自觉遵守考场纪律 如考试作弊 此答卷无效

姓名________ 学号________

密 封 线

东南大学考试卷（A卷）

课程名称 数值分析 考试学期 14-15学年秋学期 得分________

适用专业 各专业工科研究生 考试形式 闭卷 考试时间长度 150分钟

（开卷、半开卷请在此写明考试可带哪些资料）

题目	一	二	三	四	五	六	七	八	九	总分
得分										
批阅人										

1. (10分) 设$x = 1.345$, $y = 0.2067$均为有效数. 试分析由此计算函数

$$f(x,y) = x^2 - x\sin y$$

的近似值至少具有几位有效数字, 并给出其相对误差限.

解: $|e(x)| \le \frac{1}{2}\times 10^{-3}$, $|e(y)| \le \frac{1}{2}\times 10^{-4}$ (2分)

$f(x,y) = x^2 - x\sin y = 1.5330$

$|e(f(x,y))| \le |2x - \sin y||e(x)| + |x\cos y||e(y)|$ (2分)

$\le 2.4848 \times \frac{1}{2}\times 10^{-3} + 1.3164 \times \frac{1}{2}\times 10^{-4}$

$= 0.1308 \times 10^{-2} < 0.5 \times 10^{-3}$ (2分)

$f(x,y)$的近似值有至少3位有效数字 - - - - - - - (2分)

$|e_r(f(x,y))| = \left|\frac{e(f(x,y))}{f(x,y)}\right| \le 0.8532\times$ (2分)

2. (10分) 给定方程$x^5 - 20x^2 - 2 = 0$.

(1) 证明该方程存在唯一正根;

(2) 用Newton迭代法求出这个根, 精确至4位有效数.

解: 设 $f(x) = x^5 - 20x^2 - 2$

$f'(x) = 5x^4 - 40x = 5x(x-2)(x^2+2x+4)$ (2分)

可判断在$(0,2)$内, $f'(x) < 0$, 在$(2,+\infty)$内$f'(x) >$

又因为 $f(0) = -2 < 0$, $f(2) = -50 < 0$, $f(3) = 64 > 0$

因此方程存在唯一正根x^*，且$x^* \in [2,3]$. (2分)

~~取 $x_0=2.5$~~,

$$x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}=x_k-\frac{x_k^5-20x_k^2-2}{5x_k^4-40x_k} \quad (3分)$$

取 $x_0=2.5$, $x_1=2.8079$, $x_2=2.7330$, $x_3=2.7266$. $x_4=2.7265$

(3分)

$x^*\approx 2.727$

[注意, 若取 $x_0=2$. 发散]

3. (10分) 用列主元Gauss消去法求解线性方程组

$$\begin{cases} -x_1+4x_2+2x_3=-3 \\ 2x_1+3x_2-x_3=-2 \\ 4x_1+5x_3=9 \end{cases}$$

解:
$$\begin{bmatrix} -1 & 4 & 2 & -3 \\ 2 & 3 & -1 & -2 \\ 4 & 0 & 5 & 9 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_3} \begin{bmatrix} 4 & 0 & 5 & 9 \\ 2 & 3 & -1 & -2 \\ -1 & 4 & 2 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow[r_3+r_1\times(\frac{1}{4})]{r_2+r_1\times(-\frac{1}{2})} \text{(1分)}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & 5 & 9 \\ 0 & 3 & -\frac{7}{2} & -\frac{13}{2} \\ 0 & 4 & \frac{13}{4} & -\frac{3}{4} \end{bmatrix} \text{(3分)} \xrightarrow{r_2 \leftrightarrow r_3} \begin{bmatrix} 4 & 0 & 5 & 9 \\ 0 & 4 & \frac{13}{4} & -\frac{3}{4} \\ 0 & 3 & -\frac{7}{2} & -\frac{13}{2} \end{bmatrix} \text{(1分)} \xrightarrow{r_3+r_2\times(-\frac{3}{4})}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & 5 & 9 \\ 0 & 4 & \frac{13}{4} & -\frac{3}{4} \\ 0 & 0 & -\frac{95}{16} & -\frac{95}{16} \end{bmatrix} \text{(2分)}$$

等价三角方程组为:

$$\begin{cases} 4x_1+5x_3=9 \\ 4x_2+\frac{13}{4}x_3=-\frac{3}{4} \\ -\frac{95}{16}x_3=-\frac{95}{16} \end{cases} \quad (2分)$$

解得
$$\begin{cases} x_3=1 \\ x_2=-1 \\ x_1=1 \end{cases} \quad (1分)$$

4. (10分) 给定方程组

$$\begin{pmatrix} \alpha & 2 & 1 \\ 2 & \alpha & -1 \\ 1 & 1 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 8 \\ 5 \end{pmatrix}$$

其中实参数$\alpha \neq 0$. 试确定α的取值范围以保证求解这个线性方程组的Jacobi格式和Gauss-seidel格式都收敛.

解：求解以上方程组的Jacobi格式对应迭代矩阵J的特征方程为：

$$\begin{vmatrix} \lambda\alpha & 2 & 1 \\ 2 & \lambda\alpha & -1 \\ 1 & 1 & \frac{\lambda}{2} \end{vmatrix} = 0,$$

(3分)

即：$\alpha^2\lambda^3 - 4\lambda = \lambda(\alpha^2\lambda^2 - 4) = 0$

$\lambda = 0$ 或 $\lambda^2 = \frac{4}{\alpha^2}$

$\rho(J) = \frac{2}{|\alpha|}$ 当 $\rho(J) < 1$ 时. Jacobi格式收敛.

因此由 $\frac{2}{|\alpha|} < 1$ 得 $|\alpha| > 2$. (2分)

Gauss-Seidel 格式对应的迭代矩阵G的特征方程为：

$$\begin{vmatrix} \lambda\alpha & 2 & 1 \\ 2\lambda & \lambda\alpha & -1 \\ \lambda & \lambda & \frac{\lambda}{2} \end{vmatrix} = 0,$$

即：$\alpha^2\lambda^3 - 4\lambda = 0$ (3分)

$\lambda = 0$ 或 $\lambda^2 = \frac{4}{\alpha^2}$

$\therefore$ $\rho(G) = \frac{2}{|\alpha|}$, $\rho(G) < 1$ 时 G-S格式收敛.

由 $\frac{2}{|\alpha|} < 1$ 得 $|\alpha| > 2$ (2分)

要保证两种格式都收敛，

所以 取 $|\alpha| > 2$.

5. (12分) 设$f(x)\in C^1[a,b]$.

(1) 求一个3次多项式$H_3(x)$, 使之满足

$$H_3(a)=f(a),\ H_3'(a)=f'(a),\ H_3(b)=f(b),\ H_3'(b)=f'(b).$$

(2) 讨论满足如下条件的4次多项式$H(x)$是否存在. 若存在,写出满足这组条件的多项式.

$$H(a)=f(a),\ H'(a)=f'(a),\ H(b)=f(b),\ H'(b)=f'(b),\ H'(\frac{a+b}{2})=f'(\frac{a+b}{2}).$$

解：(1) 列差商表：

a	$f(a)$	$f'(a)$	$f[a,a,b]$	$f[a,a,b,b]$
a	$f(a)$	$f[a,b]$	$f[a,b,b]$	
b	$f(b)$	$f'(b)$		
b	$f(b)$			

(2分)

其中 $f[a,a,b]=\dfrac{f[a,b]-f'(a)}{b-a}=\dfrac{f(b)-f(a)-(b-a)f'(a)}{(b-a)^2}$

$f[a,b,b]=\dfrac{f'(b)-f[a,b]}{b-a}=\dfrac{(b-a)f'(b)-f(b)+f(a)}{(b-a)^2}$

$f[a,a,b,b]=\dfrac{f'(b)+f'(a)-2f[a,b]}{(b-a)^2}=\dfrac{(b-a)(f'(b)+f'(a))-2(f(b)-f(\ldots}{(b-a)^3}$

$H_3(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\dfrac{f[a,b]-f'(a)}{b-a}(x-a)^2+\dfrac{f'(b)+f'(a)-2f[a,b]}{(b-a)^2}(x-a)^2(x-b)$

(2分)

(2) 注意到$H(x)$与$H_3(x)$共同满足(1)中的4个条件. 因此

$H(x)-H_3(x)=A(x-a)^2(x-b)^2$ (2分)

$H'(x)-H_3'(x)=2A(x-a)(x-b)(2x-a-b)$

将$x=\frac{a+b}{2}$代入有 $H'(\frac{a+b}{2})-H_3'(\frac{a+b}{2})=0$ (2分)

因此当 $H_3'(\frac{a+b}{2})=H'(\frac{a+b}{2})=f'(\frac{a+b}{2})$ 时,

即 $f'(a)+f[a,a,b](b-a)-f[a,a,b,b]\frac{(b-a)^2}{4}=f'(\frac{a+b}{2})$ 时

$H(x)=H_3(x)+A(x-a)^2(x-b)^2$, A可取任意值. (2分)

若 $f'(a)+f[a,a,b](b-a)-f[a,a,b,b]\frac{(b-a)^2}{4}\neq f'(\frac{a+b}{2})$ 时

满足这组条件的4次多项式$H(x)$不存在。 (2分)

6. (12分) 设$p_1(x)$为任意的一次多项式，证明

$$\max_{0\le x\le 1}\left|\frac{1}{1+x}-p_1(x)\right|\ge \frac{3}{4}-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

求函数 $\frac{1}{1+x}$ 在[0,1]上的最佳一致逼近多项式 $P_1(x)=C_0+C_1x$.

$f(x)=\frac{1}{1+x}$，$f'(x)=-\frac{1}{(1+x)^2}$，$f''(x)=\frac{2}{(1+x)^3}>0$.

$f(x)-P_1(x)$ 的交错偏差点为 0，x_1，1

$$\begin{cases} f(0)-P(0)=-[f(x_1)-P(x_1)]=f(1)-P(1) \\ f'(x_1)=P'(x_1) \end{cases}$$ (4分)

求得：$x_1=\sqrt{2}-1$，$C_1=-\frac{1}{2}$，$C_0=\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{2}}{2}$

因此，$P_1(x)=\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{2}x$ 是 $\frac{1}{1+x}$ 在[0,1]上的最佳一致逼近多项式. 因此对于任意的一次多项式 $P_1(x)$
(4分)

有：

$$\max_{0\le x\le 1}\left|\frac{1}{1+x}-P_1(x)\right|\ge\max_{0\le x\le 1}\left|\frac{1}{1+x}-P(x)\right|=|f(0)-P(0)|$$

$$=1-\left(\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$=\frac{3}{4}-\frac{\sqrt{2}}{2}$$ (4分)

7. (12分) 设$f(x)\in C^2[a,b]$, $I(f)=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$. 已知

$$I(f)-\frac{b-a}{2}[f(a)+f(b)]=-\frac{(b-a)^3}{12}f''(\xi),\ \xi\in(a,b).$$

(1) 取$h=\frac{b-a}{n}$, 其中n是正整数, $x_i=a+ih$, $0\le i\le n$. 写出计算$I(f)$的复化梯形公式$T_n(f)$;

(2) 证明

$$\lim_{h\to 0}\frac{I(f)-T_n(f)}{h^2}=\frac{1}{12}[f'(a)-f'(b)];$$

(3) 证明$I(f)-T_{2n}(f)\approx\frac{1}{3}[T_{2n}(f)-T_n(f)]$.

(1) $\int_a^b f(x)dx=\sum_{i=0}^{n-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}}f(x)dx\approx\sum_{i=0}^{n-1}\frac{h}{2}[f(x_i)+f(x_{i+1})]=T_n(f)$ (4分)

(2) $I(f)-T_n(f)=\sum_{i=0}^{n-1}\left[\int_{x_i}^{x_{i+1}}f(x)dx-\frac{h}{2}(f(x_i)+f(x_{i+1}))\right]$

$=\sum_{i=0}^{n-1}-\frac{h^3}{12}f''(\xi_i)$, $\xi_i\in(x_i,x_{i+1})$ (2分)

$\frac{I(f)-T_n(f)}{h^2}=-\frac{1}{12}\sum_{i=0}^{n-1}hf''(\xi_i)$

$\lim_{h\to 0}\frac{I(f)-T_n(f)}{h^2}=-\frac{1}{12}\lim_{h\to 0}\sum_{i=0}^{n-1}hf''(\xi_i)=-\frac{1}{12}\int_a^b f''(x)dx$ (2分)

$=\frac{1}{12}[f'(a)-f'(b)]$

(3) $I(f)-T_n(f)\approx\frac{h^2}{12}[f'(a)-f'(b)]$ (2分)

因此 $I(f)-T_{2n}(f)\approx\frac{1}{4}\cdot\frac{h^2}{12}[f'(a)-f'(b)]$

因此有 $I(f)-T_{2n}(f)\approx\frac{1}{4}[I(f)-T_n(f)]$

上式两边同乘$\frac{4}{3}$有 $I(f)-T_{2n}(f)\approx\frac{1}{3}(T_{2n}(f)-T_n(f))$

(2分)

8. (12分) 给定常微分方程初值问题

$$\begin{cases} y' = f(x, y), \quad a \le x \le b, \\ y(a) = \eta. \end{cases}$$

取正整数n, 并记$h = (b-a)/n$, $x_i = a + ih$, $0 \le i \le n$.

试确定参数A, B使求解公式

$$y_{i+1} = y_i + h\left[Af(x_i, y_i) + (1-A)f(x_i + Bh, y_i + \frac{4}{5}hf(x_i, y_i))\right]$$

的局部截断误差R_{i+1}的阶数达到最高, 并给出局部截断误差表达式.

解: $R_{i+1} = y(x_{i+1}) - y(x_i) - h\left[Ay'(x_i) + (1-A)f(x_i + Bh, y(x_i) + \frac{4}{5}hy'(x_i))\right]$

$$= y(x_i) + hy'(x_i) + \frac{h^2}{2}y''(x_i) + \frac{h^3}{6}y'''(x_i) + O(h^4) - y(x_i)$$

(2分)

$$- hAy'(x_i)$$

$$- h(1-A)\Big[f(x_i, y(x_i)) + \frac{\partial f(x_i, y(x_i))}{\partial x}Bh + \frac{\partial f(x_i, y(x_i))}{\partial y}\frac{4}{5}hy'(x_i)$$

$$+ \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f(x_i, y(x_i))}{\partial x^2}B^2h^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f(x_i, y(x_i))}{\partial y^2}\frac{16}{25}h^2(y'(x_i))^2$$

$$+ \frac{\partial^2 f(x_i, y(x_i))}{\partial x \partial y}B \cdot \frac{4}{5}h^2y'(x_i) + O(h^3)\Big]$$

(2分)

$$= hy'(x_i)(1 - A - 1 + A) + h^2\Big[(\frac{1}{2} - (1-A)B)\frac{\partial f(x_i, y(x_i))}{\partial x}$$

(2分)

$$+ (\frac{1}{2} - \frac{4}{5}(1-A))\frac{\partial f(x_i, y(x_i))}{\partial y}y'(x_i)\Big]$$

$$+ h^3\Big[\frac{1}{6}y'''(x_i) - \frac{1}{2}(1-A)B^2\frac{\partial^2 f(x_i, y(x_i))}{\partial x^2} - \frac{1}{2}(1-A)\cdot\frac{16}{25}\frac{\partial^2 f(x_i, y(x_i))}{\partial y^2}(y'(x_i))^2$$

$$- \frac{4}{5}(1-A)B\frac{\partial^2 f(x_i, y(x_i))}{\partial x \partial y}y'(x_i)\Big] + O(h^4)$$

(2分)

$$\begin{cases} (1-A)B = \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} - \frac{4}{5}(1-A) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \frac{3}{8} \\ B = \frac{4}{5} \end{cases}$$

(2分)

注意到此时 $\frac{1}{2}(1-A)B^2 = \frac{1}{5}$, $\frac{1}{2}(1-A)\frac{16}{25} = \frac{1}{5}$, $\frac{4}{5}(1-A)B = \frac{2}{5}$

因此 $R_{i+1} = h^3\left(-\frac{1}{30}y'''(x_i) + \frac{1}{5}\frac{\partial f(x_i, y(x_i))}{\partial y}y''(x_i)\right) + O(h^4)$

(2分)

9. (12分) 给定如下抛物方程初边值问题:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u = f(x,t), & 0 < x < 1, \quad 0 < t \le 1, \\ u(x,0) = \phi(x), & 0 \le x \le 1, \\ u(0,t) = \alpha(t), \quad u(1,t) = \beta(t), & 0 < t \le 1 \end{cases}$$

取正整数M, N,记步长$h = 1/M$, ,$\tau = 1/N$, $x_i = ih$, $t_k = k\tau$, $0 \le i \le M$, $0 \le k \le N$. 试建立一个求解此问题的隐式差分格式，并给出截断误差表达式.

解：①在节点，(x_i, t_k)处考虑方程：$\frac{\partial u(x_i,t_k)}{\partial t} - 2\frac{\partial^2 u(x_i,t_k)}{\partial x^2} + u(x_i,t_k) = f(x_i,t_k)$ (2分)

②差商替代导数有：

$$\frac{1}{\tau}[u(x_i,t_k) - u(x_i,t_{k-1})] - \frac{2}{h^2}[u(x_{i+1},t_k) - 2u(x_i,t_k) + u(x_{i-1},t_k)]$$

$$+ u(x_i,t_k) = f(x_i,t_k) - \frac{\tau}{2}\frac{\partial^2 u(x_i,\eta_k)}{\partial t^2} - \frac{h^2}{6}\frac{\partial^4 u(\xi_i,t_k)}{\partial x^4}, \quad 1 \le i \le M-1, \quad 1 \le k \le N \quad (3分)$$

$\xi_i \in (x_{i-1}, x_{i+1})$, $\eta_k \in (t_{k-1}, t_k)$

$u(x_i,t_0) = \varphi(x_i)$, $\quad 0 \le i \le M$ (2分)

$u(x_0,t_k) = \alpha(t_k)$, $u(x_M,t_k) = \beta(t_k)$, $1 \le k \le N$.

③略去小量 $R_{ik} = -\frac{\tau}{2}\frac{\partial^2 u(x_i,\eta_k)}{\partial t^2} - \frac{h^2}{6}\frac{\partial^4 u(\xi_i,t_k)}{\partial x^4}$，以近似值 u_i^k

代替精确值 $u(x_i,t_k)$ 得：

$$\begin{cases} \frac{1}{\tau}[u_i^k - u_i^{k-1}] - \frac{2}{h^2}[u_{i+1}^k - 2u_i^k + u_{i-1}^k] + u_i^k = f(x_i,t_k) & 1 \le i \le M-1, \quad 1 \le k \le N \\ u_i^0 = \varphi(x_i), & 0 \le i \le M \\ u_0^k = \alpha(t_k), \quad u_M^k = \beta(t_k), & 1 \le k \le N. \end{cases}$$

(3分)

截断误差为 $R_{ik} = -\frac{\tau}{2}\frac{\partial^2 u(x_i,\eta_k)}{\partial t^2} - \frac{h^2}{6}\frac{\partial^4 u(\xi_i,t_k)}{\partial x^4}$，$\xi_i \in (x_{i-1}, x_{i+1})$, $\eta_k \in (t_{k-1}, t_k)$

(2分)