INTERROGATION N°1 05/02/21

7/11 Bon travail.

Exercice 1

Conseils :
* Penser à bien justifier l'utilisation des théorèmes et résultats de convergence
* s'entraîner sur le calcul des primitives

1. $S_n = \frac{1}{n}\left(\cos\left(\frac{\pi}{2n}\right) + \cos\left(\frac{2\pi}{2n}\right) + \dots + \cos\left(\frac{n\pi}{2n}\right)\right)$

$n \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$

$S_n = \frac{1}{n} \times \sum_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{k\pi}{2n}\right)$

Soit $f : x \longrightarrow \cos\left(x\frac{\pi}{2}\right)$ et $a = 0$, $b = 1$. $(x \in \mathbb{R})$ 1

Alors $S_n = \frac{1}{n} \times \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$

Donc $S_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 f(x)\,dx$ 0,5

Il faut dire que ⚠ f est C^0 pour avoir la convergence

$= \int_0^1 \cos\left(x\frac{\pi}{2}\right) dx$

0,5 $= \left[\frac{2}{\pi}\sin\left(x\frac{\pi}{2}\right)\right]_0^1 = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \cancel{- \sin(0) - \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1}$

2. $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{k^2+n^2}$

$= \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2\left(\frac{k^2}{n^2}+1\right)}$

$= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \times \frac{k/n}{\left(\frac{k^2}{n^2}+1\right)}$

$= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{k/n}{\left(\frac{k^2}{n^2}+1\right)}$

Soit $f : x \in \mathbb{R} \longrightarrow \frac{x}{x^2+1}$ et $a = 0$, $b = 1$.

On a $S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$ 1

et donc $S_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 \frac{x}{x^2+1}\,dx = \int_0^1 x \times \frac{1}{x^2+1}\,dx$ 0,5

Exercice 2

$f : t \longrightarrow \arctan(t)$, $D_f = \mathbb{R}$

Donc f admet des primitives sur $\mathbb{R}$ car est continue sur $\mathbb{R}$. 1

Et une primitive de $\arctan(t)$ est :

$$F(x) = \int_c^x f(t)\,dt \quad , [c, x] \subset \mathbb{R}$$ 1

$$= \int_c^x \arctan(t)\,dt$$

Soit $u(t) = \arctan(t)$, $u'(t) = \frac{1}{1+t^2}$ 1

$v'(t) = 1$, $v(t) = t$

alors par intégration par partie :

$$F(x) = [\arctan(t) \times t]_c^x - \int_c^x \frac{1}{1+t^2} \times t \, dx$$ 0,5

$$= \arctan(x) \times x - [$$