Exercice 5 :

2) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(t))\,dt$

On a $f : t \longmapsto \ln(\sin(t))$ est continue sur $]0, \frac{\pi}{2}]$.

f est de signe constant sur $]0, \frac{\pi}{2}]$ (elle est négative)

Or on a $\ln(\sin(t)) \underset{\substack{t \to 0 \\ t > 0}}{\sim} \ln(t)$

(car $\sin(t) \underset{t \to 0}{\sim} t$)

Donc d'après le théorème de comparaison par relation d'équivalence, $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(t))\,dt$ est de même nature que $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(t)\,dt$.

Or on a vu que $\int_0^1 \ln(t)\,dt$ converge donc $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(t)\,dt$ converge aussi.

Bilan : $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(t))\,dt$ converge.

- $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos(t))\,dt$, $t \mapsto \ln(\cos(t))$ est continue sur $[0, \frac{\pi}{2}[$

Soit $0 < y < \frac{\pi}{2}$ alors considérons

$$\int_0^y \ln(\cos(t))\,dt$$

Faisons le changement de variable $u = \frac{\pi}{2} - t$

donc $du = -dt$ d'où d'après la formule du chg de variable

$$\int_0^y \ln(\cos(t))\,dt = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}-y} \ln\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}-u\right)\right)(-du)$$

$$= \int_{\frac{\pi}{2}-y}^{\frac{\pi}{2}} \ln\Big(\underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{2}-u\right)}_{=\sin(u)}\Big)\,du$$

$$= \int_{\frac{\pi}{2}-y}^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(u))\,du$$

Donc en faisant $y \to \frac{\pi}{2}$, on voit que $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos(t))\,dt$ est de même nature que $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(u))\,du$, or celle-ci converge, d'où la convergence de $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos(t))\,dt$

Et on a montré aussi que

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos(t))\,dt = \lim_{y \to \frac{\pi}{2}} \int_0^{y} \ln(\cos(t))\,dt$$

$$= \lim_{y \to \frac{\pi}{2}} \int_{\frac{\pi}{2}-y}^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(u))\,du$$

d'après le calcul précédent

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(u))\,du = A$$

3) $\int_0^{\pi} \ln(\sin(t))\,dt$ converge ?

$$\int_0^{\pi} \ln(\sin(t))\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(t))\,dt + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \ln(\sin(t))\,dt$$

Or $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(t))\,dt$ CV d'après 2) donc $\int_0^{\pi} \ln(\sin(t))\,dt$ est convergente

<u>ssi</u> $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \ln(\sin(t))\,dt$ est convergente.

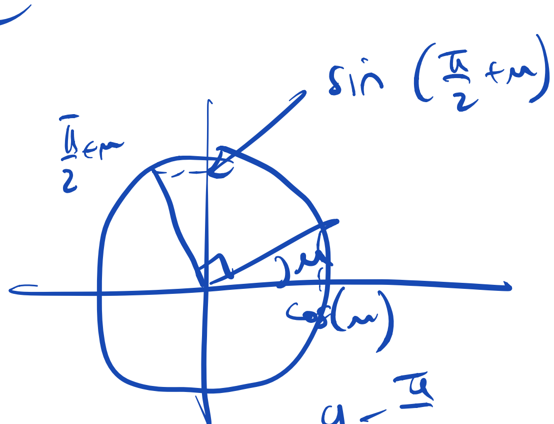
Soit $\frac{\pi}{2} < y < \pi$, considérons $\int_{\frac{\pi}{2}}^{y} \ln(\sin(t))\,dt$

Faisons le changement de variable $t = \frac{\pi}{2} + u$

donc $dt = du$

d'où

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{y} \ln(\sin(t))\,dt = \int_0^{y-\frac{\pi}{2}} \ln\Big(\underbrace{\sin\big(\tfrac{\pi}{2}+u\big)}_{=\cos(u)}\Big)\,du$$



$$= \int_0^{y-\frac{\pi}{2}} \ln(\cos(u))\,du$$

D'où $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \ln(\sin(t))\,dt$ converge car $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos(u))\,du$ converge grâce 2)

(Ici on a fait $y \to \pi$)

<u>Bilan</u> : $\int_0^{\pi} \ln(\sin(t))\,dt$ est convergente.

De plus $\int_0^{\pi} \ln(\sin(t))\,dt = A + \underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos(t))\,dt}_{=A}$

$= 2A$.

4) $I = \int_0^{\pi} \ln(\sin(t))\,dt$

Faisons le changement de variable $t = 2u$
donc $dt = 2\,du$

Alors

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(2u))\,(2du)$$

$$= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(2\sin(u)\cos(u))\,du$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\ln(2) + \ln(\sin(u)) + \ln(\cos(u))\right) du$$

$$= \pi\ln(2) + 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(u))\, du$$

$$+ 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos(u))\, du$$

$$= \pi\ln(2) + 4A$$

$$= \pi\ln(2) + 2I$$

$$\Rightarrow I = -\pi\ln(2)$$

Exercice 8 :

1) On veut montrer que $\int_1^{+\infty} e^{-t/2} f(t)\, dt$ est convergente.

Sur $[27, +\infty[$, $t \mapsto f(t)e^{-t/2}$ est positive et satisfait $f(t)e^{-t/2} \le t^4 e^{-t/2}$.

Comme $t \mapsto t^4 e^{-t/2}$ est positive et d'intégrale convergente sur $[2T, +\infty[$

↳ voir exercice 1, 3)

donc d'après le théorème de comparaison,

$\int_{2T}^{+\infty} f(t) e^{-t/2} dt$ est convergente.

Donc c'est le cas aussi $\int_1^{+\infty} f(t) e^{-t/2} dt$.