mickael Dos santos Bernardino n° 21902523

DM n°2

4/21

ex 2 1,5/6

(E) $2y''(x) + 4y(x) = 2\sin(x) - 2e^{-3x}$, $\forall x \in \mathbb{R}$

1ère étape on cherche les solutions de l'équation homogène associée.

$$2y''(x) + 4y(x) = 0$$

équation caractéristique $2r^2 + 4 = 0$

Discriminant : $\Delta = -32$

Racine : $r_1 : 0 + \sqrt{2}i$ $r_2 : 0 - \sqrt{2}i$

Comme $\Delta < 0$ les solutions de l'équation homogène sont de la forme

$$y(x) = C_1 e^0 \cos(\sqrt{2}x) + C_2 e^0 \sin(\sqrt{2}x) \quad C_2, C_1 \in \mathbb{R}$$

soit encore

$$y(x) = C_1 \cos(\sqrt{2}x) + C_2 \sin(\sqrt{2}x) \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$ 1

2ème étape on cherche une solution particulière de la forme $y_p(x) = a_1 x + a_0$

$y_p'(x) = a_1$, $y_p''(x) = 0$ on injecte y_p dans l'équation (E) et on obtient :

$$0 + 4a_1 x + 4a_0 = 2\sin(x) - 2e^{-3x}$$

on identifie terme à terme :

$a_1 = \frac{1}{4}$

$a_2 = \frac{1}{4}$

cette identification n'est pas possible.

Donc

pas la même forme qu'au départ

$$y_p(x) = \cancel{\frac{2\sin(x) - 2e^{-3x}}{4}}$$

est une solution particulière de (E)

3ème étape Ainsi, toute solution de (E) est de la forme

$$y(x) = \cancel{\frac{2\sin(x) - 2e^{-3x}}{4}} + C_1\cos(\sqrt{2}x) + C_2\sin(\sqrt{2}x)$$

$C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

0,5

ex3
1,5/3

$$\int_0^{+\infty} \sin(e^{-t})\left(e^{\frac{t}{2}} + e^{\frac{t}{3}} - t^3\right) dt$$

0,5 $D_f = \mathbb{R}$ f est continue et positive en $I = [\cancel{0}; +\infty[$ (< 0 pour t = 2)

On a $\sin(e^{-t})\boxed{\left(e^{\frac{t}{2}} + e^{\frac{t}{3}} - t^3\right)} \underset{+\infty}{\sim} \sin(e^{-t})$? $\sim \frac{1}{e^t}$

or pour ~~Pou~~ $t \geq 1$ or $\frac{1}{e^t} \in [0; +\infty[$ $\sin\left(\frac{1}{e^x}\right)$

Donc ces deux fonction sont positive donc l'intégrale de même nature par le théo. de comparaison par relation d'équivalence

or $\int_2^{+\infty} \frac{1}{e^t} dt$ est converge Donc

$\int_0^{+\infty} \sin(e^{-t})\left(e^{\frac{t}{2}} + e^{\frac{t}{3}} - t^3\right) dt$ converge

1

ex 4 $\sum_{n\in\mathbb{N}} \dfrac{e^{-\frac{n}{2}}}{\ln\left(1+\frac{1}{n^n}\right)\left(n!-(n-1)^3\right)}$

1/4

La série est terme positifs => seulement APCR

car $\ln :]0;+\infty[\to \mathbb{R}$ pas forcément $\mathbb{R}_+$

$\ln\left(1+\frac{1}{n^n}\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n^n}$

$n!-(n-1)^3 \underset{+\infty}{\sim} n!$

oui 0,5

(faire le quotient : $\frac{\frac{1}{n}}{n} \underset{n\to+\infty}{\cancel{\to}} 1$)

$\frac{1}{n^n} n! \sim \cancel{n!}$ non ! comme $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{e^{-\frac{n}{2}}}{n!}$

est une série à terme strictement positif

bien

par la rédaction

on en déduit par le théorème de comparaison

que $\sum_{n\in\mathbb{N}} \dfrac{e^{-\frac{n}{2}}}{\ln\left(1+\frac{1}{n^n}\right)\left(n!-(n-1)^3\right)}$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}} \dfrac{e^{-\frac{n}{2}}}{n!}$

ont la même nature. 0,5

étudions donc la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \dfrac{e^{-\frac{n}{2}}}{n!}$.

$\dfrac{e^{-\frac{n}{2}}}{n!} \to 0$ quand $n\to+\infty$

aie aie aie !

Non ! $\frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\to} 0$ mais $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ DV.

Donc $\sum_{n\in\mathbb{N}} \dfrac{e^{-\frac{n}{2}}}{n!}$ converge. par conséquent

$\sum_{n\in\mathbb{N}} \dfrac{e^{-\frac{n}{2}}}{\ln\left(1+\frac{1}{n^n}\right)\left(n!-(n-1)^3\right)}$ converge également.

ex 1 (E) $y'(x) - y(x) = \frac{1}{(e^{-x}-1)^2} - \frac{1}{(e^{-x}-2)} - \frac{1}{e^{-2x}+2e^{-x}+2}$

0/8

1er étape : on cherche les solutions de l'équation homogène associée.

$$y'(x) - y(x) = 0 \quad (E_0)$$

L'équation est déjà normalisée. L'ensemble des solutions de (E_0) est formé des fonctions

$$y(x) = Ce^{-x}, \quad C \in \mathbb{R}$$

Ce^{x} ⚠

Une primitive de $x \mapsto -1$ est $x \mapsto -x$ donc solutions $y(x) = Ce^{-(-x)}$ $\forall x \in \mathbb{R}$ avec $C \in \mathbb{R}$.

2e étape on cherche une solution particulière de (E) sous la forme $y_p(x) = F(x)e^{x}$