6/6 Très bon travail

21911153
Maciva
Mombaki

Interrogation

Ex 1 2/2

(E_0) $2y'(x) - 3y(x) = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$

On normalise l'équation homogène

$\forall, x \in \mathbb{R}$ $2y'(x) - 3y(x) = 0$

$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \quad y'(x) - \frac{3}{2} y(x) = 0$ 1

On peut appliquer le théorème du cours:

une primitive de $x \in \mathbb{R} \mapsto -\frac{3}{2}$ est par exemple $x \in \mathbb{R} \mapsto -\frac{3}{2} x$

Donc d'après le cours l'ensemble des solutions de (E_0)

est $\mathcal{S}_0 = \{ y : x \in \mathbb{R} \mapsto Ce^{\frac{3}{2}x} : C \in \mathbb{R} \}$ 1

Ex 2 4/4

(E) $y'(x) + y(x) = x^2$, $\forall x \in \mathbb{R}$

1ère étape : on résout l'équation homogène

(E_0) $y'(x) + y(x) = \cancel{x^2}\ 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$ OK

Cette équation est normalisée on peut appliquer le théorème du cours : une primitive de $x \in \mathbb{R} \mapsto 1$ est $x \in \mathbb{R} \mapsto x$

d'où l'ensemble des solutions de l'équation homogène est

$\mathcal{S}_0 = \{ y : x \in \mathbb{R} \mapsto Ce^{-x} : C \in \mathbb{R} \}$ 1

2e étape : cherchons une solution particulière de (E)

Comme le second membre est polynomial de degré 2

On cherche une solution particulière y_p sous la forme

$y_p(x) = P(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$ où P est un polynome

On a $\forall x \in \mathbb{R}$, $y_p'(x) = P'(x)$

Donc y_p solution de (E)

$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \ y_p'(x) + y_p(x) = x^2$

$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \ P'(x) + P(x) = x^2$

Il faut trouver P un polynôme qui satisfait

cette dernière équation. Les équations différentielle de ce type admettent une solution polynomiale de même degré que le second membre.

Donc P est sous la forme $P(x) = a_0 x^2 + a_1 x + a_2$

avec $a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $2a_0 x + a_1 + a_0 x^2 + a_1 x + a_2 = x^2$

$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}$, $a_0 x^2 + (2a_0 + a_1) x + a_1 + a_2 = x^2$

$\Leftrightarrow$ par identification $\begin{cases} a_0 = 1 \\ 2a_0 + a_1 = 0 \\ a_1 + a_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_0 = 1 \\ a_1 = -2 \\ a_2 = 2 \end{cases}$ 1

D'où $P : x \in \mathbb{R} \mapsto x^2 - 2x + 2$ satisfait (E)

On a donc $y_p : x \in \mathbb{R} \mapsto x^2 - 2x + 2$ est une solution particulière de (E)

L'ensemble des solution de (E) est :

$\mathcal{S} = \{ x \in \mathbb{R} \mapsto x^2 - 2x + 2 + Ce^{-x} ; C \in \mathbb{R} \}$ 1