10,5/11 Très bon travail. Continuez.

Exercice 1 :

2. $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{k^2+n^2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{nk}{n(k^2+n^2)} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{nk}{k^2+n^2}$

$= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{n^2(\frac{k}{n})}{n^2(\frac{k^2}{n^2}+1)} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{\frac{k}{n}}{(\frac{k}{n})^2+1}$

1

• Soit $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$ pour $x \in [0,1]$, f continue sur $[0,1]$.

ie $S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f(\frac{k}{n}) \longrightarrow \int_0^1 f(x)\,dx$ 1

• Or $\int_0^1 f(x)\,dx = \left[\frac{\ln(x^2+1)}{2}\right]_0^1$

$= \frac{\ln(2)}{2} - \frac{\ln(1)}{2} = \frac{\ln(2)}{2}$

Donc $S_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \frac{\ln(2)}{2}$ 1

1. $S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \left(\cos\left(\frac{k\pi}{2n}\right)\right) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \left(\cos\left(\frac{k}{n} \times \frac{\pi}{2}\right)\right)$

• Soit $f(x) = \cos\left(\frac{x\pi}{2}\right)$ pour $x \in [0,1]$, f est continue sur $[0;1]$.

1

ie $S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f(\frac{k}{n}) \longrightarrow \int_0^1 f(x)\,dx$ 1

Or $\int_0^1 f(x)\,dx = \left[2 \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot x}{2}\right) \times \frac{1}{\pi}\right]_0^1$

$= 2 \cdot \underbrace{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{=1} \times \frac{1}{\pi} - 2 \cdot \underbrace{\sin\left(\frac{0}{2}\right)}_{0} \times \frac{1}{\pi}$

$= \frac{2}{\pi} - 0 = \frac{2}{\pi}$ Donc $S_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \frac{2}{\pi}$ 1

Lethan
TARMAT
21908463

Exercice 2:

1 Soit $f(t) = \arctan(t)$ pour $t \in \mathbb{R} = D_f$
Soit $[c, x] \subset D_f$ avec c une constante
Comme f est continue sur D_f, f admet des primitives pour $x \in \mathbb{R}$.

0,5 $F(x) = \int_c^x f(t)\,dt = \int_c^x \arctan(t)\,dt$ qu'est-ce que ce F ?

On pose $\begin{cases} u'(t) = 1 & \rightarrow v'(t) = \frac{1}{1+t^2} \\ v(t) = \arctan(t) & \rightarrow u(t) = t \end{cases}$

1 Par IPP:

$F(x) = [t.\arctan(t)]_c^x - \int_c^x \frac{t}{1+t^2}$

$= x.\arctan(t) - \frac{1}{2} \times [\ln(1+t^2)]_c^x + cste$

1 $= x.\arctan(t) - \frac{\ln(1+x^2)}{2} + C$

L'ensemble des primitives de la fonction f:

1 $F(x) = \{ x \in \mathbb{R} \rightarrow x.\arctan(t) - \frac{\ln(1+x^2)}{2} + \cancel{cste}\ C \ / \ C \in \mathbb{R} \}$

~~$c = c.\arctan(c) + \frac{\ln(1+c^2)}{2}$~~