Exercice 1 : 3/5

(4,5/16)

Elie Iniesta

$x \mapsto \dfrac{e^x+1}{e^{3x}-e^{2x}-2e^x}$ La fonction est définie et continue sur $D = \mathbb{R} \setminus \{\ln(2)\}$

0,5 car le dénominateur s'annule en $\ln(2)$. Elle admet donc des primitives sur $\mathbb{R}\setminus\{\ln(2)\}$

un peu trop rapide

Soient x et x_0 tels que $[x_0, x] \subset D$ alors considérons

$$\int_{x_0}^{x} \frac{e^x+1}{e^{3x}-e^{2x}-2e^x}\,dx$$

On fait le changement de variable : $e^x = u$ $\quad \frac{du}{dx} = e^x \quad dx = e^{-x}du$

$e^{2x} = u^2 \quad e^{3x} = u^3$

(et les bornes d'intégration deviennent e^{x_0} et e^x)

attention aux liens logiques. Où sont les "=" et à la présentation du calcul

$$\int_{e^{x_0}}^{e^x} \frac{u+1}{(u^3-u^2-2u)u}\,du$$ on factorise :

$$\frac{u+1}{u^2(u+1)(u+2)} = \frac{1}{u^2(u-2)}$$

$$\int_{e^{x_0}}^{e^x} \frac{1}{u^2(u-2)}\,du$$ 1 On fait une décomposition en élément simple

$$\frac{1}{u^2(u-2)} = \frac{A}{u} + \frac{B}{u^2} + \frac{C}{u-2}$$

$$\frac{u^2(u-2)}{u^2(u-2)} = \frac{Au^2(u-2)}{u} + \frac{Bu^2(u-2)}{u^2} + \frac{Cu^2(u-2)}{u-2}$$

Utiliser plutôt la méthode vue en TD

$1 = A\,u(u-2) + B(u-2) + C u^2$

$1 = u^2A + u^2C - 2uA + uB - 2B$

$1 = u^2(A+C) + u(-2A+B) - 2B$

$\begin{cases} A+C=0 \\ -2A+B=0 \\ -2B=1 \end{cases}$ ce qui donne $A = -\frac{1}{4}$ $B = -\frac{1}{2}$ et $C = \frac{1}{4}$ 1

$$\int_{e^{x_0}}^{e^x} \left(-\frac{1}{4}u - \frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{4}(u-2)\right) du$$

bornes! Par linéarité :

Pas de sens. Où est passé le signe $\int$

$$= -\frac{1}{4}\int \frac{1}{u}\,du - \frac{1}{2}\int \frac{1}{u^2}\,du + \frac{1}{4}\int \frac{1}{u-2}\,du$$

$$= -\frac{\ln(u)}{4} + \frac{1}{2u} + \frac{\ln(u-2)}{4} = \frac{\ln(e^{x}-2)}{4} + \frac{e^{-x}}{2} - \frac{x}{4}$$

pourquoi du "u" puis du "x" ?

Ainsi on obtient :

$$\int_{x_0}^{x} \frac{e^x+1}{e^{3x}-e^{2x}-2e^x}\,dx = \frac{\ln(|e^x-2|)}{4} + \frac{e^{-x}}{2} - \frac{x}{4} + C$$ 0,5

$$= \frac{\ln(|e^x-2|) + 2e^{-x} - x}{4} + C$$

Conclure

Exercice 2 : 0,5/4

$x \mapsto \frac{1}{1+sh(x)+4ch(x)}$ la fonction est définie sur $\mathbb{R}$ car son dénominateur

0,5 est toujours positif. rapide Elle admet donc des primitives sur $\mathbb{R}$ pourquoi ?

$$\int \frac{1}{\frac{2\tanh\left(\frac{x}{2}\right)}{1-\tanh^2\left(\frac{x}{2}\right)} + \frac{4\left(\tanh^2\left(\frac{x}{2}\right)+1\right)}{1-\tanh^2\left(\frac{x}{2}\right)} + 1}\,dx$$

Pourquoi introduire tanh ?

Changement de variable $u = \tanh\left(\frac{x}{2}\right)$ $\quad dx = \frac{2}{\mathrm{sech}^2\left(\frac{x}{2}\right)}$

$$\frac{du}{dx} = \frac{\mathrm{sech}^2\left(\frac{x}{2}\right)}{2} \quad ? \qquad du = \frac{2}{1-u^2}\,du \quad ?$$

Il est très difficile de suivre le raisonnement à cause de la manière dont il est présenté. Que faut-il lire ? Dans quel ordre ?

$$= 2\int \frac{1}{3u^2+2u+\cancel{5}}\,du$$

On résout :

$$\int \frac{1}{3u^2+2u+5}\,du$$

$$= \int \frac{1}{\left(\sqrt{3}\,u+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2+\frac{14}{3}}\,du$$

On réalise un changement de variable

$$S = \frac{3u+1}{\sqrt{14}} \quad \frac{ds}{du} = \frac{3}{\sqrt{14}} \quad du = \frac{\sqrt{14}}{3}\,ds$$

$$= \int \frac{\sqrt{14}}{3\left(\frac{14s^2}{3}+\frac{14}{3}\right)}\,ds$$

$$= \frac{1}{\sqrt{14}} \int \frac{1}{s^2+1}\,ds$$

$$\int \frac{1}{s^2+1}\,ds = \arctan(s)$$ Penser au correcteur !

$$= \frac{\arctan(s)}{\sqrt{14}}$$

ce qui donne $\frac{\arctan\left(\frac{3u+1}{\sqrt{14}}\right)}{\sqrt{14}}$

On revient à la variable initiale $u = \tanh\left(\frac{x}{2}\right)$

$$2\int \frac{1}{3u^2+2u+5}\,du = 2\,\frac{\arctan\left(\frac{\cancel{3}\tanh\left(\frac{x}{2}\right)+1}{\sqrt{14}}\right)}{\sqrt{14}} + c$$

Exercice 3 : 1/4

$h : x \longmapsto \dfrac{1}{\cos(x)\cos(2x)}$ la fonction est continue et définie sur l'intervalle $[2\pi k ; \frac{\pi}{4}+2\pi k]$. elle admet donc des primitives sur celui-ci.

$\notin D_h$

$$\int_{x_0}^{x} \frac{1}{\cos(x)\cos(2x)}\,dx$$

$$= \int_{x_0}^{x} \cos(x) \times \frac{1}{(\sin^2(x)-1)(2\sin^2(x-1)}\,dx$$

On fait le changement de variable $u = \sin(x)$ $\frac{du}{dx} = \cos(x)$ $dx = \frac{1}{\cos(x)}du$

$$= \int_{\sin(x_0)}^{\sin(x)} \frac{1}{(u^2-1)(2u^2-1)}\,du \qquad 1$$

$$= \int_{\sin(x_0)}^{\sin(x)} \frac{1}{(u-1)(u+1)(2u^2-1)}\,du$$

pourquoi ?

On fait une décomposition par éléments simples ce qui nous donne

$$= \int \left(-\frac{2}{2u^2-1} - \frac{1}{2(u+1)} + \frac{1}{2(u-1)}\right) du$$

$$= -2\int \frac{1}{2u^2-1}\,du - \frac{1}{2}\int \frac{1}{u+1}\,du + \frac{1}{2}\int \frac{1}{u-1}\,du$$

$$\int \frac{1}{2u^2-1}\,du \;\times\; \int \frac{1}{(2u-\sqrt{2})(2u+\sqrt{2})}\,du$$ par décomposition en éléments simples :

$$= \int \left(\frac{1}{\sqrt{2}(2u-\sqrt{2})} - \frac{1}{\sqrt{2}(2u+\sqrt{2})}\right) du$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{1}{2u-\sqrt{2}}\,du - \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{1}{2u+\sqrt{2}}\,du$$

⚠ bornes dans $\int$

On fait un changement de variable $v = 2u-\sqrt{2}$

$\frac{dv}{du} = 2$ $du = \frac{1}{2}dv$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{1}{v}\,dv = \frac{\ln(v)}{2}$$

Ce qui donne $\frac{\ln(2u-\sqrt{2})}{2}$ et c'est la même procédé pour $\int \frac{1}{2u+\sqrt{2}}\,du$ donc $\frac{\ln(2u+\sqrt{2})}{2}$

$$= \frac{\ln(2u-\sqrt{2})}{2^{\frac{3}{2}}} - \frac{\ln(2u+\sqrt{2})}{2^{\frac{3}{2}}}$$

Scanné avec CamScanner

bornes

$\int_0^0 \frac{1}{u+1}\,du$ et $\int_0^0 \frac{1}{u-1}\,du$

sont intégrées par $\int \frac{1}{u+1}\,du \cancel{=} \ln(u+1)$ et $\int \frac{1}{u-1}\,du = \ln(u-1)$

Ce qui donne au total : et l'intégrale

$$= \frac{\ln(2u+\sqrt{2})}{\sqrt{2}} - \frac{\ln(2u-\sqrt{2})}{\sqrt{2}} - \frac{\ln(u+1)}{2} + \frac{\ln(u-1)}{2}$$

Voir la correction pour une rédaction type

? on revient à $u = \sin(x)$:

$$= \frac{\ln(2\sin(x)+\sqrt{2})}{\sqrt{2}} - \frac{\ln(2\sin(x)-\sqrt{2})}{\sqrt{2}} - \frac{\ln(\sin(x)+1)}{2} + \frac{\ln(\sin(x)-1)}{2}$$

$$= \frac{\ln(|2\sin(x)+\sqrt{2}|) - \ln(|2\sin(x)-\sqrt{2}|)}{\sqrt{2}} + \frac{\ln(|1-\sin(x)|) - \ln(\sin(x)+1)}{2} + C$$