Corection Examen Optimisation

M1 MMA 2020/2021

Exercice 1 :

Voir cours

Exercice 2 :

Déjà vu (CC2)

Exercice 3 :

1) $$D = \begin{bmatrix} -1 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & -1 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \quad 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R}). \quad Dx = \begin{bmatrix} x_2 - x_1 \\ \vdots \\ x_n - x_{n-1} \\ 0 \end{bmatrix}$$

1

Donc $$f(x) = \frac{1}{2}\|x-y\|_2^2 + \lambda\sqrt{\|Dx\|_2^2 + \varepsilon}$$

2) Soit $x, x' \in \mathbb{R}^n$, et $t \in [0,1]$ alors comme h est convexe :

$$h((1-t)x + tx') \leq (1-t)\,h(x) + t\,h(x').$$

Comme ϕ est croissante on a ainsi

$$\phi \circ h((1-t)x + tx') \leq \phi((1-t)\,h(x) + t\,h(x'))$$
$$\underset{\phi \text{ convexe}}{\leq} (1-t)\,\phi\circ h(x) + t\,\phi\circ h(x').$$

1

D'où $\phi \circ h$ est convexe.

3) On pose $\phi(t) = \lambda\sqrt{t^2+\varepsilon}$ pour $t \in \mathbb{R}$

alors ϕ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et

$$\phi'(t) = 2\lambda t\,(t^2+\varepsilon)^{-\frac{1}{2}} \geq 0 \quad \text{pour } t \geq 0$$

ie ϕ est croissante sur $\mathbb{R}_+$

Puis $$\phi''(t) = 2\lambda(t^2+\varepsilon)^{-\frac{1}{2}} - 2\lambda t^2(t^2+\varepsilon)^{-\frac{3}{2}}$$
$$= 2\lambda(t^2+\varepsilon)^{-\frac{3}{2}}(t^2+\varepsilon - t^2)$$
$$= 2\lambda\varepsilon(t^2+\varepsilon)^{-3/2} > 0 \text{ sur } \mathbb{R}$$

donc ϕ convexe sur $\mathbb{R}$ donc aussi sur $\mathbb{R}_+$.

Soit maintenant $h(x) = \|Dx\|_2$ pour $x \in \mathbb{R}^q$.
On montre facilement que h est convexe.
De plus h est à valeurs positives ou
2 nulles donc par convexité de ϕ et
croissance sur $\mathbb{R}_+$, par 2)

on a $g = \phi \circ h$ convexe.

4) On a $\nabla^2 f(x) = I_n + \nabla^2 g(x)$ pour tout x.
Comme g est convexe, $\nabla^2 g(x)$ est positive
donc

1 $\forall x, h \in \mathbb{R}^n$, $\langle \nabla^2 f(x) h, h \rangle = \|h\|_2^2 + \langle \nabla^2 g(x) h, h \rangle$
$\geq \|h\|_2^2$

ie f est 1-fortement convexe.

5) On a vu dans le cours qu'une
fonction 1-fortement convexe est coercive
0,5 donc admet au moins un minimum global
et est strictement convexe d'où f admet
un unique minimum global.

Exercice 4 :

1) a) $v \in \mathbb{R}^n \longmapsto \langle \nabla f(x), v \rangle$ est $\mathcal{C}^0$ et $\{ v \in \mathbb{R}^n \;/\; \|v\|_1 \leq 1 \}$ est compact donc

0,5 le problème de minimisation admet au moins un minimum global.

b) Soit $v \in \mathbb{R}^n$ avec $\|v\|_1 \leq 1$ alors

$$|\langle \nabla f(x), v \rangle| \leq \|v\|_1 \, \|\nabla f(x)\|_\infty \leq \|\nabla f(x)\|_\infty$$

1,5 donc $\langle \nabla f(x), v \rangle \geqslant - \|\nabla f(x)\|_\infty = -|\partial_i f(x)|$

Or $\langle \nabla f(x), v^* \rangle = - \operatorname{sign}(\partial_i f(x)) \, \partial_i f(x) = - |\partial_i f(x)|$

d'où v^* est un minimum global

2) a) On a $\langle \nabla f(x^{(k)}), d^{(k)} \rangle = - \|\nabla f(x^{(k)})\|_\infty^2 < 0$ dès que

0,5 $\nabla f(x^{(k)}) \neq 0$ ie $d^{(k)}$ est bien une direction de descente.

b) Il existe $z \in \,]x^{(k)}, x^{(k)} + t \, d^{(k)}[$ tel que

$$f(x^{(k)}+t\,d^{(k)}) = f(x^{(k)}) + t\langle \nabla f(x^{(k)}), d^{(k)}\rangle + \frac{t^2}{2}\langle \nabla^2 f(z)\, d^{(k)}, d^{(k)}\rangle$$

1 (par formule Taylor Maclaurin à l'ordre 2)

d'où $f(x^{(k)}+t\,d^{(k)}) \leq f(x^{(k)}) - t\|\nabla f(x^{(k)})\|_\infty^2 + \frac{Mt^2}{2}\underbrace{\|d^{(k)}\|_2^2}_{=\|\nabla f(x^{(k)})\|_\infty^2}$

c) La relation précédente est vraie pour tout $t>0$ donc comme

$$f(\underbrace{x^{(k)}+t^{(k)}d^{(k)}}_{=x^{(k+1)}}) = \min_{t>0} f(x^{(k)}+t\,d^{(k)})$$

on a $\forall\, t>0$

$$f(x^{(k+1)}) \leq \underbrace{f(x^{(k)}) - t\|\nabla f(x^{(k)})\|_\infty^2 + \frac{Mt^2}{2}\|\nabla f(x^{(k)})\|_\infty^2}_{\text{polynôme de degré 2 en } t \text{ minimum en } t=\frac{1}{M}}$$

1

d'où $f(x^{(k+1)}) \leq f(x^{(k)}) - \frac{1}{2M}\|\nabla f(x^{(k)})\|_\infty^2$

d) Soit $v \in \mathbb{R}^n$, $\|v\|_2^2 = \sum_{i=1}^n v_i^2 \leq \sum_{i=1}^n \|v\|_\infty^2 = n\|v\|_\infty^2$

On a donc

$$f(x^{(k+1)}) \leq f(x^{(k)}) - \frac{1}{2Mn} \|\nabla f(x^{(k)})\|_2^2$$

1

$$\leq f(x^{(k)}) + \frac{m}{Mn} \left(f(x^*) - f(x^{(k)}) \right)$$

donc $f(x^{(k+1)}) - f(x^*) \leq \left(1 - \frac{m}{Mn}\right)\left(f(x^{(k)}) - f(x^*)\right)$

e) On a $0 \leq f(x^{(k+1)}) - f(x^*) \leq c^{k+1} \left(f(x^{(0)}) - f(x^*)\right)$

0,25 avec $c = 1 - \frac{m}{Mn} \in]0,1[$ donc $f(x^{(k)}) \xrightarrow[k \to +\infty]{} f(x^*)$ et la convergence est linéaire.

f) On remarque que $c_n = 1 - \frac{m}{Mn} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$

ie la convergence linéaire est de plus en plus lente quand la dimension augmente.

0,75 C'est logique car à chaque étape de descente, on ne modifie qu'une seule coordonnée ce qui devient pénalisant quand la dimension augmente.