非交换几何选讲

曲豆豆 码字
南七技校福利社 五道口分社
2019 年 3 月 7 日
第 01-1 稿

图：雾气朦胧的安徽合肥大蜀山森林公园
拍摄于 2014.5.31 - 10：44

在五道口也要红专并进、理实交融呀 ～

目录

第 1 章　Hochschild 理论

1.1　结合代数的双模、余中心

我们需要**代数拓扑**、**同调代数**的预备知识，并且采用同调代数的标准术语、记号，诸如链复形、上同调、导出函子等等。首先介绍基本的记号与概念。

在本课，我们给定一个特征 0 的含幺交换环 K（例如一个域），考虑含幺结合 K-代数 A（注意 A 未必是交换代数），并且 A 作为交换环 K 上的模是投射模（projective module）。A 的 K-代数结构给出如下 K-模同态：

$$\begin{array}{rcl} A\otimes_K A & \to & A \\ (a_1,a_2) & \mapsto & a_1a_2 \end{array}$$

由 A 的结合性，$(a_1a_2)a_3=a_1(a_2a_3)$ 对 A 中任意元素 a_1,a_2,a_3 成立.

对于含幺结合 K-代数 A，回顾 A 的**反代数**（opposite algebra）A^{op}. 反代数 A^{op} 作为 K-模与 A 完全相同，记号如下：

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{id}:A & \to & A^{\mathrm{op}} \\ x & \mapsto & x^{\mathrm{op}} \end{array}$$

但是 A^{op} 具有与 A“相反”的乘法，具体地，对于 A^{op} 中的元素 $x^{\mathrm{op}},y^{\mathrm{op}}$，成立

$$x^{\mathrm{op}}y^{\mathrm{op}}:=(yx)^{\mathrm{op}}$$

定义 1.1.1. 对于含幺结合 K-代数 A，我们定义 K-代数 A^e 为

$$A^e:=A\otimes_K A^{op}$$

即 A 与 A^{op} 的 $K-$ 代数张量积。

容易验证对于任何两个含幺结合 K-代数 A,B，总有

$$(A\otimes_K B)^{\mathrm{op}}=A^{\mathrm{op}}\otimes_K B^{\mathrm{op}}$$

从而容易得到

$$(A^{\mathrm{op}})^e=(A^e)^{\mathrm{op}}$$

对于 $K-$ 代数 A，回顾 **双 $A-$ 模**（A-bimodule）的概念如下：

定义 1.1.2. 对于 K-代数 A，双 A-模是指如下资料：

（1）K-模 M；

（2）A 在 M 上的左、右 K-线性作用，

并且满足相容性：$(a.m).b = a.(m.b)$ 对任意 $m \in M$ 以及 $a, b \in A$ 成立。

例如，A 本身自然有双 A-模结构，A 在其上的左、右作用即为左乘、右乘。再比如 K-模张量积 $A \otimes_K A$ 具有如下双 A-模结构：

$$b.(a_1 \otimes a_2) := (ba_1) \otimes a_2$$

$$(a_1 \otimes a_2).b := a_1 \otimes (a_2 b)$$

其中 $a_1, a_2, b \in A$.

我们不再回顾左模、右模的概念了，也不去回顾右模与左模的平衡张量积。

性质 1.1.3. 设 M 为双 A-模，

（1）M 可自然地视为左 A^e-模：

$$(a_1 \otimes a_2^{op}).m = a_1.m.a_2$$

（2）M 可自然地视为右 A^e-模：

$$m.(a_1 \otimes a_2^{op}) = a_2.m.a_1$$

反之，左（右）A^e-模也可视为双 A-模。

证明. 容易验证。 □

特别地如果 M, N 都是双 A-模，那么考虑平衡张量积 $M \otimes_{A^e} N$，它的双 A-模结构具体如下：

$$a.(m \otimes n) = (a.m) \otimes n = m \otimes (n.a)$$

$$(m \otimes n).b = m \otimes (n.b) = (b.m) \otimes n$$

对于任何 $m \in M, n \in N, a, b \in A$ 成立。

定义 1.1.4. （余中心 *cocenter*）对于双 A-模 M，称双 A-模

$$M \otimes_{A^e} A$$

为 M 的**余中心**（*cocenter*）。

容易看出，对任意的 $m \in M, a \in A$，在余中心 $M \otimes_{A^e} A$ 当中，成立

$$(m.a) \otimes 1 = m \otimes (a.1) = m \otimes a = m \otimes (1.a) = (a.m) \otimes 1$$

从而 $(m.a - a.m) \otimes 1 = 0$. 事实上，$M$ 的余中心具有如下结构：

性质 1.1.5. 对于双 A-模 M，则有如下双 A-模同构

$$M\otimes_{A^e}A\cong M/\{(m.a-a.m)|a\in A,m\in M\}$$

证明. 考虑如下的双 A-模链复形

$$\partial_\bullet : A\otimes A\otimes A\to A\otimes A\to A\to 0$$

其中

$$\begin{aligned}\partial : a_1\otimes a_2\otimes a_3 &\mapsto a_1a_2\otimes a_3-a_1\otimes a_2a_3\\ a_1\otimes a_2 &\mapsto a_1a_2\end{aligned}$$

容易验证 ∂^2=0（由 A 的结合性），从而 $\partial_\bullet$ 为双 A-模链复形。并且显然 $\partial : A\otimes A\to A$ 是满同态。

断言链复形 $\partial_\bullet$ 为正合（exact）的。事实上，$\partial_\bullet$ 到其自身的恒等链映射与零链映射是链同伦的。我们构造如下的链同伦 $h_\bullet$：

$$\begin{aligned}h : a_1 &\mapsto 1\otimes a_1\\ a_1\otimes a_2 &\mapsto 1\otimes a_1\otimes a_2\end{aligned}$$

容易验证，对于任意的 $\varphi=a_1\otimes a_2\in A\otimes A$，成立

$$\begin{aligned}(\partial h+h\partial)\varphi &= (\partial h+h\partial)(a_1\otimes a_2)\\ &= \partial(1\otimes a_1\otimes a_2)+h(a_1a_2)\\ &= a_1\otimes a_2-1\otimes a_1a_2+1\otimes a_1a_2\\ &= a_1\otimes a_2=\varphi\end{aligned}$$

从而对于 $\varphi\in A\otimes A$，如果 $\partial\varphi=0$，那么

$$\varphi=(\partial h+h\partial)\varphi=\partial(h\varphi)$$

这说明链复形 $\partial_\bullet$ 在 $A\otimes A$ 处正合，因此 $\partial_\bullet$ 是正合的。

接下来，将函子 $M\otimes_{A^e}-$ 作用于链复形 $\partial_\bullet$，得到如下的双 A-模链复形：

$$M\otimes_{A^e}\partial_\bullet : M\otimes A\to M\to M\otimes_{A^e}A\to 0$$

由张量函子的右正合性，上述链复形也是正合的。其中注意到双 A-模同构

$$\begin{aligned}M\otimes_{A^e}(A\otimes A\otimes A) &\cong M\otimes A\\ m\otimes(a_1\otimes a_2\otimes a_3) &\mapsto (a_3.m.a_1)\otimes a_2\end{aligned}$$

以及双 A-模同构

$$\begin{aligned}M\otimes_{A^e}(A\otimes A) &\cong M\\ m\otimes(a_1\otimes a_2) &\mapsto a_2.m.a_1\end{aligned}$$

于是正合列 $M\otimes_{A^e}\partial_\bullet$ 的边界映射有如下具体表达式：

$$\begin{aligned} M\otimes_{A^e}\partial : M\otimes A &\to M \\ m\otimes A &\mapsto m.a-a.m \end{aligned}$$

从而由正合性，易知

$$M\otimes_{A^e} A\cong M/\{(m.a-a.m)|a\in A, m\in M\}$$

□

可见，M 的余中心无非是商掉 M 当中“非交换的部分”所得到的“交换的部分”，如此望文生义。例如，如果 A 为交换 K-代数，那么 A 本身作为双 A-模，其余中心为 A 本身.

1.2 Hochschild 同调

定义 1.2.1. （*Hochschild* 同调）

对于双 A-模 M，以及非负整数 n，记

$$H_n(A,M):=\mathrm{Tor}_n^{A^e}(M,A)$$

称为 M 的第 n 个 *Hochschild* 同调。特别地，我们记

$$\mathrm{HH}_n(A):=H_n(A,A)$$

由定义以及导出函子的基础知识，容易知道双 $A-$ 模 M 的第 0 个 Hochschild 同调

$$H_0(A,M)=M\otimes_{A^e}A=M/\{(m.a-a.m)|a\in A, m\in M\}$$

正是 M 的余中心。注意 Hochschild 同调一般并不是环，仅仅能保证它是双 A-模。

具体地，由导出函子的定义，我们采用投射消解（projective resolution）来计算 Hochschild 同调。若双 A-模链复形

$$P_\bullet\to A:=...\to P_3\to P_2\to P_1\to P_0\to A\to 0$$

为双 A-模 A 的投射消解（正合，并且每个 $P_i(i\geq 0)$ 作为 K-模是投射的），那么

$$H_n(A,M)\cong H_n(M\otimes_{A^e}P_\bullet)$$

由同调代数的事实，它与投射消解 $P_\bullet$ 的选取无关。

事实上 Hochschild 同调可以与空间上的微分形式类比。作为一个具体计算例子，我们考虑 $\mathbb{C}$ 上的 n 元多项式代数

$$A:=\mathbb{C}[x^1,x^2,...,x^n]$$

注意到 A 作为 $\mathbb{C}$-代数是交换的，从而 $A=A^{\mathrm{op}}$. 我们记

$$A^{\mathrm{op}}=\mathbb{C}[y^1,y^2,...,y^n]\quad A^e=\mathbb{C}[x^1,x^2,...,x^n;y^1,y^2,...,y^n]$$

性质 1.2.2. 考虑 $\mathbb{C}$-代数 $A := \mathbb{C}[x^1, x^2, ..., x^n]$，则其第 k 个 *Hochschild* 同调

$$\mathrm{HH}_k(A) \cong A \otimes \bigwedge^k(\mathbb{C}^n)$$

是以 A 为系数的 k-形式。

证明. 我们给出 A 的投射消解，比如众所周知的 Koszul 消解

$$\mathcal{K}_A \to A \to 0$$

具体地，引入 n 个新的独立变元 $\eta^1, \eta^2, ..., \eta^n$ （视为复线性空间 $\mathbb{C}^n$ 的一组基），考虑环

$$\mathcal{K} := \frac{A^e[\eta^1, \eta^2, ..., \eta^n]}{\{(\eta^i\eta^j + \eta^j\eta^i) | i \neq j\}} = A^e \otimes \bigwedge^*(\mathbb{C}^n)$$

为以 A^e 为系数的外代数。

注意 $\mathcal{K}$ 有自然的分次：

$$\deg \eta^i = 1 \quad \deg x^i = \deg y^i = \deg 1 = 0$$

记 $\mathcal{K}_l$ 为 $\mathcal{K}$ 的 l 次分量（$0 \leq l \leq n$），即

$$\mathcal{K}_l = \bigoplus_{1 \leq i_1 < i_2 < ... < i_l \leq n} A^e \eta^{i_1} \wedge \eta^{i_2} \wedge ... \wedge \eta^{i_l} = A^e \otimes \bigwedge^l(\mathbb{C}^n)$$

此时 $K = \mathbb{C}$ 是域，因此 $\mathcal{K}$ （作为 K-模，即复线性空间）的投射性显然。我们定义 Koszul 复形 $(\mathcal{K}_A, \partial)$ 如下：

$$\mathcal{K}_A : ... \xrightarrow{\partial} \mathcal{K}_n \xrightarrow{\partial} \mathcal{K}_{n-1} \xrightarrow{\partial} ... \xrightarrow{\partial} \mathcal{K}_1 \xrightarrow{\partial} \mathcal{K}_0$$

其中边缘算子 ∂（首先是 A^e-模同态）满足

$$\partial \eta^i = x^i - y^i$$

以及与外微分相同的莱布尼茨法则：对任意 $\omega \in \mathcal{K}$，成立

$$\partial(\eta^i \wedge \omega) = \partial\eta^i \wedge \omega - \eta^i \wedge \partial\omega$$

再考虑连接映射

$$\begin{aligned} \varepsilon : \mathcal{K}_0 = A^c \quad &\to \quad A \\ x^i \quad &\mapsto \quad x^i \\ y^i \quad &\mapsto \quad x^i \end{aligned}$$

则众所周知，Koszul 复形

$$\mathcal{K}_A \xrightarrow{\varepsilon} A \to 0$$

为 A 的投射消解（证明从略）。我们以此计算 $\mathrm{HH}^\bullet(A)$. 我们注意到以下两个简单事实：

其一：对任何 $1 \leq l \leq n$，成立双 A-模同构

$$A \otimes_{A^e} \mathcal{K}_l = A \otimes_{A^e} A^e \otimes \bigwedge^l(\mathbb{C}^n) \cong A \otimes \bigwedge^l(\mathbb{C}^n)$$

其二：函子 $A \otimes_{A^e} -$ 作用于 Koszul 复形 $\mathcal{K}_A$ 之后，成立

$$A \otimes_{A^e} \partial = 0$$

这是因为，对于任意 $f \in A$，在 $A \otimes_{A^e} A^e$ 当中总成立

$$f \otimes x^i = x^i f \otimes 1 = f x^i \otimes 1 = f \otimes (x^i)^{\mathrm{op}} = f \otimes y^i$$

因此

$$f \otimes (x^i - y^i) = 0 \in A \otimes_{A^e} A^e$$

从而由 ∂ 的定义，容易看出 $A \otimes_{A^e} \partial = 0$.

综上两方面，直接计算之，

$$\begin{aligned} \mathrm{HH}_k(A) &= H_k(A \otimes^L_{A^e} A) \\ &= H_k(A \otimes_{A^e} \mathcal{K}_A) \\ &= A \otimes_{A^e} \mathcal{K}_k \\ &= A \otimes \bigwedge^k(\mathbb{C}^n) \end{aligned}$$

从而得证。 $\square$

事实上对于一般的含幺结合 K-代数 A，$\mathrm{HH}_\bullet(A)$ 扮演了“微分形式”的角色。这是 Hochschild 同调的一种几何解释。

对于一般的 A，A 作为双 A-模，由一种典范的投射消解，称之为 **Bar-复形**：

定义 1.2.3. （*Bar*-复形）

对于含幺结合 K-代数 A，定义以下双 A-模链复形

$$\cdots \to B_2 A \xrightarrow{b} B_1 A \xrightarrow{b} B_0 A \xrightarrow{b} A \to 0$$

如下：

$$B_n A := A \otimes A^{\otimes n} \otimes A \ \ (n \geq 0)$$

$$b: \ a_0 \otimes a_1 \otimes ... \otimes a_n \quad \mapsto \quad \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k a_0 \otimes a_1 \otimes ... \otimes (a_k a_{k+1}) \otimes ... \otimes a_n$$

称之为 ***Bar*-复形**。

首先容易验证 $b^2=0$，从而 $B_\bullet A \xrightarrow{b} A \to 0$ 确实是链复形。对于 $n \geq 1$，具体验证如下：

$$\begin{aligned}
b^2(a_0\otimes a_1\otimes ...\otimes a_n) &= b\left(\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k a_0\otimes a_1\otimes ...\otimes(a_ka_{k+1})\otimes ...\otimes a_n\right)\\
&= \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k b(a_0\otimes a_1\otimes ...\otimes(a_ka_{k+1})\otimes ...\otimes a_n)\\
&= \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\Bigg[\sum_{l=0}^{k-2}(-1)^l a_0\otimes ...\otimes(a_la_{l+1})\otimes ...\otimes(a_ka_{k+1})\otimes ...\otimes a_n\\
&\quad +(-1)^{k-1}a_0\otimes ...\otimes(a_{k-1}a_ka_{k+1})\otimes ...\otimes a_n\\
&\quad +(-1)^k a_0\otimes ...\otimes(a_ka_{k+1}a_{k+2})\otimes ...\otimes a_n\\
&\quad -\sum_{l=k+2}^{n-1}(-1)^l a_0\otimes ...\otimes(a_ka_{k+1})\otimes ...\otimes(a_la_{l+1})\otimes ...\otimes a_n\Bigg]\\
&= \sum_{\substack{0\le k<l\le n-1\\ l-k\ge 2}}\left(-(-1)^{k+l}+(-1)^{k+l}\right)a_0\otimes ...\otimes(a_ka_{k+1})\otimes ...\otimes(a_la_{l+1})\otimes ...\otimes a_n\\
&\quad +\sum_{0\le k\le n-2}\left((-1)^{2k+1}+(-1)^{2k}\right)a_0\otimes ...\otimes(a_ka_{k+1}a_{k+2})\otimes ...\otimes a_n\\
&= 0
\end{aligned}$$

从而验证完毕。

我们可以把 $a_0\otimes ...\otimes a_n$ 想象为直线上依次排列的 $n+1$ 个质点，将算子 b 想象为相邻质点两两“碰撞”。

性质 1.2.4. 记号同之前，则 *Bar*-复形

$$B_\bullet A \to A \to 0$$

是 A 的投射消解。

证明. 对任意 $n\geq 0$，$B_nA = A\otimes A^{\otimes n}\otimes A$ 是投射 K-模（这是因为由最初的假定，A 是投射 K-模，从而其张量积也投射）于是我们只需再验证该链复形是正合的。

为此，我们构造链同伦

$$\begin{aligned}
h: B_{n-2}A &\to B_{n-1}A \quad (n\geq 1,\ B_{-1}A = A)\\
a_0\otimes ...\otimes a_n &\mapsto 1\otimes a_0\otimes ...\otimes a_n
\end{aligned}$$

只需验证 $hb+bh$=1，之后与性质1.1.5的证明类似。

注意到对于任意 $n\geq 0$，成立

$$\begin{aligned}
bh(a_0\otimes ...\otimes a_n) &= b(1\otimes a_0\otimes ...\otimes a_n)\\
&= a_0\otimes ...\otimes a_n - \sum_{k=0}^{n-1}1\otimes a_0\otimes ...\otimes(a_ka_{k+1})\otimes ...\otimes a_n\\
&= a_0\otimes ...\otimes a_n - 1\otimes b(a_0\otimes ...\otimes a_n)\\
&= (1-hb)a_0\otimes ...\otimes a_n
\end{aligned}$$

因此 $bh+hb=1$，证毕。 $\square$

定义 1.2.5. 设 M 为双 A-模，定义 ***Hochschild*** **链复形**

$$C_\bullet(A,M) := M\otimes_{A^e} B_\bullet A$$

$$\cdots M\otimes A^{\otimes 3}\to M\otimes A^{\otimes 2}\to M\otimes A\to M$$

方便起见，该链复形的边缘算子仍记作 b.

则易知 M 的 Hochdchild 同调无非是 Hochschlid 链复形的同调：

$$H_n(A,M)=H_n(C_\bullet(A,M))$$

注意到有双 A-模同构

$$C_n(A,M)=M\otimes_{A^e}\left(A\otimes A^{\otimes n}\otimes A\right)\cong M\otimes A^{\otimes n}$$

在此同构意义下，容易验证 $C_\bullet(A,M)$ 的边缘算子 b 有如下显示表达：

对任意 $m\in M$，以及 $a_1,a_2,...,a_n\in A$，成立

$$\begin{aligned}
b\left(m\otimes(a_1\otimes...\otimes a_n)\right) &= m\otimes_{A^e}\left(b(1\otimes a_1\otimes...\otimes a_n\otimes 1)\right)\\
&= m\otimes_{A^e}[a_1\otimes...\otimes a_n\otimes 1\\
&\quad+\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k 1\otimes a_1\otimes...\otimes(a_ka_{k+1})\otimes...\otimes a_n\otimes 1\\
&\quad+(-1)^n 1\otimes a_1\otimes...\otimes a_n]\\
&= (m.a_1)\otimes a_2\otimes...\otimes a_n\\
&\quad+\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k m\otimes a_1\otimes...\otimes(a_ka_{k+1})\otimes...\otimes a_n\\
&\quad+(-1)^n(a_n.m)\otimes a_1\otimes...\otimes a_{n-1}
\end{aligned}$$

Hochschlid 链复形的边缘算子的显式表达与 Bar-复形非常相似，从上式最右边的前两项可以看出；区别在于上式最右边的第三项。

1.3 Hochschlid 上同调

对于双 A-模 M，既然我们已经考虑余中心 $M\otimes_{A^e}A$，那么我们自然也会去考虑 $\mathrm{Hom}_{A^e}(A,M)$. 我们称双 A-模 $\mathrm{Hom}_{A^e}(A,M)$ 为 M 的**导出中心**（derived center）。

性质 1.3.1. （导出中心的结构）对于双 A-模 M，则有双 A-模同构

$$\mathrm{Hom}_{A^e}(A,M)\cong\{m\in M|a.m-m.a=0\ \ \forall a\in A\}$$

容易验证 $\{m \in M | a.m - m.a = 0 \ \forall a \in A\}$ 为 M 的双 A-子模。粗俗地说，该子模由“与 A 中所有元素交换”的元素构成，故谓之“中心”。

证明. 对于任意的 $\varphi \in \mathrm{Hom}_{A^e}(A, M)$ 以及 $a \in A$，则 $\varphi(a)$ 的取值由 $\varphi(1)$ 完全决定：

$$\varphi(a) = \varphi(a.1) = a.\varphi(1)$$

而另一方面，

$$\varphi(a) = \varphi(1.a) = \varphi(1).a$$

从而有 $a.\varphi(1) = \varphi(1).a$. 于是我们可以构造如下双 $A-$ 模同态：

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Hom}_{A^e}(A, M) & \to & \{m \in M | a.m - m.a = 0 \ \forall a \in A\} \\ \varphi & \mapsto & \varphi(1) \end{array}$$

容易验证该模同态为同构。证毕。 □

然后我们考虑 $\mathrm{Hom}(-, M)$ 的导出函子，自然地去定义如下：

定义 1.3.2. （*Hochschild* 上同调）

对于双 A-模 M，以及 $n \geq 0$，定义 M 的第 n 个 *Hochschild* 上同调

$$H^n(A, M) = \mathrm{Ext}^n_{A^e}(A, M)$$

特别地，我们记

$$H^n(A) = \mathrm{Ext}^n_{A^e}(A, A)$$

由定义知，M 的第 0 个 Hochschild 上同调为 $\mathrm{Hom}_{A^e}(A, M)$，是 M 的导出中心。回顾 Bar-复形，我们考虑如下的 **Hochschild 上链复形**

$$C^\bullet(A, M) = \mathrm{Hom}_{A^e}(B_\bullet A, M)$$

该上链复形的微分算子 ∂ 由 Bar-复形 $B_\bullet A$ 的边缘算子 b 所诱导。则 M 的 Hochschild 上同调满足

$$H^n(A, M) = H^n(C^\bullet(A, M), \partial) = H^n(\mathrm{Hom}_{A^e}(B_\bullet A, M), \partial)$$

注意有自然的双 A-模同构

$$C^n(A, M) = \mathrm{Hom}_{A^e}(A \otimes A^{\otimes n} \otimes A, M) \cong \mathrm{Hom}(A^{\otimes n}, M)$$

（即取值于 M 的 n 重 K-线性映射）于是对于任意的 $\varphi \in C^n(A, M) = \mathrm{Hom}(A^{\otimes n}, M)$，容易知道 $\partial\varphi \in \mathrm{Hom}(A^{\otimes n+1}, M)$ 具有如下显式表达：对任意 $a_0, a_1, ..., a_m \in A$，

$$\begin{array}{rcl} \partial\varphi(a_0, a_1, ..., a_n) & = & a_0.\varphi(a_1, a_2, ..., a_n) \\ & & -\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \varphi(a_0, ...; (a_k a_{k+1}); ..., a_n) \\ & & -(-1)^n \varphi(a_0, a_1, ..., a_{n-1}).a_n \end{array}$$

接下来讨论 Hochschild 上同调的几何意义。我们已经知道第 0 个 Hochschild 上同调为 M 的导出中心；现在我们看 $H^1(A,M)$，我们将发现它是 A 的取值于 M 的外导子。

回顾**导子**（derivation）的概念如下：

定义 1.3.3. （导子）对于双 A-模 M，K-线性映射

$$D : A \to M$$

称为 A 的取值于 M 的**导子**（*derivation*），如果对任意的 $a_1, a_2 \in A$，成立

$$D(a_1a_2) = D(a_1).a_2 + a_1.D(a_2)$$

对于 $m \in M$ 我们定义

$$\begin{aligned} \mathrm{ad}_m : A &\to M \\ a &\mapsto [m,a] := m.a - a.m \end{aligned}$$

则容易验证 ad_m 为 A 的取值于 M 的导子，称形如这样的导子为**内导子**（inner derivation）。

我们记

$$\mathrm{Der}(A,M) := \{D : A \to M | D\text{为导子}\}$$

$$\mathrm{Inn}(A,M) := \{\mathrm{ad}_m | m \in M\} \subseteq \mathrm{Der}(A,M)$$

注意 $\mathrm{Inn}(A,M)$ 与 $\mathrm{Der}(A,M)$ 都有显然的 K-模结构，且前者是后者的 K-子模。

性质 1.3.4. （$\mathrm{HH}^1(A,M)$ 的结构）

对于双 A-模 M，成立

$$\mathrm{HH}^1(A,M) \cong \frac{\mathrm{Der}(A,M)}{\mathrm{Inn}(A,M)}$$

我们称上式右边的集合当中的元素为 A 的取值于 M 的**外导子**（outer derivation）。

证明. 只需考虑 Hochschild 上链复形

$$C^0(A,M) \xrightarrow{\partial^0} C^1(A,M) \xrightarrow{\partial^1} C^2(A,M) \to \cdots$$

我们只需具体计算之。对于 $\varphi \in C^1(A,M) \cong \mathrm{Hom}(A,M)$，则 $\partial^1\varphi \in C^2(A,M) \cong \mathrm{Hom}(A^{\otimes 2},M)$ 满足：对任意 $a_1, a_2 \in A$，成立

$$\partial^1\varphi(a_1,a_2) = a_1.\varphi(a_2) - \varphi(a_1a_2) + \varphi(a_1).a_2$$

可见 $\varphi \in \ker \partial^1$ 当且仅当 $\varphi \in \mathrm{Der}(A,M)$. 也就是说 $\ker \partial^1 = \mathrm{Der}(A,M)$.

另一方面，对于 $m \in C^0(A,M) \cong M$，以及 $a \in A$，成立

$$(\partial^0 m)(a) = a.m - m.a = -\mathrm{ad}_m(a)$$

因此 $\ker\partial^0 \cong \mathrm{Inn}(A,M)$. 从而

$$\mathrm{HH}^1(A,M) = \frac{\ker\partial^1}{\mathrm{Im}\,\partial^0} \cong \frac{\mathrm{Der}(A,M)}{\mathrm{Inn}(A,M)}$$

□

特别地，当 $M=A$ 时，

$$\mathrm{HH}^1(A) = \mathrm{Der}(A,A)/\mathrm{Inn}(A,A)$$

注意到 $\mathrm{Der}(A,A)$ 上面还有更多的结构：对于 $\forall D_1, D_2 \in \mathrm{Der}(A,A)$，定义

$$[D_1,D_2] := D_1\circ D_2 - D_2\circ D_1 : A\to A$$

容易验证 $[D_1,D_2]$ 仍然为 A 的导子，并且 $[-,-]$ 为 $\mathrm{Der}(A,A)$ 上的李括号（Lie bracket）。

另外容易验证

$$[\mathrm{Der}(A,A),\mathrm{Inn}(A,A)] \subseteq \mathrm{Inn}(A,A)$$

具体地，对于 $D\in\mathrm{Der}(A,A)$ 以及 $m\in M$，成立

$$[D,\mathrm{ad}_m] = \mathrm{ad}_{D(m)}$$

也就是说 $\mathrm{Inn}(A,A)$ 是 $\mathrm{Der}(A,A)$ 的理想。于是 $[-,-]$ 诱导了 $\mathrm{HH}^1(A) = \frac{\mathrm{Der}(A,A)}{\mathrm{Inn}(A,A)}$ 上的李括号结构.

如果 A 是交换 K-代数，则 $\mathrm{Inn}(A,A)=0$。于是

$$\mathrm{HH}^1(A)\cong\mathrm{Der}(A,A)$$

可被认为是“切向量场”（此时 A 被认为是“函数环”）。

我们再去考虑 $\mathrm{HH}^2(A,M)$. 对于任意的

$$\varphi\in C^2(A,M) = \mathrm{Hom}(A^{\otimes 2},M)$$

则对 $a_0,a_1,a_2\in A$，成立

$$\partial\varphi(a_0,a_1,a_2) = a_0.\varphi(a_1,a_2) - \varphi(a_0a_1,a_2) + \varphi(a_0,a_1a_2) - \varphi(a_0,a_1).a_2$$

引理 1.3.5. 对于双 A-模 M，以及 $\varphi\in C^2(A,M)=\mathrm{Hom}(A^{\otimes 2},M)$，我们令

$$\hat{A} := A\oplus M$$

并赋以如下的 K-代数结构：对于任意 $a_1,a_2\in A$ 以及 $m_1,m_2\in M$，规定 $\hat{A}$ 的乘法 $\hat{\bullet}_\varphi$ 为

$$(a_1\oplus m_1)\hat{\bullet}_\varphi(a_2\oplus m_2) := a_1a_2\oplus[a_1.m_2 + m_1.a_2 + \varphi(a_1,a_2)]$$

那么 $(\hat{A},\hat{\bullet}_\varphi)$ 为结合代数，当且仅当 $\partial\varphi=0$.

证明. 这是简单的计算验证。对于任意的 $a_0,a_1,a_2\in A$ 以及 $m_0,m_1,m_2\in M$，直接计算之，

$$\begin{aligned}
& [(a_0\oplus m_0)\hat{\bullet}_\varphi(a_1\oplus m_1)]\hat{\bullet}_\varphi(a_2\oplus m_2)\\
= \ & a_0a_1a_2\oplus[a_0a_1.m_2 + a_0.m_1.a_2 + m_0.a_1a_2 + \varphi(a_0,a_1).a_2 + \varphi(a_0a_1,a_2)]
\end{aligned}$$

以及

$$\begin{aligned}&(a_0\oplus m_0)\hat{\bullet}_\varphi[(a_1\oplus m_1)\hat{\bullet}_\varphi(a_2\oplus m_2)]\\ =\quad & a_0a_1a_2\oplus[a_0a_1.m_2+a_0.m_1.a_2+m_0.a_1a_2+a_0.\varphi(a_1,a_2)+\varphi(a_0,a_1a_2)]\end{aligned}$$

因此 $\hat{\bullet}_\varphi$ 满足结合性，当且仅当

$$\varphi(a_0,a_1).a_2+\varphi(a_0a_1,a_2)=a_0.\varphi(a_1,a_2)+\varphi(a_0,a_1a_2)$$

而此式等价于 $\partial\varphi=0$. □

注意到在 $\hat{A}$ 当中，对任意的 $m_1,m_2\in M$，以及任意 $\varphi\in C^2(A,M)$，总有 $m_1\hat{\bullet}_\varphi m_2=0$. 于是我们不妨将“$A\oplus M$”当中的“$M$”理解为“一阶小量”。我们考虑 $\varphi=0$ 时 $\hat{A}_0:=A\oplus M$ 的代数结构

$$(a_1\oplus m_1)\bullet(a_2\oplus m_2):=a_1a_2\oplus(a_1.m_2+m_1.a_2)$$

显然 $(\hat{A}_0,\bullet)$ 为结合代数。若 $\partial\varphi=0$，则结合代数 $(\hat{A},\hat{\bullet}_\varphi)$ 为 $(\hat{A}_0,\bullet)$ 的**一阶形变**，而 φ 为其“形变参数”。

从而 M 的第 2 个 Hochschild 上同调

$$H^2(A,M)\cong\frac{\{\varphi|(\hat{A},\hat{\bullet}_\varphi)\text{是结合代数}\}}{\mathrm{Im}(\partial:C^1(A,M)\to C^2(A,M))}$$

商掉的东西（$\mathrm{Im}\,\partial$）为形如以下的一类特殊的一阶形变：

$$\begin{aligned}\varphi_f:A\otimes A&\quad\to\quad M\\ a_1\otimes a_2&\quad\mapsto\quad a_1.f(a_2)+f(a_1).a_2-f(a_1a_2)\end{aligned}$$

其中 $f\in C^1(A,M)=\mathrm{Hom}(A,M)$，$\varphi_f=\partial f$.

我们考察一个 Hochschild 上同调的具体算例。

性质 1.3.6. 若 $A=\mathbb{C}[x^1,...,x^n]$ 为 $\mathbb{C}$ 上的 n 元多项式环，则

$$\mathrm{HH}^k(A)\cong\mathrm{Hom}\left(\bigwedge^k(\mathbb{C}^n),A\right)$$

证明. 对于这个特例，采用 Koszul 复形计算更佳简便。有关记号同性质1.2.2的证明过程. 考虑 Koszul 复形

$$\mathcal{K}_A:\cdots\xrightarrow{\partial}A^e\otimes\bigwedge^{k+1}(\mathbb{C}^n)\xrightarrow{\partial}A^e\otimes\bigwedge^k(\mathbb{C}^n)\xrightarrow{\partial}A^e\otimes\bigwedge^{k-1}(\mathbb{C}^n)\xrightarrow{\partial}\cdots$$

然后将函子 $\mathrm{Hom}_{A^e}(-,A)$ 作用于之上。注意到有 $\mathbb{C}$-线性同构

$$\begin{aligned}&\mathrm{Hom}_{A^e}\left(A^e\otimes\bigwedge^k(\mathbb{C}^n),A\right)\\ \cong\quad&\mathrm{Hom}\left(\bigwedge^k(\mathbb{C}^n),\mathrm{Hom}_{A^e}(A^e,A)\right)\\ \cong\quad&\mathrm{Hom}\left(\bigwedge^k(\mathbb{C}^n),A\right)\end{aligned}$$

此外再注意到，上链复形 $\mathrm{Hom}_{A^e}(\mathcal{K}_A, A)$ 的微分算子 $\mathrm{d} := \mathrm{Hom}_{A^e}(\partial, A) = 0$. 这是因为对于 $\varphi \in \mathrm{Hom}_{A^e}\left(A^e \otimes \bigwedge^k(\mathbb{C}^n), A\right)$，$\omega \in \bigwedge^{k+1}(\mathbb{C}^n)$ 以及 $f \in A^e$，成立

$$\mathrm{d}\varphi(f \otimes \omega) = \varphi(\partial(f \otimes \omega))$$

回顾 Koszul 复形边缘算子运算规则

$$\partial : \eta^i \mapsto x^i - y^i \in A^e$$

又由于 φ 为 A^e-模同态，从而对于任意 $\tilde{\omega} \in \bigwedge^k(\mathbb{C}^n)$，成立

$$\varphi(x^i \otimes \tilde{\omega}) = x^i.\varphi(1 \otimes \tilde{\omega}) = \varphi(1 \otimes \tilde{\omega}).x^i = \varphi((x^i)^{\mathrm{op}} \otimes \tilde{\omega}) = \varphi(y^i \otimes \tilde{\omega})$$

也就是说 $\varphi((x^i - y^i) \otimes \tilde{\omega}) = 0$. 由此可见 $\mathrm{d} = 0$. 综上可知

$$\mathrm{HH}^k(A) \cong \mathrm{Hom}\left(\bigwedge^k(\mathbb{C}^n), A\right)$$

□

注意到 $\mathrm{Hom}\left(\bigwedge^k(\mathbb{C}^n), A\right)$ 之中的元素形如

$$\sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_k \le n} f_{i_1 \ldots i_k} \partial_{i_1} \wedge \ldots \wedge \partial_{i_k}$$

回顾 $\mathrm{HH}_\bullet(A)$ 中的元素可被认为是“微分形式”，可见 $\mathrm{HH}^\bullet(A)$ 中的元素则是“多重切向量场”。

1.4 Hochschild（上）同调的例子

定义 1.4.1. （约化 *Bar-* 复形）（*reduced Bar-complex*）

对于 K-代数 A，则视 K 为 A 的 K-子模，并且令 K-模

$$\overline{A} := A/K$$

我们定义如下的约化 *Bar-* 复形 $(\overline{B}_\bullet A, b)$:

$$\overline{B}_n A := A \otimes \overline{A}^{\otimes n} \otimes A \quad \forall i \ge 0$$

边缘算子 $b : \overline{B}_n A \to \overline{B}_{n-1} A$ 如下定义:

$$\begin{aligned} b\Big(a_0 \otimes (\overline{a_1} \otimes \cdots \otimes \overline{a_n}) \otimes a_{n+1}\Big) \quad := \quad & (a_0 a_1) \otimes (\overline{a_2} \otimes \cdots \otimes \overline{a_n}) \otimes a_{n+1} \\ + \quad & \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^i a_0 \otimes (\overline{a_1} \otimes \cdots (\overline{a_i a_{i+1}}) \otimes \cdots \otimes \overline{a_n}) \otimes a_{n+1} \\ + \quad & (-1)^n a_0 \otimes (\overline{a_1} \otimes \cdots \otimes \overline{a_{n-1}}) \otimes (a_n a_{n+1}) \end{aligned}$$

注意到 $\overline{B}_\bullet A$ 是 $B_\bullet A$ 的商模:

$$\overline{B}_n A = \frac{B_n A}{\{a_0 \otimes (a_1 \otimes \cdots \otimes a_{i-1} \otimes 1 \otimes a_{i+1} \otimes \cdots \otimes a_n) \otimes a_{n+1}\}}$$

容易发现约化 Bar-复形的“b”正是 Bar-复形的 b. 但是我们要验证 b 的良定性，即与代表元选取无关。这是容易验证的。进而，我们可以由约化 Bar-复形构造 A 的投射消解：

$$\overline{B}_\bullet A \to A \to 0$$

与之前 *Bar*-复形完全类似，我们容易验证此复形也是正合的。只需构造同伦算子

$$\begin{array}{rcl} h : \overline{B}_{n-1}A & \to & \overline{B}_n A \\ a_0 \otimes (\overline{a_1} \otimes \cdots \otimes \overline{a_{n-1}}) \otimes a_n & \mapsto & 1 \otimes (\overline{a_0} \otimes \overline{a_1} \otimes \cdots \otimes \overline{a_n}) \otimes a_{n+1} \end{array}$$

验证 $bh + hb = 1$ 即可。

定义 1.4.2. （约化 *Hochschild*（上）链复形）

对于双 A-模 M，我们令

$$\begin{array}{rcl} \overline{C}_\bullet(A, M) & := & M \otimes_{A^e} \overline{B}_\bullet A \cong M \otimes \overline{A}^{\otimes \bullet} \\ \overline{C}^\bullet(A, M) & := & \mathrm{Hom}_{A^e}(\overline{B}_\bullet A, M) \cong \mathrm{Hom}(\overline{A}^{\otimes \bullet}, M) \end{array}$$

称之为关于 M 的约化 *Hochschild*（上）链复形。

由于约化 Bar-复形也是 A 的投射消解，从而我们也可以由约化 Hochschild（上）链复形来计算 Hochschild（上）同调：

$$H_\bullet(\overline{C}_\bullet(A, M)) = H_\bullet(A, M)$$

$$H^\bullet(\overline{C}^\bullet(A, M)) = H^\bullet(A, M)$$

关于（约化）Bar-复形，我们还有另一种理解方式：关于 A 的（约化）Bar-复形是 A 与某个微分分次代数的自由乘积。

定义 1.4.3. （微分分次代数）

$\mathbb{Z}$-分次 K-代数

$$A := \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} A_n$$

称为**微分分次代数**（*differential graded algebra*），若它配以 K-线性算子 $\mathrm{d} : A \to A$，并且满足：

$$\begin{cases} \mathrm{d}(A_n) \subseteq A_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{Z} \\ \mathrm{d}^2 = 0 \\ \mathrm{d}(\alpha\beta) = (\mathrm{d}\alpha)\beta + (-1)^{\deg \alpha}\alpha(\mathrm{d}\beta) \quad \forall \alpha, \beta \in A, \text{并且 } \alpha \text{ 是齐次元} \end{cases}$$

对于微分分次代数 (A, d)，由于 A 的分次以及 $\mathrm{d}^2 = 0$，从而自然有上链复形

$$\cdots \to A_{-1} \xrightarrow{\mathrm{d}} A_0 \xrightarrow{\mathrm{d}} A_1 \to \cdots$$

我们将此上链复形也记为 (A, d).

微分分次代数最直接的例子是，对于光滑流形 X，考虑 $A := \Omega^\bullet(X)$ 为 X 上的微分形式。A 上的乘法即为微分形式的外积 $\wedge$，微分结构即为外微分 d.

我们可以适当修改微分分次代数的定义，将条件"$\mathrm{d}(A_n) \subseteq A_{n+1}$"改为"$\mathrm{d}(A_n) \subseteq A_{n-1}$"，此时的微分算子我们习惯记为"$\partial$". 对于这样的微分分次代数 (A, ∂)，它可以被视为链复形。

例子 1.4.4. 我们考虑如下 K-代数：

$$A := K[\varepsilon] := K \oplus K\varepsilon \oplus K\varepsilon^2 \oplus \cdots$$

其中 ε 为形式变量，并且规定 $\deg \varepsilon = 1$，由此诱导出 $K[\varepsilon]$ 的分次结构。其微分算子 ∂_ε 由以下诱导：

$$\partial_\varepsilon(1) = 0 \quad \partial_\varepsilon(\varepsilon) = 1$$

注意 $\deg \varepsilon = 1$，按照微分代数的定义可计算出

$$\partial_\varepsilon(\varepsilon^2) = \partial_\varepsilon(\varepsilon)\varepsilon + (-1)^{\deg \varepsilon}\varepsilon\partial_\varepsilon(\varepsilon) = \varepsilon - \varepsilon = 0$$

一般地，对于非负整数 n 我们有

$$\partial_\varepsilon(\varepsilon^n) = \begin{cases} 0 & n \text{ 为偶数} \\ \varepsilon^{n-1} & n \text{ 为奇数} \end{cases}$$

从而链复形 $(K[\varepsilon], \partial_\varepsilon)$：

$$\cdots \to K\varepsilon^4 \xrightarrow{0} K\varepsilon^3 \xrightarrow{1} K\varepsilon^2 \xrightarrow{0} K\varepsilon \xrightarrow{1} K \to 0$$

是正合的。其中 $1 : K\varepsilon^{2n+1} \to K\varepsilon^{2n}$ 将 ε^{2n+1} 映为 ε^{2n}.

众所周知，对于两个 K-代数 A, B，我们可以谈论它们的**自由乘积**（free product）$A * B$. 若 $A = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} A_n$ 是微分分次代数，其微分算子为 d，则容易知道 $A * B$ 自然也有微分分次代数结构：

$$\begin{cases} \deg b &= 0 & \forall b \in B \\ \deg a &= n & \forall a \in A_n \subseteq A \\ \mathrm{d}b &= 0 & \forall b \in B \end{cases}$$

容易知道 $A * B$ 中的 N 次齐次元必形如以下元素的有限和：

$$b_1 a_1 b_2 a_2 \cdots b_m a_m b_{m+1} \quad (b_i \in B\,,\, a_i \in A_{n_i}\,,\, \sum_{i=1}^m n_i = N)$$

性质 1.4.5. 对于 K-代数 A，则有链复形的同构

$$(B_\bullet A \to A, b) \cong (A * K[\varepsilon], \partial_\varepsilon)$$

其中 $(K[\varepsilon], \partial_\varepsilon)$ 为例子 *1.4.4* 当中的微分分次代数，视为链复形；同构映射为

$$\begin{aligned} \varphi_n : B_n A &\to (A * K[\varepsilon])_n \\ a_0 \otimes (a_1 \otimes \cdots \otimes a_n) \otimes a_{n+1} &\mapsto a_0 \varepsilon a_1 \varepsilon a_2 \cdots a_n \varepsilon a_{n+1} \end{aligned}$$

这给出了 Bar-复形的又一种理解方式。

证明. 容易验证 φ_n 为 K-模同构，且逆映射 φ_n^{-1} 由以下诱导：

$$\varepsilon^n \mapsto \underbrace{1\varepsilon 1\varepsilon 1\cdots 1\varepsilon 1}_{n\text{个}\varepsilon}$$

然后只需验证 $\varphi_\bullet : (B_\bullet \to A, b) \to (A * K[\varepsilon], \partial_\varepsilon)$: 是链映射，也就是要验证交换关系 $\varphi \circ b = \partial_\varepsilon \circ \varphi$

$$\begin{tikzcd}
B_n A \arrow[r, "b"] \arrow[d, "\varphi"] & B_{n-1} A \arrow[d, "\varphi"] \\
(K[\varepsilon] * A)_n \arrow[r, "\partial_\varepsilon"] & (K[\varepsilon] * A)_{n-1}
\end{tikzcd}$$

而这容易验证，验证如下：

$$\begin{aligned}
& \varphi \circ b(a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n \otimes a_{n+1}) \\
= \; & \varphi\left(\sum_{k=0}^{n} (-1)^k a_0 \otimes \cdots \otimes (a_k a_{k+1}) \otimes \cdots \otimes a_{n+1}\right) \\
= \; & \sum_{k=0}^{n} (-1)^k a_0 \varepsilon a_1 \varepsilon \cdots \varepsilon a_{n+1} \\
= \; & \partial_\varepsilon (a_0 \varepsilon a_1 \varepsilon \cdots a_n \varepsilon a_{n+1}) \\
= \; & \partial_\varepsilon \circ \varphi (a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n \otimes a_{n+1})
\end{aligned}$$

□

我们还可以考虑 $(K[\varepsilon], \partial_\varepsilon)$ 的商代数 $K[\varepsilon]/\varepsilon^2$，易知 $(K[\varepsilon]/\varepsilon^2, \partial_\varepsilon)$ 也构成微分分次代数，从而也通过微分算子 ∂_ε 视为链复形。在此代数中，$\varepsilon^2 = 0$.

类似地，我们可以给出约化 Bar-复形的另一种理解方式：

性质 1.4.6. 对于 K-代数 A，则有链复形同构

$$(\overline{B}_\bullet A \to A, b) \cong (A * K[\varepsilon]/\varepsilon^2, \partial_\varepsilon)$$

只需注意到 $A * K[\varepsilon]/\varepsilon^2$ 当中的 n 次齐次元必形如以下元素的有限和：

$$a_0 \varepsilon a_1 \varepsilon \cdots a_n \varepsilon a_{n+1} \quad (a_i \in A)$$

证明. 完全类似。事实上此链复形同构映射由 $\varphi_n : B_n A \to (A * K[\varepsilon])_n$ 诱导，其良定性由下式保证：对任意 $1 \le i \le n$，

$$\begin{aligned}
& \varphi_n (a_0 \otimes \cdots \otimes a_{i-1} \otimes 1 \otimes a_{i+1} \otimes \cdots \otimes a_{n+1}) \\
= \; & a_0 \varepsilon a_1 \cdots a_{i-1} \varepsilon 1 \varepsilon a_{i+1} \cdots \varepsilon a_{n+1} \\
= \; & a_0 \varepsilon a_1 \cdots a_{i-1} 1 \varepsilon^2 a_{i+1} \cdots \varepsilon a_{n+1} \\
= \; & 0 \mod \varepsilon^2
\end{aligned}$$

□

本节最后简单介绍以下 Hochschild（上）同调与其它常见的（上）同调理论的关系。

例子 1.4.7. （群的上同调）

设 G 是一个群，$M \in \mathrm{Rep}(G)$ 为群 G 的一个左 K-表示，则有 G-模链复形

$$0 \to M \xrightarrow{\delta} C^1(G, M) \xrightarrow{\delta} C^2(G, M) \xrightarrow{\delta} \dots$$

其中

$$C^n(G, M) := \mathrm{Hom}(G^n, M) = \{f : G^n \to M\}$$

并且微分算子 δ 满足

$$\begin{cases} \delta(m)(g) &= g.m - m \\ (\delta f)(g_0, g_1, \dots, g_n) &= g_0.f(g_1, g_2, \dots, g_n) \\ & \quad - \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k f(g_1, \dots, g_k g_{k+1}, \dots, g_n) \\ & \quad -(-1)^n f(g_0, g_1, \dots, g_{n-1}) \end{cases}$$

容易验证 $\delta^2 = 0$. 此链复形的上同调

$$H^\bullet(G, M) := H^\bullet(C^\bullet(G, M), \delta)$$

称之为**群的上同调** *(group cohomology)*

由 δ 的表达式容易看出，群的上同调与 Hochschild 上同调有以下关系：

性质 1.4.8. 设 G 是一个群，M 为群 G 的一个左 K-模，考虑群代数 $A := K[G]$，于是 M 自然有左 A-模结构。那么有同构：

$$H^\bullet(G, M) \cong H^\bullet(K[G], M)$$

其中左边为群 G 关于 M 的上同调，右边为群代数 $K[G]$ 关于 M 的 *Hichschild* 上同调。

注意 M 仅仅是左 $K[G]$-模，并没有双 $K[G]$-模结构呀，怎么谈论 Hochschild 上同调？

（强行规定 G 在 M 上的右作用恒为 1，通过 K-线性扩张得到 $K[G]$ 在 M 的右作用，这样就得到 M 的双 $K[G]$-模结构了。）

证明. 注意到 $\mathrm{Hom}(G^n, M)$ 中的元素可以自然地 K-线性延拓为 $\mathrm{Hom}(K[G]^n, M)$ 中的元素，这给出它们之间的同构。然后注意到 $A = K[G]$ 的 Hochschild 上链复形的微分算子的显式表达式，（见定义1.3.2的下方）它与群上同调相应的上链复形的微分算子显式表达式“相同”。细节从略。 □

若熟悉李代数同调，我们可以将李代数同调与其泛包络代数的 Hochschild 同调联系起来：

例子 1.4.9. （李代数同调）对于李代数 $\mathfrak{g}$，M 为李代数 $\mathfrak{g}$ 的一个左 K-模。令 $A := \mathcal{U}(\mathfrak{g})$ 为 $\mathfrak{g}$ 的泛包络代数，则 A 自然有左 A-模结构。（再通过某种“比较平凡”的方式给出右作用？与上例类似？）则有同构

$$H_\bullet(\mathcal{U}(\mathfrak{g}), M) \cong H_\bullet^{Lie}(\mathfrak{g}, M)$$

其中左边是 A 关于 M 的 *Hochschild* 同调，右边是李代数同调。

并没有在此叙述**李代数同调**的定义。留给感兴趣者。此处从略。

事实上，也可以考虑**群的同调**、**李代数上同调**，它们也有对应的 Hochschild 同调、上同调。

1.5 循环同调

$\mathrm{HH}_\bullet(A) \rightsquigarrow$noncommutative differential forms.

$$B \dashleftarrow \text{de rham}$$

cyclic group action

$$C_\bullet(A,A) = C_\bullet(A) = A \otimes A$$

$$C_n(A) = A^{\otimes n+1}$$

we consider the $\mathbb{Z}/(n+1)\mathbb{Z}$ acting on $C_n A$,

$$\lambda : C_n(A) \to C_n(A)$$

$$a_0 \otimes a_1 \otimes ... \otimes a_n \mapsto (-1)^n a_n \otimes a_0 \otimes ... \otimes a_{n-1}$$

then λ is generator,

$$\lambda^{n+1} = (-1)^{n(n+1)} = 1$$

Let

$$C_\bullet^\lambda(A) := C_\bullet(A)/(1-\lambda)$$

cyclic co-invariant.

性质 1.5.1. *Hochschild differential b(on $C_\bullet(A)$) induces a differential on $C_\bullet(A)/(1-\lambda)$*

证明. Let us define

$$b' : C_\bullet(A) \to C_{\bullet-1}(A)$$

$$b'(a_0 \otimes ... \otimes a_n) = a_0 a_1 \otimes a_2 \otimes ... \pm ... \pm a_0 \otimes a_1 \otimes ... \otimes a_{n-1} a_n$$

$((C_\bullet(A), b') = (B_\bullet A \to A))$
claim that

$$(1-\lambda)b' = b(1-\lambda)$$

$$[b,\lambda] = (1-\lambda)(b-b')$$

In particular, $b : \mathrm{Im}(1-\lambda) \mapsto \mathrm{Im}(1-\lambda)$
"proof": □

so, b acts on $C_\bullet^\lambda(A) = C_\bullet(A)/(1-\lambda)$,called **Connes' complex**

$$H_\bullet^\lambda(A) = H_\bullet(C_\bullet^\lambda(A), b)$$

Introduce

$$\mathcal{N} : C_n(A) \to C_n(A)$$

性质 1.5.2.

$$b'\mathcal{N} = Nb$$

we have an exact sequence

定义 1.5.3. *the cyclic bi-complex* $CC_\bullet(A)$

Let $\mathrm{Tot}(CC_\bullet(A))$ be the total complex of $CC_\bullet(A)$ with a natural map of complexs

$$\mathrm{Tot}(CC_\bullet(A)) \to C_\bullet^\lambda(A)$$

is a quasi-isomorphism.

$$HC_\bullet(A) := H_\bullet(\mathrm{Tot}(CC_\bullet(A))) \cong H_\bullet^\lambda(A)$$

Intuitively, we can delete "exact sequence" and get rid of 蓝色框框，

1.6 始有一如，独一之神，其名在阿尔达称为伊露维塔。

Cyclic v.s. de Rham

Last time "Cyclic homology"

$$\lambda : a_0 \otimes ... \otimes a_n \mapsto (-1)^n a_n \otimes a_1 \otimes ... \otimes a_{n+1}$$

$H_\bullet^\lambda(A) = H_\bullet(C_\bullet(A)/(1-\lambda), b)$
$\mathcal{N} : C_n(A) \to C_n(A)$
$\mathcal{N} = 1 + \lambda + ... + \lambda^n$
$HC_\bullet(A) = \mathrm{Tot}(\text{cyclic bi-complex})$
Today:

性质 1.6.1.

$$B \circ b + b \circ B = 0$$

where B is Connes' operator

Easy to check.

$$(C_\bullet(A)[u^{-1}], b + uB)$$

$$C_\bullet(A)[u^{-1}] := C_\bullet(A) \oplus C_\bullet(A)u^{-1} \oplus C_\bullet(A)u^{-2} \oplus \cdots$$

性质 1.6.2.

$$H_\bullet^\lambda(A) \cong H_\bullet(C_\bullet(A)[u^{-1}], b + uB)$$

$(b + uB)^2 = 0$

$$\deg(b) = -1, \quad \deg(B) = 1, \quad \deg(u) = -2$$

where u is a formal variable.

注记 1.6.3. *(Geometry anelogue)* ***Hodge theory***

A complex m.f.d., X, complex(or algebraic) geometry, has an operator $\bar\partial$;

topology: consider de-rham operator $\mathrm{d} = \partial + \bar\partial$.

Consider $\mathrm{d}_u := \bar\partial + u\partial$, called "Hodge filtration". A bridge between "topology" and "complex geometry". "Stability condition".

Periodic cyclic homology

$$CC_\bullet^{per}(A) := (C_\bullet(A)((u)), b + uB)$$

$$H_\bullet(CC_\bullet^{per}(A), b + uB)$$

is called periodic cyclic homology.

negative cyclic homology

$$CC_\bullet^-(A) := (C_\bullet(A)[u], b + uB)$$

$$CC_\bullet^{per} \rightsquigarrow \text{de rham homologyopen-closed string states}$$

$$CC_\bullet(A) \rightsquigarrow \text{open string states} \leftrightsquigarrow \text{gauge theory}$$

$$CC_\bullet^-(A) \rightsquigarrow \text{closed string states} \leftrightsquigarrow \text{gravity}$$

Why "B" is like de-rham differential?

$$B : \overline{C}_n(A) \to \overline{C}_{n+1}(A)$$

$$a_0 \otimes \overline{a_1} \otimes ... \otimes \overline{a_n} \mapsto \sum_i \pm 1 \otimes \overline{a_i} \otimes \cdots \otimes \overline{a_n} \otimes ... \otimes \overline{a_{i-1}}$$

$$H_\bullet(\overline{C}_\bullet(A)[u^{-1}], b + uB) \cong \text{cyclic homology of } A$$

例子 1.6.4. *Consider $A = K$ as K-algebra. $\overline{A} = 0$. So,*

$$\overline{A}_\bullet A = A \otimes \text{"}0\text{"}$$

$$b = 0 \quad B = 0$$

$$\overline{\bullet}(A)[]u^{-1} \rightsquigarrow HC_n(K) = \begin{cases} K & n \geq 0 \text{ even} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$K, Ku^{-1}, Ku^{-2} ... H_\bullet(\mathbb{C}P^\infty = B\cup(1))$$

$$C_\bullet^\lambda A = C_\bullet(K)/(1-\lambda)$$

$$C_n(K) : 1 \overbrace{\otimes 1 \otimes ... \otimes 1}^{n} =: \varepsilon_n$$

$$\lambda(\varepsilon_n) = (-1)^n \varepsilon_n$$

$$\begin{cases} \varepsilon even \text{ is cyclic invariant} \\ \varepsilon odd = 0 \ in C_\bullet^\lambda(K) \end{cases}$$

$$b(\varepsilon_{2m}) = \varepsilon_{2m-1}$$

$$0 = b acts \ on C_\bullet^\lambda(K)$$

$$H_\bullet^\lambda(K) = C_\bullet^\lambda(K) = K\varepsilon_0 \oplus K\varepsilon_2 \oplus ...$$

compute it by 3 ways...

例子 1.6.5. $A = K[x^i]$,*then* $\mathrm{HH}_\bullet(A) = \Omega^\bullet(A) = \mathbb{C}[x^i, \mathrm{d}x^i]$. *Explicitly, we define*

$$\Phi : \overline{C}_p(A) \to \Omega^p(A)$$

$$a_0 \otimes \overline{a_1} \otimes ... \otimes \overline{A_p} \mapsto \frac{1}{p!} a_0 \mathrm{d}a_1 \wedge \mathrm{d}a_2 \wedge ... \wedge \mathrm{d}a_p$$

Check: $\Phi \circ b = 0.i.e.$

$$\Phi : (\overline{C_\bullet(A)}, b) \to (\Omega^0(A), 0)$$

si a chain map.

So, we have an isomorphism

$$\mathrm{HH}_\bullet(A) \cong \Omega^\bullet(A)$$

Check:

$$\Phi \circ B = \mathrm{d} \circ \Phi$$

So,

$$\Phi : (\bar{(C)}_\bullet(A), b, B) \to (\Omega^\bullet(A), 0, \mathrm{d})$$

Cyclic homology,

$$\Phi : (\bar{(C)}_\bullet(A), b + uB) \to (\Omega^\bullet(A)[u^{-1}], u\mathrm{d})$$

If $A = K[x^i]$

$$\cdots \xrightarrow{\mathrm{d}} \Omega^\bullet(A) \xrightarrow{\mathrm{d}} \Omega^\bullet(A) \xrightarrow{\mathrm{d}} \Omega^\bullet(A) \to 0$$

then

$$H_\bullet(\Omega^\bullet(A), \mathrm{d}) = H_0 = K$$

"Poincare lemma"

性质 1.6.6.

$$HC_\bullet(K[x^i]) = \frac{\Omega^\bullet(A)}{d\Omega^\bullet(A)} \oplus u^{-1}K[u^{-1}]$$

注记 1.6.7. *Phi has a splitting*

$$\eta : \Omega^\bullet(A) \to \overline{C}_\bullet(A)$$
$$a_0 \mathrm{d}a_1 \wedge \mathrm{d}a_2 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}a_p \mapsto \sum_{\sigma \in S_p} (-1)^{|\sigma|} a_0 \otimes a_{\sigma(1)} \otimes \ldots \otimes a_{\sigma(p)}$$

Check:$b \circ \eta = 0$.

So, $\eta : \Omega^\bullet(A) \to \mathrm{HH}_\bullet(A)$ *which is inverse of* Φ.

Cyclic cohomology

$$C_n(A) \cong A^{\otimes n+1}$$

定义 1.6.8.

$$C^n(A) := \mathrm{Hom}(A^{\otimes n+1}, K)$$

with $f \in C^n(A)$ *is called cyclic invariant if*

$$f(a_0, a_1, \ldots, a_n) = (-1)^n f(a_n, a_0, \ldots, a_{n-1})$$

cyclic cochains form a subcomplex

$$C^n_\lambda(A) \subseteq C^n(A)$$

which is dual to

$$C_n(A) \to C^\lambda_n(A)$$

$$b^* : C^n_\lambda(A) \to C^{n+1}_\lambda(A)$$

定义 1.6.9. *Cyclic cohomology*

$$H^\bullet(H^\bullet_\lambda(A), d^*) =: H^\bullet_\lambda(A) = HC^\bullet(A)$$

例子 1.6.10.

$$f \in C^0_\lambda(A) : A \to K$$

$$b^* f \in C^1_\lambda(A)$$

$$b^* f(a_0, a_1) = f(b(a_0 \otimes a_1)) = f(a_0 a_1 - a_1 a_0)$$

$$b^* = 0 \iff f : A/[A, A] \to K$$

f behaves like "trace". $HC^0(A)$="trace operators"

Pairing M, N are bi-module,then there is a pairing

$$C^n(A, M) \otimes C_0(A, N) \to N \otimes_{A^e} M$$

So,

$$H^n(A, M) \otimes H_n(A, N) \to N \otimes_{A^e} M$$

$$H^n(A, A^*) \otimes H_n(A, A) \to A^* \otimes_{A^e} A \xrightarrow{ev} K$$

术语索引