6/21 Retravailler la rédaction.

BARTHEL
Tristan

Devoir Maison n°2

Exercice 1 2/8

Soit $y'(x) - y(x) = \frac{1}{(e^{-x}-1)^2} - \frac{1}{e^{-x}-2} - \frac{1}{e^{-2x}+2e^{-x}+2}$ $\forall x \in]-\ln(2)$ ...

(1) il faut que les trois équations du dénominateur soit différente de 0 :

d'où $(e^{-x}-1)^2 \neq 0$ pour $x = 0$ donc défini sur $\mathbb{R}/\{0\}$

d'où $e^{-x} - 2 \neq 0$ pour $x = -\ln(2)$ donc défini sur $\mathbb{R}/\{-\ln(2)\}$

d'où $e^{-2x} + 2e^{-x} + 2 \neq 0$ pour x n'existe pas donc défini sur $\mathbb{R}$

1 ainsi cette équation est defini sur $]-\infty ; -\ln(2)[\cup]-\ln(2) ; 0[\cup]0 ; +\infty[$. Ainsi elle est bien defini sur $]-\ln(2) ; 0[$

(2) Soit (E_0) l'équation homogène : $y'(x) - y(x) = 0$

On a de base une équation normalisée

Une primitive de $x \in \mathbb{R} \to -1$ est par exemple $x \in \mathbb{R} \to -x$

donc d'après le cours l'ensemble des solutions de E_0 est donné par les fonctions

1 $$S_0 = \{x \in \mathbb{R} \mapsto y(x) = Ce^{x} : C \in \mathbb{R}\}$$ C constante

(3) (a) la technique

Exercice 2 Soit l'équation differencielle

3/6

$$2y''(x) + 4y(x) = 2\sin(x) - 2e^{-3x}$$

On a une équation differenciel de deuxieme ordre a coefficients constants. On normalise l'équation $\Leftrightarrow y''(x) + 2y(x) = \cancel{2}\sin(x) - \cancel{2}e^{-3x}$ 0,5

Normalisation

(1) On résoud l'équation homogène

(E_0) $y''(x) + 2y(x) = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$

l'équation caractéristique est donc $R^2 + 2 = 0$

On a $\Delta = -8$ avec $R_1 = \sqrt{2}$ $R_2 = -\sqrt{2}$

Donc d'après le cours, les solutions de (E_0) sont données par l'ensemble

1 $$\mathcal{S}_0 = \{ C_1\cos(\sqrt{2}x) + C_2\sin(\sqrt{2}x) \; C_1, C_2 \in \mathbb{R} \}$$

pourquoi chercher y_{p_1} et y_{p_2}

On considère plutôt deux second membre différent

$h_1(x) = \sin(x)$

$h_2(x) = -e^{-3x}$

(2) Cherchons les solutions particulière de y_p

soit $y_p = y_{p_1} + y_{p_2}$ avec $y_{p_1} = 2\sin(x)$ $y_{p_2} = -2e^{-3x}$

donc $y_p = 2\sin(x) - 2e^{-3x}$ Si on a déjà l'expression ?

→ ainsi en premier pour (E_1): $y_{p_1}''(x) + 2y_{p_1}(x) = 2\sin(x)$

vu la forme du second membre, on cherche y_p sous la forme $\forall x \in \mathbb{R}$, $y_p(x) = a\cos(x) + b\sin(x)$, pour a et $b \in \mathbb{R}$

On a donc $y_{p_1}'(x) = -a\sin(x) + b\cos(x)$

et $y_{p_1}''(x) = -a\cos(x) - b\sin(x)$

d'où y_{p_1} est solution de (E_1)

$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}$, $y_{p_1}''(x) + 2y_{p_1}(x) = 2\sin(x)$ On a normalisé !

$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}$, $-a\cos(x) - b\sin(x) + 2a\cos(x) + 2b\sin(x) = 2\sin(x) + 0\cos(x)$

$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}$, $a\cos(x) + b\sin(x) = 2\sin(x)$

$\Leftrightarrow$ par identification $\begin{cases} b = 2 \\ a = 0 \end{cases}$

d'où $y_{p_1} : x \in \mathbb{R} \longmapsto \cancel{2}\sin(x)$ est une solution particulière de (E_1)

1

→ ainsi posons (E_2) : $y_{p_2}''(x) + 2\, y_{p_2}(x) = -2e^{-3x}$
donc cherchons une solution particulière de (E_2). Vu la forme du second membre (une exponentielle) cherchons une solution particulière sous la forme

$-2e^{-3x}$ est le second membre de l'(E) et non la solution particulière

$\forall x \in \mathbb{R}$, $\boxed{y_{p_2}(x) = -2e^{-3x}}$??

$y_{p_2}(x) = P(x)e^{-3x}$ avec P un polynôme

$y'_{p_2}(x) = 6e^{-3x}$

$y''_{p_2}(x) = -18e^{-3x}$

$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}$, $y''_{p_2}(x) + 2y_{p_2}(x) = -2e^{-3x}$

$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}$, $-18e^{-3x} - 4e^{-3x} = -2y_{p_2}(x)$

$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}$, $-22e^{-3x} = -2y_{p_2}(x)$

$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}$, $y_{p_2}(x) = 11e^{-3x}$

$y_{p_2}(x) = -2e^{-3x}$ ou $11e^{-3x}$?

d'où $y_{p_2} : x \in \mathbb{R} \mapsto 11e^{-3x}$ est une solution particulière de (E_2)

(3) En conclusion, on en déduit que l'ensemble des solutions de (E) est d'après le cours.

0,5

$$\mathcal{f} = \{ x \in \mathbb{R} \longmapsto C_1 \cos(\sqrt{2}x) + C_2 \sin(\sqrt{2}x) - 11e^{-3x} + 2\sin(x) : C_1, C_2 \in \mathbb{R} \}$$

Exercice 3

0/3

Soit l'intégrale $\int_0^{+\infty} \sin(e^{-t})(e^{t/2} + e^{t/3} - t^3)\,dt$

On a $\sin(e^{-t}) \underset{t \to +\infty}{\sim} e^{-t}$

$\cancel{\dfrac{e^{t/2}}{t^3} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0}$!

$e^{t/2}$

et par croissance comparée $e^{t/2} + e^{t/3} - t^3 \underset{t\to+\infty}{\sim} -t^3$

d'où $\int_0^{+\infty} \sin(e^{-t})(e^{t/2} + e^{t/3} - t^3)\,dt \underset{t\to+\infty}{\sim} \int_0^{+\infty} \dfrac{-t^3}{e^t}$

Non. Faire le quotient et $t \to +\infty$ pour le vérifier.

par croissance comparée $\boxed{e^{-t} \times (-t^3) \underset{t\to+\infty}{\sim} e^{-t}}$

OR e^{-t} est une fonction positive qui converge

$\dfrac{e^{-t} \cdot t^3}{e^{-t}} = \cancel{t^3 \xrightarrow[t\to+\infty]{} 1}$.

Exercice 3 Ces deux fonction e^{-t} et $\sin(e^{-t})(e^{t/2}+e^{t/3}-t^3)$ sont deux fonctions positives. Donc par le théorème de comparaison $\int^{+\infty} e^{-t}$ converge ainsi $\int_0^{+\infty} \sin(e^{-t})(e^{t/2}+e^{t/3}-t^3)$ converge.

Exercice 4 Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{e^{-n/2}}{\ln(1+\frac{1}{n^n})(n!-(n-1)^3)}$

1/4

C'est une serie à termes positifs.] justifier plus. Vrai seulement APCR

On a $\ln(1+\frac{1}{n^n}) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^n}$

par croissance comparée $n!-(n-1)^3 \underset{n\to+\infty}{\sim} n!$

d'où $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{e^{-n/2}}{\ln(1+\frac{1}{n^n})(n!-(n-1)^3)} \sim \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{e^{-n/2}}{n!/n^n}$ 1

donc Soit $u_n = \frac{n!}{n^n}$ pour $n \geq 0$ → $u_n = \frac{e^{-n/2}n^n}{n!}$

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est à termes positifs strictement

On a $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)! \times n^n}{n! \times (n+1)^{n+1}} = \frac{\cancel{(n+1)} \times \cancel{n!} \times n^n}{\cancel{n!} \times \cancel{(n+1)} \times (n+1)^n}$

$= \frac{n^n}{(n+1)^n}$

$= \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} e$

On a donc $\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \cancel{0}\ e$

donc d'après le critère d'Alembert, le corollaire, la serie $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge.
de plus la serie $\sum e^{-n/2}$ est a termes positifs et est convergente d'après le cours car par comparaison avec $\sum e^{-n}$ qui est convergente.
Ainsi pour conclure $\sum \frac{e^{-n/2}}{\ln(1+\frac{1}{n^n})(n!-(n-1)^3)}$ est une serie convergente.

⚠ Il n'y a pas dans le cours de résultat sur la convergence de $\sum u_n v_n$ quand $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent