(6,5/16) Bonne rédaction dans l'ensemble. Continuez ! Par contre il y a des notions à revoir (notamment exercice 4)

BARTHEL Tristan

DM 01 - Mathématiques.

Exercice 1 : $x \mapsto \dfrac{e^x+1}{e^{3x}-e^{2x}-2e^x}$

3/5

La fonction est définie et continue sur $D = \mathbb{R}/\{\ln(2)\}$ car son dénominateur s'annule en $\ln(2)$. Elle admet donc des primitives sur $\mathbb{R}/\{\ln(2)\}$

car pour $e^x = X$ dans $e^{3x}-e^{2x}-2e^x$
$\iff X^3 - X^2 - 2X$
$\iff X(X^2-X-2)$

donc $X = 0$ ou $X^2 - X - 2 = 0$

$e^x = 0$ $\quad$ $X = -1$ $\quad$ $X = 2$

$x = \ln(0)$ $\quad$ $e^x = -1$ $\quad$ $e^x = 2$

impossible $\quad$ impossible $\quad$ $\ln(2) = x$ 1

Soient x_0, x tels que $[x_0, x] \in D$. Alors considérons

$$= \int_{x_0}^{x} \frac{e^x+1}{e^{3x}-e^{2x}-2e^x}\,dx$$

On fait le changement de variables $u = e^x$. L'application $x \to e^x$ est C^1 sur $\mathbb{R}$ bijective donc on va pouvoir appliquer la formule du changement de variable. On a $du = e^x dx$ et les bornes d'intégration x_0, x deviennent respectivement e^{x_0} et e^x et en remplaçant e^x par u dans l'intégrale, on obtient

$$= \int_{e^{x_0}}^{e^x} \frac{\cancel{u\,du} + 1}{u^3-u^2-2u} \quad \frac{du}{u}$$

0,5

Comme $u^3 - u^2 - 2u = u(u+1)(u-2)$, par décomposition en éléments simples, pour tout $u \in \mathbb{R}/\{2\}$ on a

$$\frac{u+1}{u^3-u^2-2u} = \frac{a_0}{u} + \frac{b_0}{(u+1)} + \frac{c_0}{(u-2)}$$

avec a_0, b_0 et $c_0 \in \mathbb{R}$

par passage à la limite $u \to 0$ on obtient
on a $a_0 = -\frac{1}{2}$

on multiplie par $(u+1)$ et $u \to -1$
on a $b_0 = 0$

0,5

on multiplie par $(u-2)$ et $u \to 2$
on a $c_0 = \frac{3}{8}$

donc $$= -\int_{e^{x_0}}^{e^x} \frac{1/2}{u} + \int_{e^{x_0}}^{e^x} \frac{3/8}{(u-2)}$$

$$= -\frac{1}{2}\Big[\ln(|u|)\Big]_{e^{x_0}}^{e^x} + \frac{3}{8}\Big[\ln(|u-2|)\Big]_{e^{x_0}}^{e^x}$$

Scanned with CamScanner

Ainsi une primitive de la fonction sur D est $x \mapsto -\frac{1}{2}\ln(|e^x|) + \frac{3}{8}\ln(|e^x - 2|)$

On peut simplifier cette écriture en distinguant les deux cas suivants.

1

- si $[x_0 ; x] \in]-\infty ; \ln(2)[$ alors $\begin{cases} e^x - 2 < 0 \\ e^x < 0 \end{cases}$
  d'où $= -\frac{1}{2}x + \frac{3}{8}\ln(2 - e^x) + c \in \mathbb{R}$
- sinon si $[x_0 ; x] \in]\ln(2) ; +\infty[$ alors $\begin{cases} e^x > 0 \\ e^x - 2 > 0 \end{cases}$
  d'où $= -\frac{1}{2}x + \frac{3}{8}\ln(e^x - 2) + c \in \mathbb{R}$

Exercice 2

3,5/4

$$x \mapsto \frac{1}{1 + sh(x) + 4ch(x)}$$

$$sh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad ch(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

soit $x \mapsto \dfrac{1}{1 + \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right) + 4\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)}$

soit $x \mapsto \dfrac{1}{1 + \frac{5}{2}e^x + \frac{3}{2}e^{-x}}$

la fonction est définie et continue sur $\mathbb{R}$ car son dénominateur est toujours strictement positif. Elle admet donc des primitives sur $\mathbb{R}$

1

Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ alors $x \mapsto \int_{x_0}^{x} f(x)dx$ est une primitive de la fonction. Soit $x \in \mathbb{R}$ on a

$$= \int_{x_0}^{x} \frac{1}{1 + \frac{5}{2}e^x + \frac{3}{2}e^{-x}}$$

On fait le changement de variable $u = e^x$. L'application $x \mapsto e^x$ est C^1 sur $\mathbb{R}$, bijective donc on va pouvoir appliquer la formule du changement de variable. On a $du = dx\, e^x$
$\iff dx = \frac{du}{u}$,

les bornes d'intégration x_0 et x deviennent respectivement e^{x_0} et e^x

d'où $= \displaystyle\int_{e^{x_0}}^{e^x} \frac{1}{1 + \frac{5}{2}u + \frac{3}{2} \times \frac{1}{u}} \times \frac{du}{u}$ oui

Scanned with CamScanner

$$= \int_{e^{x_0}}^{e^x} \frac{1}{\frac{5}{2}u^2 + u + \frac{3}{2}} \, du$$ 1

ici $\frac{5}{2}u^2 + u + \frac{3}{2} > 0 \ \forall u \in \mathbb{R}$

donc on met le dénominateur sous forme canonique soit $\frac{5}{2}\left(u + \frac{1}{5}\right)^2 + \frac{7}{5}$

donc $= \int_{e^{x_0}}^{e^x} \frac{1}{7/5 + \frac{5}{2}\left(u+\frac{1}{5}\right)^2} du$

$$= \frac{7}{5} \int_{e^{x_0}}^{e^x} \frac{1}{1 + \frac{25}{14}\left(u + \frac{1}{5}\right)^2} du$$

$$= \frac{7}{5} \int_{e^{x_0}}^{e^x} \frac{1}{1 + \left(\frac{5\left(u+\frac{1}{5}\right)}{\sqrt{14}}\right)^2}$$

$$= \cancel{\frac{7}{5}} \frac{5}{7} \int_{e^{x_0}}^{e^x} \frac{1}{1 + \left(\frac{5u+1}{\sqrt{14}}\right)^2}$$ 0,5

changement de variable en $v = \frac{5u+1}{\sqrt{14}}$

$dv = \frac{5}{\sqrt{14}} du$

d'où $= \frac{7}{5} \times \frac{5}{\sqrt{14}} \int_{\frac{5e^{x_0}+1}{\sqrt{14}}}^{\frac{5e^x+1}{\sqrt{14}}} \frac{1}{1+v^2} dv$

1

$$= \frac{7}{\sqrt{14}} \left[\mathrm{Arctan}(v)\right]_{\frac{5e^{x_0}+1}{\sqrt{14}}}^{\frac{5e^x+1}{\sqrt{14}}} + C \in \mathbb{R}$$

⚠ Ne pas oublier de conclure

Exercice 3

0/4

$x \longmapsto \frac{1}{\cos(x)\cos(2x)}$ $\cos(2x) = 1 - 2\sin^2(x)$

$x \longmapsto \frac{1}{\cos(x)(1 - 2\sin^2(x))}$

la fonction est continue et définie sur $D = \mathbb{R} / \{\frac{\pi}{2} + \pi k\}$ car son dénominateur s'annule en $\frac{\pi}{2} + k\pi$. Elle admet donc des primitives sur $D = \mathbb{R} / \cancel{\{\frac{\pi}{2} + \pi k\}}$

Soient x et x_0 tels que $[x_0 ; x] \in D$. Alors on a

$$= \int_{x_0}^{x} \frac{1}{\cos(x)(1-2\sin^2(x))} dx$$

On effectue le changement de variable $u = \sin(x)$. L'application $x \mapsto \sin x$ est continue sur $\mathbb{R}$, bijective donc on va pouvoir appliquer la formule du changement de variables. On a $du = \sin(x) dx$ et les bornes d'intégration x et x_0 deviennent alors $\sin(x)$ et $\sin(x_0)$ soit

?

$$= \int_{\sin(x_0)}^{\sin(x)} \frac{1}{\cos(x)(1-2u^2)}$$

Deux variables présentes. Pas possible.

$$= \int_{\sin(x_0)}^{\sin(x)} \frac{1}{\cos(x)} + \int_{\sin(x_0)}^{\sin(x)} \frac{1}{1-2u^2}$$

$$= [\ln(|\sin(x)|)]_{\sin x_0}^{\sin x} + \left[\frac{1}{2}\ln(|x+1|) - \frac{1}{2}\ln(|x-1|)\right]_{\sin x_0}^{\sin x}$$

Voir la correction

donc les primitives de la fonction sont

$$= [\ln(|\sin x|)]_{\sin x_0}^{\sin x} + \left[\frac{1}{2}\ln(|x+1|)\right] - \frac{1}{2}\ln(1-x)\Big]_{\sin x_0}^{\sin x} + C$$

Exercice 4

0/3

$$\int_1^{+\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{t}}\right) \times \ln(t)}{t} dt$$

À retravailler.

Oui

donner la nature de cette fonction revient à s'interesser à la limite de $\int_1^{t} f(t) dt$ lorsque $t \to +\infty$

si la limite est finie elle est convergente sinon elle est divergente

Non ! On a fait un exercice le dessus

d'où $\lim_{t \to +\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{t}}\right) \times \ln(t)}{t} \to +\infty$

On a $\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{t}}\right) \underset{t \to +\infty}{\sim} \cancel{\ln\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)}$ et $\int_1^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{t}}\right)$ converge

Or t lorsque $t \to +\infty$ l'emporte sur $\ln(t)$

donc $\lim_{t \to +\infty} \frac{\ln\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right) \times \ln(t)}{t} = +\infty$

donc cette limite diverge ainsi l'intégrale

$$\int_1^{+\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{t}}\right) \times \ln(t)}{t}$$ diverge.

$1+\frac{1}{\sqrt{t}}$ n'est pas équivalent à $\frac{1}{\sqrt{t}}$ quand $t \to +\infty$ puisque $\frac{1}{\sqrt{t}} \to 0$ et $1+\frac{1}{\sqrt{t}} \to 1$