Université de Paris
UFR de Mathématiques et Informatique
45, rue des Saints-Pères, 75006, Paris.

Licence $1^{\text{ère}}$ année, MATHÉMATIQUES ET CALCUL 2
Équations Différentielles : Suppléments

1 Superposition de solutions particulières

Considérons l'équation différentielle linéaire d'ordre 1 suivante

$$\forall x \in I, \quad y'(x) + \alpha(x)y(x) = h_1(x) + h_2(x) + \ldots + h_N(x), \tag{E}$$

où I est un intervalle, α, h_1, ..., h_N des fonctions continues sur I.

Pour sa résolution, il va falloir appliquer la technique vue en cours et en TD de d'abord résoudre l'équation homogène, puis de trouver une solution particulière et enfin de conclure que l'ensemble des solutions est composé de la somme de la solution particulière trouvée et de n'importe quelle solution de l'équation homogène.

Concentrons nous sur la recherche d'une solution particulière. Comme le second membre est la somme de N fonctions, une technique est d'obtenir une solution particulière y_{p_n} pour chacunes des N équations suivantes, pour $1 \leq n \leq N$

$$\forall x \in I, \quad y'(x) + \alpha(x)y(x) = h_n(x), \tag{E_n}$$

car alors

$$y_p = y_{p_1} + y_{p_2} + \ldots + y_{p_N},$$

est une solution particulière de (E). En effet

$$\begin{aligned}\forall x \in I, \quad y_p'(x) + \alpha(x)y_p(x) &= \left(y_{p_1}'(x) + \alpha(x)y_{p_1}(x)\right) + \ldots + \left(y_{p_N}'(x) + \alpha(x)y_{p_N}(x)\right), \\ &= h_1(x) + \ldots + h_N(x).\end{aligned}$$

Cette méthode est pertinente quand α **est une fonction constante** et que les h_n appartiennent chacunes à une forme connue vue en TD :

— un polynôme de degré m, on cherche alors une solution particulière sous la forme d'un polynôme de degré m (*si le coefficient devant y est non nul*),
— un produit d'un polynôme et d'une exponentielle, on cherche une solution particulière sous la forme d'un produit d'un polynôme quelconque et de la même exponentielle,
— une combinaison linéaire de sinus et cosinus, on cherche une solution particulière sous la même forme.

Remarques :

— il est possible (comme toujours) d'utiliser plutôt la méthode de la variation de la constante à la place de cette technique,
— ce résultat s'applique également quand on a une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants.

Exemple : donner les solutions de l'équation différentielle suivante

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y'(x) + 3y(x) = x - e^{3x} + \cos(\frac{x}{2}). \tag{E}$$

On remarque que cette équation différentielle a la bonne forme pour appliquer la technique précédente. En effet, elle est à coefficients constants, le second membre est somme de 3 termes dont chacun correspond à une forme connue.

Résoudre cette équation pour s'entraîner. Vous devez trouver que l'ensemble des solutions est composé des fonctions

$$y : x \in \mathbb{R} \mapsto \left(\frac{x}{3} - \frac{1}{9}\right) - \frac{1}{6}e^{3x} + \left(\frac{12}{37}\cos(\frac{x}{2}) + \frac{2}{37}\sin(\frac{x}{2})\right) + Ce^{-3x},$$

avec $C \in \mathbb{R}$.

2 Recollement de solutions d'une équation différentielle

Le principe du recollement de solutions intervient typiquement quand la résolution d'une équation différentielle doit se faire *séparément* sur plusieurs intervalles disjoints alors qu'au départ l'équation différentielle était définie sur $\mathbb{R}$ tout entier. La question se pose alors de savoir s'il est possible de trouver des solutions (à partir de celles trouvées sur chacuns des intervalles) sur $\mathbb{R}$. Illustrons ce principe sur un exemple.

On souhaite trouver les solutions de l'équation différentielle suivante

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad xy'(x) - 2y(x) = x^3. \tag{E}$$

Tout d'abord on commence par l'analyser. C'est une équation différentielle linéaire d'ordre 1, non normalisée, avec second membre et à coefficients non constants. Par conséquent, pour la résoudre, il va falloir commencer par la normaliser. On va donc considérer l'équation différentielle suivante

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad y'(x) - \frac{2}{x}y(x) = x^2. \tag{E'}$$

Notons que l'équation (E) était définie sur $\mathbb{R}$ tout entier (aucun soucis de définition) mais que (E') ne l'est que sur $\mathbb{R}^*$ car on a divisé par x. Il va donc falloir résoudre l'équation différentielle (E') sur chacun des intervalles $]0, +\infty[$ et $]-\infty, 0[$ (**rappel de cours : on considère toujours la résolution des équations différentielles sur un intervalle**).

Considérons donc d'abord

$$\forall x \in]0, +\infty[, \quad y'(x) - \frac{2}{x}y(x) = x^2. \tag{E_1'}$$

— 1ère étape : on résout l'équation homogène

$$\forall x \in]0, +\infty[, \quad y'(x) - \frac{2}{x}y(x) = 0.$$

Une primitive de $x \in]0, +\infty[\mapsto -\frac{2}{x}$ est $x \in]0, +\infty[\mapsto -2\ln(x)$, donc les solutions de l'équation homogène sont les fonctions $x \in]0, +\infty[\mapsto C_1 e^{-2\ln(x)} = C_1 x^2$, avec $C_1 \in \mathbb{R}$.

— 2ème étape : on cherche une solution particulière. Comme l'équation différentielle (E_1') n'est pas à coefficients constants, on ne peut pas chercher la solution particulière sous la forme d'un polynôme de degré 3. On utilise donc la méthode de la variation de la constante. Soit $y_p(x) = F(x)x^2$ pour tout $x > 0$. Alors y_p est solution de (E_1') si et seulement si $F'(x) = 1$ pour tout $x > 0$ (écrire les calculs intermédiaires si besoin comme vu en TD). Donc par exemple $F(x) = x$ et $y_p(x) = x^3$, pour tout $x > 0$, est solution particulière de (E_1').

— 3ème étape : en conclusion les solutions de (E_1') sont les fonctions

$$y_1 : x \in]0, +\infty[\mapsto (C_1 + x)x^2, \quad C_1 \in \mathbb{R}.$$

On recommence avec l'équation différentielle sur l'autre intervalle

$$\forall x \in]-\infty, 0[, \quad y'(x) - \frac{2}{x}y(x) = x^2. \tag{E_2'}$$

— 1ère étape : on résout l'équation homogène

$$\forall x \in]-\infty, 0[, \quad y'(x) - \frac{2}{x} y(x) = 0.$$

Une primitive de $x \in]-\infty, 0[\mapsto -\dfrac{2}{x}$ est $x \in]-\infty, 0[\mapsto -2\ln(-x)$, donc les solutions de l'équation homogène sont les fonctions $x \in]-\infty, 0[\mapsto C_2 e^{-2\ln(-x)} = C_2(-x)^2 = C_2 x^2$, avec $C_2 \in \mathbb{R}$.

— 2ème étape : on cherche une solution particulière. Les calculs sont identiques à la question précédente comme les solutions de l'équation homogène sont les mêmes. D'où $y_p(x) = x^3$, pour tout $x < 0$, est solution particulière de (E_2').

— 3ème étape : en conclusion les solutions de (E_2') sont les fonctions

$$y_2 : x \in]-\infty, 0[\mapsto (C_2 + x)x^2, \quad C_2 \in \mathbb{R}.$$

Recollement. Se pose désormais la question de la détermination (si c'est possible) des solutions de l'équation différentielle (E) (donc sur $\mathbb{R}$ tout entier). Supposons qu'une telle solution $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ existe et raisonnons par conditions nécessaires. Alors y est forcément solution de (E_1') et de (E_2'), d'où il existe $C_1 \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall x > 0, \quad y(x) = (C_1 + x)x^2,$$

et il existe $C_2 \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall x < 0, \quad y(x) = (C_2 + x)x^2.$$

Comme y est solution de (E), y doit être une fonction $\mathcal{C}^1$ (dérivable et à dérivée continue) sur $\mathbb{R}$. Regardons ce que cela implique.

— *Continuité de y* : y est continue sur $\mathbb{R}$, donc en 0, d'où on doit avoir $\lim\limits_{x\to 0, x<0} y(x) = \lim\limits_{x\to 0, x>0} y(x)$. Or $\lim\limits_{x\to 0, x<0} y(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0, x>0} y(x) = 0$, d'où ce critère est satisfait peu importe les valeurs de C_1 et C_2. On en déduit par contre que forcément $y(0) = 0$.

— *Continuité de la dérivée de y* : y' est continue sur $\mathbb{R}$, donc en 0. Or pour tout $x < 0$, on a $y'(x) = 2C_2 x + 3x^2$ et pour tout $x > 0$, on a $y'(x) = 2C_1 x + 3x^2$, d'où $\lim\limits_{x\to 0, x<0} y'(x) = \lim\limits_{x\to 0, x>0} y'(x) = 0$ peu importe les valeurs de C_1 et C_2. On en déduit par contre que forcément $y'(0) = 0$.

La fonction y doit ainsi satisfaire

$$y : x \in \mathbb{R} \mapsto \begin{cases} (C_1 + x)x^2, & \text{si } x > 0, \\ 0, & \text{si } x = 0, \\ (C_2 + x)x^2, & \text{si } x < 0, \end{cases}$$

ce qui peut se réécrire par exemple

$$y : x \in \mathbb{R} \mapsto \begin{cases} (C_1 + x)x^2, & \text{si } x \geq 0, \\ (C_2 + x)x^2, & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Synthèse : une telle fonction y est bien $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ d'après l'étude précédente et satisfait bien l'équation différentielle (E) (sur $\mathbb{R}$ tout entier).

Par conséquent, les solutions de l'équation différentielle (E) sont les fonctions

$$y : x \in \mathbb{R} \mapsto \begin{cases} (C_1 + x)x^2, & \text{si } x \geq 0, \\ (C_2 + x)x^2, & \text{si } x < 0, \end{cases}$$

avec C_1 et C_2 des constantes réelles quelconques (que l'on peut choisir de manière indépendante). On a recollé les solutions de (E_1') et (E_2') pour obtenir les solutions de (E).