11,5/12 Excellent travail !

Sophia Gekle

Interrogation n°2.

Exercice 1

1. $f : t \longmapsto \dfrac{e^t}{e^{2t}+1}$.

$D_f = \{ t \in \mathbb{R},\ e^{2t}+1 \neq 0 \}$ or $e^t : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+_*$ donc $e^{2t}+1 \neq 0$
$= \mathbb{R}$. et $e^{2t}+1 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$.

1

Ainsi f est continue et intégrable sur $\mathbb{R}$.
Soit $[c, x] \subset \mathbb{R}$, alors f est intégrable sur $[c,x]$ et
$F(x) = \int_c^x f(t)\,dt$ est une primitive de f.

1

$$F(x) = \int_c^x \frac{e^t}{e^{2t}+1}\,dt$$

Effectuons le changement de variable $u = e^t$.
Alors $\begin{cases} \text{si } t = c, & u = e^c \\ \text{si } t = x, & u = e^x \end{cases}$ et $\ln(u) = t$ (défini pour u, car $e^{2t} > 0$)

1

d'où $dt = \frac{1}{u}\,du$

Pour $u \in \mathbb{R}^*_+$:

$$\int_c^x \frac{e^t}{e^{2t}+1}\,dt = \int_{e^c}^{e^x} \frac{u}{u^2+1} \cdot \frac{1}{u}\,du$$

$$= \int_{e^c}^{e^x} \frac{1}{u^2+1}\,du$$ 1

$$= \left[\arctan(u) \right]_{e^c}^{e^x}.$$

$F(x) = \left[\operatorname{arctan}(u) \right]_{e^{c}}^{e^{x}} = \operatorname{arctan}(e^{x}) - \operatorname{arctan}(e^{c})$

$\neq$

Ainsi pour x , une primitive de f est

1 $G(x) = \operatorname{arctan}(e^{x})$ et l'ensemble des primitives de f sur $\mathbb{R}$ est $\mathcal{F} = \{ x \mapsto G(x) + C \ ; \ C \in \mathbb{R} \}$.

2. $g : t \longmapsto \dfrac{4e^t}{e^{2t}-4}$

$$D_g = \{x \in \mathbb{R},\ e^{2x}-4 \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R},\ 2x \neq \ln(4)\}$$

$$= \{x \in \mathbb{R},\ x \neq \ln(2)\} = \mathbb{R} \setminus \{\ln(2)\}.$$

1 Ainsi g est continue et intégrable sur $]-\infty, \ln(2)[\cup]\ln(2), +\infty[$.
et pour $[c, x] \subset D_g$, g est intégrable et admet
$G(x) = \int_c^x g(t)dt$ comme une primitive.

$$G(x) = \int_c^x g(t)dt = \int_c^x \frac{4e^t}{e^{2t}-4}\,dt$$

Effectuons le changement de variable $u = e^t \Leftrightarrow \ln(u) = t$ (défini car $e^t > 0$)

1 Alors pour $\begin{cases} t = c,\ u = e^c \\ t = x,\ u = e^x \end{cases}$ et $dt = \frac{1}{u}du$.

$$\text{d'où } G(x) = \int_{e^c}^{e^x} \frac{4u}{u^2-4} \cdot \frac{1}{u}\,du = \int_{e^c}^{e^x} \frac{4}{u^2-4}\,du$$ 1

$$= \int_{e^c}^{e^x} \frac{4}{(u-2)(u+2)}\,du.$$

Décomposition en éléments simples de $\dfrac{4}{(u-2)(u+2)}$

$$\frac{4}{(u+2)(u-2)} = \frac{A}{u+2} + \frac{B}{u+2},\ (A,B) \in \mathbb{R}^2$$ 1

Comment as-tu obtenu ces équations ?

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} A+B=0 \\ \& \ A-2B=4 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} A = 1 \\ B = -1 \end{cases}$$

0,5

En multipliant par $u-2$ puis $u \to 2$ on trouve directement $A=1$

Puis idem pour B.

d'où $\displaystyle\int_{e^c}^{e^x} \frac{4}{(u+2)(u-2)}\,du$.

$$= \int_{e^c}^{e^x} \frac{du}{u-2} - \int_{e^c}^{e^x} \frac{du}{u+2}$$

$$= \left[\ln|u-2|\right]_{e^c}^{e^x} - \left[\ln|u+2|\right]_{e^c}^{e^x}$$

$$= \ln|e^x-2| - \ln|e^c-2| - \ln|e^x+2| + \ln|e^c+2|$$

Ainsi on en déduit qu'une primitive de g est

oui $G(x) = \ln|e^x-2| - \ln|e^x+2|$ 1

Et l'ensemble des primitives de g sur D_g est

$\mathcal{G} = \{x \mapsto G(x) + C,\ C \in \mathbb{R}\}$.

Etudions $G(x)$ en fonction de la valeur de x :

- $e^x - 2 > 0 \iff x > \ln(2)$. et $e^x+2>0$, $\forall x \in D_g$

Ainsi pour $x \in]-\infty, \ln(2)[$, $G(x) = \ln(2-e^x) - \ln(e^x+2)$

$$= \ln\left(\frac{2-e^x}{e^x+2}\right)$$

1

et si $x \in]\ln(2), +\infty[$, $G(x) = \ln(e^x-2) - \ln(e^x+2)$

$$= \ln\left(\frac{e^x-2}{e^x+2}\right)$$