Université de Paris
UFR de Mathématiques et Informatique
45, rue des Saints-Pères, 75006, Paris.

Licence $1^{\text{ère}}$ année, Groupe 5, Mathématiques et Calcul 2 (MC2)

Devoir Maison n°1 : intégrales et primitives

À rendre avant le **lundi 1 mars à 17h** par email

On pensera à bien détailler les raisonnements et justifier les réponses. On pourra s'aider de la rédaction des réponses vue en TD.

Exercice 1 Déterminer l'ensemble des primitives de la fonction $f : x \mapsto \frac{e^x+1}{e^{3x}-e^{2x}-2e^x}$.

Correction. Déterminons d'abord l'ensemble de définition de f. Le dénominateur s'annule pour les $x \in \mathbb{R}$ vérifiant $e^{3x} - e^{2x} - 2e^x = 0$, i.e. $(e^x)^3 - (e^x)^2 - 2e^x = 0$. Or le polynôme $X^3 - X^2 - 2X$ admet pour racines $\{0, -1, 2\}$, donc comme $e^x > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, seul $x = \ln(2)$ annule le dénominateur. On a ainsi $\mathrm{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{\ln(2)\}$. La fonction f est continue sur D_f et admet donc des primitives. Soit $[x_0, x] \subset \mathrm{D}_f$ et considérons $\int_{x_0}^{x} f(t)dt$. Faisons le changement de variable $u = e^t$, alors $du = dte^t = udt$, d'où

$$\int_{x_0}^{x} f(t)dt = \int_{e^{x_0}}^{e^x} \frac{u+1}{u^3-u^2-2u}\frac{du}{u} = \int_{e^{x_0}}^{e^x} \frac{u+1}{u^2(u+1)(u-2)}du, = \int_{e^{x_0}}^{e^x} \frac{1}{u^2(u-2)}du.$$

Effectuons une décomposition en éléments simples de $\frac{1}{u^2(u-2)}$ pour tout $u \in \mathbb{R} \setminus \{0, 2\}$. On a pour tout $u \in \mathbb{R} \setminus \{0, 2\}$

$$\frac{1}{u^2(u-2)} = \frac{a_0}{u} + \frac{a_1}{u^2} + \frac{b_0}{u-2},$$

avec $a_0, a_1, b_0 \in \mathbb{R}$. En multipliant par u^2 à gauche et à droite et en faisant $u \to 0$, on trouve $a_1 = -\frac{1}{2}$. En multipliant par $u - 2$ à gauche et à droite et en faisant $u \to 2$, on trouve $b_0 = \frac{1}{4}$. En prenant par exemple la valeur $u = 1$, on trouve $-1 = a_0 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}$, i.e. $a_0 = -\frac{1}{4}$. On a donc

$$\begin{aligned}\int_{x_0}^{x} f(t)dt &= -\frac{1}{4}\int_{e^{x_0}}^{e^x} \frac{1}{u}du - \frac{1}{2}\int_{e^{x_0}}^{e^x} \frac{1}{u^2}du + \frac{1}{4}\int_{e^{x_0}}^{e^x} \frac{1}{u-2}du,\\ &= -\frac{1}{4}\ln(e^x) + \frac{1}{2}\frac{1}{e^x} + \frac{1}{4}\ln(|e^x-2|) + cste.\end{aligned}$$

Une primitive de f sur D_f est donc donnée par la fonction $F : x \in \mathrm{D}_f \mapsto -\frac{x}{4} + \frac{e^{-x}}{2} + \frac{1}{4}\ln(|e^x - 2|)$. Si $x < \ln(2)$, alors F se réécrit $F : x \in \mathrm{D}_f \mapsto -\frac{x}{4} + \frac{e^{-x}}{2} + \frac{1}{4}\ln(2 - e^x)$ (car $|e^x - 2| = 2 - e^x$). Si $x > \ln(2)$, alors F se réécrit $F : x \in \mathrm{D}_f \mapsto -\frac{x}{4} + \frac{e^{-x}}{2} + \frac{1}{4}\ln(e^x - 2)$ (car $|e^x - 2| = e^x - 2$). On conclut que l'ensemble des primitives de f sur D_f est $\{x \in \mathrm{D}_f \mapsto F(x) + c : c \in \mathbb{R}\}$.

Exercice 2 Déterminer l'ensemble des primitives de la fonction $g : x \mapsto \frac{1}{1+\operatorname{sh}(x)+4\operatorname{ch}(x)}$.

Correction. On a pour tout $x \in \mathbb{R}$, $1+\operatorname{sh} x+4\operatorname{ch} x = 1+\frac{e^x-e^{-x}}{2}+2(e^x+e^{-x}) = \frac{2+5e^x+3e^{-x}}{2} > 0$. La fonction g est donc définie sur $\mathbb{R}$ et elle est continue. Soit $[x_0, x]$ un segment de $\mathbb{R}$ et considérons $\int_{x_0}^x g(t)dt$. On a d'après le précédent calcul

$$\int_{x_0}^x g(t)dt = 2\int_{x_0}^x \frac{1}{2+5e^t+3e^{-t}}dt = 2\int_{e^{x_0}}^{e^x} \frac{1}{2+5u+3\frac{1}{u}}\frac{du}{u} = 2\int_{e^{x_0}}^{e^x} \frac{1}{3+2u+5u^2}du,$$

où, pour obtenir l'avant dernière égalité, on a fait le changement de variable $u = e^t$ $(du = udt)$. On sait que le dénominateur ne s'annule pas (il n'est pas pas possible de le factoriser sur $\mathbb{R}$), donc procédons plutôt à une mise en forme canonique

$$2\frac{1}{3+2u+5u^2} = \frac{2}{5}\frac{1}{u^2+\frac{2}{5}u+\frac{3}{5}} = \frac{2}{5}\frac{1}{\left(u+\frac{1}{5}\right)^2+\frac{3}{5}-\frac{1}{25}} = \frac{2}{5}\frac{1}{\left(u+\frac{1}{5}\right)^2+\frac{14}{25}} = \frac{5}{7}\frac{1}{\left(\frac{5u+1}{\sqrt{14}}\right)^2+1}.$$

Ansi

$$\int_{x_0}^x g(t)dt = \frac{5}{7}\int_{e^{x_0}}^{e^x} \frac{1}{\left(\frac{5u+1}{\sqrt{14}}\right)^2+1}du.$$

Par le changement de variable $v = \frac{5u+1}{\sqrt{14}}$ $(dv = \frac{5}{\sqrt{14}}du)$, on obtient

$$\int_{x_0}^x g(t)dt = \frac{\sqrt{14}}{7}\int_{\frac{5e^{x_0}+1}{\sqrt{14}}}^{\frac{5e^x+1}{\sqrt{14}}} \frac{1}{v^2+1}dv = \frac{\sqrt{14}}{7}\arctan\left(\frac{5e^x+1}{\sqrt{14}}\right) + cste.$$

Ainsi, la fonction $G : x \in \mathbb{R} \mapsto \frac{\sqrt{14}}{7}\arctan\left(\frac{5e^x+1}{\sqrt{14}}\right)$ est une primitive de g sur $\mathbb{R}$. On conclut que l'ensemble des primitives de g sur $\mathbb{R}$ est $\{x \in \mathbb{R} \mapsto G(x)+c : c \in \mathbb{R}\}$.

Exercice 3 Déterminer l'ensemble des primitives de la fonction $x \mapsto \frac{1}{\cos(x)\cos(2x)}$. On pensera à faire le changement de variable $u = \sin(x)$ et à utiliser la formule $\cos(2x) = 1-2\sin(x)^2$.
Correction. On a $D_h = \mathbb{R}\backslash\{\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2} : k \in \mathbb{Z}\}$ et h est continue sur D_h. Soit $[x_0, x] \subset D_h$ et considérons $\int_{x_0}^x \frac{1}{\cos(t)\cos(2t)}dt$. Par le changement de variable $u = \sin t$, donc $du = \cos(t)dt$, on obtient

$$\int_{x_0}^x \frac{1}{\cos(t)\cos(2t)}dt = \int_{x_0}^x \frac{1}{\cos(t)^2\cos(2t)}\cos(t)dt = \int_{\sin x_0}^{\sin x} \frac{1}{(u^2-1)(2u^2-1)}du.$$

On a pour tout $u \in \mathbb{R} \setminus \{\pm 1, \pm\sqrt{2}\}$, d'après la formule de décomposition en éléments simples

$$\frac{1}{(u^2-1)(2u^2-1)} = \frac{\frac{1}{2}}{(u-1)(u+1)(u-\frac{\sqrt{2}}{2})(u+\frac{\sqrt{2}}{2})} = \frac{a_0}{u-1}+\frac{b_0}{u+1}+\frac{c_0}{u-\frac{1}{\sqrt{2}}}+\frac{d_0}{u+\frac{1}{\sqrt{2}}}.$$

En multipliant à gauche et à droite par $u-1$ et en faisant $u \to 1$, on obtient $a_0 = \frac{1}{2}$. En procédant de la même manière, on trouve $b_0 = -\frac{1}{2}, c_0 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $d_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}$. On déduit ainsi que

$$\int_{x_0}^x \frac{1}{\cos(t)\cos(2t)}dt = \frac{1}{2}\ln(1-\sin x) - \frac{1}{2}\ln(1+\sin x)\ldots$$

$$\ldots - \frac{\sqrt{2}}{2}\ln(|\sin x - \frac{\sqrt{2}}{2}|) + \frac{\sqrt{2}}{2}\ln(|\sin x + \frac{\sqrt{2}}{2}|) + cste.$$

Ainsi, la fonction $H : x \in \mathrm{D}_h \mapsto \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1-\sin x}{1+\sin x}\right) + \frac{\sqrt{2}}{2}\ln\left(\left|\frac{\sin x+\frac{\sqrt{2}}{2}}{\sin x-\frac{\sqrt{2}}{2}}\right|\right)$ est une primitive de h sur D_h. On peut réécrire H sans valeurs absolues, par exemple sur $I =]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}[$ alors $H : x \in \mathrm{D}_h \mapsto \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1-\sin x}{1+\sin x}\right) + \frac{\sqrt{2}}{2}\ln\left(\frac{\sin x+\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}-\sin x}\right)$. Dans tous les cas, on conclut que l'ensemble des primitives de h sur D_h est $\{x \in D_h \mapsto H(x)+c : c \in \mathbb{R}\}$.

Exercice 4 Donner la nature de l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(1+\frac{1}{\sqrt{t}})\ln(t)}{t}dt$.

Correction. Notons pour tout $t \geqslant 1$, $\varphi(t) = \frac{\ln(1+\frac{1}{\sqrt{t}})\ln(t)}{t}$. La fonction h est continue et positive sur $[1,+\infty[$. On a

$$\varphi(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{\frac{1}{\sqrt{t}}\ln(t)}{t} = \frac{\ln(t)}{t^{\frac{3}{2}}}.$$

Ainsi comme h et $t \mapsto \frac{\ln(t)}{t^{\frac{3}{2}}}$ sont positives sur $[1,+\infty[$, d'après le théorème de comparaison par relation d'équivalence, la nature de leur intégrale est la même. On est donc ramené à étudier la nature de $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t^{\frac{3}{2}}}dt$. Or on sait que

$$t^{1+\frac{1}{4}}\frac{\ln(t)}{t^{\frac{3}{2}}} = \frac{\ln(t)}{t^{\frac{1}{4}}} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

donc pour tout t suffisamment grand, $t^{1+\frac{1}{4}}\frac{\ln(t)}{t^{\frac{3}{2}}} \leqslant 1$, i.e. $\frac{\ln(t)}{t^{\frac{3}{2}}} \leqslant \frac{1}{t^{1+\frac{1}{4}}}$. La fonction $t \mapsto \frac{1}{t^{1+\frac{1}{4}}}$ est positive et d'intégrale convergente sur $[1,+\infty[$ (intégrale de Riemann), donc par le théorème de comparaison, on en déduit que $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t^{\frac{3}{2}}}dt$ est convergente. Finalement $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(1+\frac{1}{\sqrt{t}})\ln(t)}{t}dt$ est aussi convergente.