

东南大学

实 验 报 告

课程名称： 数字信号处理实验

实验名称： IIR, FIR 滤波器设计

院（系） 自动化学院 专 业： 自动化

姓 名： 邱洪彬 学 号： 08018126

实 验 室： 实验组别：

同组人员： 实验时间：

评定成绩： 审阅教师：

IIR 滤波器的设计

一、实验目的

掌握双线性变换法及脉冲响应不变法设计 IIR 数字滤波器的具体设计方法及其原理，熟悉用双线性变换法及脉冲响应不变法设计低通 IIR 数字滤波器的 MATLAB 计算机编程。

二、实验要求

设计一数字低通滤波器，通带内幅度特性在低于 $\omega = 0.2613\pi$ 的频率上维持在 $0.75dB$ 内，阻带内在 $\omega = 0.4018\pi$ 和 π 之间的频率上衰减至少为 $20dB$ ，按上述指标要求分别用脉冲响应不变变换法与双线性变换法将模拟滤波器映射成相应的数字滤波器。

三、实验原理

1. IIR 滤波器的结构：

IIR 滤波器差分方程的一般表达式为

$$y[n] = \sum_{i=0}^N b_i y(n-i) - \sum_{i=1}^M a_i y(n-i)$$

式中， $x(n)$ 为输入序列； $y(n)$ 为输出序列； a_i 和 b_i 为滤波器系数。若所有系数 $a_i=0$ ，则为 FIR 滤波器。IIR 滤波器具有无限长的单位脉冲响应，在结构上存在反馈回路，具有递归性，即 IIR 滤波器的输出不仅与输入有关，而且与过去的输出有关。
传递函数可以写成：

$$H(z) = \frac{b_0 Z^N + b_1 Z^{N-1} + \dots + X_n b_N}{Z^N + a_1 Z^{N-1} + \dots + a_N} = C \prod_{i=1}^N \frac{z - z_i}{p - p_i}$$

式中，具有 N 个极点 p_i 和 N 个零点 z_i ，若有极点位于单位圆外将导致系统不稳定。对于 IIR 滤波器，系统稳定的条件如下：

- (1) 若 p_i 的绝对值小于 1，系统稳定；

(2) 若 p_i 的绝对值大于 1，系统不稳定。

IIR 滤波器具有多种形式，主要有：直接型，标准型，变换型，级联型和并联型。

二阶 IIR 滤波器，又称为二阶基本节，分为直接型，标准型和变换型。对于一个二阶基本节，其输出可以写成：

$$y(n) = b_0 x(n) + b_1 x(n-1) + b_2 x(n-2) - a_1 y(n-1) - a_2 y(n-2)$$

2. 理论计算：

i. 脉冲响应不变法：

1) 用脉冲响应不变变换法， $\omega = \Omega T$ ，令 $T=1$

2) 采用巴特沃斯滤波器设计法：

$$|H(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{j\Omega}{j\Omega_c}\right)^{2N}}$$

$$3) \quad \Omega_1 = \frac{\omega}{T} = \frac{0.2613\pi}{T}, \quad \Omega_2 = \frac{\omega}{T} = \frac{0.4018\pi}{T}$$

$$\text{由 } H(j\Omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{j\Omega}{j\Omega_c}\right)^{2N}}}$$

$$\therefore 20 \lg(H(j\Omega)) = -10 \lg\left[1 + \left(\frac{j\Omega}{j\Omega_c}\right)^{2N}\right]$$

$$\therefore \begin{cases} -10 \lg\left[1 + \left(\frac{j\Omega_1}{j\Omega_c}\right)^{2N}\right] \geq -0.75 \\ -10 \lg\left[1 + \left(\frac{j\Omega_2}{j\Omega_c}\right)^{2N}\right] \leq -20 \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} -10 \lg\left[1 + \left(\frac{j \frac{0.2613\pi}{T}}{j\Omega_c}\right)^{2N}\right] = -0.75 \\ -10 \lg\left[1 + \left(\frac{j \frac{0.4018\pi}{T}}{j\Omega_c}\right)^{2N}\right] = -20 \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} \Omega'_c = \frac{0.2913\pi}{T} \\ N' = 7.28 \end{cases}$$

取 $N=8$ ，则 $\Omega_c=0.9472$

$$\text{由 } 1 + \left(\frac{S}{j\Omega_c}\right)^{2N} = 0$$

$$\therefore \text{极点为 } S'_k = \Omega_c e^{j[\frac{2k-1}{16} + \frac{1}{2}]\pi}, k = 1, 2, \dots, 16$$

\therefore 最低阶巴特沃斯模拟滤波器系统函数的极点为左半平面的极点:

$$S_k = \Omega_c e^{j[\frac{2k-1}{16} + \frac{1}{2}]\pi}, k = 1, 2, \dots, 8$$

$$\therefore H(s) = \frac{\prod_{k=1}^8 (-Sk)}{\prod_{k=1}^8 (s - Sk)} = \frac{\Omega_c^8}{\prod_{k=1}^8 (s - Sk)} = \sum_{k=1}^8 \frac{Ak}{s - Sk}$$

\therefore 数字滤波器的系数函数为将 $S_k \rightarrow e^{S_k T}$

$$\therefore H(z) = \sum_{k=1}^8 \frac{Ak}{1 - e^{S_k T} z^{-1}}$$

ii. 双线性变换法:

1) 用双线性变换法, $\Omega = \frac{2}{T} \operatorname{tg} \frac{\omega}{2}$, (取 $T=1$)

2) 采用巴特沃斯滤波器设计法:

$$H^2 | \Omega | = | H(j\Omega) |^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{j\Omega}{j\Omega_c}\right)^{2N}}$$

$$3) \Omega_1 = \frac{2}{T} \operatorname{tg} \frac{0.2613\pi}{2}, \quad \Omega_2 = \frac{2}{T} \operatorname{tg} \frac{0.4018\pi}{2}$$

$$\text{由 } H(j\Omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{j\Omega}{j\Omega_c}\right)^{2N}}}$$

$$\begin{aligned} \therefore 20 \lg(H(j\Omega)) &= -10 \lg \left| 1 + \left(\frac{j\Omega}{j\Omega_c} \right)^{2N} \right| \\ \therefore \begin{cases} -10 \lg \left| 1 + \left(\frac{j\Omega_1}{j\Omega_c} \right)^{2N} \right| & \geq -0.75 \\ -10 \lg \left| 1 + \left(\frac{j\Omega_2}{j\Omega_c} \right)^{2N} \right| & \leq -20 \end{cases} \\ \therefore \begin{cases} -10 \lg \left| 1 + \left(\frac{j \frac{2}{T} \operatorname{tg} \frac{0.2613\pi}{2}}{j\Omega_c} \right)^{2N} \right| & = -0.75 \\ -10 \lg \left| 1 + \left(\frac{j \frac{2}{T} \operatorname{tg} \frac{0.4018\pi}{2}}{j\Omega_c} \right)^{2N} \right| & = -20 \end{cases} \\ \therefore \begin{cases} \Omega_c = \frac{2}{T} \cdot 0.4991 = \frac{2}{T} \operatorname{tg} \frac{0.2947\pi}{2} \\ N = 6.025 \end{cases} \end{aligned}$$

可取 $N=7$ ，则 $\Omega_c=1.0528$

$$\text{由 } 1 + \left(\frac{S}{j\Omega_c} \right)^{2N} = 0$$

$$\therefore \text{极点为 } S'_k = \Omega_c e^{j[\frac{2k-1}{14} + \frac{1}{2}]\pi}, k = 1, 2, \dots, 14$$

\therefore 最低阶巴特沃斯模拟滤波器系统函数的极点为左半平面的极点：

$$S_k = \Omega_c e^{j[\frac{2k-1}{14} + \frac{1}{2}]\pi}, k = 1, 2, \dots, 7$$

$$\therefore H(s) = \frac{\prod_{k=1}^7 (-Sk)}{\prod_{k=1}^7 (s - Sk)} = \frac{\Omega_c^7}{\prod_{k=1}^7 (s - Sk)} = \sum_{k=1}^7 \frac{Ak}{s - Sk}$$

$$\therefore \text{数字滤波器的系数函数为 } H(z) = H(s) \bigg|_{s=\frac{2}{T} \cdot \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}} = \frac{\Omega_c^7}{\prod_{k=1}^7 \left(\frac{2}{T} \cdot \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} - Sk \right)}$$

四、MATLAB 仿真

1. 仿真代码：

```
1    fp=0.2613*pi;fs=0.4018*pi;rp=0.75;rs=20;f=1; %设计指标
2    wpl=fp*f;
```

```

3  wsl=fs*f;          %根据脉冲响应不变法变换数字滤波器到模拟滤波器指标
4  [N1,wcl]=buttord(wpl,ws1,rp,rs,'s');%根据模拟指标设计巴特沃斯滤波器
5  [B1,A1]=butter(N1,wcl,'s');    %得到传递函数
6  [num1,den1]=impinvar(B1,A1,f);%根据脉冲响应不变法转换成系统函数
7  freqz(num1,den1);          %画出频率响应图像
8
9  wp2=2*f*tan(fp/2);
10 ws2=2*f*tan(fs/2);          %根据双线性变换法将数字指标转换为模拟指标
11 [N2,wc2]=buttord(wp2,ws2,rp,rs,'s');%根据模拟指标设计巴特沃斯滤波器
12 [B2,A2]=butter(N2,wc2,'s');    %得到传递函数
13 [num2,den2]=bilinear(B2,A2,f);%根据双线性变换法转换成系统函数
14 freqz(num2,den2);          %画出频率响应图像

```

2. 函数说明:

语句**[b,a]=butter(n,Wn)**是计算巴特沃思低通滤波器的系数，**n**为低通滤波器的阶数，**Wn**为低通滤波器的截止频率，**b**为**H(s)**的分子多项式的系数，**a**为**H(s)**的分母多项式系数。

语句**[num,den]=impinvar(b,a,f)**可以根据给定的滤波器传递函数**H(s)**，根据脉冲响应不变法得到系统函数**H(z)**，**num,den**分别为系统函数分子分母多项式系数。

语句**[num,den]=impinvar(b,a,f)**可以根据给定的滤波器传递函数**H(s)**，根据双线性变换法得到系统函数**H(z)**，**num,den**分别为系统函数分子分母多项式系数。

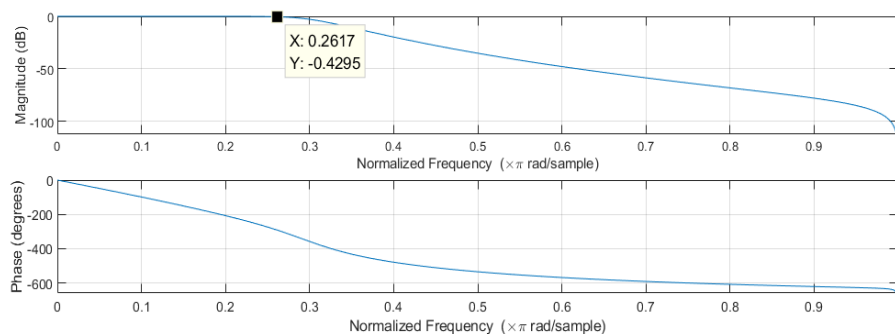
语句**freqz(num,den)**可以根据系统函数画出其频率特性响应图像曲线。

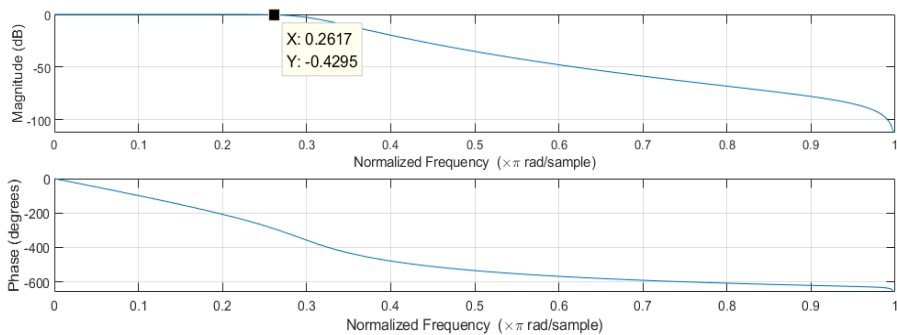
3. 运行结果:

i. 脉冲响应不变法:

$$N = 8, W_c = 0.9472 \text{ rad/s}$$

$$H(s) = \frac{0.6478}{s^8 + 4.8551s^7 + 11.7859s^6 + 18.5641s^5 + 20.676s^4 + 16.6547s^3 + 9.4862s^2 + 3.5058s + 0.6478}$$

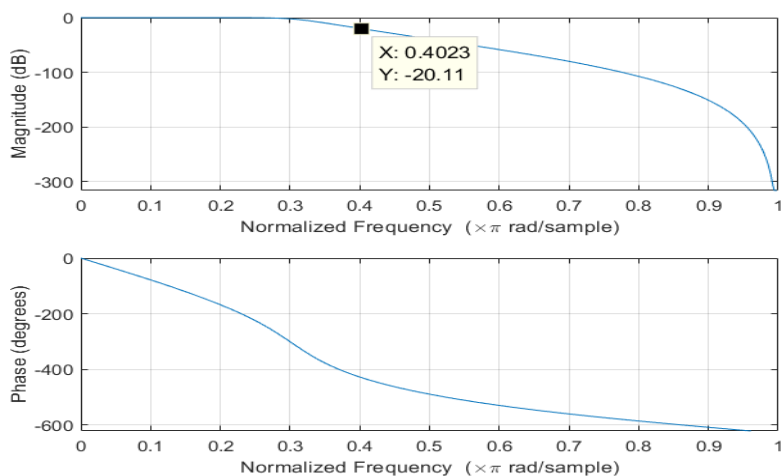
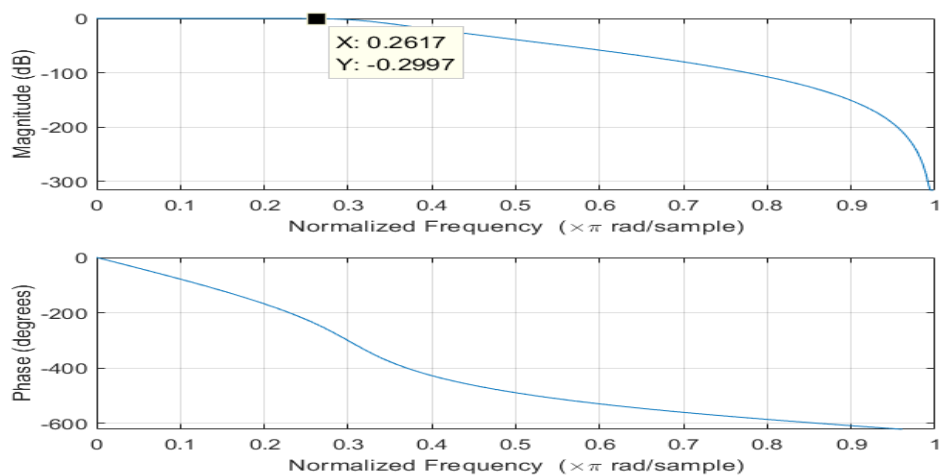




ii. 双线性变换法:

$$N=7, W_c=1.0528 \text{ rad/s}$$

$$H(s) = \frac{1.4331}{s^7 + 4.731s^6 + 11.1913s^5 + 17.0249s^4 + 17.923s^3 + 13.0574s^2 + 6.1176s + 1.4331}$$



五、实验分析

由 MATLAB 仿真结果可知，两种方法算出的模拟滤波器阶数以及截止频率均与理论计算结果相同，同时观察两者的频率特性响应图像也可以看出，数字滤波器的通带与阻带的衰减范围都符合一开始设定的数字指标要求，因此设计的 IIR 数字滤波器可以满足要求。而两种方法也有不同之处，如本实验中对于相同的数字指标，脉冲响应不变法比双线性变换法所得到的滤波器阶数更高，同时由于脉冲响应法的混叠影响，根据图像可以看出，脉冲响应不变法设计的低通滤波器相比于双线性变换法在过渡带下降比较平缓、特性较差。

六、实验总结

通过这次实验，我对使用设计 IIR 滤波器有了更深的了解，对设计的原理与过程有了清晰的认识，同时仿真实现也加强了实践，脉冲响应不变法与双线性变换法两种转化方法各有优劣，具体应用时要根据指标要求选用。

FIR 滤波器的设计

一、实验目的

掌握用窗函数法设计 FIR 滤波器的原理及方法，熟悉相应的 MATLAB 编程。

二、实验要求

设计一个线性相位 FIR 高通滤波器，给定抽样频率为 $\Omega_s = 2\pi * 15000 \text{ rad/s}$ ，通带截止频率为 $\Omega_p = 2\pi * 3100 \text{ rad/s}$ ，阻带上限截止频率为 $\Omega_r = 2\pi * 1600 \text{ rad/s}$ ，阻带衰减不小于 -18dB。

三、实验原理

1. FIR 滤波器的结构：

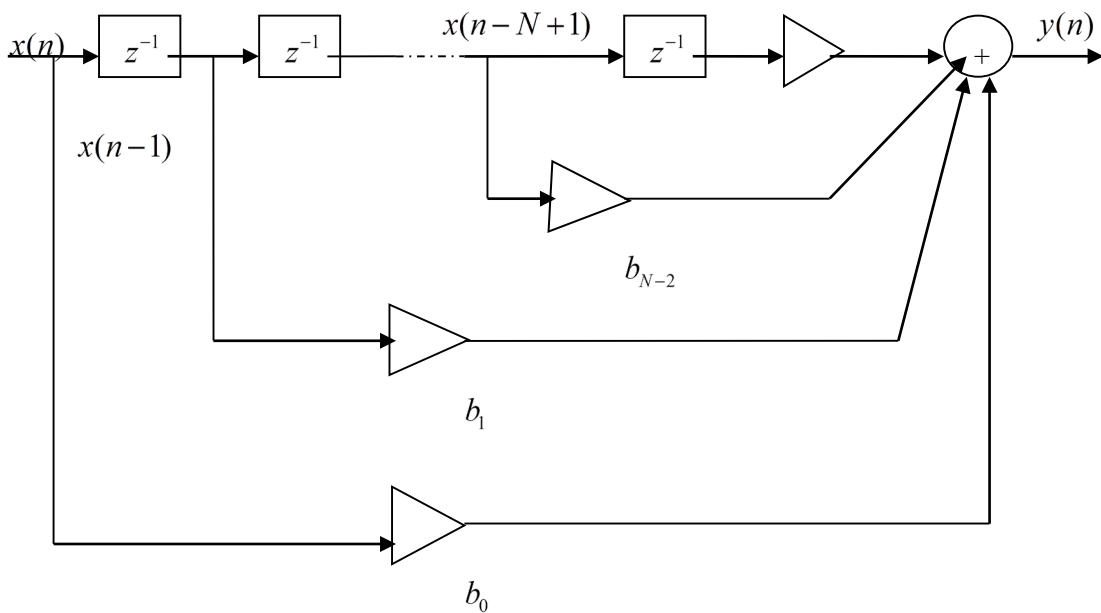
数字滤波器是将输入新号序列，按规定的算法进行处理，从而得到所期望的输出序列。一个线性位移不变系统的输出序列 $y(n)$ 和输入序列 $x(n)$ 之间的关系，应满足常系数线性差分方程：

$$y(n) = \sum_{i=0}^{N-1} b_i x(n-i) - \sum_{i=1}^M a_i y(n-i) \quad \text{式中，} x(n) \text{ 为输入序列；} y(n) \text{ 为输出序列；} a_i \text{ 和 } b_i \text{ 为}$$

滤波器系数；N 为滤波器阶数。若所有的 a_i 均为 0，则得到 FIR 滤波器的差分方程为

$$y(n) = \sum_{i=0}^{N-1} b_i x(n-i) \quad ; \text{对这式进行 Z 变换，整理后可得 FIR 滤波器的传递函数为}$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \sum_{i=0}^{N-1} b_i z^{-i} \quad ; \text{FIR 滤波器的结构图如下：}$$



FIR 滤波器的单位冲激响应 $h(n)$ 是一个有限长序列。若 $h(n)$ 为实数，且满足偶对称或奇对称的条件，即 $h(n) = h(N-1-n)$ 或 $h(n) = -h(N-1-n)$ ，则 FIR 滤波器具有线性相位特性。偶对称线性相位 FIR 滤波器的差分方程为

$$y(n) = \sum_{i=0}^{\frac{N}{2}-1} b_i [x(n-i) + x(n-N+1+i)]$$

式中，N 为偶数。

在数字滤波器中，FIR 滤波器无反馈回路，是一种无条件系统；并且可以设计成具有线性相位特性。

2. 窗函数法：

窗函数设计法的基本原理是用一定宽度窗函数截取无限脉冲响应序列获得有限长的脉冲响应序列。对于所给定的理想滤波器频率响应 $H_d(e^{j\omega})$ ，要求设计一个 FIR 滤波器频率响应

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) e^{-j\omega n} \text{ 来逼近 } H_d(e^{j\omega})。 \text{ 但是设计是在时域进行的，因而先由 } H_d(e^{j\omega}) \text{ 的}$$

傅里叶反变换导出 $h_d(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_d(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega$ ，由于 $H_d(e^{j\omega})$ 是矩形频率特性，故 $h_d(n)$ 一

定是无限长的序列，且是非因果的，而我们要设计的是 FIR 滤波器，其 $h(n)$ 必然是有限长

的，所以要用有限长的 $h(n)$ 来逼近无限长的 $h_d(n)$ ，最有效的方法是截断，或者说是用一个有限长度的窗口函数序列 $w(n)$ 来截取，因而窗函数序列的形状及长度的选择很关键。

按照卷积公式，在时域是相乘，则频域上是周期性卷积关系，即

$$H(e^{jw}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_d(e^{j\theta}) W(e^{j(w-\theta)}) d\theta, \text{ 因而逼近的好坏, 完全取决于窗函数的频率特性。}$$

求得 $h(n)$ 的傅里叶变换，也就是找出待求 FIR 滤波器的频率特性，这样就能看出加窗

处理后究竟对频率响应有何影响。

窗函数法的主要设计步骤为：

- (1) 首先是给定所要求的频率响应函数 $H_d(e^{jw})$ ；
- (2) 求出 $h_d(n)$ ；
- (3) 由过渡带宽及阻带最小衰减的要求，选定窗 $w(n)$ 形状及 N 的大小，一般 N 要通过几次试探而最后确定；
- (4) 求得所设计的 FIR 滤波器的单位抽样响应 $h(n) = h_d(n)w(n)$ ；
- (5) 求 $H(e^{jw})$ ，检验是否满足设计要求，如不满足，则需重新设计。

3. 理论计算：

通带截止频率为 $w_p = \frac{2\pi\Omega_p}{\Omega_s} = 0.4133\pi$ ；阻带上限截止频率为 $w_r = \frac{2\pi\Omega_r}{\Omega_s} = 0.213\pi$ ；阻带衰

减相当于 $\delta = -18dB$ ，理想线性相位高通滤波器为 $H_d(e^{jw}) = \begin{cases} e^{-jw\tau}, & w_c \leq |w| \leq \pi \\ 0, & \text{others} \end{cases}$ ；由

所需高通滤波器的过渡带求理想高通滤波器的截止频率及其对应的数字频率为

$$w_c = \frac{w_p + w_r}{2} = 0.313\pi,$$

$$h_d(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_d(e^{jw}) e^{jwn} dw = \frac{1}{2\pi} \left[\int_{-\pi}^{-w_c} e^{jw(n-\tau)} dw + \int_{w_c}^{\pi} e^{jw(n-\tau)} dw \right]$$

$$= \begin{cases} \frac{\sin[(n-\tau)\pi] - \sin[(n-\tau)w_c]}{\pi(n-\tau)}, & n \neq \tau \\ \frac{\pi - w_c}{\pi}, & n = \tau \end{cases}$$

其中, τ 为线性相位所必须的移位, 且应满足 $\tau = \frac{N-1}{2}$ 。选矩形窗, 其阻带最小衰减满足要求, 所要求的过渡带宽 (数字频域) $\Delta\omega = \frac{2\pi(\Omega_p - \Omega_r)}{\Omega_c} = 0.2\pi$, 由于矩形窗过渡带宽满足 $\Delta\omega = \frac{1.8\pi}{N}$, 所以 $N=9, \tau=4$, 由矩形窗表达式确定 FIR 滤波器的 $h(n) = h_d(n)w(n) = \frac{\sin[(n-4)\pi] - \sin[(n-4)0.313\pi]}{\pi(n-4)} R_N(n)$, 求出 $H(e^{j\omega})$ 检验各项指标是否满足要求, 如不满足要求要改变 N , 或改变窗形状 (或两者都改变) 来重新计算。

四、MATLAB 仿真

1. 仿真代码:

```
1  wp=0.413*pi;
2  wr=0.213*pi;
3  tr_with=wp-wr;          %过渡带宽度
4  N=ceil(1.8*pi/tr_with)-1;%滤波长度
5  wc=(wr+wp)/2;          %理想高通滤波器的截止频率
6  h=fir1(N-1,wc,'high',rectwin(N));%根据矩形窗函数法得到单位脉冲响应
7  freqz(h,1);            %计算实际滤波器的幅度响应
```

2. 函数说明:

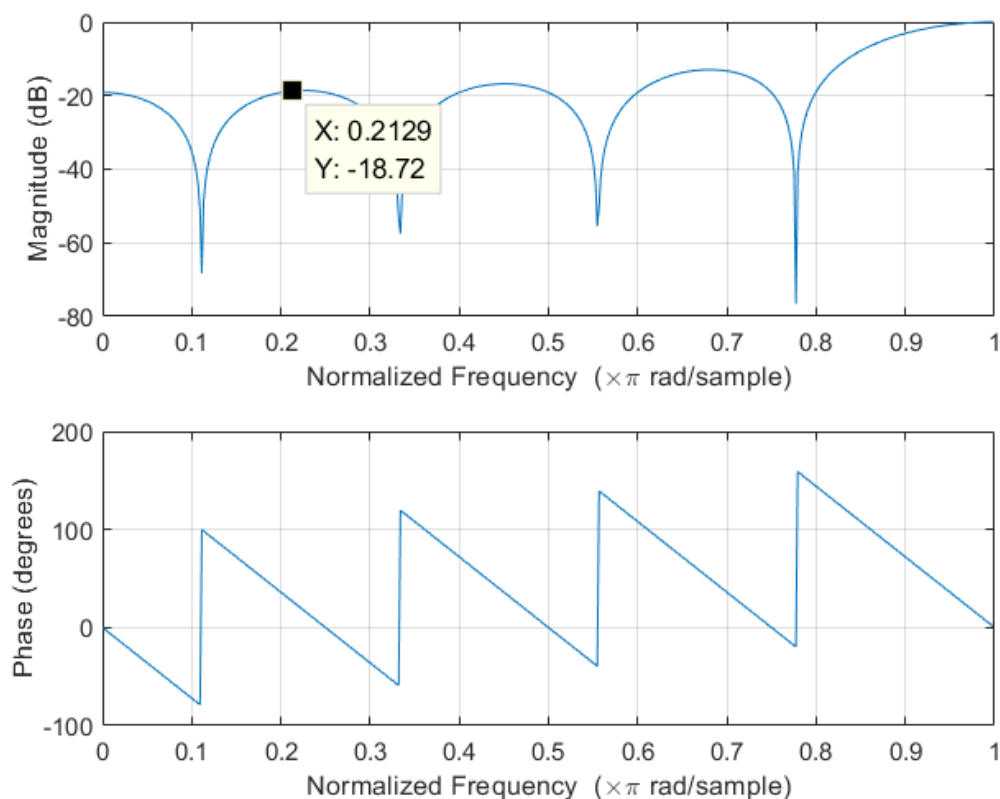
$b = \text{fir1}(n, W_n, \text{'ftype'}, \text{Window})$; 其中, n 为滤波器的阶数; W_n 为滤波器的截止频率; ftype 参数用来决定滤波器的类型, $\text{ftype}=\text{high}$ 时, 可设计高通滤波器, 当 $\text{ftype}=\text{stop}$ 时, 可设计带阻滤波器。 Window 参数用来指定滤波器采用的窗函数类型, 其默认值为汉明窗。使用 fir1 函数可设计标准的低通、高通、带通和带阻滤波器。滤波器的系数包含在返回值 b 中, 可表示为

$$b(z) = b(1) + b(2)z^{-1} + \dots + b(n+1)z^{-n}$$

3. 运行结果:

$h(n) = \{ 0.110636208286613 \quad -0.110992091680673 \quad 0.111246713640564 \quad -0.111399654795454$

```
0.111450663193392    -0.111399654795454    0.111246713640564    -0.110992091680673
0.110636208286613};
```



五、实验分析

由 MATLAB 仿真结果可知，根据矩形窗函数法设计的 FIR 滤波器与理论结果一致，理论计算得到 $N=9$ ，同时脉冲响应 $h(n)$ 的表达式也是偶对称，根据线性相位性质，该滤波器具有严格的线性相位特性，由相频响应特性曲线可以看出的确如此，同时计算得到的幅频特性曲线也满足衰减频率的要求，但是由于直接选用矩形窗，导致对旁瓣处理不到位，频率响应波动较大，若要进一步完善，可以选择其他的窗函数。

七、实验总结

通过这次实验，我对使用窗函数法设计 FIR 滤波器有了更深的了解，对设计的原理与过程有了清晰的认识，同时仿真实现也加强了实践，MATLAB 中的相关函数大大简化了设计过程，同时对各种窗函数对结果的影响有了一定的了解，具体设计时要根据指标选择合适的窗函数。