Rappel : Soit $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ continue

On dira que $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ est **convergente**

ssi $\lim_{t \to +\infty} \int_a^t f(x)\,dx$ existe

Remarque : pour tout $t \geq a$,

$\int_a^t f(x)\,dx$ est bien définie

car f est continue et on intègre sur

un segment ($[a,t]$).

Donc dire que l'intégrale $\int_a^{+\infty} f$

converge revient à s'intéresser à la

limite de $\int_a^t f(x)\,dx$ lorsque

$t \to +\infty$.

Rappel : si la limite n'est pas finie alors on dit que l'intégrale est divergente.

Ex : * $\int_a^t 1\,dx = t-a$

On a $\lim_{t\to+\infty} \int_a^t 1\,dx = \lim_{t\to+\infty} t-a$
$= +\infty$

Donc $\int_a^t 1\,dx$ n'est pas convergente on dit qu'elle est divergente.

* $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$ avec $\alpha > 1$

Cette intégrale est convergente.

Preuve : Soit $X \geq 1$.

$$\int_1^X \frac{dt}{t^\alpha} = \left[\frac{1}{1-\alpha} t^{-\alpha+1}\right]_1^X$$

$$= \frac{X^{-\alpha+1}}{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha}$$

Comme $\alpha > 1$ on a $-\alpha+1 < 0$

donc $\frac{X^{-\alpha+1}}{1-\alpha} \xrightarrow[X \to +\infty]{} 0$

d'où $\int_1^X \frac{dt}{t^\alpha} \xrightarrow[X \to +\infty]{} \frac{1}{1-\alpha}$

donc $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$ est convergente.

Exercice : Si $0 < \alpha < 1$

alors $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$ est divergente.

En particulier $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t}$ est DV.

⚠

Théorème de comparaison

les deux fonctions sont ≥ 0

$f, g : [a, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}_+$ $\mathcal{C}^0$

- Si $\int_a^{+\infty} g$ est convergente (CV)

et $f \leq g$ alors

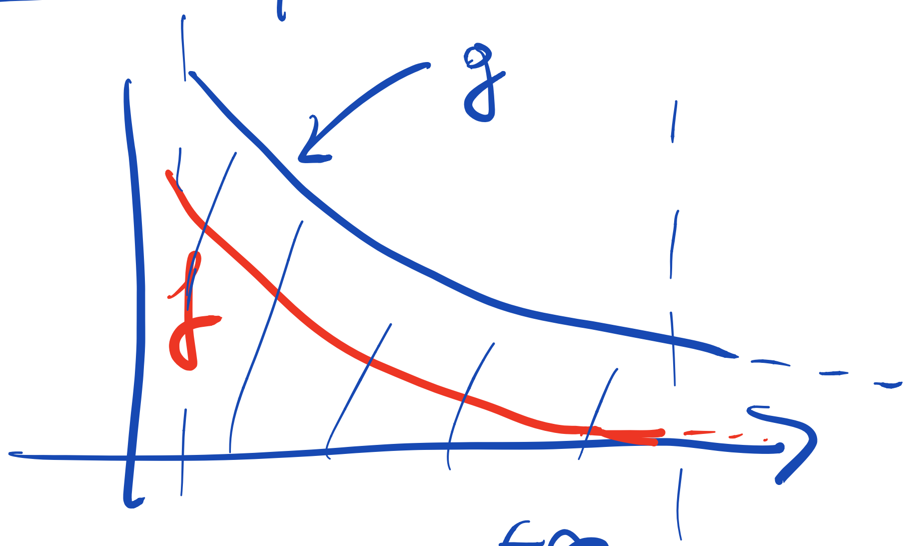
$$\int_a^{+\infty} f \text{ est aussi convergente}$$

- Si $\int_a^{+\infty} f$ est divergente (DV)

et $f \leq g$ alors

$$\int_a^{+\infty} g \text{ est aussi divergente.}$$

Preuve : premier cas $f \leq g$



alors si $\int_a^{+\infty} g$ est convergente cela signifie que l'aire sous la courbe de g entre a et $+\infty$ est fini et donc l'aire sous la courbe de f sur $[a, +\infty[$ est aussi fini ie $\int_a^{+\infty} f$ est CV.

Rmq : La condition $f \leq g$

n'a pas à être vrai sur tout $[a, +\infty[$.

Il suffit d'avoir $f \leq g$ "à partir d'un certain rang"

c'est-à-dire il est suffit d'avoir :

$\exists A \geq a$ tel que $f(x) \leq g(x)$ pour $x \geq A$.

<u>Exercice 1</u>

1) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^3}$ CV ou DV ?

<u>Intégrale convergente</u> : intégrale de Riemann avec $\alpha = 3 > 1$.

Mais $\int_1^x \frac{dt}{t^3} = \left[-\frac{1}{2}\frac{1}{t^2}\right]_1^x \xrightarrow[x\to+\infty]{}$ limite finie

2) $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\,dt$ CV ou DV ?

<u>Cours</u> : $t \mapsto e^{-\alpha t}$ avec $\alpha > 0$

sont convergentes <u>en $+\infty$</u>

On a $\frac{1}{\sqrt{t}} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$

donc il existe $t_0 \geq 0$ tel que

$\frac{1}{\sqrt{t}} \leq 1$

on a comparé les fonctions seulement à partir d'un certain rang.

donc pour $t \geq t_0$, $\frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} \leq e^{-t}$

Or $\int_1^{+\infty} e^{-t}\,dt$ est convergente,

les fonctions $t \mapsto \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}$ et $t \mapsto e^{-t}$ sont positives

donc par le théorème de comparaison

$$\int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\,dt \text{ est convergente.}$$

3) $\int_1^{+\infty} \sqrt{t}\, e^{-t}\,dt$ est convergente :

On a $\sqrt{t}\, e^{-t/2} \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0$ car

$e^{-t/2}$ l'emporte sur $\sqrt{t}$ (sur toute puissance de t)

donc il existe $t_0 \geq 1$ tel que

pour tout $t \geq t_0$, $\sqrt{t}\, e^{-t/2} \leq 1$

donc $\forall t \geq t_0$, $\sqrt{t}\,\underbrace{e^{-t/2}\,e^{-t/2}}_{=e^{-t}} \leq e^{-t/2}$

Or $t \mapsto \sqrt{t}\,e^{-t}$ est positive

idem pour $t \mapsto e^{-t/2}$

Comme $\int_1^{+\infty} e^{-t/2}\,dt$ est convergente

Par le théorème de comparaison

$$\int_1^{+\infty} \sqrt{t}\,e^{-t}\,dt \text{ est } \underline{\text{convergente}}.$$