

学校代码: 10730

分类号: O24

密级: 公开

兰州大学

硕士学位论文

(学 术 学 位)

论文题目 (中文) 基于分级网格的配置法求解非局部扩散模型

论文题目 (外文) Collocation methods on graded meshes for
nonlocal diffusion models

作 者 姓 名 闵超

学 科 专 业 数学 • 计算数学

研 究 方 向 偏微分方程数值解

教 育 类 型 学历教育

指 导 教 师 陈明华 副教授

合 作 导 师

论 文 工 作 时 段 2023 年 3 月 至 2024 年 3 月

论 文 答 辩 日 期 2024 年 5 月

校址: 甘肃省兰州市城关区天水南路 222 号

基于分级网格的配置法求解非局部扩散模型

中文摘要

目前, 非局部扩散模型已经被广泛地用来描述各种科学现象. 其中含奇异核的非局部扩散模型 (如: 分数阶 Laplacian 问题等) 受到了许多研究人员的关注. 这一类问题的高精度数值算法设计存在挑战. 因为对于这类含奇异核的积分方程来说, 即使问题的源项有较好的正则性, 其解通常也会存在边界奇异性. 而这一性质往往会导致数值算法的精度下降.

在本文中, 我们研究针对一类含弱奇异核的非局部扩散模型以及一维分数阶 Laplacian 问题的高精度数值算法, 并证明相应的收敛性理论. 对于含弱奇异核的非局部扩散模型, 我们讨论配置法在分级网格上的刚度矩阵性质与相应的误差分析, 并通过数值实验对理论结果进行验证. 这一算法及其误差分析理论能够推广到一些高维空间的非局部扩散模型. 对于一维分数阶 Laplacian 问题, 我们分别从分数阶 Laplacian 算子的两个等价定义对该算子进行离散, 并对相应的离散误差进行分析. 对于反常对流的分数阶 Laplacian 问题, 我们基于分数阶 Laplacian 算子的奇异积分定义, 分析了配置法离散分数阶 Laplacian 算子的刚度矩阵性质与相应的局部截断误差, 并证明了算法的收敛性. 最后通过数值实验对理论结果进行验证. 对于反常扩散的分数阶 Laplacian 问题, 我们从分数阶 Laplacian 算子的 Riesz 分数阶导数定义进行研究. 结合有限差分方法和配置法对分数阶 Laplacian 算子进行离散, 研究了离散格式的刚度矩阵结构和性质, 并证明离散格式解的存在唯一性. 最后通过这一数值格式对分数阶 Laplacian 问题进行研究.

关键词: 非局部扩散模型, 分级网格, 配置法, 误差分析

COLLOCATION METHODS ON GRADED MESHES FOR NONLOCAL DIFFUSION MODELS

Abstract

Currently, nonlocal diffusion models have been widely used to describe various scientific phenomena. Among them, nonlocal diffusion models with singular kernels (e.g., fractional Laplacian problem, etc.) have attracted the attention of many researchers. There are challenges in designing high-precision numerical algorithms for this class of problems. The challenge is that for such integral equations with singular kernels, even if the source terms are well regularized, there are usually singularities with its solutions. This property leads to a decrease in the accuracy of numerical algorithms.

In this paper, we study numerical methods for a class of nonlocal diffusion models with weakly singular kernels and the one-dimensional fractional Laplacian problem, and prove the corresponding convergence theory. For the nonlocal diffusion model with weakly singular kernels, we study the stiffness matrix properties of the collocation method on graded meshes and the corresponding error analysis, and verify the theoretical results by numerical experiments. This method and its error analysis theory can be generalized to some nonlocal diffusion models in higher dimensional spaces. For fractional Laplacian problem, we discretized the fractional Laplacian operator from its two equivalent definitions and analyzed the corresponding error. For the fractional Laplacian problem of anomalous convection, based on the definition of singular integrals of the fractional Laplacian operator, we study the properties of stiffness matrix of fractional Laplacian operator discretized by the collocation method and the corresponding local truncation error analysis, prove the convergence of the algorithm, and then validate the theoretical results by numerical experiments. For the fractional Laplacian problem with anomalous diffusion, we study it from the definition of the Riesz fractional derivatives of the fractional Laplacian operator. The fractional Laplacian operator is discretized by combining the finite difference method and the collocation method. For the discretized format, the structure and properties of the stiffness matrix are investigated and the existence of the solution is proved to be unique. Finally the fractional Laplacian problem is studied by this numerical discretization format.

Keywords: nonlocal diffusion models, graded meshes, collocation methods, error analysis

目 录

| | |
|-----------------------------------|----|
| 中文摘要 | I |
| Abstract..... | II |
| 第一章 引言 | 1 |
| 1.1 一类含弱奇异核的非局部扩散模型 | 1 |
| 1.2 分数阶 Laplacian 问题..... | 2 |
| 1.3 本文主要工作 | 4 |
| 第二章 含弱奇异核的非局部扩散模型 | 6 |
| 2.1 数值格式 | 7 |
| 2.1.1 稳态问题 (2.2) 的配置法 | 7 |
| 2.1.2 非局部扩散模型 (2.1) 的配置法 | 8 |
| 2.1.3 (2.7)中系数矩阵的谱分析..... | 8 |
| 2.2 误差分析: 具有光滑解的稳态问题..... | 11 |
| 2.2.1 局部截断误差..... | 12 |
| 2.2.2 收敛性分析 | 15 |
| 2.3 误差分析: 具有低正则性解的稳态问题 | 16 |
| 2.3.1 局部截断误差..... | 16 |
| 2.3.2 收敛性分析 | 20 |
| 2.4 误差分析: 具有低正则解的时间依赖非局部扩散模型..... | 21 |
| 2.4.1 局部截断误差..... | 21 |
| 2.4.2 稳定性和收敛性分析 | 22 |
| 2.5 数值实验 | 23 |
| 2.6 小结 | 24 |
| 第三章 反常对流的分数阶 Laplacian 问题..... | 26 |
| 3.1 数值格式 | 26 |

| | |
|--|-----------|
| 3.2 解的正则性 | 29 |
| 3.3 误差分析 | 30 |
| 3.3.1 局部截断误差 | 31 |
| 3.3.2 收敛性分析 | 36 |
| 3.4 数值实验 | 39 |
| 3.4.1 数值解的精度 | 39 |
| 3.4.2 数值解中误差的局部行为 | 39 |
| 3.5 小结 | 41 |
| 第四章 反常扩散的分数阶 Laplacian 问题 | 43 |
| 4.1 数值格式 | 43 |
| 4.2 刚度矩阵性质分析 | 44 |
| 4.3 数值实验 | 47 |
| 4.4 小结 | 49 |
| 第五章 总结 | 50 |
| 参考文献 | 55 |
| 在学期间的研究成果 | 56 |
| 致 谢 | 57 |

第一章 引言

目前, 非局部扩散模型已被用于模拟各种不同的应用情景, 例如生物学 [34]、图像处理 [25,30]、粒子系统 [9]、凝聚模型 [23]、用于相变的非局部各向异性模型 [3,4]、以及数学金融中利用最优控制理论 [8,29] 等领域. 在本文中, 我们将研究含有奇异核的非局部扩散模型

$$\begin{cases} u_t(x,t) - \mathcal{L}u(x,t) = f(x,t), & x \in \Omega, t > 0, \\ u(x,0) = u_0(x), & x \in \Omega, \\ u(x,t) = 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \Omega, \end{cases} \quad (1.1)$$

和相应的稳态问题

$$\begin{cases} -\mathcal{L}u(x) = f(x), & x \in \Omega, \\ u(x) = 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \Omega. \end{cases} \quad (1.2)$$

非局部算子 \mathcal{L} 定义如下:

$$\mathcal{L}u(x) = \int_{\Omega'} \frac{u(y) - u(x)}{|x - y|^\alpha} dy, \quad (1.3)$$

其中 $0 < \alpha$. 这些模型的详细背景可参考文献 [5, 38]. 模型的适定性 (存在性和唯一性) 在专著 [5] 中被讨论. 而 u 在 Ω 外部为零, 在生物学上描述了: Ω 的外部是一个充满敌意的环境, 任何跳出 Ω 的个体都会立即死亡.

1.1 一类含弱奇异核的非局部扩散模型

当非局部算子 (1.3) 的积分区间 Ω' 为有界区域 Ω 时, 非局部扩散模型 (1.1) 和 (1.2) 描述了只在区域 Ω 上扩散的现象 [5]. 此时,

$$\mathcal{L}u(x) = \int_{\Omega} \frac{u(y) - u(x)}{|x - y|^\alpha} dy,$$

其中 $0 < \alpha < 1$.

需要注意, 第二类、第三类 Fredholm 弱奇异积分方程有如下形式 [6, 45]:

$$\lambda(x)u(x) - \int_a^b \frac{u(y)}{|x - y|^\alpha} dy = f(x), \quad x \in (a, b), \quad 0 < \alpha < 1,$$

其中 $\lambda(x)$ 是一个非零复常数或者在区间 $[a, b]$ 中至少有一个零点的函数. 虽然非局部扩散模型 (1.2) 形式与上述 Fredholm 弱奇异积分方程相似, 但是它不属于 Fredholm 积分方程. 因为 (1.2) 中的变量系数大于零, 即

$$\lambda(x) := \int_a^b \frac{1}{|x - y|^\alpha} dy = \frac{1}{1 - \alpha} \left[(x - a)^{1-\alpha} + (b - x)^{1-\alpha} \right] > 0, \quad 0 < \alpha < 1.$$

这两种模型之间还存在一些差异. 例如, 第二类 Fredholm 积分方程的逆算子是一致有界的 (参见 [6] 中的定理 4.2.1). 然而, 非局部模型 (1.2) 的逆算子是无界的, 如 [12] 中的引理 3.5 所示.

目前, 非局部扩散模型的数值方法方面的研究已经取得了一些重要进展, 包括有限元方法 [44]、配置法 [18, 41, 46]、快速共轭梯度法 [12, 44] 和多重网格法 [17]. 在求解非局部问题 (1.2) 的各种数值方法中, 配置法是最简单的. 但是这一方法存在一些缺陷. 例如, 基于分片线性多项式的配置法求解第二类 Fredholm 弱奇异积分方程时收敛阶为二阶 [6]. 然而, 在 $\alpha = 1$ 时, (1.2) 的配置法数值结果表明其收敛率大约为 $O(h^{1.5})$ [41]. 事实上, 即使是在解充分光滑的情况下, 配置法在一致网格上的收敛率也只有 $O(h)$ [18].

在文献 [18, 41, 46] 中, 这些收敛性理论都假设解充分光滑 (高阶导数存在且连续到边界). 然而, 在很多实际问题中解的正则性较低, 并且在边界附近往往存在边界奇异性, 如:

$$\left| \frac{\partial^\ell}{\partial x^\ell} u(x) \right| \leq C[(x-a)(b-x)]^{\sigma-\ell}, \quad 0 < \sigma < 1, \quad \ell = 0, 1, 2. \quad (1.4)$$

这一现象在含有奇异核的积分方程中很常见, 比如 Volettra 积分方程 [11]、Fredholm 积分方程 [37]、时间分数阶扩散方程 [39] 以及 (区域) 分数阶 Laplacian 问题 [2, 16, 21, 26, 36]. 这样的边界奇异性往往会导致算法的数值计算精度下降. 为了捕捉解的奇异性并获得更准确的数值结果, 分级网格技术被应用于这些问题中 [26, 36, 39].

1.2 分数阶 Laplacian 问题

当非局部算子 (1.3) 的积分区间 Ω' 为整个实数域 \mathbb{R}^n 并且 $1 < \alpha < 3$ 时, 非局部算子 (1.3) 为分数阶 Laplacian 算子. Fick 第一定律描述了扩散通量的本质关系. 根据 Fick 第一定理, 当布朗运动不能对潜在随机过程进行描述时, 我们称这样的扩散为反常扩散 [47]. 在研究这一类反常扩散模型时, 我们不得不提及这类扩散问题与概率论之间的密切关系. 从概率的角度来看, 分数阶 Laplacian 算子对应于稳定 Lèvy 过程的无穷小生成器 [2, 7, 24].

在整个空间 \mathbb{R}^n 上, 分数阶 Laplacian 算子 $(-\Delta)^{\frac{s}{2}}$ ($0 < s < 2$) 有多种等价的定义 [31]. 它的一个主要定义是作为一个超奇异积分算子:

$$(-\Delta)^{\frac{s}{2}} u(x) = C_{n,s} \text{P.V.} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{u(x) - u(y)}{|x-y|^{n+s}} dy, \quad (*)$$

其中

$$C_{n,s} = \frac{s 2^{s-1} \Gamma\left(\frac{n+s}{2}\right)}{\pi^{n/2} \Gamma(1-s/2)}.$$

另外,也可以通过傅里叶变换将其定义为一个伪微分算子

$$\mathcal{F}[(-\Delta)^{\frac{s}{2}}u](\xi) = |\xi|^s \mathcal{F}[u](\xi),$$

或者用 Riesz 分数阶导数 (左和右 Riemann-Liouville 导数) 来定义 [2, 14]

$$(-\Delta)^{\frac{s}{2}}u(x) = \frac{{}_aD_x^s u(x) + {}_xD_b^s u(x)}{2\cos(s\pi/2)}, \quad x \in (a, b).$$

在物理上, 我们通常用分数阶 Laplacian 算子来描述反常输运现象. 当 $s \in (0, 1)$ 时分数阶 Laplacian 算子 (作为弱奇异积分) 常用于描述反常对流现象; 而 $s \in (1, 2)$ 时 (作为超奇异积分) 则用来描述反常扩散现象 [33].

分数阶 Laplacian 算子 (*) 是一个很重要的非局部算子. 但是, 在对分数阶 Laplacian 问题

$$\begin{cases} (-\Delta)^{\frac{s}{2}}u(x) = f(x), & x \in \Omega, \\ u = 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \Omega \end{cases}$$

进行数值分析时出现了很多困难 (见参考文献 [13, 19, 28]). 这些困难部分是因为分数阶 Laplacian 问题的一般解 u 在边界处具有弱奇异性; 例如, 当 Ω 是有界区间 $(a, b) \subset \mathbb{R}$ 且 $f \equiv 1$ 时, 分数阶 Laplacian 问题的精确解为 [24, 28, 36]

$$u(x) = \frac{2^{-s}\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(1+\frac{s}{2})\Gamma(\frac{1+s}{2})} [(x-a)(b-x)]^{\frac{s}{2}}. \quad (1.5)$$

显然, $u(x)$ 在 Ω 的边界处存在奇异性, 而这一性质导致了许多数值方法计算精度下降 [19, 28].

对于分数阶 Laplacian 问题, 基于全局连续分段线性多项式的有限元方法 (FEM) 研究取得了许多进展. 在一致网格上, [19] 证明了在 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 范数下有收敛性 $O(h^{1/2})$. 在分级网格上, [1] 针对 $1 < s < 2$ 的情况证明了在 $H^{\frac{s}{2}}(\mathbb{R}^n)$ 中有收敛性 $O(h|\log h|)$ (见 [1] 中的注 4.13), 但是此结果无法直接推广到 $0 < s < 1$. 随后, [10] 通过 Aubin-Nitsche 对偶论证的思想证明了有限元方法在 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 中的超线性收敛性. 同时, 作者通过数值实验在 Ω 的适当子域 Ω^* 上, 观察到了其局部误差在 $L^2(\Omega^*)$ 范数下有二阶收敛 [22]. 此外, [13] 的数值实验表明: 对于一维分数阶 Laplacian 问题, 在适当分级的网格上基于全局连续分段线性多项式的有限元方法可以实现二阶精度 (离散的 $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ 范数意义下), 但目前并没有相应的算法收敛性分析.

与此同时, 基于数值积分和分段线性多项式的有限差分法 (FDM) 也引起了研究人员的关注 [26, 28]. 在 [28] 中一种基于积分的有限差分法被提出, 用于解决一维分数阶 Laplacian 问题. 如果解充分光滑, 该方法得到的数值解在离散的

$L^\infty(\mathbb{R}^n)$ 范数中可以达到 $O(h^{2-s})$ 的精度. 而对于 $f \equiv 1$ 的情况 (如 (1.5) 所示, u 在边界上具有奇异性), 精度降低为 $O(h^{s/2})$. 在 [20] 中一种新颖的 FDM 被提出, 并证明当真实解充分光滑时该算法精度为 $O(h^2)$ (在离散的 $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ 范数下). 但当 $f \equiv 1$ 时, 该方法也会出现严重的精度下降. 另一方面, 受 [28] 的启发, [26] 通过障碍函数证明了对于一维问题 $0 < s < 2$ 时在分级网格上算法精度为 $O(|\log h| h^{2-s/2})$ (离散的 $L^\infty(\mathbb{R})$ 范数下), 而对于二维问题当 $s \leq 4/3$ 时, 其精度只有 $O(h^s)$ (离散的 $L^\infty(\mathbb{R}^2)$ 范数下).

在 [46] 中, 积分型分数阶 Laplacian 的一种变形被研究, 即

$$L_\delta^s(x) = \int_{a-\delta}^{b+\delta} \frac{u(x) - u(y)}{|x - y|^{1+s}} dy, \quad x \in (a, b),$$

其中 $\delta \in [0, \infty)$ 是一个水平参数. [46] 证明了在一致网格上, 当 $0 < s < 2$ 且精确解属于 $C^2[a, b]$, 分段线性多项式配置法在离散 L^∞ 范数意义下算法精度为 $O(h^{2-s})$.

1.3 本文主要工作

对于这类含奇异核的积分方程来说, 即使方程的源项有较好的正则性, 其解通常会存在边界奇异性. 本文我们将针对非局部扩散模型解的奇异性进行研究, 分析在分级网格上分片线性多项式配置法求解非局部扩散模型的收敛性理论和离散格式的刚度矩阵性质.

我们将本文划分为五章, 详细安排如下:

第一章为引言. 主要对非局部扩散模型的背景进行介绍, 并对国内外研究现状进行回顾.

第二章为含弱奇异核的非局部扩散模型的配置法, 主要讨论配置法在分级网格上的刚度矩阵性质与相应的误差分析. 在这一章中我们通过 Taylor 公式估计了刚度矩阵 L_∞ 范数的下界, 结合局部截断误差的分析之后, 证明配置法的收敛性. 同时从理论上解释了稳态的非局部扩散模型在标准分级网格上算法精度下降的现象, 证明了这一算法在反常分级网格上能达到更优的计算精度. 数值实验结果与收敛性理论吻合.

第三章为反常对流的分数阶 Laplacian 问题的配置法, 主要讨论了配置法离散分数阶 Laplacian 算子的刚度矩阵性质与相应的误差分析. 在这一章中我们对刚度矩阵的性质进行分析, 并与局部截断误差估计结合, 证明了算法的收敛性, 并从收敛性理论中找到了最优的分级网格. 最后通过数值实验验证了算法的有效性, 数值结果与收敛性理论证明一致.

第四章为反常扩散的分数阶 Laplacian 问题的配置法, 主要讨论了从 Riesz 分数阶导数的角度, 结合有限差分方法和配置法对分数阶 Laplacian 算子进行离散.

在这一章我们对离散格式的刚度矩阵性质进行分析, 并通过这一离散格式对反常扩散的分数阶 **Laplacian** 问题进行研究. 数值实验结果表明这一离散格式在适当的分级网格上可以达到二阶精度.

在第五章中, 对本文内容进行总结.

第二章 含弱奇异核的非局部扩散模型

在这一章中, 我们对含弱奇异核的非局部扩散模型进行研究, 在解充分光滑的情况和解含有奇异性的情况下, 分别对算法的收敛性进行分析. 取 $\alpha \in (0, 1)$, Ω' 为有界区域 $\Omega := (a, b)$ ($-\infty < a < b < +\infty$), 我们研究的问题为

$$\begin{cases} u_t(x, t) - \int_{\Omega} \frac{u(y) - u(x)}{|x - y|^{\alpha}} dy = f(x, t), & x \in \Omega, t > 0, \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in \Omega, \\ u(x, t) = 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \Omega, \end{cases} \quad (2.1)$$

和相应的稳态问题

$$\begin{cases} - \int_{\Omega} \frac{u(y) - u(x)}{|x - y|^{\alpha}} dy = f(x), & x \in \Omega, \\ u(x) = 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \Omega, \end{cases} \quad (2.2)$$

其中非局部算子为

$$\mathcal{L}u(x) := \int_{\Omega} \frac{u(y) - u(x)}{|x - y|^{\alpha}} dy, \quad 0 < \alpha < 1.$$

为了精准捕捉解的奇异性, 获得更精确的数值结果, 分级网格技术被广泛地应用于解决这一类含有奇异性的问题之中 [26, 36, 39]. 然而分级网格能否产生比均匀网格更准确的数值解? 在解的充分光滑时, 对于稳态问题 (2.2), 我们在定理 2.10 中给出了算法绝对误差的一个估计.

$$\max_{1 \leq i \leq 2N-1} |u(x_i) - u_i| \leq \begin{cases} CN^{r-2}, & \text{如果 } r > \frac{2}{3}, \\ CN^{r-2} \ln N, & \text{如果 } r = \frac{2}{3}, \\ CN^{-2r}, & \text{如果 } r < \frac{2}{3}. \end{cases}$$

这里, u_i 是 $u(x_i)$ 的数值近似, N 是网格点的数量, $r > 1$ 是标准分级网格的分级指数; 相反, 对于 $0 < r < 1$, 称为反常分级网格. 这些结果表明基于分片线性多项式的配置法在标准分级网格上的精确性比均匀网格更差, 甚至当 $r \geq 2$ 时可能导致发散. 同时这也表明在反常分级网格上配置法取到了最优的收敛阶 (大于一). 相反, 对于正则性低的解 (解满足 (1.4)), 配置法在标准分级网格上取到了最优收敛阶 (远小于一). 如定理 2.15 所示, 它的收敛性结果如下:

$$\max_{1 \leq i \leq 2N-1} |u(x_i) - u_i| \leq \begin{cases} CN^{r-2}, & \text{如果 } r > \frac{2}{\sigma+1}, \\ CN^{r-2} \ln N, & \text{如果 } r = \frac{2}{\sigma+1}, \\ CN^{-r\sigma}, & \text{如果 } r < \frac{2}{\sigma+1}. \end{cases}$$

对于时间依赖的非局部扩散模型 (2.1), 我们从理论上和数值实验上证明了 (如定理 2.17 所示): 即使解的正则性低 (解满足 (1.4)), 分片线性多项式配置法也可以在适当的分级网格上实现二阶收敛, 其相应的收敛性结果为 $O(N^{-\min\{r(1+\sigma-\alpha), 2\}})$.

2.1 数值格式

在这一小节中, 我们将分别针对非局部扩散模型 (2.1) 和相应的稳态问题 (2.2) 在区间 $\Omega = (a, b) \subseteq \mathbb{R}$ 上推导离散格式.

考虑区间 (a, b) 上的剖分 π_h :

$$\pi_h : a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{2N-1} < x_{2N} = b.$$

定义分级网格为:

$$x_j = \begin{cases} a + \frac{b-a}{2} \left(\frac{j}{N}\right)^r, & j = 0, 1, \dots, N, \\ b - \frac{b-a}{2} \left(2 - \frac{j}{N}\right)^r, & j = N+1, N+2, \dots, 2N, \end{cases} \quad (2.3)$$

令 $h_j := x_j - x_{j-1}$ 表示单元长度. 这里, $r > 1$ 是标准分级网格的分级指数. 我们将其扩展到 $0 < r < 1$ 的情况, 并称之为反常分级网格.

令 S^h 为定义在剖分 π_h 上的连续分段线性多项式空间, 并选择标准帽子函数作为基函数. 将基函数记为 $\{\phi_j(x)\}_0^{2N}$:

$$\phi_j(x) = \begin{cases} \frac{x - x_{j-1}}{x_j - x_{j-1}}, & x \in [x_{j-1}, x_j], \\ \frac{x_{j+1} - x}{x_{j+1} - x_j}, & x \in [x_j, x_{j+1}], \\ 0, & \text{其他}, \end{cases} \quad j = 1, \dots, 2N-1,$$

$$\phi_0(x) = \begin{cases} \frac{x_1 - x}{x_1 - x_0}, & x \in [x_0, x_1], \\ 0, & \text{其他}, \end{cases} \quad \text{和} \quad \phi_{2N}(x) = \begin{cases} \frac{x - x_{2N-1}}{x_{2N} - x_{2N-1}}, & x \in [x_{2N-1}, x_{2N}], \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

2.1.1 稳态问题 (2.2) 的配置法

令 $\Pi_h u(x)$ 是 $u(x)$ 的分段线性插值近似, 并满足齐次 Dirichlet 边界条件, 即

$$\Pi_h u(x) = \sum_{k=0}^{2N} u(x_k) \phi_k(x) = \sum_{k=1}^{2N-1} u(x_k) \phi_k(x).$$

将其代入 (2.2), 得到 $-\mathcal{L}u(x_i)$ 的近似, 即

$$\begin{aligned} -\mathcal{L}[\Pi_h u](x_i) &= \int_a^b \frac{\sum_{k=1}^{2N-1} u(x_k) \phi_k(x_i) - \sum_{k=1}^{2N-1} u(x_k) \phi_k(y)}{|x_i - y|^\alpha} dy \\ &= \sum_{k=1}^{2N-1} a_{i,k} u(x_k), \end{aligned}$$

其中

$$a_{i,k} := \int_a^b \frac{\phi_k(x_i) - \phi_k(y)}{|x_i - y|^\alpha} dy, \quad i, k = 1, 2, \dots, 2N-1. \quad (2.4)$$

因此, 从 (2.2) 可得

$$-\mathcal{L}[\Pi_h u](x_i) = f(x_i) + R_i, \quad i = 1, 2, \dots, 2N-1, \quad (2.5)$$

其中局部截断误差为

$$R_i := \mathcal{L}[u - \Pi_h u](x_i) = \int_a^b \frac{u(y) - \Pi_h u(y)}{|x_i - y|^\alpha} dy. \quad (2.6)$$

令 u_i 为 $u(x_i)$ 的近似值, $f_i := f(x_i)$. 根据 (2.5), 我们可以得到如下的数值格式:

$$-\mathcal{L}_h u_i = f_i, \quad \text{其中} \quad -\mathcal{L}_h u_i := \sum_{k=1}^{2N-1} a_{i,k} u_k.$$

特别地, 上述方程组具有矩阵形式

$$AU = F, \quad (2.7)$$

其中系数矩阵 A 和网格函数矩阵分别定义为

$$A = (a_{i,k}) \in \mathbb{R}^{(2N-1) \times (2N-1)}, \quad U = (u_1, \dots, u_{2N-1})^T, \quad F = (f_1, \dots, f_{2N-1})^T.$$

2.1.2 非局部扩散模型 (2.1) 的配置法

在时间离散上, 我们使用一致网格上的 Crank-Nicolson 格式 [40], 其中 $t_j = j\tau$, $\tau = \frac{1}{M}$, $j = 0, 1, \dots, M$ (M 是一个正整数), 时间半离散的精度为 $\mathcal{O}(M^{-2})$ [40]. 在本文中, 我们主要关注空间方向上的离散.

令 u_i^j 为 $u(x_i, t_j)$ 的数值近似, $f_i^j := f(x_i, t_j)$. 从 (2.7) 可知, 时间依赖的非局部扩散模型 (2.1) 的全离散格式为:

$$\left(I + \frac{\tau}{2}A\right)U^j = \left(I - \frac{\tau}{2}A\right)U^{j-1} + \tau F^{j-\frac{1}{2}}, \quad j = 1, 2, \dots, M, \quad (2.8)$$

其中系数矩阵 A 在 (2.7) 中给出, 并且网格函数矩阵定义为

$$U^j = (u_1^j, \dots, u_{2N-1}^j)^T, \quad F^{j-\frac{1}{2}} = (f_1^{j-\frac{1}{2}}, \dots, f_{2N-1}^{j-\frac{1}{2}})^T.$$

2.1.3 (2.7) 中系数矩阵的谱分析

引理 2.1 ^[35] 如果一个 n 阶实矩阵 A 是正定的当且仅当矩阵 $H = \frac{A+A^T}{2}$ 是正定的. 若 $H \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 是对称矩阵, 那么 H 是正定的当且仅当 H 的特征值都是正数.

引理 2.2 ^[42] 若矩阵 A 是行对角占优的, 则 A 的逆满足

$$\|A^{-1}\|_{\infty} \leq \frac{1}{\delta}, \quad \delta = \min_i \left(|a_{i,i}| - \sum_{j \neq i} |a_{i,j}| \right).$$

引理 2.3 令矩阵 $G_{\alpha} = (g_{i,j}) \in \mathbb{R}^{(2N-1) \times (2N-1)}$, 其元素定义为 $g_{i,j} := \int_a^b \frac{\phi_j(y)}{|x_i - y|^{\alpha}} dy$, 则 G_{α} 是一个正定矩阵, 并且

$$g_{i,j} = \frac{1}{(1-\alpha)(2-\alpha)} C_j Q_j^i > 0,$$

其中

$$C_j = \left(\frac{1}{h_j}, -\frac{1}{h_j} - \frac{1}{h_{j+1}}, \frac{1}{h_{j+1}} \right) \quad \text{和} \quad Q_j^i = \begin{pmatrix} |x_{j-1} - x_i|^{2-\alpha} \\ |x_j - x_i|^{2-\alpha} \\ |x_{j+1} - x_i|^{2-\alpha} \end{pmatrix}.$$

证明 令 $C_{\alpha} := \frac{1}{(1-\alpha)(2-\alpha)}$, 则有 $g_{i,i} = C_{\alpha} (h_{i+1}^{1-\alpha} + h_i^{1-\alpha}) > 0$.

另一方面, 对于 $j \neq i$, 我们有

$$\begin{aligned} g_{i,j} &= C_{\alpha} \left[\frac{|x_i - x_{j+1}|^{2-\alpha}}{h_{j+1}} - \frac{h_j + h_{j+1}}{h_j h_{j+1}} |x_i - x_j|^{2-\alpha} + \frac{|x_i - x_{j-1}|^{2-\alpha}}{h_j} \right] \\ &= C_{\alpha} \frac{h_j + h_{j+1}}{h_j h_{j+1}} \left[\frac{h_j |x_i - x_{j+1}|^{2-\alpha}}{h_j + h_{j+1}} - |x_i - x_j|^{2-\alpha} + \frac{h_{j+1} |x_i - x_{j-1}|^{2-\alpha}}{h_j + h_{j+1}} \right]. \end{aligned}$$

又因为当 $0 < \alpha < 1$ 时函数 $x \mapsto x^{2-\alpha}$ 在 $x \geq 0$ 上是一个凸函数, 并且

$$\frac{h_j}{h_j + h_{j+1}} |x_i - x_{j+1}| + \frac{h_{j+1}}{h_j + h_{j+1}} |x_i - x_{j-1}| = |x_i - x_j|,$$

所以由 Jensen 不等式可知

$$\frac{h_j}{h_j + h_{j+1}} |x_i - x_{j+1}|^{2-\alpha} + \frac{h_{j+1}}{h_j + h_{j+1}} |x_i - x_{j-1}|^{2-\alpha} > |x_i - x_j|^{2-\alpha}, \quad j \neq i.$$

证毕. □

从 (2.4)、(2.7) 和引理 2.3 可知, 当 $\alpha \in (0, 1)$ 时系数矩阵 $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{(2N-1) \times (2N-1)}$ 的元素可以显式表达为

$$A = D_{\alpha} - G_{\alpha}, \tag{2.9}$$

对角矩阵 D_{α} 定义为

$$D_{\alpha} = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_{2N-1} \end{pmatrix},$$

其中 $d_i := \int_a^b \frac{1}{|x_i - y|^{\alpha}} dy$, $i = 1, 2, \dots, 2N-1$.

引理 2.4 矩阵 A 由 (2.7) 定义, 则 A 是严格行对角占优的矩阵, 对角线上的元素为正, 非对角线上的元素为非正, 并且线性方程组 (2.7) 的解存在且唯一.

证明 从 (2.4) 可知

$$\begin{aligned} a_{ii} &= \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \frac{1 - \phi_i(y)}{|x_i - y|^\alpha} dy \\ &= \frac{1}{1 - \alpha} \left[(x_i - a)^{1-\alpha} + (b - x_i)^{1-\alpha} \right] - \frac{1}{(1 - \alpha)(2 - \alpha)} (h_i^{1-\alpha} + h_{i+1}^{1-\alpha}) > 0. \end{aligned} \quad (2.10)$$

根据引理 2.3 有 $a_{i,j} = -g_{i,j} < 0$ ($j \neq i$).

另一方面, 对于 $1 \leq i \leq 2N - 1$, 利用 Taylor 级数展开, 我们有

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{2N-1} a_{i,j} &= \int_a^b \frac{dy}{|x_i - y|^\alpha} - \sum_{j=1}^{2N-1} \int_{x_{j-1}}^{x_{j+1}} \frac{\phi_j(y)}{|x_i - y|^\alpha} dy \\ &= \int_{x_0}^{x_1} \frac{\phi_0(y)}{|x_i - y|^\alpha} dy + \int_{x_{2N-1}}^{x_{2N}} \frac{\phi_{2N}(y)}{|x_i - y|^\alpha} dy \\ &= \frac{1}{1 - \alpha} \left[(x_i - x_0)^{1-\alpha} - \frac{(x_i - x_0)^{2-\alpha} - (x_i - x_1)^{2-\alpha}}{(2 - \alpha)h_1} \right] \\ &\quad + \frac{1}{1 - \alpha} \left[(x_{2N} - x_i)^{1-\alpha} - \frac{(x_{2N} - x_i)^{2-\alpha} - (x_{2N-1} - x_i)^{2-\alpha}}{(2 - \alpha)h_{2N}} \right] \\ &\geq \frac{1}{2} [h_1 (x_i - x_0)^{-\alpha} + h_{2N} (x_{2N} - x_i)^{-\alpha}] > 0. \end{aligned} \quad (2.11)$$

综上所述, 矩阵 A 是 M -矩阵. 矩阵 A 是非奇异, 线性方程组的解存在且唯一.

证毕. □

令条件数 $\kappa_p = \|A\|_p \|A^{-1}\|_p$, 其中 $p = 1, 2, \dots, \infty$, 则有以下引理:

引理 2.5 令矩阵 A 如 (2.7) 所定义, 则条件数

$$\kappa_\infty = \|A\|_\infty \|A^{-1}\|_\infty = O(N^r),$$

其中 r 是分级网格的分级指数.

证明 根据引理 2.4 和 (2.10), 我们有

$$\|A\|_\infty \leq 2 \max_{1 \leq i \leq 2N-1} a_{i,i} \leq \frac{4}{1 - \alpha} (b - a)^{1-\alpha}.$$

另一方面, 因为

$$|a_{i,i}| - \sum_{j \neq i} |a_{i,j}| = \sum_{j=1}^{2N-1} a_{i,j} \geq \frac{1}{2} \left(\frac{b-a}{2} \right)^{-\alpha} N^{-r},$$

所以由引理 2.2, 我们可以得到 $\|A^{-1}\|_\infty \leq 2 \left(\frac{b-a}{2} \right)^\alpha N^r$.

证毕. □

注 1 根据引理 2.4 和 [43] 的定理 1.21, 我们有

$$\Re(\lambda(A)) > 0.$$

对于 $r > 0$ 时 A 是非奇异的. 特别地, 当 $r = 1$ 时矩阵 A 是对称正定的实矩阵.

但是, 根据引理 2.1 和表 2-1 中的反例, 可以看出

$$\min(\lambda(H)) < 0, \quad \max(\lambda(H)) > 0, \quad \text{其中 } H = \frac{A + A^T}{2}.$$

也就是说, 对于分级网格, 矩阵 A 可能是非对称且不定的.

表 2-1 $\alpha = 0.5, N = 500$ 时 $H = \frac{A+A^T}{2}$ 的最大特征值和最小特征值

| r | 0.2 | 0.9 | 1 | 1.1 | 4 |
|--------------------|---------|---------|--------|---------|---------|
| $\max(\lambda(H))$ | 8.8728 | 5.5807 | 5.5766 | 5.5727 | 5.4974 |
| $\min(\lambda(H))$ | -4.6418 | -0.0023 | 0.0039 | -0.0046 | -0.8304 |

2.2 误差分析: 具有光滑解的稳态问题

在本节中, 我们将证明即使解充分光滑, 配置法在标准分级网格上的精确度也不如一致网格, 甚至可能导致数值格式发散. 但是, 在反常分级网格上配置法可以达到最佳精度.

不失一般性, 我们取 $\Omega = (0, 2T)$, 从而 (2.3) 改写为

$$x_j = \begin{cases} T\left(\frac{j}{N}\right)^r, & \text{其中 } j = 0, 1, \dots, N, \\ 2T - T\left(2 - \frac{j}{N}\right)^r, & \text{其中 } j = N+1, N+2, \dots, 2N. \end{cases} \quad (2.12)$$

根据中值定理和 $\{h_j\}_{j=1}^{2N}$ 的定义, 我们有如下结论 [16, 39]

$$h_j = x_j - x_{j-1} \leq \begin{cases} CN^{-r} j^{r-1}, & \text{其中 } j = 1, \dots, N, \\ CN^{-r}(2N+1-j)^{r-1}, & \text{其中 } j = N+1, \dots, 2N. \end{cases} \quad (2.13)$$

这里需要注意, 对于标准分级网格 $r \geq 1$, 有 $h_j \leq CN^{-1}$; 然而对于反常分级网格 ($0 < r < 1$), 存在单元, N^{-1} 是其长度的高阶无穷小量, 比如 $\lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{N^{-1}}{h_1} = \lim_{N \rightarrow +\infty} TN^{r-1} = 0$, 并且随着 T 的增大存在单元长度大于 N^{-1} , 比如 $h_1 > N^{-1}$.

注 2 在本文中, C 表示一个正常数, 不同的出现位置可能不相同, 但是它们与 N 以及其它指标 (如 i 或 j 等) 无关. 对任意实数 $s \in \mathbb{R}$, $\lceil s \rceil$ 表示不小于 s 的最小整数.

2.2.1 局部截断误差

我们接下来研究当解充分光滑时的局部截断误差(2.6). 从(2.6) 可以得到

$$R_i = \sum_{k=1}^{2N} \int_{x_{k-1}}^{x_k} \frac{u(y) - \Pi_h u(y)}{|x_i - y|^\alpha} dy = \sum_{k=1}^{2N} \mathcal{T}_{i,k}, \quad (2.14)$$

其中

$$\mathcal{T}_{i,k} := \int_{x_{k-1}}^{x_k} \frac{u(y) - \Pi_h u(y)}{|x_i - y|^\alpha} dy. \quad (2.15)$$

引理 2.6 若 $u(x) \in C^2(\bar{\Omega})$ 且 $r \geq 1$, 则存在常数 C 使得, 当 $i \in \{1, 2, \dots, 2N-1\}$ 时, 有

$$|R_i| \leq CN^{-2}.$$

证明 当 $i = 1, 2, \dots, 2N-1$ 时, 因为 $u(x) \in C^2(\bar{\Omega})$, 所以由中值定理可知

$$\begin{aligned} |R_i| &\leq \sum_{k=1}^{2N} |\mathcal{T}_{i,k}| \\ &\leq C \sum_{k=1}^{2N} h_k^2 \left(\max_{s \in [x_{k-1}, x_k]} |u_{xx}(s)| \right) \int_{x_{k-1}}^{x_k} |x_i - y|^{-\alpha} dy \\ &\leq CN^{-2} \int_{x_0}^{x_{2N}} |x_i - y|^{-\alpha} dy \leq CN^{-2}. \end{aligned}$$

证毕. □

然而, 因为在反常分级网格中可能存在单元, 其单元长度无法被 N^{-1} 控制 (如: $h_1 > N^{-1}$), 所以引理 2.6 的证明方法在 $r < 1$ 的情况下不成立.

引理 2.7 若 $u(x) \in C^2(\bar{\Omega})$ 且 $r < 1$, 则存在常数 C , 使得对于 $i \in \{1, 2, \dots, N\}$, 以下不等式成立:

$$\sum_{k=1}^N |\mathcal{T}_{i,k}| \leq \begin{cases} CN^{-r(3-\alpha)} i^{-r\alpha}, & \text{如果 } 3r-2 < 0, \\ CN^{-r(3-\alpha)} i^{-r\alpha} \ln N, & \text{如果 } 3r-2 = 0, \\ CN^{-(2-r\alpha)} i^{-r\alpha}, & \text{如果 } 3r-2 > 0. \end{cases}$$

证明 因为 $u \in C^2(\bar{\Omega})$, 所以存在常数 C 使得

$$|\mathcal{T}_{i,k}| \leq C \int_{x_{k-1}}^{x_k} \frac{(y - x_{k-1})(x_k - y)}{|x_i - y|^\alpha} dy \leq Ch_k^2 \int_{x_{k-1}}^{x_k} \frac{1}{|x_i - y|^\alpha} dy. \quad (2.16)$$

接下来, 对局部截断误差进行估计. 从 (2.16) 我们可以计算出

$$|\mathcal{T}_{1,1}| \leq C \int_{x_0}^{x_1} y(x_1 - y)^{1-\alpha} dy \leq Cx_1^{3-\alpha} = CN^{-r(3-\alpha)},$$

以及

$$|\mathcal{T}_{i,1}| \leq Ch_1^3 (x_i - x_1)^{-\alpha} \leq CN^{-r(3-\alpha)} i^{-r\alpha}, \quad i > 1.$$

对于 $1 < k \leq \lceil \frac{i}{2} \rceil$, 利用 (2.16) 和 (2.13), 可以计算得到

$$\begin{aligned} \sum_{k=2}^{\lceil \frac{i}{2} \rceil} |\mathcal{T}_{i,k}| &\leq C \sum_{k=2}^{\lceil \frac{i}{2} \rceil} h_k^3 (x_i - x_k)^{-\alpha} \leq C \sum_{k=2}^{\lceil \frac{i}{2} \rceil} h_k^3 (x_i - x_{\lceil \frac{i}{2} \rceil})^{-\alpha} \\ &\leq C \sum_{k=2}^{\lceil \frac{i}{2} \rceil} N^{-r(3-\alpha)} i^{-r\alpha} k^{3r-3} \\ &\leq \begin{cases} CN^{-r(3-\alpha)} i^{-r\alpha}, & \text{如果 } 3r-2 < 0, \\ CN^{-r(3-\alpha)} i^{-r\alpha} \ln i, & \text{如果 } 3r-2 = 0, \\ CN^{-r(3-\alpha)} i^{-r\alpha} i^{3r-2}, & \text{如果 } 3r-2 > 0. \end{cases} \end{aligned}$$

对于 $\lceil \frac{i}{2} \rceil < k < i$, 我们同样有

$$\begin{aligned} \sum_{k=\lceil \frac{i}{2} \rceil+1}^{i-1} |\mathcal{T}_{i,k}| &\leq C (N^{-r} i^{r-1})^2 \int_{x_{\lceil \frac{i}{2} \rceil}}^{x_{i-1}} (x_i - y)^{-\alpha} dy \\ &\leq C (N^{-r} i^{r-1})^2 (x_i - x_{\lceil \frac{i}{2} \rceil})^{1-\alpha} \\ &\leq CN^{-r(3-\alpha)} i^{r(3-\alpha)-2}. \end{aligned}$$

对于 $i > 1$, 我们可以推导出

$$|\mathcal{T}_{i,i}| \leq Ch_i^{3-\alpha} \leq N^{-r(3-\alpha)} i^{r(3-\alpha)-(3-\alpha)},$$

和

$$|\mathcal{T}_{i,i+1}| \leq Ch_{i+1}^{3-\alpha} \leq CN^{-r(3-\alpha)} i^{r(3-\alpha)-(3-\alpha)}.$$

令 $J = \min\{2i, N\}$. 根据 (2.16) 和 (2.13), 可知

$$\begin{aligned} \sum_{k=i+2}^J |\mathcal{T}_{i,k}| &\leq C \sum_{k=i+2}^J h_k^2 \int_{x_{k-1}}^{x_k} (y - x_i)^{-\alpha} dy \\ &\leq CN^{-2r} i^{2r-2} \int_{x_i}^{x_J} (y - x_i)^{-\alpha} dy \\ &\leq CN^{-r(3-\alpha)} i^{r(3-\alpha)-2}. \end{aligned}$$

对于特殊情况 $J = 2i < N$, 我们有

$$\begin{aligned} \sum_{k=J+1}^N |\mathcal{T}_{i,k}| &\leq C \sum_{k=J+1}^N h_k^3 (x_{k-1} - x_i)^{-\alpha} \\ &\leq C \sum_{k=J+1}^N N^{-r(3-\alpha)} i^{-r\alpha} k^{3r-3} \\ &\leq \begin{cases} CN^{-r(3-\alpha)} i^{-r\alpha}, & \text{如果 } 3r-2 < 0, \\ CN^{-r(3-\alpha)} i^{-r\alpha} \ln N, & \text{如果 } 3r-2 = 0, \\ CN^{-(2-r\alpha)} i^{-r\alpha}, & \text{如果 } 3r-2 > 0. \end{cases} \end{aligned}$$

证毕. \square

引理 2.8 若 $u(x) \in C^2(\bar{\Omega})$ 且 $r < 1$, 则存在常数 C , 使得当 $i \in \{1, 2, \dots, N\}$ 是, 有

$$\sum_{k=N+1}^{2N} |\mathcal{T}_{i,k}| \leq \begin{cases} CN^{-r(3-\alpha)} i^{-r\alpha}, & \text{如果 } 3r-2 < 0, \\ CN^{-r(3-\alpha)} i^{-r\alpha} \ln N, & \text{如果 } 3r-2 = 0, \\ CN^{-(2-r\alpha)} i^{-r\alpha}, & \text{如果 } 3r-2 > 0. \end{cases}$$

证明 取 $\zeta = 2T - y$. 因为当 $N+1 \leq k \leq 2N-i$ 时, 对于 $\zeta \in [x_{2N-k}, x_{2N-k+1}]$, 有 $2T - x_i - \zeta \geq \zeta - x_i \geq 0$. 所以利用 (2.12)、(2.13) 和 (2.16), 可以计算出

$$\begin{aligned} |\mathcal{T}_{i,k}| &\leq Ch_k^2 \int_{x_{k-1}}^{x_k} (y - x_i)^{-\alpha} dy \\ &= Ch_{2N-k+1}^2 \int_{x_{k-1}}^{x_k} (y - 2T + 2T - x_i)^{-\alpha} dy \\ &= Ch_{2N-k+1}^2 \int_{x_{2N-k}}^{x_{2N-k+1}} (2T - x_i - \zeta)^{-\alpha} d\zeta \\ &\leq Ch_{2N-k+1}^2 \int_{x_{2N-k}}^{x_{2N-k+1}} (\zeta - x_i)^{-\alpha} d\zeta. \end{aligned}$$

而另一方面, 取 $\zeta = 2T - y$, 则当 $k > 2N-i$ 时, 对于 $\zeta \in [x_{2N-k}, x_{2N-k+1}]$, 有 $2T - x_i - \zeta \geq x_i - \zeta \geq 0$. 因此, 我们可以推导出

$$|T_{i,k}| \leq Ch_{2N-k+1}^2 \int_{x_{2N-k}}^{x_{2N-k+1}} (2T - x_i - \zeta)^{-\alpha} d\zeta \leq Ch_{2N-k+1}^2 \int_{x_{2N-k}}^{x_{2N-k+1}} (x_i - \zeta)^{-\alpha} d\zeta.$$

最后按照引理 2.7 的证明过程, 我们得到所需的结果. \square

引理 2.9 若 $u(x) \in C^2(\bar{\Omega})$ 且 $r < 1$, 则存在常数 C , 使得对于 $i \in \{1, 2, \dots, N\}$,

$$|R_i| \leq \sum_{k=1}^{2N} |\mathcal{T}_{i,k}| \leq \begin{cases} CN^{-r(3-\alpha)} i^{-r\alpha}, & \text{如果 } 3r-2 < 0, \\ CN^{-r(3-\alpha)} i^{-r\alpha} \ln N, & \text{如果 } 3r-2 = 0, \\ CN^{-(2-r\alpha)} i^{-r\alpha}, & \text{如果 } 3r-2 > 0, \end{cases}$$

并且对于 $i \in \{N+1, N+2, \dots, 2N-1\}$,

$$|R_i| \leq \sum_{k=1}^{2N} |\mathcal{T}_{i,k}| \leq \begin{cases} CN^{-r(3-\alpha)} (2N-i)^{-r\alpha}, & \text{如果 } 3r-2 < 0, \\ CN^{-r(3-\alpha)} (2N-i)^{-r\alpha} \ln N, & \text{如果 } 3r-2 = 0, \\ CN^{-(2-r\alpha)} (2N-i)^{-r\alpha}, & \text{如果 } 3r-2 > 0. \end{cases}$$

证明 这个引理的第一部分可以直接由引理 2.7 和引理 2.8 得到. 第二部分可以类似地证明, 这里我们省略. \square

2.2.2 收敛性分析

定义 $e_k := u(x_k) - u_k$, 其中 $e_0 = e_{2N} = 0$, 且 $e = (e_1, e_2, \dots, e_{2N-1})^T$. 由(2.5)和(2.7), 可以得到

$$\sum_{k=1}^{2N-1} a_{i,k} e_k = R_i, \text{ 其中 } i, k = 1, 2, \dots, 2N-1. \quad (2.17)$$

令 $|e_{i_0}| := \|e\|_\infty = \max_{1 \leq k \leq 2N-1} |e_k|$. 根据引理2.4, 我们有

$$\begin{aligned} |R_{i_0}| &= \left| a_{i_0, i_0} e_{i_0} + \sum_{k=1, k \neq i_0}^{2N-1} a_{i_0, k} e_k \right| \geq a_{i_0, i_0} |e_{i_0}| - \sum_{k=1, k \neq i_0}^{2N-1} |a_{i_0, k}| |e_k| \\ &\geq \left(\sum_{k=1}^{2N-1} a_{i_0, k} \right) |e_{i_0}|. \end{aligned} \quad (2.18)$$

于是我们有如下结论.

定理 2.10 若 $u(x) \in C^2(\bar{\Omega})$, u_k 是离散格式 (2.7) 计算得到的 $u(x_k)$ 的近似解, 则

$$\max_{1 \leq i \leq 2N-1} |u(x_i) - u_i| \leq \begin{cases} CN^{r-2}, & \text{如果 } r > \frac{2}{3}, \\ CN^{r-2} \ln N, & \text{如果 } r = \frac{2}{3}, \\ CN^{-2r}, & \text{如果 } 0 < r < \frac{2}{3}. \end{cases} \quad (2.19)$$

证明 对于 $r \geq 1$, 因为 $(x_{i_0} - x_0)^{-\alpha} + (x_{2N} - x_{i_0})^{-\alpha} \geq 2T^{-\alpha}$, 所以从 (2.11)、(2.12)、(2.18) 和引理 2.6 可知

$$\|e\|_\infty \leq \frac{|R_{i_0}|}{\sum_{k=1}^{2N-1} a_{i_0, k}} \leq C \frac{N^{-2}}{N^{-r} ((x_{i_0} - x_0)^{-\alpha} + (x_{2N} - x_{i_0})^{-\alpha})} \leq CN^{r-2}.$$

考虑反常分级网格 $0 < r < 1$ 的情况. 对于 $1 \leq i_0 \leq N$, 根据 (2.11)、(2.18) 和引理 2.9, 我们有

$$\|e\|_\infty \leq \frac{|R_{i_0}|}{\sum_{k=1}^{2N-1} a_{i_0, k}} \leq C \frac{|R_{i_0}|}{h_1 (x_{i_0} - x_0)^{-\alpha}} \leq \begin{cases} CN^{r-2}, & \text{如果 } r > \frac{2}{3}, \\ CN^{r-2} \ln N, & \text{如果 } r = \frac{2}{3}, \\ CN^{-2r}, & \text{如果 } 0 < r < \frac{2}{3}; \end{cases}$$

同理可知, 对于 $N+1 \leq i_0 \leq 2N-1$, 我们有

$$\|e\|_\infty \leq C \frac{|R_{i_0}|}{h_{2N}(x_{2N} - x_{i_0})^{-\alpha}} \leq \begin{cases} CN^{r-2}, & \text{如果 } r > \frac{2}{3}, \\ CN^{r-2} \ln N, & \text{如果 } r = \frac{2}{3}, \\ CN^{-2r}, & \text{如果 } 0 < r < \frac{2}{3}. \end{cases}$$

证毕. □

2.3 误差分析: 具有低正则性解的稳态问题

在之前的小节中, 我们证明了在解光滑时配置法在反常分级网格上达到最佳计算精度. 在这一小节中, 我们将证明由于解的低正则性配置法将在标准分级网格上达到最优精度, 但是其精度较低 (小于一阶).

不失一般性, 我们取 $\Omega = (0, 2T)$, 因此(1.4)重写为

$$\left| \frac{\partial^\ell}{\partial x^\ell} u(x) \right| \leq C[x(2T-x)]^{\sigma-\ell}, \quad 0 < \sigma < 1, \quad \ell = 0, 1, 2. \quad (2.20)$$

在本章的其余部分, 我们将研究在解的低正则性(2.20)下, 配置法求解非局部扩散模型的局部截断误差和全局误差.

2.3.1 局部截断误差

由(2.20)可知 $u \in C^2(0, 2T)$, 于是对(2.15)有如下估计:

$$|\mathcal{T}_{i,k}| \leq Ch_k^2 \left(\max_{s \in [x_{k-1}, x_k]} |u_{xx}(s)| \right) \int_{x_{k-1}}^{x_k} |x_i - y|^{-\alpha} dy, \quad k \neq 1, 2N. \quad (2.21)$$

引理 2.11 若 $r > 0$ 且 $0 < \sigma < 1$, 则存在常数 C , 使得对于任意 $i \in \{1, \dots, N\}$, 有如下结论:

$$\sum_{k=1}^i |\mathcal{T}_{i,k}| \leq \begin{cases} CN^{-r(1+\sigma-\alpha)} i^{-r\alpha}, & \text{如果 } r(1+\sigma) < 2, \\ CN^{-r(1+\sigma-\alpha)} i^{-r\alpha} \ln i, & \text{如果 } r(1+\sigma) = 2, \\ CN^{-r(1+\sigma-\alpha)} i^{r(1+\sigma-\alpha)-2}, & \text{如果 } r(1+\sigma) > 2. \end{cases}$$

证明 任取 $i \in \{1, \dots, N\}$. 分别考虑 $k=1=i$, $k=1 < i$, $1 < k=i$ 和 $1 < k < i$ 的情况.

从(2.15)和(2.20)可以计算得到: 对于 $i=1$,

$$\begin{aligned} |\mathcal{T}_{1,1}| &\leq \int_{x_0}^{x_1} |u(y)|(x_1-y)^{-\alpha} dy + \int_{x_0}^{x_1} |\Pi_h u(y)|(x_1-y)^{-\alpha} dy \\ &\leq C \left[\int_{x_0}^{x_1} y^\sigma (x_1-y)^{-\alpha} dy + \frac{x_1^\sigma}{h_1} \int_{x_0}^{x_1} y (x_1-y)^{-\alpha} dy \right] \\ &\leq C x_1^{1+\sigma-\alpha} \leq N^{-r(1+\sigma-\alpha)}; \end{aligned} \quad (2.22)$$

而对于 $i > 1$,

$$\begin{aligned} |\mathcal{T}_{i,1}| &\leq C(x_i - x_1)^{-\alpha} \int_{x_0}^{x_1} |u(y) - \Pi_h u(y)| dy \\ &\leq C(x_1^{\sigma+1} + x_1^\sigma h_1)(N^{-r} i^r)^{-\alpha} \leq CN^{-r(1+\sigma-\alpha)} i^{-r\alpha}. \end{aligned} \quad (2.23)$$

当 $1 < k \leq \lceil \frac{i}{2} \rceil$ 时, 由(2.13)、(2.21)和级数 $\sum_{j=2}^{\infty} j^\mu$ ($\mu \in \mathbb{R}$) 的敛散性可知

$$\begin{aligned} \sum_{k=2}^{\lceil i/2 \rceil} |\mathcal{T}_{i,k}| &\leq C \sum_{k=2}^{\lceil i/2 \rceil} h_k^3 x_{k-1}^{\sigma-2} (x_i - x_k)^{-\alpha} \\ &\leq C \sum_{k=2}^{\lceil i/2 \rceil} (N^{-r} k^{r-1})^3 (N^{-r} k^r)^{\sigma-2} (N^{-r} i^r)^{-\alpha} \\ &\leq CN^{-r(1+\sigma-\alpha)} i^{-r\alpha} \sum_{k=2}^{\lceil i/2 \rceil} k^{r(1+\sigma)-3} \\ &\leq \begin{cases} CN^{-r(1+\sigma-\alpha)} i^{-r\alpha}, & \text{如果 } r(1+\sigma) < 2, \\ CN^{-r(1+\sigma-\alpha)} i^{-r\alpha} \ln i, & \text{如果 } r(1+\sigma) = 2, \\ CN^{-r(1+\sigma-\alpha)} i^{r(1+\sigma-\alpha)-2}, & \text{如果 } r(1+\sigma) > 2. \end{cases} \end{aligned} \quad (2.24)$$

当 $\lceil \frac{i}{2} \rceil < k < i$ 时, 利用(2.21)和(2.13), 可以算出

$$\begin{aligned} \sum_{k=\lceil i/2 \rceil+1}^{i-1} |\mathcal{T}_{i,k}| &\leq C \sum_{k=\lceil i/2 \rceil+1}^{i-1} h_k^2 x_{k-1}^{\sigma-2} \int_{x_{k-1}}^{x_k} (x_i - y)^{-\alpha} dy \\ &\leq C(N^{-r} i^{r-1})^2 (N^{-r} i^r)^{\sigma-2} \int_{x_{\lceil i/2 \rceil}}^{x_{i-1}} (x_i - y)^{-\alpha} dy \\ &\leq C(N^{-r} i^{r-1})^2 (N^{-r} i^r)^{\sigma-2} [(x_i - x_{\lceil i/2 \rceil})^{1-\alpha} - h_i^{1-\alpha}] \\ &\leq CN^{-r(1+\sigma-\alpha)} i^{r(1+\sigma-\alpha)-2}. \end{aligned} \quad (2.25)$$

同理对于 $i > 1$, 我们有

$$\begin{aligned} |\mathcal{T}_{i,i}| &\leq Ch_i^2 x_{i-1}^{\sigma-2} \int_{x_{i-1}}^{x_i} (x_i - y)^{-\alpha} dy \\ &\leq Ch_i^{3-\alpha} x_i^{\sigma-2} \\ &\leq CN^{-r(1+\sigma-\alpha)} i^{r(1+\sigma-\alpha)-(3-\alpha)}. \end{aligned} \quad (2.26)$$

结合不等式(2.22)、(2.23)、(2.24)、(2.25)和(2.26), 即可得到所需的结果. \square

引理 2.12 令 $r > 0$ 且 $0 < \sigma < 1$, 则存在常数 C , 使得对任意 $i \in \{1, \dots, N-1\}$ 有

$$\sum_{k=i+1}^N |\mathcal{T}_{i,k}| \leq \begin{cases} CN^{-r(1+\sigma-\alpha)} i^{-r\alpha}, & \text{如果 } r(1+\sigma) < 2, \\ CN^{-r(1+\sigma-\alpha)} i^{-r\alpha} \ln N, & \text{如果 } r(1+\sigma) = 2, \\ CN^{-(2-r\alpha)} i^{-r\alpha}, & \text{如果 } r(1+\sigma) > 2. \end{cases}$$

证明 由 (2.21)、(2.12) 和 (2.13), 我们可以得到

$$\begin{aligned}
 |\mathcal{T}_{i,i+1}| &\leq Ch_{i+1}^2 x_i^{\sigma-2} \int_{x_i}^{x_{i+1}} (y-x_i)^{-\alpha} dy \\
 &\leq Ch_{i+1}^{3-\alpha} x_i^{\sigma-2} \\
 &\leq CN^{-r(1+\sigma-\alpha)} i^{r(1+\sigma-\alpha)-(3-\alpha)}.
 \end{aligned} \tag{2.27}$$

取 $K = \min\{2i, N\}$, 并利用 (2.21)、(2.13), 可以得到

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=i+2}^K |\mathcal{T}_{i,k}| &\leq C \sum_{k=i+2}^K h_k^2 x_{k-1}^{\sigma-2} \int_{x_{k-1}}^{x_k} (y-x_i)^{-\alpha} dy \\
 &\leq C (N^{-r} i^{r-1})^2 (N^{-r} i^r)^{\sigma-2} \int_{x_{i+1}}^{x_K} (y-x_i)^{-\alpha} dy \\
 &\leq C (N^{-r} i^{r-1})^2 (N^{-r} i^r)^{\sigma-2} (x_K - x_i)^{1-\alpha} \\
 &\leq CN^{-r(1+\sigma-\alpha)} i^{r(1+\sigma-\alpha)-2}.
 \end{aligned} \tag{2.28}$$

对于特殊情况 $K = 2i < N$, 由 (2.21)、(2.12) 和 (2.13), 我们有

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=K+1}^N |\mathcal{T}_{i,k}| &\leq C \sum_{k=K+1}^N h_k^3 x_k^{\sigma-2} (x_{k-1} - x_i)^{-\alpha} \\
 &\leq C \sum_{k=K+1}^N (N^{-r} k^{r-1})^3 (N^{-r} k^r)^{\sigma-2} (N^{-r} i^r)^{-\alpha} \\
 &\leq CN^{-r(1+\sigma-\alpha)} i^{-r\alpha} \sum_{k=K+1}^N k^{r(1+\sigma)-3} \\
 &\leq \begin{cases} CN^{-r(1+\sigma-\alpha)} i^{-r\alpha}, & \text{如果 } r(1+\sigma) < 2, \\ CN^{-r(1+\sigma-\alpha)} i^{-r\alpha} \ln N, & \text{如果 } r(1+\sigma) = 2, \\ CN^{-(2-r\alpha)} i^{-r\alpha}, & \text{如果 } r(1+\sigma) > 2. \end{cases}
 \end{aligned} \tag{2.29}$$

将 (2.27)、(2.28) 和 (2.29) 组合, 可得所需结果. \square

引理 2.13 令 $r > 0$ 且 $0 < \sigma < 1$, 则存在常数 C , 使得对于任意 $i \in \{1, \dots, N\}$, 有

$$\sum_{k=N+1}^{2N} |\mathcal{T}_{i,k}| \leq \begin{cases} CN^{-r(1+\sigma)}, & \text{如果 } r(1+\sigma) < 2, \\ CN^{-r(1+\sigma)} \ln N, & \text{如果 } r(1+\sigma) = 2, \\ CN^{-2}, & \text{如果 } r(1+\sigma) > 2. \end{cases}$$

证明 因为当 $i = N$ 时

$$\int_{x_N}^{x_{N+1}} (y-x_i)^{-\alpha} dy = \frac{1}{1-\alpha} h_{N+1}^{1-\alpha},$$

并且当 $i < N$ 时

$$\int_{x_N}^{x_{N+1}} (y - x_i)^{-\alpha} dy \leq h_{N+1} (x_N - x_i)^{-\alpha} \leq h_{N+1}^{1-\alpha},$$

所以从 (2.21) 和 (2.13) 中我们得到

$$\begin{aligned} |\mathcal{T}_{i,N+1}| &\leq Ch_{N+1}^2 (2T - x_{N+1})^{\sigma-2} \int_{x_N}^{x_{N+1}} (y - x_i)^{-\alpha} dy \\ &\leq Ch_{N+1}^{3-\alpha} = CN^{-(3-\alpha)}. \end{aligned} \quad (2.30)$$

另外, 从 (2.21)、(2.12) 和 (2.13), 我们可以推出

$$\begin{aligned} \sum_{k=N+2}^{\lceil 3N/2 \rceil} |\mathcal{T}_{i,k}| &\leq C \sum_{k=N+2}^{\lceil 3N/2 \rceil} h_k^2 (2T - x_k)^{\sigma-2} \int_{x_{k-1}}^{x_k} (y - x_i)^{-\alpha} dy \\ &\leq CN^{-2} \int_{x_{N+1}}^{x_{\lceil 3N/2 \rceil}} (y - x_i)^{-\alpha} dy \\ &\leq CN^{-2}. \end{aligned} \quad (2.31)$$

由 (2.12)、(2.13) 和 (2.21), 可以得到

$$\begin{aligned} \sum_{k=\lceil 3N/2 \rceil+1}^{2N-1} |\mathcal{T}_{i,k}| &\leq C \sum_{k=\lceil 3N/2 \rceil+1}^{2N-1} h_k^2 (2T - x_k)^{\sigma-2} \int_{x_{k-1}}^{x_k} (y - x_i)^{-\alpha} dy \\ &\leq C \sum_{k=\lceil 3N/2 \rceil+1}^{2N-1} h_k^3 (2T - x_k)^{\sigma-2} \\ &\leq C \sum_{k=\lceil 3N/2 \rceil+1}^{2N-1} \left(N^{-r} (2N+1-k)^{r-1} \right)^3 (N^{-r} (2N-k)^r)^{\sigma-2} \\ &\leq CN^{-r(1+\sigma)} \sum_{q=2}^{\lceil N/2 \rceil} q^{r(1+\sigma)-3} \\ &\leq \begin{cases} CN^{-r(1+\sigma)}, & \text{如果 } r(1+\sigma) < 2, \\ CN^{-r(1+\sigma)} \ln N, & \text{如果 } r(1+\sigma) = 2, \\ CN^{-2}, & \text{如果 } r(1+\sigma) > 2. \end{cases} \end{aligned} \quad (2.32)$$

从 (2.21) 和 (2.13), 我们得到

$$\begin{aligned} |\mathcal{T}_{i,2N}| &\leq \int_{x_{2N-1}}^{x_{2N}} \frac{|u(y) - \Pi_h u(y)|}{(y - x_i)^\alpha} dy \\ &\leq C \int_{x_{2N-1}}^{x_{2N}} (2T - y)^\sigma dy + \frac{|u(x_{2N-1})|}{h_{2N}} \int_{x_{2N-1}}^{x_{2N}} (x_{2N} - y) dy \\ &\leq Ch_{2N}^{1+\sigma} \leq CN^{-r(1+\sigma)}. \end{aligned} \quad (2.33)$$

组合 (2.30)、(2.31)、(2.32) 和 (2.33) 得到所需的结果. \square

引理 2.14 令 $r > 0$ 且 $0 < \sigma < 1$, 则存在常数 C , 使得当 $i \in \{1, 2, \dots, N\}$ 时

$$|R_i| \leq \begin{cases} CN^{-r(1+\sigma-\alpha)} i^{-r\alpha}, & \text{如果 } r(1+\sigma) < 2, \\ CN^{-r(1+\sigma-\alpha)} i^{-r\alpha} \ln N, & \text{如果 } r(1+\sigma) = 2, \\ CN^{-(2-r\alpha)} i^{-r\alpha}, & \text{如果 } r(1+\sigma) > 2; \end{cases}$$

而当 $i \in \{N+1, N+2, \dots, 2N\}$ 时

$$|R_i| \leq \begin{cases} CN^{-r(1+\sigma-\alpha)} (2N-i)^{-r\alpha}, & \text{如果 } r(1+\sigma) < 2, \\ CN^{-r(1+\sigma-\alpha)} (2N-i)^{-r\alpha} \ln N, & \text{如果 } r(1+\sigma) = 2, \\ CN^{-(2-r\alpha)} (2N-i)^{-r\alpha}, & \text{如果 } r(1+\sigma) > 2. \end{cases}$$

证明 对于 $i = 1, 2, \dots, N$, 由引理 2.11–2.13 可得到这个结果. 对于 $i \in \{N+1, N+2, \dots, 2N\}$, 与引理 2.11–2.13 类似可证, 这里我们不再赘述. \square

2.3.2 收敛性分析

接下来, 对求解含低正则解的稳态问题 (2.2) 的配置法进行收敛性分析.

定理 2.15 若 $u(x) \in C^{2\sigma}(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ (其中 $2\sigma \in (0, 2)$) 是方程 (2.2) 的解, 并满足 (2.20), 则对任意 $r > 0$ 和 $0 < \sigma < 1$, 存在常数 C , 使得下列不等式成立:

$$\max_{1 \leq i \leq 2N-1} |u(x_i) - u_i| \leq \begin{cases} CN^{r-2}, & \text{如果 } r(1+\sigma) > 2, \\ CN^{r-2} \ln N, & \text{如果 } r(1+\sigma) = 2, \\ CN^{-r\sigma}, & \text{如果 } r(1+\sigma) < 2. \end{cases}$$

证明 由 (2.11)、(2.18) 和引理 2.14, 当 $1 \leq i_0 \leq N$ 时, 有

$$\begin{aligned} \|e\|_\infty &\leq C \frac{|R_{i_0}|}{h_1(x_{i_0} - x_0)^{-\alpha}} \\ &\leq \begin{cases} CN^{r-2}, & \text{如果 } r(1+\sigma) > 2, \\ CN^{r-2} \ln N, & \text{如果 } r(1+\sigma) = 2, \\ CN^{-r\sigma}, & \text{如果 } r(1+\sigma) < 2. \end{cases} \end{aligned}$$

对于 $N+1 \leq i_0 \leq 2N-1$, 同理可证

$$\begin{aligned} \|e\|_\infty &\leq C \frac{|R_{i_0}|}{h_{2N}(x_{2N} - x_{i_0})^{-\alpha}} \\ &\leq \begin{cases} CN^{r-2}, & \text{如果 } r(1+\sigma) > 2, \\ CN^{r-2} \ln N, & \text{如果 } r(1+\sigma) = 2, \\ CN^{-r\sigma}, & \text{如果 } r(1+\sigma) < 2. \end{cases} \end{aligned}$$

证毕. \square

2.4 误差分析: 具有低正则解的时间依赖非局部扩散模型

在小节 2.3 中, 我们证明了在求解含有低正则性解的稳态问题时配置法的计算精度远低于一阶. 现在, 我们进一步研究时间依赖的非局部扩散模型.

2.4.1 局部截断误差

在我们开始讨论时间依赖的非局部扩散模型 (2.1) 之前, 我们将对求解稳态问题 (2.2) 的配置法的局部截断误差进行简要回顾并修改.

引理 2.16 令 $r > 0, 0 < \sigma < 1$, 则存在常数 C , 使得对任意 $i \in \{1, \dots, 2N-1\}$, 有

$$|R_i| \leq \begin{cases} CN^{-r(1+\sigma-\alpha)}, & \text{如果 } r(1+\sigma-\alpha) < 2, \\ CN^{-r(1+\sigma-\alpha)} \ln N, & \text{如果 } r(1+\sigma-\alpha) = 2, \\ CN^{-2}, & \text{如果 } r(1+\sigma-\alpha) > 2. \end{cases}$$

证明 这里只考虑 $1 \leq i \leq N$ 的情况; $N+1 \leq i \leq 2N-1$ 的情况同理可证.

由引理 2.11, 可知

$$\sum_{k=1}^i |\mathcal{T}_{i,k}| \leq \begin{cases} CN^{-r(1+\sigma-\alpha)}, & \text{如果 } r(1+\sigma-\alpha) \leq 2, \\ CN^{-2}, & \text{如果 } r(1+\sigma-\alpha) > 2. \end{cases} \quad (2.34)$$

取 $K = \min\{2i, N\}$, 由 (2.27) 和 (2.28) 可得

$$\sum_{k=i+1}^K |\mathcal{T}_{i,k}| \leq \begin{cases} CN^{-r(1+\sigma-\alpha)}, & \text{如果 } r(1+\sigma-\alpha) \leq 2, \\ CN^{-2}, & \text{如果 } r(1+\sigma-\alpha) > 2. \end{cases}$$

特别地, 对于 $K = 2i < N$, 由 (2.29) 有

$$\begin{aligned} \sum_{k=K+1}^N |\mathcal{T}_{i,k}| &\leq C \sum_{k=K+1}^N (N^{-r}k^{r-1})^3 (N^{-r}k^r)^{\sigma-2} (N^{-r}k^r)^{-\alpha} \\ &\leq CN^{-r(1+\sigma-\alpha)} \sum_{k=K+1}^N k^{r(1+\sigma-\alpha)-3} \\ &\leq \begin{cases} CN^{-r(1+\sigma-\alpha)}, & \text{如果 } r(1+\sigma-\alpha) < 2, \\ CN^{-r(1+\sigma-\alpha)} \ln N, & \text{如果 } r(1+\sigma-\alpha) = 2, \\ CN^{-2}, & \text{如果 } r(1+\sigma-\alpha) > 2. \end{cases} \end{aligned}$$

因此我们可以得出以下结果

$$\sum_{k=i+1}^N |\mathcal{T}_{i,k}| \leq \begin{cases} CN^{-r(1+\sigma-\alpha)}, & \text{如果 } r(1+\sigma-\alpha) < 2, \\ CN^{-r(1+\sigma-\alpha)} \ln N, & \text{如果 } r(1+\sigma-\alpha) = 2, \\ CN^{-2}, & \text{如果 } r(1+\sigma-\alpha) > 2. \end{cases} \quad (2.35)$$

因为当 $r(1+\sigma) \leq 2$ 时, 有 $N^{-r(1+\sigma)} \leq N^{-r(1+\sigma)} \ln N \leq CN^{-r(1+\sigma-\alpha)}$, $r(1+\sigma-\alpha) < 2$; 而对于 $r(1+\sigma-\alpha) \leq 2$, 有 $N^{-2} \leq N^{-r(1+\sigma-\alpha)}$. 所以由引理 2.13, 我们可以证明

$$\sum_{k=N+1}^{2N} |\mathcal{T}_{i,k}| \leq \begin{cases} CN^{-r(1+\sigma-\alpha)}, & \text{如果 } r(1+\sigma-\alpha) \leq 2, \\ CN^{-2}, & \text{如果 } r(1+\sigma-\alpha) > 2. \end{cases} \quad (2.36)$$

由 (2.34)、(2.35) 和 (2.36), 我们可以得到所需的结果. \square

2.4.2 稳定性和收敛性分析

通过 Lax 等价定理 [32], 我们可以证明算法的稳定性, 所以这一小节我们主要对求解时间依赖的非局部问题 (2.1) 的配置法进行收敛性分析.

定理 2.17 令 u_i^k 是由离散格式 (2.8) 计算得到的 $u(x_i, t_k)$ 的近似解, 则

$$\max_{\substack{1 \leq i \leq 2N-1 \\ 1 \leq k \leq M}} |u(x_i, t_k) - u_i^k| \leq \begin{cases} C(N^{-r(1+\sigma-\alpha)} + M^{-2}), & \text{如果 } r(1+\sigma-\alpha) < 2, \\ C(N^{-r(1+\sigma-\alpha)} \ln N + M^{-2}), & \text{如果 } r(1+\sigma-\alpha) = 2, \\ C(N^{-2} + M^{-2}), & \text{如果 } r(1+\sigma-\alpha) > 2. \end{cases}$$

证明 令 $e_i^k = u(x_i, t_k) - u_i^k$, 其中 $e_i^0 = 0$, $i = 1, 2, \dots, 2N-1$, $k = 0, 1, \dots, M$, 且 $E^k = (e_1^k, e_2^k, \dots, e_{2N-1}^k)^T$. 由 (2.8) 的扰动方程, 我们可以得到

$$\left(1 + \frac{\tau}{2} a_{i,i}\right) e_i^k = e_i^{k-1} - \frac{\tau}{2} \sum_{j=1}^{2N-1} a_{i,j} e_j^{k-1} - \frac{\tau}{2} \sum_{j=1, j \neq i}^{2N-1} a_{i,j} e_j^k + \tau R_i^{k-\frac{1}{2}}, \quad (2.37)$$

其中局部截断误差为 $|R_i^{k-\frac{1}{2}}| \leq C(|R_i| + M^{-2})$, R_i 由引理 2.16 给出.

设 $|e_{i_0}^k| := \|E^k\|_\infty = \max_{j=1, 2, \dots, 2N-1} |e_j^k|$. 由 (2.37) 和引理 2.4, 我们有

$$\left(1 + \frac{\tau}{2} a_{i_0, i_0}\right) |e_{i_0}^k| \leq |e_{i_0}^{k-1}| + \frac{\tau}{2} \sum_{j=1}^{2N-1} |a_{i_0, j}| |e_j^{k-1}| + \frac{\tau}{2} \sum_{j=1, j \neq i_0}^{2N-1} |a_{i_0, j}| |e_j^k| + \tau |R_{i_0}^{k-\frac{1}{2}}|.$$

令 $\|R^{k-\frac{1}{2}}\|_\infty = \max_{j=1, 2, \dots, 2N-1} |R_j^{k-\frac{1}{2}}|$, $k = 1, 2, \dots, M$. 由 (2.10), 可知

$$a_{i_0, i_0} < \frac{2^{2-\alpha}}{1-\alpha} T^{1-\alpha} := C_a.$$

因此, 利用上述方程和 $\|E^0\|_\infty = 0$, 我们得到

$$\|E^k\|_\infty \leq (1 + \tau C_a) \|E^{k-1}\|_\infty + \tau \|R^{k-\frac{1}{2}}\|_\infty$$

$$\leq (1 + \tau C_a)^k \|E^0\|_\infty + \tau \sum_{l=1}^k (1 + \tau C_a)^{k-l} \|R^{l-\frac{1}{2}}\|_\infty$$

$$\leq \begin{cases} C(N^{-r(1+\sigma-\alpha)} + M^{-2}), & \text{如果 } r(1+\sigma-\alpha) < 2, \\ C(N^{-r(1+\sigma-\alpha)} \ln N + M^{-2}), & \text{如果 } r(1+\sigma-\alpha) = 2, \\ C(N^{-2} + M^{-2}), & \text{如果 } r(1+\sigma-\alpha) > 2. \end{cases} \quad \square$$

注 3 上述的误差分析可以推广到一些多维问题, 例如

$$u_t(x, y, t) - \int_{\Omega} \frac{u(\bar{x}, \bar{y}, t) - u(x, y, t)}{|x - \bar{x}|^{\alpha} |y - \bar{y}|^{\beta}} d\bar{x} d\bar{y} = f(x, y, t). \quad (2.38)$$

根据 [12] 和 (2.8), (2.38) 的全离散格式为

$$\left(I + \frac{\tau}{2} \mathcal{A}\right) U^k = \left(I - \frac{\tau}{2} \mathcal{A}\right) U^{k-1} + \tau F^{k-\frac{1}{2}}, \quad k = 1, 2, \dots, M. \quad (2.39)$$

这里 $\mathcal{A} := D_{\alpha} \otimes D_{\beta} - G_{\alpha} \otimes G_{\beta}$, 而 D_{α} 、 D_{β} 、 G_{α} 、 G_{β} 在 (2.9) 中定义. 此外, 网格函数定义为

$$U^k = (U_1^k, U_2^k, \dots, U_{2N-1}^k)^T, \quad U_i^k = (u_{i,1}^k, u_{i,2}^k, \dots, u_{i,2N-1}^k).$$

2.5 数值实验

我们通过数值实验验证了上述理论结果, 采用 L_{∞} 范数来衡量数值误差. 所有的数值实验均在 Julia 1.10.0 中运行.

例 2.1 含光滑解的稳态问题 考虑定义在区间 $0 < x < 1$ 上的稳态问题 (2.2). 该方程的精确解为 $u(x) = e^x \sin x$. 这里的源项函数是通过 JacobiGL 算法计算得到的, 具体算法可参考 [15] 或 [27].

表 2-2 解光滑时 (2.7) 的最大节点误差和收敛性

| r | $\alpha = 0.3$ | | | $\alpha = 0.7$ | | |
|----------------|----------------|------------|------------|----------------|------------|------------|
| | $N = 25$ | $N = 50$ | $N = 100$ | $N = 25$ | $N = 50$ | $N = 100$ |
| $\frac{1}{10}$ | 2.7121E-01 | 2.3141E-01 | 1.9727E-01 | 3.2843E-01 | 2.8221E-01 | 2.4216E-01 |
| | | 0.2290 | 0.2303 | | 0.2188 | 0.2208 |
| $\frac{2}{3}$ | 1.1367E-02 | 4.7263E-03 | 1.9630E-03 | 1.6104E-02 | 6.6190E-03 | 2.7124E-03 |
| | | 1.2660 | 1.2676 | | 1.2827 | 1.2870 |
| 1 | 2.3460E-02 | 1.1669E-02 | 5.8160E-03 | 3.2383E-02 | 1.5898E-02 | 7.8451E-03 |
| | | 1.0075 | 1.0046 | | 1.0264 | 1.0189 |
| $\frac{3}{2}$ | 1.7322E-01 | 1.2272E-01 | 8.6908E-02 | 2.1307E-01 | 1.5136E-01 | 1.0777E-01 |
| | | 0.4972 | 0.4979 | | 0.4934 | 0.4900 |
| 4 | 2.6637E+03 | 1.0809E+04 | 4.3522E+04 | 2.6455E+03 | 1.1593E+04 | 4.9022E+04 |
| | | -2.0208 | -2.0095 | | -2.1316 | -2.0802 |

表 2-2 表明, 配置法在标准分级网格上的精确度比均匀网格上更糟糕, 甚至当 $r \geq 2$ 时算法发散. 同时, 它还表明在反常分级网格 $r = \frac{2}{3}$, 配置法可以达到最优精度 (大于一阶). 数值实验的结果与定理 2.10 的结论一致.

例 2.2 具有低正则性解的稳态问题. 考虑在 $0 < x < 1$ 区域内具有低正则性解的稳态问题 (2.2). 该方程的精确解为 $u(x) = e^x x^{0.3} (1-x)^{0.3}$. 这里的源项函数是通过 JacobiGL 算法 [15, 27] 计算得到的.

表 2-3 解正则性低时 (2.7) 的最大节点误差和收敛性

| r | $\alpha = 0.3, \sigma = 0.3$ | | | $\alpha = 0.7, \sigma = 0.3$ | | |
|----------------------|------------------------------|------------|------------|------------------------------|------------|------------|
| | $N = 25$ | $N = 50$ | $N = 100$ | $N = 25$ | $N = 50$ | $N = 100$ |
| $\frac{1}{10}$ | 7.9074E-01 | 7.7541E-01 | 7.5993E-01 | 8.3789E-01 | 8.2387E-01 | 8.0921E-01 |
| | | 0.0282 | 0.0291 | | 0.0243 | 0.0259 |
| 1 | 3.4398E-01 | 2.7800E-01 | 2.2493E-01 | 3.6838E-01 | 2.9473E-01 | 2.3629E-01 |
| | | 0.3072 | 0.3056 | | 0.3218 | 0.3188 |
| $\frac{2}{1+\sigma}$ | 3.4263E-01 | 2.7098E-01 | 2.1273E-01 | 3.7335E-01 | 2.9526E-01 | 2.3190E-01 |
| | | 0.3385 | 0.3492 | | 0.3385 | 0.3485 |
| 4 | 7.8187E+02 | 3.1534E+03 | 1.2657E+04 | 7.8879E+02 | 3.4092E+03 | 1.4311E+04 |
| | | -2.0119 | -2.0050 | | -2.1117 | -2.0697 |

表 2-3 显示与解为光滑函数的结果相反. 在(1.4) 问题解的正则性低时, 配置法在标准分级网格上中获得最优计算精度, 数值实验的结果与定理 2.15 吻合.

例 2.3 一维和二维的时间依赖问题. 考虑在区域 $0 < x, y < 1, 0 < t < 1$ 中具有低正则性解的一维问题 (2.1) 和二维问题 (2.38). 方程的精确解分别为

$$u(x, t) = e^{x+t} x^{0.3} (1-x)^{0.3}$$

和

$$u(x, y, t) = e^{x+y+t} x^{0.3} (1-x)^{0.3} y^{0.3} (1-y)^{0.3}.$$

其中, 源项函数通过 JacobiGL 算法 [15, 27] 计算得出.

表 2-4 和表 2-5 说明: 对于时间依赖的非局部扩散模型 (2.1), 即使解的正则性低 (1.4), 配置法也可以在适当的分级网格上实现二阶收敛, 其算法精度为 $O(N^{-\min\{r(1+\sigma-\alpha), 2\}})$. 这一结论与定理 2.17 和注记 3 相吻合.

2.6 小结

在求解含弱奇异核的非局部扩散模型时, 许多数值方法都出现阶降的现象. 在这一章中, 我们对充分光滑和低正则性的解分别进行分析, 推导了配置法在分级网格上求解稳态非局部扩散模型 (2.2) 的误差估计. 将稳态问题的理论分析进一步推广, 我们证明了对于时间依赖的非局部扩散模型 (2.1) 配置法在适当的分级网格上能够达到二阶收敛性, 并给出了相应的误差分析.

表 2-4 解正则性低时 (2.8) 的最大节点误差和收敛性

| r | $\alpha = 0.3, \sigma = 0.3$ | | | $\alpha = 0.7, \sigma = 0.3$ | | |
|-----------------------------|------------------------------|------------|------------|------------------------------|------------|------------|
| | $N = 25$ | $N = 50$ | $N = 100$ | $N = 25$ | $N = 50$ | $N = 100$ |
| $\frac{1}{10}$ | 5.7985E-01 | 5.4054E-01 | 5.0377E-01 | 9.1193E-01 | 8.6425E-01 | 8.1921E-01 |
| | | 0.1013 | 0.1016 | | 0.0775 | 0.0772 |
| 1 | 2.7978E-02 | 1.3211E-02 | 6.2824E-03 | 1.0937E-01 | 6.6510E-02 | 4.1126E-02 |
| | | 1.0825 | 1.0724 | | 0.7175 | 0.6935 |
| $\frac{2}{1+\sigma-\alpha}$ | 2.5376E-03 | 6.7806E-04 | 1.8116E-04 | 8.6346E-03 | 2.3398E-03 | 5.9992E-04 |
| | | 1.9040 | 1.9041 | | 1.8838 | 1.9635 |
| 4 | 2.9415E-03 | 7.4086E-04 | 1.8591E-04 | 8.5118E-03 | 2.2250E-03 | 5.7114E-04 |
| | | 1.9893 | 1.9946 | | 1.9357 | 1.9619 |

表 2-5 解正则性低时 (2.39) 的最大节点误差和收敛性

| r | $\alpha = 0.3, \sigma = 0.3$ | | | $\alpha = 0.7, \sigma = 0.3$ | | |
|-----------------------------|------------------------------|------------|------------|------------------------------|------------|------------|
| | $N = 10$ | $N = 20$ | $N = 40$ | $N = 10$ | $N = 20$ | $N = 40$ |
| 1 | 2.1188E-01 | 9.8586E-02 | 4.5734E-02 | 8.9027E-01 | 5.1261E-01 | 2.8362E-01 |
| | | 1.1038 | 1.1081 | | 0.7964 | 0.8539 |
| $\frac{2}{1+\sigma-\alpha}$ | 4.0795E-02 | 1.0899E-02 | 2.9089E-03 | 3.1494E-01 | 8.5428E-02 | 2.2781E-02 |
| | | 1.9042 | 1.9057 | | 1.8823 | 1.9069 |
| 4 | 5.7365E-02 | 1.4645E-02 | 3.6988E-03 | 3.8907E-01 | 1.0463E-01 | 2.7542E-02 |
| | | 1.9697 | 1.9853 | | 1.8948 | 1.9255 |

第三章 反常对流的分数阶 Laplacian 问题

在这一章, 我们将利用配置法在分级网格上求解反常对流的分数阶 Laplacian 问题, 并进行误差分析.

为了方便讨论, 我们将分数阶 Laplacian 问题中的常数系数 $C_{n,\alpha}$ 因子移除. 取 $0 < \alpha < 1$, $\Omega = (a, b)$, 其中 $-\infty < a < b < \infty$. 在本章中, 我们主要研究问题:

$$\begin{cases} Lu(x) = f(x), & x \in \Omega, \\ u(x) = 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \Omega, \end{cases} \quad (3.1)$$

其中非局部算子定义为

$$Lu(x) = \text{P.V.} \int_{\mathbb{R}} \frac{u(x) - u(y)}{|x - y|^{1+\alpha}} dy.$$

3.1 数值格式

用分级网格 π_h 对 Ω 进行划分

$$\pi_h : x_0 = a < x_1 < x_2 < \cdots < x_{2N-1} < x_{2N} = b,$$

其中

$$x_j = \begin{cases} a + \frac{b-a}{2} \left(\frac{j}{N}\right)^r, & \text{其中 } j = 0, 1, \dots, N, \\ b - \frac{b-a}{2} \left(2 - \frac{j}{N}\right)^r, & \text{其中 } j = N+1, N+2, \dots, 2N, \end{cases} \quad (3.2)$$

$r \geq 1$ 是分级指数. 当 $r > 1$ 时, 网格点聚集在 $x = a$ 和 $x = b$ 附近. 对于 $j = 1, 2, \dots, 2N$, 令 $h_j = x_j - x_{j-1}$, 并且 $h := \max_j h_j$.

空间 S^h 为在网格 π_h 上全局连续的分段线性函数的集合. 在这个空间中, 我们选择标准帽函数 $\{\phi_j(x)\}_{j=0}^{2N}$ 作为基函数, 并定义真实解 $u(x)$ 的分段线性插值函数为 $(u(x_0) = u(x_{2N}) = 0)$

$$\Pi_h u(x) := \sum_{j=0}^{2N} u(x_j) \phi_j(x) = \sum_{j=1}^{2N-1} u(x_j) \phi_j(x).$$

通过在每个网格点 x_i 处进行插值来离散 (3.1). 将 $u(x)$ 替换为一个连续的分段线性函数 $u_h(x) := \sum_{j=1}^{2N-1} u_j \phi_j(x)$, 其中 u_j 是待确定的节点值 ($i = 1, 2, \dots, 2N-1$):

$$L_h u_h(x_i) := \int_{\mathbb{R}} \frac{\sum_{j=1}^{2N-1} u_j \phi_j(x_i) - \sum_{j=1}^{2N-1} u_j \phi_j(y)}{|x_i - y|^{1+\alpha}} dy = f(x_i) =: f_i. \quad (3.3)$$

这里

$$L_h u_h(x_i) = \sum_{j=1}^{2N-1} u_j \int_{\mathbb{R}} \frac{\phi_j(x_i) - \phi_j(y)}{|x_i - y|^{1+\alpha}} dy = \sum_{j=1}^{2N-1} a_{ij} u_j, \quad (3.4)$$

其中 $a_{ij} := \int_{\mathbb{R}} [\phi_j(x_i) - \phi_j(y)] |x_i - y|^{-1-\alpha} dy$, $i, j = 1, 2, \dots, 2N-1$.

用 $\Pi_h u(x)$ 逼近 (3.1) $Lu(x) = f(x)$ 中的 $u(x)$, 则在 π_h 上有局部截断误差:

$$R_i := L_h u(x_i) - Lu(x_i), \quad i = 1, 2, \dots, 2N-1, \quad (3.5)$$

其中

$$L_h u(x_i) = L(\Pi_h u)(x_i) = \sum_{j=1}^{2N-1} a_{ij} u(x_j). \quad (3.6)$$

由(3.3)和(3.4)推导的离散方程组具有矩阵-向量形式

$$AU = F, \quad (3.7)$$

其中刚度矩阵 A 和向量 U 、 F 定义为

$$A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{(2N-1) \times (2N-1)}, \quad U = (u_1, u_2, \dots, u_{2N-1})^T, \quad F = (f_1, f_2, \dots, f_{2N-1})^T.$$

接下来, 对刚度矩阵的性质进行分析.

对于 $j \geq i+2$, 我们有:

$$\begin{aligned} a_{ij} &= \int_{\mathbb{R}} \frac{\phi_j(x_i) - \phi_j(y)}{|x_i - y|^{1+\alpha}} dy \\ &= \frac{1}{\alpha(1-\alpha)} \left[\frac{(x_{j-1} - x_i)^{1-\alpha}}{h_j} - \frac{(h_{j+1} + h_j)(x_j - x_i)^{1-\alpha}}{h_j h_{j+1}} + \frac{(x_{j+1} - x_i)^{1-\alpha}}{h_{j+1}} \right]. \end{aligned}$$

类似地, 对于 $j \leq i-2$, 我们有:

$$a_{ij} = \frac{1}{\alpha(1-\alpha)} \left[\frac{(x_i - x_{j-1})^{1-\alpha}}{h_j} - \frac{(h_{j+1} + h_j)(x_i - x_j)^{1-\alpha}}{h_j h_{j+1}} + \frac{(x_i - x_{j+1})^{1-\alpha}}{h_{j+1}} \right].$$

对于 $j = i+1$, 有:

$$\begin{aligned} a_{ij} &= \int_{\mathbb{R}} \frac{\phi_j(x_i) - \phi_j(y)}{|x_i - y|^{1+\alpha}} dy \\ &= \frac{1}{\alpha(1-\alpha)} \left[-\frac{(h_{j+1} + h_j)(x_j - x_i)^{1-\alpha}}{h_j h_{j+1}} + \frac{(x_{j+1} - x_i)^{1-\alpha}}{h_{j+1}} \right], \end{aligned}$$

类似地, 对于 $j = i-1$, 我们有:

$$a_{ij} = \frac{1}{\alpha(1-\alpha)} \left[\frac{(x_i - x_{j-1})^{1-\alpha}}{h_j} - \frac{(h_{j+1} + h_j)(x_i - x_j)^{1-\alpha}}{h_j h_{j+1}} \right].$$

最后, 对于 $j = i$, 我们有:

$$\begin{aligned} a_{ii} &= \int_{\mathbb{R}} \frac{\phi_i(x_i) - \phi_i(y)}{|x_i - y|^{1+\alpha}} dy \\ &= \frac{1}{\alpha(1-\alpha)} \left[\frac{(x_i - x_{i-1})^{1-\alpha}}{h_i} + \frac{(x_{i+1} - x_i)^{1-\alpha}}{h_{i+1}} \right]. \end{aligned}$$

因此, 我们得到了如下结果.

引理 3.1 当 $\alpha \in (0, 1)$ 时, 刚度矩阵 $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{(2N-1) \times (2N-1)}$ 的元素可以显式表达为:

$$a_{ij} = \frac{1}{\alpha(1-\alpha)} C_j D_j^i,$$

其中

$$C_j = \left(\frac{1}{h_j}, -\frac{1}{h_j} - \frac{1}{h_{j+1}}, \frac{1}{h_{j+1}} \right) \text{ 和 } D_j^i = \begin{pmatrix} |x_{j-1} - x_i|^{1-\alpha} \\ |x_j - x_i|^{1-\alpha} \\ |x_{j+1} - x_i|^{1-\alpha} \end{pmatrix}.$$

引理 3.2 由 (3.7) 定义的矩阵 A 是严格行对角占优的, 且主对角线上的元素为正, 非对角线上的元素为负.

证明 任取 $i \in \{1, 2, \dots, 2N-1\}$, 则有

$$a_{ii} = \frac{1}{\alpha(1-\alpha)} (h_i^{-\alpha} + h_{i+1}^{-\alpha}) > 0.$$

接下来, 考虑 a_{ij} 的情况. 对于 $j \neq i$, 由引理 3.1 可知

$$\begin{aligned} a_{ij} &= \frac{1}{\alpha(1-\alpha)} \left[\frac{|x_{j-1} - x_i|^{1-\alpha}}{h_j} - \frac{(h_{j+1} + h_j)|x_j - x_i|^{1-\alpha}}{h_j h_{j+1}} + \frac{|x_{j+1} - x_i|^{1-\alpha}}{h_{j+1}} \right] \\ &= \omega_j \left[\frac{h_{j+1}}{h_{j+1} + h_j} |x_{j-1} - x_i|^{1-\alpha} - |x_j - x_i|^{1-\alpha} + \frac{h_j}{h_{j+1} + h_j} |x_{j+1} - x_i|^{1-\alpha} \right], \end{aligned}$$

其中 $\omega_j := \frac{h_{j+1} + h_j}{\alpha(1-\alpha)h_j h_{j+1}} > 0$.

因为 $x_{j+1} - x_i, x_j - x_i$ 和 $x_{j-1} - x_i$ 都具有相同的符号 (≥ 0 或 ≤ 0), 所以

$$\frac{h_{j+1}}{h_{j+1} + h_j} |x_{j-1} - x_i| + \frac{h_j}{h_{j+1} + h_j} |x_{j+1} - x_i| = |x_j - x_i|.$$

但是 $x \mapsto x^{1-\alpha}$ 是一个凹函数 (其中 $0 < \alpha < 1$ 且 $x \geq 0$), 因此由 Jensen 不等式可得:

$$\frac{h_{j+1}}{h_{j+1} + h_j} |x_{j-1} - x_i|^{1-\alpha} + \frac{h_j}{h_{j+1} + h_j} |x_{j+1} - x_i|^{1-\alpha} < |x_j - x_i|^{1-\alpha}.$$

所以对于 $j \neq i$, 有 $a_{ij} < 0$.

最后, 由 a_{ij} 的定义可以计算出下列结论:

$$\begin{aligned} |a_{ii}| - \sum_{j=1, j \neq i}^{2N-1} |a_{ij}| &= \sum_{j=1}^{2N-1} a_{ij} = \int_{\mathbb{R}} \frac{1 - \sum_{j=1}^{2N-1} \phi_j(y)}{|x_i - y|^{1+\alpha}} dy \\ &= \frac{1}{\alpha(1-\alpha)} \left[\frac{(x_i - a)^{1-\alpha} - (x_i - h_1 - a)^{1-\alpha}}{h_1} + \frac{(b - x_i)^{1-\alpha} - (b - h_{2N} - x_i)^{1-\alpha}}{h_{2N}} \right] > 0, \end{aligned}$$

即 A 是一个严格行对角占优的矩阵. \square

3.2 解的正则性

对于任意的 $\beta > 0$, 我们使用标准符号 $C^\beta(\bar{\Omega}), C^\beta(\mathbb{R})$ 等表示 Hölder 空间及其范数和半范数.

首先考虑一个简单的例子.

例 3.1 假设在 (3.1) 中 $f(x) \equiv 1$. 即考虑如下问题:

$$\begin{cases} \int_{\mathbb{R}} \frac{v(x) - v(y)}{|x - y|^{1+\alpha}} dy = 1, & x \in \Omega, \\ v(x) = 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \Omega, \end{cases}$$

其中 $0 < \alpha < 1$.

这个问题的精确解是 $v(x) = \varpi [(x - a)(b - x)]^{\alpha/2}$ 其中 $x \in \bar{\Omega}$, $\varpi := \frac{\alpha}{2\Gamma(1-\frac{\alpha}{2})\Gamma(1+\frac{\alpha}{2})}$. 因此 $v \in C^{\alpha/2}(\mathbb{R})$. 显然存在一个常数 C , 使得

$$|v^{(\ell)}(x)| \leq C[(x - a)(b - x)]^{(\alpha/2) - \ell}, \quad x \in \Omega, \quad \ell = 0, 1, 2.$$

现在回到问题 (3.1), [36] 的结果表明: 即使 f 是充分光滑的, 解 u 也具有类似例 3.1 的正则性.

定义 $\delta(x) := \text{dist}(x, \partial\Omega)$ 和 $\delta(x, y) := \min\{\delta(x), \delta(y)\}$, 其中 $x, y \in \Omega$.

定理 3.3 ^[36] 若 $f \in L^\infty(\Omega)$, u 是方程 (3.1) 的解, 则存在某个 $\sigma \in (0, \alpha/2)$, 使得函数 $u/\delta^{\alpha/2} \in C^\sigma(\bar{\Omega})$, 且满足以下不等式:

$$\|u/\delta^{\alpha/2}\|_{C^\sigma(\bar{\Omega})} \leq C\|f\|_{L^\infty(\Omega)},$$

其中 $C = C(\Omega, \alpha)$ 是常数.

特别地, 这个结果表明如果 $f \in L^\infty(\Omega)$, 那么对于所有的 $x \in \bar{\Omega}$, 都有

$$|u(x)| \leq C[(x - a)(b - x)]^{\alpha/2}. \quad (3.8)$$

为了分析函数 u 的导数, 我们引入一些额外的定义. 对于任意 $\beta > 0$, 我们将 β 表示为 $\beta = k + \beta'$, 其中 k 是整数, 且 $0 < \beta' \leq 1$. 取 θ 满足 $-\beta \leq \theta$, 定义半范数

$$|w|_{\beta}^{(\theta)} := \sup_{x, y \in \Omega} \delta(x, y)^{\beta+\theta} \frac{|w^{(k)}(x) - w^{(k)}(y)|}{|x - y|^{\beta'}}$$

和对应的范数

$$\|w\|_{\beta}^{(\theta)} := \begin{cases} \sum_{\ell=0}^k \sup_{x \in \Omega} \{ \delta(x)^{\ell+\theta} |w^{(\ell)}(x)| \} + |w|_{\beta}^{(\theta)}, & \theta \geq 0, \\ \|w\|_{C^{-\theta}(\Omega)} + \sum_{\ell=1}^k \sup_{x \in \Omega} \{ \delta(x)^{\ell+\theta} |w^{(\ell)}(x)| \} + |w|_{\beta}^{(\theta)}, & -1 < \theta < 0. \end{cases}$$

定理 3.4 ^[36] 若 $\beta > 0$, β 和 $\beta + \alpha$ 都不是整数, 并且 $f \in C^{\beta}(\Omega)$, 满足 $\|f\|_{\beta}^{(\alpha/2)} < \infty$, $u \in C^{\alpha/2}(\mathbb{R})$ 是方程 (3.1) 的解, 则 $u \in C^{\beta+\alpha}(\Omega)$, 且满足

$$\|u\|_{\beta+\alpha}^{(-\alpha/2)} \leq C \left(\|u\|_{C^{\alpha/2}(\mathbb{R})} + \|f\|_{\beta}^{(\alpha/2)} \right),$$

其中 $C = C(\Omega, \alpha, \beta)$.

推论 3.5 若 $f \in C^{\beta}(\Omega)$, 其中 $\beta = 2 - \alpha + \sigma$, 且满足 $\alpha < \sigma < 1$, 则存在常数 $C = C(\Omega, \alpha, \beta, f)$, 使得对于所有 $x \in \Omega$ 和 $\ell = 0, 1, 2$, 有

$$|u^{(\ell)}(x)| \leq C[(x-a)(b-x)]^{(\alpha/2)-\ell}.$$

证明 我们的假设意味着 $2 < \beta < 3$ 且 $2 < \beta + \alpha < 3$, 即 β 和 $\beta + \alpha$ 都不是整数. 那么由定理 3.4, 可知

$$\|u\|_{2+\sigma}^{(-\alpha/2)} \leq C \left(\|u\|_{C^{\alpha/2}(\mathbb{R})} + \|f\|_{\beta}^{(\alpha/2)} \right).$$

特别地,

$$\sum_{\ell=1}^2 \sup_{x \in \Omega} \{ \delta(x)^{\ell-\alpha/2} |u^{(\ell)}(x)| \} \leq C \left(\|u\|_{C^{\alpha/2}(\mathbb{R})} + \|f\|_{\beta}^{(\alpha/2)} \right), \quad x \in \Omega.$$

对于 $\ell = 1, 2$, 这就是所需的结果. $\ell = 0$ 的情况 (3.8) 已经给出. \square

3.3 误差分析

为了方便讨论, 我们取 $\Omega = (0, 2T)$ 并将 (3.2) 重写为

$$x_j = \begin{cases} T \left(\frac{j}{N} \right)^r, & \text{其中 } j = 0, 1, \dots, N, \\ 2T - T \left(2 - \frac{j}{N} \right)^r, & \text{其中 } j = N+1, N+2, \dots, 2N. \end{cases} \quad (3.9)$$

根据中值定理和 $\{x_j\}$ 的定义, 可得

$$h_j \leq \begin{cases} TN^{-r} r j^{r-1} \leq CN^{-r} j^{r-1}, & \text{其中 } j = 1, \dots, N, \\ CN^{-r} (2N+1-j)^{r-1}, & \text{其中 } j = N+1, \dots, 2N. \end{cases} \quad (3.10)$$

特别地, 对于 $r \geq 1$ 存在常数 C 使得 $h = \max_j h_j \leq CN^{-1}$.

3.3.1 局部截断误差

在本节中, 我们对局部截断误差 $R_i = L_h u(x_i) - Lu(x_i)$ 进行了详细分析, 分析思路主要参考 [18, 39], 并假设推论 3.5 的条件得到满足, 即 $u \in C^2(0, 2T) \cap C^\alpha[0, 2T]$.

令 $i \in \{1, 2, \dots, 2N-1\}$. 由 (3.1) 和 (3.6), 我们有

$$Lu(x_i) - L_h u(x_i) = \int_0^{x_i} \frac{\Pi_h u(y) - u(y)}{(x_i - y)^{1+\alpha}} dy + \int_{x_i}^{2T} \frac{\Pi_h u(y) - u(y)}{(y - x_i)^{1+\alpha}} dy = \sum_{j=1}^{2N} T_{i,j},$$

其中

$$T_{i,j} := \int_{x_{j-1}}^{x_j} \frac{\Pi_h u(y) - u(y)}{|x_i - y|^{1+\alpha}} dy, \quad j = 1, \dots, 2N. \quad (3.11)$$

在本小节中, 我们将在引理 3.6–3.8 中对 $\sum_{j=1}^{2N} |T_{i,j}|$ 进行估计.

因为 $u \in C^2(0, 2T)$, 由线性插值的一般误差估计方法可得

$$|T_{i,j}| \leq Ch_j^2 \left(\max_{s \in [x_{j-1}, x_j]} |u''(s)| \right) \int_{x_{j-1}}^{x_j} |x_i - y|^{-1-\alpha} dy, \quad j \neq 1, i, i+1, 2N. \quad (3.12)$$

此外, 对 (3.11) 进行分部积分得到

$$T_{i,j} = \frac{1}{\alpha} \int_{x_{j-1}}^{x_j} \frac{(\Pi_h u)'(y) - u'(y)}{|x_i - y|^\alpha} [\text{sign}(y - x_i)] dy, \quad j = 1, \dots, 2N. \quad (3.13)$$

在估计 $T_{i,j}$ 时, 这种形式有时比 (3.12) 更方便, 并且由 (3.13) 可得

$$|T_{i,j}| \leq Ch_j \left(\max_{s \in [x_{j-1}, x_j]} |u''(s)| \right) \int_{x_{j-1}}^{x_j} |x_i - y|^{-\alpha} dy, \quad j \neq 1, 2N. \quad (3.14)$$

分析过程中偶尔会使用以下的插值误差估计:

$$|(u - \Pi_h u)(x)| = \left| \frac{x_{i+1} - x}{h_{i+1}} \int_{x_i}^x u'(s) ds - \frac{x - x_i}{h_{i+1}} \int_x^{x_{i+1}} u'(s) ds \right| \leq \int_{x_i}^{x_{i+1}} |u'(s)| ds. \quad (3.15)$$

引理 3.6 存在常数 C 使得对于任意 $i \in \{1, \dots, N\}$, 有

$$\sum_{j=1}^i |T_{i,j}| \leq CN^{r\alpha/2} i^{-\min\{r\frac{\alpha}{2}+2-\alpha, r(1+\alpha)\}}.$$

证明 任取 $i \in \{1, \dots, N\}$, 分别考虑 $j = 1 = i$ 、 $j = 1 < i$ 、 $1 < j = i$ 和 $1 < j < i$ 的情况.

当 $j = 1 = i$ 时, 由 (3.13) 可知

$$T_{1,1} = \frac{-1}{\alpha} \int_{x_0}^{x_1} \left[\frac{u(x_1) - u(x_0)}{x_1 - x_0} - u'(y) \right] (x_1 - y)^{-\alpha} dy.$$

其中

$$\begin{aligned} \left| \int_{x_0}^{x_1} \frac{u(x_1) - u(x_0)}{x_1 - x_0} (x_1 - y)^{-\alpha} dy \right| &= \left| \frac{x_1^{-\alpha}}{1 - \alpha} (u(x_1) - u(x_0)) \right| = \left| \frac{x_1^{-\alpha}}{1 - \alpha} \int_{x_0}^{x_1} u'(y) dy \right| \\ &\leq C x_1^{-\alpha} \int_{x_0}^{x_1} y^{\frac{\alpha}{2}-1} dy = C N^{r\alpha/2}, \end{aligned}$$

$$\left| \int_{x_0}^{x_1} u'(y) (x_1 - y)^{-\alpha} dy \right| \leq C \int_{x_0}^{x_1} y^{\frac{\alpha}{2}-1} (x_1 - y)^{-\alpha} dy = C x_1^{-\alpha/2} = C N^{r\alpha/2},$$

这里我们使用了 Beta 函数的性质.

因此,

$$|T_{1,1}| \leq C N^{r\alpha/2}. \quad (3.16)$$

当 $j = 1 < i$ 时, 由 (3.11)、(3.15) 和推论 3.5, 我们可以得到

$$\begin{aligned} |T_{i,1}| &= \left| \int_{x_0}^{x_1} \frac{\Pi_h u(y) - u(y)}{(x_i - y)^{1+\alpha}} dy \right| \leq \frac{1}{(x_i - x_1)^{1+\alpha}} \int_{x_0}^{x_1} |\Pi_h u(y) - u(y)| dy \\ &\leq C x_i^{-1-\alpha} \int_{x_0}^{x_1} \left(\int_{x_0}^{x_1} |u'(s)| ds \right) dy \\ &\leq C x_i^{-1-\alpha} \int_{x_0}^{x_1} \left(\int_{x_0}^{x_1} s^{\frac{\alpha}{2}-1} ds \right) dy \\ &= C x_i^{-1-\alpha} x_1^{\frac{\alpha}{2}+1} = C N^{r\alpha/2} i^{-r(1+\alpha)}. \end{aligned} \quad (3.17)$$

当 $j = i > 1$ 时, 由 (3.14) 可得

$$|T_{i,i}| \leq C h_i \left(\max_{s \in [x_{i-1}, x_i]} |u''(s)| \right) \int_{x_{i-1}}^{x_i} (x_i - y)^{-\alpha} dy = C h_i \left(\max_{s \in [x_{i-1}, x_i]} |u''(s)| \right) h_i^{1-\alpha}.$$

因此, 从 (3.9), (3.10) 和推论 3.5 可以推导出

$$|T_{i,i}| \leq C \left(N^{-r} i^{r-1} \right)^{2-\alpha} (N^{-r} i^r)^{\frac{\alpha}{2}-2} = C N^{r\alpha/2} i^{-r\frac{\alpha}{2}-(2-\alpha)}, \text{ 其中 } i > 1. \quad (3.18)$$

当 $1 < j < i$ 时, 由 (3.12)、推论 3.5、(3.9) 和 (3.10) 可以得到

$$\begin{aligned} |T_{i,j}| &\leq C h_j^2 x_{j-1}^{\frac{\alpha}{2}-2} \int_{x_{j-1}}^{x_j} (x_i - y)^{-1-\alpha} dy \leq C h_j^3 x_{j-1}^{\frac{\alpha}{2}-2} (x_i - x_j)^{-1-\alpha} \\ &\leq C N^{r\alpha/2} j^{3(r-1)} (j-1)^{r(\frac{\alpha}{2}-2)} (i^r - j^r)^{-1-\alpha} \\ &\leq C N^{r\alpha/2} j^{(\frac{\alpha}{2}+1)-3} (i^r - j^r)^{-1-\alpha}. \end{aligned} \quad (3.19)$$

由 (3.19) 和级数 $\sum_{j=2}^{\infty} j^{\mu}$ ($\mu \in \mathbb{R}$) 的敛散性, 我们有

$$\begin{aligned} \sum_{j=2}^{[i/2]} |T_{i,j}| &\leq CN^{r\alpha/2} i^{-r(1+\alpha)} \sum_{j=2}^{[i/2]} j^{r(\frac{\alpha}{2}+1)-3} \\ &\leq \begin{cases} CN^{r\alpha/2} i^{-r(\alpha+1)}, & \text{如果 } r(\frac{\alpha}{2}+1) < 2, \\ CN^{r\alpha/2} i^{-r(\alpha+1)} \ln i, & \text{如果 } r(\frac{\alpha}{2}+1) = 2, \\ CN^{r\alpha/2} i^{-r\frac{\alpha}{2}-2}, & \text{如果 } r(\frac{\alpha}{2}+1) > 2. \end{cases} \end{aligned} \quad (3.20)$$

对于 $[i/2]+1 \leq j \leq i-1$, 利用 (3.19)、(3.12)、(3.10) 和推论 3.5, 可以对 $T_{i,j}$ 进行如下估计:

$$\begin{aligned} |T_{i,j}| &\leq C(N^{-r} j^{r-1})^2 (N^{-r} (j-1)^r)^{\frac{\alpha}{2}-2} \int_{x_{j-1}}^{x_j} (x_i - y)^{-1-\alpha} dy \\ &\leq C(N^{-r} i^{r-1})^2 (N^{-r} i^r)^{\frac{\alpha}{2}-2} \int_{x_{j-1}}^{x_j} (x_i - y)^{-1-\alpha} dy \\ &\leq CN^{-r\alpha/2} i^{r\frac{\alpha}{2}-2} \int_{x_{j-1}}^{x_j} (x_i - y)^{-1-\alpha} dy. \end{aligned}$$

因此, 由 (3.10) 可知

$$\begin{aligned} \sum_{j=[i/2]+1}^{i-1} |T_{i,j}| &\leq CN^{-r\alpha/2} i^{r\frac{\alpha}{2}-2} \int_{x_{[i/2]}}^{x_{i-1}} (x_i - y)^{-1-\alpha} dy \\ &\leq CN^{-r\alpha/2} i^{r\frac{\alpha}{2}-2} (x_i - x_{i-1})^{-\alpha} \\ &\leq CN^{-r\alpha/2} i^{r\frac{\alpha}{2}-2} (N^{-r} i^{r-1})^{-\alpha} \\ &\leq CN^{r\alpha/2} i^{-r\frac{\alpha}{2}-(2-\alpha)}. \end{aligned} \quad (3.21)$$

由于 $r(\frac{\alpha}{2}+1) \geq 2$ 所以 $r(\alpha+1) > r\frac{\alpha}{2}+2-\alpha$. 因此由 (3.20) 和 (3.21), 可知

$$\sum_{j=2}^{i-1} |T_{i,j}| \leq CN^{r\alpha/2} i^{-\min\{r\frac{\alpha}{2}+2-\alpha, r(\alpha+1)\}}. \quad (3.22)$$

最后, 将不等式 (3.16)、(3.17)、(3.18) 和 (3.22) 相加即可得出所需结果. \square

引理 3.7 存在常数 C , 使得对于任意 $i \in \{1, \dots, N-1\}$, 都有

$$\sum_{j=i+1}^N |T_{i,j}| \leq CN^{r\alpha/2} i^{-\frac{r\alpha}{2}+\alpha-2}.$$

证明 任取 $i \in \{1, \dots, N-1\}$.

首先分析 $T_{i,i+1}$. 通过 (3.14)、(3.9) 和 (3.10), 我们有

$$\begin{aligned}
 |T_{i,i+1}| &\leq Ch_{i+1} \left(\max_{s \in [x_i, x_{i+1}]} |u''(s)| \right) \int_{x_i}^{x_{i+1}} (y - x_i)^{-\alpha} dy \\
 &\leq Ch_{i+1} x_i^{\frac{\alpha}{2}-2} (x_{i+1} - x_i)^{1-\alpha} = Ch_{i+1}^{2-\alpha} x_i^{\frac{\alpha}{2}-2} \\
 &\leq C (N^{-r} i^{r-1})^{2-\alpha} (N^{-r} i^r)^{\frac{\alpha}{2}-2} \\
 &= CN^{\frac{r\alpha}{2}} i^{-r\frac{\alpha}{2}-(2-\alpha)}.
 \end{aligned} \tag{3.23}$$

接下来, 令 $J = \min\{2i, N\}$. 利用 (3.12)、推论 3.5、(3.9) 和 (3.10), 可以算出

$$\begin{aligned}
 \sum_{j=i+2}^J |T_{i,j}| &\leq C \sum_{j=i+2}^J h_j^2 x_j^{\frac{\alpha}{2}-2} \int_{x_{j-1}}^{x_j} (y - x_i)^{-1-\alpha} dy \\
 &\leq Ch_i^2 x_i^{\frac{\alpha}{2}-2} \sum_{j=i+2}^J \int_{x_{j-1}}^{x_j} (y - x_i)^{-1-\alpha} dy \\
 &\leq Ch_i^2 x_i^{\frac{\alpha}{2}-2} (x_{i+1} - x_i)^{-\alpha} \leq Ch_i^{2-\alpha} x_i^{\frac{\alpha}{2}-2} \\
 &\leq C (N^{-r} i^{r-1})^{2-\alpha} (N^{-r} i^r)^{\frac{\alpha}{2}-2} = CN^{r\alpha/2} i^{-r\frac{\alpha}{2}-(2-\alpha)}.
 \end{aligned} \tag{3.24}$$

最后, 当 $2i < N$ (即 $J = 2i$) 时, 由 (3.12) 可知

$$\begin{aligned}
 \sum_{j=J+1}^N |T_{i,j}| &\leq C \sum_{j=2i+1}^N h_j^2 x_j^{\frac{\alpha}{2}-2} \int_{x_{j-1}}^{x_j} |x_i - y|^{-1-\alpha} dy \\
 &\leq C \sum_{j=2i+1}^N h_j^2 x_j^{\frac{\alpha}{2}-2} h_j x_j^{-1-\alpha} = C \sum_{j=2i+1}^N h_j^3 x_j^{-\frac{\alpha}{2}-3} \\
 &\leq C \sum_{j=2i+1}^N (N^{-r} j^{r-1})^3 (N^{-r} j^r)^{-\frac{\alpha}{2}-3} \\
 &= CN^{r\alpha/2} \sum_{j=2i+1}^N j^{-r\frac{\alpha}{2}-3} \\
 &\leq CN^{r\alpha/2} i^{-r\frac{\alpha}{2}-2}.
 \end{aligned} \tag{3.25}$$

将 (3.23)、(3.24) 和 (3.25) 相加即可得到所需结果. \square

引理 3.8 存在常数 C , 对于任意 $i \in \{1, \dots, N\}$, 都有

$$\sum_{j=N+1}^{2N} |T_{i,j}| \leq CN^{r\alpha/2} i^{-\min\{r\frac{\alpha}{2}+2-\alpha, r(1+\alpha)\}}.$$

证明 任取 $i \in \{1, \dots, N\}$.

首先考虑 $T_{i,N+1}$. 如果 $i < N$, 则根据 (3.12) 和推论 3.5, 我们有

$$\begin{aligned}
 |T_{i,N+1}| &\leq Ch_{N+1}^2 \left(\max_{s \in [x_N, x_{N+1}]} |u''(s)| \right) \int_{x_N}^{x_{N+1}} (y - x_i)^{-1-\alpha} dy \\
 &\leq Ch_{N+1}^3 (x_N - x_i)^{-1-\alpha} \leq Ch_{N+1}^3 h_N^{-1-\alpha} \leq CN^{\alpha-2},
 \end{aligned}$$

而如果 $i = N$, 则根据 (3.14) 和推论 3.5, 我们有

$$\begin{aligned} |T_{i,N+1}| &\leq Ch_{N+1} \left(\max_{s \in [x_N, x_{N+1}]} |u''(s)| \right) \int_{x_N}^{x_{N+1}} (y - x_i)^{-\alpha} dy \\ &\leq Ch_{N+1} (x_{N+1} - x_N)^{1-\alpha} = Ch_{N+1}^{2-\alpha} \leq CN^{\alpha-2}. \end{aligned}$$

因此, 对于任意 $i \in \{1, \dots, N\}$, 我们有

$$|T_{i,N+1}| \leq CN^{\alpha-2}. \quad (3.26)$$

接下来, 根据 (3.12) 和推论 3.5, 我们有

$$\begin{aligned} \sum_{j=N+2}^{\lceil 3N/2 \rceil} |T_{i,j}| &\leq C \sum_{j=N+2}^{\lceil 3N/2 \rceil} h_j^2 \left(\max_{s \in [x_{j-1}, x_j]} |u''(s)| \right) \int_{x_{j-1}}^{x_j} (y - x_i)^{-1-\alpha} dy \\ &\leq C \sum_{j=N+2}^{\lceil 3N/2 \rceil} N^{-2} \int_{x_{j-1}}^{x_j} (y - x_i)^{-1-\alpha} dy \\ &\leq CN^{-2} (x_{N+1} - x_i)^{-\alpha} \\ &\leq CN^{\alpha-2}. \end{aligned} \quad (3.27)$$

令 $k = 2N - j$, 再次利用 (3.9)、(3.10)、(3.12) 和推论 3.5, 我们可以得到

$$\begin{aligned} \sum_{j=\lceil 3N/2 \rceil+1}^{2N-1} |T_{i,j}| &\leq C \sum_{j=\lceil 3N/2 \rceil+1}^{2N-1} h_j^2 \left(\max_{s \in [x_{j-1}, x_j]} |u''(s)| \right) \int_{x_{j-1}}^{x_j} (y - x_i)^{-1-\alpha} dy \\ &\leq C \sum_{j=\lceil 3N/2 \rceil+1}^{2N-1} h_j^3 (2T - x_j)^{\frac{\alpha}{2}-2} \\ &\leq C \sum_{j=\lceil 3N/2 \rceil+1}^{2N-1} N^{-3r} (2N + 1 - j)^{3(r-1)} \left(2 - \frac{j}{N} \right)^{r(\frac{\alpha}{2}-2)} \\ &\leq C \sum_{k=1}^{\lceil N/2 \rceil} N^{-3r} k^{3(r-1)} \left(\frac{k}{N} \right)^{r(\frac{\alpha}{2}-2)} = CN^{-r(1+\frac{\alpha}{2})} \sum_{k=1}^{\lceil N/2 \rceil} k^{r(1+\frac{\alpha}{2})-3} \\ &\leq \begin{cases} CN^{-r(1+\frac{\alpha}{2})}, & \text{如果 } r(1+\frac{\alpha}{2}) < 2, \\ CN^{-r(1+\frac{\alpha}{2})} \ln N, & \text{如果 } r(1+\frac{\alpha}{2}) = 2, \\ CN^{-2}, & \text{如果 } r(1+\frac{\alpha}{2}) > 2. \end{cases} \end{aligned} \quad (3.28)$$

最后, 利用 (3.9)、(3.11)、(3.15) 和推论 3.5, 我们有

$$\begin{aligned} |T_{i,2N}| &\leq \int_{x_{2N-1}}^{x_{2N}} \frac{|\Pi_h u(y) - u(y)|}{(y - x_i)^{1+\alpha}} dy \\ &\leq C \int_{x_{2N-1}}^{x_{2N}} \left(\int_{x_{2N-1}}^{x_{2N}} |u'(s)| ds \right) dy \\ &\leq C \int_{x_{2N-1}}^{x_{2N}} \left(\int_{x_{2N-1}}^{x_{2N}} (2T - s)^{\frac{\alpha}{2}-1} ds \right) dy \\ &\leq C (x_{2N} - x_{2N-1})^{\frac{\alpha}{2}+1} \leq CN^{-r(1+\frac{\alpha}{2})}. \end{aligned} \quad (3.29)$$

将 (3.26)–(3.29) 组合, 由 $r(1 + \frac{\alpha}{2}) \geq 2 > 2 - \alpha$ 可知

$$\sum_{j=N+1}^{2N} |T_{i,j}| \leq CN^{-\min\{2-\alpha, r(1+\frac{\alpha}{2})\}} \leq CN^{r\alpha/2} i^{-\min\{r\frac{\alpha}{2}+2-\alpha, r(1+\alpha)\}}.$$

□

引理 3.9 令 $Lu(x_i)$ 和 $L_h u(x_i)$ 分别由 (3.1) 和 (3.6) 定义, 则存在常数 C , 使得

$$|R_i| = |Lu(x_i) - L_h u(x_i)| \leq \begin{cases} CN^{r\alpha/2} i^{-\min\{r\frac{\alpha}{2}+2-\alpha, r(1+\alpha)\}}, & i = 1, 2, \dots, N, \\ CN^{r\alpha/2} (2N-i)^{-\min\{r\frac{\alpha}{2}+2-\alpha, r(1+\alpha)\}}, & i = N+1, N+2, \dots, 2N-1. \end{cases}$$

证明 对于 $i \in \{1, 2, \dots, N\}$, 这个结果可以由 $T_{i,j}$ 的定义和引理 3.6–3.8 得到.

对于 $i \in \{N+1, N+2, \dots, 2N-1\}$, 首先观察到网格 (3.9) 关于 $x = T$ 对称 (即, 如果 $x = x_i$ 是一个网格点, 那么 $x = 2T - x_i = x_{2N-i}$ 也是一个网格点), 并且引理 3.5 中的先验导数上界也关于 $x = T$ 对称, 其次网格点的位置和这些导数上界是分析 $i = 1, 2, \dots, N$ 情况的唯一要素.

因此, 可以定义 $\tilde{u}(x) = u(2T - x)$, 现在 $u(x)$ 在 $i = N+1, N+2, \dots, 2N-1$ 处的截断误差与 $\tilde{u}(x)$ 在 $i = N-1, N-2, \dots, 1$ 处的截断误差完全相同, 可以用与引理 3.6–3.8 中 $u(x)$ 的截断误差分析完全相同的方式对 $\tilde{u}(x)$ 在 $i = N-1, N-2, \dots, 1$ 处的截断误差进行分析. 最后通过变换 $x \mapsto 2T - x$, 我们得到 $u(x)$ 在 $i = N+1, N+2, \dots, 2N-1$ 处的截断误差分析. □

3.3.2 收敛性分析

接下来, 对离散格式(3.7)的全局收敛性进行证明.

定理 3.10 令 u_i 是由离散格式(3.7)计算得到的 $u(x_i)$ 的近似解, 则存在常数 C , 使得

$$\max_{1 \leq i \leq 2N-1} |u(x_i) - u_i| \leq CN^{-\min\{2-\alpha, r\alpha/2\}}.$$

证明 令 $\epsilon_i = u(x_i) - u_i$, $i \in \{1, 2, \dots, 2N-1\}$, 且 $\epsilon_0 = \epsilon_{2N} = 0$. 从(3.4)和(3.6)可知

$$\sum_{j=1}^{2N-1} a_{ij} \epsilon_j = R_i, \quad i = 1, 2, \dots, 2N-1.$$

取 i_0 使得 $|\epsilon_{i_0}| = \max_{1 \leq i \leq 2N-1} |\epsilon_i|$. 回顾引理 4.2, 我们知道 $a_{i_0, i_0} > 0$ 且 $a_{i_0, j} < 0$ ($j \neq i_0$).

因此,

$$\begin{aligned}
|R_{i_0}| &= \left| a_{i_0, i_0} \epsilon_{i_0} + \sum_{j=1, j \neq i_0}^{2N-1} a_{i_0, j} \epsilon_j \right| \\
&\geq a_{i_0, i_0} |\epsilon_{i_0}| - \sum_{j=1, j \neq i_0}^{2N-1} |a_{i_0, j}| |\epsilon_j| \\
&\geq a_{i_0, i_0} |\epsilon_{i_0}| - \sum_{j=1, j \neq i_0}^{2N-1} |a_{i_0, j}| |\epsilon_{i_0}| \\
&= \sum_{j=1}^{2N-1} a_{i_0, j} |\epsilon_{i_0}| = |\epsilon_{i_0}| \int_{\mathbb{R}} \frac{1 - \sum_{j=1}^{2N-1} \phi_j(y)}{|x_{i_0} - y|^{1+\alpha}} dy = S_{i_0} |\epsilon_{i_0}|,
\end{aligned}$$

其中 A 的第 i 行元素之和用 S_i 表示, 即

$$S_i := \int_{\mathbb{R}} \frac{1 - \sum_{j=1}^{2N-1} \phi_j(y)}{|x_i - y|^{1+\alpha}} dy. \quad (3.30)$$

由中值定理可知

$$\begin{aligned}
S_{i_0} &= \frac{1}{\alpha(1-\alpha)} \left[\frac{(x_{i_0} - x_0)^{1-\alpha} - (x_{i_0} - x_1)^{1-\alpha}}{h_1} + \frac{(x_{2N} - x_{i_0})^{1-\alpha} - (x_{2N-1} - x_{i_0})^{1-\alpha}}{h_{2N}} \right] \\
&\geq \frac{x_{i_0}^{-\alpha} + (2T - x_{i_0})^{-\alpha}}{\alpha}.
\end{aligned}$$

当 $i_0 \leq N$ 时, $S_{i_0} \geq x_{i_0}^{-\alpha}/\alpha$. 因此, 由引理 3.9 可知

$$\max_{1 \leq i \leq 2N-1} |\epsilon_i| = |\epsilon_{i_0}| \leq \frac{|R_{i_0}|}{S_{i_0}} \leq C x_{i_0}^{\alpha} N^{r\alpha/2} i_0^{-\min\{r\frac{\alpha}{2}+2-\alpha, r(1+\alpha)\}}. \quad (3.31)$$

如果 $\min\{r\frac{\alpha}{2}+2-\alpha, r(1+\alpha)\} = r(1+\alpha)$, 那么由 (3.31) 可知

$$\max_{1 \leq i \leq 2N-1} |\epsilon_i| \leq C x_{i_0}^{\alpha} N^{r\alpha/2} i_0^{-r(1+\alpha)} = C(N^{-r} i_0^r)^{\alpha} N^{r\alpha/2} i_0^{-r(1+\alpha)} \leq C N^{-r\alpha/2}.$$

如果 $\min\{r\frac{\alpha}{2}+2-\alpha, r(1+\alpha)\} = r\frac{\alpha}{2}+2-\alpha$, 那么由 (3.31) 可知

$$\begin{aligned}
\max_{1 \leq i \leq 2N-1} |\epsilon_i| &\leq C(N^{-r} i_0^r)^{\alpha} N^{r\alpha/2} i_0^{-(r\frac{\alpha}{2}+2-\alpha)} \\
&= C N^{-r\alpha/2} i_0^{r\frac{\alpha}{2}-(2-\alpha)} \leq C N^{-\min\{2-\alpha, r\frac{\alpha}{2}\}}.
\end{aligned}$$

当 $i_0 > N$ 时同理可证. □

注 4 定理 3.10 说明在任意 $r \geq 2(2-\alpha)/\alpha$ 的分级网格上, 分片线性配置法都可以达到最优精度 $O(N^{-(2-\alpha)})$.

注 5 若 $u(x)$ 的正则性

$$\left| \frac{\partial^\ell u}{\partial x^\ell} \right| \leq C[(x-a)(b-x)]^{\frac{\alpha}{2}-\ell}, \quad \text{其中 } \ell = 0, 1, 2,$$

在推论 3.5 的范围内被更一般的弱正则性条件

$$\left| \frac{\partial^\ell u}{\partial x^\ell} \right| \leq C[(x-a)(b-x)]^{\sigma-\ell}, \quad \text{其中 } \ell = 0, 1, 2$$

所替代. $\sigma \in (0, \frac{\alpha}{2}]$ 是给定的. 然后类似 3.3 节的过程, 可以得到下列的估计: 不等式 (3.16)、(3.17) 和 (3.18) 变为

$$|T_{1,1}| \leq CN^{r(\alpha-\sigma)}, \quad |T_{i,1}| \leq CN^{r(\alpha-\sigma)} i^{-r(1+\alpha)}, \quad i = 2, \dots, N,$$

和

$$|T_{i,i}| \leq CN^{r(\alpha-\sigma)} i^{-r(\alpha-\sigma)-(2-\alpha)}.$$

同样, 不等式 (3.20) 变为

$$\sum_{j=2}^{\lceil i/2 \rceil} |T_{i,j}| \leq \begin{cases} CN^{r(\alpha-\sigma)} i^{-r(\alpha+1)}, & \text{如果 } r(\sigma+1) < 2, \\ CN^{r(\alpha-\sigma)} i^{-r(\alpha+1)} \ln i, & \text{如果 } r(\sigma+1) = 2, \\ CN^{r(\alpha-\sigma)} i^{-r(\alpha-\sigma)-2}, & \text{如果 } r(\sigma+1) > 2. \end{cases}$$

而 (3.21) 变为

$$\sum_{\lceil i/2 \rceil+1}^{i-1} |T_{i,j}| \leq CN^{r(\alpha-\sigma)} i^{-r(\alpha-\sigma)-(2-\alpha)}.$$

因此, 对于 $1 \leq i \leq N$, 引理 3.6 变为

$$\sum_{j=1}^i |T_{i,j}| \leq CN^{r(\alpha-\sigma)} i^{-\min\{r(\alpha-\sigma)+2-\alpha, r(1+\alpha)\}}.$$

类似地, 引理 3.7 变为

$$\sum_{j=i+1}^N |T_{i,j}| \leq CN^{r(\alpha-\sigma)} i^{-r(\alpha-\sigma)-(2-\alpha)}, \quad 1 \leq i < N.$$

引理 3.8 变为

$$\sum_{j=N+1}^{2N} |T_{i,j}| \leq CN^{r(\alpha-\sigma)} i^{-\min\{r(\alpha-\sigma)+2-\alpha, r(1+\alpha)\}}, \quad 1 \leq i \leq N.$$

因此, 引理 3.9 变为

$$|R_i| \leq \begin{cases} CN^{r(\alpha-\sigma)} i^{-\min\{r(\alpha-\sigma)+2-\alpha, r(1+\alpha)\}}, & i = 1, 2, \dots, N, \\ CN^{r(\alpha-\sigma)} (2N-i)^{-\min\{r(\alpha-\sigma)+2-\alpha, r(1+\alpha)\}}, & i = N+1, \dots, 2N-1. \end{cases}$$

因此, 定理 3.10 的收敛性结果变为

$$\max_{1 \leq i \leq 2N-1} |u(x_i) - u_i| \leq CN^{-\min\{2-\alpha, r\sigma\}}.$$

3.4 数值实验

我们使用(3.7) 的配点法来求解区间 $\Omega = (0, 1)$ 上的分数阶 Laplacian 问题 (3.1), 其中 $f \equiv 1$. 该问题的精确解 (Getoor 解) [24, 28] 是

$$u(x) = \frac{\alpha}{2\Gamma(1 - \frac{\alpha}{2})\Gamma(1 + \frac{\alpha}{2})} x^{\frac{\alpha}{2}} (1-x)^{\frac{\alpha}{2}}, \quad x \in \Omega. \quad (3.32)$$

所有的数值实验都是通过 Julia 1.8.5 编程实现的. 值得注意的是, 在计算分级网格上刚度矩阵的元素时, 需要进行多精度浮点计算, 以减少舍入误差.

3.4.1 数值解的精度

在这一小节的数值实验中, 我们使用最大节点误差 (即离散的 L^∞ 范数) 来衡量数值误差:

$$E^N := \max_{0 \leq i \leq 2N} |u(x_i) - u_i|.$$

E^N 的收敛阶通常采用如下方式计算:

$$Rate^N = \log_2 \left(\frac{E^N}{E^{2N}} \right).$$

在表 3-1 至表 3-4 中, 我们选择了不同网格分级参数 r 的值, 然后展示了不同的 α 和 N 下 E^N 和 $Rate^N$ 的值. 我们基于注 4 选择 r 的值. 该注表明了对任意 $r \geq 2(2-\alpha)/\alpha$ 算法取得最优精度 $O(N^{-(2-\alpha)})$. 表 3-1 至表 3-4 表明配置法 (3.7) 的计算精度为 $O(N^{-\min[2-\alpha, r\alpha/2]})$, 这与定理 3.10 完全一致.

表 3-1 $r = 1$: 最大节点误差与计算精度 $O(h^{\frac{\alpha}{2}})$

| $\alpha \backslash 2N$ | 32 | 64 | 128 | 256 | 512 | 1024 |
|------------------------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| 0.1 | 2.05E-03 | 1.97E-03 | 1.89E-03 | 1.82E-03 | 1.76E-03 | 1.70E-03 |
| | | 0.0613 | 0.0555 | 0.0527 | 0.0513 | 0.0507 |
| 0.5 | 2.22E-02 | 1.85E-02 | 1.55E-02 | 1.30E-02 | 1.09E-02 | 9.17E-03 |
| | | 0.2634 | 0.2565 | 0.2532 | 0.2516 | 0.2508 |
| 0.9 | 4.33E-02 | 3.01E-02 | 2.16E-02 | 1.56E-02 | 1.13E-02 | 8.24E-03 |
| | | 0.5215 | 0.4842 | 0.4696 | 0.4609 | 0.4560 |

3.4.2 数值解中误差的局部行为

接下来, 我们将提供一些实验数据, 用于展示在误差分析中出现的量 R_i 和 S_i , 以及数值格式误差的局部行为, 以便读者能深入理解此这一章中数值格式的收敛性理论.

表 3-2 $r = \frac{(2-\alpha)}{\alpha}$: 最大节点误差与计算精度 $O(h^{\frac{2-\alpha}{2}})$

| $\alpha \backslash 2N$ | 32 | 64 | 128 | 256 | 512 | 1024 |
|------------------------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| 0.1 | 1.12E-03 | 5.81E-04 | 3.01E-04 | 1.56E-04 | 8.07E-05 | 4.18E-05 |
| | | 0.9428 | 0.9481 | 0.9495 | 0.9499 | 0.9500 |
| 0.5 | 9.66E-03 | 5.74E-03 | 3.41E-03 | 2.03E-03 | 1.21E-03 | 7.18E-04 |
| | | 0.7500 | 0.7500 | 0.7500 | 0.7500 | 0.7500 |
| 0.9 | 4.12E-02 | 2.66E-02 | 1.76E-02 | 1.19E-02 | 8.05E-03 | 5.48E-03 |
| | | 0.6295 | 0.5933 | 0.5717 | 0.5601 | 0.5552 |

表 3-3 $r = \frac{2(2-\alpha)}{\alpha}$: 最大节点误差与计算精度 $O(h^{2-\alpha})$

| $\alpha \backslash 2N$ | 32 | 64 | 128 | 256 | 512 | 1024 |
|------------------------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| 0.1 | 9.84E-04 | 3.34E-04 | 1.02E-04 | 2.97E-05 | 8.42E-06 | 2.36E-06 |
| | | 1.5609 | 1.7050 | 1.7822 | 1.8201 | 1.8385 |
| 0.5 | 5.54E-03 | 2.08E-03 | 7.65E-04 | 2.77E-04 | 9.99E-05 | 3.58E-05 |
| | | 1.4117 | 1.4458 | 1.4635 | 1.4734 | 1.4801 |
| 0.9 | 5.15E-02 | 2.78E-02 | 1.39E-02 | 6.67E-03 | 3.15E-03 | 1.48E-03 |
| | | 0.8873 | 1.0031 | 1.0576 | 1.0815 | 1.0919 |

表 3-4 $r = \frac{3(2-\alpha)}{\alpha}$: 最大节点误差与计算精度 $O(h^{2-\alpha})$

| $\alpha \backslash 2N$ | 32 | 64 | 128 | 256 | 512 | 1024 |
|------------------------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| 0.1 | 1.44E-03 | 4.90E-04 | 1.47E-04 | 4.20E-05 | 1.18E-05 | 3.27E-06 |
| | | 1.5523 | 1.7362 | 1.8091 | 1.8346 | 1.8453 |
| 0.5 | 8.52E-03 | 3.31E-03 | 1.24E-03 | 4.57E-04 | 1.66E-04 | 5.97E-05 |
| | | 1.3658 | 1.4111 | 1.4423 | 1.4627 | 1.4757 |
| 0.9 | 6.36E-02 | 3.60E-02 | 1.84E-02 | 8.97E-03 | 4.27E-03 | 2.01E-03 |
| | | 0.8213 | 0.9662 | 1.0381 | 1.0708 | 1.0860 |

在我们的例子中, 局部截断误差 R_i 是通过(3.5), 并结合(4.8)和数值解来计算的. 引理 3.9 给出了 R_i 的一个上界. 回顾(3.30), 我们有

$$S_i = \int_{\mathbb{R}} \frac{1 - \sum_{j=1}^{2N-1} \phi_j(y)}{|x_i - y|^{1+\alpha}} dy = \sum_{j=1}^{2N-1} a_{i,j} = |a_{i,i}| - \sum_{j \neq i} |a_{i,j}|,$$

因此根据 [42] 的定理 1 可知

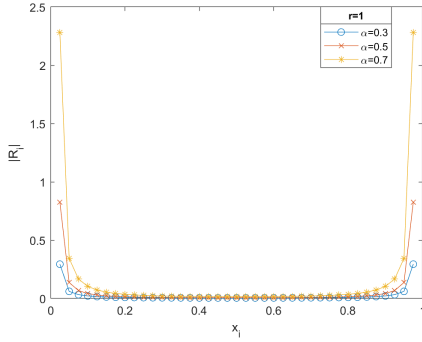
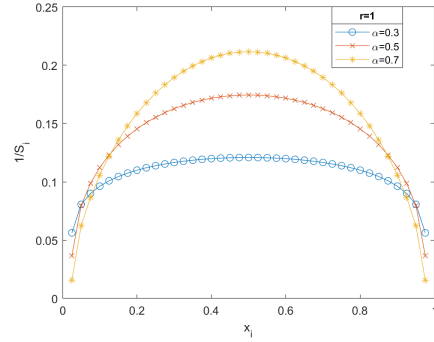
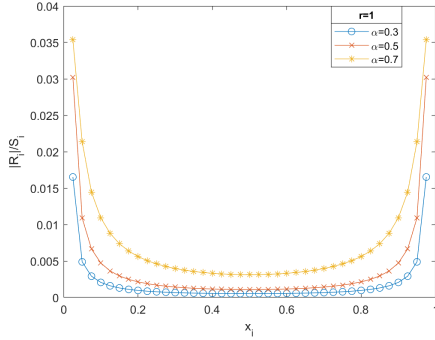
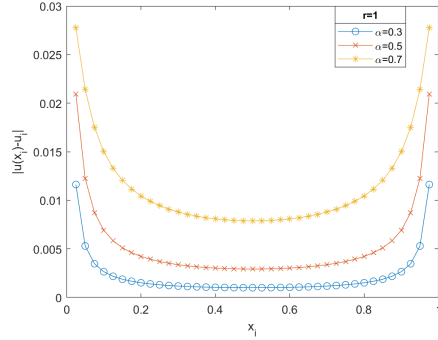
$$\|A^{-1}\|_{\infty} < \max_{1 \leq i \leq 2N-1} \frac{1}{S_i}.$$

于是全局误差为

$$\max_{1 \leq i \leq 2N-1} |\epsilon_i| \leq \frac{|R_{i_0}|}{S_{i_0}} \leq \max_{1 \leq i \leq 2N-1} \frac{|R_i|}{S_i}.$$

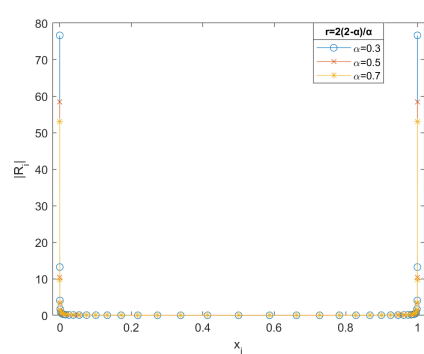
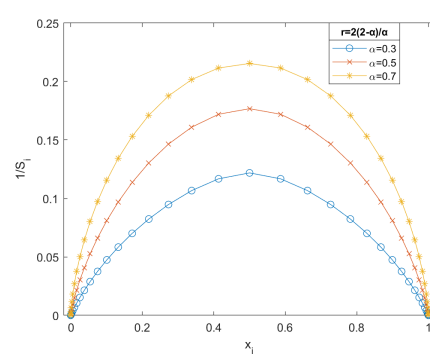
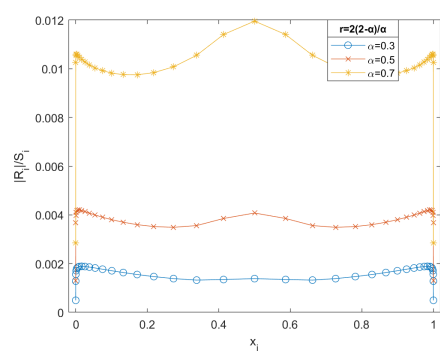
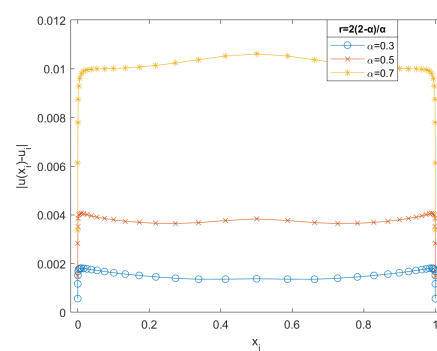
图 3.1 和 3.5 表明, 无论是使用均匀网格 ($r = 1$) 还是分级网格 ($r = 2(2 - \alpha)/\alpha$), 局部截断误差 R_i 的最大值均出现在边界层, 并且 R_i 的最大值是无界的 ($N \rightarrow +\infty$), 这与引理 3.9 的结论相吻合. 相反, $1/S_i$ 的最小值 (也出现在边界层) 在均匀和分级网格上都趋于零 ($N \rightarrow +\infty$), 如图 3.2 和 3.6 所示. 所以在所有网格点上, 包括边界层内的点, $|R_i|/S_i$ 和 ϵ_i 的节点误差都很小; 参见图 3.3 和图 3.7, 以及图 3.4 和图 3.8.

在均匀网格上全局误差的最大值出现在边界层内的某些点上 (见图 3.4), 但在分级网格上最大全局误差点可能出现在远离边界的内部 (见图 3.8).

图 3.1 局部截断误差: $|R_i|$ 图 3.2 $1/S_i$ 的值图 3.3 $|R_i|/S_i$ 的值图 3.4 绝对误差: $|\epsilon_i| = |u(x_i) - u_i|$

3.5 小结

在这一章中, 我们利用 [36] 中的结果来推导一维分数阶 Laplacian 问题 (3.1) 解的正则性. 然后, 我们通过基于分级网格和分段线性函数的配置法来离散分数阶 Laplacian 算子. 我们对分段线性插值的局部截断误差进行研究并证明了配置法的计算精度是 $O(N^{-\min[2-\alpha, r\alpha/2]})$, 其中 N 是网格节点数, r 是网格分级参数. 数值结果与收敛性理论吻合; 此外, 从收敛性结果可知, 只有取 $r \geq \frac{2(2-\alpha)}{\alpha}$ 这一数值格式的计算精度才能达到最优精度 $O(N^{-(2-\alpha)})$.

图 3.5 局部截断误差: $|R_i|$ 图 3.6 $1/S_i$ 的值图 3.7 $|R_i|/S_i$ 的值图 3.8 绝对误差: $|\epsilon_i| = |u(x_i) - u_i|$

第四章 反常扩散的分数阶 Laplacian 问题

在本章中, 我们将考虑反常扩散的分数阶 Laplacian 问题 ($n = 1$). 因为 $1 < s < 2$ 时 $(-\Delta)^{\frac{s}{2}}$ 为超奇异积分算子, 这导致了上一章中的数值算法无法直接推广到反常扩散的情况上. 所以在这一章中我们将从 Riesz 分数阶导数对一维分数阶 Laplacian 问题的数值方法进行研究.

取 $\Omega = (a, b)$, 其中 $-\infty < a < b < \infty$ 和 $1 < \alpha < 2$, 这一章我们主要研究问题

$$\begin{cases} (-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}} u(x) = f(x), & x \in \Omega, \\ u(x) = 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \Omega. \end{cases} \quad (4.1)$$

这里, 分数阶 Laplacian 算子通过 Riesz 分数导数定义为

$$(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}} u(x) = -\frac{\partial^\alpha u}{\partial |x|^\alpha} = C_R \frac{d^2}{dx^2} \int_a^b \frac{u(y)}{|x-y|^{\alpha-1}} dy, \quad C_R = \frac{1}{2 \cos(\alpha\pi/2) \Gamma(2-\alpha)},$$

它等价于具有超奇异核的积分算子 [28]

$$(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}} u = P.V. \int_{\mathbb{R}} \frac{u(x) - u(y)}{|x-y|^{1+\alpha}} dy.$$

4.1 数值格式

取区间 $\Omega = (a, b)$ 上的剖分 π_h

$$\pi_h : a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{2N-1} < x_{2N} = b,$$

其中 $h_j = x_j - x_{j-1}$, $j \in \{1, 2, \dots, 2N\}$.

分级网格定义如下:

$$x_j = \begin{cases} a + \frac{b-a}{2} \left(\frac{j}{N}\right)^r, & j = 0, 1, \dots, N, \\ b - \frac{b-a}{2} \left(2 - \frac{j}{N}\right)^r, & j = N+1, N+2, \dots, 2N, \end{cases} \quad (4.2)$$

其中 $r \geq 1$ 是分级指数.

需要注意的是, 对于所有的 $1 \leq i \leq 2N-1$, 分级网格都满足性质: $h_{i-1} \leq h_i \leq h_{i+1}$ 或者 $h_{i-1} \geq h_i \geq h_{i+1}$. 这一性质对于引理 4.2 的证明非常重要的.

与上一章类似, 取 S^h 为相对于剖分 π_h 定义的连续分段线性多项式空间, 并选择标准的帽函数 $\{\phi_j(x)\}_{j=0}^{2N}$ 作为基函数. 由于 $u(x) = 0$ 在 $x \in \mathbb{R} \setminus \Omega$ 上, 我们在剖分 π_h 上用连续分段线性函数 $u_h(x) = \sum_{j=1}^{2N-1} u_j \phi_j(x)$ 来近似 $u(x)$. 其中 u_j 为待定的节点值, $j = 1, 2, \dots, 2N-1$. 因此, 我们将 (4.1) 近似为以下离散问题

$$D_h^\alpha u_h(x_i) = f(x_i) := f_i, \quad i = 1, 2, \dots, 2N-1. \quad (4.3)$$

这里

$$D_h^\alpha u_h(x_i) = \sum_{j=1}^{2N-1} a_{i,j} u_j,$$

其中

$$a_{ij} := C_R \left[\frac{2}{h_{i+1}(h_i + h_{i+1})} \tilde{a}_{i+1,j} - \frac{2}{h_i h_{i+1}} \tilde{a}_{i,j} + \frac{2}{h_i(h_i + h_{i+1})} \tilde{a}_{i-1,j} \right] \quad (4.4)$$

和

$$\tilde{a}_{i,j} := \int_{x_{j-1}}^{x_{j+1}} \frac{\phi_j(y)}{|x_i - y|^{\alpha-1}} dy, \quad (4.5)$$

$j = 1, 2, \dots, 2N-1$.

这个方程组具有矩阵形式

$$AU = F, \quad (4.6)$$

其中刚度矩阵 A 和网格函数矩阵的定义为

$$A = (a_{i,j}) \in \mathbb{R}^{(2N-1) \times (2N-1)}, \quad U = (u_1, u_2, \dots, u_{2N-1}), \quad F = (f_1, f_2, \dots, f_{2N-1}).$$

4.2 刚度矩阵性质分析

在本节中, 我们将计算矩阵 A 的元素并分析其性质.

引理 4.1 对于 $\alpha \in (1, 2)$, 刚度矩阵 $A = (a_{i,j}) \in \mathbb{R}^{(2N-1) \times (2N-1)}$ 的元素为:

$$a_{ij} = C_R C_i^\alpha C_i D_j^i C_j^T,$$

其中 $C_i^\alpha := \frac{1}{(2-\alpha)(3-\alpha)} \frac{2}{h_i + h_{i+1}}$, $C_j := \left(\frac{1}{h_j}, -\frac{1}{h_j} - \frac{1}{h_{j+1}}, \frac{1}{h_{j+1}} \right)$, 以及

$$D_j^i := \begin{pmatrix} |x_{j-1} - x_{i-1}|^{3-\alpha} & |x_j - x_{i-1}|^{3-\alpha} & |x_{j+1} - x_{i-1}|^{3-\alpha} \\ |x_{j-1} - x_i|^{3-\alpha} & |x_j - x_i|^{3-\alpha} & |x_{j+1} - x_i|^{3-\alpha} \\ |x_{j-1} - x_{i+1}|^{3-\alpha} & |x_j - x_{i+1}|^{3-\alpha} & |x_{j+1} - x_{i+1}|^{3-\alpha} \end{pmatrix}.$$

证明 从 (4.5) 可得

$$\begin{aligned} \tilde{a}_{i,j} &= \int_{x_{j-1}}^{x_{j+1}} \phi_j(y) |x_i - y|^{1-\alpha} dy \\ &= C_\alpha \left[\frac{|x_{j+1} - x_i|^{3-\alpha}}{h_{j+1}} - \frac{h_j + h_{j+1}}{h_j h_{j+1}} |x_j - x_i|^{3-\alpha} + \frac{|x_{j-1} - x_i|^{3-\alpha}}{h_j} \right], \end{aligned} \quad (4.7)$$

其中 $C_\alpha := \frac{1}{(2-\alpha)(3-\alpha)}$. 然后, 将 (4.7) 代入 (4.4), 即可直接得到所求结果. \square

注 6 引理 4.1 表明(4.6)中刚度矩阵 A 类似于 [13] 中有限元法推导的刚度矩阵. 它们相差一个对角矩阵

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{h_1+h_2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{2}{h_2+h_3} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{2}{h_{2N-1}+h_{2N}} \end{pmatrix}.$$

引理 4.2 令 A 由(4.6)定义, π_h 是分级网格, 则 A 是一个主对角元为正、非主对角元非正的矩阵.

证明 当 $x \in (0, 1)$ 和 $1 < \alpha < 2$ 时, 有 $C_R < 0$ 且 $1 - x^{2-\alpha} - (1-x)^{2-\alpha} < 0$. 因此, 对于 $j = i$ 的情况, 由引理 4.1 可知

$$\begin{aligned} a_{ii} &= C_R C_i^\alpha C_i \begin{pmatrix} 0 & h_i^{3-\alpha} & (h_{i+1} + h_i)^{3-\alpha} \\ h_i^{3-\alpha} & 0 & h_{i+1}^{3-\alpha} \\ (h_{i+1} + h_i)^{3-\alpha} & h_{i+1}^{3-\alpha} & 0 \end{pmatrix} C_i^T \\ &= 2C_R C_i^\alpha \frac{(h_i + h_{i+1})^{3-\alpha}}{h_i h_{i+1}} \left[1 - \left(\frac{h_i}{h_i + h_{i+1}} \right)^{2-\alpha} - \left(\frac{h_{i+1}}{h_i + h_{i+1}} \right)^{2-\alpha} \right] > 0. \end{aligned}$$

对于 $j - i = 1$ 的情况, 由引理 4.1 可以算出

$$\begin{aligned} a_{i,i+1} &= C_R C_i^\alpha C_i \begin{pmatrix} h_i^{3-\alpha} & (h_i + h_{i+1})^{3-\alpha} & (h_i + h_{i+1} + h_{i+2})^{3-\alpha} \\ 0 & h_{i+1}^{3-\alpha} & (h_{i+1} + h_{i+2})^{3-\alpha} \\ h_{i+1}^{3-\alpha} & 0 & h_{i+2}^{3-\alpha} \end{pmatrix} C_{i+1} \\ &= C_R C_i^\alpha \frac{1}{h_i h_{i+1} h_{i+2}} \left[h_{i+2} h_i^{3-\alpha} - (h_{i+1} + h_{i+2})(h_{i+1} + h_i)^{3-\alpha} + h_{i+1}(h_{i+2} + h_{i+1} + h_i)^{3-\alpha} \right. \\ &\quad \left. + (h_{i+1} + h_i)(h_{i+1} + h_{i+2}) h_{i+1}^{2-\alpha} - (h_{i+1} + h_i)(h_{i+2} + h_{i+1})^{3-\alpha} + h_i h_{i+2} h_{i+1}^{2-\alpha} + h_i h_{i+2}^{3-\alpha} \right]. \end{aligned}$$

因为当 $0 < x \leq y \leq 1$, $1 < \alpha < 2$ 时,

$$x^{3-\alpha} - (y+1)(x+y)^{3-\alpha} + y(1+x+y)^{3-\alpha} + (x+y)(y+1)y^{2-\alpha} - (x+y)(1+y)^{3-\alpha} + xy^{2-\alpha} + x \geq 0,$$

并且 π_h 是分级网格, 所以我们可以得到以下结果:

当 $0 < h_i \leq h_{i+1} \leq h_{i+2}$ 时, 令 $x = \frac{h_i}{h_{i+2}}$ 和 $y = \frac{h_{i+1}}{h_{i+2}}$, 我们有

$$\begin{aligned} a_{i,i+1} &= C_R C_i^\alpha \frac{h_{i+2}^{3-\alpha}}{h_i h_{i+1}} \left[x^{3-\alpha} - (y+1)(x+y)^{3-\alpha} + y(1+x+y)^{3-\alpha} + (x+y)(y+1)y^{2-\alpha} \right. \\ &\quad \left. - (x+y)(1+y)^{3-\alpha} + xy^{2-\alpha} + x \right] \leq 0, \end{aligned}$$

其中 $0 < x \leq y \leq 1$.

当 $0 < h_{i+2} \leq h_{i+1} \leq h_i$ 时, 令 $x = \frac{h_{i+2}}{h_i}$ 和 $y = \frac{h_{i+1}}{h_i}$, 我们有

$$a_{i,i+1} = C_R C_i^\alpha \frac{h_i^{3-\alpha}}{h_{i+2} h_{i+1}} \left[x^{3-\alpha} - (y+1)(x+y)^{3-\alpha} + y(1+x+y)^{3-\alpha} + (x+y)(y+1)y^{2-\alpha} - (x+y)(1+y)^{3-\alpha} + xy^{2-\alpha} + x \right] \leq 0,$$

其中 $0 < x \leq y \leq 1$.

另一方面, 同理可证 $a_{i,i-1} < 0$. 因此, 对于 $|j-i|=1$, 有 $a_{i,j} < 0$.

对于 $|j-i| > 1$, 由于在 $1 < \alpha < 2$ 时, $x \mapsto x^{1-\alpha}$ 是一个凸函数, 并且

$$\frac{h_i}{h_i + h_{i+1}} |x_{i+1} - y| + \frac{h_{i+1}}{h_i + h_{i+1}} |x_{i-1} - y| = |x_i - y|, \text{ 其中 } y \in [x_{j-1}, x_{j+1}].$$

因此, 由 Jensen 不等式可得

$$\frac{h_i}{h_i + h_{i+1}} |x_{i+1} - y|^{1-\alpha} + \frac{h_{i+1}}{h_i + h_{i+1}} |x_{i-1} - y|^{1-\alpha} \geq |x_i - y|^{1-\alpha}, \text{ 其中 } y \in [x_{j-1}, x_{j+1}].$$

从 (4.4) 和 (4.5) 中, 我们得出以下结论

$$\begin{aligned} a_{i,j} &= \frac{2C_R}{h_i h_{i+1}} \left[\frac{h_i}{h_i + h_{i+1}} \tilde{a}_{i+1,j} - \tilde{a}_{i,j} + \frac{h_{i+1}}{h_i + h_{i+1}} \tilde{a}_{i-1,j} \right] \\ &= \frac{2C_R}{h_i h_{i+1}} \int_{x_{j-1}}^{x_{j+1}} \phi_j \left(\frac{h_i}{h_i + h_{i+1}} |x_{i+1} - y|^{1-\alpha} - |x_i - y|^{1-\alpha} + \frac{h_{i+1}}{h_i + h_{i+1}} |x_{i-1} - y|^{1-\alpha} \right) dy \leq 0. \end{aligned}$$

证毕. \square

引理 4.3 令 A 由 (4.6) 定义, π_h 是分级网格, 则 A 是严格对角占优的矩阵, 并且线性方程组 (4.6) 有唯一解.

证明 在考虑 $\sum_{j=1}^{2N-1} a_{i,j}$ 的值之前, 我们先对 $\sum_{j=1}^{2N-1} \tilde{a}_{i,j}$ 进行研究.

对于 $0 \leq i \leq 2N$, 我们有

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{2N-1} \tilde{a}_{i,j} &= \sum_{j=1}^{2N-1} \int_{x_{j-1}}^{x_{j+1}} \frac{\phi_j(y)}{|x_i - y|^{\alpha-1}} dy \\ &= C_\alpha \left[\frac{|x_i - x_0|^{3-\alpha} - |x_i - x_1|^{3-\alpha}}{h_1} + \frac{|x_{2N} - x_i|^{3-\alpha} - |x_{2N-1} - x_i|^{3-\alpha}}{h_{2N}} \right]. \end{aligned}$$

为了方便讨论, 我们定义函数:

$$g(x) := g_1(x) + g_{2N}(x),$$

$$\text{其中 } g_1(x) := \frac{(x-x_0)^{3-\alpha} - (x-x_1)^{3-\alpha}}{h_1}, \quad g_{2N}(x) := \frac{(x_{2N}-x)^{3-\alpha} - (x_{2N-1}-x)^{3-\alpha}}{h_{2N}}.$$

于是, 当 $2 \leq i \leq 2N-2$ 时, 我们有

$$\begin{aligned}
 \sum_{j=1}^{2N-1} a_{i,j} &= C_R \left[\frac{2}{h_{i+1}(h_i + h_{i+1})} \sum_{j=1}^{2N-1} \tilde{a}_{i+1,j} - \frac{2}{h_i h_{i+1}} \sum_{j=1}^{2N-1} \tilde{a}_{i,j} + \frac{2}{h_i(h_i + h_{i+1})} \sum_{j=1}^{2N-1} \tilde{a}_{i-1,j} \right] \\
 &= C_R C_i^\alpha \left[\frac{1}{h_{i+1}} g(x_{i+1}) - \left(\frac{1}{h_i} + \frac{1}{h_{i+1}} \right) g(x_i) + \frac{1}{h_i} g(x_{i-1}) \right] \\
 &= C_R C_i^\alpha [g'(\xi_1) - g'(\xi_2)] \\
 &= C_R C_i^\alpha (\xi_1 - \xi_2) g''(\xi_3) > 0,
 \end{aligned}$$

其中 $\xi_1 \in (x_i, x_{i+1})$, $\xi_2 \in (x_{i-1}, x_i)$, $\xi_3 \in (\xi_2, \xi_1)$.

由于 $0 < \frac{h_1}{h_2} \leq 1$ 且对于 $x \in (0, 1]$ 和 $\alpha \in (1, 2)$ 有 $(1+x)^{3-\alpha} - 1 - x^{3-\alpha} - 2x^{2-\alpha} < 0$, 所以我们有

$$\begin{aligned}
 \sum_{j=1}^{2N-1} a_{1,j} &= C_R \left[\frac{2}{h_2(h_1 + h_2)} \sum_{j=1}^{2N-1} \tilde{a}_{2,j} - \frac{2}{h_1 h_2} \sum_{j=1}^{2N-1} \tilde{a}_{1,j} + \frac{2}{h_1(h_1 + h_2)} \sum_{j=1}^{2N-1} \tilde{a}_{0,j} \right] \\
 &= C_R C_i^\alpha \left[\frac{(h_2 + h_1)^{3-\alpha} - h_2^{3-\alpha} - h_1^{3-\alpha}}{h_2 h_1} - 2h_1^{1-\alpha} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{g_{2N}(x_2) - g_{2N}(x_1)}{h_2} - \frac{g_{2N}(x_1) - g_{2N}(x_0)}{h_1} \right] \\
 &= C_R C_h^\alpha \left\{ \frac{h_2^{3-\alpha}}{h_1 h_2} \left[\left(1 + \frac{h_1}{h_2} \right)^{3-\alpha} - 1 - \left(\frac{h_1}{h_2} \right)^{3-\alpha} - 2 \left(\frac{h_1}{h_2} \right)^{2-\alpha} \right] + g'_{2N}(\xi_4) - g'_{2N}(\xi_5) \right\} \\
 &= C_R C_h^\alpha \left\{ \frac{h_2^{3-\alpha}}{h_1 h_2} \left[\left(1 + \frac{h_1}{h_2} \right)^{3-\alpha} - 1 - \left(\frac{h_1}{h_2} \right)^{3-\alpha} - 2 \left(\frac{h_1}{h_2} \right)^{2-\alpha} \right] + (\xi_4 - \xi_5) g''_{2N}(\xi_6) \right\} > 0,
 \end{aligned}$$

其中 $\xi_4 \in (x_1, x_2)$, $\xi_5 \in (x_0, x_1)$ 且 $\xi_6 \in (\xi_5, \xi_4)$.

类似可证 $\sum_{j=1}^{2N-1} a_{2N-1,j} > 0$.

结合引理4.2, 由于 $a_{i,i} > 0$, $a_{i,j} < 0$ ($j \neq i$) 且 $\sum_{j=1}^{2N-1} a_{i,j} > 0$, 所以矩阵 A 是一个 M -矩阵, 且线性方程组 (4.6) 有唯一解. \square

4.3 数值实验

在这一节中, 我们使用数值格式 (4.6) 来求解区间 $\Omega = (0, 1)$ 中的分数阶 Laplacian 边值问题 (4.1), 其中 $f \equiv 1$. 这个问题的精确解 (Getoor 解) [24, 28] 是

$$u(x) = \frac{2^{-\alpha} \Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(1 + \frac{\alpha}{2}) \Gamma(\frac{1+\alpha}{2})} x^{\frac{\alpha}{2}} (1-x)^{\frac{\alpha}{2}}, \quad x \in \Omega. \quad (4.8)$$

所有的数值实验都是在 Julia 1.8.5 中编程完成的. 值得注意的是, 在计算分级网格上刚度矩阵的元素时, 需要使用多精度浮点运算以减少舍入误差.

在本节的数值实验中, 我们使用最大节点误差 (即离散的 L^∞ 范数) 来衡量数值误差:

$$E^N := \max_{0 \leq i \leq 2N} |u(x_i) - u_i|.$$

E^N 的收敛速率通常以以下方式计算:

$$Rate^N = \log_2 \left(\frac{E^N}{E^{2N}} \right).$$

在图 4.1 中, 我们选择 $r = 1$ 、 $r = \frac{2}{\alpha}$ 、 $r = \frac{4}{\alpha}$ 和 $r = \frac{6}{\alpha}$ 作为网格分级参数 r , 然后展示了不同 α 和 $2N$ 值下的 E^N 和 $Rate^N$ 的数值. 从图 4.1 可以看出, 在适当的分级网格上, 配置法 (4.6) 可以实现二阶收敛. 从图中可以看出, 该离散格式的计算精度为 $O(N^{-\min\{r\frac{\alpha}{2}, 2\}})$, $r = \frac{4}{\alpha}$ 是最优网格分级参数.

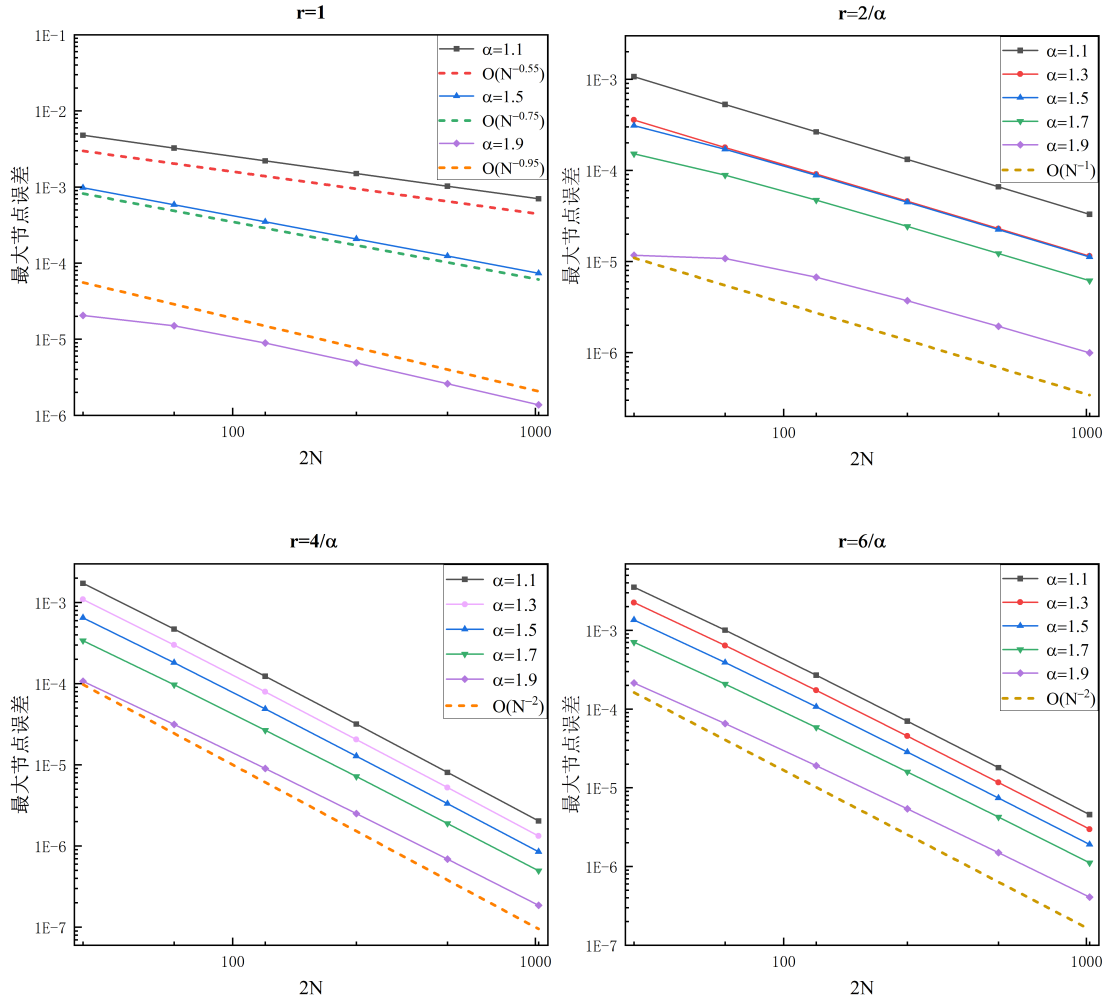


图 4.1 数值结果

4.4 小结

在本章中, 我们研究了反常扩散的一维分数 Laplacian 问题. 基于 Riesz 分数导数, 在非均匀网格上通过有限差分方法和分段线性函数对分数阶 Laplacian 算子离散, 并且证明离散格式的刚度矩阵是 **M**-矩阵. 值得注意的是, 我们观察到该离散格式的刚度矩阵与 [13] 中讨论的相似. 对于这两个刚度矩阵, 它们之间的区别仅在于

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{h_1+h_2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{2}{h_2+h_3} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{2}{h_{2N-1}+h_{2N}} \end{pmatrix}.$$

最后, 数值结果表明: 在适当的分级网格上, 我们的方法在离散的 $L^\infty(\mathbb{R})$ 范数意义下具有二阶精度, 其中 $r = \frac{4}{\alpha}$ 是最优网格分级参数.

遗憾的是, 在分级网格上这一离散格式的收敛性证明存在一些困难. 本文未能提供严谨的理论分析, 但局部截断误差的部分分析与第二章的分析方法类似. 完整的收敛性理论分析还需要后续进一步的研究.

第五章 总结

本文分别研究了一类含弱奇异核的非局部扩散模型和一维分数阶 Laplacian 问题的配置法以及相应的收敛性分析.

对于含弱奇异核的非局部扩散模型, 我们分别研究了基于分级网格和分片线性多项式的配置法求解一维空间上的稳态问题和非稳态问题的误差分析, 以及离散格式的刚度矩阵性质. 这一算法及相应的误差分析理论可以直接推广到高维空间上的一些非局部扩散模型.

对于一维分数阶 Laplacian 问题, 我们分别从分数阶 Laplacian 算子的奇异积分定义和 Riesz 分数阶导数定义对该算子进行离散, 并对相应的误差进行分析. 对于反常对流的分数阶 Laplacian 问题的配置法, 本文从奇异积分定义对算子进行离散, 并给出了完整的理论分析, 该分析思路可以推广到更多的非局部模型配置法的敛散性理论分析上. 对于反常扩散的分数阶 Laplacian 问题, 本文从 Riesz 分数阶导数定义对算子进行离散. 遗憾的是由于算法的复杂性, 本文未能证明其收敛性理论, 但是数值算例表明该算法可以达到二阶收敛.

对于高维分数阶 Laplacian 问题, 由于分数阶 Laplacian 算子的定义, 这些算法及其相应的理论分析无法直接推广到高维问题. 在未来的研究中, 将对本文的方法进行改进, 以解决高维分数阶 Laplacian 问题的高精度数值算法设计问题.

参考文献

- [1] Gabriel Acosta and Juan Pablo Borthagaray. A fractional Laplace equation: regularity of solutions and finite element approximations. *SIAM J. Numer. Anal.*, 55(2):472–495, 2017.
- [2] Gabriel Acosta, Juan Pablo Borthagaray, Oscar Bruno, and Martín Maas. Regularity theory and high order numerical methods for the (1D)-fractional Laplacian. *Math. Comp.*, 87(312):1821–1857, 2018.
- [3] Giovanni Alberti and Giovanni Bellettini. A non-local anisotropic model for phase transitions: asymptotic behaviour of rescaled energies. *European J. Appl. Math.*, 9(3):261–284, 1998.
- [4] Giovanni Alberti and Giovanni Bellettini. A nonlocal anisotropic model for phase transitions. I. The optimal profile problem. *Math. Ann.*, 310(3):527–560, 1998.
- [5] Fuensanta Andreu-Vaillo, José M. Mazón, Julio D. Rossi, and J. Julián Toledo-Melero. *Nonlocal diffusion problems*, volume 165 of *Mathematical Surveys and Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI; Real Sociedad Matemática Española, Madrid, 2010.
- [6] Kendall E. Atkinson. *The numerical solution of integral equations of the second kind*. Cambridge monographs on applied and computational mathematics 4. Cambridge University Press, reissue edition, 2009.
- [7] Jean Bertoin. *Lévy processes*, volume 121 of *Cambridge Tracts in Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1996.
- [8] Imran H. Biswas, Espen Robstad Jakobsen, and Kenneth Hvistendahl Karlsen. Error estimates for a class of finite difference-quadrature schemes for fully nonlinear degenerate parabolic integro-PDEs. *J. Hyperbolic Differ. Equ.*, 5(1):187–219, 2008.
- [9] Marek Bodnar and Juan J. López Velazquez. An integro-differential equation arising as a limit of individual cell-based models. *J. Differential Equations*, 222(2):341–380, 2006.

- [10] Juan Pablo Borthagaray, Dmitriy Leykekhman, and Ricardo H. Nochetto. Local energy estimates for the fractional Laplacian. *SIAM J. Numer. Anal.*, 59(4):1918–1947, 2021.
- [11] Hermann Brunner. *Collocation methods for Volterra integral and related functional differential equations*, volume 15 of *Cambridge Monographs on Applied and Computational Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 2004.
- [12] Rongjun Cao, Minghua Chen, Michael K. Ng, and Yu-Jiang Wu. Fast and high-order accuracy numerical methods for time-dependent nonlocal problems in \mathbb{R}^2 . *J. Sci. Comput.*, 84(1):Paper No. 8, 31, 2020.
- [13] Hongbin Chen, Changtao Sheng, and Li-Lian Wang. On explicit form of the FEM stiffness matrix for the integral fractional Laplacian on non-uniform meshes. *Appl. Math. Lett.*, 113:Paper No. 106864, 8, 2021.
- [14] Minghua Chen and Weihua Deng. Fourth order accurate scheme for the space fractional diffusion equations. *SIAM J. Numer. Anal.*, 52(3):1418–1438, 2014.
- [15] Minghua Chen and Weihua Deng. High order algorithms for the fractional substantial diffusion equation with truncated Lévy flights. *SIAM J. Sci. Comput.*, 37(2):A890–A917, 2015.
- [16] Minghua Chen, Weihua Deng, Chao Min, Jiankang Shi, and Martin Stynes. Error analysis of a collocation method on graded meshes for a fractional Laplacian problem. *Adv. Comput. Math.*, 50(3):Paper No. 49, 2024.
- [17] Minghua Chen, Sven-Erik Ekström, and Stefano Serra-Capizzano. A multi-grid method for nonlocal problems: non-diagonally dominant or Toeplitz-plus-tridiagonal systems. *SIAM J. Matrix Anal. Appl.*, 41(4):1546–1570, 2020.
- [18] Minghua Chen, Wenya Qi, Jiankang Shi, and Jiming Wu. A sharp error estimate of piecewise polynomial collocation for nonlocal problems with weakly singular kernels. *IMA J. Numer. Anal.*, 41(4):3145–3174, 2021.
- [19] Marta D’Elia and Max Gunzburger. The fractional Laplacian operator on bounded domains as a special case of the nonlocal diffusion operator. *Comput. Math. Appl.*, 66(7):1245–1260, 2013.

- [20] Siwei Duo, Hans Werner van Wyk, and Yanzhi Zhang. A novel and accurate finite difference method for the fractional Laplacian and the fractional Poisson problem. *J. Comput. Phys.*, 355:233–252, 2018.
- [21] Mouhamed Moustapha Fall. Regional fractional Laplacians: boundary regularity. *J. Differential Equations*, 320:598–658, 2022.
- [22] Markus Faustmann, Michael Karkulik, and Jens Markus Melenk. Local convergence of the FEM for the integral fractional Laplacian. *SIAM J. Numer. Anal.*, 60(3):1055–1082, 2022.
- [23] Nicolas Fournier and Philippe Laurencot. Well-posedness of Smoluchowski’s coagulation equation for a class of homogeneous kernels. *J. Funct. Anal.*, 233(2):351–379, 2006.
- [24] Ronald Kay Gettoor. First passage times for symmetric stable processes in space. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 101:75–90, 1961.
- [25] Guy Gilboa and Stanley Osher. Nonlocal linear image regularization and supervised segmentation. *Multiscale Model. Simul.*, 6(2):595–630, 2007.
- [26] Rubing Han and Shuonan Wu. A monotone discretization for integral fractional Laplacian on bounded Lipschitz domains: pointwise error estimates under Hölder regularity. *SIAM J. Numer. Anal.*, 60(6):3052–3077, 2022.
- [27] Jan S. Hesthaven and Tim Warburton. *Nodal discontinuous Galerkin methods*, volume 54 of *Texts in Applied Mathematics*. Springer, New York, 2008.
- [28] Yanghong Huang and Adam Oberman. Numerical methods for the fractional Laplacian: a finite difference–quadrature approach. *SIAM J. Numer. Anal.*, 52(6):3056–3084, 2014.
- [29] Espen Robstad Jakobsen and Kenneth Hvistendahl Karlsen. Continuous dependence estimates for viscosity solutions of integro-PDEs. *J. Differential Equations*, 212(2):278–318, 2005.
- [30] Stefan Kindermann, Stanley Osher, and Peter Wilcox Jones. Deblurring and denoising of images by nonlocal functionals. *Multiscale Model. Simul.*, 4(4):1091–1115, 2005.

- [31] Mateusz Kwaśnicki. Ten equivalent definitions of the fractional Laplace operator. *Fract. Calc. Appl. Anal.*, 20(1):7–51, 2017.
- [32] Randall J. LeVeque. *Finite difference methods for ordinary and partial differential equations*. Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, PA, 2007.
- [33] Changpin Li and Min Cai. *Theory and numerical approximations of fractional integrals and derivatives*. Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, PA, 2020.
- [34] Alexander Mogilner and Leah Edelstein-Keshet. A non-local model for a swarm. *J. Math. Biol.*, 38(6):534–570, 1999.
- [35] Alfio Quarteroni, Riccardo Sacco, and Fausto Saleri. *Numerical mathematics*, volume 37 of *Texts in Applied Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, second edition, 2007.
- [36] Xavier Ros-Oton and Joaquim Serra. The Dirichlet problem for the fractional Laplacian: regularity up to the boundary. *J. Math. Pures Appl.*, 101(3):275–302, 2014.
- [37] Claus Schneider. Regularity of the solution to a class of weakly singular Fredholm integral equations of the second kind. *Integral Equations Operator Theory*, 2(1):62–68, 1979.
- [38] Pablo Seleson, Max Gunzburger, and Michael L. Parks. Interface problems in nonlocal diffusion and sharp transitions between local and nonlocal domains. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 266:185–204, 2013.
- [39] Martin Stynes, Eugene O’Riordan, and José Luis Gracia. Error analysis of a finite difference method on graded meshes for a time-fractional diffusion equation. *SIAM J. Numer. Anal.*, 55(2):1057–1079, 2017.
- [40] Vidar Thomée. *Galerkin finite element methods for parabolic problems*, volume 25 of *Springer Series in Computational Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, second edition, 2006.
- [41] Hao Tian, Hong Wang, and Wenqia Wang. An efficient collocation method for a non-local diffusion model. *Int. J. Numer. Anal. Model.*, 10(4):815–825, 2013.

- [42] James Martin Varah. A lower bound for the smallest singular value of a matrix. *Linear Algebra Appl.*, 11:3–5, 1975.
- [43] Richard Steven Varga. *Matrix iterative analysis*, volume 27 of *Springer Series in Computational Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, expanded edition, 2000.
- [44] Hong Wang and Hao Tian. A fast Galerkin method with efficient matrix assembly and storage for a peridynamic model. *J. Comput. Phys.*, 231(23):7730–7738, 2012.
- [45] Stephen M. Zemyan. *The classical theory of integral equations*. Birkhäuser/Springer, New York, 2012.
- [46] Xiaoping Zhang, Max Gunzburger, and Lili Ju. Nodal-type collocation methods for hypersingular integral equations and nonlocal diffusion problems. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 299:401–420, 2016.
- [47] 李语同. 核函数可积的非局部问题的辅助问题法. 华中师范大学, 2023.