Exercice 1:

6,5/12

Conseils : • bien annoncer ce que tu fais
• attention aux bornes pour le changement de variable. Quelque chose n'est pas bien compris

1. $f(t) = \frac{e^t}{e^{2t}+1}$

soit $h(x) = e^{2x}+1$ $\quad h(x)>0$ donc f est continue sur $\mathbb{R}$ et positive sur cette intervalle. et donc admet des primitives 0,5

soit $F(t) = \int_{t_0}^{t} \frac{e^x}{e^{2x}+1}dx$ avec $[t_0;t] \subset \mathbb{R}$ avec t_0 fixé 0,5

Faisons le changement de variable :

soit $u = e^x$ $(\ln(u) = x)$ $\quad dx = \frac{du}{u}$ 0,5

Comme on fait le CV $u = e^x$ quand $x = t_0$ alors $u = e^{t_0}$

On a donc

$$F(t) = \int_{\cancel{\ln(t_0)}\; e^{t_0}}^{\cancel{\ln(t)}\; e^t} \frac{u}{u^2+1} \times \frac{du}{u} = \int_{\cancel{\ln(t_0)}}^{\cancel{\ln(t)}} \frac{1}{u^2+1}du \qquad (\arctan(u))' = \frac{u'}{u^2+1}$$

0,5

$$F(t) = [\arctan(u)]_{\cancel{\ln t_0}}^{\cancel{\ln(t)}}$$

0,5

$$F(t) = \arctan({}_{e}\ln(t)) - \arctan({}_{e}\ln(t_0))$$

les primitives de f sont de la forme $F(t) = \arctan(e^t) - \underbrace{\arctan(e^{t_0})}_{cste}$

2. $g(t) = \frac{4e^t}{e^{2t}-4}$

soit $j(x) = e^{2x}-4 = (e^x-2)(e^x+2)$

$j(x) = 0$ lorsque $e^x - 2 = 0$ car $e^x + 2 > 0$

donc $j(x) = 0$ lorsque $e^x = 2$
$x = \ln(2)$

On a donc $g(t) = \frac{4e^t}{e^{2t}-4}$ définie sur $\mathbb{R} \setminus \{\ln(2)\}$ 0,5

soit $G(t) = \int_{t_0}^{t} \frac{4e^x}{e^{2x}-4}dx$ avec $[t_0;t] \subset]-\infty;\ln(2)[\cup]\ln(2);+\infty[$

Faisons le chg de variable :

soit $u = e^x$ $(\ln(u) = x)$ $\quad dx = \frac{du}{u}$ 0,5

$$G(t) = \int_{\cancel{\ln(t_0)}}^{\cancel{\ln(t)}} \frac{4u}{u^2-4}\,\frac{du}{u} = \int_{\ln(t_0)}^{\ln(t)} \frac{4\,du}{u^2-4} = \int_{\cancel{\ln(t_0)}}^{\cancel{\ln(t)}} \frac{4\,du}{(u-2)(u+2)}$$

1

$$M(x) = \frac{4}{(x-2)(x+2)} = \frac{a_0}{x-2} + \frac{b_0}{x+2}$$

faire une DES :

$\downarrow \times (x-2)$

0,5

$$\frac{4}{x+2} = a_0 + \frac{b_0}{x+2}(x-2) \qquad x = 2$$

$$1 = a_0 + \underbrace{\frac{b_0}{x+2} \times 0}_{0}$$

On a $a_0 = 1$

$$\frac{4}{(x-2)(x+2)} = \frac{1}{x-2} + \frac{b_0}{x+2}$$

$\downarrow \times (x+2)$

$$\frac{4}{x-2} = \frac{1}{x-2}(x+2) + b_0 \qquad x = -2$$

$$-1 = \frac{1 \times 0}{-2-2} + b_0$$

$$-1 = b_0 \quad \text{car} \quad \frac{1 \times 0}{-2-2} = 0$$

On a donc $a_0 = 1$
$b_0 = -1$

1

alors $G(t) = \int_{\cancel{\ln(t_0)}}^{\cancel{\ln(t)}} \frac{1}{u-2} + \frac{-1}{u+2}\, du = \int_{\ln(t_0)}^{\ln(t)} \frac{1}{u-2}\, du + \int_{\ln(t_0)}^{\ln(t)} \frac{-1}{u+2}\, du$

$$G(t) = \Big[\ln(|u-2|)\Big]_{\ln(t_0)}^{\ln(t)} - \Big[\ln(u+2)\Big]_{\ln(t_0)}^{\ln(t)} \qquad (\ln(u))' = \frac{u'}{u}$$

0,5

$$G(t) = \ln(|\ln(t)-2|) - C_1 - \ln(e^{\ln(t)} + 2) + C_2$$

$$G(t) = \ln(e^{(\ln t)} - 2) - \ln(e^{\ln(t)} + 2) + C \qquad C = -C_1 + C_2$$

les primitives de g sont de la ~~form~~ forme $G(t) = \ln|e^{(\ln t)} - 2| - \ln(e^{\ln(t)} + 2) + C$ avec $C \in \mathbb{R}$