

非交换几何选讲

曲豆豆 码字
南七技校福利社 五道口分社
2019 年 3 月 12 日
第 01-4 稿



图：雾气朦胧的安徽合肥大蜀山森林公园
拍摄于 2014.5.31 - 10: 44

在五道口也要红专并进、理实交融呀～

目录

1	Hochschild 理论	3
1.1	结合代数的双模、余中心	3
1.2	Hochschild 同调	7
1.3	Hochschild 上同调	12
1.4	一些例子	18
2	循环同调	24
2.1	Connes 复形 $C_{\bullet}^{\lambda}(A)$	24
2.2	循环双复形 $CC_{\bullet\bullet}(A)$	27
2.3	Connes 算子 \mathcal{B}	31
2.4	一些例子	37
2.5	循环上同调	42
3	乘积	45
3.1	多重切向量场与 Schouten-Nijenhuis 括号	45
3.2	Shuffle 乘积	47
3.3	Cup 乘积	48
3.4	Gerstenhaber 乘积	49

第 1 章 Hochschild 理论

1.1 结合代数的双模、余中心

我们需要代数拓扑、同调代数的预备知识，并且采用同调代数的标准术语、记号，诸如链复形、上同调、导出函子等等。首先介绍基本的记号与概念。

在本课，我们给定一个特征 0 的含么交换环 K （例如一个域），考虑含么结合 K -代数 A （注意 A 未必是交换代数），并且 A 作为交换环 K 上的模是投射模（projective module）。 A 的 K -代数结构给出如下 K -模同态：

$$\begin{aligned} A \otimes_K A &\rightarrow A \\ (a_1, a_2) &\mapsto a_1 a_2 \end{aligned}$$

由 A 的结合性， $(a_1 a_2) a_3 = a_1 (a_2 a_3)$ 对 A 中任意元素 a_1, a_2, a_3 成立。

对于含么结合 K -代数 A ，回顾 A 的反代数（opposite algebra） A^{op} 。反代数 A^{op} 作为 K -模与 A 完全相同，记号如下：

$$\begin{aligned} \text{id} : A &\rightarrow A^{\text{op}} \\ x &\mapsto x^{\text{op}} \end{aligned}$$

但是 A^{op} 具有与 A “相反”的乘法，具体地，对于 A^{op} 中的元素 $x^{\text{op}}, y^{\text{op}}$ ，成立

$$x^{\text{op}} y^{\text{op}} := (yx)^{\text{op}}$$

定义 1.1.1. 对于含么结合 K -代数 A ，我们定义 K -代数 A^e 为

$$A^e := A \otimes_K A^{\text{op}}$$

即 A 与 A^{op} 的 K -代数张量积。

容易验证对于任何两个含么结合 K -代数 A, B ，总有

$$(A \otimes_K B)^{\text{op}} = A^{\text{op}} \otimes_K B^{\text{op}}$$

从而容易得到

$$(A^{\text{op}})^e = (A^e)^{\text{op}}$$

对于 K -代数 A ，回顾双 A -模 (A -bimodule) 的概念如下：

定义 1.1.2. 对于 K -代数 A ，双 A -模是指如下资料：

- (1) K -模 M ；
 - (2) A 在 M 上的左、右 K -线性作用，
- 并且满足相容性： $(a.m).b = a.(m.b)$ 对任意 $m \in M$ 以及 $a, b \in A$ 成立。

例如， A 本身自然有双 A -模结构， A 在其上的左、右作用即为左乘、右乘。再比如 K -模张量积 $A \otimes_K A$ 具有如下双 A -模结构：

$$b.(a_1 \otimes a_2) := (ba_1) \otimes a_2$$

$$(a_1 \otimes a_2).b := a_1 \otimes (a_2 b)$$

其中 $a_1, a_2, b \in A$ 。

再比如，对于 K -代数 A ，考虑其对偶

$$A^* := \text{Hom}(A, K)$$

则 A^* 具有以下的双 A -模结构：对任意 $a, x \in A$ 以及 $f \in A^*$ ，

$$\begin{cases} (a.f)(x) := f(xa) \\ (f.a)(x) := f(ax) \end{cases}$$

容易验证这的确使得 A^* 为双 A -模。

我们不再回顾左模、右模的概念了，也不去回顾右模与左模的平衡张量积。

性质 1.1.3. 设 M 为双 A -模，

- (1) M 可自然地视为左 A^e -模：

$$(a_1 \otimes a_2^{\text{op}}).m = a_1.m.a_2$$

- (2) M 可自然地视为右 A^e -模：

$$m.(a_1 \otimes a_2^{\text{op}}) = a_2.m.a_1$$

反之，左（右） A^e -模也可视为双 A -模。

证明. 容易验证。 □

特别地如果 M, N 都是双 A -模, 那么考虑平衡张量积 $M \otimes_{A^e} N$, 它的双 A -模结构具体如下:

$$a.(m \otimes n) = (a.m) \otimes n = m \otimes (n.a)$$

$$(m \otimes n).b = m \otimes (n.b) = (b.m) \otimes n$$

对于任何 $m \in M, n \in N, a, b \in A$ 成立。

定义 1.1.4. (余中心 *cocenter*) 对于双 A -模 M , 称双 A -模

$$M \otimes_{A^e} A$$

为 M 的余中心 (*cocenter*)。

容易看出, 对任意的 $m \in M, a \in A$, 在余中心 $M \otimes_{A^e} A$ 当中, 成立

$$(m.a) \otimes 1 = m \otimes (a.1) = m \otimes a = m \otimes (1.a) = (a.m) \otimes 1$$

从而 $(m.a - a.m) \otimes 1 = 0$. 事实上, M 的余中心具有如下结构:

性质 1.1.5. 对于双 A -模 M , 则有如下双 A -模同构

$$M \otimes_{A^e} A \cong M / \{(m.a - a.m) | a \in A, m \in M\}$$

证明. 考虑如下的双 A -模链复形

$$\partial_{\bullet} : A \otimes A \otimes A \rightarrow A \otimes A \rightarrow A \rightarrow 0$$

其中

$$\partial : a_1 \otimes a_2 \otimes a_3 \mapsto a_1 a_2 \otimes a_3 - a_1 \otimes a_2 a_3$$

$$a_1 \otimes a_2 \mapsto a_1 a_2$$

容易验证 $\partial^2=0$ (由 A 的结合性), 从而 ∂_{\bullet} 为双 A -模链复形。并且显然 $\partial : A \otimes A \rightarrow A$ 是满同态。

断言链复形 ∂_\bullet 为正合 (exact) 的。事实上, ∂_\bullet 到其自身的恒等链映射与零链映射是链同伦的。我们构造如下的链同伦 h_\bullet :

$$\begin{aligned} h : a_1 &\mapsto 1 \otimes a_1 \\ a_1 \otimes a_2 &\mapsto 1 \otimes a_1 \otimes a_2 \end{aligned}$$

容易验证, 对于任意的 $\varphi = a_1 \otimes a_2 \in A \otimes A$, 成立

$$\begin{aligned} (\partial h + h \partial) \varphi &= (\partial h + h \partial)(a_1 \otimes a_2) \\ &= \partial(1 \otimes a_1 \otimes a_2) + h(a_1 a_2) \\ &= a_1 \otimes a_2 - 1 \otimes a_1 a_2 + 1 \otimes a_1 a_2 \\ &= a_1 \otimes a_2 = \varphi \end{aligned}$$

从而对于 $\varphi \in A \otimes A$, 如果 $\partial \varphi = 0$, 那么

$$\varphi = (\partial h + h \partial) \varphi = \partial(h \varphi)$$

这说明链复形 ∂_\bullet 在 $A \otimes A$ 处正合, 因此 ∂_\bullet 是正合的。

接下来, 将函子 $M \otimes_{A^e} -$ 作用于链复形 ∂_\bullet , 得到如下的双 A -模链复形:

$$M \otimes_{A^e} \partial_\bullet : M \otimes A \rightarrow M \rightarrow M \otimes_{A^e} A \rightarrow 0$$

由张量函子的右正合性, 上述链复形也是正合的。其中注意到双 A -模同构

$$\begin{aligned} M \otimes_{A^e} (A \otimes A \otimes A) &\cong M \otimes A \\ m \otimes (a_1 \otimes a_2 \otimes a_3) &\mapsto (a_3.m.a_1) \otimes a_2 \end{aligned}$$

以及双 A -模同构

$$\begin{aligned} M \otimes_{A^e} (A \otimes A) &\cong M \\ m \otimes (a_1 \otimes a_2) &\mapsto a_2.m.a_1 \end{aligned}$$

于是正合列 $M \otimes_{A^e} \partial_\bullet$ 的边界映射有如下具体表达式:

$$\begin{aligned} M \otimes_{A^e} \partial : M \otimes A &\rightarrow M \\ m \otimes A &\mapsto m.a - a.m \end{aligned}$$

从而由正合性, 易知

$$M \otimes_{A^e} A \cong M / \{(m.a - a.m) | a \in A, m \in M\}$$

□

可见, M 的余中心无非是商掉 M 当中“非交换的部分”所得到的“交换的部分”, 如此望文生义。例如, 如果 A 为交换 K -代数, 那么 A 本身作为双 A -模, 其余中心为 A 本身。

1.2 Hochschild 同调

定义 1.2.1. (*Hochschild* 同调)

对于双 A -模 M , 以及非负整数 n , 记

$$H_n(A, M) := \mathrm{Tor}_n^{A^e}(M, A)$$

称为 M 的第 n 个 *Hochschild* 同调。特别地, 我们记

$$\mathrm{HH}_n(A) := H_n(A, A)$$

由定义以及导出函子的基础知识, 容易知道双 A -模 M 的第 0 个 Hochschild 同调

$$H_0(A, M) = M \otimes_{A^e} A = M / \{(m.a - a.m) | a \in A, m \in M\}$$

正是 M 的余中心。注意 Hochschild 同调一般并不是环, 仅仅能保证它是双 A -模。

具体地, 由导出函子的定义, 我们采用投射消解 (projective resolution) 来计算 Hochschild 同调。若双 A -模链复形

$$P_\bullet \rightarrow A := \dots \rightarrow P_3 \rightarrow P_2 \rightarrow P_1 \rightarrow P_0 \rightarrow A \rightarrow 0$$

为双 A -模 A 的投射消解 (正合, 并且每个 $P_i (i \geq 0)$ 作为 K -模是投射的), 那么

$$H_n(A, M) \cong H_n(M \otimes_{A^e} P_\bullet)$$

由同调代数的事实, 它与投射消解 P_\bullet 的选取无关。

事实上 Hochschild 同调可以与空间上的微分形式类比。作为一个具体计算例子, 我们考虑 \mathbb{C} 上的 n 元多项式代数

$$A := \mathbb{C}[x^1, x^2, \dots, x^n]$$

注意到 A 作为 \mathbb{C} -代数是交换的, 从而 $A = A^{\mathrm{op}}$. 我们记

$$A^{\mathrm{op}} = \mathbb{C}[y^1, y^2, \dots, y^n] \quad A^e = \mathbb{C}[x^1, x^2, \dots, x^n; y^1, y^2, \dots, y^n]$$

性质 1.2.2. 考虑 \mathbb{C} -代数 $A := \mathbb{C}[x^1, x^2, \dots, x^n]$, 则其第 k 个 *Hochschild* 同调

$$\mathrm{HH}_k(A) \cong \Omega_A^k := A \otimes \bigwedge^k (\mathbb{C}^n)$$

是以 A 为系数的 k -形式。

证明. 我们给出 A 的投射消解, 比如众所周知的 Koszul 消解

$$\mathcal{K}_A \rightarrow A \rightarrow 0$$

具体地, 引入 n 个新的独立变元 $\eta^1, \eta^2, \dots, \eta^n$ (视为复线性空间 \mathbb{C}^n 的一组基), 考虑环

$$\mathcal{K} := \frac{A^e[\eta^1, \eta^2, \dots, \eta^n]}{\{(\eta^i \eta^j + \eta^j \eta^i) | i \neq j\}} = A^e \otimes \bigwedge^*(\mathbb{C}^n)$$

为以 A^e 为系数的外代数。

注意 \mathcal{K} 有自然的分次:

$$\deg \eta^i = 1 \quad \deg x^i = \deg y^i = \deg 1 = 0$$

记 \mathcal{K}_l 为 \mathcal{K} 的 l 次分量 ($0 \leq l \leq n$), 即

$$\mathcal{K}_l = \bigoplus_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_l \leq n} A^e \eta^{i_1} \wedge \eta^{i_2} \wedge \dots \wedge \eta^{i_l} = A^e \otimes \bigwedge^l(\mathbb{C}^n)$$

此时 $K = \mathbb{C}$ 是域, 因此 \mathcal{K} (作为 K -模, 即复线性空间) 的投射性显然。我们定义 Koszul 复形 $(\mathcal{K}_A, \partial)$ 如下:

$$\mathcal{K}_A : \dots \xrightarrow{\partial} \mathcal{K}_n \xrightarrow{\partial} \mathcal{K}_{n-1} \xrightarrow{\partial} \dots \xrightarrow{\partial} \mathcal{K}_1 \xrightarrow{\partial} \mathcal{K}_0$$

其中边缘算子 ∂ (首先是 A^e -模同态) 满足

$$\partial \eta^i = x^i - y^i$$

以及与外微分相同的莱布尼茨法则: 对任意 $\omega \in \mathcal{K}$, 成立

$$\partial(\eta^i \wedge \omega) = \partial \eta^i \wedge \omega - \eta^i \wedge \partial \omega$$

再考虑连接映射

$$\begin{aligned} \varepsilon : \mathcal{K}_0 = A^e &\rightarrow A \\ x^i &\mapsto x^i \\ y^i &\mapsto x^i \end{aligned}$$

则众所周知, Koszul 复形

$$\mathcal{K}_A \xrightarrow{\varepsilon} A \rightarrow 0$$

为 A 的投射消解 (证明从略)。我们以此计算 $\mathrm{HH}^\bullet(A)$. 我们注意到以下两个简单事实:

其一: 对任何 $1 \leq l \leq n$, 成立双 A -模同构

$$A \otimes_{A^e} \mathcal{K}_l = A \otimes_{A^e} A^e \otimes \bigwedge^l(\mathbb{C}^n) \cong A \otimes \bigwedge^l(\mathbb{C}^n)$$

其二：函子 $A \otimes_{A^e} -$ 作用于 Koszul 复形 \mathcal{K}_A 之后，成立

$$A \otimes_{A^e} \partial = 0$$

这是因为，对于任意 $f \in A$ ，在 $A \otimes_{A^e} A^e$ 当中总成立

$$f \otimes x^i = x^i f \otimes 1 = f x^i \otimes 1 = f \otimes (x^i)^{\text{op}} = f \otimes y^i$$

因此

$$f \otimes (x^i - y^i) = 0 \in A \otimes_{A^e} A^e$$

从而由 ∂ 的定义，容易看出 $A \otimes_{A^e} \partial = 0$ 。

综上两方面，直接计算之，

$$\begin{aligned} \text{HH}_k(A) &= H_k(A \otimes_{A^e}^L A) \\ &= H_k(A \otimes_{A^e} \mathcal{K}_A) \\ &= A \otimes_{A^e} \mathcal{K}_k \\ &= A \otimes \bigwedge^k(\mathbb{C}^n) \\ &= \Omega_A^k \end{aligned}$$

从而得证。 □

事实上对于一般的含么结合 K -代数 A ， $\text{HH}_\bullet(A)$ 扮演了“微分形式”的角色。这是 Hochschild 同调的一种几何解释。

对于一般的 A ， A 作为双 A -模，由一种典范的投射消解，称之为 **Bar-复形**：

定义 1.2.3. (*Bar-复形*)

对于含么结合 K -代数 A ，定义以下双 A -模链复形

$$\cdots \rightarrow B_2 A \xrightarrow{b} B_1 A \xrightarrow{b} B_0 A \xrightarrow{b} A \rightarrow 0$$

如下：

$$B_n A := A \otimes A^{\otimes n} \otimes A \quad (n \geq 0)$$

$$b : a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n \mapsto \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes (a_k a_{k+1}) \otimes \cdots \otimes a_n$$

称之为 **Bar-复形**。

首先容易验证 $b^2 = 0$ ，从而 $B_\bullet A \xrightarrow{b} A \rightarrow 0$ 确实是链复形。对于 $n \geq 1$ ，具体验证如下：

$$\begin{aligned}
b^2(a_0 \otimes a_1 \otimes \dots \otimes a_n) &= b \left(\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k a_0 \otimes a_1 \otimes \dots \otimes (a_k a_{k+1}) \otimes \dots \otimes a_n \right) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k b(a_0 \otimes a_1 \otimes \dots \otimes (a_k a_{k+1}) \otimes \dots \otimes a_n) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \left[\sum_{l=0}^{k-2} (-1)^l a_0 \otimes \dots \otimes (a_l a_{l+1}) \otimes \dots \otimes (a_k a_{k+1}) \otimes \dots \otimes a_n \right. \\
&\quad + (-1)^{k-1} a_0 \otimes \dots \otimes (a_{k-1} a_k a_{k+1}) \otimes \dots \otimes a_n \\
&\quad + (-1)^k a_0 \otimes \dots \otimes (a_k a_{k+1} a_{k+2}) \otimes \dots \otimes a_n \\
&\quad \left. - \sum_{l=k+2}^{n-1} (-1)^l a_0 \otimes \dots \otimes (a_k a_{k+1}) \otimes \dots \otimes (a_l a_{l+1}) \otimes \dots \otimes a_n \right] \\
&= \sum_{\substack{0 \leq k < l \leq n-1 \\ l-k \geq 2}} \left(-(-1)^{k+l} + (-1)^{k+l} \right) a_0 \otimes \dots \otimes (a_k a_{k+1}) \otimes \dots \otimes (a_l a_{l+1}) \otimes \dots \otimes a_n \\
&\quad + \sum_{0 \leq k \leq n-2} \left((-1)^{2k+1} + (-1)^{2k} \right) a_0 \otimes \dots \otimes (a_k a_{k+1} a_{k+2}) \otimes \dots \otimes a_n \\
&= 0
\end{aligned}$$

从而验证完毕。

我们可以把 $a_0 \otimes \dots \otimes a_n$ 想象为直线上依次排列的 $n+1$ 个质点，将算子 b 想象为相邻质点两两“碰撞”。

性质 1.2.4. 记号同之前，则 Bar -复形

$$B_\bullet A \rightarrow A \rightarrow 0$$

是 A 的投射消解。

证明. 对任意 $n \geq 0$ ， $B_n A = A \otimes A^{\otimes n} \otimes A$ 是投射 K -模（这是因为由最初的假定， A 是投射 K -模，从而其张量积也投射）于是我们只需再验证该链复形是正合的。

为此，我们构造链同伦

$$\begin{aligned}
h : B_{n-2} A &\rightarrow B_{n-1} A \quad (n \geq 1, B_{-1} A = A) \\
a_0 \otimes \dots \otimes a_n &\mapsto 1 \otimes a_0 \otimes \dots \otimes a_n
\end{aligned}$$

只需验证 $hb + bh = 1$ ，之后与性质1.1.5的证明类似。

注意到对于任意 $n \geq 0$, 成立

$$\begin{aligned}
bh(a_0 \otimes \dots \otimes a_n) &= b(1 \otimes a_0 \otimes \dots \otimes a_n) \\
&= a_0 \otimes \dots \otimes a_n - \sum_{k=0}^{n-1} 1 \otimes a_0 \otimes \dots \otimes (a_k a_{k+1}) \otimes \dots \otimes a_n \\
&= a_0 \otimes \dots \otimes a_n - 1 \otimes b(a_0 \otimes \dots \otimes a_n) \\
&= (1 - hb)a_0 \otimes \dots \otimes a_n
\end{aligned}$$

因此 $bh + hb = 1$, 证毕。 □

定义 1.2.5. 设 M 为双 A -模, 定义 **Hochschild 链复形**

$$C_\bullet(A, M) := M \otimes_{A^e} B_\bullet A$$

$$\dots M \otimes A^{\otimes 3} \rightarrow M \otimes A^{\otimes 2} \rightarrow M \otimes A \rightarrow M$$

方便起见, 该链复形的边缘算子仍记作 b .

则易知 M 的 Hochschild 同调无非是 Hochschild 链复形的同调:

$$H_n(A, M) = H_n(C_\bullet(A, M))$$

注意到有双 A -模同构

$$C_n(A, M) = M \otimes_{A^e} (A \otimes A^{\otimes n} \otimes A) \cong M \otimes A^{\otimes n}$$

在此同构意义下, 容易验证 $C_\bullet(A, M)$ 的边缘算子 b 有如下显示表达:

对任意 $m \in M$, 以及 $a_1, a_2, \dots, a_n \in A$, 成立

$$\begin{aligned}
b(m \otimes (a_1 \otimes \dots \otimes a_n)) &= m \otimes_{A^e} (b(1 \otimes a_1 \otimes \dots \otimes a_n \otimes 1)) \\
&= m \otimes_{A^e} [a_1 \otimes \dots \otimes a_n \otimes 1 \\
&\quad + \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k 1 \otimes a_1 \otimes \dots \otimes (a_k a_{k+1}) \otimes \dots \otimes a_n \otimes 1 \\
&\quad + (-1)^n 1 \otimes a_1 \otimes \dots \otimes a_n] \\
&= (m \cdot a_1) \otimes a_2 \otimes \dots \otimes a_n \\
&\quad + \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k m \otimes a_1 \otimes \dots \otimes (a_k a_{k+1}) \otimes \dots \otimes a_n \\
&\quad + (-1)^n (a_n \cdot m) \otimes a_1 \otimes \dots \otimes a_{n-1}
\end{aligned}$$

Hochschild 链复形的边缘算子的显式表达与 Bar-复形非常相似, 从上式最右边的前两项可以看出; 区别在于上式最右边的第三项。

1.3 Hochschild 上同调

对于双 A -模 M ，既然我们已经考虑余中心 $M \otimes_{A^e} A$ ，那么我们自然也会去考虑 $\text{Hom}_{A^e}(A, M)$ 。我们称双 A -模 $\text{Hom}_{A^e}(A, M)$ 为 M 的导出中心（derived center）。

性质 1.3.1.（导出中心的结构）对于双 A -模 M ，则有双 A -模同构

$$\text{Hom}_{A^e}(A, M) \cong \{m \in M \mid a.m - m.a = 0 \ \forall a \in A\}$$

容易验证 $\{m \in M \mid a.m - m.a = 0 \ \forall a \in A\}$ 为 M 的双 A -子模。粗俗地说，该子模由“与 A 中所有元素交换”的元素构成，故谓之“中心”。

证明. 对于任意的 $\varphi \in \text{Hom}_{A^e}(A, M)$ 以及 $a \in A$ ，则 $\varphi(a)$ 的取值由 $\varphi(1)$ 完全决定：

$$\varphi(a) = \varphi(a.1) = a.\varphi(1)$$

而另一方面，

$$\varphi(a) = \varphi(1.a) = \varphi(1).a$$

从而有 $a.\varphi(1) = \varphi(1).a$ 。于是我们可以构造如下双 A -模同态：

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{A^e}(A, M) &\rightarrow \{m \in M \mid a.m - m.a = 0 \ \forall a \in A\} \\ \varphi &\mapsto \varphi(1) \end{aligned}$$

容易验证该模同态为同构。证毕。 □

然后我们考虑 $\text{Hom}(-, M)$ 的导出函子，自然地去定义如下：

定义 1.3.2.（Hochschild 上同调）

对于双 A -模 M ，以及 $n \geq 0$ ，定义 M 的第 n 个 Hochschild 上同调

$$H^n(A, M) = \text{Ext}_{A^e}^n(A, M)$$

特别地，我们记

$$H^n(A) = \text{Ext}_{A^e}^n(A, A)$$

由定义知， M 的第 0 个 Hochschild 上同调为 $\text{Hom}_{A^e}(A, M)$ ，是 M 的导出中心。回顾 Bar-复形，我们考虑如下的 **Hochschild 上链复形**

$$C^\bullet(A, M) = \text{Hom}_{A^e}(B_\bullet, A, M)$$

该上链复形的微分算子 ∂ 由 Bar-复形 $B_\bullet A$ 的边缘算子 b 所诱导。则 M 的 Hochschild 上同调满足

$$H^n(A, M) = H^n(C^\bullet(A, M), \partial) = H^n(\text{Hom}_{A^e}(B_\bullet A, M), \partial)$$

注意有自然的双 A -模同构

$$C^n(A, M) = \text{Hom}_{A^e}(A \otimes A^{\otimes n} \otimes A, M) \cong \text{Hom}(A^{\otimes n}, M)$$

(即取值于 M 的 n 重 K -线性映射) 于是对于任意的 $\varphi \in C^n(A, M) = \text{Hom}(A^{\otimes n}, M)$, 容易知道 $\partial\varphi \in \text{Hom}(A^{\otimes n+1}, M)$ 具有如下显式表达: 对任意 $a_0, a_1, \dots, a_m \in A$,

$$\begin{aligned} \partial\varphi(a_0, a_1, \dots, a_n) &= a_0 \cdot \varphi(a_1, a_2, \dots, a_n) \\ &\quad - \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \varphi(a_0, \dots, (a_k a_{k+1}), \dots, a_n) \\ &\quad - (-1)^n \varphi(a_0, a_1, \dots, a_{n-1}) \cdot a_n \end{aligned}$$

接下来讨论 Hochschild 上同调的几何意义。我们已经知道第 0 个 Hochschild 上同调为 M 的导出中心; 现在我们看 $H^1(A, M)$, 我们将发现它是 A 的取值于 M 的外导子。

回顾导子 (derivation) 的概念如下:

定义 1.3.3. (导子) 对于双 A -模 M , K -线性映射

$$D : A \rightarrow M$$

称为 A 的取值于 M 的导子 (derivation), 如果对任意的 $a_1, a_2 \in A$, 成立

$$D(a_1 a_2) = D(a_1) \cdot a_2 + a_1 \cdot D(a_2)$$

对于 $m \in M$ 我们定义

$$\begin{aligned} \text{ad}_m : A &\rightarrow M \\ a &\mapsto [m, a] := m \cdot a - a \cdot m \end{aligned}$$

则容易验证 ad_m 为 A 的取值于 M 的导子, 称形如这样的导子为内导子 (inner derivation)。

我们记

$$\text{Der}(A, M) := \{D : A \rightarrow M \mid D \text{ 为导子}\}$$

$$\text{Inn}(A, M) := \{\text{ad}_m \mid m \in M\} \subseteq \text{Der}(A, M)$$

注意 $\text{Inn}(A, M)$ 与 $\text{Der}(A, M)$ 都有显然的 K -模结构, 且前者是后者的 K -子模。

性质 1.3.4. ($\mathrm{HH}^1(A, M)$ 的结构)

对于双 A -模 M , 成立

$$\mathrm{HH}^1(A, M) \cong \frac{\mathrm{Der}(A, M)}{\mathrm{Inn}(A, M)}$$

我们称上式右边的集合当中的元素为 A 的取值于 M 的**外导子** (outer derivation)。

证明. 只需考虑 Hochschild 上链复形

$$C^0(A, M) \xrightarrow{\partial^0} C^1(A, M) \xrightarrow{\partial^1} C^2(A, M) \rightarrow \cdots$$

我们只需具体计算之。对于 $\varphi \in C^1(A, M) \cong \mathrm{Hom}(A, M)$, 则 $\partial^1 \varphi \in C^2(A, M) \cong \mathrm{Hom}(A^{\otimes 2}, M)$ 满足: 对任意 $a_1, a_2 \in A$, 成立

$$\partial^1 \varphi(a_1, a_2) = a_1 \cdot \varphi(a_2) - \varphi(a_1 a_2) + \varphi(a_1) \cdot a_2$$

可见 $\varphi \in \ker \partial^1$ 当且仅当 $\varphi \in \mathrm{Der}(A, M)$. 也就是说 $\ker \partial^1 = \mathrm{Der}(A, M)$.

另一方面, 对于 $m \in C^0(A, M) \cong M$, 以及 $a \in A$, 成立

$$(\partial^0 m)(a) = a \cdot m - m \cdot a = -\mathrm{ad}_m(a)$$

因此 $\ker \partial^0 \cong \mathrm{Inn}(A, M)$. 从而

$$\mathrm{HH}^1(A, M) = \frac{\ker \partial^1}{\mathrm{Im} \partial^0} \cong \frac{\mathrm{Der}(A, M)}{\mathrm{Inn}(A, M)}$$

□

特别地, 当 $M = A$ 时,

$$\mathrm{HH}^1(A) = \mathrm{Der}(A, A) / \mathrm{Inn}(A, A)$$

注意到 $\mathrm{Der}(A, A)$ 上面还有更多的结构: 对于 $\forall D_1, D_2 \in \mathrm{Der}(A, A)$, 定义

$$[D_1, D_2] := D_1 \circ D_2 - D_2 \circ D_1 : A \rightarrow A$$

容易验证 $[D_1, D_2]$ 仍然为 A 的导子, 并且 $[-, -]$ 为 $\mathrm{Der}(A, A)$ 上的李括号 (Lie bracket)。

另外容易验证

$$[\mathrm{Der}(A, A), \mathrm{Inn}(A, A)] \subseteq \mathrm{Inn}(A, A)$$

具体地, 对于 $D \in \mathrm{Der}(A, A)$ 以及 $m \in M$, 成立

$$[D, \mathrm{ad}_m] = \mathrm{ad}_{D(m)}$$

也就是说 $\text{Inn}(A, A)$ 是 $\text{Der}(A, A)$ 的理想。于是 $[-, -]$ 诱导了 $\text{HH}^1(A) = \frac{\text{Der}(A, A)}{\text{Inn}(A, A)}$ 上的李括号结构。

如果 A 是交换 K -代数，则 $\text{Inn}(A, A) = 0$ 。于是

$$\text{HH}^1(A) \cong \text{Der}(A, A)$$

可被认为是“切向量场”（此时 A 被认为是“函数环”）。

我们再去考虑 $\text{HH}^2(A, M)$ 。对于任意的

$$\varphi \in C^2(A, M) = \text{Hom}(A^{\otimes 2}, M)$$

则对 $a_0, a_1, a_2 \in A$ ，成立

$$\partial\varphi(a_0, a_1, a_2) = a_0 \cdot \varphi(a_1, a_2) - \varphi(a_0 a_1, a_2) + \varphi(a_0, a_1 a_2) - \varphi(a_0, a_1) \cdot a_2$$

引理 1.3.5. 对于双 A -模 M ，以及 $\varphi \in C^2(A, M) = \text{Hom}(A^{\otimes 2}, M)$ ，我们令

$$\hat{A} := A \oplus M$$

并赋以如下的 K -代数结构：对于任意 $a_1, a_2 \in A$ 以及 $m_1, m_2 \in M$ ，规定 \hat{A} 的乘法 $\hat{\bullet}_\varphi$ 为

$$(a_1 \oplus m_1) \hat{\bullet}_\varphi (a_2 \oplus m_2) := a_1 a_2 \oplus [a_1 \cdot m_2 + m_1 \cdot a_2 + \varphi(a_1, a_2)]$$

那么 $(\hat{A}, \hat{\bullet}_\varphi)$ 为结合代数，当且仅当 $\partial\varphi = 0$ 。

证明。这是简单的计算验证。对于任意的 $a_0, a_1, a_2 \in A$ 以及 $m_0, m_1, m_2 \in M$ ，直接计算之，

$$\begin{aligned} & [(a_0 \oplus m_0) \hat{\bullet}_\varphi (a_1 \oplus m_1)] \hat{\bullet}_\varphi (a_2 \oplus m_2) \\ &= a_0 a_1 a_2 \oplus [a_0 a_1 \cdot m_2 + a_0 \cdot m_1 \cdot a_2 + m_0 \cdot a_1 a_2 + \varphi(a_0, a_1) \cdot a_2 + \varphi(a_0 a_1, a_2)] \end{aligned}$$

以及

$$\begin{aligned} & (a_0 \oplus m_0) \hat{\bullet}_\varphi [(a_1 \oplus m_1) \hat{\bullet}_\varphi (a_2 \oplus m_2)] \\ &= a_0 a_1 a_2 \oplus [a_0 a_1 \cdot m_2 + a_0 \cdot m_1 \cdot a_2 + m_0 \cdot a_1 a_2 + a_0 \cdot \varphi(a_1, a_2) + \varphi(a_0, a_1 a_2)] \end{aligned}$$

因此 $\hat{\bullet}_\varphi$ 满足结合性，当且仅当

$$\varphi(a_0, a_1) \cdot a_2 + \varphi(a_0 a_1, a_2) = a_0 \cdot \varphi(a_1, a_2) + \varphi(a_0, a_1 a_2)$$

而此式等价于 $\partial\varphi = 0$ 。 □

注意到在 \hat{A} 当中, 对任意的 $m_1, m_2 \in M$, 以及任意 $\varphi \in C^2(A, M)$, 总有 $m_1 \hat{\bullet}_\varphi m_2 = 0$. 于是我们不妨将 “ $A \oplus M$ ” 当中的 “ M ” 理解为 “一阶小量”。我们考虑 $\varphi = 0$ 时 $\hat{A}_0 := A \oplus M$ 的代数结构

$$(a_1 \oplus m_1) \bullet (a_2 \oplus m_2) := a_1 a_2 \oplus (a_1 \cdot m_2 + m_1 \cdot a_2)$$

显然 (\hat{A}_0, \bullet) 为结合代数。若 $\partial\varphi = 0$, 则结合代数 $(\hat{A}, \hat{\bullet}_\varphi)$ 为 (\hat{A}_0, \bullet) 的一阶形变, 而 φ 为其 “形变参数”。

从而 M 的第 2 个 Hochschild 上同调

$$H^2(A, M) \cong \frac{\{\varphi | (\hat{A}, \hat{\bullet}_\varphi) \text{ 是结合代数}\}}{\text{Im}(\partial : C^1(A, M) \rightarrow C^2(A, M))}$$

商掉的东西 ($\text{Im } \partial$) 为形如以下的一类特殊的一阶形变:

$$\begin{aligned} \varphi_f : A \otimes A &\rightarrow M \\ a_1 \otimes a_2 &\mapsto a_1 \cdot f(a_2) + f(a_1) \cdot a_2 - f(a_1 a_2) \end{aligned}$$

其中 $f \in C^1(A, M) = \text{Hom}(A, M)$, $\varphi_f = \partial f$.

Hochschild 上同调与 Hochschild 同调两者之间有如下自然的配对:

定义 1.3.6. 设 M, N 为双 A -模, 则自然有如下配对:

$$C^n(A, M) \otimes C_n(A, N) \rightarrow N \otimes_{A^e} M$$

定义为: 对任意 $f \in C^n(A, M) = \text{Hom}(A^{\otimes n}, M)$ 以及任意 $y \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n \in C_n(A, N) = N \otimes A^{\otimes n}$, 有

$$(f, y \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n) \mapsto y \otimes f(a_1, \dots, a_n) \in N \otimes_{A^e} M$$

其中任意 $y \in N$, 以及 $a_1, \dots, a_n \in A$.

容易验证, 该配对自然诱导了

$$H^n(A, M) \otimes H_n(A, N) \rightarrow N \otimes_{A^e} M$$

这是容易发现的 (先限制, 再下降, 下降的良好性容易说明。)

特别地, 当 $M = A, N = A^*$ (其中 $A^* := \text{Hom}(A, K)$) 时, 我们有双线性函数

$$H^n(A, A) \otimes H_n(A, A^*) \rightarrow A^* \otimes_{A^e} A \xrightarrow{\text{ev}} K$$

我们考察一个 Hochschild 上同调的具体算例。

性质 1.3.7. 若 $A = \mathbb{C}[x^1, \dots, x^n]$ 为 \mathbb{C} 上的 n 元多项式环, 则

$$\mathrm{HH}^k(A) \cong \mathrm{Hom}\left(\bigwedge^k(\mathbb{C}^n), A\right)$$

证明. 对于这个特例, 采用 Koszul 复形计算更佳简便. 有关记号同性质 1.2.2 的证明过程. 考虑 Koszul 复形

$$\mathcal{K}_A : \dots \xrightarrow{\partial} A^e \otimes \bigwedge^{k+1}(\mathbb{C}^n) \xrightarrow{\partial} A^e \otimes \bigwedge^k(\mathbb{C}^n) \xrightarrow{\partial} A^e \otimes \bigwedge^{k-1}(\mathbb{C}^n) \xrightarrow{\partial} \dots$$

然后将函子 $\mathrm{Hom}_{A^e}(-, A)$ 作用于之上. 注意到有 \mathbb{C} -线性同构

$$\begin{aligned} & \mathrm{Hom}_{A^e}\left(A^e \otimes \bigwedge^k(\mathbb{C}^n), A\right) \\ & \cong \mathrm{Hom}\left(\bigwedge^k(\mathbb{C}^n), \mathrm{Hom}_{A^e}(A^e, A)\right) \\ & \cong \mathrm{Hom}\left(\bigwedge^k(\mathbb{C}^n), A\right) \end{aligned}$$

此外再注意到, 上链复形 $\mathrm{Hom}_{A^e}(\mathcal{K}_A, A)$ 的微分算子 $d := \mathrm{Hom}_{A^e}(\partial, A) = 0$. 这是因为对于 $\varphi \in \mathrm{Hom}_{A^e}\left(A^e \otimes \bigwedge^k(\mathbb{C}^n), A\right)$, $\omega \in \bigwedge^{k+1}(\mathbb{C}^n)$ 以及 $f \in A^e$, 成立

$$d\varphi(f \otimes \omega) = \varphi(\partial(f \otimes \omega))$$

回顾 Koszul 复形边缘算子运算规则

$$\partial : \eta^i \mapsto x^i - y^i \in A^e$$

又由于 φ 为 A^e -模同态, 从而对于任意 $\tilde{\omega} \in \bigwedge^k(\mathbb{C}^n)$, 成立

$$\varphi(x^i \otimes \tilde{\omega}) = x^i \cdot \varphi(1 \otimes \tilde{\omega}) = \varphi(1 \otimes \tilde{\omega}) \cdot x^i = \varphi((x^i)^{\mathrm{op}} \otimes \tilde{\omega}) = \varphi(y^i \otimes \tilde{\omega})$$

也就是说 $\varphi((x^i - y^i) \otimes \tilde{\omega}) = 0$. 由此可见 $d = 0$. 综上所述可知

$$\mathrm{HH}^k(A) \cong \mathrm{Hom}\left(\bigwedge^k(\mathbb{C}^n), A\right)$$

□

注意到 $\mathrm{Hom}\left(\bigwedge^k(\mathbb{C}^n), A\right)$ 之中的元素形如

$$\sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} f_{i_1 \dots i_k} \partial_{i_1} \wedge \dots \wedge \partial_{i_k}$$

回顾 $\mathrm{HH}_\bullet(A)$ 中的元素可被认为是“微分形式”, 可见 $\mathrm{HH}^\bullet(A)$ 中的元素则是“多重切向量场”。

1.4 一些例子

如果 $K \hookrightarrow A$ 为嵌入, 那么我们可以更加方便地计算 Hochschild (上) 同调:

定义 1.4.1. (约化 Bar-复形) (*reduced Bar-complex*)

对于 K -代数 A , 如果 $K \hookrightarrow A$, 那么考虑 K -模

$$\bar{A} := A/K$$

我们定义如下的约化 Bar-复形 $(\bar{B}_\bullet A, b)$:

$$\bar{B}_n A := A \otimes \bar{A}^{\otimes n} \otimes A \quad \forall i \geq 0$$

边缘算子 $b: \bar{B}_n A \rightarrow \bar{B}_{n-1} A$ 如下定义:

$$\begin{aligned} b(a_0 \otimes (\bar{a}_1 \otimes \cdots \otimes \bar{a}_n) \otimes a_{n+1}) &:= (a_0 a_1) \otimes (\bar{a}_2 \otimes \cdots \otimes \bar{a}_n) \otimes a_{n+1} \\ &+ \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^i a_0 \otimes (\bar{a}_1 \otimes \cdots \otimes (\bar{a}_i \bar{a}_{i+1}) \otimes \cdots \otimes \bar{a}_n) \otimes a_{n+1} \\ &+ (-1)^n a_0 \otimes (\bar{a}_1 \otimes \cdots \otimes \bar{a}_{n-1}) \otimes (a_n a_{n+1}) \end{aligned}$$

注意到 $\bar{B}_\bullet A$ 是 $B_\bullet A$ 的商模:

$$\bar{B}_n A = \frac{B_n A}{\{a_0 \otimes (a_1 \otimes \cdots \otimes a_{i-1} \otimes 1 \otimes a_{i+1} \otimes \cdots \otimes a_n) \otimes a_{n+1}\}}$$

容易发现约化 Bar-复形的“ b ”正是 Bar-复形的 b . 但是我们要验证 b 的良好性, 即与代表元选取无关。这是容易验证的。于是我们得到以下链复形:

$$\bar{B}_\bullet A \rightarrow A \rightarrow 0$$

与之前 Bar-复形完全类似, 我们容易验证此复形也是正合的。只需构造同伦算子

$$\begin{aligned} h: \bar{B}_{n-1} A &\rightarrow \bar{B}_n A \\ a_0 \otimes (\bar{a}_1 \otimes \cdots \otimes \bar{a}_{n-1}) \otimes a_n &\mapsto 1 \otimes (\bar{a}_0 \otimes \bar{a}_1 \otimes \cdots \otimes \bar{a}_n) \otimes a_{n+1} \end{aligned}$$

验证 $bh + hb = 1$ 即可。

定义 1.4.2. (约化 Hochschild (上) 链复形)

对于双 A -模 M ，我们令

$$\begin{aligned}\overline{C}_\bullet(A, M) &:= M \otimes_{A^e} \overline{B}_\bullet A \cong M \otimes \overline{A}^{\otimes \bullet} \\ \overline{C}^\bullet(A, M) &:= \operatorname{Hom}_{A^e}(\overline{B}_\bullet A, M) \cong \operatorname{Hom}(\overline{A}^{\otimes \bullet}, M)\end{aligned}$$

称之为关于 M 的约化 Hochschild (上) 链复形。

事实上，约化 Hochschild (上) 链复形的 (上) 同调自然同构于 Hochschild (上) 同调——这是由以下代数引理保证的：

引理 1.4.3. 条件同上，则商映射

$$\pi_\bullet : C_\bullet(A, M) \rightarrow \overline{C}_\bullet(A, M)$$

所诱导的链映射

$$\pi_\bullet : (C_\bullet(A, M), d) \rightarrow (\overline{C}_\bullet(A, M), d)$$

为拟同构。

证明. 注意链映射 π_\bullet 为满态射，只需再证明其核复形

$$\ker \pi_\bullet$$

是正合的即可。我们承认之（似乎不太好证）。 \square

注意上述引理也适用于 Hochschild 上链复形的情形，完全类似，不再赘述。从而我们立刻有如下推论：

推论 1.4.4. 对于 K -代数 A ，如果 $K \hookrightarrow A$ 为嵌入，则有自然同构：

$$\begin{aligned}H_\bullet(A, M) &\cong H_\bullet(\overline{C}_\bullet(A, M)) \\ H^\bullet(A, M) &\cong H^\bullet(\overline{C}^\bullet(A, M))\end{aligned}$$

关于 (约化) Bar-复形，我们还有另一种理解方式：关于 A 的 (约化) Bar-复形是 A 与某个微分分次代数的自由乘积。

定义 1.4.5. (微分分次代数)

\mathbb{Z} -分次 K -代数

$$A := \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} A_n$$

称为微分分次代数 (differential graded algebra), 若它配以 K -线性算子 $d: A \rightarrow A$, 并且满足:

$$\begin{cases} d(A_n) \subseteq A_{n+1} & \forall n \in \mathbb{Z} \\ d^2 = 0 \\ d(\alpha\beta) = (d\alpha)\beta + (-1)^{\deg \alpha} \alpha(d\beta) & \forall \alpha, \beta \in A, \text{ 并且 } \alpha \text{ 是齐次元} \end{cases}$$

对于微分分次代数 (A, d) , 由于 A 的分次以及 $d^2 = 0$, 从而自然有上链复形

$$\cdots \rightarrow A_{-1} \xrightarrow{d} A_0 \xrightarrow{d} A_1 \rightarrow \cdots$$

我们将此上链复形也记为 (A, d) .

微分分次代数最直接的例子是, 对于光滑流形 X , 考虑 $A := \Omega^\bullet(X)$ 为 X 上的微分形式。 A 上的乘法即为微分形式的外积 \wedge , 微分结构即为外微分 d .

我们可以适当修改微分分次代数的定义, 将条件 “ $d(A_n) \subseteq A_{n+1}$ ” 改为 “ $d(A_n) \subseteq A_{n-1}$ ”, 此时的微分算子我们习惯记为 “ ∂ ”. 对于这样的微分分次代数 (A, ∂) , 它可以被视为链复形。

例子 1.4.6. 我们考虑如下 K -代数:

$$A := K[\varepsilon] := K \oplus K\varepsilon \oplus K\varepsilon^2 \oplus \cdots$$

其中 ε 为形式变量, 并且规定 $\deg \varepsilon = 1$, 由此诱导出 $K[\varepsilon]$ 的分次结构。其微分算子 ∂_ε 由以下诱导:

$$\partial_\varepsilon(1) = 0 \quad \partial_\varepsilon(\varepsilon) = 1$$

注意 $\deg \varepsilon = 1$, 按照微分代数的定义可计算出

$$\partial_\varepsilon(\varepsilon^2) = \partial_\varepsilon(\varepsilon)\varepsilon + (-1)^{\deg \varepsilon} \varepsilon \partial_\varepsilon(\varepsilon) = \varepsilon - \varepsilon = 0$$

一般地, 对于非负整数 n 我们有

$$\partial_\varepsilon(\varepsilon^n) = \begin{cases} 0 & n \text{ 为偶数} \\ \varepsilon^{n-1} & n \text{ 为奇数} \end{cases}$$

从而链复形 $(K[\varepsilon], \partial_\varepsilon)$:

$$\cdots \rightarrow K\varepsilon^4 \xrightarrow{0} K\varepsilon^3 \xrightarrow{1} K\varepsilon^2 \xrightarrow{0} K\varepsilon \xrightarrow{1} K \rightarrow 0$$

是正合的。其中 $1 : K\varepsilon^{2n+1} \rightarrow K\varepsilon^{2n}$ 将 ε^{2n+1} 映为 ε^{2n} 。

众所周知，对于两个 K -代数 A, B ，我们可以谈论它们的自由乘积（free product） $A * B$ 。若 $A = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} A_n$ 是微分分次代数，其微分算子为 d ，则容易知道 $A * B$ 自然也有微分分次代数结构：

$$\begin{cases} \deg b = 0 & \forall b \in B \\ \deg a = n & \forall a \in A_n \subseteq A \\ db = 0 & \forall b \in B \end{cases}$$

容易知道 $A * B$ 中的 N 次齐次元必形如以下元素的有限和：

$$b_1 a_1 b_2 a_2 \cdots b_m a_m b_{m+1} \quad (b_i \in B, a_i \in A_{n_i}, \sum_{i=1}^m n_i = N)$$

性质 1.4.7. 对于 K -代数 A ，则有链复形的同构

$$(B_\bullet A \rightarrow A, b) \cong (A * K[\varepsilon], \partial_\varepsilon)$$

其中 $(K[\varepsilon], \partial_\varepsilon)$ 为例子 1.4.6 当中的微分分次代数，视为链复形；同构映射为

$$\begin{aligned} \varphi_n : B_n A &\rightarrow (A * K[\varepsilon])_n \\ a_0 \otimes (a_1 \otimes \cdots \otimes a_n) \otimes a_{n+1} &\mapsto a_0 \varepsilon a_1 \varepsilon a_2 \cdots \varepsilon a_n \varepsilon a_{n+1} \end{aligned}$$

这给出了 Bar-复形的又一种理解方式。

证明. 容易验证 φ_n 为 K -模同构，且逆映射 φ_n^{-1} 由以下诱导：

$$\varepsilon^n \mapsto \underbrace{1\varepsilon 1\varepsilon 1 \cdots 1\varepsilon 1}_{n \uparrow \varepsilon}$$

然后只需验证 $\varphi_\bullet : (B_\bullet \rightarrow A, b) \rightarrow (A * K[\varepsilon], \partial_\varepsilon)$ ：是链映射，也就是要验证交换关系 $\varphi \circ b = \partial_\varepsilon \circ \varphi$

$$\begin{array}{ccc} B_n A & \xrightarrow{b} & B_{n-1} A \\ \downarrow \varphi & & \downarrow \varphi \\ (K[\varepsilon] * A)_n & \xrightarrow{\partial_\varepsilon} & (K[\varepsilon] * A)_{n-1} \end{array}$$

而这容易验证，验证如下：

$$\begin{aligned}
& \varphi \circ b(a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n \otimes a_{n+1}) \\
&= \varphi \left(\sum_{k=0}^n (-1)^k a_0 \otimes \cdots \otimes (a_k a_{k+1}) \otimes \cdots \otimes a_{n+1} \right) \\
&= \sum_{k=0}^n (-1)^k a_0 \varepsilon a_1 \varepsilon \cdots \varepsilon a_{n+1} \\
&= \partial_\varepsilon (a_0 \varepsilon a_1 \varepsilon \cdots a_n \varepsilon a_{n+1}) \\
&= \partial_\varepsilon \circ \varphi(a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n \otimes a_{n+1})
\end{aligned}$$

□

我们还可以考虑 $(K[\varepsilon], \partial_\varepsilon)$ 的商代数 $K[\varepsilon]/\varepsilon^2$ ，易知 $(K[\varepsilon]/\varepsilon^2, \partial_\varepsilon)$ 也构成微分分次代数，从而也通过微分算子 ∂_ε 视为链复形。在此代数中， $\varepsilon^2 = 0$ 。

类似地，我们可以给出约化 Bar-复形的另一种理解方式：

性质 1.4.8. 对于 K -代数 A ，则有链复形同构

$$(\overline{B}_\bullet A \rightarrow A, b) \cong (A * K[\varepsilon]/\varepsilon^2, \partial_\varepsilon)$$

只需注意到 $A * K[\varepsilon]/\varepsilon^2$ 当中的 n 次齐次元必形如以下元素的有限和：

$$a_0 \varepsilon a_1 \varepsilon \cdots a_n \varepsilon a_{n+1} \quad (a_i \in A)$$

证明. 完全类似。事实上此链复形同构映射由 $\varphi_n : B_n A \rightarrow (A * K[\varepsilon])_n$ 诱导，其良定性由下式保证：对任意 $1 \leq i \leq n$ ，

$$\begin{aligned}
& \varphi_n(a_0 \otimes \cdots \otimes a_{i-1} \otimes 1 \otimes a_{i+1} \otimes \cdots \otimes a_{n+1}) \\
&= a_0 \varepsilon a_1 \cdots a_{i-1} \varepsilon 1 \varepsilon a_{i+1} \cdots \varepsilon a_{n+1} \\
&= a_0 \varepsilon a_1 \cdots a_{i-1} 1 \varepsilon^2 a_{i+1} \cdots \varepsilon a_{n+1} \\
&= 0 \pmod{\varepsilon^2}
\end{aligned}$$

□

本节最后简单介绍以下 Hochschild（上）同调与其它常见的（上）同调理论的关系。

例子 1.4.9. （群的上同调）

设 G 是一个群， $M \in \text{Rep}(G)$ 为群 G 的一个左 K -表示，则有 G -模链复形

$$0 \rightarrow M \xrightarrow{\delta} C^1(G, M) \xrightarrow{\delta} C^2(G, M) \xrightarrow{\delta} \cdots$$

其中

$$C^n(G, M) := \text{Hom}(G^n, M) = \{f : G^n \rightarrow M\}$$

并且微分算子 δ 满足

$$\begin{cases} \delta(m)(g) &= g \cdot m - m \\ (\delta f)(g_0, g_1, \dots, g_n) &= g_0 \cdot f(g_1, g_2, \dots, g_n) \\ &\quad - \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k f(g_1, \dots, g_k g_{k+1}, \dots, g_n) \\ &\quad - (-1)^n f(g_0, g_1, \dots, g_{n-1}) \end{cases}$$

容易验证 $\delta^2=0$. 此链复形的上同调

$$H^\bullet(G, M) := H^\bullet(C^\bullet(G, M), \delta)$$

称之为群的上同调 (*group cohomology*)

由 δ 的表达式容易看出, 群的上同调与 Hochschild 上同调有以下关系:

性质 1.4.10. 设 G 是一个群, M 为群 G 的一个左 K -模, 考虑群代数 $A := K[G]$, 于是 M 自然有左 A -模结构。那么有同构:

$$H^\bullet(G, M) \cong H^\bullet(K[G], M)$$

其中左边为群 G 关于 M 的上同调, 右边为群代数 $K[G]$ 关于 M 的 *Hochschild* 上同调。

注意 M 仅仅是左 $K[G]$ -模, 并没有双 $K[G]$ -模结构呀, 怎么谈论 Hochschild 上同调?

(强行规定 G 在 M 上的右作用恒为 1, 通过 K -线性扩张得到 $K[G]$ 在 M 的右作用, 这样就得到 M 的双 $K[G]$ -模结构了。)

证明. 注意到 $\text{Hom}(G^n, M)$ 中的元素可以自然地 K -线性延拓为 $\text{Hom}(K[G]^n, M)$ 中的元素, 这给出它们之间的同构。然后注意到 $A = K[G]$ 的 Hochschild 上链复形的微分算子的显式表达式, (见定义 1.3.2 的下方) 它与群上同调相应的上链复形的微分算子显式表达式 “相同”。细节从略。 \square

若熟悉李代数同调, 我们可以将李代数同调与其泛包络代数的 Hochschild 同调联系起来:

例子 1.4.11. (李代数同调) 对于李代数 \mathfrak{g} , M 为李代数 \mathfrak{g} 的一个左 K -模。令 $A := \mathcal{U}(\mathfrak{g})$ 为 \mathfrak{g} 的泛包络代数, 则 A 自然有左 A -模结构。(再通过某种 “比较平凡” 的方式给出右作用? 与上例类似?) 则有同构

$$H_\bullet(\mathcal{U}(\mathfrak{g}), M) \cong H_\bullet^{\text{Lie}}(\mathfrak{g}, M)$$

其中左边是 A 关于 M 的 *Hochschild* 同调, 右边是李代数同调。

并没有在此叙述李代数同调的定义。留给感兴趣者。此处从略。

事实上, 也可以考虑群的同调、李代数上同调, 它们也有对应的 Hochschild 同调、上同调。

第2章 循环同调

与上一章一样，我们仍假设 K 为特征零的含么交换环， A 为 K -代数，且作为 K -模是投射的。不过，在本章我们新增一条假定：

$$\mathbb{Q} \hookrightarrow K$$

也就是说，有理数域能够嵌入到 K 中。（事实上，任何特征零的域都满足此假定。）

2.1 Connes 复形 $C_\bullet^\lambda(A)$

回顾对于 K -代数 A ，若 A 交换，则其 Hochschild 同调 $\mathrm{HH}_\bullet(A)$ 可以被理解为“空间” A 上的“微分形式”。本节我们进一步研究 $\mathrm{HH}_\bullet(A)$ 。

记号 2.1.1. 对于 K -代数 A ，双 A -模 $M = A$ 。考虑其 Hochschild 链复形 $C_\bullet(A) := C_\bullet(A, A)$ ：

$$C_n(A) := C_n(A, A) \cong A^{\otimes n+1}$$

(回顾定义 1.2.5). 我们考虑群 $\mathbb{Z}/(n+1)\mathbb{Z}$ 在 $C_n(A)$ 上的如下左 K -作用：记 $\mathbb{Z}/(n+1)\mathbb{Z}$ 的生成元为 λ ，则

$$\begin{aligned} \lambda : C_n(A) &\rightarrow C_n(A) \\ a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n &\mapsto (-1)^n a_n \otimes a_0 \otimes \cdots \otimes a_{n-1} \end{aligned}$$

考虑 $C_n(A)$ 模掉此群作用，所得的商 K -模记为

$$C_n^\lambda(A) := C_n(A)/(1 - \lambda)$$

其中的元素称之为循环余不变量 (*cyclic co-invariant*)。

容易验证，

$$\lambda^{n+1} a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n = (-1)^{n(n+1)} a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n = a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n$$

即 $\lambda^{n+1} = \mathrm{id}$. 可见这的确是 $\mathbb{Z}/(n+1)\mathbb{Z}$ 的作用。

回顾 Bar-复形，我们可以直观地视为“直线上依次排列质点，相邻两两碰撞”；而在这里，商掉 λ 循环作用后，直观地更像是“圆周上排列质点”。

我们将说明，Hochschild 链复形 $C_\bullet(A)$ 的边缘算子 b ，沿商映射 $C_\bullet(A) \twoheadrightarrow C_\bullet^\lambda(A)$ 下降，诱导了 $C_\bullet^\lambda(A)$ 的链复形结构（称之为 Connes 复形）。

引理 2.1.2. 对于 K -代数 A ，我们定义算子 $b' : C_\bullet(A) \rightarrow C_{\bullet-1}(A)$ 如下：

$$\begin{aligned} b' : C_n(A) &\rightarrow C_{n-1}(A) \\ a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n &\mapsto \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k a_0 \otimes \cdots \otimes (a_k a_{k+1}) \otimes \cdots \otimes a_n \end{aligned}$$

则成立：

- (1) $b' \circ b' = 0$,
- (2) 对任意 $n \geq 1$ ，则以下图表交换：

$$\begin{array}{ccc} C_n(A) & \xrightarrow{b'} & C_{n-1}(A) \\ \downarrow 1-\lambda & & \downarrow 1-\lambda \\ C_n(A) & \xrightarrow{b} & C_{n-1}(A) \end{array}$$

证明. 注意到有同构 $C_n(A) \cong B_n A (\cong A^{\otimes n+1})$ ，其中 $B_\bullet A$ 为 Bar-复形；容易看出这里定义的 b' 在此同构下，正是 Bar 复形当中的边缘算子，从而 $b' \circ b' = 0$ ，也就是说 $(C_\bullet(A), b')$ 是一个链复形，并且同构于 Bar-复形 $(B_\bullet A, b)$ 。（这里有轻微的记号混用：Bar-复形 $(B_\bullet A, b)$ 当中的“ b ”并不是本引理当中 Hochschild 链复形 $(C_\bullet(A), b)$ 当中的“ b ”，前者在此是临时记号。）

我们再来看 (2)。回顾 $b : C_n(A) \rightarrow C_{n-1}(A)$ 的显式表达式（见定义 1.2.5 的下方，并且令其中 $M = a$ 以及 $m = a_0$ ）（注意此图中的 b 与 b' 并不是同一个映射，它们的具体表达式相差一

项), 直接验算之:

$$\begin{aligned}
& (1 - \lambda) \circ b'(a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n) \\
&= (1 - \lambda) \left(\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k a_0 \otimes \cdots \otimes (a_k a_{k+1}) \otimes \cdots \otimes a_n \right) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k a_0 \otimes \cdots \otimes (a_k a_{k+1}) \otimes \cdots \otimes a_n \\
&\quad + \sum_{k=0}^{n-2} (-1)^{k+n} a_n \otimes a_0 \otimes \cdots \otimes (a_k a_{k+1}) \otimes \cdots \otimes a_{n-1} \\
&\quad - (a_{n-1} a_n) \otimes a_0 \otimes \cdots \otimes a_{n-2} \\
&= b(a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n) - (-1)^n (a_n a_0) \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_{n-1} \\
&\quad + (-1)^n \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k a_n \otimes a_0 \otimes \cdots \otimes (a_k a_{k+1}) \otimes \cdots \otimes a_{n-1} \\
&\quad - (a_{n-1} a_n) \otimes a_0 \otimes \cdots \otimes a_{n-2} \\
&= b(a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n - (-1)^n a_n \otimes a_0 \otimes \cdots \otimes a_{n-1}) \\
&= b \circ (1 - \lambda)(a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n)
\end{aligned}$$

也就是说,

$$(1 - \lambda) \circ b' = b \circ (1 - \lambda)$$

从而此图表交换, 证毕。 □

此图表的交换关系也可改写为

$$[b, \lambda] = (1 - \lambda) \circ (b - b')$$

其中 $[b, \lambda] := b \circ \lambda - \lambda \circ b$.

此引理给出了链复形 $(C_\bullet(A), b')$ 与 $(C_\bullet(A), b)$ 之间的链映射:

$$(1 - \lambda)_\bullet : (C_\bullet(A), b') \rightarrow (C_\bullet(A), b)$$

然而注意到

$$C_n^\lambda(A) := C_n(A) / (1 - \lambda) = \text{coker}(1 - \lambda)_n$$

于是我们 (在由 K -模链复形构成范畴当中) 考虑链映射 $(1 - \lambda)_\bullet$ 的余核, 这给出了 $C_\bullet^\lambda(A)$ 的链复形结构:

定义 2.1.3. (*Connes 复形*) 对于 K -代数 A , 考虑链映射

$$(1 - \lambda)_\bullet : (C_\bullet(A), b') \rightarrow (C_\bullet(A), b)$$

的余核链复形

$$(C_{\bullet}^{\lambda}(A), b^{\lambda}) := \text{coker}[(1 - \lambda)_{\bullet}]$$

称其为 **Connes** 复形。并且记

$$H_{\bullet}^{\lambda}(A) := H_{\bullet}(C_{\bullet}^{\lambda}(A))$$

称之为 A 的循环同调 (*cyclic homology*) .

也就是说，有如下的交换图表：

$$\begin{array}{ccccccc}
 \cdots & \longrightarrow & C_{n+1} & \xrightarrow{b'} & C_n & \xrightarrow{b'} & C_{n-1} \longrightarrow \cdots \\
 & & \downarrow 1-\lambda & & \downarrow 1-\lambda & & \downarrow 1-\lambda \\
 \cdots & \longrightarrow & C_{n+1} & \xrightarrow{b} & C_n & \xrightarrow{b} & C_{n-1} \longrightarrow \cdots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 \cdots & \longrightarrow & C_{n+1}^{\lambda} & \xrightarrow{b^{\lambda}} & C_n^{\lambda} & \xrightarrow{b^{\lambda}} & C_{n-1}^{\lambda} \longrightarrow \cdots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & 0 & & 0 & & 0
 \end{array}$$

此交换图表每一横行都为链复形，其中第三横行为 Connes 复形；每一列都是右短正合的。并且容易知道：Connes 复形的边缘算子 b^{λ} 正是 Hochschild 链复形的边缘算子 b 沿商映射 $C_{\bullet}(A) \twoheadrightarrow C_{\bullet}^{\lambda}(A)$ 的下降。

2.2 循环双复形 $CC_{\bullet\bullet}(A)$

引理 2.2.1. (平均算子) 对于任意 K -代数 A ，以及 $n \geq 0$ ，引入平均算子 $\mathcal{N} : C_n(A) \rightarrow C_n(A)$ ：

$$\mathcal{N} := 1 + \lambda + \lambda^2 + \cdots + \lambda^n$$

则此算子满足以下性质：

$$(1) \quad b' \mathcal{N} = \mathcal{N} b$$

(2) $(1 - \lambda) \mathcal{N} = \mathcal{N} (1 - \lambda) = 0$. 此外，如果有理数域 $\mathbb{Q} \hookrightarrow K$ ，那么对于任意 $n \geq 0$ ，以下链复形是正合的：

$$\cdots \rightarrow C_n(A) \xrightarrow{\mathcal{N}} C_n(A) \xrightarrow{1-\lambda} C_n(A) \xrightarrow{\mathcal{N}} C_n(A) \xrightarrow{1-\lambda} C_n(A) \twoheadrightarrow C_n^{\lambda}(A) \rightarrow 0$$

证明. (1) 任意固定 $n \geq 1$, 为了区分算子在不同空间的作用, 我们采用临时记号

$$\begin{cases} \lambda : C_n(A) \rightarrow C_n(A) \\ \bar{\lambda} : C_{n-1}(A) \rightarrow C_{n-1}(A) \end{cases} \quad \begin{cases} \mathcal{N} := 1 + \lambda + \cdots + \lambda^n \\ \bar{\mathcal{N}} := 1 + \bar{\lambda} + \cdots + \bar{\lambda}^{n-1} \end{cases}$$

则在此记号下我们需要证 $b'\mathcal{N} = \bar{\mathcal{N}}b$.

定义缩并算子

$$\begin{aligned} s : C_n(A) &\rightarrow C_{n-1}(A) \\ a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n &\mapsto (a_0 a_1) \otimes \cdots \otimes a_n \end{aligned}$$

则容易验证 (稍微注意一下正负号, 确实都是正号)

$$b = \sum_{k=0}^n \bar{\lambda}^k s \lambda^{-k} \quad b' = \sum_{k=0}^{n-1} \bar{\lambda}^k s \lambda^{-k}$$

于是有

$$b'\mathcal{N} = \left(\sum_{k=0}^{n-1} \bar{\lambda}^k s \lambda^{-k} \right) \left(\sum_{l=0}^n \lambda^l \right) = \sum_{\substack{0 \leq k \leq n-1 \\ 0 \leq l \leq n}} \bar{\lambda}^k s \lambda^l$$

同理也有

$$\bar{\mathcal{N}}b = \sum_{\substack{0 \leq k \leq n-1 \\ 0 \leq l \leq n}} \bar{\lambda}^k s \lambda^l$$

从而 $b'\mathcal{N} = \bar{\mathcal{N}}b$.

(2) 给定 $n \geq 0$, 注意到 $\lambda^{n+1} = 1$, 从而

$$(1 - \lambda)\mathcal{N} = (1 - \lambda)(1 + \lambda + \cdots + \lambda^n) = 1 - \lambda^{n+1} = 0$$

同理 $\mathcal{N}(1 - \lambda) = 0$. 因此该图表是链复形, 只需再验证正合性。

现在假设 \mathbb{Q} 是 K 的子环. 我们构造如下链同伦:

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & C_n(A) & \xrightarrow{\mathcal{N}} & C_n(A) & \xrightarrow{1-\lambda} & C_n(A) & \xrightarrow{\mathcal{N}} & C_n(A) & \longrightarrow & \cdots \\ & & \downarrow \text{id} & \nearrow g & \downarrow \text{id} & \nearrow f & \downarrow \text{id} & \nearrow g & \downarrow \text{id} & & \\ \cdots & \longrightarrow & C_n(A) & \xrightarrow{\mathcal{N}} & C_n(A) & \xrightarrow{1-\lambda} & C_n(A) & \xrightarrow{\mathcal{N}} & C_n(A) & \longrightarrow & \cdots \end{array}$$

其中 $f, g : C_n(A) \rightarrow C_n(A)$ 定义为

$$\begin{cases} f := \frac{1}{n+1}(\lambda^{n-1} + 2\lambda^{n-2} + 3\lambda^{n-3} + \cdots + n) \\ g := \frac{1}{n+1} \end{cases}$$

(利用了 $\mathbb{Q} \hookrightarrow K$) 则容易验证

$$f(1 - \lambda) + \mathcal{N}g = g\mathcal{N} + (1 - \lambda)f = 1$$

从而证毕. □

特别地，当 K 为域时（注意我们总假定 $\text{char } K = 0$ ）成立正合性。链同伦 f, g 的构造来自于（关于变元 λ 的多项式的）欧几里得辗转相除法。

由此引理，我们可构造出如下的循环双复形（cyclic bicomplex），记为 $CC_{\bullet\bullet}(A)$ ：

$$\begin{array}{ccccccc}
 \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
 \downarrow b & & \downarrow -b' & & \downarrow b & & \downarrow -b' \\
 C_2(A) & \xleftarrow{1-\lambda} & C_2(A) & \xleftarrow{\mathcal{N}} & C_2(A) & \xleftarrow{1-\lambda} & C_2(A) \xleftarrow{\dots} \\
 \downarrow b & & \downarrow -b' & & \downarrow b & & \downarrow -b' \\
 C_1(A) & \xleftarrow{1-\lambda} & C_1(A) & \xleftarrow{\mathcal{N}} & C_1(A) & \xleftarrow{1-\lambda} & C_1(A) \xleftarrow{\dots} \\
 \downarrow b & & \downarrow -b' & & \downarrow b & & \downarrow -b' \\
 C_0(A) & \xleftarrow{1-\lambda} & C_0(A) & \xleftarrow{\mathcal{N}} & C_0(A) & \xleftarrow{1-\lambda} & C_0(A) \xleftarrow{\dots}
 \end{array}$$

其中对于任意 $p, q \geq 0$ ， $CC_{p,q}(A) = C_p(A)$ 为该图表的从下往上第 p 行，从左往右第 q 列的节点；此图表的偶数列与奇数列 $(C_{\bullet}(A), b)$ 与 $(C_{\bullet}(A), -b')$ 交替。并且注意到，此图表不是交换的，而是对于其中每一个方框都满足反交换性。

我们回顾一些同调代数工具：

定义 2.2.2. （双复形的全复形）

对于任意的含么交换环 K （这里暂时不必假定 $\text{char } K = 0$ ），以及 K -模双复形 $(A_{\bullet\bullet}, d, \partial)$ ：

$$\begin{array}{ccccccc}
 \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 A_{2,0} & \xleftarrow{\partial_{2,1}} & A_{2,1} & \xleftarrow{\partial_{2,2}} & A_{2,2} & \xleftarrow{\dots} & \dots \\
 \downarrow d_{2,0} & & \downarrow d_{2,1} & & \downarrow d_{2,2} & & \downarrow \\
 A_{1,0} & \xleftarrow{\partial_{1,1}} & A_{1,1} & \xleftarrow{\partial_{1,2}} & A_{1,2} & \xleftarrow{\dots} & \dots \\
 \downarrow d_{1,0} & & \downarrow d_{1,1} & & \downarrow d_{1,2} & & \downarrow \\
 A_{0,0} & \xleftarrow{\partial_{0,1}} & A_{0,1} & \xleftarrow{\partial_{0,2}} & A_{0,2} & \xleftarrow{\dots} & \dots
 \end{array}$$

即：

$$\begin{cases} d_{p,q} : A_{p,q} \rightarrow A_{p-1,q} \\ \partial_{p,q} : A_{p,q} \rightarrow A_{p,q-1} \end{cases}$$

使得该图表每一行、每一列都是链复形，并且满足反交换关系

$$\partial_{p-1,q} \circ d_{p,q} + d_{p,q-1} \circ \partial_{p,q} = 0$$

则我们定义双复形 $A_{\bullet\bullet}$ 的全复形 (total complex) $(\text{Tot}_\bullet(A_{\bullet\bullet}), d)$ 如下:

$$\begin{cases} \text{Tot}_n(A_{\bullet\bullet}) &:= \bigoplus_{p+q=n} A_{p,q} \\ d_n &:= \sum_{p+q=n} (d_{p,q} + \partial_{p,q}) \end{cases}$$

对于两个双复形 $A_{\bullet\bullet}$ 与 $A'_{\bullet\bullet}$, 我们可以去定义双复形之间的态射 $f_{\bullet\bullet} : A_{\bullet\bullet} \rightarrow A'_{\bullet\bullet}$, 进而考虑双复形范畴。双复形的态射自然诱导了相应的全复形之间的链映射, 也就是说 Tot 具有函子性。我们还有以下同调代数工具:

引理 2.2.3. 设 $f_{\bullet\bullet} : A_{\bullet\bullet} \rightarrow A'_{\bullet\bullet}$ 为双复形之间的态射。如果对于任意 $n \geq 0$, 链映射

$$f_{n,\bullet} : A_{n,\bullet} \rightarrow A'_{n,\bullet}$$

为拟同构 (quasi-isomorphism), (即它诱导的任意阶同调对象之间的态射均为同构), 那么链映射

$$\text{Tot}_\bullet(f_{\bullet\bullet}) : \text{Tot}_\bullet(A_{\bullet\bullet}) \rightarrow \text{Tot}_\bullet(A'_{\bullet\bullet})$$

也为拟同构。

证明. 同调代数工具, 承认之。 □

我们回到循环双复形 $\text{CC}_{\bullet\bullet}(A)$. 由上述同调代数工具, 我们可以给出循环同调 $H_\bullet^\lambda(A) := H_\bullet(\text{C}_\bullet^\lambda(A))$ 的另一种定义:

定理 2.2.4. 对于 K -代数 A , 假设 $\mathbb{Q} \hookrightarrow K$, 记

$$HC_\bullet(A) := H_\bullet(\text{Tot}_\bullet(\text{CC}_{\bullet\bullet}(A)))$$

为 A 的循环双复形的全复形的同调, 那么有自然的同构

$$HC_\bullet(A) \cong H_\bullet^\lambda(A)$$

证明. 对于循环双复形 $CC_{\bullet\bullet}(A)$, 我们再考虑另一个双复形 $CC'_{\bullet\bullet}(A)$ 如下:

$$\begin{array}{ccccccc}
 \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 C_2^\lambda(A) & \leftarrow & 0 & \leftarrow & 0 & \leftarrow & 0 \leftarrow \cdots \\
 \downarrow b_2^\lambda & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 C_1^\lambda(A) & \leftarrow & 0 & \leftarrow & 0 & \leftarrow & 0 \leftarrow \cdots \\
 \downarrow b_1^\lambda & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 C_0^\lambda(A) & \leftarrow & 0 & \leftarrow & 0 & \leftarrow & 0 \leftarrow \cdots
 \end{array}$$

考虑双复形之间的态射

$$f_{\bullet\bullet} : CC_{\bullet\bullet}(A) \rightarrow CC'_{\bullet\bullet}(A)$$

其中 $f_{n,0} : C_n(A) \rightarrow C_n^\lambda(A)$ 为商映射. 由引理 2.2.1 知 $CC_{\bullet\bullet}(A)$ 的每一行都是正合的, 从而容易验证 $f_{\bullet\bullet}$ 满足引理 2.2.3 的使用条件, 因此我们有同构

$$H_\bullet(\text{Tot}_\bullet(CC_{\bullet\bullet}(A))) \cong H_\bullet(\text{Tot}_\bullet(CC'_{\bullet\bullet}(A)))$$

上式左边, 由定义, 即为 $HC_\bullet(A)$; 而再注意到 $\text{Tot}_\bullet(CC'_{\bullet\bullet})$ 正是 Connes 复形 C_\bullet^λ , 从而上式右边为循环同调 $H_\bullet^\lambda(A)$. \square

也就是说, 循环同调 (Connes 复形的同调) 自然同构于循环双复形的全复形的同调。

2.3 Connes 算子 B

我们将给出循环同调的更多等价定义方式, 并计算一些具体例子. 本节均假定 $\mathbb{Q} \hookrightarrow K$ (甚至直接把 K 当成特征零的域). 我们需要更多的同调代数工具:

引理 2.3.1. (杀掉可缩复形)

对于 K -模链复形

$$\cdots \rightarrow A_{n+1} \oplus B_{n+1} \xrightarrow{d} A_n \oplus B_n \xrightarrow{d} A_{n-1} \oplus B_{n-1} \rightarrow \cdots$$

其中

$$d = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

并且 (B_\bullet, δ) 是可缩链复形, 其同伦逆

$$h : B_\bullet \rightarrow B_{\bullet+1}$$

使得 $h\delta + \delta h = 1$. 那么下述图表交换:

$$\begin{array}{ccccccc}
 \cdots & \longrightarrow & A_{n+1} & \xrightarrow{\alpha - \beta h \gamma} & A_n & \xrightarrow{\alpha - \beta h \gamma} & A_{n-1} \longrightarrow \cdots \\
 & & \downarrow \varphi & & \downarrow \varphi & & \downarrow \varphi \\
 \cdots & \longrightarrow & A_{n+1} \oplus B_{n+1} & \xrightarrow{d} & A_n \oplus B_n & \xrightarrow{d} & A_{n-1} \oplus B_{n-1} \longrightarrow \cdots
 \end{array}$$

并且此图表的每一行都为链复形, 并且链映射

$$\varphi := \begin{pmatrix} 1 \\ -h\gamma \end{pmatrix}$$

为拟同构。

证明. 注意到 $\delta^2 = 0$, 以及

$$0 = d^2 = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} \alpha^2 + \beta\gamma & \alpha\beta + \beta\gamma \\ \gamma\alpha + \delta\gamma & \gamma\beta + \delta^2 \end{pmatrix}$$

从而我们有

$$\begin{cases} \alpha^2 &= -\beta\gamma \\ \alpha\beta &= -\beta\delta \\ \gamma\alpha &= -\delta\gamma \\ \gamma\beta &= 0 \end{cases}$$

再注意到 $h\delta + \delta h = 1$, 直接计算验证可知 φ_\bullet 的确为链复形之间的链映射。细节略。

再注意链映射

$$\varphi_\bullet : (A_\bullet, \alpha - \beta h \gamma) \rightarrow (A_\bullet \oplus B_\bullet, d)$$

为单射, 并且其余核

$$\operatorname{coker} \varphi_\bullet \cong (B_\bullet, \delta)$$

是正合的, 因此 φ_\bullet 为拟同构。 □

这个引理的功能是, 如果给定的链复形 $(A_\bullet \oplus B_\bullet, d)$ 当中“含有正合的部分” (B_\bullet, δ) , 那我们可以把这个“正合的部分”剔除掉, 得到一个“不那么冗余”的链复形 $(A_\bullet, \alpha - \beta h \delta)$, 并且此复形与原来的复形的各阶同调自然同构。

我们将此引理用于循环双复形 $CC_{\bullet\bullet}(A)$ 的全复形 $\operatorname{Tot}_\bullet(CC_{\bullet\bullet}(A))$ 上。回顾 $CC_{\bullet\bullet}(A)$ 为如下双复形:

$$\begin{array}{ccccccc}
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
\downarrow b & & \downarrow -b' & & \downarrow b & & \downarrow -b' \\
C_2(A) & \xleftarrow{1-\lambda} & C_2(A) & \xleftarrow{\mathcal{N}} & C_2(A) & \xleftarrow{1-\lambda} & C_2(A) \leftarrow \dots \\
\downarrow b & & \downarrow -b' & & \downarrow b & & \downarrow -b' \\
C_1(A) & \xleftarrow{1-\lambda} & C_1(A) & \xleftarrow{\mathcal{N}} & C_1(A) & \xleftarrow{1-\lambda} & C_1(A) \leftarrow \dots \\
\downarrow b & & \downarrow -b' & & \downarrow b & & \downarrow -b' \\
C_0(A) & \xleftarrow{1-\lambda} & C_0(A) & \xleftarrow{\mathcal{N}} & C_0(A) & \xleftarrow{1-\lambda} & C_0(A) \leftarrow \dots
\end{array}$$

注意到该双复形的第偶数列为 Hochschild 链复形（链映射 b ），第奇数列为 Bar-复形（链映射 $-b'$ ）。注意 Bar-复形是正合的，并且有同伦逆

$$h : C_n(A) \rightarrow C_{n+1}(A) \quad (2.1)$$

$$a_0 \otimes a_1 \otimes \dots \otimes a_n \mapsto 1 \otimes a_0 \otimes a_1 \otimes \dots \otimes a_n \quad (2.2)$$

使得 $b'h + hb' = 1$ 。

现在，注意到

$$\begin{aligned}
\text{Tot}_n(\text{CC}_{\bullet\bullet}(A)) &= \left(\bigoplus_{\substack{p+q=n \\ q \text{ 为偶数}}} \text{CC}_{p,q}(A) \right) \oplus \left(\bigoplus_{\substack{p+q=n \\ q \text{ 为奇数}}} \text{CC}_{p,q}(A) \right) \\
&=: X_n \oplus Y_n
\end{aligned}$$

也就是说，我们把循环双复形 $\text{CC}_{\bullet\bullet}(A)$ 的全复形 $(\text{Tot}_{\bullet}(\text{CC}_{\bullet\bullet}(A)), d)$ 写为：

$$\dots \rightarrow X_{n+1} \oplus Y_{n+1} \xrightarrow{d} X_n \oplus Y_n \xrightarrow{d} X_{n-1} \oplus Y_{n-1} \rightarrow \dots$$

边缘算子矩阵 $d = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ 留给读者。但是要注意 (Y_{\bullet}, δ) 的正合性是由 Bar-复形 $(C_{\bullet}(A), -b')$ 的正合性所诱导的； δ 也存在同伦逆，仍记为 h 。

综上，对 $\text{Tot}_{\bullet}(\text{CC}_{\bullet\bullet}(A))$ 使用引理2.3.1，我们得到以下结果：

性质 2.3.2. 对于 K -代数 A ，考虑以下双复形 $B_{\bullet\bullet}(A)$ ：

$$\begin{array}{ccccc}
\vdots & & \vdots & & \vdots \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
A^{\otimes 3} & \xleftarrow{\mathcal{B}} & A^{\otimes 2} & \xleftarrow{\mathcal{B}} & A \\
\downarrow b & & \downarrow b & & \\
A^{\otimes 2} & \xleftarrow{\mathcal{B}} & A & & \\
\downarrow b & & & & \\
A & & & &
\end{array}$$

此图表的最左下角为第 0 行 0 列，右下角空白处都为 0，具体地，

$$\mathcal{B}_{p,q}(A) = \begin{cases} CC_{p-q,2q}(A) & p \geq q \\ 0 & p < q \end{cases}$$

(也就是说， $\mathcal{B}_{\bullet\bullet}$ 的结点是由将循环双复形 $CC_{\bullet\bullet}(A)$ 的第奇数列 (*Bar*-复形) 都删掉，再将原来第 $2l$ 列整体向左、上各平移 l 格所得) 其中 **Connes** 算子 $\mathcal{B} : C_n(A) \rightarrow C_{n+1}(A)$ 定义为以下的复合：

$$\begin{array}{ccccc} C_{n+1}(A) & \xleftarrow{1-\lambda} & C_{n+1}(A) & \xleftarrow{\mathcal{N}} & C_{n+1}(A) \\ \downarrow b & & \uparrow h \downarrow -b' & & \downarrow b \\ C_n(A) & \xleftarrow{1-\lambda} & C_n(A) & \xleftarrow{\mathcal{N}} & C_n(A) \end{array}$$

$$\mathcal{B} := (1 - \lambda)h\mathcal{N}$$

那么，存在自然的双复形单同态

$$\mathcal{B}_{\bullet\bullet}(A) \hookrightarrow CC_{\bullet\bullet}(A)$$

并且其诱导的全复形的链映射

$$\text{Tot}_{\bullet}(\mathcal{B}_{\bullet\bullet}(A)) \hookrightarrow \text{Tot}_{\bullet}(CC_{\bullet\bullet}(A))$$

为拟同构。

证明. 只需注意到

$$\text{Tot}_n(\mathcal{B}_{\bullet\bullet}) = \left(\bigoplus_{\substack{p+q=n \\ q \text{ 为偶数}}} CC_{p,q}(A) \right) \hookrightarrow \text{Tot}_n(CC_{\bullet\bullet}(A))$$

直接使用引理2.3.1，细节从略。但是要验证 $\mathcal{B}_{\bullet\bullet}(A)$ 的确是双复形，即需要验证反交换关系

$$\mathcal{B} \circ b + b \circ \mathcal{B}$$

而这是容易的，验证如下：

$$\begin{aligned} \mathcal{B} \circ b &= (1 - \lambda)h\mathcal{N}b = (1 - \lambda)hb'\mathcal{N} \\ &= (1 - \lambda)(1 - b'h)\mathcal{N} = (1 - \lambda)\mathcal{N} - (1 - \lambda)b'h\mathcal{N} \\ &= -b(1 - \lambda)h\mathcal{N} = -b \circ \mathcal{B} \end{aligned}$$

从而证毕。 □

于是我们得到循环同调的又一等价定义：

$$H_{\bullet}^{\lambda}(A) \cong H_{\bullet}(\text{Tot}_{\bullet}(\mathcal{B}_{\bullet\bullet}))$$

我们可以将链复形 $\text{Tot}_\bullet(\mathcal{B}_{\bullet\bullet})$ 适当改写，使得形式更加美观：

性质 2.3.3. 对于 K -代数 A ，以及形式变元 u ，考虑如下链复形：

$$(CC_\bullet(A), b + u\mathcal{B})$$

其中

$$CC_n(A) := (C_\bullet(A)[u^{-1}])_n := \bigoplus_{k=0}^{\infty} u^{-k} C_{n-2k}(A)$$

（注意这是有限直和）换句话说，我们给定以下分次

$$\deg(b) = -1, \quad \deg(B) = 1, \quad \deg(u) = -2$$

那么此链复形的同调自然同构于循环同调：

$$H_\bullet(CC_\bullet(A), b + u\mathcal{B}) \cong H_\bullet^\lambda(A)$$

证明. 这个几乎显然。注意到

$$\begin{aligned} \text{Tot}_n(\mathcal{B}_{\bullet\bullet}(A)) &= \bigoplus_{k=0}^{\infty} \mathcal{B}_{n-k,k}(A) = \bigoplus_{k=0}^{\infty} C_{n-2k}(A) \\ CC_n(A) &= \bigoplus_{k=0}^{\infty} u^{-k} C_{n-2k}(A) \end{aligned}$$

于是有自然的链复形同构

$$\begin{aligned} \text{Tot}_\bullet(\mathcal{B}_{\bullet\bullet}(A)) &\rightarrow CC_\bullet(A) \\ \mathcal{B}_{n-k,k}(A) &\mapsto u^{-k} C_{n-2k}(A) \end{aligned}$$

容易验证此对应也保持相应的边缘算子。证毕。 \square

注意，我们还可以考虑 $(CC_\bullet(A), b)$ ，它与 $(CC_\bullet(A), b + u\mathcal{B})$ 具有不同的边缘算子：前者的同调我们早已知道是 Hochschild 同调，而后者的同调为循环同调。

注记 2.3.4. （复几何的背景）

对于复流形 X ，它作为光滑流形，有外微分算子 d ；再注意到它的复结构，有算子 $\bar{\partial}$ ——前者代表拓扑，而后代表复几何。它们之间有关系

$$d = \bar{\partial} + \partial$$

并且满足

$$\partial^2 = \bar{\partial}^2 = 0 \quad \partial\bar{\partial} + \bar{\partial}\partial = 0$$

我们考虑以下“拓扑与复几何之间的桥梁”：

$$d_u := \bar{\partial} + u\partial$$

称此算子为霍奇滤链 (Hodge filtration)，其中 $0 \leq u \leq 1$. 注意 d_u 满足稳定性条件 $d_u^2 = 0$ ，即 $\bar{\partial}$ 与 d 的“过渡”的任何一个“中间状态”都仍为外微分算子。

所以，似乎可以如下粗暴地对应？

复几何	非交换几何
复流形 X	K -代数 A
Ω_X^\bullet	$CC_\bullet(A)$
$\bar{\partial}$	b
∂	$u\mathcal{B}$
d	$b + u\mathcal{B}$
$H_{DR}^\bullet(X)$	$H_\bullet^\lambda(A)$
$H_{\bar{\partial}}^\bullet(X)$	$HH_\bullet(A)$

这表格似乎不太对吧，应该是 Hochschild 同调 $HH_\bullet(A)$ 对应于“非交换版本的”微分形式 Ω^\bullet ，从之前的例子能看出来。

定义 2.3.5. (周期循环同调与负循环同调) 对于 K -代数 A ，与 $CC_\bullet(A)$ 类似，我们还可以去定义以下：

(1) 定义周期循环复形 (periodic cyclic complex)

$$CC_\bullet^{\text{per}}(A) := (C_\bullet(A)[[u]], b + u\mathcal{B})$$

该复形的同调

$$HC_\bullet^{\text{per}}(A) := H_\bullet(CC_\bullet^{\text{per}}(A), b + u\mathcal{B})$$

称之为周期循环同调 (periodic cyclic homology)。

(2) 定义负循环复形 (negative cyclic complex)

$$CC_\bullet^-(A) := (C_\bullet(A)[[u]], b + u\mathcal{B})$$

该复形的同调

$$HC_\bullet^-(A) := H_\bullet(CC_\bullet^-(A), b + u\mathcal{B})$$

称之为负循环同调 (negative cyclic homology)。

注意上述定义当中的“ $\llbracket u \rrbracket$ ”是指关于形式变元 u 的形式幂级数，而“ $((u))$ ”为关于 u 的 Laurent 级数。由定义，显然有

$$CC_{\bullet}(A) \cong CC_{\bullet}^{\text{per}}(A)/CC_{\bullet}^{-}(A)$$

至此，我们定义出了 $CC_{\bullet}(A)$, $CC_{\bullet}^{\text{per}}(A)$ 以及 $CC_{\bullet}^{-}(A)$ 。事实上，这三者都有深刻的物理背景，见下表：

非交换几何中的对象	几何、物理背景	几何、物理背景
$CC_{\bullet}^{\text{per}}(A)$	open-closed string states	de-Rham cohomology
$CC_{\bullet}(A)$	open string states	gauge theory
$CC_{\bullet}^{-}(A)$	closed string states	gravity

其中特别注意，周期循环同调是 de-Rham 上同调的“非交换版本”，我们将在后文举例说明。

2.4 一些例子

回顾约化 Bar-复形 $\overline{B}_{\bullet}(A)$ （见定义1.4.1），我们可以类似地通过约化 Bar-复形来构造类似的“循环双复形”：在 $K \hookrightarrow A$ 的条件下，考虑约化 Hochschild 链复形

$$\overline{C}_n(A) := \overline{C}_n(A, A) \cong A \otimes \overline{A}^{\otimes n}$$

类似去定义循环算子 $\lambda: \overline{C}_n(A) \rightarrow \overline{C}_n(A)$ ，其显式表达式与非约化情形完全相同；以及平均算子

$$\mathcal{N}: \overline{C}_n(A, A) \cong A \otimes \overline{A}^{\otimes n}$$

可惜是错的，类似于此前的 λ, \mathcal{N} 并不良定。比如

$$0 = \lambda(0) = \lambda(a_0 \otimes \overline{1}) = -1 \otimes \overline{\lambda} \neq 0$$

但是，Connes 算子 $\mathcal{B}: \overline{C}_n(A) \rightarrow \overline{C}_{n+1}(A)$ 是有意义的，运算规则与非约化情形完全相同，具体地，

$$\begin{aligned}
\mathcal{B}(a_0 \otimes \overline{a_1} \otimes \cdots \otimes \overline{a_n}) &= \widetilde{(1-\lambda)} h \widetilde{\mathcal{N}}(a_0 \otimes \overline{a_1} \otimes \cdots \otimes \overline{a_n}) \\
&= \widetilde{(1-\lambda)} h \left(\sum_{k=0}^n (-1)^{n(n+1-k)} a_k \otimes \overline{a_{k+1}} \otimes \cdots \otimes \overline{a_n} \otimes \overline{a_0} \otimes \cdots \otimes \overline{a_{k-1}} \right) \\
&= \widetilde{(1-\lambda)} \left(\sum_{k=0}^n (-1)^{n(n+1-k)} 1 \otimes \overline{a_k} \otimes \overline{a_{k+1}} \otimes \cdots \otimes \overline{a_n} \otimes \overline{a_0} \otimes \cdots \otimes \overline{a_{k-1}} \right) \\
&= \sum_{k=0}^n (-1)^{nk} 1 \otimes \overline{a_k} \otimes \overline{a_{k+1}} \otimes \cdots \otimes \overline{a_n} \otimes \overline{a_0} \otimes \cdots \otimes \overline{a_{k-1}}
\end{aligned}$$

其中 $a_{-1} := a_n$ 。

性质 2.4.1. 对于 K -代数 A , 假设 $K \hookrightarrow A$, 则有如下双复形 $\overline{B}_{\bullet\bullet}(A)$:

$$\begin{array}{ccccc}
 \vdots & & \vdots & & \vdots \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 A \otimes \overline{A}^{\otimes 2} & \xleftarrow{\mathcal{B}} & A \otimes \overline{A} & \xleftarrow{\mathcal{B}} & A \\
 \downarrow b & & \downarrow b & & \\
 A \otimes \overline{A} & \xleftarrow{\mathcal{B}} & A & & \\
 \downarrow b & & & & \\
 A & & & &
 \end{array}$$

记此双复形的全复形为 $\overline{CC}_{\bullet}(A) := \text{Tot}_{\bullet}(\overline{B}_{\bullet\bullet}(A))$, 则有自然同构

$$H_{\bullet}^{\lambda}(A) \cong H_{\bullet}(\overline{CC}_{\bullet}(A))$$

也就是说, 在 $K \hookrightarrow A$ 的条件下, 我们可以用约化版本的双复形来计算循环同调。

证明. 考虑商映射 $\pi_{\bullet} : C_{\bullet}(A, A) \rightarrow \overline{C}_{\bullet}(A, A)$ 自然诱导的双复形同态

$$\pi_{\bullet\bullet} : B_{\bullet\bullet}(A) \rightarrow \overline{B}_{\bullet\bullet}(A)$$

注意 $\pi_{\bullet\bullet}$ 限制在双复形的每一列上, 都为相应链复形的拟同构 (这里使用了引理 1.4.3), 因此根据引理 2.2.3, 其诱导的全复形之间的同态

$$\text{Tot}_{\bullet}(B_{\bullet\bullet}(A)) \rightarrow \text{Tot}_{\bullet}(\overline{B}_{\bullet\bullet}(A))$$

为拟同构。再注意性质 2.3.2, 上式左边的同调即为循环同调, 从而证毕。 \square

与非约化情形类似, 我们也可以

$$\text{Tot}_{\bullet}(\overline{B}_{\bullet\bullet}(A)) \cong \overline{C}_{\bullet}(A)[u^{-1}], b + u\mathcal{B}$$

甚至去定义“约化周期循环同调”、“约化负循环同调”, 此处不再赘述。

本节接下来给出循环同调的一些典型的计算实例。

例子 2.4.2. 对于环 K , 设 K -代数 $A = K$, 那么其循环同调

$$H_n^{\lambda}(K) \cong \begin{cases} K & n \text{ 为偶数} \\ 0 & n \text{ 为奇数} \end{cases}$$

我们早已具体计算出 $K[x^1, x^2, \dots, x^n]$ 的 Hochschild 同调, 特别地 $\mathrm{HH}_\bullet(K)$ 只有第零个是非平凡的 (同构于 K), 其余都为 0. 不过, $H_\bullet^\lambda(K)$ 与 $\mathrm{HH}_\bullet(K)$ 并不相同。

证明. 我们采用最简便的方法去计算, 当然采用约化循环双复形啦。在本例中,

$$\overline{A} = K/K = 0$$

从而双复形 $\overline{B}_{\bullet\bullet}(K)$ 为以下:

$$\begin{array}{ccccccc} & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longleftarrow & 0 & \longleftarrow & 0 & \longleftarrow & K \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longleftarrow & 0 & \longleftarrow & K \\ & \downarrow & & \downarrow & & & & \\ 0 & \longleftarrow & K \\ & \downarrow & & & & & & \\ & K \end{array}$$

其全复形 $\overline{C}_\bullet(K)$ 为以下

$$\cdots \rightarrow 0 \xrightarrow{0} K \xrightarrow{0} 0 \xrightarrow{0} K$$

从而易求循环同调。 □

当然我们也可以按照循环同调最原始的定义去计算, 其实也不难算, 如下:

另一种计算方式. 直接计算。此时,

$$C_n(K) \cong K^{\otimes n+1} \cong K$$

我们记其生成元

$$\varepsilon_n := \underbrace{1 \otimes 1 \otimes \cdots \otimes 1}_{n+1 \text{ 个}} \in C_n(K)$$

容易验证算子 b 与算子 λ 的作用

$$b(\varepsilon_n) = \begin{cases} \varepsilon_{n-1} & n \text{ 为偶数} \\ 0 & n \text{ 为奇数} \end{cases} \quad \lambda(\varepsilon_n) = \begin{cases} \varepsilon_n & n \text{ 为偶数} \\ -\varepsilon_n & n \text{ 为奇数} \end{cases}$$

因此, 易知 Connes 复形 $C_\bullet^\lambda(K) := C_\bullet K / (1 - \lambda)$ 具体如下:

$$\cdots \rightarrow 0 \xrightarrow{0} K \xrightarrow{0} 0 \xrightarrow{0} K$$

对它取同调, 即得循环同调。 □

接下来, 考虑 $A = K[x^1, x^2, \dots, x^n]$ 为 n 元多项式环的情形, 我们企图取计算 A 的循环同调。注意在之前我们已经使用 Koszul 复形求出了 $A = K[x^1, x^2, \dots, x^n]$ 的 Hochschild 同调。

引理 2.4.3. 设 $A = K[x^1, x^2, \dots, x^n]$ 为 n 元多项式环, 考虑微分形式代数 $\Omega_A^\bullet := K[x^1, \dots, x^n; dx^1, \dots, dx^n]$, 注意 Ω_A^\bullet 上有外积运算 \wedge 与外微分运算 d . 考虑以下 K -模同态

$$\begin{aligned} \Phi: \overline{C}_p(A) &\rightarrow \Omega_A^p \\ a_0 \otimes \overline{a}_1 \otimes \cdots \otimes \overline{a}_p &\mapsto \frac{1}{p!} a_0 da_1 \wedge da_2 \wedge \cdots \wedge da_p \end{aligned}$$

则 Φ 是良定的, 并且成立:

$$\begin{cases} \Phi \circ b = 0 \\ \Phi \circ \mathcal{B} = d \circ \Phi \end{cases}$$

其中 $b: \overline{C}_p(A) \rightarrow \overline{C}_{p-1}(A)$ 为约化 Hochschild 复形的边缘算子, $\mathcal{B}: \overline{C}_{p-1}(A) \rightarrow \overline{C}_p(A)$ 为约化的 Connes 算子。

证明. Φ 的良定性, 即 \overline{A} 中元素与代表元选取无关。而此代表元选取至多相差“常数项”(即 K 中元素), 它在外微分 d 的作用下为零。因此 Φ 良定。

我们来验证 $\Phi \circ b = 0$. 暴力验证如下:

$$\begin{aligned} &\Phi \circ b(a_0 \otimes \overline{a}_1 \otimes \cdots \otimes \overline{a}_n) \\ &= \frac{1}{p!} \left(a_0 a_1 da_2 \wedge \cdots \wedge da_p + \sum_{k=1}^{p-1} (-1)^k a_0 da_1 \wedge \cdots \wedge d(a_k a_{k+1}) \wedge \cdots \wedge da_p \right. \\ &\quad \left. + (-1)^p a_0 a_p da_1 \wedge \cdots \wedge da_{p-1} \right) \\ &= \frac{1}{p!} \left(a_0 a_1 da_2 \wedge \cdots \wedge da_p + \sum_{k=1}^{p-1} (-1)^k a_0 a_k da_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{da_k} \wedge \cdots \wedge da_p \right. \\ &\quad \left. + \sum_{k=1}^{p-1} (-1)^k a_0 a_{k+1} da_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{da_{k+1}} \wedge \cdots \wedge da_p + (-1)^p a_0 a_p da_1 \wedge \cdots \wedge da_{p-1} \right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

第二个等式 $\Phi \circ \mathcal{B} = d \circ \Phi$ 也容易直接验证: 一方面,

$$\begin{aligned} &\Phi \circ \mathcal{B}(a_0 \otimes \overline{a}_1 \otimes \cdots \otimes \overline{a}_n) \\ &= \sum_{k=0}^p \frac{(-1)^{pk}}{(p+1)!} (da_k \wedge da_{k+1} \wedge \cdots \wedge da_p) \wedge (da_0 \wedge da_1 \wedge \cdots \wedge da_{k-1}) \\ &= \frac{1}{p!} da_0 \wedge da_1 \wedge \cdots \wedge da_n \end{aligned}$$

而另一方面，

$$d \circ \Phi(a_0 \otimes \bar{a}_1 \otimes \cdots \otimes \bar{a}_p) = \frac{1}{p!} d(a_0 da_1 \wedge \cdots \wedge da_p) = \frac{1}{p!} da_0 \wedge da_1 \wedge \cdots \wedge da_p$$

从而得证。 \square

由此引理，我们即可去计算 $A := K[x^1, x^2, \dots, x^n]$ 的循环同调。

性质 2.4.4. 对于 $A := K[x^1, x^2, \dots, x^n]$ ，则其循环同调

$$H_n^\lambda(A) \cong \begin{cases} (\Omega_A^n / d\Omega_A^{n-1}) \oplus K & n \text{ 为偶数} \\ \Omega_A^n / d\Omega_A^{n-1} & n \text{ 为奇数} \end{cases}$$

证明. 事实上，刚才的引理 2.4.3 表明， Φ 诱导以下两个双复形之间的态射：

$$\begin{array}{ccccc} \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \bar{C}_2(A) & \xleftarrow{\mathcal{B}} & \bar{C}_1(A) & \xleftarrow{\mathcal{B}} & \bar{C}_0(A) \\ \downarrow b & & \downarrow b & & \\ \bar{C}_1(A) & \xleftarrow{\mathcal{B}} & \bar{C}_0(A) & & \\ \downarrow b & & & & \\ \bar{C}_0(A) & & & & \end{array} \quad \begin{array}{ccccc} \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \Omega_A^2 & \xleftarrow{d} & \Omega_A^1 & \xleftarrow{d} & \Omega_A^0 \\ \downarrow 0 & & \downarrow 0 & & \\ \Omega_A^1 & \xleftarrow{d} & \Omega_A^0 & & \\ \downarrow 0 & & & & \\ \Omega_A^0 & & & & \end{array}$$

（按村儿里的规矩，此处应该有立方交换图）

其中左边为 $\bar{\mathcal{B}}_{\bullet\bullet}(A)$ ，而右边的每一行均为 de-Rham 上链复形，每一列的边缘算子都为零。注意到 Φ 是满射，以及我们早已用 Koszul 复形得到的

$$H_n(\bar{C}_\bullet(A)) \cong HH_n(A) \cong \Omega_A^n \cong H_n(\Omega_A^\bullet, 0)$$

从而双复形同态 Φ 限制在每一列上都为拟同构，于是由引理 2.2.3，立刻知道

$$\Phi : \text{Tot}_\bullet(\bar{\mathcal{B}}_{\bullet\bullet}(A), b, \mathcal{B}) \rightarrow \text{Tot}_\bullet(\Omega_A^\bullet, 0, d)$$

为拟同构。上式左边的同调即为 A 的循环同调，而右边的同调可以直接计算。只需要注意到（Poincare 引理）de-Rham 复形

$$\cdots \xrightarrow{d} \Omega^\bullet(A) \xrightarrow{d} \Omega^\bullet(A) \xrightarrow{d} \Omega^\bullet(A) \rightarrow 0$$

的 (上) 同调满足

$$H^n(\Omega_A^\bullet, d) = \begin{cases} K & n = 0 \\ 0 & n > 0 \end{cases}$$

因此容易计算出

$$H_n^\lambda(A) \cong \begin{cases} (\Omega_A^n / d\Omega_A^{n-1}) \oplus K & n \text{ 为偶数} \\ \Omega_A^n / d\Omega_A^{n-1} & n \text{ 为奇数} \end{cases}$$

□

注记 2.4.5. 容易知道, *Connes* 算子

$$\mathcal{B} : \overline{C}_n(A) \rightarrow \overline{C}_{n+1}(A)$$

在 $\ker b$ 上的限制, 可以下降为 *Hochschild* 同调之间的同态

$$\mathcal{B} : \mathrm{HH}_n(A) \rightarrow \mathrm{HH}_{n+1}(A)$$

Hochschild 同调扮演的角色相当于微分形式, 而此时 *Connes* 算子扮演的则是外微分。

注记 2.4.6. 双复形满同态

$$\Phi : (\overline{B}_{\bullet\bullet}(A), b, \mathcal{B}) \twoheadrightarrow (\Omega_A^\bullet, 0, d)$$

其实是可裂 (*split*) 的。具体地, 存在双复形同态

$$\begin{aligned} \eta : \Omega^\bullet(A) &\rightarrow \overline{C}_\bullet(A) \\ a_0 da_1 \wedge da_2 \wedge \cdots \wedge da_p &\mapsto \sum_{\sigma \in S_p} (-1)^{\mathrm{sgn} \sigma} a_0 \otimes a_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes a_{\sigma(p)} \end{aligned}$$

使得 $\Phi \circ \eta = \mathrm{id}$.

容易验证 (简单的组合技巧) η 的确诱导了双复形同态

$$\eta : (\Omega_A^\bullet, 0, d) \rightarrow (\overline{B}_{\bullet\bullet}(A), b, \mathcal{B})$$

2.5 循环上同调

本章最后, 简单介绍一下循环上同调 (Cyclic cohomology)。对于双 A -模 M , 回顾我们之前已经介绍的 *Hochschild* 上链复形

$$C^n(A, M) := \mathrm{Hom}(A^{\otimes n}, M)$$

特别地, 当 $M = A$ 时, 我们给出以下记号:

记号 **2.5.1.** 对于 K -代数 A , 以及 $n \geq 0$, 我们记 *Hochschild* 上链复形

$$C^n(A) := C^n(A, A) \cong \text{Hom}(A^{\otimes n}, A) \cong \text{Hom}(A^{\otimes n+1}, K)$$

并且将该 *Hochschild* 上链复形的微分算子记为 b^* .

我们此前考虑同构 $C_n(A) \cong A^{\otimes n+1}$, 而 *Hochschild* 上链复形 $C^n(A) \cong \text{Hom}(A^{\otimes n+1}, K)$ 恰为其对偶; 微分算子 b^* 的作用即为 b 的对偶: 即对任意 $f \in C^n(A) \cong \text{Hom}(A^{\otimes n+1}, K)$ 以及 $\omega \in A^{\otimes n+2} \cong C_{n+1}(A)$, 成立

$$(b^*f)(\omega) = f(b(\omega))$$

与循环余不变量对偶, 我们可以谈论循环不变量:

定义 2.5.2. (循环不变量)

对于 $f \in C^n(A)$, 称 f 为循环不变量 (*cyclic invariant*), 如果对任意的 $a_0, \dots, a_n \in A$, 成立

$$f(a_0, a_1, \dots, a_n) = (-1)^n f(a_n, a_0, \dots, a_{n-1})$$

记 $C^n(A)$ 当中的循环不变量之全体为 $C_\lambda^n(A)$.

容易验证 $b^*(C_\lambda^n(A)) \subseteq C_\lambda^{n+1}(A)$, 从而 $(C_\lambda^\bullet(A), b^*)$ 为 $(C^\bullet(A), b^*)$ 的子复形。(不必暴力验证了, 由循环余不变量对偶过去就行) 看图说话即可:

$$\begin{array}{ccccccc}
 \cdots \longrightarrow & C_n(A) & \xrightarrow{b'} & C_{n-1}(A) & \longrightarrow & \cdots & \cdots \longleftarrow C^n(A) \xleftarrow{b'^*} C^{n-1}(A) \longleftarrow \cdots \\
 & \downarrow 1-\lambda & & \downarrow 1-\lambda & & & \uparrow 1-\lambda^* & \uparrow 1-\lambda^* \\
 \cdots \longrightarrow & C_n(A) & \xrightarrow{b} & C_{n-1}(A) & \longrightarrow & \cdots & \cdots \longleftarrow C^n(A) \xleftarrow{b^*} C^{n-1}(A) \longleftarrow \cdots \\
 & \downarrow & & \downarrow & & & \uparrow & \uparrow \\
 \cdots \longrightarrow & C_\lambda^n(A) & \longrightarrow & C_\lambda^{n-1}(A) & \longrightarrow & \cdots & \cdots \longleftarrow C_\lambda^n(A) \longleftarrow C_\lambda^{n-1}(A) \longleftarrow \cdots \\
 & \downarrow & & \downarrow & & & \uparrow & \uparrow \\
 & 0 & & 0 & & & 0 & 0
 \end{array}$$

左图我们早已熟悉, 注意它的每一列都是右正合的。将反变左正合函子 $\text{Hom}(-, K)$ 作用于左图即得到右图, 右图的每一列都是左正合的。

定义 2.5.3. (循环上同调) 对于 K -代数 A 定义 A 的循环上同调 (Cyclic cohomology)

$$H_\lambda^\bullet(A) := \mathrm{HC}^\bullet(A) := H^\bullet(C_\lambda^\bullet(A), d^*)$$

作为例子，我们具体计算一下第零个循环上同调。

例子 2.5.4. 对于 K -代数 A ，则有

$$H_\lambda^0(A) = \{f \in \mathrm{Hom}(A, K) | \forall x, y \in A, f(xy) = f(yx)\}$$

证明. 直接计算即可。只需考虑 Hochschild 上链复形

$$0 \rightarrow C_\lambda^0(A) \xrightarrow{b^*} C_\lambda^1(A) \xrightarrow{b^*} C_\lambda^2(A) \rightarrow \dots$$

易知 $C_\lambda^0(A) = C^0(A) = \mathrm{Hom}(A, K)$ ，从而

$$H_\lambda^0(A) = \ker(b^* : C^0(A) \rightarrow C^1(A))$$

对于 $f \in \mathrm{Hom}(A, K)$ ，若 $b^*f = 0$ ，则对于任意 $x, y \in A$ ，有

$$0 = (b^*f)(x, y) = f(b(x \otimes y)) = f(xy - yx) = f(xy) - f(yx)$$

从而可知

$$H_\lambda^0(A) = \{f \in \mathrm{Hom}(A, K) | \forall x, y \in A, f(xy) = f(yx)\}$$

□

像 $H_\lambda^0(A)$ 当中的线性算子那样，满足

$$f(xy) = f(yx) \quad (\forall x, y \in A)$$

的线性算子称之为迹算子。

高阶的循环上同调可被认为是“导出的”迹算子。

第3章 乘积

Product

Recall: Commutative non-Commutative

polyvectorfield $(C^\bullet(A, A), \partial)$

differential form $(C_\bullet(A, A), b)$

$(\Omega_X^\bullet)(C_\bullet(A), b, \mathcal{B})$

cyclic homology $H_\bullet(C_\bullet(A)[u^{-1}], b + u\mathcal{B})$

negative homology $H_\bullet(C_\bullet(A)[u], b + u\mathcal{B})$

periodic homology (analogue of de Rham cohomology) $H_\bullet(C_\bullet(A)(u), b + u\mathcal{B})$

Today:

3.1 多重切向量场与 Schouten-Nijenhuis 括号

定义 3.1.1. A is a \mathbb{Z} -graded algebra, $A = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} A_k$, such that

$$A_k \cdot A_l \subseteq A_{k+l}$$

and associative.

A is graded commutative if

$$a_k \cdot a_l = (-1)^{kl} a_l a_k$$

定义 3.1.2. \mathfrak{g} is a graded Lie algebra (super Lie algebra) if

$$(1) \mathfrak{g} = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} \mathfrak{g}_k$$

(2) Lie bracket $[\cdot, \cdot]: \mathfrak{g}_k \times \mathfrak{g}_l \rightarrow \mathfrak{g}_{k+l}$ which is graded skew-symmetric

$$[a, b] = -(-1)^{\deg a \deg b} [b, a]$$

(3) Graded Jacobi identity

$$[[a, b], c] = [a, [b, c]] - (-1)^{\deg a \deg b} [b, [a, c]]$$

例子 3.1.3. (1) $(\Omega_X^\bullet, \wedge)$ is a graded commutative algebra.

(2) $PV_X := \Gamma(X, \wedge^* TX)$ poly vector field, is graded commutative alg.

Schouten-Nijenhuis bracket $\{\cdot, \cdot\}$:

$$\{\cdot, \cdot\} : PV^p \times PV^q \rightarrow PV^{p+q-1}$$

$$\xi = \xi_1 \wedge \dots \wedge \xi_p$$

$$\eta = \eta_1 \wedge \dots \wedge \eta_q$$

then

$$\{\xi, \eta\} = \sum_{i,j} (-1)^{i+j} [\xi_i, \eta_j] \xi_1 \wedge \dots \widehat{\xi_i} \dots \xi_p \wedge \eta_1 \wedge \dots \widehat{\eta_j} \dots \eta_q$$

Check:

(1) $\{\cdot, \cdot\}$ is well-defined and coordinate independent. (HW)

(2) $\{\xi, \eta\} = -(-1)^{(\deg \xi - 1)(\deg \eta - 1)} \{\eta, \xi\}$

记号 3.1.4. A is graded, then $(A[1])_n := A_{n-1}$ shifted gradation...

So, $PV_X[1]$ is a graded Lie algebra, and

$$(PV_X[1])_0 = T_X$$

is a Lie algebra.

(3) graded Leibnitz rule

$$\{\alpha, \beta \wedge \gamma\} = \{\alpha, \beta\} \gamma + (-1)^{(\deg \alpha - 1) \deg \beta} \beta \{\alpha, \gamma\}$$

(挪之前的分次)

性质 3.1.5. (1) (PV, \wedge) graded algebra

(2) $(PV[1], \{\cdot, \cdot\})$ graded Lie alg

(3) (1)(2) is compactible (Leibnitz rule)

Gerstenhaber algebra(Wiki, HW) (in physics, Classical BV algebra)

3.2 Shuffle 乘积

定义 3.2.1. Let S_n be the symmetric group, A (p,q) -Shuffle is a permutation $\sigma \in S_{p+q}$ such that

$$\sigma(1) < \sigma(2) < \dots < \sigma(p)$$

$$\sigma(p+1) < \sigma(p+2) < \dots < \sigma(q)$$

Let

$$Sh_{p,q} := \text{all the } p,q\text{-Shuffle}$$

Let A, A' be to K -algebras, M, M' are A, A' -bimodule. We define the Shuffle product \times

$$C_p(A, M) \times C_q(A', M') \rightarrow C_{p+q}(A \otimes A', M \otimes M')$$

$$(m, a_1, \dots, a_p) \times (m', a'_1, \dots, a'_q) \mapsto \sum_{\sigma \in Sh_{p,q}} (-1)^{|\sigma|} (m \otimes m', \sigma(a_1, \dots, a_p, a'_1, \dots, a'_q))$$

Here $\sigma(a_1, \dots, a_p, a'_1, \dots, a'_q) = (a_{\sigma^{-1}(1)})$

性质 3.2.2. The Shuffle product \times is compatible with Hochschild differential b : i.e.

$$b(x \times y) = b(x) \times y + (-1)^{\deg x} x \times b(y)$$

推论 3.2.3. we get a chain complex map

$$C_\bullet(A, M) \otimes C_\bullet(A', M') \rightarrow C_\bullet(A \otimes A', M \otimes M')$$

pass to homology, we get

$$H_\bullet(A, M) \otimes H_\bullet(A', M') \rightarrow H_\bullet(A \otimes A', M \otimes M')$$

In particular,

$$C_\bullet(A) \otimes C_\bullet(A') \rightarrow C_\bullet(A \otimes A')$$

定理 3.2.4. (*Künneth Formula*)

Assume A, A' are flat over K , then Shuffle product gives an isomorphism

$$\mathrm{HH}_\bullet(A) \otimes \mathrm{HH}_\bullet(A') \cong \mathrm{HH}_\bullet(A \otimes A')$$

Functoriality:

$$\varphi : A \rightarrow B$$

is a map of K -algebra, then

$$\varphi_\bullet : C_\bullet(A) \rightarrow C_\bullet(B)$$

induces

$$\varphi : \mathrm{HH}_\bullet(A) \rightarrow \mathrm{HH}_\bullet(B)$$

推论 3.2.5. *Let A be a commutative associative algebra, then $(\mathrm{HH}_\bullet(A), \times)$ is a graded commutative algebra.*

HW: If $A = K[x^i]$, then

$$(\mathrm{HH}_\bullet(A), \times) \cong (\Omega_A^\bullet, \wedge)$$

3.3 Cup 乘积

$$C^\bullet(A, A) = \bigoplus_p (C^p(A, A))$$

定义 3.3.1. *For $f \in C^p(A, A), g \in C^q(A, A)$. Define cup product*

$$f \cup g \in C^{p+q}(A, A)$$

性质 3.3.2. *Cup product is compatible with Hochschild differential ∂ :*

$$\partial(f \cup g) = (\partial f) \cup g + (-1)^{\deg f} f \cup \partial g$$

推论 3.3.3. *There is a well-defined cup product*

$$\cup : H^p(A, A) \times H^q(A, A) \rightarrow H^{p+q}(A, A)$$

HW: If $A = \mathbb{C}[x^i]$, then

$$(H^\bullet(A, A), \cup) \cong (PV_A, \wedge)$$

3.4 Gerstenhaber 乘积

Gerstenhaber algebra(自己查定义)

定义 3.4.1. *Gershenhaber product*

$$C^p(A, A) \times C^q(A, A) \rightarrow C^{p+q-1}(A, A)$$

$$(f, g) \rightarrow f \circ g$$

性质 3.4.2.

$$\partial(f \circ g) - (\partial f) \circ g - (-1)^{\deg g - 1} f \circ \partial g = \pm(f \cup g - (-1)^{\deg f \deg g} g \cup f)$$

= the failure of \circ being a chain map is measured bu the commutativity of cup product

证明. HW

□

推论 3.4.3. *$(\bullet(A, A), \cup)$ is a graded commutative algebra.*

证明. Omit. □

定义 3.4.4. (*Cerstenhaber bracket*)

$$\{f, g\} = f \circ g - (-1)^{(f-1)(g-1)} g \circ f$$

性质 3.4.5.

$$\partial\{f, g\} = \{\partial f, g\} \pm \{f, \partial g\}$$

and induces $\{, \}$ defines on $H^\bullet(A, A)$. this is the analogue of Schouten-Nijenhuis bracket.

Coalgebra and homotopy associativity

We will talk with the category \mathbb{Z} -graded K -modules

$$Mod_k^{\mathbb{Z}}$$

object: $C = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} C_k$

morphism: $f : C \rightarrow D$ is said to have degree n if

$$f : C_k \rightarrow C_{k+n}$$

$$\text{Hom}(C, D) := \bigoplus_n (C, D)_n$$

(i.e. degree = n) where

$$\text{Hom}(C, D)_n = \bigoplus_m \text{Hom}(C_m, D_{m+n})$$

now, $C, D \in Mod_K^{\mathbb{Z}}$

$$(C \otimes D)_n := \sum_{m+l=n} C_m \otimes D_l$$

we define the flip

$$\tau : C_\bullet \otimes D_\bullet \rightarrow D_\bullet \otimes C_\bullet$$

$$c_m \otimes d_l \mapsto (-1)^{ml} d_l \otimes c_m$$

\rightsquigarrow Koszul sign rule:

Eg. $f \in \text{Hom}(C, D), g \in \text{Hom}(C', D')$, then

$$(f \otimes g)(x \otimes y) = (-1)^{|g||x|} f(x)g(y)$$

C_\bullet graded K -module. Graded duality??

$$C_n^* := \text{Hom}(C_{-n}, K)$$

$$C_\bullet^* := \bigoplus_n C_n^*$$

A complex is \mathbb{Z} - graded K -module

$$\cdots \rightarrow C_{-1} \xrightarrow{d} C_0 \xrightarrow{d} C_1 \xrightarrow{d} C_2 \rightarrow \cdots$$

$\deg d = 1, d^2 = 0$.

Complex $(C_\bullet, d) \rightsquigarrow$ dual complex (C_\bullet^*, d^*) is the dual of $C_{-(n+1)} \xrightarrow{d} C_{-n}$.

Shift

$$(C_\bullet, d) \rightsquigarrow (C_\bullet[1])$$

$$(C_\bullet[1])_n := C_{n+1}$$

differential = $-d$

(C_\bullet, d_C) and (D_\bullet, d_D) , then $(C_\bullet \otimes D_\bullet, d)$

$$d : C_p \otimes D_q \rightarrow C_{p+1} \otimes D_q \oplus C_p \otimes D_{q+1}$$

$$d = d_C \otimes 1 + (-1)^p 1 \otimes d_D$$

A graded K -algebra,

$$A = \bigoplus_n A_n \in \text{Mod}_K^{\mathbb{Z}}$$

$$m : A \otimes A \rightarrow A$$

degree of m is 0.

satisfying associativity

Category of associative graded K -algebra

$$\text{Ass} - \text{alg}_K^{\mathbb{Z}}$$

$A \in \text{Ass} - \text{alg}_K^{\mathbb{Z}}$ is called (graded) "commutative" if

A differential graded K -algebra (A_\bullet, d) $d(\alpha \cdot \beta) = (d\alpha)\beta + (-1)^{|\alpha|} \alpha d\beta$

V is a graded K -module, then define

$$\text{Sym}^m(V) = V^{\otimes m} / \sim$$

where

$$\alpha \otimes \beta \sim (-1)^{|\alpha||\beta|} \beta \otimes \alpha$$

and define

$$\bigwedge^m(V) := V^{\otimes m} / \sim$$

where

$$\alpha \otimes \beta \sim -(-1)^{|\alpha||\beta|} \beta \otimes \alpha$$

If $V = V_0$, then $Sym^n(V_0)$ is the usual symmetric tensor, and $\bigwedge^n(V_0)$ exterior.

HW:

$$Sym^n(V_\bullet[1]) \cong \bigwedge^n(V)[n]$$

here $[n] = ([1])^{n \text{ times}}$

We have natural forgetful functor

$$Ass - alg_K^{\mathbb{Z}} \rightarrow Mod_K^{\mathbb{Z}}$$

$$Commu - alg_K^{\mathbb{Z}} \rightarrow Mod_K^{\mathbb{Z}}$$

whose left adjoints are called "free objects".

定义 3.4.6. $V \in Mod_K^{\mathbb{Z}}$, define the tensor algebra

$$T(V) := K \oplus V \oplus V^{\otimes a} \oplus \dots = \bigoplus_{n \geq 0} V^{\otimes n}$$

with algebra structure given by \otimes :

$$(v_1 \otimes \dots \otimes v_p) \cdot ((v_{p+1} \otimes \dots \otimes v_{p+q})) = v_1 \otimes \dots \otimes v_{p+q}$$

$$T : Mod_K^{\mathbb{Z}} \rightarrow Ass - alg_K^{\mathbb{Z}}$$

$$V \mapsto T(V)$$

性质 3.4.7. T is the left adjoint of

$$Ass - alg_K^{\mathbb{Z}} \rightarrow Mod_K^{\mathbb{Z}}$$

这个显然，不证了。

定义 3.4.8. $V \in \text{Mod}_K^{\mathbb{Z}}$, we define $\text{Sym}(V)$ by

$$\text{Sym}(V) := \bigoplus_{m \geq 0}^n (V)$$

$$\text{Sym} : \text{Mod}_K^{\mathbb{Z}} \rightarrow \text{Commu} - \text{alg}_K^{\mathbb{Z}}$$

性质 3.4.9. Sym is the left adjoint of

$$\text{Commu} - \text{alg}_K^{\mathbb{Z}} \rightarrow \text{Mod}_K^{\mathbb{Z}}$$

Let $A \in \text{Ass} - \text{alg}_K^{\mathbb{Z}}$, M is a (graded) bi-module, a derivation

$$D : A \rightarrow M$$

is a K -linear map ,and satisfies

$$D(ab) = D(a)b \pm aD(b)$$

性质 3.4.10. (if V is a graded K -module)

$$\text{Der}(T(V), M) \cong \text{Hom}(V, M)$$

In particular,

$$\text{Der}(T(V), T(V)) \cong \text{Hom}(V, T(V))$$

Check: If $D_1, D_2 \in \text{Der}(A, A)$, then

$$[D_1, D_2] := D_1 \circ D_2 - (-1)^{|D_1||D_2|} D_2 \circ D_1$$

is also a (graded) derivation.

i.e. $(\text{Der}(A, A), [-, -])$ is a graded Lie algebra.

Co-algebra

定义 3.4.11. $C_{\bullet} \in \text{Mod}_K^{\mathbb{Z}}$ is a graded coalgebra over K , if there is a coproduct ($\deg = 0$)

$$\Delta : C \rightarrow C \otimes C$$

counit $\epsilon : C \rightarrow K$ satisfying

co-derivation

$\delta : C \rightarrow C$ satisfying

A differential graded co-algebra is a co-algebra C with a co-derivation $\delta : C \rightarrow C$ such that $\deg \delta = 1$ and $\delta^2 = 0$.

co-augmentation

(Recall: $A:K$ -algebra. augmentation is an algebra morphism $A \rightarrow K$.)

Co-algebra (C, Δ) is called co-augmentation if there is a co-algebra map $K \rightarrow C$.

(C, Δ) is co-commutative, if

注记 3.4.12. *If (C, Δ) is a co-algebra, then (C^*, Δ^*) is an algebra*

$$A \otimes A = C^* \otimes C^* \rightarrow (C \otimes C)^* \xrightarrow{\Delta^*} C^* = A$$

例子 3.4.13. $V \in \text{Mod}_K^{\mathbb{Z}}$,

$$T^c(V) := \bigoplus_{n \geq 0} V^{\otimes n}$$

$$\Delta : T(V) \rightarrow T(V) \otimes T(V)$$

$$v_1 \otimes \dots \otimes v_n \mapsto \sum_{i=0}^n (v_1 \otimes \dots \otimes v_i) \otimes (v_{i+1} \otimes \dots \otimes v_n)$$

Check: Δ is a co-product, and what is its dual?

例子 3.4.14.

$$\overline{T^c}(V) := \bigoplus_{n \geq 1} V^{\otimes n}$$

$$\overline{\Delta}(v_1 \otimes \dots \otimes v_n) = \sum_{i=1}^{n-1} (v_1 \otimes \dots \otimes v_i) \otimes (v_{i+1} \otimes \dots \otimes v_n)$$

$\overline{T^c}(V)$ is a co-product on $\overline{T^c}(V)$.

$\text{Coder}(C)$ is all the co-derivation....

性质 3.4.15. *$\text{Coder}(C)$ is a graded Lie algebra, where*

$$[D_1, D_2] = D_1 \circ D_2 - (-1)^{|D_1||D_2|} D_2 \circ D_1$$

Associativity.

$$\bullet : A \otimes A \rightarrow A$$

\Rightarrow

$$m : A[1] \otimes A[1] \rightarrow A[1]$$

$$sa_1 \otimes sa_2 \mapsto (-1)^{|a_1|+1} s(a_1 a_2)$$

Observation: Associativity of $\bullet \iff [m, m] = 0$

术语索引

- Bar-复形, 9
- cocenter 余中心, 5
- Connes' complex Connes 复形, 26
- Connes' operator Connes 算子, 34
- cyclic bicomplex 循环双复形, 29
- cyclic co-invariant 循环余不变量, 24
- Cyclic cohomology 循环上同调, 44
- cyclic homology 循环同调, 27
- cyclic invariant 循环不变量, 43
- derivation 导子, 13
- derived center 导出中心, 12
- differential graded algebra 微分分次代数, 20
- exact 正合, 6
- group cohomology 群的上同调, 23
- Hochschild 同调, 7
- Hochschild 上同调, 12
- Hochschild 上链复形, 12
- Hochschild 链复形, 11
- Hodge filtration 霍奇滤链, 36
- inner derivation 内导子, 13
- Lie bracket 李括号, 14
- negative cyclic complex 负循环复形, 36
- opposite algebra 反代数, 3
- outer derivation 外导子, 14
- periodic cyclic complex 周期循环复形, 36
- projective module 投射模, 3
- projective resolution 投射消解, 7
- quasi-isomorphism 拟同构, 30
- reduced Bar-complex 约化 Bar-复形, 18
- total complex 全复形, 30