9/16

Bonne rédaction. Continuez ! Revoir les petites choses qui ne vont pas.

$\boxed{\text{DM1}}$ MC2

EXERCICE 1 :

5/5

$$x \longmapsto \frac{e^x+1}{e^{3x}-e^{2x}-2e^x}$$

On pose $u = e^x$:

$$e^{3x}-e^{2x}-2e^x = u^3-u^2-2u$$

On résout alors :

$$u^3-u^2-2u=0$$ pour connaître le domaine de définition.

Une racine évidente est $u=0$ $\Leftrightarrow e^x=0$, ce qui n'est pas défini.

On résout ensuite

$$u(\underbrace{u^2-u-2}_{=0\ ?})$$

la racine évidente est alors $u=-1$ $(\Leftrightarrow e^x=-1)$ qui n'est pas défini

la 2e racine évidente est $u=2$
$\Leftrightarrow e^x = 2$
$\Leftrightarrow x = \ln(2)$

Donc Df est $\cancel{\mathbb{R}^*_+ \setminus \ln(2)}$ $\mathbb{R} \setminus \{\ln(2)\}$

On a f continue sur $\mathbb{R}^*_+ \setminus \ln(2)$ donc f admet des primitives sur cet intervalle. 1

L'une d'elle est :

$$F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt$$ avec $[x_0, x] \subset Df$ et x_0 constante

changement de variable :
$u = e^t$
$\Rightarrow du = e^t dt = u\,dt$
$\Rightarrow dt = \frac{du}{u}$

$$= \int_{e^{x_0}}^{e^x} \frac{u+1}{u^4-u^3-2u^2}\,du$$

$$= \frac{\cancel{u+1}}{u^2\cancel{(u+1)}(u-2)} = \frac{1}{u^2(u-2)}$$ 1

On essaie une décomposition en éléments simples : TB

$$\frac{1}{u^2(u-2)} = \frac{a_0}{u} + \frac{a_1}{u^2} + \frac{b_0}{u-2}$$

On cherche a_0, a_1, b_0 :

* On multiplie par u^2 :

$$\frac{1}{u-2} = u a_0 + a_1 + \frac{u^2 b_0}{u-2}$$

passage à la limite $u \to 0$:

$$-\frac{1}{2} = a_1$$

* On multiplie par $(u-2)$:

$$\frac{1}{u^2} = \frac{a_0(u-2)}{u} + \frac{a_1(u-2)}{u^2} + b_0$$

passage à la limite $u \to 2$:

$$\frac{1}{4} = b_0$$

* On a $\frac{1}{u^2(u-2)} = \frac{a_0}{u} - \frac{1/2}{u^2} + \frac{1/4}{u-2}$

par passage à la limite $u \to 1$: $-1 = a_0 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}$

$\iff -1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = a_0$

$\iff a_0 = \frac{-1}{4}$

1

Donc on a $\frac{1}{u^2(u-2)} = \frac{-1/4}{u} - \frac{1/2}{u^2} + \frac{1/4}{u-2}$

Retournons au calcul de F :

$$F(x) = \int_{e^{x_0}}^{e^x} \frac{-1/4}{u}\,du + \int_{e^{x_0}}^{e^x} \frac{-1/2}{u^2}\,du + \int_{e^{x_0}}^{e^x} \frac{1/4}{u-2}\,du$$

$$= -\frac{1}{4}\int_{e^{x_0}}^{e^x} \frac{1}{u}\,du - \frac{1}{2}\int_{e^{x_0}}^{e^x} \frac{1}{u^2}\,du + \frac{1}{4}\int_{e^{x_0}}^{e^x} \frac{1}{u-2}\,du$$

$$= -\frac{1}{4}\left[\ln(|u|)\right]_{e^{x_0}}^{e^x} - \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{u}\right]_{e^{x_0}}^{e^x} + \frac{1}{4}\left[\ln|u-2|\right]_{e^{x_0}}^{e^x}$$

$$= -\frac{1}{4}\left[\underbrace{\ln(e^t)}_{=t}\right]_{x_0}^{x} - \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{e^t}\right]_{x_0}^{x} + \frac{1}{4}\left[\ln|e^t-2|\right]_{x_0}^{x}$$

$= -\frac{1}{4}x + \frac{1}{2}e^{-x} + \frac{1}{4}\ln|e^{x}-2| + \text{cste}$ 1

Donc $\mathcal{F}$ est l'ensemble des primitives de f sur $\mathbb{R}$ tel que $\mathcal{F} = \{-\frac{1}{4}x + \frac{1}{2}e^{-x} + \frac{1}{4}\ln|e^{x}-2| + C \mid C \in \mathbb{R}\}$

avec $\ln|e^{x}-2| = \begin{cases} \ln(e^{x}-2) & \text{pour } x > \ln(2) \\ \ln(2-e^{x}) & \text{pour } x < \ln(2) \end{cases}$ 1

2,5/4

EXERCICE 2 :

$x \longmapsto \frac{1}{1+\operatorname{sh}(x)+4\operatorname{ch}(x)}$

pourquoi ?

Cette fonction (que l'on appellera g) est définie et continue sur $\mathbb{R}$ donc possède des primitives sur cet intervalle. 0,5

Voici l'une d'elles :

$$F(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{1}{1+\operatorname{sh}(t)+4\operatorname{ch}(t)}\,dt \quad \text{avec } [x_0, x] \subset \mathbb{R}.$$

$$= \int_{x_0}^{x} \frac{1}{1+\frac{5}{2}e^{t}+\frac{3}{2}e^{-t}}\,dt = \int_{x_0}^{x} \frac{2}{5e^{t}+2+3e^{-t}}\,dt$$

CHANGEMENT DE VARIABLE :

Posons $u = e^{t} \Rightarrow du = e^{t}dt$
$\Leftrightarrow dt = du/u$

Donc $F(x) = \int_{e^{x_0}}^{e^{x}} \frac{2}{5u^2+2u+3}\,du$ 1

$$= \int_{e^{x_0}}^{e^{x}} \frac{2}{\left(\sqrt{5}u+\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2+\frac{14}{5}}\,du$$ 0,5 à mettre en facteur

0,5

$$= \cancel{2}\left[\operatorname{Arctan}\left(\sqrt{5}u+\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\right]_{e^{x_0}}^{e^{x}} + C \quad \text{avec } C \text{ cste}$$

$$= \cancel{2}\operatorname{Arctan}\left(\sqrt{5}e^{x}+\frac{1}{\sqrt{5}}\right) + C$$

Donc l'ensemble des primitives de g sur $\mathbb{R}$ est

$\mathcal{S} = \{ 2\mathrm{Arctan}(\sqrt{5}e^{x} + \frac{1}{\sqrt{5}}) + C \ / \ C \in \mathbb{R} \}$

EXERCICE 4 : $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(1+\frac{1}{\sqrt{t}})\ln(t)}{t}\,dt$

1,5/3

$$\frac{\ln(1+\frac{1}{\sqrt{t}})\ln(t)}{t} = \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{t}} - \frac{1}{2t} + o(\frac{1}{t})\right)\ln(t)}{t}$$

$$= \frac{\frac{\ln(t)}{\sqrt{t}} - \cancel{\frac{\ln(t)}{2t}} + o\left(\frac{\ln(t)}{t}\right)}{t}$$

pas nécessaire

$$= \frac{\ln(t)}{t\sqrt{t}} - \cancel{\frac{\ln(t)}{2t^2}} + o\left(\frac{\ln(t)}{t^2}\right)$$

suffisant

$$\underset{+\infty}{\sim} \frac{\ln(t)}{t\sqrt{t}} - \cancel{\frac{\ln(t)}{2t^2}} = \frac{\ln(t)(2t-\sqrt{t})}{2t^2\sqrt{t}}$$

les deux fonctions équivalentes sont positives donc leurs intégrales sont de même nature. 1

On a $\frac{\ln(t)(2t-\sqrt{t})}{2\sqrt{t}} \xrightarrow[+\infty]{} \cancel{0}$ par CC.

Donc il existe t_0 tq $\forall t \geq t_0$ on a

$$\frac{\ln(t)(2t-\sqrt{t})}{2\sqrt{t}} \leq 1$$

$$\iff \frac{\ln(t)(2t-\sqrt{t})}{2t^2\sqrt{t}} \leq \frac{1}{t^2}$$

0,5

Or on sait que $\int_1^{+\infty}\frac{1}{t^2}\,dt$ est convergente (Riemann avec $\alpha > 1$)

donc par comparaison $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)(2t-\sqrt{t})}{2t^2\sqrt{t}}\,dt$ conv.

D'où $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(1+\frac{1}{\sqrt{t}})\ln(t)}{t}\,dt$ converge.