Indications T.D. 6

T.D. 6 : Exercice 1

1. On posera $\varphi : (x,u) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to f(x)\mathbb{1}_{]-\infty,u]}(x)$ et on appliquera le théorème de continuité des Intégrales Dépendantes d'un Paramètre (IDP).

T.D. 6 : Exercice 2

1. On posera $f : (x,u) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+ \to \dfrac{1-\cos(x)}{x^2}e^{-ux}$ et on appliquera le théorème de continuité des IDP. Pour le calcul de la limite, on montrera que $\lim\limits_{u\to+\infty} f(x,u) = 0$ puis on utilisera le TCD.

2. On appliquera deux fois le théorème de dérivation des IDP. Pour dominer les dérivées partielles, on se placera sur l'intervalle $u \in \,]\varepsilon\,, +\infty[$ où $\varepsilon > 0$ est fixé.

3. En considérant une suite $(u_n)_n$ décroissante vers 0, on montrera à l'aide du thèorème qe Beppo-Levi, que F n'est pas dérivable en 0.

4. On exprimera F' en fonction de F'' puis F en fonction de F'.

5. On utilisera la question précédente et la continuité de F en 0.

T.D. 6 : Exercice 4

1. Pour montrer l'uniforme continuité, on montrera d'abord que pour tout $s, t \in \mathbb{R}$, $|e^{it} - e^{is}| \leq \min(2, |t-s|)$ puis en utilisant le TCD, que
$$\lim_{\theta\to 0^+} \int |f(x)| \min(2, \theta|x|)dx = 0.$$

T.D. 6 : Exercice 5

2. On posera $I_{x_0,\varepsilon} = \,]x_0 - \varepsilon\,, x_0 + \varepsilon[$ où $x_0 > 0$ et $\varepsilon > 0$ tel que $x_0 - \varepsilon > 0$ et on étudiera la dérivabilité de F sur $I_{x_0,\varepsilon}$ à l'aide du théorème de dérivation des IDP que l'on appliquera deux fois.