非交换几何

曲豆豆 码字
南七技校福利社五道口分社

2019 年 2 月 25 日

第 00 稿

目录

第 1 章 非交换代数

我们需要**代数拓扑**、**同调代数**的预备知识，并且采用同调代数的标准术语、记号，诸如链复形、上同调、导出函子等等。首先介绍基本的记号与概念。

在本课，我们给定一个特征 0 的含幺交换环 K（例如一个域），考虑含幺结合 $K-$ 代数 A（注意 A 未必是交换代数），则 A 首先为交换环 K 上的模。A 的 $K-$ 代数结构给出如下 $K-$ 模同态：

$$\begin{array}{rcl} A \otimes_K A & \to & A \\ (a_1, a_2) & \mapsto & a_1 a_2 \end{array}$$

由 A 的结合性，$(a_1 a_2) a_3 = a_1 (a_2 a_3)$ 对 A 中任意元素 a_1, a_2, a_3 成立.

对于含幺结合 K-代数 A，回顾 A 的**反代数**（opposite algebra）A^{op}. 反代数 A^{op} 作为 K-模与 A 完全相同，记号如下：

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{id} : A & \to & A^{\mathrm{op}} \\ x & \mapsto & x^{\mathrm{op}} \end{array}$$

但是 A^{op} 具有与 A“相反”的乘法，具体地，对于 A^{op} 中的元素 $x^{\mathrm{op}}, y^{\mathrm{op}}$，成立

$$x^{\mathrm{op}} y^{\mathrm{op}} := (yx)^{\mathrm{op}}$$

定义 1.0.1. 对于含幺结合 K-代数 A，我们定义 $K-$ 代数 A^e 为

$$A^e := A \otimes_K A^{op}$$

即 A 与 A^{op} 的 $K-$ 代数张量积。

容易验证对于任何两个含幺结合 $K-$ 代数 A, B，总有

$$(A \otimes_K B)^{\mathrm{op}} = A^{\mathrm{op}} \otimes_K B^{\mathrm{op}}$$

从而容易得到

$$(A^{\mathrm{op}})^e = (A^e)^{\mathrm{op}}$$

对于 $K-$ 代数 A，回顾 **双 $A-$ 模**（A-bimodule）的概念如下：

定义 1.0.2. 对于 $K-$ 代数 A，双 $A-$ 模是指如下资料：

（1）K-模 M；

（2）A 在 M 上的左、右 $K-$ 线性作用，

并且满足相容性：$(a.m).b = a.(m.b)$ 对任意 $m \in M$ 以及 $a, b \in A$ 成立。

例如，A 本身自然有双 $A-$ 模结构，A 在其上的左、右作用即为左乘、右乘。再比如 $K-$ 模张量积 $A \otimes_K A$ 具有如下双 $A-$ 模结构：

$$b.(a_1 \otimes a_2) := (ba_1) \otimes a_2$$

$$(a_1 \otimes a_2).b := a_1 \otimes (a_2 b)$$

其中 $a_1, a_2, b \in A$.

我们不再回顾左模、右模的概念了，也不去回顾右模与左模的平衡张量积。

性质 1.0.3. 设 M 为双 $A-$ 模，

（1）M 可自然地视为左 A^e-模：

$$(a_1 \otimes a_2^{op}).m = a_1.m.a_2$$

（2）M 可自然地视为右 A^e-模：

$$m.(a_1 \otimes a_2^{op}) = a_2.m.a_1$$

反之，左（右）A^e 模也可视为双 $A-$ 模。

证明. 容易验证。 □

特别地如果 M, N 都是双 $A-$ 模，那么考虑平衡张量积 $M \otimes_{A^e} N$，它的双 $A-$ 模结构具体如下：

$$a.(m \otimes n) = (a.m) \otimes n = m \otimes (n.a)$$

$$(m \otimes n).b = m \otimes (n.b) = (b.m) \otimes n$$

对于任何 $m \in M, n \in N, a, b \in A$ 成立。

定义 1.0.4. （余中心 *cocenter*）对于双 $A-$ 模 M，称双 $A-$ 模

$$M \otimes_{A^e} A$$

为 M 的**余中心**（*cocenter*）。

容易看出，对任意的 $m \in M, a \in A$，在余中心 $M \otimes_{A^e} A$ 当中，成立

$$(m.a) \otimes 1 = m \otimes (a.1) = m \otimes a = m \otimes (1.a) = (a.m) \otimes 1$$

从而 $(m.a - a.m) \otimes 1 = 0$. 事实上，$M$ 的余中心具有如下结构：

性质 1.0.5. 对于双 $A-$ 模 M，则有如下双 $A-$ 模同构

$$M \otimes_{A^e} A \cong M/\{(m.a - a.m)|a \in A, m \in M\}$$

证明. 考虑如下的双 $A-$ 模链复形

$$\partial_\bullet : A \otimes A \otimes A \to A \otimes A \to A \to 0$$

其中

$$\begin{aligned} \partial : a_1 \otimes a_2 \otimes a_3 &\mapsto a_1a_2 \otimes a_3 - a_1 \otimes a_2a_3 \\ a_1 \otimes a_2 &\mapsto a_1a_2 \end{aligned}$$

容易验证 ∂^2=0（由 A 的结合性），从而 $\partial_\bullet$ 为双 $A-$ 模链复形。并且显然 $\partial : A \otimes A \to A$ 是满同态。

断言链复形 $\partial_\bullet$ 为正合（exact）的。事实上，$\partial_\bullet$ 到其自身的恒等链映射与零链映射是链同伦的。我们构造如下的链同伦 $h_\bullet$：

$$\begin{aligned} h : a_1 &\mapsto 1 \otimes a_1 \\ a_1 \otimes a_2 &\mapsto 1 \otimes a_1 \otimes a_2 \end{aligned}$$

容易验证，对于任意的 $\varphi = a_1 \otimes a_2 \in A \otimes A$，成立

$$\begin{aligned} (\partial h + h\partial)\varphi &= (\partial h + h\partial)(a_1 \otimes a_2) \\ &= \partial(1 \otimes a_1 \otimes a_2) + h(a_1a_2) \\ &= a_1 \otimes a_2 - 1 \otimes a_1a_2 + 1 \otimes a_1a_2 \\ &= a_1 \otimes a_2 = \varphi \end{aligned}$$

从而对于 $\varphi \in A \otimes A$，如果 $\partial\varphi = 0$，那么

$$\varphi = (\partial h + h\partial)\varphi = \partial(h\varphi)$$

这说明链复形 $\partial_\bullet$ 在 $A \otimes A$ 处正合，因此 $\partial_\bullet$ 是正合的。

接下来，将函子 $M \otimes_{A^e} -$ 作用于链复形 $\partial_\bullet$，得到如下的双 $A-$ 模链复形：

$$M \otimes_{A^e} \partial_\bullet : M \otimes A \to M \to M \otimes_{A^e} A \to 0$$

由张量函子的右正合性，上述链复形也是正合的。其中注意到双 $A-$ 模同构

$$\begin{aligned} M \otimes_{A^e} (A \otimes A \otimes A) &\cong M \otimes A \\ m \otimes (a_1 \otimes a_2 \otimes a_3) &\mapsto (a_3.m.a_1) \otimes a_2 \end{aligned}$$

以及双 $A-$ 模同构

$$\begin{aligned} M \otimes_{A^e} (A \otimes A) &\cong M \\ m \otimes (a_1 \otimes a_2) &\mapsto a_2.m.a_1 \end{aligned}$$

于是正合列 $M\otimes_{A^e}\partial$ 的边界映射有如下具体表达式：

$$\begin{aligned} M\otimes_{A^e}\partial_\bullet : M\otimes A &\to M \\ m\otimes A &\mapsto m.a-a.m \end{aligned}$$

从而由正合性，易知

$$M\otimes_{A^e}A\cong M/\{(m.a-a.m)|a\in A,m\in M\}$$

□

可见，M 的余中心无非是 M 当中“非交换的部分”商掉之后所得到的“交换的部分”，如此望文生义。例如，如果 A 为交换 $K-$ 代数，那么 A 本身作为双 $A-$ 模，其余中心为 A 本身.

定义 1.0.6. （*Hochschild* 同调）

对于双 $A-$ 模 M，以及非负整数 n，记

$$H_n(A,M):=\mathrm{Tor}_n^{A^e}(M,A)$$

称为 M 的第 n 个 *Hochschild* 同调。特别地，我们记

$$\mathrm{HH}_n(A):=H_n(A,A)$$

由定义以及导出函子的基础知识，容易知道双 $A-$ 模 M 的第 0 个 Hochschild 同调

$$H_0(A,M)=M\otimes_{A^e}A=M/\{(m.a-a.m)|a\in A,m\in M\}$$

正是 M 的余中心。

术语索引