

Licence 1^{ère} année, MATHÉMATIQUES ET CALCUL 2
Fiche de TD n° 4 : Séries

Exercice 1. Etudier la nature de la série de terme général u_n dans les cas suivants :

1. $u_n = \frac{n^2 + 1}{n^2}$
2. $u_n = \frac{2^n + n}{n2^n}$
3. $u_n = \frac{n^2 + 1}{(\ln n)^2 \sqrt{n^6 + 2n + 3}}$
4. $u_n = \frac{1}{n} \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right)$
5. $u_n = \sin^2 \left(\pi + \frac{\pi}{n} \right)$
6. $u_n = \frac{\arctan n}{n^2 + \cos^2 n + 1}$
7. $u_n = \frac{1}{n(\ln n)}$
8. $u_n = \frac{\operatorname{ch} n}{\operatorname{ch} 2n}$
9. $u_n = \frac{10^n}{n!}$
10. $u_n = \frac{n!}{n^n}$
11. $u_n = \left(\frac{5n + 7}{2n + 1} \right)^n$
12. $u_n = \left(\frac{n}{4n + 1} \right)^n$

Exercice 2. Montrer que les séries suivantes sont convergentes et calculer leur somme :

1. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+6)(n+7)}$
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 1}$
3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n+1} + (n+1)\sqrt{n}}$
4. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{3^n + 2^n}{6^n}$
5. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^3 - n + 2}{n!}$
6. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2 + 2}{(n-1)!}$

Exercice 3. Montrer que les séries de terme général $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ et $v_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}$ ne sont pas de même nature (bien que $u_n \sim v_n$).

Exercice 4. Etudier la nature de la série de terme général u_n dans les cas suivants :

1. $u_n = (-1)^n$
2. $u_n = \frac{(-1)^n}{n^2 + 1}$
3. $u_n = (-1)^n \left(\frac{2n + 100}{3n + 1} \right)^n$
4. $u_n = \begin{cases} (-1)^k \frac{2}{5^k} & \text{si } n = 2k \\ (-1)^{k+1} \frac{4}{5^{k+1}} & \text{si } n = 2k + 1 \end{cases}$
5. $u_n = \frac{(-1)^n}{n \ln n}$
6. $u_n = \frac{\cos n}{n}$
7. $u_n = \frac{\sin^3 n}{\sqrt{n+2}}$
8. $u_n = \frac{(\cos n)^3 (n+1)}{n^3}$

Exercice 5. Montrer que les séries suivantes sont convergentes et calculer leur somme :

1. $\sum_{n=2}^{\infty} \ln \left(1 - \frac{1}{n^2} \right)$
2. $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \ln \left(\frac{n+1}{n-1} \right)$
3. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(n\theta)}{2^n}, \quad \theta \in \mathbb{R}$
4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n + n^2}{n!}$
5. $\sum_{n=0}^{\infty} n^2 r^n$ avec $|r| < 1$

Exercice 6. Soient $(u_n)_{n \geq 1}$ une suite qui tend vers zéro et a, b, c trois réels tels que $a + b + c = 0$. On pose $v_n = au_n + bu_{n+1} + cu_{n+2}$. Montrer que $\sum v_n$ converge et calculer sa limite.

Exercice 7. On admet que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

1. Montrer que la série de terme général $u_n = \frac{1}{n^2(n+1)^2}$ est convergente et calculer $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$.
2. Montrer que la série de terme général $v_n = \frac{1}{(2n+1)^2}$ est convergente et calculer $\sum_{n=0}^{\infty} v_n$.

Exercice 8.

1. Soient $(u_n)_{n \geq 1}$ une suite de nombres réels positifs et $(v_n)_{n \geq 1}$ la suite déterminée par

$$v_n = u_{2n} + u_{2n+1}.$$

Montrer que $\sum v_n$ et $\sum u_n$ sont de même nature.

2. Soient $(u_n)_{n \geq 1}$ une suite de nombres réels positifs et $(v_n)_{n \geq 1}$ la suite déterminée par

$$v_n = \frac{u_n}{1 + u_n}.$$

Montrer que $\sum v_n$ et $\sum u_n$ sont de même nature. On pourra chercher à exprimer u_n en fonction de v_n .

Exercice 9. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $w_n = (-1)^n a_n$ et $a_n = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}$.

1. Montrer que la suite (a_n) est décroissante.
2. Déterminer la nature de la série $\sum_{n \geq 1} -\ln \left(\frac{a_n}{a_{n-1}} \right)$.
En déduire la nature de la suite $(\ln(a_n))$ puis celle de la suite (a_n) .
3. Préciser alors la nature de la série $\sum_{n \geq 0} w_n$.

Exercice 10. On pose pour tout $n \geq 0$

$$u_n = \int_0^1 x^n e^{-x} dx.$$

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ est positive et décroissante.
2. Grace à une intégration par parties, établir une relation de récurrence entre u_n et u_{n+1} .
3. Montrer par récurrence que $u_n = \frac{n!}{e} \left(e - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \right)$.
4. En revenant à la définition de u_n , montrer que

$$\frac{1}{e(n+1)} \leq u_n \leq \frac{1}{n+1}.$$

5. Quelle est la nature de la série $\sum u_n$? de $\sum \frac{u_n}{n}$? de $\sum (-1)^n u_n$?