14/16

Excellent travail pour exercices 1, 2, 3 ! Et très bonne rédaction. Dommage pour l'exercice 4, à revoir.

Lethan
TARMAT
21908463
L1

Devoir Maison n°1

Intégrales et primitives

Exercice 1: 5/5

Soit $f : x \mapsto \dfrac{e^x+1}{e^{3x}-e^{2x}-2e^x}$

• $e^{3x}-e^{2x}-2e^x \neq 0$

$\Leftrightarrow e^x(e^{2x}-e^x-2) \neq 0$

$\Leftrightarrow$ ① $e^x \neq 0$ ou ② $e^{2x}-e^x-2 \neq 0$ ① toujours vraie car $e^x > 0$

• ② On pose $X = e^x$, on a :

$X^2 - X - 2 \neq 0$

$\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times (-2) = 9$

$x_1 = \dfrac{1-3}{2} = \boxed{-1}$ $x_2 = \dfrac{1+3}{2} = \boxed{2}$

• Or $e^{x_1} = -1$ absurde car $e^x > 0$ et

$e^x = 2 \Leftrightarrow \boxed{x = \ln(2)}$

→ La fonction f est donc définie et continue sur $D_f = \mathbb{R} \setminus \{\ln(2)\}$ car son dénominateur s'annule en $\ln(2)$. Elle admet donc des primitives sur $\mathbb{R} \setminus \{\ln(2)\}$. Soient x_0, x tels que $[x_0, x] \subset D_f$. Alors une primitive de f est : 1

$$\boxed{F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt = \int_{x_0}^{x} \frac{e^t+1}{e^{3t}-e^{2t}-2e^t}\,dt}$$

$$= \int_{x_0}^{x} \frac{e^t+1}{e^t(e^{2t}-e^t-2)}\,dt$$

→ On fait le changement de variable $\boxed{u = e^t}$.
L'application $t \mapsto e^t$ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, bijective

donc on va pouvoir appliquer la formule du changement de variable. On a $du = e^t dt$, les bornes d'intégration x_0, x deviennent respectivement e^{x_0} et e^x et en remplaçant e^t par u dans l'intégrale, on obtient :

$$F(x) = \int_{e^{x_0}}^{e^x} \frac{u+1}{u(u^2-u-2)} \times \frac{1}{u}\, du$$

$$= \int_{e^{x_0}}^{e^x} \frac{u+1}{u^2(u^2-u-2)}\, du$$

→ (Or, $u^2 - u - 2$ peut aussi s'écrire :
$(u-x_1)(u-x_2) \Leftrightarrow (u+1)(u-2)$)

Donc :

Simplifier !

$$\boxed{F(x) = \int_{e^{x_0}}^{e^x} \frac{\cancel{u+1}}{u^2\cancel{(u+1)}(u-2)}\, du}$$

1

→ Par décomposition en éléments simples, pour tout $u \in \mathbb{R} \setminus \{\ln(2)\}$, on a :

$$\left\{ \frac{u+1}{u^2(u+1)(u-2)} = \frac{a_0}{u^2} + \frac{a_1}{u} + \frac{b_0}{u+1} + \frac{c_0}{u-2} \right\} (E)$$

On multiplie (E) par u^2 :

$$\frac{u+1}{(u+1)(u-2)} = a_0 + a_1 \cdot u + \frac{b_0 \cdot u^2}{u+1} + \frac{c_0 \cdot u^2}{u-2}$$

On fait tendre $u \to 0$:

$$\boxed{-\frac{1}{2} = a_0}$$

On multiplie par $u+1$ et tendre $u \to -1$:

$$\frac{u+1}{u-2} = \underbrace{-\frac{1}{2}(u+1)}_{=0} + \underbrace{a_1 \cdot u(u+1)}_{=0} + b_0 \cdot u^2 + \underbrace{\frac{c_0 \cdot u^2 \cdot (u+1)}{u-2}}_{=0}$$

$$\Leftrightarrow \frac{0}{-3} = b_0 \cdot (-1)^2 \Leftrightarrow \boxed{b_0 = 0}$$

logique car on pouvait simplifier

◎ On multiplie par $u-2$ et tendre $u \to 2$:

$$u+1 = -\frac{1}{2}\underbrace{(u+1)(u-2)}_{=0} + \underbrace{a_1 . u(u+1)(u-2)}_{=0} + \underbrace{0 . u^2(u-2)}_{=0} + c_0 . u^2 . (u+1)$$

$$\Leftrightarrow \quad 3 = c_0 . 2^2 (3) \Leftrightarrow 12 c_0 = 3 \Leftrightarrow \boxed{c_0 = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}}$$

◎ On pose $u = 1$ pour isoler a_1 :

$$\frac{u+1}{(u+1)(u-2)} = \frac{a_0}{u^2} + \frac{a_1}{u} + \frac{b_0}{u+1} + \frac{c_0}{u-2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{-2}{2} = -\frac{1}{2} + a_1 + 0 - \frac{1}{4} \Leftrightarrow -1 = a_1 - \frac{3}{4}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{a_1 = -\frac{1}{4}}$$

1

Finalement, on a :

$$F(x) = -\frac{1}{2}\int_{e^{x_0}}^{e^x} \frac{du}{u^2} - \frac{1}{4}\int_{e^{x_0}}^{e^x} \frac{du}{u} + \frac{1}{4}\int_{e^{x_0}}^{e^x} \frac{du}{u-2}$$

$$= -\frac{1}{2}\left[\frac{-1}{u}\right]_{e^{x_0}}^{e^x} - \frac{1}{4}\left[\ln(|u|)\right]_{e^{x_0}}^{e^x} + \frac{1}{4}\left[\ln(|u-2|)\right]_{e^{x_0}}^{e^x}$$

Ainsi une primitive de f sur D_f est :

$$x \longmapsto \frac{1}{2e^x} - \frac{1}{4}x + \frac{1}{4} . \ln(|e^x - 2|)$$

1

On peut distinguer les deux cas suivants :

◎ si $[x_0 ; x] \subset]-\infty ; \ln(2)[$ alors $e^x - 2 < 0$ (et donc $|e^x - 2| = 2 - e^x$), d'où :

$$\boxed{F(x) = \frac{1}{2e^x} - \frac{1}{4}x + \frac{1}{4} . \ln(2 - e^x)}$$

1

◎ si $[x_0 ; x] \subset]\ln(2) ; +\infty[$ alors $e^x - 2 > 0$ et donc

$$\boxed{F(x) = \frac{1}{2e^x} - \frac{1}{4}x + \frac{1}{4} . \ln(e^x - 2)}$$

En conclusion, l'ensemble des primitives de g sur D_f est donné par les applications

TB !

$$x \in D_f \longmapsto \frac{1}{2e^x} - \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}.\ln(|e^x - 2|) + C$$

avec $C \in \mathbb{R}$

Exercice 11 :

4/4

Soit $g : x \longmapsto \dfrac{1}{1+sh(x)+4ch(x)}$

$1 + sh(x) + 4ch(x) \neq 0$

$\Leftrightarrow sh(x) + 4ch(x) \neq -1$

$\Leftrightarrow \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} + 4.\dfrac{e^x + e^{-x}}{2} \neq -1$

$\Leftrightarrow \dfrac{5.e^x + 3e^{-x}}{2} \neq -1 \Leftrightarrow \dfrac{5.e^x + 3e^{-x}}{2} > 0$ donc $\neq -1$

$\left(\begin{array}{l} e^x > 0 \Rightarrow 5e^x > 0 \\ e^x > 0 \Leftrightarrow 3e^{-x} > 0 \end{array}\right)$

⑥ La fonction g est donc définie et continue sur $\mathbb{R}$ car son dénominateur est toujours positif.

1 Elle admet donc des primitives sur $\mathbb{R}$.

Soit $x_0 \in \mathbb{R}$, alors $G : x \in \mathbb{R} \longmapsto \int_{x_0}^{x} g(t)dt$ est une primitive de g. Soit $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$G(x) = \int_{x_0}^{x} g(t)dt = \int_{x_0}^{x} \frac{1}{\frac{5e^t + 3e^{-t}+2}{2}}\,dt$$

$$\boxed{= \int_{x_0}^{x} \frac{2}{5e^t + 3e^{-t} + 2}\,dt}$$

⑥ On fait le changement de variable $u = e^t$.
L'application $t \mapsto e^t$ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, bijective donc on va pouvoir appliquer la formule du changement de variable $u = e^t$. On a $\boxed{du = e^t . dt}$, les bornes d'intégration x_0, x deviennent respectivement e^{x_0} et e^x et on remplaçant e^t par u dans l'intégrale, on obtient:

$$G(x) = \int_{e^{x_0}}^{e^x} \frac{2}{(5u+3u^{-1}+2)u}\, du$$

$$\boxed{= \int_{e^{x_0}}^{e^x} \frac{2}{5u^2+2u+3}\, du}$$ 1

⑥ $\left(\text{Or } 5u^2+2u+3 = \left(\sqrt{5}\,u + \frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 + \frac{14}{5} \right)$. Alors: 1

$$G(x) = \int_{e^{x_0}}^{e^x} \frac{(2) \times \frac{5}{14}}{\left(\left(\sqrt{5}\,u+\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2+\frac{14}{5}\right) \times \frac{5}{14}}\, du$$

$$= \int_{e^{x_0}}^{e^x} \frac{5}{7} \times \frac{1}{\left(\frac{5\sqrt{14}}{14}u + \frac{\sqrt{14}}{14}\right)^2+1}\, du$$

$$= \frac{5}{7}\left[\frac{\mathrm{Arctan}\left(\frac{5\sqrt{14}}{14}u+\frac{\sqrt{14}}{14}\right)}{\frac{5\sqrt{14}}{14}\left(= \frac{5}{\sqrt{14}}\right)} \right]_{e^{x_0}}^{e^x}$$

$$\boxed{= \frac{5}{7}\left[\frac{\sqrt{14}\,\mathrm{Arctan}\left(\frac{5\sqrt{14}}{14}u+\frac{\sqrt{14}}{14}\right)}{5} \right]_{e^{x_0}}^{e^x}}$$ 1

Ainsi une primitive de g sur $\mathbb{R}$ est

$x \in \mathbb{R} \mapsto \frac{\sqrt{14}.\mathrm{Arctan}\left(\frac{5\sqrt{14}}{14}e^x + \frac{\sqrt{14}}{14}\right)}{7}$ et l'ensemble des primitives de g sur $\mathbb{R}$ est:

$x \in \mathbb{R} \mapsto \boxed{\frac{\sqrt{14}.\mathrm{Arctan}\left(\frac{5\sqrt{14}}{14}e^x + \frac{\sqrt{14}}{14}\right)}{7} + C}$ avec $C \in \mathbb{R}$

Exercice III : 4/4

Soit $f : x \longmapsto \dfrac{1}{\cos(x)\cos(2x)}$

(6) $\cos(x)\cos(2x) \neq 0$

(I) $\cos(x) \neq 0$
$\Leftrightarrow x \neq \mathrm{Arccos}(0)$
$\Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$
(avec $k \in \mathbb{Z}$)

(II) $\cos(2x) \neq 0$
$2x \neq \mathrm{Arccos}(0)$
$x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$
(avec $k \in \mathbb{Z}$)

→ La fonction f est donc définie et continue sur $D_f = \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} ; \frac{\pi}{2} + k\pi\}$ avec $k \in \mathbb{Z}$.
Elle admet donc des primitives sur D_f.
1 Soient x_0, x tels que $[x_0, x] \subset D_f$. Alors une primitive de f est :

$$F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)dt = \int_{x_0}^{x} \frac{1}{\cos(t)\cos(2t)}dt$$

$$= \int_{x_0}^{x} \frac{1 \times \cos(t)}{\underbrace{\cos(t).\cos(2t)}_{\times \cos(t)}}dt = \int_{x_0}^{x} \frac{\cos(t)}{\cos(t)^2.\cos(2t)}dt$$

→ On fait le changement de variable $\boxed{u = \sin(t)}$
L'application $t \longmapsto \sin(t)$ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, ~~bijective~~
donc on va pouvoir appliquer la formule du changement de variable. On a $\boxed{du = \cos(t).dt}$, les bornes d'intégration x_0, x deviennent respectivement $\sin(x_0)$ et $\sin(x)$ et en remplaçant $\sin(t)$ par u dans l'intégrale, on obtient :

$$F(x) = \int_{\sin(x_0)}^{\sin(x)} \frac{\cancel{\cos(t)}}{(1-u^2)(1-2u^2).\cancel{\cos(t)}}du$$

$$\Leftrightarrow F(x) = \int_{\sin(x_0)}^{\sin(x)} \frac{1}{(1-u^2)(1-2u^2)}du \quad 1$$

(1) $\cos(t)^2 = 1 - \sin(t)^2$ (2) $\cos(2t) = 1 - 2\sin(t)^2$

$\rightarrow$ Or : ▸ $1-u^2 = (1+u)(1-u)$

▸ $1-2u^2 = (1+\sqrt{2}u)(1-\sqrt{2}u)$

Donc :

$$F(x) = \int_{\sin(x_0)}^{\sin(x)} \frac{1}{(1+u)(1-u)(1+\sqrt{2}u)(1-\sqrt{2}u)} du$$

$\rightarrow$ Par décomposition en éléments simples, pour tout $u \in D_f$, on a :

$$\frac{1}{(1+u)(1-u)(1+\sqrt{2}u)(1-\sqrt{2}u)} = \frac{a_0}{(1+u)} + \frac{b_0}{(1-u)} + \frac{c_0}{(1+\sqrt{2}u)} + \frac{d_0}{(1-\sqrt{2}u)}$$

⊙ On multiplie par $(1+u)$ et tendre $u \rightarrow -1$:

$$\frac{1}{(1-u)(1+\sqrt{2}u)(1-\sqrt{2}u)} = a_0 + \underbrace{\frac{b_0(1+u)}{(1-u)} + \frac{c_0(1+u)}{(1+\sqrt{2}u)} + \frac{d_0(1+u)}{(1-\sqrt{2}u)}}_{\xrightarrow[u\to -1]{} 0}$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{-\frac{1}{2} = a_0}$$

⊙ On multiplie par $(1-u)$ et tendre $u \rightarrow 1$:

$$\frac{1}{(1+\sqrt{2}u)(1-\sqrt{2}u)} = \underbrace{a_0(1-u)}_{\xrightarrow[u\to 1]{} 0} + b_0(1+u) + \underbrace{\frac{c_0(1+u)(1-u)}{(1+\sqrt{2}u)} + \frac{d_0(1+u)(1-u)}{(1-\sqrt{2}u)}}_{\xrightarrow[u\to 1]{} 0}$$

$$\Leftrightarrow \quad -1 = 2b_0$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{-\frac{1}{2} = b_0}$$

⊙ On multiplie par $(1+\sqrt{2}u)$ et tendre $u \rightarrow -\frac{\sqrt{2}}{2}$:

$$\frac{1}{(1-\sqrt{2}u)} = c_0(1+u)(1-u)$$

(multiplier par $(1+\sqrt{2}u)$ et tendre $u \rightarrow -\frac{\sqrt{2}}{2}$ revient à faire tendre $a_0 ; b_0 ; d_0$ vers 0)

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{2} = \frac{1}{2}c_0 \Leftrightarrow \boxed{1 = c_0}$$

⑤ On multiplie par $(1-\sqrt{2}u)$ et tendre $u \to \frac{\sqrt{2}}{2}$:

(multiplier par $(1-\sqrt{2}u)$ et faire tendre $u \to \frac{\sqrt{2}}{2}$ revient à faire tendre $a_0 ; b_0 ; c_0$ vers 0)

$$1 = d_0 (1+u)(1-u)(1+\sqrt{2}u)$$

$$\Leftrightarrow \boxed{1 = d_0}$$

1

Finalement, on a :

$$F(x) = -\frac{1}{2}\int_{\sin x_0}^{\sin x} \frac{du}{(1+u)} - \frac{1}{2}\int_{\sin x_0}^{\sin x} \frac{du}{(1-u)} + \int_{\sin x_0}^{\sin x} \frac{du}{(1+\sqrt{2}u)} + \int_{\sin x_0}^{\sin x} \frac{du}{(1-\sqrt{2}u)}$$

$$\Leftrightarrow = -\frac{1}{2}\int_{\sin x_0}^{\sin x} \frac{du}{(1+u)} - \frac{1}{2}\int_{\sin x_0}^{\sin x} \frac{du}{(1-u)} + \frac{\sqrt{2}}{2}\int_{\sin x_0}^{\sin x} \frac{du}{(\frac{1}{\sqrt{2}}+u)} + \frac{\sqrt{2}}{2}\int_{\sin x_0}^{\sin x} \frac{du}{(\frac{1}{\sqrt{2}}-u)}$$

$$\Leftrightarrow = -\frac{1}{2}\left[\ln(|u+1|)\right]_{\sin x_0}^{\sin x} + \frac{1}{2}\left[\ln(|u-1|)\right]_{\sin x_0}^{\sin x}$$

$$+ \frac{\sqrt{2}}{2}\left[\ln(|u+\frac{1}{\sqrt{2}}|)\right]_{\sin x_0}^{\sin x} - \frac{\sqrt{2}}{2}\left[\ln(|u-\frac{1}{\sqrt{2}}|)\right]_{\sin x_0}^{\sin x}$$

Ainsi une primitive de f sur D_f est :

$$x \mapsto \frac{\ln(|\sin x - 1|)}{2} - \frac{\ln(|\sin x + 1|)}{2} + \frac{\sqrt{2}\ln(|\sin x + \frac{1}{\sqrt{2}}|)}{2} - \frac{\sqrt{2}.\ln(|\sin x - \frac{1}{\sqrt{2}}|)}{2}$$

et l'ensemble des primitives de f sur $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} ; \frac{\pi}{2} + k\pi\}$ est :

$$x \in D_f \mapsto \frac{\ln(1-\sin x)}{2} - \frac{\ln(\sin x + 1)}{2} + \frac{\sqrt{2}.\ln(|\sin x + \frac{1}{\sqrt{2}}|)}{2} - \frac{\sqrt{2}.\ln(|\sin x - \frac{1}{\sqrt{2}}|)}{2} + C \text{ avec } C \in \mathbb{R}$$

1

1/3

Exercice IV:

Soit $f : x \mapsto \frac{\ln(1+\frac{1}{\sqrt{x}})\ln(x)}{x}$

À ne pas écrire en examen sauf si demandé

⓪ D'après le cours, $\int_1^{+\infty} f(t)\,dt$ converge ssi $\lim\limits_{x\to+\infty} \int_1^x f(t)\,dt$ existe et est finie. Alors:

$\boxed{\int_1^{+\infty} f(t)\,dt = \lim\limits_{x\to+\infty} \int_1^x f(t)\,dt}$. On a :

① On sait que $\ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + \underset{x\to0}{o}(u^2)$

Puisque $u = \frac{1}{\sqrt{x}} \underset{x\to0}{\longrightarrow} 0$, on a:

$$\ln(1+\frac{1}{\sqrt{x}}) = \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{2x} + \underset{x\to0}{o}(\frac{1}{x})$$

② Alors:

$$f(t) = \left(\frac{1}{\sqrt{t}} - \frac{1}{2t} + \underset{t\to0}{o}(\frac{1}{t})\right) \times \ln(t) \times \frac{1}{t}$$

$$= \left(\frac{\ln(t)}{\sqrt{t}} - \frac{\ln(t)}{2t} + \underset{t\to0}{o}(\frac{\ln(t)}{t})\right) \times \frac{1}{t}$$

$$= \frac{\ln(t)}{t\sqrt{t}} - \frac{\ln(t)}{2t^2} + \underset{t\to0}{o}(\frac{\ln(t)}{t^2})$$

pas nécessaire de donner un ~ aussi fin.

0,5

$$f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{\ln(x)\cdot(2x^2 - x\sqrt{x})}{2x^3\cdot\sqrt{x}} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \text{ (par croissance comparée)}$$

Complexifie la discussion ...

Donc il existe $t_0 \geq 1$ tel que pour tout $t \geq t_0$

$$\frac{\ln(t)(2t^2 - t\sqrt{t})}{2\sqrt{t}} \leq 1$$

Faux $\left(\underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty\right)$

D'où pour tout t suffisamment grand $(t \geq t_0)$:

$$\frac{\ln(t)(2t^2 - t\sqrt{t})}{2t^3\sqrt{t}} \leq \cancel{\frac{1}{t^2}}$$

la précédente ligne ne permet pas de déduire l'inégalité

Ces deux fonctions sont positives et $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^3} dt$ est convergente (d'après l'intégrale de Riemann $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}$ avec $\alpha > 1$)

0,5

par le théorème de comparaison $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)\,(2t^2+\sqrt{t})}{2t^3 \cdot \sqrt{t}}$ est convergente d'où :

$$\int_1^{+\infty} \frac{\ln(1+\frac{1}{\sqrt{t}})\ln(t)}{t} dt \text{ est convergente.}$$