DEVOIR MAISON N°2 (16/04/21) 16,5/21

EXERCICE 1 6/8 Très bonne rédaction dans l'ensemble !

(E) $y'(x) - y(x) = \frac{1}{(e^{-x}-1)^2} - \frac{1}{e^{-x}-2} - \frac{1}{e^{-2x}+2e^{-x}+2}$, $\forall x \in]-\ln(2), 0[$.

(1)
Soit Df le domaine de définition (E). Alors

$$x \in Df \iff \begin{cases} (e^{-x}-1)^2 \neq 0 \iff x \neq 0 \\ e^{-x}-2 \neq 0 \iff x \neq -\ln(2) \\ e^{-2x}+2e^{-x}+2 \neq 0 \iff x \in \mathbb{R} \end{cases}$$ 1

Donc $Df =]-\infty, -\ln(2)[\cup]-\ln(2), 0[\cup]0, +\infty[$. Alors (E) est bien définie sur $]-\ln(2), 0[$

(2) Résolvons l'équation homogène (E_0) $y'(x) - y(x) = 0$ $\forall x \in I =]-\ln(2), 0[$

L'équation est déjà normalisé, alors on cherche une primitive de $x \in I \to -1$
Cela peut être $x \in I \to -x$. Donc d'après le cours, l'ensemble des solutions de (E_0) est $S_0 = \{x \in I \to Ce^{x} : C \in \mathbb{R}\}$ 1 Voir correction

(3)(a) Cette technique se nomme la "variation de la constante" (Elle est pertinente car il suffit de récupérer la forme de la solution de (E_0) et de transformé la constante C en une fonction $x \to F(x)$.) 0,5

(b) Cherchons une solution particulière y_p telle que $y_p(x) = F(x)e^{x}$ $\forall x \in I$.
On a pour tout $x \in I$, $y_p'(x) = F'(x)e^{x} + F(x)e^{x}$

On a donc y_p solution de (E)

$\iff \forall x \in I$, $y_p'(x) - y_p(x) = \frac{1}{(e^{-x}-1)^2} - \frac{1}{e^{-x}-2} - \frac{1}{e^{-2x}+2e^{-x}+2}$

$\iff \forall x \in I$, $F'(x)e^{x} + F(x)e^{x} - F(x)e^{x} = \frac{1}{(e^{-x}-1)^2} - \frac{1}{e^{-x}-2} - \frac{1}{e^{-2x}+2e^{-x}+2}$

$\iff \forall x \in I$, $F'(x)e^{x} = \frac{1}{(e^{-x}-1)^2} - \frac{1}{e^{-x}-2} - \frac{1}{e^{-2x}+2e^{-x}+2}$

$\iff \forall x \in I$, $F'(x) = \dfrac{\frac{1}{(e^{-x}-1)^2} - \frac{1}{e^{-x}-2} - \frac{1}{e^{-2x}+2e^{-x}+2}}{e^{x}}$ 1

Chercher y_p solution particulière de (E) sous cette forme se ramène donc à devoir déterminer la primitive de $F'(x)$

(c) F' est continue sur I donc elle admet des primitives sur I.
Soit $[x_0, x] \subset \mathbb{R}$ 0,5

$f(x) = \int_{x_0}^{x} F'(t)\,dt$ est une primitive de F' sur Df.

On a $f(x) = \int_{x_0}^{x} \left(\frac{e^{-t}}{(e^{-t}-1)^2} - \frac{e^{-t}}{e^{-t}-2} - \frac{e^{-t}}{e^{-2t}+2e^{-t}+2} \right) dt$ 0,5

$= \int_{x_0}^{x} \frac{e^{-t}}{(e^{-t}-1)^2}\,dt - \int_{x_0}^{x} \frac{e^{-t}}{e^{-t}-2}\,dt - \int_{x_0}^{x} \frac{e^{-t}}{e^{-2t}+2e^{-t}+2}\,dt$

Faisons le changement de variable $u = e^{-t}$ donc $du = dt(-e^{-t}) = dt.(-u) \Rightarrow dt = -\frac{du}{u}$

Donc d'après la formule du changement de variable :

$$f(x) = \int_{x_0}^{x} F'(t)\,dt = \int_{e^{-x_0}}^{e^{-x}} \frac{u}{(u-1)^2} \cdot \left(-\frac{du}{u}\right) - \int_{e^{-x_0}}^{e^{-x}} \frac{u}{u-2} \cdot -\frac{du}{u} - \int_{e^{-x_0}}^{e^{-x}} \frac{u}{u^2+2u+2} \cdot \frac{-du}{u}$$

0,5

$$= \int_{e^{-x_0}}^{e^{-x}} \frac{1}{(u-1)^2} \cdot (-du) + \int_{e^{-x_0}}^{e^{-x}} \frac{1}{u-2} \cdot du + \int_{e^{-x_0}}^{e^{-x}} \frac{1}{u^2+2u+2} \cdot d$$

$a_0 = 0$

0,5

$$= \int_{e^{-x_0}}^{e^{-x}} \frac{1}{(u-1)^2} \cdot -du + \left[\ln |u-2| \right]_{e^{-x_0}}^{e^{-x}} + \left[\operatorname{Arctan}(u+1) \right]_{e^{-x_0}}^{e^{-x}}$$

$$= \left[\frac{1}{u-1} \right]_{e^{-x_0}}^{e^{-x}}$$

$\left(\text{car } \frac{1}{u^2+2u+2} = \frac{1}{(u+1)^2+1} \right)$

ici $e^{-x} - 2 < 0$ car $x \in]-\ln(2), 0[$

donc $\ln |e^{-x} - 2| = \ln(2 - e^{-x})$

Donc, une primitive de F' sur I est :

$$F : x \in I \longrightarrow e^{x} x \left(\int_{e^{-x_0}}^{e^{-x}} \frac{1}{(u-1)^2} \cdot -du + \ln(e^{-x} - 2) + \operatorname{Arctan}(e^{-x}+1) \right)$$

et est aussi une solution particulière de (E).

4) Donc, l'ensemble des solutions de (E) est :

Δ !

0,5

$$S = \left\{ x \in I \longrightarrow Ce^{x} + \left(\int_{e^{-x_0}}^{e^{x}} \frac{1}{(u-1)^2} \cdot -du + \ln(e^{-x} - 2) + \operatorname{Arctan}(e^{-x}+1) \right) xe^{x} : C, x_0 \in \mathbb{R} \right\}$$

EXERCICE 2 5/6

(E) $2y''(x)+4y(x)=2\sin(x)-2e^{-3x}$, $\forall x\in\mathbb{R}$ ⚠ Ne pas oublier de normaliser.

On a une équation différentielle d'ordre 2 à coefficient constant avec second membre

1ère étape Résolvons l'équation homogène (E_0) $2y''(x)+4y(x)=0$ $\forall x\in\mathbb{R}$

Normaliser !

L'équation caractéristique est donc : $2x^2+4=0$ On a $\Delta=-32<0$

D'où $\begin{cases} x_1=\frac{-b-i\sqrt{32}}{2a}=\frac{-i\sqrt{32}}{4}=-i\sqrt{2} \\ x_2=\frac{-b+i\sqrt{32}}{2a}=i\sqrt{2} \end{cases}$

Donc d'après le cours l'ensemble des solutions de (E_0) est

$S_0=\{x\in\mathbb{R}\longrightarrow C_1e^0\cos(\sqrt{2}x)+C_2e^0\sin(\sqrt{2}x) : C_1,C_2\in\mathbb{R}\}$

$=\{x\in\mathbb{R}\longrightarrow C_1\cos(\sqrt{2}x)+C_2\sin(\sqrt{2}x) : C_1,C_2\in\mathbb{R}\}$ 1

2ème étape : Cherchons une solution particulière en utilisant le principe de superposition de solutions particulières. En effet (E) est à coefficient constant et le second membre est somme de 2 termes dont chacun correspond à une forme connue. 0,5

• On cherche d'abord une solution particulière y_{p_1} pour (E_1) $2y''(x)+4y(x)=2\sin(x)$ $\forall x\in\mathbb{R}$ de la forme $y_{p_1}(x)=a\cos(x)+b\sin(x)$, $\forall x\in\mathbb{R}$ avec $a,b\in\mathbb{R}$ à chercher.

On a pour tout $x\in\mathbb{R}$, $y_{p_1}'(x)=a\times(-\sin(x))+b\cos(x)$ et $y_{p_1}''(x)=a\times(-\cos(x))+b\times(-\sin(x))$

Donc y_{p_1} est solution de (E_1)

$\iff \forall x\in\mathbb{R},\ 2y_{p_1}''(x)+4y_{p_1}(x)=2\sin(x)$

$\iff \forall x\in\mathbb{R},\ 2(-a.\cos(x)-b.\sin(x))+4(a\cos(x)+b\sin(x))=2\sin(x)+0\cos(x)$

$\iff \forall x\in\mathbb{R},\ -2a\cos(x)-2b\sin(x)+4a\cos(x)+4b\sin(x)=2\sin(x)+0\cos(x)$

$\iff \forall x\in\mathbb{R},\ 2a\cos(x)+2b\sin(x)=2\sin(x)+0\cos(x)$

$\iff$ par identification $\begin{cases} 2a\overset{??}{=}2 \\ 2b=0 \end{cases} \iff \begin{cases} a=\cancel{1}\ 0 \\ b=\cancel{0}\ 1 \end{cases}$ 0,5

D'où $y_{p_1} : x\in\mathbb{R}\longrightarrow$ ~~cos(x)~~ sin(x) est solution de (E_1)

• Cherchons maintenant une solution particulière y_{p_2} de (E_2) $2y''(x)+4y(x)=-2e^{-3x}$ $\forall x\in\mathbb{R}$ telle que $y_{p_2}=Q(x)e^{-3x}$ avec Q un polynôme. On a pour tout $x\in\mathbb{R}$ $y_{p_2}'(x)=Q'(x)e^{-3x}-3Q(x)e^{-3x}$

et $y_{p_2}''(x)=Q''(x)e^{-3x}-3Q'(x)e^{-3x}-3Q'(x)e^{-3x}+9Q(x)e^{-3x}$

$=Q''(x)e^{-3x}-6Q'(x)e^{-3x}+9Q(x)e^{-3x}$

On a donc y_{p_2} solution

$\iff \forall x\in\mathbb{R},\ 2y_{p_2}''(x)+4y_{p_2}(x)=-2e^{-3x}$

Rédaction

$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, 2(Q''(x)e^{-3x} - 6Q'(x)e^{-3x} + 9Q(x)e^{-3x}) + 4Q(x)e^{-3x} = -2e^{-3x}$

$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, 2Q''(x)e^{-3x} - 12Q'(x)e^{-3x} + 22Q(x)e^{-3x} = -2e^{-3x}$

$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \quad 2Q''(x) - 12Q'(x) + 22Q(x) = -2$

$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \quad Q''(x) - 6Q'(x) + 11Q(x) = -1 \quad (E')$

au top!

TB

Il reste à trouver Q polynôme pour satisfaire cette équation. Donc cherchons Q sous la forme $Q(x) = b$ avec $b \in \mathbb{R}$. D'où Q vérifie (E') si et seulement si

$\forall x \in \mathbb{R} \quad 0 - 6 \times 0 + 11b = -1$

$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \quad 11b = -1$

$\Leftrightarrow$ par identification $\quad b = \frac{-1}{11}$

D'où $Q : x \in \mathbb{R} \to -\frac{1}{11}$ satisfait (E')

Finalement d'après le raisonnement précédent $y_{p2} : x \in \mathbb{R} \longrightarrow -\frac{1}{11}e^{-3x}$ est une solution particulière de (E_2)

2

Donc une solution particulière de (E) est $y_p : x \in \mathbb{R} \to y_{p1} + y_{p2} = \cancel{\cos(x)}\ \sin(x) - \frac{1}{11}e^{-3x}$

0,5

3ème étape : Pour conclure, l'ensemble des solutions de (E) est

$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \to C_1 \cos(\sqrt{2}x) + C_2 \sin(\sqrt{2}x) + \cos(x) - \frac{1}{11}e^{-3x} : C_1, C_2 \in \mathbb{R} \right\}$ 0,5

EXERCICE 3 $2{,}5/3$

Soit $\int_0^{+\infty} \sin(e^{-t})(e^{\frac{t}{2}}+e^{\frac{t}{3}}-t^3)\,dt$.

On a $\sin(e^{-t}) \underset{t\to+\infty}{\sim} e^{-t}$ et $e^{\frac{t}{2}}+e^{\frac{t}{3}}-t^3 \underset{t\to+\infty}{\sim} e^{\frac{t}{2}}$. Donc $\sin(e^{-t})(e^{\frac{t}{2}}+e^{\frac{t}{3}}-t^3) \underset{t\to+\infty}{\sim} e^{-\frac{t}{2}}$ 1

(voir correction)

0,5 Or $t \to e^{-\frac{t}{2}}$ est positive de même rapide pour $t \to \sin(e^{-t})(e^{\frac{t}{2}}+e^{\frac{t}{3}}-t^3)$. seulement APCR

Comme $\int_0^{+\infty} e^{-\frac{t}{2}}\,dt$ converge*, alors par le théorème de comparaison pour les relations d'équivalence, $\int_0^{+\infty} (e^{-t})(e^{\frac{t}{2}}+e^{\frac{t}{3}}-t^3)\,dt$ converge 1

* d'après le cours (avec $\alpha = \frac{1}{2} > 0$)

EXERCICE 4 3/4

Trop rapide ! Seulement A[illegible].

$\sum_{n\in\mathbb{N}} \dfrac{e^{-\frac{n}{2}}}{\ln(1+\frac{1}{n^n})(n!-(n-1)^3)}$ est à termes positifs. On a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

non !

$$\frac{e^{-\frac{n}{2}}}{\ln(1+\frac{1}{n^n})(n!-(n-1)^3)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \overset{\sim +\infty}{} \frac{e^{-\frac{n}{2}}}{\frac{1}{n^n}\times n!} = \frac{e^{-\frac{n}{2}}\times n^n}{n!} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{e^{-n}}{\ln(1+\frac{1}{n^n})(n!-(n-1)^3)}$$

oui 1

On obtient
$$\frac{e^{-\frac{n+1}{2}}\times(n+1)^{n+1}\times n!}{(n+1)!\times e^{-\frac{n}{2}}\times n^n} = \frac{e^{-\frac{n+1}{2}}\times(n+1)^n\times(n+1)\times n!}{n!\times(n+1)\times e^{-\frac{n}{2}}\times n^n}$$
$$= \frac{e^{-\frac{n+1}{2}}}{e^{-\frac{n}{2}}}\times\frac{(n+1)^n}{n^n} = e^{-\frac{n+1}{2}+\frac{n}{2}}\times\left(\frac{n+1}{n}\right)^n = e^{-\frac{1}{2}}\times\left(\frac{n+1}{n}\right)^n$$

0,5

Or $\left(\frac{n+1}{n}\right)^n = e^{\ln(1+\frac{1}{n})\times n} \longrightarrow e^{\frac{1}{n}\times n} = e^{1}$. Donc $e^{-\frac{1}{2}}\times\left(\frac{n+1}{n}\right)^n \longrightarrow e^{\frac{\cancel{3}}{2}} > 1$ 1

Donc d'après le critère de d'Alembert, $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{e^{-\frac{n}{2}}\times n^n}{n!}$ à termes strictement positifs est divergente. Et d'après le théorème de comparaison $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{e^{-\frac{n}{2}}}{\ln(1+\frac{1}{n})(n!-(n-1)^3)}$ est divergente.

1,5

Dire quel calcul est fait ici :

" Soit $v_n = \dfrac{e^{-\frac{n}{2}}\, n^n}{n!}$ pour $n \geqslant 0$. $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est à termes strictement positifs et pour tout $n \geqslant 0$

on a $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} = \dots$ "