4/16

Attention à la présentation des raisonnements. Il est vraiment important de travailler cette aspect. Particulièrement les liens logiques.
Retravailler la correction.
Courage !

Exercice 1 :

1,5/5

nous avons $f : x \to \dfrac{e^x + 1}{e^{3x} - e^{2x} - 2e^x}$ et Df !

Soit $\displaystyle\int \frac{e^x + 1}{e^{3x} - e^{2x} - 2e^x}\, dx$

effectuons le changement de variable :

$t = e^x$

$dt = e^x \cdot dx$

$dt = t \cdot dx$

$\dfrac{dt}{t} = dx$

$\displaystyle\int \frac{t+1}{t^3 - t^2 - 2t} \frac{dt}{t} = \dots = \dots$

Ne pas oublier les bornes

nous avons donc : $\displaystyle\int \frac{t + 1}{(t^3 - t^2 - 2t)} \cdot \frac{dt}{t}$

Soit $\displaystyle\int \frac{(t+1)\, dt}{t^4 - t^3 - 2t^2}$ $\cancel{\Leftrightarrow}$ $\dfrac{(t+1)\, dt}{t^2(t^2 - t - 2)}$

Pas de sens

Les racines du polynôme en t $(t^2 - t - 2)$ ont pour racines

$\Delta = 1 - 4 \times 1 \times (-2) = 9$

$S_1 = \dfrac{4}{2} = 2$ $\qquad S_2 = \dfrac{-2}{2} = -1$

on a donc $\displaystyle\int \frac{(t+1)\, dt}{t^2(t+1)(t-2)}$ $\cancel{\Leftrightarrow}$ $=$ $\displaystyle\int \frac{dt}{t^2(t-2)}$ $\cancel{\Leftrightarrow}$ $=$ $\dfrac{1}{t^2(t-2)} \cdot dt$

on utilise la formule de la DES. on a donc. 0,5

$\dfrac{1}{t^2(t-2)} = \dfrac{a}{t} + \dfrac{b}{t^2} + \dfrac{c}{t-2}$

$$= \frac{at(t-2) + b(t-2) + ct^2}{t^2(t-2)}$$

$$E \begin{cases} a + c = 0 \\ -2a + b = 0 \\ -2b = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} b = -1/2 \\ -2a = 1/2 \iff a = -1/4 \\ c = 1/4 \end{cases}$$

1

d'où est-ce que

on a donc : $-\frac{1}{4t} - \frac{1}{2t^2} + \frac{1}{4(t-2)}$

ça vient. Ce n'est pas une égalité

donc $\int \frac{1}{t^2(t-2)} dt = -\frac{1}{4}\ln t + \frac{1}{2t} + \frac{1}{4}\ln(t-2)$

⚠ bornes

où est passé " $\int$ "

$$\iff \boxed{F(x) = -\frac{1}{4}x + \frac{1}{2e^x} + \frac{1}{4}\ln(e^x - 2) + k}$$

pourquoi ?

Exercice 2

2,5/4

Nous avons $g : x \to \frac{1}{1 + sh(x) + 4\,ch(x)}$

D_g ?

Soit $\int \frac{1}{1 + sh(x) + 4\,ch(x)} \, dx$

nous savons que $sh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ et $ch(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

donc on a : $\int \frac{1}{1 + \frac{e^x - e^{-x}}{2} + \frac{4(e^x + e^{-x})}{2}} \, dx$

$$\Leftrightarrow \int \frac{1}{\frac{2 + e^x - e^x + 4e^x + 4e^{-x}}{2}}$$

Soit $\displaystyle\int \frac{2}{2+5e^x+3e^{-x}}\,dx \Leftrightarrow \int$

on effectue le changement de variable : $t =$

$$\boxed{t = e^x}$$

$$\frac{1}{t} = \frac{1}{e^x} = e^{-x}$$

$$\boxed{\frac{dt}{t} = dx}$$

on a donc : $\displaystyle\int_0^0 \frac{2}{2+5t+\frac{3}{t}}\,\frac{dt}{t}$

$$\cancel{\Leftrightarrow} \int_0^0 \frac{2}{2t+5t^2+3}\,dt \qquad 1$$

on met le denominateur sous forme canonique :

$$5t^2+2t+3 = 5\left(t^2+\frac{2}{5}t+\frac{3}{5}\right)$$

$$= 5\left(t^2+2\left(\frac{2}{10}\right)t+\left(\frac{1}{5}\right)^2-\left(\frac{1}{5}\right)^2+\frac{3}{5}\right)$$

$$= 5\left(\left(t+\frac{1}{5}\right)^2-\frac{1}{25}+\frac{15}{25}\right)$$

$$= 5\left(\left(t+\frac{1}{5}\right)^2 - \frac{14}{25}\right) \quad + \qquad 1$$

on a donc : $\displaystyle\int \frac{2}{5t^2+2t+3}\,dt$

$$\cancel{\Leftrightarrow} \frac{2}{5}\int \frac{1}{t^2+\frac{2}{5}t+3}\,dt$$

$$\cancel{\Leftrightarrow} \frac{2}{5}\int \frac{1}{\left(t+\frac{1}{5}\right)^2+\frac{14}{25}}\,dt$$

$$\cancel{\Leftrightarrow} \frac{2}{5}\left(\frac{1}{\frac{14}{25}}\left(\int\frac{1}{\left(\frac{t+\frac{1}{5}}{\frac{\sqrt{14}}{5}}\right)^2+1}\,dt\right)\right)$$

$$\cancel{\Leftrightarrow} \quad \frac{5}{7}\int \frac{1}{\left(\frac{t+\frac{1}{5}}{\frac{\sqrt{14}}{5}}\right)^2+1}\,dt$$

donc une primitive de f sur $D_f = \mathbb{R}$.

pourquoi ?

$$\Rightarrow \cancel{\frac{5}{7}} \arctan\left(\frac{t+\frac{1}{5}}{\frac{\sqrt{14}}{5}}\right) + k$$

$$F(x) = \frac{5}{7}\arctan\left(\frac{e^x+1}{\frac{\sqrt{14}}{5}}\right) + k$$

0,5

Exercice 3 :

0/4

nous avons $x \to \dfrac{1}{\cos(x)\cos(2x)}$

Soit $\displaystyle\int \frac{1}{\cos(x)\cos(2x)}\,dx$

on utilise le changement de variable :

$\boxed{u = \sin x}$

$\boxed{du = \cos x\, dx}$

$\boxed{\cos(2x) = 1 - 2\sin(x)^2}$

nous avons donc : $\displaystyle\int \frac{1}{\cos(x)\cdot(1-2\sin^2(x))} \times \cancel{\frac{\cos\,dx}{1}}$

$$\Leftrightarrow \int \frac{1}{1-2\sin^2(x)}\,dx$$

$$\Leftrightarrow \int \frac{1}{1-2u^2}\,du$$

$$\Leftrightarrow \int \frac{du}{\cancel{1-2u^2}}$$

on a donc une primitive de f sur $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$

$$\Rightarrow \quad + \frac{1}{2u} + k$$

$$F(x) = \frac{1}{2\sin(x)} + k$$