Correction T.D.6

T.D. 6 : Exercice 1

1. Soit pour tout u, x dans $\mathbb{R}$, $\varphi(u,x) = f(x)\mathbb{1}_{]-\infty,u]}(x)$. On a :
   - pour tout u, $\varphi(u,\cdot)$ est mesurable.
   - Soit $u_0 \in \mathbb{R}$ fixé. Alors $\phi(u,x) = f(x)\mathbb{1}_{[x,+\infty[}(u)$ donc $u \mapsto \varphi(u,x)$ est continue dès que $x \neq u_0$ c'est à dire λ p.p (car $\{u_0\}$ est de mesure de Lebesgue nulle).
   - pour tout u, x, $|\varphi(u,x)| \leq |f(x)|$ et $|f|$ intégrable.

   D'après le théorème de continuité des intégrales dépendant d'un paramètre, on a F définie en tout point de $\mathbb{R}$ et F continue en u_0. C'est vrai pour tout $u_0 \in \mathbb{R}$ donc F continue sur $\mathbb{R}$.

2. Pour tout u, $G(u) = F(u) - F(a)$ d'où G continue sur $\mathbb{R}$.

T.D. 6 : Exercice 2

1. Soit pour tout $(u,x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+^*$, $f(u,x) = \frac{1-\cos(x)}{x^2}e^{-ux}$. On a :
   - pour tout $u \geq 0$, $f(u,\cdot)$ continue sur $\mathbb{R}_+^*$ donc mesurable.
   - Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f(\cdot,x)$ continue sur $\mathbb{R}_+$.
   - Pour tout $(u,x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+^*$, $|f(u,x)| \leq \frac{1-\cos(x)}{x^2} = g(x)$ avec g intégrable (g tend vers $1/2$ en 0 et est un $O(1/x^2)$ en $+\infty$).

   D'après le théorème de continuité des intégrales dépendant d'un paramètre, F est continue sur $\mathbb{R}_+$.

   Soit $(u_n)_n$ une suite tendant vers $+\infty$. On applique le TCD à $(f_n = f(u_n,\cdot))_n$, qui converge simplement vers 0, en utilisant la même domination par g. On obtient que $F(u_n) \to 0$. C'est vrai pour tout suite $(u_n)_n$ tendant vers $+\infty$ donc $F(u) \to 0$ quand $u \to +\infty$.

2. On a :
   - pour tout $x > 0$, $f(\cdot,x)$ $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\partial_u f(u,x) = -\frac{1-\cos(x)}{x}e^{-ux}$ et $\partial_u^2 f(u,x) = (1-\cos(x))e^{-ux}$.
   - Soit $\varepsilon > 0$ fixé. Pour tout $(u,x) \in [\varepsilon, +\infty[\times \mathbb{R}_+^*$,

   $$\begin{aligned} |\partial_u f(u,x)| &\leq \frac{1-\cos(x)}{x}e^{-\varepsilon x} = g_1(x), \\ |\partial_u^2 f(u,x)| &\leq (1-\cos(x))e^{-\varepsilon x} = g_2(x). \end{aligned}$$

   g_1 et g_2 sont toutes les deux intégrables sur $\mathbb{R}_+^*$ car des $O(1/x^2)$ en $+\infty$ et $g_1(x) \to 0$ quand $x \to 0$.

   D'après le théorème de dérivabilité des intégrales dépendant d'un paramètre, on en déduit que F est $\mathcal{C}^2$ sur $[\varepsilon, +\infty[$. Comme $\varepsilon > 0$ est quelconque, on en déduit F est $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus, on a $F'(u) = -\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(x)}{x}e^{-ux}dx$ et $F''(u) = \int_0^{+\infty}(1-\cos(x))e^{-ux}dx$. En utilisant le fait que $\cos(x) = \mathrm{Re}(e^{ix})$, on obtient alors que pour tout $u > 0$, $F''(u) = \frac{1}{u} - \frac{u}{1+u^2}$.

3. Soit $(u_n)_n$ une suite tendant vers 0 en décroissant. On définit $\varphi_n(x) = \frac{1-\cos(x)}{x^2}e^{-u_n x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$. (φ_n) est mesurable et converge simplement en croissant vers $x \mapsto \frac{1-\cos(x)}{x^2}$. Donc d'après le théorème de Beppo Levi, $F'(u_n) \to -\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(x)}{x^2}dx = -\infty$. Donc F n'est pas dérivable à droite en 0.

4. Soit $u > 0$ et $X \geq u$. En utilisant le fait que $F'(X) - F'(u) = \int_u^X F''(v)dv$, en intégrant puis en faisant $X \to +\infty$ (sachant que $F'(X) \to 0$ dans ce cas), on obtient $F'(u) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{u^2}{1+u^2}\right) = -\frac{1}{2}\ln(1+\frac{1}{u^2})$.

   On utilise de même $F(X) - F(u) = \int_u^X F'(v)dv$. Or une primitive de $u \mapsto \frac{1}{2}\ln(1+\frac{1}{u^2})$ est $\frac{u}{2}\ln(1+\frac{1}{u^2}) - \arctan(\frac{1}{u})$ (faire une intégration par partie), on obtient

$$F(u) = \frac{u}{2}\ln(\frac{u^2}{1+u^2}) + \frac{\pi}{2} - \arctan(u),$$

   car $F(X) \to 0$, $\frac{X}{2}\ln(1+\frac{1}{X^2}) \to 0$ et $\arctan(\frac{1}{X}) \to 0$ quand $X \to +\infty$.

5. On a $F(0) = \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(x)}{x^2}dx$. Or comme F est continue à droite en 0 et que l'on a son expression pour tout $u > 0$ grâce à 4), par passage à la limite, on obtient que l'intégrale vaut $\frac{\pi}{2}$.

T.D. 6 : Exercice 3

1. • **Montrons que F est continue sur $\mathbb{R}$**

   i. $\forall t \in \mathbb{R}$, $x \mapsto f(t,x)$ continue sur $\mathbb{R}_+^*$ donc est mesurable.

   ii. $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $t \mapsto f(t,x)$ continue sur $\mathbb{R}$.

   iii. $\forall t \in \mathbb{R}$, $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$,
$$|f(t,x)| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp(-x^2/2),$$
   et $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp(-x^2/2)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

   Donc d'après le théorème de continuité des IDP, F est continue sur $\mathbb{R}$.

   • Clairement F est paire.

2. Soit $t_0 > 0$, $\varepsilon > 0$ et $I_{t_0,\varepsilon} =]t_0 - \varepsilon\,, t_0 + \varepsilon[$.

   • **Montrons que F est dérivable sur $I_{t_0,\varepsilon}$**

   i. $\forall t \in \mathbb{R}$, $x \mapsto f(t,x)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ (voir question 1)

   ii. $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $t \mapsto f(t,x)$ est dérivable sur $I_{t_0,\varepsilon}$.

   iii. $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\forall t \in I_{t_0,\varepsilon}$, on a
$$\left|\frac{\partial f}{\partial t}(t,x)\right| = \frac{1}{t}e^{-x^2/2}\varphi\left(\frac{t^2}{x^2}\right),$$
   où $\varphi(y) = y\exp(-y/2)$. La fonction φ est continue sur $\mathbb{R}_+$, de limites nulles en 0^+ et en $+\infty$. Donc φ est bornée par $K > 0$ sur $\mathbb{R}_+$. Ainsi, $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\forall t \in I_{t_0,\varepsilon}$,
$$\left|\frac{\partial f}{\partial t}(t,x)\right| \leq K\frac{1}{t}e^{-x^2/2} \leq \frac{K}{t_0 - \varepsilon}e^{-x^2/2} = Ae^{-x^2/2},$$
   avec $A = K/(t_0 - \varepsilon) > 0$. Et $x \mapsto Ae^{-x^2/2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

Donc d'après le théorème de dérivation des IDP, F est dérivable sur $I_{t_0,\varepsilon}$ et pour tout $t \in I_{t_0,\varepsilon}$,

$$F'(t) = -\int_0^{+\infty} \frac{t}{\sqrt{2\pi}x^2} \exp\left(\frac{1}{2}\left(x^2 + \frac{t^2}{x^2}\right)\right) dx.$$

• **Montrons que F est dérivable sur $\mathbb{R}^*$**

Comme le point d'avant est vrai pour tout voisinage de $t_0 > 0$, F est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. Par parité de F, F est donc dérivable sur $\mathbb{R}^*$.

3. Avec le changement de variables $u = t/x$, $t > 0$, on remarque que $F'(t) = -F(t)$. Ainsi, pour tout $t > 0$, $F(t) = Ce^{-t}$ avec $C \in \mathbb{R}$. Et par continuité de F en 0, on a $C = \lim_{t \to 0^+} F(t) = F(0) = 1/2$. Puis par parité, on conclut
$$F(t) = \frac{1}{2}e^{-|t|} \quad \text{pour tout } t \in \mathbb{R}.$$

T.D. 6 : Exercice 4

1. i. $\hat{f}$ est bien définie car pour tout $X \in \mathbb{R}$, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $|f(x)e^{itx}| = |f(x)|$ et $|f| \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}_+}$.

   ii. $\hat{f}$ est bornée car pour $t \in \mathbb{R}$,
$$|\hat{f}(t)| \leq \int_{\mathbb{R}} |e^{-itx} f(x)| dx \leq \int |f| d\lambda = \|f\|_1 < +\infty.$$

   iii. $\hat{f}$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}$. En effet, soit $a, b \in \mathbb{R}$,
$$|\hat{f}(b) - \hat{f}(a)| \leq \int_{\mathbb{R}} |f(x)| e^{-ixb} - e^{-ixa}| dx \leq \int_{\mathbb{R}} |f(x)| \min(2, |b-a||x|) dx,$$
car pour tout $s, t \in \mathbb{R}$, $|e^{it} - e^{is}| \leq |t-s|$ et $|e^{it} - e^{is}| \leq 2$. Soit maintenant $g(x,\theta) = |f(x)| \min(2, \theta|x|)$ définie sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$. Alors pour tout $\theta > 0$, $|g(x,\theta)| \leq 2|f(x)|$ et $\lim_{\theta \to 0^+} g(x,\theta) = 0$, donc d'après le TCD,
$$\lim_{\theta \to 0^+} \int g(x,\theta) dx = 0.$$
Soit maintenant $G(\theta) = \int_{\mathbb{R}} g(x,\theta) dx$ définie pour tout $\theta > 0$. Soit $\varepsilon > 0$. Soit $\theta_\varepsilon > 0$ tel que $\delta \leq \theta_\varepsilon \Rightarrow G(\delta) \leq \varepsilon$ (un tel θ_ε existe par le point précédent). Alors pour tout $a, b \in \mathbb{R}$ tel que $|b-a| \leq \theta_\varepsilon$, $|\hat{f}(b) - \hat{f}(a)| \leq G(|b-a|) \leq \varepsilon$. Donc $\hat{f}$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}$ (donc en particulier continue).
Remarque : On peut prouver que f est continue sur $\mathbb{R}$ à l'aide du théorème de continuité des IDP (voir cours).

2. Soit $h(t,x) = f(x)e^{-itx}$ définie sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

   i. $x \mapsto h(t,x)$ est intégrable (voir question précédente)

   ii. $\forall x \in \mathbb{R}$, $t \mapsto h(t,x)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

   iii. $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall t \in \mathbb{R}$,
$$\left|\frac{\partial h}{\partial t}(t,x)\right| = \left|-ixf(x)e^{-itx}\right| = |xf(x)|,$$
et $x \mapsto |xf(x)|$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ par hypothèse. Donc d'après le théorème de dérivation des IDP, $\hat{f}$ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, et
$$\hat{f}'(t) = -i \int_{\mathbb{R}} xf(x)e^{-itx} dx = -i\hat{g}(t),$$
où $g(x) = xf(x)$.

T.D. 6 : Exercice 5

1. Soit $f(x,t) = \frac{e^{xt}}{1+t^2}$ définie sur $(\mathbb{R}_+)^2$.

   i. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $t \mapsto f(x,t)$ est mesurable et positive, donc F est bien définie à valeurs dans $[0\,,+\infty]$. De plus, pour tout $(x,t) \in (\mathbb{R}_+)^2$, $0 \leq f(x,t) \leq 1/(1+t^2)$ et $t \mapsto 1/(1+t^2)$ intégrable sur $\mathbb{R}_+$. Donc $F < +\infty$.

   ii. Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$ et pour tout $0 \leq x \leq y$, $f(x,t) \geq f(y,t) \Rightarrow F(x) \geq F(y)$, donc F est décroissante.

2. Soit $x_0 > 0$ et soit $\varepsilon > 0$ tel que $x_0 - \varepsilon > 0$. Notons $I_{x_0,\varepsilon} =]x_0 - \varepsilon\,, x_0 + \varepsilon[$. Alors

   i. $\forall x \in I_{x_0,\varepsilon}$, $t \mapsto f(x,t)$ intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

   ii. $\forall t \in \mathbb{R}_+$, $x \mapsto f(x,t)$ est deux fois dérivable sur $I_{x_0,\varepsilon}$

   iii. $\forall t \in \mathbb{R}_+$, $\forall x \in I_{x_0,\varepsilon}$,
   $$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| = \frac{te^{-xt}}{1+t^2} \leq \frac{1}{2}e^{-xt} \leq \frac{1}{2}e^{-(x_0-\varepsilon)t},$$
   car $t \leq (1+t^2)/2$. Et
   $$\left|\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t)\right| = \frac{t^2e^{-xt}}{1+t^2} \leq e^{-xt} \leq e^{-(x_0-\varepsilon)t}.$$
   Comme $x_0 - \varepsilon > 0$, $t \mapsto e^{-(x_0-\varepsilon)t}$ est intégrable.

   D'après le théorème de dérivation des IDP, F est deux fois dérivable sur $I_{t_0,\varepsilon}$. Vrai pour tout voisinage de $x_0 > 0$ et tout $x_0 > 0$, F est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et on a pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,
   $$F''(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t^2e^{-xt}}{1+t^2}dt.$$

3. Soit $x > 0$,
   $$F''(x) + F(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt}dt = \frac{1}{x}.$$

T.D. 6 : Exercice 6

1. • L'égalité entre les deux intégrales vient du changement de variables $z = x - y$.

   • Pour la continuité : soit $h(x,y) = f(y)g(x-y)$ définie sur $\mathbb{R}^2$.

   i. $\forall x \in \mathbb{R}$, $y \mapsto f(x,y)$ mesurable sur $\mathbb{R}$.

   ii. $\forall y \in \mathbb{R}$, $x \mapsto h(x,y)$ est continue sur $\mathbb{R}$.

   iii. $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall y \in \mathbb{R}$,
   $$|h(x,y)| = |f(y)||g(x-y)| \leq |f(y)|\|g\|_\infty,$$
   et $\|g\|_\infty|f| \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}_+}$ par hypothèses.

   Donc par le théorème de continuité des IDP, $f \star g$ est continue sur $\mathbb{R}$.

   • Enfin pour tout $x \in \mathbb{R}$,
   $$|f \star g(x)| \leq \int_{\mathbb{R}} |f(y)|\|g\|_\infty dy = \|g\|_\infty\|f\|_1 < +\infty,$$
   donc $f \star g$ est bornée.

2. i. $\forall y \in \mathbb{R}$, $x \mapsto h(x,y)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ par hypothèses.
   ii. $\forall x \in \mathbb{R}$, $y \mapsto h(x,y)$ est intégrable (voir question précédente).
   iii. $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall y \in \mathbb{R}$,
   $$\left|\frac{\partial h}{\partial x}(x,y)\right| = |g'(x-y)||f(y)| \leq \|g'\|_\infty |f(y)|,$$
   et $\|g'\|_\infty |f| \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}_+}$.

   Donc d'après le théorème de dérivation des IDP, $f \star g$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $(f \star g)' = f \star g'$. Enfin par 1., $f \star g'$ est continue bornée. Noter que ce résultat s'étend par récurrence à g n fois dérivable continuement avec des dérivées bornées jusqu'à l'ordre n.