Exercice 1 :

5/5

14,5/16

Sid
Rafika
22011887

$$f(x) = \frac{e^{x}+1}{e^{3x}-e^{2x}-2e^{x}}$$

$u = e^t$

Très bon travail et très bonne rédaction ! Continuer.

$e^{3x} - e^{2x} - 2e^{x} = 0 \quad u = e^{x}$

$u^3 - u^2 - 2u = 0 \quad x = \ln 2.$

pourquoi seulement cette solution ?

$D_f = \mathbb{R} \setminus \{\ln 2\}$

Un peu rapide

f est continue sur D_f donc admet des primitives sur D_f

Soient c, x tq $[c, x] \subset D_f$. 1

Alors considérons

$$F(x) = \int_c^x f(x)\,dx = \int_c^x \frac{e^{x}+1}{e^{3x}-e^{2x}-2e^{x}}\,dx$$

On fait le changement de variable $u = e^t$

$t \mapsto e^t$ est C^1 sur $\mathbb{R}$

$du = e^t\,dt$

c devient e^c

x devient e^x

pas nécessaire

En remplaçant e^t par u, on obtient :

$$F(x) = \int_{e^c}^{e^x} \frac{u+1}{u^3-u^2-2u} \times \frac{1}{u}\,du$$

1

~~Essayons la~~ Faisons une décomposition en éléments simples :

$$u^3 - u^2 - 2u = u(\cancel{u^2 - u - 1})$$
$$= u \times (u+1) \times (u-2)$$

$$\frac{u+1}{u^3-u^2-2u} \times \frac{1}{u} = \frac{u+1}{u^2 \times (u+1) \times (u-2)} \quad u \neq 0 ; -1 ; 2$$

simplifier directement

$$\frac{\cancel{u+1}}{u^2 \times \cancel{(u+1)}(u-2)} = \frac{a}{u^2} \left(+ \cancel{\frac{b}{u+1}} \right) + \frac{c}{u-2} + \frac{d}{u}$$

- on multiplie à d et à g. par u^2, on obtient :

$$\frac{u+1}{(u+1)(u-2)} = a + \frac{b \times u^2}{u+1} + \frac{c \times u^2}{u-2} + d \times u$$

limite quand $u \to 0$

$$\frac{1}{-2} = a \quad \Rightarrow a = -\frac{1}{2}$$

- on multiplie à d et à g. par $(u+1)$, on obtient :

$$\frac{u+1}{u^2 \times (u-2)} = \frac{a(u+1)}{u^2} + b + \frac{c(u+1)}{u-2} + \frac{d \times (u+1)}{u}$$

limite quand $u \to -1$

$b = 0$ logique comme on pouvait simplifier

- on multiplie à d et à g. par $(u-2)$, on obtient :

$$\frac{u+1}{u^2 \times (u+1)} = \frac{a(u-2)}{u^2} + \frac{b(u-2)}{u+1} + c + \frac{d \times (u-2)}{u}$$

limite quand $u \to 2$

$$\frac{3}{12} = c \quad \to c = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$$

• on multiplie à droite et à g. par u, on obtient :

$$\frac{u+1}{u\times(u+1)(u-2)} = \frac{a}{u} + \frac{b\times u}{u+1} + \frac{c\times u}{u-2} + d$$

$$\frac{u+1}{u^2\times(u+1)(u-2)} = -\frac{1}{2u^2} + \frac{1}{4(u-2)} + \frac{d}{u}$$

limite quand $u \to 1$

$$\frac{2}{1\times 2\times(-1)} = \frac{-1}{2\times 1} + \frac{1}{-4} + d$$

$-1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = d \to d = -\frac{1}{4}$

on obtient donc :

$$\frac{u+1}{u^2\times(u+1)(u-2)} = -\frac{1}{2u^2} + \frac{1}{4(u-2)} - \frac{1}{4u}$$ 1

Donc $F(x) = \int_{e^c}^{e^x} \frac{-1/4}{u}\,du + \int_{e^c}^{e^x} \frac{-1/2}{u^2}\,du + \int_{e^c}^{e^x} \frac{1/4}{u-2}\,du$

$F(x) = \left[-\frac{1}{4}\ln|u|\right]_{e^c}^{e^x} + \left[\frac{1}{2}\frac{1}{u}\right]_{e^c}^{e^x} + \left[\frac{1}{4}\ln|u-2|\right]_{e^c}^{e^x}$

Primitive de f sur Df :

$G : x \in Df \mapsto -\frac{1}{4}\ln|e^x| - \frac{1}{2}e^{-x} + \frac{1}{4}\ln|e^x - 2|$ 1

+

~~Si~~ $e^x > 0 \to \ln|e^x| = x$

Comme

• Si $[c, x] \subset]-\infty ; \ln 2[$:

$e^{x} - 2 < 0$

$G(x) = -\frac{1}{4}x + \frac{1}{2}e^{-x} + \frac{1}{4}\ln(2-e^{x})$

• Si $[c, x] \subset]\ln 2 ; +\infty[$:

$e^{x} - 2 > 0$

$G(x) = -\frac{1}{4}x + \frac{1}{2}e^{-x} + \frac{1}{4}\ln(e^{x}-2)$ 1

L'ensemble des primitives de f sont :

$\mathcal{F} = \{ x \in D_f \mapsto G(x) + C \,/\, C \in \mathbb{R} \}$

Exercice 2 : 4/4

$$f(x) = \frac{1}{1 + sh(x) + 4ch(x)}$$

$$sh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad ch(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$f(x) = \frac{1}{1 + \frac{e^x - e^{-x}}{2} + 4 \times \frac{e^x + e^{-x}}{2}} = \frac{1}{\frac{2 + e^x - e^{-x} + 4e^x + 4e^{-x}}{2}}$$

$$= \frac{2}{2 + 5e^x + 3e^{-x}}$$

f est définie et continue sur $\mathbb{R}$, 1

Donc f admet des primitives sur $\mathbb{R}$. Soient c, x tq $[c, x] \subset D_f$

Une primitive de f est :

$$F(x) = \int_c^x f(x)\,dx = \int_c^x \frac{2}{2 + 5e^x + 3e^{-x}}\,dx$$

On fait le changement de variable $u = e^t$

$t \mapsto e^t$ est C^1 sur $\mathbb{R}$

$du = e^t dt \quad \rightarrow dt = \frac{du}{u}$

c devient e^c

x devient e^x

On remplace e^t par u, on obtient :

$$F(x) = \int_{e^c}^{e^x} \frac{2}{2 + 5u + \frac{3}{u}} \times \frac{1}{u}\,du = \int_{e^c}^{e^x} \frac{2}{2u + 5u^2 + 3}\,du$$ 1

$5u^2 + 2u + 3 > 0 \quad \forall u \in \mathbb{R}$.

Mettons le sous forme canonique $P(u) = 5u^2 + 2u + 3 = a(u - \alpha)^2 + \beta$

$$= 5\left(u + \frac{1}{5}\right)^2 + \frac{42}{15}$$

$$= 5\left(u + \frac{1}{5}\right)^2 + \frac{14}{5}$$

$$F(x) = \int_{e^c}^{e^x} \frac{2}{5\left(u+\frac{1}{5}\right)^2 + \frac{14}{5}}\,du = \int_{e^c}^{e^x} \frac{2}{\frac{14}{5}\left[\frac{25}{14}\left(u+\frac{1}{5}\right)^2+1\right]}\,du$$

$$= \frac{5}{7}\int_{e^c}^{e^x} \frac{1}{\frac{25}{14}\left(u+\frac{1}{5}\right)^2+1}\,du$$

$$= \frac{5}{7}\int_{e^c}^{e^x} \frac{1}{\left(\frac{5u}{\sqrt{14}}+\frac{1}{\sqrt{14}}\right)^2+1}\,du$$

1

Faisons le changement de variable $v = \frac{5u+1}{\sqrt{14}}$ $dv = \frac{5}{\sqrt{14}}\,du$

$du = \frac{\sqrt{14}}{5}\,dv$

$$F(x) = \frac{5}{7}\,\frac{\sqrt{14}}{5}\int_{\frac{5e^c+1}{\sqrt{14}}}^{\frac{5e^x+1}{\sqrt{14}}} \frac{1}{v^2+1}\,dv$$

TB !

$$F(x) = \frac{\sqrt{14}}{7}\left[\operatorname{Arctan}(v)\right]_{\frac{5e^c+1}{\sqrt{14}}}^{\frac{5e^x+1}{\sqrt{14}}}$$

Primitive de f sur D_f :

$G : x \in \mathbb{R} \to \frac{\sqrt{14}}{7}\operatorname{Arctan}\left(\frac{5e^x+1}{\sqrt{14}}\right)$ 1

L'ensemble des primitives de f sont :

$\mathcal{F} = \{x \in \mathbb{R} \mapsto G(x) + C \,/\, C \in \mathbb{R}\}$

Exercice 3 : 3,5/4

$f(x) = \dfrac{1}{\cos(x)\cos(2x)}$

$\cos x = 0 \iff x = \frac{\pi}{2} + k\pi$

$\cos 2x = 0 \iff x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$

$D_f = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \, ; \, \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \, ; \, k \in \mathbb{Z} \right\}$

f est continue sur Df donc admet des primitives sur Df 1

Soient c, x tq $[c, x] \subset D_f$

Alors considérons :

$$F(x) = \int_c^x f(x)\,dx = \int_c^x \frac{1}{\cos(x)\cos(2x)}\,dx = \int_c^x \frac{\cos(x)}{\cos^2(x)\cos(2x)}\,dx$$

$\cos(2x) = 1 - 2\sin^2(x)$

Faisons le changement de variable $u = \sin t$:

$du = \cos t\,dt \iff dt = \frac{du}{\cos t}$

$$F(x) = \int_{\sin(c)}^{\sin(x)} \frac{\cos(x)}{\cos^2(x)\cos(2x)} \times \frac{1}{\cos x}\,du$$ TB

$$= \int_{\sin(c)}^{\sin(x)} \frac{1}{\cos^2(x)\cos(2x)}\,du = \int_{\sin(c)}^{\sin(x)} \frac{1}{(1-\sin^2(x))(1-2\sin^2(x))}\,du$$

$$= \int_{\sin(c)}^{\sin(x)} \frac{1}{(1-u^2)(1-2u^2)}\,du$$ 1

$$g(u) = \frac{1}{(1-u^2)(1-2u^2)} = \frac{1}{(1+u)(1-u)(1-\sqrt{2}u)(1+\sqrt{2}u)}$$

$$= \frac{a}{1+u} + \frac{b}{1-u} + \frac{c}{1-\sqrt{2}u} + \frac{d}{1+\sqrt{2}u}$$

Essayons une décomposition en éléments simple :

$$g(u) = \frac{a}{1+u} + \frac{b}{1-u} + \frac{c}{1-\sqrt{2}u} + \frac{d}{1+\sqrt{2}u} = \frac{1}{(1+\sqrt{2}u)(1+u)(1-u)(1-\sqrt{2}u)}$$

- on multiplie à d et à g. par $(1+u)$, on obtient :

$$\frac{1}{(1-u)(1-\sqrt{2}u)(1+\sqrt{2}u)} = a + \frac{b(1+u)}{1-u} + \frac{c(1+u)}{1-\sqrt{2}u} + \frac{d(1+u)}{1+\sqrt{2}u}$$

limite quand $u \to -1$:

$$\frac{1}{2\times(1+\sqrt{2})\times(1-\sqrt{2})} = a \iff a = -\frac{1}{2}$$

- on multiplie à d. et à g. par $(1-u)$, on obtient :

$$\frac{1}{(1+u)(1-\sqrt{2}u)(1+\sqrt{2}u)} = \frac{a(1-u)}{1+u} + b + \frac{c(1-u)}{1-\sqrt{2}u} + \frac{d(1-u)}{1+\sqrt{2}u}$$

limite quand $u \to 1$:

$$\frac{1}{2\times(1-\sqrt{2})(1+\sqrt{2})} = b \iff b = -\frac{1}{2}$$

- on multiplie à d. et à g. par $(1+\sqrt{2}u)$, on obtient :

$$\frac{1}{(1+u)(1-u)(1-\sqrt{2}u)} = \frac{a(1+\sqrt{2}u)}{1+u} + \frac{b(1+\sqrt{2}u)}{1-u} + \frac{c(1+\sqrt{2}u)}{1-\sqrt{2}u} + d$$

limite quand $u \to -\frac{\sqrt{2}}{2}$:

$$\frac{1}{(1-\frac{\sqrt{2}}{2})(1+\frac{\sqrt{2}}{2})(1+\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2})} = d \iff d = 1$$

$$g(u) = -\frac{1/2}{1+u} - \frac{1/2}{1-u} + \frac{c}{1-\sqrt{2}u} + \frac{1}{1+\sqrt{2}u} \Rightarrow c = 1$$

$$g(u) = \frac{-1/2}{1+u} - \frac{1/2}{1-u} + \frac{1}{1-\sqrt{2}u} + \frac{1}{1+\sqrt{2}u}$$

$$= \frac{-1/2}{1+u} - \frac{1/2}{1-u} + \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}}-u} + \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}}+u}$$ 1

Revenons à $F(x)$:

$$F(x) = \int_{\sin(c)}^{\sin(x)} g(u)\,du$$

$$= \int_{\sin(c)}^{\sin(x)} \frac{-1/2}{1+u}\,du + \int_{\sin(c)}^{\sin(x)} \frac{-1/2}{1-u}\,du + \int_{\sin(c)}^{\sin(x)} \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}}-u}\,du$$

$$+ \int_{\sin(c)}^{\sin(x)} \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}}+u}\,du$$

$$= \left[-\frac{1}{2}\ln|1+u|\right]_{\sin(c)}^{\sin(x)} + \left[-\frac{1}{2}\ln|1-u|\right]_{\sin(c)}^{\sin(x)}$$

$$+ \left[\frac{\sqrt{2}}{2}\ln\left|\frac{1}{\sqrt{2}}-u\right|\right]_{\sin(c)}^{\sin(x)} + \left[\frac{\sqrt{2}}{2}\ln\left|\frac{1}{\sqrt{2}}+u\right|\right]_{\sin(c)}^{\sin(x)}$$

$$= -\frac{1}{2}\ln|1+\sin x| - \frac{1}{2}\ln|1-\sin x| + \frac{\sqrt{2}}{2}\ln\left|\frac{1}{\sqrt{2}} - \sin x\right|$$

$$+ \frac{\sqrt{2}}{2}\ln\left|\frac{1}{\sqrt{2}} + \sin x\right|$$ les $|\cdot|$ se simplifient

0,5

Primitive de f sur D_f :

$$H : x \in D_f \mapsto -\frac{1}{2}\left(\ln|1+\sin x| + \ln|1-\sin x|\right) + \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\ln\left|\frac{1}{\sqrt{2}} - \sin x\right| + \ln\left|\frac{1}{\sqrt{2}} + \sin x\right|\right)$$

L'ensemble des primitives de f sont :

$$\mathcal{F} = \{x \in D_f \mapsto H(x) + C \mid C \in \mathbb{R}\}$$

Exercice 4 : 2/3

$g(t) = \dfrac{\ln(1+\frac{1}{\sqrt{t}})\ln(t)}{t}\,dt$

Nature de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(1+\frac{1}{\sqrt{t}})\ln(t)}{t}\,dt$?

$$\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{t}}\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{t}} = \frac{1}{t^{1/2}}$$

la fonction $t \mapsto \ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{t}}\right)$ est continue et positive sur $[1;+\infty[$,
on a un problème en $+\infty$

$$\frac{\ln(1+\frac{1}{\sqrt{t}})\ln t}{t} \underset{+\infty}{\sim} \frac{\frac{1}{\sqrt{t}}\ln t}{t} = \frac{\ln t}{t\sqrt{t}} = \frac{\ln t}{t^{3/2}}$$

1

(On a également $\dfrac{\ln t}{t^{3/2}} \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0$)

Très bien de le dire !

On sait que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^{3/2}}\,dt$ converge grâce à l'intégrale de Rieman avec $\alpha > 1$

Or pour t assez grand, on a $\ln(t) \geq 1$

Donc $\exists\, t_0 \in \mathbb{R},\ \forall t \geq t_0$:

$$\frac{\ln t}{t^{3/2}} \leq \frac{1}{t^{3/2}}$$

Il y a une étape intermédiaire non réussi, on admet le résultat suivant :

résultat faux
c'est plutôt pour $t \geq t_0$
$\dfrac{\ln(t)}{t^{3/2}} \leq \dfrac{1}{t^{5/4}}$

$\forall t \geq t_0$, les 2 fct° sont continues et positives
Donc par Théorème de Comparaison, on a : $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t^{3/2}}\,dt$ converge

Or $\dfrac{\ln t}{t^{3/2}} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\ln(1+\frac{1}{\sqrt{t}})\ln(t)}{t}$ et ces 2 fct° sont positives sur $[1;+\infty[$

Par Théorème d'Equivalence $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(1+\frac{1}{\sqrt{t}})\ln(t)}{t}\,dt$ Converge.

1