

数值分析上机题

211881+周宏毅

题目 1: 第五章习题 23

题目 2: 第六章习题 23

习题 1:

23. (上机题) 重积分的计算

(1) 给定积分 $I(f) = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) dy$, 取初始步长 h 和 k 及精度 ϵ , 应用复化梯形公式, 采用逐次二分步长的方法并应用外推思想编制计算 $I(f)$ 的通用程序, 计算至相邻两次近似值之差的绝对值不超过 ϵ 为止;

(2) 用所编程序计算积分

$$I(f) = \int_0^{\pi/6} \left(\int_0^{\pi/3} \tan(x^2 + y^2) dx \right) dy$$

取 $\epsilon = \frac{1}{2} \times 10^{-5}$ 。

算法概述

初始时候只在 x, y 方向上各二分一次, 根据复化 Simpson 公式计算积分值, 然后再二分一次, 仍然根据上式重新计算积分值, 比较两次计算结果的差值, 如果小于误差限, 则已求得满足要求的结果, 否则继续二分区间直到满足误差要求为止。

程序如下:

```
#include<iostream>
#include<math.h>
#define PI 3.1415926
#define error 0.5E-5
using namespace std;
double f(double x,double y)
{
    double answ;
    answ=tan(x*x+y*y);
    return answ;
}

int main()
{
    double old,temp,a=0,c=0;
    int i,j,m=1,n=1;
    double b=PI/3;
    double d=PI/6;
    double h=(b-a)/(2*n);
    double k=(d-c)/(2*m);
    double answ=0;
```

```

do
{
    old=answ;
    answ=a;
    answ=(int)0;
    temp=0;
    for(i=1;i<n;i++)
        temp+=f(a+2*i*h,c);
    temp*=2;
    answ+=temp;
    temp=0;
    for(i=1;i<=n;i++)
        temp+=f(a+(2*i-1)*h,c);
    temp*=4;
    answ+=temp;
    answ+=f(b,c);
    temp=0;
    for(j=1;j<m;j++)
        temp+=f(a,c+2*j*k);
    temp*=2;
    answ+=temp;
    temp=0;
    for(j=1;j<m;j++)
        for(i=1;i<n;i++)
            temp+=f(a+2*i*h,c+2*j*k);
    temp*=4;
    answ+=temp;
    temp=0;
    for(j=1;j<m;j++)
        for(i=1;i<=n;i++)
            temp+=f(a+(2*i-1)*h,c+2*j*k);
    temp*=8;
    answ+=temp;
}

```

```

temp=0;
for(j=1;j<m;j++)
|   temp+=f(b,c+2*j*k);
temp*=2;
answ+=temp;
temp=0;
for(j=1;j<=m;j++)
|   temp+=f(a,c+(2*j-1)*k);
temp*=4;
answ+=temp;
temp=0;
for(j=1;j<=m;j++)
|   for(i=1;i<n;i++)
temp+=f(a+2*i*h,c+(2*j-1)*k);
temp*=8;
answ+=temp;
temp=0;
for(j=1;j<=m;j++)
|   for(i=1;i<n;i++)
temp+=f(a+(2*i-1)*h,c+(2*j-1)*k);
temp*=16;
answ+=temp;
temp=0;
for(j=1;j<=m;j++)
|   temp+=f(b,c+(2*j-1)*k);
temp*=4;
answ+=temp;
answ+=f(a,d);
temp=0;
for(i=1;i<n;i++)
|   temp+=f(a+2*i*h,d);
temp*=2;

```

```

    answ+=temp;
    temp=0;
    for(i=1;i<=n;i++)
        temp+=f(a+(2*i-1)*h,d);
    temp*=4;
    answ+=temp;
    answ+=f(b,d);
    answ=answ*h*k/9;
    m*=2;
    n*=2;
    h=(b-a)/(2*n);
    k=(d-c)/(2*m);
} while(fabs(answ-old)>error);
cout<<"answ is:"<<answ;
cout<<"\nDivided into"<<m/2<<"parts\n";
return 0;
}

```

在 x,y 方向上各二分 6 次，随着二分的继续，计算的结果越来越趋近准确值。六次二分后检验误差符合精度要求。

习题 2:

23. (上机题) 常微分方程初值问题数值解

- (1) 编制 RK₄ 方法的通用程序;
- (2) 编制 AB₄ 方法的通用程序(由 RK₄ 提供初值);
- (3) 编制 AB₄-AM₄ 预测校正方法通用程度(由 RK₄ 提供初值);
- (4) 编制带改进的 AB₄-AM₄ 预测校正方法通用程序(由 RK₄ 提供初值);
- (5) 对于初值问题

$$\begin{cases} y' = -x^2 y^2 & (0 \leq x \leq 1.5), \\ y(0) = 3 \end{cases}$$

取步长 $h = 0.1$, 应用(1) ~ (4) 中的四种方法进行计算, 并将计算结果和精确解 $y(x) = 3/(1+x^3)$ 作比较;

- (6) 通过本上机题, 你能得到哪些结论?

1、RK₄ 方法的通用程序

```
%RK4方法的通用程序
%f:函数, x0:求解范围, y0:初值, h:计算步长
function [x,y]=RK4(f,x0,y0,h)
x=[x0(1):h:x0(2)]';
y=zeros(length(x),1);
y(1)=y0;
for i=1:length(x)-1
    k1=f(x(i),y(i));
    k2=f(x(i)+1/2*h,y(i)+1/2*h*k1);
    k3=f(x(i)+1/2*h,y(i)+1/2*h*k2);
    k4=f(x(i)+h,y(i)+h*k3);
    y(i+1)=y(i)+h/6*(k1+2*k2+2*k3+k4);
end
end
```

2、AB₄ 方法的通用程序

%AB4方法的通用程序

%f:函数, x0:求解范围, y0:初值,h:计算步长

function [x,y]=AB4(f,x0,y0,h)

x=[x0(1):h:x0(2)]';

[~,y0] = RK4(f,x([1,4]),yo,h);

y=zeros(length(x),1);

y(1:4)=y0;

for i=1:length(x)-1

 y(i+1) = y(i) +...
 h/24* (55*f(x(i) ,y(i)) - ...
 59*f(x(i-1) ,y(i-1)) + ...
 37*f(x(i-2) ,y(i-2)) - ...
 9*f(x(i-3) ,y(i-3))) ;

end

end

3、AB4- AB4 预测校正方法的通用程序

%AB4AM4方法的通用程序

%f:函数, x0:求解范围, y0:初值,h:计算步长

function [x,y]=AB4AM4(f,x0,y0,h)

x=[x0(1):h:x0(2)]';

[~,y0] = RK4(f,x([1,4]),yo,h);

y=zeros(length(x),1);

y(1:4)=y0;

for i=1:length(x)-1

 y(i+1) = y(i) +...
 h/24* (55*f(x(i) ,y(i)) - ...
 59*f(x(i-1) ,y(i-1)) + ...
 37*f(x(i-2) ,y(i-2)) - ...
 9*f(x(i-3) ,y(i-3))) ;
 y(i+1) = y(i) +...
 h/24* (9*f(x(i+1) ,y(i+1)) + ...
 19*f(x(i) ,y(i)) - ...
 5*f(x(i-1) ,y(i-1)) + ...
 f(x(i-2) ,y(i-2))) ;

end

end

4、带改进的 AB4- AB4 预测校正方法的通用程序

```
%f:函数, x0:求解范围, y0:初值,h:计算步长
function [x,y]=advanceAB4AM4(f,x0,y0,h)
x=[x0(1):h:x0(2)]';
[~,y0] = RK4(f,x([1,4]),y0,h);

y=zeros(length(x),1);
y(1:4)=y0;
for i=1:length(x)-1
    yp = y(i) +...
        h/24* (55*f(x(i) ,y(i)) - ...
        59*f(x(i-1) ,y(i-1)) + ...
        37*f(x(i-2) ,y(i-2)) - ...
        9*f(x(i-3) ,y(i-3))) ;
    yc = y(i) +...
        h/24* (9*f(x(i+1) ,yp) + ...
        19*f(x(i) ,y(i)) - ...
        5*f(x(i-1) ,y(i-1)) + ...
        f(x(i-2) ,y(i-2))) ;
    y(i+1) = 251/270*yc+19/270*yp;
end
end
```

第六章上机题实验结果:

采用 4 中方法运算结果

x	精确值	y 的结果			
		RK4	AB4	AB4-AM4	改进 AB4-AM4
0		3	3	3	3
0.1	2.997002997	2.99700281	2.99700281	2.99700281	2.99700281
0.2	2.976190476	2.976190085	2.976190085	2.976190085	2.976190085
0.3	2.921129503	2.921128745	2.921128745	2.921128745	2.921128745
0.4	2.819548872	2.819547261	2.818389261	2.819678433	2.819587713
0.5	2.666666667	2.666663489	2.664672471	2.666875983	2.666712854
0.6	2.467105263	2.467100258	2.46520263	2.467251764	2.467097029
0.7	2.233804914	2.233799142	2.233078952	2.233731415	2.233682492
0.8	1.984126984	1.984122855	1.984950578	1.983786704	1.983884685
0.9	1.735106998	1.735107114	1.737043286	1.734607435	1.734808011
1		1.5	1.500005807	1.502194547	1.499515936
				1.499731907	

1. 1	1. 287001287	1. 287012594	1. 288763445	1. 286657139	1. 286820676
1. 2	1. 099706745	1. 099722169	1. 100724202	1. 099533146	1. 09962178
1. 3	0. 938379731	0. 938397458	0. 938710496	0. 938342523	0. 938367316
1. 4	0. 801282051	0. 801300427	0. 801134948	0. 801327374	0. 801311354
1. 5	0. 685714286	0. 685732086	0. 685334576	0. 685796111	0. 685760446

各方法误差分析:

x	各点误差 dy					
	精确值	RK4	AB4	AB4-AM4	改进 AB4-AM4	
0	3	0	0	0	0	0
0.1	2.997002997	-1.87E-07	-1.87E-07	-1.87E-07	-1.87E-07	-1.87E-07
0.2	2.976190476	-3.92E-07	-3.92E-07	-3.92E-07	-3.92E-07	-3.92E-07
0.3	2.921129503	-7.58E-07	-7.58E-07	-7.58E-07	-7.58E-07	-7.58E-07
0.4	2.819548872	-1.61E-06	-0.001159611	0.00012956	3.88E-05	3.88E-05
0.5	2.666666667	-3.18E-06	-0.001994196	0.000209316	4.62E-05	4.62E-05
0.6	2.467105263	-5.01E-06	-0.001902633	0.000146501	-8.23E-06	-8.23E-06
0.7	2.233804914	-5.77E-06	-0.000725963	-7.35E-05	-0.000122422	-0.000122422
0.8	1.984126984	-4.13E-06	0.000823594	-0.00034028	-0.0002423	-0.0002423
0.9	1.735106998	1.16E-07	0.001936288	-0.000499563	-0.000298987	-0.000298987
1	1.5	5.81E-06	0.002194547	-0.000484064	-0.000268093	-0.000268093
1.1	1.287001287	1.13E-05	0.001762158	-0.000344148	-0.000180611	-0.000180611
1.2	1.099706745	1.54E-05	0.001017457	-0.000173599	-8.50E-05	-8.50E-05
1.3	0.938379731	1.77E-05	0.000330765	-3.72E-05	-1.24E-05	-1.24E-05
1.4	0.801282051	1.84E-05	-0.000147103	4.53E-05	2.93E-05	2.93E-05
1.5	0.685714286	1.78E-05	-0.00037971	8.18E-05	4.62E-05	4.62E-05
2 范数						
	RK4	AB4	AB4-AM4	改进 AB4-AM4		
	3.82E-05	0.004809132	9.20E-04	5.31E-04		

结论:

由误差分析可知: 四种方法的运算精度, RK4 最高, 其次是改进 AB4—AM4, 再次是 AB4-AM4, 精度最低的是 AB4。