复几何

曲豆豆 码字
南七技校福利社 五道口分社

2019 年 6 月 11 日

第 02 稿

图：中国科学技术大学西校区 -也西湖雪景
拍摄于 2015.1.28 - 11：30

本课程参考以下教材：

1. Demailly: Complex analytic and differential geometry.
2. Huybrechts: Complex geometry: an introduction.
3. Morrow, Kodaira: Complex manifolds.
4. Grauert, Remmert: Coherent analytic sheaves.
5. Hormander: An introduction to complex analysis in several variables.
6. Griffiths, Harris: Principles of algebraic geometry.

在五道口也要红专并进、理实交融呀 ∼

目录

第 1 章　多复变函数

1.1　多元全纯函数

首先快速回顾单复变函数的知识。我们通常用 Ω 来表示 $\mathbb{C}$ 的开子集，$z = x + iy$ 为 $\mathbb{C}$ 的坐标。对于 $z \in \mathbb{C}$ 以及实数 $R > 0$，我们令

$$\mathbb{D}(z, R) := \{w \in \mathbb{C} | \, |w - z| < R\}$$

为以 z 为圆心 R 为半径的开圆盘。

此外，我们有如下常用记号：

$$\begin{cases} \mathrm{d}z := \mathrm{d}x + i\mathrm{d}y \\ \mathrm{d}\bar{z} := \mathrm{d}x - i\mathrm{d}y \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{\partial}{\partial z} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right) \\ \frac{\partial}{\partial \bar{z}} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right) \end{cases}$$

对于函数 $f : \Omega \to \mathbb{C}$，称 f 是**全纯**（holomorphic）的，若在 Ω 中成立

$$\bar{\partial} f := \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \mathrm{d}\bar{z} = 0$$

我们知道，f 是全纯的当且仅当 f 在 Ω 处处能够局部地展开为收敛幂级数。

对于 $\mathbb{C}$ 中的紧致集 K，称函数 $f : K \to \mathbb{C}$ 是全纯的，如果存在 K 的开邻域 $\Omega \supseteq K$，使得 f 可延拓为 Ω 上的全纯函数。

单复变函数论中有如下重要结果：

定理 1.1.1. （柯西积分公式）设 $\mathbb{D} \subseteq \mathbb{C}$ 为 $\mathbb{C}$ 中的开圆盘，$f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ 为 $\mathbb{D}$ 上的全纯函数，且在 $\partial\mathbb{D}$ 连续，则对于任意 $w \in \mathbb{D}$，成立

$$f(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\mathbb{D}} \frac{f(z)}{z - w} \mathrm{d}z$$

此定理能推导出单变量全纯函数理论的“almost everything”. 这里不再赘述。

我们开始考虑多变量全纯函数。

定义 1.1.2. 设 $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$ 为 $\mathbb{C}^n$ 的开子集，函数 $f: \Omega \to \mathbb{C}$ 称为（多变量）**全纯函数**，如果满足以下条件：

（*1*）f 是连续函数；

（*2*）对任意 $1 \leq j \leq n$，以及任意固定的 $z_1, ..., z_{j-1}; z_{j+1}, ..., z_n \in \mathbb{C}$，关于 z_j 的单变量函数

$$z_j \mapsto f(z_1, ..., z_{j-1}; z_j; z_{j+1}, ..., z_n)$$

是（单变量）全纯函数。

事实上，如果该定义中的（2）成立，那么能推出（1）成立，也就是说此定义中的（1）可以去掉。其证明比较复杂，我们承认之。

记号 1.1.3. 对于 $\mathbb{C}^n$ 的开子集 Ω，我们记

$$\mathcal{O}(\Omega) := \{f: \Omega \to \mathbb{C} | f \text{是 } \Omega \text{ 上的全纯函数}\}$$

容易知道 $\mathcal{O}(\Omega)$ 有显然的 $\mathbb{C}$-代数结构。

本节将说明，多变量全纯函数具有一些与单变量全纯函数类似的性质。

记号 1.1.4. 对于 $z = (z_1, z_2, ..., z_n) \in \mathbb{C}^n$ 以及 $R = (R_1, R_2, ..., R_n) \in \mathbb{R}^n$，并且 $R_j > 0$ $(\forall 1 \leq j \leq n)$，则我们记

$$\mathbb{D}(z, R) := \mathbb{D}(z_1, R_1) \times \mathbb{D}(z_2, R_2) \times \cdots \times \mathbb{D}(z_n, R_n)$$

称为以 z 为中心，R 为半径的**多圆柱**（*polydisk*）。

对于多圆柱 $\mathbb{D}(z, R)$，我们记

$$\Gamma(z, R) := \partial\mathbb{D}(z_1, R_1) \times \partial\mathbb{D}(z_2, R_2) \times \cdots \times \partial\mathbb{D}(z_n, R_n)$$

称为 $\mathbb{D}(z, R)$ 的**特征边界**（*distinguished boundary*）。

特别注意特征边界 $\Gamma(z, R)$ 并不等于该多圆柱的边界 $\partial\mathbb{D}(z, R)$.

定理 1.1.5. （多变量全纯函数的柯西积分公式）

设 $f:\overline{\mathbb{D}(z,R)}\to\mathbb{C}$ 为全纯函数，则对任意的 $w\in\mathbb{D}(z,R)$，成立

$$f(w)=\frac{1}{(2\pi i)^n}\int_{\Gamma(z,R)}\frac{f(\xi)\mathrm{d}\xi_1\mathrm{d}\xi_2\cdots\mathrm{d}\xi_n}{(\xi_1-w_1)(\xi_2-w_2)\cdots(\xi_n-w_n)}$$

证明. 由多变量全纯函数的定义，反复使用单变量全纯函数的柯西积分公式即可。这是容易的。 □

与单复变函数完全类似，我们也有泰勒展开：

推论 1.1.6. （多元全纯函数的泰勒展开公式）

对于 $f\in\mathcal{O}(\Omega)$，其中 $\Omega\subseteq\mathbb{C}^n$ 为开子集，则对于任何多圆柱 $\mathbb{D}(z_0,R)$，如果 $\overline{\mathbb{D}(z_0,R)}\subseteq\Omega$，则对于任意 $w\in\mathbb{D}(z_0,R)$，成立

$$f(w)=\sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n}a_\alpha(w-z_0)^\alpha$$

其中

$$a_\alpha=\frac{1}{(2\pi i)^n}\int_{\Gamma(z_0,R)}\frac{f(z)}{(z-z_0)^{\alpha+1}}\mathrm{d}z_1\mathrm{d}z_2\cdots\mathrm{d}z_n=\frac{f^{(\alpha)}(z_0)}{\alpha!}$$

注意这里的 α 为多重指标，即 $\alpha=(\alpha_1,...,\alpha_n)$，其中每个 α_i 都为非负整数。我们记

$$\begin{aligned}
z^\alpha &:= z_1^{\alpha_1}z_2^{\alpha_2}\cdots z_n^{\alpha_n}\\
\alpha! &:= \alpha_1!\alpha_2!\cdots\alpha_n!\\
f^{(\alpha)} &:= (\partial_{z_1})^{\alpha_1}(\partial_{z_2})^{\alpha_2}\cdots(\partial_{z_n})^{\alpha_n}f\\
\alpha+1 &:= (\alpha_1+1,\alpha_2+1,...,\alpha_n+1)
\end{aligned}$$

其中 $z=(z_1,...,z_n)\in\mathbb{C}^n$，$f$ 为 n 元全纯函数。

证明. 与单复变函数的情形完全类似，可由柯西积分公式得到。 □

定理 1.1.7. （柯西不等式）对于 $\mathbb{C}^n$ 的开子集 Ω，若 $f\in\mathcal{O}(\Omega)$，多圆柱 $\overline{\mathbb{D}(z_0,R)}\subseteq\Omega$，则对任意多重指标 $\alpha\in\mathbb{N}^n$，成立

$$\left|f^{(\alpha)}(z_0)\right|\leq\frac{\alpha!}{R^\alpha}\sup_{z\in\Gamma(z_0,R)}|f(z)|$$

证明. 与单复变函数的情形完全类似。利用多元泰勒展开（推论1.1.6）即可。 □

推论 1.1.8. 设 $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$ 为**连通**开集，$f \in \mathcal{O}(\Omega)$ 满足 $\forall 1 \leq k \leq n$，$\frac{\partial f}{\partial z_k}$ 在 Ω 上恒为 0，则 f 在 Ω 上为常值函数。

推论 1.1.9. （刘维尔定理）设 $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^n)$，并且满足

$$|f(z)| \leq A(1+|z|)^B$$

其中 A, B 为正实数，那么 f 必为次数不超过 B 的多项式函数。

这些性质于单变量全纯函数雷同，证明也是类似的。

推论 1.1.10. （*Montel* 定理）

设 Ω 为 $\mathbb{C}^n$ 的开子集，则 $\mathcal{O}(\Omega)$ 中的任何局部一致有界的全纯函数列都存在一致收敛的子列。

证明. 仍类似于单复变全纯函数的情形。使用柯西积分公式，再配合 Arzela-Ascoli 定理即可。从略。 □

现在，简单介绍一些复的微分形式。对于 $\mathbb{C}^n$，记其复坐标为 $(z_1, z_2, ..., z_n)$；视 $\mathbb{C}^n$ 为 $2n$ 维实线性空间，

$$z_k = x_k + iy_k$$

从而引入

$$\begin{aligned} \mathrm{d}z_k &= \mathrm{d}x_k + i\mathrm{d}y_k \qquad (1,0)\text{形式} \\ \mathrm{d}\bar{z}_k &= \mathrm{d}x_k - i\mathrm{d}y_k \qquad (0,1)\text{形式} \end{aligned}$$

定义 1.1.11. （(p,q)-形式）

设 Ω 为 $\mathbb{C}^n$ 的非空开集，则形如

$$u(z) = \sum_{\substack{|I|=p \\ |J|=q}} a_{IJ}(z)\mathrm{d}z_I \wedge \mathrm{d}\bar{z}_J$$

的光滑张量场称为 (p,q)-形式。记 Ω 上的 (p,q)-形式之全体为 $C^\infty_{p,q}(\Omega)$.

这里的 I, J 为多重指标。“光滑”指的是系数函数 a_{IJ} 为 Ω 上的光滑复值函数。另外，显然 $(0,0)$-形式即为光滑函数；$C^\infty_{p,q}(\Omega)$ 具有显然的复线性空间结构，事实上还是 $C^\infty(\Omega)$-模。

记号 1.1.12. （$\overline{\partial}$-算子）定义算子

$$\overline{\partial} : C^\infty_{p,q}(\Omega) \to C^\infty_{p,q+1}(\Omega)$$

如下: 对于 (p,q)-形式

$$u := \sum_{\substack{|I|=p \\ |J|=q}} a_{IJ} \mathrm{d}z_I \wedge \mathrm{d}\overline{z}_J$$

则

$$\overline{\partial} u = \sum_{\substack{|I|=p \\ |J|=q}} \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial a_{IJ}}{\partial \overline{z}_k} \mathrm{d}\overline{z}_k \wedge \mathrm{d}z_I \wedge \mathrm{d}\overline{z}_J$$

类似地，也有

$$\partial : C^\infty_{p,q}(\Omega) \to C^\infty_{p+1,q}(\Omega)$$

它们与外微分算子 d 满足关系

$$\mathrm{d} = \partial + \overline{\partial}$$

由 $\mathrm{d}^2 = 0$，易知

$$\partial^2 = 0, \quad \overline{\partial}^2 = 0, \quad \partial\overline{\partial} + \overline{\partial}\partial = 0$$

以下事实显然成立：

引理 1.1.13. 对于区域 Ω 上的光滑函数 $f \in C^\infty(\Omega)$，则 f 全纯当且仅当 $\overline{\partial} f = 0$.

注记 1.1.14. （*Dolbeault* 上同调）对于 $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$，注意 $\overline{\partial}^2 = 0$，从而对任意 $p \geq 0$，有上链复形 $C^\infty_{p,\bullet}(\Omega)$：

$$\cdots \to C^\infty_{p,q-1}(\Omega) \xrightarrow{\overline{\partial}} C^\infty_{p,q}(\Omega) \xrightarrow{\overline{\partial}} C^\infty_{p,q+1}(\Omega) \to \cdots$$

称上同调群

$$H^{p,q}(\Omega) := H^q(C^\infty_{p,\bullet}(\Omega), \overline{\partial})$$

为区域 Ω 的 ***Dolbeault* 上同调群**。

类似于外微分 d 的 de-Rham 上同调群，Dolbeault 上同调群与 Ω 的拓扑联系密切。例如，以下定理十分重要，我们先陈述，以后再证明：

引理 1.1.15. *(Dolbeault-Grothendieck 引理)*

设 $\mathbb{D} \subseteq \mathbb{C}^n$ 为多圆柱，则对于任意 $p, q \geq 0$，

$$H^{p,q}(\mathbb{D}) = 0$$

不难发现它与 de Rham 上同调的 Poincare 引理有些类似。

1.2 解析延拓与 Hartogs 现象

上一节介绍了多复变函数的一些“普通的”（与单变量类似）性质，本节开始介绍多复变函数的一些独特性质。

引理 1.2.1. 设 $f \in C_c^\infty(\mathbb{C})$ 为复平面上的紧支光滑函数，则对任意 $z \in \mathbb{C}$，成立

$$\frac{1}{2\pi i} \iint_{\mathbb{C}} \frac{\partial f / \partial \overline{\tau}}{\tau - z} \mathrm{d}\tau \wedge \mathrm{d}\overline{\tau} = f(z)$$

证明. 基本的微积分练习。考虑换元 $\tau = z + re^{i\theta}$，则易知

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\tau \wedge \mathrm{d}\overline{\tau} &= -2ir\mathrm{d}r \wedge \mathrm{d}\theta \\ \frac{\partial r}{\partial \overline{\tau}} &= \frac{1}{2} e^{i\theta} \\ \frac{\partial \theta}{\partial \overline{\tau}} &= -\frac{1}{2ir} e^{i\theta} \end{aligned}$$

因此有

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \iint_{\mathbb{C}} \frac{\partial f / \partial \overline{\tau}}{\tau - z} \mathrm{d}\tau \wedge \mathrm{d}\overline{\tau} &= \frac{-1}{2\pi} \int_0^\infty \mathrm{d}r \int_0^{2\pi} \left(-\frac{1}{ir} \frac{\partial f}{\partial \theta}(z + re^{i\theta}) \right) \mathrm{d}\theta \\ &\quad + \frac{-1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^\infty \left(\frac{\partial f}{\partial r}(z + re^{i\theta}) \right) \mathrm{d}r \\ &= 0 + \frac{-1}{2\pi} \int_0^{2\pi} -f(z) \mathrm{d}\theta \\ &= f(z) \end{aligned}$$

证毕。 □

引理 1.2.2. （简单版本的 $\overline{\partial}$-引理）

设 $n \geq 2$，$\varphi \in C^{\infty}_{0,1}(\mathbb{C}^n)$ 为具有紧支集的光滑 $(0,1)$-形式，且 $\overline{\partial}\varphi = 0$，则存在 $\mathbb{C}^n$ 上的紧支光滑函数 g，使得

$$\overline{\partial} g = \varphi$$

证明. 记光滑 $(0,1)$-形式 φ 为

$$\varphi = \sum_{k=1}^{n} \varphi_k(z_1, ..., z_n) \mathrm{d}\overline{z}_k$$

则

$$\overline{\partial}\varphi = \sum_{k,l} \frac{\partial \varphi_k}{\partial \overline{z}_l} \mathrm{d}\overline{z}_l \wedge \mathrm{d}\overline{z}_k = \sum_{1 \leq l < k \leq n} \left(\frac{\partial \varphi_k}{\partial \overline{z}_l} - \frac{\partial \varphi_l}{\partial \overline{z}_k} \right) \mathrm{d}\overline{z}_l \wedge \mathrm{d}\overline{z}_k$$

从而由 $\overline{\partial}\varphi = 0$ 可得对任意 $k \neq l$，

$$\frac{\partial \varphi_k}{\partial \overline{z}_l} = \frac{\partial \varphi_l}{\partial \overline{z}_k}$$

考虑如下的 $\mathbb{C}^n$ 上的函数 ψ：对于 $z = (z_1, ..., z_n) \in \mathbb{C}^n$，

$$\psi(z) := \frac{1}{2\pi i} \iint_{\mathbb{C}} \frac{\varphi_1(\tau; z_2, ..., z_n)}{\tau - z_1} \mathrm{d}\tau \wedge \mathrm{d}\overline{\tau}$$

由 φ_1 的紧支性易知 ψ 为 $\mathbb{C}^n$ 上的光滑函数。对于 $1 < k \leq n$，有

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi(z)}{\partial \overline{z}_k} &= \frac{1}{2\pi i} \iint_{\mathbb{C}} \frac{\frac{\partial \varphi_1}{\partial \overline{z}_k}(\tau; z_2, ..., z_n)}{\tau - z_1} \mathrm{d}\tau \wedge \mathrm{d}\overline{\tau} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \iint_{\mathbb{C}} \frac{\frac{\partial \varphi_k}{\partial \overline{\tau}}(\tau; z_2, ..., z_n)}{\tau - z_1} \mathrm{d}\tau \wedge \mathrm{d}\overline{\tau} \\ &= \varphi_k(z) \end{aligned}$$

上式对 $k = 1$ 显然也成立。因此 $\overline{\partial}\psi = \varphi$.

最后还需要证明 ψ 是紧支的。由于 φ 紧支，存在足够大的 $R > 0$，使得

$$\operatorname{supp} \varphi \subseteq \mathbb{D}(0, R)$$

因此任意取定 $z \in \mathbb{C}^n$，使得 z 的分量 $z_2, z_3, ..., z_n$ 之中至少有一个模长大于 R，则由 ψ 的定义式直接得到 $\psi(z) = 0$. (注意：这一步严重依赖 $n \geq 2$！) 也就是说，存在 $z \notin \mathbb{D}(0, R)$ 使得 $\psi = 0$ 在 z 的某邻域内都成立。另一方面，由于 $\overline{\partial}\psi = \varphi$ 且 $\operatorname{supp} \varphi \subseteq \mathbb{D}(0, R)$，从而 ψ 在 $\mathbb{D}(0, \mathbb{R})$ 外部全纯，因此由解析延拓唯一性，ψ 在 $\mathbb{D}(0, R)$ 外部恒为零，因此 ψ 紧支。 □

此引理在单复变 $n = 1$ 的情形**不成立**：

例子 1.2.3. 设 $\varphi_1 \in C_0^\infty(\mathbb{C})$ 为复平面上的紧支光滑函数，并且

$$\iint_{\mathbb{C}} \varphi_1(z) \neq 0$$

考虑 $\mathbb{C}$ 上的 $(0,1)$-形式 $\varphi = \varphi_1(z)\mathrm{d}\bar{z}$，则 $\bar{\partial}\varphi = 0$ 是平凡的，但**不存在**紧支光滑函数 ψ 使得 $\bar{\partial}\psi = \varphi$.

证明. 若存在紧支光滑函数 ψ 使得 $\bar{\partial}\psi = \varphi$，则 $\frac{\partial\psi}{\partial\bar{z}} = \varphi_1$. 于是

$$0 \neq \iint_{\mathbb{C}} \varphi_1(z)\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}\bar{z} = \iint_{\mathbb{C}} \frac{\partial\psi}{\partial\bar{z}}\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}\bar{z} = 0$$

产生矛盾。 □

以下是多复变函数解析延拓的令人惊讶的性质，它与单复变函数有本质不同：

定理 1.2.4. （*Hartogs* 现象）

设 $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$ 为开集 $(n \geq 2)$，$K \subset\subset \Omega$ 且为 $\mathbb{C}^n$ 的紧子集，则对任意的 $f \in \mathcal{O}(\Omega \setminus K)$，都存在解析延拓 $F \in \mathcal{O}(\Omega)$，使得

$$F|_{\Omega \setminus K} = f$$

证明. 取 K 与 Ω 直接的截断函数 $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{C}^n)$，使得 $0 \leq \psi \leq 1$，

$$K \subset\subset \operatorname{supp}\psi \subset\subset \Omega$$

并且 $\psi|_K \equiv 1$. 考虑

$$\widetilde{f} := (1-\psi)f$$

则 $\widetilde{f}$ 在整个 Ω 上都有定义。注意

$$\bar{\partial}\widetilde{f} = -(\bar{\partial}\psi)f + (1-\psi)\bar{\partial}f$$

易知 $\operatorname{supp}\bar{\partial}\widetilde{f} \subseteq \operatorname{supp}\psi$. 于是由引理1.2.2，存在光滑函数 v，使得 $\operatorname{supp} v \subseteq \psi$，并且 $\bar{\partial}v = \bar{\partial}\widetilde{f}$，从而考虑函数

$$F := (1-\psi)f - v$$

则 $\bar{\partial}F = 0$，从而 $F \in \mathcal{O}(\Omega)$. 又因为易知

$$F = f \quad (\forall z \in \Omega \setminus \operatorname{supp}\psi)$$

从而由解析延拓唯一性，有 $F_{\Omega \setminus K} = f$. □

关于解析延拓，再介绍如下结果：

引理 1.2.5. （*Hartogs figure*）

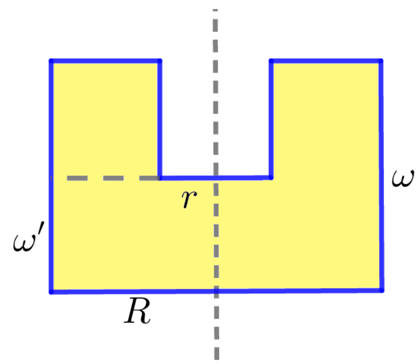
对于 $n > 1$，正实数 $0 \le r < R$，以及 $\mathbb{C}^{n-1}$ 的开子集 $\omega' \subseteq \omega$，其中 ω 是连通的。记 $\mathbb{C}^n$ 的开子集

$$\Omega := ((\mathbb{D}(0,R) \setminus \mathbb{D}(0,r)) \times \omega) \cup \left(\mathbb{D}(0,R) \times \omega'\right)$$

其中 $\mathbb{D}(0,r)$ 与 $\mathbb{D}(0,R)$ 分别为 $\mathbb{C}$ 上的以原点为中心，r, R 为半径的开圆盘。则任意 $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ 都可以（唯一地）解析延拓至

$$\widetilde{\Omega} := \mathbb{D}(0,R) \times \omega$$

如此的区域 Ω 称之为“**Hartogs figure**”。Ω 的几何图像大致如下：



图：Hartogs figure 示意

证明. 容易知道

$$\Omega = \left\{(z_1, \widetilde{z}) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^{n-1} \middle| r < |z_1| < R, \widetilde{z} \in \omega \text{或者} |z_1| \le r, \widetilde{z} \in \omega'\right\}$$

对于 $f \in \mathcal{O}(\Omega)$，定义 $\widetilde{\Omega}$ 上的函数

$$\widetilde{f}(z_1, \widetilde{z}) := \frac{1}{2\pi i} \int_{|w|=\rho} \frac{f(w, \widetilde{z})}{z_1 - w} \mathrm{d}w$$

其中 ρ 为满足 $\max\{r, |z_1|\} < \rho < R$ 的任意实数。则易知如此定义的 $\widetilde{f}$ 为 f 在 $\widetilde{\Omega}$ 上的解析延拓。 □

定理 1.2.6. （*Riemann* 延拓定理）

考虑 $\mathbb{C}^n$ 中的多圆柱 $\mathbb{D}(0,R)$，其中 $n \ge 2$，$R \in \mathbb{R}_+^n$。对任意 $2 \le p \le n$，令 $\mathbb{C}^n$ 的子集

$$S := (z_1, ..., z_n) \in \mathbb{C}^n | z_1 = \cdots = z_p = 0$$

则对任意 $f \in \mathcal{O}(\mathbb{D}(0,R) \setminus S)$，$f$ 都可（唯一地）解析延拓至 $\mathbb{D}(0,R)$.

证明. 这是 Hartogs figure 的显然推论。记 $R=(R_1,R_2,...,R_n)$，以及 $R':=(R_2,...,R_n)\in\mathbb{R}^{n-1}$. 考虑 $\mathbb{C}^{n-1}$ 的开子集

$$\begin{aligned}\omega &:= \mathbb{D}(0,R')\\ \omega' &:= \omega\setminus\{z_2=\cdots=z_p=0\}\end{aligned}$$

则易知

$$\mathbb{D}(0,R)\setminus S=\Big(\mathbb{D}(0,R_1)\setminus\{0\}\times\omega\Big)\cup\Big(\mathbb{D}(0,R_1)\times\omega'\Big)$$

为 Hartogs figure，从而完。 □

1.3 Weierstrass 预备定理与除法定理

回顾单复变函数，若 f 在 $0\in\mathbb{C}$ 附近全纯，且 $f(0)=0$，则在 0 附近 f 可以唯一地分解为 $f=z^d g(z)$，其中 g 全纯且 $g(0)\neq 0$，d 为 f 在 0 处的**零点阶数**。

现在，设 $f=f(z,w)$ 在 $0\in\mathbb{C}^n(n\geq 2)$ 附近全纯，其中 $z\in\mathbb{C}$，$w\in\mathbb{C}^{n-1}$. 固定 w，记

$$f_w(z):=f(z,w)$$

为关于 z 的单复变函数。如果 $f_0(0)=0$ 且 $f_0(z)$ 不恒为零，则 $f_0(z)=z^d g_0(z)$。我们的一个结果是，若"f_0"的下标"0"稍微"扰动"一下，则相应的多项式 z^k 也"随之扰动"。

记号 1.3.1. （*Weierstrass 多项式*）

对于 $(z_0,w_0)\in\mathbb{C}\times\mathbb{C}^{n-1}$，则 (z_0,w_0) 处的 ***Weierstrass* 多项式** 是指形如下述的定义于 (z_0,w_0) 附近的 n 元全纯函数：

$$P(z,w)=z^k+a_1(w)z^{k-1}+\cdots+a_k(w)$$

其中 $a_i(1\leq i\leq k)$ 为定义在 $w_0\in\mathbb{C}^{n-1}$ 附近的全纯函数，且 $a_i(w_0)=0$.

关于多元全纯函数在其零点附近的行为，首先有如下：

定理 1.3.2. *(Weierstrass 预备定理)*

设 $f(z,w)$ 为定义在 $(0,0)\in\mathbb{C}\times\mathbb{C}^{n-1}$ 附近的全纯函数，$f(0,0)=0$，且 $f_w(z)$ 在 $z=0$ 附近不恒为零，则存在唯一的 $(0,0)$ 处的 *Weierstrass* 多项式 $P(z,w)$，使得

$$f(z,w)=P(z,w)h(z,w)$$

其中 $h(z,w)$ 在 $(0,0)$ 附近全纯，且 $h(0,0)\neq 0$.

证明. 分若干步。

Step1 设 $f_0(z)$ 在 $z=0\in\mathbb{C}$ 处的零点阶数为 $d\geq 1$, 取足够小的 $\varepsilon>0$ 使得 $f_0(z)$ 在 $|z|\leq\varepsilon$ 之中不再有 $z=0$ 之外的零点。再由 f 的连续性以及 $\{|z|=\varepsilon\}\subseteq\mathbb{C}$ 的紧性，存在足够小的 $\varepsilon'>0$，使得对任意 $|z|=\varepsilon,|w|<\varepsilon'$，$f_w(z)\neq 0$.

对于 $w\in\mathbb{C}^{n-1}$ 且 $|w|<\varepsilon'$，由辐角原理，$f_w(z)$ 在 $|z|<\varepsilon$ 内的零点个数（记重数）为

$$d(w)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=\varepsilon}\frac{f_w'(\xi)}{f_w(\xi)}\mathrm{d}\xi$$

这是关于 w 的连续函数，且 $d(0)=d$. 从而不妨缩小 ε'，使得任意 $|w|<\varepsilon'$，$f_w(z)$ 在 $|z|<\varepsilon$ 内的零点个数（计重数）均为 d.

Step2 对于 $w\in\mathbb{C}^{n-1}$ 且 $|w|<\varepsilon'$，记 $f_w(z)$ 的 d 个零点为 $s_1(w),s_2(w),...,s_d(w)$，它们允许相同，则 $|s_j(w)|<\varepsilon$（注意 $s_j(w)$ 未必为关于 w 的全纯函数）。特别地 $s_1(0)=s_2(0)=\cdots=s_d(0)=0$. 考虑多项式

$$\begin{aligned}P(z,w) &:= \prod_{j=1}^{d}(z-s_j(w))\\ &= z^d+\sum_{j=1}^{d}a_j(w)z^{d-j}\end{aligned}$$

显然系数 $a_j(w)$ 满足 $a_j(0)=0$. 断言 $P(z,w)$ 为 Weierstrass 多项式。为此只需证明 $z_j(w)$ 关于 w 全纯。由代数学可知，系数 a_j 可以写为形如 $s_1^k(w)+s_2^k(w)+\cdots s_d^k(w)\,(k\geq 0)$ 的 $\mathbb{C}$-线性组合；而由留数定理易知

$$\sum_{j=1}^{d}s_j^k(w)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\xi|=\varepsilon}\xi^k\frac{f_w'(\xi)}{f_w(\xi)}\mathrm{d}\xi$$

从而关于 w 全纯。这就说明了 $P(z,w)$ 的系数函数 $a_j(w)$ 关于 w 全纯。

Step3 令 $h(z,w):=\frac{f(z,w)}{P(z,w)}$，断言 h 在 $(0,0)$ 附近全纯，又因为显然 $h(0,0)\neq 0$，从而 Weierstrass 预备定理的存在性得证。由单复变易知 $h(z,w)$ 关于 z 全纯，于是只需证明 h 关于 w 全纯。

任取 $w\in\mathbb{C}^{n-1}$ 且 $|w|<\varepsilon'$，由于 $h_w(z):=h(z,w)$ 关于 z 全纯，从而

$$h(z,w)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\xi|=\varepsilon}\frac{h_w(\xi)}{\xi-z}\mathrm{d}\xi$$

而被积函数 $(\xi,w)\mapsto\frac{h_w(\xi)}{\xi-z}$ 在 $\{(z,w)||z|=\varepsilon,|w|<\varepsilon'\}$ 的某个邻域全纯，从而 $h(z,w)$ 关于 w 也全纯。存在性证毕。

Step4 唯一性几乎显然，因为 f（在 $(0,0)$ 附近）的零点完全由 Weierstrass 多项式贡献：对于 w，以 $s_1(w),...,s_d(w)$ 为零点的关于 z 的首一多项式只能是 $P(z,w)$. □

定理 1.3.3. （*Weierstrass* 除法定理）

设 $f(z,w)$ 为定义在 $(0,0)\in\mathbb{C}\times\mathbb{C}^{n-1}$ 附近的全纯函数，$g(z,w)=z^d+\sum\limits_{j=1}^{d}a_j(w)z^{d-j}$ 为次数为 d 的 *Weierstrass* 多项式。那么存在唯一的 $h(z,w)$ 与 $r(z,w)$，其中 h 为定义在 $(0,0)\in\mathbb{C}\times\mathbb{C}^{n-1}$ 附近的全纯函数，r 为关于 z 的在 $(0,0)$ 处的次数 $<d$ 的多项式，使得

$$f=gh+r$$

在 $(0,0)$ 附近成立。

证明. 先看唯一性。

Step1 唯一性是容易的。如果 $f=gh_1+r_1=gh_2+r_2$，则

$$r_1-r_2=g(h_2-h_1)$$

注意 g,r_1,r_2 为 Weierstrass 多项式，从而由之前讨论，存在足够小的 $\varepsilon,\varepsilon'>0$ 使得对任意 $w\in\mathbb{C}^{n-1}$ 且 $|w|<\varepsilon'$，$g_w(z)$ 在 $\{|z|<\varepsilon\}$ 内的零点个数（计重数）恰为 g 的次数 d，并且 $(r_1-r_2)_w(z)$ 在此范围内的零点个数（计重数）恰为 (r_1-r_2) 的次数。注意 r_1,r_2 的次数均小于 d，从而若 $r_1\neq r_2$，则导致 $(r_1-r_2)_w(z)$ 的零点个数小于 $g_w(z)(h_2-h_1)_w(z)$，因此导致矛盾。这迫使 $r_1=r_2$.

Step2 再看存在性。取 $\varepsilon,\varepsilon'>0$ 使得对任意 $|z|=\varepsilon$，$|w|\leq\varepsilon'$，$g_w(z)\neq 0$。对任意 $|z|<\varepsilon,|w|<\varepsilon'$，定义

$$h(z,w)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\xi|=\varepsilon}\frac{f_w(\xi)}{g_w(\xi)(\xi-z)}\mathrm{d}\xi$$

则易知 $h(z,w)$ 在 $(0,0)$ 附近全纯。再令 $r:=f-gh$，只需证明 r 为关于 z 的次数小于 d 的 Weierstrass 多项式即可。事实上，

$$\begin{aligned}
r(z,w) &= f(z,w)-g(z,w)h(z,w)\\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_{|\xi|=\varepsilon}\frac{f_w(\xi)}{\xi-z}\mathrm{d}\xi-\frac{g_w(z)}{2\pi i}\int_{|\xi|=\varepsilon}\frac{f_w(\xi)}{g_w(\xi)(\xi-z)}\mathrm{d}\xi\\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_{|\xi|=\varepsilon}\frac{f_w(\xi)(g_w(\xi)-g_w(z))}{g_w(\xi)(\xi-z)}\mathrm{d}\xi\\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_{|\xi|=\varepsilon}\frac{f_w(\xi)}{g_w(\xi)}\frac{(\xi^d-z^d)+a_1(w)(\xi^{d-1}-z^{d-1})+\cdots}{\xi-z}\mathrm{d}\xi\\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_{|\xi|=\varepsilon}\frac{f_w(\xi)}{g_w(\xi)}\left(z^{d-1}+\beta_1(\xi,w)z^{d-2}+\cdots\right)\mathrm{d}\xi
\end{aligned}$$

其中函数 $\beta_j(\xi,w)$ 由 g 的系数函数 $a_k(w)$ 决定。容易看出 $r(z,w)$ 的确为关于 z 的次数 $\leq d-1$ 的多项式。存在性证毕。 □

注意 r 未必是 Weierstrass 多项式，因为 $r(z,w)$ 的 z^{d-1} 的系数

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=\varepsilon}\frac{f_w(\zeta)}{g_w(\zeta)}\mathrm{d}\zeta$$

不见得是 1（若此积分为 0，则 r 的首项系数甚至可以是关于 w 的函数）。

注记 1.3.4. 事实上，*Weierstrass* 除法定理对单复变 $n=1$ 的情形也成立。设 $f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}a_kz^k$ 在 $0\in\mathbb{C}$ 附近全纯，$g(z)=z^d$ 为次数为 d 的 *Weierstrass* 多项式。则令

$$\begin{aligned} h(z) &= \sum_{k=d}^{\infty}a_kz^{k-d} \\ r(z) &= \sum_{k=0}^{d-1}a_kz^k \end{aligned}$$

则 $f=gh+r$ 满足要求。

1.4 解析函数芽环 $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n,z}$ 及其代数结构

本节继续研究多元解析函数的性质。首先回顾函数芽的概念。

定义 1.4.1. （解析函数芽环）

对于 $z\in\mathbb{C}^n$，记

$$\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n,z}:=\{(U,f)|U \text{ 是 } z \text{ 在 } \mathbb{C}^n \text{ 的一个开邻域，} f \text{ 为定义在 } U \text{ 上的全纯函数}\}/\sim$$

其中模掉的关系 $\sim$ 为

$$(U,f)\sim(V,g) \quad\Longleftrightarrow\quad \text{存在 } z \text{ 的开邻域 } W\text{，使得 } W\subseteq U\cap V\text{，且 } f|_W=g|_W$$

粗俗地说，$\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n,z}$ 就是“定义在 $z\in\mathbb{C}^n$ 附近的全纯函数之全体”。之前介绍的 Weierstrass 预备定理、Weierstrass 除法定理其实都是解析函数芽环的性质。容易验证，$\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n,z}$ 在通常的函数加法、乘法下构成**环**。

我们记 $\mathcal{O}_n:=\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n,0}$. 本节介绍环 $\mathcal{O}_n$ 的代数性质。假定读者熟悉基础的交换代数。本讲义中的“环”默认为含幺、交换的。

定理 1.4.2. $\mathcal{O}_n$ 是局部诺特环（$\forall n\geq 1$）。

回顾：环 A 称为**局部环**（local ring），若 A 存在唯一极大理想 $\mathfrak{m}$（等价定义：A 的全体不可逆元构成 A 的理想）；环 A 称为**诺特环**（Noetherian ring），若满足理想升链条件（等价定义：A 的每个理想都是有限生成的）。

证明. 显然 $\mathcal{O}_n$ 为局部环，其极大理想 $\mathfrak{m}$ 由定义在 0 附近、在 0 处取值为 0 的函数芽构成。我们对 n 归纳证明 $\mathcal{O}_n$ 为诺特环。

$n=1$ 时，在单复变中我们早已熟知 $\mathcal{O}_1 \cong \{$收敛半径 ≥ 0 的幂级数$\}$ 为主理想整环（PID），其理想形如 $J_k=(z^k)$。特别地，为诺特环。

一般地，对于 $n\geq 2$，若 $\mathcal{O}_{n-1}$ 为诺特环，则对 $\mathcal{O}_n$ 的任意非零理想 J，断言 J 时有限生成的。任取 $0\neq h\in J\subseteq \mathfrak{m}$，则 $h(0)=0$，不妨 $h(z,0)$ 不恒为零（其中 $z\in\mathbb{C}, 0\in\mathbb{C}^{n-1}$），则由 Weierstrass 预备定理，存在 Weierstrass 多项式 $P(z,w)\in\mathcal{O}_{n-1}[z]\subseteq\mathcal{O}_n$ 以及函数芽 $h'\in\mathcal{O}_n\setminus\mathfrak{m}$，使得 $h(z,w)=P(z,w)h'(z,w)$. 注意 $h'(0,0)$ 为 $\mathcal{O}_n$ 的可逆元，又 $h\in J$ 且 J 为 $\mathcal{O}_n$ 的理想，从而 $P(z,w)\in J$.

这说明 J 当中必存在 Weierstrass 多项式。取定

$$P(z,w)=z^d+\sum_{j=1}^{d}a_j(w)z^{d-j}\in J$$

则对任意 $f\in J$，对 f,P 使用 Weierstrass 除法定理，存在 $g(z,w)\in\mathcal{O}_n$，以及

$$r(z,w)=\sum_{k=0}^{d-1}c_k(w)z^k\in\mathcal{O}_{\mathbb{C}^{n-1}}[z]$$

为次数至多为 $(d-1)$ 的多项式，使得

$$f=gP+r$$

则 $r(z,w)\in J$，并且容易验证，这诱导了 $\mathcal{O}_{n-1}$-模同态

$$\begin{aligned}\varphi: J &\to \mathcal{O}_{n-1}^{\oplus d}\cong\{r\in\mathcal{O}_{n-1}[z]\,|\,\deg_z r<d\}\\ f &\mapsto \sum_{k=0}^{d-1}c_k(w)z^k\end{aligned}$$

由归纳假设，$\mathcal{O}_{n-1}$ 为诺特环，从而 $\mathcal{O}_{n-1}^{\oplus d}$ 作为有限生成 $\mathcal{O}_{n-1}$-模为诺特模，从而其子模 $\operatorname{Im}\varphi$ 也为有限生成的。注意 $\operatorname{Im}\varphi\subseteq J$，记 $\{\beta_1,\ldots,\beta_N\}\subseteq\operatorname{Im}\varphi$ 为 $\operatorname{Im}\varphi$ 的一组 $\mathcal{O}_{n-1}$-生成元，其中

$$\beta_j(w)=\sum_{l=0}^{d-1}\beta_{j,l}(w)z^l\in\mathcal{O}_{n-1}^{\oplus d}$$

则易知

$$\{\beta_j\}_{1\leq j\leq N}\cup\{P(z,w)\}$$

为理想 J 的一组生成元，因此 J 是有限生成的。从而 $\mathcal{O}_n$ 为诺特环。 □

引理 1.4.3. *设 $P, Q \in \mathcal{O}_{n-1}[z] \subseteq \mathcal{O}_n$，其中 P 为 Weierstrass 多项式，则 P 整除 Q 在 $\mathcal{O}_n$ 成立，当且仅当 P 整除 Q 在 $\mathcal{O}_{n-1}[z]$ 中成立。*

证明. “当”是显然的，只证“仅当”。若 $P|Q$ 在 $\mathcal{O}_n$ 中成立，则令

$$Q(z,w) = f(z,w)P(z,w)$$

其中 $f \in \mathcal{O}_n$. 另一方面，考虑 $\mathcal{O}_{n-1}[z]$ 中标准的欧几里得带余除法，

$$Q(z,w) = g(z,w)P(z,w) + r(z,w)$$

其中 $g, r \in \mathcal{O}_{n-1}[z]$. 则 Weierstrass 除法定理的唯一性迫使 $f = g, r = 0$，从而得证。 □

引理 1.4.4. *设 $P(z,w) \in \mathcal{O}_{n-1}[z]$ 为 Weierstrass 多项式，则：*

（1）若在 $\mathcal{O}_{n-1}[z]$ 中有分解

$$P = P_1 P_2 \cdots P_N$$

则在相差 $\mathcal{O}_{n-1}$ 中的可逆元的意义下，每个 P_j 都为 Weierstrass 多项式；

（2）P 为 $\mathcal{O}_n$ 中的不可约元当且仅当 P 为 $\mathcal{O}_{n-1}[z]$ 中的不可约元。

证明.

（1） 记 $\deg_z P = s$，以及 $\deg_z P_j = s_j$，则 $s = \sum_{j=1}^{N} s_j$. 不妨每个 $s_j > 0$. 考虑 P 的最高次项，有

$$z^s = z^s \prod_{j=1}^{N} \left(P_j \text{ 的 } z^{s_j} \text{ 系数}\right)$$

从而相差 $\mathcal{O}_{n-1}$ 中某个可逆元倍，不妨每个 P_j 的 z^{s_j} 系数都为 1. 再注意

$$z^s = P(0,z) = \prod_{j=1}^{N} P_j(0,z) = \prod_{j=1}^{N} (z^{s_j} + \cdots)$$

从而迫使 $P_j(0,z) = z^{s_j}$，因此 P_j 为 Weierstrass 多项式。

（2） “仅当”是显然的，只证“当”。仍记 $P(z,w)$ 关于 z 的次数为 s. 如果 P 在 $\mathcal{O}_n$ 中可约，令 $P = g_1 g_2$，其中 g_1, g_2 为 $\mathcal{O}_n$ 中的不可逆元，从而关于 z 的函数 $g_1(z,0), g_2(z,0)$ 在 $z = 0$ 处的零点阶数大于 0，分别记为 s_1, s_2. 由 Weierstrass 预备定理，存在分解

$$g_j(z,w) = P_j(z,w) u_j(z,w) \quad (j = 1,2)$$

使得 $P_j \in \mathcal{O}_{n-1}[z]$ 为次数为 s_j 的 Weierstrass 多项式，u_j 为 $\mathcal{O}_n$ 中的可逆元。所以在 $\mathcal{O}_n$ 中成立 $(P_1 P_2)|P$；再根据引理1.4.3，可知 $(P_1 P_2)|P$ 在 $\mathcal{O}_{n-1}[z]$ 中也成立。而 P, P_1, P_2 都为首一多项式，从而必有 $P = P_1 P_2$，因此 P 在 $\mathcal{O}_{n-1}$ 中可约。 □

定理 1.4.5. $\mathcal{O}_n$ *是唯一分解整环 (UFD).*

证明. 对 n 归纳。$n=1$ 时，$\mathcal{O}_1$ 为主理想整环，从而为唯一分解整环。对于 $n\geq 2$，如果 $\mathcal{O}_{n-1}$ 为唯一分解整环，则由代数学中的高斯引理，多项式环 $\mathcal{O}_{n-1}[z]$ 也是唯一分解整环。

现在，对于 $\mathcal{O}_n$ 中的不可逆元 f，不妨 $z\mapsto f(z,w)|_{w=0}$ 不恒为零（$w\in\mathbb{C}^{n-1}$），从而由 Weierstrass 预备定理，存在分解 $f(z,w)=u(z,w)P(z,w)$，其中 u 为 $\mathcal{O}_n$ 中的可逆元，$P\in\mathcal{O}_{n-1}[z]$ 为 Weierstrass 多项式。由归纳假设，$\mathcal{O}_{n-1}[z]$ 为唯一分解整环，从而存在 P 在 $\mathcal{O}_{n-1}[z]$ 中的分解 $P=P_1P_2\cdots P_s$，使得每个 P_j 都为 $\mathcal{O}_{n-1}[z]$ 中的不可约元。从而由引理1.4.4的（1），不妨每个 P_j 都为 Weierstrass 多项式；再对每个 P_j 使用引理1.4.4的（2），知 P_j 为 $\mathcal{O}_n$ 中的不可约元。从而 $f\in\mathcal{O}_n$ 的不可约分解的存在性证毕。

再看分解的唯一性。只需再证明 $\mathcal{O}_n$ 的不可约元都是素元。若 f 为 $\mathcal{O}_n$ 中的不可约元，以及 $g,h\in\mathcal{O}_n$ 使得 $f|gh$，断言 $f|g$ 或者 $f|h$. 由 Weierstrass 预备定理，不妨假设 $f=f(z,w)$ 为关于第一个分量 z 的 Weierstrass 多项式，从而由 $f|gh$ 知 $g(z,0),h(z,0)$ 也不恒为零，于是由 Weierstrass 预备定理也不妨 $g,h\in\mathcal{O}_{n-1}[z]$ 为 Weierstrass 多项式。因此 $f|gh$ 在 $\mathcal{O}_{n-1}[z]$ 中成立，而由归纳假设 $\mathcal{O}_{n-1}[z]$ 是唯一分解整环，且 f 在 $\mathcal{O}_{n-1}[z]$ 不可约，所以 $f|g$ 或者 $f|h$ 在 $\mathcal{O}_{n-1}[z]$ 中成立，从而在 $\mathcal{O}_n$ 中成立。证毕。 □

1.5 解析集与局部解析零点定理

多复变函数与单复变的一个显著区别是解析延拓的难易程度，Hartogs 现象表明多复变函数“更容易被解析延拓”；而单复变与多复变函数令一个区别是零点集的形态：在单复变中我们熟知全纯函数零点离散（除非函数恒为零），这在多复变中显然不对，例如 $\mathbb{C}^2$ 上的全纯函数 $f(z_1,z_2)=z_1$.

事实上，多元全纯函数的零点集十分重要，而且是代数几何学中的某些概念（代数簇）的源头。

定义 1.5.1. （解析集）

设 $n\geq 2$，$\mathbb{C}^n$ 的子集 A 称为**解析集**（*analytic set*），若对任意 $z\in A$，存在 z 在 $\mathbb{C}^n$ 中的开邻域 Ω，以及 $f_1,f_2,...,f_N\in\mathcal{O}(\Omega)$，使得

$$A\cap\Omega=\{w\in\Omega|f_1(w)=f_2(w)=\cdots=f_N(w)\}$$

也就是说，“局部上看是若干全纯函数的公共零点集”。对于一个解析集，我们首先局部地研究之——类似于解析函数芽环，我们引入如下概念：

定义 1.5.2. （解析集芽）对于 $x \in \mathbb{C}^n$，定义

$$\mathcal{A}_x := \{(A, x) | x \in A,\ A \text{ 是 } \mathbb{C}^n \text{ 中的解析集}\}/\sim$$

其中关系 $\sim$ 为：$(A_1, x) \sim (A_2, x) \iff$ 存在 x 在 $\mathbb{C}^n$ 中的开邻域 Ω，使得 $A_1 \cap \Omega = A_2 \cap \Omega$. 称 $\mathcal{A}_x$ 中的元素为 x 处的**解析集芽**。

$\mathcal{A}_x$ 中的元素可以认为是包含 x 的“无穷小解析集”。容易知道它与解析函数芽的关系：任意 $(A, x) \in \mathcal{A}_x$，(A, x) 为 $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n,x}$ 中某些函数的公共零点集。

定义 1.5.3. 对于 $x \in \mathbb{C}^n$，

（*1*）对与 x 处的解析集芽 $(A, x) \in \mathcal{A}_x$，定义 $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n,x}$ 的理想

$$J_{(A,x)} := \{f \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n,x} | f(z) = 0 \forall z \in A\}$$

（*2*）对于 $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n,x}$ 中的理想 J，定义 x 处的解析集芽

$$(V(J), x) := \{z \in \mathbb{C}^n | g(z) \equiv 0, \forall g \in J\}\text{的等价类}$$

这里并未仔细写清楚，需要验证良定性：注意解析集芽、函数芽实际上都为等价类，我们需要验证与代表元选取无关，留给读者。

注意 $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n,x}$ 为诺特环，从而任何理想 J 都是有限生成的，记 $\{g_1, g_2, ..., g_N\}$ 为其一组生成元，则易知

$$V(J) = \{g_1(x) = g_2(x) = \cdots = g_N(x) = 0\}$$

在 x 附近为有限个解析函数的公共零点集，从而的确为解析集（芽）。

引理 1.5.4. 设 $x \in \mathbb{C}^n$，$(A, x) \in \mathcal{A}_x$ 为 x 处的解析集芽，$J \subseteq \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n,x}$ 为理想，则

$$\begin{aligned} J &\subseteq J_{(V(J),x)} \\ (V(J_{(A,x)}), x) &= (A, x) \end{aligned}$$

证明. 直接按定义验证即可。第一式是容易的；至于第二式，由解析集的定义，(A, x) 必形如

$$\{g_1(x) = g_2(x) = \cdots = g_N(x) = 0\}$$

其中 $g_j \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n,x}$，从而 $J_{(A,x)} = (g_1, ..., g_N)$，之后容易。 □

注记 1.5.5. 不过要注意，第一式的等号未必成立，例如对于 $0 \in \mathbb{C}^2$，$f(z_1, z_2) = z_1^2$，令 $J := (f) \subseteq \mathcal{O}_{\mathbb{C}^2,0}$ 为由 f 生成的理想，则 $V(J) = \{z_1^2 = 0\} = \{z_1 = 0\}$，于是 $J_{(V(J),0)} = (z_1)$，即为由 $\widetilde{f}(z_1, z_2) = z_1$ 生成的理想。很明显，$J \subsetneqq J_{(V(J),0)}$.

对于 $x \in \mathbb{C}^n$，则 $\mathcal{A}_x$ 中的解析集芽可以进行交、并运算：

引理 1.5.6. 对于 $x \in \mathbb{C}^n$，$\{J_\alpha | \alpha \in \mathcal{I}\}$ 为 $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n,x}$ 的一族理想，则对任意 $\alpha, \beta \in \mathcal{I}$，

$$(V(J_\alpha) \cup V(J_\beta), x) = (V(J_\alpha J_\beta), x)$$

$$(\bigcap_{\alpha \in \mathcal{I}} V(J_\alpha), x) = (V(\sum_{\gamma \in \mathcal{I}} J_\gamma), x)$$

自行补全解析集芽交、并的定义（无非是取代表元作交、并）

证明. 直接定义验证。 □

此引理表明，一点处的解析集芽可以“有限并，任意交”，与拓扑学中的“闭集”类似。

接下来研究解析集芽的局部结构。

定义 1.5.7. （不可约解析集芽）

对于 $x \in \mathbb{C}^n$，以及 $(A, x) \in \mathcal{A}_x$，称解析集芽 (A, x) 是**不可约** *(irreducible)* 的，若不存在 $(A_1, x), (A_2, x) \in \mathcal{A}_x$，使得 $(A, x) = (A_1 \cup A_2, x)$，且 $(A_i, x) \subsetneqq (A, x), i = 1, 2$.

由引理1.5.6，以及基本的交换代数，容易知道：解析集芽 (A, x) 不可约，当且仅当 $J_{(A,x)}$ 为 $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n,x}$ 的**素理想**。此外，解析函数芽环的诺特性等价于如下：

引理 1.5.8. 对于 $x \in \mathbb{C}^n$，以及 $(A_k, x) \in \mathcal{A}_x, k \geq 1$，若 $(A_k, x) \supseteq (A_{k+1}, x)$ 对任意 $k \geq 1$ 都成立（即 $\{A_k\}_{k=1}^\infty$ 为解析集芽降链），则存在 $k_0 \geq 1$，使得对任意 $l \geq k_0$，都有 $(A_k, x) = (A_l, x)$.

证明. 考察理想 $J_{(A_k,x)} \subseteq \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n,x}$，则 $(A_k, x) \supseteq (A_{k+1}, x)$ 表明

$$J_{(A_k,x)} \subseteq J_{(A_{k+1},x)}$$

即 $\{J_{(A_k,x)}\}_{k=1}^\infty$ 为理想升链，从而由 $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n,x}$ 的诺特性，以及引理1.5.4，得证。 □

定理 1.5.9. （解析集芽的不可约分解）

给定 $x\in\mathbb{C}^n$，则对任意 $(A,x)\in\mathcal{A}_x$，存在 $N\geq 1$，以及对任意 $1\leq k\leq N$ 存在 $(A_k,x)\in\mathcal{A}_x$ 为不可约解析集芽，使得这些解析集芽**互不包含**，并满足

$$(A,x)=\bigcup_{k=1}^{N}(A_k,x)$$

并且上述分解是唯一的（不计次序）。

证明. **存在性**：先断言，若 (A,x) 可约，则存在分解 $(A,x)=(A^{(1)},x)\cup(A^{(2)},x)$，其中 $(A^{(1)},x)$ 与 $(A^{(2)},x)$ 都为 (A,x) 的真子芽，并且 $(A^{(1)},x)$ 不可约。

这是因为，由 (A,x) 可约，取真子芽 $(A_1,x),(A_1',x)$ 使得 $(A,x)=(A_1,x)\cup(A_1',x)$（但至此无法保证 A_1,A_2 至少有一个不可约）。如果 (A_1,x) 不可约，则继续对其分解：$(A_1,x)=(A_2,x)\cup(A_2',x)$，然后再考察 (A_2,x) 的可约性，不断做下去，总会得到不可约的 (A_k,x)；若不然就有解析集芽降链

$$(A_1,x)\supsetneqq(A_2,x)\supsetneqq(A_3,x)\supsetneqq\cdots$$

与引理1.5.8矛盾。因此必存在 $k>0$，使得 (A_k,x) 不可约，此时

$$(A,x)=(A_k,x)\cup\left(\bigcup_{j=1}^{k}(A_j',x)\right)$$

为所希望的分解，断言证毕。

反复使用此断言：令 $(A,x)=(A^{(1)},x)\cup(B_1,x)$，其中 $(A^{(1)},x)$ 不可约，若 (B_1,x) 可约，则再对 (B_1,x) 使用此断言：$(B_1,x)=(A^{(2)},x)\cup(B_2,x)$，其中 $(A^{(2)},x)$ 不可约；若 (B_2,x) 可约，则再继续对 (B_2,x) 使用断言……该操作必在有限步停止，停止于某个 $(B_{\widetilde{N}},x)$ 不可约，否则就有解析集芽降链

$$(B_1,x)\supsetneqq(B_2,x)\supsetneqq(B_3,x)\cdots$$

与引理1.5.8矛盾。从而得到不可约分解

$$(A,x)=(B_{\widetilde{N}},x)\cup\left(\bigcup_{k=1}^{\widetilde{N}}(A_k,x)\right)$$

之后适当取 $\{A_1,A_2,...,A_{\widetilde{N}};B_{\widetilde{N}}\}$ 的子集使得其中元素之并仍是 (A,x) 并且其中元素互不包含。因此存在性证毕。

唯一性：假设

$$(A,x)=\bigcup_{k=1}^{N}(A_k,x)=\bigcup_{k=1}^{N'}(A_k',x)$$

都为 (A,x) 的满足题设的不可约分解，则需要证明 $N=N'$，并且有集合相等

$$\{A_1,A_2,...,A_N\}=\{A'_1,A'_2,...,A'_{N'}\}$$

对任意 A_i，因为

$$(A_i,x)=\bigcup_{k=1}^{N'}(A_i\cap A'_k,x)$$

从而 (A_i,x) 的不可约性迫使存在某个 (A'_j,x) 使得 $(A_i,x)=(A_i\cap A'_j,x)$，即 $(A_i,x)\subseteq(A'_j,x)$. 同理，对于此 (A'_j,x)，存在某个 $(A_{i'},x)$，使得 $(A'_j,x)\subseteq(A_{i'},x)$，因此

$$(A_i,x)\subseteq(A'_j,x)\subseteq(A_{i'},x)$$

但由于 $\{(A_k,x)\}_{k=1}^N$ 中任何两元素互不包含，因此上式等号成立。也就是说对任意 $1\leq j\leq N$，存在（唯一）$1\leq j'\leq N'$，使得 $(A_j,x)=(A'_{j'},x)$；同理对任意 $1\leq j'\leq N'$ 也有类似结果。这就给出了集合一一对应

$$\{A_1,A_2,...,A_N\}\cong\{A'_1,A'_2,...,A'_{N'}\}$$

从而证毕。 □

注记 1.5.10. 此定理表明，欲研究解析集芽的局部性态，只需要研究不可约解析集芽；一般的解析集芽无非是不可约解析集芽的有限并。

现在，考虑 $\mathcal{O}_n:=\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n,0}$ 的素理想 $\mathfrak{p}$，我们研究解析集芽 $(V(\mathfrak{p}),0)$ 的性质。

记号 1.5.11. 给定 $\mathbb{C}^n$ 的一组基 $\{e_1,e_2,...,e_n\}$，关于此基的坐标函数记作 $z_1,z_2,...,z_n$，对 $1\leq k\leq n$，记

$$\mathbb{C}\{z_1,...,z_k\}:=\{f\in\mathcal{O}_n|\frac{\partial f}{\partial z_l}\equiv 0\ ,\forall k+1\leq l\leq n\}$$

为 $\mathcal{O}_n$ 中“只显含前 k 个变量的函数芽”，则明显有

$$\mathcal{O}_k\cong\mathbb{C}\{z_1,...,z_k\}\hookrightarrow\mathcal{O}_n$$

于是对于 $\mathcal{O}_n$ 的素理想 $\mathfrak{p}$，

$$\mathfrak{p}_k:=\mathfrak{p}\cap\mathbb{C}\{z_1,...,z_k\}$$

为子环 $\mathcal{O}_k\cong\mathbb{C}\{z_1,...,z_k\}$ 的素理想。

引理 1.5.12. 对于环 $\mathcal{O}_n$ 的素理想 $\mathfrak{p}$，则存在 $\mathbb{C}_n$ 的一组基 $\{f_1, f_2, ..., f_n\}$，（记在该基下的坐标函数为 $w_1, w_2, ..., w_n$）以及存在 $0 \le d \le n$，使得

$$\mathfrak{p}_d := \mathfrak{p} \cap \mathbb{C}\{w_1, w_2, ..., w_d\} = 0$$

并且对任意 $d+1 \le k \le n$，$\mathfrak{p}_k$ 当中存在 *Weierestrass* 多项式

$$P_k(\widetilde{w}_k, w_k) = w_k^{s_k} + \sum_{j=1}^{s_k} a_{jk}(\widetilde{w}_k) w_k^{s_k - j}$$

其中 $\widetilde{w}_k := (w_1, w_2, ..., w_{k-1}) \in \mathbb{C}^{k-1}$.

证明. 对 n 归纳，$n = 1$ 时平凡。

Step1对于 $n \ge 2$，先给定 $\mathbb{C}^n$ 的一组基 $\{e_1, ..., e_n\}$ 并记坐标函数为 $z_1, z_2, ..., z_n$，如果 $\mathfrak{p} = \{0\}$，则仍取这组基，并取 $d = n$ 即可。若 $\mathfrak{p} \ne 0$，则任取 $0 \ne g_n \in \mathfrak{p}$，注意 $g_n(0) = 0$；取 $\mathbb{C}^n$ 中的非零向量 f_n，使得定义在 $0 \in \mathbb{C}$ 附近的函数

$$t \mapsto g_n(t f_n)$$

在 $t = 0$ 处的零点阶数最低，记为 s_n. 注意满足如此性质的向量 f_n 在 $\mathbb{C}^n$ 中是稠密的（只需要使得 g_n 沿 f_n 方向的 s_n 阶方向导数非零），从而不妨取 f_n 充分接近基向量 e_n，使得 $\{e_1, e_2, ..., e_{n-1}; f_n\}$ 仍是 $\mathbb{C}^n$ 的一组基。

Step2现在考虑基 $\{e_1, e_2, ..., e_{n-1}; f_n\}$，该基下的坐标记为 $z_1', z_2', ..., z_n'$，则由 Weierstrass 预备定理，注意 $z_n' = 0$ 是函数 $z_n' \mapsto g_n(0, z_n')$ 的 s_n 阶零点，则由 Weierstrass 预备定理，存在 Weierstrass 多项式

$$P_n(\widetilde{z}_n', z_n') = (z_n')^{s_n} + \sum_{j=1}^{s_n} a_{jn}(\widetilde{z}_n')(z_n')^{s_k - j}$$

以及 $h \in \mathcal{O}_n$ 使得 $h(0) \ne 0$，以及 $g_n = P_n h$. （其中 $\widetilde{z}_n' = (z_1', ..., z_{n-1}') \in \mathbb{C}^{n-1}$）由于 h 在 $\mathcal{O}_n$ 中可逆，所以 Weierstrass 多项式 $P_n \in \mathfrak{p} = \mathfrak{p}_n$.

Step3如果 $\mathfrak{p}_{n-1} := \mathfrak{p} \cap \mathbb{C}\{z_1', z_2', ..., z_{n-1}'\} = 0$，则取 $\mathbb{C}^n$ 的基 $\{e_1, ..., e_{n-1}; f_n\}$，以及 $d = n-1$ 即可。如果 $\mathfrak{p}_{n-1} \ne 0$，则 $\mathfrak{p}_{n-1}$ 为子环 $\mathcal{O}_{n-1} \cong \mathbb{C}\{z_1', ..., z_{n-1}'\}$ 的素理想，之后对 $\mathbb{C}^{n-1} \cong \mathrm{span}_{\mathbb{C}}\{e_1, e_2, ..., e_{n-1}\}$ 以及 $\mathfrak{p}_{n-1}$ 使用归纳假设即可。 □

注记 1.5.13. 容易知道，对事先任意给定的 $\mathbb{C}^n$ 的基 $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$，上述引理中的基 $\{f_1, f_2, ..., f_n\}$ 可以适当选取使得与 $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ 任意接近。

（这个引理证明过程中，哪里利用了“素理想”？）

本节有坑待填，尚未完成。笔者打算完整证明如下：

定理 1.5.14. （局部解析零点定理）

设 I 为 $\mathcal{O}_n$ 的理想，则

$$J_{(V(J),x)} = \sqrt{J}$$

回顾 $\sqrt{J} := \left\{ f \in \mathcal{O}_n \middle| \exists N \geq 0,\, f^n \in J \right\}$ 为 J 的**根式理想**。交换代数当中有以下基本结果：

$$\sqrt{J} = \bigcap_{\substack{\mathfrak{p} \supseteq J \\ \mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_n)}} \mathfrak{p}$$

证明大意. $J_{(V(J),x)} \supseteq \sqrt{J}$ 是容易验证的，而另一边“$\subseteq$”，由交换代数，只需对 $J = \mathfrak{p}$ 为素理想的情形证明。

这是非常不显然的结果，需要利用引理1.5.12 等多复变函数的结果，以及较多的交换代数。从略。 □

（这里待完善）

1.6 局部参数化

本节陈述关于不可约解析集芽的如下重要定理

定理 1.6.1. （不可约解析集芽的局部参数化定理）

设 $\mathfrak{p}$ 为环 $\mathcal{O}_n$ 的素理想，任取解析集 A 为解析集芽 $(V(\mathfrak{p}), 0)$ 的代表元，则：存在 $\mathbb{C}^n$ 的基 $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$（该基下的坐标函数记为 $z_1, z_2, ..., z_n$），存在 $1 \leq d \leq n$，以及存在足够小的正实数 $r', r'' > 0$，以及常数 $C > 0$，使得：

（*1*）$\mathfrak{p} \cap \mathbb{C}\{z_1, ..., z_d\} = 0$，并且环同态

$$\mathbb{C}\{z_1, ..., z_d\} \hookrightarrow \mathcal{O}_n / \mathfrak{p}$$

为**有限整扩张**。

（*2*） 在坐标 $z' = (z_1, ..., z_d), z'' = (z_{d+1}, ..., z_n)$ 下，

$$A \cap (\triangle' \times \triangle'') \subseteq \left\{ (z', z'') \in \mathbb{C}^d \times \mathbb{C}^{n-d} \middle| |z''| \leq C|z'| \right\}$$

其中 $\triangle'$ 为 $\mathbb{C}^d$ 中以原点为中心，半径 r' 的多圆柱；$\triangle''$ 为 $\mathbb{C}^{n-d}$ 中以原点为中心，半径 r'' 的多圆柱。

（3） 记 q 为 $\mathbb{C}\{z_1,...,z_d\} \hookrightarrow \mathcal{O}_n/\mathfrak{p}$ 的扩张次数，则投影映射

$$\begin{aligned} \pi : A\cap(\triangle'\times\triangle'') &\to \triangle' \\ (z',z'') &\mapsto z' \end{aligned}$$

为次数为 q 的**分歧映射**（*ramified map*），并且存在某个 $\delta\in\mathcal{O}_d$，使得 π 的所有**分歧值**都位于集合

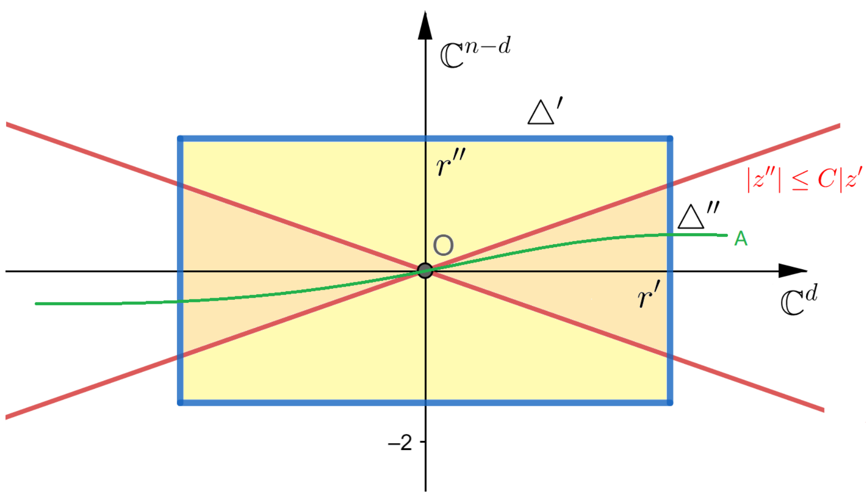
$$S := \left\{z'\in\triangle' \middle| \delta(z')=0\right\}$$

之中，并且 $\triangle'\setminus S$ 为 $\triangle'$ 的连通、稠密子集。

第（3）条的“分歧映射”、“分歧值”具体指：投影

$$\begin{aligned} \pi' : A\cap\left[(\triangle'\setminus S)\times\triangle''\right] &\to \triangle' \\ (z',z'') &\mapsto z' \end{aligned}$$

为 q 叶覆盖映射，并且对任意 $z'\in S$，$\#\pi^{-1}(z')\leq q$.



图：性质1.6.1示意

证明. 异常复杂，从略。承认之。 □

不过我们可以考虑一种简单的特殊情形——$\mathfrak{p}$ 为主理想：

例子 1.6.2. （超曲面的参数化）

设 $\mathcal{O}_n$ 的素理想 $\mathfrak{p}=(f)$ 为主理想，证明此种情形的局部参数化定理。

证明. 由 Weierstrass 预备定理，不妨取 $\mathfrak{p}$ 的生成元 f 为 weierstrass 多项式

$$f(\widetilde{z}, z_n) = z_n^q + \sum_{j=1}^{q} a_j(\widetilde{z}) z_n^{s-j} = \prod_{j=1}^{q}(z_n - w_j(\widetilde{z}))$$

其中 $\widetilde{z} = (z_1, z_2, ..., z_{n-1}) \in \mathbb{C}^{n-1}$，$w_j(\widetilde{z})$ 为多项式 $z_n \mapsto f(\widetilde{z}, z_n)$ 的根。取 $d = n-1$，显然

$$\mathfrak{p} \cap \mathbb{C}\{z_1, z_2, ..., z_d\} = 0$$

现在对任意 $F \in \mathcal{O}_n$，对 F 以及 Weierstrass 多项式 f 使用 Weierstrass 除法定理，有 $F = hf + R$，其中 $R \in \mathcal{O}_{n-1}[z_n]$ 并且次数 $< q$. 这表明 $\widetilde{F} \in \mathcal{O}_n/\mathfrak{p}$ 为有限生成 $\mathcal{O}_d = \mathcal{O}_{n-1}$-模，并且 $\{1, z_n, z_n^2, ..., z_n^{q-1}\}$ 为其一组 $\mathcal{O}_d$-模生成元。因此

$$\mathcal{O}_d \hookrightarrow \mathcal{O}_n/\mathfrak{p}$$

为有限整扩张。从而定理1.6.1的（1）证毕。

而（3）几乎显然，取

$$S := \left\{ \widetilde{z} \in \triangle' \middle| \text{多项式 } z_n \mapsto f(\widetilde{z}, z_n) \text{ 无重根} \right\}$$

即可。利用代数学中关于重根的判别式，容易知道 S 为某个 $\mathcal{O}_d$ 中的函数（芽）的零点集。从而（3）易证。

至于（2），常数 C 的存在性显然吗？如果有对 f 的根的估计

$$w_j(\widetilde{z}) = O(|\widetilde{z}|)$$

那么就没问题。（待补） □

1.7 正则点、奇异点，全纯隐函数定理

（待补）

第 2 章　复流形（待补）

计划详细介绍复流形、复微分形式，以及复流形的例子。

2.1　复流形（暂定）

2.2　微分形式（暂定）

2.3　复向量丛与全纯向量丛（暂定）

Recall: X is a smooth manifold, E is a vector bundle of rank r, if

(1)$\pi : E \to X$ is smooth map,

(2)for any $x \in X$, $E_x := \pi^{-1}(x)$ is a vector space over $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ or $\mathbb{C}$) of dimension r.

(3)there an open covering $\mathcal{U} = (\mathcal{U}_\alpha)_{\alpha \in I}$ and trivializations

$$\theta_\alpha : E|_{U_\alpha} \cong U_\alpha \times \mathbb{K}^r$$

and for any intersection $U_\alpha \cap U_\beta$, we have

注记 2.3.1.

$$g_{\alpha\beta} = g_{\beta\alpha}^{-1}$$

$$g_{\alpha\beta} g_{\beta\gamma} g_{\gamma\alpha} = 1$$

(cocycle condition)

例子 2.3.2. *trivial vector bundle* $X \times \mathbb{K}^r$

例子 2.3.3. *Tangent bundle* TX. *(transition matrix* $g_{\alpha\beta}$ *are given by Jacobi matrix..)*

定义 2.3.4. *(Local frame of vector bundles)*

$$\theta_\alpha : E|_{U_\alpha} \xrightarrow{\sim} U_\alpha \times \mathbb{K}^r$$

be a trivialization, we define

$$e_\lambda(x) := \theta_\alpha^{-1}(x, \begin{pmatrix} 0 \\ \dots \\ 1(\leftarrow ith) \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix})$$

then, $\{e_1, ..., e_r\}$ *be a local smooth section* $s \in \Gamma(U_\alpha, E)$ *can be written as*

$$s(x) = \sum \sigma_\lambda(x)$$

where $\sigma_\lambda \in C^\infty(U_\alpha, \mathbb{K})$.

定义 2.3.5. *(dual of vector bundles)* $E \to X$, *and* $g_{\alpha\beta}$ *:transition matrix of* E, *the dual is given by* $(g_{\alpha\beta})^{-1}$. （用转移函数来定义向量丛）

定义 2.3.6. *direct sum of two vector bundles* $(E, F) \to E \oplus F$. *locally,*

$$(g_{\alpha,\beta}) \oplus (h_{\alpha\beta})$$

direct sum of transition matrices.

定义 2.3.7. *tensor product of two vector bundles.*

locally, tensor product of two transition matrices.

2.4 例子（暂定）

例子 2.4.1. $\mathcal{O}(-1)$ *on* $\mathbb{C}P^n$, *tautological line bundle. (Recall:* $\mathbb{C}P^n$ *is a compact complex manifold with holomorphic charts*

$$\Omega_j := \{[z_0; z_1; ...; z_n] | z_j \neq 0\} \to \left(\frac{z_0}{z_j}, \cdots, \hat{1}, \cdots \frac{z_n}{z_j}\right) \in \mathbb{C}^n$$

)

Let V be a complex vector space, $\dim_{\mathbb{C}} V = n+1$. Denote the projective space by

$$\mathbb{P}(V) = (V \setminus \{0\})/\mathbb{C}^*$$

Let $\underline{V} := \mathbb{P}(V) \times V$ be the trivial vector bundle, define

$$\mathcal{O}(-1) := \{([x], \xi) | \xi \in \mathbb{C} \cdot x\}$$

性质 2.4.2. *$\mathcal{O}(-1)$ is a holomorphic line bundle on $\mathbb{P}(V)$.*

证明. $\mathcal{O}(-1)|_{\Omega_j}$ has a non-vanishing holomorphic section $\mathcal{E}_j$ defined by

$$\mathcal{E}_j([x]) = \frac{x}{x_j}$$

for $0 \leq j \leq n$. □

第 3 章　层与层上同调

本章介绍层论、层上同调的语言。这套理论是 J-Leray 于 1945-1946 年在监狱中创立的。在正式介绍这套抽象的理论之前，先通过一个例子来大致了解引入此理论的动机。

问题：设 S 为一个黎曼曲面，$\{p_n\} \subseteq S$ 为 S 的一个离散点集，我们希望找一个 S 上的亚纯函数 f，使得 f 在 $S \setminus \{p_n\}$ 全纯，并且在每个 p_i 处具有事先给定的主部。

这样的函数 f 在局部上的存在性是显然的；而在 S 上的整体存在性并不平凡。

思路 (Čech). 取 S 的一族开覆盖 $\mathcal{U} := \left\{U_\alpha \middle| \alpha \in \mathcal{I}\right\}$，使得每个 U_α 均为局部坐标卡，并且至多包含 $\{p_n\}$ 中的一个点，则局部地，可在每个 U_α 上找到满足要求的亚纯函数 f_α.

之后我们希望找到 $g_\alpha \in \mathcal{O}(U_\alpha)$，使得对任意 $\alpha, \beta \in \mathcal{I}$，在 $U_\alpha \cap U_\beta$ 上成立 $f_\alpha - g_\alpha = f_\beta - g_\beta$. 于是我们可定义 S 上的亚纯函数 $f = f_\alpha - g_\alpha$. 易知 f 良定，且满足要求。

令 $f_{\alpha\beta} \in \mathcal{O}(U_\alpha \cap U_\beta)$ 为

$$f_{\alpha\beta} := f_\alpha - f_\beta$$

则显然对于任意指标 α, β, γ，在公共部分 $U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma$ 上成立

$$f_{\alpha\beta} + f_{\beta\gamma} + f_{\gamma\alpha} = 0 \tag{$*$}$$

而如果存在上述 $g_\alpha \in U_\alpha$，则有 $f_\alpha = g_\alpha - g_\beta$. 现在，令

$$\begin{aligned} Z^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}) &:= \operatorname{span}\left\{f_{\alpha\beta} \in \mathcal{O}(U_\alpha \cap U_\beta) \middle| f_{\alpha\beta}\text{满足 } (*)\right\} \\ B^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}) &:= \operatorname{span}\left\{f_{\alpha\beta} \in \mathcal{O}(U_\alpha \cap U_\beta) \middle| \exists g_\alpha \in \mathcal{O}(U_\alpha), f_{\alpha\beta} = g_\alpha - g_\beta\right\} \end{aligned}$$

显然 $B^1(\mathcal{U}, \mathcal{O})$ 为 $Z^1(\mathcal{U}, \mathcal{O})$ 的子空间。如果这两者相等，则满足题设的解存在。 □

我们记 $H^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}) := \frac{Z^1(\mathcal{U}, \mathcal{O})}{B^1(\mathcal{U}, \mathcal{O})}$ 为 X 上的全纯函数"层"（sheaf）关于开覆盖 $\mathcal{U}$ 的第 1 个 **Čech 上同调**. 我们将了解到，Čech 上同调与 S 的拓扑有密切关系。

本章需要一定的范畴论准备。由于这不是专门介绍层论的讲义，我们会省略很多论证细节，只介绍主要结果。

3.1 预层与层的概念

定义 3.1.1. （集值预层）

设 X 为拓扑空间，X 上的**预层**（*presheaf*）$\mathcal{F}$ 是指以下资料：

（*1*）对任意 X 中的开集 U，给定集合 $\mathcal{F}(U)$，称 $\mathcal{F}(U)$ 为 $\mathcal{F}$ 在 U 上的**截面空间**，其中的元素称为 $\mathcal{F}$ 在 $\mathcal{U}$ 上的一个**截面** *(section).*

（*2*）对于 X 的任意开子集 U, V，若 $U \subseteq V$，则配以**限制映射**

$$\begin{aligned} \rho_{UV} : \mathcal{F}(V) &\to \mathcal{F}(U) \\ s &\mapsto s|_U \end{aligned}$$

并且对 X 的任意开子集 $W \subseteq U \subseteq V$ 成立：

$$\begin{aligned} \rho_{UU} &= \mathrm{id}_{\mathcal{F}(U)} \\ \rho_{WV} &= \rho_{WU} \circ \rho_{UV} \end{aligned}$$

最典型的例子是，拓扑空间 X 上的函数之全体函数构成预层 $\mathcal{C}$. 具体地，对 X 的开子集 U，$\mathcal{C}(U) := C(U)$ 为定义在 U 上的连续函数之全体；对于 $V \subseteq U$，则限制映射 ρ_{UV} 为通常的函数定义域的限制。

注记 3.1.2. 通常来说，预层 $\mathcal{F}$ 被假定具有代数结构。具体地，对于 X 的开集 U，$\mathcal{F}(U)$ 被假定具有 *Abel* 群结构、交换环结构或者 A-模结构等等，此时分别称作取值于 *Abel* 群范畴、交换环范畴、A-模范畴的预层。

当然，若 $\mathcal{F}(U)$ 具有上述代数结构，则我们也要求限制映射 ρ_{VU} 为相应范畴中的态射，并且规定 $\mathcal{F}(\varnothing) = \{0\}$ 为相应范畴中的零对象。

例子 3.1.3. （常值预层）

对于拓扑空间 X，定义 X 上的集值预层 $\mathbb{C}_X$ 如下：对于任意开子集 U，$\mathbb{C}_X(U) := \mathbb{C}$；对于 $U \subseteq V$，限制映射 $\rho_{UV} := \begin{cases} \mathrm{id}_{\mathbb{C}} & U \neq \varnothing \\ 0 & U = \varnothing \end{cases}$，则容易验证这是 X 上的预层，称为**常值预层**.

例子 3.1.4. （全纯函数预层）

设 X 为复流形，则 $\mathcal{O}_X : U \mapsto \mathcal{O}(U)$，配以通常的函数限制，构成 X 上的预层，称为**全纯函数预层**。

例子 3.1.5. （微分形式预层）

设 X 为光滑流形，对 X 的任意开子集 U，考虑 U 上的光滑 k 形式之全体 $\bigwedge^k(U)$，配以通常的限制映射，则 $\bigwedge^k$ 构成预层，称为 **光滑 k-形式预层**。

定义 3.1.6. （层）

设 $\mathcal{F}$ 为拓扑空间 X 上的预层，称 $\mathcal{F}$ 为层（*sheaf*），若以下成立：

（*1*）（粘合公理）若 U 与 $U_\alpha(\alpha \in \mathcal{I})$ 均为 X 的开子集，并且 $U = \bigcup\limits_{\alpha\in\mathcal{I}} U_\alpha$，则对于任何 $s_\alpha \in \mathcal{F}(U_\alpha)$，如果 $s_\alpha|_{U_\alpha\cap U_\beta} = s_\beta|_{U_\alpha\cap U_\beta}$ 对任意 $\alpha,\beta \in \mathcal{I}$ 成立，则存在 $s \in \mathcal{F}(U)$，使得 $s|_{U_\alpha} = s_\alpha$ 对任意 $\alpha \in \mathcal{I}$ 成立。

（*2*）（唯一性公理）条件同上，则对于任意 $s,t \in \mathcal{F}(U)$，若对任意 $\alpha \in \mathcal{I}$，$s|_{U_\alpha} = t|_{U_\alpha}$，则 $s = t$.

类似地也可以定义取值于 Abel 范畴上的层。此时，容易验证唯一性公理等价于：（$U = \bigcup\limits_{\alpha\in\mathcal{I}} U_\alpha$）对于 $s \in \mathcal{F}(U)$，若 $s|_{U_\alpha} = 0$ 对任意 $\alpha \in \mathcal{I}$ 成立，则 $s = 0$.

例子 3.1.7. 若拓扑空间 X 包含至少两个不交的开集，则常值预层（例子*3.1.3*）$\mathbb{C}_X$ **不是**层，因为不满足粘合公理。

具体地，若 U,V 为 X 的两个不交的开子集，考虑 $1 \in \mathbb{C}_X(U)$ 以及 $2 \in \mathbb{C}_X(V)$，则显然不存在 $z \in \mathbb{C}_X(U\cup V)$ 使得 $1 = z|_U$ 以及 $2 = z|_V$.

例子 3.1.8. （向量丛是层）设 $E \to X$ 为光滑流形 X 上的向量丛，则 E 自然视为 X 上的层 $\Gamma(-,E)$：对任意 $U \subseteq X$，考虑丛 E 在 U 上的截面之全体 $\Gamma(U,E)$。易验证其满足层的公理。

类似地，复流形上的全纯函数预层是层，光滑 k-形式预层也是层。

定义 3.1.9. （预层的同态）

设 $\mathcal{F}$ 与 $\mathcal{G}$ 为拓扑空间 X 上的（取值于同一个 *Abel* 范畴的）预层，预层同态 $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ 是指以下资料：对任意开集 $U \subseteq X$，配以（相应 *Abel* 范畴中的）态射 $\varphi_U : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)$，并且对于 X 的任意开子集 $U \subseteq V$，以下图表交换：

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F}(U) \arrow[d, "\varphi_U"'] & \mathcal{F}(V) \arrow[l, "\rho_{UV}"'] \arrow[d, "\varphi_V"'] \\
\mathcal{G}(U) & \mathcal{G}(V) \arrow[l, "\rho_{UV}"']
\end{tikzcd}$$

设 $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ 为 X 上的预层同态，则我们可以定义 $\ker^p \varphi$,$\mathrm{Im}^p \varphi$,$\mathrm{coker}^p \varphi$ 为：对任意开集 $U \subseteq X$，

$$(\ker^p \varphi)(U) := \ker(\varphi_U)$$

$\mathrm{Im}^p \varphi$ 与 $\mathrm{coker}^p \varphi$ 也完全类似。容易验证它们都是预层，分别称为预层同态 φ 的**核预层**、**像预层**、**余核预层**。这里的上标“p”是指“预层”（presheaf）。

性质 3.1.10. 设 $\mathcal{F},\mathcal{G}$ 为 X 上的层，$\varphi:\mathcal{F}\to\mathcal{G}$ 为预层同态，则预层 $\ker^p\varphi$ 是层。

证明. 直接验证 $\ker^p\varphi$ 满足层的粘合公理和唯一性公理。设 $\left\{U_\alpha \middle| \alpha\in\mathcal{I}\right\}$ 为 X 的开子集 U 的一族开覆盖，注意到 $(\ker^p\varphi)(U_\alpha)\subseteq\mathcal{F}(U_\alpha)$，以及 $\mathcal{F}$ 为层（满足粘合公理），因此易知 $\ker^p\varphi$ 也满足粘合公理。$\ker^p\varphi$ 的唯一性公理也是由 $\mathcal{F}$ 的层性质直接得到的。 □

从此以后，若 $\mathcal{F}$ 与 $\mathcal{G}$ 都为层，则我们将核预层 $\ker^p\varphi$ 简记为 $\ker\varphi$.

注记 3.1.11. 好吧，刚才的命题几乎显然。但是要注意，即使 $\mathcal{F}$ 与 $\mathcal{G}$ 都是层，$\mathrm{Im}^p\varphi$ 与 $\mathrm{coker}^p\varphi$ 未必是层。它们并没有 $\ker^p\varphi$ 的良好性质。

例子 3.1.12. 考虑拓扑空间 $X=\mathbb{C}\setminus\{0\}$，令 $\mathcal{F}:=\mathcal{O}_X$ 为 X 上的全纯函数层，$\mathcal{G}:=\mathcal{O}_X^*$ 定义为：对于 X 的开集 U，

$$\mathcal{O}_X^*(U):=\left\{f\in\mathcal{O}_X(U)\middle|f(z)\neq 0,\forall z\in U\right\}$$

容易验证 $\mathcal{O}_X^*$ 为（取值于集合的）层。考虑层同态

$$\begin{aligned}\exp:\mathcal{F}&\to\mathcal{G}\\ f\in\mathcal{F}(U)&\mapsto e^f\end{aligned}$$

则 $\mathrm{Im}^p\exp$ **不是**层。

证明. 只需要考虑函数 $z\in\mathcal{O}_X^*(X)$. 对任意单连通的开子集 $U\subseteq X$，易知 $z\in\mathcal{O}_X^*(U)$ 满足 $z\in(\mathrm{Im}^p\exp)(U)$，但是 $z\in\mathcal{O}_X^*(X)$ 并不位于 $(\mathrm{Im}^p\exp)(X)$ 当中，从而 $\mathrm{Im}^p\exp$ 不满足粘合公理。 □

记号 3.1.13. （层的限制）设 $\mathcal{F}$ 是拓扑空间 X 上的层，U 为 X 的开子集，则自然有拓扑空间 U 上的层 $\mathcal{F}|_U$ 如下：对 U 中的开集 V （注意 V 也是 X 中的开集），定义

$$\mathcal{F}|_U(V):=\mathcal{F}(V)$$

相应的限制映射也自然给出。容易验证 $\mathcal{F}|_U$ 是拓扑空间 U 上的层，称为 $\mathcal{F}$ 在 U 上的**限制**。

关于层的构造，我们再介绍层的直和：

例子 3.1.14. （层的直和）

设 $\mathcal{F}$ 与 $\mathcal{G}$ 为拓扑空间 X 上的取值于（同一个）*Abel* 范畴的层，则定义 $\mathcal{F}$ 与 $\mathcal{G}$ 的**直和层**$\mathcal{F}\oplus\mathcal{G}$ 如下：对 X 中的开集 U, $(\mathcal{F}\oplus\mathcal{G})(U):=\mathcal{F}(U)\oplus\mathcal{G}U.$

容易验证 $\mathcal{F}\oplus\mathcal{G}$ 也为 X 上的层。类似也可以定义多个层的直和。特别地，对于层 $\mathcal{F}$ 以及正整数 n，记 $\mathcal{F}^{\oplus n}:=\underbrace{\mathcal{F}\oplus\mathcal{F}\oplus\cdots\oplus\mathcal{F}}_{n\text{个}}$

3.2 预层的层化

定义 3.2.1. *(预层的芽)*

设 $\mathcal{F}$ 为 X 上的预层，$x \in X$，则称

$$\mathcal{F}_x := \varinjlim_{x \in U} \mathcal{F}(U)$$

为 $\mathcal{F}$ 在 x 处的**茎条**（*stalk*），其中 U 取遍 x 的开邻域。$\mathcal{F}_X$ 中的元素称为 x 处的**芽**（*germ*）。

我们不再回顾范畴论中的余极限（or 归纳极限、正向极限）的概念。典型的例子是，若 $\mathcal{O}_X$ 为复流形 X 上的解析函数环层，则对于 $x \in X$，$\mathcal{O}_{X,x}$ 即为通常的在 x 处的解析函数芽环。

回顾层的粘合公理、唯一性公理，用茎条、芽的语言可以给出上述公理的等价表述：

性质 3.2.2. 设 $\mathcal{F}$ 是拓扑空间 X 上的预层，则

（*1*）$\mathcal{F}$ 满足粘合公理 $\iff$ 对任意开集 U，以及对任意 $s(x) \in \mathcal{F}_x (\forall x \in U)$，如果对任意 $x \in U$，存在 x 的开邻域 $V \subseteq U$，以及 $s(x)$ 的代表元 $t \in \mathcal{F}(V)$，使得对任意 $y \in V$，成立 $s(y) = t_y$，那么存在 $S \in \mathcal{F}(U)$，使得对任意 $x \in U$ 成立 $S_x = s(x)$。

（*2*）$\mathcal{F}$ 满足唯一性公理 $\iff$ 对任意开集 U，以及对任意 $s \in \mathcal{F}(U)$，如果对任意 $x \in U$，$s_x = 0$，那么 $s = 0$.

证明. 由有关定义出发，几乎显然。 □

性质 3.2.3. 设 $\mathcal{F}$ 与 $\mathcal{G}$ 为 X 上的预层，$\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ 为预层同态，则对任意 $x \in X$，φ 自然诱导茎条同态

$$\varphi_x : \mathcal{F}_x \to \mathcal{G}_x$$

证明. 由余极限 $\varinjlim$ 的函子性直接得到。 □

具体构造是，对任意 $F_x \in \mathcal{F}_x$，取 F_x 的代表元 $F \in \mathcal{F}(U)$，其中 U 为 x 的某个开邻域。之后，$\varphi_x(F_x) = (\varphi_U(F))_x$.

定义 3.2.4. （预层的层空间）

设 $\mathcal{F}$ 为拓扑空间 X 上的预层，则定义拓扑空间

$$\widetilde{\mathcal{F}} := \coprod_{x \in X} \mathcal{F}_x$$

其拓扑由拓扑基 $\left\{\Omega_{F,U} \middle| U \subseteq X\text{为开子集}, F \in \mathcal{F}(U)\right\}$ 生成，其中 $\Omega_{F,U} = \left\{F_x \in \mathcal{F}_x \middle| x \in U\right\}$. 称拓扑空间 $\widetilde{\mathcal{F}}$ 为预层 $\mathcal{F}$ 的**层空间**（*sheaf space*）。

具体地，若芽 $F_x \in \widetilde{\mathcal{F}}$，取 F_x 的代表元 $F \in \mathcal{F}(U)$，其中 U 为 x 的一个（充分小的）开邻域，则 $\left\{F_y \middle| y \in U\right\}$ 为 F_X 在 $\widetilde{\mathcal{F}}$ 中的一个开邻域。我们由自然的映射

$$\begin{aligned} \Pi : \widetilde{\mathcal{F}} &\to X \\ s \in \mathcal{F}_x &\mapsto x \end{aligned}$$

则容易验证 $\Pi : \widetilde{\mathcal{F}} \to X$ 为连续映射，且对于任意 $F \in \mathcal{F}(U)$，$\Pi : \Omega_{F,U} \to U$ 为拓扑同胚。

定义 3.2.5. （预层的层化）

设 $\mathcal{F}$ 是 X 上的预层，对 X 的开子集 U，定义

$$\mathcal{F}^+(U) := \left\{s : U \to \widetilde{\mathcal{F}} \middle| s\text{为连续映射，并且}\Pi \circ s = \mathrm{id}_U\right\}$$

称 $\mathcal{F}^+$ 为预层 $\mathcal{F}$ 的**层化**（*sheafification*）.

具体地，对于 $s : U \to \widetilde{\mathcal{F}}$，$s \in \mathcal{F}^+(U)$ 当且仅当对任意的 $x \in U$，$s(x) \in \mathcal{F}_x$，并且存在 x 的开邻域 $V \subseteq U$，以及存在 $F \in \mathcal{F}(V)$，使得 $s(y) = F_y$ 对任意 $y \in V$ 成立。

性质 3.2.6. 设 $\mathcal{F}$ 为 X 上的预层，则 $\mathcal{F}^+$ 为 X 上的层，并且有典范的预层同态 $\theta : \mathcal{F} \to \mathcal{F}^+$ 如下：对任意开集 U，

$$\begin{aligned} \theta_U : \mathcal{F}(U) &\to \mathcal{F}^+(U) \\ s &\mapsto \tilde{s} : U \to \widetilde{\mathcal{F}} \quad (x \mapsto s_x) \end{aligned}$$

证明. $\mathcal{F}^+$ 的粘合公理与唯一性公理几乎显然成立。 □

我们更习惯于把有预层同态 $\theta : \mathcal{F} \to \mathcal{F}^+$ 称为 $\mathcal{F}$ 的层化。容易验证，对任意 $x \in X$，由茎条同构 $\mathcal{F}_X \cong \mathcal{F}_x^+$；此外也容易验证，如果 $\mathcal{F}$ 本身是层，那么 θ 为层同构，即“层的层化同构于其本身”。

性质 3.2.7. （层化的泛性质）

设 $\mathcal{F}$ 为拓扑空间 X 上的预层，则对于 X 上的任何层 $\mathcal{G}$，以及预层同态 $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$，存在唯一的层同态 $\psi : \mathcal{F}^+ \to \mathcal{G}$，使得以下图表交换：

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F} \arrow[r, "\forall\varphi"] \arrow[d, "\theta"'] & \mathcal{G} \\
\mathcal{F}^+ \arrow[ur, dashed, "\exists!\,\psi"'] &
\end{tikzcd}$$

证明. 对任意 $x \in X$，$\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ 诱导了 $\varphi_x : \mathcal{F}_x \to \mathcal{G}_x$，再注意 $\mathcal{F}_X \cong \mathcal{F}_x^+$，从而自然给出 $\psi_x : \mathcal{F}_x^+ \to \mathcal{G}_x$. 易验证 $\left\{\psi_x \middle| x \in X\right\}$ 确定了层同态 $\psi : \mathcal{F}^+ \to \mathcal{G}$，且 $\psi \circ \theta = \varphi$.

ψ 的唯一性是显然的。 □

例子 3.2.8. 回顾常值预层 $\mathbb{C}_X$ （见例子3.1.3），则其层化 $\mathbb{C}_X^+$ 为，对任意开集 U，

$$\mathbb{C}_X^+(U) = \left\{ f : U \to \mathbb{C} \middle| f \text{为局部常值函数} \right\}$$

称之为 X 上的**局部常值层**。

例子 3.2.9. 回顾例子3.1.12中的预层同态

$$\exp : \mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_X^*$$

则像预层 $\mathrm{Im}^p(\exp)$ 的层化 $(\mathrm{Im}^p \exp)^+ \cong \mathcal{O}_X^*$.

定义 3.2.10. （像层、余核层与商层）

设 $\mathcal{F}$ 与 $\mathcal{G}$ 为拓扑空间 X 上的层，$\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ 为层同态。

（1）定义 $\mathrm{Im}\,\varphi := (\mathrm{Im}^p\,\varphi)^+$，称之为 φ 的**像层**；

（2）定义 $\mathrm{coker}\,\varphi := (\mathrm{coker}^p\,\varphi)^+$，称之为 φ 的**余核层**；

（3）若对于任意开集 U，$\varphi_U : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)$ 为单同态，则称 φ 为**层单同态**，此时也称 $\mathcal{F}$ 为 $\mathcal{G}$ 的**子层**，并且定义**商层**$\mathcal{F}/\mathcal{G} := \mathrm{coker}\,\varphi$.

无非是将相应的预层加以层化。此外容易验证，层同态 $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ 为单同态，当且仅当对任意 $x \in X$，$\varphi_x : \mathcal{F}_x \to \mathcal{G}_x$ 为单同态。

注记 3.2.11. 设 $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ 为层同态，则像层 $\operatorname{Im}\varphi$ 自然地视为 $\mathcal{G}$ 的子层：

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F} \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\widetilde{\varphi}"'] & \mathcal{G} \\
\operatorname{Im}^p \varphi \arrow[ru, "i'"] \arrow[r, "\theta"] & \operatorname{Im}\varphi \arrow[u, dashed, "i"']
\end{tikzcd}$$

层同态 $i : \operatorname{Im}\phi \to \mathcal{G}$ 由层化的泛性质给出，并且逐茎条看，显然 i 为层单同态。

定义 3.2.12. （层满同态）

设 $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ 为层同态，称 φ 为**层满同态**，若 $\operatorname{Im}\varphi := (\operatorname{Im}^p \varphi)^+ \cong \mathcal{G}$.

由有关定义可以验证，层同态 $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ 为层满同态，当且仅当对任意 $x \in X$，$\varphi_x : \mathcal{F}_x \to \mathcal{G}_x$ 为满同态。由此可推出，φ 为层同构，当且仅当对任意 $x \in X$，φ_x 为茎条同构。

3.3 层的顺像与逆像

记号 3.3.1. 对于拓扑空间 X，定义 X 上的 *Abel* 群层范畴 Ab_X 为：

（*1*）$\mathsf{Ab}(X)$ 中的对象为 X 上的取值于 *Abel* 群的层；

（*2*）对象之间的态射为相应的层同态。

显然这是一个范畴。类似可定义“X 上的集值层范畴”Set_X，“X 上的交换环层范畴”Ring_X，以及对于交换环 A，我们可定义 X 上的 A-模层范畴 A-Mod_X 等等。

一般地，将 X 上（所有种类的）层之全体记作 Sh_X，这自然也给出一个范畴，称为 X 上的**层范畴**。类似地，X 上的所有预层也构成范畴，记为 pSh_X.

注记 3.3.2. 对于拓扑空间 X，以及 X 的开集 U，则有“取截面”函子

$$\begin{aligned} \Gamma(U, -) : \mathsf{Ab}_X &\to \mathsf{Ab} \\ \mathcal{F} &\mapsto \mathcal{F}(U) \end{aligned}$$

其中 Ab 为 *Abel* 群范畴。容易验证函子 $\Gamma(U, -)$ 是**左正合函子**，即对于 Ab_X 中任意的左短正合列 $0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{G} \to \mathcal{H}$，该函子诱导的 *Abel* 群同态序列 $0 \to \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U) \to \mathcal{H}(U)$ 也是正合的。

函子 $\Gamma(U, -)$ 的左正合性是后文将要介绍的层上同调理论的基础。

定义 3.3.3. （层的顺像）

设 $f: X \to Y$ 为拓扑空间的连续映射，$\mathcal{F}$ 是 X 上的层，则定义 $\mathcal{F}$ 的**推出** *(push-forward)*，也称为**顺像**（*direct image*）$f_*\mathcal{F}$ 为：对 Y 的开子集 U，$(f_*\mathcal{F})(U) := \mathcal{F}(f^{-1}(U))$.

显然 $f_*\mathcal{F}$ 为 Y 上的预层。容易验证，若 $\mathcal{F}$ 是层，则预层 $f_*\mathcal{F}$ 也是层。事实上，顺像 f_* 具有函子性，具体地说，若 $\varphi: \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ 为 X 上的层同态，则 f 诱导了 Y 上的层同态 $f_*\varphi: f_*\mathcal{F} \to f_*\mathcal{G}$，并且使得有关图表交换。换句话说，我们有函子 $f_*: \mathsf{Sh}_X \to \mathsf{Sh}_Y$.

容易验证，$f_*\mathcal{F}$ 在 $y \in Y$ 处的茎条为

$$(f_*\mathcal{F})_y \cong \varinjlim_{y\in V} \mathcal{F}(f^{-1}(V))$$

定义 3.3.4. （层的逆像）

设 $f: X \to Y$ 为拓扑空间之间的连续映射，$\mathcal{G}$ 为 Y 上的层，则定义 X 上的层 $f^{-1}\mathcal{G}$ 为：对 X 的任意开集 U，

$$(f^{-1}\mathcal{G})(U) := \varinjlim_{V\in f(U)} \mathcal{G}(V)$$

其中 V 取遍 Y 中的包含 $f(U)$ 的开子集。称 $f^{-1}\mathcal{G}$ 为 $\mathcal{G}$ 关于 f 的**逆像**（*inverse image*）

显然如此定义的 $f^{-1}\mathcal{G}$ 为 X 上的预层。利用余极限的泛性质，也能验证当 $\mathcal{G}$ 为层时，$f^{-1}\mathcal{G}$ 也为层。容易验证对 Y 中的开集 V，成立

$$(f^{-1}\mathcal{G})(f^{-1}(V)) \cong \mathcal{G}(V)$$

此外对任意 $x \in X$，成立

$$(f^{-1}\mathcal{G})_x \cong \mathcal{G}_{f(x)} \tag{$*$}$$

容易验证 $f^{-1}: \mathsf{Sh}_Y \to \mathsf{Sh}_X$ 为层范畴之间的函子。

注记 3.3.5. （逆像的层空间）

设 $f: X \to Y$ 为拓扑空间之间的连续映射，$\mathcal{G}$ 为 Y 上的层，则有层空间的拓扑同胚

$$\widetilde{f^{-1}\mathcal{G}} \cong X \times_Y \widetilde{\mathcal{G}}$$

也就是说，存在下述纤维积图表：

$$\begin{tikzcd}
\widetilde{f^{-1}\mathcal{G}} \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d] & \widetilde{\mathcal{G}} \arrow[d] \\
X \arrow[r, "f"] & Y
\end{tikzcd}$$

其中映射 α 由 $(*)$ 式诱导。由拓扑空间纤维积的具体构造，容易验证以上。

性质 3.3.6. （伴随对）

设 $f: X \to Y$ 为拓扑空间之间的连续映射，则 f^{-1} 为 f_* 的左伴随函子。也就是说对于任意 $\mathcal{F} \in \mathsf{Sh}_X$ 以及 $\mathcal{G} \in \mathsf{Sh}_Y$，存在（关于 X, Y）自然的一一对应

$$\mathrm{Hom}_{\mathsf{Sh}_X}(f^{-1}\mathcal{G}, \mathcal{F}) \xlongequal{\text{1-1}} \mathrm{Hom}_{\mathsf{Sh}_Y}(\mathcal{G}, f_*\mathcal{F})$$

证明大意. 我们只给出此一一对应的构造，其余细节从略（反复使用各种泛性质）。对于任意的

$$\begin{aligned} \psi:& \quad \mathcal{G} \to f_*\mathcal{F} \\ \varphi:& \quad f^{-1}\mathcal{G} \to \mathcal{F} \end{aligned}$$

首先我们定义 $\alpha: \mathrm{Hom}_{\mathsf{Sh}_Y}(\mathcal{G}, f_*\mathcal{F}) \to \mathrm{Hom}_{\mathsf{Sh}_X}(f^{-1}\mathcal{G}, \mathcal{F})$ 如下：对 X 中开集 U，$[\alpha(\psi)]_U$ 由以下交换图表给出：

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{G}(W) \arrow[r, "\psi_W"] \arrow[d, "\rho"] & (f_*\mathcal{F})(W) = \mathcal{F}(f^{-1}(W)) \arrow[d, "\rho"] \\
\mathcal{G}(V) \arrow[r, "\psi_V"] \arrow[d] & (f_*\mathcal{F})(V) = \mathcal{F}(f^{-1}(V)) \arrow[d, "\rho"] \\
\varinjlim\limits_{V \supseteq f(U)} \mathcal{G}(V) = (f^{-1}\mathcal{G})(U) \arrow[r, dashed, "{[\alpha(\psi)]_U}"] & \mathcal{F}(U)
\end{tikzcd}$$

其中 $W \supseteq V$ 为 Y 中的包含 $f(U)$ 的开集。

再定义 $\beta: \mathrm{Hom}_{\mathsf{Sh}_X}(f^{-1}\mathcal{G}, \mathcal{F}) \to \mathrm{Hom}_{\mathsf{Sh}_Y}(\mathcal{G}, f_*\mathcal{F})$ 如下: 对 Y 中的开集 V，$[\beta(\varphi)]_V$ 由以下交换图表给出：

$$\begin{tikzcd}
(f^{-1}\mathcal{G})(f^{-1}(V)) \arrow[r, "\varphi_{f^{-1}(V)}"] \arrow[d, equal] & \mathcal{F}(f^{-1}(V)) \arrow[d, equal] \\
\mathcal{G}(V) \arrow[r, dashed, "{[\beta(\varphi)]_V}"] & (f_*\mathcal{F})(V)
\end{tikzcd}$$

其余细节从略。 $\square$

3.4 局部自由模层与向量丛

定义 3.4.1. （$\mathcal{A}$-模层）

设 $\mathcal{A}$ 为拓扑空间 X 上的（含幺交换）环层，$\mathcal{M}$ 为 X 上的 *Abel* 群层，称 $\mathcal{M}$ 为 $\mathcal{A}$-模层，如果对 X 的任何开集 $V \supseteq U$，$\mathcal{M}(U)$ 具有 $\mathcal{A}(U)$-模结构 $\mathcal{A}(U) \times \mathcal{M}(U) \to \mathcal{M}(U)$，并且下述图表交换：

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A}(V) \times \mathcal{M}(V) \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{M}(V) \arrow[d] \\ \mathcal{A}(U) \times \mathcal{M}(U) \arrow[r] & \mathcal{M}(U) \end{tikzcd}$$

例如，考虑复流形 X 上的解析函数环层 $\mathcal{O}_X$，则全纯切向量场、全纯微分形式等等，都可视为 $\mathcal{O}_X$-模层。再比如，环层 $\mathcal{A}$ 也有自然的 $\mathcal{A}$-模层结构。一般地，对于拓扑空间 X 上的环层 $\mathcal{A}$，我们有 X 上的 $\mathcal{A}$-模层范畴 $\mathcal{A}\text{-}\mathsf{Mod}_X$，自行定义此范畴中的态射“$\mathcal{A}$-模层同态”。能够验证，$\mathcal{A}\text{-}\mathsf{Mod}_X$ 为 Abel 范畴。

容易验证，对于 $\mathcal{A}$-模层 $\mathcal{M}$，则对任意 $x \in X$，茎条 $\mathcal{M}_x$ 有自然的 $\mathcal{A}_x$-模结构。

定义 3.4.2. （局部自由层）

设 $\mathcal{S}$ 为拓扑空间 X 上的 $\mathcal{A}$-模层，称 $\mathcal{S}$ 为**局部自由 $\mathcal{A}$-模层**，简称**局部自由层**（*locally free sheaf*），如果对任意 $x \in X$，存在 x 的开邻域 U，使得有层同构

$$\mathcal{S}|_U \cong (\mathcal{A}|_U)^{\oplus r}$$

其中 r 为正整数，称为局部自由层 $\mathcal{S}$ 的秩。

特别地，对任意 $x \in X$，存在 x 的开邻域 U，使得 $\mathcal{S}(U) \cong (\mathcal{A}(U))^{\oplus r}$（但是定义中的“层限制”的语言更强）。事实上 $\mathcal{S}$ 为局部自由层当且仅当对任意 $x \in X$，存在 x 的开邻域 U，以及截面 $F_{1,x}, F_{2,x}, ..., F_{r,x} \in \mathcal{S}(U)$，使得对任意 $y \in U$，环同态

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_y^{\oplus r} &\to \mathcal{S}_y \\ (w_1, w_2, ..., w_r) &\mapsto \sum_{i=1}^{r} w_i F_{i,x} \end{aligned}$$

为同构。如此选取的 $\left\{F_{i,x} \in \mathcal{A}(U) \middle| 1 \leq i \leq r\right\}$ 称为 $\mathcal{S}$ 的一个**局部标架**。

记号 3.4.3. （局部自由层局部标架的转移函数）

设 $\mathcal{S}$ 为拓扑空间 X 上的秩为 r 的局部自由 $\mathcal{A}$-模层。取 X 的一族开覆盖 $X=\bigcup_{\alpha\in\mathcal{I}}U_\alpha$，以及对于任意 $\alpha\in\mathcal{I}$，取 $\mathcal{S}$ 在 U_α 上的局部标架

$$F_\alpha := \left\{F_\alpha^i \in \mathcal{S}(U_\alpha)\middle|1\le i\le r\right\}$$

则 F_α 自然诱导了层同构（仍记作 F_α）

$$F_\alpha : \mathcal{A}|_{U_\alpha}^{\oplus r} \xrightarrow{\sim} \mathcal{S}|_{U_\alpha}$$

对于 $\alpha,\beta\in\mathcal{I}$，若 $U_\alpha\cap\mathcal{U}_\beta\neq\varnothing$，则考虑如下图表：

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{A}|_{U_\alpha\cap U_\beta}^{\oplus r} \arrow[r, "F_\alpha"] & \mathcal{S}|_{U_\alpha\cap U_\beta} \arrow[d, equal] \\
\mathcal{A}|_{U_\alpha\cap U_\beta}^{\oplus r} \arrow[u, dashed, "G_{\alpha\beta}"] \arrow[r, "F_\beta"] & \mathcal{S}|_{U_\alpha\cap U_\beta}
\end{tikzcd}$$

称层自同构 $G_{\alpha\beta}:=F_\alpha^{-1}\circ F_\beta$ 为局部标架 F_α 与 F_β 之间的转移函数。

对于 $x\in U_\alpha\cap U_\beta$，

$$(G_{\alpha\beta})_x : \mathcal{A}_x^{\oplus r}\to\mathcal{A}_x^{\oplus r}$$

可以表达为在基 $\left\{(F_\beta^i)_x\middle|1\le i\le r\right\}$ 与 $\left\{(F_\alpha^i)_x\middle|1\le i\le r\right\}$ 下的矩阵，称此矩阵为**转移矩阵**。

对于 $\alpha,\beta,\gamma\in\mathcal{I}$，如果 $U_\alpha\cap U_\beta\cap U_\gamma\neq\varnothing$，则显然有 $\begin{cases} G_{\alpha\alpha}=\mathrm{id}_{\mathcal{A}|_{U_\alpha}^{\oplus r}} \\ G_{\alpha\beta}=G_{\beta\alpha}^{-1} \\ G_{\alpha\beta}\circ G_{\beta\gamma}\circ G_{\gamma\alpha}=\mathrm{id}_{\mathcal{A}|_{U_{\alpha\beta\gamma}}^{\oplus r}}\end{cases}$，其中 $U_{\alpha\beta\gamma}:=U_\alpha\cap U_\beta\cap U_\gamma$.

上述的语言与**向量丛**十分相似，事实上局部自由层是向量丛概念的推广。

重要例子 3.4.4. （拓扑向量丛）

设 X 为拓扑空间，$\mathcal{C}_X$ 为 X 上的连续函数环层，则有自然的一一对应

$$\left\{X\text{ 上的局部自由 }\mathcal{C}_X\text{-模层}\right\}\xlongequal{\text{1-1}}\left\{X\text{ 上的（拓扑）向量丛}\right\}$$

证明. 若 $\mathcal{E}$ 为 X 上的局部自由 $\mathcal{C}_X$-模层，取 X 的一组局部标架覆盖 $X=\bigcup_{\alpha\in\mathcal{I}}U_\alpha$，以及 U_α 上的局部标架 $F_\alpha=\left\{F_\alpha^i\middle|1\le i\le r\right\}$，则对于任意的 $\alpha,\beta\in\mathcal{I}$，若 $U_\alpha\cap U_\beta\neq\varnothing$，则对任意 $x\in U_\alpha\cap U_\beta$，

转移函数 $(G_{\alpha\beta})_x$ 在相应标架上的矩阵（仍记为 $(G_{\alpha\beta})_x$）给出了映射

$$\begin{array}{rcl} U_\alpha \cap U_\beta & \to & \mathrm{GL}(r, \mathbb{C}) \\ x & \mapsto & (G_{\alpha\beta})_x \end{array}$$

易验证该映射连续，并且满足向量丛转移函数的相容条件，从而这些转移函数可以粘合成一个向量丛。反之，对于拓扑向量丛 $E \to X$，该向量丛的截面层显然为局部自由 $\mathcal{C}_X$-模层。容易验证上述给出的对应是互逆的，从而得到一一对应。 □

例子 3.4.5. （全纯向量丛）

设 X 为复流形，$\mathcal{O}_X$ 为 X 上的全纯函数环层，则类似地有一一对应

$$\left\{X \text{ 上的局部自由 } \mathcal{O}_X\text{-模层}\right\} \xlongequal{\text{1-1}} \left\{X \text{ 上的全纯向量丛}\right\}$$

光滑流形上的光滑向量丛也完全类似。

最后，需要注意局部自由层范畴不是 Abel 范畴：

重要例子 3.4.6. （摩天大厦层）

考虑拓扑空间（复流形）$X = \mathbb{C}$，X 上的局部自由 $\mathcal{O}_X$-模层 $\mathcal{S}_1 = \mathcal{S}_2 := \mathcal{O}_X$. 考虑 $\mathcal{O}_X$-模层同态 $\varphi : \mathcal{S}_1 \to \mathcal{S}_2$ 为：对任意开集 $U \subseteq X$，

$$\begin{array}{rcl} \varphi_U : \mathcal{S}_1(U) & \to & \mathcal{S}_2(U) \\ f(z) & \mapsto & zf(z) \end{array}$$

则其余核层 $\operatorname{coker}\varphi$ **不是**局部自由 $\mathcal{O}_X$-模层。

容易验证，对 X 中的开集 U，成立 $\operatorname{coker}\varphi(U) \cong \begin{cases} \mathbb{C} & (0 \in U) \\ 0 & (0 \notin U) \end{cases}$，明显不是局部自由层。此层称为**摩天大厦层**（skyscraper sheaf）。

3.5 凝聚层及其基本性质

定义 3.5.1. （局部有限生成 $\mathcal{A}$-模层）

设 $\mathcal{M}$ 为拓扑空间 X 上的 $\mathcal{A}$-模层，称 $\mathcal{A}$ 是 **局部有限生成**的，若对任意 $x \in X$，存在 x 的邻域 U，以及正整数 r，使得有层同态短正合列

$$\mathcal{A}|_U^{\oplus r} \twoheadrightarrow \mathcal{M}|_U \to 0$$

或者等价地，存在 x 的开邻域 U，以及截面 $F_1, F_2, ..., F_r \in \mathcal{M}(U)$，使得对任意 $y \in U$，$\left\{(F_i)_y \in \mathcal{M}_y \middle| 1 \le i \le r\right\}$ 是 $\mathcal{M}_y$ 的一组 $\mathcal{A}_x$-模生成元。

显然，局部自由层一定是局部有限生成的。

定义 3.5.2. （关系层）

设 $\mathcal{M}$ 是拓扑空间 X 上的 $\mathcal{A}$-模层，对于 X 的开集 U，以及 $F_1, F_2, ..., F_r \in \mathcal{M}(U)$，称层同态

$$\begin{aligned} \varphi : \mathcal{A}|_U^{\oplus r} &\to \mathcal{M}|_U \\ (g_1, g_2, ..., g_r) &\mapsto \sum_{i=1}^{r} g_i F_i \end{aligned}$$

的核层 $\mathcal{R}(F_1, F_2, ..., F_r) := \ker \varphi$ 为截面 $F_1, F_2, ..., F_r$ 的**关系层**。

这个定义当中并不要求 φ 为层满同态，也就是说 $\mathcal{M}$ 未必为局部有限生成的。只要给定若干局部截面，就可以定义它们的关系层。

定义 3.5.3. （凝聚层）

对于拓扑空间 X 上的 $\mathcal{A}$-模层 $\mathcal{M}$，称 $\mathcal{A}$ 为 **凝聚层**（*coherent sheaf*），如果：

（*1*）$\mathcal{A}$ 为局部有限生成的；

（*2*）对 X 的任意开集 U，以及任意截面 $F_1, F_2, ..., F_r \in \mathcal{M}(U)$，关系层 $\mathcal{R}(F_1, F_2, ..., F_r)$ 也是局部有限生成的。

通过适当缩小 $x \in X$ 的邻域 U，容易验证 $\mathcal{M}$ 是凝聚层一定是**局部有限呈示**的，即对任意 $x \in X$，存在 x 的开邻域 U，以及正整数 p, q，使得存在 U 上的 $\mathcal{A}|_U$-模层正合列

$$\mathcal{A}|_U^{\oplus p} \to \mathcal{A}|_U^{\oplus q} \twoheadrightarrow \mathcal{M}|_U \to 0$$

由定义容易知道，**凝聚层的局部有限生成子层也是凝聚的**。

此外，对于 X 上的交换环层 $\mathcal{A}$，称 $\mathcal{A}$ 为局部有限生成的（切转：凝聚的），如果 $\mathcal{A}$ 作为 $\mathcal{A}$-模层是局部有限生成的（切转：凝聚的）。

凝聚层的下列基本性质是纯线性代数的：

性质 3.5.4. （凝聚层的基本性质）

设 $\mathcal{A}$ 为拓扑空间 X 上的交换环层，$\mathcal{F}, \mathcal{G}$ 为凝聚 $\mathcal{A}$-模层，$\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ 为 $\mathcal{A}$-模层同态，则 $\ker \varphi, \operatorname{Im} \varphi, \operatorname{coker} \varphi$ 均为凝聚 $\mathcal{A}$-模层。

证明. 显然 $\operatorname{Im}\varphi$ 是局部有限生成的，从而为凝聚层 $\mathcal{G}$ 的局部有限生成子层，故也为凝聚层。再看 $\ker\varphi$ 作为凝聚层 $\mathcal{F}$ 的子层，只需要说明 $\ker\varphi$ 是局部有限生成的。对任意 $x\in X$，由于 $\mathcal{F}$ 局部有限生成，取 x 的开邻域 U，以及截面 $F_1,F_2,...,F_q\in\mathcal{F}(U)$ 为 $\mathcal{F}|_U$ 的生成元，于是有 $\varphi(F_1),\varphi(F_2),...,\varphi(F_q)\in\mathcal{G}(U)$. 由 $\mathcal{G}$ 的凝聚性，取关系层 $\mathcal{R}(\varphi(F_1),\varphi(F_2),...,\varphi(F_q))$ 的一组生成元 $G_1,G_2,...,G_r\in\mathcal{A}(U)^{\oplus q}$，其中 $G_i=(G_i^1,G_i^2,...,G_i^q)$，即有以 $\mathcal{A}(U)$ 为系数的矩阵 (G_i^j)，其中 $1\le i\le r, 1\le j\le q$. 则容易验证 $\left\{\sum\limits_{j=1}^{q}G_i^jF_j\middle|1\le i\le r\right\}$ 是 $\ker\varphi|_U$ 的一组生成元，因此 $\ker\varphi$ 是局部有限生成的，进而由 $\mathcal{F}$ 的凝聚性知 $\ker\varphi$ 也是凝聚的。

再看 $\operatorname{coker}\varphi$ 的凝聚性。$\operatorname{coker}\varphi$ 作为局部有限生成层 $\mathcal{G}$ 的商层，显然也是局部有限生成的。然后对 X 的任意开集 U，以及任意截面 $G_1,G_2,...,G_q\in\operatorname{coker}\varphi(U)$，断言关系层 $\mathcal{R}(G_1,G_2,...,G_q)\subseteq\mathcal{A}|_U^{\oplus q}$ 是局部有限生成的。对于任意 $x\in U$，取 x 在 U 中的（足够小）邻域 U'，$G_i(1\le i\le q)$ 在 U' 上的限制仍记为 G_i. 取截面 $G_i\in\operatorname{coker}\varphi(U')$ 在 $\mathcal{G}$ 中的代表元 $\widetilde{G}_i\in\mathcal{G}(U')$，再取 $F_1,F_2,...,F_p\in\mathcal{F}(U')$ 为 $\mathcal{F}|_{U'}$ 的生成元，考虑关系层

$$\mathcal{R}(F_1,...,F_p;\widetilde{G}_1,...,\widetilde{G}_q)\subseteq\mathcal{A}|_{U'}^{\oplus(p+q)}$$

由 $\mathcal{G}$ 的凝聚性（不断缩小 U'），取其一组生成元

$$\left\{H_i=(H_i^1,H_i^2,...,H_i^{p+q})\in\mathcal{A}(U')^{\oplus(p+q)}\middle|1\le i\le r\right\}$$

则容易验证（纯线性代数，细节略）

$$\left\{\widetilde{H}_i=(\pi(H_i^{p+1}),...,\pi(H_i^{p+q}))\in\mathcal{A}(U')^{\oplus q}\middle|1\le i\le r\right\}$$

是关系层 $\mathcal{R}(G_1,G_2,...,G_q)|_{U'}$ 的生成元（其中 $\pi:\mathcal{G}\to\operatorname{coker}\varphi$ 为典范投影），从而关系层 $\mathcal{R}(G_1,G_2,...,G_q)$ 是局部有限生成的，因此 $\operatorname{coker}\varphi$ 凝聚。 □

注记 3.5.5. 对于拓扑空间 X，$\mathcal{A}$ 为 X 上的交换环层，记 $\mathcal{A}\text{-}\mathsf{Coh}_X$ 为 X 上的凝聚 $\mathcal{A}$-模层范畴，这是 $\mathcal{A}\text{-}\mathsf{Mod}_X$ 的子范畴。上述性质表明 $\mathcal{A}\text{-}\mathsf{Coh}_X$ 是 *Abel* 范畴。

性质 3.5.6. 设 $\mathcal{A}$ 为拓扑空间 X 上的交换环层，则对于 $\mathcal{A}$-模层同态短正合列

$$0\to\mathcal{F}_1\to\mathcal{F}_2\to\mathcal{F}_3\to0$$

此正合列中任何两个为凝聚层均可推出第三个也为凝聚层。

证明. 只需再证明 $\mathcal{F}_1,\mathcal{F}_3$ 凝聚能推出 $\mathcal{F}_2$ 凝聚。先断言 $\mathcal{F}_2$ 是局部有限生成的。对任意 $x\in X$，取 x 的（足够小的）开邻域 U，并且取 $F_1,F_2,...,F_p\in\mathcal{F}_1(U)$ 为 $\mathcal{F}_1|_U$ 的生成元，再取 $G_1,G_2,...,G_q\in\mathcal{F}_3(U)$ 为 $\mathcal{F}_3|_U$ 的生成元。将 G_j 在 $F_2(U)$ 中的代表元记为 $\widetilde{G}_j\,(1\le j\le q)$，则容易验证 $\{F_1,F_2,...,F_p;\widetilde{G}_1,\widetilde{G}_2,...,\widetilde{G}_q\}$ 为 $\mathcal{F}_2|_U$ 的一组生成元。从而 $\mathcal{F}_2$ 是局部有限生成的。

对 X 的任意开集 U，以及 $S_1, S_2, ..., S_r \in \mathcal{F}_2(U)$，断言关系层 $\mathcal{R}(S_1, S_2, ..., S_r)$ 是局部有限生成的。任取 $x \in U$，记截面 $S_1, ..., S_r$ 在 $\mathcal{F}_3(U)$ 上的投影分别为 $\overline{S}_1, ..., \overline{S}_r$. 由 $\mathcal{F}_3$ 的凝聚性，$\mathcal{R}(\overline{S}_1, ..., \overline{S}_r)$ 是局部有限生成的，从而取 x 在 U 中的（足够小且不妨不断缩小的）开邻域 U'，以及 $\mathcal{R}(\overline{S}_1, ..., \overline{S}_r)|_{U'}$ 的生成元矩阵

$$H := \begin{pmatrix} H_1^1 & \cdots & H_t^1 \\ \vdots & & \vdots \\ H_1^r & \cdots & H_t^r \end{pmatrix} \in \mathcal{A}(U')^{r \times t}$$

即每个 $H_j^i \in \mathcal{A}(U')$，$H$ 中的列向量 $\in \mathcal{R}(\overline{S}_1, ..., \overline{S}_r)(U')$，矩阵 H 的 r 个列向量构成 $\mathcal{R}(\overline{S}_1, ..., \overline{S}_r)|_{U'}$ 的生成元。再令

$$(F_1, F_2, ..., F_t) := (S_1, S_2, ..., S_r)H$$

则易验证 $(F_1, F_2, ..., F_t) \in \mathcal{F}_1(U')^{\oplus t}$. 由 $\mathcal{F}_1$ 的凝聚性，取 $\mathcal{R}(F_1, ..., F_t)|_{U'}$ 的生成元矩阵

$$K := \begin{pmatrix} K_1^1 & \cdots & K_s^1 \\ \vdots & & \vdots \\ K_1^t & \cdots & K_s^t \end{pmatrix} \in \mathcal{A}(U')^{t \times s}$$

则容易验证 HK 为 $\mathcal{R}(S_1, ..., S_r)|_{U'}$ 的生成元矩阵，从而 $\mathcal{R}(S_1, ..., S_r)$ 是局部有限生成的。

综上所述，若 $\mathcal{F}_1$ 与 $\mathcal{F}_3$ 凝聚，则 $\mathcal{F}_2$ 也凝聚。 □

推论 3.5.7. *设 $\mathcal{F}$ 是拓扑空间 X 上的凝聚 $\mathcal{A}$-模层，则*

（1）任意 $n \geq 1$，$\mathcal{F}^{\oplus n}$ 也是凝聚 $\mathcal{A}$-模层；

（2）对 X 的任意开集 U，以及任意 $F_1, F_2, ..., F_p \in \mathcal{F}(U)$，则关系层 $\mathcal{R}(F_1, F_2, ..., F_p)$ 也是凝聚的（$\mathcal{A}|_U$-模层）。

证明. **(1)**注意短正合列 $0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{F} \oplus \mathcal{F}^{\oplus(n-1)} \to \mathcal{F}^{\oplus(n-1)} \to 0$，反复利用性质3.5.6作归纳即可。

(2)由（1）知 $(\mathcal{F}|_U)^{\oplus p}$ 是凝聚的，因此 $\mathcal{R}(F_1, F_2, ..., F_p)$ 作为 $(\mathcal{F}|_U)^{\oplus p}$ 的局部有限生成子层，也是凝聚的。 □

推论 3.5.8. *若拓扑空间 X 上的 $\mathcal{A}$-模层 $\mathcal{M}$ 是凝聚的，并且 $\mathcal{M}$ 的子层 $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ 也是凝聚的，那么 $\mathcal{F} \cap \mathcal{G}$ 也为凝聚 $\mathcal{A}$-模层。*

证明. 考虑层同态 $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{M}/\mathcal{G}$ 为如下复合：

$$\mathcal{F} \hookrightarrow \mathcal{M} \twoheadrightarrow \mathcal{G}$$

注意 $\mathcal{F}$ 与 $\mathcal{M}/\mathcal{G}$ 都是凝聚的，再注意 $\mathcal{F} \cap \mathcal{G} \cong \ker \varphi$，因此 $\mathcal{F} \cap \mathcal{G}$ 也凝聚。 □

3.6 Oka 凝聚定理

本节介绍多复变函数论、复几何中的重要结果：**对于复流形 X，解析函数环层 $\mathcal{O}_X$ 是凝聚层**。这也是凝聚层的重要例子。注意凝聚性是局部性质，于是我们不妨 $X = \mathbb{C}^n$. 我们只需要证明，对 $\mathbb{C}^n$ 的任意开子集 U，以及任意 $F_1, F_2, ..., F_q \in \mathcal{O}_X(U)$，关系层 $\mathcal{R}(F_1, F_2, ..., F_q)$ 是局部有限生成的。

现在，对任意 $x \in X$，由于 $\mathcal{O}_{X,x}$ 为诺特环，从而 $\mathcal{R}(F_1, ..., F_q)_x \subseteq \mathcal{O}_{X,x}^{\oplus q}$ 为有限生成 $\mathcal{O}_{X,x}$-模。但这与希望要证的"$\mathcal{R}(F_1, ..., F_q)$ 局部有限生成"还差些东西。我们暂时只能说明存在 x 的邻域 $U' \subseteq U$，以及有限多个 $\mathcal{O}_X^{\oplus q}$ 在 U' 的截面，使得它们在 x 的芽生成 $\mathcal{R}(F_1, ..., F_q)_x$；但我们希望**对 x 附近的任何点 y**，这些截面在 y 处的芽也生成 $\mathcal{R}(F_1, ..., F_q)_y$——这是不显然的。

引理 3.6.1. （重要引理）

对于 $n \geq 2$，记 $\mathbb{C}^n = \left\{(z', z_n) \middle| z' = (z_1, ..., z_{n-1}) \in \mathbb{C}^{n-1}, z_n \in \mathbb{C}\right\}$，设 $F_1, F_2, ..., F_q$ 为定义在 $(0,0) \in \mathbb{C}^n$ 附近的解析函数，则存在 $(0,0)$ 的邻域 $\triangle := \triangle' \times \triangle_n$，其中 $\triangle'$ 与 $\triangle_n$ 分别为 $\mathbb{C}^{n-1}$ 与 $\mathbb{C}$ 中的以原点为中心的多圆柱，使得对任意 $w = (w', w_n) \in \triangle$，$\left\{(K^1, K^2, ..., K^q) \in \mathcal{O}_{\triangle,w}^{\oplus q} \middle| K^j \in \mathcal{K}, \forall 1 \leq j \leq q\right\}$ 是 $\mathcal{O}_{\triangle,w}$-模 $\mathcal{R}(F_1, F_2, ..., F_q)_w$ 的一组生成元，其中

$$\mathcal{K} := \left\{f(z', z) \in \mathcal{O}_{\triangle',w'}[z_n] \middle| \deg_{z_n} f \leq \mu\right\}$$

$$\mu := \max\left\{\operatorname{Ord}_{z_n}(F_k)_0 \middle| 1 \leq k \leq q\right\}$$

证明. 对 $F_1, F_2, ..., F_q$ 在原点处使用 Weierstrass 预备定理，适当乘以原点附近的可逆解析函数（不会改变 $\mathcal{R}(F_1, ..., F_q)$ 在原点的足够小邻域的限制），不妨设 $F_1, ..., F_q \in \mathcal{O}_{\triangle',0}[z_n]$ 为定义在原点附近的关于 z_n 的 Weieretrass 多项式。此外，不妨

$$\deg_{z_n} F_q = \mu$$

Step 1 对于 $w = (w', w_n) \in \triangle$，关于 z_n 的 Weierstrass 多项式 F_q （通过平移）自然也视为关于 $(z_n - w_n)$ 的 Weierstrass 多项式（次数仍为 μ）。对 F_q 在 w 处使用 Weierstrass 预备定理，令 $F_q = f'f''$，其中 $f' \in \mathcal{O}_{\triangle',w'}[z_n]$ 为关于 $(z_n - w_n)$ 的 Weierstrass 多项式，$f'' \in \mathcal{O}_{\triangle,w}$ 在 w 附近可逆。注意 F_q 与 f' 都为 Weierstrass 多项式，从而由引理1.4.3可知 $f'' \in \mathcal{O}_{\triangle',w'}[z_n]$ 为关于 $(z_n - w_n)$ 的多项式。分别记 μ', μ'' 为多项式 f', f'' 关于 z_n 的次数，则 $\mu = \mu' + \mu''$.

Step 2 我们习惯将 $\mathcal{R}(F_1, F_2, ..., F_q)_w$ 中的元素记成列向量。对于任意的 $\begin{pmatrix} g^1 \\ g^2 \\ \vdots \\ g^q \end{pmatrix} \in \mathcal{R}(F_1, F_2, ..., F_q)_w$，对于 $1 \leq j \leq q-1$，将 g^j 除以 Weierstrass 多项式 $F_{q,w}$，由 Weierstrass 除法定理，得

$$g^j = F_{q,w}T^j + R^j \qquad (1 \leq j \leq q-1)$$

其中 $T^j \in \mathcal{O}_{\triangle,w}$ 以及 $R^j \in \mathcal{O}_{\triangle',w'}[z_n]$，且 $\deg_{z_n} R^j < \mu'$. 而对于 $j = q$，令

$$R^q := g^q + \sum_{j=1}^{q-1} F_{j,w} T^j$$

则容易验证

$$\begin{pmatrix} g^1 \\ g^2 \\ \vdots \\ g^q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{q,w} & & & \\ & F_{q,w} & & \\ & & \ddots & \\ & & & F_{q,w} \\ -F_{1,w} & -F_{2,w} & \cdots & -F_{q-1,w} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T^1 \\ T^2 \\ \vdots \\ T^{q-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} R^1 \\ R^2 \\ \cdots \\ R^q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{q,w} & & & R^1 \\ & \ddots & & \vdots \\ & & F_{q,w} & R^{q-1} \\ -F_{1,w} & \cdots & -F_{q-1,w} & R^q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T^1 \\ \vdots \\ T^{q-1} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Step 3 我们得到了 q 阶方阵 $G := \begin{pmatrix} F_{q,w} & & & R^1 \\ & \ddots & & \vdots \\ & & F_{q,w} & R^{q-1} \\ -F_{1,w} & \cdots & -F_{q-1,w} & R^q \end{pmatrix}$. 容易验证 G 的每一列都位于 $\mathcal{R}(F_1, F_2, ..., F_q)_w$ 之中；并且除了第 (q,q)-分量 $G_q^q = R_q$，G 的其余矩阵元都位于 $\mathcal{K}$ 中，即为次数不超过 μ 的关于 z_n 的 $\mathcal{O}_{\triangle',w'}$-系数的多项式。最后，我们适当调整矩阵 G 的最后一列。

注意到 G 的第 q 列位于 $\mathcal{R}(F_1, F_2, ..., F_q)_w$ 之中，以及 $F_q = f'f''$，从而

$$\sum_{j=1}^{q-1} F_{j,w} R^j + f'f'' R^q = 0$$

注意 $\deg_{z_n}\left(\sum_{j=1}^{q-1} F_{j,w} R^j\right) < \mu + \mu'$，因此 $f'f''R^q \in \mathcal{O}_{\triangle',w'}[z_n]$ 并且 $\deg_{z,n}(f'f''R^q) < \mu + \mu'$. 又因为 f' 是关于 z_n 的次数为 μ' 的 Weierstrass 多项式，从而由引理1.4.3可知，$f''R^q \in \mathcal{O}_{\triangle',w'}[z_n]$，并且 $\deg_{z_n}(f''R^q) < \mu$. 从而考虑

$$\begin{pmatrix} g^1 \\ g^2 \\ \vdots \\ g^q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{q,w} & & & f''R^1 \\ & \ddots & & \vdots \\ & & F_{q,w} & f''R^{q-1} \\ -F_{1,w} & \cdots & -F_{q-1,w} & f''R^q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T^1 \\ \vdots \\ T^{q-1} \\ 1/f'' \end{pmatrix}$$

易知上式中的矩阵的每个矩阵元都位于 $\mathcal{K}$，并且每一列都位于 $\mathcal{R}(F_1, F_2, ..., F_q)_w$，因此 $\begin{pmatrix} g^1 \\ \vdots \\ g^n \end{pmatrix}$ 由上述矩阵（q 个列向量）$\mathcal{O}_{\triangle,w}$-生成。从而证毕。 $\square$

定理 3.6.2. （*Oka* 凝聚定理）

对于复流形 X，X 上的解析函数环层 $\mathcal{O}_X$ 是凝聚的。

证明. 如之前所述，不妨 $X=\mathbb{C}^n$，以及对于任意开集 $U\subseteq\mathbb{C}^n$ 以及任意 $F_1,...,F_q\in\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}(U)$，我们不妨 U 是以原点为中心的多圆柱区域，不妨 $F_1,...,F_q$ 为关于 z_n 的 Weierstrass 多项式。

对 $X=\mathbb{C}^n$ 的维数 n 归纳。$n=0$ 时平凡。对于 $n\geq 1$，如果 $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^{n-1}}$ 是凝聚的，则对于 $(0,0)\in\mathbb{C}^{n-1}\times\mathbb{C}$ 的多圆柱邻域 $\triangle=\triangle'\times\triangle_n$，以及 $F_1,F_2,...,F_q\in\mathcal{O}_{\triangle'}[z_n]$ 为 Weierstrass 多项式，它们关于 z_n 的最高次数记为 μ. 只需证 $\mathcal{F}(F_1,F_2,...,F_q)$ 局部有限生成。对于任意的 $w\in\triangle$，以及 $\begin{pmatrix}g^1\\ \vdots\\ g^q\end{pmatrix}\in\mathcal{R}(F_1,F_2,...,F_q)_w$，由重要引理3.6.1 可知，存在 $q\times(\mu+1)$ 矩阵 $U=(U_\alpha^j)_{\substack{1\leq j\leq q\\ 0\leq\alpha\leq\mu}}$，使得

$$\begin{pmatrix}g^1\\ \vdots\\ g^q\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}U_0^1&\cdots&U_\mu^1\\ \vdots&&\vdots\\ U_0^q&\cdots&U_\mu^q\end{pmatrix}\begin{pmatrix}z_n^0\\ \vdots\\ z_n^\mu\end{pmatrix}$$

其中 $U_\alpha^j\in\mathcal{O}_{\triangle',w'}$，视为定义在 $w'\in\triangle'$ 附近的解析函数，自然也视为定义在 $w\in\triangle$ 附近的（不显含 z_n 的）解析函数。注意 $F_k\in\mathcal{O}_{\triangle'}[z_n]$ 也为关于 z_n 的（次数不超过 μ 的）（Weierstrass）多项式，从而

$$(F_1,\cdots F_q)=(z_n^0,\cdots z_n^\mu)\begin{pmatrix}H_1^0&\cdots&H_q^0\\ \vdots&&\vdots\\ H_1^\mu&\cdots&H_q^\mu\end{pmatrix}$$

即得 $(\mu+1)\times q$ 的矩阵 H，H 的每个矩阵元都位于 $\mathcal{O}_{\triangle'}$ 之中，当然也是定义在 $w\in\triangle$ 附近的（不显含 z_n 的）解析函数。注意到

$$0=(F_1,\cdots,F_q)\begin{pmatrix}g^1\\ \vdots\\ g^q\end{pmatrix}=(z_n^0,\cdots z_n^\mu)HU\begin{pmatrix}z_n^0\\ \vdots\\ z_n^\mu\end{pmatrix}=:\sum_{k=0}^{2\mu}L_k(U)z_n^k$$

因此比较 z_n 各次幂的系数，知 $L_k(U)=0,\forall 0\leq k\leq 2\mu$.

我们将矩阵 U 视为层 $\mathcal{O}_{\triangle'}^{\oplus q(\mu+1)}$ 在 w' 附近的截面，对于 $0\leq k\leq 2\mu$，L_k 为层同态

$$L_k:\mathcal{O}_{\triangle'}^{\oplus q(\mu+1)}|_{\Omega'}\to\mathcal{O}_{\triangle'}|_{\Omega'}$$

并且 L_k 只与 $F_1,F_2,...,F_q$ 有关。其中 Ω' 为 w' 在 $\triangle'$ 中的（足够小、不断缩小的）邻域。

由归纳假设，$\mathcal{O}_{\triangle'}$ 是凝聚的，因此 $\mathcal{O}_{\triangle'}^{\oplus q(\mu+1)}$ 也凝聚，因此对任意 $0\leq k\leq 2\mu$，核层 $\ker L_k$ 也凝聚，从而 $\bigcap_{k=0}^{2\mu}\ker L_k$ 凝聚，故局部有限生成。因此存在截面 $U_1,U_2,...,U_N\in\mathcal{O}_{\triangle'}^{\oplus q(\mu+1)}(\Omega')$，

使得 $\{U_1, U_2, ..., U_N\}$ 为 $\mathcal{O}_{\triangle'}^{\oplus q(\mu+1)}|_{\Omega'}$ 的子层 $\bigcap\limits_{k=0}^{2\mu} \ker L_k$ 的生成元。其中对于 $1 \le l \le N$，U_l 为 $q \times (\mu+1)$ 矩阵，其矩阵元取值于 $\mathcal{O}_{\triangle'}(\Omega')$.

容易验证，以下 N 个 q 维列向量

$$\left\{ U_l \begin{pmatrix} z_n^0 \\ \vdots \\ z_n^\mu \end{pmatrix} \middle| 1 \le l \le N \right\}$$

构成关系层 $\mathcal{R}(F_1, ..., F_q)|_{\Omega'}$ 的一组生成元。这就证明了 $\mathcal{O}_\triangle$ 的凝聚性，证毕。 $\square$

3.7 层的上同调

本节开始，我们讨论拓扑空间 X 上的 $\mathcal{A}$-模层，即考虑范畴 $\mathcal{A}\text{-}\mathsf{Mod}_X$. 先简单回顾一些同调代数的记号、结论。对于 X 上的 $\mathcal{A}$-模层 $\mathcal{F}$，$\mathcal{F}$ 的**消解** (resolution) 是指形如下述的 $\mathcal{A}\text{-}\mathsf{Mod}_X$ 中的正合序列：

$$0 \to \mathcal{F} \xrightarrow{j} \mathcal{G}_0 \xrightarrow{d^0} \mathcal{G}_1 \xrightarrow{d^1} \cdots$$

注意范畴 Ab 是 Abel 范畴，因此我们可以考虑该范畴中的**内射对象**（injective object），即“**内射层**”（injective sheaf）。具体地，Abel 群层 $\mathcal{F}$ 是内射的，若对任意的层单同态 $i : \mathcal{F} \hookrightarrow \mathcal{G}$，以及任意的层同态 $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{H}$，都存在层同态 $\psi : \mathcal{G} \to \mathcal{H}$，使得 $\varphi = \psi \circ i$，如下图：

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F} \arrow[r, hook, "i"] \arrow[dr, "\varphi"'] & \mathcal{G} \arrow[d, dashed, "\exists \psi"] \\ & \mathcal{H} \end{tikzcd}$$

我们承认以下事实：

定理 3.7.1. 对于拓扑空间 X，以及 X 上的交换环层 $\mathcal{A}$，范畴 $\mathcal{A}\text{-}\mathsf{Mod}_X$ 是**足够内射**的，即对于 X 上任意的 $\mathcal{A}$-模层 $\mathcal{F}$，都存在内射层 $\mathcal{I}$，以及层单同态 $\mathcal{F} \hookrightarrow \mathcal{I}$.

由同调代数，容易知道 $\mathcal{A}\text{-}\mathsf{Mod}_X$ 足够内射，当且仅当对任何 $\mathcal{A}$-模层 $\mathcal{F}$，都存在 $\mathcal{F}$ 的**内射消解**（injective resolution）

$$0 \to \mathcal{F} \hookrightarrow \mathcal{I}^0 \to \mathcal{I}^1 \to \mathcal{I}^2 \to \cdots$$

即上述序列正合，并且 $\mathcal{I}_k$ 为内射层（$\forall k \ge 0$）。

定义 3.7.2. （层的上同调）

对于拓扑空间 X 上的 $\mathcal{A}$-模层 $\mathcal{F}$，任取 $\mathcal{F}$ 的一个内射消解 $0 \to \mathcal{F} \hookrightarrow \mathcal{I}^{\bullet}$：

$$0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{I}^0 \xrightarrow{\mathrm{d}} \mathcal{I}^1 \xrightarrow{\mathrm{d}} \mathcal{I}^2 \to \cdots$$

将函子 $\Gamma(X, -)$（见注记*3.3.2*）作用于其上，诱导了如下的 $\mathcal{A}(X)$-模上链复形

$$0 \to \Gamma(X, \mathcal{F}) \hookrightarrow \Gamma(X, \mathcal{I}^0) \xrightarrow{\mathrm{d}} \Gamma(X, \mathcal{I}^1) \xrightarrow{\mathrm{d}} \Gamma(X, \mathcal{I}^2) \to \cdots$$

定义 $\mathcal{F}$ 的第 q 阶上同调群

$$H^q(X, \mathcal{F}) := H^q(\Gamma(X, \mathcal{I}^{\bullet}))$$

由函子 $\Gamma(X, -)$ 的左正合性可知，

$$H^0(X, \mathcal{F}) = \frac{\ker(\mathrm{d} : \Gamma(X, \mathcal{I}^0) \to \Gamma(X, \mathcal{I}^1))}{\mathrm{Im}(0 \to \Gamma(X, \mathcal{I}^0))} \cong \mathrm{Im}(\Gamma(X, \mathcal{F}) \hookrightarrow \Gamma(X, \mathcal{I}^0)) \cong \Gamma(X, \mathcal{F}) = \mathcal{F}(X)$$

即为 $\mathcal{F}$ 的整体截面。

注记 3.7.3. 由同调代数的有关知识，上述 $H^q(X, \mathcal{F})$ 是良定的，与 $\mathcal{F}$ 的内射消解无关。

此外，若 X 上有 $\mathcal{A}$-模层短正合列 $0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{G} \to \mathcal{H} \to 0$，则由同调代数的有关结果，可分别取 $\mathcal{F}, \mathcal{G}, \mathcal{H}$ 的适当的内射消解 $0 \to \mathcal{X} \hookrightarrow \mathcal{I}^{\bullet}_{\mathcal{X}}$ ($\mathcal{X} = \mathcal{F}, \mathcal{G}, \mathcal{H}$)，使得存在链复形正合列

$$0 \to \mathcal{I}^{\bullet}_{\mathcal{F}}(X) \to \mathcal{I}^{\bullet}_{\mathcal{G}}(X) \to \mathcal{I}^{\bullet}_{\mathcal{H}}(X) \to 0$$

该链复形短正合列诱导相应同调的长正合列，即有：

定理 3.7.4. 设 X 为拓扑空间，则 X 上的 $\mathcal{A}$-模层短正合列 $0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{G} \to \mathcal{H} \to 0$ 诱导了层上同调的长正合列：

$$0 \to H^0(X, \mathcal{F}) \to H^0(X, \mathcal{G}) \to H^0(X, \mathcal{H}) \to H^1(X, \mathcal{F}) \to \cdots$$

层上同调的定义简单，但是难以具体计算。我们希望有更加方便的计算层上同调的方法。

定义 3.7.5. （松弛层）

称拓扑空间 X 上的 $\mathcal{A}$-模层 $\mathcal{S}$ 是**松弛的** (*flabby* 或 *flasque*)，如果对 X 的任意开集 U，限制同态 $\mathcal{S}(X) \to \mathcal{S}(U)$ 是满射。

对于 $\mathcal{A}$-模层 $\mathcal{F}$，望文生义，$\mathcal{F}$ 的**松弛消解**（flabby resolution）是指层正合列

$$0 \to \mathcal{F} \hookrightarrow \mathcal{S}^0 \to \mathcal{S}^1 \to \mathcal{S}^2 \to \cdots$$

其中每个 $\mathcal{S}^k (k \geq 0)$ 都是松弛层。

我们承认如下事实：

定理 3.7.6. 对于 X 上的 $\mathcal{A}$-模层 $\mathcal{F}$，若 $0 \to \mathcal{F} \hookrightarrow \mathcal{S}^\bullet$ 为 $\mathcal{F}$ 的一个松弛消解，则成立

$$H^\bullet(X, \mathcal{F}) \cong H^q(\Gamma(X, \mathcal{S}^\bullet))$$

特别地，若 $\mathcal{F}$ 为松弛层，则 $H^q(X, \mathcal{F}) = 0$ 对任意 $q \geq 1$ 成立。

也就是说，我们可以利用松弛消解来计算层上同调。然而，松弛消解一定存在吗？答案是肯定的。

记号 3.7.7. （典范松弛层）

设 $\mathcal{F}$ 为 X 上的 $\mathcal{A}$-模层，对于 X 的开集 U，记

$$\mathrm{God}(\mathcal{F})(U) := \left\{ f : U \to \coprod_{x \in U} \mathcal{F}_x \middle| f(x) \in \mathcal{F}_x, \forall x \in U \right\}$$

则 $\mathrm{God}(\mathcal{F})$ 为 X 上的松弛层，并且有典范的层单同态

$$j : \mathcal{F} \hookrightarrow \mathrm{God}(\mathcal{F})$$

称 $\mathrm{God}(\mathcal{F})$ 为关于 $\mathcal{F}$ 的**典范松弛层**，也称为 ***Godement* 构造**。

证明. $\mathrm{God}(\mathcal{F})$ 的松弛性几乎显然。典范同态 $j : \mathcal{F} \hookrightarrow \mathrm{God}(\mathcal{F})$ 如下给出：对 X 的任意开子集 U，

$$\begin{array}{rcl} j(U) : \mathcal{F}(U) & \to & \mathrm{God}(\mathcal{F})(U) \\ s & \mapsto & (x \mapsto s_x) \end{array}$$

易知如此定义的 j 是层单同态。 □

也就是说 $\mathcal{A}\text{-}\mathsf{Mod}_X$ 中的任何对象都是某个松弛层的子层，即“足够松弛”。从而由同调代数的标准技术（与“足够内射 $\iff$ 存在内射消解”完全一样）可知，X 上的任何 $\mathcal{A}$-模层都存在松弛消解。

在一些更特殊的情形下，我们可以去计算某些层的上同调。回顾：设 $\mathcal{U} = \left\{ U_\alpha \middle| \alpha \in \mathcal{I} \right\}$ 为拓扑空间 X 的一族开覆盖，称 X 的另一族开覆盖 $\mathcal{V} = \left\{ V_\beta \middle| \beta \in \mathcal{J} \right\}$ 为 $\mathcal{U}$ 的**开加细**（refinement），

若存在指标集之间的映射 $\rho:\mathcal{J}\to\mathcal{I}$，使得对任意 $\beta\in\mathcal{J}$，都有 $V_\beta\subseteq U_{\rho(\beta)}$；称 $\mathcal{U}$ 是**局部有限**的，若任意 $x\in X$，存在 x 的开邻域 U，使得 $\left\{\alpha\in\mathcal{I}\middle|U_\alpha\cap U\neq\varnothing\right\}$ 为有限集。

拓扑空间 X 称为**仿紧**（paracompact）的，如果 X 是 Hausdorff 的，并且 X 的任何开覆盖都存在局部有限开加细。众所周知，度量空间都是仿紧的，紧空间都是仿紧的，仿紧空间都是正规的。

定义 3.7.8. （单位分解环层）

设 X 为仿紧空间，$\mathcal{A}$ 为 X 上的交换环层，称 $\mathcal{A}$ 为 ***fine sheaf***，*若对 X 的任何开覆盖 $\mathcal{U}=\left\{\alpha\middle|\alpha\in\mathcal{I}\right\}$，存在一族截面 $f_\alpha\in\mathcal{A}(X)$，使得*

$$\operatorname{supp}(f_\alpha):=\overline{\left\{x\in X\middle|(f_\alpha)_x\neq 0\right\}}\subseteq U_\alpha$$

$$\sum_{\alpha\in\mathcal{I}}f_\alpha\equiv 1\in\mathcal{A}(X)$$

其中上述求和是局部有限的。

Fine sheaf 的典型例子是光滑流形上众所周知的单位分解定理：

例子 3.7.9. （单位分解定理）

设 X 为光滑流形，$\mathcal{C}^\infty$ 为 X 上的光滑函数环层，则 $\mathcal{C}^\infty$ 是 fine sheaf。

事实上，若仿紧空间 X 上的环层 $\mathcal{A}$ 是 fine sheaf，则任何 $\mathcal{A}$-模层都是上同调平凡的：

定理 3.7.10. *设仿紧空间 X 上的环层 $\mathcal{A}$ 为 fine sheaf，则对于任意 $\mathcal{A}$-模层 $\mathcal{F}$，*

$$H^q(X,\mathcal{F})=0\qquad(\forall q\geq 1)$$

证明. 任取 $\mathcal{F}$ 的内射消解 $0\to\mathcal{F}\hookrightarrow\mathcal{I}^\bullet$，其中 $\mathrm{d}^k:\mathcal{I}^k\to\mathcal{I}^{k+1}\ (\forall k\geq 0)$，则对任意 $q\geq 1$，有

$$H^q(X,\mathcal{F})\cong\frac{\ker(\mathrm{d}_X^q:\mathcal{I}^q(X)\to\mathcal{I}^{q+1}(X))}{\operatorname{Im}(\mathrm{d}_X^{q-1}:\mathcal{I}^{q-1}(X)\to\mathcal{I}^q(X))}$$

而对于任意截面 $s\in\ker\mathrm{d}_X^q\subseteq\mathcal{I}^q(X)$，由 $\cdots\to\mathcal{I}^{q-1}\to\mathcal{I}^q\to\mathcal{I}^{q+1}\to\cdots$ 在 $\mathcal{I}^q$ 处的正合性可知，存在 X 的开覆盖 $\mathcal{U}=\left\{U_\alpha\middle|\alpha\in\mathcal{J}\right\}$，以及 $s'_\alpha\in\mathcal{I}^{q-1}(U_\alpha)$，使得 $\mathrm{d}_{U_\alpha}^{q-1}(s'_\alpha)=s|_{U_\alpha}$.

由于 $\mathcal{A}$ 为 fine sheaf，从而取 $f_\alpha\in\mathcal{A}(X)$，使得 $\operatorname{supp}(f_\alpha)\subseteq U_\alpha$，并且 $\sum\limits_{\alpha\in\mathcal{J}}f_\alpha=1$ 为局部有限和。从而有

$$s':=\sum_{\alpha\in\mathcal{J}}f_\alpha s'_\alpha\in\mathcal{I}^{q-1}(X)$$

并且 $\mathrm{d}_X^{q-1}s' = s$. 这表明 $H^q(X,\mathcal{F}) = 0$. □

推论 3.7.11. 设 X 为光滑流形，$E \to X$ 为 X 上的光滑向量丛，自然也视为 X 上的 $\mathcal{C}^\infty$-模层。则对任意 $q \geq 1$，

$$H^q(X,E) = 0$$

看来光滑流形上“常见的”层的上同调都是平凡的。

关于层上同调，以下是同调代数的基本结果：

定理 3.7.12. （*de Rham-Weil* 定理）

设 $\mathcal{F}$ 为拓扑空间 X 上的 $\mathcal{A}$-模层，若有 $\mathcal{A}$-模层正合列

$$0 \to \mathcal{F} \hookrightarrow \mathcal{L}^0 \to \mathcal{L}^1 \to \mathcal{L}^2 \to \mathcal{L}^3 \to \cdots$$

其中对任意 $n \geq 0$ 以及任意 $q \geq 1$，都成立 $H^q(X,\mathcal{L}^n) = 0$，那么有同构

$$H^\bullet(X,\mathcal{F}) \cong H^\bullet(\mathcal{L}^\bullet(\mathrm{X}))$$

证明. 注意利用定理3.7.4，之后是同调代数的标准技术。从略。 □

此定理中的 $\mathcal{L}^n(n \geq 0)$ 的任何 ≥ 1 阶上同调都平凡，这样的层称为**零调的** (acyclic). 类似地，$\mathcal{F}$ 的消解 $0 \to \mathcal{F} \hookrightarrow \mathcal{L}^\bullet$ 称为**零调消解**。此定理表明，我们可以用零调消解来计算层上同调。

重要例子 3.7.13. *(de Rham 上同调)*

设 X 为光滑流形，$\mathbb{R}_X$ 为 X 上的局部常值层，$\mathcal{E}_X^p$ 为 X 上的微分 p-形式层（视为 $\mathbb{R}_X$-模层），则外微分 $\mathrm{d}: \mathcal{E}_X^p \to \mathcal{E}_X^{p+1}$ 为 $\mathcal{R}$-模层同态。注意到对任意 $q \geq 0$，$\mathcal{E}_X^q$ 是零调的，并且有层正合列

$$0 \to \mathbb{R}_X \hookrightarrow \mathcal{E}_X^0 \xrightarrow{\mathrm{d}} \mathcal{E}_X^1 \xrightarrow{\mathrm{d}} \mathcal{E}_X^2 \to \cdots \tag{$*$}$$

因此由 *de Rham-Weil* 定理可知，$H^\bullet(X,\mathbb{R}_X) \cong H^\bullet_{\mathrm{DR}}(\mathrm{X};\mathbb{R})$. 即 X 的 *de Rham* 上同调同构于局部常值层 $\mathbb{R}_X$ 的上同调。

证明. 注意到 $\mathcal{E}_X^q$ 有自然的 $\mathcal{E}_X^0 = \mathcal{C}^\infty$-模层结构，从而由定理3.7.10可知其零调。上链复形 $(*)$ 的正合性是因为微分几何中的局部 Poincaré 引理。 □

重要例子 3.7.14. *(Dolbeault 上同调)*

设 X 为复流形，Ω_X^p 为 X 上的全纯 p-形式层（即 $\bar{\partial}$-闭的 $(p,0)$-形式），$\mathcal{E}_X^{p,q}$ 为 X 上的光滑 (p,q) 形式层，则 $\mathcal{E}_X^{p,q}$ 是零调的。再注意对任意 $p \geq 0$，有层正合列

$$0 \to \Omega_X^p \hookrightarrow \mathcal{E}_X^{p,0} \xrightarrow{\bar{\partial}} \mathcal{E}_X^{p,1} \xrightarrow{\bar{\partial}} \mathcal{E}_X^{p,2} \xrightarrow{\bar{\partial}} \mathcal{E}_X^{p,3} \to \cdots \tag{$**$}$$

从而由 *de Rham-Weil* 定理可知，对任意 $p,q \geq 0$，有同构

$$H^q(X, \Omega_X^p) \cong H_{\bar{\partial}}^{p,q}(X, \mathbb{C})$$

即第 (p,q) 阶 *Dolbeaut* 上同调同构于全纯 p-形式层的第 q 阶上同调。

证明. 注意到上链复形 $(**)$ 的正合性是由 Dolbeault 引理保证的。 □

注记 3.7.15. （奇异上同调）

回顾代数拓扑当中“奇异上同调”的概念。对于光滑流形 X 的任意开集 U，考虑 U 上的奇异 q-上链之全体 $C_{\text{sing}}^q(U)$，这给出了 X 上的**奇异 q-上链层**$\mathcal{C}_{\text{sing}}^q$. 显然 $\mathcal{C}_{\text{sing}}^q$ 是松弛层。事实上我们有松弛消解

$$0 \to \mathbb{Z}_X \hookrightarrow \mathcal{C}_{\text{sing}}^0 \xrightarrow{\mathrm{d}} \mathcal{C}_{\text{sing}}^1 \xrightarrow{\mathrm{d}} \mathcal{C}_{\text{sing}}^2 \to \cdots$$

从而得 $H_{\text{sing}}^q(X, \mathbb{Z}) \cong H^q(X, \mathbb{Z}_X)$，即整系数奇异上同调同构于局部常值层 $\mathbb{Z}_X$ 的上同调。

类似地，$\mathbb{R}$-系数奇异上同调同构于局部常值层 $\mathbb{R}_X$ 的上同调。特别地，我们有 de Rham 定理：对于光滑流形 X，则对任意 $q \geq 0$，有

$$H_{\text{DR}}^q(X, \mathbb{R}) \cong H^q(X, \mathbb{R}_X) \cong H_{\text{sing}}^q(X, \mathbb{R})$$

奇异上同调、de Rham 上同调都同构于局部常值层 $\mathbb{R}_X$ 的上同调。

3.8 Čech 上同调

设 X 为拓扑空间，$\mathcal{A}$ 为 X 上的交换环层，$\mathcal{F}$ 为 $\mathcal{A}$-模层。对于 X 的开覆盖 $\mathcal{U} = \left\{ U_\alpha \middle| \alpha \in \mathcal{I} \right\}$，我们记

$$U_{\alpha_0\alpha_1\cdots\alpha_k} := \bigcap_{j=0}^{k} U_{\alpha_j} \qquad (\forall \alpha_0, \ldots, \alpha_k \in \mathcal{I})$$

定义 3.8.1. （*Čech* 上同调）

记号同上，并且给定开覆盖 $\mathcal{U}$ 的指标集 $\mathcal{I}$ 上的一个良序 $\preceq$，则对任意 $q \geq 0$，记

$$C^q(\mathcal{U},\mathcal{F}) := \prod_{\substack{(\alpha_0,\ldots,\alpha_q)\in\mathcal{I}^{q+1}\\ \alpha_0\prec\alpha_1\prec\cdots\prec\alpha_q}} \mathcal{F}(U_{\alpha_0\cdots\alpha_q})$$

对于 $c \in C^q(\mathcal{U},\mathcal{F})$，记 c 的 $\mathcal{F}(U_{\alpha_0\cdots\alpha_q})$-分量为 $c_{\alpha_0\cdots\alpha_q}$. 再定义 $\delta^q : C^q(\mathcal{U},\mathcal{F}) \to C^{q+1}(\mathcal{U},\mathcal{F})$ 为：对任意 $c \in C^q(\mathcal{U},\mathcal{F})$，

$$(\delta^q(c))_{\alpha_0\alpha_1\cdots\alpha_{q+1}} := \sum_{k=0}^{q+1}(-1)^k c_{\alpha_0\cdots\widehat{\alpha_k}\cdots\alpha_{q+1}}|_{U_{\alpha_0\cdots\alpha_{q+1}}}$$

则容易验证 $\left\{\delta^q : C^q(\mathcal{U},\mathcal{F}) \to C^{q+1}(\mathcal{U},\mathcal{F})\middle| q \geq 0\right\}$ 为上链复形，称之为 ***Čech* 上链复形**，相应的上同调

$$\check{H}^\bullet(\mathcal{U},\mathcal{F}) := H^\bullet(C^\bullet(\mathcal{U},\mathcal{F}))$$

称为 $\mathcal{F}$ 关于开覆盖 $\mathcal{U}$ 的 ***Čech* 上同调**.

容易验证上述定义的 $\delta^\bullet$ 满足 $\delta^2 = 0$，从而 $(C^\bullet(\mathcal{U},\mathcal{F}),\delta^\bullet)$ 的确为上链复形。

此外由定义容易看出，若 $\mathcal{U}$ 为有限覆盖，$|\mathcal{I}| = n < +\infty$，那么 $C^n(\mathcal{U},\mathcal{F}) = 0$，并且对任意 $q \geq n$ 有 $\check{H}^q(\mathcal{U},\mathcal{F}) = 0$.

例子 3.8.2. （第零阶 *Čech* 上同调）

记号同之前，则有 $\check{H}^0(\mathcal{U},\mathcal{F}) = \ker\delta^0$. 而对于 $c \in C^0(\mathcal{U},\mathcal{F}) = \prod_{\alpha\in\mathcal{I}} \mathcal{F}(U_\alpha)$，有 $(\delta^0 c)_{\alpha\beta} = (c_\beta - c_\alpha)|_{U_{\alpha\beta}}$，因此有

$$\ker\delta^0 = \left\{c = (c_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{I}} \in \prod_{\alpha\in\mathcal{I}}\mathcal{F}(U_\alpha)\middle| c_\alpha|_{U_{\alpha\beta}} = c_\beta|_{U_{\alpha\beta}}, \forall\alpha,\beta\in\mathcal{I}\right\} \xlongequal{\text{层的粘合公理}} \mathcal{F}(X)$$

即 $\check{H}^0(\mathcal{U},\mathcal{F}) \cong \mathcal{F}(X)$ 为 $\mathcal{F}$ 的整体截面之全体。

例子 3.8.3. （去心多圆柱）

考虑 $\mathbb{C}^2$ 的开子集 $X := \triangle\setminus\{0\}$，其中 $\triangle$ 为多圆柱 $\left\{(z_1,z_2)\middle| |z_1| < 1, z_2 < 1\right\}$. 设 $\mathcal{U} = \{U_1,U_2\}$ 为 X 的开覆盖，其中 $\begin{cases} U_1 := \{z_1 \neq 0\}\cap\triangle = \mathbb{D}^*\times\mathbb{D} \\ U_2 := \{z_2 \neq 0\}\cap\triangle = \mathbb{D}\times\mathbb{D}^* \end{cases}$，试计算 $\check{H}^\bullet(\mathcal{U},\mathcal{O})$. 其中 $\mathcal{O}$ 为 X 上的解析函数层。

解. 首先能够直接写出，$\check{H}^0(\mathcal{U},\mathcal{O}) \cong \mathcal{O}(X)$，以及对任意 $q \geq 2$，$\check{H}^q(\mathcal{U},\mathcal{O}) = 0$（因为只有两片覆

盖）。只需计算 $\check{H}^1(\mathcal{U},\mathcal{O})$. 注意到

$$\begin{aligned}
\mathcal{O}(U_1) &= \left\{c(z_1,z_2)=\sum_{\substack{m\in\mathbb{Z}\\ n\geq 0}} a_{mn}z_1^m z_2^n \,\middle|\, \text{该级数在 } U_1 \text{ 收敛}\right\}\\
\mathcal{O}(U_2) &= \left\{c(z_1,z_2)=\sum_{\substack{m\geq 0\\ n\in\mathbb{Z}}} a_{mn}z_1^m z_2^n \,\middle|\, \text{该级数在 } U_2 \text{ 收敛}\right\}\\
\mathcal{O}(U_{12}) &= \left\{c(z_1,z_2)=\sum_{m,n\in\mathbb{Z}} a_{mn}z_1^m z_2^n \,\middle|\, \text{该级数在 } U_{12} \text{ 收敛}\right\}
\end{aligned}$$

其中 $U_{12} := U_1\cap U_2 = \mathbb{D}^*\times\mathbb{D}^*$. 注意 $\begin{cases} C^0(\mathcal{U},\mathcal{O}) = \mathcal{O}(U_1)\oplus\mathcal{O}(U_2) \\ C^1(\mathcal{U},\mathcal{O}) = \mathcal{O}(U_{12}) \end{cases}$，以及

$$\check{H}^1(\mathcal{U},\mathcal{O}) = \frac{C^1(\mathcal{U},\mathcal{O})}{\operatorname{Im}(\delta^0 : C^0(\mathcal{U},\mathcal{O})\to C^1(\mathcal{U},\mathcal{O}))}$$

直接用 δ^0 的定义容易验证

$$\operatorname{Im}\delta^0 = \left\{c_2-c_1\,\middle|\, c_2\in\mathcal{O}(U_2),\, c_1\in\mathcal{O}(U_1)\right\} = \left\{c(z_1,z_2) = \sum_{\substack{m,n\in\mathbb{Z}\\ m\geq 0 \text{ 或 } n\geq 0}} a_{mn}z_1^m z_2^n \,\middle|\, \text{该级数在 } U_{12} \text{ 收敛}\right\}$$

因此立刻得到

$$\check{H}^1(\mathcal{U},\mathcal{O}) = \left\{c(z_1,z_2) = \sum_{\substack{m,n\in\mathbb{Z}\\ m<0 \text{ 且 } n<0}} a_{mn}z_1^m z_2^n \,\middle|\, \text{该级数在 } U_{12} \text{ 收敛}\right\}$$

□

例子 3.8.4. （复射影空间）

考虑复射影空间 $\mathbb{CP}^1$ 的坐标覆盖 $\mathcal{U}=\{U_0,U_1\}$，其中 $U_i = \left\{[z_0,z_1]\,\middle|\, z_i\neq 0\right\}$, $i=0,1$. 记 $\mathcal{O}$ 为 $\mathbb{CP}^1$ 上的全纯函数层，则有 $\check{H}^q(\mathcal{U},\mathcal{O}) \cong \begin{cases} \mathbb{C} & q=0 \\ 0 & q>0 \end{cases}$.

解. 只需注意到 $U_1 \cong (\mathbb{C}\setminus\{0\})\cup\{\infty\}$，于是有

$$\begin{aligned}
\mathcal{O}(U_0) &= \left\{\sum_{n\geq 0} a_n z^n \,\middle|\, \text{该级数在 } U_0 \text{ 收敛}\right\}\\
\mathcal{O}(U_1) &= \left\{\sum_{n\leq 0} a_n z^n \,\middle|\, \text{该级数在 } U_1 \text{ 收敛}\right\}\\
\mathcal{O}(U_{01}) &= \left\{\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n z^n \,\middle|\, \text{该级数在 } U_{01} \text{ 收敛}\right\}
\end{aligned}$$

仿照上例的做法，容易计算出来（而且比上例容易）。 □

性质 3.8.5. （*Čech 上链复形的加细*）

设 $\mathcal{F}$ 为拓扑空间 X 上的 $\mathcal{A}$-模层，$\mathcal{U} := \left\{U_\alpha \middle| \alpha \in \mathcal{I}\right\}$ 为 X 的一族开覆盖，$\mathcal{V} := \left\{V_\beta \middle| \beta \in \mathcal{J}\right\}$ 为 X 的另一族开覆盖。如果存在 $\rho : \mathcal{J} \to \mathcal{I}$ 使得 $\mathcal{V}$ 为 $\mathcal{U}$ 的加细，则存在自然的同态

$$\begin{aligned} \rho^q : C^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}) &\to C^q(\mathcal{V}, \mathcal{F}) \\ c &\mapsto (\rho^q c)_{\beta_0 \cdots \beta_q} := c_{\rho(\beta_0)\cdots\rho(\beta_q)}|_{V_{\beta_0\cdots\beta_q}} \end{aligned}$$

则上述 ρ^q 诱导了链映射

$$\rho^\bullet : C^\bullet(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \to C^\bullet(\mathcal{V}, \mathcal{F})$$

进而诱导了 Čech 上同调之间的同态 $H^\bullet(\rho) : \check{H}^\bullet(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \to \check{H}^\bullet(\mathcal{V}, \mathcal{F})$.

证明. 显然成立。 □

但是要注意一点，对于如此的 $\mathcal{U}, \mathcal{V}$，使得 $\mathcal{V}$ 是 $\mathcal{U}$ 的加细的 $\rho : \mathcal{J} \to \mathcal{I}$ 未必唯一。事实上若 $\rho_1, \rho_2 : \mathcal{J} \to \mathcal{I}$ 都使得 $\mathcal{V}$ 为 $\mathcal{U}$ 的加细，则链映射

$$\rho_1^\bullet, \rho_2^\bullet : C^\bullet(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \to C^\bullet(\mathcal{V}, \mathcal{F})$$

是**链同伦**的（我们承认这一点），因此它们诱导的 Čech 上同调之间的同态相同：$H^\bullet(\rho_1) = H^\bullet(\rho_2)$. 从而我的可以定义如下：

定义 3.8.6. （*层关于拓扑空间的 Čech 上同调*）

对于拓扑空间 X 上的 $\mathcal{A}$-模层 $\mathcal{F}$，定义 $\mathcal{F}$ 关于拓扑空间 X 的 ***Čech 上同调***

$$\check{H}^q(X, \mathcal{F}) := \varinjlim_{\mathcal{U}} H^q(\mathcal{U}, \mathcal{F})$$

其中 $\mathcal{U}$ 取遍 X 的开覆盖，并且若 $\mathcal{V}$ 为 $\mathcal{U}$ 的加细，则 $\check{H}^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \to \check{H}^q(\mathcal{V}, \mathcal{F})$.

由此定义容易看出，$\check{H}^0(X, \mathcal{F}) = \mathcal{F}(X)$ 为整体截面。

据说容易验证，对于开覆盖 $\mathcal{U}$ 的加细 $\mathcal{V}$，则 $\check{H}^1(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \to \check{H}^1(\mathcal{V}, \mathcal{F})$ 是单同态。从而对任何开覆盖 $\mathcal{U}$，有嵌入 $\check{H}^1(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \hookrightarrow \check{H}^1(X, \mathcal{F})$.

我们已经初步探讨不同开覆盖的 Čech 上同调之间的关系；现在考虑不同的层的 Čech 上同调。

性质 3.8.7. 设 X 为拓扑空间，$\mathcal{F},\mathcal{G}$ 为 X 上的 $\mathcal{A}$-模层，$\mathcal{U}$ 为 X 的一个开覆盖，$\varphi:\mathcal{F}\to\mathcal{G}$ 为 $\mathcal{A}$-模层同态。则 φ 自然诱导链映射

$$\varphi^\bullet : C^\bullet(\mathcal{U},\mathcal{F}) \to C^\bullet(\mathcal{U},\mathcal{G})$$

证明. 这是显然的。 □

如果再有 $\mathcal{U}$ 的加细 $(\mathcal{V},\rho)$，则有如下交换图：

$$\begin{tikzcd} C^\bullet(\mathcal{U},\mathcal{F}) \arrow[r, "\varphi^\bullet"] \arrow[d, "\rho^\bullet"] & C^\bullet(\mathcal{U},\mathcal{G}) \arrow[d, "\rho^\bullet"] \\ C^\bullet(\mathcal{V},\mathcal{F}) \arrow[r, "\varphi^\bullet"] & C^\bullet(\mathcal{V},\mathcal{G}) \end{tikzcd}$$

从而由余极限的泛性质可知，层同态 φ 诱导了 Čech 上同调的同态 $\check{H}^\bullet(\varphi):\check{H}^\bullet(X,\mathcal{F})\to\check{H}^\bullet(X,\mathcal{G})$.

现在，对于拓扑空间 X 的开覆盖 $\mathcal{U}$，以及 $\mathcal{A}$-模层短正合列

$$0\to\mathcal{F}\xrightarrow{\varphi}\mathcal{G}\xrightarrow{\psi}\mathcal{H}\to 0$$

注意对 X 的任意开集 U，“取截面”函子 $\Gamma(U,-)$ 是左正合的，即有左短正合列

$$0\to\mathcal{F}(U)\xrightarrow{\varphi_U}\mathcal{G}(U)\xrightarrow{\psi_U}\mathcal{H}(U)$$

但一般来说 $\Gamma(U,-)$ 不是右正合的，即不保持满同态。但退而求其次，我们有如下的短正合列：

$$0\to\mathcal{F}(U)\xrightarrow{\varphi_U}\mathcal{G}(U)\xrightarrow{\psi_U}\operatorname{Im}\psi_U\to 0$$

记号 3.8.8. 设 $\psi:\mathcal{G}\to\mathcal{H}$ 为拓扑空间 X 上的 $\mathcal{A}$-模层同态，$\mathcal{U}=\left\{U_\alpha\middle|\alpha\in\mathcal{I}\right\}$ 为 X 上的一族开覆盖，则对任意 $q\geq 0$，记

$$C^q_\psi(\mathcal{U},\mathcal{H}) := \prod_{\substack{\alpha_0,\dots,\alpha_q\in\mathcal{I}\\ \alpha_0\prec\alpha_1\prec\cdots\prec\alpha_q}} \operatorname{Im}(\psi_{U_{\alpha_0\cdots\alpha_k}})\subseteq C^q(\mathcal{U},\mathcal{H})$$

其中 $\prec$ 为开覆盖指标集 $\mathcal{I}$ 上的一个良序。

容易验证，Čech 微分 $\delta^q: C^q(\mathcal{U},\mathcal{F})\to C^{q+1}(\mathcal{U},\mathcal{F})$ 在 $C^q_\psi(\mathcal{U},\mathcal{F})$ 上的限制给出了

$$\delta^q_\psi: C^q_\psi(\mathcal{U},\mathcal{F})\to C^{q+1}_\psi(\mathcal{U},\mathcal{F})$$

并且有上链复形 $(C^\bullet_\psi(\mathcal{U},\mathcal{F}),\delta^\bullet_\psi)$. 因此有同调代数的标准工具，得到以下：

性质 3.8.9. 设 $\mathcal{U}$ 为拓扑空间 X 的一族开覆盖，则 $\mathcal{A}$-模层短正合列

$$0 \to \mathcal{F} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{G} \xrightarrow{\psi} \mathcal{H} \to 0$$

诱导了如下的上链复形短正合列：

$$0 \to C^{\bullet}(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \xrightarrow{\varphi^{\bullet}} C^{\bullet}(\mathcal{U}, \mathcal{G}) \xrightarrow{\psi^{\bullet}} C^{\bullet}_{\psi}(\mathcal{U}, \mathcal{H}) \to 0$$

进而诱导相应的同调对象的长正合列

$$0 \to \check{H}^0(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \to \check{H}^0(\mathcal{U}, \mathcal{G}) \to \check{H}^0_{\psi}(\mathcal{U}, \mathcal{H}) \to \check{H}^1(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \to \cdots$$

如果拓扑空间 X 是仿紧的，我们会有更好的结果。以下定理述而不证：

定理 3.8.10. 设 X 为仿紧拓扑空间，$0 \to \mathcal{F} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{G} \xrightarrow{\psi} \mathcal{H} \to 0$ 为 X 上的 $\mathcal{A}$-模层正合列，则成立：

$$\varinjlim_{\mathcal{U}} \check{H}^{\bullet}(\mathcal{U}, \mathcal{H}) = \varinjlim_{\mathcal{U}} \check{H}^{\bullet}_{\psi}(\mathcal{U}, \mathcal{H})$$

其中 $\mathcal{U}$ 取遍 X 的开覆盖。并且由此可以得出，该层短正合列诱导 *Čech* 上同调的长正合列：

$$0 \to \check{H}^0(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \to \check{H}^0(\mathcal{U}, \mathcal{G}) \to \check{H}^0(\mathcal{U}, \mathcal{H}) \to \check{H}^1(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \to \cdots$$

证明. 从略。 □

目前我们介绍了层的 Čech 上同调，在回顾之前所介绍的“通常的”层上同调——事实上这两者之间有如下联系：

定理 3.8.11. （*Leray* 零调定理）

设 $\mathcal{U} := \left\{ U_\alpha \middle| \alpha \in \mathcal{I} \right\}$ 为拓扑空间 X 的一族开覆盖，$\mathcal{F}$ 为 X 上的 $\mathcal{A}$-模层。如果对 $\mathcal{I}$ 中的任意有限个指标 $\alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_N$，都有

$$H^q(U_{\alpha_0\alpha_1\cdots\alpha_q}, \mathcal{F}|_{U_{\alpha_0\alpha_1\cdots\alpha_q}}) = 0 \qquad (\forall q \geq 1)$$

那么对任意 $q \geq 1$，有同构 $H^q(X, \mathcal{F}) \cong \check{H}^q(\mathcal{U}, \mathcal{F})$.

更进一步，若 X 是仿紧的，我们还有

$$H^q(X, \mathcal{F}) \cong \check{H}^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \cong \check{H}^q(X, \mathcal{F})$$

证明. 从略。 □

满足此定理条件的开覆盖 $\mathcal{U}$ 也被称为“零调覆盖”（acyclic covering）。

重要例子 3.8.12. （光滑线丛）

设 X 为光滑流形，$E \to X$ 为 X 上的光滑线丛（即 $\operatorname{rank} E = 1$）。取 E 的一族局部平凡化开覆盖 $\mathcal{U} = \left\{U_\alpha \middle| \alpha \in \mathcal{I}\right\}$，并记相应的转移矩阵（在这里是转移函数）为 $g_{\alpha\beta}$. 考虑 $\mathcal{E}_X^*$ 为 X 上的可逆光滑函数层，即对任意开集 U，$\mathcal{E}_X^*(U) = \left\{f \in C^\infty(U) \middle| f \text{在 } U \text{ 上恒不为零}\right\}$. 注意 $\mathcal{E}_X^*$ 为在通常的函数乘法下构成 *Abel* 群层。

容易验证 $(g_{\alpha\beta})_{\alpha,\beta\in\mathcal{I}} \in C^1(\mathcal{U}, \mathcal{E}_X^*)$，并且在 *Čech* 微分 δ 作用下是闭的，从而线丛 E 的转移函数 $(g_{\alpha\beta})$ 给出了 $\check{H}^1(\mathcal{U}, \mathcal{E}_X^*)$ 中的元素。又因为

$$\check{H}^1(\mathcal{U}, \mathcal{E}_X^*) \hookrightarrow \check{H}^1(X, \mathcal{E}_X^*)$$

（这个我们承认），从而线丛 E 的转移函数 $(g_{\alpha\beta})$ 诱导了 $\check{H}^1(X, \mathcal{E}_X^*)$ 中的一个元素。

证明. 对于 $g = (g_{\alpha\beta}) \in C^1(\mathcal{U}, \mathcal{E}_X^*)$，注意向量丛转移函数的 cocycle 性质，直接计算其 Čech 微分得

$$(\delta g)_{\alpha\beta\gamma} = g_{\beta\gamma} g_{\alpha\gamma}^{-1} g_{\alpha\beta} = 1$$

从而 $g = (g_{\alpha\beta})$ 是 δ-闭的，$[g] \in \check{H}^1(\mathcal{U}, \mathcal{E}_X^*)$. □

注记 3.8.13. 事实上，有一一对应

$$\left\{X \text{ 上的光滑线丛同构类}\right\} \cong \check{H}^1(X, \mathcal{E}_X^*)$$

重要例子 3.8.14. （全纯线丛）

考虑复流形 X，$\mathcal{O}_X^*$ 为 X 上的可逆全纯函数层，在通常的函数乘法下构成 *Abel* 群层。与上例类似，对于全纯线丛 $E \to X$，E 的一族局部平凡化覆盖的转移函数诱导了 $\check{H}^1(X, \mathcal{O}_X^*)$ 中的一个元素。

事实上，也有一一对应

$$\left\{X \text{ 上的全纯线丛同构类}\right\} \cong \check{H}^1(X, \mathcal{O}_X^*)$$

此结论我们也述而不证。

第 4 章　Hermite 向量丛

4.1　向量丛的联络与曲率

先回顾一下光滑向量丛的联络（活动标架版本），这是黎曼几何的标准内容。我们考察光滑的实向量丛或者复向量丛。为表述方便，令 $\mathbb{K} := \mathbb{R}$ 或 $\mathbb{C}$.

记号 4.1.1. （向量值微分形式）

设 X 为光滑流形，$E \to X$ 为 X 上的光滑 $\mathbb{K}$-向量丛，记

$$\Omega^p(X, E) := \Gamma(X, (\bigwedge^p T^*M) \otimes E)$$

为 X 上的取值于 E 的光滑 p-形式空间。

我们将 $\Omega^\bullet(X, E) := \bigoplus_{p \geq 0} \Omega^p(X, E)$ 自然视为分次线性空间，使得该空间的 p 次齐次子空间为 $\Omega^p(X, E)$. 注意到 X 上的微分 p-形式空间 $\Omega^p(X) \cong \Omega^p(X, \mathbb{K})$，此处的 $\mathbb{K}$ 为 X 上的平凡线丛。注意 $\Omega^\bullet(X)$ 上的外积结构 $\wedge$，它自然诱导了

$$\wedge : \Omega^p(X) \times \Omega^q(X, E) \to \Omega^{p+q}(X, E)$$

事实上这给出了 $\Omega^\bullet(X, E)$ 的一个分次 $\Omega^\bullet(X)$-模结构。

局部地，取向量丛 E 的一个局部平凡化

$$\theta_\alpha : E|_{U_\alpha} \cong U_\alpha \times \mathbb{K}^r$$

记 $\{e_1, ..., e_r\}$ 为 U_α 上的一组局部标架，则 $\Omega^p(X, E)$ 中的元素 s 在此局部标架下形如

$$s = \sum_{\lambda=1}^r \varphi^\lambda \otimes e_\lambda =: \varphi^\lambda \otimes e_\lambda$$

其中每个 φ_λ 均为光滑 p-形式，并采用 Einstein 求和约定。

定义 4.1.2. （向量丛上的联络）

设 $E \to X$ 为光滑流形 X 上的光滑向量丛，丛 E 上的**联络** *(connection)* 是指作用在分次向量空间 $\Omega^{\bullet}(X,E)$ 上的次数为 1 的齐次线性映射 $\mathrm{D}:\Omega^{\bullet}(X,E)\to\Omega^{\bullet+1}(X,E)$，并且满足:

$$\mathrm{D}(\varphi\wedge s)=\mathrm{d}\varphi\wedge s+(-1)^{p}\varphi\wedge \mathrm{D}s$$

对任意 $\varphi\in\Omega^{p}(X)$ 以及 $s\in\Omega^{q}(X,E)$ 成立。

注意定义中并没要求 $\mathrm{D}^2=0$，一般地 $(\Omega^{\bullet}(X,E),\mathrm{D})$ 并不是上链复形。易知向量丛 $E\to X$，E 上的联络之全体，构成 $\mathbb{K}$-线性空间. 联络的典型例子是，考虑 X 上的平凡线丛 $\mathbb{K}$，则 $\Omega^{\bullet}(X,\mathbb{K})\cong\Omega^{\bullet}(X)$ 上的外微分 d 即为丛 $\mathbb{K}$ 上的联络。

取 $E\to X$ 的局部平凡化坐标卡 U 及其局部标架 $\{e_1,e_2,...,e_r\}$，则对任意 $t\in\Omega^{p}(X,E)$，其中 $r:=\operatorname{rank}E$. 若在该局部标架下 $t=\varphi^{\lambda}\otimes e_{\lambda}$，则有

$$\mathrm{D}t=\mathrm{d}\varphi^{\lambda}\otimes e_{\lambda}+(-1)^{p}\varphi^{\lambda}\wedge\mathrm{D}e_{\lambda}$$

其中 $\mathrm{D}e_{\lambda}\in\Omega^{1}(U,E)$. 可见只要确定了 D 在 $e_{\lambda}\in\Omega^{0}(X,E)$ 上的作用，则联络 D 被唯一确定。我们令 $\mathrm{D}e_{\lambda}=a_{\lambda}^{\mu}\otimes e_{\mu}$，其中 $a_{\lambda}^{\mu}\in\Omega^{1}(U)$，称为 D 关于局部标架 $\{e_1,e_2,...,e_r\}$ 的**联络 1-形式**，称 $r\times r$ 矩阵 $A:=(a_{\lambda}^{\mu})$ 为 D 关于局部标架 $\{e_1,e_2,...,e_r\}$ 的**系数矩阵**。若记 $e:=(e_1,e_2,...,e_r)$ 为标架排成的行向量，则有紧凑的表达式 $\mathrm{D}e=eA$.

在局部标架 $\{e_1,e_2,...,e_r\}$ 下，$\Omega^{p}(X,E)$ 中的元素 t 可以用以 p-形式为分量的列向量 $\varphi:=(\varphi^{\lambda})_{1\leq\lambda\leq r}$ 来表示，即 $t=\varphi^{\lambda}\otimes e_{\lambda}$. 在此意义下，有

$$\begin{aligned}\mathrm{D}t &= \mathrm{d}\varphi^{\lambda}\otimes e_{\lambda}+(-1)^{p}\varphi^{\lambda}\wedge\mathrm{D}e_{\lambda}=\mathrm{d}\varphi^{\lambda}\otimes e_{\lambda}+(-1)^{p}\varphi^{\lambda}\wedge a_{\lambda}^{\mu}\otimes e_{\mu}\\ &= \left(\mathrm{d}\varphi^{\mu}+a_{\lambda}^{\mu}\wedge\varphi^{\lambda}\right)\otimes e_{\mu}=(\mathrm{d}\varphi+A\wedge\varphi)^{\mu}\otimes e_{\mu}\end{aligned}$$

或者简记为

$$\mathrm{D}\varphi=\mathrm{d}\varphi+A\wedge\varphi$$

性质 4.1.3. （联络矩阵的变换）

设 $E\to X$ 为光滑向量丛，D 为 E 上的一个联络。设 (U,e) 与 $(\widetilde{U},\widetilde{e})$ 为丛 E 的两个局部平凡化，其中 $e=(e_1,e_2...,e_r)$, $\widetilde{e}=(\widetilde{e}_1,\widetilde{e}_2,...,\widetilde{e}_r)$ 为相应的局部标架。记它们之间的转移函数为 $\widetilde{e}_{\lambda}=g_{\lambda}^{\mu}e_{\mu}$，$G:=(g_{\lambda}^{\mu})$. 若 $A,\widetilde{A}$ 分别为联络 D 关于标架 $e,\widetilde{e}$ 的系数矩阵，则有变换关系

$$\widetilde{A}=G^{-1}AG+G^{-1}\mathrm{d}G$$

证明. 将 $\widetilde{e}_\lambda = g^\mu_\lambda e_\mu$ 写为紧凑的矩阵形式，有 $\widetilde{e} = eG$. 从而我们有

$$
\begin{aligned}
\mathrm{D}\widetilde{e} &= \mathrm{D}(eG) = (\mathrm{D}e)G + e\mathrm{d}G = eAG + e\mathrm{d}G \\
\mathrm{D}\widetilde{e} &= \widetilde{e}\widetilde{A} = eG\widetilde{A}
\end{aligned}
$$

因此整理得 $\widetilde{A} = G^{-1}AG + G^{-1}\mathrm{d}G$. □

定义 4.1.4. （曲率）

设 $E \to X$ 为光滑流形 X 上的光滑 $\mathbb{K}$-向量丛，D 为 E 上的一个联络，则记

$$\Theta := \mathrm{D} \circ \mathrm{D}$$

为联络 D 的**曲率** *(curvature)*.

在局部标架 $e = (e_1, e_2, ..., e_k)$ 下，对于 $t \in \Omega^p(X, E)$，若 $t = e\varphi$，其中 φ 为分量为 p-形式的列向量，利用局部标架下的联络公式 $\mathrm{D}\varphi = \mathrm{d}\varphi + A \wedge \varphi$，其中 A 为联络 D 在关于此标架的系数矩阵，可得

$$
\begin{aligned}
\Theta\varphi &= \mathrm{D}(\mathrm{d}\varphi + A \wedge \varphi) \\
&= \mathrm{d}(\mathrm{d}\varphi + A \wedge \varphi) + A \wedge (\mathrm{d}\varphi + A \wedge \varphi) \\
&= \mathrm{d}^2\varphi + \mathrm{d}A \wedge \varphi - A \wedge \mathrm{d}\varphi + A \wedge \mathrm{d}\varphi + A \wedge A \wedge \varphi \\
&= (\mathrm{d}A + A \wedge A) \wedge \varphi
\end{aligned}
$$

即在局部标架 e 下，曲率算子 Θ 的矩阵 $\Omega = \mathrm{d}A + A \wedge A$，此矩阵的矩阵元为光滑 2-形式，称为**曲率形式**。

性质 4.1.5. （曲率形式在不同局部平凡化下的变化）

设 $E \to X$ 为光滑向量丛，D 为 E 上的联络，Θ 为联络 D 的曲率。设 $e = (e_1, e_2, ..., e_r)$ 与 $\widetilde{e} = (\widetilde{e}_1, \widetilde{e}_2, ..., \widetilde{e}_r)$ 为 E 的两组局部标架，转移矩阵 G 满足 $\widetilde{e} = eG$. 则曲率 Θ 在标架 $e, \widetilde{e}$ 下的矩阵 $\Omega, \widetilde{\Omega}$ 满足

$$\widetilde{\Omega} = G^{-1}\Omega G$$

证明. 我们已有 $\widetilde{A} = G^{-1}AG + G^{-1}\mathrm{d}G$，从而 $G\widetilde{A} = AG + \mathrm{d}G$，两边外微分得到

$$\mathrm{d}G \wedge \widetilde{A} + G\mathrm{d}\widetilde{A} = \mathrm{d}A \cdot G - A \wedge \mathrm{d}G$$

因此有

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\widetilde{A} &= G^{-1}\mathrm{d}A\cdot G - G^{-1}\mathrm{d}G\wedge\widetilde{A} - G^{-1}A\wedge\mathrm{d}G \\
&= G^{-1}\mathrm{d}A\cdot G - G^{-1}\mathrm{d}G\wedge(G^{-1}AG+G^{-1}\mathrm{d}G) - G^{-1}A\wedge\mathrm{d}G \\
&= G^{-1}\mathrm{d}A\cdot G - G^{-1}\mathrm{d}G\cdot G^{-1}AG - G^{-1}\mathrm{d}G\cdot G^{-1}\mathrm{d}G - G^{-1}A\wedge\mathrm{d}G
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\widetilde{A}\wedge\widetilde{A} &= (G^{-1}AG+G^{-1}\mathrm{d}G)\wedge(G^{-1}AG+G^{-1}\mathrm{d}G) \\
&= G^{-1}A\wedge AG + G^{-1}A\wedge\mathrm{d}G + G^{-1}\mathrm{d}G\cdot G^{-1}AG + G^{-1}\mathrm{d}G\cdot G^{-1}\mathrm{d}G
\end{aligned}$$

从而得到

$$\widetilde{\Omega} = \mathrm{d}\widetilde{A} + \widetilde{A}\wedge\widetilde{A} = G^{-1}(\mathrm{d}A + A\wedge A)G = G^{-1}\Omega G$$

□

注记 4.1.6. 此定理表明，曲率 Θ 是丛 E 上的 2-形式值 $(1,1)$ 型张量，故称为**曲率张量**。具体地，

$$\Theta \in \Omega^2(X,\mathrm{End}(E)) \cong \Omega^2(X, E^*\otimes E)$$

重要例子 4.1.7. （对偶丛的联络与曲率）

设 $E\to X$ 为光滑向量丛，E^* 为 E 的对偶丛。注意到有如下自然的配对：

$$\begin{aligned}
\langle,\rangle : \Omega^p(X,E^*)\times\Omega^q(X,E) &\to \Omega^{p+q}(X) \\
\langle \varphi_\lambda\otimes e^\lambda, \psi^\mu\otimes e_\mu\rangle &:= \langle e^\lambda, e_\mu\rangle \varphi_\lambda\wedge\psi^\mu
\end{aligned}$$

若 D_E 为 E 上的联络，则 D_E 诱导了对偶丛 E^* 上的联络 D_{E^*}，使得对任意 $s\in\Omega^p(X,E^*)$ 以及 $t\in\Omega^q(X,E)$ 都成立

$$\mathrm{d}\langle s,t\rangle = \langle \mathrm{D}_{E^*}s, t\rangle + (-1)^p\langle s, \mathrm{D}_E t\rangle$$

取 E 的局部标架 $e=(e_1,e_2,...,e_r)$，记 $e^* := (e_1^*, e_2^*, ..., e_r^*)$ 为其对偶标架（也排成行向量），记对偶丛联络 $\mathrm{D}^* := \mathrm{D}_{E^*}$ 的曲率为 Θ^*，它们在对偶标架 e^* 上的矩阵记作 A^*,Ω^*，则成立：$\begin{cases} A^* = -A^T \\ \Omega^* = -\Omega^T \end{cases}$. 这是因为，由于 $\langle e^{*T}, e\rangle = I$，从而

$$0 = \mathrm{d}\langle e^{*T}, e\rangle = \langle \mathrm{D}^* e^{*T}, e\rangle + \langle e^{*T}, \mathrm{D}e\rangle = \langle (e^*A^*)^T, e\rangle + \langle e^{*T}, eA\rangle = A^{*T} + A$$

因此对偶联络的系数矩阵 $A^* = -A^T$. 从而对偶联络的曲率矩阵

$$\Omega^* = \mathrm{d}A^* + A^*\wedge A^* = -\mathrm{d}A^T + A^T\wedge A^T = -(\mathrm{d}A + A\wedge A)^T = -\Omega^T$$

这里要特别注意微分形式矩阵的运算，注意 A 的矩阵元为微分 1-形式，从而易验证有 $(A\wedge A)^T = -A^T\wedge A^T$. 此外，若把对偶标架记为上指标 $e^* = (e^1, e^2, ..., e^r)^T$，则有 $\mathrm{D}e^\lambda = -A^\lambda_\mu e^\mu$.

重要例子 4.1.8. （直和丛的联络与曲率）

设 $E,F\to X$ 均为 X 上的光滑向量丛，$\mathrm{D}_E,\mathrm{D}_F$ 分别为 E,F 上的联络，则直和丛 $E\oplus F$ 上自然有联络 $\mathrm{D}_{E\oplus F}$，使得对任意 $u\in\Omega^p(X,E)$ 以及 $v\in\Omega^p(X,F)$，成立

$$\mathrm{D}_{E\oplus F}(u\oplus v)=\mathrm{D}_E u\oplus \mathrm{D}_F v$$

取定 E 的局部标架 $e=(e_1,e_2,...,e_r)$ 以及 F 的局部标架 $f=(f_1,f_2,...,f_s)$，则 $E\oplus F$ 有局部标架 $e\oplus f=(e_1,...,e_r;f_1,...,f_s)$. 容易验证相应的联络、曲率矩阵满足

$$A_{E\oplus F}=\begin{pmatrix}A_E & \\ & A_F\end{pmatrix},\qquad \Omega_{E\oplus F}=\begin{pmatrix}\Omega_E & \\ & \Omega_F\end{pmatrix}$$

重要例子 4.1.9. （张量丛的联络与曲率）

设 $E,F\to X$ 均为 X 上的光滑向量丛，$\mathrm{D}_E,\mathrm{D}_F$ 分别为 E,F 上的联络，则张量丛 $E\otimes F$ 上自然有联络 $\mathrm{D}_{E\otimes F}$，使得对任意 E 的截面 u 以及 F 的截面 v，成立

$$\mathrm{D}_{E\otimes F}(u\otimes v)=\mathrm{D}_E u\otimes v+u\otimes \mathrm{D}_F v$$

取定 E 的局部标架 $e=(e_1,e_2,...,e_r)$ 以及 F 的局部标架 $f=(f_1,f_2,...,f_s)$，则 $E\otimes F$ 有局部标架 $e\otimes f=\left\{e_\alpha\otimes f_\beta\middle|1\le\alpha\le r,1\le\beta\le s\right\}$. 同意验证有关的联络、曲率矩阵满足

$$\begin{aligned}A_{E\otimes F}&=A_E\otimes I_F+I_E\otimes A_F\\ \Omega_{E\otimes F}&=\Omega_E\otimes I_F+I_E\otimes\Omega_F\end{aligned}$$

在计算曲率时要当心微分 1-形式系数的矩阵的外积运算结果的符号。

重要例子 4.1.10. （行列式丛的联络与曲率）

设 $E\to X$ 为 X 上的秩为 r 的光滑向量丛，D_E 为 E 上的联络，则 D_E 自然诱导了**行列式从** $\det E:=\bigwedge^r E$ 上的联络 $\mathrm{D}_{\det E}$，使得对任意局部标架 $e=(e_1,e_2,...,e_r)$，

$$\mathrm{D}_{\det E}e_1\wedge e_2\wedge\cdots\wedge e_r=\sum_{k=1}^r e_1\wedge\cdots\wedge\mathrm{D}_E e_k\wedge\cdots\wedge e_r$$

E 的局部标架 $e=(e_1,e_2,...,e_r)$ 诱导了线丛 $\det E$ 的局部标架 $e_1\wedge e_2\wedge\cdots\wedge e_r$，容易验证相应的联络、曲率矩阵满足 $\begin{cases}A_{\det E}&=\ \operatorname{tr}A_E\\ \Omega_{\det E}&=\ \operatorname{tr}\Omega_E\end{cases}$. 只需注意到 $A_{\det E}$ 与 $\Omega_{\det_E}$ 都是一阶矩阵，无非是普通的微分形式；验证曲率时注意 $\operatorname{tr}(A_E\wedge A_E)=0$.

性质 4.1.11. （Hom 丛的联络与曲率）设 $E, F \to X$ 为 X 上的光滑向量丛，$\mathrm{D}_E, \mathrm{D}_F$ 分别为 E, F 上的联络，则 Hom 丛 $\mathrm{Hom}(E,F) \cong E^* \otimes F$ 上自然有（由张量丛、对偶丛诱导的）联络 $\mathrm{D}_{\mathrm{Hom}(E,F)}$，相应的曲率记为 $\Theta_{\mathrm{Hom}(E,F)} \in \Omega^2(X, \mathrm{End}(\mathrm{Hom}(E,F)))$. 则对任意 $f \in \Omega^p(X, \mathrm{Hom}(E,F))$ 以及 $u \in \Omega^q(X, E)$，成立

$$\begin{aligned}
\mathrm{D}_F\langle f, u\rangle &= \langle \mathrm{D}_{\mathrm{Hom}(E,F)} f, u\rangle + (-1)^p \langle f, \mathrm{D}_E u\rangle \\
\Theta_F\langle f, u\rangle &= \langle \Theta_{\mathrm{Hom}(E,F)} f, u\rangle + \langle f, \Theta_E u\rangle
\end{aligned}$$

证明. 不妨 $f = u^* \otimes v$，其中 $u^* \in \Omega^p(X, E^*)$, $v \in \Omega^0(X, F)$. 为方便书写，不妨省略 D, Θ 的下标，这不会产生歧义。则由对偶丛与张量丛的联络运算法则，易知

$$\begin{aligned}
\mathrm{D}\langle f, u\rangle &= \mathrm{D}(\langle u^*, u\rangle \otimes v) \\
&= (\langle \mathrm{D}u^*, u\rangle + (-1)^p \langle u^*, \mathrm{D}u\rangle) \otimes v + (-1)^{p+q} \langle u^*, u\rangle \otimes \mathrm{D}v \\
&= \langle \mathrm{D}u^* \otimes v, u\rangle + (-1)^p \langle u^* \otimes v, \mathrm{D}u\rangle + (-1)^{p+q}(-1)^q \langle u^* \otimes \mathrm{D}v, u\rangle \\
&= \langle \mathrm{D}(u^* \otimes v), u\rangle + (-1)^p \langle u^* \otimes v, \mathrm{D}u\rangle \\
&= \langle \mathrm{D}f, u\rangle + (-1)^p \langle f, \mathrm{D}u\rangle
\end{aligned}$$

利用上式，容易得到 $\mathrm{D}_{\mathrm{Hom}(E,F)}$ 的曲率的表达式：

$$\begin{aligned}
\Theta\langle f, u\rangle &= \mathrm{D}(\mathrm{D}\langle f, u\rangle) = \mathrm{D}(\langle \mathrm{D}f, u\rangle + (-1)^p \langle f, \mathrm{D}u\rangle) \\
&= \langle \mathrm{D}^2 f, u\rangle + (-1)^{p+1} \langle \mathrm{D}f, \mathrm{D}u\rangle + (-1)^p \langle \mathrm{D}f, \mathrm{D}u\rangle + (-1)^{p+p} \langle f, \mathrm{D}^2 u\rangle \\
&= \langle \Theta f, u\rangle + \langle f, \Theta u\rangle
\end{aligned}$$

□

性质 4.1.12. （*Bianchi* 恒等式）

设 $E \to X$ 为光滑向量丛，D_E 为 E 上的一个联络，其曲率为 $\Theta \in \Omega^2(X, \mathrm{End}(E))$. 考虑 $\mathrm{End}(E) \cong E^* \otimes E$ 上的由 D_E 诱导的联络 $\mathrm{D}_{\mathrm{End}\,E}$，则有

$$\mathrm{D}_{\mathrm{End}(E)}\Theta = 0 \in \Omega^3(X, \mathrm{End}(E))$$

证明. 对任意 $u \in \Omega^p(X, E)$，由性质4.1.11可知，

$$\mathrm{D}\langle \Theta, u\rangle = \langle \mathrm{D}\Theta, u\rangle + (-1)^2 \langle \Theta, \mathrm{D}u\rangle$$

因此有

$$\begin{aligned}\langle \mathrm{D}\theta, u\rangle &= \mathrm{D}\langle \Theta, u\rangle - \langle \Theta, \mathrm{D}u\rangle \\ &= \mathrm{D}(\mathrm{D}^2 u) - \mathrm{D}^2(\mathrm{D}u) = 0\end{aligned}$$

从而由 u 的任意性，得证。 □

4.2 陈省身示性类

对于 r 阶方阵 M，考虑 r 次多项式

$$f(t) := \det(I + tM) = I + f_1(M)t + f_2(M)t^2 + \cdots + f_r(M)t^r$$

由线性代数不难知道，函数 $f_k\,(1 \le k \le r)$ 在矩阵相似变换下不变，即对任意的 r 阶可逆矩阵 P，有 $f_k(P^{-1}MP) = f_k(M)$. 此外众所周知，$f_1(M) = \operatorname{tr} M$ 以及 $f_r(M) = \det M$.

此外，由代数学，f_k 唯一决定了一个 k 重对称线性泛函（仍记为 f_k）$f_k : \mathrm{Sym}^k \mathfrak{gl}(r, \mathbb{K}) \to \mathbb{K}$，使得对任意矩阵 $M \in \mathfrak{gl}(r, \mathbb{K})$，成立 $f_k(M) = f_k(\underbrace{M, M, ..., M}_{k})$，并且每个 $f_k \in \mathrm{Sym}^k \mathfrak{gl}(r, \mathbb{K})$ 都是 $\mathrm{GL}(r, \mathbb{K})$-不变的，即对任意 r 阶方阵 $M_1, M_2, ..., M_k$ 以及 r 阶可逆矩阵 P，成立

$$f_k(P^{-1}M_1P, P^{-1}M_2P, ..., P^{-1}M_kP) = f_k(M_1, M_2, ..., M_k) \qquad (*)$$

对于任意 r 阶矩阵 $M \in \mathfrak{gl}(r, \mathbb{K})$，若令 $P = e^{tM}$ 代入 $(*)$ 式，并求 $t = 0$ 处的导数，容易得到

$$\sum_{j=1}^{k} f_k(M_1, ..., [M, M_j], ..., M_k) = 0 \qquad (**)$$

引理 4.2.1. 设 $E \to X$ 为光滑向量丛，D_E 为 E 上的一个联络，取 $e = (e_1, e_2, ..., e_r)$ 为 E 的一个局部标架，D_E 在此标架下的系数矩阵为 A，则对于任意 $\varphi \in C^k(X, \mathrm{End}(E))$，$\varphi$ 在此局部标架下可表示为系数为 k-形式的 r 阶矩阵。则在此意义下，D_E 诱导的 $\mathrm{End}(E)$ 上的联络 $\mathrm{D}_{\mathrm{End}(E)}$ 满足

$$\mathrm{D}\varphi = \mathrm{d}\varphi + [A, \varphi]$$

其中 $[A, \varphi] = A \wedge \varphi - (-1)^p \varphi \wedge A$ 为分次对易子。

证明. 局部标架下直接计算即可。注意 $\varphi = \varphi_i^j e^i \otimes e_j$，其中矩阵元 φ_i^j 为 p-形式。则有

$$\begin{aligned}\mathrm{D}(\varphi_i^j e^i \otimes e_j) &= \mathrm{d}\varphi_i^j e^i \otimes e_j + (-1)^p \left(\varphi_i^j \wedge (-A_k^i) e^k \otimes e_j + \varphi_i^j e^i \otimes A_j^k e_k\right) \\ &= \left(\mathrm{d}\varphi_i^j + A_k^j \wedge \varphi_i^k - (-1)^k \varphi_k^j \wedge A_i^k\right) e^i \otimes e_j \\ &= (\mathrm{d}\varphi + [A, \varphi])_i^j\, e^i \otimes e_j\end{aligned}$$

□

性质 4.2.2. （陈省身示性类）

设 $E \to X$ 为秩为 r 的光滑向量丛，D 为 E 的一个联络，Θ 为 D 的曲率。设 $e = (e_1, e_2, ..., e_n)$ 为 E 的一个局部标架，Θ 在该标架下的矩阵为 Ω. 记

$$c_k(E;\mathrm{D}) := f_k(\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\Omega), \quad (1 \le k \le r)$$

则事实上 $c_k(E;\mathrm{D})$ 为 X 上整体定义的 $2k$-形式，并且 $\mathrm{d}c_k(E;\mathrm{D}) = 0$，从而 $c_k(E;\mathrm{D}) \in H^{2k}_{\mathrm{DR}}(X)$. 称 $c_k(E;\mathrm{D})$ 为向量丛 E 关于联络 D 的第 k 阶**陈省身示性类**，简称**陈类**（*Chern class*）.

证明. 若 $\widetilde{e} = (\widetilde{e}_1, \widetilde{e}_2, ..., \widetilde{e}_r)$ 为 E 的另一组局部标架，且有转移矩阵 $\widetilde{e} = eG$，则我们已证 $\widetilde{\Omega} = G^{-1}\Omega G$，从而 $f_k(\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\widetilde{\Omega}) = f_k(\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\Omega)$，从而 $c_k(E,\mathrm{D}) \in \Omega^{2k}(X)$ 整体定义。

再证明所有的 $c_k(E,\mathrm{D})$ 都是闭形式。注意到在某局部标架下，

$$c_k(E,\mathrm{D}) = f_k(\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\Omega) = \left(\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\right)^k f_k(\Omega, \Omega, ..., \Omega)$$

其中 $\Omega = \mathrm{d}A + A \wedge A$ 为曲率 Θ 在局部标架下的矩阵。直接外微分，有

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}c_k(E,\mathrm{D}) &= \left(\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\right)^k \mathrm{d}f_k(\Omega, \Omega, ..., \Omega) = \left(\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\right)^k \sum_{j=1}^k f_k(\Omega, ..., \underbrace{\mathrm{d}\Omega}_{\text{第 } j \text{ 个}}, ..., \Omega) \\
&= \left(\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\right)^k \sum_{j=1}^k f_k(\Omega, ..., \underbrace{(\mathrm{D}\Omega - [A, \Omega])}_{\text{第 } j \text{ 个}}, ..., \Omega) \\
&= -\left(\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\right)^k \sum_{j=1}^k f_k(\Omega, ..., \underbrace{[A, \Omega]}_{\text{第 } j \text{ 个}}, ..., \Omega) = 0
\end{aligned}$$

其中注意到 Bianch 恒等式 $\mathrm{D}\Omega = 0$（见性质4.1.12）、引理4.2.1以及该引理上方的 $(**)$ 式。 □

引理 4.2.3. （联络的形变）

设 $E \to X$ 为光滑向量丛，D 为 E 的一个联络，则对于任意 $\alpha \in \Omega^1(X, \mathrm{End}(E))$，$\mathrm{D} + \alpha$ 也是 E 的一个联络，并且其曲率为

$$\Theta_{\mathrm{D}+\alpha} = \Theta_{\mathrm{D}} + \mathrm{D}\alpha + \alpha \wedge \alpha$$

其中“$\mathrm{D}\alpha$”当中的“D”为 $\mathrm{End}(E)$ 上的联络。

证明. 显然 $\mathrm{D}+\alpha$ 也是联络，并且在局部标架下的系数矩阵为 $A+\alpha$，其中 A 为 D 的系数矩阵，α 也用来表示相应的系数矩阵。我们来验证曲率，有

$$\begin{aligned}\Omega_{\mathrm{D}+\alpha} &= \mathrm{d}(A+\alpha)+(A+\alpha)\wedge(A+\alpha)\\ &= \mathrm{d}A+\mathrm{d}\alpha+A\wedge A+A\wedge\alpha+\alpha\wedge A+\alpha\wedge\alpha\\ &= \Omega_{\mathrm{D}}+\mathrm{d}\alpha+[A,\alpha]+\alpha\wedge\alpha\end{aligned}$$

注意到引理4.2.1，从而可知 $\Theta_{\mathrm{D}+\alpha}=\Theta_{\mathrm{D}}+\mathrm{D}\alpha+\alpha\wedge\alpha$，证毕。 □

定理 4.2.4. （陈类与向量丛的联络选取无关）

设 $E\to X$ 为秩为 r 的光滑向量丛，则对任意 $1\leq k\leq r$，上同调类 $[c_k(E,\mathrm{D})\in H^{2k}(X)]$ 与 E 的联络 D 选取无关。

证明. 设 D_0 与 D_1 为丛 E 上的两个联络，对于 $t\in[0,1]$，记

$$\mathrm{D}_t := (1-t)\mathrm{D}_0+t\mathrm{D}_1$$

则 D_t 显然也是联络。令 $\alpha:=\mathrm{D}_1-\mathrm{D}_0$，则容易验证 $\alpha\in\Omega^1(X,\mathrm{End}(E))$ 为整体定义的张量。再记 $\alpha_t:=\mathrm{D}_t-\mathrm{D}_0\in\Omega^1(X,\mathrm{End}(E))$，则 $\alpha_t=t\alpha$. 记联络 D_t 的曲率为 Θ_t，则由引理4.2.3可知

$$\begin{aligned}\Theta_t &= \Theta_0+t\mathrm{D}_0\alpha+t^2\alpha\wedge\alpha\\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Theta_t &= \mathrm{D}_0\alpha+2t\alpha\wedge\alpha\\ &= \mathrm{D}_t\alpha-(\mathrm{D}_t-\mathrm{D}_0)\alpha+2t\alpha\wedge\alpha\\ &= \mathrm{D}_t\alpha-t[\alpha,\alpha]+2t\alpha\wedge\alpha\\ &= \mathrm{D}_t\alpha\end{aligned}$$

因此有

$$\begin{aligned}c_k(E,\mathrm{D}_1)-c_k(E,\mathrm{D}_0) &= \int_0^1\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}c_k(E,\mathrm{D}_t)\mathrm{d}t=\left(\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\right)^k\int_0^1\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f_k(\Theta_t,\Theta_t,...,\Theta_t)\mathrm{d}t\\ &= k\left(\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\right)^k\int_0^1 f_k(\frac{\mathrm{d}\Theta_t}{\mathrm{d}t},\Theta_t,...,\Theta_t)\mathrm{d}t=k\left(\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\right)^k\int_0^1 f_k(\mathrm{D}_t\alpha,\Theta_t,...,\Theta_t)\mathrm{d}t\\ &= k\left(\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\right)^k\mathrm{d}\left(\int_0^1 f_k(\alpha,\Theta_t,...,\Theta_t)\mathrm{d}t\right)\end{aligned}$$

最后一步利用了 Bianchi 恒等式 $\mathrm{D}_t\Theta_t=0$ 以及 f_k 的 $\mathfrak{gl}(r,\mathbb{K})$-不变性（与性质4.2.2的证明过程类似）。因此 $[c_k(E,\mathrm{D}_1)]=[c_k(E,\mathrm{D}_0)]$，即位于同一个上同调类。 □

注记 4.2.5. 对于向量丛 $E \to X$，既然陈类 $[c_k(E, \mathrm{D})]$ 与联络选取无关，我们可记 $[c_k(E)] := [c_k(E, \mathrm{D})]$，其中 D 为 E 上的任何一个联络。

在黎曼几何中，我们知道黎曼度量总存在，并且黎曼度量诱导的 Levi-Civita 联络非平凡（即不恒为 0）. 类似地，后文将会在向量丛上引入某种度量，该度量诱导了某个非平凡的联络。也就是我，向量丛上的（不恒为零的）联络总存在。

例子 4.2.6. （线丛的第一陈类）

设 $E \to X$ 为光滑线丛，即 $\mathrm{rank}_{\mathbb{K}} E = 1$. 设 D 为 E 上的联络，A 为 D 在某局部标架下的系数矩阵（无非是局部的 1-形式），此时曲率形式 $\Omega = \mathrm{d}A + A \wedge A = \mathrm{d}A$. 容易验证第一陈类为

$$c_1(E, \mathrm{D}) = \frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\Theta$$

在此特殊情况下，若 D_0 与 D_1 为线丛 E 的两个联络，则容易验证

$$c_1(E, \mathrm{D}_1) - c_1(E, \mathrm{D}_0) = \frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\mathrm{d}(\mathrm{D}_1 - \mathrm{D}_0)$$

其中 $\mathrm{D}_1 - \mathrm{D}_0 \in \Omega^1(X)$ 为整体定义的 1 形式。特别地，$[c_1(E, \mathrm{D}_1)] = [c_1(E, \mathrm{D}_0)] \in H^2(X)$

4.3 Hermite 向量丛

本节开始考虑复向量丛。

定义 4.3.1. （*Hermite* 向量丛）

设 $E \to X$ 为光滑流形 X 上的复向量丛，称 E 为 *Hermite* 向量丛，若任意 $x \in X$，纤维 E_x 上配以 *Hermite* 内积结构 $h \in \Omega^0(X, \mathrm{Herm}(E, E))$:

$$\begin{aligned} h_x : E_x \times E_x &\to \mathbb{C} \\ (s_x, t_x) &\mapsto \{s_x, t_x\} \end{aligned}$$

并且对于任意局部标架 $e(x) = (e_1(x), e_2(x), .., e_r(x))$，$h_{ij}(x) := \{e_i(x), e_j(x)\}$ 是光滑的。此时 h 称为 E 的 ***Hermite* 度量**。

由定义知，在局部标架 $e = (e_1, e_2, ..., e_r)$ 下，矩阵 $h = (h_{ij})$ 为正定 Hermite 矩阵。我们假定 $\{,\}$ 关于第一个位置共轭线性。我们用符号“$\dagger$”来表示矩阵的共轭转置，则 $h^\dagger = h$. 显然此定义是良定的，若 $\tilde{e}$ 为另一组局部标架，并有转移矩阵 G 使得 $\tilde{e} = eG$，则有

$$\tilde{h}_{ij} = \{\tilde{e}_i, \tilde{e}_j\} = \{G_i^k e_k, G_j^l e_l\} = \overline{G}_i^k G_j^l \{e_k, e_l\} = \overline{G}_i^k h_{kl} G_j^l = (G^\dagger h G)_{ij}$$

即 $\tilde{h} = G^\dagger h G$. 又由于转移矩阵 G 是光滑的，从而 h 光滑当且仅当 $\tilde{h}$ 光滑。

任何复向量丛都存在 Hermite 度量，原因与黎曼几何当中的“黎曼度量存在性”完全类似。此外，Hermite 度量 h 可自然地线性延拓为

$$h:\Omega^p(X,E)\times\Omega^q(X,E) \quad\rightarrow\quad \Omega^{p+q}(X)$$

满足共轭超对称性：对任意 $u\in\Omega^p(X,E)$ 以及 $v\in\Omega^q(X,E)$，$\{u,v\}=(-1)^{pq}\overline{\{v,u\}}$ 等等性质。

定义 4.3.2. （*Hermite* 联络）

设复向量丛 $(E,h)\to X$ 为 *Hermite* 向量丛，D 为 E 上的联络。称 D 与 *Hermite* 度量 h 相容，或称 D 为 ***Hermite* 联络**，若对任意 $u\in\Omega^p(X,E)$ 以及 $v\in\Omega^q(X,E)$，都有

$$\mathrm{d}\{u,v\}=\{\mathrm{D}u,v\}+(-1)^p\{u,\mathrm{D}v\}$$

特别地，在局部标架 $e=(e_1,e_2,...,e_r)$ 下，成立

$$\mathrm{d}h_{ij}=\{\mathrm{D}e_i,e_j\}+\{e_i,\mathrm{D}e_j\}=\overline{A_i^k}h_{kj}+A_j^kh_{ik}=(A^\dagger h+hA)_{ij}$$

其中 A 为 D 在该标架下的系数。从而有

$$\mathrm{d}h=A^\dagger h+hA \tag{$*$}$$

性质 4.3.3. （*Hermite* 联络的曲率）

设 $E\to X$ 为复向量丛，h 为 E 的一个 *Hermite* 结构，D 为 E 上的与 h 相容的联络，$e=(e_1,e_2,...,e_r)$ 为 E 的一组局部**幺正标架**（即 $\{e_i,e_j\}=\delta_{ij}$），则 D 的曲率 Θ 在标架 e 下的矩阵 Ω 满足

$$\Omega^\dagger=-\Omega$$

证明. 只需注意到

$$\begin{aligned}0 &= \mathrm{d}^2\{e_i,e_j\}=\mathrm{d}\left(\{\mathrm{D}e_i,e_j\}+\{e_i,\mathrm{D}e_j\}\right)\\ &= \{\mathrm{D}^2e_i,e_j\}-\{\mathrm{D}e_i,\mathrm{D}e_j\}+\{\mathrm{D}e_i,\mathrm{D}e_j\}+\{e_i,\mathrm{D}^2e_j\}=\overline{\Omega_i^j}+\Omega_j^i\end{aligned}$$

因此 $\Omega^\dagger=-\Omega$. □

容易验证，在一般的标架（未必幺正）下，Hermite 联络的曲率的系数矩阵满足

$$\Omega^\dagger h+h\Omega=0$$

注记 4.3.4. 此性质表明，*Hermite* 联络 D 的曲率 Θ 满足：$\sqrt{-1}\Theta\in\Omega^2(X,\mathrm{Herm}(E,E))$. 特别地，$\sqrt{-1}\Theta$ 的系数矩阵 $\sqrt{-1}\Omega$ 的对角元都是实的 2-形式，从而第一陈类

$$[c_1(E)]=\frac{1}{2\pi}[\mathrm{tr}(\sqrt{-1}\Theta)]\in H^2(X,\mathbb{R})$$

4.4 复流形上的联络

现在，我们考虑**复流形**X 上的光滑向量丛。对于复流形，注意到微分形式空间的分解

$$\Omega^m(X) = \bigoplus_{p+q=m} \Omega^{p,q}(X)$$

现在，若 $E \to X$ 为复流形 E 上的光滑向量丛，我们类似定义

$$\Omega^{p,q}(X,E) = \Gamma(X, \bigwedge\nolimits^{p,q}(T^*M) \otimes E)$$

为取值于 E 上的 (p,q) 形式空间。在复流形上，外微分算子 $\mathrm{d} = \mathrm{d}' + \mathrm{d}''$，其中 $\mathrm{d}' := \partial, \mathrm{d}'' := \overline{\partial}$.

定义 4.4.1. （$(1,0)$ 型联络）

对于复流形 X 上的光滑向量丛 E，称算子 $\mathrm{D}' : \Omega^{\bullet,\bullet}(X,E) \to \Omega^{\bullet+1,\bullet}(X,E)$ 为 $(1,0)$ 型联络，如果对任意 $u \in \Omega^{p,q}(X)$ 以及 $v \in \Omega^{p',q'}(X,E)$，成立

$$\mathrm{D}'(u \wedge v) = \mathrm{d}'u \wedge v + (-1)^{p+q} u \wedge \mathrm{D}'v$$

注意“$(1,0)$ 型联络”虽然字面上有“联络”，但它一般不是向量丛的联络（从定义能看出）。类似地，我们也可以定义 $(0,1)$ 型联络 $\mathrm{D}'' : \Omega^{\bullet,\bullet}(X,E) \to \Omega^{\bullet,\bullet+1}(X,E)$，使得对任意 $u \in \Omega^{p,q}(X)$ 以及 $v \in \Omega^{p',q'}(X,E)$，成立

$$\mathrm{D}''(u \wedge v) = \mathrm{d}''u \wedge v + (-1)^{p+q} u \wedge \mathrm{D}''v$$

注记 4.4.2. 对于复流形上的光滑向量丛 $E \to X$，若 D' 与 D'' 分别为 E 上的 $(1,0),(0,1)$ 型联络，则易验证 $\mathrm{D} := \mathrm{D}' + \mathrm{D}''$ 必为 E 上的联络。反之，E 上的任何联络 D 都可自然地分解为 $(1,0)$ 部分与 $(0,1)$ 部分之和：$\mathrm{D} = \mathrm{D}' + \mathrm{D}''$.

设 D' 为 $(1,0)$ 型联络，则在 E 的局部（光滑）标架下，类似定义 D' 的系数矩阵 A'，注意 A' 的每个矩阵元都是 $(1,0)$ 形式；而 $(0,1)$ 型联络的系数矩阵也类似。类似地，也有局部标架下的表达式 $\mathrm{D}' = \mathrm{d}' + A'$ 以及 $\mathrm{D}'' = \mathrm{d}'' + A''$.

性质 4.4.3. 设 $(E,h) \to X$ 为复流形 X 上的光滑 *Herimite* 向量丛，D 为 E 上的与 h 相容的 *Hermite* 联络，则对于 E 的光滑**幺正标架**$e = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$，联络 D 的系数矩阵 A 的 $(1,0),(0,1)$ 部分 A', A'' 满足

$$A'' = -(A')^\dagger$$

证明. 直接验证即可，只需注意

$$0=\mathrm{D}\{e_i,e_j\}=\mathrm{D}'\{e_i,e_j\}+\mathrm{D}''\{e_i,e_j\}=\left((\overline{A}')_i^j+(A'')_j^i\right)+\left((A')_j^i+(\overline{A}'')_i^j\right)$$

注意其 $(1,0)$ 分量与 $(0,1)$ 分量，从而 $A'=-(A'')^\dagger$. □

事实上，联络 D 在幺正标架下的系数矩阵满足 $(A'')^\dagger=-A'$ 当且仅当 D 为 Hermite 联络。由此不难得出：

推论 4.4.4. *设 $E\to X$ 为复流形 X 上的光滑 Hermite 向量丛，则对于 E 上的任何 $(0,1)$ 型联络 D''，存在唯一的 Hermite 联络 D，使得 D 的 $(0,1)$ 部分恰为 D''.*

证明. 任取 E 的光滑幺正标架 $e=(e_1,e_2,...,e_r)$，令 D'' 在标架 e 下的系数矩阵为 A''. 令 $A:=-(A'')^\dagger+A''$，则矩阵 A 确定了一个 Hermite 联络 D，使得 D 在该标架下的矩阵为 A. 易验证 D 的良定性。 □

现在，假设 $E\to X$ 为全纯向量丛。

重要例子 4.4.5. （全纯向量丛上的典范 $(0,1)$ 型联络）

设 $E\to X$ 为全纯向量丛，则微分算子 $\mathrm{d}''=\overline{\partial}$ 自然给出了 E 上的一个 $(0,1)$ 型联络，称为**典范** $(0,1)$ **型联络**。

任取 E 的**全纯标架**$e=(e_1,e_2...,e_r)$，则对于任意的 $u\in\Omega^{p,q}(X,E)$，局部上有 $u=u^\alpha\otimes e_\alpha$，其中 $u^\alpha\in\Omega^{p,q}(X)$，则令

$$\overline{\partial}u:=(\overline{\partial}u^\alpha)\otimes e_\alpha$$

特别地，对于全纯标架场 e_α，有 $\overline{\partial}e_\alpha=0$. 容易验证上述定义的良定性，从而 $\overline{\partial}$ 诱导了 E 上的一个 $(0,1)$ 型联络。

定义 4.4.6. （全纯 *Hermite* 向量丛的陈联络）

设 $E\to X$ 为**全纯 *Hermite* 向量丛**（即它为全纯向量丛且配以 *Hermite* 结构 h,），则存在唯一的 *Hermite* 联络 D，使得其 $(0,1)$ 分量 $\mathrm{D}''=\overline{\partial}$. 称此联络为全纯 *Hermite* 向量丛 $(E,h)\to X$ 的**陈联络**（*Chern connection*）。

显然，陈联络的存在唯一性是推论4.4.4的推论。全纯 Hermite 丛的陈联络就像 Riemann 流形上的 Levi-Civita 联络一样典范。另外，注意全纯 Hermite 向量丛的 Hermite 结构 h 在全纯标架下的矩阵**未必**是全纯的，仅仅光滑即可，并不存在 Hermite 结构与全纯结构的“相容性”。

引理 4.4.7. 设 $(E,h)\to X$ 为全纯 *Hermite* 向量丛，$\mathrm{D}=\mathrm{D}'+\mathrm{D}''$ 为其陈联络，任取 E 的全纯标架 $e=(e_1,e_2,...,e_r)$，将 h 在该标架下的矩阵也记为 h，则陈联络 D 在该标架下的系数矩阵 A 及其 $(1,0),(0,1)$ 分量 A',A'' 满足

$$A=A'=h^{-1}\partial h \qquad A''=0$$

证明. 由于 $\mathrm{D}''=\bar{\partial}$，从而系数矩阵 $A''=0$ 是显然的，也有 $A'=A$. 注意 D 首先是 Hermite 联络，从而定义4.3.2下方的 $(*)$ 式成立，即

$$hA+A^{\dagger}h=\mathrm{d}h=\partial h+\bar{\partial}h$$

比较 $(1,0)$ 分量，得到 $hA=\partial h$，因此 $A=h^{-1}\partial h$. □

注意在我这里，Hermite 内积 $\{,\}$ **关于第一个位置**是共轭线性的，即 $\{\lambda u,v\}=\bar{\lambda}\{u,v\}$. 而在其它版本中，若假定 $\{,\}$ 关于第二个位置共轭线性，则陈联络在全纯标架下的系数矩阵为 $A=\bar{h}^{-1}\partial\bar{h}$.

引理 4.4.8. 设 $(E,h)\to X$ 为全纯 *Hermite* 向量丛，$\mathrm{D}=\mathrm{D}'+\mathrm{D}''$ 为其陈联络，则有 $(\mathrm{D}')^2=(\mathrm{D}'')^2=0$，特别地，$\mathrm{D}$ 的曲率

$$\Theta=\mathrm{D}^2=(\mathrm{D}'+\mathrm{D}'')^2=\mathrm{D}'\mathrm{D}''+\mathrm{D}''\mathrm{D}'$$

证明. 注意 $\mathrm{D}''=\bar{\partial}$，从而显然 $(\mathrm{D}'')^2=\bar{\partial}^2=0$. 至于 $(\mathrm{D}')^2=0$，我们在全纯局部标架下验证。对于全纯标架 $e=(e_1,e_2...,e_r)$，设 $\varphi\in\Omega^{0,0}(X,E)$ 为 E 的光滑截面，$\varphi:=\varphi^{\alpha}e_{\alpha}$，我们将 φ 在标架 e 下的坐标函数仍记为 φ （这里的 φ 是 r 维列向量，每个分量都为光滑函数），则有

$$\mathrm{D}'\varphi=\partial\varphi+A'\varphi=\partial\varphi+h^{-1}\partial h\cdot\varphi$$

注意到 $\partial^2=0$，以及 $\partial(h^{-1})=-h^{-1}\partial h\cdot h^{-1}$，因此有

$$\begin{aligned}
(\mathrm{D}')^2\varphi &= \mathrm{D}'(\partial\varphi+h^{-1}\partial h\cdot\varphi)\\
&= \partial(\partial\varphi+h^{-1}\partial h\cdot\varphi)+h^{-1}\partial h\cdot(\partial\varphi+h^{-1}\partial h\cdot\varphi)\\
&= \partial(h^{-1}\partial h\cdot\varphi)+h^{-1}\partial h\cdot\partial\varphi+h^{-1}\partial h\cdot h^{-1}\partial h\cdot\varphi\\
&= -h^{-1}\partial h\cdot h^{-1}\partial h\cdot\varphi-h^{-1}\partial h\cdot\partial\varphi+h^{-1}\partial h\cdot\partial\varphi+h^{-1}\partial h\cdot h^{-1}\partial h\cdot\varphi\\
&= 0
\end{aligned}$$

□

性质 4.4.9. （陈联络的曲率）

设 $(E,h) \to X$ 为全纯 *Hermite* 向量丛，D 为其陈联络，则 D 的曲率 Θ 在全纯标架 $e=(e_1,e_2,...,e_r)$ 下的系数矩阵为

$$\Omega = \overline{\partial}(h^{-1}\partial h)$$

证明. 记号同之前，则

$$\Omega = \mathrm{d}A + A\wedge A = (\partial+\overline{\partial})(h^{-1}\partial h) + h^{-1}\partial h \cdot h^{-1}\partial h = \overline{\partial}(h^{-1}\partial h)$$

□

注记 4.4.10. 注意陈联络首先是 *Hermite* 联络，回顾性质*4.3.3*，陈联络的曲率满足 $\sqrt{-1}\Theta \in \Omega^2(X,\mathrm{Herm}(E,E))$. 而由 $\Omega = \overline{\partial}(h^{-1}\partial h)$ 不难看出，对于陈联络的曲率 Θ，

$$\sqrt{-1}\Theta \in \Omega^{1,1}(X,\mathrm{Herm}(E,E))$$

例子 4.4.11. （全纯线丛的情形）

特别地，若 $(E,h)\to X$ 为全纯 *Hermite* 线丛，D 为其陈联络，则在全纯标架 e 下，曲率形式 Ω 满足

$$\Omega = \overline{\partial}(h^{-1}\partial h) = \overline{\partial}\partial\log h = -\partial\overline{\partial}\log h$$

若在该标架下，$h=e^{-2\varphi}$，则曲率形式

$$\Omega = -\partial\overline{\partial}\log h = 2\partial\overline{\partial}\varphi = 2\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^i\partial\overline{z}^j}\mathrm{d}z^i\wedge\mathrm{d}\overline{z}^j$$

性质 4.4.12. 设 $(E,h)\to X$ 为全纯 *Hermite* 线丛，设 s 为 E 的任何一个（局部）非零的**全纯截面**，则成立

$$-\sqrt{-1}\partial\overline{\partial}\log\|s\|_h^2 = \sqrt{-1}\Theta$$

其中 Θ 为 (E,h) 陈联络的曲率形式。

证明. 任取 E 的全纯标架 e，在全纯标架下验证。把 s 在该标架下的坐标函数仍记为 s. 则注意 s 为全纯标架，从而坐标函数 s 满足 $\overline{\partial}s = \partial\overline{s} = 0$，因此有

$$\begin{aligned}-\sqrt{-1}\partial\overline{\partial}\log\|s\|_h^2 &= -\sqrt{-1}\partial\overline{\partial}\log(s\overline{s}h) = -\sqrt{-1}\partial\overline{\partial}[\log(s\overline{s})+\log h]\\ &= -\sqrt{-1}\partial\overline{\partial}\log h = \sqrt{-1}\Theta\end{aligned}$$

□

推论 4.4.13. （$\partial\bar{\partial}$-引理）
设 $(E,h)\to X$ 为复流形 X 上的全纯线丛，记 Θ 为 h 的陈联络的曲率形式。则对任意实值光滑函数 $f\in\Omega^0(X,\mathbb{R})$，必存在 E 上的 *Hermite* 度量 $=\widetilde{h}$，使得其陈联络的曲率形式 $\widetilde{\Theta}$ 满足

$$\widetilde{\Theta}=\Theta+2\pi\partial\bar{\partial}f$$

证明. 取 $\widetilde{h}=e^{-2\pi f}h$ 即可。 □

定理 4.4.14. （第一陈类的代数几何解释）
设 X 为复流形，考虑 X 上的层正合列 $0\to\mathbb{Z}\hookrightarrow\mathcal{O}\xrightarrow{e^{2\pi i*}}\mathcal{O}^*\to 0$ 诱导的上同调长正合列

$$\cdots\to H^1(X,\mathcal{O})\to H^1(X,\mathcal{O}^*)\xrightarrow{\delta}H^2(X,\mathbb{Z})\to H^2(X,\mathcal{O})\to\cdots$$

则对任意全纯线丛 $E\in H^1(X,\mathcal{O}^*)$，$\delta(E)\in H^2(X,\mathbb{Z})\hookrightarrow H^2(X,\mathbb{R})\cong H^2_{\mathrm{DR}}(X,\mathbb{R})$ 满足

$$\delta(E)=[c_1(E)]$$

证明. （待补） □

4.5 例子：复射影空间上的典范线丛 $\mathcal{O}(-1)$

设 V 为复线性空间，$\dim_{\mathbb{C}}V=n+1$，则我们已经熟悉复流形 $\mathbb{P}(V)\cong\mathbb{CP}^n$ 以及其上的典范线丛 $\mathcal{O}(-1):=\left\{([\xi],\eta)\in\mathbb{P}(V)\times V\middle|\eta\in[\xi]\right\}$. 回顾 $\mathbb{P}(V)$ 具有典范的坐标覆盖 $U_i:=\left\{[z_0;z_1;...;z_n]\middle|z_i\neq 0\right\}$，这也是线丛 $\mathcal{O}(-1)$ 的局部平凡化覆盖。

重要例子 4.5.1. 设 V 为 *Hermite* 内积空间（酉空间），则线丛 $\mathcal{O}(-1)\to h$ 上自然配以 *Hermite* 内积结构 h，该 *Hermite* 内积由 V 上的 *Hermite* 内积自然诱导。取线性空间 V 的一组幺正基 $(e_0,e_1,...,e_n)$，该基下的坐标函数记为 $(z_0,z_1,...,z_n)^T$. 则在 $\mathbb{P}(V)$ 的局部坐标卡 $U_0:=\left\{[z_0;z_1;...;z_n]\middle|z_0\neq 0\right\}\cong\mathbb{C}^n$ 下，

$$\mathcal{E}_0:=e_0+\sum_{k=1}^n z_ke_k$$

为 $\mathcal{O}(-1)$ 在 U_0 下的一个非零全纯截面，即全纯标架。

关于截面 $\mathcal{E}_0$，有一点轻微的记号混用。线丛的全纯截面在局部平凡化坐标卡下，应该是 $\mathcal{U}_0 \cong \mathbb{C}^n$ 上的全纯函数。在此意义下，$\mathcal{E}_0(z_1, z_2, ..., z_n) \equiv 1$，是“最简单”的非零全纯函数。

注意 Hermite 度量，容易知道在局部坐标 $U_0 = (z_1, z_2, ..., z_n)$ 以及全纯标架 $\mathcal{E}_0$ 下有

$$h = \|\mathcal{E}_0\|_h^2 = 1 + |z_1|^2 + |z_2|^2 + \cdots + |z_n|^2$$

因此陈联络的曲率形式 $\Theta(\mathcal{O}(-1))$ 为

$$\Theta(\mathcal{O}(-1)) = -\partial\bar{\partial}\log h = -\partial\bar{\partial}\log(1 + |z_1|^2 + |z_2|^2 + \cdots + |z_n|^2)$$

例子 4.5.2. （超平面丛 $\mathcal{O}(1)$）

记号同上，考虑 $\mathcal{O}(-1)$ 的对偶丛 $\mathcal{O}(1) := \mathcal{O}(-1)^*$，则 $\mathcal{O}(1)$ 的曲率形式在坐标卡 U_0 下的表达式为

$$\Theta(\mathcal{O}(1)) = -\Theta(\mathcal{O}(-1)) = \partial\bar{\partial}\log(1 + |z_1|^2 + |z_2|^2 + \cdots + |z_n|^2)$$

记 $f(z_1, z_2, ..., z_n) := \log(1 + |z_1|^2 + |z_2|^2 + \cdots + |z_n|^2)$，则矩阵 $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial z_k \partial \bar{z}_l}\right)_{1 \le k,l \le n}$ 是**正定** Hermite 矩阵（为什么？）。

定理 4.5.3. 对于 $n+1$ 维复向量空间 V，则 $\mathbb{P}(V)$ 上的线丛 $\mathcal{O}(1)$ 的第一陈形式 $c_1(\mathcal{O}(1)) \in \Omega^{1,1}(\mathbb{P}(V))$ 满足

$$\int_{\mathbb{P}(V)} [c_1(\mathcal{O}(1))]^{\wedge n} = 1$$

注意 $c_1(\mathcal{O}(1)) = \frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\Theta$，其中 Θ 为上文当中的陈联络的曲率形式。事实上，陈类的定义当中的系数“$\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}$”存在的意义正是要让此定理成立（归一化）。

证明. 考虑 $\mathbb{P}(V)$ 的坐标卡 U_0，注意 $\mathbb{P}(V) \setminus U_0$ 是零测的，从而只需计算它在 U_0 上的积分。

（待补，似乎要暴力计算？） □

第 5 章　L^2 Hodge 理论

5.1　向量丛上的微分算子

现在，假设 X 为 n 维（连通）光滑流形，$E,F \to X$ 为 X 上的光滑 $\mathbb{K}$-向量丛，其秩分别为 r,r'. 这里 $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ 或 $\mathbb{C}$.

定义 5.1.1.（向量丛上的微分算子）

对于光滑流形 X 上的秩分别为 r,r' 的光滑 $\mathbb{K}$-向量丛 $E,F\to X$，称 $\mathbb{K}$-线性算子

$$\begin{aligned} P: C^\infty(X,E) &\to C^\infty(X,F) \\ u &\mapsto Pu \end{aligned}$$

为次数为 k 的**微分算子**，如果在局部平凡化坐标卡下，截面的坐标函数满足

$$(Pu)^\mu = \sum_{|\alpha|\le k} a^\mu_{\lambda,\alpha} \mathrm{D}^\alpha u^\lambda$$

其中 u 为 E 的某截面在某局部标架下的坐标函数，视为 r 维列向量；$1\le\lambda\le r, 1\le\mu\le s$，$\alpha\in\mathbb{N}^r$ 为多重指标，D^α 为相应的偏微分算子。

容易验证微分算子 P 的次数 k 与局部标架选取无关。固定 E,F 上的局部标架，$x=(x^1,x^2,...,x^n)^T$ 为 X 上的关于 E,F 的局部平凡化坐标卡，若 X 上还有另一组局部平凡化坐标卡 $\widetilde{x}=(\widetilde{x}^1,\widetilde{x}^2,...,\widetilde{x}^n)^T$，则对于多重指标 $|\alpha|=k$，可以去验证 P 在 $x,\widetilde{x}$ 下的第 α 阶系数矩阵 $a_\alpha,\widetilde{a}_\alpha$ 的转换关系。不过要注意，若 $|\alpha|<k$，则转换关系会异常复杂。

性质 5.1.2.（微分算子的主符号）

记号同上，则对于向量丛上的 k 阶微分算子 $P: C^\infty(X,E)\to C^\infty(X,F)$，在 E 的局部平凡化坐标卡下，对于 $x\in X$，$u\in C^\infty(X,E)$ 视为 r 为列向量值函数，以及 $\xi=\xi_i\mathrm{d}x^i\in\Omega^1(X)=C^\infty(X,T^*X)$ 为 X 上的 1-形式，在坐标卡下视为 n 维行向量 $(\xi_1,\xi_2,...,\xi_n)$，则

$$\sigma_P(x,\xi): u\to \sum_{|\alpha|=k}\xi^\alpha a_\alpha u$$

整体定义了一个 $\mathbb{K}$-线性算子

$$\sigma_P : T^*X \to \mathrm{Hom}(E,F)$$

称该算子为微分算子 P 的**主符号** *(principal symbol)*。其中 $\xi^\alpha = \xi_1^{\alpha_1}\xi_2^{\alpha_2}\cdots\xi_n^{\alpha_n}$.

证明. 需要验证 $\sigma_P(x,\xi)$ 是在 X 上的整体定义的。

（待补） □

注记 5.1.3. 要注意，对于余切向量 $\xi \in T_x^*X$，$\xi \to \sigma_{x,\xi}$ 一般**不是**关于 ξ 线性的，而是 ξ 的 k 次函数，其中 k 是微分算子 P 的阶数。若 $k=1$，则 $\sigma_P(x,-)$ 关于 ξ 线性。

注记 5.1.4. 设 f 为 X 上的在 $x \in X$ 附近定义的光滑函数，则对 E 的在 x 附近的截面 u，容易验证

$$t \mapsto e^{-tf}P(e^{tf}u)$$

是关于 t 的 k 次多项式，并且首项 t^k 的系数正是 $\sigma(x,\mathrm{d}f)(u)$.

例子 5.1.5. （外微分算子 d）

对于光滑流形 X，外微分算子 d 自然视为 p-形式丛 $\bigwedge^p T^*X$ 到 $(p+1)$-形式丛 $\bigwedge^{p+1} T^*X$ 的一阶微分算子.

注意到对于 X 上的光滑函数 f，以及 $\omega \in \Omega^p(X)$，

$$e^{-tf}\mathrm{d}(e^{tf}\omega) = t\mathrm{d}f \wedge \omega + \mathrm{d}\omega$$

从而知 d 的主符号 $\sigma_{\mathrm{d}}(x,\xi)(\omega) = \xi \wedge \omega$.

定义 5.1.6. （椭圆算子）

设 E,F 为 X 的光滑向量丛，微分算子 $P : C^\infty(X,E) \to \infty(X,F)$ 称为椭圆算子，若 P 的主符号 σ_P 满足：对任意 $x \in X$ 以及 $\xi \in T_x^*X \setminus \{0\}$，$\sigma_P(x,\xi) : E_x \to F_x$ 是单射。

例如，外微分算子 $\mathrm{d} : \Omega^0(X) \to \Omega^1(X)$ 是椭圆的。

接下来引入一些分析上的概念，首先是向量丛的 L^2 截面：

定义 5.1.7. 设 X 为定向的光滑流形，$\mathrm{d\,Vol}$ 为 X 的一个体积形式，$E \to X$ 为光滑丛，并配以欧氏结构或者 *Hermite* 结构 $\langle,\rangle$。则对任意 $u,v \in C^\infty(X,E)$，定义

$$\langle\!\langle u,v\rangle\!\rangle := \int_M \langle u,v\rangle \mathrm{d\,Vol}$$

定义 $L^2(X,E) := \left\{u \in C^\infty(X,E) \middle| \langle\!\langle u,u\rangle\!\rangle < +\infty\right\}$ 的（在 $\langle\!\langle,\rangle\!\rangle$ 诱导的范数下的）完备化。

$L^2(X,E)$ 配以内积《,》，构成 Hilbert 空间。对于 $u \in L^2(X,E)$，局部标架下，u 可视为向量值的 L^2-可积的可测函数。由分析学可知，$C^\infty(X,E)\cap L^2(X,E)$ 在 $L^2(X,E)$ 中稠密。以后我们在讨论 $L^2(X,E)$ 时，不妨假定 E 是 Hermite 向量丛。

性质 5.1.8. （微分算子的形式伴随）

设 $E,F \to X$ 为光滑定向流形 X 上的 *Hermite* 向量丛，给定 X 的体积形式 $\mathrm{d\,Vol}$，则对任意的微分算子 $P: C^\infty(X,E) \to C^\infty(X,F)$，存在唯一的微分算子 $P^*: C^\infty(X,F) \to C^\infty(X,E)$，使得对任意的 $u \in C^\infty(X,E)$ 以及 $v \in C^\infty(X,F)$，若 $\operatorname{supp} u \cap \operatorname{supp} v \subset\subset X$，都有

$$\langle\!\langle Pu, v\rangle\!\rangle = \langle\!\langle u, P^* v\rangle\!\rangle$$

称算子 P^* 为 P 的**形式伴随**（*formal adjoint*）。

证明. 取定 Hermite 丛 E,F 的幺正标架以及 X 的局部坐标卡。记 $\Omega := \operatorname{supp} u \cap \operatorname{supp} v$，不妨 Ω 包含于该局部坐标卡。则在该幺正标架、局部坐标下，记微分算子 P 与体积形式 $\mathrm{d\,Vol}$ 分别为

$$P = \sum_{|\alpha|\le k} a_\alpha \mathrm{D}^\alpha, \qquad \mathrm{d\,Vol} = \gamma(x)\mathrm{d}x^1 \wedge \mathrm{d}x$$

其中 $\mathrm{d}x := \mathrm{d}x^1 \wedge \mathrm{d}x^2 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^n$. 因此有

$$\begin{aligned}
\langle\!\langle Pu, v\rangle\!\rangle &= \sum_{|\alpha|\le k}\int_\Omega \langle a_\alpha \mathrm{D}^\alpha u, v\rangle \gamma \mathrm{d}x = \sum_{|\alpha|\le k}\int_\Omega \mathrm{D}^\alpha u^\dagger a_\alpha^\dagger v \gamma \mathrm{d}x \\
&= \sum_{|\alpha|\le k}\int_\Omega (-1)^{|\alpha|} u^\dagger \mathrm{D}^\alpha(\gamma a_\alpha^\dagger v)\mathrm{d}x = \int_\Omega u^\dagger \sum_{|\alpha|\le k}(-1)^{|\alpha|}\gamma^{-1}\mathrm{D}^\alpha(\gamma a_\alpha^\dagger v)\cdot\gamma \mathrm{d}x \\
&= \langle\!\langle u, \gamma^{-1}\sum_{|\alpha|\le k}(-1)^{|\alpha|}\mathrm{D}^\alpha(\gamma a_\alpha^\dagger v)\rangle\!\rangle
\end{aligned}$$

因此，只需取

$$P^*(v) := \gamma^{-1}\sum_{|\alpha|\le k}(-1)^{|\alpha|}\mathrm{D}^\alpha(\gamma a_\alpha^\dagger v)$$

□

推论 5.1.9. （形式伴随的主符号）

设 $E,F \to X$ 为配以体积形式 $\mathrm{d\,Vol}$ 的光滑定向流形 X 上的 *Hermite* 向量丛，$P: C^\infty(X,E) \to C^\infty(X,F)$ 为 k 阶微分算子，则形式伴随 P^* 的主符号 σ_{P^*} 满足

$$\sigma_{P^*}(x,\xi) = (-1)^k[\sigma_P(x,\xi)]^*$$

证明. 由 P^* 的局部表达式显然得到。 □

推论 5.1.10. 条件记号同上，若 $\operatorname{rank} E = \operatorname{rank} F$，则 P 为椭圆算子当且仅当 P^* 为椭圆算子。

证明. 显然。 □

5.2 椭圆算子的基本性质

本节不加证明地陈述分析学当中的一些重要结果。

设 X 为紧致、定向光滑流形，配以体积形式 $\mathrm{d}\,\mathrm{Vol}$，$\dim_{\mathbb{R}} X = n$；$E \to X$ 为 Hermite 向量丛，$\operatorname{rank}_{\mathbb{C}} E = r$. 取 X 的有限的关于 E 的局部平凡化坐标覆盖 $\left\{\Omega_j \middle| 1 \le j \le n\right\}$，以及 E 的在 Ω_j 上的局部的幺正标架 $e_j = (e_{j,1}, e_{j,2}, ..., e_{j,r})$. 对于 $u \in L^2(X, E)$，记 u 在 Ω_j 的局部表达式为 $u = u_j^{\lambda} e_{j,\lambda}$，视 u_j 为 r 为列向量。从而对于 $k \ge 0$，对于 $u \in C^k(X, E)$，记

$$\|u\|_k^2 := \sum_{j=1}^{N} \int_{\Omega_j} \sum_{|\alpha| \le k} |\mathrm{D}^{\alpha} u_j|^2 \mathrm{d}\,\mathrm{Vol}$$

从而定义**索伯列夫空间**（Sobolev space）$W^k(X, E) := \left\{u \in C^k(X, E) \middle| \|u\|_k < +\infty\right\}$ 在范数 $\|\cdot\|_k$ 下的完备化。易知 $W^k(X, E)$ 为 Hilbert 空间。事实上对于紧流形 X，取 X 的不同的开覆盖、坐标卡、局部幺正标架，所得到的范数 $\|\cdot\|_k$ 是等价范数。

接下来的一系列结果，述而不证：

引理 5.2.1. （*Sobolev* 引理）若 $k > l + \frac{n}{2}$，则有 $W^k(X, E) \subseteq C^l(X, E)$.

引理 5.2.2. （*Rellich* 紧嵌入定理）

对任意 $k \in \mathbb{Z}_{\ge 0}$，则 $W^{k+1}(M, E) \hookrightarrow W^k(M, E)$ 是紧算子。

引理 5.2.3. （*Gårding* 不等式）

设 E, F 为紧定向流形 X 上的 *Hermite* 向量丛，$\operatorname{rank}_{\mathbb{C}} E = \operatorname{rank}_{\mathbb{C}} F$，$P : C^{\infty}(E) \to C^{\infty}(F)$ 为 d 次的椭圆算子，并将 P 的定义域自然延拓到 E 的分布系数的截面上。则对于任意 $u \in W^0(X, E)$，如果 $Pu \in W^k(X, F)$，那么 $u \in W^{k+d}(X, E)$，并且成立不等式

$$\|u\|_{k+d} \le C_k \left(\|Pu\|_k + \|u\|_0\right)$$

其中常数 C_k 只与 k 有关。

特别地，我们有椭圆算子正则性：对于椭圆算子 P，若 $u \in W^0(X,E)$ 满足 $Pu=0$，则必有 $u \in C^\infty(X,E)$.

我们还有关于椭圆算子的如下的一般结果：

引理 5.2.4. *(有限性定理)*

设 X 为紧定向流形，$E,F \to X$ 为 *Hermite* 向量丛，并且 $\operatorname{rank}_{\mathbb{C}} E = \operatorname{rank}_{\mathbb{C}} F$，$P: C^\infty(M,E) \to C^\infty(M,F)$ 为椭圆算子，则有：

（*1*）$\ker P$ 是有限维空间；

（*2*）$P(C^\infty(X,E))$ 是 $C^\infty(X,F)$ 的闭子空间，并且余维数有限；

（*3*）若 P^* 为 P 的形式伴随，则有（$L^2(X,F)$ 上的）正交直和分解

$$C^\infty(X,F) = P(C^\infty(X,E)) \oplus \ker P^*$$

5.3 Hodge $\star$ 算子与 Laplace 算子

我们先来介绍黎曼流形上的 Hodge 理论。在本节，假设 X 为 n 维紧定向黎曼流形，$E \to X$ 为 Herimite 向量丛，$\operatorname{rank}_{\mathbb{C}} E = r$. 局部上，取切丛 TX 的（关于黎曼度量的）幺正标架 $\xi = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n)$ 以及 E 的（关于 Hermite 结构的）幺正标架 $e = (e_1, e_2, ..., e_r)$. 记 $\xi^* := (\xi_1^*, \xi_2^*, ..., \xi_n^*)$ 以及 $e^* := (e_1^*, e_2^*, ..., e_r^*)$ 为相应的对偶标架。

众所周知，对于 $x \in X$，X 上的黎曼度量诱导了微分形式丛 $\bigwedge^\bullet T_x^*M$ 上的内积结构：对于任意 $u_1, ..., u_p; v_1, ..., v_p \in T_x^*X$，有

$$\langle u_1 \wedge \cdots \wedge u_p, v_1 \wedge \cdots \wedge v_p \rangle := \det(\langle u_i, v_j \rangle)$$

事实上，对于 T_x^*X 的幺正基 ξ^*，则 $\left\{ \xi_{i_1}^* \wedge \xi_{i_2}^* \wedge \cdots \wedge \xi_{i_p}^* \middle| p \geq 0, 1 \leq i_1 < \cdots < i_p \leq n \right\}$ 为 $\bigwedge^\bullet T_x^*X$ 的一组幺正基。用多重指标记号，将 $\xi_{i_1}^* \wedge \xi_{i_2}^* \wedge \cdots \wedge \xi_{i_p}^*$ 简记为 ξ_I^*，其中 $I := (i_1, i_2, ..., i_p)$.

$\bigwedge^\bullet T^*M \otimes E$ 的纤维上也自然地有由 $\bigwedge^\bullet T^*M$ 以及 E 诱导的 Hermite 内积结构。此外，也自然有 $\mathbb{C}$-共轭双线性型

$$\{,\} : \left(\bigwedge^p T^*X \otimes E\right) \times \left(\bigwedge^q T^*X \otimes E\right) \quad \to \quad \bigwedge^{p+q} T^*X$$

它由 $\bigwedge^\bullet T^*X$ 中的外积，以及 E 上的 Hermite 内积所诱导。

定义 5.3.1. （*Hodge* $\star$ 算子）

记号同之前，则定义 ***Hodge*** $\star$ **算子**

$$\star : \bigwedge^p T^*X \to \bigwedge^{n-p} T^*X$$

使得对任意 $u, v \in \bigwedge^p T^*X$，成立

$$u \wedge \star v = \langle u, v \rangle \mathrm{d}\,\mathrm{Vol}$$

良定性容易验证，并且 $\star$ 为线性算子。容易验证，在 T^*X 的幺正标架 $\zeta^* = (\zeta_1^*, \zeta_2^*, ..., \zeta_n^*)$ 下，对于指标 $I = (i_1, i_2, ..., i_p)$，其中 $1 \le i_1 < 1_2 < \cdots < i_p$，则有

$$\star \zeta_I^* = \mathrm{sgn}(I, I^c) \zeta_{I^c}^*$$

其中 $(n-p)$ 重指标 $I^c = (j_1, j_2, ..., j_{n-p})$ 为 $\{1, 2, ..., n\} \setminus I$ 中元素的从小到大排列，$\mathrm{sgn}(I, I^c)$ 为排列 $\begin{pmatrix} 1 & \cdots & p & p+1 & \cdots & n \\ i_1 & \cdots & i_p & j_1 & \cdots & j_{n-p} \end{pmatrix}$ 的符号。

定义 5.3.2. （向量丛上的 $\star$ 算子与 # 算子）

设 $E \to X$ 为黎曼流形上的 *Hermite* 向量丛，则定义

$$\begin{aligned} \star : \bigwedge^p T^*X \otimes E &\to \bigwedge^{n-p} X^*M \otimes E \\ \# : \bigwedge^p T^*X \otimes E &\to \bigwedge^{n-p} X^*M \otimes E^* \end{aligned}$$

使得对任意 $u, v \in \bigwedge^p T^*X \otimes E$，成立

$$\begin{aligned} \{u, \star v\} &= \langle u, v \rangle \mathrm{d}\,\mathrm{Vol} \\ u \wedge \# v &= \langle u, v \rangle \mathrm{d}\,\mathrm{Vol} \end{aligned}$$

其中双线性型 $\{,\}$ 由 $\bigwedge^\bullet T^*X$ 中外积 $\wedge$ 与 E 的 Hermite 结构诱导，$u \wedge \# v$ 当中的“$\wedge$”则由通常的外积与 E^*, E 的配对所诱导（其实 $\{u, \star v\}$ 与 $u \wedge \star v$ 是一个意思，但 $\{,\}$ 强调 E 中的 Hermite 内积，而不是 E^* 与 E 配对）。容易验证，在 $\bigwedge^\bullet T^*X$ 的幺正标架 $\{\zeta_I^*\}$ 与 E 的幺正标架 $e = (e_1, ..., e_r)$ 下，成立

$$\begin{aligned} \star(\zeta_I^* \otimes e_i) &= \mathrm{sgn}(I, I^c) \zeta_{I^c}^* \otimes e_i \\ \#(\zeta_I^* \otimes e_i) &= \mathrm{sgn}(I, I^c) \zeta_{I^c}^* \otimes e_i^* \end{aligned}$$

以及容易验证，在 $\bigwedge^p T^*X \otimes E$ 上，成立

$$\star^2 = \#^2 = (-1)^{p(n-p)} \mathrm{id}$$

回顾 $\Omega^p(X,E) := C^\infty(X, \bigwedge^p T^*X \otimes E)$ 上有 Hermite 内积结构

$$\langle\!\langle s,t \rangle\!\rangle := \int_X \langle u,v\rangle \mathrm{d}\,\mathrm{Vol}$$

在此意义下，我们可谈论相关微分算子的形式伴随：

性质 5.3.3. （*Hermite* 联络的形式伴随）

设 $E \to X$ 为紧定向黎曼流形上的 *Hermite* 向量丛，$\mathrm{D}_E : \Omega^p(X,E) \to \Omega^{p+1}(X,E)$ 为 *Hermite* 联络，则有

$$\mathrm{D}_E^* = (-1)^{np+1} \star \mathrm{D}_E \star$$

证明. 对任意的 $s \in \Omega^p(X,E)$ 以及 $t \in \Omega^{p+1}(X,E)$，只需注意

$$\langle\!\langle s, \mathrm{D}_E^* t \rangle\!\rangle \;=\; \langle\!\langle \mathrm{D}_E s, t \rangle\!\rangle = \int_X \langle \mathrm{D}_E s, t\rangle \mathrm{d}\,\mathrm{Vol} = \int_X \{\mathrm{D}_E s, \star t\}$$

再注意 D_E 为 Hermite 联络，从而 $\mathrm{d}\{s,\star t\} = \{\mathrm{D}_E s, \star t\} + (-1)^p \{s, \mathrm{D}_E \star t\}$；再注意 X 为紧流形，从而由 Stokes 定理知 $\int_X \mathrm{d}\{s,\star t\} = 0$. 因此

$$\begin{aligned}\langle\!\langle s, \mathrm{D}_E^* t\rangle\!\rangle &= \int_X \{\mathrm{D}_E s, \star t\} = (-1)^{p+1} \int_X \{s, \mathrm{D}_E \star t\} = (-1)^{p+1}(-1)^{p(n-p)} \int_X \{s, \star\star \mathrm{D}_E \star t\} \\ &= (-1)^{np+1} \int_X \langle s, \star \mathrm{D}_E \star t\rangle \mathrm{d}\,\mathrm{Vol} = (-1)^{np+1} \langle\!\langle s, \star \mathrm{D}_E \star t \rangle\!\rangle\end{aligned}$$

从而由 s,t 的任意性，有 $\mathrm{D}_E^* = (-1)^{np+1} \star \mathrm{D}_E \star$. □

引理 5.3.4. （# 算子的性质）

设 $E \to X$ 为紧定向黎曼流形 X 上的 *Hermite* 向量丛，D_E 为 E 上的 *Hermite* 联络，则在空间 $\Omega^p(X,E)$ 上，成立

$$\begin{aligned}\mathrm{D}_{E^*} \# &= (-1)^p \# \mathrm{D}_E^* \\ \mathrm{D}_{E^*}^* \# &= (-1)^{p+1} \# \mathrm{D}_E\end{aligned}$$

证明. 对于任意 $s \in \Omega^p(X,E)$ 以及 $t \in \Omega^{n-p+1}(X,E^*)$，注意到对偶联络 D_{E^*} 满足

$$\mathrm{d}(\# s \wedge \# t) = \mathrm{D}_{E^*} \# s \wedge \# t + (-1)^{n-p} \# s \wedge \mathrm{D}_E \# t$$

再注意 X 的紧性，使用 Stokes 定理，因此有

$$\begin{aligned}
\langle\!\langle \mathrm{D}_{E^*}\#s,t\rangle\!\rangle &= \int_X\langle \mathrm{D}_{E^*}\#s,t\rangle \mathrm{d\,Vol} = \int_X \mathrm{D}_{E^*}\#s\wedge\#t = (-1)^{n-p+1}\int_X \#s\wedge \mathrm{D}_E\#t \\
&= (-1)^{n-p+1}(-1)^{(n-p)p}\int_X \mathrm{D}_E\#t\wedge\#s = (-1)^{np+n+1}\int_X\langle \mathrm{D}_E\#t,s\rangle \mathrm{d\,Vol} \\
&= (-1)^{np+n+1}\int_X\langle \#t,\mathrm{D}_E^*s\rangle \mathrm{d\,Vol} = (-1)^{np+n+1}\int_X \#t\wedge\#\mathrm{D}_E^*s \\
&= (-1)^{np+n+1}(-1)^{(p-1)(n-p+1)}\int_X \#\mathrm{D}_E^*s\wedge\#t = (-1)^p\int_X\langle\#\mathrm{D}_E^*s,t\rangle \mathrm{d\,Vol} \\
&= (-1)^p\langle\!\langle\#\mathrm{D}_E^*s,t\rangle\!\rangle
\end{aligned}$$

由 s,t 的任意性，可得 $\mathrm{D}_{E^*}\# = (-1)^p\#\mathrm{D}_E^*$. 类似地对任意 $s\in\Omega^p(X,E)$ 以及 $t\in\Omega^{n-p-1}(X,E)$，我们还可以如下验证之（利用 $\#\# = (-1)^{p(n-p)}\mathrm{id}$）：

$$\begin{aligned}
\langle\!\langle \mathrm{D}_{E^*}^*\#s,t\rangle\!\rangle &= \int_X\langle \mathrm{D}_{E^*}^*\#s,t\rangle \mathrm{d\,Vol} = \int_X\langle\#s,\mathrm{D}_{E^*}t\rangle \mathrm{d\,Vol} = \int_X\overline{\langle \mathrm{D}_{E^*}t,\#s\rangle}\mathrm{d\,Vol} = \int_X\overline{\mathrm{D}_{E^*}t\wedge\#\#s} \\
&= (-1)^{p(n-p)}\int_X\overline{\mathrm{D}_{E^*}t\wedge s} = (-1)^{(p-1)(n-p)}\int_X\overline{t\wedge \mathrm{D}_E s} \\
&= (-1)^{(p-1)(n-p)}(-1)^{(p+1)(n-p-1)}\int_X\overline{t\wedge\#\#\mathrm{D}_E s} = (-1)^{p-1}\int_X\overline{\langle t,\#\mathrm{D}_E s\rangle}\mathrm{d\,Vol} \\
&= (-1)^{p-1}\int_X\langle\#\mathrm{D}_E s,t\rangle\mathrm{d\,Vol} = (-1)^{p-1}\langle\!\langle\#\mathrm{D}_E s,t\rangle\!\rangle
\end{aligned}$$

从而 $\mathrm{D}_{E^*}^*\# = (-1)^{p-1}\#\mathrm{D}_E$. □

定义 5.3.5. （向量丛上的 *Laplace* 算子）

设 $E\to X$ 为紧定向黎曼流形 X 上的 *Hermite* 向量丛，D_E 为 E 的一个 *Hermite* 联络，则定义关于联络 D_E 的 ***Laplace* 算子** $\triangle_E:\Omega^p(X,E)\to\Omega^p(X,E)$ 为：

$$\triangle_E := \mathrm{D}_E\mathrm{D}_E^* + \mathrm{D}_E^*\mathrm{D}_E$$

为说明如此定义的 Laplace 算子与古典情形 $\triangle := \sum\limits_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ 之间的关系，我们来看特殊例子。考虑 $X=\mathbb{R}^n$ 配以标准黎曼度量 $g=\sum\limits_{i=1}^n \mathrm{d}x_i\otimes\mathrm{d}x_i$，以及平凡 Hermite 线丛 $E:=X\times\mathbb{C}$。对于外微分算子（平凡线丛 E 上的联络）

$$\mathrm{d}:\Omega^{p-1}(X,E)\to\Omega^p(X,E)$$

则对任意 $u\in\Omega^p(X,E)$ 以及 $v\in\Omega^{p-1}(X,E)$，若 $\operatorname{supp}u\cap\operatorname{supp}v\subset\subset X=\mathbb{R}^n$，则

$$\begin{aligned}
\langle\!\langle \mathrm{d}^*u,v\rangle\!\rangle &= \langle\!\langle u,\mathrm{d}v\rangle\!\rangle = \int_X\langle u,\mathrm{d}v\rangle\mathrm{d\,Vol} = \sum_{i=1}^n\int_X\langle u,\mathrm{d}x_i\wedge\frac{\partial v}{\partial x_i}\rangle\mathrm{d\,Vol} \\
&= \sum_{i=1}^n\int_X\langle\frac{\partial}{\partial x_i}\lrcorner u,\frac{\partial v}{\partial x_i}\rangle\mathrm{d\,Vol} = \sum_{i=1}^n\int_X -\langle\frac{\partial}{\partial x_i}\lrcorner\frac{u}{x_i},v\rangle\mathrm{d\,Vol} = -\langle\!\langle\sum_{i=1}^n\frac{\partial}{\partial x_i}\lrcorner\frac{\partial u}{\partial x_i},v\rangle\!\rangle
\end{aligned}$$

其中“⌟”为切向量场与微分形式之间的缩并运算。因此对于 $u=\sum\limits_{|I|=p} u_I \mathrm{d}x_I \in \Omega^p(X,E)$，成立

$$\mathrm{d}^* u = -\sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \lrcorner \frac{\partial u}{\partial x_i} = -\sum_{i=1}^n \sum_{|I|=p} \frac{\partial u_I}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_i} \lrcorner \mathrm{d}x_I$$

因此对于 $u \in \Omega^p(X,E)$，成立

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\mathrm{d}^* u &= -\sum_{i,j=1}^n \mathrm{d}x_j \wedge \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial}{\partial x_i} \lrcorner \frac{\partial u}{\partial x^i}\right) = -\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\mathrm{d}x_j \wedge \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \lrcorner \frac{\partial u}{\partial x^i}\right)\right) \\ \mathrm{d}^*\mathrm{d}u &= -\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} \lrcorner \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\mathrm{d}x_i \wedge \frac{\partial u}{\partial x_i}\right) = -\sum_{i,j=1}^n \delta_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\mathrm{d}x_i \wedge \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \lrcorner \frac{\partial u}{\partial x_j}\right)\right) \end{aligned}$$

因此有

$$\triangle u = (\mathrm{d}\mathrm{d}^* + \mathrm{d}^*\mathrm{d})u = -\sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$$

定理 5.3.6. 设 $E \to X$ 为紧定向黎曼流形 X 上的 *Hermite* 向量丛，D_E 为 E 的一个 *Hermite* 联络，则关于 D_E 的 *Laplace* 算子 $\triangle_E := \mathrm{D}_E\mathrm{D}_E^* + \mathrm{D}_E^*\mathrm{D}_E$ 是自伴的椭圆算子。

证明. 显然 $\triangle_E^* = (\mathrm{D}_E\mathrm{D}_E^* + \mathrm{D}_E^*\mathrm{D}_E)^* = \mathrm{D}_E^*\mathrm{D}_E + \mathrm{D}_E\mathrm{D}_E^* = \triangle_E$，从而 $\triangle_E$ 是自伴的。再注意容易验证 D_E 与 D_E^* 的主符号 $\sigma_{\mathrm{D}_E}, \sigma_{\mathrm{D}_E^*}$ 满足

$$\begin{aligned} \sigma_{\mathrm{D}}(x,\xi)(u) &= \xi \wedge u \\ \sigma_{\mathrm{D}^*}(x,\xi)(u) &= -\xi^* \lrcorner u \end{aligned}$$

因此 $\triangle_E$ 的主符号 $\sigma_{\triangle_E}$ 满足

$$\sigma_{\triangle_E}(x,\xi)(u) = -\xi^* \lrcorner (\xi \wedge u) + \xi \wedge (-\xi^* \lrcorner u) = -(\xi^* \lrcorner \xi) \wedge u = -u$$

即 $\sigma_{\triangle_E}(x,\xi) \equiv -\mathrm{id} : (\bigwedge^p T^*X \otimes E)_x \to (\bigwedge^p T^*X \otimes E)_x$. 特别地，任意 $\xi \neq 0 \in T_x^*X$，$\sigma_{\triangle_E}(x,\xi)$ 都为单射，从而 $\triangle_E$ 为椭圆算子。 □

引理 5.3.7. （*Laplace* 算子与 # 算子）

设 $E \to X$ 为紧定向黎曼流形 X 上的 *Hermite* 向量丛，D_E 为 X 上的一个 *Hermite* 联络，$\triangle_E$ 为关于联络 D_E 的 *Laplace* 算子，$\triangle_{E^*}$ 为对偶联络 D_{E^*} 的 *Laplace* 算子，则成立

$$\triangle_{E^*}\# = \#\triangle_E$$

证明. 考虑它们在 $\Omega^p(X,E)$ 上的作用，利用引理5.3.4可得

$$\begin{aligned}\triangle_{E^*}\# &= (\mathrm{D}_{E^*}\mathrm{D}_{E^*}^* + \mathrm{D}_{E^*}^*\mathrm{D}_{E^*})\# \\ &= (-1)^{p-1}\mathrm{D}_{E^*}\#\mathrm{D}_E + (-1)^p\mathrm{D}_{E^*}^*\#\mathrm{D}_E^* \\ &= (-1)^{p-1}(-1)^{p+1}\#\mathrm{D}_E^*\mathrm{D}_E + (-1)^p(-1)^{p-1-1}\#\mathrm{D}_E\mathrm{D}_E^* \\ &= \#\triangle_E\end{aligned}$$

从而证毕。 □

5.4 紧黎曼流形上 Hodge 理论

定义 5.4.1. （平坦联络）

设 $E \to X$ 为光滑流形上的光滑向量丛，D_E 为 E 上的联络。称 D_E 为**平坦联络**（*flat connection*），若曲率 $\Theta := \mathrm{D}_E^2 = 0$.

例如，光滑流形 X 上的外微分算子 d 视为平凡线丛 $X \times \mathbb{C}$ 上的联络，是平坦联络。注意到对于平坦联络 $\mathrm{D}_E : \Omega^p(X,E) \to \Omega^{p+1}(X,E)$，则有上链复形 $(\Omega^\bullet(X,E), \mathrm{D}_E)$，该上链复形的上同调称为 E 关于平坦联络 D_E 的 **de Rham 上同调**，记作

$$H^\bullet_{\mathrm{DR}}(X,E) := H^\bullet(\Omega^\bullet(X,E), \mathrm{D}_E)$$

定义 5.4.2. （调和形式）

对于紧定向黎曼流形 X 上的 *Hermite* 向量丛 $E \to X$，D_E 为 E 的一个 *Hermite* 联络。称 $u \in \Omega^p(X,E)$ 为（关于 D_E 的）**调和形式**（*harmonic form*），若 $\triangle_{\mathrm{D}_E} u = 0$. 其中 $\triangle_E$ 为关于 D_E 的 *Laplace* 算子。

容易知道调和形式构成的空间

$$\mathcal{H}^p(X,E) := \left\{ u \in \Omega^p(X,E) \middle| \triangle_E u = 0 \right\}$$

为 $\Omega^p(X,E)$ 的线性子空间。

引理 5.4.3. 条件、记号承上，则对于 $s \in \Omega^p(X,E)$，$s \in \mathcal{H}^p(X,E)$ 当且仅当 $\mathrm{D}_E s = \mathrm{D}_E^* s = 0$.

证明. 充分性显然；再注意到

$$\langle\!\langle \triangle_E s, s\rangle\!\rangle = \langle\!\langle \mathrm{D}_E\mathrm{D}_E^* s, s\rangle\!\rangle + \langle\!\langle \mathrm{D}_E^*\mathrm{D}_E s, s\rangle\!\rangle = \|\mathrm{D}_E^* s\|^2 + \|\mathrm{D}_E s\|^2$$

从而必要性也显然。 □

定理 5.4.4. （*Hodge* 分解定理）

设 $E \to X$ 是紧定向黎曼流形 X 上的 Hermite 向量丛，D_E 为 E 上的一个平坦联络，则有正交直和分解

$$\Omega^p(X,E) = \mathcal{H}^p(X,E) \oplus \operatorname{Im}\mathrm{D}_E \oplus \operatorname{Im}\mathrm{D}_E^*$$

证明. $\mathcal{H}^p(X,E)$ 与 $\operatorname{Im}\mathrm{D}_E, \operatorname{Im}\mathrm{D}_E^*$ 的正交性由引理5.4.3易得；$\operatorname{Im}\mathrm{D}_E$ 与 $\operatorname{Im}\mathrm{D}_E^*$ 正交，是因为 D_E 的平坦性，这都容易验证。由于 $\triangle_E$ 为椭圆算子，从而由椭圆算子的一般结果（引理5.2.4），有

$$\Omega^p(X,E) = \operatorname{Im}\triangle_E \oplus \ker\triangle_E^* = \operatorname{Im}\triangle_E \oplus \ker\triangle_E = \mathcal{H}^p(X,E) \oplus \operatorname{Im}\triangle_E$$

之后再注意到

$$\operatorname{Im}\triangle_E = \operatorname{Im}(\mathrm{D}_E\mathrm{D}_E^* + \mathrm{D}_E^*\mathrm{D}_E) \subseteq \operatorname{Im}\mathrm{D}_E \oplus \operatorname{Im}\mathrm{D}_E^*$$

从而证毕。 □

定理 5.4.5. （*Hodge* 同构定理）

设 $E \to X$ 是紧定向黎曼流形 X 上的 Hermite 向量丛，D_E 为 E 上的一个平坦联络，则有同构

$$\mathcal{H}^p(X,E) \cong H^p_{\mathrm{DR}}(X,E)$$

证明. 注意到 Hodge 分解 $\Omega^p(X,E) = \mathcal{H}^p(X,E) \oplus \operatorname{Im}\mathrm{D}_E \oplus \operatorname{Im}\mathrm{d}_E^*$，从而有 $\ker\mathrm{D}_E = (\operatorname{Im}\mathrm{D}_E^*)^\perp = \mathcal{H}^p(X,E) \oplus \operatorname{Im}\mathrm{D}_E$，因此

$$H^p_{\mathrm{DR}}(X,E) = \frac{\ker\mathrm{D}_E}{\operatorname{Im}\mathrm{D}_E} \cong \frac{\mathcal{H}^p(X,E) \oplus \operatorname{Im}\mathrm{D}_E}{\operatorname{Im}\mathrm{D}_E} \cong \mathcal{H}^p(X,E)$$

证毕。 □

特别地，取 $E = X \times \mathbb{C}$ 为平凡线丛，$\mathrm{D}_E = \mathrm{d}$ 为外微分，则得到：紧定向流形（注意一定有黎曼结构）的 de Rham 上同调群一定是有限维的。以及我们有同构

$$H^p_{\mathrm{sing}}(X,\mathbb{C}) \cong H^p(X,\mathbb{C}) \cong H^p_{\mathrm{DR}}(X,\mathbb{C}) \cong \mathcal{H}^p(X,\mathbb{C})$$

即：（复系数）奇异上同调、层上同调、de Rham 上同调、调和形式四者同构。

推论 5.4.6. 条件、记号承上，则有

$$\dim H_{\mathrm{DR}}^{p}(X,E) < +\infty$$

证明. 利用 Hodge 同构定理，以及椭圆算子的一般性质（引理5.2.4）。 □

定理 5.4.7. （庞加莱对偶）

设 X 为紧定向 n 维光滑流形，$E \to X$ 为 X 上的 *Hermite* 向量丛，D_E 为 E 上的平坦 *Hermite* 联络，则对任意 $0 \leq p \leq n$，双线性型

$$\begin{aligned} H_{\mathrm{DR}}^{p}(X,E) \times H_{\mathrm{DR}}^{n-p}(X,E^*) &\to \mathbb{C} \\ ([s],[t]) &\mapsto \int_X s \wedge t \end{aligned}$$

是良定的，并且非退化。

证明. 对于任意 $s \in \Omega^{p-1}(X,E)$，以及任意 $t \in \Omega^{n-p}(X,E^*)$ 使得 $[t] \in H^{n-p}(X,E^*)$，则 $\mathrm{D}_{E^*}t = 0$. 注意到

$$\mathrm{d}(s \wedge t) = \mathrm{D}_E s \wedge t + (-1)^{p-1} s \wedge \mathrm{D}_{E^*t} = \mathrm{D}_E s \wedge t$$

因此有

$$\int_X \mathrm{D}_E s \wedge t = -\int_X \mathrm{d}(s \wedge t) = 0$$

这就证明了 $([s],[t]) \to \mathbb{C}$ 与 $[s]$ 的代表元选取无关，类似地也可证明与 $[t]$ 的代表元选取无关，从而良定。

在看非退化性。给定 X 上的一个黎曼度量 g，于是可谈论关于 g 与 D_E 的 Laplace 算子 $\triangle_E$. 注意 Hodge 同构定理 $H_{\mathrm{DR}}^{p}(X,E) \cong \mathcal{H}^p(X,E)$，从而对任意 $s \in H^p(X,E)$，不妨取代表元 s 为调和形式。则有引理5.3.7容易得到，$\#s \in \mathcal{H}^{n-p}(E^*)$，从而 $[\#s] \in H_{\mathrm{DR}}^{n-p}(X,E^*)$. 因此有

$$\int_X s \wedge \#s = \int_X \langle s,s \rangle \mathrm{d}\,\mathrm{Vol} = \|s\|^2$$

这就证明了对任意 $[s] \neq 0 \in H_{\mathrm{DR}}^{p}(X,E)$，$[t] \mapsto \int_X s \wedge t$ 是非退化的。同理该双线性型对另一边也非退化。 □

注记 5.4.8. 事实上，以上结果对于赋以欧氏内积（而不是 *Hermite* 内积）的向量丛也成立。证明也完全类似。

推论 5.4.9. *对于 n 维紧致定向光滑流形 X，则其 de Rham 上同调满足*

$$\dim_{\mathbb{C}} H^p_{\mathrm{DR}}(X,\mathbb{C}) = \dim_{\mathbb{C}} H^{n-p}_{\mathrm{DR}}(X,\mathbb{C})$$

证明. 取 X 上的平凡线丛 $E \cong X \times \mathbb{C}$，配以标准的 Hermite 内积，则外微分 d 为 E 上的平坦 Hermite 联络。注意到 $E^* \cong E$，之后庞加莱对偶即可。 □

5.5 Hermite 流形与 Kähler 流形

定义 5.5.1. *对于复流形 X，称 X 为 Hermite 流形，若 X 配以张量 h，局部上形如*

$$h = h_{ij} \mathrm{d}z^i \otimes \mathrm{d}\overline{z}^j$$

并且矩阵 $(h_{ij})_{1\le 1,j\le n}$ 是正定 Hermite 矩阵。

无非是全纯切丛 TX 上的 Hermite 结构。但是要注意这里的 Hermite 结构关于右边的变量（而不是左边）是共轭线性的，与之前介绍 Hermite 向量丛时有区别。容易验证该定义的良定性。此外，与黎曼度量存在性类似，用单位分解定理可易证任何复流形都可配以 Hermite 流形结构。

对于 Hermite 张量 $h = h_{ij}\mathrm{d}z^i \otimes \mathrm{d}\overline{z}^j$，$h$ 诱导了 $(1,1)$-形式 ω:

$$h = h_{ij}\mathrm{d}z^i \otimes \mathrm{d}\overline{z}^j \quad \mapsto \quad \omega = \frac{\sqrt{-1}}{2} h_{ij} \mathrm{d}z^i \wedge \mathrm{d}\overline{z}^j$$

容易验证良定性，事实上对于 X 上的任意全纯切向量场 ξ, η，成立

$$\omega(\xi,\eta) = -\sqrt{-1}\,\mathrm{Im}\, h(\xi,\eta)$$

即 ω 是 h 的虚部的相反数。显然 ω 是实的 $(1,1)$-形式，即 $\omega = \overline{\omega}$，也就是说 $\omega \in \Omega^2(X,\mathbb{R})$. 称如此由 Hermite 度量诱导的 ω 为 **Hermite 形式**.

定义 5.5.2. （*Kähler 度量与 Kähler 流形*）

对于 Hermite 流形 (X,h)，称 Hermite 度量 h 为 ***Kähler* 度量**，*若关于 h 的微分形式 ω 满足 $\mathrm{d}\omega = 0$，此时也称 ω 为* ***Kähler* 形式**；*称复流形 X 为* ***Kähler* 流形**，*若 X 上存在 Kähler 度量。*

注意到 $\mathrm{d}\omega=0$ 当且仅当 $\partial\omega=\bar{\partial}\omega=0$，而 Hermite 形式 ω 总是实形式，从而 $\overline{\partial\omega}=\bar{\partial}\omega$. 因此 $\mathrm{d}\omega=0 \iff \partial\omega=0$. 在局部坐标下，$\omega=\frac{\sqrt{-1}}{2}h_{jk}\mathrm{d}z^j\wedge\mathrm{d}\bar{z}^k$，则

$$\partial\omega=\frac{\sqrt{-1}}{2}\frac{\partial h_{jk}}{\partial z^l}\mathrm{d}z^l\wedge\mathrm{d}z^j\wedge\mathrm{d}\bar{z}^k=\frac{\sqrt{-1}}{2}\sum_{l<j}\left(\frac{\partial h_{jk}}{\partial z^l}-\frac{\partial h_{lk}}{\partial z^j}\right)\mathrm{d}z^l\wedge\mathrm{d}z^j\wedge\mathrm{d}\bar{z}^k$$

$$\mathrm{d}\omega=0 \iff \frac{\partial h_{jk}}{\partial z^l}=\frac{\partial h_{lk}}{\partial z^j}$$

性质 5.5.3. （紧 *Kähler* 流形的拓扑限制）

设 X 为紧 *Kähler* 流形，则对任意 $k\geq 0$，必有

$$H^{2k}(X,\mathbb{R})\neq 0$$

证明. 设 $\omega=\frac{\sqrt{-1}}{2}h_{ij}\mathrm{d}z^i\wedge\mathrm{d}\bar{z}^j$ 为 X 的一个 Kähler 形式，则 $\mathrm{d}\omega=0$. 注意到

$$\begin{aligned}\omega^n &= \left(\frac{\sqrt{-1}}{2}\right)^n n!\det(h_{ij})\mathrm{d}z^1\wedge\mathrm{d}\bar{z}^1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}z^n\wedge\mathrm{d}\bar{z}^n\\ &= n!\det(h_{ij})\mathrm{d}x^1\wedge\mathrm{d}y^1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^n\wedge\mathrm{d}y^n\end{aligned}$$

从而 ω^n 为 X 上的一个体积形式，$\int_X\omega^n\neq 0$. 因此对于 $k\geq 0$，考虑

$$([\omega^k],[\omega^{n-k}])\mapsto\int_X\omega^k\wedge\omega^{n-k}=\int_X\omega^n\neq 0$$

从而由庞加莱对偶，知 $0\neq[\omega^k]\in H^{2k}(X,\mathbb{R})$. □

例子 5.5.4. （紧复流形但非 *Kähler* 的例子：*Hopf* 曲面）

给定 $0<\lambda<1$，考虑离散群 $\Gamma:=\left\{\lambda^n\middle|n\in\mathbb{Z}\right\}\cong\mathbb{Z}$. 则 Γ 中的元素作为标量乘积，在 $\mathbb{C}^2$ 上有自然的作用。考虑

$$X:=(\mathbb{C}^2\setminus\{0\})/\Gamma$$

则 X 具有紧复流形结构，但非 *Kähler.*

证明. 容易验证在拓扑同胚意义下 $X\cong S^1\times S^3$，从而紧致。其复流形结构由 $\mathbb{C}^2\setminus\{0\}$ 的商流形给出。回顾代数拓扑中的 **Künneth 公式**：对于紧流形 M,N，成立

$$H^k(M\times N,\mathbb{Z})\cong\bigoplus_{p+q=k}H^p(M,\mathbb{Z})\otimes H^q(N,\mathbb{Z})$$

由此可知，$H^2(X,\mathbb{R})=H^2(S^1\times S^3,\mathbb{R})=0$，从而由性质5.5.3可知 X 不是 Kähler 流形。 □

例子 5.5.5. 黎曼曲面一定是 *Kähler* 流形。

这是平凡的例子。

例子 5.5.6. 复环面 $X=\mathbb{C}^n/\Gamma$ 为 *Kähler* 流形。其中 Γ 为格点子群。

因为 $\mathbb{C}^n$ 上具有 Kähler 形式 $\omega=\frac{\sqrt{-1}}{2}\mathrm{d}z^i\wedge\mathrm{d}\bar{z}^j$. 但要注意这样的流形未必是紧的。

例子 5.5.7. 复射影空间 $\mathbb{CP}^n$ 是 *Kähler* 流形。

证明. 回顾例子4.5.2当中的曲率形式

$$\Theta(\mathcal{O}(1))=\sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\log(1+|z_1|^2+\cdots+|z_n|^2)$$

事实上，可以验证该形式的系数矩阵正定；并且它作为线丛的曲率形式，必然是 d-闭的，因此 $\Theta(\mathcal{O}(1))$ 是 $\mathbb{CP}^n$ 上的 Kähler 形式。 □

例子 5.5.8. （全纯浸入）

设 X,Y 为复流形，$f:X\to Y$ 为全纯浸入（即 f 在 X 的任何一点处的全纯切映射都是单射），若 Y 为 *Kähler* 流形，则 X 也为 *Kähler* 流形。

证明. 设 ω 为 Y 的一个 Kähler 形式，则易验证其拉回 $f^*\omega$ 是 X 上的 Kähler 形式。 □

特别地，射影流形（$\mathbb{CP}^n$ 的复子流形）都是 Kähler 流形。这就与代数几何联系密切了。

性质 5.5.9. （特殊坐标下的 *Kähler* 形式）

设 (X,h) 为 *Hermite* 流形，ω 为 h 的 *Hermite* 形式。则 ω 为 *Kähler* 形式当且仅当对任意 $p\in X$，存在 p 附近的全纯坐标卡 $(z^1,z^2,...,z^n)$，使得 p 位于坐标原点，并且 ω 在该坐标卡下形如

$$\omega=\sqrt{-1}\delta_{ij}\mathrm{d}z^i\wedge\mathrm{d}\bar{z}^j+O(|z|^2) \tag{$*$}$$

证明. 如果 ω 在某全纯坐标卡下形如 $(*)$，则显然 $\mathrm{d}\omega=0$，从而 ω 是 Kähler 的。另一方面，若 ω 是 Kähler 的，则对任意一点 $p\in X$，取 p 附近的一个全纯坐标卡 $(x^1,x^2,...,x^n)$，使得 p 位于该坐标的原点，并且切标架 $\frac{\partial}{\partial x^1},\frac{\partial}{\partial x^2},...,\frac{\partial}{\partial x^n}$ 在点 p 处幺正，这总可以取到。则在此局部坐标下，

$$\omega=\sqrt{-1}\left(\delta_{lm}+a_{jlm}x^j+a'_{jlm}\bar{x}^j\right)\mathrm{d}x^l\wedge\mathrm{d}\bar{x}^m+O(|x|^2)$$

注意 ω 是实形式（$\omega=\overline{\omega}$），从而易验证 $\begin{cases} a_{jlm}=\overline{a'_{jml}} \\ a'_{jlm}=\overline{a_{jml}} \end{cases}$. 再注意到 $\mathrm{d}\omega=0$，从而易验证 $a_{jlm}=a_{ljm}$. 取新的坐标

$$z^m:=x^m+\frac{1}{2}a_{rsm}x^rx^s$$

（注意指标“m”上下对不齐，有点别扭），于是

$$\mathrm{d}z^m=\mathrm{d}x^m+\frac{1}{2}a_{rsm}\left(x^r\mathrm{d}x^s+x^s\mathrm{d}x^r\right)=\mathrm{d}x^m+a_{rsm}x^r\mathrm{d}x^s$$

类似地 $\mathrm{d}\bar{z}^m = \mathrm{d}\bar{x}^m + a'_{rms}\bar{x}^r\mathrm{d}\bar{x}^s$，从而

$$\mathrm{d}z^l \wedge \mathrm{d}\bar{z}^m = \mathrm{d}x^l \wedge \mathrm{d}\bar{x}^m + a_{rsl}x^r\mathrm{d}x^s \wedge \mathrm{d}\bar{x}^m + a'_{rms}\bar{x}^r\mathrm{d}x^l \wedge \mathrm{d}\bar{x}^s + O(|x|^2)$$

从而容易验证在此坐标下，成立

$$\omega = \delta_{ij}\mathrm{d}z^i \wedge \mathrm{d}\bar{z}^j + O(|z|^2)$$

□

性质 5.5.10. （*Kähler 流形的测地坐标系*）

设 (X,ω) 为 Kähler 流形，则对任意 $x \in X$，存在以 p 为中心的全纯坐标卡 $(z^1, z^2, ..., z^n)$，使得 Kähler 形式 ω 在该坐标卡下形如

$$\omega = \sqrt{-1}\left(\delta_{lm} - c_{jklm}z^j\bar{z}^k\right)\mathrm{d}z^l \wedge \mathrm{d}\bar{z}^m + O(|z|^3)$$

其中 c_{jklm} 为 Hermite 度量 h 的陈联络的曲率张量 $\Theta \in \Omega^2(X, \mathrm{End}(TX))$ 的系数，即

$$\Theta = \sum_{jklm} c_{jklm}\mathrm{d}z^j \wedge \mathrm{d}\bar{z}^k \otimes \left(\frac{\partial}{\partial z^l}\right)^* \otimes \frac{\partial}{\partial z^m}$$

证明. （待补） □

5.6 紧复流形上的 Hodge 理论

在本节，总假设 X 为紧 Hermite 流形，$\dim_{\mathbb{C}} X = n$. $E \to X$ 为全纯 Hermite 向量丛，$\mathrm{D}_E = \mathrm{D}'_E + \mathrm{D}''_E$ 为 E 的陈联络。特别地，$\mathrm{D}''_E = \bar{\partial}$ 为 E 的典范 $(0,1)$ 型联络。注意 D''_E 总是平坦的，从而有上链复形

$$\mathrm{D}''_E := \Omega^{p,q}(X,E) \to \Omega^{p,q+1}\Omega(X,E)$$

该上链复形的上同调 $H^{p,q}_{\mathrm{D}''_E}(X,\mathbb{C}) := H^q(\Omega^{p,\bullet}(X,E), \mathrm{D}''_E)$ 称为从 E 的第 (p,q) 阶 **Dolbeault 上同调**。注意到对于 $p \in X$，X 上的 Hermite 度量 h 诱导了切空间（$2n$ 维实空间）T_pX 上的（实线性）欧氏内积结构，即取 Hermite 内积的实部。该欧氏内积自然延拓为 $T_pX \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \cong \mathbb{C}^{2n}$ 上的 Hermite 内积。在此意义下，我们可类似定义 $\Omega^{\bullet,\bullet}(X,E)$ 上的 Hermite 内积 $\langle\!\langle , \rangle\!\rangle$.

我们也可讨论联络 $\mathrm{D}_E, \mathrm{D}'_E, \mathrm{D}''_E$ 关于 $\langle\!\langle , \rangle\!\rangle$ 的形式伴随算子 $\mathrm{D}^*_E, \mathrm{D}'^*_E, \mathrm{D}''^*_E$. 与黎曼流形的情形完全一样，我们有 Hodge 星算子 $\star : \Omega^p(X,E) \to \Omega^{2n-p}(X,E)$，使得对任意 $u, v \in \Omega^p(X,E)$，成立 $u \wedge \overline{\star v} = \langle u, v\rangle \mathrm{d}\,\mathrm{Vol}$ （这里关于**右边变量共轭线性**）。事实上有

$$\star : \Omega^{p,q}(X,E) \to \Omega^{n-q,n-p}(X,E)$$

性质 5.6.1. 条件、记号承上，则有

$$\begin{aligned}
\mathrm{D}_E^* &= -\star\mathrm{D}_E\star \\
\mathrm{D}_E'^* &= -\star\mathrm{D}_E''\star \\
\mathrm{D}_E''^* &= -\star\mathrm{D}_E'\star
\end{aligned}$$

证明. 第一个式子与性质5.3.3完全类似，但注意复流形总是偶数维的。在毕竟 D_E' 与 D_E'' 各自分次，容易从第一式得到后两式。 □

定义 5.6.2. （*Laplace* 算子）

条件、记号承上，则定义 *Laplace* 算子

$$\begin{aligned}
\triangle_E &:= \mathrm{D}_E\mathrm{D}_E^* + \mathrm{D}_E^*\mathrm{D}_E \\
\triangle_E' &:= \mathrm{D}_E'\mathrm{D}_E'^* + \mathrm{D}_E'^*\mathrm{D}_E' \\
\triangle_E'' &:= \mathrm{D}_E''\mathrm{D}_E''^* + \mathrm{D}_E''^*\mathrm{D}_E''
\end{aligned}$$

容易验证上述三者都是自伴、椭圆算子。注意 $\mathrm{D}_E''^2 = 0$，之后与黎曼流形的情形完全类似，我们也有 Hodge 分解定理与 Hodge 同构定理如下：

定理 5.6.3. （紧复流形的 *Hodge* 理论）

设 (X,h) 为紧 *Hermite* 流形，$E \to X$ 为全纯 *Hermite* 线丛，D_E 为 E 上的陈联络。则对任意 $p,q \geq 0$，有正交直和分解

$$\Omega^{p,q}(X,E) = \ker\triangle_E'' \oplus \operatorname{Im}\mathrm{D}_E''\triangle \in \mathrm{D}_E''^*$$

并且 E 关于 D_E'' 的 *Dolbeault* 上同调与 $\triangle_E''$-调和形式有同构

$$H^{p,q}_{\mathrm{D}_E''}(X,\mathbb{C}) \cong \ker\triangle_E''$$

并且有 $\dim_{\mathbb{C}} H^{p,q}_{\mathrm{D}_E''}(X,\mathbb{C}) < +\infty$.

证明. 与定理5.4.4、定理5.4.5 完全类似。 □

注记 5.6.4. （与层上同调的关系）

对于紧 *Hermite* 流形 X 上的全纯 *Hermite* 向量丛 $E \to X$，考虑 $\mathcal{E}^p(E)$ 为 X 上的取值于 E 的**全纯**p-形式层，$\mathcal{E}^{p,q}(E)$ 为 X 上的取值于 E 的 (p,q) 形式层，则联络 $\mathrm{D}_E'' = \overline{\partial}$ 诱导了层同态序列

$$0 \to \mathcal{E}^p(E) \hookrightarrow \mathcal{E}^{p,0}(E) \xrightarrow{\mathrm{D}_E''} \mathcal{E}^{p,1}(E) \xrightarrow{\mathrm{D}_E''} \mathcal{E}^{p,2}(E) \to \cdots$$

事实上这是层 $\mathcal{E}^p(E)$ 的一个零调消解（*Dolbeault-Grothendieck* 引理），因此由 *de Rham-Weil* 定理与 *Hodge* 同构定理，可知有同构

$$H^q(X,\mathcal{E}^p(E)) \cong H^{p,q}_{\mathrm{D}_E''}(X,E) \cong \ker \triangle_E''^{p,q}$$

定理 5.6.5. *(Serre 对偶)*

设 $E \to X$ 为紧复流形上的全纯 *Hermite* 向量丛，D_E 为 E 的陈联络，则双线性型

$$\begin{array}{rcl} H^{p,q}_{\mathrm{D}_E''}(X,E) \times H^{n-p,n-q}_{D_E''}(X,E^*) & \to & \mathbb{C} \\ (s,t) & \mapsto & \int_X s \wedge t \end{array}$$

是良定的，并且非退化。

证明. 与黎曼流形的庞加莱对偶（5.4.7）完全类似。该配对的良定性易验证。至于非退化性，首先任意给定 X 上的一个 Hermite 度量，使得 X 为 Hermite 流形，从而可谈论丛 E 的 Laplace 算子。由 Hodge 同构定理，不妨取 $H^{p,q}_{\mathrm{D}_E''}(X,E)$ 中的代表元为 $\triangle_E''$-调和形式。定义 $\#$ 算子 $\# : \omega^{p,q}(X,E) \to \omega^{n-q,n-p}(X,E^*)$ 使得对任意 $s,t \in \omega^{p,q}(X,E)$ 都成立

$$s \wedge \overline{\# t} = \langle s,t \rangle \mathrm{d}\,\mathrm{Vol}$$

容易验证 $\#\triangle_{E''} = \triangle_{E''*}\#$. 特别地，若 $s \in \Omega^{p,q}(X,E)$ 为 $\triangle_E''$-调和的，则 $\#s \in \Omega^{n-p,n-q}$ 为 $\triangle_{E^*}''$-调和的，从而 $[\#s] \in H^{n-p,n-q}_{\mathrm{D}_{E^*}''}(X,E^*)$. 从而 $\int_X s \wedge \#s = \|s\|^2 > 0$, $(\forall s \neq 0)$. 之后从略。 □

注记 5.6.6. 对于紧复流形 X，取 $E \to X \times \mathbb{C}$ 为平凡线丛，配以标准的 *Hermite* 结构。此时 E 的陈联络 D_E 满足 $\mathrm{D}_E'' = \overline{\partial}$ 为 X 上的 $\overline{\partial}$-算子，丛 E 的 *Dolbeault* 上同调就是紧复流形 X 通常的 *Dolbeault* 上同调。此时由 *Serre* 对偶可得

$$\dim_{\mathbb{C}} H^{p,q}_{\overline{\partial}}(X,\mathbb{C}) = \dim_{\mathbb{C}} H^{n-p,n-q}_{\overline{\partial}}(X,\mathbb{C})$$

第 6 章　Kähler 流形

6.1　线性代数版本的 Lefschetz 算子

我们考虑复向量空间 $V := \mathbb{C}^n$，配以 Hermite 内积 h，其 Hermite 形式为 $\omega = \sqrt{-1}h_{ij}\mathrm{d}z^i \wedge \mathrm{d}\bar{z}^j$（不妨相差 $\frac{1}{2}$ 倍）其中 (h_{ij}) 为正定 Hermite 矩阵。适当选取 $\mathbb{C}^n$ 的基，我们不妨

$$\omega = \sqrt{-1}\sum_{k=1}^{n}\mathrm{d}z_k \wedge \mathrm{d}\bar{z}_k$$

注意到空间 V 的 Hermite 内积自然诱导了 $\bigwedge^\bullet(V^*)$ 上的 Hermite 内积。

注意线性空间 $\bigwedge^\bullet(V^*)$ 的自然分次 $\bigwedge^\bullet(V^*) = \bigoplus\limits_{k\geq 0}\bigwedge^k(V^*)$，其中 $\bigwedge^k(V^*) = \bigoplus_{p+q=k}\bigwedge^{p,q}(V^*)$. 在此意义下，$\bigwedge^\bullet(V^*)$ 配以外积 $\wedge$，构成**分次交换代数**。对于线性算子 $A : \bigwedge^\bullet(V^*) \to \bigwedge^\bullet(V^*)$，称 A 的**分次**为 d，若对任意 $k \geq 0$ 都有 $A : \bigwedge^k(V^*) \to \bigwedge^{k+d}(V^*)$；称 A 的**双分次**为 (p,q)，若对任意 p', q'，都有 $A : \bigwedge^{p',q'}(V^*) \to \bigwedge^{p'+p,q'+q}(V^*)$. 设算子 A, B 的分次分别为 d_1, d_2，则定义**超对易子**

$$[A,B] = AB - (-1)^{d_1 d_2}BA$$

定义 6.1.1. （*Lefschetz 算子及其伴随*）

对于 n 维酉空间 (V,h)，定义双分次 $(1,1)$ 的线性算子

$$\begin{aligned} L : \bigwedge^{p,q}(V^*) &\to \bigwedge^{p+1,q+1}(V^*) \\ \eta &\mapsto \omega \wedge \eta \end{aligned}$$

其中 ω 为 h 的 Hermite 形式。称算子 L 为 ***Lefschetz* 算子**。*在记其（关于 $\bigwedge^\bullet(V^*)$ 的 Hermite 内积的）伴随算子为 $\Lambda := L^*$.*

对于 $\omega=\sqrt{-1}\sum\limits_{k=1}^{n}\mathrm{d}z_k\wedge\mathrm{d}\bar{z}_k$ 的情形，若 $u=\sum\limits_{\substack{|I|=p\\|J|=q}} i_{IJ}\mathrm{d}z_I\wedge\mathrm{d}\bar{z}_J\in\bigwedge^{p,q}(V^*)$，则有

$$\begin{aligned}
Lu &= \sqrt{-1}(-1)^p\sum_{\substack{|I|=p\\|J|=q}}\sum_{k=1}^{n}u_{IJ}\left(\mathrm{d}z_k\wedge\mathrm{d}z_I\right)\wedge\left(\mathrm{d}\bar{z}_k\wedge\mathrm{d}\bar{z}_J\right)\\
\Lambda u &= \sqrt{-1}(-1)^p\sum_{\substack{|I|=p\\|J|=q}}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial}{\partial z_k}\lrcorner\,\mathrm{d}z_I\right)\wedge\left(\frac{\partial}{\partial\bar{z}_k}\lrcorner\,\mathrm{d}\bar{z}_J\right)
\end{aligned}$$

性质 6.1.2. 对于 n 维酉空间 (V,h)，则在 $\bigwedge^{p,q}(V^*)$ 上成立超对易关系

$$[L,\Lambda]=(p+q-n)\,\mathrm{id}$$

证明. 在正交基下暴力验证即可，即 $\omega=\sqrt{-1}\sum\limits_{k=1}^{n}\mathrm{d}z_k\wedge\mathrm{d}\bar{z}_k$.

对于任意 $u=\sum\limits_{\substack{|I|=p\\|J|=q}}u_{IJ}\mathrm{d}z_I\wedge\mathrm{d}\bar{z}_J\in\bigwedge^{p,q}(V^*)$，有

$$L\Lambda u=\sum_{\substack{|I|=p\\|J|=q}}u_{IJ}\sum_{k,l=1}^{n}\left(\mathrm{d}z_k\wedge(\frac{\partial}{\partial z_l}\lrcorner\,\mathrm{d}z_I)\right)\wedge\left(\mathrm{d}\bar{z}_k\wedge(\frac{\partial}{\partial\bar{z}_l}\lrcorner\,\mathrm{d}\bar{z}_j)\right)$$

$$\begin{aligned}
\Lambda Lu &= \sum_{\substack{|I|=p\\|J|=q}}u_{IJ}\sum_{k,l=1}^{n}\left(\frac{\partial}{\partial z_l}\lrcorner\,(\mathrm{d}z_k\wedge\mathrm{d}z_I)\right)\wedge\left(\frac{\partial}{\partial\bar{z}_l}\lrcorner\,(\mathrm{d}\bar{z}_k\wedge\mathrm{d}\bar{z}_j)\right)\\
&= \sum_{\substack{|I|=p\\|J|=q}}u_{IJ}\sum_{k,l=1}^{n}\left(\delta_{kl}\mathrm{d}z_I-\mathrm{d}z_k\wedge(\frac{\partial}{\partial z_l}\lrcorner\,\mathrm{d}z_I)\right)\wedge\left(\delta_{kl}\mathrm{d}\bar{z}_j-\mathrm{d}\bar{z}_k\wedge(\frac{\partial}{\partial\bar{z}_l}\lrcorner\,\mathrm{d}\bar{z}_J)\right)\\
&= \sum_{\substack{|I|=p\\|J|=q}}u_{IJ}\left((n-p-q)\mathrm{d}z_I\wedge\mathrm{d}\bar{z}_J+\sum_{k,l=1}^{n}\left(\mathrm{d}z_k\wedge(\frac{\partial}{\partial z_l}\lrcorner\,\mathrm{d}z_I)\right)\wedge\left(\mathrm{d}\bar{z}_k\wedge(\frac{\partial}{\partial\bar{z}_l}\lrcorner\,\mathrm{d}\bar{z}_j)\right)\right)\\
&= L\Lambda u+(n-p-q)u
\end{aligned}$$

因此 $[L,\Lambda]u=(p+q-n)u$. □

推论 6.1.3. 若记算子 $B:=[L,\Lambda]$，则有对易关系

$$[B,L]=2L\qquad[B,\Lambda]=-2\Lambda\qquad[L,\Lambda]=B$$

证明. 只需注意 B 在 $\bigwedge^{p,q}(V^*)$ 上为标量作用 $(p+q-n)$，因此有

$$[B,L] = BL - LB = [(p+1)+(q+1)-n]L - L(p+q-n) = 2L$$

第二式同理。第三式为 B 的定义。 □

注记 6.1.4. （李代数表示论）

上述结果表明，空间 $\bigwedge^\bullet(V^*)$ 自然视为李代数 $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C}) := \mathrm{span}_{\mathbb{C}}\{l,b,\lambda\}$ 的一个表示，其中

$$l = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \lambda = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

该表示为 $l \mapsto L$, $\lambda \mapsto \Lambda$, $b \mapsto B$.

注意到 $\bigwedge^\bullet(V^*)$ 作为 $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$-模，刚好具有**权空间分解**

$$\bigwedge^\bullet(V^*) = \bigoplus_{k\geq 0} \bigwedge^k(V^*)$$

其中 $\bigwedge^k(V^*)$ 的权为 $k-n$ （即算子 B 的属于本征值 $(p+q-n)$ 的本征子空间）。李代数 $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ 的有限维模结构我们众所周知，由此立刻得到：

定理 6.1.5. （*Hard Lefschetz* 定理）

条件、记号承上，则对任意 $0 \leq k \leq n$，算子

$$L^{n-k} : \bigwedge^k(V^*) \to \bigwedge^{2n-k}(V^*)$$

为线性同构。此外，事实上对于 $p+q=k$，算子

$$L^{n-k} : \bigwedge^{p,q}(V^*) \to \bigwedge^{n-q,n-p}(V^*)$$

也为线性同构。

证明. 第一式由李代数 $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ 的表示论立刻得到。再注意到 L 的 $(1,1)$-双分次性，比较分次立刻得第二式。 □

定义 6.1.6. （本原形式）

条件、记号承上。则对于 $0 \leq k \leq n$，若 $L^{n-k+1}\alpha = 0$，则称 $\alpha \in \bigwedge^k(V^*)$ 为**本原形式**（*primitive form*）。

我们将本原 (p,q)-形式之全体记作 $\bigwedge_{\text{prim}}^{p,q}(V^*)$. 表示论的解释：考虑 $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$-模 $\bigwedge^\bullet(V^*)$ 的不可约模分解。易知本原形式就是表示论当中的**最低权向量**。从而由表示论立刻得到：

定理 6.1.7. （*Lefschitz 分解定理*）

条件记号承上，则对任意的 $\alpha \in \bigwedge^\bullet(V^*)$，则存在唯一的形如下述的分解

$$\alpha = \sum_{i=1}^{N} L^{s_i}\alpha_i$$

其中 $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_N$ 为本原形式，$s_i \geq 0$.

证明. 只需在 $\bigwedge^\bullet(V^*)$ 的每个不可约子模的最低权空间之中适当选取本原形式（最低权向量）即可。 □

对于酉空间 (V,h)，回顾 Hodge$\star$ 算子 $\star : \bigwedge^{p,q}(V^*) \to \bigwedge^{n-q,n-p}(V^*)$ 使得对任意 $\alpha, \beta \in \bigwedge^{p,q}(V^*)$，成立

$$\alpha \wedge \star\overline{\beta} = \langle \alpha, \beta \rangle \mathrm{d}\,\mathrm{Vol}$$

容易验证 $\star$ 是实算子，即对任意的 $\beta \in \bigwedge^{p,q}(V^*)$，成立 $\overline{\star\beta} = \star\overline{\beta}$. 这是因为对任意 $\alpha \in \bigwedge^{p,q}(V^*)$，

$$\alpha \wedge \overline{\star\beta} = \overline{\overline{\alpha} \wedge \star\beta} = \overline{\langle \overline{\alpha}, \overline{\beta} \rangle}\mathrm{d}V = \langle \alpha, \beta \rangle \mathrm{d}V = \alpha \wedge \star\overline{\beta}$$

之后由 α 的任意性即可。

引理 6.1.8. （*Hodge$\star$ 算子与 Lefschitz 算子的基本关系*）

$$\star\Lambda = L\star$$

证明. 对于任意 $\alpha \in \bigwedge^{p+1,q+1}(V^*)$ 以及 $\beta \in \bigwedge^{p,q}(V)$，注意到

$$\begin{aligned}
\langle \alpha, L\beta \rangle \mathrm{d}\,\mathrm{Vol} &= \overline{\langle L\beta, \alpha \rangle}\mathrm{d}\,\mathrm{Vol} = \overline{L\beta \wedge \star\overline{\alpha}} = \overline{\omega \wedge \beta \wedge \star\overline{\alpha}} = \overline{\beta \wedge L \star \overline{\alpha}} \\
&= \overline{\beta \wedge \star\star^{-1} L \star \overline{\alpha}} = \overline{\beta \wedge \star\overline{\star^{-1} L \star \alpha}} = \overline{\langle \beta, \star^{-1} L \star \alpha \rangle}\mathrm{d}\,\mathrm{Vol} = \langle \star^{-1} L \star \alpha, \beta \rangle \mathrm{d}\,\mathrm{Vol}
\end{aligned}$$

因此 $\Lambda = \star^{-1} L\star$，也就是说 $\star\Lambda = L\star$. □

定理 6.1.9. （*Hodge$\star$ 算子在 $\bigwedge^\bullet(V^*)$ 的 $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ 不可约子模上的作用*）

设 $\alpha \in \bigwedge_{\text{prim}}^{p,q}(V^*)$ 为本原 (p,q)-形式，记 $k := p+q$，则成立

$$\star L^j \alpha = (-1)^{\frac{k(k+1)}{2}} \sqrt{-1}^{p-q} \frac{j!}{(n-k-j)!} L^{n-k-j}\alpha$$

证明. 暴力计算，异常复杂。(待补)

[详见Huybrechts, Prop 1.2.31] □

特别地，此定理表明，$\bigwedge^\bullet(V^*)$ 作为 $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})=\mathrm{span}_{\mathbb{C}}\{L,B,\Lambda\}$-模，每个不可约子模都是 $\star$-不变子空间。

定理 6.1.10. (*Hodge-Riemann* 双线性关系)

对于 $k\le n$，定义 $\bigwedge^k(V^*)$ 上的共轭双线性型 Q 如下:

$$Q(\alpha,\beta):=L^{n-k}\alpha\wedge\overline{\beta}$$

那么对任意 $u\in\bigwedge^{p,q}_{\mathrm{prim}}(V^*)$，若 $k:=p+q\le n$，则

$$(\sqrt{-1})^{p-q}(-1)^{\frac{(p+q)(p+q-1)}{2}}Q(u,u)\ge 0$$

且等号成立当且仅当 $u=0$.

证明. 利用定理6.1.9，容易验证在相差常数倍意义下，有

$$Q(u,u)=L^{n-k}\wedge u\wedge\overline{u}=*u\wedge\overline{u}=\langle\overline{u},\overline{u}\rangle\mathrm{d}\,\mathrm{Vol}=|u|^2\mathrm{d}\,\mathrm{Vol}\ge 0$$

□

(细节待补，可能有小错，但基本精神如此)

6.2 Kähler 流形上的算子对易关系

现在，设 (X,ω) 为 Kähler 流形，考虑 $\Omega^{p,q}(X,\mathbb{C})$ 为 X 上的光滑 (p,q)-形式之全体. 对于 $u\in\Omega^{p,q}(X,\mathbb{C})$，局部上

$$u=\sum_{\substack{|I|=p\\|J|=q}}u_{IJ}\mathrm{d}z_I\wedge\mathrm{d}\overline{z}_J$$

再回顾微分算子 $\mathrm{d},\mathrm{d}':=\partial$ 以及 $\mathrm{d}'':=\overline{\partial}$. 回顾我们之前介绍的 Lefschitz 算子 L 及其伴随 Λ，我们在 Hermite 流形上也可定义之，只需在每点处的切空间上考虑即可。即有 $L:\Omega^{p,q}(X,\mathbb{C})\to\Omega^{p+1,q+1}(X,\mathbb{C})$，以及 $\Lambda:\Omega^{p,q}(X,\mathbb{C})\to\Omega^{p-1,q-1}(X,\mathbb{C})$.

回顾 $\Omega^{p,q}(X,\mathbb{C})$ 上的内积结构《,》(视 $\mathbb{C}$ 为 X 上的平凡线丛，配以标准 Hermite 度量)。在此意义下可谈论微分算子的形式伴随 $\mathrm{d}^*,\mathrm{d}'^*,\mathrm{d}''^*$. 容易验证，在 $X=\mathbb{C}^n,\omega=\sqrt{-1}\sum_{k=1}^{n}\mathrm{d}z_k\wedge\mathrm{d}\overline{z}_k$

的经典情况下，对于 $u=\sum\limits_{\substack{|I|=p\\|J|=q}} u_{IJ}\mathrm{d}z_I\wedge \mathrm{d}\bar{z}_J\in\Omega^{p,q}(X,\mathbb{C})$，则有

$$\begin{aligned}\mathrm{d}'^*u &= -\sum_{\substack{|I|=p\\|J|=q}}\sum_{k=1}^n \frac{\partial u_{I,J}}{\partial \bar{z}_k}\frac{\partial}{\partial z_k}\lrcorner(\mathrm{d}z_I\wedge \mathrm{d}\bar{z}_J)\\ \mathrm{d}''^*u &= -\sum_{\substack{|I|=p\\|J|=q}}\sum_{k=1}^n \frac{\partial u_{I,J}}{\partial z_k}\frac{\partial}{\partial \bar{z}_k}\lrcorner(\mathrm{d}z_I\wedge \mathrm{d}\bar{z}_J)\end{aligned}$$

引理 6.2.1. 对于 $X=\mathbb{C}^n$，$\omega=\sqrt{-1}\sum\limits_{k=1}^n \mathrm{d}z_k\wedge \mathrm{d}\bar{z}_k$，则微分算子 d' 与 *Lefshictz* 算子 L 满足对易关系

$$[\mathrm{d}''^*,L]=\sqrt{-1}\mathrm{d}'$$

证明. 暴力验证即可。对于 $u\in\Omega^{p,q}(X,\mathbb{C})$，不妨 u 为单项式 $u=u_{IJ}\mathrm{d}z_I\wedge \mathrm{d}\bar{z}_J$，其中多重指标 $|I|=p,|J|=q$. 则有

$$L\mathrm{d}''^*u = \omega\wedge\left(-\sum_{k=1}^n\frac{\partial u_{IJ}}{\partial z_k}\frac{\partial}{\partial \bar{z}_k}\lrcorner(\mathrm{d}z_I\wedge \mathrm{d}\bar{z}_J)\right)=-\sqrt{-1}\sum_{k,l=1}^n \mathrm{d}z_I\wedge\left(\mathrm{d}z_l\wedge\left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}_k}\lrcorner \mathrm{d}\bar{z}_J\right)\right)$$

$$\begin{aligned}\mathrm{d}''^*Lu &= \sqrt{-1}(-1)^{p+1}\sum_{k,l=1}^n\frac{\partial u_{IJ}}{\partial z_l}\frac{\partial}{\partial \bar{z}_l}\lrcorner\Big[(\mathrm{d}z_k\wedge \mathrm{d}z_I)\wedge(\mathrm{d}\bar{z}_k\wedge \mathrm{d}\bar{z}_J)\Big]\\ &= \sqrt{-1}\sum_{k,l=1}^n\frac{\partial u_{IJ}}{\partial z_l}(\mathrm{d}z_k\wedge \mathrm{d}z_I)\wedge\left(\delta_{lk}\mathrm{d}\bar{z}_J-\mathrm{d}\bar{z}_k\wedge\left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}_l}\lrcorner \mathrm{d}\bar{z}_J\right)\right)\\ &= \sqrt{-1}\sum_{k=1}^n\frac{\partial u_{IJ}}{\partial z_k}\mathrm{d}z_k\wedge \mathrm{d}z_I\wedge \mathrm{d}\bar{z}_J-\sqrt{-1}\sum_{k,l=1}^n\frac{\partial u_{IJ}}{\partial z_l}\mathrm{d}\bar{z}_k\wedge\left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}_l}\lrcorner \mathrm{d}\bar{z}_J\right)\\ &= \sqrt{-1}\mathrm{d}'u+L\mathrm{d}''^*u\end{aligned}$$

因此有 $[\mathrm{d}''^*,L]=\sqrt{-1}\mathrm{d}'$. □

定理 6.2.2. （*Kähler* 流形上的基本对易关系）

设 (X,ω) 为 *Kähler* 流形（可以非紧），则成立算子对易关系

$$\begin{aligned}&[\mathrm{d}''^*,L]=\sqrt{-1}\mathrm{d}' && [\mathrm{d}'^*,L]=-\sqrt{-1}\mathrm{d}''\\ &[\Lambda,\mathrm{d}'']=-\sqrt{-1}\mathrm{d}'^* && [\Lambda,\mathrm{d}']=\sqrt{-1}\mathrm{d}''^*\end{aligned}$$

证明. 由于 ω 为 Kähler 形式，从而由性质5.5.9可知对任意 $x \in X$，存在 x 的全纯坐标邻域 $(z_1, z_2, ..., z_n)$，使得 x 位于该坐标卡原点，并且

$$\omega = \sqrt{-1}\sum_{k=1}^{n} \mathrm{d}z_k \wedge \mathrm{d}\bar{z}_k + O(|z|^2)$$

从而对于 $u = \sum\limits_{\substack{|I|=p\\|J|=q}} u_{IJ}\mathrm{d}z_I \wedge \mathrm{d}\bar{z}_J$，容易验证成立

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}'^{*}u &= -\sum_{\substack{|I|=p\\|J|=q}}\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial u_{IJ}}{\partial \bar{z}_k}\frac{\partial}{\partial z_k} \lrcorner\, (\mathrm{d}z_I \wedge \mathrm{d}\bar{z}_J) + O(|z|) \\
\mathrm{d}''^{*}u &= -\sum_{\substack{|I|=p\\|J|=q}}\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial u_{IJ}}{\partial z_k}\frac{\partial}{\partial \bar{z}_k} \lrcorner\, (\mathrm{d}z_I \wedge \mathrm{d}\bar{z}_J) + O(|z|)
\end{aligned}$$

之后与引理6.2.1的证明完全类似，可知 $[\mathrm{d}''^{*}, L] = \sqrt{-1}\mathrm{d}'$. 对此式取共轭，即得 $[\mathrm{d}'^{*}, L] = -\sqrt{-1}\mathrm{d}''$. 再取形式伴随，即可得到余下的两个关于 Λ 的对易关系。 □

引理 6.2.3. 设 (X, ω) 为 *Kähler* 流形（可以非紧），则成立

$$[\mathrm{d}', \mathrm{d}''^{*}] = [\mathrm{d}'', \mathrm{d}'^{*}] = 0$$

证明. 注意利用对易关系（定理6.2.2）

$$[\mathrm{d}', \mathrm{d}''^{*}] = -\sqrt{-1}[\mathrm{d}', [\Lambda, \mathrm{d}']]$$

而再注意超对易子 $[,]$ 的超雅可比恒等式，以及 $(\mathrm{d}')^2 = 0$，从而有

$$[\mathrm{d}', [\Lambda, \mathrm{d}']] = [[\mathrm{d}', \Lambda], \mathrm{d}'] + [\Lambda, [\mathrm{d}', \mathrm{d}']] = -[\mathrm{d}', [\Lambda, \mathrm{d}']]$$

因此 $[\mathrm{d}', [\Lambda, \mathrm{d}']] = 0$，从而 $[\mathrm{d}', \mathrm{d}''^{*}] = 0$. 另一式也类似。 □

性质 6.2.4. （*Kähler* 流形上的 *Laplace* 算子）
设 (X, ω) 为 *Kähler* 流形（可以非紧），则成立

$$\triangle' = \triangle'' = \frac{1}{2}\triangle$$

其中 $\triangle := [\mathrm{d}, \mathrm{d}^{*}]$，$\triangle' := [\mathrm{d}', \mathrm{d}'^{*}]$，$\triangle'' := [\mathrm{d}'', \mathrm{d}''^{*}]$ 为 *Laplace* 算子。

证明. 注意利用对易关系（定理6.2.2）以及超对易子 $[,]$ 的超雅可比恒等式，再注意到 $[\mathrm{d}',\mathrm{d}'']=0$，从而

$$\begin{aligned}\triangle'' &= [\mathrm{d}'',\mathrm{d}''^*]=-\sqrt{-1}[\mathrm{d}'',[\Lambda,\mathrm{d}']]=-\sqrt{-1}\left([[\mathrm{d}'',\Lambda],\mathrm{d}']+[\Lambda,[\mathrm{d}'',\mathrm{d}']]\right)\\ &= -\sqrt{-1}[[\mathrm{d}'',\Lambda],\mathrm{d}']=-\sqrt{-1}\cdot\sqrt{-1}[\mathrm{d}'^*,\mathrm{d}']=\triangle'\end{aligned}$$

从而再注意引理6.2.3，可知

$$\begin{aligned}\triangle &= [\mathrm{d}'+\mathrm{d}'',\mathrm{d}'^*+\mathrm{d}''^*]\\ &= [\mathrm{d}',\mathrm{d}'^*]+[\mathrm{d}',\mathrm{d}''^*]+[\mathrm{d}'',\mathrm{d}'^*]+[\mathrm{d}'',\mathrm{d}''^*]\\ &= \triangle'+\triangle''\end{aligned}$$

从而证毕。 □

推论 6.2.5. 设 (X,ω) 为 *Kähler* 流形，则 $\triangle$ 保持双分次，即

$$\triangle:\Omega^{p,q}(X,\mathbb{C})\to\Omega^{p,q}(X,\mathbb{C})$$

证明. 只需注意 $\triangle=2\triangle'$，而 $\triangle'$ 保持双分次。 □

由此可得，若 $\alpha\in\Omega^\bullet(X,E)$ 使得 $\triangle\alpha=0$，则 α 在每个 $\Omega^{p,q}(X,\mathbb{C})$ 的分量也是 $\triangle$-调和的。

定理 6.2.6. （*Laplace* 算子的对易性）

设 (X,ω) 为 *Kähler* 流形（可以非紧），则算子 $\triangle$ 与以下算子都对易：

$$\star\quad \mathrm{d}'\quad \mathrm{d}''\quad \mathrm{d}'^*\quad \mathrm{d}''^*\quad L\quad \Lambda$$

证明. $[\triangle,\star]=0$ 与黎曼流形的情形类似；直接验证 $[\triangle',\mathrm{d}']=[\triangle',\mathrm{d}'^*]=0$ 以及 $[\triangle'',\mathrm{d}'']=[\triangle'',\mathrm{d}''^*]=0$，而 $\triangle=2\triangle''=2\triangle''^*$，从而 $\triangle$ 与 $\mathrm{d}',\mathrm{d}'',\mathrm{d}'^*,\mathrm{d}''^*$ 对易。

而注意 ω 为 Kähler 形式，$\mathrm{d}\omega=0$，比较分次得 $\mathrm{d}'\omega=\mathrm{d}''\omega=0$，从而对任意 $u\in\Omega^\bullet(X,\mathbb{C})$，

$$[\mathrm{d},L]u=\mathrm{d}(\omega\wedge u)-\omega\wedge\mathrm{d}u=\mathrm{d}\omega\wedge u=0$$

从而 $[\mathrm{d},L]=0$. 比较分次可知 $[\mathrm{d}',L]=[\mathrm{d}'',L]=0$. 从而由超雅可比恒等式，

$$[\triangle',L]=[[\mathrm{d}',\mathrm{d}'^*],L]=[\mathrm{d}',[\mathrm{d}'^*,L]]+[[\mathrm{d}',L],\mathrm{d}'^*]=-\sqrt{-1}[\mathrm{d}',\mathrm{d}'']=0$$

再注意到 $\triangle=2\triangle'$，从而 $\triangle$ 与 L 对易。再取伴随，注意 $\triangle$ 是自伴的，从而易知 $\triangle$ 也与 Λ 对易。 □

6.3 紧 Kähler 流形的上同调群

对于一般的紧 Hermite 流形 (X,h)，回顾 Hodge 分解定理（定理5.6.3），考虑 $E = X \times \mathbb{C}$ 为平凡线丛并配以标准 Hermite 度量的情形，有 Hodge 分解

$$\Omega^{p,q}(X,\mathbb{C}) = \mathcal{H}^{p,q}_{\mathrm{d}''}(X,\mathbb{C}) + \mathrm{Im}\,\mathrm{d}'' + \mathrm{Im}\,\mathrm{d}''^*$$

在平凡线丛的特殊情形下，注意到 $(\mathrm{d}')^2 = 0$，我们亦可类似得到关于 $\triangle' = [\mathrm{d}',\mathrm{d}'^*]$ 的 Hodge 分解

$$\Omega^{p,q}(X,\mathbb{C}) = \mathcal{H}^{p,q}_{\mathrm{d}'}(X,\mathbb{C}) + \mathrm{Im}\,\mathrm{d}' + \mathrm{Im}\,\mathrm{d}'^*$$

而对于 Kähler 流形 (X,ω)，注意到 $\triangle = 2\triangle' = 2\triangle''$，从而有

$$\mathcal{H}^{p,q}_{\mathrm{d}}(X,\mathbb{C}) \cong \mathcal{H}^{p,q}_{\mathrm{d}'}(X,\mathbb{C}) \cong \mathcal{H}^{p,q}_{\mathrm{d}''}(X,\mathbb{C})$$

于是为了方便，我们将其记作 $\mathcal{H}^{p,q}(X,\mathbb{C})$，省略下标不会有歧义。由于 $\triangle = 2\triangle' = 2\triangle''$，从而推论6.2.5表明 $\mathcal{H}^k(X,\mathbb{C}) = \bigoplus\limits_{p+q=k} \mathcal{H}^{p,q}(X,\mathbb{C})$. 再注意 $\triangle,\triangle',\triangle''$ 都为实算子，从而立刻得到：

定理 6.3.1. （紧 *Kähler* 流形的 *Hodge* 分解定理）

设 X 为紧 Kähler 流形，则其 de Rham 上同调与 Dolbeault 上同调满足

$$\begin{aligned} H^k_{\mathrm{DR}}(X,\mathbb{C}) &\cong \bigoplus_{p,q=k} H^{p,q}_{\mathrm{d}''}(X,\mathbb{C}) \\ H^{p,q}_{\mathrm{d}''}(X,\mathbb{C}) &\cong \overline{H^{q,p}_{\mathrm{d}''}(X,\mathbb{C})} \end{aligned}$$

证明. 任取 Kähler 度量 ω，只需注意到 Hodge 同构 $H^k(X,\mathbb{C}) \cong \mathcal{H}^k(X,\mathbb{C})$ 以及 $H^{p,q}_{\mathrm{d}''}(X,\mathbb{C}) = \mathcal{H}^{p,q}(X,\mathbb{C})$. □

事实上，上述同构是典范的，与 X 上的 Kähler 度量选取无关。为说明这一点，我们需要一个引理：

引理 6.3.2. （紧 *Kähler* 流形的 $\partial\bar{\partial}$-引理）

设 (X,ω) 为紧 Kähler 流形，$\alpha \in \Omega^{p,q}(X,\mathbb{C})$ 满足 $\mathrm{d}\alpha = 0$，则以下等价：

（1）α 是 d-恰当的；

（2）α 是 d'-恰当的；

（3）α 是 d''-恰当的；

（4）α 是 $\mathrm{d}'\mathrm{d}''$-恰当的；

（5）α 与空间 $\mathcal{H}^{p,q}(X,\mathbb{C})$ 正交。

证明. 分以下几步：

(1)(2)(3)(4)→(5)：对于任意 $\beta \in \mathcal{H}^{p,q}(\mathrm{X}, \mathbb{C})$，则 $\triangle' \beta = \triangle'' \beta = 0$. 类似于引理5.4.3可知 $\mathrm{d}'^* \beta = \mathrm{d}''^* \beta = 0$，从而易证 (5) 成立。

(4)→(1)(2)(3)：若（4）成立，则（2）（3）显然。令 $\alpha = \mathrm{d}'\mathrm{d}''\beta$，则 $\alpha = \frac{1}{2}(\mathrm{d}' + \mathrm{d}'')(\mathrm{d}'' - \mathrm{d}')\beta = \mathrm{d}\frac{(\mathrm{d}''-\mathrm{d}')\beta}{2}$，从而（1）成立。

最后只需再证 (5)→(4)：若 $\alpha \perp \mathcal{H}^{p,q}(\mathrm{X}, \mathbb{C})$，则注意到关于 $\triangle'$ 的 Hodge 分解，必有

$$\alpha = \mathrm{d}'\gamma + \mathrm{d}'^*\gamma'$$

而由 $\mathrm{d}\alpha = 0$ 比较分次可得 $\mathrm{d}'\alpha = \mathrm{d}''\alpha = 0$，因此

$$0 = \mathrm{d}'\alpha = \mathrm{d}'\mathrm{d}'^*\gamma'$$

因此 $0 = \langle\!\langle \mathrm{d}'\mathrm{d}'^*\gamma', \gamma' \rangle\!\rangle = \langle\!\langle \mathrm{d}'^*\gamma', \mathrm{d}'^*\gamma' \rangle\!\rangle = \|\mathrm{d}'^*\gamma'\|^2$，迫使 $\mathrm{d}'^*\gamma' = 0$. 因此 $\alpha = \mathrm{d}'\gamma$.

再对 γ 考虑关于 $\triangle''$ 的 Hodge 分解，令

$$\gamma = \mathrm{d}''\beta + \mathrm{d}''^*\beta' + \beta''$$

其中 $\triangle''\beta'' = 0$，从而 $\mathrm{d}''\beta'' = 0$ （类似于引理5.4.3）. 于是

$$\alpha = \mathrm{d}'\gamma = \mathrm{d}'\mathrm{d}''\beta + \mathrm{d}'\mathrm{d}''^*\beta' = \mathrm{d}'\mathrm{d}''\beta - \mathrm{d}''^*\mathrm{d}'\beta'$$

其中第二个等号利用了引理6.2.3. 又因为 $\mathrm{d}''\alpha = 0$，从而得到 $\mathrm{d}''\mathrm{d}''^*\mathrm{d}'\beta' = 0$，因此 $0 = \langle\!\langle \mathrm{d}''\mathrm{d}''^*\mathrm{d}'\beta', \mathrm{d}'\beta' \rangle\!\rangle = \|\mathrm{d}''^*\mathrm{d}'\beta'\|^2$，迫使 $\mathrm{d}''^*\mathrm{d}'\beta' = 0$，因此 $\alpha = \mathrm{d}'\mathrm{d}''\beta$ 证毕。 □

从而我们有以下结果，由此可知定理6.3.1 当中的同构是典范的：

性质 6.3.3. *设 X 为紧 Kähler 流形，则存在典范同态*

$$H^{p,q}_{\mathrm{d}''}(X, \mathbb{C}) \to H^{p+q}_{\mathrm{d}}(X, \mathbb{C})$$

证明. 任取 X 的 Kähler 度量 ω，即相应的 Laplace 算子为 $\triangle = 2\triangle_{td''}$. 对任意 $[\alpha]_{\mathrm{d}''} \in H^{p,q}_{\mathrm{d}''}(X, \mathbb{C})$，注意 Hodge 同构，可取 $[\alpha]_{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}'}}{}'$ 的代表元 α，使得 $\triangle_{\mathrm{d}''}\alpha = 0$，从而 $\triangle\alpha = 0$，从而 $\mathrm{d}\alpha = 0$. 这就给出了 $[\alpha]_{\mathrm{d}} \in H^{p+q}_{\mathrm{d}}(X, \mathbb{C})$.

我们需要验证此映射的良定性，即与 Kähler 度量选取无关。现在，若 ω 与 $\widetilde{\omega}$ 都为 X 上的 Kähler 度量，记相应的 Laplace 算子为 $\triangle, \widetilde{\triangle}$. 则对于 $[\alpha] \in H^{p,q}_{\mathrm{d}''}(X, \mathbb{C})$，取调和代表元 $\begin{cases} \alpha_1 \in \mathcal{H}^{p,q}_{\triangle}(X, \mathbb{C}) \\ \alpha_2 \in \mathcal{H}^{p,q}_{\widetilde{\triangle}}(X, \mathbb{C}) \end{cases}$，则 $\mathrm{d}\alpha_1 = \mathrm{d}\alpha_2 = 0$. 注意 $[\alpha_1]_{\mathrm{d}''} = [\alpha_2]_{\mathrm{d}''}$，从而存在 γ 使得 $\alpha_1 - \alpha_2 = \mathrm{d}''\gamma$. 则

$$\mathrm{d}\mathrm{d}''\gamma = \mathrm{d}(\alpha_1 - \alpha_2) = 0$$

又容易直接验证 $\mathrm{d}''\gamma \perp \mathcal{H}^{p,q}_{\triangle}(X, \mathbb{C})$，从而由 $\partial\bar{\partial}$-引理可知，$\mathrm{d}''\gamma$ 是 d-正合的。因此 $[\alpha_1]_{\mathrm{d}} = [\alpha_2]_{\mathrm{d}}$. 证毕。 □

注记 6.3.4. （*Bott-Chern* 上同调）

对于复流形 X，定义 X 的 ***Bott-Chern*** **上同调**

$$H^{p,q}_{\mathrm{BC}}(X,\mathbb{C}) := \frac{\ker \mathrm{d} \cap \Omega^{p,q}(X,\mathbb{C})}{\mathrm{Im}(\mathrm{d}'\mathrm{d}'') \cap \Omega^{p,q}(X,\mathbb{C})}$$

则由 $\partial\bar{\partial}$-引理（引理6.3.2）可知，若 X 为紧 Kähler 流形，则有同构

$$H^{p,q}_{\mathrm{BC}}(X,\mathbb{C}) \cong H^{p,q}_{\mathrm{d}}(X,\mathbb{C}) := \frac{(\ker \mathrm{d}) \cap \Omega^{p,q}(X,\mathbb{C})}{(\mathrm{Im}\, \mathrm{d}) \cap \Omega^{p,q}(X,\mathbb{C})} \cong H^{p,q}_{\mathrm{d}''}(X,\mathbb{C})$$

注记 6.3.5. （*Appeli* 上同调）

对于复流形 X，还可以定义 X 的 ***Appeli*** 上同调如下：

$$K^{p,q}_{\mathrm{A}}(X,\mathbb{C}) := \frac{\ker(\mathrm{d}'\mathrm{d}'') \cap \Omega^{p,q}(X,\mathbb{C})}{(\mathrm{Im}\, \mathrm{d}' + \mathrm{Im}\, \mathrm{d}'') \cap \Omega^{p,q}(X,\mathbb{C})}$$

重要例子 6.3.6. （复环面的 *Dolbeault* 上同调）

考虑 $X := \mathbb{C}^n/\Gamma$，其中 $\Gamma := \mathbb{Z}^{2n}$ 使得 $\Gamma = \mathrm{span}_{\mathbb{Z}}\{e_1, e_2, ..., e_n; \sqrt{-1}e_1, \sqrt{-1}e_2, ..., \sqrt{-1}e_n\}$，其中 $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ 为 $\mathbb{C}^n$ 的一组 $\mathbb{C}$-基。则 X 为 Kähler 流形，并且其 Dolbeault 上同调满足

$$H^{p,q}_{\mathrm{d}''}(X,\mathbb{C}) \cong \bigwedge\nolimits^{p,q}(\mathbb{C}^n)$$

证明. 首先在拓扑上，$X \cong (S^1)^n$. 由代数拓扑中的 Künneth 公式可知

$$H^k_{\mathrm{DR}}(X,\mathbb{C}) = \bigoplus_{a_1+a_2+\cdots+a_{2n}=k} H^{a_1}_{\mathrm{DR}}(S^1) \otimes H^{a_2}_{\mathrm{DR}}(S^1) \otimes \cdots \otimes H^{a_{2n}}_{\mathrm{DR}}(S^1)$$

注意到 $H^0_{\mathrm{DR}}(S^1,\mathbb{C}) \cong \mathbb{C}$ 以及 $H^1_{\mathrm{DR}}(S^1) \cong \mathbb{C}\mathrm{d}x$. 从而可知 De Rham 上同调满足

$$H^k_{\mathrm{DR}}(X,\mathbb{C}) \cong \bigoplus_{|I|=k} \mathbb{C}\mathrm{d}x_I$$

其中 $I = (a_1, a_2, ..., a_k)$ 满足 $1 \le a_1 < a_2 < \cdots < a_k \le 2n$. 事实上，对任意 $[u] \in H^k_{\mathrm{DR}}(X,\mathbb{C})$，该同调类中存在形如 $u = \sum\limits_{|I|=k} u_I \mathrm{d}x_I$ 的代表元，使得 $u_I \in \mathbb{C}$ 为常数。

注意到 X 为 Kähler 流形，从而由 Hodge 分解

$$H^k_{\mathrm{DR}}(X,\mathbb{C}) \cong \bigoplus_{p+q=k} H^{p,q}_{\mathrm{d}''}(X,\mathbb{C})$$

立刻得到

$$H^{p,q}_{\mathrm{d}''}(X,\mathbb{C}) = \left\{ \Big[\sum_{\substack{|I|=p \\ |J|=q}} u_{IJ} \mathrm{d}z_I \wedge \mathrm{d}\bar{z}_J \Big] \Big| u_{IJ} \in \mathbb{C} \right\}$$

□

注记 6.3.7. *对于该复环面 X，存在一一对应*

$$\left\{[\omega]\in H^{1,1}_{\mathrm{d}''}(X,\mathbb{C})\cap H^2_{\mathrm{DR}}(X,\mathbb{R})\middle|\omega\text{ 为 }X\text{ 上的 Kähler 度量}\right\}\Leftrightarrow\left\{n\text{ 阶正定 Hermite 方阵}\right\}$$

定理 6.3.8. *(Hard Lefschetz 定理)*

设 X 为紧 Kähler 流形，$\dim_{\mathbb{C}}X=n$，则对任意 $k:=p+q\leq n$，Lefschetz 算子 L^{n-k} 诱导同构

$$\begin{aligned}L^{n-k}:H^k_{\mathrm{DR}}(X,\mathbb{C})&\cong H^{2n-k}_{\mathrm{DR}}(X,\mathbb{C})\\ H^{p,q}_{\mathrm{d}''}(X,\mathbb{C})&\cong H^{n-q,n-p}_{\mathrm{d}''}(X,\mathbb{C})\end{aligned}$$

证明. 任取 X 上的 Kähler 形式 ω. 由 Hodge 同构，$H^{p,q}_{\mathrm{d}''}(X,\mathbb{C})\cong\mathcal{H}^{p,q}_{\mathrm{d}}(X,\mathbb{C})$. 由定理6.1.5知，$L^{n-k}$ 在每一点 $x\in X$ 处都给出了同构

$$L^{n-k}:\bigwedge\nolimits^{p,q}T^*_xX\cong\bigwedge\nolimits^{n-q,n-p}T^*_xX$$

再注意定理6.2.6，$[\triangle,L]=0$，从而有同构

$$L^{n-k}:\mathcal{H}^{p,q}_{\mathrm{d}}(X,\mathbb{C})\cong\mathcal{H}^{n-q,n-p}_{\mathrm{d}}(X,\mathbb{C})$$

再利用 Hodge 分解 $H^k_{\mathrm{DR}}(X,\mathbb{C})\cong\bigoplus\limits_{p+q=k}H^{p,q}_{\mathrm{d}''}(X,\mathbb{C})$ 即可。 □

回顾 Lefschetz 分解当中的**本原形式**，对于复流形 X，记 $\Omega^{p,q}_{\mathrm{prim}}(X,\mathbb{C}):=\left\{\alpha\in\Omega^{p,q}(X,\mathbb{C})\middle|\forall x\in X,\ \alpha(x)\in\bigwedge^{p,q}_{\mathrm{prim}}T^*_xX\right\}$. 而对于 Hermite 流形 X，令 $\mathcal{H}^{p,q}_{\mathrm{prim}}(X,\mathbb{C}):=\left\{\alpha\in\Omega^{p,q}_{\mathrm{prim}}(X,\mathbb{C})\middle|\triangle\alpha=0\right\}$，称其中元素为**本原调和形式**。类似地，我们有如下定理：

定理 6.3.9. *(Lefschetz 分解定理)*

设 X 为紧 Kähler 流形，则成立

$$\mathcal{H}^{p,q}(X,\mathbb{C})=\bigoplus_{r\geq(p+q-n)_+}L^r\mathcal{H}^{p-r,q-r}_{\mathrm{prim}}(X,\mathbb{C})$$

这里的 $(p+q-n)_+:=\max\{p+q-n,0\}$.

证明. 对于任意 $u\in\Omega^{p,q}(X,\mathbb{C})$，由之前结果（定理6.1.7）易知存在唯一的分解

$$u=\sum_{r\geq(p+q-n)_+}L^r\varphi_r$$

其中 $\varphi_r \in \Omega^{p-r,q-r}_{\text{prim}}(X,\mathbb{C})$ 为本原形式。注意到 $[\triangle, L] = 0$，以及 Lefshcitz 分解的唯一性，易知 $\triangle u = 0$ 当且仅当 $\triangle \varphi_r = 0$ 对每个 r 都成立。从而证毕。 □

定理 6.3.10. （*Hodge-Riemann* 双线性关系）

设 X 为紧 *Kähler* 流形，若 $p+q \leq n$，则 $\mathcal{H}^{p,q}_{\text{prim}}(X,\mathbb{C})$ 上的双线性型

$$Q(\alpha,\beta) := \lambda_{p,q} \int_X L^{n-p-q} \alpha \wedge \overline{\beta}$$

是严格正定的。其中 $\lambda_{p,q}$ 为某常数。

证明. 只需注意定理6.1.10. □

记号 6.3.11. *(Betti* 数与 *Hodge* 数*)*

对于紧 *Kähler* 流形 X，记其 *Dolbeault* 上同调、*de Rham* 上同调的维数

$$\begin{aligned} h^{p,q} &:= \dim_{\mathbb{C}} H^{p,q}_{d''}(X,\mathbb{C}) \\ b^k &:= \dim_{\mathbb{C}} H^k_{\text{DR}}(X,\mathbb{C}) \end{aligned}$$

分别称为 X 的 ***Hodge* 数**、***Betti* 数**.

则对于紧 Kähler 流形，我们有以下关系：

$$\begin{cases} h^{p,q} = h^{q,p} & \text{共轭} \\ h^{p,q} = h^{n-q,n-p} & \text{Serre 对偶} \\ b^k = \sum\limits_{p+q=k} h^{p,q} & \text{Hodge 分解} \end{cases}$$

特别地，**当 k 为奇数时，b^k 为偶数**，这是紧 Kahler 流形的又一拓扑限制。

若再令 $h^{p,q}_{\text{prim}} := \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{H}^{p,q}_{\text{prim}}(X,\mathbb{C})$，则 Lefschitz 分解定理与 Serre 对偶定理表明

$$h^{p,q} = \begin{cases} h^{p,q}_{\text{prim}} + h^{p-1,q-1}_{\text{prim}} + h^{p-2,q-2}_{\text{prim}} + \cdots & p+q \leq n \\ h^{n-q,n-p}_{\text{prim}} + h^{n-q-1,n-p-1}_{\text{prim}} + h^{n-q-2,n-p-2}_{\text{prim}} + \cdots & p+q > n \end{cases}$$

由此得到 Betti 数与 Hodge 数满足不等式

$$\begin{cases} \text{如果 } p+q \leq n, & h^{p,q} \geq h^{p-1,q-1}, b^k \geq b^{k-2} \\ \text{如果 } p+q \geq n, & h^{p,q} \geq h^{p+1,q+1}, b^k \geq b^{k+2} \end{cases}$$

Exercise:Consider X-compact Kahler,$\dim_{\mathbb{C}} X = n$, ω-Kahler metric, Then $\forall \alpha, \beta \in H^{1,1}(X, \mathbb{R}) = H^{1,1}(X, \mathbb{C}) \cap H^2(X, \mathbb{R})$, Then

$$\left(\{\omega^{n-2}\} \cdot \alpha \cdot \beta\right)^2 \geq \left(\{\omega^{n-2}\} \cdot \alpha^2\right)\left(\{\omega^{n-2}\} \cdot \beta^2\right)$$

with equality if and only if $\alpha = \lambda\beta$ for some $\lambda \in \mathbb{R}$

Eg: $\mathbb{C}^2$, α, β real $(1,1)$-forms,

$$(\alpha, \beta)^2 \geq \alpha^2 \beta^2$$

Hint: Using HRR, and Lefschitz decomposition... "Alg-Geom-inequality over Kahler manifold".

6.4 Hodge-Frolicher 谱序列

X-compact Kahler, then Hodge decomposition

$$\Rightarrow b_k = \sum_{p+q=k} h^{p,q}$$

Question: X compact complex manifold, relation between b_k and $\sum\limits_{p+q=k} h^{p,q}$?

定理 6.4.1. *(Hodge-Frolicher inequality) X compact complex manifold, then*

$$b_k \leq \sum_{p+q=k} h^{p,q}$$

Spectral sequence: $(K^{p,q}, \mathrm{d} = \mathrm{d}' + \mathrm{d}'')$ a double complex of modules.

$$K^{p,q} \xrightarrow{\mathrm{d}'} K^{p+1,q} \quad K^{p,q} \xrightarrow{\mathrm{d}''} K^{p,q+1}$$

with $\mathrm{d}'^2 = 0, \mathrm{d}''^2 = 0, \mathrm{d}^2 = 0$.

Assume $K^{p,q} = 0$ if $p \leq 0$ or $q \leq 0$.

$\rightsquigarrow$ total complex $(K^\bullet, \mathrm{d})$where

$$K^l := \bigoplus_{p+q=l} K^{p,q}$$

$\exists$ a natural filtration

$$F_p K^l := \bigoplus_{l \geq i \geq p} K^{i,l-i}$$

F induces a filtration on $H^\bullet(K^\bullet)$.

$$F_p H^l(K^\bullet) = \mathrm{Im}(H^l(F_p K^\bullet) \to H^l(K^\bullet)) = \frac{F_p Z^l}{F_p B^l}$$

where $Z^l = \ker \mathrm{d} \frown K^l$ and $B^l = \mathrm{Im}\, \mathrm{d} \frown K^{l-1}$

Denote $G_p H^l(K^\bullet) = F_p H^l / F_{p+1} H^l$.

定理 6.4.2. *There exists a sequence*

$$\{E_r, \mathrm{d}_r\}_{r\geq 0}$$

satisfying:

(1) $E_r = \bigoplus\limits_{p,q\geq 0} E_r^{p,q}$

(2)$\mathrm{d}_r : E_r^{p,q} \to E_r^{p+r,q+r-1}$, $\mathrm{d}_r^2 = 0$.

(3) $E_{r+1} = H^\bullet((E_r, \mathrm{d}_r))$.

$$E_0^{p,q} = \frac{F_pK^{p+q}}{F_{p+1}K^{p+q}} = K^{p,q}$$

d_0 induced by d.

$$E_1^{p,q} = H^q((K^{p,\bullet}, \mathrm{d}''))$$

d_1 induced by d.

查任何一本同调代数的书。

定义 6.4.3. *We call the sequence* E_r *converges at* E_{r_0}, *if* $E_{r+1} = E_r$ *for any* $r \geq r_0$, ($\iff$ $\mathrm{d}_r = 0$*for any* $r \geq r_0$) *then we denote* $E_\infty = E_{r_0}$

In our setting, $E_\infty^{p,q} = G_pH^{p+q}(K^\bullet)$

Application:X compact complex manifold,

$$K^{p,q} = C^\infty(X, \bigwedge\nolimits^{p,q}) \quad \mathrm{d} = \mathrm{d}' + \mathrm{d}''$$

$\rightsquigarrow E_0^{p,q} = K^{p,q}$, $E_1^{p,q} = H^{p,q}(X, \mathbb{C})$.

推论 6.4.4.

$$E_\infty^{p,q} = G_pH^{p+q}(X, \mathbb{C})$$

定理 6.4.5. *X is a compact complex manifold of complex dimension n,then*

$$b_l = \dim_{\mathbb{C}} H^l(X, \mathbb{C}) = \sum_{p+q=l} \dim_{\mathbb{C}} E_\infty^{p,q} \leq \sum_{p+q=l} \dim_{\mathbb{C}} E_1^{p,q} = \sum_{p+q=l} h^{p,q}$$

with equality holds if and only if $\mathrm{d}_1 = 0$ *(i.e* $\{E_r\}$ *converges at* E_1*.)*

定理 6.4.6. *X compact Kahler $\Rightarrow \{E_r\}$ converges at E_1 ($\iff b_l = \sum\limits_{p+q=l} h^{p,q}$)*

Remark: algebraic proof by Deligne-Illusive 1987.

Relèvement module p^2 et décomposition du complexe de de Rham

remark: Assume X is bimeromorphic to a compact Kahler manifold, then we still have the convergence of $\{E_r\}$ ($\iff$ Hodge decomposition)

(Deligne-Griffiths-Morgan)

Picard group $H^1(X, \mathcal{O}^*)$.

Recall:

$$\{\text{isomorphic class of holomorphic line bundle}\} \xrightarrow{1-1} H^1(X, \mathcal{O}^*)$$

Consider the sequence

$$0 \to \mathbb{Z} \to \mathcal{O} \xrightarrow{e^{2\pi\sqrt{-1}}} \mathcal{O}^* \to 0$$

$$\rightsquigarrow 0 \to H^0(X,\mathbb{Z}) \to H^0(X,\mathcal{O}) \to H^0(X,\mathcal{O}^*) \to H^1(X,\mathbb{Z}) \to H^1(X,\mathcal{O}) \to H^1(X,\mathcal{O}^*) \to \cdots$$

Assume X is a compact complex manifold, then

$$H^0(X, \mathcal{O}) = \mathbb{C}$$

$$H^0(X, \mathcal{O}^*) = \mathbb{C}^*$$

$\Rightarrow H^0(X,\mathcal{O}) \to H^0(X,\mathcal{O}^*)$ is surjective,

$\Rightarrow H^1(X,\mathbb{Z}) \to H^1(X,\mathcal{O})$ is injective.

So we have an exact sequence

$$0 \to H^1(X,\mathbb{Z}) \to H^1(X,\mathcal{O}) \to H^1(X,\mathcal{O}^*) \xrightarrow{c_1} H^2(X,\mathbb{Z})$$

so we have an isomorphism

$$\ker\{c_1 : H^1(X,\mathcal{O}^*) \to H^2(X,\mathbb{Z})\} \cong H^1(X,\mathcal{O})/H^1(X,\mathbb{Z})$$

定义 6.4.7. *(Irregularity of X)*

$$q(X) = \dim_{\mathbb{C}} H^1(X,\mathcal{O}) = h^{0,1}$$

if X is also complex Kahler, then $h^{0,1} = h^{1,0}$.

Assume X is compact Kahler:

引理 **6.4.8.** *$H^1(X,\mathbb{Z})$ is also a lattice in $H^1(X,\mathcal{O})$of*

$$rank_{\mathbb{Z}} H^1(X,\mathbb{Z}) = 2q$$

$\Rightarrow H^1(X,\mathcal{O})/H^1(X,\mathbb{Z})$ is a compact torus of $\dim_{\mathbb{C}} = q$.

$$H^1(C,\mathcal{O})/H^1(X,\mathbb{Z}) := \ker\{c_1 : H^1(X,\mathcal{O}^*) to H^2(X,\mathbb{Z})\}$$

is called **Jacobian variety**($Jac(X)$) or **Picard variety** ($Pic^\circ(X)$)

Denote $NS(X)_{\mathbb{Z}} = \operatorname{Im}(c_1 : H^1(X,\mathcal{O}^*) to H^2(X,\mathbb{Z}))$ the Neron-Severi group of X,

$$\rightsquigarrow \quad 0 \to Pic^\circ(X) \to H^1(X,\mathcal{O}^*) \xrightarrow{c_1} NS(X,\mathbb{Z}) \to 0$$

proof of the lemma. $\mathbb{Z} \to \mathcal{O}$ can be decomposed : $\mathbb{Z} \to \mathbb{R} \to \mathbb{C} \to \mathcal{O}$. It induces a sequence

$$H^1(X,\mathbb{Z}) \to H^1(X,\mathbb{R}) \to H^1(X,\mathbb{C}) \to H^1(X,\mathcal{O})$$

$H^1(X,\mathbb{R}) \to H^1(X,\mathcal{O})$ is an isomorphism.

Consider the diagram

then $H^1(X,\mathbb{R}) \to H^1(X,\mathcal{O})$ corresponds to

$$H^1_{DR}(X,\mathbb{R}) \hookrightarrow H^1_{DR}(X,\mathbb{C}) \twoheadrightarrow H^{0,1}(X,\mathbb{C})$$

$H^1(X,\mathbb{Z})$ is a lattice in $H^1(X,\mathbb{R})$ of $rank_{\mathbb{Z}} = 2q$ □

Albanese map, Albanese torus

X-compact Kahler $\Rightarrow$ any holomorphic p-forms are d-closed.

(Exercise!!)

Special case: holo 1-forms is d-closed.

$$Alb(X) := H^0(X,\Omega^1)^* / \operatorname{Im}(H_1(X,\mathbb{Z}))$$

where $H^1(X,\mathbb{Z})$ is mapped to $H^0(X,\Omega^1)^*$ in the following way:

$$[\gamma] \mapsto (\alpha \in H^0(X,\Omega^1) \mapsto \int_\gamma \alpha)$$

(Fact: $\int_\gamma \alpha$ depends only on the class on $[\gamma]$)

Then $Alb(X)$ is compact complex of $\dim_{\mathbb{C}} = q(X)$. More precisely, we have a map:

$$alb : X \to Alb(X)$$

Fix a base point $x_0 \in X$, then

$$alb(x) = \left(u \mapsto \int_{x_0}^{x} u \right) \mod \Lambda$$

where

$$\Lambda := \left\{ \left(\int_{\gamma} u_1, ..., \int_{\gamma} u_q\right) \middle| [\gamma] \in H_1(X, \mathbb{Z}) \right\}$$

$\{u_1, ..., u_q\}$ is a basis of $H^0(X, \Omega^1)$. Then Λ is a lattice of $rank_{\mathbb{Z}} = 2q$.

The map

$$alb : X \to Alb(X)$$

is holomorphic.

第 7 章　正性与消灭定理

positivity and vanishing theorem

X-Kahler manifold, i.e. $\exists$ Hermitian metric ω s.t. $\mathrm{d}\omega = 0$, $\mathrm{d} = \mathrm{d}' + \mathrm{d}''$, $\mathrm{d}' = \partial, \mathrm{d}'' = \bar{\partial}$.

$$\triangle_{\mathrm{d}} = [\mathrm{d}, \mathrm{d}^*] = \mathrm{d}\mathrm{d}^* + \mathrm{d}^*\mathrm{d}$$

$$\triangle_{\mathrm{d}'} = [\mathrm{d}', \mathrm{d}'^*]$$

$$\triangle_{\mathrm{d}''} = [\mathrm{d}'', \mathrm{d}''^*]$$

$\mathrm{d} \curvearrowright C^\infty(X, \bigwedge^{p,q})$.

Fact: ω is Kahler $\iff$ $\triangle_{\mathrm{d}'} = \triangle_{\mathrm{d}''} = \frac{1}{2}\triangle_{\mathrm{d}}$.

Let $\underline{\mathbb{C}} := X \times \mathbb{C}$ be the trivial line bundle, d can be regraded as the Chern connection on $\underline{\mathbb{C}}$.

(E, h)-Hermitian holomorphic vector bundle over (X, ω), with Chern connection $D_E = D_E' + D_E''$. $(D_E'' = \bar{\partial})$.

$$C^\infty(X, \bigwedge^{p,q} \otimes E)$$

has an inner product induced by ω, h. $\rightsquigarrow$ adjoint operators $D_E^* = D_E'^* + D_E''^*$.

$\rightsquigarrow$ $\triangle_E = [D_E, D_E^*] = D_E D_E^* + D_E^* D_E$, and $\triangle_E'$, $\triangle_E''$. (self adjoint, elliptic operators)

Question: relation between $\triangle_E'$ and $\triangle_E''$?

定理 7.0.9. *(Bochner-Kodaira-Nakaino identity)*

$$\triangle_E'' - \triangle_E' = \left[\sqrt{-1}\Theta_E, \Lambda\right]$$

where Θ_E is the Chern curvature of D_E.

Recall: $\Theta_E = D_E^2$, when D_E is Chern connectoin, we have

$$D_E'^2 = 0 \qquad D_E''^2 = 0$$

i.e. $\Theta_E = [D_E', D_E'']$.

Remark: E is flat(i.e. $D_E^2 = 0$) $\iff$ $\triangle_E' = \triangle_E''$.

证明. based on following identities:

$$[D_E''^*, L] = \sqrt{-1}D_E'$$

$$[D_E'^*, L] = -\sqrt{-1}D_E''$$

$$[\Lambda, D_E'] = -\sqrt{-1}D_E'^*$$

$$[\Lambda, D_E''] = \sqrt{-1}D_E''^*$$

then (by super Jacobi identity):

$$\begin{aligned} \triangle_E'' = [D_E'', D_E''^*] &= -\sqrt{-1}\left[D_E'', [\Lambda, D_E']\right] = -\sqrt{-1}\left([\Lambda, [D_E', D_E'']] + [D_E', [D_E'', \Lambda]]\right) \\ &= -\sqrt{-1}\Big([\Lambda, \Theta_E] + [D_E', \sqrt{-1}D_E'^*]\Big) \end{aligned}$$

so,

$$\triangle_E'' - \triangle_E' = [\sqrt{-1}\Theta_E, \Lambda]$$

□

引理 7.0.10. *(normal frame)*

Let X be a complex manifold, then for any $x_0 \in X$, and any holomorphic chart $(z_1, ..., z_n)$ centered at x_0, there exists a holomorphic frame $\{e_\lambda\}_{\lambda=1}^{r:=rankE}$ of E near x_0 such that

$$\langle e_\lambda(z), e_\mu(z)\rangle = \delta_{\lambda,\mu} - \sum_{1\le j,k\le n} C_{jk\lambda\mu} z_j \bar{z}_k + O(|z|^3)$$

where $(C_{jk\lambda\mu})$ are the coefficients of the Chern curvature

$$\Theta_E(x_0) = \sum_{\substack{1\le j,k\le n \\ 1\le\lambda,\mu\le r}} C_{jk\lambda\mu} \mathrm{d}z_j \wedge \mathrm{d}\bar{z}_k \otimes e_\lambda^* \otimes e_\mu$$

need to verify: $\forall s \in C^\infty(X, \bigwedge^{p,q} \otimes E), x_0 \in X$,

$$[D_E''^*, L]s(x_0) = \sqrt{-1}D_E' s(x_0)$$

w.r.t the normal frame $(e_\lambda)_{\lambda=1}^r$ near x_0, assume

$$s = \sum_{\lambda=1}^n \sigma_\lambda \otimes e_\lambda$$

then

$$D_E s(z) = \sum_{\lambda=1}^n \mathrm{d}\sigma_\lambda \otimes e_\lambda + O(|z|)$$

$$D_E^* s(z) = \sum_{\lambda=1}^{n} \mathrm{d}^* \sigma_\lambda \otimes e_\lambda + O(|z|)$$

$$D_E''^* = \sum_{\lambda=1}^{r} \mathrm{d}''^* \sigma_\lambda \otimes e_\lambda + O(|z|)$$

$$\Rightarrow [D_E''^*, L]s = D_E''^*(\sum \omega \wedge \sigma_\lambda \otimes e_\lambda) - \omega \wedge \left(\sum_{\lambda=1}^{r} \mathrm{d}''^* \sigma_\lambda \otimes e_\lambda + O(|z|) \right) = \sum_{\lambda=1}^{r} [\mathrm{d}''^*, L] \sigma_\lambda \otimes e_\lambda + O(|z|)$$

Similarly,

$$D_E' s = \sum_{\lambda=1}^{r} \mathrm{d}' \sigma_\lambda \otimes e_\lambda + O(|z|)$$

we have:

$$[d''^*, L] = \sqrt{-1}\mathrm{d}'$$

(because ω is Kahler)

...

(E, h) hermitian holomorphic vector bundle over Kahler manifold (X, ω). we have BKN identity

$$\triangle_E'' - \triangle_E' = [\sqrt{-1}\Theta_E, \Lambda]$$

Recall: L^2-Hodge theory. X compact manifold,then

$$H^{p,q}(X, E) := \frac{\ker D_E''}{\operatorname{Im} D_E''} \cong \ker \triangle_E''$$

(harmonic form)

Take $u \in C^\infty(X, \bigwedge^(p, q) \otimes E)$,applying BKN identity to u,

$$\triangle_E'' u - \triangle_E' u = [\sqrt{-1}\Theta_E, \Lambda] u$$

note that

$$\langle\langle \triangle_E' u, u \rangle\rangle = \|D_E' u\|^2 + \|D_E'^* u\|^2 \geq 0$$

$$\Rightarrow \|D_E'' u\|^2 + \|D_E''^* u\|^2 \geq \langle\langle [\sqrt{-1}\Theta_E, \Lambda], u \rangle\rangle$$

i.e.

$$\|D_E'' u\|^2 + \|D_E''^* u\|^2 \geq \int_X \langle [\sqrt{-1}\Theta_E, \Lambda], u \rangle \mathrm{d}Vol$$

Observation: if $u \in \ker \triangle_E''$, and $[\sqrt{-1}\Theta_E, \Lambda]$ has "positivity", then $LHS = 0$. So, $H^{p,q}(X, E) = 0$.

定义 7.0.11. *(Positivity)*

We call $[\sqrt{-1}\Theta_E, \Lambda]$ *is positive at* $x_0 \in X$*, if for any* $0 \neq v \in (\bigwedge^{p,q} \otimes E)_{x_0}$*, we have*

$$\langle [\sqrt{-1}\Theta_E, \Lambda]v, v\rangle > 0$$

....positive on X*, if ... at each point*

定理 7.0.12. *If* $[\sqrt{-1}\Theta_E, \Lambda]$ *is positive on* X*, then*

$$H^{p,q}(X, E) = 0$$

Special case: E is a holomorphic line bundle, with Hermitian metric h,

$$\Theta_E = -\mathrm{d}'\mathrm{d}'' \log h$$

$\Rightarrow \sqrt{-1}\Theta_E$ is a real d-closed $(1,1)$-form on X.

locally,

$$\alpha = \sqrt{-1} \sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{ij} \mathrm{d}z_i \wedge \mathrm{d}\bar{z}_j$$

α is real $\iff \alpha = \bar{\alpha}$, (i.e. locally (a_{ij}) is an hermitian matrix)

定义 7.0.13. *a real* $(1,1)$*-form* α *is called positive, if* $(a_{ij})_{ij}$ *is positive definite.*

引理 7.0.14. *If* $\sqrt{-1}\Theta_E$ *is positive, then* $\omega := \sqrt{-1}\Theta_E$ *gives a Kahler metric on* X*.*

引理 7.0.15. *If* $\omega = \sqrt{-1}\Theta_E > 0$*, and* Λ *is the adjoint of* $L = \omega\wedge$*, then*

$$[\sqrt{-1}\Theta_E, \Lambda]$$

is positive on $\bigwedge^{p,q} \otimes E$ *whenever* $p + q \geq n + 1$*.*

引理 7.0.16. *Let α be a real $(1,1)$-form, ω a Kahler metric, assume the eigenvalue of α at x_0 is $\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \cdots \leq \alpha_n$, then (in the coordinate chart $(z_1, z_2, ..., z_n)$, and $u = \sum_{\substack{|I|=p \\ |J|=q}} u_{IJ} \mathrm{d}z_I \wedge \mathrm{d}\bar{z}_J$)*

$$[\alpha, L] = \sum_{I,J} \left(\sum_{i \in I} \alpha_i + \sum_{j \in J} \alpha_j - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \right) u_{IJ} \mathrm{d}z_I \wedge \mathrm{d}\bar{z}_J$$

推论 7.0.17. *$\alpha = \omega$, then*

$$[\omega, \Lambda]u = (p + q - n)u$$

推论 7.0.18. *Take an orthonormal frame e of E, then for any $u = \sum_{\substack{|I|=p \\ |J|=q}} u_{IJ} \mathrm{d}z_I \wedge \mathrm{d}\bar{z}_J \otimes e$, we have*

$$\langle [\sqrt{-1}\Theta_E, \Lambda]u, u \rangle = (p + q - n)|u|^2$$

定理 7.0.19. *If $[\sqrt{-1}\Theta_E, \Lambda]$ is positive on X, then*

$$H^{p,q}(X, E) = 0$$

定理 7.0.20. *If E is a holomorphic line bundle with a smooth hermitian metric h s.t. $\sqrt{-1}\Theta_{(E,h)} \geq 0$, then$H^{p,q}(X, E) = 0$ whenever $p + q \geq n + 1$.*

de Rham-Weil...$\cong H^q(X, \Omega^p \otimes E)$.

定义 7.0.21. *(canonical bundle)*

$$K_X = \det T^* X$$

determinate bundle of cotangent bundle, is called canonical bundle. $(\mathcal{O}(K_X) = \Omega_X^n)$

定义 7.0.22. *X is called Fano, if $K_X^* = \det(TX)$ has a matric with positive curvature.*

X is called Calabi-Yau,if K_X has a metric with vanishing curvature.

X is of general type, if K_X has a metric with positive curvature.

推论 7.0.23. *(Kodaira vanishing theorem) E is a positive line bundle, then*

$$H^q(X, K_X \otimes E) = 0$$

for any $q \geq 1$.

So, if X is Fano, ($\iff$ K_X^*) positive, $K_X \otimes K_X^* = \underline{\mathbb{C}}$, $\Rightarrow H^1(X, \mathcal{O}) = 0, \Rightarrow H^1(X, \mathbb{R}) = 0$,

Recall: BKN-inequality.

holomorphic Hermitian vector bundle $(E, h) \to (X, \omega)$, ω is Kahler. For any $u \in C^\infty(X, \bigwedge^{p,q} \otimes E)$, we have

$$\|D''u\|^2 + \|D''^*u\|^2 \geq \int_X \langle [\sqrt{-1}\Theta_E, \Lambda_\omega]u, u\rangle \mathrm{d}Vol$$

Recall: If $[\sqrt{-1}\Theta_E, \Lambda_\omega]$ is positive on $C^\infty(X, \bigwedge^{p,q} \otimes E)$, then $H^{p,q}(X, E) = 0$.

定理 7.0.24. *(Kodaira-Nakano vanishing theorem)*

If E is a holomorphic line bundle with a smooth metric h s.t. $\sqrt{-1}\Theta_{(E,h)} > 0$,then $[\sqrt{-1}\Theta_E, \Lambda_\omega]$ is positive on $C^\infty(X, \bigwedge^{p,q} \otimes E)$ whenever $p + q \geq n + 1$.

$\Rightarrow H^{p,q}(X, E) = 0$ when $p + q \geq n + 1$.

(Last time)

Today:

定理 7.0.25. *(Girbau vanishing theorem, 1976)*

E is a holomorphic line bundle over compact Kahler manifold, with smooth metric h s.t. $\sqrt{-1}\Theta_{(E,h)} \geq 0$, and has at least $n - s + 1$ positive eigenvalues at every points of X, then

$$H^{p,q}(X, E) = 0$$

if $p + q \geq n + s$.

α: a **real** $(1,1)$-form on X, locally $\alpha = \sqrt{-1}\sum \alpha_{ij} \mathrm{d}z_i \wedge \mathrm{d}\bar{z}_j$. then we have a matrix $M(\alpha) = (\alpha_{ij})_{n\times n}$, ($\alpha$ is real $\Rightarrow$)a hermite matrix.

we call α has at least k positive eigenvalues at x, if $M(\alpha)(x)$ has k positive eigenvalues. (Remark: It is well defined)

证明. Claim: there exists some Kahler metric ω s.t. $[\sqrt{-1}\Theta, \Lambda]$ is positive.

Fix a Kahler metric ω, for $p \in X$, choose a holomorphic chart $(z_1, ..., z_n)$, s.t. $\omega(p) = \sqrt{-1}\sum \mathrm{d}z_j \wedge \mathrm{d}\bar{z}_j$ and $\sqrt{-1}\Theta_E(p) = \sqrt{-1}\sum\limits_{j=1}^{n} \gamma_j \mathrm{d}z_j \wedge \mathrm{d}\bar{z}_j$. WLOG, $0 \le \gamma_1 \le \gamma_2 \le \cdots \le \gamma_n$, and for any $j \ge s$, $\gamma_j > 0$.

Consider

$$\omega_\varepsilon := \varepsilon\omega + \sqrt{-1}\Theta_E$$

for $\varepsilon > 0$, then ω_ε is a Kahler metric. $\omega_\varepsilon(p) = \sqrt{-1}\sum\limits_j (\varepsilon + \gamma_j) \mathrm{d}z_j \wedge \mathrm{d}\bar{z}_j$.

$\Rightarrow$ the eigenvalue of $\sqrt{-1}\Theta$ with respective to $\omega_\varepsilon(p)$ is given by

$$\gamma_{j,\varepsilon} = \frac{\gamma_j}{\varepsilon + \gamma_j} = \frac{1}{1 + \frac{\varepsilon}{\gamma_j}}$$

Claim: $[\sqrt{-1}\Theta, \Lambda_{\omega_\varepsilon}]$ is positive on $\bigwedge^{p,q} \otimes E$ when $p + q \ge n + s$, $0 < \varepsilon << 1$.

Take $u = \sum u_{IJ} \mathrm{d}w_T \wedge \mathrm{d}\overline{w}_J \otimes e$,then

$$\langle [\sqrt{-1}\Theta_E, \Lambda_{\omega_\varepsilon}], u\rangle = \sum_{\substack{|I|=p\\|J|=q}} \left(\sum_{i\in I} \gamma_{i,\varepsilon} + \sum_{j\in J} \gamma_{j,\varepsilon} + \sum_{k=1}^{n} \gamma_{k,\varepsilon} \right) |u_{IJ}|^2 \ge (\gamma_{1,\varepsilon} + ... + \gamma_{p,\varepsilon} - \gamma_{q+1,\varepsilon} - ... - \gamma_{n,\varepsilon})|u|^2$$

note that $\gamma_{j,\varepsilon} \ge 1 - \frac{\varepsilon}{\gamma_s}$ if $j \ge s$, $\gamma_{j,\varepsilon} \in [0, 1)$ for all j. it

$$\ge \left((q + s - 1)(1 - \frac{\varepsilon}{\gamma_s}) - (n - p) \right) |u|^2 > 0$$

if $p + q \ge n + s$ and $0 < \varepsilon << 1$. □

注记 7.0.26. *(Kawamata-Viewheg vanishing theorem)*

$E \to (X, \omega)$ is a holomorphic line bundle over a compact Kahler manifold.

Definition: E is called positive, ...(positive="ample" in AG). numerically effective(nef) if for any $\varepsilon > 0$, there is a smooth metric h_ε s.t. $\sqrt{-1}\Theta_{h_\varepsilon} \ge -\varepsilon\omega$.

Theorem: If E is nef, and $\int_X c_1(E)^n > 0$, then $H^q(X, K_X \otimes E) = 0$ for $q \ge 1$.

Positivity concept of vector bundles(rank > 1)

$(E, h) \to (X, \omega)$ Hermitian vector bundle of rank r, over a complex manifold(may not Kahler).

Denote $(e_1, ..., e_r)$ a local orthonormal frame of E, $(z_1, ..., z_n)$ local holomorphic chart, Chern curvature of (E, h):

$$\Theta_{(E,h)} = \sum_{\substack{1\le j,k\le n\\1\lambda,\mu\le r}} c_{ik\lambda\mu} \mathrm{d}z_j \wedge \mathrm{d}\bar{z}_k \otimes e_\lambda^* \otimes e_\mu$$

Fact: $\sqrt{-1}\Theta_E$ induces a Hermitian operator θ_E on $TX \otimes E$.

Let u, v be local sections of $TX \otimes E$,

$$u = \sum_{\substack{1 \le j \le n \\ 1 \le \lambda \le r}} u_{k\mu} \frac{\partial}{\partial z_k} \otimes e_\mu$$

$$\theta_E(u, v) := \sum_{\substack{1 \le j,k \le n \\ 1 \le \lambda,\mu \le r}} c_{jk\lambda\mu} u_{j\lambda} \overline{v_{k\mu}}$$

定义 7.0.27. *We call E Nakano positive, if θ_E is positive. (i.e for any non-zero local section $u \in TX \otimes E$, $\theta_E(u, u) > 0$)*

We call E Griffith positive, if for any $0 \neq \xi \in T_x X$, $s \in E_x, s \neq 0$,

$$\theta_E(\xi \otimes s, \xi \otimes s) > 0$$

注记 7.0.28. *By definition, Nakano positivity $\Rightarrow$ Griffith positivity.*

If E is line bundle, Nakano positivity $\Longleftrightarrow$ Griffith positivity. (and $\Longleftrightarrow$ positivity of lines bundles)

定理 7.0.29. *(Demailly-Skota, 1979)*

E is Griffith positive $\Rightarrow$ $E \otimes \det E$ is Nakano positive.

证明. Omit. Non-trivial. □

Notation: $E >_{Nak} 0$ (E is Nakano positive). Similarly, $E >_{Giff} 0$...

性质 7.0.30. *(1)E is Griffith positive if and only if E^* is Griffith negative.*

(2) Consider an exact sequence of holomorphic vector bundles:

$$0 \to S \to E \to Q \to 0$$

then if E is Griffith positive, then Q is Griffith positive. If E is Griffith negative, then S is Griffith negative. If E is Nakano negative, then S is Nakano negative.

证明. Omit. Compute curvature... □

Remark: In general, E is Nakano positive, $\not\Rightarrow$ Q is Nakano positive.

定理 7.0.31. *(Nakano vanishing theorem)*

(X,ω) is compact Kahler of dimension n, (E,h) is a Nakano positive holomorphic Hermitian vector bundle, then

$$H^{n,q}(X,E)=0 \qquad \forall q\geq 1$$

证明. E is Nakano positive, check:

$$[\sqrt{-1}\Theta_E,\Lambda_\omega]$$

is positive on $\bigwedge^{n,q}\otimes E$ for $(q\geq 1)$ □

Ampleness

$E\to X$, E: holomorphic line bundle of rank r, X:complex manifold.

定义 7.0.32. *(Jet vector bundle)*

$$J^kE=\bigcup_{x\in X}(J^kE)_x$$

where

$$(J^kE)_x=\mathcal{O}_x(E)\Big/\mathfrak{m}_x^{k+1}\mathcal{O}_x(E)$$

$\mathfrak{m}_x\subseteq\mathcal{O}_x$ be the maximal ideal of $\mathcal{O}_x$.

In local coordinate,

$$(J^kE)_x=\Big\{\sum_{\substack{1\leq\lambda\leq r\\ |\alpha|\leq k}}C_{\lambda\alpha}(z-x)^\alpha e_\lambda(z)\Big\}$$

性质 7.0.33. *J^kE is a holomorphic vector bundle of rank $=r\binom{n+k}{n}$.*

证明. Exercise. □

定义 7.0.34. *E is called very ample, if the following maps:*

$$H^0(X,E)\to(J^1E)_x$$

$$H^0(X,E) \to E_x \oplus E_y$$

are surjective, for all $x, y \in X$, $x \neq y$.

E is called ample, if $S^m E := \mathrm{Sym}^m E$ is very ample for some $m \in \mathbb{N}$.

(ample: " 足够多的全纯截面")

定理 7.0.35. *(Kodaira)*

L-holomorphic line bundle, X is a compact complex manifold. Then L is positive if and only if L is ample.

We will prove:

定理 7.0.36. *$L \to X$ holomorphic line bundle over a compact complex manifold, then L is positive $\iff$ L is ample.*

We need:

(1)Kodiara vanishing theorem.

(2)Blow-up of complex manifold

(3)Relation between divisor and line bundles.

analytic cycles, divisors and meromorphic functions

定义 7.0.37. *X be a analytic set in some complex manifold, then the set X_{reg} is a dense subset of X. Denote the connected component of X_{reg} by X_α, $\overline{X_\alpha}$ is the closure of X_α in X, then $\overline{X_\alpha}$ is called a global irreducible component of X.*

In particular, X is the union of global irreducible components.

例子 7.0.38. *(Global irreducibility is different from local irreducibility)*

$V = \left\{(x,y) \in \mathbb{C}^2 \middle| y^2 = x^2(1+x)\right\}$ is an analytic set in $\mathbb{C}^2$, $V_{reg} = V \setminus \{0\}$ is connected. So, $V = \overline{V_{reg}}$ is globally irreducible.

On the other hand, $(V,0)$ is a reducible as an analytic germ.

定义 7.0.39. *(analytic cycles)*

X is a complex manifold, a q-cycle (with integer coefficient) is a formal linear combination $\sum \lambda_j V_j$, $\lambda_j \in \mathbb{Z}$, and V_j is a global analytic sets of X of dimension q.

So, we get a group $C^q_{cyl}(X)$.

an element of $Cycl^{n-1}(X)$ is called a divisor. (Weil divisor) ($Div(X)$)

If D is an irreducible analytic set of dimension $n-1$ then the divisor given by D is called a prime divisor.

注记 7.0.40. *For any open set $U \subseteq X$, $U \to Cycl^q(U)$ induces a sheaf $Cycl^q$ of X with the germ $Cycl^q_x$ given by q-dimension analytic germs at X.*

定理 7.0.41. *X is a connected complex manifold, $f \in \mathcal{O}(X)$, then we have $f^{-1}(0)$ is emply of $\dim_{\mathbb{C}}$ isempty of $n-1$.*

定义 7.0.42. （*Cartier-dividiot*）

A divisor $D = \sum \lambda_j D_j$ locally giveb by a $\mathbb{X}$ linear combination of $div(f)$. f is locally holomorphic functions.

定义 7.0.43. *X is a compact , $\beta \in \mathcal{O}(X)$, D_j is a global irreponent of $f^{(-1)0}$,*

$$m_j := Ord_z(f)$$

for all $z \in D_j reg \setminus \bigcup_{k \neq j} D_k$ m_j be the vanishing order along D_j.

定理 7.0.44. *(A, x) an analytic germ of $\dim_{\mathbb{C}}$=n-1. $(A, x) = (g)$for sone $g \in \mathcal{O}X$,and g is a product of $(J_{A_j,x}) = (g_j)$.*

(2) Let $f \in \theta_x$ with $(f^{-1}(0), x) \subseteq (A, x)$,then $f = u \coprod_j g_j m^{m_j}$, where $m_j = ord_z(f)$

性质 7.0.45. *If X is a complex manifold, then any Weil divisor is also a Cantier divisor.*

Remark: NOT true for singular points.

Meromorphic function: X complex manifold, $\mathcal{O}_X$ sheaf of functions on X.

$$\mathfrak{m}_x := \left\{ \frac{g_x}{h_x} \middle| g_x, h_x \in \mathcal{O}_x \text{and } h_x \text{ is not zeor in } \mathcal{O}_x \right\}$$

$$\mathcal{M} := \bigcup_{x \in X} \mathfrak{m}_x$$

with the topology given by the basis

$$\left\{ \frac{G_x}{H_x} \middle| x \in V, G, H \in \mathcal{O}(V) \right\}$$

例子 7.0.46. $f(z_1, z_2) = \frac{z_1}{z_2}$

定义 7.0.47. *Let $F \in \mathfrak{m}(X)$,denote $P(X) :=\notin \left\{ x \in X \middle| f_x \notin \mathcal{O}_x \right\}$. Pole set pf f, and $Z(f) := P(\frac{1}{z})$ zero set of f.*

定理 7.0.48. *$f \in \mathfrak{m}(X)$, if $P(d)$ (or$Z(f)$) is not empty, then $P(f)$ is analytic set of* $\dim = \mathbb{H}$.

定义 7.0.49. *$P(f) \cup Z(f)$ is called the indeterminiary of set of f, (in particular, codimension $P(M) \cap Z(f) \geq 2$)*

性质 7.0.50. *Given $f \in \mathcal{M}(X)$, we get a divisor:*

$$div(f) = \sum a_j A_j - \sum b_j B_j$$

where a_j = the vanishing order of f along A_j, A_j a globally irreducible component of $Z(f)$, b_j =...along of $\frac{1}{f}$ along B_j, B_j:...component of $P(f)$.

例子 7.0.51. $f = \frac{z_1}{z_2} \in \mathcal{M}(\mathbb{C}^2)$, *then* $P(f) = \{z_2 = 0\}$ *and* $Z(f) = \{z_1 = 0\}$, *and*

$$div(f) = [z_1 = 0] - [z_2 = 0]$$

Consider: X - complex manifold, $\mathcal{O}^*$: sheaf of invertible holomorphic functions,
$\mathcal{M}^*$: Sheaf of non-zero meromorphic functions
$\mathcal{D}iv$: Sheaf of $(n-1)$-cycles.

性质 7.0.52. *We have an exact sequences:*

$$0 \to \mathcal{O}^* \to \mathcal{M}^* \to \mathcal{D}iv \to 0$$

In particular, $\mathcal{D}iv = \mathcal{M}^*/\mathcal{O}^*$.
long exact sequence:

$$0 \to H^0(X, \mathcal{O}^*) \to H^0(X, \mathcal{M}^*) \to H^0(X, \mathcal{D}iv) \to H^1(X, \mathcal{O}^*) \to H^1(X, \mathcal{M}^*) \to \cdots$$

where, note that :

$$H^0(X, \mathcal{D}iv) = Div(X) \qquad H^1(X, \mathcal{O}^*) = Pic(X)$$

Consider $Div(X) = H^0(X, \mathcal{M}^*/\mathcal{O}^*) \to Pic(X)$, $f \in H^0(X, \mathcal{M}^*/\mathcal{O}^*) \iff$ we have an open covering $X = \bigcup_i U_i$ and $f_i \in \mathcal{M}^*(U_i)$ with $\frac{f_i}{f_j} \in \mathcal{O}^*(U_i \cap U_j)$.

$f \in H^0(X, \mathcal{M}^*/\mathcal{O}^*) \xrightarrow{\varphi} (U_i \cap U_j, g_{ij} \in \mathcal{O}^*(U_i \cap U_j)) \in \check{H}^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}^*) \hookrightarrow H^1(X, \mathcal{O}^*)$.

定义 7.0.53. *A divisor* D *is called principal divisor, if* $D = div(h)$ *for some* $h \in \mathcal{M}^*(X)$.

性质 7.0.54. $\ker \varphi = \{$*principal divisors*$\}$, *i.e.* $\mathcal{O}(D)$ *is trivial* $\iff$ $D = div(f)$ *for some global meromorphic functions.*

性质 7.0.55.

$$\mathcal{O}(D_1 + D_2) = \mathcal{O}(D_1) \otimes \mathcal{O}(D_2)$$

$$\mathcal{O}(-D) = \mathcal{O}(D)^*$$

定义 7.0.56. *$D_1, D_2 \in Div(X)$ is called linear equivalent, if $D_1 - D_2$ is principal, denoted by $D_1 \sim D_2$. We have an injection:*

$$Div(X)/\sim \hookrightarrow Pic(X)$$

Remark: in general, $D \to \mathcal{O}(D)$ is not surjective.
If $X \hookrightarrow \mathbb{P}^n$, then $Div(X)/\sim \cong Pic(X)$.

性质 7.0.57. *$L \to X$ holomorphic line bundle over a complex manifold, we have a canonical map:*

$$H^0(X, L) \setminus \{0\} \to Div(X)$$

$$s \to Z(s)$$

证明. $s \in H^0(X, L) \iff$ the data $(U_i, f_i \in \mathcal{O}(U_i))$, L is determined by $g_{ij} \in \mathcal{O}^*(\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j)$.
$Z(s)$ locally given by $div(f_i)$. $(div(f_i) = div(f_j)$ on $U_i \cap U_j)$ □

性质 7.0.58. *$s_i \in H^0(X, L_i) \setminus \{0\}, i = 1, 2$,we have $Z(s_1 \otimes s_2) = Z(s_1) + Z(s_2)$.*

性质 7.0.59. *Let $s \in H^0(X, L) \setminus \{0\}$, then $\mathcal{O}(Z(s)) \cong L$.*

证明. Assume $X = \bigcup U_i$ with L determined by $g_{ij} \in \mathcal{O}^*(U_i \cap U_j)$, $s \in H^0(X, L)$ determined by $(U_i, f_i \in \mathcal{O}(U_i))$.
so,$\mathcal{O}(Z(s))$ is the line bundle given by $\frac{f_i}{f_j} \in \mathcal{O}^*(U_i \cap U_j)$.
note that $f_i = g_{ij} f_j$. □

推论 7.0.60. *Let $s_i \in H^0(X, L_i) \setminus \{0\}, i = 1, 2$, then*

$$Z(s_1) \sim Z(s_2) \iff L_1 \cong L_2$$

use the fact: $\mathcal{O}(Z(s_i)) = L_i$ and $\mathcal{O}(\text{principal divisor}) \cong \mathcal{O}_X$ trivial line bundle.

性质 7.0.61. *Consider the map*

$$Div(X) \to Pic(X)$$

$$D \to \mathcal{O}(D)$$

then the image is generated by line bundles with non-zero holomorphic sections.

7.1 Blow-up

Local picture: $U \subseteq \mathbb{C}^n$ open subset, $Y \subseteq U$ linear subspace, $codim_U Y = k$, e.g. assume $Y = \left\{z \in U \middle| z_1 = \dots = z_k = 0\right\}$.

Consider the space

$$U_Y := \left\{([w], z) \in \mathbb{P}^{k-1} \times U \middle| w_i z_j = w_j z_i, 1 \leq i, j \leq k\right\} \subseteq \mathbb{P}^{k-1} \times U \xrightarrow{\pi_2} U$$

定义 7.1.1. *U_Y is called the blow-up of U along Y.*

性质 7.1.2. *U_Y is a smooth complex submanifold of $\mathbb{P}^{k-1} \times U$, and $\dim_{\mathbb{C}} U_Y = \dim_{\mathbb{C}} U = n$. And $\tau : U_Y \to U$ is a holomorphic map with*

$$\tau|_{U_Y \setminus \tau^{-1}(Y)} : U_Y \setminus \tau^{-1}(Y) \cong U \setminus Y$$

And for any $y \in Y$, $\tau^{-1}(y) = \mathbb{P}^{k-1} \times \{y\}$ is complex projective space.

Locally, on then chart $w_1 \neq 0$, denote $\hat{w}_i = \frac{w_i}{w_1}$ for all $2 \leq i \leq k$. Then $z_i = \widehat{w}_i z_1$.Then $(z_1, \widehat{w}_2, \dots, \widehat{w}_k, z_{k+1}, \dots, z_n)$ gives a holomorphic chart of U_Y.

Denote $(z_1, \dots, z_n) = (z_1, \widehat{w}_2, \dots, \widehat{w}_k, z_{k+1}, \dots, z_n)$, then $z_1 = \xi_1$, $z_2 = \xi_1\xi_2$,...,$z_k = \xi_1\xi_k$, and $z_{k+l} = \xi_{k+l}$for $k \geq l$.

In this coordinate system, $\tau^{-1}(Y) = \left\{\xi \in U_Y \middle| \xi_1 = 0\right\}$.

$\Rightarrow$ $\tau^{-1}(Y)$ is a (smooth) hypersurface in U_Y.And, $\tau^{-1}(Y) \cong \mathbb{P}(N_{Y/U})$, where $N_{Y/U}$ is the normal bundle of Y in U.

$$(0 \to T_Y \to T_U|_Y \to N_{Y/U} \to 0)$$

If $codim_U Y = 1$ hypersurface, then $U_Y \cong U$.

Global construction

Y is a complex submanifold of X, $\dim_{\mathbb{C}} = n$,$\dim_{\mathbb{C}} Y = k \le n$.

引理 7.1.3. *If $f_1, ..., f_k$ and $g_1, ..., g_k$ are two (local) definition of Y, defining equations of Y, $Y = \left\{ f_z(z) = ... = f_k(z) = 0 \middle| , \right\}$, then $\mathrm{d}f_1, ..., \mathrm{d}f_k$ are linely independent along Y. And $\exists$ a matrix (m_{ij}) of holomorphic functions, s.t. $g_i = \sum_{j=1}^{k} M_{n,j} f_j$ for any $1 \le i \le k$.*

The matrix (M_i^j) is invertible along Y,and determined uniquely by $(f_1, ..., f_k)$ and $g_1, ..., g_k$.

证明. Assume $f_i = z_i$ for $1 \le i \le k$ is a local coordinate system $\equiv 0$.For ever g_i, $g_i|_{z_1,...,z_k=0}$

Consider the Taylor expansion of

g_i, we set

$$g_i = \sum_{j=1}^{k} M_i^j(z) z_j$$

$\mathrm{d}g_i = \sum_{j=1}^{k} \mathrm{d}M_i^j z_j + \sum_{j=1}^{k} M_i^j \mathrm{d}z_j$.

$(\mathrm{d}g_1, ..., \mathrm{d}g_k)|_Y$ and $(\mathrm{d}z_1, ..., \mathrm{d}z_k)|_Y$ are $L.I$, so $M_i^j|_Y$ is invertible.

Assume $Y \cap U = \{f_1^U = ... = f_k^U = 0\}$, $Y \cap V = \{f_1^V = f_2^V = ... = f_k^V = 0\}$ and $(M_{i,UV}^j)_{1 \le i,j \le k}$ is the $\square$

$0 \to T_Y \to T_X|_Y \to N_{Y/D}$, the dual

$$N_{Y/X}^* \to T_X^*|_Y \to T_Y^*$$

(M_i^j, UV) gives the translation matrix middle of $N_{Y/X}^*$

引理 7.1.4. *$\exists$ isomorphism $\phi_{UV} : \tau_U^{-1}(U \cap V) \cong \tau_V^{-1}(U \cap V)$.*

证明. Assume $f_i^U = \sum_{j=1}^{k} = \sum_{j=1}^{k} M_{i,UV}^j f_j^V$. Define $\phi_{UV}([w], z) = ([M^{-t} w], z)$, then ϕ_{UV} satisfies the two properties. $\square$

定义 7.1.5. *(The blow-up of X along Y)(Global blow up)*

$\mathrm{Bl}_Y X$*:the blow-up of X along Y is defined as the complex manifold by gluing the U_Y and $\Omega := X \setminus S_Y$, where S_Y is some neighborhood of Y.*

we have a holomorphic map: $\tau : \mathrm{Bl}_Y X \to X$.

性质 7.1.6. *$\tau : \mathrm{Bl}_Y X \to X$ satisfies :*

(1)$\tau^{-1}(Y)$ is a smooth complex submanifold of $\mathrm{Bl}_Y X$, with $\dim_{\mathbb{C}} = n-1$,(It is called the excepted divisor of τ)

(2)$\tau : \mathrm{Bl}_Y X \setminus \tau^{-1}(Y) \to X \setminus Y$ is an isomorphism.

(2)τ is a proper map(any pre-image of compact set is compact).

证明. Check. □

projective bundle $E \to X$ is a holomorphic vector bundle(of rank r) over a complex manifold(of complex dimension n), then we can define projective bundle $\mathbb{P}(E)$,

$$\mathbb{P}(E) := \left\{ (x, [\xi]) \middle| x \in X, \xi \in E_x \setminus \{0\} \right\}$$

$\mathbb{P}(E)$ is a complex manifold of dimension $n+r-1$ (if $X = \{pt\}$, then $\mathbb{P}(E)$ is just the projective space)

We have a tautological line bundle on $\mathbb{P}(E)$:

$$\mathcal{O}_E(-1)_{(x,[\xi])} = \mathbb{C}\xi$$

$\mathcal{O}_E(-1)$ is a holomorphic line bundle on $\mathbb{P}(E)$.

Exercise: Assume (E, h) is an hermitian vector bundle with metric h,then h induces a metric on $\widetilde{h}$ on $\mathcal{O}_E(-1)$, then the Chern curvature Θ of $\widetilde{h}$ satisfies: for any $x \in X$, $\sqrt{-1}\Theta|_{\mathbb{P}(E_x)} < 0$.

定理 7.1.7. *$\tau : \mathrm{Bl}_Y X \to X$ blow-up along Y, $E := \tau^{-1}(Y)$ exceptional divisor, $\mathcal{O}(E)$: the holomorphic line bundle associated to E, then*

(1) $\tau : E \to Y$ is just the map $\mathbb{P}(N_{Y/X}) \to Y$

(2) $\mathcal{O}(E)|_E \cong \mathcal{O}_{P(N_{Y/X})}(-1) \cong N_{E/\mathrm{Bl}_Y X}$ the normal bundle of E in $\mathrm{Bl}_Y X$.

证明. Exercise. □

推论 7.1.8. *If X is a (compact) Kahler manifold, Y is a compact submnifold of X, then the blow-up $\mathrm{Bl}_Y X$ is also a (compact) Kahler manifold.*

证明. $\tau : \mathrm{Bl}_Y X \to X$, let ω be a Kahler matric on X, then $\tau^*\omega$ is a semi-positive $(1,1)$-form on $\mathrm{Bl}_Y X$, positive on $\mathrm{Bl}_Y X \setminus E$, and the kernel of $\tau^{-1}\omega$ along E is given by the tangent space of the fiber $E \to Y$.

Define the metric h on $\mathcal{O}(E)$ as follows: on E,h is induced by the metric on $N_{Y/X}$ induced by the metric on $N_{Y/X}$, and we extend h to a neighborhood of E; outside a neighborhood of E,($\mathcal{O}(E)|_{\mathrm{Bl}_Y X\setminus E}$ is trivial), h is given by the trivial metric.

Then ,we glue these two metrics to get a matric on $\mathcal{O}(E)$. Denote the curvature $\theta := \sqrt{-1}\Theta(\mathcal{O}(-E),h)/$

Claim: $C\tau^*\omega + \theta > 0$ for $C \gg 1$ □

7.2 Kodaira Embedding Theorem

Recall: $L \to X$ holomorphic line bundle with a smooth metric h over compact complex manifold.

L is called positive if the curvature $\sqrt{-1}\Theta_{(L,h)}$ is a positive $(1,1)$-form.

L is called ample, if $L^{\otimes m} := mL$ is very ample for $m \gg 1$.

Recall: a holomorphic vector bundle E is called very ample, if the following maps

$$H^0(X,E) \to E_x \oplus E_y \qquad \forall x \neq y \in X$$

$$H^0(X,E) \to (J^1E)_x \qquad \forall x \in X$$

are surjective.

性质 7.2.1. *X is a complex manifold of dimension n, $Y \subseteq X$ is a complex submanifold of codimension k. $\tau : \widehat{X} \to X$ blow-up along Y. $E := \tau^{-1}(Y)$ exceptional divisor. Then*

$$K_{\widehat{X}} = \tau^* K_X \otimes \mathcal{O}((k-1)E)$$

(Recall: $K_X = \det T^*X = \bigwedge^n T^*X$, locally free sheaf of holomorphic n-terms Ω_X^n).

证明. locally, τ can be written as

$$\tau : (w_1, ..., w_n) \to (z_1, ..., z_n)$$

$$z_1 = w_1,\ z_2 = w_2, ..., z_k = w_k w_1, ..., z_{k+l} = w_{k+l}$$

$$\Rightarrow \tau^*(\mathrm{d}z_1 \wedge \mathrm{d}z_2 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}z_n) = w_1^{k-1}\mathrm{d}w_1 \wedge \mathrm{d}w_2 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}w_n$$

(local holomorphic frame of K_X and $K_{\widehat{X}}$... w_1^{k-1}-local section of $\mathcal{O}(E)$)

Recall: L-line bundle, $\{g_{ij}\}$ transition function, a local section is the following data $f_i = g_{ij} f_j$. If e_i the local frame on U_i, then $f_i e_i = f_j e_j$ on $U_i \cap U_j$.

之后 check 两个线丛的转移函数相同. □

引理 7.2.2. *Let $\widehat{X}$ be the blow up of X along $\{x_1, ..., x_N\} \subseteq X$, ($N$ distinct points), denote E the exceptional divisor, then*

$$H^1(\widehat{X}, \mathcal{O}(-mE) \otimes \tau^*(kL)) = 0$$

for $m \geq 1$, $k \geq Cm$ for $C \gg 1$

证明.

$$H^1(\widehat{X}, \mathcal{O}(-mE) \otimes \tau^*(kL)) = H^1(\widehat{X}, K_{\widehat{X}} \otimes K_{\widehat{X}}^{-1} \otimes \mathcal{O}(-mE) \otimes \tau^*(kL)) = H^{n,1}(\widehat{X}, F)$$

where $F := K_{\widehat{X}}^{-1} \otimes \mathcal{O}(-mE) \otimes \tau^*(kL)$.

By Kodaira-Nakano vanishing, if F is positive, then $H^{n,1}(\widehat{X}, F) = 0$.

Note that

$$\begin{aligned} F &= \mathcal{O}(-mE) \otimes \tau^* K_X^{-1} \otimes \mathcal{O}((1-n)E) \otimes \tau^*(kL) \\ &= \tau^* K_X^{-1} \otimes \mathcal{O}(-(m+n-1)E) \otimes \tau^*(kL) \end{aligned}$$

We know, $\exists C_0 \gg 1$ s.t. $C_0 L \otimes K_X^{-1}$ is positive, and $\exists C \gg 1$,s.t. $C\tau^* L \otimes \mathcal{O}(-E)$ is positive.

So, For $k \geq Cm$ $(C \gg 1)$, F is positive.

Let $v_j \in H^0(\Omega_j, kL)$ be a local section of kL, s.t. v_j generates the m-jet at x_j. Let $\psi_j \in C^\infty(X, \mathbb{R})$ s.t. $supp\psi_j \subset\subset \Omega_j$, $0 \leq \psi_j \leq 1$, $\psi_j \equiv 1$ around x_j. Denote

$$v := \sum_{j=1}^{n} \psi_j v_j$$

a smooth section of kL.

$$\mathrm{d}'' v = \sum_j \mathrm{d}'' \psi_j v_j \in C^\infty_{(0,1)}(X, kL)$$

satisfies $\mathrm{d}'' v = 0$ near x_j for $1 \leq j \leq N$.

Lemma:(Exercise)

$$\begin{aligned} H^0(X, M) &\to H^0(\widehat{X}, \tau^* M) \\ s &\mapsto \tau^* s \end{aligned}$$

is an isomorphism for any line bundle M.

Lemma:(Exercise) a section of $\tau^* M$ with vanishing order$= k$ along E is the pull-back of a section of M with vanishing order $= k$ at x_j.

Denote $S_E \in H^0(\widehat{X}, \mathcal{O}(E))$ the canonical section of E,

$$w = S_E^{-(m+1)} \otimes \tau^*(\mathrm{d}'' v) \in C^\infty_{(0,1)}(\widehat{X}, \mathcal{O}(-(m+1)E) \otimes \tau^*(kL))$$

and $\mathrm{d}''w = 0$. Vanishing of $H^0(\widehat{X}, \mathcal{O}(-(m+1)) \otimes \tau^*(kL))$ implies $w = \mathrm{d}''u$ for some $u \in C^\infty(\widehat{X}, \mathcal{O}(-(m+1)E) \otimes \tau^{-1}kL)$.

$$S_E^{-(m+1)}\tau^*(\mathrm{d}''v) = \mathrm{d}''u$$

$$\Rightarrow \mathrm{d}''(\tau^*v - S_E^{(m+1)}u) = 0$$

so, $\tau^*v - s_E^{(m+1)}u$ is a holomorphic section of $\tau^*(kL)$. Using $s_E^{(m+1)}u = \tau^*f$ for some $f \in H^0(X, kL)$ with vanishing order $= m+1$ along x_j.

Claim: denote $g := v - f$ is the holomorphic sections generating the m-jets at x_j. $\mathrm{d}''(\tau^*g) = 0 \Rightarrow \tau^*g$ is holomorphic, $\mathrm{Ord}_{x_j}(f) = m+1$. So, $J^m(g)_{x_j} = J^m(v)_{x_j}$.

□

定理 7.2.3. *$L \to X$ positive line bundle, $x_1, ..., x_N \in X$ are N distinct points on X, then there exists $C > 0$, s.t.*

$$H^0(X, kL) \twoheadrightarrow \bigoplus_{j=1}^{N} (J^m(kL))_{x_j}$$

is surjective for all $m \geq 0$ and $k \geq Cm$

证明. □

定理 7.2.4. *(Kodaira)*

Line bundle L is positive $\iff$ it is ample.

（微分几何的正性与代数几何的正性是等价的）

证明. (有一边是显然的，留作习题)

proof of "L ample $\Rightarrow$ L positive".

Exercise: If A is a very ample line bundle on X, $H^0(X, A)$ has a basis $\{s_0, ..., s_N\}$, then the map

$$\Phi : X \to \mathbb{P}(H^0(X, A))$$

$$s \mapsto [s_0(x); s_1(x); ...; s_N()]$$

(Kodaira map) is a holomorphic embedding.

(Hint: $H^0(X, A) \twoheadrightarrow A_x \oplus A_y$ means that Φ is injective; $H^0(X, A) \twoheadrightarrow (J^1(A))_x$ means that Φ_* is injective.)

Exercise: denote the tautological line bundle on $\mathbb{P}(H^0(X, A))$ by $\mathcal{O}(1)$, then $A = \Phi^*\mathcal{O}(1)$.

Cor: A is very ample $\Rightarrow$ A is positive.

Given any inner product on $H^0(X, A)$, we get a metric h on $\mathcal{O}(1)$, the curvature $\Theta(\mathcal{O}(n))$ of h is positive.

$$\Rightarrow \Theta(A) = \Phi^*\Theta(\mathcal{O}(1))$$

Φ is embedding $\Rightarrow \Theta(A)$ is positive. $\square$

L positive $\Rightarrow L$ ample, i.e. mL is very ample,

$$\Rightarrow \Phi_{H^0(X,mL)} : X \hookrightarrow \mathbb{P}(H^0(X, mL))$$

holomorphic embedding($\Rightarrow X$ is an analytic submanifold of $\mathbb{P}(H^0(X, mL))$)

$\xrightarrow{\text{Chow theorem}}$ X is an algebraic set of $\mathbb{P}(H^0(X, mL))$ (i.e. $X = \bigcup_{j=1}^{t} \{P_j = 0\}$, P_j-homogenous polynomial)

a compact complex manifold X admitting a positive line bundle L if and only if X is an algebraic manifold.

$$0 \to \mathbb{Z} \to \mathcal{O} \xrightarrow{e^{2\pi\sqrt{-1}}} \mathcal{O}^* \to 0$$

$$\rightsquigarrow H^1(X, \mathcal{O}^*) \xrightarrow{C_1} H^2(X, \mathbb{Z}) \to H^2(X, \mathcal{O}) \to ...$$

and $H^2(X, \mathbb{Z}) \to H^2(X, \mathbb{C}) \cong H^{2,0} \oplus H^{1,1} \oplus H^{0,2}$, and $H^2(X, \mathcal{O}) \cong H^{0,2}(X, \mathbb{C})$.

$\Rightarrow \forall \alpha \in H^2(X, \mathbb{Z}) \cup H^{1,1}(X, \mathbb{C})$, we have a holomorphic line bundle L s.t. $\alpha = c_1(L)$.

L admitting a positive line bundle $\iff$ X admitting a class $\alpha \in H^2(X, \mathbb{Z}) \cup H^{1,1}$ with a positive representative.

Recall:

定理 7.2.5. *$L \to X$ positive line bundle over compact complex manifold, then $\forall x_1, ..., x_N \in X, \exists C > 0$ (depends on X), s.t.*

$$H^0(X, L^k) \twoheadrightarrow \bigoplus_{i=1}^{N} (J^m L^k)_{x_i} \tag{$*$}$$

whenever $m \geq 0$ and $k \geq C(m+1)$

For fixed $(x_1, ..., x_N)$, we proved $\exists C(x_1, ..., x_N) > 0$, s.t. $(*)$ holds.

Observation:$(*)$ is an open condition with respect to $(x_1, ..., x_N)$.

$\Rightarrow \exists$ open set $U(x_i)$ s.t. $\forall (y_1, ..., y_N) \in \prod_{i=1}^{N} U(x_i)$, $(*)$ holds for $C = C(x_1, ..., x_N)$.

$m = 0, N = 1, H^0(X, L^k) \twoheadrightarrow (L^k)_x \iff \exists$ section s s.t. $s(x) \neq 0$ (for y near x, $s(y) \neq 0$)

$\pi : Y \to X$ blow-up along $x_1, ..., x_N$, with exception divisor E,

FACT:$\exists C \gg 1$, s.t. $C\pi^* L + \mathcal{O}(-E)$ is positive.

（这些已证明）

(more generally, if ω is a Kahler metric on X,denote $\{\omega\} \in H^{1,1}(X, \mathbb{R})$ the Kahler associated to ω, then $\exists C \gg 1$ s.t. $C\pi^*\omega + c_1(-E)$ is a Kahler class)

性质 7.2.6. *Define the Seshadri constant*

$$\mathcal{E}(x_1, ..., x_N; \omega) := \sup \left\{ t \geq 0 \middle| \pi^*\omega + t \cdot c_1(-E) \textit{is a Kahler class} \right\}$$

Then $\mathcal{E}(x_1, ..., x_N; \omega)$ is a lower-semi-continuous function w.r.t $x_1, ..., x_N$.

So,

$$\inf \left\{ \mathcal{E}(x_1, ..., x_N; \omega) \middle| (x_1, ..., x_N) \in \underbrace{X \times \cdots \times X}_{N} \right\} > 0$$

证明. Too difficult. omit. □

注记 7.2.7. （如果感兴趣）

Nagata conjecture

Biran-Nagata conjecture

Symplectic packing/embedding of bundles

定理 7.2.8. *L is a positive line bundle, for $k \gg 1$,*

$$\Phi_{H^0(X,L^k)} : X \hookrightarrow \mathbb{P}(H^0(X, L^k))$$

$$x \mapsto [s_0(x) : ... : s_N(x)]$$

is a holomorphic embedding.(Where $\{s_j\}_{j=0}^N$ is a basis of $H^0(X, L^k)$)

So, (Chow theorem), X is an algebraic manifold.

Chow theorem 1949:

定理 7.2.9. （*Chow theorem ,1949*）

Let A be an analytic set of $\mathbb{P}^n$， then A is an algebraic set, i.e.

$$A = \bigcap_{j=1}^{N} \{P_j(z_0, ..., z_n) = 0\}$$

where P_j is a homogeneous polynomial.

Using the Remmert-Stein theorem:

X- a complex manifold, $A \subseteq X$ an analytic set, $Z \subseteq X \setminus A$ is an analytic subset (of $X \setminus A$). If $\dim(Z, x) > \dim A$ for all $x \in Z$, then the closure $\overline{Z}$ in X is also an analytic set of X.

Consider the natural map $\pi : \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathbb{P}^n$, then $Z := \pi^{-1}(A)$ is an analytic set of $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$. we have $\dim Z \geq 1 > \dim\{0\}$, Using Remmart-Stein, $\overline{Z}$ is an analytic set of $\mathbb{C}^{n+1}$. So, for a small disk $\triangle$ around $0 \in \mathbb{C}^{n+1}$,

$$\overline{Z} \cap \triangle = \bigcap_{j=1}^{N} \{f_j(z_1, ..., z_n) = 0\}$$

where $f_j \in \mathcal{O}(\triangle)$.

Let $f_j = \sum_{k=0}^{\infty} P_{j,k}$ be the Taylor expansion of f_j, where $P_{j,k}$ is a homogenous polynomials of degree k.

Claim: $\overline{Z} \cap \triangle = \left(\bigcap_{j,k}\{P_{j,k} = 0\}\right) \cap \triangle$. Denote $W := \bigcap_{j,k}\{P_{j,k} = 0\}$,

$W \cap \triangle \subseteq \overline{Z} \cap$ is obvious.

By the definition of π, Z is invariant by homotheties, so, for any $z \in \overline{Z} \cap \triangle$, $|t| \ll 1$, we have $f_j(t, z) = 0$.Write

$$f_j(tz) = \sum_{k=0}^{\infty} P_{j,k}(z)t^k = 0 \quad \Rightarrow \quad P_{j,k}(z) = 0$$

so, $\overline{Z} \cap \triangle \subseteq W \cap \triangle$.

$\Rightarrow \overline{Z} = W$ by the $\mathbb{C}^*$-invariance of $\overline{Z}$ and W. By the noetherian property of $\mathbb{C}[z_0, ..., z_n]$, $\exists$ finite polynomials $P_j, \quad 1 \leq j \leq k$, s.t.

$$W = \bigcap_{j=1}^{k} \{P_j = 0\}$$

推论 7.2.10. *Any analytic subset of an algebraic variety is also algebraic.*

Lefschetz's $(1-1)$-theorem

Exercise: X is a compact complex manifold, L, A be two holomorphic line bundles over X, A is positive($\iff$ ample). Then for $k \gg 1$, $H^0(X, L \otimes A^k) \neq \{0\}$. （与之前证明几乎完全一样）

Recall:$0 \to \mathcal{O} \to \mathcal{M}^* \to Div \to 0$ induces

$$Div(X) := H^0(X, Div) \to H^1(X, \mathcal{O}^*) =: Pic(X)$$

定理 7.2.11. *If X is an algebraic manifold, then for all $L \in Pic(X)$, $\exists$ divisor D s.t. $L = \mathcal{O}(D)$.*

证明. Take non-zero sections $S \in H^0(X, L \otimes A^k)$, $t \in H^0(X, A^k)$, then $\frac{s}{t}$ is a meromorphic section of L. Let D be the divisor associated to $\frac{s}{t}$, then

$$L \cong \mathcal{O}(D)$$

□

定理 7.2.12. *(Lelong-Poincare equation)*

Let $s \in H^0(X, L) \setminus \{0\}$, then

$$\frac{\sqrt{-1}}{\pi}\partial\bar{\partial}\log|s|_h = [s^{-1}(0)] - \frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\Theta_{(L,h)} \tag{$*$}$$

where $[s^{-1}(0)]$ is defined as follows:

$$\langle [s^{-1}(0)], \psi \rangle = \int_{s^{-1}(0)} \psi$$

where ψ is an $(n-1, n-1)$-form on X. （假设.. 有度量；在分布意义下求导）

(Current of integration)

证明. （以后再证） □

$(*) \Rightarrow$

$$c_1(L) = \{\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\Theta_{(L,h)}\} = \{[s^{-1}(0)]\}$$

注记 7.2.13. $(*)$ *also holds for moromorphic sections.*

推论 7.2.14. *X be an algebraic manifold, then $\forall \alpha \in H^{1,1}(X, \mathbb{Q})$, we have a divisor D with $\mathbb{Q}$-coefficients s.t.*

$$[\alpha] = \{[D]\}$$

(Hodge conjecture for $(1,1)$-classes)

Fact: X is a compact complex manifold, $V \subseteq X$ is an analytic set of pure $\dim_{\mathbb{C}} V = p$. Then the current $[V]$ associated to V_{reg}:

$$\langle [V], \psi \rangle := \int_{V_{\text{reg}}} \psi|_{V_{\text{reg}}}$$

where $\psi \in C^\infty(X, \bigwedge^{p,p})$, defines a class $\{[V]\} \in H^{n-p,n-p}(X, \mathbb{Z})$.

Hodge conjecture: X is a complex algebraic manifold, then for all $\alpha \in H^{n-p,n-p}(X,\mathbb{Q})$, $\exists$ analytic sets V_k of pure dimension p and rational numbers r_k, s.t.

$$\alpha \in \{\sum_{k=1}^{N} r_k[V_k]\}$$

（这个猜想作为练习，说不定就做出来了………………）

Known case: $p = n-1$, it is Lef. $(1,1)$-theorem.

Exercise: also true for $p = 1$ (Using Hard Lef) And, $p = 0, p = n$...

下学期课程：《Analytic methods in algebraic geometry》敬请期待 233333333333

Pluripotential theroy/Positive currents

Positive currents and Lelong numbers

Currents on C^∞ manifolds. Let X is a C^∞, oriented manifold, with $\dim_{\mathbb{R}} X = n$. Denote $C^s(X, \bigwedge^p T^*X)$ the space of s-differentiable p-forms on X.

Let $\Omega \subseteq X$ be a coordinate open set, $u \in C^s(X, \bigwedge^p T^*X)$,write

$$u = \sum_{|I|=p} u_I \mathrm{d}x_I$$

where u_I are s-differentiable functions.

Assume $K \subset\subset \Omega$, define

$$P_K^s(u) := \sup_{x\in K} \max_{\substack{|I|=p \\ |\alpha|\leq s}} |D^\alpha u_I(x)|$$

,where $D^\alpha = \frac{\partial^\alpha}{\partial x_1^{\alpha_1}\cdots\partial x_n^{\alpha_n}}$.

$\mathcal{E}^p(X)$- the space $C^\infty(X, \bigwedge^p T^*X)$ equipped with the topology defined by all the $P_k^s(\cdot)$, when $s, K \subset\subset \Omega$ vary/

${}^s\mathcal{E}^p(X)$- the space $C^s(X, \bigwedge^p T^*X)$ equipped with the topology defined by all the $P_K^s(\cdot)$, when $K \subset\subset \Omega$ vary.

Let $K \subseteq X$ be a compact subset, $\mathcal{D}^p(K)$- the space of $u \in \mathcal{E}^p(X)$with induced topology and $\operatorname{supp}(u) \subseteq K$.

$$\mathcal{D}^p(X) := \bigcup_{K \text{ is compact subset of } X} \mathcal{D}^p(K)$$

similarly we can define ${}^s\mathcal{D}^p(K)$ and ${}^s\mathcal{D}^p(K)$.

注记 7.2.15. *(1) $\mathcal{E}^p(X)$(resp. ${}^s\mathcal{E}^p(X)$) can be defined by countably many P_k^s. In particular, $\mathcal{E}^p$, ${}^s\mathcal{E}^p$ are Fréchet spaces.*

(2)$\mathcal{D}^p(X)$ is dense in $\mathcal{E}^p(X)$.

定义 7.2.16. *(Current, 流,[de Rham 1955])*

The spaces of currents of $\dim = p$ *(or* $\deg = n-p$*) denoted by* $\mathcal{D}'_p(X)$ *:=the topological dual of* $\mathcal{D}^p(X)$*. i.e.* $\mathcal{D}'_p(X)$ *is the set of linear forms* T *on* $\mathcal{D}^p(X)$ *s.t.* $T|_{\mathcal{D}^p(K)}$ *is continuous.*

注记 7.2.17. *A current can be considered as a form with distribution coefficients. More precisely,*

$$T = \sum_{|I|=n-p} T_I \mathrm{d}x_I$$

is a current on Ω*, if and only if* T_I *is a distribution on* Ω*.*

Let $u = f\mathrm{d}x_{I^c} \in \mathcal{D}^p(\Omega)$, we have

$$\langle T, f\mathrm{d}x_I \rangle := T_I(f)$$

On the other hand, if T is a current of dimension p, then we define

$$T_I(f) := \langle T, f\mathrm{d}x_{I^c} \rangle$$

we can verify $T = \sum\limits_{|I|=p} T_I \mathrm{d}x_I$.

记号 7.2.18.

$$\langle T, U \rangle := \int_X T \wedge U$$

例子 7.2.19. *(Current of integration)*

$Z \subseteq X$ *is an oriented closed submanifold with dimension* p*, with boundary* ∂Z*. We can define the current* $[Z]$ *as followes:*

$$\langle [Z], u \rangle := \int_Z u$$

for all $u \in \mathcal{D}^p(X)$*.*

例子 7.2.20. *Let* f *be a form of degree* $n-p$*, with coefficients in* $L^1_{loc}(X)$*. We define the following current* T_f*:*

$$\langle T_f, u \rangle := \int_X f \wedge u$$

（一般地，current 与 current 无法作外积，好比测度与测度无法相乘）

Exterior derivative on Currents:

定义 7.2.21. *Let T be a current of dimension p(or degree $n-p$), $u \in \mathcal{D}^{p-1}(X)$. We define* $\mathrm{d}T$ *is the current is defined as followes:*

$$\langle \mathrm{d}T, u \rangle := (-1)^{n-p+1} \langle T, \mathrm{d}U \rangle$$

(why $(-1)^{n-p+1}$?)

注记 7.2.22. *if X has no boundary, $T \in T_f$, $f \in \mathcal{E}^{n-p}(X) \cap L^1_{loc}(X)$,then*

$$0 = \int_X \mathrm{d}(f \wedge u) = \int_X \mathrm{d}f \wedge u + (-1)^{n-p} f \wedge \mathrm{d}u$$

$$\langle T_{\mathrm{d}f}, u \rangle = (-1)^{n-p+1} \langle T_f, \mathrm{d}u \rangle$$

例子 7.2.23. *$Z \subseteq X$ is a p-dimensional submanifold with boundary ∂Z, then by the stokes formula: for $u \in \mathcal{D}^{p-1}(X)$,*

$$\langle \mathrm{d}[Z], u \rangle = (-1)^{n-p+1} \langle [Z], \mathrm{d}u \rangle = (-1)^{n-p+1} \int_Z \mathrm{d}u = (-1)^{n-p+1} \int_{\partial Z} u = (-1)^{n-p+1} \langle [\partial Z], u \rangle$$

so we have

$$\mathrm{d}[Z] = (-1)^{n-p+1} [\partial Z]$$

定义 7.2.24. *A current $T \in \mathcal{D}'_p(X)$ is called closed if* $\mathrm{d}T = 0$.

Example: if $T = T_f$ for some $f \in \mathcal{E}^p(X) \cap L^1_{loc}(X)$, then T_f is closed if and only if f is closed(differential form).

Example: $Z \subseteq X$ a submanifold of X, then $\mathrm{d}[Z] = 0 \iff Z$ has no boundary.

Now, Let X be a complex manifold... of $\dim_{\mathbb{C}} = n$, similar to the smooth case, we can define:

$$\mathcal{E}^{p,q}(X) \quad {}^s\mathcal{E}^{p,q}(X) \quad \mathcal{D}^{p,q}(X) \quad {}^s\mathcal{D}^{p,q}(X)$$

定义 7.2.25. *the space of currents of bidimenison (p,q) (or bidegree $(n-p,n-q)$) denoted by*

$$\mathcal{D}'_{p,q}(X)$$

is the topological dual of $\mathcal{D}^{p,q}(X)$

Sinilar to the operator d, we can define $\mathrm{d}' = \partial$ and $\mathrm{d}'' = \overline{\partial}$ on $\mathcal{D}'_{p,q}(X)$ by duality.

例子 7.2.26. *$V \subseteq X$ complex submanifold of $\dim_{\mathbb{C}} = p$, then the current of integration $[V]$ defined by*

$$\langle [V], u\rangle = \int_V u|_V$$

we have $[v] \in \mathcal{D}'_{p,p}(X)$.(Why?!)

例子 7.2.27. *(Non-trivial example)*

Let $V \subset X$ is an irreducible analytic set of pure dimension $\dim_{\mathbb{C}} = p$. define the current $[V]$ as follows:

$$\langle [V], u\rangle := \int_{V_{\text{reg}}} u$$

(in general, V_{reg} is an open submanifold of $\dim_{\mathbb{C}} = p$.)

FACT: $[V]$ also defines a closed currents.

例子 7.2.28. *(trivial example)*

$$\mathcal{E}^{p,q}(X) \cap L^1_{\text{Loc}}(X) \subseteq (\mathcal{D}')^{p,q}(X)$$

7.3 微分形式的正性

positivity of forms

定义 7.3.1. *A (p,p)-form $\varphi \in \bigwedge^{p,p}(\mathbb{C}^n)$ is called strongly positive if φ is a convex combination as follows:*

$$\varphi = \sum_{s=1}^{k} c_s \sqrt{-1}\alpha_{s,1} \wedge \overline{\alpha_{s,1}} \wedge \cdots \wedge \sqrt{-1}\alpha_{s,p} \wedge \overline{\alpha_{s,p}}$$

where $c_s \geq 0$, $\alpha_{s,j} \in \bigwedge^{1,0}(\mathbb{C}^n)$

(in particular, $\varphi \equiv 0$ is strongly positive)

定义 7.3.2. *A (p,p)-form $\psi \in \bigwedge^{p,p}(\mathbb{C}^n)$ is called positive, if $\forall \varphi \in \bigwedge^{n-p,n-p}(\mathbb{C}^n)$ strongly positive, we have $\psi \wedge \varphi \geq 0$.*

注记 7.3.3. *(1) Let $\varphi = \sqrt{-1}\sum\limits_{i,j} \varphi_{ij} \mathrm{d}z_i \wedge \mathrm{d}\bar{z}_j$ be a real $(1,1)$-form, then φ is positive /strongly positive $\iff$ $[\varphi_{ij}]_{i,j} \geq 0$.*

(2) denote $\mathcal{C}^k_{sp} :=$ the strongly positive (k,k)-forms, ($\mathcal{C}^k_{sp}$ is a convex cone in $\bigwedge^{k,k}$) $\mathcal{C}^k_p :=$ the set of positive (k,k)-forms. (also a convex cone)

Check: $\mathcal{C}^k_{sp} \subseteq \mathcal{C}^k_p$.

Consider a (p,p)-form as a linear function on $\bigwedge^{n-p,n-p}$, then $C^k_p = (C^{n-k}_{sp})^*$

(General setting: $\mathcal{C} \subseteq V$, V is a real vector space of finite dimension, $\mathcal{C}$ is a convex cone, V^* is the dual of V, then we can define $\mathcal{C}^* := \left\{ l \in V^* \middle| l|_{\mathcal{C}} \geq 0 \right\}$)

Take double dual:

$$\overline{\mathcal{C}^{n-k}_{sp}} = (\mathcal{C}^k_p)^*$$

(general fact: $(\mathcal{C}^*)^* = \overline{\mathcal{C}}$)

推论 7.3.4. *A (p,p)-form φ is strongly positive if and only if for all $\psi \in \bigwedge^{n-p,n-p}$ positive, $\varphi \wedge \psi \geq 0$. In particular, "strongly positivity" is dual to "positivity".*

Recall: positivity of forms.

a (p,p)-form $\varphi \in \bigwedge^{p,p}(\mathbb{C}^n)$ is strongly positive if

$$\varphi = \sum_{c_s \geq 0} c_s \sqrt{-1}\alpha_{s,1} \wedge \overline{\alpha}_{s,1} \wedge \cdots \wedge \sqrt{-1}\alpha_{s,p} \wedge \overline{\alpha}_{s,p}$$

where $\alpha_{s,j} \in \bigwedge^{1,0}$

A (p,p)-form $\psi \in \bigwedge^{p,p}$ is positive if $\psi \wedge \varphi \geq 0$ for all $\varphi \in \bigwedge^{n-p,n-p}$ strongly positive.

Rem: {positive (p,p)-forms} and {strongly positive $(n-p,n-p)$-forms} are dual to each other.

Rem: an $(1,1)$-form $\varphi = \sqrt{-1}\sum\limits_{i,j} \varphi_{ij} \mathrm{d}z_i \wedge \mathrm{d}\overline{z}_j$ is strongly positive $\iff$ positive $\iff$ the matrix $[\varphi_{ij}]$ is a semi-positive Hermitian matrix.

Rem: for $p = 1, n-1, 0, n$, strongly positive $\iff$ positive. In particular, an $(n-1,n-1)$-form $\psi = c\sum\limits_{ij} \psi_{ij} \widehat{\mathrm{d}z_i \wedge \mathrm{d}\overline{z}_j}$ (where $\widehat{\mathrm{d}z_i \wedge \mathrm{d}\overline{z}_j}$ is the $(n-1,n-1)$-form s.t. $\mathrm{d}z_i \wedge \mathrm{d}\overline{z}_j \wedge \widehat{\mathrm{d}z_i \wedge \mathrm{d}\overline{z}_j} = \mathrm{d}z_1 \wedge \mathrm{d}\overline{z}_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}z_n \wedge \mathrm{d}\overline{z}_n$.) is strongly positive $\iff$ $[\psi_{ij}] \geq 0$.

性质 7.3.5. *Let $(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ be a coordinate system of $\mathbb{C}^n$, then $\bigwedge^{p,p}$ admits a basis consisting of strongly positive form*

$$\beta_s = \sqrt{-1}\beta_{s,1} \wedge \overline{\beta}_{s,1} \wedge \cdots \wedge \sqrt{-1}\beta_{s,p} \wedge \overline{\beta}_{s,p}$$

with $1 \leq s \leq \binom{n}{p}^2$, every $\beta_{s,j} \in \bigwedge^{1,0}$ is of the type $\mathrm{d}z_j \pm \mathrm{d}z_k, \mathrm{d}z_j \pm \sqrt{-1}\mathrm{d}z_k$, $1 \leq j,k \leq n$.

证明. note the identity

$$4\mathrm{d}z_j \wedge \mathrm{d}\overline{z}_k = (\mathrm{d}z_j + \mathrm{d}z_k) \wedge \overline{(\mathrm{d}z_j + \mathrm{d}z_k)} - (\mathrm{d}z_j - \mathrm{d}z_k) \wedge \overline{(\mathrm{d}z_j - \mathrm{d}z_k)} + \sqrt{-1}(\mathrm{d}z_j + \sqrt{-1}\mathrm{d}z_k) \wedge \overline{\sqrt{-1}(\mathrm{d}z_j + \sqrt{-1}\mathrm{d}z_k)}$$

and

$$dz_{i_1} \wedge \cdots \wedge dz_{i_p} \wedge d\bar{z}_{j_1} \wedge \cdots \wedge d\bar{z}_{j_p} = \pm \bigwedge_{1\le s\le p} (dz_{is} \wedge d\bar{z}_{js})$$

a set of generators contain a basis. □

推论 7.3.6. *All positive (p,p)-forms are real, i.e. if $u \in \bigwedge_{\mathbb{C}}^{p,p}$ is positive,and*

$$u = (\sqrt{-1})^{p^2} \sum_{|I|=|J|=p} u_{IJ} dz_I \wedge dz_J$$

then $u = \bar{u}$, i.e. $u_{IJ} = \overline{u_{JI}}$

注记 7.3.7. *For all $2 \le p \le n-2$,*

$$\{\textit{strongly positive } (p,p)\textit{-forms}\} \subsetneq \{\textit{positive } (p,p)\textit{-forms}\}$$

The wedge product of positive forms may NOT be positive

注记 7.3.8. *Ref:*

`Blocki-Pli\'{s}:Square or positive $(p,p)$-forms 2013`

For $p = 2$, if α is a positive $(2,2)$-form, then α^2 is a positive $(4,4)$-form.

（困难的线性代数题）

Positivity of currents

定义 7.3.9. *A current $T \in \mathcal{D}'_{p,p}(X)$ is called positive if $\langle T, \varphi \rangle \ge 0$ for all $\varphi \in \mathcal{D}^{p,p}(X)$ strongly positive.*

T is called strongly positive, if $\langle T, \varphi \rangle \ge 0$ for all $\varphi \in \mathcal{D}^{p,p}(X)$ positive.

例子 7.3.10. *Let $V \subseteq X$ be a complex submanifold of $\dim = p$, then the current of integration $[V]$ is a strongly positive (p,p)-current $\in \mathcal{D}'_{p,p}(X)$.*

证明. Exercise. □

注记 7.3.11. *In general, $\{$strongly positive (p,p)-currents$\} \subseteq \{$positive (p,p)-current$\}$ with equality if $p = 0, 1, n-1, n$.*

注记 7.3.12. *Every positive* (p,p)*-current* $T =_{loc} (-1)^p \sum\limits_{|I|=|J|=p} T_{IJ} \mathrm{d}z_I \wedge \mathrm{d}\bar{z}_J$ *is real ,i.e.* $T_{IJ} = \overline{T_{JI}}$ *(as distribution) and* $T_{I,I} \geq 0$*. and*

$$\lambda_I \lambda_J |T_{IJ}| \leq 2^p \sum \lambda_M^2 T_{MM}$$

if $I \cap J \subseteq M \subseteq I \cup J$*, where* $\lambda_I = \prod_{k \in I} \lambda_K$*,* $\lambda_k \geq 0$*.*

证明. Omit. □

Weak topology of currents

定义 7.3.13. *The weak topology on* $\mathcal{D}'_p(X)$ *is the topology defined by the collection of semi-norms*

$$T \mapsto |\langle T, f \rangle| \qquad f \in \mathcal{D}^p(X)$$

定义 7.3.14. *A set* $B \subseteq \mathcal{D}'_p(X)$ *is called weakly bounded if* $|\langle T, f \rangle|$ *if bounded for ever* $T \in B$ *and* $f \in \mathcal{D}^p(X)$*.*

注记 7.3.15. *By Banach-Alaoglu Theorem(泛函大招), every weakly bounded closed subset* $B \subseteq \mathcal{D}'_p(X)$ *is weakly compact.*

定理 7.3.16. (X, ω)*-Hermitian manifold, then the set*

$$\left\{ T \in \mathcal{D}'_{p,p}(X) positive \middle| \sup_{\theta \in C^\infty(X) with\ compact\ supp} \langle T, \theta \omega^p \rangle \leq 1 \right\}$$

is weakly compact in $\mathcal{D}'_{p,p}$

d-closed positive $(1,1)$**-currents and plurisubharmonic (PSH) functions**
$T \in \mathcal{D}^{1,1}(X), T \geq 0, \mathrm{d}T = 0 ...$

例子 7.3.17. $D \in \mathrm{Div}(X)$ *effective, then* $[D]$ *is a* d*-closed positive* $(1,1)$*-current.*

PSH functions

定义 7.3.18. *$\Omega \subseteq X$ open subset, $u : \Omega \to [-\infty, +\infty)$ is called* ***PSH***（多重次调和），*if*

(1)u is upper-semi-continuous (usc) (rmk: u has a upper bound on any compact subset)

(2) for any complex line $L \subseteq \mathbb{C}^n$, $u|_{\Omega\cap L}$ is subharmonic. (i.e. $\forall a \in \Omega, \xi \in \mathbb{C}^n$ with $|\xi| < d(a, \partial\Omega)$, we have the mean value inequality

$$u(a) \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(a + e^{i\theta}\xi)\mathrm{d}\theta$$

Denote $PSH(\Omega) :=$ the set of PSH functions on Ω)

性质 7.3.19. *(1) for all $u \in \mathrm{PSH}(\Omega)$, u is subharmonic, i.e. for any $a \in \Omega, r < d(a, \partial\Omega)$ we have*

$$u(a) \leq \frac{1}{|B(a,r)|}\int_{B(a,r)} u(z)\mathrm{d}\lambda(z)$$

(2)Let $\{u_k\}_{k\geq 1} \subseteq \mathrm{PSH}(\Omega)$, assume $u_k \downarrow u$, then $u \in \mathrm{PSH}(\Omega)$.

(cor: $u \in \mathrm{PSH}(\Omega)$, then either $u \equiv -\infty$ or $u \in L^1_{\mathrm{Loc}}(\Omega)$)

(3)Let $u \in \mathrm{PSH}(\Omega) \cap L^1_{\mathrm{Loc}}(\Omega)$, take $(\rho_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ a family of smoothing kernels, then

$$u * \rho_\varepsilon \in C^\infty(\Omega_\varepsilon) \cap \mathrm{PSH}(\Omega_\varepsilon)$$

where $\Omega_\varepsilon := \left\{x \in \Omega \middle| d(x, \partial\Omega) > \omega\right\}$, and $u * \rho_\varepsilon \downarrow u$ as $\varepsilon \to 0^+$.

(4) Let $u_1, ..., u_p \in \mathrm{PSH}(\Omega)$, $x : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ be a convex function and increasing w.r.t. every variable, then $x(u_1, ..., u_p) \in \mathrm{PSH}(\Omega)$.

In particular, $\max\{u_1, ..., u_p\}$,$\log(e^{u_1} + \cdots + e^{u_p})$ are also in $\mathrm{PSH}(\Omega)$.

(5)If $u \in C^2(\Omega)$,then $u \in \mathrm{PSH}(\Omega) \iff \sqrt{-1}\partial\bar{\partial}u$ is a (strongly) positive $(1,1)$-form, i.e. Hessian

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial z_i \partial \bar{z}_j}\right) \geq 0$$

Use the formula

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(a + e^{i\theta}\xi)\mathrm{d}\theta - u(a) = \frac{2}{\pi}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t}\int_{|\zeta|<t} Hu(a + \zeta\xi)(\xi)\mathrm{d}\lambda(\zeta)$$

where $Hu(z)(\xi) := \sum\limits_{1\leq i,j\leq n} \frac{\partial^2 u}{\partial z_i \partial \bar{z}_j}(z)\xi_i\bar{\xi}_j$.

证明. Exercise. Analysis. $\square$

定理 7.3.20. *(1) If* $u \in \mathrm{PSH}(\Omega) \cap L^1_{\mathrm{Loc}}(\Omega)$*, then the current* $\sqrt{-1}\partial\bar{\partial}u \geq 0$.

(2) if f *is a distribution on* Ω *and* $\sqrt{-1}\partial\bar{\partial}f \geq 0$ *in the sense of currents, then* $\exists! u \in \mathrm{PSH}(\Omega) \cap L^1_{\mathrm{Loc}}(\Omega)$ *s.t.* f *is the distribution associative to* u.

证明. (1) $u \in \mathrm{PSH}(\Omega) \cap L^1_{\mathrm{Loc}}(\Omega) \Rightarrow \sqrt{-1}\partial\bar{\partial}u = \lim_{\varepsilon \to 0} \sqrt{-1}\partial\bar{\partial}(u * \rho_\varepsilon)$.

(2)Assume $\sqrt{-1}\partial\bar{\partial}f \geq 0$ as currents,then

$$\sqrt{-1}\partial\bar{\partial}(f * \rho_\varepsilon) = (\sqrt{-1}\partial\bar{\partial}f) * \rho_\varepsilon$$

so $f * \rho_\varepsilon \in C^\infty(\Omega_\varepsilon) \cap \mathrm{PSH}(\Omega_\varepsilon)$. □

define:

$$u := \lim_{\varepsilon \to 0} f * \rho_\varepsilon \in \mathrm{PSH}(\Omega)$$

推论 7.3.21.

$$\mathrm{PSH}(\Omega) \cap L^1_{\mathrm{Loc}}(\Omega)$$

is a closed convex cone in $L^1_{\mathrm{Loc}}(\Omega)$.

Every bounded set (in $L^1_{\mathrm{Loc}}(\Omega)$*) in* $\mathrm{PSH}(\Omega)$ *is (relatively) compact.*

Recall: $\Omega \in \mathbb{C}^n$ open set, $u \in \mathrm{PSH}(\Omega)$ if u is u.s.c. and $u|_L$ is subharmonic $\iff$ $\sqrt{-1}\mathrm{d}'\mathrm{d}''u$ is a positive $(1,1)$-current on Ω.

Remark(check!): any d-closed $(1,1)$ current T on Ω can be written as $T = \sqrt{-1}\mathrm{d}'\mathrm{d}''\varphi$ locally. $\Rightarrow$ if T is a d-closed positive $(1,1)$-current on Ω, then locally $T = \sqrt{-1}\mathrm{d}'\mathrm{d}''u$ for some PSH-function u. This u is called **local potential** of T.

Now, X is a complex manifold, observation: $F : \Omega_1 \to \Omega_2$ holomorphic map, then $F^*(\sqrt{-1}\mathrm{d}'\mathrm{d}''\varphi) = \sqrt{-1}\mathrm{d}'\mathrm{d}''(F^*\varphi)$.

定义 7.3.22. $u \in \mathrm{PSH}(X)$*, if:*

(1) u *is u.s.c.*

(2) $u|_\Omega$ *is PSH on every coordinate open set.*

性质 7.3.23. *$f : X \to Y$ is holomorphic map between two complex manifolds, $u \in \mathrm{PSH}(Y)$, then $f^*u \in \mathrm{PSH}(X)$.*

证明. Easy. □

例子 7.3.24. *(1)Let $f \in H^0(X, \mathcal{O}_X)$, then $\log|f| \in \mathrm{PSH}(X)$.*

证明. consider $f : X \to \mathbb{C}$, and $\log|f| = f^*(\log|z|)$, note that $\log|z| \in \mathrm{PSH}(\mathbb{C})$ □

note that $\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\mathrm{d}'\mathrm{d}'' \log|z| = \delta_0$ is Dirac distribution.

例子 7.3.25. *For any $f_1, f_2, ..., f_k \in H^0(X, \mathcal{O}_X)$, then*

$$\log(|f_1|^{\alpha_1} + \cdots + |f_k|^{\alpha_k}) \in \mathrm{PSH}(X)$$

for any $\alpha_j \geq 0, 1 \leq j \leq k$.

Skoda-El Mir extension theorem

Let X be a complex manifold

定义 7.3.26. *$E \subseteq X$ is called pluripolar(多重极点) if X has an open covering (Ω), we have $u \in \mathrm{PSH}(\Omega) \cap L^1_{\mathrm{Loc}}(\Omega)$ s.t.*

$$E \cap \Omega = \left\{ z \in \Omega \middle| u(z) = -\infty \right\}$$

if "=" holds, then E is called **complete** pluripolar set.

例子 7.3.27. *If A is an analytic set, then A is complete pluripolar set.*

Locally ,$A \cap \Omega = \{f_1 = \cdots f_k = 0\}$ where $f_j \in \mathcal{O}(\Omega)$, it also $= U^{-1}(-\infty)$, where

$$u = \log(|f_1|^2 + \cdots + |f_k|^2)$$

定理 7.3.28. *(Skoda 1982; El mir 1984; Sibory 1985)*

X be a complex manifold, $E \subseteq X$ be (closed) pluripolar set in X, T is a closed positive (p, p)-current on $X \setminus E$, s.t. T has locally finite mass(局部有限质量)near E. (i.e. $\forall$ compact neighborhood Ω we have

$$\int_{\Omega \setminus E} T \wedge \omega^{n-p} < +\infty$$

)

Then, $1_{X \setminus E} T$ is also a closed positive (p, p)-current on X.

(this current is called:current obtained by extending T by 0 on E.)

证明. (1)Notice that : d-closeness is a local property(check!)

(2)we need to verify $1_{\Omega\setminus E}T$ is $\mathrm{d}-$closed on every open set Ω s.t. $\Omega\cap 1=\left\{z\in\Omega \middle| v(z)=-\infty\right\}$ where $v\in \mathrm{PSH}(\Omega)\cap L^1_{\mathrm{Loc}}(\Omega)$,

(3)We can assume $v\leq 0$ on Ω after shrinking Ω.

Let $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ smooth, convex, increasing. $g(t)\equiv 0$ if $t\leq 1$, and $g(0)=1$.

define $v_k=g(k^{-1}v*\rho_{\varepsilon_k})$ where $\varepsilon_k\to 0$ fast.

(After shrinking Ω a little bit, $v_k\in \mathrm{PSH}(\Omega)\cap C^\infty(\Omega)$)

Then, $0\leq v_k\leq 1$, $v_k=0$ in a neighborhood of $E\cap\Omega$. And $\lim\limits_{k\to\infty} v_k(x)=1$ for any $x\in\Omega\setminus E$.

Let $\theta\in C^\infty[0,1]$ s.t. $\theta=0$ on $[0,\frac{1}{3}]$, $\theta=1$ on $[\frac{1}{3},1]$, and θ is smooth, increasing.

So, $\theta\circ v_k=0$ near $E\cap\Omega$, and $\to 1$ on $\Omega\setminus E$. Moreover, $\theta\circ v_k\to 1_{\Omega\setminus E}$.

In particular, $\widetilde{T}=1_{\Omega\setminus E}T=\lim(k\to\infty)(\theta\circ v_k)T$ in the sense of currents w.r.t. weak topology. Using the continuity of d on currents,

$$\mathrm{d}\widetilde{T}=\lim_{k\to\infty}\mathrm{d}(\theta\circ v_k)\wedge T$$

Need to verify $\lim\limits_{k\to\infty}\mathrm{d}(\theta\circ v_k)\wedge T=0 \iff \lim\limits_{k\to\infty} T\wedge \mathrm{d}'(\theta\circ v_k)=0$.

First assume T is a current of bi-degree $(n-1,n-1)$: need to verity $\forall\alpha\in\mathcal{D}^{1,0}(\Omega)$ we have

$$\langle T\wedge \mathrm{d}'(\theta\circ v_k),\overline{\alpha}\rangle=\langle T,\theta'(v_k)\mathrm{d}'v_k\wedge\overline{\alpha}\rangle\to 0$$

Prop: (Linear algebra) For $\gamma\in\mathcal{D}^{1,0}(\Omega\setminus E)$,

$$\gamma\mapsto\langle T,\sqrt{-1}\gamma\wedge\overline{\gamma}\rangle$$

is a non-negative Hermitian form, so we have Cauchy-Schwarz inequality:

$$|\langle T,\sqrt{-1}\beta\wedge\overline{\gamma}\rangle|^2\leq\langle T,\sqrt{-1}\beta\wedge\overline{\beta}\rangle+\langle T,\sqrt{-1}\gamma\wedge\overline{\gamma}\rangle$$

so we have

$$|\langle T,\theta'(v_k)\mathrm{d}'v_k\wedge\overline{\alpha}\rangle|^2\leq\underbrace{\langle T,\theta'(v_k)^2\alpha\wedge\overline{\alpha}\rangle}_{(1)}\underbrace{\langle T,\psi\mathrm{d}'v_k\wedge \mathrm{d}''v_k\rangle}_{(2)}$$

where $0\leq\psi\leq 1$ s.t. $\operatorname{supp}\psi\supseteq\operatorname{supp}\alpha$, $\psi\equiv 1$ near $\operatorname{supp}\alpha$.

(1) : T has locally finite mass near E, $\Rightarrow$

$$\int_{\Omega\setminus E}T\wedge\sqrt{-1}\alpha\wedge\overline{\alpha}<+\infty$$

note that $\theta'(v_k)\to 0$ on Ω, use Lebesgue dominated convergent theorem, (1) $\to 0$ as $k\to\infty$.

(2): use the formula:

$$\sqrt{-1}\mathrm{d}'\mathrm{d}''v_k^2=2v_k\sqrt{-1}\mathrm{d}'\mathrm{d}''v_k+2\sqrt{-1}\mathrm{d}'v_k\wedge \mathrm{d}''v_k\geq 2\sqrt{-1}\mathrm{d}'v_k\wedge \mathrm{d}''v_k$$

so,

$$\begin{aligned}(2) \le \langle T, \psi\sqrt{-1}\mathrm{d}'\mathrm{d}''v_k^2\rangle &= \langle T, v_k^2\sqrt{-1}\mathrm{d}'\mathrm{d}''\psi\rangle = \int_{\Omega\setminus E} v_k^2 T\wedge\sqrt{-1}\mathrm{d}'\mathrm{d}''\psi \\ &\le \int_{\Omega\setminus E} T\wedge\sqrt{-1}\mathrm{d}'\mathrm{d}''\psi \le C(\psi)\int_{\Omega\setminus E} T\wedge\omega < +\infty\end{aligned}$$

Conclusion:$\mathrm{d}\widetilde{T} = 0$.

General bidegree (p,p): Take $\Gamma = \sqrt{-1}\gamma_1\wedge\overline{\gamma}_1\wedge\cdots\wedge\sqrt{-1}\gamma_{n-p-1}\wedge\overline{\gamma}_{n-p-1}$ where $\gamma_j \in \mathcal{D}^{1,0}(\Omega)$ with constant coefficients, then $T\wedge T$ is a current of bidegree $(n-1,n-1)$ with locally finite mass near E.

$$0 = \mathrm{d}(1_{\Omega\setminus E}(T\wedge\Gamma)) = \mathrm{d}(\widetilde{T}\wedge\Gamma) = \mathrm{d}\widetilde{T}\wedge\Gamma$$

by first case, $\Rightarrow$ $\mathrm{d}\widetilde{T}\wedge\Gamma = 0$ for any such Γ.

$\Rightarrow \forall\Gamma\in\mathcal{D}^{n-p-1,n-p-1}(\Omega)$, $\mathrm{d}\widetilde{T}\wedge\Gamma = 0$, so $\mathrm{d}\widetilde{T} = 0$. □

推论 7.3.29. *T is a* d*-closed positive current on X, $E\subseteq X$ (closed) complete pluripolar set, Then $1_{X\setminus E}T$ is a* d*-closed positive current.*

(Since $1_{X\setminus E}$ is the trivial extension of $T|_{X\setminus E}$) ($1_E T$ is a d-closed positive current) ($1_E T = T - 1_{X\setminus E}T$)

推论 7.3.30. *(Exercise)*

$A\subseteq X$ an analytic subset of X A is of pure dimension $\dim_{\mathbb{C}} = p$*, then the current $[A]$ is a* d-***closed*** *positive current of bidimension (p,p)*

证明. (1)$[A_{\text{reg}}]$ is a closed positive current on $X\setminus A_{\text{sing}}$.

(2)$[A_{\text{reg}}]$ has locally finite mass near A_{sing}. (要用解析集局部参数化定理，可怕) (Using the local parameterization theorem of analytic set)

(3)$[A]$ is the trivial extension of $[A_{\text{reg}}]$, i.e. $[A] = 1_{X\setminus A_{\text{sing}}}[A_{\text{reg}}]$ □

Cor: if X is compact (over $\mathbb{C}$), then (cohomology of current)

$$\{[A]\}\in H^{p,p}(X,\mathbb{R})$$

术语索引