Kellian
Akera

INTERRO n° 2

8/12

- Très bonne rédaction du 1)
- Penser à la DES

EXERCICE 1

1. $f : t \to \frac{e^t}{e^{2t}+1}$, $Df = \mathbb{R}$ car Pour tout t, $e^{2t}+1 \neq 0$

1 f est continue sur $\mathbb{R}$, donc admet des primitives sur Df. Une primitive de f est :

$$F(x) = \int_c^x \frac{e^t}{e^{2t}+1}\,dt \qquad [c, x] \subset Df$$

Continues !

1

On effectue un changement de variable :

$u = e^t$

$\Rightarrow du = dt\ e^t = dt\, u \iff dt = \frac{du}{u}$ 1

Pour les bornes de l'intégrales : $u = e^c$ et $u = e^x$ pour conserver la bonne intervalle.

$$F(x) = \int_{e^c}^{e^x} \frac{u}{u^2+1}\,\frac{du}{u}$$

$$= \int_{e^c}^{e^x} \frac{1}{u^2+1}\,du$$ 1

$$= \Big[\ \mathrm{Arctan}(u)\Big]_{e^c}^{e^x}$$

Soit $G : x \in Df \to \mathrm{Arctan}(e^x)$, alors G est une primitive de f sur Df

L'ensemble des primitives de f est alors :

$$\mathcal{F} : \{x \in Df \longrightarrow G(x) + C \ / \ C \in \mathbb{R}\}$$ 1

2. $g : t \to \frac{4e^t}{e^{2t}-4}$ $\quad u = e^t$ alors on a :

$\frac{4 \times u}{u^2 - 4}$ le dénominateur est nul quand u est égal à -2 ou 2.

C'est à dire $e^t \in \{-2 ; 2\}$

donc $Dg = \mathbb{R} \setminus \{\ln(2)\}$ car la fonction exponentielle est positive 1 g est continue et donc possède des primitives sur D_g. Une primitive de g est :

$$G(x) = \int_c^x \frac{4e^t}{e^{2t}-4}\,dt \quad [c, x] \subset D_g$$

On effectue un changement de variable :

$u = e^t$

$\Rightarrow du = dt\, e^t$

$\Rightarrow dt = \frac{du}{u}$

1

On a donc :

$$G(x) = \int_{e^c}^{e^x} \frac{4u}{u^2-4}\,\frac{du}{u}$$

1

$$= \int_{e^c}^{e^x} \frac{4}{u^2-4}\,du$$

$$= 4\int_{e^c}^{e^x} \frac{1}{4\left(\frac{u^2}{4}-1\right)}\,du$$

$$= 1\int_{e^c}^{e^x} \frac{1}{\left(\frac{u}{2}\right)^2-1}\,du$$

$$= \int_{e^c}^{e^x} \frac{-1}{1-\left(\frac{u}{2}\right)^2}\,du$$

$$= -\int_{e^c}^{e^x} \frac{1}{1-\left(\frac{u}{2}\right)^2}\,du$$

Faire une DES

$$= \int_{e^x}^{e^c} \frac{1}{1-\left(\frac{u}{2}\right)^2}\,du$$

$$\cancel{= \left[2\arctan\left(\frac{u}{2}\right)\right]_{e^x}^{e^c}}$$

$$\cancel{= -2\arctan\left(\frac{u}{2}\right) + cste}$$

~~Une primiv~~

Changement de variable :

$\frac{u}{2} = v \iff \frac{du}{2} = dv \iff du = 2dv$

$$G(x) = \int_{\frac{e^x}{2}}^{\frac{e^c}{2}} \frac{1}{1-v^2}\,2\,dv$$

$$= \int^{\frac{e^c}{2}}$$