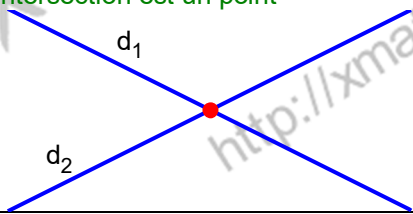
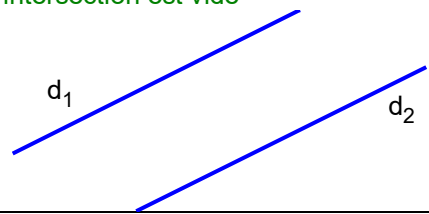

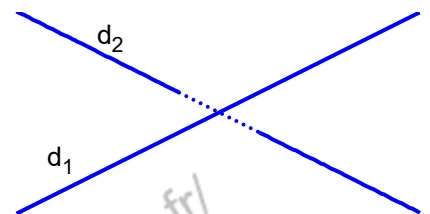


# GÉOMÉTRIE DANS L'ESPACE

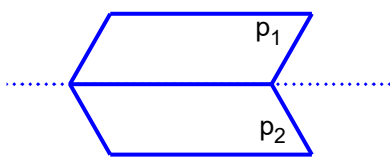
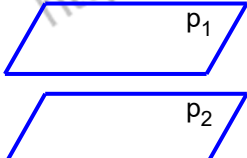

## I Droites et plans de l'espace

### Positions et intersection de droites et de plans

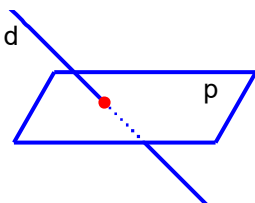
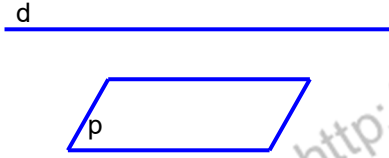

- Deux droites  $d_1$  et  $d_2$  de l'espace peuvent être :

<ul style="list-style-type: none"> <li>sécantes leur intersection est un point</li> </ul> 	<ul style="list-style-type: none"> <li>strictement parallèles leur intersection est vide</li> </ul> 
<ul style="list-style-type: none"> <li>confondues (et donc parallèles) leur intersection est égale à <math>d_1</math> (et à <math>d_2</math>)</li> </ul> 	<ul style="list-style-type: none"> <li>non coplanaires leur intersection est vide</li> </ul> 

- Deux plans  $p_1$  et  $p_2$  peuvent être :

<ul style="list-style-type: none"> <li>sécants leur intersection est une droite</li> </ul> 	<ul style="list-style-type: none"> <li>strictement parallèles leur intersection est vide</li> </ul> 	<ul style="list-style-type: none"> <li>confondus (et donc parallèles) leur intersection est <math>p_1</math> (et <math>p_2</math>)</li> </ul> 
--	---	---

- Par rapport à un plan  $p$ , une droite  $d$  peut être :

<ul style="list-style-type: none"> <li>sécante à <math>p</math> leur intersection est un point</li> </ul> 	<ul style="list-style-type: none"> <li>strictement parallèle à <math>p</math> leur intersection est vide</li> </ul> 	<ul style="list-style-type: none"> <li>contenue dans <math>p</math> (et donc parallèle à <math>p</math>) leur intersection est <math>d</math></li> </ul> 
---	---	--

### Remarques

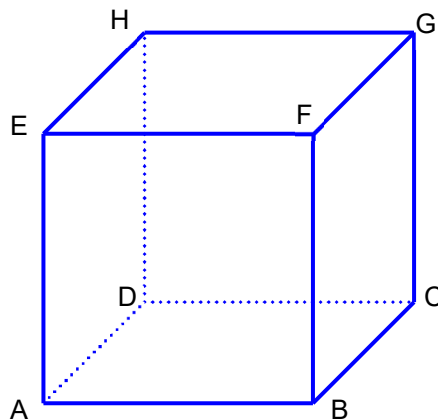
- Dans l'espace, deux droites qui n'ont aucun point commun ne sont pas nécessairement parallèles.
- Il n'est pas possible que deux plans aient un seul point commun.

### Exercice 01 (voir [réponses et correction](#))

On considère un cube ABCDEFGH.

Citer :

- deux droites sécantes ;
- deux droites strictement parallèles ;
- deux droites non coplanaires ;
- deux plans sécants ;
- deux plans strictement parallèles ;
- une droite sécante à un plan ;
- une droite strictement parallèle à un plan ;
- une droite contenue dans un plan.



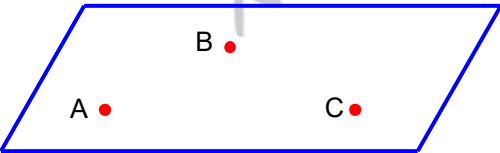
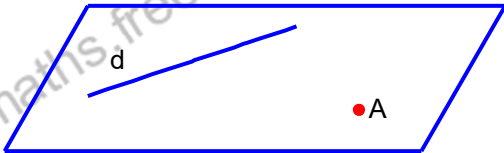
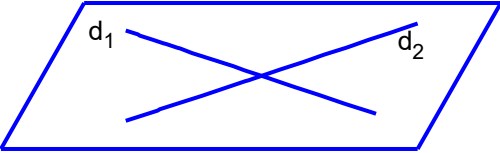
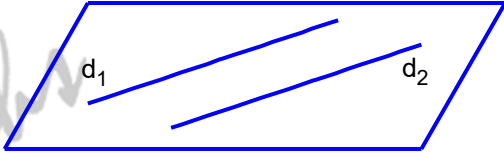
### Exercice 02 (voir [réponses et correction](#))

Dans le cube de la figure précédente, indiquer (sans justifier) les positions relatives

- 1° des plans (EFA) et (GCD) ;
- 2° des droites (EF) et (HC) ;
- 3° de la droite (DG) et du plan (ABE) ;
- 4° des plans (CDF) et (ABG) ;
- 5° du plan (EHB) et de la droite (DF) ;
- 6° des droites (AG) et (BH).

#### Caractérisation d'un plan

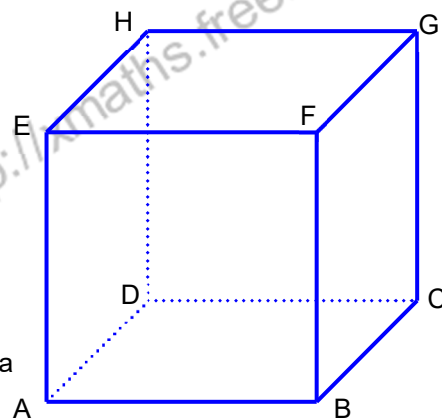
- Dans l'espace il existe un seul plan p

<ul style="list-style-type: none"> <li>• passant par 3 points A, B, C non alignés</li> </ul> 	<ul style="list-style-type: none"> <li>• passant par un point A et contenant une droite d qui ne passe pas par A</li> </ul> 
<ul style="list-style-type: none"> <li>• contenant deux droites sécantes <math>d_1</math> et <math>d_2</math></li> </ul> 	<ul style="list-style-type: none"> <li>• contenant deux droites strictement parallèles <math>d_1</math> et <math>d_2</math></li> </ul> 

### Exercice 03 (voir [réponses et correction](#))

On considère un cube ABCDEFGH.

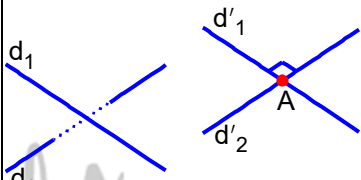
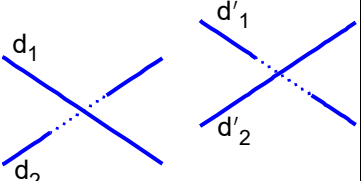
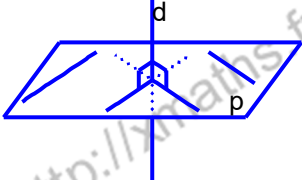
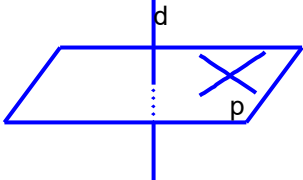
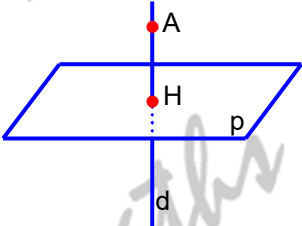
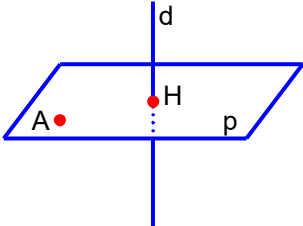
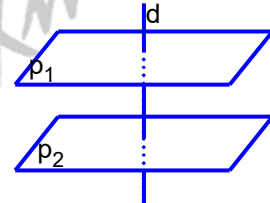
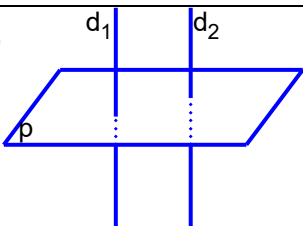
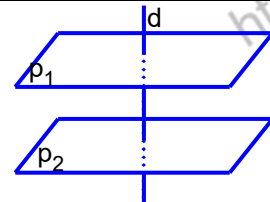
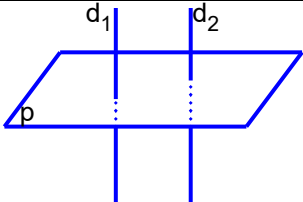
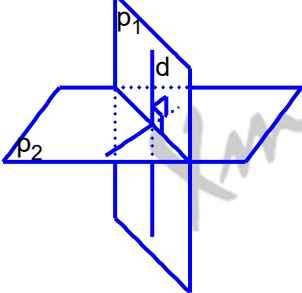
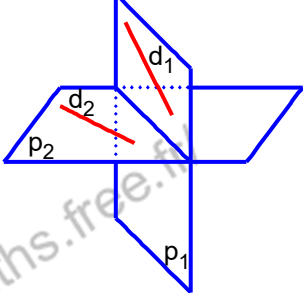
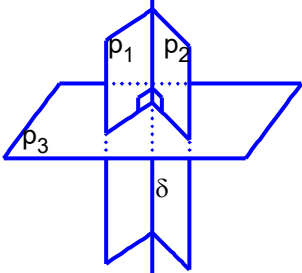
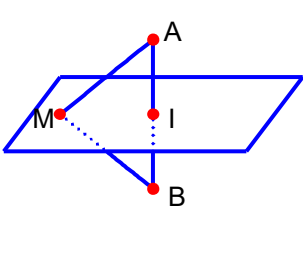
- 1° Justifier que les quatre points A, D, F et G sont coplanaires (c'est-à-dire qu'ils appartiennent à un même plan).
- 2° Démontrer que les droites (CE) et (BH) sont sécantes.
- 3° a) Justifier que les droites (BD) et (FH) sont parallèles.  
b) Soient I et J les milieux respectifs de  $[AB]$  et  $[AD]$ .  
Démontrer que les droites (IJ) et (FH) sont parallèles.
- 4° Démontrer que les droites (FI) et (HJ) sont sécantes.  
Soit  $\Omega$  leur point d'intersection.  
Démontrer que  $\Omega A H D$  est un parallélogramme et donner la position de  $\Omega$  par rapport à A et E.



## Parallélisme de droites et de plans

Si deux droites $d_1$ et $d_2$ sont parallèles à une même droite $d_3$ alors $d_1$ et $d_2$ sont parallèles entre elles.		Si deux droites $d_1$ et $d_2$ sont parallèles; alors tout plan contenant $d_2$ est parallèle à $d_1$	
Si deux plans $p_1$ et $p_2$ sont sécants suivant une droite $\delta$ , toute droite $d$ parallèle à $p_1$ et à $p_2$ est parallèle à $\delta$		Si deux plans $p_1$ et $p_2$ sont parallèles, toute droite $d$ sécante à $p_1$ est aussi sécante à $p_2$	
Si deux plans $p_1$ et $p_2$ sont parallèles, toute droite $d$ contenue dans $p_1$ est parallèle à $p_2$ .		Si deux plans $p_1$ et $p_2$ sont parallèles, tout plan $p_3$ sécant à $p_1$ est aussi sécant à $p_2$ et les droites d'intersection sont parallèles.	
Pour que deux plans $p_1$ et $p_2$ soient parallèles, il suffit que $p_1$ contiennent deux droites sécantes $d_1$ et $d'_1$ respectivement parallèles à deux droites sécantes $d_2$ et $d'_2$ de $p_2$ .		Pour qu'une droite $d$ soit parallèle à un plan $p$ , il suffit que $d$ soit parallèle à une droite de $p$ .	
Si deux plans $p_1$ et $p_2$ sont parallèles à une même plan $p_3$ alors $p_1$ et $p_2$ sont parallèles entre eux.		Étant donné un plan $p$ et un point $A$ , il existe un et un seul plan $p'$ passant par $A$ et parallèle à $p$ , ce plan contient toutes les droites passant par $A$ et parallèles à $p$ .	
<u>Théorème du toit</u> Si deux droites parallèles $d$ et $d'$ sont dans des plans $p$ et $p'$ sécants suivant une droite $\delta$ , alors $d$ et $d'$ sont parallèles à $\delta$ .		<b>Attention</b> Si $d$ est parallèle à $p$ et si $d'$ est parallèle à $p$ , on ne peut pas en déduire que $d$ est parallèle à $d'$ .	

## Orthogonalité de droites et de plans

<p>Deux droites <math>d_1</math> et <math>d_2</math> sont orthogonales si leurs parallèles respectives <math>d'_1</math> et <math>d'_2</math> passant par un même point A sont perpendiculaires dans le plan qu'elles déterminent.</p>		<p>Si deux droites <math>d_1</math> et <math>d_2</math> sont orthogonales, toute parallèle <math>d'_1</math> à <math>d_1</math> est orthogonale à toute parallèle <math>d'_2</math> à <math>d_2</math>.</p>	
<p>Une droite <math>d</math> est perpendiculaire à un plan <math>p</math> si elle est orthogonale à toutes les droites de <math>p</math>.</p>		<p>Pour qu'une droite <math>d</math> soit perpendiculaire à un plan <math>p</math> il suffit qu'elle soit orthogonale à deux droites sécantes de <math>p</math>.</p>	
<p>Par un point A il passe une et une seule droite <math>d</math> perpendiculaire à un plan <math>p</math> donné. Le point d'intersection H de <math>d</math> et de <math>p</math> est appelé projeté orthogonal de A sur <math>p</math>.</p>		<p>Par un point A il passe un et un seul plan <math>p</math> perpendiculaire à une droite <math>d</math> donnée. Le point d'intersection H de <math>d</math> et de <math>p</math> est appelé projeté orthogonal de A sur <math>d</math>.</p>	
<p>Si deux plans <math>p_1</math> et <math>p_2</math> sont parallèles, toute droite <math>d</math> perpendiculaire à l'un est perpendiculaire à l'autre.</p>		<p>Si deux droites <math>d_1</math> et <math>d_2</math> sont parallèles, tout plan <math>p</math> perpendiculaire à l'une est perpendiculaire à l'autre.</p>	
<p>Si deux plans <math>p_1</math> et <math>p_2</math> sont perpendiculaires à une même droite <math>d</math>, alors <math>p_1</math> et <math>p_2</math> sont parallèles.</p>		<p>Si deux droites <math>d_1</math> et <math>d_2</math> sont perpendiculaires à un même plan <math>p</math>, alors <math>d_1</math> et <math>d_2</math> sont parallèles.</p>	
<p>Deux plans <math>p_1</math> et <math>p_2</math> sont perpendiculaires si l'un d'eux contient une droite <math>d</math> perpendiculaire à l'autre.</p>		<p><b>Attention</b> Si <math>p_1</math> et <math>p_2</math> sont deux plans perpendiculaires, une droite <math>d_1</math> quelconque de <math>p_1</math> n'est pas orthogonale à une droite <math>d_2</math> quelconque de <math>p_2</math>.</p>	
<p>Si des plans sécants <math>p_1</math> et <math>p_2</math> sont tous deux perpendiculaires à un même plan <math>p_3</math>, alors la droite <math>\delta</math> d'intersection de <math>p_1</math> et <math>p_2</math> est perpendiculaire à <math>p_3</math>.</p>		<p>Le plan médiateur d'un segment <math>[AB]</math> est le plan passant par le milieu de <math>[AB]</math> et perpendiculaire à la droite <math>(AB)</math>. C'est l'ensemble des points M équidistants de A et de B.</p>	

#### Exercice 04 (voir [réponses et correction](#))

On considère un cube ABCDEFGH.

- 1°) Justifier que les droites (HE) et (EB) sont perpendiculaires.
- 2°) Les droites (GE) et (EB) sont-elles perpendiculaires ?
- 3°) Que peut-on dire des droites (HE) et (FA) ?
- 4°) Justifier que la droite (EG) est parallèle au plan (ABCD).
- 5°) Justifier que la droite (DB) est perpendiculaire au plan (EAG).
- 6°) Justifier que la droite (HB) est sécante au plan (EGC).

Construire leur point d'intersection.

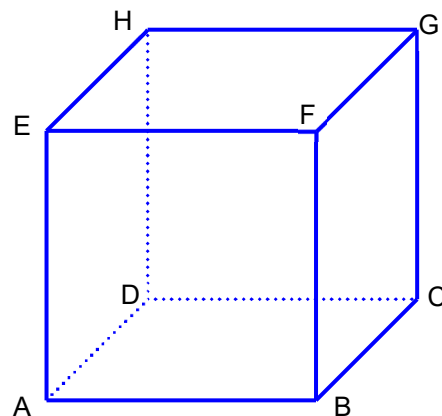
- 7°) Soient I et J les milieux de [AB] et [AE].

- a) Justifier que (IJ) est parallèle au plan (BCH).
- b) Justifier que (IJ) et (BF) sont sécantes.

Construire leur point d'intersection.

- c) Justifier que (IJ) est sécante au plan (DBF).

Construire leur point d'intersection.



#### Remarques

Les constructions d'intersections dans l'espace se feront en ne perdant pas de vue que :

- Deux droites qui paraissent sécantes sur un dessin ne le sont pas nécessairement. Pour justifier qu'elles sont effectivement sécantes, il faut justifier que ces droites sont coplanaires.
- L'intersection de deux plans sécants est une droite. Le dessin des deux plans n'est pas suffisant pour faire apparaître leur droite d'intersection. (Il faudra souvent utiliser des intersections de droites contenues dans les plans)
- Lorsque deux plans sont parallèles, leurs droites d'intersection avec un même troisième plan sont des droites parallèles.

#### Exercice 05 (voir [réponses et correction](#))

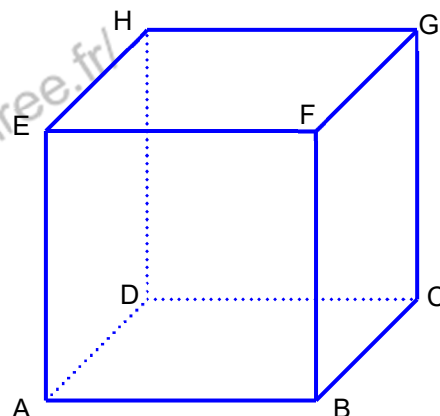
On considère un cube ABCDEFGH.

Soit I le milieu de [AB] et K le point défini par  $\overrightarrow{GK} = \frac{1}{4} \overrightarrow{GH}$ .

Un plan  $p$  coupe la face ABCD suivant [DI] et la face DCGH suivant [DK].

Montrer que l'intersection de  $p$  avec la face ABFE est parallèle à [DK]. Tracer cette intersection.

Déterminer et tracer l'intersection de  $p$  avec les autres faces du cube.

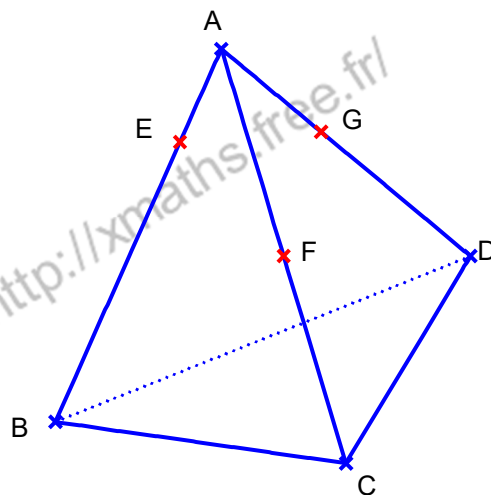


#### Exercice 06 (voir [réponses et correction](#))

On considère le tétraèdre ABCD représenté ci-contre.

Les points E, F et G appartiennent respectivement aux arêtes [AB], [AC], [AD].

Construire l'intersection du plan (EFG) avec le plan (BCD). (On justifiera la construction)



**Exercice 07** (voir [réponses et correction](#))

ABCDEFGH est un parallélépipède rectangle (pavé droit).

I est un point de l'arête [EF].

J est un point de l'arête [AB].

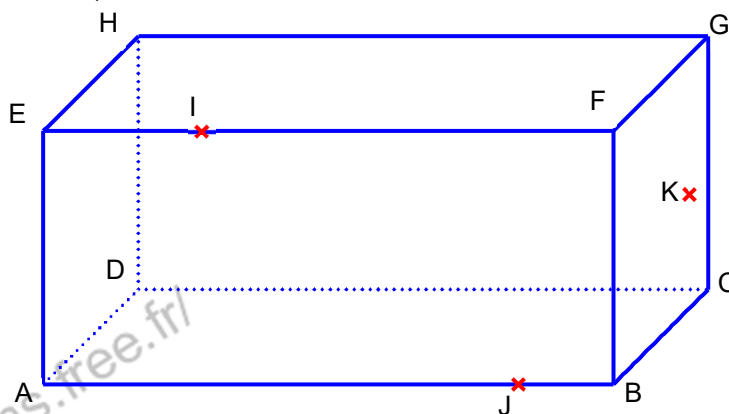
K est un point de la face (BCGF).

Voir figure ci-contre.

Représenter l'intersection du plan (IJK) avec les faces du parallélépipède rectangle.

Tracer la droite d'intersection du plan (IJK) et du plan (ADHE).

(Les constructions seront justifiées)

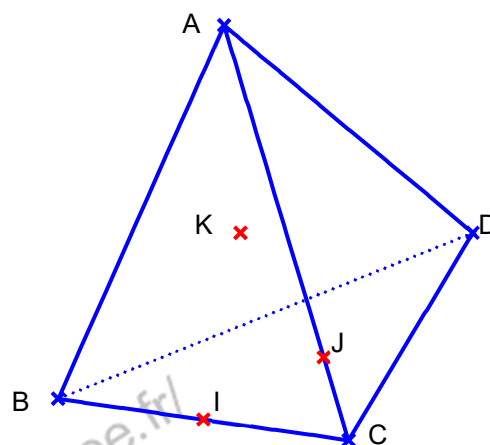
**Exercice 08** (voir [réponses et correction](#))

On considère le tétraèdre ABCD représenté ci-contre.

Les points I et J appartiennent respectivement aux arêtes [BC] et [AC].

Le point K est sur la face (ABD).

Construire l'intersection du plan (IJK) avec les faces du tétraèdre ABCD. (On justifiera la construction)

**Exercice 09** (voir [réponses et correction](#))

On considère un cube ABCDEFGH.

Les deux questions sont indépendantes.

1°) Le point I est un point de la face (BCGF).

Le point J est un point de la face (ABFE).

Le point K est un point de la face (EFGH).

(Voir figure)

Construire l'intersection de la droite (IJ) et du plan (EFGH).

En déduire l'intersection du plan (IJK) avec les faces du cube.

(On justifiera les constructions)

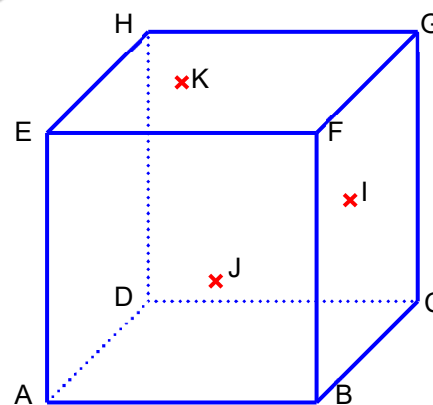
2°) On suppose maintenant que I, J et K sont les centres respectifs des faces (BCGF) ; (ABFE) et (EFGH).

Quelle est la nature du triangle IJK ? (justifier)

Démontrer que F est équidistant des points I, J et K.

Démontrer que D est équidistant des points I, J et K.

En déduire que la droite (FD) est perpendiculaire au plan (IJK).

**Exercice 10** (voir [réponses et correction](#))

On considère un cube ABCDEFGH.

Les deux questions sont indépendantes.

1°) Le point J est un point de l'arête [FG].

Le point K est un point de l'arête [AB].

Le point L est un point de l'arête [DH].

(Voir figure)

Construire l'intersection du plan (JKL) avec les faces du cube.

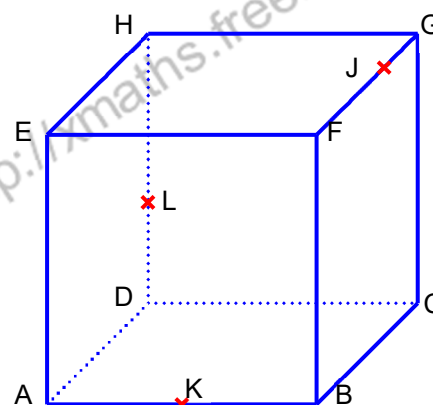
(On justifiera les constructions)

2°) On suppose que J, K et L sont les milieux respectifs de

[FG] ; [AB] et [DH].

Démontrer que la droite (EC) est perpendiculaire au plan (JKL).

Démontrer que JKL est un triangle équilatéral.



## II Vecteurs de l'espace - Vecteurs colinéaires - Vecteurs coplanaires

### Propriétés (admisses)

Les propriétés vues pour les vecteurs dans le plan (addition, multiplication par un réel, relation de Chasles...) restent valables pour les vecteurs dans l'espace.

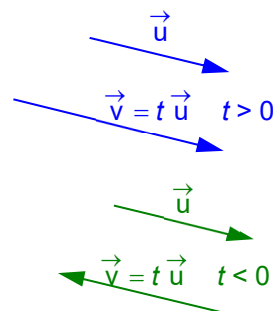
### Définition

- Deux vecteurs non nuls,  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont colinéaires lorsqu'il existe un réel  $t$  tel que  $\vec{v} = t \vec{u}$ .
- Le vecteur nul est colinéaire à tous les vecteurs.

### Remarque

Deux vecteurs colinéaires non nuls ont la même direction.

- Si  $\vec{v} = t \vec{u}$  avec  $t > 0$  alors  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont de même sens.
- Si  $\vec{v} = t \vec{u}$  avec  $t < 0$  alors  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont de sens contraire.



### Remarque

Lorsque deux vecteurs non nuls sont colinéaires, on peut écrire l'un en fonction de l'autre ( $\vec{v} = t \vec{u}$ ). On dit que les deux vecteurs sont dépendants.

Lorsque deux vecteurs ne sont pas colinéaires, on dit qu'ils sont indépendants ou libres.

### Exercice 11 (voir [réponses et correction](#))

Soient A, B, C et D quatre points de l'espace.

1°) Soient I et J définis par  $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{5} \overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{AJ} = \frac{1}{5} \overrightarrow{AC}$ . Démontrer que  $\overrightarrow{IJ}$  et  $\overrightarrow{BC}$  sont colinéaires.

2°) Soient K et L définis par  $\overrightarrow{AK} = k \overrightarrow{AC}$  et  $\overrightarrow{AL} = k \overrightarrow{AD}$  avec  $k \in \mathbb{R}$ .

Démontrer que  $\overrightarrow{KL}$  et  $\overrightarrow{CD}$  sont colinéaires.

3°) À quel théorème de géométrie classique ces résultats peuvent-ils être associés ?

### Exercice 12 (voir [réponses et correction](#))

On considère un tétraèdre ABCD.

On appelle I, J, K et L les points définis respectivement par :

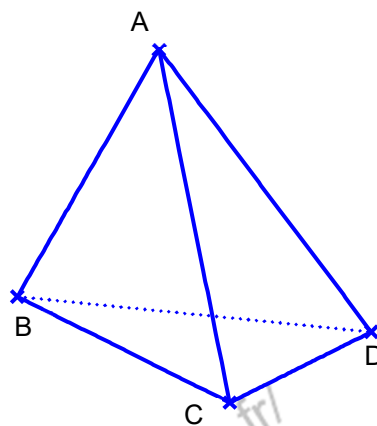
$$\overrightarrow{AI} = \frac{2}{3} \overrightarrow{AB} ; \quad \overrightarrow{BJ} = \frac{1}{3} \overrightarrow{BC} ; \quad \overrightarrow{CK} = \frac{2}{3} \overrightarrow{CD} ; \quad \overrightarrow{DL} = \frac{1}{3} \overrightarrow{DA}.$$

1°) Placer I, J, K et L sur le dessin.

2°) Exprimer  $\overrightarrow{IJ}$  en fonction de  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{BC}$ , puis en fonction de  $\overrightarrow{AC}$ .

3°) Justifier que les points I, J, K et L sont coplanaires et que la droite (AC) est parallèle au plan (IJKL).

4°) Démontrer que la droite (BD) est parallèle au plan (IJKL).



### Exercice 13 (voir [réponses et correction](#))

ABCDEFGH est un cube.

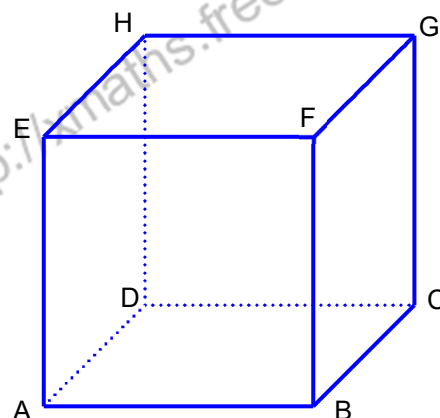
1°) On considère K, L, M, N les milieux respectifs de [AE], [BF], [CG], [DH].

Démontrer que  $\overrightarrow{KL} = \overrightarrow{AB}$ .

Montrer que les points K, L, M et N sont coplanaires et que le plan (KLMN) est parallèle au plan (ABCD).

2°) Montrer que la droite (DB) est parallèle au plan (KLMN).

3°) Montrer que le plan (EFCD) est sécant au plan (KLMN) et que leur droite d'intersection est parallèle à (CD).





### Propriété (voir démonstration 01)

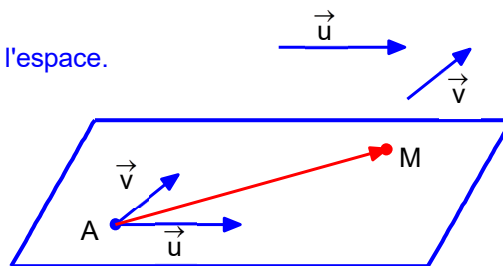
Soit A un point et soient  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  deux vecteurs non colinéaires de l'espace.  
L'ensemble des points M tels que :

$$\overrightarrow{AM} = t\vec{u} + t'\vec{v} \text{ avec } t \in \mathbb{R} \text{ et } t' \in \mathbb{R}$$

est un plan.

On dit que c'est le plan passant par A et de couple de vecteurs directeurs  $(\vec{u}, \vec{v})$ .

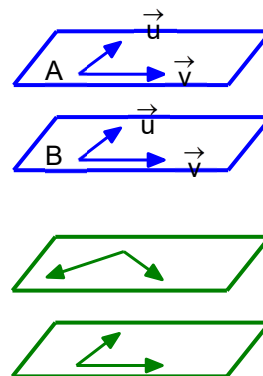
C'est le plan contenant les droites  $(A; \vec{u})$  et  $(A; \vec{v})$ .



### Propriété (voir démonstration 02)

Soient  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  deux vecteurs non colinéaires de l'espace et soient A et B deux points.

Le plan passant par A de couple de vecteurs directeurs  $(\vec{u}, \vec{v})$  et le plan passant par B de couple de vecteurs directeurs  $(\vec{u}, \vec{v})$  sont parallèles.



### Remarque

Attention : Si deux plans ne sont pas définis à partir du même couple de vecteurs directeurs, on ne peut pas en déduire qu'ils ne sont pas parallèles.

### Exercice 14 (voir réponses et correction)

Théorème du toit.

On considère deux plans p et p' sécants suivant une droite  $\delta$  et deux droites d et d' parallèles telles que d est contenue dans p et d' est contenue dans p'.

1°) Justifier que si d et d' sont confondues alors  $\delta = d = d'$ .

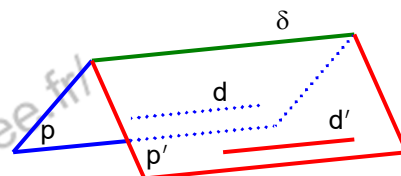
2°) On suppose que d et d' ne sont pas confondues. Soient  $A \in d$  et  $A' \in d'$ .

Soit  $\vec{u}$  un vecteur directeur de d et  $\vec{v}$  un vecteur directeur de  $\delta$ .

a) En supposant que les vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  ne sont pas colinéaires, justifier que p est le plan passant par A et de couple de vecteurs directeurs  $(\vec{u}, \vec{v})$ , puis en conclure que p et p' sont parallèles.

b) En déduire que  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont colinéaires.

c) En déduire que d et d' sont parallèles à  $\delta$ .



### Exercice 15 (voir réponses et correction)

On considère un tétraèdre ABCD.

Soit E le point défini par  $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$  :

F le point défini par  $\overrightarrow{AF} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AD} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ .

et G le point défini par  $\overrightarrow{AG} = \frac{4}{9}\overrightarrow{AD}$

1°) Placer les points E ; F et G sur le dessin.

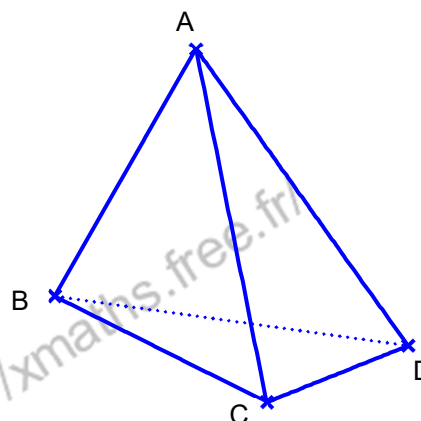
2°) Justifier que E se trouve dans le plan (ABC).

3°) Les points E, C et D sont-ils alignés ? Justifier.

4°) Justifier que les droites (FC) et (AD) sont coplanaires.

5°) Exprimer les vecteurs  $\overrightarrow{CG}$  et  $\overrightarrow{CF}$  en fonction de  $\overrightarrow{AC}$  et  $\overrightarrow{AD}$ .

En déduire que G est le point d'intersection des droites (AD) et (FC).



### Remarques

- Une droite est définie par un point et un vecteur directeur.  
Deux vecteurs non nuls sont colinéaires lorsqu'on peut écrire l'un en fonction de l'autre.
- Un plan est défini par un point et un couple de vecteurs directeurs.  
On dira que trois vecteurs sont coplanaires lorsqu'on peut écrire l'un en fonction des deux autres.



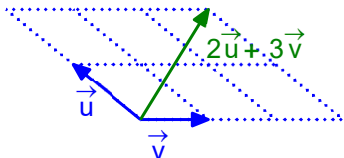
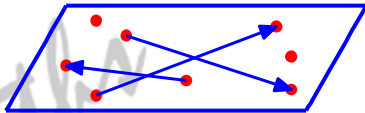
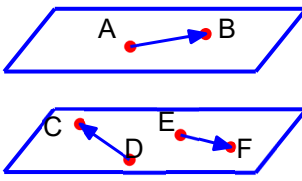
## Définition

On dit que trois vecteurs  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$  sont coplanaires s'il existe trois réels  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\gamma$  non tous nuls tels que  $\alpha \vec{u} + \beta \vec{v} + \gamma \vec{w} = \vec{0}$ .

### Remarques

- Pour trois vecteurs  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$  coplanaires, si  $\alpha \vec{u} + \beta \vec{v} + \gamma \vec{w} = \vec{0}$  avec  $\alpha \neq 0$ , alors on peut exprimer le vecteur  $\vec{u}$  en fonction de  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$ .  
Comme au moins l'un des coefficients  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  est non nul, on peut effectivement exprimer l'un des vecteurs en fonction des deux autres.
- Lorsque trois vecteurs  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$  sont coplanaires, on dit alors que les trois vecteurs sont dépendants. (s'ils ne sont pas coplanaires, on dit qu'ils sont indépendants ou libres).

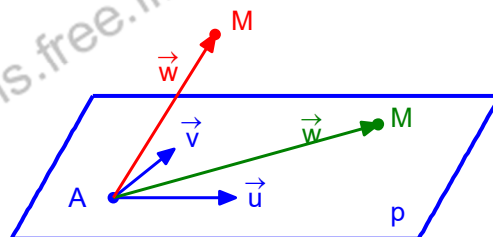
### Exemples

Les vecteurs $\vec{u}$ , $\vec{v}$ et le vecteur $\vec{w}$ défini par $\vec{w} = 2\vec{u} + 3\vec{v}$ sont coplanaires	Si des points sont dans un même plan, 3 vecteurs obtenus à partir de ces points sont nécessairement coplanaires.	Attention des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ , $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{EF}$ peuvent être coplanaires sans que les points A, B, C, D, E et F soient dans un même plan.
		

## Propriété (voir démonstration 03)

Soit  $p$  le plan passant par un point A et de couple de vecteurs directeurs  $(\vec{u}, \vec{v})$ .

Soit  $\vec{w}$  un vecteur et M le point tel que  $\overrightarrow{AM} = \vec{w}$   
 $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$  sont coplanaires si et seulement si le point M se trouve dans le plan  $p$ .



### Exercice 16 (voir réponses et correction)

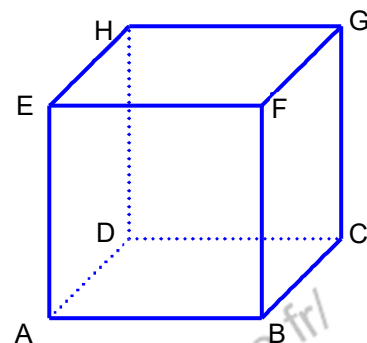
On considère un cube ABCDEFGH.

Les vecteurs  $\overrightarrow{AB}$ ;  $\overrightarrow{AD}$ ;  $\overrightarrow{AE}$  sont-ils coplanaires ?

Les vecteurs  $\overrightarrow{AB}$ ;  $\overrightarrow{AD}$ ;  $\overrightarrow{AC}$  sont-ils coplanaires ?

Les vecteurs  $\overrightarrow{AB}$ ;  $\overrightarrow{AD}$ ;  $\overrightarrow{FH}$  sont-ils coplanaires ?

Les vecteurs  $\overrightarrow{FD}$ ;  $\overrightarrow{AG}$ ;  $\overrightarrow{EH}$  sont-ils coplanaires ?



### Exercice 17 (voir réponses et correction)

On considère un tétraèdre ABCD.

1°) Justifier que les vecteurs  $\overrightarrow{AB}$ ,  $\overrightarrow{AC}$  et  $\overrightarrow{AD}$  ne sont pas coplanaires.

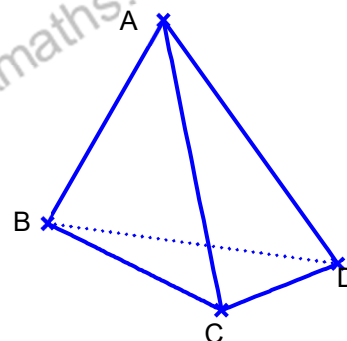
2°) Soit I le milieu de  $[AD]$ ; J le milieu de  $[BC]$ ;

K défini par  $\overrightarrow{BK} = \overrightarrow{CA}$  et L défini par  $\overrightarrow{BL} = k \overrightarrow{AD}$  avec  $k \in \mathbb{R}$ .

a) Exprimer le vecteur  $\overrightarrow{JL}$  en fonction des vecteurs  $\overrightarrow{AB}$ ,  $\overrightarrow{AC}$  et  $\overrightarrow{AD}$ .

b) Exprimer le vecteur  $\overrightarrow{IK}$  en fonction des vecteurs  $\overrightarrow{AB}$ ,  $\overrightarrow{AC}$  et  $\overrightarrow{AD}$ .

c) Existe-t-il une valeur de  $k$  pour laquelle  $\overrightarrow{IK}$  et  $\overrightarrow{JL}$  sont colinéaires.

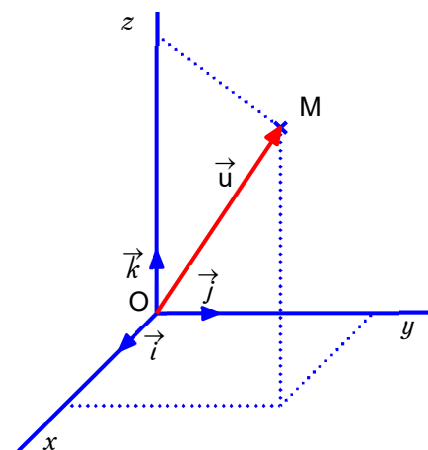


### III Repérage

#### Définition - Propriété (admise)

Dans l'espace, un quadruplet  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  formé par un point  $O$  et trois vecteurs  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$  et  $\vec{k}$  non coplanaires constitue un repère de l'espace.

- Pour tout point  $M$  de l'espace il existe un unique triplet de réels  $(x; y; z)$  tel que  $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$   
 $(x; y; z)$  est le triplet des coordonnées du point  $M$  dans le repère  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .
- Pour tout vecteur  $\vec{u}$  de l'espace il existe un unique triplet de réels  $(x; y; z)$  tel que  $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$   
 $(x; y; z)$  est le triplet des coordonnées du vecteur  $\vec{u}$  dans le repère  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .



#### Remarques

- $x$  est appelée abscisse,  $y$  est appelé ordonnée et  $z$  la cote.
- Deux points sont confondus si et seulement si leurs coordonnées sont égales.
- Deux vecteurs sont égaux si et seulement si leurs coordonnées sont égales.
- Si  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$  et  $\vec{k}$  sont deux à deux orthogonaux, on dit que le repère est orthogonal.  
Si  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$  et  $\vec{k}$  sont deux à deux orthogonaux et ont pour norme 1, on dit que le repère est orthonormé.
- On peut adapter aux triplets de coordonnées dans l'espace les propriétés des coordonnées dans le plan.

#### Propriété (voir démonstration 04)

Soient  $A$  et  $B$  deux points de coordonnées  $(x_A; y_A; z_A)$  et  $(x_B; y_B; z_B)$  dans le repère  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ , alors

- Le vecteur  $\overrightarrow{AB}$  a pour coordonnées  $(x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A)$
- Le milieu de  $[AB]$  a pour coordonnées  $\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}; \frac{z_A + z_B}{2}\right)$

Si le repère  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  est orthonormé, on a

- $AB = \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$

#### Propriété (voir démonstration 05)

Soient  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  deux vecteurs de coordonnées respectives  $(x; y; z)$  et  $(x'; y'; z')$ , et soit  $t$  un réel.

- $\vec{u} + \vec{v}$  a pour coordonnées  $(x + x'; y + y'; z + z')$
- $t\vec{u}$  a pour coordonnées  $(tx; ty; tz)$
- $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont colinéaires si et seulement si leurs coordonnées sont proportionnelles.
- Si le repère  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  est orthonormé, on a :  $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

#### Exercice 18 (voir réponses et correction)

L'espace est rapporté à un repère  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

On considère les points  $A(-3; 5; 2)$ ;  $B(-2; 1; 1)$ ;  $C(4; -2; -2)$ ;  $D(3; 2; -1)$

Justifier que ABCD est un parallélogramme et déterminer les coordonnées de son centre  $I$ .

#### Exercice 19 (voir réponses et correction)

L'espace est rapporté à un repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

On considère les points  $A(-1; 3; 1)$ ;  $B(3; 1; -1)$ ;  $C(1; -3; -1)$ ;  $D(-5; 0; 2)$ .

1°) Justifier que ABC est un triangle rectangle.

2°) Montrer que les vecteurs  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{CD}$  sont colinéaires.

Montrer que A, B, C et D sont coplanaires. Quelle est la nature du quadrilatère ABCD ?

### Exercice 20 (voir [réponses et correction](#))

L'espace est rapporté à un repère  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

On considère les points  $A(0; 2; 1)$ ;  $B(-2; 3; 1)$ ;  $C(1; 2; -1)$

Justifier que les points A, B et C ne sont pas alignés.

Déterminer les coordonnées du milieu I de  $[BC]$  et du centre de gravité G du triangle ABC.

### Propriété (voir [démonstration 06](#))

L'espace est rapporté à un repère  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

Soit  $\vec{u}$  un vecteur non nul de coordonnées  $(a; b; c)$  et soit  $\vec{v}$  un vecteur de coordonnées  $(x; y; z)$ .

$$\vec{v} \text{ est colinéaire à } \vec{u} \Leftrightarrow \vec{v} = t\vec{u} \text{ avec } t \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} x = t \times a \\ y = t \times b \\ z = t \times c \end{cases} \text{ avec } t \in \mathbb{R}$$

### Remarque

Trois points distincts A, B et C sont alignés si et seulement si les vecteurs  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{AC}$  sont colinéaires.  
On peut alors utiliser la propriété ci-dessus :

$$\overrightarrow{AC} \text{ est colinéaire à } \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{AC} = t\overrightarrow{AB} \text{ avec } t \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} x_C - x_A = t(x_B - x_A) \\ y_C - y_A = t(y_B - y_A) \\ z_C - z_A = t(z_B - z_A) \end{cases} \text{ avec } t \in \mathbb{R}$$

### Exercice 21 (voir [réponses et correction](#))

L'espace est rapporté à un repère  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

1°) Soient  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$  les vecteurs de coordonnées respectives  $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ;  $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$  et  $\begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont-ils colinéaires ?  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$  sont-ils colinéaires ?  $\vec{u}$  et  $\vec{w}$  sont-ils colinéaires ?

Déterminer les coordonnées du vecteur  $2\vec{u} - \vec{v} - \vec{w}$ .

Que peut-on en déduire pour les vecteurs  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$  ?

2°) Les points  $A(2; 3; -1)$ ,  $B(1; -3; 1)$  et  $C(4; 2; 1)$  sont-ils alignés ?

### Propriété (voir [démonstration 07](#))

L'espace est rapporté à un repère  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

Soit A un point de coordonnées  $(x_A; y_A; z_A)$  et  $\vec{u}$  un vecteur non nul de coordonnées  $(a; b; c)$ .

$$M(x; y; z) \text{ est sur la droite passant par A et de vecteur directeur } \vec{u} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = t\vec{u} \text{ avec } t \in \mathbb{R} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_A + t \times a \\ y = y_A + t \times b \\ z = z_A + t \times c \end{cases} \text{ avec } t \in \mathbb{R}$$

On dit que ce système est un système d'équations paramétriques de la droite  $(A; \vec{u})$  ou une représentation paramétrique de la droite  $(A; \vec{u})$ .

### Remarques

- Soient  $A(x_A; y_A; z_A)$  et  $B(x_B; y_B; z_B)$  deux points distincts.

$$M(x; y; z) \in (AB) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AB} \text{ avec } t \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_A + t(x_B - x_A) \\ y = y_A + t(y_B - y_A) \\ z = z_A + t(z_B - z_A) \end{cases} \text{ avec } t \in \mathbb{R}$$

- Il existe une infinité de systèmes d'équations paramétriques d'une droite, puisqu'on peut choisir d'une infinité de façons un vecteur directeur et un point de la droite.
- Dans le plan une droite est caractérisée par une équation cartésienne (relation entre  $x$  et  $y$ )  
Dans l'espace une droite est caractérisée par un système d'équations paramétriques (relation entre  $x$  et le paramètre  $t$ , relation entre  $y$  et le paramètre  $t$ , relation entre  $z$  et le paramètre  $t$ )

**Exercice 22** (voir [réponses et correction](#))

L'espace est rapporté à un repère  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

Soient  $A(3; 1; -1)$  et  $B(0; 2; -2)$ . Donner une représentation paramétrique de la droite (AB).

Le point  $C(-3; 3; 1)$  appartient-il à la droite (AB) ?

**Exercice 23** (voir [réponses et correction](#))

L'espace est rapporté à un repère  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

On considère les points  $A(2; -1; 5)$ ;  $B(1; -3; 2)$  et  $C(2; 3; 9)$  et le vecteur  $\vec{u}(1; 0; 1)$ .

Donner une représentation paramétrique de la droite (AB) et une représentation paramétrique de la droite passant par C et de vecteur directeur  $\vec{u}$ .

Déterminer si ces deux droites sont sécantes et donner éventuellement les coordonnées de leur point d'intersection.

**Exercice 24** (voir [réponses et correction](#))

L'espace est rapporté à un repère  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

1°) Justifier que l'ensemble des points  $M(x; y; z)$  tels que 
$$\begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = -1 + 2t \\ z = 2 - 4t \end{cases} \text{ avec } t \in \mathbb{R},$$

est une droite d que l'on caractérisera.

2°) Justifier que l'ensemble des points  $M(x; y; z)$  tels que 
$$\begin{cases} x = 5 - 6t' \\ y = 1 - 4t' \\ z = -2 + 8t' \end{cases} \text{ avec } t' \in \mathbb{R},$$

est une droite d' que l'on caractérisera.

3°) Que peut-on dire des positions relatives de d et d' ?

4°) Justifier que l'ensemble des points  $M(x; y; z)$  tels que 
$$\begin{cases} x = 3 - \lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = 2 \end{cases} \text{ avec } \lambda \in \mathbb{R}.$$

est une droite  $\delta$  que l'on caractérisera. Donner deux points distincts de  $\delta$ .

5°) Que peut-on dire des positions relatives de d et  $\delta$  ?

**Exercice 25** (voir [réponses et correction](#))

On considère un cube ABCDEFGH.

Donner, sans justification, les coordonnées des différents

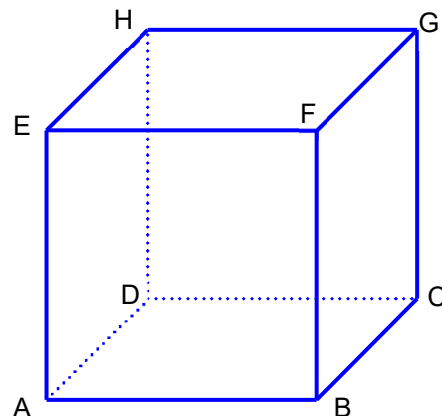
sommets du cube dans le repère  $(A; \vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AE})$ .

Donner les coordonnées de I milieu de [AB] et J milieu de [AD].

Donner une représentation paramétrique de la droite (FI) et une représentation paramétrique de la droite (HJ).

Démontrer que les droites (FI) et (HJ) sont sécantes et déterminer les coordonnées de leur point d'intersection  $\Omega$ .

Justifier que  $\Omega$ ; A et E sont alignés.

**Exercice 26** (voir [réponses et correction](#))

On considère un cube ABCDEFGH d'arête de longueur 1.

On se place dans le repère orthonormé  $(A; \vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AE})$ .

On considère les points  $I(1; \frac{1}{4}; 0)$ ;  $J(0; \frac{3}{4}; 1)$ ;  $K(\frac{2}{5}; 0; 1)$

et  $L(a; 1; 0)$  avec  $a$  un nombre réel appartenant à l'intervalle  $[0; 1]$ .

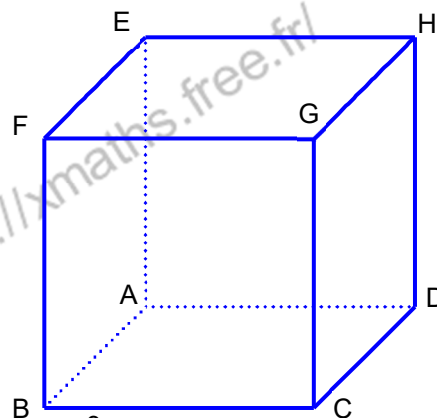
1°) Déterminer une représentation paramétrique de la droite (IJ).

2°) Démontrer que la droite (KL) a pour représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = \frac{2}{5} + \left(a - \frac{2}{5}\right)t' \\ y = t' \\ z = 1 - t' \end{cases} ; t' \in \mathbb{R}$$

3°) Démontrer que les droites (IJ) et (KL) sont sécantes si et seulement si  $a = \frac{3}{5}$ .

Donner alors les coordonnées de leur point d'intersection.



(voir [réponses et correction](#))

L'espace est rapporté à un repère  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

On considère les points  $A(1 ; 2 ; 0)$  ;  $B(-1 ; 2 ; 3)$  et  $C(1 ; -2 ; 1)$

Justifier que les vecteurs  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{AC}$  ne sont pas colinéaires.

En déduire qu'il existe un et un seul plan  $p$  contenant les points  $A$ ,  $B$  et  $C$ .

Soit  $M(x; y; z)$ . Montrer que  $M \in p \Leftrightarrow$  il existe deux réels  $t$  et  $t'$  tels que 
$$\begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 2 - 4t' \\ z = 3t + t' \end{cases}$$

On dit que le système  $\begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 2 - 4t' \\ z = 3t + t' \end{cases}$  avec  $t \in \mathbb{R}$  et  $t' \in \mathbb{R}$  est une représentation paramétrique du plan  $p$ .

Soit  $D(3 ; 2 ; 1)$ . Montrer que  $D \notin p$ .

Soit  $E(-3 ; 6 ; 5)$ . Montrer que  $E \in p$ . Exprimer le vecteur  $\overrightarrow{AE}$  en fonction des vecteurs  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{AC}$ .

**Propriété** (voir démonstration 08)

L'espace est rapporté à un repère  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ . Soient A un point de coordonnées  $(x_A; y_A; z_A)$ ;  $\vec{u}(a; b; c)$  et  $\vec{v}(a'; b'; c')$  un couple de vecteurs non colinéaires.

$M(x ; y ; z)$  appartient au plan passant par A et de couple de vecteurs directeurs  $(\vec{u} ; \vec{v})$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = t \overrightarrow{u} + t' \overrightarrow{v} \quad \text{avec } t \in \mathbb{R} \text{ et } t' \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = x_A + t \cdot x_a + t' \cdot x_{a'} \\ y = y_A + t \cdot x_b + t' \cdot x_{b'} \\ z = z_A + t \cdot x_c + t' \cdot x_{c'} \end{cases} \text{ avec } t \in \mathbb{R} \text{ et } t' \in \mathbb{R}$$

On dit que ce système est un système d'équations paramétriques du plan  $(A; \vec{u}, \vec{v})$  ou une représentation paramétrique du plan  $(A; \vec{u}, \vec{v})$ .

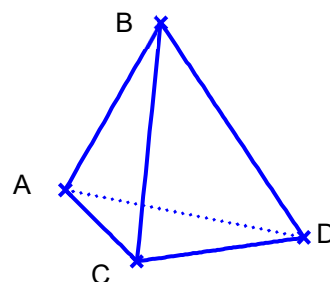
**Exercice 28** (voir [réponses et correction](#))

On considère un tétraèdre ABCD.

Soit I le milieu de  $[AB]$  et J le milieu de  $[AD]$  et K le milieu de  $[CI]$

Justifier que la droite (DK) est sécante au plan (BCJ) en un point L.

Exprimer le vecteur  $\overrightarrow{DL}$  en fonction des vecteurs  $\overrightarrow{AB}$  ;  $\overrightarrow{AC}$  et  $\overrightarrow{AD}$ .



**Exercice 29** (voir [réponses et correction](#))

On considère un cube  $ABCDEFGH$  d'arête de longueur 1.

On se place dans le repère orthonormé  $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$ .

On considère les points  $I\left(1; \frac{1}{4}; 0\right)$  ;  $J\left(0; \frac{3}{4}; 1\right)$  ;  $K\left(\frac{2}{5}; 0; 1\right)$

La figure ci-contre fait apparaître l'intersection du plan (IJK) avec les faces du cube ABCDEFGH telle qu'elle a été obtenue à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique.

1°) Justifier que la droite (IL) est parallèle à la droite (JK).

Donner une représentation paramétrique de la droite (IL) et une représentation paramétrique de la droite (CD). En déduire les coordonnées du point L.

2°) Justifier que les droites (IL) et (AB) sont sécantes et démontrer que leur point d'intersection S a pour abscisse  $\frac{17}{15}$ .

3°) Donner une représentation paramétrique de la droite (SK) et une représentation paramétrique de la droite (BF). En déduire les coordonnées du point M.

4°) Déterminer les coordonnées du point N.

