Optimisation - Partiel en présentiel

Durée 1h. Aucun document n'est autorisé. Les deux exercices sont indépendants.

Exercice 1.

Soient $n, m \in \mathbb{N}^*$. On définit pour tout $x \in \mathbb{R}^n$,

$$f(x) = \frac{1}{2} \|x - y\|_{n,2}^2 + \lambda \|Lx\|_{m,2}^2,$$

avec $L: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ est un opérateur linéaire, $y \in \mathbb{R}^n$ un vecteur fixé, $\lambda > 0$, $\|\cdot\|_{n,2}$ et $\|\cdot\|_{m,2}$ respectivement la norme euclidienne sur \mathbb{R}^n et \mathbb{R}^m .

- 1. (a) Rappeler la définition d'une fonctionnelle quadratique.
 - (b) Montrer que f est une fonctionnelle quadratique.
 - (c) Que vaut $\nabla f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$?
 - (d) Que vaut $\nabla^2 f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$?
- 2. Démontrer que f est strictement convexe.
- 3. Démontrer que f admet un unique minimum global.
- 4. Les hypothèses du théorème de convergence de la méthode de gradient à pas optimal sont-elles satisfaites ?

On considère maintenant pour tout $x \in \mathbb{R}^n$,

$$g(x) = \frac{1}{2} \|Hx - z\|_{M,2}^2 + \lambda \|Lx\|_{m,2}^2,$$

avec $H: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^M$ un opérateur linéaire, $M \ge n$ et $z \in \mathbb{R}^M$. On suppose que H est de rang plein, c'est-à-dire rg(H) = n.

- 5. Montrer que g est aussi strictement convexe. (Indication: on pensera à montrer que H^TH est inversible).
- 6. Ecrire une fonction gradG qui renvoie le gradient de g et qui prend en argument un vecteur x quelconque. On supposera que H, L, λ et z ont été stockés dans des variables de même nom au préalable et sont donc utilisables comme des variables globales.
- 8. Les hypothèses du théorème de convergence de la méthode de gradient à pas optimal sont-elles toujours satisfaites ?

Exercice 2.

Soit f une fonction \mathcal{C}^2 m-fortement convexe (m>0) sur \mathbb{R}^n , c'est-à-dire pour tous $x,h\in\mathbb{R}^n$,

$$m \|h\|_2^2 \le \langle \nabla^2 f(x)h, h \rangle,$$

et telle que ∇f soit L-Lipschitzienne (L>0), c'est-à-dire pour tous $x,y\in\mathbb{R}^n$,

$$\|\nabla f(x) - \nabla f(y)\|_2 \le L \|x - y\|_2$$
.

Soient $x_0 \in \mathbb{R}^n$ et $\tau > 0$. On considère la suite $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ définie par récurrence par

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad x_{k+1} = F(x_k),$$

où pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $F(x) = x - \tau \nabla f(x)$. C'est la méthode de descente de gradient à pas fixe. On veut trouver une condition sur $\tau > 0$ de sorte que la suite $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge.

1. En utilisant un développement de Taylor approprié (on indiquera bien lequel), démontrer que pour tous $x,y\in\mathbb{R}$,

$$\langle x - y, \nabla f(x) - \nabla f(y) \rangle \ge m \|x - y\|_2^2$$
.

2. En développant la norme, en déduire que pour tous $x, y \in \mathbb{R}^n$,

$$||F(x) - F(y)||_2^2 \le (1 + \tau^2 L^2 - 2m\tau) ||x - y||_2^2.$$

3. En déduire que si $0 < \tau < \frac{2m}{L^2}$, alors il existe $0 \le c < 1$ tel que pour tout $k \ge 1$,

$$||x_{k+1} - x_k||_2 \le c ||x_k - x_{k-1}||_2$$
.

- 4. En déduire que $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers un $x_*\in\mathbb{R}^n$. (Indication: On cherchera à montrer que c'est une suite de Cauchy).
- 5. Que représente ce x_* ? Justifier.
- 6. Commenter la vitesse de convergence. Justifier.

Exercia 1: 3 pints

Barene indicatif

1) a) Fontionalle quadrique:

f: a e(rh +) { < Ax, x> - < b, x> + c

0.5

area AE Sn(IR), btin, ceir.

(b) $O_{n,x} = \{(x,x) - (y,x) + 1 < |x|,x \}$ $+ \{|x||_{2} < |x| \}$

 $=\frac{1}{2}\left(\frac{I_{n}+2AL^{T}L}{z}\right)\approx_{1}x^{2}-\frac{2}{2}\left(\frac{1}{2}\frac{1}\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}$ 0,5

La notrie A et bien symittique donc fest une fontionrelle quadrotique.

O,Tc) D'aprèle cors pon a $\nabla f(x) = Ax - b$ O,Tc) D'aprèle cors, on a $\nabla^2 f(x) = A$

2) Il suffit de nontre que A at définie positive von 1) d). Lit h Elet 1 10}. On a:

< Ah, h> = 1/h1/2 + 22<27/2/h, h>

= 1/1/2 + 27/12/12 > 1 hl2 >0 re A est test, positive How y est skirteret conver (mine 1 fortenet 3) Emme that def positive, $\nabla f(x) = 0$ adout une unique solution is of a un

1 unique point witigre qui et un minimum

ghal puigue of at (strictment) onvere. 4) Il fant vicifier: tr, her $m \|h\|_{2} \leq (\nabla f(x)h, h) \leq M \|h\|_{2}$. (1) est vooi avec m=1 (cf 2).
(2) il suffit de parche M=1+21 moux M=1+21 moux M=1+21 paper M=1+21 M=1+21 moux M=1+21 M=1+21,5 des hypothèses set donc très virifités.

5) g est auxi une factionnelle quodetique evec cette fis t= HTH t21 LTL. Vicifion que tout sef pasitive. Lithtip'1/0} obors (Ah, h) > | | Hhhh Si | | Hh||² = 0 obs Hh = 0 in dentaH>1. Or d'april le théorème du very dentarH=0 1,5 on rg(H)=h. I'm (Ah, h)>0 ré De get striveret converse. 6) On a Vg(x)= (HTH+2/LTL) x - HTZ stef good (r(x):

A = Let (transpse (H), H) +2* Let (transpse(L),L)

b = Let (transpse (H), z)

Neuran Let (A,x) - b 7) Les hypothise set iglement satisfaites some m= min di(HTH) >0

iE[n,n] >0 et M = max li(HH)+2/max li(LT)

Exerciel 6 pints a) On a $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$, Taylor Machanin ($f \in \mathcal{Y}$) $\exists z \in \exists x, y \in \mathcal{Y}$ $\nabla f(x) = \nabla f(y) + \nabla^2(z)(x-y)$ In (x-y, \f(x)-\f(y)) = (x-y, \f(z)6c-y)> > m / x-y// 2) On ~ ||F(x) - F(y) ||2 = |(x-y)||2 +T/17/201-P/(y)/2 -2 = (2-y, Pf(x)-Pf(y)> ≤ (1+ -2/2 -2m =) 1/x-y//2 I par 6-Lip de Pf st 1). 3) Lit $g(z) = 1 + z^{2}L^{2} - 2mz$, On a g(z) = g(2m) = 1 et g minimale en $\frac{m}{L^{2}}$ et volant 1 - m 30. long par tot

0 <TC 2m (0 < 9(T) < 1.

It an the = et c= $\int 1+t^2l^2-lmt$ also properties = $\int 1+t^2l^2-lmt$ $\int 1+t^2-lmt$ $\int 1+t^2$ $\leq c \|x_{b} - x_{b-1}\|_{L}$ & april 2) x > 1 > 14) ft les 1 laetr-relie & lastr-rennlet---t Kren-nelle $\leq \left(\sum_{i=1}^{\infty} c^{i}\right) \|x_{2} - x_{2-n}\|_{2}$ 1,5 $\leq c^{k-1} \left(\sum_{i=1}^{\infty} c^{i} \right) \|x_{n} - x_{o}\|_{2}$ SKCE aver K= 1/21-20/12 bound $c \xrightarrow{l_{n-1+m}} 0$ (0<0<1) 6. en stedet pre 4 EDD, Fleen ty 425, E,
HREIN, Il næen - nælle EE

ie (ne) een et de buchy d'on no de? 5) 6 mme He, respendent et & Jacques de limite et & de Pf on e révinem gbbel de f (can f fortmet cres). llarer - relle Etc