Exercice 3:

0/1

Si une suite converge vers a, alors $u_n - u_{n+1} \leq r$ avec $0 \leq r < 1$.

0,5/6

Exercice 1 : 0/2

$$\sum_{n\geq 1} \frac{\ln(n)^4 \times \ln(n)^4}{n} \quad \frac{\ln(n)^8}{n\ln(n)^4} \quad \cancel{\frac{\ln(n)^8}{n\ln(n)^4}}$$

??

On a :

$$\ln(n)^4 = o(n)$$

/!\ passage à la limite. Ne peut dépendre de n.

Donc $\frac{\ln(n)^4}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{n}$

D'après le critère de Riemann $\frac{1}{n}$ diverge donc $\sum_{n\geq 1} \frac{\ln(n)^4}{n}$ diverge aussi.

Exercice 2 : 0,5/3

$$\sum_{n\geq 0} e^{\frac{10^n}{n!}} - 1$$

0,5

• $e^{\frac{10^n}{n!}} = 1 + \frac{10^n}{n!} + o\left(\frac{10^n}{n!}\right)$

$\Leftrightarrow e^{\frac{10^n}{n!}} - 1 = \frac{10^n}{n!} + o\left(\frac{10^n}{n!}\right)$

donc $e^{\frac{10^n}{n!}} - 1 \underset{+\infty}{\sim} \frac{10^n}{n!}$

TB !!

Soit $f(x) = \frac{10^n}{n!}$

$$\frac{f(x+1)}{f(x)} = \frac{\frac{10^{(n+1)}}{(n+1)!}}{\frac{10^n}{n!}} = \cancel{\frac{10^{(n+1)}\, n!}{(n+1)!\, 10^n} = 1} \quad \frac{10}{n+1}$$

Alors $\sum_{n\geq 0} e^{\frac{10^n}{n!}} - 1$ diverge.

Habiller le raisonnement.