
Einführung in die Regelungstechnik

Sommersemester 2019

PROJEKT- WETTBEWERB

Stabilisierung eines Segways auf einer Wippe

M.Sc. Tim Martin



Universität Stuttgart
Institut für
Systemtheorie und Regelungstechnik

1 Motivation

Das Ziel des Projektwettbewerbes ist das selbständige Anwenden der Vorlesungsinhalte der „Einführung in die Regelungstechnik“ (ERT) für anwendungsnahe Beispiele. Nach Abschluss des Projektwettbewerbes können die Studierenden insbesondere Ihre Kenntnisse zur Analyse und Synthese einschleifiger linearer Regelkreise mit Hilfe von MATLAB anwenden, sowie grundlegende Zusammenhänge zwischen dem Vorsteuerungs- und dem Reglerentwurf erkennen.

Im Vergleich zum Praktikum zur Vorlesung „Einführung in die Regelungstechnik“ mit vier Versuchen konzentriert sich der Projektwettbewerb auf *ein* Anwendungsbeispiel. Durch die intensive Auseinandersetzung mit diesem einen Beispielsystem können die wesentlichen aus ERT bekannten Regelungsstrukturen und -entwurfsmethoden angewendet werden. Zusätzlich wird ein direkter Vergleich der Methoden und der entsprechenden Regler ermöglicht. Ein weiterer Unterschied zum Praktikum besteht im *selbständigen* Anwenden und Umsetzen der Methoden, indem z.B. bis auf das Simulationsmodell keine vorgefertigten MATLAB-Dateien vorliegen. Durch die eigenständige Erarbeitung der Lösung findet eine tiefer gehende Auseinandersetzung mit den Methoden und dem Softwarepaket MATLAB und Simulink statt. Weiterhin wird durch den Umfang der Aufgaben und die selbständige Arbeitsweise die Teamfähigkeit gefördert, da für eine effiziente Bearbeitung die Aufgaben sinnvoll auf die Gruppenmitglieder aufgeteilt werden müssen.

Als praktisches Beispiel wird die Aufgabe aus dem Roborace Wettbewerb 2017 herangezogen. Diese bestand im Kern daraus, ein Segway an einer vorgeschriebenen Position auf einer Wippe zu stabilisieren. Das heißt, wir können folgende zwei Regelungsaufgaben unterscheiden:

1. Stabilisierung des Segways um dessen instabile Ruhelage, damit das Segway nicht umkippt, und
2. Regelung der Position des Segways auf der Wippe, sodass das Segway die Wippe nicht verlässt und einen Lichtstrahl möglichst lange unterbricht.

Aus Sicht der Regelung ist diese Aufgabe interessant, da es einem klassischen Beispiel der Regelungstechnik, dem invertierten Pendel, nachempfunden ist. Allerdings ist die Stabilisierung der instabilen Ruhelage durch die Bewegung der Wippe deutlich erschwert.

2 Systembeschreibung

Der Aufbau der Roborace Aufgabe ist schematisch in Abbildung 1 dargestellt. Der Aufbau besteht aus einer gefederten und gedämpften Wippe, auf der ein Helligkeitsverlauf angebracht ist. Die Wippe hat eine rechteckige Auflagefläche mit einer Länge von 1,2 m und einer Breite von 0,6 m. Angeregt wird die Wippe allein durch das Gewicht des Roboters und dessen Geschwindigkeit. Der Untergrund der Wippe ist mit einem Grauverlauf entsprechend Abbildung 2 bedruckt. Anhand dieses Helligkeitsverlaufs soll der Roboter von seinem Startbereich zu einer Zielmarkierung, der dunkelsten Stelle, navigieren. Nachdem der Roboter dort angekommen ist, sollte er diese Zielmarkierung nicht mehr verlassen. Im Zielbereich weißt der Helligkeitsverlauf den dunkelsten und am Rand den hellsten Grau-Wert auf. Die Platzierung des Zielbereichs liegt im Gegensatz zu Abbildung 2 in der Mitte der Wippe bzw. in deren Drehachse.

Während es beim Roborace das Ziel war den Roboter so lange wie möglich in der

Mitte zu halten ohne die Wippe zu verlassen und ohne Umkippen des Segways, wird im Projektwettbewerb verlangt, dass der Roboter einer Referenzposition folgt. Für die Wettbewerbsaufgabe wird die mittlere Abweichung von dieser Referenzposition über die gesamte Dauer des Laufs ermittelt.

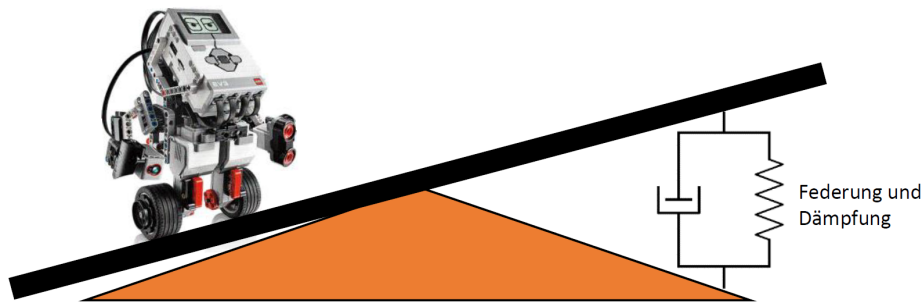


Abbildung 1: Strecke der Roborace Aufgabe 2017.

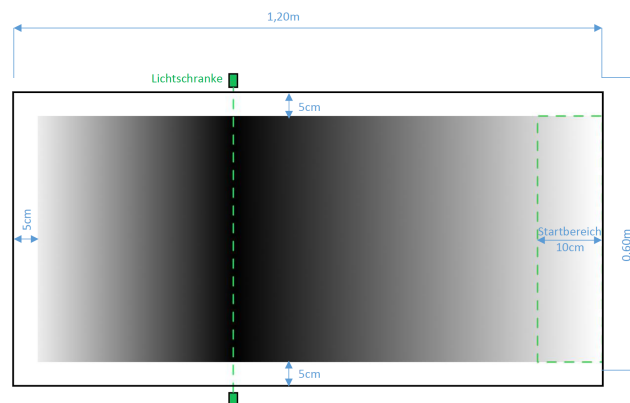


Abbildung 2: Farbverlauf der Wippe.

Für den Projektwettbewerb wird davon ausgegangen, dass der Roboter sich nur längs zur Wippe bewegen kann, d.h. es wird nur eine Koordinate benötigt, um die aktuelle Position des Roboters zu beschreiben. Diese Annahme ist damit gerechtfertigt, dass das Segway symmetrisch aufgebaut ist und beide Motoren gleich stark sind. Desweiteren soll angenommen werden, dass der Roboter seine Position auf der Wippe messen kann. Dies wäre allein durch die Messung des Farbverlaufs nicht möglich, da der Farbverlauf symmetrisch zur Drehachse aufgebracht ist. Damit stehen dem Regler durch Lichtsensor und Gyroskop die Position der Radachse und die absolute Drehgeschwindigkeit des Segways zur Verfügung. Zuletzt wird angenommen, dass die Masse des Segways in einem Punkt konzentriert werden kann. Um im Folgenden eine Simulation der Regelstrecke und einen modellbasierten Reglerentwurf zu ermöglichen, wird im nächsten Kapitel ein detailliertes Modell der Regelstrecke hergeleitet.

3 Modellierung

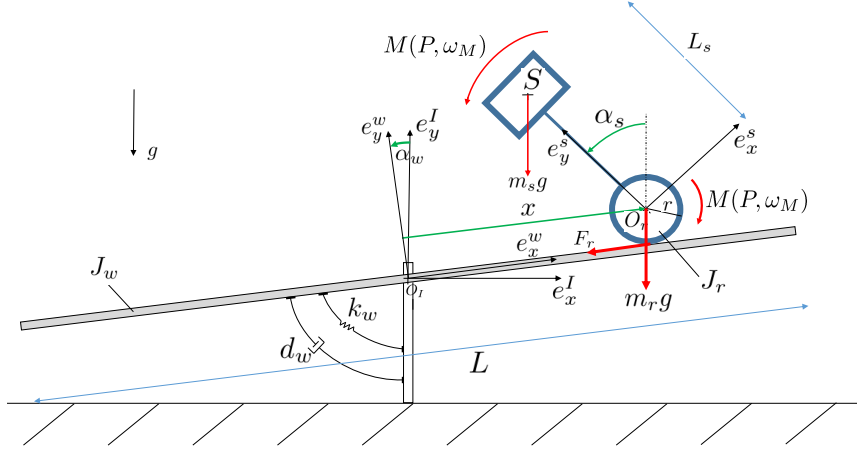


Abbildung 3: Modellierung eines Segways auf einer Wippe.

Für die Modellierung betrachten wir die Wippe und den Roboter als starre Körper. Wie in Abbildung 3 dargestellt, kann die Wippe sich um die z-Achse (zeigt aus der Bildebene heraus) um den Punkt O_I drehen. Der Drehwinkel ist durch den Winkel α_w gegeben und ist aufgrund der Unterlage betragsmäßig auf 30° beschränkt, d.h.

$$\alpha_w \in \left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right]. \quad (1)$$

Die Position der Radachse des Segways O_r relativ zur Wippe wird durch die zeitabhängige Strecke x beschrieben. Wir gehen von einer Raddrehung auf der Wippe ohne Schlupf aus, sodass sich die Drehgeschwindigkeit des Rades ω_{Rad} zu

$$\omega_{\text{Rad}} = -\frac{\dot{x}}{r} \quad (2)$$

ergibt, wobei r dem Radius der Räder entspricht. Als dritten Freiheitsgrad des Gesamtsystems wird die absolute Drehung des Segways zur Vertikalen α_s gewählt. Damit besitzt das Gesamtsystem drei Freiheitsgrade $\mathbf{q} = [\alpha_w \ x \ \alpha_s]^T$.

Wie bereits erwähnt, nehmen wir an, dass die gesamte Masse des Segways in dessen Schwerpunkt S konzentriert ist. Aus der Aufgabenstellung des Roboraces entnehmen wir außerdem, dass die Wippe so gefedert und gedämpft ist, sodass die Ruhelage der Wippe in der Horizontalen liegt. Daher wirken auf die Wippe zwei zusätzliche Momente proportional zu dessen Auslenkung (Federkonstante k_w) und Drehgeschwindigkeit (Dämpfungskonstante d_w). Weiter soll ein geschwindigkeitsabhängiger Rollwiderstand bremesend auf die Räder des Roboters wirken. Durch Vernachlässigung der Trägheitskräfte ergibt sich der Rollwiderstand zu

$$F_r = f_r \dot{x} (m_r + m_s) \cos(\alpha_w), \quad (3)$$

wobei f_r dem Rollreibungskoeffizient und g der Erdbeschleunigung entspricht. Aus dieser Systembeschreibung kann mit Hilfe der Lagrangeschen Gleichungen 2. Art

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i, \quad i = 1, 2, 3$$

die Bewegungsgleichungen in der Form

$$\beta_1(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \beta_2(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \beta_3(\mathbf{q}) = \beta_4(M(P, \omega_M)), \quad \mathbf{q} = [\alpha_w \quad x \quad \alpha_s]^T \in \mathbb{R}^3 \quad (4)$$

hergeleitet werden. Wie aus dem Anhang B entnommen werden kann, ergeben sich die Bewegungsgleichungen zu

$$\begin{aligned} \beta_1(\mathbf{q}) &= \begin{bmatrix} J_w + m_r(q_2^2 + \frac{3}{2}r^2) + m_s(r^2 + q_2^2) & -(\frac{3}{2}m_r + m_s)r + m_s L_s \cos \Delta & m_s L_s(r \cos \Delta - q_2 \sin \Delta) \\ -(\frac{3}{2}m_r + m_s)r & \frac{3}{2}m_r + m_s & -m_s L_s \cos \Delta \\ m_s L_s(r \cos \Delta - q_2 \sin \Delta) & -m_s L_s \cos \Delta & m_s L_s^2 \end{bmatrix} \\ \beta_2(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) &= \begin{bmatrix} d_w + (2(m_r + m_s)q_2 - m_s L_s \sin \Delta)\dot{q}_2 & m_s L_s \dot{q}_3 \sin \Delta & -m_s L_s \dot{q}_3(r \sin \Delta + q_2 \cos \Delta) \\ -(m_r + m_s)q_2 \dot{q}_1 & f_r g(m_r + m_s) \cos q_1 & m_s L_s \dot{q}_3 \sin \Delta \\ m_s L_s \dot{q}_1(r \sin \Delta + q_2 \cos \Delta) & -2m_s L_s \dot{q}_1 \sin \Delta & 0 \end{bmatrix} \\ \beta_3(\mathbf{q}) &= \begin{bmatrix} k_w q_1 + (m_r + m_s)g(q_2 \cos q_1 - r \sin q_1) \\ (m_r + m_s)g \sin q_1 \\ -m_s L_s g \sin q_3 \end{bmatrix} \\ \beta_4(M(u, \omega_M)) &= \begin{bmatrix} -1 \\ \frac{1}{r} \\ 1 \end{bmatrix} M(P, \omega_M) \end{aligned}$$

mit $\Delta = q_3 - q_1$. Die Matrix $\beta_1(\mathbf{q})$ wird in der Mechanik auch als Massenmatrix bezeichnet und ist stets invertierbar, sodass aus den Bewegungsgleichungen (4) ein Zustandsraummodell aufgestellt werden kann. Nachdem die mechanische Komponente des Systems modelliert wurde, wird im Folgenden auf den Antrieb und damit auf das Motormoment $M(P, \omega_M)$ eingegangen.

Im Folgenden wird das Motordrehmoment *eines* Motors $M_M(P, \omega_M)$ betrachtet. Beachten Sie, dass für die Berechnung des gesamten Motormoments, das in Abbildung 3 zu sehen ist, zwei Motoren verbaut sind, d.h. $M = 2M_M$. Das Motordrehmoment M_M ist abhängig von der angebrachten Leistung P sowie der *Motordrehzahl* ω_M . Das Motormoment verhält sich für eine konstant angebrachte Leistung P gemäß der Kennlinien aus Abbildung 4. Hierbei entspricht der Eingang u dem Verhältnis der Leistung P zur maximalen Leistung P_{\max} in Prozent, d.h.

$$P = P_{\max} \frac{u}{100}.$$

und

$$u \in [-u_{\max}, u_{\max}] \quad (5)$$

mit $u_{\max} = 100$.

Entsprechend wird folgendes Modell angenommen

$$M_{\text{calc}} = \text{sign}(\omega_M) \left(\frac{|P|}{\omega_M} - M_{\max}(P) \right), \quad (6)$$

$$\tau(P, \omega_M) = \begin{cases} M_{\max}(P), & M_{\text{calc}} > M_{\max}(P) \\ 0, & M_{\text{calc}} < 0 \\ M_{\text{calc}}, & \text{sonst} \end{cases}, \quad (7)$$

$$M_M(P, \omega_M) = \begin{cases} \tau(P, \omega_M), & P \geq 0, \\ -\tau(P, -\omega_M), & P < 0 \end{cases}, \quad (8)$$

$$M_{\max}(P) = \text{sign}(P) \frac{\sqrt{|P|}}{9.434}. \quad (9)$$

Dabei gilt für die *Drehgeschwindigkeit des Motor* $\omega_M = -\frac{\dot{x}}{r}$, da zunächst kein Getriebe und kein Schlupf der Räder angenommen wird. Laut LEGO Dokumentation beträgt das maximale Drehmoment eines großen EV3 Motors in der Spitze $M_{\max}(P_{\max}) = 0.2 \text{ Nm}$, außerdem hat er eine *maximale Umdrehungszahl* von

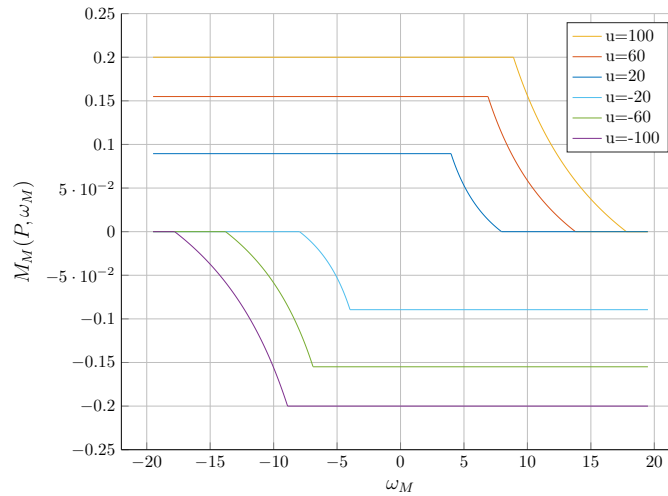


Abbildung 4: Motorkennlinien für verschiedene Leistungsstufen.

$w_{M,\max} = 17.8 \text{ rad/s}$ wodurch sich eine maximale elektrische Leistung von $P_{\max} = 3.56 \text{ W}$ ergibt.

Diverse Störungen δ im Inneren von Motor und EV3 Brick verursachen Schwankungen der vom Benutzer vorgegebenen elektrischen Leistung. Für die Abhängigkeit der Leistung vom Eingang u ergibt sich somit

$$P = P_{\max} \frac{u + \delta}{100}. \quad (10)$$

Wir können dabei annehmen, dass die Störung als weißes Rauschen mit Amplituden von

$$|\delta| < 3 \quad (11)$$

beschrieben werden kann.

Wie in Kapitel 2 erwähnt, stehen zwei Sensorsignale als Systemausgänge zur Verfügung: ein Lichtsensor, mit welchem die Position

$$y_1 = x \quad (12)$$

des Radstandes gemessen werden kann, sowie ein Gyroskop, welches die absolute Drehgeschwindigkeit des Segways

$$y_2 = \dot{\alpha}_s \quad (13)$$

bestimmt.

Das Modell (1)-(13) ist bereits in Matlab/Simulink im Subsystem „Regelstrecke“ implementiert.

Tabelle 1: Nominelle Parameterwerte und Systemgrößen.

Parameter	Beschreibung	nomineller Wert	Einheit
m_s	Masse des Segways	0.8	kg
m_r	Masse zweier Räder	0.048	kg
m_w	Masse der Wippe	10	kg
R	Radradius	0.041	m
L	Länge Wippe	1.2	m
L_s	Höhe des Schwerpunktes Segway	0.15	m
J_w	Trägheitsmoment Wippe	0.60	$\text{m}^2 \cdot \text{kg}$
J_r	Trägheitsmoment Rad	$1.75e - 5$	$\text{m}^2 \cdot \text{kg}$
f_r	Rollreibungskoeffizient	$7.2e - 3$	s/m
g	Erdbeschleunigung	9.81	m/s^2
k_w	Federsteifigkeit	2	Nm/rad
d_w	Dämpfung	0.4	$\text{Nm}\cdot\text{s/rad}$
$\alpha_{w,\max}$	maximale Drehung Wippe	$\pi/6$	rad
M_{\max}	maximales Motor-Drehmoment	0.2	Nm
$\omega_{M,\max}$	maximale Motor-Drehgeschwindigkeit	17.8	rad/s
P_{\max}	maximale elektrische Leistung	3.56	W
u_{\max}	maximale Leistungsstufe	100	%

4 Arbeits-Aufgaben

In diesem Kapitel soll ein Regler entworfen werden, so dass das Segway möglichst in der Mitte der Wippe stabilisiert wird und einer Referenzposition folgen kann. Die hierdurch gewonnenen Erfahrungen können anschließend für die Wettbewerbsaufgabe (siehe Kapitel 5) genutzt und weiterentwickelt werden.

Verwenden Sie in diesem Kapitel als Ausgangspunkt das zuvor hergeleitete Modell (1)-(13), mit den nominellen Parameterwerten aus Tabelle 1, und den Messgrößen $y_1 = x$ und $y_2 = \dot{\alpha}_s$. Nehmen Sie für den Reglerentwurf zunächst an, dass keine Störungen auftreten, d.h. $\delta = 0$.

Im Folgenden soll zuerst ein für den Reglerentwurf geeignetes Modell hergeleitet werden und dessen Systemverhalten analysiert werden. Anschließend wird in Abschnitt 4.3 die Stabilisierung des Modells um einen geeigneten Arbeitspunkt mit Hilfe verschiedener Regler betrachtet.

Im Folgenden sind Einheiten nicht weiter angegeben.

4.1 MATLAB und Simulink (ca. 2 Stunden)¹

Arbeiten Sie sich in MATLAB und Simulink ein. Je nach Ihrem Vorwissen können Sie die MATLAB Tutorials [1] oder die Dokumentationen zu MATLAB [2], Simulink [3] und die Control System Toolbox [4] nutzen. Während des Projektwettbewerbs werden Sie u.a. Fehler in Ihrem Code suchen müssen. Hierfür können die Hinweise im MATLAB **User's Guide** unter Programming Fundamentals > Programming Tips > Debugging hilfreich sein. In Simulink kann der **Scope** Block benutzt werden, um Fehler aufzuspüren. Weiterhin sind im **Anhang A** die für den Projektwettbewerb wichtigsten MATLAB und Simulink-Befehle aufgelistet. Wenn Sie einzelne Befehle oder Blöcke nicht kennen, machen Sie sich mit deren Funktion vertraut.

¹Die Zeitangaben sind als grobe Richtwerte zu verstehen und sollen in erster Linie als Anhaltspunkt für die Aufteilung der Zeit auf die Teilaufgaben dienen.

4.2 System und Analyse (ca. 3 Stunden)

Für die späteren Reglerentwürfe wird ein um einen geeigneten **Arbeitspunkt linearisiertes Modell** benötigt, welches im Folgenden hergeleitet werden soll.

1. Stellgrößenbeschränkung:

Wie bereits im vorherigen Kapitel beschrieben, ist die **maximale Drehung** der Wippe aus geometrischen Gründen auf den Bereich (1) beschränkt. Darüber hinaus sind auch die anderen Zustände des Systems beschränkt.

Bestimmen Sie die geometrische Beschränkungen für x und α_s , ggf. in Abhängigkeit von α_w . Überlegen Sie sich außerdem welche Werte $\dot{\alpha}_w$, \dot{x} und $\dot{\alpha}_s$ annehmen, falls x , α_s und α_w in einer der obigen Begrenzung ist. Begründen Sie.

Eine sinnvolle Beschränkung der Zustände ist bereits im Matlab/Simulink Template implementiert und sollte für die Wettbewerbsaufgabe verwendet werden.

2. Das Motormoment $M(P, \omega_M)$ geht linear in die Bewegungsgleichungen (4) ein, wohingegen der Systemeingang u nichtlinear. Anstatt die Systemgleichungen bezüglich u zu linearisieren, fassen wir das Motormoment M als neuen Systemeingang \tilde{u} auf, sodass der neue Systemeingang linear in die Systemgleichung eingeht und der zu entwerfende Regler das benötigte Motormoment \tilde{u} berechnet anstatt der relativen Leistung u . Um diesen Regler zu realisieren wird eine **Vorschrift benötigt, die für ein gegebenes Moment \tilde{u} die entsprechende Leistung u berechnet.** Der Vorteil ist, dass die Nichtlinearität der Motorkennlinie im linearen Reglerentwurf berücksichtigt wird.

Bestimmen Sie mit Hilfe der **Motorkennlinie aus Abbildung 4** und aus den **Gleichungen (6)-(9)** eine Vorschrift, die für ein gegebenes **Motormoment \tilde{u}** und **Motordrehgeschwindigkeit ω_M** die dazugehörige relative Leistung u bestimmt.

3. Im Folgendem wird eine zusätzliche Übersetzung zwischen Motor und Rad angenommen, sodass die Motordrehgeschwindigkeit ω_M gering ist. Aufgrund dieser Annahme findet man für alle Motormomente $M_M \in [-0.2, 0.2]$ eine eindeutige Leistung P . Zur einfacheren Implementierung sei dieser Zusammenhang gegeben durch (9), d.h.

$$M_M(P) = \text{sign}(P) \frac{\sqrt{|P|}}{9.434}.$$

Bestimmen Sie, wie bereits im vorherigen Teil, die inverse Vorschrift, um aus einem Gesamtmoment \tilde{u} die benötigte Leistung u in Prozent für einen Motor zu erhalten. Testen Sie Ihre Vorschrift in Simulink. Nutzen Sie ggf. Teile aus dem Matlab Template.

Die vereinfachte Motorkennlinie ist bereits im Matlab/Simulink Template implementiert.

Mit Hilfe dieser Umrechnung genügt es für den Reglerentwurf das System gegeben durch die Bewegungsgleichungen (4) mit Systemeingang $\tilde{u} = M$ zu betrachten. Damit reduziert sich das System für den Reglerentwurf auf den mechanischen Anteil.

4. Im nächsten Schritt sollen die Ruhelagen des Systems berechnet werden. Bestimmen Sie alle Ruhelagen \mathbf{q}_s des Systems, welches durch die Bewegungsgleichungen (4) gegeben ist, in Abhängigkeit von \tilde{u}_s .

5. Für den Zustandsvektor $\mathbf{z} = [\alpha_w \quad \dot{\alpha}_w \quad x \quad \dot{x} \quad \alpha_s \quad \dot{\alpha}_s]^T$ sollen die Bewegungsgleichungen (4) um einen stationären Arbeitspunkt \mathbf{z}_s und \tilde{u}_s linearisiert werden. Dazu soll eine Formel zur Linearisierung einer Differentialgleichung $\mathbf{0} = \mathbf{f}(\mathbf{z}, \dot{\mathbf{z}}, \tilde{u})$ hergeleitet werden. Approximieren Sie die rechte Seite der Differentialgleichung durch eine Taylor-Reihe bis zur ersten Ordnung. Leiten Sie daraus eine allgemeine Formel zur Linearisierung der Differentialgleichung $\mathbf{0} = \mathbf{f}(\mathbf{z}, \dot{\mathbf{z}}, \tilde{u})$ um einen allgemeinen stationären Arbeitspunkt \mathbf{z}_s , $\dot{\mathbf{z}}_s$ und \tilde{u}_s her.
6. Linearisieren Sie nun die Regelstrecke (4) für den Zustandsvektor $\mathbf{z} = [\alpha_w \quad \dot{\alpha}_w \quad x \quad \dot{x} \quad \alpha_s \quad \dot{\alpha}_s]^T$ um den stationären Arbeitspunkt $\mathbf{z}_s = \mathbf{0}$ mit den Zustandsabweichungen $\Delta \mathbf{z} = \mathbf{z} - \mathbf{z}_s$, dem Eingang $\Delta \tilde{u} = \tilde{u} - \tilde{u}_s$ und den Ausgängen $\Delta \mathbf{y} = \mathbf{y} - \mathbf{y}_s$ mit $\mathbf{y} = [y_1 \quad y_2]^T$. Schreiben Sie dazu die Bewegungsgleichungen (4) in die Form $\mathbf{0} = \mathbf{f}(\mathbf{z}, \dot{\mathbf{z}}, \tilde{u})$ und nutzen die Formel aus dem vorherigen Schritt. Geben Sie die linearisierte Regelstrecke in der Form

$$\begin{aligned}\dot{\Delta \mathbf{z}} &= A \Delta \mathbf{z} + b \Delta \tilde{u}, \\ \Delta \mathbf{y} &= C \Delta \mathbf{z}\end{aligned}\tag{14}$$

an. Ist eine Linearisierung um $\mathbf{z}_s = \mathbf{0}$ gerechtfertigt?

7. Untersuchen Sie das linearisierte Systems (14) auf Stabilität. Untersuchen Sie das System (14) auf Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit. Was lässt sich daraus für den Entwurf einer Zustandsrückführung und den Entwurf eines Beobachters schließen.
8. Um einen späteren Reglerentwurf durch loop-shaping zu ermöglichen, sollen im Folgenden vereinfachte Übertragungsfunktionen $G_{\Delta \tilde{u} \rightarrow \Delta y_1}$ und $G_{\Delta \tilde{u} \rightarrow \Delta z_5}$ berechnet werden. Nehmen Sie an, dass die Wippe in der Horizontalen fixiert ist. Aus den Bewegungsgleichungen (4) ergeben sich damit die vereinfachten Differentialgleichungen

$$m_s L_s^2 \dot{z}_6 - m_s L_s \dot{z}_4 \cos z_5 - m_s L_s g \sin z_5 - \tilde{u} = 0\tag{15}$$

$$\begin{aligned}\left(\frac{3}{2}m_r + m_s\right) \dot{z}_4 - m_s L_s \dot{z}_6 \cos z_5 + \dots \\ \dots + m_s L_s z_5^2 \sin z_5 + f_r g(m_r + m_s) z_4 = \frac{1}{r} \tilde{u}\end{aligned}\tag{16}$$

Ausgehend von Gleichung (15) und der Annahme, dass der Einfluss durch \dot{z}_4 zu vernachlässigen ist, bestimmen Sie die Übertragungsfunktion $G_{\Delta \tilde{u} \rightarrow \Delta z_5}$ (Linearisieren Sie gegebenenfalls). Ausgehend von Gleichung (16) und der Annahme, dass der Einfluss durch z_5 und \dot{z}_6 zu vernachlässigen ist, bestimmen Sie die Übertragungsfunktion $G_{\Delta \tilde{u} \rightarrow \Delta y_1}$ (Linearisieren Sie gegebenenfalls). Untersuchen Sie die Übertragungsfunktionen auf Stabilität.

Hinweis: Um Folgefehler zu vermeiden, benutzen Sie im folgenden die Systemmatrizen:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 9.84 & -0.33 & -6.90 & 0.08 & -10.85 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -115.14 & -0.01 & -0.28 & -0.83 & 108.56 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -770.27 & 1 \cdot 10^{-16} & 2 \cdot 10^{-15} & -5.55 & 792.07 & 0 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 0 \\ -42.95 \\ 0 \\ 429.59 \\ 0 \\ 2931.20 \end{bmatrix}$$

und die Übertragungsfunktionen

$$G_{\Delta\tilde{u} \rightarrow \Delta z_5} = \frac{55.55}{s^2 - 65.4}, \quad G_{\Delta\tilde{u} \rightarrow \Delta y_1} = \frac{27.97}{s^2 + 0.07s}.$$

4.3 Stabilisierung durch Zustandsrückführung (ca. 6 Stunden)

Wie in der Systemanalyse festgestellt, ist das System beobachtbar. Daher kann für die Stabilisierung ein Beobachter genutzt werden, um somit eine Zustandsrückführung anstelle einer Ausgangsrückführung zu ermöglichen. Mit diesem Ansatz, beschrieben im ERT-Handout „Beobachterentwurf“ und unter der Voraussetzung, dass das System sowohl beobachtbar als auch steuerbar ist, ist es möglich, die Pole des geschlossenen Kreises mit linearisierter Regelstrecke beliebig vorzugeben.

1. In einem ersten Schritt soll ein stabilisierende Zustandsrückführung für das linearisierte System (14) entworfen werden. Für die Berechnung der Zustandsrückführung $\Delta\tilde{u} = -\mathbf{k}^T \Delta\mathbf{z}$ durch Polvorgabe, wie aus der ERT Vorlesung bekannt, erfordert die Vorgabe der Pole des geschlossenen Regelkreises. Da sich eine geeignete Wahl der Pole häufig als schwierig herausstellt, soll hier die Zustandsrückführung $\Delta\tilde{u} = -\mathbf{k}^T \Delta\mathbf{z}$ als linear-quadratischer Regler (LQR) realisiert werden. Der Vorteil besteht darin, dass die Zustandsrückführung durch Lösen eines Optimierungsproblems berechnet wird. Dabei müssen sogenannte Gewichtungsmatrizen gewählt werden, anstatt der Pole des geschlossenen Kreises.

Informieren Sie sich über den LQ-Regler mit unendlichem Zeithorizont. Machen Sie sich vor allem klar, welche Auswirkungen die Wahl der Gewichtungsmatrizen auf das Verhalten des geschlossenen Regelkreises haben. Benutzen Sie nur Gewichtungsmatrizen deren Nichtdiagonalelemente gleich null sind und Diagonalelemente größer null, d.h.

$$Q = \begin{bmatrix} q_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & q_6 \end{bmatrix}, q_1, \dots, q_6 > 0$$

$$R > 0.$$

Testen Sie den Regler am linearisierten System für die Anfangsbedingungen $[-\frac{\pi}{6} \ 0 \ 0.2 \ 0 \ 0 \ 0]$ in Simulink. Gehen Sie davon aus, dass alle Zustände gemessen werden können. Werden die Stellgrößenbeschränkungen eingehalten? Ist der geschlossene Kreis asymptotisch stabil? Betrachten Sie die Position und die Drehung des Segways.

2. Schalten Sie Ihren Regler mit dem nichtlinearen System zusammen. Beachten Sie ggf. bei der Übertragung auf das nichtlineare Modell die Arbeitspunktverschiebung. Die Arbeitspunktverschiebung ist ausführlich im Kapitel „Lineare Regelung nichtlinearer Systeme“ im ERT-Handout „Erweiterte Regelkreisstrukturen“ beschrieben. Gehen Sie davon aus, dass alle Zustände gemessen werden können. Testen Sie verschiedene Anfangsbedingungen für $\alpha_w(0)$, $x(0)$ und $\alpha_s(0)$ (die restlichen Zustände sollten zu null gewählt werden). Variieren Sie die Regelparameter ggf. sodass das System stabilisiert wird und der geschlossene Kreis eine gute Performance zeigt.

Hinweis: Für den Wettbewerb wird die Anfangsbedingungen festgelegt zu $[-\frac{\pi}{6} \ 0 \ 0.5 \ 0 \ \alpha_s(0) \ 0]$, wobei $\alpha_s(0)$ von Ihnen festgelegt werden kann.

Hinweis: Für $\alpha_s(0) = 0$ sollten Sie ein inverse-response Verhalten in der Position beobachten. Nutzen Sie dieses Wissen um eine geeignete Anfangsbedingung für $\alpha_s(0)$ zu wählen.

3. Bisher wurde angenommen, dass alle Zustände gemessen werden können. Da nur die Ausgänge $y_1 = z_3$ und $y_2 = z_6$ gemessen werden, soll im Folgenden ein Beobachter entworfen werden.
Wiederholen Sie die Theorie zum Beobachterentwurf anhand des ERT-Handouts „Beobachterentwurf“ und entwerfen Sie einen Luenberger-Beobachter der Form

$$\dot{\Delta \hat{\mathbf{z}}} = F \Delta \hat{\mathbf{z}} + E_1 \Delta y_1 + E_2 \Delta y_2 + L \Delta \tilde{u}.$$

Wählen Sie die Matrizen F , E_1 , E_2 und L entsprechend so, dass die Pole der Beobachterfehlerdynamik reell und stabil sind.

4. Implementieren Sie Ihren Beobachter für die nichtlineare Strecke. Überlegen Sie sich welchen Wert für den Systemeingang $\Delta \tilde{u}$ der Beobachter verwenden soll (Stellgrößenbeschränkung!). Stabilisieren Sie zuerst die Strecke durch die Zustandsrückführung mit den Zuständen der Regelstrecke. Vergleichen Sie die beobachteten/geschätzten Zustände mit den Zuständen der Regelstrecke. Variieren Sie gegebenenfalls die Pole der Beobachterfehlerdynamik.
5. Verbinden Sie Ihre Zustandsrückführung mit Ihrem Beobachter. Kann der Regler die Strecke stabilisieren. Ggf. muss der Entwurf der Zustandsrückführung und des Beobachters mehrfach iteriert werden bis eine erfolgreiche Stabilisierung erreicht wird.
6. In der Wettbewerbsaufgabe soll das Segways einer Referenzposition $|x_{\text{sol}}(t)| < 0.15$ folgen. Dazu soll die Zustandsrückführung um einen Vorfilter erweitert werden. Leiten Sie eine Formel zur Berechnung des Vorfilters her. Überlegen Sie sich dabei, welchen Ausgang Sie für den Vorfilter verwenden müssen. Testen Sie Ihren Vorfilter am nichtlinearen System in Simulink. Ist eine bleibende Regelabweichung zu beobachten? Wie könnte diese weiter reduziert werden?

4.4 Stabilisierung durch loop-shaping (ca. 5 Stunden)

Im Folgenden soll untersucht, ob eine Stabilisierung der Strecke durch loop-shaping erreicht werden kann. Dazu sollen die Bode- und Nyquistdiagramme einzelner Übertragungsfunktionen mit Hilfe der Matlab-Befehle „bode“ und „nyquist“ betrachtet werden. Außerdem soll das MATLAB Design Tool *sisotool* verwendet werden. Das *sisotool* soll mit der graphischen Oberfläche die Auswertung des Regelkreisverhaltens vereinfachen. Nutzen Sie den Reiter „Compensator Editor“ um den Regler von Hand zu variieren. Der Reiter „Automated Tuning“ soll *nicht* benutzt werden, da ein manuelles Anpassen der Reglerparameter das Verständnis mehr fördert. Die Reglerstruktur in Abbildung 5 wird vorgeschlagen. Da α_s stabilisiert werden soll, allerdings $y_2 = \dot{\alpha}_s$ gemessen wird, wird der Systemausgang y_2 integriert. Der Regler soll in zwei Schritten entworfen werden, zuerst soll α_s durch K_{α_s} stabilisiert werden. Damit wird verhindert, dass das Segway umkippt. Anschließend folgt der Reglerentwurf von K_x , um das Segway in der Mitte der Wippen zu halten bzw. einer Referenzposition zu folgen. Die Reglerstruktur ist einer Kaskadenregelung nachempfunden.

4.4.1 Stabilisierung der Drehung des Segways

In diesem Abschnitt liegt der Fokus zunächst auf der Regelung von α_s , der Drehung des Segways. Wie bereits erwähnt kann α_s durch Integration von y_2 „gemessen“

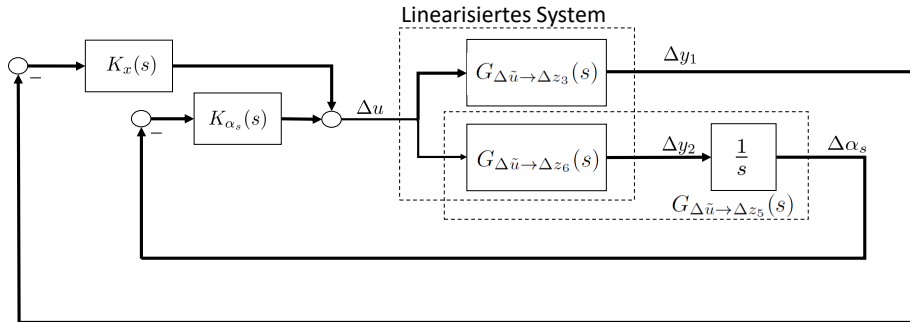


Abbildung 5: Vorgeschlagene Reglerstruktur.

werden (Anfangsbedingung $\alpha_s(0)$ sei bekannt), daher kann die Übertragungsfunktion

$$G_{\Delta \tilde{u} \rightarrow \Delta z_5} = \frac{55.55}{s^2 - 65.4} \quad (17)$$

für den Reglerentwurf verwendet werden.

1. Plotten Sie das Nyquist- und Bodediagramm der Übertragungsfunktion (17). Betrachten Sie einen Standardregelkreis mit Regelstrecke (17). Überlegen Sie sich, ob ein Regler, bestehend aus einer Verschaltung von P-, PI- und/oder lead-Elementen, den Standardregelkreis stabilisieren kann. Verwenden Sie dazu das Nyquist-Kriterium aus der Vorlesung.
2. Geben Sie im MATLAB Command Window *sisotool* ein. Machen Sie sich mit der Oberfläche vertraut. Gehen Sie im „CONTROL SYSTEM“ Tab auf den Reiter „Edit Architecture“ und wählen Sie eine angemessene Reglerstruktur. Importieren Sie dann die Übertragungsfunktion (17) aus dem Workspace. Fügen Sie für die grafische Analyse die Sprungantwort des geschlossenen Kreises (Referenzsignal auf Regelgröße) hinzu.
3. Nutzen Sie nun das *sisotool* um einen stabilisierenden Regler zu entwerfen. Dazu können im „Compensator Editor“ Elemente hinzugefügt werden. Variieren Sie die Reglerparameter im „Compensator Editor“ und im Bodediagramm des offenen Regelkreises. Beobachten Sie dabei wie sich die Sprungantwort ändert. Wählen Sie die Reglerparameter so, dass ein schnelles Einschwingen von α_s erreicht wird.
4. Implementieren Sie die Übertragungsfunktion (17) (als Zustandsraummodell) sowie Ihren Regler in Simulink. Testen Sie Ihren Regler für unterschiedliche Anfangsbedingungen. Achten Sie auf die Stellgrößenbeschränkung.

4.4.2 Regelung der Position des Segways

Für die Regelung der Position des Segways, nutzen Sie im Folgenden das lineare Modell

$$G_{\Delta \tilde{u} \rightarrow \Delta z_3} = \frac{27.97}{s^2 + 0.07s}. \quad (18)$$

Im Vergleich zur Regelung der Drehung des Segway ist das Ziel nun das Segways ohne bleibende Regelabweichung in der Mitte der Wippe zu halten und einer Referenzposition zu folgen.

1. Untersuchen Sie den Standardregelkreis mit Regelstrecke (18) und Regler $K(s) = 1$ auf Stabilität. Ist der geschlossene Kreis asymptotisch stabil? Lässt sich die Übertragungsfunktion des geschlossenen Kreises durch einen P-, PI-Regler oder lead-Element stabilisieren bzw. bleibt der geschlossene Kreis mit einem zusätzlichem P-, PI-Regler oder lead-Element stabil?
2. Besitzt der geschlossene Regelkreis eine bleibende Regelabweichung für Sprünge im Referenzsignal? Besitzt der geschlossene Regelkreis eine bleibende Regelabweichung für konstante Störungen in der Stellgröße? Was kann dagegen vorgenommen werden?
3. Nutzen Sie das *sisotool* um einen stabilisierenden Regler zu entwerfen und testen Sie den Regler in Simulink für die Übertragungsfunktion (18). Wird die Stellgrößenbeschränkung eingehalten?

4.4.3 Kombination beider Regler

In diesem Kapitel sollen die beiden zuvor entworfenen Regler am (vereinfachten) linearen Gesamtsystem, welches durch die Übertragungsfunktionen (17) und (18) gegeben ist, getestet werden.

1. Verschalten Sie die Regler wie in Abbildung 5. Kann der Regler die Regelaufgabe lösen? Falls nicht, überlegen Sie sich warum?

5 Wettbewerbsaufgabe (ca. 9 Stunden)

Das Ziel der Wettbewerbsaufgabe ist es einen Regler so zu entwerfen, dass das Segway trotz Störung δ nicht umkippt und möglichst genau einer Referenzposition folgt. Als Maß für die Regelgüte wird der quadratische Regelfehler

$$J = \int_0^{T_{\text{end}}} (z_3(t) - x_{\text{soll}}(t))^2 dt$$

verwendet. Für T_{end} und die Anfangsbedingungen des Systems werden

$$T_{\text{end}} = 60 \text{ s}$$
$$z(0) = \left[-\frac{\pi}{6} \quad 0 \quad 0.5 \quad 0 \quad \alpha_s(0) \quad 0 \right]^T$$

gewählt, wobei $\alpha_s(0)$ von Ihnen gewählt werden soll. Als Simulationsmodell für den Roboter wird das Modell aus dem Matlab/Simulink Template verwendet. Für die Auswertung werden sechs Simulationen mit variierenden Störungen und verschiedenen Referenzposition durchgeführt. Für alle Gruppen werden die gleichen Werte verwendet. Die Regelfehler der sechs Simulationen werden gemittelt. Die Gruppe mit dem kleinsten Mittelwert ist der Sieger des Projektwettbewerbes. Der Regler kann als Eingänge auf folgende Signale zugreifen:

- Zeit t
- gemessene Position des Segways auf der Wippe x
- gemessene Drehgeschwindigkeit des Segways $\dot{\alpha}_s$
- Referenzposition $x_{\text{soll}}(t)$ mit $|x_{\text{soll}}(t)| \leq 0,15$ und $x_{\text{soll}}(0) = 0$.

1. Laden Sie sich für die Wettbewerbsaufgabe das MATLAB-Template herunter. Testen Sie verschiedene Regelstrategien und -verfahren aus, bis Sie einen zufriedenstellenden Regelfehler erreicht haben. Passen Sie hierfür die m-Datei **reglerInit.m** sowie den Simulink Subblock *Regler* entsprechend an. Verändern Sie *nur* den Subblock *Regler* sowie die m-Datei **reglerInit.m**. Geben Sie zusätzlich in der **reglerInit.m** Datei die Anfangsbedingung für α_s als Variable „alpha_sStart“ an. Verwenden Sie nur Funktionen oder Blöcke, die in MATLAB und Simulink enthalten sind.

Der Sieger des Projektwettbewerbes wird durch Simulation mit der MATLAB Version R2018a ermittelt. Hierzu wird Ihr Regler-Block in das Simulink-Template eingefügt. Zur Simulation wird der fixed-step ode3 Solver mit einer Schrittweite von 0.0001 verwendet. Beachten Sie, dass die Rechenzeit für eine Simulation mit Initialisierung bei der Ermittlung des Siegers maximal 5 Minuten betragen darf.

Für die Gruppe mit dem kleinsten Regelfehler gibt es einen kleinen Preis zu gewinnen.

6 Bericht (ca. 8 Stunden) und Abgabe

Die Abgabe muss bis zum *23. Juni 2019, 23:59 Uhr* über das ILIAS Modul, Übung *Wettbewerbsaufgabe*, erfolgen.

Abzugeben sind:

- Die Simulink-Datei mit Ihrem Subblock *Regler*,
- Ihre m-Datei `reglerInit.m` sowie
- ein Bericht als PDF-Datei:
 - Umfang: 3-4 A4-Seiten (die zu verwendende Latex Vorlage ist im ILIAS Modul zu finden),
 - Matrikelnummern und Studiengänge aller Gruppenmitglieder,
 - Beschreibung der Lösung zu den Aufgaben aus Abschnitt 4.3 bis 4.4 und insbesondere der Wettbewerbsaufgabe. Diese Beschreibung sollte selbsterklärend sein, d.h. auch ohne Kenntnis der exakten Aufgabenstellung verständlich. Gehen Sie dabei insbesondere auf für Sie wichtige Aspekte bei den vorbereitenden Aufgaben und der Wettbewerbsaufgabe ein. Beschreiben Sie dabei nicht Ihr Vorgehen, sondern diskutieren Sie Ihre *Lösungsansätze und die Ergebnisse*.

Zum Bestehen des Projektwettbewerbes müssen die Aufgaben ausführlich bearbeitet werden. Weiterhin muss der Bericht wissenschaftlichen Standards genügen. Alle Teilnehmer müssen an den abschließenden Evaluationsgesprächen und der Abschlussveranstaltung anwesend sein. Während des Gesprächs muss ersichtlich sein, dass *alle* Mitglieder der jeweiligen Gruppe die Aufgabe bearbeitet haben.

Literatur

- [1] Interaktive Tutorials zu MATLAB und Simulink:
http://www.mathworks.de/academia/student_center/tutorials/index.html
 (Letzter Zugriff: 02.05.2017).
- [2] MATLAB Dokumentation:
<http://de.mathworks.com/help/matlab/index.html>
 (Letzter Zugriff: 02.05.2017).
- [3] Simulink Dokumentation:
<http://de.mathworks.com/help/simulink/index.html>
 (Letzter Zugriff: 02.05.2017).
- [4] Control System Toolbox Dokumentation:
<http://de.mathworks.com/help/control/index.html>
 (Letzter Zugriff: 02.05.2017).

A MATLAB und Simulink-Befehle

Die für den Projektwettbewerb wichtigsten Matlab-Befehle sind in Tabelle 2 und die Simulink-Befehle in Tabelle 3 aufgelistet.

Tabelle 2: Wichtige MATLAB Funktionen.

Kategorie	Name	Kategorie	Name
Allgemein	doc	Diagramme	figure
	disp		legend
	help		plot
	sprintf		subplot
Analyse	bode		xlabel
	connect		ylabel
	ctrb	Entwurf	acker
	damp		place
	eig		sisotool
	sim		lqr
	ss	Mathematik	"mldivide (\)"
	ssdata		mrdivide (/)
	sumblk		rand
	tf		round
	nyquist		

Tabelle 3: Wichtige Simulink Blöcke.

Name	Bibliothek
Integrator	Continuous
State-Space	
Transfer Fcn	
Saturation	Discontinuities
Add	Math operations
Bias	
Gain	
Sum	
In1	Ports & Subsystems
Out1	
Subsystem	
Rate Transition	Signal Attributes
Demux	Signal Routing
Manual Switch	
Mux	
Switch	
Vector Concatenate	
Scope	Sinks
Terminator	
ToWorkspace	
Band-Limited White Noise	Sources
Chirp Signal	
Clock	
Constant	
From Workspace	
Fcn	User-Defined Functions

B Herleitung der Bewegungsgleichungen

B.1 Kinematik

Im Folgenden seien alle Positionsvektoren und Geschwindigkeitsvektoren bezüglich des Koordinatensystems W , welches körperfest mit der Wippe dreht, dargestellt. Für die Bestimmung der Lagrangschen Funktion

$$L = T - V$$

werden die kinetischen Energien T und potentiellen Energien V aller drei Körper, Wippe, Rad und Segway, benötigt. Dazu stellen wir die Positionsvektoren

$$\mathbf{r}_{O_I O_r} = \begin{bmatrix} x \\ r \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{r}_{O_I S} = \begin{bmatrix} x - L_s \sin(\alpha_s - \alpha_w) \\ r + L_s \cos(\alpha_s - \alpha_w) \\ 0 \end{bmatrix}$$

und die Drehgeschwindigkeitsvektoren

$$\boldsymbol{\omega}_{IW} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\alpha}_w \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\omega}_{IS} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\alpha}_s \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\omega}_{IRad} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\alpha}_w - \frac{\dot{x}}{r} \end{bmatrix}$$

auf. Mit Hilfe der Eulerschen Differentiationsregel

$$\frac{d}{dt} \mathbf{r} = \frac{d'}{d't} \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega}_{KK'} \times \mathbf{r},$$

wobei $\frac{d}{dt}$ die Ableitung bezüglich eines Koordinatensystems K , $\frac{d'}{d't}$ die Ableitung bezüglich eines Koordinatensystems K' und \times dem Kreuzprodukt zweier Vektoren entspricht, erhält man die (absoluten) Geschwindigkeiten der Punkte O_r, S und P

$$\mathbf{v}_{O_r} = \begin{bmatrix} \dot{x} - r\dot{\alpha}_w \\ x\dot{\alpha}_w \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_S = \begin{bmatrix} \dot{x} - r\dot{\alpha}_w - L_s\dot{\alpha}_s \cos(\alpha_s - \alpha_w) \\ x\dot{\alpha}_w - L_s\dot{\alpha}_s \sin(\alpha_s - \alpha_w) \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_{O_r} = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ x\dot{\alpha}_w \\ 0 \end{bmatrix}$$

wobei P der Angriffspunkt der Reibung F_r ist.

B.2 Kinetik

Mit Hilfe der zuvor berechneten Lage- und Geschwindigkeitsvektoren können nun die potentiellen und kinetischen Energien der einzelnen Körper berechnet werden. Da sich der Schwerpunkt der Wippe nicht bewegt, ist die kinetische Energie der Wippe rein rotatorisch

$$T_w = \frac{1}{2} J_w \dot{\alpha}_w^2.$$

Die potentielle Energie ergibt sich aus der Verdrehung der Feder

$$V_w = \frac{1}{2} k_w \alpha_w^2.$$

Da das Segways als Massepunkt modelliert wird, ist die kinetische Energie des Segways rein translatorisch

$$T_S = \frac{1}{2} m_s \mathbf{v}_s^T \mathbf{v}_s = \frac{1}{2} m_s [\dot{x}^2 + (r^2 + x^2) \dot{\alpha}_w^2 + L_s^2 \dot{\alpha}_s^2 - 2r\dot{x}\dot{\alpha}_w - 2L_s\dot{x}\dot{\alpha}_s \cos(\alpha_s - \alpha_w) + 2L_s\dot{\alpha}_w\dot{\alpha}_s (r \cos(\alpha_s - \alpha_w) - x \sin(\alpha_s - \alpha_w))].$$

Die kinetische Energie der Räder enthält einen rotatorischen und translatorischen Anteil

$$\begin{aligned} T_r &= \frac{1}{2} m_r \mathbf{v}_{O_r}^T \mathbf{v}_{O_r} + \frac{1}{2} J_r \boldsymbol{\omega}_{IRad}^T \boldsymbol{\omega}_{IRad} \\ &= \frac{1}{2} m_r \left(\frac{3}{2} \dot{x}^2 - 3r\dot{x}\dot{\alpha}_w + (x^2 + \frac{3}{2}r^2)\dot{\alpha}_w^2 \right). \end{aligned}$$

Die potentielle Energie der Räder und des Segways ergeben sich durch die Schwerkraft zu

$$\begin{aligned} V_r &= -m_r \mathbf{r}_{O_I O_r}^T \begin{bmatrix} -g \cos \alpha_w \\ -g \sin \alpha_w \\ 0 \end{bmatrix} = m_r g (x \sin \alpha_w + r \cos \alpha_w) \\ V_S &= -m_S \mathbf{r}_{O_I S}^T \begin{bmatrix} -g \cos \alpha_w \\ -g \sin \alpha_w \\ 0 \end{bmatrix} = m_S g (x \sin \alpha_w + r \cos \alpha_w + L_S \cos \alpha_s). \end{aligned}$$

Damit ergibt sich die Lagrangsche Funktion zu

$$L = T_w + T_S + T_r - V_w - V_S - V_r. \quad (19)$$

Die verallgemeinerten Nichtpotentialkräfte für M , $d_w \dot{\alpha}_w$ und F_r können auf verschiedenen Art und Weisen aufgestellt werden, zum Beispiel mit Hilfe der Jacobimatrizen, was im Folgenden für das Motormoment M , das am Rad angreift, beispielhaft demonstriert wird. Die Drehgeschwindigkeit des Rades ist gegeben durch

$$\boldsymbol{\omega}_{IRad} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\alpha}_w - \frac{\dot{x}}{r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -\frac{1}{r} & 0 \end{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} =: J_{\omega_{Rad}} \dot{\mathbf{q}}.$$

Mit Hilfe der Jacobimatrix $J_{\omega_{Rad}}$ ergibt sich die verallgemeinerte Nichtpotentialkraft von M , die am Rad angreift, zu

$$\mathbf{Q}_{M,Rad} = J_{\omega_{Rad}}^T \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -M \\ \frac{1}{r}M \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Analog erhalten wir

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_{M,Seg} &= [0 \quad 0 \quad M]^T, \\ \mathbf{Q}_D &= [-d_w \dot{\alpha}_w \quad 0 \quad 0]^T, \\ \mathbf{Q}_{F_r} &= [0 \quad -F_r \quad 0]^T, \\ \mathbf{Q} &= \mathbf{Q}_{M,Rad} + \mathbf{Q}_{M,Seg} + \mathbf{Q}_D + \mathbf{Q}_{F_r}. \end{aligned}$$

Durch Einsetzen der Lagrangschen Funktion (19) und der verallgemeinerte Nichtpotentialkraft \mathbf{Q} in die Lagrangschen Gleichungen 2.ter Art

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i, \quad i = 1, 2, 3$$

erhalten wir die Bewegungsgleichungen aus Kapitel 3.