1/3

Equivalent : $\frac{1}{1-u} \underset{u\to 0}{\sim} 1+u$.

Marira
Moubarki
2491153

Interrogation n°5

Ex 1 :

$$\sum_{n\geq 0} \left(\frac{1}{1-\left(\frac{2n+1}{5n+5}\right)^n} - 1 \right) = \sum_{n\geq 0} u_n$$

la série est à termes positifs → justifier

0,5 on a : $\left(\frac{2n+1}{5n+5}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(\frac{2}{5}\right)^n$ et donc $\frac{1}{1-\left(\frac{2n+1}{5n+5}\right)^n} - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{1-\left(\frac{2}{5}\right)^n} - 1$

Comme $\sum_{n\geq 0} \left(\frac{1}{1-\left(\frac{2}{5}\right)^n} - 1 \right)$ est une série à termes positifs

0,5 on en déduit par le théorème de comparaison que $\sum_{n\geq 0} u_n$ et $\sum_{n\geq 0} \left(\frac{1}{1-\left(\frac{2}{5}\right)^n} - 1 \right)$ sont de même nature

étudions la nature de $\sum_{n\geq 0} \left(\frac{1}{1-\left(\frac{2}{5}\right)^n} - 1 \right)$

$\frac{1}{1-\left(\frac{2}{5}\right)^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ car $\left(\frac{2}{5}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

! quantité indépendante de n (car on somme sur n) donc ça n'a pas de sens de prendre $\lim_{n\to+\infty}$.

donc $\sum_{n\geq 0} \left(\frac{1}{1-\left(\frac{2}{5}\right)^n} - 1 \right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ Donc d'après le critère de d'Alembert :

$\sum_{n\geq 0} \left(\frac{1}{1-\left(\frac{2}{5}\right)^n} - 1 \right)$ converge. Donc $\sum_{n\geq 0} \left(\frac{1}{1-\left(\frac{2n+1}{5n+5}\right)^n} - 1 \right)$ converge.

Je ne comprends pas le rapport avec ce qui précède.
Pour le critère de d'Alembert, on regarde le rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$.