INTERRO 5 : Bonus. 0,5/3 Bloqué par la non utilisation de l'équivalent $\frac{1}{1-u} \underset{u \to 0}{\sim} 1+u$. Dommage !

EXERCICE 1 :

$$\sum_{n\geq 0}\left(\frac{1}{1-\left(\frac{2n+1}{5n+5}\right)^n}-1\right)$$

Cette série est à termes positifs car $\left(\frac{2n+1}{5n+5}\right)^n<1$ donc $1-\left(\frac{2n+1}{5n+5}\right)^n$ ~~≤ 1~~ >0 donc $\frac{1}{1-\left(\frac{2n+1}{5n+5}\right)^n}-1>0$.

Il faut aussi que $\left(\frac{2n+1}{5n+5}\right)^n>0$ car alors $1-\left(\frac{2n+1}{5n+5}\right)^n$ est un nombre compris strictement entre 0 et 1 donc quand on l'inverse, il est >1.

On a $\frac{2n+1}{5n+5} \underset{+\infty}{\sim} \frac{2n}{5n}=\frac{2}{5}$

D'où $\frac{1}{1-\left(\frac{2n+1}{5n+5}\right)^n}-1 \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{1-\left(\frac{2}{5}\right)^n}-1$ $\underset{+\infty}{\sim}\left(\frac{2}{5}\right)^n$ car $\frac{1}{1-u}\underset{0}{\sim}1+u$.

Comme cette suite est également à valeurs positives on a $\sum_{n\geq 0}\left(\frac{1}{1-\left(\frac{2n+1}{5n+5}\right)^n}-1\right)$ de même nature que $\sum_{n\geq 0}\left(\frac{1}{1-\left(\frac{2}{5}\right)^n}-1\right)$ 0,5

$$\frac{v_{n+1}}{v_n}=\frac{1-\left(\frac{2}{5}\right)^n}{1-\left(\frac{2}{5}\right)^{n+1}} \cancel{>} 1 \quad \forall n\in\mathbb{N}$$

<1

donc d'après d'Alembert ~~elle~~ la série est divergente.

⚠ L'implication :

$$\left(\frac{2n+1}{5n+5}\right)\underset{+\infty}{\sim}\frac{2}{5} \Rightarrow \left(\frac{2n+1}{5n+5}\right)^n\underset{+\infty}{\sim}\left(\frac{2}{5}\right)^n$$

est à manipuler avec précaution ! Elle est vraie ici car $\frac{2}{5}\neq 1$. Cf TD où on a vu que

$$1+\frac{1}{n}\underset{+\infty}{\sim}1 \quad \cancel{\Rightarrow} \quad \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\underset{+\infty}{\sim}1$$

mais $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} e$