Salah Ould Mohand 22007648 Groupe 5

1/3

Contrôle Bonus 16/04/21

Exercice 1

Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tel que $U_n = \left(\dfrac{1}{1-\left(\frac{2n+1}{5n+5}\right)^n} - 1\right)$

$(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est à terme positif car :
on a $n \geq 0$ donc $\left(\dfrac{2n+1}{5n+5}\right)^n \cancel{\geq 1}$ < 1 donc $\dfrac{1}{1-\left(\frac{2n+1}{5n+5}\right)^n}$ est ≥ 1

On a utiliser le développement limité de $\dfrac{1}{1-u}$ avec $u = \left(\dfrac{2n+1}{5n+5}\right)^n$ on a alors :

0,5

$1 + \left(\dfrac{2n+1}{5n+5}\right)^n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{1-\left(\frac{2n+1}{5n+5}\right)^n}$

On a alors $\dfrac{2n+1}{5n+5} \xrightarrow[+\infty]{} 0$ donc : donc $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(\dfrac{2n+1}{5n+5}\right)^n$

$\left(1 + \left(\dfrac{2n+1}{5n+5}\right)^n\right.$ tend vers 1 en $+\infty$$\left.\right)$

(On a trouvé 0 précédemment car on a appliqué le critère de Cauchy tel que :

0,5

$U_n = \left(\left(\dfrac{2n+1}{5n+5}\right)^n\right)^{1/n} = \dfrac{2n+1}{5n+5} \xrightarrow[+\infty]{} \cancel{0}$ $\dfrac{2}{5} < 1$

On trouve ensuite 1 car on fait : $1 + \left(\dfrac{2n+1}{5n+5}\right)^n$, ce qui tend vers 1 et par théorème de comparaison :

$\dfrac{1}{1-\left(\frac{2n+1}{5n+5}\right)^n} - 1 \leq \dfrac{1}{1-\left(\frac{2n+1}{5n+6}\right)^n}$

terme de série non CV !

La série $\sum\limits_{n\geq 0}\left(\dfrac{1}{1-\left(\frac{2n+1}{5n+5}\right)^n} - 1\right)$ est donc à termes positif est converge