1/3 Dommage ! Raisonnement bloqué par la non utilisation de l'équivalent $\frac{1}{1-u} \underset{u \to 0}{\sim} 1+u$

BARTHEL
Tristan

Interrogation n° 5 - Bonus.

Exercice 1 Soit $\sum_{n\geq 0} \left(\frac{1}{1-\left(\frac{2n+1}{5n+5}\right)^n} - 1 \right)$

C'est une série à termes positifs → justifier (pas trivial ici)

Soit $U_n = \left(\frac{2n+1}{5n+5}\right)^n$, $n \geq 0$, c'est une série à termes positifs

d'où $\sqrt[n]{U_n} = \frac{2n+1}{5n+5} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{2}{5} < 1$

1

donc d'après le théorème de Cauchy $\sum U_n$ converge vers $\frac{2}{5}$

Si on remplace dans $\sum_{n\geq 0} \left(\frac{1}{1-\left(\frac{2n+1}{5n+5}\right)^n} - 1 \right)$

⚠ On ne peut pas faire ça !

ce qui donne $\xrightarrow[n\to+\infty]{} \sum_{n\geq 0} \left(\frac{1}{1-\left(\frac{2}{5}\right)} - 1 \right)$

(car en plus $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$)

$\xrightarrow[n\to+\infty]{} \sum_{n\geq 0} \left(\frac{2}{3} \right)$

ainsi la série $\sum_{n\geq 0} \left(\frac{1}{1-\left(\frac{2n+1}{5n+5}\right)^n} - 1 \right)$ est convergente

non c'est $(u_n)^{\frac{1}{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{2}{5}$.

⚠ Cela n'implique pas que $\sum u_n = \frac{2}{5}$