2,5/12

- Il faut revoir le changement de variable. En particulier faire attention au "dt".
- Revoir la rédaction avec la correction

Joséphine Le Contel
TD5
12/02/2021

Interrogation n°2

Exercice 4 :

1) $f : t \longmapsto \dfrac{e^t}{e^{2t}+1}$

Posons $u = e^t$

On a donc $f(u) = \dfrac{u}{u^2+1}$

la fonction n'est pas définie pour $u^2+1=0$
u^2 n'est jamais négatif donc elle n'annule pas le 1
e^t n'ont plus donc la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$.

0,5

$$\begin{cases} u = e^t \\ du = dt\, e^t \end{cases}$$

$2u$

Une primitive de f : $F(x) = \int_{x_0}^{x} f(u)\,du$ avec $[x_0, x] \subset \mathbb{R}$, x_0 une constante

1

$$= \int_{x_0}^{x} \frac{u}{u^2+1} \frac{du}{u}$$

On pose $v(u) = u^2+1$
$v'(u) = 2u$

$dt = \dfrac{du}{u}$

$$= \cancel{\frac{1}{2}} \int_{x_0}^{x} \frac{\cancel{2x}}{u^2+1}\,du$$

on a donc ici $\dfrac{v'(u)}{v(u)}$

$$\cancel{= \frac{1}{2}\left[\ln|u^2+1|\right]_{x_0}^{x}} = \cancel{\frac{1}{2}\left[\ln(u^2+1)\right]_{x_0}^{x}}$$

car $u^2+1 > 0$

$$\cancel{= \frac{1}{2}\left(\ln(x^2+1) - \ln(x_0^2+1)\right)}$$ constante

$$F(x) = \cancel{\frac{\ln x^2+1}{2}} + C$$

Les primitives de f sont de la forme : $\left\{ F(x) = \dfrac{\ln x^2+1}{2} + C \,/\, x \in \mathbb{R} \right\}$

$4u$

$2(2u)$

2) $g : t \longmapsto \dfrac{4e^t}{e^{2t}-4}$ Posons $u = e^t$

⚠ ne pas faire ça maintenant

$u = e^t$
$du = dt\, e^t$

On a donc $g(u) = \dfrac{4u}{u^2-4}$

La fonction s'annule pour $u^2-4=0$

$u^2 = 4$

$u = \pm\sqrt{4} = \pm 2$

donc elle s'annule quand $e^t = 2$

$\ln(e^t) = \ln(2)$

$t = \ln(2)$

Donc g est définie sur $\mathbb{R} / \{\ln(2)\}$ 0,5

0,5

Une primitive de g est : $G(x) = \int_{x_0}^{x} g(u)\, du$ avec $[x_0, x] \subset \mathbb{R}/\{\ln 2\}$

x_0 est une constant

$$G(x) = \int_{x_0}^{x} g(t)\, dt$$

$$= \int_{x_0}^{x} \frac{4u}{u^2-4} \frac{du}{u}$$

$$= \int_{e^{x_0}}^{e^{x}} \frac{4u}{u^2-4} \frac{du}{u}$$

par chg de variable $u = e^t$ donc $du = u\, dt$

posons $v_2(x) = u^2-4$

$v_2'(x) = 2u$

$$= 2\int_{x_0}^{x} \frac{2u}{u^2-4}\, du$$ on a donc : $\dfrac{v_2'(x)}{v(x)}$

$$= 2\left[\ln|u^2-4|\right]_{x_0}^{x}$$

$$= 2\left(\ln(x^2-4) - \ln(x_0^2-4)\right)$$ constante

Les primitives de g sont de la forme : $G(x) = 2\ln(x^2-4) + C$

$\{G(x) = 2\ln(x^2-4) + C \,/\, x \in \mathbb{R}/\ln(2)\}$