Université de Paris
UFR de Mathématiques et Informatique
45, rue des Saints-Pères, 75006, Paris.

Licence $1^{\text{ère}}$ année, Mathématiques et Calcul 2
Fiche de TD n°3 : Équations Différentielles

Exercice 1. Équations différentielles linéaires du premier ordre à coefficients constants.

1. Donner les solutions de l'équation différentielle

$$7y'(x) + 2y(x) = 2x^3 - 5x^2 + 4x - 1,\ x \in \mathbb{R}.$$

Méthode : on donnera les solutions de l'équation homogène associée, puis on cherchera une solution particulière.

2. Donner les solutions de l'équation différentielle

$$y'(x) + y(x) = xe^{-x},\ x \in \mathbb{R}.$$

Donner la solution vérifiant $y(0) = 1$.

3. Donner les solutions de l'équation différentielle

$$y'(x) - 2y(x) = \cos x + 2\sin x,\ x \in \mathbb{R}.$$

Exercice 2. Méthode de variation de la constante.

1. Donner les solutions de l'équation différentielle

$$y'(x) - 2xy(x) = -(2x-1)e^x,\ x \in \mathbb{R}.$$

Méthode : on donnera les solutions de l'équation homogène associée, puis on cherchera une solution particulière par la méthode de variation de la constante.

2. Donner les solutions de l'équation différentielle

$$y'(x) - 2\frac{y(x)}{x} = x^2,\ x \in]0, +\infty[.$$

3. Donner les solutions de l'équation différentielle

$$y'(x) + (\tan x)y(x) = \sin 2x,\ x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[.$$

Donner la solution vérifiant $y(0) = 1$.

Exercice 3. Recollement de solutions définies sur des intervalles distincts (exercice complémentaire).

1. Utilisant l'exercice 2, donner les solutions de l'équation différentielle

$$xy'(x) - 2y(x) = x^3,$$

d'une part sur $]-\infty, 0[$, d'autre part sur $]0, +\infty[$. Peut-on trouver des fonctions y dérivables sur $\mathbb{R}$ satisfaisant l'équation sur $\mathbb{R}$? Si oui, combien de conditions "initiales" peut-on leur imposer ?

2. Mêmes questions pour

$$x^2y'(x) - y(x) = 0.$$

3. Mêmes questions pour
$$xy'(x) + 2y(x) = \frac{x}{1+x^2}.$$

4. Étudier
$$(\cos x^2)y'(x) - y(x) = \exp(\tan x),$$
sur les intervalles sur lesquels $\cos x$ ne s'annule pas.

Exercice 4. Équations différentielles linéaires du deuxième ordre.

1. Donner les solutions de l'équation
$$y''(x) - 3y'(x) + 2y(x) = x,\ x \in \mathbb{R}.$$

Méthode : on donnera les solutions de l'équation homogène associée, puis on cherchera une solution particulière. **2.** Donner les solutions de l'équation
$$y''(x) - 2y'(x) + y(x) = x,\ x \in \mathbb{R}.$$

3. Même question pour
$$y''(x) + 9y(x) = x + 1,\ x \in \mathbb{R}.$$

4. Même question pour
$$y''(x) + 4y(x) = \tan x,\ x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[.$$

On utilisera la méthode de variation de la constante.

Exercice 5. Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $y' + 7y = e^{3x}$
2. $y' + y = e^{-4x}$
3. $y' - 6y = 3x$
4. $y' + 9y = 1$
5. $y' - 2y = x^2 + 2x - 1$
6. $y' - 4y = x^2$
7. $y' + y = 2\cos(x)$
8. $y' - 3y = (x+1)e^{3x}$
9. $y' + 3y = x - e^{3x} + \cos(x/2)$
10. $(x^2+1)y' + 2xy = 2x^2 + x - 1$
11. $y'' - 4y' + y = 0$
12. $y'' - 2y' + 3y = 0$
13. $y'' - 3y' - 6y = 0$
14. $y'' - 3y' - 6y = 7$
15. $y'' - 6y' = 8$
16. $y'' = 5$
17. $y'' - 3y' + y = x^3 - 2x$
18. $y'' + 4y' = 2x + 2$
19. $y'' = e^{2x} - 1$
20. $y'' - y' - 5y = 0$
21. $y'' - y' - 5y = 3e^x$
22. $y'' - 2y' + 10y = x$
23. $y'' + 2y' = x$
24. $y'' - 3y' + 2y = 0$
25. $y'' - 2y' + 2y = e^x$