

复几何

曲豆豆 码字
南七技校福利社 五道口分社

2019 年 6 月 7 日

第 02 稿



图：中国科学技术大学西校区 - 也西湖雪景
拍摄于 2015.1.28 - 11: 30

本课程参考以下教材：

1. Demailly: Complex analytic and differential geometry.
2. Huybrechts: Complex geometry: an introduction.
3. Morrow, Kodaira: Complex manifolds.
4. Grauert, Remmert: Coherent analytic sheaves.
5. Hormander: An introduction to complex analysis in several variables.
6. Griffiths, Harris: Principles of algebraic geometry.

在五道口也要红专并进、理实交融呀 ~

目录

1	多复变函数	4
1.1	多元全纯函数	4
1.2	解析延拓与 Hartogs 现象	9
1.3	Weierstrass 预备定理与除法定理	13
1.4	解析函数芽环 $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n, z}$ 及其代数结构	16
1.5	解析集与局部解析零点定理	19
1.6	局部参数化	25
1.7	正则点、奇异点, 全纯隐函数定理	27
2	复流形 (待补)	28
2.1	复流形 (暂定)	28
2.2	微分形式 (暂定)	28
2.3	复向量丛与全纯向量丛 (暂定)	28
2.4	例子 (暂定)	29
3	层与层上同调	31
3.1	预层与层的概念	32
3.2	预层的层化	35
3.3	层的顺像与逆像	38
3.4	局部自由模层与向量丛	40
3.5	凝聚层及其基本性质	43
3.6	Oka 凝聚定理	47
3.7	层的上同调	50
3.8	Čech 上同调	55
4	Hermite 向量丛	62
4.1	向量丛的联络与曲率	62
4.2	陈省身示性类	68
4.3	Hermite 向量丛	71
4.4	复流形上的联络	73

4.5	例子：复射影空间上的典范线丛 $\mathcal{O}(-1)$	77
5	L^2 Hodge 理论	79
5.1	向量丛上的微分算子	79
5.2	椭圆算子的基本性质	82
5.3	Hodge \star 算子与 Laplace 算子	83
5.4	紧黎曼流形上 Hodge 理论	88
5.5	Hermite 流形与 Kähler 流形	91
5.6	紧复流形上的 Hodge 理论	94
6	Lefschitz 分解	98
6.1	线性代数版本的 Lefschitz 算子	98
6.2	紧 Kahler 流形的上同调群	104
7	正性与消灭定理	117
7.1	Blow-up	131
7.2	Kodaira Embedding Theorem	134
7.3	微分形式的正性	144

第 1 章 多复变函数

1.1 多元全纯函数

首先快速回顾单复变函数的知识。我们通常用 Ω 来表示 \mathbb{C} 的开子集, $z = x + iy$ 为 \mathbb{C} 的坐标。对于 $z \in \mathbb{C}$ 以及实数 $R > 0$, 我们令

$$\mathbb{D}(z, R) := \{w \in \mathbb{C} \mid |w - z| < R\}$$

为以 z 为圆心 R 为半径的开圆盘。

此外, 我们有如下常用记号:

$$\begin{cases} dz := dx + i dy \\ d\bar{z} := dx - i dy \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{\partial}{\partial z} := \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) \\ \frac{\partial}{\partial \bar{z}} := \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right) \end{cases}$$

对于函数 $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$, 称 f 是全纯 (holomorphic) 的, 若在 Ω 中成立

$$\bar{\partial}f := \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} d\bar{z} = 0$$

我们知道, f 是全纯的当且仅当 f 在 Ω 处处能够局部地展开为收敛幂级数。

对于 \mathbb{C} 中的紧致集 K , 称函数 $f: K \rightarrow \mathbb{C}$ 是全纯的, 如果存在 K 的开邻域 $\Omega \supseteq K$, 使得 f 可延拓为 Ω 上的全纯函数。

单复变函数论中有如下重要结果:

定理 1.1.1. (柯西积分公式) 设 $\mathbb{D} \subseteq \mathbb{C}$ 为 \mathbb{C} 中的开圆盘, $f: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$ 为 \mathbb{D} 上的全纯函数, 且在 $\partial\mathbb{D}$ 连续, 则对于任意 $w \in \mathbb{D}$, 成立

$$f(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\mathbb{D}} \frac{f(z)}{z - w} dz$$

此定理能推导出单变量全纯函数理论的 “almost everything”. 这里不再赘述。

我们开始考虑多变量全纯函数。

定义 1.1.2. 设 $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$ 为 \mathbb{C}^n 的开子集, 函数 $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ 称为 (多变量) 全纯函数, 如果满足以下条件:

- (1) f 是连续函数;
- (2) 对任意 $1 \leq j \leq n$, 以及任意固定的 $z_1, \dots, z_{j-1}, z_{j+1}, \dots, z_n \in \mathbb{C}$, 关于 z_j 的单变量函数

$$z_j \mapsto f(z_1, \dots, z_{j-1}, z_j, z_{j+1}, \dots, z_n)$$

是 (单变量) 全纯函数。

事实上, 如果该定义中的 (2) 成立, 那么能推出 (1) 成立, 也就是说此定义中的 (1) 可以去掉。其证明比较复杂, 我们承认之。

记号 1.1.3. 对于 \mathbb{C}^n 的开子集 Ω , 我们记

$$\mathcal{O}(\Omega) := \{f: \Omega \rightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ 是 } \Omega \text{ 上的全纯函数}\}$$

容易知道 $\mathcal{O}(\Omega)$ 有显然的 \mathbb{C} -代数结构。

本节将说明, 多变量全纯函数具有一些与单变量全纯函数类似的性质。

记号 1.1.4. 对于 $z = (z_1, z_2, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$ 以及 $R = (R_1, R_2, \dots, R_n) \in \mathbb{R}^n$, 并且 $R_j > 0$ ($\forall 1 \leq j \leq n$), 则我们记

$$\mathbb{D}(z, R) := \mathbb{D}(z_1, R_1) \times \mathbb{D}(z_2, R_2) \times \cdots \times \mathbb{D}(z_n, R_n)$$

称为以 z 为中心, R 为半径的**多圆柱** (*polydisk*)。

对于多圆柱 $\mathbb{D}(z, R)$, 我们记

$$\Gamma(z, R) := \partial\mathbb{D}(z_1, R_1) \times \partial\mathbb{D}(z_2, R_2) \times \cdots \times \partial\mathbb{D}(z_n, R_n)$$

称为 $\mathbb{D}(z, R)$ 的**特征边界** (*distinguished boundary*)。

特别注意特征边界 $\Gamma(z, R)$ 并不等于该多圆柱的边界 $\partial\mathbb{D}(z, R)$ 。

定理 1.1.5. (多变量全纯函数的柯西积分公式)

设 $f: \overline{\mathbb{D}(z, R)} \rightarrow \mathbb{C}$ 为全纯函数, 则对任意的 $w \in \mathbb{D}(z, R)$, 成立

$$f(w) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{\Gamma(z, R)} \frac{f(\xi) d\xi_1 d\xi_2 \cdots d\xi_n}{(\xi_1 - w_1)(\xi_2 - w_2) \cdots (\xi_n - w_n)}$$

证明. 由多变量全纯函数的定义, 反复使用单变量全纯函数的柯西积分公式即可。这是容易的。□

与单复变函数完全类似, 我们也有泰勒展开:

推论 1.1.6. (多元全纯函数的泰勒展开公式)

对于 $f \in \mathcal{O}(\Omega)$, 其中 $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$ 为开子集, 则对于任何多圆柱 $\mathbb{D}(z_0, R)$, 如果 $\overline{\mathbb{D}(z_0, R)} \subseteq \Omega$, 则对于任意 $w \in \mathbb{D}(z_0, R)$, 成立

$$f(w) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} a_\alpha (w - z_0)^\alpha$$

其中

$$a_\alpha = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{\Gamma(z_0, R)} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{\alpha+1}} dz_1 dz_2 \cdots dz_n = \frac{f^{(\alpha)}(z_0)}{\alpha!}$$

注意这里的 α 为多重指标, 即 $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, 其中每个 α_i 都为非负整数。我们记

$$\begin{aligned} z^\alpha &:= z_1^{\alpha_1} z_2^{\alpha_2} \cdots z_n^{\alpha_n} \\ \alpha! &:= \alpha_1! \alpha_2! \cdots \alpha_n! \\ f^{(\alpha)} &:= (\partial_{z_1})^{\alpha_1} (\partial_{z_2})^{\alpha_2} \cdots (\partial_{z_n})^{\alpha_n} f \\ \alpha + 1 &:= (\alpha_1 + 1, \alpha_2 + 1, \dots, \alpha_n + 1) \end{aligned}$$

其中 $z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$, f 为 n 元全纯函数。

证明. 与单复变函数的情形完全类似, 可由柯西积分公式得到。□

定理 1.1.7. (柯西不等式) 对于 \mathbb{C}^n 的开子集 Ω , 若 $f \in \mathcal{O}(\Omega)$, 多圆柱 $\overline{\mathbb{D}(z_0, R)} \subseteq \Omega$, 则对任意多重指标 $\alpha \in \mathbb{N}^n$, 成立

$$|f^{(\alpha)}(z_0)| \leq \frac{\alpha!}{R^\alpha} \sup_{z \in \Gamma(z_0, R)} |f(z)|$$

证明. 与单复变函数的情形完全类似. 利用多元泰勒展开 (推论1.1.6) 即可. \square

推论 1.1.8. 设 $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$ 为连通开集, $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ 满足 $\forall 1 \leq k \leq n, \frac{\partial f}{\partial z_k}$ 在 Ω 上恒为 0, 则 f 在 Ω 上为常值函数。

推论 1.1.9. (刘维尔定理) 设 $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^n)$, 并且满足

$$|f(z)| \leq A(1 + |z|)^B$$

其中 A, B 为正实数, 那么 f 必为次数不超过 B 的多项式函数。

这些性质于单变量全纯函数雷同, 证明也是类似的。

推论 1.1.10. (*Montel* 定理)

设 Ω 为 \mathbb{C}^n 的开子集, 则 $\mathcal{O}(\Omega)$ 中的任何局部一致有界的全纯函数列都存在一致收敛的子列。

证明. 仍类似于单复变全纯函数的情形. 使用柯西积分公式, 再配合 Arzela-Ascoli 定理即可. 从略. \square

现在, 简单介绍一些复的微分形式. 对于 \mathbb{C}^n , 记其复坐标为 (z_1, z_2, \dots, z_n) ; 视 \mathbb{C}^n 为 $2n$ 维实线性空间,

$$z_k = x_k + iy_k$$

从而引入

$$dz_k = dx_k + idy_k \quad (1,0)\text{形式}$$

$$d\bar{z}_k = dx_k - idy_k \quad (0,1)\text{形式}$$

定义 1.1.11. ((p, q) -形式)

设 Ω 为 \mathbb{C}^n 的非空开集, 则形如

$$u(z) = \sum_{\substack{|I|=p \\ |J|=q}} a_{IJ}(z) dz_I \wedge d\bar{z}_J$$

的光滑张量场称为 (p, q) -形式. 记 Ω 上的 (p, q) -形式之全体为 $C_{p,q}^\infty(\Omega)$.

这里的 I, J 为多重指标。“光滑”指的是系数函数 a_{IJ} 为 Ω 上的光滑复值函数。另外，显然 $(0,0)$ -形式即为光滑函数； $C_{p,q}^\infty(\Omega)$ 具有显然的复线性空间结构，事实上还是 $C^\infty(\Omega)$ -模。

记号 1.1.12. ($\bar{\partial}$ -算子) 定义算子

$$\bar{\partial} : C_{p,q}^\infty(\Omega) \rightarrow C_{p,q+1}^\infty(\Omega)$$

如下: 对于 (p,q) -形式

$$u := \sum_{\substack{|I|=p \\ |J|=q}} a_{IJ} dz_I \wedge d\bar{z}_J$$

则

$$\bar{\partial}u = \sum_{\substack{|I|=p \\ |J|=q}} \sum_{k=1}^n \frac{\partial a_{IJ}}{\partial \bar{z}_k} d\bar{z}_k \wedge dz_I \wedge d\bar{z}_J$$

类似地，也有

$$\partial : C_{p,q}^\infty(\Omega) \rightarrow C_{p+1,q}^\infty(\Omega)$$

它们与外微分算子 d 满足关系

$$d = \partial + \bar{\partial}$$

由 $d^2 = 0$ ，易知

$$\partial^2 = 0, \quad \bar{\partial}^2 = 0, \quad \partial\bar{\partial} + \bar{\partial}\partial = 0$$

以下事实显然成立：

引理 1.1.13. 对于区域 Ω 上的光滑函数 $f \in C^\infty(\Omega)$ ，则 f 全纯当且仅当 $\bar{\partial}f = 0$ 。

注记 1.1.14. (*Dolbeault* 上同调) 对于 $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$ ，注意 $\bar{\partial}^2 = 0$ ，从而对任意 $p \geq 0$ ，有上链复形 $C_{p,\bullet}^\infty(\Omega)$ ：

$$\cdots \rightarrow C_{p,q-1}^\infty(\Omega) \xrightarrow{\bar{\partial}} C_{p,q}^\infty(\Omega) \xrightarrow{\bar{\partial}} C_{p,q+1}^\infty(\Omega) \rightarrow \cdots$$

称上同调群

$$H^{p,q}(\Omega) := H^q(C_{p,\bullet}^\infty(\Omega), \bar{\partial})$$

为区域 Ω 的 *Dolbeault* 上同调群。

类似于外微分 d 的 de-Rham 上同调群，*Dolbeault* 上同调群与 Ω 的拓扑联系密切。例如，以下定理十分重要，我们先陈述，以后再证明：

引理 1.1.15. (*Dolbeault-Grothendieck 引理*)

设 $\mathbb{D} \subseteq \mathbb{C}^n$ 为多圆柱, 则对于任意 $p, q \geq 0$,

$$H^{p,q}(\mathbb{D}) = 0$$

不难发现它与 de Rham 上同调的 Poincare 引理有些类似。

1.2 解析延拓与 Hartogs 现象

上一节介绍了多复变函数的一些“普通的”(与单变量类似)性质, 本节开始介绍多复变函数的一些独特性质。

引理 1.2.1. 设 $f \in C_c^\infty(\mathbb{C})$ 为复平面上的紧支光滑函数, 则对任意 $z \in \mathbb{C}$, 成立

$$\frac{1}{2\pi i} \iint_{\mathbb{C}} \frac{\partial f / \partial \bar{\tau}}{\tau - z} d\tau \wedge d\bar{\tau} = f(z)$$

证明. 基本的微积分练习。考虑换元 $\tau = z + re^{i\theta}$, 则易知

$$\begin{aligned} d\tau \wedge d\bar{\tau} &= -2ir dr \wedge d\theta \\ \frac{\partial r}{\partial \bar{\tau}} &= \frac{1}{2} e^{i\theta} \\ \frac{\partial \theta}{\partial \bar{\tau}} &= -\frac{1}{2ir} e^{i\theta} \end{aligned}$$

因此有

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \iint_{\mathbb{C}} \frac{\partial f / \partial \bar{\tau}}{\tau - z} d\tau \wedge d\bar{\tau} &= \frac{-1}{2\pi} \int_0^\infty dr \int_0^{2\pi} \left(-\frac{1}{ir} \frac{\partial f}{\partial \theta}(z + re^{i\theta}) \right) d\theta \\ &\quad + \frac{-1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\infty \left(\frac{\partial f}{\partial r}(z + re^{i\theta}) \right) dr \\ &= 0 + \frac{-1}{2\pi} \int_0^{2\pi} -f(z) d\theta \\ &= f(z) \end{aligned}$$

证毕。 □

引理 1.2.2. (简单版本的 $\bar{\partial}$ -引理)

设 $n \geq 2$, $\varphi \in C_{0,1}^\infty(\mathbb{C}^n)$ 为具有紧支集的光滑 $(0,1)$ -形式, 且 $\bar{\partial}\varphi = 0$, 则存在 \mathbb{C}^n 上的紧支光滑函数 g , 使得

$$\bar{\partial}g = \varphi$$

证明. 记光滑 $(0,1)$ -形式 φ 为

$$\varphi = \sum_{k=1}^n \varphi_k(z_1, \dots, z_n) d\bar{z}_k$$

则

$$\bar{\partial}\varphi = \sum_{k,l} \frac{\partial \varphi_k}{\partial \bar{z}_l} d\bar{z}_l \wedge d\bar{z}_k = \sum_{1 \leq l < k \leq n} \left(\frac{\partial \varphi_k}{\partial \bar{z}_l} - \frac{\partial \varphi_l}{\partial \bar{z}_k} \right) d\bar{z}_l \wedge d\bar{z}_k$$

从而由 $\bar{\partial}\varphi = 0$ 可得对任意 $k \neq l$,

$$\frac{\partial \varphi_k}{\partial \bar{z}_l} = \frac{\partial \varphi_l}{\partial \bar{z}_k}$$

考虑如下的 \mathbb{C}^n 上的函数 ψ : 对于 $z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$,

$$\psi(z) := \frac{1}{2\pi i} \iint_{\mathbb{C}} \frac{\varphi_1(\tau; z_2, \dots, z_n)}{\tau - z_1} d\tau \wedge d\bar{\tau}$$

由 φ_1 的紧支性易知 ψ 为 \mathbb{C}^n 上的光滑函数。对于 $1 < k \leq n$, 有

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi(z)}{\partial \bar{z}_k} &= \frac{1}{2\pi i} \iint_{\mathbb{C}} \frac{\frac{\partial \varphi_1}{\partial \bar{z}_k}(\tau; z_2, \dots, z_n)}{\tau - z_1} d\tau \wedge d\bar{\tau} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \iint_{\mathbb{C}} \frac{\frac{\partial \varphi_k}{\partial \bar{\tau}}(\tau; z_2, \dots, z_n)}{\tau - z_1} d\tau \wedge d\bar{\tau} \\ &= \varphi_k(z) \end{aligned}$$

上式对 $k = 1$ 显然也成立。因此 $\bar{\partial}\psi = \varphi$.

最后还需要证明 ψ 是紧支的。由于 φ 紧支, 存在足够大的 $R > 0$, 使得

$$\text{supp } \varphi \subseteq \mathbb{D}(0, R)$$

因此任意取定 $z \in \mathbb{C}^n$, 使得 z 的分量 z_2, z_3, \dots, z_n 之中至少有一个模长大于 R , 则由 ψ 的定义式直接得到 $\psi(z) = 0$. (注意: 这一步严重依赖 $n \geq 2$!) 也就是说, 存在 $z \notin \mathbb{D}(0, R)$ 使得 $\psi = 0$ 在 z 的某邻域内都成立。另一方面, 由于 $\bar{\partial}\psi = \varphi$ 且 $\text{supp } \varphi \subseteq \mathbb{D}(0, R)$, 从而 ψ 在 $\mathbb{D}(0, R)$ 外部全纯, 因此由解析延拓唯一性, ψ 在 $\mathbb{D}(0, R)$ 外部恒为零, 因此 ψ 紧支。□

此引理在单复变 $n = 1$ 的情形不成立:

例子 1.2.3. 设 $\varphi_1 \in C_0^\infty(\mathbb{C})$ 为复平面上的紧支光滑函数, 并且

$$\iint_{\mathbb{C}} \varphi_1(z) \neq 0$$

考虑 \mathbb{C} 上的 $(0,1)$ -形式 $\varphi = \varphi_1(z)d\bar{z}$, 则 $\bar{\partial}\varphi = 0$ 是平凡的, 但不存在紧支光滑函数 ψ 使得 $\bar{\partial}\psi = \varphi$.

证明. 若存在紧支光滑函数 ψ 使得 $\bar{\partial}\psi = \varphi$, 则 $\frac{\partial\psi}{\partial\bar{z}} = \varphi_1$. 于是

$$0 \neq \iint_{\mathbb{C}} \varphi_1(z)dz \wedge d\bar{z} = \iint_{\mathbb{C}} \frac{\partial\psi}{\partial\bar{z}} dz \wedge d\bar{z} = 0$$

产生矛盾。 □

以下是多复变函数解析延拓的令人惊讶的性质, 它与单复变函数有本质不同:

定理 1.2.4. (*Hartogs 现象*)

设 $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$ 为开集 ($n \geq 2$), $K \subset\subset \Omega$ 且为 \mathbb{C}^n 的紧子集, 则对任意的 $f \in \mathcal{O}(\Omega \setminus K)$, 都存在解析延拓 $F \in \mathcal{O}(\Omega)$, 使得

$$F|_{\Omega \setminus K} = f$$

证明. 取 K 与 Ω 直接的截断函数 $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{C}^n)$, 使得 $0 \leq \psi \leq 1$,

$$K \subset\subset \text{supp } \psi \subset\subset \Omega$$

并且 $\psi|_K \equiv 1$. 考虑

$$\tilde{f} := (1 - \psi)f$$

则 \tilde{f} 在整个 Ω 上都有定义。注意

$$\bar{\partial}\tilde{f} = -(\bar{\partial}\psi)f + (1 - \psi)\bar{\partial}f$$

易知 $\text{supp } \bar{\partial}\tilde{f} \subseteq \text{supp } \psi$. 于是由引理1.2.2, 存在光滑函数 v , 使得 $\text{supp } v \subseteq \text{supp } \psi$, 并且 $\bar{\partial}v = \bar{\partial}\tilde{f}$, 从而考虑函数

$$F := (1 - \psi)f - v$$

则 $\bar{\partial}F = 0$, 从而 $F \in \mathcal{O}(\Omega)$. 又因为易知

$$F = f \quad (\forall z \in \Omega \setminus \text{supp } \psi)$$

从而由解析延拓唯一性, 有 $F|_{\Omega \setminus K} = f$. □

关于解析延拓, 再介绍如下结果:

引理 1.2.5. (*Hartogs figure*)

对于 $n > 1$, 正实数 $0 \leq r < R$, 以及 \mathbb{C}^{n-1} 的开子集 $\omega' \subseteq \omega$, 其中 ω 是连通的。记 \mathbb{C}^n 的开子集

$$\Omega := ((\mathbb{D}(0, R) \setminus \mathbb{D}(0, r)) \times \omega) \cup (\mathbb{D}(0, R) \times \omega')$$

其中 $\mathbb{D}(0, r)$ 与 $\mathbb{D}(0, R)$ 分别为 \mathbb{C} 上的以原点为中心, r, R 为半径的开圆盘。则任意 $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ 都可以 (唯一地) 解析延拓至

$$\tilde{\Omega} := \mathbb{D}(0, R) \times \omega$$

如此的区域 Ω 称之为 “**Hartogs figure**”。 Ω 的几何图像大致如下:

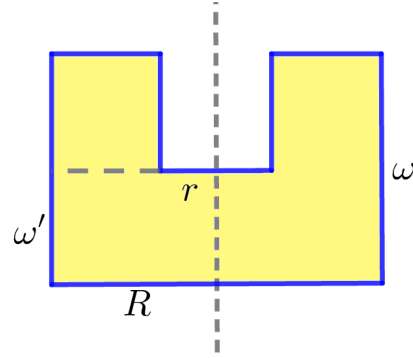


图: Hartogs figure 示意

证明. 容易知道

$$\Omega = \{(z_1, \tilde{z}) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^{n-1} \mid r < |z_1| < R, \tilde{z} \in \omega \text{ 或者 } |z_1| \leq r, \tilde{z} \in \omega'\}$$

对于 $f \in \mathcal{O}(\Omega)$, 定义 $\tilde{\Omega}$ 上的函数

$$\tilde{f}(z_1, \tilde{z}) := \frac{1}{2\pi i} \int_{|w|=\rho} \frac{f(w, \tilde{z})}{z_1 - w} dw$$

其中 ρ 为满足 $\max\{r, |z_1|\} < \rho < R$ 的任意实数。则易知如此定义的 \tilde{f} 为 f 在 $\tilde{\Omega}$ 上的解析延拓。 □

定理 1.2.6. (*Riemann 延拓定理*)

考虑 \mathbb{C}^n 中的多圆柱 $\mathbb{D}(0, R)$, 其中 $n \geq 2$, $R \in \mathbb{R}_+^n$. 对任意 $2 \leq p \leq n$, 令 \mathbb{C}^n 的子集

$$S := (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n \mid z_1 = \dots = z_p = 0$$

则对任意 $f \in \mathcal{O}(\mathbb{D}(0, R) \setminus S)$, f 都可 (唯一地) 解析延拓至 $\mathbb{D}(0, R)$.

证明. 这是 Hartogs figure 的显然推论. 记 $R = (R_1, R_2, \dots, R_n)$, 以及 $R' := (R_2, \dots, R_n) \in \mathbb{R}^{n-1}$. 考虑 \mathbb{C}^{n-1} 的开子集

$$\begin{aligned}\omega &:= \mathbb{D}(0, R') \\ \omega' &:= \omega \setminus \{z_2 = \dots = z_p = 0\}\end{aligned}$$

则易知

$$\mathbb{D}(0, R) \setminus S = \left(\mathbb{D}(0, R_1) \setminus \{0\} \times \omega \right) \cup \left(\mathbb{D}(0, R_1) \times \omega' \right)$$

为 Hartogs figure, 从而完。 □

1.3 Weierstrass 预备定理与除法定理

回顾单复变函数, 若 f 在 $0 \in \mathbb{C}$ 附近全纯, 且 $f(0) = 0$, 则在 0 附近 f 可以唯一地分解为 $f = z^d g(z)$, 其中 g 全纯且 $g(0) \neq 0$, d 为 f 在 0 处的零点阶数。

现在, 设 $f = f(z, w)$ 在 $0 \in \mathbb{C}^n (n \geq 2)$ 附近全纯, 其中 $z \in \mathbb{C}$, $w \in \mathbb{C}^{n-1}$. 固定 w , 记

$$f_w(z) := f(z, w)$$

为关于 z 的单复变函数。如果 $f_0(0) = 0$ 且 $f_0(z)$ 不恒为零, 则 $f_0(z) = z^d g_0(z)$ 。我们的一个结果是, 若 “ f_0 ” 的下标 “0” 稍微 “扰动” 一下, 则相应的多项式 z^k 也 “随之扰动”。

记号 1.3.1. (*Weierstrass* 多项式)

对于 $(z_0, w_0) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^{n-1}$, 则 (z_0, w_0) 处的 **Weierstrass 多项式** 是指形如下述的定义于 (z_0, w_0) 附近的 n 元全纯函数:

$$P(z, w) = z^k + a_1(w)z^{k-1} + \dots + a_k(w)$$

其中 $a_i (1 \leq i \leq k)$ 为定义在 $w_0 \in \mathbb{C}^{n-1}$ 附近的全纯函数, 且 $a_i(w_0) = 0$.

关于多元全纯函数在其零点附近的行为, 首先有如下:

定理 1.3.2. (*Weierstrass* 预备定理)

设 $f(z, w)$ 为定义在 $(0, 0) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^{n-1}$ 附近的全纯函数, $f(0, 0) = 0$, 且 $f_w(z)$ 在 $z = 0$ 附近不恒为零, 则存在唯一的 $(0, 0)$ 处的 *Weierstrass* 多项式 $P(z, w)$, 使得

$$f(z, w) = P(z, w)h(z, w)$$

其中 $h(z, w)$ 在 $(0, 0)$ 附近全纯, 且 $h(0, 0) \neq 0$.

证明. 分若干步。

Step1 设 $f_0(z)$ 在 $z = 0 \in \mathbb{C}$ 处的零点阶数为 $d \geq 1$, 取足够小的 $\varepsilon > 0$ 使得 $f_0(z)$ 在 $|z| \leq \varepsilon$ 之中不再有 $z = 0$ 之外的零点。再由 f 的连续性以及 $\{|z| = \varepsilon\} \subseteq \mathbb{C}$ 的紧性, 存在足够小的 $\varepsilon' > 0$, 使得对任意 $|z| = \varepsilon, |w| < \varepsilon'$, $f_w(z) \neq 0$.

对于 $w \in \mathbb{C}^{n-1}$ 且 $|w| < \varepsilon'$, 由辐角原理, $f_w(z)$ 在 $|z| < \varepsilon$ 内的零点个数 (记重数) 为

$$d(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=\varepsilon} \frac{f'_w(\zeta)}{f_w(\zeta)} d\zeta$$

这是关于 w 的连续函数, 且 $d(0) = d$. 从而不妨缩小 ε' , 使得任意 $|w| < \varepsilon'$, $f_w(z)$ 在 $|z| < \varepsilon$ 内的零点个数 (计重数) 均为 d .

Step2 对于 $w \in \mathbb{C}^{n-1}$ 且 $|w| < \varepsilon'$, 记 $f_w(z)$ 的 d 个零点为 $s_1(w), s_2(w), \dots, s_d(w)$, 它们允许相同, 则 $|s_j(w)| < \varepsilon$ (注意 $s_j(w)$ 未必为关于 w 的全纯函数)。特别地 $s_1(0) = s_2(0) = \dots = s_d(0) = 0$. 考虑多项式

$$\begin{aligned} P(z, w) &:= \prod_{j=1}^d (z - s_j(w)) \\ &= z^d + \sum_{j=1}^d a_j(w) z^{d-j} \end{aligned}$$

显然系数 $a_j(w)$ 满足 $a_j(0) = 0$. 断言 $P(z, w)$ 为 Weierstrass 多项式。为此只需证明 $s_j(w)$ 关于 w 全纯。由代数学可知, 系数 a_j 可以写为形如 $s_1^k(w) + s_2^k(w) + \dots + s_d^k(w)$ ($k \geq 0$) 的 \mathbb{C} -线性组合; 而由留数定理易知

$$\sum_{j=1}^d s_j^k(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=\varepsilon} \zeta^k \frac{f'_w(\zeta)}{f_w(\zeta)} d\zeta$$

从而关于 w 全纯。这就说明了 $P(z, w)$ 的系数函数 $a_j(w)$ 关于 w 全纯。

Step3 令 $h(z, w) := \frac{f(z, w)}{P(z, w)}$, 断言 h 在 $(0, 0)$ 附近全纯, 又因为显然 $h(0, 0) \neq 0$, 从而 Weierstrass 预备定理的存在性得证。由单复变易知 $h(z, w)$ 关于 z 全纯, 于是只需证明 h 关于 w 全纯。

任取 $w \in \mathbb{C}^{n-1}$ 且 $|w| < \varepsilon'$, 由于 $h_w(z) := h(z, w)$ 关于 z 全纯, 从而

$$h(z, w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=\varepsilon} \frac{h_w(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

而被积函数 $(\zeta, w) \mapsto \frac{h_w(\zeta)}{\zeta - z}$ 在 $\{(z, w) \mid |z| = \varepsilon, |w| < \varepsilon'\}$ 的某个邻域全纯, 从而 $h(z, w)$ 关于 w 也全纯。存在性证毕。

Step4 唯一性几乎显然, 因为 f (在 $(0, 0)$ 附近) 的零点完全由 Weierstrass 多项式贡献: 对于 w , 以 $s_1(w), \dots, s_d(w)$ 为零点的关于 z 的首一多项式只能是 $P(z, w)$. \square

定理 1.3.3. (Weierstrass 除法定理)

设 $f(z, w)$ 为定义在 $(0, 0) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^{n-1}$ 附近的全纯函数, $g(z, w) = z^d + \sum_{j=1}^d a_j(w)z^{d-j}$ 为次数为 d 的 Weierstrass 多项式。那么存在唯一的 $h(z, w)$ 与 $r(z, w)$, 其中 h 为定义在 $(0, 0) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^{n-1}$ 附近的全纯函数, r 为关于 z 的在 $(0, 0)$ 处的次数 $< d$ 的多项式, 使得

$$f = gh + r$$

在 $(0, 0)$ 附近成立。

证明. 先看唯一性。

Step1 唯一性是容易的。如果 $f = gh_1 + r_1 = gh_2 + r_2$, 则

$$r_1 - r_2 = g(h_2 - h_1)$$

注意 g, r_1, r_2 为 Weierstrass 多项式, 从而由之前讨论, 存在足够小的 $\varepsilon, \varepsilon' > 0$ 使得对任意 $w \in \mathbb{C}^{n-1}$ 且 $|w| < \varepsilon'$, $g_w(z)$ 在 $\{|z| < \varepsilon\}$ 内的零点个数 (计重数) 恰为 g 的次数 d , 并且 $(r_1 - r_2)_w(z)$ 在此范围内的零点个数 (计重数) 恰为 $(r_1 - r_2)$ 的次数。注意 r_1, r_2 的次数均小于 d , 从而若 $r_1 \neq r_2$, 则导致 $(r_1 - r_2)_w(z)$ 的零点个数小于 $g_w(z)(h_2 - h_1)_w(z)$, 因此导致矛盾。这迫使 $r_1 = r_2$ 。

Step2 再看存在性。取 $\varepsilon, \varepsilon' > 0$ 使得对任意 $|z| = \varepsilon$, $|w| \leq \varepsilon'$, $g_w(z) \neq 0$ 。对任意 $|z| < \varepsilon, |w| < \varepsilon'$, 定义

$$h(z, w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi|=\varepsilon} \frac{f_w(\xi)}{g_w(\xi)(\xi - z)} d\xi$$

则易知 $h(z, w)$ 在 $(0, 0)$ 附近全纯。再令 $r := f - gh$, 只需证明 r 为关于 z 的次数小于 d 的 Weierstrass 多项式即可。事实上,

$$\begin{aligned} r(z, w) &= f(z, w) - g(z, w)h(z, w) \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi|=\varepsilon} \frac{f_w(\xi)}{\xi - z} d\xi - \frac{g_w(z)}{2\pi i} \int_{|\xi|=\varepsilon} \frac{f_w(\xi)}{g_w(\xi)(\xi - z)} d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi|=\varepsilon} \frac{f_w(\xi)(g_w(\xi) - g_w(z))}{g_w(\xi)(\xi - z)} d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi|=\varepsilon} \frac{f_w(\xi)}{g_w(\xi)} \frac{(\xi^d - z^d) + a_1(w)(\xi^{d-1} - z^{d-1}) + \dots}{\xi - z} d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi|=\varepsilon} \frac{f_w(\xi)}{g_w(\xi)} (z^{d-1} + \beta_1(\xi, w)z^{d-2} + \dots) d\xi \end{aligned}$$

其中函数 $\beta_j(\xi, w)$ 由 g 的系数函数 $a_k(w)$ 决定。容易看出 $r(z, w)$ 的确为关于 z 的次数 $\leq d-1$ 的多项式。存在性证毕。 \square

注意 r 未必是 Weierstrass 多项式, 因为 $r(z, w)$ 的 z^{d-1} 的系数

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi|=\epsilon} \frac{f_w(\xi)}{g_w(\xi)} d\xi$$

不见得是 1 (若此积分为 0, 则 r 的首项系数甚至可以是关于 w 的函数)。

注记 1.3.4. 事实上, Weierstrass 除法定理对单复变 $n = 1$ 的情形也成立。设 $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ 在 $0 \in \mathbb{C}$ 附近全纯, $g(z) = z^d$ 为次数为 d 的 Weierstrass 多项式。则令

$$\begin{aligned} h(z) &= \sum_{k=d}^{\infty} a_k z^{k-d} \\ r(z) &= \sum_{k=0}^{d-1} a_k z^k \end{aligned}$$

则 $f = gh + r$ 满足要求。

1.4 解析函数芽环 $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n, z}$ 及其代数结构

本节继续研究多元解析函数的性质。首先回顾函数芽的概念。

定义 1.4.1. (解析函数芽环)

对于 $z \in \mathbb{C}^n$, 记

$$\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n, z} := \{(U, f) | U \text{ 是 } z \text{ 在 } \mathbb{C}^n \text{ 的一个开邻域, } f \text{ 为定义在 } U \text{ 上的全纯函数}\} / \sim$$

其中模掉的关系 \sim 为

$$(U, f) \sim (V, g) \iff \text{存在 } z \text{ 的开邻域 } W, \text{ 使得 } W \subseteq U \cap V, \text{ 且 } f|_W = g|_W$$

粗俗地说, $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n, z}$ 就是“定义在 $z \in \mathbb{C}^n$ 附近的全纯函数之全体”。之前介绍的 Weierstrass 预备定理、Weierstrass 除法定理其实都是解析函数芽环的性质。容易验证, $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n, z}$ 在通常的函数加法、乘法下构成环。

我们记 $\mathcal{O}_n := \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n, 0}$. 本节介绍环 \mathcal{O}_n 的代数性质。假定读者熟悉基础的交换代数。本讲义中的“环”默认为含么、交换的。

定理 1.4.2. \mathcal{O}_n 是局部诺特环 ($\forall n \geq 1$)。

回顾：环 A 称为**局部环** (local ring)，若 A 存在唯一极大理想 \mathfrak{m} （等价定义： A 的全体不可逆元构成 A 的理想）；环 A 称为**诺特环** (Noetherian ring)，若满足理想升链条件（等价定义： A 的每个理想都是有限生成的）。

证明. 显然 \mathcal{O}_n 为局部环，其极大理想 \mathfrak{m} 由定义在 0 附近、在 0 处取值为 0 的函数芽构成。我们对 n 归纳证明 \mathcal{O}_n 为诺特环。

$n = 1$ 时，在单复变中我们早已熟知 $\mathcal{O}_1 \cong \{\text{收敛半径} \geq 0 \text{ 的幂级数}\}$ 为主理想整环 (PID)，其理想形如 $J_k = (z^k)$ 。特别地，为诺特环。

一般地，对于 $n \geq 2$ ，若 \mathcal{O}_{n-1} 为诺特环，则对 \mathcal{O}_n 的任意非零理想 J ，断言 J 时有限生成的。任取 $0 \neq h \in J \subseteq \mathfrak{m}$ ，则 $h(0) = 0$ ，不妨 $h(z, 0)$ 不恒为零（其中 $z \in \mathbb{C}, 0 \in \mathbb{C}^{n-1}$ ），则由 Weierstrass 预备定理，存在 Weierstrass 多项式 $P(z, w) \in \mathcal{O}_{n-1}[z] \subseteq \mathcal{O}_n$ 以及函数芽 $h' \in \mathcal{O}_n \setminus \mathfrak{m}$ ，使得 $h(z, w) = P(z, w)h'(z, w)$ 。注意 $h'(0, 0)$ 为 \mathcal{O}_n 的可逆元，又 $h \in J$ 且 J 为 \mathcal{O}_n 的理想，从而 $P(z, w) \in J$ 。

这说明 J 当中必存在 Weierstrass 多项式。取定

$$P(z, w) = z^d + \sum_{j=1}^d a_j(w)z^{d-j} \in J$$

则对任意 $f \in J$ ，对 f, P 使用 Weierstrass 除法定理，存在 $g(z, w) \in \mathcal{O}_n$ ，以及

$$r(z, w) = \sum_{k=0}^{d-1} c_k(w)z^k \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}^{n-1}}[z]$$

为次数至多为 $(d-1)$ 的多项式，使得

$$f = gP + r$$

则 $r(z, w) \in J$ ，并且容易验证，这诱导了 \mathcal{O}_{n-1} -模同态

$$\begin{aligned} \varphi : J &\rightarrow \mathcal{O}_{n-1}^{\oplus d} \cong \{r \in \mathcal{O}_{n-1}[z] \mid \deg_z r < d\} \\ f &\mapsto \sum_{k=0}^{d-1} c_k(w)z^k \end{aligned}$$

由归纳假设， \mathcal{O}_{n-1} 为诺特环，从而 $\mathcal{O}_{n-1}^{\oplus d}$ 作为有限生成 \mathcal{O}_{n-1} -模为诺特模，从而其子模 $\text{Im } \varphi$ 也为有限生成的。注意 $\text{Im } \varphi \subseteq J$ ，记 $\{\beta_1, \dots, \beta_N\} \subseteq \text{Im } \varphi$ 为 $\text{Im } \varphi$ 的一组 \mathcal{O}_{n-1} -生成元，其中

$$\beta_j(w) = \sum_{l=0}^{d-1} \beta_{j,l}(w)z^l \in \mathcal{O}_{n-1}^{\oplus d}$$

则易知

$$\{\beta_j\}_{1 \leq j \leq N} \cup \{P(z, w)\}$$

为理想 J 的一组生成元，因此 J 是有限生成的。从而 \mathcal{O}_n 为诺特环。 \square

引理 1.4.3. 设 $P, Q \in \mathcal{O}_{n-1}[z] \subseteq \mathcal{O}_n$, 其中 P 为 Weierstrass 多项式, 则 P 整除 Q 在 \mathcal{O}_n 成立, 当且仅当 P 整除 Q 在 $\mathcal{O}_{n-1}[z]$ 中成立。

证明. “当”是显然的, 只证“仅当”。若 $P|Q$ 在 \mathcal{O}_n 中成立, 则令

$$Q(z, w) = f(z, w)P(z, w)$$

其中 $f \in \mathcal{O}_n$. 另一方面, 考虑 $\mathcal{O}_{n-1}[z]$ 中标准的欧几里得带余除法,

$$Q(z, w) = g(z, w)P(z, w) + r(z, w)$$

其中 $g, r \in \mathcal{O}_{n-1}[z]$. 则 Weierstrass 除法定理的唯一性迫使 $f = g, r = 0$, 从而得证。□

引理 1.4.4. 设 $P(z, w) \in \mathcal{O}_{n-1}[z]$ 为 Weierstrass 多项式, 则:

(1) 若在 $\mathcal{O}_{n-1}[z]$ 中有分解

$$P = P_1 P_2 \cdots P_N$$

则在相差 \mathcal{O}_{n-1} 中的可逆元的意义下, 每个 P_j 都为 Weierstrass 多项式;

(2) P 为 \mathcal{O}_n 中的不可约元当且仅当 P 为 $\mathcal{O}_{n-1}[z]$ 中的不可约元。

证明.

(1) 记 $\deg_z P = s$, 以及 $\deg_z P_j = s_j$, 则 $s = \sum_{j=1}^N s_j$. 不妨每个 $s_j > 0$. 考虑 P 的最高次项, 有

$$z^s = z^s \prod_{j=1}^N (P_j \text{ 的 } z^{s_j} \text{ 系数})$$

从而相差 \mathcal{O}_{n-1} 中某个可逆元倍, 不妨每个 P_j 的 z^{s_j} 系数都为 1. 再注意

$$z^s = P(0, z) = \prod_{j=1}^N P_j(0, z) = \prod_{j=1}^N (z^{s_j} + \cdots)$$

从而迫使 $P_j(0, z) = z^{s_j}$, 因此 P_j 为 Weierstrass 多项式。

(2) “仅当”是显然的, 只证“当”。仍记 $P(z, w)$ 关于 z 的次数为 s . 如果 P 在 \mathcal{O}_n 中可约, 令 $P = g_1 g_2$, 其中 g_1, g_2 为 \mathcal{O}_n 中的不可逆元, 从而关于 z 的函数 $g_1(z, 0), g_2(z, 0)$ 在 $z = 0$ 处的零点阶数大于 0, 分别记为 s_1, s_2 . 由 Weierstrass 预备定理, 存在分解

$$g_j(z, w) = P_j(z, w)u_j(z, w) \quad (j = 1, 2)$$

使得 $P_j \in \mathcal{O}_{n-1}[z]$ 为次数为 s_j 的 Weierstrass 多项式, u_j 为 \mathcal{O}_n 中的可逆元. 所以在 \mathcal{O}_n 中成立 $(P_1 P_2)|P$; 再根据引理 1.4.3, 可知 $(P_1 P_2)|P$ 在 $\mathcal{O}_{n-1}[z]$ 中也成立. 而 P, P_1, P_2 都为首一多项式, 从而必有 $P = P_1 P_2$, 因此 P 在 \mathcal{O}_{n-1} 中可约。□

定理 1.4.5. \mathcal{O}_n 是唯一分解整环 (UFD).

证明. 对 n 归纳. $n = 1$ 时, \mathcal{O}_1 为主理想整环, 从而为唯一分解整环. 对于 $n \geq 2$, 如果 \mathcal{O}_{n-1} 为唯一分解整环, 则由代数学中的高斯引理, 多项式环 $\mathcal{O}_{n-1}[z]$ 也是唯一分解整环.

现在, 对于 \mathcal{O}_n 中的不可逆元 f , 不妨 $z \mapsto f(z, w)|_{w=0}$ 不恒为零 ($w \in \mathbb{C}^{n-1}$), 从而由 Weierstrass 预备定理, 存在分解 $f(z, w) = u(z, w)P(z, w)$, 其中 u 为 \mathcal{O}_n 中的可逆元, $P \in \mathcal{O}_{n-1}[z]$ 为 Weierstrass 多项式. 由归纳假设, $\mathcal{O}_{n-1}[z]$ 为唯一分解整环, 从而存在 P 在 $\mathcal{O}_{n-1}[z]$ 中的分解 $P = P_1 P_2 \cdots P_s$, 使得每个 P_j 都为 $\mathcal{O}_{n-1}[z]$ 中的不可约元. 从而由引理 1.4.4 的 (1), 不妨每个 P_j 都为 Weierstrass 多项式; 再对每个 P_j 使用引理 1.4.4 的 (2), 知 P_j 为 \mathcal{O}_n 中的不可约元. 从而 $f \in \mathcal{O}_n$ 的不可约分解的存在性证毕.

再看分解的唯一性. 只需再证明 \mathcal{O}_n 的不可约元都是素元. 若 f 为 \mathcal{O}_n 中的不可约元, 以及 $g, h \in \mathcal{O}_n$ 使得 $f|gh$, 断言 $f|g$ 或者 $f|h$. 由 Weierstrass 预备定理, 不妨假设 $f = f(z, w)$ 为关于第一个分量 z 的 Weierstrass 多项式, 从而由 $f|gh$ 知 $g(z, 0), h(z, 0)$ 也不恒为零, 于是由 Weierstrass 预备定理也不妨 $g, h \in \mathcal{O}_{n-1}[z]$ 为 Weierstrass 多项式. 因此 $f|gh$ 在 $\mathcal{O}_{n-1}[z]$ 中成立, 而由归纳假设 $\mathcal{O}_{n-1}[z]$ 是唯一分解整环, 且 f 在 $\mathcal{O}_{n-1}[z]$ 不可约, 所以 $f|g$ 或者 $f|h$ 在 $\mathcal{O}_{n-1}[z]$ 中成立, 从而在 \mathcal{O}_n 中成立. 证毕. \square

1.5 解析集与局部解析零点定理

多复变函数与单复变的一个显著区别是解析延拓的难易程度, Hartogs 现象表明多复变函数“更容易被解析延拓”; 而单复变与多复变函数另一个区别是零点集的形态: 在单复变中我们熟知全纯函数零点离散 (除非函数恒为零), 这在多复变中显然不对, 例如 \mathbb{C}^2 上的全纯函数 $f(z_1, z_2) = z_1$.

事实上, 多元全纯函数的零点集十分重要, 而且是代数几何学中的某些概念 (代数簇) 的源头.

定义 1.5.1. (解析集)

设 $n \geq 2$, \mathbb{C}^n 的子集 A 称为**解析集** (analytic set), 若对任意 $z \in A$, 存在 z 在 \mathbb{C}^n 中的开邻域 Ω , 以及 $f_1, f_2, \dots, f_N \in \mathcal{O}(\Omega)$, 使得

$$A \cap \Omega = \{w \in \Omega | f_1(w) = f_2(w) = \cdots = f_N(w)\}$$

也就是说, “局部上看是若干全纯函数的公共零点集”. 对于一个解析集, 我们首先局部地研究之——类似于解析函数芽环, 我们引入如下概念:

定义 1.5.2. (解析集芽) 对于 $x \in \mathbb{C}^n$, 定义

$$\mathcal{A}_x := \{(A, x) | x \in A, A \text{ 是 } \mathbb{C}^n \text{ 中的解析集}\} / \sim$$

其中关系 \sim 为: $(A_1, x) \sim (A_2, x) \iff$ 存在 x 在 \mathbb{C}^n 中的开邻域 Ω , 使得 $A_1 \cap \Omega = A_2 \cap \Omega$. 称 \mathcal{A}_x 中的元素为 x 处的解析集芽。

\mathcal{A}_x 中的元素可以认为是包含 x 的“无穷小解析集”。容易知道它与解析函数芽的关系: 任意 $(A, x) \in \mathcal{A}_x$, (A, x) 为 $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n, x}$ 中某些函数的公共零点集。

定义 1.5.3. 对于 $x \in \mathbb{C}^n$,

(1) 对与 x 处的解析集芽 $(A, x) \in \mathcal{A}_x$, 定义 $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n, x}$ 的理想

$$J_{(A, x)} := \{f \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n, x} | f(z) = 0 \forall z \in A\}$$

(2) 对于 $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n, x}$ 中的理想 J , 定义 x 处的解析集芽

$$(V(J), x) := \{z \in \mathbb{C}^n | g(z) \equiv 0, \forall g \in J\} \text{ 的等价类}$$

这里并未仔细写清楚, 需要验证良定性: 注意解析集芽、函数芽实际上都为等价类, 我们需要验证与代表元选取无关, 留给读者。

注意 $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n, x}$ 为诺特环, 从而任何理想 J 都是有限生成的, 记 $\{g_1, g_2, \dots, g_N\}$ 为其一组生成元, 则易知

$$V(J) = \{g_1(x) = g_2(x) = \dots = g_N(x) = 0\}$$

在 x 附近为有限个解析函数的公共零点集, 从而的确为解析集 (芽)。

引理 1.5.4. 设 $x \in \mathbb{C}^n$, $(A, x) \in \mathcal{A}_x$ 为 x 处的解析集芽, $J \subseteq \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n, x}$ 为理想, 则

$$\begin{aligned} J &\subseteq J_{(V(J), x)} \\ (V(J_{(A, x)}), x) &= (A, x) \end{aligned}$$

证明. 直接按定义验证即可。第一式是容易的; 至于第二式, 由解析集的定义, (A, x) 必形如

$$\{g_1(x) = g_2(x) = \dots = g_N(x) = 0\}$$

其中 $g_j \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n, x}$, 从而 $J_{(A, x)} = (g_1, \dots, g_N)$, 之后容易。 □

注记 1.5.5. 不过要注意, 第一式的等号未必成立, 例如对于 $0 \in \mathbb{C}^2$, $f(z_1, z_2) = z_1^2$, 令 $J := (f) \subseteq \mathcal{O}_{\mathbb{C}^2, 0}$ 为由 f 生成的理想, 则 $V(J) = \{z_1^2 = 0\} = \{z_1 = 0\}$, 于是 $J_{(V(J), 0)} = (z_1)$, 即为由 $\tilde{f}(z_1, z_2) = z_1$ 生成的理想。很明显, $J \subsetneq J_{(V(J), 0)}$.

对于 $x \in \mathbb{C}^n$, 则 \mathcal{A}_x 中的解析集芽可以进行交、并运算:

引理 1.5.6. 对于 $x \in \mathbb{C}^n$, $\{J_\alpha | \alpha \in \mathcal{I}\}$ 为 $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n, x}$ 的一族理想, 则对任意 $\alpha, \beta \in \mathcal{I}$,

$$(V(J_\alpha) \cup V(J_\beta), x) = (V(J_\alpha J_\beta), x)$$

$$\left(\bigcap_{\alpha \in \mathcal{I}} V(J_\alpha), x\right) = \left(V\left(\sum_{\gamma \in \mathcal{I}} J_\gamma\right), x\right)$$

自行补全解析集芽交、并的定义（无非是取代表元作交、并）

证明. 直接定义验证。 □

此引理表明, 一点处的解析集芽可以“有限并, 任意交”, 与拓扑学中的“闭集”类似。接下来研究解析集芽的局部结构。

定义 1.5.7. (不可约解析集芽)

对于 $x \in \mathbb{C}^n$, 以及 $(A, x) \in \mathcal{A}_x$, 称解析集芽 (A, x) 是不可约 (irreducible) 的, 若不存在 $(A_1, x), (A_2, x) \in \mathcal{A}_x$, 使得 $(A, x) = (A_1 \cup A_2, x)$, 且 $(A_i, x) \subsetneq (A, x), i = 1, 2$.

由引理1.5.6, 以及基本的交换代数, 容易知道: 解析集芽 (A, x) 不可约, 当且仅当 $J_{(A, x)}$ 为 $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n, x}$ 的素理想。此外, 解析函数芽环的诺特性等价于如下:

引理 1.5.8. 对于 $x \in \mathbb{C}^n$, 以及 $(A_k, x) \in \mathcal{A}_x, k \geq 1$, 若 $(A_k, x) \supseteq (A_{k+1}, x)$ 对任意 $k \geq 1$ 都成立 (即 $\{A_k\}_{k=1}^\infty$ 为解析集芽降链), 则存在 $k_0 \geq 1$, 使得对任意 $l \geq k_0$, 都有 $(A_k, x) = (A_l, x)$.

证明. 考察理想 $J_{(A_k, x)} \subseteq \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n, x}$, 则 $(A_k, x) \supseteq (A_{k+1}, x)$ 表明

$$J_{(A_k, x)} \subseteq J_{(A_{k+1}, x)}$$

即 $\{J_{(A_k, x)}\}_{k=1}^\infty$ 为理想升链, 从而由 $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n, x}$ 的诺特性, 以及引理1.5.4, 得证。 □

定理 1.5.9. (解析集芽的不可约分解)

给定 $x \in \mathbb{C}^n$, 则对任意 $(A, x) \in \mathcal{A}_x$, 存在 $N \geq 1$, 以及对任意 $1 \leq k \leq N$ 存在 $(A_k, x) \in \mathcal{A}_x$ 为不可约解析集芽, 使得这些解析集芽互不包含, 并满足

$$(A, x) = \bigcup_{k=1}^N (A_k, x)$$

并且上述分解是唯一的 (不计次序)。

证明. 存在性: 先断言, 若 (A, x) 可约, 则存在分解 $(A, x) = (A^{(1)}, x) \cup (A^{(2)}, x)$, 其中 $(A^{(1)}, x)$ 与 $(A^{(2)}, x)$ 都为 (A, x) 的真子芽, 并且 $(A^{(1)}, x)$ 不可约。

这是因为, 由 (A, x) 可约, 取真子芽 $(A_1, x), (A'_1, x)$ 使得 $(A, x) = (A_1, x) \cup (A'_1, x)$ (但至此无法保证 A_1, A_2 至少有一个不可约)。如果 (A_1, x) 不可约, 则继续对其分解: $(A_1, x) = (A_2, x) \cup (A'_2, x)$, 然后再考察 (A_2, x) 的可约性, 不断做下去, 总会得到不可约的 (A_k, x) ; 若不然就有解析集芽降链

$$(A_1, x) \supsetneq (A_2, x) \supsetneq (A_3, x) \supsetneq \cdots$$

与引理1.5.8矛盾。因此必存在 $k > 0$, 使得 (A_k, x) 不可约, 此时

$$(A, x) = (A_k, x) \cup \left(\bigcup_{j=1}^k (A'_j, x) \right)$$

为所希望的分解, 断言证毕。

反复使用此断言: 令 $(A, x) = (A^{(1)}, x) \cup (B_1, x)$, 其中 $(A^{(1)}, x)$ 不可约, 若 (B_1, x) 可约, 则再对 (B_1, x) 使用此断言: $(B_1, x) = (A^{(2)}, x) \cup (B_2, x)$, 其中 $(A^{(2)}, x)$ 不可约; 若 (B_2, x) 可约, 则再继续对 (B_2, x) 使用断言……该操作必在有限步停止, 停止于某个 $(B_{\tilde{N}}, x)$ 不可约, 否则就有解析集芽降链

$$(B_1, x) \supsetneq (B_2, x) \supsetneq (B_3, x) \cdots$$

与引理1.5.8矛盾。从而得到不可约分解

$$(A, x) = (B_{\tilde{N}}, x) \cup \left(\bigcup_{k=1}^{\tilde{N}} (A_k, x) \right)$$

之后适当取 $\{A_1, A_2, \dots, A_{\tilde{N}}; B_{\tilde{N}}\}$ 的子集使得其中元素之并仍是 (A, x) 并且其中元素互不包含。因此存在性证毕。

唯一性: 假设

$$(A, x) = \bigcup_{k=1}^N (A_k, x) = \bigcup_{k=1}^{N'} (A'_k, x)$$

都为 (A, x) 的满足题设的不可约分解, 则需要证明 $N = N'$, 并且有集合相等

$$\{A_1, A_2, \dots, A_N\} = \{A'_1, A'_2, \dots, A'_{N'}\}$$

对任意 A_i , 因为

$$(A_i, x) = \bigcup_{k=1}^{N'} (A_i \cap A'_k, x)$$

从而 (A_i, x) 的不可约性迫使存在某个 (A'_j, x) 使得 $(A_i, x) = (A_i \cap A'_j, x)$, 即 $(A_i, x) \subseteq (A'_j, x)$. 同理, 对于此 (A'_j, x) , 存在某个 $(A'_{i'}, x)$, 使得 $(A'_j, x) \subseteq (A'_{i'}, x)$, 因此

$$(A_i, x) \subseteq (A'_j, x) \subseteq (A'_{i'}, x)$$

但由于 $\{(A_k, x)\}_{k=1}^N$ 中任何两元素互不包含, 因此上式等号成立。也就是说对任意 $1 \leq j \leq N$, 存在 (唯一) $1 \leq j' \leq N'$, 使得 $(A_j, x) = (A'_{j'}, x)$; 同理对任意 $1 \leq j' \leq N'$ 也有类似结果。这就给出了集合一一对应

$$\{A_1, A_2, \dots, A_N\} \cong \{A'_1, A'_2, \dots, A'_{N'}\}$$

从而证毕。 □

注记 1.5.10. 此定理表明, 欲研究解析集芽的局部性态, 只需要研究不可约解析集芽; 一般的解析集芽无非是不可约解析集芽的有限并。

现在, 考虑 $\mathcal{O}_n := \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n, 0}$ 的素理想 \mathfrak{p} , 我们研究解析集芽 $(V(\mathfrak{p}), 0)$ 的性质。

记号 1.5.11. 给定 \mathbb{C}^n 的一组基 $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$, 关于此基的坐标函数记作 z_1, z_2, \dots, z_n , 对 $1 \leq k \leq n$, 记

$$\mathbb{C}\{z_1, \dots, z_k\} := \{f \in \mathcal{O}_n \mid \frac{\partial f}{\partial z_l} \equiv 0, \forall k+1 \leq l \leq n\}$$

为 \mathcal{O}_n 中“只显含前 k 个变量的函数芽”, 则明显有

$$\mathcal{O}_k \cong \mathbb{C}\{z_1, \dots, z_k\} \hookrightarrow \mathcal{O}_n$$

于是对于 \mathcal{O}_n 的素理想 \mathfrak{p} ,

$$\mathfrak{p}_k := \mathfrak{p} \cap \mathbb{C}\{z_1, \dots, z_k\}$$

为子环 $\mathcal{O}_k \cong \mathbb{C}\{z_1, \dots, z_k\}$ 的素理想。

引理 1.5.12. 对于环 \mathcal{O}_n 的素理想 \mathfrak{p} , 则存在 \mathbb{C}^n 的一组基 $\{f_1, f_2, \dots, f_n\}$, (记在该基下的坐标函数为 w_1, w_2, \dots, w_n) 以及存在 $0 \leq d \leq n$, 使得

$$\mathfrak{p}_d := \mathfrak{p} \cap \mathbb{C}\{w_1, w_2, \dots, w_d\} = 0$$

并且对任意 $d+1 \leq k \leq n$, \mathfrak{p}_k 当中存在 Weierstrass 多项式

$$P_k(\tilde{w}_k, w_k) = w_k^{s_k} + \sum_{j=1}^{s_k} a_{jk}(\tilde{w}_k) w_k^{s_k-j}$$

其中 $\tilde{w}_k := (w_1, w_2, \dots, w_{k-1}) \in \mathbb{C}^{k-1}$.

证明. 对 n 归纳, $n=1$ 时平凡.

Step1 对于 $n \geq 2$, 先给定 \mathbb{C}^n 的一组基 $\{e_1, \dots, e_n\}$ 并记坐标函数为 z_1, z_2, \dots, z_n , 如果 $\mathfrak{p} = \{0\}$, 则仍取这组基, 并取 $d=n$ 即可. 若 $\mathfrak{p} \neq 0$, 则任取 $0 \neq g_n \in \mathfrak{p}$, 注意 $g_n(0) = 0$; 取 \mathbb{C}^n 中的非零向量 f_n , 使得定义在 $0 \in \mathbb{C}$ 附近的函数

$$t \mapsto g_n(tf_n)$$

在 $t=0$ 处的零点阶数最低, 记为 s_n . 注意满足如此性质的向量 f_n 在 \mathbb{C}^n 中是稠密的 (只需要使得 g_n 沿 f_n 方向的 s_n 阶方向导数非零), 从而不妨取 f_n 充分接近基向量 e_n , 使得 $\{e_1, e_2, \dots, e_{n-1}; f_n\}$ 仍是 \mathbb{C}^n 的一组基.

Step2 现在考虑基 $\{e_1, e_2, \dots, e_{n-1}; f_n\}$, 该基下的坐标记为 z'_1, z'_2, \dots, z'_n , 则由 Weierstrass 预备定理, 注意 $z'_n = 0$ 是函数 $z'_n \mapsto g_n(0, z'_n)$ 的 s_n 阶零点, 则由 Weierstrass 预备定理, 存在 Weierstrass 多项式

$$P_n(\tilde{z}'_n, z'_n) = (z'_n)^{s_n} + \sum_{j=1}^{s_n} a_{jn}(\tilde{z}'_n) (z'_n)^{s_n-j}$$

以及 $h \in \mathcal{O}_n$ 使得 $h(0) \neq 0$, 以及 $g_n = P_n h$. (其中 $\tilde{z}'_n = (z'_1, \dots, z'_{n-1}) \in \mathbb{C}^{n-1}$) 由于 h 在 \mathcal{O}_n 中可逆, 所以 Weierstrass 多项式 $P_n \in \mathfrak{p} = \mathfrak{p}_n$.

Step3 如果 $\mathfrak{p}_{n-1} := \mathfrak{p} \cap \mathbb{C}\{z'_1, z'_2, \dots, z'_{n-1}\} = 0$, 则取 \mathbb{C}^n 的基 $\{e_1, \dots, e_{n-1}; f_n\}$, 以及 $d = n-1$ 即可. 如果 $\mathfrak{p}_{n-1} \neq 0$, 则 \mathfrak{p}_{n-1} 为子环 $\mathcal{O}_{n-1} \cong \mathbb{C}\{z'_1, \dots, z'_{n-1}\}$ 的素理想, 之后对 $\mathbb{C}^{n-1} \cong \text{span}_{\mathbb{C}}\{e_1, e_2, \dots, e_{n-1}\}$ 以及 \mathfrak{p}_{n-1} 使用归纳假设即可. \square

注记 1.5.13. 容易知道, 对事先任意给定的 \mathbb{C}^n 的基 $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$, 上述引理中的基 $\{f_1, f_2, \dots, f_n\}$ 可以适当选取使得与 $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ 任意接近.

(这个引理证明过程中, 哪里利用了“素理想”?)

本节有坑待填, 尚未完成. 笔者打算完整证明如下:

定理 1.5.14. (局部解析零点定理)

设 I 为 \mathcal{O}_n 的理想, 则

$$I_{(V(I),x)} = \sqrt{I}$$

回顾 $\sqrt{I} := \{f \in \mathcal{O}_n \mid \exists N \geq 0, f^N \in I\}$ 为 I 的**根式理想**。交换代数当中有以下基本结果:

$$\sqrt{I} = \bigcap_{\substack{\mathfrak{p} \supseteq I \\ \mathfrak{p} \in \text{Spec}(\mathcal{O}_n)}} \mathfrak{p}$$

证明大意. $I_{(V(I),x)} \supseteq \sqrt{I}$ 是容易验证的, 而另一边 “ \subseteq ”, 由交换代数, 只需对 $I = \mathfrak{p}$ 为素理想的情形证明。

这是非常不显然的结果, 需要利用引理1.5.12 等多复变函数的结果, 以及较多的交换代数。从略。 \square

([这里待完善](#))

1.6 局部参数化

本节陈述关于不可约解析集芽的如下重要定理

定理 1.6.1. (不可约解析集芽的局部参数化定理)

设 \mathfrak{p} 为环 \mathcal{O}_n 的素理想, 任取解析集 A 为解析集芽 $(V(\mathfrak{p}), 0)$ 的代表元, 则: 存在 \mathbb{C}^n 的基 $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ (该基下的坐标函数记为 z_1, z_2, \dots, z_n), 存在 $1 \leq d \leq n$, 以及存在足够小的正实数 $r', r'' > 0$, 以及常数 $C > 0$, 使得:

(1) $\mathfrak{p} \cap \mathbb{C}\{z_1, \dots, z_d\} = 0$, 并且环同态

$$\mathbb{C}\{z_1, \dots, z_d\} \hookrightarrow \mathcal{O}_n / \mathfrak{p}$$

为有限整扩张。

(2) 在坐标 $z' = (z_1, \dots, z_d), z'' = (z_{d+1}, \dots, z_n)$ 下,

$$A \cap (\Delta' \times \Delta'') \subseteq \{(z', z'') \in \mathbb{C}^d \times \mathbb{C}^{n-d} \mid |z''| \leq C|z'|\}$$

其中 Δ' 为 \mathbb{C}^d 中以原点为中心, 半径 r' 的多圆柱; Δ'' 为 \mathbb{C}^{n-d} 中以原点为中心, 半径 r'' 的多圆柱。

(3) 记 q 为 $\mathbb{C}\{z_1, \dots, z_d\} \hookrightarrow \mathcal{O}_n/\mathfrak{p}$ 的扩张次数, 则投影映射

$$\begin{aligned}\pi: A \cap (\Delta' \times \Delta'') &\rightarrow \Delta' \\ (z', z'') &\mapsto z'\end{aligned}$$

为次数为 q 的分歧映射 (ramified map), 并且存在某个 $\delta \in \mathcal{O}_d$, 使得 π 的所有分歧值都位于集合

$$S := \{z' \in \Delta' \mid \delta(z') = 0\}$$

之中, 并且 $\Delta' \setminus S$ 为 Δ' 的连通、稠密子集。

第(3)条的“分歧映射”、“分歧值”具体指: 投影

$$\begin{aligned}\pi': A \cap [(\Delta' \setminus S) \times \Delta''] &\rightarrow \Delta' \\ (z', z'') &\mapsto z'\end{aligned}$$

为 q 叶覆盖映射, 并且对任意 $z' \in S$, $\#\pi^{-1}(z') \leq q$.

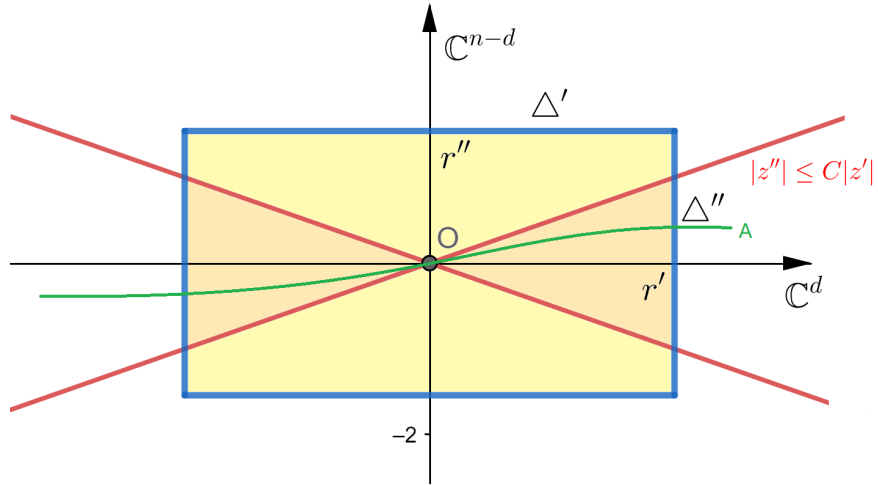


图: 性质1.6.1示意

证明. 异常复杂, 从略. 承认之。

□

不过我们可以考虑一种简单的特殊情形—— \mathfrak{p} 为主理想:

例子 1.6.2. (超曲面的参数化)

设 \mathcal{O}_n 的素理想 $\mathfrak{p} = (f)$ 为主理想, 证明此种情形的局部参数化定理。

证明. 由 Weierstrass 预备定理, 不妨取 \mathfrak{p} 的生成元 f 为 weierstrass 多项式

$$f(\tilde{z}, z_n) = z_n^q + \sum_{j=1}^q a_j(\tilde{z}) z_n^{s-j} = \prod_{j=1}^q (z_n - w_j(\tilde{z}))$$

其中 $\tilde{z} = (z_1, z_2, \dots, z_{n-1}) \in \mathbb{C}^{n-1}$, $w_j(\tilde{z})$ 为多项式 $z_n \mapsto f(\tilde{z}, z_n)$ 的根. 取 $d = n - 1$, 显然

$$\mathfrak{p} \cap \mathbb{C}\{z_1, z_2, \dots, z_d\} = 0$$

现在对任意 $F \in \mathcal{O}_n$, 对 F 以及 Weierstrass 多项式 f 使用 Weierstrass 除法定理, 有 $F = hf + R$, 其中 $R \in \mathcal{O}_{n-1}[z_n]$ 并且次数 $< q$. 这表明 $\tilde{F} \in \mathcal{O}_n/\mathfrak{p}$ 为有限生成 $\mathcal{O}_d = \mathcal{O}_{n-1}$ -模, 并且 $\{1, z_n, z_n^2, \dots, z_n^{q-1}\}$ 为其一组 \mathcal{O}_d -模生成元. 因此

$$\mathcal{O}_d \hookrightarrow \mathcal{O}_n/\mathfrak{p}$$

为有限整扩张. 从而定理1.6.1的 (1) 证毕.

而 (3) 几乎显然, 取

$$S := \left\{ \tilde{z} \in \Delta' \mid \text{多项式 } z_n \mapsto f(\tilde{z}, z_n) \text{ 无重根} \right\}$$

即可. 利用代数学中关于重根的判别式, 容易知道 S 为某个 \mathcal{O}_d 中的函数 (芽) 的零点集. 从而 (3) 易证.

至于 (2), 常数 C 的存在性显然吗? 如果有对 f 的根的估计

$$w_j(\tilde{z}) = O(|\tilde{z}|)$$

那么就没问题. (待补)

□

1.7 正则点、奇异点, 全纯隐函数定理

(待补)

第2章 复流形（待补）

计划详细介绍复流形、复微分形式，以及复流形的例子。

2.1 复流形（暂定）

2.2 微分形式（暂定）

2.3 复向量丛与全纯向量丛（暂定）

Recall: X is a smooth manifold, E is a vector bundle of rank r , if

(1) $\pi : E \rightarrow X$ is smooth map,

(2) for any $x \in X$, $E_x := \pi^{-1}(x)$ is a vector space over \mathbb{K} ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ or \mathbb{C}) of dimension r .

(3) there an open covering $\mathcal{U} = (U_\alpha)_{\alpha \in I}$ and trivializations

$$\theta_\alpha : E|_{U_\alpha} \cong U_\alpha \times \mathbb{K}^r$$

and for any intersection $U_\alpha \cap U_\beta$, we have

注记 2.3.1.

$$g_{\alpha\beta} = g_{\beta\alpha}^{-1}$$

$$g_{\alpha\beta} g_{\beta\gamma} g_{\gamma\alpha} = 1$$

(cocycle condition)

例子 2.3.2. *trivial vector bundle* $X \times \mathbb{K}^r$

例子 2.3.3. *Tangent bundle* TX . (transition matrix $g_{\alpha\beta}$ are given by Jacobi matrix..)

定义 2.3.4. (Local frame of vector bundles)

$$\theta_\alpha : E|_{U_\alpha} \xrightarrow{\sim} U_\alpha \times \mathbb{K}^r$$

be a trivialization, we define

$$e_\lambda(x) := \theta_\alpha^{-1}(x, \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1(\leftarrow ith) \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix})$$

then, $\{e_1, \dots, e_r\}$ be a local smooth section $s \in \Gamma(U_\alpha, E)$ can be written as

$$s(x) = \sum \sigma_\lambda(x)$$

where $\sigma_\lambda \in C^\infty(U_\alpha, \mathbb{K})$.

定义 2.3.5. (dual of vector bundles) $E \rightarrow X$, and $g_{\alpha\beta}$:transition matrix of E , the dual is given by $(g_{\alpha\beta})^{-1}$. (用转移函数来定义向量丛)

定义 2.3.6. direct sum of two vector bundles $(E, F) \rightarrow E \oplus F$. locally,

$$(g_{\alpha,\beta}) \oplus (h_{\alpha\beta})$$

direct sum of transition matrices.

定义 2.3.7. tensor product of two vector bundles.

locally, tensor product of two transition matrices.

2.4 例子（暂定）

例子 2.4.1. $\mathcal{O}(-1)$ on \mathbb{CP}^n , tautological line bundle. (Recall: \mathbb{CP}^n is a compact complex manifold with holomorphic charts

$$\Omega_j := \{[z_0; z_1; \dots; z_n] | z_j \neq 0\} \rightarrow \left(\frac{z_0}{z_j}, \dots, \hat{1}, \dots, \frac{z_n}{z_j} \right) \in \mathbb{C}^n$$

)

Let V be a complex vector space, $\dim_{\mathbb{C}} V = n + 1$. Denote the projective space by

$$\mathbb{P}(V) = (V \setminus \{0\}) / \mathbb{C}^*$$

Let $\underline{V} := \mathbb{P}(V) \times V$ be the trivial vector bundle, define

$$\mathcal{O}(-1) := \{([x], \xi) \mid \xi \in \mathbb{C} \cdot x\}$$

性质 2.4.2. $\mathcal{O}(-1)$ is a holomorphic line bundle on $\mathbb{P}(V)$.

证明. $\mathcal{O}(-1)|_{\Omega_j}$ has a non-vanishing holomorphic section \mathcal{E}_j defined by

$$\mathcal{E}_j([x]) = \frac{x}{x_j}$$

for $0 \leq j \leq n$. □

第3章 层与层上同调

本章介绍层论、层上同调的语言。这套理论是 J-Leray 于 1945-1946 年在监狱中创立的。在正式介绍这套抽象的理论之前，先通过一个例子来大致了解引入此理论的动机。

问题：设 S 为一个黎曼曲面， $\{p_n\} \subseteq S$ 为 S 的一个离散点集，我们希望找一个 S 上的亚纯函数 f ，使得 f 在 $S \setminus \{p_n\}$ 全纯，并且在每个 p_i 处具有事先给定的主部。

这样的函数 f 在局部上的存在性是显然的；而在 S 上的整体存在性并不平凡。

思路 (Čech). 取 S 的一族开覆盖 $\mathcal{U} := \{U_\alpha \mid \alpha \in \mathcal{I}\}$ ，使得每个 U_α 均为局部坐标卡，并且至多包含 $\{p_n\}$ 中的一个点，则局部地，可在每个 U_α 上找到满足要求的亚纯函数 f_α 。

之后我们希望找到 $g_\alpha \in \mathcal{O}(U_\alpha)$ ，使得对任意 $\alpha, \beta \in \mathcal{I}$ ，在 $U_\alpha \cap U_\beta$ 上成立 $f_\alpha - g_\alpha = f_\beta - g_\beta$ 。于是我们可定义 S 上的亚纯函数 $f = f_\alpha - g_\alpha$ 。易知 f 良定，且满足要求。

令 $f_{\alpha\beta} \in \mathcal{O}(U_\alpha \cap U_\beta)$ 为

$$f_{\alpha\beta} := f_\alpha - f_\beta$$

则显然对于任意指标 α, β, γ ，在公共部分 $U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma$ 上成立

$$f_{\alpha\beta} + f_{\beta\gamma} + f_{\gamma\alpha} = 0 \quad (*)$$

而如果存在上述 $g_\alpha \in \mathcal{O}(U_\alpha)$ ，则有 $f_\alpha = g_\alpha - g_\beta$ 。现在，令

$$\begin{aligned} Z^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}) &:= \text{span} \left\{ f_{\alpha\beta} \in \mathcal{O}(U_\alpha \cap U_\beta) \mid f_{\alpha\beta} \text{ 满足 } (*) \right\} \\ B^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}) &:= \text{span} \left\{ f_{\alpha\beta} \in \mathcal{O}(U_\alpha \cap U_\beta) \mid \exists g_\alpha \in \mathcal{O}(U_\alpha), f_{\alpha\beta} = g_\alpha - g_\beta \right\} \end{aligned}$$

显然 $B^1(\mathcal{U}, \mathcal{O})$ 为 $Z^1(\mathcal{U}, \mathcal{O})$ 的子空间。如果这两者相等，则满足题设的解存在。 \square

我们记 $H^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}) := \frac{Z^1(\mathcal{U}, \mathcal{O})}{B^1(\mathcal{U}, \mathcal{O})}$ 为 X 上的全纯函数“层” (sheaf) 关于开覆盖 \mathcal{U} 的第 1 个 Čech 上同调。我们将了解到，Čech 上同调与 S 的拓扑有密切关系。

本章需要一定的范畴论准备。由于这不是专门介绍层论的讲义，我们会省略很多论证细节，只介绍主要结果。

3.1 预层与层的概念

定义 3.1.1. (集值预层)

设 X 为拓扑空间, X 上的预层 (presheaf) \mathcal{F} 是指以下资料:

(1) 对任意 X 中的开集 U , 给定集合 $\mathcal{F}(U)$, 称 $\mathcal{F}(U)$ 为 \mathcal{F} 在 U 上的截面空间, 其中的元素称为 \mathcal{F} 在 U 上的一个截面 (section).

(2) 对于 X 的任意开子集 U, V , 若 $U \subseteq V$, 则配以限制映射

$$\begin{aligned}\rho_{UV} : \mathcal{F}(V) &\rightarrow \mathcal{F}(U) \\ s &\mapsto s|_U\end{aligned}$$

并且对 X 的任意开子集 $W \subseteq U \subseteq V$ 成立:

$$\begin{aligned}\rho_{UU} &= \text{id}_{\mathcal{F}(U)} \\ \rho_{WV} &= \rho_{WU} \circ \rho_{UV}\end{aligned}$$

最典型的例子是, 拓扑空间 X 上的函数之全体函数构成预层 \mathcal{C} . 具体地, 对 X 的开子集 U , $\mathcal{C}(U) := C(U)$ 为定义在 U 上的连续函数之全体; 对于 $V \subseteq U$, 则限制映射 ρ_{UV} 为通常的函数定义域的限制。

注记 3.1.2. 通常来说, 预层 \mathcal{F} 被假定具有代数结构。具体地, 对于 X 的开集 U , $\mathcal{F}(U)$ 被假定具有 $Abel$ 群结构、交换环结构或者 A -模结构等等, 此时分别称作取值于 $Abel$ 群范畴、交换环范畴、 A -模范畴的预层。

当然, 若 $\mathcal{F}(U)$ 具有上述代数结构, 则我们也要求限制映射 ρ_{VU} 为相应范畴中的态射, 并且规定 $\mathcal{F}(\emptyset) = \{0\}$ 为相应范畴中的零对象。

例子 3.1.3. (常值预层)

对于拓扑空间 X , 定义 X 上的集值预层 \mathbf{C}_X 如下: 对于任意开子集 U , $\mathbf{C}_X(U) := \mathbf{C}$; 对于 $U \subseteq V$, 限制映射 $\rho_{UV} := \begin{cases} \text{id}_{\mathbf{C}} & U \neq \emptyset \\ 0 & U = \emptyset \end{cases}$, 则容易验证这是 X 上的预层, 称为常值预层。

例子 3.1.4. (全纯函数预层)

设 X 为复流形, 则 $\mathcal{O}_X : U \mapsto \mathcal{O}(U)$, 配以通常的函数限制, 构成 X 上的预层, 称为全纯函数预层。

例子 3.1.5. (微分形式预层)

设 X 为光滑流形, 对 X 的任意开子集 U , 考虑 U 上的光滑 k 形式之全体 $\wedge^k(U)$, 配以通常的限制映射, 则 \wedge^k 构成预层, 称为光滑 k -形式预层。

定义 3.1.6. (层)

设 \mathcal{F} 为拓扑空间 X 上的预层, 称 \mathcal{F} 为层 (sheaf), 若以下成立:

(1) (粘合公理) 若 U 与 $U_\alpha (\alpha \in \mathcal{I})$ 均为 X 的开子集, 并且 $U = \bigcup_{\alpha \in \mathcal{I}} U_\alpha$, 则对于任何 $s_\alpha \in \mathcal{F}(U_\alpha)$, 如果 $s_\alpha|_{U_\alpha \cap U_\beta} = s_\beta|_{U_\alpha \cap U_\beta}$ 对任意 $\alpha, \beta \in \mathcal{I}$ 成立, 则存在 $s \in \mathcal{F}(U)$, 使得 $s|_{U_\alpha} = s_\alpha$ 对任意 $\alpha \in \mathcal{I}$ 成立。

(2) (唯一性公理) 条件同上, 则对于任意 $s, t \in \mathcal{F}(U)$, 若对任意 $\alpha \in \mathcal{I}$, $s|_{U_\alpha} = t|_{U_\alpha}$, 则 $s = t$.

类似地也可以定义取值于 Abel 范畴上的层。此时, 容易验证唯一性公理等价于: ($U = \bigcup_{\alpha \in \mathcal{I}} U_\alpha$) 对于 $s \in \mathcal{F}(U)$, 若 $s|_{U_\alpha} = 0$ 对任意 $\alpha \in \mathcal{I}$ 成立, 则 $s = 0$.

例子 3.1.7. 若拓扑空间 X 包含至少两个不交的开集, 则常值预层 (例子 3.1.3) \mathbb{C}_X 不是层, 因为不满足粘合公理。

具体地, 若 U, V 为 X 的两个不交的开子集, 考虑 $1 \in \mathbb{C}_X(U)$ 以及 $2 \in \mathbb{C}_X(V)$, 则显然不存在 $z \in \mathbb{C}_X(U \cup V)$ 使得 $1 = z|_U$ 以及 $2 = z|_V$.

例子 3.1.8. (向量丛是层) 设 $E \rightarrow X$ 为光滑流形 X 上的向量丛, 则 E 自然视为 X 上的层 $\Gamma(-, E)$: 对任意 $U \subseteq X$, 考虑丛 E 在 U 上的截面之全体 $\Gamma(U, E)$ 。易验证其满足层的公理。

类似地, 复流形上的全纯函数预层是层, 光滑 k -形式预层也是层。

定义 3.1.9. (预层的同态)

设 \mathcal{F} 与 \mathcal{G} 为拓扑空间 X 上的 (取值于同一个 Abel 范畴的) 预层, 预层同态 $\varphi: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ 是指以下资料: 对任意开集 $U \subseteq X$, 配以 (相应 Abel 范畴中的) 态射 $\varphi_U: \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{G}(U)$, 并且对于 X 的任意开子集 $U \subseteq V$, 以下图表交换:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(U) & \xleftarrow{\rho_{UV}} & \mathcal{F}(V) \\ \varphi_U \downarrow & & \downarrow \varphi_V \\ \mathcal{G}(U) & \xleftarrow{\rho_{UV}} & \mathcal{G}(V) \end{array}$$

设 $\varphi: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ 为 X 上的预层同态, 则我们可以定义 $\ker^p \varphi, \text{Im}^p \varphi, \text{coker}^p \varphi$ 为: 对任意开集 $U \subseteq X$,

$$(\ker^p \varphi)(U) := \ker(\varphi_U)$$

$\text{Im}^p \varphi$ 与 $\text{coker}^p \varphi$ 也完全类似。容易验证它们都是预层, 分别称为预层同态 φ 的核预层、像预层、余核预层。这里的上标 “ p ” 是指 “预层” (presheaf)。

性质 3.1.10. 设 \mathcal{F}, \mathcal{G} 为 X 上的层, $\varphi: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ 为预层同态, 则预层 $\ker^p \varphi$ 是层。

证明. 直接验证 $\ker^p \varphi$ 满足层的粘合公理和唯一性公理。设 $\{U_\alpha \mid \alpha \in \mathcal{I}\}$ 为 X 的开子集 U 的一族开覆盖, 注意到 $(\ker^p \varphi)(U_\alpha) \subseteq \mathcal{F}(U_\alpha)$, 以及 \mathcal{F} 为层 (满足粘合公理), 因此易知 $\ker^p \varphi$ 也满足粘合公理。 $\ker^p \varphi$ 的唯一性公理也是由 \mathcal{F} 的层性质直接得到的。□

从此以后, 若 \mathcal{F} 与 \mathcal{G} 都为层, 则我们将核预层 $\ker^p \varphi$ 简记为 $\ker \varphi$ 。

注记 3.1.11. 好吧, 刚才的命题几乎显然。但是要注意, 即使 \mathcal{F} 与 \mathcal{G} 都是层, $\operatorname{Im}^p \varphi$ 与 $\operatorname{coker}^p \varphi$ 未必是层。它们并没有 $\ker^p \varphi$ 的良好性质。

例子 3.1.12. 考虑拓扑空间 $X = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, 令 $\mathcal{F} := \mathcal{O}_X$ 为 X 上的全纯函数层, $\mathcal{G} := \mathcal{O}_X^*$ 定义为: 对于 X 的开集 U ,

$$\mathcal{O}_X^*(U) := \{f \in \mathcal{O}_X(U) \mid f(z) \neq 0, \forall z \in U\}$$

容易验证 \mathcal{O}_X^* 为 (取值于集合的) 层。考虑层同态

$$\begin{aligned} \exp: \mathcal{F} &\rightarrow \mathcal{G} \\ f \in \mathcal{F}(U) &\mapsto e^f \end{aligned}$$

则 $\operatorname{Im}^p \exp$ 不是层。

证明. 只需要考虑函数 $z \in \mathcal{O}_X^*(X)$. 对任意单连通的开子集 $U \subseteq X$, 易知 $z \in \mathcal{O}_X^*(U)$ 满足 $z \in (\operatorname{Im}^p \exp)(U)$, 但是 $z \in \mathcal{O}_X^*(X)$ 并不位于 $(\operatorname{Im}^p \exp)(X)$ 当中, 从而 $\operatorname{Im}^p \exp$ 不满足粘合公理。□

记号 3.1.13. (层的限制) 设 \mathcal{F} 是拓扑空间 X 上的层, U 为 X 的开子集, 则自然有拓扑空间 U 上的层 $\mathcal{F}|_U$ 如下: 对 U 中的开集 V (注意 V 也是 X 中的开集), 定义

$$\mathcal{F}|_U(V) := \mathcal{F}(V)$$

相应的限制映射也自然给出。容易验证 $\mathcal{F}|_U$ 是拓扑空间 U 上的层, 称为 \mathcal{F} 在 U 上的限制。

关于层的构造, 我们再介绍层的直和:

例子 3.1.14. (层的直和)

设 \mathcal{F} 与 \mathcal{G} 为拓扑空间 X 上的取值于 (同一个) $Abel$ 范畴的层, 则定义 \mathcal{F} 与 \mathcal{G} 的直和层 $\mathcal{F} \oplus \mathcal{G}$ 如下: 对 X 中的开集 U , $(\mathcal{F} \oplus \mathcal{G})(U) := \mathcal{F}(U) \oplus \mathcal{G}(U)$ 。

容易验证 $\mathcal{F} \oplus \mathcal{G}$ 也为 X 上的层。类似也可以定义多个层的直和。特别地, 对于层 \mathcal{F} 以及正整数 n , 记 $\mathcal{F}^{\oplus n} := \underbrace{\mathcal{F} \oplus \mathcal{F} \oplus \cdots \oplus \mathcal{F}}_{n \text{ 个}}$

3.2 预层的层化

定义 3.2.1. (预层的芽)

设 \mathcal{F} 为 X 上的预层, $x \in X$, 则称

$$\mathcal{F}_x := \varinjlim_{x \in U} \mathcal{F}(U)$$

为 \mathcal{F} 在 x 处的茎条 (stalk), 其中 U 取遍 x 的开邻域。 \mathcal{F}_x 中的元素称为 x 处的芽 (germ)。

我们不再回顾范畴论中的余极限 (or 归纳极限、正向极限) 的概念。典型的例子是, 若 \mathcal{O}_X 为复流形 X 上的解析函数环层, 则对于 $x \in X$, $\mathcal{O}_{X,x}$ 即为通常在 x 处的解析函数芽环。

回顾层的粘合公理、唯一性公理, 用茎条、芽的语言可以给出上述公理的等价表述:

性质 3.2.2. 设 \mathcal{F} 是拓扑空间 X 上的预层, 则

(1) \mathcal{F} 满足粘合公理 \iff 对任意开集 U , 以及对任意 $s(x) \in \mathcal{F}_x (\forall x \in U)$, 如果对任意 $x \in U$, 存在 x 的开邻域 $V \subseteq U$, 以及 $s(x)$ 的代表元 $t \in \mathcal{F}(V)$, 使得对任意 $y \in V$, 成立 $s(y) = t_y$, 那么存在 $S \in \mathcal{F}(U)$, 使得对任意 $x \in U$ 成立 $S_x = s(x)$ 。

(2) \mathcal{F} 满足唯一性公理 \iff 对任意开集 U , 以及对任意 $s \in \mathcal{F}(U)$, 如果对任意 $x \in U$, $s_x = 0$, 那么 $s = 0$ 。

证明. 由有关定义出发, 几乎显然。 □

性质 3.2.3. 设 \mathcal{F} 与 \mathcal{G} 为 X 上的预层, $\varphi: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ 为预层同态, 则对任意 $x \in X$, φ 自然诱导茎条同态

$$\varphi_x: \mathcal{F}_x \rightarrow \mathcal{G}_x$$

证明. 由余极限 \varinjlim 的函子性直接得到。 □

具体构造是, 对任意 $F_x \in \mathcal{F}_x$, 取 F_x 的代表元 $F \in \mathcal{F}(U)$, 其中 U 为 x 的某个开邻域。之后, $\varphi_x(F_x) = (\varphi_U(F))_x$ 。

定义 3.2.4. (预层的层空间)

设 \mathcal{F} 为拓扑空间 X 上的预层, 则定义拓扑空间

$$\tilde{\mathcal{F}} := \coprod_{x \in X} \mathcal{F}_x$$

其拓扑由拓扑基 $\{\Omega_{F,U} \mid U \subseteq X \text{ 为开子集}, F \in \mathcal{F}(U)\}$ 生成, 其中 $\Omega_{F,U} = \{F_x \in \mathcal{F}_x \mid x \in U\}$. 称拓扑空间 $\tilde{\mathcal{F}}$ 为预层 \mathcal{F} 的层空间 (sheaf space)。

具体地, 若芽 $F_x \in \tilde{\mathcal{F}}$, 取 F_x 的代表元 $F \in \mathcal{F}(U)$, 其中 U 为 x 的一个 (充分小的) 开邻域, 则 $\{F_y \mid y \in U\}$ 为 F_x 在 $\tilde{\mathcal{F}}$ 中的一个开邻域。我们由自然的映射

$$\begin{aligned} \Pi: \tilde{\mathcal{F}} &\rightarrow X \\ s \in \mathcal{F}_x &\mapsto x \end{aligned}$$

则容易验证 $\Pi: \tilde{\mathcal{F}} \rightarrow X$ 为连续映射, 且对于任意 $F \in \mathcal{F}(U)$, $\Pi: \Omega_{F,U} \rightarrow U$ 为拓扑同胚。

定义 3.2.5. (预层的层化)

设 \mathcal{F} 是 X 上的预层, 对 X 的开子集 U , 定义

$$\mathcal{F}^+(U) := \left\{ s: U \rightarrow \tilde{\mathcal{F}} \mid s \text{ 为连续映射, 并且 } \Pi \circ s = \text{id}_U \right\}$$

称 \mathcal{F}^+ 为预层 \mathcal{F} 的层化 (sheafification)。

具体地, 对于 $s: U \rightarrow \tilde{\mathcal{F}}$, $s \in \mathcal{F}^+(U)$ 当且仅当对任意的 $x \in U$, $s(x) \in \mathcal{F}_x$, 并且存在 x 的开邻域 $V \subseteq U$, 以及存在 $F \in \mathcal{F}(V)$, 使得 $s(y) = F_y$ 对任意 $y \in V$ 成立。

性质 3.2.6. 设 \mathcal{F} 为 X 上的预层, 则 \mathcal{F}^+ 为 X 上的层, 并且有典范的预层同态 $\theta: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}^+$ 如下: 对任意开集 U ,

$$\begin{aligned} \theta_U: \mathcal{F}(U) &\rightarrow \mathcal{F}^+(U) \\ s &\mapsto \tilde{s}: U \rightarrow \tilde{\mathcal{F}} \quad (x \mapsto s_x) \end{aligned}$$

证明. \mathcal{F}^+ 的粘合公理与唯一性公理几乎显然成立。 □

我们更习惯于把有预层同态 $\theta: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}^+$ 称为 \mathcal{F} 的层化。容易验证, 对任意 $x \in X$, 由茎条同构 $\mathcal{F}_x \cong \mathcal{F}_x^+$; 此外也容易验证, 如果 \mathcal{F} 本身是层, 那么 θ 为层同构, 即“层的层化同构于其本身”。

性质 3.2.7. (层化的泛性质)

设 \mathcal{F} 为拓扑空间 X 上的预层, 则对于 X 上的任何层 \mathcal{G} , 以及预层同态 $\varphi: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$, 存在唯一的层同态 $\psi: \mathcal{F}^+ \rightarrow \mathcal{G}$, 使得以下图表交换:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F} & \xrightarrow{\varphi} & \mathcal{G} \\ \theta \downarrow & \nearrow \exists! \psi & \\ \mathcal{F}^+ & & \end{array}$$

证明. 对任意 $x \in X$, $\varphi: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ 诱导了 $\varphi_x: \mathcal{F}_x \rightarrow \mathcal{G}_x$, 再注意 $\mathcal{F}_x \cong \mathcal{F}_x^+$, 从而自然给出 $\psi_x: \mathcal{F}_x^+ \rightarrow \mathcal{G}_x$. 易验证 $\{\psi_x | x \in X\}$ 确定了层同态 $\psi: \mathcal{F}^+ \rightarrow \mathcal{G}$, 且 $\psi \circ \theta = \varphi$.

ψ 的唯一性是显然的。 □

例子 3.2.8. 回顾常值预层 \mathbb{C}_X (见例子 3.1.3), 则其层化 \mathbb{C}_X^+ 为, 对任意开集 U ,

$$\mathbb{C}_X^+(U) = \left\{ f: U \rightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ 为局部常值函数} \right\}$$

称之为 X 上的局部常值层。

例子 3.2.9. 回顾例子 3.1.12 中的预层同态

$$\exp: \mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{O}_X^*$$

则像预层 $\text{Im}^p(\exp)$ 的层化 $(\text{Im}^p \exp)^+ \cong \mathcal{O}_X^*$.

定义 3.2.10. (像层、余核层与商层)

设 \mathcal{F} 与 \mathcal{G} 为拓扑空间 X 上的层, $\varphi: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ 为层同态。

- (1) 定义 $\text{Im } \varphi := (\text{Im}^p \varphi)^+$, 称之为 φ 的像层;
- (2) 定义 $\text{coker } \varphi := (\text{coker}^p \varphi)^+$, 称之为 φ 的余核层;
- (3) 若对于任意开集 U , $\varphi_U: \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{G}(U)$ 为单同态, 则称 φ 为层单同态, 此时也称 \mathcal{F} 为 \mathcal{G} 的子层, 并且定义商层 $\mathcal{F}/\mathcal{G} := \text{coker } \varphi$.

无非是将相应的预层加以层化。此外容易验证, 层同态 $\varphi: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ 为单同态, 当且仅当对任意 $x \in X$, $\varphi_x: \mathcal{F}_x \rightarrow \mathcal{G}_x$ 为单同态。

注记 3.2.11. 设 $\varphi: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ 为层同态, 则像层 $\text{Im } \varphi$ 自然地视为 \mathcal{G} 的子层:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F} & \xrightarrow{\varphi} & \mathcal{G} \\ \downarrow \tilde{\varphi} & \nearrow i' & \uparrow i \\ \text{Im}^p \varphi & \xrightarrow{\theta} & \text{Im } \varphi \end{array}$$

层同态 $i: \text{Im } \varphi \rightarrow \mathcal{G}$ 由层化的泛性质给出, 并且逐茎条看, 显然 i 为层单同态。

定义 3.2.12. (层满同态)

设 $\varphi: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ 为层同态, 称 φ 为层满同态, 若 $\text{Im } \varphi := (\text{Im}^p \varphi)^+ \cong \mathcal{G}$.

由有关定义可以验证, 层同态 $\varphi: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ 为层满同态, 当且仅当对任意 $x \in X$, $\varphi_x: \mathcal{F}_x \rightarrow \mathcal{G}_x$ 为满同态。由此可推出, φ 为层同构, 当且仅当对任意 $x \in X$, φ_x 为茎条同构。

3.3 层的顺像与逆像

记号 3.3.1. 对于拓扑空间 X , 定义 X 上的 $Abel$ 群层范畴 Ab_X 为:

- (1) $\text{Ab}(X)$ 中的对象为 X 上的取值于 $Abel$ 群的层;
- (2) 对象之间的态射为相应的层同态。

显然这是一个范畴。类似可定义“ X 上的集值层范畴” Set_X , “ X 上的交换环层范畴” Ring_X , 以及对于交换环 A , 我们可定义 X 上的 A -模层范畴 $A\text{-Mod}_X$ 等等。

一般地, 将 X 上(所有种类的)层之全体记作 Sh_X , 这自然也给出一个范畴, 称为 X 上的层范畴。类似地, X 上的所有预层也构成范畴, 记为 pSh_X 。

注记 3.3.2. 对于拓扑空间 X , 以及 X 的开集 U , 则有“取截面”函子

$$\begin{aligned} \Gamma(U, -) : \text{Ab}_X &\rightarrow \text{Ab} \\ \mathcal{F} &\mapsto \mathcal{F}(U) \end{aligned}$$

其中 Ab 为 $Abel$ 群范畴。容易验证函子 $\Gamma(U, -)$ 是左正合函子, 即对于 Ab_X 中任意的左短正合列 $0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H}$, 该函子诱导的 $Abel$ 群同态序列 $0 \rightarrow \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{G}(U) \rightarrow \mathcal{H}(U)$ 也是正合的。

函子 $\Gamma(U, -)$ 的左正合性是后文将要介绍的层上同调理论的基础。

定义 3.3.3. (层的顺像)

设 $f: X \rightarrow Y$ 为拓扑空间的连续映射, \mathcal{F} 是 X 上的层, 则定义 \mathcal{F} 的推出 (push-forward), 也称为顺像 (direct image) $f_*\mathcal{F}$ 为: 对 Y 的开子集 U , $(f_*\mathcal{F})(U) := \mathcal{F}(f^{-1}(U))$.

显然 $f_*\mathcal{F}$ 为 Y 上的预层。容易验证, 若 \mathcal{F} 是层, 则预层 $f_*\mathcal{F}$ 也是层。事实上, 顺像 f_* 具有函子性, 具体地说, 若 $\varphi: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ 为 X 上的层同态, 则 f 诱导了 Y 上的层同态 $f_*\varphi: f_*\mathcal{F} \rightarrow f_*\mathcal{G}$, 并且使得有关图表交换。换句话说, 我们有函子 $f_*: \text{Sh}_X \rightarrow \text{Sh}_Y$.

容易验证, $f_*\mathcal{F}$ 在 $y \in Y$ 处的茎条为

$$(f_*\mathcal{F})_y \cong \varinjlim_{y \in V} \mathcal{F}(f^{-1}(V))$$

定义 3.3.4. (层的逆像)

设 $f: X \rightarrow Y$ 为拓扑空间之间的连续映射, \mathcal{G} 为 Y 上的层, 则定义 X 上的层 $f^{-1}\mathcal{G}$ 为: 对 X 的任意开集 U ,

$$(f^{-1}\mathcal{G})(U) := \varinjlim_{V \in f(U)} \mathcal{G}(V)$$

其中 V 取遍 Y 中的包含 $f(U)$ 的开子集。称 $f^{-1}\mathcal{G}$ 为 \mathcal{G} 关于 f 的逆像 (inverse image)

显然如此定义的 $f^{-1}\mathcal{G}$ 为 X 上的预层。利用余极限的泛性质, 也能验证当 \mathcal{G} 为层时, $f^{-1}\mathcal{G}$ 也为层。容易验证对 Y 中的开集 V , 成立

$$(f^{-1}\mathcal{G})(f^{-1}(V)) \cong \mathcal{G}(V)$$

此外对任意 $x \in X$, 成立

$$(f^{-1}\mathcal{G})_x \cong \mathcal{G}_{f(x)} \quad (*)$$

容易验证 $f^{-1}: \text{Sh}_Y \rightarrow \text{Sh}_X$ 为层范畴之间的函子。

注记 3.3.5. (逆像的层空间)

设 $f: X \rightarrow Y$ 为拓扑空间之间的连续映射, \mathcal{G} 为 Y 上的层, 则有层空间的拓扑同胚

$$\widetilde{f^{-1}\mathcal{G}} \cong X \times_Y \widetilde{\mathcal{G}}$$

也就是说, 存在下述纤维积图表:

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{f^{-1}\mathcal{G}} & \xrightarrow{\alpha} & \widetilde{\mathcal{G}} \\ \downarrow & & \downarrow \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

其中映射 α 由 $(*)$ 式诱导。由拓扑空间纤维积的具体构造，容易验证以上。

性质 3.3.6. (伴随对)

设 $f: X \rightarrow Y$ 为拓扑空间之间的连续映射，则 f^{-1} 为 f_* 的左伴随函子。也就是说对于任意 $\mathcal{F} \in \text{Sh}_X$ 以及 $\mathcal{G} \in \text{Sh}_Y$ ，存在（关于 X, Y ）自然的一一对应

$$\text{Hom}_{\text{Sh}_X}(f^{-1}\mathcal{G}, \mathcal{F}) \xrightarrow{1-1} \text{Hom}_{\text{Sh}_Y}(\mathcal{G}, f_*\mathcal{F})$$

证明大意。我们只给出此一一对应的构造，其余细节从略（反复使用各种泛性质）。对于任意的

$$\begin{aligned} \psi: \mathcal{G} &\rightarrow f_*\mathcal{F} \\ \varphi: f^{-1}\mathcal{G} &\rightarrow \mathcal{F} \end{aligned}$$

首先我们定义 $\alpha: \text{Hom}_{\text{Sh}_Y}(\mathcal{G}, f_*\mathcal{F}) \rightarrow \text{Hom}_{\text{Sh}_X}(f^{-1}\mathcal{G}, \mathcal{F})$ 如下：对 X 中开集 U ， $[\alpha(\psi)]_U$ 由以下交换图表给出：

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{G}(W) & \xrightarrow{\psi_W} & (f_*\mathcal{F})(W) = \mathcal{F}(f^{-1}(W)) \\ \downarrow \rho & & \downarrow \rho \\ \mathcal{G}(V) & \xrightarrow{\psi_V} & (f_*\mathcal{F})(V) = \mathcal{F}(f^{-1}(V)) \\ \downarrow & & \downarrow \rho \\ \varinjlim_{V \supseteq f(U)} \mathcal{G}(V) = (f^{-1}\mathcal{G})(U) & \xrightarrow{[\alpha(\psi)]_U} & \mathcal{F}(U) \end{array}$$

其中 $W \supseteq V$ 为 Y 中的包含 $f(U)$ 的开集。

再定义 $\beta: \text{Hom}_{\text{Sh}_X}(f^{-1}\mathcal{G}, \mathcal{F}) \rightarrow \text{Hom}_{\text{Sh}_Y}(\mathcal{G}, f_*\mathcal{F})$ 如下：对 Y 中的开集 V ， $[\beta(\varphi)]_V$ 由以下交换图表给出：

$$\begin{array}{ccc} (f^{-1}\mathcal{G})(f^{-1}(V)) & \xrightarrow{\varphi_{f^{-1}(V)}} & \mathcal{F}(f^{-1}(V)) \\ \parallel & & \parallel \\ \mathcal{G}(V) & \xrightarrow{[\beta(\varphi)]_V} & (f_*\mathcal{F})(V) \end{array}$$

其余细节从略。 □

3.4 局部自由模层与向量丛

定义 3.4.1. (\mathcal{A} -模层)

设 \mathcal{A} 为拓扑空间 X 上的 (含么交换) 环层, \mathcal{M} 为 X 上的 *Abel* 群层, 称 \mathcal{M} 为 \mathcal{A} -模层, 如果对 X 的任何开集 $V \supseteq U$, $\mathcal{M}(U)$ 具有 $\mathcal{A}(U)$ -模结构 $\mathcal{A}(U) \times \mathcal{M}(U) \rightarrow \mathcal{M}(U)$, 并且下述图表交换:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A}(V) \times \mathcal{M}(V) & \longrightarrow & \mathcal{M}(V) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{A}(U) \times \mathcal{M}(U) & \longrightarrow & \mathcal{M}(U) \end{array}$$

例如, 考虑复流形 X 上的解析函数环层 \mathcal{O}_X , 则全纯切向量场、全纯微分形式等等, 都可视为 \mathcal{O}_X -模层。再比如, 环层 \mathcal{A} 也有自然的 \mathcal{A} -模层结构。一般地, 对于拓扑空间 X 上的环层 \mathcal{A} , 我们有 X 上的 \mathcal{A} -模层范畴 $\mathcal{A}\text{-Mod}_X$, 自行定义此范畴中的态射 “ \mathcal{A} -模层同态”。能够验证, $\mathcal{A}\text{-Mod}_X$ 为 *Abel* 范畴。

容易验证, 对于 \mathcal{A} -模层 \mathcal{M} , 则对任意 $x \in X$, 茎条 \mathcal{M}_x 有自然的 \mathcal{A}_x -模结构。

定义 3.4.2. (局部自由层)

设 \mathcal{S} 为拓扑空间 X 上的 \mathcal{A} -模层, 称 \mathcal{S} 为局部自由 \mathcal{A} -模层, 简称局部自由层 (*locally free sheaf*), 如果对任意 $x \in X$, 存在 x 的开邻域 U , 使得有层同构

$$\mathcal{S}|_U \cong (\mathcal{A}|_U)^{\oplus r}$$

其中 r 为正整数, 称为局部自由层 \mathcal{S} 的秩。

特别地, 对任意 $x \in X$, 存在 x 的开邻域 U , 使得 $\mathcal{S}(U) \cong (\mathcal{A}(U))^{\oplus r}$ (但是定义中的 “层限制” 的语言更强)。事实上 \mathcal{S} 为局部自由层当且仅当对任意 $x \in X$, 存在 x 的开邻域 U , 以及截面 $F_{1,x}, F_{2,x}, \dots, F_{r,x} \in \mathcal{S}(U)$, 使得对任意 $y \in U$, 环同态

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_y^{\oplus r} &\rightarrow \mathcal{S}_y \\ (w_1, w_2, \dots, w_r) &\mapsto \sum_{i=1}^r w_i F_{i,x} \end{aligned}$$

为同构。如此选取的 $\{F_{i,x} \in \mathcal{A}(U) \mid 1 \leq i \leq r\}$ 称为 \mathcal{S} 的一个局部标架。

记号 3.4.3. (局部自由层局部标架的转移函数)

设 \mathcal{S} 为拓扑空间 X 上的秩为 r 的局部自由 \mathcal{A} -模层。取 X 的一族开覆盖 $X = \bigcup_{\alpha \in \mathcal{I}} U_\alpha$ ，以及对于任意 $\alpha \in \mathcal{I}$ ，取 \mathcal{S} 在 U_α 上的局部标架

$$F_\alpha := \left\{ F_\alpha^i \in \mathcal{S}(U_\alpha) \mid 1 \leq i \leq r \right\}$$

则 F_α 自然诱导了层同构（仍记作 F_α ）

$$F_\alpha : \mathcal{A}|_{U_\alpha}^{\oplus r} \xrightarrow{\sim} \mathcal{S}|_{U_\alpha}$$

对于 $\alpha, \beta \in \mathcal{I}$ ，若 $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ ，则考虑如下图表：

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A}|_{U_\alpha \cap U_\beta}^{\oplus r} & \xrightarrow{F_\alpha} & \mathcal{S}|_{U_\alpha \cap U_\beta} \\ \uparrow G_{\alpha\beta} & & \parallel \\ \mathcal{A}|_{U_\alpha \cap U_\beta}^{\oplus r} & \xrightarrow{F_\beta} & \mathcal{S}|_{U_\alpha \cap U_\beta} \end{array}$$

称层自同构 $G_{\alpha\beta} := F_\alpha^{-1} \circ F_\beta$ 为局部标架 F_α 与 F_β 之间的转移函数。

对于 $x \in U_\alpha \cap U_\beta$ ，

$$(G_{\alpha\beta})_x : \mathcal{A}_x^{\oplus r} \rightarrow \mathcal{A}_x^{\oplus r}$$

可以表达为在基 $\left\{ (F_\beta^i)_x \mid 1 \leq i \leq r \right\}$ 与 $\left\{ (F_\alpha^i)_x \mid 1 \leq i \leq r \right\}$ 下的矩阵，称此矩阵为转移矩阵。

对于 $\alpha, \beta, \gamma \in \mathcal{I}$ ，如果 $U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma \neq \emptyset$ ，则显然有
$$\begin{cases} G_{\alpha\alpha} = \text{id}_{\mathcal{A}|_{U_\alpha}^{\oplus r}} \\ G_{\alpha\beta} = G_{\beta\alpha}^{-1} \\ G_{\alpha\beta} \circ G_{\beta\gamma} \circ G_{\gamma\alpha} = \text{id}_{\mathcal{A}|_{U_{\alpha\beta\gamma}}^{\oplus r}} \end{cases}, \text{ 其中}$$

$$U_{\alpha\beta\gamma} := U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma.$$

上述的语言与向量丛十分相似，事实上局部自由层是向量丛概念的推广。

重要例子 3.4.4. (拓扑向量丛)

设 X 为拓扑空间， \mathcal{C}_X 为 X 上的连续函数环层，则有自然的一一对应

$$\left\{ X \text{ 上的局部自由 } \mathcal{C}_X\text{-模层} \right\} \xrightarrow{1-1} \left\{ X \text{ 上的 (拓扑) 向量丛} \right\}$$

证明. 若 \mathcal{E} 为 X 上的局部自由 \mathcal{C}_X -模层，取 X 的一组局部标架覆盖 $X = \bigcup_{\alpha \in \mathcal{I}} U_\alpha$ ，以及 U_α 上的局部标架 $F_\alpha = \left\{ F_\alpha^i \mid 1 \leq i \leq r \right\}$ ，则对于任意的 $\alpha, \beta \in \mathcal{I}$ ，若 $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ ，则对任意 $x \in U_\alpha \cap U_\beta$ ，

转移函数 $(G_{\alpha\beta})_x$ 在相应标架上的矩阵（仍记为 $(G_{\alpha\beta})_x$ ）给出了映射

$$\begin{aligned} U_\alpha \cap U_\beta &\rightarrow \mathrm{GL}(r, \mathbb{C}) \\ x &\mapsto (G_{\alpha\beta})_x \end{aligned}$$

易验证该映射连续，并且满足向量丛转移函数的相容条件，从而这些转移函数可以粘合成一个向量丛。反之，对于拓扑向量丛 $E \rightarrow X$ ，该向量丛的截面层显然为局部自由 \mathcal{C}_X -模层。容易验证上述给出的对应是互逆的，从而得到一一对应。 \square

例子 3.4.5.（全纯向量丛）

设 X 为复流形， \mathcal{O}_X 为 X 上的全纯函数环层，则类似地有一一对应

$$\{X \text{ 上的局部自由 } \mathcal{O}_X\text{-模层}\} \xrightarrow{1-1} \{X \text{ 上的全纯向量丛}\}$$

光滑流形上的光滑向量丛也完全类似。

最后，需要注意局部自由层范畴不是 Abel 范畴：

重要例子 3.4.6.（摩天大厦层）

考虑拓扑空间（复流形） $X = \mathbb{C}$ ， X 上的局部自由 \mathcal{O}_X -模层 $\mathcal{S}_1 = \mathcal{S}_2 := \mathcal{O}_X$ 。考虑 \mathcal{O}_X -模层同态 $\varphi: \mathcal{S}_1 \rightarrow \mathcal{S}_2$ 为：对任意开集 $U \subseteq X$ ，

$$\begin{aligned} \varphi_U: \mathcal{S}_1(U) &\rightarrow \mathcal{S}_2(U) \\ f(z) &\mapsto zf(z) \end{aligned}$$

则其余核层 $\mathrm{coker} \varphi$ 不是局部自由 \mathcal{O}_X -模层。

容易验证，对 X 中的开集 U ，成立 $\mathrm{coker} \varphi(U) \cong \begin{cases} \mathbb{C} & (0 \in U) \\ 0 & (0 \notin U) \end{cases}$ ，明显不是局部自由层。此层称为摩天大厦层（skyscraper sheaf）。

3.5 凝聚层及其基本性质

定义 3.5.1.（局部有限生成 \mathcal{A} -模层）

设 \mathcal{M} 为拓扑空间 X 上的 \mathcal{A} -模层，称 \mathcal{A} 是局部有限生成的，若对任意 $x \in X$ ，存在 x 的邻域 U ，以及正整数 r ，使得有层同态短正合列

$$\mathcal{A}|_U^{\oplus r} \twoheadrightarrow \mathcal{M}|_U \rightarrow 0$$

或者等价地, 存在 x 的开邻域 U , 以及截面 $F_1, F_2, \dots, F_r \in \mathcal{M}(U)$, 使得对任意 $y \in U$, $\{(F_i)_y \in \mathcal{M}_y \mid 1 \leq i \leq r\}$ 是 \mathcal{M}_y 的一组 \mathcal{A}_x -模生成元。
显然, 局部自由层一定是局部有限生成的。

定义 3.5.2. (关系层)

设 \mathcal{M} 是拓扑空间 X 上的 \mathcal{A} -模层, 对于 X 的开集 U , 以及 $F_1, F_2, \dots, F_r \in \mathcal{M}(U)$, 称层同态

$$\begin{aligned} \varphi : \mathcal{A}|_U^{\oplus r} &\rightarrow \mathcal{M}|_U \\ (g_1, g_2, \dots, g_r) &\mapsto \sum_{i=1}^r g_i F_i \end{aligned}$$

的核层 $\mathcal{R}(F_1, F_2, \dots, F_r) := \ker \varphi$ 为截面 F_1, F_2, \dots, F_r 的关系层。

这个定义当中并不要求 φ 为层满同态, 也就是说 \mathcal{M} 未必为局部有限生成的。只要给定若干局部截面, 就可以定义它们的关系层。

定义 3.5.3. (凝聚层)

对于拓扑空间 X 上的 \mathcal{A} -模层 \mathcal{M} , 称 \mathcal{A} 为 **凝聚层** (*coherent sheaf*), 如果:

- (1) \mathcal{A} 为局部有限生成的;
- (2) 对 X 的任意开集 U , 以及任意截面 $F_1, F_2, \dots, F_r \in \mathcal{M}(U)$, 关系层 $\mathcal{R}(F_1, F_2, \dots, F_r)$ 也是局部有限生成的。

通过适当缩小 $x \in X$ 的邻域 U , 容易验证 \mathcal{M} 是凝聚层一定是**局部有限呈示**的, 即对任意 $x \in X$, 存在 x 的开邻域 U , 以及正整数 p, q , 使得存在 U 上的 $\mathcal{A}|_U$ -模层正合列

$$\mathcal{A}|_U^{\oplus p} \rightarrow \mathcal{A}|_U^{\oplus q} \rightarrow \mathcal{M}|_U \rightarrow 0$$

由定义容易知道, **凝聚层的局部有限生成子层也是凝聚的**。

此外, 对于 X 上的交换环层 \mathcal{A} , 称 \mathcal{A} 为局部有限生成的 (切转: 凝聚的), 如果 \mathcal{A} 作为 \mathcal{A} -模层是局部有限生成的 (切转: 凝聚的)。

凝聚层的下列基本性质是纯线性代数的:

性质 3.5.4. (凝聚层的基本性质)

设 \mathcal{A} 为拓扑空间 X 上的交换环层, \mathcal{F}, \mathcal{G} 为凝聚 \mathcal{A} -模层, $\varphi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ 为 \mathcal{A} -模层同态, 则 $\ker \varphi, \operatorname{Im} \varphi, \operatorname{coker} \varphi$ 均为凝聚 \mathcal{A} -模层。

证明. 显然 $\text{Im } \varphi$ 是局部有限生成的, 从而为凝聚层 \mathcal{G} 的局部有限生成子层, 故也为凝聚层。再看 $\ker \varphi$ 作为凝聚层 \mathcal{F} 的子层, 只需要说明 $\ker \varphi$ 是局部有限生成的。对任意 $x \in X$, 由于 \mathcal{F} 局部有限生成, 取 x 的开邻域 U , 以及截面 $F_1, F_2, \dots, F_q \in \mathcal{F}(U)$ 为 $\mathcal{F}|_U$ 的生成元, 于是有 $\varphi(F_1), \varphi(F_2), \dots, \varphi(F_q) \in \mathcal{G}(U)$. 由 \mathcal{G} 的凝聚性, 取关系层 $\mathcal{R}(\varphi(F_1), \varphi(F_2), \dots, \varphi(F_q))$ 的一组生成元 $G_1, G_2, \dots, G_r \in \mathcal{A}(U)^{\oplus q}$, 其中 $G_i = (G_i^1, G_i^2, \dots, G_i^q)$, 即有以 $\mathcal{A}(U)$ 为系数的矩阵 (G_i^j) , 其中 $1 \leq i \leq r, 1 \leq j \leq q$. 则容易验证 $\left\{ \sum_{j=1}^q G_i^j F_j \mid 1 \leq i \leq r \right\}$ 是 $\ker \varphi|_U$ 的一组生成元, 因此 $\ker \varphi$ 是局部有限生成的, 进而由 \mathcal{F} 的凝聚性知 $\ker \varphi$ 也是凝聚的。

再看 $\text{coker } \varphi$ 的凝聚性。 $\text{coker } \varphi$ 作为局部有限生成层 \mathcal{G} 的商层, 显然也是局部有限生成的。然后对 X 的任意开集 U , 以及任意截面 $G_1, G_2, \dots, G_q \in \text{coker } \varphi(U)$, 断言关系层 $\mathcal{R}(G_1, G_2, \dots, G_q) \subseteq \mathcal{A}|_U^{\oplus q}$ 是局部有限生成的。对于任意 $x \in U$, 取 x 在 U 中的 (足够小) 邻域 U' , $G_i (1 \leq i \leq q)$ 在 U' 上的限制仍记为 G_i . 取截面 $G_i \in \text{coker } \varphi(U')$ 在 \mathcal{G} 中的代表元 $\tilde{G}_i \in \mathcal{G}(U')$, 再取 $F_1, F_2, \dots, F_p \in \mathcal{F}(U')$ 为 $\mathcal{F}|_{U'}$ 的生成元, 考虑关系层

$$\mathcal{R}(F_1, \dots, F_p; \tilde{G}_1, \dots, \tilde{G}_q) \subseteq \mathcal{A}|_{U'}^{\oplus(p+q)}$$

由 \mathcal{G} 的凝聚性 (不断缩小 U'), 取其一组生成元

$$\left\{ H_i = (H_i^1, H_i^2, \dots, H_i^{p+q}) \in \mathcal{A}(U')^{\oplus(p+q)} \mid 1 \leq i \leq r \right\}$$

则容易验证 (纯线性代数, 细节略)

$$\left\{ \tilde{H}_i = (\pi(H_i^{p+1}), \dots, \pi(H_i^{p+q})) \in \mathcal{A}(U')^{\oplus q} \mid 1 \leq i \leq r \right\}$$

是关系层 $\mathcal{R}(G_1, G_2, \dots, G_q)|_{U'}$ 的生成元 (其中 $\pi: \mathcal{G} \rightarrow \text{coker } \varphi$ 为典范投影), 从而关系层 $\mathcal{R}(G_1, G_2, \dots, G_q)$ 是局部有限生成的, 因此 $\text{coker } \varphi$ 凝聚。□

注记 3.5.5. 对于拓扑空间 X , \mathcal{A} 为 X 上的交换环层, 记 $\mathcal{A}\text{-Coh}_X$ 为 X 上的凝聚 \mathcal{A} -模层范畴, 这是 $\mathcal{A}\text{-Mod}_X$ 的子范畴。上述性质表明 $\mathcal{A}\text{-Coh}_X$ 是 *Abel* 范畴。

性质 3.5.6. 设 \mathcal{A} 为拓扑空间 X 上的交换环层, 则对于 \mathcal{A} -模层同态短正合列

$$0 \rightarrow \mathcal{F}_1 \rightarrow \mathcal{F}_2 \rightarrow \mathcal{F}_3 \rightarrow 0$$

此正合列中任何两个为凝聚层均可推出第三个也为凝聚层。

证明. 只需再证明 $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_3$ 凝聚能推出 \mathcal{F}_2 凝聚。先断言 \mathcal{F}_2 是局部有限生成的。对任意 $x \in X$, 取 x 的 (足够小的) 开邻域 U , 并且取 $F_1, F_2, \dots, F_p \in \mathcal{F}_1(U)$ 为 $\mathcal{F}_1|_U$ 的生成元, 再取 $G_1, G_2, \dots, G_q \in \mathcal{F}_3(U)$ 为 $\mathcal{F}_3|_U$ 的生成元。将 G_j 在 $\mathcal{F}_2(U)$ 中的代表元记为 $\tilde{G}_j (1 \leq j \leq q)$, 则容易验证 $\{F_1, F_2, \dots, F_p; \tilde{G}_1, \tilde{G}_2, \dots, \tilde{G}_q\}$ 为 $\mathcal{F}_2|_U$ 的一组生成元。从而 \mathcal{F}_2 是局部有限生成的。

对 X 的任意开集 U , 以及 $S_1, S_2, \dots, S_r \in \mathcal{F}_2(U)$, 断言关系层 $\mathcal{R}(S_1, S_2, \dots, S_r)$ 是局部有限生成的。任取 $x \in U$, 记截面 S_1, \dots, S_r 在 $\mathcal{F}_3(U)$ 上的投影分别为 $\bar{S}_1, \dots, \bar{S}_r$. 由 \mathcal{F}_3 的凝聚性, $\mathcal{R}(\bar{S}_1, \dots, \bar{S}_r)$ 是局部有限生成的, 从而取 x 在 U 中的 (足够小且不妨不断缩小的) 开邻域 U' , 以及 $\mathcal{R}(\bar{S}_1, \dots, \bar{S}_r)|_{U'}$ 的生成元矩阵

$$H := \begin{pmatrix} H_1^1 & \cdots & H_t^1 \\ \vdots & & \vdots \\ H_1^r & \cdots & H_t^r \end{pmatrix} \in \mathcal{A}(U')^{r \times t}$$

即每个 $H_j^i \in \mathcal{A}(U')$, H 中的列向量 $\in \mathcal{R}(\bar{S}_1, \dots, \bar{S}_r)(U')$, 矩阵 H 的 r 个列向量构成 $\mathcal{R}(\bar{S}_1, \dots, \bar{S}_r)|_{U'}$ 的生成元。再令

$$(F_1, F_2, \dots, F_t) := (S_1, S_2, \dots, S_r)H$$

则易验证 $(F_1, F_2, \dots, F_t) \in \mathcal{F}_1(U')^{\oplus t}$. 由 \mathcal{F}_1 的凝聚性, 取 $\mathcal{R}(F_1, \dots, F_t)|_{U'}$ 的生成元矩阵

$$K := \begin{pmatrix} K_1^1 & \cdots & K_s^1 \\ \vdots & & \vdots \\ K_1^t & \cdots & K_s^t \end{pmatrix} \in \mathcal{A}(U')^{t \times s}$$

则容易验证 HK 为 $\mathcal{R}(S_1, \dots, S_r)|_{U'}$ 的生成元矩阵, 从而 $\mathcal{R}(S_1, \dots, S_r)$ 是局部有限生成的。

综上所述, 若 \mathcal{F}_1 与 \mathcal{F}_3 凝聚, 则 \mathcal{F}_2 也凝聚。 \square

推论 3.5.7. 设 \mathcal{F} 是拓扑空间 X 上的凝聚 \mathcal{A} -模层, 则

- (1) 任意 $n \geq 1$, $\mathcal{F}^{\oplus n}$ 也是凝聚 \mathcal{A} -模层;
- (2) 对 X 的任意开集 U , 以及任意 $F_1, F_2, \dots, F_p \in \mathcal{F}(U)$, 则关系层 $\mathcal{R}(F_1, F_2, \dots, F_p)$ 也是凝聚的 ($\mathcal{A}|_U$ -模层)。

证明. (1) 注意短正合列 $0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F} \oplus \mathcal{F}^{\oplus(n-1)} \rightarrow \mathcal{F}^{\oplus(n-1)} \rightarrow 0$, 反复利用性质 3.5.6 作归纳即可。

(2) 由 (1) 知 $(\mathcal{F}|_U)^{\oplus p}$ 是凝聚的, 因此 $\mathcal{R}(F_1, F_2, \dots, F_p)$ 作为 $(\mathcal{F}|_U)^{\oplus p}$ 的局部有限生成子层, 也是凝聚的。 \square

推论 3.5.8. 若拓扑空间 X 上的 \mathcal{A} -模层 \mathcal{M} 是凝聚的, 并且 \mathcal{M} 的子层 \mathcal{F}, \mathcal{G} 也是凝聚的, 那么 $\mathcal{F} \cap \mathcal{G}$ 也为凝聚 \mathcal{A} -模层。

证明. 考虑层同态 $\varphi: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{M}/\mathcal{G}$ 为如下复合:

$$\mathcal{F} \hookrightarrow \mathcal{M} \twoheadrightarrow \mathcal{G}$$

注意 \mathcal{F} 与 \mathcal{M}/\mathcal{G} 都是凝聚的, 再注意 $\mathcal{F} \cap \mathcal{G} \cong \ker \varphi$, 因此 $\mathcal{F} \cap \mathcal{G}$ 也凝聚。 \square

3.6 Oka 凝聚定理

本节介绍多复变函数论、复几何中的重要结果：对于复流形 X ，解析函数环层 \mathcal{O}_X 是凝聚层。这也是凝聚层的重要例子。注意凝聚性是局部性质，于是我们不妨 $X = \mathbb{C}^n$ 。我们只需要证明，对 \mathbb{C}^n 的任意开子集 U ，以及任意 $F_1, F_2, \dots, F_q \in \mathcal{O}_X(U)$ ，关系层 $\mathcal{R}(F_1, F_2, \dots, F_q)$ 是局部有限生成的。

现在，对任意 $x \in X$ ，由于 $\mathcal{O}_{X,x}$ 为诺特环，从而 $\mathcal{R}(F_1, \dots, F_q)_x \subseteq \mathcal{O}_{X,x}^{\oplus q}$ 为有限生成 $\mathcal{O}_{X,x}$ -模。但这与希望要证的“ $\mathcal{R}(F_1, \dots, F_q)$ 局部有限生成”还差些东西。我们暂时只能说明存在 x 的邻域 $U' \subseteq U$ ，以及有限多个 $\mathcal{O}_X^{\oplus q}$ 在 U' 的截面，使得它们在 x 的芽生成 $\mathcal{R}(F_1, \dots, F_q)_x$ ；但我们希望对 x 附近的任何点 y ，这些截面在 y 处的芽也生成 $\mathcal{R}(F_1, \dots, F_q)_y$ ——这是不显然的。

引理 3.6.1. (重要引理)

对于 $n \geq 2$ ，记 $\mathbb{C}^n = \{(z', z_n) \mid z' = (z_1, \dots, z_{n-1}) \in \mathbb{C}^{n-1}, z_n \in \mathbb{C}\}$ ，设 F_1, F_2, \dots, F_q 为定义在 $(0,0) \in \mathbb{C}^n$ 附近的解析函数，则存在 $(0,0)$ 的邻域 $\Delta := \Delta' \times \Delta_n$ ，其中 Δ' 与 Δ_n 分别为 \mathbb{C}^{n-1} 与 \mathbb{C} 中的以原点为中心的多圆柱，使得对任意 $w = (w', w_n) \in \Delta$ ， $\{(K^1, K^2, \dots, K^q) \in \mathcal{O}_{\Delta, w}^{\oplus q} \mid K^j \in \mathcal{K}, \forall 1 \leq j \leq q\}$ 是 $\mathcal{O}_{\Delta, w}$ -模 $\mathcal{R}(F_1, F_2, \dots, F_q)_w$ 的一组生成元，其中

$$\mathcal{K} := \{f(z', z) \in \mathcal{O}_{\Delta', w'}[z_n] \mid \deg_{z_n} f \leq \mu\}$$

$$\mu := \max \left\{ \text{Ord}_{z_n}(F_k)_0 \mid 1 \leq k \leq q \right\}$$

证明. 对 F_1, F_2, \dots, F_q 在原点处使用 Weierstrass 预备定理，适当乘以原点附近的可逆解析函数（不会改变 $\mathcal{R}(F_1, \dots, F_q)$ 在原点的足够小邻域的限制），不妨设 $F_1, \dots, F_q \in \mathcal{O}_{\Delta', 0}[z_n]$ 为定义在原点附近的关于 z_n 的 Weierstrass 多项式。此外，不妨

$$\deg_{z_n} F_q = \mu$$

Step 1 对于 $w = (w', w_n) \in \Delta$ ，关于 z_n 的 Weierstrass 多项式 F_q （通过平移）自然也视为关于 $(z_n - w_n)$ 的 Weierstrass 多项式（次数仍为 μ ）。对 F_q 在 w 处使用 Weierstrass 预备定理，令 $F_q = f'f''$ ，其中 $f' \in \mathcal{O}_{\Delta', w'}[z_n]$ 为关于 $(z_n - w_n)$ 的 Weierstrass 多项式， $f'' \in \mathcal{O}_{\Delta, w}$ 在 w 附近可逆。注意 F_q 与 f' 都为 Weierstrass 多项式，从而由引理 1.4.3 可知 $f'' \in \mathcal{O}_{\Delta', w'}[z_n]$ 为关于 $(z_n - w_n)$ 的多项式。分别记 μ', μ'' 为多项式 f', f'' 关于 z_n 的次数，则 $\mu = \mu' + \mu''$ 。

Step 2 我们习惯将 $\mathcal{R}(F_1, F_2, \dots, F_q)_w$ 中的元素记成列向量。对于任意的 $\begin{pmatrix} g^1 \\ g^2 \\ \vdots \\ g^q \end{pmatrix} \in \mathcal{R}(F_1, F_2, \dots, F_q)_w$,

对于 $1 \leq j \leq q-1$ ，将 g^j 除以 Weierstrass 多项式 $F_{q,w}$ ，由 Weierstrass 除法定理，得

$$g^j = F_{q,w} T^j + R^j \quad (1 \leq j \leq q-1)$$

其中 $T^j \in \mathcal{O}_{\Delta, w}$ 以及 $R^j \in \mathcal{O}_{\Delta', w'}[z_n]$, 且 $\deg_{z_n} R^j < \mu'$. 而对于 $j = q$, 令

$$R^q := g^q + \sum_{j=1}^{q-1} F_{j,w} T^j$$

则容易验证

$$\begin{pmatrix} g^1 \\ g^2 \\ \vdots \\ g^q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{q,w} & & & \\ & F_{q,w} & & \\ & & \ddots & \\ & & & F_{q,w} \\ -F_{1,w} & -F_{2,w} & \cdots & -F_{q-1,w} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T^1 \\ T^2 \\ \vdots \\ T^{q-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} R^1 \\ R^2 \\ \cdots \\ R^q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{q,w} & & & R^1 \\ & \ddots & & \vdots \\ & & F_{q,w} & R^{q-1} \\ -F_{1,w} & \cdots & -F_{q-1,w} & R^q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T^1 \\ \vdots \\ T^{q-1} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Step 3 我们得到了 q 阶方阵 $G := \begin{pmatrix} F_{q,w} & & & R^1 \\ & \ddots & & \vdots \\ & & F_{q,w} & R^{q-1} \\ -F_{1,w} & \cdots & -F_{q-1,w} & R^q \end{pmatrix}$. 容易验证 G 的每一列都

位于 $\mathcal{R}(F_1, F_2, \dots, F_q)_w$ 之中; 并且除了第 (q, q) -分量 $G_q^q = R_q$, G 的其余矩阵元都位于 \mathcal{K} 中, 即为次数不超过 μ 的关于 z_n 的 $\mathcal{O}_{\Delta', w'}$ -系数的多项式。最后, 我们适当调整矩阵 G 的最后一列。

注意到 G 的第 q 列位于 $\mathcal{R}(F_1, F_2, \dots, F_q)_w$ 之中, 以及 $F_q = f' f''$, 从而

$$\sum_{j=1}^{q-1} F_{j,w} R^j + f' f'' R^q = 0$$

注意 $\deg_{z_n} \left(\sum_{j=1}^{q-1} F_{j,w} R^j \right) < \mu + \mu'$, 因此 $f' f'' R^q \in \mathcal{O}_{\Delta', w'}[z_n]$ 并且 $\deg_{z_n}(f' f'' R^q) < \mu + \mu'$. 又因为 f' 是关于 z_n 的次数为 μ' 的 Weierstrass 多项式, 从而由引理 1.4.3 可知, $f'' R^q \in \mathcal{O}_{\Delta', w'}[z_n]$, 并且 $\deg_{z_n}(f'' R^q) < \mu$. 从而考虑

$$\begin{pmatrix} g^1 \\ g^2 \\ \vdots \\ g^q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{q,w} & & & f'' R^1 \\ & \ddots & & \vdots \\ & & F_{q,w} & f'' R^{q-1} \\ -F_{1,w} & \cdots & -F_{q-1,w} & f'' R^q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T^1 \\ \vdots \\ T^{q-1} \\ 1/f'' \end{pmatrix}$$

易知上式中的矩阵的每个矩阵元都位于 \mathcal{K} , 并且每一列都位于 $\mathcal{R}(F_1, F_2, \dots, F_q)_w$, 因此 $\begin{pmatrix} g^1 \\ \vdots \\ g^n \end{pmatrix}$ 由上述矩阵 (q 个列向量) $\mathcal{O}_{\Delta, w}$ -生成。从而证毕。 \square

定理 3.6.2. (Oka 凝聚定理)

对于复流形 X , X 上的解析函数环层 \mathcal{O}_X 是凝聚的。

证明. 如之前所述, 不妨 $X = \mathbb{C}^n$, 以及对于任意开集 $U \subseteq \mathbb{C}^n$ 以及任意 $F_1, \dots, F_q \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}(U)$, 我们不妨 U 是以原点为中心的多圆柱区域, 不妨 F_1, \dots, F_q 为关于 z_n 的 Weierstrass 多项式。

对 $X = \mathbb{C}^n$ 的维数 n 归纳。 $n = 0$ 时平凡。 对于 $n \geq 1$, 如果 $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^{n-1}}$ 是凝聚的, 则对于 $(0,0) \in \mathbb{C}^{n-1} \times \mathbb{C}$ 的多圆柱邻域 $\Delta = \Delta' \times \Delta_n$, 以及 $F_1, F_2, \dots, F_q \in \mathcal{O}_{\Delta'}[z_n]$ 为 Weierstrass 多项式, 它们关于 z_n 的最高次数记为 μ . 只需证 $\mathcal{F}(F_1, F_2, \dots, F_q)$ 局部有限生成。 对于任意的 $w \in \Delta$,

以及 $\begin{pmatrix} g^1 \\ \vdots \\ g^q \end{pmatrix} \in \mathcal{R}(F_1, F_2, \dots, F_q)_w$, 由重要引理 3.6.1 可知, 存在 $q \times (\mu + 1)$ 矩阵 $U = (U_\alpha^j)_{\substack{1 \leq j \leq q \\ 0 \leq \alpha \leq \mu}}$, 使得

$$\begin{pmatrix} g^1 \\ \vdots \\ g^q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_0^1 & \cdots & U_\mu^1 \\ \vdots & & \vdots \\ U_0^q & \cdots & U_\mu^q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_n^0 \\ \vdots \\ z_n^\mu \end{pmatrix}$$

其中 $U_\alpha^j \in \mathcal{O}_{\Delta', w'}$, 视为定义在 $w' \in \Delta'$ 附近的解析函数, 自然也视为定义在 $w \in \Delta$ 附近的 (不显含 z_n 的) 解析函数。 注意 $F_k \in \mathcal{O}_{\Delta'}[z_n]$ 也为关于 z_n 的 (次数不超过 μ 的) (Weierstrass) 多项式, 从而

$$(F_1, \dots, F_q) = (z_n^0, \dots, z_n^\mu) \begin{pmatrix} H_1^0 & \cdots & H_q^0 \\ \vdots & & \vdots \\ H_1^\mu & \cdots & H_q^\mu \end{pmatrix}$$

即得 $(\mu + 1) \times q$ 的矩阵 H , H 的每个矩阵元都位于 $\mathcal{O}_{\Delta'}$ 之中, 当然也是定义在 $w \in \Delta$ 附近的 (不显含 z_n 的) 解析函数。 注意到

$$0 = (F_1, \dots, F_q) \begin{pmatrix} g^1 \\ \vdots \\ g^q \end{pmatrix} = (z_n^0, \dots, z_n^\mu) H U \begin{pmatrix} z_n^0 \\ \vdots \\ z_n^\mu \end{pmatrix} =: \sum_{k=0}^{2\mu} L_k(U) z_n^k$$

因此比较 z_n 各次幂的系数, 知 $L_k(U) = 0, \forall 0 \leq k \leq 2\mu$.

我们将矩阵 U 视为层 $\mathcal{O}_{\Delta'}^{\oplus q(\mu+1)}$ 在 w' 附近的截面, 对于 $0 \leq k \leq 2\mu$, L_k 为层同态

$$L_k : \mathcal{O}_{\Delta'}^{\oplus q(\mu+1)}|_{\Omega'} \rightarrow \mathcal{O}_{\Delta'}|_{\Omega'}$$

并且 L_k 只与 F_1, F_2, \dots, F_q 有关。 其中 Ω' 为 w' 在 Δ' 中的 (足够小、不断缩小的) 邻域。

由归纳假设, $\mathcal{O}_{\Delta'}$ 是凝聚的, 因此 $\mathcal{O}_{\Delta'}^{\oplus q(\mu+1)}$ 也凝聚, 因此对任意 $0 \leq k \leq 2\mu$, 核层 $\ker L_k$ 也凝聚, 从而 $\bigcap_{k=0}^{2\mu} \ker L_k$ 凝聚, 故局部有限生成。 因此存在截面 $U_1, U_2, \dots, U_N \in \mathcal{O}_{\Delta'}^{\oplus q(\mu+1)}(\Omega')$,

使得 $\{U_1, U_2, \dots, U_N\}$ 为 $\mathcal{O}_{\Delta'}^{\oplus q(\mu+1)}|_{\Omega'}$ 的子层 $\bigcap_{k=0}^{2\mu} \ker L_k$ 的生成元。其中对于 $1 \leq l \leq N$, U_l 为 $q \times (\mu+1)$ 矩阵, 其矩阵元取值于 $\mathcal{O}_{\Delta'}(\Omega')$ 。

容易验证, 以下 N 个 q 维列向量

$$\left\{ U_l \begin{pmatrix} z_n^0 \\ \vdots \\ z_n^\mu \end{pmatrix} \mid 1 \leq l \leq N \right\}$$

构成关系层 $\mathcal{R}(F_1, \dots, F_q)|_{\Omega'}$ 的一组生成元。这就证明了 \mathcal{O}_{Δ} 的凝聚性, 证毕。 \square

3.7 层的上同调

本节开始, 我们讨论拓扑空间 X 上的 \mathcal{A} -模层, 即考虑范畴 $\mathcal{A}\text{-Mod}_X$. 先简单回顾一些同调代数的记号、结论。对于 X 上的 \mathcal{A} -模层 \mathcal{F} , \mathcal{F} 的**消解** (resolution) 是指形如下述的 $\mathcal{A}\text{-Mod}_X$ 中的正合序列:

$$0 \rightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{j} \mathcal{G}_0 \xrightarrow{d^0} \mathcal{G}_1 \xrightarrow{d^1} \dots$$

注意范畴 \mathbf{Ab} 是 Abel 范畴, 因此我们可以考虑该范畴中的**内射对象** (injective object), 即“**内射层**” (injective sheaf)。具体地, Abel 群层 \mathcal{F} 是内射的, 若对任意的层单同态 $i: \mathcal{F} \hookrightarrow \mathcal{G}$, 以及任意的层同态 $\varphi: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{H}$, 都存在层同态 $\psi: \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H}$, 使得 $\varphi = \psi \circ i$, 如下图:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F} & \xhookrightarrow{i} & \mathcal{G} \\ & \searrow \varphi & \downarrow \exists \psi \\ & & \mathcal{H} \end{array}$$

我们承认以下事实:

定理 3.7.1. 对于拓扑空间 X , 以及 X 上的交换环层 \mathcal{A} , 范畴 $\mathcal{A}\text{-Mod}_X$ 是**足够内射的**, 即对于 X 上任意的 \mathcal{A} -模层 \mathcal{F} , 都存在内射层 \mathcal{I} , 以及层单同态 $\mathcal{F} \hookrightarrow \mathcal{I}$.

由同调代数, 容易知道 $\mathcal{A}\text{-Mod}_X$ 足够内射, 当且仅当对任何 \mathcal{A} -模层 \mathcal{F} , 都存在 \mathcal{F} 的**内射消解** (injective resolution)

$$0 \rightarrow \mathcal{F} \hookrightarrow \mathcal{I}^0 \rightarrow \mathcal{I}^1 \rightarrow \mathcal{I}^2 \rightarrow \dots$$

即上述序列正合, 并且 \mathcal{I}_k 为内射层 ($\forall k \geq 0$)。

定义 3.7.2. (层的上同调)

对于拓扑空间 X 上的 \mathcal{A} -模层 \mathcal{F} , 任取 \mathcal{F} 的一个内射消解 $0 \rightarrow \mathcal{F} \hookrightarrow \mathcal{I}^\bullet$:

$$0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{I}^0 \xrightarrow{d} \mathcal{I}^1 \xrightarrow{d} \mathcal{I}^2 \rightarrow \dots$$

将函子 $\Gamma(X, -)$ (见注记 3.3.2) 作用于其上, 诱导了如下的 $\mathcal{A}(X)$ -模上链复形

$$0 \rightarrow \Gamma(X, \mathcal{F}) \hookrightarrow \Gamma(X, \mathcal{I}^0) \xrightarrow{d} \Gamma(X, \mathcal{I}^1) \xrightarrow{d} \Gamma(X, \mathcal{I}^2) \rightarrow \dots$$

定义 \mathcal{F} 的第 q 阶上同调群

$$H^q(X, \mathcal{F}) := H^q(\Gamma(X, \mathcal{I}^\bullet))$$

由函子 $\Gamma(X, -)$ 的左正合性可知,

$$H^0(X, \mathcal{F}) = \frac{\ker(d : \Gamma(X, \mathcal{I}^0) \rightarrow \Gamma(X, \mathcal{I}^1))}{\operatorname{Im}(0 \rightarrow \Gamma(X, \mathcal{I}^0))} \cong \operatorname{Im}(\Gamma(X, \mathcal{F}) \hookrightarrow \Gamma(X, \mathcal{I}^0)) \cong \Gamma(X, \mathcal{F}) = \mathcal{F}(X)$$

即为 \mathcal{F} 的整体截面。

注记 3.7.3. 由同调代数的有关知识, 上述 $H^q(X, \mathcal{F})$ 是良定的, 与 \mathcal{F} 的内射消解无关。

此外, 若 X 上有 \mathcal{A} -模层短正合列 $0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H} \rightarrow 0$, 则由同调代数的有关结果, 可分别取 $\mathcal{F}, \mathcal{G}, \mathcal{H}$ 的适当的内射消解 $0 \rightarrow \mathcal{X} \hookrightarrow \mathcal{I}_\mathcal{X}^\bullet$ ($\mathcal{X} = \mathcal{F}, \mathcal{G}, \mathcal{H}$), 使得存在链复形正合列

$$0 \rightarrow \mathcal{I}_\mathcal{F}^\bullet(X) \rightarrow \mathcal{I}_\mathcal{G}^\bullet(X) \rightarrow \mathcal{I}_\mathcal{H}^\bullet(X) \rightarrow 0$$

该链复形短正合列诱导相应同调的长正合列, 即有:

定理 3.7.4. 设 X 为拓扑空间, 则 X 上的 \mathcal{A} -模层短正合列 $0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H} \rightarrow 0$ 诱导了层上同调的长正合列:

$$0 \rightarrow H^0(X, \mathcal{F}) \rightarrow H^0(X, \mathcal{G}) \rightarrow H^0(X, \mathcal{H}) \rightarrow H^1(X, \mathcal{F}) \rightarrow \dots$$

层上同调的定义简单, 但是难以具体计算。我们希望有更加方便的计算层上同调的方法。

定义 3.7.5. (松弛层)

称拓扑空间 X 上的 \mathcal{A} -模层 \mathcal{S} 是松弛的 (*flabby* 或 *flasque*), 如果对 X 的任意开集 U , 限制同态 $\mathcal{S}(X) \rightarrow \mathcal{S}(U)$ 是满射。

对于 \mathcal{A} -模层 \mathcal{F} ，望文生义， \mathcal{F} 的**松弛消解** (flabby resolution) 是指层正合列

$$0 \rightarrow \mathcal{F} \hookrightarrow \mathcal{S}^0 \rightarrow \mathcal{S}^1 \rightarrow \mathcal{S}^2 \rightarrow \dots$$

其中每个 $\mathcal{S}^k (k \geq 0)$ 都是松弛层。

我们承认如下事实：

定理 3.7.6. 对于 X 上的 \mathcal{A} -模层 \mathcal{F} ，若 $0 \rightarrow \mathcal{F} \hookrightarrow \mathcal{S}^\bullet$ 为 \mathcal{F} 的一个松弛消解，则成立

$$H^\bullet(X, \mathcal{F}) \cong H^q(\Gamma(X, \mathcal{S}^\bullet))$$

特别地，若 \mathcal{F} 为松弛层，则 $H^q(X, \mathcal{F}) = 0$ 对任意 $q \geq 1$ 成立。

也就是说，我们可以利用松弛消解来计算层上同调。然而，松弛消解一定存在吗？答案是肯定的。

记号 3.7.7. (典范松弛层)

设 \mathcal{F} 为 X 上的 \mathcal{A} -模层，对于 X 的开集 U ，记

$$\text{God}(\mathcal{F})(U) := \left\{ f : U \rightarrow \prod_{x \in U} \mathcal{F}_x \mid f(x) \in \mathcal{F}_x, \forall x \in U \right\}$$

则 $\text{God}(\mathcal{F})$ 为 X 上的松弛层，并且有典范的层单同态

$$j : \mathcal{F} \hookrightarrow \text{God}(\mathcal{F})$$

称 $\text{God}(\mathcal{F})$ 为关于 \mathcal{F} 的**典范松弛层**，也称为 *Godement* 构造。

证明. $\text{God}(\mathcal{F})$ 的松弛性几乎显然。典范同态 $j : \mathcal{F} \hookrightarrow \text{God}(\mathcal{F})$ 如下给出：对 X 的任意开子集 U ，

$$\begin{aligned} j(U) : \mathcal{F}(U) &\rightarrow \text{God}(\mathcal{F})(U) \\ s &\mapsto (x \mapsto s_x) \end{aligned}$$

易知如此定义的 j 是层单同态。 □

也就是说 $\mathcal{A}\text{-Mod}_X$ 中的任何对象都是某个松弛层的子层，即“足够松弛”。从而由同调代数的标准技术（与“足够内射 \iff 存在内射消解”完全一样）可知， X 上的任何 \mathcal{A} -模层都存在松弛消解。

在一些更特殊的情形下，我们可以去计算某些层的上同调。回顾：设 $\mathcal{U} = \{U_\alpha \mid \alpha \in \mathcal{I}\}$ 为拓扑空间 X 的一族开覆盖，称 X 的另一族开覆盖 $\mathcal{V} = \{V_\beta \mid \beta \in \mathcal{J}\}$ 为 \mathcal{U} 的**开加细** (refinement)，

若存在指标集之间的映射 $\rho: \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{I}$, 使得对任意 $\beta \in \mathcal{J}$, 都有 $V_\beta \subseteq U_{\rho(\beta)}$; 称 \mathcal{U} 是**局部有限**的, 若任意 $x \in X$, 存在 x 的开邻域 U , 使得 $\{\alpha \in \mathcal{I} \mid U_\alpha \cap U \neq \emptyset\}$ 为有限集。

拓扑空间 X 称为**仿紧** (paracompact) 的, 如果 X 是 Hausdorff 的, 并且 X 的任何开覆盖都存在局部有限开加细。众所周知, 度量空间都是仿紧的, 紧空间都是仿紧的, 仿紧空间都是正规的。

定义 3.7.8. (单位分解环层)

设 X 为仿紧空间, \mathcal{A} 为 X 上的交换环层, 称 \mathcal{A} 为 **fine sheaf**, 若对 X 的任何开覆盖 $\mathcal{U} = \{U_\alpha \mid \alpha \in \mathcal{I}\}$, 存在一族截面 $f_\alpha \in \mathcal{A}(X)$, 使得

$$\text{supp}(f_\alpha) := \overline{\{x \in X \mid (f_\alpha)_x \neq 0\}} \subseteq U_\alpha$$

$$\sum_{\alpha \in \mathcal{I}} f_\alpha \equiv 1 \in \mathcal{A}(X)$$

其中上述求和是局部有限的。

Fine sheaf 的典型例子是光滑流形上众所周知的单位分解定理:

例子 3.7.9. (单位分解定理)

设 X 为光滑流形, C^∞ 为 X 上的光滑函数环层, 则 C^∞ 是 **fine sheaf**。

事实上, 若仿紧空间 X 上的环层 \mathcal{A} 是 fine sheaf, 则任何 \mathcal{A} -模层都是上同调平凡的:

定理 3.7.10. 设仿紧空间 X 上的环层 \mathcal{A} 为 **fine sheaf**, 则对于任意 \mathcal{A} -模层 \mathcal{F} ,

$$H^q(X, \mathcal{F}) = 0 \quad (\forall q \geq 1)$$

证明. 任取 \mathcal{F} 的内射消解 $0 \rightarrow \mathcal{F} \hookrightarrow \mathcal{I}^\bullet$, 其中 $d^k: \mathcal{I}^k \rightarrow \mathcal{I}^{k+1} (\forall k \geq 0)$, 则对任意 $q \geq 1$, 有

$$H^q(X, \mathcal{F}) \cong \frac{\ker(d_X^q: \mathcal{I}^q(X) \rightarrow \mathcal{I}^{q+1}(X))}{\text{Im}(d_X^{q-1}: \mathcal{I}^{q-1}(X) \rightarrow \mathcal{I}^q(X))}$$

而对于任意截面 $s \in \ker d_X^q \subseteq \mathcal{I}^q(X)$, 由 $\dots \rightarrow \mathcal{I}^{q-1} \rightarrow \mathcal{I}^q \rightarrow \mathcal{I}^{q+1} \rightarrow \dots$ 在 \mathcal{I}^q 处的正合性可知, 存在 X 的开覆盖 $\mathcal{U} = \{U_\alpha \mid \alpha \in \mathcal{J}\}$, 以及 $s'_\alpha \in \mathcal{I}^{q-1}(U_\alpha)$, 使得 $d_{U_\alpha}^{q-1}(s'_\alpha) = s|_{U_\alpha}$.

由于 \mathcal{A} 为 fine sheaf, 从而取 $f_\alpha \in \mathcal{A}(X)$, 使得 $\text{supp}(f_\alpha) \subseteq U_\alpha$, 并且 $\sum_{\alpha \in \mathcal{J}} f_\alpha = 1$ 为局部有限和。从而有

$$s' := \sum_{\alpha \in \mathcal{J}} f_\alpha s'_\alpha \in \mathcal{I}^{q-1}(X)$$

并且 $d_X^{q-1}s' = s$. 这表明 $H^q(X, \mathcal{F}) = 0$. □

推论 3.7.11. 设 X 为光滑流形, $E \rightarrow X$ 为 X 上的光滑向量丛, 自然也视为 X 上的 C^∞ -模层. 则对任意 $q \geq 1$,

$$H^q(X, E) = 0$$

看来光滑流形上“常见的”层的上同调都是平凡的。
关于层上同调, 以下是同调代数的基本结果:

定理 3.7.12. (*de Rham-Weil 定理*)

设 \mathcal{F} 为拓扑空间 X 上的 \mathcal{A} -模层, 若有 \mathcal{A} -模层正合列

$$0 \rightarrow \mathcal{F} \hookrightarrow \mathcal{L}^0 \rightarrow \mathcal{L}^1 \rightarrow \mathcal{L}^2 \rightarrow \mathcal{L}^3 \rightarrow \dots$$

其中对任意 $n \geq 0$ 以及任意 $q \geq 1$, 都成立 $H^q(X, \mathcal{L}^n) = 0$, 那么有同构

$$H^\bullet(X, \mathcal{F}) \cong H^\bullet(\mathcal{L}^\bullet(X))$$

证明. 注意利用定理3.7.4, 之后是同调代数的标准技术。从略。 □

此定理中的 $\mathcal{L}^n (n \geq 0)$ 的任何 ≥ 1 阶上同调都平凡, 这样的层称为**零调的** (acyclic). 类似地, \mathcal{F} 的消解 $0 \rightarrow \mathcal{F} \hookrightarrow \mathcal{L}^\bullet$ 称为**零调消解**. 此定理表明, 我们可以用零调消解来计算层上同调。

重要例子 3.7.13. (*de Rham 上同调*)

设 X 为光滑流形, \mathbb{R}_X 为 X 上的局部常值层, \mathcal{E}_X^p 为 X 上的微分 p -形式层 (视为 \mathbb{R}_X -模层), 则外微分 $d: \mathcal{E}_X^p \rightarrow \mathcal{E}_X^{p+1}$ 为 \mathcal{R} -模层同态。注意到对任意 $q \geq 0$, \mathcal{E}_X^q 是零调的, 并且有层正合列

$$0 \rightarrow \mathbb{R}_X \hookrightarrow \mathcal{E}_X^0 \xrightarrow{d} \mathcal{E}_X^1 \xrightarrow{d} \mathcal{E}_X^2 \rightarrow \dots \quad (*)$$

因此由 *de Rham-Weil* 定理可知, $H^\bullet(X, \mathbb{R}_X) \cong H_{\text{DR}}^\bullet(X; \mathbb{R})$. 即 X 的 *de Rham* 上同调同构于局部常值层 \mathbb{R}_X 的上同调。

证明. 注意到 \mathcal{E}_X^q 有自然的 $\mathcal{E}_X^0 = C^\infty$ -模层结构, 从而由定理3.7.10可知其零调。上链复形 $(*)$ 的正合性是因为微分几何中的局部 Poincaré 引理。 □

重要例子 3.7.14. (*Dolbeault* 上同调)

设 X 为复流形, Ω_X^p 为 X 上的全纯 p -形式层 (即 $\bar{\partial}$ -闭的 $(p,0)$ -形式), $\mathcal{E}_X^{p,q}$ 为 X 上的光滑 (p,q) 形式层, 则 $\mathcal{E}_X^{p,q}$ 是零调的。再注意对任意 $p \geq 0$, 有层正合列

$$0 \rightarrow \Omega_X^p \hookrightarrow \mathcal{E}_X^{p,0} \xrightarrow{\bar{\partial}} \mathcal{E}_X^{p,1} \xrightarrow{\bar{\partial}} \mathcal{E}_X^{p,2} \xrightarrow{\bar{\partial}} \mathcal{E}_X^{p,3} \rightarrow \cdots \quad (**)$$

从而由 *de Rham-Weil* 定理可知, 对任意 $p, q \geq 0$, 有同构

$$H^q(X, \Omega_X^p) \cong H_{\bar{\partial}}^{p,q}(X, \mathbb{C})$$

即第 (p, q) 阶 *Dolbeault* 上同调同构于全纯 p -形式层的第 q 阶上同调。

证明. 注意到上链复形 $(**)$ 的正合性是由 *Dolbeault* 引理保证的。□

注记 3.7.15. (奇异上同调)

回顾代数拓扑当中“奇异上同调”的概念。对于光滑流形 X 的任意开集 U , 考虑 U 上的奇异 q -上链之全体 $C_{\text{sing}}^q(U)$, 这给出了 X 上的奇异 q -上链层 $\mathcal{C}_{\text{sing}}^q$. 显然 $\mathcal{C}_{\text{sing}}^q$ 是松弛层。事实上我们有松弛消解

$$0 \rightarrow \mathbb{Z}_X \hookrightarrow \mathcal{C}_{\text{sing}}^0 \xrightarrow{d} \mathcal{C}_{\text{sing}}^1 \xrightarrow{d} \mathcal{C}_{\text{sing}}^2 \rightarrow \cdots$$

从而得 $H_{\text{sing}}^q(X, \mathbb{Z}) \cong H^q(X, \mathbb{Z}_X)$, 即整系数奇异上同调同构于局部常值层 \mathbb{Z}_X 的上同调。

类似地, \mathbb{R} -系数奇异上同调同构于局部常值层 \mathbb{R}_X 的上同调。特别地, 我们有 *de Rham* 定理: 对于光滑流形 X , 则对任意 $q \geq 0$, 有

$$H_{\text{DR}}^q(X, \mathbb{R}) \cong H^q(X, \mathbb{R}_X) \cong H_{\text{sing}}^q(X, \mathbb{R})$$

奇异上同调、*de Rham* 上同调都同构于局部常值层 \mathbb{R}_X 的上同调。

3.8 Čech 上同调

设 X 为拓扑空间, \mathcal{A} 为 X 上的交换环层, \mathcal{F} 为 \mathcal{A} -模层。对于 X 的开覆盖 $\mathcal{U} = \{U_\alpha \mid \alpha \in \mathcal{I}\}$, 我们记

$$U_{\alpha_0 \alpha_1 \cdots \alpha_k} := \bigcap_{j=0}^k U_{\alpha_j} \quad (\forall \alpha_0, \dots, \alpha_k \in \mathcal{I})$$

定义 3.8.1. (*Čech* 上同调)

记号同上, 并且给定开覆盖 \mathcal{U} 的指标集 \mathcal{I} 上的一个良序 \preceq , 则对任意 $q \geq 0$, 记

$$C^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}) := \prod_{\substack{(\alpha_0, \dots, \alpha_q) \in \mathcal{I}^{q+1} \\ \alpha_0 \prec \alpha_1 \prec \dots \prec \alpha_q}} \mathcal{F}(U_{\alpha_0 \dots \alpha_q})$$

对于 $c \in C^q(\mathcal{U}, \mathcal{F})$, 记 c 的 $\mathcal{F}(U_{\alpha_0 \dots \alpha_q})$ -分量为 $c_{\alpha_0 \dots \alpha_q}$. 再定义 $\delta^q : C^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \rightarrow C^{q+1}(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ 为: 对任意 $c \in C^q(\mathcal{U}, \mathcal{F})$,

$$(\delta^q(c))_{\alpha_0 \alpha_1 \dots \alpha_{q+1}} := \sum_{k=0}^{q+1} (-1)^k c_{\alpha_0 \dots \widehat{\alpha}_k \dots \alpha_{q+1}}|_{U_{\alpha_0 \dots \alpha_{q+1}}}$$

则容易验证 $\{\delta^q : C^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \rightarrow C^{q+1}(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \mid q \geq 0\}$ 为上链复形, 称之为 *Čech* 上链复形, 相应的上同调

$$\check{H}^\bullet(\mathcal{U}, \mathcal{F}) := H^\bullet(C^\bullet(\mathcal{U}, \mathcal{F}))$$

称为 \mathcal{F} 关于开覆盖 \mathcal{U} 的 *Čech* 上同调.

容易验证上述定义的 δ^\bullet 满足 $\delta^2 = 0$, 从而 $(C^\bullet(\mathcal{U}, \mathcal{F}), \delta^\bullet)$ 的确为上链复形.

此外由定义容易看出, 若 \mathcal{U} 为有限覆盖, $|\mathcal{I}| = n < +\infty$, 那么 $C^n(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = 0$, 并且对任意 $q \geq n$ 有 $\check{H}^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = 0$.

例子 3.8.2. (第零阶 *Čech* 上同调)

记号同之前, 则有 $\check{H}^0(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = \ker \delta^0$. 而对于 $c \in C^0(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = \prod_{\alpha \in \mathcal{I}} \mathcal{F}(U_\alpha)$, 有 $(\delta^0 c)_{\alpha\beta} = (c_\beta - c_\alpha)|_{U_{\alpha\beta}}$, 因此有

$$\ker \delta^0 = \left\{ c = (c_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{I}} \in \prod_{\alpha \in \mathcal{I}} \mathcal{F}(U_\alpha) \mid c_\alpha|_{U_{\alpha\beta}} = c_\beta|_{U_{\alpha\beta}}, \forall \alpha, \beta \in \mathcal{I} \right\} \xrightarrow{\text{层的粘合公理}} \mathcal{F}(X)$$

即 $\check{H}^0(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \cong \mathcal{F}(X)$ 为 \mathcal{F} 的整体截面之全体.

例子 3.8.3. (去心多圆柱)

考虑 \mathbb{C}^2 的开子集 $X := \Delta \setminus \{0\}$, 其中 Δ 为多圆柱 $\{(z_1, z_2) \mid |z_1| < 1, z_2 < 1\}$. 设 $\mathcal{U} = \{U_1, U_2\}$ 为 X 的开覆盖, 其中 $\begin{cases} U_1 := \{z_1 \neq 0\} \cap \Delta = \mathbb{D}^* \times \mathbb{D} \\ U_2 := \{z_2 \neq 0\} \cap \Delta = \mathbb{D} \times \mathbb{D}^* \end{cases}$, 试计算 $\check{H}^\bullet(\mathcal{U}, \mathcal{O})$. 其中 \mathcal{O} 为 X 上的解析函数层.

解. 首先能够直接写出, $\check{H}^0(\mathcal{U}, \mathcal{O}) \cong \mathcal{O}(X)$, 以及对任意 $q \geq 2$, $\check{H}^q(\mathcal{U}, \mathcal{O}) = 0$ (因为只有两片覆

盖)。只需计算 $\check{H}^1(\mathcal{U}, \mathcal{O})$. 注意到

$$\begin{aligned}\mathcal{O}(U_1) &= \left\{ c(z_1, z_2) = \sum_{\substack{m \in \mathbb{Z} \\ n \geq 0}} a_{mn} z_1^m z_2^n \mid \text{该级数在 } U_1 \text{ 收敛} \right\} \\ \mathcal{O}(U_2) &= \left\{ c(z_1, z_2) = \sum_{\substack{m \geq 0 \\ n \in \mathbb{Z}}} a_{mn} z_1^m z_2^n \mid \text{该级数在 } U_2 \text{ 收敛} \right\} \\ \mathcal{O}(U_{12}) &= \left\{ c(z_1, z_2) = \sum_{m, n \in \mathbb{Z}} a_{mn} z_1^m z_2^n \mid \text{该级数在 } U_{12} \text{ 收敛} \right\}\end{aligned}$$

其中 $U_{12} := U_1 \cap U_2 = \mathbb{D}^* \times \mathbb{D}^*$. 注意 $\begin{cases} C^0(\mathcal{U}, \mathcal{O}) = \mathcal{O}(U_1) \oplus \mathcal{O}(U_2) \\ C^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}) = \mathcal{O}(U_{12}) \end{cases}$, 以及

$$\check{H}^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}) = \frac{C^1(\mathcal{U}, \mathcal{O})}{\text{Im}(\delta^0 : C^0(\mathcal{U}, \mathcal{O}) \rightarrow C^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}))}$$

直接用 δ^0 的定义容易验证

$$\text{Im } \delta^0 = \left\{ c_2 - c_1 \mid c_2 \in \mathcal{O}(U_2), c_1 \in \mathcal{O}(U_1) \right\} = \left\{ c(z_1, z_2) = \sum_{\substack{m, n \in \mathbb{Z} \\ m \geq 0 \text{ 或 } n \geq 0}} a_{mn} z_1^m z_2^n \mid \text{该级数在 } U_{12} \text{ 收敛} \right\}$$

因此立刻得到

$$\check{H}^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}) = \left\{ c(z_1, z_2) = \sum_{\substack{m, n \in \mathbb{Z} \\ m < 0 \text{ 且 } n < 0}} a_{mn} z_1^m z_2^n \mid \text{该级数在 } U_{12} \text{ 收敛} \right\}$$

□

例子 3.8.4. (复射影空间)

考虑复射影空间 \mathbb{CP}^1 的坐标覆盖 $\mathcal{U} = \{U_0, U_1\}$, 其中 $U_i = \{[z_0, z_1] \mid z_i \neq 0\}$, $i = 0, 1$. 记 \mathcal{O} 为 \mathbb{CP}^1 上的全纯函数层, 则有 $\check{H}^q(\mathcal{U}, \mathcal{O}) \cong \begin{cases} \mathbb{C} & q = 0 \\ 0 & q > 0 \end{cases}$.

解. 只需注意到 $U_1 \cong (\mathbb{C} \setminus \{0\}) \cup \{\infty\}$, 于是有

$$\begin{aligned}\mathcal{O}(U_0) &= \left\{ \sum_{n \geq 0} a_n z^n \mid \text{该级数在 } U_0 \text{ 收敛} \right\} \\ \mathcal{O}(U_1) &= \left\{ \sum_{n \leq 0} a_n z^n \mid \text{该级数在 } U_1 \text{ 收敛} \right\} \\ \mathcal{O}(U_{01}) &= \left\{ \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n z^n \mid \text{该级数在 } U_{01} \text{ 收敛} \right\}\end{aligned}$$

仿照上例的做法, 容易计算出来 (而且比上例容易).

□

性质 3.8.5. (*Čech* 上链复形的加细)

设 \mathcal{F} 为拓扑空间 X 上的 \mathcal{A} -模层, $\mathcal{U} := \{U_\alpha \mid \alpha \in \mathcal{I}\}$ 为 X 的一族开覆盖, $\mathcal{V} := \{V_\beta \mid \beta \in \mathcal{J}\}$ 为 X 的另一族开覆盖. 如果存在 $\rho: \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{I}$ 使得 \mathcal{V} 为 \mathcal{U} 的加细, 则存在自然的同态

$$\begin{aligned} \rho^q: C^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}) &\rightarrow C^q(\mathcal{V}, \mathcal{F}) \\ c &\mapsto (\rho^q c)_{\beta_0 \dots \beta_q} := c_{\rho(\beta_0) \dots \rho(\beta_q)}|_{V_{\beta_0 \dots \beta_q}} \end{aligned}$$

则上述 ρ^q 诱导了链映射

$$\rho^\bullet: C^\bullet(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \rightarrow C^\bullet(\mathcal{V}, \mathcal{F})$$

进而诱导了 *Čech* 上同调之间的同态 $H^\bullet(\rho): \check{H}^\bullet(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \rightarrow \check{H}^\bullet(\mathcal{V}, \mathcal{F})$.

证明. 显然成立. □

但是要注意一点, 对于如此的 \mathcal{U}, \mathcal{V} , 使得 \mathcal{V} 是 \mathcal{U} 的加细的 $\rho: \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{I}$ 未必唯一. 事实上若 $\rho_1, \rho_2: \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{I}$ 都使得 \mathcal{V} 为 \mathcal{U} 的加细, 则链映射

$$\rho_1^\bullet, \rho_2^\bullet: C^\bullet(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \rightarrow C^\bullet(\mathcal{V}, \mathcal{F})$$

是链同伦的 (我们承认这一点), 因此它们诱导的 *Čech* 上同调之间的同态相同: $H^\bullet(\rho_1) = H^\bullet(\rho_2)$. 从而我的可以定义如下:

定义 3.8.6. (层关于拓扑空间的 *Čech* 上同调)

对于拓扑空间 X 上的 \mathcal{A} -模层 \mathcal{F} , 定义 \mathcal{F} 关于拓扑空间 X 的 *Čech* 上同调

$$\check{H}^q(X, \mathcal{F}) := \varinjlim_{\mathcal{U}} H^q(\mathcal{U}, \mathcal{F})$$

其中 \mathcal{U} 取遍 X 的开覆盖, 并且若 \mathcal{V} 为 \mathcal{U} 的加细, 则 $\check{H}^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \rightarrow \check{H}^q(\mathcal{V}, \mathcal{F})$.

由此定义容易看出, $\check{H}^0(X, \mathcal{F}) = \mathcal{F}(X)$ 为整体截面.

据说容易验证, 对于开覆盖 \mathcal{U} 的加细 \mathcal{V} , 则 $\check{H}^1(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \rightarrow \check{H}^1(\mathcal{V}, \mathcal{F})$ 是单同态. 从而对任何开覆盖 \mathcal{U} , 有嵌入 $\check{H}^1(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \hookrightarrow \check{H}^1(X, \mathcal{F})$.

我们已经初步探讨不同开覆盖的 *Čech* 上同调之间的关系; 现在考虑不同的层的 *Čech* 上同调.

性质 3.8.7. 设 X 为拓扑空间, \mathcal{F}, \mathcal{G} 为 X 上的 \mathcal{A} -模层, \mathcal{U} 为 X 的一个开覆盖, $\varphi: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ 为 \mathcal{A} -模层同态。则 φ 自然诱导链映射

$$\varphi^\bullet: C^\bullet(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \rightarrow C^\bullet(\mathcal{U}, \mathcal{G})$$

证明. 这是显然的。 □

如果再有 \mathcal{U} 的加细 (\mathcal{V}, ρ) , 则有如下交换图:

$$\begin{array}{ccc} C^\bullet(\mathcal{U}, \mathcal{F}) & \xrightarrow{\varphi^\bullet} & C^\bullet(\mathcal{U}, \mathcal{G}) \\ \downarrow \rho^\bullet & & \downarrow \rho^\bullet \\ C^\bullet(\mathcal{V}, \mathcal{F}) & \xrightarrow{\varphi^\bullet} & C^\bullet(\mathcal{V}, \mathcal{G}) \end{array}$$

从而由余极限的泛性质可知, 层同态 φ 诱导了 Čech 上同调的同态 $\check{H}^\bullet(\varphi): \check{H}^\bullet(X, \mathcal{F}) \rightarrow \check{H}^\bullet(X, \mathcal{G})$.

现在, 对于拓扑空间 X 的开覆盖 \mathcal{U} , 以及 \mathcal{A} -模层短正合列

$$0 \rightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{G} \xrightarrow{\psi} \mathcal{H} \rightarrow 0$$

注意对 X 的任意开集 U , “取截面” 函子 $\Gamma(U, -)$ 是左正合的, 即有左短正合列

$$0 \rightarrow \mathcal{F}(U) \xrightarrow{\varphi_U} \mathcal{G}(U) \xrightarrow{\psi_U} \mathcal{H}(U)$$

但一般来说 $\Gamma(U, -)$ 不是右正合的, 即不保持满同态。但退而求其次, 我们有如下的短正合列:

$$0 \rightarrow \mathcal{F}(U) \xrightarrow{\varphi_U} \mathcal{G}(U) \xrightarrow{\psi_U} \text{Im } \psi_U \rightarrow 0$$

记号 3.8.8. 设 $\psi: \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H}$ 为拓扑空间 X 上的 \mathcal{A} -模层同态, $\mathcal{U} = \{U_\alpha \mid \alpha \in \mathcal{I}\}$ 为 X 上的一族开覆盖, 则对任意 $q \geq 0$, 记

$$C_\psi^q(\mathcal{U}, \mathcal{H}) := \prod_{\substack{\alpha_0, \dots, \alpha_q \in \mathcal{I} \\ \alpha_0 \prec \alpha_1 \prec \dots \prec \alpha_q}} \text{Im}(\psi_{U_{\alpha_0 \dots \alpha_q}}) \subseteq C^q(\mathcal{U}, \mathcal{H})$$

其中 \prec 为开覆盖指标集 \mathcal{I} 上的一个良序。

容易验证, Čech 微分 $\delta^q: C^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \rightarrow C^{q+1}(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ 在 $C_\psi^q(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ 上的限制给出了

$$\delta_\psi^q: C_\psi^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \rightarrow C_\psi^{q+1}(\mathcal{U}, \mathcal{F})$$

并且有上链复形 $(C_\psi^\bullet(\mathcal{U}, \mathcal{F}), \delta_\psi^\bullet)$. 因此有同调代数的标准工具, 得到以下:

性质 3.8.9. 设 \mathcal{U} 为拓扑空间 X 的一族开覆盖, 则 \mathcal{A} -模层短正合列

$$0 \rightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{G} \xrightarrow{\psi} \mathcal{H} \rightarrow 0$$

诱导了如下的上链复形短正合列:

$$0 \rightarrow C^\bullet(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \xrightarrow{\varphi^\bullet} C^\bullet(\mathcal{U}, \mathcal{G}) \xrightarrow{\psi^\bullet} C_\psi^\bullet(\mathcal{U}, \mathcal{H}) \rightarrow 0$$

进而诱导相应的同调对象的长正合列

$$0 \rightarrow \check{H}^0(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \rightarrow \check{H}^0(\mathcal{U}, \mathcal{G}) \rightarrow \check{H}_\psi^0(\mathcal{U}, \mathcal{H}) \rightarrow \check{H}^1(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \rightarrow \cdots$$

如果拓扑空间 X 是仿紧的, 我们会有更好的结果。以下定理述而不证:

定理 3.8.10. 设 X 为仿紧拓扑空间, $0 \rightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{G} \xrightarrow{\psi} \mathcal{H} \rightarrow 0$ 为 X 上的 \mathcal{A} -模层正合列, 则成立:

$$\varinjlim_{\mathcal{U}} \check{H}^\bullet(\mathcal{U}, \mathcal{H}) = \varinjlim_{\mathcal{U}} \check{H}_\psi^\bullet(\mathcal{U}, \mathcal{H})$$

其中 \mathcal{U} 取遍 X 的开覆盖。并且由此可以得出, 该层短正合列诱导 Čech 上同调的长正合列:

$$0 \rightarrow \check{H}^0(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \rightarrow \check{H}^0(\mathcal{U}, \mathcal{G}) \rightarrow \check{H}^0(\mathcal{U}, \mathcal{H}) \rightarrow \check{H}^1(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \rightarrow \cdots$$

证明. 从略。 □

目前我们介绍了层的 Čech 上同调, 在回顾之前所介绍的“通常的”层上同调——事实上这两者之间有如下联系:

定理 3.8.11. (Leray 零调定理)

设 $\mathcal{U} := \{U_\alpha \mid \alpha \in \mathcal{I}\}$ 为拓扑空间 X 的一族开覆盖, \mathcal{F} 为 X 上的 \mathcal{A} -模层。如果对 \mathcal{I} 中的任意有限个指标 $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_N$, 都有

$$H^q(U_{\alpha_0 \alpha_1 \dots \alpha_q}, \mathcal{F}|_{U_{\alpha_0 \alpha_1 \dots \alpha_q}}) = 0 \quad (\forall q \geq 1)$$

那么对任意 $q \geq 1$, 有同构 $H^q(X, \mathcal{F}) \cong \check{H}^q(\mathcal{U}, \mathcal{F})$.

更进一步, 若 X 是仿紧的, 我们还有

$$H^q(X, \mathcal{F}) \cong \check{H}^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \cong \check{H}^q(X, \mathcal{F})$$

证明. 从略. □

满足此定理条件的开覆盖 \mathcal{U} 也被称为“零调覆盖” (acyclic covering)。

重要例子 3.8.12. (光滑线丛)

设 X 为光滑流形, $E \rightarrow X$ 为 X 上的光滑线丛 (即 $\text{rank } E = 1$)。取 E 的一族局部平凡化开覆盖 $\mathcal{U} = \{U_\alpha \mid \alpha \in \mathcal{I}\}$, 并记相应的转移矩阵 (在这里是转移函数) 为 $g_{\alpha\beta}$. 考虑 \mathcal{E}_X^* 为 X 上的可逆光滑函数层, 即对任意开集 U , $\mathcal{E}_X^*(U) = \{f \in C^\infty(U) \mid f \text{ 在 } U \text{ 上恒不为零}\}$. 注意 \mathcal{E}_X^* 为在通常的函数乘法下构成 *Abel* 群层。

容易验证 $(g_{\alpha\beta})_{\alpha, \beta \in \mathcal{I}} \in C^1(\mathcal{U}, \mathcal{E}_X^*)$, 并且在 Čech 微分 δ 作用下是闭的, 从而线丛 E 的转移函数 $(g_{\alpha\beta})$ 给出了 $\check{H}^1(\mathcal{U}, \mathcal{E}_X^*)$ 中的元素。又因为

$$\check{H}^1(\mathcal{U}, \mathcal{E}_X^*) \hookrightarrow \check{H}^1(X, \mathcal{E}_X^*)$$

(这个我们承认), 从而线丛 E 的转移函数 $(g_{\alpha\beta})$ 诱导了 $\check{H}^1(X, \mathcal{E}_X^*)$ 中的一个元素。

证明. 对于 $g = (g_{\alpha\beta}) \in C^1(\mathcal{U}, \mathcal{E}_X^*)$, 注意向量丛转移函数的 cocycle 性质, 直接计算其 Čech 微分得

$$(\delta g)_{\alpha\beta\gamma} = g_{\beta\gamma} g_{\alpha\gamma}^{-1} g_{\alpha\beta} = 1$$

从而 $g = (g_{\alpha\beta})$ 是 δ -闭的, $[g] \in \check{H}^1(\mathcal{U}, \mathcal{E}_X^*)$. □

注记 3.8.13. 事实上, 有一一对应

$$\left\{ X \text{ 上的光滑线丛同构类} \right\} \cong \check{H}^1(X, \mathcal{E}_X^*)$$

重要例子 3.8.14. (全纯线丛)

考虑复流形 X , \mathcal{O}_X^* 为 X 上的可逆全纯函数层, 在通常的函数乘法下构成 *Abel* 群层。与上例类似, 对于全纯线丛 $E \rightarrow X$, E 的一族局部平凡化覆盖的转移函数诱导了 $\check{H}^1(X, \mathcal{O}_X^*)$ 中的一个元素。

事实上, 也有一一对应

$$\left\{ X \text{ 上的全纯线丛同构类} \right\} \cong \check{H}^1(X, \mathcal{O}_X^*)$$

此结论我们也述而不证。

第4章 Hermite 向量丛

4.1 向量丛的联络与曲率

先回顾一下光滑向量丛的联络（活动标架版本），这是黎曼几何的标准内容。我们考察光滑的实向量丛或者复向量丛。为表述方便，令 $\mathbb{K} := \mathbb{R}$ 或 \mathbb{C} 。

记号 4.1.1. （向量值微分形式）

设 X 为光滑流形， $E \rightarrow X$ 为 X 上的光滑 \mathbb{K} -向量丛，记

$$\Omega^p(X, E) := \Gamma(X, (\bigwedge^p T^*M) \otimes E)$$

为 X 上的取值于 E 的光滑 p -形式空间。

我们将 $\Omega^\bullet(X, E) := \bigoplus_{p \geq 0} \Omega^p(X, E)$ 自然视为分次线性空间，使得该空间的 p 次齐次子空间为 $\Omega^p(X, E)$ 。注意到 X 上的微分 p -形式空间 $\Omega^p(X) \cong \Omega^p(X, \mathbb{K})$ ，此处的 \mathbb{K} 为 X 上的平凡线丛。注意 $\Omega^\bullet(X)$ 上的外积结构 \wedge ，它自然诱导了

$$\wedge : \Omega^p(X) \times \Omega^q(X, E) \rightarrow \Omega^{p+q}(X, E)$$

事实上这给出了 $\Omega^\bullet(X, E)$ 的一个分次 $\Omega^\bullet(X)$ -模结构。

局部地，取向量丛 E 的一个局部平凡化

$$\theta_\alpha : E|_{U_\alpha} \cong U_\alpha \times \mathbb{K}^r$$

记 $\{e_1, \dots, e_r\}$ 为 U_α 上的一组局部标架，则 $\Omega^p(X, E)$ 中的元素 s 在此局部标架下形如

$$s = \sum_{\lambda=1}^r \varphi^\lambda \otimes e_\lambda =: \varphi^\lambda \otimes e_\lambda$$

其中每个 φ_λ 均为光滑 p -形式，并采用 Einstein 求和约定。

定义 4.1.2. (向量丛上的联络)

设 $E \rightarrow X$ 为光滑流形 X 上的光滑向量丛, 丛 E 上的**联络** (*connection*) 是指作用在分次向量空间 $\Omega^\bullet(X, E)$ 上的次数为 1 的齐次线性映射 $D: \Omega^\bullet(X, E) \rightarrow \Omega^{\bullet+1}(X, E)$, 并且满足:

$$D(\varphi \wedge s) = d\varphi \wedge s + (-1)^p \varphi \wedge Ds$$

对任意 $\varphi \in \Omega^p(X)$ 以及 $s \in \Omega^q(X, E)$ 成立。

注意定义中并没要求 $D^2 = 0$, 一般地 $(\Omega^\bullet(X, E), D)$ 并不是上链复形。易知向量丛 $E \rightarrow X$, E 上的联络之全体, 构成 \mathbb{K} -线性空间。联络的典型例子是, 考虑 X 上的平凡线丛 \mathbb{K} , 则 $\Omega^\bullet(X, \mathbb{K}) \cong \Omega^\bullet(X)$ 上的外微分 d 即为丛 \mathbb{K} 上的联络。

取 $E \rightarrow X$ 的局部平凡化坐标卡 U 及其局部标架 $\{e_1, e_2, \dots, e_r\}$, 则对任意 $t \in \Omega^p(X, E)$, 其中 $r := \text{rank } E$. 若在该局部标架下 $t = \varphi^\lambda \otimes e_\lambda$, 则有

$$Dt = d\varphi^\lambda \otimes e_\lambda + (-1)^p \varphi^\lambda \wedge De_\lambda$$

其中 $De_\lambda \in \Omega^1(U, E)$. 可见只要确定了 D 在 $e_\lambda \in \Omega^0(X, E)$ 上的作用, 则联络 D 被唯一确定。我们令 $De_\lambda = a_\lambda^\mu \otimes e_\mu$, 其中 $a_\lambda^\mu \in \Omega^1(U)$, 称为 D 关于局部标架 $\{e_1, e_2, \dots, e_r\}$ 的**联络 1-形式**, 称 $r \times r$ 矩阵 $A := (a_\lambda^\mu)$ 为 D 关于局部标架 $\{e_1, e_2, \dots, e_r\}$ 的**系数矩阵**。若记 $e := (e_1, e_2, \dots, e_r)$ 为标架排成的行向量, 则有紧凑的表达式 $De = eA$ 。

在局部标架 $\{e_1, e_2, \dots, e_r\}$ 下, $\Omega^p(X, E)$ 中的元素 t 可以用以 p -形式为分量的列向量 $\varphi := (\varphi^\lambda)_{1 \leq \lambda \leq r}$ 来表示, 即 $t = \varphi^\lambda \otimes e_\lambda$. 在此意义下, 有

$$\begin{aligned} Dt &= d\varphi^\lambda \otimes e_\lambda + (-1)^p \varphi^\lambda \wedge De_\lambda = d\varphi^\lambda \otimes e_\lambda + (-1)^p \varphi^\lambda \wedge a_\lambda^\mu \otimes e_\mu \\ &= (d\varphi^\mu + a_\lambda^\mu \wedge \varphi^\lambda) \otimes e_\mu = (d\varphi + A \wedge \varphi)^\mu \otimes e_\mu \end{aligned}$$

或者简记为

$$D\varphi = d\varphi + A \wedge \varphi$$

性质 4.1.3. (联络矩阵的变换)

设 $E \rightarrow X$ 为光滑向量丛, D 为 E 上的一个联络。设 (U, e) 与 (\tilde{U}, \tilde{e}) 为丛 E 的两个局部平凡化, 其中 $e = (e_1, e_2, \dots, e_r)$, $\tilde{e} = (\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \dots, \tilde{e}_r)$ 为相应的局部标架。记它们之间的转移函数为 $\tilde{e}_\lambda = g_\lambda^\mu e_\mu$, $G := (g_\lambda^\mu)$. 若 A, \tilde{A} 分别为联络 D 关于标架 e, \tilde{e} 的系数矩阵, 则有变换关系

$$\tilde{A} = G^{-1}AG + G^{-1}dG$$

证明. 将 $\tilde{e}_\lambda = g_\lambda^\mu e_\mu$ 写为紧凑的矩阵形式, 有 $\tilde{e} = eG$. 从而我们有

$$\begin{aligned} D\tilde{e} &= D(eG) = (De)G + edG = eAG + edG \\ D\tilde{e} &= \tilde{e}\tilde{A} = eG\tilde{A} \end{aligned}$$

因此整理得 $\tilde{A} = G^{-1}AG + G^{-1}dG$. □

定义 4.1.4. (曲率)

设 $E \rightarrow X$ 为光滑流形 X 上的光滑 \mathbb{K} -向量丛, D 为 E 上的一个联络, 则记

$$\Theta := D \circ D$$

为联络 D 的曲率 (*curvature*).

在局部标架 $e = (e_1, e_2, \dots, e_k)$ 下, 对于 $t \in \Omega^p(X, E)$, 若 $t = e\varphi$, 其中 φ 为分量为 p -形式的列向量, 利用局部标架下的联络公式 $D\varphi = d\varphi + A \wedge \varphi$, 其中 A 为联络 D 在关于此标架的系数矩阵, 可得

$$\begin{aligned} \Theta\varphi &= D(d\varphi + A \wedge \varphi) \\ &= d(d\varphi + A \wedge \varphi) + A \wedge (d\varphi + A \wedge \varphi) \\ &= d^2\varphi + dA \wedge \varphi - A \wedge d\varphi + A \wedge d\varphi + A \wedge A \wedge \varphi \\ &= (dA + A \wedge A) \wedge \varphi \end{aligned}$$

即在局部标架 e 下, 曲率算子 Θ 的矩阵 $\Omega = dA + A \wedge A$, 此矩阵的矩阵元为光滑 2-形式, 称为曲率形式。

性质 4.1.5. (曲率形式在不同局部平凡化下的变化)

设 $E \rightarrow X$ 为光滑向量丛, D 为 E 上的联络, Θ 为联络 D 的曲率。设 $e = (e_1, e_2, \dots, e_r)$ 与 $\tilde{e} = (\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \dots, \tilde{e}_r)$ 为 E 的两组局部标架, 转移矩阵 G 满足 $\tilde{e} = eG$. 则曲率 Θ 在标架 e, \tilde{e} 下的矩阵 $\Omega, \tilde{\Omega}$ 满足

$$\tilde{\Omega} = G^{-1}\Omega G$$

证明. 我们已有 $\tilde{A} = G^{-1}AG + G^{-1}dG$, 从而 $G\tilde{A} = AG + dG$, 两边外微分得到

$$dG \wedge \tilde{A} + Gd\tilde{A} = dA \cdot G - A \wedge dG$$

因此有

$$\begin{aligned}
d\tilde{A} &= G^{-1}dA \cdot G - G^{-1}dG \wedge \tilde{A} - G^{-1}A \wedge dG \\
&= G^{-1}dA \cdot G - G^{-1}dG \wedge (G^{-1}AG + G^{-1}dG) - G^{-1}A \wedge dG \\
&= G^{-1}dA \cdot G - G^{-1}dG \cdot G^{-1}AG - G^{-1}dG \cdot G^{-1}dG - G^{-1}A \wedge dG \\
\tilde{A} \wedge \tilde{A} &= (G^{-1}AG + G^{-1}dG) \wedge (G^{-1}AG + G^{-1}dG) \\
&= G^{-1}A \wedge AG + G^{-1}A \wedge dG + G^{-1}dG \cdot G^{-1}AG + G^{-1}dG \cdot G^{-1}dG
\end{aligned}$$

从而得到

$$\tilde{\Omega} = d\tilde{A} + \tilde{A} \wedge \tilde{A} = G^{-1}(dA + A \wedge A)G = G^{-1}\Omega G$$

□

注记 4.1.6. 此定理表明, 曲率 Θ 是从 E 上的 2-形式值 $(1,1)$ 型张量, 故称为曲率张量。具体地,

$$\Theta \in \Omega^2(X, \text{End}(E)) \cong \Omega^2(X, E^* \otimes E)$$

重要例子 4.1.7. (对偶丛的联络与曲率)

设 $E \rightarrow X$ 为光滑向量丛, E^* 为 E 的对偶丛。注意到有如下自然的配对:

$$\begin{aligned}
\langle, \rangle : \Omega^p(X, E^*) \times \Omega^q(X, E) &\rightarrow \Omega^{p+q}(X) \\
\langle \varphi_\lambda \otimes e^\lambda, \psi^\mu \otimes e_\mu \rangle &:= \langle e^\lambda, e_\mu \rangle \varphi_\lambda \wedge \psi^\mu
\end{aligned}$$

若 D_E 为 E 上的联络, 则 D_E 诱导了对偶丛 E^* 上的联络 D_{E^*} , 使得对任意 $s \in \Omega^p(X, E^*)$ 以及 $t \in \Omega^q(X, E)$ 都成立

$$d\langle s, t \rangle = \langle D_{E^*}s, t \rangle + (-1)^p \langle s, D_E t \rangle$$

取 E 的局部标架 $e = (e_1, e_2, \dots, e_r)$, 记 $e^* := (e_1^*, e_2^*, \dots, e_r^*)$ 为其对偶标架 (也排成行向量), 记对偶丛联络 $D^* := D_{E^*}$ 的曲率为 Θ^* , 它们在对偶标架 e^* 上的矩阵记作 A^*, Ω^* , 则成立:

$$\begin{cases} A^* = -A^T \\ \Omega^* = -\Omega^T \end{cases}$$

这是因为, 由于 $\langle e^{*T}, e \rangle = I$, 从而

$$0 = d\langle e^{*T}, e \rangle = \langle D^*e^{*T}, e \rangle + \langle e^{*T}, D_E e \rangle = \langle (e^*A^*)^T, e \rangle + \langle e^{*T}, eA \rangle = A^{*T} + A$$

因此对偶联络的系数矩阵 $A^* = -A^T$. 从而对偶联络的曲率矩阵

$$\Omega^* = dA^* + A^* \wedge A^* = -dA^T + A^T \wedge A^T = -(dA + A \wedge A)^T = -\Omega^T$$

这里要特别注意微分形式矩阵的运算, 注意 A 的矩阵元为微分 1-形式, 从而易验证有 $(A \wedge A)^T = -A^T \wedge A^T$. 此外, 若把对偶标架记为上指标 $e^* = (e^1, e^2, \dots, e^r)^T$, 则有 $D e^\lambda = -A^\lambda_\mu e^\mu$.

重要例子 4.1.8. (直和丛的联络与曲率)

设 $E, F \rightarrow X$ 均为 X 上的光滑向量丛, D_E, D_F 分别为 E, F 上的联络, 则直和丛 $E \oplus F$ 上自然有联络 $D_{E \oplus F}$, 使得对任意 $u \in \Omega^p(X, E)$ 以及 $v \in \Omega^p(X, F)$, 成立

$$D_{E \oplus F}(u \oplus v) = D_E u \oplus D_F v$$

取定 E 的局部标架 $e = (e_1, e_2, \dots, e_r)$ 以及 F 的局部标架 $f = (f_1, f_2, \dots, f_s)$, 则 $E \oplus F$ 有局部标架 $e \oplus f = (e_1, \dots, e_r; f_1, \dots, f_s)$. 容易验证相应的联络、曲率矩阵满足

$$A_{E \oplus F} = \begin{pmatrix} A_E & \\ & A_F \end{pmatrix}, \quad \Omega_{E \oplus F} = \begin{pmatrix} \Omega_E & \\ & \Omega_F \end{pmatrix}$$

重要例子 4.1.9. (张量丛的联络与曲率)

设 $E, F \rightarrow X$ 均为 X 上的光滑向量丛, D_E, D_F 分别为 E, F 上的联络, 则张量丛 $E \otimes F$ 上自然有联络 $D_{E \otimes F}$, 使得对任意 E 的截面 u 以及 F 的截面 v , 成立

$$D_{E \otimes F}(u \otimes v) = D_E u \otimes v + u \otimes D_F v$$

取定 E 的局部标架 $e = (e_1, e_2, \dots, e_r)$ 以及 F 的局部标架 $f = (f_1, f_2, \dots, f_s)$, 则 $E \otimes F$ 有局部标架 $e \otimes f = \{e_\alpha \otimes f_\beta \mid 1 \leq \alpha \leq r, 1 \leq \beta \leq s\}$. 同意验证有关的联络、曲率矩阵满足

$$A_{E \otimes F} = A_E \otimes I_F + I_E \otimes A_F$$

$$\Omega_{E \otimes F} = \Omega_E \otimes I_F + I_E \otimes \Omega_F$$

在计算曲率时要当心微分 1-形式系数的矩阵的外积运算结果的符号。

重要例子 4.1.10. (行列式丛的联络与曲率)

设 $E \rightarrow X$ 为 X 上的秩为 r 的光滑向量丛, D_E 为 E 上的联络, 则 D_E 自然诱导了行列式丛 $\det E := \wedge^r E$ 上的联络 $D_{\det E}$, 使得对任意局部标架 $e = (e_1, e_2, \dots, e_r)$,

$$D_{\det E} e_1 \wedge e_2 \wedge \dots \wedge e_r = \sum_{k=1}^r e_1 \wedge \dots \wedge D_E e_k \wedge \dots \wedge e_r$$

E 的局部标架 $e = (e_1, e_2, \dots, e_r)$ 诱导了线丛 $\det E$ 的局部标架 $e_1 \wedge e_2 \wedge \dots \wedge e_r$, 容易验证相应的联络、曲率矩阵满足 $\begin{cases} A_{\det E} = \text{tr } A_E \\ \Omega_{\det E} = \text{tr } \Omega_E \end{cases}$. 只需注意到 $A_{\det E}$ 与 $\Omega_{\det E}$ 都是一阶矩阵, 无非是普通的微分形式; 验证曲率时注意 $\text{tr}(A_E \wedge A_E) = 0$.

性质 4.1.11. (Hom 丛的联络与曲率) 设 $E, F \rightarrow X$ 为 X 上的光滑向量丛, D_E, D_F 分别为 E, F 上的联络, 则 Hom 丛 $\text{Hom}(E, F) \cong E^* \otimes F$ 上自然有 (由张量丛、对偶丛诱导的) 联络 $D_{\text{Hom}(E, F)}$, 相应的曲率记为 $\Theta_{\text{Hom}(E, F)} \in \Omega^2(X, \text{End}(\text{Hom}(E, F)))$. 则对任意 $f \in \Omega^p(X, \text{Hom}(E, F))$ 以及 $u \in \Omega^q(X, E)$, 成立

$$\begin{aligned} D_F \langle f, u \rangle &= \langle D_{\text{Hom}(E, F)} f, u \rangle + (-1)^p \langle f, D_E u \rangle \\ \Theta_F \langle f, u \rangle &= \langle \Theta_{\text{Hom}(E, F)} f, u \rangle + \langle f, \Theta_E u \rangle \end{aligned}$$

证明. 不妨 $f = u^* \otimes v$, 其中 $u^* \in \Omega^p(X, E^*), v \in \Omega^0(X, F)$. 为方便书写, 不妨省略 D, Θ 的下标, 这不会产生歧义. 则由对偶丛与张量丛的联络运算法则, 易知

$$\begin{aligned} D \langle f, u \rangle &= D(\langle u^*, u \rangle \otimes v) \\ &= (\langle Du^*, u \rangle + (-1)^p \langle u^*, Du \rangle) \otimes v + (-1)^{p+q} \langle u^*, u \rangle \otimes Dv \\ &= \langle Du^* \otimes v, u \rangle + (-1)^p \langle u^* \otimes v, Du \rangle + (-1)^{p+q} (-1)^q \langle u^* \otimes Dv, u \rangle \\ &= \langle D(u^* \otimes v), u \rangle + (-1)^p \langle u^* \otimes v, Du \rangle \\ &= \langle Df, u \rangle + (-1)^p \langle f, Du \rangle \end{aligned}$$

利用上式, 容易得到 $D_{\text{Hom}(E, F)}$ 的曲率的表达式:

$$\begin{aligned} \Theta \langle f, u \rangle &= D(D \langle f, u \rangle) = D(\langle Df, u \rangle + (-1)^p \langle f, Du \rangle) \\ &= \langle D^2 f, u \rangle + (-1)^{p+1} \langle Df, Du \rangle + (-1)^p \langle Df, Du \rangle + (-1)^{p+p} \langle f, D^2 u \rangle \\ &= \langle \Theta f, u \rangle + \langle f, \Theta u \rangle \end{aligned}$$

□

性质 4.1.12. (Bianchi 恒等式)

设 $E \rightarrow X$ 为光滑向量丛, D_E 为 E 上的一个联络, 其曲率为 $\Theta \in \Omega^2(X, \text{End}(E))$. 考虑 $\text{End}(E) \cong E^* \otimes E$ 上的由 D_E 诱导的联络 $D_{\text{End} E}$, 则有

$$D_{\text{End}(E)} \Theta = 0 \in \Omega^3(X, \text{End}(E))$$

证明. 对任意 $u \in \Omega^p(X, E)$, 由性质 4.1.11 可知,

$$D \langle \Theta, u \rangle = \langle D\Theta, u \rangle + (-1)^2 \langle \Theta, Du \rangle$$

因此有

$$\begin{aligned}\langle D\theta, u \rangle &= D\langle \Theta, u \rangle - \langle \Theta, Du \rangle \\ &= D(D^2u) - D^2(Du) = 0\end{aligned}$$

从而由 u 的任意性，得证。 \square

4.2 陈省身示性类

对于 r 阶方阵 M ，考虑 r 次多项式

$$f(t) := \det(I + tM) = I + f_1(M)t + f_2(M)t^2 + \cdots + f_r(M)t^r$$

由线性代数不难知道，函数 f_k ($1 \leq k \leq r$) 在矩阵相似变换下不变，即对任意的 r 阶可逆矩阵 P ，有 $f_k(P^{-1}MP) = f_k(M)$ 。此外众所周知， $f_1(M) = \text{tr } M$ 以及 $f_r(M) = \det M$ 。

此外，由代数学， f_k 唯一决定了一个 k 重对称线性泛函（仍记为 f_k ） $f_k : \text{Sym}^k \mathfrak{gl}(r, \mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$ ，使得对任意矩阵 $M \in \mathfrak{gl}(r, \mathbb{K})$ ，成立 $f_k(M) = f_k(\underbrace{M, M, \dots, M}_k)$ ，并且每个 $f_k \in \text{Sym}^k \mathfrak{gl}(r, \mathbb{K})$ 都是 $\text{GL}(r, \mathbb{K})$ -不变的，即对任意 r 阶方阵 M_1, M_2, \dots, M_k 以及 r 阶可逆矩阵 P ，成立

$$f_k(P^{-1}M_1P, P^{-1}M_2P, \dots, P^{-1}M_kP) = f_k(M_1, M_2, \dots, M_k) \quad (*)$$

对于任意 r 阶矩阵 $M \in \mathfrak{gl}(r, \mathbb{K})$ ，若令 $P = e^{tM}$ 代入 $(*)$ 式，并求 $t = 0$ 处的导数，容易得到

$$\sum_{j=1}^k f_k(M_1, \dots, [M, M_j], \dots, M_k) = 0 \quad (**)$$

引理 4.2.1. 设 $E \rightarrow X$ 为光滑向量丛， D_E 为 E 上的一个联络，取 $e = (e_1, e_2, \dots, e_r)$ 为 E 的一个局部标架， D_E 在此标架下的系数矩阵为 A ，则对于任意 $\varphi \in C^k(X, \text{End}(E))$ ， φ 在此局部标架下可表示为系数为 k -形式的 r 阶矩阵。则在此意义下， D_E 诱导的 $\text{End}(E)$ 上的联络 $D_{\text{End}(E)}$ 满足

$$D\varphi = d\varphi + [A, \varphi]$$

其中 $[A, \varphi] = A \wedge \varphi - (-1)^p \varphi \wedge A$ 为分次对易子。

证明. 局部标架下直接计算即可。注意 $\varphi = \varphi_i^j e^i \otimes e_j$ ，其中矩阵元 φ_i^j 为 p -形式。则有

$$\begin{aligned}D(\varphi_i^j e^i \otimes e_j) &= d\varphi_i^j e^i \otimes e_j + (-1)^p (\varphi_i^j \wedge (-A_k^i) e^k \otimes e_j + \varphi_i^j e^i \otimes A_j^k e_k) \\ &= (d\varphi_i^j + A_k^j \wedge \varphi_i^k - (-1)^k \varphi_i^j \wedge A_k^j) e^i \otimes e_j \\ &= (d\varphi + [A, \varphi])_i^j e^i \otimes e_j\end{aligned}$$

\square

性质 4.2.2. (陈省身示性类)

设 $E \rightarrow X$ 为秩为 r 的光滑向量丛, D 为 E 的一个联络, Θ 为 D 的曲率。设 $e = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ 为 E 的一个局部标架, Θ 在该标架下的矩阵为 Ω . 记

$$c_k(E; D) := f_k\left(\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\Omega\right), \quad (1 \leq k \leq r)$$

则事实上 $c_k(E; D)$ 为 X 上整体定义的 $2k$ -形式, 并且 $dc_k(E; D) = 0$, 从而 $c_k(E; D) \in H_{\text{DR}}^{2k}(X)$. 称 $c_k(E; D)$ 为向量丛 E 关于联络 D 的第 k 阶陈省身示性类, 简称陈类 (Chern class).

证明. 若 $\tilde{e} = (\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \dots, \tilde{e}_r)$ 为 E 的另一组局部标架, 且有转移矩阵 $\tilde{e} = eG$, 则我们已证 $\tilde{\Omega} = G^{-1}\Omega G$, 从而 $f_k(\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\tilde{\Omega}) = f_k(\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\Omega)$, 从而 $c_k(E, D) \in \Omega^{2k}(X)$ 整体定义。

再证明所有的 $c_k(E, D)$ 都是闭形式。注意到在某局部标架下,

$$c_k(E, D) = f_k\left(\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\Omega\right) = \left(\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\right)^k f_k(\Omega, \Omega, \dots, \Omega)$$

其中 $\Omega = dA + A \wedge A$ 为曲率 Θ 在局部标架下的矩阵。直接外微分, 有

$$\begin{aligned} dc_k(E, D) &= \left(\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\right)^k df_k(\Omega, \Omega, \dots, \Omega) = \left(\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\right)^k \sum_{j=1}^k f_k(\Omega, \dots, \underbrace{d\Omega}_{\text{第 } j \text{ 个}}, \dots, \Omega) \\ &= \left(\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\right)^k \sum_{j=1}^k f_k(\Omega, \dots, \underbrace{(D\Omega - [A, \Omega])}_{\text{第 } j \text{ 个}}, \dots, \Omega) \\ &= -\left(\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\right)^k \sum_{j=1}^k f_k(\Omega, \dots, \underbrace{[A, \Omega]}_{\text{第 } j \text{ 个}}, \dots, \Omega) = 0 \end{aligned}$$

其中注意到 Bianchi 恒等式 $D\Omega = 0$ (见性质4.1.12)、引理4.2.1以及该引理上方的 (**) 式。 \square

引理 4.2.3. (联络的形变)

设 $E \rightarrow X$ 为光滑向量丛, D 为 E 的一个联络, 则对于任意 $\alpha \in \Omega^1(X, \text{End}(E))$, $D + \alpha$ 也是 E 的一个联络, 并且其曲率为

$$\Theta_{D+\alpha} = \Theta_D + D\alpha + \alpha \wedge \alpha$$

其中 “ $D\alpha$ ” 当中的 “ D ” 为 $\text{End}(E)$ 上的联络。

证明. 显然 $D + \alpha$ 也是联络, 并且在局部标架下的系数矩阵为 $A + \alpha$, 其中 A 为 D 的系数矩阵, α 也用来表示相应的系数矩阵。我们来验证曲率, 有

$$\begin{aligned}\Omega_{D+\alpha} &= d(A + \alpha) + (A + \alpha) \wedge (A + \alpha) \\ &= dA + d\alpha + A \wedge A + A \wedge \alpha + \alpha \wedge A + \alpha \wedge \alpha \\ &= \Omega_D + d\alpha + [A, \alpha] + \alpha \wedge \alpha\end{aligned}$$

注意到引理4.2.1, 从而可知 $\Theta_{D+\alpha} = \Theta_D + D\alpha + \alpha \wedge \alpha$, 证毕。 \square

定理 4.2.4. (陈类与向量丛的联络选取无关)

设 $E \rightarrow X$ 为秩为 r 的光滑向量丛, 则对任意 $1 \leq k \leq r$, 上同调类 $[c_k(E, D) \in H^{2k}(X)]$ 与 E 的联络 D 选取无关。

证明. 设 D_0 与 D_1 为丛 E 上的两个联络, 对于 $t \in [0, 1]$, 记

$$D_t := (1 - t)D_0 + tD_1$$

则 D_t 显然也是联络。令 $\alpha := D_1 - D_0$, 则容易验证 $\alpha \in \Omega^1(X, \text{End}(E))$ 为整体定义的张量。再记 $\alpha_t := D_t - D_0 \in \Omega^1(X, \text{End}(E))$, 则 $\alpha_t = t\alpha$. 记联络 D_t 的曲率为 Θ_t , 则由引理4.2.3可知

$$\begin{aligned}\Theta_t &= \Theta_0 + tD_0\alpha + t^2\alpha \wedge \alpha \\ \frac{d}{dt}\Theta_t &= D_0\alpha + 2t\alpha \wedge \alpha \\ &= D_t\alpha - (D_t - D_0)\alpha + 2t\alpha \wedge \alpha \\ &= D_t\alpha - t[\alpha, \alpha] + 2t\alpha \wedge \alpha \\ &= D_t\alpha\end{aligned}$$

因此有

$$\begin{aligned}c_k(E, D_1) - c_k(E, D_0) &= \int_0^1 \frac{d}{dt} c_k(E, D_t) dt = \left(\frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \right)^k \int_0^1 \frac{d}{dt} f_k(\Theta_t, \Theta_t, \dots, \Theta_t) dt \\ &= k \left(\frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \right)^k \int_0^1 f_k\left(\frac{d\Theta_t}{dt}, \Theta_t, \dots, \Theta_t\right) dt = k \left(\frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \right)^k \int_0^1 f_k(D_t\alpha, \Theta_t, \dots, \Theta_t) dt \\ &= k \left(\frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \right)^k d \left(\int_0^1 f_k(\alpha, \Theta_t, \dots, \Theta_t) dt \right)\end{aligned}$$

最后一步利用了 Bianchi 恒等式 $D_t\Theta_t = 0$ 以及 f_k 的 $\mathfrak{gl}(r, \mathbb{K})$ -不变性 (与性质4.2.2的证明过程类似)。因此 $[c_k(E, D_1)] = [c_k(E, D_0)]$, 即位于同一个上同调类。 \square

注记 4.2.5. 对于向量丛 $E \rightarrow X$, 既然陈类 $[c_k(E, D)]$ 与联络选取无关, 我们可记 $[c_k(E)] := [c_k(E, D)]$, 其中 D 为 E 上的任何一个联络。

在黎曼几何中, 我们知道黎曼度量总存在, 并且黎曼度量诱导的 Levi-Civita 联络非平凡 (即不恒为 0)。类似地, 后文将会在向量丛上引入某种度量, 该度量诱导了某个非平凡的联络。也就是我, 向量丛上的 (不恒为零的) 联络总存在。

例子 4.2.6. (线丛的第一陈类)

设 $E \rightarrow X$ 为光滑线丛, 即 $\text{rank}_{\mathbb{K}} E = 1$. 设 D 为 E 上的联络, A 为 D 在某局部标架下的系数矩阵 (无非是局部的 1-形式), 此时曲率形式 $\Omega = dA + A \wedge A = dA$. 容易验证第一陈类为

$$c_1(E, D) = \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \Theta$$

在此特殊情况下, 若 D_0 与 D_1 为线丛 E 的两个联络, 则容易验证

$$c_1(E, D_1) - c_1(E, D_0) = \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} d(D_1 - D_0)$$

其中 $D_1 - D_0 \in \Omega^1(X)$ 为整体定义的 1 形式。特别地, $[c_1(E, D_1)] = [c_1(E, D_0)] \in H^2(X)$

4.3 Hermite 向量丛

本节开始考虑复向量丛。

定义 4.3.1. (*Hermite* 向量丛)

设 $E \rightarrow X$ 为光滑流形 X 上的复向量丛, 称 E 为 *Hermite* 向量丛, 若任意 $x \in X$, 纤维 E_x 上配以 *Hermite* 内积结构 $h \in \Omega^0(X, \text{Herm}(E, E))$:

$$\begin{aligned} h_x : E_x \times E_x &\rightarrow \mathbb{C} \\ (s_x, t_x) &\mapsto \{s_x, t_x\} \end{aligned}$$

并且对于任意局部标架 $e(x) = (e_1(x), e_2(x), \dots, e_r(x))$, $h_{ij}(x) := \{e_i(x), e_j(x)\}$ 是光滑的。此时 h 称为 E 的 *Hermite* 度量。

由定义知, 在局部标架 $e = (e_1, e_2, \dots, e_r)$ 下, 矩阵 $h = (h_{ij})$ 为正定 Hermite 矩阵。我们假定 $\{, \}$ 关于第一个位置共轭线性。我们用符号 “ † ” 来表示矩阵的共轭转置, 则 $h^\dagger = h$. 显然此定义是良定的, 若 \tilde{e} 为另一组局部标架, 并有转移矩阵 G 使得 $\tilde{e} = eG$, 则有

$$\tilde{h}_{ij} = \{\tilde{e}_i, \tilde{e}_j\} = \{G_i^k e_k, G_j^l e_l\} = \overline{G_i^k} G_j^l \{e_k, e_l\} = \overline{G_i^k} h_{kl} G_j^l = (G^\dagger h G)_{ij}$$

即 $\tilde{h} = G^\dagger h G$. 又由于转移矩阵 G 是光滑的, 从而 h 光滑当且仅当 \tilde{h} 光滑。

任何复向量丛都存在 **Hermite 度量**，原因与黎曼几何当中的“黎曼度量存在性”完全类似。此外，Hermite 度量 h 可自然地线性延拓为

$$h : \Omega^p(X, E) \times \Omega^q(X, E) \rightarrow \Omega^{p+q}(X)$$

满足共轭超对称性：对任意 $u \in \Omega^p(X, E)$ 以及 $v \in \Omega^q(X, E)$ ， $\{u, v\} = (-1)^{pq} \overline{\{v, u\}}$ 等等性质。

定义 4.3.2. (*Hermite 联络*)

设复向量丛 $(E, h) \rightarrow X$ 为 *Hermite 向量丛*， D 为 E 上的联络。称 D 与 *Hermite 度量* h 相容，或称 D 为 ***Hermite 联络***，若对任意 $u \in \Omega^p(X, E)$ 以及 $v \in \Omega^q(X, E)$ ，都有

$$d\{u, v\} = \{Du, v\} + (-1)^p \{u, Dv\}$$

特别地，在局部标架 $e = (e_1, e_2, \dots, e_r)$ 下，成立

$$dh_{ij} = \{De_i, e_j\} + \{e_i, De_j\} = \bar{A}_i^k h_{kj} + A_j^k h_{ik} = (A^\dagger h + hA)_{ij}$$

其中 A 为 D 在该标架下的系数。从而有

$$dh = A^\dagger h + hA \quad (*)$$

性质 4.3.3. (*Hermite 联络的曲率*)

设 $E \rightarrow X$ 为复向量丛， h 为 E 的一个 *Hermite 结构*， D 为 E 上的与 h 相容的联络， $e = (e_1, e_2, \dots, e_r)$ 为 E 的一组局部正标架（即 $\{e_i, e_j\} = \delta_{ij}$ ），则 D 的曲率 Θ 在标架 e 下的矩阵 Ω 满足

$$\Omega^\dagger = -\Omega$$

证明。只需注意到

$$\begin{aligned} 0 &= d^2\{e_i, e_j\} = d(\{De_i, e_j\} + \{e_i, De_j\}) \\ &= \{D^2e_i, e_j\} - \{De_i, De_j\} + \{De_i, De_j\} + \{e_i, D^2e_j\} = \bar{\Omega}_i^j + \Omega_j^i \end{aligned}$$

因此 $\Omega^\dagger = -\Omega$. □

容易验证，在一般的标架（未必么正）下，Hermite 联络的曲率的系数矩阵满足

$$\Omega^\dagger h + h\Omega = 0$$

注记 4.3.4. 此性质表明，*Hermite 联络* D 的曲率 Θ 满足： $\sqrt{-1}\Theta \in \Omega^2(X, \text{Herm}(E, E))$ 。特别地， $\sqrt{-1}\Theta$ 的系数矩阵 $\sqrt{-1}\Omega$ 的对角元都是实的 2-形式，从而第一陈类

$$[c_1(E)] = \frac{1}{2\pi} [\text{tr}(\sqrt{-1}\Theta)] \in H^2(X, \mathbb{R})$$

4.4 复流形上的联络

现在，我们考虑复流形 X 上的光滑向量丛。对于复流形，注意到微分形式空间的分解

$$\Omega^m(X) = \bigoplus_{p+q=m} \Omega^{p,q}(X)$$

现在，若 $E \rightarrow X$ 为复流形 E 上的光滑向量丛，我们类似定义

$$\Omega^{p,q}(X, E) = \Gamma(X, \bigwedge^{p,q}(T^*M) \otimes E)$$

为取值于 E 上的 (p, q) 形式空间。在复流形上，外微分算子 $d = d' + d''$ ，其中 $d' := \partial, d'' := \bar{\partial}$ 。

定义 4.4.1. ((1,0) 型联络)

对于复流形 X 上的光滑向量丛 E ，称算子 $D' : \Omega^{\bullet,\bullet}(X, E) \rightarrow \Omega^{\bullet+1,\bullet}(X, E)$ 为 (1,0) 型联络，如果对任意 $u \in \Omega^{p,q}(X)$ 以及 $v \in \Omega^{p',q'}(X, E)$ ，成立

$$D'(u \wedge v) = d'u \wedge v + (-1)^{p+q} u \wedge D'v$$

注意“(1,0) 型联络”虽然字面上有“联络”，但它一般不是向量丛的联络（从定义能看出）。类似地，我们也可以定义 (0,1) 型联络 $D'' : \Omega^{\bullet,\bullet}(X, E) \rightarrow \Omega^{\bullet,\bullet+1}(X, E)$ ，使得对任意 $u \in \Omega^{p,q}(X)$ 以及 $v \in \Omega^{p',q'}(X, E)$ ，成立

$$D''(u \wedge v) = d''u \wedge v + (-1)^{p+q} u \wedge D''v$$

注记 4.4.2. 对于复流形上的光滑向量丛 $E \rightarrow X$ ，若 D' 与 D'' 分别为 E 上的 (1,0), (0,1) 型联络，则易验证 $D := D' + D''$ 必为 E 上的联络。反之， E 上的任何联络 D 都可自然地分解为 (1,0) 部分与 (0,1) 部分之和： $D = D' + D''$ 。

设 D' 为 (1,0) 型联络，则在 E 的局部（光滑）标架下，类似定义 D' 的系数矩阵 A' ，注意 A' 的每个矩阵元都是 (1,0) 形式；而 (0,1) 型联络的系数矩阵也类似。类似地，也有局部标架下的表达式 $D' = d' + A'$ 以及 $D'' = d'' + A''$ 。

性质 4.4.3. 设 $(E, h) \rightarrow X$ 为复流形 X 上的光滑 Herimite 向量丛， D 为 E 上的与 h 相容的 Hermite 联络，则对于 E 的光滑么正标架 $e = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ ，联络 D 的系数矩阵 A 的 (1,0), (0,1) 部分 A', A'' 满足

$$A'' = -(A')^\dagger$$

证明. 直接验证即可, 只需注意

$$0 = D\{e_i, e_j\} = D'\{e_i, e_j\} + D''\{e_i, e_j\} = \left((\bar{A}')_i^j + (A'')_j^i \right) + \left((A')_j^i + (\bar{A}'')_i^j \right)$$

注意其 $(1,0)$ 分量与 $(0,1)$ 分量, 从而 $A' = -(A'')^\dagger$. \square

事实上, 联络 D 在么正标架下的系数矩阵满足 $(A'')^\dagger = -A'$ 当且仅当 D 为 Hermite 联络。由此不难得出:

推论 4.4.4. 设 $E \rightarrow X$ 为复流形 X 上的光滑 *Hermite* 向量丛, 则对于 E 上的任何 $(0,1)$ 型联络 D'' , 存在唯一的 *Hermite* 联络 D , 使得 D 的 $(0,1)$ 部分恰为 D'' .

证明. 任取 E 的光滑么正标架 $e = (e_1, e_2, \dots, e_r)$, 令 D'' 在标架 e 下的系数矩阵为 A'' . 令 $A := -(A'')^\dagger + A''$, 则矩阵 A 确定了一个 Hermite 联络 D , 使得 D 在该标架下的矩阵为 A . 易验证 D 的良好性. \square

现在, 假设 $E \rightarrow X$ 为全纯向量丛。

重要例子 4.4.5. (全纯向量丛上的典范 $(0,1)$ 型联络)

设 $E \rightarrow X$ 为全纯向量丛, 则微分算子 $d'' = \bar{\partial}$ 自然给出了 E 上的一个 $(0,1)$ 型联络, 称为**典范 $(0,1)$ 型联络**。

任取 E 的全纯标架 $e = (e_1, e_2, \dots, e_r)$, 则对于任意的 $u \in \Omega^{p,q}(X, E)$, 局部上有 $u = u^\alpha \otimes e_\alpha$, 其中 $u^\alpha \in \Omega^{p,q}(X)$, 则令

$$\bar{\partial}u := (\bar{\partial}u^\alpha) \otimes e_\alpha$$

特别地, 对于全纯标架场 e_α , 有 $\bar{\partial}e_\alpha = 0$. 容易验证上述定义的良好性, 从而 $\bar{\partial}$ 诱导了 E 上的一个 $(0,1)$ 型联络。

定义 4.4.6. (全纯 *Hermite* 向量丛的陈联络)

设 $E \rightarrow X$ 为全纯 ***Hermite* 向量丛** (即它为全纯向量丛且配以 *Hermite* 结构 h), 则存在唯一的 *Hermite* 联络 D , 使得其 $(0,1)$ 分量 $D'' = \bar{\partial}$. 称此联络为全纯 *Hermite* 向量丛 $(E, h) \rightarrow X$ 的**陈联络 (Chern connection)**。

显然, 陈联络的存在唯一性是推论4.4.4的推论。全纯 Hermite 丛的陈联络就像 Riemann 流形上的 Levi-Civita 联络一样典范。另外, 注意全纯 Hermite 向量丛的 Hermite 结构 h 在全纯标架下的矩阵**未必**是全纯的, 仅仅光滑即可, 并不存在 Hermite 结构与全纯结构的“相容性”。

引理 4.4.7. 设 $(E, h) \rightarrow X$ 为全纯 *Hermite* 向量丛, $D = D' + D''$ 为其陈联络, 任取 E 的全纯标架 $e = (e_1, e_2, \dots, e_r)$, 将 h 在该标架下的矩阵也记为 h , 则陈联络 D 在该标架下的系数矩阵 A 及其 $(1,0), (0,1)$ 分量 A', A'' 满足

$$A = A' = h^{-1}\partial h \quad A'' = 0$$

证明. 由于 $D'' = \bar{\partial}$, 从而系数矩阵 $A'' = 0$ 是显然的, 也有 $A' = A$. 注意 D 首先是 *Hermite* 联络, 从而定义4.3.2下方的 $(*)$ 式成立, 即

$$hA + A^\dagger h = dh = \partial h + \bar{\partial} h$$

比较 $(1,0)$ 分量, 得到 $hA = \partial h$, 因此 $A = h^{-1}\partial h$. □

注意在我这里, *Hermite* 内积 $\{, \}$ 关于第一个位置是共轭线性的, 即 $\{\lambda u, v\} = \bar{\lambda}\{u, v\}$. 而在其它版本中, 若假定 $\{, \}$ 关于第二个位置共轭线性, 则陈联络在全纯标架下的系数矩阵为 $A = \bar{h}^{-1}\partial \bar{h}$.

引理 4.4.8. 设 $(E, h) \rightarrow X$ 为全纯 *Hermite* 向量丛, $D = D' + D''$ 为其陈联络, 则有 $(D')^2 = (D'')^2 = 0$, 特别地, D 的曲率

$$\Theta = D^2 = (D' + D'')^2 = D'D'' + D''D'$$

证明. 注意 $D'' = \bar{\partial}$, 从而显然 $(D'')^2 = \bar{\partial}^2 = 0$. 至于 $(D')^2 = 0$, 我们在全纯局部标架下验证. 对于全纯标架 $e = (e_1, e_2, \dots, e_r)$, 设 $\varphi \in \Omega^{0,0}(X, E)$ 为 E 的光滑截面, $\varphi := \varphi^\alpha e_\alpha$, 我们将 φ 在标架 e 下的坐标函数仍记为 φ (这里的 φ 是 r 维列向量, 每个分量都为光滑函数), 则有

$$D'\varphi = \partial\varphi + A'\varphi = \partial\varphi + h^{-1}\partial h \cdot \varphi$$

注意到 $\partial^2 = 0$, 以及 $\partial(h^{-1}) = -h^{-1}\partial h \cdot h^{-1}$, 因此有

$$\begin{aligned} (D')^2\varphi &= D'(\partial\varphi + h^{-1}\partial h \cdot \varphi) \\ &= \partial(\partial\varphi + h^{-1}\partial h \cdot \varphi) + h^{-1}\partial h \cdot (\partial\varphi + h^{-1}\partial h \cdot \varphi) \\ &= \partial(h^{-1}\partial h \cdot \varphi) + h^{-1}\partial h \cdot \partial\varphi + h^{-1}\partial h \cdot h^{-1}\partial h \cdot \varphi \\ &= -h^{-1}\partial h \cdot h^{-1}\partial h \cdot \varphi - h^{-1}\partial h \cdot \partial\varphi + h^{-1}\partial h \cdot \partial\varphi + h^{-1}\partial h \cdot h^{-1}\partial h \cdot \varphi \\ &= 0 \end{aligned}$$

□

性质 4.4.9. (陈联络的曲率)

设 $(E, h) \rightarrow X$ 为全纯 *Hermite* 向量丛, D 为其陈联络, 则 D 的曲率 Θ 在全纯标架 $e = (e_1, e_2, \dots, e_r)$ 下的系数矩阵为

$$\Omega = \bar{\partial}(h^{-1}\partial h)$$

证明. 记号同之前, 则

$$\Omega = dA + A \wedge A = (\partial + \bar{\partial})(h^{-1}\partial h) + h^{-1}\partial h \cdot h^{-1}\partial h = \bar{\partial}(h^{-1}\partial h)$$

□

注记 4.4.10. 注意陈联络首先是 *Hermite* 联络, 回顾性质 4.3.3, 陈联络的曲率满足 $\sqrt{-1}\Theta \in \Omega^2(X, \text{Herm}(E, E))$. 而由 $\Omega = \bar{\partial}(h^{-1}\partial h)$ 不难看出, 对于陈联络的曲率 Θ ,

$$\sqrt{-1}\Theta \in \Omega^{1,1}(X, \text{Herm}(E, E))$$

例子 4.4.11. (全纯线丛的情形)

特别地, 若 $(E, h) \rightarrow X$ 为全纯 *Hermite* 线丛, D 为其陈联络, 则在全纯标架 e 下, 曲率形式 Ω 满足

$$\Omega = \bar{\partial}(h^{-1}\partial h) = \bar{\partial}\partial \log h = -\partial\bar{\partial} \log h$$

若在该标架下, $h = e^{-2\varphi}$, 则曲率形式

$$\Omega = -\partial\bar{\partial} \log h = 2\partial\bar{\partial}\varphi = 2\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^i \partial \bar{z}^j} dz^i \wedge d\bar{z}^j$$

性质 4.4.12. 设 $(E, h) \rightarrow X$ 为全纯 *Hermite* 线丛, 设 s 为 E 的任何一个 (局部) 非零的全纯截面, 则成立

$$-\sqrt{-1}\partial\bar{\partial} \log \|s\|_h^2 = \sqrt{-1}\Theta$$

其中 Θ 为 (E, h) 陈联络的曲率形式。

证明. 任取 E 的全纯标架 e , 在全纯标架下验证。把 s 在该标架下的坐标函数仍记为 s . 则注意 s 为全纯标架, 从而坐标函数 s 满足 $\bar{\partial}s = \partial\bar{s} = 0$, 因此有

$$\begin{aligned} -\sqrt{-1}\partial\bar{\partial} \log \|s\|_h^2 &= -\sqrt{-1}\partial\bar{\partial} \log (s\bar{s}h) = -\sqrt{-1}\partial\bar{\partial} [\log (s\bar{s}) + \log h] \\ &= -\sqrt{-1}\partial\bar{\partial} \log h = \sqrt{-1}\Theta \end{aligned}$$

□

推论 4.4.13. ($\partial\bar{\partial}$ -引理)

设 $(E, h) \rightarrow X$ 为复流形 X 上的全纯线丛, 记 Θ 为 h 的陈联络的曲率形式。则对任意实值光滑函数 $f \in \Omega^0(X, \mathbb{R})$, 必存在 E 上的 *Hermite* 度量 $= \tilde{h}$, 使得其陈联络的曲率形式 $\tilde{\Theta}$ 满足

$$\tilde{\Theta} = \Theta + 2\pi\partial\bar{\partial}f$$

证明. 取 $\tilde{h} = e^{-2\pi f}h$ 即可。 □

定理 4.4.14. (第一陈类的代数几何解释)

设 X 为复流形, 考虑 X 上的层正合列 $0 \rightarrow \mathbb{Z} \hookrightarrow \mathcal{O} \xrightarrow{e^{2\pi i*}} \mathcal{O}^* \rightarrow 0$ 诱导的上同调长正合列

$$\cdots \rightarrow H^1(X, \mathcal{O}) \rightarrow H^1(X, \mathcal{O}^*) \xrightarrow{\delta} H^2(X, \mathbb{Z}) \rightarrow H^2(X, \mathcal{O}) \rightarrow \cdots$$

则对任意全纯线丛 $E \in H^1(X, \mathcal{O}^*)$, $\delta(E) \in H^2(X, \mathbb{Z}) \hookrightarrow H^2(X, \mathbb{R}) \cong H_{\text{DR}}^2(X, \mathbb{R})$ 满足

$$\delta(E) = [c_1(E)]$$

证明. (待补) □

4.5 例子: 复射影空间上的典范线丛 $\mathcal{O}(-1)$

设 V 为复线性空间, $\dim_{\mathbb{C}} V = n+1$, 则我们已经熟悉复流形 $\mathbb{P}(V) \cong \mathbb{CP}^n$ 以及其上的典范线丛 $\mathcal{O}(-1) := \left\{ ([\xi], \eta) \in \mathbb{P}(V) \times V \mid \eta \in [\xi] \right\}$. 回顾 $\mathbb{P}(V)$ 具有典范的坐标覆盖 $U_i := \left\{ [z_0; z_1; \dots; z_n] \mid z_i \neq 0 \right\}$, 这也是线丛 $\mathcal{O}(-1)$ 的局部平凡化覆盖。

重要例子 4.5.1. 设 V 为 *Hermite* 内积空间 (酉空间), 则线丛 $\mathcal{O}(-1) \rightarrow h$ 上自然配以 *Hermite* 内积结构 h , 该 *Hermite* 内积由 V 上的 *Hermite* 内积自然诱导。取线性空间 V 的一组么正基 (e_0, e_1, \dots, e_n) , 该基下的坐标函数记为 $(z_0, z_1, \dots, z_n)^T$. 则在 $\mathbb{P}(V)$ 的局部坐标卡 $U_0 := \left\{ [z_0; z_1; \dots; z_n] \mid z_0 \neq 0 \right\} \cong \mathbb{C}^n$ 下,

$$\mathcal{E}_0 := e_0 + \sum_{k=1}^n z_k e_k$$

为 $\mathcal{O}(-1)$ 在 U_0 下的一个非零全纯截面, 即全纯标架。

关于截面 \mathcal{E}_0 ，有一点轻微的记号混用。线丛的全纯截面在局部平凡化坐标卡下，应该是 $\mathcal{U}_0 \cong \mathbb{C}^n$ 上的全纯函数。在此意义下， $\mathcal{E}_0(z_1, z_2, \dots, z_n) \equiv 1$ ，是“最简单”的非零全纯函数。

注意 Hermite 度量，容易知道在局部坐标 $U_0 = (z_1, z_2, \dots, z_n)$ 以及全纯标架 \mathcal{E}_0 下有

$$h = \|\mathcal{E}_0\|_h^2 = 1 + |z_1|^2 + |z_2|^2 + \dots + |z_n|^2$$

因此陈联络的曲率形式 $\Theta(\mathcal{O}(-1))$ 为

$$\Theta(\mathcal{O}(-1)) = -\partial\bar{\partial} \log h = -\partial\bar{\partial} \log(1 + |z_1|^2 + |z_2|^2 + \dots + |z_n|^2)$$

例子 4.5.2. (超平面丛 $\mathcal{O}(1)$)

记号同上，考虑 $\mathcal{O}(-1)$ 的对偶丛 $\mathcal{O}(1) := \mathcal{O}(-1)^*$ ，则 $\mathcal{O}(1)$ 的曲率形式在坐标卡 U_0 下的表达式为

$$\Theta(\mathcal{O}(1)) = -\Theta(\mathcal{O}(-1)) = \partial\bar{\partial} \log(1 + |z_1|^2 + |z_2|^2 + \dots + |z_n|^2)$$

记 $f(z_1, z_2, \dots, z_n) := \log(1 + |z_1|^2 + |z_2|^2 + \dots + |z_n|^2)$ ，则矩阵 $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial z_k \partial \bar{z}_l} \right)_{1 \leq k, l \leq n}$ 是正定 Hermite 矩阵（为什么？）。

定理 4.5.3. 对于 $n+1$ 维复向量空间 V ，则 $\mathbb{P}(V)$ 上的线丛 $\mathcal{O}(1)$ 的第一陈形式 $c_1(\mathcal{O}(1)) \in \Omega^{1,1}(\mathbb{P}(V))$ 满足

$$\int_{\mathbb{P}(V)} [c_1(\mathcal{O}(1))]^n = 1$$

注意 $c_1(\mathcal{O}(1)) = \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \Theta$ ，其中 Θ 为上文当中的陈联络的曲率形式。事实上，陈类的定义当中的系数“ $\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}$ ”存在的意义正是要让此定理成立（归一化）。

证明. 考虑 $\mathbb{P}(V)$ 的坐标卡 U_0 ，注意 $\mathbb{P}(V) \setminus U_0$ 是零测的，从而只需计算它在 U_0 上的积分。

（待补，似乎要暴力计算？）

□

第5章 L^2 Hodge 理论

5.1 向量丛上的微分算子

现在, 假设 X 为 n 维 (连通) 光滑流形, $E, F \rightarrow X$ 为 X 上的光滑 \mathbb{K} -向量丛, 其秩分别为 r, r' . 这里 $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ 或 \mathbb{C} .

定义 5.1.1. (向量丛上的微分算子)

对于光滑流形 X 上的秩分别为 r, r' 的光滑 \mathbb{K} -向量丛 $E, F \rightarrow X$, 称 \mathbb{K} -线性算子

$$\begin{aligned} P : C^\infty(X, E) &\rightarrow C^\infty(X, F) \\ u &\mapsto Pu \end{aligned}$$

为次数为 k 的微分算子, 如果在局部平凡化坐标卡下, 截面的坐标函数满足

$$(Pu)^\mu = \sum_{|\alpha| \leq k} a_{\lambda, \alpha}^\mu D^\alpha u^\lambda$$

其中 u 为 E 的某截面在某局部标架下的坐标函数, 视为 r 维列向量; $1 \leq \lambda \leq r, 1 \leq \mu \leq s$, $\alpha \in \mathbb{N}^r$ 为多重指标, D^α 为相应的偏微分算子。

容易验证微分算子 P 的次数 k 与局部标架选取无关。固定 E, F 上的局部标架, $x = (x^1, x^2, \dots, x^n)^T$ 为 X 上的关于 E, F 的局部平凡化坐标卡, 若 X 上还有另一组局部平凡化坐标卡 $\tilde{x} = (\tilde{x}^1, \tilde{x}^2, \dots, \tilde{x}^n)^T$, 则对于多重指标 $|\alpha| = k$, 可以去验证 P 在 x, \tilde{x} 下的第 α 阶系数矩阵 $a_\alpha, \tilde{a}_\alpha$ 的转换关系。不过要注意, 若 $|\alpha| < k$, 则转换关系会异常复杂。

性质 5.1.2. (微分算子的主符号)

记号同上, 则对于向量丛上的 k 阶微分算子 $P : C^\infty(X, E) \rightarrow C^\infty(X, F)$, 在 E 的局部平凡化坐标卡下, 对于 $x \in X$, $u \in C^\infty(X, E)$ 视为 r 为列向量值函数, 以及 $\xi = \xi_i dx^i \in \Omega^1(X) = C^\infty(X, T^*X)$ 为 X 上的 1-形式, 在坐标卡下视为 n 维行向量 $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$, 则

$$\sigma_P(x, \xi) : u \rightarrow \sum_{|\alpha|=k} \xi^\alpha a_\alpha u$$

整体定义了一个 \mathbb{K} -线性算子

$$\sigma_P : T^*X \rightarrow \text{Hom}(E, F)$$

称该算子为微分算子 P 的主符号 (*principal symbol*)。其中 $\zeta^\alpha = \zeta_1^{\alpha_1} \zeta_2^{\alpha_2} \cdots \zeta_n^{\alpha_n}$ 。

证明. 需要验证 $\sigma_P(x, \zeta)$ 是在 X 上的整体定义的。

(待补)

□

注记 5.1.3. 要注意, 对于余切向量 $\zeta \in T_x^*X$, $\zeta \rightarrow \sigma_{x, \zeta}$ 一般不是关于 ζ 线性的, 而是 ζ 的 k 次函数, 其中 k 是微分算子 P 的阶数。若 $k=1$, 则 $\sigma_P(x, -)$ 关于 ζ 线性。

注记 5.1.4. 设 f 为 X 上的在 $x \in X$ 附近定义的光滑函数, 则对 E 的在 x 附近的截面 u , 容易验证

$$t \mapsto e^{-tf} P(e^{tf} u)$$

是关于 t 的 k 次多项式, 并且首项 t^k 的系数正是 $\sigma(x, df)(u)$ 。

例子 5.1.5. (外微分算子 d)

对于光滑流形 X , 外微分算子 d 自然视为 p -形式丛 $\wedge^p T^*X$ 到 $(p+1)$ -形式丛 $\wedge^{p+1} T^*X$ 的一阶微分算子。

注意到对于 X 上的光滑函数 f , 以及 $\omega \in \Omega^p(X)$,

$$e^{-tf} d(e^{tf} \omega) = t df \wedge \omega + d\omega$$

从而知 d 的主符号 $\sigma_d(x, \zeta)(\omega) = \zeta \wedge \omega$ 。

定义 5.1.6. (椭圆算子)

设 E, F 为 X 的光滑向量丛, 微分算子 $P : C^\infty(X, E) \rightarrow C^\infty(X, F)$ 称为椭圆算子, 若 P 的主符号 σ_P 满足: 对任意 $x \in X$ 以及 $\zeta \in T_x^*X \setminus \{0\}$, $\sigma_P(x, \zeta) : E_x \rightarrow F_x$ 是单射。

例如, 外微分算子 $d : \Omega^0(X) \rightarrow \Omega^1(X)$ 是椭圆的。

接下来引入一些分析上的概念, 首先是向量丛的 L^2 截面:

定义 5.1.7. 设 X 为定向的光滑流形, $d\text{Vol}$ 为 X 的一个体积形式, $E \rightarrow X$ 为光滑丛, 并配以欧氏结构或者 Hermite 结构 \langle, \rangle 。则对任意 $u, v \in C^\infty(X, E)$, 定义

$$\langle\langle u, v \rangle\rangle := \int_M \langle u, v \rangle d\text{Vol}$$

定义 $L^2(X, E) := \left\{ u \in C^\infty(X, E) \mid \langle\langle u, u \rangle\rangle < +\infty \right\}$ 的 (在 $\langle\langle, \rangle\rangle$ 诱导的范数下的) 完备化。

$L^2(X, E)$ 配以内积 $\langle \cdot, \cdot \rangle$, 构成 Hilbert 空间。对于 $u \in L^2(X, E)$, 局部标架下, u 可视为向量值的 L^2 -可积的可测函数。由分析学可知, $C^\infty(X, E) \cap L^2(X, E)$ 在 $L^2(X, E)$ 中稠密。以后我们在讨论 $L^2(X, E)$ 时, 不妨假定 E 是 Hermite 向量丛。

性质 5.1.8. (微分算子的形式伴随)

设 $E, F \rightarrow X$ 为光滑定向流形 X 上的 Hermite 向量丛, 给定 X 的体积形式 $d\text{Vol}$, 则对任意的微分算子 $P: C^\infty(X, E) \rightarrow C^\infty(X, F)$, 存在唯一的微分算子 $P^*: C^\infty(X, F) \rightarrow C^\infty(X, E)$, 使得对任意的 $u \in C^\infty(X, E)$ 以及 $v \in C^\infty(X, F)$, 若 $\text{supp } u \cap \text{supp } v \subset\subset X$, 都有

$$\langle Pu, v \rangle = \langle u, P^*v \rangle$$

称算子 P^* 为 P 的形式伴随 (formal adjoint)。

证明. 取定 Hermite 丛 E, F 的么正标架以及 X 的局部坐标卡。记 $\Omega := \text{supp } u \cap \text{supp } v$, 不妨 Ω 包含于该局部坐标卡。则在该么正标架、局部坐标下, 记微分算子 P 与体积形式 $d\text{Vol}$ 分别为

$$P = \sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha D^\alpha, \quad d\text{Vol} = \gamma(x) dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$$

其中 $dx := dx^1 \wedge dx^2 \wedge \cdots \wedge dx^n$. 因此有

$$\begin{aligned} \langle Pu, v \rangle &= \sum_{|\alpha| \leq k} \int_{\Omega} \langle a_\alpha D^\alpha u, v \rangle \gamma dx = \sum_{|\alpha| \leq k} \int_{\Omega} D^\alpha u^\dagger a_\alpha^\dagger v \gamma dx \\ &= \sum_{|\alpha| \leq k} \int_{\Omega} (-1)^{|\alpha|} u^\dagger D^\alpha (\gamma a_\alpha^\dagger v) dx = \int_{\Omega} u^\dagger \sum_{|\alpha| \leq k} (-1)^{|\alpha|} \gamma^{-1} D^\alpha (\gamma a_\alpha^\dagger v) \cdot \gamma dx \\ &= \langle u, \gamma^{-1} \sum_{|\alpha| \leq k} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha (\gamma a_\alpha^\dagger v) \rangle \end{aligned}$$

因此, 只需取

$$P^*(v) := \gamma^{-1} \sum_{|\alpha| \leq k} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha (\gamma a_\alpha^\dagger v)$$

□

推论 5.1.9. (形式伴随的主符号)

设 $E, F \rightarrow X$ 为配以体积形式 $d\text{Vol}$ 的光滑定向流形 X 上的 Hermite 向量丛, $P: C^\infty(X, E) \rightarrow C^\infty(X, F)$ 为 k 阶微分算子, 则形式伴随 P^* 的主符号 σ_{P^*} 满足

$$\sigma_{P^*}(x, \xi) = (-1)^k [\sigma_P(x, \xi)]^*$$

证明. 由 P^* 的局部表达式显然得到。 \square

推论 5.1.10. 条件记号同上, 若 $\text{rank } E = \text{rank } F$, 则 P 为椭圆算子当且仅当 P^* 为椭圆算子。

证明. 显然。 \square

5.2 椭圆算子的基本性质

本节不加证明地陈述分析学当中的一些重要结果。

设 X 为紧致、定向光滑流形, 配以体积形式 $d\text{Vol}$, $\dim_{\mathbb{R}} X = n$; $E \rightarrow X$ 为 Hermite 向量丛, $\text{rank}_{\mathbb{C}} E = r$. 取 X 的有限的关于 E 的局部平凡化坐标覆盖 $\{\Omega_j | 1 \leq j \leq n\}$, 以及 E 的在 Ω_j 上的局部的么正标架 $e_j = (e_{j,1}, e_{j,2}, \dots, e_{j,r})$. 对于 $u \in L^2(X, E)$, 记 u 在 Ω_j 的局部表达式为 $u = u_j^\lambda e_{j,\lambda}$, 视 u_j 为 r 为列向量。从而对于 $k \geq 0$, 对于 $u \in C^k(X, E)$, 记

$$\|u\|_k^2 := \sum_{j=1}^N \int_{\Omega_j} \sum_{|\alpha| \leq k} |D^\alpha u_j|^2 d\text{Vol}$$

从而定义索伯列夫空间 (Sobolev space) $W^k(X, E) := \{u \in C^k(X, E) | \|u\|_k < +\infty\}$ 在范数 $\|\cdot\|_k$ 下的完备化。易知 $W^k(X, E)$ 为 Hilbert 空间。事实上对于紧流形 X , 取 X 的不同的开覆盖、坐标卡、局部么正标架, 所得到的范数 $\|\cdot\|_k$ 是等价范数。

接下来的一系列结果, 述而不证:

引理 5.2.1. (*Sobolev 引理*) 若 $k > l + \frac{n}{2}$, 则有 $W^k(X, E) \subseteq C^l(X, E)$.

引理 5.2.2. (*Rellich 紧嵌入定理*)

对任意 $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, 则 $W^{k+1}(M, E) \hookrightarrow W^k(M, E)$ 是紧算子。

引理 5.2.3. (*Gårding 不等式*)

设 E, F 为紧定向流形 X 上的 Hermite 向量丛, $\text{rank}_{\mathbb{C}} E = \text{rank}_{\mathbb{C}} F$, $P: C^\infty(E) \rightarrow C^\infty(F)$ 为 d 次的椭圆算子, 并将 P 的定义域自然延拓到 E 的分布系数的截面上。则对于任意 $u \in W^0(X, E)$, 如果 $Pu \in W^k(X, F)$, 那么 $u \in W^{k+d}(X, E)$, 并且成立不等式

$$\|u\|_{k+d} \leq C_k (\|Pu\|_k + \|u\|_0)$$

其中常数 C_k 只与 k 有关。

特别地，我们有椭圆算子正则性：对于椭圆算子 P ，若 $u \in W^0(X, E)$ 满足 $Pu = 0$ ，则必有 $u \in C^\infty(X, E)$ 。

我们还关于椭圆算子的如下的一般结果：

引理 5.2.4. (有限性定理)

设 X 为紧定向流形， $E, F \rightarrow X$ 为 Hermite 向量丛，并且 $\text{rank}_{\mathbb{C}} E = \text{rank}_{\mathbb{C}} F$ ， $P : C^\infty(M, E) \rightarrow C^\infty(M, F)$ 为椭圆算子，则有：

- (1) $\ker P$ 是有限维空间；
- (2) $P(C^\infty(X, E))$ 是 $C^\infty(X, F)$ 的闭子空间，并且余维数有限；
- (3) 若 P^* 为 P 的形式伴随，则有 $(L^2(X, F)$ 上的) 正交直和分解

$$C^\infty(X, F) = P(C^\infty(X, E)) \oplus \ker P^*$$

5.3 Hodge \star 算子与 Laplace 算子

我们先来介绍黎曼流形上的 Hodge 理论。在本节，假设 X 为 n 维紧定向黎曼流形， $E \rightarrow X$ 为 Herimite 向量丛， $\text{rank}_{\mathbb{C}} E = r$ 。局部上，取切丛 TX 的（关于黎曼度量的）么正标架 $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ 以及 E 的（关于 Hermite 结构的）么正标架 $e = (e_1, e_2, \dots, e_r)$ 。记 $\xi^* := (\xi_1^*, \xi_2^*, \dots, \xi_n^*)$ 以及 $e^* := (e_1^*, e_2^*, \dots, e_r^*)$ 为相应的对偶标架。

众所周知，对于 $x \in X$ ， X 上的黎曼度量诱导了微分形式丛 $\wedge^\bullet T_x^* M$ 上的内积结构：对于任意 $u_1, \dots, u_p; v_1, \dots, v_p \in T_x^* X$ ，有

$$\langle u_1 \wedge \dots \wedge u_p, v_1 \wedge \dots \wedge v_p \rangle := \det(\langle u_i, v_j \rangle)$$

事实上，对于 $T_x^* X$ 的么正基 ξ^* ，则 $\left\{ \xi_{i_1}^* \wedge \xi_{i_2}^* \wedge \dots \wedge \xi_{i_p}^* \mid p \geq 0, 1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n \right\}$ 为 $\wedge^\bullet T_x^* X$ 的一组么正基。用多重指标记号，将 $\xi_{i_1}^* \wedge \xi_{i_2}^* \wedge \dots \wedge \xi_{i_p}^*$ 简记为 ξ_I^* ，其中 $I := (i_1, i_2, \dots, i_p)$ 。

$\wedge^\bullet T^* M \otimes E$ 的纤维上也自然地有由 $\wedge^\bullet T^* M$ 以及 E 诱导的 Hermite 内积结构。此外，也自然有 \mathbb{C} -共轭双线性型

$$\{, \} : \left(\wedge^p T^* X \otimes E \right) \times \left(\wedge^q T^* X \otimes E \right) \rightarrow \wedge^{p+q} T^* X$$

它由 $\wedge^\bullet T^* X$ 中的外积，以及 E 上的 Hermite 内积所诱导。

定义 5.3.1. (*Hodge* \star 算子)

记号同之前, 则定义 **Hodge** \star 算子

$$\star: \bigwedge^p T^*X \rightarrow \bigwedge^{n-p} T^*X$$

使得对任意 $u, v \in \bigwedge^p T^*X$, 成立

$$u \wedge \star v = \langle u, v \rangle d \text{Vol}$$

良定性容易验证, 并且 \star 为线性算子。容易验证, 在 T^*X 的么正标架 $\xi^* = (\xi_1^*, \xi_2^*, \dots, \xi_n^*)$ 下, 对于指标 $I = (i_1, i_2, \dots, i_p)$, 其中 $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_p$, 则有

$$\star \xi_I^* = \text{sgn}(I, I^c) \xi_{I^c}^*$$

其中 $(n-p)$ 重指标 $I^c = (j_1, j_2, \dots, j_{n-p})$ 为 $\{1, 2, \dots, n\} \setminus I$ 中元素的从小到大排列, $\text{sgn}(I, I^c)$ 为排列 $\begin{pmatrix} 1 & \cdots & p & p+1 & \cdots & n \\ i_1 & \cdots & i_p & j_1 & \cdots & j_{n-p} \end{pmatrix}$ 的符号。

定义 5.3.2. (向量丛上的 \star 算子与 $\#$ 算子)

设 $E \rightarrow X$ 为黎曼流形上的 *Hermite* 向量丛, 则定义

$$\begin{aligned} *: \bigwedge^p T^*X \otimes E &\rightarrow \bigwedge^{n-p} T^*X \otimes E \\ \#: \bigwedge^p T^*X \otimes E &\rightarrow \bigwedge^{n-p} T^*X \otimes E^* \end{aligned}$$

使得对任意 $u, v \in \bigwedge^p T^*X \otimes E$, 成立

$$\begin{aligned} \{u, \star v\} &= \langle u, v \rangle d \text{Vol} \\ u \wedge \# v &= \langle u, v \rangle d \text{Vol} \end{aligned}$$

其中双线性型 $\{, \}$ 由 $\bigwedge^\bullet T^*X$ 中外积 \wedge 与 E 的 *Hermite* 结构诱导, $u \wedge \# v$ 当中的 “ \wedge ” 则由通常的外积与 E^*, E 的配对所诱导。容易验证, 在 $\bigwedge^\bullet T^*X$ 的么正标架 $\{\xi_I^*\}$ 与 E 的么正标架 $e = (e_1, \dots, e_r)$ 下, 成立

$$\begin{aligned} \star(\xi_I^* \otimes e_i) &= \text{sgn}(I, I^c) \xi_{I^c}^* \otimes e_i \\ \#(\xi_I^* \otimes e_i) &= \text{sgn}(I, I^c) \xi_{I^c}^* \otimes e_i^* \end{aligned}$$

以及容易验证, 在 $\bigwedge^p T^*X \otimes E$ 上, 成立

$$\star^2 = \#^2 = (-1)^{p(n-p)} \text{id}$$

回顾 $\Omega^p(X, E) := C^\infty(X, \wedge^p T^*X \otimes E)$ 上有 Hermite 内积结构

$$\langle s, t \rangle := \int_X \langle u, v \rangle d\text{Vol}$$

在此意义下, 我们可谈论相关微分算子的形式伴随:

性质 5.3.3. (*Hermite 联络的形式伴随*)

设 $E \rightarrow X$ 为紧定向黎曼流形上的 *Hermite* 向量丛, $D_E : \Omega^p(X, E) \rightarrow \Omega^{p+1}(X, E)$ 为 *Hermite* 联络, 则有

$$D_E^* = (-1)^{np+1} \star D_E \star$$

证明. 对任意的 $s \in \Omega^p(X, E)$ 以及 $t \in \Omega^{p+1}(X, E)$, 只需注意

$$\langle s, D_E^* t \rangle = \langle D_E s, t \rangle = \int_X \langle D_E s, t \rangle d\text{Vol} = \int_X \{D_E s, \star t\}$$

再注意 D_E 为 Hermite 联络, 从而 $d\{s, \star t\} = \{D_E s, \star t\} + (-1)^p \{s, D_E \star t\}$; 再注意 X 为紧流形, 从而由 Stokes 定理知 $\int_X d\{s, \star t\} = 0$. 因此

$$\begin{aligned} \langle s, D_E^* t \rangle &= \int_X \{D_E s, \star t\} = (-1)^{p+1} \int_X \{s, D_E \star t\} = (-1)^{p+1} (-1)^{p(n-p)} \int_X \{s, \star \star D_E \star t\} \\ &= (-1)^{np+1} \int_X \langle s, \star D_E \star t \rangle d\text{Vol} = (-1)^{np+1} \langle s, \star D_E \star t \rangle \end{aligned}$$

从而由 s, t 的任意性, 有 $D_E^* = (-1)^{np+1} \star D_E \star$. □

引理 5.3.4. (*# 算子的性质*)

设 $E \rightarrow X$ 为紧定向黎曼流形 X 上的 *Hermite* 向量丛, D_E 为 E 上的 *Hermite* 联络, 则在空间 $\Omega^p(X, E)$ 上, 成立

$$\begin{aligned} D_{E^*} \# &= (-1)^p \# D_E^* \\ D_{E^*}^* \# &= (-1)^{p+1} \# D_E \end{aligned}$$

证明. 对于任意 $s \in \Omega^p(X, E)$ 以及 $t \in \Omega^{n-p+1}(X, E^*)$, 注意到对偶联络 D_{E^*} 满足

$$d(\#s \wedge \#t) = D_{E^*} \#s \wedge \#t + (-1)^{n-p} \#s \wedge D_E \#t$$

再注意 X 的紧性, 使用 Stokes 定理, 因此有

$$\begin{aligned}
\langle D_{E^*} \# s, t \rangle &= \int_X \langle D_{E^*} \# s, t \rangle d \text{Vol} = \int_X D_{E^*} \# s \wedge \# t = (-1)^{n-p+1} \int_X \# s \wedge D_E \# t \\
&= (-1)^{n-p+1} (-1)^{(n-p)p} \int_X D_E \# t \wedge \# s = (-1)^{np+n+1} \int_X \langle D_E \# t, s \rangle d \text{Vol} \\
&= (-1)^{np+n+1} \int_X \langle \# t, D_E^* s \rangle d \text{Vol} = (-1)^{np+n+1} \int_X \# t \wedge \# D_E^* s \\
&= (-1)^{np+n+1} (-1)^{(p-1)(n-p+1)} \int_X \# D_E^* s \wedge \# t = (-1)^p \int_X \langle \# D_E^* s, t \rangle d \text{Vol} \\
&= (-1)^p \langle \# D_E^* s, t \rangle
\end{aligned}$$

由 s, t 的任意性, 可得 $D_{E^*} \# = (-1)^p \# D_E^*$. 类似地对任意 $s \in \Omega^p(X, E)$ 以及 $t \in \Omega^{n-p-1}(X, E)$, 我们还可以如下验证之 (利用 $\# \# = (-1)^{p(n-p)} \text{id}$):

$$\begin{aligned}
\langle D_{E^*} \# s, t \rangle &= \int_X \langle D_{E^*} \# s, t \rangle d \text{Vol} = \int_X \langle \# s, D_E^* t \rangle d \text{Vol} = \int_X \overline{\langle D_E^* t, \# s \rangle} d \text{Vol} = \int_X \overline{D_E^* t \wedge \# \# s} \\
&= (-1)^{p(n-p)} \int_X \overline{D_E^* t \wedge \# s} = (-1)^{(p-1)(n-p)} \int_X \overline{t \wedge D_E s} \\
&= (-1)^{(p-1)(n-p)} (-1)^{(p+1)(n-p-1)} \int_X \overline{t \wedge \# \# D_E s} = (-1)^{p-1} \int_X \overline{\langle t, \# D_E s \rangle} d \text{Vol} \\
&= (-1)^{p-1} \int_X \langle \# D_E s, t \rangle d \text{Vol} = (-1)^{p-1} \langle \# D_E s, t \rangle
\end{aligned}$$

从而 $D_{E^*} \# = (-1)^{p-1} \# D_E$. □

定义 5.3.5. (向量丛上的 Laplace 算子)

设 $E \rightarrow X$ 为紧定向黎曼流形 X 上的 Hermite 向量丛, D_E 为 E 的一个 Hermite 联络, 则定义关于联络 D_E 的 **Laplace 算子** $\Delta_E : \Omega^p(X, E) \rightarrow \Omega^p(X, E)$ 为:

$$\Delta_E := D_E D_E^* + D_E^* D_E$$

为说明如此定义的 Laplace 算子与古典情形 $\Delta := \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ 之间的关系, 我们来看特殊例子。考虑 $X = \mathbb{R}^n$ 配以标准黎曼度量 $g = \sum_{i=1}^n dx_i \otimes dx_i$, 以及平凡 Hermite 线丛 $E := X \times \mathbb{C}$. 对于外微分算子 (平凡线丛 E 上的联络)

$$d : \Omega^{p-1}(X, E) \rightarrow \Omega^p(X, E)$$

则对任意 $u \in \Omega^p(X, E)$ 以及 $v \in \Omega^{p-1}(X, E)$, 若 $\text{supp } u \cap \text{supp } v \subset\subset X = \mathbb{R}^n$, 则

$$\begin{aligned}
\langle d^* u, v \rangle &= \langle u, dv \rangle = \int_X \langle u, dv \rangle d \text{Vol} = \sum_{i=1}^n \int_X \langle u, dx_i \wedge \frac{\partial v}{\partial x_i} \rangle d \text{Vol} \\
&= \sum_{i=1}^n \int_X \langle \frac{\partial}{\partial x_i} \lrcorner u, \frac{\partial v}{\partial x_i} \rangle d \text{Vol} = \sum_{i=1}^n \int_X - \langle \frac{\partial}{\partial x_i} \lrcorner \frac{u}{x_i}, v \rangle d \text{Vol} = - \langle \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \lrcorner \frac{\partial u}{\partial x_i}, v \rangle
\end{aligned}$$

其中“ \lrcorner ”为切向量场与微分形式之间的缩并运算。因此对于 $u = \sum_{|I|=p} u_I dx_I \in \Omega^p(X, E)$, 成立

$$d^*u = - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \lrcorner \frac{\partial u}{\partial x_i} = - \sum_{i=1}^n \sum_{|I|=p} \frac{\partial u_I}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_i} \lrcorner dx_I$$

因此对于 $u \in \Omega^p(X, E)$, 成立

$$\begin{aligned} dd^*u &= - \sum_{i,j=1}^n dx_j \wedge \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \lrcorner \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) = - \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} \left(dx_j \wedge \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \lrcorner \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) \right) \\ d^*du &= - \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} \lrcorner \frac{\partial}{\partial x_j} \left(dx_i \wedge \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) = - \sum_{i,j=1}^n \delta_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(dx_i \wedge \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \lrcorner \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) \right) \end{aligned}$$

因此有

$$\Delta u = (dd^* + d^*d)u = - \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$$

定理 5.3.6. 设 $E \rightarrow X$ 为紧定向黎曼流形 X 上的 *Hermite* 向量丛, D_E 为 E 的一个 *Hermite* 联络, 则关于 D_E 的 *Laplace* 算子 $\Delta_E := D_E D_E^* + D_E^* D_E$ 是自伴的椭圆算子。

证明. 显然 $\Delta_E^* = (D_E D_E^* + D_E^* D_E)^* = D_E^* D_E + D_E D_E^* = \Delta_E$, 从而 Δ_E 是自伴的。再注意容易验证 D_E 与 D_E^* 的主符号 $\sigma_{D_E}, \sigma_{D_E^*}$ 满足

$$\begin{aligned} \sigma_D(x, \xi)(u) &= \xi \wedge u \\ \sigma_{D^*}(x, \xi)(u) &= -\xi^* \lrcorner u \end{aligned}$$

因此 Δ_E 的主符号 σ_{Δ_E} 满足

$$\sigma_{\Delta_E}(x, \xi)(u) = -\xi^* \lrcorner (\xi \wedge u) + \xi \wedge (-\xi^* \lrcorner u) = -(\xi^* \lrcorner \xi) \wedge u = -u$$

即 $\sigma_{\Delta_E}(x, \xi) \equiv -\text{id} : (\wedge^p T^*X \otimes E)_x \rightarrow (\wedge^p T^*X \otimes E)_x$. 特别地, 任意 $\xi \neq 0 \in T_x^*X$, $\sigma_{\Delta_E}(x, \xi)$ 都为单射, 从而 Δ_E 为椭圆算子。□

引理 5.3.7. (*Laplace* 算子与 $\#$ 算子)

设 $E \rightarrow X$ 为紧定向黎曼流形 X 上的 *Hermite* 向量丛, D_E 为 X 上的一个 *Hermite* 联络, Δ_E 为关于联络 D_E 的 *Laplace* 算子, Δ_{E^*} 为对偶联络 D_{E^*} 的 *Laplace* 算子, 则成立

$$\Delta_{E^*} \# = \# \Delta_E$$

证明. 考虑它们在 $\Omega^p(X, E)$ 上的作用, 利用引理5.3.4可得

$$\begin{aligned}
\Delta_E \# &= (D_E^* D_E^* + D_E^* D_E^*) \# \\
&= (-1)^{p-1} D_E^* \# D_E + (-1)^p D_E^* \# D_E^* \\
&= (-1)^{p-1} (-1)^{p+1} \# D_E^* D_E + (-1)^p (-1)^{p-1-1} \# D_E D_E^* \\
&= \# \Delta_E
\end{aligned}$$

从而证毕。 □

5.4 紧黎曼流形上 Hodge 理论

定义 5.4.1. (平坦联络)

设 $E \rightarrow X$ 为光滑流形上的光滑向量丛, D_E 为 E 上的联络. 称 D_E 为平坦联络 (*flat connection*), 若曲率 $\Theta := D_E^2 = 0$.

例如, 光滑流形 X 上的外微分算子 d 视为平凡线丛 $X \times \mathbb{C}$ 上的联络, 是平坦联络. 注意到对于平坦联络 $D_E : \Omega^p(X, E) \rightarrow \Omega^{p+1}(X, E)$, 则有上链复形 $(\Omega^\bullet(X, E), D_E)$, 该上链复形的上同调称为 E 关于平坦联络 D_E 的 **de Rham 上同调**, 记作

$$H_{\text{DR}}^\bullet(X, E) := H^\bullet(\Omega^\bullet(X, E), D_E)$$

定义 5.4.2. (调和形式)

对于紧定向黎曼流形 X 上的 *Hermite* 向量丛 $E \rightarrow X$, D_E 为 E 的一个 *Hermite* 联络. 称 $u \in \Omega^p(X, E)$ 为 (关于 D_E 的) 调和形式 (*harmonic form*), 若 $\Delta_E u = 0$. 其中 Δ_E 为关于 D_E 的 *Laplace* 算子.

容易知道调和形式构成的空间

$$\mathcal{H}^p(X, E) := \left\{ u \in \Omega^p(X, E) \mid \Delta_E u = 0 \right\}$$

为 $\Omega^p(X, E)$ 的线性子空间。

引理 5.4.3. 条件、记号承上, 则对于 $s \in \Omega^p(X, E)$, $s \in \mathcal{H}^p(X, E)$ 当且仅当 $D_E s = D_E^* s = 0$.

证明. 充分性显然; 再注意到

$$\langle \triangle_E s, s \rangle = \langle D_E D_E^* s, s \rangle + \langle D_E^* D_E s, s \rangle = \|D_E^* s\|^2 + \|D_E s\|^2$$

从而必要性也显然。 \square

定理 5.4.4. (*Hodge 分解定理*)

设 $E \rightarrow X$ 是紧定向黎曼流形 X 上的 *Hermite* 向量丛, D_E 为 E 上的一个平坦联络, 则有正交直和分解

$$\Omega^p(X, E) = \mathcal{H}^p(X, E) \oplus \text{Im } D_E \oplus \text{Im } D_E^*$$

证明. $\mathcal{H}^p(X, E)$ 与 $\text{Im } D_E, \text{Im } D_E^*$ 的正交性由引理5.4.3易得; $\text{Im } D_E$ 与 $\text{Im } D_E^*$ 正交, 是因为 D_E 的平坦性, 这都容易验证。由于 \triangle_E 为椭圆算子, 从而由椭圆算子的一般结果 (引理5.2.4), 有

$$\Omega^p(X, E) = \text{Im } \triangle_E \oplus \ker \triangle_E^* = \text{Im } \triangle_E \oplus \ker \triangle_E = \mathcal{H}^p(X, E) \oplus \text{Im } \triangle_E$$

之后再注意到

$$\text{Im } \triangle_E = \text{Im}(D_E D_E^* + D_E^* D_E) \subseteq \text{Im } D_E \oplus \text{Im } D_E^*$$

从而证毕。 \square

定理 5.4.5. (*Hodge 同构定理*)

设 $E \rightarrow X$ 是紧定向黎曼流形 X 上的 *Hermite* 向量丛, D_E 为 E 上的一个平坦联络, 则有同构

$$\mathcal{H}^p(X, E) \cong H_{\text{DR}}^p(X, E)$$

证明. 注意到 Hodge 分解 $\Omega^p(X, E) = \mathcal{H}^p(X, E) \oplus \text{Im } D_E \oplus \text{Im } D_E^*$, 从而有 $\ker D_E = (\text{Im } D_E^*)^\perp = \mathcal{H}^p(X, E) \oplus \text{Im } D_E$, 因此

$$H_{\text{DR}}^p(X, E) = \frac{\ker D_E}{\text{Im } D_E} \cong \frac{\mathcal{H}^p(X, E) \oplus \text{Im } D_E}{\text{Im } D_E} \cong \mathcal{H}^p(X, E)$$

证毕。 \square

特别地, 取 $E = X \times \mathbb{C}$ 为平凡线丛, $D_E = d$ 为外微分, 则得到: 紧定向流形 (注意一定有黎曼结构) 的 de Rham 上同调群一定是有限维的。以及我们有同构

$$H_{\text{sing}}^p(X, \mathbb{C}) \cong H^p(X, \mathbb{C}) \cong H_{\text{DR}}^p(X, \mathbb{C}) \cong \mathcal{H}^p(X, \mathbb{C})$$

即: (复系数) 奇异上同调、层上同调、de Rham 上同调、调和形式四者同构。

推论 5.4.6. 条件、记号承上，则有

$$\dim H_{\text{DR}}^p(X, E) < +\infty$$

证明. 利用 Hodge 同构定理，以及椭圆算子的一般性质（引理5.2.4）。 \square

定理 5.4.7.（庞加莱对偶）

设 X 为紧定向 n 维光滑流形， $E \rightarrow X$ 为 X 上的 *Hermite* 向量丛， D_E 为 E 上的平坦 *Hermite* 联络，则对任意 $0 \leq p \leq n$ ，双线性型

$$\begin{aligned} H_{\text{DR}}^p(X, E) \times H_{\text{DR}}^{n-p}(X, E^*) &\rightarrow \mathbb{C} \\ ([s], [t]) &\mapsto \int_X s \wedge t \end{aligned}$$

是良定的，并且非退化。

证明. 对于任意 $s \in \Omega^{p-1}(X, E)$ ，以及任意 $t \in \Omega^{n-p}(X, E^*)$ 使得 $[t] \in H^{n-p}(X, E^*)$ ，则 $D_{E^*}t = 0$. 注意到

$$d(s \wedge t) = D_E s \wedge t + (-1)^{p-1} s \wedge D_{E^*} t = D_E s \wedge t$$

因此有

$$\int_X D_E s \wedge t = - \int_X d(s \wedge t) = 0$$

这就证明了对任意 $[s], [t] \rightarrow \mathbb{C}$ 与 $[s]$ 的代表元选取无关，类似地也可证明与 $[t]$ 的代表元选取无关，从而良定。

在看非退化性。给定 X 上的一个黎曼度量 g ，于是可谈论关于 g 与 D_E 的 Laplace 算子 Δ_E . 注意 Hodge 同构定理 $H_{\text{DR}}^p(X, E) \cong \mathcal{H}^p(X, E)$ ，从而对任意 $s \in H^p(X, E)$ ，不妨取代表元 s 为调和形式。则有引理5.3.7容易得到， $\#s \in \mathcal{H}^{n-p}(E^*)$ ，从而 $[\#s] \in H_{\text{DR}}^{n-p}(X, E^*)$. 因此有

$$\int_X s \wedge \#s = \int_X \langle s, s \rangle d\text{Vol} = \|s\|^2$$

这就证明了对任意 $[s] \neq 0 \in H_{\text{DR}}^p(X, E)$ ， $[t] \mapsto \int_X s \wedge t$ 是非退化的。同理该双线性型对另一边也非退化。 \square

注记 5.4.8. 事实上，以上结果对于赋以欧氏内积（而不是 *Hermite* 内积）的向量丛也成立。证明也完全类似。

推论 5.4.9. 对于 n 维紧致定向光滑流形 X ，则其 *de Rham* 上同调满足

$$\dim_{\mathbb{C}} H_{\text{DR}}^p(X, \mathbb{C}) = \dim_{\mathbb{C}} H_{\text{DR}}^{n-p}(X, \mathbb{C})$$

证明. 取 X 上的平凡线丛 $E \cong X \times \mathbb{C}$ ，配以标准的 Hermite 内积，则外微分 d 为 E 上的平坦 Hermite 联络。注意到 $E^* \cong E$ ，之后庞加莱对偶即可。□

5.5 Hermite 流形与 Kähler 流形

定义 5.5.1. 对于复流形 X ，称 X 为 *Hermite 流形*，若 X 配以张量 h ，局部上形如

$$h = h_{ij} dz^i \otimes d\bar{z}^j$$

并且矩阵 $(h_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ 是正定 Hermite 矩阵。

无非是全纯切丛 TX 上的 Hermite 结构。但是要注意这里的 Hermite 结构关于右边的变量（而不是左边）是共轭线性的，与之前介绍 Hermite 向量丛时有区别。容易验证该定义的良好性。此外，与黎曼度量存在性类似，用单位分解定理可易证任何复流形都可配以 Hermite 流形结构。

对于 Hermite 张量 $h = h_{ij} dz^i \otimes d\bar{z}^j$ ， h 诱导了 $(1,1)$ -形式 ω ：

$$h = h_{ij} dz^i \otimes d\bar{z}^j \mapsto \omega = \frac{\sqrt{-1}}{2} h_{ij} dz^i \wedge d\bar{z}^j$$

容易验证良好性，事实上对于 X 上的任意全纯切向量场 ξ, η ，成立

$$\omega(\xi, \eta) = -\sqrt{-1} \operatorname{Im} h(\xi, \eta)$$

即 ω 是 h 的虚部的相反数。显然 ω 是实的 $(1,1)$ -形式，即 $\omega = \bar{\omega}$ ，也就是说 $\omega \in \Omega^2(X, \mathbb{R})$ 。

定义 5.5.2. (*Kähler 度量与 Kähler 流形*)

对于 Hermite 流形 (X, h) ，称 Hermite 度量 h 为 **Kähler 度量**，若关于 h 的微分形式 ω 满足 $d\omega = 0$ ，此时也称 ω 为 **Kähler 形式**；称复流形 X 为 **Kähler 流形**，若 X 上存在 Kähler 度量。

注意到 $d\omega = 0$ 当且仅当 $\partial\omega = \bar{\partial}\omega = 0$, 而 Hermite 形式 ω 总是实形式, 从而 $\overline{\partial\omega} = \bar{\partial}\omega$. 因此 $d\omega = 0 \iff \partial\omega = 0$. 在局部坐标下, $\omega = \frac{\sqrt{-1}}{2} h_{jk} dz^j \wedge d\bar{z}^k$, 则

$$\begin{aligned}\partial\omega &= \frac{\sqrt{-1}}{2} \frac{\partial h_{jk}}{\partial z^l} dz^l \wedge dz^j \wedge d\bar{z}^k = \frac{\sqrt{-1}}{2} \sum_{l < j} \left(\frac{\partial h_{jk}}{\partial z^l} - \frac{\partial h_{lk}}{\partial z^j} \right) dz^l \wedge dz^j \wedge d\bar{z}^k \\ d\omega = 0 &\iff \frac{\partial h_{jk}}{\partial z^l} = \frac{\partial h_{lk}}{\partial z^j}\end{aligned}$$

性质 5.5.3. (紧 Kähler 流形的拓扑限制)

设 X 为紧 Kähler 流形, 则对任意 $k \geq 0$, 必有

$$H^{2k}(X, \mathbb{R}) \neq 0$$

证明. 设 $\omega = \frac{\sqrt{-1}}{2} h_{ij} dz^i \wedge d\bar{z}^j$ 为 X 的一个 Kähler 形式, 则 $d\omega = 0$. 注意到

$$\begin{aligned}\omega^n &= \left(\frac{\sqrt{-1}}{2} \right)^n n! \det(h_{ij}) dz^1 \wedge d\bar{z}^1 \wedge \cdots \wedge dz^n \wedge d\bar{z}^n \\ &= n! \det(h_{ij}) dx^1 \wedge dy^1 \wedge \cdots \wedge dx^n \wedge dy^n\end{aligned}$$

从而 ω^n 为 X 上的一个体积形式, $\int_X \omega^n \neq 0$. 因此对于 $k \geq 0$, 考虑

$$([\omega^k], [\omega^{n-k}]) \mapsto \int_X \omega^k \wedge \omega^{n-k} = \int_X \omega^n \neq 0$$

从而由庞加莱对偶, 知 $0 \neq [\omega^k] \in H^{2k}(X, \mathbb{R})$. □

例子 5.5.4. (紧复流形但非 Kähler 的例子: Hopf 曲面)

给定 $0 < \lambda < 1$, 考虑离散群 $\Gamma := \left\{ \lambda^n \mid n \in \mathbb{Z} \right\} \cong \mathbb{Z}$. 则 Γ 中的元素作为标量乘积, 在 \mathbb{C}^2 上有自然的作用. 考虑

$$X := (\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}) / \Gamma$$

则 X 具有紧复流形结构, 但非 Kähler.

证明. 容易验证在拓扑同胚意义下 $X \cong S^1 \times S^3$, 从而紧致. 其复流形结构由 $\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$ 的商流形给出. 由代数拓扑 (Künneth 公式) 可知 $H^2(X, \mathbb{R}) = H^2(S^1 \times S^3, \mathbb{R}) = 0$, 从而由性质 5.5.3 可知 X 不是 Kähler 流形. □

例子 5.5.5. 黎曼曲面一定是 Kähler 流形。

这是平凡的例子。

例子 5.5.6. 复环面 $X = \mathbb{C}^n / \Gamma$ 为 Kähler 流形. 其中 Γ 为格子子群。

因为 \mathbb{C}^n 上具有 Kähler 形式 $\omega = \frac{\sqrt{-1}}{2} dz^i \wedge d\bar{z}^i$. 但要注意这样的流形未必是紧的。

例子 5.5.7. 复射影空间 \mathbb{CP}^n 是 Kähler 流形。

证明. 回顾例子4.5.2当中的曲率形式

$$\Theta(\mathcal{O}(1)) = \sqrt{-1} \partial \bar{\partial} \log(1 + |z_1|^2 + \cdots + |z_n|^2)$$

事实上, 可以验证该形式的系数矩阵正定; 并且它作为线丛的曲率形式, 必然是 d -闭的, 因此 $\Theta(\mathcal{O}(1))$ 是 \mathbb{CP}^n 上的 Kähler 形式. \square

例子 5.5.8. *Let (X, ω) is a Kahler manifold, then any complex submanifold $Y \subseteq X$ is also Kahler.*

$$i : Y \hookrightarrow X$$

with the Kahler metric $i^* \omega$.

Exercise: Let $f : Y \rightarrow X$ be a holomorphic immersion, and assume X is Kahler, then Y is Kahler.

推论 5.5.9. *Any projective manifold (i.e. $X \hookrightarrow \mathbb{CP}^N$) is Kähler.*

(Algebraic Geometry.....)

性质 5.5.10. *(Equivalent definition of Kaehler metrics) a Hermitian metric ω is Kahler, iff for all $x_0 \in X$, there exists a holomorphic chart (z_1, \dots, z_n) centered at x_0 , s.t.*

$$\omega(z) = \sqrt{-1} \sigma_{jk} \delta_{jk} dz_j \wedge d\bar{z}_k + O(|z|^2)$$

(\Leftarrow is trivial...) (left to HW)

定理 5.5.11. *(Exercise)*

If (X, ω) is Kahler, then for all $x_0 \in X$, \exists holomorphic chart z_1, \dots, z_n centered at x_0 , s.t. assume

$$\omega = \sqrt{-1} h_{jk} dz_j \wedge d\bar{z}_k$$

then

$$h_{lm}(z) = \delta_{lm} - \sum_{j,k} c_{jk,lm} z_j \bar{z}_k + O(|z|^3)$$

where $c_{jk,lm}$ is the coefficients of the Chern curvature tensor,

$$\Theta(TX)_x := \sum c_{jk,lm} dz_j \wedge d\bar{z}_k \otimes \left(\frac{\partial}{\partial z_l}\right)^* \otimes \frac{\partial}{\partial z_m}$$

(查书)

5.6 紧复流形上的 Hodge 理论

(X, ω) is a compact Hermitian manifold, $E \rightarrow X$ is a homomorphic Hermitian vector bundle.

$$D_E := D'_E + D''_E$$

Chern connection, $D''_E = \bar{\partial}$.

定义 5.6.1.

$$\Delta_E := D_E D_E^* + D_E^* D_E$$

$$(D'_E)^* = - * D''_E *$$

$$(D''_E)^* = - * D'_E *$$

$$\Delta'_E = D'_E (D'_E)^* + \dots$$

$$\Delta''_E = \dots$$

Note that $(D''_E)^2 = 0$, consider the complex

$$\begin{aligned} C^\infty(X, \bigwedge^{p,q} \otimes E) &\xrightarrow{D''_E} C^\infty(X, \bigwedge^{p,q+1} \otimes E) \\ &\rightsquigarrow H_{D''_E}^{p,q}(X, E) \end{aligned}$$

Dolbeaut cohomology... it isom to $\ker \Delta''_E$

Hodge theory in compact complex manifold.

Let (X, ω) be a compact complex manifold of dimension n . $E \rightarrow X$ holomorphic Hermitian vector bundle, with Chern connection D_E , $D_E = D'_E + D''_E$ where $D''_E = \bar{\partial}$.

Recall: L^2 inner product: $u \in C^\infty(X \wedge^{p,q} \otimes E)$,

$$\langle \langle u, v \rangle \rangle := \int_X \langle u, v \rangle \mathrm{dvol}$$

Hodge star operator $*$: $u, v \in C^\infty(X, \wedge^{p,q} \otimes E)$,

定义 5.6.2.

$$*: \wedge^{p,q} \otimes E \rightarrow \wedge^{n-q, n-p} \otimes E$$

s.t.

$$u \wedge *v = \langle u, v \rangle \mathrm{dvol}$$

(wedge product from $\wedge^{p,q}$, with inner product from E)

Exercise: Take a holomorphic chart (z_1, \dots, z_n) s.t.

$$\omega = \sqrt{-1} \sum_j \mathrm{d}z_j \wedge \mathrm{d}\bar{z}_j$$

at some point p . An orthonormal frame $\{e_1, \dots, e_r\}$, Let

$$u = \sum_{\substack{|I|=p \\ |J|=q}} \sum_{\lambda=1}^r u_{IJ} \mathrm{d}z_I \wedge \mathrm{d}\bar{z}_J \otimes e_\lambda \in \wedge^{p,q} \otimes E$$

WHAT IS $*u$?

Formal adjoint of D_E, D'_E, D''_E ?

性质 5.6.3.

$$D_E^* = - * D_E *$$

$$(D'_E)^* = - * D''_E *$$

$$(D''_E)^* = - * D'_E *$$

定义 5.6.4.

$$\Delta_E := D_E D_E^* + D_E^* D_E$$

$$\Delta'_E := D'_E D'^*_E + D'^*_E D'_E$$

$$\Delta''_E := \dots$$

Check: $\Delta_E, \Delta'_E, \Delta''_E$ are self adjoint, elliptic operators.
Hodge theory w.r.t. Δ''_E .

定理 5.6.5. *We have a decomposition*

$$C^\infty(X, \bigwedge^{p,q} \otimes E) = \ker \Delta''_E \oplus \operatorname{Im} D''_E \oplus \operatorname{Im} D''_{E^*}$$

As a consequence, Dolbeault cohomology

$$H_{D''_E}^{p,q}(X, \mathbb{C}) \cong \ker \Delta''_E$$

推论 5.6.6.

$$\dim_{\mathbb{C}} H_{D''_E}^{p,q}(X, \mathbb{C}) < +\infty$$

Cohomology group

$$H_{D''_E}^{p,q}(X, \mathbb{C})$$

Ω^p : sheaf of holomorphic p -forms on X (i.e. a $(p, 0)$ -form φ is holomorphic if $\bar{\partial}\varphi = 0$).

$\mathcal{E}^{p,q}$: Sheaf of smooth (p, q) -forms on X .

Similarly, we have $\Omega^p(E)$ the sheaf of holomorphic p -forms with values in E , and $\mathcal{E}^{p,q}(E)$ the sheaf...smooth (p, q) -forms ...

we have an acyclic resolutions

$$0 \rightarrow \Omega^p(E) \xrightarrow{D''_E} \mathcal{E}^{p,1}(E) \xrightarrow{D''_E} \mathcal{E}^{p,2}(E) \xrightarrow{D''_E} \dots$$

(check, it is a resolution)

By de Rham-Weil theorem,

$$H^q(X, \Omega^p(E)) \cong H_{D''_E}^{p,q}(X, \mathbb{C}) \cong \mathcal{H}_{D''_E}^{p,q}(X, \mathbb{C}) := \ker \Delta''_E$$

定理 5.6.7. *(Serre duality)*

The pairing

$$H_{D''_E}^{p,q}(X, E) \times H_{D''_E}^{n-p, n-q}(X, E^*) \rightarrow \mathbb{C}$$

$$(s, t) \mapsto \int_X s \wedge t$$

is non-degenerate

证明. Define

$$\# : \bigwedge^{p,q} \otimes E \rightarrow \bigwedge^{n-p,n-q} \otimes E^*$$

by: for $u, v \in \bigwedge^{p,q} \otimes E$,

$$u \wedge \#v := \langle u, v \rangle \text{dvol}$$

Fact:

$$\Delta''_{E^*} \# = \# \Delta''_E$$

□

Remark: take $E = X \times \mathbb{C}, D_E = \mathbf{d} = \mathbf{d}' + \mathbf{d}'', (\mathbf{d}' = \partial, \mathbf{d}'' = \bar{\partial})$ then we have

$$\Delta' = \mathbf{d}' \mathbf{d}'^* + \mathbf{d}'^* \mathbf{d}'$$

$$\Delta'' = \dots$$

then

$$H_{\mathbf{d}''}^{p,q}(X, \mathbb{C}) \cong \ker \Delta'' \hookrightarrow C^\infty(X, \bigwedge^{p,q})$$

the pairing

$$H^{p,q}(X, \mathbb{C}) \times H^{n-p,n-q}(X, \mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}$$

is non-degenerate.

第 6 章 Lefschitz 分解

6.1 线性代数版本的 Lefschitz 算子

Three goals:

Kahler package

Lefschetz decomposition

Hodge-Riemann bilinear relations

Linear algebra(baby representation theory)(local case)

\mathbb{C}^n ,

$$\omega = \sqrt{-1} \sum_{i,j} h_{ij} dz_i \wedge d\bar{z}_j$$

Kahler metric with constant coefficients.(i.e. h_{ij} is constant, (h_{ij}) is positive Hermite matrix)

W.L.O.G, by taking a linear transformation, we can assume

$$\omega = \sqrt{-1} \sum_{j=1}^n dz_j \wedge d\bar{z}_j$$

记号 6.1.1. *An operator is of pure degree r if it transform a form of $\deg = k$ to as form of degree $k + r$.*

An operator ..of bi-degree (p, q) if $...(s, t) \rightarrow (s + p, t + q)$ (in this case, $\text{degree} = p + q$) if A, B with degree $\deg A, \deg B$, define

$$[A, B] := AB - (-1)^{\deg A \deg B} BA$$

定义 6.1.2.

$$L : \bigwedge^{p,q} \rightarrow \bigwedge^{p+1,q+1}$$
$$u \mapsto \omega \wedge u$$

is called Lefschetz operator.

Denote Λ to be the adjoint of L , adjointed by : Let $v \in \wedge^{p-1,q-1}$ and $u \in \wedge^{p,q}$

$$\langle Lv, u \rangle := \langle u, \Lambda v \rangle$$

The operator Λ is of bi-degree $(-1, -1)$.

性质 6.1.3. If

$$u = \sum_{\substack{|I|=p \\ |J|=q}} u_{IJ} dz_I \wedge d\bar{z}_J$$

then

$$Lu = \sqrt{-1} \sum_{\substack{|I|=p \\ |J|=q}} \sum_{m=1}^n u_{IJ} dz_m \wedge d\bar{z}_m \wedge dz_I \wedge d\bar{z}_J$$

$$\Lambda u = \sqrt{-1}(-1)^p \sum_{\substack{|I|=p \\ |J|=q}} \sum_{m=1}^n u_{IJ} \left(\frac{\partial}{\partial z_m} \lrcorner dz_I \right) \wedge \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}_m} \lrcorner d\bar{z}_J \right)$$

where " \lrcorner " is contraction.

推论 6.1.4. (Exercise) Let

$$\alpha = \sqrt{-1} \sum_{j=1}^n \alpha_j dz_j \wedge \bar{z}_j$$

then, (α is a operator of bi-degree $(1, 1)$)

$$[\alpha, \Lambda]u = \sum_{\substack{|I|=p \\ |J|=q}} \left(\sum_{i \in I} \alpha_i + \sum_{j \in J} \alpha_j - \sum_{k=1}^n \alpha_k \right) u_{IJ} dz_I \wedge d\bar{z}_J$$

where

$$u = \sum_{\substack{|I|=p \\ |J|=q}} u_{IJ} dz_I \wedge d\bar{z}_J$$

推论 6.1.5. if $u \in \wedge^{p,q}$, then

$$[L, \Lambda]u = (p + q - n)u$$

推论 6.1.6. Denote $B := [L, \lambda]$, then

$$[B, L] = 2L$$

$$[B, \Lambda] = -2\Lambda$$

证明. Take $u \in \bigwedge^{p,q}$, then

$$[B, L] = BLu - LBu = (p + q - n + 2)Lu - (p + q - n)Lu = 2Lu$$

the second is similar.. □

$\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ -representation

$$\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) = \text{span}_{\mathbb{C}} l, \lambda, b$$

where

$$l = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

we have

$$[l, \lambda] = b \quad [b, l] = 2l \quad [b, \lambda] = -2\lambda$$

性质 6.1.7. There exists a natural action

$$\rho : \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) \rightarrow \text{End}\left(\bigoplus_{p,q} \bigwedge^{p,q}\right)$$

with

$$\rho(l) = L$$

$$\rho(\lambda) = \Lambda$$

$$\rho(b) = B$$

定理 6.1.8. (HL)

$$L^{n-k} : \bigwedge^k \rightarrow \bigwedge^{2n-k}$$

$$u \rightarrow \omega^{n-k} \wedge u$$

is an isomorphism.

$$L^{n-k} : \bigwedge^{p,q} \rightarrow \bigwedge^{n-k+p, n-k+q}$$

is also an isomorphism.

证明. Lemma:

$$[L^r, \Lambda]u = r(k - n + r - 1)L^{r-1}u$$

(induction, omit)

Assume $\alpha \in \bigwedge_{\mathbb{C}}^k$, $L^{n-k}\alpha = 0$, need to verify $\alpha = 0$.

Claim:

$$L^r : \bigwedge^k \rightarrow \bigwedge^{k+2r}$$

is injective whenever $r \leq n - k$.

proof of the claim:

claim is true when $k = 0$ or $k = 1$. (check)

Let $\alpha \in \bigwedge^k$ s.t. $L^r\alpha = 0$ ($r \leq n - k$). By the lemma,

$$L^r\Lambda\alpha - \Lambda L^r\alpha = r(k - n + r - 1)L^{r-1}\alpha$$

so,

$$L^{r-1}(L\Lambda\alpha - r(k - n + r - 1)\alpha) = 0$$

by the induction on r ,

$$L\Lambda\alpha = r(k - n + r - 1)\alpha$$

since $r(k - n + r - 1) \neq 0$, $\alpha = L\beta$ for some $\beta \in \bigwedge^{k-2}$. so, $L^r\alpha = L^{r+1}\beta = 0$, by induction on k , we have $\beta = 0$, so $\alpha = 0$.

The claim is proved. □

定义 6.1.9. (*Primitive form*)

$\alpha \in \bigwedge^k$ ($k \leq n$) is called primitive form, if

$$L^{n-k+1}\alpha = 0$$

推论 6.1.10. (*Lefschitz Decomposition*)(LD)

For any $\alpha \in \bigwedge^k$, ($1 \leq k \leq 2n$), we have a unique decomposition:

$$\alpha = \sum_{\gamma \geq (k-n)_+} L^\gamma \alpha_\gamma$$

$((k-n)_+ := \max\{k-n, 0\})$ with $\alpha_r \in \bigwedge^{k-2r}$ is primitive

证明. Existence: assume $k \leq n$, consider

$$L^{n-k+1}\alpha \in \bigwedge^{2n-k+2}$$

by HL, $\exists! \beta \in \bigwedge^{k-2}$ s.t. $L^{n-k+2}\beta = L^{n-k+1}\alpha$, so $L^{n-k+1}(\alpha - L\beta) = 0$, i.e. $\alpha_0 = \alpha - L\beta$ is primitive. $\alpha = \alpha_0 + L\beta$, then induction on degrees, we get the decomposition for α .

If $k > n$, we apply HL to reduce it to case 1.

Uniqueness: Next time..

□

Today: Continuous to Hard Lef decomposition, Hodge-Riemann bilinear relations.

Hard-Lefschitz: HL

Lefschitz decomposition :LD

Hodge-Riemann bilinear relations :HRR

Recall: $\mathbb{C}^n, \bigwedge^k = \bigoplus_{p+q=k} \bigwedge^{p,q}$, ω : a Kahler metric on \mathbb{C}^n with constant coefficient $\in \bigwedge_{\mathbb{R}}^{1,1}$.

Lefschitz operator : $Lu = \omega \wedge u$.

定理 6.1.11. (HL)

Assume $k \leq n, p+q \leq n$, then

$$L^{n-k} : \bigwedge^k \rightarrow \bigwedge^{2n-k}$$

is a linear isomorphism.

$$L^{n-k} : \bigwedge^{p,q} \rightarrow \bigwedge^{p+n-k, q+n-k}$$

is also a linear isomorphism.

Linear algebra..

定理 6.1.12. (LD) for any $u \in \bigwedge^k$, we have a unique decomposition

$$u = \sum_{r \geq (k-n)_+} L^r u_r$$

where $u_r \in \bigwedge_{\text{prim}}^{k-2r}$ is a primitive form.

Recall: a k -form $u \in \wedge^k (k \leq n)$ is called primitive, if $L^{n-k+1}(u) = 0$. When $k > n$, u is called primitive, $\Lambda(u) = 0$, where Λ is the adjoint of L .

证明. Existence: application of HL .

Uniqueness: Omit. □

性质 6.1.13. Assume $\alpha \in \wedge_{prim}^{p,q}$, and $p+q \leq n$. (i.e. $L^{n-p-q+1}\alpha = 0$), then

$$*\alpha = (-1)^{\frac{(p+q)(p+q-1)}{2}} (\sqrt{-1})^{p-q} \frac{1}{(n-p-q)!} L^{n-p-q}\alpha$$

证明. See [Humphreys, Prop 1.2.31] □

定理 6.1.14. (HRR) Define the bilinear form Q on $\wedge^k (k \leq n)$ as follows:

$$Q(\alpha, \beta) := L^{n-k} \wedge \alpha \wedge \bar{\beta}$$

Then

$$(\sqrt{-1})^{p-q} (-1)^{\frac{(p+q)(p+q-1)}{2}} Q(u, u) \geq 0$$

for any $u \in \wedge_{prim}^{p,q}$, $p+q = k \leq n$, and equal holds

$$\iff u = 0$$

(i.e. $Q|_{\wedge_{prim}^{p,q}}$ is positive definite up to a factor)

证明. Take $u \in \wedge_{prim}^{p,q}$,

$$Q(u, u) = L^{n-k} \wedge u \wedge \bar{u} = *u \wedge \bar{u} = \langle \bar{u}, \bar{u} \rangle dVol = |u|^2 dVol \geq 0$$

(up to a factor!)

(We apply the following result: $\overline{* \varphi} = * \bar{\varphi}$, i.e. $*$ is a real operator) □

Summary: $\wedge^\bullet = \bigoplus_{1 \leq k \leq n} \wedge_{\mathbb{C}}^k$, where $\wedge_{\mathbb{C}}^k = \bigoplus_{p+q=k} \wedge_{\mathbb{C}}^{p,q}$.

Lefschitz operator $L \rightsquigarrow HL, LD, HRR$.

6.2 紧 Kahler 流形的上同调群

The analogue of compact Kahler manifolds,

$$H_{DR}^k(X, \mathbb{C}) \cong \bigoplus_{p+q=k} H_{Dol}^{p,q}(X, \mathbb{C})$$

ω : A Kahler metric $\in H_{Dol}^{1,1}(X, \mathbb{R})$.

Denote $L \hookrightarrow H_{DR}^k(X, \mathbb{C})$,

$$L(u) = [\omega, u] = [\omega] \wedge u$$

Commutative relations on Kahler manifolds

$$(\mathbb{C}^n, \omega = \sqrt{-1} \sum_{j=1}^n dz_j \wedge d\bar{z}_j)$$

$u \in C^\infty(\mathbb{C}^n, \wedge^{p,q})$, locally

$$u = \sum_{|I|=p, |J|=q} u_{I,J} dz_I \wedge d\bar{z}_J, \quad v = \sum_{|I|=p, |J|=q} v_{I,J} dz_I \wedge d\bar{z}_J$$

$$\langle \langle u, v \rangle \rangle = \int_{\mathbb{C}^n} \sum_{|I|=p, |J|=q} u_{I,J} \overline{v_{I,J}} dVol$$

$$d = d' + d'', \quad d' = \partial, \quad d'' = \bar{\partial}.$$

$$d'u = \sum_{I,J} \sum_k \frac{\partial u_{I,J}}{\partial z_k} dz_k \wedge dz_I \wedge d\bar{z}_J$$

$$d''u = \dots$$

定理 6.2.1.

$$(d'')^* u = - \sum_{I,J} \sum_k \frac{\partial u_{I,J}}{\partial \bar{z}_k} \frac{\partial}{\partial \bar{z}_k} \lrcorner (dz_I \wedge d\bar{z}_J)$$

$$(d')^* u = - \sum_{I,J} \sum_k \frac{\partial u_{I,J}}{\partial \bar{z}_k} \frac{\partial}{\partial z_k} \lrcorner (dz_I \wedge d\bar{z}_J)$$

性质 6.2.2.

$$[(d'')^*, L] = \sqrt{-1} d'$$

证明. Exercise. □

定理 6.2.3. *Let X be a Kahler manifold (may not compact), with Kahler metric ω , then we have*

$$[(d'')^*, L] = \sqrt{-1}d'$$

证明. Only need to verify $u \in C_c^\infty(X, \wedge^{p,q})$ with compact support in a holomorphic chart at x .

Assume the holomorphic chart near x is choosen s.t.

$$\omega(z) = \sqrt{-1} \sum_{1 \leq j \leq n} dz_j \wedge d\bar{z}_j + O(|z|^2)$$

$$u \in \sum_{I,J} u_{I,J} dz_I \wedge \bar{z}_J$$

is a (p, q) -form, v is also...

$$\langle u, q \rangle = u_{I,J} \overline{v_{M,N}} \langle dz_I, dz_M \rangle \langle d\bar{z}_J, d\bar{z}_N \rangle = u_{IJ} \overline{V_{ij}} + a_{IJMN}(z) u_{IJ} \overline{V_{MN}}$$

where $a_{IJMN} = O(|z|^2)$.

So,

$$(d'')^* u = - \sum_{I,jk} \frac{\partial u_{IJ}}{\partial z_k} \frac{\partial}{\partial \bar{z}_k} \lrcorner (dz_I \wedge d\bar{z}_J) + \sum_{IJMN} b_{IJMN} u_{IJ} dz_M \wedge d\bar{z}_N$$

where $b_{IJMN}(z) = O(|z|)$. So,

$$[(d'')^*, L]u(x) = \sqrt{-1}d'u(x)$$

$$\implies [(d'')^*, L] = \sqrt{-1}d'$$

□

性质 6.2.4. *In Kahler manifold,*

$$[(d')^*, L] = -\sqrt{-1}d''$$

$$[\Lambda, d''] = -\sqrt{-1}(d')^*$$

$$[\Lambda, d'] = \sqrt{-1}(d'')^*$$

推论 6.2.5. (X, ω) is a Kahler manifold, then

$$\Delta_d = 2\Delta_{d'} = 2\Delta_{d''}$$

证明. For example, $\Delta_d = 2\Delta_{d''}$,

$$\Delta_d = (d' + d'')(d' + d'')^* + (d' + d'')^*(d' + d'') = (d' + d'')(d'^* - \sqrt{-1}[\Lambda, d']) + (d'^* - \sqrt{-1}[\Lambda, d'])(d' + d'')$$

然后暴力展开, 12 项??? ...

从略。

□

推论 6.2.6. If (X, ω) is a Kahler manifold, then

$$\Delta_d : C^\infty(C, \bigwedge^{p,q}) \rightarrow C^\infty(C, \bigwedge^{p,q})$$

证明. Since $\Delta_d = 2\Delta_{d'}$, $\Delta_{td'}$ preserves the bi-degree.

□

推论 6.2.7. If (X, ω) is a compact Kahler manifold, u is a Δ_d -harmonic k -form. Assume

$$u = \sum_{p+q=k} u^{p,q}$$

$$u^{p,q} \in C^\infty(X, \bigwedge^{p,q})$$

then each $u^{p,q}$ is also harmonic.

定理 6.2.8. (Hodge decomposition)

X is a compact Kahler manifold, then we have a decomposition

$$H_d^k(X, \mathbb{C}) = \bigoplus_{p+q=k} H_{d''}^{p,q}(X, \mathbb{C})$$

Equivalently, (sheaf cohomology)

$$H^k(X, \mathbb{C}) \cong \bigoplus_{p+q=k} H^q(X, \Omega^p)$$

证明. take a Kahler metric ω , we can define $\Delta_d, \Delta_{td'}, \Delta_{d''}$, then

$$\ker \Delta_d := \mathcal{H}^k(X, \mathbb{C}) \cong \bigoplus_{p+q=k} \mathcal{H}_{d''}^{p,q}(X, \mathbb{C})$$

then \implies the decomposition for $H_d^k(X, \mathbb{C})$

the decomposition for $H_d^k(X, \mathbb{C})$ is independent of the choice of ω (Next time) \square

Recall: Hodge decomposition,

X compact Kahler manifold, $\dim_{\mathbb{C}} X = n$,

Thm:(Hodge decomposition)

$$H_{DR}^k(X, \mathbb{C}) = \bigoplus_{p+q=k} H^{p,q}(X, \mathbb{C}) \cong \bigoplus_{p+q=n} H_{d''}^{p,q}(X, \mathbb{C})$$

where

$$H^{p,q}(X, \mathbb{C}) = \{[\alpha] \in H_{DR}^k(X, \mathbb{C}) | \alpha \text{ is a } d\text{-closed s.m. } (p, q)\text{-form}\}$$

Proof: take a Kahler metric ω ,

$$H_{DR}^k(X, \mathbb{C}) \cong \mathcal{H}_d^k(X, \mathbb{C}) = \bigoplus \mathcal{H}_d^{p,q}(X, \mathbb{C}) = \bigoplus \mathcal{H}_{d''}^{p,q}(X, \mathbb{C})$$

性质 6.2.9. *There is a canonical isomorphism*

$$H_d^{p,q}(X, \mathbb{C}) \xrightarrow{\sim} H_{d''}^{p,q}(X, \mathbb{C})$$

$$[\alpha]_d \mapsto [\alpha]_{d''}$$

where $d\alpha = 0, \alpha$ is a (p, q) -form. $\implies d''\alpha = 0$

证明. Check: this map is well defined. Need to verify: if $\alpha = d\beta$ is a (p, q) -form, then $[\alpha]_{d''} = 0$, i.e. α is also d'' -exact.

α is a (p, q) -form,

$$\implies \alpha = d'\beta^{p-1,q} + d''\beta^{p,q-1}$$

we have $d''d'\beta^{p-1,q} = 0, d'd''\beta^{p,q-1} = 0$

We need a very important lemma: \square

引理 6.2.10. ($\partial\bar{\partial}$ -lemma)

Let X is a Kahler manifold, α is a smooth form which is d' and d'' closed. Then, if α is d or d' or d'' -exact, then $\alpha = d'd''\gamma$ for some γ .

Using $\partial\bar{\partial}$ -lemma, this map is well-defined.

Now, notice that the two space has the same dimension. So, we need to show the map is injective(or, surjective). Claim : this map is injective. If α is a d -closed with $[\alpha]_{d''} = 0$, i.e. $\alpha = d''\beta^{p,q-1}$. α is d -closed $\Rightarrow d'd''\beta^{p,q-1} = 0$, $\partial\bar{\partial}$ -lemma applying to $d''\beta^{p,q-1}$, we have

$$d''\beta^{p,q-1} = d'd''\gamma = d(d''\gamma)$$

for some γ .

Proof of $\partial\bar{\partial}$ -lemma:

证明. Assume α is d'' exact, i.e. $\alpha = d''\beta$, write

$$\beta = H(\beta) + \Delta_d \gamma$$

where $H(\beta)$ is Δ_d -harmonic, so

$$\alpha = d''H(\beta) + d''\Delta_d \gamma - 2d''\Delta_{d'} \gamma$$

(Since $\Delta_d = 2\Delta_{d''}$)

$$\Rightarrow \alpha = 2d''(d'd'^* + d'^*d') = 2d''d; d'^* \gamma - 2d'^*d''d' \gamma$$

By the assumption, $d'\alpha = 0$, so $d'^*d''d' \gamma = 0$

$$\alpha = -2d'd''d'^* \gamma$$

□

注记 6.2.11. (*Deligne-Griffiths-Morrora*)

If \hat{X} is bimeromorphic to X , where X is a compact Kahler, then \hat{X} is also satisfies the $\partial\bar{\partial}$ -lemma. X is a kahler manifold, then

$$H_d^{p,q}(X, \mathbb{C}) \cong H_{d''}^{p,q}(X, \mathbb{C}) \cong H^{p,q}X, \mathbb{C}$$

X is a compact complex manifold, define

$$H_{BC}^{p,q} := \frac{d\text{-closed } (p,q)}{d'd''\text{-exact}}$$

Bott-Chern cohomology

Exercise" If X is Kahler, then $H_{BC}^{p,q} = H_d^{p,q}$

$$H_A^{p,q}(X, \mathbb{C}) := \frac{d'd''\text{closed}}{(d')\text{-exact} + \{d''\text{exact}\}}$$

(Appeli cohomology)

denote

$$h_{BC}^k := \sum_{p+q=k} \dim_{\mathbb{C}} H_{BC}^{p,q}$$

$$h_A^k := \sum_{p+q=k} \dim_{\mathbb{C}} H_A^{p,q}$$

定理 6.2.12. *X satisfies $\partial\bar{\partial}$ -lemma \iff*

$$h_B^k + h_A^k = 2b_k$$

where

$$b_k = \dim_{\mathbb{C}} H_{DR}^k(X, \mathbb{C})$$

定理 6.2.13. (*Hard Lef*)

X is a compact Kahler, $\dim_{\mathbb{C}} X = n$, denote $L = \{\omega\} \curvearrowright H_{DR}^k(X, \mathbb{C})$, ω is a Kahler metric, Then we have:

$$L^{n-k} : H_{DR}^k(X, \mathbb{C}) \cong H_{DR}^{2n-k}(X, \mathbb{C})$$

$$H^{p,q}(X, \mathbb{C}) \cong H^{p+n-k, q+n-k}(X, \mathbb{C})$$

where $k \leq n$, $p+q \leq n$.

证明. For a Kahler metric ω ,

$$L^{n-k} : H_{DR}^k \rightarrow H_{DR}^{2n-k}$$

($\cong \mathcal{H}_d^k, \cong \mathcal{H}_d^{2n-k}$ respectively) (there is a commutative diagram...)

need to proof: For any $\varphi \in \mathcal{H}_d^k$, then

$$L^{n-k}(\varphi) = \omega^{n-k} \wedge \varphi$$

is also harmonic. □

引理 6.2.14.

$$[\triangle_d, L] = 0$$

证明.

$$[\Delta_d, L] = 2[\Delta_{d'}, L] = 2([d'd'^*, L] + [d'^*d', L]) = 2(d'[d'^*, L] + [d'^*, L]d')$$

(check: $[L, d'] = 0$) So,

$$= -2\sqrt{-1}(d'd'' + d''d') = 0$$

□

Exercise: Complex tori

$$\mathbb{T}^n := \mathbb{C}^n / \Gamma$$

where $\Gamma = \mathbb{Z}^n$. \mathbb{T}^n is a compact Kahler manifold. Then

$$H^{1,1}(\mathbb{T}^n, \mathbb{C}) \cong \bigwedge_{\mathbb{C}}^{1,1}$$

the space of $(1,1)$ -forms on \mathbb{C}^n with constant coefficient, in particular,

$$\dim_{\mathbb{C}} H^{1,1}(\mathbb{T}^n, \mathbb{C}) = n^2$$

Exercise: the set of all the Kahler class on $\mathbb{T}^n \subseteq H^{1,1}(X, \mathbb{C}) \cap H^2(X, \mathbb{R})$ is equal to the set of $n \times n$ positive definite Hermitian metrics.

(Hint: using Hodge theory)

定理 6.2.15. (*Lefschitz decomposition*)

Define a class $\alpha \in H_{DR}^k(X, \mathbb{C})$ to be positive if

$$L^{n-k+1}(\alpha) = 0$$

if $k \leq n$.

(When $\alpha \in H_{DR}^k(X, \mathbb{C})$, $k > n$, we call α positive)

Then $\forall \varphi \in H_{DR}^k(X, \mathbb{C})$, exist unique decomposition

$$\varphi = \sum_{\gamma \geq (k-n)_+} L^\gamma \varphi_\gamma$$

where $\varphi_\gamma \in H_{prim}^{k-2\gamma}(X, \mathbb{C})$.

Similarly,

$$H^{p,q}(X, \mathbb{C}) = \bigoplus_{r \geq (p+q-n)_+} H_{prim}^{p-r, q-r}(X, \mathbb{C})$$

证明. Exercise.

□

定理 6.2.16. (HRR)

X compact Kahler, $\dim_{\mathbb{C}} X = n$, ω is Kahler metric, define

$$Q(\alpha, \beta) = L^{n-k} \alpha \wedge \bar{\beta}$$

where $\alpha, \beta \in H^{p,q}(X, \mathbb{C})$, and $p + q = k$.

Then $Q|_{H_{\text{prim}}^{p,q}}$ is positive defined (up to a factor).

证明. Exercise. □

Exercise: Consider X -compact Kahler, $\dim_{\mathbb{C}} X = n$, ω -Kahler metric, Then $\forall \alpha, \beta \in H^{1,1}(X, \mathbb{R}) = H^{1,1}(X, \mathbb{C}) \cap H^2(X, \mathbb{R})$, Then

$$(\{\omega^{n-2}\} \cdot \alpha \cdot \beta)^2 \geq (\{\omega^{n-2}\} \cdot \alpha^2) (\{\omega^{n-2}\} \cdot \beta^2)$$

with equality if and only if $\alpha = \lambda \beta$ for some $\lambda \in \mathbb{R}$

Eg: \mathbb{C}^2 , α, β real $(1,1)$ -forms,

$$(\alpha, \beta)^2 \geq \alpha^2 \beta^2$$

Hint: Using HRR, and Lefschitz decomposition... "Alg-Geom-inequality over Kahler manifold".

性质 6.2.17. X is a compact Kahler, then

$$\overline{H^{p,q}(X, \mathbb{C})} = H^{q,p}(X, \mathbb{C})$$

证明. Use harmonic form.. and \triangle_d is a real operator... □

Summary X -compact Kahler with a Kahler metric ω , then define Lefschitz operator $L = [\omega] \wedge$, then:

Hodge decomposition:

$$H^k = \bigoplus_{p+q=k} H^{p,q}$$

$$\overline{H^{p,q}} = H^{q,p}$$

Hard Lefschitz:

$$L^{n-k} : H^{p,q} \cong H^{p+n-k, q+n-k}$$

where $p + q = k$

Lefschitz decomposition:

$$H^{p,q} = \bigoplus_{r \geq (p+q-1)_+} L^r H_{prim}^{p-r, q-r}$$

HRR:...

References Kahler pairing in other settings..

Adiprasito-Huh-Katz: Hodge theory in combinatorial geometries

McMullen: On simple polytopes

Deligne: Weil II

Beilinson-Bernstein-Deligne-Gabber: Faisceaux Pervers

Adiprasito: Combinatorial Lefschetz theorem beyond positivity, 2018

Recall: Kahler pairing: X-compact Kahler manifold of complex dimension n , ω -Kahler metric.

Lefschitz operator

$$L = \{\omega\} \curvearrowright H^\bullet$$

Hodge decomposition

$$H^k = \bigoplus_{p+q=k} H^{p,q}, \quad \overline{H^{p,q}} = H^{q,p}$$

(Corollary: if k is odd, then $b_k := \dim_{\mathbb{C}} H^k(X, \mathbb{C})$ is even.)

Rmk: if X is compact complex surface ($\dim_{\mathbb{C}} = 2$), X is Kahler $\iff b_1$ is even. (The proof of " \Leftarrow " we not given...Ref: Kodaira&Siu, Lamari 1999)

Hard Lef. ($p+q=k$)

$$L^{n-k} : H^{p,q} \xrightarrow{\sim} H^{p+n-k, q+n-k}$$

Lef. decomposition:

$$H^{p,q} = \bigoplus_{r \geq (k-n)_+} L^r H_{prim}^{p-r, q-r}$$

Denote $h^{p,q} := \dim_{\mathbb{C}} H^{p,q}$, "Hodge number". Cor:

$$h^{p,q} = \begin{cases} h_{prim}^{p,q} + h_{prim}^{p-1, q-1} + \dots & p+q \leq n \\ h_{prim}^{n-q, n-p} + h_{prim}^{n-q-1, n-p-1} + \dots & p+q \geq n \end{cases}$$

(Using the property of L^r)

If $p+q \leq n$, $h^{p,q} \geq h^{p-1, q-1} \Rightarrow b_k \geq b_{k-2}$ if $k \leq n$.

If $p+q \geq n$, $h^{p,q} \leq h^{p-1, q-1} \Rightarrow b_k \leq b_{k-2}$ if $k \geq n$.

(Hodge-Frolicher spectral sequence)

X-compact Kahler, then Hodge decomposition

$$\Rightarrow b_k = \sum_{p+q=k} h^{p,q}$$

Question: X compact complex manifold, relation between b_k and $\sum_{p+q=k} h^{p,q}$?

定理 6.2.18. (Hodge-Frolicher inequality) X compact complex manifold, then

$$b_k \leq \sum_{p+q=k} h^{p,q}$$

Spectral sequence: $(K^{p,q}, d = d' + d'')$ a double complex of modules.

$$K^{p,q} \xrightarrow{d'} K^{p+1,q} \quad K^{p,q} \xrightarrow{d''} K^{p,q+1}$$

with $d'^2 = 0, d''^2 = 0, d^2 = 0$.

Assume $K^{p,q} = 0$ if $p \leq 0$ or $q \leq 0$.

\rightsquigarrow total complex (K^\bullet, d) where

$$K^l := \bigoplus_{p+q=l} K^{p,q}$$

\exists a natural filtration

$$F_p K^l := \bigoplus_{l \geq i \geq p} K^{i,l-i}$$

F induces a filtration on $H^\bullet(K^\bullet)$.

$$F_p H^l(K^\bullet) = \text{Im}(H^l(F_p K^\bullet) \rightarrow H^l(K^\bullet)) = \frac{F_p Z^l}{F_p B^l}$$

where $Z^l = \ker d \cap K^l$ and $B^l = \text{Im } d \cap K^{l-1}$

Denote $G_p H^l(K^\bullet) = F_p H^l / F_{p+1} H^l$.

定理 6.2.19. *There exists a sequence*

$$\{E_r, d_r\}_{r \geq 0}$$

satisfying:

- (1) $E_r = \bigoplus_{p,q \geq 0} E_r^{p,q}$
- (2) $d_r : E_r^{p,q} \rightarrow E_r^{p+r,q+r-1}, d_r^2 = 0$.
- (3) $E_{r+1} = H^\bullet((E_r, d_r))$.

$$E_0^{p,q} = \frac{F_p K^{p+q}}{F_{p+1} K^{p+q}} = K^{p,q}$$

d_0 induced by d .

$$E_1^{p,q} = H^q((K^{p,\bullet}, d''))$$

d_1 induced by d .

查任何一本同调代数的书。

定义 6.2.20. We call the sequence E_r converges at E_{r_0} , if $E_{r+1} = E_r$ for any $r \geq r_0$, ($\iff d_r = 0$ for any $r \geq r_0$) then we denote $E_\infty = E_{r_0}$

In our setting, $E_\infty^{p,q} = G_p H^{p+q}(K^\bullet)$

Application: X compact complex manifold,

$$K^{p,q} = C^\infty(X, \bigwedge^{p,q}) \quad d = d' + d''$$

$$\rightsquigarrow E_0^{p,q} = K^{p,q}, E_1^{p,q} = H^{p,q}(X, \mathbb{C}).$$

推论 6.2.21.

$$E_\infty^{p,q} = G_p H^{p+q}(X, \mathbb{C})$$

定理 6.2.22. X is a compact complex manifold of complex dimension n , then

$$b_l = \dim_{\mathbb{C}} H^l(X, \mathbb{C}) = \sum_{p+q=l} \dim_{\mathbb{C}} E_\infty^{p,q} \leq \sum_{p+q=l} \dim_{\mathbb{C}} E_1^{p,q} = \sum_{p+q=l} h^{p,q}$$

with equality holds if and only if $d_1 = 0$ (i.e. $\{E_r\}$ converges at E_1 .)

定理 6.2.23. X compact Kahler $\Rightarrow \{E_r\}$ converges at E_1 ($\iff b_l = \sum_{p+q=l} h^{p,q}$)

Remark: algebraic proof by Deligne-Illusie 1987.

Relèvement module p^2 et décomposition du complexe de de Rham

remark: Assume X is bimeromorphic to a compact Kahler manifold, then we still have the convergence of $\{E_r\}$ (\iff Hodge decomposition)

(Deligne-Griffiths-Morgan)

Picard group $H^1(X, \mathcal{O}^*)$.

Recall:

$$\{\text{isomorphic class of holomorphic line bundle}\} \xrightarrow{1-1} H^1(X, \mathcal{O}^*)$$

Consider the sequence

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \mathcal{O} \xrightarrow{e^{2\pi\sqrt{-1}}} \mathcal{O}^* \rightarrow 0$$

$$\rightsquigarrow 0 \rightarrow H^0(X, \mathbb{Z}) \rightarrow H^0(X, \mathcal{O}) \rightarrow H^0(X, \mathcal{O}^*) \rightarrow H^1(X, \mathbb{Z}) \rightarrow H^1(X, \mathcal{O}) \rightarrow H^1(X, \mathcal{O}^*) \rightarrow \dots$$

Assume X is a compact complex manifold, then

$$H^0(X, \mathcal{O}) = \mathbb{C}$$

$$H^0(X, \mathcal{O}^*) = \mathbb{C}^*$$

$\Rightarrow H^0(X, \mathcal{O}) \rightarrow H^0(X, \mathcal{O}^*)$ is surjective,

$\Rightarrow H^1(X, \mathbb{Z}) \rightarrow H^1(X, \mathcal{O})$ is injective.

So we have an exact sequence

$$0 \rightarrow H^1(X, \mathbb{Z}) \rightarrow H^1(X, \mathcal{O}) \rightarrow H^1(X, \mathcal{O}^*) \xrightarrow{c_1} H^2(X, \mathbb{Z})$$

so we have an isomorphism

$$\ker\{c_1 : H^1(X, \mathcal{O}^*) \rightarrow H^2(X, \mathbb{Z})\} \cong H^1(X, \mathcal{O})/H^1(X, \mathbb{Z})$$

定义 6.2.24. (*Irregularity of X*)

$$q(X) = \dim_{\mathbb{C}} H^1(X, \mathcal{O}) = h^{0,1}$$

if X is also complex Kahler, then $h^{0,1} = h^{1,0}$.

Assume X is compact Kahler:

引理 6.2.25. $H^1(X, \mathbb{Z})$ is also a lattice in $H^1(X, \mathcal{O})$ of

$$\text{rank}_{\mathbb{Z}} H^1(X, \mathbb{Z}) = 2q$$

$\Rightarrow H^1(X, \mathcal{O})/H^1(X, \mathbb{Z})$ is a compact torus of $\dim_{\mathbb{C}} = q$.

$$H^1(X, \mathcal{O})/H^1(X, \mathbb{Z}) := \ker\{c_1 : H^1(X, \mathcal{O}^*) \rightarrow H^2(X, \mathbb{Z})\}$$

is called **Jacobian variety** ($Jac(X)$) or **Picard variety** ($Pic^\circ(X)$)

Denote $NS(X)_{\mathbb{Z}} = \text{Im}(c_1 : H^1(X, \mathcal{O}^*) \rightarrow H^2(X, \mathbb{Z}))$ the Neron-Severi group of X ,

$$\rightsquigarrow 0 \rightarrow Pic^\circ(X) \rightarrow H^1(X, \mathcal{O}^*) \xrightarrow{c_1} NS(X, \mathbb{Z}) \rightarrow 0$$

proof of the lemma. $\mathbb{Z} \rightarrow \mathcal{O}$ can be decomposed : $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \rightarrow \mathcal{O}$. It induces a sequence

$$H^1(X, \mathbb{Z}) \rightarrow H^1(X, \mathbb{R}) \rightarrow H^1(X, \mathbb{C}) \rightarrow H^1(X, \mathcal{O})$$

$H^1(X, \mathbb{R}) \rightarrow H^1(X, \mathcal{O})$ is an isomorphism.

Consider the diagram

then $H^1(X, \mathbb{R}) \rightarrow H^1(X, \mathcal{O})$ corresponds to

$$H_{DR}^1(X, \mathbb{R}) \hookrightarrow H_{DR}^1(X, \mathbb{C}) \twoheadrightarrow H^{0,1}(X, \mathbb{C})$$

$H^1(X, \mathbb{Z})$ is a lattice in $H^1(X, \mathbb{R})$ of $rank_{\mathbb{Z}} = 2q$

□

Albanese map, Albanese torus

X -compact Kahler \Rightarrow any holomorphic p -forms are d -closed.

(Exercise!!)

Special case: holo 1-forms is d -closed.

$$Alb(X) := H^0(X, \Omega^1)^* / \text{Im}(H_1(X, \mathbb{Z}))$$

where $H^1(X, \mathbb{Z})$ is mapped to $H^0(X, \Omega^1)^*$ in the following way:

$$[\gamma] \mapsto (\alpha \in H^0(X, \Omega^1) \mapsto \int_{\gamma} \alpha)$$

(Fact: $\int_{\gamma} \alpha$ depends only on the class on $[\gamma]$)

Then $Alb(X)$ is compact complex of $\dim_{\mathbb{C}} = q(X)$. More precisely, we have a map:

$$alb : X \rightarrow Alb(X)$$

Fix a base point $x_0 \in X$, then

$$alb(x) = \left(u \mapsto \int_{x_0}^x u \right) \mod \Lambda$$

where

$$\Lambda := \left\{ \left(\int_{\gamma} u_1, \dots, \int_{\gamma} u_q \right) \mid [\gamma] \in H_1(X, \mathbb{Z}) \right\}$$

$\{u_1, \dots, u_q\}$ is a basis of $H^0(X, \Omega^1)$. Then Λ is a lattice of $rank_{\mathbb{Z}} = 2q$.

The map

$$alb : X \rightarrow Alb(X)$$

is holomorphic.

第7章 正性与消灭定理

positivity and vanishing theorem

X-Kahler manifold, i.e. \exists Hermitian metric ω s.t. $d\omega = 0$, $d = d' + d''$, $d' = \partial$, $d'' = \bar{\partial}$.

$$\Delta_d = [d, d^*] = dd^* + d^*d$$

$$\Delta_{d'} = [d', d'^*]$$

$$\Delta_{d''} = [d'', d''^*]$$

$$d \sim C^\infty(X, \bigwedge^{p,q}).$$

Fact: ω is Kahler $\iff \Delta_{d'} = \Delta_{d''} = \frac{1}{2}\Delta_d$.

Let $\underline{\mathbb{C}} := X \times \mathbb{C}$ be the trivial line bundle, d can be regraded as the Chern connection on $\underline{\mathbb{C}}$.

(E, h) -Hermitian holomorphic vector bundle over (X, ω) , with Chern connection $D_E = D'_E + D''_E$. ($D''_E = \bar{\partial}$).

$$C^\infty(X, \bigwedge^{p,q} \otimes E)$$

has an inner product induced by ω, h . \rightsquigarrow adjoint operators $D_E^* = D'^*_E + D''^*_E$.

$\rightsquigarrow \Delta_E = [D_E, D_E^*] = D_E D_E^* + D_E^* D_E$, and Δ'_E, Δ''_E . (self adjoint, elliptic operators)

Question: relation between Δ'_E and Δ''_E ?

定理 7.0.26. (*Bochner-Kodaira-Nakano identity*)

$$\Delta''_E - \Delta'_E = [\sqrt{-1}\Theta_E, \Lambda]$$

where Θ_E is the Chern curvature of D_E .

Recall: $\Theta_E = D_E^2$, when D_E is Chern connectoin, we have

$$D_E^2 = 0 \quad D_E'^2 = 0$$

i.e. $\Theta_E = [D'_E, D''_E]$.

Remark: E is flat (i.e. $D_E^2 = 0$) $\iff \Delta'_E = \Delta''_E$.

证明. based on following identities:

$$[D_E''^*, L] = \sqrt{-1}D_E'$$

$$[D_E'^*, L] = -\sqrt{-1}D_E''$$

$$[\Lambda, D_E'] = -\sqrt{-1}D_E'^*$$

$$[\Lambda, D_E''] = \sqrt{-1}D_E''^*$$

then (by super Jacobi identity):

$$\begin{aligned}\Delta_E'' = [D_E'', D_E''^*] &= -\sqrt{-1} [D_E'', [\Lambda, D_E']] = -\sqrt{-1} ([\Lambda, [D_E', D_E'']] + [D_E', [D_E'', \Lambda]]) \\ &= -\sqrt{-1} ([\Lambda, \Theta_E] + [D_E', \sqrt{-1}D_E'^*])\end{aligned}$$

so,

$$\Delta_E'' - \Delta_E' = [\sqrt{-1}\Theta_E, \Lambda]$$

□

引理 7.0.27. (*normal frame*)

Let X be a complex manifold, then for any $x_0 \in X$, and any holomorphic chart (z_1, \dots, z_n) centered at x_0 , there exists a holomorphic frame $\{e_\lambda\}_{\lambda=1}^{r:=\text{rank} E}$ of E near x_0 such that

$$\langle e_\lambda(z), e_\mu(z) \rangle = \delta_{\lambda,\mu} - \sum_{1 \leq j, k \leq n} C_{jk\lambda\mu} z_j \bar{z}_k + O(|z|^3)$$

where $(C_{jk\lambda\mu})$ are the coefficients of the Chern curvature

$$\Theta_E(x_0) = \sum_{\substack{1 \leq j, k \leq n \\ 1 \leq \lambda, \mu \leq r}} C_{jk\lambda\mu} dz_j \wedge d\bar{z}_k \otimes e_\lambda^* \otimes e_\mu$$

need to verify: $\forall s \in C^\infty(X, \bigwedge^{p,q} \otimes E), x_0 \in X$,

$$[D_E''^*, L]s(x_0) = \sqrt{-1}D_E's(x_0)$$

w.r.t the normal frame $(e_\lambda)_{\lambda=1}^r$ near x_0 , assume

$$s = \sum_{\lambda=1}^n \sigma_\lambda \otimes e_\lambda$$

then

$$D_E s(z) = \sum_{\lambda=1}^n d\sigma_\lambda \otimes e_\lambda + O(|z|)$$

$$D_E^* s(z) = \sum_{\lambda=1}^n \mathbf{d}^* \sigma_\lambda \otimes e_\lambda + O(|z|)$$

$$D_E''^* = \sum_{\lambda=1}^r \mathbf{d}''^* \sigma_\lambda \otimes e_\lambda + O(|z|)$$

$$\Rightarrow [D_E''^*, L]s = D_E''^* (\sum \omega \wedge \sigma_\lambda \otimes e_\lambda) - \omega \wedge \left(\sum_{\lambda=1}^r \mathbf{d}''^* \sigma_\lambda \otimes e_\lambda + O(|z|) \right) = \sum_{\lambda=1}^r [\mathbf{d}''^*, L] \sigma_\lambda \otimes e_\lambda + O(|z|)$$

Similarly,

$$D_E' s = \sum_{\lambda=1}^r \mathbf{d}' \sigma_\lambda \otimes e_\lambda + O(|z|)$$

we have:

$$[d''^*, L] = \sqrt{-1} \mathbf{d}'$$

(because ω is Kahler)

...

(E, h) hermitian holomorphic vector bundle over Kahler manifold (X, ω) . we have BKN identity

$$\Delta_E'' - \Delta_E' = [\sqrt{-1} \Theta_E, \Lambda]$$

Recall: L^2 -Hodge theory. X compact manifold, then

$$H^{p,q}(X, E) := \frac{\ker D_E''}{\text{Im } D_E''} \cong \ker \Delta_E''$$

(harmonic form)

Take $u \in C^\infty(X, \wedge^{(p,q)} \otimes E)$, applying BKN identity to u ,

$$\Delta_E'' u - \Delta_E' u = [\sqrt{-1} \Theta_E, \Lambda] u$$

note that

$$\begin{aligned} \langle \Delta_E' u, u \rangle &= \|D_E' u\|^2 + \|D_E'^* u\|^2 \geq 0 \\ \Rightarrow \|D_E'' u\|^2 + \|D_E''^* u\|^2 &\geq \langle [\sqrt{-1} \Theta_E, \Lambda], u \rangle \end{aligned}$$

i.e.

$$\|D_E'' u\|^2 + \|D_E''^* u\|^2 \geq \int_X \langle [\sqrt{-1} \Theta_E, \Lambda], u \rangle dVol$$

Observation: if $u \in \ker \Delta_E''$, and $[\sqrt{-1} \Theta_E, \Lambda]$ has "positivity", then $LHS = 0$. So, $H^{p,q}(X, E) = 0$.

定义 7.0.28. (*Positivity*)

We call $[\sqrt{-1}\Theta_E, \Lambda]$ is positive at $x_0 \in X$, if for any $0 \neq v \in (\wedge^{p,q} \otimes E)_{x_0}$, we have

$$\langle [\sqrt{-1}\Theta_E, \Lambda]v, v \rangle > 0$$

....positive on X , if ... at each point

定理 7.0.29. If $[\sqrt{-1}\Theta_E, \Lambda]$ is positive on X , then

$$H^{p,q}(X, E) = 0$$

Special case: E is a holomorphic line bundle, with Hermitian metric h ,

$$\Theta_E = -d'd'' \log h$$

$\Rightarrow \sqrt{-1}\Theta_E$ is a real d -closed $(1,1)$ -form on X .

locally,

$$\alpha = \sqrt{-1} \sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{ij} dz_i \wedge d\bar{z}_j$$

α is real $\iff \alpha = \bar{\alpha}$, (i.e. locally (a_{ij}) is an hermitian matrix)

定义 7.0.30. a real $(1,1)$ -form α is called positive, if $(a_{ij})_{ij}$ is positive definite.

引理 7.0.31. If $\sqrt{-1}\Theta_E$ is positive, then $\omega := \sqrt{-1}\Theta_E$ gives a Kahler metric on X .

引理 7.0.32. If $\omega = \sqrt{-1}\Theta_E > 0$, and Λ is the adjoint of $L = \omega \wedge$, then

$$[\sqrt{-1}\Theta_E, \Lambda]$$

is positive on $\wedge^{p,q} \otimes E$ whenever $p + q \geq n + 1$.

引理 7.0.33. Let α be a real $(1,1)$ -form, ω a Kahler metric, assume the eigenvalue of α at x_0 is $\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \cdots \leq \alpha_n$, then (in the coordinate chart (z_1, z_2, \dots, z_n) , and $u = \sum_{\substack{|I|=p \\ |J|=q}} u_{IJ} dz_I \wedge d\bar{z}_J$)

$$[\alpha, L] = \sum_{I,J} \left(\sum_{i \in I} \alpha_i + \sum_{j \in J} \alpha_j - \sum_{k=1}^n \alpha_k \right) u_{IJ} dz_I \wedge d\bar{z}_J$$

推论 7.0.34. $\alpha = \omega$, then

$$[\omega, \Lambda]u = (p + q - n)u$$

推论 7.0.35. Take an orthonormal frame e of E , then for any $u = \sum_{\substack{|I|=p \\ |J|=q}} u_{IJ} dz_I \wedge d\bar{z}_J \otimes e$, we have

$$\langle [\sqrt{-1}\Theta_E, \Lambda]u, u \rangle = (p + q - n)|u|^2$$

定理 7.0.36. If $[\sqrt{-1}\Theta_E, \Lambda]$ is positive on X , then

$$H^{p,q}(X, E) = 0$$

定理 7.0.37. If E is a holomorphic line bundle with a smooth hermitian metric h s.t. $\sqrt{-1}\Theta_{(E,h)} \geq 0$, then $H^{p,q}(X, E) = 0$ whenever $p + q \geq n + 1$.

de Rham-Weil... $\cong H^q(X, \Omega^p \otimes E)$.

定义 7.0.38. (canonical bundle)

$$K_X = \det T^*X$$

determinate bundle of cotangent bundle, is called canonical bundle. ($\mathcal{O}(K_X) = \Omega_X^n$)

定义 7.0.39. X is called Fano, if $K_X^* = \det(TX)$ has a metric with positive curvature.

X is called Calabi-Yau, if K_X has a metric with vanishing curvature.

X is of general type, if K_X has a metric with positive curvature.

推论 7.0.40. (Kodaira vanishing theorem) E is a positive line bundle, then

$$H^q(X, K_X \otimes E) = 0$$

for any $q \geq 1$.

So, if X is Fano, ($\iff K_X^*$) positive, $K_X \otimes K_X^* = \underline{\mathbb{C}}$, $\Rightarrow H^1(X, \mathcal{O}) = 0, \Rightarrow H^1(X, \mathbb{R}) = 0$,

Recall: BKN-inequality.

holomorphic Hermitian vector bundle $(E, h) \rightarrow (X, \omega)$, ω is Kahler. For any $u \in C^\infty(X, \bigwedge^{p,q} \otimes E)$, we have

$$\|D''u\|^2 + \|D''^*u\|^2 \geq \int_X \langle [\sqrt{-1}\Theta_E, \Lambda_\omega]u, u \rangle dVol$$

Recall: If $[\sqrt{-1}\Theta_E, \Lambda_\omega]$ is positive on $C^\infty(X, \bigwedge^{p,q} \otimes E)$, then $H^{p,q}(X, E) = 0$.

定理 7.0.41. (Kodaira-Nakano vanishing theorem)

If E is a holomorphic line bundle with a smooth metric h s.t. $\sqrt{-1}\Theta_{(E,h)} > 0$, then $[\sqrt{-1}\Theta_E, \Lambda_\omega]$ is positive on $C^\infty(X, \bigwedge^{p,q} \otimes E)$ whenever $p + q \geq n + 1$.

$\Rightarrow H^{p,q}(X, E) = 0$ when $p + q \geq n + 1$.

(Last time)

Today:

定理 7.0.42. (Girbau vanishing theorem, 1976)

E is a holomorphic line bundle over compact Kahler manifold, with smooth metric h s.t. $\sqrt{-1}\Theta_{(E,h)} \geq 0$, and has at least $n - s + 1$ positive eigenvalues at every points of X , then

$$H^{p,q}(X, E) = 0$$

if $p + q \geq n + s$.

α : a **real** $(1,1)$ -form on X , locally $\alpha = \sqrt{-1} \sum \alpha_{ij} dz_i \wedge d\bar{z}_j$. then we have a matrix $M(\alpha) = (\alpha_{ij})_{n \times n}$, (α is real \Rightarrow) a hermite matrix.

we call α has at least k positive eigenvalues at x , if $M(\alpha)(x)$ has k positive eigenvalues. (Remark: It is well defined)

证明. Claim: there exists some Kahler metric ω s.t. $[\sqrt{-1}\Theta, \Lambda]$ is positive.

Fix a Kahler metric ω , for $p \in X$, choose a holomorphic chart (z_1, \dots, z_n) , s.t. $\omega(p) = \sqrt{-1} \sum dz_j \wedge d\bar{z}_j$ and $\sqrt{-1}\Theta_E(p) = \sqrt{-1} \sum_{j=1}^n \gamma_j dz_j \wedge d\bar{z}_j$. WLOG, $0 \leq \gamma_1 \leq \gamma_2 \leq \dots \leq \gamma_n$, and for any $j \geq s$, $\gamma_j > 0$.

Consider

$$\omega_\varepsilon := \varepsilon \omega + \sqrt{-1}\Theta_E$$

for $\varepsilon > 0$, then ω_ε is a Kahler metric. $\omega_\varepsilon(p) = \sqrt{-1} \sum_j (\varepsilon + \gamma_j) dz_j \wedge d\bar{z}_j$.

\Rightarrow the eigenvalue of $\sqrt{-1}\Theta$ with respect to $\omega_\varepsilon(p)$ is given by

$$\gamma_{j,\varepsilon} = \frac{\gamma_j}{\varepsilon + \gamma_j} = \frac{1}{1 + \frac{\varepsilon}{\gamma_j}}$$

Claim: $[\sqrt{-1}\Theta, \Lambda_{\omega_\varepsilon}]$ is positive on $\wedge^{p,q} \otimes E$ when $p + q \geq n + s$, $0 < \varepsilon < 1$.

Take $u = \sum u_{IJ} dw_T \wedge d\bar{w}_J \otimes e$, then

$$\langle [\sqrt{-1}\Theta_E, \Lambda_{\omega_\varepsilon}], u \rangle = \sum_{\substack{|I|=p \\ |J|=q}} \left(\sum_{i \in I} \gamma_{i,\varepsilon} + \sum_{j \in J} \gamma_{j,\varepsilon} + \sum_{k=1}^n \gamma_{k,\varepsilon} \right) |u_{IJ}|^2 \geq (\gamma_{1,\varepsilon} + \dots + \gamma_{p,\varepsilon} - \gamma_{q+1,\varepsilon} - \dots - \gamma_{n,\varepsilon}) |u|^2$$

note that $\gamma_{j,\varepsilon} \geq 1 - \frac{\varepsilon}{\gamma_s}$ if $j \geq s$, $\gamma_{j,\varepsilon} \in [0, 1)$ for all j . it

$$\geq \left((q + s - 1) \left(1 - \frac{\varepsilon}{\gamma_s} \right) - (n - p) \right) |u|^2 > 0$$

if $p + q \geq n + s$ and $0 < \varepsilon < 1$. □

注记 7.0.43. (Kawamata-Viewheg vanishing theorem)

$E \rightarrow (X, \omega)$ is a holomorphic line bundle over a compact Kahler manifold.

Definition: E is called *positive*, ... (positive = "ample" in AG). *numerically effective (nef)* if for any $\varepsilon > 0$, there is a smooth metric h_ε s.t. $\sqrt{-1}\Theta_{h_\varepsilon} \geq -\varepsilon\omega$.

Theorem: If E is nef, and $\int_X c_1(E)^n > 0$, then $H^q(X, K_X \otimes E) = 0$ for $q \geq 1$.

Positivity concept of vector bundles (rank > 1)

$(E, h) \rightarrow (X, \omega)$ Hermitian vector bundle of rank r , over a complex manifold (may not Kahler).

Denote (e_1, \dots, e_r) a local orthonormal frame of E , (z_1, \dots, z_n) local holomorphic chart, Chern curvature of (E, h) :

$$\Theta_{(E,h)} = \sum_{\substack{1 \leq j, k \leq n \\ 1 \leq \lambda, \mu \leq r}} c_{ik\lambda\mu} dz_j \wedge d\bar{z}_k \otimes e_\lambda^* \otimes e_\mu$$

Fact: $\sqrt{-1}\Theta_E$ induces a Hermitian operator θ_E on $TX \otimes E$.

Let u, v be local sections of $TX \otimes E$,

$$u = \sum_{\substack{1 \leq j \leq n \\ 1 \leq \lambda \leq r}} u_{k\mu} \frac{\partial}{\partial z_k} \otimes e_\mu$$

$$\theta_E(u, v) := \sum_{\substack{1 \leq j, k \leq n \\ 1 \leq \lambda, \mu \leq r}} c_{jk\lambda\mu} u_{j\lambda} \overline{v_{k\mu}}$$

定义 7.0.44. We call E Nakano positive, if θ_E is positive. (i.e for any non-zero local section $u \in TX \otimes E$, $\theta_E(u, u) > 0$)

We call E Griffith positive, if for any $0 \neq \xi \in T_x X$, $s \in E_x, s \neq 0$,

$$\theta_E(\xi \otimes s, \xi \otimes s) > 0$$

注记 7.0.45. By definition, Nakano positivity \Rightarrow Griffith positivity.

If E is line bundle, Nakano positivity \iff Griffith positivity. (and \iff positivity of lines bundles)

定理 7.0.46. (Demailly-Skoda, 1979)

E is Griffith positive $\Rightarrow E \otimes \det E$ is Nakano positive.

证明. Omit. Non-trivial. □

Notation: $E >_{Nak} 0$ (E is Nakano positive). Similarly, $E >_{Giff} 0 \dots$

性质 7.0.47. (1) E is Griffith positive if and only if E^* is Griffith negative.

(2) Consider an exact sequence of holomorphic vector bundles:

$$0 \rightarrow S \rightarrow E \rightarrow Q \rightarrow 0$$

then if E is Griffith positive, then Q is Griffith positive. If E is Griffith negative, then S is Griffith negative. If E is Nakano negative, then S is Nakano negative.

证明. Omit. Compute curvature... □

Remark: In general, E is Nakano positive, $\not\Rightarrow Q$ is Nakano positive.

定理 7.0.48. (*Nakano vanishing theorem*)

(X, ω) is compact Kahler of dimension n , (E, h) is a Nakano positive holomorphic Hermitian vector bundle, then

$$H^{n,q}(X, E) = 0 \quad \forall q \geq 1$$

证明. E is Nakano positive, check:

$$[\sqrt{-1}\Theta_E, \Lambda_\omega]$$

is positive on $\bigwedge^{n,q} \otimes E$ for $(q \geq 1)$ □

Ampleness

$E \rightarrow X$, E : holomorphic line bundle of rank r , X : complex manifold.

定义 7.0.49. (*Jet vector bundle*)

$$J^k E = \bigcup_{x \in X} (J^k E)_x$$

where

$$(J^k E)_x = \mathcal{O}_x(E) / \mathfrak{m}_x^{k+1} \mathcal{O}_x(E)$$

$\mathfrak{m}_x \subseteq \mathcal{O}_x$ be the maximal ideal of \mathcal{O}_x .

In local coordinate,

$$(J^k E)_x = \left\{ \sum_{\substack{1 \leq \lambda \leq r \\ |\alpha| \leq k}} C_{\lambda\alpha} (z - x)^\alpha e_\lambda(z) \right\}$$

性质 7.0.50. $J^k E$ is a holomorphic vector bundle of rank $= r \binom{n+k}{n}$.

证明. Exercise. □

定义 7.0.51. E is called very ample, if the following maps:

$$H^0(X, E) \rightarrow (J^1 E)_x$$

$$H^0(X, E) \rightarrow E_x \oplus E_y$$

are surjective, for all $x, y \in X, x \neq y$.

E is called ample, if $S^m E := \text{Sym}^m E$ is very ample for some $m \in \mathbb{N}$.

(ample: "足够多的全纯截面")

定理 7.0.52. (Kodaira)

L -holomorphic line bundle, X is a compact complex manifold. Then L is positive if and only if L is ample.

We will prove:

定理 7.0.53. $L \rightarrow X$ holomorphic line bundle over a compact complex manifold, then L is positive $\iff L$ is ample.

We need:

- (1) Kodaira vanishing theorem.
- (2) Blow-up of complex manifold
- (3) Relation between divisor and line bundles.

analytic cycles, divisors and meromorphic functions

定义 7.0.54. X be a analytic set in some complex manifold, then the set X_{reg} is a dense subset of X . Denote the connected component of X_{reg} by X_α , $\overline{X_\alpha}$ is the closure of X_α in X , then $\overline{X_\alpha}$ is called a global irreducible component of X .

In particular, X is the union of global irreducible components.

例子 7.0.55. (Global irreducibility is different from local irreducibility)

$V = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 \mid y^2 = x^2(1+x)\}$ is an analytic set in \mathbb{C}^2 , $V_{\text{reg}} = V \setminus \{0\}$ is connected. So, $V = \overline{V_{\text{reg}}}$ is globally irreducible.

On the other hand, $(V, 0)$ is a reducible as an analytic germ.

定义 7.0.56. (*analytic cycles*)

X is a complex manifold, a q -cycle (with integer coefficient) is a formal linear combination $\sum \lambda_j V_j$, $\lambda_j \in \mathbb{Z}$, and V_j is a global analytic sets of X of dimension q .

So, we get a group $C_{cyl}^q(X)$.

an element of $Cycl^{n-1}(X)$ is called a divisor. (Weil divisor) ($Div(X)$)

If D is an irreducible analytic set of dimension $n - 1$ then the divisor given by D is called a prime divisor.

注记 7.0.57. For any open set $U \subseteq X$, $U \rightarrow Cycl^q(U)$ induces a sheaf $Cycl^q$ of X with the germ $Cycl_x^q$ given by q -dimension analytic germs at X .

定理 7.0.58. X is a connected complex manifold, $f \in \mathcal{O}(X)$, then we have $f^{-1}(0)$ is empty of $\dim_{\mathbb{C}}$ is empty of $n - 1$.

定义 7.0.59. (*Cartier-dividiot*)

A divisor $D = \sum \lambda_j D_j$ locally giveb by a \mathbb{X} linear combination of $div(f)$. f is locally holomorphic functions.

定义 7.0.60. X is a compact , $\beta \in \mathcal{O}(X)$, D_j is a global irreponent of $f^{(-1)0}$,

$$m_j := Ord_z(f)$$

for all $z \in D_j \text{reg} \setminus \bigcup_{k \neq j} D_k$ m_j be the vanishing order along D_j .

定理 7.0.61. (A, x) an analytic germ of $\dim_{\mathbb{C}} = n-1$. $(A, x) = (g)$ for some $g \in \mathcal{O}_X$, and g is a product of $(J_{A_j, x}) = (g_j)$.

(2) Let $f \in \theta_x$ with $(f^{-1}(0), x) \subseteq (A, x)$, then $f = u \prod_j g_j m_j^{m_j}$, where $m_j = ord_z(f)$

性质 7.0.62. *If X is a complex manifold, then any Weil divisor is also a Cartier divisor.*

Remark: NOT true for singular points.

Meromorphic function: X complex manifold, \mathcal{O}_X sheaf of functions on X .

$$\mathfrak{m}_x := \left\{ \frac{g_x}{h_x} \mid g_x, h_x \in \mathcal{O}_x \text{ and } h_x \text{ is not zero in } \mathcal{O}_x \right\}$$

$$\mathcal{M} := \bigcup_{x \in X} \mathfrak{m}_x$$

with the topology given by the basis

$$\left\{ \frac{G_x}{H_x} \mid x \in V, G, H \in \mathcal{O}(V) \right\}$$

例子 7.0.63. $f(z_1, z_2) = \frac{z_1}{z_2}$

定义 7.0.64. *Let $F \in \mathfrak{m}(X)$, denote $P(X) := \{x \in X \mid f_x \notin \mathcal{O}_x\}$. Pole set of f , and $Z(f) := P(\frac{1}{f})$ zero set of f .*

定理 7.0.65. *$f \in \mathfrak{m}(X)$, if $P(f)$ (or $Z(f)$) is not empty, then $P(f)$ is analytic set of $\dim = \dim X$.*

定义 7.0.66. *$P(f) \cup Z(f)$ is called the indeterminacy set of f , (in particular, codimension $P(M) \cap Z(f) \geq 2$)*

性质 7.0.67. *Given $f \in \mathcal{M}(X)$, we get a divisor:*

$$\text{div}(f) = \sum a_j A_j - \sum b_j B_j$$

where a_j = the vanishing order of f along A_j , A_j a globally irreducible component of $Z(f)$, b_j = ... along of $\frac{1}{f}$ along B_j , B_j : ... component of $P(f)$.

例子 7.0.68. $f = \frac{z_1}{z_2} \in \mathcal{M}(\mathbb{C}^2)$, then $P(f) = \{z_2 = 0\}$ and $Z(f) = \{z_1 = 0\}$, and

$$\text{div}(f) = [z_1 = 0] - [z_2 = 0]$$

Consider: X - complex manifold, \mathcal{O}^* : sheaf of invertible holomorphic functions,

\mathcal{M}^* : Sheaf of non-zero meromorphic functions

$\mathcal{D}iv$: Sheaf of $(n-1)$ -cycles.

性质 7.0.69. We have an exact sequences:

$$0 \rightarrow \mathcal{O}^* \rightarrow \mathcal{M}^* \rightarrow \mathcal{D}iv \rightarrow 0$$

In particular, $\mathcal{D}iv = \mathcal{M}^* / \mathcal{O}^*$.

long exact sequence:

$$0 \rightarrow H^0(X, \mathcal{O}^*) \rightarrow H^0(X, \mathcal{M}^*) \rightarrow H^0(X, \mathcal{D}iv) \rightarrow H^1(X, \mathcal{O}^*) \rightarrow H^1(X, \mathcal{M}^*) \rightarrow \dots$$

where, note that :

$$H^0(X, \mathcal{D}iv) = \text{Div}(X) \quad H^1(X, \mathcal{O}^*) = \text{Pic}(X)$$

Consider $\text{Div}(X) = H^0(X, \mathcal{M}^* / \mathcal{O}^*) \rightarrow \text{Pic}(X)$, $f \in H^0(X, \mathcal{M}^* / \mathcal{O}^*) \iff$ we have an open covering $X = \bigcup_i U_i$ and $f_i \in \mathcal{M}^*(U_i)$ with $\frac{f_i}{f_j} \in \mathcal{O}^*(U_i \cap U_j)$.

$$f \in H^0(X, \mathcal{M}^* / \mathcal{O}^*) \xrightarrow{\varphi} (U_i \cap U_j, g_{ij} \in \mathcal{O}^*(U_i \cap U_j)) \in \check{H}^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}^*) \hookrightarrow H^1(X, \mathcal{O}^*).$$

定义 7.0.70. A divisor D is called principal divisor, if $D = \text{div}(h)$ for some $h \in \mathcal{M}^*(X)$.

性质 7.0.71. $\ker \varphi = \{\text{principal divisors}\}$, i.e. $\mathcal{O}(D)$ is trivial $\iff D = \text{div}(f)$ for some global meromorphic functions.

性质 7.0.72.

$$\mathcal{O}(D_1 + D_2) = \mathcal{O}(D_1) \otimes \mathcal{O}(D_2)$$

$$\mathcal{O}(-D) = \mathcal{O}(D)^*$$

定义 7.0.73. $D_1, D_2 \in \text{Div}(X)$ is called linear equivalent, if $D_1 - D_2$ is principal, denoted by $D_1 \sim D_2$. We have an injection:

$$\text{Div}(X) / \sim \hookrightarrow \text{Pic}(X)$$

Remark: in general, $D \rightarrow \mathcal{O}(D)$ is not surjective.

If $X \hookrightarrow \mathbb{P}^n$, then $\text{Div}(X) / \sim \cong \text{Pic}(X)$.

性质 7.0.74. $L \rightarrow X$ holomorphic line bundle over a complex manifold, we have a canonical map:

$$\begin{aligned} H^0(X, L) \setminus \{0\} &\rightarrow \text{Div}(X) \\ s &\rightarrow Z(s) \end{aligned}$$

证明. $s \in H^0(X, L) \iff$ the data $(U_i, f_i \in \mathcal{O}(U_i))$, L is determined by $g_{ij} \in \mathcal{O}^*(U_i \cap U_j)$.

$Z(s)$ locally given by $\text{div}(f_i)$. ($\text{div}(f_i) = \text{div}(f_j)$ on $U_i \cap U_j$) □

性质 7.0.75. $s_i \in H^0(X, L_i) \setminus \{0\}, i = 1, 2$, we have $Z(s_1 \otimes s_2) = Z(s_1) + Z(s_2)$.

性质 7.0.76. Let $s \in H^0(X, L) \setminus \{0\}$, then $\mathcal{O}(Z(s)) \cong L$.

证明. Assume $X = \bigcup U_i$ with L determined by $g_{ij} \in \mathcal{O}^*(U_i \cap U_j)$, $s \in H^0(X, L)$ determined by $(U_i, f_i \in \mathcal{O}(U_i))$.

so, $\mathcal{O}(Z(s))$ is the line bundle given by $\frac{f_i}{f_j} \in \mathcal{O}^*(U_i \cap U_j)$.

note that $f_i = g_{ij} f_j$. □

推论 7.0.77. Let $s_i \in H^0(X, L_i) \setminus \{0\}, i = 1, 2$, then

$$Z(s_1) \sim Z(s_2) \iff L_1 \cong L_2$$

use the fact: $\mathcal{O}(Z(s_i)) = L_i$ and $\mathcal{O}(\text{principal divisor}) \cong \mathcal{O}_X$ trivial line bundle.

性质 7.0.78. Consider the map

$$\text{Div}(X) \rightarrow \text{Pic}(X)$$

$$D \rightarrow \mathcal{O}(D)$$

then the image is generated by line bundles with non-zero holomorphic sections.

7.1 Blow-up

Local picture: $U \subseteq \mathbb{C}^n$ open subset, $Y \subseteq U$ linear subspace, $\text{codim}_U Y = k$, e.g. assume $Y = \left\{ z \in U \mid z_1 = \dots = z_k = 0 \right\}$.

Consider the space

$$U_Y := \left\{ ([w], z) \in \mathbb{P}^{k-1} \times U \mid w_i z_j = w_j z_i, 1 \leq i, j \leq k \right\} \subseteq \mathbb{P}^{k-1} \times U \xrightarrow{\pi_2} U$$

定义 7.1.1. U_Y is called the blow-up of U along Y .

性质 7.1.2. U_Y is a smooth complex submanifold of $\mathbb{P}^{k-1} \times U$, and $\dim_{\mathbb{C}} U_Y = \dim_{\mathbb{C}} U = n$. And $\tau : U_Y \rightarrow U$ is a holomorphic map with

$$\tau|_{U_Y \setminus \tau^{-1}(Y)} : U_Y \setminus \tau^{-1}(Y) \cong U \setminus Y$$

And for any $y \in Y$, $\tau^{-1}(y) = \mathbb{P}^{k-1} \times \{y\}$ is complex projective space.

Locally, on then chart $w_1 \neq 0$, denote $\hat{w}_i = \frac{w_i}{w_1}$ for all $2 \leq i \leq k$. Then $z_i = \hat{w}_i z_1$. Then $(z_1, \hat{w}_2, \dots, \hat{w}_k, z_{k+1}, \dots, z_n)$ gives a holomorphic chart of U_Y .

Denote $(z_1, \dots, z_n) = (z_1, \hat{w}_2, \dots, \hat{w}_k, z_{k+1}, \dots, z_n)$, then $z_1 = \xi_1$, $z_2 = \xi_1 \xi_2, \dots, z_k = \xi_1 \xi_k$, and $z_{k+l} = \xi_{k+l}$ for $k \geq l$.

In this coordinate system, $\tau^{-1}(Y) = \left\{ \xi \in U_Y \mid \xi_1 = 0 \right\}$.

$\Rightarrow \tau^{-1}(Y)$ is a (smooth) hypersurface in U_Y . And, $\tau^{-1}(Y) \cong \mathbb{P}(N_{Y/U})$, where $N_{Y/U}$ is the normal bundle of Y in U .

$$(0 \rightarrow T_Y \rightarrow T_U|_Y \rightarrow N_{Y/U} \rightarrow 0)$$

If $\text{codim}_U Y = 1$ hypersurface, then $U_Y \cong U$.

Global construction

Y is a complex submanifold of X , $\dim_{\mathbb{C}} X = n, \dim_{\mathbb{C}} Y = k \leq n$.

引理 7.1.3. *If f_1, \dots, f_k and g_1, \dots, g_k are two (local) definition of Y , defining equations of Y , $Y = \left\{ f_z(z) = \dots = f_k(z) = 0 \right\}$, then df_1, \dots, df_k are linely independent along Y . And \exists a matrix (m_{ij}) of holomorphic functions, s.t. $g_i = \sum_{j=1}^k M_{n,j} f_j$ for any $1 \leq i \leq k$.*

The matrix (M_i^j) is invertible along Y , and determined uniquely by (f_1, \dots, f_k) and g_1, \dots, g_k .

证明. Assume $f_i = z_i$ for $1 \leq i \leq k$ is a local coordinate system $\equiv 0$. For ever g_i , $g_i|_{z_1, \dots, z_k=0}$

Consider the Taylor expansion of

g_i , we set

$$g_i = \sum_{j=1}^k M_i^j(z) z_j$$

$$dg_i = \sum_{j=1}^k dM_i^j z_j + \sum_{j=1}^k M_i^j dz_j.$$

$(dg_1, \dots, dg_k)|_Y$ and $(dz_1, \dots, dz_k)|_Y$ are $L.I.$, so $M_i^j|_Y$ is invertible.

Assume $Y \cap U = \{f_1^U = \dots = f_k^U = 0\}$, $Y \cap V = \{f_1^V = f_2^V = \dots = f_k^V = 0\}$ and $(M_{i,UV}^j)_{1 \leq i,j \leq k}$ is the □

$0 \rightarrow T_Y \rightarrow T_X|_Y \rightarrow N_{Y/D}$, the dual

$$N_{Y/X}^* \rightarrow T_X^*|_Y \rightarrow T_Y^*$$

(M_i^j, UV) gives the translation matrix middle of $N_{Y/X}^*$

引理 7.1.4. \exists isomorphism $\phi_{UV} : \tau_U^{-1}(U \cap V) \cong \tau_V^{-1}(U \cap V)$.

证明. Assume $f_i^U = \sum_{j=1}^k = \sum_{j=1}^k M_{i,UV}^j f_j^V$. Define $\phi_{UV}([w], z) = ([M^{-t}w], z)$, then ϕ_{UV} satisfies the two properties. □

定义 7.1.5. *(The blow-up of X along Y)(Global blow up)*

$\text{Bl}_Y X$: the blow-up of X along Y is defined as the complex manifold by gluing the U_Y and $\Omega := X \setminus S_Y$, where S_Y is some neighborhood of Y .

we have a holomorphic map: $\tau : \text{Bl}_Y X \rightarrow X$.

性质 7.1.6. $\tau : \text{Bl}_Y X \rightarrow X$ satisfies :

(1) $\tau^{-1}(Y)$ is a smooth complex submanifold of $\text{Bl}_Y X$, with $\dim_{\mathbb{C}} = n - 1$, (It is called the *excepted divisor* of τ)

(2) $\tau : \text{Bl}_Y X \setminus \tau^{-1}(Y) \rightarrow X \setminus Y$ is an isomorphism.

(2) τ is a proper map (any pre-image of compact set is compact).

证明. Check. □

projective bundle $E \rightarrow X$ is a holomorphic vector bundle (of rank r) over a complex manifold (of complex dimension n), then we can define projective bundle $\mathbb{P}(E)$,

$$\mathbb{P}(E) := \left\{ (x, [\xi]) \mid x \in X, \xi \in E_x \setminus \{0\} \right\}$$

$\mathbb{P}(E)$ is a complex manifold of dimension $n + r - 1$ (if $X = \{pt\}$, then $\mathbb{P}(E)$ is just the projective space)

We have a tautological line bundle on $\mathbb{P}(E)$:

$$\mathcal{O}_E(-1)_{(x, [\xi])} = \mathbb{C}\xi$$

$\mathcal{O}_E(-1)$ is a holomorphic line bundle on $\mathbb{P}(E)$.

Exercise: Assume (E, h) is an hermitian vector bundle with metric h , then h induces a metric on \tilde{h} on $\mathcal{O}_E(-1)$, then the Chern curvature Θ of \tilde{h} satisfies: for any $x \in X$, $\sqrt{-1}\Theta|_{\mathbb{P}(E_x)} < 0$.

定理 7.1.7. $\tau : \text{Bl}_Y X \rightarrow X$ blow-up along Y , $E := \tau^{-1}(Y)$ exceptional divisor, $\mathcal{O}(E)$: the holomorphic line bundle associated to E , then

(1) $\tau : E \rightarrow Y$ is just the map $\mathbb{P}(N_{Y/X}) \rightarrow Y$

(2) $\mathcal{O}(E)|_E \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}(N_{Y/X})}(-1) \cong N_{E/\text{Bl}_Y X}$ the normal bundle of E in $\text{Bl}_Y X$.

证明. Exercise. □

推论 7.1.8. If X is a (compact) Kahler manifold, Y is a compact submanifold of X , then the blow-up $\text{Bl}_Y X$ is also a (compact) Kahler manifold.

证明. $\tau : \text{Bl}_Y X \rightarrow X$, let ω be a Kahler metric on X , then $\tau^*\omega$ is a semi-positive $(1,1)$ -form on $\text{Bl}_Y X$, positive on $\text{Bl}_Y X \setminus E$, and the kernel of $\tau^*\omega$ along E is given by the tangent space of the fiber $E \rightarrow Y$.

Define the metric h on $\mathcal{O}(E)$ as follows: on E , h is induced by the metric on $N_{Y/X}$ induced by the metric on $N_{Y/X}$, and we extend h to a neighborhood of E ; outside a neighborhood of E , $(\mathcal{O}(E)|_{\text{Bl}_Y X \setminus E})$ is trivial, h is given by the trivial metric.

Then, we glue these two metrics to get a metric on $\mathcal{O}(E)$. Denote the curvature $\theta := \sqrt{-1}\Theta(\mathcal{O}(-E), h)/$

Claim: $C\tau^*\omega + \theta > 0$ for $C \gg 1$ □

7.2 Kodaira Embedding Theorem

Recall: $L \rightarrow X$ holomorphic line bundle with a smooth metric h over compact complex manifold.

L is called positive if the curvature $\sqrt{-1}\Theta_{(L,h)}$ is a positive $(1,1)$ -form.

L is called ample, if $L^{\otimes m} := mL$ is very ample for $m \gg 1$.

Recall: a holomorphic vector bundle E is called very ample, if the following maps

$$H^0(X, E) \rightarrow E_x \oplus E_y \quad \forall x \neq y \in X$$

$$H^0(X, E) \rightarrow (J^1 E)_x \quad \forall x \in X$$

are surjective.

性质 7.2.1. X is a complex manifold of dimension n , $Y \subseteq X$ is a complex submanifold of codimension k . $\tau: \hat{X} \rightarrow X$ blow-up along Y . $E := \tau^{-1}(Y)$ exceptional divisor. Then

$$K_{\hat{X}} = \tau^* K_X \otimes \mathcal{O}((k-1)E)$$

(Recall: $K_X = \det T^*X = \bigwedge^n T^*X$, locally free sheaf of holomorphic n -forms Ω_X^n).

证明. locally, τ can be written as

$$\tau: (w_1, \dots, w_n) \rightarrow (z_1, \dots, z_n)$$

$$z_1 = w_1, z_2 = w_2, \dots, z_k = w_k w_1, \dots, z_{k+l} = w_{k+l}$$

$$\Rightarrow \tau^*(dz_1 \wedge dz_2 \wedge \dots \wedge dz_n) = w_1^{k-1} dw_1 \wedge dw_2 \wedge \dots \wedge dw_n$$

(local holomorphic frame of K_X and $K_{\hat{X}}$... w_1^{k-1} -local section of $\mathcal{O}(E)$)

Recall: L -line bundle, $\{g_{ij}\}$ transition function, a local section is the following data $f_i = g_{ij}f_j$.

If e_i the local frame on U_i , then $f_i e_i = f_j e_j$ on $U_i \cap U_j$.

之后 check 两个线丛的转移函数相同. □

引理 7.2.2. Let \widehat{X} be the blow up of X along $\{x_1, \dots, x_N\} \subseteq X$, (N distinct points), denote E the exceptional divisor, then

$$H^1(\widehat{X}, \mathcal{O}(-mE) \otimes \tau^*(kL)) = 0$$

for $m \geq 1$, $k \geq Cm$ for $C \gg 1$

证明.

$$H^1(\widehat{X}, \mathcal{O}(-mE) \otimes \tau^*(kL)) = H^1(\widehat{X}, K_{\widehat{X}} \otimes K_{\widehat{X}}^{-1} \otimes \mathcal{O}(-mE) \otimes \tau^*(kL)) = H^{n,1}(\widehat{X}, F)$$

where $F := K_{\widehat{X}}^{-1} \otimes \mathcal{O}(-mE) \otimes \tau^*(kL)$.

By Kodaira-Nakano vanishing, if F is positive, then $H^{n,1}(\widehat{X}, F) = 0$.

Note that

$$\begin{aligned} F &= \mathcal{O}(-mE) \otimes \tau^* K_X^{-1} \otimes \mathcal{O}((1-n)E) \otimes \tau^*(kL) \\ &= \tau^* K_X^{-1} \otimes \mathcal{O}(-(m+n-1)E) \otimes \tau^*(kL) \end{aligned}$$

We know, $\exists C_0 \gg 1$ s.t. $C_0 L \otimes K_X^{-1}$ is positive, and $\exists C \gg 1$, s.t. $C \tau^* L \otimes \mathcal{O}(-E)$ is positive.

So, For $k \geq Cm$ ($C \gg 1$), F is positive.

Let $v_j \in H^0(\Omega_j, kL)$ be a local section of kL , s.t. v_j generates the m -jet at x_j . Let $\psi_j \in C^\infty(X, \mathbb{R})$ s.t. $\text{supp} \psi_j \subset \subset \Omega_j$, $0 \leq \psi_j \leq 1$, $\psi_j \equiv 1$ around x_j . Denote

$$v := \sum_{j=1}^n \psi_j v_j$$

a smooth section of kL .

$$d''v = \sum_j d''\psi_j v_j \in C_{(0,1)}^\infty(X, kL)$$

satisfies $d''v = 0$ near x_j for $1 \leq j \leq N$.

Lemma:(Exercise)

$$\begin{aligned} H^0(X, M) &\rightarrow H^0(\widehat{X}, \tau^* M) \\ s &\mapsto \tau^* s \end{aligned}$$

is an isomorphism for any line bundle M .

Lemma:(Exercise) a section of $\tau^* M$ with vanishing order = k along E is the pull-back of a section of M with vanishing order = k at x_j .

Denote $S_E \in H^0(\widehat{X}, \mathcal{O}(E))$ the canonical section of E ,

$$w = S_E^{-(m+1)} \otimes \tau^*(d''v) \in C_{(0,1)}^\infty(\widehat{X}, \mathcal{O}(-(m+1)E) \otimes \tau^*(kL))$$

and $d''w = 0$. Vanishing of $H^0(\widehat{X}, \mathcal{O}(-(m+1)) \otimes \tau^*(kL))$ implies $w = d''u$ for some $u \in C^\infty(\widehat{X}, \mathcal{O}(-(m+1)E) \otimes \tau^{-1}kL)$.

$$\begin{aligned} S_E^{-(m+1)} \tau^*(d''v) &= d''u \\ \Rightarrow d''(\tau^*v - S_E^{(m+1)}u) &= 0 \end{aligned}$$

so, $\tau^*v - S_E^{(m+1)}u$ is a holomorphic section of $\tau^*(kL)$. Using $S_E^{(m+1)}u = \tau^*f$ for some $f \in H^0(X, kL)$ with vanishing order $= m+1$ along x_j .

Claim: denote $g := v - f$ is the holomorphic sections generating the m -jets at x_j . $d''(\tau^*g) = 0 \Rightarrow \tau^*g$ is holomorphic, $\text{Ord}_{x_j}(f) = m+1$. So, $J^m(g)_{x_j} = J^m(v)_{x_j}$.

□

定理 7.2.3. $L \rightarrow X$ positive line bundle, $x_1, \dots, x_N \in X$ are N distinct points on X , then there exists $C > 0$, s.t.

$$H^0(X, kL) \rightarrow \bigoplus_{j=1}^N (J^m(kL))_{x_j}$$

is surjective for all $m \geq 0$ and $k \geq Cm$

证明.

□

定理 7.2.4. (Kodaira)

Line bundle L is positive \iff it is ample.

(微分几何的正性与代数几何的正性是等价的)

证明. (有一边是显然的, 留作习题)

proof of "L ample \Rightarrow L positive".

Exercise: If A is a very ample line bundle on X , $H^0(X, A)$ has a basis $\{s_0, \dots, s_N\}$, then the map

$$\begin{aligned} \Phi : X &\rightarrow \mathbb{P}(H^0(X, A)) \\ s &\mapsto [s_0(x); s_1(x); \dots; s_N(x)] \end{aligned}$$

(Kodaira map) is a holomorphic embedding.

(Hint: $H^0(X, A) \twoheadrightarrow A_x \oplus A_y$ means that Φ is injective; $H^0(X, A) \twoheadrightarrow (J^1(A))_x$ means that Φ_* is injective.)

Exercise: denote the tautological line bundle on $\mathbb{P}(H^0(X, A))$ by $\mathcal{O}(1)$, then $A = \Phi^*\mathcal{O}(1)$.

Cor: A is very ample $\Rightarrow A$ is positive.

Given any inner product on $H^0(X, A)$, we get a metric h on $\mathcal{O}(1)$, the curvature $\Theta(\mathcal{O}(1))$ of h is positive.

$$\Rightarrow \Theta(A) = \Phi^* \Theta(\mathcal{O}(1))$$

Φ is embedding $\Rightarrow \Theta(A)$ is positive. □

L positive $\Rightarrow L$ ample, i.e. mL is very ample,

$$\Rightarrow \Phi_{H^0(X, mL)} : X \hookrightarrow \mathbb{P}(H^0(X, mL))$$

holomorphic embedding ($\Rightarrow X$ is an analytic submanifold of $\mathbb{P}(H^0(X, mL))$)

$\xrightarrow{\text{Chow theorem}}$ X is an algebraic set of $\mathbb{P}(H^0(X, mL))$ (i.e. $X = \bigcup_{j=1}^t \{P_j = 0\}$, P_j -homogenous polynomial)

a compact complex manifold X admitting a positive line bundle L if and only if X is an algebraic manifold.

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \mathcal{O} \xrightarrow{e^{2\pi\sqrt{-1}}} \mathcal{O}^* \rightarrow 0 \\ \rightsquigarrow H^1(X, \mathcal{O}^*) \xrightarrow{c_1} H^2(X, \mathbb{Z}) \rightarrow H^2(X, \mathcal{O}) \rightarrow \dots \end{aligned}$$

and $H^2(X, \mathbb{Z}) \rightarrow H^2(X, \mathbb{C}) \cong H^{2,0} \oplus H^{1,1} \oplus H^{0,2}$, and $H^2(X, \mathcal{O}) \cong H^{0,2}(X, \mathbb{C})$.

$\Rightarrow \forall \alpha \in H^2(X, \mathbb{Z}) \cup H^{1,1}(X, \mathbb{C})$, we have a holomorphic line bundle L s.t. $\alpha = c_1(L)$.

L admitting a positive line bundle $\iff X$ admitting a class $\alpha \in H^2(X, \mathbb{Z}) \cup H^{1,1}$ with a positive representative.

Recall:

定理 7.2.5. $L \rightarrow X$ positive line bundle over compact complex manifold, then $\forall x_1, \dots, x_N \in X, \exists C > 0$ (depends on X), s.t.

$$H^0(X, L^k) \twoheadrightarrow \bigoplus_{i=1}^N (J^m L^k)_{x_i} \quad (*)$$

whenever $m \geq 0$ and $k \geq C(m+1)$

For fixed (x_1, \dots, x_N) , we proved $\exists C(x_1, \dots, x_N) > 0$, s.t. $(*)$ holds.

Observation: $(*)$ is an open condition with respect to (x_1, \dots, x_N) .

$\Rightarrow \exists$ open set $U(x_i)$ s.t. $\forall (y_1, \dots, y_N) \in \prod_{i=1}^N U(x_i)$, $(*)$ holds for $C = C(x_1, \dots, x_N)$.

$m = 0, N = 1, H^0(X, L^k) \twoheadrightarrow (L^k)_x \iff \exists$ section s s.t. $s(x) \neq 0$ (for y near x , $s(y) \neq 0$)

$\pi : Y \rightarrow X$ blow-up along x_1, \dots, x_N , with exception divisor E ,

FACT: $\exists C \gg 1$, s.t. $C\pi^*L + \mathcal{O}(-E)$ is positive.

(这些已证明)

(more generally, if ω is a Kahler metric on X , denote $\{\omega\} \in H^{1,1}(X, \mathbb{R})$ the Kahler associated to ω , then $\exists C \gg 1$ s.t. $C\pi^*\omega + c_1(-E)$ is a Kahler class)

性质 7.2.6. *Define the Seshadri constant*

$$\mathcal{E}(x_1, \dots, x_N; \omega) := \sup \left\{ t \geq 0 \mid \pi^*\omega + t \cdot c_1(-E) \text{ is a Kahler class} \right\}$$

Then $\mathcal{E}(x_1, \dots, x_N; \omega)$ is a lower-semi-continuous function w.r.t x_1, \dots, x_N .

So,

$$\inf \left\{ \mathcal{E}(x_1, \dots, x_N; \omega) \mid (x_1, \dots, x_N) \in \underbrace{X \times \dots \times X}_N \right\} > 0$$

证明. Too difficult. omit. □

注记 7.2.7. (如果感兴趣)

Nagata conjecture

Biran-Nagata conjecture

Symplectic packing/embedding of bundles

定理 7.2.8. *L is a positive line bundle, for $k \gg 1$,*

$$\Phi_{H^0(X, L^k)} : X \hookrightarrow \mathbb{P}(H^0(X, L^k))$$

$$x \mapsto [s_0(x) : \dots : s_N(x)]$$

is a holomorphic embedding. (Where $\{s_j\}_{j=0}^N$ is a basis of $H^0(X, L^k)$)

So, (Chow theorem), X is an algebraic manifold.

Chow theorem 1949:

定理 7.2.9. (Chow theorem, 1949)

Let A be an analytic set of \mathbb{P}^n , then A is an algebraic set, i.e.

$$A = \bigcap_{j=1}^N \{P_j(z_0, \dots, z_n) = 0\}$$

where P_j is a homogeneous polynomial.

Using the Remmert-Stein theorem:

X - a complex manifold, $A \subseteq X$ an analytic set, $Z \subseteq X \setminus A$ is an analytic subset (of $X \setminus A$). If $\dim(Z, x) > \dim A$ for all $x \in Z$, then the closure \bar{Z} in X is also an analytic set of X .

Consider the natural map $\pi : \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{P}^n$, then $Z := \pi^{-1}(A)$ is an analytic set of $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$. we have $\dim Z \geq 1 > \dim \{0\}$, Using Remmert-Stein, \bar{Z} is an analytic set of \mathbb{C}^{n+1} . So, for a small disk Δ around $0 \in \mathbb{C}^{n+1}$,

$$\bar{Z} \cap \Delta = \bigcap_{j=1}^N \{f_j(z_1, \dots, z_n) = 0\}$$

where $f_j \in \mathcal{O}(\Delta)$.

Let $f_j = \sum_{k=0}^{\infty} P_{j,k}$ be the Taylor expansion of f_j , where $P_{j,k}$ is a homogenous polynomials of degree k .

Claim: $\bar{Z} \cap \Delta = \left(\bigcap_{j,k} \{P_{j,k} = 0\} \right) \cap \Delta$. Denote $W := \bigcap_{j,k} \{P_{j,k} = 0\}$,

$W \cap \Delta \subseteq \bar{Z} \cap \Delta$ is obvious.

By the definition of π , Z is invariant by homotheties, so, for any $z \in \bar{Z} \cap \Delta$, $|t| \ll 1$, we have $f_j(t, z) = 0$. Write

$$f_j(tz) = \sum_{k=0}^{\infty} P_{j,k}(z)t^k = 0 \quad \Rightarrow \quad P_{j,k}(z) = 0$$

so, $\bar{Z} \cap \Delta \subseteq W \cap \Delta$.

$\Rightarrow \bar{Z} = W$ by the \mathbb{C}^* -invariance of \bar{Z} and W . By the noetherian property of $\mathbb{C}[z_0, \dots, z_n]$, \exists finite polynomials P_j , $1 \leq j \leq k$, s.t.

$$W = \bigcap_{j=1}^k \{P_j = 0\}$$

推论 7.2.10. *Any analytic subset of an algebraic variety is also algebraic.*

Lefschetz's (1 - 1)-theorem

Exercise: X is a compact complex manifold, L, A be two holomorphic line bundles over X , A is positive (\iff ample). Then for $k \gg 1$, $H^0(X, L \otimes A^k) \neq \{0\}$. (与之前证明几乎完全一样)

Recall: $0 \rightarrow \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{M}^* \rightarrow \text{Div} \rightarrow 0$ induces

$$\text{Div}(X) := H^0(X, \text{Div}) \rightarrow H^1(X, \mathcal{O}^*) =: \text{Pic}(X)$$

定理 7.2.11. *If X is an algebraic manifold, then for all $L \in \text{Pic}(X)$, \exists divisor D s.t. $L = \mathcal{O}(D)$.*

证明. Take non-zero sections $S \in H^0(X, L \otimes A^k)$, $t \in H^0(X, A^k)$, then $\frac{s}{t}$ is a meromorphic section of L . Let D be the divisor associated to $\frac{s}{t}$, then

$$L \cong \mathcal{O}(D)$$

□

定理 7.2.12. (*Lelong-Poincare equation*)

Let $s \in H^0(X, L) \setminus \{0\}$, then

$$\frac{\sqrt{-1}}{\pi} \partial \bar{\partial} \log |s|_h = [s^{-1}(0)] - \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \Theta_{(L,h)} \quad (*)$$

where $[s^{-1}(0)]$ is defined as follows:

$$\langle [s^{-1}(0)], \psi \rangle = \int_{s^{-1}(0)} \psi$$

where ψ is an $(n-1, n-1)$ -form on X . (假设..有度量; 在分布意义下求导)

(Current of integration)

证明. (以后再证)

□

$(*) \Rightarrow$

$$c_1(L) = \left\{ \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \Theta_{(L,h)} \right\} = \{[s^{-1}(0)]\}$$

注记 7.2.13. $(*)$ also holds for meromorphic sections.

推论 7.2.14. X be an algebraic manifold, then $\forall \alpha \in H^{1,1}(X, \mathbb{Q})$, we have a divisor D with \mathbb{Q} -coefficients s.t.

$$[\alpha] = \{[D]\}$$

(Hodge conjecture for $(1,1)$ -classes)

Fact: X is a compact complex manifold, $V \subseteq X$ is an analytic set of pure $\dim_{\mathbb{C}} V = p$. Then the current $[V]$ associated to V_{reg} :

$$\langle [V], \psi \rangle := \int_{V_{\text{reg}}} \psi|_{V_{\text{reg}}}$$

where $\psi \in C^\infty(X, \wedge^{p,p})$, defines a class $\{[V]\} \in H^{n-p, n-p}(X, \mathbb{Z})$.

Hodge conjecture: X is a complex algebraic manifold, then for all $\alpha \in H^{n-p, n-p}(X, \mathbb{Q})$, \exists analytic sets V_k of pure dimension p and rational numbers r_k , s.t.

$$\alpha \in \left\{ \sum_{k=1}^N r_k [V_k] \right\}$$

(这个猜想作为练习, 说不定就做出来了.....)

Known case: $p = n - 1$, it is Lef. $(1, 1)$ -theorem.

Exercise: also true for $p = 1$ (Using Hard Lef) And, $p = 0, p = n...$

下学期课程: 《Analytic methods in algebraic geometry》 敬请期待 23333333333

Pluripotential theory/Positive currents

Positive currents and Lelong numbers

Currents on C^∞ manifolds. Let X is a C^∞ , oriented manifold, with $\dim_{\mathbb{R}} X = n$. Denote $C^s(X, \wedge^p T^*X)$ the space of s -differentiable p -forms on X .

Let $\Omega \subseteq X$ be a coordinate open set, $u \in C^s(X, \wedge^p T^*X)$, write

$$u = \sum_{|I|=p} u_I dx_I$$

where u_I are s -differentiable functions.

Assume $K \subset\subset \Omega$, define

$$P_K^s(u) := \sup_{x \in K} \max_{\substack{|I|=p \\ |\alpha| \leq s}} |D^\alpha u_I(x)|$$

, where $D^\alpha = \frac{\partial^\alpha}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}$.

$\mathcal{E}^p(X)$ - the space $C^\infty(X, \wedge^p T^*X)$ equipped with the topology defined by all the $P_K^s(\cdot)$, when $s, K \subset\subset \Omega$ vary/

${}^s\mathcal{E}^p(X)$ - the space $C^s(X, \wedge^p T^*X)$ equipped with the topology defined by all the $P_K^s(\cdot)$, when $K \subset\subset \Omega$ vary.

Let $K \subseteq X$ be a compact subset, $\mathcal{D}^p(K)$ - the space of $u \in \mathcal{E}^p(X)$ with induced topology and $\text{supp}(u) \subseteq K$.

$$\mathcal{D}^p(X) := \bigcup_{K \text{ is compact subset of } X} \mathcal{D}^p(K)$$

similarly we can define ${}^s\mathcal{D}^p(K)$ and ${}^s\mathcal{D}^p(X)$.

注记 7.2.15. (1) $\mathcal{E}^p(X)$ (resp. ${}^s\mathcal{E}^p(X)$) can be defined by countably many P_K^s . In particular, \mathcal{E}^p , ${}^s\mathcal{E}^p$ are Fréchet spaces.

(2) $\mathcal{D}^p(X)$ is dense in $\mathcal{E}^p(X)$.

定义 7.2.16. (Current, 流, [de Rham 1955])

The spaces of currents of $\dim = p$ (or $\deg = n - p$) denoted by $\mathcal{D}'_p(X) :=$ the topological dual of $\mathcal{D}^p(X)$. i.e. $\mathcal{D}'_p(X)$ is the set of linear forms T on $\mathcal{D}^p(X)$ s.t. $T|_{\mathcal{D}^p(K)}$ is continuous.

注记 7.2.17. A current can be considered as a form with distribution coefficients. More precisely,

$$T = \sum_{|I|=n-p} T_I dx_I$$

is a current on Ω , if and only if T_I is a distribution on Ω .

Let $u = f dx_{I^c} \in \mathcal{D}^p(\Omega)$, we have

$$\langle T, f dx_I \rangle := T_I(f)$$

On the other hand, if T is a current of dimension p , then we define

$$T_I(f) := \langle T, f dx_{I^c} \rangle$$

we can verify $T = \sum_{|I|=p} T_I dx_I$.

记号 7.2.18.

$$\langle T, U \rangle := \int_X T \wedge U$$

例子 7.2.19. (Current of integration)

$Z \subseteq X$ is an oriented closed submanifold with dimension p , with boundary ∂Z . We can define the current $[Z]$ as follows:

$$\langle [Z], u \rangle := \int_Z u$$

for all $u \in \mathcal{D}^p(X)$.

例子 7.2.20. Let f be a form of degree $n - p$, with coefficients in $L^1_{loc}(X)$. We define the following current T_f :

$$\langle T_f, u \rangle := \int_X f \wedge u$$

(一般地, current 与 current 无法作外积, 好比测度与测度无法相乘)

Exterior derivative on Currents:

定义 7.2.21. Let T be a current of dimension p (or degree $n - p$), $u \in \mathcal{D}^{p-1}(X)$. We define dT is the current is defined as follows:

$$\langle dT, u \rangle := (-1)^{n-p+1} \langle T, du \rangle$$

(why $(-1)^{n-p+1}$?)

注记 7.2.22. if X has no boundary, $T \in T_f$, $f \in \mathcal{E}^{n-p}(X) \cap L^1_{loc}(X)$, then

$$\begin{aligned} 0 &= \int_X d(f \wedge u) = \int_X df \wedge u + (-1)^{n-p} f \wedge du \\ \langle T_{df}, u \rangle &= (-1)^{n-p+1} \langle T_f, du \rangle \end{aligned}$$

例子 7.2.23. $Z \subseteq X$ is a p -dimensional submanifold with boundary ∂Z , then by the stokes formula: for $u \in \mathcal{D}^{p-1}(X)$,

$$\langle d[Z], u \rangle = (-1)^{n-p+1} \langle [Z], du \rangle = (-1)^{n-p+1} \int_Z du = (-1)^{n-p+1} \int_{\partial Z} u = (-1)^{n-p+1} \langle [\partial Z], u \rangle$$

so we have

$$d[Z] = (-1)^{n-p+1} [\partial Z]$$

定义 7.2.24. A current $T \in \mathcal{D}'_p(X)$ is called closed if $dT = 0$.

Example: if $T = T_f$ for some $f \in \mathcal{E}^p(X) \cap L^1_{loc}(X)$, then T_f is closed if and only if f is closed (differential form).

Example: $Z \subseteq X$ a submanifold of X , then $d[Z] = 0 \iff Z$ has no boundary.

Now, Let X be a complex manifold... of $\dim_{\mathbb{C}} = n$, similar to the smooth case, we can define:

$$\mathcal{E}^{p,q}(X) \quad {}^s\mathcal{E}^{p,q}(X) \quad \mathcal{D}^{p,q}(X) \quad {}^s\mathcal{D}^{p,q}(X)$$

定义 7.2.25. the space of currents of bidimension (p, q) (or bidegree $(n - p, n - q)$) denoted by

$$\mathcal{D}'_{p,q}(X)$$

is the topological dual of $\mathcal{D}^{p,q}(X)$

Similar to the operator d , we can define $d' = \partial$ and $d'' = \bar{\partial}$ on $\mathcal{D}'_{p,q}(X)$ by duality.

例子 7.2.26. $V \subseteq X$ complex submanifold of $\dim_{\mathbb{C}} = p$, then the current of integration $[V]$ defined by

$$\langle [V], u \rangle = \int_V u|_V$$

we have $[v] \in \mathcal{D}'_{p,p}(X)$. (Why?!)

例子 7.2.27. (Non-trivial example)

Let $V \subset X$ is an irreducible analytic set of pure dimension $\dim_{\mathbb{C}} = p$. define the current $[V]$ as follows:

$$\langle [V], u \rangle := \int_{V_{\text{reg}}} u$$

(in general, V_{reg} is an open submanifold of $\dim_{\mathbb{C}} = p$.)

FACT: $[V]$ also defines a closed currents.

例子 7.2.28. (trivial example)

$$\mathcal{E}^{p,q}(X) \cap L^1_{\text{Loc}}(X) \subseteq (\mathcal{D}')^{p,q}(X)$$

7.3 微分形式的正性

positivity of forms

定义 7.3.1. A (p, p) -form $\varphi \in \wedge^{p,p}(\mathbb{C}^n)$ is called strongly positive if φ is a convex combination as follows:

$$\varphi = \sum_{s=1}^k c_s \sqrt{-1} \alpha_{s,1} \wedge \overline{\alpha_{s,1}} \wedge \cdots \wedge \sqrt{-1} \alpha_{s,p} \wedge \overline{\alpha_{s,p}}$$

where $c_s \geq 0$, $\alpha_{s,j} \in \wedge^{1,0}(\mathbb{C}^n)$

(in particular, $\varphi \equiv 0$ is strongly positive)

定义 7.3.2. A (p, p) -form $\psi \in \wedge^{p,p}(\mathbb{C}^n)$ is called positive, if $\forall \varphi \in \wedge^{n-p,n-p}(\mathbb{C}^n)$ strongly positive, we have $\psi \wedge \varphi \geq 0$.

注记 7.3.3. (1) Let $\varphi = \sqrt{-1} \sum_{i,j} \varphi_{ij} dz_i \wedge d\bar{z}_j$ be a real $(1,1)$ -form, then φ is positive /strongly positive $\iff [\varphi_{ij}]_{i,j} \geq 0$.

(2) denote $\mathcal{C}_{sp}^k :=$ the strongly positive (k,k) -forms, (\mathcal{C}_{sp}^k is a convex cone in $\wedge^{k,k}$) $\mathcal{C}_p^k :=$ the set of positive (k,k) -forms. (also a convex cone)

Check: $\mathcal{C}_{sp}^k \subseteq \mathcal{C}_p^k$.

Consider a (p, p) -form as a linear function on $\wedge^{n-p, n-p}$, then $\mathcal{C}_p^k = (\mathcal{C}_{sp}^{n-k})^*$

(General setting: $\mathcal{C} \subseteq V$, V is a real vector space of finite dimension, \mathcal{C} is a convex cone, V^* is the dual of V , then we can define $\mathcal{C}^* := \{l \in V^* \mid l|_{\mathcal{C}} \geq 0\}$)

Take double dual:

$$\overline{\mathcal{C}_{sp}^{n-k}} = (\mathcal{C}_p^k)^*$$

(general fact: $(\mathcal{C}^*)^* = \overline{\mathcal{C}}$)

推论 7.3.4. *A (p, p) -form φ is strongly positive if and only if for all $\psi \in \wedge^{n-p, n-p}$ positive, $\varphi \wedge \psi \geq 0$. In particular, "strongly positivity" is dual to "positivity".*

Recall: positivity of forms.

a (p, p) -form $\varphi \in \wedge^{p, p}(\mathbb{C}^n)$ is strongly positive if

$$\varphi = \sum_{c_s \geq 0} c_s \sqrt{-1} \alpha_{s,1} \wedge \bar{\alpha}_{s,1} \wedge \cdots \wedge \sqrt{-1} \alpha_{s,p} \wedge \bar{\alpha}_{s,p}$$

where $\alpha_{s,j} \in \wedge^{1,0}$

A (p, p) -form $\psi \in \wedge^{p, p}$ is positive if $\psi \wedge \varphi \geq 0$ for all $\varphi \in \wedge^{n-p, n-p}$ strongly positive.

Rem: {positive (p, p) -forms} and {strongly positive $(n-p, n-p)$ -forms} are dual to each other.

Rem: an $(1, 1)$ -form $\varphi = \sum_{i,j} \varphi_{ij} dz_i \wedge d\bar{z}_j$ is strongly positive \iff positive \iff the matrix $[\varphi_{ij}]$ is a semi-positive Hermitian matrix.

Rem: for $p = 1, n-1, 0, n$, strongly positive \iff positive. In particular, an $(n-1, n-1)$ -form $\psi = c \sum_{ij} \psi_{ij} \widehat{dz_i \wedge d\bar{z}_j}$ (where $\widehat{dz_i \wedge d\bar{z}_j}$ is the $(n-1, n-1)$ -form s.t. $dz_i \wedge d\bar{z}_j \wedge \widehat{dz_i \wedge d\bar{z}_j} = dz_1 \wedge d\bar{z}_1 \wedge \cdots \wedge dz_n \wedge d\bar{z}_n$.) is strongly positive $\iff [\psi_{ij}] \geq 0$.

性质 7.3.5. *Let (z_1, z_2, \dots, z_n) be a coordinate system of \mathbb{C}^n , then $\wedge^{p, p}$ admits a basis consisting of strongly positive form*

$$\beta_s = \sqrt{-1} \beta_{s,1} \wedge \bar{\beta}_{s,1} \wedge \cdots \wedge \sqrt{-1} \beta_{s,p} \wedge \bar{\beta}_{s,p}$$

with $1 \leq s \leq \binom{n}{p}^2$, every $\beta_{s,j} \in \wedge^{1,0}$ is of the type $dz_j \pm dz_k, dz_j \pm \sqrt{-1} dz_k, 1 \leq j, k \leq n$.

证明. note the identity

$$4dz_j \wedge d\bar{z}_k = (dz_j + dz_k) \wedge \overline{(dz_j + dz_k)} - (dz_j - dz_k) \wedge \overline{(dz_j - dz_k)} + \sqrt{-1}(dz_j + \sqrt{-1}dz_k) \wedge \overline{\sqrt{-1}(dz_j + \sqrt{-1}dz_k)} -$$

and

$$dz_{i_1} \wedge \cdots \wedge dz_{i_p} \wedge d\bar{z}_{j_1} \wedge \cdots \wedge d\bar{z}_{j_p} = \pm \bigwedge_{1 \leq s \leq p} (dz_{is} \wedge d\bar{z}_{js})$$

a set of generators contain a basis. □

推论 7.3.6. All positive (p, p) -forms are real, i.e. if $u \in \bigwedge_{\mathbb{C}}^{p,p}$ is positive, and

$$u = (\sqrt{-1})^{p^2} \sum_{|I|=|J|=p} u_{IJ} dz_I \wedge d\bar{z}_J$$

then $u = \bar{u}$, i.e. $u_{IJ} = \overline{u_{JI}}$

注记 7.3.7. For all $2 \leq p \leq n-2$,

$$\{\text{strongly positive } (p, p)\text{-forms}\} \subsetneq \{\text{positive } (p, p)\text{-forms}\}$$

The wedge product of positive forms may NOT be positive

注记 7.3.8. Ref:

Blocki-Pli\{'s\}:Square or positive (p, p) -forms 2013

For $p = 2$, if α is a positive $(2, 2)$ -form, then α^2 is a positive $(4, 4)$ -form.

(困难的线性代数题)

Positivity of currents

定义 7.3.9. A current $T \in \mathcal{D}'_{p,p}(X)$ is called positive if $\langle T, \varphi \rangle \geq 0$ for all $\varphi \in \mathcal{D}^{p,p}(X)$ strongly positive.

T is called strongly positive, if $\langle T, \varphi \rangle \geq 0$ for all $\varphi \in \mathcal{D}^{p,p}(X)$ positive.

例子 7.3.10. Let $V \subseteq X$ be a complex submanifold of $\dim = p$, then the current of integration $[V]$ is a strongly positive (p, p) -current $\in \mathcal{D}'_{p,p}(X)$.

证明. Exercise. □

注记 7.3.11. In general, $\{\text{strongly positive } (p, p)\text{-currents}\} \subseteq \{\text{positive } (p, p)\text{-current}\}$ with equality if $p = 0, 1, n-1, n$.

注记 7.3.12. Every positive (p, p) -current $T =_{loc} (-1)^p \sum_{|I|=|J|=p} T_{IJ} dz_I \wedge d\bar{z}_J$ is real ,i.e. $T_{IJ} = \overline{T_{JI}}$ (as distribution) and $T_{I,I} \geq 0$. and

$$\lambda_I \lambda_J |T_{IJ}| \leq 2^p \sum \lambda_M^2 T_{MM}$$

if $I \cap J \subseteq M \subseteq I \cup J$, where $\lambda_I = \prod_{k \in I} \lambda_k$, $\lambda_k \geq 0$.

证明. Omit. □

Weak topology of currents

定义 7.3.13. The weak topology on $\mathcal{D}'_p(X)$ is the topology defined by the collection of semi-norms

$$T \mapsto |\langle T, f \rangle| \quad f \in \mathcal{D}^p(X)$$

定义 7.3.14. A set $B \subseteq \mathcal{D}'_p(X)$ is called weakly bounded if $|\langle T, f \rangle|$ is bounded for ever $T \in B$ and $f \in \mathcal{D}^p(X)$.

注记 7.3.15. By Banach-Alaoglu Theorem (泛函大招) , every weakly bounded closed subset $B \subseteq \mathcal{D}'_p(X)$ is weakly compact.

定理 7.3.16. (X, ω) -Hermitian manifold, then the set

$$\left\{ T \in \mathcal{D}'_{p,p}(X) \text{ positive} \mid \sup_{\theta \in C^\infty(X) \text{ with compact supp}} \langle T, \theta \omega^p \rangle \leq 1 \right\}$$

is weakly compact in $\mathcal{D}'_{p,p}$

d-closed positive $(1, 1)$ -currents and plurisubharmonic (PSH) functions

$$T \in \mathcal{D}^{1,1}(X), T \geq 0, dT = 0 \dots$$

例子 7.3.17. $D \in \text{Div}(X)$ effective, then $[D]$ is a d-closed positive $(1, 1)$ -current.

PSH functions

定义 7.3.18. $\Omega \subseteq X$ open subset, $u : \Omega \rightarrow [-\infty, +\infty)$ is called **PSH** (多重次调和), if

(1) u is upper-semi-continuous (usc) (rmk: u has a upper bound on any compact subset)

(2) for any complex line $L \subseteq \mathbb{C}^n$, $u|_{\Omega \cap L}$ is subharmonic. (i.e. $\forall a \in \Omega, \xi \in \mathbb{C}^n$ with $|\xi| < d(a, \partial\Omega)$, we have the mean value inequality

$$u(a) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(a + e^{i\theta} \xi) d\theta$$

Denote $\text{PSH}(\Omega) :=$ the set of PSH functions on Ω)

性质 7.3.19. (1) for all $u \in \text{PSH}(\Omega)$, u is subharmonic, i.e. for any $a \in \Omega, r < d(a, \partial\Omega)$ we have

$$u(a) \leq \frac{1}{|B(a, r)|} \int_{B(a, r)} u(z) d\lambda(z)$$

(2) Let $\{u_k\}_{k \geq 1} \subseteq \text{PSH}(\Omega)$, assume $u_k \downarrow u$, then $u \in \text{PSH}(\Omega)$.

(cor: $u \in \text{PSH}(\Omega)$, then either $u \equiv -\infty$ or $u \in L^1_{\text{Loc}}(\Omega)$)

(3) Let $u \in \text{PSH}(\Omega) \cap L^1_{\text{Loc}}(\Omega)$, take $(\rho_\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$ a family of smoothing kernels, then

$$u * \rho_\varepsilon \in C^\infty(\Omega_\varepsilon) \cap \text{PSH}(\Omega_\varepsilon)$$

where $\Omega_\varepsilon := \{x \in \Omega \mid d(x, \partial\Omega) > \varepsilon\}$, and $u * \rho_\varepsilon \downarrow u$ as $\varepsilon \rightarrow 0^+$.

(4) Let $u_1, \dots, u_p \in \text{PSH}(\Omega)$, $x : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ be a convex function and increasing w.r.t. every variable, then $x(u_1, \dots, u_p) \in \text{PSH}(\Omega)$.

In particular, $\max\{u_1, \dots, u_p\}, \log(e^{u_1} + \dots + e^{u_p})$ are also in $\text{PSH}(\Omega)$.

(5) If $u \in C^2(\Omega)$, then $u \in \text{PSH}(\Omega) \iff \sqrt{-1} \partial \bar{\partial} u$ is a (strongly) positive $(1, 1)$ -form, i.e. Hessian

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial z_i \partial \bar{z}_j} \right) \geq 0$$

Use the formula

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(a + e^{i\theta} \xi) d\theta - u(a) = \frac{2}{\pi} \int_0^1 \frac{dt}{t} \int_{|\xi| < t} Hu(a + \zeta \xi)(\xi) d\lambda(\zeta)$$

where $Hu(z)(\xi) := \sum_{1 \leq i, j \leq n} \frac{\partial^2 u}{\partial z_i \partial \bar{z}_j}(z) \xi_i \bar{\xi}_j$.

证明. Exercise. Analysis. □

定理 7.3.20. (1) If $u \in \text{PSH}(\Omega) \cap L^1_{\text{Loc}}(\Omega)$, then the current $\sqrt{-1}\partial\bar{\partial}u \geq 0$.

(2) if f is a distribution on Ω and $\sqrt{-1}\partial\bar{\partial}f \geq 0$ in the sense of currents, then $\exists! u \in \text{PSH}(\Omega) \cap L^1_{\text{Loc}}(\Omega)$ s.t. f is the distribution associative to u .

证明. (1) $u \in \text{PSH}(\Omega) \cap L^1_{\text{Loc}}(\Omega) \Rightarrow \sqrt{-1}\partial\bar{\partial}u = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sqrt{-1}\partial\bar{\partial}(u * \rho_\varepsilon)$.

(2) Assume $\sqrt{-1}\partial\bar{\partial}f \geq 0$ as currents, then

$$\sqrt{-1}\partial\bar{\partial}(f * \rho_\varepsilon) = (\sqrt{-1}\partial\bar{\partial}f) * \rho_\varepsilon$$

so $f * \rho_\varepsilon \in C^\infty(\Omega_\varepsilon) \cap \text{PSH}(\Omega_\varepsilon)$. □

define:

$$u := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f * \rho_\varepsilon \in \text{PSH}(\Omega)$$

推论 7.3.21.

$$\text{PSH}(\Omega) \cap L^1_{\text{Loc}}(\Omega)$$

is a closed convex cone in $L^1_{\text{Loc}}(\Omega)$.

Every bounded set (in $L^1_{\text{Loc}}(\Omega)$) in $\text{PSH}(\Omega)$ is (relatively) compact.

Recall: $\Omega \in \mathbb{C}^n$ open set, $u \in \text{PSH}(\Omega)$ if u is u.s.c. and $u|_L$ is subharmonic $\iff \sqrt{-1}\text{d}'\text{d}''u$ is a positive $(1,1)$ -current on Ω .

Remark(check!): any d -closed $(1,1)$ current T on Ω can be written as $T = \sqrt{-1}\text{d}'\text{d}''\varphi$ locally.
 \Rightarrow if T is a d -closed positive $(1,1)$ -current on Ω , then locally $T = \sqrt{-1}\text{d}'\text{d}''u$ for some PSH-function u . This u is called **local potential** of T .

Now, X is a complex manifold, observation: $F : \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$ holomorphic map, then $F^*(\sqrt{-1}\text{d}'\text{d}''\varphi) = \sqrt{-1}\text{d}'\text{d}''(F^*\varphi)$.

定义 7.3.22. $u \in \text{PSH}(X)$, if:

(1) u is u.s.c.

(2) $u|_\Omega$ is PSH on every coordinate open set.

性质 7.3.23. $f : X \rightarrow Y$ is holomorphic map between two complex manifolds, $u \in \text{PSH}(Y)$, then $f^*u \in \text{PSH}(X)$.

证明. Easy. □

例子 7.3.24. (1) Let $f \in H^0(X, \mathcal{O}_X)$, then $\log |f| \in \text{PSH}(X)$.

证明. consider $f : X \rightarrow \mathbb{C}$, and $\log |f| = f^*(\log |z|)$, note that $\log |z| \in \text{PSH}(\mathbb{C})$ □

note that $\frac{\sqrt{-1}}{2\pi} d'd'' \log |z| = \delta_0$ is Dirac distribution.

例子 7.3.25. For any $f_1, f_2, \dots, f_k \in H^0(X, \mathcal{O}_X)$, then

$$\log(|f_1|^{\alpha_1} + \dots + |f_k|^{\alpha_k}) \in \text{PSH}(X)$$

for any $\alpha_j \geq 0, 1 \leq j \leq k$.

Skoda-El Mir extension theorem

Let X be a complex manifold

定义 7.3.26. $E \subseteq X$ is called pluripolar(多重极点) if X has an open covering (Ω) , we have $u \in \text{PSH}(\Omega) \cap L^1_{\text{Loc}}(\Omega)$ s.t.

$$E \cap \Omega = \left\{ z \in \Omega \mid u(z) = -\infty \right\}$$

if "=" holds, then E is called **complete** pluripolar set.

例子 7.3.27. If A is an analytic set, then A is complete pluripolar set.

Locally, $A \cap \Omega = \{f_1 = \dots = f_k = 0\}$ where $f_j \in \mathcal{O}(\Omega)$, it also $= U^{-1}(-\infty)$, where

$$u = \log(|f_1|^2 + \dots + |f_k|^2)$$

定理 7.3.28. (Skoda 1982; El mir 1984; Sibory 1985)

X be a complex manifold, $E \subseteq X$ be (closed) pluripolar set in X , T is a closed positive (p, p) -current on $X \setminus E$, s.t. T has locally finite mass (局部有限质量) near E . (i.e. \forall compact neighborhood Ω we have

$$\int_{\Omega \setminus E} T \wedge \omega^{n-p} < +\infty$$

)

Then, $1_{X \setminus E} T$ is also a closed positive (p, p) -current on X .

(this current is called: current obtained by extending T by 0 on E .)

证明. (1) Notice that : \mathbf{d} -closeness is a local property (check!)

(2) we need to verify $1_{\Omega \setminus E} T$ is \mathbf{d} -closed on every open set Ω s.t. $\Omega \cap 1 = \{z \in \Omega \mid v(z) = -\infty\}$

where $v \in \text{PSH}(\Omega) \cap L^1_{\text{loc}}(\Omega)$,

(3) We can assume $v \leq 0$ on Ω after shrinking Ω .

Let $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ smooth, convex, increasing. $g(t) \equiv 0$ if $t \leq 1$, and $g(0) = 1$.

define $v_k = g(k^{-1}v * \rho_{\varepsilon_k})$ where $\varepsilon_k \rightarrow 0$ fast.

(After shrinking Ω a little bit, $v_k \in \text{PSH}(\Omega) \cap C^\infty(\Omega)$)

Then, $0 \leq v_k \leq 1$, $v_k = 0$ in a neighborhood of $E \cap \Omega$. And $\lim_{k \rightarrow \infty} v_k(x) = 1$ for any $x \in \Omega \setminus E$.

Let $\theta \in C^\infty[0, 1]$ s.t. $\theta = 0$ on $[0, \frac{1}{3}]$, $\theta = 1$ on $[\frac{1}{3}, 1]$, and θ is smooth, increasing.

So, $\theta \circ v_k = 0$ near $E \cap \Omega$, and $\rightarrow 1$ on $\Omega \setminus E$. Moreover, $\theta \circ v_k \rightarrow 1_{\Omega \setminus E}$.

In particular, $\tilde{T} = 1_{\Omega \setminus E} T = \lim(k \rightarrow \infty)(\theta \circ v_k)T$ in the sense of currents w.r.t. weak topology.

Using the continuity of \mathbf{d} on currents,

$$\mathbf{d}\tilde{T} = \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{d}(\theta \circ v_k) \wedge T$$

Need to verify $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{d}(\theta \circ v_k) \wedge T = 0 \iff \lim_{k \rightarrow \infty} T \wedge \mathbf{d}'(\theta \circ v_k) = 0$.

First assume T is a current of bi-degree $(n-1, n-1)$: need to verify $\forall \alpha \in \mathcal{D}^{1,0}(\Omega)$ we have

$$\langle T \wedge \mathbf{d}'(\theta \circ v_k), \bar{\alpha} \rangle = \langle T, \theta'(v_k) \mathbf{d}'v_k \wedge \bar{\alpha} \rangle \rightarrow 0$$

Prop: (Linear algebra) For $\gamma \in \mathcal{D}^{1,0}(\Omega \setminus E)$,

$$\gamma \mapsto \langle T, \sqrt{-1}\gamma \wedge \bar{\gamma} \rangle$$

is a non-negative Hermitian form, so we have Cauchy-Schwarz inequality:

$$|\langle T, \sqrt{-1}\beta \wedge \bar{\gamma} \rangle|^2 \leq \langle T, \sqrt{-1}\beta \wedge \bar{\beta} \rangle + \langle T, \sqrt{-1}\gamma \wedge \bar{\gamma} \rangle$$

so we have

$$|\langle T, \theta'(v_k) \mathbf{d}'v_k \wedge \bar{\alpha} \rangle|^2 \leq \underbrace{\langle T, \theta'(v_k)^2 \alpha \wedge \bar{\alpha} \rangle}_{(1)} \underbrace{\langle T, \psi \mathbf{d}'v_k \wedge \mathbf{d}''v_k \rangle}_{(2)}$$

where $0 \leq \psi \leq 1$ s.t. $\text{supp } \psi \supseteq \text{supp } \alpha$, $\psi \equiv 1$ near $\text{supp } \alpha$.

(1) : T has locally finite mass near E , \Rightarrow

$$\int_{\Omega \setminus E} T \wedge \sqrt{-1}\alpha \wedge \bar{\alpha} < +\infty$$

note that $\theta'(v_k) \rightarrow 0$ on Ω , use Lebesgue dominated convergent theorem, (1) $\rightarrow 0$ as $k \rightarrow \infty$.

(2): use the formula:

$$\sqrt{-1}\mathbf{d}'\mathbf{d}''v_k^2 = 2v_k\sqrt{-1}\mathbf{d}'\mathbf{d}''v_k + 2\sqrt{-1}\mathbf{d}'v_k \wedge \mathbf{d}''v_k \geq 2\sqrt{-1}\mathbf{d}'v_k \wedge \mathbf{d}''v_k$$

so,

$$\begin{aligned} (2) \leq \langle T, \psi \sqrt{-1} d' d'' v_k^2 \rangle &= \langle T, v_k^2 \sqrt{-1} d' d'' \psi \rangle = \int_{\Omega \setminus E} v_k^2 T \wedge \sqrt{-1} d' d'' \psi \\ &\leq \int_{\Omega \setminus E} T \wedge \sqrt{-1} d' d'' \psi \leq C(\psi) \int_{\Omega \setminus E} T \wedge \omega < +\infty \end{aligned}$$

Conclusion: $d\tilde{T} = 0$.

General bidegree (p, p) : Take $\Gamma = \sqrt{-1} \gamma_1 \wedge \bar{\gamma}_1 \wedge \cdots \wedge \sqrt{-1} \gamma_{n-p-1} \wedge \bar{\gamma}_{n-p-1}$ where $\gamma_j \in \mathcal{D}^{1,0}(\Omega)$ with constant coefficients, then $T \wedge \Gamma$ is a current of bidegree $(n-1, n-1)$ with locally finite mass near E .

$$0 = d(1_{\Omega \setminus E}(T \wedge \Gamma)) = d(\tilde{T} \wedge \Gamma) = d\tilde{T} \wedge \Gamma$$

by first case, $\Rightarrow d\tilde{T} \wedge \Gamma = 0$ for any such Γ .

$$\Rightarrow \forall \Gamma \in \mathcal{D}^{n-p-1, n-p-1}(\Omega), d\tilde{T} \wedge \Gamma = 0, \text{ so } d\tilde{T} = 0. \quad \square$$

推论 7.3.29. *T is a d -closed positive current on X , $E \subseteq X$ (closed) complete pluripolar set, Then $1_{X \setminus E} T$ is a d -closed positive current.*

(Since $1_{X \setminus E}$ is the trivial extension of $T|_{X \setminus E}$) ($1_E T$ is a d -closed positive current) ($1_E T = T - 1_{X \setminus E} T$)

推论 7.3.30. *(Exercise)*

$A \subseteq X$ an analytic subset of X A is of pure dimension $\dim_{\mathbb{C}} = p$, then the current $[A]$ is a d -closed positive current of bidimension (p, p)

证明. (1) $[A_{\text{reg}}]$ is a closed positive current on $X \setminus A_{\text{sing}}$.

(2) $[A_{\text{reg}}]$ has locally finite mass near A_{sing} . (要用解析集局部参数化定理, 可怕) (Using the local parameterization theorem of analytic set)

$$(3) [A] \text{ is the trivial extension of } [A_{\text{reg}}], \text{ i.e. } [A] = 1_{X \setminus A_{\text{sing}}} [A_{\text{reg}}] \quad \square$$

Cor: if X is compact (over \mathbb{C}), then (cohomology of current)

$$\{[A]\} \in H^{p,p}(X, \mathbb{R})$$

术语索引

Čech 上同调, 56, 58

Kähler 流形, 91

acyclic 零调的, 54

analytic set 解析集, 19

Chern class 陈类, 69

Chern connection 陈联络, 74

coherent sheaf 凝聚层, 44

connection 联络, 63

curvature 曲率, 64

distinguished boundary 特征边界, 5

Dolbeault cohomology, 8

elliptic operator 椭圆算子, 80

fine sheaf, 53

flabby 松弛 (层), 51

flat connection 平坦联络, 88

formal adjoint 形式伴随, 81

germ 芽, 35

harmonic form 调和形式, 88

Hartogs figure, 12

Hermite 向量丛, 71

holomorphic function 全纯函数, 4

injective resolution 内射消解, 50

injective sheaf 内射层, 50

inverse image 逆像, 39

local ring 局部环, 17

locally free sheaf 局部自由层, 41

Noetherian ring 诺特环, 17

paracompact 仿紧, 53

polydisk 多圆柱, 5

presheaf 预层, 32

refinement (开) 加细, 53

resolution 消解, 50

section 截面, 32

sheaf space 层空间, 36

sheaf 层, 33

sheafification 层化, 36

skyscraper sheaf 摩天大厦层, 43

stalk 茎条, 35

Weierstrass 多项式, 13