7/12 Bon travail et bonne rédaction. Continues

Conseils : • ne pas oublier que ln est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ et les valeurs absolues quand c'est nécessaire

• Revoir la DES avec la correction

MAYOUNEL RETEHO Interne

Alistair

L1 GS

Exercice 1

2) Soit $g(t) = \frac{4e^t}{e^{2t}-4}$.

On pose $u = e^t$, on se retrouve avec $\frac{4u}{u^2-4}$

$u^2-4 = (u+2)(u-2)$.

Les racines de ce polynômes sont ~~$u \neq 2$~~ et ~~$u \neq -2$~~ 2 et -2

Soit $e^t \neq 2 \Leftrightarrow \ln(2) \neq 0$

$e^t \neq -2 \Leftrightarrow \ln(-2) \neq 0$ ⚠ ln définie sur $\mathbb{R}_+^*$

$D_g = \mathbb{R} \setminus \{\ln(-2), \ln(2)\}$

0,5 g est continue sur D_g donc g admet des primitives et une primitive de g est :

$$G(x) = \int_{t_0}^{x} \frac{4e^t}{e^{2t}-4}\,dt \quad \text{avec } [t_0, x] \subset D_g.$$

Avec le changement de variable $u = e^t$, on obtient :

1 $$G(x) = \int_{e^{t_0}}^{e^x} \frac{4u}{u^2-4}\frac{du}{u} = \int_{e^{x_0}}^{e^x} \frac{4u}{(u+2)(u-2)}\frac{du}{u}$$

1 $\Rightarrow du = dt\, e^t = dt \times u$

On va maintenant faire une décomposition en élément simple.

On a : $\frac{4u}{(u+2)(u-2)} \cdot \frac{1}{u} = \frac{4}{(u+2)(u-2)}$

L'égalité est bien définie pour $u \neq 2$ et $u \neq -2$

Avec la formule de la décomposition en élément simple, on obtient,

$$\frac{4}{(u-2)(u+2)} = \frac{a_0}{(u+2)} + \frac{b_0}{(u-2)}$$ 1

Avec a_0 et b_0 uniques et réels.

On multiplie à gauche et à droite par $u+1$:

$$\frac{4(u+2)}{(u-2)(u+2)} = a_0 + \frac{(u+2)b_0}{u-2} \iff \frac{4}{u-2} = a_0 + \frac{(u+2)b_0}{u-1}$$

$u+2$

Par passage à la limite $u \to \cancel{-1}$ -2 on obtient.

$\cancel{-2} = a_0$

$u-2$

On multiplie à gauche et à droite par $\cancel{u-1}$:

$$\frac{(u-2)4}{(u-2)(u+2)} = \frac{(u-2)a_0}{(u+2)} + b_0 \iff \frac{4}{u+2} = \frac{(u-2)a_0}{(u+2)} + b_0.$$

Par passage à la limite $u \to \cancel{1}$ 2 on obtient :

$\cancel{2} = b_0$.

ne pas oublier les $|\cdot|$

Donc $G(t) = \int_{e^{t_0}}^{e^t} \frac{-2}{u+2}\,du + \frac{2}{u-2}\,du$

0,5 $$= \left[-\cancel{2} \ln(u+2)\right]_{e^{t_0}}^{e^t} + \left[\cancel{2} \ln|u-2|\right]_{e^{t_0}}^{e^t}$$

Car $u-2$ peut être négatif

Donc une primitive de g sur D_g est :

$$F : x \in D_g \mapsto -2\ln(e^t+2) + 2\ln|e^t-2|$$

Donc l'ensemble des primitives de g est :

$$G = \{ t \in D_f \mapsto F(t) + c \ / \ c \in \mathbb{R} \}$$

1) Soit $f(t) = \frac{e^t}{e^{2t}+1}$

On pose $u = e^t$, on se retrouve avec $\frac{u}{u^2+1}$.

$u^2+1 \neq 0$ lorsque $u = i$ ou $u = -i$.

Donc $D_f = \mathbb{R}$.

1 f est continue sur D_f donc f admet des primitives et une primitive de f est :

$\int_{t_0}^{t} \frac{e^t}{e^{2t}+1} \, dt$ avec $[t_0, t] \subset D_f$

1 Avec le changement de variable $u = e^t$, on obtient :

$\int_{e^{t_0}}^{e^t} \frac{u}{u^2+1} \frac{du}{u} = \int_{e^{t_0}}^{e^t} \frac{1}{u^2+1} \, du$, 1

$= [\text{Arctan } u]_{e^{t_0}}^{e^t}$

Donc l'ensemble des primitives de f est :

$F = \{ t \in D_f \mapsto \text{Arctan } e^t + c \,/\, c \in \mathbb{R} \}$.

1