

## TD 1 : Différentiabilité, gradient, points extrémaux

**Exercice 1.** Un réel  $\varepsilon > 0$  étant fixé, on définit

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad J_\varepsilon(x) = \sum_{i=2}^{n-1} N_\varepsilon(x_{i+1} + x_{i-1} - 2x_i), \quad \text{où} \quad N_\varepsilon(t) = \sqrt{\varepsilon + t^2}.$$

Prouver que  $J_\varepsilon$  est différentiable et calculer sa différentielle  $dJ_\varepsilon$ .

**Exercice 2.** [Interprétation géométrique du gradient]

Soit  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$ . Pour  $\lambda \in \mathbb{R}$ , on note  $L_\lambda$  la ligne de niveau d'équation  $f(x) = \lambda$ .

On considère  $a \in \mathbb{R}^2$  tel que  $\nabla f(a) \neq 0$  et  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  de classe  $\mathcal{C}^1$  tel que  $\gamma(0) = a$  et  $\|\gamma'(t)\| = 1$  pour tout  $t \in \mathbb{R}$ .

1. Définir  $\gamma$  de sorte que  $f \circ \gamma$  décroît le plus vite au voisinage de 0. En déduire que  $-\nabla f(a)$  donne la direction de la plus forte pente de  $f$  en  $a$ .
2. On suppose maintenant que  $f \circ \gamma$  est constante au voisinage de 0. Démontrer que  $\nabla f(a)$  est orthogonale à la tangente à  $L_\alpha$  où  $\alpha = f(a)$ .
3. On suppose que  $\gamma'(0)$  est colinéaire et de même sens que  $\nabla f(a)$ . Montrer alors qu'il existe une fonction  $x : \lambda \mapsto x(\lambda) \in \mathbb{R}^2$  définie au voisinage de  $\alpha = f(a)$  telle que  $x(\lambda) \in L_\lambda$ . En déduire un équivalent de  $\|x(\lambda) - a\|$  lorsque  $\lambda \rightarrow \alpha$ . Interpréter.

**Exercice 3.** Soit  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$f(x_1, x_2) = x_1^3 + x_2^3 - 6(x_1^2 - x_2^2).$$

1. Montrer que  $f$  admet quatre points critiques.
2. Calculer  $f(0, t)$  et  $f(t, 0)$  et dire si  $f$  admet un extremum en  $(0, 0)$ .
3. Pour les trois autres points critiques, calculer la hessienne de  $f$  en ces points.
4. Modifier la fonction `plot_fonction` du TP1 pour qu'elle donne également le maximum de la fonction sur la grille et l'utiliser pour afficher  $f$  au voisinage de ces points critiques. Préciser la nature des points critiques (maximum local, minimum local, point selle).
5. Commenter en prenant en compte la question 3.

**Exercice 4.** Soit  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^3.$$

Déterminer ses points critiques. Admet-elle des extrema locaux ? Globaux ?

**Exercice 5.** Soit  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$f(x_1, x_2) = x_1^3 - 3x_1x_2^2.$$

1. Montrer que  $f$  admet un unique point critique en  $(0, 0)$ .
2. Préciser la nature de ce point critique.
3. En utilisant la fonction *plot\_fonction* du TP1 pour afficher  $f$  au voisinage de  $(0, 0)$ , dire si  $(0, 0)$  est un minimum local, maximum local ou point col.
4. Démontrer que  $f$  est positivement homogène de degré 3 et en remarquant que  $f(x_1, x_2) = \operatorname{Re}((x_1 + ix_2)^3)$ , on démontrera que  $f$  admet 3 "creux" comme observé numériquement.
5. On pourra tracer  $f_k(x_1, x_2) = \operatorname{Re}((x_1 + ix_2)^k)$  et observer le nombre de creux pour  $k \geq 2$ .