Ling
Thierry
21900896

$15/21$

Bon travail et bonne rédaction.

Exercice 2: $4,5/6$

(E) $2y''(x) + 4y(x) = 2\sin(x) - 2e^{-3x}$, $\forall x \in \mathbb{R}$

L'équation (E) n'est pas normalisé donc on l'a normalise

(E) $y''(x) + 2y(x) = \sin(x) - e^{-3x}$ 0,5

1ère étape on résout l'équation homogène

(E_0) $y''(x) + 2y(x) = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$

L'équation caractéristique est

$r^2 + 2 = 0$

Le discriminant vaut $\Delta = -8$ et les racines sont $z = i\sqrt{2}$ et $z = -i\sqrt{2}$

Donc d'après le cours, l'ensemble des solutions de (E_0) est donné par $S_0 = \{x \in \mathbb{R} \mapsto C_1 e^{0x}\cos(\sqrt{2}x) + C_2 e^{0x}\sin(\sqrt{2}x)\ (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2\}$

ou sinon $S_0 = \{x \in \mathbb{R} \mapsto C_1\cos(\sqrt{2}x) + C_2\sin(\sqrt{2}x)\ (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2\}$ 1

2ème étape cherchons les solutions particulières

0,5 On cherche d'abord une solution particulière de $\sin(x)$ puis de $-e^{-3x}$

oui bien!

Comme le second membre est $\sin(x)$, que les coefficients de l'équation différentielle sont constant, on peut chercher une solution particulière y_p de la forme $y_p(x) = \alpha\sin(x)$

Très bonne remarque

car le coefficient devant y' est nul et pour $\forall x \in \mathbb{R}$ $y_p'(x) = \alpha\cos(x)$ et $y_p''(x) = -\alpha\sin(x)$ pour $\forall x \in \mathbb{R}$

D'où y_p est solution de (E)

$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ y_p''(x) + 2y_p(x) = \sin(x)$

$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ -\alpha\sin(x) + 2\alpha\sin(x) = \sin(x)$ ⚠

$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ \alpha = 1$

1 D'où $y_p : x \in \mathbb{R} \mapsto \sin(x)$ est solution particulière de ~~(E)~~

de l'équation différentielle $y''(x) + 2y(x) = \sin(x)$

Comme le second membre est exponentiel, que l'équation différentiel est à coefficients constant, on peut chercher une solution particulière y_p exponentiel de même puissance que le second membres.

→ Attention : de manière générale, il faut chercher C un polynôme de degré quelconque (cf TD). Ici cela fonctionne mais il est possible de trouver des exemples où il n'y a pas de solutions sous cette forme avec C constant → ex si "2" est remplacé par "-9" !

c'est à dire, $y_p(x) = C(x)e^{-3x}$, $\forall x \in \mathbb{R}$ avec $C(x)$ une constante $C'(x)=0$

On a pour tout $x \in \mathbb{R}$, $y_p' = C'(x)e^{-3x} - 3C(x)e^{-3x} = -3C(x)e^{-3x}$

$y_p''(x) = -3C'(x)e^{-3x} + 9C(x)e^{-3x} = 9C(x)e^{-3x}$

D'où y_p est solution de (E) → de l'équation $y''(x) + 2y(x) = -e^{-3x}$ ⚠

$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \; y_p''(x) + 2y(x) = -e^{-3x}$

$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \; 9C(x)e^{-3x} + 2C(x)e^{-3x} = -e^{-3x}$

$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \; 9C(x) + 2C(x) = -1$

$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \; C(x) = -\frac{1}{11}$

1

D'où $y_p : x \in \mathbb{R} \mapsto -\frac{e^{-3x}}{11}$ est solution particulière de ~~(E)~~

→ 3ème étape : d'où l'ensemble des solutions de (E) est

0,5

$\mathcal{S} = \{x \in \mathbb{R} \mapsto C_1\cos(\sqrt{2}x) + C_2\sin(\sqrt{2}x) + \sin(x) - \frac{e^{-3x}}{11} ; (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2\}$

Par le principe de superposition, $y_p(x) = \sin(x) - \frac{e^{-3x}}{11}$ est sol de (E)

3/3

Exercice 3 :

$$F(x) = \int_0^{+\infty} |\sin(e^{-t})(e^{\frac{t}{2}} + e^{\frac{t}{3}} - t^3)| dt$$

On a aucun problème pour 0 mais on ne sait pas si elle converge ou diverge en $+\infty$ et il n'y a pas de valeur interdite $\in [0, +\infty[$ donc est continue et de signe constant

$\sin(e^{-t}) \underset{t\to+\infty}{\sim} e^{-t}$ $\quad |e^{\frac{t}{2}} + e^{\frac{t}{3}} - t^3| \underset{t\to+\infty}{\sim} e^{\frac{t}{2}}$

$|\sin(e^{-t})(e^{\frac{t}{2}} + e^{\frac{t}{3}} - t^3)| \underset{t\to+\infty}{\sim} e^{-t} e^{\frac{t}{2}} = e^{-\frac{t}{2}}$.

sinon on peut aussi dire directement qu'elle CV car intégrale de référence vue en cours.

$t^2 e^{-\frac{t}{2}} < 1$ pour tout t suffisamment grand (à partir d'un certain rang) par croissance comparée

$e^{-\frac{t}{2}} < \frac{1}{t^2}$

$\int_1^{+\infty} e^{-\frac{t}{2}} < \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$

$\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$ est convergente car intégrale de Riemann $\alpha > 1$

donc d'après le théorème de comparaison vu que $e^{-\frac{t}{2}}$ est de même signe que $\frac{1}{t^2}$ et $0 < e^{-\frac{t}{2}}$

on ne sait pas si $\sin(e^{-t})(e^{\frac{t}{2}} + e^{\frac{t}{3}} - t^3)$ est de signe constant donc $|\sin(e^{-t})(e^{\frac{t}{2}} + e^{\frac{t}{3}} - t^3)|$ est positif ou nul

→ il l'est pour tout t suffisamment grand car $\sin(e^{-t}) > 0$ et $e^{t/2} + e^{t/3} - t^3$ est du signe de $e^{t/2}$ pour t suffisamment grand par croissance comparée.

Mais bonne idée de passer par l'absolu convergence

donc d'après le théorème de comparaison par relation ~~[illegible]~~ d'équivalence $F(x)$ est absolument convergente donc converge

1,5/4

Exercice 4 :

$G(x) \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{e^{-\frac{n}{2}}}{\ln(1+\frac{1}{n^n})(n! - (n-1)^2)}$

quantité qui ne peut dépendre de n puisque on somme sur tout $n \in \mathbb{N}$.

L'appeler plutôt "G" ou "S" comme "série" si besoin

Très bien

$e^{-\frac{n}{2}}$ est de signe constant (positif)

$\ln(1+\frac{1}{n^n})$ est signe constant (positif)

$n! - (n-1)^2$ est de signe constant à partir d'un certains rang et est positif à partir de ce rang

0,5

Donc $G(\cancel{x})$ est de signe positif à partir d'un certains rang

$e^{\frac{n}{2}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \cancel{1 + \frac{n}{2}}$

ce DL n'est valable que lorsque l'élément dans l'exp tend vers 0 puisque c'est le DL en 0 de l'exp qui est utilisé ici.

Or $-\frac{n}{2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$.

0,5

$\begin{cases} \ln(1+\frac{1}{n^n}) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^n} \\ n! - (n-1)^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} n! \end{cases}$

$\frac{\frac{1}{e^{\frac{n}{2}}}}{\ln(1+\frac{1}{n^n})(n! - (n-1)^2)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{1+\frac{n}{2}} \times \frac{1}{\frac{1}{n^n}} \times \frac{1}{n!} = \frac{n^n}{(1+\frac{n}{2})n!}$

$\frac{n\, n^{n-1}}{n\,(\frac{1}{n}+\frac{1}{2})n\,!} = \frac{n^{n-1}}{(\frac{1}{n}+\frac{1}{2})n\,!} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^{n-1}}{\frac{1}{2}(n!)} = \frac{2n^{n-1}}{n!}$ car $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} + \frac{1}{2} \to \frac{1}{2}$

soit $V_n = \frac{2n^{n-1}}{n!}$

$\frac{V_{n+1}}{V_n} = \frac{2(n+1)^{n-1}}{\frac{(n+1)!}{(n+1)}} \times \frac{n!}{2n^{n-1}} = \frac{(n+1)^{n-1}}{(n)^{n-1}} = (1+\frac{1}{n})^{n-1} = e^{(n-1)\ln(1+\frac{1}{n})}$

or comme $\ln(1+\frac{1}{n}) \sim \frac{1}{n}$

$\frac{V_{n+1}}{V_n} = \frac{e^{n\ln(1+\frac{1}{n})}}{e^{\ln(1+\frac{1}{n})}}$

déterminer $\frac{1}{\,\cdots\,}) \times \frac{1}{2}$

$]-\ln(2), 0[$

$[<x] C$

$\frac{1}{\cdots - 2} \times \frac{1}{e^2}\, dt$

variable

$\int_{x}^{2x} \frac{1}{u-2}$

$\frac{du}{u}$

$\frac{1}{u-2}$

$u-2|)]_{e^{-x}}^{e^{\cdots}}$

$+ [\,$arc

arctan

arcta

> qu

$-1+\ell$

$\frac{V_{n+1}}{V_n} = \frac{e^{\frac{n+1}{n}}}{e^{\frac{2}{n}}} = e^{1-\frac{1}{n}} > 1$ pour un $n > 1$

donc V_n diverge lorsque $n \to +\infty$ et donc $\sum_{n \geq 1} V_n$ diverge

0,5 alors d'après le théorème de comparaison $\sum_{n\geq N} \frac{e^{-\frac{1}{n}}}{(n(1+\frac{1}{n}))(n^2-n-1)}$ et $\sum_{n\geq N} V_n$ sont de même nature avec $N \in \mathbb{N}$ tel que $G(n)$ positif donc $G(n)$ diverge aussi

6/8

Exercice 1:

1) (E) $y'(x) - y(x) = \frac{1}{(e^{-x}-1)^2} - \frac{1}{e^{-x}-2} - \frac{1}{e^{-2x}+2e^{-x}+2}$, $\forall x \in]-\ln(2), 0[$

$(e^{-x}-1)^2 = 0$ lorsque $x = 0$

$e^{-x} - 2 = 0$ lorsque $x = -\ln(2)$

$e^{-2x} + 2e^{-x} + 2 > 0$

1 donc (E) est bien défini sur $]-\ln(2), 0[$

2) (E_0) $y'(x) - y(x) = 0$, $\forall x \in]-\ln(2), 0[$

l'équation ~~caractéristique~~ différentielle est normalisé, donc on peut appliquer le théorème du cours.

une primitive de $x \in \mathbb{R} \mapsto -1$ est $x \in \mathbb{R} \mapsto -x$ d'où l'ensemble des solutions de l'équations (E_0) est

1 $\mathcal{S}_0 = \{x \in]-\ln(2), 0[\mapsto Ce^{x} : C \in \mathbb{R}\}$

3) a) cette technique s'appelle la variation de la constante

0,5 cette technique marche dans tout les cas donc très pertinente. on peut en dire plus, cf correction.

b) On a pour tout $x \in]-\ln(2), 0[$ $y_p(x) = C(x)e^{x}$ et

$y_p'(x) = C'(x)e^{x} + C(x)e^{x}$

On a pour y_p solution (E):

$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ y_p'(x) - y_p(x) = \frac{1}{(e^{-x}-1)^2} - \frac{1}{e^{-x}-2} - \frac{1}{e^{-2x}+2e^{-x}+2}$

$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ C'(x)e^{x} + C(x)e^{x} - C(x)e^{x} = \frac{1}{(e^{-x}-1)^2} - \frac{1}{e^{-x}-2} - \frac{1}{e^{-2x}+2e^{-x}+2}$

$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ C'(x) = \frac{1}{\frac{\boxed{(e^{-x}-1)^2}}{e^{-x}}} - \frac{1}{\frac{e^{-x}-2}{e^{-x}}} - \frac{1}{\frac{e^{-2x}+2e^{-x}+2}{e^{-x}}}$

⚠ écriture compliquée qui mène à une erreur.

$e^{x}C'(x)=\left(\frac{1}{(e^{-x}-1)^2}+\dots\right) \Rightarrow C'(x)=\frac{1}{e^{x}}\cdot\left(\frac{1}{(e^{-x}-1)^2}+\dots\right)=\frac{e^{-x}}{(e^{-x}-1)^2}+\dots$

0,5 donc pour trouver $y_p(x)=C(x)e^{x}$ il faut trouver $C(x)=\int C'(t)dt$ donc il faut déterminer une primitive

c) Les fonction $\left(\frac{1}{e^{-x}-1}-\frac{1}{e^{-x}-2}-\frac{1}{e^{-2x}+2e^{-x}+2}\right)\times\frac{1}{e^{x}}$ sont continue et OK correcte maintenant

(pas besoin de signe constant) sur l'intervalle $]-\ln(2),0[$, une primitive est $C(x)=\int_c^x C'(t)dt$ avec $[c,x]\subset]-\ln(2),0[$

1

$$C(x)=\int_c^x \frac{1}{e^{t}}\times\frac{1}{(e^{-t}-1)^2}dt+\int_c^x\frac{1}{e^{-t}-2}\times\frac{1}{e^{t}}dt-\int_c^x\frac{1}{e^{-2t}+2e^{-t}+2}\frac{1}{e^{t}}dt$$

On fait le changement de variable $u=e^{-x}\Rightarrow du=-udx$

$dx=-\frac{du}{u}$ on a donc :

$$C(x)=\int_{e^{-c}}^{e^{-x}}-u\times\frac{1}{(u-1)^2}\times\frac{du}{u}+\int_{e^{-c}}^{e^{-x}}\frac{1}{u-2}\times u\times\frac{du}{u}$$
$$+\int_{e^{-c}}^{e^{-x}}\frac{1}{u^2+2u+2}\times u\times\frac{du}{u}$$

0,5
$$C(x)=\int_{e^{-c}}^{e^{-x}}\frac{-1}{(u-1)^2}du+\int_{e^{-c}}^{e^{-x}}\frac{1}{u-2}du+\int_{e^{-c}}^{e^{-x}}\frac{1}{u^2+2u+2}du$$

$$C(x)=\left[\frac{1}{(u-1)}\right]_{e^{-c}}^{e^{-x}}+\left[\ln(|u-2|)\right]_{e^{-c}}^{e^{-x}}+\int_{e^{-c}}^{e^{-x}}\frac{1}{(u+1)^2+1}du$$

$$C(x)=\frac{1}{e^{-x}-1}+\ln(|e^{-x}-2|)+\left[\arctan\cancel{(u)}\,(u+1)\right]_{e^{-c}}^{e^{-x}}+A \text{ avec } A\in\mathbb{R}$$

0,5
$$C(x)=\frac{1}{e^{-x}-1}+\ln(-e^{-x}+2|)+\arctan(e^{-x}+1)+A' \text{ avec } A'\in\mathbb{R}$$

4)

On en déduit donc que :

$y_p(x)=(e^{-x}-1+\ln(-e^{-x}+2)+\arctan(e^{-x}))e^{x}$, $\forall x\in]-\ln(2),0[$ est une solution particulière de (E)

3ème étape on déduit donc que l'ensemble des solutions de (E) est :

1

$\mathcal{S}=\{x\in]-\ln(2),0[\mapsto(e^{-x}-1+\ln(-e^{-x}+2)+\arctan(e^{-x})+C)e^{x};$

[GR]

Vu