$2{,}5/3$

Sophia Gekle.
22009132.

Exercice 1

Soit $u_n = \dfrac{1}{1-\left(\frac{2n+1}{5n+5}\right)^n} - 1$

on a que $\forall n \geqslant 0$, $0 \leqslant \dfrac{2n+1}{5n+5} \leqslant 1$

important

car si > 1 alors $\dfrac{1}{1-(\ )^n} < 1$. Pas bon !

par conséquent $0 \leqslant \left(\dfrac{2n+1}{5n+5}\right)^n \leqslant 1$

besoin d'une inégalité stricte ici pour justifier que $1-\left(\frac{2n+1}{5n+5}\right)^n \neq 0$, pour ne pas diviser par 0.

$1 >$

$\Rightarrow 1 - \left(\dfrac{2n+1}{5n+5}\right)^n \geqslant 0$ $>$

$\Rightarrow \dfrac{1}{1-\left(\frac{2n+1}{5n+5}\right)^n} > 1$

$\Rightarrow$ donc $\dfrac{1}{1-\left(\frac{2n+1}{5n+5}\right)^n} - 1 \geqslant 0$

Donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une série à termes positifs

or ayant $\left(\dfrac{2n+1}{5n+5}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ TB !

On a $\dfrac{1}{1-\left(\frac{2n+1}{5n+5}\right)^n} \underset{n\to+\infty}{\sim} 1 + \left(\dfrac{2n+1}{5n+5}\right)^n$ TB !

d'où $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(\dfrac{2n+1}{5n+5}\right)^n$ 1

La suite $\left(\dfrac{2n+1}{5n+5}\right)^n$ étant à termes positifs 1

et $\sqrt[n]{\left(\frac{2n+1}{5n+5}\right)^n} = \dfrac{2n+1}{5n+5} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \dfrac{1}{5}\ (< 1)$

Par le critère de ~~Bertrand~~ Cauchy $\sum_{n\geqslant 0} \left(\dfrac{2n+1}{5n+5}\right)^n$ est convergente

donc par le théorème de comparaison $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ aussi.

critère de Bertrand c'est pour $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n \ln(n)^\beta}$.

oui ! 0,5