \right\rangle = C_{123} \left(z_{12}^{\frac{\alpha'}{4}(p_3^2 - p_1^2 - p_2^2)} \bar{z}_{12}^{\frac{\alpha'}{4}(p_3^2 - p_1^2 - p_2^2)} \times cyc(1, 2, 3) \right) \quad (6.1. 11)$$

令 $C_{123} = \delta^D(p_1 + p_2 + p_3)$ 再利用动量守恒得到:

$$p_3^2 - p_1^2 - p_2^2 = (p_1 + p_2)^2 - p_1^2 - p_2^2 = 2p_1 \cdot p_2 \quad (6.1. 12)$$

我们便得到这两者等价的结论了.

6.2 泊里雅科夫路径积分与 $b c$ 鬼场

在欧几里得空间中, 泊里雅科夫作用量为:

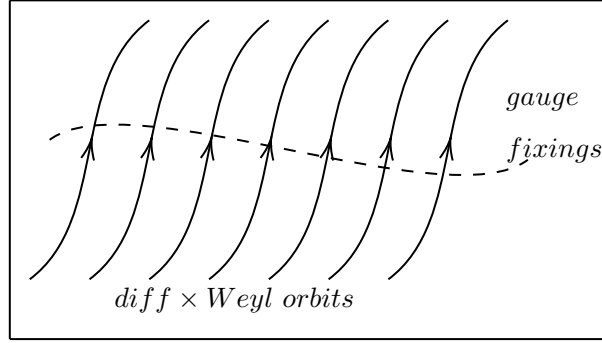
$$S_P = \frac{1}{4\pi\alpha'} \int d^2\sigma \sqrt{h} g^{\alpha\beta} \partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X^\nu \delta_{\mu\nu}$$

我们将用路径积分来分析弦. 对所有嵌入坐标 X^μ 和所有世界面度规 $g_{\alpha\beta}$ 进行积分. 具体来说, 路径积分的计算公式为:

$$Z = \frac{1}{\text{Vol}} \int D[g] D[X] e^{-S_P[X, g]}$$

其中 Vol 表示, 我们不应该对所有场构型进行积分, 而只应该对那些物理上不等价, 即彼此之间不能被微分同胚和外尔变换相互转换的构型进行积分. 由于路径积分对所有场求和, 因此 Vol 项意味着我们需要除以等价部分的贡献.

具体示意图如 6.1 所示, 我们需要将所有场构型的积分分成两部分: 与物理上不同的构型相对应的部分在图中用虚线表示. 而与规范变换相对应的部分则实线表示了出来. 实线上的点之间都可以利用 $diff \times Weyl$ 彼此联系, 实线便描述了规范变换的轨道, 简称规范轨道 (gauge orbit). 因此除以 Vol 实际上就是去掉沿规范轨道积分的那部分配分函数.

Figure 6.1: (X, h) 的场构型空间

在普通的积分中, 坐标变换会生成一个雅可比行列式因子:

$$\int d^n x \phi(x) = \int d^n y \left| \det \frac{\partial x^\mu}{\partial y^\nu} \right| \phi(x(y)) \quad (6.2.13)$$

路径积分也不例外. 我们这里的坐标变换就是把积分变量分解成物理场和规范轨道. 最棘手的部分是找出这个变换对应的雅可比行列式. 实际上我们有一种标准方法解决这个问题. 这种方法最早是由法捷耶夫 (Faddeev) 和波波夫 (Popov) 提出的. 这种方法适用于包括杨-米尔斯在内的所有规范对称性, 在量子场论中也涉及这一方法.

6.2.1 法捷耶夫-波波夫方法

我们有两种规范对称性: 微分同胚和外尔变换. 我们将用 ζ 来标记这两种对称性:

$$\zeta = \{\tilde{\sigma}, \phi\} = \{diff : \sigma^\alpha \rightarrow \tilde{\sigma}^\alpha(\sigma); \quad Weyl : g_{\alpha\beta} \rightarrow e^{2\phi(\sigma)} g_{\alpha\beta}\} \quad (6.2.14)$$

度规最一般的规范变换记为 $g \rightarrow g^\zeta$. 完整形式为:

$$g_{\alpha\beta}(\sigma) \longrightarrow g_{\alpha\beta}^\zeta(\tilde{\sigma}) = e^{2\phi(\sigma)} \frac{\partial \sigma^\gamma}{\partial \tilde{\sigma}^\alpha} \frac{\partial \sigma^\delta}{\partial \tilde{\sigma}^\beta} g_{\gamma\delta}(\sigma)$$

在二维中, 通过选取合适的 $\zeta = \{\tilde{\sigma}\}$ 这些规范对称性允许我们在 $g = 0$ 的世界面把度规变成任何我们期望的形式. 比如 $\hat{g}_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta}$. 我们称其为基准度规 (fiducial metric), 代表了对规范固定 ζ 的选择. 这里有两点需要注意:

- 首先, 我们并不能在任意的世界面上将任何 2d 度规变成我们所选择的 \hat{g} 形式. 这个操作对任意的世界面只在局域内可行. 若世界面具有圆柱面或球面的拓扑结构才可

以在全球进行这一操作. 我们将在第 8 章重新讨论这个问题.

- 其次, 局域地将度规固定为 \hat{g} 并不能固定所有的规范对称性. 我们还有共形对称要处理. 我们同样将在第 8 章中讨论这个问题.

我们的目标是只对物理上不相等的构型进行积分. 首先要考虑对 \hat{g} 规范轨道的积分. 对于某些规范变换 ζ 的值, 构型 g^ζ 将与我们的原始度规 g 重合. 我们可以在积分中加入 $\delta(g - \hat{g}^\zeta)$, 从而得到:

$$\int \mathcal{D}\zeta \delta(g - \hat{g}^\zeta) = \Delta_{FP}^{-1}[g] \quad (6.2. 15)$$

这个积分不等于一, 因为我们需要考虑雅可比行列式. 相当于对:

$$\int d^n x \delta^n(y(x)) = \sum_{y(x)=0} \frac{1}{\left| \det \frac{\partial y^\mu}{\partial x^\nu} \right|} \quad (6.2. 16)$$

做连续化推广.

我们把这个雅可比行列式连续推广的逆写成 Δ_{FP}^{-1} . 它的倒数, 即 Δ_{FP} , 称为法捷耶夫-波波夫行列式 (Faddeev-Popov determinant). 我们稍后对其进行明确计算, 首先让我们观察一下 Δ_{FP} :

- 整个过程就是我们在试图定义路径积分时遇到了常见的困难. 与杨-米尔斯理论一样, 我们最终会发现它可以给出合理的结果.
- 我们假定我们的规范固定定义良好, 即图 8.7.1 中的虚线正好穿过每个物理上不同的构型一次. 与之等价地, 对规范变换的积分 $\mathcal{D}\zeta$ 中 δ 函数恰好出现一次.
- 积分测度与李群在群元左右作用下不变的哈氏测度类似, 满足:

$$\mathcal{D}\zeta = \mathcal{D}(\zeta'\zeta) = \mathcal{D}(\zeta\zeta')$$

- $\Delta_{FP}[g]$ 是规范不变的, 即:

$$\Delta_{FP}[g] = \Delta_{FP}[g^\zeta]$$

这一点的证明依赖于上一条性质, 具体的过程为:

$$\begin{aligned} \Delta_{FP}^{-1}[g^\zeta] &= \int \mathcal{D}\zeta' \delta(g^\zeta - \hat{g}^{\zeta'}) \\ &= \int \mathcal{D}\zeta' \delta(g - \hat{g}^{\zeta^{-1}\zeta'}) \\ &= \int \mathcal{D}\zeta'' \delta(g - \hat{g}^{\zeta''}) = \Delta_{FP}^{-1}[g] \end{aligned}$$

其中, 我们在第二行应用了 $g^\zeta = \hat{g}^{\zeta'}$ 与 $h = \hat{g}^{\zeta^{-1}\zeta'}$ 等价 而在第三行中, 我们利用了测度规范不变这一事实.

现在, 我们可以引入法捷耶夫-波波夫方法. 我们今后提及法捷耶夫-波波夫均简写为 FP, 例如 FP 方法和 FP 行列式. 我们首先在路径积分中插入一个单位元:

$$1 = \Delta_{FP}[g] \int \mathcal{D}\zeta \delta(g - \hat{g}^\zeta)$$

我们把得到的路径积分表达式称作 $Z[\hat{g}]$, 因为它取决于基准度规 \hat{g} 的选择. 我们要做的第一件事是利用 δ 函数 $\delta(g - \hat{g}^\zeta)$ 处理度规的路径积分:

$$\begin{aligned} Z[\hat{g}] &= \frac{1}{\text{Vol}} \int \mathcal{D}[\zeta] \mathcal{D}[X] \mathcal{D}[g] \Delta_{FP}[g] \delta(g - \hat{g}^\zeta) e^{-S_P[X, g]} \\ &= \frac{1}{\text{Vol}} \int \mathcal{D}[\zeta] \mathcal{D}[X] \Delta_{FP}[\hat{g}^\zeta] e^{-S_P[X, \hat{g}^\zeta]} \\ &= \underbrace{\frac{1}{\text{Vol}} \int \mathcal{D}[\zeta]}_{=1} \int \mathcal{D}[X] \Delta_{FP}[\hat{g}] e^{-S_P[X, \hat{g}]} \end{aligned}$$

其中在最后一行, 我们利用了作用量规范不变这一性质. 即 $S[X, g] = S[X, g^\zeta]$, 同时, 我们也用到了前述的 FP 行列式规范不变的性质.

于是现在没有任何东西依赖于规范变换 ζ . 而这正是我们想要隔离的对规范轨道的积分. 与 Vol 刚好抵消.

$$Z[\hat{g}] = \int \mathcal{D}X \Delta_{FP}[\hat{g}] e^{-S_P[X, \hat{g}]} \quad (6.2. 17)$$

这就是对不同物理构型, 即图 6.1 中虚线的积分. 我们可以看到, FP 行列式正是我们需要的雅可比行列式.

6.2.2 FP 行列式

我们仍然需要计算 $\Delta_{FP}[\hat{g}]$. 它的定义式为 eq. (6.2. 15). 首先观察趋近于恒等变换的规范变换 ζ . 在这种情况下, 当度规 h 接近基准度规 \hat{g} 时, δ 函数 $\delta(g - \hat{g}^\zeta)$ 非零. 这等价于 $\delta(\hat{g} - \hat{g}^\zeta)$ 在 $\zeta = 0$ 时非零. 考虑以 $\phi(\sigma)$ 为参数的无穷小外尔变换和一个无穷小微分同胚 $\tilde{\sigma}^\alpha = \sigma^\alpha - \eta^\alpha(\sigma)$ 作用于度规导致的变化:

$$\delta \hat{g}_{\alpha\beta} = 2\phi \hat{g}_{\alpha\beta} + \nabla_\alpha \eta_\beta + \nabla_\beta \eta_\alpha$$

将其插入 δ 函数. 同时, 我们有 $\mathcal{D}[\zeta] = \mathcal{D}[\phi]\mathcal{D}[\eta]$ FP 行列式的表达式变为:

$$\Delta_{FP}^{-1}[\hat{g}] = \int \mathcal{D}[\phi]\mathcal{D}[\eta]\delta[2\phi\hat{g}_{\alpha\beta} + \nabla_{\alpha}\eta_{\beta} + \nabla_{\beta}\eta_{\alpha}] \quad (6.2. 18)$$

其中, 由于我们考虑无穷小变换, 我们将规范群上的积分 $\mathcal{D}[\zeta]$ 替换为单位元切空间, 即的李代数上的积分 $\mathcal{D}[\phi]\mathcal{D}[\eta]$.

现在, 我们利用 δ 函数的傅里叶形式的连续推广, 即 $\delta(x) = \int d^n\beta \exp(2\pi i\beta \cdot x)$ 的连续推广, 这是因为 eq. (6.2. 18) 中的 δ 函数实际上是一个 δ 泛函. 它限制了一个完整的函数. 相应地, 我们要将其替换为泛函积分:

$$\Delta_{FP}^{-1}[\hat{g}] = \int \mathcal{D}[\phi]\mathcal{D}[\eta]\mathcal{D}[\beta] \exp\left(2\pi i \int d^2\sigma \sqrt{-\hat{g}}\beta^{\alpha\beta}(2\phi\hat{g}_{\alpha\beta} + \nabla_{\alpha}\eta_{\beta} + \nabla_{\beta}\eta_{\alpha})\right)$$

其中 $\beta^{\alpha\beta}$ 为世界面上的对称二阶张量.

现在我们只需做 $\int \mathcal{D}[\phi]$ 积分. 这里没有任何导数, 因此只作为拉格朗日乘子出现. 我们令

$$\beta^{\alpha\beta}\hat{g}_{\alpha\beta} = 0$$

换句话说, 在进行 $\int \mathcal{D}[\phi]$ 积分之后, $\beta^{\alpha\beta}$ 是对称无迹的. 从现在起, 我们将把这个性质纳入 $\beta^{\alpha\beta}$ 的定义中. 所以, 最后我们有:

$$\Delta_{FP}^{-1}[\hat{g}] = \int \mathcal{D}[\eta]\mathcal{D}[\beta] \exp\left(4\pi i \int d^2\sigma \sqrt{-\hat{g}}\beta^{\alpha\beta}\nabla_{\alpha}\eta_{\beta}\right) \quad (6.2. 19)$$

6.2.3 鬼场与格拉斯曼变量 (Grassmann variables)

通过前面的操作, 我们得到了 Δ_{FP}^{-1} . 我们需要的是 Δ_{FP} . 值得庆幸的是, 有一种简单的方法可以实现这个目的. 我们首先观察有限维微积分中的例子:

$$\int d^{2n}z e^{-z B \bar{z}} = \frac{\pi^n}{\det B} \quad (6.2. 20)$$

这里的 z 与 \bar{z} 是复矢量及其共轭 B 是矩阵, $z B \bar{z}$ 为矩阵乘积. 而 z 是普通的复变量, 满足对易性. 但当我们把 z 替换为反对易的格拉斯曼变量 (Grassmann variable) χ 后² 则有:

$$\int d^n\chi d^n\bar{\chi} e^{\chi B \bar{\chi}} = \det B \quad (6.2. 21)$$

²也可以将 z 称为偶格拉斯曼变量 (Grassmann-even variable) 而将 χ 称为奇格拉斯曼变量 (Grassmann-odd variable), 原因我们稍后会解释.

为理解这一事实, 接下来我们简要介绍格拉斯曼变量及其积分.

格拉斯曼变量实际上就是反对称变量, 记为 ψ , 有:

$$\{\psi_i, \psi_j\} = 0, \quad \psi_i^2 = 0 \quad (6.2. 22)$$

其中 $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ 注意到, 一般的实数或复数为对称变量, 对实数 c 或复数 z 均有:

$$[c_i, c_j] = 0, \quad [z_i, z_j] = 0 \quad (6.2. 23)$$

这是格拉斯曼变量与普通的实或复变量的根本区别. 我们也将格拉斯曼数称为 g 数, 将普通数称为 c 数. 我们首先定义 $n = 1$ 的格拉斯曼变量的一元函数 $f(\psi)$, 它可以展开为:

$$f(\psi) = a + \psi b \quad (6.2. 24)$$

由于 $\psi^2 = 0$, 展开一定不含 ψ 平方以上阶次, 因而只能有以上两项. 而函数作为映射, 其像为普通的实或复变量, 因此函数一定是对易的. 这等价于 a 为 c 数, b 为 g 数, 且满足:

$$\{b, b\} = \{b, \psi\} = 0 \quad (6.2. 25)$$

于是有:

$$f(\psi) = a + \psi b = a - b\psi \quad (6.2. 26)$$

我们接下来考虑格拉斯曼变量的积分. 类比于实变量 x 的函数 $g(x)$ 关于 x 从负无穷到正无穷的积分, 我们可以分析出格拉斯曼变量积分的结果. 具体来说, 关于实变量 x 的收敛积分满足两条重要性质:

- 线性性 (linearity):

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx c g(x) = c \int_{-\infty}^{+\infty} dx g(x) \quad (6.2. 27)$$

- 平移不变性

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx g(x + d) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx g(x) \quad (6.2. 28)$$

对 $\int d\psi f(\psi)$, 唯一满足上述两条性质的非平凡结果³为:

$$\int d\psi f(\psi) = b \quad (6.2. 29)$$

³可能存在一个对每个 $f(\psi)$ 都相同的平凡数值因子.

现在我们考虑 $n > 1$ 的多元函数, 有:

$$f(\psi) = a + \psi^i b_i + \frac{1}{2} \psi^{i_1} \psi^{i_2} c_{i_1 i_2} + \cdots + \frac{1}{n!} \psi^{i_1} \cdots \psi^{i_n} d_{i_1 \dots i_n} \quad (6.2. 30)$$

所有的系数 $a, b_i, c_{i_1 i_2}, \dots$ 均为全反对称. 于是我们可以进行分解:

$$d_{i_1 \dots i_n} = d \epsilon_{i_1 \dots i_n} \quad (6.2. 31)$$

与一元情况类似, 为了保证 $f(\psi)$ 满足对易性, 我们对 d 需要提出要求. d 的性质与 n 的奇偶有关. 当 n 为奇数时, d 为 g 数, 当 n 为偶数时, d 为满足对易性的 c 数. 我们可以检验一下: 任取 $f(\psi)$ 中的两项, 它们彼此对易:

$$\psi^{i_1} \cdots \psi^{i_n} d_{i_1 \dots i_n} \psi^{j_1} \cdots \psi^{j_m} e_{j_1 \dots j_m} = \psi^{j_1} \cdots \psi^{j_m} e_{j_1 \dots j_m} \psi^{i_1} \cdots \psi^{i_n} d_{i_1 \dots i_n}$$

接下来我们可以定义格拉斯曼多元函数的积分, 与一元的情况类似, 我们有:

$$\int d^n \psi f(\psi) = d \quad (6.2. 32)$$

这里我们规定积分测度为 $d^n \psi = d\psi^n \cdots d\psi^1$, 且满足:

$$\{d\psi^i, d\psi^j\} = 0, \quad \{d\psi^i, \psi^j\} = 0, \quad \int d\psi^j = 0, \quad \int d\psi^i \psi^j = \delta^{ij} \quad (6.2. 33)$$

接下来我们考虑对 ψ 进行线性变换, 由 c 数构成的雅可比矩阵 J^i_j 描述. 我们有:

$$\psi^i = J^i_j \psi'^j \quad (6.2. 34)$$

于是 $f(\psi)$ 可以写为:

$$f(\psi) = a + \cdots + \frac{1}{n!} (J^{i_1}_{j_1} \psi'^{j_1}) \cdots (J^{i_n}_{j_n} \psi'^{j_n}) \epsilon_{i_1 \dots i_n} d \quad (6.2. 35)$$

我们再利用行列式的定义:

$$\epsilon_{i_1 \dots i_n} J^{i_1}_{j_1} \cdots J^{i_n}_{j_n} = (\det J) \epsilon_{j_1 \dots j_n} \quad (6.2. 36)$$

将 $f(\psi)$ 化为:

$$f(\psi) = a + \cdots + \frac{1}{n!} \psi'^{i_1} \cdots \psi'^{i_n} \epsilon_{i_1 \dots i_n} (\det J) d \quad (6.2. 37)$$

仿照 $\int d^n \psi f(\psi) = d$, 我们有 $\int d^n \psi' f(\psi) = (\det J) d$, 因此:

$$\int d^n \psi f(\psi) = (\det J)^{-1} \int d^n \psi' f(\psi) \quad (6.2. 38)$$

这就是 g 数积分中坐标变换的形式. 与 c 数积分中坐标变换:

$$\int d^n t f(t) = (\det J)^{+1} \int d^n t' f(t) \quad (6.2. 39)$$

对比, 我们发现两者雅可比行列式的阶数不同. g 数坐标变换出现雅可比行列式的负一次方.

现在让我们来考虑指数上形如 $\psi^T M \psi = \psi^i M_{ij} \psi^j$ 的函数, 其中 M 为 c 数构成的反对称矩阵⁴. 它的积分 $\int d^n \psi \exp(\frac{1}{2} \psi^T M \psi)$ 是一个类高斯型积分. 以 $n = 2$ 为例:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & +m \\ -m & 0 \end{pmatrix} \quad (6.2. 40)$$

且有 $\psi^T M \psi = 2m\psi^1\psi^2$, $\exp(\frac{1}{2}\psi^T M \psi) = 1 + m\psi^1\psi^2$, 因此:

$$\int d^2 \psi \exp(\frac{1}{2}\psi^T M \psi) = m \quad (6.2. 41)$$

对于更大的 n , 利用尤拉分解 (Youla decomposition) 我们总可以用么正矩阵 U 将复的反对称矩阵 M 分块对角化:

$$U^T M U = \begin{pmatrix} 0 & m_1 & \cdots \\ -m_1 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \quad (6.2. 42)$$

其中 m_1 为正实数. 此处若 n 为奇数, 我们必然有一行一列为零, 因为反对称矩阵的秩必为偶数. 因此我们今后取 n 为偶数即可. 令 $\psi^i = U^i_j \psi'^j$, 我们有:

$$\begin{aligned} \int d^n \psi \exp(\frac{1}{2}\psi^T M \psi) &= (\det U)^{-1} \prod_{I=1}^{n/2} \int d^2 \psi_I \exp(\frac{1}{2}\psi_I^T M_I \psi_I) \\ &= (\det U)^{-1} \prod_{I=1}^{n/2} m_I \end{aligned} \quad (6.2. 43)$$

⁴我们当然可以考虑一个任意的矩阵 M , 但易证, 最终存在贡献的只有 M 的反对称部分.

其中我们在第二步将 ψ' 全部改写为 ψ , M_I 为 M 分块对角化后出现的 2×2 矩阵

$M_I = \begin{pmatrix} 0 & m_I \\ -m_I & 0 \end{pmatrix}$ 而 ψ_I 则表示 ψ 中对应于 M_I 的分量. 注意到:

$$(\det U)^2 (\det M) = \prod_{I=1}^{n/2} m_I^2 \quad (6.2.44)$$

因此我们得到:

$$\int d^n \psi \exp\left(\frac{1}{2} \psi^T M \psi\right) = (\det M)^{1/2} \quad (6.2.45)$$

区别于 c 数 t 的高斯积分:

$$\int d^n t \exp\left(\frac{1}{2} t^T M t\right) = (2\pi)^{n/2} (\det M)^{-1/2} \quad (6.2.46)$$

带来这一区别的根本原因是 eq. (6.2.38) 中雅可比行列式对 g 数与 c 数的不同. 此外, 不同于 g 数, c 数高斯型积分指数上矩阵 M 为对称矩阵⁵.

接下来我们引入复的格拉斯曼变量:

$$\begin{cases} \chi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi^1 + i\psi^2) \\ \bar{\chi} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi^1 - i\psi^2) \end{cases} \quad (6.2.47)$$

我们可以将 $(\bar{\chi}, \chi)$ 视作 ψ' 他对应的雅可比行列式为 $\det J = -i$, 因此:

$$d^2 \psi = d\psi^2 d\psi^1 = (-i)^{-1} d\chi d\bar{\chi} \quad (6.2.48)$$

同时, $\psi^1 \psi^2 = -i \bar{\chi} \chi$, 因此:

$$\int d\chi d\bar{\chi} \chi \bar{\chi} = (-i)(-i)^{-1} \int d\psi^2 d\psi^1 \psi^1 \psi^2 = 1 \quad (6.2.49)$$

考虑对函数 $f(\chi, \bar{\chi}) = a + \chi b + \bar{\chi} c + \bar{\chi} \chi d$ 进行积分, 有:

$$\int d\chi d\bar{\chi} f(\chi, \bar{\chi}) = d \quad (6.2.50)$$

⁵与 g 数情况类似, 我们同样可以取任意矩阵, 但最终对 c 数高斯型积分存在贡献的只有这一矩阵的对称部分.

我们同样可以定义高斯型积分:

$$\int d\chi d\bar{\chi} \exp(m\bar{\chi}\chi) = m \quad (6.2. 51)$$

下面再讨论一下多元复格拉斯曼数, 令 χ^α 和 $\bar{\chi}_{\dot{\alpha}}$ 为多元格拉斯曼数. 它们的乘积定义为:

$$\begin{aligned} \chi\chi &:= \chi^\alpha \chi_\alpha & \bar{\chi}\bar{\chi} &:= \bar{\chi}_{\dot{\alpha}} \bar{\chi}^{\dot{\alpha}} \\ \Rightarrow \chi^\alpha \chi^\beta &= -\frac{1}{2} \epsilon^{\alpha\beta} \chi\chi & \bar{\chi}^{\dot{\alpha}} \bar{\chi}^{\dot{\beta}} &= \frac{1}{2} \epsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \bar{\chi}\bar{\chi}. \end{aligned}$$

导数则为:

$$\frac{\partial \chi^\beta}{\partial \chi^\alpha} = \delta_\alpha^\beta \Rightarrow \frac{\partial \bar{\chi}^{\dot{\beta}}}{\partial \bar{\chi}^{\dot{\alpha}}} = \delta_{\dot{\alpha}}^{\dot{\beta}}$$

最后让我们考虑 n 个复格拉斯曼变量 χ 及其复共轭 $\bar{\chi}$:

$$d^n \chi d^n \bar{\chi} = d\chi^n d\bar{\chi}^n \dots d\chi^1 d\bar{\chi}^1 \quad (6.2. 52)$$

我们同样可以再进行一次变换, 有 $\chi^i = J^i_j \chi'^j$ 与 $\bar{\chi}^i = K^i_j \bar{\chi}'^j$, 于是:

$$d^n \chi d^n \bar{\chi} = (\det J)^{-1} (\det K)^{-1} d^n \chi' d^n \bar{\chi}' \quad (6.2. 53)$$

注意到, 我们无需要求 $K = \bar{J}$, 这是因为就积分而言 $\bar{\chi}$ 是否为 χ 的复共轭无关紧要. 现在我们可以考虑含 n 个 χ 的高斯型积分 $\int d^n \chi d^n \bar{\chi} \exp(\chi^\dagger M \chi)$, 需要注意的是, 这里的 M 可以为任意矩阵, 不再有对称性上的要求. 我们总可以找到么正矩阵 U 和 V 对 M 进行对角化得到对角矩阵 $V M U$, 矩阵元为正实数 m_i . U 和 V 对应于 χ 变换 $\chi = U \chi'$ 与 $\chi^\dagger = \chi'^\dagger V$, 于是:

$$\begin{aligned} \int d^n \chi d^n \bar{\chi} \exp(\chi^\dagger M \chi) &= (\det U)^{-1} (\det V)^{-1} \prod_{i=1}^n \int d\chi_i d\bar{\chi}_i \exp(m_i \bar{\chi}_i \chi_i) \\ &= (\det U)^{-1} (\det V)^{-1} \prod_{i=1}^n m_i = \det M \end{aligned} \quad (6.2. 54)$$

与之相对的 c 数高斯型积分为:

$$\int d^n z d^n \bar{z} \exp(-z^\dagger M z) = (2\pi)^n (\det M)^{-1} \quad (6.2. 55)$$

此外, 格拉斯曼变量的高斯型积分还有一个主要应用是量子场论中费米子配分函数的

路径积分形式. 我们对 eq. (6.2. 45) 进行变换 $\psi \rightarrow \psi - M^{-1}\theta$, 利用积分的平移不变性 eq. (6.2. 28) 可以得到:

$$\int d^n\psi \exp(\frac{1}{2}\psi^T M \psi + \eta^T \psi - \frac{1}{2}\theta^T M^{-1}\theta) = (\det M)^{1/2} \quad (6.2. 56)$$

于是有:

$$\int d^n\psi \exp(\frac{1}{2}\psi^T M \psi + \theta^T \psi) = (\det M)^{1/2} \exp(\frac{1}{2}\theta^T M^{-1}\theta) \quad (6.2. 57)$$

同理, 我们对 eq. (6.2. 54) 做变换 $\psi \rightarrow \psi - M^{-1}\theta$ 与 $\psi^\dagger \rightarrow \psi^\dagger - \theta^\dagger M^{-1}$ 可以得到:

$$\int d^n\chi d^n\bar{\chi} \exp(\chi^\dagger M \chi + \theta^\dagger \chi + \chi^\dagger \theta) = (\det M) \exp(-\theta^\dagger M^{-1}\theta) \quad (6.2. 58)$$

于是, 为了利用 eq. (6.2. 19) 得到 Δ_{FP} , 我们需要将 eq. (6.2. 19) 中的 η 与 β 替换为格拉斯曼变量 b 与 c :

$$\begin{aligned} \beta^{\alpha\beta} &\longrightarrow b_{\alpha\beta} \\ \eta_\alpha &\longrightarrow c^\alpha \end{aligned}$$

格拉斯曼数 b 和 c 被称为鬼场 (ghost fields). 这样我们就得到了 FP 行列式的最终表达式:

$$\Delta_{FP}[\hat{g}] = \int \mathcal{D}[b]\mathcal{D}[c] e^{-S_{gh}[b,c,\hat{g}]}$$

鬼场作用量定义为:

$$S_{gh} = \frac{1}{2\pi} \int d^2\sigma \sqrt{-\hat{g}} b_{\alpha\beta} \nabla^\alpha c^\beta \quad (6.2. 59)$$

我们在最后一步对 b 和 c 场进行了缩放, 以便在作用量前面加上 $1/2\pi$ 的因子. (这只是出于配分函数归一化的要求, 实际上并不重要). 利用旋转回到欧几里得空间后, i 因子就消失了. 完整配分函数 eq. (6.2. 17) 的表达式为:

$$Z[\hat{g}] = \int \mathcal{D}[X]\mathcal{D}[b]\mathcal{D}[c] \exp(-S_P[X, \hat{g}] - S_{ghost}[b, c, \hat{g}])$$

我们看到了非常有趣的物理效应, 虽然鬼场是作为一些辅助构造引入的, 但现在它们与动力学场 X 同等重要. 这就是我们先前所说的, 规范固定是有代价的: 我们的理论有了额外的鬼场.

这些鬼场的作用是消除非物理的规范自由度, 只留下 X^μ 的 $D-2$ 个横向模. 与光锥量子化不同的是, 它们实现这一点的过程中保留了洛伦兹不变性.

简化鬼场作用量

鬼场作用量 eq. (6.2. 59) 已经看起来相当简单了. 但如果我们使用共形规范, 看起来就更简单了、就可以进一步简化:

$$\hat{g}_{\alpha\beta} = e^{2\phi} \eta_{\alpha\beta}$$

行列式为 $\sqrt{\hat{g}} = e^{2\phi}$. 回顾一下, 在复坐标中, 测度为 $d^2\sigma = \frac{1}{2}d^2z$, 而我们可以使用 $\nabla^z = \hat{g}^{z\bar{z}}\nabla_{\bar{z}} = 2e^{-2\phi}\nabla_{\bar{z}}$ 降低协变导数的指标. 我们有:

$$S_{\text{gh}} = \frac{1}{2\pi} \int d^2z \left(b_{zz} \nabla_{\bar{z}} c^z + b_{\bar{z}\bar{z}} \nabla_z c^{\bar{z}} \right)$$

在推导过程中不存在场 $b_{z\bar{z}}$. 这是因为 $b_{\alpha\beta}$ 无迹. 此外, 这里的协变导数实际上只是普通导数. 观察:

$$\nabla_{\bar{z}} c^z = \partial_{\bar{z}} c^z + \Gamma_{\bar{z}\alpha}^z c^\alpha$$

由克氏符 (Christoffel symbol) 定义, 我们有:

$$\Gamma_{\bar{z}\alpha}^z = \frac{1}{2} \hat{g}^{z\bar{z}} (\partial_{\bar{z}} \hat{g}_{\alpha\bar{z}} + \partial_{\alpha} \hat{g}_{\bar{z}\bar{z}} - \partial_{\bar{z}} \hat{g}_{\bar{z}\alpha}) = 0 \quad \alpha = z, \bar{z}$$

因此, 在共形规范中鬼场作用量变为:

$$S_{\text{ghost}} = \frac{1}{2\pi} \int d^2z \left(b_{zz} \partial_{\bar{z}} c^z + b_{\bar{z}\bar{z}} \partial_z c^{\bar{z}} \right)$$

作用量不依赖于共形因子 ϕ , 我们无需对 b 和 c 进行任何操作就可以保证作用量外尔不变的. 因此这两个变量不受外尔变换影响.

值得注意的是, $b_{\alpha\beta}$ 和 c^α 在外尔变换下不变, 但如果我们升降指标, 那么这些场就会额外携带度规的因子, 因此 $b^{\alpha\beta}$ 和 c_α 随外尔变换而变换.

最后要注意的是, 我们利用法捷耶夫-波波夫方法固定了 $\text{diff} \times \text{Weyl}$, 但微分同胚中存在可以被外尔变换抵消的微分同胚变换, 即冗余的共形变换. 这部分没有被消除, 但是好消息是, 它可以直接被表示出来, 这一变换群称为共形基灵群 (conformal Killing group) 我们会在第 8 中进行具体计算.

6.3 鬼场的共形场论

在固定外尔和微分同胚的规范对称性的过程中, 我们引入了两个新的动力学变量: 鬼场 b 和 c . 它们都是格拉斯曼变量 (即反对易变量). 简记:

$$\begin{aligned} b &= b_{zz} \quad , \quad \bar{b} = b_{\bar{z}\bar{z}} \\ c &= c^z \quad , \quad \bar{c} = c^{\bar{z}} \end{aligned}$$

鬼场作用量便可以写为如下简单的形式:

$$S_{gh} = \frac{1}{2\pi} \int d^2z \left(b \bar{\partial} c + \bar{b} \partial \bar{c} \right) \quad (6.3. 60)$$

得出运动方程:

$$\bar{\partial} b = \partial \bar{b} = \bar{\partial} c = \partial \bar{c} = 0$$

因此我们看到 b 和 c 是全纯场, 而 \bar{b} 和 \bar{c} 是反全纯场. 且由作用量无共形权, 我们可以得到 b 和 c 的共形权加和为 1. 因此我们将 b 和 c 的共形权分别记为 λ 和 $(1 - \lambda)$

在进行量子化之前, 我们还需要利用经典理论完成最后一点计算: b, c 鬼场的能动张量. 计算有点繁琐. 我们使用能动张量的一般定义, 这就要求我们回到一般背景下的 eq. (6.2. 59) 理论, 并对度规 $g^{\alpha\beta}$ 求泛函微分. 最终结果来自于两部分: 首先, 我们会从协变导数 ∇^α 中的克氏符中获取贡献. 其次, 我们还有限制条件 $b_{\alpha\beta}$ 无迹. 但这个条件本身取决于度规: $b_{\alpha\beta} \hat{g}^{\alpha\beta} = 0$. 为了考虑到这一点, 我们应该在作用量中加入一个描述无迹限制的拉格朗日乘子 (Lagrange multiplier). 在对度规进行正确的变分之后, 我们可以回到平直空间. 最终结果形式上相当简单, 且满足我们对能动张量的一般要求: $T_{z\bar{z}} = 0$. 而能动张量的全纯和反全纯部分为:

$$T = 2 : (\partial c) b : + : c \partial b : \quad , \quad \bar{T} = 2 : (\bar{\partial} \bar{c}) \bar{b} : + : \bar{c} \bar{\partial} \bar{b} : . \quad (6.3. 61)$$

以下是具体的推导过程:

6.3.1 b, c 鬼场的能动张量

我们首先用拉格朗日乘子法导出 b, c 鬼场的能动张量. 由于能动张量的定义为作用量关于度规的泛函微商, 我们需要基于含度规的 eq. (6.2. 59) 求出能动张量后再取共形规范.

我们已经知道, b 满足无迹条件 $\hat{g}^{\alpha\beta}b_{\alpha\beta} = 0$, 我们有:

$$\delta(\hat{g}^{\alpha\beta}b_{\alpha\beta}) = 0 \quad (6.3. 62)$$

因此对 \hat{g} 的泛函微商也会存在来自 b 的贡献:

$$\hat{g}^{\alpha\beta}\delta b_{\alpha\beta} = -\delta\hat{g}^{\alpha\beta}b_{\alpha\beta} \quad (6.3. 63)$$

我们利用拉格朗日乘子法在作用量中引入无迹限制, 于是有:

$$S = \frac{1}{2\pi} \int d^2\sigma \sqrt{-\hat{g}}(b_{\alpha\beta}\nabla^\alpha c^\beta + l\hat{g}^{\alpha\beta}b_{\alpha\beta}) \quad (6.3. 64)$$

其中 $\sqrt{-\hat{g}}l\hat{g}^{\alpha\beta}b_{\alpha\beta}$ 便是拉格朗日乘子法新引入的项, 系数 $\sqrt{-\hat{g}}$ 的出现只是为了使形式看起来更简单, 我们当然也可以将其吸收进 l . 现在我们只需要考虑 \hat{g} 变分引起的 S 变化, 因为 b 场的无迹条件由拉格朗日乘子自动进行限制, 我们无需再考虑它的贡献. 接下来我们利用 b 场的运动方程:

$$\hat{g}^{\alpha\delta}\nabla_\delta c^\beta = l\hat{g}^{\alpha\beta}$$

确定 l 的值, 得到:

$$l = \frac{1}{2}\nabla_\alpha c^\alpha$$

代回 eq. (6.3. 64), 注意到, 这里的克氏符并不为零, 我们有:

$$S = \frac{1}{2\pi} \int d^2\sigma \sqrt{-\hat{g}}[b_{\alpha\beta}\hat{g}^{\alpha\delta}(\partial_\delta c^\beta + \Gamma_{\delta\gamma}^\beta c^\gamma) + \frac{1}{2}b_{\alpha\beta}\hat{g}^{\alpha\beta}(\partial_\delta c^\delta + \Gamma_{\delta\gamma}^\delta c^\gamma)] \quad (6.3. 65)$$

对于任意度规 h , 克氏符定义为:

$$\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha = \frac{1}{2}g^{\alpha\sigma}(\partial_\beta g_{\gamma\sigma} + \partial_\gamma g_{\sigma\beta} - \partial_\sigma g_{\beta\gamma}) \quad (6.3. 66)$$

作为度规的函数, 当我们求作用量关于度规的泛函微商时, 克氏符也必然存在贡献. 因此我们需要考虑克氏符的变分⁶:

$$\delta\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha = \frac{1}{2}g^{\alpha\sigma}(\nabla_\beta\delta g_{\gamma\sigma} + \nabla_\gamma\delta g_{\sigma\beta} - \nabla_\sigma\delta g_{\beta\gamma}) \quad (6.3. 67)$$

⁶有趣的是, 如果我们将克氏符的变换规则写下来, 我们会发现两项, 第一项按照张量的方式变换, 而第二项只与坐标彼此求导有关, 克氏符不是张量正是第二项带来的后果. 但由于它只是坐标之间彼此的导数, 我们会发现两个克氏符的差第二项抵消, 因而克氏符之差属于张量, 克氏符的变分可以理解成两个彼此靠近的克氏符之差, 也是张量.

注意到: $\delta g^{\alpha\beta} g_{\beta\nu} + g^{\alpha\beta} \delta g_{\beta\nu} = 0$, 于是我们有:

$$\delta g_{\mu\nu} = -g_{\alpha\mu} g_{\beta\nu} \delta g^{\alpha\beta} \quad (6.3. 68)$$

代回克氏符变分, 我们可以进一步得到:

$$\delta \Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha} = -\frac{1}{2} g^{\alpha\sigma} (g_{\mu\gamma} g_{\nu\sigma} \nabla_{\beta} + g_{\mu\sigma} g_{\nu\beta} \nabla_{\gamma} - g_{\mu\beta} g_{\nu\gamma} \nabla_{\sigma}) \delta g^{\mu\nu} \quad (6.3. 69)$$

现在我们将上面的讨论代回作用量关于度规的泛函微商, 由 b 的无迹条件以及格拉斯曼变量的反对称性, 我们得到:

$$\begin{aligned} \delta S = \frac{1}{4\pi} \int d^2\sigma \sqrt{-\hat{g}} \{ & -\hat{g}_{\alpha\beta} (b_{\sigma\gamma} \nabla^{\sigma} c^{\gamma}) \\ & + (b_{\alpha\gamma} \nabla_{\beta} c^{\gamma} + b_{\beta\gamma} \nabla_{\alpha} c^{\gamma} - b_{\alpha\beta} \nabla_{\gamma} c^{\gamma}) \\ & + [\nabla^{\delta} (b_{\delta\alpha} c_{\beta}) + \nabla^{\delta} (b_{\alpha\beta} c_{\delta}) - \nabla^{\delta} (b_{\delta\beta} c_{\alpha})] \} \delta \hat{g}^{\alpha\beta} \end{aligned} \quad (6.3. 70)$$

这样我们便可以得到作用量对度规求泛函微商的完整结果. 由度规的对称性, 我们可以得到:

$$T_{\alpha\beta} = -\frac{4\pi}{\sqrt{-\hat{g}}} \frac{\delta S}{\delta \hat{g}^{\alpha\beta}} = \hat{g}_{\alpha\beta} b_{\sigma\gamma} \nabla^{\sigma} c^{\gamma} - b_{\alpha\gamma} \nabla_{\beta} c^{\gamma} + c^{\gamma} \nabla_{\gamma} b_{\alpha\beta} - b_{\beta\gamma} \nabla_{\alpha} c^{\gamma} \quad (6.3. 71)$$

我们可以在复坐标系 (z, \bar{z}) 中求出能动张量的每个分量, 不难发现:

$$T = 2 : (\partial c) b : + : c \partial b : , \quad \bar{T} = 2 : (\bar{\partial} \bar{c}) \bar{b} : + : \bar{c} \bar{\partial} \bar{b} : . \quad (6.3. 72)$$

我们同样可以用诺特流的方法推导出 $b c$ 鬼场的能动张量. 但要注意的是, 这种方法依赖于 b 和 c 的共形权, 我们会在下一节给出具体的共形权. 虽然会用到能动张量, 但利用共形权计算能动张量实际上不属于循环论证, 因为共形权是 b 和 c 自身的性质, 其定义并不依赖于能动张量.

诺特流法便不再需要对度规做泛函微商, 因此我们可以直接取共形规范下复坐标系内作用量的形式, 即 eq. (6.3. 60). 进行共形变换 $z \rightarrow z + \epsilon(z)$, 注意到共形变换中的 $\epsilon(z)$ 是全纯函数, 因而有 $\bar{\partial} \epsilon = 0$. 我们曾在 eq. (6.3. 60) 后提及 b 和 c 的共形权分别为 λ 和 $(1 - \lambda)$ 于是有:

$$b(z) \rightarrow \left(1 + \frac{\partial \epsilon}{\partial z}\right)^{\lambda} b(z + \epsilon(z)) = b(z) + \lambda \partial \epsilon(z) b(z) + \epsilon(z) \partial b(z) + \mathcal{O}(\epsilon^2) \quad (6.3. 73)$$

对 c 的变换同理, 只需将 λ 改为 $(1 - \lambda)$, 于是, 作用量的变分可以写为:

$$\begin{aligned}
 \delta S &= \frac{1}{2\pi} \int d^2 z \left[\lambda \partial \epsilon b + \epsilon \partial b \right] \bar{\partial} c + b \bar{\partial} \left[(1 - \lambda) \partial \epsilon c + \epsilon \partial c \right] \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int d^2 z \left[(1 - \lambda) b \bar{\partial} \partial \epsilon c + b \bar{\partial} \epsilon \partial c \right] \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int d^2 z \epsilon \bar{\partial} \left[-\lambda b \partial c + (1 - \lambda) \partial b c \right] \\
 &\sim \frac{1}{2\pi} \int d^2 z \epsilon(z) \partial_{\bar{z}} T(z)
 \end{aligned} \tag{6.3. 74}$$

于是我们现在有:

$$T(z) = -\lambda : b \partial c : + (1 - \lambda) : (\partial b) c : \tag{6.3. 75}$$

我们会在下一节说明 $\lambda = 2$, 于是:

$$T(z) = 2 : (\partial c) b : + : c (\partial b) : \tag{6.3. 76}$$

对 \bar{T} , 同理, 只需考虑反全纯共形变换 $\bar{\epsilon}$ 即可.

我们还有第三种计算方式, 同样是依赖于 b 和 c 的共形权的方法, 这同样是在不讨论 b c 鬼场与引力耦合的情况下确定应力张量. 注意到作用量关于 b 和 c 呈线性, 因此能动张量必须关于 b 和 c 呈线性. 此外, 能动张量是一个共形权为 $(2, 0)$ 的算符, 因此应力张量的最一般形式是

$$T = \alpha (\partial c) b + \beta c \partial b \tag{6.3. 77}$$

又因为 b 和 c 的共形权分别为 $(2, 0)$ 和 $(0, -1)$, 我们便可以利用 T 与 b 和 c 的 OPE 列出方程求解 α 和 β . 这同样是不构成循环论证的, 因为 b 和 c 的共形权并不依赖于能动张量的具体形式, 而是 b 和 c 本身的性质.

算符的乘积展开

我们可以使用前面讲过的标准路径积分技术计算这些场的 OPE. 接下来, 我们将只关注共形场论的全纯部分, 反全纯部分的计算几乎完全相同. 例如, 我们有:

$$0 = \int \mathcal{D}b \mathcal{D}c \frac{\delta}{\delta b(\sigma)} \left[e^{-S_{\text{ghost}}} b(\sigma') \right] = \int \mathcal{D}b \mathcal{D}c e^{-S_{\text{ghost}}} \left[-\frac{1}{2\pi} \bar{\partial} c(\sigma) b(\sigma') + \delta(\sigma - \sigma') \right]$$

这表明:

$$\bar{\partial} c(\sigma) b(\sigma') = 2\pi \delta(\sigma - \sigma')$$

同样, 观察 $\delta/\delta c(\sigma)$ 可以得到:

$$\bar{\partial}b(\sigma) c(\sigma') = 2\pi \delta(\sigma - \sigma')$$

我们可以利用 $\bar{\partial}(1/z) = 2\pi\delta(z, \bar{z})$ 对这两个方程进行积分. 我们可以知道, 场之间的 OPE 为:

$$\begin{aligned} b(z) c(w) &= \frac{1}{z-w} + \dots \\ c(w) b(z) &= \frac{1}{w-z} + \dots \end{aligned} \quad (6.3.78)$$

事实上, 第二个方程是根据第一个方程和费米统计得出的. $b(z) b(w)$ 的 OPE 和 $c(z) c(w)$ 的 OPE 没有奇异部分. 它们都在 $z \rightarrow w$ 时消失.

主场

现在我们将证明 b 和 c 都是主场, 共形权分别为 $h = 2$ 和 $h = -1$. 我们先来看看 c . 它与能动张量的 OPE 为:

$$\begin{aligned} T(z) c(w) &= 2 : \partial c(z) b(z) : c(w) + : c(z) \partial b(z) : c(w) \\ &= \frac{2\partial c(z)}{z-w} - \frac{c(z)}{(z-w)^2} + \dots = -\frac{c(w)}{(z-w)^2} + \frac{\partial c(w)}{z-w} + \dots \end{aligned}$$

于是 c 的权重为 -1 . 而在计算带有 b 的 OPE 时, 我们需要对负号特别小心. 我们得到:

$$\begin{aligned} T(z) b(w) &= 2 : \partial c(z) b(z) : b(w) + : c(z) \partial b(z) : b(w) \\ &= -2b(z) \left(\frac{-1}{(z-w)^2} \right) - \frac{\partial b(z)}{z-w} = \frac{2b(w)}{(z-w)^2} + \frac{\partial b(w)}{z-w} + \dots \end{aligned}$$

这表明 b 的共形权为 2 . 我们在前面提到, 场 b 和 c 在外尔变换下不变. 这反映在它们的共形权上的结果就是, 它们的共形权完全是由微分同胚决定的. 我们从 b_{zz} 和 c^z 的指标数量就可见一斑.

作为主场, 由于 b 和 c 带有的共形权分别为: $(h_b, h_c) = (2, -1)$, 我们可以按照主场的模展开的一般方法对 b 和 c 进行展开, 得到:

$$\begin{aligned} b(z) &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} b_n z^{-n-2}, & b_{n \geq -1} |0\rangle &= 0 \\ c(z) &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n z^{-n+1}, & c_{n \geq 2} |0\rangle &= 0 \end{aligned} \quad (6.3.79)$$

其中的展开系数的厄米共轭为 $b_n^\dagger = b_{-n}$ 和 $c_n^\dagger = c_{-n}$. 它们作为谐振模存在代数:

$$\{c_n, b_m\} = \delta_{n+m,0}, \quad \{c_n, c_m\} = \{b_n, b_m\} = 0 \quad (6.3. 80)$$

而这可以从 b 和 c 的 OPE eq. (6.3. 78) 得到. b 和 c 的 OPE 为:

$$c(z)b(w) = \frac{1}{z-w} \quad (6.3. 81)$$

而 $\frac{1}{z-w}$ 可以写为 $\frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} (\frac{w}{z})^n$, 而算符 OPE 与算符 (反) 对易子互成正比, 现在我们展开 $\{c(z), b(w)\}$, 得到:

$$\begin{aligned} \{c(z), b(w)\} &= \sum_{m,n} \{c_n, b_m\} z^{-n+1} w^{-m-2} \\ &= \frac{1}{z} \sum_{m,n} \{c_n, b_m\} \frac{w^{-m-2}}{z^{n-2}} \end{aligned} \quad (6.3. 82)$$

这两个结果成正比的要求便导致我们必然有:

$$\{c_n, b_m\} = \delta_{n+m,0} \quad (6.3. 83)$$

同理, 我们可以从 eq. (6.3. 78) 后的讨论得到:

$$\{c_n, c_m\} = \{b_n, b_m\} = 0 \quad (6.3. 84)$$

我们接下来便可以基于能动张量定义鬼场的维拉索罗生成元:

$$L_n = \sum_m (m+n) : b_{n-m} c_m : \quad (6.3. 85)$$

同样, 零模有正规排序常数, 于是:

$$L_0^{b,c} = \sum_{m \geq 1} m(b_{-m} c_m + c_{-m} b_m) - 1 = \sum_m m {}^* b_{-m} c_m {}^* - 1 \quad (6.3. 86)$$

这里的 ${}^* b_{-m} c_m {}^*$ 是正规排序, 符号 * 表示对反对易算符进行正规排序, 与普通的正规排序相差负号⁷. 需要注意的是, 这里对应于 $L_0^{b,c}$ 中的正规排序常数 -1 出现在 $L_0^{b,c}$ 内部. 而在 eq. (3.2. 18) 中我们见到的则是 L_0^m 内不含正规排序常数, 并用正规排序常数

⁷注意与其他参考文献的区别, Polchinski 书中: 称为共形排序, 实际上就是时序, 在复平面内被映射为半径排序. \circ 表示一般的正规排序, 产生在左湮灭在右. 而 * 则表示带边界的共形排序, 存在像荷的作用, 以保证边界处有限.

对限制条件进行修正. 这是因为 eq. (3.2. 18) 的完整形式是物质部分与鬼场部分整体的维拉索罗代数零模湮灭物理态, 对限制条件而非对维拉索罗代数引入修正 a 就是因为这一修正实际是在鬼场中出现的. 在 eq. (3.2. 18) 的只是 $L_0^{b,c}$ 的真空期望. 此处我们也可以通过对计算 $L_0^{b,c}$ 关于真空态 $c_1 |0\rangle$ 的真空期望, 即真空态 $c_1 |0\rangle$ 的共形权来得到正规排序常数 -1 .

中心荷

最后, 我们可以通过计算 TT 的 OPE 来确定 b, c 鬼场体系的中心荷.

$$\begin{aligned} T(z)T(w) = & 4 : \partial c(z)b(z) : : \partial c(w)b(w) : + 2 : \partial c(z)b(z) : : c(w)\partial b(w) : \\ & + 2 : c(z)\partial b(z) : : \partial c(w)b(w) : + : c(z)\partial b(z) : : c(w)\partial b(w) : \end{aligned}$$

对于其中的每一个项, 进行两次缩并就能为 OPE 带来 $(z-w)^{-4}$ 的贡献. 还有两种不同的单次缩并方式, 根据导数作用对象的不同, 这几种单次缩并分别可以得到 $(z-w)^{-1}$, $(z-w)^{-2}$ 或 $(z-w)^{-3}$. 最终结果是:

$$\begin{aligned} T(z)T(w) = & \frac{-4}{(z-w)^4} + \frac{4 : \partial c(z)b(w) :}{(z-w)^2} - \frac{4 : b(z)\partial c(w) :}{(z-w)^2} \\ & - \frac{4}{(z-w)^4} + \frac{2 : \partial c(z)\partial b(w) :}{z-w} - \frac{4 : b(z)c(w) :}{(z-w)^3} \\ & - \frac{4}{(z-w)^4} - \frac{4 : c(z)b(w) :}{(z-w)^3} + \frac{2 : \partial b(z)\partial c(w) :}{z-w} \\ & - \frac{1}{(z-w)^4} - \frac{: c(z)\partial b(w) :}{(z-w)^2} + \frac{\partial b(z)c(w) :}{(z-w)^2} + \dots \end{aligned}$$

再利用泰勒展开, 将函数 $f(z)$ 转化为函数 $f(w)$ 函数. 合并同类项后, 我们经过化简得到:

$$T(z)T(w) = \frac{-13}{(z-w)^4} + \frac{2T(w)}{(z-w)^2} + \frac{\partial T(w)}{z-w} + \dots$$

首先要注意的是, 它确实与我们期望的 TT OPE 形式一致. 第二, 也是最重要的一点, 是 bc 鬼场体系的中心荷:

$$c = -26$$

6.3.2 鬼场对真空态的影响

完成之前的讨论后, 我们发现现在我们仍有两个问题没有解决:

- 分析 b 和 c 的模展开 eq. (6.3. 79) 中出现的谐振模:

$$\begin{aligned} b(z) &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} b_n z^{-n-2}, & b_{n \geq -1} |0\rangle &= 0 \\ c(z) &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n z^{-n+1}, & c_{n \geq 2} |0\rangle &= 0 \end{aligned} \quad (6.3. 87)$$

我们发现, c_1 和 b_{-2} 是第一个不湮灭 $|0\rangle$ 的模. 然而, 由于 $[L_0, c_1] = -c_1$ 它仍然会起到降低共形权的作用. 相应地, $|0\rangle$ 在 b, c 的谐振模代数 eq. (6.3. 80) 下不是基态, 尽管它的确是维拉索罗代数的最高权态.

- 在考虑 b 和 c 的两点关联函数时, 我们可能会想当然地写出 $\langle c(z)b(w) \rangle_{naive} = (z-w)^{-1}$ 而我们先前曾给出过, 对于共形权分别为 h_1 与 h_2 的主场, 其关联函数满足 $\langle \phi_{h_1}(z)\phi_{h_2}(w) \rangle \sim \delta_{h_1, h_2}$. 注意到, $(h_b, h_c) = (2, -1)$ 因此, 这种想当然的两点关联函数由于 δ 函数的原因应当消失.

这两个问题的解决方案是紧密相关的:

首先注意到, 我们可以基于鬼场谐振子模构造两个可能的 L_0 基态:

$$|c\rangle = c_1 |0\rangle, \quad |(\partial c)c\rangle = c_0 c_1 |0\rangle \quad (6.3. 88)$$

我们可以检查, 这两个态确实满足最高权条件:

$$c_{n \geq 1} |c\rangle = c_{n \geq 1} |(\partial c)c\rangle = 0 \quad (6.3. 89)$$

这里利用了格拉斯曼变量平方为零的条件: $c_1^2 = 0$ 这两个态的厄米共轭也是特殊的, 他们在厄米共轭下彼此交换:

$$(c_1 |0\rangle)^\dagger = \langle 0| c_{-1} c_0 \quad (6.3. 90)$$

于是有:

$$\langle 0| c_{-1} c_0 c_1 |0\rangle = 1 \quad (6.3. 91)$$

我们可以验证 c 的三点关联函数与我们期望的三个 $h = -1$ 的主算符关联函数一致:

$$\begin{aligned} \langle c(z_1)c(z_2)c(z_3) \rangle &= \sum_{n_1, n_2, n_3 \in \mathbb{Z}} \langle 0| \prod_{j=1}^3 c_{n_j} z_j^{-n_j+1} |0\rangle \\ &= \langle 0| c_{-1} c_0 c_1 |0\rangle (z_1^2 z_2 - z_1 z_2^2 + cyc(z_1, z_2, z_3)) \\ &= z_{12} z_{13} z_{23} = z^{-h_1-h_2+h_3} \times cyc(z_1, z_2, z_3) \end{aligned} \quad (6.3. 92)$$

我们先想当然地给出的两点关联函数具体的值为:

$$\begin{aligned}\langle b(z)c(w) \rangle &= \sum_{\substack{m \leq 1 \\ n \geq 2}} \langle 0 | b_n z^{-n-2} c_m w^{-m+1} | 0 \rangle \\ &= \langle 0 | 0 \rangle \frac{w}{z^2} \sum_{n \geq 2} \left(\frac{w}{z} \right)^n = \frac{w^3}{z^3} \frac{\langle 0 | 0 \rangle}{z - w}\end{aligned}\quad (6.3. 93)$$

正如本节开头所说, 这和对主场关联函数的一般性要求相悖, 除非我们要求 $\langle 0 | 0 \rangle = 0$.

实际上, 真正有意义的两点关联函数要额外插入 c_n 然后形式上写成五点关联函数:

$$\langle 0 | c_{-1} c_0 c_1 b(z) c(w) | 0 \rangle = \frac{1}{z - w} = \langle 0 | c_{-1} c_0 c_1 c(z) b(w) | 0 \rangle \quad (6.3. 94)$$

我们可以将 b_m 一步步地移到最左侧. 首先展开关联函数中的 b 和 c

$$\langle 0 | c_{-1} c_0 c_1 c(z) b(w) | 0 \rangle = \sum_{m, n} \langle 0 | c_{-1} c_0 c_1 c_n b_m | 0 \rangle z^{-n+1} w^{-m-2}$$

注意到, 我们有:

$$\begin{aligned}b_{m \geq -1} | 0 \rangle &= 0, & \langle 0 | b_{m \leq 1} &= 0 \\ c_{n \geq 2} | 0 \rangle &= 0, & \langle 0 | c_{n \leq -2} &= 0\end{aligned}\quad (6.3. 95)$$

而由于 eq. (6.3. 80), 我们知道, c 谐振模之间反对易子为零, 因此我们对 c_n 的限制首先有 $n \geq -1$, 而又因为 $c_i^2 = 0$, 我们有 $n \neq -1, 0, 1$, 因此 c_n 的限制为 $n \geq 2$. b_m 的限制比较简单, $m \leq -2$ 即可. 于是我们有:

$$\begin{aligned}\langle 0 | c_{-1} c_0 c_1 c(z) b(w) | 0 \rangle &= \sum_{\substack{m \leq -2 \\ n \geq 2}} \langle 0 | c_{-1} c_0 c_1 (\delta_{n+m, 0} - b_m c_n) | 0 \rangle z^{-n+1} w^{-m-2} \\ &= \sum_{m \leq -2} \frac{w^{-m-2}}{z^{-m-1}} - \sum_{m \leq -2, n \geq 2} \langle 0 | c_{-1} c_0 c_1 b_m \underbrace{c_n}_{=0} | 0 \rangle z^{-n+1} w^{-m-2} \\ &= \sum_{m \leq -2} \frac{w^{-m-2}}{z^{-m-1}} = \frac{1}{z - w}\end{aligned}$$

我们当然也可以从 $\langle 0 | c_{-1} c_0 c_1 b(z) c(w) | 0 \rangle$ 出发, 讨论 m, n 范围并得到四项求和, 最终结果完全一致:

$$\langle 0 | c_{-1} c_0 c_1 b(z) c(w) | 0 \rangle = \frac{w^3}{z^3} \frac{1}{z - w} + \frac{w^2}{z^3} + \frac{w}{z^2} + \frac{1}{z} = \frac{1}{z - w} \quad (6.3. 96)$$

计算过程留作习题.

在路径积分语言中, $\int \mathcal{D}[c]$ 包含三个如下积分:

$$\int dc_{-1}dc_0dc_1c_{-1}^xc_0^yc_1^z = \delta_{x,1}\delta_{y,1}\delta_{z,1} \quad (6.3.97)$$

这正是我们在想当然的两点关联函数 $\langle b(z)c(w) \rangle_{naive} = (z-w)^{-1}$ 中所忽略的.

接下来我们给出 $\langle 0|0 \rangle = 0$ 和 $\langle 0|c_{-1}c_0c_1|0 \rangle = 1$ 形式上的来源, 首先给出反常鬼场流:

$$j(z) = - : b(z)c(z) : \quad (6.3.98)$$

这实际上就是鬼场 b 和 c 的 $U(1)$ 对称性 $c \rightarrow e^{i\alpha}c$ 和 $b \rightarrow e^{-i\alpha}b$ 对应的诺特流⁸ $\delta S = -\frac{i}{2\pi} \int d^2z j \bar{\partial} \alpha$. 我们同样可以进行展开:

$$j(z) = \sum_n \left(\sum_m : c_{n-m} b_m : \right) z^{-n-1} = \sum_n j_n z^{-n-1} \quad (6.3.99)$$

反过来也有:

$$j_n = \oint_{B_\epsilon(0)} \frac{dz}{2\pi i} z^n j(z) \quad (6.3.100)$$

计算反常鬼场流与鬼场能动张量的 OPE, 得到:

$$T(z)j(w) \sim \frac{-3}{(z-w)^3} + \frac{j(w)}{(z-w)^2} + \frac{\partial_w j(w)}{z-w} + \dots \quad (6.3.101)$$

这实际上等价于下面的对易子:

$$[L_n, j(z)] = \frac{-3n(n+1)}{2} z^{n-1} + (n+1)z^n j(z) + z^{n+1} \partial j(z) \quad (6.3.102)$$

其中 L_n 的定义为 eq. (6.3.85) 于是得到:

$$[L_n, j_m] = \frac{-3n(n+1)}{2} \delta_{n+m,0} - m j_{m+n} \quad (6.3.103)$$

我们可以对 L_n 分别取 $n = -1, 0, 1$, 并观察上述对易子. 不难发现中心荷项对于 L_{-1} 与 L_0 消失, 但对 L_1 仍然存在. 因此反常鬼场流不是准主算符. 反常鬼场流的厄米条件是 $j_n^\dagger = -j_{-n}, \forall n \neq 0$ 与维拉索罗算符零模 L_0 中出现正规排序常数的原因相似, 我们

⁸经典意义下流守恒, 但在量子理论中存在反常. 这也正是反常二字的来源.

$n = 0$ 的厄米共轭存在一个常数修正:

$$j_0^\dagger = -[L_{-1}, j_1]^\dagger = -[L_1, j_{-1}] = -j_0 + 3 \quad (6.3. 104)$$

再考虑态与算符的对应关系, 对于满足:

$$j(z)\mathcal{O}_q(w) \sim \frac{q\mathcal{O}_q(w)}{z-w} + \dots, \quad \begin{cases} \mathcal{O}_{q=1}(w) = c(w) \\ \mathcal{O}_{q=-1}(w) = b(w) \end{cases} \quad (6.3. 105)$$

的算符 \mathcal{O}_q , 我们称之为鬼数 (ghost number) 为 q 的算符, b 和 c 分别的鬼数为 -1 和 1 . 进一步, 我们可以得到 j_0 的本征态:

$$|q\rangle = \lim_{z \rightarrow 0} \mathcal{O}_q(z) |0\rangle \quad (6.3. 106)$$

本征方程为:

$$j_0 |q\rangle = q |q\rangle \quad (6.3. 107)$$

而由于 j_0^\dagger 的反常, 除非 $q + q' = 3$, 否则 $\langle q' | q \rangle$ 为零:

$$\begin{aligned} q \langle q' | q \rangle &= \langle q' | j_0 | q \rangle = (j_0^\dagger | q' \rangle)^\dagger | q \rangle \\ &= [(3 - j_0) | q' \rangle]^\dagger | q \rangle = (3 - q') \langle q' | q \rangle \end{aligned} \quad (6.3. 108)$$

我们于是就得到了两对互为厄米共轭的态:

$$\begin{aligned} q = 0 : \quad |0\rangle &\leftrightarrow q = 3 : \quad c_{-1}c_0c_1 |0\rangle \\ q = 1 : \quad c_1 |0\rangle &\leftrightarrow q = 2 : \quad c_0c_1 |0\rangle \end{aligned} \quad (6.3. 109)$$

在带里奇标量 \mathcal{R} 的弯曲世界面上, 反常鬼场流遵循反常守恒律:

$$\partial_{\bar{z}} j(z) = -\frac{3}{4} \sqrt{-h} \mathcal{R} \quad (6.3. 110)$$

等式的右侧在积分后会得到反映世界面拓扑性质的量:

$$\chi = \frac{1}{4\pi} \int_{\Sigma} d^2\sigma \sqrt{-h} \mathcal{R} = 2(1 - g) \quad (6.3. 111)$$

其中 χ 就是 Σ 的欧拉示性数 (Euler characteristic), g 是 Σ 的亏格数 (genus), 我们会在第 8 章详细介绍这些概念.

最后, b 和 c 出现的个数 N_c 和 N_b 与亏格数 g 有关:

$$N_c - N_b = 3 - 3g \quad (6.3. 112)$$

这与黎曼-罗赫定理 (Riemann-Roch theorem) 有关. 具体来说, 路径积分 $\int \mathcal{D}[c]$ 中出现的 $\int dc_{-1}dc_0dc_1$ 便是 $g = 0$ 的特例.

6.4 弦理论的维数限制

现在我们总结一下. 我们知道, 对微分同胚和外尔规范对称性进行规范固定会引入鬼场, 从而产生中心荷 $c = -26$. 我们也知道, 除非 $c = 0$, 否则物理体系关于外尔对称会出现反常. 由于外尔对称是一种规范对称, 因此我们必须将其保留. 因此我们不得不在弦上添加合适的自由度以抵消鬼场在中心荷上的贡献.

最简单的方法是添加 D 自由标量场. 我们前面看到, 每个自由标量场对中心电荷的贡献都是 $c = 1$, 因此整个体系的一致性要求我们选择:

$$D = 26$$

这与我们在第 3 章末尾发现的结果一致. 这正是我们先前对弦理论维数的要求.

然而, 我们没有理由必须使用自由标量场. 一致性要求仅仅是弦的自由度由 $c = 26$ 的共形场论来描述. 任何满足此条件的共形场论都可以. 每个共形场论都描述了弦可以传播的不同背景. 如果我们愿意, 我们也可以把 $c = 26$ 的不同 CFT 张成的空间看作弦理论的经典解空间.

实际上, 弦理论的维度要求更准确来讲是中心荷要求. 只有对于相当特殊的 CFT, 这种中心荷才能被视为时空维度.

例如, 如果我们想描述在四维闵氏时空中运动的弦, 我们可以把 $D = 4$ 自由标量 (其中一个类时) 与其他一些 $c = 22$ CFT 放在一起. 这个共形场论可能有几何解释, 也可能更抽象. 具有 $c = 22$ 的 CFT 有时被称为理论的内部 (internal sector). 这就是人们常说的弦理论的额外隐藏维数的含义. 我们将在第 9 章中看到一些这样的例子.

接下来我们简要介绍超弦维数限制为 $D = 10$ 这个著名结论. 超弦在世界面上还有另一种规范对称: 超对称. 这就产生了更多的鬼场, 称为 $\beta \gamma$ 鬼场. 其中心荷为 $+11$. 因此, 一致性要求弦的自由度贡献中心荷 $c = 26 - 11 = 15$. 然而, 超弦的 CFT 本身必须在超对称性下是不变的. 这意味着玻色子要与费米子相匹配. 如果存在 D 个玻色子, 那么我

们同样需要在体系中包含 D 个费米子. 每个自由玻色子贡献中心荷 $c = 1$, 而每个自由费米子则贡献 $c = 1/2$. 因此, 我们需要添加的自由玻色子总数为 $D(1 + 1/2) = 15$, 于是就得到了著名的超弦维数限制:

$$D = 10$$

最后还有一个微妙的问题: 我们最终需要回到闵氏时空. 一种思路是把 X^0 视为自由标量场, 而用某个 $c = 25$ 的 CFT 来描述其余自由度. 但这似乎不太令人满意, 因为这样不存在随时间演化的时空. 当然, 如果我们想了解一些诸如早期宇宙学的问题, 这些时空的演化肯定是必要的. 要理解含时演化背景下的弦世界面, 目前还存在一些技术障碍. 为了在这个问题上取得进展并讨论弦宇宙学, 我们通常会通过低能有效作用量来绕过这个问题, 我们将在第 9 章中推导出这个作用量.

6.4.1 泊里雅科夫非临界弦 (non-critical strings)

虽然这与我们的主线略有偏离, 但还是值得停下来提一下泊里雅科夫的主要贡献之一, 他主要关注的不是 $D = 26$ 的临界弦, 而是 $D \neq 26$ 的非临界弦 (non-critical strings). 通过上面的讨论, 我们知道这类弦存在外尔反常. 但事实证明, 有一种方法可以解释这种情况.

我们的出发点是从一开始就放弃外尔不变性. 我们从与动态世界面度规 $g_{\alpha\beta}$ 耦合的 D 个自由标量场开始. (更一般地说, 我们可以有任意的共形场论). 我们希望保持重参数化不变性, 但忽略外尔不变性的约束. 当然, 这样的物理理论很可能与我们熟知的南部-后藤弦没有太大关系, 但我们接受这一点继续讨论. 在没有外尔不变性的情况下, 有一个额外的项可以很自然地添加到二维理论中: 世界面宇宙常数 μ 项:

$$S_{\text{non-crit}} = \frac{1}{4\pi\alpha'} \int d^2\sigma \sqrt{-h} (g^{\alpha\beta} \partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X_\mu + \mu)$$

于是我们可以尝试理解配分函数在外尔变换下的变换规律. 这来自于两方面的贡献: 一个来自于对 μ 依赖性, 一个来自外尔反常. 我们考虑两个通过外尔变换相关的度规:

$$\hat{g}_{\alpha\beta} = e^{2\phi} h_{\alpha\beta}$$

在我们变动 ϕ 的值时, 配分函数 $Z[\hat{g}]$ 以如下方式变换:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{Z} \frac{\partial Z}{\partial \phi} &= \frac{1}{Z} \int \mathcal{D}\phi e^{-S} \left(-\frac{\partial S}{\partial \hat{g}_{\alpha\beta}} \frac{\partial \hat{g}_{\alpha\beta}}{\partial \phi} \right) \\
 &= \frac{1}{Z} \int \mathcal{D}\phi e^{-S} \left(-\frac{1}{2\pi} \sqrt{\hat{g}} T^\alpha_\alpha \right) \\
 &= \frac{c}{24\pi} \sqrt{\hat{g}} \hat{R} - \frac{1}{2\pi\alpha'} \mu e^{2\phi} \\
 &= \frac{c}{24\pi} \sqrt{h} (R - 2\nabla^2 \phi) - \frac{1}{2\pi\alpha'} \mu e^{2\phi}
 \end{aligned}$$

其中, 在最后两行中, 我们使用了外尔反常 eq. (5.5. 50) 和里奇曲率在外尔变换下的变换规律 eq. (2.5. 56). 这些公式中出现的中心荷自然也包括来自鬼场的贡献:

$$c = D - 26$$

现在我们可以把它当作配分函数 Z 的微分方程来处理并求解. 这样, 我们就可以用定义在另一个世界面上的 $Z[g]$ 来表达定义在一个世界面度规上的配分函数 $Z[\hat{g}]$. 两者之间的关系是:

$$Z[\hat{g}] = Z[g] \exp \left[-\frac{1}{4\pi\alpha'} \int d^2\sigma \sqrt{g} \left(2\mu e^{2\phi} - \frac{c\alpha'}{6} (g^{\alpha\beta} \partial_\alpha \phi \partial_\beta \phi + R\phi) \right) \right]$$

我们看到外尔变换对应的 ϕ 继承了一个动力学项. 它现在作为一个新的标量场出现在理论中. 由于乘以 μ 的指数势项, 它通常被称为刘维尔场 (Liouville field). 对这个理论求解是相当困难的⁹. 需要注意的是, 我们新引入的标量场 ω 与里奇标量 R 以乘积的形式出现在最后一项中. 我们将在 9.2.1 节解释这一项的含义.

⁹可以参考塞伯格的文章 *Notes on Quantum Liouville Theory and Quantum Gravity*, Prog. Theor. Phys. Supl. 102 (1990) 319.

Chapter 7

BRST 量子化与顶角算符

我们在本章会用更系统化的方法来分析弦的能谱. 我们曾在第 3 章利用光锥进行非协变的量子化, 将 X 的零分量与一个空间分量分离, 并证明了所有的自由度都来自于分离之后的 $(D-2)$ 个分量的激发态. 而协变量子化过程中我们保留了所有的 X 分量, 并在规范固定时引入 b, c 鬼场, 现在我们需要找到一个途径来区分这样构造的态中哪些是物理的, 哪些非物理. 此外, 光锥量子化对 X^μ 与 $g_{\alpha\beta}$ 进行限制的方法并不完善. 为了得到最一般的规范变换, 我们也需要要求 $\delta g_{\alpha\beta}$ 成为算符, 即依赖于路径积分中出现的场. 这两件事都与一个新的对称性相关: 贝基-鲁埃-斯道拉-秋金对称性 (Becchi-Rouet-Stora-Tyutin symmetry), 简称 BRST 对称性.

7.1 BRST 对称性

首先, 介绍本节使用的符号约定. 一方面, 为了得到完整的对称性, 我们需要从更一般的角度重新审视问题. 另一方面, BRST 对称性在弦论以外也有非常广泛的应用. 所以, 我们在最初介绍 BRST 对称性的时候采用更一般化的符号约定, 稍后考虑对弦的应用时我们会回到我们更熟悉的写法.:

- 我们将路径积分中出现的场统一记为 ϕ_i , 指标 i 同时一个或多个标记场的种类以及坐标 σ 分量. 例如在弦论中的 $X^\mu(\sigma)$ 和 $g_{\alpha\beta}(\sigma)$ 均由 ϕ_i 表示, 他们的指标均由 i 进行标记.

- 规范变换记为 $\epsilon^\alpha T_\alpha$, 规范变换生成元为 T_α , 满足代数:

$$[T_\alpha, T_\beta] = f_{\alpha\beta}^\gamma T_\gamma \quad (7.1. 1)$$

由于我们总可以将复参数分解为实部和虚部两个实参数, 此处规范变换中的参数 ϵ^α 不妨直接取为实参数.

- 我们考虑的物理体系中存在规范对称性, 我们利用函数 $F^A(\phi)$ 固定规范:

$$F^A(\phi) = 0 \quad (7.1. 2)$$

指标同样是坐标分量, 为做区分, 此处用 A 标记.

我们现在可以利用第 6 章中的 FP 方法固定规范, 并用拉格朗日乘子法将 FP 方法得到的规范固定方程引入路径积分, 于是作用量现在可以被写为三项求和的形式:

$$S = S_{gi} + S_{gf} + S_{gh} \quad (7.1. 3)$$

这三项也常直接简写为 $S = S_1 + S_2 + S_3$. 他们分别的含义是:

- S_{gi} : 下标表示规范不变 (gauge invariant) 的原作用量, 例如可以是杨米尔斯作用量或泊里雅科夫作用量.
- S_{gf} : 下标表示规范固定项 (gauge fixing term) 我们引入拉格朗日乘子 B_A 将规范固定条件 $F^A(\phi) = 0$ 包含在路径积分中. S_{gf} 于是可以写为:

$$S_{gf} = -i \int B_A F^A(\phi) \quad (7.1. 4)$$

其中 $-i$ 是方便计算引入的常数, 我们当然可以将其吸收进 B_A 中. 由于本节我们希望讨论一般的 BRST 对称性而非局限于弦的世界面, 我们此处略去积分测度.

- S_{gh} : 下标表示鬼场 (ghost) 作用量, 即我们利用 FP 方法固定规范时引入的新作用量. 我们将 S_{gh} 可以写为:

$$S_{gh} = \int b_A c^\alpha T_\alpha F^A(\phi) \quad (7.1. 5)$$

此后我们用 $S_1 + S_2 + S_3$ 简写. 于是我们可以将配分函数的路径积分形式写为:

$$\int \frac{\mathcal{D}[\phi_i]}{V_{gauge}} \exp(-S_1) \rightarrow \int \mathcal{D}[\phi_i] \mathcal{D}[B_A] \mathcal{D}[b_A] \mathcal{D}[c^\alpha] \exp(-S_1 - S_2 - S_3) \quad (7.1. 6)$$

观察整体作用量 S , 我们可以发现如下两条性质:

- 首先, 作用量整体在所谓的 BRST 变换 δ_B 下不变:

$$\begin{aligned}
 \delta_B \phi_i &= -i\epsilon c^\alpha T_\alpha \phi_i \\
 \delta_B B_A &= 0 \\
 \delta_B b_A &= \epsilon B_A \\
 \delta_B c^\alpha &= \frac{i}{2} \epsilon f_{\beta\gamma}^\alpha c^\beta c^\gamma
 \end{aligned} \tag{7.1. 7}$$

需要注意的是, 我们将 c 数与 g 数互相变换, 因此变换中出现的参数 ϵ 必须是 g 数. 由于 b 和 c 的鬼数分别为 -1 和 1 , 而 c 数算符的鬼数一定为 0 , 我们对等号两侧分别与反常鬼场流求 OPE, 不难得到, ϵ 的鬼数一定为 -1 .

原作用量 S_1 本身在 BRST 变换下不变. 这是因为, ϕ 的 BRST 变换无非就是它的规范变换 $T_\alpha \phi_i$ 乘以参数 ϵc^α . 而 S_2 和 S_3 的 BRST 变换相互抵消, 具体来说, 对 S_2 的 BRST 变换与 S_3 中 b_A 的 BRST 变换抵消, 而 S_3 中 $\delta_\alpha F^A$ 与 c^α 的 BRST 变换抵消, 具体计算留做习题.

- 第二, 对 $b_A F^A$ 的 BRST 变换为:

$$\delta_B(b_A F^A) = i\epsilon(S_2 + S_3) \tag{7.1. 8}$$

现在, 考虑规范固定方程中的无穷小变化 δF . 我们知道, S_1 本身是规范不变的, 因此不出现 F , 而在 S_2 与 S_3 中, F 均呈线性. 于是, 在关联函数中变化 δF 导致的无穷小变化可以写为:

$$\begin{aligned}
 \epsilon \delta \langle f | i \rangle &= i \langle f | \delta_B(b_A \delta F^A) | i \rangle \\
 &= -\epsilon \langle f | \{Q_B, b_A \delta F^A\} | i \rangle
 \end{aligned} \tag{7.1. 9}$$

我们在量子场论中学过, 算符的变换实际上等价于变换对应的诺特流守恒荷与算符的对易子或反对易子 (取决于算符本身是 c 数还是 g 数). 此处最后一步同理, 我们用与 BRST 守恒荷的反对易子的形式给出了 BRST 变换. 此外存在物理意义的关联函数不依赖于 F , 换言之对于初态末态均为物理态的情况, 上式为 0 .

因此, 物理态必须满足:

$$\langle \psi | \{Q_B, b_A \delta F^A\} | \psi' \rangle = 0 \tag{7.1. 10}$$

为使这一条件对任意 δF 均成立, 上式等价于要求物理态必须满足:

$$Q_B | \psi \rangle = Q_B | \psi' \rangle = 0 \tag{7.1. 11}$$

这是一条非常重要的性质: 物理态必须是 BRST 不变的. 需要注意的是, 我们默认了

Q_B 是厄米的, 即 $Q_B^\dagger = Q_B$. 这其实不难看出, 倘若 Q_B^\dagger 是另一个荷, 那么它一定对应于另一个不同的对称性, 而我们无法找到这样备选的对称性. 我们后面也会对于弦论的例子直接从 BRST 对称性计算出 Q_B , 届时也可以直接看到弦论中 Q_B 的厄米性质.

以上是作用量满足的两条性质. 接下来, 考虑 BRST 荷的一些性质. 当我们选取不同的规范固定, BRST 荷必须仍然守恒. 这也就等价于 BRST 荷必须与哈密顿量中的变化对易, 即:

$$\begin{aligned} 0 &= [Q_B, \{Q_B, b_A \delta F^A\}] \\ &= Q_B^2 b_A \delta F^A - Q_B b_A \delta F^A Q_B + Q_B b_A \delta F^A Q_B - b_A \delta F^A Q_B^2 \\ &= [Q_B^2, b_A \delta F^A] \end{aligned} \quad (7.1. 12)$$

同样地, 我们要求上式对任意的变化均成立, 因此这等价于要求:

$$Q_B^2 = 0 \quad (7.1. 13)$$

这是一个幂零算符 (nilpotent operator). 我们可能会有疑问, 若 Q_B^2 取非零常数, 上述对易子也为 0, 这部分被排除的原因是什么? 通过观察 eq. (7.1. 9) 得知, Q_B 的鬼数为 1, 因此 Q_B^2 的鬼数为 2, 因此 Q_B^2 只能为 0. 我们当然也可以尝试进行两次 BRST 变换 eq. (7.1. 7), 所有的场在两次变换后都是不变的. 例如, 我们可以利用结构张量 $f_{\beta\gamma}^\alpha$ 的雅可比恒等式证明:

$$\delta_B(\delta'_B c^\alpha) = -\frac{1}{2} \epsilon \epsilon' f_{\beta\gamma}^\alpha f_{\delta\tau}^\gamma c^\beta c^\delta c^\tau = 0 \quad (7.1. 14)$$

证明过程利用了鬼场的反对易性, 即指标 β, δ, τ 反对称.

需要注意的是, 如果 eq. (7.1. 1) 中的结构张量依赖于场, 或者等号右侧存在正比于运动方程的修正项, 那么我们需要将 BRST 荷需要推广为 巴塔林-维尔可维斯基形式 (Batalin-Vilkovisky formalism). 它与我们课程主线关系不大, 因此不深入介绍.

幂零性 eq. (7.1. 13) 是非常重要的性质, 它保证了 Q_B 可以湮灭掉任何取如下形式的态:

$$Q_B |\chi\rangle \quad (7.1. 15)$$

这对任意的 $|\chi\rangle$ 均成立. 因此 $Q_B |\chi\rangle$ 是物理态. 但需要注意的是, 它与所有物理态 (包括 $Q_B |\chi\rangle$ 本身) 正交:

$$\langle \psi | (Q_B |\chi\rangle) = (\langle \psi | Q_B) |\chi\rangle = 0 \quad (7.1. 16)$$

其中最后一步我们利用了对物理态的要求: $Q_B|\psi\rangle = 0$. 倘若两个物理态之间仅差一个 $Q_B|\chi\rangle$, 那么他们与任何物理态的内积都一定是相同的, 因此他们属于同一个等价类 (equivalence class). 这实际上类似于光锥量子化中, 两个物理态若仅相差物理赝态则属于同一等价类的论述类似. 我们这里便是要求出全部物理态相对等价类的商空间. 这是通过 Q_B 的上同调 (cohomology) 做到的. 即, 每个等价类都由去掉 $Q_B|\chi\rangle$ 的态来表征. 换句话讲, 我们如果找到所有能被 Q_B 湮灭 (物理态要求) 而不能写为 Q_B 作用于某个态的结果 (去掉同一等价类的其他元素) 的所有态, 我们便找到了这个商空间. 用上同调的语言来描述, 若态能被 Q_B 湮灭则称其为 Q_B 闭的 (closed), 若态能被写为 Q_B 作用于某个态的结果则称其为 Q_B 恰当的 (exact). 由 Q_B 的幂零性, 我们知道, 恰当的一定是闭的, 而 Q_B 闭关于 Q_B 恰当的商空间称为 Q_B 的上同调.

一个与之类似的例子是外微分算符, 这同样是一个幂零算符. 我们可以定义 n 形式场, 在外微分作用下, n 形式场会变为 $n+1$ 形式场, 此时再用外微分进行作用则会得到 0.

7.2 弦的 BRST 量子化

我们现在可以给出一个不依赖于光锥的方法来协变地描述玻色弦的能谱.

现在作用量除泊里雅科夫作用量与鬼场作用量以外还应当附加规范固定项:

$$\frac{i}{4\pi} \int d^2\sigma \sqrt{g} B^{\alpha\beta} (\eta_{\alpha\beta} - g_{\alpha\beta}) \quad (7.2. 17)$$

我们首先写下对于弦的 BRST 变换:

$$\begin{aligned} \delta_B X^\mu &= i\epsilon(c\partial + \bar{c}\bar{\partial})X^\mu \\ \delta_B b &= i\epsilon(T^X + T^g) \\ \delta_B \bar{b} &= i\epsilon(\bar{T}^X + \bar{T}^g) \\ \delta_B c &= i\epsilon c\partial c \\ \delta_B \bar{c} &= i\epsilon \bar{c}\bar{\partial}\bar{c} \end{aligned} \quad (7.2. 18)$$

我们发现, b 的 BRST 变换原本应该给出 $\delta_B b_{ab} = \epsilon B_{ab}$, 但对拉格朗日乘子 B_{ab} 进行积分再将度规的运动方程代入便可以得到 eq. (7.2. 18) 中的形式. 在有了具体的语境之后, 我们就可以具体计算 BRST 流 j_B 和守恒荷 Q_B . 首先是 j_B , 上述 BRST 变换对应

的守恒流为:

$$\begin{aligned} j_B &= cT^m + \frac{1}{2} : cT^g : + \frac{3}{2} \partial^2 c \\ &= cT^m + : bc\partial c : + \frac{3}{2} \partial^2 c \end{aligned} \quad (7.2. 19)$$

相应地, BRST 流也有反全纯部分, 计算同理. 需要注意的是, 最后一项作为全导数项, 在计算守恒荷时不产生贡献. 这实际上是人为添加用以保证 BRST 流成为主场. 接下来我们计算 BRST 流与鬼场以及与一般形式的物质场之间的 OPE:

$$\begin{aligned} j_B(z)b(w) &\sim \frac{3}{(z-w)^3} + \frac{j^g(w)}{(z-w)^2} + \frac{T^{m+g}(w)}{z-w} \\ j_B(z)c(w) &\sim \frac{c\partial c(w)}{z-w} \\ j_B(z)\mathcal{O}(w) &\sim \frac{hc\mathcal{O}^m(w)}{(z-w)^2} + \frac{1}{z-w} [h(\partial c)\mathcal{O}^m(w) + c\partial\mathcal{O}^m(w)] \end{aligned} \quad (7.2. 20)$$

其中的一阶奇点反映了这些场对应的 BRST 变换 eq. (7.2. 18). 接下来我们可以给出 BRST 荷 Q_B :

$$Q_B = \frac{1}{2\pi i} \oint (dz j_B - d\bar{z} \bar{j}_B) \quad (7.2. 21)$$

将 eq. (7.2. 19) 代入上式, 令 Q_B 展开为鬼场模的形式, 我们便得到:

$$\begin{aligned} Q_B &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} (c_n L_n^m + \bar{c}_n \bar{L}_n^m) \\ &\quad + \sum_{m,n=-\infty}^{\infty} \frac{(m-n)}{2} : (c_m c_n b_{-m-n} + \bar{c}_m \bar{c}_n \bar{b}_{-m-n}) : - (c_0 + \bar{c}_0) \end{aligned} \quad (7.2. 22)$$

其中最后一项来自于排序常数, 即当 n 或 m 等于 0 时, 第个求和中 c 和 b 不再反对易, 这本质上和 eq. (3.3. 32) 后提到的常数修正是一件事. 与之同理, 这里需要附带排序常数 a , 再求出常数 a 的值, 由此给出最后一项. 进一步, 利用围道积分 eq. (7.2. 21), 我们可以得到:

$$\{Q_B, b_n\} = L_n^m + L_n^g = L_n^{tot} \quad (7.2. 23)$$

将 n 取为 0, 我们有:

$$\{Q_B, b_0\} = L_0^m + L_0^g = L_0^{tot} \quad (7.2. 24)$$

我们可以利用 Q_B, Q_B, b_n 的雅可比恒等式证明在总中心荷为 0 时, $\{Q_B, Q_B\} = 0$, 即物质场中心荷 $c^m = 26$ 时有:

$$\{Q_B, Q_B\} = 0 \quad (7.2. 25)$$

我们当然也可以从 BRST 流的 OPE 看出这一点:

$$j_B(z)j_B(w) \sim -\frac{c^m - 18}{2(z-w)^3}c\partial c(w) - \frac{c^m - 18}{4(z-w)^2}c\partial^2 c(w) - \frac{c^m - 26}{12(z-w)}c\partial^3 c(w) \quad (7.2. 26)$$

上式的一阶奇点对应于 $\{Q_B, Q_B\}$, 我们自然可以看到, 在物质场中心荷 $c^m = 26$ 时 $\{Q_B, Q_B\} = 0$. 同样, 观察能动张量与 BRST 流的 OPE:

$$T(z)j_B(w) \sim -\frac{c^m - 26}{2(z-w)^4}c(w) + \frac{1}{(z-w)^2}j_B(w) + \frac{1}{z-w}\partial j_B(w) \quad (7.2. 27)$$

我们同样得到 $c^m = 26$ 时 j_B 才为主场.

此外, 由定义, 我们有:

$$L_n^{tot} = L_n^m + L_n^g = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2} : \alpha_{n-m}\alpha_m : + (n+m) : b_{n-m}c_m : \right) \quad (7.2. 28)$$

零分量为:

$$\begin{aligned} L_0^{tot} &= L_0^m + L_0^g = \sum_{m>0} \left(\alpha_{-m}\alpha_m + m(b_{-m}c_m + c_{-m}b_m) \right) + \alpha'p^2 - 1 \\ &= N^{tot} + \alpha'p^2 - 1 \end{aligned} \quad (7.2. 29)$$

而 $N^{tot} - 1$ 正是对应能级的质量, 因此我们可以将 L_0^{tot} (以后简写为 L_0) 写为 $L_0 = \alpha'(p^\mu p_\mu + m^2)$, 于是对满足质壳方程的物理态 $|\psi\rangle$, 我们有:

$$L_0 |\psi\rangle = \{Q_B, b_0\} |\psi\rangle = 0 \quad (7.2. 30)$$

而由于我们已经要求物理态为 Q_B 闭的, 因此上述条件等价于要求 $b_0 |\psi\rangle = 0$.

总结一下对弦进行 BRST 量子化的过程:

- 首先利用物质场与鬼场构造出所有可能的态
- 将 b_0 作用于其上, 剔除得到非零结果的态.
- 找出所有 Q_B 闭的态.
- 最后剔除所有 Q_B 恰当的态, 我们就找到了满足质壳方程的全部物理态.

关于 BRST, 的其他细节可以在 [4, 1, 5] 中找到.

我们接下来会具体计算开弦无质量态的例子作为练习.

7.2.1 无质量开弦态

接下来我们举一个简单的例子, 利用 BRST 量子化计算无质量开玻色弦态, 即开玻色弦的第一激发态.

我们可以先从无质量态的三点关联函数入手¹, 这实际上是三个顶角算符的关联函数, 由于关联函数本身必须是 $diff \times Weyl$ 不变的, 因此关联函数的共形权必须为 $(h, \bar{h}) = (0, 0)$. 三个顶角算符平权, 因此顶角算符共形权也为 $(h, \bar{h}) = (0, 0)$. 所以我们接下来利用物质场, 鬼场以及平面波尝试构造顶角算符, 如果我们能够筛选出无质量开弦态的所有顶角算符我们便筛选出了所有无质量开弦物理态. 首先, 列出顶角算符全部组成部分的共形权:

Operator	$e^{ip \cdot X(z)}$	$\partial_z X^\mu$	b	c	$\partial_z c$	$\partial_z^2 c$	λ
h	$\frac{\alpha'}{4} p^2 \Big _{p^2=0}$	1	2	-1	0	1	0

其中 λ 为常数, 共形权为 0. 注意到平面波必须在顶角算符中出现且只出现一次, 我们可以对上述对象进行重组, 构造所有共形权为 0 的备选, 将他们线性组合起来, 便得到:

$$\psi_{general} = (\alpha \partial c + \beta c \partial^2 c + \gamma c \partial c \partial^2 c + \epsilon_\mu c \partial X^\mu + \zeta_\mu c \partial c \partial X^\mu + \lambda) e^{ip \cdot X} : \quad (7.2. 31)$$

这便是我们能构造出的全部备选态. 其中 λ 是常数项, 我们接下来逐步从中筛选出符合要求的态即可.

我们令 b_0 作用于 $\psi_{general}$, 得到:

$$\begin{aligned} b_0 \psi_{general} &= \oint \frac{dz}{2\pi i} z b : (\alpha \partial c + \beta c \partial^2 c + \gamma c \partial c \partial^2 c + \epsilon_\mu c \partial X^\mu + \zeta_\mu c \partial c \partial X^\mu + \lambda) e^{ip \cdot X} : \\ &= \oint \frac{dz}{2\pi i} : \left(\frac{\alpha}{z} + \beta \partial^2 c - \frac{2\beta c}{z^2} + \gamma \partial c \partial^2 c - \frac{\gamma c \partial^2 c}{z} + \frac{2\gamma c \partial c}{z^2} \right. \\ &\quad \left. + \epsilon_\mu \partial X^\mu + \zeta_\mu (\partial c \partial X^\mu) - \frac{\zeta_\mu (c \partial X^\mu)}{z} + z b \lambda \right) e^{ip \cdot X} : \\ &= \oint \frac{dz}{2\pi i} : \left(\frac{\alpha}{z} - \frac{\gamma c \partial^2 c}{z} - \frac{\zeta_\mu (c \partial X^\mu)}{z} \right) e^{ip \cdot X} : \end{aligned} \quad (7.2. 32)$$

其中第二步应用了 eq. (6.3. 78) 处理 b 和 c 的 OPE. 第三步则应用了柯西积分公式. 我们知道, 物理态满足质壳方程等价于物理态会被 b_0 湮灭, 对于 $\alpha, \gamma, \zeta_\mu$, 其对应的态

¹这里取三点关联函数是有原因的, 我们后面会在第 8 章看到, 对于四点及以上, 我们需要对顶角算符进行积分, 而积分的测度 $\int d^2 z$ 存在共形权 $(h, \bar{h}) = (-1, -1)$, 会影响讨论, 三点则不需要考虑这一问题.

若满足质壳条件则这三个系数必然为 0, 态消失. 因此我们筛选后的结果为:

$$\psi_{general} \rightarrow \psi_1 =: (\beta c \partial^2 c + \epsilon_\mu c \partial X^\mu + \lambda) e^{ip \cdot X} : \quad (7.2. 33)$$

接下来我们要筛选出满足物理态要求的态, 即 Q_B 闭的态

我们将 Q_B 作用于 ψ_1 , 可以得到:

$$\begin{aligned} Q_B \psi_1 &= \oint \frac{dz}{2\pi i} : cT + bc\partial c :: (\beta c \partial^2 c + \epsilon_\mu c \partial X^\mu + \lambda) e^{ip \cdot X} : \\ &= \oint \frac{dz}{2\pi i} \left[\frac{1}{z} \beta c(z) : ip \partial X e^{ip \cdot X} c \partial^2 c : + \frac{1}{z} \beta c(z) \partial c(z) : e^{ip \cdot X} \partial^2 c : \right. \\ &\quad - \frac{2}{z^3} \beta c(z) \partial c(z) : e^{ip \cdot X} c : + \frac{1}{z^2} c(z) : \epsilon \cdot \partial X e^{ip \cdot X} c : \\ &\quad + \frac{1}{z} c(z) \partial \left(: \epsilon \cdot \partial X e^{ip \cdot X} c : \right) - \frac{i\alpha'}{2z^3} c(z) \epsilon \cdot p : e^{ip \cdot X} c : \\ &\quad + \frac{\alpha'}{4z^2} c(z) p^2 \epsilon_\mu : \partial X^\mu e^{ip \cdot X} c : + \frac{1}{z} \epsilon_\mu : \partial X^\mu e^{ip \cdot X} c \partial c : \\ &\quad \left. + \frac{\lambda}{z} c(z) : \partial e^{ip \cdot X} : + \lambda b(z) c(z) \partial c(z) : e^{ip \cdot X} : \right] \end{aligned} \quad (7.2. 34)$$

对上式 z 的函数进行泰勒展开, 再利用柯西积分公式, 我们得到:

$$\begin{aligned} Q_B \psi_1 &= \oint \frac{dz}{2\pi i} \left[\underbrace{\frac{\beta}{z} (: c \partial c e^{ip \cdot X} \partial^2 c : - : \partial c \partial^2 c e^{ip \cdot X} c :)}_{=0} \right. \\ &\quad \left. + \underbrace{\frac{\epsilon_\mu}{z} (: \partial c e^{ip \cdot X} c \partial X^\mu : + c \partial c e^{ip \cdot X} \partial X^\mu :)}_{=0} \right. \\ &\quad \left. - \frac{i\alpha'}{4z} \epsilon \cdot p : \partial^2 c e^{ip \cdot X} c : + \frac{\lambda}{z} c \partial e^{ip \cdot X} \right] \end{aligned} \quad (7.2. 35)$$

我们对物理态的要求是被 Q_B 作用等于 0, 这等价于 $\lambda = 0$ 且 $\epsilon \cdot p = 0$. 于是我们现在有:

$$\psi_1 \rightarrow \psi_2 =: (\beta c \partial^2 c + \epsilon_\mu c \partial X^\mu) e^{ip \cdot X} : \quad \epsilon \cdot p = 0 \quad (7.2. 36)$$

其中 $\epsilon \cdot p = 0$ 正是我们在量子场论中见到的横场极化条件.

最后, 我们来剔除 ψ_2 中所有 Q_B 恰当的态. 这件事实际上有一点点小技巧. 通过上面的计算, 我们发现 Q_B 的作用是不改变共形权的, 态 ψ_2 中的 Q_B 恰当部分 $Q_B \phi$ 中的 ϕ 共形权一定也为 0. 又由于 $\psi_{general}$ 已经涵盖了我们能构造的所有 $h = 0$ 态, 我们于是知道 ϕ 一定是 $\psi_{general}$ 中的一部分. 因此我们令 Q_B 作用于 $\psi_{general}$, 得到的任何出现

在 ψ_2 中的非零结果便是待求的 Q_B 恰当部分. 将 Q_B 作用于 $\psi_{general}$, 有:

$$\begin{aligned}
Q_B \psi_{general} &= \oint \frac{dz}{2\pi i} : cT + bc\partial c : \\
&\quad : \left(\alpha\partial c + \beta c\partial^2 c + \gamma c\partial c\partial^2 c + \epsilon_\mu c\partial X^\mu + \zeta_\mu c\partial c\partial X^\mu + \lambda \right) e^{ip \cdot X} : \\
&= \oint \frac{dz}{2\pi i} \left[\frac{\alpha}{z} c(z) : ip \cdot \partial X e^{ip \cdot X} \partial c : + \frac{\alpha}{z^2} c(z) \partial c(z) : e^{ip \cdot X} : \right. \\
&\quad + \frac{\beta}{z} c(z) : ip \cdot \partial X e^{ip \cdot X} c\partial^2 c : + \frac{\beta}{z} c(z) \partial c(z) : e^{ip \cdot X} \partial^2 c : \\
&\quad - \frac{2\beta}{z^2} c(z) \partial c(z) : e^{ip \cdot X} c : + \frac{\gamma}{z} c(z) : ip \cdot \partial X e^{ip \cdot X} c\partial c\partial^2 c : \\
&\quad + \frac{\gamma}{z} c(z) \partial c(z) : e^{ip \cdot X} (\partial c\partial^2 c - \frac{1}{z} c\partial^2 c + \frac{2}{z^2} c\partial c) : \\
&\quad - \frac{i\alpha'}{2z^3} c(z) \epsilon \cdot p : e^{ip \cdot X} c : + \frac{\alpha'}{4z^2} c(z) p^2 \epsilon_\mu : \partial X^\mu e^{ip \cdot X} c : \\
&\quad + \frac{\epsilon_\mu}{z} c(z) : ip \cdot \partial X e^{ip \cdot X} \partial X^\mu c : + \frac{\epsilon_\mu}{z^2} c(z) : \partial X^\mu e^{ip \cdot X} c : \\
&\quad + \frac{\epsilon_\mu}{z} c(z) : \partial^2 X^\mu e^{ip \cdot X} c : + \frac{\epsilon_\mu}{z} c(z) \partial c(z) : \partial X^\mu e^{ip \cdot X} : \\
&\quad + \frac{\zeta_\mu}{z} c(z) : ip \cdot \partial X e^{ip \cdot X} \partial X^\mu c\partial c : + \frac{\zeta_\mu}{z^2} c(z) : \partial X^\mu e^{ip \cdot X} c\partial c : \\
&\quad + \frac{\zeta_\mu}{z} c(z) : \partial^2 X^\mu e^{ip \cdot X} c\partial c : + \frac{\zeta_\mu}{z} c(z) \partial c(z) : \partial X^\mu e^{ip \cdot X} (\partial c - \frac{c}{z^2}) : \\
&\quad \left. + \frac{\lambda}{z} c(z) : \partial e^{ip \cdot X} : + \lambda b(z) c(z) \partial c(z) : e^{ip \cdot X} : \right]
\end{aligned}$$

同样地, 对上式 z 的函数进行泰勒展开, 再利用柯西积分公式, 我们得到:

$$\begin{aligned}
Q_B \psi_{general} &= i\alpha : c\partial c\partial X e^{ip \cdot X} : + \alpha : c\partial^2 c e^{ip \cdot X} : \\
&\quad + i\lambda : cp \cdot \partial X e^{ip \cdot X} : + \epsilon \cdot p : c\partial^2 c e^{ip \cdot X} :
\end{aligned} \tag{7.2. 37}$$

于是, 通过对照 ψ_2 , 我们找到 Q_B 恰当的部分为:

$$\psi_{exact} = \alpha : c\partial^2 c e^{ip \cdot X} : + i\lambda : cp \cdot \partial X e^{ip \cdot X} : \tag{7.2. 38}$$

第一项表明 ψ_2 中的 $\beta c\partial^2 c$ 部分是 Q_B 恰当的, 因此应整个剔除. 第二项表明 $\epsilon_\mu = i\lambda p_\mu$ 的部分是 Q_B 恰当的, 应当剔除, 即 ϵ_μ 不能与 p_μ 成正比, 在量子场论中这部分被称为纵向极化, 在极化矢量上增加任意倍的动量不会导致物理效应的变化反应的就是 Q_B 恰当的性质, 因为他们处在同一等价类中.

于是我们最后找到的物理态为:

$$\psi_{phys} =: \epsilon_\mu c \partial X^\mu e^{ip \cdot X} : \quad (7.2. 39)$$

附带的两个条件是 $\epsilon \cdot p = 0$ 且极化不能与动量成正比. 这是两条限制条件, 于是我们现在有 $D - 2$ 个自由度. 以上讨论针对开弦, 而对于闭弦补齐反全纯部分即可, 共有 $(D - 2)^2$ 个自由度.

7.3 顶角算符

在了解了共形场论工具与 b, c 鬼场后, 我们现在可以引入一个弦论中非常重要的讨论对象: 顶角算符 (vertex operator). 我们前面已经数次提及这一概念, 本节我们便详细介绍它的一些性质.

我们先前对物理态的限制条件是:

$$\begin{aligned} L_{n>0} |phys\rangle &= \tilde{L}_{n>0} |phys\rangle = 0 \\ (L_{n>0} - a) |phys\rangle &= (\tilde{L}_{n>0} - \tilde{a}) |phys\rangle = 0 \end{aligned} \quad (7.3. 40)$$

而由态与算符的对应关系, 物理态可以被表示为一个主算符作用于真空态再取 $z \rightarrow 0$ 极限的形式, 记为:

$$|phys\rangle = \lim_{z \rightarrow 0} V_{phys}(z) |0\rangle \quad (7.3. 41)$$

由物理态限制条件, 主算符 $V_{phys}(z)$ 的共形权为 (a, \tilde{a}) . 而在关联函数中的结果一定是 $diff \times Weyl$ 不变的, 与 z 无关. 因此顶角算符与 c 鬼场的乘积整体:

$$c\bar{c}V_{phys}(z) \quad (7.3. 42)$$

满足 $diff \times Weyl$ 不变性, 因而共形权为 $(0, 0)$. 又由于鬼场 $c\bar{c}$ 的共形权为 $(-1, -1)$, 我们得到 $(a, \tilde{a}) = (1, 1)$. 此外, 易证平面波 $:e^{ip \cdot X(z)}:$ 对应的物理态是动量算符:

$$\sqrt{\frac{2}{\alpha'}} \alpha_0^\mu = \frac{2}{\alpha'} \oint_{B_\epsilon(0)} \frac{dz}{2\pi i} i \partial_z X^\mu(z) \quad (7.3. 43)$$

的本征态 (我们只需考虑 $\partial_z X^\mu(z)$ 与 $:e^{ip \cdot X(z)}:$ 的 OPE 再进行积分即可.). 对于物理态的顶角算符, 我们自然希望其是动量本征态, 因此将其拆成两部分:

$$V_{phys}(z) =: W_{phys}(z) e^{ip \cdot X(z)} : \quad (7.3. 44)$$

其中的 $W_{phys}(z)$ 对应于物理态中的 α_{-n}^μ 与 $\tilde{\alpha}_{-n}^\mu$, 其中 $n > 0$. 由态与算符的对应关系, 这实际上就表示 $W_{phys}(z)$ 由 $\partial_z^n X^\mu(z)$ 与 $\partial_{\bar{z}}^n X^\mu(z)$ 构成². 我们知道, 平面波: $e^{ip \cdot X(z)}$: 的共形权是 $(\frac{\alpha' p^2}{4}, \frac{\alpha' p^2}{4})$, 且有 $p^2 = -m^2$, 因此 $W_{phys}(z)$ 的共形权必须为:

$$(h_W, \bar{h}_W) = \left(1 + \frac{\alpha' m^2}{4}, 1 + \frac{\alpha' m^2}{4}\right) \quad (7.3. 45)$$

我们在下面的讨论中先不考虑鬼场, 我们有 $h_W, \bar{h}_W \geq 0$, 因此 m^2 下界为 $-\frac{4}{\alpha'}$, 而这又对应于闭弦的快子态:

$$V_T(z) =: e^{ip \cdot X(z)} :, \quad p^2 = \frac{4}{\alpha'} \quad (7.3. 46)$$

而利用 $\partial_z^{n \geq 1} X$, 我们可以令 h_W 的值产生变化, 即变动 m^2 . 具体来说, 我们有:

$$m^2 = \frac{4}{\alpha'}(N - 1) \leftrightarrow W_{phys} \sim: \prod_{j=1}^r \partial_z^{n_j} X^{\mu_j} : \quad (7.3. 47)$$

其中 $\sum_{j=1}^r n_j = N$. 这样, 我们就构造出了激发态, 并找到了其对应的质量谱. 而由于我们变动的始终是 m^2 的值, 顶角算符整个的共形权自然是不变的, 这些新构造出来的顶角算符共形权依然是 $(1, 1)$. 于是, 第一激发态即无质量态对应的顶角算符为:

$$V_{m^2=0}(z) = \zeta_{\mu\nu} : \partial_z X^\mu \partial_{\bar{z}} X^\nu e^{ip \cdot X} :, \quad p^2 = 0 \quad (7.3. 48)$$

但这里存在一个潜在的问题, 当我们将这一顶角算符与能动张量进行 OPE, 我们会发现正比于 $\zeta_{\mu\nu} p^\mu$ 的三阶奇点, 这不满足主算符的定义, 因此仅当:

$$p^\mu \zeta_{\mu\nu} = \zeta_{\mu\nu} p^\nu = 0 \quad (7.3. 49)$$

时, 顶角算符 $V_{m^2=0}(z)$ 才是共形权为 $(1, 1)$ 的主算符. 具体计算留作习题

此外, 可以被写为全导数形式的顶角算符虽然也是主算符, 但对应非物理的赝态 (spurious states), 具体来说:

$$V_{sp}(z) = \frac{d}{dz} D_{sp}(z) = \frac{d}{d\bar{z}} \bar{D}_{sp}(z) \quad (7.3. 50)$$

中的 $V_{sp}(z)$ 便是赝态的顶角算符, 其中 $D_{sp}(z)$ 与 $\bar{D}_{sp}(z)$ 任意. 我们可以举一个例子, 对无质量态, 我们可以将 $D_{sp}(z)$ 取为:

$$D_{m^2=0}(z) = -i\xi_\mu : \partial_{\bar{z}} X^\mu e^{ip \cdot X(z)} :, \quad \xi \cdot p = 0 \quad (7.3. 51)$$

²这是玻色弦的情况. 而对于超弦, $W_{phys}(z)$ 的组成部分中也会出现 $\partial_z^n X^\mu(z)$ 与 $\partial_{\bar{z}}^n X^\mu(z)$ 的超对称伙伴.

它给出的 $V_{sp}(z)$ 便是:

$$V_{sp, m^2=0}(z) =: p_\mu \xi_\nu \partial_z X^\mu \partial_{\bar{z}} X^\nu e^{ip \cdot X(z)} : \quad (7.3. 52)$$

再加上 $\bar{D}_{sp}(z)$:

$$\bar{D}_{m^2=0}(z) = -i\bar{\xi}_\mu : \partial_z X^\mu e^{ip \cdot X(z)} :, \quad \bar{\xi} \cdot p = 0 \quad (7.3. 53)$$

的贡献, 我们于是可以知道, 无质量态的极化张量中属于赭态的部分是:

$$\zeta_{\mu\nu} \rightarrow p_\mu \xi_\nu, \quad \zeta_{\mu\nu} \rightarrow \bar{\xi}_\mu p_\nu \quad (7.3. 54)$$

于是我们发现, 赭态正是上一节中的 BRST 恰当态. 现在我们可以再数一次自由度:

- 主算符要求 $p^\mu \zeta_{\mu\nu} = \zeta_{\mu\nu} p^\nu = 0$, 于是剩余 $(D-1)^2$ 个态.
- 去掉赭态对应的全导数部分, 将 ξ_μ 和 $\bar{\xi}_\mu$ 替换为动量得到的赭态各 $(D-1)$ 个.
- 上一步中 $p_\mu p_\nu : \partial_z X^\mu \partial_{\bar{z}} X^\nu e^{ip \cdot X} :$ 被减掉了两次, 我们需要加回 1.

于是我们最终得到 $(D-2)^2$ 个态, 与 BRST 的计算一致.

这里我们可能会注意到一个疑点, 作为世界面上的坐标, z 不应当出现在有物理含义的关联函数中. 那么我们应该考虑的是 $\int d^2 z V$ 而非 $c\bar{c}V$. 但事实上, 当我们利用法捷耶夫-波波夫方法固定 $diff \times Weyl$ 时在分母上遗留下了冗余的共形变换, 即共形基灵群. 在关联函数的计算中我们最后需要把这部分也去除, 因此我们可以自由固定几个参数, 反映在这里便是可以自由固定几个 z 的值. 对应于 $c\bar{c}V$, 未固定的则对应于 $\int d^2 z V$. 具体的计算以及固定 z 值的过程我们会在第 8 章计算弦的关联函数时具体分析. 并且我们知道, $\int d^2 z$ 的共形权也是 $(-1, -1)$, 因此上述对顶角算符的讨论也适用于这些被积分的顶角算符.

对于开弦, 讨论是类似的. 区别就在于开弦的顶角算符定义在以 \mathbb{R} 为边界的 CFT 上, 并将积分改为实数轴上的积分:

$$\int_{\mathbb{C}} d^2 z V_{phys}^{cl}(z) \leftrightarrow \int_{\mathbb{R}} d^2 z V_{phys}^{op}(z) \quad (7.3. 55)$$

其中开弦顶角算符 V_{phys}^{op} 中的 ∂X 满足我们在第 5 章给出的如下边界条件:

$$\partial_z X_\mu(z \in \mathbb{R}) = \begin{cases} +\partial_{\bar{z}} X_\mu(z \in \mathbb{R}) : & N \\ -\partial_{\bar{z}} X_\mu(z \in \mathbb{R}) : & D \end{cases} \quad (7.3. 56)$$

也可以用 \mathbb{C} 上的单个 $\partial_z X_\mu^{op}(z)$ 场表示. 此外, 由开弦格林函数:

$$\begin{aligned} G_{op}^N(z, w) &= G_{cl}(z, w) + G_{cl}(z, \bar{w}) \\ G_{op}^D(z, w) &= G_{cl}(z, w) - G_{cl}(z, \bar{w}) \end{aligned} \quad (7.3. 57)$$

每一个 $\partial_z X^{op}$ 参与的 OPE 都会有额外的因子 2, 例如:

$$\begin{aligned} i\partial_z X_\mu^{op}(z) : e^{ip \cdot X^{op}(w)} : &\sim \frac{\alpha' p_\mu}{2} \left(\frac{1}{z-w} + \frac{1}{z-\bar{w}} \right) : e^{ip \cdot X^{op}(w)} : + \dots \\ T_\mu^{op}(z) : e^{ip \cdot X^{op}(w)} : &\sim \frac{\alpha' p^2}{4} \left(\frac{1}{z-w} + \frac{1}{z-\bar{w}} \right)^2 : e^{ip \cdot X^{op}(w)} : + \dots \end{aligned} \quad (7.3. 58)$$

于是:

$$T_\mu^{op}(z) : e^{ip \cdot X^{op}(w)} : \sim \frac{\alpha' p^2}{(z-w)^2} : e^{ip \cdot X^{op}(w)} : + \dots \quad (7.3. 59)$$

对应的开弦顶角算符:

$$V_{phys}^{op}(z) =: W_{phys}^{op}(z) e^{ip \cdot X^{op}(z)} : \quad (7.3. 60)$$

其中 W_{phys}^{op} 由 $\partial_\tau X_\mu^{op}$ 组成, 这里的导数 $\partial_\tau = \partial_z + \partial_{\bar{z}}$ 是沿着边界方向的导数, 对于 $z \in \mathbb{R}$, 则有 $\partial_\tau = 2\partial_z$. 我们可以看到, 为了让顶角算符共形权为 1, 质量为 m 的 W_{phys}^{op} 相应的共形权则必须是 $1 + \alpha' m^2$. 即, 共形不变的 $\int_{\mathbb{R}} dz V_{phys}^{op}$ 对应的质量谱为:

$$m_{op}^2 = \frac{N-1}{\alpha'}, \quad N \in \mathbb{N}_0 \quad (7.3. 61)$$

最低态 $m_{op}^2 \rightarrow -\frac{1}{\alpha'}$ 仍然对应快子. 而第一激发态可以类比上面闭弦的讨论构造出来:

$$V_{m^2=0}^{op}(z) = \zeta^\mu : \partial_z X_\mu^{op} e^{ip \cdot X^{op}(z)} : \quad (7.3. 62)$$

与闭弦同理, 主算符要求 $\zeta \cdot p = 0$, $\zeta^\mu \rightarrow p^\mu$ 依然对应赝态, 可以写为全导数的形式 (此处便是 $\partial_\tau : e^{ip \cdot X^{op}(z)} :$). 我们可以再数一下开弦的自由度, 不难看到, 总的自由度是 $D-2$, 与 BRST 的结论一致.

与闭弦类似, 我们这里也可以将积分与 c 鬼场相互替换, 分别对应非固定与固定 z 值的顶角算符:

$$\int_{\mathbb{R}} dz V_{phys}^{op}(z) \leftrightarrow c(z) V_{phys}^{op}(z) \quad (7.3. 63)$$

最后, 正如我们先前所说, 我们可以利用所谓的内部 CFT 构造维数 $D < 26$ 的弦, 内部 CFT 对应的中心荷为 $c_{int} = 26 - D$. 内部 CFT 中的主算符 ϕ_h^{int} 作为顶角算符的基本

组成部分出现, 例如:

$$V_{phys}^{op}(z) \rightarrow \begin{cases} : \phi_h^{int}(z) e^{ip \cdot X^{op}(z)} : & m_{op}^2 = \frac{h-1}{\alpha'} \\ \zeta^\mu : \partial_z X_\mu^{op} \phi_h^{int}(z) e^{ip \cdot X^{op}(z)} : & m_{op}^2 = \frac{h}{\alpha'} \end{cases} \quad (7.3. 64)$$

于是, 每一个共形权为 h 的内部主算符 ϕ_h^{int} 均会将开弦与闭弦的能谱移动为:

$$m_{op}^2 = \frac{1}{\alpha'}(h-1+N), \quad m_{cl}^2 = \frac{4}{\alpha'}(h-1+N), \quad N \in \mathbb{N}_0 \quad (7.3. 65)$$

Chapter 8

弦的相互作用

到目前为止, 我们只讨论了自由弦. 现在, 我们希望考虑相互作用. 如果我们用量子场论进行类比, 那么我们可能会认为相互作用需要我们在作用量中加入各种非线性项. 然而, 事实并非如此. 任何为弦添加额外非线性项的尝试都不符合我们要求的规范对称性. 实际上弦与量子场论的另一个主要区别就是, 所有关于弦相互作用的信息都已经包含在泊里雅科夫作用量所描述的自由理论中. 但是, 技术上场振幅仍对弦振幅的计算存在参考价值. 我们对弦振幅的计算思路也是对所有给定的外态计算路径积分.

我们可以在弦相互作用的物理图像上看出这一点. 如图 8.1 所示的世界面是光滑的. 与量子场论不同, 在量子场论的费曼图中, 有关相互作用的信息被插入顶点, 即不同的外线交汇的地方. 而对于弦, 这里没有这样的点. 从局域上看, 图的每一部分都像一根自由传播的弦. 而只有在整体上观察, 我们才能看到该图描述了相互作用.

在这里我们可以首先给出几个弦振幅关于拓扑结构展开得到的世界面图与量子场论中费曼图的区别:

- 单个世界面图对应于同圈数的所有费曼图. 如上图所示, 对于 n 点树级振幅 (tree level amplitude), 所有 $(n-5)!!$ 个三顶角费曼图均来自单个闭弦的球世界面或开弦的盘世界面的某个特定的 $\alpha' \rightarrow 0$ 极限.
- 弦世界面中相互作用发生的区域存在空间尺度, 这与费曼图中以点的形式出现的相互作用顶角不同. 我们在后面的讨论中会看到, 这种特殊的结构会让我们能以指数形式消除量子场论中因为点相互作用的物理图像带来的紫外发散.

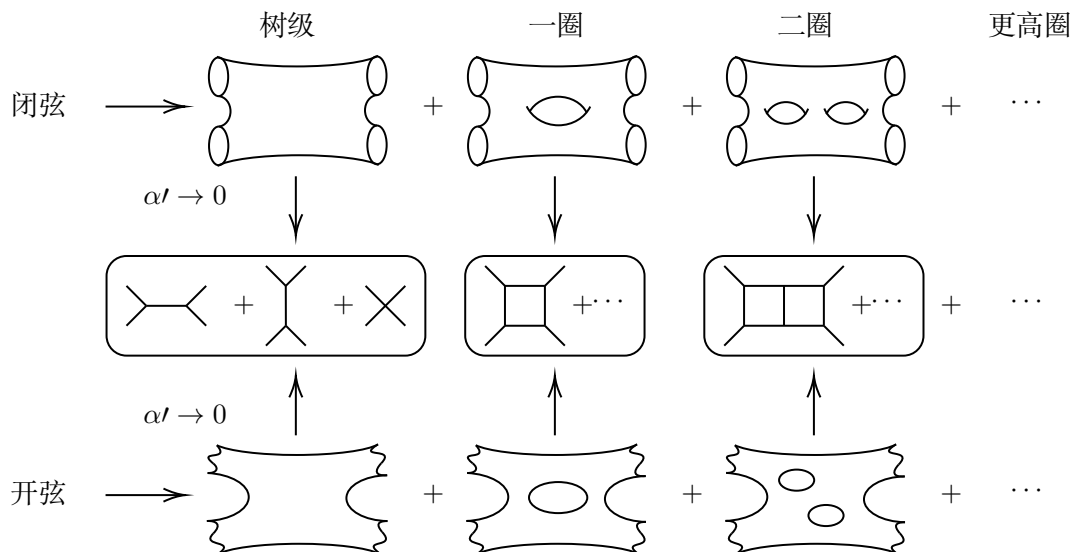


Figure 8.1: 弦振幅的物理图像

以下是我们学习弦振幅的几个出发点:

- 通过比较开弦振幅和闭弦振幅, 我们可以发现引力振幅可以由特定的规范理论的平方给出. 因此, 弦振幅给出了通向微扰引力理论与规范理论的所谓叠合结构 (double-copy structure) 的一条路径. 而它已经发展成为一个充满活力的研究领域, 在引力理论之外也有着各种应用和扩展. 综述见 [6]
- 弦振幅的 α' 展开可以给出不同弦理论的低能有效作用量, 而应当注意的是, 低能有效理论的路径积分会去掉的有质量态的贡献, 因此参与相互作用的是无质量态. 低能有效作用量是检验弦对偶性的关键对象.
- 弦振幅 α' 展开中的系数和基本构成包含很多数论中的特殊函数结构: 例如多重 ζ 函数 (multiple zeta values), 多重对数函数 (polylogarithms), 及两者的椭圆推广和模形式. 这些特殊函数也出现在高能物理的其他各个领域, 例如, 椭圆多重对数函数是量子场论中费曼积分的重要研究对象.

8.1 弦振幅的基本思想

那么如果弦相互作用的信息已经包含在泊里雅科夫作用量中, 那我们便可以直接进行计算. 首先应当明确我们计算的对象, 我们可以尝试计算弦在早期的特定构型经过演化在后期演变成特定新构型的概率. 实际上弦振幅的基本计算方式就是对世界面上所有

在 $(diff \times Weyl)$ 下不等价且来自给定外态的场构型 (X, h, \dots) 进行路径积分. 我们来一点一点进行说明:

当谈及具体计算, 我们可以首先看一下量子场论中的计算方法. 量子场论中我们会首先给出关联函数 (correlation function):

$$\langle \phi(x_1) \dots \phi(x_n) \rangle \quad (8.1.1)$$

它们经过傅立叶变换后的结果描述了外腿携带任意动量的费曼图 (Feynman diagram). 因此, 这些外腿也被称为离壳的 (off-shell). 为了得到散射振幅, 我们需要让外腿在壳 (on-shell), (并执行 LSZ 约化公式 (LSZ reduction formula) 中给出的其他一些小技巧).

而当我们讨论的问题涉及引力, 就需要对上述讨论进行一定修正. 引力是一种规范理论, 它的规范对称性是微分同胚对称性. 在规范理论中, 只有规范不变的可观测量才有意义. 但关联函数 eq. (8.1.1) 并不是规范不变的, 因为微分同胚作用会把点 x_i 映射到另一点, 于是它的值在微分同胚作用下会发生变化. 这就告诉我们: 在引力规范理论中不存在离壳的局域规范不变可观测量.

还有另一种说法. 根据因果律, 我们知道, 被类空间隔分开的算符在量子场论中应该对易. 但在引力中, 算符之间的间隔是否类空的问题变成了一个动力学问题, 因果结构会因量子效应而波动. 这就提供了我们无法在任何量子引力理论中定义局域规范不变可观测量的另一个依据. 这一事实与所谓温伯格-威滕定理也紧密相关:

8.1.1 温伯格-威滕定理 (Weinberg-Witten theorem)

温伯格-威滕定理是局域场论与量子引力存在根本矛盾的又一有力论证. 该定理表明局域能动张量算符 $T_{\mu\nu}(x)$ 的存在与自旋大于 1 的无质量粒子 (如引力子) 的存在不相容.

以四维为例, 考虑无质量单粒子态 $|\vec{p}, h\rangle$, 动量取为 $p^\mu = (p_0, \vec{p})$, 则螺旋度为 $h = \hat{p} \cdot \vec{L}$. 其中 \hat{p} 为 \vec{p} 方向上的单位矢量. 而 \vec{L} 是角动量矢量, 我们有归一化条件:

$$\langle \vec{p}', h | \vec{p}, h \rangle = \delta^3(\vec{p}' - \vec{p})$$

在态中间插入守恒流, 可以得到:

$$\langle \vec{p}', h | J^\mu(x) | \vec{p}, h \rangle = \exp^{i(p-p') \cdot x} \langle \vec{p}', h | J^\mu(0) | \vec{p}, h \rangle$$

注意到, 这里我们应当保证存在连续的 $\vec{p}' \rightarrow \vec{p}$ 极限. 这其实可以理解为真正的物理态

应当以波包 $|phys\rangle = \int d^3\vec{p} g(\vec{p}) |\vec{p}, h\rangle$ 的形式出现, 而这一物理态的守恒流也应当局域地存在定义, 这便等价于要求上式存在连续的 $\vec{p}' \rightarrow \vec{p}$ 极限. 对守恒流的零分量进行空间积分计算守恒荷, 可以得到:

$$\langle \vec{p}', h | \int d^3\vec{x} J^0(x) | \vec{p}, h \rangle = Q \delta^3(\vec{p}' - \vec{p})$$

其中 Q 为守恒荷. 而从归一化条件, 我们有:

$$\begin{aligned} \langle \vec{p}', h | \int d^3\vec{x} J^0(x) | \vec{p}, h \rangle &= \langle \vec{p}', h | \int d^3\vec{x} \exp^{i(\vec{p}-\vec{p}')\cdot\vec{x}} J^0(0) | \vec{p}, h \rangle \\ &= (2\pi)^3 \delta^3(\vec{p}' - \vec{p}) \langle \vec{p}', h | J^0(0) | \vec{p}, h \rangle \end{aligned}$$

而由于 δ 函数会将 $\vec{p}' = \vec{p}$ 以外的贡献压缩为 0, 因此我们有:

$$\lim_{\vec{p}' \rightarrow \vec{p}} \langle \vec{p}', h | J^0(0) | \vec{p}, h \rangle = \frac{Q}{(2\pi)^3} \quad (8.1. 2)$$

而当 $\vec{p}' \neq \vec{p}$, 我们总可以找到一个参考系使 \vec{p} 和 \vec{p}' 分别朝向 z 轴正反方向. 此时对 $\langle \vec{p}', h | J^\mu(0) | \vec{p}, h \rangle$ 操作绕 z 轴的旋转可以得到:

$$R^\rho{}_\mu(\theta) \langle \vec{p}', h | J^\mu(0) | \vec{p}, h \rangle = \langle \vec{p}', h | U^\dagger(\theta) J^\rho(0) U(\theta) | \vec{p}, h \rangle \quad (8.1. 3)$$

其中 $U(\theta)$ 是旋转算符, 作用于态上, 满足么正性. 而 $R^\rho{}_\mu(\theta)$ 是洛伦兹群矢量表示中的旋转矩阵, 其本征值为 $1, \exp^{i\theta}, \exp^{-i\theta}$. 而 $|\vec{p}, h\rangle$ 是 $U(\theta)$ 的本征矢, 对应的本征值则为:

$$\begin{aligned} U(\theta) |\vec{p}, h\rangle &= \exp^{ih\theta} |\vec{p}, h\rangle \\ U(\theta) |\vec{p}', h\rangle &= \exp^{-ih\theta} |\vec{p}', h\rangle \end{aligned} \quad (8.1. 4)$$

于是:

$$R^\rho{}_\mu(\theta) \langle \vec{p}', h | J^\mu(0) | \vec{p}, h \rangle = \exp^{i2h\theta} \langle \vec{p}', h | J^\rho(0) | \vec{p}, h \rangle \quad (8.1. 5)$$

因此 $h = 0, \pm 1/2$ 或者 $J^\mu(0) = 0$, 而后者意味着守恒流平凡, 即 eq. (8.1. 2) 中的荷为 0. 而我们期望讨论非平凡情况, $Q \neq 0$. 这就表明, 若存在局域的守恒流, 则无质量物理态的螺旋度小于等于 $1/2$.

而若是考虑能动张量, 我们可以自然地从事前情形进行推广. 在态中间插入能动张量算符, 可以得到如下矩阵:

$$\langle \vec{p}', h | T^{\mu\nu}(x) | \vec{p}, h \rangle = \exp^{i(\vec{p}-\vec{p}')\cdot\vec{x}} \langle \vec{p}', h | T^{\mu\nu}(0) | \vec{p}, h \rangle$$

此时将能动张量视为守恒流, 对等号左侧守恒流的零分量进行空间积分计算守恒荷, 可以得到:

$$\langle \vec{p}', h | \int d^3 \vec{x} T^{\mu 0}(x) | \vec{p}, h \rangle = p^\mu \delta^3(\vec{p}' - \vec{p})$$

再从归一化条件, 得到:

$$\lim_{\vec{p}' \rightarrow \vec{p}} \langle \vec{p}', h | T^{\mu 0}(0) | \vec{p}, h \rangle = \frac{p^\mu}{(2\pi)^3} \quad (8.1. 6)$$

从洛伦兹协变性出发可以推广得到 $T^{\mu\nu}$ 的矩阵元:

$$\lim_{\vec{p}' \rightarrow \vec{p}} \langle \vec{p}', h | T^{\mu\nu}(0) | \vec{p}, h \rangle = \frac{p^\mu p^\nu}{(2\pi)^3 p^0} \quad (8.1. 7)$$

其余讨论与守恒流讨论一致, 最终我们会得到:

$$R^\rho{}_\mu R^\sigma{}_\nu(\theta) \langle \vec{p}', h | T^{\mu\nu}(0) | \vec{p}, h \rangle = \exp^{i2h\theta} \langle \vec{p}', h | J^\rho(0) | \vec{p}, h \rangle \quad (8.1. 8)$$

两个旋转矩阵分别带有本征值 $1, \exp^{i\theta}, \exp^{-i\theta}$, 于是 h 的取值范围变为 $h = 0, \pm 1/2, \pm 1$ 于是, 我们得到结论, 无质量自旋为 2 的粒子与局域的能动张量不能同时出现.

现在让我们回到弦理论. 计算弦构型在有限时间内的演化类似于计算 QFT 中的离壳关联函数. 但弦理论是引力理论, 所以这种关联函数可能没有意义. 为此我们退回到 S 矩阵的起点考虑问题.

弦的 S 矩阵

我们在弦理论中计算的对象是 S 矩阵. 它的来源是把关联函数中的点取到无穷大: $x_i \rightarrow \infty$. 区别于不可接受的有限区域内的关联函数, S 矩阵可以接受是因为就像在量子电动力学中一样, 系统的冗余由那些在趋近无穷大时消失的规范变换组成. 换一种说法, 在量子引力中, 微分同胚在趋于边界时也会逐渐消失, 即边界上的点不会波动. 因此我们计算的对象所有外腿都出现在无穷远上, 每条腿都可以对应于自由弦的某种态, 并被赋予一定的靶空间上的动量 p_i^μ . 由此得到的表达式就是弦的 S 矩阵.

利用态与算符的映射关系, 我们知道在无限远处的这些态中, 每一种态都等价于在世界面上插入一个适当的顶点算符. 而为了计算这个 S 矩阵的矩阵元, 我们使用共形变换将无穷远处的每条腿都拉到有限的距离. 最终的结果是闭弦的树图被映射为一个具有球面拓扑结构的世界面, 其上带有一些顶角算符的插入点 (puncture), 用于代表顶角算符的位置. 而这些算符的位置原本是外腿的位置. 开弦及两者的圈图也有对应的推广,

得到如下的各种世界面:

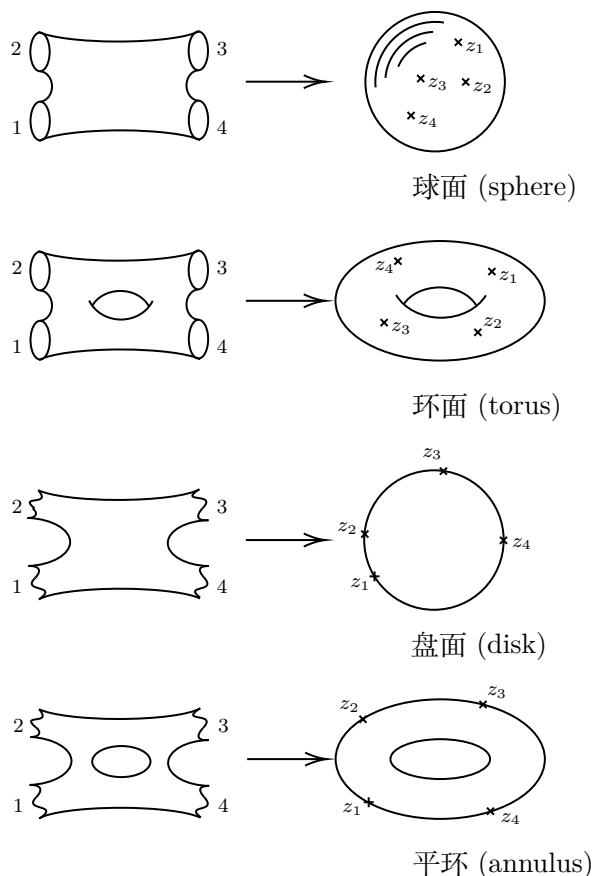


Figure 8.2: 各种世界面举例

而我们在前面几章已经看到, 外尔不变性的约束意味着顶角算符必然是在壳的算符. 从技术上讲, 这也是我们在弦理论中只能计算在壳关联函数的原因. 最后, 在计算世界面上顶角算符的关联函数要对顶角算符在世界面上的坐标进行积分.

8.1.2 对拓扑结构的求和

泊里雅科夫路径积分表明我们对所有度规求和. 但是具有不同拓扑结构的世界面呢? 事实上, 如图 8.1, 我们也应该对这些世界面求和. 正是这个和给出了弦理论的微扰展开. 我们接下来唯一的问题是如何对这些不同的世界面加权. 我们注意到, 弦上有一个我们尚未考虑的非常自然的耦合可以实现这一目的. 我们将泊里雅科夫作用量修正为:

$$S_{\text{string}} = S_P + \lambda \chi \quad (8.1.9)$$

这里 λ 为实数, 而 χ 是所谓的欧拉示性数, 这是一个直接与世界面整体拓扑结构相关的量.

我们发现 λ , 或者更准确地说, e^λ 为弦耦合加权:

$$\sum_{\substack{\text{topologies} \\ \text{metrics}}} e^{-S_{\text{string}}} \sim \sum_{\text{topologies}} e^{-\lambda\chi} \int \mathcal{D}[X] \mathcal{D}[g] e^{-S_P[X,g]} \quad (8.1. 10)$$

在 $e^\lambda \ll 1$ 时, 微扰展开的性质很好, 我们对所有拓扑求和. (这种渐近展开与量子场论中的微扰展开一样). 进行展开的标准程序要定义耦合常数, 对于弦, 耦合常数定义为:

$$g_s = e^\lambda$$

现在我们考虑最一般的具有 n 条外腿的弦振幅:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_n &= \sum_{g=0}^{\infty} \mathcal{M}_{bos}^{g-loop} \\ &\sim \sum_{g=0}^{\infty} C_{\Sigma_g} \int \mathcal{D}[X] \mathcal{D}[g] \int d^2 z_1 \dots d^2 z_n V_1(z_1, \bar{z}_1) \dots V_n(z_n, \bar{z}_n) e^{-S_P[X,g]} \end{aligned} \quad (8.1. 11)$$

其中 C_{Σ_g} 为求和的加权系数, 我们接下来就尝试利用欧拉示性数确定这一加权系数.

欧拉示性数

欧拉示性数的定义是偶数维同调群阶数与奇数维同调群阶数之差, 它与柄 (handle), 洞 (hole) 以及交叉帽 (crosscap) 的依赖关系为:

$$\chi = 2 - 2h - b - c \quad (8.1. 12)$$

其中 h, b, c 分别是柄, 洞以及交叉帽的数量. 在弦理论中, 可定向世界面不存在交叉帽¹, 因此在分析可定向世界面时我们常将 c 取为 0. 而欧拉示性数也常常基于高斯-博内定理 (Gauss-Bonnet theorem) 进行计算²:

$$\chi = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathcal{M}} d^2\sigma \sqrt{g} R + \frac{1}{2\pi} \int_{\partial\mathcal{M}} ds k \quad (8.1. 13)$$

¹不可定向世界面包括莫比乌斯带, 克莱因瓶等等, 与之相对的环境面与平环则是可定向世界面.

²如果 \mathcal{M} 分段连续, 则需要加上修正项 $\frac{1}{2\pi} \sum_i (\pi - \theta_i)$. 其中求和取遍所有不连续点的内角.

其中 R 是世界面的里奇标量, k 是边界的测地曲率. 为定义测地曲率, 我们在世界面上引入两个单位向量: t^α 是边界的切向单位向量, 而 n^α 则是指向边界外侧的法向单位向量, 测地曲率定义为:

$$k = -t^\alpha n_\beta \nabla_\alpha t^\beta$$

我们先前曾提及, 在作用量上加入额外项进行修正时, 修正项不能影响重参数化不变性与外尔不变性. 边界项显然不会影响, 不含边界的部分为:

$$\chi = \frac{1}{4\pi} \int d^2\sigma \sqrt{h} R \quad (8.1. 14)$$

这一项形式上与世界面上的爱因斯坦-希尔伯特作用量类似, 在重参数化和外尔变换下也不变.

在四维时空, 爱因斯坦-希尔伯特作用量使引力具有动力学演化. 但在二维下, 情况就很不一样了. 事实上, 我们已经看到, 度规的所有分量都可以被规范掉, 因此不存在与 $g_{\alpha\beta}$ 相关的传播子自由度. 因此, 在二维中, eq. (8.1. 14) 并不能使引力成为动力学问题: 事实上, 它在经典情况不起任何作用, 但会影响量子修正的部分, 即圈图的权重. 原因在于 χ 是拓扑不变量. 这意味着它实际上不依赖于度规 $g_{\alpha\beta}$, 而只依赖于世界面的拓扑结构³. 这就是高斯-博内定理的内容: 里奇标量 R 在世界面上的积分给出了一个整数 χ , 即世界面的欧拉示性数.

在物理中我们通常不使用柄数, 而使用亏格数来反映闭弦的圈数: 对于无边界的可定向世界面 (即可定向闭弦), 由 eq. (8.1. 12), 我们有:

$$\chi = 2 - 2h = 2(1 - g) \quad (8.1. 15)$$

其中 g 称为世界面的亏格数, 可以理解为闭弦圈的个数. 球面满足 $g = 0$, $\chi = 2$; 环面满足 $g = 1$, $\chi = 0$. 而对于更高的 $g > 1$, 欧拉示性数 χ 取负值. 想当然地, g_s^χ 便应当是 eq. (8.1. 11) 中的加权系数 C_{Σ_g} , 但实际上当粒子参与散射, 即黎曼面上有顶角算符插入点时, eq. (8.1. 11) 中的加权系数会收到插入点个数影响, 变为:

$$g_s^{-2+2g+b+c+n_c+\frac{1}{2}n_o} = g_s^{\chi+n_c+\frac{1}{2}n_o} \quad (8.1. 16)$$

其中 n_c 与 n_o 分别表示闭弦与开弦的插入点个数, 插入点个数的影响其实可以这样理解: 考虑对任意世界面增加一个柄, 这会导致 $g \rightarrow g + 1$, 物理上这相当于是释放又吸收了一个闭弦态, 即增加了两个闭弦态参与相互作用, 这使得 n_c 增加了 2, 于是我们知

³更准确地说, χ 只依赖于度规的全局属性, 而这些全局属性本身又依赖于世界面的拓扑, 即各维同调群.

道, 每增加一个闭弦态, 在加权系数上的影响便相当于增加了 $1/2$ 的亏格数. 对于开弦同理, 增加一条边界等价于增加两个开弦插入点再将其相连. 而由于我们通常考虑的情况是外态不变, 而对世界面拓扑求和, 我们也常常将 $g_s^{n_c + \frac{1}{2}n_o}$ 视为公因子, 而只考虑世界面拓扑结构带来的效应, 因此后文如无强调则只考虑 χ 对加权系数的影响.

在共形映射之后, 树级散射对应于具有球面拓扑结构的世界面: 振幅正比于 $1/g_s^2$. 单圈散射对应于环状世界面, 在前述归一化下 g_s 的阶数为 0 (即, 相对于树级散射, 单圈 g_s^2 的两阶). 最终的结果是, 在图 8.1 中世界面的求和变成了递增亏格的黎曼面的求和, 其中初态和末态插入了顶角算符. 而亏格为 g 的黎曼曲面的权为:

$$(g_s^2)^{g-1}$$

虽然我们看似在理论中引入了一个新的参数 g_s , 并手动添加了耦合项 eq. (8.1. 9), 但我们稍后会看到为什么这个耦合项是必要的组成部分, 并为 g_s 提供解释.

此外, 度规的共形规范: $g_{\alpha\beta} \rightarrow \exp^{2\phi} \eta_{\alpha\beta}$ 对于 $g = 0$, 即树级振幅可以在全局选取. 但对于一般的情况, $g \neq 0$ 时, 上述共形规范只能在局域选取 (世界面上给定点的某个开邻域内), 我们在 8.7 节会详细说明这一点.

最后, 为了正确计算关联函数, 我们应该在计算中引入在上一章中看到的 b, c 鬼场. 然而, 如果我们只计算树级振幅, 那么我们可以忽略鬼场. 原因可以从鬼场的作用量 eq. (6.2. 59) 中看出. 我们看到鬼场只与世界面度规耦合, 而不与其他世界面上的场耦合. 这意味着, 如果我们完全固定了世界面的度规, 那么我们就可以忘掉鬼场了. (实际上, 只要我们确保外尔反常抵消了便无需考虑它们). 然而, 正如前述讨论, 对于更高亏格的世界面, 规范固定并不能完全固定度规. 度规还有遗留的动力学模, 即模态 (moduli), 它将鬼场和物质场耦合在一起. 这类似于场论中的说法, 即我们只需要在圈级问题中考虑鬼场.

8.2 闭弦的树级振幅

现在我们已经掌握了解释如何计算弦散射振幅所需的全部信息. 这一节我们将计算树级闭弦振幅来作为我们的第一个例子. 闭弦树级振幅的示意图如下: 假设我们要计算带有 n 个态的 S 矩阵: 我们将赋予每个态靶空间动量 p_i , 并将运动学变量 (包括极化与动量) 合写为 Φ_i . 每个态都有一个相应的顶角算符 $V_{\Phi_i}(z_i)$. 然后通过计算二维共形场

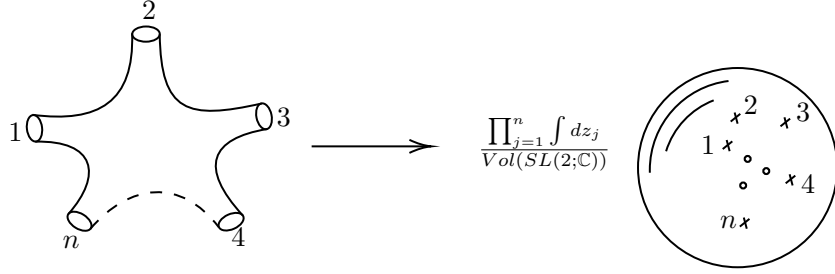


Figure 8.3: 闭弦树级振幅示意图

论中顶角算符的关联函数来计算 S 矩阵的矩阵元:

$$\sum_{\text{topologies}} g_s^{-\chi} \prod_{j=1}^n \frac{\int d^2 z_j}{\text{Vol}} \int \mathcal{D}[X] \mathcal{D}[g] e^{-S_P} \prod_{i=1}^m V_{\Phi_i}(z_i)$$

其中 Vol 对应于我们因为冗余规范对称性 ($\text{diff} \times \text{Weyl}$) 重复计算的部分, 因此要去掉. 树级散射振幅对应于上式中对拓扑求和的第一项, 由带有二维球面拓扑的世界面上的关联函数给出:

$$\mathcal{M}_{cl-bos}^{tree}(\{\Phi_i\}, \alpha') = \frac{1}{g_s^2} \prod_{j=1}^n \frac{\int d^2 z_j}{\text{Vol}} \int \mathcal{D}[X] \mathcal{D}[g] e^{-S_P} \prod_{i=1}^m V_{\Phi_i}(z_i)$$

其中 $V_{\Phi_i}(z_i)$ 是与态对应的顶角算符. \mathcal{M} 的上标 $tree$ 表示树级振幅, 下标 $cl-bos$ 表示闭波色弦 (closed bosonic string)

现在因为我们考虑树级振幅, 在球面上我们不存在度规不能全局平直的麻烦问题, 因此对所有度规进行积分便可以利用微分同胚和外尔变换的规范对称性来解决. 球面上的任何度规都与平面上的平直度规共形等价. 例如, 半径为 R 的球面上的圆形度规可以利用投影映射写为:

$$ds^2 = \frac{4R^2}{(1 + |z|^2)^2} dz d\bar{z}$$

8.2.1 冗余规范对称性: $SL(2; \mathbb{C})$

我们讨论的物理体系有一个冗余的规范对称性, 如同我们在第 5 章中看到的, 由可以通过外尔变换来消除的微分同胚产生, 被共形群描述, 而这种共形变换有无数种.

然而, 实际的冗余的规范对称性比我们想象的要少. 在第 5 章中, 我们只研究了由维拉索罗算符 L_n , $n \in \mathbb{Z}$ 生成的无穷小共形变换. 我们并没有研究这些变换在全空间中是

否定义明确和可逆. 现在让我们来看看这个问题. 回想一下, 与 L_n 相关的坐标变化是由 eq. (5.6. 71) 的矢量场生成的:

$$l_n = z^{n+1} \partial_z$$

从而产生移动 $\delta z = \epsilon z^{n+1}$. 这只有在 $n \geq -1$ 时才在 $z = 0$ 非奇异. 而如果我们只考虑光滑映射, 就能立刻摆脱一半的变换. 但由于我们最终关注的是球面, 所以我們也需要关注 $z = \infty$ 处的点, 即球面的北极. 我们改用如下坐标:

$$u = \frac{1}{z}$$

u 坐标变换的生成元为:

$$l_n = z^{n+1} \partial_z = \frac{1}{u^{n+1}} \frac{\partial u}{\partial z} \partial_u = -u^{1-n} \partial_u$$

仅在 $n \leq 1$ 时, 在 $u = 0$ 非奇异.

结合这两个结果, 共形群中在整个黎曼球上非奇异的生成元只有 l_{-1} 、 l_0 和 l_1 , 它们的无限小形式为:

$$\begin{aligned} l_{-1}: z &\rightarrow z + \epsilon \\ l_0: z &\rightarrow (1 + \epsilon)z \\ l_1: z &\rightarrow (1 + \epsilon z)z \end{aligned}$$

而有限形式为:

$$\begin{aligned} l_{-1}: z &\rightarrow z + \alpha \\ l_0: z &\rightarrow \lambda z \\ l_1: z &\rightarrow \frac{z}{1 - \beta z} \end{aligned}$$

结合起来可以得到变换的一般形式:

$$z \rightarrow \frac{az + b}{cz + d} \quad (8.2. 17)$$

有 $a, b, c, d \in \mathbb{C}$. 我们这里有四个复数参数, 但只有三个变换, 这是因为有一个参数是假的, 因为同时按相同方式缩放参数不会改变 z . 利用这样的放缩, 我们可以始终认为参数满足:

$$ad - bc = 1$$

满足上述要求的变换 eq. (8.2. 17) 带有群结构 $SL(2; \mathbb{C})$, 这是行列式为 1 的 2×2 复矩阵群. 事实上, 由于对所有参数反转符号后变换本身不变, 因此全局共形变换群实际上是 $SL(2; \mathbb{C})/\mathbb{Z}_2$, 有时也被写成 $PSL(2; \mathbb{C})$ (这个 \mathbb{Z}_2 的微妙之处在下文中对我们并不重要).

球面上的冗余全局变换被称为共形基林向量 (conformal Killing vector), 简称 CKV. 而群 $SL(2; \mathbb{C})/\mathbb{Z}_2$ 则称为共形基林群 (conformal Killing group), 简称 CKG. 这个群允许我们在世界面上任意取三个顶角算符的插入点, 并将它们移动到我们所选择的三个固定的坐标. 我们很快就会利用这一事实来进行规范固定, 但目前先保留 $SL(2; \mathbb{C})$ 对称性.

8.2.2 维拉索罗-夏皮罗振幅 (Virasoro-Shapiro Amplitude)

现在我们将计算闭弦快子 (tachyon) 的 S 矩阵. 这是一个相对平凡的例子. 毕竟, 我们最终感兴趣的是不含快子态的超弦振幅. 但事实证明, 快子的散射振幅比其他振幅都要简单得多, 主要是因为我们不用担心态上的大量额外指标. 此外, 我们从快子散射中学到的经验也适用于其他态的散射. 闭弦快子振幅有一个固定的称谓: 维拉索罗-夏皮罗振幅.

n 点快子散射振幅由平直时空关联函数给出:

$$\mathcal{M}_{cl-bos}^{tree}(\{T_i\}, \alpha') = \frac{1}{g_s^2} \int \frac{d^2 z_1 d^2 z_2 \dots d^2 z_n}{\text{Vol}(SL(2; \mathbb{C}))} \int \mathcal{D}[X] e^{-S_P} \prod_{i=1}^n V_{T_i}(z_i, p_i)$$

也可以将路径积分写为关联函数形式:

$$\mathcal{M}_{cl-bos}^{tree}(\{T_i\}, \alpha') = \frac{g_s^{-2}}{\text{Vol}(SL(2; \mathbb{C}))} \int \prod_{i=1}^n d^2 z_i \langle V_{T_1}(z_1, p_1) \dots V_{T_n}(z_n, p_n) \rangle$$

其中快子顶角算符为:

$$V_{T_i}(z_i, p_i) = e^{ip_i \cdot X(z_i)} \quad (8.2. 18)$$

期望值 $\langle \dots \rangle$ 是用规范固定的泊里雅科夫作用量计算的. 但是, 规范固定的泊里雅科夫作用量只是一个自由理论, 于是关联函数的计算非常简单, 这正是高斯积分的连续化推广:

$$\langle V_{T_1}(z_1, p_1) \dots V_{T_n}(z_n, p_n) \rangle = \int \mathcal{D}X \exp \left(-\frac{1}{2\pi\alpha'} \int d^2 z \partial X \cdot \bar{\partial} X \right) \exp \left(i \sum_{i=1}^n p_i \cdot X(z_i, \bar{z}_i) \right)$$

这里需要注意, 泊里雅科夫作用量前面的归一化现在是 $1/2\pi\alpha'$, 而不是 $1/4\pi\alpha'$. 因为我们这里使用的是复坐标, 规定的归一化为: $\partial_\alpha\partial^\alpha = 4\partial\bar{\partial}$ 和 $d^2z = 2d^2\sigma$. 代入高斯积分连续化推广的结果, 我们可以得到:

$$\mathcal{M}_{cl-bos}^{tree}(\{T_i\}, \alpha') \sim \frac{1}{\text{Vol}(SL(2; \mathbb{C}))} \delta^{26}(\sum_i p_i) \int \prod_{i=1}^n d^2z_i \exp \left(\alpha' \sum_{j<l} p_j \cdot p_l \ln |z_j - z_l| \right)$$

其中的 δ 如上一章讨论, 来自于高斯积分指数上不可逆部分的贡献. 上式可以化简为:

$$\mathcal{M}_{cl-bos}^{tree}(\{T_i\}, \alpha') \sim \frac{1}{\text{Vol}(SL(2; \mathbb{C}))} \delta^{26}(\sum_i p_i) \int \prod_{i=1}^n d^2z_i \prod_{j<l} |z_j - z_l|^{\alpha' p_j \cdot p_l} \quad (8.2. 19)$$

接下来我们将 n 取为 3 和 4, 给出快子振幅的两个例子

三快子振幅

我们现在计算一个具体的例子: 快子的三点振幅: 利用动量守恒 $p_1 + p_2 + p_3 = 0$ 与质壳条件 $p_j^2 = -m_j^2 = \frac{4}{\alpha'}$, 我们可以得到 K-N 因子的指数为:

$$\alpha' p_1 \cdot p_2 = \frac{\alpha'}{2} [(p_1 + p_2)^2 - p_1^2 - p_2^2] = \frac{\alpha'}{2} (m_1^2 + m_2^2 - m_3^2) = -2$$

因此, 被积函数中快子顶角算符 $V_{T_a} \sim: e^{ip_a \cdot X(z_a)} :$ 的关联函数为:

$$\left\langle \prod_{a=1}^3 : e^{ip_a \cdot X(z_a)} : \right\rangle = \prod_{1 \leq i < j}^3 |z_{ij}|^{\alpha' p_i \cdot p_j} = \frac{1}{|z_{12} z_{13} z_{23}|^2} \quad (8.2. 20)$$

再带上固定 $SL_2(\mathbb{C})$ 引入的 c 鬼场关联函数 $\langle c\bar{c}(z_1)c\bar{c}(z_2)c\bar{c}(z_3) \rangle = |z_{12}z_{13}z_{23}|^2$, 经过化简, 我们最终抵消了所有关于插入点坐标的依赖, 并得到:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{cl-bos}^{tree}(\{T_1, T_2, T_3\}; \alpha') &\sim \int \frac{d^2z_1 d^2z_2 d^2z_3}{\text{Vol}(SL(2; \mathbb{C}))} \left\langle \prod_{a=1}^3 V_{T_a}(z_a) \right\rangle \\ &\sim \left\langle \prod_{a=1}^3 c\bar{c}(z_a) : e^{ip_a \cdot X(z_a)} : \right\rangle \Big|_{(z_1, z_2, z_3) \rightarrow (0, 1, \infty)} \\ &= 1 \end{aligned} \quad (8.2. 21)$$

这与我们先前说的三个插入点可以被固定到任意坐标相吻合⁴, 由于这一任意性, 我们最终的结果一定是不含任何插入点坐标的形式.

四快子振幅

现在我们尝试推广到四点.

四点散射振幅通常用曼德尔施塔姆变量 (Mandelstam variable) 表示. 区别于量子场论, 这里我们定义无量纲曼德尔施塔姆变量:

$$s = \alpha'(p_1 + p_2)^2, \quad t = \alpha'(p_1 + p_4)^2, \quad u = \alpha'(p_1 + p_3)^2$$

满足动量守恒 $\sum_{j=1}^4 p_j = 0$, 于是对于快子, 我们有:

$$s + t + u = \alpha' \sum_i p_i^2 = -\alpha' \sum_i M_i^2 = 16$$

其中, 我们在最后一步代入了快子质量 eq. (3.4. 45). 此外, 我们注意到还有一个 $\text{Vol}(SL(2; \mathbb{C}))$ 因子没有处理, 即我们仍然有一个冗余的规范对称性没有固定, 现在我们来解决这个问题. 正如我们之前提到的, 它提供的自由度让我们可以把平面上的任意三点移动到其他任意三点, 不失一般性, 我们取:

$$z_1 = 0, \quad z_3 = 1, \quad z_4 = \infty$$

那么关于这三个坐标在复平面上的积分退化, 而积分本身有共形权, 为了保持共形权不变, 我们将 $z_i \rightarrow a$ 坐标的顶角算符的复积分改写为非积分顶角算符 (unintegrated vertex operator):

$$\int dz_i V_{\Phi_i}(z_i, p_i) \rightarrow c(a) \bar{c}(a) V_{\Phi_i}(a, p_i) \quad (8.2. 22)$$

其中, 对 $i = 1, n-1, n$ 分别有 $a = 0, 1, \infty$. 于是振幅中会出现三个非积分顶角算符, 他们引入的 c 鬼场的关联函数 $\langle c(z_i) c(z_j) c(z_k) \rangle = z_{ij} z_{ik} z_{jk}$ 可以被视作将复坐标固定这一坐标变换的雅可比行列式, 我们前面要求这是一个全局定义的共形变换, 即有六个生成元, c 与 \bar{c} 的关联函数各对应三个, 我们以 c 为例, 这一共形变换的无穷小形式为 $\delta z_a = -\eta_{-1} - \eta_0 z_a - \eta_1 z_a^2$, 由此得到这一变换的雅可比行列式:

$$\det \left(\frac{\partial(\delta z_i, \delta z_j, \delta z_k)}{\partial(\eta_{-1}, \eta_0, \eta_{+1})} \right) = z_{ij} z_{ik} z_{jk} \quad (8.2. 23)$$

⁴我们这里只出现了三个插入点, 他们可以被固定至 \mathbb{C} 中的任意三个坐标.

代回 n 点快子振幅 eq. (8.2. 19), 取 $n = 4$, 我们有:

$$\langle c\bar{c}(z_1)c\bar{c}(z_3)c\bar{c}(z_4) \rangle = |z_{13}z_{14}z_{34}|^2 \quad (8.2. 24)$$

而四点的 K-N 因子为:

$$\prod_{1 \leq i < j}^4 |z_{ij}|^{\alpha' p_i \cdot p_j} = \frac{|z_{12}z_{34}|^{s/2} |z_{14}z_{23}|^{t/2} |z_{13}z_{24}|^{u/2}}{|z_{12}z_{13}z_{14}z_{23}z_{24}z_{34}|^4} \quad (8.2. 25)$$

固定复坐标 $(z_1, z_3, z_4) \rightarrow (0, 1, \infty)$ 后, 我们首先要检查的就是振幅是否会因为 z_4 的无穷出现发散问题. 所有与 z_4 相关的因子只有两个: K-N 因子与 c 鬼场关联函数, $(z_1, z_3, z_4) \rightarrow (0, 1, \infty)$ 时, 我们有:

$$\frac{|z_{12}z_{34}|^{s/2} |z_{14}z_{23}|^{t/2} |z_{13}z_{24}|^{u/2}}{|z_{12}z_{13}z_{14}z_{23}z_{24}z_{34}|^4} \rightarrow \frac{|z_{*4}^{(s+t+u)/2}|}{|z_{*4}|^{12}} = \frac{1}{|z_{*4}|^4} \quad (8.2. 26)$$

$$|z_{13}z_{14}z_{34}|^2 \rightarrow |z_{*4}|^4$$

剩下的部分就是单变量积分:

$$\mathcal{M}_{cl-bos}^{tree}(\{T_1, T_2, T_3, T_4\}, \alpha') \sim \int d^2 z_2 |z_2|^{s/2-4} |1 - z_2|^{t/2-4} \quad (8.2. 27)$$

这个积分的结果是伽马函数, 参见附录 B, 具体来说: 对于 $a + b + c = 1$, 我们有:

$$\int d^2 z |z|^{2a-2} |1 - z|^{2b-2} = \frac{2\pi\Gamma(a)\Gamma(b)\Gamma(c)}{\Gamma(1-a)\Gamma(1-b)\Gamma(1-c)} \quad (8.2. 28)$$

于是四快子振幅 eq. (8.2. 27) 可以写为:

$$\mathcal{M}_{cl-bos}^{tree}(\{T_1, T_2, T_3, T_4\}, \alpha') \sim \frac{2\pi\Gamma(\frac{s}{4}-1)\Gamma(\frac{t}{4}-1)\Gamma(\frac{u}{4}-1)}{\Gamma(2-\frac{s}{4})\Gamma(2-\frac{t}{4})\Gamma(2-\frac{u}{4})} \quad (8.2. 29)$$

这就是闭玻色弦的四快子振幅.

历史上, 维拉索罗-夏皮罗振幅与弦理论的第一个等式关系密切, 而它也是弦理论早期发现的方程之一 (弦理论中的第一个等式实际上是韦内齐亚诺振幅 (Veneziano amplitude), 它是描述开弦快子的振幅, 我们将在 8.3.1 节中得到). 早在人们知道这些振幅与弦有关之前, 这些振幅就已经被发现了. 它们表现出了各种有趣而惊人的性质. 经过几年的研究, 人们才意识到它们实际上描述的是弦的散射. 现在, 我们将开始说明维拉索罗-夏皮罗振幅的一些特性.

那么, 散射振幅 eq. (8.2. 29) 背后隐含着什么物理规律? 显然, 它关于 s, t 和 u 对称. 这是非常好的性质, 我们稍后再讨论这个问题. 现在, 我们先从固定 t 开始, 观察在我们改变 s 时振幅的特性.

首先要注意的是, $\mathcal{M}_{cl-bos}^{tree}(\{T_1, T_2, T_3, T_4\}, \alpha')$ 有很多极点. 它们来自分子中的 $\Gamma(\frac{s}{4} - 1)$ 因子. 第一个极点出现在:

$$\frac{s}{4} - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad s = 4$$

这意味着, 当快子质量的平方接近 $-4/\alpha'$ 时, 振幅的形式是量子场论中我们熟悉的三顶角的散射振幅: $\frac{1}{(p_1+p_2)^2+M^2}$. 其中 M 是传播子的质量, 在这里就是快子的质量.

振幅的其他极点出现在 $s = 4(1 - n)$, 其中 $n \in \mathbb{Z}^+$. 这正是闭弦激发态态的质量谱. 我们便了解到, 树级弦振幅是无数树级场论振幅的和, 而其中传播子对应于自由弦的所有不同态.

而振幅中还隐藏着更多关于态的能谱的信息. 我们可以观察 $n = 0, 1, \dots$ 处 $s = 4(1 - n)$ 极点的留数. 这些留数是 t 的相当复杂的函数, 但每个极点出现的动量的最高幂是:

$$\mathcal{M}_{cl-bos}^{tree} \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n}}{s - M_n^2} \quad (8.2. 30)$$

动量的幂次包含 n 能级的粒子的最高自旋态的信息. 考虑一个与自旋 J 粒子相对应的场. 它有多洛伦兹指标: $\Phi_{\mu_1 \dots \mu_J}$. 在三顶角相互作用中, 这些指标都必须与导数缩并. 因此, 我们在每个顶角都有 J 个导数, 在费曼图的分子中贡献了 $2J$ 次的动量. 与上述弦散射振幅相对照, 便能得到: 弦在 n 能级上粒子的自旋最高为 $J = 2n$. 这的确是我们第 3 章中从弦的量子化中看到的结果.

最后, 振幅 eq. (8.2. 29) 有一个与场论中的振幅截然不同的性质. 上述讨论中, 我们通过固定 t 并对 s 展开来进行讨论. 但我们完全可以反其道而行之: 固定 s , 观察 t 中的极点. 现在弦振幅可以解释为无数个 t 道的散射振幅求和.

我们知道, 在场论中我们通常会把 s 道和 t 道的散射振幅相加. 弦理论则不然, 对无数个 s 道振幅的求和等价于无数个 t 道振幅的求和. 对于弦来说, 它们是重复的. 因此我们不会对其重复求和 (类似的说法也适用于 u 道). 同一个振幅既可以写成 s 道极点之和, 又可以写成 t 道极点之和, 这一事实有时被称为 "对偶性". 在人们还不知道弦理论是弦的理论时, 这个问题就已经由振幅的这种对偶性得名, 被称为对偶共振模型 (dual resonance model).

两快子和单引力子的振幅

当我们利用场论方法尝试直接从爱因斯坦希尔伯特作用量给出引力振幅时, 我们会发现, 费曼图中的三顶角与四顶角都会使得四引力子树级振幅呈现 E^2 的行为, 这也就导致 $E \rightarrow \infty$ 极限下四引力子树级振幅会出现平方形式的发散问题. 我们后面会看到, 弦理论可以一定程度上解决这一问题. 因此, 研究弦理论中包含引力子的散射振幅至关重要. 本节我们计算两快子和单引力子的三点闭弦振幅, 而三点纯引力子振幅我们会在 8.4.1 节用所谓 KLT 关系构造. 此外, 从 m 粒子散射建立爱因斯坦希尔伯特作用量并不是研究广义相对论的最佳方法. 相反, 我们将在第 9 章以更好的方式讨论爱因斯坦希尔伯特作用量.

接下来我们考虑两个质量为 $m_2^2 = m_3^2 = -\frac{4}{\alpha'}$ 的快子与引力子的散射过程, 引力子无质量, 满足 $p_1^2 = -m_1^2 = 0$. 引力子的顶角算符为:

$$V_{\zeta_1}(z_1) \sim \zeta_1^{\mu\nu} : i\partial_z X_\mu i\partial_{\bar{z}} X_\nu(z_1) e^{ip_1 \cdot X(z_1)} : \quad (8.2.31)$$

再固定 $SL_2(\mathbb{C})$:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}^{(3)}(\{\zeta_1, T_2, T_3\}; \alpha') &\sim \zeta_1^{\mu\nu} \left\langle c\bar{c}(z_1) : i\partial_z X_\mu i\partial_{\bar{z}} X_\nu(z_1) e^{ip_1 \cdot X(z_1)} : \prod_{a=2}^3 c\bar{c}(z_a) : e^{ip_a \cdot X(z_a)} : \right\rangle \Big|_{(z_1, z_2, z_3) \rightarrow (0, 1, \infty)} \\ &= |z_{12} z_{13} z_{23}|^2 \zeta_1^{\mu\nu} \left\langle : i\partial_z X_\mu i\partial_{\bar{z}} X_\nu(z_1) e^{ip_1 \cdot X(z_1)} : \prod_{a=2}^3 : e^{ip_a \cdot X(z_a)} : \right\rangle \Big|_{(z_1, z_2, z_3) \rightarrow (0, 1, \infty)} \end{aligned}$$

利用 $2p_{i \cdot j} = (p_i + p_j)^2 - p_i^2 - p_j^2$ 以及三个外腿分别的质壳条件, 我们可以得到 K-N 因子: $\prod_{1 \leq i < j}^3 |z_{ij}|^{\alpha' p_i \cdot p_j} = |z_{23}|^{-4}$. 注意到, 相对于快子振幅, 我们这里出现额外的 $i\partial_z X_\mu i\partial_{\bar{z}} X_\nu(z_1)$, 它们的贡献一般有两种方法得到, 第一种是展开指数, 将其写为 X 的幂函数求和的形式, 再令 ∂X 与 X 进行 OPE, 得到:

$$\partial X^\mu(z) e^{ip \cdot X(w)} = \partial X^\mu \left(1 + \sum_{n=1} \frac{(ip \cdot X)^n}{n!} \right) = \frac{p^\mu}{z-w} e^{ip \cdot X} \quad (8.2.32)$$

第二种是推广我们先前利用沃德恒等式从平面波关联函数得到 K-N 因子的计算, 考虑如下生成函数:

$$\mathcal{G}_n(p_j, \xi_j, z_j) := \left\langle \prod_{j=1}^n : e^{ip_j \cdot X(z_j) + i\xi_j \cdot \partial X(z_j)} : \right\rangle \quad (8.2.33)$$

与平面波关联函数计算类似, 利用高斯积分便可得到含导数 $i\partial_z X_\mu i\partial_{\bar{z}} X_\nu(z_1)$ 的关联函数, 值得注意的是, 这里的源 J 也被推广, 应写为 $J^\mu(z) \sum_{j=1}^n [p_j^\mu \delta^2(z - z_j) - \xi_j^\mu \partial_z \delta^2(z -$

$z_j]$. 其中关于 δ 的求导利用分部积分处理即可. 这里利用这一例子, 我们再介绍一个闭弦振幅计算过程中的一个常用技巧: 我们可以先忽略 $i\partial_{\bar{z}}X_\nu$ 部分, 得到:

$$\begin{aligned}\zeta_1^{\mu\nu} \left\langle : i\partial_z X_\mu(z_1) e^{ip_1 \cdot X(z_1)} : \prod_{a=2}^3 : e^{ip_a \cdot X(z_a)} : \right\rangle &= \frac{\alpha'}{2} \left(\frac{p_\mu^2}{z_{12}} + \frac{p_\mu^3}{z_{13}} \right) \zeta_1^{\mu\nu} |z_{23}|^{-4} \\ &= \frac{\alpha'}{2} \frac{z_{23}}{z_{12}z_{13}} p_\mu^2 \zeta_1^{\mu\nu} |z_{23}|^{-4}\end{aligned}$$

这里动量的上标是外腿指标, 我们在第三步使用了动量守恒 $p_1 + p_2 + p_3 = 0$ 及横场极化条件 $p_\mu^1 \zeta_1^{\mu\nu}$. 在得到来自 $i\partial_z X_\mu$ 的贡献后, 利用对称性, 交换 $(\mu \leftrightarrow \nu)$ 与 $z_j \leftrightarrow \bar{z}_j$ 便可以得到 $i\partial_{\bar{z}}X_\nu$ 的贡献. 于是两快子与一引力子的闭弦振幅为:

$$\begin{aligned}\mathcal{M}^{(3)}(\{\zeta_1, T_2, T_3\}; \alpha') &\sim \left(\frac{\alpha'}{2} \right)^2 |z_{12}z_{13}z_{23}|^2 \frac{z_{23}}{z_{12}z_{13}} p_\mu^2 \zeta_1^{\mu\nu} \frac{\bar{z}_{23}}{\bar{z}_{12}\bar{z}_{13}} p_\nu^2 |z_{23}|^{-4} \Big|_{(z_1, z_2, z_3) \rightarrow (0, 1, \infty)} \\ &= \left(\frac{\alpha'}{2} \right)^2 p_\mu^2 \zeta_1^{\mu\nu} p_\nu^2\end{aligned}\tag{8.2. 34}$$

这是最简单的含引力闭弦振幅.

8.3 开弦的树级振幅

到目前为止, 我们讨论的都是闭弦. 开弦的讨论与闭弦非常类似. 我们将再次计算 S 矩阵元. 区别是共形对称现在将树级散射映射到盘面, 并在圆盘边界上插入顶角算符.

对于有 b 个边界亏格为 g 的可定向世界面, 由 eq. (8.1. 12), 欧拉示性数为

$$\chi = 2 - 2g - b$$

相应地, 对于开弦, 我们添加到泊里雅科夫作用量中的弦耦合常数需要添加一个高斯-博内定理 eq. (8.1. 13) 中的边界项.

在广义相对论中, 有边界的流形也需要形如 eq. (8.1. 13) 的边界项: 即吉本斯-霍金-约克项 (Gibbons-Hawking-York terms).

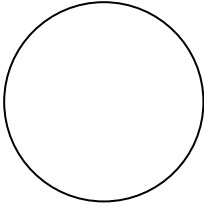
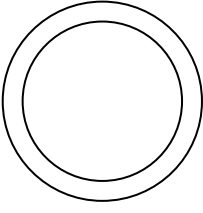
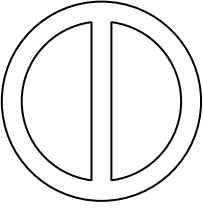
$\chi = 1$	$\chi = 0$	$\chi = -1$
$g = 0$	$g = 0$	$g = 0$
$b = 1$	$b = 2$	$b = 3$
		

Figure 8.4: 开弦黎曼面

一些例子如图 8.4 所示. 与闭弦添加柄对应, 开弦散射的展开则是在世界面上添加整条的边界. 盘面的权为 $1/g_s$, 而平环的权则为 g_s 的 0 阶, 以此类推. 在计算闭弦散射振幅时的关键步骤之一是考虑共形基灵群 (conformal Killing group) 的影响, 它被定义为在球面上有全局定义的冗余规范对称. 而对于开弦, 我们同样有一个类似的冗余规范对称性. 不失一般性, 考虑上半平面. 边界是 $\text{Im}z = 0$. 共形基灵群由如下变换组成:

$$z \rightarrow \frac{az + b}{cz + d}$$

同样的, 我们要求 $ad - bc = 1$. 但这次还有一个条件: 边界 $\text{Im}z = 0$ 必须映射到边界自身. 这就要求 $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. 由此得到的共形基灵群为 $SL(2; \mathbb{R})/\mathbb{Z}_2$. 现在, 由于顶角算符的插入点在边界上, 因此它们有固定的排序, 如图 8.5 所示. 开弦顶角算符在盘面边界上的顺序会导致所谓的循环排序 (cyclic ordering), 例如这里的 2 腿与 1, 3 腿相邻, 而不与 4, 5, ..., n 腿相邻. 循环排序的选取对于开弦振幅与詹-佩顿系数 T_a (即非阿贝尔规范自由度) 的关系也至关重要: 从图 8.5 的左侧可以看到, 两个相邻开弦态的插入点由盘面边界段连接, 这相当于缩并了各自的规范群生成元 $(T^{a_j})_{n_j}^{m_j}$ 的 (反) 基本表示指标 m_j 与 n_j . 在这里的循环排序中, 来自边界段的缩并最终得到规范群生成元的迹 $\text{Tr}(T^{a_1} T^{a_2} \dots T^{a_n})$, 我们需要将其与图 8.5 右侧 $z_j \in \mathbb{R}$ 的积分区域相关联.

对于 n 个开弦态, 我们一共可以找到 $(n-1)!$ 个在循环下不等价的排序. 我们只需固定 n 的位置⁵, 那么其余 $n-1$ 的置换 $\rho \in S_{n-1}$ 两两不等价, 因此共有 $(n-1)!$ 个循环不等价排序. 路径积分中我们要对所有共形不等价的构型求和, 因此在计算散射振幅时,

⁵我们总可以这样做, 因为循环不等价仅取决于相对位置, 我们总可以在 n 个点中任取一个固定后依次写出其他所有点.

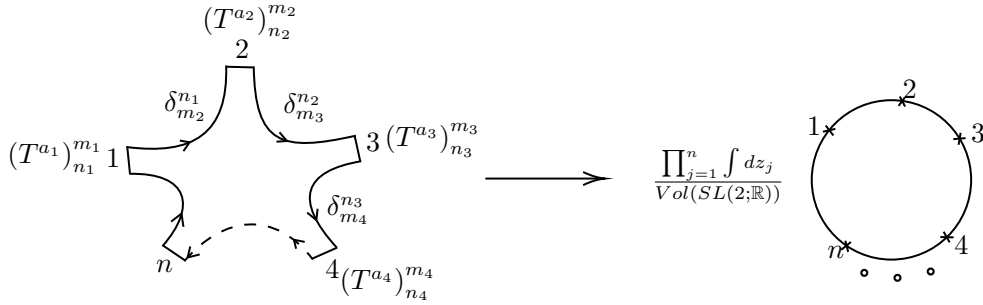


Figure 8.5: 开弦树级振幅示意图

我们必须对所有排序求和. 利用 T^{a_j} 的迹表示循环排序, 我们有所谓的色分解 (color decomposition):

$$\mathcal{M}_{op-bos}^{tree}(\{\varphi_i, a_i\}; \alpha') = \sum_{\rho \in S_{n-1}} \text{Tr}(T^{a_{\rho(1)}} T^{a_{\rho(2)}} \dots T^{a_{\rho(n-1)}} T^{a_n}) \times \mathcal{A}_{bos}^{tree}(\varphi_{\rho(1)}, \varphi_{\rho(2)}, \dots, \varphi_{\rho(n-1)}, \varphi_n; \alpha') \quad (8.3. 35)$$

与闭弦类似, 我们仍然将所有的运动学自由度信息 (例如极化与动量, 但要注意不含色指标.) 包含在 φ_i 中. 与前述讨论类似, 不失一般性, 我们这里将每一个循环不等价的迹中的 n 固定在最后. 而整个的开弦树级振幅 $\mathcal{M}_{op-bos}^{tree}$ 则与伴随表示指标 a_j 和运动学自由度 φ_j 均有关. 于是, 色排序振幅 \mathcal{A}_{bos}^{tree} 只是循环排序的 φ_j 的函数. 此外, 詹佩顿系数与顶角算符中谐振模在世界面的宇称变换下, 即 $\sigma^1 \rightarrow -\sigma^1$ 变换下本征值为 ± 1 (正负号的选取与顶角算符能级有关, 无质量态顶角算符谐振模的本征值是 -1), 因此有:

$$\mathcal{A}_{bos}^{tree}(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{n-1}, \varphi_n) = (-1)^n \mathcal{A}_{bos}^{tree}(\varphi_n, \varphi_{n-1}, \dots, \varphi_2, \varphi_1) \quad (8.3. 36)$$

上式说明参与散射的粒子顺序整个颠倒前后的振幅线性相关, 这个关系称为色排序振幅的反转对称性 (reflection). 即 $(n-1)!$ 个循环不等价排序中不等价排序的个数被减少到了 $\frac{(n-1)!}{2}$. 那么, 这是不是意味着我们总需要计算 $\frac{(n-1)!}{2}$ 个色排序振幅来得到整个开弦振幅呢? 答案是不需要. 我们在 8.4.2 节会证明, 来自同一个开弦振幅的不等价色排序振幅之间也有正比关系, 最终我们会发现 n 点色排序振幅中独立的个数是 $(n-3)!$.

每一个排序都对应于一个 z_j 的不同积分区域. 利用共形映射将开弦世界面映射为上半复平面后, 开弦的边界为实轴 \mathbb{R} , 以图 8.5 中的排序为例, 它对应的积分区域为:

$$\mathcal{A}_{bos}^{tree}(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n) \leftrightarrow -\infty < z_1 < z_2 < \dots < z_n < \infty \quad (8.3. 37)$$

最后, 冗余规范对称性 $SL(2; \mathbb{R})$ 允许我们固定三个插入点. 与闭弦类似, 我们依然固定 $(z_1, z_{n-1}, z_n) \rightarrow (0, 1, \infty)$, 但目前先形式上保留 $SL(2; \mathbb{R})$, 在具体计算时再进行固定. 于是, 开弦的树级色排序振幅为:

$$\mathcal{A}_{bos}^{tree}(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n; \alpha') \sim \int_{-\infty < z_1 < z_2 < \dots < z_n < \infty} \frac{dz_1 dz_2 \dots dz_n}{Vol(SL(2; \mathbb{R}))} \left\langle \prod_{a=1}^n V_{\varphi_a}^{op}(z_a) \right\rangle \quad (8.3.38)$$

接下来就是具体的计算, X_μ^{op} 与 X_μ 的区别就是 α' 中的放缩因子 2, 我们之后的计算中为简化符号都不再使用 X_μ^{op} .

8.3.1 韦内齐亚诺振幅 (Veneziano amplitude)

韦内齐亚诺振幅是弦理论的第一个式子, 与闭弦的维拉索罗-夏皮罗振幅类似, 它们都是描述快子散射的振幅, 不同的是韦内齐亚诺振幅是开弦快子振幅. 快子的顶角算符为:

$$V_{T_i}(z_i, p_i) = e^{ip_i \cdot X(z_i)}$$

在振幅中要对顶角算符进行积分 $\int dz$ 现在积分沿开弦边界, 而开弦快子满足在壳条件: $p^2 = -m^2 = 1/\alpha'$.

通过与闭弦相同的步骤, 我们发现振幅由以下公式给出

$$\mathcal{A}_{bos}^{tree}(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n; \alpha') \sim \int_{-\infty < z_1 < z_2 < \dots < z_n < \infty} \frac{dz_1 dz_2 \dots dz_n}{Vol(SL(2; \mathbb{R}))} \prod_{j < i} |z_i - z_j|^{2\alpha' p_i \cdot p_j} \quad (8.3.39)$$

注意到, K-N 因子的指数中有一个系数 2, 与 eq. (8.2.19) 的闭弦表达式不同. 这是因为带边界世界面上的传播子 eq. (5.8.91) 由于像荷而多了一个系数 2. 由于三点平凡, 可以直接由闭弦推广. 接下来我们计算四快子振幅.

四快子振幅

我们仍然用曼德尔施塔姆变量 s, t, u 表示四点振幅.

现在我们利用 $SL(2; \mathbb{R})$ 的冗余规范对称性来固定边界上的三个插入点. 在取定排序后, 令 $z_1 = 0$, $z_3 = 1$ 和 $z_4 \rightarrow \infty$. 由于算符排序的限制, 插入点 z_2 必须位于区间 $[0, 1]$ 中. 于是有积分:

$$\mathcal{A}_{bos}^{tree}(T_1, T_2, T_3, T_4; \alpha') \sim \int_0^1 dz_2 |z_2|^{2\alpha' p_1 \cdot p_2} |1 - z_2|^{2\alpha' p_2 \cdot p_3}$$

这个积分, 如附录 B 所示, 就是欧拉 β 函数.

$$B(a, b) = \int_0^1 dx x^{a-1} (1-x)^{b-1} = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$$

因此, 色排序开弦快子振幅为:

$$\mathcal{A}_{bos}^{tree}(T_1, T_2, T_3, T_4; \alpha') \sim \frac{\Gamma(s-1)\Gamma(t-1)}{\Gamma(2-u)}$$

这就是著名的韦内齐亚诺振幅 (Veneziano Amplitude), 它于 1968 年被首次提出, 人们当时并没有意识到这是弦论中的振幅.

开弦四快子振幅满足如下几条性质:

- 开弦散射振幅包含了我们在闭弦时看到的相似特征. 例如, 它的极点位于

$$s = n - 1 \quad t = n - 1 \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

这正对应于开弦质量谱.

- 与闭弦不同的是, 这里没有 u 道的极点, 四快子振幅分母上的伽玛函数 $\Gamma(2-u)$ 只会得到在 $u = \alpha'(p_1 + p_3)^2 = 2, 3, 4, \dots$ 处振幅存在零点. 这实际上来源于振幅的色排序性质, 即詹-佩顿因子的迹 $\text{Tr}(T^{a_1} T^{a_2} T^{a_3} T^{a_4})$ 中 T^{a_1} 与 T^{a_3} 不相邻.
- 由于在 s 和 t 道的极点中出现了所有的负整数, 因此每个能级都至少有一个态与两快子耦合. 接下来, 我们通过计算这些极点的留数尝试得到更多信息: 首先展开 $(1-z_2)^{t-2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-z_2)^n \binom{t-2}{n}$, 且有 $\binom{t-2}{n} = \frac{\Gamma(t-1)}{n! \Gamma(t-n-1)}$, 于是我们可以将四快子振幅写为:

$$\begin{aligned} \int_0^1 dz_2 z_2^{s-2} (1-z_2)^{t-2} &= \int_0^1 dz_2 z_2^{s-2} \sum_{n=0}^{\infty} (-z_2)^n \binom{t-2}{n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \binom{t-2}{n}}{s+n-1} \\ &= \frac{1}{s-1} - \frac{t-2}{s} + \frac{(t-2)(t-3)}{2(s+1)} + \dots \end{aligned} \quad (8.3. 40)$$

这其实就是开弦版本的 eq. (8.2. 30). 但开弦将分子 t 的阶数改为 n . 于是我们有相似的讨论得到开弦 n 能级上粒子自旋 J 最高为 $J = n$.

- 此外, 与闭弦振幅类似的是, 这里 s 道与 t 道也不重复相加, 需要注意与场论 s 道 t 道求和的区别.

8.3.2 三胶子振幅

考虑开弦无质量态顶角算符, 满足 $p_j^2 = 0$ 与 $\varepsilon_j \cdot p_j = 0$, 于是有:

$$V_{\varepsilon_j}(z_j) \sim \varepsilon_j^\mu : i\partial_z X_\mu e^{ip_j \cdot X(z_j)} : \quad (8.3. 41)$$

再进行色分解并固定 $SL(2; \mathbb{R})$, 与 $\text{Tr}(T^{a_1} T^{a_2} T^{a_3})$ 相关联的色排序振幅为:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{bos}^{tree}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3; \alpha') &\sim \langle cV_{\varepsilon_1}(z_1) cV_{\varepsilon_2}(z_2) cV_{\varepsilon_3}(z_3) \rangle \\ &= |z_{12} z_{13} z_{23}| \varepsilon_1^{\mu_1} \varepsilon_2^{\mu_2} \varepsilon_3^{\mu_3} \left\langle \prod_{j=1}^3 : i\partial X_{\mu_j} e^{ip_j \cdot X(z_j)} : \right\rangle \\ &= (2\alpha')^2 |z_{12} z_{13} z_{23}| \prod_{1 \leq i \leq j}^3 |z_{ij}|^{2\alpha' p_i \cdot p_j} \varepsilon_1^{\mu_1} \varepsilon_2^{\mu_2} \varepsilon_3^{\mu_3} \\ &\quad \times \left\{ 2\alpha' \frac{p_{\mu_1}^2 z_{23}}{z_{12} z_{13}} \frac{p_{\mu_2}^3 z_{31}}{z_{23} z_{21}} \frac{p_{\mu_3}^1 z_{12}}{z_{31} z_{32}} + \left[\frac{\eta_{\mu_1 \mu_2} p_{\mu_3}^1 z_{12}}{z_{12}^2 z_{31} z_{32}} + cyc(1, 2, 3) \right] \right\} \end{aligned}$$

再利用动量守恒与质壳条件, 我们可以得到 K-N 因子的指数 $\alpha' p_i \cdot p_j$ 均为 0, 于是有:

$$\mathcal{A}_{bos}^{tree}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3; \alpha') \sim [(\varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2)(\varepsilon_3 \cdot p_1) + cyc(1, 2, 3)] + 2\alpha'(\varepsilon_1 \cdot p_2)(\varepsilon_2 \cdot p_3)(\varepsilon_3 \cdot p_1) \quad (8.3. 42)$$

c 鬼场关联函数给出的 $|z_{12} z_{13} z_{23}|$ 依然和闭弦鬼场关联函数一样可以被理解为固定三个插入点过程中引入的雅可比行列式. 与闭弦有区别的是, 这里没有平方, 因此导致了下面两个色排序之间相差的负号:

$$\mathcal{A}_{bos}^{tree}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3; \alpha') = -\mathcal{A}_{bos}^{tree}(\varepsilon_3, \varepsilon_2, \varepsilon_1; \alpha') \quad (8.3. 43)$$

因此, 我们可以将相差的负号写在与之相应的迹上, 于是在 $\mathcal{M}_{op-bos}^{tree}$ 中出现的就是一个色排序振幅乘以包含生成元对易子的迹: $\text{Tr}([T^{a_1}, T^{a_2}], T^{a_3}) \sim f^{a_1 a_2 a_3}$. 这正是规范群的结构常数, $[T^{a_1}, T^{a_2}] = if^{a_1 a_2 a_3} T^{a_3}$

我们可以从三点胶子振幅 eq. (8.3. 42) 中发现一些有趣性质:

- 三胶子振幅 eq. (8.3. 42) 中 α' 的领头阶正是场论中杨-米尔斯理论 (Yang-Mills

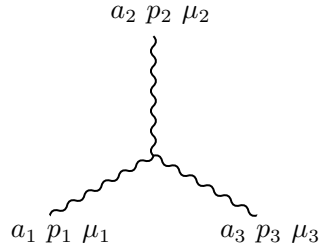
theory) 拉氏量:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}\text{Tr}(F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}) \sim \text{Tr}(A\partial^2 A + A^2\partial A + A^4) \quad (8.3. 44)$$

给出的三胶子杨-米尔斯振幅. 其中 F 是规范场的非线性场强:

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - g_{YM}[A_\mu, A_\nu] \quad (8.3. 45)$$

场论杨-米尔斯作用量中 A^4 对三顶角没有贡献, 因此形如 $\text{Tr}(A^2\partial A)$ 项的费曼规则 (Feynman rule) 如下图所示:

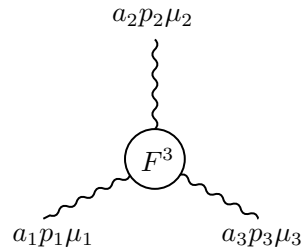


Feynman rule of $A^2\partial A$

$$f^{a_1 a_2 a_3} [\eta^{\mu_1 \mu_2} (p_1^{\mu_3} - p_2^{\mu_3}) + \eta^{\mu_2 \mu_3} (p_2^{\mu_1} - p_3^{\mu_1}) + \eta^{\mu_3 \mu_1} (p_3^{\mu_2} - p_1^{\mu_2})]$$

Figure 8.6: 场论杨-米尔斯拉氏量中形如 $\text{Tr}(A^2\partial A)$ 项三顶角的费曼规则

- 三胶子振幅 eq. (8.3. 42) 中 α' 的次领头阶则对应于更高量纲算符 $\alpha'\text{Tr}(F^3)$ 的费曼规则, 示意图如下:



Feynman rule of F^3

$$f^{a_1 a_2 a_3} [(p_2^{\mu_3} - p_1^{\mu_3}) \times (p_3^{\mu_1} - p_2^{\mu_1}) (p_1^{\mu_2} - p_3^{\mu_2})]$$

Figure 8.7: $\text{Tr}(F^3)$ 三顶角的费曼规则

- 因此, 三点振幅的 α' 展开可以被下述有效拉氏量的低能展开描述:

$$\mathcal{L}_{op-bos} = \mathcal{L}_{YM} + \alpha'\text{Tr}(F_\nu^\mu F_\lambda^\nu F_\mu^\lambda) + \mathcal{O}(\alpha'^2) \quad (8.3. 46)$$

并且我们后面会在四点振幅中看到从 $\alpha'^2\text{Tr}(F^4)$ 开始的 α' 展开中更高阶的项

8.3.3 D -膜的张力

我们曾介绍过 D -膜, 它是可以连接开弦端点空间曲面. 并声明最终会发现这些 D -膜本身就是动力学对象. 我们将在下一章更仔细地研究这个问题, 但现在我们可以做一个简单的计算来确定 D -膜的张力.

Dp -膜的张力 T_p 定义为单位空间体积内的能量. 它的量纲为 $[T_p] = p + 1$. 张力反映了膜与引力之间耦合的大小. 用这一章的语言来说, 就是闭弦态与开弦态之间相互作用的强度. 最简单的示意图如下图所示:

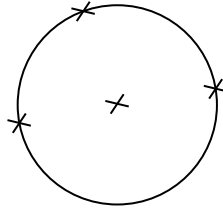


Figure 8.8: 开弦闭弦相互作用示意图

图中圆盘内插入了引力子顶角算符, 边界上则是开弦态顶角算符. 虽然我们不计算这个图, 但仍能看出它最重要的性质: 它具有圆盘的拓扑结构, 因此与 $1/g_s$ 成正比. 利用 α' 配出量纲, 我们得出结论: Dp -膜的张力必须有如下形式:

$$T_p \sim \frac{1}{l_s^{p+1}} \frac{1}{g_s} \quad (8.3.47)$$

其中弦长 l_s 定义为 $l_s = \sqrt{\alpha'}$. 张力 $1/g_s$ 的形式是 D -膜的主要特征之一.

这里的讨论是非常粗略的, 有很多地方被略过了. 尽管如此, 最终结果 eq. (8.3.47) 是正确的. 关于更全面的讨论, 可以参阅波尔钦斯基弦论教材上册的第 8.7 节.

8.4 利用开弦的叠合 (double copy) 重构闭弦

这一节会在树级利用开弦的叠合复现闭弦振幅. 首先是被积函数, 我们会发现, 闭弦树级振幅的被积函数可以通过开弦关联函数在放缩 α' 后进行叠合实现. 此外, 在积分后我们也仍然可以观察到树级振幅存在叠合关系, 即所谓的 KLT 关系 (Kawai-Lewellen-Tye relation). KLT 关系使得我们可以将球面上的积分 $\int d^2 z_j$ 替换为沿实轴 (盘面边界) 上线段相互独立的积分 $\int dz_j$ 与 $\int d\bar{z}_j$.

被积函数层面上的叠合

我们首先将闭弦关联函数因子化为全纯与反全纯部分. 闭弦顶角算符: $(\partial_z X_\mu)^n (\partial_{\bar{z}} X_\nu)^n e^{ip \cdot X}$: 的关联函数与相对应的开弦顶角算符: $(\partial_z X_\nu^{op})^n e^{ip \cdot X^{op}}$: 的关联函数之间的联系可以从生成函数中看出:

开弦关联函数可以从其生成函数 $\left\langle \prod_{j=1}^n : e^{ip \cdot X^{op} + i\xi_j \cdot (\partial_z + \partial_{\bar{z}}) X^{op}} : \right\rangle$ 关于 ξ_j^μ 的展开得到:

$$\left\langle \prod_{j=1}^n : e^{ip \cdot X^{op} + i\xi_j \cdot (\partial_z + \partial_{\bar{z}}) X^{op}} : \right\rangle = \prod_{1 \leq i < j}^n |z_{ij}|^{2\alpha' p_i \cdot p_j} \exp \left(2\alpha' \sum_{1 \leq i < j}^n \left[\frac{\xi_i \cdot \xi_j}{z_{ij}^2} + \frac{\xi_i \cdot p_j}{z_{ij}} + \frac{p_i \cdot \xi_j}{z_{ji}} \right] \right)$$

其中 $(\partial_z + \partial_{\bar{z}})$ 是沿边界的导数.

与之对应的闭弦生成函数包含 $\bar{\xi}_j$ 用以区分左行模 $\partial_z X^\mu$ 与右行模 $\partial_{\bar{z}} X^\mu$:

$$\begin{aligned} \left\langle \prod_{j=1}^n : e^{ip \cdot X + i\xi_j \cdot \partial_z X + i\bar{\xi}_j \cdot \partial_{\bar{z}} X} : \right\rangle &= \prod_{1 \leq i < j}^n |z_{ij}|^{\alpha' p_i \cdot p_j} \exp \left(\frac{\alpha'}{2} \sum_{1 \leq i < j}^n \left[\frac{\xi_i \cdot \xi_j}{z_{ij}^2} + \frac{\xi_i \cdot p_j}{z_{ij}} + \frac{p_i \cdot \xi_j}{z_{ji}} \right] \right) \\ &\quad \times \exp \left(\frac{\alpha'}{2} \sum_{1 \leq i < j}^n \left[\frac{\bar{\xi}_i \cdot \bar{\xi}_j}{\bar{z}_{ij}^2} + \frac{\bar{\xi}_i \cdot p_j}{\bar{z}_{ij}} + \frac{p_i \cdot \bar{\xi}_j}{\bar{z}_{ji}} \right] \right) \end{aligned}$$

通过比较比较两种生成函数, 我们得到, 对应于 X_μ 与 X_μ^{op} 一阶导数的顶角算符的关联函数满足:

$$\left\langle \prod_{j=1}^n V_{\Phi_j}(z_j) \right\rangle = \left| \left\langle \prod_{j=1}^n V_{\varphi_j}^{op}(z_j) \right\rangle_{\alpha' \rightarrow \alpha'/4} \right|^2 \quad (8.4. 48)$$

这里的绝对值实际上是作用于 z_j 与 ξ_j 的函数上, 满足 $|f(z, \xi)|^2 = f(z, \xi) f(\bar{z}, \bar{\xi})$. 闭弦的极化也可以因子化为两个开弦极化 $\Phi_j = \varphi_j \otimes \bar{\varphi}_j$. 我们可以将相似的讨论应用于更高阶导数 $\partial_z^{n \geq 2} X$, 同样能得到关联函数的叠合关系. 这时就需要用到 ξ 的推广, 为每阶导数配备 $\xi^{(2)}, \xi^{(3)}, \dots$ 与 $\bar{\xi}^{(2)}, \bar{\xi}^{(3)}, \dots$.

对无质量闭弦态的应用

对无质量闭弦态, 极化张量可以利用胶子极化的叠合给出:

$$\zeta_j^{\mu\nu} = \varepsilon_j^\mu \otimes \bar{\varepsilon}_j^\nu \quad (8.4. 49)$$

根据洛伦兹群不可约表示, 我们可以将它拆成引力子, B 场和伸缩子. 在场论极限下, B -场与伸缩子总是成对与引力子耦合. 例如, 对应于广义相对论微扰展开的树级振幅完全不含 B -场与伸缩子的贡献.

利用闭弦关联函数的叠合关系, 我们得到下述三点振幅的因子化形式:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{cl-bos}^{tree}(\{\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3\}; \alpha') &\sim \left\langle \prod_{j=1}^3 c\bar{c}V_{\zeta_j}(z_j) \right\rangle \\ &= \left| z_{12}z_{13}z_{23}\varepsilon_1^\mu\varepsilon_2^\nu\varepsilon_3^\lambda \left\langle \prod_{j=1}^3 : i\partial_z X_{\mu_j}^{op} e^{ip_j \cdot X}(z_j) : \right\rangle_{\alpha' \rightarrow \alpha'/4} \right|^2 \\ &= (2\alpha')^4 [(\varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2)(\varepsilon_3 \cdot p_1) + cyc(1, 2, 3)] + 2\alpha'(\varepsilon_1 \cdot p_2)(\varepsilon_2 \cdot p_3)(\varepsilon_3 \cdot p_1) \end{aligned}$$

对照前文开弦三胶子振幅, 我们发现:

$$\mathcal{M}_{cl-bos}^{tree} \sim \mathcal{A}_{bos}^{tree}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3; \alpha') \mathcal{A}_{bos}^{tree}(\bar{\varepsilon}_1, \bar{\varepsilon}_2, \bar{\varepsilon}_3; \alpha') \quad (8.4. 50)$$

在 α' 的领头阶, 张量积中自旋 2 的部分对应于微扰引力. 即在爱因斯坦-希尔伯特作用量中将度规关于闵氏度规展开

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \kappa h_{\mu\nu}, \quad \kappa = \sqrt{32\pi^2 G_{Newton}} \quad (8.4. 51)$$

所给出的费曼规则. 展开后的爱因斯坦-希尔伯特作用量为:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{EH} &\sim \sqrt{|\det g|} \mathcal{R} \\ &= h\partial^2 h + \kappa h^2 \partial^2 h + \kappa^2 h^3 \partial^2 h + \mathcal{O}(\kappa^3) \end{aligned} \quad (8.4. 52)$$

在写出所有洛伦兹指标后, 对应于 $\kappa h^2 \partial^2 h$ 的三顶角与对应于 $\kappa^2 h^3 \partial^2 h$ 的四顶角分别有 171 与 2850 项, 但是利用叠合关系, 带有 171 项的三引力子振幅则可以写为如下相对简单的形式:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{EH}^{tree}(\{\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3\}) &\sim [(\varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2)(\varepsilon_3 \cdot p_1) + cyc(1, 2, 3)] \\ &\times [(\bar{\varepsilon}_1 \cdot \bar{\varepsilon}_2)(\bar{\varepsilon}_3 \cdot p_1) + cyc(1, 2, 3)]|_{\zeta_j^{\mu\nu} = \varepsilon_j^\mu \otimes \bar{\varepsilon}_j^\nu} \end{aligned} \quad (8.4. 53)$$

而引力的高阶 α' 修正则是以 \mathcal{R}^2 和 \mathcal{R}^3 为首的含高阶导数的算符:

$$\mathcal{L}_{cl-bos} = \mathcal{L}_{EH} + \sqrt{|\det g|} (\alpha' \mathcal{R}^2 + \alpha'^2 \mathcal{R}^3 + \mathcal{O}(\alpha'^3)) \quad (8.4. 54)$$

实际上, 三点振幅的上述平方关系对于所有闭弦态 $\Phi_j = \varphi_j \otimes \bar{\varphi}_j$ 均成立, 因为这里涉及的只是被积函数中关联函数的因子化性质:

$$\mathcal{M}_{cl-bos}^{tree}(\{\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3\}; \alpha') \sim \mathcal{A}_{bos}^{tree}(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3; \frac{\alpha'}{4}) \mathcal{A}_{bos}^{tree}(\bar{\varphi}_1, \bar{\varphi}_2, \bar{\varphi}_3; \frac{\alpha'}{4}) \quad (8.4. 55)$$

8.4.1 四点 KLT 关系 (Kawai-Lewellen-Tye relation)

在给出了三点闭弦振幅的因子化形式后, 一个自然的问题便是: 相似的性质在四点及以上出现非退化球面和盘面积分时是否仍然存在? 本节的目的就是说明, 我们的确可以将复积分因子化:

$$\int_{sphere} d^2 z_j \leftrightarrow \int_{disk \text{ boundary}} dz_j \int_{disk \text{ boundary}} d\bar{z}_j \quad (8.4. 56)$$

这一过程与 KLT 关系 (Kawai-Lewellen-Tye relation) 联系密切.

在四点, KLT 关系可以将任意的闭弦树级振幅约化为色排序开弦振幅的乘积:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{cl-bos}^{tree}(\{\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \Phi_4\}; \alpha') &\sim -\sin\left(\frac{\pi\alpha'}{2} p_1 \cdot p_2\right) \mathcal{A}_{bos}^{tree}(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4; \frac{\alpha'}{4}) \\ &\quad \times \mathcal{A}_{bos}^{tree}(\bar{\varphi}_1, \bar{\varphi}_2, \bar{\varphi}_4, \bar{\varphi}_3; \frac{\alpha'}{4}) \end{aligned} \quad (8.4. 57)$$

注意到, 左行模与右行模的第三条腿和第四条腿位置相反. 这是 KLT 关系的一条重要性质. 四点 KLT 关系的证明依赖于对非固定点 (这里就是 z_2 .) 的球面积分中的围道变换, 具体过程如下:

仍然固定 $(z_1, z_3, z_4) \rightarrow (0, 1, \infty)$, 考虑对于 z_2 的积分, 我们取:

$$z_2 = x + iy, \quad \bar{z}_2 = x - iy; \quad x, y \in \mathbb{R} \quad (8.4. 58)$$

$|z_{ij}|^{s_{ij}}$ 在下述位置出现分支奇点:

$$|z_1 - z_2| = 0; \quad |z_2 - z_3| = 0 \quad (8.4. 59)$$

分支奇点在 x 和 y 的坐标下为:

$$y = \pm ix; \quad y = \pm i(1 - x) \quad (8.4. 60)$$

倘若将 y 视作复数, 这正是 y 复平面虚轴上的点, 使得我们可以将 y 逆时针旋转至奇

点附近:

$$y \in \mathbb{R} \rightarrow y = i\omega \in i\mathbb{R} \quad (8.4. 61)$$

这一变形虽然对后续计算有利, 但会带来原先没有的麻烦. 如果直接按照 eq. (8.4. 61) 旋转, y 积分会经过上述分支奇点所在的坐标. 这时我们需要令 y 移动 $\pm\epsilon$ 来绕过分支奇点:

$$y = i(\omega - i\rho(\omega)\epsilon) \in i\mathbb{R} \pm \epsilon; \quad \rho(\omega) = \begin{cases} > 0 & \omega > 0 \\ < 0 & \omega < 0 \end{cases} \quad (8.4. 62)$$

其中 $\rho(\omega)$ 是光滑函数, 示意图如下:

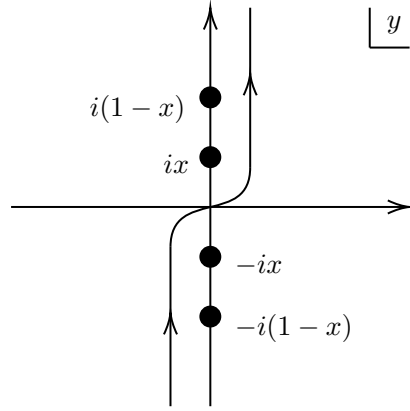


Figure 8.9: y 的积分围道

我们之所以选择这样的方向绕过分支奇点是因为 y 积分的围道最开始是沿着实数轴, 因此, eq. (8.4. 62) 的移动和 eq. (8.4. 61) 的变形应当理解为同一个围道变换的两步, 自然不能跨过奇点. 于是我们将 z_2 与 \bar{z}_2 化为了 x 与 ω 的形式:

$$z_2 = x - \omega + i\rho(\omega)\epsilon, \quad \bar{z}_2 = x + \omega - i\rho(\omega)\epsilon; \quad x, \omega \in \mathbb{R} \quad (8.4. 63)$$

这里 $\rho(\omega)$ 与前述要求相同.

做了这些铺垫之后我们可以开始观察闭弦振幅中与 z_2 积分有关的部分:

$$\mathcal{M}_{cl-bos}^{tree}(4pt) \sim \frac{1}{2\pi\alpha'} \int_C d^2 z_2 |z_2|^{2s_{12}} |1 - z_2|^{2s_{23}} \quad (8.4. 64)$$

其中 (4pt) 表示四点振幅. 我们要求移动的 ϵ 为小量, 因此 $y \in i\mathbb{R} \pm \epsilon$ 接近纯虚, 因此 z_2 和 \bar{z}_2 接近纯实. 然后我们将 z_2 和 \bar{z}_2 视为独立变量进行积分, eq. (8.4. 64) 中的积

分于是可以化为:

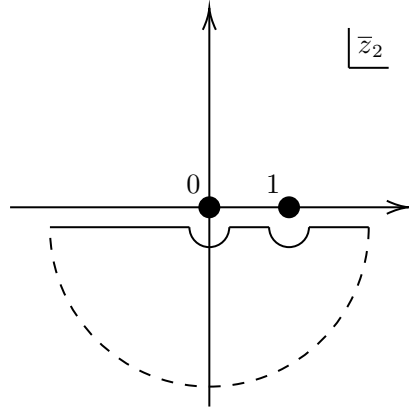
$$\mathcal{M}_{cl-bos}^{tree}(4pt) \sim \frac{1}{4\pi\alpha'} \int_{-\infty}^{\infty} dz_2 \int_{-\infty}^{\infty} d\bar{z}_2 z_2^{s_{12}} (1-z_2)^{s_{23}} \bar{z}_2^{s_{12}} (1-\bar{z}_2)^{s_{23}} e^{\pm i\pi s_{12} \pm i\pi s_{23}} \quad (8.4.65)$$

这里的相因子 $e^{\pm i\pi s_{12} \pm i\pi s_{23}}$ 的来源是 eq. (8.4.64) 中的绝对值, 换句话讲是来源于我们将绝对值打开并独立处理 z_2 和 \bar{z}_2 的积分后的值不变, 即需要一个相位来保证 $z_2^{s_{12}} \bar{z}_2^{s_{12}} e^{\pm i\pi s_{12}}$ 和 $(1-z_2)^{s_{23}} (1-\bar{z}_2)^{s_{23}} e^{\pm i\pi s_{23}}$ 为正. 接下来考虑积分, 我们固定 z_2 考虑对 \bar{z}_2 的积分, 根据 $\text{Re } z_2 \sim z_2$ 的值分以下三类讨论 $\rho(\omega)$ 并给出积分围道⁶:

- 第一类: $\text{Re } z_2 \sim z_2 \in (-\infty, 0)$, 即 $x - \omega < 0$. 在 $\text{Re } \bar{z}_2 = 0$ 处, $x - \omega = 0$, 于是得到 $\omega > 0$, 因此 $\rho(\omega) > 0$, 而在 $\text{Re } \bar{z}_2 = 1$ 处同理, 有 $\rho(\omega) > 0$. 代回 \bar{z}_2 基于 x 和 ω 的表达式 eq. (8.4.63), 得到:

$$\bar{z}_2|_{\text{Re } \bar{z}_2=0} = -i\epsilon \quad \bar{z}_2|_{\text{Re } \bar{z}_2=1} = -i\epsilon \quad (8.4.66)$$

于是 \bar{z}_2 的积分围道如图所示:



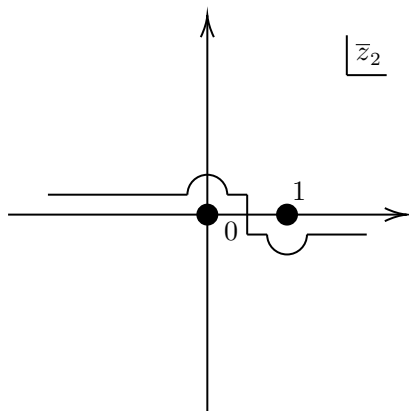
可以缩为一点, 因此这个围道对应的积分为 0.

- 第二类: $\text{Re } z_2 \sim z_2 \in (0, 1)$, 即 $x - \omega \in (0, 1)$. 与第一类同理:

$$\bar{z}_2|_{\text{Re } \bar{z}_2=0} = i\epsilon \quad \bar{z}_2|_{\text{Re } \bar{z}_2=1} = -i\epsilon \quad (8.4.67)$$

于是 \bar{z}_2 的积分围道如图所示:

⁶我们为推导简单, 这里只保留 ρ 的符号, 并且由于三种情况推导类似, 我们在后两种情况中不再重复

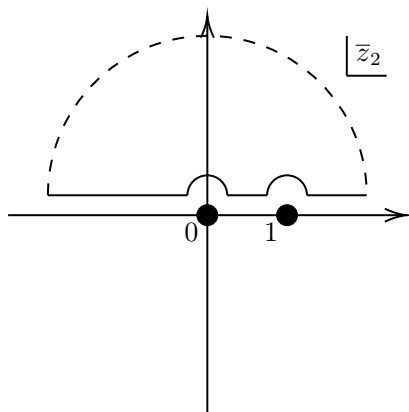


不可缩为一点, 即积分有奇点留数的贡献.

- 第三类: $\text{Re } z_2 \sim z_2 \in (1, \infty)$, 即 $1 < x - \omega$. 与第一类同理:

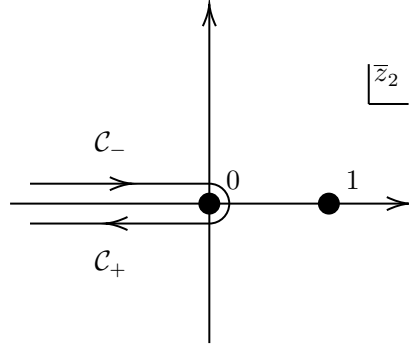
$$\bar{z}_2|_{\text{Re } \bar{z}_2=0} = i\epsilon \quad \bar{z}_2|_{\text{Re } \bar{z}_2=1} = i\epsilon \quad (8.4.68)$$

于是 \bar{z}_2 的积分围道如图所示:



可以缩为一点, 因此这个围道对应的积分为 0.

综上, 三类 z_2 取值给出的 \bar{z}_2 积分中非零的只有 $0 < \text{Re } z_2 < 1$, 我们将 \bar{z}_2 的围道左半部分称为 C_- , 右半部分称为 C_+ , 分别对应于实轴的两半, 将围道中的 C_+ 部分变形, 得到:



且显然有, 在 C_{\pm} 上分别有: $z_2^{s_{12}} \bar{z}_2^{s_{12}} e^{i\pi s_{12}}$ 和 $z_2^{s_{12}} \bar{z}_2^{s_{12}} e^{-i\pi s_{12}}$ 于是, 我们最终得到:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{M}_{cl-bos}^{tree}(4pt) &\sim \frac{1}{2\pi\alpha'} \int_{\mathbb{C}} d^2 z_2 |z_2|^{2s_{12}} |1 - z_2|^{2s_{23}} \\
 &= \frac{1}{4\pi\alpha'} \int_{-\infty}^{\infty} dz_2 \int_{-\infty}^{\infty} d\bar{z}_2 z_2^{s_{12}} (1 - z_2)^{s_{23}} \bar{z}_2^{s_{12}} (1 - \bar{z}_2)^{s_{23}} e^{\pm i\pi s_{12} \pm i\pi s_{23}} \\
 &= \frac{1}{4\pi\alpha'} \int_0^1 dz_2 |z_2|^{s_{12}} |1 - z_2|^{s_{23}} \\
 &\quad \times \left(e^{i\pi s_{12}} \int_{C_+} d\bar{z}_2 + e^{-i\pi s_{12}} \int_{C_-} d\bar{z}_2 \right) |\bar{z}_2|^{s_{12}} |1 - \bar{z}_2|^{s_{23}} \\
 &= \frac{1}{4\pi\alpha'} \int_0^1 dz_2 |z_2|^{s_{12}} |1 - z_2|^{s_{23}} \\
 &\quad \times \left(e^{-i\pi s_{12}} - e^{+i\pi s_{12}} \right) \int_{-\infty}^0 d\bar{z}_2 |\bar{z}_2|^{s_{12}} |1 - \bar{z}_2|^{s_{23}} \\
 &= -\frac{\sin(\pi s_{12})}{2\pi\alpha'} \mathcal{A}_{bos}^{tree}(1, 2, 3, 4) \overline{\mathcal{A}_{bos}^{tree}(2, 1, 3, 4)}
 \end{aligned}$$

又由于振幅的反转对称 eq. (8.3. 36), 我们得到: $\overline{\mathcal{A}_{bos}^{tree}(2, 1, 3, 4)} = \overline{\mathcal{A}_{bos}^{tree}(1, 2, 4, 3)}$ 因此有:

$$\mathcal{M}_{cl-bos}^{tree}(4pt) \sim -\frac{\sin(\pi s_{12})}{2\pi\alpha'} \mathcal{A}_{bos}^{tree}(1, 2, 3, 4) \overline{\mathcal{A}_{bos}^{tree}(1, 2, 4, 3)} \quad (8.4. 69)$$

接下来我们将四点 KLT 关系应用于快子四点振幅. 开弦的四点快子振幅, 即韦内齐亚诺振幅在将 α' 放缩为闭弦的 $\frac{\alpha'}{4}$ 后有如下形式:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{A}_{bos}^{tree}(T_1, T_2, T_3, T_4; \frac{\alpha'}{4}) &\sim \int_0^1 dz_2 |z_2|^{\frac{s}{4}-2} |1 - z_2|^{\frac{t}{4}-2} \\
 &= \frac{\Gamma(\frac{s}{4} - 1) \Gamma(\frac{t}{4} - 1)}{\Gamma(2 - \frac{u}{4})} \quad (8.4. 70)
 \end{aligned}$$

而 $\mathcal{A}_{bos}^{tree}(T_1, T_2, T_4, T_3; \alpha')$ 可以直接通过在 Γ 函数中交换 $t \leftrightarrow u$ 而四点 KLT 关系中的

正弦函数也可以被表示为 Γ 函数的形式:

$$\sin\left(\frac{\pi\alpha'}{2}p_1 \cdot p_2\right) = \sin\left[\pi\left(\frac{s}{4} - 2\right)\right] = \frac{-\pi}{\Gamma(\frac{s}{4} - 1)\Gamma(2 - \frac{s}{4})} \quad (8.4. 71)$$

这里使用了 $p_j^2 = \frac{4}{\alpha'}$. 代回 KLT 关系, 我们得到:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{cl-bos}^{tree}(\{T_1, T_2, T_3, T_4\}; \alpha') &\sim \frac{-\pi}{\Gamma(\frac{s}{4} - 1)\Gamma(2 - \frac{s}{4})} \times \frac{\Gamma(\frac{s}{4} - 1)\Gamma(\frac{t}{4} - 1)}{\Gamma(2 - \frac{u}{4})} \\ &\times \frac{\Gamma(\frac{s}{4} - 1)\Gamma(\frac{u}{4} - 1)}{\Gamma(2 - \frac{t}{4})} \\ &= \frac{\pi\Gamma(\frac{s}{4} - 1)\Gamma(\frac{t}{4} - 1)\Gamma(\frac{u}{4} - 1)}{\Gamma(2 - \frac{s}{4})\Gamma(2 - \frac{t}{4})\Gamma(2 - \frac{u}{4})} \end{aligned} \quad (8.4. 72)$$

这正是我们在闭弦快子振幅一节中得到的闭弦四快子振幅 eq. (8.2. 29) 在技术层面, KLT 关系给出了一个计算球面积分的有效方式. 而在物理含义层面, 我们可以从极点的角度理解 KLT 关系中分子上的正弦函数. 色排序分别为 $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$ 和 $\bar{\varphi}_1, \bar{\varphi}_2, \bar{\varphi}_4, \bar{\varphi}_3$ 的开弦振幅均含有无穷多个 s 道极点, 在 α' 放缩后这些极点位于: $s = 4, 0, -4, -8, \dots$. 因此, 分子上的正弦函数 $\sin(\frac{\pi\alpha'}{2}p_1 \cdot p_2)$ 的零点 $s \in 4\mathbb{Z}$ 的作用便是将 $|\mathcal{A}_{bos}^{tree}|^2$ 中的极点平方抵消到 $\mathcal{M}_{cl-bos}^{tree}$ 所要求的一次的极点形式. 即 $(s+t) + (s+u) - s = s+t+u$. 而 u 来自于 KLT 关系中右行模将 3, 4 翻转为 4, 3 的操作.

从快子向更一般的四点 KLT 关系的推广也很简单, 对于有理的亚纯 (meromorphic) 与反亚纯 (anti-meromorphic) 函数 $f(z)$ 和 $g(\bar{z})$, 有:

$$\int_{\mathbb{C}} d^2z |z|^{2s} |1-z|^{2t} f(z) g(\bar{z}) = -\sin(\pi s) \left(\int_0^1 dz |z|^s |1-z|^t f(z) \right) \left(\int_{-\infty}^0 d\bar{z} |\bar{z}|^s |1-\bar{z}|^t g(\bar{z}) \right)$$

KLT 关系的场论极限

我们这里介绍 KLT 最重要的应用之一, 无质量振幅 KLT 关系的场论极限. 由于 B -场与伸缩子总是成对与引力子耦合, 因此他们不会出现在微扰引力的树图传播子中.

因此, 弦论中的 KLT 取 $\alpha' \rightarrow 0$ 极限可以给出:

$$\mathcal{M}_{EH}^{tree}(\{\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \zeta_4\}) \sim -(p_1 + p_2)^2 \mathcal{A}_{YM}^{tree}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4) \mathcal{A}_{YM}^{tree}(\bar{\varepsilon}_1, \bar{\varepsilon}_2, \bar{\varepsilon}_4, \bar{\varepsilon}_3) \quad (8.4. 73)$$

其中 $(p_1 + p_2)^2$ 因子来自于正弦函数的 α' 领头阶, 即 $\sin(\frac{\pi\alpha'}{2}p_1 \cdot p_2) = \frac{\pi\alpha'}{2}p_1 \cdot p_2 + \mathcal{O}(\alpha'^3)$. 这个 $(p_1 + p_2)^2$ 因子正是传播子的逆, 与先前的讨论相似, 起到了在 $|\mathcal{A}_{YM}^{tree}|^2$ 中抵消一

个 s 道奇点的作用.

更高点的 KLT 关系

我们可以在更高点利用相似的围道变形处理 $d^2 z_j = dz_j d\bar{z}_j$, 得到五点的结果:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{bos}^{tree}(\{\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \Phi_4, \Phi_5\}; \alpha') \sim & \left\{ \mathcal{A}_{bos}^{tree}(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \varphi_5; \frac{\alpha'}{4}) \sin\left(\frac{\pi\alpha'}{2} p_1 \cdot p_2\right) \right. \\ & \times \left[\sin\left(\frac{\pi\alpha'}{2} (p_1 + p_2) \cdot p_3\right) \mathcal{A}_{bos}^{tree}(\bar{\varphi}_1, \bar{\varphi}_2, \bar{\varphi}_3, \bar{\varphi}_5, \bar{\varphi}_4; \frac{\alpha'}{4}) \right. \\ & \left. \left. + \sin\left(\frac{\pi\alpha'}{2} p_1 \cdot p_3\right) \mathcal{A}_{bos}^{tree}(\bar{\varphi}_1, \bar{\varphi}_2, \bar{\varphi}_3, \bar{\varphi}_5, \bar{\varphi}_4; \frac{\alpha'}{4}) \right] \right\} \\ & + (2 \leftrightarrow 3) \end{aligned}$$

其中 $+(2 \leftrightarrow 3)$ 表示加上其之前的所有内容交换 2 和 3 的结果, 即加上花括号内的三行交换 $(p_2, \varphi_2, \bar{\varphi}_2) \leftrightarrow (p_3, \varphi_3, \bar{\varphi}_3)$ 后的结果. 通过与三点和四点 KLT 比较, 我们发现正弦函数的数量与外腿数线性相关. 相应地, n 点 KLT 关系中每一项都包含形如 $[\sin(\frac{\pi\alpha'}{2} p_i \cdot p_j)]^{n-3}$ 的因子, 整体上有如下形式:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{bos}^{tree}(\{\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \Phi_4, \Phi_5\}; \alpha') \sim & \sum_{\rho, \tau \in S_{n-3}} \mathcal{A}_{bos}^{tree}(\varphi_1, \rho(\varphi_2, \dots, \varphi_{n-2}), \varphi_{n-1}, \varphi_n; \frac{\alpha'}{4}) \\ & \times S_{\alpha'}(\rho|\tau) \mathcal{A}_{bos}^{tree}(\bar{\varphi}_1, \tau(\bar{\varphi}_2, \dots, \bar{\varphi}_{n-2}), \bar{\varphi}_n, \bar{\varphi}_{n-1}; \frac{\alpha'}{4}) \end{aligned} \quad (8.4.74)$$

我们发现, 上式形式上类似于用 $2, 3, \dots, n-2$ 外腿的排序 ρ 和 τ 标记的 $(n-3)! \times (n-3)!$ 矩阵的矩阵元

8.4.2 置换不变性 (permutation invariance) 与单值关系 (monodromy relation)

外态为相同玻色态的闭弦振幅必须是关于 $(p_i, \varphi_i, \bar{\varphi}_i)$ 置换不变的, 其中 $i = 1, 2, \dots, n$. 但是上述 KLT 关系只保证了外腿子集 $i = 2, 3, \dots, n-2$ 的置换不变性. 包含剩余三条腿 $1, n-1, n$ 的置换不变性则来自于色排序开弦振幅的所谓单值关系 (monodromy relation) 以四点为例, $(p_2, \varphi_2, \bar{\varphi}_2) \leftrightarrow (p_4, \varphi_4, \bar{\varphi}_4)$ 的对称性来自于如下单值关系:

$$\sin(2\pi\alpha' p_1 \cdot p_2) \mathcal{A}_{bos}^{tree}(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_4, \varphi_3; \alpha') = \sin(2\pi\alpha' p_2 \cdot p_3) \mathcal{A}_{bos}^{tree}(\varphi_1, \varphi_3, \varphi_2, \varphi_4; \alpha')$$

实际上, 四点所有的色排序振幅彼此都成正比, 我们接下来证明这件事:

首先要说明的是, 单值关系并不只对玻色弦成立, 超弦也同样有单值关系. 我们接下来的证明过程中不区分玻色弦与超弦, 将色排序树级振幅记为 $\mathcal{A}_*^{tree}(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n; \alpha')$, 下标的星号表示此处既可以是玻色弦也可以是超弦. 外态取为无质量态, 满足 $s = 2\alpha' p_1 \cdot p_2$ 与 $t = 2\alpha' p_2 \cdot p_3$. 我们的目的便是将不同的色排序, 即不同的 z_2, z_3, \dots, z_{n-2} 积分区域相互关联. 我们会通过利用顶角算符关联函数除 K-N 因子 $|z_{ij}|^{2\alpha' p_1 \cdot p_2}$ 外全部为亚纯函数的性质来实现这一点.

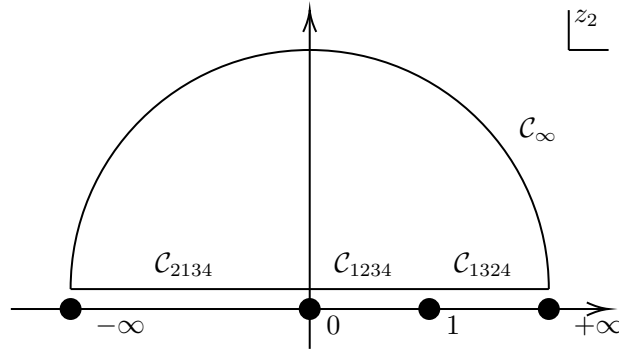
先考虑四点的情况:

四点的色排序振幅满足:

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_*^{tree}(\varphi_2, \varphi_1, \varphi_3, \varphi_4; \alpha') &= \int_{-\infty}^0 dz_2 |z_2|^s |1 - z_2|^t f_*(z_2) \\ \mathcal{A}_*^{tree}(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4; \alpha') &= \int_0^1 dz_2 |z_2|^s |1 - z_2|^t f_*(z_2) \\ \mathcal{A}_*^{tree}(\varphi_1, \varphi_3, \varphi_2, \varphi_4; \alpha') &= \int_1^{\infty} dz_2 |z_2|^s |1 - z_2|^t f_*(z_2)\end{aligned}\tag{8.4. 75}$$

包含极化的有理函数 $f_*(z_2)$ 由顶角算符的缩并给出. 我们后面并不需要用到它的具体形式, 即不需要用到顶角算符的具体形式. 这也是单值关系对玻色弦与超弦都成立的原因.

我们接下来考虑 $F_*(z_2) = (z_2)^s (1 - z_2)^t f_*(z_2)$ 在图 8.4.2 所示的围道 \mathcal{C} 上的积分.



这里我们缩写如下⁷:

$$\mathcal{C}_{2134} = (-\infty, 0), \quad \mathcal{C}_{1234} = (0, 1), \quad \mathcal{C}_{1324} = (1, \infty)\tag{8.4. 76}$$

⁷实际上严格来讲, \mathcal{C}_{ijkl} 应当带一个无穷小的虚部 $i\epsilon$ 从而离开实轴以规避在 $z_2 = 0$ 和 $z_2 = 1$ 可能出现的奇点问题.

应用柯西定理:

$$\oint_C dz_2 F_*(z_2) = 0 \quad (8.4. 77)$$

可以证明, 围道中无穷远处的半圆 C_∞ 对积分 $\oint_C dz_2 F_*(z_2)$ 无贡献. 与 KLT 的讨论类似, $F_*(z_2)$ 与 $f_*(z_2)$ 有如下关系:

$$F_*(z_2) = \begin{cases} e^{i\pi s} |z_2|^s |1 - z_2|^t f_*(z_2); & z_2 \in C_{2134} \\ |z_2|^s |1 - z_2|^t f_*(z_2); & z_2 \in C_{1234} \\ e^{-i\pi t} |z_2|^s |1 - z_2|^t f_*(z_2); & z_2 \in C_{1324} \end{cases} \quad (8.4. 78)$$

我们引入相位来抵消去掉绝对值前后相差的负号. 于是柯西定理 $\oint_C dz_2 F_*(z_2) = 0$ 可以改写为:

$$\left(e^{i\pi s} \int_{-\infty}^0 + \int_0^1 + e^{-i\pi t} \int_1^\infty \right) dz_2 |z_2|^s |1 - z_2|^t f_*(z_2) = 0 \quad (8.4. 79)$$

而色排序振幅的积分形式为:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_*^{tree}(\varphi_2, \varphi_1, \varphi_3, \varphi_4; \alpha') &= \int_{-\infty}^0 dz_2 |z_2|^s |1 - z_2|^t f_*(z_2) \\ \mathcal{A}_*^{tree}(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4; \alpha') &= \int_0^1 dz_2 |z_2|^s |1 - z_2|^t f_*(z_2) \\ \mathcal{A}_*^{tree}(\varphi_1, \varphi_3, \varphi_2, \varphi_4; \alpha') &= \int_1^{+\infty} dz_2 |z_2|^s |1 - z_2|^t f_*(z_2) \end{aligned} \quad (8.4. 80)$$

代回 eq. (8.4. 79), 我们于是有:

$$e^{i\pi s} \mathcal{A}_*^{tree}(\varphi_2, \varphi_1, \varphi_3, \varphi_4; \alpha') + \mathcal{A}_*^{tree}(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4; \alpha') + e^{-i\pi t} \mathcal{A}_*^{tree}(\varphi_1, \varphi_3, \varphi_2, \varphi_4; \alpha') = 0 \quad (8.4. 81)$$

这就是四点开弦振幅的单值关系. 若振幅为实值, 我们可以进一步给出上式的实部和虚部为 0, 得到如下两个等式:

$$\begin{aligned} \cos(\pi s) \mathcal{A}_*^{tree}(\varphi_2, \varphi_1, \varphi_3, \varphi_4; \alpha') + \mathcal{A}_*^{tree}(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4; \alpha') + \cos(\pi t) \mathcal{A}_*^{tree}(\varphi_1, \varphi_3, \varphi_2, \varphi_4; \alpha') &= 0 \\ \sin(\pi s) \mathcal{A}_*^{tree}(\varphi_2, \varphi_1, \varphi_3, \varphi_4; \alpha') - \sin(\pi t) \mathcal{A}_*^{tree}(\varphi_1, \varphi_3, \varphi_2, \varphi_4; \alpha') &= 0 \end{aligned} \quad (8.4. 82)$$

取 α' 的领头阶, 我们可以得到:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{YM}^{tree}(\varphi_2, \varphi_1, \varphi_3, \varphi_4; \alpha') + \mathcal{A}_{YM}^{tree}(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4; \alpha') + \mathcal{A}_{YM}^{tree}(\varphi_1, \varphi_3, \varphi_2, \varphi_4; \alpha') &= 0 \\ (p_1 + p_2)^2 \mathcal{A}_{YM}^{tree}(\varphi_2, \varphi_1, \varphi_3, \varphi_4; \alpha') - (p_2 + p_3)^2 \mathcal{A}_{YM}^{tree}(\varphi_1, \varphi_3, \varphi_2, \varphi_4; \alpha') &= 0 \end{aligned} \quad (8.4. 83)$$

这两个等式中的第一个是场论四点色排序振幅的 K-K 关系 (Kleiss-Kuijf relation), 第二个是 BCJ 关系 (Bern-Carrasco-Johansson relation). 将积分围道 \mathcal{C} 和被积函数 $F_*(z_2)$ 推广至 n 点 $F_*(z_2) \rightarrow F_*(z_{\rho(2)}, z_{\rho(3)}, \dots, z_{\rho(n-2)})$, 这里以 $F_*(z_2, z_3, \dots, z_{n-2})$ 为例. 我们可以得到 n 点开弦振幅的如下单值关系:

$$\begin{aligned} 0 &= e^{i2\pi\alpha' p_1 \cdot p_2} \mathcal{A}_*^{tree}(\varphi_2, \varphi_1, \varphi_3, \dots, \varphi_n; \alpha') + \mathcal{A}_*^{tree}(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots, \varphi_n; \alpha') \\ &\quad + e^{-i2\pi\alpha' p_2 \cdot p_3} \mathcal{A}_*^{tree}(\varphi_1, \varphi_3, \varphi_2, \varphi_4, \dots, \varphi_n; \alpha') \\ &\quad + e^{-i2\pi\alpha' p_2 \cdot (p_3 + p_4)} \mathcal{A}_*^{tree}(\varphi_1, \varphi_3, \varphi_4, \varphi_2, \dots, \varphi_n; \alpha') \\ &\quad + \dots + e^{-i2\pi\alpha' p_2 \cdot (p_3 + p_4 + \dots + p_{n-1})} \mathcal{A}_*^{tree}(\varphi_1, \varphi_3, \varphi_4, \dots, \varphi_{n-1}, \varphi_2, \varphi_n; \alpha') \end{aligned} \quad (8.4. 84)$$

因此我们可以得到独立的色排序 n 点振幅共有如下 $(n-3)!$ 个:

$$\{\mathcal{A}_{bos}^{tree}(\varphi_1, \rho(\varphi_2, \varphi_3, \dots, \varphi_{n-2}), \varphi_{n-1}, \varphi_n; \alpha'), \rho \in S_{n-3}\} \quad (8.4. 85)$$

对单值关系取场论极限, 便可以得到 n 点的 BCJ 关系:

$$\begin{aligned} p_1 \cdot p_2 \mathcal{A}_{YM}^{tree}(\varphi_2, \varphi_1, \varphi_3, \dots, \varphi_n; \alpha') &= \sum_{j=3}^{n-1} p_2 \cdot (p_3 + p_4 + \dots + p_j) \\ &\quad \times \mathcal{A}_{YM}^{tree}(\varphi_1, \varphi_3, \varphi_4, \dots, \varphi_j, \varphi_2, \varphi_{j+1}, \dots, \varphi_n; \alpha') \end{aligned} \quad (8.4. 86)$$

最后补充一点: 我们需要注意, KLT 关系和单值关系都是对任何外态 $\Phi_i = \varphi_i \otimes \bar{\varphi}_i$ 的组合均成立的关系, 这是因为它们的推导不依赖于外态, 只和 K-N 因子的解析性质相关.

8.5 弦振幅的低能展开

这一节的目标是:

- 利用弦振幅的 $\alpha' \rightarrow 0$ 极限重构杨-米尔斯与引力并通过 α' 展开构造包含诸如 $\text{Tr}(D^{2m} F^n)$ 和 $D^{2m} \mathcal{R}^n$ 的含高阶导数算符的有效拉氏量⁸.
- 利用有效场论 (effective field theory) 与么正性将顶角算符进行归一化

⁸这里 D_μ 表示非线性规范变换与微分同胚变换对应的协变导数算符.

我们在之前的三点振幅中有提及, 无质量弦振幅的 α' 展开可以复现费曼规则, 从而得到再现其表达式的低能有效拉氏量. 在复现 D 维时空中的杨-米尔斯和广义相对论的耦合 g_{YM} 与 $\kappa^2 = 32\pi^2 G_{Newton}$ 时, 对三点振幅存在贡献的低能有效拉氏量为:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{op-bos} &= -\frac{\text{Tr}(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu})}{4} + \frac{2\alpha'}{3}g_{YM}\text{Tr}(F^\mu{}_\nu F^\nu{}_\lambda F^\lambda{}_\mu) + \mathcal{O}(\alpha'^2) \\ \mathcal{L}_{cl-bos} &= \frac{2}{\kappa^2}\sqrt{\det|g|}\left\{\mathcal{R} + \frac{\alpha'}{4}(\mathcal{R}_{\mu\nu\lambda\rho}\mathcal{R}^{\mu\nu\lambda\rho} - 4\mathcal{R}_{\mu\nu}\mathcal{R}^{\mu\nu} + \mathcal{R}^2) \right. \\ &\quad + \left(\frac{\alpha'}{4}\right)^2(\mathcal{R}^{\mu\nu}{}_{\alpha\beta}\mathcal{R}^{\alpha\beta}{}_{\lambda\rho}\mathcal{R}^{\lambda\rho}{}_{\mu\nu} - \frac{4}{3}\mathcal{R}^{\mu\nu\alpha\beta}\mathcal{R}_{\nu\lambda\beta\rho}\mathcal{R}^\lambda{}_\mu{}^\rho{}_\alpha) \\ &\quad \left. + (B - \text{field}; \text{dilaton})\right\} + \mathcal{O}(\alpha'^3)\end{aligned}\quad (8.5. 87)$$

这里的场强是所谓的非线性场强:

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - g_{YM}[A_\mu, A_\nu] \quad (8.5. 88)$$

而引力场绕闵氏背景展开如下:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \kappa h_{\mu\nu} \quad (8.5. 89)$$

含更高质量纲的算符形如 $\alpha'\text{Tr}(F^3)$ 与 $\alpha'\mathcal{R}^2$, 不包含快子或其他质量非零态. 这是我们利用路径积分处理掉所有质量非零态导致的结果. 从对 α' 泰勒展开的角度, 无量纲曼德尔施塔姆变量 $\alpha'p_i \cdot p_j \ll 1$, 所有质量非零的态均反比于 α' , 因而变得级大. 对应于弦振幅 α' 展开的低能有效作用量可以在路径积分中将 $\hat{\varphi}$ 代表的有质量自由度积掉来得到:

$$\int D[\hat{\varphi}_{m^2 \neq 0}]D[\varphi_{m^2=0}]e^{-S_{bos}^{exact}[\varphi, \hat{\varphi}]} = \int D[\varphi_{m^2=0}]e^{-S_{bos}^{eff}[\varphi]} \quad (8.5. 90)$$

有效场论的一般思想是把精确拉格朗日量 (这里指 $S_{bos}^{exact}[\varphi, \hat{\varphi}]$) 看作是目前无法验证的, 而把确定精确到能量尺度固定阶次的有效拉格朗日量 $S_{bos}^{eff}[\varphi]$ 设定为研究对象. 有效场论方法允许我们基于量子场论方法在大型强子对撞机能量尺度上进行预测. 因此, 人们无法根据大型强子对撞机实验来探测普朗克尺度物理学. 因为这些实验只能用来逐阶固定有效拉格朗日中的参数. 考虑这种限制在弦振幅中的一个例子: 韦内齐亚诺振幅中的因子 $\Gamma(1+s)$ 的 α' 展开无法感知 Γ 函数整体在 $s \in -\mathbb{N}$ 处的极点.

8.5.1 四点 α' 展开

除去前述三点的例子以外, 开玻色弦与闭玻色弦的有效相互作用可以利用黎曼 ζ 值 (Riemann ζ value) 表示. 权 (weight) 为 n 的 ζ 值定义为:

$$\zeta_n = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^n}, \quad n \geq 2 \quad (8.5. 91)$$

无质量四胶子振幅是洛伦兹不变量 $(\varepsilon_i \cdot \varepsilon_j)(\varepsilon_i \cdot p_j)$ 和 $s_{ij} = 2\alpha' p_i \cdot p_j$ 的有理函数. 关于极化的依赖性可以直接由顶角算符 OPE 进行确定, 这与三点是一致的. 而每一项都会包含积分, 并最终得到欧拉 β 函数, 可以基于黎曼 ζ 值展开为如下形式:

$$\begin{aligned} \frac{\Gamma(1+s)\Gamma(1+t)}{\Gamma(1+s+t)} = & 1 - \zeta_2 st - \zeta_4 st(s^2 + \frac{1}{4}st + t^2) + \zeta_2 \zeta_3 s^2 t^2 u \\ & - \zeta_5 stu(s^2 + st + t^2) + \mathcal{O}(\alpha'^6) \end{aligned} \quad (8.5. 92)$$

无论被积函数中 z_2 与 $(1-z_2)$ 的阶次如何, 我们总可以通过反复利用 $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ 从 Γ 函数中提取 $1+s$, $1+t$ 以及 $1+s+t$, 并得到 s 和 t 的有理函数. 欧拉 β 函数的 α' 展开中 α' 的阶数与 ζ 的阶数相等, 这种性质被称为均匀超越 (uniformly transcendental). 与之相似地, 四引力子振幅的球面积分也有类似的展开:

$$\frac{\Gamma(1+\frac{s}{4})\Gamma(1+\frac{t}{4})\Gamma(1+\frac{u}{4})}{\Gamma(1-\frac{s}{4})\Gamma(1-\frac{t}{4})\Gamma(1-\frac{u}{4})} = 1 - 2\zeta_3 stu - 2\zeta_5 stu(s^2 + st + t^2) + \mathcal{O}(\alpha'^6) \quad (8.5. 93)$$

这一展开同样是均匀超越的, 但不存在 ζ_2 与 ζ_4 .

在将四胶子振幅中的欧拉 β 函数作为因子提取出来后, 剩余的部分会自然成为 α' 的级数, 由顶角算符 OPE 得到, 是 s 和 t 的有理函数, 并可能包含几何级数 (geometric series) $(1-s)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} s^k$. 但这其中一定不含 ζ . 于是有:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{bos}^{tree}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4; \alpha') = & \frac{\Gamma(1+s)\Gamma(1+t)}{\Gamma(1+s+t)} \\ & \times \underbrace{\left\{ \mathcal{A}_{YM}^{tree}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4) + \alpha' \mathcal{A}_{YM+F^3}^{tree}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4) + \mathcal{O}(\alpha'^2) \right\}}_{no \ \zeta} \end{aligned} \quad (8.5. 94)$$

与我们期望的一致, 领头阶的确可以复现色排序四点杨米尔斯振幅 \mathcal{A}_{YM}^{tree} . 次领头阶的 $\mathcal{A}_{YM+F^3}^{tree}$ 则来自于 $\alpha' g_{YM} \text{Tr}(F^3)$ 项对应的费曼图, 而这其中既包含两个三顶角分别为 $\alpha' \partial^3 A^3$ 和杨-米尔斯相互作用项 $A^2 \partial A$ 的四点图, 也包含直接来自于 $\text{Tr}(F^3)$ 中非线性场强贡献的四顶角的四点图. 所以我们称其为 $YM + F^3$.

而 $+\mathcal{O}(\alpha'^2)$ 项则对应始于 $\alpha'^2 \text{Tr}(F^4)$ 的更高阶算符, 且系数中均没有 ζ . \mathcal{A}_{YM}^{tree} 中的交叉项与 Γ 函数展开的次领头阶 $-\zeta_2 st$ 会共同贡献 $\alpha'^2 \text{Tr}(F^4)$, 但要注意这里存在 ζ , 因此两种 $\alpha'^2 \text{Tr}(F^4)$ 并不会彼此混杂. 由 $\zeta_2 = \frac{\pi^2}{6}$, 我们得到, 这一项对应的低能有效拉氏量为:

$$\mathcal{L}_{op-bos} = \dots + \frac{(\pi\alpha')^2}{2} \text{STr}(F_\mu{}^\nu F_\nu{}^\lambda F_\lambda{}^\rho F_\rho{}^\mu - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} F_{\lambda\rho} F^{\lambda\rho}) + \dots \quad (8.5.95)$$

其中 STr 指求迹并对称化, 具体来说便是在求迹的基础上对四个詹-佩顿矩阵 $T^a \in U(N)$ 的顺序做对称化. 此外, 注意到两个三顶角均为 $\alpha' \text{Tr}(F^3)$ 的四点振幅同样对 α'^2 阶存在贡献.

8.5.2 更高阶

对于 Γ 函数来说, 对 α' 的展开可以直接写为:

$$\frac{\Gamma(1+s)\Gamma(1+t)}{\Gamma(1+s+t)} = \exp\left(\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\zeta_n}{n} (-1)^n [s^n + t^n - (s+t)^n]\right) \quad (8.5.96)$$

我们在上一节给出的 eq. (8.5.92) 实际上是上式的泰勒展开. 我们可以从这里得到无穷多个有效相互作用:

$$(\alpha')^w \zeta_{w_1} \zeta_{w_2} \dots \zeta_{w_m} \text{Tr}(D^{2(w-2)} F^4), \quad \sum_{j=1}^m w_j \leq w \quad (8.5.97)$$

其中 D_μ 为协变导数算符, (α') 的阶数有两个来源: 既可以来自于 eq. (8.5.94) 中的黎曼 β 函数, 也可以来自于提取出黎曼 β 函数因子后花括号中场振幅的 (α') 非零阶. 因此, $\sum_{j=1}^m w_j = w$ 时, 所有的 (α') 均来自于黎曼 β 函数, 对应于 eq. (8.5.94) 花括号中的 \mathcal{A}_{YM}^{tree} , 此时 α' 的阶数与 ζ 的权之和相等. 而花括号中的更高阶则对应于满足 $\sum_{j=1}^m w_j < w$ 的算符.

包含 $F^{n \geq 5}$ 的算符一定对四点振幅无贡献. 因此这样的算符只能从高点振幅确定. 这些算符形如 $(\alpha')^w \text{Tr}(D^{2(w-3)} F^5)$ 和 $(\alpha')^w \text{Tr}(D^{2(w-4)} F^6)$ 等. 例如, 有效作用量中 $\zeta_3 \alpha'^3$ 和 $\zeta_4 \alpha'^4$ 的完整系数为下述算符:

$$\zeta_3 \alpha'^3 \text{Tr}(D^2 F^4 + F^5), \quad \zeta_4 \alpha'^4 \text{Tr}(D^4 F^4 + D^2 F^5 + F^6) \quad (8.5.98)$$

如前述讨论, 这些都是对应于 \mathcal{A}_{YM}^{tree} 的相互作用.

我们可以用同样的方法分析闭弦有效作用量中的引力. 黎曼 β 函数展开的次领头阶属于如下形式的有效算符:

$$\zeta_3 \alpha'^3 \mathcal{R}^4, \quad \zeta_5 \alpha'^5 (D^4 \mathcal{R}^4 + D^2 \mathcal{R}^5 + \mathcal{R}^6) \quad (8.5. 99)$$

一般来说, $(n \geq 5)$ 点振幅的 α' 展开会包含所谓的多元 ζ 值 (multiple ζ values), 常常简记为 MZV, 定义如下:

$$\zeta_{n_1, n_2, \dots, n_r} = \sum_{0 < k_1 < k_2 < \dots < k_r} k_1^{-n_1} k_2^{-n_2} \dots k_r^{-n_r}, \quad n_r \geq 2 \quad (8.5. 100)$$

这是将黎曼 ζ 值推广至多个参数 $n_j \in \mathbb{N}$ 的结果, $\zeta_{n_1, n_2, \dots, n_r}$ 的权为 $\sum_{j=1}^r n_j$, r 称为深度 (depth).

8.5.3 顶角算符与振幅的归一化

我们前面的归一化系数可以归结为:

- 只与世界面拓扑有关而与态无关的归一化系数 (例如对盘面与球面分别有 \mathcal{N}_{D^2} 和 \mathcal{N}_{S^2}).
- 对每种顶角算符 $V_\Phi(z)$ 均存在的不同归一化系数 g_Φ

这些系数在振幅中出现的方式相同, 这里以 m 快子和 $n-m$ 引力子的 n 点树级闭弦振幅为例:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{cl-bos}^{tree}(\{T_1, \dots, T_m, \zeta_{m+1}, \dots, \zeta_n\}; \alpha') &= \mathcal{N}_{S^2}(g_T)^m (g_\zeta)^{n-m} \\ &\times \int \frac{d^2 z_1 \dots d^2 z_n}{Vol(SL(2; \mathbb{C}))} \left\langle \prod_{j=1}^m : e^{ip_j \cdot X(z_j)} : \prod_{k=m+1}^n \zeta_k^{\mu_k \nu_k} : i \partial_z X_{\mu_k} i \partial_{\bar{z}} X_{\nu_k} e^{ip_j \cdot X(z_j)} : \right\rangle \end{aligned}$$

我们可以从胶子与引力子振幅中确定所有归一化系数, 具体的方法是: 对正确归一化的弦振幅, 在取 $\alpha' \rightarrow 0$ 极限后应当复现场论振幅的结果. 例如对开弦:

$$\lim_{\alpha' \rightarrow 0} \mathcal{N}_{D^2}(g_\epsilon)^3 (2\alpha')^2 [(\epsilon_1 \cdot \epsilon_2)(\epsilon_3 \cdot p_1) + cyc(1, 2, 3)] = \mathcal{A}_{YM}^{tree}(\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3) \quad (8.5. 101)$$

上式与上式四点类比联立求解, 我们便得到了 g_ϵ 和 \mathcal{N}_{D^2} 的具体形式:

$$g_\epsilon = g_{YM}, \quad \mathcal{N}_{D^2} = \frac{2}{(2g_{YM}\alpha')^2} \quad (8.5. 102)$$

我们可以用同样的方法给出 g_ζ 和 \mathcal{N}_{S^2} 关于弦长参数 α' 和引力耦合常数 κ 的依赖关系.

但是对于有质量物理态 Φ 的顶角算符 V_Φ , 我们便不能再用房论极限的方法进行归一化. 这里我们需要用到么正性来确定 g_Φ . 如图 8.5.3 所示, 左侧的无质量四点振幅已归一化, 它在 $s + N$, $N \geq -1$ 处存在极点. 由么正性, 振幅在这些极点处的留数必然为三点振幅的乘积. 每一个极点对应于右侧求和中的一项. 例如, 我们可以通过分析 $N = -1$ 处的极点来确定闭弦快子态的归一化系数 g_T .

$$\text{Res}_{(s=-4N)} \begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \\ \text{---} \\ \diagup \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} \frac{1}{s+m_{int}^2/\alpha'} \\ \text{---} \\ \diagdown \\ 3 \\ \diagup \\ 4 \end{array} = \sum_{m_\Phi^2 = \frac{4N}{\alpha'}} \begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \\ \text{---} \\ \diagup \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} \Phi_N \\ \text{---} \\ \diagdown \\ 3 \\ \diagup \\ 4 \end{array} \times \begin{array}{c} \text{---} \\ \diagdown \\ 3 \\ \diagup \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \Phi_N \end{array}$$

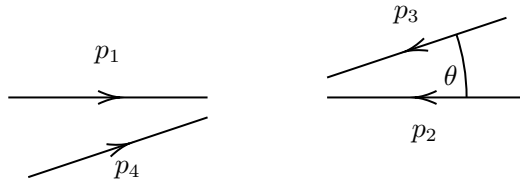
8.6 弦振幅的高能极限

下面我们基于闭弦快子振幅来讨论振幅在高能极限下的有趣性质. 我们首先讨论 s/t 不变, 但 $s, t \rightarrow \infty$ 的极限. 在这个极限中, 所有交换的动量都变得很大. 它对应于入射和出射粒子之间的角度 θ 不变的高能散射. 我们稍后会给出关于 θ 的依赖关系.

为了便于理解, 我们考虑无质量粒子 (虽然我们前述给出的振幅是针对快子的, 但同样的讨论对无质量粒子也适用). 我们将入射和出射的动量分别取为:

$$\begin{aligned} p_1 &= \frac{\sqrt{s}}{2}(1, 1, 0, \dots) \quad , \quad p_2 = \frac{\sqrt{s}}{2}(1, -1, 0, \dots) \\ p_3 &= \frac{\sqrt{s}}{2}(1, \cos \theta, \sin \theta, \dots) \quad , \quad p_4 = \frac{\sqrt{s}}{2}(1, -\cos \theta, -\sin \theta, \dots) \end{aligned}$$

图示如下:



我们可以清楚地看到, 在 s/t 固定的情况下, 取极限 $s \rightarrow \infty$ 和 $t \rightarrow \infty$, 散射角 θ 也保持不变.

我们可以用:

$$\Gamma(1+x) \sim \exp(x \ln x) \quad (8.6.103)$$

来计算这个极限下的散射振幅. 我们绕过极点取 $s \rightarrow \infty$ (我们可以通过将 $s \rightarrow \infty$ 向虚部稍微偏转一点的方向取极限来实现这一点). 我们很容易就能发现, 在趋向高能极限的过程中, 振幅会以指数形式被迅速压低:

$$\mathcal{M}_{cl-bos}^{tree}(4pt) \sim \exp\left(-\frac{1}{2}(s \ln s + t \ln t + u \ln u)\right) \quad s \rightarrow \infty \quad (8.6. 104)$$

而同样的结论也可以通过球面积分的鞍点 (saddle-point) 近似得到.

鞍点近似法 (saddle point approximation)

所谓的鞍点近似是一种利用被积函数鞍点值替代复积分的方法, 是积分近似众多手段中相当强大的一种.

准确来说, 我们以复平面内的如下积分为例:

$$I(\lambda) = \int_C dz e^{\lambda g(z)} \quad (8.6. 105)$$

鞍点近似法适用的要求是 λ 为正的大实数, 且 $g(z)$ 解析. 我们考虑的就是上面的积分在这种极限下的渐进行为 (asymptotic behavior). 首先, 作为解析函数 $g(z)$ 一定是复值的, 我们无法定义 $g(z)$ 的极值点, 因此只能定义被积函数的鞍点 $z = z_0$:

$$\left. \frac{\partial}{\partial z} e^{\lambda g(z)} \right|_{z=z_0} = 0 \quad (8.6. 106)$$

接下来我们将积分路径做变形, 使 C 经过鞍点, 并且沿着最速下降 (the steepest descent) 的方向离开鞍点. 所谓最速下降的方向实际上指的是 $g(z)$ 实部减小最快的方向, 可以利用复数的极坐标形式:

$$g''(z_0) \equiv |g''(z_0)|e^{i\alpha}; \quad z - z_0 \equiv \rho e^{i\theta} \quad (8.6. 107)$$

进行定义. 首先沿最速下降的方向将被积函数 $e^{\lambda g(z)}$ 展开为:

$$\exp[\lambda g(z)] = \exp[\lambda g(z_0) + \frac{1}{2}\lambda g''(z_0)(z - z_0)^2 + \dots] \quad (8.6. 108)$$

其中一阶导数项由于鞍点的性质为 0. 保留至二次项的形式近似为一个高斯函数.

接下来我们可以将上式化为极坐标形式:

$$\begin{aligned}
 \lambda g(z) &= \lambda g(z_0) + \frac{1}{2} \lambda g''(z_0) (z - z_0)^2 + \dots \\
 &= \lambda g(z_0) + \frac{1}{2} \lambda |g''(z_0)| \rho^2 e^{i(\alpha + 2\theta)} + \dots \\
 &= \lambda g(z_0) + \frac{1}{2} \lambda |g''(z_0)| \rho^2 [\cos(\alpha + 2\theta) + i \sin(\alpha + 2\theta)] + \dots
 \end{aligned} \tag{8.6. 109}$$

观察实部, 我们得到, $g(z)$ 的实部在 $\alpha + 2\theta = 2n\pi$ 时增长最快, 在 $\alpha + 2\theta = (2n + 1)\pi$ 时减小最快, 由此给出最速下降的方向为:

$$\theta = \frac{(2n + 1)\pi - \alpha}{2} \tag{8.6. 110}$$

其中 α 为 $g''(z_0)$ 的辐角 (argument), 记作 $\arg(g''(z_0))$.

所谓的鞍点近似便是将整个积分的值用 eq. (8.6. 108) 高斯函数形式的近似取代. 利用高斯函数的定义, 高斯函数的宽量为 $\mathcal{O}(1/\sqrt{\lambda})$, 因此 λ 越大, 高阶修正的影响越小, 这也就是我们先前给出的近似成立要求 λ 极大的来源. 最后, 将 eq. (8.6. 108) 代回 eq. (8.6. 105), 我们便得到:

$$I(\lambda) = e^{i\theta} \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda |g''(z_0)|}} e^{\lambda g(z_0)} [1 + \mathcal{O}(1/\lambda)] \tag{8.6. 111}$$

我们可以对 Γ 函数的复积分形式应用鞍点近似法得到斯特林近似 (Stirling approximation):

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \Gamma \sim e^{-x} x^{x-1/2} \tag{8.6. 112}$$

这是一个略强于 eq. (8.6. 103) 的近似. 计算留作习题接下来我们将鞍点近似应用于闭弦振幅的被积函数. 首先, 鞍点 $z_2 = z_*$ 满足:

$$\left. \frac{\partial}{\partial z_2} |z_2|^{s/2} |1 - z_2|^{t/2} \right|_{z_2=z_*} = 0 \tag{8.6. 113}$$

解得 $z_* = -\frac{s}{u}$ 代回振幅的积分形式并应用鞍点近似, 有:

$$\int_C d^2 z_2 |z_2|^{s/2} |1 - z_2|^{t/2} \rightarrow |z_2|^{s/2} |1 - z_2|^{t/2} \Big|_{z_2=z_*} = |s|^{s/2} |t|^{t/2} |u|^{-s/2-t/2} \tag{8.6. 114}$$

于是我们又得到了指数压低形式的高能极限.

弦振幅高能极限的角度依赖

前面我们的讨论固定了动量之间的夹角, 即固定了 s/t 接下来我们将利用 eq. (8.6. 103) 中的参数化讨论弦振幅高能极限对夹角的依赖. 我们可以将 s, t, u 均表示为 s 与 θ 的形式:

$$\begin{aligned} t = \alpha' (p_1 + p_4)^2 &= \alpha' \left(-\frac{s}{\alpha'} \right) \left(0, \frac{1 + \cos(\theta)}{2}, \frac{\sin(\theta)}{2}, 0, \dots \right)^2 = -s \cos^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) \\ u = -s - t &= -s \cos^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) \end{aligned} \quad (8.6. 115)$$

代回闭弦振幅的高能极限, 我们得到:

$$\mathcal{M}_{cl-bos}^{tree}(4pt) \sim \exp \left(-\frac{s}{2} \left[\cos^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) \ln \left(\cos^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) \right) + \sin^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) \ln \left(\sin^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) \right) \right] \right) \quad (8.6. 116)$$

这便是高能极限下弦振幅关于动量夹角的依赖关系.

弦振幅高能极限的性质

我们发现 eq. (8.6. 104) 中的指数式衰减比任何场论振幅都快得多, 因为场论振幅在趋近高能极限时充其量是以幂函数的方式衰减, 糟糕的甚至会发散. 例如, 单独考虑 eq. (8.2. 30) 中涉及自旋 $2n$ 粒子交换的 s 道过程的项. 我们可以看到, 自旋 2 粒子的交换会导致高能极限下的发散. 这对应于我们已经知道的引力相互作用: 四维中的无量纲耦合为 $G_N E^2$ 的形式, 当趋向高能极限时, 它会趋于无穷. 高自旋粒子的交换则会导致更严重的发散. 如果我们在任何有限的 n 处截断 eq. (8.2. 30) 中的无限求和, 得到的结果都会发散. 但是无限求和可以做到有限求和做不到的事情, 而且振幅 eq. (8.6. 104) 的最终行为比求和中的任一项都要好得多. 因此, 弦理论中无限多种粒子的出现使得某一种粒子引起的任何发散都弱化为有限的结果.

从粒子的 s 道交换的角度来看, 弦理论的高能行为似乎有些不可思议. 但从另一个角度来看, 这一切都非常显然. 散射振幅的幂函数行为是点粒子 (例如电动力学中的点电荷) 的特征. 但是, 弦当然不是点状物体, 它的尺度与 $\sqrt{\alpha'}$ 相当, 在 $\sqrt{\alpha'}$ 的尺度观察弦, 我们会看到一个模糊的具有空间尺度的对象. 这可以定性地解释振幅在高能下表现良好的原因. 事实上, 这种认为有一定尺度的光滑物体在高能下给出呈指数衰减的散射振幅的观点在非相对论量子力学中便出现过. 例如, 考虑高斯势对粒子的散射作用. 我们可以利用玻恩近似 (Born approximation) 求解非齐次亥姆霍兹方程 (Helmholtz Equation). 而在玻恩近似中, 微分截面是由傅立叶变换给出的, 变换的结果仍是高斯函数, 其在动量趋于无穷大时以指数形式衰减, 这里的高斯势就是带有一定空间尺度分布的对象.

指数衰减行为与幂函数行为的讨论可以追溯至原子结构的汤姆逊模型 (Thomson model) 和卢瑟福模型 (Rutherford model) 的争论. 盖革 (Geiger), 马斯顿 (Marsden) 和 卢瑟福 (Rutherford) 所做的 α 粒子轰击金箔散射实验最终得到的结果是幂函数形式, 于是得到正电荷出现在点状的原子核上而非弥散于原子内的结论. 我们不妨假设我们用于轰击的能量极大, 以致于观察到的相互作用尺度小于质子中子, 甚至夸克, 此时如果弦理论可以正确描述物理规律, 那么我们应当可以观察到指数形式的衰减行为, 即出现了带有空间尺度, 不能被视为点粒子的散射对象.

我们在前面已经看到, 量子引力理论应该有一个 "最小长度". 这个长度有时被认为是普朗克尺度, 这在弦理论中大体上是正确的, 这一最小长度在不同问题中以不同的方式出现. 上面的讨论就是其中一个例子: 弦无法探测短于 $l_s = \sqrt{\alpha'}$ 的距离尺度, 原因很简单, 弦在这个尺度上本身就是模糊的. 事实证明, D -膜能更好地探测亚弦尺度的物理, 并为时空的短距离结构提供不同的视角. 我们还将 9.8 节看到弦理论最小尺度的另一种表现形式.

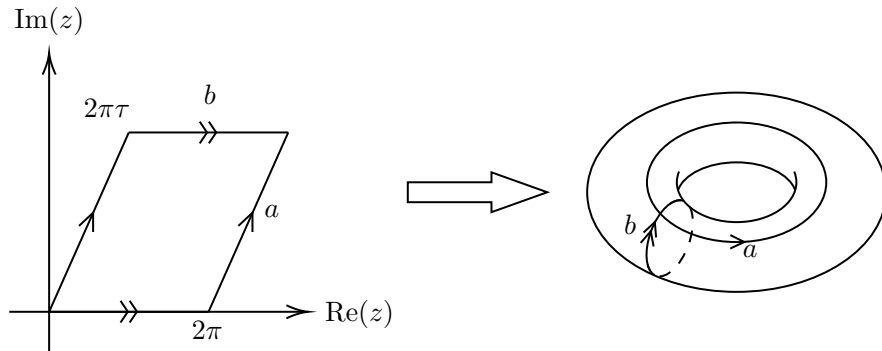
8.7 一圈弦振幅

现在我们回到闭弦, 讨论单圈的弦振幅. 如上所述, 这相当于一个具有环面拓扑结构的世界面, 我们需要对环面上的所有度规进行积分.

对于树级过程, 我们使用微分同胚和外尔变换将球面上的任意度规映射为平面上的平直度规. 而这次, 我们利用这些变换将环面上的任意度规映射为环面上的平直度规. 但这其中又出现了一个新的问题: 并非所有环上的平直度规都是等价的.

8.7.1 环面的模空间 (moduli space)

这里让我们来解释一下: 如图所示, 我们可以通过以合适的方式粘接 z 复平面上的一个



区域的边来构造一个环面, 这里我们把两条对边分别同向粘和, 便可得到环面. 一般来说, 这种粘接由一个的复数参数确定, 即 $\tau \in \mathbb{C}$.

$$z \equiv z + 2\pi, \quad z \equiv z + 2\pi\tau$$

这里注意, 不要将 τ 与世界面时间坐标混淆: 我们在引入共形场论工具之后就不再使用这一坐标了. 这里涉及到的都是带欧氏度规的世界面, τ 只是一个参数, 告诉我们环面对应的复平面中区域的倾斜程度. 现在, 平直环面上的度规简单来说就是对:

$$ds^2 = dzd\bar{z}$$

进行上述粘和之后的结果

对于某个固定的 τ 值, 环上的一般度规总是可以转化为平直度规. 但我们感兴趣的问题是, 以不同的 τ 为参数的两个环是否共形等价? 一般来说, 答案是否定的. 以 τ 为参数, 互相不满足共形等价的环面构成的空间被称为模空间 (moduli space), 记作 \mathcal{M} .

然而, 有一些 τ 值确实对应于相同的环面. 并且, 有几种显然的方法可以在不改变环面的前提下改变 τ . 它们分别被称为 S 和 T 变换:

- $T: \tau \rightarrow \tau + 1$: 这显然会得到同一个环面, 因为现在的粘接是:

$$z \equiv z + 2\pi; \quad z \equiv z + 2\pi(\tau + 1) \equiv z + 2\pi\tau$$

- $S: \tau \rightarrow -1/\tau$: 例如, 如果 $\tau = ia$ 是纯虚的, 那么变换为 $\tau \rightarrow i/a$. 这一变换后的环面与原环面的等价性并不显然, 我们接下来说明这件事.

环面可以沿如 8.7.1 图所示的 a, b 切开得到左侧的平行四边形. 于是, 将平行四边形任一组对边的其中一条边平移与其长度相等的距离, 得到新平行四边形后以与之前相同的方式重新粘接, 这等价于将环面的切口旋转一周后重新粘接⁹, 如下图所示. 而对于平行四边形的两条对边我们都可以进行这样的扭转, 其中对 b 边的扭转, 由上述讨论, 显然由 T 变换生成, 而对 a 边的扭转则等价于 TST 变换 $\tau \rightarrow \tau/\tau + 1$. 这是因为 τ 实际上是两个复变量的比值, 这两个复变量分别描述 a 与 b 边在复平面上的方向. 而两环面等价与否只取决于 a 与 b 的夹角, 于是我们始终要求 b 边落在实轴上以简化讨论. 因此当我们再对 a 扭转进行共形变换使之满足 b 边落在实轴上的要求时, 不难发现, a 扭转等价于 $\tau \rightarrow \tau/\tau + 1$ 变换, 即 TST 变换. 环面只有两种扭转方式, 由于 T 生成 b 扭

⁹注意这里与克莱因瓶 (Klein bottle) 的区别, 克莱因瓶要求对边反向粘接, 即改变箭头方向, 这与我们的操作完全无关.

转, 我们用 S 来表征对应于 a 扭转的 TST 变换.

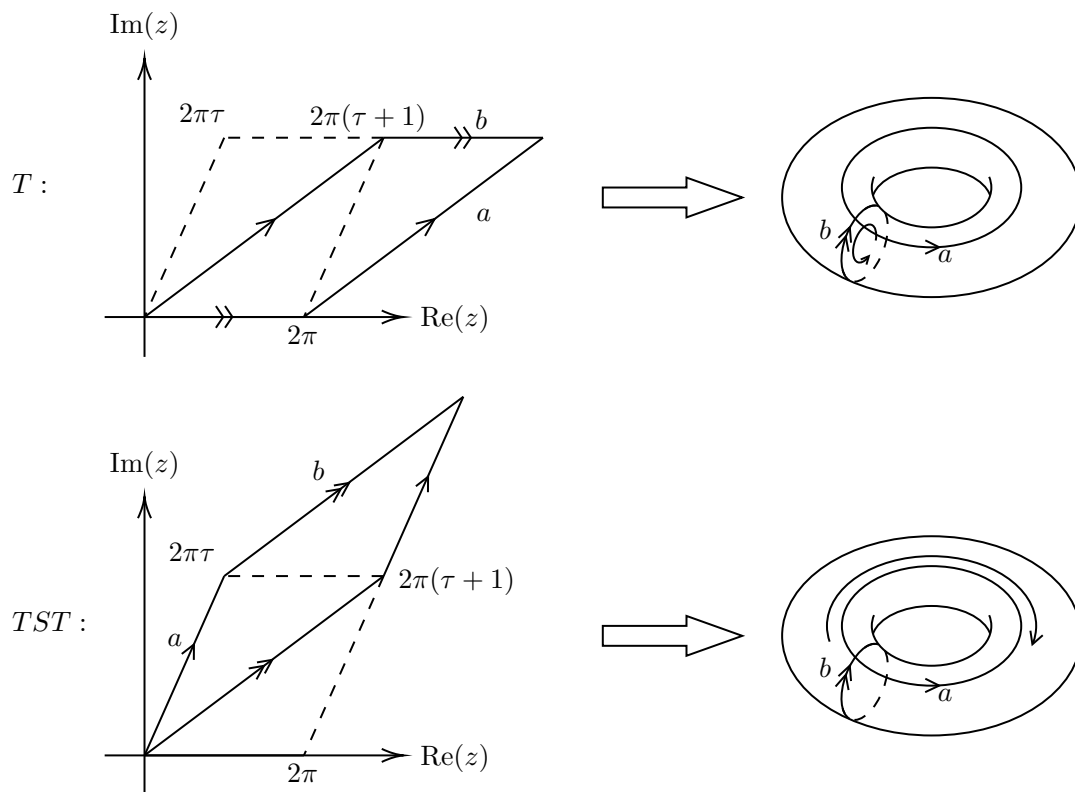


Figure 8.10: 两种变换

于是我们知道, 只有两种变换 S 和 T 变换能使环面保持不变. 它们有时也被称为模变换 (modular transformations). 而 S 和 T 经过组合可以生成一般形式的模变换, 其形式如下:

$$\tau \rightarrow \frac{a\tau + b}{c\tau + d}; \quad ad - bc = 1 \quad (8.7.117)$$

其中 $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$. 这正是 $SL(2; \mathbb{Z})$ 群¹⁰. 环面的模空间 \mathcal{M} 为:

$$\mathcal{M} \cong \mathbb{C}/SL(2; \mathbb{Z})$$

¹⁰与我们先前提及的 $SL(2; \mathbb{C})$ 群一样, 我们这里也有一个实际上无害的 \mathbb{Z}_2 , 这个群实际上是 $PSL(2; \mathbb{Z}) = SL(2; \mathbb{Z})/\mathbb{Z}_2$.

那么这个空间有什么特征? 利用 $T: \tau \rightarrow \tau + 1$, 我们总可以将 τ 移动至下面的区域中:

$$\operatorname{Re} \tau \in \left[-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\right]$$

且这一区间的边缘已被粘合. 同时, $S: \tau \rightarrow -1/\tau$ 将 τ 的模长 $|\tau|$ 取倒数, 因此我们可以用它把圆内的点 $|\tau| < 1$ 映射到圆外的点 $|\tau| > 1$. 我们可以证明, 通过 S 和 T 的相继作用, 我们总可以将任意点映射到 8.11 图中所示的阴影区域内, 其定义为:

$$|\tau| \geq 1; \quad \operatorname{Re} \tau \in \left[-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\right]$$

这就是 $SL(2; \mathbb{Z})$ 的基本域 (fundamental domain).

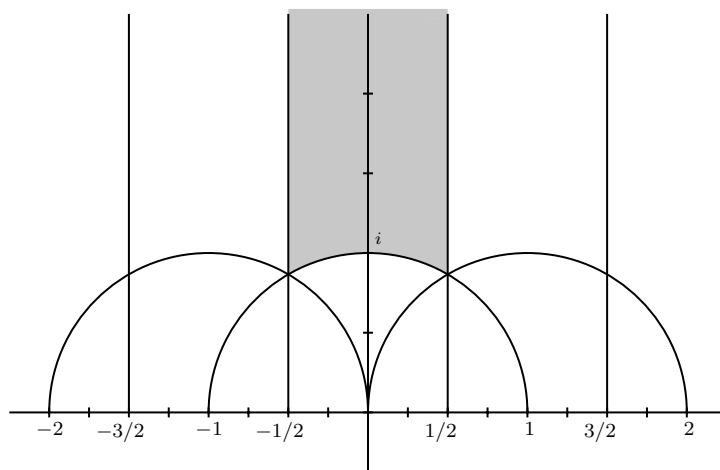


Figure 8.11: $SL(2; \mathbb{Z})$ 的基本域

我们完全可以相当任意地选择 8.11 图中所示的其他基本域, 但取阴影区域是标准取法.

模空间上的积分

在弦理论中, 我们要对所有度规求和. 而在利用规范固定微分同胚和外尔不变性之后, 我们仍然需要对所有不等价环面进行积分. 换句话说, 我们要对整个基本域进行积分. 基本域上的 $SL(2; \mathbb{Z})$ 不变积分测度是:

$$\int \frac{d^2 \tau}{(\operatorname{Im} \tau)^2}$$

为证明这是 $SL(2; \mathbb{Z})$ 不变的, 我们用形如 eq. (8.7. 117) 的一般变换进行作用, 得到:

$$d^2\tau \rightarrow \frac{d^2\tau}{|c\tau + d|^4}; \quad \text{Im } \tau \rightarrow \frac{\text{Im } \tau}{|c\tau + d|^2}$$

这些相当数学化的陈述中其实隐藏着一些物理学原理. 弦理论中对基本域的积分类似于量子场论中对动量的圈积分, 以 $\text{Re } \tau = 0$ 的方形区域粘接的环面为例, 满足 $\text{Im } \tau \rightarrow \infty$ 的环面形状扁平, 它们对应于费曼图中圈动量的红外区域. 而 $\text{Im } \tau \rightarrow 0$ 对应的环面则是又细又长的. 它们对应于费曼图中紫外极限下的圈动量. 然而, 正如我们在基本域示意图中所看到的, 我们不应该对圈的这些紫外线区域进行积分, 因为基本域并没有向下延伸到原点附近. 或者, 更确切地说, 在 S 映射和 T 映射的交替作用下, 形状细长的环面最终总会被映射为形状相对扁平的环面. 换句话讲, 弦的紫外性质与红外性质总是紧密关联的. 这是弦理论良好紫外性质的又一说明. 我们将在 8.7.2 节的例子中更清楚地看到这一点.

最后, 在弦理论中计算圈振幅时, 我们还需要考虑我们尚未固定的冗余规范对称性, 即描述冗余规范对称性的共形基灵群. 在球面上的树级振幅中, 共形基灵群是 $SL(2; \mathbb{C})$. 而对于环面, 共形基灵群是 $U(1) \times U(1)$, 显然由生成元 ∂_z 和 $\bar{\partial}_{\bar{z}}$ 生成.

更高圈的世界面

可以证明亏格 $g > 1$ 的黎曼面的模空间 \mathcal{M}_g 的维数为:

$$\dim \mathcal{M}_g = 3g - 2$$

当 $g > 1$ 时, 不存在共形基灵向量. 这些事实可以通过应用黎曼-罗赫定理 (Riemann-Roch theorem) 来证明.

8.7.2 一圈配分函数

我们不会具体计算弦理论中的一圈散射振幅, 而是给出一些更简单的东西: 真空的一圈修正, 也可以认为是真空到真空的一圈振幅, 即一圈配分函数. 具有周期性时间的欧氏世界面对应于柱面上的物理理论的有限温度配分函数. 在 $D = 26$ 维时空中, 它则与玻色弦理论中的宇宙常数有关.

首先考虑一个理论在由方形粘合的环面上的配分函数, 即 $\text{Re } \tau = 0$. 对欧氏时间取周期

为 $(\text{Im } \tau)$ 的紧致化, 这相当于考虑温度为 $T = 1/(\text{Im } \tau)$ 的物理理论.

$$Z[\tau] = \text{Tr } e^{-2\pi(\text{Im } \tau)H}$$

其中的 Tr 是对理论中所有态求迹. 对于定义在圆柱面上的共形场论, 哈密顿量由以下公式给出:

$$H = L_0 + \tilde{L}_0 - \frac{c + \tilde{c}}{24}$$

其中最后一项正是 5.5.2 节中计算的卡西米尔能.

那么在 $\text{Re } \tau \neq 0$ 的环面上计算出的真空振幅又该如何解释呢? 从图 8.2 中我们可以看到, τ 的非零实部的作用是将圆柱面的接口平移 $\text{Re } \tau$ 后再粘接. 而实现这种平移的算符是: $\exp(2\pi i(\text{Re } \tau)P)$, 其中 P 是圆柱面上的动量算符. 在映射到平面后, 就变成了旋转算符:

$$P = L_0 - \tilde{L}_0$$

因此, 环面上的真空振幅有对所有态以如下形式加权求和的物理解释:

$$Z[\tau] = \text{Tr } e^{-2\pi(\text{Im } \tau)(L_0 + \tilde{L}_0)} e^{-2\pi i(\text{Re } \tau)(L_0 - \tilde{L}_0)} e^{2\pi(\text{Im } \tau)(c + \tilde{c})/24}$$

我们改记:

$$q = e^{2\pi i \tau}, \quad \bar{q} = e^{-2\pi i \bar{\tau}}$$

于是配分函数可以简写为:

$$Z[\tau] = \text{Tr } q^{L_0 - c/24} \bar{q}^{\tilde{L}_0 - \tilde{c}/24}$$

接下来对自由弦计算一圈配分函数. 我们知道, 每个标量场 X 都会分解成一个零模和无数个谐振模 α_{-n} , 这些振动模式会产生能量为 n 的态. 我们很快就会讨论零模, 但现在, 我们把重点放在谐振模上, 用算符 α_{-n} 作用 d 次会产生能量为 dn 的态. 这就为 $\text{Tr } q^{L_0}$ 产生了形式如下的贡献:

$$\sum_{d=0}^{\infty} q^{nd} = \frac{1}{1 - q^n}$$

但单个标量场的福克空间是由所有 $n \in \mathbb{Z}^+$ 的谐振模的作用构造的. 因此, 再包括中心荷 $c = 1$ 的贡献, 单个标量场振荡模的贡献为:

$$\text{Tr } q^{L_0 - c/24} = \frac{1}{q^{1/24}} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 - q^n}$$

$\bar{q}^{\tilde{L}_0 - \tilde{c}/24}$ 部分也有类似的表达式. 我们接下来考虑来自标量场零模 p 的贡献: 它对世界面上态的能量 H 的贡献是:

$$\frac{1}{4\pi\alpha'} \int d\sigma (\alpha' p)^2 = \frac{1}{2} \alpha' p^2$$

配分函数中的迹要求我们对所有态求和, 即:

$$\int \frac{dp}{2\pi} e^{-\pi\alpha' (\text{Im } \tau) p^2} \sim \frac{1}{\sqrt{\alpha' \text{Im } \tau}}$$

因此, 综合考虑零模和谐振模, 我们可以得到单个自由标量场的配分函数:

$$Z_{\text{scalar}}[\tau] \sim \frac{1}{\sqrt{\alpha' \text{Im } \tau}} \frac{1}{(q\bar{q})^{1/24}} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1-q^n} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1-\bar{q}^n} \quad (8.7. 118)$$

所有常数都包含在 \sim 中.

要建立弦的配分函数, 我们原则上应该在协变量子化下处理, 并将鬼场考虑在内. 但在这里, 我们为方便起见使用光锥规范, 这会带来一些问题, 因为如果我们老实地推理, 很多物理现象都会被推到光锥动量的 $p^+ = 0$ 极限, 而规范选择会在这一极限下崩溃. 因此, 我们只能放宽我们的要求.

在光锥规范中, 我们有 24 个谐振模和 26 个零模¹¹. 最后, 还有几步需要完成. 我们需要除以共形基灵群的体积, 即 $U(1) \times U(1)$ 的体积, 反映粘接处的平移. 于是群的体积就是 $\text{Vol} = 4\pi^2 \text{Im } \tau$. 最后, 再对环面的模空间进行积分. 我们忽略所有常数因子, 最终得到:

$$Z_{1\text{-loop}} = \int d^2\tau \frac{1}{(\text{Im } \tau)} \frac{1}{(\alpha' \text{Im } \tau)^{13}} \frac{1}{q\bar{q}} \left(\prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1-q^n} \right)^{24} \left(\prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1-\bar{q}^n} \right)^{24} \quad (8.7. 119)$$

有些文献与教材也将 eq. (8.7. 119) 称为一圈真空振幅, 并认为配分函数是 τ 积分的被积函数, 在这种定义下, 配分函数为:

$$Z'_{1\text{-loop}} = \frac{1}{(\text{Im } \tau)^{12}} \frac{1}{q\bar{q}} \left(\prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1-q^n} \right)^{24} \left(\prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1-\bar{q}^n} \right)^{24} \quad (8.7. 120)$$

¹¹ 这里我们没有要求能级匹配条件, 而实际上这正是计算中不严格的部分. 我们很快就会看到它的来源.

模不变量

标量场配分函数 eq. (8.7. 118) 中出现的函数实际上是如下戴德金 η 函数 (Dedekind η function) 的逆:

$$\eta(q) = q^{1/24} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n)$$

19 世纪, 对模变换 $T: \tau \rightarrow \tau + 1$ 和 $S: \tau \rightarrow -1/\tau$ 下函数性质感兴趣的数学家对戴德金 η 函数进行了研究, η 函数满足以下等式:

$$\eta(\tau + 1) = e^{2\pi i/24} \eta(\tau) \quad \text{and} \quad \eta(-1/\tau) = \sqrt{-i\tau} \eta(\tau)$$

这两个条件确保了标量配分函数 eq. (8.7. 118) 是一个模不变函数. 当然, 标量配分函数也必须满足模不变性: 这是物理理论必须满足的性质.

将弦的配分函数 eq. (8.7. 119) 写为 η 函数的形式, 我们有:

$$Z_{\text{string}} = \int \frac{d^2\tau}{(\text{Im } \tau)^2} \left(\frac{1}{\sqrt{\text{Im } \tau}} \frac{1}{\eta(q)} \frac{1}{\bar{\eta}(\bar{q})} \right)^{24} = \int \frac{d^2\tau}{(\text{Im } \tau)^2} \text{Im } \tau^{-12} |\eta(q)|^{-48} \quad (8.7. 121)$$

积分测度和被积函数都单独满足模不变性.

8.7.3 弦配分函数的含义

本节我们尝试用一些更简单的概念来理解弦的配分函数 eq. (8.7. 119) 的物理含义.

我们知道, 自由弦描述了无数个质量为 $m_n^2 = 4(n-1)/\alpha'$, $n = 0, 1, \dots$ 的粒子. 弦的配分函数应当等于对这些粒子构成的真空圈求和. 现在我们将证明它的确有这样的物理解释.

首先, 让我们分辨出单个粒子的贡献. 我们将考虑 D 维有质量的标量场 ϕ . 根据量子场论的讨论, 我们知道其配分函数为:

$$\begin{aligned} Z &= \int \mathcal{D}\phi \exp \left(-\frac{1}{2} \int d^D x \phi (-\partial^2 + m^2) \phi \right) \\ &\sim \det^{-1/2} (-\partial^2 + m^2) \\ &= \exp \left(\frac{1}{2} \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \ln(p^2 + m^2) \right) \end{aligned}$$

上式包含所有粒子数对应的真空圈. 而为了与弦的配分函数进行比较, 我们需要从中提

取单个粒子的真空振幅. 为做到这一点, 我们可以把场论配分函数写成:

$$Z = \exp(Z_1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{Z_1^n}{n!}$$

总和中的每项都对应于在真空圈中传播的 n 个粒子, 其中的 $n!$ 因子来自于玻色统计. 因此, 有质量的单个自由粒子的真空振幅简单来说就是:

$$Z_1 = \frac{1}{2} \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \ln(p^2 + m^2)$$

显然, 它在积分的紫外区, 即 $p \rightarrow \infty$ 发散. 我们可以用施文格参数化来重写这个积分. 利用下述等式:

$$\int_0^\infty dl e^{-xl} = \frac{1}{x} \Rightarrow \int_0^\infty dl \frac{e^{-xl}}{l} = -\ln x$$

然后, 单粒子配分函数便可以写为:

$$Z_1 = \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \int_0^\infty \frac{dl}{2l} e^{-(p^2 + m^2)l} \quad (8.7. 122)$$

值得一提的是, 还有另一种视角可以看出这是单粒子配分函数, 从原理上来说, 这实际上更接近我们在弦理论中的讨论. 我们可以从相对论点粒子作用量的一标架形式 eq. (2.2. 17) 开始. 将规范固定为 $e = 1$ 之后, eq. (8.7. 122) 中的指数就是穿越长度为 l 的圈的粒子带有的能量. 积分测度 dl/l 表示对圈的所有可能尺寸的求和.

我们可以在 eq. (8.7. 122) 中首先进行 $\int d^D p$ 积分. 忽略数值因子, 我们有:

$$Z_1 = \int_0^\infty dl \frac{1}{l^{1+D/2}} e^{-m^2 l} \quad (8.7. 123)$$

值得注意的是, 这里 $p \rightarrow \infty$ 带来的紫外发散已经变为与 $l \rightarrow 0$ 对应的小圈相关的发散.

方程 eq. (8.7. 123) 给出了质量为 m 的单个粒子的配分函数. 而在弦理论中, 我们预期质量为 m_n 的粒子会有无数种. 特别地, 考虑 $D = 26$, 配分函数为:

$$Z = \int_0^\infty dl \frac{1}{l^{14}} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-m_n^2 l}$$

但我们知道自由弦的质量谱: 它由算符 L_0 和 \tilde{L}_0 给出:

$$m^2 = \frac{4}{\alpha'}(L_0 - 1) = \frac{4}{\alpha'}(\tilde{L}_0 - 1) = \frac{2}{\alpha'}(L_0 + \tilde{L}_0 - 2)$$

能级匹配条件要求: $L_0 = \tilde{L}_0$. 要满足能级匹配条件很容易: 我们只需在积分中加入一个克罗内克 δ (Kronecker delta):

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-1/2}^{+1/2} ds e^{2\pi i s(L_0 - \tilde{L}_0)} = \delta_{L_0, \tilde{L}_0} \quad (8.7. 124)$$

即可.

用受限于能级匹配条件的能谱的迹取代对粒子种类的求和, 配分函数就变成了:

$$Z = \int_0^\infty dl \frac{1}{l^{14}} \int_{-1/2}^{+1/2} ds \text{Tr} e^{2\pi i s(L_0 - \tilde{L}_0)} e^{-2(L_0 + \tilde{L}_0 - 2)l/\alpha'} \quad (8.7. 125)$$

我们再次使用定义 $q = \exp(2\pi i \tau)$, 但这次的复参数 τ 是圈长度 l 和我们为实现水平匹配而引入的辅助变量的组合:

$$\tau = s + \frac{2li}{\alpha'}$$

对弦的能谱进行一次求迹, 就能得到 η 函数. 剩下的就是配分函数的结果了:

$$Z_{\text{string}} = \int \frac{d^2\tau}{(\text{Im} \tau)^2} \left(\frac{1}{\sqrt{\text{Im} \tau}} \frac{1}{\eta(q)} \frac{1}{\bar{\eta}(\bar{q})} \right)^{24}$$

这看起来正是 eq. (8.7. 121). 但实际上有不同之处. 这个不同之处就是 $d^2\tau$ 的积分范围, 这可以在原始表达式 eq. (8.7. 123) 和 eq. (8.7. 124) 中找到. 与我们在弦理论中看到的一样, $\text{Re} \tau$ 的取值范围是边界粘合的区间 $[-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}]$. 从上述讨论中可以清楚地看到, 正是这个积分保证了能级匹配条件. 而不同之处在于 $\text{Im} \tau$ 的范围, 在上述讨论中, 它的取值范围是 $[0, \infty)$. 这与弦理论不同, 在弦理论中, 我们只对基本域进行积分.

这一定程度上佐证了我们之前的论述: 这里的讨论基于场论的配分函数, 而我们之前提及, 场论中潜在的紫外发散是在 $\text{Im} \tau \sim l \rightarrow 0$ 极限下遇到的. 在上述分析中, 这相当于粒子穿越小圈. 但在正确的弦理论计算中, 这个区域根本不存在. 通过模不变性, 它被映射到了大圈的红外区域.

有一种说法是, 在 $g_s \rightarrow 0$ 极限, 弦理论会变成无限多自由粒子构成的理论. 这在能谱上是正确的. 但上述计算表明, 当我们计算圈时, 这个说法并不正确, 因为模不变性意味着我们在弦理论中积分的动量范围与在简化的场论方法中积分的动量范围不同.

那么, 在配分函数的红外区域会发生什么呢? 观察积分 eq. (8.7. 125) 的 $l \rightarrow \infty$ 极限, 我们可以看到, 积分被最轻的态所支配. 而对于玻色弦来说, 最轻的态就是快子. 它满

足 $m^2 = -4/\alpha'$, 或者说 $(L_0 + \tilde{L}_0 - 2) = -2$. 于是快子为配分函数贡献了:

$$\int^\infty \frac{dl}{l^{14}} e^{+4l/\alpha'}$$

这明显发散. 这种一圈配分函数的红外发散是快子带来问题的另一种表现. 而在超弦中, 不存在快子, 且超弦的红外区域表现良好.

讨论到这里, 一个自然的问题便是: 弦的任意圈是否一直保持有限? 而这是一个我们尚不能回答的问题. 我们在上面看到的紫外有限性对所有一圈振幅都是成立的. 这意味着, 我们有一个在更高维度上与物质相互作用的引力理论在单圈仍保持有限. 这已经很了不起了. 并且, 我们还可以证明, 在两圈时紫外有限依然满足. 近年来, 对超弦使用纯旋量形式的讨论表明, 某些对象在五圈以内仍然是有限的. 此外, 当所有动量交换都很大时, 我们看到的指数抑制 eq. (8.6. 104) 在所有振幅上都仍然成立.

然而, 关于有限性的一般性讨论尚未完成. 主要问题出现在亏格为 3 及以上的黎曼面积分的奇异点上.

8.7.4 非微扰弦论简介

通过本节的讨论, 我们应该清楚弦微扰理论完全类似于场论中的费曼图展开. 正如在场论中一样, 我们可以证明 g_s 中的展开是渐近的. 这意味着数列并不收敛, 但我们仍然可以理解它的意义.

我们知道量子场论中有许多现象是费曼图无法描述的, 包括强耦合机制中的约束以及弱耦合机制中的瞬子 (instantons) 和孤子 (solitons). 那么, 这是否意味着我们在弦理论中也遗漏了类似的有趣现象? 答案是肯定的. 在本节中, 我将非常简要地提及几个更复杂的问题, 它们已经超越了弦理论中微扰展开的范畴.

首先是所谓的弦场论 (string field theory). 它以量子场论为指导, 尝试用路径积分来建立弦理论的非微扰定义. 我们已经看到, 世界面上的泊里雅科夫路径积分等价于费曼图. 因此, 我们需要更进一步. 回想一下, 在量子场论中, 一个场会产生一个粒子. 而在弦理论中, 我们现在要寻找的是一个能创造弦的场. 这表示我们应该为弦的每一种构型提供不同的场. 换句话说, 我们的场本身应该是一个函数的函数: $\Phi(X^\mu(\sigma))$. 这是一个相当复杂的对象. 我们可以考虑这个场的路径积分:

$$Z = \int \mathcal{D}\Phi e^{iS[\Phi(X(\sigma))]}$$

对于某个合适的作用量 $S[\Phi]$, 我们希望这个路径积分能够重现弦的微扰展开, 并定义了

理论的非微扰完备性. 这是沿着物理学发展进程的下一步: 粒子 \rightarrow 场 \rightarrow 弦场. 我们也可以沿用历史上常用的说法, 称场论是 "二次量子化"¹², 那么弦场论就是 "三次量子化".

弦场论在开弦方面取得了相当大的成功, 并以这种方式获得了一些有趣的非微扰结果. 然而, 对于闭弦, 这种方法的作用就小得多了. 人们通常认为, 闭弦场论的失败背后有深层原因, 这与我们在本节开头提到的问题有关: 引力理论中没有离壳量. 但是, 我们先前提到过, 相互作用的开弦理论必然包含闭弦, 因此, 开弦场论应该已经隐含了引力和闭弦. 这一矛盾的深层次原因我们仍知之甚少.

还有其它方法可以讨论非微扰弦论, 通常情况下, 这些技术依赖于超对称来提供一个讨论强耦合机制的方法, 因此只对超弦有效. 这些方法非常成功, 以致于现如今几乎任何关于超弦理论的课程都会专门讲解诸如对偶性和 M 理论.

最后, 在渐近 AdS 时空, AdS/CFT 对应给出了弦理论和量子引力的非微扰定义. 即: 边界上的杨-米尔斯理论或与之类似的规范理论. 从某种意义上说, 边界上的场论就是弦场论.

¹²这里的称谓其实是不正确的, 所谓的二次量子化过程并不是真正意义上的量子化, 但是由于历史原因人们通常沿用这一称谓.

Chapter 9

非平凡靶空间中的弦

到目前为止, 我们只讨论了在平直时空中传播的弦. 这一章我们将考虑在不同背景下传播的弦. 这相当于在弦的世界面上考虑不同的 CFT.

为描述在弯曲时空中运动的弦, 泊里雅科夫作用量有一个自然的推广:

$$S = \frac{1}{4\pi\alpha'} \int d^2\sigma \sqrt{g} g^{\alpha\beta} \partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X^\nu G_{\mu\nu}(X) \quad (9.0.1)$$

与之前一样, 这里的 $g_{\alpha\beta}$ 是世界面度规. 这个作用量描述了从弦的世界面到具有度规 $G_{\mu\nu}(X)$ 的靶空间的映射 (尽管同样记作 G , 但我们要注意这不是爱因斯坦张量).

形如 eq. (9.0.1) 的作用量被称为非线性 σ 模型 (non-linear σ models). 这个名字源于 π 介子 (pion). 这类理论在物理学的许多方面, 从 QCD 到凝聚态理论都很重要.

虽然很明显 eq. (9.0.1) 描述的是在弯曲时空中运动的弦, 但仅仅把它写下来还是不足的. 问题在于, 闭弦的量子化已经出现了引力子. 那么如果我们想建立某种背景度规 $G_{\mu\nu}(X)$, 它应该是由这些引力子构成的. 就像电磁场是由光子构成的一样. 我们如何看到 eq. (9.0.1) 中的度规与弦的量子化所产生的引力子之间的联系呢?

答案就在于顶角算符. 首先让我们把靶空间度规关于平直度规展开, 得到:

$$G_{\mu\nu}(X) = \delta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}(X)$$

那么, 我们从作用量 eq. (9.0. 1) 建立的配分函数与平直空间中弦的配分函数的关系是:

$$Z = \int \mathcal{D}X \mathcal{D}g e^{-S_{\text{Poly}} - V} = \int \mathcal{D}X \mathcal{D}g e^{-S_{\text{Poly}}} (1 - V + \frac{1}{2} V^2 + \dots)$$

其中, S_P 是 eq. (2.4. 44) 中给出的平直空间中弦的作用量, V 满足:

$$V = \frac{1}{4\pi\alpha'} \int d^2\sigma \sqrt{g} g^{\alpha\beta} \partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X^\nu h_{\mu\nu}(X) \quad (9.0. 2)$$

这正是我们先前给出的引力子态对应的顶角算符. 为看出这一点, 我们只需引入对称无迹张量 $\zeta_{\mu\nu}$ 和动量 p^μ , 并要求:

$$h_{\mu\nu}(X) = \zeta_{\mu\nu} e^{ip \cdot X}$$

通过这样的选取, 表达式 eq. (9.0. 2) 与顶角算符 eq. (7.3. 48) 一致. 但在一般情况下, 我们可以用上述平面波的任意线性组合叠加出一般的 $h_{\mu\nu}(X)$.

我们知道, 在路径积分中插入一个 V 相当于引入一个引力子态. 在路径积分中插入 e^V 则对应于引力子的相干态, 这使度规从 $\delta_{\mu\nu}$ 变为 $\delta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$. 这样我们就能看到 eq. (9.0. 1) 的背景弯曲度规确实是由我们在第 3 中第一次见到的引力子所构建的.

9.1 爱因斯坦方程

在共形规范下, 平直靶空间的泊里雅科夫作用量以自由理论的形式出现, 这使我们能够计算理论的能谱. 但在弯曲背景下, 情况则存在差别. 共形规范下, 世界面理论是由相互作用的二维场论描述的:

$$S = \frac{1}{4\pi\alpha'} \int d^2\sigma G_{\mu\nu}(X) \partial_\alpha X^\mu \partial^\alpha X^\nu \quad (9.1. 3)$$

为理解这些相互作用, 我们将 X^μ 围绕一个经典解 \bar{x}^μ 进行展开:

$$X^\mu(\sigma) = \bar{x}^\mu + \sqrt{\alpha'} Y^\mu(\sigma)$$

这里的 Y^μ 是小波动. $\sqrt{\alpha'}$ 因子的存在是为了平衡量纲: 因为 $[X] = -1$, 所以 $[Y] = 0$, 这样, $Y \ll 1$ 才是有意义的. 将这一展开代入拉格朗日量, 我们可以得到:

$$G_{\mu\nu}(X) \partial X^\mu \partial X^\nu = \alpha' \left[G_{\mu\nu}(\bar{x}) + \sqrt{\alpha'} G_{\mu\nu,\omega}(\bar{x}) Y^\omega + \frac{\alpha'}{2} G_{\mu\nu,\omega\rho}(\bar{x}) Y^\omega Y^\rho + \dots \right] \partial Y^\mu \partial Y^\nu$$

其中泰勒展开中的每个系数 $G_{\mu\nu,\dots}$ 都是波动 Y^μ 参与的相互作用的耦合常数. 该理论有无数个耦合常数, 它们的来源都是 $G_{\mu\nu}(X)$. 而 $G_{\mu\nu,\dots}$ 逗号后的指标表示对应的 $G_{\mu\nu}(X)$ 导数, 例如 $G_{\mu\nu,\omega}(\bar{x}) = \partial_\omega G_{\mu\nu}(\bar{x})$

一个重要的问题是, 既然这一相互作用耦合常数如此之多, 那这个场论在什么情况下才是弱耦合的? 显然, 我们的第一反应是弱耦合便要求这无限多个耦合常数都很小. 但是有没有更简单的方法来描述这一点? 我们可以假设靶空间具有特征曲率半径 r_c , 这表示:

$$\frac{\partial G}{\partial X} \sim \frac{1}{r_c}$$

曲率半径带有长度量纲, 因此 $[r_c] = -1$. 根据度规的展开, 我们可以看到低能有效无量纲耦合系数为:

$$\frac{\sqrt{\alpha'}}{r_c} \quad (9.1.4)$$

这说明, 如果时空度规只在远大于 $\sqrt{\alpha'}$ 的尺度上变化, 我们就可以用微扰理论来研究形如 eq. (9.1.3) 的 CFT. 关于 $\sqrt{\alpha'}/r_c$ 的展开通常被称为 α' 展开, 用以区别于我们在上一章中看到的 g_s 展开. 弦理论中计算的量通常由两方面的微扰展开给出: 一个是 α' 展开, 一个是 g_s 展开.

如果考虑的曲率半径与弦长度尺度 $r_c \sim \sqrt{\alpha'}$ 相当, 那么世界面 CFT 就是强耦合的, 我们就需要开发新的方法来处理. 需要注意的是 α' 中的强耦合虽然是很困难的问题, 但这个问题至少在世界面路径积分上是定义明确的. 这与 g_s 中的强耦合问题有本质区别, 正如 8.7.4 节所讨论的, 我们对 g_s 中的强耦合问题还知之甚少.

9.1.1 β 函数

在经典意义下, 由 eq. (9.1.3) 定义的理论是共形不变的. 但这在量子理论中却并不一定成立. 为了处理发散, 我们需要引入紫外截断, 通常, 在重正化之后, 物理量取决于截断给定的尺度 μ . 在这种情况下, 理论就不再是共形不变的了. 有很多理论在经典上具有尺度不变性, 但在量子化后不满足尺度不变性, 例如杨-米尔斯.

正如我们多次讨论过的, 在弦理论中, 共形不变性是一种规范对称性, 我们必须保留这一对称性. 我们本节的目标是理解在什么情况下 eq. (9.1.3) 能在量子层面上保持共形不变性.

描述耦合如何依赖于尺度 μ 的对象被称为 β 函数. 由于我们的耦合以函数的形式出现,

我们此处讨论的对象实际上应当称为 β 泛函, 其形式为:

$$\beta_{\mu\nu}(G) \sim \mu \frac{\partial G_{\mu\nu}(X; \mu)}{\partial \mu}$$

物理理论只有满足:

$$\beta_{\mu\nu}(G) = 0$$

才能在量子化后仍满足共性对称性. 我们现在计算一圈的非线性 σ 模型. 首先分离出理论的紫外发散, 然后找出我们应该添加什么样的抵消项 (counterterm). 如果这些抵消项消失, 相应地 β 函数也会消失.

坐标若选择巧妙则可以大大简化我们的分析过程. 围绕任意一 \bar{x} , 我们总是可以选择黎曼正则坐标 (Riemann normal coordinates), 从而利用 $X^\mu = \bar{x}^\mu + \sqrt{\alpha'} Y^\mu$ 的展开可以得到:

$$G_{\mu\nu}(X) = \delta_{\mu\nu} - \frac{\alpha'}{3} \mathcal{R}_{\mu\lambda\nu\kappa}(\bar{x}) Y^\lambda Y^\kappa + \mathcal{O}(Y^3)$$

作用量展开到波动的四阶, 可以写为:

$$S = \frac{1}{4\pi} \int d^2\sigma \partial Y^\mu \partial Y^\nu \delta_{\mu\nu} - \frac{\alpha'}{3} \mathcal{R}_{\mu\lambda\nu\kappa} Y^\lambda Y^\kappa \partial Y^\mu \partial Y^\nu$$

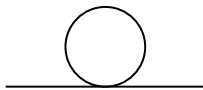
我们现在可以把它当作二维的相互作用量子场论. 四点的相互作用给出了如下的四顶点费曼规则,



$$\sim \mathcal{R}_{\mu\lambda\nu\kappa} (k^\mu \cdot k^\nu)$$

其中 k_α^μ 是标量场 Y^μ 的 2d 动量, $\alpha = 1, 2$ 是世界面指标.

现在我们把问题简化为一个简单的相互作用量子场论, 我们可以用任何我们喜欢的方法来计算 β 函数. 理论中的发散来自如下一圈图:



在位形空间考虑此一圈图相对更简单. 标量粒子的传播子为:

$$\langle Y^\lambda(\sigma) Y^\kappa(\sigma') \rangle = -\frac{1}{2} \delta^{\lambda\kappa} \ln |\sigma - \sigma'|^2$$

对于圈中传播的标量场, 起点与终点重合. 因此 $\sigma \rightarrow \sigma'$ 时会发散, 这正对应了关于圈动量积分中出现的紫外发散.

为了分离这种发散, 我们使用维数正规化, 即取维数为 $d = 2 + \epsilon$. 传播子就变成了:

$$\begin{aligned} \langle Y^\lambda(\sigma) Y^\kappa(\sigma') \rangle &= 2\pi \delta^{\lambda\kappa} \int \frac{d^{2+\epsilon} k}{(2\pi)^{2+\epsilon}} \frac{e^{ik \cdot (\sigma - \sigma')}}{k^2} \\ &\longrightarrow \frac{\delta^{\lambda\kappa}}{\epsilon} \quad \text{as } \sigma \rightarrow \sigma' \end{aligned}$$

为确定这一发散的抵消项, 我们只需将作用量中的 $Y^\lambda Y^\kappa$ 替换为 $\langle Y^\lambda Y^\kappa \rangle$ 即可. 为了去掉 $1/\epsilon$ 阶项, 我们加上如下抵消项:

$$\mathcal{R}_{\mu\lambda\nu\kappa} Y^\lambda Y^\kappa \partial Y^\mu \partial Y^\nu \rightarrow \mathcal{R}_{\mu\lambda\nu\kappa} Y^\lambda Y^\kappa \partial Y^\mu \partial Y^\nu - \frac{1}{\epsilon} \mathcal{R}_{\mu\nu} \partial Y^\mu \partial Y^\nu$$

我们可以通过波函数重整化 $Y^\mu \rightarrow Y^\mu + (\alpha'/6\epsilon) \mathcal{R}^\mu_\nu Y^\nu$ 以及耦合常数的重正化 (此处, 耦合常数是度规 $G_{\mu\nu}$) 来吸收抵消项. 我们要求:

$$G_{\mu\nu} \rightarrow G_{\mu\nu} + \frac{\alpha'}{\epsilon} \mathcal{R}_{\mu\nu} \quad (9.1. 5)$$

由此我们可以得知理论的 β 函数以及共形不变条件, 如下:

$$\beta_{\mu\nu}(G) = \alpha' \mathcal{R}_{\mu\nu} = 0 \quad (9.1. 6)$$

即 σ 模型的共形不变性要求目标空间必须是里奇平直的: $\mathcal{R}_{\mu\nu} = 0$. 或者换句话说, 弦运动的背景时空必须服从真空爱因斯坦方程. 我们看到, 广义相对论也描述了二维 σ 模型的重整化群流 (renormalization group flow), 重整化群流通常简记为 RG 流.

β 函数与外尔不变性

上述计算有效地研究了平直世界面上 CFT eq. (9.1. 3) 中共形不变性的破坏. 而这与弯曲世界面上外尔不变性的破坏是相似的. 我们也可以从另一个角度来得到这个重要结果. 考虑世界面的度规:

$$g_{\alpha\beta} = e^{2\phi} \delta_{\alpha\beta}$$

而在维数正规化中, 在 $d = 2 + \epsilon$ 维中的理论不是外尔不变的. 这是因为来自 \sqrt{g} 的贡献并不能完全抵消来自度规的逆 $g^{\alpha\beta}$ 的贡献. 体现在作用量中的结果为:

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{4\pi\alpha'} \int d^{2+\epsilon}\sigma \, e^{\phi\epsilon} \partial_\alpha X^\mu \partial^\alpha X^\nu G_{\mu\nu}(X) \\ &\approx \frac{1}{4\pi\alpha'} \int d^{2+\epsilon}\sigma \, (1 + \phi\epsilon) \partial_\alpha X^\mu \partial^\alpha X^\nu G_{\mu\nu}(X) \end{aligned}$$

其中, 在这个表达式中, 指标 $\alpha = 1, 2$ 由 $\delta_{\alpha\beta}$ 升降. 如果我们把这个表达式中的 $G_{\mu\nu}$ 换成度规 eq. (9.1. 5), 我们会发现有一个含 ϕ 的项 即使在 $\epsilon \rightarrow 0$ 极限下也仍然存在:

$$S = \frac{1}{4\pi\alpha'} \int d^2\sigma \, \partial_\alpha X^\mu \partial^\alpha X^\nu [G_{\mu\nu}(X) + \alpha' \phi \mathcal{R}_{\mu\nu}(X)]$$

这表明外尔不变性被破坏了. 事实上, 我们可以检查外尔不变性的通常判断标准, 即 T_α^α 是否消失. 在共形规范中, 我们有:

$$T_{\alpha\beta} = +\frac{4\pi}{\sqrt{g}} \frac{\partial S}{\partial g^{\alpha\beta}} = -2\pi \frac{\partial S}{\partial \phi} \delta_{\alpha\beta} \Rightarrow T_\alpha^\alpha = -\frac{1}{2} \mathcal{R}_{\mu\nu} \partial X^\mu \partial X^\nu$$

从这个角度看, 我们可以将 β 函数定义为 $\partial X \partial X$ 前面的系数, 即:

$$T_\alpha^\alpha = -\frac{1}{2\alpha'} \beta_{\mu\nu} \partial X^\mu \partial X^\nu$$

我们于是就又得到了:

$$\beta_{\mu\nu} = \alpha' \mathcal{R}_{\mu\nu}$$

9.1.2 里奇流 (Ricci Flow)

在弦理论中, 我们通常只关心具有里奇平直度规的共形理论. 然而, 在物理学和数学的其他领域, RG 流本身也很重要. 它通常也被称为里奇流 (Ricci flow).

$$\mu \frac{\partial G_{\mu\nu}}{\partial \mu} = \alpha' \mathcal{R}_{\mu\nu} \quad (9.1. 7)$$

这便确定了度规如何随尺度 μ 变化.

举一个简单的例子, 考虑半径为 r 的球面靶空间 \mathbb{S}^2 . 这是凝聚态物理学中的一个重要模型. 它描述了一维海森堡自旋链 (Heisenberg spin chain) 的低能极限. 有时也被称为 $O(3)$ 的 σ 模型. 由于球面是一个对称空间, 这里 RG 流的唯一作用是使半径与尺度相

关: $r = r(\mu)$. 于是 β 函数为:

$$\mu \frac{\partial r^2}{\partial \mu} = \frac{\alpha'}{2\pi}$$

因此, 当我们越接近紫外时 r 越大, 而越接近红外时 r 越小. 由于耦合系数为 $1/r$, 这意味着靶空间为 S^2 的非线性 σ 模型是渐近自由的. 在低能下理论强耦合, 于是微扰计算 (例如一圈 β 函数) 无法保证正确性.

9.2 B 场与伸缩子

我们已经了解了弦如何与背景时空度规耦合. 那么弦的其他自由度呢? 在第 3 章中, 我们看到闭弦具有其他无质量态, 即反对称张量 $B_{\mu\nu}$ 和伸缩子 Φ . 现在来看看如果引入这些场, 会有什么效应.

9.2.1 带荷的弦与 B 场

让我们先看看弦是如何与反对称场 $B_{\mu\nu}$ 相耦合的. 我们在第 7 章中讨论了与此态相关的顶角算符. 它的形式与引力子顶角算符相同, 只是极化张量 $\zeta_{\mu\nu}$ 反对称. 与引力子的处理方法类似, 将其指数化就能描述弦在 $B_{\mu\nu}$ 背景场中的传播. 我们还将保留弯曲度规 $G_{\mu\nu}$ 以得到推广后的作用量:

$$S = \frac{1}{4\pi\alpha'} \int d^2\sigma \sqrt{g} (G_{\mu\nu}(X) \partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X^\nu g^{\alpha\beta} + i B_{\mu\nu}(X) \partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X^\nu \epsilon^{\alpha\beta}) \quad (9.2.8)$$

其中 $\epsilon^{\alpha\beta}$ 是反对称二阶张量, 其归一化为 $\sqrt{g}\epsilon^{12} = +1$ (作用量中有 i 是因为我们在欧几里得空间, 而这个新引入的项包含时间的一阶导数). 该作用量在世界面的重参数化变换和外尔变换下不变.

那么如何解释新引入的这一项呢? 现在我们将证明, 我们应该把场 $B_{\mu\nu}$ 视为类似于电磁学中的规范势 A_μ . 而作用量 eq. (9.2.8) 告诉我们, 弦在与 $B_{\mu\nu}$ 耦合的情况下带荷.

规范势

我们回想一下量子电动力学中的内容. 首先, 考虑点粒子. 我们知道, 带电点粒子通过作用量中加入如下耦合项来描述与背景规范势 A_μ 的耦合:

$$\int d\tau A_\mu(X) \dot{X}^\mu. \quad (9.2.9)$$

如果不熟悉这个相对论形式, 我们可以考虑静态规范 $X^0 \equiv t = \tau$, 它的内容是于是得到:

$$\int dt A_0(X) + A_i(X) \dot{X}^i ,$$

这一拉氏量给出了带电粒子与规范势耦合的动力学.

那么, 对于弦来说, 这种耦合的推广是什么? 首先要注意的是 eq. (9.2. 9) 有一个有趣的几何结构. 它是靶空间中的一形式 $A = A_\mu dX^\mu$ 向粒子世界线上拉回的结果. 这是因为 A 是一形式, 而世界线刚好是一维的. 而由于弦的世界面是二维的, 因此类似的耦合应该是靶空间中的二形式场向世界面的拉回. 二形式场是反对称二阶张量场, 即 $B_{\mu\nu}$. 因此, 把 $B_{\mu\nu}$ 拉回到世界面上就可以给出我们期望的相互作用:

$$\int d^2\sigma B_{\mu\nu}(X) \partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X^\nu \epsilon^{\alpha\beta} . \quad (9.2. 10)$$

这正是我们在 eq. (9.2. 8) 中看到的形式.

点粒子耦合 eq. (9.2. 9) 在背景场的规范变换 $A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu \alpha$ 下不变. 这是因为拉氏量的变化是整体导数的形式. 对于二形式 $B_{\mu\nu}$ 也有类似的说法. 它的规范对称性为:

$$B_{\mu\nu} \rightarrow B_{\mu\nu} + \partial_\mu C_\nu - \partial_\nu C_\mu \quad (9.2. 11)$$

在这种变换下的拉氏量变化也是整体导数的形式.

在电动力学中, 我们可以构造出规范不变的电磁场张量, 写为二形式场强 $F = dA$ 的形式. 与之相似地, 对于 $B_{\mu\nu}$, 我们同样可以找到规范不变场强 $H = dB$ 相应地, 这是一个三形式场:

$$H_{\mu\nu\rho} = \partial_\mu B_{\nu\rho} + \partial_\nu B_{\rho\mu} + \partial_\rho B_{\mu\nu} .$$

这个三形式场 H 有时被称为挠度 (torsion). 它的作用与广义相对论中的挠度相同, 表示仿射联络 (affine connection) 的反对称分量.

9.2.2 伸缩子

现在我们讨论弦如何与伸缩子背景场 $\Phi(X)$ 耦合. 这是个比较微妙的问题, 我们不能想当然地给出顶角算符. 这里我将直接给出耦合的具体形式.

在涉及无质量场 $G_{\mu\nu}$, $B_{\mu\nu}$ 和 $\Phi(X)$ 的背景中运动弦的作用量为:

$$S = \frac{1}{4\pi\alpha'} \int d^2\sigma \sqrt{g} (G_{\mu\nu}(X) \partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X^\nu g^{\alpha\beta} + iB_{\mu\nu}(X) \partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X^\nu \epsilon^{\alpha\beta} + \alpha' \Phi(X) \mathcal{R}^{(2)}) \quad (9.2. 12)$$

其中 $\mathcal{R}^{(2)}$ 是世界面的二维里奇标量. (到目前为止, 我们一直将其直接写为 \mathcal{R} , 但今后我们需要区分世界面里奇标量和时空里奇标量) 因此我们从现在起将引入此上标.

特别地, 我们看到作用量中描述与伸缩子耦合的项在 $\mathcal{R}^{(2)} = 0$ 的平直的世界面上消失. 这也是使用顶角算符来确定这一耦合比较麻烦的原因之一. 此外, 与伸缩子的耦合中另一个有趣的性质是这一项不满足外尔不变性. 而我们已经看到, 这门课的很大一部分内容都是为了理解外尔不变性的含义, 那我们现在究竟为什么要抛弃它呢? 实际上, 虽然伸缩子耦合项确实违反了外尔不变性, 但我们很快就会解释将其恢复的办法. 但首先, 让我们来讨论一下伸缩子耦合项 eq. (9.2. 12) 的一个至关重要的含义.

伸缩子与弦的耦合

首先我们需要知道一件事: 当伸缩子是常数时, 与伸缩子的耦合项不再违反外尔不变性. 例如:

$$\Phi(X) = \lambda$$

其中 λ 为常数. 在这种情况下, 伸缩子耦合就简化为:

$$S_{\text{dilaton}} = \lambda\chi$$

其中 χ 是我们在 eq. (8.1. 14) 中引入的世界面欧拉示性数. 这表明常数伸缩子的真空期望 $\langle\Phi\rangle$ 可以确定弦的耦合常数. 这个常数模通常被认为是伸缩子的渐近极限:

$$\Phi_0 = \lim_{X \rightarrow \infty} \Phi(X) \quad (9.2. 13)$$

弦的耦合系数于是为:

$$g_s = e^{\Phi_0} \quad (9.2. 14)$$

所以弦耦合不是弦理论的独立参数: 它是一个场的期望值. 这意味着, 就像时空度规 $G_{\mu\nu}$ (或者, 像希格斯 (Higgs) 真空期望值) 一样, 它可以被动态地确定.

我们已经看到, 只要 $g_s \ll 1$, 我们围绕平直空间的微扰展开就是有效的. 但现在我们有了一个更强的要求: 我们只有在对任意的 X 都满足 $e^{\Phi(X)} \ll 1$ 的区域内才能使用微扰

理论. 如果我们讨论的弦出现在不满足 $e^{\Phi(X)}$ 极小的区域, 那么我们就需要使用 8.7.4 节所述的不依赖弦微扰理论的技术.

9.2.3 β 函数

那么, 我们是如何摆脱伸缩子耦合 eq. (9.2. 12) 违背外尔不变性这一问题的? 这其中的关键是伸缩子耦合前面的 α' . 它的存在是为了补齐量纲 (作用量中的其他两个项都带有导数 $[\partial X] = -1$, 所以不需要 α' 的任何幂).

然而, 回想在非线性西格玛模型中, α' 也扮演着圈展开参数 eq. (9.1. 4) 的角色. 这意味着伸缩子耦合中外尔不变性的丢失可以通过 $G_{\mu\nu}$ 和 $B_{\mu\nu}$ 的耦合产生的一圈贡献来补偿.

要清楚地看到这一点, 我们可以计算二维场论 eq. (9.2. 12) 的 β 函数. 在存在伸缩子耦合的情况下, 我们可以利用 $\langle T_\alpha^\alpha \rangle$ 来观察外尔不变性. 应力张量有三种不同的贡献, 分别与三种不同的场有关. 相应地, 我们定义了三种不同的贝塔函数:

$$\langle T_\alpha^\alpha \rangle = -\frac{1}{2\alpha'} \beta_{\mu\nu}(G) g^{\alpha\beta} \partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X^\nu - \frac{i}{2\alpha'} \beta_{\mu\nu}(B) \epsilon^{\alpha\beta} \partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X^\nu - \frac{1}{2} \beta(\Phi) R^{(2)} \quad (9.2. 15)$$

一圈 β 函数的计算结果为:

$$\begin{aligned} \beta_{\mu\nu}(G) &= \alpha' \mathcal{R}_{\mu\nu} + 2\alpha' \nabla_\mu \nabla_\nu \Phi - \frac{\alpha'}{4} H_{\mu\lambda\kappa} H_\nu^{\lambda\kappa} \\ \beta_{\mu\nu}(B) &= -\frac{\alpha'}{2} \nabla^\lambda H_{\lambda\mu\nu} + \alpha' \nabla^\lambda \Phi H_{\lambda\mu\nu} \\ \beta(\Phi) &= -\frac{\alpha'}{2} \nabla^2 \Phi + \alpha' \nabla_\mu \Phi \nabla^\mu \Phi - \frac{\alpha'}{24} H_{\mu\nu\lambda} H^{\mu\nu\lambda} \end{aligned}$$

弦理论的自治背景必须保持外尔不变性, 这就要求 $\beta_{\mu\nu}(G) = \beta_{\mu\nu}(B) = \beta(\Phi) = 0$.

9.3 低能有效作用量

方程 $\beta_{\mu\nu}(G) = \beta_{\mu\nu}(B) = \beta(\Phi) = 0$ 可以看作背景的运动方程. 现在我们换个角度: 我们寻找一种存在于 $D = 26$ 维时空的作用量, 要求它可以把这些 β 函数方程再现为运动方程. 这就是玻色弦的低能有效作用量 (low-energy effective action):

$$S = \frac{1}{2\kappa_0^2} \int d^{26} X \sqrt{-G} e^{-2\Phi} \left(\mathcal{R} - \frac{1}{12} H_{\mu\nu\lambda} H^{\mu\nu\lambda} + 4\partial_\mu \Phi \partial^\mu \Phi \right) \quad (9.3. 16)$$

这里我们使用威克转动回到闵氏时空讨论.

通过作用量关于这三个场的泛函微商, 可以得出 β 函数:

$$\delta S = \frac{1}{2\kappa_0^2\alpha'} \int d^{26}X \sqrt{-G} e^{-2\Phi} (\delta G_{\mu\nu} \beta^{\mu\nu}(G) - \delta B_{\mu\nu} \beta^{\mu\nu}(B) - (2\delta\Phi + \frac{1}{2} G^{\mu\nu} \delta G_{\mu\nu}) (\beta^\lambda_\lambda(G) - 4\beta(\Phi)))$$

方程 eq. (9.3. 16) 支配着这三个场的低能动力学. 这里的所谓低能指的是我们只考虑了一圈贝塔函数.

注意到, 我们之前研究的都是单根弦如何在平直空间中运动. 然而, 仅凭自洽性的理由, 我们就可以得到支配时空和其他场在 $D = 26$ 维度中如何波动的作用量 eq. (9.3. 16). 那么, 我们现在有两种不同的方法来计算弦理论中引力子的散射. 第一种是我们在第 8 章中讨论过的散射振幅. 第二种是通过观察低能有效作用量 eq. (9.3. 16) 中包含的动力学. 这两种看似截然不同的方法却给出了一致的结果.

9.3.1 弦标架 (String Frame) 与爱因斯坦标架 (Einstein Frame)

由于系数 $e^{-2\Phi}$ 的出现, 作用量 eq. (9.3. 16) 并不完全是附录 A 中我们熟悉的爱因斯坦-希尔伯特作用量的形式. 这个因子表明这个作用量是在弦微扰理论的树级上计算出来的, 正如我们在第 8 章中提及的, 树级对应与 $1/g_s^2$ 阶.

此外, eq. (9.3. 16) 中 Φ 的运动学项符号也与常见的运动学项相反. 然而, 此处这并不是特别严重的问题. 因为 $e^{-2\Phi}$ 因子的存在意味着这里的动力学项不是常见的正则归一化形式.

为了把作用量表示为我们更熟悉的形式, 我们可以重定义场. 首先, 我们需要把伸缩子的常数部分 Φ_0 和我们称之为 $\tilde{\Phi}$ 的变化部分区分. 我们在 eq. (9.2. 13) 中定义了常数部分: 它与弦的耦合常数有关. 变化的部分可以写为:

$$\tilde{\Phi} = \Phi - \Phi_0 \quad (9.3. 17)$$

在 D 维, 我们定义了一个新度规 $\tilde{G}_{\mu\nu}$ 作为旧度规和伸缩子的组合:

$$\tilde{G}_{\mu\nu}(X) = e^{-4\tilde{\Phi}/(D-2)} G_{\mu\nu}(X) \quad (9.3. 18)$$

需要注意的是, 这并不是坐标变换或作用量的对称性. 它只是对理论中的场彼此混合再重新标记. 我们可以在任何场论中进行这样的重定义. 而通常情况下, 我们不这样做的原因是场已经有了正则动量. 变换 eq. (9.3. 18) 的目的是让 eq. (9.3. 16) 中的场也拥有

正则动量项.

新度规 eq. (9.3. 18) 通过共形放缩与旧度规相关. 我们可以发现, 通过共形变换 $\tilde{G}_{\mu\nu} = e^{2\omega} G_{\mu\nu}$ 相互关联的两个度规, 其对应的里奇标量的关系为:

$$\tilde{\mathcal{R}} = e^{-2\omega} (\mathcal{R} - 2(D-1)\nabla^2\omega - (D-2)(D-1)\partial_\mu\omega\partial^\mu\omega)$$

在 eq. (9.3. 18) 中选择 $\omega = -2\tilde{\Phi}/(D-2)$ 再回到 $D = 26$, 作用量 eq. (9.3. 16) 于是变为:

$$S = \frac{1}{2\kappa^2} \int d^{26}X \sqrt{-\tilde{G}} \left(\tilde{\mathcal{R}} - \frac{1}{12} e^{-\tilde{\Phi}/3} H_{\mu\nu\lambda} H^{\mu\nu\lambda} - \frac{1}{6} \partial_\mu \tilde{\Phi} \partial^\mu \tilde{\Phi} \right) \quad (9.3. 19)$$

现在, 动力学项 $\tilde{\Phi}$ 符号正确且是正则的. 我们注意到, 这里没有伸缩子的势能项, 现在自然也不能动态地确定它在玻色弦中的期望值. 然而在超弦的背景下, 伸缩子的势能项将会出现, 从而可以利用它固定弦的耦合常数.

作用量的引力部分现在变为了标准的爱因斯坦-希尔伯特形式. 引力耦合系数为:

$$\kappa^2 = \kappa_0^2 e^{2\tilde{\Phi}_0} \sim l_s^{24} g_s^2 \quad (9.3. 20)$$

爱因斯坦-希尔伯特项前面的系数通常与牛顿常数有如下关系:

$$8\pi G_N = \kappa^2$$

但需要注意的是, 这是在 $D = 26$ 维度下的牛顿常数: 它与在四维世界中的牛顿常数不同. 从牛顿常数出发, 我们可以定义 $D = 26$ 的普朗克长度 $8\pi G_N = l_p^{24}$ 和普朗克质量 $M_p = l_p^{-1}$ (由于存在因子 8π , 这通常被称为约化普朗克质量). 对比 eq. (9.3. 20), 我们可以看到弦的弱耦合 $g_s \ll 1$ 要求普朗克尺度与弦尺度之间满足:

$$g_s \ll 1 \quad \Rightarrow \quad l_p \ll l_s$$

引力物理学的疑难往往在尺度 l_p 附近出现. 当 $g_s \ll 1$ 时, 我们对弦理论的理解最为透彻. 这种情况下, 许多弦的物理效应发生在 $l_s \gg l_p$, 可以与引力中的强耦合效应相分离.

原始的度规 $G_{\mu\nu}$ 通常被称为弦度规, 反映在作用量 eq. (9.0. 1) 中, 是弦看到的度规. 与之相对的, 度规 $\tilde{G}_{\mu\nu}$ 被称为爱因斯坦度规. 当然, 作用量 eq. (9.3. 16) 和 eq. (9.3. 19) 描述的是相同的物理: 我们只是选择了不同的方式打包这两个作用量中的场. 度规的选取通常也被称为标架的选取: 两种度规 $G_{\mu\nu}$ 与 $\tilde{G}_{\mu\nu}$ 分别对应弦标架或爱因斯坦标架.

之所以会出现两种彼此等价的度规选取, 是因为这里存在一个无质量的标量场 Φ . 无质量标量场会产生长程作用, 这会与引力混合, 从而违反等效原理. 因此, 如果我们想描述真正的物理, 就需要找到一种方法让 Φ 带质量. 而超弦中就存在这样的机制.

9.3.2 对爱因斯坦方程的修正

既然我们知道爱因斯坦方程是如何由弦论给出的, 我们就可以开始尝试理解新的物理学. 例如, 爱因斯坦方程的量子修正是什么?

一般来说, 当时空曲率 r_c 与弦长尺度 $\sqrt{\alpha'}$ 相当时, 我们预计这些修正就会起作用. 但这与上文的讨论非常吻合, 我们看到非线性西格玛模型的微扰展开参数是 α'/r_c^2 . 计算贝塔函数的下一圈修正就是对爱因斯坦方程的修正.

如果我们忽略 H 和 Φ , 就可以很容易地计算出两圈 σ 模型的 β 函数, 并对爱因斯坦方程进行 α' 阶修正:

$$\beta_{\mu\nu} = \alpha' \mathcal{R}_{\mu\nu} + \frac{1}{2} \alpha'^2 \mathcal{R}_{\mu\lambda\rho\sigma} \mathcal{R}_\nu^{\lambda\rho\sigma} + \dots = 0$$

这种两圈修正也出现在杂化弦中. 然而, 二型弦理论中不存在这种两圈修正. 从西格玛模型的角度来看, 第一阶修正出现在 4 圈.

弦的圈级修正

微扰弦理论有 α' 和 g_s 两种展开. 对于弦的圈级修正我们仍需讨论后者. 这里出现了一个有趣的微妙之处. 西格玛模型的 β 函数是通过调节世界面的紫外发散而产生的. 然而, g_s 展开只关心弦的拓扑结构. 紫外发散怎么会关心世界面的全局性质呢? 或者换句话说, β 函数的高圈修正怎么会给出任何有趣的东西呢?

这个问题的答案是: 在计算更高的 g_s 修正时, 我们必须在黎曼曲面的模空间上积分. 但这个模空间会包含一些黎曼曲面退化的特殊点. (例如, 环面中的一个圆可能会在某处退化). 在这些点上, 紫外发散与全局拓扑有关, 这就导致了对低能有效作用量的 g_s 修正.

9.4 D-膜与背景规范场

理解了共形不变性对闭弦背景的约束, 我们就得出了爱因斯坦方程和时空中的低能有效作用量. 现在, 我们想对开弦做同样的事情. 我们想了解一致性对 D -膜动力学的限制.

我们在第 4 章中看到, 开弦的量子化会产生两类无质量模: 对应于 D -膜波动的标量和 $U(1)$ 规范场. 我们此处暂时忽略标量波动模, 稍后再讨论它们. 首先观察在 Dp -膜上的规范场 A_i , $i = 0, \dots, p$ 的动力学.

我们提出的第一个问题是: 弦的末端如何与背景规范场相互作用? 要回答这个问题, 我们需要观察光子的顶角算符. 它在 eq. (7.3. 62) 中给出, 这里我们改写指标为 i , 即纽曼指标:

$$V_{\text{photon}} \sim \zeta^i : \partial_z X_i^{op} e^{ip \cdot X^{op}(z)} : \quad (9.4. 21)$$

积分后的顶角算符当 $p^2 = 0$ 和 $p^i \zeta_i = 0$ 时满足外尔不变性, 且为主算符. 于是我们可以仿照前述对闭弦的讨论对这个顶角算符进行指数化, 就得到了开弦与一般背景规范场 $A_i(X)$ 的耦合:

$$S_{\text{end-point}} = \int_{\partial\mathcal{M}} d\tau A_i(X) \frac{dX^i}{d\tau}$$

但这是我们非常熟悉的耦合. 我们已经在 eq. (9.2. 9) 中提到过了. 这表明弦的末端在膜上的背景规范场 A_i 下是带荷的.

9.4.1 β 函数

我们现在可以进行与闭弦相同类型的贝塔函数计算了. 这一计算的原始文献是 [7]. 要做到这一点, 首先要像我们在 5.8 节中描述的那样, 利用共形不变性将开弦世界面映射到上半欧几里得平面. 对于两端与 D -膜上的背景规范场作用的开弦, 描述其在平直空间中传播的作用量被分成两部分:

$$S = S_{\text{Neumann}} + S_{\text{Dirichlet}}$$

其中, S_{Neumann} 描述了平行于 Dp -膜的波动, 写为:

$$S_{\text{Neumann}} = \frac{1}{4\pi\alpha'} \int_{\mathcal{M}} d^2\sigma \partial^\alpha X^i \partial_\alpha X^j \delta_{ij} + i \int_{\partial\mathcal{M}} d\tau A_i(X) \dot{X}^i \quad (9.4. 22)$$

这里 $i, j = 0, \dots, p$. 因为我们在欧几里得空间, 所以产生了额外的系数 i . 同时, 垂直于膜的场具有迪利克雷边界条件, 范围为 $I = p + 1, \dots, D - 1$. 由如下作用量描述:

$$S_{\text{Dirichlet}} = \frac{1}{4\pi\alpha'} \int_{\mathcal{M}} d^2\sigma \partial^\alpha X^I \partial_\alpha X^J \delta_{IJ}$$

作用量 $S_{\text{Dirichlet}}$ 描述的是自由场, 不能用来计算 β 函数. 有趣的部分是 S_{Neumann} . 对于非零的 $A_i(X)$, 它是一个有边界的相互作用量子场论. 我们的任务是计算与 $A_i(X)$ 耦

合相关的 β 函数. 我们使用的计算方法与之前用于闭弦的方法相同. 我们将场 $X^i(\sigma)$ 展开为:

$$X^i(\sigma) = \bar{x}^i(\sigma) + \sqrt{\alpha'} Y^i(\sigma)$$

其中, 我们要求 $\bar{x}^i(\sigma)$ 是服从经典运动方程的固定背景:

$$\partial^2 \bar{x}^i = 0$$

(在闭弦的计算中, 我们选择了 \bar{x}^i 为常数的特殊情况. 这里我们讨论的是更一般的情况). 然而, 我们还需要为这个经典解考虑边界条件. 在没有规范场 A_i 的情况下我们需要在 $\sigma = 0$ 处施加纽曼边界条 $\partial_\sigma X^i = 0$. 然而, 对 eq. (9.4. 22) 做变分可知, 规范场的存在使得相关的边界条件有一个额外的修正项:

$$\partial_\sigma \bar{x}^i + 2\pi\alpha' i F^{ij} \partial_\tau \bar{x}_j = 0 \quad \text{at } \sigma = 0 \quad (9.4. 23)$$

其中 F_{ij} 表示场强:

$$F_{ij}(X) = \frac{\partial A_j}{\partial X^i} - \frac{\partial A_i}{\partial X^j} \equiv \partial_i A_j - \partial_j A_i$$

与闭弦的讨论类似, 场 $Y^i(\sigma)$ 是小波动. 同样, 展开中引入的因子 $\sqrt{\alpha'}$ 保证了 Y^i 无量纲. 将作用量 S_{Neumann} 展开, 从现在开始将其简记为 S . 到波动的二阶, 我们可以得到:

$$\begin{aligned} S[\bar{x} + \sqrt{\alpha'} Y] = & S[\bar{x}] + \frac{1}{4\pi} \int_{\mathcal{M}} d^2\sigma \partial Y^i \partial Y^j \delta_{ij} \\ & + i\alpha' \int_{\partial\mathcal{M}} d\tau \left(\partial_i A_j Y^i \dot{Y}^j + \frac{1}{2} \partial_i \partial_j A_k Y^i Y^j \dot{\bar{x}}^k \right) + \dots \end{aligned}$$

我们可以把边界项的第一项分成两半, 并对一半关于时间导数做分部积分:

$$\int d\tau (\partial_i A_j) Y^i \dot{Y}^j = \frac{1}{2} \int d\tau \partial_i A_j Y^i \dot{Y}^j - \partial_i A_j \dot{Y}^i Y^j - \partial_k \partial_i A_j Y^i Y^j \dot{\bar{x}}^k$$

结合第二项, 我们就可以用规范不变场强 F_{ij} 来写出作用量:

$$\begin{aligned} S[\bar{x} + \sqrt{\alpha'} Y] = & S[\bar{x}] + \frac{1}{4\pi} \int_{\mathcal{M}} d^2\sigma \partial Y^i \partial Y^j \delta_{ij} \\ & + \frac{i\alpha'}{2} \int_{\partial\mathcal{M}} d\tau \left(F_{ij} Y^i \dot{Y}^j + \partial_j F_{ik} Y^i Y^j \dot{\bar{x}}^k \right) + \dots \end{aligned} \quad (9.4. 24)$$

其中的 $+\dots$ 指的是展开中的高次项, 带有 F_{ij} 的高阶导数与相应的 α' 的幂. 计算一圈 β 函数可以忽略它们.

Y 的传播子

这个拉格朗日量描述了带边界相互作用的头几阶. 现在我们可以用它来计算 β 函数. 首先, 我们应该确定可能出现发散的项. 我们发现当波动场 Y^i 与它们的传播子缩并时 eq. (9.4. 24) 中的最后一项将导致发散. 传播子就是如下格林函数:

$$\langle Y^i(z, \bar{z}) Y^j(w, \bar{w}) \rangle = G^{ij}(z, \bar{z}; w, \bar{w})$$

在上半平面满足:

$$\partial \bar{\partial} G^{ij}(z, \bar{z}) = -2\pi \delta^{ij} \delta(z, \bar{z}) \quad (9.4. 25)$$

但现在有个小问题. Y^i 需要满足 $\text{Im } z = 0$ 处的边界条件, 这也应该反映在传播子的边界条件中. 我们在 5.8 节中曾简要地讨论了纽曼边界条件. 但我们现在也已经看到, 背景场强会将纽曼边界条件变为 eq. (9.4. 23). 与之相应地, 传播子 $G(z, \bar{z}; w, \bar{w})$ 现在必须满足:

$$\partial_\sigma G^{ij}(z, \bar{z}; w, \bar{w}) + 2\pi\alpha' i F_c^a \partial_\tau G^{cb}(z, \bar{z}; w, \bar{w}) = 0 \quad \text{at } \sigma = 0 \quad (9.4. 26)$$

在 5.8 节中, 我们展示了如何通过考虑下半平面的像电荷来构造纽曼边界条件. 类似的方法在这里也可行. 我们将 $G^{ij} \equiv G^{ij}(z, \bar{z}; w, \bar{w})$ 扩展到整个复平面. 受 eq. (9.4. 26) 约束的 eq. (9.4. 25) 的解为:

$$G^{ij} = -\delta^{ij} \ln |z - w| - \frac{1}{2} \left(\frac{1 - 2\pi\alpha' F}{1 + 2\pi\alpha' F} \right)^{ij} \ln |z - \bar{w}| - \frac{1}{2} \left(\frac{1 + 2\pi\alpha' F}{1 - 2\pi\alpha' F} \right)^{ij} \ln |\bar{z} - w|$$

抵消项与 β 函数

现在让我们回到相互作用理论 eq. (9.4. 24), 观察需要什么抵消项来消除发散. 由于所有的相互作用都发生在边界上, 我们应该在边界上计算传播子, 即满足 $z = \bar{z}$ 和 $w = \bar{w}$. 在这种情况下, 所有的对数都相同. 并在 $z \rightarrow w$ 的极限下发散: $\ln |z - w| \rightarrow \epsilon^{-1}$. 我们知道紫外发散的形式是:

$$-\frac{1}{\epsilon} \left[\delta^{ij} + \frac{1}{2} \left(\frac{1 - 2\pi\alpha' F}{1 + 2\pi\alpha' F} \right)^{ij} + \frac{1}{2} \left(\frac{1 + 2\pi\alpha' F}{1 - 2\pi\alpha' F} \right)^{ij} \right] = -\frac{2}{\epsilon} \left(\frac{1}{1 - 4\pi^2 \alpha'^2 F^2} \right)^{ij}$$

现在很容易确定必要的抵消项了. 我们只需将最后一项中的 $Y^i Y^j$ 替换为 $\langle Y^i Y^j \rangle$. 由此便可得到:

$$-\frac{i2\pi\alpha'^2}{\epsilon} \int_{\partial\mathcal{M}} d\tau \partial_j F_{ik} \left[\frac{1}{1-4\pi^2\alpha'^2 F^2} \right]^{ij} \dot{x}^c$$

为了让开弦保持共形不变性, 我们需要相关的 β 函数消失. 这就要求场强 F_{ij} 满足:

$$\partial_j F_{ik} \left[\frac{1}{1-4\pi^2\alpha'^2 F^2} \right]^{ij} = 0 \quad (9.4. 27)$$

这是 F_{ij} 满足的运动方程.

9.4.2 波恩-英费尔德作用量 (Born-Infeld Action)

方程 eq. (9.4. 27) 看起来可能不太熟悉. 与闭弦类似, 我们希望写下一个能得到 eq. (9.4. 27) 作为运动方程的作用量. 实际上, 相关的作用量在几十年前就作为麦克斯韦理论的非线性替代被构造出来了, 即波恩-英费尔德作用量 (Born-Infeld Action):

$$S = -T_p \int d^{p+1}\xi \sqrt{-\det(\eta_{ij} + 2\pi\alpha' F_{ij})} \quad (9.4. 28)$$

这里的 ξ 是膜对应的世界体上的坐标, T_p 是 Dp -膜的张力 (因为它作为作用量的因子出现, 所以不影响运动方程). 规范势可以看作是世界体坐标的函数: $A_i = A_i(\xi)$. 实际上, 要证明我们从这个作用量泛函微商得出的运动方程与使 β 函数消失的 eq. (9.4. 27) 还需要花点功夫.

对于较小的场强 $F_{ij} \ll 1/\alpha'$, 作用量 eq. (9.4. 28) 会得到麦克斯韦理论的作用量. 这只需展开得到:

$$S = -T_p \int d^{p+1}\xi \left(1 + \frac{(2\pi\alpha')^2}{4} F_{ij} F^{ij} + \dots \right)$$

第一阶正是含场强二次方的麦克斯韦作用量. 含 F_{ij} 更高次幂的项含有相应的 α' 幂, 因此属于更高阶.

因此, 对于较小的场强 D -膜上的规范场受麦克斯韦方程组支配. 然而, 当电场和磁场强度增大到 $1/\alpha'$ 时, 就会有动力学的非线性修正, 并被波恩-英费尔德作用量所描述.

波恩-英费尔德作用量来自一圈 β 函数. 这是场强为常数时的精确结果. 如果我们想理解具有大梯度的规范场 ∂F 的动力学就必须确定 β 函数的高圈贡献.

9.5 狄拉克-波恩-英费尔德作用量 (Dirac-Born-Infeld Action)

我们已经看到,-膜上规范场的动力学由波恩-英费尔德作用量描述. 但是膜本身的波动呢? 我们在 4.3 节简要地讨论了这个问题. 我们发现,-膜本身的波动应该由狄拉克作用量 eq. (4.3. 24) 描述. 我们原则上可以通过考虑膜上标量场 ϕ^I 的 β 函数来直接说明这一点, 因为物理上考虑这些方程就相当于考虑了膜弯曲的边界条件. 即按照 β 函数的思路, 直接证明膜的波动受狄拉克作用量的支配. 这部分的计算可以参考 [8]

更一般地, 我们可以同时考虑规范场的动力学和膜的波动. 这是由狄拉克作用量和波恩-英费尔德作用量共同描述的. 通常称为狄拉克-波恩-英费尔德作用量 (Dirac-Born-Infeld Action) 简记为 DBI 作用量. 此后我们也常常将波恩-英费尔德作用量简记为 BI 作用量

$$S_{DBI} = -T_p \int d^{p+1}\xi \sqrt{-\det(\gamma_{ij} + 2\pi\alpha' F_{ij})}$$

正如 4.3 节所述, γ_{ij} 是时空度规向世界体的拉回:

$$\gamma_{ij} = \frac{\partial X^\mu}{\partial \xi^i} \frac{\partial X^\nu}{\partial \xi^j} \eta_{\mu\nu}$$

这个作用量中新引入的场是嵌入坐标 $X^\mu(\xi)$, 其中 $\mu = 0, \dots, D-1$. 这似乎是 D 个新引入的自由度, 而我们预期只有 $D-p-1$ 的横向物理自由度. 解决这个问题的办法现在应该很熟悉了: DBI 作用量具有重参数化不变性, 可以消除膜的纵向波动.

我们可以利用这种重参数化不变性考虑静态规范. 对于无限大的平直 Dp -膜, 可以取:

$$X^i = \xi^i \quad a = 0, \dots, p$$

这样, 拉回度规就只取决于横向部分 X^I :

$$\gamma_{ij} = \eta_{ij} + \frac{\partial X^I}{\partial \xi^i} \frac{\partial X^J}{\partial \xi^j} \delta_{IJ}$$

如果我们对场强 F_{ij} 和导数 $\partial_i X$ 均较小的情况感兴趣, 那么我们可以把 DBI 作用量展开到前几阶, 得到:

$$S = -(2\pi\alpha')^2 T_p \int d^{p+1}\xi \left(\frac{1}{4} F_{ij} F^{ij} + \frac{1}{2} \partial_i \phi^I \partial^i \phi^I + \dots \right)$$

其中, 我们在作用量中去掉了一个整体常数项. 标量场 ϕ^I 定义为 $\phi^I = X^I/2\pi\alpha'$. 不难发现, 舍弃了 α' 的高阶项后得到的就是自由无质量标量场 ϕ^I 与自由麦克斯韦理论.

9.5.1 与闭弦场的耦合

我们看到, DBI 作用量描述了平直空间中 Dp -膜的低能动力学. 我们现在可以问, 如果 D -膜在由闭弦模 $G_{\mu\nu}$, $B_{\mu\nu}$ 和 Φ 产生的背景中运动, 它的运动会受到什么影响? 我们先写下答案, 然后依次论证每个项. 这种作用量是:

$$S_{DBI} = -T_p \int d^{p+1}\xi e^{-\tilde{\Phi}} \sqrt{-\det(\gamma_{ij} + 2\pi\alpha' F_{ij} + B_{ij})}$$

让我们从与背景度规 $G_{\mu\nu}$ 的耦合开始. 它实际上隐藏在这个表达式的符号中: 它出现在拉回度规 γ_{ij} 中, 由以下公式给出:

$$\gamma_{ij} = \frac{\partial X^\mu}{\partial \xi^i} \frac{\partial X^\nu}{\partial \xi^j} G_{\mu\nu}$$

这是非常自然的.

接下来是伸缩子. 就像 eq. (9.3.17) 中一样, 我们把伸缩子分解成一个常量部分和一个变量部分 $\Phi = \Phi_0 + \tilde{\Phi}$. 常数部分控制着渐近弦耦合, 即 $g_s = e^{\Phi_0}$, 并且隐含在作用量整体系数中, 因为 D -膜的张力按以下方式缩放:

$$T_p \sim 1/g_s$$

这就解释了作用量前面的 $e^{-\tilde{\Phi}}$ 因子: 它的作用只是把伸缩子的变化部分与不变部分重新组合在一起. 它表明 D -膜的张力取决于伸缩子场局域定义的值, 而不是渐近的常数值. 如果伸缩子发生变化, 时空中某点 X 的有效弦耦合就会由 $g_s^{eff} = e^{\Phi(X)} = g_s e^{\tilde{\Phi}(X)}$ 给出.

最后, 让我们来看看 $B_{\mu\nu}$ 场. 这是一个时空中的二形式场. 在 DBI 作用量中出现的函数 B_{ij} 是向世界体的拉回:

$$B_{ij} = \frac{\partial X^\mu}{\partial \xi^i} \frac{\partial X^\nu}{\partial \xi^j} B_{\mu\nu}$$

实际上, 它在 DBI 作用量中出现仅仅是基于规范不变性的要求. 考虑一个同时在时空中的背景 $B_{\mu\nu}(X)$ 和膜的世界体上的背景 $A_i(X)$ 的存在下运动的开弦, 就可以看到这

一点. 作用量中与之相关的项是:

$$\frac{1}{4\pi\alpha'} \int_{\mathcal{M}} d^2\sigma \epsilon^{\alpha\beta} \partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X^\nu B_{\mu\nu} + \int_{\partial\mathcal{M}} d\tau A_i \dot{X}^i$$

在规范变换

$$B_{\mu\nu} \rightarrow B_{\mu\nu} + \partial_\mu C_\nu - \partial_\nu C_\mu \quad (9.5. 29)$$

下, 第一项的变化是一个整体导数. 这对于闭弦来说没有问题, 但对于开弦来说, 它不能保证作用量不变, 因为开弦存在边界项. 在规范变换 eq. (9.5. 29) 下, 我们有:

$$\begin{aligned} S_B &= \frac{1}{4\pi\alpha'} \int_{\mathcal{M}} d^2\sigma \epsilon^{\alpha\beta} \partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X^\nu B_{\mu\nu} \\ &\rightarrow S_B + \frac{1}{2\pi\alpha'} \int_{\mathcal{M}} d\sigma d\tau \epsilon^{\alpha\beta} \partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X^\nu \partial_\mu C_\nu \\ &= S_B + \frac{1}{2\pi\alpha'} \int_{\mathcal{M}} d\sigma d\tau \epsilon^{\alpha\beta} \partial_\alpha (\partial_\beta X^\nu C_\nu) \\ &= S_B + \frac{1}{2\pi\alpha'} \int_{\partial\mathcal{M}} d\tau \dot{X}^\nu C_\nu = S_B + \frac{1}{2\pi\alpha'} \int_{\partial\mathcal{M}} d\tau \dot{X}^i C_i \end{aligned}$$

其中, 在最后一行我们将 \dot{X}^ν 的求和替换为纽曼边界条件 \dot{X}^i 的求和. 这是因为对于迪利克雷边界条件, 在端点处一定有 $\dot{X}^I = 0$.

于是我们知道弦作用量在 eq. (9.5. 29) 下会发生变化. 为了恢复这种规范不变性, 必须用第二项中 A_i 的适当变化来进行抵消. 考虑:

$$A_i \rightarrow A_i - \frac{1}{2\pi\alpha'} C_i \quad (9.5. 30)$$

需要注意的是, 这不是我们在电动力学中通常考虑的那种规范变换. 尤其是, 场强 F_{ij} 并不是不变的. 相反, 在 eq. (9.5. 29) 和 eq. (9.5. 30) 下, 规范不变的是一个组合:

$$B_{ij} + 2\pi\alpha' F_{ij}$$

这就是他们必须组合起来出现在 DBI 作用量中的原因. 这也与一个重要的物理效应有关. 我们已经看到, 时空中的弦在 $B_{\mu\nu}$ 下是带荷的. 而我们也看到, 弦的末端在 D -膜上的规范场 A_i 下也是带荷的. 这就意味着开弦在膜上存储 B 的荷, 并转化为 A 的荷. 而规范不变场强涉及 F_{ij} 和 B_{ij} 的组合正与这种电荷的相互作用有关.

9.6 杨-米尔斯作用量

最后, 让我们考虑一下 N 个重合 D -膜的情况. 我们在 4.4 节中讨论过这个问题, 我们在那一节中表明, D -膜上的无质量场可以自然地打包成 $N \times N$ 厄米矩阵. 矩阵的元素告诉我们端点处在哪一个膜上. 相应地, 规范场的形式为:

$$(A_i)^m_n$$

其中 $i = 0, \dots, p$, $m, n = 1, \dots, N$. 它看起来是一个 $U(N)$ 规范联络. 但我们是如何看到这一点的呢? 为什么这个规范场描述的是 $U(N)$ 规范对称性, 而不是诸如 $U(1)^{N^2}$ 的其他规范对称性?

要想知道重合膜会产生 $U(N)$ 规范对称性, 最快捷的方法就是回想一下, 弦的端点在 $U(1)$ 规范场的作用下是带电的. 而 $U(1)$ 规范场就在它的端点所在的膜上. 让我们用一个最简单的例子来说明这一点. 假设我们有两个膜. 对角线分量为 $(A_i)^1_1$ 和 $(A_i)^2_2$ 他们来自于两端点位于同一膜的弦. 他们每个都是 $U(1)$ 规范场. 那么非对角项 $(A_i)^1_2$ 和 $(A_i)^2_1$ 呢? 它们来自两端点分别位于两个不同膜的弦. 它们同样是无质量的规范玻色子, 但在两个原本的 $U(1)$ 对称下它们分别带着 $(+1, -1)$ 和 $(-1, +1)$ 的荷. 而这恰恰是 $U(2)$ 规范理论的结构. 其中的非对角项类似于 W 玻色子. 事实上, 只有通过非阿贝尔规范对称性才能理解无质量带荷的自旋 1 粒子.

因此, N 个重合膜的无质量激发是一个 $U(N)$ 规范场 $(A_i)^m_n$, 以及标量 $(\phi^I)^m_n$, 它们在 $U(N)$ 规范群的伴随表示 (adjoint representation) 中变换. 我们在第 4 章中看到, 对角分量 $(\phi^I)^m_m$ 可以解释为第 m 张膜的横向波动. 我们现在能写出描述这些场相互作用的作用量吗?

事实上, 写出 DBI 作用量的非阿贝尔推广有许多微妙问题. 并且我们并不知道它具体的形式. 不过, 我们可以通过考虑场强较小时的低能极限来取得进展. 忽略矩阵指标, 非阿贝尔场强表达式:

$$F_{ij} = \partial_i A_j - \partial_j A_i + i[A_i, A_j]$$

忽略整体常数项, 描述 N 个重合的 Dp -膜动力学的低能作用量已被证明可以写为:

$$S = -(2\pi\alpha')^2 T_p \int d^{p+1}\xi \operatorname{Tr} \left(\frac{1}{4} F_{ij} F^{ij} + \frac{1}{2} \mathcal{D}_i \phi^I \mathcal{D}^i \phi^I - \frac{1}{4} \sum_{I \neq J} [\phi^I, \phi^J]^2 \right) \quad (9.6. 31)$$

我们发现第一项正是 $U(N)$ 杨-米尔斯作用量. 而前面的系数是耦合常数 $1/g_{YM}^2$. 对于

一个 Dp -膜, 它可以写为 $\alpha'^2 T_p$, 或:

$$g_{YM}^2 \sim l_s^{p-3} g_s$$

作用量中 ϕ^I 的动力学项反映了这些场在规范群的伴随表示中变换,

$$\mathcal{D}_i \phi^I = \partial_i \phi^I + i[A_i, \phi^I]$$

我们不会具体推导出这一作用量, 但大概思路是: 前两个项可以根据规范不变性单独推导出来. 而势项相对复杂, 快捷方法是使用 T 对偶, 或者在超弦的情况下使用超对称.

平直, 无限大 Dp -膜破坏了时空的洛伦兹群, 使之成为:

$$S(1, D-1) \rightarrow SO(1, p) \times SO(D-p-1) \quad (9.6.32)$$

这里 $SO(1, p)$ 只是 D -膜世界体的洛伦兹群. 而 $SO(D-p-1)$ 是 D -膜理论的全局对称性, 描述标量场 ϕ^I 的旋转.

作用量 eq. (9.6.31) 中的势项:

$$V = -\frac{1}{4} \sum_{I \neq J} \text{Tr} [\phi^I, \phi^J]^2$$

包含很多信息. 势是正半定的. 我们可以看一下无需能量, 即 $V = 0$ 就能引入的场. 这就要求所有的 ϕ^I 都能换向, 也就是说, 经过适当的规范变换后, 它们都是对角形式:

$$\phi^I = \begin{pmatrix} \phi_1^I & & \\ & \ddots & \\ & & \phi_N^I \end{pmatrix} \quad (9.6.33)$$

对角分量 ϕ_n^I 描述了横向空间 \mathbb{R}^{D-p-1} 中第 n 张膜的位置. 我们仍然需要把维数搞清楚. 标量场的量纲为 $[\phi] = 1$. 其与 X 的关系我们之前在 4.3 中提到过, 是:

$$\vec{X}_n = 2\pi\alpha' \vec{\phi}_n \quad (9.6.34)$$

其中, 我们用向量符号来代替 I 指标.

特征值 ϕ_n^I 不是规范不变的: 有一个冗余的规范对称性使 ϕ^I 保 eq. (9.6.33) 的形式, 但是用 S_N , 即 N 阶置换群对矩阵元进行了置换. 这有一个非常自然的解释: 它表明 D -

膜是不可区分的对象.

当所有膜彼此分离时, 真空期望值 eq. (9.6. 33) 会将规范群破坏: $U(N) \rightarrow U(1)^N$. 于是 W 玻色子通过希格斯机制获得了质量 M_W . 让我们来计算一下这个质量. 考虑一个 $U(2)$ 理论, 并在 $X^D \equiv X$ 方向上将两个 D-膜分离. 于是我们引入了 $\phi^D = \phi$ 的真空期望值, 我们将其写为:

$$\phi = \begin{pmatrix} \phi_1 & 0 \\ 0 & \phi_2 \end{pmatrix} \quad (9.6. 35)$$

其中 ϕ_1 和 ϕ_2 的值分别是第一张和第二张膜的位置. 或者更准确地说, 我们需要乘以 eq. (9.6. 34) 中的转换系数 $2\pi\alpha'$ 才能得到这两张膜的位置 X_m .

现在让我们从杨-米尔斯作用量 eq. (9.6. 31) 计算一下 W 玻色子的质量. 它来自协变导数项 $\mathcal{D}\phi$. 我们将规范场展开为:

$$A_i = \begin{pmatrix} A_i^{11} & W_i \\ W_i^\dagger & A_i^{22} \end{pmatrix}$$

其中 A^{11} 和 A^{22} 描述两个 $U(1)$ 规范场. W 表示 W 玻色子. W 玻色子的质量来自协变导数内部的 $[A_i, \phi]$ 项, 利用期望值 eq. (9.6. 35), 我们可以得到:

$$\frac{1}{2} \text{Tr} [A_i, \phi]^2 = -(\phi_2 - \phi_1)^2 |W_i|^2$$

这便给出了 W 玻色子的质量:

$$M_W^2 = (\phi_2 - \phi_1)^2 = T^2 |X_2 - X_1|^2$$

其中 $T = 1/2\pi\alpha'$ 是弦的张力. 它有一个非常自然的解释: 这是端点分立在两个 D-膜上的开弦的质量. 我们看到, D-膜利用伴随标量为希格斯机制提供了一种自然的几何解释.

需要注意的是, 当膜彼此离开得很远时, 处在它们之间的弦很重. 它们的位置是由 eq. (9.6. 33) 中给出的矩阵的对角元素描述的. 当膜离得越来越近, 这些被拉伸的弦变得很轻, 并且对膜的动力学非常重要. 现在, D-膜的位置可以用完整的 $N \times N$ 矩阵来描述. 于是, 在短距离时, D-膜视角下的空间是非交换的.

一般来说, 我们可以考虑横向空间中位于 \vec{X}_m , $m = 1, \dots, N$ 的 N 个 D-膜. 在第 m 和

第 n 张膜之间的弦的质量为:

$$M_W = |\vec{\phi}_n - \vec{\phi}_m| = T|\vec{X}_n - \vec{X}_m|$$

这与用 eq. (9.6. 31) 计算出的对应 W 玻色子的质量再次吻合.

9.7 紧致化 (compactification)

我们已经看到, 玻色弦生活在 $D = 26$ 维中. 但我们不是. 更准确地说, 我们只观察到三个宏观的空间维度. 那么我们该如何调和这种矛盾呢?

答案就是, 我们可以将部分维度卷曲起来. 事实上, 在某些情况下, 这是我们描述的对象所必需的. 这里我们可以展示一些具有这种性质的低能有效作用量的简单解. 我们取 $H_{\mu\nu\rho} = 0$, Φ 为常数. 然后, 我们只需寻找服从 $\mathcal{R}_{\mu\nu} = 0$ 的里奇平直背景. 存在部分解满足其度规是空间上度规的直积:

$$\mathbb{R}^{1,3} \times \mathbb{X} \quad (9.7. 36)$$

其中 \mathbb{X} 是一个紧致的二十二维里奇平直流形.

最简单的流形是 $\mathbb{X} = \mathbb{T}^{22}$, 即具有里奇平直度规的环面. 当然, 还有许多其他可能性. 允许这种里奇平直度规的紧致复流形被称为卡拉比丘流形 (Calabi-Yau manifolds). (严格来说, 卡拉比丘流形是第一陈类 (first Chern class) 消失的复流形. 丘成桐的工作保证了这些空间上存在唯一的里奇平直度规).

早在弦理论之前, 人们就考虑到宇宙中可能存在被紧致化的额外维度, 并将其命名为卡鲁扎-克莱因紧致化 (Kaluza-Klein compactification), 以下简称 KK 紧致化. 如果空间 \mathbb{X} 的特征尺度 L 足够小, 那么这些额外维的存在就无法被观测到. 粒子物理标准模型已经可以精确预言 TeV 能标下的物理现象, 这意味着如果标准模型粒子可以出现在 \mathbb{X} 中, 那么其尺度必须是 $L \lesssim (\text{TeV})^{-1} \sim 10^{-18}$ 米.

然而, 我们也可以认为标准模型被限制在这些额外维的某些部分中 (例如位于 D-膜上). 在这种情况下, 对紧致化尺度的要求就会变得弱得多. 这时只需要 $L \lesssim 10^{-7}$ 米即可.

考虑低能有效作用量中的爱因斯坦-希尔伯特项. 如果我们只对 $\mathbb{R}^{1,3}$ 上的四维度规的动力学感兴趣, 那么便有:

$$S_{EH} = \frac{1}{2\kappa^2} \int d^{26}X \sqrt{-\tilde{G}} \tilde{\mathcal{R}} = \frac{\text{Vol}(\mathbb{X})}{2\kappa^2} \int d^4X \sqrt{-G_{4d}} \mathcal{R}_{4d}$$

从这个等式¹中, 我们可以知道有效四维牛顿常数是由二十六维中的牛顿常数给出的:

$$8\pi G_N^{4d} = \frac{\kappa^2}{\text{Vol}(\mathbb{X})}$$

表示为四维普朗克长度的形式, 我们可以得到 $l_p^{(4d)} \sim g_s l_s^{12} / \sqrt{\text{Vol}(\mathbb{X})}$. 整个分析的过程我们都要求 $g_s \ll 1$ 并且要求内部空间的所有尺度都大于 l_s . 这就确保了 $l_p^{(4d)} < l_s$. 虽然四维普朗克尺度极小, 只有 $l_p^{(4d)} \sim 10^{-35}$ 米, 但我们可能并不需要探测到这个距离就能研究引力物理学的紫外性质. 因为上面的近似计算表明由于额外维体积 $\sqrt{\text{Vol}(\mathbb{X})}$ 的原因, 弦的尺度 l_s 可能相对而言更大.

而在本节中, 我们将考虑玻色弦的最简单紧致化: 形式如下的背景时空

$$\mathbb{R}^{1,24} \times \mathbb{S}^1 \quad (9.7.37)$$

圆的半径为 R , 因此 \mathbb{S}^1 上的坐标具有周期性:

$$X^{25} \equiv X^{25} + 2\pi R$$

我们最初会对尺度 $\gg R$ 的物理学感兴趣, 在这种情况下, 可以忽略 \mathbb{S}^1 上的运动. 我们的目标是了解对于生活在非紧致 $\mathbb{R}^{1,24}$ 闵氏空间中的观察者视角下的物理学. 这就是前述 KK 紧致化, 也称为圈紧致化, 简称圈紧化. 我们将从两个方面来观察这种紧致化: 一是从时空低能有效作用量的角度, 二是从弦世界面的角度.

9.7.1 靶空间视角

让我们从低能有效作用量开始. 考虑尺度 $\gg R$, 即我们将认为所有场都与 X^{25} 无关: 它们只是非紧致流形 $\mathbb{R}^{1,24}$ 上的函数.

考虑爱因斯坦标架下的度规. 它在 $\mathbb{R}^{24,1}$ 上分解成三个不同的场: 度规 $\tilde{G}_{\mu\nu}$, 一个矢量 A_μ 和一个标量 σ . 可以打包成 $D = 26$ 维的度规, 即:

$$ds^2 = \tilde{G}_{\mu\nu} dX^\mu dX^\nu + e^{2\sigma} (dX^{25} + A_\mu dX^\mu)^2 \quad (9.7.38)$$

此处所有指标都只取非紧致方向 $\mu, \nu = 0, \dots, 24$.

矢量场 A_μ 就是普通的规范场, 其规范对称性来自于 $D = 26$ 维的微分同胚. 这是因为

¹这里忽略了内部流形 \mathbb{X} 的各种可能出现的结构.

在变换 $\delta X^\mu = V^\mu(X)$ 下, 度规变换为:

$$\delta G_{\mu\nu} = \nabla_\mu \Lambda_\nu + \nabla_\nu \Lambda_\mu$$

这表明紧致方向的微分同胚 $\delta X^{25} = \Lambda(X^\mu)$ 变成了 A_μ 的规范变换:

$$\delta A_\mu = \partial_\mu \Lambda$$

我们还想知道 $G_{\mu\nu}$, A_μ 和 σ 这三个场是如何相互作用的. 为了确定这一点, 我们只需将 eq. (9.7. 38) 代回到 $D = 26$ 爱因斯坦-希尔伯特作用量中. $D = 26$ 里奇标 $\mathcal{R}^{(26)}$ 由以下公式给出:

$$\mathcal{R}^{(26)} = \mathcal{R} - 2e^{-\sigma} \nabla^2 e^\sigma - \frac{1}{4} e^{2\sigma} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$$

其中 \mathcal{R} 现在指的是 $D = 25$ 里奇标量. 且作用量变为:

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2\kappa^2} \int d^{26} X \sqrt{-\tilde{G}^{(26)}} \mathcal{R}^{(26)} \\ &= \frac{2\pi R}{2\kappa^2} \int d^{25} X \sqrt{-\tilde{G}} e^\sigma \left(\mathcal{R} - \frac{1}{4} e^{2\sigma} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \partial_\mu \sigma \partial^\mu \sigma \right) \end{aligned}$$

我们对 D 维的爱因斯坦引力进行降维, 得到了 $D - 1$ 维的爱因斯坦引力. 它与 $U(1)$ 规范理论以及单个无质量标量耦合. 这正是卡鲁扎和克莱因的最初想法, 即, 构造自然产生于高维引力的麦克斯韦理论.

上面的引力作用量并不完全是爱因斯坦-希尔伯特形式的. 我们需要再次变换标架, 与 9.3.1 节中吸收伸缩子类似地吸收标量 σ . 此外, 这里也同样不存在决定 σ 真空期望值的势. 改变 σ 的真空期望值就相当于改变 R . 所以这就告诉我们, 引力作用量中没有任何东西可以确定紧致半径 R . 这是所有 KK 紧致化共有的问题: 总是存在与内部空间的体积以及其他变形相对应的无质量标量场. 如果我们想用这种 KK 紧致化来描述我们的宇宙就需要消除无质量标量场. 这意味着我们需要一种机制, 为标量场提供某种势, 使它们变得有质量, 并动态地确定它们的真空期望值. 而这种机制在超弦的背景下是存在的.

现在观察低能有效作用量中其他场的 KK 紧致化. 伸缩子很简单: D 维标量变为 $D - 1$ 维标量. 反对称二形式则有更多的结构: 它变为一个二形式场 $B_{\mu\nu}$, 以及一个矢量场 $\tilde{A}_\mu = B_{\mu 25}$.

总之, 玻色弦在 $D - 1$ 维的低能物理由一个度规 $G_{\mu\nu}$, 两个 $U(1)$ 规范场 A_μ 和 \tilde{A}_μ 以及两个无质量标量 Φ 和 σ 组成.

圈紧化的影响

在上面的讨论中, 我们假设所有场都与带周期性的 X^{25} 无关. 现在让我们看看如果我们放松这个限制会发生什么. 观察标量场 Φ 总是最简单的. 我们可以看到所产生的物理结果, 而不必担心用带指标的复杂计算. 一般来说, 我们可以将这个场围绕紧致化圈做傅立叶模式来推广展开

$$\Phi(X^\mu; X^{25}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Phi_n(X^\mu) e^{inX^{25}/R}$$

其中我们要求 $\Phi_n^* = \Phi_{-n}$. 暂时忽略与引力的耦合, 这个标量的运动学项是

$$\int d^{26}X \partial_\mu \Phi \partial^\mu \Phi + (\partial_{25} \Phi)^2 = 2\pi R \int d^{25}X \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\partial_\mu \Phi_n \partial^\mu \Phi_{-n} + \frac{n^2}{R^2} |\Phi_n|^2 \right)$$

这个简单的傅立叶分解告诉了我们一些非常重要的信息: $\mathbb{R}^{1,D-1} \times \mathbb{S}^1$ 上的单个标量场会分裂成 $\mathbb{R}^{1,D-2}$ 上的无数个标量场. 用整数 n 标记. 这些场的质量为:

$$M_n^2 = \frac{n^2}{R^2} \quad (9.7.39)$$

在 R 较小的情况下, 除了无质量零模 $n=0$ 外, 所有粒子都是有质量的. 而有质量通常也被称为卡鲁扎-克莱因模, 简称 KK 模. 如果我们探测的是能量 $\ll 1/R$, 或者等价地, 探测距离尺度 $\gg R$, 就可以忽略它们.

具有 $n \neq 0$ 的 KK 模 Φ_n 还有一个有趣的特性: 它们在度规产生的规范场 A_μ 下带电. 理解这一点最简单的方法就是查看相应的规范变换, 即微分同胚变换 $X^{25} \rightarrow X^{25} + \Lambda(X^\mu)$. 在这一变换下 KK 模也相应地发生变化:

$$\Phi_n \rightarrow \exp\left(\frac{in\Lambda}{R}\right) \Phi_n$$

于是第 n 级 KK 模的荷为 n/R . 事实上, 我们通常会把规范场放缩为 $A'_\mu = A_\mu/R$, 在这种情况下, KK 模的荷 Φ_n 就是 $n \in \mathbb{Z}$.

9.7.2 世界面视角

现在我们从弦的角度来考虑 KK 紧致化. 我们要研究在背景 $\mathbb{R}^{1,24} \times \mathbb{S}^1$ 中运动的弦. 圈紧化有两种方式改变弦的动力学.

- 圈紧化的第一个影响是, 弦在圈方向上的动量 p 不能再取任意值, 而是被量子化的整数单位:

$$p^{25} = \frac{n}{R} \quad n \in \mathbb{Z}$$

为得到这一结论, 我们只要求弦的波函数 (包括因子 $e^{ip \cdot X}$) 是单值的.

- 第二个影响是, 我们可以为 X 的模展开提供更宽泛的边界条件. 当我们在弦上移动时, 我们不再需要 $X(\sigma + 2\pi) = X(\sigma)$, 而是可以放宽到

$$X^{25}(\sigma + 2\pi) = X^{25}(\sigma) + 2\pi m R \quad m \in \mathbb{Z}$$

整数 m 表示弦绕 \mathbb{S}^1 多少圈. 它通常被称为绕数 (winding number).

现在让我们沿着第 3 章中的方法研究 eq. (9.7. 37) 中靶空间的弦谱. 我们首先只考虑周期性的 X^{25} 场, 与之前处理过程的不同之处在于, 现在 X^{25} 的模展开为:

$$X^{25}(\sigma, \tau) = x^{25} + \frac{\alpha' n}{R} \tau + m R \sigma + \text{oscillator modes}$$

其中包含了动量量子数和绕组数. 在将 $X^{25}(\sigma, \tau)$ 拆分为右移和左移部分之前, 我们有必要引入以下两个量

$$p_L = \frac{n}{R} + \frac{mR}{\alpha'} \quad , \quad p_R = \frac{n}{R} - \frac{mR}{\alpha'} \quad (9.7. 40)$$

再进行拆分 $X^{25}(\sigma, \tau) = X_L^{25}(\sigma^+) + X_R^{25}(\sigma^-)$, 于是有展开:

$$\begin{aligned} X_L^{25}(\sigma^+) &= \frac{1}{2}x^{25} + \frac{1}{2}\alpha' p_L \sigma^+ + i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \tilde{\alpha}_n^{25} e^{-in\sigma^+} \quad , \\ X_R^{25}(\sigma^-) &= \frac{1}{2}x^{25} + \frac{1}{2}\alpha' p_R \sigma^- + i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \alpha_n^{25} e^{-in\sigma^-} \end{aligned}$$

这与模展开 eq. (2.6. 66) 的区别只在于 p_L 和 p_R 项. 平直空间 $\mathbb{R}^{1,24}$ 上所有其他 X 的模展开保持不变.

那么, 对于 $D = 25$ 非紧致方向上的观者, 这个理论的频谱是什么样的? 每个粒子的态将由一个动量 p^μ 来描述, 其中 $\mu = 0, \dots, 24$. 粒子的质量为

$$M^2 = - \sum_{\mu=0}^{24} p_\mu p^\mu$$

与之前一样, 这些粒子的质量由弦的振荡模通过 L_0 与 \tilde{L}_0 限制条件固定:

$$M^2 = p_L^2 + \frac{4}{\alpha'}(\tilde{N} - 1) = p_R^2 + \frac{4}{\alpha'}(N - 1)$$

其中 N 和 \tilde{N} 是能级数, 在光锥量化中定义为 eq. (3.4. 40). (我们应该把光锥坐标放在 $\mathbb{R}^{1,24}$ 内, 而不是沿着 S^1). -1 是正规排序常数.

它与 eq. (3.4. 42) 的不同之处在于右侧存在围绕 S^1 的动量项和绕数项. 特别地, 能级匹配条件不再是 $N = \tilde{N}$, 而是:

$$N - \tilde{N} = nm \quad (9.7. 41)$$

展开质量公式, 我们得到:

$$M^2 = \frac{n^2}{R^2} + \frac{m^2 R^2}{\alpha'^2} + \frac{2}{\alpha'}(N + \tilde{N} - 2) \quad (9.7. 42)$$

这个公式中的新项有一个简单的解释. 第一项表明, 对于弦, 在圈上 $n > 0$ 的动量会对质量贡献 n/R . 这与我们在研究 KK 紧致化时发现的 eq. (9.7. 39) 是一致的. 而第二项就更容易理解了. 弦绕圈 $m > 0$ 次会对其质量贡献 $2\pi mRT$ 其中 $T = 1/2\pi\alpha'$ 是弦的张力.

无质量态

现在我们考虑 $\mathbb{R}^{1,24}$ 中的无质量态. 这可以在质量公式 eq. (9.7. 42) 中通过观察动量为零的 $n = 0$, 绕度为零 $m = 0$, 且满足能级匹配条件 $N = \tilde{N} = 1$ 的态来实现. 有如下可能的备选:

- $\alpha_{-1}^\mu \tilde{\alpha}_{-1}^\nu |0; p\rangle$: 在洛伦兹群 $SO(1, 24)$ 下, 这些态分解为一个度规 $G_{\mu\nu}$, 一个反对称张量 $B_{\mu\nu}$ 和一个标量 Φ .
- $\alpha_{-1}^\mu \tilde{\alpha}_{-1}^{25} |0; p\rangle$ 与 $\alpha_{-1}^{25} \tilde{\alpha}_{-1}^\mu |0; p\rangle$: 这是两个矢量场. 我们可以将其和 $(\alpha_{-1}^\mu \tilde{\alpha}_{-1}^{25} + \alpha_{-1}^{25} \tilde{\alpha}_{-1}^\mu) |0; p\rangle$ 认为是来自度规的矢量场 A_μ , 其差 $(\alpha_{-1}^\mu \tilde{\alpha}_{-1}^{25} - \alpha_{-1}^{25} \tilde{\alpha}_{-1}^\mu) |0; p\rangle$ 认为是来自反对称二形式场的矢量场 \tilde{A}_μ .
- $\alpha_{-1}^{25} \tilde{\alpha}_{-1}^{25} |0; p\rangle$: 这是另一个标量. 可以当作与 S^1 半径相关的标量 σ .

这些就是圈紧化下弦的无质态.

带荷的场

我们还可以检验在规范场 A_μ 下, 具有 $n \neq 0$ 的 KK 模带荷 n . 我们可以通过计算类似 QED 三点函数来确定一个态在 $U(1)$ 下的荷, 即两条外线对应于感兴趣的态, 而第三条外线类似于光子. 我们有两个这样的态, 其顶角算符为:

$$V_\pm(p) \sim \zeta_\mu(\partial X^\mu \bar{\partial} X^{25} \pm \partial X^{25} \bar{\partial} X^\mu) e^{ip \cdot X}$$

其中, $+$ 对应于 A_μ , 而 $-$ 对应于 \tilde{A}_μ , 忽略整体的归一化系数. 与此同时, 任何态都可以用系数 $e^{ip_L X^{25}(z) + ip_R \bar{X}^{25}(\bar{z})}$ 给算符分配动量 n 和绕度 m . 与往常一样, 以快子为例. 其顶角算符为:

$$V_{m,n}(p) \sim e^{ip \cdot X} e^{ip_L X^{25} + ip_R \bar{X}^{25}}$$

态的荷是态对应的场与光子的三点耦合:

$$\langle V_\pm(p_1) V_{m,n}(p_2) V_{-m,-n}(p_3) \rangle \sim \delta^{25} \left(\sum_i p_i \right) \zeta_\mu(p_2^\mu - p_3^\mu) (p_L \pm p_R)$$

前面的系数. 前几个因子只是运动学因子. 真正有趣的信息在最后一个因子中. 它告诉我们, 在 A_μ 下, 场的荷为 $p_L + p_R \sim n/R$. 这与我们之前看到的 KK 紧致化的结果一致. 然而, 这也告诉我们: 在 \tilde{A}_μ 下, 场带的荷为 $p_L - p_R \sim mR/\alpha'$. 换句话说, 绕紧致化圈的模在 $B_{\mu\nu}$ 紧致化产生的规范场下是带荷的. 这并不奇怪, 绕数对应于绕圈的弦, 而我们在前面看到弦在 $B_{\mu\nu}$ 下带荷.

圈紧化对规范对称性的影响

在引入了圈紧化后我们就有了其他方法构造无质量态, 而不需要在 $N = \tilde{N} = 1$ 能级上构造. 例如, 我们可以取 $N = \tilde{N} = 0$, 并观察绕数为 $m \neq 0$ 的模. 能级匹配条件 eq. (9.7.41) 要求 $n = 0$, 于是态的质量为:

$$M^2 = \left(\frac{mR}{\alpha'} \right)^2 - \frac{4}{\alpha'}$$

只要半径取特殊值 $R^2 = 4\alpha'/m^2$, 其中 $m \in \mathbb{Z}$. 这个态就可以是无质量的. 同样, 我们可以将绕数取为零 $m = 0$, 并考虑质量为:

$$M^2 = \frac{n^2}{R^2} - \frac{4}{\alpha'}$$

的快子的 KK 模. 它在 $R^2 = n^2\alpha'/4$ 时成为无质量态.

而当半径取一个非常特殊的值, 即:

$$R = \sqrt{\alpha'}$$

时, 无质量态频谱最丰富. 这时 $M^2 = 0$ 的能级匹配条件 eq. (9.7. 41) 给出的解为:

- $N = \tilde{N} = 1$ 且有 $m = n = 0$: 这就是我们之前给出的态: 一个度规, 两个 $U(1)$ 规范场和两个无荷的标量.
- $N = \tilde{N} = 0$ 且有 $n = \pm 2$ 和 $m = 0$: 它们是快子场的 KK 模. 它们是靶空间中的标量, 在 $U(1) \times U(1)$ 规范对称下的荷为 $(\pm 2, 0)$.
- $N = \tilde{N} = 0$ 且有 $n = 0$ 和 $m = \pm 2$: 这是快子场绕数非零的模. 它们是靶空间中的标量, 在 $U(1) \times U(1)$ 规范对称下的荷为 $(0, \pm 2)$.
- $N = 1, \tilde{N} = 0$ 且有 $n = m = \pm 1$: 这是自旋为 1 的场: $\alpha_{-1}^\mu |0; p\rangle$. 在 $U(1) \times U(1)$ 规范对称下的荷为 $(\pm 1, \pm 1)$.
- $N = 1, \tilde{N} = 0$ 且有 $n = -m = \pm 1$: 这是自旋为 1 的场: $\tilde{\alpha}_{-1}^\mu |0; p\rangle$, 在 $U(1) \times U(1)$ 规范对称下的荷为 $(\pm 1, \mp 1)$.

我们如何解释这些新的无质量态? 我们首先来看看自旋 1 的场. 这些场在 $U(1) \times U(1)$ 下带荷. 正如我们在 9.6 节中提到的, 要理解带荷的无质量自旋 1 场, 就需要引入非阿贝尔规范对称. 通过观察荷, 我们发现在临界半径 $R = \sqrt{\alpha'}$ 时, 理论的规范对称性可以改写为:

$$U(1) \times U(1) \rightarrow SU(2) \times SU(2)$$

来自 $N = \tilde{N} = 0$ 的无质量标量现在与之前的标量共同形成了这个新对称性的伴随表示. 我们通过改变 σ 的真空期望值来远离临界半径就可以通过希格斯机制将规范群破缺回它的嘉当子代数 (Cartan subalgebra).

而从上面的讨论可以看出, 这种生成非阿贝尔规范对称性的机制依赖于快子的存在. 因此, 这种机制在第二型超弦理论中不起作用. 然而, 事实证明, 尽管杂化弦的能谱中没有快子, 这种方法在杂化弦中依然起作用.

9.8 T 对偶 (T duality)

注意到, eq. (9.7. 42) 有一个相当显著的特性: 它在同时进行交换:

$$R \leftrightarrow \frac{\alpha'}{R} \quad (9.8. 43)$$

和

$$m \leftrightarrow n \quad (9.8.44)$$

的前后是不变的. 这意味着, 在半径为 R 的圆上运动的弦与在半径为 α'/R 的圆上运动的弦具有相同的能谱. 它是通过将缠绕与移动的含义互换来实现这种操作的. 对于圈的半径, 我们有两个相反的极限, 它们的物理意义都很有趣:

- 当圈的半径变大, 即 $R \rightarrow \infty$, 绕数对质量的贡献 $\sim R/\alpha'$ 会变得非常大, 并与低能的动力学解耦合. 但这时动量量子数的贡献 $M \sim 1/R$ 变得很轻, 并且在达到极限值时形成一个连续谱. 从能谱的角度来看, 这种能谱连续的态是非紧致方向所要求的.
- 而在另一个相反的极限, 即 $R \rightarrow 0$ 下, 动量模变得很重, 同样会解耦合. 也就是说要让任何东西在 S^1 上移动都需要非常大的能量. 与此相反, 缠绕的贡献变得很轻, 且其能谱开始连续化. 我们稍后会说明, 由此产生的能谱看起来就像是打开了空间的另一个维度.

半径为 R 和 α'/R 的圈上, 弦能谱的等价性对整个共形场论都成了, 从而也在弦相互作用中出现. 弦无法区分很大的圈和很小的圈. 这种关系被称作 T 对偶 (T-duality).

这提供了一种机制, 使弦理论存在最小尺度: 当你把一个圈缩得越来越小, 在达到 $R = \sqrt{\alpha'}$ 后, 理论的行为就好像这个圆又在变大, 只是缠绕与动量交换了彼此的角色.

靶空间中的新方向

那么, 这个在极限 $R \rightarrow 0$ 处新出现的类空方向是什么? 在 eq. (9.8.43) 和 eq. (9.8.44) 的交换下, 我们看到 p_L 和 p_R 变换为:

$$p_L \rightarrow p_L, \quad p_R \rightarrow -p_R$$

由此, 我们可以定义新的标量场:

$$Y^{25} = X_L^{25}(\sigma^+) - X_R^{25}(\sigma^-)$$

我们可以很容易地检验出, 在自由紧致的标量场 CFT 中, Y^{25} 的所有 OPE 都与 X^{25} 的 OPE 等价. 这足以确保在 CFT 中定义的所有相互作用都是相同的.

我们也可以直接用旧场 X 来写出新的场 Y , 而不需要先把它分成左行右行两部分. 根据 Y 的定义, 我们可以验证 $\partial_\tau X = \partial_\sigma Y$ 和 $\partial_\sigma X = \partial_\tau Y$. 于是可以统一写为:

$$\partial_\alpha X = \epsilon_{\alpha\beta} \partial^\beta Y \quad (9.8.45)$$

其中, $\epsilon_{\alpha\beta}$ 是反对称矩阵, 满足 $\epsilon_{\tau\sigma} = -\epsilon_{\sigma\tau} = +1$. (当我们降低 ∂^β 的指标时, 上式中来自 $\epsilon_{\sigma\tau}$ 的负号会被来自闵氏世界面度规的另一个负号抵消).

伸缩子的变化

伸缩子, 或者说弦耦合, 也会在 T 对偶的作用下发生变换. 此处我们不会做详细推导, 只是给出解释, 说明出现这种情况的原因. 从弦世界的角度中无法做区分半径为 R 的紧致化圈和半径为 α'/R 的紧致化圈. 首先观察低能有效作用量, 在爱因斯坦标架下, 它包含以下项:

$$\frac{2\pi R}{2l_s^{24}g_s^2} \int d^{25}X \sqrt{-\tilde{G}} e^\sigma \mathcal{R} + \dots$$

只有当伸缩子的值也产生变动从而使作用量前面的因子保持不变, 即 $R/g_s^2 = \tilde{R}/\tilde{g}_s^2$ 时, 从世界面的角度才能保证 R 和 $\tilde{R} = \alpha'/R$ 之间没有区别. 这就意味着, 在 T 对偶条件下, 伸缩子必须产生变动, 这样弦的耦合常数就变成了

$$g_s \rightarrow \tilde{g}_s = \frac{\sqrt{\alpha'} g_s}{R} \quad (9.8.46)$$

9.8.1 T 对偶的路径积分推导

有一种简单的方法可以用路径积分来导出 T 对偶性. 我们只考虑世界面上的一个周期性标量场 $X \equiv X + 2\pi R$. 我们将其改写为 $X = R\varphi$, 这样场 φ 就有了周期 2π . 圆的半径 R 现在作为作用量的因子出现:

$$S[\varphi] = \frac{R^2}{4\pi\alpha'} \int d^2\sigma \partial_\alpha \varphi \partial^\alpha \varphi \quad (9.8.47)$$

这个理论的配分函数是 $Z = \int \mathcal{D}\varphi e^{-S[\varphi]}$. 我们现在对这个配分函数进行操作, 以证明我们可以用描述 T 对偶的新变量来重写它.

我们发现, eq. (9.8.47) 理论有一个简单的平移对称性 $\varphi \rightarrow \varphi + \lambda$. 我们首先在世界面上引入一个规范场 A_α 来使这个对称性局域化, 这个规范场变换为 $A_\alpha \rightarrow A_\alpha - \partial_\alpha \lambda$. 然后我们再用协变导数代替普通导数:

$$\partial_\alpha \varphi \rightarrow \mathcal{D}_\alpha \varphi = \partial_\alpha \varphi + A_\alpha$$

这就改变了我们的理论. 然而, 我们可以通过添加一个新场 θ 返回之前的理论:

$$S[\varphi, \theta, A] = \frac{R^2}{4\pi\alpha'} \int d^2\sigma \mathcal{D}_\alpha \varphi \mathcal{D}^\alpha \varphi + \frac{i}{2\pi} \int d^2\sigma \theta \epsilon^{\alpha\beta} \partial_\alpha A_\beta \quad (9.8.48)$$

新引入的场 θ 起到了拉格朗日乘子的作用. 将 θ 积掉就可以得到 $\epsilon^{\alpha\beta} \partial_\alpha A_\beta = 0$. 这个条件就意味着如果世界面同胚于 \mathbb{R}^2 , 我们就可以选择一个规范, 使得 $A_\alpha = 0$. 这样, 由 eq. (9.8.48) 描述的量子理论就等价于由 eq. (9.8.47) 描述的量子理论.

当然, 如果世界面同胚于 \mathbb{R}^2 , 那么我们就看不到绕 φ 的弦相关的物理结构. 在非平凡世界面上, $\epsilon^{\alpha\beta} \partial_\alpha A_\beta = 0$ 不能保证我们可以选择 $A_\alpha = 0$ 的规范. 此时, 规范场绕世界面的紧致化圈有非平凡的整体贡献. 但如果 θ 的周期为 2π , 那么这些整体贡献就是规范平凡的. 在这种情况下, 由 eq. (9.8.48) 定义的配分函数为:

$$Z = \frac{1}{\text{Vol}} \int \mathcal{D}\varphi \mathcal{D}\theta \mathcal{D}A e^{-S[\varphi, \theta, A]}$$

这等价于由 eq. (9.8.47) 对任意拓扑的世界面构建的配分函数.

这里我们颠倒积分的顺序, 首先对 φ 积分, 只需固定规范对称性, 使 $\varphi = 0$ 即可. 这样路径积分就变成了:

$$Z = \int \mathcal{D}\theta \mathcal{D}A \exp \left(-\frac{R^2}{4\pi\alpha'} \int d^2\sigma A_\alpha A^\alpha - \frac{i}{2\pi} \int d^2\sigma \epsilon^{\alpha\beta} (\partial_\alpha \theta) A_\beta \right)$$

其中我们还对最后一项进行了分部积分. 再对 A_α 积分, 便得到:

$$Z = \int \mathcal{D}\theta \exp \left(-\frac{\tilde{R}^2}{4\pi\alpha'} \int d^2\sigma \partial_\alpha \theta \partial^\alpha \theta \right)$$

其中 $\tilde{R} = \alpha'/R$ 是 T 对偶的半径. 在最后的积分中, 我们忽略了路径积分中的整体因子, 虽然它正比于 $\sqrt{\alpha'}/R$, 因而会引起伸缩子的偏移 eq. (9.8.46).

9.8.2 开弦的 T 对偶

在 T 对偶下, 开弦和 D -膜会发生什么变化? 首先假设我们在垂直于膜的 X 方向上做圈紧化, 即 X 具有迪利克雷边界条件:

$$X = \text{const} \Rightarrow \partial_\tau X^{25} = 0 \quad \text{at } \sigma = 0, \pi$$

但是在 T 对偶引入的 Y 上会发生什么? 由定义 eq. (9.8. 45), 新引入的 Y 方向具有纽曼边界条件,

$$\partial_\sigma Y = 0 \quad \text{at } \sigma = 0, \pi$$

因此 T 对偶交换了纽曼和迪利克雷边界条件. 如果我们把垂直于 Dp -膜的圈的对偶, 那么它就会变成 $D(p+1)$ -膜.

反之亦然. 我们可以从一个包含紧致化圈方向 X 的 Dp -膜开始, 这样弦就有了纽曼边界条件. 在 T 对偶之后 eq. (9.8. 45) 将其变为迪利克雷边界条件, 且 Dp -膜变成了 $D(p-1)$ 膜, 在圆 Y 上的某一点局域地出现.

事实上, D -膜最初就是这样通过研究开弦在 T 对偶下的命运行为被发现的.

9.8.3 超弦的 T 对偶

最后, 再看看 T 对偶对超弦的作用. 十维超弦理论在 T 对偶下不是不变的, 相反, 它们由 T 对偶相互映射. 更准确地说, IIA 型和 IIB 型由 T 对偶相互转化. 这表明半径为 R 的圈上的 IIA 型弦理论等价于半径为 α'/R 的圈上的 IIB 型弦理论. 这与 D -膜的变换相吻合, 我们后面会看到, IIA 型超弦对应偶数维 D -膜, 而 IIB 型超弦对应奇数维 D -膜. 同样, 两个杂化弦在 T 对偶作用下也相互转化.

9.8.4 镜像对称 (Mirror Symmetry) 简介

实际上, T 对偶的本质就是弦的延展性导致它们无法区分大圈和小圈. 我们可以问, 这种混淆是否在更复杂的流形上也存在? 答案是肯定的. 弦可以把不同的流形看成相同的流形, 这就是所谓的镜像对称 (Mirror Symmetry).

尽管杂化弦也有镜像对称, 但其在第二类超弦的背景下更简洁. 当弦的世界面由超共形的非线性 σ 模型支配且其靶空间由某个卡拉比丘流形 \mathbb{X} 给出时, 情况最简单. 镜像对称性就是指, 这个 CFT 与描述在不同卡拉比丘流形 \mathbb{Y} 上运动的弦的 CFT 是相同的. 而 \mathbb{X} 和 \mathbb{Y} 的拓扑结构并不相同, 它们的赫吉阵列 (Hodge diamond) 是彼此的镜像, 镜像对称性因此得名. 镜像对称性是几何学中一个活跃的研究领域, 也是弦理论对数学之影响的一例.

Chapter 10

RNS 超弦 (RNS superstring) 简介

10.1 超共形场论 (superconformal Field Theory)

我们迄今分析过的玻色弦有两个问题：它不包含时空费米子，也没有稳定的真空（因为我们总能在频谱中找到一个快子）。而超弦同时解决了这两个问题，本章我们将具体说明这一点。

超弦的一个关键构成是推广庞加莱对称性得到的超对称 (supersymmetry)。它将玻色子与费米子相互关联，我们在这门课中将会具体介绍这一对称性。需要注意的是，弦理论同时存在靶空间与二维世界面两个流形，因此也存在两种超对称，由他们所在的流形进行区分：

- 世界面的超对称 (二维)：将世界面标量场 X^μ 与世界面旋量 Ψ^μ 相互关联。
- 靶空间超对称 (这门课中主要讨论四维与十维)：例如将自旋为 1 的光子 (photon) 与自旋 1/2 的光伴子 (photino) 相互关联。

超弦粗略来讲有三种不同的表述形式，他们的区别并不平凡：

- 拉蒙-纳维-施瓦兹表述 (Ramond-Neveu-Schwarz formulation)：通常简称 RNS 表述。它保留了出世界面超对称，而隐藏了靶空间超对称。
- 格林-施瓦兹表述 (Green-Schwarz formulation)：通常简称 GS 表述。它保留了时空超对称，但不存在世界面超对称，通常还会在量子化过程中（光锥量子化）破坏 $SO(1, D-1)$ 对称性。

- 纯旋量表述 (pure spinor formalism): 由博科维茨 (Berkovits) 于 2000 年发现 [9]. 它保留了靶空间超对称以及 $SO(1, 9)$ 对称性, 但不存在世界面超对称. 纯旋量表述是近年来弦振幅研究的常用表述, 尤其是在处理多圈及多外腿的弦振幅问题时尤为重要.

我们这一章会简要介绍 RNS 超弦.

10.1.1 物质场 $(X; \Psi)$ 的超共形场论

我们已经知道, 在规范固定之前, 玻色弦的泊里雅科夫作用量可以被视为引力 $g^{\alpha\beta}$ 与玻色的物质场 X^μ 在二维世界面上的耦合. 我们现在引入 RNS 超弦, 视为二维超引力与含超对称的物质场 $(X; \Psi)$ 在世界面上的耦合. 更准确来说, 世界面超对称将引力子 $g_{\alpha\beta}$ 与引力伴子 χ_α 相互关联, 也将玻色物质场 X^μ 与费米物质场 Ψ^μ 相互关联. 需要注意的是, χ_α 与 Ψ^μ 均为世界面上的旋量, 我们一般不写出这一旋量指标.

二维中的狄拉克 γ 矩阵记为 ρ^α , 同样地, 我们省去二维世界面的旋量指标. 它满足如下的克里福德代数 (Clifford algebra):

$$\{\rho^\alpha, \rho^\beta\} = \rho^\alpha \rho^\beta + \rho^\beta \rho^\alpha = 2g^{\alpha\beta} \mathbb{1}_{2 \times 2} \quad (10.1.1)$$

我们有几种不同的选取 ρ 的方式, 其中一种是 $\rho^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ 与 $\rho^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

于是, 我们首先要在泊里雅科夫作用量:

$$S_1 = -\frac{1}{4\pi\alpha'} \int d^2\sigma \sqrt{-g} g^{\alpha\beta} \partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X_\mu \quad (10.1.2)$$

加入 Ψ^μ 的动力学项:

$$S_2 = \frac{1}{4\pi} \int d^2\sigma \sqrt{-g} (\bar{\Psi}^\mu \rho^\alpha \nabla_\alpha \Psi_\mu + F^\mu F_\mu) \quad (10.1.3)$$

其中 F^μ 是辅助标量场 (auxiliary scalar field), 出现它的原因是: 对于离壳情形, 我们没有运动方程的限制, 因此若仍期望理论在超对称下不变就需要引入辅助标量场进行替代.

需要注意的是, 此时 $S_1 + S_2$ 仍然不满足局域超对称. 实际上, 局域超对称要求在作用量上额外附加:

$$S_3 = \frac{1}{4\pi} \int d^2\sigma \sqrt{-g} \bar{\chi}_\alpha \rho^\beta \rho^\alpha \Psi^\mu \left(\frac{1}{\sqrt{2\alpha'}} \partial_\beta X_\mu + \frac{1}{8} \bar{\chi}_\beta \Psi_\mu \right) \quad (10.1.4)$$

因此平直时空中泊里雅科夫作用量的完整 RNS 推广为:

$$S_{RNS}[X, \Psi, g, \chi] = \frac{1}{4\pi} \int d^2\sigma \sqrt{-g} \left[-\frac{1}{\alpha'} g^{\alpha\beta} \partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X_\mu + \bar{\Psi}^\mu \rho^\alpha \nabla_\alpha \Psi_\mu \right. \\ \left. + (\bar{\chi}_\alpha \rho^\beta \rho^\alpha \Psi^\mu) \left(\frac{1}{\sqrt{2\alpha'}} \partial_\beta X_\mu + \frac{1}{8} \bar{\chi}_\beta \Psi_\mu \right) \right] \quad (10.1. 5)$$

这一作用量满足以下几条对称性:

- 不难证明, 附加的两项 S_2 与 S_3 均满足重参数化不变性, 因而整体的 S_{RNS} 满足以参数 ξ 重参数化不变性:

$$\begin{aligned} \delta_\xi X^\mu &= \xi^\beta \partial_\beta X^\mu \\ \delta_\xi \Psi^\mu &= \xi^\beta \partial_\beta \Psi^\mu \\ \delta_\xi g_{\alpha\beta} &= \xi^\gamma \partial_\gamma g_{\alpha\beta} + g_{\gamma\alpha} \partial_\beta \xi^\gamma + g_{\gamma\beta} \partial_\alpha \xi^\gamma \\ \delta_\xi \chi_\alpha &= \xi^\beta \partial_\beta \chi_\alpha + \chi_\beta \partial_\alpha \xi^\beta \end{aligned} \quad (10.1. 6)$$

- 此外, S_{RNS} 满足以旋量参数 ε 描述的所谓局域超对称不变性:

$$\begin{aligned} \delta_\varepsilon X^\mu &= \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \bar{\varepsilon} \Psi^\mu \\ \delta_\varepsilon \Psi^\mu &= \rho^\alpha \left(\frac{1}{\sqrt{2\alpha'}} \partial_\beta X_\mu + \frac{1}{4} \bar{\chi}_\beta \Psi_\mu \right) \varepsilon \\ \delta_\varepsilon g_{\alpha\beta} &= \bar{\varepsilon} \rho_{(\alpha} \chi_{\beta)} \\ \delta_\varepsilon \chi_\alpha &= 2 \nabla_\alpha \varepsilon \end{aligned} \quad (10.1. 7)$$

- 当然, S_{RNS} 也满足由参数 ϕ 描述的外尔不变性:

$$\begin{aligned} \delta_\phi X^\mu &= 0 \\ \delta_\phi \Psi^\mu &= -\frac{\phi}{2} \Psi^\mu \\ \delta_\phi g_{\alpha\beta} &= 2\phi g_{\alpha\beta} \\ \delta_\phi \chi_\alpha &= \frac{\phi}{2} \chi_\alpha \end{aligned} \quad (10.1. 8)$$

- 而外尔不变性会由于超对称的存在拓展为由旋量参数 ζ 描述的超外尔不变性:

$$\delta_\zeta \chi_\alpha = \rho_\alpha \zeta \quad \delta_\zeta (others) = 0 \quad (10.1. 9)$$

- 最后, 由参数 l 描述的二维洛伦兹对称性

$$\begin{aligned}
\delta_l X^\mu &= 0 \\
\delta_l \Psi^\mu &= -\frac{1}{2} l \bar{\rho} \Psi^\mu \\
\delta_l g_{\alpha\beta} &= 2l g_{\alpha\beta} \\
\delta_l \chi_\alpha &= -\frac{1}{2} l \bar{\rho} \chi_\alpha
\end{aligned} \tag{10.1. 10}$$

与共形场论的讨论类似, 上述的对称性可以用以选取所谓的超共形规范. 这实际上就是共形规范的超对称推广. 我们将 χ^α 分解为:

$$\begin{aligned}
\chi^\alpha &= \left(g^{\alpha\beta} - \frac{1}{2} \rho^\alpha \rho^\beta \right) \chi_\beta + \frac{1}{2} \rho^\alpha \rho^\beta \chi_\beta \\
&= \frac{1}{2} \rho^\beta \rho^\alpha \chi_\beta + \frac{1}{2} \rho^\alpha \rho^\beta \chi_\beta \\
&= \tilde{\chi}^\alpha + \rho^\alpha \zeta
\end{aligned} \tag{10.1. 11}$$

其中 $\tilde{\chi}^\alpha = \frac{1}{2} \rho^\beta \rho^\alpha \chi_\beta$ 满足 $\rho \cdot \tilde{\chi} = 0$. 而 $\zeta = \rho^\alpha \chi_\alpha$ 这实际上是把自旋 3/2 的引力伴子分解为螺旋度 (helicity) 分别为 $\pm 3/2$ 与 $\pm 1/2$ 的两部分. 再带上度规的共形规范, 我们便得到了超共形规范:

$$(g_{\alpha\beta}, \chi_\gamma) \rightarrow (e^{2\phi} \eta_{\alpha\beta}, \rho_\gamma \zeta) \tag{10.1. 12}$$

现在让我们将规范固定之后的 RNS 作用量改写为 $z = i(\tau + \sigma)$ 与 $\bar{z} = i(\tau - \sigma)$ 的形式, 取 Ψ^μ 的马约拉纳-外尔分量 (Majorana-Weyl component) $\Psi = \begin{pmatrix} \psi^\mu \\ \bar{\psi}^\mu \end{pmatrix}$. 其中 $\psi^\mu(z)$ 和 $\bar{\psi}^\mu(\bar{z})$ 是共形权分别为 $(\frac{1}{2}, 0)$ 和 $(0, \frac{1}{2})$ 的主场. 而由于自旋与共形权的关系为 $s = h - \bar{h}$, 它们是自旋 $\frac{1}{2}$ 的场, 根据费米狄拉克统计, 它们必须是奇格拉斯曼数. 相应的世界面作用量为:

$$S = \frac{1}{2\pi} \int d^2 z \left(\frac{2}{\alpha'} \partial X^\mu \bar{\partial} X_\mu + \psi^\mu \bar{\partial} \psi_\mu + \bar{\psi}^\mu \partial \bar{\psi}_\mu \right), \tag{10.1. 13}$$

是一个自由的二维共形场论, 利用以下 OPE 定义:

$$\begin{aligned}
X^\mu(z, \bar{z}) X^\nu(0, 0) &= -\frac{\alpha'}{2} \eta^{\mu\nu} \log |z| + \cdots, \\
\psi^\mu(z) \psi^\nu(0) &= \eta^{\mu\nu} \frac{1}{z} + \cdots, \\
\bar{\psi}^\mu(\bar{z}) \bar{\psi}^\nu(0) &= \eta^{\mu\nu} \frac{1}{\bar{z}} + \cdots.
\end{aligned} \tag{10.1. 14}$$

物质部分的能动张量为:

$$\begin{aligned} T^{\text{m}}(z) &= -\frac{1}{\alpha'} : \partial X \cdot \partial X : - \frac{1}{2} : \psi \cdot \partial \psi : , \\ \bar{T}^{\text{m}}(\bar{z}) &= -\frac{1}{\alpha'} : \bar{\partial} X \cdot \bar{\partial} X : - \frac{1}{2} : \bar{\psi} \cdot \bar{\partial} \bar{\psi} : . \end{aligned} \quad (10.1. 15)$$

然后我们可以仿照 eq. (5.4. 45) 得到:

$$T^{\text{m}}(z_1)T^{\text{m}}(z_2) = \frac{c}{2} \frac{1}{(z_1 - z_2)^4} + \frac{2T^{\text{m}}(z_2)}{(z_1 - z_2)^2} + \frac{\partial T^{\text{m}}(z_2)}{(z_1 - z_2)} + \cdots , \quad (10.1. 16)$$

而反全纯部分也是如此. 理论的中心荷为:

$$c = c_X + c_\psi = d + \frac{1}{2}d = \frac{3}{2}d, \quad (10.1. 17)$$

其中我们把来自 X 的 CFT 和来自 ψ 的 CFT 的贡献相加. 回到世界面作用量 10.1. 13, 我们发现它在两种可能的变换下是不变的.

- 共形变换. 它的的无穷小形式为:

$$\begin{aligned} \delta_\epsilon^c X^\mu(z, \bar{z}) &= - \left[\epsilon(z) \partial X^\mu(z, \bar{z}) + \bar{\epsilon}(\bar{z}) \bar{\partial} X^\mu(z, \bar{z}) \right] \\ \delta_\epsilon^c \psi^\mu(z) &= - \left[\epsilon \partial \psi^\mu(z) + \frac{1}{2} (\partial \epsilon) \psi^\mu(z) \right] \\ \delta_\epsilon^c \bar{\psi}^\mu(\bar{z}) &= - \left[\bar{\epsilon} \bar{\partial} \bar{\psi}^\mu(\bar{z}) + \frac{1}{2} (\bar{\partial} \bar{\epsilon}) \bar{\psi}^\mu(\bar{z}) \right] , \end{aligned} \quad (10.1. 18)$$

其中, 上标 c 代表共形, $\epsilon(z)$ 是变换的参数, 可以做如下展开为:

$$\epsilon(z) = \sum_n \epsilon_n z^{-n+1}, \quad (10.1. 19)$$

是权为 -1 的场

- 超共形变换. 它的的无穷小形式为:

$$\begin{aligned} \delta_\eta^{\text{sc}} X^\mu(z, \bar{z}) &= \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \left[\eta(z) \psi^\mu(z) + \bar{\eta}(\bar{z}) \bar{\psi}^\mu(\bar{z}) \right] \\ \delta_\eta^{\text{sc}} \psi^\mu(z) &= \sqrt{\frac{2}{\alpha'}} [-\eta(z) \partial X^\mu(z)] \\ \delta_\eta^{\text{sc}} \bar{\psi}^\mu(\bar{z}) &= \sqrt{\frac{2}{\alpha'}} [-\bar{\eta}(\bar{z}) \bar{\partial} X^\mu(\bar{z})] , \end{aligned} \quad (10.1. 20)$$

其中上标 sc 代表超共形. 我们马上就能看到, 这些超共形变换将 X 和 ψ 彼此变换, 也就是在玻色场和费米场之间架起了一座桥梁. 这是因为 $\eta(z)$ 具有费米性质, 可以展开为:

$$\eta(z) = \sum_r \eta_r z^{-r+\frac{1}{2}}, \quad (10.1. 21)$$

即权为 $-\frac{1}{2}$ 的场.

现在让我们检查一下作用量 10.1. 13 是否如我们所说的那样, 在这些超共形变换下是不变的. 如果我们暂时取 $\alpha' = 1$ 并只考虑全纯部分, 那么我们会得到:

$$\begin{aligned} \delta_\eta^{\text{sc}} S &= \frac{1}{2\pi} \int d^2 z \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \partial(\eta\psi) \cdot \bar{\partial} X + \frac{1}{\sqrt{2}} \partial X \cdot \bar{\partial}(\eta\psi) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} (\sqrt{2}\eta\partial X) \cdot \bar{\partial}\psi - \frac{1}{2} \psi \cdot \bar{\partial}(\sqrt{2}\eta\partial X) \right] \\ &= \frac{1}{2\pi} \int d^2 z \sqrt{2} \left[\partial(\eta\psi) \cdot \bar{\partial} X + \eta(\bar{\partial}\partial X) \cdot \psi \right] \\ &= \frac{1}{2\pi} \int d^2 z \sqrt{2} \left[\partial(\eta\psi) \cdot \bar{\partial} X - \bar{\partial} X \cdot \partial(\eta\psi) \right] \\ &= 0. \end{aligned} \quad (10.1. 22)$$

其中最后一步我们应用了分部积分. 而对于反全纯部分, 推理过程是类似的. 因此, 我们证明了世界面作用量 10.1. 13 在超形变下是不变的. 现在计算:

$$\begin{aligned} [\delta_{\eta_1}^{\text{sc}}, \delta_{\eta_2}^{\text{sc}}] X^\mu &= (\delta_{\eta_1}^{\text{sc}} \delta_{\eta_2}^{\text{sc}} - \delta_{\eta_2}^{\text{sc}} \delta_{\eta_1}^{\text{sc}}) X^\mu \\ &= -\eta_2 \eta_1 \partial X^\mu + \eta_1 \eta_2 \partial X^\mu \\ &= -2\eta_1 \eta_2 \partial X^\mu \\ &= \delta_{2\eta_2 \eta_1}^{\text{c}} X^\mu, \end{aligned} \quad (10.1. 23)$$

相似地, 我们有

$$\begin{aligned} [\delta_{\eta_1}^{\text{sc}}, \delta_{\eta_2}^{\text{sc}}] \psi^\mu &= (\delta_{\eta_1}^{\text{sc}} \delta_{\eta_2}^{\text{sc}} - \delta_{\eta_2}^{\text{sc}} \delta_{\eta_1}^{\text{sc}}) \psi^\mu \\ &= -\eta_2 \partial(\eta_1 \psi^\mu) + \eta_1 \partial(\eta_2 \psi^\mu) \\ &= [-\eta_2 \partial \eta_1 - (\partial \eta_2) \eta_1] \psi^\mu - 2\eta_2 \eta_1 \partial \psi^\mu \\ &= -\left[\frac{1}{2} \partial(2\eta_2 \eta_1) \psi^\mu + 2\eta_2 \eta_1 (\partial \psi^\mu) \right] \\ &= \delta_{2\eta_2 \eta_1}^{\text{c}} \psi^\mu. \end{aligned} \quad (10.1. 24)$$

因此, 我们便证明了:

$$[\delta_{\eta_1}^{\text{sc}}, \delta_{\eta_2}^{\text{sc}}] = \delta_{2\eta_2\eta_1}^{\text{c}}, \quad (10.1. 25)$$

这意味着两个超共形变换的组合生成一个共形变换. 在某种意义上, 我们可以说超共形变换是共形变换的平方根. 由 eq. (5.6. 68) 和 eq. (5.6. 69), 共形变换是由诺特荷生成的:

$$T_{\epsilon(z)} = \oint_0 \frac{dz}{2\pi i} \epsilon(z) T^{\text{m}}(z) \quad (10.1. 26)$$

于是

$$\delta_{\epsilon}^{\text{c}} \phi(z) = -[T_{\epsilon}, \phi(z)] . \quad (10.1. 27)$$

类似地, 超共形变换也由对应的诺特荷生成:

$$G_{\eta(z)} = \oint_0 \frac{dz}{2\pi i} \eta(z) G^{\text{m}}(z) \quad (10.1. 28)$$

于是

$$\delta_{\eta}^{\text{sc}} \phi(z) = -[G_{\eta}, \phi(z)] . \quad (10.1. 29)$$

守恒流 $G^{\text{m}}(z)$ 通常称为超流 (supercurrent), 其定义为:

$$G^{\text{m}}(z) = i\sqrt{\frac{2}{\alpha'}} \psi^{\mu} \partial X_{\mu} = \psi \cdot j, \quad (10.1. 30)$$

此处利用了玻色弦守恒流 j^{μ} 的定义 eq. (2.6. 68), 正如 eq. (??), 两个共形变换的组合 eq. (??) 会生成两个能动张量 OPE 的正确形式 eq. (5.4. 45). 类似地, eq. (10.1. 25) 也将缩并完全固定

$$\begin{aligned} G^{\text{m}}(z_1)G^{\text{m}}(z_2) &= \frac{d}{(z_1 - z_2)^3} + \frac{2T^{\text{m}}(z_2)}{(z_1 - z_2)}, \\ T^{\text{m}}(z_1)G^{\text{m}}(z_2) &= \frac{\frac{3}{2}G^{\text{m}}(z_2)}{(z_1 - z_2)^2} + \frac{\partial G^{\text{m}}(z_2)}{(z_1 - z_2)}. \end{aligned} \quad (10.1. 31)$$

总结一下, 我们有:

$$\begin{aligned} T^{\text{m}}(z_1)T^{\text{m}}(z_2) &= \frac{\frac{c}{2}}{(z_1 - z_2)^4} + \frac{2T^{\text{m}}(z_2)}{(z_1 - z_2)^2} + \frac{\partial T^{\text{m}}(z_2)}{(z_1 - z_2)} + (\text{reg.}), \\ G^{\text{m}}(z_1)G^{\text{m}}(z_2) &= \frac{\frac{2}{3}c}{(z_1 - z_2)^3} + \frac{2T^{\text{m}}(z_2)}{(z_1 - z_2)} + (\text{reg.}), \\ T^{\text{m}}(z_1)G^{\text{m}}(z_2) &= \frac{\frac{3}{2}G^{\text{m}}(z_2)}{(z_1 - z_2)^2} + \frac{\partial G^{\text{m}}(z_2)}{(z_1 - z_2)} + (\text{reg.}), \end{aligned} \quad (10.1. 32)$$

这便完整地定义了我们的 $(X; \psi)$ 超共形场论 (今后简称 SCFT) 的超共形代数 (反全纯部分也如此). 这是 $\mathcal{N} = 1$ SCFT 的最简单例子. 这个代数的作用与维拉索罗代数在玻色弦中的作用相同: 这是一个约束构成的代数, 而这些约束作用于态上. 我们现在感兴趣的是这种代数的不可约表示, 即主场. 我们在, 权重为 h 的主场 $\phi_h(z)$ 的定义是:

$$T^m(z_1)\phi_h(z_2) = \frac{h\phi_h(z_2)}{(z_1 - z_2)^2} + \frac{\partial\phi_h(z_2)}{(z_1 - z_2)} + \dots \quad (10.1. 33)$$

因此, 由 eq. (10.1. 32), $G^m(z)$ 是共形权为 $\frac{3}{2}$ 的主场. 我们还可以定义超共形主场 (superconformal primary field). 如果 $\phi_h(z)$ 是权为 h 的主场, 若它满足以下条件, 它便是一个权重为 h 的超共形主场:

$$G^m(z_1)\phi_h(z_2) = \frac{\phi_{h+1/2}(z_2)}{(z_1 - z_2)} + \dots \quad (10.1. 34)$$

这意味着超流 $G^m(z)$ 作用于超共形主场 ϕ_h 并生成超子场 (superdescendant field) $\psi_{h+1/2}$. 需要注意的是, 超子场虽然不是超共形主场, 但仍可能是共形主场.

我们还可以定义超共形权为 h 的超共形主场对: $(\phi_h, \phi_{h+1/2})$, 这要求对于共形权分别为 h 与 $h + \frac{1}{2}$ 的共形主场 ϕ_h 与 $\phi_{h+1/2}$ 满足:

$$\begin{aligned} T^m(z_1)\phi_h(z_2) &= \frac{h\phi_h(z_2)}{(z_1 - z_2)^2} + \frac{\partial\phi_h(z_2)}{(z_1 - z_2)} + \dots \\ T^m(z_1)\phi_{h+1/2}(z_2) &= \frac{(h + \frac{1}{2})\phi_{h+1/2}(z_2)}{(z_1 - z_2)^2} + \frac{\partial\phi_{h+1/2}(z_2)}{(z_1 - z_2)} + \dots \\ G^m(z_1)\phi_h(z_2) &= \frac{\phi_{h+1/2}(z_2)}{(z_1 - z_2)} + \dots \\ G^m(z_1)\phi_{h+1/2}(z_2) &= \frac{h\phi_h(z_2)}{(z_1 - z_2)^2} + \frac{\partial_{z_2}\phi_h(z_2)}{2(z_1 - z_2)} \dots \end{aligned} \quad (10.1. 35)$$

于是, 我们知道, 超共形主场对 $(\phi_h, \phi_{h+1/2})$ 中 ϕ_h 总是超共形主场, 而 $\phi_{h+1/2}$ 则不是超共形主场, 因为它被超流作用后不能得到权升高二分之一的子场.

在 $(X; \psi)$ 的 SCFT 中, 我们可以得到:

$$G^m(z_1)\psi^\mu(z_2) = j \cdot \psi(z_1)\psi^\mu(z_2) = \frac{j^\mu(z_1)}{(z_1 - z_2)} \stackrel{\text{Taylor}}{=} \frac{j^\mu(z_2)}{(z_1 - z_2)} + \dots, \quad (10.1. 36)$$

与 $T^m(z)$ 的 OPE 类似. 所以 $\psi(z)$ 是权为 $\frac{1}{2}$ 的超共形主场. 此外,

$$G^m(z_1)j^\mu(z_2) = \psi \cdot j(z_1)j^\mu(z_2) = \frac{\psi^\mu(z_1)}{(z_1 - z_2)^2} \stackrel{\text{Taylor}}{=} \frac{\psi^\mu(z_2)}{(z_1 - z_2)^2} + \frac{\partial\psi^\mu(z_2)}{(z_1 - z_2)}, \quad (10.1. 37)$$

因此 $j(z)$ 不是超共形主场.

下面我们来考虑一下 X^μ , 我们有

$$G^m(z_1)i\sqrt{\frac{2}{\alpha'}}X^\mu(z_2) = \frac{\psi^\mu(z_2)}{(z_1 - z_2)}. \quad (10.1. 38)$$

因此 X^μ (从 $G^m(z)$ 的角度看) 是一个超共形主场. 然而, 由于其对数形式的 OPE eq. (5.4. 39), 我们知道, 它并不是一个真正的主场.

超共形主场对的一个例子是 $(\psi^\mu, i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}}\partial_z X^\mu)$. 他们便是超共形权为 $h = \frac{1}{2}$ 的超共形主场对.

最后, 考虑平面波, 我们有:

$$\begin{aligned} G^m(z_1) : e^{ip \cdot X_L} : (z_2) &= \psi \cdot j : (z_1) : e^{ip \cdot X_L} : (z_2) \\ &= \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} p_\mu \frac{\psi^\mu : e^{ip \cdot X_L} : (z_2)}{(z_1 - z_2)}. \end{aligned} \quad (10.1. 39)$$

因此平面波 $: e^{ip \cdot X_L} :$ 是权为 $(\frac{\alpha' p^2}{4}, 0)$ 的超共形主场.

10.1.2 世界面超对称

我们已经知道, 平移是由 $\partial_z = \partial$ (或 $\partial_{\bar{z}} = \bar{\partial}$). 即由 L_{-1} 的作用来生成:

$$[L_{-1}, \cdot] = \oint_0 \frac{dz}{2\pi i} T^m(z). \quad (10.1. 40)$$

而我们有:

$$[L_{-1}, \phi(z_2)] = \oint_0 \frac{dz_1}{2\pi i} T^m(z_1)\phi(z_2) = \partial\phi(z_2). \quad (10.1. 41)$$

现在我们要对超流 $G^m(z)$ 做同样的处理. 因此, 我们定义全纯的超对称变换. 而反全纯情况类似, 为:

$$\delta_{\text{SUSY}} = \oint_0 \frac{dz}{2\pi i} G^m(z). \quad (10.1. 42)$$

这里的变换 δ_{SUSY} 是奇格拉斯曼的. 因为 $G^m(z)$ 是奇格拉斯曼的. 不妨回顾一下 $T^m(z)$ 可以用维拉索罗算符 L_n 展开 eq. (??), 我们就可以把超流 $G^m(z)$ 展开为:

$$G^m(z) = \sum_{r \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}} G_r z^{-r - \frac{3}{2}}. \quad (10.1.43)$$

因此, 我们可以得到:

$$\delta_{\text{SUSY}} = \left[G_{-\frac{1}{2}}, \cdot \right]. \quad (10.1.44)$$

超对称对我们的 $(X; \psi)$ SCFT 场的作用是:

$$\begin{aligned} \delta_{\text{SUSY}} \left(i \sqrt{\frac{2}{\alpha'}} X^\mu(z) \right) &= \psi^\mu(z), \\ \delta_{\text{SUSY}} (\psi^\mu(z)) &= j^\mu(z), \\ \delta_{\text{SUSY}} (j^\mu(z)) &= \partial \psi^\mu(z). \end{aligned} \quad (10.1.45)$$

通过超对称变换相互联系的两个场叫做超伴子 (superpartners). 此外, 超对称是平移的平方根:

$$[\delta_{\text{SUSY}}, \delta_{\text{SUSY}}] = \partial_z. \quad (10.1.46)$$

10.1.3 鬼场 $(b, c; \beta, \gamma)$ 的 SCFT

正如我们之前所看到的, 通过法捷耶夫-波波夫方法, 我们将 X 与鬼场 (b, c) 关联. 同样, 当我们添加 ψ 在我们的 CFT 中时, 我们必须通过世界面超对称添加鬼场 (β, γ) . 完整的鬼场共形场论由以下作用量给出:

$$S_{\text{gh}} = \frac{1}{2\pi} \int d^2z \left(b\bar{\partial}c + \bar{b}\partial\bar{c} + \beta\bar{\partial}\gamma + \bar{\beta}\partial\bar{\gamma} \right), \quad (10.1.47)$$

其中

- b 是权重为 2 的主场, 作为由偶格拉斯曼数参数化的对称性的 FP 方法引入的鬼场, 它是奇格拉斯曼数, 满足幂零性.
- c 是权重为 -1 的主场, 作为由偶格拉斯曼数参数化的对称性的 FP 方法引入的鬼场, 它是奇格拉斯曼数, 满足幂零性.
- β 是权重为 $\frac{3}{2}$ 的主场, 作为由奇格拉斯曼数参数化的对称性的 FP 方法引入的鬼场, 它是偶格拉斯曼数.
- γ 是权重为 $-\frac{1}{2}$ 的主场, 作为由奇格拉斯曼数参数化的对称性的 FP 方法引入的鬼

场, 它是偶格拉斯曼数.

他们的 OPE 满足:

$$\begin{aligned} b(z_1)c(z_2) &= \frac{1}{(z_1 - z_2)} + \cdots, \\ c(z_1)b(z_2) &= \frac{1}{(z_1 - z_2)} + \cdots, \\ \beta(z_1)\gamma(z_2) &= \frac{-1}{(z_1 - z_2)} + \cdots, \\ \gamma(z_1)\beta(z_2) &= \frac{1}{(z_1 - z_2)} + \cdots. \end{aligned} \quad (10.1. 48)$$

而鬼场能动张量的全纯部分定义为:

$$T^{(\text{gh})}(z) = T^{(b,c)}(z) + T^{(\beta,\gamma)}(z), \quad (10.1. 49)$$

其中

$$\begin{aligned} T^{(b,c)}(z) &= :(\partial b)c:(z) - 2 : \partial(bc) : (z), \\ T^{(\beta,\gamma)}(z) &= :(\partial\beta)\gamma:(z) - \frac{3}{2} : \partial(\beta\gamma) : (z). \end{aligned} \quad (10.1. 50)$$

然后, 当我们计算能动张量间的 OPE, 就可以得到:

$$\begin{aligned} T^{(b,c)}(z_1)T^{(b,c)}(z_2) &\approx \frac{(-26)/2}{(z_1 - z_2)^4}, \\ T^{(\beta,\gamma)}(z_1)T^{(\beta,\gamma)}(z_2) &\approx \frac{(11)/2}{(z_1 - z_2)^4}, \end{aligned} \quad (10.1. 51)$$

这表明他们的中心荷分别为:

$$c^{(b,c)} = -26 \quad c^{(\beta,\gamma)} = 11, \quad (10.1. 52)$$

这表明

$$c^{(\text{gh})} = c^{(b,c)} + c^{(\beta,\gamma)} = -15. \quad (10.1. 53)$$

鬼场 $(b, c; \beta, \gamma)$ 的超共形代数基于如下的鬼场超流:

$$G^{(\text{gh})}(z) = -\frac{1}{2}(\partial\beta)c + \frac{3}{2}\partial(\beta c) - 2b\gamma, \quad (10.1. 54)$$

这里不需要正规排序, 因为 (b, c) 和 (β, γ) 彼此无关. 我们可以证明 $T^{(\text{gh})}$ 和 $G^{(\text{gh})}$ 可以生成一个中心荷为 $c^{(\text{gh})} = -15$ 的超代数. 而如果我们现在把物质部分的中心荷和鬼

场中心荷放在一起, 就可以得到整体中心荷:

$$c^{(\text{tot})} = c^{\text{m}} + c^{(\text{gh})} = \frac{3}{2}D - 15 \quad (10.1. 55)$$

为了消除外尔反常, 我们需要让中心荷为 0, 这要求

$$D = 10. \quad (10.1. 56)$$

这就是著名的超弦临界维数, 对于玻色弦, 它则是 26.

与反常鬼场流 $j_{b,c} = - : bc :$ 类似, 我们对 β 与 γ 也可以定义描述鬼场数的所谓反常鬼场流:

$$\begin{aligned} j_{b,c} &= - : bc : \\ j_{\beta,\gamma} &= - : \beta\gamma : \end{aligned} \quad (10.1. 57)$$

同样地, 他不是主场, 与能动张量的 OPE 为:

$$\begin{aligned} T_{b,c}(z)j_{b,c}(w) &\sim \frac{-3}{(z-w)^3} + \frac{j_{b,c}(w)}{(z-w)^2} + \frac{\partial_w j_{b,c}(w)}{z-w} + \dots \\ T_{\beta,\gamma}(z)j_{\beta,\gamma}(w) &\sim \frac{2}{(z-w)^3} + \frac{j_{\beta,\gamma}(w)}{(z-w)^2} + \frac{\partial_w j_{\beta,\gamma}(w)}{z-w} + \dots \end{aligned} \quad (10.1. 58)$$

于是厄米共轭改为:

$$\begin{aligned} |q(b, c)\rangle^\dagger &= \langle -q(b, c) + 3| \\ |q(\beta, \gamma)\rangle^\dagger &= \langle -q(\beta, \gamma) - 2| \end{aligned} \quad (10.1. 59)$$

鬼场零模的数量与亏格数 g 的依赖关系为:

$$\begin{aligned} N_c - N_b &= 3 - 3g \\ N_\gamma - N_\beta &= 2 - 2g \end{aligned} \quad (10.1. 60)$$

最后, 我们可以回顾一下, 在玻色弦中, TT 的代数被解释为约束条件的代数. 而 $T^{\text{m}} = 0$ 所代表的度规运动方程便是一个经典约束. 而 BRST 量子化给每个约束添加了一个鬼场 (由于约束的非阿贝尔性质, 有一个附加项). 由此定义了如下的 BRST 流:

$$j_{\text{B}}(z) = cT^{\text{m}}(z) + \frac{1}{2} : cT^{(\text{gh})} : (z). \quad (10.1. 61)$$

这给出了 BRST 荷的定义:

$$Q_B = \oint_0 \frac{dz}{2\pi i} j_B(z), \quad (10.1.62)$$

当且仅当 CFT 整体的中心荷为 0 时 BRST 荷满足幂零性:

$$Q_B^2 = 0 \iff c^m + c^{(\text{gh})} = 0. \quad (10.1.63)$$

与之类似, 对于超弦, 我们两组经典约束, 分别为:

$$\begin{aligned} T^m &= 0 \\ G^m &= 0, \end{aligned} \quad (10.1.64)$$

实际上, 第一个等式是度规的运动方程, 而第二个等式则是度规的超伴子, 即引力伴子的运动方程, 这件事我们会稍后说明. 而如果我们把 (b, c) 系统与 T^m 联系起来, 把 (β, γ) 系统与 G^m 联系起来, 那么 BRST 流便可以进行如下构造:

$$j_B(z) = cT^m(z) + \gamma G^m(z) + \frac{1}{2} \left(:cT^{(\text{gh})}: (z) + : \gamma G^{(\text{gh})}: (z) \right) \quad (10.1.65)$$

而 BRST 荷就是 BRST 流的积分:

$$Q_B = \oint_0 \frac{dz}{2\pi i} j_B(z). \quad (10.1.66)$$

我们又一次得到了

$$Q_B^2 = 0 \iff c^m + c^{(\text{gh})} = 0, \quad (10.1.67)$$

而这要求体系满足 $D = 10$ 的临界维数要求. 此外, 通过简单的计算可知:

$$\begin{aligned} [Q_B, b(z)] &= T^{(\text{tot})}(z) = T^m(z) + T^{(\text{gh})}(z), \\ [Q_B, \beta(z)] &= G^{(\text{tot})}(z) = G^m(z) + G^{(\text{gh})}(z). \end{aligned} \quad (10.1.68)$$

于是, 我们看到 SCFT 中出现的场都被世界面超对称成对地联系了起来:

$$\begin{aligned} \psi^\mu &\longleftrightarrow X^\mu, \\ \gamma &\longleftrightarrow c, \\ \beta &\longleftrightarrow b. \end{aligned} \quad (10.1.69)$$

10.2 闭超弦 (closed superstring) 的 RNS 表述

我们接下来可以开始讨论超弦的 RNS 表述, 在本章中我们不会详细介绍开弦的 RNS 表述, 这是由于开弦的结构与闭弦的亚纯部分非常相似, 仅仅是边界条件不同.

10.2.1 纳维-施瓦兹部分与拉蒙部分

现在让我们考虑闭超弦. 我们引入的世界面旋量 (可以通称为 χ , 即 $\chi = \psi, \beta, \gamma \dots$) 也必须如玻色弦一样在对作用量进行泛函微商求运动方程时不能出现边界项贡献, 即:

$$\delta S_{\text{RNS}}[X, \psi, \bar{\psi}] \rightarrow \int d\tau (\psi^\mu \delta \psi_\mu - \bar{\psi}^\mu \delta \bar{\psi}_\mu) \Big|_{\sigma=0}^{\sigma=2\pi} = 0 \quad (10.2. 70)$$

为实现这一条件, 我们必须要求 χ 沿着 σ 方向满足周期性 (periodic) 或反周期性 (anti-periodic):

- 周期性: $\chi(\sigma + 2\pi) = +\chi(\sigma)$;
- 反周期性: $\chi(\sigma + 2\pi) = -\chi(\sigma)$.

这两个条件都是可能的, 但反周期条件对玻色的 X 是不可接受的, 因为它会破坏洛伦兹不变性.¹

由旋量的周期与反周期性, 我们可以将理论分为两部分 (sectors):

- χ 关于 σ 呈周期性, 这对应拉蒙部分 (Ramond sector), 简称 R 部分.
- χ 关于 σ 呈反周期性, 这对应纳维-施瓦兹部分 (Neveu-Schwarz sector), 简称 NS 部分.

与之相似地, 因为超流也是费米的, 我们有:

$$G(\sigma + 2\pi) = \begin{cases} +G(\sigma) & (\text{R}) \\ -G(\sigma) & (\text{NS}) \end{cases} . \quad (10.2. 71)$$

如果我们通过指数映射 $z = e^\sigma$ 将圆柱面映射到复平面上, 由 ψ 的共形权是 $\frac{1}{2}$, 满足:

$$\psi(z)(dz)^{\frac{1}{2}} = \psi(w)(dw)^{\frac{1}{2}} \quad (10.2. 72)$$

于是有

¹ 然而, 在构造轨形 (orbifolds) 中的弦理论时这种情况仍需考虑.

$$\psi(z) = \left(\frac{dz}{d\sigma}\right)^{\frac{1}{2}} \psi(\sigma(z)) = \frac{1}{\sqrt{z}} \psi(\ln(z)). \quad (10.2.73)$$

因此我们可以关于 ψ 两个不同的边界条件对应的部分, 分别写出如下展开:

$$\begin{cases} \psi_{\text{NS}}^\mu(z) = \sum_{r \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}} \psi_r^\mu z^{-r - \frac{1}{2}} \\ \psi_{\text{R}}^\mu(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \psi_n^\mu z^{-n - \frac{1}{2}} \end{cases}. \quad (10.2.74)$$

我们来分析一下:

- 在 NS 部分中, 由于 $r \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}$, 于是 $-r - \frac{1}{2} \in \mathbb{Z}$, 因而 $z^{-r - \frac{1}{2}}$ 是亚纯函数, 在 \mathbb{C} 上没有分支奇点.
- 而在 R 部分中, 有一个从 0 到 ∞ 的分支, 因为 $n \in \mathbb{Z}$, 于是 $-n - \frac{1}{2} \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}$, 因而 $z^{-n - \frac{1}{2}}$ 是双值函数.

分支的存在可以理解为在复平面的原点插入了一个特殊的场, 它改变了真空的性质. 这个场记作 $S_A(0)$, 被称为自旋场 (spin field), 指标 A 是靶空间中的旋量指标. 两个费米子 ψ 的 OPE 在两个部分中仍然是一样的, 均为:

$$\psi(z_1)\psi(z_2) = \frac{1}{(z_1 - z_2)} + \cdots, \quad (10.2.75)$$

它由如下两个分别对应两个部分的不同谐振模代数实现:

$$\begin{aligned} \text{NS)} \quad & [\psi_r^\mu, \psi_s^\nu] = \eta^{\mu\nu} \delta_{r+s, 0}, \quad r, s \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}, \\ \text{R)} \quad & [\psi_n^\mu, \psi_m^\nu] = \eta^{\mu\nu} \delta_{n+m, 0}, \quad n, m \in \mathbb{Z}. \end{aligned} \quad (10.2.76)$$

此处我们使用了阶化对易子的符号约定. 这里的方括号实际上是反对易子, 因为我们处理的是费米的对象. 对 (β, γ) 也存在相似的展开:

$$\begin{cases} \beta_{\text{NS}}(z) = \sum_{r \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}} \beta_r z^{-r - \frac{3}{2}} \\ \beta_{\text{R}}(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \beta_n z^{-n - \frac{3}{2}} \end{cases}, \quad \begin{cases} \gamma_{\text{NS}}(z) = \sum_{r \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}} \gamma_r z^{-r + \frac{1}{2}} \\ \gamma_{\text{R}}(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \gamma_n z^{-n + \frac{1}{2}} \end{cases}. \quad (10.2.77)$$

这表示

$$\begin{aligned} \text{NS)} \quad & [\beta_r, \gamma_s] = \delta_{r+s, 0}, \quad \text{with } r, s \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}, \\ \text{R)} \quad & [\beta_n, \gamma_m] = \delta_{n+m, 0}, \quad \text{with } n, m \in \mathbb{Z}. \end{aligned} \quad (10.2.78)$$

相似地, 对于超流, 我们有:

$$\begin{cases} G_{\text{NS}}(z) = \sum_{r \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}} G_r z^{-r - \frac{3}{2}} \\ G_{\text{R}}(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} G_n z^{-n - \frac{3}{2}} \end{cases}, \quad (10.2.79)$$

而这表明:

$$\begin{aligned} \text{NS)} \quad [G_r, G_s] &= 2L_{r+s} + \frac{c}{12}(4r^2 - 1)\delta_{r+s, 0}, \quad r, s \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}, \\ \text{R)} \quad [G_n, G_m] &= 2L_{n+m} + \frac{c}{12}(4n^2 - 1)\delta_{n+m, 0}, \quad n, m \in \mathbb{Z}. \end{aligned} \quad (10.2.80)$$

因此, 超共形代数可以写成谐振模的形式:

$$\begin{aligned} [L_n, L_m] &= (n - m)L_{n+m} + \frac{c}{12}n(n^2 - 1)\delta_{n+m, 0}, \\ [L_n, G_r] &= \frac{n - 2r}{2}G_{n+r}, \\ \text{NS)} \quad [G_r, G_s] &= 2L_{r+s} + \frac{c}{12}(4r^2 - 1)\delta_{r+s, 0}, \quad \text{with } r, s \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}, \\ \text{R)} \quad [G_r, G_s] &= 2L_{r+s} + \frac{c}{12}(4r^2 - 1)\delta_{r+s, 0}, \quad \text{with } r, s \in \mathbb{Z}, \end{aligned} \quad (10.2.81)$$

其中 eq. (10.2.81) 来自于 G 是主场这一事实. 而这个代数则由两个 SCFT 生成:

- 物质场 $(X; \psi)$ 的 SCFT, 它的中心荷为 $c^{\text{m}} = \frac{3}{2}D$;
- 鬼场 $(b, c; \beta, \gamma)$ 的 SCFT, 它的中心荷为 $c^{(\text{gh})} = -15$.

于是有:

$$[L_n, L_m] = (n - m)L_{n+m} + \frac{c^{(\text{tot})}}{12}n(n^2 - 1)\delta_{n+m, 0} \quad (10.2.82)$$

与先前的结论一致, 整体的 SCFT 在 $D = 10$ 时满足 $c^{(\text{tot})} = c^{\text{m}} + c^{(\text{gh})} = 0$.

10.2.2 纳维-施瓦兹真空与拉蒙真空

接下来, 让我们构建理论的真空态. 我们将使用以下符号:

- α_n^μ : 用来表示 X 的谐振模;
- ψ_r^μ : 用来表示 ψ_{NS} 的谐振模;
- ψ_n^μ : 用来表示 ψ_{R} 的谐振模.

我们于是有以下两种对象:

- 在 NS 部分中对应动量的真空态 $|0, p\rangle_{\text{NS}}$, 满足:

$$\begin{aligned}\alpha_n^\mu |0, p\rangle_{\text{NS}} &= 0 \quad \text{for } n \geq 1, \\ \psi_r^\mu |0, p\rangle_{\text{NS}} &= 0 \quad \text{for } r \geq \frac{1}{2}.\end{aligned}\tag{10.2. 83}$$

- 在 R 部分中对应动量的真空态 $|0, p\rangle_{\text{R}}$, 满足:

$$\begin{aligned}\alpha_n^\mu |0, p\rangle_{\text{R}} &= 0 \quad \text{for } n \geq 1, \\ \psi_n^\mu |0, p\rangle_{\text{R}} &= 0 \quad \text{for } n \geq 1.\end{aligned}\tag{10.2. 84}$$

我们先前给出 $[\psi_n^\mu, \psi_m^\nu] = \eta^{\mu\nu} \delta_{n+m, 0}$. 这表明, 对于零模, 我们有:

$$[\psi_0^\mu, \psi_0^\nu] = \eta^{\mu\nu}.\tag{10.2. 85}$$

因此, 与 b_0 和 c_0 一样, 零模 ψ_0^μ 既不是产生算符, 也不是湮灭算符. 因此我们有许多这样的零模, 即 R 真空是退化的. 我们用指标 A' 来区分退化的态. 于是, 我们可以利用 ψ_0^μ 在退化的真空之间转换. 于是有:

$$\psi_0^\mu |A', p\rangle_{\text{R}} = (\psi^\mu)_{A'B'} |B', p\rangle_{\text{R}}.\tag{10.2. 86}$$

它的行为类似于 γ 矩阵作用于狄拉克旋量的行为. 那么现在我们可以定义

$$\Gamma^\mu = \sqrt{2}\psi_0^\mu,\tag{10.2. 87}$$

再利用 eq. (10.2. 85), 我们就找到了 D 维下的克里福德代数:

$$[\Gamma^\mu, \Gamma^\nu] = 2\eta^{\mu\nu},\tag{10.2. 88}$$

此处也同样使用阶化对易子的符号约定. 这里的方括号实际上是反对易子, 因为我们处理的是费米的对象.

由于 Γ 只与真空的狄拉克旋量指标 A' 有关, 我们可以将 R 真空态分解为两部分的直积, 这两部分分别对应 X 与 ψ_R . 这意味着 R 真空中对应 ψ_R 的部分是 D 维 γ 矩阵作用的空间, 也就是 D 维旋量空间. 因此, 如果我们考虑临界维度 $D = 10$, 则 R 真空中对应 ψ_R 的部分, 记作 $|A'\rangle_{\text{R}}$ 便是 $SO(1, 9)$ 的一个十维狄拉克旋量, 它可以分

解为两个不可约表示, 即:

$$|A'\rangle_R = \underbrace{|A\rangle}_{16_c} \oplus \underbrace{|\dot{A}\rangle}_{16_s}, \quad (10.2. 89)$$

其中 16_c 是正手性的 16 维不可约表示, 代表左手外尔旋量. 而 16_s 是负手性的 16 维不可约表示, 代表右手外尔旋量. 分别用指标 A 与 \dot{A} . 这两个不可约表示由手性矩阵 Γ 的作用定义:

$$\begin{aligned} \Gamma |A\rangle &= + |A\rangle, \\ \Gamma |\dot{A}\rangle &= - |\dot{A}\rangle. \end{aligned} \quad (10.2. 90)$$

现在我们回顾一下. 动量信息包含在 X 所对应的真空中, 那么我们可以把 NS 部分物质场整体的真空写为:

$$|0, p\rangle_{\text{NS}}^{\text{m}} = \underbrace{|0, p\rangle}_X \otimes \underbrace{|0\rangle_{\text{NS}}}_{\psi} = |0, p\rangle \otimes |0\rangle, \quad (10.2. 91)$$

这里我们写出 $|0\rangle_{\text{NS}} = |0\rangle$, 因为对物质场, 在 NS 真空中对应 ψ 的部分是 $SL(2, \mathbb{C})$ 不变的.

而 R 部分物质场整体的真空则写为:

$$|A', p\rangle_R^{\text{m}} = \underbrace{|0, p\rangle}_X \otimes \underbrace{|A'\rangle_R}_{\psi} = |0, p\rangle \otimes \left(|A\rangle \oplus |\dot{A}\rangle \right). \quad (10.2. 92)$$

正如我们所预料的, R 真空是通过在 $SL(2, \mathbb{C})$ 不变真空, 即 NS 真空中插入一个自旋场而得到的:

$$|A'\rangle_R = \lim_{z \rightarrow 0} S_{A'}(z) |0\rangle_{\text{NS}}, \quad {}_R \langle B'| = \lim_{z \rightarrow \infty} {}_{\text{NS}} \langle 0| S_{B'}(z) z^{D/8} \quad (10.2. 93)$$

而 eq. (10.2. 81) 中 $[L_m, L_n]$ 中附加的 $D/16$ 就反映了 R 部分的真空能, 也就是自旋场 $S_{A'}(z)$ 的共形权. 因此, 拉蒙真空在某种意义上是纳维-施瓦兹真空的激发态.

在给出了自旋场 $S_{A'}(z)$ 的共形权之后, 我们可以大致地描述含自旋场的关联函数. 首先, 两个自旋场之间的关联函数一定是正比于 $(z-w)^{-D/8}$ 的, 又由于洛伦兹协变性, 两个旋量的缩并一定正比于所谓的荷共轭矩阵 (charge conjugation matrix), 即 $C_{A'B'}$, 于是我们有:

$$\langle S_{A'}(z) S_{B'}(w) \rangle = \frac{C_{A'B'}}{(z-w)^{D/8}} \quad (10.2. 94)$$

再利用 eq. (10.2. 87) 的对应关系, 我们有:

$${}_R \langle A' | \psi_0^\mu | B' \rangle_R = \frac{1}{\sqrt{2}} (\Gamma^\mu C)_{A'B'} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\Gamma^\mu)_{A'}^{D'} C_{D'B'} \quad (10.2. 95)$$

而它可以通过三点关联函数的极限得到. 由 $|A'\rangle_R$ 与 ψ_0^μ 定义, 我们有:

$$\underbrace{\lim_{z_1 \rightarrow \infty} {}_{NS} \langle 0 | z_1^{D/8} S_{A'}(z_1)}_{{}_R \langle A' |} \underbrace{\lim_{z_2 \rightarrow 0} z_2^{1/2} \psi^\mu(z_2)}_{\psi_0^\mu} \underbrace{\lim_{z_3 \rightarrow 0} S_{B'}(z_3) | 0 \rangle_{NS}}_{|B'\rangle_R} \quad (10.2. 96)$$

而由于这个三点函数的构成均为主场, 我们于是得到如下三点关联函数:

$$\langle S_{A'}(z_1) \psi^\mu(z_2) S_{B'}(z_3) \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{(\Gamma^\mu C)_{A'B'}}{(z_{12} z_{23})^{1/2} z_{13}^{D/8-1/2}} \quad (10.2. 97)$$

现在对上式取 $z_1 \rightarrow z_2$, 再改变一下算符的顺序, 我们可以得到:

$$\langle \psi^\mu(z_1) S_{A'}(z_2) S_{B'}(z_3) \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{(\Gamma^\mu C)_{A'B'}}{(z_{12} z_{13})^{1/2} z_{23}^{D/8-1/2}} \quad (10.2. 98)$$

再利用上面给出的 $\langle S_{A'}(z) S_{B'}(w) \rangle$, 我们于是便得到 ψ 与 $S_{A'}$ 的 OPE:

$$\psi^\mu(z) S_{A'}(w) = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{(\Gamma^\mu)_{A'}^{B'} S_{B'}(w)}{(z-w)^{\pm \frac{1}{2}}}, \quad (10.2. 99)$$

注意到, 这里出现了平方根. 实际上这是很自然的, 这表明 S_A 的出现使得 ψ^μ 在复平面上出现分支, 进而有 R 部分的边界条件 $\psi^\mu(e^{2\pi i} z) = -\psi^\mu(z)$

现在倘若我们取 $z_2 \rightarrow z_3$ 极限并利用 $\langle \psi^\mu(z) \psi^\nu(w) \rangle = \eta^{\mu\nu} / z_{12}$ 便可得到自旋场的完整 OPE:

$$S_{A'}(z) S_{B'}(w) \sim \frac{C_{A'B'}}{(z-w)^{D/8}} + \frac{(\Gamma^\mu C)_{A'B'} \psi_\mu(w)}{\sqrt{2} (z-w)^{D/8-1/2}} \quad (10.2. 100)$$

10.2.3 协变量子化

与玻色弦量子化类似, 对于超弦的量子化, 我们依然分别考虑: 先量子化再引入限制条件的协变量子化, 以及先引入限制条件再量子化的光锥量子化.

10.2.3.1 限制条件

我们现在便可以写出全纯物质部分中的所有可能出现的态 (反全纯部分原理相同). 最一般的态是由极化张量, X 的谐振模 (玻色部分), 和 ψ 谐振模 (费米部分) 作用于对应特定动量的真空得到的.

在 NS 部分, 我们有:

$$G_{\{\mu_1 \dots \mu_k\}\{\nu_1 \dots \nu_q\}}(p) (\alpha_{-n_1}^{\mu_1} \dots \alpha_{-n_k}^{\mu_k}) (\psi_{-r_1}^{\nu_1} \dots \psi_{-r_q}^{\nu_q}) |0, p\rangle_{\text{NS}}, \quad (10.2. 101)$$

这是洛伦兹群最通用的整数自旋表示 (即对应靶空间玻色子). 事实上 $\{\mu_1 \dots \mu_k\}$ 与 $\{\nu_1 \dots \nu_q\}$ 是洛伦兹矢量指标.

而另一方面, 在 R 部分, 我们有:

$$\chi_{A'\{\mu_1 \dots \mu_k\}\{\nu_1 \dots \nu_q\}}(p) (\alpha_{-n_1}^{\mu_1} \dots \alpha_{-n_k}^{\mu_k}) (\psi_{-r_1}^{\nu_1} \dots \psi_{-r_q}^{\nu_q}) |A', p\rangle_{\text{R}}, \quad (10.2. 102)$$

这是洛伦兹群最通用的半整数自旋表示 (即对应靶空间玻色子). 事实上此处 A' 是 $D = 10$ 靶空间的狄拉克旋量指标, 而 $\{\mu_1 \dots \mu_k\}$ 和 $\{\nu_1 \dots \nu_q\}$ 是洛伦兹矢量指标. 这表明我们在弦论中成功构造了费米子态. 但我们还需要引入物理限制来筛选出在壳的态.

观察 $n \in \mathbb{Z}$ 与 $r \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}$ 时的物理限制:

- 在 NS 部分中:

$$\begin{aligned} (L_0 - a_{\text{NS}}) |\text{phys}\rangle_{\text{NS}} &= 0, \\ L_{n>0} |\text{phys}\rangle_{\text{NS}} &= 0, \end{aligned} \quad (10.2. 103)$$

而 G 给出的限制为:

$$G_{r \geq \frac{1}{2}} |\text{phys}\rangle_{\text{NS}} = 0; \quad (10.2. 104)$$

- 在 R 部分中:

$$\begin{aligned} (L_0 - a_{\text{R}}) |\text{phys}\rangle_{\text{R}} &= 0, \\ L_{n>0} |\text{phys}\rangle_{\text{R}} &= 0, \end{aligned} \quad (10.2. 105)$$

而 G 给出的限制为:

$$G_{n \geq 0} |\text{phys}\rangle_{\text{R}} = 0. \quad (10.2. 106)$$

其中 a_{NS} 与 a_{R} 为正规排序常数. 如果我们将鬼场的贡献纳入 BRST (或光锥) 量子化,

我们就可以得到:

$$a_{\text{NS}} = \frac{1}{2}, \quad a_{\text{R}} = \frac{5}{8}. \quad (10.2. 107)$$

为了理解这些正规排序常数 a 的由来, 我们不妨回顾一下, 在第 6 章中, 我们曾说明玻色弦的正规排序常数 a 等于鬼场真空 $c_1|0\rangle$ 的共形权, 也即 L_0 相对鬼场真空的真空期望:

$$\begin{aligned} L_0^{(\text{tot})} &= L_0^{\text{m}} + L_0^{(\text{gh})} \\ &= L_0^{\text{m}} - a \\ &= L_0^{\text{m}} - 1 \\ &= 0. \end{aligned}$$

现在, 回到超弦, 由 eq. (10.2. 77), 可知 NS 部分中, γ 鬼场的模展开为 $\gamma_{\text{NS}}(z) = \sum_{r \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}} \gamma_r z^{-r + \frac{1}{2}}$, 其中 $\gamma_{r \geq 3/2}$ 会湮灭基态 $|0\rangle$, 而 $\gamma_{r \leq 1/2}$ 则不会. 于是我们遇到了与玻色弦 c 鬼场一样的情况, 存在作用于真空态降低 L_0 本征值而不会湮灭真空态的模. 但我们的麻烦比玻色弦更加严重. 因为玻色弦中的 c 鬼场为费米场, 对于降低 L_0 本征值而不会湮灭真空态的 c_1 , 我们自然地有 $(c_1)^2 = 0$. 由此定义 eq. (6.3. 88) 的鬼场真空 $c_1|0\rangle \neq 0$ 但会被 c_1 由费米性湮灭. 但是现在 γ 与其展开的模均是玻色的, 由 $[L_0, (\gamma_{1/2})^n] = -\frac{n}{2}(\gamma_{1/2})^n$, 我们可知 $\gamma_{1/2}|0\rangle \neq 0$ 无法被 $\gamma_{1/2}$ 湮灭, 反而有 $(\gamma_{1/2})^n|0\rangle$ 各自对应负的 L_0 本征值. 那么如何解决这一问题呢?

解决方案是构造一个满足要求的真空态, 而这需要我们将变量 (β, γ) 分解为 (η, ξ) 与手性玻色子 (chiral boson) ϕ :

$$\beta(z) =: e^{-\phi(z)} : \partial_z \xi(z), \quad \gamma(z) =: e^{\phi(z)} : \eta(z) \quad (10.2. 108)$$

这一分解引入的场 (η, ξ, ϕ) 满足以下性质, 这些性质均可通过与玻色弦类似的计算得到:

- 首先是他们的 OPE. 我们自然要求他们的 OPE 代回后能复现 β 与 γ 的 OPE. 因此, 我们有:

$$\eta(z)\xi(w) \sim \frac{1}{z-w} + \cdots, \quad \phi(z)\phi(w) \sim -\ln(z-w) \quad (10.2. 109)$$

而 $\xi(z)\xi(w)$ 与 $\eta(z)\eta(w)$ 的 OPE 没有奇点项.

- 新引入的场对应的能动张量为:

$$T_{\eta, \xi} = -: \eta \partial_z \xi : , \quad T_\phi = -\frac{1}{2} : (\partial_z \phi) \partial_z \phi : - \partial_z^2 \phi \quad (10.2. 110)$$

- 通过简单的 OPE 计算我们可以得到场 (η, ξ, ϕ) 分别的共形权为:

$$h(\eta) = 1, \quad h(\xi) = 0, \quad h(e^{q\phi}) = -\frac{q^2}{2} - q \quad (10.2.111)$$

- 利用计算 K-N 因子 $\langle \prod_{j=1}^n : e^{ip_j \cdot X(z_j)} : \rangle$ 相似的方法, 我们可以得到:

$$: e^{q_1 \phi(z)} :: e^{q_2 \phi(w)} : \sim (z-w)^{-q_1 q_2} : e^{(q_1+q_2)\phi(w)} : +. \quad (10.2.112)$$

由此可以构造 NS 部分中可以由 $\gamma_{1/2} = \oint \frac{dz}{2\pi i} \frac{\gamma(z)}{z}$ 湮灭的态:

$$|q = -1\rangle_{\beta, \gamma} =: e^{-\phi(0)} : |0\rangle, \quad h(e^{-\phi}) = \frac{1}{2} \quad (10.2.113)$$

代入 γ 的分解形式与 $: e^{q_1 \phi(z)} :: e^{q_2 \phi(w)} :$ 的 OPE, 我们可以得到复积分的结果为零, 于是有 $\gamma_{1/2} |q = -1\rangle_{\beta, \gamma} = 0$.

同理, R 部分中的基态应被 γ_1 湮灭. 此外, 与自旋场 $S_A(z)$ 导致 $\psi^\mu(z)$ 在 R 部分中出现分支的行为类似, R 部分中 β, γ 也存在分支, 这同样是基态存在类似结构导致的. 首先给出满足要求的基态:

$$|q = -1/2\rangle_{\beta, \gamma} =: e^{-\phi(0)/2} : |0\rangle, \quad h(e^{-\phi/2}) = \frac{3}{8} \quad (10.2.114)$$

这里的 $e^{-\phi(0)/2}$ 就是自旋场在超鬼场中的类比.

因此, 在 NS 部分, 我们有:

$$\begin{aligned} L_0^{(\text{tot})} &= L_0^{\text{m}} + L_0^{(\text{gh})} \\ &= L_0^{\text{m}} - a_{\text{NS}} \\ &= L_0^{\text{m}} - \frac{1}{2} \\ &= 0. \end{aligned}$$

而 R 部分中则有:

$$\begin{aligned} L_0^{(\text{tot})} &= L_0^{\text{m}} + L_0^{(\text{gh})} \\ &= L_0^{\text{m}} - a_{\text{R}} \\ &= L_0^{\text{m}} - \frac{5}{8} \\ &= 0. \end{aligned}$$

现在我们总结一下:

$$\begin{aligned} \text{NS)} \quad L_n &= \frac{1}{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_{n-k} \cdot \alpha_k + \frac{1}{4} \sum_{r \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}} (2r - n) : \psi_{n-r} \cdot \psi_r :, \\ \text{R)} \quad L_n &= \frac{1}{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_{n-k} \cdot \alpha_k + \frac{1}{4} \sum_{m \in \mathbb{Z}} (2m - n) : \psi_{n-m} \cdot \psi_m : + \frac{D}{16} \delta_{n,0}. \end{aligned} \quad (10.2.115)$$

我们可以注意到, 在 R 部分中存在一个与自旋场共形权相等的项, 即 $D/16$. 它将 NS 部分真空转移到 R 部分真空.

此外, 我们有超流 G_r :

$$G_r = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha_n \cdot \psi_{n-r}, \quad (10.2.116)$$

其中 NS 部分取 $r \in \mathbb{Z} + 1/2$, 而 R 部分取 $r \in \mathbb{Z}$.

10.2.3.2 质量谱

现在我们改写

$$L_0 = \frac{1}{2}(\alpha_0)^2 + N, \quad (10.2.117)$$

其中 $\alpha_0^\mu = \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} P^\mu$, 这是 X 模展开中的零模. 而其中的 N 则用来标记能级数. 在 $D = 10$ 时:

$$\begin{aligned} \text{NS)} \quad N_{\text{NS}} &= \frac{1}{2} \sum_{k \neq 0} \alpha_{-k} \cdot \alpha_k + \frac{1}{4} \sum_{r \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}} (2r) : \psi_{-r} \cdot \psi_r :, \\ \text{R)} \quad N_{\text{R}} &= \frac{1}{2} \sum_{k \neq 0} \alpha_{-k} \cdot \alpha_k + \frac{1}{4} \sum_{m \in \mathbb{Z}} (2m) : \psi_{-m} \cdot \psi_m : + \frac{5}{8}. \end{aligned} \quad (10.2.118)$$

现在我们可以开始从 NS 部分的第一个能级开始分析:

首先是 $N_{\text{NS}} = 0$. 在 $N_{\text{NS}} = 0$ 时, 我们有:

$$L_0^{\text{m}} - a_{\text{NS}} = L_0^{\text{m}} - \frac{1}{2} = 0 \implies \frac{\alpha' P^2}{4} = \frac{1}{2} = a_{\text{NS}} \implies m^2 = -\frac{2}{\alpha'}. \quad (10.2.119)$$

我们发现, 这是一个快子, 并且质量平方比玻色弦快子更小了. 但我们后面会解释, 这里的快子态存在问题并最终会被去除.

接下来, $N_{\text{NS}} = \frac{1}{2}$. 由于 ψ 的存在, 与玻色弦不同, 我们现在可以将 N_{NS} 激发半整数.

于是 $N_{\text{NS}} = 1/2$ 对应的态为:

$$\epsilon_\mu(p) \psi_{\frac{1}{2}}^\mu |0, p\rangle_{\text{NS}}, \quad (10.2.120)$$

这是一个无质量的矢量:

$$m^2 = \frac{4}{\alpha'} \left(\frac{1}{2} - a_{\text{NS}} \right) = 0. \quad (10.2.121)$$

这描述了一个无质量矢量, 它是小群 $SO(8)$ 的表示, 我们将其记为 8_V . 观察超流, 注意到:

$$G_{\frac{1}{2}} = \sum_n \alpha_n \cdot \psi_{\frac{1}{2}-n}, \quad (10.2.122)$$

其中 $n = 0$ 项为 $\alpha_0 \cdot \psi_{\frac{1}{2}}$. 于是限制条件 eq. (10.2.104) 变为:

$$G_{\frac{1}{2}} = 0 \implies \alpha_0 \cdot \epsilon = 0 \implies p \cdot \epsilon = 0, \quad (10.2.123)$$

与玻色弦类似, 更高激发态则对应质量态.

现在我们来分析 R 部分的第一个能级:

第一个能级 $N_{\text{R}} = 0$ 所对应的态由 eq. (10.2.92) 可以分解为左右手外尔旋量两部分, 因此有:

$$u_A(p) |A, p\rangle_{\text{R}} + v_{\dot{A}}(p) |\dot{A}, p\rangle_{\text{R}}, \quad (10.2.124)$$

其中 $u_A(p)$ 是 $D = 10$ 的左手外尔旋量, 而 $v_{\dot{A}}(p)$ 则是 $D = 10$ 的右手外尔旋量. 我们现在可以分别处理这两个不可约的旋量表示.

再次观察超流, 我们发现:

$$G_0 = \sum_n \alpha_n \cdot \psi_{-n}, \quad (10.2.125)$$

在 R 真空中, $n = 0$ 项给出:

$$G_0 = \alpha_0 \cdot \psi_0 = \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} p \cdot \Gamma \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{\alpha'}}{2} \not{p}, \quad (10.2.126)$$

其中 \not{p} 是费米子的狄拉克算符, 即矢量算符与 Γ 矩阵缩并. 不难证明, \not{p} 满足 $(\not{p})^2 = p^2$. 现在限制方程 eq. (10.2.106) 变为狄拉克方程:

$$\begin{aligned} \not{p} u(p) &= 0 \implies m^2 = 0, \\ \not{p} v(p) &= 0 \implies m^2 = 0. \end{aligned} \quad (10.2.127)$$

与场论中的外尔方程类似, 这一限制方程将旋量自由度减半, 从 16 分量的外尔旋量减

为 8 分量的马约拉纳-外尔旋量 (Majorana-Weyl spinor). 今后我们令 A 与 α 分别表示外尔指标与马约拉纳-外尔指标. 于是我们得到的两个态 $u_\alpha(p) |\alpha, p\rangle_R$ 与 $v_{\dot{\alpha}}(p) |\dot{\alpha}, p\rangle_R$ 张成了 $SO(8)$ 的 $2^{8/2} = 16 = 8 + 8$ 维旋量表示:

$$SO(8) \longrightarrow \underbrace{8_C}_{\text{left}} \oplus \underbrace{8_S}_{\text{right}}. \quad (10.2.128)$$

如果观察更高激发态, 我们会发现有质量的半整数自旋态.

现在, 我们在表 10.1 中汇总了我们在全纯部分中的发现. 无质量部分分别构成 $SO(8)$ 的表示.

NS	R
$N_{\text{NS}} = 0$: 快子	$N_{\text{R}} = 0$: $8_C \oplus 8_S$ 无质量
$N_{\text{NS}} = \frac{1}{2}$: 8_V 无质量	

Table 10.1: 闭超弦全纯部分能谱例

10.2.4 光锥量子化

与玻色弦类似, 我们也可以先引入限制条件再进行量子化, 即进行所谓光锥量子化.

10.2.4.1 限制条件

在玻色弦中我们利用 eq. (3.3.24) 固定共形变换:

$$X^+(z) = x^+ + \alpha' p^+ \tau = X_0^+ + i\alpha' p^+ \ln(\bar{z} - z) \quad (10.2.129)$$

因此,

$$j^+(z) = i\sqrt{\frac{2}{\alpha'}} \partial X^+(z) = \frac{1}{z} \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} p^+. \quad (10.2.130)$$

然而, 在超弦中, 我们还有 ψ 部分和超共形变换. 如果我们在光锥方向 $+$ 写出超共形变换, 我们便有:

$$\delta_\eta^{\text{sc}} \psi^+(z) = -i\eta j^+(z), \quad (10.2.131)$$

我们可以固定

$$\psi^+(z) = 0. \quad (10.2.132)$$

于是, 在超弦中, 光锥规范为:

$$\begin{cases} X_L^+(z) = X_0^+ + i\alpha' p^+ \ln(\bar{z} - z) \\ \psi^+(z) = 0 \end{cases} . \quad (10.2. 133)$$

在经典层面, 我们可以在 NS 部分实现约束条件 $L_{n>0} |\text{phys}\rangle_{\text{NS}} = 0$ 与 $G_{r \geq \frac{1}{2}} |\text{phys}\rangle_{\text{NS}} = 0$, 即 eq. (10.2. 103). 而在 R 部分我们则可以实现约束条件 $L_{n>0} |\text{phys}\rangle_{\text{R}} = 0$ 和 $G_{n \geq 0} |\text{phys}\rangle_{\text{R}} = 0$, 即 eq. (10.2. 105). 这里我们暂时忽略 L_0 约束. 而 $-$ 方向上的谐振模可以用横向的谐振模表示为:

$$\begin{cases} \partial X^-(z) = \frac{z}{2p^+} \left(\frac{2}{\alpha'} \partial X^j \partial X_j + i\psi^j \partial \psi_j \right) \\ \psi^-(z) = \frac{2z}{\alpha' p^+} \psi^j \partial X_{L,j} \end{cases} , \quad (10.2. 134)$$

其中指标 j 表示横向方向. 而由于我们现在只有横向谐振模, 因此福克空间将由以下形式的态组成:

$$\begin{aligned} \text{NS)} \quad & \left(\alpha_{-n_1}^{i_1} \dots \alpha_{-n_k}^{i_k} \right) \left(\psi_{-r_1}^{j_1} \dots \psi_{-r_q}^{j_q} \right) |0, p\rangle_{\text{NS}} , \\ \text{R)} \quad & \left(\alpha_{-n_1}^{i_1} \dots \alpha_{-n_k}^{i_k} \right) \left(\psi_{-r_1}^{j_1} \dots \psi_{-r_q}^{j_q} \right) |(\cdot), p\rangle_{\text{R}} , \end{aligned} \quad (10.2. 135)$$

与我们先前提过的一样, $|\alpha\rangle$ 是 $SO(8)$ 的 8_C 旋量表示, 而 $|\dot{\alpha}\rangle$ 则是 8_S 旋量表示. 现在考虑 L_0 限制, 我们有:

$$\begin{aligned} \text{NS)} \quad & L_0^{(\text{lc})} - a_{\text{NS}}^{(\text{lc})} = 0 , \\ \text{R)} \quad & L_0^{(\text{lc})} - a_{\text{R}}^{(\text{lc})} = 0 . \end{aligned} \quad (10.2. 136)$$

10.2.4.2 光锥中的 NS 能谱

现在我们可以开始利用光锥量子化分析 NS 部分的能谱

首先是 $N_{\text{NS}}^{(\text{lc})} = 0$. 与协变量子化一致, 在 $N_{\text{NS}}^{(\text{lc})} = 0$ 时出现的态是快子态, 满足

$$m^2 = -a_{\text{NS}}^{(\text{lc})} \frac{4}{\alpha'} . \quad (10.2. 137)$$

而在 $N_{\text{NS}}^{(\text{lc})} = \frac{1}{2}$ 能级, 我们找到的态可以写为:

$$\xi_i(p) \psi_{-\frac{1}{2}}^i |0, p\rangle_{\text{NS}} , \quad (10.2. 138)$$

同样地, 指标 i 表示横向自由度. 这个态的质量为:

$$\frac{\alpha' m^2}{4} = \frac{1}{2} - a_{\text{NS}}^{(\text{lc})}. \quad (10.2. 139)$$

与我们在玻色弦的讨论类似, 通过计算自由度考虑其对应的小群表示, 我们可以发现这种态是无质量矢量. 即它有 $D - 2$ 自由度, 因而张成小群 $SO(8)$ 的 8_V 表示, 是无质量的. 这意味着:

$$a_{\text{NS}}^{(\text{lc})} = \frac{1}{2}, \quad (10.2. 140)$$

这与我们之前得到的 eq. (10.2. 107) 一致. 倘若我们尝试直接对 L_0 取正规排序, 我们便有:

$$\begin{aligned} L_0^{(\text{lc})} &= \frac{\alpha' p^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{k \neq 0} \alpha_{-k}^i \alpha_{k,i} + \frac{1}{2} \sum_{r \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}} r \psi_{-r}^i \psi_{r,i} \\ &= \frac{\alpha' p^2}{4} + \sum_{k \geq 1} \left(\alpha_{-k}^i \alpha_{k,i} + \frac{1}{2} k(d-2) \right) + \sum_{r \geq \frac{1}{2}} \left(r \psi_{-r}^i \psi_{r,i} - \frac{1}{2} r(d-2) \right) \\ &= \frac{\alpha' p^2}{4} + \hat{N}_\perp + \underbrace{\frac{1}{2}(d-2) \sum_{k \geq 1} k - \frac{1}{2}(d-2) \sum_{r \geq \frac{1}{2}} r}_{\text{infinite zero point energies}}, \end{aligned}$$

其中指标 \perp 用于标记横向的能级数算符. 与玻色弦类似, 我们又一次遇到了无穷求和问题, 处理方式也是类似的, 我们有:

$$\sum_{k \geq \nu} k \rightarrow \sum_{k \geq \nu} k e^{-\epsilon k} = \frac{e^{\epsilon \nu} (\nu + e^{\epsilon(1-\nu)})}{(1 - e^\epsilon)^2} \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon^2} - \frac{1}{12} (1 - 6\nu + 6\nu^2) + O(\epsilon). \quad (10.2. 141)$$

对于 X -CFT, 它对应 $\nu = 1$. 而对 ψ -CFT, 则是 $\nu = 1/2$. 如果我们现在进行一些重整化操作, 插入一个适当的反项将 $1/\epsilon^2$ 发散吸收 (这实际上就是我们在玻色弦中的操作), 那么零点能便可以写为:

$$\sum_{k \geq 1} k = -\frac{1}{12}, \quad \sum_{r \geq \frac{1}{2}} r = \frac{1}{24}. \quad (10.2. 142)$$

因此

$$L_0^{(\text{lc})} = \frac{\alpha' p^2}{4} + \hat{N}_\perp - \frac{D-2}{16}, \quad (10.2. 143)$$

限制条件 $L_0^{(lc)} - a_{NS}^{(lc)} = 0$ 于是给出:

$$a_{NS}^{(lc)} = \frac{D-2}{16} = \frac{1}{2} \implies D = 10. \quad (10.2. 144)$$

10.2.4.3 光锥中的 R 能谱

现在, 让我们分析光锥量子化下 R 部分的能谱.

能级 $N_R^{(lc)} = 0$ 对应的态是无质量的 $8_C + 8_S$:

$$u_\alpha(p) |\alpha, p\rangle_R + v_{\dot{\alpha}}(p) |\dot{\alpha}, p\rangle_R. \quad (10.2. 145)$$

于是有:

$$\begin{aligned} L_0^{(lc)} &= \frac{\alpha' p^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_{-k}^i \alpha_{k,i} + \frac{1}{2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} n \psi_{-n}^i \psi_{n,i} \\ &= \frac{\alpha' P^2}{4} + \hat{N}_\perp + \frac{1}{2} (d-2) \sum_{k \geq 1} k - \frac{1}{2} (d-2) \sum_{n \geq 1} n. \end{aligned}$$

我们注意到零点能量相互抵消. 于是约束条件 $L_0^{text(lc)} - a_R^{text(lc)} = 0$ 要求:

$$a_R^{(lc)} = 0. \quad (10.2. 146)$$

而这与我们在闭超弦协变量子化中看到的值 eq. (10.2. 107) 不同. 原因便是光锥量子化计算的是物质与鬼场中 R 部分真空态完整共形权, 即 $\sim c e^{-\phi/2} S_\alpha |0\rangle_{SL(2, \mathbb{C})}$.

10.3 开超弦 (open superstring) 的边界条件

我们接下来讨论开超弦的边界在 RNS 表述下的行为. 在开弦情况下, 全纯部分会分裂为 NS 和 R 部分. 因此, 我们需要将其分开讨论, 既然是开弦, 这便表示我们必须构建一个带边界的超共形场, 亚纯与反亚纯部分在实轴处的边界条件为:

$$\begin{aligned} T(z) &= \overline{T}(\bar{z}), \\ \text{NS)} \quad G(z) &= \overline{G}(\bar{z}), \\ \text{R)} \quad G(z) &= \begin{cases} +\overline{G}(\bar{z}) & \text{for } z = \bar{z} < 0 \\ -\overline{G}(\bar{z}) & \text{for } z = \bar{z} > 0. \end{cases} \end{aligned} \quad (10.3. 147)$$

具体来说: 在 R 情况下, 超流的粘合条件来自于在 $z = \bar{z} = 0$ 处存在一个旋量场, 它在实轴上从 0 到 ∞ 之间产生了一个分支奇点.

与玻色弦中对开弦的讨论类似, 能动张量可以利用类似电像法的操作表示为:

$$T_C = \begin{cases} T_{\text{亚纯}}(z) & \text{Im}(z) > 0 \\ \bar{T}_{\text{亚纯}}(z^*) & \text{Im}(z) < 0 \end{cases}. \quad (10.3. 148)$$

其中 $T_{\text{亚纯}}(z)$ 表示开弦定义在上半平面的能动张量, 我们利用这一操作便定义出了在全复平面上的能动张量 T_C . 这种操作也常常被称为倍化技巧 (doubling trick). 我们现在定义 ϵ 指标来区分 NS 与 R 部分:

$$\epsilon = \begin{cases} +1 & \text{NS} \\ -1 & \text{R} \end{cases}. \quad (10.3. 149)$$

因此我们可以将电像法技巧应用于超流:

$$G_C^{(\epsilon)}(z) = \begin{cases} G_{\text{亚纯}}(z) & \text{Im}(z) > 0 \\ \bar{G}_{\text{亚纯}}(z^*) & \text{Im}(z) > 0, \text{Re}(z) < 0 \\ \epsilon \bar{G}_{\text{亚纯}}(z^*) & \text{Im}(z) > 0, \text{Re}(z) > 0 \end{cases}. \quad (10.3. 150)$$

绕原点一周我们有:

$$G_C^{(\epsilon)}(ze^{2i\pi}) = \epsilon G_C^{(\epsilon)}(z), \quad (10.3. 151)$$

这正对应了 R 部分中出现在实数轴 0 到 ∞ 处的分支.

在确定了能动张量与超流在边界的行为后我们现在可以开始根据纽曼边界与迪利克雷边界进行分类进一步讨论共形场的行为. 首先, 物质场 $\partial X^\mu(z)$ 在实数轴上满足:

$$\partial X^\mu(z) = \Omega_A^{(\partial X)} \bar{\partial} X^\mu(\bar{z}) \quad \text{for } z = \bar{z}, \quad (10.3. 152)$$

其中 $\partial X^\mu(z)$ 是 $\partial X^\mu(z, \bar{z})$ 的简写

$$\Omega_A^{((\partial X))} = \begin{cases} +1 & \text{for } A = \text{纽曼} \\ -1 & \text{for } A = \text{迪利克雷} \end{cases}. \quad (10.3. 153)$$

而超对称变换会将 ∂X^μ 与 ψ^μ 相互关联:

$$\delta_{\text{SUSY}}^{(\epsilon)} \psi^{\mu(\epsilon)}(z) = \partial X^\mu(z), \quad (10.3.154)$$

于是我们立刻得到了 $\psi^\mu(z)$ 的边界行为:

$$\psi^{\mu(\epsilon)}(z) = \begin{cases} \Omega_A^{(\psi)} \bar{\psi}^{\mu(\epsilon)}(\bar{z}) & \text{for } z = \bar{z} < 0 \\ \epsilon \Omega_A^{(\psi)} \bar{\psi}^{\mu(\epsilon)}(\bar{z}) & \text{for } z = \bar{z} > 0 \end{cases}, \quad (10.3.155)$$

而 $\Omega_A^{(\psi)}$ 与 $\Omega_A^{((\partial X))}$ 相同.

10.4 GSO 投影

我们迄今为止针对闭超弦全纯部分的讨论可以被直接应用到反全纯部分, 从而找到我们目前讨论范围内的完整闭超弦能谱. 结果如表 10.2 所示. 不难发现, 我们目前讨论的能谱中包含快子. 而实际上快子在超弦的体系中会引起各种问题, 解决方案由格里奥齐 (Gliozzi), 舍克 (Sherk), 奥利弗 (Olive) 三人于 1976 年发现 [10], 通常称为 GSO 投影 (GSO projection).

	NS - $\overline{\text{NS}}$	R - $\overline{\text{NS}}$	NS - $\overline{\text{R}}$	R - $\overline{\text{R}}$
$L_0 - a = 0$ $\bar{L}_0 - a = 0$	$m^2 = \frac{4}{\alpha'} (N_{\text{NS}} - \frac{1}{2})$ $N_{\text{NS}} = \bar{N}_{\text{NS}}$	$m^2 = \frac{4}{\alpha'} N_{\text{R}}$ $N_{\text{R}} = \bar{N}_{\text{NS}} - \frac{1}{2}$	$m^2 = \frac{4}{\alpha'} \bar{N}_{\text{R}}$ $\bar{N}_{\text{R}} = N_{\text{NS}} - \frac{1}{2}$	$m^2 = \frac{4}{\alpha'} \bar{N}_{\text{R}}$ $N_{\text{R}} = \bar{N}_{\text{R}}$
$N = 0$	快子: $t(p) 0, p\rangle$ $m^2 = -\frac{2}{\alpha'}$			
$N_{\text{NS}} = \frac{1}{2}$ $N_{\text{R}} = 0$	无质量玻色子: $\underbrace{8_V}_{\text{bos}} \otimes \underbrace{8_V}_{\text{bos}}$ $m^2 = 0$	无质量费米子: $\underbrace{(8_C \oplus 8_S)}_{\text{ferm}} \otimes \underbrace{8_V}_{\text{bos}}$ $m^2 = 0$	无质量费米子: $\underbrace{8_V}_{\text{bos}} \otimes \underbrace{(8_C \oplus 8_S)}_{\text{ferm}}$ $m^2 = 0$	无质量玻色子: $\underbrace{(8_C \oplus 8_S)}_{\text{ferm}} \otimes \underbrace{(8_C \oplus 8_S)}_{\text{ferm}}$ $m^2 = 0$

Table 10.2: 闭超弦能谱例

而 NS 和 R 部分中分别的更高激发态便是 $\alpha_{-\text{N}}^\mu$ 与 $\psi_{1/2-\text{N}}^\mu$ 相继作用于 $|q = -1\rangle$ 与

$|q = -1/2\rangle$ 的结果. 回顾一下, 玻色弦中我们曾说明过, 物理态由共形权 $h = 1$ 的顶角算符 V_{phys} 生成:

$$|phys\rangle = \lim_{z \rightarrow 0} V_{phys}(z) |0\rangle \quad (10.4. 156)$$

而这对超弦同样成立. 于是我们有:

- NS 部分: 顶角算符由 α_{-N}^μ 与 $\psi_{1/2-N}^\mu$ 作用于 $|q = -1\rangle =: e^{-\phi(0)} : |0\rangle$ 生成. 不出现靶空间旋量指标, 因此其对应的顶角算符是靶空间玻色子顶角算符:

$$V_{phys}^{NS}(z) = \Phi_{phys}^{NS}(z) : e^{-\phi(z)} :, \quad h(\Phi_{phys}^{NS}) = \frac{1}{2} \quad (10.4. 157)$$

- R 部分: 顶角算符由 α_{-N}^μ 与 ψ_{-N}^μ 作用于 $|q = -1/2\rangle = S_A(0) : e^{-\phi(0)/2} : |0\rangle$ 生成. 其中只有 A 是靶空间旋量指标, 因此是靶空间费米子顶角算符:

$$V_{phys}^R(z) = \Phi_{phys}^R(z) : e^{-\phi(z)/2} :, \quad h(\Phi_{phys}^R) = \frac{5}{8} \quad (10.4. 158)$$

其中我们将物质部分的贡献 Φ_{phys}^{NS} 与 Φ_{phys}^R 单独提取出来进行分析. 这里需要注意的是自旋场 S_A 出现在 Φ_{phys}^R 中. 而十维下的自旋场共形权为 $h(S_A) = \frac{5}{8}$, 因此 Φ_{phys}^R 中物质部分贡献的共形权并不会出现奇怪的分数, 而是 0. 由此, 我们现在便可以利用叠合关系得到闭超弦激发态, 玻色子与费米子与 NS 和 R 的对应关系分别为:

- (NS,R); (R,NS): 靶空间费米子
- (NS,NS); (R,R): 靶空间玻色子

我们稍后会看到, 这里的 (R,R) 的双旋量会产生反对称张量

现在让我们讨论在 RNS 超弦中给出物理态对应的 Φ_{phys}^{NS} 与 Φ_{phys}^R 的基本规则. 而为简化讨论, 我们这里仅考虑左行模 (即 $\partial_z X^\mu$ 与 ψ^μ 及其导数). 而 $\partial_{\bar{z}} X^\mu$ 与 $\bar{\psi}^\mu$ 等右行模则直接由复叠关系得到.

接下来便是 GSO 三个人的工作. 他们提出了一条限制, 大致来讲就是物理态顶角算符的 OPE 中不能出现分支. 我们会说明, 这条限制能去掉快子并对极化 ϵ^μ 与 (u_A, v_A) 进行限制². 具体来说:

- 由于 K-N 因子中复坐标 z 绝对值的出现:

$$\left\langle \prod_{j=1}^n : e^{ip_j \cdot X(z_j)} : \right\rangle \sim \prod_{i < j}^n |z_{ij}|^{\alpha' p_i \cdot p_j} \quad (10.4. 159)$$

²注意到我们这里对 (u_A, v_A) 仍然使用外尔指标而非马约拉纳外尔指标, 这是因为 GSO 给出的限制与 eq. (10.2. 104) 和 eq. (10.2. 106) 给出的限制作用相同, 为了说明这一点, 让我们暂时保留外尔指标.

平面波关联函数对任意的 p_i 均为单值函数.

- 但顶角算符 $V_{phys}^{NS}(z)$ 与 $V_{phys}^R(w)$ 其他部分之间的 OPE 有出现多值函数的可能:

$$\begin{aligned} e^{-\phi(z)}e^{-\phi(w)/2} &\sim (z-w)^{-1/2} \\ \partial_z^{n \geq 0} \psi^\mu(z) S_A(w) &\sim (z-w)^{-\#(\psi)/2} \end{aligned} \quad (10.4.160)$$

其中 $\#(\psi)$ 表示 ψ 出现的个数, 而 ψ^μ 及其导数 $\partial_z^{n \geq 1} \psi^\mu$ 贡献的 $\#(\psi)$ 均为 1.

基于这两条性质, 我们发现鬼场与 (ψ^μ, S_A) 整体不产生分支则要求 NS 部分的顶角算符中 $\#(\psi)$ 为奇数, 即只出现奇数个 ψ . 于是我们便排除了快子态, 但保留无质量矢量态.

接下来我们观察十维中无质量费米子顶角算符 $V_{m^2=0}^R(z)$ 与 $V_{m^2=0}^R(w)$ 的 OPE, 得到:

$$:e^{-\phi/2} S_A(z)::e^{-\phi/2} S_B(w): \sim \frac{C_{AB}:e^{-\phi(w)}:}{(z-w)^{3/2}} + \frac{(\Gamma^\mu C)_{AB} \psi_\mu(w)}{\sqrt{2}(z-w)} :e^{-\phi(w)}: + \dots \quad (10.4.161)$$

为保证 OPE 中不出现分支我们要求顶角算符 OPE 中不出现上述的第一项, 而这唯一的实现方法是要求 $u_1^A u_2^B C_{AB} = 0$. 其中荷共轭矩阵 C_{AB} 是外尔基底下非对角分块矩阵 $C_{A'B'}$ 的对角元:

$$C_{A'B'} = \begin{pmatrix} 0 & C_A^{\dot{B}} \\ C_B^{\dot{A}} & 0 \end{pmatrix} \quad (10.4.162)$$

其中 A', B' 为狄拉克旋量指标指标. 这实际上就是狄拉克旋量的外尔分解, 于是对角部分 $C_{AB} = 0$. 我们发现外尔旋量刚好满足 $u_1^A u_2^B C_{AB} = 0$. 这实际上就是 eq. (10.2.124) 分解的来源. 另外, 十维靶空间的 γ 矩阵 $(\Gamma^\mu)_{A'}^{B'}$ 也是分块的非对角矩阵:

$$(\Gamma^\mu)_{A'}^{B'} = \begin{pmatrix} 0 & \gamma_{A\dot{B}}^\mu \\ \gamma^{\mu\dot{A}B} & 0 \end{pmatrix} \quad (10.4.163)$$

且有 16×16 的克里福德代数 $\gamma_{A\dot{B}}^\mu \gamma^{\nu\dot{B}C} + \gamma_{A\dot{B}}^\nu \gamma^{\mu\dot{B}C} = 2\eta^{\mu\nu} \delta_A^C$. 于是第二项 $\chi_1^{A'} (\gamma^\mu C)_{A'B'} \chi_2^{B'} \rightarrow u_1^A (\gamma^\mu C)_{AB} u_2^B \neq 0$ 所以我们发现, 对于 R 部分中 $m^2 > 0$ 的态, 由 eq. (10.4.159), 为避免分支, 我们只能允许 $\partial_z^{n \geq 0} \psi^\mu$ 引入偶数的 $\#(\psi)$, 这使得有质量态中自动出现偶数个 ψ^μ 算符, 并将自旋算符限制为外尔旋量.

简单总结一下, 上述的选择规则给出了所谓的 GSO 投影, 即如下对物理态的要求:

- NS 部分: 只允许出现奇数个 $\#(\psi)$, 由此去掉了快子态以及其他整数能级对应的态,

例如 $\psi^\mu \psi^\nu : e^{-\phi} e^{ip \cdot X} :$ 与 $\partial_z X^\mu : e^{-\phi} e^{ip \cdot X} :$.

- R 部分: 只允许出现偶数个 $\#(\psi)$, 由此去掉了半整数能级对应的态, 并将自旋算符确定为外尔旋量.

于是我们发现, 无论是 R 部分还是 NS 部分, 他们都只能包含质量平方 $m^2 \in \frac{4\mathbb{N}}{\alpha'}$, 这是靶空间超对称存在的必要条件.

关于 GSO 投影, 我们仍有两个潜在的问题:

- 在玻色弦无质量态的顶角算符 $\epsilon_\mu : i\partial_z X^\mu e^{ip \cdot X} :$ 中, 只有当 $\epsilon \cdot p = 0$ 时顶角算符才是主场, 由此我们对玻色弦的极化矢量给出了限制. 但对于超弦我们则不能类似地对无质量态极化 ϵ^μ 与 u^A 进行限制.
- 由 eq. (10.1. 60) 中 (β, γ) 系统对厄米共轭的修正, 在关联函数 $\langle \prod_{j=1}^n : e^{q_j \phi(z_j)} : \rangle$ 中, 只有满足 $\sum_{j=1}^n q_j = -2$ (对含非零亏格数情况则为 $2g - 2$.) 时, 关联函数才非零. 但是, 对于包含两个以上 V_{phys}^{NS} 或四个以上 V_{phys}^R 的关联函数, 我们自然会发现 q 的总和小于 -2 , 尽管与之对应的树级振幅毫无疑问是非零的.

这两条问题的解决方案都依赖于世界面超对称.

为了得到非零的 n 点树级弦振幅, 我们需要 $q \neq -1, -\frac{1}{2}$ 的顶角算符 $\hat{V}_{phys}(z) \sim: e^{q\phi(z)} :$, 即:

- 在 $q = 0$ 下的玻色子顶角算符 $\hat{V}_{phys}^{NS}(z) \sim \hat{\Phi}_{phys}^{NS}(z) : e^{0\phi(z)} :$
- 在 $q = \frac{1}{2}$ 下的费米子顶角算符 $\hat{V}_{phys}^R(z) \sim \hat{\Phi}_{phys}^R(z) : e^{\phi(z)/2} :$

显然, 我们只需构造出这两种顶角算符便总可以将关联函数的 q 总和变回 -2 . 由 $h(e^{q\phi}) = -\frac{q^2}{2} - q$ 及 $h(\hat{V}_{phys}^{NS}) = h(\hat{V}_{phys}^R) = 1$, 我们得到物质部分的贡献 $\hat{\Phi}_{phys}^{NS}$ 与 $\hat{\Phi}_{phys}^R$ 分别有共形权:

$$h(\hat{\Phi}_{phys}^{NS}) = 1, \quad h(\hat{\Phi}_{phys}^R) = \frac{13}{8} \quad (10.4. 164)$$

并且, 我们希望每一对 $(V_{phys}^{NS}, \hat{V}_{phys}^{NS})$ 与 $(V_{phys}^R, \hat{V}_{phys}^R)$ 均描述单个的物理态 $|phys\rangle$, 即是否带 \wedge 对算符描述的物理态不产生影响, 仅用于区分 q 的取值. 这便要求我们必须将 Φ_{phys} 与 $\hat{\Phi}_{phys}$ 用 RNS 作用量本身的对称性相互联系, 实际上就是要求 Φ_{phys} 与 $\hat{\Phi}_{phys}$ 能够用超流 $G(z) \sim i\partial_z X_\mu(z)\psi^\mu(z)$ 相互关联.

首先我们观察一下 NS 部分, 即靶空间玻色子. 我们要求 $(\Phi_{phys}^{NS}, \hat{\Phi}_{phys}^{NS})$ 作为 $h = \frac{1}{2}$ 的超共形主场对出现, 即满足定义 eq. (10.1. 35). 而这便要求我们有:

$$G(z)\Phi_{phys}^{NS}(w) = \frac{\hat{\Phi}_{phys}^{NS}}{z-w} + \dots \quad (10.4. 165)$$

不能出现二阶奇点. 而这就给出了我们对极化的限制, 在无质量态便给出了 $\epsilon \cdot p = 0$. 利用柯西积分公式, 我们便得到: $G_{-1/2} : \Phi_{phys}^{NS} \rightarrow \hat{\Phi}_{phys}^{NS}$. 现在我们具体观察一下超流对无质量态的作用:

$$\begin{aligned} G(z)\Phi_{m^2=0}^{NS}(w) &\sim :i\partial_z X_\mu(z)\psi^\mu(z) : \epsilon_\lambda : \psi^\lambda(w) e^{ip \cdot X(w)} : \\ &= \epsilon_\lambda : \left(\frac{2\alpha' P_\mu}{z-w} + i\partial_w X_\mu(w) + \dots \right) \left(\frac{\eta^{\mu\lambda}}{z-w} + \psi^\mu \psi^\lambda(w) + \dots \right) e^{ip \cdot X(w)} : \\ &= : \left(\frac{2\alpha' \epsilon \cdot p}{(z-w)^2} + \frac{\epsilon_\mu [i\partial_w X^\mu(w) + 2\alpha' (p \cdot \psi) \psi^\mu(w)]}{z-w} + \dots \right) e^{ip \cdot X(w)} : \end{aligned} \quad (10.4.166)$$

为保证出现的是超共形主场对, 我们需要让二阶奇点的系数为 0, 这也就是要求 $\epsilon \cdot p = 0$. 现在我们可以根据定义从上式读出 $q = 0$ 的 $\hat{\Phi}_{m^2=0}^{NS}$, 如下:

$$\hat{\Phi}_{m^2=0}^{NS}(z) = \epsilon_\mu : [i\partial_z X^\mu(z) + 2\alpha' (p \cdot \psi) \psi^\mu(z)] e^{ip \cdot X(z)} : \quad (10.4.167)$$

从这里我们也可以看出, 当我们取 $\epsilon_\mu \rightarrow p_\mu$ 时, 由于 $p_\mu p_\nu : \psi^\mu \psi^\nu :$ 中 $\psi^\mu \psi^\nu$ 反对称, 第二项为零, 而第一项则是全导数项 $\partial_z : e^{ip \cdot X(z)} :$.

接下来, 考虑 R 部分. 我们要做的就是将 NS 部分的 $G_{-1/2} : \Phi_{phys}^{NS} \rightarrow \hat{\Phi}_{phys}^{NS}$ 推广为 $G_{-1} : \Phi_{phys}^R \rightarrow \hat{\Phi}_{phys}^R$, 即:

$$\hat{\Phi}_{phys}^R(w) = (G_{-1}\Phi_{phys}^R)(w) = \oint_{B_\epsilon(w)} \frac{dz}{2\pi i} G(z)(z-w)^{-1/2} \Phi_{phys}^R(w) \quad (10.4.168)$$

超共形主场对要求出现的两个场均为共形主场. Φ_{phys}^R 满足共形主场要求. 现在我们需要 $\hat{\Phi}_{phys}^R$ 也是共形主场, 并被 L_1 湮灭. 而由于 $[L_1, G_{-1}] = \frac{3}{2}G_0$, 这一要求现在变为要求下式成立:

$$0 = (G_0\Phi_{phys}^R)(w) = \oint_{B_\epsilon(w)} \frac{dz}{2\pi i} G(z)(z-w)^{1/2} \Phi_{phys}^R(w) \quad (10.4.169)$$

由柯西积分公式, 这等价于要求 $G(z)\Phi_{phys}^R(w)$ 的 OPE 中 $(z-w)^{-3/2}$ 的系数为 0. 我们还是观察一下无质量态的例子:

$$\begin{aligned} G(z)\Phi_{m^2=0}^R(w) &\sim :i\partial_z X_\mu(z)\psi^\mu(z) : u^A S_A(w) : e^{ip \cdot X(w)} : \\ &= \left(\frac{2\alpha' p_\mu}{z-w} + \dots \right) \left(\frac{u^A \gamma_{A\dot{B}}^\mu S^{\dot{B}}(w)}{\sqrt{2}(z-w)^{1/2}} + \dots \right) : e^{ip \cdot X(w)} : + \dots \end{aligned} \quad (10.4.170)$$

这里 $(z - w)^{-3/2}$ 的系数为 0 实际就是要求 $u^A, v^{\dot{A}}$ 满足无质量狄拉克方程:

$$\begin{aligned} \not{p}u(p) &= 0, \\ \not{p}v(p) &= 0. \end{aligned} \quad (10.4. 171)$$

我们又一次看到, 这两个 16 分量的外尔旋量变为两个 8 分量马约拉纳-外尔旋量. 而他们分别与 8 分量的极化矢量相互对应, 这同样是超对称的重要特征.

不难发现, 要求 Φ_{phys} 与 $\hat{\Phi}_{phys}$ 成为超共形主场对得到的限制, 和我们分析 eq. (10.2. 104) 与 eq. (10.2. 106) 得到的限制相同, 这实际上并不奇怪, eq. (10.2. 104) 与 eq. (10.2. 106) 给出了超流特定的模作用于物理态的限制. 而我们现在希望一个超共形主场对描述同一个物理态, 这个超共形主场对由超流相互联系, 这自然就会给出超流作用于这一物理态的要求.

最后我们还需要说明几件事:

- 我们今后在描述态 $|\varphi\rangle$ 时将使用 $V_\varphi^{(q)}(z) \sim: e^{q\phi(z)}:$ 而非 $V_{phys}^{NS}, \hat{V}_{phys}^{NS}, V_{phys}^R, \hat{V}_{phys}^R$. 例如, 无质量态中我们有:

$$\begin{aligned} V_\epsilon^{(-1)}(z) &\sim \epsilon_\mu : \psi^\mu(z) e^{-\phi(z)} e^{ip \cdot X(z)} : \\ V_\epsilon^{(0)}(z) &\sim \epsilon_\mu : [i\partial_z X^\mu(z) + 2\alpha'(p \cdot \psi)\psi^\mu(z)] e^{ip \cdot X(z)} : \\ V_u^{(-1/2)}(z) &\sim u^\alpha S_\alpha(z) : e^{-\phi(z)/2} e^{ip \cdot X(z)} : \\ V_u^{(1/2)}(z) &\sim u^\alpha : \left(i\partial_z X^\mu(z) + \frac{\alpha'}{8}(p \cdot \psi)\psi^\mu(z) \right) (\gamma_\mu)^{\alpha\dot{\beta}} S_{\dot{\beta}}(z) e^{\phi(z)/2} e^{ip \cdot X(z)} : \end{aligned} \quad (10.4. 172)$$

- $V_\epsilon^{(-1)}(z)$ 的纵向极化 $\epsilon_\mu \rightarrow p_\mu$ 同样是解耦合的, 直接证明 $p_\mu \psi^\mu(z) : e^{-\phi(z)} e^{ip \cdot X(z)} :$ 是赝态相对困难.
- 对于闭弦, $\phi(z)$ 与 $\bar{\phi}(\bar{z})$ 相互独立, 我们可以对左行与右行分别取不同的 q 值, 例如 $V_\zeta^{(-1,0)}$ 或 $V_\zeta^{(0,0)}$.

接下来我们将要介绍 RNS 超弦在靶空间中的性质, 例如靶空间中的超对称如何在 RNS 超弦上体现. 而在此之前, 我们需要简要介绍超对称基础, 以方便理解高维靶空间中的超对称.

Chapter 11

超对称基础

在本章我们将简要介绍超对称基础, 在本书中分别会提及四维靶空间与十维靶空间两种背景下的超对称. 四维是我们在物理学中最常见的时空, 而提及十维则有两方面原因, 一方面是超弦的自洽维数是十维, 另一方面, 十维中的超杨米尔斯理论是最简洁的超杨米尔斯理论, 其与后面会提到的超弦纯旋量表述也有十分紧密的联系. 本章会着重介绍四维超对称, 并简单介绍高维超对称的一般性质, 十维超对称及其在超弦中应用的介绍则会主要放到下一章进行. 首先为了区分两者的记号, 我们这里规定:

- 十维矢量指标 $\mu\nu = 0, 1, \dots, 9$.
- 十维外尔旋量指标 $\alpha = 1, 2, \dots, 16$ 和 $\dot{\alpha} = \dot{1}, \dot{2}, \dots, \dot{16}$.
- 四维矢量指标 $m, n = 0, 1, 2, 3$.
- 四维外尔旋量指标 $a = 1, 2$ 和 $\dot{a} = \dot{1}, \dot{2}$.

矢量指标利用度规进行升降, 而旋量指标则如上一章所述, 用荷共轭矩阵 C 升降. 在四维, 荷共轭矩阵刚好是 2×2 的列维-奇维塔张量 (Levi-Civita tensor):

$$\begin{aligned}\varepsilon_{ab} &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, & \varepsilon^{ab} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \\ \varepsilon_{\dot{a}\dot{b}} &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, & \varepsilon^{\dot{a}\dot{b}} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},\end{aligned}\tag{11.0. 1}$$

11.1 庞加莱对称性

从表示论的角度, 所谓的超对称实际上是庞加莱代数 $\{P^m, J^{mn}\}$ 的扩张 (extension), 我们以四维为例, 简单回顾庞加莱群的相关内容. 庞加莱群描述狭义相对论中的基本对称性, 它以如下方式作用于时空坐标 x^m 上:

$$x^m \mapsto x'^m = \underbrace{\Lambda^m_n}_{\text{洛伦兹变换}} x^n + \underbrace{a^m}_{\text{平移变换}}$$

洛伦兹变换下度规 $\eta_{mn} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$ 保持不变, 即:

$$\Lambda^T \eta \Lambda = \eta$$

他们可以分成与单位元连通与非连通两类, (例如宇称 $\Lambda = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$ 便是与单位元非连通的一例.). 我们通常讨论与单位元连通的洛伦兹变换 Λ , 即固有正时洛伦兹群 (proper orthochronous Lorentz group) $SO(3, 1)_+^\uparrow$. 洛伦兹群的代数为洛伦兹代数, 其生成元 J^{mn}, P^q 满足如下的对易关系

$$\begin{aligned} [P^m, P^n] &= 0 \\ [J^{mn}, P^q] &= i(P^n \eta^{mq} - P^m \eta^{nq}) \\ [J^{mn}, J^{pq}] &= i(J^{mp} \eta^{nq} + J^{nq} \eta^{mp} - J^{mq} \eta^{np} - J^{np} \eta^{mq}) \end{aligned}$$

而 J^{mn} 在 4 维下的矩阵表示, 即矢量表示¹为:

$$(J^{pq})^m_n = i(\eta^{pm} \delta^q_n - \eta^{mq} \delta^p_n). \quad (11.1. 2)$$

11.1.1 洛伦兹群的性质

首先, 洛伦兹代数满足

$$\mathcal{SO}(3, 1) \cong \mathcal{SU}(2) \oplus \mathcal{SU}(2), \quad (11.1. 3)$$

旋转 (rotation) 生成元 J_i 与纯增速 (boost) 生成元 K_i 可以表示为:

$$J_i = \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} J^{jk} \quad K_i = J_{0i}, \quad (11.1. 4)$$

¹其他文献中也常将生成元 J 记作 M , 用 S_V 标记洛伦兹代数生成元的矢量表示, 用 S_L 与 S_R 分别标记左手与右手旋量表示. 在本书中我们均写为 J , 利用指标与上横线区分表示种类.

而他们的线性组合:

$$A_i = \frac{1}{2} (J_i + iK_i) \quad B_i = \frac{1}{2} (J_i - iK_i) \quad (11.1. 5)$$

满足 $SU(2)$ 的对易关系 (可以由 $[J_i, J_j] = i\epsilon_{ijk}J_k$, $[J_i, K_j] = i\epsilon_{ijk}K_k$ 以及 $[K_i, K_j] = -i\epsilon_{ijk}K_k$ 中得到):

$$[A_i, A_j] = i\epsilon_{ijk} A_k \quad [B_i, B_j] = i\epsilon_{ijk} B_k \quad [A_i, B_j] = 0 \quad (11.1. 6)$$

在宇称 P ($x^0 \mapsto x^0$ and $x^i \mapsto -x^i$) 下, 我们有:

$$J_i \mapsto J_i \quad K_i \mapsto -K_i \quad (11.1. 7)$$

因此, 宇称对 A_i 和 B_i 的作用为:

$$A_i \leftrightarrow B_i. \quad (11.1. 8)$$

于是我们可以将 $J^i = A^i + B^i$ 解释为物理意义上的自旋矢量.

此外, 洛伦兹群与 $SL(2, \mathbb{C})$ 同态 (注意并非同构):

$$SO(3, 1) \cong SL(2, \mathbb{C}). \quad (11.1. 9)$$

说明这一点只需要取 4 矢量 X 以及对应的 2×2 矩阵 \tilde{x} :

$$X = x_m e^m = (x_0, x_1, x_2, x_3) \quad \tilde{x} = x_m \sigma^m = \begin{pmatrix} x_0 + x_3 & x_1 - ix_2 \\ x_1 + ix_2 & x_0 - x_3 \end{pmatrix}, \quad (11.1. 10)$$

其中 σ^m 是泡利矩阵 (Pauli matrices) 构成的 4 矢量:

$$\sigma^m = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\}. \quad (11.1. 11)$$

满足克里福德代数:

$$\{\sigma^m, \bar{\sigma}^n\} = -2\eta^{mn} \quad (11.1. 12)$$

在 $SO(3, 1)$ 下的变换 $X \mapsto \Lambda X$ 保持时空间隔不变:

$$|X|^2 = x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 \quad (11.1.13)$$

而 $SL(2, \mathbb{C})$ 的作用 $\tilde{x} \mapsto N\tilde{x}N^\dagger$ 则保持 \tilde{x} 的行列式不变:

$$\det \tilde{x} = x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2. \quad (11.1.14)$$

注意到, 两个 $SL(2, \mathbb{C})$ 群元对应于一个 $SO(1, 3)$ 群元, 例如 $N = \pm \mathbb{1}$ 均对应于 $\Lambda = \mathbb{1}$, 但是 $SL(2, \mathbb{C})$ 是单连通的, 因此 $SL(2, \mathbb{C})$ 是一个万有覆盖群 (universal covering group).

11.1.2 $SL(2, \mathbb{C})$ 群的表示与不变张量

我们首先介绍 $SL(2, \mathbb{C})$ 的几个常见表示:

- 基本表示 (fundamental representations):

$$\psi'_a = N_a{}^b \psi_b \quad a, b = 1, 2 \quad (11.1.15)$$

这一表示中的 ψ_a 正是左手外尔旋量.

- 共轭表示 (conjugate representations):

$$\bar{\chi}'_{\dot{a}} = N_{\dot{a}}^{*b} \bar{\chi}_{\dot{b}} \quad \dot{a}, \dot{b} = 1, 2 \quad (11.1.16)$$

这里的 $\bar{\chi}_{\dot{b}}$ 为右手外尔旋量

- 逆变表示 (contravariant representations):

$$\psi'^a = \psi^b (N^{-1})_b{}^a \quad \bar{\chi}'^{\dot{a}} = \bar{\chi}^{\dot{b}} (N^{*-1})_{\dot{b}}{}^{\dot{a}} \quad (11.1.17)$$

基本表示与共轭表示是 $SL(2, \mathbb{C})$ 群与洛伦兹群表示的基础, $SL(2, \mathbb{C})$ 群与洛伦兹群的紧密联系表明旋量是狭义相对论中的重要讨论对象. 接下来我们要说明这两种表示与逆变表示的联系:

- 度规张量 $\eta^{mn} = (\eta_{mn})^{-1}$ 在 $SO(3, 1)$ 群下不变.
- 在 $SL(2, \mathbb{C})$ 中也有类似的结构:

$$\epsilon^{ab} = \epsilon^{\dot{a}\dot{b}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = -\epsilon_{ab} = -\epsilon_{\dot{a}\dot{b}}, \quad (11.1.18)$$

考虑其在 $SL(2, \mathbb{C})$ 中的变换, 有:

$$\epsilon'^{ab} = \epsilon^{pq} N_p^a N_q^b = \epsilon^{ab} \cdot \det N = \epsilon^{ab} . \quad (11.1. 19)$$

因此 ϵ 可以用于升降指标:

$$\psi^a = \epsilon^{ab} \psi_b \quad \bar{\chi}^{\dot{a}} = \epsilon^{\dot{a}\dot{b}} \bar{\chi}_{\dot{b}} , \quad (11.1. 20)$$

因此逆变表示并非独立.

- 而当 $SO(3, 1)$ 与 $SL(2, \mathbb{C})$ 指标同时出现时, 注意到, 无论我们利用 $SO(3, 1)$ 变换 X , 抑或是利用 $SL(2, \mathbb{C})$ 变换矩阵 $\tilde{x} = x_m \sigma^m$, 我们得到的 x_m 应当是完全相同的, 即

$$(x_m \sigma^m)_{a\dot{a}} \mapsto N_a^b (x_n \sigma^n)_{b\dot{c}} N_{\dot{a}}^{*\dot{c}} , \quad (11.1. 21)$$

与

$$x_m \mapsto \Lambda_m^n x_n \quad (11.1. 22)$$

应当得到一致的变换结果, 因此我们有:

$$(\sigma^m)_{a\dot{a}} \mapsto N_a^b (\sigma^p)_{b\dot{c}} (\Lambda^{-1})^m_p N_{\dot{a}}^{*\dot{c}} . \quad (11.1. 23)$$

相似的变换规则对

$$(\bar{\sigma}^m)^{\dot{a}a} := \epsilon^{ab} \epsilon^{\dot{a}\dot{b}} (\sigma^m)_{b\dot{b}} = (\mathbf{1}, -\vec{\sigma}) . \quad (11.1. 24)$$

也存在.

而 $SO(3, 1)$ 的变换 Λ 与 $SL(2, \mathbb{C})$ 的变换 N 之间由

$$\Lambda^m_n = -\frac{1}{2} \text{Tr} \left\{ \bar{\sigma}^m N \sigma_n N^\dagger \right\} . \quad (11.1. 25)$$

直接相互关联. 为说明这一点, 我们需要从克里福德代数得到 $\text{Tr}\{\sigma^m, \bar{\sigma}^n\} = \text{Tr}\{\bar{\sigma}^m, \sigma^n\} = -2\eta^{mn}$, 再令等号两侧同时作用于 x^n , 右侧可以化简:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} \text{Tr} \left\{ \bar{\sigma}^m N \sigma_n N^\dagger \right\} x^n &= -\frac{1}{2} \text{Tr} \left\{ \bar{\sigma}^m N \tilde{x} N^\dagger \right\} \\ &= -\frac{1}{2} \text{Tr} \left\{ \bar{\sigma}^m \tilde{x}' \right\} = -\frac{1}{2} \text{Tr} \left\{ \bar{\sigma}^m \sigma^n \right\} x'_n \\ &= x'^m, \end{aligned} \quad (11.1. 26)$$

与左侧的结果一致.

11.1.3 $SL(2, \mathbb{C})$ 的生成元

接下来我们利用 σ 矩阵乘积定义反对称张量 σ^{mn} 与 $\bar{\sigma}^{mn}$:

$$\begin{aligned} (\sigma^{mn})_a{}^b &:= \frac{i}{4} (\sigma^m \bar{\sigma}^n - \sigma^n \bar{\sigma}^m)_a{}^b \\ (\bar{\sigma}^{mn})_{\dot{a}}{}^{\dot{b}} &:= \frac{i}{4} (\bar{\sigma}^m \sigma^n - \bar{\sigma}^n \sigma^m)_{\dot{a}}{}^{\dot{b}} \end{aligned}$$

且 σ^{mn} 与 $\bar{\sigma}^{mn}$ 分别为自对偶 (self duality) 与反自对偶 (anti self duality) 张量:

$$\begin{aligned} \sigma^{mn} &= \frac{1}{2i} \epsilon^{mnpq} \sigma_{pq} \\ \bar{\sigma}^{mn} &= -\frac{1}{2i} \epsilon^{mnpq} \bar{\sigma}_{pq}, \end{aligned}$$

作为反对称张量 σ^{mn} 与 $\bar{\sigma}^{mn}$ 的自由度会被想当然地写为 $\frac{4 \times 3}{2}$, 但由于自对偶与反自对偶, 自由度减半, 变为 $\frac{4 \times 3}{2 \times 2}$ 利用 σ 矩阵的克里福德代数, 不难证明, σ^{mn} 与 $\bar{\sigma}^{mn}$ 满足洛伦兹代数:

$$[\sigma^{mn}, \sigma^{pq}] = i \left(\eta^{mp} \sigma^{nq} + \eta^{nq} \sigma^{mp} - \eta^{mq} \sigma^{np} - \eta^{np} \sigma^{mq} \right). \quad (11.1.27)$$

在以 ω_{mn} 为参数描述的有限洛伦兹变换下, 旋量以如下形式变换:

$$\begin{aligned} \psi_a &\mapsto \exp \left(-\frac{i}{2} \omega_{mn} \sigma^{mn} \right)_a{}^b \psi_b & (\text{左手}) \\ \bar{\chi}^{\dot{a}} &\mapsto \exp \left(-\frac{i}{2} \omega_{mn} \bar{\sigma}^{mn} \right)^{\dot{a}}{}_{\dot{b}} \bar{\chi}^{\dot{b}} & (\text{右手}) \end{aligned}$$

考虑分别由 A_i 与 B_i 张成的 $SU(2)$ 对应的旋量:

$$\begin{aligned} \psi_a : \quad (A, B) &= \left(\frac{1}{2}, 0 \right) \implies J_i = \frac{1}{2} \sigma_i \quad K_i = -\frac{i}{2} \sigma_i \\ \bar{\chi}^{\dot{a}} : \quad (A, B) &= \left(0, \frac{1}{2} \right) \implies J_i = \frac{1}{2} \sigma_i \quad K_i = +\frac{i}{2} \sigma_i \end{aligned}$$

11.1.4 外尔旋量积

我们用如下方式定义外尔旋量的乘积:

$$\begin{aligned}\chi\psi &:= \chi^a \psi_a = -\chi_a \psi^a \\ \overline{\chi}\overline{\psi} &:= \overline{\chi}_{\dot{a}} \overline{\psi}^{\dot{a}} = -\overline{\chi}^{\dot{a}} \overline{\psi}_{\dot{a}},\end{aligned}$$

特别地,

$$\psi\psi = \psi^a \psi_a = \epsilon^{ab} \psi_b \psi_a = \psi_2 \psi_1 - \psi_1 \psi_2. \quad (11.1. 28)$$

我们将 ψ_a 取为反对称的格拉斯曼数, 有: $\psi_1 \psi_2 = -\psi_2 \psi_1$, 因此 $\psi\psi = 2\psi_2 \psi_1$.

由定义可得:

$$\psi_a^\dagger := \overline{\psi}_{\dot{a}}, \quad \overline{\psi}^{\dot{a}} := \psi_b^* (\sigma^0)^{b\dot{a}} \quad (11.1. 29)$$

且有:

$$(\chi\psi)^\dagger = \overline{\chi}\overline{\psi}, \quad (\psi\sigma^m\overline{\chi})^\dagger = \chi\sigma^m\overline{\psi} \quad (11.1. 30)$$

我们可以利用基本表示 $(\frac{1}{2}, 0)$ 以及共轭表示 $(0, \frac{1}{2})$ 的乘积得到洛伦兹群的所有更高维表示. 张量积的计算 $(\frac{1}{2}, 0)^{\otimes r} \otimes (0, \frac{1}{2})^{\otimes s}$ 可以由相继应用 $SU(2)$ 的计算规则 $(\frac{j}{2}) \otimes (\frac{j}{2}) = (\frac{j-1}{2}) \oplus (\frac{j+1}{2})$ ($j \neq 0$) 来实现, 例如:

- $(\frac{1}{2}, 0) \otimes (0, \frac{1}{2}) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ 手性不同的旋量组成的双旋量可以利用 $\sigma_{a\dot{a}}^m$ 表示:

$$\psi_a \overline{\chi}_{\dot{a}} = \frac{1}{2} (\psi\sigma_m\overline{\chi}) \sigma_{a\dot{a}}^m \quad (11.1. 31)$$

因此, 两个手性相反的旋量对应于洛伦兹矢量 $\psi\sigma_m\overline{\chi}$.

- $(\frac{1}{2}, 0) \otimes (\frac{1}{2}, 0) = (0, 0) \oplus (1, 0)$ 手性相同的双旋量则需要 ϵ_{ab} 和 $(\sigma^{mn})_a{}^c \epsilon_{cb} =: (\sigma^{mn}\epsilon^T)_{ab}$ 来表示. 前者对应于唯一独立的 2×2 反对称矩阵, 而后者则对应对称矩阵. 注意到, 由于对偶性质, σ^{mn} 独立的个数为 3. 同手性双旋量的展开为:

$$\psi_a \chi_b = \frac{1}{2} \epsilon_{ab} (\psi\chi) + \frac{1}{2} (\sigma^{mn}\epsilon^T)_{ab} (\psi\sigma_{mn}\chi) \quad (11.1. 32)$$

相同手性旋量乘积于是化为两个洛伦兹群不可约表示, 一个标量 $\psi\chi$ 与一个自对偶反对称迹为 2 的张量 $\psi\sigma_{mn}\chi$. 在 σ^{mn} 中的自由度与 $(1, 0)$ 表示的自由度一致, 均为 3. 与之相似地, $(0, 1)$ 表示中存在反自对偶张量 $\overline{\chi}\sigma^{mn}\overline{\psi}$.

这些展开也常常被直接称为菲尔兹恒等式 (Fierz identity).

11.1.5 庞加莱群的表示

旋转生成元 $\{J_i : i = 1, 2, 3\}$ 满足:

$$[J_i, J_j] = i\epsilon_{ijk} J_k. \quad (11.1. 33)$$

对应的卡西米尔算符 (Casimir operator) 为

$$J^2 = \sum_{i=1}^3 J_i^2 \quad (11.1. 34)$$

它与所有的 J_i 均对易, 并用 J^2 的本征值 $j(j+1)$ 标记所有的不可约表示, 对应的 J_3 本征值取 $j_3 = -j, -j+1, \dots, j-1, j$. 与之相应的态则表示为 $|j, j_3\rangle$.

与之类似的, 庞加莱群中也存在这样的卡西米尔算符. 共有两个, 其中一个包含泡利卢比安斯基矢量 (Pauli Ljubanski vector) W_m :

$$W_m = \frac{1}{2} \epsilon_{mnpq} P^n M^{pq} \quad (11.1. 35)$$

(其中 $\epsilon_{0123} = -\epsilon^{0123} = +1$). 庞加莱群的两个卡西米尔算符表示如下:

$$C_1 = P^m P_m \quad C_2 = W^m W_m. \quad (11.1. 36)$$

与旋转群卡西米尔算符的性质相似, C_i 与庞加莱群的所有生成元对易. 于是态可以由 C_1 与 C_2 的本征值两个指标来进行标记, 写为 $|m, \omega\rangle$. 这些不可约表示中的态的指标 ω 包含 P^m 的本征值 p^m 以及其他部分.

需要注意的是, 在目前的阶段, 泡利卢比安斯基矢量只起到了表示第二种卡西米尔算符的作用. 虽然 W_m 与 J_{mn}, P_m 的对易关系表明 W_m 以矢量形式在洛伦兹变换下变换, 并与 P_m 对易, 即在平移变换下不变. 但 W_m 之间的对易子 $[W_m, W_n] \sim \epsilon_{mnpq} W^p P^q$ 则表明 W_m 无法作为任何代数的生成元出现.

现在我们将 P^m 视为已知, 尝试通过找到与 P^m 对易的洛伦兹群元, 这样便得到了小群:

- 对于有质量粒子, 我们总可以取参考系使 $p^m = (m, \underbrace{0, 0, 0}_{\text{旋转不变}})$, 旋转群作为有质量粒子的小群出现. 而由于 W_m 中的反对称 ϵ_{mnpq} , 我们有:

$$W_0 = 0 \quad W_i = -m J_i. \quad (11.1. 37)$$

每个质量非零的粒子均构成庞加莱群的不可约表示, 相应的态记为 $|m, j; p^m, j_3\rangle$.

- 而无质量粒子, 我们通过选取参考系给出的动量最简为 $p^m = (E, 0, 0, E)$ 此时:

$$(W_0, W_1, W_2, W_3) = E (J_3, -J_1 + K_2, -J_2 - K_1, -J_3) \quad (11.1. 38)$$

$$\Rightarrow [W_1, W_2] = 0 \quad [W_3, W_1] = -iE W_2 \quad [W_3, W_2] = iE W_1. \quad (11.1. 39)$$

这正是二维欧氏群的对易关系, 也记作 $ISO(2)$. 需要注意的是, 非零的 W_1, W_2 则会给物理态带来没有物理含义的连续自由度, 因而将 $ISO(2)$ 中的 W_1, W_2 取零后得到的子群 $SO(2)$ 常常被认为是无质量粒子真正的小群, 此时 $W^m = \lambda P^m$ 态则用 $|0, 0; p^m, \lambda\rangle =: |p^m, \lambda\rangle$ 来标记, 其中 λ 称为螺旋度 (helicity). 在 CPT 变换下, 这些态变为 $|p^m, -\lambda\rangle$. 而

$$\exp(2\pi i \lambda) |p^m, \lambda\rangle = \pm |p^m, \lambda\rangle \quad (11.1. 40)$$

则要求 λ 必须为整数或半整数 $\lambda = 0, \frac{1}{2}, 1, \dots$, 例如 $\lambda = 0$ (戈德斯坦玻色子), $\lambda = \frac{1}{2}$ (中微子), $\lambda = 1$ (光子, 胶子等) 以及 $\lambda = 2$ (引力子).

11.2 四维靶空间的基本超对称 (simple SUSY)

超对称对于庞加莱代数的所谓扩张实际就是在庞加莱代数基础上引入旋量形式的生成元, 从而构成超庞加莱代数. 因此超庞加莱代数生成元有庞加莱生成元 P^m, J^{mn} 以及旋量生成元 Q_a^A, \bar{Q}_a^A , 互为厄米共轭 $(Q_a^A)^\dagger = \bar{Q}_a^A$. 其中旋量形式的生成元原则上可以有不只一对, 用指标 $A = 1, \dots, \mathcal{N}$ 来标记数量. 我们将 $\mathcal{N} = 1$ 称为简单超对称 (simple SUSY), 而将 $\mathcal{N} > 1$ 称为扩张超对称 (extended SUSY). 我们首先取 $\mathcal{N} = 1$ 进行讨论. 上一节曾给出, 庞加莱代数平移生成元 P^m 以及洛伦兹变换生成元 J^{mn} , 之间的代数关系如下:

$$\begin{aligned} [J_{mn}, P_q] &= i(\eta_{nq} P_m - \eta_{mq} P_n) \\ [J_{mn}, J_{pq}] &= i(\eta_{nq} J_{mp} - \eta_{mq} J_{np} - (m \leftrightarrow n)) \end{aligned} \quad (11.2. 41)$$

而带上 $\{Q_a, \bar{Q}_b\}$ 之后, (反) 对易关系中会出现 σ 矩阵:

$$\sigma_{ab}^m = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\} = (\mathbb{1}_{2 \times 2}, \vec{\sigma}) \quad (11.2. 42)$$

以及

$$\bar{\sigma}^{m\dot{a}b} = \varepsilon^{\dot{a}\dot{c}} \varepsilon^{bd} \sigma_{d\dot{c}}^m = (\mathbb{1}_{2 \times 2}, -\vec{\sigma}) \quad (11.2. 43)$$

旋量生成元 Q_a 与 \bar{Q}_b 和先前的洛伦兹代数生成元的对易子非平凡, 在具体进行计算之前, 我们首先要给出所谓阶化李代数 (graded Lie algebra). 取 O_a 为李代数中的算符, 那么:

$$O_a O_b - (-1)^{\eta_a \eta_b} O_b O_a = i C^e_{ab} O_e, \quad (11.2.44)$$

其中阶化参数 η_a 的取值规则为:

$$\eta_a = \begin{cases} 0 & : O_a \text{ (玻色生成元)} \\ 1 & : O_a \text{ (费米生成元)} \end{cases}. \quad (11.2.45)$$

注意到, 庞加莱代数生成元之间的对易子 $[P^m, P^n]$, $[P^m, J^{pq}]$ 与 $[J^{mn}, J^{pq}]$ 已经给出, 因此我们需要计算的部分为:

$$\begin{aligned} & (a) [Q_a, J^{mn}], \quad (b) [Q_a, P^m], \\ & (c) \{Q_a, Q_b\}, \quad (d) \{Q_a, \bar{Q}_b\}, \end{aligned} \quad (11.2.46)$$

需要注意的是, 尽管庞加莱对称性与内部对称性为直积关系, 生成元对易子均为 0, 但有一类特殊的内部对称性的生成元与超对称生成元对易子非平凡, 我们将其记为 T_i , 于是还需要计算:

$$(e) [Q_a, T_i]. \quad (11.2.47)$$

- (a) $[Q_a, J^{mn}]$

由于 Q_a 为旋量, 它在 $SL(2, \mathbb{C})$ 生成元 σ^{mn} 下变换:

$$Q'_a = \exp\left(-\frac{i}{2}\omega_{mn}\sigma^{mn}\right)_a{}^b Q_b \xrightarrow{\omega_{mn} \rightarrow 0} \left(\mathbb{1} - \frac{i}{2}\omega_{mn}\sigma^{mn}\right)_a{}^b Q_b, \quad (11.2.48)$$

但同时 Q_a 也要满足算符的洛伦兹变换规则:

$$Q'_a = U^\dagger Q_a U \xrightarrow{\omega_{mn} \rightarrow 0} \left(\mathbb{1} + \frac{i}{2}\omega_{mn}J^{mn}\right) Q_a \left(\mathbb{1} - \frac{i}{2}\omega_{mn}J^{mn}\right). \quad (11.2.49)$$

其中 $U = \exp(-\frac{i}{2}\omega_{mn}J^{mn})$. 通过对比 Q'_a 的这两种表达式中 ω_{mn} 的低阶项, 我们便可以得到:

$$Q_a - \frac{i}{2}\omega_{mn}(\sigma^{mn})_a{}^b Q_b = Q_a - \frac{i}{2}\omega_{mn}(Q_a J^{mn} - J^{mn} Q_a) + \mathcal{O}(\omega^2) \quad (11.2.50)$$

于是有:

$$[Q_a, J^{mn}] = (\sigma^{mn})_a{}^b Q_b \quad (11.2. 51)$$

• (b) $[Q_a, P^m]$

观察得知, 这一对易子应当包含矢量指标 m 与旋量指标 a , 并且与 Q 呈线性. 满足这些性质的最简单构造便是 $[Q_a, P^m] = a \cdot (\sigma^m)_{a\dot{a}} \bar{Q}^{\dot{a}}$. 但我们还有一个常数 a 没有固定, 利用厄米共轭 $(Q_a)^\dagger = \bar{Q}_{\dot{a}}$ 以及 $(\sigma^m \bar{Q})_a^\dagger = (Q \sigma^m)_{\dot{a}}$, 我们可以得到 $[\bar{Q}^{\dot{a}}, P^m] = a^* \cdot (\bar{\sigma})^{\dot{a}b} Q_b$. 于是我们可以构造 P^m, P^n 与 Q_a 的雅可比恒等式:

$$\begin{aligned} 0 &= \left[P^m, [P^n, Q_a] \right] + \left[P^n, [Q_a, P^m] \right] + \left[Q_a, \underbrace{[P^m, P^n]}_0 \right] \\ &= -a (\sigma^n)_{a\dot{a}} [P^m, \bar{Q}^{\dot{a}}] + a (\sigma^m)_{a\dot{a}} [P^n, \bar{Q}^{\dot{a}}] \\ &= |a|^2 (\sigma^n)^{a\dot{a}} (\bar{q}^m)^{\dot{a}b} Q_b - |a|^2 (\sigma^m)_{a\dot{a}} (\bar{q}^n)^{\dot{a}b} Q_b \\ &= |a|^2 \underbrace{(\sigma^n \bar{q}^m - \sigma^m \bar{q}^n)_{a\dot{a}}}_{\neq 0} Q_b \end{aligned}$$

我们要求这对任意的 Q_b 均成立, 因此必须有 $a = 0$, 于是:

$$[Q_a, P^m] = [\bar{Q}^{\dot{a}}, P^m] = 0 \quad (11.2. 52)$$

• (c) $\{Q_a, Q_b\}$

通过观察指标的结构可知, 对易子应写为:

$$\{Q_a, Q_b\} = b (\sigma^{mn})_a{}^b J_{mn} . \quad (11.2. 53)$$

而由于左侧与 P^m 对易, 右侧不对易, 只有取 $b = 0$ 可以使其自洽, 于是:

$$\{Q_a, Q_b\} = 0 \quad (11.2. 54)$$

• (d) $\{Q_a, \bar{Q}_b\}$

同样地, 利用指标的结构, 我们有:

$$\{Q_a, \bar{Q}_b\} = c (\sigma^m)_{a\dot{b}} P_m . \quad (11.2. 55)$$

我们没有类似之前的方法固定 c , 我们取 $c = 2$, 即:

$$\{Q_a, \bar{Q}_b\} = 2 (\sigma^m)_{a\dot{b}} P_m \quad (11.2. 56)$$

这表明 $Q_a \bar{Q}_b$ 的效应等价于平移. 取玻色态 $|B\rangle$ 与费米态 $|F\rangle$, 我们有:

$$Q_a |F\rangle = |B\rangle, \quad \bar{Q}_b |B\rangle = |F\rangle, \quad Q\bar{Q}: |B\rangle \mapsto |B(\text{平移})\rangle. \quad (11.2. 57)$$

• (e) $[Q_a, T_i]$

此处 T_i 的 i 指标为内部对称指标, 并非空间分量. 超对称代数生成元 Q_a 与内部对称性生成元的对易子通常为 0. 但存在特例, 超对称代数的 $U(1)$ 自同构, 也称为 R 对称性 (R symmetry):

$$Q_a \mapsto \exp(i\lambda^\alpha) Q_a \quad \bar{Q}_{\dot{a}} \mapsto \exp(-i\lambda^\alpha) \bar{Q}_{\dot{a}}. \quad (11.2. 58)$$

用 R 表示 $U(1)$ 生成元, 于是:

$$[Q_a, R] = Q_a \quad [\bar{Q}_{\dot{a}}, R] = -\bar{Q}_{\dot{a}}. \quad (11.2. 59)$$

超庞加莱代数生成元的对易关系整理如下:

$$\begin{aligned} [J_{mn}, P_q] &= i(\eta_{nq}P_m - \eta_{mq}P_n) \\ [J_{mn}, J_{pq}] &= i(\eta_{nq}J_{mq} - \eta_{mq}J_{np} - (m \leftrightarrow n)) \\ [Q_a, J^{mn}] &= (\sigma^{mn})_a{}^b Q_b = \frac{i}{4}(\sigma^m \bar{\sigma}^n - \sigma^n \bar{\sigma}^m)_a{}^b Q_b \\ [\bar{Q}_{\dot{a}}, J^{mn}] &= (\bar{\sigma}^{mn})^{\dot{a}}{}_{\dot{b}} \bar{Q}^{\dot{b}} = \frac{i}{4}(\bar{\sigma}^m \sigma^n - \bar{\sigma}^n \sigma^m)^{\dot{a}}{}_{\dot{b}} \bar{Q}^{\dot{b}} \\ \{Q_a, Q_b\} &= \{\bar{Q}_{\dot{a}}, \bar{Q}_{\dot{b}}\} = 0 \\ \{Q_a, \bar{Q}_{\dot{b}}\} &= 2\sigma_{ab}^m P_m \\ [P^m, P^n] &= [Q_a, P^m] = [\bar{Q}_{\dot{b}}, P^m] = 0 \\ [Q_a, R] &= Q_a \\ [\bar{Q}_{\dot{a}}, R] &= -\bar{Q}_{\dot{a}} \end{aligned} \quad (11.2. 60)$$

利用泡利卢比安斯基矢量的定义以及如下关系:

$$\epsilon^{mnpq} \epsilon_{qab\gamma} = 6 \delta_a^{[m} \delta_b^n \delta_\gamma^{p]} \quad \epsilon^{mnpq} \epsilon_{pqab} = -4 \delta_a^{[m} \delta_b^n] \quad \epsilon^{mnpq} W_q = 3M^{[mn} P^{p]}, \quad (11.2. 61)$$

带入上述超庞加莱代数, 我们也可以证明如下的对易关系:

$$\begin{aligned} [W_m, P_n] &= 0 \\ [W_m, M_{pq}] &= i\eta_{mp} W_q - i\eta_{mq} W_p \\ [W_m, W_n] &= -i\epsilon_{mnpq} W^p P^q \\ [W_m, Q_a] &= -i P_n (q^{mn})_a{}^b Q_b \end{aligned}$$

同样, 作为庞加莱代数的卡西米尔算符, C_2 与庞加莱生成元对易, 但与 Q_b 不对易. 而 C_1 则与超庞加莱代数生成元均对易. 因此, C_2 本征值不能作为指标描述超庞加莱代数, 换言之, 在超庞加莱代数中可以出现自旋不同的粒子, 但其 C_1 本征值, 即质量必须相同. 不过我们可以进行一定的修改来得到 \tilde{C}_2 使之与超庞加莱代数生成元对易. 具体来说, 定义:

$$B_m := W_m - \frac{1}{4} \bar{Q}_{\dot{a}} (\bar{\sigma}_m)^{\dot{a}b} Q_b \quad C_{mn} := B_m P_n - B_n P_m \quad (11.2. 62)$$

我们便可以利用 C_{mn} 构造 \tilde{C}_2 :

$$\tilde{C}_2 := C_{mn} C^{mn}. \quad (11.2. 63)$$

它对应的物理量是所谓的超自旋 (superspin).

接下来我们尝试分别构造 $\mathcal{N} = 1$ 超对称的无质量与有质量多重态, 即超庞加莱代数的无质量与有质量表示:

11.2.1 无质量多重态

为了得到超庞加莱代数的无质量表示, 我们选取参考系使动量的本征值为 $P_m = (E, 0, 0, E)$, 于是卡西米尔算符 C_1 与 \tilde{C}_2 均为 0, 有:

$$\{Q_a, \bar{Q}_{\dot{b}}\} = 2E(\sigma^0 + \sigma^3)_{a\dot{b}} = 4E \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{a\dot{b}} \quad (11.2. 64)$$

于是在这一表示下, $Q_2, \bar{Q}_{\dot{2}}$ 对应的矩阵元为 0. 我们再利用 Q_a 与 $\bar{Q}_{\dot{b}}$ 和洛伦兹代数生成元的对易关系, 便可得到:

$$[Q_a, J^3] = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}_a{}^b Q_b \quad (11.2. 65)$$

在这一参考系下我们已经讨论过, 此处 a 的取值只能为 1, 因此有:

$$\begin{aligned} [Q_1, J^3] &= \frac{1}{2} Q_1 \\ [\bar{Q}_1, J^3] &= -\frac{1}{2} \bar{Q}_1 \end{aligned} \quad (11.2. 66)$$

因此我们也可以将 Q_1 与 \bar{Q}_1 视作沿 P^m 空间分量方向的 $J^3 = J^{12}$ 的本征值, 即螺旋度 (helicity) λ 的上升下降算符, 但上升下降均为 $1/2$. 我们将 Q_1 与 \bar{Q}_1 重新取归一化, 定义:

$$a = \frac{Q_1}{2\sqrt{E}}, \quad a^\dagger = \frac{\bar{Q}_1}{2\sqrt{E}} \quad (11.2. 67)$$

于是:

$$\{a, a\} = \{a^\dagger, a^\dagger\} = 0, \quad \{a, a^\dagger\} = 1 \quad (11.2. 68)$$

于是, $[a, J^3] = \frac{1}{2}a$, $a^2 = (a^\dagger)^2 = 0$. 我们有:

$$J^3 (a |p^m, \lambda\rangle) = \left(a J^3 - [a, J^3] \right) |p^m, \lambda\rangle = \left(a J^3 - \frac{a}{2} \right) |p^m, \lambda\rangle = \left(\lambda - \frac{1}{2} \right) a |p^m, \lambda\rangle.$$

因此, $a |p^m, \lambda\rangle$ 的螺旋度为 $\lambda - \frac{1}{2}$. 相似地, $a^\dagger |p^m, \lambda\rangle$ 的螺旋度为 $\lambda + \frac{1}{2}$. 接下来, 我们可以构造整个表示, 首先取螺旋度 λ 最小的基态, 记为 $|\Omega\rangle$. 自然有 $a|\Omega\rangle = 0$, 否则会出现螺旋度更小的态. 且有 $a^\dagger a^\dagger |\Omega\rangle = 0|\Omega\rangle = 0$. 因此我们构造出的完整多重态便是:

$$|\Omega\rangle = |p^m, \lambda\rangle \quad a^\dagger |\Omega\rangle = |p^m, \lambda + \frac{1}{2}\rangle. \quad (11.2. 69)$$

我们可以取不同螺旋度的基态来构造手性多重态, 矢量多重态, 以及张量多重态. 例如轻子, 光子, 以及引力子与其分别对应的超伴子构成的多重态.

11.2.2 有质量多重态

而当 $m \neq 0$ 时, 动量算符 P^m 对应的本征值为 $p^m = (m, 0, 0, 0)$, 于是有卡西米尔算符:

$$C_1 = P^m P_m = m^2 \quad \tilde{C}_2 = C_{mn} C^{mn} = 2m^4 Y^i Y_i, \quad (11.2. 70)$$

其中, 由 $p^m = (m, 0, 0, 0)$, 带入 C_{mn} 定义, 不难发现 B_m 只有 $i, j = 1, 2, 3$ 分量出现, 故用 Y_i 来表示:

$$Y_i = J_i - \frac{1}{4m} \bar{Q} \sigma_i Q = \frac{B_i}{m} \quad [Y_i, Y_j] = i\epsilon_{ijk} Y_k. \quad (11.2. 71)$$

用于标记超自旋. 简单计算得知, $Y^2 = Y^i Y_i$ 的本征值为 $y(y+1)$, 因此我们用 $|m, y\rangle$ 标记不可约表示. 而 Q 与 \bar{Q} 的反对易子满足:

$$\{Q_a, \bar{Q}_b\} = 2(\sigma^m)_{ab} P_m = 2m(\sigma^0)_{ab} = 2m \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_{ab} \quad (11.2.72)$$

而由于这两个 Q 分别与各自对应的 \bar{Q} 之间的反对易子非零, 我们有:

$$a_{1,2} := \frac{Q_{1,2}}{\sqrt{2m}} \quad a_{1,2}^\dagger := \frac{\bar{Q}_{1,2}}{\sqrt{2m}}, \quad (11.2.73)$$

于是:

$$\{a_p, a_q^\dagger\} = \delta_{pq} \quad \{a_p, a_q\} = \{a_p^\dagger, a_q^\dagger\} = 0. \quad (11.2.74)$$

令 $|\Omega\rangle$ 为真空态, 被 $a_{1,2}$ 湮灭. 因此,

$$Y_i |\Omega\rangle = J_i |\Omega\rangle - \frac{1}{4m} \bar{Q} \bar{\sigma}_i \sqrt{2m} \underbrace{a |\Omega\rangle}_0 = J_i |\Omega\rangle, \quad (11.2.75)$$

即, 对于真空态 $|\Omega\rangle$, 自旋数 j 与超自旋数 y 相等. 因此对于给定的 m, y , 有:

$$|\Omega\rangle = |m, j = y; p^m, j_3\rangle \quad (11.2.76)$$

而我们可以进一步得到多重态的其余部分:

$$\begin{aligned} a_1 |j_3\rangle &= |j_3 - \tfrac{1}{2}\rangle & a_1^\dagger |j_3\rangle &= |j_3 + \tfrac{1}{2}\rangle \\ a_2 |j_3\rangle &= |j_3 + \tfrac{1}{2}\rangle & a_2^\dagger |j_3\rangle &= |j_3 - \tfrac{1}{2}\rangle, \end{aligned}$$

而 a_p^\dagger 作用于 $|\Omega\rangle$ 的行为则类似于自旋分别为 j 与 $\frac{1}{2}$ 的两个态的耦合, 给出自选 $j + \frac{1}{2}$ 与 $j - \frac{1}{2}$ 两个态的线性组合 ($j \otimes \frac{1}{2} = (j - \frac{1}{2}) \oplus (j + \frac{1}{2})$), 其组合系数正是所谓的克莱布希-高登系数 (Clebsch Gordan coefficients) k_i , 具体的计算方法可以在李群不可约表示的直积进行直和分解的相关计算中找到, 此处不再赘述:

$$\begin{aligned} a_1^\dagger |\Omega\rangle &= k_1 |m, j = y + \tfrac{1}{2}; p^m, j_3 + \tfrac{1}{2}\rangle + k_2 |m, j = y - \tfrac{1}{2}; p^m, j_3 + \tfrac{1}{2}\rangle \\ a_2^\dagger |\Omega\rangle &= k_3 |m, j = y + \tfrac{1}{2}; p^m, j_3 - \tfrac{1}{2}\rangle + k_4 |m, j = y - \tfrac{1}{2}; p^m, j_3 - \tfrac{1}{2}\rangle. \end{aligned}$$

此外还有

$$a_2^\dagger a_1^\dagger |\Omega\rangle = -a_1^\dagger a_2^\dagger |\Omega\rangle \propto |\Omega\rangle \quad (11.2.77)$$

表示自旋为 j 的态. 于是全部的态为:

$$\underbrace{2 \cdot |m, j = y; p^m, j_3\rangle}_{(4y+2) \text{ states}} \quad \underbrace{1 \cdot |m, j = y + \frac{1}{2}; p^m, j_3\rangle}_{(2y+2) \text{ states}} \quad \underbrace{1 \cdot |m, j = y - \frac{1}{2}; p^m, j_3\rangle}_{(2y) \text{ states}}, \quad (11.2.78)$$

在 $|m, y\rangle$ 多重态中, 会出现等量的玻色子态和费米子态. 需要注意的是, 在对态进行标记时 m 和 y 的值在整个多重态中始终是固定的. 但对其中不同的态, 其 j 的值不同, 因为在超对称多重态中存在不同的自旋态. 即, 多重态的超自旋是一个对其中所有态都相同的值, 但不同的态自旋各不相同.

而 $y = 0$ 的情况则需要单独讨论:

$$\begin{aligned} |\Omega\rangle &= |m, j = 0; p^m, j_3 = 0\rangle \\ a_{1,2}^\dagger |\Omega\rangle &= |m, j = \frac{1}{2}; p^m, j_3 = \pm \frac{1}{2}\rangle \\ a_1^\dagger a_2^\dagger |\Omega\rangle &= |m, j = 0; p^m, j_3 = 0\rangle =: |\Omega'\rangle \end{aligned}$$

宇称变换: $(A, B) \leftrightarrow (B, A)$, 即, $(\frac{1}{2}, 0) \leftrightarrow (0, \frac{1}{2})$. 而由于 $\{Q_a, \bar{Q}_b\} = 2(\sigma^m)_{ab}P_m$, 我们可以利用 P^m 的宇称来确定 Q_a 与 \bar{Q}_a 满足的宇称变换 (其中 $|\eta_P| = 1$):

$$\begin{aligned} P Q_a P^{-1} &= \eta_P (\sigma^0)_{ab} \bar{Q}^b \\ P \bar{Q}^a P^{-1} &= \eta_P^* (\bar{\sigma}^0)^{ab} Q_b \end{aligned}$$

演算可知 $P^m \mapsto (P^0, -\vec{P})$ 且有 $P^2 Q P^{-2} = -Q$. 此外, 考虑 $j = 0$ 的两个态 $|\Omega\rangle$ 与 $|\Omega'\rangle$: 第一个被 a_i 湮灭, 而第二个则被 a_i^\dagger 湮灭. 而由于宇称会交换 $Q \leftrightarrow \bar{Q}$, 即交换 a_i 与 a_i^\dagger , 因此宇称会交换 $|\Omega\rangle \leftrightarrow |\Omega'\rangle$. 而我们常见的标量与赝标量均为宇称的本征矢, 我们于是做线性组合:

$$|\pm\rangle := |\Omega\rangle \pm |\Omega'\rangle \quad P|\pm\rangle = \pm|\pm\rangle. \quad (11.2.79)$$

这正是标量 ($|+\rangle$) 与赝标量 ($|-\rangle$) 态.

11.3 四维靶空间的扩张超对称 (extended SUSY)

在介绍完基本超对称 $\mathcal{N} = 1$ 的代数结构与表示之后, 我们尝试向更一般的情况推广, 即扩张超对称 $\mathcal{N} > 1$, 首先让我们介绍扩张超对称的代数结构. 扩张超对称与基本超对称的主要区别便是在旋量生成元中引入了新的指标 $A, B = 1, 2, \dots, \mathcal{N}$, 而代数结构则会出

现如下的额外反对易子:

$$\begin{aligned}\{Q_a^A, \bar{Q}_{bB}\} &= 2(\sigma^m)_{ab} P_m \delta^A_B \\ \{Q_a^A, Q_b^B\} &= \epsilon_{ab} Z^{AB}\end{aligned}\quad (11.3. 80)$$

其中 $Z^{AB} = -Z^{BA}$ 是与所有生成元均对易的反对称中心荷:

$$[Z^{AB}, P^m] = [Z^{AB}, M^{\mu\nu}] = [Z^{AB}, Q_a^A] = [Z^{AB}, Z^{CD}] = [Z^{AB}, T_i] = 0.$$

他们张成了内部对称性的不变子代数, 其中 T_i 满足 $[T_i, T_j] = iC_{ijk}T_k$, 此处 i, j, k 不代表空间分量, 而是内部对称指标. 令 G 表示内部对称群, 通过找到 G 中所有不与超对称生成元对易的群元, 我们可以定义出所谓的 R 对称 $H \subset G$. 例如 $T_a \in G$ 满足:

$$[Q_a^A, T_i] = S_i^A{}_B Q_a^B \neq 0 \quad (11.3. 81)$$

于是它便是 H 的群元. 若是 $Z^{AB} = 0$, 那么 R 对称性便是 $H = U(\mathcal{N})$, 而若是 $Z^{AB} \neq 0$, 则 H 构成 $U(\mathcal{N})$ 的子群. 扩张超对称所引入的最主要的额外结构就是中心荷. 前述代数结构的推导则是 $\mathcal{N} = 1$ 超对称的直接推广.

11.3.1 无质量多重态

与 $\mathcal{N} = 1$ 的情形类似, 我们首先讨论无质量多重态. 首先取动量 $p_\mu = (E, 0, 0, E)$, 与 $\mathcal{N} = 1$ 的情形类似, 有:

$$\{Q_a^A, \bar{Q}_{bB}\} = 4E \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{ab} \delta^A_B, \quad (11.3. 82)$$

与 $\mathcal{N} = \infty$ 相似, 矩阵中只有一个元非零, 因此 a, b 只能取 1,

$$Q_2^A = 0 \quad (11.3. 83)$$

此时利用 $\{Q_a^A, Q_b^B\} = \epsilon_{ab} Z^{AB}$, 我们立刻可以得到中心荷 $Z^{AB} = 0$ 的结论.

为了得到完整的表示, 我们定义 \mathcal{N} 对产生湮灭算符:

$$a^A := \frac{Q_1^A}{2\sqrt{E}}, \quad a^{A\dagger} := \frac{\bar{Q}_1^A}{2\sqrt{E}} \quad (11.3. 84)$$

因此有:

$$\{a^A, a_B^\dagger\} = \delta^A_B, \quad (11.3. 85)$$

于是我们生成了如下的态:

states	helicity	number of states
$ \Omega\rangle$	λ_0	$1 = \binom{\mathcal{N}}{0}$
$a^{A\dagger} \Omega\rangle$	$\lambda_0 + \frac{1}{2}$	$\mathcal{N} = \binom{\mathcal{N}}{1}$
$a^{A\dagger}a^{B\dagger} \Omega\rangle$	$\lambda_0 + 1$	$\frac{1}{2!}\mathcal{N}(\mathcal{N}-1) = \binom{\mathcal{N}}{2}$
$a^{A\dagger}a^{B\dagger}a^{C\dagger} \Omega\rangle$	$\lambda_0 + \frac{3}{2}$	$\frac{1}{3!}\mathcal{N}(\mathcal{N}-1)(\mathcal{N}-2) = \binom{\mathcal{N}}{3}$
\vdots	\vdots	\vdots
$a^{\mathcal{N}\dagger}a^{(\mathcal{N}-1)\dagger}\dots a^{1\dagger} \Omega\rangle$	$\lambda_0 + \frac{\mathcal{N}}{2}$	$1 = \binom{\mathcal{N}}{\mathcal{N}}$

于是态的总数便是

$$\sum_{k=0}^{\mathcal{N}} \binom{\mathcal{N}}{k} = \sum_{k=0}^{\mathcal{N}} \binom{\mathcal{N}}{k} 1^k 1^{\mathcal{N}-k} = 2^{\mathcal{N}}. \quad (11.3. 86)$$

考虑如下的两个例子:

- $\mathcal{N} = 2, \lambda_0 = 0$ 矢量多重态

$$\begin{array}{ccc} & \lambda = 0 & \\ \lambda = \frac{1}{2} & & \lambda = \frac{1}{2} \\ & \lambda = 1 & \end{array}$$

我们发现这一 $\mathcal{N} = 2$ 多重态可以分解为 $\mathcal{N} = 1$ 的形式: 一个 $\mathcal{N} = 1$ 矢量多重态以及一个 $\mathcal{N} = 1$ 手性多重态.

- $\mathcal{N} = 2, \lambda_0 = -\frac{1}{2}$ 多重态

$$\begin{array}{ccc} & \lambda = -\frac{1}{2} & \\ \lambda = 0 & & \lambda = 0 \\ & \lambda = \frac{1}{2} & \end{array}$$

它又可以被分解为两个 $\mathcal{N} = 1$ 手性多重态.

- $\mathcal{N} = 4, \lambda_0 = -1$ 亢多重态 (hypermultiplet)²

$$\begin{aligned} 1 \times \quad \lambda &= -1 \\ 4 \times \quad \lambda &= -\frac{1}{2} \\ 6 \times \quad \lambda &= \pm 0 \\ 4 \times \quad \lambda &= +\frac{1}{2} \\ 1 \times \quad \lambda &= +1 \end{aligned}$$

这是包含螺旋度 $\lambda < 2$ 的态的 $\mathcal{N} = 4$ 多重态, 包含了一个 $\mathcal{N} = 2$ 矢量多重态以及两个 $\mathcal{N} = 2$ 亢多重态以及他们的 CPT 共轭 (如前述, 相反螺旋度的多重态). 我们也可以将其分解为一个 $\mathcal{N} = 1$ 矢量多重态与三个 $\mathcal{N} = 1$ 手性多重态以及他们的 CPT 共轭

- $\mathcal{N} = 8, \lambda_0 = -2$ 最大多重态

$$\begin{aligned} 1 \times \quad \lambda &= \pm 2 \\ 8 \times \quad \lambda &= \pm \frac{3}{2} \\ 28 \times \quad \lambda &= \pm 1 \\ 56 \times \quad \lambda &= \pm \frac{1}{2} \\ 70 \times \quad \lambda &= \pm 0 \end{aligned}$$

由这些结果, 我们可以得出如下结论:

- 在每个多重态中, 螺旋度上下限之差为: $\lambda_{\max} - \lambda_{\min} = \frac{\mathcal{N}}{2}$
- 可重整化理论对无质量粒子的螺旋度限制为: $|\lambda| \leq 1$, 这要求 $\mathcal{N} \leq 4$. 我们通常将 \mathcal{N} 的上限称为最大超对称. 需要注意的是, 引力不可重整化, 因此不受 $\mathcal{N} \leq 4$ 限制.
- 有许多讨论均说明螺旋度 $|\lambda^\alpha| > 2$ 的无质量粒子不存在. 此外, $\mathcal{N} > 8$ 会导致出现不止一个引力子. 因此最大超对称称为 $\mathcal{N} = 8$.
- $\mathcal{N} > 1$ 超对称不存在手性粒子. 我们知道, 标准模型粒子在复基本表示下变换, 其中右手夸克与轻子不参与弱相互作用, 而左手夸克与轻子参与相互作用 (他们是在 $SU(2)_L$ 下变换的二重态), 因此他们是手性粒子. 所有的 $\mathcal{N} > 1$ 多重态中, 除 $\mathcal{N} = 2$ 亢多重态外, 均包含 $\lambda^\alpha = \pm 1$ 的粒子, 在实伴随表示中变换, 不是手性粒子. 而多重态中 $\lambda^\alpha = \pm \frac{1}{2}$ 的粒子在同一个表示中变换, 也不是手性粒子. 上述讨论的例外是 $\mathcal{N} = 2$ 亢多重态, 它不包含 $\lambda^\alpha = \pm 1$ 粒子, 但 $\lambda^\alpha = \pm \frac{1}{2}$ 在同一个多重态中, 同样不存在手性. 因此只有 $\mathcal{N} = 1, 0$ 超对称存在手性粒子, 因此超对称在现实中可能出现

²这一名称来自于历史上对 $\mathcal{N} = 2$ 超对称的称呼, 即所谓亢对称性 (hypersymmetry). 如今, 这一名称本身已被替代, 但其衍生词汇, 例如此处的亢多重态仍被使用

的就只有 $\mathcal{N} = 1$ 在低能区 $E \approx 10^2$ GeV 破缺的结果.

11.3.2 有质量多重态

考虑 $p_\mu = (m, 0, 0, 0)$, 于是:

$$\{Q_a^A, \bar{Q}_{bB}\} = 2m \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \delta^A_B. \quad (11.3. 87)$$

与无质量情形不同, 此处的中心荷可以非零. 因此我们必须区分两种情况:

11.3.2.1 零中心荷 ($Z^{AB} = 0$)

产生与湮灭算符各有 $2\mathcal{N}$ 个:

$$a_a^A := \frac{Q_a^A}{\sqrt{2m}} \quad a_a^{A\dagger} := \frac{\bar{Q}_{\dot{a}}^A}{\sqrt{2m}} \quad (11.3. 88)$$

共有 $2^{2\mathcal{N}}$ 个态, 以 $\mathcal{N} = 2$ 为例, 我们有:

$$\begin{aligned} |\Omega\rangle & 1 \times \text{spin } 0 \\ a_a^{A\dagger} |\Omega\rangle & 4 \times \text{spin } \frac{1}{2} \\ a_a^{A\dagger} a_b^{B\dagger} |\Omega\rangle & 3 \times \text{spin } 0, 3 \times \text{spin } 1 \\ a_a^{A\dagger} a_b^{B\dagger} a_c^{C\dagger} |\Omega\rangle & 4 \times \text{spin } \frac{1}{2} \\ a_a^{A\dagger} a_b^{B\dagger} a_c^{C\dagger} a_d^{D\dagger} |\Omega\rangle & 1 \times \text{spin } 0 \end{aligned} \quad (11.3. 89)$$

总计 $2^{2 \times 2} = 16$ 个态, 需要注意这与无质量情况的 $2^\mathcal{N}$ 不同, 这是因为无质量情况中半数的超对称生成元为零 (无质量情形下, 旋量指标取 2 时 $Q_2^A = 0$).

11.3.2.2 非零中心荷 ($Z^{AB} \neq 0$)

扩张超对称的有质量多重态在中心荷不等于零时相对复杂, 注意到, 我们可以对 Z 进行极分解.

方阵的极分解指: 实方阵可以分解为半正定矩阵与正交矩阵的乘积, 而复方阵则可以分解为半正定厄米矩阵与么正矩阵的乘积. 当被分解的矩阵可逆时, 上述半正定变为正定且分解唯一. 具体内容可以在线性代数教材中找到. 所谓的极分解实际上类似于复数的

极坐标分解, 例如复矩阵 $A = PU$, 其中 P 为正定厄米矩阵, U 为么正矩阵, 于是有:

$$\det A = \det P \det U \quad (11.3. 90)$$

其中 $\det A$ 为复数 z , 有极坐标分解 $z = r e^{i\theta}$. 此时 $\det P$ 可以被视作极坐标 r , 而 $\det U$ 则可被视为 $e^{i\theta}$. 这一分解存在相当明确的几何图像, 方阵描述线性空间中一般的线性变换, 而其总可以由伸缩与旋转两部分构成, 分别便由上述的 P 与 U 描述.

现在我们对 Z 进行极分解, 得到 $Z = HU$, 其中 $H = H^\dagger$ 为正定厄米矩阵, 而 $V = (U^\dagger)^{-1}$ 为么正矩阵, 接下来定义:

$$\Gamma_a^A := \epsilon_{ab} U^{AB} \bar{Q}_{\dot{c}} (\bar{\sigma}^0)^{\dot{c}b} \quad (11.3. 91)$$

其中 U 便为 Z 的极分解中出现的么正矩阵, 由此可以定义标量 \mathcal{H} 如下:

$$\mathcal{H} := (\bar{\sigma}^0)^{\dot{b}a} \left\{ Q_a^A - \Gamma_a^A, \bar{Q}_{\dot{b}A} - \bar{\Gamma}_{\dot{b}A} \right\} \geq 0. \quad (11.3. 92)$$

它是算符 $Q_a^A - \Gamma_a^A$ 本身与其共轭转置的乘积, 因此 \mathcal{H} 非负. 再利用反对易子 $\{Q_\alpha^A, \bar{Q}_{\dot{\beta}}^B\}$ 我们便有:

$$\mathcal{H} = 8m\mathcal{N} - 2\text{Tr}\{ZU^\dagger + UZ^\dagger\} \geq 0. \quad (11.3. 93)$$

现在我们再次应用 Z 的极分解, 便可以得到:

$$\mathcal{H} = 8m\mathcal{N} - 4\text{Tr}\{H\} = 8m\mathcal{N} - 4\text{Tr}\{\sqrt{Z^\dagger Z}\} \geq 0. \quad (11.3. 94)$$

我们现在得到了质量的最低值, 即:

$$m \geq \frac{1}{2\mathcal{N}} \text{Tr}\{\sqrt{Z^\dagger Z}\} \quad (11.3. 95)$$

它被称为质量 m 的 BPS 边界 (以博戈莫尔尼 (Bogomolnyi), 普拉萨德 (Prasad), 以及索末菲 (Sommerfeld)³ 命名), 而对应最低质量的态则被称为 BPS 态, 这多重态比较特殊, 回看 \mathcal{H} 的定义, 当 $\mathcal{H} = 0$ 时对应 BPS 态, 这表明反对易子中的 $Q_\alpha^A - \Gamma_\alpha^A = 0$. 由 Γ_α^A 的定义, Γ_α^A 与 \bar{Q} 成正比, 因此 BPS 态不能由全部的 Q 生成, 其中的一半受到 BPS 边界条件限制. 因此 BPS 态中只有 $2^\mathcal{N}$ 而非 $2^{2\mathcal{N}}$ 个态, 这实际上与无质量情况由于 $Q_2^a = 0$ 导致态个数减半类似.

³查尔斯·索莫菲 (1933-2021), 并非人们所熟知的阿诺尔德·索莫菲 (1868-1951)

当 $\mathcal{N} = 2$ 时, 我们将反对称矩阵 Z^{AB} 定义为:

$$Z^{AB} = \begin{pmatrix} 0 & q_1 \\ -q_1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow m \geq \frac{q_1}{2} \quad (11.3.96)$$

此处指标 1 实际上是分块指标标记, 但 2×2 反对称矩阵只有一个分块矩阵, 因此只能等于 1. 更一般地, 当 $\mathcal{N} > 2$ 且为偶数时,

$$Z^{AB} = \begin{pmatrix} 0 & q_1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ -q_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & q_2 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & -q_2 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots \\ & & & & 0 & q_{\frac{\mathcal{N}}{2}} \\ & & & & -q_{\frac{\mathcal{N}}{2}} & 0 \end{pmatrix},$$

质量需要满足每个分块矩阵分别的 BPS 边界: $2m \geq q_i$. 为说明这一点, 对每个分块矩阵分别定义 \mathcal{H} . 当 k 个 q_i 等于 $2m$, 即 $\frac{\mathcal{N}}{2}$ 个 BPS 边界条件有 k 个取等时, 我们便有 $2k$ 个产生算符受到限制, 于是独立的产生算符剩下 $2\mathcal{N} - 2k$, 对应于 $2^{2(\mathcal{N}-k)}$ 个态.

$$\begin{aligned} k = 0 & \Rightarrow 2^{2\mathcal{N}} \text{ 正常个数的多重态} \\ 0 < k < \frac{\mathcal{N}}{2} & \Rightarrow 2^{2(\mathcal{N}-k)} \text{ 受部分 BPS 限制的短多重态} \\ k = \frac{\mathcal{N}}{2} & \Rightarrow 2^{\mathcal{N}} \text{ 受完整 BPS 限制的最短多重态} \end{aligned}$$

最后补充一点 BPS 态相关的内容:

- BPS 状态和边界始于杨-米尔斯系统的孤子 (单极) 解, 它是经典运动方程的局部有限能解. 边界指的是能量边界.
- 由于 BPS 态为最轻的带荷物理态, 因此是稳定的.
- 质量与荷的等价性让我们想起了带电黑洞. 事实上, 霍金辐射 (Hawking evaporation) 的终点, 即所谓的极端黑洞⁴ (extremal black holes) 处于不产生霍金辐射的稳定状

⁴指具有与其电荷和角动量相容的最小质量的黑洞. 在超对称理论中极端黑洞在部分超对称荷作用下不变, 这正是 BPS 边界带来的效应. 极端黑洞的熵与弦论的联系也十分紧密, 其理论意义巨大, 但目前还没有直接证据证明其真实存在. 同

态, 而它也恰好是扩张超引力理论所对应的 BPS 态.

- BPS 态对于理解场论和弦论中的强弱耦合对偶性非常重要. 尤其是 BPS 态对应于短多重态这一性质, 这使得 BPS 态可以从弱耦合扩展到强耦合, 因为多重态的长度不应当随着耦合从弱到强的连续变化而改变.
- 我们曾多次提及的 D-膜也是 BPS 态.

11.4 超空间与超场

到目前为止, 我们只讨论了超多重态中的单粒子态. 我们的目标是构建一个描述相互作用的超对称场论. 请回想一下, 粒子由场 $\varphi(x^\mu)$ 描述, 其具有以下性质:

- 是闵氏时空中坐标 x^μ 的函数
- 满足 φ 在洛伦兹群下的变换

在超对称的情况下, 我们需要处理对象 $\Phi(X)$,

- 是超空间中坐标 X 的函数
- 满足 Φ 在超庞加莱群下的变换

但是, 什么是超空间呢?

11.4.1 超空间基础

11.4.1.1 群与商空间

我们可以利用对称性来定义流形, 我们知道, 每一个连续群 G 都可以通过以下方式定义流形 \mathcal{M}_G :

$$\Lambda: G \longrightarrow \mathcal{M}_G \quad \left\{ g = \exp(i\alpha_a T^a) \right\} \longrightarrow \left\{ \alpha_a \right\}, \quad (11.4.97)$$

其中应用了李群李代数的指数映射, 群元 g 写为了李代数生成元 T^a 的指数映射形式, 指数映射参数 α_a 便对应了流形 \mathcal{M}_G 上的点. 不难发现, $\dim G = \dim \mathcal{M}_G$. 考虑如下几个例子:

- 李群 $G = U(1)$, 群元为 $g = \exp(i\alpha Q)$, 那么 $\alpha \in [0, 2\pi]$, 因此对应的流形是 1 维球面 (一个圆) $\mathcal{M}_{U(1)} = S^1$.

时, 极端黑洞与黑洞热力学的兼容性也存在争论.

- 李群 $G = SU(2)$, 群元为 $g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta^* & \alpha^* \end{pmatrix}$, 其中复数参数 α 和 β 满足 $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$. 设 $\alpha = x_1 + ix_2$ 和 $\beta = x_3 + ix_4$, 其中 $x_k \in \mathbb{R}$, 则 p 和 q 的约束条件为 $\sum_{k=1}^4 x_k^2 = 1$, 因此 $\mathcal{M}_{SU(2)} = S^3$.
- 李群 $G = SL(2, \mathbb{C})$, 群元为 $g = h \cdot v$, 其中 $h \in H$, $v \in SU(2)$ 且 $H = H^\dagger$ 是正定的, $\det H = 1$. 记一般的元素 $h \in H$ 为 $h = x_\mu \sigma^\mu = \begin{pmatrix} x_0 + x_3 & x_1 + ix_2 \\ x_1 - ix_2 & x_0 - x_3 \end{pmatrix}$, 行列式的约束条件为 $(x_0)^2 - \sum_{k=1}^3 (x_k)^2 = 1$, 因此 $\mathcal{M}_{SL(2, \mathbb{C})} = \mathbb{R}^3 \times S^3$.

现在考虑更一般的情况, 考虑商空间 G/H , 其中 $g \in G$ 作为商空间 G/H 的群元与 $g \cdot h \forall h \in H$ 相同. 例如:

- 考虑 $G = U_1(1) \times U_2(1)$, 其中 $g \in G$ $g = \exp(i(\alpha_1 Q_1 + \alpha_2 Q_2))$, 而子群 $H = U_1(1)$, 群元 $h \in H$ 为 $h = \exp(i\beta Q_1)$. 在 $G/H = (U_1(1) \times U_2(1))/U_1(1)$ 中, 有如下关系:

$$gh = \exp\{i((\alpha_1 + \beta)Q_1 + \alpha_2 Q_2)\} = \exp(i(\alpha_1 Q_1 + \alpha_2 Q_2)) = g,$$

因此只有 α_2 包含有效信息, 于是 $G/H = U_2(1)$.

- $G/H = SU(2)/U(1) \cong SO(3)/SO(2)$: 每一个 $g \in SU(2)$ 可以写作 $g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta^* & \alpha^* \end{pmatrix}$, 通过 $U(1)$ 元素 $\text{diag}(e^{i\gamma}, e^{-i\gamma})$ 识别, 使得 α 实数化. 因此, 参数空间是二维球面 $(\beta_1^2 + \beta_2^2 + \alpha^2 = 1)$, 即 $\mathcal{M}_{SU(2)/U(1)} = S^2$. 更一般地, $\mathcal{M}_{SO(n+1)/SO(n)} = S^n$.
- 闵氏时空 = 庞加莱群 / 洛伦兹群 = $\{\omega^{\mu\nu}, a^\mu\} / \{\omega^{\mu\nu}\}$ 因此, 庞加莱群与洛伦兹群的商空间仅包含平移的自由度, 即 $\{a^\mu = x^\mu\}$, 这些平移自由度 (a^μ) 可以看作定义在闵氏空间中的点 x^μ . 因此, 闵氏空间可以被视为庞加莱群与洛伦兹群的商空间, 因为这个商空间只留下了时空中的平移操作, 而这些平移正是定义闵氏空间的基本几何操作.

所谓的超空间实际上是闵氏时空的推广, 我们将 $\mathcal{N} = 1$ 的超空间定义为如下的商空间:

$$\text{超庞加莱群 / 洛伦兹群} = \{\omega^{\mu\nu}, a^\mu, \theta^\alpha, \bar{\theta}_{\dot{\alpha}}\} / \{\omega^{\mu\nu}\}.$$

我们先前给出的超庞加莱群元 g 的一般形式为:

$$g = \exp(i(\omega^{\mu\nu} M_{\mu\nu} + a^\mu P_\mu + \theta^\alpha Q_\alpha + \bar{\theta}_{\dot{\alpha}} \bar{Q}^{\dot{\alpha}})),$$

其中格拉斯曼参数 θ^α 和 $\bar{\theta}_{\dot{\beta}}$ 将 Q_α 与 $\bar{Q}^{\dot{\beta}}$ 的反对易关系简化为如下的对易关系:

$$\{Q_\alpha, \bar{Q}_{\dot{\alpha}}\} = 2(\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\alpha}} P_\mu \implies [\theta^\alpha Q_\alpha, \bar{\theta}^{\dot{\beta}} \bar{Q}_{\dot{\beta}}] = 2\theta^\alpha (\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\beta}} \bar{\theta}^{\dot{\beta}} P_\mu$$

格拉斯曼数的性质我们已经在 6.2.3 一节中详细介绍, 此后的内容中会频繁应用.

11.4.1.2 标量超场的定义与变换

为了定义标量超场, 我们首先回顾一下标量场 $\varphi(x^\mu)$ 的性质:

- 它是时空坐标 x^μ 的函数
- 在庞加莱群下变换, 以平移变换为例: 将 φ 视为算符, 一个参数为 a_μ 的平移会将其改变为

$$\varphi \mapsto \exp(-ia_\mu P^\mu) \varphi \exp(ia_\mu P^\mu).$$

但是 $\varphi(x^\mu)$ 也是某个函数空间 \mathcal{F} 中的希尔伯特向量, 因此

$$\varphi(x^\mu) \mapsto \exp(-ia_\mu P^\mu) \varphi(x^\mu) =: \varphi(x^\mu - a^\mu) \implies \mathcal{P}_\mu = -i\partial_\mu.$$

\mathcal{P} 是抽象算符 P^μ 在 \mathcal{F} 上的一个表示. 通过比较两种变换规则在 a_μ 的一阶展开, 可以得到如下关系:

$$(1 - ia_\mu P^\mu) \varphi (1 + ia_\mu P^\mu) = (1 - ia_\mu \mathcal{P}^\mu) \varphi \implies i [\varphi, a_\mu P^\mu] = -ia^\mu \mathcal{P}_\mu \varphi = -a^\mu \partial_\mu \varphi$$

对于一个一般的标量超场 $S(x^\mu, \theta_\alpha, \bar{\theta}_{\dot{\alpha}})$, 我们可以按 θ_α 和 $\bar{\theta}_{\dot{\alpha}}$ 的幂展开, 且只有有限个非零项:

$$\begin{aligned} S(x^\mu, \theta_\alpha, \bar{\theta}_{\dot{\alpha}}) = & \varphi(x) + \theta\psi(x) + \bar{\theta}\bar{\chi}(x) + \theta\theta M(x) + \bar{\theta}\bar{\theta} N(x) + (\theta\sigma^\mu\bar{\theta})V_\mu(x) \\ & + (\theta\theta)\bar{\theta}\bar{\lambda}(x) + (\bar{\theta}\bar{\theta})\theta\rho(x) + (\theta\theta)(\bar{\theta}\bar{\theta})D(x) \end{aligned}$$

此处 $\theta\theta = \theta^\alpha\theta_\alpha = \epsilon^{\alpha\beta}\theta_\alpha\theta_\beta$, 由于四维中的马约拉纳-外尔旋量指标 $\alpha, \beta = 1, 2$, 此处最高为 $2^{D/2-1} = 2^1 = 2$ 阶, 而在十维中超场关于 θ 的幂展开则最高为 16 阶, 这在本书后面纯旋量表述中是非常重要的性质.

与普通标量场类似, 标量超场 $S(x^\mu, \theta_\alpha, \bar{\theta}_{\dot{\alpha}})$ 在超庞加莱群下的平移变换也有两种形式, 首先作为一个场算符, 变换如下:

$$S(x^\mu, \theta_\alpha, \bar{\theta}_{\dot{\alpha}}) \mapsto \exp(-i(\epsilon Q + \bar{\epsilon}\bar{Q})) S \exp(i(\epsilon Q + \bar{\epsilon}\bar{Q})),$$

其次作为一个希尔伯特向量, 变换如下:

$$S(x^\mu, \theta_\alpha, \bar{\theta}_{\dot{\alpha}}) \mapsto \exp(i(\epsilon Q + \bar{\epsilon}\bar{Q})) S(x^\mu, \theta_\alpha, \bar{\theta}_{\dot{\alpha}}),$$

现在我们需要尝试给出平移变换之后的结果, 上式中的 ϵ^α 为参数, Q_α 是作用在 $\theta, \bar{\theta}$ 函数上的旋量生成元 Q_α 的一个表示. 对 x^μ 的平移变换应当与 ϵ^α 和 $\bar{\epsilon}^\alpha$ 分别成正比, 且带矢量指标 μ . 于是 x^μ 平移的一般形式可以写为:

$$x^\mu \mapsto x^\mu - ic(\epsilon\sigma^\mu\bar{\theta}) + ic^*(\theta\sigma^\mu\bar{\epsilon}).$$

其中 c 与 c^* 是出现在平移中的待定常数. 而 θ 的变换在其后附加 ϵ 即可. 于是有:

$$\exp(i(\epsilon Q + \bar{\epsilon}\bar{Q})) S(x^\mu, \theta_\alpha, \bar{\theta}_{\dot{\alpha}}) = S(x^\mu - ic(\epsilon\sigma^\mu\bar{\theta}) + ic^*(\theta\sigma^\mu\bar{\epsilon}), \theta + \epsilon, \bar{\theta} + \bar{\epsilon}).$$

与标量场平移类似, 我们可以得到:

$$\begin{aligned} Q_\alpha &= -i \frac{\partial}{\partial \theta^\alpha} - c(\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\beta}} \bar{\theta}^{\dot{\beta}} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \\ \bar{Q}_{\dot{\alpha}} &= +i \frac{\partial}{\partial \bar{\theta}^{\dot{\alpha}}} + c^* \theta^\beta (\sigma^\mu)_{\beta\dot{\alpha}} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \end{aligned} \quad (11.4.98)$$

其中 c 可以通过 Q_α 与 $\bar{Q}_{\dot{\alpha}}$ 的反对易关系来确定:

$$\{Q_\alpha, \bar{Q}_{\dot{\alpha}}\} = 2(\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\alpha}} \mathcal{P}_\mu \implies \text{Re}\{c\} = 1$$

不妨取 $c = 1$. 再次比较超场 S 的两种表达式中 ϵ 的一阶展开, 以此获得 S 与 Q_α 的对易关系:

$$i[S, \epsilon Q + \bar{\epsilon}\bar{Q}] = i(\epsilon Q + \bar{\epsilon}\bar{Q})S = \delta S$$

在知道了 Q, \bar{Q} 和 S 的形式及其对易关系后, 我们可以得到 S 各个部分变化的显式

形式:

$$\begin{aligned}
\delta\varphi &= \epsilon\psi + \bar{\epsilon}\bar{\chi} \\
\delta\psi &= 2\epsilon M + \sigma^\mu \bar{\epsilon} (i\partial_\mu \varphi + V_\mu) \\
\delta\bar{\chi} &= 2\bar{\epsilon} N - \epsilon\sigma^\mu (i\partial_\mu \varphi - V_\mu) \\
\delta M &= \bar{\epsilon}\bar{\lambda} - \frac{i}{2} \partial_\mu \psi \sigma^\mu \bar{\epsilon} \\
\delta N &= \epsilon\rho + \frac{i}{2} \epsilon\sigma^\mu \partial_\mu \bar{\chi} \\
\delta V_\mu &= \epsilon\sigma_\mu \bar{\lambda} + \rho\sigma_\mu \bar{\epsilon} + \frac{i}{2} (\partial^\nu \psi \sigma_\mu \bar{\sigma}_\nu \epsilon - \bar{\epsilon} \bar{\sigma}_\nu \sigma_\mu \partial^\nu \bar{\chi}) \\
\delta\bar{\lambda} &= 2\bar{\epsilon} D + \frac{i}{2} (\bar{\sigma}^\nu \sigma^\mu \bar{\epsilon}) \partial_\mu V_\nu + i\bar{\sigma}^\mu \epsilon \partial_\mu M \\
\delta\rho &= 2\epsilon D - \frac{i}{2} (\sigma^\nu \bar{\sigma}^\mu \epsilon) \partial_\mu V_\nu + i\sigma^\mu \bar{\epsilon} \partial_\mu N \\
\delta D &= \frac{i}{2} \partial_\mu (\epsilon\sigma^\mu \bar{\lambda} - \rho\sigma^\mu \bar{\epsilon})
\end{aligned}$$

非常重要的一个现象是, 除了 D 之外的其他场均由超对称变换相互联系, 而 D 的超对称变换则是全导数形式.

我们接下来简单就超场进行一些讨论:

- 如果 S_1 和 S_2 是超场 (superfields), 那么它们的乘积 $S_1 S_2$ 也是超场:

$$\begin{aligned}
\delta(S_1 S_2) &= i [S_1 S_2, \epsilon Q + \bar{\epsilon} \bar{Q}] = i S_1 [S_2, \epsilon Q + \bar{\epsilon} \bar{Q}] + i [S_1, \epsilon Q + \bar{\epsilon} \bar{Q}] S_2 \\
&= S_1 (i(\epsilon Q + \bar{\epsilon} \bar{Q}) S_2) + (i(\epsilon Q + \bar{\epsilon} \bar{Q}) S_1) S_2 \\
&= i(\epsilon Q + \bar{\epsilon} \bar{Q}) (S_1 S_2)
\end{aligned}$$

在最后一步中, 我们利用了 Q 和 \bar{Q} 作为微分算符的莱布尼兹律.

- 超场的线性组合仍然是超场 (证明非常简单).
- $\partial_\mu S$ 是超场, 但 $\partial_\alpha S$ 不是:

$$\begin{aligned}
\delta(\partial_\alpha S) &= i [\partial_\alpha S, \epsilon Q + \bar{\epsilon} \bar{Q}] = i \partial_\alpha [S, \epsilon Q + \bar{\epsilon} \bar{Q}] \\
&= i \partial_\alpha (\epsilon Q + \bar{\epsilon} \bar{Q}) S \neq i(\epsilon Q + \bar{\epsilon} \bar{Q}) (\partial_\alpha S)
\end{aligned}$$

问题在于 $[\partial_\alpha, \epsilon Q + \bar{\epsilon} \bar{Q}] \neq 0$. 我们需要定义超空间导数 (superspace derivative):

$$\mathcal{D}_\alpha := \partial_\alpha + i(\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\beta}} \bar{\theta}^{\dot{\beta}} \partial_\mu \quad \bar{\mathcal{D}}_{\dot{\alpha}} := -\bar{\partial}_{\dot{\alpha}} - i\theta^\beta (\sigma^\mu)_{\beta\dot{\alpha}} \partial_\mu$$

它满足以下条件:

$$\{\mathcal{D}_\alpha, \mathcal{Q}_\beta\} = \{\mathcal{D}_\alpha, \overline{\mathcal{Q}}_{\dot{\beta}}\} = \{\overline{\mathcal{D}}_{\dot{\alpha}}, \mathcal{Q}_\beta\} = \{\overline{\mathcal{D}}_{\dot{\alpha}}, \overline{\mathcal{Q}}_{\dot{\beta}}\} = 0$$

因此有:

$$[\mathcal{D}_\alpha, \epsilon \mathcal{Q} + \bar{\epsilon} \overline{\mathcal{Q}}] = 0 \implies \mathcal{D}_\alpha S \text{ 是超场.}$$

另请注意, 超空间导数 (superspace derivatives) 满足以下反对易关系:

$$\{\mathcal{D}_\alpha, \overline{\mathcal{D}}_{\dot{\beta}}\} = -2i(\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\beta}} \partial_\mu \quad \{\mathcal{D}_\alpha, \mathcal{D}_\beta\} = \{\overline{\mathcal{D}}_{\dot{\alpha}}, \overline{\mathcal{D}}_{\dot{\beta}}\} = 0.$$

- 当且仅当 $f = \text{常数}$ 时, $S = f(x)$ 才是超场, 否则会有 $\delta\psi \propto \epsilon \partial^\mu f$. 对于常数旋量 c , 由于 $\delta\phi = \epsilon c S = c\theta$ 不是超场.

S 不是超对称的不可约表示, 因此我们可以去除它的一些分量, 同时仍保持其作为超场的性质. 一般来说, 我们可以在 S 上施加一致的约束, 得到更小的超场, 这些超场可以是超对称代数的不可约表示. 以下是一些相关的超场列表:

- 手性超场 Φ 满足 $\overline{\mathcal{D}}_{\dot{\alpha}}\Phi = 0$
- 反手性超场 $\overline{\Phi}$ 满足 $\mathcal{D}_\alpha\overline{\Phi} = 0$
- 矢量超场或实超场⁵ $V = V^\dagger$
- 线性超场 L 满足 $\mathcal{D}\mathcal{D}L = 0$ 且 $L = L^\dagger$

11.5 手性超场

我们希望找到满足 $\overline{\mathcal{D}}_{\dot{\alpha}}\Phi = 0$ 的超场 Φ 的分量. 为简化计算, 我们定义复合 x 与 $\theta, \bar{\theta}$ 的新坐标 y

$$y^\mu := x^\mu + i\theta\sigma^\mu\bar{\theta}.$$

⁵二者均满足自伴条件 $V = V^\dagger$, 但概念上略有不同. 矢量超场常用于描述超对称规范场, 而实超场满足自伴条件即可. 自伴条件意味着超场整体是厄米的, 但其各个分量不一定是实数, 例如矢量超场的物理分量场可能出现复值的外尔费米子.

如果 $\Phi = \Phi(y, \theta, \bar{\theta})$, 则要注意的是, θ 与 $\bar{\theta}$ 的贡献不止来自于他们自身, 也在 y 中存在, 因此对 θ 或 $\bar{\theta}$ 的导数都要拆成两项, 于是我们有:

$$\begin{aligned}\bar{\mathcal{D}}_{\dot{\alpha}} \Phi &= -\bar{\partial}_{\dot{\alpha}} \Phi - \frac{\partial \Phi}{\partial y^{\mu}} \frac{\partial y^{\mu}}{\partial \bar{\theta}^{\dot{\alpha}}} - i\theta^{\beta} (\sigma^{\mu})_{\beta \dot{\alpha}} \partial_{\mu} \Phi \\ &= -\bar{\partial}_{\dot{\alpha}} \Phi - \partial_{\mu} \Phi (-i\theta \sigma^{\mu})_{\dot{\alpha}} - i\theta^{\beta} (\sigma^{\mu})_{\beta \dot{\alpha}} \partial_{\mu} \Phi \\ &= -\bar{\partial}_{\dot{\alpha}} \Phi = 0,\end{aligned}$$

其中第二行第二项括号中的负号来自于 6.2.3 一节中提及的 $\frac{\partial \bar{\theta}^{\dot{\alpha}}}{\partial \theta^{\beta}} = +\delta_{\beta}^{\dot{\alpha}} \Rightarrow \frac{\partial \bar{\theta}_{\dot{\alpha}}}{\partial \theta^{\beta}} = -\delta_{\dot{\alpha}}^{\beta}$. 由上式可知, Φ 不依赖于 $\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}$, 仅依赖于 y 和 θ . 需要注意的是, 在 x^{μ} 变量的格式下手性要求不会得到与 $\bar{\theta}$ 无关的结论, 而是会给出一个限制条件, 形式较为复杂, 在我们使用了 y^{μ} 形式后这一限制便直接改为形式上与 $\bar{\theta}$ 无关, 但实际上 $\bar{\theta}$ 的依赖性隐藏在 y^{μ} 中, 这正是我们前述定义 y^{μ} 时提及的简化计算目的之一. 接下来, 通过展开分量, 我们得到:

$$\Phi(y^{\mu}, \theta^{\alpha}) = \varphi(y^{\mu}) + \sqrt{2} \theta \psi(y^{\mu}) + \theta \theta F(y^{\mu}),$$

其中左手超空间导数作用在 $\Phi(y^{\mu}, \theta^{\alpha})$ 上的形式为:

$$\mathcal{D}_{\alpha} = \partial_{\alpha} + 2i(\sigma^{\mu} \bar{\theta})_{\alpha} \frac{\partial}{\partial y^{\mu}}.$$

手性超场的物理分量为:

- 标量: φ 表示标量部分 (如超夸克, 超轻子, 希格斯粒子).
- 旋量: ψ 表示自旋 $s = \frac{1}{2}$ 的粒子 (如夸克, 轻子, 希格斯伴子 (Higgsino))
- 辅助场 (auxiliary field): F , 具体定义稍后给出.

在离壳情况下, 物理分量中有 4 个玻色分量 (φ, F) 和 4 个费米分量 (ψ_{α}). 将 Φ 重新写为 x^{μ} 的函数, 有:

$$\begin{aligned}\Phi(x^{\mu}, \theta^{\alpha}, \bar{\theta}^{\dot{\alpha}}) &= \varphi(x) + \sqrt{2} \theta \psi(x) + \theta \theta F(x) \\ &\quad + i\theta \sigma^{\mu} \bar{\theta} \partial_{\mu} \varphi(x) - \frac{i}{\sqrt{2}} (\theta \theta) \partial_{\mu} \psi(x) \sigma^{\mu} \bar{\theta} \\ &\quad - \frac{1}{4} (\theta \theta) (\bar{\theta} \bar{\theta}) \partial_{\mu} \partial^{\mu} \varphi(x)\end{aligned}$$

我们可以直接证明 Φ 的这一分量表达式满足 $\bar{\mathcal{D}}_{\dot{\alpha}}\Phi = 0$

$$\begin{aligned}
 -\bar{\mathcal{D}}_{\dot{\alpha}}\Phi &= \bar{\partial}_{\dot{\alpha}}\Phi + i\theta^{\beta}(\sigma^{\nu})_{\beta\dot{\alpha}}\partial_{\nu}\Phi \\
 &= \bar{\partial}_{\dot{\alpha}}\left(i(\theta\sigma^{\mu}\bar{\theta})\partial_{\mu}\varphi - \frac{1}{4}(\theta\theta)(\bar{\theta}\bar{\theta})\partial_{\mu}\partial^{\mu}\varphi - \frac{i}{\sqrt{2}}(\theta\theta)(\partial_{\mu}\psi\sigma^{\mu}\bar{\theta})\right) \\
 &\quad + i\theta^{\beta}(\sigma^{\nu})_{\beta\dot{\alpha}}\left(\partial_{\nu}\varphi + \sqrt{2}(\theta\partial_{\nu}\psi) + i(\theta\sigma^{\mu}\bar{\theta})\partial_{\nu}\partial_{\mu}\varphi\right) \\
 &= \left(-i\theta^{\alpha}(\sigma^{\mu})_{\alpha\dot{\alpha}}\partial_{\mu}\varphi + \frac{1}{2}(\theta\theta)\bar{\theta}_{\dot{\alpha}}\partial_{\mu}\partial^{\mu}\varphi + \frac{i}{\sqrt{2}}(\theta\theta)\partial_{\mu}\psi^{\alpha}(\sigma^{\mu})_{\alpha\dot{\alpha}}\right) \\
 &\quad + i\theta^{\beta}(\sigma^{\nu})_{\beta\dot{\alpha}}\left(\partial_{\nu}\varphi + \sqrt{2}\theta\partial_{\nu}\psi + i(\theta\sigma^{\mu}\bar{\theta})\partial_{\nu}\partial_{\mu}\varphi\right) \\
 &= \frac{1}{2}(\theta\theta)\bar{\theta}_{\dot{\alpha}}\partial_{\mu}\partial^{\mu}\varphi + \frac{i}{\sqrt{2}}(\theta\theta)\partial_{\mu}\psi^{\alpha}(\sigma^{\mu})_{\alpha\dot{\alpha}} \\
 &\quad + \left(\sqrt{2}i\theta^{\beta}(\sigma^{\nu})_{\beta\dot{\alpha}}\theta^{\alpha}\partial_{\nu}\psi_{\alpha} - \theta^{\beta}(\sigma^{\nu})_{\beta\dot{\alpha}}(\theta\sigma^{\mu}\bar{\theta})\partial_{\nu}\partial_{\mu}\varphi\right) \\
 &= \frac{1}{2}(\theta\theta)\bar{\theta}_{\dot{\alpha}}\partial_{\mu}\partial^{\mu}\varphi - (\theta^{\beta}(\sigma^{\nu})_{\beta\dot{\alpha}}(\theta\sigma^{\mu}\bar{\theta})\partial_{\nu}\partial_{\mu}\varphi) \\
 &= 0,
 \end{aligned}$$

在最后一步中我们使用了如下的恒等式：

$$\begin{aligned}
 \theta^{\beta}(\sigma^{\nu})_{\beta\dot{\alpha}}(\theta\sigma^{\mu}\bar{\theta})\partial_{\mu}\partial_{\nu}\varphi &= \theta^{\beta}(\sigma^{\nu})_{\beta\dot{\alpha}}\theta^{\gamma}(\sigma^{\mu})_{\gamma\dot{\gamma}}\bar{\theta}^{\dot{\gamma}}\partial_{(\mu}\partial_{\nu)}\varphi \\
 &= -\frac{\theta\theta}{2}\epsilon^{\beta\gamma}(\sigma^{\nu})_{\beta\dot{\alpha}}(\sigma^{\mu})_{\gamma\dot{\gamma}}\bar{\theta}^{\dot{\gamma}}\partial_{(\mu}\partial_{\nu)}\varphi \\
 &= \frac{\theta\theta}{2}\epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\tau}}(\bar{\sigma}^{\nu}\sigma^{\mu})^{\dot{\tau}}_{\dot{\gamma}}\bar{\theta}^{\dot{\gamma}}\partial_{(\mu}\partial_{\nu)}\varphi \\
 &= \frac{\theta\theta}{2}\epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\tau}}\eta^{\mu\nu}\delta^{\dot{\tau}}_{\dot{\gamma}}\bar{\theta}^{\dot{\gamma}}\partial_{(\mu}\partial_{\nu)}\varphi \\
 &= \frac{\theta\theta}{2}\bar{\theta}_{\dot{\alpha}}\partial^2\varphi.
 \end{aligned}$$

接下来计算物理分量场的超对称变换, Φ 在超对称变换下的形式为:

$$\delta\Phi = i(\epsilon\mathcal{Q} + \bar{\epsilon}\bar{\mathcal{Q}})\Phi,$$

左侧代入 Φ 的物理分量场展开式, 右侧代入 \mathcal{Q} 与 $\bar{\mathcal{Q}}$ 的定义式 eq. (11.4. 98), 比较等号两侧 θ 的阶数相等的项, 便可得到:

$$\begin{aligned}
 \delta\varphi &= \sqrt{2}\epsilon\psi \\
 \delta\psi &= i\sqrt{2}\sigma^{\mu}\bar{\epsilon}\partial_{\mu}\varphi + \sqrt{2}\epsilon F \\
 \delta F &= i\sqrt{2}\bar{\epsilon}\sigma^{\mu}\partial_{\mu}\psi.
 \end{aligned}$$

因此, δF 是另一个全导数项, 正如一般超场中的 δD 一样. 需要注意的是:

- 手性超场的乘积仍然是手性超场. 一般而言, 手性超场 Φ 的任何全纯函数 $f(\Phi)$ 都是手性超场.
- 如果 Φ 是手性超场, 则 $\bar{\Phi} = \Phi^\dagger$ 是反手性超场.
- $\Phi^\dagger \Phi$ 和 $\Phi^\dagger + \Phi$ 是实超场, 既不是手性超场也不是反手性超场.

11.6 矢量超场

11.6.1 矢量超场的定义与变换

在超对称理论中, 矢量超场是描述规范场的超场形式. 矢量超场通常用符号 V 表示, 满足自伴要求 $V(x, \theta, \bar{\theta}) = V^\dagger(x, \theta, \bar{\theta})$. 其物理分量场展开为:

$$\begin{aligned} V(x, \theta, \bar{\theta}) = & C(x) + i\theta\chi(x) - i\bar{\theta}\bar{\chi}(x) + \frac{i}{2}\theta\theta(M(x) + iN(x)) - \frac{i}{2}\bar{\theta}\bar{\theta}(M(x) - iN(x)) \\ & + \theta\sigma^\mu\bar{\theta}V_\mu(x) + i\theta\bar{\theta}\bar{\theta}\left(-i\bar{\lambda}(x) + \frac{i}{2}\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu\chi(x)\right) \\ & - i\bar{\theta}\bar{\theta}\theta\left(i\lambda(x) - \frac{i}{2}\sigma^\mu\partial_\mu\bar{\chi}(x)\right) + \frac{1}{2}(\theta\theta)(\bar{\theta}\bar{\theta})\left(D - \frac{1}{2}\partial_\mu\partial^\mu C\right). \end{aligned}$$

这些物理分量场包括 8 个玻色分量 C, M, N, D, V_μ 和 $4 + 4$ 个费米分量 $(\chi_\alpha, \lambda_\alpha)$. 与手性超场不同, 这里第一项标量场 C 为实标量. 所谓矢量超场实际上就是在强调这是包含 V_μ 的超场. 将超对称变换作用于展开两侧, 比较 θ 阶数, 我们可以得到物理分量场的超对称变换:

$$\begin{aligned} \text{标量场 } C(x): \quad & \delta C = i\epsilon\chi - i\bar{\epsilon}\bar{\chi} \\ \text{外尔费米子场 } \chi(x): \quad & \delta\chi_\alpha = \sqrt{2}(M\epsilon_\alpha + iN\epsilon_\alpha + (\sigma^\mu\bar{\epsilon})_\alpha V_\mu) \\ \text{外尔费米子场 } \bar{\chi}(x): \quad & \delta\bar{\chi}_{\dot{\alpha}} = \sqrt{2}(M\bar{\epsilon}_{\dot{\alpha}} - iN\bar{\epsilon}_{\dot{\alpha}} + (\bar{\sigma}^\mu\epsilon)_{\dot{\alpha}} V_\mu) \\ \text{标量场 } M(x): \quad & \delta M = -\epsilon\sigma^\mu\partial_\mu\bar{\chi} - \bar{\epsilon}\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu\chi \\ \text{标量场 } N(x): \quad & \delta N = i\epsilon\sigma^\mu\partial_\mu\bar{\chi} - i\bar{\epsilon}\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu\chi \\ \text{矢量场 } V_\mu(x): \quad & \delta V_\mu = i\epsilon\sigma_\mu\bar{\lambda} - i\bar{\epsilon}\bar{\sigma}_\mu\lambda \\ \text{外尔费米子场 } \lambda(x): \quad & \delta\lambda_\alpha = \epsilon_\alpha D + \frac{1}{2}(\sigma^{\mu\nu}\epsilon)_\alpha F_{\mu\nu} \\ \text{外尔费米子场 } \bar{\lambda}(x): \quad & \delta\bar{\lambda}_{\dot{\alpha}} = \bar{\epsilon}_{\dot{\alpha}} D + \frac{1}{2}(\bar{\sigma}^{\mu\nu}\bar{\epsilon})_{\dot{\alpha}} F_{\mu\nu} \\ \text{辅助场 } D(x): \quad & \delta D = -i\epsilon\sigma^\mu\partial_\mu\bar{\lambda} + i\bar{\epsilon}\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu\lambda \end{aligned}$$

其中 $F_{\mu\nu} = \partial_\mu V_\nu - \partial_\nu V_\mu$ 为物理分量场中矢量 V_μ 的场强, $\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{4}(\sigma^\mu \bar{\sigma}^\nu - \sigma^\nu \bar{\sigma}^\mu)$.

注意到, 矢量超场 V_μ 与矢量伴子 $\lambda, \bar{\lambda}$ 以及辅助场 D 之间的超对称变换封闭, 这意味着它们是物理上相互独立, 且可以通过超对称变换关联起来的最小自由度集, 其余的场在超对称变换下不参与其中. 因此 $V_\mu, \lambda, \bar{\lambda}, D$ 是需要保留的物理分量场, 它们共同描述了超对称规范场的所有物理性质. $C, \chi, \bar{\chi}, M, N$ 等并不能构成一个封闭的系统, 它们在超对称变换下与物理自由度没有直接的耦合, 因此可以认为它们是冗余的自由度. 通过规范固定 (WZ 规范), 可以去除这些冗余, 只保留与物理相关的自由度. 我们稍后会介绍这一规范固定.

在上一节我们提到, 如果 Λ 是一个手性超场, 则 $i(\Lambda - \Lambda^\dagger)$ 是一个矢量超场. 其作为矢量超场的物理分量场利用手性超场的物理分量场 φ, ψ, F 可以表示为:

$$\begin{aligned} C &= i(\varphi - \varphi^\dagger) \\ \chi &= \sqrt{2}\psi \\ \frac{1}{2}(M + iN) &= F \\ V_\mu &= -\partial_\mu(\varphi + \varphi^\dagger) \\ \lambda &= D = 0 \end{aligned}$$

这是一个非常简单的矢量超场. 超场的规范变换需要我们保证固定的前后整个超场依然是超对称不变的, 因此附加的部分也应当是超场, 我们找到的这一简单矢量超场便可以辅助我们完成固定规范的操作. 我们可以利用两个手性超场给出的通过以下方式定义矢量场的广义规范变换:

$$V \mapsto V - \frac{i}{2}(\Lambda - \Lambda^\dagger),$$

这会引入 V 的矢量分量的规范变换

$$V_\mu \mapsto V_\mu + \partial_\mu [\text{Re}(\varphi)] =: V_\mu - \partial_\mu \alpha.$$

这正是我们期望的矢量场规范变换形式. 然后, 我们可以选择在 Λ 中的 φ, ψ, F , 以去除 V 的某些分量, 这便是所谓的威斯-朱米诺规范 (Wess-Zumino gauge)

11.6.2 威斯-朱米诺规范 (Wess–Zumino gauge)

我们可以选择 Λ 的分量 φ, ψ, F 使得 $C = \chi = M = N = 0$, 称为威斯-朱米诺规范. 在威斯-朱米诺规范下的矢量超场形式简化为

$$V_{\text{WZ}}(x, \theta, \bar{\theta}) = (\theta \sigma^\mu \bar{\theta}) V_\mu(x) + (\theta\theta) (\bar{\theta}\bar{\lambda}(x)) + (\bar{\theta}\bar{\theta}) (\theta\lambda(x)) + \frac{1}{2} (\theta\theta) (\bar{\theta}\bar{\theta}) D(x).$$

矢量超场的物理成分包括: V_μ , 对应规范粒子 (γ, W^\pm, Z , 胶子), λ 和 $\bar{\lambda}$ 对应规范伴子, 而 D 是一个辅助场, 稍后将对其进行定义. V_{WZ} 的幂为:

$$V_{\text{WZ}}^2 = \frac{1}{2} (\theta\theta) (\bar{\theta}\bar{\theta}) V^\mu V_\mu \quad V_{\text{WZ}}^{2+n} = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

需要特别注意的是, 威斯-朱米诺规范固定得到的超场在超对称变换后矢量超场与附加的手性超场分别会进行超对称变换, 威斯-朱米诺规范固定条件要求的抵消可能不再满足. 换句话讲, 威斯-朱米诺规范固定相当于要求一个矢量超场在超对称变换下, 在特定情况下冗余的自由度全部为 0, 但再次进行超对称变换后, 预设为 0 的自由度可能被再次 "激发". 也就是说虽然超场是超对称不变的, 但是威斯-朱米诺规范固定形式不是超对称的. 总之, WZ 规范是一种特定的简化形式, 不具有全局的超对称不变性. 具体来说, 超对称性变换下 $V_{\text{WZ}} \mapsto V'_{\text{WZ}}$. 然而, 我们可以进行规范修正使得它回到 WZ 规范固定的形式上去, 即 $V'_{\text{WZ}} \mapsto V''_{\text{WZ}}$.

11.6.2.1 阿贝尔场强

回忆一下, 一个非超对称复标量场 φ 与规范场 V_μ 通过超空间导数 $D_\mu = \partial_\mu - iqV_\mu$ 耦合, 并在局域 $U(1)$ 规范变换下按如下方式变化:

$$\varphi(x) \mapsto \exp(iq\alpha(x)) \varphi(x) \quad V_\mu(x) \mapsto V_\mu(x) + \partial_\mu \alpha(x)$$

其中 q 为电荷, $\alpha(x)$ 为局域参数.

在超对称下, 这些概念推广到手性超场 Φ 和矢量超场 V . 为了从 Φ 和 V 构造一个规范不变量, 我们规定如下变换性质:

$$\left. \begin{aligned} \Phi &\mapsto \exp(iq\Lambda) \Phi \\ V &\mapsto V - \frac{i}{2} (\Lambda - \Lambda^\dagger) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \Phi^\dagger \exp(2qV) \Phi \text{ gauge invariant}$$

其中, Λ 为定义广义规范变换的手性超场. 注意, 如果 Φ 是手性的, 则 $\exp(iq\Lambda)\Phi$ 也是

手性的.

在超对称这一章之前, 我们定义过阿贝尔场强

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu V_\nu - \partial_\nu V_\mu$$

超对称的对应物是

$$W_\alpha := -\frac{1}{4} (\overline{\mathcal{D}\mathcal{D}}) \mathcal{D}_\alpha V$$

它既是手性的, 也在广义规范变换下保持不变.

11.6.2.2 非阿贝尔场强

在本节中, 超对称 $U(1)$ 规范理论被推广到非阿贝尔规范群. 规范自由度由厄米生成元 T^a 张成的李代数:

$$\Lambda = \Lambda_a T^a \quad V = V_a T^a \quad [T^a, T^b] = if^{abc} T_c$$

表示, 与阿贝尔情形相同. 我们希望保持 $\Phi^\dagger e^{2qV} \Phi$ 在规范变换 $\Phi \mapsto e^{iq\Lambda} \Phi$ 下不变, 但 Λ 和 V 的非交换性质要求 V 进行非线性变换 $V \mapsto V'$:

$$\begin{aligned} \exp(2qV') &= \exp(iq\Lambda^\dagger) \exp(2qV) \exp(-iq\Lambda) \\ \Rightarrow V' &= V - \frac{i}{2} (\Lambda - \Lambda^\dagger) - \frac{iq}{2} [V, \Lambda + \Lambda^\dagger] + \dots \end{aligned}$$

对易子由贝克-坎贝尔-豪斯多夫公式 (Baker Campbell Hausdorff formula) 描述:

$$\exp(X) \exp(Y) = \exp \left(X + Y + \frac{1}{2} [X, Y] + \dots \right).$$

在非阿贝尔理论中, 场强超场 W_α 也需要进行一些修改. 回忆非超对称杨-米尔斯理论的场强张量 $F_{\mu\nu}$ 在么正变换下变换为 $U F_{\mu\nu} U^{-1}$. 类似地, 我们定义

$$W_\alpha := -\frac{1}{8q} (\overline{\mathcal{D}\mathcal{D}}) (\exp(-2qV) \mathcal{D}_\alpha \exp(2qV))$$

并得到了一个规范协变的场强.

11.7 高维超对称

我们已经充分介绍了四维中的超对称, 但是正如上一章所讲的, 超弦的自洽维数是十维, 我们希望讨论一下十维中的超对称, 本节我们将简要提供一些高维超对称的基本内容, 而具体的十维中的超对称的技术细节则放在下一节介绍.

11.7.1 高维中的旋量

对于超过四维的费米子理论, 需要某种四维的狄拉克 γ 矩阵的类似物, 即克利福德代数在高维中的某种表示:

$$\{\Gamma^M, \Gamma^N\} = -2\eta^{MN},$$

然后便可以由此定义 Σ^{MN} 是 $SO(1, D-1)$ 的生成元:

$$\Sigma^{MN} = \frac{i}{4} [\Gamma^M, \Gamma^N]$$

其满足洛伦兹代数:

$$[\Sigma^{MN}, \Sigma^{PQ}] = i(\Sigma^{MQ}\eta^{NP} + \Sigma^{NP}\eta^{MQ} - \Sigma^{MP}\eta^{NQ} - \Sigma^{NQ}\eta^{MP}).$$

11.7.1.1 偶数维 $D = 2n$ 中的旋量表示

偶数维 $D = 2n$ 中定义 n 对上升下降算符

$$\begin{aligned} a^0 &:= \frac{i}{2} (\Gamma^0 + \Gamma^1) \implies (a^0)^\dagger = \frac{i}{2} (-\Gamma^0 + \Gamma^1) \\ a^j &:= \frac{i}{2} (\Gamma^{2j} - i\Gamma^{2j+1}) \implies (a^j)^\dagger = \frac{i}{2} (\Gamma^{2j} + i\Gamma^{2j+1}), \end{aligned}$$

其中 $j = 1, \dots, n-1$, 这些算符的厄米性质则来自于 $(\Gamma^0)^\dagger = +\Gamma^0$ 以及 $(\Gamma^{M \neq 0})^\dagger = -\Gamma^{M \neq 0}$. 从 $\eta^{MN} = \text{diag}(-1, +1, \dots, +1)$ 符号的克利福德代数可以得到, a^l 构成了一组 n 个费米子谐振子 ($l = 0, 1, \dots, n-1$).

$$\{a^i, (a^j)^\dagger\} = \delta^{ij} \quad \{a^i, a^j\} = \{(a^i)^\dagger, (a^j)^\dagger\} = 0.$$

设 $|0\rangle$ 表示真空态, 使得 $a^i |0\rangle = 0$, 那么存在如下的态:

states	$ 0\rangle$	$(a^i)^\dagger 0\rangle$	$(a^i)^\dagger (a^j)^\dagger 0\rangle$	\dots	$(a^n)^\dagger (a^{n-1})^\dagger \dots (a^1)^\dagger 0\rangle$
number	1	n	$\binom{n}{2}$	\dots	1

态的总数为:

$$1 + n + \binom{n}{2} + \dots + 1 = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n = 2^{\frac{D}{2}}.$$

旋量表示中的状态由 $n = D/2$ 个量子数 $s_i = \pm \frac{1}{2}$ 定义:

$$|s_0, \dots, s_{n-1}\rangle := (a^0)^\dagger (s_0 + \frac{1}{2}) \dots (a^{n-1})^\dagger (s_{n-1} + \frac{1}{2}) |0\rangle.$$

注意到, 生成元 $\Sigma^{(2i)(2i+1)}$ 彼此对易. 因此, 我们可以将以下算符全部进行对角化:

$$\begin{aligned} (a^0)^\dagger a^0 - \frac{1}{2} &= \frac{1}{4} [\Gamma^0, \Gamma^1] = -i\Sigma^{01} \\ (a^j)^\dagger a^j - \frac{1}{2} &= \frac{i}{4} [\Gamma^{2j}, \Gamma^{2j+1}] = \Sigma^{(2j)(2j+1)} \end{aligned}$$

再令上面定义的 $|s_0, \dots, s_{n-1}\rangle$ 同时成为以下算符的本征态:

$$S^i := \begin{cases} (a^0)^\dagger a^0 - \frac{1}{2} = -i\Sigma^{01} & : i = 0 \\ (a^i)^\dagger a^i - \frac{1}{2} = \Sigma^{(2i)(2i+1)} & : i = 1, \dots, n-1 \end{cases}$$

即满足以下条件:

$$S^i |s_0, \dots, s_{n-1}\rangle = s_i |s_0, \dots, s_{n-1}\rangle.$$

我们将这些态 $|s_0, \dots, s_{n-1}\rangle$ 作为高维中的狄拉克旋量. 以四维为例, 在 $D = 4$ 维空间中, 对应的 n 值为 $n = 2$, 态 $|\pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{2}\rangle$ 形成一个 4 分量狄拉克旋量.

此外, 在偶数维情况下, 以上表示是可约的, 因为有 γ^5 的推广:

$$\Gamma^{2n+1} := i^{n-1} \Gamma^0 \Gamma^1 \dots \Gamma^{2n-1},$$

满足

$$\{\Gamma^{2n+1}, \Gamma^M\} = 0 \quad [\Gamma^{2n+1}, \Sigma^{MN}] = 0 \quad (\Gamma^{2n+1})^2 = \mathbb{1}.$$

而我们又:

$$\begin{aligned} 2^n S^0 S^1 \dots S^{n-1} &= 2^n \frac{1}{4} \left(+\frac{i}{4} \right)^{n-1} [\Gamma^0, \Gamma^1] \dots [\Gamma^{2n-2}, \Gamma^{2n-1}] \\ &= i^{n-1} \Gamma^0 \Gamma^1 \dots \Gamma^{2n-1} = \Gamma^{2n+1}. \end{aligned}$$

这意味着所有的 $|s_0, \dots, s_{n-1}\rangle$ 都是 Γ^{2n+1} 的本征态:

$$\Gamma^{2n+1} |s_0, \dots, s_{n-1}\rangle = \pm |s_0, \dots, s_{n-1}\rangle$$

当 $s_i = -\frac{1}{2}$ 的个数为偶数时, 对应本征值为 $+1$; 当 $s_i = -\frac{1}{2}$ 的个数为奇数时, 对应本征值为 -1 . 这个性质便是我们熟知的手性, 具有确定手性的旋量称为外尔旋量.

11.7.1.2 奇数维 $D = 2n + 1$ 中的旋量表示

只需将 $\Gamma^{2n+1} = i^{n-1} \Gamma^0 \Gamma^1 \dots \Gamma^{2n-1}$ 添加到 $D = 2n$ 维度中的 Γ^M 矩阵中. 根据其性质 $\{\Gamma^{2n+1}, \Gamma^M\} = 0$ 和 $(\Gamma^{2n+1})^2 = 1$, 它将 $D = 2n$ 维度中的 Clifford 代数完美地扩展到 $D = 2n + 1$, 并使用扩展的度规 $\eta^{\mu\nu} = (-1, +1, \dots, +1)$.

由于没有额外的 Γ 矩阵可以与 Γ^{2n+1} 配对形成新的 a^i 算符, 因此其表示与 $D = 2n$ 时相同, 但现在是不可约的. 除包含 $SO(1, 2n - 1)$ 的生成元外, $SO(1, 2n)$ 的新生成元由 $\frac{i}{2} \Gamma^M \Gamma^{2n+1}$ 给出, 其中 $M = 0, 1, \dots, 2n - 1$. 由于奇数维度没有 γ^5 的类似物, 因此不存在手性. 旋量表示的维度为 $2^{(D-1)/2}$.

通常, 定义 N_D 表示旋量分量的数量:

$$N_D := \begin{cases} 2^n = 2^{D/2} & : D = 2n \text{ even} \\ 2^n = 2^{(D-1)/2} & : D = 2n + 1 \text{ odd} \end{cases}$$

11.7.1.3 Majorana 旋量

现在让我们介绍闵可夫斯基时空中的实旋量. 在无穷小洛伦兹变换下, 旋量 ψ 变换为 $\psi' = \psi + i\omega_{MN}\Sigma^{MN}\psi$. 由于 Σ^{MN} 通常是复数, 因此 ψ 与其复共轭 ψ^* 之间的关系未必是洛伦兹不变的.

而 $\psi \leftrightarrow \psi^*$ 之间的关系称为马约拉纳条件 (Majorana condition). 它必须具有 $\psi^* = CT^0\psi$ 的形式, 其中 C 是荷共轭矩阵. 一致性要求 $(CT^0)^*CT^0 = 1$, 这在 $D = 0, 1, 2, 3, 4 \bmod 8$ 维中是可能出现. 换句话说, 在超弦可能的维度中, $D = 5, 6, 7$ 时不允许出现马约拉纳条件.

如果 $D = 0, 1, 2, 3, 4 \bmod 8$ 并且外尔表示与自身共轭⁶, 则可以对外尔旋量施加马约拉纳条件.

首先, 外尔旋量存在于 $D = 2n$ 的偶数维中, 于是要求 $D = 0, 2, 4 \bmod 8$. 接下来, 通过分析手征矩阵的复共轭

$$(\Gamma^{2n+1})^* = (-1)^{n+1} C^{-1} \Gamma_0^{-1} \Gamma^{2n+1} \Gamma_0 C,$$

结果表明, 只有当 $(-1)^{n+1} = +1$ 时, 电荷共轭才能保持旋量的手性不变. 而如果 n 是偶数, 即在 $D = 4, 8, 12, \dots$ 维度中, 两个不等价的外尔表示彼此互为复共轭, 因此手性会交换而非不变. 那么此时可以施加外尔或马约拉纳条件, 但不能同时施加! 最终我们得到, 在 $D = 2 \bmod 8$ 的维度中, 外尔表示自共轭并与马约拉纳条件相容, 因此在 $D = 2$ 和 $D = 10$ 的维度中才可能存在马约拉纳-外尔旋量.

11.7.2 高维中的超对称代数

在 D 维中, 超对称 (SUSY) 代数包含生成元 M_{MN}, P_M, Q_α , 其中最后一个是 D 维中的旋量. 该代数具有与 4 维相同的结构, 其中玻色生成元定义了更高维度中的庞加莱代数, 并且

$$\{Q_\alpha, Q_\beta\} = a_{\alpha\beta}^M P_M + Z_{\alpha\beta}$$

其中 $a_{\alpha\beta}^M$ 是常数, 而中心荷 $Z_{\alpha\beta}$ 现在也可以包括膜上的荷. 这是 $D > 4$ 的超对称代数对 $D = 4$ 超对称代数的推广. 庞加莱代数的一个新特征是所有生成元 $M^{(2j)(2j+1)}$ 彼此对易, 因此可以同时对角化, 正如我们在更高维度旋量表示的讨论中看到的洛伦兹生成元那样. 于是我们现在可以定义几个“自旋”, 作为这些算符的本征值. 特别相关的是生

⁶实际就是复共轭结果仍为外尔表示且手性不变.

成元 M^{01} . 它用于通过下式定义算符 \mathcal{O} 的权 (weight) w

$$[M^{01}, \mathcal{O}] = -iw \mathcal{O}$$

其中, 算符 \mathcal{O} 与其复共轭 \mathcal{O}^* 具有相同的权.

11.7.2.1 超对称代数在高维度中的表示

考虑无质量态的动量 $P^\mu = (E, E, 0, \dots, 0)$, 其小群为 $SO(D-2)$. 我们定义自旋为表示中 M_{MN} 的最大本征值. 注意到对于无质量粒子的动量 $P^1 - P^0 = 0$, 并且有:

$$[M^{01}, P^1 \pm P^0] = \mp i(P^1 \pm P^0).$$

因此 $P^1 \pm P^0$ 的权为 $w = \pm 1$. 由于 $P^1 - P^0$ 为零, 权 $w = -1$ 可以被排除, 我们只需考虑两个 Q 都具有权 $w = +\frac{1}{2}$ 的反对易子 $\{Q, Q\}$ 的组合即可.

因此, 如果我们从形式为

$$Q_\alpha = |\pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{2}, \dots, \pm \frac{1}{2}\rangle \quad \alpha = 1, \dots, N_D$$

的任意旋量 Q_α 开始, 其中 N_D 表示狄拉克分量个数 (偶数维 $N_D = 2^{D/2}$, 奇数维 $N_D = 2^{(D-1)/2}$). 那么, 要求权为 $+\frac{1}{2}$ 便意味着:

$$[M^{01}, Q_\alpha] = -\Sigma^{01} Q_\alpha = -iS^0 Q_\alpha \stackrel{!}{=} -\frac{i}{2} Q_\alpha,$$

因此 Q_α 必须具有以下形式

$$Q_\alpha \Big|_{w=+\frac{1}{2}} = |+\frac{1}{2}, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{2}, \dots, \pm \frac{1}{2}\rangle \quad \alpha = 1, \dots, \frac{N_D}{2}.$$

注意到第一个分量被限制为正, 这时观察无质量情况下 Q_α 的分量数, 其变为 $\frac{N_D}{2} = 2^{D/2-1}$.

此外, 我们可以根据 M_{23} (即 4 维中对应自旋的洛伦兹生成元) 的本征值将 Q 拆分为 Q^+ 和 Q^- , 它们构成的代数具有 $\{Q^+, Q^+\} = \{Q^-, Q^-\} = 0$ 和 $\{Q^+, Q^-\} \neq 0$ 的形式, 对应于产生与湮灭算符. 为了理解这一点, 可以考虑对易关系

$$[M^{(2j)(2j+1)}, Q_{(\alpha} Q_{\beta)}] = -Q_{(\alpha} S^j Q_{\beta)} - S^j Q_{(\alpha} Q_{\beta)} = -(s_j^{(\alpha)} + s_j^{(\beta)}) Q_{(\alpha} Q_{\beta)}.$$

利用超庞加莱代数, 我们还可以证明这个表达式是 P^2, \dots, P^{D-1} 的线性组合, 在我们考虑的情形 $P^\mu = (E, E, 0, \dots, 0)$ 中它们全为零. 因此, 所有组合 $s_j^{(\alpha)} + s_j^{(\beta)}$ 必须为零, 剩下的唯一非零反对易子为 $\{Q_\alpha^+, Q_{\beta=\alpha}^-\}$.

这意味着多重态可以从其中的一个螺旋度为 λ , 并被 Q^- 算符湮灭, 即满足 $Q^-|\lambda\rangle = 0$ 的态 $|\lambda\rangle$ 开始构造, 而多重态中的其他态通过 Q^+ 的作用生成. 因此它们的形式为:

$$Q_\alpha^+ \Big|_{w=+\frac{1}{2}} = |+\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}, \dots, \pm\frac{1}{2}\rangle \quad \alpha = 1, \dots, \frac{N_D}{4}$$

总数为 $\frac{N_D}{4} = 2^{D/2-2}$.

给定螺旋度为 λ 的某态 $|\lambda\rangle$ (即 $M_{23}|\lambda\rangle = \lambda|\lambda\rangle$), 任何 Q_α^+ 的作用都会降低 M^{23} 的本征值:

$$\begin{aligned} M^{23} Q_\alpha^+ |\lambda\rangle &= [M^{23}, Q_\alpha^+] |\lambda\rangle + Q_\alpha^+ M^{23} |\lambda\rangle = -\Sigma^{23} Q_\alpha^+ |\lambda\rangle + \lambda Q_\alpha^+ |\lambda\rangle \\ &= \left(\lambda - \frac{1}{2}\right) Q_\alpha^+ |\lambda\rangle \end{aligned}$$

因此通过作用于 $Q_\alpha^+ \Big|_{w=+\frac{1}{2}}$ 可以得到以下螺旋度:

$$|\lambda\rangle, |\lambda - \frac{1}{2}\rangle, \dots, |\lambda - \frac{1}{2} \cdot \frac{N_D}{4}\rangle.$$

由此可以得出出现的 λ 的范围为

$$\lambda_{\max} - \lambda_{\min} = \lambda - \left(\lambda - \frac{N_D}{8}\right) = \frac{N_D}{8},$$

于是螺旋度 $|\lambda| \leq 2$ 的条件便等价于要求 $N_D \leq 32$. 但考虑到 $N_D = 2^{\frac{D}{2}}, 2^{\frac{D-1}{2}}$ 分别对应于偶数和奇数维, 这意味着时空维数最大为 $D = 10, 11$.

注意到这个论证与先前证明 4 维中最大超对称数为 $\mathcal{N} = 8$ 的论证均用到了螺旋度的限制条件, 因此二者非常相似. 我们稍后将看到, $\mathcal{N} = 8$ 超引力正是从 $D = 10$ 和 $D = 11$ 维度的超对称理论中得到的.

- $D = 11$ 仅有 $\mathcal{N} = 1$ 的超对称可能出现. 唯一的多重态由以下场组成:

$$\underbrace{g_{\mu\nu}}_{\text{引力子}} \quad \underbrace{\psi_\mu^\alpha}_{\text{引力伴子}} \quad \underbrace{A_{\mu\nu\rho}}_{\text{非手性反对称张量}}$$

为了计算每个场的 (在壳) 自由度, 我们需要利用小群 $SO(D-2)$ 进行分析. 在 D

维中的引力子仍然是小群的对称无迹表示, 携带 $\frac{(D-2)(D-1)}{2} - 1$ 个分量, 在 $D = 11$ 的情况下为 $45 - 1 = 44$ 个分量. 在 D 维中, 秩为 $p + 1$ 的反对称张量具有 $\binom{D-2}{p+1}$ 个自由度, 对于 $A_{\mu\nu\rho}$ ($p + 1 = 3$ 的情况), 有 $\binom{9}{3} = 84$ 个自由度.

对于引力伴子 ψ_α^μ , 我们有 $2^{(D-3)/2} \cdot (D-2) - 2^{(D-3)/2}$ 个独立的分量: 第一项是旋量分量和引力旋量的矢量分量的乘积 (因为它同时携带两个指标), 减去的第二项类似于引力子的迹, 我们去掉 $2^{(D-3)/2}$ 个自旋为 $\frac{1}{2}$ 粒子的自由度. 以 $su(2)$ 表示为例, 进行表示的直和分解 $(1) \otimes (\frac{1}{2}) = (\frac{3}{2}) \oplus (\frac{1}{2})$, 上面所谓的减去的自由度相当于等号右侧的自旋 $\frac{1}{2}$ 部分被舍弃. 更一般地, 只有当矢-旋量 (vector spinor) Ψ_μ^α 与任何不变量张量 (例如度规和高维的 Γ 矩阵) 的缩并为零时, 矢-旋量才构成不可约表示. 如果伽玛迹 (gamma trace) $\Psi_\mu^\alpha \Gamma_{\alpha\beta}^\mu$ 非零, 那么伽玛迹自身就是一个低维的不可约表示, 这一表示便拆分为伽玛迹以及与之正交的部分, 正交的部分则重新充当新的不可约表示. 在 $D = 11$ 中, 引力旋量的分量为 $9 \cdot 2^4 - 2^4 = 128$, 与玻色自由度的数量 $84 + 44 = 128$ 相匹配.

- $D = 10$
允许 $\mathcal{N} = 2$:

IIA	$g_{\mu\nu}$	$2 \times \psi_\mu^\alpha$	$B_{\mu\nu}$	ϕ	$A_{\mu\nu\rho}$	λ
IIB	$g_{\mu\nu}$	$2 \times \psi_\mu^\alpha$	$2 \times B_{\mu\nu}$	$2 \times \phi$	$A_{\mu\nu\rho\sigma}^\dagger$	λ
I	$(g_{\mu\nu} \quad B_{\mu\nu} \quad \phi \quad \psi_\mu^\alpha)$	$(A_\mu \quad \lambda)$	(手性)			

关于自旋为 0 或 1 的反对称张量 $A_{\mu_1 \dots \mu_{p+1}}$, 我们知道:

- A_μ 与粒子的耦合为 $\int A^\mu dx_\mu$, 其中 dx_μ 指的是世界线
- $A_{\mu\nu}$ 与弦的耦合为 $\int A^{\mu\nu} dx_\mu \wedge dx_\nu$ (世界 sheet)
- $A_{\mu\nu\rho}$ 与膜的耦合为...
- $A_{\mu_1 \dots \mu_{p+1}}$ 与 p -膜的耦合

耦合取决于物体的荷:

物体	荷	耦合对象
粒子	q	A_μ
弦	q_μ	$A_{\mu\nu}$
p 膜	$q_{\mu_1 \dots \mu_p}$	$A_{\mu_1 \dots \mu_{p+1}}$

荷是超庞加莱代数中出现的中心荷, 这正是本节开头关于高维庞加莱代数中心荷所讨

论的:

$$\{Q, Q\} \propto aP + b^{\mu_1 \dots \mu_p} q_{\mu_1 \dots \mu_p}$$

11.7.3 维数约化

以圈紧化为例, 让我们回顾一下将任意大于 4 的维数降至 $d = 4$ 的一般程序. 回忆在 5 维中的标量的例子 $M_5 = \mathbb{M}_4 \times S^1$ (其中 S^1 的半径为 R), 如果 φ 是无质量的, 此时 5 维场可以替换为 $d = 4$ 中的无限多个场:

$$\partial_M \partial^M \varphi = 0 \quad \Rightarrow \quad \partial_\mu \partial^\mu \varphi_n - \frac{n^2}{R^2} \varphi_n = 0,$$

则相对于 S^1 维度的傅里叶模式 φ_n 具有质量 $\frac{n}{R}$.

而对于超对称中的维数缩减, 我们仅保留 $n = 0$ 的模⁷,

$$\begin{aligned} \varphi(x^M) &\mapsto \varphi(x^\mu) \\ A_M(x^M) &\mapsto A_\mu(x^\mu), \quad \underbrace{A_m(x^\mu)}_{\text{标量}} \quad m = 4, \dots, D-1 \\ B_{MN} &\mapsto B_{\mu\nu}, \quad \underbrace{B_{\mu n}}_{\text{矢量}}, \quad \underbrace{B_{mn}}_{\text{标量}} \\ \underbrace{\psi}_{2^n} &\mapsto \underbrace{\psi}_{\frac{1}{4}2^n \text{ 个 } 4 \text{ 维旋量}}. \end{aligned}$$

例如考虑从 $D = 11$ 降至 $d = 4$ 的情况: 基本场是引力子 g_{MN} , 它有 $\frac{9 \cdot 10}{2} - 1 = 44$ 个自由度, 引力旋量 ψ_M^α 有 $9 \cdot 2^{\frac{9-1}{2}} - 2^{\frac{9-1}{2}} = 8 \cdot 16 = 128$ 个分量. 最后, 反对称张量 A_{MNP} , 有 $\binom{9}{3} = 84$ 个自由度. 注意我们有 128 个玻色自由度和 128 个费米自由度. 维数缩减到 $d = 4$ 导致:

$$\begin{aligned} g_{MN} &\mapsto \underbrace{g_{\mu\nu}}_{\text{引力子}} \quad \underbrace{g_{\mu m}}_{7 \text{ 矢量}} \quad \underbrace{g_{mn}}_{\frac{7 \cdot 8}{2} = 28 \text{ 标量}} \\ A_{MNP} &\mapsto A_{\mu\nu\rho} \quad \underbrace{A_{\mu\nu m}}_{7 \text{ 张量 (对偶于标量)}} \quad \underbrace{A_{\mu mn}}_{21 \text{ 矢量}} \quad \underbrace{A_{mnp}}_{\frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3!} = 35 \text{ 标量}} \\ \psi_M^\alpha &\mapsto \underbrace{\psi_\mu^\alpha}_{\frac{32}{4} = 8} \quad \underbrace{\psi_m^\alpha}_{7 \cdot 8 = 56 \text{ 费米旋量}} \end{aligned}$$

⁷由于维数约化中, 讨论的维度变化频繁, 为方便书写以及讨论, 本节我们不继续沿用之前的指标记号, 不过会标注指标取值范围.

回忆一下, 在 4 维中, 无质量粒子小群为 $SO(2)$, 一个三指标反对称张量 $A_{\mu\nu\rho}$ 不携带任何自由度, 而二指标反对称张量 $A_{\mu\nu m}$ 对偶于标量. 我们最终得到的谱与 4 维中的 $\mathcal{N} = 8$ 超引力相同:

数量	螺旋度	粒子类型	$d = 4$ 在壳自由度
1	2	引力子	$1 \cdot \left(\frac{(4-2)(4-1)}{2} - 1 \right) = 1 \cdot 2 = 2$
8	$\frac{3}{2}$	引力伴子	$8 \cdot (2^{(4-2)/2} \cdot (4-2) - 2^{(4-2)/2}) = 8 \cdot 2 = 16$
28	1	矢量	$28 \cdot (4-2) = 28 \cdot 2 = 56$
56	$\frac{1}{2}$	费米子	$56 \cdot 2^{\frac{4-2}{2}} = 56 \cdot 2 = 112$
70	0	标量	$70 \cdot 1 = 70$

11.8 十维靶空间的超对称

本节我们将介绍十维的超杨-米尔斯 (SYM) 理论. SYM 是 D 维 SYM 理论中最简单的一种; 其谱包含仅由胶子和胶伴子组成的场, 这两者通过 16 个超对称荷相关联, 这些超对称荷构成了 $SO(1,9)$ 的马约拉纳-外尔旋量. 十维 SYM 的超庞加莱协变形式是开超弦无质量态纯旋量表述的支柱之一. 实际上, SYM 超场及其多粒子推广在计算开超弦振幅中起到了关键作用. 因此, 详细介绍十维的 SYM 理论是非常有益的.

与在上一节十一维超引力的维数约化类似, 十维 SYM 理论进行维数约化会产生低维中各种具有最大超对称的杨-米尔斯理论, 包括著名的四维 $\mathcal{N} = 4$ 理论. 因此, 对十维理论的更好理解也可以帮助我们理解低维 SYM.

11.8.1 十维 SYM

为了描述十维 SYM 中的胶子和胶伴子态, 引入了李代数取值的超场联络 $A_\alpha = A_\alpha(X, \theta)$ 和 $A_\mu = A_\mu(X, \theta)$, 以及超协变导数,

$$\nabla_\alpha := D_\alpha - A_\alpha, \quad \nabla_\mu := \partial_\mu - A_\mu, \quad (11.8.99)$$

其中普通导数算符是 $\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial X^\mu}$, 超空间导数为:

$$D_\alpha := \frac{\partial}{\partial \theta^\alpha} + \frac{1}{2}(\gamma^\mu \theta)_\alpha \partial_\mu \quad (11.8.100)$$

满足 $\{D_\alpha, D_\beta\} = \gamma_{\alpha\beta}^\mu \partial_\mu$. 超协变导数满足如下限制条件:

$$\{\nabla_\alpha, \nabla_\beta\} = \gamma_{\alpha\beta}^\mu \nabla_\mu. \quad (11.8. 101)$$

11.8.1.1 非线性运动方程

约束条件 eq. (11.8. 101) 及其相关的比安基恒等式 (Bianchi identities) 包含了如下非线性运动方程:

$$\begin{aligned} \{\nabla_\alpha, \nabla_\beta\} &= \gamma_{\alpha\beta}^\mu \nabla_\mu, & [\nabla_\alpha, \nabla_\mu] &= -(\gamma_\mu W)_\alpha, \\ \{\nabla_\alpha, W^\beta\} &= \frac{1}{4}(\gamma^{\mu\nu})_\alpha{}^\beta F_{\mu\nu}, & [\nabla_\alpha, F^{\mu\nu}] &= (W^{[m} \gamma^{n]})_\alpha, \end{aligned} \quad (11.8. 102)$$

其中场强与超场强分别定义为:

$$F_{\mu\nu} := -[\nabla_\mu, \nabla_\nu], \quad W_\mu^\alpha := [\nabla_\mu, W^\alpha], \quad (11.8. 103)$$

其中本书中对 k 个指标的 (反) 对称化约定不包含因子 $\frac{1}{k!}$, 例如 $T^{[\mu\nu]} = T^{\mu\nu} - T^{\nu\mu}$. 超场 $F^{\mu\nu}$ 和 W^α 分别是胶子和胶伴子的场强.

11.8.1.2 规范不变性

方程 eq. (11.8. 102) 在超场联络的无穷小规范变换下保持不变, 其中变换参数是李代数取值的超场 $\Omega = \Omega(X, \theta)$.

$$\delta_\Omega A_\alpha = [\nabla_\alpha, \Omega], \quad \delta_\Omega A_\mu = [\nabla_\mu, \Omega] \quad (11.8. 104)$$

于是, 其场强的规范变换为:

$$\delta_\Omega W^\alpha = [\Omega, W^\alpha], \quad \delta_\Omega F^{\mu\nu} = [\Omega, F^{\mu\nu}], \quad \delta_\Omega W_\mu^\alpha = [\Omega, W_\mu^\alpha]. \quad (11.8. 105)$$

此外, 从 eq. (11.8. 102) 可以推导出无质量狄拉克方程与杨-米尔斯方程:

$$\gamma_{\alpha\beta}^\mu [\nabla_\mu, W^\beta] = 0, \quad [\nabla_\mu, F^{\mu\nu}] = \gamma_{\alpha\beta}^\nu \{W^\alpha, W^\beta\}. \quad (11.8. 106)$$

为说明 eq. (11.8. 102) 可以推导无质量狄拉克方程, 首先将 eq. (11.8. 101) 代入

$$\gamma_{\alpha\beta}^{\mu} [\nabla_{\mu}, W^{\beta}] = [\{\nabla_{\alpha}, \nabla_{\beta}\}, W^{\beta}] \quad (11.8. 107)$$

$$= - [\{W^{\beta}, \nabla_{\alpha}\}, \nabla_{\beta}] - [\{\nabla_{\beta}, W^{\beta}\}, \nabla_{\alpha}] \quad (11.8. 108)$$

代入 eq. (11.8. 102), 我们得到:

$$\gamma_{\alpha\beta}^{\mu} [\nabla_{\mu}, W^{\beta}] = -\frac{1}{4}(\gamma^{\mu\nu})_{\alpha}{}^{\beta} [F_{\mu\nu}, \nabla_{\beta}] \quad (11.8. 109)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{4}(\gamma^{\mu\nu}\gamma^{\nu}W^{\mu})_{\alpha} - \frac{1}{4}(\gamma^{\mu\nu}\gamma^{\mu}W^{\nu})_{\alpha} \\ &= \frac{9}{2}\gamma_{\alpha\beta}^{\mu} [\nabla_{\mu}, W^{\beta}], \end{aligned} \quad (11.8. 110)$$

在这里我们使用了 $\gamma^{\mu\nu}\gamma^{\nu} = 9\gamma^{\mu}$, $\gamma^{\mu\nu}\gamma^{\beta} = 0$ 和 eq. (11.8. 103) 得到最后一行, 于是我们得到 $\gamma_{\alpha\beta}^{\mu} [\nabla_{\mu}, W^{\beta}] = 0$. 而为了得到杨-米尔斯方程, 我们可以计算狄拉克方程与 $\gamma_{\nu}^{\alpha\delta}\nabla_{\delta}$ 的反对易算符, 并使用雅可比恒等式。

$$0 = \gamma_{\nu}^{\alpha\delta}\gamma_{\alpha\beta}^{\mu} \{\nabla_{\delta}, [\nabla_{\mu}, W^{\beta}]\} \quad (11.8. 111)$$

$$\begin{aligned} &= \gamma_{\nu}^{\alpha\delta}\gamma_{\alpha\beta}^{\mu} \{W^{\beta}, [\nabla_{\delta}, \nabla_{\mu}]\} + \gamma_{\nu}^{\alpha\delta}\gamma_{\alpha\beta}^{\mu} [\nabla_{\mu}, \{W^{\beta}, \nabla_{\delta}\}] \\ &= -\gamma_{\nu}^{\alpha\delta}\gamma_{\alpha\beta}^{\mu} (\gamma_{\mu})_{\delta\sigma} \{W^{\beta}, W^{\sigma}\} + \frac{1}{4}\gamma_{\nu}^{\alpha\delta}\gamma_{\alpha\beta}^{\mu} (\gamma^{rs})_{\delta}{}^{\beta} [\nabla_{\mu}, F_{rs}] \\ &= 8\gamma_{\beta\sigma}^{\nu} \{W^{\beta}, W^{\sigma}\} - 8[\nabla_{\mu}, F^{\mu\nu}], \end{aligned} \quad (11.8. 112)$$

为了到达最后一行, 我们使用了克里福德代数 eq. (11.1. 12) 和 $\gamma^{\mu}\gamma_{\mu} = 10$ 得到 $-(\gamma^{\mu}\gamma^{\nu}\gamma_{\mu})_{\beta\sigma} = 8\gamma_{\beta\sigma}^{\nu}$, 并对 γ 矩阵求迹得到 $\frac{1}{4}\text{Tr}(\gamma_{\mu}\gamma_{\nu}\gamma^{rs}) = 4(\delta_{\nu}^r\delta_{\mu}^s - \delta_{\mu}^r\delta_{\nu}^s)$ 。

11.8.1.3 非线性运动方程

运动方程 eq. (11.8. 102) 也可以重写为

$$\{\nabla_{\alpha}, A_{\beta}\} + \{\nabla_{\beta}, A_{\alpha}\} = \gamma_{\alpha\beta}^{\mu} A_{\mu} - \{A_{\alpha}, A_{\beta}\}, \quad (11.8. 113)$$

$$[\nabla_{\alpha}, A_{\mu}] = [\partial_{\mu}, A_{\alpha}] + (\gamma_{\mu}W)_{\alpha},$$

$$\{\nabla_{\alpha}, W^{\beta}\} = \frac{1}{4}(\gamma^{\mu\nu})_{\alpha}{}^{\beta} F_{\mu\nu}, \quad (11.8. 114)$$

$$[\nabla_{\alpha}, F^{\mu\nu}] = (W^{[m}\gamma^{n]})_{\alpha}. \quad (11.8. 115)$$

在使用定义 eq. (11.8. 99) 后, 这些方程变为

$$\begin{aligned}\{D_\alpha, A_\beta\} + \{D_\beta, A_\alpha\} &= \gamma_{\alpha\beta}^\mu A_\mu + \{A_\alpha, A_\beta\}, \\ [D_\alpha, A_\mu] &= [\partial_\mu, A_\alpha] + (\gamma_\mu W)_\alpha + [A_\alpha, A_\mu], \\ \{D_\alpha, W^\beta\} &= \frac{1}{4}(\gamma^{\mu\nu})_\alpha{}^\beta F_{\mu\nu} + \{A_\alpha, W^\beta\}, \\ [D_\alpha, F^{\mu\nu}] &= (W^{[m}\gamma^{n]})_\alpha + [A_\alpha, F^{\mu\nu}],\end{aligned}$$

为了方便后续讨论, 我们使用记号 K 来表示包含这些超场的集合中的任意一个:

$$K \in \{A_\alpha, A_\mu, W^\alpha, F^{\mu\nu}\}. \quad (11.8. 116)$$

11.8.2 线性化超场

散射振幅中外腿规范多重态的渐近态通过线性化十维 SYM 来描述. 具体来说, 这是通过忽略运动方程 eq. (11.8. 115) 中的二次项得到的, 结果为:

$$\begin{aligned}D_\alpha A_\beta^i + D_\beta A_\alpha^i &= \gamma_{\alpha\beta}^\mu A_\mu^i, & D_\alpha A_\mu^i &= (\gamma_\mu W_i)_\alpha + \partial_\mu A_\alpha^i, \\ D_\alpha W_i^\beta &= \frac{1}{4}(\gamma^{\mu\nu})_\alpha{}^\beta F_{\mu\nu}^i, & D_\alpha F_{\mu\nu}^i &= \partial_{[\mu}(\gamma_{\nu]} W_i)_{\alpha}.\end{aligned} \quad (11.8. 117)$$

此外, 规范变换 eq. (11.8. 104) 的线性化形式为

$$\delta_\Omega A_\alpha = D_\alpha \Omega, \quad \delta_\Omega A_\mu = \partial_\mu \Omega, \quad (11.8. 118)$$

超场用自然数 i 来标记, 这些数字是参与散射过程的第 i^{th} 个外部态的单粒子指标. 此外, 线性化方程 eq. (11.8. 117) 描述了指标为 i 的单个 SYM 粒子的运动方程.

11.8.2.1 超场的 θ 展开

规范变换 (11.8. 104) 的线性化形式可用于选取规范使得 $\theta^\alpha A_\alpha^i = 0$, 其中 θ 的依赖关系可以通过费米子的幂级数展开来表示, 我们前面已经用四维中的标量超场举过例子. 在通过剥离掉平面波, 即 $e^{ik_i \cdot X}$ 以去除线性化超场对玻色坐标 X^μ 的依赖性, 其中动量满足在壳条件 $k_i^2 = 0$. 超场的不同 θ 阶次会分别对应胶伴子波函数 χ_i^α 或胶子偏振矢量 e_i^μ , 或者它们相关的线性化场强, 例如:

$$f_i^{\mu\nu} = k_i^\mu e_i^\nu - k_i^\nu e_i^\mu. \quad (11.8. 119)$$

具体来说:

$$\begin{aligned}
A_\alpha^i(X, \theta) &= \left\{ \frac{1}{2}(\theta\gamma_\mu)_\alpha e_i^\mu + \frac{1}{3}(\theta\gamma_\mu)_\alpha(\theta\gamma^\mu\chi_i) - \frac{1}{32}(\theta\gamma^\mu)^\alpha(\theta\gamma_{mnp}\theta)f_i^{np} \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{60}(\theta\gamma^\mu)_\alpha(\theta\gamma_{mnp}\theta)k_i^\nu(\chi_i\gamma^p\theta) + \frac{1}{1152}(\theta\gamma^\mu)_\alpha(\theta\gamma_{mnp}\theta)(\theta\gamma^p_{qr}\theta)k_i^\nu f_i^{qr} + \dots \right\} e^{k_i \cdot X}, \\
A_i^\mu(X, \theta) &= \left\{ e_i^\mu + (\theta\gamma^\mu\chi_i) - \frac{1}{8}(\theta\gamma^\mu_{pq}\theta)f_i^{pq} + \frac{1}{12}(\theta\gamma^\mu_{np}\theta)k_i^\nu(\chi_i\gamma^p\theta) \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{192}(\theta\gamma^\mu_{nr}\theta)(\theta\gamma^r_{pq}\theta)k_i^\nu f_i^{pq} - \frac{1}{480}(\theta\gamma^\mu_{nr}\theta)(\theta\gamma^r_{pq}\theta)k_i^\nu k_i^p(\chi_i\gamma^q\theta) + \dots \right\} e^{k_i \cdot X}, \\
W_i^\alpha(X, \theta) &= \left\{ \chi_i^\alpha + \frac{1}{4}(\theta\gamma_{\mu\nu})^\alpha f_i^{\mu\nu} - \frac{1}{4}(\theta\gamma_{\mu\nu})^\alpha k_i^\mu(\chi_i\gamma^n\theta) - \frac{1}{48}(\theta\gamma_\mu^q)^\alpha(\theta\gamma_{qnp}\theta)k_i^\mu f_i^{np} \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{96}(\theta\gamma_\mu^q)^\alpha(\theta\gamma_{qnp}\theta)k_i^\mu k_i^\nu(\chi_i\gamma^p\theta) - \frac{1}{1920}(\theta\gamma_\mu^r)^\alpha(\theta\gamma_{nr}^s\theta)(\theta\gamma_{spq}\theta)k_i^\mu k_i^\nu f_i^{pq} + \dots \right\} e^{k_i \cdot X}, \\
F_i^{\mu\nu}(X, \theta) &= \left\{ f_i^{\mu\nu} - k_i^{[m}(\chi_i\gamma^{n]} \theta) + \frac{1}{8}(\theta\gamma_{pq}^{[m}\theta)k_i^{n]} f_i^{pq} - \frac{1}{12}(\theta\gamma_{pq}^{[m}\theta)k_i^{n]} k_i^p(\chi_i\gamma^q\theta) \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{192}(\theta\gamma_{ps}^{[m}\theta)k_i^{n]} k_i^p f_i^{qr}(\theta\gamma^s_{qr}\theta) + \frac{1}{480}(\theta\gamma_{ps}^{[m}\theta)k_i^{n]} k_i^p k_i^q(\chi_i\gamma^r\theta)(\theta\gamma^s_{qr}\theta) + \dots \right\} e^{k_i \cdot X},
\end{aligned}
\tag{11.8. 120}$$

这里只写出了前五阶, 我们也可以将 $A_i^\mu(X, \theta)$ 的全部展开写为:

$$A_i^\mu(X, \theta) = \left\{ (\cosh\sqrt{\mathcal{O}})^\mu{}_q e_i^q + \left(\frac{\sinh\sqrt{\mathcal{O}}}{\sqrt{\mathcal{O}}} \right)^\mu{}_q (\theta\gamma^q\chi_i) \right\} e^{k_i \cdot X}, \tag{11.8. 121}$$

其中

$$\mathcal{O}^\mu{}_q = \frac{1}{2}(\theta\gamma^\mu_{qn}\theta)k_i^\nu. \tag{11.8. 122}$$

11.8.3 更高量纲的超场

当考虑圈级振幅时, 随着 SYM 振幅的圈数增加, 相关运动学因子的质量纲也增加. 在纯旋量表述中, 如果我们仅使用 eq. (11.8. 116) 中给出的标准 SYM 超场计算四点振幅, 我们遇到的相互作用的最大质量纲为 $k^2 F^4$, 这是从纯旋量超空间表达式 $\langle (\lambda\gamma^{mnpqr}\lambda)(\lambda\gamma^s W)F_{\mu\nu}F_{pq}F_{rs} \rangle$ 在两圈情形下得到的. 因此, 定义比 K 中的标准超场质量纲更高的 SYM 超场会为我们的计算提供方便. 那么如何定义? 想当然的 $\partial_\mu\partial_\nu\dots K$ 形式作为定义并不合适, 因为普通导数 ∂_μ 在圈级振幅参与的非线性情形无法保持规范协变性. 而基于在 eq. (11.8. 99) 中给出的超协变导数 ∇_μ 即规范场联络, 可以导出后

续的定义:

$$\begin{aligned} W^{m_1 \dots m_k \alpha} &:= [\nabla^{m_1}, W^{m_2 \dots m_k \alpha}], \\ F^{m_1 \dots m_k | pq} &:= [\nabla^{m_1}, F^{m_2 \dots m_k | pq}], \end{aligned} \quad (11.8. 123)$$

指标中的竖线用于分隔递归起始是出现在标准超场 F^{pq} 中的反对称指标对. 这些高量纲超场也有对应的运动方程, 其在高圈弦振幅中应用广泛, 均可以由定义推导, 此处不再赘述.

Chapter 12

RNS 超弦的靶空间超对称

在第 10 章我们曾提及, RNS 超弦保留世界面超对称, 但隐藏了靶空间超对称. 我们现在可以开始分析 RNS 在靶空间中的特征以及和靶空间超对称的联系

12.1 开超弦与靶空间超对称

开玻色弦靶空间庞加莱生成元在世界面上的形式为:

$$P_\mu^{\text{bos}} = \frac{1}{2\alpha'} \oint \frac{dz}{2\pi i} i \partial_z X_\mu(z) \quad (12.1.1)$$

$$J_{\mu\nu}^{\text{bos}} = \frac{1}{2\alpha'} \oint \frac{dz}{2\pi i} (i X_\mu i \partial_z X_\nu - i X_\nu i \partial_z X_\mu) \quad (12.1.2)$$

类似地, 可以从 RNS 超弦的成分构造超庞加莱生成元:

注意到 P_μ^{bos} 与零动量下的胶子顶点算符相匹配; 这可以推广到开超弦, 其中两个顶角算符 $V_\epsilon^{(q)}$ 在 $q = -1, 0$ 时, 给出了两种不同的平移算符的表现形式:

$$P_\mu^{(-1)} = \frac{1}{\sqrt{2\alpha'}} \oint \frac{dz}{2\pi i} \psi_\mu(z) : e^{-\phi(z)} : \quad (12.1.3)$$

$$P_\mu^{(0)} = \frac{1}{2\alpha'} \oint \frac{dz}{2\pi i} i \partial_z X_\mu(z) \quad (12.1.4)$$

我们可以通过引入一个来自靶空间矢量 ψ^μ 的双旋量 (世界面旋量) 项修正, 从而扩展

$J_{\mu\nu}^{\text{bos}}$ 洛伦兹生成元至超对称形式:

$$J_{\mu\nu}^{(0)} = \oint \frac{dz}{2\pi i} \left[\frac{1}{2\alpha'} (iX_\mu i\partial_z X_\nu - iX_\nu i\partial_z X_\mu) + : \psi_\mu \psi_\nu : \right] \quad (12.1. 5)$$

那么, 为什么 $J_{\mu\nu}^{\text{bos}}$ 推广至超对称情形需要进行修正而 P_μ^{bos} 的推广则不需要呢? 这正是第 11 章中所提及的自旋对应的洛伦兹群卡西米尔算符在超对称情形下不作为卡西米尔算符出现, 而需要修正为超自旋所导致的. 于是, 通过类比 $\lim_{p \rightarrow 0} V_\epsilon^{(q)} \sim P_\mu^{(q)}$, 从费米子顶点算符 $V_\chi^{(q)}$ 在 $p \rightarrow 0$ 时, 可以得到在 $q = \pm \frac{1}{2}$ 中的超对称生成元 $Q_\alpha^{(q)}$

$$Q_\alpha^{(-1/2)} = \sqrt{2}(\alpha')^{-1/4} \oint \frac{dz}{2\pi i} S_\alpha : e^{-\phi/2} : \quad (12.1. 6)$$

$$Q_\alpha^{(+1/2)} = \frac{1}{\sqrt{2}(\alpha')^{3/4}} \oint \frac{dz}{2\pi i} i\partial_z X_\mu \gamma_{\alpha\beta}^\mu S^\beta : e^{\phi/2} : \quad (12.1. 7)$$

应用自旋场的 OPE, 我们得到超对称生成元的反对易子为:

$$\{Q_\alpha^{(-1/2)}, Q_\beta^{(q)}\} = 2(\gamma^\mu C)_{\alpha\beta} P_\mu^{(q-1/2)} \quad (12.1. 8)$$

这类类似于四维超庞加莱代数中的反对易子:

$$\{Q_a, \bar{Q}_b\} = 2(\sigma^m)_{ab} P_m \quad (12.1. 9)$$

需要区分的是, 在 $D = 10$ 反对易子中的超对称荷具有相同手性, 而 $D = 4$ 中的非零反对易子中出现的则是相反手性的超对称荷.

现在我们可以通过 $D = 10$ 超对称的维数约化在四维中复现 $\mathcal{N} = 4, 8$ 的扩张超对称多重态. 开超弦在 $D = 10$ 维中具有 $\mathcal{N} = 1$ 超对称, 即超对称荷形成了 $SO(1, 9)$ 群的单个左手外尔旋量 $Q_{\alpha=1,2,\dots,16}$, 表示十六个分量, 分量总数与四维时空中的 $\mathcal{N} = 4$ 超对称一致.

- Q_α 的维度约化到 $D = 4$ 基于以下分解:

$$SO(1, 9) \rightarrow SO(1, 3) \times SO(6) \quad (12.1. 10)$$

其中 $SO(1, 3)$ 被解释为四维的洛伦兹群, 并作用于 $P_\mu = (E, 0, 0, E, \vec{0})$ 的前四个分量上, 其中 Q_α 正如在四维一样, 会使得 J^{12} 的本征值改变 $\pm \frac{1}{2}$; 第二个因子 $SO(6)$ 具有 Cartan 生成元 J^{45} 、 J^{67} 、 J^{89} , Q_α 也会改变它们的本征值.

- 更具体地, 十维超对称生成元 ($SO(1, 9)$ 的左手外尔旋量) 到四维的分解为:

$$Q_\alpha = Q_{a=1,2}^{I=1,2,3,4} \oplus \bar{Q}_{J=1,2,3,4}^{\dot{b}=1,2} \quad (12.1. 11)$$

其中 $Q_{a=1,2}^{I=1,2,3,4}$ 带有 $SO(1, 3)$ 的左手外尔旋量指标 a 和 $SO(6)$ 的左手外尔旋量指标 I ; 类似地, $\bar{Q}_{J=1,2,3,4}^{\dot{b}=1,2}$ 包含 $SO(1, 3)$ 和 $SO(6)$ 的右手外尔旋量指标 \dot{b} 和 J .

- 这种情况下, 我们通过将 $D = 10$ 的 $\mathcal{N} = 1$ SYM 超多重态维度约化到 $D = 4$, 可以得到 $\mathcal{N} = 4$ SYM 超多重态. 具体来说: 利用顶点算符构造 $D = 10$ 开超弦的无质量态:

$$\text{胶子 } A_\mu \leftrightarrow V_\epsilon^{(q=-1,0)} \quad (12.1. 12)$$

$$\text{胶伴子 } \chi_\mu \leftrightarrow V_\chi^{(q=-1/2,1/2)} \quad (12.1. 13)$$

- 在 $SO(1, 9) \rightarrow SO(1, 3) \times SO(6)$ 下对两个场进行分解:

$$A_{m=0,1,2,3} \rightarrow \begin{cases} A_{m=0,1,2,3} & : \text{四维中的矢量} \\ A_{i=4,5,\dots,9} & : \text{四维中的标量} \end{cases} \quad (12.1. 14)$$

$$\chi_{\alpha=1,2,\dots,16} \rightarrow \begin{cases} \chi_{\alpha=1,2}^{I=1,2,3,4} & : \text{四维中的左手旋量} \\ \bar{\chi}_{\dot{\alpha}=1,2}^{J=1,2,3,4} & : \text{四维中的右手旋量} \end{cases} \quad (12.1. 15)$$

- 顶点算符和物理态之间的显式超对称变换可以通过共形场论计算. 具体来说, 通过将 OPE 插入超对称荷 $Q_\alpha^{(\pm 1/2)}$ 的围道积分表示中来实现. 我们将主要考虑无质量态, 为了简化记号, 我们将超对称荷与一个外尔旋量 η^α 缩并旋量指标.
- $Q_Q^{(\mp 1/2)}$: 玻色子 \rightarrow 费米子 (g_e 为胶子顶角算符的归一化系数)

$$\begin{aligned} & [\eta^\alpha Q_\alpha^{(-1/2)}, V_\epsilon^{(0)}(w)] \\ &= \sqrt{2}(\alpha')^{1/4} g_\epsilon \\ & \quad \times \oint \frac{dz}{2\pi i} \eta^\alpha S_\alpha(z) : e^{-\phi(z)/2} : \epsilon_\mu : [i\partial_z X^\mu(w) + 2(\rho \cdot \psi)\psi^\mu(w)] e^{ip \cdot X(w)} : \\ &= g_\epsilon(\alpha')^{1/4} \epsilon_\mu p_\nu (\eta^\mu \gamma^\nu)^\alpha S_\alpha : e^{-\phi(w)/2} e^{ip \cdot X(w)} : \end{aligned} \quad (12.1. 16)$$

右侧可以识别为胶子顶点算符

$$V_\chi^{(-1/2)} = g_\epsilon \alpha'^{1/4} \chi^\alpha S_\alpha : e^{-\phi(w)/2} e^{ip \cdot X(w)} : \quad (12.1. 17)$$

其波函数为

$$\chi^\alpha = \epsilon_\mu p_\nu (\eta \gamma^\mu \gamma^\nu)^\alpha \quad (12.1. 18)$$

后者满足无质量的狄拉克方程

$$\chi^\alpha \gamma_{\alpha\beta}^\lambda p_\lambda = 0 \quad (12.1. 19)$$

这是因为无质量情况下有 $p_\nu p_\lambda \gamma^\nu \eta^\lambda = p^2 = 0$.

- $Q_\alpha^{(\mp 1/2)}$: 费米子 \rightarrow 玻色子 (重复上述的 OPE 计算即可)

$$[\eta^\alpha Q_\alpha^{(-1/2)}, V_\chi^{(-1/2)}(w)] = \dots = g_\epsilon (\eta \gamma_\mu C \chi) \psi^\mu(w) \cdot e^{-\phi(w)} e^{ip \cdot X(w)}. \quad (12.1. 20)$$

我们由此可以得到极化矢量 $\epsilon_\mu = (\eta \gamma_\mu C \chi)$ 对应的胶子顶点算符, 其中 ϵ_μ 满足极化矢量的横向条件, 因为 χ 满足无质量狄拉克方程.

- 我们整理一下上述变换, 可以写为如下形式:

$$\delta_\eta \epsilon^\mu = (\eta \gamma^\mu C \chi), \quad \delta_\eta \chi^\beta = \eta^\alpha (\gamma^{\mu\nu})_\alpha^\beta \epsilon_\mu p_\nu. \quad (12.1. 21)$$

将上述变换的反对易子作用于 χ^α 以及 ϵ_μ , 我们得到

$$\begin{aligned} [\delta_{\eta_1}, \delta_{\eta_2}] \chi^\alpha &= 2(\eta_1 \gamma^\mu C \eta_2) p_\mu \chi^\alpha \\ [\delta_{\eta_1}, \delta_{\eta_2}] \epsilon^\lambda &= 2(\eta_1 \gamma^\mu C \eta_2) p_\mu \epsilon^\lambda - 2(\eta_1 \gamma^\mu C \eta_2) \epsilon_\mu p^\lambda. \end{aligned}$$

这与在十维时空中的超对称代数 $\{Q_\alpha, Q_\beta\} = 2(\gamma^\mu C)_{\alpha\beta} P_\mu$ 仅相差与 p^λ 正比的线性化规范变换.

12.2 II 型超弦 (Type II Superstring) 与靶空间超对称

12.2.1 再谈 GSO 投影

我们先前曾在第 10.4 节简要介绍了所谓的 GSO 投影, 并使用 GSO 投影说明了超弦的一些性质. 而由于闭弦存在左行部分与右行部分, 那么左行与右行部分中便分别存在各自的投影, 因此我们现在需要考虑左行右行分别对应的两个 GSO 投影同时出现会带来什么影响.

实际上 GSO 投影可以写为算符化的形式. 给定 NS 和 R 部分中的算符 $(-1)^F$:

$$\begin{aligned} \text{NS)} \quad (-1)^F &= -\exp \left\{ i\pi \sum_{r \geq \frac{1}{2}} \left(N[\psi_{-r}^i] + N[\psi_r^i] \right) \right\}, \\ \text{R)} \quad (-1)^F &= \exp \left\{ i\pi \sum_{n \geq 0} \left(N[\psi_{-n}^i] + N[\psi_n^i] \right) \right\} \\ &\rightarrow \Gamma_9 \exp \left\{ i\pi \sum_{n \geq 1} \left(N[\psi_{-n}^i] + N[\psi_n^i] \right) \right\}. \end{aligned} \quad (12.2. 22)$$

其中 $N[\cdot]$ 表示计算出现在中括号中的算符总数 F 表示世界面费米子数.

让我们对这里的内容稍做解释: NS 部分中的负号来源于 $|0\rangle_{\text{NS}}$ 中隐含的项 $\delta(\gamma) = e^{-\phi}$, 它等价于插入一个额外的费米子. 该项来自鬼场 (β, γ) , 它作用在玻色子的 $SL(2, \mathbb{C})$ 真空上从而定义出 NS 部分的真空态, 即: $|0\rangle_{\text{NS}} = e^{-\phi(0)} |0\rangle_{SL(2, \mathbb{C})}$. 而在 R 部分, 我们已经将零模孤立出来, 并且这些零模完全由矩阵 Γ_9 描述. 这正是来自于我们在第 10 章给出的费米子零模与伽马矩阵的对应关系.

为方便理解其作用, 让我们看一些相关的例子. 从 NS 真空开始:

$$(-1)^F |0, P\rangle_{\text{NS}} = -|0, P\rangle_{\text{NS}}. \quad (12.2. 23)$$

因此, 正如之前所预期的那样, NS 真空自带一个世界面费米子. 对于第一激发态, 我们有:

$$(-1)^F \psi_{-\frac{1}{2}}^i |0, P\rangle_{\text{NS}} = +\psi_{-\frac{1}{2}}^i |0, P\rangle_{\text{NS}}. \quad (12.2. 24)$$

而另一方面, 在 R 部分, 我们有:

$$(-1)^F |\alpha, P\rangle_{\text{R}} = +|\alpha, P\rangle_{\text{R}}, \quad (12.2. 25a)$$

$$(-1)^F |\dot{\alpha}, P\rangle_{\text{R}} = -|\dot{\alpha}, P\rangle_{\text{R}}. \quad (12.2. 25b)$$

现在, 利用 $(-1)^F$, 我们可以构造以下投影算符:

$$\mathcal{P}_{\pm}^{(\text{R}, \text{NS})} = \frac{1}{2} \left(1 \pm (-1)^{F_{(\text{R}, \text{NS})}} \right). \quad (12.2. 26)$$

那么由这一算符作用到 NS 与 R 部分上便实现了我们在第 10.4 节说明的对 ψ 个数奇偶性的筛选. 此处需要注意的是, 在 R 部分中, 不同的 \pm 选择仅仅是用于决定每一能级上时空费米子的手性.

利用这些投影算符作用于 ψ 共形场论的亚纯和反亚纯部分, 用 GSO^\pm 来表示亚纯部分中的 GSO 投影, 而用 $\overline{\text{GSO}}^\pm$ 来表示反亚纯部分中的 GSO 投影. 通过计算一圈的配分函数便可验证, 共有以下四种可能的组合在一圈模空间变换下保持不变.

- IIA 型以及 IIB 型

选取如下投影分别作用在亚纯与反亚纯部分得到:

$$\mathcal{P}_{IIA} \equiv \left(\mathcal{P}_+^{(\text{NS})} + \mathcal{P}_+^{(\text{R})} \right) \overline{\left(\mathcal{P}_+^{(\text{NS})} + \mathcal{P}_-^{(\text{R})} \right)}, \quad (12.2.27)$$

$$\mathcal{P}_{IIB} \equiv \left(\mathcal{P}_+^{(\text{NS})} + \mathcal{P}_+^{(\text{R})} \right) \overline{\left(\mathcal{P}_+^{(\text{NS})} + \mathcal{P}_+^{(\text{R})} \right)}. \quad (12.2.28)$$

这两种投影产生相同的一圈配分函数且恒等于零. 它对应于玻色态减去费米态的数量, 而结果为零便这意味着玻色和费米自由度完全相同. 这是靶空间超对称的必然结果.

- 0A 型以及 0B 型

最后两种可能性则由以下投影给出:

$$\mathcal{P}_{0A} \equiv \mathcal{P}_+^{(\text{NS})} \overline{\mathcal{P}_+^{(\text{NS})}} + \mathcal{P}_-^{(\text{NS})} \overline{\mathcal{P}_-^{(\text{NS})}} + \mathcal{P}_+^{(\text{R})} \overline{\mathcal{P}_-^{(\text{R})}} + \mathcal{P}_-^{(\text{R})} \overline{\mathcal{P}_+^{(\text{R})}}, \quad (12.2.29)$$

$$\mathcal{P}_{0B} \equiv \mathcal{P}_+^{(\text{NS})} \overline{\mathcal{P}_+^{(\text{NS})}} + \mathcal{P}_-^{(\text{NS})} \overline{\mathcal{P}_-^{(\text{NS})}} + \mathcal{P}_+^{(\text{R})} \overline{\mathcal{P}_+^{(\text{R})}} + \mathcal{P}_-^{(\text{R})} \overline{\mathcal{P}_-^{(\text{R})}}. \quad (12.2.30)$$

我们发现, 在这种组合只有时空玻色子, 左行右行取 (NS,R) 对应的费米子已经被投影出去. 其次, 由 $\mathcal{P}_-^{(\text{NS})} \overline{\mathcal{P}_-^{(\text{NS})}}$ 组合对应的快子仍然存在.

而这两种组合对应的 0A 和 0B 型理论与玻色弦类似, 不含费米子且存在快子, 这表明这一理论真空不稳定. 于是在接下来的讨论中我们将不再考虑它们, 而仅考虑 IIA 型以及 IIB 型.

12.2.2 闭超弦

让我们继续研究 II 型闭超弦. 根据我们前述 GSO 投影的讨论, 我们用 GSO^\pm 来表示亚纯部分中的 GSO 投影, 而用 $\overline{\text{GSO}}^\pm$ 来表示反亚纯部分中的 GSO 投影. 而我们可以观察得出: R 部分的 GSO 投影选择会产生两种不等价的理论:

- 对应于 $(\text{GSO}_R^+, \overline{\text{GSO}}_R^-)$ 的 IIA 型闭超弦.
- 对应于 $(\text{GSO}_R^+, \overline{\text{GSO}}_R^+)$ 的 IIB 型闭超弦.

而显然, 它们在 NS 部分都是 $(\text{GSO}_{\text{NS}}^+, \overline{\text{GSO}}_{\text{NS}}^+)$, 因此 NS- $\overline{\text{NS}}$ 部分中 $(\text{GSO}_{\text{NS}}^-, \overline{\text{GSO}}_{\text{NS}}^-)$ 对应的快子被移除. 因此, 这两种理论在每个质量谱上都有相等数量的玻色自由度和费

米自由度, 这正是靶空间超对称所需的.

接下来我们进一步分析两种 II 型闭超弦的无质量态, 与玻色弦情形类似, 我们利用小群的表示的直积进行直和分解来寻找不可约表示, 并分析自由度.

12.2.2.1 IIA 型闭超弦

如果我们现在分析 IIA 型闭弦能谱中的无质量态, 我们便可以得到如下结果:

- NS – $\overline{\text{NS}}$ 部分

该部分的通用极化是一个洛伦兹张量表示, 具有两个 8_V 指数, 这可以分解为对称部分 (s), 反对称部分 (a) 和迹:

$$t^{ij} = \delta^{ij} \Phi + a^{[ij]} + s^{(ij)}. \quad (12.2. 31)$$

也可以写成:

$$8_V \otimes 8_V = 1 \oplus 28_a \oplus 35_s, \quad (12.2. 32)$$

其中

- 单重态 (1) 对应伸缩子 (自旋 0),
- 反对称部分 (28_a) 对应反对称张量场 (自旋 1),
- 对称部分 (35_s) 对应对称无迹张量场, 即引力子 (自旋 2).

- NS – $\overline{\text{R}}$ 部分

该部分的一般极化具有一个矢量指标 μ 和一个旋量指标 $\dot{\alpha}$, 写作 $\chi_{\dot{\alpha}}^i$, 而这可以分解为:

$$8_V \otimes 8_S = 8_C \oplus 56_S, \quad (12.2. 33)$$

其中

- 旋量 8_C 是伸缩伴子 (dilatino), 靶空间中自旋 1/2 的左手旋量. 它是 $\chi_{\dot{\alpha}}^i$ 的 Γ -迹:

$$\eta_{\dot{\beta}} = \Gamma_{\dot{\beta}\dot{\alpha}}^i \chi_{\dot{\alpha}}^i; \quad (12.2. 34)$$

- 而 56_S 是引力伴子 (gravitino), 靶空间中自旋 3/2 的右手旋量:

$$\psi_{\dot{\beta}}^i = \chi_{\dot{\beta}}^i - \frac{1}{D-2} \Gamma_{\dot{\beta}\alpha}^i \eta_{\alpha}. \quad (12.2. 35)$$

- R – $\overline{\text{NS}}$ 部分

该部分的一般极化具有一个矢量指标 μ 和一个旋量指标 α , 写作 χ_{α}^i , 而这可以分

解为:

$$8_C \otimes 8_V = 8_S \oplus 56_C, \quad (12.2. 36)$$

其中

– 旋量 8_S 是伸缩伴子 (dilatinos), 靶空间中自旋 1/2 的右手旋量. 它是 χ_α^i 的 Γ -迹:

$$\eta_{\dot{\beta}} = \Gamma_{\dot{\beta}\alpha}^i \chi_\alpha^i; \quad (12.2. 37)$$

– 而 56_C 是引力伴子 (gravitinos), 靶空间中自旋 3/2 的左手旋量:

$$\psi_\beta^i = \chi_\beta^i - \frac{1}{D-2} \Gamma_{\beta\dot{\alpha}}^i \eta_{\dot{\alpha}}. \quad (12.2. 38)$$

• $R - \bar{R}$ 部分

该部分的一般极化具有两个旋量指标 $\alpha, \dot{\alpha}$, 写作 $H_{\alpha\dot{\alpha}}$ 它可以利用 Γ 矩阵展开如下:

$$H_{\alpha\dot{\alpha}} = C_i \Gamma_{\alpha\dot{\alpha}}^i + C_{ijk} \Gamma_{\alpha\dot{\alpha}}^{ijk}, \quad (12.2. 39)$$

其中我们使用了:

$$\Gamma^{i_1 \dots i_n} = \frac{1}{n!} \Gamma^{[i_1} \dots \Gamma^{i_n]}. \quad (12.2. 40)$$

而在 eq. (12.2. 39) 的分解中不出现更高阶微分形式的原因则是 Γ 矩阵的对偶关系. 我们将在 12.2.2.3 节中详细讨论. 与前三部分类似, 利用表示的直和分解我们可以将这个展开可以写为:

$$8_C \otimes 8_S = 8_V \oplus 56_a, \quad (12.2. 41)$$

其中

– 矢量 8_V 也可以解释为一个 1-形式场 C_μ , 其关联的场强是 $F^{(2)} = dC^{(1)}$, 即

$$F_{\mu\nu} = \partial_{[\mu} C_{\nu]}; \quad (12.2. 42)$$

– 反对称张量 56_a 是一个 3-形式场 $C_{\mu\nu\rho}$, 其关联的场强是 $F^{(4)} = dC^{(3)}$, 即

$$F_{\mu\nu\rho\sigma} = \partial_{[\mu} C_{\nu\rho\sigma]}. \quad (12.2. 43)$$

我们使用了符号 $C^{(p)} = C_{i_1 \dots i_p} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p}$. 这些微分形式场被称为拉蒙-拉蒙形式场 (Ramond-Ramond forms) 我们将在 12.2.2.3 节中进一步讨论.

到目前为止我们所说的关于 $SO(8)$ 表示的所有内容都与其三重性 (triality) 密切相关.

而 $SO(8)$ 群具有三重性意味着它的矢量表示和两个旋量表示维度相同, 他们是同构的, 我们可以写出:

$$8_i \otimes 8_j = 8_k \oplus 56, \quad i \neq j \neq k \quad (12.2.44)$$

其中 $i \neq j \neq k$ 在 V, C, S 中取值, 这一性质表明矢量表示与左右手旋量表示之间可以相互转换, 这则暗示了 $SO(8)$ 李代数登金图 (Dynkin diagram) 的 \mathbb{Z}_3 对称性.

下表中列出了 IIA 型闭超弦的无质量态

IIA 型闭超弦					
玻色子			费米子		
Φ	伸缩子	spin 0	η_α	左手伸缩伴子	spin 1/2
B_{ij}	反对称张量	spin 1	$\eta_{\dot{\alpha}}$	右手伸缩伴子	spin 1/2
G_{ij}	引力子	spin 2	ψ_β^i	左手引力伴子	spin 3/2
C_i	1-形式		ψ_β^i	右手引力伴子	spin 3/2
C_{ijk}	3-形式				

Table 12.1: IIA 型闭超弦的无质量态

而 IIA 型闭超弦的无质量态的结构与我们在第 11 章给出的 IIA 型超引力 (supergravity) 相同, 其作用量为:

$$\begin{aligned}
S_{\text{IIA}} = & \frac{1}{2K_{10}^2} \int d^{10}x \sqrt{-G} \left\{ e^{-2\Phi} \left(R + 4(\partial\Phi)^2 - \frac{1}{2}|H_{(3)}|^2 \right) - \frac{1}{2}|F_{(2)}|^2 - \frac{1}{2}|F_{(4)}|^2 \right\} \\
& + \frac{1}{4K_{10}^2} \int B_{(2)} \wedge dC_{(3)} \wedge dC_{(3)} \\
& + (\text{费米子耦合部分}) \\
& + (\alpha' \text{修正}),
\end{aligned} \quad (12.2.45)$$

其中

- K_{10} 是 10 维中的牛顿常数, 它与弦长参数之间的关系为 $K_{10} = 8\pi^{7/2}\alpha'^2 g_s$;
- $\int d^{10}x \sqrt{-G} e^{-2\Phi} R$ 为爱因斯坦希尔伯特作用量;
- $4(\partial\Phi)^2$ 对应于伸缩子的动能项;
- $H_{(3)} = dB_{(2)}$ 对应反对称张量场的动能项;
- $F_{(2)} = dC_{(1)}$ 以及 $F_{(4)} = dC_{(3)} - dB_{(2)} \wedge C_{(1)}$ 则对应 RR 场的动能项;
- $\int B_{(2)} \wedge dC_{(3)} \wedge dC_{(3)}$ 为度规无关的拓扑项

12.2.2.2 IIB 型闭超弦

与 IIA 型闭超弦的计算同理可得 IIB 型闭超弦的无质量态构成, 总结如下: 同样地, 这

IIB 型闭超弦					
玻色子			费米子		
Φ	伸缩子	spin 0	$\eta_{\dot{\alpha}}$	右手伸缩伴子	spin 1/2
B_{ij}	反对称张量	spin 1	$\eta'_{\dot{\alpha}}$	右手伸缩伴子	spin 1/2
G_{ij}	引力子	spin 2	$\psi_{\dot{\beta}}^i$	左手引力伴子	spin 3/2
C	0-形式	spin 0	$\psi'_{\dot{\beta}}^i$	左手引力伴子	spin 3/2
C_{ij}	2-形式				
C_{ijkl}	4-形式				

Table 12.2: IIB 型闭超弦的无质量态

与 IIB 型超引力的结构相同, 其作用量为:

$$\begin{aligned}
 S_{\text{IIB}} = & \frac{1}{2K_{10}^2} \int d^{10}x \sqrt{-G} \left\{ e^{-2\Phi} \left(R + 4(\partial\Phi)^2 - \frac{1}{2}|H_{(3)}|^2 \right) \right. \\
 & \left. - \frac{1}{2}|F_{(1)}|^2 - \frac{1}{2}|F_{(3)}|^2 - \frac{1}{2}|F_{(5)}|^2 \right\} \\
 & + \frac{1}{4K_{10}^2} \int C_{(4)} \wedge H_{(3)} \wedge F_{(3)} \\
 & + (\text{费米子耦合}) \\
 & + (\alpha' \text{修正}),
 \end{aligned} \tag{12.2. 46}$$

其中

$$\begin{aligned}
 F_{(1)} &= dC, \\
 F_{(3)} &= dC_{(2)} - CdB_{(2)}, \\
 F_{(5)} &= dC_{(4)} - \frac{1}{2}dC_{(2)} \wedge B_{(2)} + \frac{1}{2}B_{(2)} \wedge dC_{(2)}.
 \end{aligned} \tag{12.2. 47}$$

各项的物理含义与 IIA 型闭超弦的讨论类似

12.2.2.3 拉蒙-拉蒙势 (Ramond-Ramond potentials)

现在让我们考虑 IIA 型超弦. 在 IIA 型超弦的 $R\bar{R}$ 部分无质量态原则上可以写为如下形式场之和:

$$H_{\alpha\dot{\alpha}} = C_i \Gamma_{\alpha\dot{\alpha}}^i + C_{i_1 \dots i_3} \Gamma_{\alpha\dot{\alpha}}^{i_1 \dots i_3} + C_{i_1 \dots i_5} \Gamma_{\alpha\dot{\alpha}}^{i_1 \dots i_5} + C_{i_1 \dots i_7} \Gamma_{\alpha\dot{\alpha}}^{i_1 \dots i_7}. \quad (12.2. 48)$$

而由于小群为 $SO(8)$, 因此 Γ 矩阵在八维下有对偶关系:

$$\Gamma^{i_1 \dots i_n} \propto \varepsilon^{i_1 \dots i_n j_1 \dots j_{8-n}} \Gamma_{j_1 \dots j_{8-n}}, \quad (12.2. 49)$$

于是这些形式场彼此之间并不独立, 我们可以写出:

$$\begin{aligned} C_{i_1 \dots i_7} &\propto \varepsilon_{i_1 \dots i_7}^j C_j \implies C_{(7)} = \star_8 C_{(1)}, \\ C_{i_1 \dots i_3} &\propto \varepsilon_{i_1 \dots i_3}^{j_1 \dots j_5} C_{j_1 \dots j_5} \implies C_{(3)} = \star_8 C_{(5)}, \end{aligned} \quad (12.2. 50)$$

其中 \star_8 表示八维的霍奇对偶 (Hodge duality). 这便是 eq. (12.2. 39) 中没有写出 $C_{(5)}$ 和 $C_{(7)}$ 的原因. 我们将形式场 $C_{(1)}$ 与 $C_{(3)}$ 称为拉蒙-拉蒙势 (Ramond-Ramond potentials), 以后简称 RR 势.

接下来我们回到十维靶空间进行讨论. 我们在第 10 章将拉蒙真空定义为自旋场作用于共形真空的结果:

$$\begin{aligned} R) \quad S_\alpha(0) |0\rangle &\quad \alpha \in 16_C, \\ \bar{R}) \quad S_{\dot{\alpha}}(0) |0\rangle &\quad \dot{\alpha} \in 16_S. \end{aligned} \quad (12.2. 51)$$

现在 Γ 矩阵以及荷共轭矩阵 \mathcal{C} 均为 32×32 矩阵. 于是我们有如下的相似变换:

$$\mathcal{C}^{-1} (\Gamma^\mu)^T \mathcal{C} = \Gamma^\mu. \quad (12.2. 52)$$

自旋场 S_α 则满足如下关系:

$$S_\alpha^\dagger \Gamma^0 = S_\alpha^T \mathcal{C}. \quad (12.2. 53)$$

这表明自旋场所代表的旋量是马约拉纳旋量, 因此在 $|S_\alpha\rangle \rightarrow \langle S_\alpha|$ 变换下, 我们无需考虑厄米共轭的问题.

考虑顶角算符:

$$F_{\mu_1 \dots \mu_p}(p) \left((S(z))^T \mathcal{C} \Gamma^{\mu_1 \dots \mu_p} \tilde{S}(\bar{z}) \right). \quad (12.2. 54)$$

我们现在令十维中的手性矩阵 Γ^{11} 作用于 IIA 中的自旋场, 便有:

$$\begin{aligned} (\Gamma^{11} S)_\alpha &= +S_\alpha, \\ (\Gamma^{11} \tilde{S})_{\dot{\alpha}} &= -\tilde{S}_{\dot{\alpha}}, \end{aligned} \quad (12.2. 55)$$

这表明我们可以在左手自旋场上自由增加 Γ^{11} , 于是, 顶角算符中出现的 $(S)^T \mathcal{C} \Gamma^{\mu_1 \dots \mu_p} \tilde{S}$ 因子满足:

$$(S)^T \mathcal{C} \Gamma^{\mu_1 \dots \mu_p} \tilde{S} = (S)^T (\Gamma^{11})^T \mathcal{C} \Gamma^{\mu_1 \dots \mu_p} \tilde{S}. \quad (12.2. 56)$$

这时, 再利用 $\{\Gamma^{11}, \Gamma^\mu\} = 0$ 以及 $\mathcal{C} \Gamma^{11} + (\Gamma^{11})^T \mathcal{C} = 0$, 我们可以得到

$$\begin{aligned} (S_\alpha)^T \mathcal{C} \Gamma^{\mu_1 \dots \mu_p} \tilde{S}_{\dot{\beta}} &= (S_\alpha)^T (\Gamma^{11})^T \mathcal{C} \Gamma^{\mu_1 \dots \mu_p} \tilde{S}_{\dot{\beta}} \\ &= (-1)^{p+1} (S_\alpha)^T \mathcal{C} \Gamma^{\mu_1 \dots \mu_p} \Gamma^{11} \tilde{S}_{\dot{\beta}} \\ &= (-1)^{p+1} (S_\alpha)^T \mathcal{C} \Gamma^{\mu_1 \dots \mu_p} (-\tilde{S}_{\dot{\beta}}) \\ &= (-1)^p (S_\alpha)^T \mathcal{C} \Gamma^{\mu_1 \dots \mu_p} \tilde{S}_{\dot{\beta}}. \end{aligned}$$

这便导致 IIA 型闭超弦中出现的双旋量形式 $(S)^T \mathcal{C} \Gamma^{\mu_1 \dots \mu_p} \tilde{S}$ 中的 p 必须为偶数. 于是 IIA 型闭超弦中 p -形式场 $F_{\mu_1 \dots \mu_p}$ 在 $p = 2n$, $n \in \mathbb{N}$ 时可以耦合到两个具有相反手性的全纯和反全纯旋量场. 另一方面, RR 势具有奇数个矢量指标. 这暗示我们 F 是 C 的场强.

为了说明这一点, 我们现在考虑 $R\bar{R}$ 部分中的态:

$$|\text{state}\rangle = F_{\mu_1 \dots \mu_p} (S_\alpha)^T \mathcal{C} \Gamma^{\mu_1 \dots \mu_p} \tilde{S}_{\dot{\beta}} e^{ip \cdot X}(0, 0) |0\rangle. \quad (12.2. 57)$$

亚纯与反亚纯超流的约束条件给出了如下两个狄拉克方程:

$$\begin{aligned} G_0 |\text{state}\rangle &= 0 \implies P^\mu \psi_{0\mu} = 0, \\ \bar{G}_0 |\text{state}\rangle &= 0 \implies P^\mu \bar{\psi}_{0\mu} = 0, \end{aligned} \quad (12.2. 58)$$

具体来说:

$$\begin{aligned} G_0 |\text{state}\rangle &= P_\mu F_{\mu_1 \dots \mu_p} (S_\alpha)^T (\Gamma^\mu)^T \mathcal{C} \Gamma^{\mu_1 \dots \mu_p} \tilde{S}_{\dot{\beta}}(0, 0) |0\rangle \\ &= P_\mu F_{\mu_1 \dots \mu_p} (S_\alpha)^T \mathcal{C} \Gamma^\mu \Gamma^{\mu_1 \dots \mu_p} \tilde{S}_{\dot{\beta}}(0, 0) |0\rangle \\ &= P_\mu F_{\mu_1 \dots \mu_p} (S_\alpha)^T \mathcal{C} (\Gamma_\mu^{\mu_1 \dots \mu_p} + p \delta_\mu^{[\mu_1} \Gamma^{\mu_2 \dots \mu_p]}) \tilde{S}_{\dot{\beta}}(0, 0) |0\rangle \\ &= 0, \end{aligned}$$

对于 \overline{G}_0 , 同理. 因此, 由这些限制条件我们可以得到:

- 比安基恒等式 (Bianchi identities):

$$P_{[\mu} F_{\mu_1 \dots \mu_p]} = 0 \implies dF^{(p)} = 0; \quad (12.2. 59)$$

- 推广麦克斯韦方程:

$$P^{\mu_1} F_{\mu_1 \dots \mu_p} = 0 \implies d \star_{10} F^{(p)} = 0. \quad (12.2. 60)$$

给定一个场强 $F^{(p)}$, 局部上便会存在一个势 $C^{(p-1)}$ 使得 $F^{(p)} = dC^{(p-1)}$. 这就是 $C^{(p-1)}$ 被称为 RR 势的原因.

在 $D = 10$ 维中, RR 势 $C^{(1)}$, $C^{(3)}$ 及其霍奇对偶 $C^{(7)}$, $C^{(5)}$ 对应的场强为 $F^{(2)}$, $F^{(4)}$ 以及 $F^{(8)}$, $F^{(6)}$:

$$\begin{aligned} F^{(6)} &= \star_{10} F^{(4)}, \\ F^{(8)} &= \star_{10} F^{(2)}, \end{aligned} \quad (12.2. 61)$$

在十维的语境下, 我们通常使用场强, 因为它们是规范不变量. 而在光锥的讨论下, 由于规范对称性的缺失, 我们使用 RR 势 $C^{(p-1)}$.

需要注意的是, 在一般的 d 维情形下, 霍奇对偶取如下形式:

$$(\star_{10} F^{(p)})_{\mu_1 \dots \mu_{d-p}} = \sqrt{-g} \varepsilon_{\mu_1 \dots \mu_{d-p} \nu_1 \dots \nu_p} F^{\nu_1 \dots \nu_p}. \quad (12.2. 62)$$

由于度规的出现, 这显然不是一个拓扑意义上的操作. 它只能在配备度量的流形上进行, 即在黎曼流形 (Riemannian manifold) 上.

与我们在电动力学中学到的作用量中的 $F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$ 形式一致, 此处场强的动力学项由 $F_{\mu_1 \dots \mu_p} F^{\mu_1 \dots \mu_p}$ 给出. 如果我们将其与引力耦合, 便会得到:

$$\begin{aligned} S &= \int d^d x \sqrt{-g} F_{\mu_1 \dots \mu_p} F^{\mu_1 \dots \mu_p} \\ &= \int d^d x \sqrt{-g} |F^{(p)}|^2 \\ &= \int_{\mathcal{M}_d} F^{(p)} \wedge \star F^{(p)}, \end{aligned}$$

其中 \mathcal{M}_d 是一个 d -维流形.

我们曾在玻色弦的非平凡背景场一节讨论过 $B^{(2)}$ 与弦的耦合可以写为:

$$\frac{1}{2\pi\alpha'} \int_{\text{WS}} B^{(2)} = \frac{1}{2\pi\alpha'} \int_{\text{WS}} d^2\sigma B_{\mu\nu} \partial X^\mu \bar{\partial} X^\nu = \frac{1}{2\pi\alpha'} \int_{\text{WS}} B_{\mu\nu} dX^\mu \wedge dX^\nu. \quad (12.2. 63)$$

其中 ∂ 与 $\bar{\partial}$ 正是全反对称张量与导数缩并后在复平面上的形式, 写为外微分楔积的形式便可方便推广至一般维:

$$S_{\text{p-形式}} \sim \int_{\Sigma_{p+1}} dX^{\mu_1} \wedge dX^{\mu_2} \wedge \cdots \wedge dX^{\mu_{p+1}} A_{\mu_1\mu_2\cdots\mu_{p+1}}^{(p+1)} \quad (12.2. 64)$$

我们取一形式场 $A^{(1)}$ 为例, 解释其物理含义. 它与世界线, 即点粒子耦合如下:

$$q \int_{\gamma} A^{(1)} = q \int d\tau A_\mu \dot{x}^\mu. \quad (12.2. 65)$$

这正是电动力学中四矢势与带电粒子耦合的高维推广. 诸如此类的形式场均与特定维数的对象存在耦合, 推广至 RR 势, 便得到:

- 在 IIA 型理论中, R-R 势为
 - $C^{(1)}$ 与靶空间中的一维对象耦合, 我们称为 0-膜 (即点粒子) 耦合;
 - 其 Hodge 对偶 $C^{(7)}$, 与 6-膜耦合;
 - $C^{(3)}$ 与 2-膜耦合;
 - 其 Hodge 对偶 $C^{(5)}$, 与 4-膜耦合.
- 在 IIB 型理论中, R-R 势为
 - $C^{(0)}$, 与 (-1)-膜耦合;
 - 其 Hodge 对偶 $C^{(8)}$, 与 7-膜耦合;
 - $C^{(2)}$, 与 1-膜耦合;
 - 其 Hodge 对偶 $C^{(6)}$, 与 5-膜耦合;
 - $C^{(4)}$, 与 3-膜耦合, 且自对偶.

波尔钦斯基发现这些耦合对象 p-膜正是开弦的 $D(p)$ -膜

我们于是可以说, $(X; \psi)$ 的超共形场中 $D(p)$ -膜边界条件对应于 R-R 场. 这意味着在超弦理论中, $D(p)$ -膜不仅具有质量和能量, 还有一种来自于 R-R 场的荷, 因此被称为 R-R 荷, 它是电动力学中电场的高维推广, 且存在所谓的电磁对偶关系, 我们将在附录中详细讨论这一点.

在讨论了两种超弦的靶空间超对称结构后, 我们看到了 $D(p)$ -膜与 R-R 场存在耦合, 我们便可以开始考虑开弦与 D -膜的相互作用. 正如前面开弦靶空间性质的讨论, 在开

弦情况下, 亚纯与反亚纯部分在实轴处的边界条件为:

$$\begin{aligned}
 T(z) &= \bar{T}(\bar{z}), \\
 \text{NS) } G(z) &= \bar{G}(\bar{z}), \\
 \text{R) } G(z) &= \begin{cases} +\bar{G}(\bar{z}) & \text{for } z = \bar{z} < 0 \\ -\bar{G}(\bar{z}) & \text{for } z = \bar{z} > 0. \end{cases}
 \end{aligned} \tag{12.2. 66}$$

共形场在边界上的行为则满足:

$$\begin{aligned}
 \partial X^\mu(z) &= \Omega_A^{(\partial X)} \bar{\partial} X^\mu(\bar{z}) \quad \text{for } z = \bar{z}, \\
 \psi^{\mu(\epsilon)}(z) &= \begin{cases} \Omega_A^{(\psi)} \bar{\psi}^{\mu(\epsilon)}(\bar{z}) & \text{for } z = \bar{z} < 0 \\ \epsilon \Omega_A^{(\psi)} \bar{\psi}^{\mu(\epsilon)}(\bar{z}) & \text{for } z = \bar{z} > 0 \end{cases},
 \end{aligned} \tag{12.2. 67}$$

其中

$$\Omega_A^{((\partial X))} = \Omega_A^{(\psi)} = \begin{cases} +1 & \text{for } A = \text{纽曼} \\ -1 & \text{for } A = \text{迪利克雷} \end{cases}. \tag{12.2. 68}$$

而 ∂X^μ 与 ψ^μ 由超对称变换相互关联:

$$\delta_{\text{SUSY}}^{(\epsilon)} \psi^{\mu(\epsilon)}(z) = \partial X^\mu(z), \tag{12.2. 69}$$

共形场对 $(X; \psi)$ 的边界由 D -膜确定:

- 纽曼边界条件下 $(X^\mu; \psi^\mu)$ 取 $\Omega = +1$, 其中 $\mu = 0, 1, \dots, p$;
- 迪利克雷边界条件下 $(X^i; \psi^i)$ 取 $\Omega = -1$, 其中 $i = p+1, \dots, 9$.

这些 $D(p)$ -膜通过与 RR 场的耦合进而与 IIA 或 IIB 型闭超弦紧密关联.

12.3 超弦之间的关系

在十维中有 5 种具有靶空间超对称性的超弦理论. 我们只研究了 IIA 型和 IIB 型. 然而, 还有 3 种可以构造的微扰弦理论. 这 5 种超弦理论的列表如下:

- IIA 型超弦:

- 本质上是十维的定向 (oriented) 闭弦理论, 不过可以利用 RR 势耦合的 D -膜引入开弦, 但并不是 IIA 型超弦本身的组成成分;
- 带有 32 个超对称荷;
- 包含十维中的两个实的外尔旋量, 分别为左手与右手旋量.
- IIB 型超弦:
 - 与 IIA 型超弦类似, 本质上是十维的定向 (oriented) 闭弦理论, 不过可以利用 RR 势耦合的 D -膜引入开弦;
 - 带有 32 个超对称荷;
 - 包含十维中的两个实的外尔旋量, 均为左手旋量.
- I 型超弦:
 - 包含十维的非定向 (unoriented) 闭弦理论¹ 与开弦理论, I 型超弦是唯一一个本身的构造便包含开弦的超弦理论;
 - 带有 16 个超对称荷;
 - 32 个占据全空间的 $D9$ -膜²
- $SO(32)$ 杂化弦:
 - 是十维的定向闭弦理论, 具体来说是结合了 26 维玻色弦的左行部分和 10 维超弦的右行部分来构造的一个闭弦理论, 玻色弦的其中 16 维需要进行紧致化来得到十维中的结构.
 - 带有 16 个超对称荷;
 - 杂化弦不含开弦的自由度, 因此不包含 D -膜
 - $SO(32)$ 规范对称性来自于玻色弦的其中 16 维的紧致化
- $E_8 \times E_8$ 杂化弦:
 - 与 $SO(32)$ 杂化弦类似, 是十维的定向闭弦理论, 同样需要对玻色弦的其中 16 维进行紧致化.
 - 带有 16 个超对称荷;
 - 不包含 D -膜
 - $E_8 \times E_8$ 规范对称性来自于玻色弦的其中 16 维的紧致化

我们可以对这五种超弦理论各自取低能极限. 这便得到了分别的有效理论, 即 α' 展开的最低阶:

- IIA 型超弦 \rightarrow IIA 型超引力:

¹I 型超弦理论引入了一种特殊的对象, 向形平面 (orientifold plane), 简称 O 平面. O 平面具有一种反射对称性, 对弦的传播施加了额外的约束. 对于闭弦, 这意味着弦的传播必须在 O 平面的反射对称性下保持不变. 这一条件要求 I 型超弦中的闭弦必须非定向.

² $D9$ -膜与 I 型超弦激发的 RR 势耦合会带来 RR 荷, 而向形 (orientifold) 则会引入负的 RR 荷, 在 I 型超弦理论中, O 平面提供的负 RR 荷必须恰好抵消 $D9$ -膜的正 RR 荷, 否则会破坏 I 型超弦理论的自洽性.

- 超对称荷: $16_S + 16_C$;
- 有效作用量为 eq. (12.2. 45);
- IIB 型超弦 \rightarrow IIB 型超引力:
 - 超对称荷: $16_C + 16_C$;
 - 有效作用量为 eq. (12.2. 46);
- I 型超弦 \rightarrow I 型超引力:
 - 超对称荷: 16_C ;
 - 与十维中的 $SO(32)$ 杨米尔斯场耦合.
- $SO(32)$ 杂化弦 \rightarrow I 型超引力:
 - 超对称荷: 16_C ;
 - 与十维中的 $SO(32)$ 杨米尔斯场耦合.
- $E_8 \times E_8$ 杂化弦 \rightarrow I 型超引力:
 - 超对称荷: 16_C ;
 - 与十维中的 $E_8 \times E_8$ 杨米尔斯场耦合.

在超弦理论中存在如下对偶关系:

- **T 对偶:** $r \rightarrow \frac{\alpha'}{r}$ 交换了 IIA 型超弦与 IIB 型超弦 (参考它们各自的 Dp -膜即可), 也交换了 $\text{het}_{SO(32)} \leftrightarrow \text{het}_{E_8 \times E_8}$.
- **S 对偶:** 在其他方面, S 对偶作用在弦耦合常数上, 体现为强弱耦合之间的对偶, 具体来说, 对于 I 型超弦:

$$g_s^{\text{杂化}} = \frac{1}{g_s^{\text{I 型}}}, \quad (12.3. 70)$$

$$\text{type I at } \left\{ \begin{array}{c} \text{weak} \\ \text{strong} \end{array} \right\} \text{ coupling} \xleftrightarrow{\text{S-duality}} \text{het}_{SO(32)} \text{ at } \left\{ \begin{array}{c} \text{strong} \\ \text{weak} \end{array} \right\} \text{ coupling} \quad (12.3. 71)$$

S 对偶还将 IIB 型超弦映射到其自身, 并将弱耦合与强耦合进行交换.

- 又因为 r 和 g_s 都是可以由标量的真空期望确定的动态值, T 对偶和 S 对偶便关联了同一理论的不同物理相 (即同一理论在不同参数下的理论表现).
- 对于 IIA 型超弦和 $\text{het}_{E_8 \times E_8}$ 杂化弦在强耦合 g_s 时, 会出现一个尺度为 $\ell_s g_s$ 的额外维度 (其中 ℓ_s 表示弦长尺度); 这一整体构成的 11 维量子场论被称为 M 理论 (M theory).
- 上述理论均可以通过对偶性和 M 理论的不同极限得到. 此外, 11 维超引力来自于 M 理论的 $\alpha' \rightarrow 0$ 极限. 正如我们在第 11 章所讲的, $D = 11$ 是引力子能够嵌入到超对称多重态中而不引入自旋 $\geq \frac{5}{2}$ 态的最高维度.

这些对偶关系在超弦中的具体内容我们会在附录 C 中详细介绍.

于是有下图:

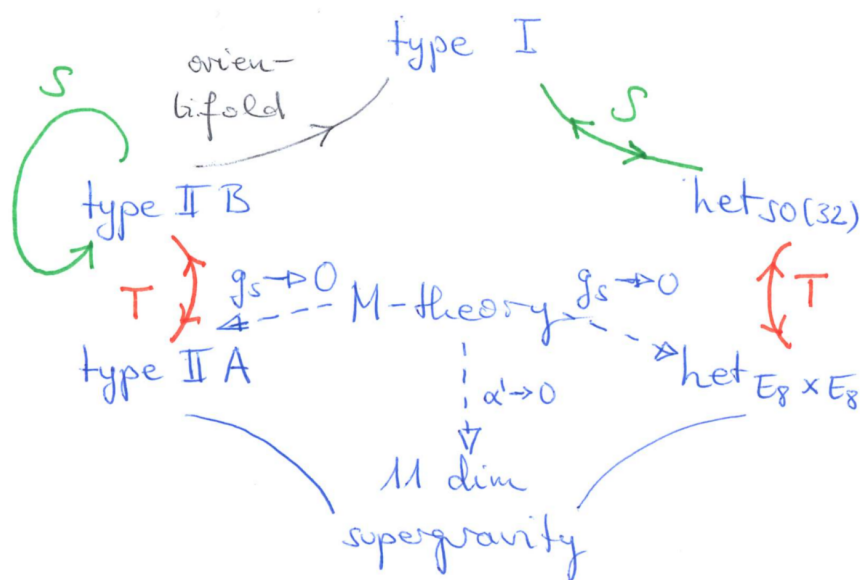


Figure 12.1: 超弦的对偶关系 (节选自 Oliver 讲义)

Chapter 13

超弦的纯旋量表述 (pure spinor formulation)

我们在 10.2 节曾提及, 目前弦论的研究在表述超弦时主要有三种不同的表述方式, 本章我们将简要介绍纯旋量表述. 它是格林-施瓦兹表述 (Green-Schwarz formulation) 的协变推广. 纯旋量表述的优势主要体现在处理振幅时, 尤其是圈级弦振幅和非平凡靶空间下的弦振幅.

在这一章, 我们会简要介绍纯旋量表述在世界面上的自由度. 我们会说明物质和鬼场部分会给出和 RNS 超弦相同的中心荷与洛伦兹流代数

博科维茨发现的纯旋量表述提供了一个保留超对称-庞加莱不变性的计算超弦散射振幅的有效工具. 它结合了拉蒙-纳维-施瓦兹 (RNS) 和格林-施瓦兹 (GS) 表述的许多优势, 可以计算以前无法计算的各种振幅. 本章, 我们将回顾该表述的基本构成, 以期在超弦中计算盘面振幅, 即开弦振幅. 首先, 我们将介绍发展纯旋量表述的一些动机.

13.1 格林-施瓦兹 (GS) 表述的协变量子化疑难

首先让我们来介绍本章使用的符号记法. 首先是十维超空间的符号, 对于超弦的十维靶空间, 超空间坐标为 $\{X^\mu, \theta^\alpha\}$, 其中 $\mu = 0, 1, \dots, 9$ 作为矢量指标出现, 而 $\alpha = 1, 2, \dots, 16$ 则是外尔旋量指标, 并且可以定义 16×16 的 $\gamma_{\alpha\beta}^\mu = \gamma_{\beta\alpha}^\mu$, 他们满足克里福德代数 $\gamma_{\alpha\beta}^{(\mu} \gamma^{\nu)\beta\sigma} = 2\delta^{\mu\nu} \delta_\alpha^\sigma$. 在十维靶空间中, I 型超弦, II 型超弦以及杂化弦都是超对称

的, 因此我们很自然地希望存在一种对世界面作用量的十维超对称表述. 这是通过 GS 表述来实现的, 但不幸的是, 对于 GS 表述, 其经典作用量无法在保持洛伦兹协变性的同时进行量子化. 在共形规范下, 描述杂化弦 (以及 II 型超弦的手性部分 (chiral half)) 的 GS 作用量为:

$$\begin{aligned} S_{\text{GS}} &= \frac{1}{\pi} \int d^2z \left[\frac{1}{2} \Pi^\mu \bar{\Pi}_\mu + \frac{1}{4} \Pi_\mu (\theta \gamma^\mu \bar{\partial} \theta) - \frac{1}{4} \bar{\Pi}_\mu (\theta \gamma^\mu \partial \theta) \right] \\ &= \frac{1}{\pi} \int d^2z \left[\frac{1}{2} \partial X^\mu \bar{\partial} X_\mu + \frac{1}{2} \partial X_\mu (\theta \gamma^\mu \bar{\partial} \theta) + \frac{1}{8} (\theta \gamma^\mu \partial \theta) (\theta \gamma_\mu \bar{\partial} \theta) \right], \end{aligned} \quad (13.1. 1)$$

这里我们引入了超对称动量:

$$\Pi^\mu = \partial X^\mu + \frac{1}{2} (\theta \gamma^\mu \partial \theta), \quad \bar{\Pi}^\mu = \bar{\partial} X^\mu + \frac{1}{2} (\theta \gamma^\mu \bar{\partial} \theta). \quad (13.1. 2)$$

此处 X^μ, θ 均为世界面坐标 z, \bar{z} 的函数, 这里是简写. 积分测度是 $d^2z = \frac{i}{2} dz \wedge d\bar{z}$ 关于界面坐标的导数则简记为: $\partial = \partial_z$ 和 $\bar{\partial} = \partial_{\bar{z}}$. 全纯和反全纯导数则通过 $\partial_0 = \partial + \bar{\partial}$ 和 $\partial_1 = \partial - \bar{\partial}$ 与世界面坐标 $\sigma^0 = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$ 和 $\sigma^1 = \frac{1}{2}(z - \bar{z})$ 的导数相互关联. 为了简化计算和书写方便, 我们也常常取 $\alpha' = 2$, 若想回到保留 α' 的形式, 利用量纲配凑 α' 即可.

需要注意的是, eq. (13.1. 1) 的共轭量子化存在一个技术障碍: 对应于 θ^α 的共轭动量:

$$p_\alpha = 2\pi \frac{\delta S_{\text{GS}}}{\delta(\partial_0 \theta^\alpha)} = \frac{1}{2} \left(\Pi^\mu - \frac{1}{4} (\theta \gamma^\mu \partial_1 \theta) \right) (\gamma_\mu \theta)_\alpha \quad (13.1. 3)$$

它依赖于 θ^α 本身, 进而给出了 GS 约束 $d_\alpha = 0$:

$$d_\alpha = p_\alpha - \frac{1}{2} \left(\Pi^\mu - \frac{1}{4} (\theta \gamma^\mu \partial_1 \theta) \right) (\gamma_\mu \theta)_\alpha. \quad (13.1. 4)$$

容易证明, d_α 有如下的反对易子:

$$\{d_\alpha, d_\beta\} = i \gamma_{\alpha\beta}^\mu \Pi_\mu. \quad (13.1. 5)$$

由于维拉索罗代数给出的约束 $\Pi_\mu \Pi^\mu = 0$ (这类似于在壳条件), 我们发现 eq. (13.1. 5) 中无法区分反对易子是否为零, 即出现在约束 $\Pi_\mu \Pi^\mu = 0$ 的形如 eq. (13.1. 5) 的反对易子中有一半为零. 换言之, eq. (13.1. 5) 混合了经典力学中我们熟知的第一类和第二类约束 (泊松括号是否为零). 对于这样的体系, 我们很难通过协变的方式将这两类约束分开. 处理这种情况的标准方法是使用光锥规范 (light-cone gauge), 这样才可以分别处理两类约束, 并实现量子化. 然而, 我们在前文已经看到, 这一过程中显然会失去洛伦兹协

变性. 这些困难普遍存在于杂化弦理论和第二类弦理论的 GS 表示中.

13.2 西格尔 (Siegel) 对 GS 表述的改进

在 1986 年, 西格尔 (Siegel) 提出了一种处理 GS 表述的协变量量子化的新方法 [11]. 他的想法是把 θ^α 的共轭动量视为一个独立变量, 对左行模, 他提出的作用量如下:

$$S_{\text{Siegel}} = \frac{1}{\pi} \int d^2 z \left[\frac{1}{2} \partial X^\mu \bar{\partial} X_\mu + p_\alpha \bar{\partial} \theta^\alpha \right] \quad (13.2. 6)$$

定义变量 d_α 如下:

$$d_\alpha = p_\alpha - \frac{1}{2} \left(\partial X^\mu + \frac{1}{4} (\theta \gamma^\mu \partial \theta) \right) (\gamma_\mu \theta)_\alpha \quad (13.2. 7)$$

它现在被作为独立变量处理, 不作为约束条件出现. (对于 d_α , 先前定义的 eq. (13.1. 4) 与这里的 eq. (13.2. 7) 之间的差正比于 $\bar{\partial} \theta^\alpha$, 而由 p_α 的运动方程可知这个相差的部分为零.) 这样一来, 利用西格尔的方法, 我们便可以解决 GS 表述中 eq. (13.1. 5) 第一类和第二类约束混合的问题了.

我们可以从作用量 eq. (13.2. 6) 得到旋量的洛伦兹流:

$$\Sigma^{\mu\nu} = -\frac{1}{2} (p \gamma^{\mu\nu} \theta) \quad (13.2. 8)$$

能动张量 $T := T(z)$ 的全纯部分为:

$$T = -\frac{1}{2} \partial X^\mu \partial X_\mu - p_\alpha \partial \theta^\alpha = -\frac{1}{2} \Pi^\mu \Pi_\mu - d_\alpha \partial \theta^\alpha. \quad (13.2. 9)$$

超对称动量 $\Pi^\mu = \partial X^\mu + \frac{1}{2} (\theta \gamma^\mu \partial \theta)$ 的定义与 ?? 节中的定义一样, 不过与第二类超弦相关的右行部分 $\bar{\Pi}^\mu$ 与 eq. (13.1. 2) 不同, 它是用单独的 θ 变量定义的. 例如, 在以 $\varepsilon_{\mu\nu}$ 为参数的洛伦兹变换下:

$$\delta p_\alpha = \frac{1}{4} \varepsilon_{\mu\nu} (\gamma^{\mu\nu})_\alpha^\beta p_\beta, \quad \delta \theta^\alpha = \frac{1}{4} \varepsilon_{\mu\nu} (\gamma^{\mu\nu})^\alpha_\beta \theta^\beta, \quad (13.2. 10)$$

由此给出了 eq. (13.2. 6) 的变分: $\delta S_{\text{Siegel}} = -\frac{1}{\pi} \int \frac{1}{2} \Sigma^{\mu\nu} \bar{\partial} \varepsilon_{\mu\nu}$. 利用诺特流, 我们可以直接得到:

$$\begin{aligned} \delta S_{\text{Siegel}} &= \frac{1}{\pi} \int d^2 z \delta (p_\alpha \bar{\partial} \theta^\alpha) = \frac{1}{\pi} \int d^2 z \left[\frac{1}{4} \varepsilon_{\mu\nu} (\gamma^{\mu\nu})_\alpha^\beta p_\beta \bar{\partial} \theta^\alpha + \frac{1}{4} p_\alpha \bar{\partial} (\varepsilon_{\mu\nu} (\gamma^{\mu\nu} \theta)^\alpha) \right] \\ &= \frac{1}{\pi} \int d^2 z \left[\frac{1}{4} \bar{\partial} \varepsilon_{\mu\nu} p_\alpha (\gamma^{\mu\nu})^\alpha_\beta \theta^\beta \right] = -\frac{1}{\pi} \int d^2 z \frac{1}{2} \Sigma^{\mu\nu} \bar{\partial} \varepsilon_{\mu\nu}, \end{aligned} \quad (13.2. 11)$$

这里我们应用了 γ 矩阵的反对称性: $(\gamma^{\mu\nu})_{\alpha}^{\beta} = -(\gamma^{\mu\nu})^{\beta}_{\alpha}$.

作用量 eq. (13.2. 6) 描述了一个共形场论. 其中, 全纯的 $\partial X^{\mu}, p_{\alpha}$ 和 θ^{α} 的共形权分别为 $h_{\partial X} = h_p = 1$ 以及 $h_{\theta} = 0$. 出现在 S_{Siegel} 中的变量之间的 OPE 可以用标准的路径积分方法计算两点关联函数得到, 我们最终得到:

$$\begin{aligned} X^{\mu}(z, \bar{z})X^{\nu}(w, \bar{w}) &\sim -\delta^{\mu\nu} \ln |z - w|^2 + \cdots, \\ p_{\alpha}(z)\theta^{\beta}(w) &\sim \frac{\delta_{\alpha}^{\beta}}{z - w} + \cdots, \\ d_{\alpha}(z)d_{\beta}(w) &\sim -\frac{\gamma_{\alpha\beta}^{\mu}\Pi_{\mu}(w)}{z - w} + \cdots, \\ d_{\alpha}(z)\Pi^{\mu}(w) &\sim \frac{(\gamma^{\mu}\partial\theta(w))_{\alpha}}{z - w} + \cdots, \end{aligned} \quad (13.2. 12)$$

这里的 \cdots 均表示在 $z \rightarrow w$ 时不出现奇点的项.

西格尔还为无质量开弦态 (用下标 i 标记) 提出了一个超对称的积分顶角算符 (integrated vertex operator), 如下:

$$U_i^{\text{Siegel}} = \int dz (\partial\theta^{\alpha} A_{\alpha}^i(X, \theta) + A_{\mu}^i(X, \theta)\Pi^{\mu} + d_{\alpha}W_i^{\alpha}(X, \theta)), \quad (13.2. 13)$$

其中 $\{A_{\alpha}^i, A_{\mu}^i, W_i^{\alpha}\}$ 是线性化的超杨米尔斯 (super-Yang-Mills, 今后简称 SYM) 的超场.

13.2.1 西格尔方法的困难

西格尔方法的困难主要体现在如下的三个方面, 而它们都会由 13.3 节介绍的纯旋量表述解决.

- 非零的中心荷: 根据 [12] 中对 bc 鬼场的计算, 共形权为 $h_p = 1$ 费米子对 $(p_{\alpha}, \theta^{\alpha})$ 出现在能动张量 eq. (13.2. 9) 中的每个分量对中心荷的贡献均为 $-3(2h_p - 1)^2 + 1 = -2$, 总计为 $16 \times (-2) = -32$. 我们已经知道, X^{μ} 的贡献为 $+10$. 因此, 能动量张量的总中心荷为: $c_X + c_{p\theta} = 10 - 32 = -22$. 中心荷的这一非零结果导致理论在量子化时出现反常, 这给西格尔修正的 GS 表述带来了第一个重大问题.
- 无质量顶角算符的不等价性: 正如 [9] 中指出的, 顶角算 eq. (13.2. 13) 无法重现在 RNS 表述中计算出的振幅的相同结果, 因为它不满足相同的 OPE. 具体来说, 在使用线性化 SYM 超场的 θ 展开 eq. (11.8. 120) 之后, 从 eq. (13.2. 13) 得到的胶子顶

角算符是:

$$U_{i,\text{gluon}}^{\text{Siegel}} = \int dz \left(e_i^\mu \partial X_\mu - \frac{1}{4} (p \gamma^{\mu\nu} \theta) f_{\mu\nu}^i + \dots \right) e^{k_i \cdot X} \quad (13.2. 14)$$

省略号包含 θ^3 项. 另一方面, 在 RNS 表述中, 极化矢量为 e_i^μ 的胶子的顶角算符则在 [4] 中给出. 如下:

$$U_{i,\text{gluon}}^{\text{RNS}} = \int dz \left(e_i^\mu \partial X_\mu - \frac{1}{2} \psi^\mu \psi^\nu f_{\mu\nu}^i \right) e^{k_i \cdot X}, \quad (13.2. 15)$$

其中为了使括号中的形式简单, 我们此处使用了约定是通过放缩 $k \rightarrow -ik$ 的符号约定, 因此平面波的形式以及括号内的系数与部分文献不同. 其中, ψ^μ 是共形权为 $h_\psi = \frac{1}{2}$ 的 RNS 世界面旋量, $f_{\mu\nu}^i = k_\mu^i e_\nu^i - k_\nu^i e_\mu^i$ 表示胶子的线性化场强. 通过比较 eq. (13.2. 15) 和 eq. (13.2. 14) 我们就会发现, 在每一种表述中, 与 $\frac{1}{2} f_{\mu\nu}^i$ 相乘的算符都是费米变量的洛伦兹流:

$$\Sigma_{\text{RNS}}^{\mu\nu} = -\psi^\mu \psi^\nu, \quad \Sigma_{\text{Siegel}}^{\mu\nu} = -\frac{1}{2} (p \gamma^{\mu\nu} \theta). \quad (13.2. 16)$$

前面说的 OPE 不同的问题实际上就在于这里的 OPE 存在区别. 首先, 对于 RNS 表述, 我们有:

$$\Sigma_{\text{RNS}}^{\mu\nu}(z) \Sigma_{\text{RNS}}^{\rho\sigma}(w) \sim \frac{\delta^{\rho[\mu} \Sigma_{\text{RNS}}^{\nu]\sigma}(w) - \delta^{\sigma[\mu} \Sigma_{\text{RNS}}^{\nu]\rho}(w)}{z - w} + \frac{\delta^{\mu[\sigma} \delta^{\rho]\nu}}{(z - w)^2}, \quad (13.2. 17)$$

其中二阶奇点项的系数为 +1. 另一方面, 使用 eq. (13.2. 12) 中的 OPE 我们可以得到:

$$\begin{aligned} \Sigma_{\text{Siegel}}^{\mu\nu}(z) \Sigma_{\text{Siegel}}^{\rho\sigma}(w) &\sim \frac{1}{4} \frac{p_\alpha(w) (\gamma^{\mu\nu} \gamma^{\rho\sigma} - \gamma^{\rho\sigma} \gamma^{\mu\nu})^\alpha_\beta \theta^\beta(w)}{z - w} + \frac{1}{4} \frac{\text{Tr}(\gamma^{\mu\nu} \gamma^{\rho\sigma})}{(z - w)^2} \\ &= \frac{\delta^{\rho[\mu} \Sigma^{\nu]\sigma}(w) - \delta^{\sigma[\mu} \Sigma^{\nu]\rho}(w)}{z - w} + 4 \frac{\delta^{m[\sigma} \delta^{\rho]\nu}}{(z - w)^2}, \end{aligned} \quad (13.2. 18)$$

其中我们在第二行使用了 $\gamma^{\mu\nu} \gamma^{\rho\sigma} - \gamma^{\rho\sigma} \gamma^{\mu\nu} = 2\delta^{\nu\rho} \gamma^{\mu\sigma} - 2\delta^{\nu\sigma} \gamma^{\mu\rho} + 2\delta^{\mu\sigma} \gamma^{\nu\rho} - 2\delta^{\mu\rho} \gamma^{\nu\sigma}$ 以及 $\text{Tr}(\gamma^{\mu\nu} \gamma_{\rho\sigma}) = 16(\delta_q^\mu \delta_p^\nu - \delta_p^\mu \delta_q^\nu)$.

eq. (13.2. 17) 和 eq. (13.2. 18) 在二阶奇点项系数上的差异导致分别使用 RNS 顶角算符 eq. (13.2. 15) 和西格尔定角算符 eq. (13.2. 14) 计算胶子散射振幅时也会出现类似的差异.

- 缺失限制条件: 最后, 在 eq. (13.2. 6) 中, 我们需要加入适当的约束条件才能复现超

弦谱: 即前述的 T 和 G . 他们以超对称动量和 GS 约束的形式可以写为:

$$T = -\frac{1}{2}\Pi^\mu\Pi_\mu - d_\alpha\partial\theta^\alpha, \quad G^\alpha = \Pi^\mu(\gamma_\mu d)^\alpha \quad (13.2. 19)$$

这两个条件也应当被包含在作用量的限制条件中. 尽管用西格尔的方法成功地描述了超粒子, 但在超弦情况下却从未找到完整的约束条件.

尽管有上述种种困难, 西格尔的想法仍有其贡献, 并且被博科维茨继承, 用在了他提出的纯旋量表述 [9] 中.

13.3 纯旋量表述基础

我们在上文已经看到, 虽然西格尔的方法规避了与 GS 约束相关的困难, 但中心荷 $c_X + c_{p\theta} = -22$, 且洛伦兹流代数的 OPE 出现 $+4$, 与 RNS 表述不同. 这些都对这种新的表述提出了严峻的挑战. 这促使博科维茨修改了西格尔的表述, 最终引入了纯旋量的鬼场, 他们对能量动量张量中心荷贡献 $+22$, 并为洛伦兹流 OPE 中的二阶奇点贡献 -3 , 从而解决了西格尔表述中最紧迫的问题, 并由此构造出了所谓的纯旋量表述 [9]. 下面让我们简要回顾一下这一表述的核心要素:

- 鬼场的洛伦兹流: 博科维茨的想法便是对洛伦兹流 eq. (13.2. 8) 增加来自鬼场的修正项 $N^{\mu\nu}$, 得到:

$$M^{\mu\nu} = \Sigma^{\mu\nu} + N^{\mu\nu}. \quad (13.3. 20)$$

如果鬼场给出的 $N^{\mu\nu}$ 在 OPE 中对二阶奇点贡献 -3 的系数, 那么新定义的 $M^{\mu\nu}$ 将满足与 RNS 表述中相同的 OPE eq. (13.2. 17). 这里 OPE 的推导细节参见 [13].

$$N^{\mu\nu}(z)N^{\rho\sigma}(w) \sim \frac{\delta^{\rho[\mu}N^{\nu]\sigma}(w) - \delta^{\sigma[\mu}N^{\nu]\rho}(w)}{z-w} - 3\frac{\delta^{m[\sigma}\delta^{\rho]\nu}}{(z-w)^2},$$

$$\Sigma^{\mu\nu}(z)N^{\rho\sigma}(w) \sim \text{regular}. \quad (13.3. 21)$$

这便解决了洛伦兹流的 OPE 中出现的问题, 并将整个洛伦兹流 $M^{\mu\nu}$ 的二阶奇点系数改为 $4 - 3 = 1$, 与 eq. (13.2. 17) 中的 RNS 洛伦兹流结果一致.

- 鬼场的能动量张量: 为了解决西格尔方法中能动量张量中心荷不为零的问题, 我们需要这些鬼场抵消物质场的中心荷, 即要求鬼场的中心荷为 $c_\lambda = +22$. 引入 BRST 荷便可以正确地解决这个问题, 而这也必然地给出了纯旋量表述.

- 纯旋量表述的 BRST 算符: 现在, 为了解决刚才的问题, 我们给出 BRST 荷:

$$Q_{\text{BRST}} = \oint dz \lambda^\alpha(z) d_\alpha(z), \quad (13.3. 22)$$

其中 λ^α 是满足玻色统计的旋量, 因此是鬼场. 而与 GS 约束相对应的西格尔变量 d_α 定义于 eq. (13.2. 7). BRST 荷 eq. (13.3. 22) 必须满足一致性条件 $Q_{\text{BRST}}^2 = 0$, 否则 BRST 荷本身在规范约束的变分作用下不是不变量. 使用 eq. (13.3. 22) 和 OPE eq. (13.2. 12) 我们可以得到:

$$Q_{\text{BRST}}^2 = \frac{1}{2} \{Q_{\text{BRST}}, Q_{\text{BRST}}\} = -\frac{1}{2} \oint dz (\lambda \gamma^\mu \lambda) \Pi_\mu. \quad (13.3. 23)$$

因此要求 BRST 荷必须是幂零算符

$$Q_{\text{BRST}}^2 = 0 \quad (13.3. 24)$$

便表明玻色旋量场 λ^α 必须满足所谓的纯旋量约束:

$$\lambda \gamma^\mu \lambda = 0, \quad (13.3. 25)$$

13.3.1 $U(5)$ 分解

博科维茨发现的表述基于纯旋量 λ^α 的性质, 而确定在约束条件 eq. (13.3. 25) 作用后遗留的自由度的数量是非常重要的. 想当然地, 我们可能认为与 $m = 0, 1, \dots, 9$ 相对应的十个约束表明 $SO(1, 9)$ 的纯旋量只有 $16 - 10 = 6$ 的自由度. 然而, 这些约束方程并不完全独立. 我们将在下文看到, 纯旋量有 11 个自由度.

为了看到一个纯旋量有十一个自由度, 我们首先需要介绍所谓的 $U(5)$ 分解. 我们可以进行威克转动把 $SO(1, 9)$ 改为 $SO(10)$ 并把 $SO(10)$ 对称性分解为它的 $U(5)$ 子群. 具体计算见 [9], 结果是外尔旋量分解为 $U(5)$ 的不可约表示表示:

$$\lambda^\alpha \longrightarrow (\lambda^+, \lambda_{ab}, \lambda^a) \quad (13.3. 26)$$

对应于 $\mathbf{16} \longrightarrow (\mathbf{1}, \overline{\mathbf{10}}, \mathbf{5})$, 其中 $\lambda_{ba} = -\lambda_{ab}$. 而纯旋量约束 eq. (13.3. 25) 的解则表明, 对于 $\lambda^+ \neq 0$ 我们有:

$$\lambda^a = \frac{1}{8\lambda^+} \epsilon^{abcde} \lambda_{bc} \lambda_{de}, \quad a, b, c, d, e = 1, \dots, 5 \quad (13.3. 27)$$

其中 ϵ^{abcde} 是全反对称的, $\epsilon^{12345} = 1$. 在这记号下, λ_{ab} 将 $SO(10)/U(5)$ 参数化. 因此,

纯旋量约束只消除了 $\lambda^a \in \mathbf{5}$, 而保留 $\lambda^+ \in \mathbf{1}$ 与 $\lambda_{ab} \in \overline{\mathbf{10}}$. 因此, 在 $SO(10)$ 的纯旋量中仍有 $1 + 10 = 11$ 个自由度. 注意到, 在没有进行威克转动的情况下, λ_{ab} 参数化的是紧致空间 $SO(1,9)/(U(4) \times \mathcal{R}^9)$, 其中 \mathcal{R}^9 代表九个类光纯增速 (boosts).

为了解决纯旋量约束 eq. (13.3. 25), 我们将 $SO(10)$ 对称性分解为它的子群 $U(5)$, 纯旋量于是成为 $U(5) = SU(5) \otimes U(1)$ 变量的形式. 那么现在, 洛伦兹流也相应地需要分解为 $U(5)$ 的不可约表示:

$$N^{\mu\nu} \longrightarrow (n, n_a^b, n_{ab}, n^{ab}), \quad (13.3. 28)$$

他们分别对应 $U(1)$ 荷 $(0, 0, +2, -2)$. 在本节的余下部分, 这些 $SU(5)$ 洛伦兹流将由基本的鬼场变量 $s(z), u_{ab}(z)$ 和它们的共轭动量 $t(z), v^{ab}(z)$ 构建而成. 从而满足所需的 eq. (13.3. 21) 条件. 为此, 我们将首先讨论 eq. (13.3. 21) 中的 OPE 在 eq. (13.3. 28) 给出的 $SO(10) \rightarrow SU(5) \otimes U(1)$ 下如何分解: 洛伦兹流的 $SO(10)$ 协变 OPE:

$$N^{\mu\nu}(z)N^{\rho\sigma}(w) \sim \frac{\delta^{\mu\rho}N^{\nu\sigma}(w) - \delta^{\nu\rho}N^{\mu\sigma}(w) - \delta^{\mu\sigma}N^{\nu\rho}(w) + \delta^{\nu\sigma}N^{\mu\rho}(w)}{z-w} - 3\frac{(\delta^{\mu\sigma}\delta^{\nu\rho} - \delta^{\mu\rho}\delta^{\nu\sigma})}{(z-w)^2}, \quad (13.3. 29)$$

这表明 $SU(5) \otimes U(1)$ 流 $(n, n_a^b, n_{ab}, n^{ab})$ 满足下面的 OPE:

$$\begin{aligned} n_{ab}(z)n_{cd}(w) &\sim \text{regular}, \\ n^{ab}(z)n^{cd}(w) &\sim \text{regular}, \\ n_{ab}(z)n^{cd}(w) &\sim \frac{-\delta_{[a}^c n_{b]}^d(w) + \delta_{[a}^d n_{b]}^c(w) - \frac{2}{\sqrt{5}}\delta_{[a}^c \delta_{b]}^d n(w)}{z-w} - 3\frac{\delta_b^c \delta_a^d - \delta_a^c \delta_b^d}{(z-w)^2}, \\ n(z)n_b^a(w) &\sim \text{regular}, \\ n_b^a(z)n_d^c(w) &\sim \frac{-\delta_b^c n_d^a(w) + \delta_d^a n_b^c(w)}{z-w} - 3\frac{\delta_d^a \delta_b^c - \frac{1}{5}\delta_b^a \delta_d^c}{(z-w)^2}, \\ n(z)n_{ab}(w) &\sim +\frac{2}{\sqrt{5}}\frac{n_{ab}(w)}{z-w}, \\ n^{ab}(z)n_d^c(w) &\sim \frac{-\delta_d^a n^{bc}(w) + \delta_d^b n^{ac}(w) - \frac{2}{5}\delta_d^c n^{ab}(w)}{z-w}, \\ n(z)n^{ab}(w) &\sim -\frac{2}{\sqrt{5}}\frac{n^{ab}(w)}{z-w}, \\ n_{ab}(z)n_d^c(w) &\sim \frac{-\delta_b^c n_{ad}(w) + \delta_a^c n_{bd}(w) + \frac{2}{5}\delta_a^c n_{ab}(w)}{z-w}, \\ n(z)n(w) &\sim -\frac{3}{(z-w)^2}. \end{aligned} \quad (13.3. 30)$$

在构造 $U(5)$ 洛伦兹流时, 还有一个一致性条件需要遵守. 纯旋量 λ^α 必须在 eq. (13.3. 20) 中给出的总洛伦兹流 $M^{\mu\nu}$ 的作用下以旋量形式变换:

$$\delta\lambda^\alpha = \frac{1}{2} \left[\oint dz \varepsilon_{\mu\nu} M^{\mu\nu}, \lambda^\alpha \right] = \frac{1}{4} \varepsilon_{\mu\nu} (\gamma^{\mu\nu} \lambda)^\alpha. \quad (13.3. 31)$$

由于 λ^α 与 eq. (13.2. 8) 中的洛伦兹流 $\Sigma^{\mu\nu}$ 的 OPE 没有奇点项, 我们可以给出纯旋量必须满足的形式. 考虑到纯旋量约束 eq. (13.3. 27) 在 $U(5)$ 变量中的解, 我们需要知道 $SO(10)$ 旋量的变换在写为 $U(5)$ 表示的形式时有怎样的群论分解. 首先, 旋量的 $SO(10)$ 变换为:

$$N^{\mu\nu}(z) \lambda^\alpha(w) \sim \frac{1}{2} \frac{(\gamma^{\mu\nu})^\alpha{}_\beta \lambda^\beta(w)}{(z-w)}, \quad (13.3. 32)$$

这说明 $SU(5)$ 表示 $(n, n_b^a, n_{ab}, n^{ab})$ 和 $(\lambda^+, \lambda_{cd}, \lambda^c)$ 之间的 OPE 为:

$$\begin{aligned} n(z) \lambda^+(w) &\sim -\frac{\sqrt{5}}{2} \frac{\lambda^+(w)}{z-w}, & n(z) \lambda_{cd}(w) &\sim -\frac{1}{2\sqrt{5}} \frac{\lambda_{cd}(w)}{z-w}, \\ n(z) \lambda^c(w) &\sim \frac{3}{2\sqrt{5}} \frac{\lambda^c(w)}{z-w}, & n_b^a(z) \lambda^+(w) &\sim \text{regular}, \\ n_b^a(z) \lambda_{cd}(w) &\sim \frac{\delta_d^a \lambda_{cb}(w) - \delta_c^a \lambda_{db}(w)}{(z-w)} - \frac{2}{5} \frac{\delta_b^a \lambda_{cd}(w)}{(z-w)}, \\ n_b^a(z) \lambda^c(w) &\sim \frac{1}{5} \frac{\delta_b^a \lambda^c(w)}{(z-w)} - \frac{\delta_b^c \lambda^a(w)}{(z-w)}, \\ n_{ab}(z) \lambda^+(w) &\sim \frac{\lambda_{ab}(w)}{z-w}, & n_{ab}(z) \lambda_{cd}(w) &\sim \frac{\epsilon_{abcde} \lambda^e(w)}{z-w}, \\ n_{ab}(z) \lambda^c(w) &\sim \text{regular}, & n^{ab}(z) \lambda^+(w) &\sim \text{regular}, \\ n^{ab}(z) \lambda_{cd}(w) &\sim -\frac{\delta_c^{[a} \delta_d^{b]} \lambda^+(w)}{z-w}, & n^{ab}(z) \lambda^c(w) &\sim -\frac{\epsilon^{abcde} \lambda_{de}(w)}{2(z-w)}. \end{aligned} \quad (13.3. 33)$$

事实证明, 所有这些 OPE 都可以通过涉及以下鬼场变量 $s(z)$, $u_{ab}(z)$, $t(z)$ 以及 $v^{cd}(z)$ 的作用量来重现, 这些鬼场变量是洛伦兹流 $(n, n_a^b, n_{ab}, n^{ab})$ 和纯旋量 $(\lambda^+, \lambda_{cd}, \lambda^c)$ 的组成部分. 纯旋量表述的关键就在于这种构造的存在. 在继续讨论之前, 我们注意到 eq. (13.3. 32) 的 OPE 与 eq. (13.3. 29) 的奇点之间的一致性. 即, 如果有 $[N^{\mu\nu}, \lambda^\alpha] = \frac{1}{2} (\gamma^{\mu\nu})^\alpha{}_\beta \lambda^\beta$, 我们便有 $[N^{\rho\sigma}, [N^{\mu\nu}, \lambda^\alpha]] = \frac{1}{4} (\gamma^{\mu\nu})^\alpha{}_\beta (\gamma^{\rho\sigma})^\beta{}_\delta \lambda^\delta$. 这表明:

$$\begin{aligned} [[N^{\mu\nu}, N^{\rho\sigma}], \lambda^\alpha] &= [N^{\mu\nu}, [N^{\rho\sigma}, \lambda^\alpha]] - [N^{\rho\sigma}, [N^{\mu\nu}, \lambda^\alpha]] \\ &= \frac{1}{4} [(\gamma^{\rho\sigma} \gamma^{\mu\nu})^\alpha{}_\beta - (\gamma^{\mu\nu} \gamma^{\rho\sigma})^\alpha{}_\beta] \lambda^\beta \\ &= \delta^{\mu\rho} [N^{\nu\sigma}, \lambda^\alpha] - \delta^{\nu\rho} [N^{\mu\sigma}, \lambda^\alpha] - \delta^{\mu\sigma} [N^{\nu\rho}, \lambda^\alpha] + \delta^{\nu\sigma} [N^{\mu\rho}, \lambda^\alpha], \end{aligned}$$

其中我们利用了 $\gamma^{\rho\sigma}\gamma^{\mu\nu} - \gamma^{\mu\nu}\gamma^{\rho\sigma} = 2\delta^{\mu\rho}\gamma^{\nu\sigma} - 2\delta^{\nu\rho}\gamma^{\mu\sigma} - 2\delta^{\mu\sigma}\gamma^{\nu\rho} + 2\delta^{\nu\sigma}\gamma^{\mu\rho}$. 这些 OPE 在计算弦振幅的共形场论关联函数中起着至关重要的作用.

13.3.2 纯旋量的鬼场

在本节中, 我们将展示博科维茨在引入纯旋量, 洛伦兹流和能动张量的特定 $U(5)$ 参数化后发现的上述问题的解决方案. 纯旋量约束下的鬼场作用量为:

$$S_\lambda = \frac{1}{2\pi} \int d^2z \left(-\partial t \bar{\partial} s + \frac{1}{2} v^{ab} \bar{\partial} u_{ab} \right), \quad a, b = 1, \dots, 5, \quad (13.3.34)$$

其中, $t(z)$ 和 $v^{ab}(z)$ 是 $s(z)$ 和 $u_{ab}(z)$ 的共轭动量. 此外, 与 RNS 鬼场中的 ϕ 类似, $s(z)$ 和 $t(z)$ 是手性玻色子, 我们必须手动赋予运动方程 $\bar{\partial} s = \bar{\partial} t = 0$ 他们的 OPE 则有以下形式:

$$t(z)s(w) \sim \ln(z-w),$$

$$v^{ab}(z)u_{cd}(w) \sim \frac{\delta_c^a \delta_d^b - \delta_d^a \delta_c^b}{z-w}.$$

构建纯旋量表述的基础是在作用量 eq. (13.3.34) 中构造鬼场 $s(z), t(z), v^{ab}(z), u_{ab}(z)$ 形式的 $U(5)$ 洛伦兹流 $(n, n_b^a, n_{ab}, n^{ab})$ 以及 $(\lambda^+, \lambda_{ab}, \lambda^a)$. 这样做的前提是 $U(5)$ 分解后, 它们之间的 OPE 满足 eq. (13.3.30) 和 eq. (13.3.33). 博科维茨找到的解是:

$$\begin{aligned} n &= -\frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1}{4} u_{ab} v^{ab} + \frac{5}{2} \partial t - \frac{5}{2} \partial s \right), & \lambda^+ &= e^s, \\ n_b^a &= -u_{bc} v^{ac} + \frac{1}{5} \delta_b^a u_{cd} v^{cd}, & \lambda_{ab} &= u_{ab}, \\ n^{ab} &= -e^s v^{ab}, & \lambda^a &= \frac{1}{8} e^{-s} \epsilon^{abcde} u_{bc} u_{de}, \\ n_{ab} &= -e^{-s} \left(2\partial u_{ab} - u_{ab} \partial t - 2u_{ab} \partial s + u_{ac} u_{bd} v^{cd} - \frac{1}{2} u_{ab} u_{cd} v^{cd} \right). \end{aligned} \quad (13.3.35)$$

对 $n(z)$ 所取的正规化会导致使其二阶奇点系数为 -3 . 计算表明, 只要鬼场 $s(z), t(z), v^{ab}(z), u_{ab}(z)$ 满足 OPE eq. (13.3.35), 它们之间的 OPE 就能重现 eq. (13.3.30) 和 eq. (13.3.33)

中的所有结果. 以下是两个例子:

$$\begin{aligned}
n(z)n^{ab}(w) &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1}{4} u_{fg}(z) v^{fg}(z) + \frac{5}{2} \partial t(z) - \frac{5}{2} \partial s(z) \right) e^{s(w)} v^{ab}(w) \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}} \frac{1}{4} e^{s(w)} v^{fg}(z) \overline{u_{fg}(z)} v^{ab}(w) - \frac{\sqrt{5}}{2} \overline{\partial t(z)} e^{s(w)} v^{ab}(w) \\
&\sim \frac{1}{\sqrt{5}} \frac{1}{4} e^{s(w)} v^{fg}(z) \frac{(-\delta_f^a \delta_g^b + \delta_g^a \delta_f^b)}{z-w} - \frac{\sqrt{5}}{2} \frac{1}{z-w} e^{s(w)} v^{ab}(w) \\
&\sim -\frac{2}{\sqrt{5}} \frac{n^{ab}(w)}{z-w}
\end{aligned} \tag{13.3. 36}$$

以及

$$\begin{aligned}
n^{ab}(z) \lambda^c(w) &= -\frac{1}{8} e^{s(z)} \epsilon^{cdefg} \left(\overline{v^{ab}(z)} u_{de}(w) u_{fg}(w) + u_{de}(w) \overline{v^{ab}(z)} u_{fg}(w) \right) e^{-s(w)} \\
&\sim -\frac{1}{8} e^{s(z)} \frac{(2\epsilon^{cabfg} u_{fg}(w) + 2\epsilon^{cdeab} u_{de}(w))}{z-w} e^{-s(w)} \\
&\sim -\frac{1}{2} \epsilon^{abcde} \frac{\lambda_{de}(w)}{z-w},
\end{aligned} \tag{13.3. 37}$$

这里我们使用了 OPE $u_{fg}(z) v^{ab}(w) \sim \frac{-\delta_f^a \delta_g^b + \delta_g^a \delta_f^b}{z-w}$ 和 $\partial t(z) e^{s(w)} \sim \frac{1}{z-w} e^{s(w)}$ 他们是由 eq. (13.3. 35) 和丢弃的非奇异项得出的, 这些非奇异项来自 z 处的场围绕 w 的泰勒展开. 上述结果重现了 $SO(10)$ 协变 OPE 进行群论分解得到的 eq. (13.3. 30) 和 eq. (13.3. 33) 中的两个结果. 所有其他 OPE 都可以用类似的方法验证. 因此, 尽管鬼场 S_λ 的作用量并不是能直接看出洛伦兹协变性, 但所有涉及 $N^{\mu\nu}$ 和 λ^α 的 OPE 都是从 $SO(10)$ 协变表达式演化而来的. 所以纯旋量表述保留了洛伦兹协变性.

接下来, 我们将给出来自鬼场作用量 eq. (13.3. 34) 的鬼场能动张量:

$$T_\lambda = \frac{1}{2} v^{ab} \partial u_{ab} + \partial t \partial s + \partial^2 s, \tag{13.3. 38}$$

并说明其中心荷为 +22. 这正是要求它与西格尔发现的物质场能动张量中心荷相加时为零所需的值. 能动张量 eq. (13.3. 38) 的推导与先前计算其他能动张量的步骤一致. 在共形权重分别为 $(1, 0)$, $(0, 0)$, $(1, 0)$ 和 $(0, 1)$, 的场 $(v^{ab}, u_{ab}, \partial s, \bar{\partial} t)$ 的共形变换下:

$$\begin{aligned}
\delta v^{ab} &= \partial \varepsilon v^{ab} + \varepsilon \partial v^{ab} + \bar{\varepsilon} \bar{\partial} v^{ab}, & \delta u_{ab} &= \varepsilon \partial u_{ab} + \bar{\varepsilon} \bar{\partial} u_{ab}, \\
\delta \partial s &= \partial \varepsilon \partial s + \varepsilon \partial^2 s + \partial \bar{\varepsilon} \bar{\partial} s + \bar{\partial} \bar{\varepsilon} \partial s, & \delta \bar{\partial} t &= \varepsilon \partial \bar{\partial} t + \bar{\varepsilon} \bar{\partial} \partial t + \bar{\partial} \bar{\varepsilon} \bar{\partial} t + \bar{\varepsilon} \bar{\partial}^2 t,
\end{aligned} \tag{13.3. 39}$$

作用量的变分为:

$$\delta S_\lambda = \frac{1}{2\pi} \int d^2z [\bar{\partial}\varepsilon T_\lambda(z) + \partial\bar{\varepsilon}\bar{T}_\lambda(\bar{z})], \quad (13.3. 40)$$

要求 $(n, n_b^a, n^{ab}, n_{ab})$ 为共形主场. 最后我们可以得到鬼场能动张量 eq. (13.3. 38).

接下来我们可以尝试计算鬼场能动张量 eq. (13.3. 38) 的中心荷, 验证其为 $c_\lambda = 22$. 中心荷的来源是能动张量之间 OPE 的四阶奇点: $T_\lambda(z)T_\lambda(w) \sim \frac{(c_\lambda/2)}{(z-w)^4} + \dots$. 这里共有两种来源:

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \overbrace{v^{ab}(z)\partial u_{ab}(z)v^{cd}(w)\partial u_{ab}(w)} &= \frac{1}{4} \frac{\delta_c^{[a}\delta_d^{b]}\delta_a^{[c}\delta_b^{d]}}{(z-w)^4} = \frac{10}{(z-w)^4}, \\ \overbrace{\partial t(z)\partial s(z)\partial t(w)\partial s(w)} &= \frac{1}{(z-w)^4}, \end{aligned} \quad (13.3. 41)$$

加和便可以得到 $c_\lambda = +22$. 因此, 由于鬼场与物质场之间的 OPE 没有奇点, 在纯旋量表述中, 总能动量张量:

$$T_{\text{PS}} = -\frac{1}{2}\partial X^\mu\partial X_\mu - p_\alpha\partial\theta^\alpha + \frac{1}{2}v^{ab}\partial u_{ab} + \partial t\partial s + \partial^2 s, \quad (13.3. 42)$$

给出的总中心电荷为零: $c_X + c_{p\theta} + c_\lambda = 10 - 32 + 22 = 0$. 因此在纯旋量表述中不会出现非零中心荷带来的共形反常.

13.3.3 纯旋量表述的作用量

从上面的讨论中我们可以得知, 将 eq. (13.3. 34) 中的纯旋量鬼场作用加入西格尔作用量 eq. (13.2. 6) 便可以得到理论整体的能动量张量中心荷为零. 因为来自物质的 $c_X + c_{p\theta} = -22$ 都被来自鬼场的 $c_\lambda = 22$ 抵消了. 此外, 总作用量的洛伦兹流的 OPE 与 RNS 表述中的 OPE 相同. 博科维茨随后给出了纯旋量表述中左行场的作用量 [9]:

$$S_{\text{PS}} = \frac{1}{\pi} \int d^2z \left(\frac{1}{2} \partial X^\mu \bar{\partial} X_\mu + p_\alpha \bar{\partial} \theta^\alpha - \partial t \bar{\partial} s + \frac{1}{2} v^{ab} \bar{\partial} u_{ab} \right). \quad (13.3. 43)$$

靶空间超对称生成元为:

$$\mathcal{Q}_\alpha = \oint dz \left(p_\alpha + \frac{1}{2} (\gamma^\mu \theta)_\alpha \partial X_\mu + \frac{1}{24} (\gamma^\mu \theta)_\alpha (\theta \gamma_\mu \partial \theta) \right), \quad (13.3. 44)$$

以外尔旋量 ε^α 为参数, 在纯旋量表述中, 它们对变量的作用为:

$$\begin{aligned}\delta X^\mu &= \frac{1}{2}(\varepsilon\gamma^\mu\theta), \quad \delta\theta^\alpha = \varepsilon^\alpha, \\ \delta p_\beta &= -\frac{1}{2}(\varepsilon\gamma^\mu)_\beta\partial X_\mu + \frac{1}{8}(\varepsilon\gamma_\mu\theta)(\partial\theta\gamma^\mu)_\beta, \\ \delta s &= \delta t = \delta u_{ab} = \delta v^{ab} = 0.\end{aligned}\tag{13.3. 45}$$

通过分析 $\partial X^\mu\bar{\partial}X_\mu$ 与 δp_β 中的 θ^2 阶的变分, 我们找到:

$$\begin{aligned}\partial[(\varepsilon\gamma_\mu\theta)\bar{\partial}X^\mu] - \bar{\partial}[(\varepsilon\gamma_\mu\theta)\partial X^\mu] &= (\varepsilon\gamma_\mu\partial\theta)\bar{\partial}X^\mu - (\varepsilon\gamma_\mu\bar{\partial}\theta)\partial X^\mu \\ \partial[(\varepsilon\gamma_\mu\theta)(\theta\gamma^\mu\bar{\partial}\theta)] - \bar{\partial}[(\varepsilon\gamma_\mu\theta)(\theta\gamma^\mu\partial\theta)] &= 3(\varepsilon\gamma_\mu\theta)(\partial\theta\gamma^\mu\bar{\partial}\theta)\end{aligned}$$

他们在 d^2z 积分下为零. 因而作用量 eq. (13.3. 43) 是超对称的.

纯旋量表述作用量 eq. (13.3. 43) 现在可以被写为 $SO(10)$ 协变的形式:

$$S_{\text{PS}} = \frac{1}{\pi} \int d^2z \left(\frac{1}{2} \partial X^\mu \bar{\partial} X_\mu + p_\alpha \bar{\partial} \theta^\alpha - w_\alpha \bar{\partial} \lambda^\alpha \right), \tag{13.3. 46}$$

其中 w_α 是纯旋量的共轭动量. 所有的 α' 因子都可以利用量纲分析补写, 这里的变量分别有如下量纲:

$$[\alpha'] = 2, \quad [X^\mu] = 1, \quad [\theta^\alpha] = [\lambda^\alpha] = \frac{1}{2}, \quad [p_\alpha] = [w_\alpha] = -\frac{1}{2}. \tag{13.3. 47}$$

与西格尔作用量类似, 这里我们需要引入超对称动量 Π^μ , GS 约束 d_α 和超对称导数 D_α 的定义. 为方便读者, 我们再次列出这些定义:

$$\begin{aligned}\Pi^\mu &= \partial X^\mu + \frac{1}{2}(\theta\gamma^\mu\partial\theta), \\ d_\alpha &= p_\alpha - \frac{1}{2}\left(\partial X^\mu + \frac{1}{4}(\theta\gamma^\mu\partial\theta)\right)(\gamma_\mu\theta)_\alpha, \\ D_\alpha &= \frac{\partial}{\partial\theta^\alpha} + \frac{1}{2}(\gamma^\mu\theta)_\alpha\partial_\mu.\end{aligned}$$

此外 BRST 荷 (我们今后略去下标 BRST.) 为:

$$Q = \oint dz \lambda^\alpha(z) d_\alpha(z). \tag{13.3. 48}$$

从作用量 eq. (13.3. 46) 导出的能量-动量张量 eq. (13.3. 42) 的 $SO(10)$ 协变版本和费

米洛伦兹流为:

$$T_{\text{PS}} = -\frac{1}{2}\Pi^\mu\Pi_\mu - d_\alpha\partial\theta^\alpha + w_\alpha\partial\lambda^\alpha, \quad M^{\mu\nu} = -\frac{1}{2}(p\gamma^{\mu\nu}\theta) + \frac{1}{2}(w\gamma^{\mu\nu}\lambda). \quad (13.3.49)$$

13.3.4 算符的乘积展开

现在我们将总结 $SO(10)$ 协变的纯旋量表述 OPE. 但需要注意的是, 我们不能为 $w_\alpha(z)\lambda^\beta(w)$ 写出 $SO(10)$ 协变的 OPE. 这是因为纯旋量约束告诉我们, 这些 $SO(10)$ 协变的场不是自由场. 绕过这个问题的方法是把这些场分解成 $U(5)$ 变量. 如果想当然地写出 OPE $w_\alpha(z)\lambda^\beta(w) \sim \frac{\delta_\alpha^\beta}{z-w}$ 那就需要对其引入非协变的 $U(5)$ 修正, 从而使 $(\lambda\gamma^\mu\lambda)$ 与 w_α 的 OPE 非奇异 [9]. 于是, 基本的世界面物质场之间的 OPE 满足:

$$\begin{aligned} X^\mu(z, \bar{z})X^\nu(w, \bar{w}) &\sim -\delta^{\mu\nu} \ln|z-w|^2, & d_\alpha(z)\theta^\beta(w) &\sim \frac{\delta_\alpha^\beta}{z-w}, \\ d_\alpha(z)d_\beta(w) &\sim -\frac{\gamma_{\alpha\beta}^\mu \Pi_\mu(w)}{z-w}, & d_\alpha(z)\Pi^\mu(w) &\sim \frac{(\gamma^\mu\partial\theta(w))_\alpha}{z-w}, \\ \Pi^\mu(z)\Pi^\nu(w) &\sim -\frac{\delta^{\mu\nu}}{(z-w)^2}, \end{aligned} \quad (13.3.50)$$

含洛伦兹流的 OPE 为:

$$\begin{aligned} M^{\mu\nu}(z)M^{\rho\sigma}(w) &\sim \frac{\delta^{\rho[\mu}M^{\nu]\sigma}(w) - \delta^{\sigma[\mu}M^{\nu]\rho}(w)}{z-w} + \frac{\delta^{m[\sigma}\delta^{\rho]\nu}}{(z-w)^2}, \\ N^{\mu\nu}(z)N^{\rho\sigma}(w) &\sim \frac{\delta^{\rho[\mu}N^{\nu]\sigma}(w) - \delta^{\sigma[\mu}N^{\nu]\rho}(w)}{z-w} - 3\frac{\delta^{m[\sigma}\delta^{\rho]\nu}}{(z-w)^2}, \\ N^{\mu\nu}(z)\lambda^\alpha(w) &\sim \frac{1}{2}\frac{(\gamma^{\mu\nu})^\alpha{}_\beta\lambda^\beta(w)}{(z-w)}, \end{aligned} \quad (13.3.51)$$

不依赖于任何形如 $\partial^k X^\mu$, $\partial^k \theta^\alpha$ 的导数的一般超场 $K(X, \theta)$ 在 $k \geq 1$ 时服从 $k \geq 1$ 满足:

$$\begin{aligned} d_\alpha(z)K(X(w, \bar{w}), \theta(w)) &\sim \frac{D_\alpha K(X(w, \bar{w}), \theta(w))}{z-w}, \\ \Pi^\mu(z)K(X(w, \bar{w}), \theta(w)) &\sim -\frac{\partial^\mu K(X(w, \bar{w}), \theta(w))}{z-w}. \end{aligned} \quad (13.3.52)$$

利用这些 OPE, 我们可以验证超对称流 eq. (13.3.44) 满足超对称代数:

$$\{\mathcal{Q}_\alpha, \mathcal{Q}_\beta\} = \gamma_{\alpha\beta}^\mu \oint \partial X_\mu, \quad (13.3.53)$$

以及 $\{\partial\theta^\alpha, \Pi^\mu, d_\alpha, N^{\mu\nu}\}$ 均为共形权 +1 的共形主场:

$$T_{\text{PS}}(z)\{\partial\theta^\alpha, \Pi^\mu, d_\alpha, N^{\mu\nu}\}(w) \sim \frac{\{\partial\theta^\alpha, \Pi^\mu, d_\alpha, N^{\mu\nu}\}(w)}{(z-w)^2} + \frac{\partial\{\partial\theta^\alpha, \Pi^\mu, d_\alpha, N^{\mu\nu}\}(w)}{z-w}, \quad (13.3. 54)$$

这是下面对无质量态构建积分顶角算符的一个关键事实.

13.4 纯旋量表述的顶角算符

接下来我们会简要介绍超弦纯旋量表述中的顶角算符

13.4.1 无质量态的顶角算符

为了用共形场论的方法计算超弦散射振幅, 我们首先需要给出包含弦态信息的顶角算符. 西格尔 (Siegel) 为无质量态提出的积分顶角算符 eq. (13.2. 13) 导致了费米变量的洛伦兹流的 OPE 在二阶奇点处出现系数问题. 而博科维茨为无质量态提出的积分顶角算符 [9] 在 $U_{\text{Siegel}}(z)$ 基础上进行了修正, 这个修正正比于纯旋量鬼场的洛伦兹流 $N_{\mu\nu}$.

$$U(z) = \partial\theta^\alpha A_\alpha(X, \theta) + A_\mu(X, \theta)\Pi^\mu + d_\alpha W^\alpha(X, \theta) + \frac{1}{2}N_{\mu\nu}F^{\mu\nu}(X, \theta), \quad (13.4. 55)$$

其中 $A_\alpha(X, \theta)$, $A_\mu(X, \theta)$, $W^\alpha(X, \theta)$ 和 $F^{\mu\nu}(X, \theta)$ 是线性化 SYM 超场. 其中 $\theta^\alpha = \theta^\alpha(z)$ 和 $X^\mu = X^\mu(z, \bar{z})$ 依赖于顶角算符插入点坐标. 这些超场的量纲如下:

$$[A_\alpha] = \frac{1}{2}, \quad [A_\mu] = 0, \quad [W^\alpha] = -\frac{1}{2}, \quad [F_{\mu\nu}] = -1, \quad [V(z)] = [U(z)] = 1, \quad (13.4. 56)$$

可以用如下的方式将超场 $K(X, \theta)$ 分解为平面波形式:

$$K(X, \theta) = K(\theta)e^{k \cdot X}. \quad (13.4. 57)$$

利用 θ 展开, eq. (13.4. 55) 中的胶子顶角算符以 eq. (13.3. 20) 的完整洛伦兹流 $M^{\mu\nu}(z) = \Sigma^{\mu\nu}(z) + N^{\mu\nu}(z)$ 作为分量场强的系数. 这样, eq. (13.4. 55) 就不存在二阶奇点系数与 RNS 顶角算符的结果不匹配的问题. 此外, 由于 U 共形权为 +1, 在计算振幅时, 它必须出现在世界面边界积分中, 组成共形不变的 $\int dz U(z)$. 此外, 计算树级振幅还需要在固定的三个世界面坐标处引入共形权为零的无积分顶角算符 (unintegrated vertex) 以消除冗余共性对称性. 博科维茨对无质量态提出的无积分顶角算符是:

$$V = \lambda^\alpha A_\alpha(X, \theta). \quad (13.4. 58)$$

此外, 无质量顶角算符代表胶子和胶微子的物理态, 必须在 BRST 算符 13.3. 48 的上同调中, 这首先要求 Q 为幂零算符. 回想一下, 由于纯旋量条件 eq. (13.3. 25) 以及 OPE (eq. (13.3. 25)) 和 OPE eq. (13.2. 12), BRST 荷的确满足 $Q^2 = 0$. 我们在第 7 章曾说明过, 如果一个态 Ψ 是 BRST 闭的, 即 $Q\Psi = 0$, 且不是 BRST 恰当的, 即对于任意的 Ω , $\Psi \neq Q\Omega$, 则态 Ψ 就被称为在 BRST 算符的上同调中. 接下来我们就对顶角算符进行验证:

首先, 当线性化超场 $A_\alpha(X, \theta)$ 在壳且共形权重为零时, 无质量粒子 $k^2 = 0$ 的无积分顶角算符 $V(z) = \lambda^\alpha(z)A_\alpha(X, \theta)$ 是 BRST 闭的, 即满足 $QV = 0$. 这是因为线性化超场 A_α 满足运动方程 eq. (11.8. 117). 特别地, 有 $D_{(\alpha}A_{\beta)} = \gamma_{\alpha\beta}^\mu A_\mu$, 因此:

$$QV(w) = \oint dz \lambda^\alpha(z) d_\alpha(z) \lambda^\beta(w) A_\beta(X(w), \theta(w)) = \lambda^\alpha \lambda^\beta D_\alpha A_\beta = \frac{1}{2} (\lambda \gamma^\mu \lambda) A_\mu = 0, \quad (13.4. 59)$$

这里我们使用了 OPE eq. (13.3. 52) 与纯旋量约束 eq. (13.3. 25). 而为了说明 V 的共形权重为零, 便要利用在共形场论中, 权重为 h 的共形主场 ϕ_h 与能动量张量的 OPE, 即:

$$T(z)\phi_h(w) \sim \frac{h\phi_h(w)}{(z-w)^2} + \frac{\partial_w \phi_h(w)}{(z-w)}. \quad (13.4. 60)$$

利用 eq. (13.3. 49) 的总能动张量 T_{PS} 以及 eq. (13.3. 52) 的 OPE, 我们可以得到:

$$T(z)V(w) \sim -\frac{1}{2} \frac{\partial^\mu \partial_\mu V}{(z-w)^2} + \frac{(\Pi^\mu \partial_\mu + \partial \theta^\alpha D_\alpha)V + \partial \lambda^\alpha A_\alpha}{(z-w)} = \frac{\partial V}{(z-w)}, \quad (13.4. 61)$$

其中我们使用了无质量条件以及 ∂_w 的链式法则.

$$\begin{aligned} (\Pi^\mu \partial_\mu + \partial \theta^\alpha D_\alpha)V + \partial \lambda^\alpha A_\alpha &= \lambda^\alpha \partial A_\alpha(X, \theta) + (\partial \lambda^\alpha) A_\alpha(X, \theta) \\ &= \partial V(X(w), \theta(w)) = \partial V(w) \end{aligned} \quad (13.4. 62)$$

这是由于

$$(\partial \theta^\beta D_\beta + \Pi^\mu \partial_\mu)K(X, \theta) = (\partial \theta^\beta \partial_\beta + \partial X^\mu \partial_\mu)K(X, \theta) = \partial K(X, \theta) \quad (13.4. 63)$$

对于任意与 X^μ, θ^α 的世界面导数以及 λ^α 均无关的超场 $K(X, \theta)$ 均成立. 这一点可以很容易地通过 eq. (13.3. 48) 中 D_α 与 Π^μ 的表达式来检验.

从 eq. (11.8. 118) 中可以看出, 一个形如 $Q\Omega$ 的 BRST 恰当顶角算符描述的是 SYM 场的规范变换 $Q\Omega = \lambda^\alpha D_\alpha \Omega = \lambda^\alpha \delta_\Omega A_\alpha$. 在这个意义上, 把 V 看作是 Q 的同调中的代表元就排除了规范变换对应的超场.

13.4.2 积分顶角算符与无积分顶角算符的联系

在 RNS 表述中, 积分顶角算符 U_{RNS} 通过 $QU_{\text{RNS}} = \partial V_{\text{RNS}}$ 与无积分顶角算符 $V_{\text{RNS}} = cU_{\text{RNS}}$ 互相关联. 这可以通过回顾 $U_{\text{RNS}} = \{\oint b, V_{\text{RNS}}\}$ 和 $T = \{Q, b\}$ 来检验, 其中 (b, c) 是用来固定世界面的重参数化不变性的鬼场系统. 然后利用雅各比恒等式证明:

$$QU_{\text{RNS}} = [Q, \{\oint b, V_{\text{RNS}}\}] = -[V_{\text{RNS}}, \{Q, \oint b\}] - [\oint b, \{V_{\text{RNS}}, Q\}] = \partial V_{\text{RNS}} \quad (13.4. 64)$$

因为上同调条件要求 $\{V_{\text{RNS}}, Q\} = 0$ 而 V_{RNS} 的共形权 $h=0$, 再利用 eq. (13.4. 60), 我们于是得到 $[\oint T, V_{\text{RNS}}] = \partial V_{\text{RNS}}$. 而纯旋量表述没有 (b, c) 系统的直接类似物, 这就是无积分顶角算符 eq. (13.4. 58) 和积分顶角算符 eq. (13.4. 55) 的形式截然不同. 顶角算符 V, U 仍然满足它们在 RNS 表述中类似的关系 eq. (13.4. 64). 我们可以简单验证一下这一点. 利用 OPE eq. (13.3. 50) 和 eq. (13.3. 52) 以及线性化 SYM 超场的运动方程 eq. (11.8. 117), 我们可以得到:

$$\begin{aligned} Q(\partial\theta^\alpha A_\alpha) &= (\partial\lambda^\alpha)A_\alpha - \partial\theta^\alpha\lambda^\beta D_\beta A_\alpha, \\ Q(\Pi^\mu A_\mu) &= (\lambda\gamma^\mu\partial\theta)A_\mu + \Pi^\mu\lambda^\alpha(D_\alpha A_\mu), \\ Q(d_\alpha W^\alpha) &= -(\lambda\gamma^\mu W)\Pi_\mu - d_\beta\lambda^\alpha D_\alpha W^\beta, \\ Q\left(\frac{1}{2}N_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\right) &= \frac{1}{4}(\gamma_{\mu\nu}\lambda)^\alpha d_\alpha F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}N_{\mu\nu}\lambda^\alpha D_\alpha F^{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (13.4. 65)$$

相加后得到

$$\begin{aligned} QU &= (\partial\lambda^\alpha)A_\alpha - \partial\theta^\beta\lambda^\alpha(D_\alpha A_\beta - \gamma_{\alpha\beta}^\mu A_\mu) + \lambda^\alpha\Pi^\mu(D_\alpha A_\mu - (\gamma_\mu W)_\alpha) \\ &\quad - \lambda^\alpha d_\beta\left(D_\alpha W^\beta + \frac{1}{4}(\gamma^{\mu\nu})_\alpha{}^\beta F_{\mu\nu}\right) + N_{\mu\nu}(\lambda\gamma^\nu\partial^\mu W) \\ &= (\partial\lambda^\alpha)A_\alpha + \lambda^\alpha\partial\theta^\beta D_\beta A_\alpha + \lambda^\alpha\Pi^\mu\partial_\mu A_\alpha, \end{aligned} \quad (13.4. 66)$$

其中, 由 eq. (??) 给出的纯旋量条件 $(\lambda\gamma^\nu)_\alpha(\lambda\gamma_\nu)_\beta = 0$ 和线性化运动方程 $\gamma_{\alpha\beta}^\mu\partial_\mu W^\beta = 0$ 我们可以得到 $N_{\mu\nu}(\lambda\gamma^\nu\partial^\mu W)$ 为零.

$$N_{\mu\nu}(\lambda\gamma^\nu\partial^\mu W) = \frac{1}{2}(w\gamma_\mu\gamma_\nu\lambda)(\lambda\gamma^\nu\partial^\mu W) - (w\lambda)(\lambda\gamma^\mu\partial_\mu W) = 0. \quad (13.4. 67)$$

因此, 利用 eq. (13.4. 62), 出现在 eq. (13.4. 66) 中的 BRST 变量 QU 变为:

$$QU = (\partial\lambda^\alpha)A_\alpha + \lambda^\alpha(\partial\theta^\beta D_\beta A_\alpha + \Pi^\mu\partial_\mu A_\alpha) = (\partial\lambda^\alpha)A_\alpha + \lambda^\alpha\partial A_\alpha = \partial(\lambda A) = \partial V, \quad (13.4. 68)$$

这正是我们期望的结果.

有质量开弦激发态 φ 的超空间顶角算符可以通过遵循同样的原则来构造: 确定一个共形权重为零的 BRST 闭弦无积分顶角算符 V_φ , 然后找到权为一的积分顶角算符 U_φ , 使得 $QU_\varphi = \partial V_\varphi$. 由于在第 N^{th} 激发态, 平面波的共形权为 $h(e^{k \cdot X}) = -N$, 伴随着平面波出现的 Π^μ, d_α, \dots 组合贡献的共形权和洛伦兹指标也会随着 N 的增长而积累得越来越多. 人们如今已经证明纯旋量上同调包含超弦的所有大质量态 [?, ?, ?]. 而第一激发态的顶角算符在超空间中的形式也是已知的. 而在更高激发态上的具体形式则仍是一个未解决的问题.

Chapter 14

超弦的相互作用

与玻色弦一样, 在超弦理论中, 散射振幅可以以二维曲面的形式进行拓扑展开. 而与玻色弦振幅相比, 超弦有两个值得注意的特点:

- 超弦振幅的最终结果显著比玻色理论中的结果更简单.
- 严格来说, 超弦振幅的 RNS 方案涉及对超黎曼面的玻色模空间和费米模空间的积分, 具体来说:
 - 超黎曼曲面包含玻色模和费米模自由度.
 - 我们可以利用鬼场补偿费米模自由度的贡献.
 - 在低亏格情况下, 鬼场可简化积分过程.

然而, 当亏格数 $g \geq 5$ 时, 玻色模与费米模的耦合则会变得相当复杂, 这使得我们无法简单地将积分过程分离, 即不能首先对费米模空间积分以仅剩玻色积分。

本章中我们将主要介绍树级超弦振幅.

14.1 树级超弦振幅

对于开超弦, 与端点关联的詹-佩顿荷的性质与开玻色弦的性质相同. 因此, 在玻色弦和超弦中, 开弦树级振幅的色分解相同:

$$\mathcal{M}_{\text{op-super}}^{\text{tree}}(\{\varphi_i, a_i\}; \alpha') = \sum_{\rho \in S_{n-1}} \text{Tr}(T^{a_{\rho(1)}} T^{a_{\rho(2)}} \dots T^{a_{\rho(n-1)}} T^{a_n}) A_{\text{super}}^{\text{tree}}(\varphi_{\rho(1)}, \varphi_{\rho(2)}, \dots, \varphi_{\rho(n-1)}, \varphi_n; \alpha'), \quad (14.1.1)$$

其中, 我们使用记号 φ_i 整体表示外腿 i 的极化和动量, 同时使用指标 a_i 表示色自由度. 与玻色弦类似, 色排序振幅 $\mathcal{A}_{\text{super}}^{\text{tree}}$ 则是通过顶点算符和 c 鬼场的关联函数来计算, 其中 c 鬼场的贡献为:

$$\langle c(z_i)c(z_j)c(z_k) \rangle = |z_{ij}z_{ik}z_{jk}|, \quad (14.1.2)$$

同样, 我们取 $\text{SL}(2)$ 固定的复坐标为 $(z_i, z_j, z_k) = (0, 1, \infty)$.

$$\mathcal{A}_{\text{super}}^{\text{tree}}(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n; \alpha') \sim \int_{\Sigma} \frac{dz_1 dz_2 \cdots dz_n}{\text{vol } \text{SL}_2(\mathbb{R})} \langle V_{\varphi_1}^{(q_1)}(z_1) V_{\varphi_2}^{(q_2)}(z_2) \cdots V_{\varphi_n}^{(q_n)}(z_n) \rangle \Big|_{\sum_{j=1}^n q_j = -2}.$$

其中 $\Sigma = -\infty < z_1 < z_2 < \cdots < z_n < \infty$

- 在树级振幅中需要超鬼场荷总和为 -2 , (在圈图中与圈数有关, 亏格 g 时总超鬼场荷为 $2g - 2$), 以满足 $\beta - \gamma$ 系统:

$$\left\langle \prod_{j=1}^n : e^{q_j \phi(z_j)} : \right\rangle = \delta \left(2 + \sum_{j=1}^n q_j \right) \prod_{1 \leq i < j} (z_i - z_j)^{-q_i q_j}. \quad (14.1.3)$$

所要求的背景荷条件. 对于每种具有偶数靶空间费米子的物理态组合¹, 我们可以找到多个对应鬼场荷要求的顶点算符:

$$V_{\varphi_1}^{(q_1)} \cdots V_{\varphi_n}^{(q_n)}.$$

其中 q_i 反应对应顶角算符的鬼场图景, 我们仅对总和有限制, 因此 q_i 的分布有很多可能.

- 而实际上最终计算 $\mathcal{A}_{\text{super}}^{\text{tree}}$ 得到的结果与 q_i 在顶点算符上的分布则是完全无关的. 例如, 对于 n 个玻色子, 我们可以在 $V_{\varphi}^{(-1)}$ 图景中取任意两条外腿插入, 再取 $V_{\varphi}^{(0)}$ 图像中的其余 $n - 2$ 个腿插入. 直观理解, 将超鬼场图景重新分配实际上类似于进行一个世界面超对称变换. 更详细的论证可以在奥利弗·施洛特勒 (Oliver Schlotterer) 教授的博士毕业论文 [14] 中的 5.2.3 节找到.

14.1.1 开超弦低点树级振幅

接下来, 我们将考虑几个开超弦树级振幅的粒子. 我们会看到, 相关的关联函数计算将由于 X^{μ}, ϕ 和 (ψ^{μ}, S_{α}) 的性质受到极大的简化, 粗略来讲便是因为它们分属三个独立

¹具有奇数靶空间费米子的振幅违背洛伦兹不变性.

的 CFT 组成部分, 可以分别计算 (即所有关联函数可以分解为 X^μ, ϕ 以及 (ψ^μ, S_α) 的关联函数).

- 首先是三胶子振幅, 由质壳方程与动量守恒可知, 三个无质量粒子的动量满足 $p_i \cdot p_j = 0$, 因此科巴-尼尔森因子为 1. 不失一般性, 我们总可以选择腿 1 是唯一取 $V_\epsilon^{(0)}$ 图景的外腿:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{A}_{\text{super}}^{\text{tree}}(\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3) &\sim |z_{12}z_{13}z_{23}| \langle V_{\epsilon_1}^{(0)}(z_1) V_{\epsilon_2}^{(-1)}(z_2) V_{\epsilon_3}^{(-1)}(z_3) \rangle \\
 &= |z_{12}z_{13}z_{23}| \langle : e^{-\phi(z_2)} :: e^{-\phi(z_3)} : \rangle \epsilon_1^\mu \epsilon_2^\nu \epsilon_3^\lambda \\
 &\quad \times \left\{ \langle : i\partial_{z_1} X^\mu(z_1) e^{ip_1 \cdot X(z_1)} : \prod_{j=2}^3 : e^{ip_j \cdot X(z_j)} : \rangle \langle \psi^\nu(z_2) \psi^\lambda(z_3) \rangle \right. \\
 &\quad \left. + 2\alpha' \langle \prod_{j=1}^3 : e^{ip_j \cdot X(z_j)} : \rangle p_1^\rho \langle \psi^\rho \psi^\mu(z_1) : \psi^\nu(z_2) \psi^\lambda(z_3) : \rangle \right\} \\
 &\sim \frac{|z_{12}z_{13}z_{23}|}{z_{12}z_{13}z_{23}} \{ (p_2 \cdot \epsilon_1)(\epsilon_2 \cdot \epsilon_3) + (\epsilon_1 \cdot \epsilon_2)(p_1 \cdot \epsilon_3) - (\epsilon_1 \cdot \epsilon_3)(p_1 \cdot \epsilon_2) \} \\
 &= \mathcal{A}_{\text{SYM}}^{\text{tree}}(\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3).
 \end{aligned} \tag{14.1. 4}$$

其中 $(p_2 \cdot \epsilon_1)(\epsilon_2 \cdot \epsilon_3)$ 来自于 $i\partial_{z_1} X^\mu$ 的关联函数, 而 $(\epsilon_1 \cdot \epsilon_2)(p_1 \cdot \epsilon_3) - (\epsilon_1 \cdot \epsilon_3)(p_1 \cdot \epsilon_2)$ 则来自于 $\psi^\rho \psi^\mu$ 的关联函数. 与玻色弦的关联函数类似, 插入 $i\partial_{z_1} X^\mu(z_1)$ 的结果便是引入因子:

$$2\alpha' \left(\frac{\epsilon_1 \cdot p_2}{z_{12}} + \frac{\epsilon_1 \cdot p_3}{z_{13}} \right) = 2\alpha' \frac{\epsilon_1 \cdot p_2 z_{23}}{z_{12} z_{13}}$$

其中利用了横向极化条件与动量守恒. 其余的关联函数则通过以下方式计算:

$$\langle : e^{-\phi(z_2)} :: e^{-\phi(z_3)} : \rangle = z_{23}^{-1}, \quad \langle \psi^\rho \psi^\mu(z_1) : \psi^\nu(z_2) \psi^\lambda(z_3) : \rangle = \frac{\eta^{\mu\nu} \eta^{\rho\lambda} - \eta^{\mu\lambda} \eta^{\rho\nu}}{z_{12} z_{13}}.$$

此外, 我们有:

$$\frac{|z_{12}z_{13}z_{23}|}{z_{12}z_{13}z_{23}} = -1$$

这一结果在色排序振幅 $\mathcal{A}_{\text{super}}^{\text{tree}}(\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3)$ 中的形式与 z_j 的具体取值无关, 而对于 $\mathcal{A}_{\text{super}}^{\text{tree}}(\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_2)$ 的情况则会给出 +1. 与之相应地, 带色因子的完整振幅关于色自由度的依赖性来自于

$$\text{Tr}(T^{a_1}[T^{a_2}, T^{a_3}]) \sim f^{a_1 a_2 a_3}.$$

最重要的是, 三胶子开超弦振幅与它的场论极限得到的 SYM 振幅一致, 即它在 α' 中是齐次的, 并且不涉及玻色弦振幅中额外的 $2\alpha'(p_i \cdot \epsilon_j)^3$ 项. 这体现了一个在超弦

振幅中普遍存在的优点, 即超弦振幅对 α' 依赖性比玻色弦更简单. 在 RNS 表述中, 这种简化可以从世界面超对称性间接推导出来, 而在纯旋量表述中, 振幅的计算则是通过显式的靶空间超对称直接得到简化.

- 一个胶子与两个胶伴子的振幅, 在计算时自然使用 -1 和 $-\frac{1}{2}$ 鬼场图景:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{A}_{\text{super}}^{\text{tree}}(\epsilon_1, \chi_2, \chi_3) &\sim |z_{12}z_{13}z_{23}| \langle V_{\epsilon_1}^{(-1)}(z_1) V_{\chi_2}^{(-1/2)}(z_2) V_{\chi_3}^{(-1/2)}(z_3) \rangle \quad (14.1. 5) \\
 &= |z_{12}z_{13}z_{23}| \langle : e^{-\phi(z_1)} :: e^{-\phi(z_2)/2} :: e^{-\phi(z_3)/2} : \rangle \langle \prod_{j=1}^3 : e^{ip_j \cdot X(z_j)} : \rangle \\
 &\quad \times \epsilon_1^\mu \chi_2^\alpha \chi_3^\beta \langle \psi_\mu(z_1) S_\alpha(z_2) S_\beta(z_3) \rangle \\
 &\sim \frac{|z_{12}z_{13}z_{23}|}{z_{12}z_{13}z_{23}} \frac{1}{\sqrt{2}} \epsilon_1^\mu (\chi_2 \gamma_\mu C \chi_3) \\
 &= \mathcal{A}_{\text{SYM}}^{\text{tree}}(\epsilon_1, \chi_2, \chi_3). \quad (14.1. 6)
 \end{aligned}$$

由于参与散射的态均为 GSO 投影态, 来自物质和鬼场贡献的 z_{ij} 的所有分数幂次加和为整数幂次:

$$\begin{aligned}
 \langle : e^{-\phi(z_1)} :: e^{-\phi(z_2)/2} :: e^{-\phi(z_3)/2} : \rangle &= (z_{12}z_{13})^{-1/2} z_{23}^{-1/4}, \\
 \langle \psi_\mu(z_1) S_\alpha(z_2) S_\beta(z_3) \rangle &= \frac{(\gamma_\mu C)_{\alpha\beta}}{\sqrt{2}(z_{12}z_{13})^{3/4} z_{23}^{1/2}}. \quad (14.1. 7)
 \end{aligned}$$

总结这两个三点振幅的结果, 我们可以用靶空间超对称的方式总结为:

$$\mathcal{A}_{\text{super}}^{\text{tree}}(1, 2, 3) = \mathcal{A}_{\text{SYM}}^{\text{tree}}(1, 2, 3), \quad (14.1. 8)$$

其中 1, 2, 3 指的是无质量规范多重态中的任意态的组合, 而右侧则表示 $\mathcal{N} = 1$ 超对称杨-米尔斯 (SYM) 理论在 $D = 10$ 中的振幅, 其可以由以下拉格朗日量生成:

$$S_{\text{SYM}}[A, \chi] \sim \int d^{10} X \text{Tr} \left\{ \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \chi^\alpha (\gamma^\mu C)_{\alpha\beta} [D_\mu, \chi^\beta] \right\}, \quad (14.1. 9)$$

其中规范协变导数定义为 $[D_\mu, \chi] = \partial_\mu \chi - [A_\mu, \chi]$, 拉格朗日量的玻色部分 $\sim F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$ 与纯杨-米尔斯理论的相同. 正因如此, n -胶子树级振幅在 SYM 和纯杨-米尔斯理论中是相同的. 从 SYM 作用量得到的费曼规则包括来自纯杨-米尔斯理论的三点和四点胶子顶角, 以及额外的由两个胶伴子和一个胶子组成的三顶角. 可以参考上方 $\mathcal{A}_{\text{SYM}}^{\text{tree}}(\epsilon_1, \chi_2, \chi_3)$ 的张量结构, 这个三顶角是唯一的.

接下来我们观察四点振幅:

- 在无质量的四点函数中, 四胶伴子 (gluino) 振幅的最终结果具有一种特别紧凑的形式. 与玻色弦相同, 我们使用无量纲曼德尔施塔姆变量:

$$s_{ij} = \alpha'(p_i + p_j)^2,$$

于是有:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{\text{super}}^{\text{tree}}(\chi_1, \chi_2, \chi_3, \chi_4; \alpha') & \sim \int_0^1 dz_2 \lim_{z_4 \rightarrow \infty} |z_{13} z_{14} z_{34}| \langle V_{\chi_1}^{(-1/2)}(z_1) V_{\chi_2}^{(-1/2)}(z_2) V_{\chi_3}^{(-1/2)}(z_3) V_{\chi_4}^{(-1/2)}(z_4) \rangle \\ & \sim s_{12} \int_0^1 \frac{dz_2}{z_2} |z_2|^{s_{12}} |1 - z_2|^{s_{23}} \left\{ \frac{(\chi_1 \gamma^\mu C \chi_2)(\chi_3 \gamma_\mu C \chi_4)}{s_{12}} + \frac{(\chi_4 \gamma^\mu C \chi_1)(\chi_2 \gamma_\mu C \chi_3)}{s_{23}} \right\} \\ & \sim \frac{\Gamma(1 + s_{12})\Gamma(1 + s_{23})}{\Gamma(1 + s_{12} + s_{23})} \mathcal{A}_{\text{SYM}}^{\text{tree}}(\chi_1, \chi_2, \chi_3, \chi_4). \end{aligned}$$

在我们考虑的色排序下, 我们仍然将 $\text{SL}(2)$ 固定为 $(z_1, z_3, z_4) \rightarrow (0, 1, \infty)$, 于是积分域为 $z_2 \in (0, 1)$. 上式第二行大括号中的正是四点 SYM 振幅, 与场论费曼图计算的结果完全一致.

- 最后, 由于胶伴子四点振幅实际上是整个四点超振幅的分量场振幅, 我们得到的四点结果可以由超对称保证进而推广到整个规范超多重态, 即任意胶子和胶子伴粒组合的弦四点树级振幅. 它具有如下通用形式:

$$\mathcal{A}_{\text{super}}^{\text{tree}}(1, 2, 3, 4; \alpha') = \frac{\Gamma(1 + s_{12})\Gamma(1 + s_{23})}{\Gamma(1 + s_{12} + s_{23})} \mathcal{A}_{\text{SYM}}^{\text{tree}}(1, 2, 3, 4), \quad (14.1. 10)$$

其中 α' 展开为:

$$\frac{\Gamma(1 + s_{12})\Gamma(1 + s_{23})}{\Gamma(1 + s_{12} + s_{23})} = 1 - \zeta_2 s_{12} s_{23} + \mathcal{O}(\alpha'^3), \quad (14.1. 11)$$

其首项与场论极限 $\alpha' \rightarrow 0$ 一致, 在此极限下, 任何无质量的 $\mathcal{A}_{\text{super}}^{\text{tree}}$ 收敛到相应的 $\mathcal{A}_{\text{SYM}}^{\text{tree}}$.

14.1.2 开超弦无质量 n -点树级振幅

开超弦和 SYM 树级振幅之间的紧密联系可以推广到任意数量 n 的外部规范超多重态: 如笔者的硕士导师奥利弗·施洛特勒 (Oliver Schlotterer) 与博士导师卡洛斯·马夫拉 (Carlos Mafra) 以及斯蒂芬·施蒂尔博格 (Stephan Stieberger) 教授三人合作利用超弦

纯旋量表述在 [15] 中推导出的, 这种色排序的 n 点振幅可以分解为:

$$\mathcal{A}_{\text{super}}^{\text{tree}}(1, 2, \dots, n; \alpha') = \sum_{\rho \in S_{n-3}} F^\rho(s_{ij}) \mathcal{A}_{\text{SYM}}^{\text{tree}}(1, \rho(2, 3, \dots, n-2), n-1, n), \quad (14.1.12)$$

上述振幅所有关于极化的函数关系都出现在 $(n-3)!$ 个 $\mathcal{A}_{\text{SYM}}^{\text{tree}}(1, \rho(\dots), n-1, n)$ 振幅中². 而与之相对的, 弦振幅中关于 α' 的依赖关系则完全由盘面积分 $F^\rho(s_{ij})$ 所决定, 其具体形式如下:

$$F^\rho(s_{ij}) = \int_{\Sigma} dz_2 dz_3 \dots dz_{n-2} \prod_{1 \leq i < j}^{n-1} |z_{ij}|^{s_{ij}} \rho \left\{ \prod_{k=2}^{n-2} \sum_{m=1}^{k-1} \frac{s_{km}}{z_{km}} \right\} \quad (14.1.13)$$

其中 $(z_1, z_{n-1}, z_n) = (0, 1, \infty)$, 因此积分域为: $\Sigma = 0 < z_2 < z_3 < \dots < z_{n-2} < 1$. 而置换 $\rho \in S_{n-3}$ 作用于花括号中的 z_{km} 和 s_{km} 的指标. 针对盘面排序的 $(n-3)!$ 个积分 $F^\rho(s_{ij})$ 的 α' 展开式的领头阶为:

$$F^\rho(s_{ij}) = \delta_{23\dots n-2}^\rho + \mathcal{O}(\alpha'^2). \quad (14.1.14)$$

在场论极限中, 第一项 δ 在 ρ 不为恒等置换时消失. 因此 $\mathcal{A}_{\text{super}}^{\text{tree}}$ 的上述表达式在 $\alpha' \rightarrow 0$ 时收敛到 $\mathcal{A}_{\text{SYM}}^{\text{tree}}$ 并带有相同的色排序. 第一个 α' 非零阶修正示意如下:

$$\zeta_2 s_{ij}^2 + \zeta_3 s_{ij}^3 + \dots,$$

更一般地, α'^w 阶修正包含 s_{ij} 的多项式, 以及权为 $w = n_1 + n_2 + \dots + n_r$ 的多重 ζ 函数 (multiple zeta values): $\zeta_{n_1, n_2, \dots, n_r}$, 这正是我们曾在玻色弦中提及的均匀超越性质. 而这些内容在场论振幅和费曼积分中也同样存在.

类似的展开关系对单个第一激发态与 $n-1$ 个无质量态的散射也同样存在, 具体可以参考 [16], 而其展开后场论部分的具体旋量螺旋度形式则由笔者在 [17] 中完成推导.

14.1.3 闭超弦树级振幅

对于 IIA 型和 IIB 型超弦的树级振幅, 我们可以写出:

$$\mathcal{M}_{\text{super}}^{\text{tree}}(\{\Phi_i\}; \alpha') \sim \int \frac{d^2 z_1 d^2 z_2 \dots d^2 z_n}{\text{vol SL}_2(\mathbb{C})} \left\langle \prod_{a=1}^n V_{\Phi_a}^{(q_a, \bar{q}_a)}(z_a) \right\rangle \bigg|_{\sum_{j=1}^n \bar{q}_j = -2}^{\sum_{j=1}^n q_j = -2}, \quad (14.1.15)$$

²独立的振幅数量 $(n-3)!$ 由 BCJ 关系 (在弦论中可以理解为弦振幅单值关系的场论极限) 给出.

其中关联函数涉及左行和右行超鬼场图景 q, \bar{q} 相互独立的顶角算符 $V_{\Phi}^{(q, \bar{q})}$. 根据相应超鬼场系统的背景荷条件, 他们需要分别满足:

$$\sum_{j=1}^n q_j = -2, \quad \sum_{j=1}^n \bar{q}_j = -2, \quad (14.1.16)$$

以确保对涉及手征玻色子 ϕ 和 $\bar{\phi}$ 的关联函数 $:e^{q_j \phi(z_j)}:$ 和 $:\bar{e}^{\bar{q}_j \bar{\phi}(\bar{z}_j)}:$ 得到的结果非零.

闭超弦振幅的球面积分可以使用类似于闭玻色弦的 KLT 技术进行处理, 具体来说:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{\text{super}}^{\text{tree}}(\{\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_n\}; \alpha') \\ \sim \sum_{\rho, \tau \in S_{n-3}} \mathcal{A}_{\text{super}}^{\text{tree}}(\varphi_1, \rho(\varphi_2, \varphi_3, \dots, \varphi_{n-2}), \varphi_{n-1}, \varphi_n; \frac{\alpha'}{4}) \\ \times S_{\alpha'}(\rho|\tau) \mathcal{A}_{\text{super}}^{\text{tree}}(\bar{\varphi}_1, \tau(\bar{\varphi}_2, \bar{\varphi}_3, \dots, \bar{\varphi}_{n-2}), \bar{\varphi}_n, \bar{\varphi}_{n-1}; \frac{\alpha'}{4}), \end{aligned}$$

其中 $(n-3)! \times (n-3)!$ 矩阵 $S_{\alpha'}(\rho|\tau)$ 的每个元素是 $\left[\sin\left(\frac{\pi\alpha'}{2} p_i \cdot p_j\right)\right]^{n-3}$ 的 $(n-3)$ 阶多项式. 这个 KLT 公式对所有 IIA 型或 IIB 型超弦态 $\Phi_j = \varphi_j \otimes \bar{\varphi}_j$ 普遍适用, 我们也可以通过将其中一个 $\mathcal{A}_{\text{super}}^{\text{tree}}$ 替换为玻色弦的 $\mathcal{A}_{\text{bos}}^{\text{tree}}$ 来构造杂化弦振幅. 换句话说, 这正是我们在第 8.4 节所说的, KLT 分解为盘面积分乘积的公式是球面积分的普遍特性, 与弦理论的具体起源无关.

最后, 让我们给出 IIA/IIB 超引力多重态的四个无质量态 (例如任意组合 1, 2, 3, 4) 作为例子, 我们可以将闭超弦四点树图振幅 $\mathcal{M}_{\text{super}}^{\text{tree}}$ 中的 Γ 函数写为三角函数形式的因子:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{\text{super}}^{\text{tree}}(\{1, 2, 3, 4\}; \alpha') &\sim \sin\left(\frac{\pi\alpha'}{2} p_1 \cdot p_2\right) \mathcal{A}_{\text{super}}^{\text{tree}}(1, 2, 3, 4; \alpha') \mathcal{A}_{\text{super}}^{\text{tree}}(\bar{1}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{3}; \alpha') \\ &\sim \frac{\Gamma(1 + \frac{s}{4}) \Gamma(1 + \frac{t}{4}) \Gamma(1 + \frac{u}{4})}{\Gamma(1 - \frac{s}{4}) \Gamma(1 - \frac{t}{4}) \Gamma(1 - \frac{u}{4})} \mathcal{M}_{\text{supergravity}}^{\text{tree}}(\{1, 2, 3, 4\}) \\ &= \left(1 - \frac{\zeta_3}{32} stu + \mathcal{O}(\alpha'^5)\right) \mathcal{M}_{\text{supergravity}}^{\text{tree}}(\{1, 2, 3, 4\}). \end{aligned}$$

在等式右侧, 我们已经根据场论的叠合关系改写为场论四点超引力振幅的形式:

$$\mathcal{M}_{\text{supergravity}}^{\text{tree}}(\{1, 2, 3, 4\}) \sim A_{\text{SYM}}^{\text{tree}}(1, 2, 3, 4)(p_1 \cdot p_2) A_{\text{SYM}}^{\text{tree}}(\bar{1}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{3}).$$

其中, 我们可以通过 $\mathcal{A}_{\text{SYM}}^{\text{tree}}$ 的第二项中规范伴子的手性区别开来 IIA 型和 IIB 型超弦. 超引力的第一个弦修正出现在 α'^3 阶, 其对应于一个 $\alpha'^3 \zeta_3 R^4$ 相互作用以及其在 $D = 10$ 维中伴随的 $\mathcal{N} = 2$ 超对称伙伴. 换句话说, 玻色弦的曲率修正项 $\alpha'^1 R^2$ 和 $\alpha'^2 R^3$ 在 II 型超弦中是不存在的.

而这种现象与 $\alpha'^1 F^3$ 相互作用从开超弦振幅中消失的现象紧密相关. 除此之外, II 型超弦的 32 个超对称荷与闭玻色弦的算符 $\alpha'^1 R^2$ 和 $\alpha'^2 R^3$ 不兼容. 这两种玻色弦的相互作用在超弦中消失的现象均与超对称有关, 这也是我们在本章开头提及的 "超弦振幅的最终结果显著比玻色理论中的结果更简单." 的具体体现之一.

需要注意的是, 在 n 点 KLT 公式中的 $(n-3)! \times (n-3)!$ 排列求和不允许我们类似地对 $(n \geq 5)$ 点的闭超弦振幅 $\mathcal{M}_{\text{super}}^{\text{tree}}(\{\Phi_i\}; \alpha')$ 因子化得到场的超引力振幅.

14.2 圈级超弦振幅

可能会写, 回头再说

14.2.1 一圈超弦振幅

可能会写, 回头再说

14.2.2 一圈超弦振幅的 α' 展开

可能会写, 回头再说, 想学可以先看看 [18].

14.2.3 高圈弦振幅

可能会写, 回头再说

14.2.4 多重 ζ 函数与单值映射 (single value map)

可能会写, 回头再说, 想学可以先看看 [19].

14.2.5 高圈弦振幅的模空间疑难

可能会写, 回头再说

14.2.6 圈级弦振幅的 KLT 关系

可能会写, 回头再说, 想学可以先看看 [\[20\]](#).

Appendices section.

Appendix A

量子场论中的引力问题

在本附录中我们将给出引力相互作用在量子场论中的行为, 并解释量子场论描述引力的疑难所在.

A.1 爱因斯坦-希尔伯特作用量 (Einstein-Hilbert action)

爱因斯坦-希尔伯特作用量由希尔伯特于 1915 年给出, 在这一小节我们简要推导爱因斯坦-希尔伯特作用量如下:

弯曲时空中作用量是拉格朗日量关于度规适配体元的积分 [21], 如下式:

$$S = \int \epsilon \mathcal{L}. \quad (\text{A.1. 1})$$

其中 ϵ 是度规适配体元, 这是一个依赖于度规的量, 在弯曲时空中我们为了得到爱因斯坦方程需要将度规视作场量而进行变分, 若体元依赖于场量则会给计算带来麻烦. 我们可以改用度规无关的 4 形式场 (例如任一局部对偶右手基底场 $\{(e^\mu)_a\}$ 的体元 $e \equiv e^0 \wedge e^1 \wedge e^2 \wedge e^3$) 作为体元. 这两种体元可以互相如下转换:

$$\epsilon = \sqrt{-g}e, \quad (\text{A.1. 2})$$

其中 g 是 g_{ab} 在 \mathbf{e} 的分量的行列式. 于是我们可以定义真空引力场作用量:

$$S_{EH} = \int \mathbf{e} \mathcal{L}. \quad (\text{A.1. 3})$$

我们应当注意到的是, 这里的 \mathcal{L} 与 A.1. 1 式中的拉氏量不同, 此处实际上是吸收 $\sqrt{-g}$ 因子后的拉氏量, 实际上:

$$\mathcal{L} = \sqrt{-g} \tilde{\mathcal{L}} \quad (\text{A.1. 4})$$

中的 $\tilde{\mathcal{L}}$ 与 A.1. 1 式中的拉氏量均为基底无量纲. 作用量由于其变分给出运动方程, 理应基底无关, 我们也成功证实了这一点. 而度规依赖性则全部转移到了拉氏量 \mathcal{L} 中, 对于度规的变分则将不会影响体元 \mathbf{e} .

我们于是可以尝试从度规导出的几何量中寻找基底无关的非平凡标量, 一个可能的答案便是李奇标量 (Ricci scalar), 我们可以证明, $\mathcal{L} \equiv \sqrt{-g} R = \sqrt{-g} g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$ 与真空引力拉氏密度只差一个边界项.

证明: 我们取 $g^{\mu\nu}$ 的单参族 (即用一个参数 λ 来描述 $g^{\mu\nu}$ 的变分) $g^{\mu\nu}(\lambda)$, 且要求 $g^{\mu\nu}$ 满足边界条件要求 (边界固定且不参与演化), 于是有:

$$\begin{aligned} \left. \frac{d\mathcal{L}}{d\lambda} \right|_{\lambda=0} &= \left[\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \frac{dR_{\mu\nu}(\lambda)}{d\lambda} + R \frac{d\sqrt{-g}(\lambda)}{d\lambda} + \sqrt{-g} R_{\mu\nu} \frac{dg^{\mu\nu}(\lambda)}{d\lambda} \right] \Big|_{\lambda=0} \\ &= \sqrt{-g(0)} g^{\mu\nu}(0) \delta R_{\mu\nu} + R(0) \delta \sqrt{-g} + \sqrt{-g(0)} R_{\mu\nu}(0) \delta g^{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (\text{A.1. 5})$$

我们也可以略去 (0), 并且改记第一项第二项分别为 B_1 与 B_2 , 于是改写为:

$$\left. \frac{d\mathcal{L}}{d\lambda} \right|_{\lambda=0} = B_1 + B_2 + \sqrt{-g} R_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}. \quad (\text{A.1. 6})$$

我们首先计算 B_1 , 定义度规适配的无挠导数算符:

$$\begin{aligned} \nabla_{\mu}^{(\lambda)} g_{\nu\rho}(\lambda) &= 0 \\ \nabla_{\mu} g_{\nu\rho} &= 0, \end{aligned} \quad (\text{A.1. 7})$$

以及二者的差 (类似于克氏符):

$$\left(\nabla_{\mu} - \nabla_{\mu}^{(\lambda)} \right) \omega_{\nu} = C^{\tau}_{\mu\nu}(\lambda) \omega_{\tau}. \quad (\text{A.1. 8})$$

$C^\tau_{\mu\nu}(\lambda)$ 关于 $\mu\nu$ 指标对称. 令 $\omega_\mu = \nabla_\mu f = \nabla_\mu^{(\lambda)} f$ ¹ 其中 f 为 $(0,0)$ 型张量场 (函数场), 将 $C^\mu_{\nu\rho}$ 作用于 ω_μ 得到:

$$\left(\nabla_\mu - \nabla_\mu^{(\lambda)}\right)\omega_\nu = \nabla_\mu \nabla_\nu f - \nabla_\mu^{(\lambda)} \nabla_\nu^{(\lambda)} f, \quad (\text{A.1. 9})$$

利用无挠条件:

$$\begin{aligned} \nabla_\mu \nabla_\nu f &= \nabla_\nu \nabla_\mu f \\ \nabla_\mu^{(\lambda)} \nabla_\nu^{(\lambda)} f &= \nabla_\nu^{(\lambda)} \nabla_\mu^{(\lambda)} f, \end{aligned} \quad (\text{A.1. 10})$$

我们便可以得到

$$C^\tau_{\mu\nu}(\lambda)\omega_\tau = \left(\nabla_\mu - \nabla_\mu^{(\lambda)}\right)\omega_\nu = \left(\nabla_\nu - \nabla_\nu^{(\lambda)}\right)\omega_\mu = C^\tau_{\nu\mu}(\lambda)\omega_\tau, \quad \forall \omega_\tau. \quad (\text{A.1. 11})$$

并且可以定义导数算符对应的黎曼张量:

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu\rho}{}^\sigma(\lambda)\omega_\sigma &= 2\nabla_{[\mu} \nabla_{\nu]}^{(\lambda)} \omega_\rho, \\ R_{\mu\nu\rho}{}^\sigma \omega_\sigma &= 2\nabla_{[\mu} \nabla_{\nu]} \omega_\rho, \end{aligned} \quad (\text{A.1. 12})$$

同样地, 此处的 ω 任意. 我们于是得到:

$$\begin{aligned} & \nabla_\mu^{(\lambda)} \left(\nabla_\nu^{(\lambda)} \omega_\rho \right) \\ &= \nabla_\mu \left(\nabla_\nu^{(\lambda)} \omega_\rho \right) - C^\tau_{\mu\nu}(\lambda) \nabla_\tau^{(\lambda)} \omega_\rho - C^\tau_{\mu\rho}(\lambda) \nabla_\nu^{(\lambda)} \omega_\tau \\ &= \nabla_\mu \left(\nabla_\nu \omega_\rho - C^\sigma_{\nu\rho}(\lambda) \omega_\sigma \right) - C^\tau_{\mu\nu}(\lambda) \nabla_\tau^{(\lambda)} \omega_\rho - C^\tau_{\mu\rho}(\lambda) \left(\nabla_\nu \omega_\tau - C^\tau_{\nu\tau}(\lambda) \omega_\sigma \right) \\ &= \nabla_\mu \nabla_\nu \omega_\rho - \omega_\sigma \nabla_\mu C^\sigma_{\nu\rho}(\lambda) - C^\sigma_{\nu\rho}(\lambda) \nabla_\mu \omega_\sigma - C^\tau_{\mu\nu}(\lambda) \nabla_\tau^{(\lambda)} \omega_\rho \\ & \quad - C^\tau_{\mu\rho}(\lambda) \nabla_\nu \omega_\tau - C^\tau_{\mu\rho}(\lambda) C^\tau_{\nu\tau}(\lambda) \omega_\sigma. \end{aligned} \quad (\text{A.1. 13})$$

取反对称部分即可得到黎曼张量:

$$R_{\mu\nu\rho}{}^\sigma(\lambda)\omega_\sigma = R_{\mu\nu\rho}{}^\sigma \omega_\sigma - 2\omega_\sigma \nabla_{[\mu} C^\sigma_{\nu]\rho}(\lambda) - 2C^\tau_{\mu\rho}(\lambda) C^\sigma_{\nu\tau}(\lambda) \omega_\sigma, \quad (\text{A.1. 14})$$

我们可以去掉 ω_σ 直接给出黎曼张量关于 λ 的变换规则:

$$R_{\mu\nu\rho}{}^\sigma(\lambda) = R_{\mu\nu\rho}{}^\sigma - 2\nabla_{[\mu} C^\sigma_{\nu]\rho}(\lambda) - 2C^\tau_{\rho[\mu}(\lambda) C^\sigma_{\nu]\tau}(\lambda), \quad (\text{A.1. 15})$$

¹ 此处应当注意任意导数算符作用于标量得到的结果是完全相同的, 其区别仅体现在对非 $(0,0)$ 型张量场的作用上.

由黎曼张量不难得到里奇张量:

$$R_{\mu\rho}(\lambda) = R_{\mu\sigma\rho}{}^{\sigma}(\lambda) = R_{\mu\rho} - 2\nabla_{[\mu}C^{\nu}{}_{\nu]\rho}(\lambda) - 2C^{\tau}{}_{\rho[\mu}(\lambda)C^{\nu}{}_{\nu]\tau}(\lambda), \quad (\text{A.1. 16})$$

由于 $C^{\mu}{}_{\nu\rho}$ 起到的是反映 λ 给 ∇ 带来的影响, 当 λ 取 0 时, 我们便有 $C^{\mu}{}_{\nu\rho}(0) = 0$, 于是最后一项的变分为 0, 里奇张量的变分为:

$$\delta R_{\mu\rho} = -2\nabla_{[\mu}\delta C^{\nu}{}_{\nu]\rho} = \nabla_{\nu}\delta C^{\nu}{}_{\mu\rho} - \nabla_{\mu}\delta C^{\nu}{}_{\nu\rho}. \quad (\text{A.1. 17})$$

与克氏符的计算类似, 我们可以得到 $C^{\mu}{}_{\nu\rho}$ 依赖于度规的表达式. 由导数算符的适配条件 A.1. 7:

$$\begin{aligned} \nabla_{\mu}^{(\lambda)} g_{\nu\rho}(\lambda) &= \nabla_{\mu} g_{\nu\rho}(\lambda) - C^{\sigma}{}_{\mu\nu}(\lambda)g_{\sigma\rho}(\lambda) - C^{\sigma}{}_{\mu\rho}(\lambda)g_{\nu\sigma}(\lambda) \\ &= \nabla_{\mu} g_{\nu\rho}(\lambda) - C_{\rho\mu\nu}(\lambda) - C_{\nu\mu\rho}(\lambda) = 0, \end{aligned} \quad (\text{A.1. 18})$$

我们可以得到:

$$\begin{aligned} C_{\rho\mu\nu}(\lambda) + C_{\nu\mu\rho}(\lambda) &= \nabla_{\mu} g_{\nu\rho}(\lambda), \\ C_{\rho\nu\mu}(\lambda) + C_{\mu\nu\rho}(\lambda) &= \nabla_{\nu} g_{\mu\rho}(\lambda), \\ C_{\nu\rho\mu}(\lambda) + C_{\mu\rho\nu}(\lambda) &= \nabla_{\rho} g_{\mu\nu}(\lambda). \end{aligned} \quad (\text{A.1. 19})$$

将上式线性组合并应用 $C_{\mu\nu\rho}$ 关于后两个指标对称的性质, 我们可以得到 $C_{\mu\nu\rho}$ 用度规及其导数表达的形式:

$$2C_{\mu\nu\rho}(\lambda) = \nabla_{\nu} g_{\rho\mu}(\lambda) + \nabla_{\rho} g_{\nu\mu}(\lambda) - \nabla_{\mu} g_{\nu\rho}(\lambda), \quad (\text{A.1. 20})$$

即

$$C^{\rho}{}_{\mu\nu}(\lambda) = \frac{1}{2}g^{\rho\sigma}(\nabla_{\mu}g_{\nu\sigma}(\lambda) + \nabla_{\nu}g_{\mu\sigma}(\lambda) - \nabla_{\sigma}g_{\mu\nu}(\lambda)). \quad (\text{A.1. 21})$$

对 $C^{\rho}{}_{\mu\nu}(\lambda)$ 的变分则为:

$$\begin{aligned} \delta C^{\rho}{}_{\mu\nu} &= \frac{1}{2}\frac{dg^{\rho\sigma}}{d\lambda}(\nabla_{\mu}g_{\nu\sigma}(\lambda) + \nabla_{\nu}g_{\mu\sigma}(\lambda) - \nabla_{\sigma}g_{\mu\nu}(\lambda))|_{\lambda=0} \\ &\quad + \frac{1}{2}g^{\rho\sigma}(\nabla_{\mu}\delta g_{\nu\sigma} + \nabla_{\nu}\delta g_{\mu\sigma} - \nabla_{\sigma}\delta g_{\mu\nu}), \end{aligned} \quad (\text{A.1. 22})$$

第一项由导数算符适配条件 A.1. 7 为 0, 于是:

$$\begin{aligned}\delta C^\rho_{\rho\nu} &= \frac{1}{2}g^{\rho\sigma}(\nabla_\rho\delta g_{\nu\sigma} + \nabla_\nu\delta g_{\rho\sigma} - \nabla_\sigma\delta g_{\rho\nu}) \\ &= \frac{1}{2}g^{\rho\sigma}(\nabla_\nu\delta g_{\rho\sigma} - 2\nabla_{[\rho}\delta g_{\sigma]\nu}) \\ &= \frac{1}{2}g^{\rho\sigma}\nabla_\nu\delta g_{\rho\sigma}.\end{aligned}\tag{A.1. 23}$$

将 A.1. 22 与 A.1. 23 代回 A.1. 17 便可得到:

$$\delta R_{\mu\rho} = \frac{1}{2}g^{\nu\sigma}(\nabla_\nu\nabla_\mu\delta g_{\rho\sigma} + \nabla_\nu\nabla_\rho\delta g_{\mu\sigma} - \nabla_\nu\nabla_\sigma\delta g_{\mu\rho} - \nabla_\mu\nabla_\rho\delta g_{\nu\sigma}),\tag{A.1. 24}$$

代回 B_1 的定义式:

$$\begin{aligned}B_1 &= \sqrt{-g}g^{\mu\rho}\delta R_{\mu\rho} \\ &= \sqrt{-g}g^{\mu\rho}\left[\frac{1}{2}g^{\nu\sigma}(\nabla_\nu\nabla_\mu\delta g_{\rho\sigma} + \nabla_\nu\nabla_\rho\delta g_{\mu\sigma} - \nabla_\nu\nabla_\sigma\delta g_{\mu\rho} - \nabla_\mu\nabla_\rho\delta g_{\nu\sigma})\right] \\ &= \frac{\sqrt{-g}}{2}(\nabla^\sigma\nabla^\rho\delta g_{\rho\sigma} + \nabla^\sigma\nabla^\mu\delta g_{\mu\sigma} - g^{\mu\rho}\nabla^\sigma\nabla_\sigma\delta g_{\mu\rho} - g^{\nu\sigma}\nabla^\rho\nabla_\rho\delta g_{\nu\sigma}) \\ &= \sqrt{-g}\nabla^\mu(\nabla^\sigma\nabla^\mu\delta g_{\mu\sigma} - g^{\mu\rho}\nabla^\sigma\nabla_\sigma\delta g_{\mu\rho}) \\ &= \sqrt{-g}\nabla^\mu[g^{\nu\rho}(\nabla_\rho\delta g_{\mu\nu} - \nabla_\mu\delta g_{\nu\rho})] \\ &= \sqrt{-g}\nabla^\mu v_\mu,\end{aligned}\tag{A.1. 25}$$

其中 $v_\mu = g^{\nu\rho}(\nabla_\rho\delta g_{\mu\nu} - \nabla_\mu\delta g_{\nu\rho})$

接下来计算 B_2 :

$$B_2 = R\delta\sqrt{-g} = R\frac{d\sqrt{-g(\lambda)}}{d\lambda}\bigg|_{\lambda=0} = R\left\{\frac{1}{2\sqrt{-g(\lambda)}}\frac{d[-g(\lambda)]}{d\lambda}\right\}\bigg|_{\lambda=0} = -\frac{R}{2\sqrt{-g}}\delta g,\tag{A.1. 26}$$

其中不带指标的 g 是 $g_{\mu\nu}$ 的行列式. 借 μ 指标写出行列式定义式:

$$g = g_{\mu\nu}A^{\mu\nu},\tag{A.1. 27}$$

其中 $A^{\mu\nu}$ 为 $g_{\mu\nu}$ 的代数余子式, 仅关于 ν 求和, 根据逆矩阵定义式:

$$g^{\mu\nu} = A^{\nu\mu}/g.\tag{A.1. 28}$$

于是关于行列式的变分可以写为:

$$\delta g = g g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu}, \quad (\text{A.1. 29})$$

代入 A.1. 26 得到:

$$B_2 = \frac{R\sqrt{-g}}{2} g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu}. \quad (\text{A.1. 30})$$

度规的变分与其逆的变分之间存在微妙的联系. $g^{\mu\nu} g_{\nu\rho} = \delta^\mu_\rho$, 对等号左右同时求变分:

$$\begin{aligned} 0 &= g^{\mu\nu} \delta g_{\nu\rho} + g_{\nu\rho} \delta g^{\mu\nu}, \\ g_{\nu\rho} \delta g^{\mu\nu} &= -g^{\mu\nu} \delta g_{\nu\rho}. \end{aligned} \quad (\text{A.1. 31})$$

代回 A.1. 30 得到:

$$B_2 = -\frac{R\sqrt{-g}}{2} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}, \quad (\text{A.1. 32})$$

于是, 将 A.1. 25 与 A.1. 32 代回 A.1. 6, 得到:

$$\left. \frac{d\mathcal{L}}{d\lambda} \right|_{\lambda=0} = \sqrt{-g} \nabla^\mu v_\mu + \sqrt{-g} \left(R_{\mu\nu} - \frac{R}{2} g_{\mu\nu} \right) \delta g^{\mu\nu}. \quad (\text{A.1. 33})$$

因此, 将体积元改写为一般的积分变量形式作用量 S 的变分为:

$$\begin{aligned} \delta S &= \left. \frac{dS}{d\lambda} \right|_{\lambda=0} \int d^4x \left. \frac{d\mathcal{L}}{d\lambda} \right|_{\lambda=0} \\ &= \int_\Sigma d^4x \left[\sqrt{-g} \nabla^\mu v_\mu + \sqrt{-g} \left(R_{\mu\nu} - \frac{R}{2} g_{\mu\nu} \right) \delta g^{\mu\nu} \right] \\ &= \int_\Sigma d^4x \left[\sqrt{-g} \nabla^\mu v_\mu + \sqrt{-g} G_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \right]. \end{aligned} \quad (\text{A.1. 34})$$

因此当我们取上式的欧拉拉格朗日方程, 我们就会得到真空爱因斯坦方程 (差一个边界项), 我们可以将这个边界项表示为边界上外曲率的积分. 假定 Σ 除在零测点外非类光 (法矢仅在零测点出现在面内) 定义单位法矢 \mathbf{n}^a , 对第一项有:

$$\int_\Sigma d^4x \sqrt{-g} \nabla^\mu v_\mu = \int_\Sigma \varepsilon \nabla^\mu v_\mu = \int_{\partial\Sigma} \mathbf{n}_\mu v^\mu, \quad (\text{A.1. 35})$$

$g_{\mu\nu}$ 的边界条件只能得出 $\delta g_{\mu\nu}|_{\partial\Sigma} = 0$, 但是 v^μ 的表达式中存在 $\nabla_\mu \delta g_{\nu\rho}$, 边界条件无法保证如 $\nabla_\mu \delta g_{\nu\rho}|_{\partial\Sigma}$ 的项为 0

为了讨论边界项我们需要定义度规 $g_{\mu\nu}$ 的诱导度规 $h_{\mu\nu}$, 其定义为 $h_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} \mp \mathbf{n}_\mu \mathbf{n}_\nu$. 其中 $\mathbf{n}^\mu \mathbf{n}_\mu = \pm 1$ 利用 $g^{\mu\nu}$ 升指标后可得 $h^\mu{}_\nu = g^{\mu\rho} h_{\rho\nu} = \delta^\mu{}_\nu \mp \mathbf{n}^\mu \mathbf{n}_\nu$. 外曲率 $K_{\mu\nu}$ 定

义为 $K_{\mu\nu} = h_\mu{}^\rho h_\nu{}^\sigma \nabla_\rho \mathbf{n}_\sigma$, 与诱导度规缩并即可得到 $K = h^{\mu\nu} K_{\mu\nu} = h^\mu{}_\nu \nabla_\mu \mathbf{n}^\nu$

同样地, 对于作为 λ 函数的度规 $g(\lambda)$, 我们会得到与 λ 有关的外曲率, 利用与上述一致的计算过程, 我们可以得到作为 λ 函数, $K(\lambda) = h^{\mu\nu} K_{\mu\nu}(\lambda) = h^{\mu\nu} h_\mu{}^\rho h_\nu{}^\sigma \nabla_\rho^{(\lambda)} \mathbf{n}_\sigma = h^\mu{}_\nu \nabla_\mu^{(\lambda)} \mathbf{n}^\nu = h^\mu{}_\nu [\nabla_\mu \mathbf{n}^\nu + C^\nu_{\mu\rho}(\lambda) \mathbf{n}^\rho]$ 这里的 $h^{\mu\nu}, h_\mu{}^\nu, \mathbf{n}^\mu$ 都是定义在边界上的量, 而度规关于 λ 的依赖性则出现在积分区域的内部, 因此 $h^{\mu\nu}, h_\mu{}^\nu, \mathbf{n}^\mu$ 均为 λ 无量纲.

接下来对 $K(\lambda)$ 求变分, 代入前面得到的 $C^\mu_{\nu\rho}$ 的变分表达式, 于是:

$$\begin{aligned} \delta K &= h^\mu{}_\nu \delta C^\nu_{\mu\rho} \mathbf{n}^\rho = \frac{1}{2} \mathbf{n}^\rho h^\mu{}_\nu g^{\nu\sigma} (\nabla_\mu \delta g_{\rho\sigma} + \nabla_\rho \delta g_{\mu\sigma} - \nabla_\sigma \delta g_{\mu\rho}) \\ &= \frac{1}{2} \mathbf{n}^\rho h^{\mu\sigma} \nabla_\rho \delta g_{\mu\sigma} = -\frac{1}{2} v_\mu \mathbf{n}^\mu, \end{aligned} \quad (\text{A.1. 36})$$

而这根据我们前面所得到的 A.1. 35, 这刚好就是我们所需要的边界项的二分之一, 于是在作用量中我们就可以补上这一项让作用量对应的欧拉拉格朗日方程得到真空爱因斯坦方程:

$$S' = S + 2 \int_{\partial\Sigma} K. \quad (\text{A.1. 37})$$

除此之外, 我们也可以通过改写边界条件的方式去掉边界项, 将边界处场不参与演化拓展为: 边界处及边界外的场不参与演化. 则由场的连续性条件我们可以得到 v_μ 对边界的贡献为零.

A.2 引力问题的微扰法

通过计算非真空爱因斯坦方程我们可以将上一节的作用量前的待定常数因子计算出来, 补全爱因斯坦希伯特作用量:

$$S_{EH} = \frac{1}{16\pi G_N} \int d^4x \sqrt{-g} \mathcal{R}, \quad (\text{A.2. 38})$$

牛顿常数 G_N 可以被表为

$$8\pi G_N = \frac{\hbar c}{M_{pl}^2}. \quad (\text{A.2. 39})$$

我们取自然单位制, 即 $\hbar = c = 1$. 普朗克质量 M_{pl} 给出我们理论的能标

$$M_{pl} \approx 2 \times 10^{18} \text{ GeV}. \quad (\text{A.2. 40})$$

(去掉 8π 的系数后也常常被称为普朗克质量的平方, 即 $\sqrt{1/G_N} \approx 1 \times 10^{19}$ GeV). 而我們实际上已经可以从这些内容里得到一些有用的信息了.

首先, 我们此处的耦合系数是 $1/M_{pl}$. 为了证明这一点, 我们考虑平直闵氏度规附近的扰动:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \frac{1}{M_{pl}} h_{\mu\nu}$$

因子 $1/M_{pl}$ 保证了在我们展开爱因斯坦-希尔伯特作用量时, h 的运动学项正交归一, 即 M_{pl} 的阶数为 0. 于是我们可以得到如下逐阶展开的作用量:

$$S_{EH} = \int d^4x (\partial h)^2 + \frac{1}{M_{pl}} h (\partial h)^2 + \frac{1}{M_{pl}^2} h^2 (\partial h)^2 + \dots \quad (\text{A.2. 41})$$

这里的每一项实际上都不严格, 如果尝试着严格导出这些相互作用项, 得到的结果是包含各种指标缩并的复杂形式. 此外, 我们可以发现, 相互作用项带不同的负阶次 M_{pl} . 这说明我们的微扰是关于无量纲数 E^2/M_{pl}^2 来进行的. 其中, E 为我们感兴趣的相互作用的能标. 我们知道引力相互作用是很弱的, 因此在低能情况下可以用上述方法描述. 但是当我们的能量逐渐靠近普朗克能标时, 引力相互作用就会逐渐增强. 在重整化群的语言中, 这类耦合常数在重整化群的作用下最终会消失, 称为不相关的 (irrelevant) 耦合常数.

第二, 普朗克能标 M_{pl} 极大, 欧洲核子中心 (CERN) 的大型强子对撞机 (LHC) 可以产生电弱 (electroweak) 相互作用的能标, $M_{EW} \sim 10^3$ GeV. 他们的比例是 $M_{EW}/M_{pl} \sim 10^{-15}$. 因此, 量子引力无法对我们的日常生活产生任何影响.

引力的不可重整化性

带有先前说的会因为重整化群作用而消失的耦合系数的量子场论在高能下通常会出现问题, 引力也不例外这类理论被称为不可重整化理论, 也就是说费曼图中出现的发散不可能被有限个接触项 (counter term) 抵消. 在纯爱因斯坦引力中, 其对称性要求单圈的 S-矩阵为有限. 第一个发散来自于双圈, 修正项为:

$$\Gamma \sim \frac{1}{\epsilon} \frac{1}{M_{pl}^4} \int d^4x \sqrt{-g} \mathcal{R}^{\mu\nu}_{\rho\sigma} \mathcal{R}^{\rho\sigma}_{\lambda\kappa} \mathcal{R}^{\lambda\kappa}_{\mu\nu} \quad (\text{A.2. 42})$$

其中 $\epsilon = 4 - D$. 这是纯引力理论中无穷多修正项中的第一项

令引力与物质耦合则需要引入下面的作用量:

$$S_{int} = \int d^4x \frac{1}{M_{pl}} h_{\mu\nu} T^{\mu\nu} + \mathcal{O}(h^2) \quad (\text{A.2. 43})$$

这一作用量导致我们遇到的重整化性质急剧恶化, 现在第一个发散在一圈就已经出现了, 例如考虑带两个引力传播子的四点方块一圈图, 圈动量记为 k , 一圈图发散严重, 其积分为:

$$\frac{1}{M_{pl}^4} \int^\infty d^4k \quad (\text{A.2. 44})$$

不可重整化理论在物理学的历史中随处可见, 其中一个重要例子就是费米的弱相互作用理论, 尽管它不可重整化, 但是这一理论并不是毫无作用的. 我们通常把不可重整化理论视为在一定能标 Λ 下适用的有效理论. 我们通过将任何动量积分的紫外区用 Λ 截断丢弃掉高能的部分来处理这一发散, 于是便可以得到准确度约为 E/Λ (或其若干阶) 的有效理论. 在弱相互作用下, 费米的理论预测了 $\sqrt{1/G_F} \sim 100 \text{ GeV}$ 能标下的物理. 而对于量子引力, 爱因斯坦的理论精确度与 $(E/M_{pl})^2$ 相当.

理所当然的, 不可重整化理论无法描述截断能标 Λ 附近的物理现象, 这是因为它们丢失了描述高能区域行为的紫外部分的自由度. 在弱相互作用的情形下, 这些新的自由度表示 W 和 Z 玻色子. 在这里我们希望了解为了完整地描述引力还需要哪些自由度.

奇点问题

粒子物理学家才会在处理宇观问题时使用散射振幅, 对于其他人来说, 处理广义相对论问题时通常要把几何作为一个整体来思考, 而不是把爱因斯坦-希尔伯特作用量混如其中, 来讨论平面空间周围的扰动. 而在这种语言中, 高能物理问题变成了短距离物理问题. 在时空曲率接近普朗克尺度并最终变得奇异的区域, 经典广义相对论是不可信的. 量子引力理论应能解决这些奇点问题. 时空奇点问题原则上等同于高能散射问题. 两者都在探究引力的超紫外本质. 时空几何是由引力子的相干集合构成的, 就像激光器中的电场和磁场是由光子集合构成的一样. 经过傅立叶变换后时空的短距离结构受高动量引力子支配. 时空奇点和高能散射的理解相当于一枚硬币的两面. 奇点定理告诉我们, 在广义相对论中有两种情况时空曲率会变大: 大爆炸和黑洞中心. 这两种情况是对任何量子引力理论的最大挑战.

引力的几个微妙的问题

有一种说法是广义相对论自最开始就存在一定的问题, 比如它无法预测普朗克尺度上的物理学, 还有诸如不可规范化和奇点等问题, 这些都是已知的未知. 而实际上, 整个关

于引力的问题更为复杂和微妙。一方面,不可规范化问题可能实际上并没有乍看上去那么严重。另一方面,量子引力的某些方面表明,广义相对论的缺陷并不像我们所理解的那样明显。其实这一理论还包含了许多我们未知的未知,也就是一些我们甚至不知道自己不知道的事情。在本课程中,我们不会对这些问题进行过多的讨论,但应当多少对这些问题有个简单的了解。在这里,我们只简单提几个要点。

首先,费米的弱相互作用理论与引力理论之间有一个关键的区别。费米的理论无法预测能量超过 $\sqrt{1/G_F}$ 的任何散射过程。而与之相对地,如果我们在引力作用下以极高的能量(比如说,在能量为 $E \gg M_{pl}$ 的情况下)散射两个物体,那么我们很清楚会发生什么:这会形成一个大黑洞。我们不需要量子引力来告诉我们这些,经典的广义相对论就足够了。而如果我们只关注散射,那么在超高能量下,不可重整化的危机就不成问题。只有在普朗克尺度附近才会存在问题。

类似的问题也存在于奇点。如果我们跳进黑洞,没有量子引力理论,就没有人能告诉我们在奇点附近会经历什么物理过程。然而,如果我们呆在黑洞之外,我们就很难看到量子引力的任何影响。这是因为大自然利用视界将普朗克尺度的曲率隐藏起来导致我们无法观测。在黑洞的例子中,这一点是通过所谓宇宙监督假设²来实现的,即奇点隐藏在视界之后。而对于大爆炸的例子,奇点的隐藏是通过暴涨(inflation)实现的,它冲刷掉了早期宇宙的任何痕迹。无论是高能散射还是奇点,大自然似乎都在屏蔽量子引力对我们的影响。没有人知道这会指向深层次的东西,还是仅仅给试图探测普朗克尺度的科学家带来了不便。

虽然视界可以保护我们免受奇点的影响,但它们本身也有问题。这些都是未知的未知:即当曲率很小,广义相对论也仍可用时出现的诸多困难。黑洞的熵和相关的信息丢失悖论强烈表明,局域的量子场论在宏观距离尺度上会崩溃。而试图在德西特时空或永恒存在暴涨的时空内提出量子引力,也有类似的困难。全息(holography),黑洞互补(complimentarity)和 AdS/CFT 等思想都指向非局域效应和时空的出现。这些都是量子引力的深层谜题,它们与引力的紫外特征之间的关系尚不清楚。

²即彭罗斯(Penrose)于1969年提出的猜想:任何物理上真实的坍缩都不造成裸奇点。

Appendix B

Z 积分的相关问题

B.1 积分与伽玛函数 (Gamma functions)

伽马函数用如下积分定义:

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty dt \, t^{z-1} e^{-t} \quad (\text{B.1. 1})$$

上式在 $\text{Re} z > 0$ 时收敛. 它在整个 z 平面上有唯一的解析表达式.

伽马函数有几个重要的性质. 首先, 它可以看作是正整数阶乘函数的解析延拓, 即:

$$\Gamma(n) = (n-1)! \quad n \in \mathbf{Z}^+$$

其次, $\Gamma(z)$ 在非正整数处有极点. 更确切地说, 当 $z \approx -n$, with $n = 0, 1, \dots$ 时, 有以下展开式:

$$\Gamma(z) \approx \frac{1}{z+n} \frac{(-1)^n}{n!}$$

欧拉 β 函数 (Euler β function)

对于 $x, y \in \mathbf{C}$, 欧拉 β 函数的定义是

$$B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$$

它的积分形式是:

$$B(x, y) = \int_0^1 dt t^{x-1} (1-t)^{y-1} \quad (\text{B.1. 2})$$

我们可以证明上式, 首先观察

$$\Gamma(x)\Gamma(y) = \int_0^\infty du \int_0^\infty dv e^{-u} u^{x-1} e^{-v} v^{y-1}$$

改写变量 $u = a^2$ 和 $v = b^2$ 于是上式变为:

$$\begin{aligned} \Gamma(x)\Gamma(y) &= 4 \int_0^\infty da \int_0^\infty db e^{-(a^2+b^2)} a^{2x-1} b^{2y-1} \\ &= \int_{-\infty}^\infty da \int_{-\infty}^\infty db e^{-(a^2+b^2)} |a|^{2x-1} |b|^{2y-1} \end{aligned}$$

现在我们再次改变坐标, 这次是极坐标 $a = r \cos \theta$ 和 $b = r \sin \theta$. 我们得到:

$$\begin{aligned} \Gamma(x)\Gamma(y) &= \int_0^\infty r dr e^{-r^2} r^{2x+2y-2} \int_0^{2\pi} d\theta |\cos \theta|^{2x-1} |\sin \theta|^{2y-1} \\ &= \frac{1}{2} \Gamma(x+y) \times 4 \int_0^{\pi/2} d\theta (\cos \theta)^{2x-1} (\sin \theta)^{2y-1} \\ &= \Gamma(x+y) \int_0^1 dt (1-t)^{y-1} t^{x-1} \end{aligned}$$

其中, 我们在最后一步进行了变量替换: $t = \cos^2 \theta$. 于是我们证明了 eq. (B.1. 2)

维拉索罗-夏皮罗振幅

在闭弦计算中, 我们遇到了积分:

$$C(a, b) = \int d^2 z |z|^{2a-2} |1-z|^{2b-2}$$

现在, 我们将计算这一积分, 并证明它是 eq. (8.2. 28) 的形式. 我们首先给出一个常用的计算技巧:

在伽马函数定义式 eq. (B.1. 1) 中进行变量替换 $t \rightarrow |z|^2 t$, 再对等号左右两侧同时乘以 $|z|^{2a-2}$ 便得到:

$$|z|^{2a-2} = \frac{1}{\Gamma(1-a)} \int_0^\infty dt t^{-a} e^{-|z|^2 t}$$

同理, 我们可以写出:

$$|1 - z|^{2b-2} = \frac{1}{\Gamma(1-b)} \int_0^\infty du u^{-b} e^{-|1-z|^2 u}$$

我们分解复坐标 $z = x + iy$, 这样积分的测度就是 $d^2 z = 2dx dy$. 这样, 我们就可以把积分 $C(a, b)$ 写成:

$$\begin{aligned} C(a, b) &= \int \frac{d^2 z du dt}{\Gamma(1-a)\Gamma(1-b)} t^{-a} u^{-b} e^{-|z|^2 t} e^{-|1-z|^2 u} \\ &= 2 \int \frac{dx dy du dt}{\Gamma(1-a)\Gamma(1-b)} t^{-a} u^{-b} e^{-(t+u)(x^2+y^2)+2xu-u} \\ &= 2 \int \frac{dx dy du dt}{\Gamma(1-a)\Gamma(1-b)} t^{-a} u^{-b} \exp \left(-(t+u) \left[\left(x - \frac{u}{t+u} \right)^2 + y^2 \right] - u + \frac{u^2}{t+u} \right) \end{aligned}$$

的形式. 现在, 我们进行 $dx dy$ 的积分, 这不过是简单的高斯积分. 我们得到:

$$C(a, b) = \frac{2\pi}{\Gamma(1-a)\Gamma(1-b)} \int_0^\infty du dt \frac{t^{-a} u^{-b}}{t+u} e^{-tu/(t+u)}$$

最后进行变量替换: $t = \alpha\beta$ 和 $u = (1-\beta)\alpha$. 而为了让 t 和 u 的取值范围在 $[0, \infty)$ 内, 我们便要求 $\alpha \in [0, \infty)$ 和 $\beta \in [0, 1]$. 考虑到这一变换产生的雅可比行列式, 即 α , 积分就变成了:

$$C(a, b) = \frac{2\pi}{\Gamma(1-a)\Gamma(1-b)} \int d\alpha d\beta \frac{\alpha^{1-a-b}}{\alpha} \beta^{-a} (1-\beta)^{-b} e^{-\alpha\beta(1-\beta)}$$

而对 $d\alpha$ 的积分只不过是:

$$\int_0^\infty d\alpha \alpha^{-a-b} e^{-\beta\alpha(1-\beta)} = [\beta(1-\beta)]^{a+b-1} \Gamma(1-a-b)$$

我们有 $c = 1 - a - b$. 于是最后得到:

$$C(a, b) = \frac{2\pi\Gamma(c)}{\Gamma(1-a)\Gamma(1-b)} \int_0^1 d\beta (1-\beta)^{a-1} \beta^{b-1}$$

最后的积分是欧拉贝塔函数 (Euler beta function) eq. (B.1. 2), 于是我们得到了期望的结果:

$$C(a, b) = \frac{2\pi\Gamma(a)\Gamma(b)\Gamma(c)}{\Gamma(1-a)\Gamma(1-b)\Gamma(1-c)}$$

Appendix C

弦对偶简介

可能会写, 回头再说, 想学可以先看看李佳润老师的讲义, 见 https://space.bilibili.com/2068473748?spm_id_from=333.337.0.0 以及 <https://www.zhihu.com/people/du-wang-ting-she-chu-ji-liang>.

Appendix D

非自由场的 OPE

我们在第 5 章所讲的算符乘积展开 (OPE) 有一个前提, 即讨论的是共形场中的自由场时才适用, 而我们在弦论中大多数情况下遇到的都是自由场, 因此绝大多数弦论教材通常只介绍这种自由场的 OPE. 那么何谓自由场? 自由场被定义为其自身或其导数的 OPE 中仅包含常数项的场. 而这存在例外, 例如在纯旋量表述中, 我们可以从 $d_\alpha(z)d_\beta(w)$ 或 $N^{mn}(z)N^{pq}(w)$ 的 OPE 中看出, 此处的场一般并非自由场. 在这种情况下, 算符的正规序定义以及涉及正规序算符的 OPE 的计算是通过对传统威克定理规则的一种推广来完成的. 接下来, 我们将简要回顾使用这种方法计算复合算符的 OPE 的过程.

D.1 复合算符的 OPE

复合算符 A 和 B 的 OPE 定义为:

$$A(z)B(w) = \sum_{n=-\infty}^N \frac{[AB]_n(w)}{(z-w)^n} \quad (\text{D.1. 1})$$

其中 N 为有限正整数, 而 A 和 B 的正规序乘积记作 $(AB)(w)$, 定义为:

$$(AB)(w) = \oint \frac{dz}{z-w} A(z)B(w) = [AB]_0(w). \quad (\text{D.1. 2})$$

基于这种记号, 我们可以构造广义威克定理, 非自由场的嵌套 OPE 的计算可以完全在上述引入的 OPE 括号的层面上完成. 其基础技术源于博尔切兹恒等式 (Borchers identity):

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{\infty} \binom{p}{j} [[AB]_{r+j+1} C]_{p+q+1-j} = \\ \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \binom{r}{j} \left([A[BC]_{q+1+j}]_{p+r+1-j} - (-1)^{r+ab} [B[AC]_{p+1+j}]_{q+r+1-j} \right) \end{aligned} \quad (\text{D.1. 3})$$

其中 $p, q, r \in \mathbb{Z}$. 它在顶角算符代数中扮演了重要角色. 在上述内容中, a 和 b 分别表示 A 和 B 的格拉斯曼奇偶性. 博尔切兹恒等式有两个常用的特殊情况: $(p+1=m, q+1=n, r=0)$ 和 $(p=0, q+1=n, r+1=m)$. 这些特殊情况分别导出了 $[A[BC]_n]_m$ 和 $[[AB]_m C]_n$ 的恒等式:

$$\begin{aligned} [A[BC]_n]_m &= (-1)^{ab} [B[AC]_m]_n \\ &\quad + \sum_{j=0}^{m-1} \binom{m-1}{j} [[AB]_{m-j} C]_{n+j}, \quad m \geq 1 \\ [[AB]_m C]_n &= \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \binom{m-1}{j} \\ &\quad \times ([A[BC]_{n+j}]_{m-j} + (-1)^{m+ab} [B[AC]_{j+1}]_{m+n-j-1}) \end{aligned} \quad (\text{D.1. 4})$$

其中我们对第一行使用了 $\binom{m-1}{j} = \binom{m-1}{m-1-j}$ 并进行替换 $m-1-j \rightarrow j$.

特别地, 当 OPE 中出现的复合算符满足正规排序时, 我们得到¹

$$\begin{aligned} [A[BC]_0]_n &= (-1)^{ab} [B[AC]_n]_0 + [[AB]_n C]_0 + \sum_{i=1}^{n-1} \binom{n-1}{i} [[AB]_{n-i} C]_i \\ &= (-1)^{ab} \left([B[AC]_n]_0 + \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^{j+n}}{j!} [\partial^j [BA]_{j+n} C]_0 + \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^i [[BA]_i C]_{n-i} \right), \\ [[AB]_0 C]_n &= \sum_{j=0}^{\infty} ([A[BC]_{n+j}]_{-j} + (-1)^{ab} [B[AC]_{j+1}]_{n-j-1}) \\ &= (-1)^{ab} \sum_{i=1}^{n-1} [B[AC]_{n-i}]_i + \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} \left([\partial^j A[BC]_{n+j}]_0 + (-1)^{ab} [\partial^j B[AC]_{n+j}]_0 \right) \end{aligned} \quad (\text{D.1. 5})$$

¹需要注意的是, 当 $n < 0$ 时, $\binom{n}{m} = (-1)^m \binom{-n+m-1}{m}$, 其中 $\binom{-1}{j} = (-1)^j$.

反复应用这些规则可以计算具有任意嵌套的 OPE 括号. 不难证明这些括号遵循如下关系:

$$\begin{aligned} [A[BC]_0]_0 &= (-1)^{ab}[B[AC]_0]_0 + \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{1+i} \frac{1}{i!} [\partial^i [AB]_i C]_0 \\ [[AB]_0 C]_0 &= [A[BC]_0]_0 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i!} ([\partial^i A[BC]_i]_0 + (-1)^{ab} [\partial^i B[AC]_i]_0) \end{aligned} \quad (\text{D.1. 6})$$

当 n 为非负整数时, 我们还可以得到:

$$\begin{aligned} [BA]_n &= (-1)^{n+ab} \left([AB]_n + \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^i \frac{1}{i!} \partial^i [AB]_{n+i} \right) \\ [\partial AB]_n &= (1-n)[AB]_{n-1} \\ [A\partial B]_n &= \partial[AB]_n + (n-1)[AB]_{n-1} \\ [AB]_{-n} &= \frac{1}{n!} [\partial^n AB]_0 \\ [AB]_{n-i} &= \frac{(-1)^i}{\binom{n-1}{i}} \frac{1}{i!} [\partial^i AB]_n \end{aligned} \quad (\text{D.1. 7})$$

注意到 $\partial[AB]_n = [\partial AB]_n + [A\partial B]_n$. 此外, 由 eq. (D.1. 4), 我们得到 $[A, \]_1$ 对其他括号的作用为:

$$[A[BC]_n]_1 = [[AB]_1 C]_n + (-1)^{ab} [B[AC]_1]_n. \quad (\text{D.1. 8})$$

这与导数算符非常类似.

此外, 如果 A 和 B 的共形维数分别为 h_A 和 h_B , 则 $[AB]_n$ 的共形维数为 $h_A + h_B - n$, 即括号 $[\ , \]_n$ 的共形维数为 $-n$.

D.1.1 平面波基底下超场的算符积展开

超场 $K_i \in [A_\alpha, A_m, W^\alpha, F^{mn}]$ 在平面波基底下展开为

$$K_i(z) = K_i(\theta, X) = \tilde{K}_i(\theta(z)) e^{ik_i \cdot X(z)}, \quad (\text{D.1. 9})$$

例如 $A_m^1(z) = \tilde{A}_m^1(\theta(z)) e^{ik_1 \cdot X(z)}$. 我们感兴趣的是两个此类超场的 OPE. 当算符涉及到平面波因子 $e^{ik \cdot X}$ 时, eq. (D.1. 1) 中给出的 OPE 定义需要被推广, 因为其行为与传统

情况有所不同:

$$:e^{ik_1 X(z)}::e^{ik_2 X(w)}: = (z-w)^{2\alpha' k_1 \cdot k_2} [1 + (z-w)ik_1 \cdot \partial X(z) + \mathcal{O}((z-w)^2)] :e^{i(k_1+k_2) \cdot X(w)}: \quad (\text{D.1. 10})$$

这与我们在 eq. (D.1. 1) 看到的形式不同, 除非 $2\alpha' k_1 \cdot k_2$ 为整数. 例如, 当 $2\alpha' k_1 \cdot k_2 = -1$ 时, 这一 OPE 可以写为:

$$K_1(z)K_2(w) = \sum_{n=-\infty}^N \frac{[K_1 K_2]_n}{(z-w)^n}, \quad 2\alpha' k_1 \cdot k_2 = -1 \quad (\text{D.1. 11})$$

注意到因子 $\tilde{K}_i(\theta)$ 之间的 OPE 不存在世界面奇点. 而超场 OPE 的奇点完全来源于平面波部分. 同样在 $2\alpha' k_1 \cdot k_2 = -1$ 时, 有:

$$:e^{ik_1 X(z)}::e^{ik_2 X(w)}: = \frac{e^{ik_1 \cdot X(w)} e^{ik_2 \cdot X(w)}}{(z-w)} [1 + (z-w)ik_1 \cdot \partial X(z) + \mathcal{O}((z-w)^2)] \quad (\text{D.1. 12})$$

通过因子 $K_i(\theta)$ 的泰勒展开, 我们得到:

$$K_1(\theta(z))K_2(\theta(w)) = K_1(\theta(w))K_2(\theta(w)) + (z-w)\partial\theta^\alpha \partial_\alpha K_1(\theta(w))K_2(\theta(w)) + \mathcal{O}((z-w)^2). \quad (\text{D.1. 13})$$

于是, 将上面两式的右侧做乘积, 取 $n = 0$, 可以得到:

$$\begin{aligned} [K_1 K_2]_0(w) &= (ik_1 \cdot \partial X K_1(\theta(w)) + \partial\theta^\alpha \partial_\alpha K_1(\theta(w))) e^{ik_1 \cdot X(w)} K_2(\theta(w)) e^{ik_2 \cdot X(w)} \\ &= \partial K_1(w) K_2(w). \end{aligned} \quad (\text{D.1. 14})$$

而取 $n = 1$ 阶便得到:

$$[K_1 K_2]_1(w) = K_1(w) K_2(w) \quad (\text{D.1. 15})$$

更高阶并不存在, 于是:

$$[K_1 K_2]_{n \geq 2} = 0 \quad (\text{D.1. 16})$$

综上所述, 我们得到超场之间的 OPE eq. (D.1. 11) 中展开的每一项:

$$\begin{aligned} [K_1 K_2]_0(w) &= \partial K_1(w) K_2(w), \\ [K_1 K_2]_1(w) &= K_1(w) K_2(w), \\ [K_1 K_2]_{n \geq 2}(w) &= 0. \end{aligned} \quad (\text{D.1. 17})$$

D.2 纯旋量表述中的 OPE

采用开弦的系数规定, 本书中使用的一些纯旋量表述的基本 OPE 列出如下 (为简洁起见, 等号右侧省略了自变量 w):

$$\begin{aligned}
 \partial\theta^\alpha(z)\{\partial\theta^\beta(w), \Pi^m(w), N^{mn}(w)\} &\sim \text{regular}, & d_\alpha(z)\partial\theta^\beta(w) &\rightarrow \frac{\delta_\alpha^\beta}{(z-w)^2}, \\
 d_\alpha(z)K(w) &\rightarrow \frac{D_\alpha K}{z-w}, & \Pi^m(z)K(w) &\rightarrow -2\alpha' \frac{\partial^m K}{z-w}, & d_\alpha(z)\Pi^m(w) &\rightarrow \frac{(\gamma^m \partial\theta)_\alpha}{z-w} \\
 d_\alpha(z)d_\beta(w) &\rightarrow -\frac{1}{2\alpha'} \frac{\gamma_{\alpha\beta}^m \Pi_m}{z-w}, & \Pi^m(z)\Pi^n(w) &\rightarrow -2\alpha' \frac{\eta^{mn}}{(z-w)^2}, & d_\alpha(z)\theta^\beta(w) &\rightarrow \frac{\delta_\alpha^\beta}{z-w} \\
 J(z)J(w) &\rightarrow -\frac{4}{(z-w)^2}, & J(z)\lambda^\alpha(w) &\rightarrow \frac{\lambda^\alpha}{z-w}, & N^{mn}(z)\lambda^\alpha(w) &\rightarrow \frac{1}{2} \frac{(\gamma^{mn}\lambda)^\alpha}{z-w} \\
 N^{mn}(z)N^{pq}(w) &\rightarrow \frac{\delta^{p[m} N^{n]q} - \delta^{q[m} N^{n]p}}{z-w} - 3 \frac{\delta^{m[q} \delta^{p]n}}{(z-w)^2}
 \end{aligned} \tag{D.2. 18}$$

其中, $K(w)$ 是一个一般的 10 维超场, 不依赖于 $\partial^k X^m$ 和 $\partial^k \theta^\alpha$ 的导数 ($k \geq 1$).

为方便理解与掌握, 我们在最后举两个例子:

D.2.1 正规排序括号的重排

这里我们举一个简单的例子: 使用 eq. (D.1. 4) 中的规则, 直接计算括号 $I_4 \equiv \alpha' [[N^{mn} F_1^{mn}]_0 [\lambda^\beta A_\beta^2]_0]_1$ 的结果为:

$$I_4 = \alpha' [\lambda^\beta [N^{mn} (F_1^{mn} A_\beta^2)]_0]_0 + \frac{\alpha'}{2} (\gamma^{mn})^\beta_\gamma [[F_1^{mn} \lambda^\gamma]_0 A_\beta^2]_0, \tag{D.2. 19}$$

注意, 在上式的第二项中, SYM 超场 $F^{mn}1$ 和 $A\beta^2$ 出现在不同的正规序括号中. 因此, $F^{mn}1$ 和 $A\beta^2$ 之间的奇点未被考虑. 然而, 使用恒等式 eq. (D.1. 6), 结合 eq. (D.1. 17) 中的正规序括号, 我们可以逐步地将结果构建为:

$$\begin{aligned}
 [[F_1^{mn} \lambda^\gamma]_0 A_\beta^2]_0 &= [F_1^{mn} [\lambda^\gamma A_\beta^2]_0]_0 + [\partial \lambda^\gamma [F_1^{mn} A_\beta^2]_1]_0 \\
 &= [\lambda^\gamma [F_1^{mn} A_\beta^2]_0]_0 + [\partial \lambda^\gamma (F_1^{mn} A_\beta^2)]_0 \\
 &= [\lambda^\gamma (\partial F_1^{mn} A_\beta^2)]_0 + [\partial \lambda^\gamma (F_1^{mn} A_\beta^2)]_0,
 \end{aligned} \tag{D.2. 20}$$

结果对应的平面波为 $e^{i(k_1 k_2) \cdot X}$. 与之相似地, I_4 中的第一项可以通过使用 eq. (D.1. 6) 和 $[\lambda^\beta N^{mn}]_1 = -\frac{1}{2}(\gamma^{mn})^\beta_\gamma \lambda^\gamma$ 重写如下:

$$\alpha'[\lambda^\beta[N^{mn}(F_1^{mn}A_\beta^2)]_0]_0 = \alpha'[N^{mn}[\lambda^\beta(F_1^{mn}A_\beta^2)]_0]_0 - \frac{\alpha'}{2}(\gamma^{mn})^\beta_\gamma[\partial\lambda^\gamma(F_1^{mn}A_\beta^2)]_0. \quad (\text{D.2. 21})$$

于是我们可以将 I_4 化简为:

$$\begin{aligned} I_4 &= \alpha'[\lambda^\beta[N^{mn}(F_1^{mn}A_\beta^2)]_0]_0 + \frac{\alpha'}{2}(\gamma^{mn})^\beta_\gamma([\lambda^\gamma(\partial F_1^{mn}A_\beta^2)]_0 + [\partial\lambda^\gamma(F_1^{mn}A_\beta^2)]_0) \\ &= \alpha'[N^{mn}[\lambda^\beta(F_1^{mn}A_\beta^2)]_0]_0 + \frac{\alpha'}{2}(\gamma^{mn})^\beta_\gamma[\lambda^\gamma(\partial F_1^{mn}A_\beta^2)]_0, \end{aligned} \quad (\text{D.2. 22})$$

类似这样的重排有很多, 我们可以根据自己的需要尝试寻找, 但需要用到的恒等式都大同小异, 此处仅作一例.

D.2.2 正规排序的恒等式

利用纯旋量表述中的 OPE:

$$\begin{aligned} [N^{mn}\lambda^\alpha]_1 &= \frac{1}{2}(\gamma^{mn}\lambda)^\alpha, & [N^{mn}\lambda^\alpha]_{n \geq 2} &= 0, \\ [\lambda^\alpha J]_1 &= -\lambda^\alpha, & [\lambda^\alpha J]_{n \geq 2} &= 0, \end{aligned} \quad (\text{D.2. 23})$$

以及上述的恒等式, 我们可以证明一个重要的正规排序恒等式:

$$[N^{mn}[\lambda^\alpha\lambda^\beta]_0]_0\gamma_{\beta\gamma}^m = \frac{1}{2}[J[\lambda^\alpha\lambda^\beta]_0]_0\gamma_{\beta\gamma}^n + \frac{5}{2}\lambda^\alpha(\gamma^n\partial\lambda)_\gamma + \frac{1}{2}(\lambda\gamma^{mn})^\alpha(\gamma^m\partial\lambda)_\gamma \quad (\text{D.2. 24})$$

这在证明顶角算符满足 BRST 闭条件 $QV = 0$ 时非常重要. 为说明这一点, eq. (D.1. 6) 是必不可少的. 具体来说:

$$\begin{aligned} [N^{mn}[\lambda^\alpha\lambda^\beta]_0]_0\gamma_{\beta\gamma}^m &= [\lambda^\alpha[N^{mn}\lambda^\beta]_0]_0\gamma_{\beta\gamma}^m + [\partial[N^{mn}\lambda^\alpha]_1\lambda^\beta]_0\gamma_{\beta\gamma}^m \\ &= \frac{1}{2}[\lambda^\alpha[J\lambda^\beta]_0]_0\gamma_{\beta\gamma}^n + 2\lambda^\alpha(\gamma^n\partial\lambda)_\gamma + \frac{1}{2}(\gamma^{mn}\partial\lambda)^\alpha(\lambda\gamma^m)_\gamma \\ &= \frac{1}{2}[J[\lambda^\alpha\lambda^\beta]_0]_0\gamma_{\beta\gamma}^n - \frac{1}{2}\partial\lambda^\alpha(\gamma^n\lambda)_\gamma \\ &\quad + 2\lambda^\alpha(\gamma^n\partial\lambda)_\gamma + \frac{1}{2}(\gamma^{mn}\partial\lambda)^\alpha(\lambda\gamma^m)_\gamma \\ &= \frac{1}{2}[J[\lambda^\alpha\lambda^\beta]_0]_0\gamma_{\beta\gamma}^n + \frac{5}{2}\lambda^\alpha(\gamma^n\partial\lambda)_\gamma + \frac{1}{2}(\lambda\gamma^{mn})^\alpha(\gamma^m\partial\lambda)_\gamma \end{aligned} \quad (\text{D.2. 25})$$

其中在第二行我们用到了:

$$[N^{mn}\lambda^\beta]_0\gamma_{\beta\gamma}^m = \frac{1}{2}[J\lambda^\beta]_0\gamma_{\beta\gamma}^n + 2(\gamma^n\partial\lambda)_\gamma \quad (\text{D.2. 26})$$

证明这一等式在等号两侧同时作用 $[J, -]_2$ 即可.

而在第三行我们用到了 eq. (D.1. 6) 和 $[\lambda^\alpha[J\lambda^\beta]_0]_0 = [J[\lambda^\alpha\lambda^\beta]_0]_0 - \partial\lambda^\alpha\lambda^\beta$. 最后则用到了 $(\partial\lambda\gamma^m)_\alpha(\lambda\gamma^m)_\beta + (\partial\lambda\gamma^m)_\beta(\lambda\gamma^m)_\alpha = 0$.

Appendix E

《蒲公英少女 (The Dandelion Girl)》

作者: 罗伯特·富兰克林·杨 (Robert Franklin Young, 1915-1985)

译者: 黄晨

站在山上的那女孩让马克想起了那位埃德娜·圣文森特·米莱¹。也许是因为她在夕阳下蒲公英花色的头发在风中摇曳; 又或是因为她修长纤细的双腿周围飘动的那老式的白色连衣裙。不管怎样, 他明显感觉到, 她以某种方式从过去走进了现在。而马克后来才知道, 实际上, 她并非来自过去, 而是未来。

马克在她身后不远处停了下来, 攀爬累得他气喘吁吁。而那女孩还没有看到他, 马克想着如何能不惊扰她又能让她知道自己在这。马克边想边掏出了烟斗, 填上烟草点燃, 他双手护住斗钵, 吸了几口直到烟草亮起火星。而马克再次看向那女孩时, 她已经转过身来, 好奇地注视着他。

马克缓缓朝她走去, 他感受到天空近在咫尺, 微风吹拂着她的脸颊。他默默告诉自己真该多出来走走。在来到这座小山的路上, 他一直在树林中穿行, 而现在那片树林已经落在他脚下很远的地方, 林中燃着初秋微暗的篝火, 更远处是一片小湖, 湖边有一栋小木屋还有一座垂钓码头。自从他的妻子突然被召去做陪审员, 他便不得不独自度过从暑假中挤出的两个星期, 他独自一人, 白天在码头钓鱼, 晚上则在客厅的大壁炉前读书以期度过漫漫寒夜。两天后, 这种例行公事让他感到厌倦, 在树林里漫无目的地游荡, 最终来到了这座小山, 爬上去后看到了那个女孩。

¹ 美国诗人埃德娜·圣文森特·米莱 (Edna St. Vincent Millay, 1892-1950)。后文提到的《山丘午后》也是她的作品

当马克走近她时，他看到女孩有着蓝色的眼睛，一如勾勒出她纤细身形的天空。年轻而柔和的鸭蛋脸甜美可人。这引起他强烈的既视感，以至于马克不禁按捺触摸她被风吻过的脸颊的冲动。他没有伸出手，却感到指尖发麻。

我已经年近半百，而她正当桃李年华，究竟是什么在上天眷顾我？他不禁想道。"你喜欢这景色吗？" 马克出声问道。

"哦，是啊，" 她说，转身时挥动的手臂划出了一个半圆。"这简直太神奇了！"

他顺着她的目光看去，说到："的确如此。" 在他们脚下，是那片树林，那九月独有的温暖色彩铺满了山脚的一片土地，拥抱着几英里外的小村庄，最远则到了郊区的边缘。更远处，科夫城锯齿状的轮廓由于薄雾变得模糊不清，看起来就像一座中世纪城堡，与其说这是现实不如说是梦里才有的景色。"你也是从城里来的吗？" 马克问道。

"某种意义上来说，是的。" 她对马克莞尔一笑，说道，"我来自两百四十年后的科夫城。"

她的微笑告诉他，女孩并不真的指望他会相信她，但暗示着如果马克愿意假装相信会很好。他也微笑着回答道，"是 2201 年，对吧？我猜那个地方到时一定已经发生了巨大的变化。"

"的确，它现在已经成为了一个大都市的一部分，一直延伸到了那儿。" 她指着脚下树林的边缘说道："二千零四十号大街直接穿过了那片糖枫林。" 她继续说道，"你看到那边的槐树林吗？"

"嗯，" 马克答道，"看到了。"

"新广场就在那片地方。那儿的超市非常大，逛一遍要花上半天，可以在里面买到几乎任何东西，从阿司匹林到空中汽车。超市边上，就是那片榉树林的地方，有个很大的服装店，里面摆满了一流时装设计师们的新作。我今天早上就是在那里买了我穿的这件裙子，漂亮吧？"

裙子漂亮也是她衬出来的。不过，他还是礼貌地看了看，裙子是用一种他不认识的材料剪裁的，这材质就像是棉花糖与海沫还有雪花化合出来的。这年头，缝纫师们用各种神奇的纤维创造的合成品简直天马行空。年轻女孩们幻想的奇妙故事似乎更是不逊于此。"我猜你是坐时光机到的这儿。" 他说道。

"嗯，我爸爸做了一台"

马克凑近看了看她，却看到他从未见过的坦诚面容。他问："你经常来这吗？"

"嗯, 是啊. 这是我最喜欢的时空坐标. 我有时会站在这几个小时, 就是看啊看啊看. 前天, 我遇见了小兔. 昨天, 遇见了小鹿. 今天, 则遇见了你."

"但是如果你总是回到同一个时间点, 昨天又从何谈起呢?" 马克问到

"哦, 我知道你的疑问在哪了," 她说. "这是因为这台机器和其他东西一样, 也会受到时间流逝的影响, 因此如果你想到达同一个坐标就必须每二十四小时回调一次. 但我从来都不, 因为我更希望每次回来都是不同的日子."

"你父亲没和你一起来过吗?"

头顶, 一群天鹅排成 V 字慵懒地飞过, 她盯着看了好一会, 最后才开口说道: "我父亲现在重病卧床无法行动. 倘若可以, 他一定非常愿意来. 但是我会把我看到的一切都告诉他," 她又匆忙地补充道: "这就像他真的来过一样吧. 你觉得呢?"

她看向他的眼神充满了渴望, 触动了他的内心. "我相信一定是的," 他说到. 接着又说, "拥有一台时光机一定很棒."

她严肃地点了点头. "对于喜欢站在如茵绿草上的人来说, 这简直是一种恩惠. 在二十三个世纪, 这样的草坪已经不多见了."

他笑道: "这样的地方在二十世纪就已经不多了. 我猜你会说这个地方很珍贵. 那我可得多来看看."

"你住的地方离这儿近吗?" 她问到.

"我住在身后大概三英里远的一间小木屋里. 我本来是度假的, 但这哪像度假啊. 我妻子被叫去做陪审员, 没法和我一起来, 而且我也不能推迟, 就只能被动成为梭罗了². 我叫马克·兰道夫."

"我叫朱莉, 朱莉·丹弗斯." 她说到.

这个名字与她很般配. 一如这白裙, 又如那蓝天, 还有这小山和九月的风与他非常般配. 也许她住在林中的小村庄, 但那并不重要. 如果她想假装自己来自未来, 那对他来说也没关系. 真正重要的是, 当他第一次见到她时的那种感觉, 以及每次看到她温柔的面庞时涌上心头的温情. "你现在做什么工作?" 他问道: "还是说还在上学?"

"我正在学习做一名秘书," 她说到. 她迈出半步, 优雅地转了个圈, 双手紧握放在胸前. "我太喜欢当秘书了," 她继续说道. "在一个重要的大办公室工作, 记录重要人物说的话"

²美国作家, 哲学家亨利·戴维·梭罗 (Henry David Thoreau, 1817-1862), 超验主义代表人物, 主张绝对自主, 也要每一个人都绝对自主. 此处表示马克被迫独居.

一定是非常了不起的事情。兰道夫先生，您愿意我当您的秘书吗？”

“当然愿意了，”他说道。“在战前，我妻子就做过是我的秘书。那就是我们相遇的原因。”他也不清楚他为什么会说出这些。

“那她是个好秘书吗？”

“她是最好的秘书。失去她让我非常遗憾，我失去了作为秘书的她，却得到了作为妻子的她。所以我想，说失去了她可能不太准确。”

“嗯，的确。对了，兰道夫先生，我现在必须回去了。爸爸一定在等着听我今天的所见所闻，我还得准备他的晚饭呢。”

“你明天会来这吗？”

“应该吧，我每天都会来。那再见啦，兰道夫先生。”

“再见，朱莉”他回应到。

他看着她轻盈地跑下山坡，消失在那片糖枫林中，那是二零四十号大街在两百四十年后的所在地。他笑了。多么可爱的孩子啊，他想到。拥有这般的好奇心以及对生活的这种热情，一定令人激动不已。在被剥夺过之后，他现在能更加充分地欣赏这两种品质。二十岁时，马克是一个严肃的年轻人，一心在法学院读书；二十四岁时，他开了自己的律师事务所，尽管规模不大，但却几乎占满了他的日程。当他娶安妮时，他曾经短暂地休息过一段时间，期间谋生不再那么紧迫。后来，战争爆发，他又有了另一个间歇期，不过这次间歇要长得多，安居乐业的目标变得遥不可及，甚至有时令人不齿。然而，生活回归正轨后，紧迫感又卷土重来，尤其是因为他现在不仅要养家糊口，还要抚养子女。自那时以来，他一直忙碌不停。直到最近几年，他才能每年放四周的假，两周与安妮和杰夫一起去他们选好的度假区，另外两周则是在杰夫返校后，与安妮在湖边小木屋度过。不过，今年他将孤身一人度过最后的两周。啊，也许不完全叫孤身一人。

马克这才注意到，那烟斗早已熄灭。他再次点燃，迎风深吸一口，然后走下山，穿过树林，回到木屋。秋分时节，白天越来越短了。马上就要入夜，傍晚的湿气弥漫在朦胧的空气中。

他慢悠悠地走着，到了湖边的时候太阳已经落山。那湖不大，却非常深，树木一直长到湖边。小木屋则在离湖畔较远的一排松树边，一条蜿蜒曲折的小径将其与码头相连。小屋的背后有条石子路，通向一条土路，在那可以驶向高速公路。他的旅行车就在木屋的后门，随时都能将他送回文明世界。

他在厨房简单准备了点晚饭，吃完后，他来到客厅开始读书。除了棚屋里的发电机嗡嗡作响之外，这个夜晚并没有被现代人耳朵里司空见惯的声音污染。他从壁炉旁摆放整齐的书柜里挑选了一本美国诗选，坐下来直接翻到《山丘午后》。他把这首珍贵的诗读了三遍，每读一遍都会看到她站在阳光下，她的秀发被清风吹拂，她的裙子像粉雪一样在她修长可爱的腿边环绕；他感觉喉头发堵，无法自持。

他把书放回书架，走了出去，站在门廊上，装满烟斗，最后点燃。他强迫自己去想安妮，很快，安妮的面容便浮现在眼前。下巴坚毅而温柔，双眸令人感到温暖，却隐约带着一丝不知从何而来的恐惧，还有那依然柔和的脸颊，温文尔雅的微笑。记忆中她那充满活力的亮棕色头发和高挑，轻盈的身材，使她的每一个特征都更加引人注目。每次想起她，马克都会惊叹于她的不老容颜，她为何能历经岁月的洗礼，一如多年前的那个早晨，当他惊愕地抬起头，看到她怯生生地站在他的办公桌前时那般可爱。难以置信！短短二十年后，他竟然在热切地期待着与一个年轻得足以做他女儿的女孩见面！其实，他还没到这样的程度，只是一时动摇了，仅此而已。刹那间，他的情绪失去了平衡，踉跄了一下。现在，他的双脚又回到了原来的位置，世界又回到了理智的轨道上。

他把烟斗磕灭回到屋里。在卧室里，他脱去衣服，钻进被单里，熄了灯。本应轻易睡着，但他却辗转反侧。而当他终于入睡，却做了一个破碎而无序的诱人梦境。

"前天，我遇见了小兔。昨天，遇见了小鹿。今天，则遇见了你。"

第二天下午，她穿着一件蓝色的连衣裙，蒲公英色的头发上系着一条蓝色的小丝带。翻过山头后，马克一动不动地站了一会儿，直到喉咙的紧绷感消失后，他才走过去，在她身旁迎风而立。但女孩喉头与下颌的柔美曲线又让他紧张起来。她转过身说："你好啊，我没想到你也会来。"马克花了好一会儿平复心情才回答道："但我来了，你也是。"

"是啊，"她说道。"好开心啊。"

附近一块突起的花岗岩可以当成了一条长凳，他们坐在上面眺望远方。马克把烟斗装满，然后点燃，把烟雾吹向风中。她说："我父亲也抽烟斗，他点烟时，即使没有风也会像你一样双手拢起。你和他在很多方面都很像。"

他说："跟我说说你父亲，也讲讲关于你的事吧。"

她于是开始讲了起来，她今年二十一岁，父亲是一名受雇于政府的物理学家，现已退休。他们住在二千零四十号大街的一个小公寓里。她自从四年前母亲去世后就在主持家务。之后他也跟她介绍了关于他自己，安妮还有杰夫的相关情况，谈到了他希望有朝一日能带杰夫一同合作，还提到了安妮会对照相感到恐惧，以及她如何在结婚当天就拒绝照相，并一直对照相保持抗拒直到现在。也说了去年夏天他们三人在露营时度过的美好时光。

她等马克说完后，说道："你们的家庭生活真幸福啊，1961年一定是非常适合生活的年份！"

"有一台任你差遣的时光机，你随时都可以搬来啊。"

"这可没说起来这么容易，我做梦也不能抛下我父亲不管，就算不提这事，我也得提防着时间警察。时间旅行仅限于政府支持的历史考察人员，普通百姓是禁止使用这种技术的。"

"你似乎一直都处理的很好。"

"这是因为我自己制作了台机器，时间警察不知道这件事。"

"但你还是违法了。"

她点点头，说道："但这只是他们的看法，只在他们对时间的观念里是这样。我父亲有他自己的看法。"

光是听着她说话就很令人愉悦了以至于说话的内容都没那么重要，他只希望她能继续讲下去，无论主题有多遥不可及。"跟我说说吧。"他说到。

"首先我来跟你说一下官方的理念。支持这种说法的人认为，来自未来的人都不能实质性地参与过去发生的事情，因为这会构成悖论，而未来的事件则必须产生变化以消除这一悖论。因此，时间旅行管理局要求只有官方人士才能使用它时光机，还保留了一批警力逮捕那些尝试进行时间穿越，希望生活得更容易的人，还有那些伪装成历史学家，希望永远回到一个不同时代的人。"

"但是按照我父亲的观点，时间之书是已经被写好了的。从宏观的角度上讲，我父亲认为所有会发生的事情都已经发生了。因此，如果未来的人参与了过去的事件，他将成为事件的一部分。原因很简单，就是他事先就是这件事的一部分，于是悖论就不可能出现。"³

马克深吸了一口烟斗，说道："你父亲听起来还真了不起。"

"嗯，是啊"兴奋使她脸颊上的红晕和眸中的湛蓝更甚几分。"你绝想不到他读过多少书，兰道夫先生。我家的公寓里堆满了那些书，从黑格尔，康德和休谟到爱因斯坦，牛顿和魏茨泽克。我呀，我自己也读过一些。"我也收藏过许多书，所以我也看过一些。"

她目不转睛地注视着他的脸，说道："多好啊，兰道夫先生。我敢打赌，我们一定有很多共同爱好。"

³即诺维科夫自治性原则，其含义是，人可以回到过去但无法改变历史的进程，已发生的事件是已被改变过的最终结果。

接下来的对话说明此言非虚，不过他很快反应过来，尽管他四十四岁而她二十一岁，但两人在九月的山头上讨论先验感性论，贝克莱主义以及相对论还是有点不太协调。但令人欣慰的是，讨论并不是全无收获。他们对先验感性论的热烈讨论不仅引出了先验和后验的结论，还引出了她的眼中亮起的点点繁星，他们对贝克莱主义的分析不仅点明了那位好主教的理论中内在的弱点，还点明了她脸颊的粉红，他们对相对论的回顾不仅说明了能量总是等于质量与真空光速平方的乘积，还说明了知识对于女性魅力非但不是障碍，反而是一种财富。

此刻的思绪留存得长到远超常理，直到他躺在床上时还伴他左右。这次他甚至没有去想安妮的尝试，他知道这样也无济于事。而他只是躺在黑暗中任思绪涌现，而他们全都化作九月的山头与一位有着蒲公英色秀发的少女。

前天，我遇见了小兔。昨天，遇见了小鹿。今天，则遇见了你。

第二天一早，他驱车前往村庄里，到邮局查看是否有他的信件。那并没有。他并不感到惊讶。杰夫和他一样不喜欢写信，而安妮此刻可能正与世隔绝。而至于他那边，除了最紧急的事情，他禁止秘书打扰他。

他犹豫着要不要去问那个干瘦的老局长这个地方是否住着一户叫丹弗斯的人家。但他决定不问。因为这样做会破坏朱莉精心构造的设定，即使他不相信这个设定是真的，他也还是不忍心让它倒塌。

那天下午，她穿着一件黄色的连衣裙，与她头发的颜色一般深浅。他看到她时又喉咙发紧，再次说不出话来。但当稍过片刻把话匣子打开时，一切就都好了，他们的思绪像两条潺潺的小溪，在午后的河谷中欢快地流淌。这一次，他们分别时，是她在他开口发问前首先问道："你明天还会来这里吗？"，而在他穿过树林回到小木屋的一路上，直到他在门廊上叼着烟斗度过傍晚后沉沉睡去，这句话一直在他耳边如歌声般回响。

第二天下午，当他爬上山坡时，那里空无一人。起初，失望令他浑身麻木，后来他想，不过是她迟到了而已，她可能随时都会出现。于是他坐在花岗岩长凳上等着。但她没有来。从几分钟到几小时，直到阴影从树林里爬出来，爬上了半山腰。空气越来越冷。他终于放弃了，凄凉地向小屋走去。

之后一天下午她还是没有出现，再下一天也一样。他寝食难安。钓鱼对他来说也变得平淡乏味。他也无法读书了。而同时，他也在恨着自己，恨自己的行为像个痴情的小学生，恨自己对一张漂亮的脸蛋和一双美腿的反应与其他四十多岁的傻瓜相同。直到几天前，他甚至都还不会如此注意其他女性，而在这不到一周的时间里，他不仅注意到了，甚至还爱上了她。

他第四次上山的时候本已经死了心，但他在看到夕阳下的她时又燃起了希望。她这次穿着一身黑裙，他明明应该猜到她这几天失约的原因，但却没有，直到他走到她跟前，看到她眼中噙着泪水，嘴唇微微颤抖。“朱莉，怎么了？”

她紧紧抱着他，肩膀不住颤抖着，把脸贴在他的大衣上，说道：“我父亲去世了。”不知为何，他知道这是她第一次流泪，知道她在守灵时和葬礼上一直无声无息地坐着，直到现在才无法自持。

他轻轻地搂住了她。他从未吻过她，现在也没有。他的嘴唇拂过她的额头，短暂地碰了碰她的头发，仅此而已。“我很遗憾，朱莉。”他说，“我知道他对你有多重要。”

“他一直都知道自己命不久矣，”她说。“自从他在实验室做了铯 90 实验后，他肯定就知道了。但他从未告诉过任何人，甚至都没和我说过……我不想活了。没有他在，我就没有活下去的理由了——什么都没有了，什么都没有了，什么都没有了！”

他紧紧抱住她说道：“你会找到什么的，朱莉。或者找到另一个人。你还年轻，你还只是一个孩子，真的。”

她突然仰起头，用已经无泪的双眸盯着他：“我才不是孩子！你怎么敢叫我孩子的！”

他吓了一跳，松开了她，退后了一步。他从未见过她生气。“我没有恶意。”他说到。

她的怒气来得快，去的也快。“我知道你无意伤害我的感情，兰道夫先生。但我不是孩子，真的不是。答应我你再也不会叫我孩子了。”

“好，我再也不了。”

“我现在必须得走了，还有一大堆事等着我去办呢。”

“那——那你明天还回来吗？”

她久久地望着他，蓝色的双眸升起薄雾，如夏日阵雨后氤氲的雾气。她说道：“时光机出了问题，有些零件需要更换，但我不知道怎么做。我们——我的时光机可能还能再运行一次，但我不确定。”

“但你会想办法回来的，是吧？”

“嗯，我会想想办法的。”她点头说到。“那个，兰道夫先生？”

“怎么了，朱莉？”

“以防我没能做到，我想在这正式告诉你，我爱你。”

然后她就走了，轻盈地跑下山去，片刻之后就消失在糖枫林中。点烟斗时，他双手颤抖，火柴烫着他的手指。之后，他不记得自己回过小屋，也不记得自己做了晚饭或上床睡觉，但他一定做了所有这些事，因为他是在自己的房间里醒来的，他走进厨房时也看到了滤水板上立着晚饭用的盘子。

他洗净盘子又泡了咖啡。之后他整个上午都在码头钓鱼，好让脑子一片空白。他稍后就会面对现实。现在，他只要知道她对自己的爱，知道再过几个小时自己就能再见到她，这就足够了。当然，即使是一台破旧的时光机，也能顺利地把她从村庄送到山上。

他早早地来到那里，坐在花岗岩长凳上，等着她走出树林，爬上山坡。他能感觉到自己的心在狂跳，他知道自己的手在颤抖。前天，我遇见了小兔。昨天，遇见了小鹿。今天，则遇见了你。

他等了又等，但她没有来。第二天，她也没有来。当影子被慢慢拉长，空气开始变冷的时候，他下了山，走进了糖枫林。不一会，他发现了一条小路，便沿着这条小路走进了森林，穿过森林来到了小村庄。他在小邮局停了下来，查看是否有给他的信件。那年迈的局长告诉他没有后，他徘徊了一会儿，突然问道："这附近有没有一户姓丹弗斯的人家?"

局长摇了摇头，说："从没听说过。"

"那最近这里有举行过葬礼吗?"

"近一年来没有。"

从那以后，虽然假期结束前的每天下午他都会去山上看看，但他心里明白，她不会再回来了，对他来说，她已经彻底不在了，就像她从来没有出现过一样。晚上，他在村子里徘徊，迫切希望是局长弄错了，但他没有看到朱莉的任何踪迹，他向路人描述她的时候也只得到了否定的回答。

十月初，他回到了城里。尽管他尽力对安妮表现得好像他们之间没有发生任何变化，但她似乎一看到他就知道有什么改变了。虽然她没有问任何问题，但随着一周又一周的时间过去，她变得越来越沉默寡言，她眼中那曾让他感到困惑的恐惧也越来越明显。

他开始每周日下午开车去乡下，到那山顶看看。此时树林一片金黄，天空也比一个月前更蓝了。他坐在花岗岩长椅上，凝视着她消失的地方，一坐就是几个小时。前天，我遇见了小兔。昨天，遇见了小鹿。今天，则遇见了你。

然后，在十一月中旬的一个雨夜，他发现了一个手提箱。箱子是安妮的，他只是无意中发现的。安妮进城去玩宾果游戏了，房子里只有他一个人。在花了两个小时看了四个无聊的电视节目后，他想起了前年冬天收起来的拼图。

他急切地想找点东西，随便什么东西，好让他暂时忘掉朱莉，于是他上阁楼去拿。当他在堆放在那手提箱旁边的各种箱子里不停翻找时，它从架子上掉了下来，砸在地板上打开了。

他弯腰把它捡起来。他记得她一直把那箱子锁着，还记得她笑着告诉他，即使是对丈夫，妻子也必须对有些事情保密。这把锁多年来已经生锈了，刚刚的磕碰就把锁砸坏了。

他正要盖上盖子，却看到了箱子里露出了一件白色连衣裙的下摆，他停住了。衣服的材质依稀有些熟悉。不久前，他还见过类似的材质，让人想起棉花糖，海沫还有雪花的材质。

他打开盖子，用颤抖的手指拿出连衣裙，提起肩部让它自己展开，那连衣裙挂在房间里，仿佛飘落的雪花。他注视良久，喉咙发紧。然后，他温柔地把它重新叠好，放进手提箱，盖上箱盖，把手提箱放回屋檐下的壁龛里。前天，我遇见了小兔。昨天，遇见了小鹿。今天，则遇见了你。

雨点敲打着屋顶，他喉咙发紧，一时间以为自己要哭出来。他慢慢地走下阁楼，顺着螺旋楼梯来到客厅。壁炉架上的钟显示时间是十点十四分。再过几分钟，宾果游戏巴士就会送她到街角，她就会沿着街道走上前门。安妮就……朱莉就。朱莉安？⁴

那是她的全名吗？可能是吧。人们在使用化名时，总是会保留部分原名。在完全改掉姓氏后，她可能认为名也可以改掉。除了改名换姓之外，她肯定还做了其他事情来躲避时间警察。难怪她从来不愿意照相！很久以前的那一天，当她怯生生地走进他的办公室申请工作时，她又该多害怕啊！在陌生的年代，她孤身一人，不知道父亲关于时间的理论是否正确，也不知道这个四十多岁就爱上她的男人，在二十多岁时是否会对她有同样的感觉。但她还是遵守诺言回来了。

他纳闷地想，二十年了，她一定知道有一天我会爬上九月的小山，看到年轻又可爱的她站在阳光下，然后重新爱上她。她一定知道，因为那一刻是她过去的一部分，也是我未来的一部分。但她为什么不告诉我呢？为什么她现在不告诉我？

突然，他恍然大悟。

他感到呼吸困难，走进大厅，穿上雨衣，走进雨中。他在雨中走着，雨水打在他的脸上，一滴滴地顺着脸颊流下来，有些是雨滴，有些是泪水。像安妮，像朱莉这样美丽不老的人，怎么会害怕变老呢？难道她不知道，在他的眼里，她是不会变老的吗？她难道不明白，对他来说，自从他从办公桌前抬起头看到她站在那间狭小的办公室里，并同时爱上

⁴朱莉安: Julianne, 安妮: Anne, 朱莉: Julie.

她的那一刻起，她就再没老过一天吗？她难道不明白，这就是为什么山丘上的女孩对他来说显得陌生的原因吗？

他已经走到了街上，正沿着街道向街角走去。就在他快走到街角时，宾果巴士停了下来，穿着白色风衣的女孩下了车。他的喉咙越来越紧，完全无法呼吸。那头蒲公英色的头发颜色更深了，她不再有少女的风韵，但那温柔的脸庞依然柔和可爱，修长的双腿在十一月街灯的淡淡光辉下显得优雅而匀称，这是九月金色的阳光下从未有过的。

她走上前去迎接他，他从她的眼中看到了熟悉的恐惧，这种恐惧现在凄厉得无法忍受，因为他明白了恐惧的原因。眼前的她模糊起来，他盲目地向她走去。当他走到她面前时，视野才再度清澈起来。他伸出手，穿过岁月的长河，抚摸着她被雨水打湿的脸颊。她马上就理解了一切，那份恐惧永远地消散了。雨中，他们手牵着手回家。

Bibliography

- [1] J. Polchinski, *String theory. Vol. 1: An introduction to the bosonic string*. Cambridge Monographs on Mathematical Physics, Cambridge University Press, 12 2007.
- [2] D. Tong, “String Theory,” *non-published*, 1 2009.
- [3] A. A. Belavin, A. M. Polyakov, and A. B. Zamolodchikov, “Infinite Conformal Symmetry in Two-Dimensional Quantum Field Theory,” *Nucl. Phys. B*, vol. 241, pp. 333–380, 1984.
- [4] M. B. Green, J. H. Schwarz, and E. Witten, *SUPERSTRING THEORY. VOL. 1: INTRODUCTION*. Cambridge Monographs on Mathematical Physics, Cambridge Monographs on Mathematical Physics, 7 1988.
- [5] R. Blumenhagen, D. Lüst, and S. Theisen, *Basic concepts of string theory*. Theoretical and Mathematical Physics, Heidelberg, Germany: Springer, 2013.
- [6] Z. Bern, J. J. Carrasco, M. Chiodaroli, H. Johansson, and R. Roiban, “The duality between color and kinematics and its applications,” *J. Phys. A*, vol. 57, no. 33, p. 333002, 2024.
- [7] A. Abouelsaood, C. G. Callan, Jr., C. R. Nappi, and S. A. Yost, “Open Strings in Background Gauge Fields,” *Nucl. Phys. B*, vol. 280, pp. 599–624, 1987.
- [8] R. G. Leigh, “Dirac-Born-Infeld Action from Dirichlet Sigma Model,” *Mod. Phys. Lett. A*, vol. 4, p. 2767, 1989.
- [9] N. Berkovits, “Super Poincare covariant quantization of the superstring,” *JHEP*, vol. 04, p. 018, 2000.

- [10] F. Gliozzi, J. Scherk, and D. I. Olive, “Supergravity and the Spinor Dual Model,” *Phys. Lett. B*, vol. 65, pp. 282–286, 1976.
- [11] W. Siegel, “Classical Superstring Mechanics,” *Nucl. Phys. B*, vol. 263, pp. 93–104, 1986.
- [12] D. Friedan, E. J. Martinec, and S. H. Shenker, “Conformal Invariance, Supersymmetry and String Theory,” *Nucl. Phys. B*, vol. 271, pp. 93–165, 1986.
- [13] N. Berkovits and N. Nekrasov, “The Character of pure spinors,” *Lett. Math. Phys.*, vol. 74, pp. 75–109, 2005.
- [14] O. Schlotterer, *Scattering amplitudes in open superstring theory*. PhD thesis, Munich U., 2011.
- [15] C. R. Mafra, O. Schlotterer, and S. Stieberger, “Complete N-Point Superstring Disk Amplitude I. Pure Spinor Computation,” *Nucl. Phys. B*, vol. 873, pp. 419–460, 2013.
- [16] M. Guillen, H. Johansson, R. L. Jusinkas, and O. Schlotterer, “Scattering Massive String Resonances through Field-Theory Methods,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 127, no. 5, p. 051601, 2021.
- [17] C. Huang, “Higher-point gauge-theory couplings of massive spin-2 states in four-dimensional string theories,” *Phys. Rev. D*, vol. 110, no. 2, p. 026006, 2024.
- [18] C. R. Mafra and O. Schlotterer, “All Order α' Expansion of One-Loop Open-String Integrals,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 124, no. 10, p. 101603, 2020.
- [19] O. Schlotterer and O. Schnetz, “Closed strings as single-valued open strings: A genus-zero derivation,” *J. Phys. A*, vol. 52, no. 4, p. 045401, 2019.
- [20] S. Stieberger, “One-Loop Double Copy Relation in String Theory,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 132, no. 19, p. 191602, 2024.
- [21] 梁灿彬, 微分几何入门与广义相对论. 科学出版社, 2006.
- [22] Oliver-Schlotterer, *Lecture-Notes-String-theory-I-and-II*. <https://www.uu.se/download/18.6bc4da6b190a20a519b1ef5f/1721035965616/String2022>.

-
- [23] M. B. Green, J. H. Schwarz, and E. Witten, *SUPERSTRING THEORY. VOL. 2: LOOP AMPLITUDES, ANOMALIES AND PHENOMENOLOGY*. Cambridge Monographs on Mathematical Physics, 7 1988.