第 4 章 多项式插值与函数最佳逼近

本章主要内容

1. Lagrange 插值多项式及余项表示
2. 差商和 Newton 插值多项式
3. Hermite 插值多项式
4. 分段低次插值
5. 三次样条插值
6. 最佳一致逼近
7. 最佳平方逼近

1. 函数关系 $y = f(x)$ 是一个函数表: $y_i = f(x_i)\ (i = 0, 1, 2 \cdots, n)$;

1. 函数关系 $y = f(x)$ 是一个函数表: $y_i = f(x_i)$ $(i = 0, 1, 2 \cdots, n)$;
2. 函数解析表达式 $y = f(x)$ 知道, 但很复杂.

1. 函数关系 $y = f(x)$ 是一个函数表: $y_i = f(x_i)$ $(i = 0, 1, 2 \cdots, n)$;
2. 函数解析表达式 $y = f(x)$ 知道, 但很复杂.

用一个简单的函数 (一般是多项式)$p(x)$ 近似函数 $f(x)$.

1. 函数关系 $y = f(x)$ 是一个函数表: $y_i = f(x_i)$ $(i = 0, 1, 2\cdots, n)$;
2. 函数解析表达式 $y = f(x)$ 知道, 但很复杂.

用一个简单的函数 (一般是多项式)$p(x)$ 近似函数 $f(x)$.

定义 1.1

设函数 $y = f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上有定义, 且已知在点 $a \leq x_0 < x_1 < \cdots < x_n \leq b$ 上的值 $f(x_0), f(x_1), \cdots, f(x_n)$, 若存在一个次数不超过 n 的多项式 $p_n(x)$, 使

$$p_n(x_i) = f(x_i) \quad (i = 0, 1, 2\cdots, n) \tag{1.1}$$

成立, 则称 $p_n(x)$ 为 $f(x)$ 的 **n 次插值多项式**, 式 (1.1) 为**插值条件**, 点 $x_0, x_1, \cdots, x_n$ 称为**插值节点**, 称 $f(x)$ 为**被插值函数**.

1. 函数关系 $y = f(x)$ 是一个函数表: $y_i = f(x_i)$ $(i = 0, 1, 2 \cdots, n)$;
2. 函数解析表达式 $y = f(x)$ 知道, 但很复杂.

用一个简单的函数 (一般是多项式)$p(x)$ 近似函数 $f(x)$.

定义 1.1

设函数 $y = f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上有定义, 且已知在点 $a \leq x_0 < x_1 < \cdots < x_n \leq b$ 上的值 $f(x_0), f(x_1), \cdots, f(x_n)$, 若存在一个次数不超过 n 的多项式 $p_n(x)$, 使

$$p_n(x_i) = f(x_i) \quad (i = 0, 1, 2 \cdots, n) \tag{1.1}$$

成立, 则称 $p_n(x)$ 为 $f(x)$ 的 **n 次插值多项式**, 式 (1.1) 为**插值条件**, 点 $x_0, x_1, \cdots, x_n$ 称为**插值节点**, 称 $f(x)$ 为**被插值函数**.

在几何上, 插值多项式就是求曲线 $y = p_n(x)$, 使其通过给定的 $n + 1$ 个点 (x_i, y_i), $i = 0, 1, \cdots, n$.

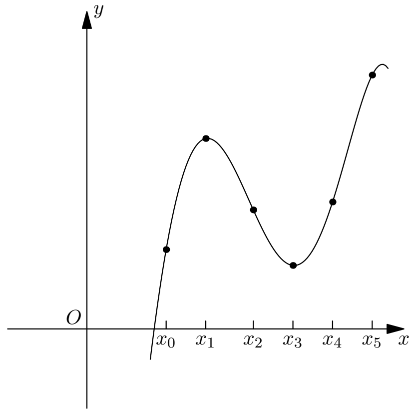

图 1: 插值多项式的几何意义

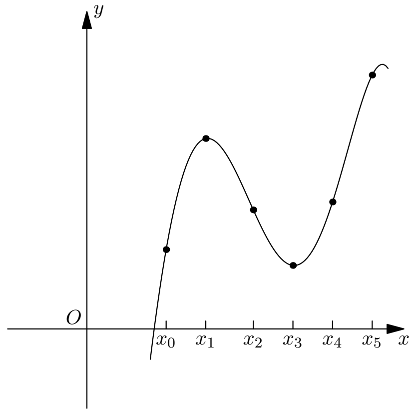

图 1: 插值多项式的几何意义

定理 1.1

满足插值条件 (1.1) 的 n 次多项式 $p_n(x)$ 是存在唯一的.

1.1 基本插值多项式

问题 求 n 次多项式 $l_k(x)$, 使满足

$$l_k(x_0)=0,\ l_k(x_1)=0,\ \cdots,\ l_k(x_{k-1})=0,\ l_k(x_k)=1,\ l_k(x_{k+1})=0,\cdots,\ l_k(x_n)=0.$$

即

$$l_k(x_j)=\begin{cases} 1 & (j=k) \\ 0 & (j\neq k). \end{cases} \tag{1.2}$$

1.1 基本插值多项式

问题　求 n 次多项式 $l_k(x)$, 使满足

$$l_k(x_0) = 0,\ l_k(x_1) = 0,\ \cdots,\ l_k(x_{k-1}) = 0,\ l_k(x_k) = 1,\ l_k(x_{k+1}) = 0, \cdots,\ l_k(x_n) = 0.$$

即

$$l_k(x_j) = \begin{cases} 1 & (j = k) \\ 0 & (j \neq k). \end{cases} \tag{1.2}$$

由条件 (1.2) 知道 $x_0,\ x_1,\ \cdots,\ x_{k-1},\ x_{k+1},\ \cdots,\ x_n$ 是 n 次多项式 $l_k(x)$ 的零点, 所以 $l_k(x)$ 有 n 个因子:

$$x - x_0,\ x - x_1,\ \cdots,\ x - x_{k-1},\ x - x_{k+1}, \cdots,\ x - x_n.$$

1.1 基本插值多项式

问题 求 n 次多项式 $l_k(x)$, 使满足

$$l_k(x_0)=0,\ l_k(x_1)=0,\ \cdots,\ l_k(x_{k-1})=0,\ l_k(x_k)=1,\ l_k(x_{k+1})=0,\cdots,\ l_k(x_n)=0.$$

即

$$l_k(x_j)=\begin{cases} 1 & (j=k) \\ 0 & (j\neq k). \end{cases} \tag{1.2}$$

由条件 (1.2) 知道 $x_0,\ x_1,\ \cdots,\ x_{k-1},\ x_{k+1},\ \cdots,\ x_n$ 是 n 次多项式 $l_k(x)$ 的零点, 所以 $l_k(x)$ 有 n 个因子:

$$x-x_0,\ x-x_1,\ \cdots,\ x-x_{k-1},\ x-x_{k+1},\cdots,\ x-x_n.$$

所以有

$$l_k(x)=A_k(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\cdots(x-x_n)=A_k\prod_{\substack{i=0\\ i\neq k}}^{n}(x-x_i) \tag{1.3}$$

其中 A_k 为待定常数. 由 $l_k(x_k) = 1$, 即

$$A_k \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^{n} (x_k - x_i) = 1$$

其中 A_k 为待定常数. 由 $l_k(x_k)=1$, 即

$$A_k\prod_{\substack{i=0\\i\neq k}}^{n}(x_k-x_i)=1$$

得到

$$A_k=\frac{1}{\prod\limits_{\substack{i=0\\i\neq k}}^{n}(x_k-x_i)}\quad\Rightarrow$$

$$l_k(x)=\frac{\prod\limits_{\substack{i=0\\i\neq k}}^{n}(x-x_i)}{\prod\limits_{\substack{i=0\\i\neq k}}^{n}(x_k-x_i)}=\prod_{\substack{i=0\\i\neq k}}^{n}\frac{x-x_i}{x_k-x_i}. \tag{1.4}$$

其中 A_k 为待定常数. 由 $l_k(x_k) = 1$, 即

$$A_k \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^{n} (x_k - x_i) = 1$$

得到

$$A_k = \frac{1}{\prod\limits_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^{n} (x_k - x_i)} \quad \Rightarrow$$

$$l_k(x) = \frac{\prod\limits_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^{n} (x - x_i)}{\prod\limits_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^{n} (x_k - x_i)} = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^{n} \frac{x - x_i}{x_k - x_i}. \tag{1.4}$$

$l_k(x)$ 称为 n **次基本插值多项式**. 当 $k = 0, 1, \cdots, n$ 时, 可得到 $n+1$ 个基本插值多项式 $l_0(x), l_1(x), \cdots, l_n(x)$.

1.2 Lagrange 插值多项式

利用基本插值多项式, 满足插值条件 (1.1) 的 n 次插值多项式可以表示为

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k) l_k(x). \tag{1.5}$$

1.2 Lagrange 插值多项式

利用基本插值多项式, 满足插值条件 (1.1) 的 n 次插值多项式可以表示为

$$p_n(x)=\sum_{k=0}^{n} f(x_k)l_k(x). \tag{1.5}$$

事实上, 由于 $p_n(x)$ 是 n 次多项式, 而且

$$p_n(x_i)=\sum_{k=0}^{n} f(x_k)l_k(x_i)=f(x_i)l_i(x_i)=f(x_i), \quad (i=0,1,\cdots,n,)$$

1.2 Lagrange 插值多项式

利用基本插值多项式, 满足插值条件 (1.1) 的 n 次插值多项式可以表示为

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k) l_k(x). \tag{1.5}$$

事实上, 由于 $p_n(x)$ 是 n 次多项式, 而且

$$p_n(x_i) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k) l_k(x_i) = f(x_i) l_i(x_i) = f(x_i), \quad (i = 0, 1, \cdots, n,)$$

(1.5) 称为 $\boldsymbol{n}$ **次 Lagrange 插值多项式**, 记为 $L_n(x)$, 即

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k) l_k(x) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k) \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^{n} \frac{x - x_i}{x_k - x_i}. \tag{1.6}$$

注 1.1

$l_0(x), l_1(x)\cdots, {}_n(x)$ 线性无关, 它是 n 次多项式空间 $\mathcal{P}_n$ 的一组基, 而 $1, x, x^2, \cdots, x^n$ 也是其一组基. $l_0(x), l_1(x)\cdots, {}_n(x)$ 称为 **n 次 Lagrange 插值基函数**.

1.3 插值余项及误差估计

称 $R_n(x) = f(x) - L_n(x)$ 为插值多项式的余项.

1.3 插值余项及误差估计

称 $R_n(x) = f(x) - L_n(x)$ 为插值多项式的余项.

定理 1.2

设 $f^{(n)}(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, $f^{(n+1)}(x)$ 在 (a,b) 内存在, $x_0, x_1, \cdots, x_n \in [a,b]$ 为互异节点, $L_n(x)$ 是满足 (1.1) 的插值多项式, 则对 $\forall x \in [a,b]$, $\exists\, \xi \in (a,b)$ (ξ 依赖于 x), 使得

$$R_n(x) = f(x) - L_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_{n+1}(x), \tag{1.7}$$

其中 $\omega_{n+1}(x) = \prod_{i=0}^{n}(x - x_i)$.

注 1.2

1. ξ 依赖于 x, 即

$$\xi = \xi(x) \in (\min\{x_0, x_1, \cdots, x_n\}, \max\{x_0, x_1, \cdots, x_n\}).$$

注 1.2

1. ξ 依赖于 x, 即
$$\xi = \xi(x) \in (\min\{ x_0, x_1, \cdots, x_n\}, \max\{x_0, x_1, \cdots, x_n\}).$$

2. 当 $f(x)$ 本身是一个次数不超过 n 的多项式时, $f(x) - L_n(x) = 0$, 因而 $L_n(x) = f(x)$. 特别当 $f(x) = 1$, 则有
$$\sum_{k=0}^{n} l_k(x) = 1.$$

注 1.2

1. ξ 依赖于 x, 即

$$\xi = \xi(x) \in (\min\{ x_0, x_1, \cdots, x_n\}, \max\{x_0, x_1, \cdots, x_n\}).$$

2. 当 $f(x)$ 本身是一个次数不超过 n 的多项式时, $f(x) - L_n(x) = 0$, 因而 $L_n(x) = f(x)$. 特别当 $f(x) = 1$, 则有

$$\sum_{k=0}^{n} l_k(x) = 1.$$

3. ξ 一般不能求出, 因此只能估计误差. 设 $\max\limits_{a\leq x\leq b} |f^{(n+1)}(x)| = M_{n+1}$, 则有

$$|R_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}|\omega(x)|.$$

例 1.1

已知函数 $f(x) = \sin x,\ x \in [0, \pi]$.
(1) 以 $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{\pi}{2}$, $x_2 = \pi$ 为插值节点, 求 $f(x)$ 的 2 次插值多项式 $L_2(x)$, 并作 $f(x)$ 和 $L_2(x)$ 的图像.
(2) 以 $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{\pi}{3}$, $x_2 = \frac{2\pi}{3}$, $x_3 = \pi$ 为插值节点, 求 $f(x)$ 的 3 次插值多项式 $L_3(x)$, 并作 $f(x)$ 和 $L_3(x)$ 的图像.

例 1.1

已知函数 $f(x)=\sin x,\ x\in[0,\pi]$.
(1) 以 $x_0=0,\ x_1=\frac{\pi}{2},\ x_2=\pi$ 为插值节点, 求 $f(x)$ 的 2 次插值多项式 $L_2(x)$, 并作 $f(x)$ 和 $L_2(x)$ 的图像.
(2) 以 $x_0=0,\ x_1=\frac{\pi}{3},\ x_2=\frac{2\pi}{3},\ x_3=\pi$ 为插值节点, 求 $f(x)$ 的 3 次插值多项式 $L_3(x)$, 并作 $f(x)$ 和 $L_3(x)$ 的图像.

解 (1) 由 Lagrange 插值多项式知

$$\begin{aligned}L_2(x)=&f(0)\frac{(x-\frac{\pi}{2})(x-\pi)}{\left(0-\frac{\pi}{2}\right)(0-\pi)}+f\left(\frac{\pi}{2}\right)\frac{(x-0)\,(x-\pi)}{\left(\frac{\pi}{2}-0\right)\left(\frac{\pi}{2}-\pi\right)}\\&+f(\pi)\frac{(x-0)\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}{(\pi-0)\left(\pi-\frac{\pi}{2}\right)}\\=&-\frac{4}{\pi^2}x(x-\pi).\end{aligned}$$

$f(x)$ 和 $L_2(x)$ 的图像见图 2.

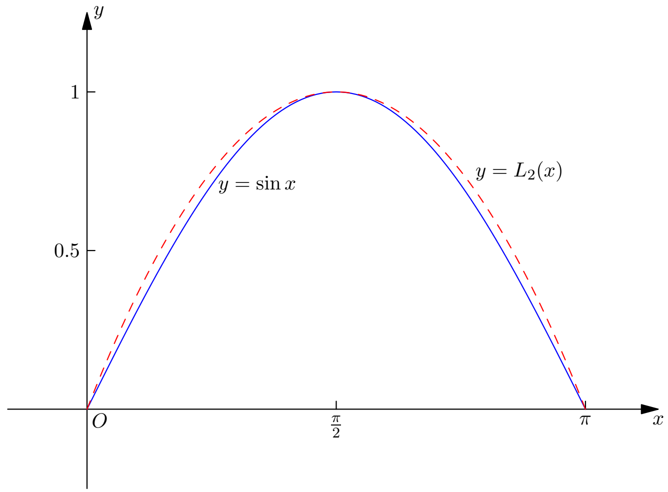

图 2: **二次插值多项式 $L_2(x)$**

(2) $f(x)$ 的 3 次插值多项式为

$$
\begin{aligned}
L_3(x) =& f(0)\frac{\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\left(x-\frac{2\pi}{3}\right)(x-\pi)}{\left(0-\frac{\pi}{3}\right)\left(0-\frac{2\pi}{3}\right)(0-\pi)} + f\left(\frac{\pi}{3}\right)\frac{(x-0)\left(x-\frac{2\pi}{3}\right)(x-\pi)}{\left(\frac{\pi}{3}-0\right)\left(\frac{\pi}{3}-\frac{2\pi}{3}\right)\left(\frac{\pi}{3}-\pi\right)} \\
&+ f\left(\frac{2\pi}{3}\right)\frac{(x-0)\left(x-\frac{\pi}{3}\right)(x-\pi)}{\left(\frac{2\pi}{3}-0\right)\left(\frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{2}\right)\left(\frac{2\pi}{3}-\pi\right)} + f(\pi)\frac{(x-0)\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\left(x-\frac{2\pi}{3}\right)}{(\pi-0)\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)\left(\pi-\frac{2\pi}{3}\right)} \\
=& -\frac{9\sqrt{3}}{4\pi^2}x(x-\pi).
\end{aligned}
$$

$f(x)$ 和 $L_3(x)$ 的图像见图 3.

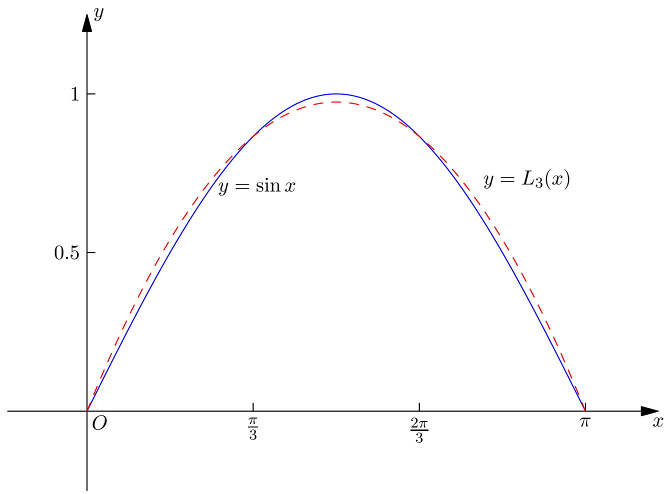

图 3: 三次插值多项式 $L_3(x)$

例 1.2

设函数

$$f(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2}\, dt$$

的函数值已造成函数表. 假设在区间 $[4, 6]$ 上用线性插值计算 $f(x)$ 的近似值, 问会有多大的误差？

例 1.2

设函数

$$f(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$$

的函数值已造成函数表. 假设在区间 $[4, 6]$ 上用线性插值计算 $f(x)$ 的近似值, 问会有多大的误差？

解 在 $[4, 6]$ 上作 $f(x)$ 的线性插值多项式 $p_1(x)$, 则

$$R_1(x) = f(x) - p_1(x) = \frac{1}{2} f''(\xi)(x - x_0)(x - x_1), \quad \xi \in [4, 6],$$

$$f'(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}, \quad f''(x) = -\frac{4x}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2},$$

$$f'''(x) = \frac{4}{\sqrt{\pi}} (2x^2 - 1) e^{-x^2} > 0, \quad x \in (4, 6), \Longrightarrow f''(x) \nearrow$$

所以有

$$|R_2(x)| \leq \frac{1}{2} \times |f''(4)| \times |(5-4)(5-6)| = 0.508 \times 10^{-6}.$$

Lagrange 插值的缺点: 当节点增加或减少时, 插值多项式 $L_n(x)$ 将发生变化, 计算不便.

Lagrange 插值的缺点: 当节点增加或减少时, 插值多项式 $L_n(x)$ 将发生变化, 计算不便.
设 $L_{k-1}(x)$ 是以 $x_0, x_1, \cdots, x_{k-1}$ 为插值节点的 $f(x)$ 的 $k-1$ 次插值多项式,$L_k(x)$ 是以 $x_0, x_1, \cdots, x_{k-1}, x_k$ 为插值节点的 $f(x)$ 的 k 次插值多项式, 考察 L_{k-1} 和 $L_k(x)$ 之间的关系.

Lagrange 插值的缺点：当节点增加或减少时, 插值多项式 $L_n(x)$ 将发生变化, 计算不便.
设 $L_{k-1}(x)$ 是以 $x_0, x_1, \cdots, x_{k-1}$ 为插值节点的 $f(x)$ 的 $k-1$ 次插值多项式,$L_k(x)$ 是以 $x_0, x_1, \cdots, x_{k-1}, x_k$ 为插值节点的 $f(x)$ 的 k 次插值多项式, 考察 L_{k-1} 和 $L_k(x)$ 之间的关系.令

$$g(x) = L_k(x) - L_{k-1}(x),$$

则 $g(x)$ 是次数不超过 k 的多项式,

Lagrange 插值的缺点: 当节点增加或减少时, 插值多项式 $L_n(x)$ 将发生变化, 计算不便.
设 $L_{k-1}(x)$ 是以 $x_0, x_1, \cdots, x_{k-1}$ 为插值节点的 $f(x)$ 的 $k-1$ 次插值多项式,$L_k(x)$ 是以 $x_0, x_1, \cdots, x_{k-1}, x_k$ 为插值节点的 $f(x)$ 的 k 次插值多项式, 考察 L_{k-1} 和 $L_k(x)$ 之间的关系.令

$$g(x) = L_k(x) - L_{k-1}(x),$$

则 $g(x)$ 是次数不超过 k 的多项式,且对 $j = 0, 1, \cdots, k-1$ 有

$$\begin{aligned} g(x_j) &= L_k(x_j) - L_{k-1}(x_j) = f(x_j) - f(x_j) = 0. \quad \Longrightarrow \\ g(x) &= a_k(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{k-1}) \end{aligned}$$

其中 a_k 是和 x 无关的常数.

Lagrange 插值的缺点：当节点增加或减少时，插值多项式 $L_n(x)$ 将发生变化，计算不便.
设 $L_{k-1}(x)$ 是以 $x_0, x_1, \cdots, x_{k-1}$ 为插值节点的 $f(x)$ 的 $k-1$ 次插值多项式,$L_k(x)$ 是以 $x_0, x_1, \cdots, x_{k-1}, x_k$ 为插值节点的 $f(x)$ 的 k 次插值多项式，考察 L_{k-1} 和 $L_k(x)$ 之间的关系.令

$$g(x) = L_k(x) - L_{k-1}(x),$$

则 $g(x)$ 是次数不超过 k 的多项式,且对 $j = 0, 1, \cdots, k-1$ 有

$$\begin{aligned} g(x_j) &= L_k(x_j) - L_{k-1}(x_j) = f(x_j) - f(x_j) = 0. \quad \Longrightarrow \\ g(x) &= a_k(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{k-1}) \end{aligned}$$

其中 a_k 是和 x 无关的常数.也可以写成

$$\begin{aligned} L_k(x) &= L_{k-1}(x) + a_k(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{k-1}), \qquad (2.1) \\ L_k(x) &= a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + \cdots \\ &\quad + a_k(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{k-1}). \end{aligned}$$

下面求 a_k, 在 (2.1) 中令 $x = x_k$ 得

$$\begin{aligned}
a_k &= \frac{L_k(x_k) - L_{k-1}(x_k)}{(x_k - x_0)(x_k - x_1)\cdots(x_k - x_{k-1})} \\
&= \frac{f(x_k) - \sum\limits_{m=0}^{k-1} f(x_m) \prod\limits_{\substack{i=0 \\ i\neq m}}^{k-1} \frac{x_k - x_i}{x_m - x_i}}{\prod\limits_{i=0}^{k-1}(x_k - x_i)} \\
&= \frac{f(x_k)}{\prod\limits_{i=0}^{k-1}(x_k - x_i)} - \sum_{m=0}^{k-1} \frac{f(x_m)}{(x_k - x_m)\prod\limits_{\substack{i=0 \\ i\neq m}}^{k-1}(x_m - x_i)} \\
&= \sum_{m=0}^{k} \frac{f(x_m)}{\prod\limits_{\substack{i=0 \\ i\neq m}}^{k}(x_m - x_i)} \qquad (2.2)
\end{aligned}$$