DEVOIR MAISON n°1 01/03/21

14/16

Très bon travail
Très bonne rédaction

EXERCICE 1

4/5

$f : x \longrightarrow \frac{e^x+1}{e^{3x}-e^{2x}-2e^x}$, Df ?

On applique le changement de variable $u=e^x$: $\frac{1}{e^{3x}-e^{2x}-2e^x} = \frac{1}{u^3-u^2-2u}$

Continuez !

On cherche les valeurs pour lesquelles $u^3-u^2-2u=0$.

$u^3-u^2-2u = u(u^2-u-2)$; $u(u^2-u-2)=0 \iff \begin{cases} u=0 \\ u^2-u-2=0 \iff \begin{cases} u=-1 \\ \text{ou} \\ u=2 \end{cases} \end{cases}$

Donc $u^3-u^2-2u=0$ quand $u \in \{-1, 0, 2\}$ mais $u=e^x$ et :

$u=0 \iff e^x=0$ impossible

$u=-1 \iff e^x=-1$ impossible donc il reste,

$u=2 \iff e^x=2 \iff x=\ln(2)$. Donc $Df = \mathbb{R}/\ln(2)$

f est définie et continue sur Df donc admet des primitives. Une des primitives de f sur Df est :

1

$F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt \quad [x, x_0] \subset Df$

$= \int_{x_0}^{x} \frac{e^t+1}{e^{3t}-e^{2t}-2e^t}\,dt$

On fait le changement de variable (CV) $u=e^t$. $t \to e^t$ est C^1 sur Df et bijective. On a $du = dt\,e^t$. Les bornes d'intégration x_0 et x deviennent respectivement e^{x_0} et e^x donc on obtient :

$F(x) = \int_{e^{x_0}}^{e^x} \frac{u+1}{u(u^3-u^2-2u)}\,du$

$= \int_{e^{x_0}}^{e^x} \frac{1}{u^2(u-2)}\,du$ car u^3-u^2-2u se factorise par $u(u+1)(u-2)$ 1

On effectue alors une décomposition en éléments simple (DES) avec $a_0, b_0, a_1 \in \mathbb{R}$.

$\frac{1}{u^2(u-2)} = \frac{a_0}{u} + \frac{a_1}{u^2} + \frac{b_0}{u-2}$

Pour a_1 : On multiplie des 2 côtés de l'équation par u^2 et on fait tendre u par 0. On obtient $\boxed{a_1 = -\frac{1}{2}}$

Pour b_0 : Cette fois ci par $u-2$ et on fait tendre u par 2. On obtient $\boxed{b_0 = \frac{1}{4}}$

Pour a_0 : On donne la valeur de 1 à u et on remplace a_1 et b_0 par les valeurs trouvées.

$-1 = a_0 + a_1 - b_0 \iff \boxed{a_0 = -\frac{1}{4}}$ 1

On remplace dans l'intégrale:

$$F(x) = \int_{e^{x_0}}^{e^x} -\frac{1/4}{u} - \frac{1/2}{u^2} + \frac{1/4}{u-2}\, du$$

$$= -\frac{1}{4}\left[\ln(u)\right]_{e^{x_0}}^{e^x} - \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{u}\right]_{e^{x_0}}^{e^x} + \frac{1}{4}\left[\ln(u-1)\right]_{e^{x_0}}^{e^x}$$

Donc une primitive de f sur D_f est:

$$G : x \in D_f \longrightarrow -\frac{1}{4}\ln e^x - \frac{1}{2}x - \frac{1}{e^x} + \frac{1}{4}\ln|e^x - 2|$$

$$= \frac{-x + \ln|e^x-2|}{4} + \frac{1}{2e^x}$$

1

L'ensemble des primitives de f sur D_f est : $\mathcal{F} = \{x \in D_f \rightarrow G(x) + C \;/\; C \in \mathbb{R}\}$

EXERCICE 2 4/4

$$f : x \longrightarrow \frac{1}{1 + sh(x) + 4ch(x)}$$

$$1 + sh(x) + 4ch(x) = 1 + \frac{e^x - e^{-x}}{2} + \frac{4(e^x + e^{-x})}{2}$$

$$= \frac{2 + 5e^x + 3e^{-x}}{2}$$

donc $\dfrac{1}{1+sh(x)+4ch(x)} = \dfrac{2}{2+5e^x+3e^{-x}}$ $\quad 2+5e^x+3e^{-x}$ ne s'annule jamais car $e^x > 0$

Donc $D_f = \mathbb{R}$.

f est définie et continue sur D_f donc admet des primitives. Une des ~~des~~ primitives de f sur D_f est

$$F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\, dt \quad [x_0, x] \subset D_f$$ 1

$$= \int_{x_0}^{x} \frac{2}{2+5e^t+3e^{-t}}\, dt$$

$t \longrightarrow e^t$ est C^1 sur D_f et bijective donc on peut appliquer le changement de variable $u = e^t$. On remplace respectivement les bornes d'intégration x_0 et x par e^{x_0} et e^x. On a avant ça du: $du = e^t dt$. On obtient:

$$F(x) = \int_{e^{x_0}}^{e^x} \frac{2}{2u+5u^2+3}\, du$$ 1

TB

On ne peut pas faire de DES car $2u + 5u^2 + 3$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ donc on va chercher à obtenir la forme $\dfrac{1}{1+x^2}$.

$5u^2 + 2u + 3 = 5\left(u + \frac{1}{5}\right)^2 + \frac{14}{5}$ donc

$$F(x) = \int_{e^{x_0}}^{e^x} \frac{2}{5\left(u+\frac{1}{5}\right)^2 + \frac{14}{5}} = \frac{10}{14}\int_{e^{x_0}}^{e^x} \frac{1}{\frac{25}{14}\left(u+\frac{1}{5}\right)^2 + 1}\, du = \frac{5}{7}\int_{e^{x_0}}^{e^x} \frac{1}{\left(\frac{5}{\sqrt{14}}u + \frac{1}{\sqrt{14}}\right)^2 + 1}\, du$$

1

Soit $v(u) = \dfrac{5}{\sqrt{14}}u + \dfrac{1}{\sqrt{14}}$ alors

$$F(x) = \frac{5}{7}\int_{e^{x_0}}^{e^x} \frac{1}{v^2(u)+1}\, du$$

donc $F(x) = \frac{\sqrt{14}}{7}\left[\text{Arctan}(v(u))\right]_{e^{x_0}}^{e^x}$ et une primitive de f sur D_f est :

$G : x \in D_f \longrightarrow \frac{\sqrt{14}}{7}\text{Arctan}(v(e^x))$

1

L'ensemble des primitives de f sur D_f est : $\mathcal{F} = \{x \overset{\in D_f}{\longrightarrow} G(x) + C \;/\; C \in \mathbb{R}\}$

EXERCICE 3

3/4

$f : x \longrightarrow \frac{1}{\cos(x)\cos(2x)}$ D_f ?

$\cos(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$

$\cos(2x) = 0 \Leftrightarrow x \in \{\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\}$ Donc $D_f = \mathbb{R} / \{\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\}$

$$\frac{1}{\cos(x)\cos(2x)} = \frac{1}{\cos(x)(1-2\sin(x)^2)} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin(x)^2}(1-2\sin(x)^2)}$$

car $\cos(x)^2 = 1 - \sin(x)^2$
$\Leftrightarrow \cos(x) = \sqrt{1-\sin(x)^2}$

f est définie et continue sur D_f donc admet des primitives et une primitive de f sur D_f est :

0,5

$$F(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(t)}(1-2\sin^2(t))}\,dt \quad [x_0, x] \subset D_f$$

$t \longrightarrow \sin(t)$ est C^1 sur D_f donc on peut utiliser le changement de variable $u = \sin(t)$. On a $du = dt\sqrt{1-\sin(t)^2}$, les bornes d'intégration passent respectivement de x_0, x à $\sin(x_0)$ et $\sin(x)$. On obtient pour tout u privée de $\{-1, 1, \sqrt{\frac{1}{2}}, -\sqrt{\frac{1}{2}}\}$

$$F(x) = \int_{\sin(x_0)}^{\sin(x)} \frac{1}{(1-u^2)(1-2u^2)}\,du$$ 1 car $1 - 2u^2 = 0 \Leftrightarrow u = -\sqrt{\frac{1}{2}}$ ou $u = \sqrt{\frac{1}{2}}$
et $1 - u^2 = 0 \Leftrightarrow u = 1$ ou $u = -1$

$$= \int_{\sin(x_0)}^{\sin(x)} \frac{1}{-(1-u^2)\times-(1-2u^2)}\,du = \int_{\sin(x_0)}^{\sin(x)} \frac{1}{(u^2-1)(2u^2-1)}\,du$$

On fait une DES avec $a_0, b_0, c_0, d_0 \in \mathbb{R}$

$$\frac{\cancel{1}\ 1/2}{(u-1)(u+1)(u+\sqrt{\frac{1}{2}})(u-\sqrt{\frac{1}{2}})} = \frac{a_0}{(u-1)} + \frac{b_0}{(u+1)} + \frac{c_0}{(u+\sqrt{\frac{1}{2}})} + \frac{d_0}{(u-\sqrt{\frac{1}{2}})}$$

Pour a_0 : On multiplie l'égalité par $(u-1)$ et on fait tendre u par 1. On obtient

$$\frac{1}{2\times(1+\sqrt{\frac{1}{2}})(1-\sqrt{\frac{1}{2}})} = \boxed{a_0 = \frac{1}{2}}$$

Pour b_0 : cette fois-ci par $(u+1)$ et u par -1. Ainsi $\boxed{b_0 = -1/2}$

Pour c_0 : On multiplie par $u + \sqrt{\frac{1}{2}}$ et $u \longrightarrow -\sqrt{\frac{1}{2}}$. Ainsi $\boxed{c_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}}$

Pour d_0 : cette fois-ci par $u - \sqrt{\frac{1}{2}}$ et u par $\sqrt{\frac{1}{2}}$. Ainsi $\boxed{d_0 = -\frac{\sqrt{2}}{2}}$ 0,5

On remplace dans l'intégrale :

$$F(x) = \frac{1}{4}\left(\int_{\sin(x_0)}^{\sin(x)} \frac{1}{u-1} - \frac{1}{u+1} + \frac{\sqrt{2}}{u+\sqrt{\frac{1}{2}}} - \frac{\sqrt{2}}{u-\sqrt{\frac{1}{2}}}\, du\right)$$

$$\frac{1}{2}\left([\ln|u-1|]_{\sin(x_0)}^{\sin(x)} - [\ln|u+1|]_{\sin(x_0)}^{\sin(x)} + \sqrt{2}\left[\ln\left|u+\sqrt{\tfrac{1}{2}}\right|\right]_{\sin(x_0)}^{\sin(x)} - \sqrt{2}\left[\ln\left|u-\sqrt{\tfrac{1}{2}}\right|\right]_{\sin(x_0)}^{\sin(x)}\right)$$

les valeurs absolues se simplifient ici

Donc une primitive sur Df de f est :

$$G : x \in Df \mapsto \ln|\sin(x)-1| - \ln|\sin(x)+1| + \sqrt{2}\ln\left|\sin(x)+\sqrt{\tfrac{1}{2}}\right| - \sqrt{2}\ln\left|\sin(x)-\sqrt{\tfrac{1}{2}}\right|$$

1

L'ensemble des primitives de f sur Df est : $\mathcal{F} : \{x \in Df \longrightarrow G(x) + c \,/\, c \in \mathbb{R}\}$

EXERCICE 4

3/3

$$\int_1^{+\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{t}}\right)\ln(t)}{t}\, dt$$

$$\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{t}}\right) \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{t}} = \frac{1}{t^{1/2}}$$

donc $$\frac{\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{t}}\right)\ln(t)}{t} \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{\ln(t)}{t^{1/2}\,t} = \frac{\ln(t)}{t^{3/2}}$$

Comme ces 2 fonctions sont positives leurs intégrales sur $[1,+\infty[$ sont de même nature par le théorème de comparaison par la relation d'équivalence. 1

$\frac{\ln(t)}{t^{1/4}} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ par croissance comparée, donc il existe $t_0 \geq 1$ tel que

pour tout $t \geq t_0$ $\frac{\ln(t)}{t^{1/4}} \leq 1$. Donc pour tout $t \geq t_0$ $\frac{\ln(t)}{t^{3/2}} \leq \frac{1}{t^{5/4}}$ 1

$\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^{5/4}}$ est convergente d'après le théorème de Riemann car $5/4 > 1$,

$t \longrightarrow \frac{\ln(t)}{t^{3/2}}$ est positive ainsi que $t \longrightarrow \frac{1}{t^{5/4}}$ donc par le théorème de comparaison

$\int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t^{3/2}}$ est convergente. Donc $\int_1^{+\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{t}}\right)\ln(t)}{t}$ aussi convergente.

1