6/6 Très bon travail !

SiD
Rafika
22011887

Interrogation du 26 mars 2021

Exercice 1 : 2/2

Donner les solutions de l'équation différentielle
$\forall x \in \mathbb{R}$ (E_0) $2y'(x) - 3y(x) = 0$

Normalisons l'équation (E_0), on obtient :
(E_0') $y'(x) - \frac{3}{2} y(x) = 0$ 1

Une primitive de $x \in \mathbb{R} \mapsto -\frac{3}{2}$ est $x \in \mathbb{R} \mapsto -\frac{3}{2} x$
$\forall x \in \mathbb{R}$

D'après le cours : L'ensemble des solutions de l'équation homogène de (E_0') et donc de (E_0) (car elles sont équivalentes) TB est :

1 $\mathcal{S}_0 = \{ y : x \in \mathbb{R} \mapsto C e^{\frac{3}{2} x} ; C \in \mathbb{R} \}$

Exercice 2 : 4/4

Donner les solutions de l'équation différentielle (E)
(E) $y'(x) + y(x) = x^2$ $\forall x \in \mathbb{R}$

1ère étape : On résout l'équation homogène (E_0)
(E_0) $y'(x) + y(x) = 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$
L'équation (E_0) est normalisée. De plus une primitive de $x \in \mathbb{R} \mapsto 1$ est $x \in \mathbb{R} \mapsto x$ $\forall x \in \mathbb{R}$

D'après le cours : L'ensemble des solutions de (E_0) est :
$\mathcal{S}_0 = \{ y : x \in \mathbb{R} \mapsto C e^{-x} ; C \in \mathbb{R} \}$ 1

$2^{ème}$ étape : Cherchons une solution particulière de E

Comme le 2nd membre est un polynome de degré 2, on cherche une solution sous la forme :

$$y_p(x) = a_0 x^2 + a_1 x + a_2, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

y_p est solution de (E)

$\boxed{y_p'(x)} = 2a_0 x + a_1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow$ (E) $y'(x) + y(x) = x^2 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R} \quad 2a_0 x + a_1 + a_0 x^2 + a_1 x + a_2 = x^2$

$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R} \quad (a_0)x^2 + (2a_0 + a_1)x + (a_1 + a_2) = x^2$

$\Leftrightarrow$ Par identification, on a :

$$\begin{cases} a_0 = 1 \\ 2a_0 + a_1 = 0 \\ a_1 + a_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_0 = 1 \\ a_1 = -2 \\ a_2 = 2 \end{cases}$$ 1

On a donc $y_p(x) = x^2 - 2x + 2$, solution particulière de (E) $\forall x \in \mathbb{R}$

D'après le cours :

$3^{ème}$ étape : On conclut que l'ensemble des solutions de (E) est

1 $\mathcal{S} = \{x \in \mathbb{R} \mapsto x^2 - 2x + 2 + Ce^{-x} : C \in \mathbb{R}\}$