Interrogation n°1

Exercice 1

10/11

Très bon travail ! Les raisonnements sont bien rédigés et justifiés. Continuer comme ça.

1) $S_n = \frac{1}{n}\left(\cos\left(\frac{\pi}{2n}\right) + \cos\left(\frac{2\pi}{2n}\right) + \dots + \cos\left(\frac{n\pi}{2n}\right)\right)$

$= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{k\pi}{2n}\right)$

TB!

Posons $a=0$, $b=1$ et $f(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)$ pour $x \in [0,1]$

1 La fonction f est continue sur $[0,1]$ et on a $S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(k/n)$

1 D'après le cours $S_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 f(x)\,dx$.

or $\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)dx = \left[\frac{2}{\pi}\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right]_0^1$

$= \frac{2}{\pi}\left(\underbrace{\sin(\pi/2)}_{=1} - \underbrace{\sin(0)}_{=0}\right)$

1

$= \frac{2}{\pi}$

On en déduit que $S_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{2}{\pi}$.

2. $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{k^2+n^2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{k/n^2}{(k/n)^2+1} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{k/n}{(k/n)^2+1}$

En posant $a=0$, $b=1$ et $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$ sur $[0,1]$

on a que $S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(k/n)$. . 1

et f est continue sur $[0,1]$.

Par le cours, on a $S_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 f(x)dx$. 1

Or $\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 \frac{x}{x^2+1} dx$

on remarque que sur $[0,1]$, $x^2+1>0$

et que $\ln'(x^2+1) = \frac{2x}{x^2+1}$

d'où $\int_0^1 \frac{x}{x^2+1} dx = \left[\frac{1}{2}\ln(x^2+1)\right]_0^1$

$= \frac{1}{2}\left(\ln(2) - \underbrace{\ln(1)}_{=0}\right) = \frac{1}{2}\ln(2)$!

1

Exercice 2

Recherche des primitives de arctan(x).

→ Cherchons d'abord le domaine de définition, et de continuité de la fonction.

$D_f = \mathbb{R}$, la fonction est continue sur $\mathbb{R}$ donc admet des primitives sur $[a,b] \subset \mathbb{R}$.

1

→ Intégration : Soit $[a,b] \subset \mathbb{R}$.

Posons $\arctan(x) = f(x) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$

et $g'(x) = 1 \Rightarrow g(x) = x$.

pourquoi cherches-tu à calculer cette intégrale ?

Par intégration par partie, on a :

$$\int_a^b \arctan(x)\,dx = \Big[x\arctan(x)\Big]_a^b - \int_a^b \frac{x}{1+x^2}\,dx$$

1

Or $\int_a^b \frac{x}{1+x^2}\,dx = \left[\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right]_a^b$ car $1+x^2>0, \forall x\in\mathbb{R}$.

d'où $\int_a^b \arctan(x)\,dx = \Big[x\arctan(x)\Big]_a^b - \left[\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right]_a^b$

1

$$= a\arctan(a) - \frac{1}{2}\ln(1+a^2) - b\arctan(b) + \frac{1}{2}\ln(1+b^2).$$

Ainsi une primitive de la fonction arctan(x) est la fonction.

$G : x\in\mathbb{R} \longmapsto x\arctan(x) - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)$

et l'ensemble des primitives de arctan(x) est

1 $\mathcal{F} = \{x \in \mathbb{R} \longmapsto G(x) + C,\ C\in\mathbb{R}$ une constante $\}$.