9/12

Bon travail !

Lethan
TARMAT
21908463

Interrogation n° 2

2. $g : t \longmapsto \dfrac{4e^t}{e^{2t}-4}$

$e^{2t} - 4 \neq 0$

$\Leftrightarrow \quad e^{2t} \neq 4$

$\Leftrightarrow \quad (e^t)^2 \neq 4 \Leftrightarrow e^t \neq 2 \Leftrightarrow t \neq \ln(2)$

Donc $D_g = \mathbb{R} \setminus \{\ln(2)\}$. g est donc définie et continue sur D_g, elle admet donc des primitives. Alors :

1

$G(x) = \int_{x_0}^{x} \dfrac{4e^t}{e^{2t}-4} \, dt$ pour $[x_0 ; x] \subset D_g$

On fait le changement de variable

• On pose $u = e^t$ $\cancel{\Leftrightarrow}$ $\Rightarrow$ $du = dt . e^t \Leftrightarrow du = dt . u$

$\Leftrightarrow dt = \dfrac{du}{u}$. 1

$G(x) = \int_{e^{x_0}}^{e^x} \dfrac{4u}{(u^2-4)} \times \dfrac{1}{u} \, du$ 0,5

$= \int_{e^{x_0}}^{e^x} \dfrac{4\cancel{u}}{(u-2)(u+2)\cancel{u}} \, du$ se simplifie

Par décomposition en élément simples :

$\dfrac{4u}{(u-2)(u+2)u} = \dfrac{a_0}{(u-2)} + \dfrac{b_0}{u+2} + \dfrac{c_0}{u}$ 1

Soit $f : x \longmapsto \dfrac{e^x}{e^{2x}+1}$

$e^{2x}+1 \neq 0 \Leftrightarrow e^{2x} \neq -1$
Or $e^x > 0 \Leftrightarrow (e^x)^2 > 0^2$
$\Leftrightarrow e^{2x} > 0 > -1$

Donc $D_f = \mathbb{R}$

1 f est continue sur $\mathbb{R}$ donc f admet des primitives : Soit le changement de variable

$u = e^t \Leftrightarrow du = dt \cdot e^t \Leftrightarrow dt = \dfrac{du}{u}$ 1

Pourquoi ce F ?

$F(x) = \displaystyle\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt$ Pour $[x; x_0] \in D_f$ ça n'a pas de sens

$= \displaystyle\int_{e^{x_0}}^{e^x} \frac{u}{(u)^2+1} \cdot \frac{du}{u} = \int_{e^{x_0}}^{e^x} \frac{u}{u^3+u}\,du = \int_{e^{x_0}}^{e^x} \frac{1}{u^2+1}\,du$ 1 (2)

$= \left[\text{Arctan}(u)\right]_{e^{x_0}}^{e^x} = \text{Arctan}(e^x) - \text{Arctan}(e^{x_0})$

1 Donc une primitive de f sur $\mathbb{R} = D_f$:

$F(x) \in \mathbb{R} \longmapsto \text{Arctan}(e^x)$

→ On multiplie par $u-2$

$$\Leftrightarrow \frac{4u}{(u+2)u} = a_0 + \frac{b_0(u-2)}{(u+2)} + \frac{c_0(u-2)}{u}$$

→ On fait tendre $u \to 2$

$$\Leftrightarrow \boxed{1 = a_0}$$

→ On multiplie par $u+2$

$$\Leftrightarrow \frac{4u}{u} = a_0(u+2) + b_0(u-2) + \frac{c_0(u-2)(u+2)}{u}$$

→ On fait tendre $u \to -2$

$$\Leftrightarrow 4 = b_0(-2-2) \Leftrightarrow 4 = -4b_0 \Leftrightarrow \boxed{-1 = b_0}$$

1

→ On calcul pour $u = 1$:

$$\frac{4u}{(u-2)(u+2)} = \frac{a_0}{u-2} + \frac{b_0}{u+2} + \frac{c_0}{u} \quad \text{avec } a_0 = 1,\ b_0 = -1$$

$$-\frac{4}{3} = -1 + -\frac{1}{3} + c_0$$

$$\Leftrightarrow -\frac{4}{3} = -\frac{4}{3} + c_0 \Leftrightarrow \boxed{c_0 = 0}$$

Ouf !

Finalement,

$$G(x) = \int_{e^{x_0}}^{e^x} \frac{1}{u-2} + \frac{-1}{u+2}\, du$$

$$= \left[\ln|u-2|\right]_{e^{x_0}}^{e^x} \overset{-}{\cancel{+}} \left[\ln|u+2|\right]_{e^{x_0}}^{e^x}$$

$$= \ln|e^x - 2| \overset{-}{\cancel{+}} \ln|e^x + 2| + cste$$

0,5

Donc une primitive de g sur D_g est:

$$G : x \mapsto \ln|e^x - 2| \overset{-}{\cancel{+}} \ln|e^x + 2|$$