8,5/16

Bonne rédaction dans l'ensemble. Exercice 4 à absolument retravailler.

Maciva
Moubarki
21911153

DM n°1

Ex 1 : 4/5

$$f(x) = \frac{e^x+1}{e^{3x}-e^{2x}-2e^x} = \frac{e^x+1}{e^x(e^{2x}-e^x-2)}$$

on cherche l'ensemble de définition $\mathcal{D}f$:

on pose $u = e^x$ $\quad u(u^2-u-2)=0 \quad \Delta = 9 \quad u_1 = \frac{1-3}{2} = -1 \quad u_2 = 2$

on a les racines suivantes : $\underbrace{e^x = 0,\ e^x = -1}_{\text{impossible}}$ ou $e^x = 2$

$\mathcal{D}f = \mathbb{R} \setminus \{\ln 2\}$

f est continue sur $\mathcal{D}f$ donc admet des primitives, une primitive de f est : 1

$$F(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{e^t+1}{e^{3t}-e^{2t}-2e^t}\,dt \quad \text{pour } [x_0, x] \subset \mathcal{D}f$$

CV : $u = e^t$
$du = dt\,e^t$

$$F(x) \underset{CV}{=} \int_{e^{x_0}}^{e^x} \frac{u+1}{u^3-u^2-2u}\cdot\frac{du}{u}$$ 1

On essaye une décomposition en éléments simples

$$\frac{u+1}{u^3-u^2-2u} \times \frac{1}{u} = \frac{\cancel{u+1}}{\cancel{(u+1)}(u-2)u^2} = \frac{1}{(u-2)u^2} = \frac{a_0}{u-2} + \frac{b_0}{u} + \frac{b_1}{u^2}$$

$\times (u-2)$

$$\frac{1}{u^2} = a_0 + \frac{b_0(u-2)}{u} + \frac{b_1(u-2)}{u^2}$$

en $u = 2$: $\boxed{a_0 = \frac{1}{4}}$

$\times u^2$

$$\frac{1}{u-2} = \frac{a_0 \times u^2}{u-2} + b_0 \times u + b_1$$

en $u = 0$: $\boxed{b_1 = -\frac{1}{2}}$

en $u = 1$: $\boxed{b_0 = -\frac{1}{4}}$ 1

On a donc $F(x) = \int_{e^{x_0}}^{e^x} \frac{1/4}{u-2}\,du - \int_{e^{x_0}}^{e^x} \frac{1/4}{u}\,du - \int_{e^{x_0}}^{e^x} \frac{1/2}{u^2}\,du$

$$= \frac{1}{4}\Big[\ln|u-2|\Big]_{e^{x_0}}^{e^x} - \frac{1}{4}\Big[\ln|u|\Big]_{e^{x_0}}^{e^x} + \frac{1}{2}\Big[\frac{1}{u}\Big]_{e^{x_0}}^{e^x}$$

donc une primitive de f sur D_f est :

$$F(x) = \frac{1}{4}\ln|e^x-2| - \frac{1}{4}\ln|e^x| + \frac{1}{2e^x}$$ → se simplifie

$e^x > 0$ donc $\ln(|e^x|) = \ln(e^x) = x$

1 L'ensemble des primitive de f est :

$$\mathcal{F} = \{x \in D_f \longmapsto F(x) + c \,/\, c \in \mathbb{R}\}$$

Ex 2 : 3/4

$$f(x) = \frac{1}{1+sh(x)+4ch(x)}$$

sh(0) = 0

$D_f = \mathbb{R}$ car $ch(x)$ et $sh(x)$ ~~ne s'annulent pas~~

$$\frac{1}{1+sh(x)+4ch(x)} = \frac{1}{1+\frac{e^x-e^{-x}}{2}+2(e^x+e^{-x})} = \frac{1}{\frac{2+e^x-e^{-x}+4e^x+4e^{-x}}{2}}$$

$$= \frac{2}{2+5e^x+3e^{-x}} = \frac{2e^x}{5e^{2x}+2e^x+3}$$

0,5 f est continue (et dérivable) sur D_f donc admet des primitives

une primitive de f est :

$F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt$ pour $[x_0, x] \subset D_f$

$$= \int_{x_0}^{x} \frac{2e^t}{5e^{2t}+2e^t+3} \overset{CV}{=} 2\int_{e^{x_0}}^{e^x} \frac{u}{5u^2+2u+3}\cdot\frac{du}{u}$$ 1

CV : $u = e^t$, $du = dt\, e^t$

or $5u^2+2u+3 = \left(\sqrt{5}u+\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 + \frac{14}{5} = \frac{14}{5}\left(\frac{5}{14}\left(\sqrt{5}u+\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2+1\right)$ 1

$$= \frac{14}{5}\left(\left(\frac{5u}{\sqrt{14}}+\frac{1}{\sqrt{14}}\right)^2+1\right)$$

CV : $v = \frac{5u}{\sqrt{14}} + \frac{1}{\sqrt{14}}$

$dv = \frac{5}{14}du$

$$F(x) \overset{CV}{=} \frac{28}{5}\int_{\frac{5}{\sqrt{14}}e^{x_0}+\frac{1}{\sqrt{14}}}^{\frac{5}{\sqrt{14}}e^x+\frac{1}{\sqrt{14}}} \frac{\frac{14}{5}}{v^2+1} = 2\int_{\frac{5}{\sqrt{14}}e^{x_0}+\frac{1}{\sqrt{14}}}^{\frac{5}{\sqrt{14}}e^x+\frac{1}{\sqrt{14}}} \frac{1}{v^2+1}$$

$$= \cancel{2}\left[\text{Arctan}(v)\right]_{5/\sqrt{14}e^{x_0}+1/\sqrt{14}}^{5/\sqrt{14}e^x+1/\sqrt{14}}$$

donc une primitive de f sur D_f est :

0,5 $F(x) = \cancel{2}\,\text{Arctan}\left(\frac{5}{\sqrt{14}}e^x + \frac{1}{\sqrt{14}}\right)$

L'ensemble des primitives est : $\mathcal{F} = \{x \in \mathbb{R} \mapsto F(x) + c \,/\, c \in \mathbb{R}\}$

Ex 3 $1{,}5/4$

$$f(x) = \frac{1}{\cos(x)\cos(2x)} = \frac{1}{\cos(x)(1-2\sin^2 x)}$$

Df ? $\cos(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ $\quad \cos(2x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$

$Df = \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + \cancel{2}k\pi, \frac{\pi}{4} + \cancel{2}k\pi \,/\, k \in \mathbb{Z}\}$

cherchons une primitive sur $[0, \frac{\pi}{4}[= J$, f est continue (et dérivable) sur J une primitive de f est :

$$F(x) = \int_c^x \frac{1}{\cos(t)(1-2\sin^2(t))}\,dt \quad \text{avec } [c,x] \subset [0, \tfrac{\pi}{4}[$$

$$= \int_c^x \frac{\cos(t)\,dt}{\cos^2(t)(1-2\sin^2(t))}$$

CV : $u = \sin(t)$ $\quad du = \cos(t)\,dt$

(le changement de variable est bien définie sur $[c,x] \subset [0,\frac{\pi}{4}[$ car $\sin'(t) \neq 0$ sur $[0,\frac{\pi}{4}[$)

CV

$$= \int_{\sin(c)}^{\sin(x)} \frac{\cos(t)}{(1-u^2)(1-2u^2)} \times \frac{du}{\cos(t)}$$

0,5

$$= \int_{\sin(c)}^{\sin(x)} \frac{du}{(1-u)(1+u)(1-\sqrt{2}u)(1+\sqrt{2}u)}$$

Ça n'a pas de sens d'avoir à la fois la variable "t" et "u"

faisons une décomposition en éléments simples

$$\frac{1}{(1-u)(1+u)(1-\sqrt{2}u)(1+\sqrt{2}u)} = \frac{a}{1-u} + \frac{b}{1+u} + \frac{c}{1-\sqrt{2}u} + \frac{d}{1+\sqrt{2}u}$$

0,5

$\times(1-u)$: $\frac{1}{(1+u)(1-\sqrt{2}u)(1+\sqrt{2}u)} = a + \frac{b(1-u)}{1+u} + \frac{c(1-u)}{1-\sqrt{2}u} + \frac{d(1-u)}{1+\sqrt{2}u}$ $\quad$ en $u = 1$: $a = -1/2$

$\times(1+u)$: $\frac{1}{(1-u)(1-\sqrt{2}u)(1+\sqrt{2}u)} = \frac{a(1+u)}{1-u} + b + \frac{c(1+u)}{1-\sqrt{2}u} + \frac{d(1+u)}{1+\sqrt{2}u}$ $\quad$ en $u = -1$: $b = \cancel{1/4}$

$\times(1-\sqrt{2}u)$: $\frac{1}{(1-u)(1+u)(1+\sqrt{2}u)} = \frac{a(1-\sqrt{2}u)}{1-u} + \frac{b(1-\sqrt{2}u)}{1+u} + c + \frac{d(1-\sqrt{2}u)}{1-u}$ $\quad$ en $u = \frac{1}{\sqrt{2}}$ $\quad c = \cancel{1/3}$

$\times(1+\sqrt{2}u)$: $\frac{1}{(1-u)(1+u)(1-\sqrt{2}u)} = \frac{a(1+\sqrt{2}u)}{1-u} + \frac{b(1+\sqrt{2}u)}{1+u} + \frac{c(1+\sqrt{2}u)}{1-\sqrt{2}u} + d$ $\quad$ en $u = \frac{-1}{\sqrt{2}}$ $\quad d = \cancel{1/6}$

$$F(x) = \int_{\sin(c)}^{\sin(x)} \frac{-1/2\,du}{1-u} + \int_{\sin(c)}^{\sin(x)} \frac{1/4\,du}{1+u} + \int_{\sin(c)}^{\sin(x)} \frac{1/3\,du}{1-\sqrt{2}u} + \int_{\sin(c)}^{\sin(x)} \frac{1/6\,du}{1+\sqrt{2}u}$$

$$= -\frac{1}{2}\Big[\ln|1-u|\Big]_{\sin c}^{\sin x} + \frac{1}{4}\Big[\ln|1+u|\Big]_{\sin c}^{\sin x} + \frac{1}{3}\Big[\ln|1-\sqrt{2}u|\Big]_{\sin c}^{\sin x} + \frac{1}{6}\Big[\ln|1+\sqrt{2}u|\Big]_{\sin c}^{\sin x}$$

donc une primitive de f sur J est :

0,5

$$F(x) = -\frac{1}{2}\ln|1-\sin x| + \frac{1}{4}\ln|1+\sin x| + \frac{1}{3}\ln|1-\sqrt{2}\sin x| + \frac{1}{6}\ln|1+\sqrt{2}\sin x|$$

L'ensemble des primitives de f est :

$\mathcal{F} : \{x \in Df \mapsto F(x) + c \,/\, c \in \mathbb{R}\}$

Ex 4 $\quad$ 0/3

$$\int_1^{+\infty} \frac{\ln(1+\frac{1}{\sqrt{t}})\ln(t)}{t}\,dt$$

$$\frac{\ln(1+\frac{1}{\sqrt{t}})\ln(t)}{t} = \ln(1+\frac{1}{\sqrt{t}}) \times \frac{\ln(t)}{t}$$

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{\ln(t)}{t} = 0$$

⚠ Ça n'a pas de sens d'écrire $f(t) \sim 0$ vu la définition de "$\sim$"

et $\frac{1}{\sqrt{t}} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$ donc $\ln(1+\frac{1}{\sqrt{t}}) \underset{t\to+\infty}{\sim} \ln(1) = 0$

donc $\int_1^{+\infty} \ln(1+\frac{1}{\sqrt{t}})$ converge $\Rightarrow \int_1^{+\infty} \frac{\ln(1+\frac{1}{\sqrt{t}})\ln t}{t}\,dt$ converge

Il s'agit donc d'une intégrale convergente