

DOI:10.11992/tis.201411030

网络出版地址: <http://www.cnki.net/kcms/detail/23.1538.tp.20150930.1556.008.html>

# 多智能体网络系统的能控性代数条件

董洁, 纪志坚, 王晓晓

(青岛大学 自动化工程学院, 山东 青岛 266071)

**摘要:** 能控性是多智能体系统研究的核心问题, 主要包括结构可控性和精准可控性。对多智能体系统的模型和能控性代数条件进行了总结。在相对协议和绝对协议条件下, 运用图论和矩阵论的知识系统分析了多智能体系统能控性的代数条件。按照同质多智能体到异质多智能体的顺序, 对现有的多智能体系统模型和代数条件进行了梳理, 并在已有结论的基础上对多智能体系统能控性的代数条件进行了改善, 进一步提出了新的代数条件。多智能体能控性代数条件的改进大大简化了能控性的计算量。

**关键词:** 多智能体系统; 结构可控性; 精准可控性; 相对协议; 绝对协议; 代数条件; 图论; 矩阵论

**中图分类号:** TP273 **文献标志码:** A **文章编号:** 1673-4785(2015)05-0747-08

中文引用格式: 董洁, 纪志坚, 王晓晓. 多智能体网络系统的能控性代数条件[J]. 智能系统学报, 2015, 10(5): 747-754.

英文引用格式: DONG Jie, JI Zhijian, WANG Xiaoxiao. Algebraic conditions for the controllability of multi-agent systems[J].

CAAI Transactions on Intelligent Systems, 2015, 10(5): 747-754.

## Algebraic conditions for the controllability of multi-agent systems

DONG Jie, JI Zhijian, WANG Xiaoxiao

(School of Automation Engineering, Qingdao University, Qingdao 266071, China)

**Abstract:** Controllability is a key issue in the study of multi-agent systems, especially structural controllability and exact controllability. This paper summarizes the system model and the algebraic conditions for controllability of multi-agent systems. Based on relative and absolute protocols, the algebraic conditions are analyzed systematically for multi-agent system controllability, using graph theory and matrix theory. Going from homogeneous dynamical multi-agent systems to heterogeneous dynamical multi-agent systems, the existing models and algebraic conditions for multi-agent systems are sorted out. The algebraic conditions for controllability of multi-agent systems are improved, and some new algebraic conditions are proposed. The improvement of algebraic controllability conditions for multi-agent system simplifies the calculation greatly.

**Keywords:** multi-agent system; structure controllability; exact controllability; relative protocol; absolute protocol; algebraic condition; graph theory; matrix theory

自然界中普遍存在着群体行为, 例如鸟的成群结队、鱼和昆虫协作捕食等, 都显示出一些群体特质: 相对简单的生物个体可以通过群体共同完成更为复杂的任务。自然界中的群体行为使得它们能够很好地生存繁衍下去, 同时也给人类很大的启发: 与单个智能体相比, 多智能体系统的合作可以大大提高系统的性能, 完成更复杂的任务。

多智能体技术是近年来新兴的一门控制学科, 它具有自主性、协调性、自组织能力和推理能力等特点。采用多智能体系统解决问题在鲁棒性、可靠性和对未知环境的适应性等方面也有很多的优势<sup>[1]</sup>。因此, 多智能体系统的研究已经成为控制领域的一个热点<sup>[2-4]</sup>, 并且已经广泛的应用在各个领域, 如智能交通、机器人的编队控制, 甚至是军事用途<sup>[5-11]</sup>。

智能体系统研究的核心问题是能控性问题, 能控性是现代控制理论的一个基本概念, 由卡尔曼

收稿日期: 2014-11-25. 网络出版日期: 2015-09-30.

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(61374062); 山东省杰出青年科学基金资助项目(JQ201419).

通信作者: 纪志坚. E-mail: jizhijian@pku.org.cn.

(Klaman) 在 20 世纪 60 年代首次提出<sup>[12]</sup>。多智能体系统的能控性是指基于系统内部智能体之间的相互连接关系,通过对多智能体内部的领航者施加外部控制输入,使得跟随者由任意给定的初始状态到达期望的最终状态。能控性能使每个智能体的状态达到人们预定的结果,使系统发挥最大的作用,因此多智能体系统能控性的研究具有重要的意义。Tanner 在 2004 年最早提出了多智能体网络系统的能控性概念,叙述了单输入线性系统领航-跟随者的经典可控性,即领航者接受外部控制信号,对跟随者发布指令,从而影响跟随者的运动。但是这种结构的引入也带来了新的问题,如领航者的选取,领航者的丢失问题等<sup>[13]</sup>。文献[14]提出了控制协议,介绍了多智能体网络系统能控的代数条件和图论条件。近年来,越来越多的研究者开始从图论的角度研究多智能体的能控性<sup>[15-16]</sup>,拓展了多智能体系统能控性的理论研究范围。多智能体网络系统的能控性不仅在理论方面具有重要研究价值,同时也具有重要的实践意义,例如可以借助多智能体网络研究编队控制,即通过调整领航者的行为来驱动跟随者达到理想的位置<sup>[17]</sup>。很多现实中的网络,如社交网络、电网、食物网和神经网络等都存在内在节点间的动态关系,但是文献[13-18]没有考虑到节点之间具有内在动力的情况。因此,从理论和实践的角度来看,异构动态多智能体网络系统的可控性研究具有极其重要的意义和价值<sup>[19-20]</sup>。Cai 基于高阶异质多智能体系统的分析建立了复杂异质多智能体系统模型,并且提出了系统不能控的 2 个充分条件<sup>[21-28]</sup>。Ji 等研究了具有状态时间延迟和切换拓扑的多智能体系统的能控性<sup>[22-24]</sup>。Liu 研究了含多个领航者和时滞情况下切换离散时间多智能体系统的能控性,提出系统的能控性仅仅是由领航者与跟随者之间的交互信息所决定的<sup>[25]</sup>。在绝对协议下,文献[26-27]研究了在广播控制信号下多智能体系统的能控性。与领航者-跟随者结构相比,广播信号在现实生活中应用更为广泛。文献[28]研究了一致性协议下单智能体的能控性。本文基于相对协议和绝对协议,总结了多智能体网络系统的模型和能控性的代数条件。阐述了图论的基本知识,叙述了在相对协议下,多智能体网络系统的模型和能控性的代数条件。总结了在绝对协议下多智能体网络系统的模型和能控性的代数条件,指出了该领域新的研究方向。

## 1 图论的准备知识

本文使用的通信结构均为无向图,关于无向图

更全面的内容见文献[29]。

一个无向图  $G = (V, E)$  包括一个顶点集  $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  和一个边集  $E = \{(v_i, v_j) \mid v_i, v_j \in V\}$ , 边是指在图  $G$  里不同的无序节点对。如果节点  $v_i, v_j \in V$ , 并且互为邻居, 那么它们之间的关系可以用  $v_i \sim v_j$  表示。令  $N_i$  表示节点  $i$  的邻居集,  $N_i = \{j \mid v_i \sim v_j\}$ 。路径  $v_{i_0} v_{i_1} \dots v_{i_s}$  是一个  $v_{i_{k-1}} \sim v_{i_k}, k = 1, 2, \dots, s$  的有限序列。如果在任意 2 个不同的节点对之间都有路径, 那么就说  $G$  是连通的。完备图是指图中任意 2 个节点都是相邻的关系。图  $G = (V, E)$  是无向图, 其中  $v_i \in V$ , 与节点  $v_i$  邻接的节点数就是  $v_i$  的度数。不含圈和重边的无向图称为简单图。各顶点的度均相同的无向简单图称为正则图。

图  $G$  的度矩阵  $D(G)$  是一个对称矩阵, 它的对角线元素就是节点的度数。图  $G$  的邻接矩阵  $A(G)$  表达了图  $G$  中各顶点之间的相邻关系, 任意一个无向图都可以由邻接矩阵  $A(G)$  来表示, 它是一个只含有元素 0 和元素 1 的对称矩阵, 如果节点  $v_i$  和  $v_j$  是相邻的, 则  $a_{ij}$  是 1, 否则就是 0。图的拉普拉斯矩阵  $L(G)$  是一个实对称矩阵, 它定义为度矩阵与邻接矩阵之差:  $L(G) = D(G) - A(G)$ , 经过计算可得:

$$L(G) = \begin{cases} d_i, & i = j \\ -1, & i \neq j \text{ and } \exists \text{ edge}(v_i, v_j) \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

## 2 相对协议下多智能体网络系统的可控性

多智能体网络系统的相对协议是  $u_i = \sum_{j \in N_i} (x_j - x_i)$ 。本节基于相对协议, 总结了多智能体网络系统能控性的模型和代数条件, 同时提出了一些新的代数条件。

### 2.1 同质多智能体网络系统的能控性

将按照从一阶同质多智能体网络系统到高阶同质多智能体网络系统的方式, 对能控性代数条件进行总结。

#### 2.1.1 一阶同质多智能体网络系统的能控性

采用多智能体系统如下:

$$\dot{x}_i = \sum_{j \in N_i} w_{ij} (x_j - x_i), i = 1, 2, \dots, n, n+1, \dots, l \quad (1)$$

式中:  $x_i$  代表智能体  $i$  的状态,  $w_{ij}$  代表  $G$  的边权重,  $n$  和  $l$  分别是领航者和跟随者的数目。假设图  $G$  代表该系统的通信拓扑图, 其相应的拉普拉斯矩阵为  $L$ 。定义一个含有  $n$  个跟随者,  $l$  个领航者的多智能体,

令  $\mathbf{x}_f = [x_1 \ x_2 \ \cdots \ x_n]^T$ ,  $\mathbf{x}_l = [x_{n+1} \ x_{n+2} \ \cdots \ x_{n+l}]^T$ , 系统(1)可以写成如下形式:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}_f \\ \dot{\mathbf{x}}_l \end{bmatrix} = -\mathbf{L}\mathbf{x} = -\begin{bmatrix} \mathbf{L}_{ff} & \mathbf{L}_{fl} \\ \mathbf{L}_{lf} & \mathbf{L}_{ll} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_f \\ \mathbf{x}_l \end{bmatrix} \quad (2)$$

式中:  $\mathbf{x}_f$  和  $\mathbf{x}_l$  分别代表跟随者和领航者状态的迭加向量,  $\mathbf{L}_{ff} \in \mathbf{R}^{n \times n}$  和  $\mathbf{L}_{ll} \in \mathbf{R}^{l \times l}$  分别对应于系统跟随者和领航者的编号,  $\mathbf{L}_{ly}$  表示从跟随者到领航者的通信连接关系,  $\mathbf{L}_{lf}$  表示从领航者到跟随者的通信连接关系。只要系统中的领航者能驱动跟随者到达期望的状态, 那么系统就是可控的。本文研究的能控性问题是领航者对跟随者的控制能力, 即系统(3)的能控性问题。

$$\dot{\mathbf{x}}_f = -\mathbf{L}_{ff}\mathbf{x}_f - \mathbf{L}_{fl}\mathbf{x}_l \quad (3)$$

如果存在输入信号  $\mathbf{u}(t)$ , 能使系统在规定的时间内从任意的初始状态  $\mathbf{x}_f(0)$  被驱使到理想状态  $\mathbf{x}_f(T)$ , 则系统(3)是能控的。

**定义 1**<sup>[30]</sup> 如果将矩阵  $\mathbf{L}$  划分成式(2)的形式, 最后  $l$  个智能体为领航者, 当且仅当  $(\mathbf{L}_{ff}, \mathbf{L}_{fl})$  可控, 则系统就是能控的。

**引理 1**<sup>[31]</sup> 给定系统  $\dot{\mathbf{x}}_f = -\mathbf{L}_{ff}\mathbf{x}_f - \mathbf{L}_{fl}\mathbf{x}_l$ , 可以得出以下的说法是等价的:

- 1) 系统是能控的;
- 2) 能控性矩阵

$$\begin{bmatrix} -\mathbf{L}_{fl} & \mathbf{L}_{ff}\mathbf{L}_{fl} & -\mathbf{L}_{ff}^2\mathbf{L}_{fl} & \cdots & (-1)^n\mathbf{L}_{ff}^{n-1}\mathbf{L}_{fl} \end{bmatrix}$$

是行满秩的;

3) 对于系统所有的特征值  $\lambda \in \mathbf{R}$ , 矩阵对  $[\lambda\mathbf{I} - \mathbf{L}_{ff} \quad \mathbf{L}_{fl}]$  都是行满秩的, 也就是说如果  $\mathbf{v}^T\mathbf{L}_{ff} = \lambda\mathbf{v}^T$  则  $\mathbf{v}^T\mathbf{L}_{fl} \neq 0$ , 其中  $\mathbf{v}$  是矩阵  $\mathbf{L}_{ff}$  的特征值  $\lambda$  所对应的非零的左特征向量。

**注释 1** 学术界已经广泛研究了一阶动力学多智能体网络系统的模型, 例如文献[13-18]。而系统(1)是一般的加权系统模型。

**命题 1** 系统(3)是能控的, 也就是  $[\mathbf{L}_{ff} \quad \mathbf{L}_{fl}]$  是可控的, 那么当且仅当矩阵  $\mathbf{L}$  和矩阵  $\mathbf{L}_{ff}$  没有相同的特征值。

**定理 1** 系统(3)是可控的, 即矩阵对  $[\mathbf{L}_{ff} \quad \mathbf{L}_{fl}]$  是可控的, 那么矩阵  $\mathbf{L}$  不存在与领航者节点所对应向量元素全为 0 的左特征向量。

**证明** 根据引理 1, 如果矩阵  $\mathbf{L}_{ff}$  中存在与特征值  $\lambda$  所对应的左特征向量  $\mathbf{v}_f \in \mathbf{C}^n$ , 使得  $\mathbf{v}_f^T\mathbf{L}_{fl} = 0$  成立, 那么矩阵对  $[\mathbf{L}_{ff} \quad \mathbf{L}_{fl}]$  是不可控的。构造一个向量  $\mathbf{v} \in \mathbf{C}^{n+l}$ , 令  $\mathbf{v}^T = [\mathbf{v}_f^T \ 0]$ , 那么下式成立:

$$\mathbf{v}^T\mathbf{L} = [\mathbf{v}_f^T \ 0] \begin{bmatrix} \mathbf{L}_{ff} & \mathbf{L}_{fl} \\ \mathbf{L}_{lf} & \mathbf{L}_{ll} \end{bmatrix} = [\mathbf{v}_f^T\mathbf{L}_{ff} \quad \mathbf{v}_f^T\mathbf{L}_{fl}]$$

则有

$$[\mathbf{v}_f^T\mathbf{L}_{ff} \quad \mathbf{v}_f^T\mathbf{L}_{fl}] = [\lambda\mathbf{v}_f^T \ 0] = \lambda\mathbf{v}^T$$

所以  $\mathbf{v}^T\mathbf{L} = \lambda\mathbf{v}^T$ 。这说明向量  $\mathbf{v}$  是  $\mathbf{L}$  的左特征向量, 并且对应于所有领航者的最后  $l$  项全为零元素。因此定理 1 成立。

## 2.1.2 高阶同质多智能体网络系统的能控性

采用文献[21,32]的多智能体网络系统模型:

$$\dot{\mathbf{x}}_i = \mathbf{F} \sum_{j \in N_i} w_{ij}(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i) + \mathbf{B}\mathbf{u}_i, i = 1, 2, \dots, n \quad (4)$$

式中:  $\mathbf{x}_i \in \mathbf{R}^d$ ,  $\mathbf{F} \in \mathbf{R}^{d \times d}$ ,  $w_{ij} \in \mathbf{R}$ ,  $\mathbf{B} \in \mathbf{R}^{d \times m}$ ,  $\mathbf{u}_i \in \mathbf{R}^m$ ;  $\mathbf{x}_i$  表示智能体  $i$  的状态;  $w_{ij}$  表示图  $G$  的边权重, 代表了节点  $i$  和  $j$  之间的连接强度;  $\mathbf{B}$  是控制输入矩阵。如果输入  $\mathbf{u}_i = 0$ , 那么智能体  $i$  就是跟随者, 反之就是领航者。定义  $\mathbf{x} = [\mathbf{x}_1^T \ \mathbf{x}_2^T \ \cdots \ \mathbf{x}_n^T]^T \in \mathbf{R}^{d \times n}$ ,  $\mathbf{u} = [\mathbf{u}_1^T \ \mathbf{u}_2^T \ \cdots \ \mathbf{u}_n^T]^T \in \mathbf{R}^{m \times n}$ , 则系统(4)就可以写成

$$\dot{\mathbf{x}} = (-\mathbf{L} \otimes \mathbf{F})\mathbf{x} + (\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})\mathbf{u} \quad (5)$$

假设前  $q$  个智能体是领航者, 那么

$$\mathbf{A} = \text{diag}(\underbrace{1, \dots, 1}_q, \underbrace{0, \dots, 0}_{n-q})$$

**注释 2** 文献[21,32]的状态方程为  $\dot{\mathbf{X}} = -\mathbf{F}\mathbf{X}\mathbf{L}^T + \mathbf{B}\mathbf{U}$ 。为了使分析一致, 将  $\dot{\mathbf{X}} = -\mathbf{F}\mathbf{X}\mathbf{L}^T + \mathbf{B}\mathbf{U}$  进行拉直处理转化成式(5)进行分析。

**引理 2** 实矩阵  $\mathbf{A}$ 、 $\mathbf{B}$ 、 $\mathbf{C}$ 、 $\mathbf{D}$  的维数兼容, 那么有以下结论<sup>[33]</sup>:

$$1) (\mathbf{A} + \mathbf{B}) \otimes \mathbf{C} = \mathbf{A} \otimes \mathbf{C} + \mathbf{B} \otimes \mathbf{C}$$

$$2) (\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})(\mathbf{C} \otimes \mathbf{D}) = (\mathbf{A}\mathbf{C}) \otimes (\mathbf{B}\mathbf{D})$$

$$3) (\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})^T = \mathbf{A}^T \otimes \mathbf{B}^T$$

4)  $\mathbf{A}$  为  $m \times m$  的矩阵, 它的特征值  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$  所对应的左特征向量分别是  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ ,  $\mathbf{B}$  为  $n \times n$  的矩阵, 它的特征值  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$  所对应的左特征向量分别是  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ 。则  $\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}$  的特征值是  $\lambda_i\mu_j (i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n)$ , 对应的左特征向量是  $\alpha_i \otimes \beta_j$ 。

**定理 2**<sup>[21]</sup> 要使系统(5)能控, 那么以下 2 个条件必须同时成立。

1)  $[\mathbf{F} \quad \mathbf{B}]$  是一个能控矩阵对;

2) 矩阵  $\mathbf{L}$  不存在前  $q$  项全是零元素的左特征向量。

**证明** 根据 PBH 判据, 如果系统(5)是不可控的, 那么矩阵  $\mathbf{L} \otimes \mathbf{F}$  中存在与特征值  $\lambda$  相对应的左特征值向量  $\mathbf{v}$ , 使得  $\mathbf{v}^T(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}) = 0$  成立。假设矩阵  $\mathbf{L}$  和  $\mathbf{F}$  对应的左特征向量分别是  $\alpha \in \mathbf{C}^m$  和  $\beta \in \mathbf{C}^d$ , 由引理 2 可知,  $\mathbf{v} = \alpha \otimes \beta$  和  $(\alpha^T \otimes \beta^T)(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}) = 0$  同时成立, 所以得到



$$(\alpha^T A) \otimes (\beta^T B) = 0 \quad (6)$$

要使式(6)成立,则有以下2种情况:

1) 如果  $\alpha^T A = 0$ , 也就是说矩阵  $L$  存在这样的左特征向量, 其前  $q$  项都是零元素; 或者

2)  $\beta^T B = 0$ , 即  $[F \ B]$  是不可控的。

分析以上2种情况, 可知定理2成立。

## 2.2 异质多智能体网络系统的能控性

按照从简单异质多智能体网络系统到复杂异质多智能体网络系统的顺序对能控性的线性代数条件进行总结。

### 2.2.1 简单异质多智能体网络系统的能控性

1) 领航-跟随者框架下简单异质多智能体网络系统的模型与文献[19]相似:

$$\dot{x}_i = c_i F x_i + F \sum_{j=1}^N w_{ij} (x_j - x_i) + B u_i, i = 1, 2, \dots, n \quad (7)$$

式中:  $x_i \in R^d, c_i \in R, F \in R^{d \times d}, w_{ij} \in R, B \in R^{d \times m}, u_i \in R^m$ 。  $c_i F x_i$  表示节点  $i$  之间的内部动态关系。如果输入  $u_i = 0$ , 那么智能体  $i$  就是跟随者, 否则就是领航者。定义  $X = [x_1^T \ x_2^T \ \dots \ x_n^T]^T \in R^{dn}$ ,  $U = [u_1^T \ u_2^T \ \dots \ u_n^T]^T \in R^{mn}$ , 则系统(7)可以写成:

$$\dot{X} = [(C - L) \otimes F] X + (A \otimes B) U \quad (8)$$

如果系统的前  $q$  个智能体是领航者, 那么  $C = \text{diag}(c_1, c_2, \dots, c_n)$ ,  $A = \text{diag}(\underbrace{1, \dots, 1}_q, \underbrace{0, \dots, 0}_{n-q})$ 。

**定理3**<sup>[19]</sup> 要使系统(8)能控, 那么以下2个条件必须同时成立。

- 1)  $[F \ B]$  是一个能控矩阵对;
- 2)  $(C - L)$  不存在前  $q$  项都为零的左特征向量。

**证明** 定理3的证明过程与定理2相似。

2) 广播信号下简单异质多智能体网络系统的模型与文献[20]中相似, 系统模型为

$$\dot{x}_i = c_i F x_i + F \sum_{j=1}^N w_{ij} (x_j - x_i) + B u, i = 1, 2, \dots, n \quad (9)$$

式中:  $x_i \in R^d, c_i \in R, F \in R^{d \times d}, w_{ij} \in R, B \in R^{d \times m}, u \in R^m$ 。  $c_i F x_i$  表示节点  $i$  之间的内部动态关系。由于系统(9)中所有的智能体都接收相同的控制信号, 所以称  $u$  为广播控制信号。定义  $X = [x_1^T \ x_2^T \ \dots \ x_n^T]^T \in R^{dn}$ ,  $U = [u_1^T \ u_2^T \ \dots \ u_n^T]^T \in R^{mn}$ , 则系统(9)可以写成如下形式:

$$\dot{X} = [(C - L) \otimes F] X + (I_n \otimes B) U \quad (10)$$

**命题2**<sup>[19]</sup> 如果系统(10)是能控的, 那么当且仅当以下2个条件同时满足:

1)  $[F \ B]$  是一个能控矩阵对;

2) 矩阵  $(C - L) \otimes F$  的所有特征值各不相同。

### 2.2.2 复杂异质多智能体网络系统的能控性

文献[21]的复杂异质多智能体网络系统写成

$$\dot{x}_i = \sum_{j=1}^N w_{ij} F_{ij} (x_j - x_i) + B_i u_i, i = 1, 2, \dots, n \quad (11)$$

式中:  $x_i \in R^d, w_{ij} \in R, F_{ij} \in R^{d \times d}, u_i \in R^m, B_i \in R^{d \times m}$ 。将标量  $w_{ij}$  与  $F_{ij}$  合并为一项, 那么方程(11)可以变形为

$$\dot{x}_i = \sum_{j=1}^N M_{ij} (x_j - x_i) + B_i u_i, i = 1, 2, \dots, n \quad (12)$$

将方程(12)与方程(1)相比较, 如果把方阵  $M_{ij} \in R^{d \times d}$  看作是拓扑图  $G$  的边权重, 那么系统的邻接矩阵为

$$W = \begin{bmatrix} 0 & M_{12} & \dots & M_{1n} \\ M_{21} & 0 & \dots & M_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ M_{n1} & M_{n2} & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad (13)$$

系统对应的拉普拉斯矩阵为

$$L = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^n M_{1j} & -M_{12} & \dots & -M_{1n} \\ -M_{21} & \sum_{j=1}^n M_{2j} & \dots & -M_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -M_{n1} & -M_{n2} & \dots & \sum_{j=1}^n M_{nj} \end{bmatrix} \quad (14)$$

**注释3** 文献[19]中,  $c_i \in R$  表示节点  $i$  之间的异质动态关系, 文献[21]中  $F_{ij} \in R^{d \times d}$  表示节点  $i$  之间的异质动态关系。文献[21]的异质多智能体网络系统的能控性是非常复杂的, 所以对于这样一个异质网络系统, 只得到了系统不能控的2个充分条件。

**命题3**<sup>[21]</sup> 如果方程(11)表示的加权矩阵图是双向的, 即  $M_{ik} = M_{ki} (\forall i, k = 1, 2, \dots, n)$ , 并且矩阵对的集合  $\{[M_{ik} \ B_i] \mid i, k = 1, 2, \dots, n\}$  是不能控的, 那么多智能体系统(10)就是不能控的。

**命题4**<sup>[21]</sup> 如果文献[21]中异质多智能体系统的拓扑图  $G$  是结构不能控的, 那么整个系统都是不能控的。

## 2.3 一般多智能体网络系统的能控性

采用文献[25]的一般动力学多智能体网络系统模型:

$$\dot{x}_i = A x_i + C u_i + \delta_i B u_l, i = 1, 2, \dots, n \quad (15)$$

式中:  $x_i \in R^p$  代表智能体  $i$  的状态,  $u_i \in R^s$  是智能体  $i$  的耦合变量,  $u_l \in R^q$  是智能体  $i$  的外部输入。  $A = R^{p \times p}, B \in R^{p \times q}, C \in R^{p \times s}$ 。

每个智能体  $i$  的耦合变量  $u_i \in \mathbf{R}^s$  是由邻居间的耦合扩散变量决定的。也就是说,系统的相对协议为

$$u_i = K \sum_{j \in N_i} (x_j - x_i) \quad (16)$$

令  $\mathbf{x} = \text{col}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ,  $\mathbf{u} = \text{col}(u_1, u_2, \dots, u_m)$ , 则系统(15)可以写成矩阵形式:

$$\dot{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{L}}\mathbf{x} + \hat{\mathbf{M}}\mathbf{u} \quad (17)$$

式中:  $\hat{\mathbf{L}} = \mathbf{I}_n \otimes \mathbf{A} - \mathbf{L} \otimes (\mathbf{C}\mathbf{K})$ ,  $\hat{\mathbf{M}} = \mathbf{M} \otimes \mathbf{B}$ ,  $\mathbf{M} \in \mathbf{R}^{n \times m}$ 。  $m$  是领航者的数目。

$$M_{il} = \begin{cases} 1, & i = v_l \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

**定理 4**<sup>[25]</sup>  $(\hat{\mathbf{L}}, \hat{\mathbf{M}})$  是能控的, 当且仅当以下 2 个条件同时成立:

1)  $(\mathbf{L}, \mathbf{M})$  是能控的;

2) 对于矩阵  $\mathbf{L}$  的每一个特征值  $\lambda$ , 矩阵对  $(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{C}\mathbf{K}, \mathbf{B})$  都是可控的。

**证明** (必要性) 只证明矩阵  $(\mathbf{L}, \mathbf{M})$  能控的必要条件,  $(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{C}\mathbf{K}, \mathbf{B})$  能控的必要条件可以用相似的方法来证明。假设  $(\mathbf{L}, \mathbf{M})$  是不能控的, 则存在非零向量  $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$  使得  $\mathbf{x}^T \mathbf{L} = \lambda \mathbf{x}^T$  和  $\mathbf{x}^T \mathbf{M} = 0$  成立。令  $(\theta, \mathbf{y}) \in \mathbf{C} \times \mathbf{C}^p$  是矩阵  $(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{C}\mathbf{K}, \mathbf{B})$  的左特征向量, 那么

$$\mathbf{L} \otimes (\mathbf{A} - \lambda \mathbf{C}\mathbf{K}) = \mathbf{L} \otimes \mathbf{A} - \lambda \mathbf{L} \otimes \mathbf{C}\mathbf{K} \quad (18)$$

由  $\mathbf{x}^T \mathbf{L} = \lambda \mathbf{x}^T$ , 可得  $\mathbf{x}^T \mathbf{L} / \lambda = \mathbf{x}^T$ , 即  $\mathbf{L} / \lambda = \mathbf{I}_n$ 。所以式(18)可转化成  $1/\lambda \{ \mathbf{L} \otimes (\mathbf{A} - \lambda \mathbf{C}\mathbf{K}) \} = 1/\lambda \{ \mathbf{L} \otimes \mathbf{A} - \lambda \mathbf{L} \otimes \mathbf{C}\mathbf{K} \} = \mathbf{I}_n \otimes \mathbf{A} - \mathbf{L} \otimes \mathbf{C}\mathbf{K} = \hat{\mathbf{L}}$ 。由引理 2,  $(\theta, \mathbf{x} \otimes \mathbf{y})$  是  $\hat{\mathbf{L}}$  的一个左特征向量, 则有

$$(\mathbf{x} \otimes \mathbf{y})^H \hat{\mathbf{M}} = (\mathbf{x}^T \mathbf{M}) \otimes (\mathbf{y}^H \mathbf{B}) = 0 \quad (19)$$

通过 PBH 判据可知,  $(\hat{\mathbf{L}}, \hat{\mathbf{M}})$  是不可控的。

(充分性) 假设  $(\hat{\mathbf{L}}, \hat{\mathbf{M}})$  是不能控的。由于  $\mathbf{L}$  是对称矩阵, 总能找到一个正交矩阵  $\mathbf{U}$  使  $\mathbf{L} = \mathbf{U}\mathbf{D}\mathbf{U}^T$  成立<sup>[33]</sup>, 即

$$\mathbf{U}^T \mathbf{L} \mathbf{U} = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$$

式中:  $\lambda_i$  是矩阵  $\mathbf{L}$  的特征值。引入 2 个矩阵  $\tilde{\mathbf{L}}$  和  $\tilde{\mathbf{M}}$ :

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{L}} &= (\mathbf{U}^T \otimes \mathbf{I}_p) \hat{\mathbf{L}} (\mathbf{U} \otimes \mathbf{I}_p) = \\ &= (\mathbf{U}^T \otimes \mathbf{I}_p) (\mathbf{I}_p \otimes \mathbf{A} - \mathbf{L} \otimes \mathbf{C}\mathbf{K}) (\mathbf{U} \otimes \mathbf{I}_p) = \\ &= ((\mathbf{U}^T \otimes \mathbf{I}_p) (\mathbf{I}_n \otimes \mathbf{A}) - (\mathbf{U}^T \otimes \mathbf{I}_p) (\mathbf{L} \otimes \mathbf{C}\mathbf{K})) (\mathbf{U} \otimes \mathbf{I}_p) = \\ &= ((\mathbf{U}^T \otimes \mathbf{A}) - (\mathbf{U}^T \mathbf{L} \otimes \mathbf{C}\mathbf{K})) (\mathbf{U} \otimes \mathbf{I}_p) = \\ &= (\mathbf{U}^T \otimes \mathbf{A}) (\mathbf{U} \otimes \mathbf{I}_p) - (\mathbf{U}^T \mathbf{L} \otimes \mathbf{C}\mathbf{K}) (\mathbf{U} \otimes \mathbf{I}_p) = \\ &= (\mathbf{I}_n \otimes \mathbf{U}^T \mathbf{A}) - (\mathbf{U}^T \mathbf{L} \mathbf{U} \otimes \mathbf{C}\mathbf{K}) = \\ &= (\mathbf{I}_n \otimes \mathbf{A}) - (\text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \otimes \mathbf{C}\mathbf{K}) = \\ &= \text{blockdiag}(\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{C}\mathbf{K}, \dots, \mathbf{A} - \lambda_n \mathbf{C}\mathbf{K}) \end{aligned}$$

和

$$\tilde{\mathbf{M}} = (\mathbf{U}^T \otimes \mathbf{I}_p) \hat{\mathbf{M}} = (\mathbf{U}^T \otimes \mathbf{I}_p) (\mathbf{M} \otimes \mathbf{B}) = (\mathbf{U}^T \mathbf{M}) \otimes \mathbf{B}$$

由于  $(\tilde{\mathbf{L}}, \tilde{\mathbf{M}})$  是不能控的, 并且  $\mathbf{U}^T \otimes \mathbf{I}_p$  是非奇异的, 因此矩阵对  $(\tilde{\mathbf{L}}, \tilde{\mathbf{M}})$  也是不能控的。考虑到  $\tilde{\mathbf{L}}$  的块对角结构, 那么就一定会存在一个数  $s$ ,  $1 \leq s \leq n$ , 使与它相对应的矩阵对  $(\mathbf{A} - \lambda_s \mathbf{C}\mathbf{K}, (\mathbf{U}^T \mathbf{M})_s \otimes \mathbf{B})$  是不能控的。用  $(\mathbf{M})_s$  表示矩阵  $\mathbf{M}$  的第  $s$  行。因此,

1)  $(\mathbf{U}^T \mathbf{M})_s = 0$ , 也就是说  $(\mathbf{L}, \mathbf{M})$  是不能控的;

2) 假如  $(\mathbf{U}^T \mathbf{M})_s \neq 0$ , 那么  $(\mathbf{A} - \lambda_s \mathbf{C}\mathbf{K}, \mathbf{B})$  是不能控的。

因此矛盾, 故结论成立, 定理证明完毕。

**注释 4** 定理 4 的证明比较复杂, 是一个新的证明方法, 并且有一定的参考价值。

### 3 绝对协议下多智能体网络系统的能控性

在绝对协议  $u_i = \sum_{j \in N_i} x_j$  下, 总结动力学多智能体

网络系统能控性的代数条件, 并且提出了一些新的代数条件。

#### 3.1 一阶同质多智能体网络系统的能控性

采用文献[26]的多智能体网络系统模型, 它由广播信号控制:

$$\dot{\mathbf{x}}_i = \sum_{j \in N_i} \mathbf{x}_j + \mathbf{u}, i = 1, 2, \dots, n \quad (20)$$

式中:  $\mathbf{x}_i$  表示智能体  $i$  的状态,  $N_i = \{j | v_i \sim v_j; j \neq i\}$  是节点  $v_i$  的邻居集,  $\mathbf{u}$  是控制输入。多智能体系统(20)的所有智能体都接受相同的控制信号, 即  $\mathbf{u}$ , 称这个信号为广播信号。

系统(20)可以写成如矩阵形式如下:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}\mathbf{u} \quad (21)$$

式中:  $\mathbf{A} \in \mathbf{R}^{n \times n}$  为多智能体系统的邻接矩阵,  $\mathbf{b} = [1 \ 1 \ \dots \ 1]^T \in \mathbf{R}^n$ 。

**命题 5**<sup>[13]</sup> 当且仅当以下 2 个条件同时成立, 系统(21)是能控的。

1) 矩阵  $\mathbf{A}$  的特征值各不相同;

2)  $\mathbf{A}$  的特征向量都不与  $\mathbf{b}$  正交。

**注释 5** 命题 5 证明过程见文献[13]。但是命题 5 只要满足条件 2) 系统就是能控的, 即条件 2) 是系统能控的充要条件, 条件 1) 是系统能控的必要条件。

**定理 5** 当且仅当矩阵  $\mathbf{A}$  的所有特征向量都不正交于  $\mathbf{b}$ , 则系统(21)是能控的, 并且如果系统(21)是能控的, 那么矩阵  $\mathbf{A}$  的特征值各不相同。

**证明** 假设向量  $\mathbf{v}$  是矩阵  $\mathbf{A}$  的特征向量, 在

PBH 判据的条件下,如果系统 (21) 是能控的,那么  $\text{rank}(\lambda_i I - A, b) = n$  成立。将 PBH 判据和对称的状态矩阵结合起来,如果系统是不能控的,那么矩阵  $A$  存在一个特征向量使得  $(\lambda_i I - A, b)v^T = 0$  成立,则有

$$\begin{cases} (\lambda_i I - A)v^T = 0 \\ bv^T = 0 \end{cases}$$

简化成

$$\begin{cases} Av = \lambda_i v \\ bv^T = 0 \end{cases}$$

因此,要使系统实现全控, $A$  的所有特征向量不能与  $b$  正交,也就是说,如果矩阵  $A$  存在特征向量与  $b$  垂直,则系统 (21) 是不能控的。所以矩阵  $A$  的所有特征向量都不正交于  $b$  是系统 (21) 能控的充要条件。另一方面, $A$  是一个实对称矩阵,因此存在矩阵  $U$  使得  $A = UDU^T$  成立<sup>[33]</sup>,  $U$  是  $A$  的特征向量,那么

$$\begin{aligned} [\lambda_i I - A, b] &= [\lambda_i I - UDU^T, b] = \\ &U[\lambda_i U^T - DU^T, U^T b] = \\ &U[(\lambda_i I - D)U^T, U^T b] \end{aligned}$$

向量  $v_i$  是特征值  $\lambda_i$  所对应的特征向量,即  $v = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ 。由于  $U$  是非奇异矩阵,所以它不影响  $[(\lambda_i I - D)U^T, U^T b]$  的秩,只需考虑  $[(\lambda_i I - D)U^T, U^T b]$  是否满秩。将  $[(\lambda_i I - D)U^T, U^T b]$  展开:

$$\begin{bmatrix} \lambda_i - \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_i - \lambda_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_i - \lambda_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1^T \\ v_2^T \\ \vdots \\ v_i^T \\ \vdots \\ v_n^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1^T b \\ v_2^T b \\ \vdots \\ v_i^T b \\ \vdots \\ v_n^T b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\lambda_i - \lambda_1)_1 v_1^T b \\ (\lambda_i - \lambda_2)_2 v_2^T b \\ \vdots \\ 0 v_i^T b \\ \vdots \\ (\lambda_i - \lambda_n)_n v_n^T b \end{bmatrix} \quad (22)$$

从式 (22) 可以看出,要使系统 (21) 是能控的,则矩阵  $A$  的所有特征值各不相同。

### 3.2 高阶异质多智能体网络系统的能控性

给定多智能体系统模型:

$$\dot{x}_i = c_i F x_i + F \sum_{j \in N_i} x_j + B u_i, i = 1, 2, \dots, n \quad (23)$$

式中:  $x_i \in \mathbf{R}^d$ ,  $c_i \in \mathbf{R}$ ,  $F \in \mathbf{R}^{d \times d}$ ,  $B \in \mathbf{R}^{d \times m}$ , 和  $u_i \in \mathbf{R}^m$ 。 $c_i F x_i$  表示异质多智能体系统中节点  $i$  之间的动态关系。如果输入  $u_i = 0$ , 那么智能体  $i$  就是跟随者, 反之是领航者。

令  $x = [x_1^T \ x_2^T \ \cdots \ x_n^T]^T \in \mathbf{R}^{d \times n}$  以及  $u = [u_1^T \ u_2^T \ \cdots \ u_n^T]^T \in \mathbf{R}^{m \times n}$ , 则系统 (23) 可以写成如下形式:

$$\dot{x} = [(C + A) \otimes F]x + (A \otimes B)u \quad (24)$$

式中:  $C = \text{diag}(c_1, c_2, \dots, c_n)$ ,  $A \in \mathbf{R}^{n \times n}$  是系统的邻接矩阵。如果前  $q$  个智能体是领航者, 那么  $A = \text{diag}(\underbrace{1, \dots, 1}_q, \underbrace{0, \dots, 0}_{n-q})$ 。

**定理 6** 假设  $F$  是对称的, 如果系统 (24) 是能控的, 那么必须同时满足以下 2 个条件:

- 1)  $[F \ B]$  是一个能控矩阵对;
- 2) 矩阵  $(C + A)$  不存在前  $q$  个元素都是零元素的左特征向量。

**证明** 假设系统 (24) 是不能控的, 根据 PBH 判据,  $(C + A) \otimes F$  就存在左特征向量  $v$  使得  $v^T (A \otimes B) = 0$  成立。根据引理 2, 矩阵  $(C + A)$  和矩阵  $F$  分别存在特征向量  $v_1$  和  $v_2$  使得  $P = v_1 \otimes v_2$  和  $(v_1^T \otimes v_2^T) (I_n \otimes B) \neq 0$  成立, 那么

$$(v_1^T A) \otimes (v_2^T B) \neq 0 \quad (25)$$

当且仅当以下 2 个条件同时满足时, 式 (25) 成立。

- 1)  $v_1^T A \neq 0$ , 也就是说  $(C + A)$  不存在前  $q$  项都是零元素的左特征向量;
  - 2)  $v_2^T B \neq 0$ , 也就是说  $[F \ B]$  是一个能控矩阵对。
- 显然, 定理 6 成立。

## 4 结束语

本文探究了多智能体网络系统的能控性问题, 分别在相对协议和绝对协议下总结了多智能体网络系统的部分模型和能控性的线性代数条件。相对协议下, 主要在 Leader-Follower 模型下利用已有的能控性代数条件对一阶系统和高阶系统的能控性代数条件进行了总结和改进, 并且还总结了一般多智能体网络系统模型下能控性的充分必要条件。在绝对协议下, 研究了广播信号下能控性的充分必要条件, 使能控性的充要条件得到了简化。此外, 本文不仅讨论了同质多智能体网络系统的能控性, 还讨论了异质多智能体网络系统的能控性问题。由于自然现象和实际应用中, 不同生物群体之间动力学具有较大的差别, 异质多智能体网络系统的能控性问题是

未来研究的一个重要方向,所以本文对异质多智能体网络系统能控性研究结果也具有很大的实际意义。

## 参考文献:

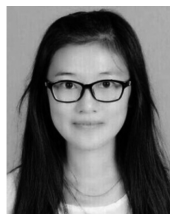
- [1] LIM H, KANG Y, KIM J, et al. Formation control of leader following unmanned ground vehicles using nonlinear model predictive control [C]//IEEE/ASME International Conference on Advanced Intelligent Mechatronics. Singapore, 2009: 945-950.
- [2] JADBABAIE A, LIN J, MORSE A S. Coordination of groups of mobile autonomous agents using nearest neighbor rules[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2003, 48(6): 988-1001.
- [3] FAX J A. Optimal and cooperative control of vehicle formations [M]. Pasadena: California Institute Technology, 2001: 1-11.
- [4] OLFATI-SABER R, MURRAY R M. Consensus problems in networks of agents with switching topology and time-delays [J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2004, 49(9): 1520-1533.
- [5] 刘金琨, 尔联洁. 多智能体技术应用综述[J]. 控制与决策, 2001, 16(2): 133-140, 180.  
LIU Jinkun, ER Lianjie. Overview of application of multi-agent technology[J]. Control and Decision, 2001, 16(2): 133-140, 180.
- [6] FAX J A, MURRAY R M. Information flow and cooperative control of vehicle formations[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2004, 49(9): 1465-1476.
- [7] OGREN P, FIORELLI E, LEONARD N E. Cooperative control of mobile sensor networks: adaptive gradient climbing in a distributed environment[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2004, 49(8): 1292-1302.
- [8] MU S M, CHU T G, WANG L. Coordinated collective motion in a motile particle group with a leader[J]. Physica A: Statistical Mechanics and its Applications, 2005, 351(2-4): 211-226.
- [9] HONG Y G, HU J P, GAO L X. Tracking control for multi-agent consensus with an active leader and variable topology [J]. Automatica, 2006, 42(7): 1177-1182.
- [10] SHI H, WANG L, CHU T G. Virtual leader approach to coordinated control of multiple mobile agents with asymmetric interactions[J]. Physica D: Nonlinear Phenomena, 2006, 213(1): 51-65.
- [11] LANE D M, MCFADZEAN A G. Distributed problem solving and real-time mechanisms in robot architectures[J]. Engineering Applications of Artificial Intelligence, 1994, 7(2): 105-117.
- [12] KALMAN R E. Mathematical description of linear dynamical systems[J]. Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics Series A: Control, 1963, 1(2): 152-192.
- [13] TANNER H G. On the controllability of nearest neighbor interconnections[C]//Proceedings of the 43rd IEEE Conference on Decision and Control. Atlantis, Paradise Island, Bahamas, 2004: 2467-2472.
- [14] RAHMANI A, MESBAHI M. On the controlled agreement problem[C]//Proceedings of the 2006 American Control Conference. Minneapolis, USA, 2006: 1376-1381.
- [15] RAHMANI A, JI M, MESBAHI M, et al. Controllability of multi-agent systems from a graph-theoretic perspective [J]. SIAM Journal on Control and Optimization, 2009, 48(1): 162-186.
- [16] JI M, EGERSTEDT M. A graph-theoretic characterization of controllability for multi-agent systems[C]//Proceedings of the IEEE American Control Conference. New York, USA, 2007: 4588-4593.
- [17] JI Z J, WANG Z D, LIN H, et al. Interconnection topologies for multi-agent coordination under leader-follower framework[J]. Automatica, 2009, 45(12): 2857-2863.
- [18] DAVISON E J. Connectability and structural controllability of composite systems[J]. Automatica, 1977, 13(2): 109-123.
- [19] XIANG L Y, ZHU J J H, CHE F, et al. Controllability of weighted and directed networks with nonidentical node dynamics [OL/EB]. [2014-01-20]. <http://www.hindawi.com/journals/mpe/2013/405034>.
- [20] 王晓晓, 纪志坚. 广播信号下非一致多智能体系统的能控性[J]. 智能系统学报, 2014, 9(4): 401-406.  
WANG Xiaoxiao, JI Zhijian. Controllability of non-identical multi-agent systems under a broadcasting control signal [J]. CAAI Transactions on Intelligent Systems, 2014, 9(4): 401-406.
- [21] CAI N, CAO J W, LIU M H, et al. On controllability problems of high-order dynamical multi-agent systems [J]. Arabian Journal for Science and Engineering, 2014, 39(5): 4261-4267.
- [22] LIU B, CHU T G, WANG L, et al. Controllability of a leader-follower dynamic network with switching topology [J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2008, 53(4): 1009-1013.
- [23] JI Z J, WANG Z D, LIN H, et al. Controllability of multi-agent systems with time-delay in state and switching topology [J]. International Journal of Control, 2010, 83(2): 371-386.
- [24] ZHANG S, CAO M, CAMLIBEL M K. Upper and lower bounds for controllable subspaces of networks of diffusively coupled agents[J]. IEEE Transactions on Automatic Con-



- trol, 2014, 59(3): 745-750.
- [25] LIU B, SU H S, LI R, et al. Switching controllability of discrete-time multi-agent systems with multiple leaders and time-delays[J]. Applied Mathematics and Computation, 2014, 228: 571-588.
- [26] YOON M G, ROWLINSON P, CVETKOVI D, et al. Controllability of multi-agent dynamical systems with a broadcasting control signal[J]. Asian Journal of Control, 2014, 16(4): 1066-1072.
- [27] NI W, WANG X L, XIONG C. Consensus controllability, observability and robust design for leader-following linear multi-agent systems[J]. Automatica, 2013, 49(7): 2199-2205.
- [28] Yoon M G. Single agent control for cyclic consensus systems[J]. International Journal of Control, Automation and Systems, 2013, 11(2): 243-249.
- [29] GODSIL C, ROYLE G. Algebraic Graph Theory[M]. New York: Springer, 2001: 163-171.
- [30] CAI N, ZHONG Y S. Formation controllability of high-order linear time-invariant swarm systems[J]. IET Control Theory & Application, 2010, 4(4): 646-654.
- [31] CHEN C T. Linear system theory and design[M]. New York: Oxford University Press, 1999: 6.

- [32] CAI N, CAO J W, KHAN M J. A controllability synthesis problem for dynamic multi-agent systems with linear high-order protocol[J]. International Journal of Control, Automation and Systems, 2014, 12(6): 1366-1371.
- [33] HORN R A, JOHNSON C R. Matrix analysis[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1985: 11-14.

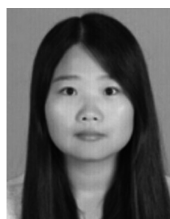
#### 作者简介:



董洁,女,1990年生,硕士研究生,主要研究方向为多智能体系统。



纪志坚,男,1973年生,博士,教授,博士生导师,主要研究方向为群体系统动力学与协调控制、复杂网络、切换动力系统的分析与控制、系统生物以及基于网络的控制系统等。主持国家自然科学基金项目3项、山东省杰出青年科学基金项目1项。山东省杰出青年基金获得者,发表学术论文70余篇,其中被SCI检索23篇,EI检索50余篇。



王晓晓,女,1989年生,硕士研究生,主要研究方向为多智能体系统。

## 第五届模式识别应用和方法国际会议 5th International Conference on Pattern Recognition Applications and Methods

24-26 February, 2016, Rome, Italy

The International Conference on Pattern Recognition Applications and Methods would like to become a major point of contact between researchers, engineers and practitioners on the areas of Pattern Recognition, both from theoretical and application perspectives.

Contributions describing applications of Pattern Recognition techniques to real-world problems, interdisciplinary research, experimental and/or theoretical studies yielding new insights that advance Pattern Recognition methods are especially encouraged.

#### Conference Areas

- 1) Theory and Methods;
- 2) Applications.

**Website:** <http://www.icpram.org/>