Université de Paris
UFR de Mathématiques et Informatique
45, rue des Saints-Pères, 75006, Paris.

Licence $1^{\text{ère}}$ année, Groupe 5, Mathématiques et Calcul 2 (MC2)

Interrogation n°4 (14/04/2021) : Séries

Durée : 20 min

On pensera à bien détailler les raisonnements et justifier les réponses.

Exercice 1 (2pt)

Donner la nature de la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(\ln(n))^4}{n}$.

Correction. La série est à termes positifs (0.5pt). De plus pour tout $n \geqslant 3$, on a $\frac{(\ln(n))^4}{n} \geqslant \frac{1}{n}$. Or $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}$ est une série à termes positifs et divergente (car c'est une série de Riemann pour $\alpha = 1$) (1pt), donc par le théorème de comparaison $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(\ln(n))^4}{n}$ est divergente (0.5pt).

Exercice 2 (3pt)

Donner la nature de la série $\sum_{n\geqslant 0} \left(e^{\frac{10^n}{n!}} - 1\right)$.

Correction. La série est à termes positifs (puisque $e^x > 1$ pour $x > 0$) (0.5pt). Comme $\frac{10^n}{n!} \to 0$ quand $n \to +\infty$, on en déduit que $e^{\frac{10^n}{n!}} \underset{n\to+\infty}{\sim} 1+\frac{10^n}{n!}$ et donc $\left(e^{\frac{10^n}{n!}} - 1\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{10^n}{n!}$ (1pt). Comme $\sum_{n\geqslant 0} \frac{10^n}{n!}$ est une série à termes strictement positifs, on en déduit par le théorème de comparaison que $\sum_{n\geqslant 0} \left(e^{\frac{10^n}{n!}} - 1\right)$ et $\sum_{n\geqslant 0} \frac{10^n}{n!}$ ont même nature (0.5pt). Étudions donc la série $\sum_{n\geqslant 0} \frac{10^n}{n!}$. Notons, pour tout $n \geqslant 1$, v_n son terme général. On a déjà vu que c'est une série à termes strictement positifs. De plus $\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{10}{n+1} \to 0$ quand $n \to +\infty$. Donc par le critère de d'Alembert, $\sum_{n\geqslant 0} \frac{10^n}{n!}$ converge. Par conséquent, $\sum_{n\geqslant 0} \left(e^{\frac{10^n}{n!}} - 1\right)$ converge également (1pt).

Exercice 3 (1pt)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite qui converge vers $a \in \mathbb{R}$. Quelle est la nature de la série $\sum_{n\geqslant 0}(u_n - u_{n+1})$.

Correction. Soit $N \in \mathbb{N}$. Alors la somme partielle de la série vaut $S_N = \sum_{n=0}^{N}(u_n - u_{n+1}) = u_0 - u_{N+1}$, car on a une somme télescopique (0.5pt). Comme $u_{N+1} \to a$ quand $N \to +\infty$, on en déduit que la série $\sum_{n\geqslant 0}(u_n - u_{n+1})$ converge (0.5pt). Bonus : on obtient également que sa somme $\sum_{n=0}^{+\infty}(u_n - u_{n+1})$ vaut $u_0 - a$.