(2) Jacobi 迭代格式的收敛性

(2) Jacobi 迭代格式的收敛性

由定理 3.11, Jacobi 迭代格式收敛 $\Longleftrightarrow \rho(\boldsymbol{J}) < 1.$

(2) Jacobi 迭代格式的收敛性
由定理 3.11, Jacobi 迭代格式收敛 $\Longleftrightarrow \rho(\boldsymbol{J}) < 1$.$\boldsymbol{J}$ 的特征方程为

$$|\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{J}| = |\lambda \boldsymbol{I} + \boldsymbol{D}^{-1}(\boldsymbol{L} + \boldsymbol{U})| = |\boldsymbol{D}^{-1}(\lambda \boldsymbol{D} + \boldsymbol{L} + \boldsymbol{U})| = 0.$$
$$\Longleftrightarrow |\lambda \boldsymbol{D} + \boldsymbol{L} + \boldsymbol{U}| = 0.$$

(2) Jacobi 迭代格式的收敛性

由定理 3.11, Jacobi 迭代格式收敛 $\Longleftrightarrow \rho(\boldsymbol{J}) < 1$.$\boldsymbol{J}$ 的特征方程为

$$|\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{J}| = |\lambda \boldsymbol{I} + \boldsymbol{D}^{-1}(\boldsymbol{L} + \boldsymbol{U})| = |\boldsymbol{D}^{-1}(\lambda \boldsymbol{D} + \boldsymbol{L} + \boldsymbol{U})| = 0.$$

$$\Longleftrightarrow |\lambda \boldsymbol{D} + \boldsymbol{L} + \boldsymbol{U}| = 0.$$

**例 3.13**

讨论用 Jacobi 迭代格式解方程组

$$\begin{bmatrix} 8 & -1 & 1 \\ 2 & 10 & -1 \\ 1 & 1 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

的收敛性.

解：Jacobi 迭代矩阵 $\boldsymbol{J}$ 的特征方程为

$$\begin{vmatrix} 8\lambda & -1 & 1 \\ 2 & 10\lambda & -1 \\ 1 & 1 & -5\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

展开得

$$400\lambda^3 + 12\lambda - 3 = 0,$$

用 Newton 迭代法求得一个实根为 $\lambda_1 = 0.146084$.

记另两根为 $\lambda_2, \lambda_3$, 通过待定系数可得

$$(\lambda - \lambda_1)(400\lambda^3 + b\lambda + c) = 0,$$

其中

$$b = \frac{1}{400\lambda_1}, \quad c = \frac{3}{\lambda_1}.$$

易知 $\lambda_2, \lambda_3$ 为共轭复根, 且有

$$|\lambda_2\lambda_3| = \frac{3}{400\lambda_1},$$

$$|\lambda_2| = |\lambda_3| = \sqrt{\frac{3}{400\lambda_1}} = 0.226584,$$

所以

$$\rho(\boldsymbol{J}) = \max_{i=1,2,3}\{|\lambda_i|\} = 0.226584 < 1,$$

Jacobi 迭代格式收敛.

**引理 3.1**

设 $\boldsymbol{A}$ 是严格对角占优矩阵, 则 $|\boldsymbol{A}| \neq 0$.

**引理 3.1**

设 $\boldsymbol{A}$ 是严格对角占优矩阵, 则 $|\boldsymbol{A}| \neq 0$.

证　这里仅证 A 是按行严格对角占优的情况. 用反证法. 设 $|\boldsymbol{A}| = 0$, 则齐次方程组 $\boldsymbol{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 有非零解 $\mathbf{x}^* = (x_1^*, x_2^*, \cdots, x_n^*)^T$.

## 引理 3.1

设 $\boldsymbol{A}$ 是严格对角占优矩阵, 则 $|\boldsymbol{A}| \neq 0$.

证　这里仅证 A 是按行严格对角占优的情况. 用反证法. 设 $|\boldsymbol{A}| = 0$, 则齐次方程组 $\boldsymbol{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 有非零解 $\mathbf{x}^* = (x_1^*, x_2^*, \cdots, x_n^*)^T$.设 $\|\mathbf{x}^*\|_\infty = |x_k^*| \neq 0$. 由第 $k$ 个方程

$$a_{kk}x_k^* + \sum_{j=1, j\neq k}^{n} a_{kj}x_j^* = 0$$

## 引理 3.1

设 $\boldsymbol{A}$ 是严格对角占优矩阵, 则 $|\boldsymbol{A}| \neq 0$.

证 这里仅证 A 是按行严格对角占优的情况. 用反证法. 设 $|\boldsymbol{A}| = 0$, 则齐次方程组 $\boldsymbol{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 有非零解 $\mathbf{x}^* = (x_1^*, x_2^*, \cdots, x_n^*)^T$.设 $\|\mathbf{x}^*\|_\infty = |x_k^*| \neq 0$. 由第 $k$ 个方程

$$a_{kk}x_k^* + \sum_{j=1, j\neq k}^{n} a_{kj}x_j^* = 0$$

可得

$$\begin{aligned}
|a_{kk}| \cdot |x_k^*| &= |\sum_{j=1, j\neq k}^{n} a_{kj}x_j^*| \leq \sum_{j=1, j\neq k}^{n} |a_{kj}| \cdot |x_j^*| \\
&\leq \sum_{j=1, j\neq k}^{n} |a_{kj}| \cdot |x_k^*|
\end{aligned}$$

**引理 3.1**

设 $\boldsymbol{A}$ 是严格对角占优矩阵, 则 $|\boldsymbol{A}| \neq 0$.

证 这里仅证 A 是按行严格对角占优的情况. 用反证法. 设 $|\boldsymbol{A}| = 0$, 则齐次方程组 $\boldsymbol{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 有非零解 $\mathbf{x}^* = (x_1^*, x_2^*, \cdots, x_n^*)^T$.设 $\|\mathbf{x}^*\|_\infty = |x_k^*| \neq 0$. 由第 $k$ 个方程

$$a_{kk}x_k^* + \sum_{j=1,j\neq k}^{n} a_{kj}x_j^* = 0$$

可得

$$\begin{aligned} |a_{kk}| \cdot |x_k^*| &= |\sum_{j=1,j\neq k}^{n} a_{kj}x_j^*| \leq \sum_{j=1,j\neq k}^{n} |a_{kj}| \cdot |x_j^*| \\ &\leq \sum_{j=1,j\neq k}^{n} |a_{kj}| \cdot |x_k^*| \end{aligned}$$

两边约去 $|x_k^*|$, 得 $|a_{kk}| \leq \sum_{j=1,j\neq k}^{n} |a_{kj}|$, 与按行严格对角占优矛盾. 因而 $|\boldsymbol{A}| \neq 0$.

**定理 3.14**

给定线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$, 如果 $\boldsymbol{A}$ 是严格对角占优矩阵, 则 Jacobi 迭代格式收敛。

## 定理 3.14

给定线性方程组 $\boldsymbol{A}\mathbf{x}=\boldsymbol{b}$, 如果 $\boldsymbol{A}$ 是严格对角占优矩阵, 则 Jacobi 迭代格式收敛。

证明 记

$$\boldsymbol{B}(\lambda)=\begin{pmatrix} \lambda a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & \lambda a_{nn} \end{pmatrix}$$

则 Jacobi 迭代矩阵 $\boldsymbol{J}$ 的特征方程为 $|\boldsymbol{B}(\lambda)|=0$.

**定理 3.14**

给定线性方程组 $\boldsymbol{A}\mathbf{x}=\boldsymbol{b}$, 如果 $\boldsymbol{A}$ 是严格对角占优矩阵, 则 Jacobi 迭代格式收敛。

证明　记

$$\boldsymbol{B}(\lambda)=\begin{pmatrix} \lambda a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & \lambda a_{nn} \end{pmatrix}$$

则 Jacobi 迭代矩阵 $\boldsymbol{J}$ 的特征方程为 $|\boldsymbol{B}(\lambda)|=0$.设 $\boldsymbol{A}$ 是按行严格对角占优的, 则当 $|\lambda|\geq 1$ 时, 有

$$|\lambda a_{ii}|\geq|a_{ii}|>\sum_{j=1,j\neq k}^{n}|a_{ij}| \quad (i=1,2,\cdots,n)$$

即 $\boldsymbol{B}(\lambda)$ 是严格按行对角占优的。

**定理 3.14**

给定线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$, 如果 $\boldsymbol{A}$ 是严格对角占优矩阵, 则 Jacobi 迭代格式收敛。

证明　记

$$\boldsymbol{B}(\lambda)=\begin{pmatrix} \lambda a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & \lambda a_{nn} \end{pmatrix}$$

则 Jacobi 迭代矩阵 $\boldsymbol{J}$ 的特征方程为 $|\boldsymbol{B}(\lambda)|=0$.设 $\boldsymbol{A}$ 是按行严格对角占优的, 则当 $|\lambda|\geq 1$ 时, 有

$$|\lambda a_{ii}|\geq |a_{ii}|>\sum_{j=1,j\neq k}^{n}|a_{ij}| \quad (i=1,2,\cdots,n)$$

即 $\boldsymbol{B}(\lambda)$ 是严格按行对角占优的。由引理 3.1 可知, 当 $|\lambda|\geq 1$ 时, $|\boldsymbol{B}(\lambda)|\neq 0$. 换句话说, 方程 $|\boldsymbol{B}(\lambda)|=0$ 的 $n$ 个根 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 都应满足 $|\lambda_i|<1$, $i=1,2,\cdots,n$. 于是 $\rho(\boldsymbol{J})<1$. 同样可证当 $\boldsymbol{A}$ 按列严格对角占优的情况。因而 Jacobi 迭代格式收敛。

（3）Gauss-Seidel 迭代格式的收敛性

同样由定理 3.12, Gauss-Seidel 迭代收敛 $\Longleftrightarrow \rho(\boldsymbol{G}) < 1$.

（3）Gauss-Seidel 迭代格式的收敛性

同样由定理 3.12, Gauss-Seidel 迭代收敛 $\Longleftrightarrow \rho(\boldsymbol{G}) < 1$. $\boldsymbol{G}$ 的特征方程为

$$
\begin{aligned}
&|\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{G}| = |\lambda \boldsymbol{I} + (\boldsymbol{D}+\boldsymbol{L})^{-1}\boldsymbol{U}| \\
&= |(\boldsymbol{D}+\boldsymbol{L})^{-1}(\lambda(\boldsymbol{D}+\boldsymbol{L}) + \boldsymbol{U}| = 0. \\
&\Longleftrightarrow |(\lambda(\boldsymbol{D}+\boldsymbol{L}) + \boldsymbol{U}| = 0.
\end{aligned}
$$

（3）Gauss-Seidel 迭代格式的收敛性

同样由定理 3.12, Gauss-Seidel 迭代收敛 $\Longleftrightarrow \rho(\boldsymbol{G}) < 1$. $\boldsymbol{G}$ 的特征方程为

$$
\begin{aligned}
&|\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{G}| = |\lambda \boldsymbol{I} + (\boldsymbol{D} + \boldsymbol{L})^{-1} \boldsymbol{U}| \\
&= |(\boldsymbol{D} + \boldsymbol{L})^{-1} (\lambda(\boldsymbol{D} + \boldsymbol{L}) + \boldsymbol{U}| = 0. \\
&\Longleftrightarrow |(\lambda(\boldsymbol{D} + \boldsymbol{L}) + \boldsymbol{U}| = 0.
\end{aligned}
$$

## 例 3.14

讨论用 Gauss-Seidel 迭代格式解线性方程组

$$
\begin{bmatrix} 8 & -1 & 1 \\ 2 & 10 & -1 \\ 1 & 1 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}.
$$

的收敛性.

解: Gauss-Seidel 迭代矩阵 $\boldsymbol{G}$ 的特征方程为

$$\begin{vmatrix} 8\lambda & -1 & 1 \\ 2\lambda & 10\lambda & -1 \\ \lambda & \lambda & -5\lambda \end{vmatrix} = \lambda(400\lambda^2 + 10\lambda - 1) = 0,$$

求得 $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = \frac{-1+\sqrt{17}}{80}$, $\lambda_2 = \frac{-1-\sqrt{17}}{80}$,

$$\rho(\boldsymbol{G}) = \max_{i=1,2,3}\{|\lambda_i|\} = 0.0640388 < 1,$$

Gauss-Seidel 迭代收敛.

解：Gauss-Seidel 迭代矩阵 $\boldsymbol{G}$ 的特征方程为

$$\begin{vmatrix} 8\lambda & -1 & 1 \\ 2\lambda & 10\lambda & -1 \\ \lambda & \lambda & -5\lambda \end{vmatrix} = \lambda(400\lambda^2 + 10\lambda - 1) = 0,$$

求得 $\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = \frac{-1+\sqrt{17}}{80}, \quad \lambda_2 = \frac{-1-\sqrt{17}}{80}$,

$$\rho(\boldsymbol{G}) = \max_{i=1,2,3}\{|\lambda_i|\} = 0.0640388 < 1,$$

Gauss-Seidel 迭代收敛.

**定理 3.15**

给定线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, 如果 $\boldsymbol{A}$ 是严格对角占优矩阵, 则 Gauss-Seidel 迭代格式收敛.

(3) SOR 迭代格式的收敛性

SOR 迭代的迭代矩阵为

$$S_\omega = (\boldsymbol{D} + \omega \boldsymbol{L})^{-1}[(1-\omega)\boldsymbol{D} - \omega \boldsymbol{U}],$$

由定理 3.12, SOR 迭代收敛 $\Longleftrightarrow \rho(S_\omega) < 1.$

(3) SOR 迭代格式的收敛性

SOR 迭代的迭代矩阵为

$$S_\omega = (\boldsymbol{D} + \omega \boldsymbol{L})^{-1}[(1-\omega)\boldsymbol{D} - \omega \boldsymbol{U}],$$

由定理 3.12, SOR 迭代收敛 $\Longleftrightarrow \rho(S_\omega) < 1.$

**定理 3.16**

SOR 迭代收敛的必要条件是 $0 < \omega < 2.$

**证**　设 $S_\omega$ 的特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$, 则由线性代数知

$$|\det(S_\omega)| = |\lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n| \le \rho(S_\omega)^n.$$

另一方面, 由定理 3.12, 若 SOR 收敛, 则 $\rho(S_\omega) < 1$, 从而有 $|\det(S_\omega)| < 1$.

**证** 设 $S_\omega$ **的特征值为** $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$, **则由线性代数知**

$$|\mathrm{det}(S_\omega)| = |\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n| \le \rho(S_\omega)^n.$$

**另一方面**, **由定理** 3.12, **若** SOR **收敛**, **则** $\rho(S_\omega) < 1$, **从而有** $|\mathrm{det}(S_\omega)| < 1$.**而行列式**

$$\begin{aligned}\mathrm{det}(S_\omega) &= \mathrm{det}[(\boldsymbol{D}+\omega\boldsymbol{L})^{-1}]\mathrm{det}[(1-\omega)\boldsymbol{D}-\omega\boldsymbol{U}] \\ &= \left(\prod_{i=1}^n a_{ii}\right)^{-1}\prod_{i=1}^n[(1-\omega)a_{ii}] \\ &= (1-\omega)^n.\end{aligned}$$

证 设 $S_\omega$ 的特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$, 则由线性代数知

$$|\det(S_\omega)| = |\lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n| \leq \rho(S_\omega)^n.$$

另一方面, 由定理 3.12, 若 SOR 收敛, 则 $\rho(S_\omega) < 1$, 从而有 $|\det(S_\omega)| < 1$.而行列式

$$\begin{aligned}
\det(S_\omega) &= \det[(\boldsymbol{D} + \omega \boldsymbol{L})^{-1}]\det[(1-\omega)\boldsymbol{D} - \omega \boldsymbol{U}] \\
&= \left(\prod_{i=1}^n a_{ii}\right)^{-1} \prod_{i=1}^n [(1-\omega)a_{ii}] \\
&= (1-\omega)^n.
\end{aligned}$$

从而有

$$|(1-\omega)^n| < 1, \quad \Longrightarrow 0 < \omega < 2.$$

**定理 3.17**

给定线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$. 如果 $\boldsymbol{A}$ 对称正定, 且 $0 < \omega < 2$, 则 SOR 迭代收敛.

**定理 3.17**

给定线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$. 如果 $\boldsymbol{A}$ 对称正定, 且 $0 < \omega < 2$, 则 SOR 迭代收敛.

## 例

给定线性方程组 $\boldsymbol{A}\mathbf{x}=\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{A}$ 为 $n$ 阶非奇异矩阵. 构造迭代

$$\mathbf{x}^{(k+1)}=\mathbf{x}^{(k)}+\omega(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{A}\mathbf{x}^{(k)}),\quad (k=0,1,2,\cdots.)$$

其中 $\omega\neq 0$ 为常数.

1. 证明: 如果迭代收敛, 则迭代序列 $\{\mathbf{x}^{(k)}\}_{k=0}^{\infty}$ 收敛于方程 $\boldsymbol{A}\mathbf{x}=\boldsymbol{b}$ 的解.
2. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{bmatrix}$, 则 $\omega$ 取何值时迭代收敛?

**解**

1. 证 设 $\lim\limits_{k\to\infty} \boldsymbol{x}^{(k)} = \boldsymbol{x}^*$. 在迭代格式两边取极限

$$\lim_{k\to\infty} \boldsymbol{x}^{(k+1)} = \lim_{k\to\infty} [\boldsymbol{x}^{(k)} + \omega(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^{(k)})].$$

得 $\boldsymbol{x}^* = \boldsymbol{x}^* + \omega(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^*)$. 因为 $\omega \neq 0$, 所以 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^* = \boldsymbol{b}$, 即 $\boldsymbol{x}^*$ 是方程 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ 的解.

2. 迭代格式的迭代矩阵为 $\boldsymbol{I} - \omega\boldsymbol{A}$, 迭代收敛 $\Longleftrightarrow \rho(\boldsymbol{I} - \omega\boldsymbol{A}) < 1$. 矩阵 $\boldsymbol{I} - \omega\boldsymbol{A}$ 的特征方程为

$$\begin{aligned}
&|\lambda\boldsymbol{I} - (\boldsymbol{I} - \omega\boldsymbol{A})| \\
&= \begin{vmatrix} (\lambda - 1 + 2\omega) & \omega & \omega \\ \omega & (\lambda - 1 + 2\omega) & \omega \\ \omega & \omega & (\lambda - 1 + 2\omega) \end{vmatrix} = 0,
\end{aligned}$$

记$\mu = (\lambda - 1 + 2\omega), \Longrightarrow \mu^3 - 3\omega^2\mu + 2\omega^3 = 0,$

$\Longrightarrow (\mu - \omega)^2(\mu + 2\omega) = 0.$

$\Longrightarrow \mu = \omega$或$\mu = -2\omega, \Longrightarrow \lambda = 1 - \omega$或$\lambda = 1 - 4\omega.$

$$\begin{cases} |1 - \omega| < 1 \\ |1 - 4\omega| < 1 \end{cases} \Longrightarrow 0 < \omega < \frac{1}{2}.$$

# 习题 3 p.118

4, 5(1), 8, 17, 18, 19, 20, 23, 24, 27, 28, 32(1)
上机作业：40 或 41