第 6 章 常微分方程数值解

本章主要内容

1. Euler 公式, 后退的 Euler 公式, 梯形公式, 改进的 Euler 公式, 局部截断误差和阶数
2. Runge-Kutta 方法
3. 单步法的收敛性和稳定性
4. 线性多步法 (Admas 显式和隐式公式, 基于 Taylor 展开的线性多步法的构造)

本章讨论一阶常微分方程初值问题的数值解

$$\begin{cases} y' = f(x, y), & a \leq x \leq b, \\ y(a) = \eta. \end{cases} \tag{0.1}$$

本章讨论一阶常微分方程初值问题的数值解

$$\begin{cases} y' = f(x, y), \quad a \leq x \leq b, \\ y(a) = \eta. \end{cases} \tag{0.1}$$

假设

1. $f(x, y), \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ 连续.

本章讨论一阶常微分方程初值问题的数值解

$$\begin{cases} y' = f(x, y), \quad a \leq x \leq b, \\ y(a) = \eta. \end{cases} \tag{0.1}$$

假设

1. $f(x, y), \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ 连续.
2. (0.1) 存在唯一解 $y(x)$ 且在 $[a, b]$ 上充分光滑.

本章讨论一阶常微分方程初值问题的数值解

$$\begin{cases} y' = f(x,y), \quad a \leq x \leq b, \\ y(a) = \eta. \end{cases} \tag{0.1}$$

假设

1. $f(x,y), \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ 连续.
2. (0.1) 存在唯一解 $y(x)$ 且在 $[a,b]$ 上充分光滑.

离散化: 将 $[a,b]$ 作 n 等分, 记 $h=(b-a)/n$, $x_i = a+ih$, $(i=0,1,\cdots,n)$. 称 h 为步长. 所谓 (0.1) 的数值解, 是求初值问题 (0.1) 的解 $y(x)$ 在离散点 $x_i(i=0,1,\cdots,n)$ 处的近似值 y_i.

本章讨论一阶常微分方程初值问题的数值解

$$\begin{cases} y' = f(x, y), & a \le x \le b, \\ y(a) = \eta. \end{cases} \tag{0.1}$$

假设

1. $f(x, y), \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ 连续.
2. (0.1) 存在唯一解 $y(x)$ 且在 $[a, b]$ 上充分光滑.

离散化: 将 $[a, b]$ 作 n 等分, 记 $h = (b - a)/n$, $x_i = a + ih$, $(i = 0, 1, \cdots, n)$. 称 h 为步长. 所谓 (0.1) 的**数值解**, 是求初值问题 (0.1) 的解 $y(x)$ 在离散点 $x_i(i = 0, 1, \cdots, n)$ 处的近似值 y_i.

计算 y_{i+1} 时, 如果只用到前一步的值 y_i, 称这类方法为**单步法**.

本章讨论一阶常微分方程初值问题的数值解

$$\begin{cases} y' = f(x, y), & a \le x \le b, \\ y(a) = \eta. \end{cases} \tag{0.1}$$

假设

1. $f(x, y), \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ 连续.
2. (0.1) 存在唯一解 $y(x)$ 且在 $[a, b]$ 上充分光滑.

离散化: 将 $[a, b]$ 作 n 等分, 记 $h = (b - a)/n$, $x_i = a + ih$, $(i = 0, 1, \cdots, n)$. 称 h 为步长. 所谓 (0.1) 的**数值解**, 是求初值问题 (0.1) 的解 $y(x)$ 在离散点 $x_i (i = 0, 1, \cdots, n)$ 处的近似值 y_i.

计算 y_{i+1} 时, 如果只用到前一步的值 y_i, 称这类方法为**单步法**.
计算 y_{i+1} 时, 如果用到前 r 步的值 $y_i, y_{i-1}, \cdots, y_{i-r+1}$, 这类方法称为 ***r* 步方法**.

1.1 Euler 公式

将方程 (0.1) 两边在 $[x_i, x_{i+1}]$ 积分

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} y'(x)\,dx = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x, y(x))\,dx,$$

得到

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x, y(x))\,dx. \tag{1.1}$$

1.1 Euler 公式

将方程 (0.1) 两边在 $[x_i, x_{i+1}]$ 积分

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} y'(x)\,dx = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x, y(x))\,dx,$$

得到

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x, y(x))\,dx. \tag{1.1}$$

应用 左矩形公式 近似右端积分得

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + hf(x_i, y(x_i)) + R_{i+1}^{(1)},$$

其中

$$R_{i+1}^{(1)} = \frac{1}{2}\frac{df(x, y(x))}{dx}\Big|_{x=\xi_i} h^2 = \frac{1}{2}y''(\xi_i)h^2, \quad \xi_i \in (x_i, x_{i+1}),$$

1.1 Euler 公式

将方程 (0.1) 两边在 $[x_i, x_{i+1}]$ 积分

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} y'(x)\,dx = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x, y(x))\,dx,$$

得到

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x, y(x))\,dx. \tag{1.1}$$

应用 **左矩形公式** 近似右端积分得

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + hf(x_i, y(x_i)) + R_{i+1}^{(1)},$$

其中

$$R_{i+1}^{(1)} = \frac{1}{2}\frac{df(x, y(x))}{dx}\Big|_{x=\xi_i} h^2 = \frac{1}{2}y''(\xi_i)h^2, \quad \xi_i \in (x_i, x_{i+1}),$$

上式中忽略 $R_{i+1}^{(1)}$ 有

$$y(x_{i+1}) \approx y(x_i) + hf(x_i, y(x_i)), \quad 0 \le i \le n-1. \tag{1.2}$$

由初值条件有

$$y(x_0) = \eta \equiv y_0.$$

代入 (1.2) 可得

$$y(x_1) \approx y(x_0) + hf(x_0, y(x_0)) = y_0 + hf(x_0, y_0). \tag{1.3}$$

由初值条件有

$$y(x_0) = \eta \equiv y_0.$$

代入 (1.2) 可得

$$y(x_1) \approx y(x_0) + hf(x_0, y(x_0)) = y_0 + hf(x_0, y_0). \tag{1.3}$$

一般地, 若已知 $y(x_i)$ 的近似值 y_i, 由 (1.2) 可得

$$y(x_{i+1}) \approx y(x_i) + hf(x_i, y(x_i)) \approx y_i + hf(x_i, y_i) \equiv y_{i+1}. \tag{1.4}$$

综合 (1.3)-(1.4), 得到

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i), \quad i = 0, 1, \cdots, n-1. \tag{1.5}$$

称 (1.5) 为 Euler 公式.

由初值条件有

$$y(x_0)=\eta\equiv y_0.$$

代入 (1.2) 可得

$$y(x_1)\approx y(x_0)+hf(x_0,y(x_0))=y_0+hf(x_0,y_0). \tag{1.3}$$

一般地, 若已知 $y(x_i)$ 的近似值 y_i, 由 (1.2) 可得

$$y(x_{i+1})\approx y(x_i)+hf(x_i,y(x_i))\approx y_i+hf(x_i,y_i)\equiv y_{i+1}. \tag{1.4}$$

综合 (1.3)-(1.4), 得到

$$y_{i+1}=y_i+hf(x_i,y_i),\quad i=0,1,\cdots,n-1. \tag{1.5}$$

称 (1.5) 为 Euler 公式.由上式可依次得到

$$y_i,\quad 0\le i\le n.$$

将 y_i 作为 $y(x_i)$ 的近似值. 其几何意义参见图 1. Euler 公式是一个单步显式公式.

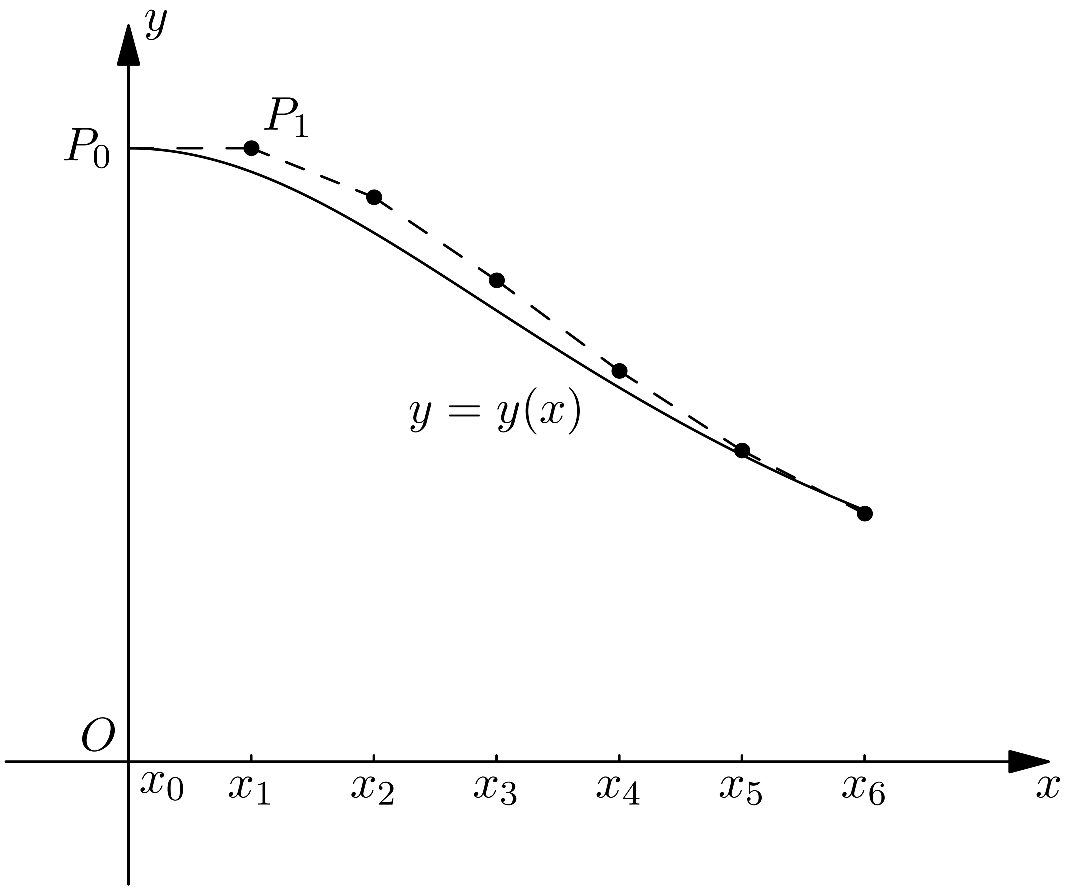

图 1: Euler 方法示意图

一般的单步显式公式为

$$\begin{cases} y_{i+1} = y_i + h\varphi(x_i, y_i, h), \\ y_0 = \eta, \end{cases} \tag{1.6}$$

其中, $\varphi(x, y, h)$ **称为增量函数**.

一般的单步显式公式为

$$\begin{cases} y_{i+1} = y_i + h\varphi(x_i, y_i, h), \\ y_0 = \eta, \end{cases} \tag{1.6}$$

其中, $\varphi(x, y, h)$ 称为**增量函数**.

定义 1.1

称

$$R_{i+1} = y(x_{i+1}) - [y(x_i) + h\varphi(x_i, y(x_i), h)]$$

为单步显式公式 (1.6) 在点 x_{i+1} 处的**局部截断误差**.

一般的单步显式公式为

$$\begin{cases} y_{i+1} = y_i + h\varphi(x_i, y_i, h), \\ y_0 = \eta, \end{cases} \tag{1.6}$$

其中, $\varphi(x, y, h)$ 称为**增量函数**.

定义 1.1

称

$$R_{i+1} = y(x_{i+1}) - [y(x_i) + h\varphi(x_i, y(x_i), h)]$$

为单步显式公式 (1.6) 在点 x_{i+1} 处的**局部截断误差**.

由上述定义, Euler 公式 (1.5) 的局部截断误差为

$$\begin{aligned} R_{i+1} &= y(x_{i+1}) - [y(x_i) + hf(x_i, y(x_i))] \\ &= \frac{1}{2}h^2 y''(\xi_i), \quad \xi_i \in (x_i, x_{i+1}). \end{aligned}$$

1.2 后退的 Euler 公式

(1.1) 中的积分用 右矩形公式 近似得

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + hf(x_{i+1}, y(x_{i+1})) + R_{i+1}^{(2)},$$

其中

$$R_{i+1}^{(2)} = -\frac{h^2}{2}\frac{df(x, y(x))}{dx}\Big|_{x=\xi_i} = -\frac{h^2}{2}y''(\xi_i), \quad \xi_i \in (x_i, x_{i+1}).$$

1.2 后退的 Euler 公式

(1.1) 中的积分用 **右矩形公式** 近似得

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + hf(x_{i+1}, y(x_{i+1})) + R_{i+1}^{(2)},$$

其中

$$R_{i+1}^{(2)} = -\frac{h^2}{2}\frac{df(x, y(x))}{dx}\Big|_{x=\xi_i} = -\frac{h^2}{2}y''(\xi_i), \quad \xi_i \in (x_i, x_{i+1}).$$

从而有

$$y(x_{i+1}) \approx y(x_i) + hf(x_{i+1}, y(x_{i+1})) \approx y_i + hf(x_{i+1}, y_{i+1}),$$

得**后退的 Euler 公式**为

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_{i+1}, y_{i+1}), \quad i = 0, 1, \cdots, n-1. \tag{1.7}$$

后退的 Euler 公式是**单步隐式公式**.

一般的单步隐式公式为

$$\begin{cases} y_{i+1} = y_i + h\psi(x_i, y_i, y_{i+1}, h), \quad i = 0, 1, \cdots, n-1, \\ y_0 = \eta, \end{cases} \tag{1.8}$$

其中 $\psi(x_i, y_i, y_{i+1}, h)$ 称为**增量函数**.

一般的单步隐式公式为

$$\begin{cases} y_{i+1} = y_i + h\psi(x_i, y_i, y_{i+1}, h), \quad i = 0, 1, \cdots, n-1, \\ y_0 = \eta, \end{cases} \tag{1.8}$$

其中 $\psi(x_i, y_i, y_{i+1}, h)$ 称为**增量函数**.

定义 1.2

称

$$R_{i+1} = y(x_{i+1}) - [y(x_i) + h\psi(x_i, y(x_i), y(x_{i+1}), h)]$$

为单步隐式公式 (1.8) 的**局部截断误差**.

一般的单步隐式公式为

$$\begin{cases} y_{i+1} = y_i + h\psi(x_i, y_i, y_{i+1}, h), \quad i = 0, 1, \cdots, n-1, \\ y_0 = \eta, \end{cases} \tag{1.8}$$

其中 $\psi(x_i, y_i, y_{i+1}, h)$ 称为**增量函数**.

定义 1.2

称

$$R_{i+1} = y(x_{i+1}) - [y(x_i) + h\psi(x_i, y(x_i), y(x_{i+1}), h)]$$

为单步隐式公式 (1.8) 的**局部截断误差**.

由定义 1.2, 后退的 Euler 公式的局部截断误差为

$$\begin{aligned} R_{i+1} &= y(x_{i+1}) - y(x_i) - hf(x_{i+1}, y(x_{i+1})) \\ &= -\frac{h^2}{2} y''(\xi_i), \quad \xi_i \in (x_i, x_{i+1}). \end{aligned}$$

1.3 梯形公式

将 (1.1) 中积分用 **梯形公式** 近似得

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + \frac{h}{2}[f(x_i, y(x_i)) + f(x_{i+1}, y(x_{i+1}))] + R_{i+1}^{(3)},$$

其中

$$R_{i+1}^{(3)} = -\frac{h^3}{12}\frac{d^2 f(x, y(x))}{dx^2}\Big|_{x=\xi_i} = -\frac{1}{12}y'''(\xi_i)h^3, \quad \xi_i \in (x_i, x_{i+1}).$$

1.3 梯形公式

将 (1.1) 中积分用 **梯形公式** 近似得

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + \frac{h}{2}[f(x_i, y(x_i)) + f(x_{i+1}, y(x_{i+1}))] + R_{i+1}^{(3)},$$

其中

$$R_{i+1}^{(3)} = -\frac{h^3}{12}\frac{d^2 f(x, y(x))}{dx^2}\Big|_{x=\xi_i} = -\frac{1}{12}y'''(\xi_i)h^3, \quad \xi_i \in (x_i, x_{i+1}).$$

略去 $R_{i+1}^{(3)}$ 得

$$\begin{aligned} y(x_{i+1}) &\approx y(x_i) + \frac{h}{2}[f(x_i, y(x_i)) + f(x_{i+1}, y(x_{i+1}))] \\ &\approx y_i + \frac{h}{2}[f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1})], \end{aligned}$$

所以得梯形公式

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}[f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1})], \ \ i = 0, 1, \cdots, n-1. \tag{1.9}$$

它是一个单步隐式公式.

所以得梯形公式

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}[f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1})], \;\; i = 0, 1, \cdots, n-1. \tag{1.9}$$

它是一个单步隐式公式.由单步隐式公式局部截断误差的定义得梯形公式的局部截断误差为

$$\begin{aligned} R_{i+1} &= y(x_{i+1}) - \left\{ y(x_i) + \frac{h}{2}[f(x_i, y(x_i)) + f(x_{i+1}, y(x_{i+1}))] \right\} \\ &= -\frac{1}{12} y'''(\xi_i) h^3, \quad \xi_i \in (x_i, x_{i+1}). \end{aligned}$$

1.4 改进的 Euler 公式

预测校正公式

$$\begin{cases} y_{i+1}^{(p)} = y_i + hf(x_i, y_i) & \textbf{预测公式} \\ y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}[f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1}^{(p)})] & \textbf{校正公式} \end{cases}$$

称上式为**改进的 Euler 公式**.

1.4 改进的 Euler 公式

预测校正公式

$$\begin{cases} y_{i+1}^{(p)} = y_i + hf(x_i, y_i) & \text{预测公式} \\ y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}[f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1}^{(p)})] & \text{校正公式} \end{cases}$$

称上式为改进的 Euler 公式.它是单步显式公式. 也可将上式写为如下两种形式

$$\begin{cases} y_{i+1}^{(p)} = y_i + hf(x_i, y_i) \\ y_{i+1}^{(c)} = y_i + hf(x_{i+1}, y_{i+1}^{(p)}) \\ y_{i+1} = \frac{1}{2}(y_{i+1}^{(p)} + y_{i+1}^{(c)}) \end{cases},$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}[f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_i + hf(x_i, y_i))],$$

1.4 改进的 Euler 公式

预测校正公式

$$\begin{cases} y_{i+1}^{(p)} = y_i + hf(x_i, y_i) & \text{预测公式} \\ y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}[f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1}^{(p)})] & \text{校正公式} \end{cases}$$

称上式为改进的 Euler 公式.它是单步显式公式. 也可将上式写为如下两种形式

$$\begin{cases} y_{i+1}^{(p)} = y_i + hf(x_i, y_i) \\ y_{i+1}^{(c)} = y_i + hf(x_{i+1}, y_{i+1}^{(p)}) \\ y_{i+1} = \frac{1}{2}(y_{i+1}^{(p)} + y_{i+1}^{(c)}) \end{cases},$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}[f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_i + hf(x_i, y_i))],$$

其局部截断误差为

$$R_{i+1} = y(x_{i+1}) - y(x_i) - \left\{ \frac{h}{2} \Big[f(x_i, y(x_i)) + f(x_{i+1}, y(x_i) + hf(x_i, y(x_i))) \Big] \right\}.$$

用两种方法求上面的局部截断误差.

用两种方法求上面的局部截断误差.

方法一: 由上式得

$$
\begin{aligned}
R_{i+1} =& y(x_{i+1}) - y(x_i) - \frac{h}{2}[f(x_i, y(x_i)) + f(x_{i+1}, y(x_{i+1}))] \\
&+ \frac{h}{2}[f(x_{i+1}, y(x_{i+1})) - f(x_{i+1}, y(x_i) + hf(x_i, y(x_i)))] \\
=& -\frac{1}{12}y'''(\xi_i)h^3 + \frac{h}{2}\frac{\partial f(x_{i+1}, \eta_{i+1})}{\partial y}[y(x_{i+1}) - y(x_i) - hf(x_i, y(x_i))] \\
=& -\frac{1}{12}y'''(\xi_i)h^3 + \frac{h}{2} \times \frac{1}{2}\frac{\partial f(x_{i+1}, \eta_{i+1})}{\partial y}y''(\tilde{\xi}_i)h^2 \\
=& \left[-\frac{1}{12}y'''(\xi_i) + \frac{1}{4}\frac{\partial f(x_{i+1}, \eta_{i+1})}{\partial y}y''(\tilde{\xi}_i)\right]h^3, \quad \xi_i, \tilde{\xi}_i \in (x_i, x_{i+1}).
\end{aligned}
$$

η_{i+1} 介于 $y(x_{i+1})$ 与 $y(x_i) + hf(x_i, y(x_i))$ 之间.

方法二 将 $y(x_{i+1})$ 在 x_i 点 Taylor 展开，将 $f(x_{i+1}, y(x_i) + hf(x_i, y(x_i)))$ 在 $(x_i, y(x_i))$ 点 Taylor 展开

方法二 将 $y(x_{i+1})$ 在 x_i 点 Taylor 展开，将 $f(x_{i+1}, y(x_i) + hf(x_i, y(x_i)))$ 在 $(x_i, y(x_i))$ 点 Taylor 展开

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + hy'(x_i) + \frac{1}{2!}h^2 y''(x_i) + \frac{1}{3!}h^3 y'''(x_i) + O(h^4),$$

方法二 将 $y(x_{i+1})$ 在 x_i 点 Taylor 展开，将 $f(x_{i+1}, y(x_i) + hf(x_i, y(x_i)))$ 在 $(x_i, y(x_i))$ 点 Taylor 展开

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + hy'(x_i) + \frac{1}{2!}h^2 y''(x_i) + \frac{1}{3!}h^3 y'''(x_i) + O(h^4),$$

$$\begin{aligned}
f(x_{i+1}, y(x_i) + hf(x_i, y(x_i))) =& f(x_i + h, y(x_i) + hf(x_i, y(x_i))) \\
=& f(x_i, y(x_i)) + h\frac{\partial f}{\partial x}(x_i, y(x_i)) + hf(x_i, y(x_i))\frac{\partial f}{\partial y}(x_i, y(x_i)) \\
&+ \frac{1}{2!}\left[h^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_i, y(x_i)) + 2h^2 f(x_i, y(x_i))\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_i, y(x_i))\right. \\
&\left. + h^2 (f(x_i, y(x_i)))^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_i, y(x_i))\right] + O(h^3) \\
=& y'(x_i) + hy''(x_i) + \frac{1}{2}h^2\left(y'''(x_i) - y''(x_i)\frac{\partial f}{\partial y}(x_i, y(x_i))\right) \\
&+ O(h^3).
\end{aligned}$$

将上面两式代入误差式并利用 $y(x)$ 及其导数和 $f(x, y(x))$ 的关系

$$
\begin{aligned}
R_{i+1} =& y(x_i) + hy'(x_i) + \frac{1}{2!}h^2 y''(x_i) + \frac{1}{3!}h^3 y'''(x_i) + O(h^4) \\
& - y(x_i) - \frac{1}{2}hy'(x_i) \\
& - \frac{1}{2}h\left[y'(x_i) + hy''(x_i) + \frac{1}{2}h^2\left(y'''(x_i) - y''(x_i)\frac{\partial f}{\partial y}(x_i, y(x_i))\right) + O(h^3)\right] \\
=& \left[-\frac{1}{12}y'''(x_i) + \frac{1}{4}y''(x_i)\frac{\partial f}{\partial y}(x_i, y(x_i))\right]h^3 + O(h^4).
\end{aligned}
$$

1.5 整体截断误差

设当步长为 h 时某种数值方法求得的数值解为 $y_1^{[h]}, y_2^{[h]}, \cdots, y_n^{[h]}$.

1.5 整体截断误差

设当步长为 h 时某种数值方法求得的数值解为 $y_1^{[h]}, y_2^{[h]}, \cdots, y_n^{[h]}$.

定义 1.3

设 $y(x_i), y_i^{[h]}, i = 1, 2, \cdots, n$, 分别为精确解和数值解, 则称

$$E(h) = \max_{1 \le i \le n} |y(x_i) - y_i^{[h]}| \tag{1.10}$$

为该数值方法的**整体截断误差**. 如果

$$\lim_{h \to 0} E(h) = 0,$$

则称该方法收敛.

定义 1.4

如果一个求解公式的局部截断误差为 $R_{i+1} = O(h^{p+1})$, 则称该公式是 $\boldsymbol{p}$ **阶**的, 或具有 $\boldsymbol{p}$ **阶精度**.

定义 1.4

如果一个求解公式的局部截断误差为 $R_{i+1} = O(h^{p+1})$, 则称该公式是 $\boldsymbol{p}$ **阶的**, 或具有 $\boldsymbol{p}$ **阶精度**.

根据这定义, Euler 公式、后退的 Euler 公式是 1 阶的, 梯形公式和改进的 Euler 公式是 2 阶的.