Université de Paris
UFR de Mathématiques et Informatique
45, rue des Saints-Pères, 75006, Paris.

Licence 1ère année, Groupe 5, Mathématiques et Calcul 2 (MC2)

Devoir Maison n°2 : Ensemble du Programme

À rendre avant le **Vendredi 16 avril 12h** par email

On pensera à bien structurer et détailler les raisonnements, ainsi qu'à justifier les réponses. On pourra s'aider de la rédaction des réponses vue en TD.

Exercice 1 (8pt) On considère l'équation différentielle suivante

$$(E) \qquad y'(x) - y(x) = \frac{1}{(e^{-x}-1)^2} - \frac{1}{e^{-x}-2} - \frac{1}{e^{-2x}+2e^{-x}+2}, \quad \forall x \in]-\ln(2), 0[.$$

(1) Justifier que cette équation différentielle est bien définie sur $]-\ln(2), 0[$.

(2) Résoudre l'équation homogène.

(3) On cherche une solution particulière de (E) sous la forme

$$\forall x \in]-\ln(2), 0[, \quad y_p(x) = F(x)e^x,$$

avec F une fonction $\mathcal{C}^1$ (dérivable et à dérivée continue) sur $]-\ln(2), 0[$.

(a) Donner le nom de cette technique et expliquer brièvement pourquoi elle est pertinente ?

(b) Démontrer que chercher y_p solution particulière de (E) sous cette forme, se ramène à devoir déterminer une primitive.

(c) Justifier qu'il est possible de trouver une telle primitive et en déterminer une (*on se réfèrera aux méthodes vues au début du semestre*).

(4) Conclure sur l'ensemble des solutions de (E).

Correction.

(1) Notons h le second membre. Alors son ensemble de définition est donné par $D_h = \mathbb{R} \setminus \{0, -\ln(2)\}$ car les dénominateurs de respectivement la première et deuxième fraction s'annule en respectivement 0 et $-\ln(2)$, et le dénominateur de la troisième fraction ne s'annule pas. Donc l'équation différentielle est bien définie sur $I =]-\ln(2), 0[\subset D_h$ (1pt).

(2) L'équation différentielle (E) est normalisée et son équation homogène est

$$(E_0) \qquad y'(x) - y(x) = 0, \quad \forall x \in]-\ln(2), 0[.$$

Une primitive de $x \in I \mapsto -1$ est $x \in I \mapsto -x$ donc l'ensemble des solutions de (E_0) est

$$\mathcal{S}_0 = \{x \in I \mapsto Ce^x : C \in \mathbb{R}\}.(1pt)$$

(3) (a) C'est la méthode de la variation de la constante (0.5pt). Cette méthode est pertinente car elle s'applique toujours et on est sûr d'obtenir une solution particulière. De plus ici le second membre n'a pas une forme particulière qui permet de chercher une solution particulière dans un ensemble de fonctions restreints (polynomiales,...), bien que l'équation différentielle soit à coefficients constants (0.5pt).

(b) On a y_p solution de (E) si et seulement si

$$\forall x \in I, \quad F'(x)e^x + F(x)e^x - F(x)e^x = \frac{1}{(e^{-x}-1)^2} - \frac{1}{e^{-x}-2} - \frac{1}{e^{-2x}+2e^{-x}+2},$$

$$\Leftrightarrow \forall x \in I, \quad F'(x) = \frac{e^{-x}}{(e^{-x}-1)^2} - \frac{e^{-x}}{e^{-x}-2} - \frac{e^{-x}}{e^{-2x}+2e^{-x}+2}.$$

Ainsi $y_p : x \in I \mapsto F(x)e^x$ est solution de (E) si et seulement si F est une primitive sur I de $g : x \in I \mapsto \frac{e^{-x}}{(e^{-x}-1)^2} - \frac{e^{-x}}{e^{-x}-2} - \frac{e^{-x}}{e^{-2x}+2e^{-x}+2}$ (1pt).

(c) Trouver une telle primitive est possible puisque la fonction g est continue sur I (0.5pt). *(Cela signifie donc, par le raisonnement par équivalence, que l'assertion y_p sous la forme précédente est solution de (E) est <u>vrai</u> et que n'importe qu'elle primitive de g peut-être utilisé comme expression pour F.)*

Soit $[x_0, x] \subset I$, alors $G(x) = \int_{x_0}^{x} g(t)dt = \int_{x_0}^{x} \left(\frac{e^{-t}}{(e^{-t}-1)^2} - \frac{e^{-t}}{e^{-t}-2} - \frac{e^{-t}}{e^{-2t}+2e^{-t}+2} \right) dt$ définie une telle primitive (0.5pt). Effectuons le changement de variable $u = e^{-t}$, alors $du = -e^{-t}dt$ c'est à dire $dt = -du/u$. On a donc

$$\begin{aligned}
G(x) &= \int_{e^{-x_0}}^{e^{-x}} \left(\frac{u}{(u-1)^2} - \frac{u}{u-2} - \frac{u}{u^2+2u+2} \right) \frac{-du}{u}, (0.5pt) \\
&= \int_{e^{-x_0}}^{e^{-x}} \left(\frac{-1}{(u-1)^2} + \frac{1}{u-2} + \frac{1}{u^2+2u+2} \right) du, \\
&= \left[\frac{1}{u-1} \right]_{e^{-x_0}}^{e^{-x}} + [\ln(|u-2|)]_{e^{-x_0}}^{e^{-x}} + \int_{e^{-x_0}}^{e^{-x}} \frac{1}{(u+1)^2+1} du, \\
&= \frac{1}{e^{-x}-1} + \ln(|e^{-x}-2|) + \arctan(e^{-x}+1) + cste. (1pt)
\end{aligned}$$

Or pour tout $x \in I$, $e^{-x} - 2 < 0$ d'où $\ln(|e^{-x}-2|) = \ln(2 - e^{-x})$. Soit donc

$$F : x \in I \mapsto \frac{1}{e^{-x}-1} + \ln(2 - e^{-x}) + \arctan(e^{-x}+1),$$

c'est une primitive (0.5pt).

(4) De la question précédente, on déduit que

$$y_p : x \in I \mapsto \frac{e^x}{e^{-x}-1} + e^x \ln(2 - e^{-x}) + e^x \arctan(e^{-x}+1),$$

est une solution particulière de (E). Et donc l'ensemble des solutions de (E) est

$$\mathcal{S} = \{x \in I \mapsto \frac{e^x}{e^{-x}-1} + e^x \ln(2 - e^{-x}) + e^x \arctan(e^{-x}+1) + Ce^x : C \in \mathbb{R}\}. (1pt)$$

Exercice 2 (6pt) Résoudre l'équation différentielle suivante

(E) $$2y''(x) + 4y(x) = 2\sin(x) - 2e^{-3x}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

On pourra penser à utiliser le principe de superposition de solutions particulières (cf le supplément sur les équations différentielles sur la page web du cours).

<u>Correction</u>. On commence par normaliser l'équation (E) (0.5pt)

(E') $$y''(x) + 2y(x) = \sin(x) - e^{-3x}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Commençons par résoudre l'équation homogène

(E'_0) $$y''(x) + 2y(x) = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

L'équation caractéristique est $r^2 + 2 = 0$ et ses racines sont $\pm\sqrt{2}i$ (son discriminant vaut -8). L'ensemble des solutions de (E'_0) est donc

$$\mathcal{S}_0 = \{x \in \mathbb{R} \mapsto C_1 \cos(\sqrt{2}x) + C_2 \sin(\sqrt{2}x) : C_1, C_2 \in \mathbb{R}\}. (1pt)$$

Cherchons maintenant une solution particulière de (E'). Comme le second membre est somme de terme de type "connu", on va utiliser le principe de superposition. Cherchons donc une solution particulière de respectivement

$$(E_1) \qquad y''(x) + 2y(x) = \sin(x), \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

et

$$(E_2) \qquad y''(x) + 2y(x) = -e^{-3x}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

(0.5pt)

— Pour (E_1), cherchons une solution particulière $y_{p,1}$ sous la forme $y_{p,1}(x) = \lambda\cos(x) + \mu\sin(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. La fonction $y_{p,1}$ est solution de (E_1) si et seulement si

$$-\lambda\cos(x) - \mu\sin(x) + 2(\lambda\cos(x) + \mu\sin(x)) = \sin(x), \forall x \in \mathbb{R},$$
$$\Leftrightarrow \lambda = 0, \mu = 1,$$

par identification. Donc $y_{p,1} : x \in \mathbb{R} \mapsto \sin(x)$ est une solution particulière de (E_1) (1pt).

— Pour (E_2), cherchons une solution particulière $y_{p,2}$ sous la forme $y_{p,2}(x) = P(x)e^{-3x}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. On vérifie que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $y'_{p,2}(x) = (P'(x) - 3P(x))e^{-3x}$ et $y''_{p,2}(x) = (P''(x) - 6P'(x) + 9P(x))e^{-3x}$. Alors la fonction $y_{p,2}$ est solution de (E_2) si et seulement si

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P''(x) - 6P'(x) + 11P(x) = -1.$$

On veut une solution polynomiale de cette dernière équation. Le second membre est de degré 0 et le coefficient devant P est non nul donc on cherche une solution sous la forme $P(x) = a$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ où a est une constante. On trouve alors nécessairement $a = -\frac{1}{11}$. Donc $y_{p,2} : x \in \mathbb{R} \mapsto -\frac{e^{-3x}}{11}$ est une solution particulière de (E_2) (2pt).

Par le principe de superposition, on en déduit que $y_p : x \in \mathbb{R} \mapsto \sin(x) - \frac{e^{-3x}}{11}$ est une solution particulière de (E') (0.5pt).

L'ensemble des solutions de (E) est donc

$$\mathcal{S} = \{x \in \mathbb{R} \mapsto \sin(x) - \frac{e^{-3x}}{11} + C_1\cos(\sqrt{2}x) + C_2\sin(\sqrt{2}x) : C_1, C_2 \in \mathbb{R}\}.(0.5pt)$$

Exercice 3 (3pt) Donner la nature de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \sin(e^{-t})(e^{\frac{t}{2}} + e^{\frac{t}{3}} - t^3)dt$.

Correction. Notons $f : t \in \mathbb{R}_+ \mapsto \sin(e^{-t})(e^{\frac{t}{2}} + e^{\frac{t}{3}} - t^3)$. C'est une fonction continue sur $\mathbb{R}_+$ et positive sur $[t_0, +\infty[$ pour t_0 suffisamment grand. En effet $\sin(e^{-t}) > 0$ pour tout $t \geqslant 0$ et $e^{\frac{t}{2}} + e^{\frac{t}{3}} - t^3$ est du signe de $e^{\frac{t}{2}}$ pour t suffisamment grand puisque les autres termes sont négligeables en $+\infty$ par rapport à ce dernier (1pt).

Pour l'étude de la nature de $\int_0^{+\infty} f(t)dt$, le soucis est donc en $+\infty$. On a $\sin(e^{-t}) \underset{+\infty}{\sim} e^{-t}$ et $e^{\frac{t}{2}} + e^{\frac{t}{3}} - t^3 \underset{+\infty}{\sim} e^{\frac{t}{2}}$, donc $f(t) \underset{+\infty}{\sim} e^{-\frac{t}{2}}$ (1pt). Or $t \mapsto e^{-\frac{t}{2}}$ est continue positive sur $\mathbb{R}_+$ et $\int_0^{+\infty} e^{-\frac{t}{2}}dt$ est convergente, donc par le théorème de comparaison $\int_0^{+\infty} \sin(e^{-t})(e^{\frac{t}{2}} + e^{\frac{t}{3}} - t^3)dt$ est convergente (1pt).

Exercice 4 (4pt)

Donner la nature de la série suivante $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{e^{-\frac{n}{2}}}{\ln(1+\frac{1}{n^n})(n!-(n-1)^3)}$.

Correction. Le terme général de la série est positif à partir d'un certain rang puisque $e^{-\frac{n}{2}} > 0$, $\ln\left(1 + \frac{1}{n^n}\right) > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $n! - (n-1)^3$ est du signe de $n!$ à partir d'un certain rang car $(n-1)^3$ est négligeable par rapport à $n!$ en $+\infty$ (0.5pt).

On a $\frac{e^{-\frac{n}{2}}}{\ln(1+\frac{1}{n^n})(n!-(n-1)^3)} \underset{+\infty}{\sim} \frac{n^n e^{-\frac{n}{2}}}{n!}$ car $\ln\left(1 + \frac{1}{n^n}\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n^n}$ et $(n-1)^3 = o_{+\infty}(n!)$ donc $n! - (n-1)^3 \underset{+\infty}{\sim} n!$ (1pt). Soit $v_n = \frac{n^n e^{-\frac{n}{2}}}{n!}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite à termes strictement positifs donc par le théorème de comparaison, la nature de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{e^{-\frac{n}{2}}}{\ln\left(1+\frac{1}{n^n}\right)(n!-(n-1)^3)}$ est la même que celle de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n$ (0.5pt).

On a pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \frac{v_{n+1}}{v_n} &= \frac{(n+1)^{n+1}e^{-\frac{n+1}{2}}}{(n+1)!}\frac{n!}{n^n e^{-\frac{n}{2}}}, \\ &= e^{-\frac{1}{2}}(1+\frac{1}{n})^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^{-\frac{1}{2}}e = e^{\frac{1}{2}}.(1pt) \end{aligned}$$

Pour rappel, nous avons déjà vu ce raisonnement : $(1+\frac{1}{n})^n = e^{n\ln(1+\frac{1}{n})}$ et $\ln(1+\frac{1}{n}) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$ donc $(1+\frac{1}{n})^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e$.

Par conséquent, d'après le critère de d'Alembert, $\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n$ diverge puisque $e^{\frac{1}{2}} > 1$. Ainsi $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{e^{-\frac{n}{2}}}{\ln\left(1+\frac{1}{n^n}\right)(n!-(n-1)^3)}$ est divergente (1pt).