Université de Paris
UFR de Mathématiques et Informatique
45, rue des Saints-Pères, 75006, Paris.

Université de Paris

Licence 1ère année, Groupe 5, Mathématiques et Calcul 2 (MC2)

Interrogation n°1 (05/02/2021) : intégrales et primitives

Durée : 20 min

On pensera à bien justifier les réponses et l'utilisation de résultats du cours, notamment en indiquant les domaines de définition des fonctions considérées ainsi que leur régularité.

Exercice 1 (6 points)

Écrire les suites suivantes sous la forme de sommes de Riemann et calculer leurs limites.

1. $S_n = \frac{1}{n}\big(\cos(\frac{\pi}{2n}) + \cos(\frac{2\pi}{2n}) + \cdots + \cos(\frac{n\pi}{2n})\big)$.
2. $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{k^2+n^2}$.

Correction :

1. On a $S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \cos(\frac{k\pi}{2n}) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(\frac{k}{n})$ où $f : t \in [0,1] \mapsto \cos(\frac{\pi}{2}t)$ (1 pt). S_n est donc une somme de Riemann. Comme f est continue sur $[0,1]$, d'après le cours on a $\lim_{n\to+\infty} S_n = \int_0^1 f(t)dt$ (1 pt). Or
$$\int_0^1 f(t)dt = \left[\frac{2}{\pi}\sin(\frac{\pi}{2}t)\right]_0^1 = \frac{2}{\pi},$$
d'où $\lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{2}{\pi}$ (1 pt).
2. On a $S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{k/n}{1+(k/n)^2} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(\frac{k}{n})$ où $f : t \in [0,1] \mapsto \frac{t}{1+t^2}$ (1 pt). S_n est donc une somme de Riemann. Comme f est continue sur $[0,1]$, d'après le cours on a $\lim_{n\to+\infty} S_n = \int_0^1 f(t)dt$ (1 pt). Or
$$\int_0^1 f(t)dt = \left[\frac{1}{2}\ln(1+t^2)\right]_0^1 = \frac{\ln(2)}{2},$$
d'où $\lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{\ln(2)}{2}$ (1 pt).

Exercice 2 (5 points)

Donner la primitive de la fonction $f : t \mapsto \arctan(t)$ en précisant son domaine de définition. On pensera à faire une intégration par partie.

Correction : la fonction f est définie et continue sur $\mathbb{R}$ donc elle admet des primitives sur $\mathbb{R}$ (1 pt). Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ alors $F : x \in \mathbb{R} \mapsto \int_{x_0}^{x} f(t)dt$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$ (1 pt). Soit $x \in \mathbb{R}$, alors
$$\begin{aligned} F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)dt = \int_{x_0}^{x} \arctan(t)dt &= [t\arctan(t)]_{x_0}^{x} - \int_{x_0}^{x} \frac{t}{1+t^2}dt, \text{ (1 pt)} \\ &= [t\arctan(t)]_{x_0}^{x} - \left[\frac{1}{2}\ln(1+t^2)\right]_{x_0}^{x}, \text{ (1 pt)} \end{aligned}$$

où on a fait une intégration par partie en posant $u'(t) = 1$ et $v(t) = \arctan(t)$. Une primitive de f sur $\mathbb{R}$ est donc $G : x \in \mathbb{R} \mapsto x\arctan(x) - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)$. L'ensemble des primitives de f sur $\mathbb{R}$ est ainsi représenté par les fonctions $x \in \mathbb{R} \mapsto G(x) + c$ où $c \in \mathbb{R}$ (1 pt).