Université de Paris
UFR de Mathématiques et Informatique
45, rue des Saints-Pères, 75006, Paris.

Licence 1ère année, Groupe 5, Mathématiques et Calcul 2 (MC2)

Interrogation n°5 bonus (16/04/2021) : Séries

Durée : 10 min

On pensera à bien détailler les raisonnements et justifier les réponses.

Exercice 1 (3pt)

Donner la nature de la série

$$\sum_{n\geqslant 1}\left(\frac{1}{1-\left(\frac{2n+1}{5n+5}\right)^n}-1\right).$$

Correction. La série est à termes positifs puisque $0<1-\left(\frac{2n+1}{5n+5}\right)^n<1$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ (0.5pt). Comme $\left(\frac{2n+1}{5n+5}\right)^n \to 0$ quand $n\to+\infty$, on en déduit que $\frac{1}{1-\left(\frac{2n+1}{5n+5}\right)^n} \underset{n\to+\infty}{\sim} 1+\left(\frac{2n+1}{5n+5}\right)^n$ et donc $\frac{1}{1-\left(\frac{2n+1}{5n+5}\right)^n}-1 \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(\frac{2n+1}{5n+5}\right)^n$ (1pt).

Comme $\sum_{n\geqslant 0}\left(\frac{2n+1}{5n+5}\right)^n$ est une série à termes (strictement) positifs, on en déduit par le théorème de comparaison que $\sum_{n\geqslant 1}\left(\frac{1}{1-\left(\frac{2n+1}{5n+5}\right)^n}-1\right)$ et $\sum_{n\geqslant 0}\left(\frac{2n+1}{5n+5}\right)^n$ ont même nature (0.5pt). Étudions donc la série $\sum_{n\geqslant 0}\left(\frac{2n+1}{5n+5}\right)^n$. Notons, pour tout $n\geqslant 0$, v_n son terme général. On a $(v_n)^{\frac{1}{n}}=\frac{2n+1}{5n+5}\to\frac{2}{5}$ quand $n\to+\infty$. Donc par le critère de Cauchy, $\sum_{n\geqslant 0}\left(\frac{2n+1}{5n+5}\right)^n$ converge. Par conséquent, la série de départ converge également (1pt).