Exercice

0,5/3

$\sum_{n\geq 0} \left(\frac{1}{1-\left(\frac{2n+1}{5n+5}\right)^n} - 1 \right)$ C'est une série à termes positifs à partir du rang $n \geq 1$.

↳ justifier car non trivial.

0,5

$\rightarrow \left(\frac{2n+1}{5n+5}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(\frac{2}{5}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

$\rightarrow$ Donc $\frac{1}{1-\left(\frac{2n+1}{5n+5}\right)^n} - 1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 < 1$

Donc d'après le critère du Cauchy,

$\sum_{n\geq 0} \frac{1}{1-\left(\frac{2n+1}{5n+5}\right)^n}$ est convergente.

/!\ Ce n'est pas ce que demande de vérifier le critère de Cauchy.

Ici tu as démontré que le terme général de la série tend vers 0, ce qui est une condition <u>nécessaire</u> de convergence mais pas <u>suffisante</u> puisque $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ diverge alors que $\frac{1}{n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$.