4.7.2 最佳一致逼近多项式

记 $M_n = \{p_n | p_n \text{为次数不超过 } n \text{ 的多项式}\}$, 则 $M_n \subset C[a, b]$.

定义 4.11

设 $f \in C[a, b]$. 若 $\exists p_n \in M_n$, 使得对 $\forall q_n \in M_n$, 有 $\|f - p_n\|_\infty \leq \|f - q_n\|_\infty$. 则称 $p_n(x)$ 是 $f(x)$ 的 $\boldsymbol{n}$ **次最佳一致逼近多项式**.

4.7.2 最佳一致逼近多项式

记 $M_n = \{p_n | p_n$为次数不超过 n 的多项式$\}$, 则 $M_n \subset C[a, b]$.

定义 4.11

设 $f \in C[a, b]$. 若 $\exists p_n \in M_n$, 使得对 $\forall q_n \in M_n$, 有 $\|f - p_n\|_\infty \leq \|f - q_n\|_\infty$. 则称 $p_n(x)$ 是 $f(x)$ 的 **n 次最佳一致逼近多项式**.

注 7.1

由定义知 $\|f - p_n\|_\infty = \min_{q_n \in M_n} \|f - q_n\|_\infty$, 或

$$\max_{a \leq x \leq b} |f(x) - p(x)| = \min_{q_n \in M_n} \max_{a \leq x \leq b} |f(x) - q_n(x)|.$$

4.7.2 最佳一致逼近多项式

记 $M_n = \{p_n | p_n$为次数不超过 n 的多项式$\}$, 则 $M_n \subset C[a,b]$.

定义 4.11

设 $f \in C[a,b]$. 若 $\exists p_n \in M_n$, 使得对 $\forall q_n \in M_n$, 有 $\|f - p_n\|_\infty \le \|f - q_n\|_\infty$. 则称 $p_n(x)$ 是 $f(x)$ 的 **n 次最佳一致逼近多项式**.

注 7.1

由定义知 $\|f - p_n\|_\infty = \min_{q_n \in M_n} \|f - q_n\|_\infty$, 或

$$\max_{a \le x \le b} |f(x) - p(x)| = \min_{q_n \in M_n} \max_{a \le x \le b} |f(x) - q_n(x)|.$$

最佳一致逼近多项式的存在唯一性

定理 4.9

设 $f \in C[a,b]$, 则 f 在 M_n 中存在唯一的 n 次最佳一致逼近多项式 $p_n(x)$.

定义 4.12

设 $g \in C[a,b]$. 如果 $\exists x_0 \in [a,b]$ 使得 $|g(x_0)| = \|g\|_\infty = \max_{a\le x\le b}|g(x)|$, 则称 x_0 为 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上的**偏差点**. 当 $g(x_0) = \|g\|_\infty$, x_0 称 $g(x)$ 的**正偏差点**. 当 $g(x_0) = -\|g\|_\infty$, x_0 称 $g(x)$ 的**负偏差点**.

定义 4.12

设 $g \in C[a,b]$. 如果 $\exists x_0 \in [a,b]$ 使得 $|g(x_0)| = \|g\|_\infty = \max_{a \le x \le b} |g(x)|$, 则称 x_0 为 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上的**偏差点**. 当 $g(x_0) = \|g\|_\infty$, x_0 称 $g(x)$ 的**正偏差点**. 当 $g(x_0) = -\|g\|_\infty$, x_0 称 $g(x)$ 的**负偏差点**.

引理 4.1

设 $f \in C[a,b]$, $p_n(x)$ 是 $f(x)$ 的 n 次最佳一致逼近多项式, 则 $f - p_n$ 必存在正负偏差点.

定义 4.12

设 $g \in C[a,b]$. 如果 $\exists x_0 \in [a,b]$ 使得 $|g(x_0)| = \|g\|_\infty = \max_{a\le x\le b}|g(x)|$, 则称 x_0 为 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上的**偏差点**. 当 $g(x_0) = \|g\|_\infty$, x_0 称 $g(x)$ 的**正偏差点**. 当 $g(x_0) = -\|g\|_\infty$, x_0 称 $g(x)$ 的**负偏差点**.

引理 4.1

设 $f \in C[a,b]$, $p_n(x)$ 是 $f(x)$ 的 n 次最佳一致逼近多项式, 则 $f - p_n$ 必存在正负偏差点.

最佳一致逼近多项式的特征定理.

定理 4.10（Chebyshev 定理）

设 $f \in C[a,b]$, $p_n(x)$ 是 n 次多项式, 则 $p_n(x)$ 是 $f(x)$ 的 n 次最佳一致逼近多项式 $\Longleftrightarrow f(x) - p_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上至少有 $(n+2)$ 个交错偏差点, 即存在 $(n+2)$ 个点 $a \le x_0 < x_1 < \cdots < x_n < x_{n+1} \le b$, 使得

$$f(x_i) - p_n(x_i) = (-1)^i \sigma \|f - p_n\|_\infty, \quad i = 0, 1, \cdots, n+1,$$

其中 $\sigma = 1$ 或 $\sigma = -1$.

推论 4.1

设 $f \in C[a,b]$, $p_n(x)$ 是 $f(x)$ 的 n 次最佳一致逼近多项式. 如果 $f^{(n+1)}(x)$ 在 (a,b) 内存在且保号, 则 $f(x) - p_n(x)$ 在 $[a,b]$ 内恰有 $(n+2)$ 个交错偏差点, 且两端点 a, b 也是偏差点.

推论 4.1

设 $f \in C[a,b]$, $p_n(x)$ 是 $f(x)$ 的 n 次最佳一致逼近多项式. 如果 $f^{(n+1)}(x)$ 在 (a,b) 内存在且保号, 则 $f(x)-p_n(x)$ 在 $[a,b]$ 内恰有 $(n+2)$ 个交错偏差点, 且两端点 a,b 也是偏差点.

由推论 4.1, 如果 $f(x) \in C[a,b]$ 且 $f^{(n+1)}$ 在 (a,b) 上保号, 设 $f(x)$ 的 n 次最佳一致逼近多项式为

$$p_n(x) = c_0 + c_1 x + \cdots + c_n x^n,$$

则 $f(x)-p_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上有 $n+2$ 个交错偏差点 $a < x_1 < x_2 < \cdots < x_n < b$, 我们有

$$\begin{aligned}
f(a)-p_n(a) &= -[f(x_1)-p_n(x_1)] \\
&= f(x_2)-p_n(x_2) \\
&= \cdots \\
&= (-1)^n[f(x_n)-p_n(x_n)] \\
&= (-1)^{n+1}[f(b)-_n(b)] \\
f'(x_i)-p_n'(x_n) &= 0, \quad i=1,2\cdots,n
\end{aligned}$$

上述是具有 $2n+1$ 个参数 $c_0, c_1, \cdots, c_n, x_1, x_2, \cdots, c_n$ 的 $2n+1$ 阶非线性方程组, 一般可用迭代法求解, 在特殊情形可精确求解.

例 4.14

设 $f(x) \in C^2[a,b]$, 且 $f'(x)$ 在 (a,b) 内存在且保号, 求 $f(x)$ 的 1 次最佳一致逼近多项式 $p_1(x)$.

例 4.14

设 $f(x) \in C^2[a,b]$, 且 $f''(x)$ 在 (a,b) 内存在且保号, 求 $f(x)$ 的 1 次最佳一致逼近多项式 $p_1(x)$.

解 设 $p_1(x) = c_0 + c_1 x$, 则 $f(x) - p_1(x)$ 在 $[a,b]$ 内有 3 个交错偏差点 a, x_1, b, 于是可得

$$\begin{cases} f(a) - p_1(a) = -[f(x_1) - p_1(x_1)] = f(b) - p_1(b), \\ f'(x_1) - p_1'(x_1) = 0, \end{cases}$$

计算可得

$$c_1 = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}, \quad x_1 = (f')^{-1}(c_1), \quad c_0 = \frac{f(a) + f(x_1)}{2} - c_1 \frac{a + x_1}{2},$$

$p_1(x)$ 的图像见图 9.

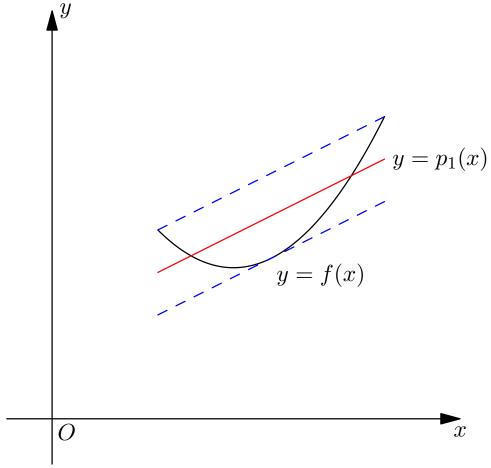

图 9: 一次最佳一致逼近多项式

例

求函数 $f(x) = \ln(1+x)$ 在 $[0,1]$ 上的 1 次最佳一致逼近多项式 $p_1(x) = c_0 + c_1 x$.

例

求函数 $f(x)=\ln(1+x)$ 在 $[0,1]$ 上的 1 次最佳一致逼近多项式 $p_1(x)=c_0+c_1x$.

解 $f'(x)=-\frac{1}{(1+x)^2}$ 在 $(0,1)$ 内保号, 所以 $f(x)-p_1(x)$ 在 $[0,1]$ 内有 3 个偏差点 $0,x_1,1$. 我们有

$$\begin{aligned}&f(0)-p_1(0)=-[f(x_1)-p_1(x_1)]=f(1)-p_1(1),\\&f'(x_1)-p_1'(x_1)=0.\end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned}-c_0&=-[\ln 1+x_1-c_0-c_1x_1]\\&=\ln 2-c_0-c_1,\\&\frac{1}{1+x_1}=c_1.\end{aligned}$$

得 $c_0=\frac{1}{2}[\ln 2-\ln\ln 2-1]$, $c_1=\ln 2$.

例

求 a, b, 使得

$$\max_{1\le x\le 2}\left|\frac{1}{x}-ax-b\right|$$

取最小值, 并求出最小值.

例

求 a, b, 使得

$$\max_{1\le x\le 2}\left|\frac{1}{x}-ax-b\right|$$

取最小值, 并求出最小值.

解　该问题即求函数 $f(x)=\frac{1}{x}$ 在 $[1,2]$ 上的 1 次最佳一致逼近多项式 $p_1(x)=b+ax$. $f'(x)=\frac{2}{x^3}$ 在 $[1,2]$ 上保号, 故 $f(x)-p_1(x)$ 在 $[1,2]$ 上有 3 个偏差点 $1, x_1, 2$ 满足

$$f(1)-p_1(1)=-[f(x_1)-p_1(x_1)]=f(2)-p_1(2),$$
$$f'(x_1)-p_1'(x_1)=0.$$

可求得 $c_0=\frac{3}{4}(1+\sqrt{2})$, $c_1=-\frac{1}{2}$.

例

求 a, b, 使得

$$\max_{1\le x\le 2}\left|\frac{1}{x}-ax-b\right|$$

取最小值, 并求出最小值.

解　该问题即求函数 $f(x)=\frac{1}{x}$ 在 $[1,2]$ 上的 1 次最佳一致逼近多项式 $p_1(x)=b+ax$. $f'(x)=\frac{2}{x^3}$ 在 $[1,2]$ 上保号, 故 $f(x)-p_1(x)$ 在 $[1,2]$ 上有 3 个偏差点 $1, x_1, 2$ 满足

$$\begin{aligned} &f(1)-p_1(1)=-[f(x_1)-p_1(x_1)]=f(2)-p_1(2),\\ &f'(x_1)-p_1'(x_1)=0. \end{aligned}$$

可求得 $c_0=\frac{3}{4}(1+\sqrt{2})$, $c_1=-\frac{1}{2}$.

推论 4.2

设 $f(x)\in C[a,b]$, 则 $f(x)$ 的 n 次最佳一致逼近多项式 $p_n(x)$ 为 $f(x)$ 的某个 n 次插值多项式.

4.8.1 内积空间

定义 4.14

设 X 是一个线性空间, 若对 $\forall x, y \in X$ 有实数与之对应, 记该实数为 (x, y), 且满足:

1. $\forall x, y \in X$, 有 $(x, y) = (y, x)$;
2. $\forall x, y \in X, \lambda \in \mathbf{R}$, 有 $(\lambda x, y) = \lambda(x, y)$;
3. $\forall x, y, z \in X$, 有 $(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$;
4. $\forall x \in X$, 有 $(x, x) \geq 0$, 且 $(x, x) = 0 \Longleftrightarrow x = 0$.

则 X 称为**内积空间**, 二元运算 $(\cdot, \cdot)$ 成为**内积**.

4.8.1 内积空间

定义 4.14

设 X 是一个线性空间, 若对 $\forall x, y \in X$ 有实数与之对应, 记该实数为 (x, y), 且满足:

1. $\forall x, y \in X$, 有 $(x, y) = (y, x)$;
2. $\forall x, y \in X, \lambda \in \mathbf{R}$, 有 $(\lambda x, y) = \lambda(x, y)$;
3. $\forall x, y, z \in X$, 有 $(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$;
4. $\forall x \in X$, 有 $(x, x) \geq 0$, 且 $(x, x) = 0 \Longleftrightarrow x = 0$.

则 X 称为**内积空间**, 二元运算 $(\cdot, \cdot)$ 成为**内积**.

定义 4.15

设 X 是内积空间, $x, y \in X$, 如果 $(x, y) = 0$, 则称 x 和 y **正交**.

例 $X=\mathbf{R}^n$, $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$, $y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)^T$, 记

$$(x,y)=\sum_{i=1}^{n}x_iy_i,$$

则 (x,y) 是 $\mathbf{R}^n$ 上的一个内积.

例 $X = \mathbf{R}^n$, $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T$, $y = (y_1, y_2, \cdots, y_n)^T$, 记

$$(x, y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i,$$

则 (x, y) 是 $\mathbf{R}^n$ 上的一个内积.
例 考虑线性空间 $C[a, b]$. 对 $f, g \in C[a, b]$, 记

$$(f, g) = \int_a^b f(x) g(x)\, dx,$$

则 (f, g) 为 $C[a, b]$ 中的一个内积.

引理 4.3(Cauchy-Schwartz 不等式)

设 X 是一个内积空间，则对 $\forall x, y \in X$ 有

$$(x, y)^2 \leq (x, x)(y, y).$$

引理 4.3(Cauchy-Schwartz 不等式)

设 X 是一个内积空间，则对 $\forall x, y \in X$ 有

$$(x, y)^2 \leq (x, x)(y, y).$$

设 X 是一个内积空间，$x \in X$，定义

$$\|x\| = \sqrt{(x, x)},$$

则可以验证 $\|x\|$ 是 X 上的一个范数，称为 2 范数.

4.8 最佳平方逼近

定义 4.14

设 X 是内积空间, $(\cdot,\cdot)$ 是内积, M 是 X 的有限维子空间, $\varphi_0, \varphi_1, \cdots, \varphi_m$ 是 M 的一组基, $f \in X$, 若存在 $\varphi \in M$, 使得对任意 $\psi \in M$ 有

$$\|f-\varphi\| \leq \|f-\psi\|, \tag{8.1}$$

或者

$$\|f-\varphi\| = \min_{\psi \in M} \|f-\psi\|,$$

则称 φ 是 f 在 M 中的**最佳平方逼近元**.

4.8 最佳平方逼近

定义 4.14

设 X 是内积空间, $(\cdot,\cdot)$ 是内积, M 是 X 的有限维子空间, $\varphi_0, \varphi_1, \cdots, \varphi_m$ 是 M 的一组基, $f \in X$, 若存在 $\varphi \in M$, 使得对任意 $\psi \in M$ 有

$$\|f-\varphi\| \leq \|f-\psi\|, \tag{8.1}$$

或者

$$\|f-\varphi\| = \min_{\psi \in M} \|f-\psi\|,$$

则称 φ 是 f 在 M 中的**最佳平方逼近元**.

记 $\varphi = \sum_{i=0}^{m} c_i\varphi_i$, $\psi = \sum_{i=0}^{m} a_i\varphi_i$, 则问题 (8.1) 即求 $c_0, c_1, \cdots, c_m$ 使得

$$(f-\sum_{i=0}^{m} c_i\varphi_i, f-\sum_{j=0}^{m} c_j\varphi_j) = \min_{\psi \in M}(f-\sum_{i=0}^{m} a_i\varphi_i, f-\sum_{j=0}^{m} a_j\varphi_j).$$

记

$$\Phi(a_0, a_1, \cdots, a_m) = (f - \sum_{i=0}^{m} a_i\varphi_i, f - \sum_{j=0}^{m} a_j\varphi_j),$$

记

$$\Phi(a_0, a_1, \cdots, a_m) = (f - \sum_{i=0}^{m} a_i\varphi_i, f - \sum_{j=0}^{m} a_j\varphi_j),$$

则即求 $c_0, c_1, \cdots, c_m$ 使得

$$\Phi(c_0, c_1 \cdots, c_m) = \min_{a_0, a_1, \cdots, a_m \in \mathbf{R}} \Phi(a_0, a_1, \cdots, a_m).$$

$$\Phi(a_0, a_1, \cdots, a_m) = (f, f) - 2\sum_{i=0}^{m} a_i(f, \varphi_i) + \sum_{i,j=0}^{m} a_i a_j(\varphi_i, \varphi_j).$$

记

$$\Phi(a_0, a_1, \cdots, a_m) = (f - \sum_{i=0}^{m} a_i\varphi_i, f - \sum_{j=0}^{m} a_j\varphi_j),$$

则即求 $c_0, c_1, \cdots, c_m$ 使得

$$\Phi(c_0, c_1 \cdots, c_m) = \min_{a_0, a_1, \cdots, a_m \in \mathbf{R}} \Phi(a_0, a_1, \cdots, a_m).$$

$$\Phi(a_0, a_1, \cdots, a_m) = (f, f) - 2\sum_{i=0}^{m} a_i(f, \varphi_i) + \sum_{i,j=0}^{m} a_i a_j(\varphi_i, \varphi_j).$$

令

$$\frac{\partial \Phi}{\partial a_k} = -2(f, \varphi_k) + 2\sum_{i=0}^{m} a_i(\varphi_i, \varphi_k) = 0, \quad k = 0, 1, \cdots, m.$$

即

$$\sum_{i=0}^{m} (\varphi_k, \varphi_i) a_i = (f, \varphi_k), \quad k = 0, 1, \cdots, m. \tag{8.2}$$

所以 $c_0, c_1, \cdots, c_m$ 是方程 (8.2) 的解, 即 $c_0, c_1, \cdots, c_m$ 满足下面的线性方程组:

$$\begin{bmatrix} (\varphi_0,\varphi_0) & (\varphi_0,\varphi_1) & \cdots & (\varphi_0,\varphi_m) \\ (\varphi_1,\varphi_0) & (\varphi_1,\varphi_1) & \cdots & (\varphi_1,\varphi_m) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ (\varphi_m,\varphi_0) & (\varphi_m,\varphi_1) & \cdots & (\varphi_m,\varphi_m) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (f,\varphi_0) \\ (f,\varphi_1) \\ \vdots \\ (f,\varphi_m) \end{bmatrix}, \tag{8.3}$$

称方程组 (8.3) 为**正规方程组**, 或**法方程组**.

引理 4.4

正规方程组 (8.3) 的系数矩阵

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} (\varphi_0, \varphi_0) & (\varphi_0, \varphi_1) & \cdots & (\varphi_0, \varphi_m) \\ (\varphi_1, \varphi_0) & (\varphi_1, \varphi_1) & \cdots & (\varphi_1, \varphi_m) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ (\varphi_m, \varphi_0) & (\varphi_m, \varphi_1) & \cdots & (\varphi_m, \varphi_m) \end{bmatrix}$$

是对称正定矩阵.

引理 4.4

正规方程组 (8.3) 的系数矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}(\varphi_0,\varphi_0) & (\varphi_0,\varphi_1) & \cdots & (\varphi_0,\varphi_m)\\ (\varphi_1,\varphi_0) & (\varphi_1,\varphi_1) & \cdots & (\varphi_1,\varphi_m)\\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ (\varphi_m,\varphi_0) & (\varphi_m,\varphi_1) & \cdots & (\varphi_m,\varphi_m)\end{bmatrix}$$

是对称正定矩阵.

定理 4.12

正规方程组 (8.3) 存在唯一解 $(c_0, c_1, \cdots, c_m)^T$.

引理 4.4

正规方程组 (8.3) 的系数矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}(\varphi_0,\varphi_0) & (\varphi_0,\varphi_1) & \cdots & (\varphi_0,\varphi_m)\\ (\varphi_1,\varphi_0) & (\varphi_1,\varphi_1) & \cdots & (\varphi_1,\varphi_m)\\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ (\varphi_m,\varphi_0) & (\varphi_m,\varphi_1) & \cdots & (\varphi_m,\varphi_m)\end{bmatrix}$$

是对称正定矩阵.

定理 4.12

正规方程组 (8.3) 存在唯一解 $(c_0,c_1,\cdots,c_m)^T$.

定理 4.13

正规方程组 (8.3) 的唯一解 $(c_0,c_1,\cdots,c_m)^T$ 是函数 $\Phi(a_0,a_1,\cdots,a_m)$ 的最小点.

4.8.3 连续函数的最佳平方逼近

设 $f(x) \in C[a,b]$, $M = \text{span}\{\varphi_0(x), \varphi_1(x), \cdots, \varphi_m(x)\}$ 是 $C[a,b]$ 的一个 $m+1$ 维子空间. $q(x), p(x) \in M$ 可表示为

$$q(x) = \sum_{i=0}^{m} a_i \varphi_i(x), \quad p(x) = \sum_{i=0}^{m} c_i \varphi_i(x).$$

4.8.3 连续函数的最佳平方逼近

设 $f(x) \in C[a,b]$, $M = \text{span}\{\varphi_0(x), \varphi_1(x), \cdots, \varphi_m(x)\}$ 是 $C[a,b]$ 的一个 $m+1$ 维子空间. $q(x), p(x) \in M$ 可表示为

$$q(x) = \sum_{i=0}^{m} a_i \varphi_i(x), \quad p(x) = \sum_{i=0}^{m} c_i \varphi_i(x).$$

记

$$\Phi(a_0, a_1, \cdots, a_m) = \|f - q\|^2 = \int_a^b [f(x) - \sum_{i=0}^{m} a_i \varphi_i(x)]^2 \, dx.$$

求 $c_0, c_1, \cdots, c_m$ 使得

$$\|f - p\|_2 \le \|f - q\|_2, \quad \forall q \in M.$$

即

$$\Phi(c_0, c_1, \cdots, c_m) = \min_{a_0, a_1, \cdots, a_m \in \mathbf{R}} \Phi(a_0, a_1, \cdots, a_m).$$

即

$$\Phi(c_0, c_1, \cdots, c_m) = \min_{a_0, a_1, \cdots, a_m \in \mathbf{R}} \Phi(a_0, a_1, \cdots, a_m).$$

由最佳平方逼近理论, $c_0, c_1, \cdots, c_m$ 是下面的 (正规) 方程组的解:

$$\begin{bmatrix} (\varphi_0, \varphi_0) & (\varphi_0, \varphi_1) & \cdots & (\varphi_0, \varphi_m) \\ (\varphi_1, \varphi_0) & (\varphi_1, \varphi_1) & \cdots & (\varphi_1, \varphi_m) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ (\varphi_m, \varphi_0) & (\varphi_m, \varphi_1) & \cdots & (\varphi_m, \varphi_m) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (f, \varphi_0) \\ (f, \varphi_1) \\ \vdots \\ (f, \varphi_m) \end{bmatrix}, \tag{8.4}$$

其中

$$(\varphi_i, \varphi_j) = \int_a^b \varphi_i(x)\varphi_j(x)\,dx, \ (f, \varphi_i) = \int_a^b f(x)\varphi_i(x)\,dx.$$

如果 $\varphi_i(x) = x^i (i = 0, 1 \cdots, m)$, 则 $p(x)$ 称为 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的 m 次最佳平方逼近多项式.

例 4.21

设 $f(x) = e^x, x \in [0,1]$. 求 $f(x)$ 的 2 次最佳平方逼近多项式 $p_2(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2$.

例 4.21

设 $f(x)=e^x, x\in[0,1]$. 求 $f(x)$ 的 2 次最佳平方逼近多项式 $p_2(x)=c_0+c_1x+c_2x^2$.

解 $\varphi_0(x)=1, \varphi_1(x)=x, \varphi_2(x)=x^2$,

$$(\varphi_0,\varphi_0)=\int_0^1 1\,dx, \quad (\varphi_0,\varphi_1)=\int_0^1 x dx=\frac{1}{2},$$

$$(\varphi_0,\varphi_2)=\int_0^1 x^2\,dx=\frac{1}{3}, \quad (\varphi_1,\varphi_1)=\int_0^1 x^2=\frac{1}{3},$$

$$(\varphi_1,\varphi_2)=\int_0^1 x^3\,dx=\frac{1}{4}, \quad (\varphi_2,\varphi_2)=\int_0^1 x^4\,dx=\frac{1}{5},$$

$$(f,\varphi_0)=\int_0^1 e^x\,dx=e-1, \quad (f,\varphi_1)=\int_0^1 xe^x\,dx=1,$$

$$(f,\varphi_2)=\int_0^1 x^2e^x\,dx=e-2.$$

正规方程组为:

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e-1 \\ 1 \\ e-2 \end{bmatrix}.$$

解得 $c_0 = 39e - 105, c_1 = 588 - 216e, c_2 = 210e - 570.$

例 4.22

求 c, d, 使得 $\int_0^1 \left[x^3 - c - dx^2\right]^2 dx$ 取最小值.

例 4.22

求 c, d, 使得 $\int_0^1 \left[x^3 - c - dx^2\right]^2 dx$ 取最小值.

解 该问题即求 $f(x) = x^3$ 在 $[0,1]$ 上的最佳平方逼近多项式 $p(x) = c + dx^2$. $\varphi_0(x) = 1$, $\varphi_1(x) = x^2$.

$$(\varphi_0, \varphi_0) = \int_0^1 1\,dx = 1, \quad (\varphi_0, \varphi_1) = \int_0^1 x^2 = \frac{1}{3},$$
$$(\varphi_1, \varphi_1) = \int_0^1 x^4\,dx = \frac{1}{5}, \quad (f, \varphi_0) = \int_0^1 x^3\,dx = \frac{1}{4}, \quad (f, \varphi_1) = \int_0^1 x^5\,dx = \frac{1}{6}.$$

正规方程为:

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{6} \end{bmatrix}.$$

解得 $c = -\frac{1}{16}, d = \frac{15}{16}$.