4.4 测量——习题与解答

DanX, Yuchen He*

练习 4.32 (局部测量与偏迹). 设 ρ 是一个双量子比特系统的密度算符。我们在计算基下对第 *2* 个量子比特做投影测量，对第 *2* 个比特的投影算符为

$$P_0 = |0\rangle\langle 0|, \qquad P_1 = |1\rangle\langle 1|.$$

于是测量算符为

$$M_0 = I \otimes P_0, \qquad M_1 = I \otimes P_1.$$

若观测者不知道具体测量结果（只知道“已经做了测量”），记此时体系的密度算符为 ρ'。证明

$$\rho' = (I \otimes P_0)\,\rho\,(I \otimes P_0) + (I \otimes P_1)\,\rho\,(I \otimes P_1).$$

再证明：对第 *1* 个量子比特的约化密度矩阵在这种测量下不变，即

$$\mathrm{tr}_2(\rho') = \mathrm{tr}_2(\rho).$$

解答. (1) 推出未区分结果时的测量后状态。

基于投影算符的测量可以用一组测量算符 $\{M_m\}$ 表示。在本题中有两个结果 $m \in \{0, 1\}$，测量算符为

$$M_0 = I \otimes P_0, \qquad M_1 = I \otimes P_1.$$

若测量结果为 m，则条件测量后密度矩阵为

$$\rho'_m = \frac{M_m \rho M_m^\dagger}{p_m}, \qquad p_m = \mathrm{tr}(M_m \rho M_m^\dagger)$$

是得到结果 m 的概率。

如果观测者只知道“做了测量”，但不知道 m 是多少，那他只能用混合来描述体系：

$$\rho' = \sum_m p_m \rho'_m.$$

把上式中 ρ'_m 和 p_m 代入：

$$\rho' = \sum_m p_m \frac{M_m \rho M_m^\dagger}{p_m} = \sum_m M_m \rho M_m^\dagger = (I \otimes P_0)\rho(I \otimes P_0) + (I \otimes P_1)\rho(I \otimes P_1),$$

这就得到所要证明的第一个等式。

(2) 证明第 1 个比特的约化态不变。

第 1 个比特的约化密度矩阵定义为

$$\rho^{(1)} := \mathrm{tr}_2(\rho), \qquad \rho^{(1)\prime} := \mathrm{tr}_2(\rho').$$

*heyuchen@tgqs.net

证明两者相等的一种方便方法是：对任意作用在第 1 个比特上的算符 A，比较它在两个约化态上的期望值。按偏迹的定义，有

$$\mathrm{tr}\big(A\,\rho^{(1)}\big)=\mathrm{tr}\big[(A\otimes I)\rho\big],\qquad \mathrm{tr}\big(A\,\rho^{(1)\prime}\big)=\mathrm{tr}\big[(A\otimes I)\rho'\big].$$

由前一部分的结论：

$$\rho'=\sum_{m=0}^{1}(I\otimes P_m)\rho(I\otimes P_m),$$

于是

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}\big[(A\otimes I)\rho'\big]&=\sum_m \mathrm{tr}\big[(A\otimes I)(I\otimes P_m)\rho(I\otimes P_m)\big]\\&=\sum_m \mathrm{tr}\big[(A\otimes P_m)\rho(I\otimes P_m)\big].\end{aligned}$$

利用迹的循环不变性 $\mathrm{tr}(XYZ)=\mathrm{tr}(ZXY)$，以及 $P_m^2=P_m$，可得

$$\mathrm{tr}\big[(A\otimes P_m)\rho(I\otimes P_m)\big]=\mathrm{tr}\big[(I\otimes P_m)(A\otimes P_m)\rho\big]=\mathrm{tr}\big[(A\otimes P_m)\rho\big].$$

因此

$$\mathrm{tr}\big[(A\otimes I)\rho'\big]=\sum_m \mathrm{tr}\big[(A\otimes P_m)\rho\big]=\mathrm{tr}\big[(A\otimes(P_0+P_1))\rho\big].$$

而 $P_0+P_1=I$，于是

$$\mathrm{tr}\big[(A\otimes I)\rho'\big]=\mathrm{tr}\big[(A\otimes I)\rho\big].$$

也就是说，对任意 A 都有

$$\mathrm{tr}\big(A\,\rho^{(1)\prime}\big)=\mathrm{tr}\big(A\,\rho^{(1)}\big),$$

从而只能是

$$\rho^{(1)\prime}=\rho^{(1)},$$

即

$$\mathrm{tr}_2(\rho')=\mathrm{tr}_2(\rho).$$

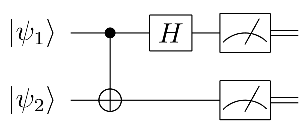
直观上，这说明：只在第 2 个比特上做局部测量，并且不看结果，对第 1 个比特的状态没有任何影响。 □

练习 4.33 (在 Bell 基中的测量)**.** *通常我们在计算基 $\{|00\rangle,|01\rangle,|10\rangle,|11\rangle\}$ 下对两比特做测量。有时我们希望在 Bell 基*

$$|\Phi^{\pm}\rangle=\frac{|00\rangle\pm|11\rangle}{\sqrt{2}},\qquad |\Psi^{\pm}\rangle=\frac{|01\rangle\pm|10\rangle}{\sqrt{2}}$$

中进行测量。

考虑如下线路：先对两比特做 CNOT（第 1 比特控制，第 2 比特为目标），然后对第 1 比特做 Hadamard，最后在计算基测量两比特：



证明：这个测量等价于先在 Bell 基下做投影测量，再把结果编码成计算基的经典比特输出。更形式化地说，诱导出的 POVM 元是到四个 Bell 态的投影 $E_j=|Bell_j\rangle\langle Bell_j|$，并给出相应的测量算符。

解答. (1) 直接看 Bell 态在该线路下如何演化。

记 $U := (H \otimes I)\,\mathrm{CNOT}_{1\to 2}$ 为 CNOT 再接 Hadamard 的总酉变换。我们分别作用在四个 Bell 态上，看看输出是什么。

$|\Phi^+\rangle = (|00\rangle + |11\rangle)/\sqrt{2}$:

$$\begin{aligned}\mathrm{CNOT}\,|\Phi^+\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathrm{CNOT}\,|00\rangle + \mathrm{CNOT}\,|11\rangle)\\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |10\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) \otimes |0\rangle = |+\rangle\,|0\rangle\,.\end{aligned}$$

再对第 1 比特作用 H：

$$(H \otimes I)\,|+\rangle\,|0\rangle = |0\rangle\,|0\rangle = |00\rangle\,.$$

$|\Phi^-\rangle = (|00\rangle - |11\rangle)/\sqrt{2}$: 同样有

$$\mathrm{CNOT}\,|\Phi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle - |10\rangle) = |-\rangle\,|0\rangle\,,$$

于是

$$(H \otimes I)\,|-\rangle\,|0\rangle = |1\rangle\,|0\rangle = |10\rangle\,.$$

$|\Psi^+\rangle = (|01\rangle + |10\rangle)/\sqrt{2}$:

$$\mathrm{CNOT}\,|\Psi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle + |11\rangle) = |+\rangle\,|1\rangle\,,$$

$$(H \otimes I)\,|+\rangle\,|1\rangle = |0\rangle\,|1\rangle = |01\rangle\,.$$

$|\Psi^-\rangle = (|01\rangle - |10\rangle)/\sqrt{2}$:

$$\mathrm{CNOT}\,|\Psi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle - |11\rangle) = |-\rangle\,|1\rangle\,,$$

$$(H \otimes I)\,|-\rangle\,|1\rangle = |1\rangle\,|1\rangle = |11\rangle\,.$$

小结：该酉变换 U 把 Bell 基一一对应地映射到计算基：

$$|\Phi^+\rangle \mapsto |00\rangle\,, \quad |\Phi^-\rangle \mapsto |10\rangle\,, \quad |\Psi^+\rangle \mapsto |01\rangle\,, \quad |\Psi^-\rangle \mapsto |11\rangle\,.$$

因此，在线路末端对计算基的测量，等价于在输入端对 Bell 基做一次投影测量。

(2) POVM 元与测量算符的形式。

记 $P_{mn} = |mn\rangle\langle mn|$ 是计算基下的投影算符，其中 $m, n \in \{0, 1\}$。将整个线路视为“先做 U，再测量”的测量过程。对任一输入态 $|\Psi\rangle$，得到输出结果 (m, n) 的测量算符可写为

$$M_{mn} = P_{mn} U,$$

对应的 POVM 元为

$$E_{mn} = M_{mn}^\dagger M_{mn} = U^\dagger P_{mn} U.$$

另一方面，

$$P_{mn} = |mn\rangle\langle mn| \quad \Rightarrow \quad E_{mn} = U^\dagger\,|mn\rangle\langle mn|\,U = |\beta_{mn}\rangle\langle\beta_{mn}|\,,$$

其中

$$|\beta_{mn}\rangle := U^\dagger |mn\rangle .$$

我们已经在第 (1) 步算出 U 把 Bell 态映射到计算基:

$$U|\Phi^+\rangle = |00\rangle ,\ U|\Phi^-\rangle = |10\rangle ,\ U|\Psi^+\rangle = |01\rangle ,\ U|\Psi^-\rangle = |11\rangle .$$

等价地,

$$|\Phi^+\rangle = U^\dagger |00\rangle , \quad |\Phi^-\rangle = U^\dagger |10\rangle , \quad |\Psi^+\rangle = U^\dagger |01\rangle , \quad |\Psi^-\rangle = U^\dagger |11\rangle .$$

因此

$$\begin{aligned} E_{00} &= |\Phi^+\rangle \langle\Phi^+| , \\ E_{10} &= |\Phi^-\rangle \langle\Phi^-| , \\ E_{01} &= |\Psi^+\rangle \langle\Psi^+| , \\ E_{11} &= |\Psi^-\rangle \langle\Psi^-| , \end{aligned}$$

它们正是对四个 Bell 态的投影。

于是该线路的 POVM 元就是到 Bell 基的四个投影，测量算符可以取为

$$M_{mn} = P_{mn}U, \qquad (m, n \in \{0, 1\}),$$

从而证明此线路实现了在 Bell 基中的投影测量。 □

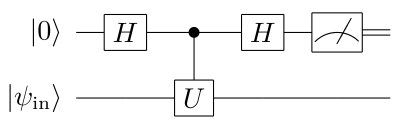
练习 4.34 (测量一个算符)**.** 设 U 是单量子比特上的一个酉算符，且它的本征值只有

$$\lambda_1 = +1, \qquad \lambda_2 = -1.$$

于是 U 既是酉算符又是 *Hermite* 算符，可以看作既是一个量子门又是一个可观测量。

我们希望 “测量 U”，即得到一个二值的测量结果 (对应本征值 ± 1)，并把被测比特投影到相应的本征态上。

考虑如下线路：引入一个辅助量子比特，初态为 $|0\rangle$，先对辅助比特做 *Hadamard*，接着以辅助比特为控制，对待测比特做受控-U，最后再对辅助比特做一次 *Hadamard*，然后测量辅助比特:



证明：该线路确实实现了对可观测量 U 的测量。

解答. (1) 写出整个线路的演化。

设待测比特的初态为 $|\psi_{\rm in}\rangle$，辅助比特初态为 $|0\rangle$，总初态为

$$|\Psi_0\rangle = |0\rangle \otimes |\psi_{\rm in}\rangle .$$

第一步，对辅助比特做 H:

$$|\Psi_1\rangle = (H \otimes I)\,|\Psi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) \otimes |\psi_{\rm in}\rangle .$$

第二步，作用受控-U，以辅助比特为控制:

$$|\Psi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(|0\rangle \otimes |\psi_{\rm in}\rangle + |1\rangle \otimes U\,|\psi_{\rm in}\rangle\big).$$

第三步，再对辅助比特作一次 H：

$$\begin{aligned}|\Psi_3\rangle &= (H\otimes I)\,|\Psi_2\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle+|1\rangle)\otimes|\psi_{\text{in}}\rangle+\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle-|1\rangle)\otimes U\,|\psi_{\text{in}}\rangle\right] \\ &= \frac{1}{2}\Big[|0\rangle\otimes(|\psi_{\text{in}}\rangle+U\,|\psi_{\text{in}}\rangle)+|1\rangle\otimes(|\psi_{\text{in}}\rangle-U\,|\psi_{\text{in}}\rangle)\Big] \\ &= \frac{1}{2}\Big[|0\rangle\otimes(I+U)\,|\psi_{\text{in}}\rangle+|1\rangle\otimes(I-U)\,|\psi_{\text{in}}\rangle\Big].\end{aligned}$$

因此，在测量之前，总态已经具有非常清晰的结构：

$$|\Psi_3\rangle = \frac{1}{2}\,|0\rangle\otimes(I+U)\,|\psi_{\text{in}}\rangle+\frac{1}{2}\,|1\rangle\otimes(I-U)\,|\psi_{\text{in}}\rangle\,.$$

(2) 辅助比特测量结果与输出状态。

现在测量辅助比特在 $\{|0\rangle\,,|1\rangle\}$ 基下的结果：

- 若测量结果为 0，则（未归一化的）后验态为

$$|\psi_{\text{out}}^{(0)}\rangle \propto (I+U)\,|\psi_{\text{in}}\rangle\,.$$

- 若测量结果为 1，则（未归一化的）后验态为

$$|\psi_{\text{out}}^{(1)}\rangle \propto (I-U)\,|\psi_{\text{in}}\rangle\,.$$

这说明测量过程可以看作是用算符 $(I\pm U)$ 作用在待测比特上，再做归一化。

(3) 查看本征态时的效果。

设 U 的两个本征态为 $|a\rangle\,,|b\rangle$，满足

$$U\,|a\rangle = +\,|a\rangle\,,\qquad U\,|b\rangle = -\,|b\rangle\,,$$

并将输入态写为

$$|\psi_{\text{in}}\rangle = \alpha\,|a\rangle+\beta\,|b\rangle\,,\qquad (\alpha,\beta\neq 0\ \text{一般情形}).$$

则

$$\begin{aligned}(I+U)\,|\psi_{\text{in}}\rangle &= \alpha(I+U)\,|a\rangle+\beta(I+U)\,|b\rangle \\ &= \alpha(1+1)\,|a\rangle+\beta(1-1)\,|b\rangle \\ &= 2\alpha\,\,|a\rangle\,,\end{aligned}$$

同理

$$(I-U)\,|\psi_{\text{in}}\rangle = 2\beta\,\,|b\rangle\,.$$

于是：

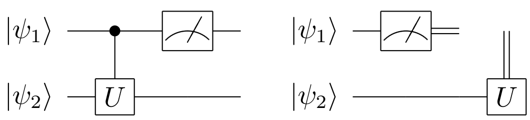
- 测得辅助比特为 0 时，待测比特（归一化后）必然处于本征态 $|a\rangle$；
- 测得辅助比特为 1 时，待测比特（归一化后）必然处于本征态 $|b\rangle$。

同时，这两种结果的概率分别与 $|\alpha|^2$、$|\beta|^2$ 成正比，这正是对可观测量 U 的本征测量的统计规律。

小结： 该线路通过引入一个辅助比特和受控-U，在辅助比特上读出的二值结果就告诉了我们 “U 的本征值是 $+1$ 还是 -1”，而被测比特被投影到对应的本征态上，因此它确实实现了对可观测量 U 的测量。 □

练习 4.35 (与控制可交换的测量). 推迟测量原理告诉我们：在很多情况下，把一个量子测量“提前”或“推后”都不会改变最终的物理效果。

考虑如下两种线路，它们都以第 *1* 个比特作为控制，对第 *2* 个比特作用酉算符 U：



(右边线路中，双线代表经典控制：只有当测量结果为 1 时才对第 *2* 比特作用 U。)

证明：这两种线路对于任意输入态给出的输出统计是等价的，即测量与受控-U 在这种情形下可以“交换顺序”。

解答. 记受控-U 门为

$$\text{ctrl-}U = P_0 \otimes I + P_1 \otimes U,$$

其中

$$P_0 = |0\rangle\langle 0|, \qquad P_1 = |1\rangle\langle 1|$$

是第 1 比特上的投影算符。

设两比特总初态为

$$|\Psi\rangle = \sum_{k,l\in\{0,1\}} c_{kl}\, |k\rangle \otimes |l\rangle,$$

其中 k 对应第 1 个比特，l 对应第 2 个比特。

(1) 先做受控-U 再测量的线路。

先作用 ctrl-U：

$$\begin{aligned} |\Psi'\rangle &= (P_0 \otimes I + P_1 \otimes U)\, |\Psi\rangle \\ &= \sum_{k,l} c_{kl} \big(P_0 |k\rangle \otimes I |l\rangle + P_1 |k\rangle \otimes U |l\rangle\big). \end{aligned}$$

接着对第 1 个比特在 $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ 基下测量。设测量结果为 $a \in \{0,1\}$，则对应投影算符为 P_a，测后（未归一化）态为

$$\begin{aligned} |\Psi'_{(a)}\rangle &= (P_a \otimes I)\, |\Psi'\rangle \\ &= \sum_{k,l} c_{kl} \big(P_a P_0 |k\rangle \otimes I |l\rangle + P_a P_1 |k\rangle \otimes U |l\rangle\big). \end{aligned}$$

(2) 先测量再根据经典结果控制 U 的线路。

另一条线路是：先对第 1 个比特测量，得到结果 a 后：

$$|\Psi_{(a)}\rangle = (P_a \otimes I)\, |\Psi\rangle = \sum_{k,l} c_{kl}\, P_a |k\rangle \otimes |l\rangle.$$

然后根据结果 a 决定是否在第 2 个比特上作用 U：

- 若 $a = 0$，则不作用 U，总态保持 $|\Psi_{(0)}\rangle$ 不变；
- 若 $a = 1$，则在第 2 个比特上作用 U，得到

$$|\Psi'_{(1)}\rangle = \sum_{k,l} c_{kl}\, P_1 |k\rangle \otimes U |l\rangle.$$

也可以用统一的形式写成

$$|\widetilde{\Psi}_{(a)}\rangle = \sum_{k,l} c_{kl} \big(P_0 P_a |k\rangle \otimes I |l\rangle + P_1 P_a |k\rangle \otimes U |l\rangle \big).$$

(3) 比较两种线路的结果。

注意 P_0, P_1 是一组对角投影算符，它们两两对易，且满足

$$P_a P_0 = P_0 P_a, \qquad P_a P_1 = P_1 P_a$$

（因为它们都是对计算基的投影）。

因此，在第 (1) 部分得到的

$$|\Psi'_{(a)}\rangle = \sum_{k,l} c_{kl} \big(P_a P_0 |k\rangle \otimes I |l\rangle + P_a P_1 |k\rangle \otimes U |l\rangle \big),$$

和第 (2) 部分的

$$|\widetilde{\Psi}_{(a)}\rangle = \sum_{k,l} c_{kl} \big(P_0 P_a |k\rangle \otimes I |l\rangle + P_1 P_a |k\rangle \otimes U |l\rangle \big)$$

实际上是逐项相同的未归一化态。

因此，对每一个测量结果 a：

- 两个线路中得到结果 a 的概率相同（因为概率由态的范数平方给出）；
- 条件在结果 a 上的后验量子态也相同（归一化后的向量只差同一个实数因子）。

结论： 对任意输入态 $|\Psi\rangle$，两条线路中关于测量结果和最终量子态的联合分布完全一致，因此“先受控-U 再测量控制比特”和“先测量控制比特再用经典结果控制 U”在物理上是等价的，即测量与控制在这种情形下可以交换顺序。 □