Université de Paris
UFR de Mathématiques et Informatique
45, rue des Saints-Pères, 75006, Paris.

Licence 1re année, MATHÉMATIQUES ET CALCUL

Fiche de TD n° 2 : intégrales convergentes

Exercice 1. Déterminer la nature des intégrales suivantes :

$$1)\int_1^{+\infty}\frac{dt}{t^3},\quad 2)\int_1^{+\infty}\frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}dt,\quad 3)\int_1^{+\infty}\sqrt{t}e^{-t}dt,\quad 4)\int_1^{+\infty}\frac{\ln t}{\sqrt{1+t}}dt,\quad 5)\int_0^{+\infty}\frac{te^{-\sqrt{t}}}{1+t^2}dt,$$

$$6)\int_1^{+\infty}\frac{(t^5+3t+1)e^{-t}}{t^3+4}dt,\quad 7)\int_0^{+\infty}\frac{\ln(1+t^2)}{1+t^2}dt,\quad 8)\int_1^{+\infty}\sin(t^{-2})dt,$$

$$9)\int_0^{+\infty}\left(t+2-\sqrt{t^2+4t+1}\right)dt,\quad 10)\int_0^1\frac{dt}{\sqrt{t}},\quad 11)\int_0^1\frac{dt}{\sqrt{1-t}},\quad 12)\int_0^1\frac{\ln t}{\sqrt{t}}dt,$$

$$13)\int_0^{\pi/2}\sqrt{\tan t}\,dt,\quad 14)\int_0^1\frac{\sqrt{1-\ln t}}{\sin t}dt.$$

Exercice 2. Soit f une fonction continue sur $[0,\ +\infty[$.

1. Montrer que si $\lim_{x\to+\infty} f(x)=l$ avec $l\neq 0$, alors son intégrale sur $[0,\ +\infty[$ diverge.
2. Prouver que si l'intégrale de f sur $[0,+\infty[$ est convergente et si f admet une limite l quand x tend vers $+\infty$, alors $l=0$.
3. Si $\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$, son intégrale sur $[0,\ +\infty[$ converge-t-elle ?
4. On suppose que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,+\infty[$ et que les intégrales de f et de f' sur $[0,+\infty[$ sont convergentes. Montrer que f converge vers 0, quand x tend vers $+\infty$.
   En complément, on admettra qu'il existe des fonctions continues ne tendant pas vers 0 quand x tend vers $+\infty$ dont l'intégrale converge.

Exercice 3. Etudier la convergence absolue et la convergence des intégrales suivantes :

$$1)\int_1^{+\infty}\frac{\sin t}{t^2}dt,\quad 2)\int_1^{+\infty}\frac{\sin t}{t}dt\quad 3)\int_0^1\frac{\sin(1/t)}{\sqrt{t}}dt,\quad 4)\int_0^1\frac{\sin(1/t)}{t}dt\quad 5)\int_0^2\cos(1/t)dt.$$

Exercice 4. Trouver une condition nécessaire et suffisante sur a et b pour que les intégrales suivantes convergent. On pourra distinguer les cas $b>0$, $b<0$ et $b=0$ pour la question 4.

$$1)\int_1^{+\infty}\frac{dt}{t^a(t-1)^b},\quad 2)\int_0^{+\infty}t^a\left(1-e^{-1/\sqrt{t}}\right)dt,\quad 3)\int_0^{+\infty}\frac{t^a}{1+t^2}dt,$$

$$4)\int_0^{+\infty}\frac{te^{-t}}{1+t^b}dt,\quad 5)\int_1^{+\infty}\frac{\ln t}{t^a}dt,\quad 6)\int_0^1\frac{\ln t}{t^a}dt,\quad 7)\int_0^{+\infty}\frac{\ln(1+t^3)}{t^a}dt.$$

Exercice 5.

1. Montrer que $\int_0^1 \ln t \, dt$ converge et calculer sa valeur (effectuer une intégration par parties).
2. Montrer que $\int_0^{\pi/2} \ln(\sin t) \, dt$ converge. On note A sa valeur. Montrer que $\int_0^{\pi/2} \ln(\cos t) \, dt$ converge et vaut A.
3. En déduire que $\int_0^{\pi} \ln(\sin t) \, dt$ converge. On note I sa valeur. Montrer que $I = 2A$.
4. Montrer finalement que $I = -\pi \ln 2$.

Exercice 6.

1. Montrer que $I = \int_0^{+\infty} \frac{\arctan t}{1+t^2} dt$ converge et que $I = \frac{\pi^2}{8}$.
2. Soit $n > 1$. Montrer que $J_n = \int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t^n} dt$ converge et que $J_n = \frac{1}{(n-1)^2}$.

Exercice 7. Soit $a > 0$. On considère l'intégrale $I(a) = \int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{(a+t)^2} dt$.

1. Montrer que $I(a)$ converge.
2. Montrer que $I(a) = \frac{\ln a}{a}$.

Exercice 8. Révisions. Soit $f : [1, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue.

1. Montrer que si pour tout $t \geq 27$, $0 \leq f(t) \leq t^4$, alors l'intégrale de $t \mapsto e^{-t/2} f(t)$ sur $[1, +\infty[$ converge.
2. Soit $F : [1, +\infty[\to \mathbb{R}$ une primitive de f. On suppose que F est bornée sur $[1, +\infty[$. Montrer que pour tout $\alpha > 0$, l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{f(t)}{t^\alpha} dt$ converge.

Exercice 9. Compléments.

1. Généralisation du théorème de la moyenne. Soit $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ et $h : [a, b] \to \mathbb{R}^+$ deux fonctions continues. On note m le minimum de g sur $[a, b]$ et M son maximum.
   a) Montrer que
   $$m \int_a^b h(t) \, dt \leq \int_a^b g(t)h(t) \, dt \leq M \int_a^b h(t) \, dt.$$
   b) En déduire qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que $\int_a^b g(t)h(t) \, dt = g(c) \int_a^b h(t) \, dt$.
2. Soit $a > 0$, $b > 0$ et $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $\int_1^{+\infty} \frac{f(t)}{t} dt$ converge.
   a) Montrer que l'intégrale $I := \int_0^{+\infty} \frac{f(at) - f(bt)}{t} dt$ converge et que $I = f(0) \ln\left(\frac{b}{a}\right)$.
   b) Application : calculer $J := \int_0^{+\infty} \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t} dt$.