Progress in Mathematics

Edited by
J. Coates and
S. Helgason

Jean-Pierre Jouanolou

# Théorèmes de Bertini et Applications

Birkhäuser

**Progress in Mathematics**
**Vol. 42**

**Edited by**
**J. Coates and**
**S. Helgason**

Birkhäuser
Boston · Basel · Stuttgart

Jean-Pierre Jouanolou

# Théorèmes de Bertini et Applications

1983

Birkhäuser
Boston • Basel • Stuttgart

Author:

Jean-Pierre Jouanolou
Département de Mathématiques
Université Louis Pasteur
7, rue René Descartes
67000 STRASBOURG
France

**Library of Congress Cataloging in Publication Data**

Jouanolou, Jean-Pierre, 1941-
Théorèmes de Bertini et applications.

(Progress in mathematics ; vol. 42)
Bibliography: p.
1. Bertini's theorems. 2. Projective modules (Algebra) 3. Connections (Mathematics) I. Title. II. Series: Progress in mathematics ; v. 42.
QA541.J68 1983 516.3'52 83-15729
ISBN 0-8176-3164-X

CIP-Kurztitelaufnahme der Deutschen Bibliothek

**Jouanolou, Jean-Pierre:**
Théorèmes de Bertini et applications / Jean-Pierre Jouanolou. - Boston ; Basel ; Stuttgart : Birkhäuser, 1983.
(Progress in Mathematics ; Vol. 42)
ISBN 3-7643-3164-X (Basel, Stuttgart)
ISBN 0-8176-3164-X (Boston)

NE: GT


ISBN 0-8176-3164-X
ISBN 3-7643-3164-X
Printed in USA
9 8 7 6 5 4 3 2 1

# INTRODUCTION

Il est d'usage d'appeler "théorème de BERTINI" tout énoncé indiquant comment une propriété d'une variété se transporte à une intersection complète globale générique de celle-ci. Il semble en effet que ce soit BERTINI qui ait le premier prouvé un résultat de ce type pour les pinceaux, dans un article maintenant difficile à trouver [Rendiconti R. Ist. Lombardo 15 (1882) pp 24-28]. Des propriétés de ce genre étaient d'ailleurs couramment utilisées par POINCARE et PAINLEVE dans leur étude des équations de Pfaff algébriques.

Il faut cependant attendre les années 1940-50 pour trouver dans la littérature des preuves tout à fait correctes, et couvrant le cas de la caractéristique $p > 0$ , des théorèmes de BERTINI usuels. Il faut ici mentionner les travaux de O. ZARISKI, T. MATSUSAKA, Y. NAKAI, ainsi que l'ouvrage classique de A. WEIL (Foundations of Algebraic Geometry), pour lesquels on trouvera des références dans la bibliographie de la première partie. Enfin, il ne faut pas oublier de citer l'énoncé concernant la normalité, connu plutôt sous le nom de théorème de SEIDENBERG, et dû à ce dernier, dont il ne sera pas question dans ces Notes.

Quelques mots concernant celles-ci. Le présent texte est la rédaction détaillée d'un cours fait à Strasbourg au premier semestre 78-79, et consacré en principe aux résultats récents, obtenus par BASS, QUILLEN, SUSLIN, SWAN,..., concernant la structure des modules projectifs.

En fait, il m'est alors apparu rapidement que les théorèmes de BERTINI jouaient un rôle important dans les travaux de SUSLIN et SWAN. L'absence de référence vraiment satisfaisante et surtout complète pour ces théorèmes m'a amené à en entreprendre une rédaction détaillée, aussi élémentaire , et cependant moderne, que possible, en utilisant le langage géométrique des schémas de GROTHENDIECK. Parallèlement, je me suis aperçu qu'une bonne connaissance des theorèmes de BERTINI permettait de simplifier substantiellement certains arguments utilisés par FULTON et HANSEN pour établir leur théorème de connexité, et j'ai donc consacré un paragraphe à cette question.

Ces considérations expliquent sans doute le caractère apparemment disparate du texte. Une première partie, assez longue, contient la démonstration des théorèmes de BERTINI, avec l'application aux résultats de FULTON et HANSEN ; une deuxième partie, plus courte, développe les théorèmes "généraux" de structure des modules projectifs (théorèmes de SERRE, théorèmes de simplification de BASS et SUSLIN), en partie en relation avec une variante, dûe à SWAN, des théorèmes de BERTINI.

J'espère néanmoins que ces notes seront utiles telles quelles, étant donné que les deux parties sont pratiquement indépendantes. Pour la commodité du lecteur, j'ai en outre joint à cette introduction une bibliographie supplémentaire, sans doute non exhaustive, où figurent des articles parus depuis que ce texte a été écrit (1979) .

Je tiens, pour terminer ces quelques lignes d'introduction, à remercier les auditeurs de mon cours pour leur patience, et Madame LAMBERT pour son excellent travail de frappe.

STRASBOURG, Juin 1983

# TABLE DE MATIERES

I - PROPRIETES CONSTRUCTIBLES ET THEOREMES DE BERTINI.

1 - Ensembles constructibles. 2

2 - Morphismes de type fini : théorèmes de Chevalley et platitude générique. 5

3 - Corps commutatifs : extensions séparables, primaires, universellement intègres. 17

4 - Constructibilité de certaines propriétés géométriques. 29

5 - Corps commutatifs : dérivations et différentielles. 47

6 - Théorèmes de Bertini. 62

7 - Application à des questions de connexité. 91

II - STRUCTURE DES MODULES PROJECTIFS.

1 - Rang libre d'un module. 98

2 - Théorème de Serre. 99

3 - Théorème de simplification de Bass. 105

4 - Théorème de simplification de Suslin. 109

5 - Un théorème de Bertini. 121

## 1 - ENSEMBLES CONSTRUCTIBLES.

DEFINITION 1.1. Une partie $E$ d'un espace topologique $X$ est dite constructible si et seulement si elle est réunion d'un nombre fini de parties localement fermées de $X$.

Autrement dit, $E$ doit être de la forme

$$E = \bigcup_{i=1}^{r} (U_i \cap F_i) , \tag{1.2}$$

où les $U_i$ (resp. les $F_i$) sont des ouverts (resp. fermés ) de $X$. Sous cette forme, il est clair qu'une réunion finie ou une intersection finie de parties constructibles est encore constructible, et que l'image réciproque par une application continue d'une partie constructible est constructible.

Dans le cas où $X$ est noethérien, on a la caractérisation suivante.

PROPOSITION 1.3. Soient $X$ un espace noethérien et $E$ une partie de $X$. Les assertions suivantes sont équivalentes.

i) $E$ est constructible.

ii) Pour toute partie fermée irréductible $T$ de $X$, on a

- ou bien $E \cap T$ contient un ouvert non vide de $T$
- ou bien $E \cap T$ est rare dans $T$.

Preuve. Pour i) $\Rightarrow$ ii), on se ramène au cas où $X$ est irréductible, et il s'agit de voir que $E$ contient un ouvert non vide de $X$, ou est rare dans $X$. Ecrivons $E$, qu'on peut supposer non vide, sous la forme (1.2) avec $U_i \cap F_i \neq \emptyset$ $(1 \leq i \leq r)$. Si l'un des $F_i$ contient $U_i$, $E$ contient l'ouvert non vide $U_i$. Sinon les ouverts $U_i \div (U_i \cap F_i)$ sont non vides et

$$X \div E \supset \bigcap_{i=1}^{r} [U_i \div (U_i \cap F_i)] \neq \emptyset , \tag{1.4}$$

l'inégalité provenant de ce que $X$ est irréductible. Dans ce cas, $\overline{E}$ ne saurait contenir un ouvert non vide $V$, car sinon, toujours à cause de l'irréductibilité de $X$ , $V$ rencontrerait l'intérieur, non vide par (1.4) , de $X \dot{-} E$ . La propriété ii) étant stable par passage aux parties fermées, on peut, pour prouver ii) $\Rightarrow$ i) utiliser une récurrence noethérienne, et supposer que, pour toute partie fermée $Y \not\subseteq X$ , $E \cap Y$ est constructible dans $Y$ , ou, ce qui revient au même, dans $X$ . Alors, si $X$ est réductible, on a $X = X_1 \cup X_2$ , avec $X_1$ et $X_2$ deux fermés $\not\subseteq X$ , d'où

$$E = (E \cap X_1) \cup (E \cap X_2) ,$$

et on conclut par hypothèse de récurrence noethérienne . Si, par contre, $X$ est irréductible, deux cas se présentent. Ou bien $E$ contient un ouvert non vide $U$ de $X$ , dont on note $F$ le complémentaire $F$ , et

$$E = U \cup (E \cap F) ,$$

ou bien $E \subset \overline{E} \not\subseteq X$ , et on conclut dans les deux cas par hypothèse de récurrence noethérienne.

Pour mieux faire apparaître la symétrie des conditions ii) , il peut être utile d'introduire la définition suivante, dans le cas des schémas.

DEFINITION 1.5. _Soit_ $X$ _un schéma. Une partie_ $E$ _de_ $X$ _est dite semi-constructible si, pour toute partie fermée irréductible_ $T$ _de_ $X$ , _les assertions suivantes sont équivalentes_.

i) $E$ _contient le point générique de_ $T$ .

ii) $E$ _contient un ouvert non vide de_ $T$ .

Avec cette terminologie, la proposition (1.3) se reformule ainsi pour les schémas.

PROPOSITION 1.6. _Soit_ $X$ _un schéma noethérien. Pour qu'une partie_ $E$ _de_ $X$ _soit constructible, il faut et il suffit que_ $E$ _et_ $X \dot{-} E$ _soient semi-constructibles._

Dans l'énoncé suivant, une partie $E$ d'un schéma $X$ est dite "stable par spécialisation" si, pour tout point $x \in E$ , elle contient toute "spécialisation de $x$ " , à savoir tout point de la partie fermée irréductible, à savoir $\overline{\{x\}}$ , dont $x$ est le point générique. De même, une partie $E$ de $X$ est dite "stable par générisation" si, pour tout $x \in E$ , elle contient les "générisations de $x$ " , à savoir les points génériques des parties irréductibles fermées de $X$ contenant $x$ .

PROPOSITION 1.7. _Soient_ $X$ _un schéma noethérien, et_ $E$ _une partie constructible de_ $X$ . _Alors_ :

1) $E$ _est ouverte si et seulement si elle est stable par générisation._

2) $E$ _est fermée si et seulement si elle est stable par spécialisation._

_Preuve._ Montrons 1) . Un ouvert qui rencontre une partie fermée irréductible en contient évidemment le point générique. Pour l'assertion en sens opposé, on peut raisonner par récurrence noethérienne, et supposer que, pour tout fermé $Y \neq X$ , $E \cap Y$ est ouvert dans $Y$ . Si $X$ est réductible, on a $X = X_1 \cup X_2$ , avec $X_1$ et $X_2$ deux fermés $\neq X$ , d'où

$$C_X E = \left[(C_X E_1) \cap X_1\right] \cup \left[(C_X E_2) \cap X_2\right]$$

est fermé dans $X$ par hypothèse de récurrence noethérienne. Si $X$ est irréductible, et $E \neq \emptyset$ , la partie $E$ , stable par générisation, contient le point générique de $X$ ; comme elle est constructible, elle contient (1.6) un ouvert non vide $U$ de $X$ . Alors $E = U \cup (C_X U \cap E)$ est ouvert, car $C_X U \cap E$ est ouvert dans $C_X U$ par récurrence noethérienne. Montrons ii) . Si $E$ est un fermé et $x \in E$ , on a $\overline{\{x\}} \subset E$ . Pour l'assertion en sens opposé, on procède à nouveau par récurrence noethérienne, en supposant $E \cap Y$ fermé pour tout fermé $Y \neq X$ . Si $X$ est réductible, on a $X = X_1 \cup X_2$ , avec $X_1$ et $X_2$ deux fermés $\neq X$ , d'où

$$E = (E \cap X_1) \cup (E \cap X_2)$$

est fermé par récurrence noethérienne. Si $X$ est irréductible, deux cas se présentent. Si $\overline{E} \neq X$ , on a $E \subset \overline{E}$ et on conclut par récurrence. Si $\overline{E} = X$ , alors, comme $E$ est constructible, $E$ contient le point générique $\eta$ de $X$ (1.6), donc, vu la stabilité par spécialisation, $E \supset \overline{\{\eta\}}$ , soit $E = X$ .

## 2 - MORPHISMES DE TYPE FINI : THEOREMES DE CHEVALLEY ET PLATITUDE GENERIQUE.

Un morphisme de schémas $f : X \to Y$ est dit quasi-compact si, pour tout ouvert quasi-compact $V$ de $Y$, $f^{-1}(V)$ est quasi-compact. Il revient au même de le demander pour $V$ ouvert affine de $Y$.

Un morphisme quasi-compact de schémas $f : X \to Y$ est dit de type fini si, pour tout $x \in X$, il existe un voisinage ouvert affine $U = \operatorname{spec} A$ de $x$ et un voisinage ouvert affine $V = \operatorname{spec} B$ de $f(x)$ tels que

1) $$f(U) \subset V$$

2) le morphisme d'anneaux transposé $B \to A$ défini par $f|U$ fait de $A$ une $B$-algèbre de type fini.

La proposition suivante, qui est essentiellement le "théorème de normalisation de NOETHER", est la clef de l'étude des morphismes de type fini.

PROPOSITION 2.1. Soient $A$ un anneau intègre, et $i : A \to B$ un morphisme d'anneaux injectif qui munit $B$ d'une structure de $A$-algèbre de type fini. Il existe alors $f \neq 0$ dans $A$, et $t_1,\dots,t_r \in B$ tels que

i) le morphisme de $A$-algèbres
$$A[T_1,\dots,T_r] \to B$$
$$T_i \mapsto t_i$$
soit injectif,

ii) $B_f$ soit ainsi muni d'une structure de $A_f[T_1,\dots,T_r]$-module de type fini.

Preuve. Commençons par le cas où $A$ est un corps $K$, et $B = K[x_1,\dots,x_n]$ est engendrée par les $x_i \in B$. Si les $x_i$ sont algébriquement indépendants sur $K$, l'énoncé est clair. Sinon, il existe une relation polynômiale

$$g(x_1,\dots,x_n) = 0 ,$$

avec $g \in K[X_1,\dots,X_n]$ non nul. Pour toute suite $m_2,\dots,m_n$ d'entiers $\geq 1$, les éléments $y_i \in B$ définis par

$$\begin{cases} x_1 = y_1 \\ x_i = y_i + y_1^{m_i} \quad (i \geq 2) \end{cases}$$

engendrent B sur k et sont tels que, posant

$$\tilde{g}(X_1,\dots,X_n) = g(X_1,X_2+X_1^{m_2},\dots,X_n+X_1^{m_n}) ,$$

on ait $\tilde{g}(y_1,y_2,\dots y_n) = 0$ . Si

$$g = \sum_{j\in J} c_j X_1^{\alpha_{1,j}} \dots X_n^{\alpha_{n,j}} ,$$

avec $c_j \neq 0$ et les monômes figurant dans cette expression deux à deux distincts, on a

$$(2.1.1) \quad \tilde{g}(X_1,X_1^{m_2},X_1^{m_3},\dots,X_1^{m_n}) = \sum_{j\in J} c_j X^{\alpha_{1,j}+m_2\alpha_{2,j}+\dots+m_n\alpha_{n,j}} ,$$

et il est clair qu'on peut choisir les entiers $m_i$ de telle sorte que les exposants

$$\alpha_{1,j}+m_2\alpha_{2,j}+\dots+m_n\alpha_{n,j}$$

soient tous distincts. Alors notant N le degré de (2.1.1), $\tilde{g}$ sera de degré N en $X_1$ et le seul monôme figurant effectivement dans la décomposition canonique de g et admettant $X_1^N$ en facteur est $X_1^N$ . Autrement dit, $\tilde{g}(y_1,\dots,y_n) = 0$ est une relation de dépendance intégrale de $y_1$ sur $K[y_2,\dots,y_n]$ . On raisonne alors par récurrence sur n , le cas n = 0 étant évident. La construction précédente montre que B est fini sur $K[y_2,\dots,y_n]$ , et l'hypothèse de récurrence appliquée à $K[y_2,\dots y_n]$ permet de conclure. Remarquons au passage que les éléments $t_1,\dots,t_r$ que l'on construit ainsi appartiennent en fait au sous-anneau $\mathbb{Z}[x_1,\dots,x_n]$ de B . Si maintenant A est quelconque, de corps des fractions K , et $B = A[x_1,\dots,x_n]$ , la preuve précédente fournit des éléments $t_1,\dots,t_r \in \mathbb{Z}[x_1,\dots,x_n] \subset B$ , algébriquement indépendants sur K , donc sur A , tels que $B \otimes_A K$ soit finie sur $K[t_1,\dots,t_r]$ . On a des relations d'intégralité des $x_i$ sur $K[t_1,\dots,t_r]$ de la forme

$$a_i x_i^{N_i} + \sum_{j<N_i} P_j x_i^j = 0 \, ,$$

avec $a_i \in A$ et $P_j \in A[t_1,\dots,t_r]$. Posant $f = a_1 \dots a_n$, il est alors clair que $B_f$ est fini sur $A_f[t_1,\dots,t_r]$.

THEOREME 2.2. (de constructibilité de CHEVALLEY). Soient $X$ et $Y$ deux schémas noethériens et $f : X \to Y$ un morphisme de type fini. Alors, pour toute partie constructible $E$ de $X$, $f(E)$ est constructible dans $Y$.

Preuve. La notion de constructibilité étant stable par réunion finie, et $E$ étant réunion finie de sous-schémas localement fermés de $X$, on se ramène immédiatement au cas $E = X$, puis, en relocalisant sur $Y$, au cas où $Y$ est affine. Enfin, utilisant la définition des morphismes de type fini, on peut supposer $f$ défini par un morphisme d'anneaux noethériens

$$u : A \to B ,$$

qui munit $B$ d'une structure de $A$-algèbre de type fini, et il s'agit alors de montrer que $f(\operatorname{spec} B)$ est constructible dans $\operatorname{spec} A$. Pour cela, on utilise le critère (1.6). Quitte à remplacer $Y$ par une partie fermée irréductible de la forme $\operatorname{spec}(A/\mathfrak{p})$ ($\mathfrak{p} \in \operatorname{spec} A$), on est donc ramené à voir que, lorsque $A$ est intègre, ou bien $f(X)$ contient un ouvert de $Y$, ou bien $\overline{f(X)} \neq Y$. Si $u$ n'est pas injectif et $\mathfrak{a} = \operatorname{Ker}(u)$, il est clair que

$$f(X) \subset V(\mathfrak{a}) \neq Y .$$

Si par contre $u$ est injectif, il résulte de (2.1) qu'on peut trouver $h \neq 0$ dans $A$ tel que $B_h$ soit fini sur une algèbre de polynômes $A_h[t_1,\dots,t_r] = C$. Alors $f|\operatorname{spec} B_h$ se factorise en

$$\operatorname{spec} B_h \xrightarrow{f'} \operatorname{spec} C \xrightarrow{f''} \operatorname{spec} A_h ,$$

où $f'$, fini et dominant, est surjectif d'après Seidenberg, et $f''$ est évidemment surjectif. Par suite, $f(X) \supset D(h) \neq \emptyset$, ce qui achève la preuve.

THEOREME 2.3. *Soient* $X$ *et* $Y$ *deux schémas intègres localement noethériens et* $f : X \to Y$ *un morphisme dominant de type fini. On note* $d$ *la dimension de la fibre générique de* $f$ *. Alors :*

i) *Les composantes irréductibles non vides des fibres de* $f$ *ont une dimension* $\geq d$ .

ii) *Il existe un ouvert* $U \neq \emptyset$ *de* $Y$ *tel que, pour tout* $y \in U$ , $f^{-1}(y)$ *soit purement de dimension* $d$ .

Remarquons que, disons par exemple si $X$ et $Y$ sont des schémas de type fini sur un corps, $d = \dim X - \dim Y$ . Cela résulte d'ailleurs de la démonstration de ii) .

*Preuve.* Les assertions étant locales sur $Y$ , on peut supposer $Y$ affine, donc $X$ quasi-compact. Comme $f$ est de type fini, on peut trouver un ensemble fini $I$ et des recouvrements ouverts affines $(X_i)_{i \in I}, (Y_i)_{i \in I}$ de $X$ et $Y$ respectivement tels que $f(X_i) \subset Y_i$ et $f_i = f|X_i : X_i \to Y_i$ soit défini par un morphisme d'anneaux de présentation finie. Montrons ii) . Comme une intersection finie d'ouverts non vides de $Y$ est un ouvert non vide ($Y$ est irréductible) , il suffit de le prouver pour les $f_i$ . On peut donc supposer $f$ défini par un morphisme injectif d'anneaux $u : A \to B$ , avec $A$ et $B$ intègres, qui munit $B$ d'une structure de $A$-algèbre de type fini. Alors (2.1) , quitte à remplacer $A$ par un localisé $A_h (h \neq 0)$ , on peut même supposer

$$A \subset C \subset B ,$$

où $C$ est une algèbre de polynômes $A[T_1,\dots,T_d]$ , et $B$ est fini sur $C$ . Pour tout $\mathfrak{p} \in \operatorname{spec} A$ , il résulte des théorèmes de Seidenberg que $B \otimes_A k(\mathfrak{p})$ est purement de dimension égale à $\dim(C \otimes_A k(\mathfrak{p})) = d$ , d'où l'assertion ii) . Montrons i) . On se ramène aussi au cas où $f$ est défini par $u$ comme plus haut. Lorsque, par exemple, $A$ est une $\mathbb{Z}$-algèbre de type fini, on raisonne par récurrence croissante sur $\dim A < +\infty$ . L'assertion est, comme on l'a vu , vraie sur un ouvert $D(h)$ de spec $A$ . Les autres fibres sont des fibres du morphisme

(2.3.1) $$v : A/hA \to B/hB$$

déduit de $u$ . Si $h$ est inversible dans $B$ , elles sont vides. Sinon, remplaçant $\mathrm{spec}(B/hB)$ par ses composantes irréductibles, on est ramené à l'étude des fibres de morphismes du type

(2.3.2) $$A/u^{-1}(\mathfrak{p}) \longrightarrow B/\mathfrak{p} ,$$

où $\mathfrak{p}$ minimal parmi les idéaux premiers de $B$ contenant $h$ . Mais

$$\dim(B/\mathfrak{p}) = \dim B - 1 \quad \text{et} \quad \dim(A/u^{-1}(\mathfrak{p})) \leq \dim A/hA = \dim A - 1 ,$$

donc, par hypothèse de récurrence, les fibres de (2.3.2) ont une dimension supérieure ou égale à

$$\dim(B/\mathfrak{p}) - \dim(A/u^{-1}(\mathfrak{p})) \geq \dim B - \dim A .$$

Dans le cas général, écrivons $B$ comme quotient d'un anneau de polynômes

$$B = A[t_1,\ldots,t_m]/(f_1,\ldots,f_s) .$$

Si $A'$ la sous-$\mathbb{Z}$-algèbre de $A$ engendrée par les coefficients des $f_i$ , posant

$$B_1 = A'[t_1,\ldots,t_m]/(f_1,\ldots,f_s) ,$$

on a

(2.3.3) $$B = A \otimes_{A'} B_1 .$$

Mieux, notant $B'$ le sous-anneau de $B$ image du morphisme évident $B_1 \to B$ , on a

(2.3.4) $$B = A \otimes_{A'} B'$$

où, cette fois, $B'$ est intègre. On a un diagramme cartésien

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{spec}\, B & \longrightarrow & \mathrm{spec}\, B' \\ \downarrow{\scriptstyle f} & & \downarrow{\scriptstyle f'} \\ \mathrm{spec}\, A & \xrightarrow{\ell} & \mathrm{spec}\, A' \end{array} ,$$

d'où résulte que, si $\mathfrak{p} \in \operatorname{spec} A$ ,

$$f^{-1}(\mathfrak{p}) = k(\mathfrak{p}) \otimes_{k(\ell(\mathfrak{p}))} f^{-1}(\ell(\mathfrak{p})) \ .$$

On en déduit aussitôt que l'assertion, vraie pour $f'$ , l'est aussi pour $f$ .

COROLLAIRE 2.4. Soient $X$ et $Y$ deux schémas noethériens, et $f : X \to Y$ un morphisme de type fini. Alors :

i) Les dimensions des fibres de $f$ sont uniformément bornées.

ii) Pour tout sous-ensemble $I$ de $\mathbb{N}$ , l'ensemble des $y \in Y$ tels que les dimensions des composantes irréductibles de $f^{-1}(y)$ appartiennent à $I$ est constructible.

Preuve. Pour i) , on peut, par récurrence noethérienne, supposer l'assertion vraie pour les morphismes induits $f^{-1}(Z) \to Z$ , où $Z$ est fermé dans $Y$ , et $Z \neq Y$ . Si $Y$ est réductible, l'assertion est immédiate : on recouvre $Y$ par deux fermés propres pour lesquels elle est vraie par récurrence. On peut donc supposer $Y$ irréductible. Notons $(T_i)_{1 \leq i \leq s}$ les composantes irréductibles de $X$ . L'assertion (2.3) ii) appliquée à ceux des morphismes induits $(T_i)_{\text{réd}} \to Y_{\text{réd}}$ qui sont dominants montre qu'il existe un ouvert non vide $U$ de $Y$ au-dessus duquel i) est vrai. (Une fibre vide est de dimension $-\infty$ par convention) . On conclut aussitôt en appliquant l'hypothèse de récurrence à $Y \dot{-} U$ . Pour ii) , il suffit, quitte à remplacer $I$ par $\mathbb{N} \dot{-} I$ , de montrer que l'ensemble en question, soit $E$ , est constructible. Pour ce faire, on se ramène immédiatement à montrer que si $Y$ est intègre et son point générique $\eta \in E$ , les points d'un voisinage y appartiennent également. Mais cela résulte aussitôt de (2.3.) ii) appliqué comme plus haut aux morphismes induits $(T_i)_{\text{réd}} \to Y_{\text{réd}}$ qui sont dominants.

THEOREME 2.5. (Platitude générique) . Soient $X$ et $Y$ deux schémas noethériens, avec $Y$ intègre, $f : X \to Y$ un morphisme de type fini et $F$ un $\mathcal{O}_X$- module cohérent. Il existe alors un ouvert non vide $U$ de $Y$ tel que $F|f^{-1}(U)$ soit plat sur $U$ .

Preuve. Comme précédemment, on se ramène immédiatement au cas où $f$ est défini par un morphisme d'anneaux $u : A \to B$ qui fait de $B$ une $A$ algèbre de type fini, avec $A$ intègre. Alors $F$ est défini par un $B$-module de type fini $M$, et l'assertion résulte alors du lemme plus précis suivant.

LEMME 2.5.1. Si $A$ est un anneau noethérien intègre, $B$ une $A$-algèbre de type fini, et $M$ un $B$-module de type fini, il existe $f \neq 0$ dans $A$ tel que $M_f$ soit un $A_f$- module libre.

Notant $K$ le corps des fractions de $A$, supposons d'abord que $M \otimes_A K = 0$. Si $m_1,\dots,m_r$ est un système de générateurs du $B$-module $M$, il existe alors des éléments non nuls $f_1,\dots,f_r \in A$ tels que $f_i m_i = 0$, d'où, posant $f = f_1 \dots f_r$, $fM = 0$ et $M_f = 0$. Dans le cas général, on va raisonner par récurrence croissante sur la dimension du support du $B \otimes_A K$ - module $M \otimes_A K$, le cas où celle-ci est $-\infty$ étant déjà vu pour toute situation du type considéré.

Si $M \neq 0$, il admet, en tant que $B$-module, une filtration finie dont les quotients consécutifs sont de la forme $B/\mathfrak{p}$, avec $\mathfrak{p} \in \operatorname{spec} B$. Une extension de modules libres étant libre, il suffit de prouver le lemme lorsque $M = B/\mathfrak{p}$. Quitte à remplacer $B$ par $B/\mathfrak{p}$, on peut donc supposer que $B$ est intègre et $M = B$. Si le morphisme $u : A \to B$ n'est pas injectif, il est clair que, pour $f \in \operatorname{Ker} u$, on a $B_f = 0$. Si $u$ est injectif, on sait (2.1) que, quitte à remplacer $A$ par un localisé $A_h$, $B$ est fini sur une algèbre de polynômes $A[T_1,\dots,T_r]$. Ceci montre déjà qu'il suffit de prouver le lemme lorsque $B = A[T_1,\dots,T_n]$ et $M$ est un $B$-module $\neq 0$, de type fini sans $B$-torsion. Notant alors $L$ le corps des fractions de $A[t_1,\dots,T_r]$, il résulte de l'existence d'un $L$-isomorphisme
$$M \otimes_B L \simeq L^m$$
qu'il existe une injection $B$-linéaire $\theta : B^m \hookrightarrow M$, avec $N = \operatorname{Coker} \theta$ de torsion, d'où $\dim \operatorname{supp}(N \otimes_A K) < \dim(B \otimes_A K) = \dim \operatorname{supp}(M \otimes_A K)$. Remarquant que, dans les diverses réductions faites, la dimension du support de $M \otimes_A K$ n'a pas augmenté, on voit que, par hypothèse de récurrence, il existe un $f \in A$ tel que $N_f$ soit

libre sur $A_f$ . Comme $B_f^m$ est libre sur $A_f$ , la suite exacte $0 \to B^m \to M \to N \to 0$ permet de conclure.

COROLLAIRE 2.6. <u>Soient</u> X <u>et</u> Y <u>deux schémas noethériens, et</u> $f : X \to Y$ <u>un morphisme de type fini. Supposons donnés trois</u> $\mathcal{O}_X$- <u>modules cohérents</u> $F'$, $F$, $F''$ <u>et des morphismes de</u> $\mathcal{O}_X$- <u>modules</u> $u : F' \to F$, $v : F \to F''$ . <u>Alors, l'ensemble des</u> $y \in Y$ <u>tels que la suite de</u> $\mathcal{O}_{f^{-1}(y)}$ - <u>modules</u>

$$F'_{f^{-1}(y)} \xrightarrow{u_{f^{-1}(y)}} F_{f^{-1}(y)} \xrightarrow{v_{f^{-1}(y)}} F''_{f^{-1}(y)}$$

<u>soit exacte est constructible dans</u> Y .

<u>Preuve</u>. Soit E cet ensemble. Il faut voir (1.6) que, lorsque Y est intègre de point générique $\eta$, et $\eta \in E$ (resp. $\eta \in Y \dot{-} E$), il existe un ouvert non vide de Y contenu dans E (resp. $Y \dot{-} E$) . Utilisant (2.5) , on voit qu'il existe un ouvert $U \neq \emptyset$ de Y tel que, au-dessus de U , $F'$, $F$, $F''$ , $\operatorname{Im} u$ , $\operatorname{Ker} u$ , $\operatorname{Coker} u$ , $\operatorname{Im} v$ , $\operatorname{Ker} v$ , $\operatorname{Coker} v$ et $H = \operatorname{Ker} v / \operatorname{Im} u$ soient plats sur U . Posant, pour tout y ,

$$H_y = \operatorname{Ker}(v_{f^{-1}(y)})/\operatorname{Im}(u_{f^{-1}(y)}) ,$$

on en déduit que, pour $y \in U$ ,

(2.6.1) $$H_y \simeq H \otimes_{\mathcal{O}_y} \mathcal{O}_{f^{-1}(y)} .$$

En fait, le lemme (2.5.1) montre plus précisément qu'on peut choisir U affine, soit $U = \operatorname{spec} A$ , et X recouvert par un nombre fini d'ouverts affines $V_\alpha = \operatorname{spec} B_\alpha$ , avec $B_\alpha$ fini sur un sous-anneau $C_\alpha$ qui est une algèbre de polynômes sur A , tels que $H|V_\alpha$ soit défini par un $B_\alpha$- module de type fini $M_\alpha$ qui est libre sur A . Si $H_{f^{-1}(\eta)} = 0$ , il est clair que les $M_\alpha$ , étant de A-torsion, sont nuls d'où $H_y = 0$ $(y \in U)$ par (2.6.1) . Inversement, si $H_{f^{-1}(\eta)} \neq 0$ , l'un des $M_\alpha$ est non nul; comme il est libre sur $A$ , on a pour tout $\mathfrak{p} \in \operatorname{spec} A$ , $M_\alpha \underset{A}{\otimes} k(\mathfrak{p}) \neq 0$ , d'où $H_y \neq 0$ pour $y \in U$ .

PROPOSITION 2.7. <u>Un morphisme plat et de type fini entre schémas noethériens est ouvert</u>.

<u>Preuve</u>. Soit $f : X \to Y$ un tel morphisme et $U$ un ouvert de $X$ . D'après le théorème de constructibilité de Chevalley (2.2) , $f(U)$ est constructible. Il suffit donc (1.7) de montrer qu'il est stable par générisation. Si $y \in Y$ , toute générisation de $y$ est dans l'image du morphisme canonique

$$\operatorname{spec} \mathcal{O}_{y,Y} \xrightarrow{c_y} Y$$

défini localement, lorsque $Y = \operatorname{spec} A$ et $y = \mathfrak{p} \in \operatorname{spec} A$ , par le morphisme d'anneaux canonique $A \to A_{\mathfrak{p}}$ . Soit alors $x \in U$ . On a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} \operatorname{spec} \mathcal{O}_{x,X} \arrow[r, "c_x"] \arrow[d, "g"'] & X \arrow[d, "f"] \\ \operatorname{spec} \mathcal{O}_{y,Y} \arrow[r, "c_y"] & Y \end{tikzcd}$$

où $y = f(x)$ , et $g$ est défini par l'homomorphisme local $\varphi : \mathcal{O}_{y,Y} \to \mathcal{O}_{x,X}$ . On a $\operatorname{Im}(c_x) \subset U$ , car $U$ est ouvert ; comme $\varphi$ est plat et local, il est fidèlement plat, donc $g$ est surjectif, d'où

$$\operatorname{Im}(c_y) \subset f(\operatorname{Im} c_x) \subset U ,$$

ce qui achève la preuve.

COROLLAIRE 2.8. <u>Soient</u> $k$ <u>un corps, et</u> $X$ <u>et</u> $Y$ <u>dans</u> $k$ - <u>schémas. Alors le morphisme de projection</u>

$$\pi : X \underset{k}{\times} Y \to Y$$

<u>est ouvert</u>.

<u>Preuve</u>. On peut supposer $X$ affine : $X = \operatorname{spec} A$ , avec $A$ une $k$ - algèbre. Si $A$ est de type fini sur $k$ , l'énoncé est un cas particulier de (2.7) . Dans le cas général, on peut supposer $Y$ affine, $Y = \operatorname{spec} B$ , et on est ramené à voir que si

(2.8.1) $$f = \sum_{i=1}^{r} a_i \otimes b_i \in A \otimes_k B ,$$

$\pi(D(f))$ est ouvert dans Spec $B$ . Soit $A'$ la sous $k$ - algèbre de type fini de $A$ engendré par les $a_i$ . On a un diagramme commutatif canonique

$$\begin{tikzcd} \operatorname{spec}(A \otimes_k B) \arrow[d, "h"'] \arrow[dr, "\pi"] & \\ \operatorname{spec}(A' \otimes_k B) \arrow[r, "\pi'"'] & \operatorname{spec} B \end{tikzcd} ,$$

dans lequel, avec un abus de notation évident ,

(2.8.2) $$h^{-1}(D_{A' \otimes_k B}(f)) = D_{A \otimes_k B}(f) .$$

Lorsque $B$ est noethérien, on sait (2.7) que $\pi'(D(f))$ est ouvert et, par (2.8.2), $\pi(D(f)) \subset \pi'(D(f))$ . On va en fait voir que cette inclusion est une égalité et, pour cela, montrer que si $z \in \operatorname{spec} B$ est tel que $\pi'^{-1}(z) \cap D(f) \neq \emptyset$ , on a aussi $\pi^{-1}(z) \cap D(f)) \neq \emptyset$ . Si $z = \mathfrak{p} \in \operatorname{spec} B$ , on se ramène aussitôt à prouver l'assertion analogue en remplaçant $B$ par $k(\mathfrak{p})$ . Mais alors le morphisme $h$

$$\operatorname{spec}(A \otimes_k k(\mathfrak{p})) \to \operatorname{spec}(A' \otimes_k k(\mathfrak{p}))$$

étant dominant, son image contient les points génériques des composantes irréductibles de $\operatorname{spec}(A' \otimes_k k(\mathfrak{p}))$ , donc rencontre tous les ouverts non vides de ce schéma. Le résultat étant connu pour $B$ noethérien, montrons-le pour $B$ quelconque. De nouveau, $f$ étant comme en (2.8.1) , il s'agit de voir que $\pi(D(f))$ est ouvert dans spec $B$ . Si maintenant $B'$ est la sous $k$ - algèbre de $B$ engendrée par les $b_i$ , on a un diagramme cartésien évident

$$\begin{array}{ccc}
\operatorname{spec}(A \underset{k}{\otimes} B) & \xrightarrow{1 \times \varphi} & \operatorname{spec}(A \underset{k}{\otimes} B') \\
\pi \downarrow & & \downarrow \pi' \\
\operatorname{spec} B & \xrightarrow{\varphi} & \operatorname{spec} B'
\end{array}$$

et

$$D_{A \underset{k}{\otimes} B}(f) = (1 \times \varphi)^{-1} [D_{A' \underset{k}{\otimes} B}(f)] ,$$

d'où

$$\pi(D(f)) = \varphi^{-1}(\pi'(D(f))) ,$$

avec un abus de notation évident. Comme $B'$ est noethérien, on sait déjà que $\pi'(D(f))$ est ouvert, d'où l'assertion.

Terminons ce paragraphe par quelques considérations qui sont à l'origine des paragraphes suivants.

Soit $f : X \to Y$ un morphisme de type fini entre schémas noethériens, et considérons l'une des propriétés suivantes, notée $P$ ,

- réduction
- irréductibilité
- intégrité (= réduction + irréductibilité)
- connexité.

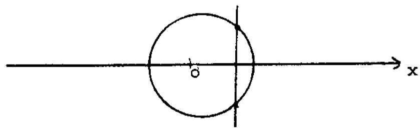
Par analogie avec un certain nombre d'énoncés de ce style (par exemple (2.4) et (2.6)) , il est naturel de se demander si

$$E = \{y \in Y | f^{-1}(y) \text{ vérifie } P \}$$

est constructible dans $Y$ . En fait, il n'en est rien, et ce sera la raison de l'introduction des propriétés "géométriques" correspondantes au paragraphe 5. En fait, l'ensemble $E$ n'est même pas en général semi-constructible. Pour les trois dernières propriétés, un contre-exemple est fourni par la projection

$$\operatorname{spec}(\mathbb{C}[X,Y]/(X^2 + Y^2 - 1)) \longrightarrow \operatorname{spec} \mathbb{C}[X]$$
$$X \longleftarrow\!\shortmid X$$

du cercle sur l'axe de $x$ .



Pour la réduction, étant donné un corps $k$ algébriquement clos de caractéristique $p > 0$ , le morphisme

$$\mathbb{E}^1_k \longrightarrow \mathbb{E}^1_k$$

$$x \longmapsto x^p$$

est un contre-exemple.

Par contre, dans chacun des cas considérés, $Y \doteq E$ est <u>semi-constructible</u>. Pour le voir, on peut supposer $Y$ intègre, et il s'agit de montrer que si la fibre générique n'est pas réduite (resp. irréductible, intègre, connexe) , il en est de même des fibres dans un ouvert non vide de $Y$ . On note $\eta$ le point générique de $Y$ .

a) <u>réduction</u>.

Soit $I$ l'idéal de $X_{réd}$ dans $X$ . On a

$$I \subset \mathcal{O}_X \quad \text{et} \quad I \otimes_{\mathcal{O}_X} k(\eta) \neq 0 \; .$$

Il résulte alors de (2.6) qu'il existe un ouvert $U$ non vide de $Y$ tel que, pour $y \in U$ ,

$$I_{f^{-1}(y)} \subset \mathcal{O}_{f^{-1}(y)} \quad \text{et} \quad I_{f^{-1}(y)} \neq 0 \; .$$

Comme $I_{f^{-1}(y)}$ est formé d'éléments nilpotents, cela permet de conclure.

b) <u>irréductibilité</u>.

Si la fibre générique n'est pas irréductible, elle contient deux ouverts non vides, traces d'ouverts $U$ et $V$ de $X$ , qui ne se rencontrent pas. Alors, d'après le théorème de Chevalley, $f(U \cap V)$ , $f(U)$ et $f(V)$ sont constructibles. Comme $\eta \notin f(U \cap V)$ , $\eta \in f(U)$ , $\eta \in f(V)$ , il existe un ouvert non vide $\Omega$ de $Y$ tel que

$$(R) \quad \begin{cases} U \cap f^{-1}(y) \neq \emptyset \ , \quad V \cap f^{-1}(y) \neq \emptyset \\ [U \cap f^{-1}(y)] \cap [V \cap f^{-1}(y)] = \emptyset \end{cases} \qquad (y \in Y) \ ,$$

d'où l'assertion.

c) <u>intégrité</u>.

Ce cas résulte immédiatement des précédents.

d) <u>connexité</u>.

Si la fibre générique n'est pas connexe, elle est réunion disjointe de deux ouverts non vides, traces d'ouverts $U$ et $V$ de $X$. Comme pour b), on va pouvoir trouver $\Omega$ tel que les relations (R) soient réalisées. De plus, le théorème de Chevalley appliqué à $X \dot{-} (U \cup V)$, dont l'image ne contient pas $\eta$, montre que, quitte à restreindre $\Omega$, on peut supposer que

$$f^{-1}(y) = [U \cap f^{-1}(y)] \cup [V \cap f^{-1}(y)] \quad (y \in \Omega) \ ,$$

d'où l'assertion.

## 3.- <u>CORPS COMMUTATIFS : EXTENSIONS SEPARABLES, PRIMAIRES, UNIVERSELLEMENT INTEGRES</u>.

Le propos de ce paragraphe est de développer une partie de la théorie des corps commutatifs qui sera essentielle pour le paragraphe suivant.

PROPOSITION 3.1. <u>Soient</u> $k \subset K \subset L$ <u>trois corps. Si</u> $L$ <u>est une extension de type fini de</u> $k$, <u>il en est de même pour</u> $K$.

<u>Preuve</u>. Une base de transcendance de $K$ sur $k$ se prolonge en une base de transcendance de $L$ sur $k$, donc est finie. Soit donc $t_1,\dots,t_n$ une base de transcendance de $L$ sur $k$, telle que $(t_1,\dots,t_m)$ $(m \leq n)$ soit une base de transcendance de $K$ sur $k$. Il suffit de démontrer que $K$ est de dimension finie sur $k(t_1,\dots,t_m) = K_1$. Comme $k(t_1,\dots,t_n) = K_1(t_{m+1},\dots,t_n)$, l'anneau

$$K \otimes_{K_1} k(t_1,\dots,t_n) \ ,$$

localisé de l'algèbre de polynômes $K[t_{m+1},\dots,t_n]$ , est intègre et, comme $K$ est algébrique sur $K_1$ , entier sur $k(t_1,\dots,t_m)$ . C'est donc un corps, et par suite le morphisme d'anneaux canonique

$$\begin{array}{ccc} K \otimes_{K_1} k(t_1,\dots,t_n) & \longrightarrow & L \\ x \otimes y & \longmapsto & xy \end{array}$$

est injectif, et $k(t_1,\dots,t_n)$ - linéaire. D'où

$$[K:K_1] = [K \otimes_{K_1} k(t_1,\dots,t_n) : k(t_1,\dots,t_n)] \leq [L:k(t_1,\dots,t_n)] < +\infty \,.$$

Nous avons besoin dans la suite d'un certain nombre de notions nouvelles.

<u>Extensions séparables</u>.

DEFINITION 3.2. <u>Une extension de type fini</u> $K$ <u>d'un corps</u> $k$ <u>est dite séparablement engendrée sur</u> $k$ <u>si elle admet une base de transcendante</u> $(x_1,\dots,x_r)$ "<u>séparante</u>", <u>i.e. telle que</u> $K$ <u>soit une extension séparable finie de</u> $k$ .

THEOREME 3.3. <u>Soit</u> $k$ <u>un corps d'exposant caractéristique</u> $p \geq 1$ . <u>Si</u> $K$ <u>est une extension de</u> $k$ , <u>les assertions suivantes sont équivalentes</u>.

i) <u>Toute sous-extension de type fini de</u> $K$ <u>sur</u> $k$ <u>est séparablement engendrée sur</u> $k$ .

ii) $K$ <u>est réunion filtrante croissante de sous-extensions de type fini séparablement engendrées sur</u> $k$ .

iii) <u>Pour toute extension</u> $L$ <u>de</u> $k$ , <u>l'anneau</u> $K \otimes_k L$ <u>est réduit</u>.

iv) <u>L'anneau</u> $K \otimes_k \bar{k}$ <u>est réduit</u>.

v) <u>Il existe une extension algébriquement close</u> $\Omega$ <u>de</u> $k$ <u>telle que</u> $K \otimes_k \Omega$ <u>soit réduit</u>.

vi) <u>La clôture parfaite</u> $k^{p^{-\infty}}$ <u>de</u> $k$ <u>est telle que</u> $K \otimes_k k^{p^{-\infty}}$ <u>soit réduit</u>.

vii) <u>Il existe une extension parfaite</u> $\Omega$ <u>de</u> $k$ <u>telle que</u> $K \otimes_k \Omega$ <u>soit réduit</u>.

viii) <u>L'anneau</u> $K \otimes_k k^{1/p}$ <u>est réduit</u>.

ix) <u>Pour toute extension radicielle finie</u> $L$ <u>de</u> $k$ , $K \otimes_k L$ <u>est réduit</u>.

<u>Preuve du théorème 2</u>. Il est clair que i) ⇒ ii) . Montrons que ii) ⇒ iii) . Si $(K_i)_{i \in I}$ est une famille filtrante croissante d'extensions de type fini séparablement engendrées de $k$ , on a

$$K \otimes_k L = \bigcup_{i \in I} (K_i \otimes_k L) \qquad \text{(famille filtrante)} ,$$

et il suffit de voir que les $K_i \otimes_k L$ sont réduits. On peut donc supposer que $K$ est finie séparable sur une extension transcendante pure de type finie $K_o$ de $k$ , de base de transcendance $(X_1,\ldots,X_n)$ . Alors

$$K_o \otimes_k L = k(X_1,\ldots,X_n) \otimes_k L \subset L(X_1,\ldots,X_n) ,$$

et $$K \otimes_k L = K \otimes_{K_o} (K_o \otimes_k L) \subset K \otimes_{K_o} L(X_1,\ldots,X_n)$$ , de sorte que, quitte à remplacer $k$ par $K_o$ et $L$ par $L(X_1,\ldots,X_n)$ , on peut supposer $K$ extension séparable finie de $k$ . Dans ce cas, $K$ admet un élément primitif $x$ , de polynôme minimal $f$ tel que

(3.3.1) $$\mathrm{pgcd}_k(f,f') = 1$$

Alors $$K \otimes_k L \simeq L[X]/f(X) ,$$

et l'égalité $$\mathrm{pgcd}_L(f,f') = \mathrm{pgcd}_k(f,f') = 1 \qquad (3.3.1)$$

montre que, dans $L[X]$ , $f(X)$ n'a pas de facteurs carrés, donc que, si $f = h_1 \ldots h_r$ est la décomposition dans $L[X]$ de $f$ en facteurs premiers distincts,

$$K \otimes_k L \simeq \prod_{i=1}^{r} L[X]/(h_i) \qquad \text{(lemme chinois)}$$

est un produit de corps extensions séparables finies de $L$ . Les implications iii) ⇒ iv) ⇒ v) sont évidentes. Pour v) ⇒ vi) , on remarque qu'on a une inclusion $k^{p^{-\infty}} \subset \Omega$ , de même vii) ⇒ viii) et vi) ⇒ vii) est évident. Montrons que viii) ⇒ i) . On peut supposer $p > 1$ . Il est clair qu'il suffit de voir que si

$K$ est de type fini et vérifie viii), alors elle est séparablement engendrée sur $k$. Nous allons le montrer par récurrence sur le nombre minimum de générateurs de $K$ sur $k$. L'assertion est évidente lorsque $K = k$. Supposons que $K = k(x_1,\dots,x_n)$. Si les $x_i$ sont algébriquement indépendants sur $k$, c'est clair. Sinon, on peut extraire de $(x_1,\dots,x_n)$ une base de transcendance, qu'on peut, quitte à renuméroter, supposer égale à $x_1,\dots,x_r$ $(r < n)$. L'élément $x_{r+1}$ étant algébrique sur $k(x_1,\dots,x_r)$, il existe un polynôme $f \in k[X_1,\dots,X_{r+1}]$, qu'on peut supposer de degré minimum, tel que

$$f(x_1,\dots,x_{r+1}) = 0 .$$

Ecrivant

$$f = \sum_i a_i M_i ,$$

où les $M_i$ sont des monômes deux à deux distincts de $k[X_1,\dots,X_{r+1}]$ et les $a_i \in k \dot{-} 0$, on va voir que les $M_i$ ne sont pas tous des puissances $p^{\text{èmes}}$ de monômes $N_i$ de $k[X_1,\dots,X_{r+1}]$. En effet, posant

$$a_i = b_i^p \quad \text{dans} \quad k^{1/p} ,$$

on aurait sinon

$$0 = f(x_1,\dots,x_{r+1}) = (\sum_i N_i(x_1,\dots,x_{r+1}) \otimes b_i)^p$$

dans $K \otimes_k k^{1/p}$, d'où, par hypothèse,

$$\sum_i [N_i(x_1,\dots,x_{r+1}) \otimes b_i] = 0 .$$

Les $N_i(x_1,\dots,x_{r+1})$, linéairement dépendants sur $k^{1/p}$ après tensorisation, le seraient déjà sur $k$, en contradiction avec le fait que $f$ est de degré minimum. Par suite, l'un au moins des $X_i$ $(1 \le i \le r+1)$ figure avec une puissance non nulle première à $p$ dans l'un des $M_i$. Supposons que ce soit $X_\ell$. Alors, $x_\ell$ est algébrique sur $k(x_1,\dots,\widehat{x_\ell},\dots,x_{r+1})$, et son polynôme minimal, égal à

$$f(x_1,\dots,x_{\ell-1},X,x_{\ell+1},\dots,x_{r+1})$$

est séparable. Par suite, $x_\ell$ est algébrique séparable sur $k(x_1,\dots,\widehat{x_\ell},\dots,x_n)$.

Comme, par hypothèse de récurrence, $k(x_1,\dots,\widehat{x_\ell},\dots,x_n)$ est séparablement engendré sur $k$ (il vérifie évidemment viii)), l'assertion en résulte. Enfin, l'équivalence de ix) et vi) est immédiate.

Une extension algébrique vérifie la condition i) du théorème 3.3. si et seulement si elle est algébrique séparable. Cela rend la définition suivante cohérente.

DEFINITION 3.4. Une extension $K$ de $k$ est dite séparable si et seulement si elle vérifie les conditions équivalentes i) à ix) du théorème (3.3).

3.5. Il est clair qu'une sous-extension d'une extension séparable est séparable. En particulier, une sous-extension d'une extension transcendante pure est séparable, donc, étant de type fini (3.1), est séparablement engendrée sur $k$.

Extensions primaires.

THEOREME 3.6. Soit $K$ une extension d'un corps $k$. Les assertions suivantes sont équivalentes.

i) La fermeture algébrique de $k$ dans $K$ est radicielle.

ii) $K \otimes_k k_s$ est un corps.

iii) $\mathrm{spec}(K \otimes_k \bar{k})$ est irréductible.

ii bis) Il existe une extension séparablement close $\Omega_1$ de $k$ telle que $\mathrm{spec}(K \otimes_k \Omega_1)$ soit irréductible.

iii bis) Il existe une extension algébriquement close $\Omega$ de $k$ telle que $\mathrm{spec}(K \otimes_k \Omega)$ soit irréductible.

iv) Pour toute extension $L$ de $k$, $\mathrm{spec}(K \otimes_k L)$ est irréductible.

v) Pour toute extension séparable finie $k'$ de $k$, $\mathrm{spec}(K \otimes_k k')$ est irréductible.

Preuve. Pour voir que i) $\Rightarrow$ ii), il suffit, comme $k_s$ est réunion filtrante d'extensions séparables finies de $k$ , de montrer que si $k'$ est une telle extension, $K \otimes_k k'$ est un corps. Si $x$ est un élément primitif de $k'$ sur $k$ , et $f$ est le polynôme minimal, choisi unitaire, de $x$ sur $k$ , on a

$$K \otimes_k k' = K[X]/f(X) ,$$

de sorte qu'il suffit de montrer que $f$ est encore irréductible sur $k$ . Nous allons en fait voir que pour toute décomposition $f = gh$ , avec $g,h \in K[X]$ et unitaire, on a nécessairement $g,h \in k[X]$ . En effet, les coefficients de $g$ et $h$ , qui sont au signe près des fonctions symétriques élémentaires de conjugués de $x$ dans $k_s$ , sont algébriques séparables sur $k$ ; comme ils appartiennent à $K$ , il résulte de i) qu'ils sont dans $k$ . Les assertions ii) $\Rightarrow$ iii) $\Rightarrow$ ii bis) $\Rightarrow$ iii bis) sont évidentes, modulo la remarque que si $L$ et $L'$ sont deux extensions de $k$ et $L'$ est extension radicielle de $L$ , le morphisme associé

$$\mathrm{spec}(K \otimes_k L') \to \mathrm{spec}(K \otimes_k L) ,$$

étant radiciel et dominant, est un homéomorphisme. Pour voir que iii bis) $\to$ iv) , on peut supposer $L$ algébriquement clos, car le morphisme canonique

$$\mathrm{spec}(K \otimes_k \bar{L}) \to \mathrm{spec}(K \otimes_k L) ,$$

entier et dominant, est surjectif. Autrement dit, étant données deux extensions algébriquement closes $\Omega'$ et $\Omega''$ de $k$ , il s'agit de voir que $\mathrm{spec}(K \otimes_k \Omega')$ est irréductible si et seulement si $\mathrm{spec}(K \otimes_k \Omega'')$ l'est. Comme $\Omega'$ et $\Omega''$ peuvent être plongés dans un même corps algébriquement clos, à savoir la clôture algébrique d'un corps résiduel de $\Omega' \otimes_k \Omega''$ , on se ramène aussitôt au cas où $\Omega' \subset \Omega''$ . Le morphisme canonique

$$\mathrm{spec}(K \otimes_k \Omega'') \to \mathrm{spec}(K \otimes_k \Omega') \tag{3.6.1}$$

est ouvert (2.8) et surjectif (car fidèlement plat) . Nous allons voir que ses fibres, de la forme

$$\mathrm{spec}(k(\mathfrak{p}) \otimes_{\Omega'} \Omega'') ,$$

où $\mathfrak{p} \in \operatorname{spec}(K \otimes_k \Omega')$ , sont irréductibles, et l'assertion résultera alors du lemme suivant.

LEMME 3.7. <u>Soit</u> $f : X \to Y$ <u>une application continue et ouverte entre espaces topologiques, dont toutes les fibres sont irréductibles. Alors, pour que</u> $X$ <u>soit irréductible, il faut et il suffit que</u> $Y$ <u>le soit</u>.

L'image continue d'un irréductible étant irréductible, on a seulement à montrer que l'irréductibilité de $Y$ implique celle de $X$. Supposant donc $Y$ irréductible, soient $U$ et $V$ deux ouverts non vides de $X$, et montrons que $U \cap V \neq \emptyset$. Comme $f$ est ouverte, $f(U)$ et $f(V)$ sont des ouverts non vides de $Y$, et l'irréductibilité de $Y$ implique que $f(U) \cap f(V) \neq \emptyset$. Si $x \in f(U) \cap f(V)$, on a $U \cap f^{-1}(x) \neq \emptyset$ et $V \cap f^{-1}(x) \neq \emptyset$, et l'irréductibilité de $f^{-1}(x)$ implique alors

$$(U \cap V) \cap f^{-1}(x) = [U \cap f^{-1}(x)] \cap [V \cap f^{-1}(x)] \neq \emptyset ,$$

d'où le lemme.

L'irréductibilité des fibres de (3.6.1) résulte du lemme suivant, dans lequel les notations n'ont rien à voir avec celles du théorème.

LEMME 3.8. <u>Soient</u> $k$ <u>un corps algébriquement clos</u>, $K$ <u>et</u> $L$ <u>deux extensions de</u> $k$. <u>Alors</u> $K \otimes_k L$ <u>est intègre</u>.

L'extension $L$ est algébrique sur une extension transcendante pure $L_1$ de $k$, et

$$K \otimes_k L = (K \otimes_k L_1) \otimes_{L_1} L .$$

Si $(x_i)_{i \in I}$ est une base de transcendance de $L_1$ sur $k$,

$$K \otimes_k L_1 = K \otimes_k k(x_i)_{i \in I} \subset K(x_i)_{i \in I} \text{, d'où}$$

$$K \otimes_k L \subset K(x_i)_{i \in I} \otimes_{L_1} \overline{L} . \tag{3.8.1}$$

Nous allons voir que $L_1$ est algébriquement fermé dans $K(x_i)_{i \in I}$. Il résultera alors de l'implication (déjà prouvée) i) ⇒ ii) du théorème (3.6), appliquée à à l'extension $L_1 \to K(x_i)_{i \in I}$ que

$$T = \mathrm{spec}(K(x_i)_{i \in I} \underset{L_1}{\otimes} \bar{L})$$

est irréductible. Comme l'extension $L_1 \to K(x_i)_{i \in I}$ est séparable (3.3), $T$ est réduit (3.3), donc $K(x_i)_{i \in I} \underset{L_1}{\otimes} \bar{L}$ est intègre, et le lemme (3.8) résultera de (3.8.1). Pour prouver que $L_1$ est algébriquement fermé dans $K(x_i)_{i \in I}$, on utilise le lemme suivant.

LEMME 3.9. <u>Soit</u> $k \subset K$ <u>une extension, avec</u> $k$ <u>algébriquement fermé dans</u> $K$. <u>Alors, pour tout ensemble d'indéterminées</u> $(X_i)_{i \in I}$, $k(X_i)_{i \in I}$ <u>est algébriquement fermé dans</u> $K(X_i)_{i \in I}$.

La propriété à démontrer étant de type fini, on peut supposer l'ensemble d'indices fini. Dans ce cas, par une récurrence immédiate, on se ramène à la situation où $I$ est réduit à un élément. On a donc à voir que $k(X)$ est algébriquement fermé dans $K(X)$. Soit

$$\xi = \frac{P(X)}{Q(X)} ,$$

avec $P,Q \in K[X]$ et $Q \neq 0$, un élément de $K(X)$ algébrique sur $k(X)$. On peut supposer $P$ et $Q$ premiers entre eux et $Q$ unitaire. Nous allons alors voir que les coefficients de $P$ et $Q$ sont algébriques sur $k$, ce qui impliquera, vu l'hypothèse, qu'ils appartiennent à $k$. Tout morphisme de $k$-extensions $\sigma$ de $K$ dans $\bar{K}$ se prolonge en un $k(X)$-morphisme $\bar{\sigma}$ de $K(X)$ dans $\bar{K}(X)$ par la formule

$$\bar{\sigma}\left(\frac{U(X)}{V(X)}\right) = \frac{U^{\sigma}(X)}{V^{\sigma}(X)} \quad (U,V \in \bar{K}[X]) ,$$

où, si $Q = q_0+q_1X+\dots+q_mX^m \in \bar{K}[X]$, on pose

$$Q^{\sigma} = \sigma(q_0)+\sigma(q_1)X+\dots+\sigma(q_m)X^m .$$

Comme $\xi$ est algébrique sur $k(X)$ et les $\bar{\sigma}(\xi)$ en sont des conjugués,

$$\{\bar{\sigma}(\xi) \mid \sigma \in \mathrm{Mor}_k(K,\bar{K})\}$$

est fini. Comme

$$\bar{\sigma}(\xi) = \frac{P^{\sigma}(X)}{Q^{\sigma}(X)} ,$$

avec $Q^{\sigma}$ unitaire, et $\mathrm{pgcd}_{\bar{K}}(P^{\sigma},Q^{\sigma}) = 1$ , on voit qu'une égalité

$$\bar{\sigma}_1(\xi) = \bar{\sigma}_2(\xi)$$

implique $P^{\sigma_1} = P^{\sigma_2}$ et $Q^{\sigma_1} = Q^{\sigma_2}$ . Par suite, pour tout coefficient $c$ de $P$ ou $Q$ ,

$$\{\sigma(c) \mid \sigma \in \mathrm{Mor}_k(K,\bar{K})\}$$

est fini, ce qui montre que $c$ est algébrique sur $k$ .

Terminons la preuve du théorème (3.6). Il est clair que iv) $\Rightarrow$ v) . Montrons que v) $\Rightarrow$ i) . Si $K$ contenait une extension séparable finie $k' \neq k$ de $k$ , on aurait

$$k' \otimes_k k' \subset K \otimes_k k' .$$

Or, comme $k'$ est séparable sur $k$ , $K \otimes_k k'$ est réduit, donc intègre vu v) ; l'anneau $k' \otimes_k k'$ serait donc intègre et, puisque fini sur $k$ , serait un corps. Or, cela est absurde, car le morphisme surjectif de $k$ - algèbres

$$\begin{array}{ccc} k' \otimes_k k' & \longrightarrow & k' \\ b \otimes c & \longmapsto & bc \end{array}$$

n'est pas un isomorphisme, vu qu'elles n'ont pas même dimension, en tant qu'espaces vectoriels sur $k$ .

DEFINITION 3.10. <u>Une extension</u> $K$ <u>de</u> $k$ <u>vérifiant les propriétés équivalentes</u> i) <u>à</u> v) <u>est dite primaire</u>.

<u>Extensions universellement intègres.</u>

THEOREME 3.11. <u>Soit</u> $K$ <u>une extension d'un corps</u> $k$ , <u>Les assertions suivantes sont équivalentes</u>.

i) Le corps $k$ est algébriquement fermé dans $K$, et $K$ est séparable sur $k$.

ii) $K \otimes_k \overline{k}$ est un corps.

iii) Il existe une extension algébriquement close $\Omega$ de $k$ telle que $K \otimes_k \Omega$ soit intègre.

iv) Pour toute extension $L$ de $k$, l'anneau $K \otimes_k L$ est intègre.

v) Pour toute extension finie $k'$ de $k$, l'anneau $K \otimes_k k'$ est un corps.

DEFINITION 3.12. Une extension $K$ de $k$ vérifiant les conditions équivalentes i) à v) de (3.11) est dite universellement intègre.

Preuve de 3.11. Montrons i) $\Rightarrow$ iv). L'extension $K$ de $k$ étant primaire (resp. séparable), $\operatorname{spec}(K \otimes_k L)$ est irréductible (3.6 iv)) (resp. réduit (3.3 iii))), d'où l'assertion. Il est clair que iv) $\Rightarrow$ iii) $\Rightarrow$ ii). Montrons que ii) $\Rightarrow$ i). Si ii) est vérifiée, $K \otimes_k \overline{k}$ est réduit, donc (3.3 iv)) $K$ est extension séparable de $k$. Par ailleurs, $K \otimes_k k_s$, sous-anneau de $K \otimes_k \overline{k}$, est intègre, donc (3.6 ii bis) $\Rightarrow$ i)), la fermeture algébrique $k'$ de $k$ dans $K$ est radicielle. Comme sous-extension de l'extension séparable $K$ de $k$, elle est aussi algébrique séparable, d'où $k' = k$. Enfin, l'équivalence de ii) et v) est évidente, compte tenu de ce qu'un anneau intègre entier sur un corps est lui-même un corps.

3.13. Formulaire et propriétés de permanence.

On note $P$ l'une quelconque des propriétés suivantes pour une extension de corps $k \hookrightarrow k'$.

$$
(P)\left\{\begin{array}{ll}
k' & \text{est séparable sur } k \\
k' & \text{est primaire sur } k \\
k & \text{est algébriquement fermé dans } k' \\
k' & \text{est extension universellement intègre de } k .
\end{array}\right.
$$

3.13.1. Soient $K$, $L$, $M$ trois corps, avec $K \subset L \subset M$.

a) Si $K \subset L$ et $L \subset M$ vérifient (P), alors $K \subset M$ vérifie (P).

b) Si $K \subset M$ vérifie (P), alors $K \subset L$ vérifie (P).

c) Si $K \subset M$ est algébrique et vérifie (P), alors $L \subset M$ vérifie (P).

Preuve. Toutes ces assertions sont faciles. Seule l'assertion a) pour la séparabilité mérite une démonstration. Il s'agit de voir que si $N$ est une extension de $M$, l'anneau $M \otimes_k N$ est réduit. Or

$$M \otimes_K N = M \otimes_L (L \otimes_K N) .$$

L'anneau $L \otimes_K N$ est réduit, car $L$ est séparable sur $K$. Par suite, on a un morphisme d'anneaux injectif

$$L \otimes_K N \hookrightarrow \prod_\alpha F_\alpha ,$$

où les $F_\alpha$ sont des corps (par exemple le morphisme canonique de $L \otimes_K N$ dans le produit des corps résiduels de ses idéaux premiers minimaux). D'où

$$M \otimes_K N \hookrightarrow M \otimes_L (\prod_\alpha F_\alpha) \hookrightarrow \prod_\alpha (M \otimes_L F_\alpha) ,$$

et l'anneau de droite est réduit, car $M$ est séparable sur $L$.

Remarque 3.13.2. On ne peut supprimer l'hypothèse que $M$ est algébrique sur $K$ dans c), comme le montrent les exemples suivants.

1) car $k = p > 0$, $k \subset k(T^p) \subset k(T)$, pour "séparable, algébriquement fermé, universellement intègre".

2) car $k = 0$, $m$ entier $\geq 2$, $k \subset k(T^m) \subset k(T)$ pour "primaire".

3.13.3. Soit $K$ une extension d'un corps $k$. On note $k'$ la fermeture algébrique de $k$ dans $K$. Alors, pour tout ensemble $(T_i)_{i \in I}$ d'indéterminées, la fermeture algébrique de $k(T_i)_{i \in I}$ dans $K(T_i)_{i \in I}$ est égale à $k'(T_i)_{i \in I}$. En particulier si $k \subset K$ vérifie (P), $k(T_i)_{i \in I} \subset K(T_i)_{i \in I}$ vérifie également (P).

Preuve. Il est clair que $k'(T_i)_{i \in I}$ est algébrique sur $k(T_i)_{i \in I}$, et le lemme (3.9) montre que $k'(T_i)_{i \in I}$ est algébriquement fermé dans $K(T_i)_{i \in I}$. Le reste de l'assertion en résulte immédiatement, une fois prouvé que si $k \hookrightarrow K$ est séparable, il en est de même de $k(T_i)_{i \in I} \hookrightarrow K(T_i)_{i \in I}$, ce que nous allons voir. Une réunion filtrante d'extensions séparables étant séparable (3.3. ii)), on peut supposer $K$ de type fini sur $k$. Soit alors (3.3. ii)) $t_1, \ldots, t_m$ une base de transcendance séparante de $K$ sur $k$, de sorte que $K$ est finie séparable sur $L = k(t_1, \ldots, t_m)$. Il est clair que $t_1, \ldots, t_m$ est une base de transcendance de $L(T_i)_{i \in I}$ sur $k(T_i)_{i \in I}$. Par ailleurs, si $x$ est un élément primitif de $K$ sur $L$, on a évidemment

$$K(T_i)_{i \in I} = L(T_i)_{i \in I}(x) ,$$

ce qui montre que $K(T_i)_{i \in I}$ est algébrique séparable sur $L(T_i)_{i \in I}$, d'où l'assertion.

3.13.4. Soit $k \subset K$ une extension séparable (resp. primaire, universellement intègre). Si $k \subset L$ est une autre extension, alors, pour tout idéal premier minimal $\mathfrak{p}$ de $K \otimes_k L$, l'extension $L \subset k(\mathfrak{p}) = (K \otimes_k L)_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}(K \otimes_k L)_{\mathfrak{p}}$ est séparable (resp. primaire, resp. universellement intègre).

Remarque. Si $k \subset K$ est primaire, et a fortiori si elle est universellement intègre, l'anneau $K \otimes_k L$ n'a qu'un idéal premier minimal.

Preuve. Si $k \subset K$ est séparable, l'anneau $(K \otimes_k L)_{\mathfrak{p}}$, étant réduit, est un corps. D'où $k(\mathfrak{p}) = (K \otimes_k L)_{\mathfrak{p}}$. Si $M$ est une extension de $L$, l'anneau $k(\mathfrak{p}) \otimes_L M$, localisé de

$$(K \otimes_k L) \otimes_L M = K \otimes_k M ,$$

qui est réduit, car $K$ est séparable sur $k$, et lui-même réduit, d'où l'assertion. Si $k \subset K$ est primaire, avec les notations précédentes, l'anneau $(K \otimes_k L) \otimes_L M = K \otimes_k M$

n'a qu'un idéal premier minimal; il en est donc de même pour son localisé $(K \otimes_k L)_{\mathfrak{p}} \otimes_L M$ , où $\mathfrak{p}$ est l'unique idéal premier minimal de $K \otimes_k L$ , et donc aussi pour $k(\mathfrak{p}) \otimes_k M$ , qui en est un quotient par un idéal formé d'éléments nilpotents. L'assertion pour "universellement intègre" est la conjonction des deux précédentes.

3.13.5. Soit $k$ un corps.

i) Pour que toute extension $k \hookrightarrow K$ soit séparable, il faut et il suffit que $k = k^p$ , i.e. que $k$ soit parfait.

ii) Pour que toute extension $k \hookrightarrow K$ soit primaire, il faut et il suffit que $k = k_s$ , i.e. que $k$ soit séparablement clos.

iii) Pour que toute extension $k \hookrightarrow K$ soit universellement intègre, il faut et il suffit que $k$ soit algébriquement clos.

Preuve. i) $\cup$ ii) $\Rightarrow$ iii) car "parfait + séparablement clos" = algébriquement clos. Montrons i) . Si $k$ est parfait, il résulte aussitôt de 3.3. vii) , en prenant $k = \Omega$ , que toute extension $K$ de $k$ est séparable. Inversement, si toute extension algébrique de $k$ est séparable, $k$ est parfait. L'assertion ii) est immédiate au vu de 3.6. i) .

## 4 - CONSTRUCTIBILITE DE CERTAINES PROPRIETES GEOMETRIQUES.

DEFINITION 4.1. Soient $k$ un corps et $X$ un $k$-schéma. On dit que $X$ est géométriquement réduit (resp. géométriquement irréductible, géométriquement intègre, géométriquement connexe) si et seulement si $X \otimes_k \bar{k}$ est réduit (resp. irréductible, intègre, connexe) .

Nous allons préciser ces notions dans chacun des cas.

PROPOSITION 4.2. Soient $k$ un corps et $X$ un $k$-schéma. Les assertions suivantes sont équivalentes.

i) $X$ est géométriquement réduit.

ii) $X$ est réduit et, pour tout point maximal $x$ de $X$ , $k(x)$ est une extension séparable de $k$ .

iii) *Il existe une extension parfaite* $\Omega$ *de* $k$ *telle que* $X \otimes_k \Omega$ *soit réduit.*

iv) *Pour toute extension* $L$ *de* $k$ , $X \otimes_k L$ *est réduit.*

v) $X \otimes_k k^{1/p}$ *est réduit.*

vi) *Pour toute extension radicielle finie* $L$ *de* $k$ , $X \otimes_k L$ *est réduit.*

*Preuve.* Toutes ces assertions étant locales pour la topologie de Zariski, on peut supposer que $X = \operatorname{spec} A$ , avec $A$ une $k$-algèbre. Si $A \otimes_k \bar{k}$ est réduit, son sous-anneau $A$ est réduit ; si $x$ est un point maximal de $A$ , on a donc $k(x) = A_x$ , et $k(x) \otimes_k \bar{k}$ , localisé de $A \otimes_k \bar{k}$ , est réduit, d'où (3.3 iv)) $k(x)$ est séparable sur $k$ . Montrons ii) $\Rightarrow$ i) . Comme $A$ est réduit, notant $x_i (i \in I)$ ses points maximaux, le morphisme d'anneaux canonique

$$A \to \prod_i k(x_i)$$

est injectif, d'où

$$A \otimes_k \bar{k} \hookrightarrow (\prod_i k(x_i)) \otimes_k \bar{k} \hookrightarrow \prod_i (k(x_i) \otimes_k \bar{k}) ,$$

et le terme de droite est réduit, car les $k(x_i)$ sont séparables sur $k$ . Si ii) est vérifiée, alors, pour pour toute extension $L$ de $k$ , on a de même

$$A \otimes_k L \hookrightarrow \prod_i (k(x_i) \otimes_k L) ,$$

donc (3.3. iii)) , $A \otimes_k L$ est réduit. Inversement, si pour une extension $L$ de $k$ , $A \otimes_k L$ est réduit, $A$ , qui en est un sous-anneau, est réduit, et, pour tout point maximal $x$ de $\operatorname{spec} A$ , $k(x) \otimes_k L$ , localisé de $A \otimes_k L$ , est également réduit. L'équivalence de l'une quelconque des assertions iii) à vi) avec ii) résulte donc des diverses caractérisations des extensions séparables données en (3.3) .

PROPOSITION 4.3. *Soient* $k$ *un corps et* $X$ *un* $k$-*schéma. Les assertions suivantes sont équivalentes.*

i) $X$ *est géométriquement irréductible.*

ii) $X$ *est irréductible et, notant* $\eta$ *son point générique,* $k(\eta)$ *est extension primaire de* $k$ .

iii) Il existe une extension séparablement close $\Omega$ de $k$ telle que $X \otimes_k \Omega$ soit irréductible.

iv) Pour toute extension $L$ de $k$, $X \otimes_k L$ est irréductible.

v) Pour toute extension séparable finie $k'$ de $k$, $X \otimes_k k'$ est irréductible.

Preuve. Montrons i) $\Rightarrow$ ii) . Le morphisme canonique $X \otimes_k \bar{k} \to X$ , fidèlement plat, est surjectif. Donc, si $X \otimes_k \bar{k}$ est irréductible, $X$ l'est également. De plus, si $U = \operatorname{spec} A$ est un ouvert non vide de $X$ , l'anneau $A \otimes_k \bar{k}$ n'a qu'un idéal premier minimal ; il en est donc de même pour $k(\eta) \otimes_k \bar{k}$ , qui est un localisé de $A_{\text{réd}} \otimes_k \bar{k}$ . On conclut par 3.6 iii) . Montrons ii) $\Rightarrow$ i) . Tout ouvert affine $U = \operatorname{spec} A$ de $X$ est irréductible et $A_{\text{réd}} \otimes_k \bar{k} \hookrightarrow k(\eta) \otimes_k \bar{k}$ n'a qu'un idéal premier minimal, donc $U \times_k \bar{k}$ est irréductible. On conclut grâce au lemme immédiat suivant, appliqué à $X \times_k \bar{k}$ .

LEMME 4.4. Soient $Y$ un schéma et $(V_j)_{j \in J}$ un recouvrement ouvert de $Y$ par des ouverts irréductibles ayant deux à deux une intersection non vide. Alors $Y$ est irréductible.

Prouvons le lemme. Fixons $V_o$ l'un des $V_j$ . Si $U$ est un ouvert non vide de $Y$ , il existe un $j$ tel que $U \cap V_j \neq \emptyset$ . Comme $V_o \cap V_j \neq \emptyset$ et $V_j$ est irréductible, il en résulte que

$$U \cap V_o \supset (U \cap V_j) \cap (V_o \cap V_j) \neq \emptyset .$$

Si $U$ et $U'$ sont deux ouverts non vides de $Y$ , l'irréductibilité de $V_o$ montre de même que

$$U \cap U' \supset (U \cap V_o) \cap (U' \cap V_o) \neq \emptyset ,$$

d'où le lemme.

L'argument utilisé pour prouver ii) $\Rightarrow$ i) , appliqué à $L$ au lieu de $\bar{k}$ , montre que ii) $\Rightarrow$ iv) , donc que ii) implique l'une quelconque des assertions iii) à v) .

Inversement, si $L$ est un corps tel que $X \otimes_k L$ soit irréductible, alors $X$ est irréductible ($X \otimes_k L \to X$ est surjectif) et, si $U = \operatorname{spec} A$ est un ouvert affine non vide de $X$, $\operatorname{spec}(A \otimes_k L)$ est irréductible, donc aussi $\operatorname{spec}(k(\eta) \otimes_k L)$, car $k(\eta) \otimes_k L$ est un localisé de $A_{\text{réd}} \otimes_k L$. Utilisant (3.6), on en déduit que n'importe laquelle des assertions iii) à v) implique ii).

PROPOSITION 4.5. Soient $k$ un corps, et $X$ un $k$-schéma. Les assertions suivantes sont équivalentes.

i) $X$ est géométriquement intègre.

ii) $X$ est intègre et, notant $\eta$ son point générique, $k(\eta)$ est une extension universellement intègre de $k$.

iii) Il existe une extension algébriquement close $\Omega$ de $k$ telle que $X \otimes_k \Omega$ soit intègre.

iv) Pour toute extension $L$ de $k$, $X \otimes_k L$ est intègre.

v) Pour toute extension finie $k'$ de $k$, $X \otimes_k k'$ est intègre.

Preuve. Conjonction de (4.2) et (4.3).

PROPOSITION 4.6. Soient $k$ un corps et $X$ un $k$-schéma. Les assertions suivantes sont équivalentes.

i) $X$ est géométriquement connexe.

ii) Il existe une extension séparablement close $\Omega$ de $k$ telle que $X \otimes_k \Omega$ soit connexe.

iii) Pour toute extension $L$ de $k$, $X \otimes_k L$ est connexe.

iv) ($X$ de type fini sur $k$). Pour toute extension séparable finie $k'$ de $k$, $X \otimes_k k'$ est connexe.

Preuve. i) $\Rightarrow$ ii) est clair. Montrons ii) $\Rightarrow$ iii). Soit $\Omega'$ un corps contenant $L$ et $\Omega$. Comme le morphisme canonique (fidèlement plat)

$$X \otimes_k \Omega' \to X \otimes_k L$$

est surjectif, il suffit de voir que $X \underset{k}{\otimes} \Omega'$ est connexe. Pour cela, on observe que le morphisme canonique

$$(4.6.1) \qquad \varphi : X \underset{k}{\otimes} \Omega' \to X \underset{k}{\otimes} \Omega$$

est ouvert (2.8) , surjectif, et que ses fibres, de la forme

$$\operatorname{spec}(k(\xi) \underset{\Omega}{\otimes} \Omega') \ , \quad \text{avec} \quad \xi \in X \underset{k}{\otimes} \Omega \ ,$$

sont irréductibles (3.6 iv)) , donc connexes. Comme $X \underset{k}{\otimes} \Omega$ est connexe, on en déduit que $X \underset{k}{\otimes} \Omega'$ l'est également. Il est clair que iii) $\Rightarrow$ iv) . Montrons iv) $\Rightarrow$ i) . Supposons par l'absurde que $X \underset{k}{\otimes} \overline{k}$ soit réunion de deux fermés disjoints $Y$ et $Z$ . Soit $X = U_1 \cup \ldots \cup U_r$ un recouvrement ouvert fini de $X$ , avec $U_i = \operatorname{spec} A_i$ , où $A_i$ est une $k$-algèbre de type fini. Pour tout $i$ , $Y \cap (U_i \underset{k}{\otimes} \overline{k})$ est défini dans $U_i \underset{k}{\otimes} \overline{k}$ par un nombre fini d'équations polynomiales à coefficients dans $\overline{k}$ ; de même pour $Z \cap (U_i \underset{k}{\otimes} \overline{k})$ . Si $k_1$ est l'extension finie de $k$ engendrée par les coefficients de toutes ces équations, il est alors clair que $Y$ et $Z$ sont "définis sur $k_1$" , i.e. qu'il existe des sous-schémas fermés $Y_1$ et $Z_1$ de $X \underset{k}{\otimes} k_1$ tels que, notant $h$ le morphisme canonique, surjectif

$$X \underset{k}{\otimes} \overline{k} \to X \underset{k}{\otimes} k_1 \ ,$$

$Y = h^{-1}(Y_1)$ et $Z = h^{-1}(Z_1)$ . Par suite, $X \underset{k}{\otimes} k_1$ n'est pas connexe. Le corps $k_1$ est radiciel sur une extension séparable finie $k'$ de $k$ , de sorte que le morphisme canonique

$$X \underset{k}{\otimes} k_1 \to X \underset{k}{\otimes} k'$$

est un homéomorphisme ; donc $X \underset{k}{\otimes} k'$ n'est pas connexe, en contradiction avec l'hypothèse.

Propriétés de permanence.

On note $P$ l'une des propriétés suivantes pour un $k$ - schéma et $GP$ la propriété géométrique correspondante.

$$P \left\{ \begin{array}{l} \text{réduit} \\ \text{irréductible} \\ \text{intègre} \\ \text{connexe} \end{array} \right. \qquad GP \left\{ \begin{array}{l} \text{géométriquement réduit} \\ \text{géométriquement irréductible} \\ \text{géométriquement intègre} \\ \text{géométriquement connexe} \end{array} \right.$$

4.7. <u>Soient</u> $X$ <u>et</u> $Y$ <u>deux</u> $k$-<u>schémas. On suppose que</u> $X$ <u>vérifie</u> (GP) . <u>Alors</u>, <u>si</u> $Y$ <u>vérifie</u> (P) (<u>resp</u>. (GP)) , <u>le produit</u> $X \times_k Y$ <u>vérifie</u> (P) (<u>resp</u>. (GP)) .

4.8. <u>Soit</u> $f : X \to Y$ <u>un morphisme dominant de</u> $k$-<u>schémas</u>. <u>Si</u> $X$ <u>vérifie</u> (GP) <u>et</u> $Y$ <u>vérifie</u> (P) , <u>alors</u> $Y$ <u>vérifie</u> (GP) .

<u>Preuve</u>. Montrons d'abord (4.8) . Pour les trois premières propriétés, cela résulte immédiatement des caractérisations en termes de points maximaux. Si $y$ est un point maximal de $y$ et $x$ un point maximal de $X$ au-dessus de $y$ , on a

$$k \subset k(y) \subset k(x) .$$

Si $k(x)$ est séparable (resp. primaire, universellement intègre) sur $k$ , il en est de même pour $k(y)$ (3.13) , d'où l'assertion. Pour la connexité, cela résulte du lemme plus général, et utile, suivant.

LEMME 4.9. <u>Soit</u> $f : X \to Y$ <u>un morphisme de schémas. Si</u> $X$ <u>est non vide et géométriquement connexe, et</u> $Y$ <u>connexe</u>, <u>alors</u> $Y$ <u>est géométriquement connexe</u>.

On a un diagramme commutatif canonique

$$(4.9.1) \qquad \begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ {\scriptstyle h_X}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle h_Y} \\ X \otimes_k \bar{k} & \xrightarrow{\bar{f}} & Y \otimes_k \bar{k} \end{array}$$

dans lequel $h_X$ et $h_Y$ sont ouverts (2.8) , fermés (car entiers) et surjectifs. Si $U$ est une partie non vide à la fois ouverte et fermée de $Y \otimes_k \bar{k}$ , $h_Y(U)$ est à la fois ouvert et fermé dans $Y$ , donc ($Y$ est connexe) $Y = h_Y(U)$ . En particulier, $f(X) \subset h_Y(U)$ , donc

(4.9.2) $$\bar{f}^{-1}(U) \neq \emptyset .$$

On en déduit que $Y$ ne peut être somme disjointe de deux parties non vides à la fois ouvertes et fermées $U_1$ et $U_2$, car on déduirait de (4.3.2)

$$X \underset{k}{\otimes} \bar{k} = \bar{f}^{-1}(U_1) \coprod \bar{f}^{-1}(U_2) ,$$

avec $\bar{f}^{-1}(U_1) \neq \emptyset$, $\bar{f}^{-1}(U_2) \neq \emptyset$, en contradiction avec le fait que $X \underset{k}{\otimes} \bar{k}$ est connexe.

Montrons (4.7). Lorsque $P$ = réduction, l'assertion est locale, et on peut supposer $X = \operatorname{spec} A$, $Y = \operatorname{spec} B$. Alors, notant $(x_i)_{i \in I}$ et $(y_j)_{j \in J}$ les points maximaux de $A$ et $B$ respectivement, on a

$$A \hookrightarrow \prod_{i \in I} k(x_i) , \quad B \hookrightarrow \prod_{j \in J} k(y_j) ,$$

d'où

(4.7.1) $$A \underset{k}{\otimes} B \subset (\prod_{i \in I} k(x_i)) \underset{k}{\otimes} (\prod_{j \in J} k(y_j)) \subset \prod_{\substack{i \in I \\ j \in J}} (k(x_i) \underset{k}{\otimes} k(y_j)) .$$

Les $k(x_i)$ étant séparables sur $k$, les $k(x_i) \underset{k}{\otimes} k(y_j)$ sont réduits, donc $A \underset{k}{\otimes} B$ est réduit. Si $B \underset{k}{\otimes} \bar{k}$ est réduit,

$$(A \underset{k}{\otimes} B) \underset{k}{\otimes} \bar{k} = (A \underset{k}{\otimes} \bar{k}) \underset{\bar{k}}{\otimes} (B \underset{k}{\otimes} \bar{k})$$

est réduit, en appliquant le résultat précédent aux $\bar{k}$ - algèbres réduites $A \underset{k}{\otimes} \bar{k}$ et $B \underset{k}{\otimes} \bar{k}$. Lorsque $P$ = irréductibilité, on se ramène à nouveau au cas affine en utilisant (4.4) : $X = \operatorname{spec} A$, $Y = \operatorname{spec} B$. Notant $\xi$ et $\eta$ les points génériques respectifs de $A$ et $B$, on a

$$A_{réd} \subset k(\xi) , \quad B_{réd} \subset k(\eta)$$

d'où

(4.7.2) $$A_{réd} \underset{k}{\otimes} B_{réd} \subset k(\xi) \underset{k}{\otimes} k(\eta) .$$

D'après (4.3), $k(\xi)$ est extension primaire de $k$, donc (3.6), $k(\xi) \otimes_k k(\eta)$ a un spectre irréductible, et par suite $X \times_k Y$ est irréductible, d'après (4.7.2). Par ailleurs

$$(X \times_k Y) \otimes_k \bar{k} = (X \otimes_k \bar{k}) \times_k (Y \otimes_k \bar{k}) ,$$

donc, d'après ce qui précède appliqué à $\bar{k}$ au lieu de $k$, $(X \times Y) \otimes_k \bar{k}$ est irréductible lorsque $X \otimes_k \bar{k}$ et $Y \otimes_k \bar{k}$ le sont.

Les assertions concernant l'intégrité sont la conjonction des deux précédentes.

Pour la connexité, il suffit, comme précédemment, de prouver la première assertion.

La deuxième projection

$$X \times_k Y \to Y$$

est ouverte (2.8) et surjective. Ses fibres, de la forme $X \otimes_k k(y)$ $(y \in Y)$, sont connexes par hypothèse. Donc, $Y$ étant connexe, $X \times_k Y$ l'est.

L'objet principal de ce paragraphe est de démontrer le théorème suivant.

THEOREME 4.10. <u>Soit</u> $f : X \to Y$ <u>un morphisme de type fini entre schémas noethériens</u>. <u>Alors, l'ensemble de</u> $y \in Y$ <u>dont la fibre</u> $f^{-1}(y)$ <u>est</u>

- <u>géométriquement réduite</u>
- <u>resp. géométriquement irréductible</u>
- <u>resp. géométriquement intègre</u>
- <u>resp. géométriquement connexe</u>

<u>est constructible dans</u> $Y$.

<u>Preuve</u>. Soit $E$ l'un quelconque de ces ensembles. Pour montrer que $E$ ou $Y \dot{-} E$ est semi-constructible (1.5), on se ramène au cas où $Y$ est intègre, et même affine. Alors le lemme suivant va permettre de simplifier la situation.

LEMME 4.11. <u>Soient</u> $k$ <u>un corps et</u> $X$ <u>un</u> $k$-<u>schéma de type fini</u>. <u>Il existe une extension finie</u> $k'$ <u>de</u> $k$ <u>telle que</u>

i) $(X \underset{k}{\otimes} k')_{\text{réd}}$ <u>soit géométriquement réduit,</u>

ii) <u>les composantes irréductibles de</u> $X \underset{k}{\otimes} k'$ <u>soient géométriquement intègres,</u>

iii) <u>les composantes connexes de</u> $X \underset{k}{\otimes} k'$ <u>soient géométriquement connexes.</u>

Prouvons le lemme. Soient $T_1, \ldots, T_r$ les composantes irréductibles de $X \underset{k}{\otimes} \bar{k}$, munies de leur structure réduite. Comme $X$ est de type fini sur $k$, il existe (cf. la preuve de 4.6. iv)) une sous-extension $k' \subset \bar{k}$ de type fini, donc finie, de $k$, et des sous-schémas $Y_1, \ldots, Y_r$ de $X \underset{k}{\otimes} k'$ tels que, notant $\varphi$ la projection canonique

$$\varphi : X \underset{k}{\otimes} \bar{k} \to X \underset{k}{\otimes} k' ,$$

on ait

(4.11.1) $\qquad \varphi^{-1}(Y_i) = T_i \quad (1 \leq i \leq r)$ (schématiquement) .

Le morphisme $\varphi$, entier et dominant, est surjectif donc il résulte de (4.11.1) que $Y_i = \varphi(T_i)$ est irréductible ; de plus, il est clair que les $Y_i$ sont réduits, et par suite les $Y_i$ sont les composantes irréductibles de $X \underset{k}{\otimes} k'$. Elles sont géométriquement intègres par (4.11.1), d'où ii) . Si $I_1, \ldots, I_r$ désignent les idéaux définissant $Y_1, \ldots, Y_r$ dans $X \underset{k}{\otimes} k'$, on a

$$(\mathcal{O}_{X \underset{k}{\otimes} k'})_{\text{réd}} = \mathcal{O}_{X \underset{k}{\otimes} k'} / I_1 \cap \ldots \cap I_r ,$$

d'où

(4.11.2) $\qquad \varphi^*((\mathcal{O}_{X \underset{k}{\otimes} k'})_{\text{réd}}) = \mathcal{O}_{X \underset{k}{\otimes} \bar{k}} / (I_1 \cap \ldots \cap I_r) \underset{k'}{\otimes} \bar{k}$ .

Or (4.11.1), notant $J_i$ l'idéal de $T_i$ dans $X \underset{k}{\otimes} \bar{k}$, on a

$$J_i = I_i \underset{k}{\otimes} \bar{k} ,$$

d'où, par (4.11.2) ,

$$\varphi^*((\mathcal{O}_{X \underset{k}{\otimes} k'})_{\text{réd}}) = \mathcal{O}_{X \underset{k}{\otimes} \bar{k}} / (J_1 \cap \ldots \cap J_r) = (\mathcal{O}_{X \underset{k}{\otimes} \bar{k}})_{\text{réd}} ,$$

ce qui implique i) . Enfin, toute composante connexe $C$ de $X \underset{k}{\otimes} k'$ contient une composante irréductible $Y_i$ , qui est géométriquement irréductible, et le lemme (4.9) montre alors que $C$ est géométriquement connexe, d'où iii) .

Revenons au théorème 4.10. Supposons $Y = \mathrm{spec}\, A$ , avec $A$ noethérien intègre de corps des fractions $K$ . Soit $K'$ une extension finie de $K$ telle que $X_K \underset{K}{\otimes} K'$ vérifie les propriétés indiquées en (4.11) , et soit $A'$ une $A$-algèbre de type fini de corps des fractions $K'$ , par exemple engendrée sur $A$ par une base de $K'$ sur $K$ . Par le théorème de normalisation de Noether (2.1) , on peut, quitte à remplacer $A$ par un localisé $A_t$ , supposer même $A'$ finie sur $A$ . Posons alors $Y' = \mathrm{spec}\, A'$ , et $X' = X \underset{Y}{\times} Y'$ , d'où un diagramme cartésien

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "f'"'] & X \arrow[d, "f"] \\ Y' \arrow[r, "\alpha"] & Y \end{tikzcd}$$

avec $\alpha$ fini et dominant, donc surjectif. Si $y' \in Y'$ et $y = \alpha(y')$ , on a $\overline{k(y)} = \overline{k(y')}$ et

$$f^{-1}(y) \underset{k(y)}{\otimes} \overline{k(y)} = f'^{-1}(y') \underset{k(y')}{\otimes} \overline{k(y')} ,$$

autrement dit $y$ et $y'$ ont même fibre géométrique. Si $E$ est l'un des ensembles de (4.10) , et $E'$ l'ensemble correspondant pour $f'$ , il résulte alors du théorème de constructibilité de Chevalley que, pour que $E$ (resp. $Y \div E$) contienne un ouvert non vide de $Y$ , il faut et il suffit que $E'$ (resp. $Y' \div E'$) contienne un ouvert non vide de $Y'$ . On peut donc, pour démontrer (4.10) supposer que

(4.10.1)
1) $Y = \mathrm{spec}\, A$ , avec $A$ noethérien intègre, de corps des fractions $K$ .
2) $(X_K)_{\text{réd}} = (X_{\text{réd}})_K$ est géométriquement réduit.
3) les composantes irréductibles de $X_K$ sont géométriquement intègres.
4) les composantes connexes de $X_K$ sont géométriquement connexes.

Dans ce cas une partie de l'assertion est assez claire. Si $Y \div E$ contient le point générique de $Y$ , il résulte de (4.10.1) que, selon le cas, $X_K$ n'est pas réduit (resp. irréductible, resp. intègre, resp. connexe) . Alors (fin du paragraphe 2) il existe un ouvert non vide $U$ de $Y$ tel que, pour $y \in Y$ , $f^{-1}(y)$ ne soit pas réduit (resp....) et a fortiori pas géométriquement réduit (resp...) . Il reste donc à démontrer que, sous les hypothèses (4.10.1) , si la fibre générique est géométriquement réduite (resp....) , il en est de même pour les fibres d'un ouvert non vide de $Y$ .

Commençons par l'<u>intégrité géométrique</u>. Si $X_K$ est géométriquement intègre, donc intègre, on peut supposer $X$ intègre : si $I$ est l'idéal de $X_{réd}$ , on a $I_K = 0$ , donc, $I$ étant de type fini, il existe $a \neq 0$ dans $A$ tel que $I_a = 0$ ; par ailleurs, $\overline{X}_K$ contient la fibre générique de $f$ donc, par le théorème de Chevalley, on peut, quitte à restreindre $Y$ , supposer que $X = \overline{X}_K$ , donc que $X$ est irréductible. Alors, nous allons voir que, pour prouver l'assertion, on peut remplacer $X$ par un ouvert non vide $U$ . Si $X_K$ est géométriquement intègre, il en est de même de $U_K$ . Posons $Z = X \dot{-} U$ , et notons $g = f|U$ , $h = f|Z$ .

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, hook] \arrow[dr, "g"'] & X \arrow[d, "f"] & Z \arrow[l, hook'] \arrow[dl, "h"] \\ & Y & \end{tikzcd}$$

Supposons qu'il existe un ouvert non vide $\Omega$ de $Y$ tel que, pour tout $y \in \Omega$ , $g^{-1}(y)$ soit intègre. Posant $d = \dim(X_K)$ et $d' = \dim(Z_K) < d$ . Quitte à rapetisser $\Omega$ , on peut supposer (2.4) que

$$\begin{cases} f^{-1}(y) \text{ et } g^{-1}(y) \text{ sont purement de dimension } d & (y \in \Omega) \\ h^{-1}(y) \text{ est de dimension } \leq d' & (y \in \Omega) , \end{cases}$$

d'où résulte aussitôt, vu l'irréductibilité de $g^{-1}(y)$, que $f^{-1}(y)$ est irréductible, pour $y \in \Omega$ . Il reste à voir qu'on peut rapetisser $\Omega$ de telle sorte que les $f^{-1}(y)$ soient réduits. Nous utiliserons pour cela les deux lemmes suivants.

LEMME 4.12. <u>Soit</u> $f : X \to Y$ <u>un morphisme de type fini entre schémas noethériens, avec</u> $Y$ <u>intègre et</u> $X$ <u>réduit. Alors il existe un ouvert non vide</u> $V$ <u>de</u> $Y$ <u>tel que, pour</u> $y \in V$ , $f^{-1}(y)$ <u>n'ait pas de composantes immergées</u>.

[On rappelle qu'une composante immergée d'un schéma noethérien est une partie fermée irréductible $\overline{\{x\}}$ dont le point générique $x$ est tel que $\mathfrak{m}_{X,x}$ soit associé à $\mathcal{O}_{X,X}$ , mais qui n'est pas une composante irréductible. Lorsque le schéma est de la forme $\mathrm{spec}(C)$ , dire que $\mathrm{spec}(C)$ n'a pas de composantes immergées, c'est dire que les seuls idéaux premiers associés à $C$ sont de hauteur $0$ ] .

LEMME 4.13. <u>Soit</u> $X$ <u>un schéma noethérien. Les assertions suivantes sont équivalentes</u> :

i) $X$ <u>est réduit</u>.

ii) $X$ <u>n'a pas de composantes immergées et, pour tout point maximal</u> $x$ <u>de</u> $X$ , <u>l'anneau</u> $\mathcal{O}_{X,x}$ <u>est un corps</u>.

Les lemmes impliquent qu'on peut rapetisser $\Omega$ comme indiqué. En effet, par (4.12) , on peut le faire en sorte que les $f^{-1}(y)$ soient sans composante immergée. Par ailleurs, $f^{-1}(y)$ est irréductible et, au voisinage de son point générique $\xi$ , coïncide avec $g^{-1}(y)$ , donc $\mathcal{O}_{f^{-1}(y),\xi}$ est intègre. Le lemme (4.13) permet alors de conclure.

Montrons (4.12) . C'est une assertion locale sur $X$ et $Y$ . On peut donc supposer $f$ défini par une $A$-algèbre de type finie $B$ , avec $A$ intègre et $B$ réduit. Notant $\mathfrak{p}_i$ $(1 \le i \le r)$ les idéaux minimaux de $B$ , et posant $C_i = B/\mathfrak{p}_i$ , on a

(4.12.1) $$B \hookrightarrow \prod_{i=1}^{r} C_i \ .$$

Le théorème de platitude générique implique (2.6) qu'on peut remplacer $A$ par un localisé $A_f$ $(f \neq 0)$ , de sorte que, pour $\mathfrak{p} \in \mathrm{spec}\, A$ , le morphisme

$$B \underset{A}{\otimes} k(\mathfrak{p}) \to \prod_{i=1}^{r} (C_i \underset{A}{\otimes} k(\mathfrak{p}))$$

soit injectif. Cela permet, quitte à remplacer B par l'un des $C_i$ , de supposer B intègre. Alors, le théorème de normalisation de Noether (2.1) montre que, quitte à localiser à nouveau sur spec A , on peut supposer que

$$A \subset D \subset B \qquad (D = A[X_1,\dots,X_m]) ,$$

avec B une D-algèbre finie et, bien sûr, sans torsion. On a par suite une application D-linéaire injective

$$B \hookrightarrow D^t \qquad (t \in \mathbb{N}) . \tag{4.12.2}$$

Le théorème de platitude générique appliqué à D implique alors (2.6) que, quitte à rapetisser de nouveau spec A , on peut supposer que les applications $D \otimes_A k(\mathfrak{p})$ - linéaires

$$B \otimes_A k(\mathfrak{p}) \to [D \otimes_A k(\mathfrak{p})]^t$$

déduites de (4.12.2) sont injectives. Par suite, $B \otimes_A k(\mathfrak{p})$ , qui est un $D \otimes_A k(\mathfrak{p})$ - module sans torsion et de type fini, ne saurait avoir, en tant que module sur lui-même, d'idéal premier associé de hauteur > 0 (utiliser le théorème de Cohen-Seidenberg par exemple).

Montrons (4.13) . L'énoncé étant de nature locale, il s'agit de voir l'équivalence, par un anneau noethérien A , entre les assertions suivantes .

i)' A <u>est réduit</u> .

ii)' <u>Tout idéal premier associé à</u> A <u>est de hauteur</u> 0 <u>et, pour tout idéal premier</u> $\mathfrak{p}$ <u>de hauteur</u> 0 , $A_{\mathfrak{p}}$ <u>est un corps</u>.

Montrons i)' ⇒ ii)' . Si $\mathfrak{p}$ est associé à A , on a une injection A-linéaire $A/\mathfrak{p} \hookrightarrow A$ , d'où, par localisation, une injection $A_{\mathfrak{p}}$ - linéaire

$$k(\mathfrak{p}) \hookrightarrow A_{\mathfrak{p}} . \tag{4.13.1}$$

Notons $x \in A_{\mathfrak{p}}$ l'image de 1 par (4.13.1) . Si $h(\mathfrak{p}) > 0$ , x ne saurait être inversible dans $A_{\mathfrak{p}}$ , sinon on déduirait de (4.13.1) que $A_{\mathfrak{p}} \simeq k(\mathfrak{p})$ serait un corps. Donc $h(\mathfrak{p}) > 0$ impliquerait $x \in \mathfrak{p} A_{\mathfrak{p}}$ et par suite $x^2 = 0$ , en contradiction avec le fait que $A_{\mathfrak{p}}$ est réduit. D'autre part, si $h(\mathfrak{p}) = 0$ , $A_{\mathfrak{p}}$ , qui est réduit, est nécessairement un corps, car $\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}$ est la racine de $A_{\mathfrak{p}}$ . Montrons ii)' $\Rightarrow$ i)' . Soient $\mathfrak{p}_i$ $(1 \leq i \leq r)$ les idéaux premiers minimaux de $A$ , et notons $\mathfrak{a}$ le noyau de l'application canonique

$$A \to \prod_{i=1}^{r} (A/\mathfrak{p}_i) \ . \tag{4.13.2}$$

Supposons par l'absurde que $\mathfrak{a} \neq 0$ , et soit $\mathfrak{p}$ un idéal premier associé à $\mathfrak{a}$ . Alors $\mathfrak{p}$ , associé à $A$ , est de hauteur $0$ par hypothèse, donc égal à l'un des $\mathfrak{p}_i$ , par exemple $\mathfrak{p}_1$ . Mais il est clair que (4.13.2) fournit, par localisation par $\mathfrak{p}_1$ , la projection canonique

$$A_{\mathfrak{p}_1} \to k(\mathfrak{p}_1) \ ,$$

qui est un isomorphisme par hypothèse, d'où $\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}_1} = 0$ , en contradiction avec le fait qu'on a $k(\mathfrak{p}_1) \hookrightarrow \mathfrak{a}_{\mathfrak{p}_1}$ , puisque $\mathfrak{p}_1$ est associé à $\mathfrak{a}$ .

Nous savons donc que, pour l'intégrité géométrique, on peut remplacer $X$ , supposé intègre, par un ouvert non vide. Ceci dit, comme $X_K$ est en particulier géométriquement réduit sur $K$ , le corps $L$ des fonctions rationnelles sur $X$ est extension séparable de $K$ , donc admet une base de transcendance séparable sur $K$ . On a

$$L \supset K(t_1,\ldots,t_r) \supset K$$

avec $L$ extension séparable finie de $K(t_1,\ldots,t_r)$ . Soit $\xi$ est un élément primitif de cette extension, et $f \in K(t_1,\ldots,t_r)[T]$ son polynôme minimal. Quitte à faire des simplifications évidentes, on peut supposer que $f$ est un élément premier de $K[t_1,\ldots,t_r,T]$ , puis, quitte à inverser dans $A$ le produit des dénominateurs qui interviennent dans l'expression de $A$ que

$$f \in A\,[t_1,\ldots,t_r,T] \ .$$

Le noyau $\mathfrak{a}$ du morphisme d'anneaux canonique

(4.10.2) $\quad C = A[t_1,\ldots,t_r,T]/_{(f)} \to K[t_1,\ldots,t_r,T]/_{(f)} = C \underset{A}{\otimes} K$

est un idéal de type fini de $C$ et vérifie $\mathfrak{a}_K = 0$ . On en déduit que, quitte à inverser un élément de $A$ , on peut supposer (4.10.2) injectif, donc $C$ est intègre. Soit maintenant $V$ un ouvert de $X$ de la forme spec $B$ , où $B$ est une $A$-algèbre de type fini, avec $B$ intègre, car $X$ l'est. Les deux $A$-algèbres $B$ et $C$ ont même corps des fractions, donc le lemme (4.14) ci-dessous montre qu'il existe un ouvert non vide de spec $C$ qui est isomorphe au-dessus de spec$(A)$ à un ouvert non vide de spec$(B)$ , donc de $X$ . Ceci montre donc qu'on peut, pour la question de l'intégrité géométrique, remplacer le morphisme du type initial par un morphisme

(4.10.3) $$\operatorname{spec} A[T_1,\ldots,T_n]/_{(f)} \to \operatorname{spec} A\ ,$$

où $f$ est irréductible dans $\overline{K}\,[T_1,\ldots,T_n]$ . On peut même supposer, quitte à localiser sur $A$ , que le coefficient de l'un des monômes de degré maximum de $f$ est inversible dans $A$ .

LEMME 4.14. Soient $L$ un corps, $A$, $B$, et $C$ trois sous-anneaux de $L$ , avec

$$\begin{array}{ccccc} & & B & & \\ & \subset & & \subset & \\ A & & & & L \\ & \subset & & \subset & \\ & & C & & \end{array}$$

On suppose que $B$ et $C$ sont des $A$-algèbres de type fini, de corps des fractions $L$ . Il existe alors deux ouverts non vides $V$ et $W$ de spec $B$ et spec $C$ respectivement et un spec $A$-isomorphisme $V \simeq W$ .

Montrons (4.14) . Si $B = A[x_1,\ldots,x_n]$ , $C = A[y_1,\ldots,y_n]$ $(x_i \in L,\ y_j \in L)$ , alors $D = A[x_1,\ldots x_m, y_1,\ldots,y_n]$ contient à la fois $B$ et $C$ . On peut donc, pour prouver le lemme supposer $B \subset C$ . Alors

$$C = B[y_1,\ldots,y_n]\ ,$$

avec $y_i = z_i/b_i$ $\quad (b_i \in B\ ,\ b_i \neq 0\ )$ , car $L$ est le corps des fractions de $B$ .

Posant $b = b_1 b_2 \dots b_n$ , il est clair que

$$B[1/b] = C[1/b] ,$$

d'où l'assertion.

Convenant de dire qu'un polynôme $f \in k[T_1,\dots,T_n]$ ($k$ un corps) non nul est <u>géométriquement irréductible</u>, s'il est irréductible dans $\bar{k}[T_1,\dots,T_n]$ , on aura terminé pour les questions d'intégrité géométrique si on prouve le lemme suivant.

LEMME 4.15. <u>Soient</u> $A$ <u>un anneau, et</u> $f \in A[T_1,\dots,T_n]$ . <u>On suppose que l'un des coefficients d'un des monômes de degré maximum de</u> $f$ <u>est inversible dans</u> $A$ , <u>de sorte que, en particulier, pour tout</u> $\mathfrak{p} \in \operatorname{spec} A$ , <u>la classe</u> $f_{\mathfrak{p}}$ <u>de</u> $f$ <u>dans</u> $k(\mathfrak{p})[T_1,\dots,T_n]$ <u>a même degré que</u> $f$ . <u>Alors</u>

(4.15.1) $\{\mathfrak{p} \in \operatorname{spec} A \mid f_{\mathfrak{p}}$ <u>géométriquement irréductible dans</u> $k(\mathfrak{p})\,[T_1,\dots T_r]\}$ <u>est constructible dans</u> $\operatorname{spec} A$ .

Soit $d$ le degré de $f$ , de sorte que

$$f = \sum_{\alpha} c_\alpha T^\alpha , \text{ avec } c_\alpha = 0 \text{ pour } |\alpha| > d .$$

Dire que $f_{\mathfrak{p}}$ n'est pas géométriquement irréductible, c'est dire qu'il existe des éléments

$$\left\{\begin{array}{ll} u_\beta & (|\beta| < d) \\ & \qquad\qquad \text{dans } \overline{k(\mathfrak{p})} \\ v_\gamma & (|\gamma| < d) \end{array}\right.$$

tels que

$$\Big(\sum_{|\beta|<d} u_\beta T^\beta\Big)\Big(\sum_{|\gamma|<d} v_\gamma T^\gamma\Big) = \sum_{\alpha} \bar{c}_\alpha T^\alpha ,$$

où $\bar{c}_\alpha$ désigne la classe de $c_\alpha$ dans $k(\mathfrak{p})$ . D'après le théorème des zéros de Hilbert, cela équivaut à dire que, notant

$$M \hookrightarrow \operatorname{spec} A[U_\beta, V_\gamma]_{|\beta|<d,\,|\gamma|<d}$$

le sous-schéma fermé défini par l'idéal engendré par les polynômes

$$\sum_{\beta+\gamma=\alpha} U_\beta V_\gamma - c_\alpha \qquad (\alpha \in \mathbb{N}^n) ,$$

on a

$$M \otimes_A k(\mathfrak{p}) \neq \emptyset .$$

Autrement dit, le complémentaire de l'ensemble (4.15.1) est l'image du morphisme canonique, de type fini, $M \to \operatorname{spec} A$ ; on conclut grâce au théorème de constructibilité de Chevalley.

Irréductibilité géométrique. Supposant toujours (4.10.1) vérifié, faisons l'hypothèse que $X_K$ est géométriquement irréductible. Alors (4.10.1,2)) $X_{réd}$ est géométriquement intègre. Par ce qui précède, il existe un ouvert non vide $\Omega$ de $Y$ tel que, pour $y \in \Omega$, $f^{-1}_{réd}(y)$ soit géométriquement intègre. Comme $f^{-1}(y)$ et $f^{-1}_{réd}(y)$ ont même espace topologique sous-jacent, l'assertion en résulte.

Réduction géométrique. Plaçons-nous sous les hypothèses de (4.10.1), et supposons $X_K$ géométriquement réduit. Alors (4.10.1,2)), $X_K$ est réduit. Soient $Z_1,\ldots,Z_r$ les adhérences dans $X$ des composantes irréductibles de $X_K$. Ce sont des parties fermées irréductibles telles que, notant $\eta$ le point générique de $Y$,

$$\eta \notin f(X \div \bigcup_{i=1}^{r} Z_i) .$$

D'après le théorème de constructibilité de Chevalley, on peut donc, quitte à localiser $A$ par un élément non nul, supposer que

$$X = \bigcup_{i=1}^{r} Z_i .$$

Comme $Z_i \neq Z_j$ $(i \neq j)$, il en résulte que les $Z_i$ sont les composantes irréductibles de $X$. Si on les munit de leur structure réduite, on a, comme $X$ est réduit, un monomorphisme de $\mathcal{O}_X$- modules

(4.10.4) $$\mathcal{O}_X \hookrightarrow \prod_{i=1}^{r} \mathcal{O}_{Z_i} .$$

Notant $g_i : Z_i \to Y$ les projections canoniques, on déduit (2.6) du théorème de platitude générique que, quitte à restreindre $Y$ à un ouvert non vide, le morphisme (4.10.4) induit un monomorphisme

(4.10.5) $$\mathcal{O}_{f^{-1}(y)} \hookrightarrow \prod_{i=1}^{r} \mathcal{O}_{g_i^{-1}(y)} \qquad (y \in Y) .$$

Mais, par hypothèse (4.10.1,3)) les fibres génériques des $g_i$ sont géométriquement intègres. On sait donc déjà que, quitte à restreindre $Y$ , les $g_i^{-1}(y)$ sont géométriquement intègres. L'assertion résulte alors du monomorphisme

$$\mathcal{O}_{f^{-1}(y)} \otimes_{k(y)} \overline{k(y)} \to \prod_{i=1}^{r} \mathcal{O}_{g_i^{-1}(y)} \otimes_{k(y)} \overline{k(y)}$$

déduit de (4.10.5) .

<u>Connexité géométrique</u>. Plaçons-nous sous les hypothèses (4.10.1) , et supposons maintenant $X_K$ géométriquement connexe. Comme pour le cas précédent, on peut, notant $Z_i$ les adhérences dans $X$ des composantes irréductibles de $X_K$ , supposer que les $Z_i$ sont les composantes irréductibles de $X$ . Comme $X_K$ est connexe de composantes irréductibles les $(Z_i)_K$ , il existe une application <u>surjective</u>

$$\lambda : [1,N] \to [1,r]$$

telle que

$$(Z_{\lambda(i)})_K \cap (Z_{\lambda(i+1)})_K \neq \emptyset \qquad (i = 1,\dots,N-1) .$$

Par le théorème de constructibilité, on en déduit que, quitte à restreindre $Y$ , on a , en notant comme précédemment $g_i : Z_i \to Y$ la projection canonique,

(4.10.6) $$g_{\lambda(i)}^{-1}(y) \cap g_{\lambda(i+1)}^{-1}(y) \neq \emptyset \qquad (y \in Y) .$$

Mais (4.10.1) les $Z_i$ sont géométriquement irréductibles. On sait déjà que, quitte à restreindre $Y$ à un ouvert non vide, les $g_i^{-1}(y)$ $(y \in Y)$ sont géométriquement irréductibles. De (4.10.6), on déduit alors que les $f^{-1}(y)$ sont connexes. Mieux, les $g_i^{-1}(y)$ étant géométriquement connexes, il résulte de (4.10.6) que $f^{-1}(y)$ est géométriquement connexe. On pourrait aussi invoquer (4.9).

## 5 - CORPS COMMUTATIFS : DERIVATIONS ET DIFFERENTIELLES.

5.1. Soient $A$ un anneau, $B$ une $A$-algèbre et $M$ un $B$-module. Une *$A$-dérivation* de $B$ dans $M$ est une application $A$-linéaire $D : B \to M$ vérifiant

(5.1.1) $$D(bc) = bDc + cDb \qquad (b,c \in B) .$$

Lorsque $A = \mathbb{Z}$, on parle simplement de dérivation. Dans le cas général, pour qu'une dérivation $D : B \to M$ soit une $A$-dérivation, il faut et il suffit que

(5.1.2) $$D(a) = 0 \qquad (a \in A) .$$

La condition est manifestement nécessaire. Pour voir qu'elle est suffisante, on observe d'abord que, d'après (5.1.1)

$$D(1) = D(1^2) = 2\,D(1) ,$$

d'où $D(1) = 0$, donc, si $D$ est $A$-linéaire,

$$D(a) = aD(1) = 0 \qquad (a \in A) .$$

Si maintenant $u : M \to N$ morphisme de $B$-modules et $D : B \to M$ une $A$-dérivation, le composé $u \circ D : B \to N$ est une $A$-dérivation.

5.2. La $A$-algèbre $B$ étant donnée, on va construire un $B$-module, noté $\Omega^1_{B/A}$, appelé *module des $A$-différentielles de* $B$, et une $A$-dérivation

$$d : B \to \Omega^1_{B/A} ,$$

ce couple étant caractérisé à isomorphisme près par la propriété universelle suivante. Si $M$ est un $B$-module, et $D : B \to M$ une application, pour que $D$

soit une A-dérivation, il faut et il suffit que $D$ admette une factorisation

$$D = u \circ d\ , \quad \text{avec} \quad u \quad B\text{-linéaire},$$

et cette factorisation est alors unique.

Pour cela, soit $I$ le noyau de l'augmentation canonique

$$\begin{aligned} B \underset{A}{\otimes} B &\to B \\ b \otimes b' &\mapsto bb' \end{aligned}$$

qu'on munit de la structure de B-module induite par le facteur gauche

(5.2.1) $$b.x = (b \otimes 1).x \quad (x \in B)\ .$$

On pose

(5.2.2) $$\Omega^1_{B/A} = I/I^2\ ,$$

muni de la structure de B-module évidente, et on note $d_{B/A}$ l'application

$$\begin{aligned} d_{B/A} : B &\to \Omega^1_{B/A} \\ b &\mapsto \overline{1 \otimes b - b \otimes 1} \end{aligned} .$$

Il est clair que $d_{B/A}$ est A-linéaire. De plus c'est une dérivation car

(5.2.3) $$\begin{aligned} & bc \otimes 1 - 1 \otimes bc - (b \otimes 1)(c \otimes 1 - 1 \otimes c) - (c \otimes 1)(b \otimes 1 - 1 \otimes b) \\ = \quad & (b \otimes 1 - 1 \otimes b)(1 \otimes c - c \otimes 1) \in I^2\ . \end{aligned}$$

Soit maintenant $D : B \to M$ une A-dérivation. L'application A-bilinéaire $(b,c) \mapsto bDc$ induit une application

$$v : B \underset{A}{\otimes} B \to M\ ,$$

qui est B-linéaire lorsqu'on munit $B \underset{A}{\otimes} B$ de la structure de B-module (5.2.1) .

Nous allons voir que $v(I^2) = 0$ . Comme il est clair que

$$v(1 \otimes b - b \otimes 1) = Db\ ,$$

cela prouvera que $v|I$ admet une factorisation B-linéaire

$$u : I/I^2 \to M$$

telle que $$u \circ d_{B/A} = D .$$

LEMME 5.2.4. <u>Le B-module I est engendré par les éléments de la forme</u>

$$1 \otimes b - b \otimes 1 \qquad (b \in B)$$

Soit $x = \sum_{i=1}^{r} b_i \otimes c_i \in I$, de sorte que

$$\sum_{i=1}^{r} b_i c_i = 0 .$$

On en déduit aussitôt

$$x = \sum_{i=1}^{r} (b_i \otimes c_i - b_i c_i \otimes 1) = \sum_{i=1}^{r} b_i (1 \otimes c_i - c_i \otimes 1) .$$

Pour voir que $v(I^2) = 0$, il suffit de montrer que $v$ s'annule sur les éléments de la forme $(1 \otimes b - b \otimes 1)(1 \otimes c - c \otimes 1)$. Mais, compte tenu de (5.2.3), sa valeur sur un tel élément est

$$D(bc) - bDc - cDb = 0 .$$

Enfin, l'unicité de la factorisation résulte aussitôt de (5.2.4).

5.3. Soient $A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C$ trois anneaux. L'application $d_{C/A} \circ \beta$ est une A-dérivation de $B$, donc définit d'après ce qui précède une application B-linéaire

$$h : \Omega^1_{B/A} \to \Omega^1_{C/A}$$

telle que $h \circ d_{B/A} = d_{C/A} \circ \beta$, et partant une application C-linéaire

(5.3.1) $$C \otimes_B \Omega^1_{B/A} \to \Omega^1_{C/A} .$$

Par ailleurs, une B-dérivation de C étant aussi une A-dérivation de C, on a une factorisation

$$\begin{tikzcd} C \arrow[d, "d_{C/A}"'] \arrow[dr, "d_{C/B}"] & \\ \Omega^1_{C/A} \arrow[r] & \Omega^1_{C/B} \end{tikzcd} \qquad (C\text{-linéaire}) . \tag{5.3.2}$$

La propriété universelle des modules de différentielles permet d'interpréter la phrase évidente "pour qu'une A-dérivation D de C soit une B-dérivation, il faut et il suffit que $D \circ \beta = 0$ " sous la forme d'une <u>suite exacte</u>

$$C \underset{B}{\otimes} \Omega^1_{B/A} \to \Omega^1_{C/A} \to \Omega^1_{C/B} \to 0 \tag{5.3.3}$$

dans laquelle les flèches ont été définies précédemment.

5.4. Soient B une A-algèbre et I un idéal de B . Alors la restriction de $d_{B/A}$ à I induit une application B-linéaire

$$I/I^2 \xrightarrow{d} (B/I) \underset{B}{\otimes} \Omega^1_{B/A} . \tag{5.4.1}$$

En effet, posant pour simplifier $d = d_{B/A}$ , on a , lorsque $x,y \in I$

$$d(xy) = xdy + ydx \in I\,\Omega^1_{B/A} ,$$

ce qui montre qu'il y a factorisation de $d|I$ en une application A-linéaire, puis $d(bx) = bdx + xdb$ $(b \in B,\ x \in I)$ montre que cette factorisation est B-linéaire.

Alors la propriété universelle des modules de différentielles permet de traduire la phrase évidente "pour qu'une A-dérivation D de B dans un (B/I)-module N se factorise en une A-dérivation de B/I , il faut et il suffit que $D(I) = 0$ " en l'exactitude de la suite

$$I/I^2 \xrightarrow{d} C \underset{B}{\otimes} \Omega^1_{B/A} \xrightarrow{(5.3.1)} \Omega^1_{C/A} \to 0 , \tag{5.4.2}$$

où on a posé pour simplifier $C = B/I$ .

5.5. Soient $B$ une $A$-algèbre, et $S$ une partie multiplicative de $B$. Alors toute $A$-dérivation $D$ de $B$ dans un $S^{-1}B$ - module $N$ se prolonge de manière unique en une $A$-dérivation de $S^{-1}B$ dans $N$ au moyen de la formule

$$d\left(\frac{b}{s}\right) = \frac{sdb - bds}{s^2} \qquad (b \in B \, , \, s \in S) \, .$$

On en déduit aussitôt que le morphisme canonique (5.3.1)

$$S^{-1} B \underset{B}{\otimes} \Omega^1_{B/A} \to \Omega^1_{S^{-1}B/A}$$

est un isomorphisme de $S^{-1}B$ - modules.

5.6. Soient $A$ un anneau et $B$ l'anneau de polynômes

$$B = A[(X_i)_{i \in I}] \, .$$

Alors, posant $d = d_{B/A}$, les $(dX_i)_{i \in I}$ <u>forment une base du</u> $B$-<u>module</u> $\Omega^1_{B/A}$. En effet, étant donnés un $B$-module $M$ et des éléments $(m_i)_{i \in I}$ de $M$, il existe une $A$-dérivation $D : B \to M$ et une seule telle que

$$D(X_i) = m_i \qquad (i \in I) \, ,$$

à savoir celle définie par la formule

$$D(P(X_i)_{i \in I}) = \sum_{i \in I} \frac{\partial P}{\partial X_i} m_i \, . \tag{5.6.1}$$

<u>Exemple</u> 5.6.2. La conjonction de (5.5) et (5.6) montre que, lorsque $k$ est un corps et $(X_i)_{i \in I}$ un ensemble d'indéterminées, les $(dX_i)_{i \in I}$ forment une base du $k(X_i)_{i \in I}$- espace vectoriel

$$\Omega^1_{k(X_i)_{i \in I}/k} \, .$$

Si à son tour $A$ est une $R$-algèbre, toute $R$-dérivation $D$ de $A$ dans un $B$-module $M$ se prolonge en une $R$-dérivation de $B$ dans $M$, soit $\bar{D}$, par la formule

$$\bar{D}\left(\sum_{\alpha} a_\alpha X^\alpha\right) = \sum_{\alpha} X^\alpha D(a_\alpha) \, .$$

Par suite (5.3.3) fournit une suite exacte scindée

(5.6.3) $$0 \to B \underset{A}{\otimes} \Omega^1_{A/R} \xrightarrow{(5.3.1)} \Omega^1_{B/R} \longrightarrow \Omega^1_{B/A} \to 0 ,$$

où $\Omega^1_{B/A}$ a pour base les $dX_i$ $(i \in I)$.

5.7. Soit $(B_i, \varphi_{ij})_{i,j \in I}$ un système inductif filtrant de A-algèbre. On pose

$$B = \varinjlim_{i \in I} B_i .$$

Etant donné un B-module M , il est clair que la donnée d'une A-dérivation $D : B \to M$ équivaut à celle de A-dérivation $D_i : B_i \to M$ (où M est muni de sa structure naturelle de $B_i$ - module) compatibles avec les morphismes de transition, i.e. telles que

$$D_j = \varphi_{ji} \circ D_i \quad (j \geq i) .$$

En termes de modules de différentielles, cela se traduit en disant que le morphisme canonique de B-modules

(5.7.1) $$\varinjlim_{i \in I} (B \underset{B_i}{\otimes} \Omega^1_{B_i/A}) \to \Omega^1_{B/A}$$

déduit de (5.3.1) est un isomorphisme.

Venons-en maintenant aux questions concernant les corps proprement dits.

PROPOSITION 5.8. Soit $K \subset L$ une extension algébrique séparable de corps. Alors le morphisme canonique (5.3.1)

$$L \underset{K}{\otimes} \Omega^1_K \to \Omega^1_L$$

est un isomorphisme de L-espaces vectoriels.

(si $A = \mathbb{Z}$, on pose $\Omega^1_{B/A} = \Omega^1_B$ ).

Preuve. L est réunion filtrante d'extensions séparables finies. Utilisant (5.7), on se ramène au cas où L est séparable finie sur K , et il s'agit alors de voir que toute dérivation D de K dans un L-espace vectoriel V se prolonge de manière unique en une dérivation de $L$ dans $V$. L'extension $L$ admet un élément primitif $x$ de polynôme minimal $f \in K[X]$, avec $f'(x) \neq 0$. Pour tout point $P \in K[X]$,

$$P = \sum_i a_i X^i ,$$

posons

$$P^D = \sum_i D(a_i) X^i \in V \underset{k}{\otimes} K[X] .$$

A supposer qu'un prolongement $\overline{D}$ de $D$ à $L$ existe, on doit avoir

(5.8.1) $$0 = \overline{D}(f(x)) = f^D(x) + f'(x)\,\overline{D}(x) ,$$

ce qui, comme $f'(x) \neq 0$, détermine $\overline{D}(x)$ et donc $\overline{D}$, car $L = K[X]$.
Montrons qu'un tel prolongement existe. Posant

(5.8.2) $$\xi = - f^D(x)/f'(x) ,$$

on définit en tout cas une dérivation

$$D_1 : K[X] \to V ,$$

où $V$ est muni de la structure de $K[X]$ - module provenant de l'augmentation $X \mapsto x : K[X] \to L$, par la formule

$$D_1(P) = P^D(x) + P'(x)\,\xi .$$

Pour voir que $D_1$ se factorise à travers $L$, il suffit, d'après (5.4.2) appliqué à $I = (f(X))$, de montrer qu'elle s'annule sur le générateur $f$ de $I$. Mais cela résulte de la définition (5.8.2) de $\xi$.

5.9. Avant d'énoncer le théorème suivant, rappelons que si $k \hookrightarrow K$ est une extension de corps de caractéristique $p > 0$, un ensemble $(x_i)_{i \in I}$ d'éléments de $K$ est <u>dit</u> <u>p-libre sur</u> $k$ si les monômes

(5.9.1) $$x^{\alpha} = \prod_i x_i^{\alpha_i} \qquad (\alpha_i \text{ nuls sauf un nombre fini, } 0 \leq \alpha_i \leq p-1)$$

sont linéairement indépendants sur $k(K^p)$ . On dit aussi que les $(x_i)_{i\in I}$ sont <u>p-indépendants</u> sur $k$ .

Une p-<u>base de</u> $K$ <u>sur</u> $k$ est un ensemble $(x_i)_{i\in I}$ comme plus haut, tel que les monômes (5.9.1) forment une base de $K$ sur $k(K^p)$ .

Toute partie p-libre de $K$ sur $k$ est contenue dans une p-base. En effet, il est immédiat que les parties p-libres forment un ensemble ordonné inductif pour l'inclusion. Soit $(x_i)_{i\in I}$ un élément maximal, et supposons que $A = k(K^p)[x_i]_{i\in I} \neq K$ . Remarquons que $A$ est un anneau intègre, entier sur $k(K^p)$ , donc un corps, et un $k(K^p)$-espace vectoriel de base les monomes $x^\alpha$ (5.9.1) . Si $y \notin A$ , on a $y^p \in k(K^p) \subset A$ , donc $A[y]$ a pour base $1,y,\dots,y^{p-1}$ sur $A$ , et la famille $(x_i)_{i\in I} \cup \{y\}$ serait encore p-libre sur $k$ , en contradiction avec l'hypothèse de maximalité.

THEOREME 5.10. <u>Soit</u> $k \hookrightarrow K$ <u>une extension de corps, et</u> $(x_i)_{i\in I}$ <u>une famille d'éléments de</u> $K$ . <u>Les assertions suivantes sont équivalentes</u>.

1) <u>les</u> $(dx_i)_{i\in I}$ <u>forment une base de</u> $\Omega^1_{K/k}$ .

2) a) (<u>En caractéristique</u> 0) <u>les</u> $(x_i)_{i\in I}$ <u>forment une base de transcendance de</u> $K$ <u>sur</u> $k$ .

b) (<u>En caractéristique</u> $p > 0$) <u>les</u> $(x_i)_{i\in I}$ <u>forment une p-base de</u> $K$ <u>sur</u> $k$ .

<u>Preuve</u>. En caractéristique 0 , si les $(x_i)_{i\in I}$ forment une base de transcendance de $K$ sur $k$ , alors $K$ est algébrique séparable sur $L = k(x_i)_{i\in I}$ . D'après (5.8) , on a

$$\begin{aligned} K \underset{K}{\otimes} \Omega^1_L &\xrightarrow{\sim} \Omega^1_K \\ 1 \otimes dx_i &\longmapsto dx_i \end{aligned} ,$$

et les $dx_i \in \Omega^1_L$ forment une base de $\Omega^1_L$ (exemple 5.6.2) , d'où 2a) $\Rightarrow$ 1) . Inversement, supposons que $(dx_i)_{i\in I}$ soit une base de $\Omega^1_{K/k}$ . Posant $L = k(x_i)_{i\in I} \subset K$ , la suite exacte (5.3.3)

$$K \otimes_L \Omega^1_{L/k} \longrightarrow \Omega^1_{K/k} \longrightarrow \Omega^1_{K/L} \longrightarrow 0$$
$$dx_i \longmapsto dx_i$$

montre que $\Omega^1_{K/L} = 0$ . Par suite $K$ est algébrique sur $L$ , car une base de transcendance non vide fournirait une base non vide de $\Omega^1_{L/K}$ par ce qui précède. Par ailleurs, les $x_i$ sont algébriquement indépendants sur $k$ . Sinon il existerait une relation $P(x_{i_1},\dots,x_{i_r}) = 0$ , avec $P \in k[X_1,\dots,X_r]$ non nul et de degré minimum. On en déduirait l'égalité

$$\frac{\partial P}{\partial X_1}(x_{i_1},\dots,x_{i_r})\, dx_{i_1} + \dots + \frac{\partial P}{\partial X_r}(x_{i_1},\dots,x_{i_r}) dx_{i_r} = 0$$

dans $\Omega^1_{K/k}$ , d'où , par l'indépendance linéaire des $dx_i$ ,

(5.10.1) $$\frac{\partial P}{\partial X_1}(x_{i_1},\dots,x_{i_r}) = \dots = \frac{\partial P}{\partial X_r}(x_{i_1},\dots,x_{i_r}) = 0 .$$

Mais, comme on est en caractéristique 0 , l'un des polynômes $\partial P/\partial X_i$ est non nul, et l'égalité (5.10.1) correspondante contredirait le caractère minimal du degré de $P$ .

En caractéristique $p > 0$ , si $(x_i)_{i \in I}$ est une p-base de $K$ sur $k$ , on a

(5.10.2) $$K = k(K^p)[x_i]_{i \in I} .$$

Comme $d(K^p) = 0$ $(d(a^p) = pa^{p-1}da = 0)$ , on en déduit déjà que les $(dx_i)_{i \in I}$ engendrent le K-espace vectoriel $\Omega^1_{K/k}$ . Par ailleurs, fixant $i \in I$ , et posant $J = I \dot{-} i$ , on a

$$K = L_i[x_i] \text{ , avec } x_i^p \in L_i = k(K^p)[x_j]_{j \in J} .$$

L'application $L_i$- linéaire

$$\delta_i : L_i[X] \to K$$

définie par

$$\delta_i\,(P(X)) = P'(x_i)$$

s'annule sur l'idéal $(X^p - x_i^p)$ , donc définit par passage au quotient une dérivation

$$d_i : K \to K$$

telle que $d_i(x_j) = \delta_{ij}$ (symbole de Kronecker) . A son tour, la dérivation $d_i$ définit une application $K$-linéaire

$$u_i : \Omega^1_{K/k} \to K$$

telle que $u_i(dx_j) = \delta_{ij}$ . L'indépendance linéaire des $dx_i$ en résulte aussitôt. Supposons inversement que les $(dx_i)_{i \in I}$ forment une base de $\Omega^1_{K/k}$ . Posant $L = k(K^p)[x_i]_{i \in I}$ , on voit comme dans la première partie que

$$\Omega^1_{K/L} = 0 ,$$

d'où résulte d'après l'assertion directe que toute $p$-base de $K$ sur $L$ est vide, soit $K = L = k(K^p)[x_i]_{i \in I}$ . Si $J \subset I$ est telle que les $(x_j)_{j \in J}$ soient $p$-indépendants , et est maximale pour cette propriété, on a nécessairement $x_i \in k(K^p)[x_j]_{j \in J}$ pour tout $i$ , donc

$$K = k(K^p)[x_j]_{j \in J} .$$

Mais alors, les $(x_j)_{j \in J}$ forment une $p$-base de $K$ sur $k$ , donc, d'après la partie directe, les $dx_j$ forment déjà une base de $\Omega^1_{K/k}$ , ce qui n'est possible que si $J = I$ .

COROLLAIRE 5.11. <u>Soit</u> $k \hookrightarrow K$ <u>une extension de corps, et</u> $(x_i)_{i \in I}$ <u>une famille d'éléments de</u> $K$ . <u>Les assertions suivantes sont équivalentes.</u>

1) <u>Les</u> $(dx_i)_{i \in I}$ <u>sont linéairement indépendants sur</u> $K$ .

2) a) (<u>En caractéristique</u> 0) <u>les</u> $(x_i)_{i \in I}$ <u>sont algébriquement indépendants sur</u> $k$ .

b) (<u>En caractéristique</u> $p > 0$) <u>les</u> $(x_i)_{i \in I}$ <u>sont</u> $p$-<u>indépendants sur</u> $k$ .

<u>Preuve</u>. 1) $\Rightarrow$ 2) . Comme les $(dx)_{x\in K}$ engendrent $\Omega^1_{K/k}$ , on peut prolonger le système libre $(dx_i)_{i\in I}$ en une base de $\Omega^1_{K/k}$ formée d'éléments de la forme $dy(y\in K)$ , à laquelle on peut appliquer l'assertion 1) $\Rightarrow$ 2) du théorème. Montrons 2) $\Rightarrow$ 1) . De même une famille algébriquement libre (resp. p-libre) de $K$ sur $k$ se prolonge en une base de transcendance (resp. p-base) de $K$ sur $k$ , à laquelle on peut appliquer la partie 2) $\Rightarrow$ 1) du théorème.

COROLLAIRE 5.12. <u>En caractéristique</u> $p > 0$ , <u>deux</u> p-<u>bases de</u> $K$ <u>sur</u> $k$ <u>ont même cardinal</u>.

COROLLAIRE 5.13. <u>Soit</u> $k \hookrightarrow K$ <u>une extension de corps. Alors</u> $\mathrm{Ker}(d_{K/k})$ <u>est</u> :

- <u>en caractéristique</u> 0 , <u>la fermeture algébrique de</u> $k$ <u>dans</u> $K$ ,
- <u>en caractéristique</u> $p > 0$ , <u>le sous-corps</u> $k(K^p)$ <u>de</u> $K$ .

<u>Preuve</u>. Dire que $dx = 0$ , c'est dire que la famille $\{dx\}$ n'est pas libre sur $K$ .

5.14. Soit $K \subset L$ une extension de corps. Définissons, avec CARTIER, un $L$-espace vectoriel $N_{L/K}$ par l'exactitude de la suite

(5.14.1) $$0 \to N_{L/K} \to L \otimes_K \Omega^1_K \xrightarrow{(5.3.1)} \Omega^1_L \to \Omega^1_{L/K} \to 0 .$$

Si $K \subset L \subset M$ sont trois corps, le lemme du serpent appliqué au diagramme

$$\begin{tikzcd}
 & & & 0 \arrow[d] & & \\
 & & & N_{M/L} \arrow[d] & & \\
0 \arrow[r] & M \otimes_L N_{L/K} \arrow[r] \arrow[d, dashed] & M \otimes_K \Omega^1_K \arrow[r, "\otimes(5.3.1)"] \arrow[d, equal] & M \otimes_L \Omega^1_L \arrow[r] \arrow[d, "(5.3.1)"] & M \otimes \Omega^1_{L/K} \arrow[r] \arrow[d, "(5.3.1)"] & 0 \\
0 \arrow[r] & N_{M/K} \arrow[r] & M \otimes_K \Omega^1_K \arrow[r] & \Omega^1_M \arrow[r] \arrow[d] & \Omega^1_{M/K} \arrow[d] & \\
 & & & \Omega^1_{M/L} \arrow[r, equal] \arrow[d] & \Omega^1_{M/L} \arrow[d] & \\
 & & & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

fournit une suite exacte à 6 termes prolongeant (5.3.3)

(5.14.2) $$0 \to M \underset{L}{\otimes} N_{L/K} \to N_{M/K} \to N_{M/L} \to M \underset{L}{\otimes} \Omega^1_{L/K} \to \Omega^1_{M/K} \to \Omega^1_{M/L} \to 0$$

THEOREME 5.15. (CARTIER) <u>Soit</u> $K \subset L$ <u>une extension de type fini. Alors</u> $\Omega^1_{L/K}$ <u>et</u> $N_{L/K}$ <u>sont des espaces vectoriels de dimension finie, et on a l'égalité</u>

(5.15.1) $$\dim_L(\Omega^1_{L/K}) = d^\circ tr(L/K) + \dim_L N_{L/K} .$$

<u>Preuve.</u> Soient $K \hookrightarrow L$ et $L \hookrightarrow M$ deux extensions de type fini. Il résulte aussitôt de la suite exacte (5.14.2) d'une part, et de l'additivité des degrés de transcendance d'autre part, que si $K \hookrightarrow L$ et $L \hookrightarrow M$ vérifient (5.15), l'extension composée $K \hookrightarrow M$ le vérifie également. Ceci montre qu'il suffit de prouver (5.15) dans chacun des cas suivants : $L$ est transcendante pure sur $K$, $L$ est séparable finie, $L$ est radicielle monogène de degré égal à la caractéristique. Supposons d'abord $L$ transcendante pure : $L = K(X_1,\dots,X_n)$. Alors (5.6.2) $\dim \Omega^1_{L/K} = n$, tandis que $N_{L/K} = 0$. En effet, toute dérivation $D$ de $K$ dans un $L$-espace vectoriel $V$ se prolonge en une dérivation $\overline{D}$ de $L$ par la formule

$$\overline{D}(P/Q) = (Q.P^D - P.Q^D)/Q^2 \quad (P,Q \in K[X_1,\dots,X_n]) ,$$

où l'on a posé (cf. (5.8)), pour

$$F = \sum_\alpha a_\alpha X^\alpha \in K[X_1,\dots,X_n] ,$$

$$F^D = \sum_\alpha X^\alpha D(a_\alpha) .$$

Lorsque $L$ est séparable finie, on a $d^\circ tr(L/K) = 0$, et $N_{L/K} = \Omega^1_{L/K} = 0$ (5.8). Reste le cas $L$ radicielle monogène : $L = K[x]$, avec $x^p = a \in K$, où $p = car(K)$. On a donc

$$L = K[X]/I , \text{ avec } I = (X^p - a) ,$$

d'où (5.4.2) une suite exacte

$$L \to L \underset{K[X]}{\otimes} \Omega^1_{K[X]/K} \to \Omega^1_{L/K} \to 0 \ ,$$

$$1 \mapsto 1 \otimes d(X^p - a) = 0$$

et par suite $\dim \Omega^1_{L/K} = 1$ , car $\Omega^1_{K[X]/K}$ a pour base $dX$ (5.6) sur $K[X]$ .
Oar ailleurs, on a (5.6.3) une suite exacte <u>scindée</u>

$$0 \to K[X] \underset{K}{\otimes} \Omega^1_K \to \Omega^1_{K[X]} \to \Omega^1_{K[X]/K} \to 0 \ .$$

Comme, dans $\Omega^1_{K[X]}$ ,

$$d(X^p - a) = - da \in K[X] \underset{K}{\otimes} \Omega^1_K \ ,$$

on déduit de (5.4.2) un diagramme commutatif, dans lequel la colonne est exacte,

$$\begin{tikzcd}
 & I/I^2 \arrow[dl, dashed] \arrow[d] \\
L \underset{K}{\otimes} \Omega^1_K \arrow[r, hook, "L \otimes (5.3.1)"] \arrow[dr, "(5.3.1)"'] & L \underset{K[X]}{\otimes} \Omega^1_{K[X]} \arrow[d] \\
 & \Omega^1_L \arrow[d] \\
 & 0
\end{tikzcd}$$

qui montre que $N_{L/K}$ est le sous-espace vectoriel de $L \underset{K}{\otimes} \Omega^1_K$ engendré par $1 \otimes da$ . Comme $x \notin K$ , on a $a \notin K^p$ , donc (5.13) $da \neq 0$ , et par suite $\dim_L N_{L/K} = 1$ , ce qui achève la démonstration.

COROLLAIRE 5.16. <u>Soit</u> $K \hookrightarrow L$ <u>une extension de type fini. Les assertions suivantes sont équivalentes</u>.

i) $L$ <u>est séparablement engendrée sur</u> $K$ (3.2) .

ii) $\dim_L \Omega^1_{L/K} = d^\circ tr(L/K)$ .

<u>Dans ce cas, les notions de</u> p-<u>base et de base de transcendance coïncident pour l'extension</u> $K \hookrightarrow L$ , <u>lorsque</u> car $K = p > 0$ .

Preuve. Si $L$ est séparablement engendrée sur $K$, et $x_1,\dots,x_n$ est une base de transcendance séparante de $L$ sur $K$, on a

$$\Omega^1_{L/K} \overset{(5.8)}{\simeq} L \underset{K(x_1,\dots,x_n)}{\otimes} \Omega^1_{K(x_1,\dots,x_n)/K} \overset{(5.6.2)}{\simeq} \bigoplus_{i=1}^{n} L\,dx_i \ .$$

Inversement, supposons que $\dim_L \Omega^1_{L/K} = d^\circ tr(L/K) = n$, et choisissons une base de $\Omega^1_{L/K}$ de la forme $dx_1,\dots,dx_n$ $(x_i \in L)$. Alors, posant $M = k(x_1,\dots,x_n)$, on a d'après (5.3.3),

(5.16.1) $$\Omega^1_{L/M} = 0 \ ,$$

ce qui, d'après le théorème de Cartier (5.15.1) implique que $L$ est algébrique sur $M$. Par suite $d^\circ tr(M/K) = d^\circ tr(L/K) = n$, ce qui montre déjà que les $x_i$ sont algébriquement indépendants, donc constituent une base de transcendance de $L$ sur $K$. De plus (5.16.1) implique que $L$ est algébrique <u>séparable</u> sur $M$, sinon, supposant car $K = p > 0$, il existerait une sous-extension $M_1$ de $L$, avec

$$M \subset M_1 \subset L \text{ , et } L \text{ radicielle de degré } p \text{ sur } M_1 \ .$$

On en déduirait un épimorphisme

$$\begin{array}{ccl} \Omega^1_{L/M} & \to \Omega^1_{L/M_1} \to 0 & , \\ \| & \quad \dim = 1 \quad (\text{preuve de } 5.15 \text{ par exemple}) & \\ 0 & & \end{array}$$

ce qui est absurde. Nous avons ainsi prouvé l'équivalence de i) et ii), plus le fait, modulo la caractérisation (5.10) des p-bases, que toute p-base de $L$ sur $K$ est une base de transcendance séparante. Inversement, le début de la démonstration montre que toute base de transcendance séparante est une p-base, d'où le corollaire.

COROLLAIRE 5.17. Soit $K \hookrightarrow L$ une extension de type fini. Les assertions suivantes sont équivalentes.

i) $L$ est algébrique séparable.

ii) $\Omega^1_{L/K} = 0$ .

iii) $L = K(L^p)$ .

Preuve. Compte tenu de (5.15.1) , c'est un cas particulier de (5.16) , qui a d'ailleurs été prouvé en cours de démonstration.

Remarque 5.17.1. Sans l'hypothèse " $L$ de type fini sur $K$ " , il est faux que iii) , qui est équivalent à ii) , implique i) . Un contre-exemple est fourni par une extension $k \hookrightarrow \bar{k}$ , avec $\bar{k}$ non séparable sur $k$ , en car $p > 0$ (bien sûr, $\bar{k}$ désigne la clôture algébrique de $k$ , qui est parfaite).

COROLLAIRE 5.18. Soit $K \hookrightarrow L$ une extension de corps. Les assertions suivantes sont équivalentes.

i) $L$ est séparable sur $K$ (3.3) .

ii) Toute dérivation de $K$ dans un $L$-espace vectoriel $V$ se prolonge en une dérivation de $L$ dans $V$ .

iii) $N_{L/K} = 0$ .

Preuve. L'assertion ii) équivaut à dire que le morphisme canonique (5.3.1)

(5.18.1) $$L \otimes_K \Omega^1_K \to \Omega^1_L$$

est un monomorphisme direct, ce qui, compte tenu de ce qu'il s'agit d'espaces vectoriels, équivaut à $N_{L/K} = 0$ . Montrons i) $\Rightarrow$ ii) . L'extension $L$ est alors réunion filtrante d'extensions $L_i$ de type fini séparablement engendrées sur $K$ . D'après le théorème de Cartier et 5.16 i) , on a $N_{L_i/K} = 0$ , autrement dit le morphisme (5.3.1)

$$\varphi_i : L_i \underset{K}{\otimes} \Omega^1_K \to \Omega^1_{L_i}$$

est injectif. Compte tenu de (5.7) , le morphisme (5.18.1) , qui s'identifie à

$$\varinjlim_i (L \underset{L_i}{\otimes} \varphi_i) : L \underset{K}{\otimes} \Omega^1_K \to \varinjlim_i (L \underset{L_i}{\otimes} \Omega^1_{L_i}) = \Omega^1_L ,$$

est aussi injectif. Inversement, si (5.18.1) est injectif, alors pour toute sous-extension $M$ de $K$ , le diagramme évident

$$\begin{tikzcd} L \underset{M}{\otimes} (M \underset{K}{\otimes} \Omega^1_K) \arrow[r, "L\otimes(5.3.1)"] \arrow[d, equal] & L \underset{M}{\otimes} \Omega^1_M \arrow[d, "(5.3.1)"] \\ L \underset{K}{\otimes} \Omega^1_K \arrow[r, "(5.3.1)"] & \Omega^1_L \end{tikzcd}$$

montre que $L \underset{M}{\otimes} N_{M/K} = 0$ , d'où $N_{M/K} = 0$ . Si $M$ est supposée de type fini sur $K$ , le théorème de Cartier et (5.16) montrent que $M$ est séparablement engendrée sur $K$ , d'où l'assertion.

## 6 - THEOREMES DE BERTINI .

Il y a plusieurs formulations, plus ou moins équivalentes, des théorèmes de Bertini, aussi allons-nous tout d'abord, dans un souci de simplicité, nous limiter au cas des sections hyperplanes affines.

6.1. Soient $k$ un corps, $X$ un $k$-schéma de type fini, $n$ un entier $\geq 1$ , et

$$\begin{aligned} f : X &\longrightarrow \mathbb{E}^n_k \\ x &\longmapsto (f_1(x),\dots,f_n(x)) \end{aligned} ,$$

avec $f_i \in \Gamma(X,\mathcal{O}_X)$ , un $k$-morphisme. Considérons le sous-$k$-schéma $Z$ de $X \underset{k}{\times} \mathbb{E}^{n+1}_k$ défini par

(6.1.1) $Z = \{(x,u_o,u_1,\dots,u_n) \in X \underset{k}{\times} \mathbb{E}^{n+1}_k \mid u_1f_1(x) + \dots + u_nf_n(x) + u_o = 0 \}$ ,

soit, plus précisément,

(6.1.2) $Z = \mathrm{spec}_X(\mathcal{O}_X[U_o,U_1,\dots,U_n]/(U_1f_1+\dots+U_nf_n+U_o))$ .

La projection

(6.1.3) $$h : \quad Z \longrightarrow X$$
$$(x,u_o,u_1,\dots,u_n) \longmapsto x$$

munit Z d'une structure de <u>fibré vectoriel trivial de rang</u> n sur X .

En effet, le morphisme

(6.1.4) $$X \underset{k}{\times} \mathbb{E}^n_k \longrightarrow Z$$
$$(x,u_1,\dots,u_n) \longmapsto (x,-u_1f_1(x)-\dots-u_nf_n(x),u_1,\dots,u_n)$$

est un k-isomorphisme rendant le diagramme

$$\begin{tikzcd} X \underset{k}{\times} \mathbb{E}^n_k \arrow[rr] \arrow[dr, "pr_1"'] & & Z \arrow[dl, "h"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

commutatif.

Par ailleurs, la projection

(6.1.5) $$\pi : \quad Z \longrightarrow \mathbb{E}^{n+1}_k$$
$$(x,u_o,u_1,\dots,u_n) \longmapsto (u_o,u_1,\dots,u_n)$$

est telle que, pour tout point rationnel $\xi = (u_o,u_1,\dots,u_n) \in k \times (k^n - 0)$ de $\mathbb{E}^{n+1}_k$ , notant $H_\xi$ l'hyperplan de $\mathbb{E}^n_k$ d'équation

$$H_\xi : u_o+u_1y_1+\dots+u_ny_n = 0 \quad (y_i \text{ coordonnées de } \mathbb{E}^n_k) ,$$

on ait, du point de vue schématique

(6.1.6) $$f^{-1}(H_\xi) \simeq \pi^{-1}(\xi) .$$

6.2. Lorsque X est irréductible, alors $Z \simeq X \underset{k}{\times} \mathbb{E}^n_k$ l'est également. Dans le cas général, notons $(X_i)_{1\le i\le m}$ les composantes irréductibles de X , et

$$f_i = f|X_i : X_i \to \mathbb{E}_k^n .$$

Grâce à (6.1.4) , les composantes irréductibles $Z_i$ de $Z$ s'identifient aux sous-schémas fermés $X_i \underset{k}{\times} \mathbb{E}_k^n$ de $X \underset{k}{\times} \mathbb{E}_k^n$, qui, à leur tour, s'identifient aux schémas (6.1.2) construits à partir de $(X_i, f_i)$ .

De plus, on a la propriété suivante.

LEMME 6.2.1. <u>Supposons</u> $X$ <u>irréductible. Alors les assertions suivantes sont équivalentes.</u>

i) <u>Le morphisme</u> $\pi : Z \to \mathbb{E}_k^{n+1}$ <u>est dominant</u>.

ii) $\dim \overline{f(X)} \geq 1$ .

<u>Preuve</u>. Etendant le corps de base $k$ à sa clôture algébrique $\bar{k}$ , il résulte aussitôt des considérations qui précèdent qu'il suffit de prouver le lemme pour l'une quelconque des composantes irréductibles de $X \otimes_k \bar{k}$ . Autrement dit, on peut supposer $k$ algébriquement clos. Dans ce cas, si $\dim \overline{f(X)} = 0$ , le schéma $\overline{f(X)}$ n'a qu'un nombre fini de points, nécessairement rationnels,

$$y_j = (y_{j1}, \dots, y_{jn}) \qquad (1 \leq j \leq r) ,$$

et il est clair que $\pi(Z)$ ne rencontre pas l'ouvert non vide

$$\bigcap_{j=1}^{r} D(y_{j_1} U_1 + \dots + y_{jn} U_n + U_0) .$$

Supposons $\dim \overline{f(X)} \geq 1$ , et montrons que $\pi$ est dominant. Quitte à remplacer $X$ par $X_{réd}$ , on peut supposer $X$ intègre. Alors l'hypothèse signifie que le sous-corps $k(f_1, \dots, f_n)$ du corps des fonctions rationnelles de $X$ a un degré de transcendance $\geq 1$ sur $k$ . En particulier, l'une des $f_i$ ,par exemple $f_1$ , est transcendante sur $k$ , et alors le morphisme

$$f_1 : X \to \mathbb{E}_k^1$$

est dominant. D'après (2.3), on a, pour presque tout $t \in k$ , (6.2.2) $$\dim f_1^{-1}(t) = \dim X - 1 .$$

Comme $\dim Z - \dim \mathbb{E}_k^{n+1} = (\dim X + n) - (n+1) = \dim X - 1$ , le théorème de semi-continuité de Chevalley (2.3.(i)) appliqué à " $\pi$ " : $Z \to \overline{\pi(Z)}$ montre que, pour voir que $\pi$ est dominant, il suffit d'en exhiber une fibre de dimension égale à $\dim X - 1$ . Mais, vu la définition (6.1.1) de $Z$ , on a, choisissant $t$ comme en (6.2.2) ,

$$\pi^{-1}(-t,1,0,\ldots,0) \simeq f_1^{-1}(t) \text{ , de dimension } = \dim X - 1 \text{ ,}$$

d'où l'assertion.

On peut généraliser le lemme (6.2.1) de la manière suivante, qui nous sera utile plus tard. Supposons toujours $X$ irréductible, et que

$$\dim \overline{f(X)} = \nu \geq 1 .$$

Alors, quitte à changer l'ordre des $f_i$ , on peut supposer que le morphisme

(6.2.3) $$\begin{aligned} \varphi : X &\longrightarrow \mathbb{E}_k^{\nu} \\ x &\longmapsto (f_1(x),\ldots,f_\nu(x)) \end{aligned}$$

est dominant. Pour le voir, on peut, quitte à remplacer $X$ par $X_{\text{réd}}$ , supposer $X$ intègre. Alors le sous-corps $k(f_1,\ldots,f_n)$ du corps des fonctions rationnelles de $X$ a pour degré de transcendance $\nu$ sur $k$ , et on peut extraire de $(f_1,\ldots,f_n)$ une base de transcendance, soit, quitte à changer l'ordre des $f_i$ , $(f_1,\ldots,f_\nu)$ . Il est alors clair que (6.2.3) est dominant.

LEMME 6.2.4. <u>Sous les hypothèses précédentes, le morphisme</u>

(6.2.4) $$\begin{aligned} \psi : Z &\longrightarrow \mathbb{E}_k^{n+1} \underset{k}{\times} \mathbb{E}_k^{\nu-1} \\ (x,u_0,u_1,\ldots,u_n) &\longmapsto [(u_0,u_1,\ldots,u_n),(f_1(x),f_2(x),\ldots,f_{\nu-1}(x))] \end{aligned}$$

<u>est dominant</u>.

<u>Preuve.</u> Comme dans la preuve de (6.2.1), on peut, quitte à remplacer $k$ par $\overline{k}$ et $X$ par une composante irréductible de $X \otimes_k \overline{k}$ , supposer $k$ algébriquement clos.

Comme $\varphi$ est dominant, il résulte de (2.3)ii) que, pour presque tout point rationnel $(a_1,\ldots,a_\nu) \in k^\nu$ de $\mathbb{E}_k^\nu$ la fibre

(6.2.5) $\quad \varphi^{-1}(a_1,\ldots,a_\nu) = \{x \in X \mid f_1(x) = a_1,\ldots,f_\nu(x) = a_\nu\}$

est purement de dimension égale à $\dim X - \nu$ . Comme

$$\dim Z - \dim(\mathbb{E}_k^{n+1} \underset{k}{\times} \mathbb{E}_k^{\nu-1}) = \dim X + n - (n+\nu) = \dim X - \nu \quad ,$$

le théorème de semi-continuité de Chevalley ((2.3)i)) appliqué à " $\psi$ " : $Z \to \overline{\psi(Z)}$ montre que, pour voir que $\psi$ est dominant, il suffit d'en exhiber une fibre de dimension égale à $\dim X - \nu$ . Or, choisissant $(a_1,\ldots,a_\nu)$ comme en (6.2.5) , c'est le cas pour

$$\psi^{-1}((\underset{\substack{\uparrow\\ u_0}}{a_\nu},0,0,\ldots,\underset{\substack{\uparrow\\ u_\nu}}{-1},0,\ldots,0),(a_1,a_2,\ldots,a_{\nu-1})) \simeq \varphi^{-1}(a_1,\ldots,a_\nu) \quad ,$$

vu la définition (6.1.1) de $Z$ .

Nous allons maintenant énoncer dans notre cas les théorèmes de Bertini, en supposant pour simplifier $k$ infini, hypothèse qui assure que l'ensemble des points rationnels d'un espace affine $\mathbb{E}_k^m$ est dense dans celui-ci. Comme en (6.1) , pour tout $\xi = (u_0,u_1,u_2,\ldots,u_n) \in k^{n+1}$ , avec $(u_1,u_2,\ldots,u_n) \neq (0,0,\ldots,0)$ , on note $H_\xi$ l'hyperplan de $\mathbb{E}_k^n$ d'équation

$$H_\xi : u_0 + u_1 y_1 + \ldots + u_n y_n = 0 \qquad (y_i \text{ coordonnées dans } \mathbb{E}_k^n) .$$

Enfin, comme d'habitude, l'expression "pour presque tout $\xi$ " signifie " pour $\xi$ parcourant l'ensemble des points rationnels d'un ouvert de Zariski non vide de $\mathbb{E}_k^{n+1}$ " .

THEOREME 6.3. <u>Soient</u> $k$ <u>un corps infini</u>, $X$ <u>un</u> $k$-<u>schéma de type fini, et</u> $f : X \to \mathbb{E}_k^n$ <u>un</u> $k$-<u>morphisme</u>.

1) a) <u>Lorsque</u> $\dim \overline{f(X)} = 0$ , <u>on a</u> $f^{-1}(H_\xi) = \emptyset$ <u>pour presque tout</u> $\xi$ .

b) Lorsque $\dim \overline{f(X)} \geq 1$, notons $(X_i)_{1 \leq i \leq n}$ celles des composantes irréductibles de $X$ vérifiant $\dim \overline{f(X_i)} \geq 1$. Alors, pour presque tout $\xi$, les composantes irréductibles des $f^{-1}(H_\xi)$ s'obtiennent de manière unique comme composantes irréductibles de l'un des schémas $f^{-1}(H_\xi) \cap X_i$, et ceux-ci sont purement de dimension égale à $\dim X_i - 1$.

2) Supposons $k$ de caractéristique $0$ ou $f$ non ramifié, et $X$ lisse sur $k$. Alors, pour presque tout $\xi$, $f^{-1}(H_\xi)$ est lisse sur $k$.

3) Supposons $k$ de caractéristique $0$ ou $f$ non ramifié, et $X$ géométriquement réduit. Alors, pour presque tout $\xi$, $f^{-1}(H_\xi)$ est géométriquement réduit.

4) Supposons $\dim \overline{f(X)} \geq 2$ et $X$ géométriquement irréductible. Alors, pour presque tout $\xi$, $f^{-1}(H_\xi)$ est géométriquement irréductible.

Preuve. Montrons 1). Lorsque $\dim \overline{f(X)} = 0$, il résulte de (6.2.1), appliqué aux composantes irréductibles de $X$, que $\pi : Z \to \mathbb{E}_k^{n+1}$ n'est pas dominant, d'où l'assertion a), compte tenu de (6.1.6). Pour b), on peut, d'après a), remplacer $X$ par $\bigcup_{i=1}^{m} X_i$. Alors, notant, pour tout i, par $Z_i$ le schéma (6.1.2) associé à $(X_i, f|X_i)$, les $Z_i$ sont les composantes irréductibles de $Z$ et les morphismes

$$\pi_i = \pi|Z_i : Z_i \to \mathbb{E}_k^{n+1}$$

sont dominants (6.2.1). L'assertion résulte alors de (2.3). En effet, tout d'abord, pour presque tout $\xi$, $f_i^{-1}(H_\xi) = f^{-1}(H_\xi) \cap X_i = \pi_i^{-1}(\xi)$ est purement de dimension égale à $\dim Z_i - \dim \mathbb{E}_k^{n+1} = (\dim X_i + n) - (n+1) = \dim X_i - 1$ et, comme

$$f^{-1}(H_\xi) = \bigcup_{i=1}^{m} f_i^{-1}(H_\xi),$$

les composantes irréductibles de $f^{-1}(H_\xi)$ sont composantes irréductibles de l'un des $f_i^{-1}(H_\xi)$. Il reste à voir que, pour presque tout $\xi$, deux quelconques des schémas $f_i^{-1}(H_\xi)$ et $f_j^{-1}(H_\xi)$ $(i \neq j)$ n'ont pas de composante irréductible commune. Mais, comme

$$Z_i \cap Z_j \neq Z_i, Z_j,$$

on a

$$\dim(Z_i \cap Z_j) < \min(\dim Z_i, \dim Z_j) ,$$

d'où résulte, par une nouvelle application de (2.3) aux composantes irréductibles de $Z_i \cap Z_j$ , que, pour presque tout $\xi$ ,

$$\dim(\pi_i^{-1}(\xi) \cap \pi_j^{-1}(\xi)) < \min(\dim X_i, \dim X_j) - 1 ,$$

avec la convention $\dim(\emptyset) = -\infty$ , ce qui montre bien que $\pi_i^{-1}(\xi) \cap \pi_i^{-1}(\xi)$ ne contient, pour presque tout $\xi$ , aucune composante irréductible de $\pi_i^{-1}(\xi)$ ou $\pi_j^{-1}(\xi)$ , car celles-ci sont alors de dimensions respectives $\dim X_i - 1$ (resp. $\dim X_j - 1$) .
Montrons 2) . Quitte à décomposer $X$ en composantes irréductibles (ouvertes), on peut supposer $X$ intègre. Il s'agit alors de voir que la fibre générique $F$ du morphisme $\pi$ est lisse sur le corps des fractions rationnelles $k(U_o, U_1, \dots, U_n)$ de $\mathbb{E}_k^{n+1}$ .Lorsque la caractéristique de $k$ est nulle, il suffit de voir que $F$ , qui est de type fini sur $k(U_o, U_1, \dots, U_n)$ , est régulière. Or $Z \simeq X \times_k \mathbb{E}_k^n$ est lisse sur $k$ , donc régulier, et les anneaux locaux de $F$ sont des anneaux locaux de $Z$ , d'où l'assertion dans ce cas. Supposons maintenant $f$ non ramifié. Quitte à localiser $X$ pour la topologie de Zariski, on peut supposer $X = \operatorname{spec} A$ , avec $A$ une $k$-algèbre de type fini lisse et intègre, de dimension $\nu$ . Le morphisme $f$ est défini par le morphisme d'anneaux transposé

$$\begin{aligned} k[T_1, T_2, \dots, T_n] &\longrightarrow A \\ T_i &\longmapsto f_i \end{aligned}$$

Dire que $f$ est non ramifié, c'est dire que le morphisme canonique (5.3.1)

$$\begin{aligned} A \underset{k[T_1,\dots,T_n]}{\otimes} \Omega^1_{k[T_1,\dots,T_n]/k} &\longrightarrow \Omega^1_{A/k} \\ 1 \otimes d\,T_i &\longmapsto df_i \end{aligned}$$

est surjectif, autrement dit que $df_1, df_2, \dots, df_n$ engendrent le $A$-module $\Omega^1_{A/k}$ qui, comme $A$ est lisse sur $k$ , est projectif de rang constant $\nu = \dim A$ .

D'après (6.1.2) , on a

$$Z = \mathrm{spec}[A \underset{k}{\otimes} (k[U_o,U_1,\dots,U_n]/(U_o+U_1f_1+\dots+ U_nf_n))] ,$$

de sorte que la fibre générique $F$ de $\pi$ est le spectre de l'anneau

$$B = [A \underset{k}{\otimes} k(U_o,U_1,\dots,U_n)]/(U_o+U_1f_1+\dots+ U_nf_n) , \tag{6.3.1}$$

qui est intègre de dimension $\nu - 1$ . Pour voir que $B$ est lisse sur $k(U_o,U_1,\dots,U_n)$, il faut et il suffit de montrer que

$$\Omega^1_{B/k(U_o,U_1,\dots,U_n)}$$

est un $B$-module projectif de rang $\nu-1$ . Or la suite exacte (5.4.2) appliquée à (6.3.1) fournit une suite exacte

$$\begin{array}{l} B \longrightarrow [\Omega^1_{A\underset{k}{\otimes}k(U_o,\dots,U_n)/k(U_o,\dots,U_n)}]/(U_o+ U_1f_1+\dots+ U_nf_n) \to \Omega^1_{B/k(U_o,\dots,U_n)} \to 0 , \\ 1 \longmapsto \quad U_1df_1+\dots+ U_ndf_n \end{array}$$

soit, compte tenu de l'isomorphisme évident

$$\Omega^1_{A\underset{k}{\otimes}k(U_o,\dots,U_n)/k(U_o,\dots,U_n)} \xrightarrow{\sim} \Omega^1_{A/k} \underset{k}{\otimes} k(U_o,U_1,\dots,U_n) , \tag{6.3.2}$$

où $A \underset{k}{\otimes} k(U_o,\dots,U_n)$ opère de façon claire sur le groupe de droite, un isomorphisme (où $C = A \underset{k}{\otimes} k(U_o,\dots,U_n)$)

$$\Omega^1_{B/k(U_o,U_1,\dots,U_n)} \xrightarrow{\sim} B \underset{C}{\otimes} \{[\Omega^1_{A/k}\underset{k}{\otimes}k(U_o,U_1,\dots,U_n)]/(U_1df_1+\dots+U_ndf_n)\} . \tag{6.3.3}$$

Pour voir que $\Omega^1_{B/k(U_o,U_1,\dots,U_n)}$ est projectif de rang $\nu-1$ , il suffit de montrer que, posant

$$M = B \underset{C}{\otimes} [\Omega^1_{A/k} \underset{k}{\otimes} k(U_o,U_1,\dots,U_n)] ,$$

la classe de $U_1df_1+\dots+ U_ndf_n$ dans $M$ est un élément direct de ce $B$-module projectif de rang $\nu$ . Notant $P$ le $A[U_o,U_1,\dots,U_n]$ - module projectif

$$P = \Omega^1_{A/k} \otimes k[U_o,U_1,\dots,U_n] , \tag{6.3.4}$$

il revient au même de montrer que, pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$ de $A[U_o,\dots,U_n]$ contenant $U_o+U_1f_1+\dots+U_nf_n$ et évitant la partie multiplicative

$$S = k[U_o,\dots,U_n] \dot{-} 0 ,$$

la classe de $U_1df_1+U_2df_2+\dots+U_ndf_n$ dans $P_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}\, P_{\mathfrak{p}}$ n'est pas nulle. Pour cela, supposons par l'absurde qu'on puisse trouver un tel $\mathfrak{p}$ pour lequel elle est nulle, et posons $\mathfrak{q} = \mathfrak{p} \cap A$ , $\Omega = \Omega^1_{A/k}$ . Les éléments $\overline{df_1},\dots,\overline{df_n}$ de $\Omega_{\mathfrak{q}}$ formant un système de générateurs, on peut, quitte à changer l'ordre des $f_i$ , supposer que $\overline{df_1},\dots,\overline{df_\nu}$ est une base de $k(\mathfrak{q})$ - espace vectoriel $\Omega_{\mathfrak{q}}/\mathfrak{q}\,\Omega_{\mathfrak{q}}$ . Si on exprime les autres $\overline{df_i}$ en fonction de ceux-là, il résulte de la relation

$$\mathrm{cl}(U_1df_1+\dots+U_ndf_n) = 0 \quad \text{dans} \quad P_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}\, P_{\mathfrak{p}}$$

que, dans $k(\mathfrak{p})$ , les éléments $\overline{U}_1,\dots,\overline{U}_\nu$ appartiennent au $k(\mathfrak{q})$ - espace vectoriel engendré par $\overline{U}_{\nu+1},\dots,\overline{U}_n$ . Comme

$$\overline{U}_o+\overline{U}_1\overline{f}_1+\dots+\overline{U}_n\overline{f}_n = 0$$

par hypothèse, on en déduit que

$$k(\mathfrak{p}) = k(\mathfrak{q})(\overline{U}_1,\overline{U}_2,\dots,\overline{U}_n) = k(\mathfrak{q})(\overline{U}_{\nu+1},\dots,\overline{U}_n) .$$

En particulier,

(6.3.5) $$d^\circ tr(k(\mathfrak{p})/k(\mathfrak{q})) \leq n-\nu .$$

Mais, par ailleurs,

$$\begin{aligned} d^\circ tr(k(\mathfrak{p})/k(\mathfrak{q})) &= d^\circ tr(k(\mathfrak{p})/k) - d^\circ tr(k(\mathfrak{q})/k) \\ &= \dim[A[U_o,\dots,U_n]/\mathfrak{p}] - \dim(A/\mathfrak{q}) \\ &= [n+1+\nu - h(\mathfrak{p})] - [\nu - h(\mathfrak{q})] \qquad \text{(catenarité)} \end{aligned}$$

(6.3.6) $$d^\circ tr(k(\mathfrak{p})/k(\mathfrak{q})) = n+1-h(\mathfrak{p})+h(\mathfrak{q}) .$$

Comme $\mathfrak{p}$ ne rencontre pas $k[U_o,\dots,U_n] \dot{-} 0$ , l'anneau $A[U_o,\dots,U_n]_{\mathfrak{p}}$ s'identifie à un localisé de $C = A \otimes_k k(U_o,\dots,U_n)$ , qui est de dimension $\nu$ , d'où $h(\mathfrak{p}) \leq \nu$ . Comparant (6.3.5) et (6.3.6) , on obtient la contradiction

$$n+1-\nu+h(\mathfrak{q}) \leq n-\nu .$$

Montrons 3) . Comme $X$ est géométriquement réduit, il existe un ouvert dense $V$ de $X$ qui est lisse sur $k$ . Le schéma (6.1.1) associé à $(V, f|V)$ , qu'on notera $Z_V$ , est un ouvert dense de $Z$ ; de plus, notant $F$ la fibre générique de $\pi$ , il résulte de 2) que $F \cap Z_V$ est lisse sur $k(U_o, U_1, \dots, U_n)$ . D'après (4.10) , il nous suffit de voir que $F$ est géométriquement réduite. Comme $Z \simeq X \times_k \mathbb{E}_k^n$ est réduit, $F$ l'est également. De plus, les points maximaux de $F$ , situés par $h$ (6.1.3) au-dessus de ceux de $X$ , appartiennent à $F \cap Z_V$ , qui est lisse sur $k(U_o, U_1, \dots, U_n)$ , donc leurs anneaux locaux sont des corps extensions séparables de $k(U_o, U_1, \dots, U_n)$ . On conclut alors en utilisant la caractérisation (4.2) ii) des schémas géométriquement réduits sur un corps.

Montrons enfin 4) . D'après (4.10) , il suffit de montrer que $F$ est géométriquement irréductible. On peut pour cela supposer $X$ intègre, donc $Z$ et $F$ également, et il suffit alors (4.3) de prouver que le corps des fonctions rationnelles $K_Z$ de $Z$ est extension primaire de $K = k(U_o, U_1, \dots, U_n)$ . Comme $\dim \overline{f(X)} \geq 2$ , il résulte de (6.2.4) que, quitte à changer l'ordre des $f_i$ , le morphisme

(6.3.7)
$$\begin{aligned} Z &\longrightarrow \mathbb{E}_k^{n+2} \\ (x, u_o, u_1, \dots, u_n) &\longmapsto (u_o, u_1, \dots, u_n, f_1(x)) \end{aligned}$$

est dominant. Par ailleurs, le morphisme $h$ (6.1.3) identifie le corps des fonctions rationnelles $K_X$ à un sous-corps de $K_Z$ et l'isomorphisme canonique (6.1.4) montre que, posant $u_i = \overline{U}_i$ dans $\Gamma(Z, \mathcal{O}_Z)$ ,

(6.3.8)
$$K_Z = K_X(u_1, u_2, \dots, u_n) ,$$

et que les $u_i$ $(1 \leq i \leq n)$ forment une base de transcendance de $K_Z$ sur $K_X$ . Les autres notations sont définies par le diagramme ci-dessous

(6.3.9)
$$\begin{array}{ccccccc} k(u_1, u_2, \dots, u_n) & \subset & k(u_o, u_1, \dots, u_n) & \subset & k(u_o, u_1, \dots, u_n, f_1) & \subset & K_Z , \\ \| & & \| & & \| & & \\ K_o & & K & & L & & \end{array}$$

où, comme (6.3.7) est dominant, $(u_o, u_1, \dots, u_n, f_1)$ est une base de transcendance de $L$ sur $k$. Notant $\tilde{K}$ la fermeture algébrique séparable de $K$ dans $K_Z$, il nous faut voir que $K = \tilde{K}$. Pour cela, on introduit aussi la fermeture algébrique séparable $\tilde{L}$ de $L$ dans $K_Z$, de sorte que

$$\tilde{K} \subset \tilde{L}$$

et $\tilde{K}$ et $\tilde{L}$ sont respectivement finis sur $K$ et $L$ (3.1). Pour tout $c \in k$, il résulte de (6.3.8) qu'on définit un $K_X$ - automorphisme de $K_Z$ par

$$\text{(6.3.10)} \qquad \begin{cases} \sigma_c(u_1) = u_1 + c \\ \sigma_c(u_i) = u_i \qquad (i \geq 1) . \end{cases}$$

De l'égalité

$$u_o + u_1 f_1 + \dots + u_n f_n = 0$$

résulte alors que

$$\text{(6.3.11)} \qquad \sigma_c(u_o) = u_o - c f_1 ,$$

de sorte que (6.3.9)

$$\text{(6.3.12)} \qquad \sigma_c(L) \subset L \quad \text{d'où} \quad \sigma_c(\tilde{L}) \subset \tilde{L} .$$

Posant alors

$$\text{(6.3.13)} \qquad M_c = L(\sigma_c \tilde{K}) ,$$

$M_c$ est une extension séparable finie de $L$, contenue dans $\tilde{L}$. Comme $\tilde{L}$ est finie sur $L$, elle ne contient qu'un nombre fini d'extensions séparables finies distinctes de $L$ ; comme $k$ est infini, on en déduit l'existence de deux scalaires $c_1, c_2 \in k$ distincts tels que

$$\text{(6.3.14)} \qquad M_{c_1} = M_{c_2} .$$

Si on pose

$$\theta_i = \sigma_{c_i}(u_o) = u_o - c_i f_1 \qquad (i = 1,2) ,$$

il est clair que

(6.3.15) $$L = K_o(\theta_1,\theta_2) \ ,$$

de sorte que, comme $d^\circ tr(L/K_o) = 2$ , $\theta_1$ et $\theta_2$ forment une base de transcendance de $L$ sur $K_o$ . Soit d'autre part $\xi$ un élément primitif de $\tilde{K}$ sur $K$ , et posons $a_1 = \sigma_{c_1}(\xi), a_2 = \sigma_{c_2}(\xi)$; comparant (6.3.13),(6.3.14) et (6.3.15),on obtient

(6.3.16) $$K_o(\theta_1,\theta_2,a_1) = K_o(\theta_1,\theta_2,a_2) \ ,$$

avec $a_i$ algébrique séparable sur $K_o(\theta_i)$ $(i = 1,2)$ . Mais $X$ étant géométriquement irréductible, $K_X$ est extension primaire de $k$ , donc (3.13.3)

$$K_Z = K_X(u_1,\ldots,u_n) \text{ est extension primaire de } K_o = k(u_1,\ldots,u_n) \ .$$

A fortiori, $K_o(\theta_1,a_1)$ est extension primaire de $K_o$ . Comme $\theta_2$ est transcendant sur $K_o(\theta_1,a_1)$ , une nouvelle application de (3.13.3) montre que $M = K_o(\theta_1,a_1,\theta_2)$ est primaire sur $K_o(\theta_2)$ . Mais (6.3.16) $a_2$ appartient à $M$ et est algébrique sur $K_o(\theta_2)$ , d'où résulte que

(6.3.17) $$a_2 = \sigma_{c_2}(\xi) \in \sigma_{c_2}(K) = K_o(\theta_2) \ .$$

Appliquant $\sigma_{c_2}^{-1}$ à (6.3.17) , on en déduit que $\xi \in K$ , soit,par définition de $\xi$ , $\tilde{K} = K$ , ce qu'il fallait démontrer.

<u>Remarque</u> 6.3.18. Lorsqu'on ne suppose plus $k$ infini, on peut formuler (6.3) de la manière suivante.

1) <u>Pour que</u> $\pi : Z \to E_k^{n+1}$ <u>soit dominant, il faut et il suffit que</u> $\dim \overline{f(X)} > 0$ .

2) <u>Lorsque</u> $k$ <u>est de caractéristique</u> 0 <u>ou</u> $f$ <u>non ramifié, et</u> $X$ <u>lisse sur</u> $k$ <u>(resp. géométriquement réduit), alors la fibre générique de</u> $\pi$ <u>est lisse (resp. géométriquement réduite)</u>.

3) <u>Si</u> $\dim \overline{f(X)} \geq 2$ et $X$ <u>est géométriquement irréductible, alors la fibre générique de</u> $\pi$ <u>est géométriquement irréductible</u>.

(On se ramène à (6.3) par extension du corps de base à sa clôture algébrique $\overline{k}$) .

Contre-exemples 6.3.19. Lorsque $car(k) = p > 0$, on ne peut pas prendre $f$ quelconque dans les parties 2) et 3) de (6.3). Pour la réduction géométrique, un contre-exemple immédiat (mais peu intéressant) est fourni par

$$\begin{aligned} f : X = \mathbb{E}^1_k &\longrightarrow \mathbb{E}^1_k \qquad \text{(k algt. clos par exemple)} \\ x &\longmapsto x^p \end{aligned}$$

Lorsque $car(k) \neq 2$, un contre-exemple plus intéressant pour la lissité est fourni par le morphisme

$$\begin{aligned} f : X = \mathbb{E}^1_k \times (\mathbb{E}^1_k \doteq 0) &\longrightarrow \mathbb{E}^2_k \qquad \text{(k algt clos)}. \\ (x,y) &\longmapsto \left(\frac{x^p+y^2}{y}, \frac{x^p}{y}\right) \end{aligned}$$

En effet, pour tout $(\lambda,\mu,\nu) \in k^3$ ; avec $(\lambda,\mu) \neq (0,0)$, l'image réciproque par $f$ du plan d'équation $\lambda X+\mu Y+\nu = 0$ est le sous-schéma de $\mathbb{E}^2_k$ défini par

$$\begin{cases} (\lambda+\mu)x^p + \lambda y^2 + \nu y = 0 \\ y \neq 0 \end{cases}$$

qui, lorsque $\lambda \neq 0$, $\nu \neq 0$ et $\lambda+\mu \neq 0$, a pour point singulier "variable" le point de coordonnées

$$\begin{cases} x = \left[\dfrac{\nu^2}{4\lambda(\lambda+\mu)}\right]^{1/p} \\ y = -\dfrac{\nu}{2\lambda} \end{cases} .$$

Avec les notations (6.1), on peut toutefois donner une condition nécessaire et suffisante pour que la fibre générique de $\pi$ soit géométriquement réduite.

PROPOSITION 6.4. Soient $k$ un corps, $X$ un $k$-schéma de type fini, et $f : X \to \mathbb{E}^n_k$ un $k$-morphisme. On suppose que, pour toute composante irréductible ou immergée $T$ de $X$, on a $\dim \overline{f(T)} \geq 1$. Alors les assertions suivantes sont équivalentes.

i) La fibre générique de $\pi : Z \to \mathbb{E}^n_k$ est géométriquement réduite.

ii) $X$ est géométriquement réduit, et le support de l'image du morphisme de $\mathcal{O}_X$ - modules

(6.4.1) $$f^* : \mathcal{O}_X \otimes_{\mathcal{O}_{\mathbb{E}^n}} \Omega^1_{\mathbb{E}^n/k} \to \Omega^1_{X/k}$$

est $X$ tout entier.

La condition ii) équivaut à dire que, pour toute composante irréductible $X_j$ de $X$, il existe $i \in [1,n]$ tel que $df_i$ ne s'annule pas sur $X_j$.

Avant de prouver (6.4), énonçons-en un corollaire.

COROLLAIRE 6.4.2. On suppose $k$ algébriquement clos et $\mathrm{car}(k) = p > 0$, et $X$ normal et intègre, avec $\dim \overline{f(X)} \geq 1$. Alors les assertions suivantes sont équivalentes.

i) La fibre générique de $\pi$ n'est pas géométriquement réduite.

ii) Le morphisme $f$ se factorise, en tant que morphisme de schémas (mais non plus de $k$-schémas), à travers le morphisme de Frobenius

$$\begin{aligned} F^{(p)} : \mathbb{E}^n_k &\longrightarrow \mathbb{E}^n_k \\ (x_1,\dots,x_n) &\longmapsto (x_1^p,\dots,x_n^p) \end{aligned}.$$

Preuve de (6.4). On peut tout d'abord supposer $k$ algébriquement clos. Nous allons montrer que i) implique que $X$ est (géométriquement) réduit, ce qui nous permettra dans la suite de supposer $X$ réduit. Quitte à localiser $X$ pour la topologie de Zariski, on peut le supposer affine : $X = \mathrm{spec}\, A$, avec $A$ une $k$-algèbre de type fini, et $f = (f_1,\dots,f_n)$, avec $f_i \in A$. La fibre générique de $\pi$ est affine, d'anneau

$$[A \otimes_k k(U_0,U_1,\dots,U_n)] / (U_0 + U_1 f_1 + \dots + U_n f_n) ,$$

qui est géométriquement réduit sur $k(U_0,U_1,\dots,U_n)$ par hypothèse, donc en particulier réduit. Nous allons voir que $A$ est réduit en étudiant le noyau du morphisme d'anneaux canonique

(6.4.3) $\varphi : A \to [A \underset{k}{\otimes} k(U_o,\dots,U_n)]/(U_o + U_1f_1 + \dots + U_nf_n)$ .

Posons $I = \operatorname{Ker}\varphi$. Si on avait $I \neq 0$ , il existerait un idéal $\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass} I \subset \operatorname{Ass} A$ , mais cela impliquerait $I_{\mathfrak{p}} = 0$ à cause du lemme (6.4.4) ci-dessous et l'hypothèse préliminaire de (6.4) . Par suite, $I = 0$ et $A$ est réduit.

LEMME 6.4.4. <u>Pour tout</u> $\mathfrak{p} \in \operatorname{spec} A$ <u>tel que</u> $\dim \overline{f(V(\mathfrak{p}))} \geq 1$ , <u>on a</u> $I_{\mathfrak{p}} = 0$ .

Soit $a \in I$ . Par définition, il existe $s \in k[U_o,\dots,U_n]$ non nul, et $P \in A[U_o,U_1,\dots,U_n]$ tels que

(6.4.5) $sa = (U_o+U_1f_1+\dots+U_nf_n)P$ dans $A[U_o,U_1,\dots,U_n]$ .

Comme $U_o + U_1\overline{f}_1 + \dots + U_n\overline{f}_n$ n'est pas diviseur de 0 dans $(A/aA)[U_o,U_1,\dots,U_n]$ , il résulte de (6.4.5) que $P$ est de la forme

$$P = aQ \text{ , avec } Q \in A[U_o,U_1,\dots,U_n] \text{ .}$$

L'égalité (6.4.5) peut donc s'écrire

(6.4.6) $[s - (U_o + U_1f_1 + \dots + U_nf_n)Q]\, a = 0$ (dans $A[U_o,U_1,\dots,U_n]$) .

Soit $\mathfrak{p} \in \operatorname{spec} A$ , avec $\dim \overline{f(V(\mathfrak{p}))} \geq 1$ . On ne saurait avoir

(6.4.7) $s = (U_o + U_1\overline{f}_1 + \dots + U_n\overline{f}_n)\overline{Q}$ dans $k(\mathfrak{p})[U_o,U_1,\dots,U_n]$ .

En effet, comme $k$ est algébriquement clos, les diviseurs premiers de $s$ dans $k[U_o,\dots,U_n]$ sont géométriquement premiers, donc (6.4.7) impliquerait l'existence de $\lambda_1,\dots,\lambda_n \in k$ tels que

$$f_i = \lambda_i \text{ sur } V(\mathfrak{p}) \text{ ,}$$

en contradiction avec l'hypothèse $\dim \overline{f(V(\mathfrak{p}))} \geq 1$ . Par suite, il existe une spécialisation $(u_o,u_1,\dots,u_n)$ de $(U_o,U_1,\dots,U_n)$ telle que

$$s(u_o,u_1,\dots,u_n) - (u_o + u_1\overline{f}_1 + \dots + u_n\overline{f}_n)\,\overline{Q}\,(u_o,\dots,u_n) \neq 0 \text{ dans } k(\mathfrak{p}) \text{ ,}$$

donc telle que $s - (u_o + u_1f_1 + \dots + u_nf_n)\,Q$ soit inversible dans $A_{\mathfrak{p}}$ , de sorte que, spécialisant ainsi (6.4.6) , on en déduit $a_{\mathfrak{p}} = 0$ .

On peut donc dans (6.4) supposer $k$ algébriquement clos et $X$ réduit. Alors $Z \simeq X \times_k \mathbb{E}_k^n$ est réduit, donc la fibre générique $F$ de $\pi$ également. Si $(X_i)_{1 \leq i \leq m}$ sont les composantes irréductibles de $X$, on sait (6.2) que $Z$ a pour composantes irréductibles les schémas (6.1.2) associés aux $(X_i, f|X_i)$, notés $Z_i$. De plus, comme $\dim \overline{f(X_i)} \geq 1$, $\pi|Z_i$ est dominant (6.2.1). Utilisant (4.2), on voit que, pour que $F$ soit géométriquement réduite sur $k(U_o, U_1, \ldots U_n)$, il faut et il suffit que, pour tout point maximal $x$ de $Z$, $k(x)$ soit une extension séparable de $k(U_o, U_1, \ldots, U_n)$. Le caractère birationnel de ii) permet alors de supposer $X$ intègre, de corps des fonctions rationnelles $K_X$. Posons alors, pour simplifier,

$$U = \mathbb{E}_k^n = \mathrm{spec}(k[U_1, \ldots, U_n]) \quad , \text{ corps des fonctions } K_U$$

$$\tilde{U} = \mathbb{E}_k^{n+1} = \mathrm{spec}(k[U_o, U_1, \ldots, U_n]) \quad , \text{ corps des fonctions } K_{\tilde{U}} \quad ,$$

de sorte que $Z \simeq X \times_k U$ (6.1.4). On a alors la suite exacte (5.3.3)

$$(6.4.8) \qquad \begin{array}{ccccccc} K_Z \otimes_{K_{\tilde{U}}} \Omega^1_{K_{\tilde{U}}/K_U} & \longrightarrow & \Omega^1_{K_Z/K_U} & \longrightarrow & \Omega^1_{K_Z/K_{\tilde{U}}} & \longrightarrow & 0 \\ \| & & \| & & & & \\ K_Z dU_o & & K_Z \otimes_{K_X} \Omega^1_{K_X/k} & & & & \\ dU_o & \longmapsto & dU_o = -U_1 df_1 - \ldots - U_n df_n & & & & \end{array} \quad .$$

Pour que $K_Z$ soit séparable sur $K_{\tilde{U}}$, il faut et il suffit que

$$\dim \Omega^1_{K_Z/K_{\tilde{U}}} = d^\circ tr(K_Z/K_{\tilde{U}}) = d^\circ tr(K_Z/K_U) - 1 \; .$$

Or, comme $K_Z$ est séparable sur $K_U$ (3.13.3),

$$\dim \Omega^1_{K_Z/K_U} = d^\circ tr(K_Z/K_U) \; .$$

Par suite, pour que $K_Z$ ne soit pas séparable sur $K_{\tilde{U}}$, il faut et il suffit que

$$U_1 df_1 + \ldots + U_n df_n = 0 \; , \text{ soit } \; df_i = 0 \quad (1 \leq i \leq n) \; ,$$

d'où l'assertion (6.4).

Montrons (6.4.2). En caractéristique $p > 0$, dire que $df_i = 0$ $(1 \le i \le n)$, c'est dire que $f_i \in k(K_X^p)$ $(1 \le i \le n)$, d'après (5.13), soit, posant $T = \overline{f(X)}$ et notant $K_T$ son corps des fonctions,

$$K_T \subset k(K_X^p) = K_X^p \quad (\text{car } k \text{ est parfait}).$$

Si $f$ se factorise à travers le morphisme de Frobenius $F^{(p)}$,

$$f = F^{(p)} \circ g\ , \text{ où } g = (g_1, \ldots, g_n)\ ,$$

alors $K_T = k(g_1^p, \ldots, g_n^p) \subset k(K_X^p)$. Inversement, si $K_T \subset K_X^p$, on peut écrire $f_i = g_i^p$, avec $g_i \in K_X$ ; comme $X$ est normal et $g_i^p \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$, on a $g_i \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ et $f = F^{(p)} \circ g$, avec $g = (g_1, \ldots, g_n)$.

6.5. Nous allons maintenant formuler les théorèmes de Bertini pour les sections affines générales.

On suppose comme toujours donnés un corps $k$, un $k$-schéma de type fini $X$ et

$$f : X \longrightarrow \mathbb{E}_k^n$$
$$x \longmapsto (f_1(x), \ldots, f_n(x))$$

un $k$-morphisme. On considère cette fois le $k$-schéma $Z^{(d)}$ de $X \times_k (\mathbb{E}_k^{n+1})^d$ défini par

(6.5.1) $$Z^{(d)} = \{(x, (u_{ji})_{0 \le i \le n, 1 \le j \le d}) \mid u_{j0} + \sum_{i=1}^{n} u_{ji} f_i(x) = 0 \quad (1 \le j \le d)\}.$$

Autrement dit, notant

(6.5.2) $$\ell_j : \mathbb{E}_k^n \longrightarrow \mathbb{E}_k^1$$

les formes affines

$$\ell_j : u_{j0} + \sum_{i=1}^{n} u_{ji} x_i \qquad (1 \le j \le d)$$

on a

$$Z^{(d)} = \{(x, \ell_1, \ldots, \ell_d) \mid \ell_1 \circ f(x) = \ldots = \ell_d \circ f(x) = 0\}.$$

Comme dans le cas des sections hyperplanes, la projection

$$(6.5.3) \qquad h : Z^{(d)} \longrightarrow X$$
$$(x, \ell_1, \ldots, \ell_d) \longmapsto x$$

munit $Z^{(d)}$ d'une structure de k-fibré vectoriel trivial de rang $nd$.

Plus précisément, le k-morphisme

$$X \times_k (\mathbb{E}_k^n)^d \longrightarrow Z^{(d)}$$

$$[x, (u_{j1}, \ldots, u_{jn})\ 1 \le j \le d] \longmapsto [x, (-u_{j1}f_1(x) - \ldots - u_{jn}f_n(x), u_{j1}, \ldots, u_{jn})\ 1 \le j \le d]$$

est un isomorphisme au-dessus de $X$.

De plus, pour tout point rationnel $\xi = (\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_d)$ de $(\mathbb{E}_k^{n+1})^d$, la fibre de $\xi$ pour la projection

$$(6.5.4) \qquad \pi : Z^{(d)} \to (\mathbb{E}_k^{n+1})^d$$

s'identifie à $f^{-1}(V_\xi)$, où $V_\xi$ désigne la variété affine

$$V_\xi : \ell_1 = \ell_2 = \ldots = \ell_d = 0 \quad \text{de} \quad \mathbb{E}_k^n ,$$

qui est en général de dimension $n-d$.

Une première manière de formuler les théorèmes de Bertini est la suivante.

THEOREME 6.6. Soient $k$ un corps, $X$ un k-schéma de type fini, $d$ un entier $\geq 1$ et $f : X \to \mathbb{E}_k^n$ un k-morphisme.

1) Lorsque $X$ est irréductible, pour que le morphisme (6.5.4) $\pi : Z^{(d)} \to (\mathbb{E}_k^{n+1})^d$ soit dominant, il faut et il suffit que $\dim \overline{f(X)} \geq d$.

2) Supposons $k$ de caractéristique 0 ou $f$ non ramifié. Alors, si $X$ est lisse (resp. géométriquement réduit), la fibre générique de $\pi$ est lisse (resp. géométriquement réduite).

3) Lorsque $\dim \overline{f(X)} \geq d+1$ et $X$ est géométriquement irréductible, la fibre générique de $\pi$ est géométriquement irréductible.

Comme dans (6.3), lorsque $k$ est infini, l'énoncé (6.6) prend l'allure plus frappante suivante, où $\xi$ désigne un point rationnel de $(\mathbf{E}_k^{n+1})^d$ .

COROLLAIRE 6.7. Supposons de plus $k$ infini.

1) a) Si $\dim \overline{f(X)} < d$ , on a $f^{-1}(V_\xi) = \emptyset$ pour presque tout $\xi$ .

b) Si $\dim \overline{f(X)} \geq d$ , notant $X_j$ $(1 \leq j \leq r)$ celles des composantes irréductibles de $X$ pour lesquelles $\dim \overline{f(X_j)} \geq d$ et $\nu_j$ leurs dimensions, alors, pour presque tout $\xi$ , les composantes irréductibles de $f^{-1}(V_\xi)$ s'écrivent de manière unique comme composantes irréductibles de l'un des schémas $f^{-1}(V_\xi) \cap X_j$ , et celui-ci est purement de dimension $\nu_j - d$ .

2) Supposons $k$ de caractéristique $0$ ou $f$ non ramifié, et $X$ lisse (resp. géométriquement réduit) . Alors, pour presque tout $\xi$ , le $k$-schéma $f^{-1}(V_\xi)$ est lisse (resp. géométriquement réduit) .

3) Supposons $\dim \overline{f(X)} \geq d+1$ , et $X$ géométriquement irréductible. Alors, pour presque tout $\xi$ , $f^{-1}(V_\xi)$ est géométriquement irréductible.

Preuve. Pour toutes les assertions de (6.6) et (6.7) , on se ramène au cas où $k$ est algébriquement clos, ce que nous supposerons désormais. Montrons (6.6.,1) . Si $\dim \overline{f(X)} \geq d$ , on sait (6.2.3) que, quitte à changer l'ordre des $f_i$ , le morphisme

$$X \longrightarrow \mathbf{E}_k^d$$
$$x \longmapsto (f_1(x), f_2(x), \ldots, f_d(x))$$

est dominant. Pour presque tout $(a_1, \ldots, a_d) \in k^d$ , la sous-variété d'équations

$$f_1(x) = a_1, f_2(x) = a_2, \ldots, f_d(x) = a_d \quad \text{dans } X$$

est de dimension $\dim(X) - d$ . Par suite, posant

$$\ell_j = a_j - x_j \quad (1 \leq j \leq d) ,$$

la fibre $\pi^{-1}(\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_d)$ a pour dimension $\dim X - d = \dim Z^{(d)} - \dim(\mathbf{E}_k^{n+1})^d$ .

Le théorème de semi-continuité de Chevalley implique alors que $\pi$ est dominant. Inversement, supposons $\pi$ dominant, et posons pour simplifier

$$\widetilde{U} = (\mathbf{E}_k^{n+1})^d \ .$$

Les fonctions coordonnées $u_{ij}$ sur $\widetilde{U}$ s'identifient, par composition avec $\pi$, à des fonctions sur $Z^{(d)}$, notées de même, et algébriquement indépendantes sur $k$. D'après (6.5.3), les $u_{ij}$ $(i \in [1,d]\ ,\ j \in [1,n])$ sont algébriquement indépendantes sur $K_X \subset K_{Z^{(d)}}$, et a fortiori sur le corps des fonctions rationnelles $K_Y = k(f_1,\dots,f_n) \subset K_X$ de $Y = \overline{f(X)}$. Les égalités dans $K_{Z^{(d)}}$

$$\begin{cases} u_{10} + u_{11}f_1 + \dots + u_{1n}f_n = 0 \\ \quad\vdots \\ u_{d0} + u_{d1}f_1 + \dots + u_{dn}f_n = 0 \end{cases}$$

montrent que

$$K_{\widetilde{U}} = k(u_{ij} \mid 1 \le i \le d, 0 \le j \le n) \subset K_Y(u_{ij} \mid 1 \le i \le d,\ 1 \le j \le n) \ ,$$

d'où

$$d^\circ tr(K_{\widetilde{U}}/k) = (n+1)d \le d^\circ tr(K_Y/k) + nd \ ,$$

et par suite $\dim \overline{f(X)} \ge d$. Une fois connu (6.6 ,1), on en déduit (6.7 ,1) en paraphrasant la preuve de (6.3,1). Compte tenu du théorème de constructibilité (4.10) les assertions (6.6,2) et (6.6,3) sont équivalentes aux assertions (6.7) correspondantes. Montrons (6.7,2) dans le cas lisse, le cas géométriquement réduit se prouvant de même. Nous allons le voir par récurrence, en supposant l'assertion vraie pour tout entier $d' \le d-1$, le cas $d = 1$ n'étant autre que (6.3,2). Posons alors pour cela

$$T = \{(\ell_1,\dots,\ell_d) \in \widetilde{U}(k) \mid \pi^{-1}(\ell_1,\dots,\ell_d) \text{ lisse}\} \ .$$

Comme le lieu des $z \in \widetilde{U}$ pour lesquels $\pi^{-1}(z)$ est lisse est constructible, il nous suffit (1.3) de prouver que $T$ est dense dans $\widetilde{U}(k) \subset \widetilde{U}$ (les points fermés sont denses dans $\widetilde{U}$). Par hypothèse de récurrence,

$$T_1 = \{\ell_1 \in k^{n+1} \,|\, (\ell_1 \circ f)^{-1}(0) \ \text{lisse}\ \}$$

est dense dans $k^{n+1}$ ; de plus, pour tout $\ell_1 \in T_1$ , l'hypothèse de récurrence appliquée à $((\ell_1 \circ f)^{-1}(0),f)$ montre que

$$T_2(\ell_1) = \{(\ell_2,\dots,\ell_d) \in (k^{n+1})^{(d-1)} \,|\, \bigcap_{j=2}^{d} (\ell_j \circ f)^{-1}(0) \ \text{lisse}\ \}$$

est dense dans $(k^{n+1})^{(d-1)}$ . On a donc, notant $\overline{T}$ l'adhérence de $T$ dans $\widetilde{U}(k)$ ,

$$\overline{T} \supset \bigcup_{\ell_1 \in T_1} \{\ell_1 \times \overline{T_2(\ell_1)}\} = T_1 \times (k^{n+1})^{(d-1)} ,$$

donc $$\overline{T} \supset \overline{T}_1 \times (k^{n+1})^{(d-1)} = (k^{n+1})^d = \widetilde{U}(k) .$$

Pour prouver (6.7,3) , il faut modifier légèrement l'argument précédent. De nouveau, on raisonne par récurrence sur $d$ , en supposant l'assertion vraie pour tout entier $d' \leq d-1$ , le cas $d = 1$ n'étant autre que (6.3,4) . On pose cette fois

$$T = \{(\ell_1,\ell_2,\dots,\ell_d) \in \widetilde{U}(k) \,|\, \pi^{-1}(\ell_1,\dots,\ell_d) \ \text{est (géométriquement) irréductible}\}$$

Le lieu des $z \in \widetilde{U}$ pour lesquels $\pi^{-1}(z)$ est géométriquement irréductible étant constructible (4.10) , il suffit (1.3) de montrer que $T$ est dense dans $\widetilde{U}(k)$ . Comme $\dim \overline{f(X)} \geq 1$ , l'hypothèse de récurrence montre que

$$T_1 = \{\ell_1 \in k^{n+1} \,|\, (\ell_1 \circ f)^{-1}(0) \ \text{géométriquement irréductible}\}$$

contient un ouvert de Zariski non vide, soit $\Omega$ , de $k^{n+1}$ . La projection

$$\begin{aligned} p : \quad & k^{n+1} \longrightarrow k^n \\ & (u_{10},u_{11},\dots,u_{1n}) \longmapsto (u_{11},\dots,u_{1n}) \end{aligned}$$

est ouverte (2.8) , et on pose $V = p(\Omega)$ . Si

$$\lambda_1 = (a_{11},\dots,a_{1n}) \in V ,$$

alors pour presque tout $a \in k$ , le sous-schéma de $X$ d'équation

$$a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n - a = 0$$

est une hypersurface irréductible de $X$ , notée $H_a$ . Nous allons voir que, pour presque tout $a$ , on a

$$\dim \overline{f(H_a)} \geq d \ ,$$

du moins si on a pris quelques précautions concernant le choix de $\Omega$ . En fait, supposant les $f_i$ ordonnées de sorte que $(f_1,\ldots,f_{d+1})$ soit dominant, il suffira de supposer que $u_{11} \not\equiv 0$ sur $\Omega$ , i.e. $\Omega \subset D\ (u_{11})$ . En effet, alors l'égalité

$$k(f_1,\ldots,f_n) = k(a_{11}f_1+\ldots+ a_{1n}f_n,f_2,\ldots,f_n)$$

dans $K_X$ montre que $(a_{11}f_1+\ldots+ a_{1n}f_n,f_2,\ldots,f_{d+1})$ est une base de transcendance de $k(f_1,\ldots,f_n)$ sur $k$ , donc que le morphisme

(6.7.1) $\quad \varphi : X \longrightarrow \mathbb{E}_k^{d+1}$

$$x \longmapsto (a_{11}f_1(x)+\ldots+ a_{1n}f_n(x),f_2(x),\ldots,f_{d+1}(x))$$

est dominant. On en déduit que, pour presque tout $a \in k$ , il existe $b_2,\ldots,b_{d+1} \in k$ tels que le sous-schéma de $X$ d'équations

$$\begin{cases} a_{11}f_1(x)+\ldots+ a_{1n}f_n(x) = a \\ f_i(x) = b_i \qquad\qquad (2 \leq i \leq d+1) \end{cases}$$

ait pour dimension $\dim X-(d+1)$ . Par suite, lorsque $H_a$ est irréductible de dimension $\dim X-1$ , il résulte du théorème de semi-continuité de Chevalley ((2.3 i)) que $\dim(\overline{\varphi(H_a)}) \geq \dim H_a - [\dim X-(d+1)] = d-1$ ((6.7.1) pour la notation $\varphi$ ) , et a fortiori $\dim \overline{f(H_a)} \geq d$ . Ceci dit, l'hypothèse de récurrence appliquée à $(H_a,f|H_a)$ et à $d-1$ montre que, pour presque tout $(\ell_2,\ldots,\ell_d) \in (k^{n+1})^{d-1}$ ,

$$(a_{11}x_1+\ldots+ a_{1n}x_n- a,\ell_2,\ldots,\ell_d) \in T \ .$$

Par suite,

$$\overline{T} \supset \{-a,a_{11},\ldots,a_{1n}\} \times (k^{n+1})^{d-1}$$

d'où $\quad \overline{T} \supset \quad k \times \{a_{11},\ldots,a_{1n}\} \times (k^{n+1})^{d-1} \quad$ (a général) et enfin $\overline{T} \supset k \times (k^{n+1})^{d-1} \quad (\overline{V} = k^n)$ .

Par ailleurs, la proportion (6.4) admet la généralisation suivante.

PROPOSITION 6.8. Soient $k$ un corps, $X$ un $k$-schéma de type fini, $d$ un entier $\geq 1$ , et $f : X \to \mathbb{E}^n_k$ un $k$-morphisme. On suppose que, pour toute composante irréductible ou immergée $T$ de $X$ , on a $\dim \overline{f(T)} \geq d$ . Alors les assertions suivantes sont équivalentes.

i) La fibre générique du morphisme $\pi : Z^{(d)} \to (\mathbb{E}^{n+1}_k)^d = \widetilde{U}$ est géométriquement réduite.

ii) Le $k$-schéma $X$ est géométriquement réduit, et le support de l'image du morphisme de $\mathcal{O}_X$- modules

(6.8.1) $$f^* : \mathcal{O}_X \otimes_{\mathcal{O}_{\widetilde{U}}} \Omega^d_{\widetilde{U}/k} \to \Omega^d_{X/k}$$

est $X$ tout entier.

Preuve. Par extension du corps de base, on se ramène au cas où $k$ est algébriquement clos. Montrons alors que, lorsque i) est réalisée, $X$ est (géométriquement) réduit. On peut supposer $X$ affine, et alors cela résulte du lemme suivant, dans lequel $C_d$ est l'anneau de la fibre générique de $\pi$ .

LEMME 6.8.2. Soient $k$ un corps, $A$ une $k$-algèbre de type fini, $(U_{ij})$ $(1 \leq i \leq d\ ,\ 0 \leq j \leq n)$ des indéterminées. Etant donnés $n$ éléments $f_1,\dots,f_n$ de $A$ , on pose

$$\ell_i = U_{i0} + U_{i1} f_1 + \dots + U_{in} f_n \quad (1 \leq i \leq d) .$$

Alors, si pour tout $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(A)$ ,

$$d^\circ\mathrm{tr}(k(\overline{f}_1,\dots,\overline{f}_n)/k) \geq d \quad (\overline{f}_i \text{ classe de } f_i \text{ dans } k(\mathfrak{p}))\ ,$$

le morphisme d'anneaux canonique

$$A \to [A \otimes_k k(U_{ij} \mid 1 \leq i \leq d,\ 0 \leq j \leq n)]/(\ell_1,\dots,\ell_d) = C_d$$

est injectif.

Le lemme se voit par récurrence croissante sur $d$ . Lorsque $d = 1$ , il a été prouvé (6.4.4) en se ramenant au cas où $k$ est algébriquement clos. Dans le cas général, remplaçant $d$ par $d-1$ , on peut supposer que le morphisme canonique $A \to C_{d-1}$ est injectif, et il suffit de voir que le morphisme canonique $C_{d-1} \to C_d$ est injectif. Or, posant, pour tout $d$ ,

$$K_d = k(U_{ij} \mid 1 \leq i \leq d \ , 0 \leq j \leq n-1) \ ,$$

on a

$$C_d = [C_{d-1} \otimes_{K_{d-1}} K_d]/(\ell_d) \tag{6.8.3}$$

de sorte que, utilisant l'hypothèse de récurrence, on est ramené à montrer que, pour tout $\mathfrak{q} \in \mathrm{Ass}(C_{d-1})$ , on a

$$d^\circ tr(K_{d-1}(\bar{f}_1,\ldots,\bar{f}_n)/K_{d-1}) \geq 1 \qquad (\bar{f}_i \in k(\mathfrak{q})) \ . \tag{6.8.4}$$

Comme $C_{d-1}$ est un localisé d'un anneau de polynômes sur $A$ , l'idéal $\mathfrak{p} = \mathfrak{q} \cap A$ est associé à $A$ , et on a

$$\begin{array}{ccc} k(\mathfrak{p}) & \hookrightarrow & k(\mathfrak{q}) \\ \uparrow & & \uparrow \\ k & \hookrightarrow & K_{d-1} \end{array} \qquad \bar{f}_i \in k(\mathfrak{p}) \quad (i = 1,\ldots,n) \ .$$

D'où

$$d^\circ tr(K_{d-1}(\bar{f}_1,\ldots,\bar{f}_n)/K_{d-1}) = d^\circ tr(K_{d-1}(\bar{f}_1,\ldots,\bar{f}_n)/k) - d^\circ tr(K_{d-1}/k) \ ,$$

soit, compte tenu de ce que $\bar{\ell}_i = 0$ $(1 \leq i \leq d)$ dans $C_d$ ,

$$d^\circ tr(K_{d-1}(\bar{f}_1,\ldots,\bar{f}_n)/K_{d-1}) = d^\circ tr(L(U_{ij} \mid 1 \leq i \leq d-1, 1 \leq j \leq n)/k) - (d-1)(n+1) \ , \tag{6.8.5}$$

où

$$L = k(\bar{f}_1,\ldots,\bar{f}_n) \text{ est le corps des fonctions de } \overline{f(V(\mathfrak{p}))} \ ,$$

avec, bien sûr, $X = \mathrm{spec}\, A$ et $f = (f_1,\ldots,f_n) : X \to \mathbb{E}^n_k$ . Finalement, il résulte de (6.8.5) que

$$\begin{aligned} d^\circ tr(K_{d-1}(\bar{f}_1,\ldots,\bar{f}_n)/K_{d-1}) &= d^\circ tr(L/k) + n(d-1) - (d-1)(n+1) \\ &= d^\circ tr(L/k) - d+1 \ . \end{aligned}$$

L'assertion (6.8.4) en résulte, car, par hypothèse, $d^\circ tr(L/k) \geq d$. On peut désormais, pour prouver (6.8), supposer $k$ algébriquement clos et $X$ réduit. Raisonnant comme dans la preuve de (6.4), le caractère birationnel des assertions i) et ii) permet même de supposer $X$ intègre. Paraphrasant les notations de (6.4), posons

$$Z = Z^{(d)}\ ,\ U = (\mathbb{E}_k^n)^d\ ,\ \widetilde{U} = (\mathbb{E}_k^{n+1})^d\ ,$$

où les coordonnées de $U$ (resp. $\widetilde{U}$) sont les $u_{ij}$, avec $1 \leq i \leq d$, et $1 \leq j \leq n$ (resp. $0 \leq j \leq n$). Posons enfin, pour $1 \leq i \leq d$,

(6.8.6) $$\xi_i = U_{i1}df_1 + \dots + U_{in}df_n \in \Omega^1_{K_Z/K_U}\ .$$

Pour que la fibre géométrique de $\pi$ soit réduite, il faut et il suffit que $\Omega^1_{K_Z/K_{\widetilde{U}}}$ soit de dimension égale à $\dim Z - \dim \widetilde{U} = \dim X - d$ sur $K_Z$.
On a la suite exacte (5.3.3)

$$K_Z \otimes_{K_{\widetilde{U}}} \Omega^1_{K_{\widetilde{U}}/K_U} \xrightarrow{\varphi} \Omega^1_{K_Z/K_U} \longrightarrow \Omega^1_{K_Z/K_{\widetilde{U}}} \to 0\ ,$$

dans laquelle, comme $Z \simeq X \times_k U$,

$$\Omega^1_{K_Z/K_U} \simeq K_Z \otimes_{K_X} \Omega^1_{K_X/k}$$

est de dimension égale à $\dim X$ sur $K_Z$, et la flèche $\varphi$ est obtenue en envoyant la base $1 \otimes dU_{io}$ $(1 \leq i \leq d)$ de $K_Z \otimes_{K_{\widetilde{U}}} \Omega^1_{K_{\widetilde{U}}/K_U}$ sur

$$dU_{i_o} = -\xi_i \quad (6.8.6) \quad \text{dans } \Omega^1_{K_Z/K_U}\ .$$

On en conclut que, pour que i) soit vérifiée, il faut et suffit que les $\xi_i$ soient linéairement indépendants sur $K_Z$. Cela équivaut à dire que $df_1,\dots,df_n$ engendrent dans $\Omega^1_{K_X/k}$ un sous-espace vectoriel de dimension $\geq d$, soit ii) à cause du lemme suivant.

LEMME 6.8.7. <u>Soient</u> $k$ <u>un corps,</u> $V$ <u>un</u> $k$-<u>espace vectoriel,</u> $v_1,\dots,v_n$ <u>des éléments de</u> $V$. <u>On suppose donnés une extension</u> $K$ <u>de</u> $k$, <u>et des éléments</u> $t_{ij}$ $(1 \leq i \leq d\ ,\ 1 \leq j \leq n)$ <u>de</u> $K$ <u>algébriquement indépendants sur</u> $k$, <u>et on pose</u>

$$\xi_i = \sum_{j=1}^{n} t_{ij} \otimes v_j \in K \underset{k}{\otimes} V \quad (1 \le i \le d) .$$

Alors les assertions suivantes sont équivalentes.

a) La dimension du sous-espace vectoriel $W = kv_1 + \dots + kv_n$ de $V$ est supérieure ou égale à $d$.

b) Les éléments $\xi_1, \dots, \xi_d$ sont $K$-linéairement indépendants dans $K \underset{k}{\otimes} V$.

Montrons le lemme. Comme

$$K\xi_1 + \dots + K\xi_d \subset K \underset{k}{\otimes} W ,$$

il est clair que b) ⇒ a). Prouvons a) ⇒ b), en supposant $\dim W = m \ge d$. Quitte à rajouter à $K$ des indéterminées $t_{ij}$ $(d+1 \le i \le m , 1 \le j \le n)$ et à définir ainsi des $\xi_j$ $(d+1 \le j \le m)$, on peut supposer que $m = d$. Quitte à changer les indexations, on peut admettre que les $v_j$ $(1 \le j \le d)$ forment une base de $W$, de sorte qu'il existe alors des scalaires $\lambda_{kj}$ $(d+1 \le k \le n , 1 \le j \le d)$ tels que

$$v_k = \sum_{j=1}^{d} \lambda_{kj} v_j \quad (d+1 \le k \le n, \ 1 \le j \le d) .$$

D'où, posant

(6.8.8) $$\theta_{ij} = t_{ij} + \sum_{k=d+1}^{n} \lambda_{kj} t_{ik} \ (1 \le i \le d, \ 1 \le j \le d)$$

les égalités

(6.8.9) $$\xi_i = \sum_{1 \le j \le d} \theta_{ij} \otimes v_j .$$

Les éléments $\theta_{ij}$ sont algébriquement indépendants sur $k$ : si $P \in k[T_{11}, \dots, T_{dd}]$ est tel que

$$P(\theta_{11}, \dots, \theta_{dd}) = 0 \text{ dans } k[t_{ij} | 1 \le i \le d, \ 1 \le j \le n] ,$$

la spécialisation $t_{ik} \to 0$ $(k \ge d+1)$ dans (6.8.8) montre que

$$P(t_{ij} | \ 1 \le i \le d , \ 1 \le j \le d) = 0 ,$$

d'où $P = 0$ puisque les $t_{ij}$ sont algébriquement indépendants sur $k$.

De (6.8.9) résulte que

$$\xi_1\wedge\ldots\wedge\xi_d = \det(\theta_{ij}) \otimes (v_1\wedge\ldots\wedge v_d) \in \Lambda^d_K(K \underset{k}{\otimes} V) .$$

Comme les $\theta_{ij}$ sont algébriquement indépendants sur $k$, $\det(\theta_{ij}) \neq 0$ dans $K$, et l'indépendance linéaire des $v_i$ $(1 \leq i \leq d)$ montre que $v_1\wedge\ldots\wedge v_d \neq 0$, d'où $\xi_1\wedge\ldots\wedge\xi_d = 0$, ce qui achève la preuve du lemme.

6.9. Pour terminer, indiquons brièvement la formulation des théorèmes de Bertini dans le cas projectif.

On se donne cette fois un corps $k$, un $k$-schéma de type fini $X$, un $k$-morphisme

$$f : X \to P^n_k$$

et un entier $d \geq 1$. Notant

$$Gr(d,n)$$

la grassmannienne des variétés linéaires projectives de <u>codimension</u> $d$ dans $P^n_k$, on considère le $k$-schéma

$$\mathcal{Z} = \{(x,V) \in X \underset{k}{\times} Gr(d,n) \,|\, f(x) \in V\} .$$

Notant $\hat{\pi} : \mathcal{Z} \to Gr(d,n)$ la projection canonique, on a

$$\hat{\pi}^{-1}(V) \simeq f^{-1}(V) \qquad (V \in Gr(d,n)) .$$

Notant $L$ le fibré en droites canonique sur $P^n_k$, la suite exacte d'Atiyah

$$0 \to L \longrightarrow P^n_k \times k^{n+1} \longrightarrow E \to 0$$

fournit, par image réciproque par $f$, une suite exacte

$$0 \to L_X \longrightarrow X \times k^{n+1} \longrightarrow E_X \to 0$$

de fibrés vectoriels sur $X$. Avec ces notations, le morphisme canonique

$$\hat{h} : \mathcal{Z} \longrightarrow X$$

s'identifie au fibré en grassmanniennes

$$Gr(d,E_X)$$

des sous-espaces de <u>codimension</u> $d$ des fibres de $E_X$.

Paraphrasant (6.6) et (6.7), on peut formuler les énoncés suivants.

THEOREME 6.10. <u>Soient</u> $k$ <u>un corps</u>, $X$ <u>un $k$-schéma de type fini, $d$ un entier</u> $\geq 1$, <u>et</u> $f : X \longrightarrow P_k^n$ <u>un $k$-morphisme</u>.

1) <u>Lorsque</u> $X$ <u>est irréductible, pour que le morphisme</u> $\hat{\pi} : \mathcal{Z} \longrightarrow Gr(d,n)$ <u>soit dominant, il faut et il suffit que</u> $\dim \overline{f(X)} \geq d$.

2) <u>Supposons</u> $k$ <u>de caractéristique zéro ou</u> $f$ <u>non ramifié. Alors, si</u> $X$ <u>est lisse (resp. géométriquement réduit), la fibre générique de</u> $\hat{\pi}$ <u>est lisse (resp. géométriquement réduite)</u>.

3) <u>Lorsque</u> $\dim \overline{f(X)} \geq d+1$ <u>et</u> $X$ <u>est géométriquement irréductible, la fibre générique de</u> $\hat{\pi}$ <u>est géométriquement irréductible</u>.

COROLLAIRE 6.11. <u>Supposons de plus</u> $k$ <u>infini</u>.

1) a) <u>Si</u> $\dim \overline{f(X)} < d$, <u>on a</u> $f^{-1}(V) = \emptyset$ <u>pour presque tout point rationnel</u> $V$ <u>de</u> $Gr(d,n)$.

b) <u>Si</u> $\dim \overline{f(X)} \geq d$, <u>notant</u> $X_j$ $(1 \leq j \leq r)$ <u>celles des composantes irréductibles de</u> $X$ <u>pour lesquelles</u> $\dim \overline{f(X_j)} \geq d$ <u>et</u> $\nu_j$ <u>leurs dimensions, alors, pour presque tout</u> $V \in Gr(d,n)(k)$, <u>les composantes irréductibles de</u> $f^{-1}(V)$ <u>s'écrivent de manière unique comme composantes irréductibles de l'un des schémas</u> $f^{-1}(V) \cap X_j$, <u>et ces derniers sont purement de dimension</u> $\nu_j - d$.

2) <u>Supposons</u> $k$ <u>de caractéristique</u> 0 <u>ou</u> $f$ <u>non ramifié, et</u> $X$ <u>lisse (resp. géométriquement réduit). Alors, pour presque tout</u> $V \in Gr(d,n)(k)$, <u>le</u> $k$-<u>schéma</u> $f^{-1}(V)$ <u>est lisse (resp. géométriquement réduit)</u>.

3) <u>Supposons</u> $\dim \overline{f(X)} \geq d+1$, <u>et</u> $X$ <u>géométriquement irréductible. Alors, pour presque tout</u> $V \in Gr(d,n)(k)$, <u>le</u> $k$-<u>schéma</u> $f^{-1}(V)$ <u>est géométriquement irréductible</u>.

<u>Preuve</u>. Compte tenu des théorèmes de constructibilité (2.3) et (4.10), l'énoncé (6.11) résulte de (6.10). Montrons (6.10). Notant $U_i$ $(x_i \neq 0)$

les cartes canoniques de $P_k^n$ , on se ramène au cas où $f(X)$ est contenu dans l'un des $U_j$ . Pour cela, on remplace $X$ par ceux des schémas $f^{-1}(U_j)$ qui sont non vides, et, pour l'assertion 3) , on utilise le caractère birationnel de l'irréductibilité géométrique (4.3) . Quitte à faire un changement de coordonnées dans $P_k^n$ , on peut donc supposer que

$$(6.10.1) \qquad f : X \longrightarrow \mathbb{E}_k^n \hookrightarrow P_k^n .$$

Soit $\Omega$ l'ouvert non vide de $Gr(d,n)$ défini par

$$\Omega = \{ V \in Gr(d,n) \mid V \cap \mathbb{E}_k^n \neq \emptyset \} .$$

Avec les notations (6.5) , notons $\hat{\ell}_i$ l'homogéneisée de la forme affine $\ell_i$ , et posons

$$\Omega_1 = \{(\ell_1,\dots,\ell_d) \in (\mathbb{E}_k^{n+1})^d \mid \det(u_{ij} \mid 1 \le i \le d,\ 1 \le j \le d) \neq 0 \} .$$

Le morphisme

$$\begin{aligned} \theta : \Omega_1 &\longrightarrow \Omega \\ (\ell_1,\dots,\ell_d) &\longmapsto (V: \hat{\ell}_1 = \dots = \hat{\ell}_d = 0) \end{aligned}$$

est (ouvert et) dominant, et on a un diagramme cartésien évident

$$(6.10.2) \qquad \begin{array}{ccc} Z^{(d)}|\Omega_1 & \longrightarrow & \mathcal{Z}|\Omega \\ \downarrow{\scriptstyle \pi} & & \downarrow{\scriptstyle \hat{\pi}} \\ \Omega_1 & \xrightarrow{\theta} & \Omega \end{array} .$$

Dans la situation (6.10.1) , on en déduit que $\pi$ est dominant si et seulement si $\hat{\pi}$ l'est. Par ailleurs, la fibre générique $F$ de $\pi$ se déduisant par extension de corps de celle, $\hat{F}$ , de $\hat{\pi}$ , on voit (§ 4) que $F$ est lisse (resp. géométriquement réduite, resp. géométriquement irréductible) si et seulement si $\hat{F}$ l'est, d'où l'assertion, compte tenu de (6.6) .

Enfin, pour être complet, mentionnons l'analogue de (6.8) , qui s'en déduit immédiatement, en utilisant le diagramme (6.10.2) .

PROPOSITION 6.12. Soient $k$ un corps, $X$ un $k$-schéma de type fini, $d$ un entier $\geq 1$, et $f : X \to P_k^n$ un $k$-morphisme. On suppose que, pour toute composante irréductible ou immergée $T$ de $X$, on a $\dim \overline{f(T)} \geq d$. Alors les assertions suivantes sont équivalentes.

i) La fibre générique du morphisme $\hat{\pi} : \mathcal{J} \to Gr(d,n)$ est géométriquement réduite.

ii) Le $k$-schéma $X$ est géométriquement réduit, et le support de l'image du morphisme de $\mathcal{O}_X$- modules

$$f^* : \mathcal{O}_X \otimes_{\mathcal{O}_P} \Omega^d_{P/k} \to \Omega^d_{X/k} \qquad (P = P_k^n)$$

est $X$ tout entier.

## 7 - APPLICATION A DES QUESTIONS DE CONNEXITE.

Une conséquence importante du théorème de Bertini (6.10) est la suivante.

THEOREME 7.1. Soient $k$ un corps, $X$ un $k$-schéma propre, $f : X \to P_k^n$ un $k$-morphisme et $L$ une sous-variété linéaire projective de $P_k^n$. On suppose en outre que

i) $X$ est géométriquement irréductible,

ii) $\dim L + \dim f(X) > n$.

Alors $f^{-1}(L)$ est géométriquement connexe, et non vide.

Preuve. On peut supposer $k$ algébriquement clos. Par ailleurs, posant, $d = n - \dim L$, l'hypothèse ii) se lit

$$\dim f(X) \geq d+1 .$$

Avec les notations utilisées dans le paragraphe précédent, on en déduit que le morphisme $\hat{\pi} : \mathcal{J} \to Gr(d,n)$ est dominant, et que sa fibre générique est géométriquement irréductible. Comme $\mathcal{J}$ est propre sur $k$, le morphisme $\hat{\pi}$, d'image fermée, est surjectif, donc $f^{-1}(L)$ est non vide. Considérons la factorisation de Stein de $\hat{\pi}$

$$\begin{tikzcd} \mathcal{Z} \arrow[rr, "\widetilde{\pi}"] \arrow[dr, "\widehat{\pi}"'] & & \widetilde{G} \arrow[dl, "g"] \\ & G = Gr(d,n) & \end{tikzcd} \quad .$$

Le morphisme $g$ est fini, $\widetilde{G}$ est intègre, et on a les inclusions de corps de fonctions

$$K_G \subset K_{\widetilde{G}} \subset K_{\mathcal{Z}} ,$$

où, comme la fibre générique de $\widehat{\pi}$ est géométriquement irréductible, la fermeture algèbrique de $K_G$ dans $K_{\mathcal{Z}}$ est radicielle sur $K_G$ (4.3) . Notant $p$ l'exposant caractéristique de $k$ , on en déduit qu'il existe un entier $\nu \geq 1$ tel que

$$(K_{\widetilde{G}})^{p^\nu} \subset K_G ,$$

d'où, comme $G$ est normal et $\widetilde{G}$ fini sur $G$ ,

$$(\mathcal{O}_{\widetilde{G}})^{p^\nu} \subset \mathcal{O}_G \subset \mathcal{O}_{\widetilde{G}} .$$

Par suite, le morphisme $g$ , radiciel et dominant, est un homéomorphisme ; les fibres de $\widehat{\pi}$ , qui s'identifient par $g$ à celles de $\widetilde{\pi}$ , sont donc connexes, d'où la connexité de $f^{-1}(L) \simeq (\widehat{\pi})^{-1}(\{L\})$ .

Utilisant ce résultat, FULTON et HANSEN ont récemment obtenu divers énoncés de connexité, qui sont tous conséquences du théorème suivant, dans lequel on note $\Delta \simeq P^n_k$ la diagonale de $(P^n_k)^r$ .

THEOREME 7.2. <u>Soient</u> $k$ <u>un corps</u>, $X$ <u>un</u> $k$-<u>schéma propre et géométriquement irréductible, et</u>

$$f : X \to (P^n_k)^r$$

<u>un</u> $k$-<u>morphisme. Alors, si</u>

$$\dim X > (r-1)n ,$$

<u>le</u> $k$-<u>schéma</u> $f^{-1}(\Delta)$ <u>est géométriquement connexe et non vide</u>.

<u>Preuve</u>. L'idée de la démonstration est de remplacer $(P_k^n)^r$ par $P_k^{nr}$ et $\Delta$ par une sous-variété linéaire projective de dimension $n$ de $P_k^{nr}$. On peut supposer $k$ algébriquement clos. Si $\xi$ et $\xi'$ sont deux points rationnels de $f^{-1}(\Delta)$, il est clair qu'il existe une forme linéaire $\ell \neq 0$ sur $k^{n+1}$ telle que, posant

$$U = \{\bar{x} \in P_k^n \mid \ell(x) \neq 0\},$$

on ait

$$f(\xi), f(\xi') \in \Delta \cap U^r \subset (P_k^n)^r .$$

Nous allons montrer que, pour tout $U$ du type indiqué, $f^{-1}(U^r \cap \Delta)$ est contenu dans une partie connexe de $f^{-1}(\Delta)$. Par suite, fixant $\xi$ et faisant varier $\xi'$, $f^{-1}(\Delta)$ sera réunion de parties connexes contenant toutes $\xi$, donc sera lui-même connexe. Dans un système de coordonnées projectives convenable, on a

$$U = \mathbb{E}_k^n \hookrightarrow P_k^n \quad \text{(complétion projective canonique)} .$$

L'isomorphisme évident

$$\theta : U^r \xrightarrow{\sim} \mathbb{E}_k^{nr} \tag{7.2.1}$$

définit une application rationnelle $(P_k^n)^r \dashrightarrow P_k^{nr}$. Notant $W$ l'adhérence du graphe de (7.2.1) dans $(P_k^n)^r \times_k P_k^{nr}$, les projections sur les deux facteurs induisent des morphismes projectifs birationnels

$$\begin{array}{ccc} & W & \\ {}^{\alpha}\swarrow & & \searrow^{\beta} \\ P = (P_k^n)^r & & P_k^{nr} \end{array}$$

tels que $\theta|U^r$ "=" $\beta \circ \alpha^{-1}$ sur $U^r$. Si $\widetilde{X}$ désigne la composante irréductible de $X \times_P W$ qui s'envoie surjectivement sur $X$, on en déduit un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} \widetilde{X} \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\gamma"'] & W \arrow[d, "\alpha"] \arrow[r, "\beta"] & P_k^{nr} \\ X \arrow[r, "f"] & (P_k^n)^r & \end{tikzcd} \tag{7.2.2}$$

Explicitons $W$ . Notant $(x_{i1},x_{i2},\dots,x_{in},t_i)$ les coordonnées projectives pour le $i^{\text{ème}}$ facteur $P^n_k$ $(1 \le i \le r)$ , et

$$(z_{11},\dots,z_{1n},z_{21},\dots,z_{2n},\dots,z_{r1},\dots,z_{rn},t)$$

les coordonnées projectives naturelles de $P^{nr}_k$ , il est immédiat de voir que $W$ est la sous-variété fermée de $(P^n_k)^r \times P^{nr}_k$ définie par les équations

$$(7.2.3) \qquad \begin{cases} t\,x_{ij} = t_i z_{ij} & (1 \le i \le r\ ,\quad 1 \le j \le n) \\ \\ x_{ij}\, z_{ik} = x_{ik} z_{ij} & (1 \le i \le r\ ,\ 1 \le j,k \le n)\ . \end{cases}$$

Notant alors $L$ la sous-variété linéaire de dimension $n$ de $P^{nr}_k$ définie par les équations

$$(7.2.4) \qquad z_{1j} = z_{2j} = \dots = z_{rj} \quad (1 \le j \le n\ )\ ,$$

on a les inclusions

$$(7.2.5) \qquad \begin{cases} \beta^{-1}(L) \subset \alpha^{-1}(\Delta) \\ \\ \alpha^{-1}(\Delta \cap U^r) \subset \beta^{-1}(L)\ . \end{cases}$$

La deuxième résulte aussitôt de ce que, avec la notation (7.2.1) , $\theta|U^r$ "=" $\beta \circ \alpha^{-1}$ sur $U^r$ , d'où

$$\beta[\alpha^{-1}(\Delta \cap U^r)] \subset L\ .$$

Pour la première, les relations (7.2.4) montrent que, pour tout $i \in [1,r]$ ,

$$(z_{i1},z_{i2},\dots,z_{in},t) \neq (0,0,\dots,0)\ ,$$

donc on déduit de (7.2.3) qu'il existe un scalaire $\lambda_i \neq 0$ tel que

$$(x_{i1},x_{i2},\dots,x_{in},t_i) = \lambda_i(z_{i1},z_{i2},\dots,z_{in},t)\ ,$$

d'où l'assertion. Ceci dit, la comparaison de (7.2.5) et du diagramme (7.2.2) montre que

$$\gamma^{-1}f^{-1}(\Delta \cap U^r) = g^{-1}\alpha^{-1}(\Delta \cap U^r) \subset g^{-1}\beta^{-1}(L) \subset g^{-1}\alpha^{-1}(\Delta) = \gamma^{-1}f^{-1}(\Delta) .$$

Comme $\alpha|\alpha^{-1}(U^r)$ est un isomorphisme sur son image et $\gamma$ est surjectif, on en déduit par application de $\gamma$ les inclusions

$$f^{-1}(\Delta \cap U^r) \subset \gamma\ ((\beta\circ g)^{-1}L) \subset f^{-1}(\Delta) .$$

On aura donc terminé si on prouve que $(\beta \circ g)^{-1}(L)$ est connexe. Comme $\beta \circ g(\widetilde{X})$ contient un ouvert isomorphe à $f(X) \cap U^r$, il est clair que

$$\dim \beta\circ g(\widetilde{X}) + \dim L = \dim f(X) + \dim \Delta > nr ,$$

d'où, d'après le théorème de connexité (7.1), la connexité de $(\beta\circ g)^{-1}(L)$. Enfin, choisissant $U$ tel que l'on ait seulement $f(X) \cap U^r \neq \emptyset$, l'argument précédent montre que $\dim(\beta\circ g(\widetilde{X})) + \dim L > nr$, donc (7.1) que $(\beta\circ g)^{-1}(L) \neq \emptyset$. L'inclusion $\gamma(\beta\circ g)^{-1}L) \subset f^{-1}(\Delta)$ montre alors que $f^{-1}(\Delta) \neq \emptyset$.

COROLLAIRE 7.3. <u>Soient $X_1,\dots,X_r$ des k-schémas propres et géométriquement irréductibles, et $f_i : X_i \to P^n_k$ $(1 \le i \le r)$ des k-morphismes. Alors, si</u>

$$\dim f(X_1) + \dim f(X_2) + \dots + \dim f(X_r) > (r-1)n ,$$

<u>le k-schéma</u>

$$X_1 \underset{P^n}{\times} X_2 \underset{P^n}{\times} \cdots \underset{P^n}{\times} X_r$$

<u>est géométriquement connexe et non vide.</u>

<u>Preuve</u>. On applique (7.2), avec $X = X_1 \underset{k}{\times} X_2 \underset{k}{\times} \dots \underset{k}{\times} X_r$ et $f = f_1 \times f_2 \times \dots \times f_r$.

<u>Exemples</u> 7.4. a) Si $X_1,\dots,X_r$ sont des sous-k-schémas fermés géométriquement irréductibles de $P^n_k$, avec $\dim X_1 + \dots + \dim X_r > (r-1)n$, alors $X_1 \cap \dots \cap X_r$ est géométriquement connexe et non vide.

b) (généralise (7.1)). Soit $Y$ un sous-k-schéma fermé géométriquement irréductible de $P^n_k$. Alors, pour tout k-schéma géométriquement irréductible et propre $X$, et tout k-morphisme $f : X \to P^n_k$ tels que

$$\dim f(X) + \dim Y > n ,$$

le k-schéma $f^{-1}(Y)$ est géométriquement connexe et non vide.

THEOREME 7.5. Soient $X$ un k-schéma propre et géométriquement irréductible, et $f : X \to P_k^n$ un k-morphisme non ramifié. Si $\dim X > \frac{n}{2}$, alors $f$ est un isomorphisme de $X$ sur son image.

Preuve. Posant $P = P_k^n$, il résulte de (7.3) que $X \times_P X$ est connexe. Par ailleurs la diagonale $X \hookrightarrow X \times_P X$ est, bien sûr, fermée dans $X \times_P X$, mais aussi ouverte, car $f$ est non ramifié. Par suite, $X = X \times_P X$, donc $f$ est injectif, d'où aussitôt l'assertion.

COROLLAIRE 7.6. (k algébriquement clos). Soit $X$ un sous-k-schéma fermé irréductible de $P_k^n$. Si $\dim X > \frac{n}{2}$, alors tout revêtement étale de $X$ est trivial, i.e.

$$\pi_1^{alg}(X) = 0 .$$

Preuve. Si $\varphi : T \to X$ est un tel revêtement, de composantes irréductibles $(T_i)_{1 \leq i \leq k}$, on applique (7.5) aux morphismes

$$\varphi|T_i : T_i \to P_k^n .$$

COROLLAIRE 7.7. (k algébriquement clos). Soit $X$ un sous-k-schéma fermé irréductible de $P_k^n$, avec $\dim X > n/2$. Alors :

ou bien $X$ est normal,

ou bien $X$ a d'autres singularités que des singularités ordinaires.

Preuve. Dire que les singularités de $X$ sont ordinaires, c'est dire que le morphisme de normalisation $\tilde{X} \to X$ est non ramifié. Dans ce cas, il résulte de (7.5) que c'est un isomorphisme.

BIBLIOGRAPHIE

[1] P. CARTIER : Dérivations dans les corps, exp. 13-14 in Sém. ENS 1955/56 (H. Cartan et C. Chevalley) .

[2] C. CHEVALLEY : Fondements de la géométrie algébrique, Secr. Math. Paris 1958 .

[3] J. DIEUDONNE et A. GROTHENDIECK : Eléments de géométrie algébrique IV (Etude locale des schémas et morphismes de schémas) 3, Publ. IHES n° 28 (1966) .

[4] W. FULTON et J. HANSEN : A connectedness theorem for projective varieties, with applications to intersections and singularities of mappings, Ann. of Math. 110 (1979), pp. 159-166 .

[5] S. LANG : Introduction to algebraic geometry, New-York, Wiley Interscience 1958 .

[6] T. MATSUSAKA : The theorem of Bertini on linear systems in modular fields, Memoirs of the college of Science, University of Kyoto, Series A , vol 26, n°1 (1950) .

[7] Y. NAKAI : Note on the intersection of an algebraic variety with the generic hyperplane, Memoirs of the college of Science, University of Kyoto, Series A, vol 26, n° 2 (1950) .

[8] A. WEIL Foundations of algebraic geometry, AMS Publ. 29 ($2^e$ édition) .

[9] O. ZARISKI :
a) Pencils on an algebraic variety and a new proof of a theorem of Bertini, Trans. Amer. Math. Soc. 50 (1941).
b) The theorem of Bertini on the variable singular points of a linear system of varieties Trans. Amer. Math. Soc. 56 (1944) .

## STRUCTURE DES MODULES PROJECTIFS.

Tous les anneaux considérés sont commutatifs.

### 1. - Rang libre d'un module.

Si $A$ est un anneau local, on appelle rang libre d'un $A$-module $M$ et on note $r\ell_A(M)$ la borne supérieure (éventuellement infinie) des entiers $r \in \mathbb{N}$ pour lesquels il existe un monomorphisme direct

$$A^r \to M .$$

Dans le cas général, si $M$ est un module sur un anneau $A$, on appelle rang libre de $M$ le nombre

(1.1) $$r\ell_A(M) = \inf_{\mathfrak{m} \in \max(A)} r\ell_{A_\mathfrak{m}}(M_\mathfrak{m}) \in \mathbb{N} \cup (+\infty) ,$$

qu'on notera aussi $r\ell(M)$ lorsqu'aucune confusion n'est possible.

Le lemme (1.3) ci-dessous montre que l'on a l'égalité

(1.2) $$r\ell_A(M \oplus A) = 1 + r\ell_A(M) .$$

Par contre, il est faux en général que $r\ell_A(M \oplus N) = r\ell_A(M) + r\ell_A(N)$. Ainsi, si $A$ est le produit de deux anneaux $A_1$ et $A_2$ non nuls, considérés comme des $A$-modules au moyen des projections canoniques on a

$$rg_A(A_1) = rg_A(A_2) = 0 \text{ , tandis que } rg_A(A) = 1 .$$

LEMME 1.3. (Simplification pour les anneaux locaux)

<u>Soient</u> $A$ <u>un anneau local, et</u> $M$ <u>et</u> $N$ <u>deux</u> $A$-<u>modules. Si</u> $A \oplus M \simeq A \oplus N$ , <u>alors</u> $M \simeq N$ .

<u>Preuve</u>. L'isomorphisme donné équivaut à l'existence d'une suite exacte scindée

$$0 \to N \to A \oplus M \xrightarrow{(b,\varphi)} A \to 0 \ .$$

Il existe alors $m \in M$ tel que

$$u = b + \varphi(m) \tag{1.4}$$

soit inversible dans $A$. Si $b$ est inversible, il suffit de prendre $m = 0$ ; sinon, réduisant modulo l'idéal maximal $\mathfrak{m}$ de $A$, le caractère surjectif de $(b,\varphi)$ montre qu'il existe $m \in M$ tel que $\varphi(m)$ soit inversible, et celui-là convient. Utilisant (1.4), on voit alors que $N$ s'identifie aux couples $(a,x) \in A \oplus M$ vérifiant

$$[b + \varphi(m)]\, a + \varphi(x - am) = 0 \ ,$$

soit

$$a + \varphi(u^{-1}(x - am)) = 0 \ .$$

Utilisant l'automorphisme

$$\psi : A \oplus M \to A \oplus M \ ,$$
$$(a,x) \mapsto (a, u^{-1}(x - am))$$

on voit que $N$ s'identifie à

$$\psi(N) = \{(a,y) \mid a + \varphi(y) = 0\} \ ,$$

et il est clair que la deuxième projection

$$\psi(N) \xrightarrow{pr_2} M$$

est un isomorphisme de $A$-modules.

## 2. - Théorème de SERRE.

Il s'agit de l'énoncé suivant.

THEOREME 2.1. *Soient* $A$ *un anneau dont le spectre maximal est un espace noetherien de dimension finie* $d$, *et* $M$ *un* $A$*-module. On suppose que* :

i) $M$ *est un facteur direct d'une somme directe de* $A$*-modules de présentation finie.*

ii) $r\ell(M) > d$ .

Alors, il existe un $A$-module $N$ et un isomorphisme

$$M \simeq A \oplus N .$$

Dans cet énoncé, la condition i) est de nature technique. Elle est satisfaite par les modules de présentation finie, mais aussi par les modules projectifs, qui sont facteurs directs de libres. Elle intervient par l'intermédiaire du lemme suivant, valable sans hypothèse sur l'anneau $A$ .

LEMME 2.2. Soient $P$ un $A$-module projectif de type fini, $M$ un $A$-module qui est facteur direct d'une somme directe de $A$-modules de présentation finie, et $u : P \to M$ une application $A$-linéaire.

i) L'ensemble de $\mathfrak{p} \in \mathrm{spec}(A)$ tels que

$$u_{\mathfrak{p}} : P_{\mathfrak{p}} \to M_{\mathfrak{p}}$$

soit un monomorphisme direct est un ouvert pour la topologie de Zariski.

ii) Si, pour tout $\mathfrak{m} \in \max(A)$ , $u_{\mathfrak{m}}$ est un monomorphisme direct, il en est de même pour $u$ .

Preuve du lemme. On se ramène immédiatement au cas où $M$ est de la forme $M = \bigoplus_{i \in I} M_i$ , où les $M_i$ sont de présentation finie. Alors, il existe, vu que $P$ est de type fini, un sous-ensemble fini $J$ de $I$ tel que $u(P) \subset \bigoplus_{j \in J} M_j = M'$ . Comme $M'$ est un facteur direct de $M$ , on voit aussitôt qu'on peut remplacer dans l'énoncé $M$ par $M'$ , donc supposer $M$ de présentation finie. Montrons alors i) . Si $u_{\mathfrak{p}}$ est un monomorphisme direct, il existe

$$w \in \mathrm{Hom}_{A_{\mathfrak{p}}}(M_{\mathfrak{p}},P_{\mathfrak{p}}) = \mathrm{Hom}_A(M,P)_{\mathfrak{p}}$$

(l'égalité provient de ce que $M$ est de présentation finie) tel que

$$w \circ u_{\mathfrak{p}} = \mathrm{id}(P_{\mathfrak{p}}) .$$

On a $w = v/s$ , avec $v : M \to P$ , et $s \notin \mathfrak{p}$ , de sorte que $(v \circ u)_{\mathfrak{p}}$ est un automorphisme de $P_{\mathfrak{p}}$ . Il en résulte que $v \circ u$ est inversible dans un voisinage de $\mathfrak{p}$ (car $\det(v \circ u)$ est inversible en $\mathfrak{p}$ , donc au voisinage) , d'où l'assertion. Pour ii) , il suffit, comme $\mathrm{id} \in \mathrm{Hom}_A(P,P)$ , de montrer que l'application

$$\begin{aligned} \theta : \mathrm{Hom}_A(M,P) &\to \mathrm{Hom}_A(P,P) \\ f &\mapsto f \circ u \end{aligned}$$

est surjective. Par hypothèse, c'est vrai après localisation par tout $\mathfrak{m} \in \max(A)$ (on utilise à nouveau que $M$ est de présentation finie) , d'où l'assertion car $\mathrm{supp}\ \mathrm{Coker}(\theta) = \emptyset$ dans $\max(A)$ .

Avant d'aborder la démonstration du théorème, introduisons la terminologie suivante. Soient $A$ un anneau, $M$ un $A$-module, $(m_1,\dots,m_h)$ une suite d'éléments de $M$ . Nous dirons qu'elle est directe en $x \in \max(A)$ si l'application

$$\begin{aligned} (m_1,\dots,m_h)_x : A_x^h &\to M_x \\ (b_1,\dots,b_h) &\mapsto b_1m_1 + \dots + b_hm_h \end{aligned}$$

est un monomorphisme direct. Nous dirons qu'elle est directe sur une partie $Z$ de $\max(A)$ si elle est directe en tout point $x$ de $Z$ . Lorsque $M$ est facteur direct d'une somme directe de $A$-modules de présentation finie, il résulte du lemme (2.2) que $(m_1,\dots,m_h)$ est directe sur $\max(A)$ si et seulement si l'application $A$-linéaire de matrice

$$(m_1,\dots,m_h) : A^h \to M$$

est un monomorphisme direct.

LEMME 2.3. Soient $A$ un anneau, $M$ un $A$-module, $\mathfrak{m} \in \max(A)$ . Supposons données deux suites $(m_1,\dots,m_h)$ , $(m'_1,\dots,m'_h)$ d'éléments de $M$ telles que

(2.3.1) $$m_i - m'_i \in \mathfrak{m} \quad (1 \le i \le h) .$$

<u>Alors la suite</u> $(m_1,\dots,m_h)$ <u>est directe en</u> $\mathfrak{m} \in \max(A)$ <u>si et seulement si</u> $(m'_1,\dots,m'_h)$ <u>l'est</u>.

<u>Preuve</u>. On peut pour le voir supposer $A$ local d'idéal maximal $\mathfrak{m}$. Notons $u$ et $u'$ les applications $A$-linéaires $A^h \to M$ définies par les deux suites. Si $u$ est un monomorphisme direct, soit $v : M \to A^h$ une rétraction $A$-linéaire de $u$. D'après (2.3.1), $v \circ u' - \mathrm{id} \in \mathfrak{m}A^h$, d'où résulte par le lemme de Nakayama que $v \circ u' : A^h \to A^h$ est surjective, donc bijective, et par suite que $u'$ est un monomorphisme direct.

Le théorème de Serre est conséquence du lemme suivant, que nous allons démontrer par récurrence croissante sur $k$.

LEMME 2.4. <u>Soient</u> $A$ <u>un anneau dont le spectre maximal</u> $X = \max(A)$ <u>est noetherien, et</u> $M$ un $A$-<u>module facteur direct d'une somme directe de modules de présentation finie. On pose</u> $r = r\ell(M)$. <u>Supposons donnés</u>

a) <u>une partie fermée</u> $Y$ <u>de</u> $X$

b) <u>une suite</u> $(m_1,\dots,m_s)$ $(s \geq 0)$ <u>d'éléments de</u> $M$, <u>qui est directe en dehors de</u> $Y$.

c) <u>une partie finie</u> $\Phi$ <u>de</u> $Y$ <u>et, pour tout</u> $y \in \Phi$, <u>un élément</u>

$$\nu_y \in M_y/y\,M_y = M/y\,M .$$

<u>Alors, pour tout entier</u> $k \in [0, r-s]$, <u>il existe une partie fermée</u> $F$ <u>de</u> $X$, <u>et un élément</u> $m_{s+1} \in M$ <u>vérifiant les conditions suivantes</u>.

i) $\mathrm{codim}(F,X) \geq k$,

ii) <u>la suite</u> $(m_1,\dots,m_{s+1})$ <u>est directe en dehors de</u> $Y \cup F$,

iii) <u>pour tout</u> $y \in \Phi$, <u>on a</u>

$$\bar{m}_{s+1} = \nu_y \quad \text{dans} \quad M_y/y\,M_y = M/y\,M .$$

Le lemme implique (2.1). On prend $k = r > d$, $s = 0$ et $Y = \emptyset$. Alors, comme $\mathrm{codim}(F,X) \geq r > d$, on a $F = \emptyset$, donc $m_1$ est direct partout, autrement dit $m : A \to M$ est un monomorphisme direct (2.2(ii)).

Comme nous l'avons dit, le lemme se prouve par récurrence croissante sur $k$ , les autres données étant arbitraires. Lorsque $k = 0$, on peut prendre $F = X$ . Alors il suffit de prouver l'existence de $m \in M$ tel que

$$\bar{m} = \nu_y \quad \text{dans} \quad M_y/yM_y \qquad (y \in \Phi) .$$

Mais les $y \in \Phi$ sont deux à deux fortement étrangers, d'où un isomorphisme canonique

$$M/(\bigcap_{y \in \Phi} y)M \xrightarrow{\sim} \prod_{y \in \Phi} M/yM \quad (\text{"lemme chinois"}) ,$$

qui implique aussitôt l'assertion. Supposons maintenant prouvé le lemme pour $k-1$ $(k \geq 1)$ et montrons-le pour $k$ . Comme $k-1 \leq r-s$ , il existe par hypothèse de récurrence un élément $m'_{s+1}$ de $M$ et un fermé $S$ de $X$ tels que

1) $\operatorname{codim}(S,X) \geq k-1$ ,
2) $(m_1,\ldots,m_s,m'_{s+1})$ soit directe en dehors de $Y \cup S$ ,
3) $\bar{m}'_{s+1} = \nu_y$ dans $M/yM$ $(y \in \Phi)$ .

Autrement dit, on a presque ce qu'on veut, à ceci près que $S$ est trop grand. Pour remédier à cet inconvénient, on procède comme suit. On choisit, pour toute composante irréductible $S_i$ de $S$ non contenu dans $Y$ , un élément

$$(2.4.1) \qquad y_i \in S_i \setminus (S_i \cap Y) , \quad y_i \notin S_{i'} \quad \text{pour } i' \neq i .$$

Comme $r\ell(M_{y_i}) \geq r$ , il existe pour tout $i$ un élément $\xi_i$ de $M$ tel que

$$(2.4.2) \qquad (m_1,\ldots,m_s,m'_{s+1}+\xi_i) \text{ soit directe dans } M_{y_i} .$$

Cela se voit en appliquant (1.2) à l'isomorphisme évident

$$M_{y_i} \simeq A^s_{y_i} \oplus [M/(m_1,\ldots,m_s)]_{y_i} .$$

Comme $k-1 \leq r-(s+1)$ , une nouvelle application de l'hypothèse de récurrence, en prenant cette fois comme fermé $Y \cup S$ , montre qu'il existe $m''_{s+1} \in M$ et un fermé $T$ de $X$ tels que

4) $\operatorname{codim}(T,X) \geq k-1$ ,

5) $(m_1,\dots,m_s,m'_{s+1},m''_{s+1})$ soit directe en dehors de $Y \cup S \cup T$ ,

6) $\bar{m}''_{s+1} = 0$ $(y \in \Phi)$ et $\bar{m}''_{s+1} = \xi_i$ dans $M/y_iM$ (2.4.1) . . .

Utilisant 5) , il est clair que, pour tout $a \in A$ , la suite

$$(m_1,\dots,m_s,m'_{s+1} + am''_{s+1})$$

est directe en dehors de $Y \cup S \cup T$ . Choisissons alors, pour toute composante irréductible $T_j$ de $T$ non contenue dans $Y \cup S$ , un élément

$$z_j \in T \dot{-} [T \cap (Y \cup S)] \; . \tag{2.4.3}$$

Il est possible, d'après le "lemme chinois", de trouver un $a \in A$ tel que

$$a \equiv \begin{cases} 0 & \text{mod les } y \in \Phi \\ 1 & \text{mod les } y_i \quad (2.4.1) \\ 0 & \text{mod les } z_j \quad (2.4.2) \end{cases} \; . \tag{2.4.4}$$

Posons alors

$$m_s = m'_{s+1} + am''_{s+1} \; .$$

De (2.4.4) et 3) résulte aussitôt que $m_{s+1} \equiv \nu_y$ mod $y \in \Phi$ .
La comparaison de (2.4.2) , 6) et (2.4.4) montre que, en $y_i$ , la suite $(m_1,\dots,m_s,m_{s+1})$ a même réduction modulo $y_i$ que $(m_1,\dots,m_s,m'_{s+1}+\xi_i)$ , donc est directe d'après le lemme (2.3) . De même, d'après (2.4.4) , la suite $(m_1,\dots,m_s,m_{s+1})$ a même réduction modulo $z_j$ que $(m_1,\dots,m_s,m'_{s+1})$ , qui est directe en $z_j \notin Y \cup S$ , donc est directe en $z_j$ d'après (2.3) . Cela dit, d'après (2.2 (i)) , l'ensemble des $x \in X$ en lesquels $(m_1,\dots,m_s,m_{s+1})$ n'est pas directe est un fermé de Zariski. Notant $F$ la réunion de ses composantes irréductibles qui ne sont pas contenues dans $Y$ , il est clair que $(m_1,\dots,m_{s+1})$ est directe en dehors de $Y \cup F$ , et que $F \subset S \cup T$ . Toute composante irréductible de $F$ est contenue dans une composante irréductible

soit de $S$ , soit de $T$, mais ne saurait être composante irréductible de $S$ ou $T$ , car les $y_i$ et les $z_j$ n'appartiennent pas à $F$ . D'où $\mathrm{codim}(F,X) \geq k$ , ce qui achève la preuve.

## 3. - Théorème de simplification de BASS .

Le deuxième théorème fondamental de structure est le suivant.

THEOREME 3.1. *Soit* $A$ *un anneau dont le spectre maximal est un espace noetherien de dimension finie* $d$ . *On suppose donnés un* $A$-*module projectif de type fini* $Q$ *et deux* $A$-*modules* $M$ *et* $N$ *tels que*

$$Q \oplus M \simeq Q \oplus N \,. \tag{3.1.1}$$

*Alors, si* $M$ *a un facteur direct projectif de rang libre* $> d$ , *on a* :

$$M \simeq N \,.$$

(Bien entendu, l'hypothèse sur $M$ est en particulier réalisée lorsque $M$ est lui-même projectif de rang libre $> d$ ) .

*Preuve*. Le $A$-module $Q$ est facteur direct d'un $A$-module libre de type fini, de sorte qu'on peut, dans (3.1.1) , remplacer $Q$ par $A^m$ , puis, par récurrence décroissante, lorsque $Q \neq 0$ , que $Q = A$ . Alors l'isomorphisme (3.1.1) définit un monomorphisme direct

$$\begin{aligned} h : A &\to A \oplus M \\ 1 &\mapsto (a,m) \end{aligned} \,, \tag{3.1.2}$$

avec $\mathrm{Coker}(h) \simeq N$ . On va déduire (3.1) du lemme suivant.

LEMME 3.2. *Sous les hypothèses de* (3.1) , *il existe* $m' \in M$ *tel que* $(m + am')$ *soit direct dans* $M$ .

Le lemme implique (3.1) . Pour cela, nous allons exhiber un isomorphisme $\theta : A \oplus M \to A \oplus M$ tel que

$$\theta \circ h\,(1) = (0,m+am') \,.$$

Notant $C$ le conoyau du monomorphisme direct

$$(3.2.1) \qquad \begin{aligned} 0 \to A &\to M \\ 1 &\mapsto m + am' \end{aligned} \quad ,$$

on en déduira que

$$N = \operatorname{Coker}(h) \simeq \operatorname{Coker}(\theta \circ h) \simeq A \oplus C \overset{(3.2.1)}{\simeq} M \ .$$

On prendra pour $\theta$ un composé d'opérateurs élémentaires. Tout d'abord, on fait la transformation élémentaire

$$\underbrace{A \oplus M}_{m'} : (b,y) \mapsto (b, y + bm')$$

qui envoie $(a,m)$ sur $(a, m + am')$. Ensuite, choisissant $\varphi : M \to A$ telle que $\varphi(m + am') = 1$, on applique

$$\underbrace{A \oplus M}_{-a\varphi} : (b,y) \mapsto (b - a\varphi(y), y)$$

qui envoie $(a, m + am')$ sur $(0, m + am')$.

Prenons maintenant (3.2). Observons tout d'abord qu'il suffit de le faire lorsque $M$ est projectif. En effet, on sait par hypothèse que

$$M = P \oplus V \ ,$$

où $P$ est projectif, avec $r\ell(P) > d$. Notons $(p,v)$ les composantes de $m$ dans cette décomposition. Ecrivant que $(a,p,v)$ est direct dans $A \oplus M$, on voit que $(\bar{a}, \bar{p})$ est direct dans $\bar{A} \oplus \bar{P}$, où la barre désigne la réduction modulo l'idéal

$$b = \{f(v) \mid f \in V^{\vee}\} \ .$$

Comme $r\ell(\bar{P}) > d \geq \dim \bar{A}$, le lemme supposé vrai pour les projectifs implique l'existence de $p' \in P$ tel que $\bar{p} + \overline{ap'}$ soit direct dans $\bar{P}$. Autrement dit, il existe une application $A$-linéaire $\bar{\varphi} : \bar{P} \to \bar{A}$ telle que

(3.2.2) $$\bar{\varphi}\,(\bar{p}+\bar{a}\,\bar{p}') = 1 .$$

Comme $P$ est projectif, on peut relever $\bar{\varphi}$ en une application $A$-linéaire $\varphi : P \to A$. D'après (3.2.2), il existera alors $f : V \to A$ telle que

$$\varphi\,(p+a\,p') = f(v) + 1 .$$

On pose alors $m' = (p',0)$, de sorte que

$$(\varphi,-f) : P \oplus V \to A \quad \text{vérifie} \quad (\varphi,-f)(m+am') = 1 .$$

Supposant désormais $M$ projectif, nous allons prouver (3.2) par récurrence croissante sur $d$. Lorsque $d = 0$, nous utiliserons le lemme suivant, qui généralise (1.3).

LEMME 3.2.3. *Soient* $A$ *un anneau semi-local,* $a \in A$ *et* $\mathfrak{a}$ *un idéal de* $A$ *tel que*

$$Aa + \mathfrak{a} = A .$$

*Il existe alors un* $y \in \mathfrak{a}$ *tel que* $a + y$ *soit inversible dans* $A$.

C'est là une assertion qu'il suffit de vérifier après réduction modulo le radical de $A$. Notant $\mathfrak{m}_1,\dots,\mathfrak{m}_r$ les idéaux maximaux de $A$, on a

$$A/\operatorname{rad} A \simeq (A/\mathfrak{m}_1)\times \dots \times(A/\mathfrak{m}_r) .$$

Cela permet de sa ramener au cas où $A$ est un corps, qui est immédiat et a d'ailleurs déjà été vu dans la preuve de (1.3).

Revenons à la preuve de (3.2) lorsque $d = 0$. D'après le théorème de Serre (1.2), on peut écrire $M = A \oplus M_1$. Notant $(b,m_1)$ les composantes de $m$, le fait que $(a,m)$ soit direct implique que, posant

$$I = \{f(m_1) \mid f \in \check{M}_1\} ,$$

on a

$$Aa + Ab + I = A .$$

Utilisant (3.2.3) avec $\mathfrak{a} = Aa + I$ , on en déduit l'existence de $a' \in A$ et de $f : M_1 \to A$ tels que

$$b + aa' + f(m_1) \text{ soit inversible dans } A .$$

On pose alors $m' = (a',0) \in A \oplus M_1$ , de sorte que $(id,f)(m+am')$ est inversible dans $A$ , d'où l'assertion. Supposons maintenant (3.2) vrai pour $d-1$ $(d \geq 1)$ , et montrons-le pour $d$ . Comme plus haut, $M = A \oplus M_1$, $m = (b,m_1)$ . Commençons par le cas où

(3.2.4) $$\dim \max(A/bA) \leq d - 1 .$$

Alors, notant par une barre la réduction modulo $b$ , il est clair que $(\bar{a},\bar{m}_1)$ est direct dans $\bar{A} \oplus \bar{M}_1$ . Comme $r\ell(M_1) \geq d - 1$ (1.2) , il résulte de l'hypothèse de récurrence qu'il existe $m_1' \in M_1$ et $\bar{\psi} : \bar{M}_1 \to \bar{A}$ tels que

$$\bar{\psi}(\bar{m}_1 + \bar{a}\bar{m}_1') = 1 .$$

Relevant $\bar{\psi}$ en une application $A$-linéaire $\psi : M_1 \to A$ (c'est possible car $M_1$ est projectif) , on en déduit l'existence d'un $c \in A$ tel que

$$\psi(m_1 + am_1') + cb = 1 .$$

On pose alors $m' = (0,m_1') \in A \oplus M_1 = M$ , de sorte que

$$(c,\psi) : A \oplus M \to A$$

envoie $m + am'$ sur $1$ , d'où l'assertion dans ce cas. Dans le cas général, on commence par modifier $b$ de manière à ce que (3.2.4) soit réalisée. Pour cela, on commence par constater, par un calcul immédiat, qu'il suffit de vérifier l'assertion en remplaçant $(a,m)$ par $(a, b + \alpha a + f(m_1), m_1)$ , avec $\alpha \in A$ et $f \in M_1^\vee$ . Choisissant dans chaque composante irréductible $X_i$ de $X$ un point $x_i$ , avec les $x_i$ distincts deux à deux, on va déterminer $\alpha$ et $f$ en sorte que $b + \alpha a + f(m_1)$ soit inversible dans les anneaux locaux des $x_i$ , d'où (3.2.4) .

Pour cela, observons que, comme $(a,b,m_1)$ est direct dans $A \oplus M_1$ , il existe $a' \in A$ , $b' \in A$ , $\varphi \in \check{M}_1$ tels que

$$aa' + bb' + \varphi(m_1) = 1 ,$$

de sorte qu'on peut, pour tout $\lambda \in A$ , remplacer, d'après ce qui précède, $b$ par

$$b + \lambda(1 - bb') .$$

Mais alors, il suffit de choisir $\lambda$ (par le "lemme chinois") tel que

$$\begin{cases} \lambda \equiv 0 \mod x_i & \text{lorsque } b \not\equiv 0 \mod x_i \\ \lambda \equiv 1 \mod x_i & \text{lorsque } b \equiv 0 \mod x_i , \end{cases}$$

pour avoir le résultat escompté.

## 4. - Théorème de simplification de SUSLIN.

Lorsque $A$ est une algèbre de type fini sur un corps algébriquement clos, l'énoncé suivant, d'abord prouvé par SWAN et MURTHY [2] en dimension 2 , puis par SUSLIN [3] dans le cas général, améliore (3.1) .

THEOREME 4.1. *Soit $A$ une algèbre de type fini sur un corps algébriquement clos $k$ . Si $P$ et $P'$ sont deux $A$ - modules projectifs de rang libre $\geq d$ , tout isomorphisme*

$$Q \oplus P \simeq Q \oplus P' ,$$

*avec $Q$ un $A$ - module projectif de type fini, implique $P \simeq P'$ .*

Preuve. Compte tenu de (3.1) , on peut supposer $P$ et $P'$ de type fini. Alors $X = \max(A)$ est somme disjointe d'ouverts sur lesquels $P$ et $P'$ sont de rang constant. Quitte à remplacer $X$ par l'un de ces ouverts, on peut supposer $P$ et $P'$ de rang constant, puis, par (3.1) , que $rg(P) = rg(P') = d$ . Par ailleurs, de même que dans la preuve de (3.1) , on peut supposer que $Q = A$ , et alors il s'agit de voir que si $(a,p) \in A \oplus P$ est direct, l'application

$$h : A \to A \oplus P$$
$$1 \mapsto (a,p)$$

est telle que $\mathrm{Coker}(h) \simeq P$ . Pour cela, il suffit bien sûr d'exhiber un isomorphisme $\theta : A \oplus P \xrightarrow{\sim} A \oplus P$ tel que $\mathrm{Coker}(\theta \circ h) \simeq P$ .
Le module $P$ étant toujours supposé de rang constant $d$ , l'idée de la démonstration consiste à se ramener au cas où $a$ est de la forme $b^d$ . Pour cela, on observe d'abord qu'on peut supposer $A$ réduit grâce au lemme suivant.

LEMME 4.2. <u>Soit</u> $A$ <u>un anneau, et</u> $J$ <u>son radical</u>. Si $P$ <u>et</u> $P'$ <u>sont deux</u> <u>$A$-modules projectifs de type fini tels que</u>

(4.2.1) $$P/JP \simeq P'/JP' ,$$

<u>alors</u> $P \simeq P'$ .

L'isomorphisme (4.2.1) se relève en un morphisme de $A$-modules

$$\varphi : P \to P' ,$$

tel que $(\mathrm{Coker}\,\varphi) \otimes (A/J) = 0$ , d'où $\mathrm{Coker}\,\varphi = 0$ par Nakayama. Comme $\varphi$ est surjectif, $\mathrm{Ker}\,\varphi$ est un $A$-module projectif de type fini, tel que $(\mathrm{Ker}\,\varphi) \otimes (A/J) = 0$ , d'où $\mathrm{Ker}\,\varphi = 0$ par une nouvelle application du lemme de Nakayama.

Cela dit, supposant $A$ réduit, i.e. géométriquement réduit, une variante d'un théorème de Bertini, due à SWAN [5] , et qui sera exposée au paragraphe suivant, montre qu'il existe $p_1 \in P$ tel que, posant

$$J = \{\varphi(p + ap_1) \mid \varphi \in \check{P}\} ,$$

l'anneau $A/J$ soit (géométriquement) réduit de dimension zéro. Alors

$$A/J \simeq k \times .. \times k \quad (k \text{ algébriquement clos}) ,$$

donc $\bar{a}$ a une racine $d^{eme}$ dans $A/J$ , i.e. il existe $b \in A$ tel que

$$a \equiv b^d \mod J .$$

Quitte à composer $h$ avec la transformation élémentaire

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, phantom, "\oplus"] \arrow[r, bend right, "p_1"'] & P \end{tikzcd} : \quad (c,y) \mapsto (c, y + cp_1) ,$$

on peut supposer $p_1 = 0$ . Il existe alors $\varphi \in \check{P}$ tel que

$$a = b^d + \varphi(p) .$$

Quitte à composer $h$ avec la transformation élémentaire

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, phantom, "\oplus"] & P \arrow[l, bend left, "-\varphi"] \end{tikzcd} ,$$

on peut alors remplacer $a$ par $b^d$ .

Dans le cas où $a = b^d$ , on pourra utiliser les deux lemmes suivants.

LEMME 4.3. *Soient* $A$ *un anneau commutatif,* $P$ *un* $A$-*module projectif,* $a$ *un élément de* $A$ . *On suppose* $P/aP$ *libre de type fini, et on se donne* $p_1,\dots,p_d \in P$ *tels que* $\bar{p}_1,\dots,\bar{p}_d \in P/aP$ *soit une base de* $P/aP$ . *Alors l'application* $A$-*linéaire*

(4.3.1)
$$k : A^d \to A^d \oplus P \qquad (e_i \text{ base canonique de } A^d)$$
$$e_i \mapsto (ae_i, p_i)$$

*est un monomorphisme direct de conoyau isomorphe à* $P$ .

Notant $\varphi$ l'application $[p_1,\dots,p_d] : A^d \to P$ , l'application (4.3.1) a pour matrice

$$\begin{bmatrix} a \times \mathrm{id}(A^d) \\ \varphi \end{bmatrix}$$

Comme $P$ est projectif, il existe par hypothèse une application $A$-linéaire $\psi : P \to A^d$ , et des applications $A$-linéaires $u : A^d \to A^d$ , $v : P \to P$ telles que

$$\psi \circ \varphi = \mathrm{id} + au$$

$$\varphi \circ \psi = \mathrm{id} + av$$

On en déduit aussitôt que

$$\begin{bmatrix} -u & \psi \\ -\varphi & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & -\psi \\ \varphi & -v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} id & * \\ 0 & id \end{bmatrix} ,$$

qui montre que, comme $A^d \oplus P$ est projectif, le morphisme

$$\sigma = \begin{bmatrix} -u & \psi \\ -\varphi & a \end{bmatrix}$$

est inversible, et tel que

$$\sigma \circ k = \begin{bmatrix} id \\ 0 \end{bmatrix} ,$$

d'où $\mathrm{Coker}(k) \simeq \mathrm{Coker}(\sigma \circ k) \simeq P$ .

LEMME 4.4. <u>Sous les hypothèses de</u> (4.3) , <u>l'application</u> $A$-<u>linéaire</u>

$$\begin{aligned} h : A &\to A \oplus P \\ 1 &\mapsto (a^d, p_1) \end{aligned}$$

<u>est un monomorphisme direct de conoyau isomorphe à</u> $P$ .

Avec les notations de (4.3) , il suffit de montrer que

$$h' = \begin{bmatrix} \left.\begin{matrix} a^d \\ 1 \\ \ddots \\ 1 \end{matrix}\right\} d \\ \hline \varphi \end{bmatrix}$$

est un monomorphisme direct de conoyau $P$ , car, notant $E$ l'application élémentaire

$$\begin{tikzcd} A^d \arrow[r, phantom, "\oplus"] & P \arrow[l, bend left, "{[0,-p_2,-p_3,\dots,-p_d]}"] \end{tikzcd}$$

on a

$$E \circ h' = id(A^{d-1}) \oplus h : \; A^d = A^{d-1} \oplus A \to A^{d-1} \oplus (A \oplus P) = A^d \oplus P \; .$$

Comme $\bar{p}_1, \bar{p}_2, \ldots, \bar{p}_d$ est une base de $P/aP$ , $\bar{p}_1 \wedge \ldots \wedge \bar{p}_d$ est une base de $\Lambda^d(P/aP)$ , donc, comme $P$ est projectif, il existe une application $A$ - linéaire

$$\lambda : \Lambda^d(P) \to A$$

telle que

$$(4.4.1) \qquad b = \lambda(p_1 \wedge \ldots \wedge p_d) \equiv 1 \mod a \; .$$

Notant pour $1 \leq i \leq d$ par $q_i$ l'application

$$\begin{array}{ccl} P & \to & A \\ p & \mapsto & \lambda(p_1 \wedge \ldots \wedge p_{i-1} \wedge p \wedge p_{i+1} \wedge \ldots \wedge p_d) \end{array} ,$$

il est immédiat que

$$q = \begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_d \end{pmatrix} : \; P \to A^d$$

vérifie

$$(4.4.2) \qquad q \circ \varphi = b \; id(A^d) \; .$$

L'égalité (4.4.1) montre que $Ab + Aa = A$ , donc qué $a$ est inversible modulo $b$ . Modulo $b$ , le lemme de Whitehead (4.5) ci-dessous montre qu'il existe dans $GL(d, A/bA)$ une matrice $\bar{M}$ , produit d'une matrice de permutation et d'un produit de matrices élémentaires, telle que

$$\bar{M} \circ \begin{bmatrix} \bar{a}^{-d} & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & \ddots \; 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{a} & & 0 \\ & \bar{a} & \\ 0 & & \ddots \; \bar{a} \end{bmatrix} .$$

Relevant de manière évidente la matrice de permutation et l'unique coefficient non nul non diagonal des diverses matrices élémentaires, on en déduit l'existence d'une matrice $M$ de la même forme, donc appartenant à $GL(d,A)$ , et ayant pour réduction $\bar{M}$ modulo $b$ , telle que

$$M \circ \begin{bmatrix} a^d & & 0 \\ & 1 \ddots & \\ 0 & & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & & 0 \\ & a \ddots & \\ 0 & & a \end{bmatrix} + b\, N \,,$$

où $N \in M(d,A)$ .

On a alors

(4.4.3) $$\begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & id \end{bmatrix} \circ h' = \begin{bmatrix} a.1 + b\, N \\ \varphi \end{bmatrix} .$$

Utilisant (4.4.2) , on voit alors que le composé à gauche de (4.4.3) par l'application élémentaire

$$\begin{tikzcd} A^d & \oplus & P \arrow[ll, bend right, "-N\circ q"'] \end{tikzcd}$$

est égal à

(4.3.1) $$k = \begin{bmatrix} a.1 \\ \varphi \end{bmatrix}$$

donc, utilisant (4.3) , il en résulte que $h$ est un monomorphisme direct, avec

$$\mathrm{Coker}(h) \simeq \mathrm{Coker}(h') \simeq \mathrm{Coker}(k) \simeq P \,.$$

Le lemme de Whitehead que nous avons utilisé est le suivant. Il implique par une récurrence immédiate le résultat que nous avons utilisé dans la preuve de (4.4) .

LEMME 4.5. (WHITEHEAD) . Soient $A$ un anneau, $m$ un entier $\geq 1$ , et $\alpha,\beta \in GL(m,A)$ . Alors il existe une matrice $E \in GL(2m,A)$ , produit de matrices élémentaires, telle que

$$E \circ \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \alpha\beta \end{bmatrix} .$$

On a l'égalité

$$\begin{bmatrix} \alpha^{-1} & 0 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \alpha\beta \end{bmatrix} ,$$

et il suffit de montrer que

$$\begin{bmatrix} \alpha^{-1} & 0 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix}$$

est produit de matrices élémentaires. On sait que les matrices

$$\begin{bmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \mu & 1 \end{bmatrix} , \text{ élémentaires "par blocs"} ,$$

sont produits de matrices élémentaires et que leur effet par composition à gauche consiste à "ajouter $\lambda$- fois la $2^e$ ligne à la première " (resp. $\mu$ fois la $1^{re}$ à la $2^e$) . Nous noterons ces opérations respectives

$$\uparrow\lambda \quad \text{et} \quad \downarrow\mu .$$

On a alors la suite de transformations évidentes

$$\begin{bmatrix} \alpha^{-1} & 0 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix} \xmapsto{\downarrow\alpha} \begin{bmatrix} \alpha^{-1} & 0 \\ 1 & \alpha \end{bmatrix} \xmapsto{\uparrow-\alpha^{-1}} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & \alpha \end{bmatrix} \xmapsto{\downarrow\alpha} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Spécialisant en $\alpha = 1$ , on voit que

$$\mathrm{id}_{A^{2m}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ se transforme de même en } \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} .$$

Compte tenu de ce que l'inverse d'une transformation élémentaire est également élémentaire, l'assertion en résulte aussitôt.

Après tous ces préliminaires, venons-en à la preuve de (4.1) proprement dite. Elle se fait par récurrence croissante sur $d$ . Lorsque $d = 0$ , on peut, comme on l'a dit, se ramener au cas où $\max(A)$ est connexe, réduit, i.e. au cas où $A$ est un corps, où c'est évident. Supposons donc le théorème vrai pour $d-1 (d \geq 1)$ , et montrons-le pour $d$ . D'après les préliminaires précédents, on est ramené à voir que, lorsque $A$ est réduit, $P$ est un $A$-module projectif de rang constant $d$ , et

$$(b^d, p) \in A \oplus P$$

un élément direct, le conoyau de l'application

$$\begin{aligned} h : A &\to A \oplus P \\ 1 &\mapsto (b^d, p) \end{aligned}$$

est isomorphe à $P$ . Supposons tout d'abord que

$$(4.6.1) \qquad \begin{cases} \dim(A/bA) \leq d-1 \\ P/bP \text{ libre sur } A/bA \end{cases} .$$

Alors, en réduction modulo $b$ , $\bar{p} \in \bar{P} = P/bP$ est direct, et

$$(4.6.2) \qquad \bar{A}^d \simeq \bar{P} \simeq \bar{A}\bar{p} \oplus C ,$$

avec $C = \bar{P}/\bar{A}\bar{p}$ . Le $\bar{A}$-module projectif $C$ a pour rang $d-1 = \dim(\bar{A})$ .
Par hypothèse de récurrence, il résulte alors de (4.6.2) que $C$ est libre, donc que $\bar{p}$ fait partie d'une base de $C$ . On peut alors conclure en utilisant (4.3) .
Montrons qu'on peut se ramener à la situation (4.6.1) . Tout d'abord, on construit un fermé $Y$ de $X = \max(A)$ , avec

$$(4.6.3) \qquad \begin{cases} \dim Y \leq d-1 \\ P \mid X \dot{-} Y \text{ libre} \end{cases} .$$

Pour cela, on choisit dans chaque composante irréductible $X_i$ $(1 \leq i \leq r)$ de $X$ un point $x_i$ , en faisant en sorte que les $x_i$ soient deux à deux distincts.
Pour tout $i$ , on choisit des éléments

$$p_{i1}, p_{i2}, \dots, p_{id}$$

dont les classes modulo $x_i$ forment une base de $P/x_iP$ sur $A/x_i$ .

Par le lemme chinois, on peut, pour tout $j \in [1,d]$ , trouver $p_j \in P$ tel que

$$p_j \equiv p_{ij} \mod x_i \quad (1 \leq i \leq r) .$$

Les éléments $p_1,\ldots,p_d$ forment alors une base de $P$ en dehors d'un fermé $Y$ ne contenant pas les $x_i$ , donc tel que $\dim Y \leq d-1$ .

Notant $Z$ une partie finie de $X$ qui contient au moins un point de chaque composante irréductible, on aura terminé si on prouve qu'on peut modifier $b$ de sorte que

$$V(b) \cap (Y \cup Z) = \emptyset ,$$

car alors les conditions (4.6.1) seront évidemment réalisées. En fait, notant $\mathfrak{a}$ un idéal tel que $V(\mathfrak{a}) = Y \cup Z$ , nous allons voir qu'on peut modifier $b$ de telle sorte que

$$b \equiv 1 \mod \mathfrak{a} . \tag{4.6.4}$$

Comme $\dim(A/\mathfrak{a}) \leq d-1$ et $\operatorname{rg}(P/\mathfrak{a}P) \geq d$ , il résulte du lemme (3.2) qu'il existe $p_1 \in P$ et $\ell \in \check{P}$ tels que

$$\ell(p + b^d p_1) \equiv 1 \mod \mathfrak{a} .$$

Quitte à appliquer la transformation élémentaire

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, phantom, "\oplus"] \arrow[r, bend right, "p_1"'] & P \end{tikzcd} ,$$

on peut supposer que $p_1 = 0$ , de sorte que

$$\ell(p) - 1 \in \mathfrak{a} .$$

Il suffit alors de trouver $c \in A$ tel que

$$\left\{ \begin{array}{lll} (1+c)^d - b^d & \in & A\ell(p) \\ c & \in & A[\ell(p) - 1] \end{array} \right. . \tag{4.6.5}$$

En effet, on pourra alors remplacer $b^d$ par $(1+c)^d$ en appliquant une transformation élémentaire

$$\underbrace{A \oplus P}_{s\ell} \qquad (s \in A) .$$

Les relations (4.6.5) seront conséquences de

$$(4.6.5)\text{bis} \qquad \begin{cases} 1+c-b \in A\ell(p) \\ c \in A[\ell(p)-1] \end{cases} ,$$

qui sont manifestement réalisées en choisissant

$$c = (1-b)(\ell(p)-1) .$$

L'hypothèse que $k$ est algébriquement clos est fondamentale dans (4.1). En effet, le fibré tangent de la sphère réelle de dimension 2

$$\operatorname{spec}\,[\mathbb{R}[X,Y,Z]/(X^2+Y^2+Z^2-1)]$$

est algébriquement parallélisable, mais n'est pas trivial, car le fibré tangent à $S^2$ n'est pas topologiquement trivial.
Toutefois, comme l'ont observé SWAN et MURTHY [2], il est parfois possible d'obtenir un énoncé analogue, par exemple le suivant :

THEOREME 4.7. _Soit_ $A$ _une algèbre de type fini sur_ $\mathbb{R}$ _de dimension_ $d$ . _On suppose que l'ensemble des points rationnels de_ $\max(A)$ _est contenu dans un fermé de Zariski_ $T$ _de_ $\max(A)$ , _avec_ $\dim T \leq d-1$ . _Alors, si_ $P$ _et_ $P'$ _sont deux_ $A$-_modules projectifs de rang libre_ $\geq d$ , _tout isomorphisme_

$$Q \oplus P \simeq Q \oplus P' ,$$

_avec_ $Q$ _un_ $A$-_module projectif de type fini, implique_ $P \simeq P'$ .

_Preuve_. Elle est analogue à celle de (4.1) . On utilise pour cela la forme plus précise suivante du théorème de Bertini déjà mentionné, et prouvé au paragraphe suivant.

4.7.1. <u>On se donne un corps</u> $k$ , <u>une</u> $k$ - <u>algèbre de type fini</u> $A$ géométriquement réduite <u>de dimension</u> $d$ , $P$ <u>un</u> $A$ - <u>module projectif de rang constant</u> $d$ , <u>et</u> $(a,p) \in A \oplus P$ <u>un élément direct. Alors, pour tout fermé de Zariski</u> $T$ <u>de</u> $\max(A)$ , <u>avec</u> $\dim T \leq d-1$ , <u>il existe</u> $p_1 \in P$ <u>tel que, posant</u>

$$J = \{\varphi(p + ap_1) \mid \varphi \in \check{P}\} ,$$

<u>on ait</u>

$A/J$ <u>géométriquement réduit de dimension</u> $0$

$$\max(A/J) \cap T = \emptyset$$

On raisonne de nouveau par récurrence sur $d$ , le cas $d = 0$ étant évident. Supposant l'énoncé vrai pour $d-1$ $(d \geq 1)$ , on cherche à le prouver pour $d$ . On peut supposer $A$ réduit, donc géométriquement réduit $(\mathrm{car}(\mathbf{R}) = 0)$ , et il suffit de voir que si $P$ est projectif de rang constant $d$ , et $(a,p)$ est direct dans $A \oplus P$ , le conoyau de l'application

$$\begin{aligned} h : A &\to A \oplus P \\ 1 &\mapsto (a,p) \end{aligned}$$

est isomorphe à $P$ . Comme $\dim T \leq d-1$ , le théorème de Bertini (4.7.1) montre qu'on peut choisir $p_1$ tel que $\max(A/J) \cap T = \emptyset$ . Les corps résiduels de $A/J$ , finis sur $\mathbf{R}$ et $\neq \mathbf{R}$ , sont isomorphes à $\mathbf{C}$ , donc

$$A/J \simeq \mathbf{C} \times \dots \times \mathbf{C} .$$

Ceci permet, comme $\mathbf{C}$ est algébriquement clos, de se ramener, comme dans la preuve de (4.1), au cas où $a = b^d$ . Le reste de la démontration est inchangé , à ceci près qu'en fin d'argument, il faut montrer qu'on peut choisir $Y$ tel que $\dim(Y \cap T) \leq d-2$ . Mais cela est possible en adjoignant aux points $x_i$ servant à la définition de $Y$ un ensemble fini de points rencontrant chaque composante irréductible de $T$ .

La proposition suivante, due à NARASIMHAN, montre que l'hypothèse faite sur l'ensemble des points rationnels de $\max(A)$ est assez stricte : lorsque $X$ est lisse, elle implique qu'il n'a pas de point rationnel.

PROPOSITION 4.8. Soit $X$ un schéma irréductible de type fini sur $R$, dont l'ensemble des points rationnels n'est pas dense pour la topologie de Zariski. Alors tout point rationnel de $X$ est singulier.

Preuve. Supposons par l'absurde que $X$ admette un point rationnel régulier $x$. Quitte à remplacer $X$ par un ouvert de Zariski, on peut supposer $X$ plongé dans l'espace affine $\mathbb{E}_R^N$. Le critère jacobien de lissité montre alors que $X(R)$ contient un voisinage $W$ de $x$ pour la topologie ordinaire qui est une sous-variété analytique réelle de dimension $d = \dim X$ de $R^n$. Par ailleurs, comme $X$ est lisse en $x$, on peut, quitte à rapetisser $X$, supposer qu'il existe un morphisme étale $\varphi : X \to \mathbb{E}_R^d$. Le morphisme $\varphi$ induit alors un morphisme étale au sens usuel

$$\varphi_R : W \to R^d ,$$

ce qui montre, d'après le théorème des fonctions inverses, que, notant $T \neq X$ un fermé de Zariski de $X$ contenant tous les points rationnels, $\varphi(T)$ contient un voisinage ouvert, pour la topologie ordinaire, de $\varphi(x)$ dans $R^d$.
D'où, pour la topologie de Zariski,

$$\overline{\varphi(T)} = \mathbb{E}_R^d ,$$

ce qui contredit le fait que $\dim T \leq d-1$.

Exemples 4.9. Une hypersurface $Y$ fermée lisse de $\mathbb{E}_R^n$ a un fibré tangent stablement trivial :

$$T(Y) \oplus 1_Y \simeq (1_Y)^n .$$

Si elle n'a pas de point rationnel, elle est donc parallélisable d'après (4.7).

C'est le cas par exemple pour les variétés d'équation ($p$ entier $\geq 1$)

$$x_1^{2p} + x_2^{2p} + \dots + x_n^{2p} + 1 = 0 .$$

5. - Un théorème de BERTINI.

Le propos de ce paragraphe est de prouver le théorème de Bertini utilisé précédemment. Soient $A$ un anneau commutatif, $M$ un $A$-module. On pose $X = \operatorname{spec} A$ et, pour tout $m \in M$, on note

$$\underset{M}{o}(m) = \{\varphi(m) \mid \varphi \in \check{M}\} , \quad \text{et}$$

$$Y_M(m) = \operatorname{spec}(A/o(m)) .$$

On utilise aussi les notations $o(m)$, $Y(m)$ s'il n'y a pas de confusion possible.

THEOREME 5.1. Soient $k$ un corps infini, $A$ une $k$-algèbre de type fini, $T$ une partie fermée de dimension $\leq m$ de $X = \operatorname{spec} A$. On suppose donnés un $A$-module projectif $P$ de rang constant $r$ et $(a,p) \in A \oplus P$ un élément direct. On note $X_i$ $(1 \leq i \leq s)$ les composantes irréductibles de $X$ non contenues dans l'hypersurface $H : a = 0$, et on pose $d_i = \dim(X_i)$.
Alors il existe $p_1 \in P$ tel que, posant $Y = Y_P(p+ap_1)$, on ait :

i) $Y \cap H = \emptyset$,

ii) pour tout $i \in [1,s]$, $Y \cap X_i$ est purement de dimension $d_i - r$ lorsque $r \leq d_i$, vide si $r > d_i$,

iii) les composantes irréductibles de $Y$ sont celles des $Y \cap X_i$,

iv) $\dim(Y \cap T) \leq m - r$,

v) si $X$ est lisse (resp. géométriquement réduit, resp. géométriquement normal), $Y$ l'est également,

vi) si $X$ est géométriquement irréductible (resp. géométriquement intègre), et $\dim X \geq 2$, $Y$ est géométriquement irréductible (resp. géométriquement intègre).

Nous avons en fait démontrer un résultat plus précis.

PROPOSITION 5.2. <u>On se donne comme précédemment</u> A, T, P .
<u>Il existe alors une partie finie</u> $\{z_1,\ldots,z_t\}$ <u>de</u> P <u>telle que, pour tout</u> (a,p) <u>direct dans</u> $A \oplus P$ , <u>l'ensemble des</u> $(\lambda_1,\ldots,\lambda_t) \in k$ <u>tels que</u> $Y_p(p + a(\sum_{i=1}^{t} \lambda_i z_i)) = Y$ <u>vérifiant les conditions</u> i) <u>à</u> vi) <u>soit l'ensemble des points rationnels d'une partie constructible dense (i.e. contenant un ouvert de Zariski non vide) de l'espace affine</u> $\mathbb{E}_k^t$ .

5.3. Pour les questions concernant la constructibilité, la construction suivante sera utile. Supposons donnés une k-algèbre de type fini A , un A-module projectif de type fini P , des éléments $(z_1,\ldots,z_t)$ de P . Considérons l'application

$$\begin{aligned} A[U_1,\ldots,U_t] \otimes_A \check{P} &\longrightarrow A[U_1,\ldots,U_t] \\ f \otimes \ell &\longmapsto f[\ell(p) + a(\sum_{i=1}^{t} U_i \ell(z_i))] \end{aligned} .$$

Elle a pour image un idéal J . Posant B = A/J , l'inclusion canonique $k[U_1,\ldots,U_t] \hookrightarrow A[U_1,\ldots,U_t]$ définit un morphisme de type fini $\varphi : \operatorname{spec} B \to \mathbb{E}_k^t$ tel que, pour tout $(\lambda_1,\ldots,\lambda_t) \in k^t$ ,

$$\varphi^{-1}(\lambda_1,\ldots,\lambda_t) = Y_p(p + a(\sum_{i=1}^{t} \lambda_i z_i)) .$$

On sait alors que l'ensemble des points de $\mathbb{E}_k^t$ dont la fibre vérifie l'une quelconque des propriétés i) à vi) est constructible dans $\mathbb{E}_k^t$ .

5.4. Sous les hypothèses de (5.2) , si une partie $\{z_1,\ldots,z_t\}$ de P vérifie la conclusion, il en est de même de toute partie $\{z_1,\ldots,z_t,z_{t+1},\ldots,z_u\}$ la contenant. Etant donné un élément direct $(a,p) \in A \oplus P$ ,

$$\Omega = \{(\lambda_1,\ldots,\lambda_u) \mid Y(p + a(\sum_{i=1}^{u} \lambda_i z_i)) \text{ vérifie i) à vi)}\} \subset k^u = k^t \times k^{u-t} .$$

Pour tout $(\lambda_{t+1},\ldots,\lambda_u) \in k^{u-t}$ , l'élément

$$(a,p+a(\sum_{j=t+1}^{u} \lambda_j z_j))$$

est direct dans $P$ , de sorte que, par hypothèse, $\Omega$ rencontre toute fibre de la deuxième projection $k^u = k^t \times k^{u-t} \to k^{u-t}$ suivant une partie dense (pour la topologie de Zariski) de $k^t$ . Il en résulte aussitôt que, $\overline{\Omega}$ contenant toutes les fibres, $\Omega$ est dense dans $k^u$ .

Les considérations précédentes montrent que, pour prouver (5.2) , il suffit de montrer qu'on peut recouvrir $X$ par un nombre fini d'ouverts affines $U_\ell$ $(\ell \in \Lambda)$ pour lesquels il existe un nombre fini d'éléments $Z_\ell$ de $P$ tels que, pour tout élément direct $(a,p) \in A \oplus P$ ,

$$\{(\lambda_z)_{z\in Z_\ell} \in k^{Z_\ell} | Y_p(p+a(\sum_{z\in Z_\ell} \lambda_z z)) \cap U_\ell \text{ vérifie i) à vi)}\}$$

soit une partie constructible et dense de $k^{Z_\ell}$. Il suffira alors, d'après (5.3), de prendre comme partie finie de $P$

$$Z = \bigcup_{\ell \in \Lambda} Z_\ell .$$

C'est ce qu'on va faire en prenant un recouvrement fini de $X$ par des ouverts, de la forme $D(f)$ , sur lesquels $P$ est libre de rang $r$ . Plus précisément, étant donné un système de générateurs $p_1,\dots,p_v$ de $P$ , on peut recouvrir $X$ par un nombre fini d'ouverts affines $U = D(f)$ tels qu'on puisse extraire de $p_1|U,\dots,p_v|U$ une base de $\Gamma(U,\widetilde{A})$ - module $P|U$ . Si

$$A = k[X_1,\dots,X_n]/\mathfrak{a} = k[x_1,\dots,x_n] ,$$

et $U = \operatorname{spec} C$ , avec

$$C = A_f = k[x_1,\dots,x_n][1/f] ,$$

soient $q_1,\dots,q_r \in P$ tels que les $e_i = q_i|U \in P_f$ forment une base de $P_f$ comme $C$-module. La proposition (5.2) résultera du lemme suivant.

LEMME 5.4. La partie

$$Z_U = \{q_1,\dots,q_r,x_iq_j \quad (1\le i\le n\ ,\ 1\le j\le r)\}$$

<u>est telle que, pour tout élément direct</u> $(a,p) \in A \oplus P$ , <u>l'ensemble</u>

$$\{(\lambda_z)_{z \in Z_U} \mid Y_p(p+a(\sum_{z \in Z_U} \lambda_z z)) \cap U \text{ vérifie i) à vi)}\}$$

<u>soit constructible et dense dans</u> $k^{\operatorname{card} Z_U}$ .

Soient $p_1,\dots,p_r \in C = A_f$ les composantes de $p$ par rapport à la base $e_1,\dots,e_r$ . L'hypothèse que $(a,p)$ est direct implique que les "fonctions" $a,p_1,\dots,p_r$ sur $U$ ne s'annulent pas simultanément, de sorte que le morphisme

$$\varphi : \quad U \longrightarrow P_k^{r+n}$$

$$x \longmapsto (p_1(x),\dots,p_r(x),a(x),a(x)x_1,\dots,a(x)x_n)$$

est bien défini. Notant (abusivement) $P_k^{r-1}$ le sous-espace projectif de $P_k^{r+n}$ défini par l'annulation de $n+1$ dernières coordonnées homogènes, il est clair que

$$\varphi^{-1}(P_k^{r-1}) = U \cap H .$$

De plus, sur $V = U \mathbin{\dot{-}} (U \cap H)$ $\varphi$ s'identifie au graphe du morphisme

$$V \longrightarrow k^r$$

$$x \longmapsto (p_1(x)/a(x),\dots,p_r(x)/a(x)) ,$$

donc $\varphi|V$ est un isomorphisme sur son image. Les théorèmes de Bertini classiques impliquent que la variété linéaire projective générale $L$ de dimension $n$ de $P_k^{r+n}$ ne rencontre pas $P_k^{r-1}$ , donc

(5.4.1) $$\varphi^{-1}(L) \xrightarrow{\sim} L \cap (\varphi(V)) ,$$

et

(5.4.2) $$\varphi^{-1}(L) \cap H = \emptyset .$$

Compte tenu de (5.4.1) , les théorèmes de Bertini classiques appliqués au sous-schéma $\varphi(V)$ de $P_k^{r+n}$ impliquent que $\varphi^{-1}(L) = Y_U$ vérifie les propriétés i) à vi) exigées pour $Y$ dans l'énoncé de (5.1) .

Génériquement, $L$ est défini par un système d'équations

$$(E) \qquad \begin{cases} a_{11}y_1 + \dots \quad + a_{1,r+n+1}\, y_{r+n+1} = 0 \\ \\ a_{r1}y_1 + \dots \quad + a_{r,r+n+1}\, y_{r+n+1} = 0 \end{cases}$$

($y_j$ coordonnées homogènes de $P_k^{r+n}$) , avec $\det(a_{ij}) \neq 0$ $(1 \leq i \leq r,\ 1 \leq j \leq r)$ . L'opération évidente de $GL(r,k)$ sur les vecteurs colonnes des coefficients de $(E)$ définit des systèmes d'équations équivalents à $(E)$ , et il est clair par suite qu'il y a un système (et un seul) équivalent à $(E)$ de la forme

$$(E')\left\{\begin{array}{llll} y_1 & 0 & + b_{1,r+1}y_{r+1} + \cdots + b_{1,r+n+1}\, y_{r+n+1} = 0 \\ & \ddots & \\ 0 & y_r & + b_{r,r+1}y_{r+1} + \cdots + b_{r,r+n+1}\, y_{r+n+1} = 0 . \end{array}\right.$$

On retrouve ainsi la paramétrisation usuelle d'un ouvert de la grassmannienne des $(n+1)$ - plans de $k^{r+n+1}$ , et un énoncé précis des théorèmes de Bertini est que l'ensemble des $b_{ij}$ $(1 \leq i \leq r\ ,\ r+1 \leq j \leq n+r+1\ )$ pour lesquels la variété linéaire $L$ d'équations $(E')$ vérifie les propriétés désirées est constructible et dense dans $k^{rn}$ . Utilisant l'expression de $\varphi$ , on voit que $\varphi^{-1}(L)$ est la partie de $U$ d'équations

$$\check{e}_k[p+a(\sum_{i=1}^{r} \lambda_i e_i + \sum_{\substack{1 \leq i \leq r \\ 1 \leq j \leq n}} \lambda_{ij} x_j e_i)] = 0 \quad (1 \leq k \leq r) ,$$

avec

$$\left\{\begin{array}{ll} \lambda_i = b_{i,r+1} & (1 \leq i \leq r) \\ \lambda_{ij} = b_{i,r+1+j} & (1 \leq i \leq r,\ 1 \leq j \leq n) , \end{array}\right.$$

soit

$$\varphi^{-1}(L) = U \cap Y_p(p+a(\sum_{i=1}^{r} \lambda_i q_i + \sum_{\substack{1 \leq i \leq r \\ 1 \leq j \leq n}} \lambda_{ij} x_j q_i)) .$$

L'assertion en résulte aussitôt.

## REFERENCES

[1] H. BASS : Algebraic K-theory, Benjamin, New York, 1968

[2] P. MURTHY et R. SWAN : Vector bundles over affine surfaces, Invent. Math. 36 (1976) .

[3] A.A. SUSLIN : A cancellation theorem for projective modules over algebras, Soviet Math. Dokl. vol 18, n° 5 (1977) .

[4] R. SWAN : Algebraic K-theory, Lecture Notes Springer 76.

[5] R. SWAN : A cancellation theorem for projective modules in the metastable range, Invent. Math. 27 (1974) .

## BIBLIOGRAPHIE COMPLEMENTAIRE


### A) Théorèmes de BERTINI et SEIDENBERG

CORAY D.F. : Two remarks on the Bertini theorems , preprint Genève 1980.

KUAN W.E. : A note on a generic hyperplane section of an algebraic variety, Can. J. Math. Vol. 22, n° 5 (1970) pp 1047-1054.

SEIDENBERG A. : The hyperplane sections of normal varieties, Trans. A.M.S. 69 (1950) pp 357-386.

TRUNG N.V. : Über allgemeine Hyperflächenschnitte einer algebraischen Varietät, preprint Hanoï 1980.

### B) Théorèmes de connexité et applications

DELIGNE P. : Le groupe fondamental du complément d'une courbe plane n'ayant que des points doubles ordinaires est abélien, Sém. Bourbaki 1979-1980, exp. 543.

FULTON W. : Notes on connectivity and its applications in algebraic geometry, preprint 1980.

FULTON W. : HANSEN J. : A connectedness theorem for projective varieties, with applications to intersections and singularities of mappings, Ann. of Math. 110 (1979), pp 159-166.

FULTON W. : LAZARSFELD R. : Connectivity and its applications in algebraic geometry, preprint 1981.

GAFFNEY T. : LAZARSFELD R. : On the ramification of branched coverings of $P^n$ , Inv. Math. 59 (1980) pp 53-58 .

### C) Autres applications

Von zur GATHEN J. : Factoring sparse multivariate polynomials, preprint Dept. of Computer science Toronto (Canada) 1983.

# PROGRESS IN MATHEMATICS
*Already published*

PM 1 Quadratic Forms in Infinite-Dimensional Vector Spaces
*Herbert Gross*
ISBN 3-7643-1111-8, 432 pages, paperback

PM 2 Singularités des systèmes différentiels de Gauss-Manin
*Frédéric Pham*
ISBN 3-7643-3002-3, 346 pages, paperback

PM 3 Vector Bundles on Complex Projective Spaces
*C. Okonek, M. Schneider, H. Spindler*
ISBN 3-7643-3000-7, 396 pages, paperback

PM 4 Complex Approximation, Proceedings, Quebec, Canada, July 3-8, 1978
*Edited by Bernard Aupetit*
ISBN 3-7643-3004-X, 128 pages, paperback

PM 5 The Radon Transform
*Sigurdur Helgason*
ISBN 3-7643-3006-6, 207 pages, hardcover

PM 6 The Weil Representation, Maslov Index and Theta Series
*Gérard Lion, Michèle Vergne*
ISBN 3-7643-3007-4, 348 pages, paperback

PM 7 Vector Bundles and Differential Equations
Proceedings, Nice, France, June 12-17, 1979
*Edited by André Hirschowitz*
ISBN 3-7643-3022-8, 256 pages, paperback

PM 8 Dynamical Systems, C.I.M.E. Lectures, Bressanone, Italy, June 1978
*John Guckenheimer, Jürgen Moser, Sheldon E. Newhouse*
ISBN 3-7643-3024-4, 305 pages, hardcover

PM 9 Linear Algebraic Groups
*T. A. Springer*
ISBN 3-7643-3029-5, 314 pages, hardcover

PM 10 Ergodic Theory and Dynamical Systems I
*A. Katok*
ISBN 3-7643-3036-8, 346 pages, hardcover

PM 11 18th Scandinavian Congress of Mathematicians, Aarhus, Denmark, 1980
*Edited by Erik Balslev*
ISBN 3-7643-3040-6, 526 pages, hardcover

PM 12 Séminaire de Théorie des Nombres, Paris 1979-80
*Edited by Marie-José Bertin*
ISBN 3-7643-3035-X, 404 pages, hardcover

PM 13 Topics in Harmonic Analysis on Homogeneous Spaces
*Sigurdur Helgason*
ISBN 3-7643-3051-1, 152 pages, hardcover

PM 14 Manifolds and Lie Groups, Papers in Honor of Yozô Matsushima
*Edited by J. Hano, A. Marimoto, S. Murakami, K. Okamoto, and H. Ozeki*
ISBN 3-7643-3053-8, 476 pages, hardcover

PM 15 Representations of Real Reductive Lie Groups
*David A. Vogan, Jr.*
ISBN 3-7643-3037-6, 776 pages, hardcover

PM 16 Rational Homotopy Theory and Differential Forms
*Phillip A. Griffiths, John W. Morgan*
ISBN 3-7643-3041-4, 258 pages, hardcover

PM 17 Triangular Products of Group Representations and their Applications
*S. M. Vovsi*
ISBN 3-7643-3062-7, 142 pages, hardcover

PM 18 Géométrie Analytique Rigide et Applications
*Jean Fresnel, Marius van der Put*
ISBN 3-7643-3069-4, 232 pages, hardcover

PM 19 Periods of Hilbert Modular Surfaces
*Takayuki Oda*
ISBN 3-7643-3084-8, 144 pages, hardcover

PM 20 Arithmetic on Modular Curves
*Glenn Stevens*
ISBN 3-7643-3088-0, 236 pagers, hardcover

PM 21 Ergodic Theory and Dynamical Systems II
*A. Katok, editor*
ISBN 3-7643-3096-1, 226 pages, hardcover

PM 22 Séminaire de Théorie des Nombres, Paris 1980-81
*Marie-José Bertin, editor*
ISBN 3-7643-3066-X, 374 pages, hardcover

PM 23 Adeles and Algebraic Groups
*A. Weil*
ISBN 3-7643-3092-9, 138 pages, hardcover

PM 24 Enumerative Geometry and Classical Algebraic Geometry
*Patrick Le Barz, Yves Hervier, editors*
ISBN 3-7643-3106-2, 260 pages, hardcover

PM 25 Exterior Differential Systems and the Calculus of Variations
*Phillip A. Griffiths*
ISBN 3-7643-3103-8, 349 pages, hardcover

PM 26 Number Theory Related to Fermat's Last Theorem
*Neal Koblitz, editor*
ISBN 3-7643-3104-6, 376 pages, hardcover

PM 27 Differential Geometric Control Theory
*Roger W. Brockett, Richard S. Millman, Hector J. Sussmann, editors*
ISBN 3-7643-3091-0, 349 pages, hardcover

PM 28 Tata Lectures on Theta I
*David Mumford*
ISBN 3-7643-3109-7, 254 pages, hardcover

PM 29 Birational Geometry of Degenerations
*Robert Friedman and David R. Morrison, editors*
ISBN 3-7643-3111-9, 410 pages, hardcover

PM 30 CR Submanifolds of Kaehlerian and Sasakian Manifolds
*Kentaro Yano, Masahiro Kon*
ISBN 3-7643-3119-4, 223 pages, hardcover

PM 31 Approximations Diophantiennes et Nombres Transcendants
*D. Bertrand and M. Waldschmidt, editors*
ISBN 3-7643-3120-8, 349 pages, hardcover

PM 32 Differential Geometry
*Robert Brooks, Alfred Gray, Bruce L. Reinhart, editors*
ISBN 3-7643-3134-8, 267 pages, hardcover

PM 33 Uniqueness and Non-Uniqueness in the Cauchy Problem
*Claude Zuily*
ISBN 3-7643-3121-6, 185 pages, hardcover

PM 34 Systems of Microdifferential Equations
*Masaki Kashiwara*
ISBN 0-8176-3138-0
ISBN 3-7643-3138-0, 182 pages, hardcover

PM 35 Arithmetic and Geometry Papers Dedicated to I. R. Shafarevich on the Occasion of His Sixtieth Birthday Volume I Arithmetic
*Michael Artin, John Tate, editors*
ISBN 3-7643-3132-1, 373 pages, hardcover

PM 36 Arithmetic and Geometry Papers Dedicated to I. R. Shafarevich on the Occasion of His Sixtieth Birthday Volume II Geometry
*Michael Artin, John Tate, editors*
ISBN 3-7643-3133-X, 495 pages, hardcover

PM 37 Mathématique et Physique
*Louis Boutet de Monvel, Adrien Douady, Jean-Louis Verdier, editors*
ISBN 0-8176-3154-2
ISBN 3-7643-3154-2, 454 pages, hardcover

PM 38 Séminaire de Théorie des Nombres, Paris 1981-82
*Marie-José Bertin, editor*
ISBN 0-8176-3155-0
ISBN 3-7643-3155-0, 359 pages, hardcover

PM 39 Classical Algebraic and Analytic Manifolds
*Kenji Ueno, editor*
ISBN 0-8176-3137-2
ISBN 3-7643-3137-2, 644 pages, hardcover

PM 40 Representation Theory of Reductive Groups
*P. C. Trombi, editor*
ISBN 0-8176-3135-6
ISBN 3-7643-3135-6, 308 pages, hardcover

PM 41 Combinatorics and Commutative Algebra
*Richard P. Stanley*
ISBN 0-8176-3112-7
ISBN 3-7643-3112-7, 102 pages, hardcover

# PROGRESS IN PHYSICS
*Already published*

PPh 1 Iterated Maps on the Interval as Dynamical Systems
*Pierre Collet and Jean-Pierre Eckmann*
ISBN 3-7643-3026-O, 256 pages, hardcover

PPh 2 Vortices and Monopoles, Structure of Static Gauge Theories
*Arthur Jaffe and Clifford Taubes*
ISBN 3-7643-3025-2, 294 pages, hardcover

PPh 3 Mathematics and Physics
*Yu. I. Manin*
ISBN 3-7643-3027-9, 112 pages, hardcover

PPh 4 Lectures on Lepton Nucleon Scattering and Quantum Chromodynamics
*W. B. Atwood, J. D. Bjorken, S. J. Brodsky, and R. Stroynowski*
ISBN 3-7643-3079-1, 574 pages, hardcover

PPh 5 Gauge Theories: Fundamental Interactions and Rigorous Results
*P. Dita, V. Georgescu, R. Purice, editors*
ISBN 3-7643-3095-3, 406 pages, hardcover

PPh 6 Third Workshop on Grand Unification
University of North Carolina, Chapel Hill, April 15-17, 1982
*P. H. Frampton, S. L. Glashow, and H. van Dam, editors*
ISBN 3-7643-3105-4, 382 pages, hardcover

Jean-Pierre Jouanolou
Théorèmes de Bertini et Applications

Bertini theorems are among the most useful statements in algebraic geometry. This monograph fills the need for a modern, systematic exposition. It will provide an introduction to the field for graduate students, as well as a reference for specialists. Included in this volume are recent applications to the structure of projective modules of finite type and to connectivity theorems which demonstrate the value of these theorems.

Birkhäuser
Boston · Basel · Stuttgart

ISBN 0-8176-3164-X
ISBN 3-7643-3164-X