第 2 章 非线性方程的求解

本章主要内容

1. 二分法
2. 不动点迭代法
3. Newton 迭代法

1 概述

本章主要讨论非线性方程

$$f(x) = 0 \tag{1.1}$$

的求根问题，这里 $x \in \mathbf{R}$, $f(x)$ 为连续函数.

1 概述

本章主要讨论非线性方程

$$f(x) = 0 \tag{1.1}$$

的求根问题, 这里 $x \in \mathbf{R}$, $f(x)$ 为连续函数.

若存在 x^* 使得 $f(x^*) = 0$, 则称 x^* 是 (1.1) 的根或函数 $f(x)$ 的零点.

1 概述

本章主要讨论非线性方程

$$f(x) = 0 \tag{1.1}$$

的求根问题, 这里 $x \in \mathbf{R}$, $f(x)$ 为连续函数.

若存在 x^* 使得 $f(x^*) = 0$, 则称 x^* 是 (1.1) 的根或函数 $f(x)$ 的零点.

若 $f(x)$ 可分解为

$$f(x) = (x - x^*)^m g(x),$$

其中 m 是正整数, 且 $g(x^*) \neq 0$. 当 $m = 1$, x^* 为单根, 当 $m \geq 2$, x^* 为 m 重根.

求根的方法：一般分下面 2 步

1. 根的搜索，分析方程存在多少个实根，找出每个根所在的区间.

求根的方法：一般分下面 2 步

1. 根的搜索，分析方程存在多少个实根，找出每个根所在的区间.
   1. 图解法. 即通过画函数的图形，了解根的分布情况. 如方程
      $$x^2 - \sin x - 1 = 0,$$
      可作函数 $y = x^2$ 和函数 $y = 1 + \sin x$ 的图像来判别，见图 1.
   2. 解析法. 用微积分基本理论来分析.
   3. 定步长搜索法. 利用连续函数的介值定理.

求根的方法：一般分下面 2 步

1. 根的搜索，分析方程存在多少个实根，找出每个根所在的区间.
   1. 图解法. 即通过画函数的图形，了解根的分布情况. 如方程

      $$x^2 - \sin x - 1 = 0,$$

      可作函数 $y = x^2$ 和函数 $y = 1 + \sin x$ 的图像来判别，见图 1.
   2. 解析法. 用微积分基本理论来分析.
   3. 定步长搜索法. 利用连续函数的介值定理.
2. 根的精确化，求满足给定精度的根的近似值.

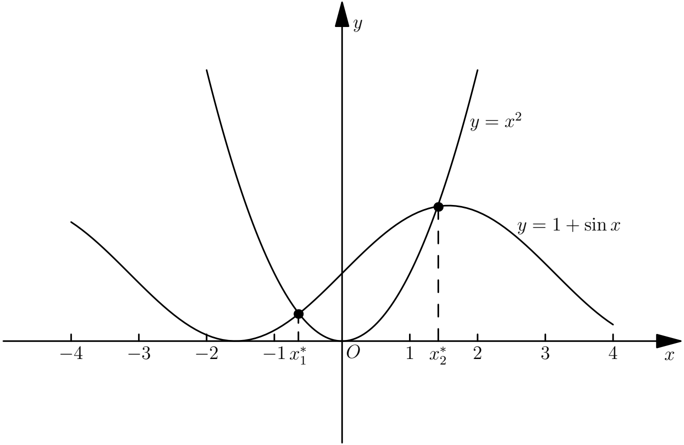

图 1: 曲线 $y=x^2$ 和 $y=1+\sin x$ 的图像

1.1 二分法

二分法思想：依据连续函数的介值定理，反复将区间分半，在足够小的区间内，方程有且仅有一根.

1.1 二分法

二分法思想：依据连续函数的介值定理，反复将区间分半，在足够小的区间内，方程有且仅有一根.

考虑方程 $f(x)=0$，设函数 $f(x)\in C[a,b]$ 且 $f(a)f(b)<0$.
记 $a_0=a,\ \ b_0=b.\ x_0=\frac{1}{2}(a_0+b_0)$

1.1 二分法

二分法思想：依据连续函数的介值定理，反复将区间分半，在足够小的区间内，方程有且仅有一根.

考虑方程 $f(x)=0$，设函数 $f(x)\in C[a,b]$ 且 $f(a)f(b)<0$.
记 $a_0=a,\ \ b_0=b.\ \ x_0=\frac{1}{2}(a_0+b_0)$

考虑区间 $[a_0,x_0]$ 和 $[x_0,b_0]$.
若 $f(x_0)=0$，则 x_0 就是根，计算结束. 否则若 $f(x_0)\neq 0$，则 $f(a_0)f(x_0)<0$ 和 $f(x_0)f(b_0)<0$ 有且只有一个成立.

1. 若 $f(a_0)f(x_0)<0$，令 $a_1=a_0$，$b_1=x_0$；否则
2. 若 $f(x_0)f(b_0)<0$，令 $a_1=x_0$，$b_1=b_0$.

考虑区间 $[a_1,b_1]$，有 $f(a_1)f(b_1)<0$，重复上述步骤.

按此方法可以得到一系列区间

$$[a_0, b_0] \supset [a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \cdots \supset [a_k, b_k] \supset \cdots,$$

按此方法可以得到一系列区间

$$[a_0, b_0] \supset [a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \cdots \supset [a_k, b_k] \supset \cdots ,$$

而且有

1. $b_k - a_k = \frac{1}{2}(b_{k-1} - a_{k-1}) = \frac{1}{2^k}(b - a)$;
2. $f(a_k)f(b_k) < 0$

当 $b_k - a_k$ 充分小时，其中点 $x_k = \frac{1}{2}(a_k + b_k)$ 可作为 $f(x) = 0$ 在 $[a, b]$ 内根的近似值.

按此方法可以得到一系列区间

$$[a_0, b_0] \supset [a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \cdots \supset [a_k, b_k] \supset \cdots,$$

而且有

1. $b_k - a_k = \frac{1}{2}(b_{k-1} - a_{k-1}) = \frac{1}{2^k}(b - a)$;
2. $f(a_k)f(b_k) < 0$

当 $b_k - a_k$ 充分小时，其中点 $x_k = \frac{1}{2}(a_k + b_k)$ 可作为 $f(x) = 0$ 在 $[a, b]$ 内根的近似值. 且有估计式

$$|x^* - x_k| \le \frac{1}{2}(b_k - a_k) \le \frac{1}{2^{k+1}}(b - a). \tag{2.1}$$

按此方法可以得到一系列区间

$$[a_0, b_0] \supset [a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \cdots \supset [a_k, b_k] \supset \cdots,$$

而且有

1. $b_k - a_k = \frac{1}{2}(b_{k-1} - a_{k-1}) = \frac{1}{2^k}(b - a)$;
2. $f(a_k)f(b_k) < 0$

当 $b_k - a_k$ 充分小时，其中点 $x_k = \frac{1}{2}(a_k + b_k)$ 可作为 $f(x) = 0$ 在 $[a, b]$ 内根的近似值. 且有估计式

$$|x^* - x_k| \le \frac{1}{2}(b_k - a_k) \le \frac{1}{2^{k+1}}(b - a). \qquad (2.1)$$

对于给定精度 ε，若取 k 使得

$$\frac{1}{2^{k+1}}(b - a) \le \varepsilon,$$

则有

$$|x^* - x_k| \le \varepsilon.$$

例 2.1

用二分法求方程 $f(x) = x^3 + 4x^2 - 10 = 0$ 在区间 $[1, 1.5]$ 上的根.

1. 要得到具有 3 位有效数的近似根, 需做多少次二分？
2. 用二分法求具有 3 位有效数的近似根.

例 2.1

用二分法求方程 $f(x) = x^3 + 4x^2 - 10 = 0$ 在区间 $[1, 1.5]$ 上的根.

1. 要得到具有 3 位有效数的近似根，需做多少次二分？
2. 用二分法求具有 3 位有效数的近似根.

解 $f(1) = -5$, $f(1.5) = 2.375$, 当 $x \in [1, 1.5]$ 时, $f'(x) = 3x^2 + 8x > 0$, 方程 $f(x) = 0$ 在 $[1, 1.5]$ 有唯一实根.

1. $a = 1,\ b = 1.5,\ \varepsilon = \frac{1}{2} \times 10^{-2}$, 由
$$\frac{b-a}{2^{k+1}} \le \varepsilon,$$
得
$$k \ge \frac{2}{\lg 2} - 1 = 5.64,$$
故可以取 $k = 6$, 即将区间二分 6 次.
2. 计算结果见表 1.

表 1: 二分法算例

k	a_k ($f(a_k)$ 的符号)	x_k ($f(x_k)$ 的符号)	b_k ($f(b_k)$ 的符号)
0	$1(-)$	$1.25(-)$	$1.5(+)$
1	$1.25(-)$	$1.375(+)$	$1.5(+)$
2	$1.25(-)$	$1.3125(-)$	$1.375(+)$
3	$1.3125(-)$	$1.34375(-)$	$1.375(+)$
4	$1.34375(-)$	$1.359375(-)$	$1.375(+)$
5	$1.359375(-)$	$1.3671875(+)$	$1.375(+)$
6	$1.359375(-)$	$1.36328125(-)$	$1.3671875(+)$

所以得具有 3 位有效数字的近似值 $x_6 = 1.36328125$.

2.1 迭代格式的构造

思想： 通过递推产生一个序列，使其极限为方程的根 (逐次逼近).

2.1 迭代格式的构造

思想： 通过递推产生一个序列, 使其极限为方程的根 (逐次逼近).
设方程

$$f(x) = 0 \tag{3.1}$$

在 $[a, b]$ 内有一个根 x^*. 将方程改为等价形式

$$x = \varphi(x). \tag{3.2}$$

2.1 迭代格式的构造

思想： 通过递推产生一个序列, 使其极限为方程的根 (逐次逼近).
设方程

$$f(x) = 0 \tag{3.1}$$

在 $[a, b]$ 内有一个根 x^*. 将方程改为等价形式

$$x = \varphi(x). \tag{3.2}$$

任取 $x_0 \in [a, b]$, 得到递推公式

$$x_{k+1} = \varphi(x_k), \quad k = 0, 1, 2, \cdots . \tag{3.3}$$

从而得到序列 $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$.

如果当 $k \to \infty$ 时，序列 $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ 有极限 $\tilde{x} \in [a, b]$，且 $\varphi(x)$ 在 $\tilde{x}$ 附近连续，则在 (3.3) 两边取极限得

$$\tilde{x} = \varphi(\tilde{x}),$$

如果当 $k \to \infty$ 时，序列 $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ 有极限 $\tilde{x} \in [a, b]$，且 $\varphi(x)$ 在 $\tilde{x}$ 附近**连续**，则在 (3.3) 两边取极限得

$$\tilde{x} = \varphi(\tilde{x}),$$

故有 $f(\tilde{x}) = 0$，即

$$\lim_{k \to \infty} x_k = x^*.$$

(3.3) 称为**迭代格式**，称 $\varphi(x)$ 为**迭代函数**，$\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ 为**迭代序列**.

如果当 $k \to \infty$ 时，序列 $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ 有极限 $\tilde{x} \in [a, b]$，且 $\varphi(x)$ 在 $\tilde{x}$ 附近**连续**，则在 (3.3) 两边取极限得

$$\tilde{x} = \varphi(\tilde{x}),$$

故有 $f(\tilde{x}) = 0$，即

$$\lim_{k\to\infty} x_k = x^*.$$

(3.3) 称为**迭代格式**，称 $\varphi(x)$ 为**迭代函数**，$\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ 为**迭代序列**.

如果任取 $x_0 \in [a, b]$ 迭代序列 $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ 收敛，则称**迭代格式 (3.3) 收敛**，否则称**迭代格式发散**.

如果当 $k\to\infty$ 时，序列 $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ 有极限 $\tilde{x}\in[a,b]$，且 $\varphi(x)$ 在 $\tilde{x}$ 附近**连续**，则在 (3.3) 两边取极限得

$$\tilde{x}=\varphi(\tilde{x}),$$

故有 $f(\tilde{x})=0$，即

$$\lim_{k\to\infty} x_k = x^*.$$

(3.3) 称为**迭代格式**，称 $\varphi(x)$ 为**迭代函数**，$\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ 为**迭代序列**.

如果任取 $x_0\in[a,b]$ 迭代序列 $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ 收敛，则称**迭代格式 (3.3) 收敛**，否则称**迭代格式发散**.
称 $e_k=x^*-x_k$ 为第 k 次**迭代误差**. 用迭代格式 (3.3) 求方程近似根的方法称为**不动点迭代法**或**简单迭代法**，也称**迭代法**.

如果当 $k \to \infty$ 时，序列 $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ 有极限 $\tilde{x} \in [a, b]$，且 $\varphi(x)$ 在 $\tilde{x}$ 附近**连续**，则在 (3.3) 两边取极限得

$$\tilde{x} = \varphi(\tilde{x}),$$

故有 $f(\tilde{x}) = 0$，即

$$\lim_{k\to\infty} x_k = x^*.$$

(3.3) 称为**迭代格式**，称 $\varphi(x)$ 为**迭代函数**，$\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ 为**迭代序列**.

如果任取 $x_0 \in [a, b]$ 迭代序列 $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ 收敛，则称**迭代格式 (3.3) 收敛**，否则称**迭代格式发散**.
称 $e_k = x^* - x_k$ 为第 k 次**迭代误差**. 用迭代格式 (3.3) 求方程近似根的方法称为**不动点迭代法**或**简单迭代法**，也称**迭代法**.

定义 2.1

当 $x^* = \varphi(x^*)$，x^* 称为不动点；上述方法称为不动点迭代法.

例 2.2

求方程 $x^3 - x - 1 = 0$ 在 $x_0 = 1.5$ 附近的根.

例 2.2

求方程 $x^3 - x - 1 = 0$ 在 $x_0 = 1.5$ 附近的根.

方法 1　将原方程写成等价的方程：$x = x^3 - 1$. 取迭代函数 $\varphi_1(x) = x^3 - 1$, 构造迭代格式

$$x_{k+1} = x_k^3 - 1, \quad k = 0, 1, 2, \cdots$$

取初值 $x_0 = 1.5$, 计算结果：

例 2.2

求方程 $x^3 - x - 1 = 0$ 在 $x_0 = 1.5$ 附近的根.

方法 1　将原方程写成等价的方程: $x = x^3 - 1$. 取迭代函数 $\varphi_1(x) = x^3 - 1$, 构造迭代格式

$$x_{k+1} = x_k^3 - 1, \quad k = 0, 1, 2, \cdots$$

取初值 $x_0 = 1.5$, 计算结果:

k	0	1	2	3	$\cdots$
x_k	1.5	2.375	12.396	1903.779	$\cdots$

方法 2 将原方程写成等价的方程：$x = \sqrt[3]{x+1}$. 取迭代函数 $\varphi_2(x) = \sqrt[3]{x+1}$, 构造迭代格式

$$x_{k+1} = \sqrt[3]{x_k + 1}, \quad k = 0, 1, 2, \cdots$$

取初值 $x_0 = 1.5$, 计算结果：

方法 2　将原方程写成等价的方程：$x=\sqrt[3]{x+1}$. 取迭代函数 $\varphi_2(x)=\sqrt[3]{x+1}$, 构造迭代格式

$$x_{k+1}=\sqrt[3]{x_k+1},\quad k=0,1,2,\cdots$$

取初值 $x_0=1.5$, 计算结果：

k	0	1	2	3	$\cdots$	7	8
x_k	1.5	1.35721	1.33086	1.32588	$\cdots$	1.32472	1.32472

方法 1 和方法 2 的情形可用图 2 和图 3 来表示:

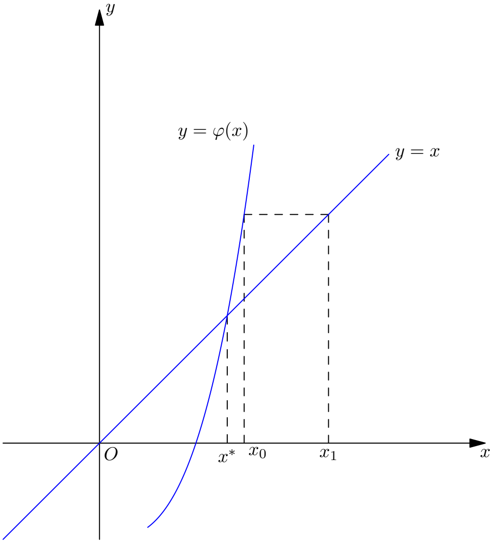

图 2: **方法 1 几何解释**

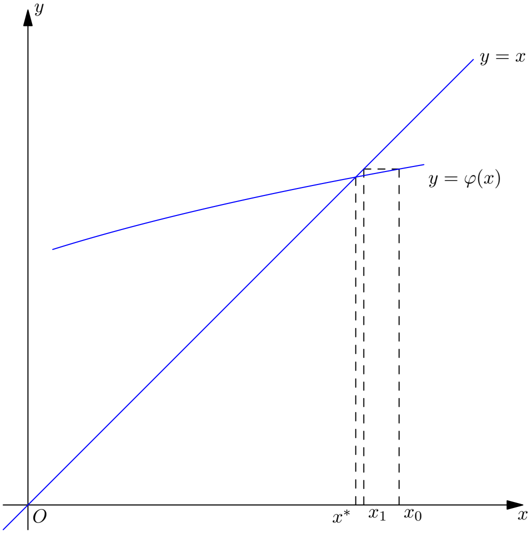

图 3: 方法 2 几何解释

迭代法的收敛性

定理 2.1

设 $\varphi(x)$ 在 $[a, b]$ 上存在一阶连续导数，且满足：
$(1°)$ 当 $x \in [a, b]$ 时，$\varphi(x) \in [a, b]$；$(2°)$ 存在正常数 $L < 1$，使得 $\max\limits_{a \le x \le b} |\varphi'(x)| \le L < 1$.

则

迭代法的收敛性

定理 2.1

设 $\varphi(x)$ 在 $[a, b]$ 上存在一阶连续导数, 且满足:
(1°) 当 $x \in [a, b]$ 时, $\varphi(x) \in [a, b]$; (2°) 存在正常数 $L < 1$, 使得 $\max\limits_{a \leq x \leq b} |\varphi'(x)| \leq L < 1$.

则
(1) $x = \varphi(x)$ 在 $[a, b]$ 上有唯一实根, 记为 x^*; (2) 对任意初值 $x_0 \in [a, b]$, 迭代格式 (3.3) 收敛, 且 $\lim\limits_{k \to \infty} x_k = x^*$; 且有:

迭代法的收敛性

定理 2.1

设 $\varphi(x)$ 在 $[a,b]$ 上存在一阶连续导数，且满足：
(1°) 当 $x\in[a,b]$ 时，$\varphi(x)\in[a,b]$; (2°) 存在正常数 $L<1$，使得 $\max\limits_{a\le x\le b}|\varphi'(x)|\le L<1$.

则
(1) $x=\varphi(x)$ 在 $[a,b]$ 上有唯一实根，记为 x^*; (2) 对任意初值 $x_0\in[a,b]$，迭代格式 (3.3) 收敛，且 $\lim\limits_{k\to\infty}x_k=x^*$; 且有：

$$|x^*-x_k|\le\frac{L}{1-L}|x_k-x_{k-1}|,\quad k=1,2,3\cdots; \tag{3.4}$$

$$|x^*-x_k|\le\frac{L^k}{1-L}|x_1-x_0|,\quad k=1,2,3\cdots; \tag{3.5}$$

$$\lim_{k\to\infty}\frac{x^*-x_{k+1}}{x^*-x_k}=\varphi'(x^*). \tag{3.6}$$

定理 2.2

设方程 (3.2) 在区间 $[a,b]$ 上有根，且 $\min\limits_{a\le x\le b}|\varphi'(x)|\ge 1$，则对任意 $x_0\in[a,b]$，且 $x_0\ne x^*$，迭代格式 (3.3) 发散.

例 2.3

求方程 $f(x) = x^3 + 4x^2 - 10 = 0$ 在 $[1, 1.5]$ 内的根 x^*.

1. 试分析如下 3 个迭代格式的收敛性.

$$x_{k+1} = 10 + x_k - 4x_k^2 - x_k^3, \tag{3.7}$$

$$x_{k+1} = \frac{1}{2}\sqrt{10 - x_k^3}, \tag{3.8}$$

$$x_{k+1} = \sqrt{\frac{10}{x_k + 4}}. \tag{3.9}$$

2. 选择一种收敛较快的迭代格式，求出 x^*，精确至 4 位有效数.

解:

1. 迭代函数

$$\varphi(x) = 10 + x - 4x^2 - x^3, \tag{3.10}$$
$$\varphi'(x) = 1 - 8x - 3x^2. \tag{3.11}$$

当 $x \in [1, 1.5]$ 时 $|\varphi'(x)| \geq 10 > 1$, 所以迭代发散.

解:

1. 迭代函数

$$\varphi(x) = 10 + x - 4x^2 - x^3, \tag{3.10}$$
$$\varphi'(x) = 1 - 8x - 3x^2. \tag{3.11}$$

当 $x \in [1, 1.5]$ 时 $|\varphi'(x)| \geq 10 > 1$, 所以迭代发散.

2. 迭代函数为 $\varphi(x) = \frac{1}{2}\sqrt{10 - x^3}$, 当 $x \in [1, 1.5]$ 时

$$|\varphi'(x)| = \left|\frac{3}{4}\frac{x^2}{\sqrt{10 - x^3}}\right| \nearrow, \quad \Longrightarrow \tag{3.12}$$
$$|\varphi(x)| \leq |\varphi(1.5)| = 0.6556 < 1. \tag{3.13}$$

当 $x \in [1, 1.5]$ 时

$$1 < \varphi(1.5) \leq \varphi(x) \leq \varphi(1) = 1.5,$$

因此迭代收敛.

- (3) 迭代函数为

$$\varphi(x)=\sqrt{\frac{10}{x+4}}$$

当 $x\in[1,1.5]$, 有

$$\begin{aligned}\varphi(x)\in[\varphi(1.5),\varphi(1)]&=\left[\sqrt{\frac{10}{1.5+4}},\sqrt{\frac{10}{1+4}}\right]\\&=[1.348,1.414]\subset[1,1.5].\end{aligned}$$

又因为

$$\varphi'(x)=-\frac{1}{2}\sqrt{10}(x+4)^{-\frac{3}{2}}<0,\quad \varphi''(x)=\frac{3}{4}\sqrt{10}(x+4)^{-\frac{5}{2}}>0,$$

所以当 $x\in[1,1.5]$，有

$$|\varphi'(x)|\leqslant|\varphi'(1)|=\frac{1}{2}\sqrt{10}(1+4)^{-\frac{3}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{10}=0.1414.$$

因此该迭代格式收敛。

第三种迭代格式比第二种迭代格式收敛快，计算结果如下：

k	0	1	2	3	4
x_k	1.25	1.38013	1.36334	1.36547	1.36520

因而 $x^* = 1.365.$

例 2.3

给定方程 $x^2 + \ln x - 2 = 0$.

1. 分析该方程存在几个实根.
2. 构造一个迭代格式, 说明收敛性, 并用迭代求方程的根, 精确至 4 位有效数.

解:

1. 记 $f(x) = x^2 + \ln x - 2$. $f(1) = 1 - 2 < 0, f(2) = 4 + \ln 2 - 2 > 0$, $f'(x) = 2x + \frac{1}{x} > 0$, 所以方程 $f(x) = 0$ 有唯一实根 $x^* \in (1, 2)$.

解:

1. 记 $f(x) = x^2 + \ln x - 2$. $f(1) = 1 - 2 < 0, f(2) = 4 + \ln 2 - 2 > 0$, $f'(x) = 2x + \frac{1}{x} > 0$, 所以方程 $f(x) = 0$ 有唯一实根 $x^* \in (1, 2)$.
2. 构造迭代格式:

$$x_{k+1} = \sqrt{2 - \ln x_k}, \quad k = 0, 1 \cdots ,$$
$$x_0 = 1.3.$$

分析: 迭代函数 $\varphi(x) = \sqrt{2 - \ln x}$.

1. $\forall x \in [1, 2]$, $|\varphi'(x)| = \frac{1}{2x\sqrt{2-\ln x}} \leq \frac{1}{2\sqrt{2-\ln 2}} < 1$.
2. 当 $x \in [1, 2]$ 时, $1 < \sqrt{2 - \ln 2} \leq \varphi(x) \leq \sqrt{2} < 2$.

由定理 2.1, 迭代收敛.

计算得 $x_1 = 1.318194$, $x_2 = 1.312911$, $x_3 = 1.314440$, $x_4 = 1.313997$, $|x_4 - x_3| < \frac{1}{2} \times 10^{-3}$, $x^* \approx 1.313997$.

定义 2.2

对于方程 $x = \varphi(x)$，若在 x^* 的某个**邻域** $S = \{x||x - x^*| \leq \delta\}$ 内，对**任意初值** $x_0 \in S$ 迭代格式 $x_{k+1} = \varphi(x_k)$ 都收敛，则称迭代法在 x^* 的附近**局部收敛**.

定义 2.2

对于方程 $x=\varphi(x)$，若在 x^* 的某个**邻域** $S=\{x||x-x^*|\le\delta\}$ 内，对**任意初值** $x_0\in S$ 迭代格式 $x_{k+1}=\varphi(x_k)$ 都收敛，则称迭代法在 x^* 的附近**局部收敛**.

定理 2.3

设方程 $x=\varphi(x)$ 有根 x^*，且在 x^* 的某个邻域 $S=\{x||x-x^*|\le\delta\}$ 内 $\varphi(x)$ **一阶连续可导**，则

1. 当 $|\varphi'(x^*)|<1$ 时，迭代格式**局部收敛**；
2. 当 $|\varphi'(x^*)|>1$ 时，迭代格式发散.

2.2.3 迭代法的收敛速度

定义 2.3

设序列 $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ 收敛于 x^*, 并记 $e_k = x^* - x_k$. 如果存在**常数** $p \geq 1$ 及**非零常数** C, 使得

$$\lim_{k\to\infty} \frac{e_{k+1}}{e_k^p} = C$$

则称序列 $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ 是 $\boldsymbol{p}$ **阶收敛**的.

东南大学 SOUTHEAST UNIVERSITY

2.2.3 迭代法的收敛速度

定义 2.3

设序列 $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ 收敛于 x^*, 并记 $e_k = x^* - x_k$. 如果存在常数 $p \geq 1$ 及非零常数 C, 使得

$$\lim_{k\to\infty} \frac{e_{k+1}}{e_k^p} = C$$

则称序列 $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ 是 **p 阶收敛**的.

p 的大小反映了序列 $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ 的收敛速度, p 越大, 收敛越快.

2.2.3 迭代法的收敛速度

定义 2.3

设序列 $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ 收敛于 x^*, 并记 $e_k = x^* - x_k$. 如果存在常数 $p \geq 1$ 及非零常数 C, 使得

$$\lim_{k\to\infty} \frac{e_{k+1}}{e_k^p} = C$$

则称序列 $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ 是 **p 阶收敛**的.

p 的大小反映了序列 $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ 的收敛速度, p 越大, 收敛越快.
当 $p = 1$ 且 $0 < |C| < 1$ 时, 称为**线性收敛**;
当 $p > 1$ 称**超线性收敛**, 特别当 $p = 2$ 时, 称**平方收敛**.

2.2.3 迭代法的收敛速度

定义 2.3

设序列 $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ 收敛于 x^*, 并记 $e_k = x^* - x_k$. 如果存在**常数** $p \geq 1$ 及**非零常数** C, 使得

$$\lim_{k\to\infty} \frac{e_{k+1}}{e_k^p} = C$$

则称序列 $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ 是 **p 阶收敛**的.

p 的大小反映了序列 $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ 的**收敛速度**, p 越大, 收敛越快.
当 $p=1$ 且 $0<|C|<1$ 时, 称为**线性收敛**;
当 $p>1$ 称**超线性收敛**, 特别当 $p=2$ 时, 称**平方收敛**.
如果迭代 $x_{k+1}=\varphi(x_k), k=0,1,\cdots$ 产生的迭代序列 $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ 是 p 阶收敛的, 则称该迭代是 p 阶收敛的.

例 2.4

设两个迭代序列分别是线性收敛和平方收敛:

$$(1)\quad \frac{e_{k+1}}{e_k} = \frac{1}{2}, k = 0, 1, 2 \cdots ;$$

$$(2)\quad \frac{\tilde{e}_{k+1}}{\tilde{e}_k^2} = \frac{1}{2}, k = 0, 1, 2 \cdots ,$$

其中 $e_0 = \tilde{e}_0 = 1$. 若取精度 $\varepsilon = 10^{-16}$, 试分别估计这两个迭代所需迭代次数.

解: (1) 由条件易得

$$e_k = \frac{1}{2}e_{k-1} = \cdots = \frac{1}{2^k}e_0 = \frac{1}{2^k},$$

要使

$$|e_k| = \frac{1}{2^k} \leq 10^{-16},$$

得 $k \geq 53.15$.

解: (1) 由条件易得

$$e_k = \frac{1}{2}e_{k-1} = \cdots = \frac{1}{2^k}e_0 = \frac{1}{2^k},$$

要使

$$|e_k| = \frac{1}{2^k} \leq 10^{-16},$$

得 $k \geq 53.15$.
(2) 由条件得

$$\begin{aligned}\tilde{e}_k &= \frac{1}{2}\tilde{e}_{k-1}^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^{1+2}(\tilde{e}_{k-2})^{2^2} \\ &= \cdots = \left(\frac{1}{2}\right)^{1+2+\cdots+2^{k-1}}\tilde{e}_0^{2^k} = \left(\frac{1}{2}\right)^{2^k-1},\end{aligned}$$

要使

$$|\tilde{e}_k| = \left(\frac{1}{2}\right)^{2^k-1} \leq 10^{-16},$$

解得 $k \geq 5.67$.

定理 2.4

若 $\varphi(x)$ 在 x^* 附近的某个邻域内有 $p(\geq 1)$ 阶连续导数, 且

$$\varphi^{(k)}(x^*) = 0, \quad k = 1, 2, \cdots, p-1, \tag{3.14}$$

$$\varphi^{(p)}(x^*) \neq 0, \tag{3.15}$$

定理 2.4

若 $\varphi(x)$ 在 x^* 附近的某个邻域内有 $p(\geq 1)$ 阶连续导数，且

$$\varphi^{(k)}(x^*) = 0, \quad k = 1, 2, \cdots, p-1, \tag{3.14}$$

$$\varphi^{(p)}(x^*) \neq 0, \tag{3.15}$$

则迭代格式在 x^* 附近是 p 阶局部收敛的，且有

$$\lim_{k\to\infty} \frac{x^* - x_{k+1}}{(x^* - x_k)^p} = (-1)^{p-1} \frac{\varphi^{(p)}(x^*)}{p!}. \tag{3.16}$$

定理 2.4

若 $\varphi(x)$ 在 x^* 附近的某个邻域内有 $p(\geq 1)$ 阶连续导数, 且

$$\varphi^{(k)}(x^*) = 0, \quad k = 1, 2, \cdots, p-1, \tag{3.14}$$

$$\varphi^{(p)}(x^*) \neq 0, \tag{3.15}$$

则迭代格式在 x^* 附近是 p 阶局部收敛的, 且有

$$\lim_{k\to\infty} \frac{x^* - x_{k+1}}{(x^* - x_k)^p} = (-1)^{p-1} \frac{\varphi^{(p)}(x^*)}{p!}. \tag{3.16}$$

如果 $p = 1$, 要求 $|\varphi'(x^*)| < 1$.

2.2.4 迭代法的加速 (Aitken)

定理 2.5

设方程 $x=\varphi(x)$ 有根 x^*, 且在 x^* 附近 $\varphi(x)$ 有 2 阶连续导数, 如果迭代格式 $x_{k+1}=\varphi(x_k)$ 线性收敛, 则迭代格式 $x_{k+1}=\Phi(x_k)$ 平方收敛, 其中

$$\Phi(x)=\frac{x\varphi(\varphi(x))-\varphi^2(x)}{x-2\varphi(x)+\varphi(\varphi(x))}. \tag{3.17}$$

2.3 Newton 迭代格式

给定方程

$$f(x) = 0 \tag{4.1}$$

2.3 Newton 迭代格式

给定方程

$$f(x) = 0 \tag{4.1}$$

若已知 x_k, 将 $f(x)$ 在 x_k 处 Taylor 展开

$$f(x) \approx f(x_k) + f'(x_k)(x - x_k)$$

所以, 方程

$$f(x_k) + f'(x_k)(x - x_k) = 0$$

可以作为 (4.1) 的近似方程, 其根为 $x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$ 可作为方程 (4.1) 的近似根.

2.3 Newton 迭代格式

给定方程

$$f(x) = 0 \tag{4.1}$$

若已知 x_k, 将 $f(x)$ 在 x_k 处 Taylor 展开

$$f(x) \approx f(x_k) + f'(x_k)(x - x_k)$$

所以, 方程

$$f(x_k) + f'(x_k)(x - x_k) = 0$$

可以作为 (4.1) 的近似方程, 其根为 $x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$ 可作为方程 (4.1) 的近似根. 因此得到下面的 **Newton 迭代格式:**

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \quad k = 0, 1, \cdots. \tag{4.2}$$

Newton 迭代的几何意义

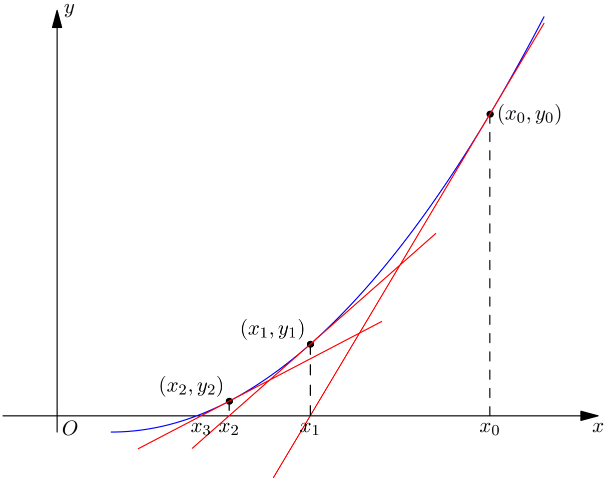

图 4: Newton 迭代法的几何意义

2.3.2 Newton 迭代的局部收敛性

Newton 迭代格式的迭代函数为：$\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$.

2.3.2 Newton 迭代的局部收敛性

Newton 迭代格式的迭代函数为：$\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$.
由定理 2.4，求 $\varphi'(x^*)$.

设 x^* 是方程 $f(x) = 0$ 的 m 重根，($m = 1$, $f(x)$ 在 x^* 存在 3 阶连续导数； $m \geq 2$, $f(x) = 0$ 在 x^* 存在 m 阶连续导数)
则 $f(x) = (x - x^*)^m g(x)$, $g(x^*) \neq 0$.

$$f'(x) = (x - x^*)^{m-1}(mg(x) + (x - x^*)g'(x)),$$

$$\varphi(x) = x - \frac{(x - x^*)g(x)}{mg(x) + (x - x^*)g'(x)},$$

$$
\begin{aligned}
\varphi'(x^*) &= \lim_{x\to x^*}\frac{\varphi(x)-\varphi(x^*)}{x-x^*}\\
&= \lim_{x\to x^*}\frac{1}{x-x^*}\left(x-\frac{(x-x^*)g(x)}{mg(x)+(x-x^*)g'(x)}-x^*\right)\\
&=1-\frac{1}{m}.
\end{aligned}
$$

所以，当 $m=1$ 时，$\varphi'(x^*)=0$; 当 $m\geq 2$, $|\varphi'(x^*)|<1$.

$$
\begin{aligned}
\varphi'(x^*) &= \lim_{x\to x^*}\frac{\varphi(x)-\varphi(x^*)}{x-x^*}\\
&= \lim_{x\to x^*}\frac{1}{x-x^*}\left(x-\frac{(x-x^*)g(x)}{mg(x)+(x-x^*)g'(x)}-x^*\right)\\
&= 1-\frac{1}{m}.
\end{aligned}
$$

所以，当 $m=1$ 时，$\varphi'(x^*)=0$；当 $m\geq 2$，$|\varphi'(x^*)|<1$.

结论：

- 当 $m=1$，即 x^* 为方程单根时，Newton 迭代**至少二阶局部收敛**.
- 当 $m\geq 2$，即 x^* 为方程 $m(m\geq 2)$ 重根时，Newton 迭代**一阶（线性）局部收敛**.

例

给定方程 $e^x + x - 3 = 0$

1. 判别该方程实根个数.
2. 用 Newton 迭代法求方程的根, 要求精确到 3 位有效数.

解:

1. 记 $f(x) = e^x + x - 3$. $f(0) = 1 + 0 - 2 < 0, f(1) = e + 1 - 3 > 0$, $f'(x) = e^x + 1 > 0$, 所以方程 $f(x) = 0$ 有唯一实根 $x^* \in (0, 1)$.

解:

1. 记 $f(x) = e^x + x - 3$. $f(0) = 1 + 0 - 2 < 0, f(1) = e + 1 - 3 > 0$, $f'(x) = e^x + 1 > 0$, 所以方程 $f(x) = 0$ 有唯一实根 $x^* \in (0, 1)$.
2. 迭代格式:

$$
\begin{aligned}
x_{k+1} &= x_k - \frac{e^{x_k} + x_k - 3}{e^{x_k} + 1}, \quad k = 0, 1 \cdots, \\
x_0 &= 0.5.
\end{aligned}
$$

计算得 $x_1 = 0.8214$, $x_2 = 0.7924$, $x_3 = 0.7921$, $|x_3 - x_2| < \frac{1}{2} \times 10^{-3}$, $x^* \approx 0.7921$.

例 2.5

用 Newton 法求方程

$$f(x) = (x - 1.56)^3 (x - 4.56) = 0$$

的根.

例 2.5

用 Newton 法求方程

$$f(x) = (x - 1.56)^3 (x - 4.56) = 0$$

的根.

解 $x_1^* = 4.56$ 是方程 $f(x) = 0$ 的单根，$x_2^* = 1.56$ 方程 $f(x) = 0$ 的三重根.

表 2: Computing results by Newton's method

k	x_k
0	5.000 000
1	4.682 017
2	4.572 805
3	4.560 161
4	4.560 00

表 3: Computing results by Newton's method

k	x_k	k	x_k
0	2.000000	10	1.567042
1	1.844420	11	1.564692
2	1.246184	12	1.563128
3	1.682723	13	1.562085
4	1.641225	14	1.561390
5	1.613896	15	1.560926
6	1.595821	16	1.560617
7	1.583832	17	1.560412
8	1.575867	18	1.560274
9	1.570569	19	1.560183

由表可知求 x_1^* 收敛是很快的，而求 x_2^* 收敛是很慢的。

2.3.3 重根的处理

设 x^* 是方程 $f(x)=0$ 的 m 重根,

1. 若 m 已知, 迭代改为

$$x_{k+1}=x_k-m\frac{f(x_k)}{f'(x_k)},\quad k=0,1,\cdots.$$

2.3.3 重根的处理

设 x^* 是方程 $f(x)=0$ 的 m 重根,

1. 若 m 已知, 迭代改为

$$x_{k+1}=x_k-m\frac{f(x_k)}{f'(x_k)},\quad k=0,1,\cdots.$$

2. 若 m 未知, 记 $u(x)=\frac{f(x)}{f'(x)}$, 此时 x^* 是方程 $u(x)=0$ 的单根, 迭代为

$$x_{k+1}=x_k-\frac{u(x_k)}{u'(x_k)},\quad k=0,1,\cdots.$$

2.3.4 Newton 迭代的大范围收敛性

定理 2.6

设函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 内 2 阶连续可导, 且满足:

1. $f(a)f(b) < 0$;
2. 当 $x \in [a, b]$ 时, $f'(x) \neq 0$;
3. 当 $x \in (a, b)$ 时, $f''(x)$ 保号;
4. $a - \dfrac{f(a)}{f'(a)} \leq b, \quad b - \dfrac{f(b)}{f'(b)} \geq a.$

东南大学 SOUTHEAST UNIVERSITY

2.3.4 Newton 迭代的大范围收敛性

定理 2.6

设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 内 2 阶连续可导, 且满足:

1. $f(a)f(b)<0$;
2. 当 $x\in[a,b]$ 时, $f'(x)\neq 0$;
3. 当 $x\in(a,b)$ 时, $f''(x)$ 保号;
4. $a-\frac{f(a)}{f'(a)}\leq b, \quad b-\frac{f(b)}{f'(b)}\geq a.$

则对 $\forall x_0\in[a,b]$, Newton 迭代格式

$$x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \quad k=0,1,\cdots.$$

收敛到方程 $f(x)=0$ 在 $[a,b]$ 内的唯一实根.

例 2.8

给定方程 $\sin x = \frac{x}{2}$.

1. 讨论上述方程在区间 $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ 上根的存在唯一性以及用 Newton 迭代法的收敛性.
2. 用 Newton 迭代法求根，精确到 5 位有效数字.

2.3.5 Newton 法的变形

1. **割线法**

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f(x_k) - f(x_{k-1})}(x_k - x_{k-1}), \quad k = 1, 2, \cdots .$$

2.3.5 Newton 法的变形

1. **割线法**

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f(x_k) - f(x_{k-1})}(x_k - x_{k-1}), \quad k = 1, 2, \cdots .$$

2. **拟 Newton 法**

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f^2(x_k)}{f(x_k) - f(x_k - f(x_k))}, \quad k = 0, 1, \cdots .$$

2.3.5 Newton 法的变形

1. **割线法**

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f(x_k) - f(x_{k-1})}(x_k - x_{k-1}), \quad k = 1, 2, \cdots .$$

2. **拟 Newton 法**

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f^2(x_k)}{f(x_k) - f(x_k - f(x_k))}, \quad k = 0, 1, \cdots .$$

3. **Steffenson 法**

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f^2(x_k)}{f(x_k + f(x_k)) - f(x_k)}, \quad k = 0, 1, \cdots .$$

习题 2 p.54–p.56

1(2),(4), 4, 6, 9, 10, 11, 12, 20(上机题)