Université de Paris
UFR de Mathématiques et Informatique
45, rue des Saints-Pères, 75006, Paris.

Licence 1$^{\text{ère}}$ année, Groupe 5, Mathématiques et Calcul 2 (MC2)

Devoir Maison n°2 : Ensemble du Programme

À rendre avant le **Vendredi 16 avril 12h** par email

On pensera à bien structurer et détailler les raisonnements, ainsi qu'à justifier les réponses. On pourra s'aider de la rédaction des réponses vue en TD.

Exercice 1 (8pt) On considère l'équation différentielle suivante

$$(E) \qquad y'(x) - y(x) = \frac{1}{(e^{-x}-1)^2} - \frac{1}{e^{-x}-2} - \frac{1}{e^{-2x}+2e^{-x}+2}, \quad \forall x \in]-\ln(2), 0[.$$

(1) Justifier que cette équation différentielle est bien définie sur $]-\ln(2), 0[$.

(2) Résoudre l'équation homogène.

(3) On cherche une solution particulière de (E) sous la forme

$$\forall x \in]-\ln(2), 0[, \quad y_p(x) = F(x)e^x,$$

avec F une fonction $\mathcal{C}^1$ (dérivable et à dérivée continue) sur $]-\ln(2), 0[$.

(a) Donner le nom de cette technique et expliquer brièvement pourquoi elle est pertinente ?

(b) Démontrer que chercher y_p solution particulière de (E) sous cette forme, se ramène à devoir déterminer une primitive.

(c) Justifier qu'il est possible de trouver une telle primitive et en déterminer une (*on se référera aux méthodes vues au début du semestre*).

(4) Conclure sur l'ensemble des solutions de (E).

Exercice 2 (6pt) Résoudre l'équation différentielle suivante

$$(E) \qquad 2y''(x) + 4y(x) = 2\sin(x) - 2e^{-3x}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

On pourra penser à utiliser le principe de superposition de solutions particulières (cf le supplément sur les équations différentielles sur la page web du cours).

Exercice 3 (3pt) Donner la nature de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \sin(e^{-t})(e^{\frac{t}{2}} + e^{\frac{t}{3}} - t^3)dt$.

Exercice 4 (4pt)

Donner la nature de la série suivante $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{e^{-\frac{n}{2}}}{\ln\left(1+\frac{1}{n^n}\right)(n!-(n-1)^3)}$.