$\Rightarrow \tilde{\theta}_3'$ — эффективнее $\hat{\tilde{\theta}}_1$ $\forall n > 1$

Т-3

Сл. вел. имеет экспоненц. распред.

$$p(x) = \begin{cases} e^{-x/\theta}/\theta, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

$\theta > 0$. По выборке объёма $n \geq 3$ найдены оценки: $\hat{\theta}_1 = \bar{x}$, $\hat{\tilde{\theta}}_2 =$

а) $M[\hat{\theta}_1] = M[\bar{x}] = M\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} M[x_i]$

$= M\varphi = \theta \Rightarrow \hat{\theta}_1$ — несмещенная

$M[\hat{\tilde{\theta}}_2]$ — ?

На лекции было выведено, что

$$\varkappa = n\, p(t)\, C_{n-1}^{k-1} (1 - F(t))^{n-k} (F(t))^{k-1},$$

где $\varkappa$ — плотность расп $\varphi_{(k)}$

В нашем случае $k=2$, поэтому

$$\varphi(z)=n\cdot\frac{1}{\theta}\cdot C_{n-1}^{1}\left(1-\left(1-e^{-\frac{z}{\theta}}\right)\right)^{n-2}\cdot$$

$$\cdot\left(1-e^{-\frac{z}{\theta}}\right)=\frac{n(n-1)}{\theta}\left(\left(e^{-\frac{z}{\theta}(n-1)}\right)-e^{-\frac{z}{\theta}n}\right)$$

Получаем, что

$$M[\hat{\theta}_2]=\int_{-\infty}^{+\infty}z\varphi(z)\,dz=\int_{0}^{+\infty}\frac{n(n-1)}{\theta}z\cdot\left(e^{-\frac{z}{\theta}(n-1)}\right.$$

$$\left.-e^{-\frac{z}{\theta}n}\right)dz=\frac{n(n-1)}{\theta}\int_0^{+\infty}\frac{z}{e^{\frac{z}{\theta}n}}\left(e^{\frac{z}{\theta}}-1\right)dz=$$

$$=\left\{\begin{array}{ll}\text{Замена } t=\frac{z}{\theta}n & z=\frac{\theta}{n}t\\ dt=\frac{n}{\theta}dz & dz=\frac{\theta}{n}dt\end{array}\right\}=$$

$$=\frac{n(n-1)}{\theta}\cdot\frac{\theta^2}{n^2}\int_0^{+\infty}\frac{t}{e^{\left(\frac{\theta}{n}t\cdot\frac{n}{\theta}\right)}}\left(e^{\left(\frac{\theta}{n}t\cdot\frac{1}{\theta}\right)}-1\right)dt=$$

$$=\frac{\theta(n-1)}{n}\int_0^{+\infty}te^{-t}\left(e^{\frac{t}{n}}-1\right)dt=$$

$$=\frac{\theta(n-1)}{n}\left(\int_0^{+\infty}te^{t\left(\frac{1}{n}-1\right)}dt-\underbrace{\int_0^{+\infty}te^{-t}dt}_{=1}\right)=$$

$$= \left\{ \int_0^{+\infty} t e^{-t\left(\frac{n-1}{n}\right)t} dt = \left\{ \begin{array}{l} u = t\left(\frac{n-1}{n}\right) \\ t = \frac{n}{n-1} u \\ dt = \frac{n}{n-1} du \end{array} \right\} = \right.$$

$$= \frac{n^2}{(n-1)^2} \underbrace{\int_0^{+\infty} u e^{-u} du}_{=1} = \frac{n^2}{(n-1)^2} \Big\} = \frac{\theta(n-1)}{n}\left(\frac{n^2}{(n-1)^2} - 1\right) =$$

$$= \frac{\theta n}{n-1} - \frac{\theta(n-1)}{n} = \theta\left(\frac{n^2 - n^2 + 2n - 1}{n(n-1)}\right) = \theta\left(\frac{2n-1}{n(n-1)}\right) \Rightarrow$$

$\Rightarrow \widehat{\theta_2}$ – смещённая

Введём $\widetilde{\theta_2}' = \frac{n(n-1)}{2n-1} \widetilde{\theta_2}$ – несмещенная

б) $M[\widetilde{\theta_2}^2] = \int_0^{+\infty} \frac{n(n-1)}{\theta} z^2 \left(e^{-\frac{z}{\theta}(n-1)} - e^{-\frac{z}{\theta}n}\right) dz =$

$$= \left\{ \begin{array}{l} t = \frac{n}{\theta} z \\ z = \frac{\theta}{n} t \\ dz = \frac{\theta}{n} dt \end{array} \right\} = \frac{n(n-1)}{\theta} \cdot \frac{\theta^3}{n^3} \int_0^{+\infty} t^2 \left(e^{-t\left(\frac{n-1}{n}\right)} - e^{-t}\right) dt =$$

$$= \theta^2 \frac{(n-1)}{n^2} \int_0^{+\infty} t^2 \left(e^{-t\left(\frac{n-1}{n}\right)} - e^{-t}\right) dt =$$

$$= \theta^2 \frac{(n-1)}{n} \left[\int_0^{+\infty} t^2 e^{-t\left(\frac{n-1}{n}\right)} dt - \int_0^{+\infty} t^2 e^{-t} dt \right] =$$

$$\ominus \left\{ \int_0^{+\infty} t^2 e^{-t\left(\frac{n-1}{n}\right)} dt = \left\{ \begin{aligned} u &= \frac{n-1}{n} t \\ t &= \frac{n}{n-1} u \\ dt &= \frac{n}{n-1} du \end{aligned} \right\} = \right.$$

$$= \frac{n^3}{(n-1)^3} \overbrace{\int_0^{+\infty} u^2 e^{-u} dt}^{=2} \Big\} \ominus 2\theta \frac{2(n-1)}{n^2} \left[\frac{n^3}{(n-1)^3} \cdot 1 \right] =$$

$$= 2\theta^n \left(\frac{n}{(n-1)^2} - \frac{(n-1)}{n^2} \right) = 2\theta^2 \left(\frac{n^3 - (n-1)^3}{n^2 (n-1)^2} \right) =$$

$$= 2\theta \left(\frac{3n^2 - 3n + 1}{n^2 (n-1)^2} \right)$$

Таким образом

$$D[\tilde{\theta}_2] = 2\theta \left(\frac{3n^2 - 3n + 1}{n^2 (n-1)^2} \right) - \theta^2 \left(\frac{(2n-1)^2}{n^2 (n-1)^2} \right) =$$

$$= \theta^2 \left(\frac{2n^2 - 2n + 1}{n^2 (n-1)^2} \right)$$

$$D[\tilde{\theta}_2'] = \frac{n^2 (n-1)^2}{(2n-1)^2} D[\tilde{\theta}_2] = \theta^2 \left(\frac{2n^2 - 2n + 1}{4n^2 - 4n + 1} \right)$$

$$D[\tilde{\theta}_1] = D\left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i \right] = \frac{1}{n^2} n D[\varphi] = \frac{1}{n} \cdot 1 \theta^2 =$$

$$= \frac{\theta^2}{n}$$

$n = 3$:

$$D[\tilde{\theta}_1] \Big|_{n=3} = \frac{\theta^2}{3}$$

$D[\tilde{\theta}_2']\Big|_{n=3} = \frac{13}{25}\theta^2$

$D[\tilde{\theta}_1] < D[\tilde{\theta}_2'] \Rightarrow \tilde{\theta}_1$ более эффективна

в) Н-во Крамéра – Рао

1) Модель явл. регулярной

2) Оценка $g(\vec{x}_n)$ – регулярная оценка диф-мой ф-ции $g(\theta)$

Тогда $\forall \theta \in \Theta$ $D[\tilde{g}] \geq \frac{g'^2(\theta)}{n I(\theta)}$, $n=3$ (в нашем случае)

Докажем, что

1. Модель регулярна:

$$\rho(x,\theta) = \begin{cases} \frac{e^{-\frac{x}{\theta}}}{\theta}, & x \geq 0 \\ 0, & x<0 \end{cases} \quad \theta > 0$$

1) $\rho(x,\theta)$ – непр диф-ма на θ на $(0, +\infty)$

2) $\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\int_0^{+\infty} \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x}{\theta}} dx\right) = \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{1}{\theta}\cdot\theta\int_0^{+\infty} e^{-t} dt\right) =$

$= \frac{\partial}{\partial\theta}\left(-e^{-t}\Big|_0^{+\infty}\right) = \frac{\partial}{\partial\theta}\left(-(e^{-\infty} - e^{0})\right) = \frac{\partial}{\partial\theta}(1) = 0$

$$\int_0^{+\infty}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{1}{\theta}e^{-\frac{x}{\theta}}\right)\right)dx=\int_0^{+\infty}\left(-\frac{1}{\theta^2}e^{-\frac{x}{\theta}}-\frac{1}{\theta^3}e^{-\frac{x}{\theta}}\right)dx=0$$

3) $I(\theta)=M\left[\left(\frac{\partial \ln\rho(x,\theta)}{\partial\theta}\right)^2\right]$

$$\ln\left(\frac{1}{\theta}e^{-\frac{x}{\theta}}\right)=-\ln\theta-\frac{x}{\theta}$$

$$\left(\frac{\partial \ln\rho}{\partial\theta}\right)^2=\left(\frac{x}{\theta^2}-\frac{1}{\theta}\right)^2$$

$$I(\theta)=M\left[\left(\frac{\partial \ln\rho}{\partial\theta}\right)^2\right]=\int_0^{+\infty}\left(\left(\frac{x}{\theta}\right)^2-\frac{2x}{\theta^3}+\frac{1}{\theta^2}\right)\cdot\frac{1}{\theta}\cdot e^{-\frac{x}{\theta}}dx=\frac{1}{\theta^2}\left(\int_0^{+\infty}t^2e^{-t}dt-2\int_0^{+\infty}te^{-t}dt+\int_0^{+\infty}e^{-t}dt\right)=\frac{1}{\theta^2}(2-2+1)=\frac{1}{\theta^2}$$

$\frac{1}{\theta^2}$: 1) непр на $(0,+\infty)$

2) >0 на $(0,+\infty)$

1, 2, 3 $\Rightarrow$ Модель регулярна

2. Докажем, что оценка регулярна (по ОЭ)

1) Расм. θ_1:

- несмещенная
- $D[\tilde{\theta}_1] = \frac{\theta^2}{n} \stackrel{\cdot}{=} \frac{\theta^2}{3}$ — огр на $\forall$ компакте на $(0, +\infty)$ по θ

$\Rightarrow \tilde{\theta}_1$ — регулярная оценка

2) $\tilde{\theta}_2'$:

- несмещенная
- $D[\tilde{\theta}_2'] = \theta^2\left(\frac{2n^2-2n+1}{4n^2-4n+1}\right)$ — огр на $\forall$ компакт на $(0, +\infty)$ по θ

$\Rightarrow \tilde{\theta}_2'$ — регул. оценка

3. Н-во Крамера-Рао:

$\forall \theta \in \Theta \hookrightarrow D[\hat{g}(\vec{x}_1)] \geq \frac{g'^2(\theta)}{n I(\theta)}$

1) Расм $\tilde{\theta}_1$

$\forall \theta \in (0, +\infty) \hookrightarrow D[\tilde{\theta}_1] \geq \frac{1}{3 \cdot \frac{1}{\theta^2}} = \frac{\theta^2}{3}$

По ДОУ эффективности

$\tilde{\theta}_1$ — эффективна

По теореме о $\exists!$ эфф. оценки $\tilde{\theta}_2'$ — не эффективна