Exercice 1 4,5/11

Conseils : - Attention à mieux rédiger et justifier les raisonnements (exercice 3).

- Revoir les sommes de Riemann

$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$

1) $S_n = \frac{1}{n}\left(\cos\left(\frac{\pi}{2n}\right) + \cos\left(\frac{2\pi}{2n}\right) + \cdots \cos\left(\frac{n\pi}{2n}\right)\right)$

$S_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\cos\left(\frac{i\pi}{2n}\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\cos$

0,5

2. $S_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{k}{k^2+n^2} = \sum_{k=1}^{n}\frac{\frac{k}{n^2}}{n^2\left(\frac{k^2}{n^2}+1\right)} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\frac{k}{n}}{\left(\frac{k}{n}\right)+1}$

1

soit $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$ $f(x)$ est continue sur $[0;1]$

donc $S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\frac{k}{n}}{\left(\frac{k}{n}\right)^2+1}$ est une somme de Riemann avec $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$

Exercice 2 :

$\forall t \in \mathbb{R}$ $\text{Arctan}(t) \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ ~~dt~~ et Arctan(t) est continue sur $\mathbb{R}$ donc admet des primitives 0,5

soit $[c;x] \in \mathbb{R}$ avec c fixé avec $f(x) = \text{arctan}(x)$

$F(x) = \int_c^x 1\,\text{Arctan}(t)\,dt = \left[t\,\text{Arctan}(t)\right]_c^x - \int_c^x \frac{t}{t^2+1}dt$

pourquoi calculer cette intégrale

$U'(x) = 1$ $U(x) = x$

$V(x) = \text{Arctan}(x)$ $V'(x) = \frac{\cancel{2x}}{x^2+1}$

0,5

$F(x) = x\,\text{Arctan}(x) - c\,\text{Arctan}(c) - \left[\frac{1}{2}\ln(t^2+1)\right]_c^x$

1

$F(x) = x\,\text{Arctan}(x) - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) - \underbrace{c\,\text{Arctan}(c) + \frac{1}{2}\ln(c^2+1)}_{= \text{cste}}$

$F(x) = x\,\text{Arctan}(x) - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + \text{cste}$

$(\text{Arctan}(u))' = \frac{du}{u^2+1}$

$\int U'V = [UV] - \int UV'$

$\int \frac{u'}{u}du = \ln(u)$

$(t^2+1)' = 2t$

1 ~~Donc~~ Une des primitives de $f(x)$ est $F(x) = x\,\text{Arctan}(x) - \frac{1}{2}\ln(x^2+1)$ avec $C = 0$

que fais-tu ici ?