第二章 波函数与薛定谔方程

一、波函数及其统计诠释

1 状态的描述

1.1 经典力学：质点

- 每一时刻具有确定的$\vec{r}$, $\vec{p}(v)$
- 其他力学量可表示为$\vec{r}$, $\vec{p}$的函数
- 其状态变化服从牛顿运动定律

1.2 量子力学：波函数

- 粒子不可能同时具有确定的$\vec{r}$和$\vec{p}$
- 粒子的状态由波函数$\Psi(\vec{r},t)$描述
- 其状态变化服从薛定谔方程

2 波粒二象性

2.1 实物粒子的波粒二象性

- 理论：$\lambda = \frac{h}{p}$, $\upsilon = \frac{E}{h}$
- 实验：C_{60}分子的干涉实验

2.2 实物粒子二象性的理解

- 粒子性：与物质相互作用时的"整体性"，具有集中的能量E和动量$\vec{p}$
- 波动性：在空间传播时的"可叠加性"，具有波长λ和波矢$\vec{k}$
- 物质波包观点：夸大了波动性，抹杀了粒子性
- 疏密波观点：夸大了粒子性，抹杀了波动性

3 波函数的统计诠释

3.1 概率波

- 粒子的状态可由波函数$\Psi(\vec{r},t)$完全描述
- 其模平方$|\Psi(\vec{r},t)|^2$表示粒子空间分布的概率密度，波函数本身称为概率振幅

3.2 波函数的归一

- 空间概率密度：$w(\vec{r},t) = |\Psi(\vec{r},t)|^2$
- 归一化条件：
  $$\int_\infty w(\vec{r},t)d\tau = \int_\infty |\Psi(\vec{r},t)|^2 d\tau = 1$$
- 注1：即使归一化后，波函数仍有一整体位相因子$e^{i\delta}$不能确定
- 注2：某些理想（非物理）情况无法归一，如平面波

3.3 多粒子波函数

- 波函数：$\Psi(\vec{r}_1,\vec{r}_2,\ldots,\vec{r}_N;t)$
- 归一化条件：
  $$\int_\infty^{(N)} \Psi(\vec{r}_1,\vec{r}_2,\ldots,\vec{r}_N;t)d^3\vec{r}_1 d^3\vec{r}_2\ldots d^3\vec{r}_N = 1$$

3.4 统计诠释对波函数的要求

- 波函数平方可积
- 满足归一化条件，但不排除某些理想波函数
- $|\Psi(\vec{r})|^2$单值，但不要求$\Psi(\vec{r})$单值
- 一般Ψ和$\nabla\Psi$连续，但$\nabla\Psi$在势能无限大跳变处可以不连续

二、量子态叠加原理

1 量子态及其表象

1.1 态函数

- 动量表象：$c(\vec{p}) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}}\int \psi(\vec{r})e^{-i\vec{p}\cdot\vec{r}/\hbar}d^3\vec{r}$
- 坐标表象：$\psi(\vec{r}) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}}\int c(\vec{p})e^{i\vec{p}\cdot\vec{r}/\hbar}d^3\vec{p}$
- 注：$\psi(\vec{r})$和$c(\vec{p})$构成傅里叶变换对

1.2 表象

- 含义：量子力学中态和力学量的表示方式
- 常用表象：坐标表象$\psi(\vec{r})$，动量表象$c(\vec{p})$等

2 量子态叠加原理

2.1 原理

若$\Psi_1, \Psi_2, \ldots, \Psi_n$是体系可能状态，则$\Phi = \sum_n c_n\Psi_n$也是体系的可能状态，其中$c_n$为复常数

2.2 讨论

- 态矢量集合$\{\Psi\}$对线性叠加封闭，故构成一个线性空间
- 态叠加原理要求态矢量的时间演化方程为线性齐次方程
- 叠加态$\Phi = \sum_n c_n\Psi_n$处于态Ψ_k的概率与$|c_k|^2$成正比

2.3 与经典叠加原理的区别

- Ψ和$c\Psi$描述的是同一个状态
- 波函数无直接物理意义，其叠加为概率波函数的叠加，而非概率密度的叠加

三、薛定谔方程

1 建立

1.1 算符

- 能量算符：$E \to i\hbar\frac{\partial}{\partial t}$
- 动量算符：$p \to -i\hbar\nabla$

1.2 方程

- 能量守恒：$E = \frac{\vec{p}^2}{2m} + U(\vec{r}, t)$
- 薛定谔方程：$i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\Psi + U(\vec{r}, t)\Psi$

2 讨论

2.1 连续性方程

- 空间概率密度：$w(\vec{r}, t) = |\Psi(\vec{r}, t)|^2 = \Psi^*(\vec{r}, t)\Psi(\vec{r}, t)$
- 概率流密度矢量：$\vec{J} = \frac{i\hbar}{2m}(\Psi\nabla\Psi^* - \Psi^*\nabla\Psi)$
- 连续性方程：$\frac{\partial w}{\partial t} + \nabla\cdot\vec{J} = 0$
- 物理意义：概率守恒，单位时间内体积V中增加的概率，等于从边界面流入V的概率通量

2.2 质量守恒定律与电荷守恒定律

- 质量守恒：$\frac{\partial w_m}{\partial t} + \nabla\cdot\vec{J}_m = 0$
- 电荷守恒：$\frac{\partial w_q}{\partial t} + \nabla\cdot\vec{J}_q = 0$

2.3 说明

- 薛定谔方程是量子力学的一个基本假设
- 薛定谔方程是线性偏微分方程，满足态叠加原理

3 定态薛定谔方程

3.1 定态薛定谔方程

- 定义：粒子的势能函数U与时间t无关的稳定势场问题
- 定态波函数：$\Psi(\vec{r},t)=e^{-\frac{iE}{\hbar}t}\psi(\vec{r})$
- 定态薛定谔方程：$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi+U(\vec{r})\psi=E\psi$

3.2 定态与非定态

- 定态：体系的能量有确定值的状态
- 非定态：由若干个能量不同的本征态叠加所形成的的态，即$\Psi(\vec{r},t)=\sum_E c_E\psi(\vec{r})e^{-\frac{iE}{\hbar}t}$

3.3 定态的特征

- 粒子的空间概率密度$\omega(\vec{r})$和概率流密度$\vec{J}$不随时间改变
- 任何不显含时力学量的平均值不随时间改变
- 任何不显含时力学量的测值概率分布不随时间改变

4 哈密顿算符

- 薛定谔方程的普遍表达：$i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t}=\hat{H}\Psi$
- 单粒子的哈密顿算符：$\hat{H}=-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2+U(\vec{r})$
- 多粒子的汉密顿算符：$\hat{H}=\sum_{i=1}^{N}(-\frac{\hbar^2}{2m_i}\nabla_i^2+U_i(\vec{r_i}))+V(\vec{r_1},\vec{r_2},\ldots,\vec{r_N})$
- 能量本征方程：$\hat{H}\Psi=E\Psi$

四、一维运动问题的一般分析

1 一维定态薛定谔方程

- 方程：$[-\frac{\hbar}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+U(x)]\psi(x)=E\psi(x)$
- 其中E, $U(x)$均为实数

2 一维定态的分类

2.1 束缚态与非束缚态

- 束缚态：粒子局限在有限的空间中，即$lim_{x\to\pm\infty}\psi(x)=0$
- 非束缚态：粒子可以出现在无限远处的状态，即$lim_{x\to+\infty}\psi(x)>0$或$lim_{x\to-\infty}\psi(x)>0$

2.2 简并与非简并

- 定义：若对于给定的能级E，只有一个线性无关的波函数存在，则称该能级是非简并的；否则称其为简并的
- 简并度：简并态中线性独立的波函数个数称为其简并度

3 一维定态薛定谔方程的性质

定理1 共轭定理

- 若$\psi(x)$是定态方程的解，则$\psi(x)^*$也是方程的解，且能量相同

- 推论：若某能量本征值E的解无简并，则可取为实解

定理2

对于任意能量本征值E，总可以找到定态方程的一组实解，其线性组合可以表示属于E的任何解

定理3 反射定理

3.1 定理

若$U(x)$具有空间反射不变性，即$U(x) = U(-x)$，那么若$\psi(x)$是方程的解，则$\psi(-x)$也是方程的解，且能量相同

3.2 宇称

- 空间反射算符：$\hat{P}\Psi(x) = \Psi(-x)$
- 本征方程：$\hat{P}\Psi(x) = \pi\Psi(x)$
- 宇称：空间反射算符的本征值，$\pi = 1$为偶宇称，$\pi = -1$为奇宇称

3.3 推论

若$U(x) = U(-x)$，且某能量本征值E的解无简并，则该解必有确定的宇称

定理4

若$U(x) = U(-x)$，则对于任意能量本征值E，总可以找到一组有确定宇称的解，其线性组合可以表示属于E的任何解

定理5

若$U(x)$的不连续点跳变值有限，则能量本征函数$\psi(x)$及其导数$\psi(x)'$连续

定理6 Wronskian定理

- Wronskian行列式：
  $$\psi_1(x)'\psi_2(x) - \psi_2(x)'\psi_1(x)$$
  称为$\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$的Wronskian行列式
- 若$\psi_1(x)$和$\psi_2(x)$均为方程的解且能量相同，则$\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$的Wronskian行列式为与x无关的常数，即$\psi_1(x)'\psi_2(x) - \psi_2(x)'\psi_1(x) = c$

定理7 不简并定理

- 定理：设$U(x)$为规则势场（即无奇点），若粒子存在束缚态，则该状态一定是非简并的
- 注：对于常见的非规则势场（如无限深势阱，δ势阱），上述定理仍然成立

五、一维无限深势阱和方势阱

1 一维无限深势阱

1.1 势能函数

$$U(x) = \begin{cases} 0, & 0 < x < a \\ \infty, & x < 0, x > a \end{cases}$$

1.2 定态薛定谔方程

- 阱内：$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}\psi(x) = E\psi(x)$
- 阱外：$(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + \infty)\psi(x) = E\psi(x)$

1.3 列写通解

- 阱内：$\psi(x) = Asin(kx+\delta)$，其中$k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$
- 阱外：$\psi(x) = 0$

1.4 边界条件

- 利用边界条件$\psi(0) = 0, \psi(x) = 0$，得 $ka = n\pi, n = 1, 2, 3, \dots$
- 能级：$E_n = \frac{\hbar^2\pi^2 n^2}{2ma^2}, n = 1, 2, 3, \dots$
- 波函数：$\psi_n(x) = A_n sin(\frac{n\pi}{a}x), n = 1, 2, 3, \dots$

1.5 归一化条件

- 利用归一化条件$\int_0^a |\psi_n(x)|^2 dx = 1$，得 $A_n = \sqrt{\frac{2}{a}}$
- 归一化波函数：

$$\Psi_n(x,t) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{a}} sin(\frac{n\pi}{a}x) e^{-\frac{iE_n}{\hbar}t}, & 0 < x < a \\ 0, & x < 0, x > a \end{cases}$$

$$n = 1, 2, 3, \dots$$

1.6 讨论

- 能量本征值：无限深势阱的能量是量子化的，其最低能级为$E_1 = \frac{\hbar^2\pi^2}{2ma^2}$
- 本征函数系：本征函数是两两正交的，即$\int_0^a \psi_m^*(x)\psi_n(x)dx = \delta_{m,n}$

2 有限深对称方势阱

2.1 势能函数

$$U(x) = \begin{cases} 0, & |x| < \frac{a}{2} \\ U_0, & |x| > \frac{a}{2} \end{cases}$$

2.2 定态薛定谔方程

考虑束缚态，即$0 < E < U_0$时

- 阱内：
  $\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + k^2\psi(x) = 0$，其中$k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$
- 阱外：
  $\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} - \beta^2\psi(x) = 0$，其中$\beta = \sqrt{\frac{2m(U_0 - E)}{\hbar^2}}$

2.3 列写通解

- 阱内：$\psi(x) = Acos(kx) + Bsin(kx)$
- 阱外：$\psi(x) = Ce^{\beta x} + De^{-\beta x}$

2.4 物理分析

- 束缚态条件：注意到$E < U_0$为束缚态，有$lim_{x\to\pm\infty}\psi(x) = 0$，故波函数为

$$\psi(x) = \begin{cases} Ce^{\beta x}, & x < -\frac{a}{2} \\ Acos(kx) + Bsin(kx), & -\frac{a}{2} < x < \frac{a}{2} \\ De^{-\beta x}, & x > -\frac{a}{2} \end{cases}$$

- 势能对称性：注意到$U(x) = U(-x)$，故定态波函数必有确定的宇称，下分偶宇称和奇宇称分别进行讨论

2.5 边界条件

- 偶宇称：$B=0, C=D$，由边界条件得

$$\begin{cases} Acos(\frac{ka}{2})=De^{-\frac{\beta a}{2}} \\ -kAsin(\frac{ka}{2})=-\beta De^{-\frac{\beta a}{2}} \end{cases} \Rightarrow k\,tan(\frac{ka}{2})=\beta$$

- 奇宇称：$A=0, C=-D$，由边界条件得

$$\begin{cases} Bsin(\frac{ka}{2})=De^{-\frac{\beta a}{2}} \\ kBsin(\frac{ka}{2})=-\beta De^{-\frac{\beta a}{2}} \end{cases} \Rightarrow k\,cot(\frac{ka}{2})=-\beta$$

- 图解法：引入$\xi=\frac{ka}{2}, \eta=\frac{\beta a}{2}$，采用图解法解如下超越方程

$$\begin{cases} \eta=\xi\,tan\xi \\ \eta^2+\xi^2=\frac{mU_0a^2}{2\hbar^2} \end{cases} \quad or \quad \begin{cases} \eta=-\xi\,cot\xi \\ \eta^2+\xi^2=\frac{mU_0a^2}{2\hbar^2} \end{cases}$$

- 能级：$E_n=\frac{2\hbar^2}{ma^2}\xi_n^2$

2.6 讨论

由图解法可得：

- 无论势阱深浅，至少存在一个束缚态（基态）
- 能级的宇称奇偶相间，最低能级为偶宇称
- 有限深势阱的各能级都低于无限深势阱能级；当$n\to\infty$时，各能级趋近于无限深势阱的响应能级
- 束缚态能级总数$N=1+[\frac{a}{\hbar\pi}\sqrt{2mU_0}]$

3 束缚态与离散谱

3.1 束缚态能级

束缚能量本征态的能级是离散的

3.2 波函数性质

- 在经典允许区，即$U(x)<E$时：波函数为震荡函数（$sin\,kx, cos\,kx$），$\psi(x)$总是向x轴弯曲
- 在经典禁区，即$U(x)>E$时：波函数为s单调函数（$e^{\pm\beta x}$），$\psi(x)$总是背离x轴弯曲

3.3 基态与激发态

- 基态：除$\pm\infty$外，在x有限的区域内基态波函数无节点
- 激发态：随能级递增，波函数节点数一次增加一个

六、量子隧穿效应

1 隧穿效应

1.1 势能函数

$$U(x)=\begin{cases} U_0, & 0<x<a \\ 0, & x<0, x>a \end{cases}$$

考虑$0<E<U_0$时的情况

1.2 定态薛定谔方程

$$\begin{cases} \frac{d^2\psi_1(x)}{dx^2}+\frac{2mE}{\hbar^2}\psi_1(x)=0 & x<0 \\ \frac{d^2\psi_2(x)}{dx^2}-\frac{2m(U_0-E)}{\hbar^2}\psi_2(x)=0, & 0<x<a \\ \frac{d^2\psi_3(x)}{dx^2}+\frac{2mE}{\hbar^2}\psi_3(x)=0 & x>a \end{cases}$$

1.3 列写通解

$$\begin{cases}\psi_1(x)=e^{ikx}+Be^{-ikx} & x<0\\ \psi_2(x)=Ce^{\kappa x}+De^{-\kappa x}, & 0<x<a\\ \psi_3(x)=Se^{ikx} & x>a\end{cases}$$

其中$k=\sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$, $\kappa=\sqrt{\frac{2m(U_0-E)}{\hbar^2}}$

1.4 物理分析

- 透射波：从物理上分析，透射波$\psi_3(x)$中只可能存在向右传播的e^{ikx}波，因此不存在e^{-ikx}项
- 概率流密度：$\vec{J}=\frac{i\hbar}{2m}(\Psi\nabla\Psi^*-\Psi^*\nabla\Psi)$，故有
  $J_i=|1|^2\frac{\hbar k}{m}=v$
  $J_r=|B|^2\frac{\hbar k}{m}=|B|^2v$
  $J_t=|S|^2\frac{\hbar k}{m}=|S|^2v$
- 透射概率：$T=\frac{J_t}{J_i}=|S|^2$
- 反射概率：$R=\frac{J_r}{J_i}=|B|^2$

1.5 边界条件

- 利用边界条件有：

$$\begin{cases}\psi_1(0)=\psi_2(0)\\ \psi_1'(0)=\psi_2'(0)\\ \psi_2(a)=\psi_3(a)\\ \psi_2'(a)=\psi_3'(a)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}1+B=C+D\\ ik(1-B)=\kappa(C-D)\\ Ce^{\kappa a}+De^{-\kappa a}=Se^{ika}\\ \kappa Ce^{\kappa a}-\kappa De^{-\kappa a}=ikSe^{ika}\end{cases}$$

- 解得：

$$T=|S|^2=\frac{4k^2\kappa^2}{(k^2+\kappa^2)^2sh^2\kappa a+4k^2\kappa^2}$$

$$R=|B|^2=\frac{(k^2+\kappa^2)^2sh^2\kappa a}{(k^2+\kappa^2)^2sh^2\kappa a+4k^2\kappa^2}$$

1.6 讨论

- 概率非负：分析下式可知 $0<T<1$

$$T=[1+\frac{(k^2+\kappa^2)^2}{4k^2\kappa^2}sh^2\kappa a]^{-1}=[1+\frac{1}{4\frac{E}{U_0}(1-\frac{E}{U_0})}sh^2\kappa a]^{-1}$$

- 概率守恒：$R+T=1$
- 近似公式：若满足条件$\kappa a\gg 1$，利用$sh\,\kappa a\approx\frac{1}{2}e^{\kappa a}\gg 1$可得

$$T\approx\frac{16k^2\kappa^2}{(k^2+\kappa^2)^2}e^{-2\kappa a}\approx T_0e^{-\frac{2a}{\hbar}\sqrt{2m(U_0-E)}}$$

  分析可知T敏感地依赖于势垒高度U_0，宽度a，粒子质量m和能量E
- 粒子隧穿一般形状势垒的透射概率：

$$T\approx T_0e^{-\frac{2}{\hbar}\int_a^b\sqrt{2m(U(x)-E)}dx}$$

2 共振隧穿

考虑$E>U_0$时的情况

2.1 定态薛定谔方程

$$\begin{cases}\frac{d^2\psi_1(x)}{dx^2}+\frac{2mE}{\hbar^2}\psi_1(x)=0 & x<0\\ \frac{d^2\psi_2(x)}{dx^2}+\frac{2m(E-U_0)}{\hbar^2}\psi_2(x)=0, & 0<x<a\\ \frac{d^2\psi_3(x)}{dx^2}+\frac{2mE}{\hbar^2}\psi_3(x)=0 & x>a\end{cases}$$

2.2 列写通解

$$\begin{cases}\psi_1(x)=e^{ikx}+Be^{-ikx} & x<0\\ \psi_2(x)=Ce^{ik'x}+De^{-ik'x}, & 0<x<a\\ \psi_3(x)=Se^{ikx} & x>a\end{cases}$$

其中$k=\sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$, $k'=\sqrt{\frac{2m(E-U_0)}{\hbar^2}}$

2.3 物理分析

- 注意到在$0<E<U_0$时，$\kappa=\sqrt{\frac{2m(U_0-E)}{\hbar^2}}$，故可将下关系式代入前表达式即可求得透射概率$T$

$$\kappa = ik,\, sh(ik'a) = i\,sin(k'a)$$

- 透射概率：

$$T=[1+\frac{1}{4}(\frac{k}{k'}-\frac{k'}{k})^2)sin^2k'a]^{-1}$$

分析可知：当$k'a=n\pi$时，$T=1$

3 方势阱的反射、透射与共振

3.1 物理分析

- 将$U_0=-U_0$, $k\text{ß}=\sqrt{\frac{2m(E+U_0)}{\hbar^2}}$代入前表达式可得

$$T=[1+\frac{1}{4}(\frac{k}{k'}-\frac{k'}{k})^2)sin^2k'a]^{-1}$$

$$=[1+\frac{sin^2k'a}{4\frac{E}{U_0}(1+\frac{E}{U_0})}]^{-1}$$

3.2 讨论

- 若$U_0=0$，则$T=1$
- 若$U_0\neq 0$，则$T<1$, $|R|^2\neq 0$
- 当$k'a=n\pi$, $n=1,2,3,...$时，$T=1$，称为共振透射，此时有共振能级

$$E_n=-U_0+\frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2ma^2},\, n=1,2,3,...$$

- 当$k'a=(n+\frac{1}{2})\pi$, $n=1,2,3,...$时，反射最强

七、一维谐振子

1 势能函数

$$U(x)=\frac{1}{2}m\omega^2x^2$$

2 定态薛定谔方程

$$(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}+\frac{1}{2}m\omega^2x^2)\psi(x)=E\psi(x)$$

3 方程求解

3.1 无量纲变换

令$\xi=\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}x=\alpha x$, $\lambda=\frac{2E}{\hbar\omega}$，则原方程化为

$$\frac{d^2\psi}{d\xi^2}+(\lambda-\xi^2)\psi(\xi)=0$$

3.2 渐近分析

当$\xi\to\pm\infty$时，有$\frac{d^2\psi}{d\xi^2}\approx\xi^2\psi(\xi)$，从而$\psi(\xi)\sim e^{-\frac{1}{2}\xi^2}$，故设$\psi(\xi)=H(\xi)e^{-\frac{1}{2}\xi^2}$，代入原方程得Hermite方程

$$\frac{d^2H}{d\xi^2}-2\xi\frac{dH}{d\xi}+(\lambda-1)H=0$$

3.3 级数解法

- 对$H(\xi)$做幂级数展开$H(\xi)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k\xi^k$，代入Hermite方程得到递推关系

$$a_{k+2}=\frac{2k-(\lambda-1)}{(k+2)(k+1)}a_k,\, k=0,1,2,...$$

- 取$\lambda = 2n+1, n = 0,1,2,\ldots$，则$a_{k+2} = \frac{2(k-n)}{(k+2)(k+1)}a_k$，解得

$$H_n(\xi) = (-1)^n e^{\xi^2}\frac{d^n}{d\xi^n}e^{-\xi^2}, n = 0,1,2,\ldots$$

- 简单的Hermite多项式：
  $H_0(\xi) = 1$
  $H_1(\xi) = 2\xi$
  $H_2(\xi) = 4\xi^2 - 2$

4 能级和波函数

4.1 能级

$$E_n = (n+\frac{1}{2})\hbar\omega, n = 0,1,2,\ldots$$

4.2 波函数

$$\psi_n(x) = A_n H_n(\xi)e^{-\frac{1}{2}\xi^2} = A_n H_n(\alpha x)e^{-\frac{1}{2}\alpha^2x^2}, n = 0,1,2,\ldots$$

其中$\alpha = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}$

4.3 归一化系数

$$A_n = \sqrt{\frac{\alpha}{\sqrt{\pi}2^n n!}}, n = 0,1,2,\ldots$$

4.4 Hermite多项式

$$H_n(\xi) = (-1)^n e^{\xi^2}\frac{d^n}{d\xi^n}e^{-\xi^2}, n = 0,1,2,\ldots$$

4.5 性质

- 宇称：$\psi_n(-x) = (-1)^n\psi_n(x)$
- 正交性：$\int_{-\infty}^{+\infty}\psi_m(x)\psi_n(x)dx = \delta_{mn}$

5 讨论

- 零点能：$E_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega$
- 能量量子化：$E_{n+1} - E_n = \hbar\omega$，源于粒子德布罗意波的自身干涉
- 宇称：能量本征态的宇称奇偶相间，基态为偶宇称
- 节点：$\psi_n(x)$有n个节点
- 与经典谐振子的比较：n较小时，概率分布与经典谐振子完全不同；$n\to\infty$时，概率分布趋于经典概率分布，能量量子化趋于能量取连续值
- 对应原理：在大量子数极限下，量子论将渐近地趋于经典理论