10/21

Maciva
Moubarki
2191153

DM n° 2

Exercice 1 3,5/8

(E) $y'(x) - y(x) = \frac{1}{(e^{-x}-1)^2} - \frac{1}{e^{-x}-2} - \frac{1}{e^{-2x}+2e^{-x}+2}$ $\forall x \in]-\ln(2), 0[$

1) Pour que (E) soit définie sur $]-\ln(2),0[$ il faut que :

- $(e^{-x}-1)^2 \neq 0$

or $e^{-x} = 1 \iff x = 0$ donc x doit être différent de 0

- $e^{-x} - 2 \neq 0 \iff \ln(e^{-x}) - \ln(2) \neq 0$

1 $\iff -x \neq \ln(2)$

- $e^{-2x} + 2e^{-x} + 2 \neq 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$

Donc (E) est bien définie sur $]-\ln(2),0[$

(2) (E_0) $y'(x) - y(x) = 0$ $\forall x \in]-\ln(2),0[= I$

cette équation est normalisée on peut appliquer le cours,

1 une primitive de $x \in I \mapsto -1$ est $x \in I \mapsto -x$

D'où l'ensemble des solution de (E_0) est :

$\mathcal{S} = \{x \in I \mapsto y(x) = Ce^{x} : C \in \mathbb{R}\}$

3) a) cette technique est la méthode de la variation

0,5 de la constante

$y_p(x) = F(x)e^{x}$

$y'_p(x) = F'(x)e^{x} + xF(x)e^{x}$

y_p solution de (E) :

$\iff y'_p(x) - y_p(x) = \frac{1}{(e^{-x}-1)^2} - \frac{1}{e^{-x}-2} - \frac{1}{e^{-2x}+2e^{-x}+2}$

$\iff F'(x)e^{x} + \cancel{F(x)e^{x}} - \cancel{F(x)e^{x}} = \frac{1}{(e^{-x}-1)^2} - \frac{1}{e^{-x}-2} - \frac{1}{e^{-2x}+2e^{-x}+2}$

$\iff F'(x) = e^{-x}\left(\frac{1}{(e^{-x}-1)^2} - \frac{1}{e^{-x}-2} - \frac{1}{e^{-2x}+2e^{-x}+2}\right)$

1 cela revient donc à chercher une primitive du second membre ~~Cette technique est pertinente car les $F(x)e^{x}$ s'annulent~~

Ex 2 4/6

(E) $2y''(x) + 4y(x) = 2\sin(x) - 2e^{-3x}$, $\forall x \in \mathbb{R}$

On utilise le principe de superposition de solution particulière dans un 1er temps etudions $2y''(x) + 4y(x) = \sin(x)$ (E_1)

1ère étape : résoudre l'équation homogène

(E_0) $2y''(x) + 4y(x) = 0$

on la normalise ; $y''(x) + 2y(x) = 0$ 0,5

L'équation caracteristique est $r^2 + 2 = 0$ $\Delta < 0$

les racines sont $r_1 = \sqrt{2}i$ $r_2 = \sqrt{2}i$

D'après le cours la solution de l'équation homogene est l'ensemble :

$\mathcal{S}_0 = \{x \in \mathbb{R} \mapsto C_1 \cos(\sqrt{2}x) + C_2 \sin(\sqrt{2}x) : C_1, C_2 \in \mathbb{R}\}$ 1

2e etape: chercher une relation particulière

$y_p(x)$ est sous la forme $y_p(x) = a\cos(x) + b\sin(x)$

$y_p'(x) = -a\sin(x) + b\cos(x)$

$y''_p(x) = -a\cos(x) - b\sin(x)$

On a y_p solution de (E_1) :

$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \quad y_p''(x) + 2y_p(x) = \sin(x)$

$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \quad -a\cos(x) - b\sin(x) + 2a\cos(x) + 2b\sin(x) = \sin(x)$

$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \quad a\cos(x) + b\sin(x) = \sin(x)$

Par identification: $a = 0$ et $b = 1$ 1

D'où $y_p : x \in \mathbb{R} \mapsto \sin(x)$ solution particulière de (E_1)

3e etape : on a que l'ensemble des solution de (E_1) est :

$\mathcal{S} = \{x \in \mathbb{R} \mapsto \sin(x) + C_1\cos(\sqrt{2}x) + C_2\sin(\sqrt{2}x) : C_1, C_2 \in \mathbb{R}\}$

le faire pour l'équation de départ!

Résoudre l'équation homogène se fait toujours avant la recherche de solution particulière

etudions $2y''(x) + 4y(x) = -2e^{-3x}$ (E_2) erreur de calcul du coup pour la suite

1ère etape : l'équation homogène

comme vu précédemment la solution de l'équation homogène est l'ensemble $\mathcal{S}_0 = \{x \in \mathbb{R} \mapsto C_1\cos(\sqrt{2}x) + C_2\sin(\sqrt{2}x) : C_1, C_2 \in \mathbb{R}\}$

Pas besoin si déjà fait au tout début

2e étape : chercher une solution particulière

l'équation différentielle est de la forme :

$ay''+by'+cy = e^{mx}$ $\quad m=-3$ Revoir le cours.

d'après le cours une solution particulière est sous la forme $y_p(x) = ae^{-3x}$

$y'_p(x) = -3ae^{-3x}$ Ce n'est pas toujours vrai. On a vu en TD qu'il fallait chercher sol part sous la forme $x \mapsto P(x)e^{mx}$ avec P un polynôme de degré quelconque

$y''_p(x) = 9ae^{-3x}$

on a : y_p solution de (E_2) :

$\iff \forall x\in\mathbb{R},\ 2y''_p(x)+4y_p(x) = e^{-3x}$

$\iff \forall x\in\mathbb{R},\ 18ae^{-3x}+4ae^{-3x} = e^{-3x}$

1 (car e^{-3x} est une fonction strictement positive donc on peut diviser)

Voir la correction

$\iff \forall x\in\mathbb{R},\ 18a+4a=1 \iff a = \frac{1}{22}$

pas même signe ??

D'où $y_p : x\in\mathbb{R} \mapsto \frac{1}{22}e^{-3x}$

3ème étape : l'ensemble des solutions de (E_2) est

$S = \{x\in\mathbb{R} \mapsto \frac{1}{22}e^{-3x} + C_1\cos(\sqrt{2}x)+C_2\sin(\sqrt{2}x) : C_1, C_2\in\mathbb{R}\}$

0,5 D'après le principe de superposition l'ensemble des solution de de (E) $2y''(x)+4y(x) = 2\sin(x) - 2e^{-3x}$ $\forall x\in\mathbb{R}$ est

$S = \{x\in\mathbb{R}\mapsto \cancel{2}\sin(x) + \frac{1}{11}e^{-3x} + C_1\cos(\sqrt{2}x)+C_2\sin(\sqrt{2}x) : C_1, C_2\in\mathbb{R}\}$

Attention : des confusions avec la normalisation. À revoir.

Pour éviter les erreurs : a) toujours commencer par normaliser l'ED (avec le second membre). b) Travailler avec cette nouvelle équation ($\iff$) jusqu'à la fin. c) Résoudre l'équation homogène. d) Chercher une solution particulière

0,5/3 À revoir

Ex 3 :

soit $\int_0^{+\infty}\sin(e^{-t})(e^{\frac{t}{2}}+e^{\frac{t}{3}}-t^3)\,dt$

• $\sin(e^{-t}) \underset{t\to+\infty}{\sim} e^{-t}$ car le développement limité de $\sin(x)$ est $x - \frac{x^3}{3!}+o(x^5)$ donc $\sin(x)\underset{x\to0}{\sim} x$

0,5 • $e^{\frac{t}{2}}+e^{\frac{t}{3}}-t^3 \underset{t\to+\infty}{\sim} e^{\frac{t}{2}}\left(+e^{\frac{t}{3}}\right)$ $e^{t/2}$ l'emporte aussi sur $e^{t/3}$ car l'exponentielle l'emporte sur t.

on a donc $e^{-t}(e^{\frac{t}{2}}+e^{\frac{t}{3}}) = e^{-\frac{t}{2}}+e^{-\frac{2t}{3}}$

$\int_0^{+\infty} e^{-\frac{t}{2}}+e^{-\frac{2t}{3}}\,dt$ converge (tend vers 0)

Tendre vers 0 en $+\infty$ n'est pas suffisant pour converger !

ex : $t\mapsto\frac{1}{t}$: $\int_1^{+\infty}\frac{1}{t}\,dt$ diverge mais $\frac{1}{t} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$

Ex 4 : 2/4

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{e^{-\frac{n}{2}}}{\ln(1+\frac{1}{n^n})(n!-(n-1)^3)} \qquad u_n = \frac{e^{-\frac{n}{2}}}{\ln(1+\frac{1}{n^n})(n!-(n-1)^3)}$$

$\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ est à termes positifs seulement vrai APCR. Justifier.

on a : $\ln(1+\frac{1}{n^n}) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^n}$

(car $\ln(1+\frac{1}{n^n}) = \frac{1}{n^n} - \left(\frac{1}{2n^n}\right)^2 + o\left(\frac{1}{n^3}\right)$

$= \frac{1}{n^n}\underbrace{\left(1 - \frac{1}{2n^n} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{} 1}$) TB mais peut être omis

et $n! - (n-1)^3 \sim n!$ oui

1 donc $u_n \sim \frac{e^{-\frac{n}{2}}}{\frac{n!}{n^n}} = \frac{e^{-\frac{n}{2}} n^n}{n!}$ écriture plus pratique

0,5 donc $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ a la même nature, par le théorème de comparaison que la serie $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} v_n$ où $v_n = \frac{e^{-\frac{n}{2}}}{\frac{n!}{n^n}}$ pour $n\in\mathbb{N}^*$

v_n est à termes strictement positifs

or pour tout $n > 0$:

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{e^{-\frac{(n+1)}{2}}}{\frac{(n+1)!}{(n+1)^n}} \times \frac{\frac{n!}{n^n}}{e^{-\frac{n}{2}}} = \frac{e^{-\frac{1}{2}}(n+1)^n}{n^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \cancel{0} \quad e^{\frac{1}{2}} > 1 \quad (<1)$$

0,5 donc d'après le critère de d'Alembert on en déduit que v_n converge, d'où d'après le raisonnement précédent

$\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{e^{-\frac{n}{2}}}{\ln(1+\frac{1}{n^n})(n!-(n-1)^3)}$ converge

Dommage pour l'erreur de calcul, sinon très bonne rédaction.