Université de Paris
UFR de Mathématiques et Informatique
45, rue des Saints-Pères, 75006, Paris.

Licence 1ère année, MATHÉMATIQUES ET CALCUL 2 (MC2)

Feuille de TD n°1 : intégrales et primitives

Exercice 1 Écrire les suites suivantes sous la forme de sommes de Riemann et calculer leur limite

1. $S_n = n\left(\dfrac{1}{(n+1)^2} + \dfrac{1}{(n+2)^2} + \cdots + \dfrac{1}{(n+n)^2}\right)$, **2.** $S_n = \dfrac{\sqrt{1}+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{n-1}}{n\sqrt{n}}$,

3. $S_n = \dfrac{1}{n}\left(\sin\dfrac{\pi}{n} + \sin\dfrac{2\pi}{n} + \cdots + \sin\dfrac{n\pi}{n}\right)$, **4.** $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{k^2+n^2}$, **5.** $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{2n} \frac{k}{n^2+k^2}$.

Exercice 2
1. Calculer $\int_0^{\pi/2} \sin^3 t\, dt$. Donner les primitives de $\cos^3 t \sin^2 t$ et de $\cos^6 t \sin^3 t$.

2. Calculer $\int_0^{\pi/2} \cos^4 t\, dt$. Donner les primitives de $\cos^4 t \sin^2 t$.

Exercice 3 Intégration par parties. Donner les primitives des fonctions suivantes en précisant leur domaine de définition **1.** t^2e^{-t}, **2.** $\arctan t$, **3.** $\ln t$, **4.** $e^t \cos t$.

Exercice 4
1. À l'aide du changement de variable $t = \cos u$, calculer $\int_0^{1/2} \sqrt{(1-t^2)}\, dt$.
2. Après avoir donné le domaine de définition de la fonction $f : x \mapsto \sqrt{5+4x-x^2}$, donner les primitives de $\dfrac{1}{\sqrt{5+4x-x^2}}$ en précisant leur domaine de définition (mettre $\sqrt{5+4x-x^2}$ sous la forme $\sqrt{1-u^2}$).
3. Mettre $\sqrt{2x^2-3x+2}$ sous la forme $\sqrt{u^2+1}$ et donner les primitives de $\dfrac{1}{\sqrt{2x^2-3x+2}}$ en précisant leur domaine de définition.

Exercice 5 Fractions rationnelles
1. En précisant leurs intervalles de définition, donner les primitives de $\dfrac{x}{x^3-3x+2}$ et de $\dfrac{x^4+4x}{(x^2-1)^2}$.
2. Calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{2t+1}{t^2+9}\, dt$.
3. 3.1. Calculer $I(x) := \displaystyle\int_1^x \frac{2t+2}{t^2+t+\frac{5}{4}}\, dt$.

3.2. Pour $x > -1$, calculer $J(x) := \displaystyle\int_1^x \frac{3t^2+5t+\frac{13}{4}}{(t+1)(t^2+t+\frac{5}{4})}\, dt$.

3.3. Calculer $K(x) := \displaystyle\int_0^x \frac{3e^{3t}+5e^{2t}+\frac{13}{4}e^t}{(e^t+1)(e^{2t}+e^t+\frac{5}{4})}\, dt$.

Exercice 6 Effectuant le changement de variable $u = e^t$, calculer les primitives des fonctions

1. $\dfrac{e^x+1}{e^{2x}-5e^x+6}$, **2.** $\dfrac{e^x}{e^{2x}+1}$, **3.** $\dfrac{2e^x+1}{e^{3x}-e^{2x}-2e^x}$.

N.B. : même si l'énoncé ne le précise pas, les intervalles de définition doivent être donnés.

Exercice 7 Effectuant le changement de variable $u = e^t$, calculer les primitives des fonctions

1. $\dfrac{1}{1+2\,\mathrm{ch}\,x}$, **2.** $\dfrac{1}{\mathrm{ch}^2\,x}$, **3.** $\dfrac{1}{\mathrm{ch}\,x-\mathrm{sh}\,x+1}$, **4.** $\dfrac{1}{1+\mathrm{sh}\,x+2\,chx}$.

Exercice 8

1. Effectuant le changement de variable indiqué, calculer les primitives des fonctions

$$\textbf{a.}\ \frac{1}{1+\sin x} \quad (u=\tan\frac{t}{2}),\quad \textbf{b.}\ \frac{1}{2\cos x+\sin x+1} \quad (u=\tan\frac{t}{2}),$$
$$\textbf{c.}\ \frac{1}{\sin x+\sin(2x)} \quad (u=\cos t),\quad \textbf{d.}\ \frac{1}{\cos x\,\cos(2x)} \quad (u=\sin t).$$

2. Calculer $\displaystyle\int_{\pi/6}^{\pi/3}\frac{1}{\sin t\cos t}\,dt$ de trois manières différentes : division par $\cos^2 t$ au numérateur et au dénominateur, changement de variable $u=\tan t$, changement de variable $u=\cos t$.

Exercice 9

1. Montrer que pour tout entier $p\neq 0$, on a

$$\frac{1}{p+1}\leqslant\int_p^{p+1}\frac{dx}{x}\leqslant\frac{1}{p}.$$

2. En déduire la double inégalité

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad \int_{n+1}^{2n+1}\frac{dx}{x}\leqslant\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}\leqslant\int_n^{2n}\frac{dx}{x},$$

puis la valeur de la limite $\lim_{n\to\infty}\sum_{p=n+1}^{2n}\frac{1}{p}$. Donner la limite de $\sum_{p=n}^{2n}\frac{1}{p}$.

3. Soit $k\geqslant 2$ un entier. En utilisant la même méthode qu'à la question **1.**, montrer que

$$\int_{n+1}^{kn+1}\frac{dx}{x}\leqslant\sum_{p=n+1}^{kn}\frac{1}{p}\leqslant\int_n^{kn}\frac{dx}{x}.$$

En déduire que $\lim_{n\to\infty}\sum_{p=n}^{kn}\frac{1}{p}=\lim_{n\to\infty}\sum_{p=n+1}^{kn}\frac{1}{p}=\ln k$.

Exercice 10 On pose $I_n=\displaystyle\int_0^{1/2}\frac{dt}{(t^2-1)^n}$ pour tout $n\geqslant 0$.

1. Montrer que pour tout $n\geqslant 0$, $I_n=\dfrac{1}{2}\dfrac{(-4)^n}{3^n}+2n(I_n+I_{n+1})$.

2. Calculer I_2.

Exercice 11

1. Soit f une fonction continue sur $[a,b]$ à valeurs positives ou nulles. Montrer que si $\int_a^b f(x)dx=0$, alors f est identiquement nulle sur $[a,b]$.

2. Soit g continue sur $[a,b]$ telle que $\int_a^b g(x)dx=0$. Montrer qu'il existe $c\in[a,b]$ tel que $g(c)=0$.

3. Soit h continue sur $[0,1]$ telle que $\int_0^1 h(x)dx=\frac{1}{2}$. Montrer qu'il existe $d\in[0,1]$ tel que $h(d)=d$.

Exercice 12 Inégalité de Cauchy-Schwarz (exercice complémentaire)

Soient f et g deux fonctions continues sur l'intervalle $[a,b]$. Montrer que

$$\Big(\int_a^b f(x)g(x)\,dx\Big)^2\leqslant\Big(\int_a^b f(x)^2dx\Big)\Big(\int_a^b g(x)^2dx\Big).$$

L'inégalité a lieu si et seulement si les fonctions f et g sont proportionnelles.

Application : Soit $f\in C^1([a,b],\mathbb{R})$ telle que $f(a)=0$. Montrer que $\int_a^b|f(x)|^2dx\leqslant\frac{(b-a)^2}{2}\int_a^b|f'(x)|^2dx$.

Exercice 13 (exercice complémentaire)

1. Mettre $S_n=\displaystyle\sum_{k=n}^{2n-1}\frac{1}{2k+1}$ sous la forme d'une somme de Riemann, puis calculer sa limite.

2. Déterminer les fonctions f continues sur $[0,1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ vérifiant $|\int_0^1 f(x)dx|=\int_0^1|f(x)|dx$.

3. Calculer les primitives de $\dfrac{1}{x^4+x^2+1}$.