Université de Paris
UFR de Mathématiques et Informatique
45, rue des Saints-Pères, 75006, Paris.

Université de Paris

Licence 1ère année, MATHÉMATIQUES ET CALCUL 2

TD n°3 : Équations Différentielles

2019-2020

Fiche guidée n°5

Équations différentielles linéaires du premier ordre, méthode de variation de la constante et recollements

Problématique

On étudie des équations différentielles linéaires d'ordre 1 de la forme :

$$a(x)y'(x) + b(x)y(x) = c(x), \ x \in I \tag{1}$$

où a, b et $c : I \to \mathbb{R}$ sont des fonctions continues définies sur un intervalle I contenant au moins 2 points.

Si a s'annule sur I, on peut résoudre (1) sur chacun des intervalles où a ne s'annule pas. Il est alors intéressant de se demander si on peut trouver des solutions définies sur des intervalles plus grands, voire sur tout I.[1]

Remarque culturelle : Une solution maximale est une solution qui ne peut être prolongée en une solution sur un intervalle plus grand. Nous sommes à la recherche des solutions maximales de (1).

1. Pour simplifier l'introduction des nouveaux concepts de cette fiche, on appellera solution de (1) les fonctions satisfaisant (1) et définies sur **un intervalle**.

Raccordements : exemple 1

Considérons l'équation différentielle

$$xy'(x) = 2x^2\,. \tag{2}$$

Pour normaliser cette équation, on est obligé d'exclure le point $x = 0$. On obtient alors pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $y'(x) = 2x$, équation que l'on peut résoudre sur l'intervalle $]-\infty, 0[$ et sur l'intervalle $]0, +\infty[$.

En primitivant, on a immédiatement les deux ensembles de solutions suivants :

$$\mathcal{F}_1 = \left\{ y :]-\infty, 0[\to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2 + C_1 \mid C_1 \in \mathbb{R} \right\}$$

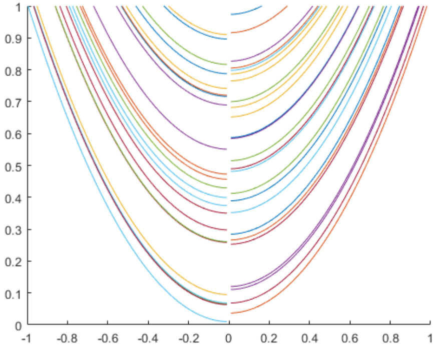
et

$$\mathcal{F}_2 = \left\{ y :]0, +\infty[\to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2 + C_2 \mid C_2 \in \mathbb{R} \right\}\ .$$

Raccordements : exemple 1

Considérons l'équation différentielle

$$xy'(x) = 2x^2 \,. \tag{2}$$



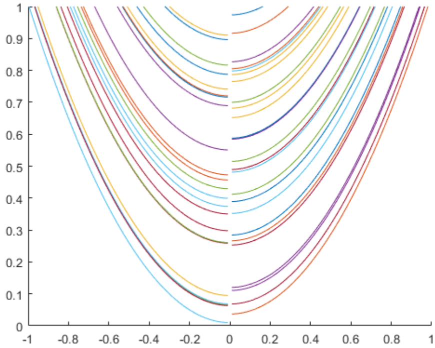
On affiche ci-contre quelques solutions pour des constantes C_1 et C_2 tirées aléatoirement.
Les solutions de $\mathcal{F}_1$ sont représentées à gauche du graphe, celles de $\mathcal{F}_2$ sont à droite.
À chaque courbe (à chaque couleur) correspond une fonction et donc une constante.

On se demande maintenant s'il existe des fonctions définies en 0 qui soient aussi solution de (2). Graphiquement, il s'agit de chercher à recoller une courbe de gauche avec une courbe de droite en préservant la continuité (car les solutions sont des fonctions continues).

Raccordements : exemple 1

Considérons l'équation différentielle

$$xy'(x) = 2x^2\,. \tag{2}$$



On observe graphiquement que les fonctions de $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$ sont prolongeables en $x = 0$ (elles admettent une limite finie). On devine également que les courbes de gauche et de droite ne se rejoignent en $x = 0$ que si $C_1 = C_2$. Vérifions-le.

Raccordements : exemple 1

Prolongement par continuité

Soient C_1 et C_2 deux constantes et $y :]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ la fonction

$$y(x) = \begin{cases} x^2 + C_1 & \text{si } x < 0 \\ x^2 + C_2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

La restriction de y à l'intervalle $]-\infty, 0[$ est solution de (2). De même pour l'intervalle $]0, +\infty[$.

On a au voisinage de 0 les limites suivantes :

$$\lim_{x\to 0^-} y(x) = 0 + C_1 = C_1$$

et

$$\lim_{x\to 0^+} y(x) = 0 + C_2 = C_2.$$

Les limites sont égales si et seulement si $C_1 = C_2$. Le cas échéant, en posant $C = C_1 = C_2$, on peut définir le prolongement par continuité de y sur $\mathbb{R}$ avec la fonction

$$\tilde{y}(x) = \begin{cases} C & \text{si } x = 0 \\ y(x) & \text{sinon} \end{cases}$$

On a alors $\tilde{y}(x) = x^2 + C$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Raccordements : exemple 1

Dérivabilité

Il reste à vérifier qu'un tel prolongement est dérivable et satisfait l'équation (2) en 0. Pour cela, il suffit de vérifier que les limites en 0^+ et 0^- de la dérivée de y sont finies et égales. On a :

$$\lim_{x\to 0^-} y'(x) = \lim_{x\to 0^-} 2x = 0$$

et

$$\lim_{x\to 0^+} y'(x) = \lim_{x\to 0^+} 2x = 0\,.$$

On en déduit que $\tilde{y}$ est dérivable en 0 et satisfait automatiquement l'équation (2) en $x = 0$.

Conclusion

Les solutions maximales de l'équation différentielle

$$xy'(x) = 2x^2 \tag{2}$$

sont de la forme

$$y : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\, x \mapsto x^2 + C\,;\; C \in \mathbb{R}\,.$$

Raccordements : exemple 2

Considérons l'équation différentielle

$$xy'(x) - y(x) = 0\,. \tag{3}$$

Pour normaliser cette équation, on est obligé d'exclure le point $x = 0$. On obtient l'équation homogène

$$y'(x) - \frac{1}{x}y(x) = 0,$$

définie pour $x \in \mathbb{R}^*$.
Elle admet des solutions sur les intervalles $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$, données par les ensembles :

$$\mathcal{F}_1 = \{y :]-\infty, 0[\to \mathbb{R},\ x \mapsto C_1 x \mid C_1 \in \mathbb{R}\}$$

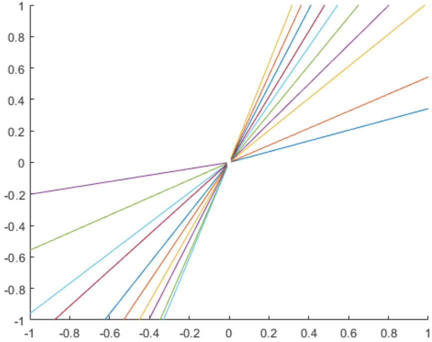
et

$$\mathcal{F}_2 = \{y :]0, +\infty[\to \mathbb{R},\ x \mapsto C_2 x \mid C_2 \in \mathbb{R}\}\ .$$

Raccordements : exemple 2

Considérons l'équation différentielle

$$xy'(x) - y(x) = 0\,. \tag{3}$$



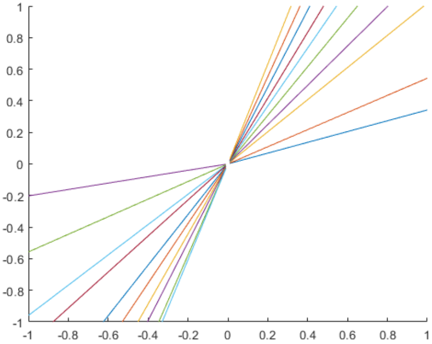
On affiche ci-contre quelques solutions pour des constantes C_1 et C_2 tirées aléatoirement.
Les solutions de $\mathcal{F}_1$ sont représentées à gauche du graphe, celles de $\mathcal{F}_2$ sont à droite.
À chaque courbe (à chaque couleur) correspond une fonction et donc une constante.

On se demande maintenant s'il existe des fonctions définies en 0 qui soient aussi solution de (2). Graphiquement, il s'agit de chercher à recoller une courbe de gauche avec une courbe de droite en préservant la continuité (car les solutions sont des fonctions continues).

Raccordements : exemple 2

Considérons l'équation différentielle

$$xy'(x) - y(x) = 0\,. \qquad (3)$$



On observe que les fonctions de $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$ sont prolongeables en $x = 0$ et qu'elles admettent toutes la même limite : 0. Ainsi, toute courbe (demi-droite) de gauche peut être raccordée à toute courbe de droite par continuité. En revanche, on devine que les courbes raccordées ne seront dérivables en 0 que si elles ont la même pente, c'est-à-dire $C_1 = C_2$. Vérifions-le.

Raccordements : exemple 2

Prolongement par continuité

Soient C_1 et C_2 deux constantes et $y :]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ la fonction

$$y(x) = \begin{cases} C_1 x & \text{si } x < 0 \\ C_2 x & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

La restriction de y à l'intervalle $]-\infty, 0[$ est solution de (2). De même pour l'intervalle $]0, +\infty[$.

On a au voisinage de 0 les limites suivantes :

$$\lim_{x \to 0^-} y(x) = C_1 \cdot 0 = 0$$

et

$$\lim_{x \to 0^+} y(x) = C_2 \cdot 0 = 0.$$

Ainsi, quels que soient C_1 et C_2, on peut définir le prolongement par continuité de y sur $\mathbb{R}$ avec la fonction

$$\tilde{y}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ y(x) & \text{sinon.} \end{cases}$$

Une expression possible de $\tilde{y}$ est

$$\tilde{y}(x) = \begin{cases} C_1 x & \text{si } x \leq 0 \\ C_2 x & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

Raccordements : exemple 2

Dérivabilité

Il reste à vérifier qu'un tel prolongement est dérivable et satisfait l'équation (2) en 0. Pour cela, il suffit de vérifier que les limites en 0^+ et 0^- de la dérivée de y sont finies et égales. On a :

$$\lim_{x\to 0^-} y'(x) = \lim_{x\to 0^-} C_1 = C_1$$

et

$$\lim_{x\to 0^+} y'(x) = \lim_{x\to 0^+} C_2 = C_2\,.$$

On en déduit que $\tilde{y}$ est dérivable en 0 si et seulement si $C_1 = C_2$. Auquel cas, elle satisfait automatiquement l'équation (3) en $x = 0$.

Conclusion

Les solutions maximales de l'équation différentielle

$$xy'(x) - y(x) = 0 \tag{3}$$

sont de la forme

$$y : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\, x \mapsto Cx\,;\; C \in \mathbb{R}\,.$$

Résumé et méthodologie

Objectif : Déterminer les solutions maximales d'une équation différentielle de la forme :

$$a(x)y'(x) + b(x)y(x) = c(x), \ x \in I\,. \tag{1}$$

2. Rappel : $]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$ n'est pas un intervalle. C'est la réunion de deux intervalles.

Résumé et méthodologie

Objectif : Déterminer les solutions maximales d'une équation différentielle de la forme :

$$a(x)y'(x) + b(x)y(x) = c(x),\ x \in I. \tag{1}$$

Étape 1 : On résout (1) sur les intervalles où a ne s'annule pas. [2]

2. Rappel : $]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$ n'est pas un intervalle. C'est la réunion de deux intervalles.

Résumé et méthodologie

Objectif : Déterminer les solutions maximales d'une équation différentielle de la forme :

$$a(x)y'(x) + b(x)y(x) = c(x),\ x \in I. \tag{1}$$

Étape 1 : On résout (1) sur les intervalles où a ne s'annule pas. [2]

Pour rappel, on cherche les solutions de l'équation différentielle homogène associée, une solution particulière, puis on somme pour déterminer les solutions générales sur chaque intervalle.

2. Rappel : $]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$ n'est pas un intervalle. C'est la réunion de deux intervalles.

Résumé et méthodologie

Objectif : Déterminer les solutions maximales d'une équation différentielle de la forme :

$$a(x)y'(x) + b(x)y(x) = c(x),\ x \in I. \qquad (1)$$

Étape 1 : On résout (1) sur les intervalles où a ne s'annule pas.[2]

Pour rappel, on cherche les solutions de l'équation différentielle homogène associée, une solution particulière, puis on somme pour déterminer les solutions générales sur chaque intervalle.

Étape 2 : On cherche tous les raccordements possibles. On commence en cherchant à prolonger par continuité les solutions obtenues à l'étape précédente, en les points où a s'annule. Puis on vérifie que les prolongements sont dérivables.

2. Rappel : $]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$ n'est pas un intervalle. C'est la réunion de deux intervalles.

Résumé et méthodologie

Objectif : Déterminer les solutions maximales d'une équation différentielle de la forme :

$$a(x)y'(x) + b(x)y(x) = c(x), \ x \in I . \tag{1}$$

Étape 1 : On résout (1) sur les intervalles où a ne s'annule pas. [2]

Pour rappel, on cherche les solutions de l'équation différentielle homogène associée, une solution particulière, puis on somme pour déterminer les solutions générales sur chaque intervalle.

Étape 2 : On cherche tous les raccordements possibles. On commence en cherchant à prolonger par continuité les solutions obtenues à l'étape précédente, en les points où a s'annule. Puis on vérifie que les prolongements sont dérivables.

Attention : Certains raccordements sont continus sans être dérivables (cf Exemple 2). Ce ne sont donc pas des solutions de (1).

2. Rappel : $]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$ n'est pas un intervalle. C'est la réunion de deux intervalles.

Résumé et méthodologie

Objectif : Déterminer les solutions maximales d'une équation différentielle de la forme :

$$a(x)y'(x) + b(x)y(x) = c(x),\ x \in I\,. \qquad (1)$$

Étape 1 : On résout (1) sur les intervalles où a ne s'annule pas.[2]

Pour rappel, on cherche les solutions de l'équation différentielle homogène associée, une solution particulière, puis on somme pour déterminer les solutions générales sur chaque intervalle.

Étape 2 : On cherche tous les raccordements possibles. On commence en cherchant à prolonger par continuité les solutions obtenues à l'étape précédente, en les points où a s'annule. Puis on vérifie que les prolongements sont dérivables.

Attention : Certains raccordements sont continus sans être dérivables (cf Exemple 2). Ce ne sont donc pas des solutions de (1).

Remarque : Pour prouver que les raccordements sont dérivables, on verra qu'il peut être utile d'utiliser (1) pour déterminer la limite de y'.

2. Rappel : $]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$ n'est pas un intervalle. C'est la réunion de deux intervalles.

Exercice 1

Donner les solutions de l'équation différentielle

$$xy'(x) - 2y(x) = x^3 \tag{4}$$

sur $I_1 =]-\infty; 0[$ et sur $I_2 =]0; +\infty[$. Peut-on trouver des solutions de (4) sur $\mathbb{R}$?

Exercice 1

Donner les solutions de l'équation différentielle

$$xy'(x) - 2y(x) = x^3 \tag{4}$$

sur $I_1 =]-\infty; 0[$ et sur $I_2 =]0; +\infty[$. Peut-on trouver des solutions de (4) sur $\mathbb{R}$?

Étape 1 : a) On cherche les solutions de (4) sur l'intervalle I_1.
L'équation homogène associée est :

$$xy'(x) - 2y(x) = 0$$

Exercice 1

Donner les solutions de l'équation différentielle

$$xy'(x) - 2y(x) = x^3 \tag{4}$$

sur $I_1 =]-\infty; 0[$ et sur $I_2 =]0; +\infty[$. Peut-on trouver des solutions de (4) sur $\mathbb{R}$?

Étape 1 : a) On cherche les solutions de (4) sur l'intervalle I_1.
L'équation homogène associée est :

$$xy'(x) - 2y(x) = 0$$

et ses solutions sont de la forme :

$$\begin{aligned} y : I_1 &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto C_1 x^2, \ C_1 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Exercice 1

On cherche une solution particulière de (4) en utilisant la méthode de variation de la constante. On pose donc $y_p : I_1 \to \mathbb{R}, x \mapsto C_1(x)x^2$.

Exercice 1

On cherche une solution particulière de (4) en utilisant la méthode de variation de la constante. On pose donc $y_p : I_1 \to \mathbb{R}, x \mapsto C_1(x)x^2$.

Injectons y_p dans (4). Pour tout $x \in I_1$, on a :

$$C_1'(x)x^3 + 2x^2C_1(x) - 2x^2C_1(x) = C_1'(x)x^3 = x^3$$

Puisque $x \neq 0$, on déduit que $C_1'(x) = 1$ dont une primitive est $C_1(x) = x$.

Exercice 1

On cherche une solution particulière de (4) en utilisant la méthode de variation de la constante. On pose donc $y_p : I_1 \to \mathbb{R}, x \mapsto C_1(x)x^2$.

Injectons y_p dans (4). Pour tout $x \in I_1$, on a :

$$C_1'(x)x^3 + 2x^2C_1(x) - 2x^2C_1(x) = C_1'(x)x^3 = x^3$$

Puisque $x \neq 0$, on déduit que $C_1'(x) = 1$ dont une primitive est $C_1(x) = x$.

Une solution particulière de (4) sur I_1 est donc $y_p : I_1 \to \mathbb{R}, x \mapsto x^3$.

Exercice 1

On cherche une solution particulière de (4) en utilisant la méthode de variation de la constante. On pose donc $y_p : I_1 \to \mathbb{R}, x \mapsto C_1(x)x^2$.

Injectons y_p dans (4). Pour tout $x \in I_1$, on a :

$$C_1'(x)x^3 + 2x^2C_1(x) - 2x^2C_1(x) = C_1'(x)x^3 = x^3$$

Puisque $x \neq 0$, on déduit que $C_1'(x) = 1$ dont une primitive est $C_1(x) = x$.

Une solution particulière de (4) sur I_1 est donc $y_p : I_1 \to \mathbb{R}, x \mapsto x^3$.

Finalement, les solutions de (4) sur I_1 sont de la forme :

$$\begin{aligned} y : I_1 &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto (C_1 + x)x^2, \;\; C_1 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Exercice 1

On cherche une solution particulière de (4) en utilisant la méthode de variation de la constante. On pose donc $y_p : I_1 \to \mathbb{R}, x \mapsto C_1(x)x^2$.

Injectons y_p dans (4). Pour tout $x \in I_1$, on a :

$$C_1'(x)x^3 + 2x^2C_1(x) - 2x^2C_1(x) = C_1'(x)x^3 = x^3$$

Puisque $x \neq 0$, on déduit que $C_1'(x) = 1$ dont une primitive est $C_1(x) = x$.

Une solution particulière de (4) sur I_1 est donc $y_p : I_1 \to \mathbb{R}, x \mapsto x^3$.

Finalement, les solutions de (4) sur I_1 sont de la forme :

$$\begin{aligned} y : I_1 &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto (C_1 + x)x^2, \ C_1 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Étape 1 : b) De même, les solutions de (4) sur I_2 sont de la forme :

$$\begin{aligned} y : I_2 &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto (C_2 + x)x^2, \ C_2 \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Exercice 1

Étape 2 : a) Raccordements par continuité.
On cherche les raccordements possibles entre les solutions de (4) sur I_1 et sur I_2. On va donc voir s'il est possible de raccorder en 0 et par continuité les solutions obtenues à l'étape précédente. On vérifiera ensuite si les fonctions obtenues sont dérivables.

Exercice 1

Étape 2 : a) Raccordements par continuité.
On cherche les raccordements possibles entre les solutions de (4) sur I_1 et sur I_2. On va donc voir s'il est possible de raccorder en 0 et par continuité les solutions obtenues à l'étape précédente. On vérifiera ensuite si les fonctions obtenues sont dérivables.

Soient $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ deux constantes et y la fonction définie sur $I_1 \cup I_2$ par

$$y(x) = \begin{cases} (C_1 + x)x^2 & \text{si } x < 0 \\ (C_2 + x)x^2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Les restrictions $y|_{I_1}$ et $y|_{I_2}$ sont solutions de (4). Voyons si y peut se prolonger par continuité en 0. On a :

Exercice 1

Étape 2 : a) Raccordements par continuité.
On cherche les raccordements possibles entre les solutions de (4) sur I_1 et sur I_2. On va donc voir s'il est possible de raccorder en 0 et par continuité les solutions obtenues à l'étape précédente. On vérifiera ensuite si les fonctions obtenues sont dérivables.

Soient $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ deux constantes et y la fonction définie sur $I_1 \cup I_2$ par

$$y(x) = \begin{cases} (C_1 + x)x^2 & \text{si } x < 0 \\ (C_2 + x)x^2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Les restrictions $y|_{I_1}$ et $y|_{I_2}$ sont solutions de (4). Voyons si y peut se prolonger par continuité en 0. On a :

$$\lim_{x \to 0^-} y(x) = \lim_{x \to 0^+} y(x) = 0.$$

Pour tous réels C_1 et C_2, y est donc prolongeable par continuité en 0. Notons $\tilde{y}$ le prolongement de y en 0 tel que $\tilde{y}(0) = 0$.

Plus précisément, $\tilde{y}$ est définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\tilde{y}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ y(x) & \text{sinon.} \end{cases}$$

$\tilde{y}$ est définie sur $\mathbb{R}$ mais on ne sait pas encore si elle est solution de (4) sur $\mathbb{R}$.

Exercice 1

Étape 2 : b) Dérivabilité.

Par construction, $\tilde{y}$ est dérivable et de dérivée continue sur I_1 et I_2. Regardons si $\tilde{y}$ est dérivable en 0.

Exercice 1

Étape 2 : b) Dérivabilité.

Par construction, $\tilde{y}$ est dérivable et de dérivée continue sur I_1 et I_2. Regardons si $\tilde{y}$ est dérivable en 0.

Pour cela, on étudie les limites en 0 de :

$$y'(x) = \begin{cases} x^2 + 2x(C_1 + x) & \text{si } x < 0 \\ x^2 + 2x(C_2 + x) & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

On a :

$$\lim_{x \to 0^-} y'(x) = \lim_{x \to 0^-} (x^2 + 2x(C_1 + x)) = 0$$

$$\lim_{x \to 0^+} y'(x) = \lim_{x \to 0^+} (x^2 + 2x(C_2 + x)) = 0$$

Exercice 1

Étape 2 : b) Dérivabilité.

Par construction, $\tilde{y}$ est dérivable et de dérivée continue sur I_1 et I_2. Regardons si $\tilde{y}$ est dérivable en 0.

Pour cela, on étudie les limites en 0 de :

$$y'(x) = \begin{cases} x^2 + 2x(C_1 + x) & \text{si } x < 0 \\ x^2 + 2x(C_2 + x) & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

On a :

$$\lim_{x \to 0^-} y'(x) = \lim_{x \to 0^-} (x^2 + 2x(C_1 + x)) = 0$$

$$\lim_{x \to 0^+} y'(x) = \lim_{x \to 0^+} (x^2 + 2x(C_2 + x)) = 0$$

Puisque les limites à gauche et à droite sont égales, $\tilde{y}$ est dérivable en 0 et $\tilde{y}'(0) = 0$.

Exercice 1

Étape 2 : b) Dérivabilité.

Par construction, $\tilde{y}$ est dérivable et de dérivée continue sur I_1 et I_2. Regardons si $\tilde{y}$ est dérivable en 0.

Pour cela, on étudie les limites en 0 de :

$$y'(x) = \begin{cases} x^2 + 2x(C_1 + x) & \text{si } x < 0 \\ x^2 + 2x(C_2 + x) & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

On a :

$$\lim_{x \to 0^-} y'(x) = \lim_{x \to 0^-} (x^2 + 2x(C_1 + x)) = 0$$

$$\lim_{x \to 0^+} y'(x) = \lim_{x \to 0^+} (x^2 + 2x(C_2 + x)) = 0$$

Puisque les limites à gauche et à droite sont égales, $\tilde{y}$ est dérivable en 0 et $\tilde{y}'(0) = 0$.

Conclusion : Les solutions de (4) sur $\mathbb{R}$ sont de la forme :

$$\begin{aligned} y : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \begin{cases} (C_1 + x)x^2 & \text{si } x \leq 0 \\ (C_2 + x)x^2 & \text{si } x > 0 \end{cases} \end{aligned}$$

où C_1 et C_2 sont des constantes de $\mathbb{R}$ (que l'on peut choisir indépendamment l'une de l'autre).

Excercice 2

Déterminer les solutions de l'équation différentielle linéaire d'ordre 1 suivante :

$$x^2 y'(x) - y(x) = 0 \tag{5}$$

Excercice 2

Déterminer les solutions de l'équation différentielle linéaire d'ordre 1 suivante :

$$x^2 y'(x) - y(x) = 0 \tag{5}$$

Étape 1 : On résout cette équation sur les intervalles $I_1 =]-\infty, 0[$ et $I_2 =]0, +\infty[$.
L'équation homogène normalisée est

$$y'(x) - \frac{1}{x^2} y(x) = 0\,.$$

Une primitive de $x \mapsto -\frac{1}{x^2}$ est $x \mapsto \frac{1}{x}$ donc les solutions de (5) sur $I_1 =]-\infty, 0[$ et $I_2 =]0, +\infty[$ sont de la forme

Excercice 2

Déterminer les solutions de l'équation différentielle linéaire d'ordre 1 suivante :

$$x^2 y'(x) - y(x) = 0 \tag{5}$$

Étape 1 : On résout cette équation sur les intervalles $I_1 =]-\infty, 0[$ et $I_2 =]0, +\infty[$. L'équation homogène normalisée est

$$y'(x) - \frac{1}{x^2} y(x) = 0\,.$$

Une primitive de $x \mapsto -\frac{1}{x^2}$ est $x \mapsto \frac{1}{x}$ donc les solutions de (5) sur $I_1 =]-\infty, 0[$ et $I_2 =]0, +\infty[$ sont de la forme

$$y : I_1 \to \mathbb{R}, x \mapsto C_1 \mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}\ ; C_1 \in \mathbb{R}$$

et

$$y : I_2 \to \mathbb{R}, x \mapsto C_2 \mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}\ ; C_2 \in \mathbb{R}\,.$$

Exercice 2

Étape 2 : a) Raccordements par continuité.
On va tenter de voir s'il existe des solutions de (5) sur $\mathbb{R}$. Regardons quelles solutions de (5) on peut prolonger par continuité en 0.

Exercice 2

Étape 2 : a) Raccordements par continuité.
On va tenter de voir s'il existe des solutions de (5) sur $\mathbb{R}$. Regardons quelles solutions de (5) on peut prolonger par continuité en 0.

Soient $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ deux constantes et y la fonction définie sur $I_1 \cup I_2$ par

$$y(x) = \begin{cases} C_1 \mathrm{e}^{-\frac{1}{x}} & \text{si } x < 0 \\ C_2 \mathrm{e}^{-\frac{1}{x}} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Les restrictions $y|_{I_1}$ et $y|_{I_2}$ sont solutions de (5). Voyons si y peut se prolonger par continuité en 0. On a :

$$\lim_{x \to 0^-} y(x) = \lim_{x \to 0^-} C_1 \mathrm{e}^{-\frac{1}{x}} = \begin{cases} \pm\infty & \text{si } C_1 \neq 0 \\ 0 & \text{si } C_1 = 0 \end{cases}$$

Exercice 2

Étape 2 : a) Raccordements par continuité.
On va tenter de voir s'il existe des solutions de (5) sur $\mathbb{R}$. Regardons quelles solutions de (5) on peut prolonger par continuité en 0.

Soient $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ deux constantes et y la fonction définie sur $I_1 \cup I_2$ par

$$y(x) = \begin{cases} C_1 \mathrm{e}^{-\frac{1}{x}} & \text{si } x < 0 \\ C_2 \mathrm{e}^{-\frac{1}{x}} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Les restrictions $y|_{I_1}$ et $y|_{I_2}$ sont solutions de (5). Voyons si y peut se prolonger par continuité en 0. On a :

$$\lim_{x \to 0^-} y(x) = \lim_{x \to 0^-} C_1 \mathrm{e}^{-\frac{1}{x}} = \begin{cases} \pm\infty & \text{si } C_1 \neq 0 \\ 0 & \text{si } C_1 = 0 \end{cases}$$

et

$$\lim_{x \to 0^+} y(x) = \lim_{x \to 0^+} C_2 \mathrm{e}^{-\frac{1}{x}} = 0.$$

Exercice 2

Étape 2 : a) Raccordements par continuité.
On va tenter de voir s'il existe des solutions de (5) sur $\mathbb{R}$. Regardons quelles solutions de (5) on peut prolonger par continuité en 0.

Soient $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ deux constantes et y la fonction définie sur $I_1 \cup I_2$ par

$$y(x) = \begin{cases} C_1 \mathrm{e}^{-\frac{1}{x}} & \text{si } x < 0 \\ C_2 \mathrm{e}^{-\frac{1}{x}} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Les restrictions $y|_{I_1}$ et $y|_{I_2}$ sont solutions de (5). Voyons si y peut se prolonger par continuité en 0. On a :

$$\lim_{x \to 0^-} y(x) = \lim_{x \to 0^-} C_1 \mathrm{e}^{-\frac{1}{x}} = \begin{cases} \pm\infty & \text{si } C_1 \neq 0 \\ 0 & \text{si } C_1 = 0 \end{cases}$$

et

$$\lim_{x \to 0^+} y(x) = \lim_{x \to 0^+} C_2 \mathrm{e}^{-\frac{1}{x}} = 0.$$

Les limites sont égales si et seulement si $C_1 = 0$ donc y est prolongeable par continuité en 0 **si et seulement si** $C_1 = 0$.
Pour $C_1 = 0$, notons $\tilde{y}$ le prolongement par continuité de y tel que $\tilde{y}(0) = 0$.

Exercice 2

Étape 2 : b) Dérivabilité.

$\tilde{y}$ est dérivable et de dérivée continue sur $I_1 \cup I_2$. Regardons si $\tilde{y}$ est dérivable en 0.

Exercice 2

Étape 2 : b) Dérivabilité.

$\tilde{y}$ est dérivable et de dérivée continue sur $I_1 \cup I_2$. Regardons si $\tilde{y}$ est dérivable en 0.

On a :

$$y(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ C_2 \mathrm{e}^{-\frac{1}{x}} & \text{si } x > 0 \end{cases} \qquad \text{d'où} \qquad y'(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{C_2 \mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}}{x^2} & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

Ainsi,

$$\lim_{x \to 0^-} y'(x) = 0$$

et

$$\lim_{x \to 0^+} y'(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{C_2 \mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}}{x^2} = 0.$$

Finalement, pour toute constante $C_2 \in \mathbb{R}$, $\tilde{y}$ est dérivable en 0 et $\tilde{y}'(0) = 0$.

Exercice 2

Étape 2 : b) Dérivabilité.

$\tilde{y}$ est dérivable et de dérivée continue sur $I_1 \cup I_2$. Regardons si $\tilde{y}$ est dérivable en 0.

On a :

$$y(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ C_2 \mathrm{e}^{-\frac{1}{x}} & \text{si } x > 0 \end{cases} \quad \text{d'où} \quad y'(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{C_2 \mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}}{x^2} & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

Ainsi,

$$\lim_{x \to 0^-} y'(x) = 0$$

et

$$\lim_{x \to 0^+} y'(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{C_2 \mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}}{x^2} = 0.$$

Finalement, pour toute constante $C_2 \in \mathbb{R}$, $\tilde{y}$ est dérivable en 0 et $\tilde{y}'(0) = 0$.

Conclusion : Les solutions de (5) sur $\mathbb{R}$ sont de la forme :

$$\begin{aligned} y : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ C_2 \mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}, \ C_2 \in \mathbb{R} & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Exercice 3

Déterminer les solutions de l'équation différentielle linéaire d'ordre 1 suivante :

$$xy'(x) + 2y(x) = \frac{x}{1+x^2} \tag{6}$$

Exercice 3

Déterminer les solutions de l'équation différentielle linéaire d'ordre 1 suivante :

$$xy'(x) + 2y(x) = \frac{x}{1+x^2} \tag{6}$$

Étape 1 : On résout cette équation sur les intervalles $I_1 =]-\infty, 0[$ et $I_2 =]0, +\infty[$.

Exercice 3

Déterminer les solutions de l'équation différentielle linéaire d'ordre 1 suivante :

$$xy'(x) + 2y(x) = \frac{x}{1+x^2} \tag{6}$$

Étape 1 : On résout cette équation sur les intervalles $I_1 =]-\infty, 0[$ et $I_2 =]0, +\infty[$.
L'équation homogène normalisée est

$$y'(x) + \frac{2}{x}y(x) = 0$$

Exercice 3

Déterminer les solutions de l'équation différentielle linéaire d'ordre 1 suivante :

$$xy'(x) + 2y(x) = \frac{x}{1+x^2} \tag{6}$$

Étape 1 : On résout cette équation sur les intervalles $I_1 =]-\infty, 0[$ et $I_2 =]0, +\infty[$. L'équation homogène normalisée est

$$y'(x) + \frac{2}{x}y(x) = 0$$

Une primitive de $x \mapsto \frac{2}{x}$ est $x \mapsto 2\ln|x|$. Puisque $e^{-2\ln|x|} = \frac{1}{x^2}$, les solutions de (5) sur $I_1 =]-\infty, 0[$ et $I_2 =]0, +\infty[$ sont de la forme

Exercice 3

Déterminer les solutions de l'équation différentielle linéaire d'ordre 1 suivante :

$$xy'(x) + 2y(x) = \frac{x}{1+x^2} \tag{6}$$

Étape 1 : On résout cette équation sur les intervalles $I_1 =]-\infty, 0[$ et $I_2 =]0, +\infty[$.
L'équation homogène normalisée est

$$y'(x) + \frac{2}{x}y(x) = 0$$

Une primitive de $x \mapsto \frac{2}{x}$ est $x \mapsto 2\ln|x|$. Puisque $e^{-2\ln|x|} = \frac{1}{x^2}$, les solutions de (5) sur $I_1 =]-\infty, 0[$ et $I_2 =]0, +\infty[$ sont de la forme

$$y : I_1 \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{C_1}{x^2} \, ; C_1 \in \mathbb{R}$$

et

$$y : I_2 \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{C_2}{x^2} \, ; C_2 \in \mathbb{R} \, .$$

Exercice 3

Déterminer les solutions de l'équation différentielle linéaire d'ordre 1 suivante :

$$xy'(x) + 2y(x) = \frac{x}{1+x^2} \tag{6}$$

Étape 1 : On résout cette équation sur les intervalles $I_1 =]-\infty, 0[$ et $I_2 =]0, +\infty[$. L'équation homogène normalisée est

$$y'(x) + \frac{2}{x}y(x) = 0$$

Une primitive de $x \mapsto \frac{2}{x}$ est $x \mapsto 2\ln|x|$. Puisque $e^{-2\ln|x|} = \frac{1}{x^2}$, les solutions de (5) sur $I_1 =]-\infty, 0[$ et $I_2 =]0, +\infty[$ sont de la forme

$$y : I_1 \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{C_1}{x^2} \, ; C_1 \in \mathbb{R}$$

et

$$y : I_2 \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{C_2}{x^2} \, ; C_2 \in \mathbb{R} \, .$$

Cherchons une solution particulière y_p de (6) sur I_1 en utilisant la méthode de variation de la constante.

Exercice 3

On pose $y_p : I_1 \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{C_1(x)}{x^2}$.

Exercice 3

On pose $y_p : I_1 \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{C_1(x)}{x^2}$. On injecte dans (6) et on obtient pour tout $x \in I_1$:

$$\frac{C_1'(x)}{x} - 2x\frac{C_1(x)}{x^3} + 2\frac{C_1(x)}{x^2} = \frac{C_1'(x)}{x} - 2\frac{C_1(x)}{x^2} + 2\frac{C_1(x)}{x^2} = \frac{C_1'(x)}{x} = \frac{x}{1+x^2}.$$

Une fois extrait C_1', on applique une division euclidienne pour calculer la primitive de la fraction rationnelle obtenue :

$$C_1'(x) = \frac{x^2}{1+x^2} = \frac{x^2+1-1}{1+x^2} = 1 - \frac{1}{1+x^2}$$

Exercice 3

On pose $y_p : I_1 \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{C_1(x)}{x^2}$. On injecte dans (6) et on obtient pour tout $x \in I_1$:

$$\frac{C_1'(x)}{x} - 2x\frac{C_1(x)}{x^3} + 2\frac{C_1(x)}{x^2} = \frac{C_1'(x)}{x} - 2\frac{C_1(x)}{x^2} + 2\frac{C_1(x)}{x^2} = \frac{C_1'(x)}{x} = \frac{x}{1+x^2}.$$

Une fois extrait C_1', on applique une division euclidienne pour calculer la primitive de la fraction rationnelle obtenue :

$$C_1'(x) = \frac{x^2}{1+x^2} = \frac{x^2+1-1}{1+x^2} = 1 - \frac{1}{1+x^2}$$

Une primitive de C_1' sur I_1 est $C_1 : I_1 \to \mathbb{R}, x \mapsto x - \arctan(x)$ et la solution particulière associée est $y_p : I_1 \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{x-\arctan(x)}{x^2}$.

Exercice 3

On pose $y_p : I_1 \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{C_1(x)}{x^2}$. On injecte dans (6) et on obtient pour tout $x \in I_1$:

$$\frac{C_1'(x)}{x} - 2x\frac{C_1(x)}{x^3} + 2\frac{C_1(x)}{x^2} = \frac{C_1'(x)}{x} - 2\frac{C_1(x)}{x^2} + 2\frac{C_1(x)}{x^2} = \frac{C_1'(x)}{x} = \frac{x}{1+x^2}.$$

Une fois extrait C_1', on applique une division euclidienne pour calculer la primitive de la fraction rationnelle obtenue :

$$C_1'(x) = \frac{x^2}{1+x^2} = \frac{x^2+1-1}{1+x^2} = 1 - \frac{1}{1+x^2}$$

Une primitive de C_1' sur I_1 est $C_1 : I_1 \to \mathbb{R}, x \mapsto x - \arctan(x)$ et la solution particulière associée est $y_p : I_1 \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{x-\arctan(x)}{x^2}$.

Finalement, les solutions de (6) sur I_1 sont de la forme :

$$\begin{aligned} y : I_1 &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{C_1 + x - \arctan(x)}{x^2}, \ C_1 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Exercice 3

On pose $y_p : I_1 \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{C_1(x)}{x^2}$. On injecte dans (6) et on obtient pour tout $x \in I_1$:

$$\frac{C_1'(x)}{x} - 2x\frac{C_1(x)}{x^3} + 2\frac{C_1(x)}{x^2} = \frac{C_1'(x)}{x} - 2\frac{C_1(x)}{x^2} + 2\frac{C_1(x)}{x^2} = \frac{C_1'(x)}{x} = \frac{x}{1+x^2}.$$

Une fois extrait C_1', on applique une division euclidienne pour calculer la primitive de la fraction rationnelle obtenue :

$$C_1'(x) = \frac{x^2}{1+x^2} = \frac{x^2+1-1}{1+x^2} = 1 - \frac{1}{1+x^2}$$

Une primitive de C_1' sur I_1 est $C_1 : I_1 \to \mathbb{R}, x \mapsto x - \arctan(x)$ et la solution particulière associée est $y_p : I_1 \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{x - \arctan(x)}{x^2}$.

Finalement, les solutions de (6) sur I_1 sont de la forme :

$$\begin{aligned} y : I_1 &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{C_1 + x - \arctan(x)}{x^2}, \quad C_1 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

De même, les solutions de (6) sur I_2 sont de la forme :

$$\begin{aligned} y : I_2 &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{C_2 + x - \arctan(x)}{x^2}, \quad C_2 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Exercice 3

Étape 2 : a) Raccordements par continuité.
On cherche les raccordements possibles afin de voir s'il existe des solutions de (6) définies sur $\mathbb{R}$.

Exercice 3

Étape 2 : a) Raccordements par continuité.
On cherche les raccordements possibles afin de voir s'il existe des solutions de (6) définies sur $\mathbb{R}$.

Soient C_1 et C_2 deux réels et $y : I_1 \cup I_2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$y(x) = \begin{cases} \frac{C_1 + x - \arctan(x)}{x^2} & \text{si } x < 0 \\ \frac{C_2 + x - \arctan(x)}{x^2} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Exercice 3

Étape 2 : a) Raccordements par continuité.
On cherche les raccordements possibles afin de voir s'il existe des solutions de (6) définies sur $\mathbb{R}$.

Soient C_1 et C_2 deux réels et $y : I_1 \cup I_2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$y(x) = \begin{cases} \frac{C_1 + x - \arctan(x)}{x^2} & \text{si } x < 0 \\ \frac{C_2 + x - \arctan(x)}{x^2} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Pour étudier le comportement en 0 de cette fonction, on utilise un équivalent. On a :

$$\arctan(\mathrm{x}) = x - \frac{x^3}{3} + o(x^3) \quad \text{de sorte que} \quad x - \arctan(x) = \frac{x^3}{3} + o(x^3).$$

Exercice 3

Étape 2 : a) Raccordements par continuité.
On cherche les raccordements possibles afin de voir s'il existe des solutions de (6) définies sur $\mathbb{R}$.

Soient C_1 et C_2 deux réels et $y : I_1 \cup I_2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$y(x) = \begin{cases} \frac{C_1 + x - \arctan(x)}{x^2} & \text{si } x < 0 \\ \frac{C_2 + x - \arctan(x)}{x^2} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Pour étudier le comportement en 0 de cette fonction, on utilise un équivalent. On a :

$$\arctan(\mathrm{x}) = x - \frac{x^3}{3} + o(x^3) \quad \text{de sorte que} \quad x - \arctan(x) = \frac{x^3}{3} + o(x^3).$$

On en déduit que :

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0^-} y(x) &= \lim_{x\to 0^-} \frac{C_1 + x - \arctan(x)}{x^2} = \lim_{x\to 0^-} \left(\frac{C_1}{x^2} + \frac{x}{3} + o(x) \right) \\ &= \lim_{x\to 0^-} \frac{C_1}{x^2} = \begin{cases} \pm\infty & \text{si } C_1 \neq 0 \\ 0 & \text{si } C_1 = 0 \end{cases}, \end{aligned}$$

de même

$$\lim_{x\to 0^+} y(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{C_2 + x - \arctan(x)}{x^2} = \begin{cases} \pm\infty & \text{si } C_2 \neq 0 \\ 0 & \text{si } C_2 = 0 \end{cases}.$$

Exercice 3

On rappelle que y n'est prolongeable par continuité que si elle admet des limites finies et égales à gauche et à droite. Dès lors, la seule fonction y prolongeable par continuité en 0 est celle donnée pour $C_1 = 0$ et $C_2 = 0$:

$$\begin{aligned} y : & I_1 \cup I_2 \to \mathbb{R} \\ & x \mapsto \begin{cases} \frac{x - \arctan(x)}{x^2}, & \text{si } x \in I_1 \\ \frac{x - \arctan(x)}{x^2}, & \text{si } x \in I_2. \end{cases} \end{aligned}$$

Notons $\tilde{y}$ le prolongement de y en 0 avec $\tilde{y}(0) = 0$.

Exercice 3

On rappelle que y n'est prolongeable par continuité que si elle admet des limites finies et égales à gauche et à droite. Dès lors, la seule fonction y prolongeable par continuité en 0 est celle donnée pour $C_1 = 0$ et $C_2 = 0$:

$$y : I_1 \cup I_2 \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \begin{cases} \frac{x - \arctan(x)}{x^2}, & \text{si } x \in I_1 \\ \frac{x - \arctan(x)}{x^2}, & \text{si } x \in I_2. \end{cases}$$

Notons $\tilde{y}$ le prolongement de y en 0 avec $\tilde{y}(0) = 0$.

Étape 2 : b) Dérivabilité.

Par construction, $\tilde{y}$ est dérivable et de dérivée continue sur I_1 et I_2. Regardons ce qu'il en est en 0. Dans les exercices précédents, nous avons calculer la dérivée de y. Une autre possibilité est d'utiliser l'équation (6) normalisée :

$$y'(x) + 2\frac{y(x)}{x} = \frac{1}{1+x^2} \quad \text{qui nous donne} \quad y'(x) = \frac{1}{1+x^2} - 2\frac{y(x)}{x}.$$

Exercice 3

En réutilisant le développement limité précédent, on déduit les limites suivantes :

$$\lim_{x\to 0^-} y'(x) = \lim_{x\to 0^-} \left(\frac{1}{1+x^2} - 2\frac{x - \arctan(x)}{x^3} \right) = 1 - \lim_{x\to 0^-} \left(2\frac{\frac{x^3}{3} + o(x^3)}{x^3} \right) = \frac{1}{3}$$

et de même

$$\lim_{x\to 0^+} y'(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{1+x^2} - 2\frac{x - \arctan(x)}{x^3} = \frac{1}{3}$$

Les limites étant finies et égales, $\tilde{y}$ est dérivable en 0 (de plus $\tilde{y}'(0) = 0$).

Exercice 3

En réutilisant le développement limité précédent, on déduit les limites suivantes :

$$\lim_{x\to 0^-} y'(x) = \lim_{x\to 0^-} \left(\frac{1}{1+x^2} - 2\frac{x-\arctan(x)}{x^3} \right) = 1 - \lim_{x\to 0^-} \left(2\frac{\frac{x^3}{3} + o(x^3)}{x^3} \right) = \frac{1}{3}$$

et de même

$$\lim_{x\to 0^+} y'(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{1+x^2} - 2\frac{x-\arctan(x)}{x^3} = \frac{1}{3}$$

Les limites étant finies et égales, $\tilde{y}$ est dérivable en 0 (de plus $\tilde{y}'(0) = 0$).

Conclusion : Finalement, l'unique solution de (6) définie sur $\mathbb{R}$ est :

$$\begin{aligned} \tilde{y} :& \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ & x \mapsto \frac{x-\arctan(x)}{x^2} \end{aligned}$$

Exercice 4

Déterminer les solutions de l'équation différentielle linéaire d'ordre 1 suivante :

$$(\cos x)^2 y'(x) - y(x) = \exp(\tan(x)) \tag{7}$$

Exercice 4

Déterminer les solutions de l'équation différentielle linéaire d'ordre 1 suivante :

$$(\cos x)^2 y'(x) - y(x) = \exp(\tan(x)) \tag{7}$$

Étape 1 : La fonction tangente est définie par périodicité sur l'ensemble $D = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} I_k$ où $I_k =]\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + (k+1)\pi[$. De plus, la fonction cosinus ne s'annule pas sur les intervalles I_k. Cherchons donc les solutions sur un intervalle I_k pour $k \in \mathbb{Z}$ quelconque.

Exercice 4

Déterminer les solutions de l'équation différentielle linéaire d'ordre 1 suivante :

$$(\cos x)^2 y'(x) - y(x) = \exp(\tan(x)) \tag{7}$$

Étape 1 : La fonction tangente est définie par périodicité sur l'ensemble $D = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} I_k$ où $I_k =]\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + (k+1)\pi[$. De plus, la fonction cosinus ne s'annule pas sur les intervalles I_k. Cherchons donc les solutions sur un intervalle I_k pour $k \in \mathbb{Z}$ quelconque. L'équation homogène normalisée est

$$y'(x) - \frac{1}{\cos^2 x} y(x) = 0.$$

Exercice 4

Déterminer les solutions de l'équation différentielle linéaire d'ordre 1 suivante :

$$(\cos x)^2 y'(x) - y(x) = \exp(\tan(x)) \tag{7}$$

Étape 1 : La fonction tangente est définie par périodicité sur l'ensemble $D = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} I_k$ où $I_k =]\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + (k+1)\pi[$. De plus, la fonction cosinus ne s'annule pas sur les intervalles I_k. Cherchons donc les solutions sur un intervalle I_k pour $k \in \mathbb{Z}$ quelconque. L'équation homogène normalisée est

$$y'(x) - \frac{1}{\cos^2 x} y(x) = 0.$$

On rappelle que $x \mapsto \frac{1}{\cos^2 x}$ est la dérivée de la fonction tangente de sorte que les solutions sur I_k de l'équation homogène sont de la forme :

$$\begin{aligned} y : & I_k \to \mathbb{R} \\ & x \mapsto C_k \exp(\tan(x)), \quad C_k \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Exercice 4

Cherchons une solution particulière y_p de (7) sur I_k avec la méthode de la variation de la constante, à savoir une solution de la forme $y_p : I_k \to \mathbb{R}, x \mapsto C_k(x) \exp(\tan(x))$.

Exercice 4

Cherchons une solution particulière y_p de (7) sur I_k avec la méthode de la variation de la constante, à savoir une solution de la forme $y_p : I_k \to \mathbb{R}, x \mapsto C_k(x) \exp(\tan(x))$.

En injectant y_p dans (7), on a pour tout $x \in I_k$:

$$C_k'(x) = \frac{1}{(\cos x)^2}$$

Ainsi $C_k(x) = \tan(x)$ convient et la solution particulière obtenue est

$$y_p : I_k \to \mathbb{R}, x \mapsto \tan(x) \exp(\tan(x)).$$

Exercice 4

Cherchons une solution particulière y_p de (7) sur I_k avec la méthode de la variation de la constante, à savoir une solution de la forme $y_p : I_k \to \mathbb{R}, x \mapsto C_k(x) \exp(\tan(x))$.

En injectant y_p dans (7), on a pour tout $x \in I_k$:

$$C_k'(x) = \frac{1}{(\cos x)^2}$$

Ainsi $C_k(x) = \tan(x)$ convient et la solution particulière obtenue est

$$y_p : I_k \to \mathbb{R}, x \mapsto \tan(x) \exp(\tan(x)).$$

Les solutions de (7) sur I_k sont donc de la forme :

$$\begin{aligned} y : & I_k \to \mathbb{R} \\ & x \mapsto (\tan(x) + C_k) \exp(\tan(x)), \;\; C_k \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Exercice 4

Étape 2 : a) Raccordements par continuité.
On va chercher les raccordements possibles entre deux intervalles consécutifs

$$I_k = \left] \frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + (k+1)\pi \right[\quad \text{et} \quad I_{k+1} = \left] \frac{\pi}{2} + (k+1)\pi, \frac{\pi}{2} + (k+2)\pi \right[.$$

Ces deux intervalles sont séparés par le point $z_{k+1} = \frac{\pi}{2} + (k+1)\pi$.

Si on établit un raccord entre ces deux intervalles pour un entier relatif k quelconque, on aura montré l'existence d'un raccord entre tout couple d'intervalles consécutifs et on pourra en déduire des prolongements définis sur $\mathbb{R}$.

Exercice 4

Étape 2 : a) Raccordements par continuité.
On va chercher les raccordements possibles entre deux intervalles consécutifs

$$I_k = \left]\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + (k+1)\pi\right[\quad \text{et} \quad I_{k+1} = \left]\frac{\pi}{2} + (k+1)\pi, \frac{\pi}{2} + (k+2)\pi\right[.$$

Ces deux intervalles sont séparés par le point $z_{k+1} = \frac{\pi}{2} + (k+1)\pi$.

Si on établit un raccord entre ces deux intervalles pour un entier relatif k quelconque, on aura montré l'existence d'un raccord entre tout couple d'intervalles consécutifs et on pourra en déduire des prolongements définis sur $\mathbb{R}$.

Pour $k \in \mathbb{Z}$ donné, soit y la fonction définie sur $I_k \cup I_{k+1}$ par :

$$\begin{aligned} y : I_k \cup I_{k+1} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \begin{cases} (\tan(x) + C_k) \exp(\tan(x)), & \text{si } x \in I_k \\ (\tan(x) + C_{k+1}) \exp(\tan(x)), & \text{si } x \in I_{k+1} \end{cases} \end{aligned}$$

Exercice 4

Étape 2 : a) Raccordements par continuité.
On va chercher les raccordements possibles entre deux intervalles consécutifs

$$I_k = \left] \frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + (k+1)\pi \right[\quad \text{et} \quad I_{k+1} = \left] \frac{\pi}{2} + (k+1)\pi, \frac{\pi}{2} + (k+2)\pi \right[.$$

Ces deux intervalles sont séparés par le point $z_{k+1} = \frac{\pi}{2} + (k+1)\pi$.
Si on établit un raccord entre ces deux intervalles pour un entier relatif k quelconque, on aura montré l'existence d'un raccord entre tout couple d'intervalles consécutifs et on pourra en déduire des prolongements définis sur $\mathbb{R}$.

Pour $k \in \mathbb{Z}$ donné, soit y la fonction définie sur $I_k \cup I_{k+1}$ par :

$$\begin{aligned} y : I_k \cup I_{k+1} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \begin{cases} (\tan(x) + C_k)\exp(\tan(x)), & \text{si } x \in I_k \\ (\tan(x) + C_{k+1})\exp(\tan(x)), & \text{si } x \in I_{k+1} \end{cases} \end{aligned}$$

Notons y_k et y_{k+1} les restrictions de y à I_k et I_{k+1}. Par construction, y_k et y_{k+1} sont solutions de (7).
Regardons si l'on peut prolonger y par continuité en z_{k+1}.

Exercice 4

Nous avons :

$$\lim_{x \to z_{k+1}^+} y(x) = \lim_{x \to z_{k+1}^+} y_{k+1}(x) = \lim_{x \to z_{k+1}^+} (\tan(x) + C_{k+1}) \exp(\tan(x)) = 0$$

et

$$\lim_{x \to z_{k+1}^-} y(x) = \lim_{x \to z_{k+1}^-} y_k(x) = \lim_{x \to z_{k+1}^-} (\tan(x) + C_k) \exp(\tan(x)) = +\infty$$

Ainsi y ne peut être prolongée par continuité en z_{k+1}.

Exercice 4

Nous avons :

$$\lim_{x \to z_{k+1}^+} y(x) = \lim_{x \to z_{k+1}^+} y_{k+1}(x) = \lim_{x \to z_{k+1}^+} (\tan(x) + C_{k+1}) \exp(\tan(x)) = 0$$

et

$$\lim_{x \to z_{k+1}^-} y(x) = \lim_{x \to z_{k+1}^-} y_k(x) = \lim_{x \to z_{k+1}^-} (\tan(x) + C_k) \exp(\tan(x)) = +\infty$$

Ainsi y ne peut être prolongée par continuité en z_{k+1}.

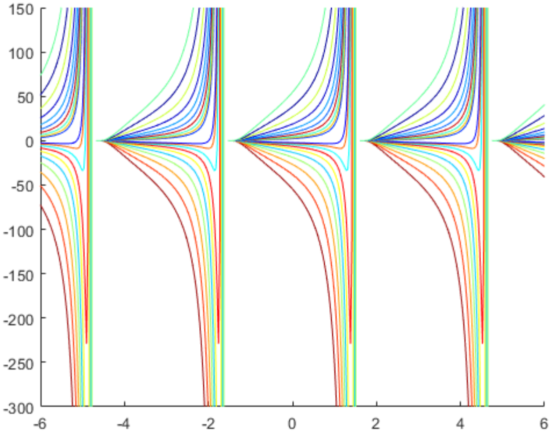
Conclusion : Il n'existe aucune solution de (7) définie sur $\mathbb{R}$.

Vérifions ce résultat graphiquement. On affiche ci-après quelques solutions

$$\begin{aligned} y : I_k &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto (\tan(x) + C_k) \exp(\tan(x)), \; C_k \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

pour différents intervalles I_k et pour un jeu de constantes C_k identiques sur chaque I_k.

Exercice 4



À chaque couleur correspond une constante. On observe ainsi la périodicité des solutions y sur à travers les intervalles I_k. On retrouve que la limite vers la borne inférieure des I_k est 0 (au voisinage de z_{k+1}^{+}). Il faut observer un peu plus attentivement les courbes au voisinage des bornes supérieures (au voisinage de z_{k+1}^{-}) pour se rendre compte que même les courbes qui semblent plonger vers $-\infty$ remontent en fait très brusquement vers $+\infty$.

Exercice 5 : Conditions initiales

1) Retour sur l'Exercice 1.
Les solutions trouvées sur $\mathbb{R}$ étaient de la forme :

$$\begin{aligned} y : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \begin{cases} (C_1 + x)x^2 & \text{si } x \leq 0 \\ (C_2 + x)x^2 & \text{si } x > 0 \end{cases} \end{aligned}$$

où C_1 et C_2 sont des constantes de $\mathbb{R}$ (que l'on peut choisir indépendamment l'une de l'autre).
a) Déterminez les solutions telles que $y(-1) = 0$.
b) Déterminez les solutions telles que $y(-1) = y(1) = 0$.

2) Retour sur l'Exercice 2.
Les solutions trouvées sur $\mathbb{R}$ étaient de la forme :

$$\begin{aligned} y : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ C\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}},\ C \in \mathbb{R} & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

a) Déterminez les solutions telles que $y(-1) = 0$.
b) Déterminez les solutions telles que $y(1) = 1$

Exercice 5

$$y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \begin{cases} (C_1 + x)x^2 & \text{si } x \leq 0 \\ (C_2 + x)x^2 & \text{si } x > 0 \end{cases} \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

1. a) Déterminons les solutions telles que $y(-1) = 0$.

Exercice 5

$$y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \begin{cases} (C_1 + x)x^2 & \text{si } x \leq 0 \\ (C_2 + x)x^2 & \text{si } x > 0 \end{cases} \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

1. a) Déterminons les solutions telles que $y(-1) = 0$.

Déterminons les conditions nécessaires sur C_1 et C_2 pour que la solution y respecte la contrainte $y(-1) = 0$.

Nous avons

$$y(-1) = (C_1 - 1)(-1)^2 = C_1 - 1 = 0 \iff C_1 = 1$$

Tous les choix de C_2 sont donc valides (puisqu'on cherche toutes les solutions satisfaisant $y(-1) = 0$, on garde toutes les constantes $C_2 \in \mathbb{R}$).
Par conséquent, les solutions telles que $y(-1) = 0$ sont de la forme :

$$y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \begin{cases} (1 + x)x^2 & \text{si } x \leq 0 \\ (C_2 + x)x^2, \;\; C_2 \in \mathbb{R} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Exercice 5

$$
\begin{aligned}
y : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\
x &\mapsto \begin{cases} (C_1 + x)x^2 & \text{si } x \leq 0 \\ (C_2 + x)x^2 & \text{si } x > 0 \end{cases} \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}
\end{aligned}
$$

1. b) Déterminons les solutions telles que $y(-1) = y(1) = 0$.

Exercice 5

$$\begin{aligned} y : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \begin{cases} (C_1 + x)x^2 & \text{si } x \leq 0 \\ (C_2 + x)x^2 & \text{si } x > 0 \end{cases} \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

1. b) Déterminons les solutions telles que $y(-1) = y(1) = 0$.

Déterminons les conditions nécessaires sur C_1 et C_2 pour que la solution y respecte la contrainte $y(-1) = y(1) = 0$.

Nous avons

$$y(-1) = (C_1 - 1)(-1)^2 = C_1 - 1 = 0 \iff C_1 = 1$$

et

$$y(1) = (C_2 + 1)(1)^2 = C_2 + 1 = 0 \iff C_2 = -1$$

Par conséquent, il existe une unique solution définie sur $\mathbb{R}$ et telle que $y(1) = y(-1) = 0$. Elle est donnée par :

$$\begin{aligned} y : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \begin{cases} (x + 1)x^2 & \text{si } x \leq 0 \\ (x - 1)x^2 & \text{si } x > 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Exercice 5

$$y : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ C\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

2. a) Déterminons les solutions telles que $y(-1) = 0$.

Déterminons les conditions nécessaires sur C pour que la solution y respecte la contrainte $y(-1) = 0$.

Exercice 5

$$y : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ C\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}, \qquad C \in \mathbb{R}\,.$$

2. a) Déterminons les solutions telles que $y(-1) = 0$.

Déterminons les conditions nécessaires sur C pour que la solution y respecte la contrainte $y(-1) = 0$.

Nous avons :

$$y(-1) = 0$$

Toutes les solutions sur $\mathbb{R}$ vérifient cette condition. Ainsi les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'Exercice 2 vérifiant $y(-1) = 0$ sont de la forme :

$$y : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ C\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}},\ C \in \mathbb{R} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Exercice 5

$$y : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ C\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}, \qquad C \in \mathbb{R}\,.$$

2. b) Déterminons les solutions telles que $y(1) = 0$.

Exercice 5

$$y : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ C\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

2. b) Déterminons les solutions telles que $y(1) = 0$.

Déterminons les conditions nécessaires sur C pour que la solution y respecte la contrainte $y(1) = 0$.

$$y(1) = C\ \mathrm{e}^{-1} = 0 \iff C = 0 \quad (e^{-1} \neq 0)$$

Exercice 5

$$y : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ C\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

2. b) Déterminons les solutions telles que $y(1) = 0$.

Déterminons les conditions nécessaires sur C pour que la solution y respecte la contrainte $y(1) = 0$.

$$y(1) = C\,\mathrm{e}^{-1} = 0 \iff C = 0 \quad (e^{-1} \neq 0)$$

Il existe donc une unique solution vérifiant $y(1) = 0$ et elle correspond à la fonction nulle.

$$y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto 0$$

Remarque et conclusion de l'Exercice 5 : Si l'ensemble des solutions d'une équation différentielle dépend de n constantes indépendantes entre elles, il faut au moins n conditions initiales pour spécifier ces constantes.