Université de Paris
UFR de Mathématiques et Informatique
45, rue des Saints-Pères, 75006, Paris.

Master 1$^{\text{ère}}$ année, MMA, Optimisation

Seconde session du 18/06/2021

Durée 2h. Aucun document n'est autorisé. Les exercices sont indépendants. Le barème est indicatif. On prendra soin de bien justifier les réponses.

Exercice 1. Question de cours (3 points)

Énoncer et démontrer la condition nécessaire et suffisante de convexité pour une fonction $f : \Omega \to \mathbb{R}$ différentiable sur un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^N$.

Exercice 2. (5 points)

Soient $N, M, P \in \mathbb{N}^*$. On définit pour tout $x \in \mathbb{R}^N$,

$$f(x) = \frac{1}{2} \|Hx - y\|_2^2 + \lambda \|Dx\|_2^2 + \mu \|x\|_2^2 ,$$

avec $H : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$ et $D : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^P$ deux opérateurs linéaires, $y \in \mathbb{R}^M$ un vecteur fixé, $\lambda, \mu > 0$ deux constantes et $\|\cdot\|_2$ la norme euclidienne, où par abus de langage on utilise la même notation peu importe l'espace sous jacent ($\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^M$ ou $\mathbb{R}^P$).

1. (a) Rappeler la définition d'une fonctionnelle quadratique.
   (b) Montrer que f est une fonctionnelle quadratique.
   (c) Que vaut $\nabla f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^N$? *On pourra utiliser directement les résultats sur les fonctionnelles quadratiques.*
   (d) Que vaut $\nabla^2 f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^N$? *On pourra utiliser directement les résultats sur les fonctionnelles quadratiques.*
2. Démontrer que f est strictement convexe.
3. Démontrer que f admet un unique minimum global.
4. Les hypothèses du théorème de convergence de la méthode de gradient à pas optimal sont-elles satisfaites ?
5. Écrire en Python l'algorithme de descente du gradient à pas optimal pour la fonction f.

6. On note $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite produite par l'algorithme de descente du gradient à pas optimal appliqué à f. Que dire des vecteurs $\Delta x_n = x_{n+1} - x_n$ et $\Delta x_{n+1} = x_{n+2} - x_{n+1}$?

Exercice 3. (13 points)

Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Dans la suite, on considère $\mathbb{R}^N$ munit de son produit scalaire canonique noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et on note $\|\cdot\|_2$ la norme euclidienne (issue du produit scalaire canonique).

Les parties I et II sont indépendantes. La partie III utilise certains résultats des deux premières.

Partie I : questions préliminaires. Dans toute cette partie uniquement on suppose que $N = 2$. On note (e_1, e_2) la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

1. Décrire l'ensemble $\mathcal{H} = \{x \in \mathbb{R}^2 : \langle e_1, x\rangle = 1\}$. Le représenter graphiquement.

2. (a) Donner l'ensemble de définition, noté V, de $g : x \mapsto -\ln(1 - \langle e_1, x\rangle)$. Le représenter graphiquement.
   (b) Est-ce un ensemble ouvert ou fermé ? Est-ce un ensemble convexe ? Justifier brièvement.

3. (a) En déduire l'ensemble de définition, noté U, de la fonction
$$f : x \mapsto -\ln(1 - \langle e_1, x\rangle) - \ln(1 - \langle e_2, x\rangle) - \ln(2 - \langle -(e_1 + e_2), x\rangle).$$
   Le représenter graphiquement.
   (b) Est-ce un ensemble ouvert ou fermé ? Est-ce un ensemble convexe ? Justifier brièvement.
   (c) U est-il borné ? *On pourra également observer, en faisant un dessin, que pour tout $v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, il est toujours possible d'avoir $\langle a, v\rangle > 0$ avec un $a \in \mathbb{R}^2$ choisi dans $\{e_1, e_2, -(e_1 + e_2)\}$.*

4. On considère $\tilde{f} : x \mapsto -\ln(-\langle e_1, x\rangle) - \ln(-\langle e_2, x\rangle)$. Représenter graphiquement l'ensemble de définition de $\tilde{f}$. Est-il borné ? Donner un $v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ tel que $\langle e_1, v\rangle \leq 0$ et $\langle e_2, v\rangle \leq 0$. Que peut-on dire alors de la demi-droite $\mathbb{R}_+^* v$?

Partie II : existence d'un minimum. On considère la fonction $f : U \to \mathbb{R}$ où U est un ouvert, non vide, borné de $\mathbb{R}^N$. On suppose que f est continue, bornée inférieurement et tel que pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, $f^{-1}(]-\infty, \alpha])$ est fermé dans $\mathbb{R}^N$.

1. Justifier que $p = \inf_{x\in U} f(x)$ est fini ($p > -\infty$).

2. Démontrer l'existence d'une suite minimisante, c'est-à-dire d'une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de U, telle que $f(x_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} p$. *On pourra utiliser la caractérisation de la borne inférieure.*

3. Démontrer qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$, on a $x_n \in f^{-1}(]-\infty, p+1])$.

4. En déduire qu'il existe $x^* \in U$ tel que $f(x^*) = p$, c'est-à-dire que le problème $\inf_{x\in U} f(x)$ admet au moins une solution.

Partie III : application. On considère $f : U \to \mathbb{R}$ avec $U \subset \mathbb{R}^N$ tel que

$$\forall x \in U, \quad f(x) = -\sum_{i=1}^{m} \ln(b_i - \langle a_i,\, x\rangle),$$

avec $m \in \mathbb{N}^*$, et pout tout $i \in \{1, \ldots, m\}$, $b_i \in \mathbb{R}$, $a_i \in \mathbb{R}^N$. On fait de plus l'hypothèse suivante

$$\forall v \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\},\ \exists i_0 \in \{1, \ldots, m\}, \quad \langle a_{i_0},\, v\rangle > 0.$$

On suppose de plus que U est non vide.

1. Montrer que $\mathrm{Vect}(a_1, \ldots, a_m) = \mathbb{R}^N$.
2. (a) Donner le plus grand ouvert $U \subset \mathbb{R}^N$ sur lequel f est défini.
   (b) Justifier que U est convexe.
3. Justifier brièvement que f est $\mathcal{C}^2$ sur U.
4. (a) Démontrer que pour tout $x \in U$, et tout $h \in \mathbb{R}^N$, la différentielle de f en x appliquée à h est donnée par

   $$\mathrm{d}f(x)(h) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\langle a_i,\, h\rangle}{b_i - \langle a_i,\, x\rangle}.$$

   (b) En déduire que pour tout $x \in U$, $\nabla f(x) = \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{b_i - \langle a_i,\, x\rangle} a_i$.
5. (a) Démontrer que pour tout $x \in U$, et tout $(h, k) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$, la différentielle seconde de f en x appliquée à (h, k) est donnée par

   $$\mathrm{d}^2 f(x)(h, k) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\langle a_i,\, h\rangle \langle a_i,\, k\rangle}{(b_i - \langle a_i,\, x\rangle)^2}.$$

   (b) Démontrer que f est strictement convexe sur U.
6. Montrer que U est borné. *On pourra raisonner par l'absurde et utiliser la compacité de la sphère unité de* $\mathbb{R}^N$.
7. (a) Soient $x, x_0 \in U$. Justifier que

   $$f(x) \geq f(x_0) + \left\langle \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{b_i - \langle a_i,\, x_0\rangle} a_i,\, x - x_0 \right\rangle.$$

   Puis montrer que

   $$f(x_0) + \left\langle \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{b_i - \langle a_i,\, x_0\rangle} a_i,\, x - x_0 \right\rangle = f(x_0) + m - \sum_{i=1}^{m} \frac{b_i - \langle a_i,\, x\rangle}{b_i - \langle a_i,\, x_0\rangle}.$$

   (b) Déduire des deux précédentes questions que f est bornée inférieurement.
8. Déduire de l'ensemble des questions que f admet un unique minimum sur U.