Referenzdokument für die Vorlesung
“Einführung in die Astronomie 2”

Sommersemester 2022

Nils Hoyer

1. Juni 2022

Zusammenfassung

In diesem Dokument sind wichtige Formeln, Umrechnungen, und Konstanten der Vorlesung “Einführung in die Astronomie 2” festgehalten. Zusätzlich werden wichtige Formeln der vorherigen Vorlesung “Einführung in die Astronomie 1” wiederholt. Ziel dieses Dokuments ist Auflistung der wichtigsten Gleichungen in einer kompakten Form, wobei besonderer Wert auf die Notation gelegt wird.

Aus hoffentlich offensichtlichen Gründen ist dieses Dokument nicht vollständig. Es sei jedoch betont, dass eine Vollständigkeit nicht Ziel ist, sondern die Vermittlung grundlegender Formeln und Konstanten zur Vorbereitung auf Prüfungen. Ein weiterer Grund für die Unvollständigkeit ist der mit der Erstellung des Dokuments verbundene Aufwand, die verwendete Literatur, aber natürlich auch das limitierte Wissen der Autoren.

Änderungen zu späteren Zeitpunkten an diesem Dokument behalten sich die Autoren vor. Am Ende dieser Seite befindet sich das Datum der letzten Änderung sowie die Versionsnummer, die Sie zum Abgleich mit Ihrer lokalen Version nutzen können. Anregungen, Kritik, Ergänzungen, oder Hinweise in jeder Art sind erwünscht und jederzeit willkommen.

Letzte Aenderung vom 1. Juni 2022. Versionsnummer: 0.2

1 Notation

Zunächst werden wir die in diesem Dokument verwendeten Symbole aufzählen.

Tabelle 1: Notation für dieses Dokument

Begriff	Notation	Einheit
Fluss (engl. *flux*)	F	$[\mathrm{erg\,cm^{-2}\,s^{-1}}]$
Distanz (engl. *distance*)	d	[cm] oder vergleichbar
Scheinbare Helligkeit (engl. *apparent magnitude*)	m	[mag]
Absolute Helligkeit (engl. *absolute magnitude*)	M	[mag]
Leuchtkraft (engl. *luminosity*)	L	$[\mathrm{erg\,s^{-1}}]$ oder vergleichbar
Distanzmodul (engl. *distance modulus*)	dm	[mag]
Oberflächenheligkeit (engl. *surface brightness*)	μ	$[\mathrm{mag\,arcsec^{-2}}]$, $[\mathrm{L_\odot\,pc^{-2}}]$
Rotverschiebung (engl. *redshift*)	z	N/A

2 Formeln und Umrechnungen

Dieser Abschnitt wird in drei Unterkategorien aufgeteilt: Photometrie / Spektroskopie, Kinematik und Verschiedenes. Zunächste wiederholen wir ein paar grundlegende Formeln und Umrechnungen aus der Vorlesung "Einführung in die Astronomie 1".

2.1 Photometrie & Spektroskopie

- Die Intensitaet I (engl. *intensity*) gibt eine Energie pro Flaeche, Zeit und Winkel an. Der Strahlungsfluss F (engl. *flux*) haengt mit der Inentistaet ueber ein Oberflaechenintegral zusammen:

$$F = \int_S \mathrm{d}S\, I = 4\pi I \quad , \tag{1}$$

  wobei wir in fuer das zweite Gleichheitszeichen eine einfach sphaerische Anordnung annehmen. In der Literatur findet man oftmals eine Defition ohne den Raumwinkelfaktor 4π.

- Der Strahlungsfluss F (engl. *flux*) gibt die eingehende Energie pro Fläche und Zeit an. Üblicherweise hat F die Einheit $[\mathrm{erg\,cm^{-2}\,s^{-1}}]$.

- Ein Schwarzer Strahler (engl. *black body*) ist ein idealisierter Körper, welcher jede einfallende Strahlung absorbiert. Er emittiert Strahlung, die der Planck'schen Funktion (engl. *Planck's law*) folgt:

$$B_{\nu,T} = 2\left(\frac{\nu}{\mathrm{c}}\right)^2 \frac{\mathrm{h}\nu}{\exp\left(\frac{\mathrm{h}\nu}{k_\mathrm{B}T}\right) - 1} \quad , \tag{2}$$

  mit den Variablen ν als Frequenz und T als Temperatur. h ist das Planck'sche Wirkungsquantum, c die Lichtgeschwindigkeit, und k_B die Boltzmannkonstante.

- Der Strahlungsfluss F eines Schwarzen Körpers hängt mit seiner Oberflächentemperatur T zusammen. Es gilt

$$F = \sigma_\mathrm{SB} T^4 \quad ,$$

  wobei σ_SB als Stefan-Boltzmann Konstante (engl. *Stefan-Boltzmann constant*).

  In der Astronomie nehmen wir an, dass Sterne ideale Schwarze Körper sind. Dies bedeutet, dass wir die Sterne durch eine effektive Temperatur T_eff beschrieben werden können. Diese Temperatur besitzt ein Schwarzer Körper, wenn er den selben Strahlungsfluss wie ein Stern emittiert. Daher erhalten wir eine Relation zwischen dem Fluss eines Sterns und dessen effektive Temperatur:

$$F = \sigma_\mathrm{SB} T_\mathrm{eff}^4 \quad . \tag{3}$$

- Das Wien'sche Verschiebungsgesetz (engl. *Wien's displacement law*) ist eine Approximation für das Maximum der oben aufgeführten Planck'schen Funktion. Es ist gegeben durch

$$\nu_\mathrm{max}\,[\mathrm{Hz}] \approx 3\frac{k_\mathrm{B}T}{\mathrm{h}} \tag{4}$$

$$\approx \frac{5.879 \times 10^{10}\,\mathrm{Hz\,K^{-1}}}{T} \quad . \tag{5}$$

  Man kann das Verschiebungsgesetz auch also Funktion der Wellenlänge λ ausdrücken:

$$\lambda_\mathrm{max}\,[\mathrm{\mu m}] \approx \frac{2898\,\mathrm{\mu m\,K^{-1}}}{T} \quad . \tag{6}$$

- Die scheinbare Helligkeit m (engl. *apparent magnitude*) wird durch einen Strahlungsfluss F bestimmt. Es gilt

$$m = -2.5 \log_{10}\left(\frac{F}{F_{\mathrm{ref}}}\right) \quad , \tag{7}$$

wobei F_{ref} ein Referenzfluss ist. Typischerweise nutzt man für F_{ref} den Fluss des Sterns Vega, jedoch existieren auch andere Referenzflüsse.

- Die absolute Helligkeit M (engl. *absolute magnitude*) entspricht der scheinbaren Helligkeit bei einer Distanz von $d = 10\,\mathrm{pc}$. Daher gilt

$$M = m - 5 \log_{10} \frac{d}{[10\,\mathrm{pc}]} \quad . \tag{8}$$

- Der Distanzmodul dm (engl. *distance module*) entspricht der Different der scheinbaren und absoluten Helligkeit und kann zur Distanzbestimmung verwendet werden:

$$\mathrm{dm} = m - M = 5 \log_{10}\left(\frac{d[\mathrm{pc}]}{10\,\mathrm{pc}}\right) = 5 \log_{10}(d[\mathrm{pc}]) - 5 \quad . \tag{9}$$

- Die Leuchtkraft L (engl. *luminosity*) eines Objektes kann direkt über die absolute Helligkeit bestimmt werden:

$$M - M_{\mathrm{ref}} = -2.5 \log_{10}\left(\frac{L}{L_{\mathrm{ref}}}\right) \quad \leftrightarrow \quad \frac{L}{L_{\mathrm{ref}}} = 10^{-0.4(M - M_{\mathrm{ref}})} \quad , \tag{10}$$

wobei M_{ref} eine Referenzhelligkeit und L_{ref} eine Referenzleuchtkraft sind. Häufig verwendet man die absolute Helligkeit der Sonne $\mathrm{M}_\odot$, um eine Leuchtkraft in Einheiten der solaren Leuchtkraft $\mathrm{L}_\odot$ zu erhalten.

- Wir erhalten auch eine Leuchtkraft L, wenn wir den gesamten Fluss F über eine Fläche A integrieren:

$$L = \int_S \mathrm{d}S\, F(\vec{x}) \quad .$$

Oftmals wird der Fluss als isotrop angenommen, sodass wir ein einfaches Oberflächeningetral erhalten. Für eine sphärische Symmetrie mit einem Radius r erhalten wir

$$L = 4\pi r^2 F = 4\pi r^2 \sigma_{\mathrm{SB}} T_{\mathrm{eff}}^4 \quad , \tag{11}$$

wobei wir beim letzten Gleichheitszeichen angenommen haben, dass wir das System als Schwarzen Körper approximieren können (z.B. ein Stern).

- Die Oberflächenhelligkeit μ (engl. *surface brightness*) gibt den Fluss F pro Fläche A an:

$$\mu\,[\mathrm{mag\,arcsec^{-2}}] = -2.5 \log_{10}\left(\frac{F}{F_{\mathrm{ref}}} \cdot \frac{1}{A\left[\mathrm{arcsec}^2\right]}\right) \tag{12}$$

$$= m + 2.5 \log_{10}\left(A\left[\mathrm{arcsec}^2\right]\right) \quad . \tag{13}$$

- Über die weiter oben aufgeführten Formeln kann man folgende Formel errechnen:

$$\mu\left[\mathrm{L}_\odot\,\mathrm{pc}^{-2}\right] \approx \frac{1}{\alpha^2\left[\mathrm{arcsec}^2\right]} 10^{-0.4\cdot(m\,[\mathrm{mag}] - \mathrm{M}_\odot - 21.572)} \quad , \tag{14}$$

wobei man eine Fläche α^2 und eine Magnitude m einsetzt, um eine Oberflächenhelligkeit μ zu erhalten. $\mathrm{M}_\odot$ ist die absolute Magnitude der Sonne.

- Falls bereits eine Oberflächenhelligkeit μ in der Einheit $\left[\mathrm{mag\,arcsec^{-2}}\right]$ gegeben ist, können wir diese natürlich in die Einheit $\left[\mathrm{L_\odot\,pc^{-2}}\right]$ umrechnen:

$$\mu\left[\mathrm{mag\,arcsec^{-2}}\right] = 21.572 + \mathrm{M_\odot} - 2.5\log_{10}\left(\mu\left[\mathrm{L_\odot\,pc^{-2}}\right]\right) \quad . \tag{15}$$

- Die Oberflächenhelligkeit μ sollte man jedoch nicht mit der Oberflächendichte Σ (engl. *surface density*) verwechseln. Zwar sind die Einheiten gleich, die Berechning ist jedoch anders:

$$\Sigma\left[\mathrm{mag\,arcsec^{-2}}\right] = \frac{m_{\mathrm{tot}}\,[\mathrm{mag}]}{A\left[\mathrm{arcsec^2}\right]} \quad , \tag{16}$$

  wobei m_{tot} die gesamte Helligkeit innerhalb der Fläche A ist. Man summiert also zunächst den gesamten Fluss in A und bestimmt daraus eine Helligkeit.

3 Konstanten

Tabelle 2: Wichtige Konstanten für die in diesem Dokument aufgeführten Formeln.

Begriff	Notation	Wert
Sonnenleuchtkraft (engl. *solar luminosity*)	$\mathrm{L}_\odot$	$3.828 \times 10^{33}\,\mathrm{erg\,s^{-1}}$
Sonnenmasse (engl. *solar mass*)	$\mathcal{M}_\odot$	$1.989 \times 10^{33}\,\mathrm{g}$
Sonneradius (engl. *solar radius*)	$\mathrm{r}_\odot$	$6.96 \times 10^{10}\,\mathrm{cm}$
Abs. Sonnenhelligkeit im V-band (Vega-System) (engl. *abs. solar magnitude in the V-band*)	$\mathrm{M}_{\odot,V}^{\mathrm{vega}}$	$4.83\,\mathrm{mag}$
Abs. bolometrische Sonnenhelligkeit (engl. *abs. solar bolometric magnitude*)	$\mathrm{M}_{\odot,\,\mathrm{bol}}$	$4.74\,\mathrm{mag}$
Sch. bolometrische Sonnenhelligkeit (engl. *app. solar bolometric magnitude*)	$\mathrm{m}_{\odot,\,\mathrm{bol}}$	$-26.83\,\mathrm{mag}$