Université de Paris
UFR de Mathématiques et Informatique
45, rue des Saints-Pères, 75006, Paris.

Licence 1ère année, Groupe 5, Mathématiques et Calcul 2 (MC2)

Interrogation n°3 (26/03/2021) : Equations différentielles

Durée : 15 min

On pensera à bien détailler les raisonnements et justifier les réponses.

Exercice 1 (2 points)

Donner les solutions de l'équation différentielle suivante

$$(E_0) \qquad 2y'(x) - 3y(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Correction. On normalise l'équation différentielle, elle devient

$$(E_0') \qquad y'(x) - \frac{3}{2}y(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}.(1pt)$$

Une primitive de $x \in \mathbb{R} \mapsto -\frac{3}{2}$ est $x \in \mathbb{R} \mapsto -\frac{3}{2}x$, donc, d'après le cours, l'ensemble des solutions est donné par les fonctions $x \in \mathbb{R} \mapsto Ce^{\frac{3}{2}x}$ avec $C \in \mathbb{R}$ (1pt).

Exercice 2 (4 points)

Donner les solutions de l'équation différentielle suivante

$$(E) \qquad y'(x) + y(x) = x^2, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Correction. L'équation différentielle est déjà normalisée. Résolvons d'abord l'équation homogène

$$(E_0) \qquad y'(x) + y(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Ses solutions sont données par les fonctions $x \in \mathbb{R} \mapsto Ce^{-x}$ avec $C \in \mathbb{R}$ (1pt).

Cherchons maintenant une solution particulière. Comme le second membre est polynomial de degré 2, on cherche y_p une solution particulière sous la forme $y_p(x) = ax^2 + bx + c$, pour tout $x \in \mathbb{R}$ (1pt). Alors y_p est solution de (E) si et seulement si

$$\begin{aligned}
& \forall x \in \mathbb{R}, \quad y_p'(x) + y_p(x) = x^2, \\
\Leftrightarrow\ & \forall x \in \mathbb{R}, \quad 2ax + b + ax^2 + bx + c = x^2, \\
\Leftrightarrow\ & \forall x \in \mathbb{R}, \quad a = 1, 2a + b = 0, b + c = 0, \\
\Leftrightarrow\ & \forall x \in \mathbb{R}, \quad a = 1, b = -2, c = 2.(1pt)
\end{aligned}$$

D'où $y_p : x \in \mathbb{R} \mapsto x^2 - 2x + 2$ est une solution particulière.

Finalement l'ensemble des solutions de (E) est donné par les fonctions $x \in \mathbb{R} \mapsto x^2 - 2x + 2 + Ce^{-x}$ avec $C \in \mathbb{R}$ (1pt).