TD 1 : Différentiabilité, gradient, points extrémaux

Exercice 1. Un réel $\varepsilon > 0$ étant fixé, on définit

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad J_\varepsilon(x) = \sum_{i=2}^{n-1} N_\varepsilon(x_{i+1} + x_{i-1} - 2x_i), \quad \text{où} \quad N_\varepsilon(t) = \sqrt{\varepsilon + t^2}.$$

Prouver que J_ε est différentiable et calculer sa différentielle $\mathrm{d}J_\varepsilon$.

Exercice 2. [Interprétation géométrique du gradient]

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, on note L_λ la ligne de niveau d'équation $f(x) = \lambda$.

On considère $a \in \mathbb{R}^2$ tel que $\nabla f(a) \neq 0$ et $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ de classe $\mathcal{C}^1$ tel que $\gamma(0) = a$ et $\|\gamma'(t)\| = 1$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

1. Définir γ de sorte que $f \circ \gamma$ décroît le plus vite au voisinage de 0. En déduire que $-\nabla f(a)$ donne la direction de la plus forte pente de f en a.
2. On suppose maintenant que $f \circ \gamma$ est constante au voisinage de 0. Démontrer que $\nabla f(a)$ est orthogonale à la tangente à L_α où $\alpha = f(a)$.
3. On suppose que $\gamma'(0)$ est colinéaire et de même sens que $\nabla f(a)$. Montrer alors qu'il existe une fonction $x : \lambda \mapsto x(\lambda) \in \mathbb{R}^2$ définie au voisinage de $\alpha = f(a)$ telle que $x(\lambda) \in L_\lambda$. En déduire un équivalent de $\|x(\lambda) - a\|$ lorsque $\lambda \to \alpha$. Interpréter.

Exercice 3. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x_1, x_2) = x_1^3 + x_2^3 - 6(x_1^2 - x_2^2).$$

1. Montrer que f admet quatre points critiques.
2. Calculer $f(0, t)$ et $f(t, 0)$ et dire si f admet un extremum en $(0, 0)$.
3. Pour les trois autres points critiques, calculer la hessienne de f en ces points.
4. Modifier la fonction *plot_fonction* du TP1 pour qu'elle donne également le maximum de la fonction sur la grille et l'utiliser pour afficher f au voisinage de ces points critiques. Préciser la nature des points critiques (maximum local, minimum local, point selle).
5. Commenter en prenant en compte la question **??**.

Exercice 4. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^3.$$

Déterminer ses points critiques. Admet-elle des extrema locaux ? Globaux ?

Exercice 5. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x_1, x_2) = x_1^3 - 3x_1x_2^2.$$

1. Montrer que f admet un unique point critique en $(0, 0)$.
2. Préciser la nature de ce point critique.
3. En utilisant la fonction *plot_fonction* du TP1 pour afficher f au voisinage de $(0, 0)$, dire si $(0, 0)$ est un minimum local, maximum local ou point col.
4. Démontrer que f est positivement homogène de degré 3 et en remarquant que $f(x_1, x_2) = Re\left((x_1 + ix_2)^3\right)$, on démontrera que f admet 3 "creux" comme observé numériquement.
5. On pourra tracer $f_k(x_1, x_2) = Re\left((x_1 + ix_2)^k\right)$ et observer le nombre de creux pour $k \geqslant 2$.