

# 非交换几何选讲

曲豆豆 码字  
南七技校福利社 五道口分社  
2019 年 3 月 4 日  
第 01-1 稿



图：雾气朦胧的安徽合肥大蜀山森林公园  
拍摄于 2014.5.31 - 10: 44

---

在五道口也要红专并进、理实交融呀～

# 目录

<b>1</b>	<b>Hochschild 理论</b>	<b>3</b>
1.1	结合代数的双模、余中心 . . . . .	3
1.2	Hochschild 同调 . . . . .	6
1.3	Hochschild 上同调 . . . . .	10
1.4	约化 Hochschild (上) 同调 . . . . .	15
1.5	循环 (上) 同调 . . . . .	17
1.6	始有一如, 独一之神, 其名在阿尔达称为伊露维塔。 . . . .	18

# 第 1 章 Hochschild 理论

## 1.1 结合代数的双模、余中心

我们需要代数拓扑、同调代数的预备知识，并且采用同调代数的标准术语、记号，诸如链复形、上同调、导出函子等等。首先介绍基本的记号与概念。

在本课，我们给定一个特征 0 的含么交换环  $K$ （例如一个域），考虑含么结合  $K$ -代数  $A$ （注意  $A$  未必是交换代数），并且  $A$  作为交换环  $K$  上的模是投射模（projective module）。 $A$  的  $K$ -代数结构给出如下  $K$ -模同态：

$$\begin{aligned} A \otimes_K A &\rightarrow A \\ (a_1, a_2) &\mapsto a_1 a_2 \end{aligned}$$

由  $A$  的结合性， $(a_1 a_2) a_3 = a_1 (a_2 a_3)$  对  $A$  中任意元素  $a_1, a_2, a_3$  成立。

对于含么结合  $K$ -代数  $A$ ，回顾  $A$  的**反代数**（opposite algebra） $A^{\text{op}}$ 。反代数  $A^{\text{op}}$  作为  $K$ -模与  $A$  完全相同，记号如下：

$$\begin{aligned} \text{id} : A &\rightarrow A^{\text{op}} \\ x &\mapsto x^{\text{op}} \end{aligned}$$

但是  $A^{\text{op}}$  具有与  $A$  “相反”的乘法，具体地，对于  $A^{\text{op}}$  中的元素  $x^{\text{op}}, y^{\text{op}}$ ，成立

$$x^{\text{op}} y^{\text{op}} := (yx)^{\text{op}}$$

**定义 1.1.1.** 对于含么结合  $K$ -代数  $A$ ，我们定义  $K$ -代数  $A^e$  为

$$A^e := A \otimes_K A^{\text{op}}$$

即  $A$  与  $A^{\text{op}}$  的  $K$ -代数张量积。

容易验证对于任何两个含么结合  $K$ -代数  $A, B$ ，总有

$$(A \otimes_K B)^{\text{op}} = A^{\text{op}} \otimes_K B^{\text{op}}$$

从而容易得到

$$(A^{\text{op}})^e = (A^e)^{\text{op}}$$

对于  $K$ -代数  $A$ ，回顾**双  $A$ -模**（ $A$ -bimodule）的概念如下：

**定义 1.1.2.** 对于  $K$ -代数  $A$ , 双  $A$ -模是指如下资料:

(1)  $K$ -模  $M$ ;

(2)  $A$  在  $M$  上的左、右  $K$ -线性作用,

并且满足相容性:  $(a.m).b = a.(m.b)$  对任意  $m \in M$  以及  $a, b \in A$  成立。

例如,  $A$  本身自然有双  $A$ -模结构,  $A$  在其上的左、右作用即为左乘、右乘。再比如  $K$ -模张量积  $A \otimes_K A$  具有如下双  $A$ -模结构:

$$b.(a_1 \otimes a_2) := (ba_1) \otimes a_2$$

$$(a_1 \otimes a_2).b := a_1 \otimes (a_2b)$$

其中  $a_1, a_2, b \in A$ .

我们不再回顾左模、右模的概念了, 也不去回顾右模与左模的平衡张量积。

**性质 1.1.3.** 设  $M$  为双  $A$ -模,

(1)  $M$  可自然地视为左  $A^e$ -模:

$$(a_1 \otimes a_2^{op}).m = a_1.m.a_2$$

(2)  $M$  可自然地视为右  $A^e$ -模:

$$m.(a_1 \otimes a_2^{op}) = a_2.m.a_1$$

反之, 左(右)  $A^e$ -模也可视为双  $A$ -模。

证明. 容易验证。 □

特别地如果  $M, N$  都是双  $A$ -模, 那么考虑平衡张量积  $M \otimes_{A^e} N$ , 它的双  $A$ -模结构具体如下:

$$a.(m \otimes n) = (a.m) \otimes n = m \otimes (n.a)$$

$$(m \otimes n).b = m \otimes (n.b) = (b.m) \otimes n$$

对于任何  $m \in M, n \in N, a, b \in A$  成立。

**定义 1.1.4.** (余中心 *cocenter*) 对于双  $A$ -模  $M$ , 称双  $A$ -模

$$M \otimes_{A^e} A$$

为  $M$  的余中心 (*cocenter*)。

容易看出, 对任意的  $m \in M, a \in A$ , 在余中心  $M \otimes_{A^e} A$  当中, 成立

$$(m.a) \otimes 1 = m \otimes (a.1) = m \otimes a = m \otimes (1.a) = (a.m) \otimes 1$$

从而  $(m.a - a.m) \otimes 1 = 0$ . 事实上,  $M$  的余中心具有如下结构:

性质 1.1.5. 对于双  $A$ -模  $M$ , 则有如下双  $A$ -模同构

$$M \otimes_{A^e} A \cong M / \{(m.a - a.m) | a \in A, m \in M\}$$

证明. 考虑如下的双  $A$ -模链复形

$$\partial_{\bullet} : A \otimes A \otimes A \rightarrow A \otimes A \rightarrow A \rightarrow 0$$

其中

$$\begin{aligned} \partial : a_1 \otimes a_2 \otimes a_3 &\mapsto a_1 a_2 \otimes a_3 - a_1 \otimes a_2 a_3 \\ a_1 \otimes a_2 &\mapsto a_1 a_2 \end{aligned}$$

容易验证  $\partial^2=0$  (由  $A$  的结合性), 从而  $\partial_{\bullet}$  为双  $A$ -模链复形. 并且显然  $\partial : A \otimes A \rightarrow A$  是满同态.

断言链复形  $\partial_{\bullet}$  为正合 (exact) 的. 事实上,  $\partial_{\bullet}$  到其自身的恒等链映射与零链映射是链同伦的. 我们构造如下的链同伦  $h_{\bullet}$ :

$$\begin{aligned} h : a_1 &\mapsto 1 \otimes a_1 \\ a_1 \otimes a_2 &\mapsto 1 \otimes a_1 \otimes a_2 \end{aligned}$$

容易验证, 对于任意的  $\varphi = a_1 \otimes a_2 \in A \otimes A$ , 成立

$$\begin{aligned} (\partial h + h \partial) \varphi &= (\partial h + h \partial)(a_1 \otimes a_2) \\ &= \partial(1 \otimes a_1 \otimes a_2) + h(a_1 a_2) \\ &= a_1 \otimes a_2 - 1 \otimes a_1 a_2 + 1 \otimes a_1 a_2 \\ &= a_1 \otimes a_2 = \varphi \end{aligned}$$

从而对于  $\varphi \in A \otimes A$ , 如果  $\partial \varphi = 0$ , 那么

$$\varphi = (\partial h + h \partial) \varphi = \partial(h \varphi)$$

这说明链复形  $\partial_{\bullet}$  在  $A \otimes A$  处正合, 因此  $\partial_{\bullet}$  是正合的.

接下来, 将函子  $M \otimes_{A^e} -$  作用于链复形  $\partial_{\bullet}$ , 得到如下的双  $A$ -模链复形:

$$M \otimes_{A^e} \partial_{\bullet} : M \otimes A \rightarrow M \rightarrow M \otimes_{A^e} A \rightarrow 0$$

由张量函子的右正合性, 上述链复形也是正合的. 其中注意到双  $A$ -模同构

$$\begin{aligned} M \otimes_{A^e} (A \otimes A \otimes A) &\cong M \otimes A \\ m \otimes (a_1 \otimes a_2 \otimes a_3) &\mapsto (a_3.m.a_1) \otimes a_2 \end{aligned}$$

以及双  $A$ -模同构

$$\begin{aligned} M \otimes_{A^e} (A \otimes A) &\cong M \\ m \otimes (a_1 \otimes a_2) &\mapsto a_2.m.a_1 \end{aligned}$$

于是正合列  $M \otimes_{A^e} \partial_\bullet$  的边界映射有如下具体表达式:

$$\begin{aligned} M \otimes_{A^e} \partial : M \otimes A &\rightarrow M \\ m \otimes A &\mapsto m.a - a.m \end{aligned}$$

从而由正合性, 易知

$$M \otimes_{A^e} A \cong M / \{(m.a - a.m) | a \in A, m \in M\}$$

□

可见,  $M$  的余中心无非是商掉  $M$  当中“非交换的部分”所得到的“交换的部分”, 如此望文生义。例如, 如果  $A$  为交换  $K$ -代数, 那么  $A$  本身作为双  $A$ -模, 其余中心为  $A$  本身。

## 1.2 Hochschild 同调

**定义 1.2.1.** (*Hochschild 同调*)

对于双  $A$ -模  $M$ , 以及非负整数  $n$ , 记

$$H_n(A, M) := \text{Tor}_n^{A^e}(M, A)$$

称为  $M$  的第  $n$  个 *Hochschild 同调*。特别地, 我们记

$$\text{HH}_n(A) := H_n(A, A)$$

由定义以及导出函子的基础知识, 容易知道双  $A$ -模  $M$  的第 0 个 Hochschild 同调

$$H_0(A, M) = M \otimes_{A^e} A = M / \{(m.a - a.m) | a \in A, m \in M\}$$

正是  $M$  的余中心。注意 Hochschild 同调一般并不是环, 仅仅能保证它是双  $A$ -模。

具体地, 由导出函子的定义, 我们采用投射消解 (projective resolution) 来计算 Hochschild 同调。若双  $A$ -模链复形

$$P_\bullet \rightarrow A := \dots \rightarrow P_3 \rightarrow P_2 \rightarrow P_1 \rightarrow P_0 \rightarrow A \rightarrow 0$$

为双  $A$ -模  $A$  的投射消解 (正合, 并且每个  $P_i (i \geq 0)$  作为  $K$ -模是投射的), 那么

$$H_n(A, M) \cong H_n(M \otimes_{A^e} P_\bullet)$$

由同调代数的事实, 它与投射消解  $P_\bullet$  的选取无关。

事实上 Hochschild 同调可以与空间上的微分形式类比。作为一个具体计算例子, 我们考虑  $\mathbb{C}$  上的  $n$  元多项式代数

$$A := \mathbb{C}[x^1, x^2, \dots, x^n]$$

注意到  $A$  作为  $\mathbb{C}$ -代数是交换的, 从而  $A = A^{\text{op}}$ 。我们记

$$A^{\text{op}} = \mathbb{C}[y^1, y^2, \dots, y^n] \quad A^e = \mathbb{C}[x^1, x^2, \dots, x^n; y^1, y^2, \dots, y^n]$$

性质 1.2.2. 考虑  $\mathbb{C}$ -代数  $A := \mathbb{C}[x^1, x^2, \dots, x^n]$ , 则其第  $k$  个 *Hochschild* 同调

$$\mathrm{HH}_k(A) \cong A \otimes \bigwedge^k(\mathbb{C}^n)$$

是以  $A$  为系数的  $k$ -形式。

证明. 我们给出  $A$  的投射消解, 比如众所周知的 Koszul 消解

$$\mathcal{K}_A \rightarrow A \rightarrow 0$$

具体地, 引入  $n$  个新的独立变元  $\eta^1, \eta^2, \dots, \eta^n$  (视为复线性空间  $\mathbb{C}^n$  的一组基), 考虑环

$$\mathcal{K} := \frac{A^e[\eta^1, \eta^2, \dots, \eta^n]}{\{(\eta^i \eta^j + \eta^j \eta^i) | i \neq j\}} = A^e \otimes \bigwedge^*(\mathbb{C}^n)$$

为以  $A^e$  为系数的外代数。

注意  $\mathcal{K}$  有自然的分次:

$$\deg \eta^i = 1 \quad \deg x^i = \deg y^i = \deg 1 = 0$$

记  $\mathcal{K}_l$  为  $\mathcal{K}$  的  $l$  次分量 ( $0 \leq l \leq n$ ), 即

$$\mathcal{K}_l = \bigoplus_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_l \leq n} A^e \eta^{i_1} \wedge \eta^{i_2} \wedge \dots \wedge \eta^{i_l} = A^e \otimes \bigwedge^l(\mathbb{C}^n)$$

此时  $K = \mathbb{C}$  是域, 因此  $\mathcal{K}$  (作为  $K$ -模, 即复线性空间) 的投射性显然。我们定义 Koszul 复形  $(\mathcal{K}_A, \partial)$  如下:

$$\mathcal{K}_A : \dots \xrightarrow{\partial} \mathcal{K}_n \xrightarrow{\partial} \mathcal{K}_{n-1} \xrightarrow{\partial} \dots \xrightarrow{\partial} \mathcal{K}_1 \xrightarrow{\partial} \mathcal{K}_0$$

其中边缘算子  $\partial$  (首先是  $A^e$ -模同态) 满足

$$\partial \eta^i = x^i - y^i$$

以及与外微分相同的莱布尼茨法则: 对任意  $\omega \in \mathcal{K}$ , 成立

$$\partial(\eta^i \wedge \omega) = \partial \eta^i \wedge \omega - \eta^i \wedge \partial \omega$$

再考虑连接映射

$$\begin{aligned} \varepsilon : \mathcal{K}_0 = A^c &\rightarrow A \\ x^i &\mapsto x^i \\ y^i &\mapsto x^i \end{aligned}$$

则众所周知, Koszul 复形

$$\mathcal{K}_A \xrightarrow{\varepsilon} A \rightarrow 0$$

为  $A$  的投射消解 (证明从略)。我们以此计算  $\mathrm{HH}^\bullet(A)$ . 我们注意到以下两个简单事实:

其一：对任何  $1 \leq l \leq n$ ，成立双  $A$ -模同构

$$A \otimes_{A^e} \mathcal{K}_l = A \otimes_{A^e} A^e \otimes \bigwedge^l (\mathbb{C}^n) \cong A \otimes \bigwedge^l (\mathbb{C}^n)$$

其二：函子  $A \otimes_{A^e} -$  作用于 Koszul 复形  $\mathcal{K}_A$  之后，成立

$$A \otimes_{A^e} \partial = 0$$

这是因为，对于任意  $f \in A$ ，在  $A \otimes_{A^e} A^e$  当中总成立

$$f \otimes x^i = x^i f \otimes 1 = f x^i \otimes 1 = f \otimes (x^i)^{\text{op}} = f \otimes y^i$$

因此

$$f \otimes (x^i - y^i) = 0 \in A \otimes_{A^e} A^e$$

从而由  $\partial$  的定义，容易看出  $A \otimes_{A^e} \partial = 0$ 。

综上两方面，直接计算之，

$$\begin{aligned} \text{HH}_k(A) &= H_k(A \otimes_{A^e}^L A) \\ &= H_k(A \otimes_{A^e} \mathcal{K}_A) \\ &= A \otimes_{A^e} \mathcal{K}_k \\ &= A \otimes \bigwedge^k (\mathbb{C}^n) \end{aligned}$$

从而得证。 □

事实上对于一般的含么结合  $K$ -代数  $A$ ， $\text{HH}_\bullet(A)$  扮演了“微分形式”的角色。这是 Hochschild 同调的一种几何解释。

对于一般的  $A$ ， $A$  作为双  $A$ -模，由一种典范的投射消解，称之为 **Bar-复形**：

**定义 1.2.3.** (*Bar-复形*)

对于含么结合  $K$ -代数  $A$ ，定义以下双  $A$ -模链复形

$$\cdots \rightarrow B_2 A \xrightarrow{b} B_1 A \xrightarrow{b} B_0 A \xrightarrow{b} A \rightarrow 0$$

如下：

$$B_n A := A \otimes A^{\otimes n} \otimes A \quad (n \geq 0)$$

$$b : a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n \mapsto \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes (a_k a_{k+1}) \otimes \cdots \otimes a_n$$

称之为 **Bar-复形**。



首先容易验证  $b^2 = 0$ , 从而  $B_\bullet A \xrightarrow{b} A \rightarrow 0$  确实是链复形。对于  $n \geq 1$ , 具体验证如下:

$$\begin{aligned}
b^2(a_0 \otimes a_1 \otimes \dots \otimes a_n) &= b \left( \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k a_0 \otimes a_1 \otimes \dots \otimes (a_k a_{k+1}) \otimes \dots \otimes a_n \right) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k b(a_0 \otimes a_1 \otimes \dots \otimes (a_k a_{k+1}) \otimes \dots \otimes a_n) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \left[ \sum_{l=0}^{k-2} (-1)^l a_0 \otimes \dots \otimes (a_l a_{l+1}) \otimes \dots \otimes (a_k a_{k+1}) \otimes \dots \otimes a_n \right. \\
&\quad + (-1)^{k-1} a_0 \otimes \dots \otimes (a_{k-1} a_k a_{k+1}) \otimes \dots \otimes a_n \\
&\quad + (-1)^k a_0 \otimes \dots \otimes (a_k a_{k+1} a_{k+2}) \otimes \dots \otimes a_n \\
&\quad \left. - \sum_{l=k+2}^{n-1} (-1)^l a_0 \otimes \dots \otimes (a_k a_{k+1}) \otimes \dots \otimes (a_l a_{l+1}) \otimes \dots \otimes a_n \right] \\
&= \sum_{\substack{0 \leq k < l \leq n-1 \\ l-k \geq 2}} \left( -(-1)^{k+l} + (-1)^{k+l} \right) a_0 \otimes \dots \otimes (a_k a_{k+1}) \otimes \dots \otimes (a_l a_{l+1}) \otimes \dots \otimes a_n \\
&\quad + \sum_{0 \leq k \leq n-2} \left( (-1)^{2k+1} + (-1)^{2k} \right) a_0 \otimes \dots \otimes (a_k a_{k+1} a_{k+2}) \otimes \dots \otimes a_n \\
&= 0
\end{aligned}$$

从而验证完毕。

我们可以把  $a_0 \otimes \dots \otimes a_n$  想象为直线上依次排列的  $n+1$  个质点, 将算子  $b$  想象为相邻质点两两“碰撞”。

**性质 1.2.4.** 记号同之前, 则  $Bar$ -复形

$$B_\bullet A \rightarrow A \rightarrow 0$$

是  $A$  的投射消解。

证明. 对任意  $n \geq 0$ ,  $B_n A = A \otimes A^{\otimes n} \otimes A$  是投射  $K$ -模 (这是因为由最初的假定,  $A$  是投射  $K$ -模, 从而其张量积也投射) 于是我们只需再验证该链复形是正合的。

为此, 我们构造链同伦

$$\begin{aligned}
h : B_{n-2} A &\rightarrow B_{n-1} A \quad (n \geq 1, B_{-1} A = A) \\
a_0 \otimes \dots \otimes a_n &\mapsto 1 \otimes a_0 \otimes \dots \otimes a_n
\end{aligned}$$

只需验证  $hb + bh = 1$ , 之后与性质1.1.5的证明类似。

注意到对于任意  $n \geq 0$ , 成立

$$\begin{aligned}
bh(a_0 \otimes \dots \otimes a_n) &= b(1 \otimes a_0 \otimes \dots \otimes a_n) \\
&= a_0 \otimes \dots \otimes a_n - \sum_{k=0}^{n-1} 1 \otimes a_0 \otimes \dots \otimes (a_k a_{k+1}) \otimes \dots \otimes a_n \\
&= a_0 \otimes \dots \otimes a_n - 1 \otimes b(a_0 \otimes \dots \otimes a_n) \\
&= (1 - hb)a_0 \otimes \dots \otimes a_n
\end{aligned}$$

因此  $bh + hb = 1$ ，证毕。 □

**定义 1.2.5.** 设  $M$  为双  $A$ -模，定义 **Hochschild** 链复形

$$\begin{aligned} C_\bullet(A, M) &:= M \otimes_{A^e} B_\bullet A \\ \cdots M \otimes A^{\otimes 3} &\rightarrow M \otimes A^{\otimes 2} \rightarrow M \otimes A \rightarrow M \end{aligned}$$

方便起见，该链复形的边缘算子仍记作  $b$ 。

则易知  $M$  的 Hochschild 同调无非是 Hochschild 链复形的同调：

$$H_n(A, M) = H_n(C_\bullet(A, M))$$

注意到有双  $A$ -模同构

$$C_n(A, M) = M \otimes_{A^e} (A \otimes A^{\otimes n} \otimes A) \cong M \otimes A^{\otimes n}$$

在此同构意义下，容易验证  $C_\bullet(A, M)$  的边缘算子  $b$  有如下显示表达：

对任意  $m \in M$ ，以及  $a_1, a_2, \dots, a_n \in A$ ，成立

$$\begin{aligned} b(m \otimes (a_1 \otimes \dots \otimes a_n)) &= m \otimes_{A^e} (b(1 \otimes a_1 \otimes \dots \otimes a_n \otimes 1)) \\ &= m \otimes_{A^e} [a_1 \otimes \dots \otimes a_n \otimes 1 \\ &\quad + \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k 1 \otimes a_1 \otimes \dots \otimes (a_k a_{k+1}) \otimes \dots \otimes a_n \otimes 1 \\ &\quad + (-1)^n 1 \otimes a_1 \otimes \dots \otimes a_n] \\ &= (m \cdot a_1) \otimes a_2 \otimes \dots \otimes a_n \\ &\quad + \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k m \otimes a_1 \otimes \dots \otimes (a_k a_{k+1}) \otimes \dots \otimes a_n \\ &\quad + (-1)^n (a_n \cdot m) \otimes a_1 \otimes \dots \otimes a_{n-1} \end{aligned}$$

Hochschild 链复形的边缘算子的显式表达与 Bar-复形非常相似，从上式最右边的前两项可以看出：区别在于上式最右边的第三项。

### 1.3 Hochschild 上同调

对于双  $A$ -模  $M$ ，既然我们已经考虑余中心  $M \otimes_{A^e} A$ ，那么我们自然也会去考虑  $\text{Hom}_{A^e}(A, M)$ 。我们称双  $A$ -模  $\text{Hom}_{A^e}(A, M)$  为  $M$  的**导出中心**（derived center）。

**性质 1.3.1.**（导出中心的结构）对于双  $A$ -模  $M$ ，则有双  $A$ -模同构

$$\text{Hom}_{A^e}(A, M) \cong \{m \in M \mid a \cdot m - m \cdot a = 0 \ \forall a \in A\}$$

容易验证  $\{m \in M | a.m - m.a = 0 \ \forall a \in A\}$  为  $M$  的双  $A$ -子模。粗俗地说，该子模由“与  $A$  中所有元素交换”的元素构成，故谓之“中心”。

证明. 对于任意的  $\varphi \in \text{Hom}_{A^e}(A, M)$  以及  $a \in A$ ，则  $\varphi(a)$  的取值由  $\varphi(1)$  完全决定：

$$\varphi(a) = \varphi(a.1) = a.\varphi(1)$$

而另一方面，

$$\varphi(a) = \varphi(1.a) = \varphi(1).a$$

从而有  $a.\varphi(1) = \varphi(1).a$ 。于是我们可以构造如下双  $A$ -模同态：

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{A^e}(A, M) &\rightarrow \{m \in M | a.m - m.a = 0 \ \forall a \in A\} \\ \varphi &\mapsto \varphi(1) \end{aligned}$$

容易验证该模同态为同构。证毕。  $\square$

然后我们考虑  $\text{Hom}(-, M)$  的导出函子，自然地去定义如下：

**定义 1.3.2.** (*Hochschild* 上同调)

对于双  $A$ -模  $M$ ，以及  $n \geq 0$ ，定义  $M$  的第  $n$  个 *Hochschild* 上同调

$$H^n(A, M) = \text{Ext}_{A^e}^n(A, M)$$

特别地，我们记

$$H^n(A) = \text{Ext}_{A^e}^n(A, A)$$

由定义知， $M$  的第 0 个 *Hochschild* 上同调为  $\text{Hom}_{A^e}(A, M)$ ，是  $M$  的导出中心。回顾 Bar-复形，我们考虑如下的 **Hochschild** 上链复形

$$C^\bullet(A, M) = \text{Hom}_{A^e}(B_\bullet A, M)$$

该上链复形的微分算子  $\partial$  由 Bar-复形  $B_\bullet A$  的边缘算子  $b$  所诱导。则  $M$  的 *Hochschild* 上同调满足

$$H^n(A, M) = H^n(C^\bullet(A, M), \partial) = H^n(\text{Hom}_{A^e}(B_\bullet A, M), \partial)$$

注意有自然的双  $A$ -模同构

$$C^n(A, M) = \text{Hom}_{A^e}(A \otimes A^{\otimes n} \otimes A, M) \cong \text{Hom}(A^{\otimes n}, M)$$

(即取值于  $M$  的  $n$  重  $K$ -线性映射) 于是对于任意的  $\varphi \in C^n(A, M) = \text{Hom}(A^{\otimes n}, M)$ ，容易知道  $\partial\varphi \in \text{Hom}(A^{\otimes n+1}, M)$  具有如下显式表达：对任意  $a_0, a_1, \dots, a_m \in A$ ，

$$\begin{aligned} \partial\varphi(a_0, a_1, \dots, a_n) &= a_0.\varphi(a_1, a_2, \dots, a_n) \\ &\quad - \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \varphi(a_0, \dots, (a_k a_{k+1}), \dots, a_n) \\ &\quad - (-1)^n \varphi(a_0, a_1, \dots, a_{n-1}).a_n \end{aligned}$$

接下来讨论 Hochschild 上同调的几何意义。我们已经知道第 0 个 Hochschild 上同调为  $M$  的导出中心；现在我们看  $H^1(A, M)$ ，我们将发现它是  $A$  的取值于  $M$  的外导子。

回顾导子 (derivation) 的概念如下：

**定义 1.3.3.** (导子) 对于双  $A$ -模  $M$ ,  $K$ -线性映射

$$D : A \rightarrow M$$

称为  $A$  的取值于  $M$  的导子 (derivation), 如果对任意的  $a_1, a_2 \in A$ , 成立

$$D(a_1 a_2) = D(a_1) \cdot a_2 + a_1 \cdot D(a_2)$$

对于  $m \in M$  我们定义

$$\begin{aligned} \text{ad}_m : A &\rightarrow M \\ a &\mapsto [m, a] := m \cdot a - a \cdot m \end{aligned}$$

则容易验证  $\text{ad}_m$  为  $A$  的取值于  $M$  的导子, 称形如这样的导子为内导子 (inner derivation)。

我们记

$$\text{Der}(A, M) := \{D : A \rightarrow M \mid D \text{ 为导子}\}$$

$$\text{Inn}(A, M) := \{\text{ad}_m \mid m \in M\} \subseteq \text{Der}(A, M)$$

注意  $\text{Inn}(A, M)$  与  $\text{Der}(A, M)$  都有显然的  $K$ -模结构, 且前者是后者的  $K$ -子模。

**性质 1.3.4.** ( $\text{HH}^1(A, M)$  的结构)

对于双  $A$ -模  $M$ , 成立

$$\text{HH}^1(A, M) \cong \frac{\text{Der}(A, M)}{\text{Inn}(A, M)}$$

我们称上式右边的集合当中的元素为  $A$  的取值于  $M$  的外导子 (outer derivation)。

证明. 只需考虑 Hochschild 上链复形

$$C^0(A, M) \xrightarrow{\partial^0} C^1(A, M) \xrightarrow{\partial^1} C^2(A, M) \rightarrow \dots$$

我们只需具体计算之。对于  $\varphi \in C^1(A, M) \cong \text{Hom}(A, M)$ , 则  $\partial^1 \varphi \in C^2(A, M) \cong \text{Hom}(A^{\otimes 2}, M)$  满足: 对任意  $a_1, a_2 \in A$ , 成立

$$\partial^1 \varphi(a_1, a_2) = a_1 \cdot \varphi(a_2) - \varphi(a_1 a_2) + \varphi(a_1) \cdot a_2$$

可见  $\varphi \in \ker \partial^1$  当且仅当  $\varphi \in \text{Der}(A, M)$ . 也就是说  $\ker \partial^1 = \text{Der}(A, M)$ .

另一方面, 对于  $m \in C^0(A, M) \cong M$ , 以及  $a \in A$ , 成立

$$(\partial^0 m)(a) = a \cdot m - m \cdot a = -\text{ad}_m(a)$$

因此  $\ker \partial^0 \cong \text{Inn}(A, M)$ . 从而

$$\text{HH}^1(A, M) = \frac{\ker \partial^1}{\text{Im } \partial^0} \cong \frac{\text{Der}(A, M)}{\text{Inn}(A, M)}$$

□

特别地, 当  $M = A$  时,

$$\text{HH}^1(A) = \text{Der}(A, A) / \text{Inn}(A, A)$$

注意到  $\text{Der}(A, A)$  上面还有更多的结构: 对于  $\forall D_1, D_2 \in \text{Der}(A, A)$ , 定义

$$[D_1, D_2] := D_1 \circ D_2 - D_2 \circ D_1 : A \rightarrow A$$

容易验证  $[D_1, D_2]$  仍然为  $A$  的导子, 并且  $[-, -]$  为  $\text{Der}(A, A)$  上的李括号 (Lie bracket)。

另外容易验证

$$[\text{Der}(A, A), \text{Inn}(A, A)] \subseteq \text{Inn}(A, A)$$

具体地, 对于  $D \in \text{Der}(A, A)$  以及  $m \in M$ , 成立

$$[D, \text{ad}_m] = \text{ad}_{D(m)}$$

也就是说  $\text{Inn}(A, A)$  是  $\text{Der}(A, A)$  的理想。于是  $[-, -]$  诱导了  $\text{HH}^1(A) = \frac{\text{Der}(A, A)}{\text{Inn}(A, A)}$  上的李括号结构。

如果  $A$  是交换  $K$ -代数, 则  $\text{Inn}(A, A) = 0$ 。于是

$$\text{HH}^1(A) \cong \text{Der}(A, A)$$

可被认为是“切向量场”(此时  $A$  被认为是“函数环”)。

我们再去考虑  $\text{HH}^2(A, M)$ . 对于任意的

$$\varphi \in C^2(A, M) = \text{Hom}(A^{\otimes 2}, M)$$

则对  $a_0, a_1, a_2 \in A$ , 成立

$$\partial\varphi(a_0, a_1, a_2) = a_0 \cdot \varphi(a_1, a_2) - \varphi(a_0 a_1, a_2) + \varphi(a_0, a_1 a_2) - \varphi(a_0, a_1) \cdot a_2$$

**引理 1.3.5.** 对于双  $A$ -模  $M$ , 以及  $\varphi \in C^2(A, M) = \text{Hom}(A^{\otimes 2}, M)$ , 我们令

$$\hat{A} := A \oplus M$$

并赋以如下的  $K$ -代数结构: 对于任意  $a_1, a_2 \in A$  以及  $m_1, m_2 \in M$ , 规定  $\hat{A}$  的乘法  $\hat{\bullet}_\varphi$  为

$$(a_1 \oplus m_1) \hat{\bullet}_\varphi (a_2 \oplus m_2) := a_1 a_2 \oplus [a_1 \cdot m_2 + m_1 \cdot a_2 + \varphi(a_1, a_2)]$$

那么  $(\hat{A}, \hat{\bullet}_\varphi)$  为结合代数, 当且仅当  $\partial\varphi = 0$ .

证明. 这是简单的计算验证. 对于任意的  $a_0, a_1, a_2 \in A$  以及  $m_0, m_1, m_2 \in M$ , 直接计算之,

$$\begin{aligned} & [(a_0 \oplus m_0) \hat{\bullet}_\varphi (a_1 \oplus m_1)] \hat{\bullet}_\varphi (a_2 \oplus m_2) \\ &= a_0 a_1 a_2 \oplus [a_0 a_1 \cdot m_2 + a_0 \cdot m_1 \cdot a_2 + m_0 \cdot a_1 a_2 + \varphi(a_0, a_1) \cdot a_2 + \varphi(a_0 a_1, a_2)] \end{aligned}$$

以及

$$\begin{aligned} & (a_0 \oplus m_0) \bullet_\varphi [(a_1 \oplus m_1) \bullet_\varphi (a_2 \oplus m_2)] \\ = & a_0 a_1 a_2 \oplus [a_0 a_1 \cdot m_2 + a_0 \cdot m_1 \cdot a_2 + m_0 \cdot a_1 a_2 + a_0 \cdot \varphi(a_1, a_2) + \varphi(a_0, a_1 a_2)] \end{aligned}$$

因此  $\bullet_\varphi$  满足结合性，当且仅当

$$\varphi(a_0, a_1) \cdot a_2 + \varphi(a_0 a_1, a_2) = a_0 \cdot \varphi(a_1, a_2) + \varphi(a_0, a_1 a_2)$$

而此式等价于  $\partial\varphi = 0$ . □

注意到在  $\hat{A}$  当中，对任意的  $m_1, m_2 \in M$ ，以及任意  $\varphi \in C^2(A, M)$ ，总有  $m_1 \bullet_\varphi m_2 = 0$ 。于是我们不妨将 “ $A \oplus M$ ” 当中的 “ $M$ ” 理解为 “一阶小量”。我们考虑  $\varphi = 0$  时  $\hat{A}_0 := A \oplus M$  的代数结构

$$(a_1 \oplus m_1) \bullet (a_2 \oplus m_2) := a_1 a_2 \oplus (a_1 \cdot m_2 + m_1 \cdot a_2)$$

显然  $(\hat{A}_0, \bullet)$  为结合代数。若  $\partial\varphi = 0$ ，则结合代数  $(\hat{A}, \bullet_\varphi)$  为  $(\hat{A}_0, \bullet)$  的一阶形变，而  $\varphi$  为其 “形变参数”。

从而  $M$  的第 2 个 Hochschild 上同调

$$H^2(A, M) \cong \frac{\{\varphi | (\hat{A}, \bullet_\varphi) \text{ 是结合代数}\}}{\text{Im}(\partial : C^1(A, M) \rightarrow C^2(A, M))}$$

商掉的东西 ( $\text{Im } \partial$ ) 为形如以下的一类特殊的一阶形变：

$$\begin{aligned} \varphi_f : A \otimes A & \rightarrow M \\ a_1 \otimes a_2 & \mapsto a_1 \cdot f(a_2) + f(a_1) \cdot a_2 - f(a_1 a_2) \end{aligned}$$

其中  $f \in C^1(A, M) = \text{Hom}(A, M)$ ， $\varphi_f = \partial f$ 。

我们考察一个 Hochschild 上同调的具体算例。

**性质 1.3.6.** 若  $A = \mathbb{C}[x^1, \dots, x^n]$  为  $\mathbb{C}$  上的  $n$  元多项式环，则

$$\text{HH}^k(A) \cong \text{Hom}\left(\bigwedge^k(\mathbb{C}^n), A\right)$$

证明. 对于这个特例，采用 Koszul 复形计算更佳简便。有关记号同性质 1.2.2 的证明过程。考虑 Koszul 复形

$$\mathcal{K}_A : \dots \xrightarrow{\partial} A^e \otimes \bigwedge^{k+1}(\mathbb{C}^n) \xrightarrow{\partial} A^e \otimes \bigwedge^k(\mathbb{C}^n) \xrightarrow{\partial} A^e \otimes \bigwedge^{k-1}(\mathbb{C}^n) \xrightarrow{\partial} \dots$$

然后将函子  $\text{Hom}_{A^e}(-, A)$  作用于之上。注意到有  $\mathbb{C}$ -线性同构

$$\begin{aligned} & \text{Hom}_{A^e}\left(A^e \otimes \bigwedge^k(\mathbb{C}^n), A\right) \\ \cong & \text{Hom}\left(\bigwedge^k(\mathbb{C}^n), \text{Hom}_{A^e}(A^e, A)\right) \\ \cong & \text{Hom}\left(\bigwedge^k(\mathbb{C}^n), A\right) \end{aligned}$$

此外再注意到，上链复形  $\text{Hom}_{A^e}(\mathcal{K}_A, A)$  的微分算子  $d := \text{Hom}_{A^e}(\partial, A) = 0$ . 这是因为对于  $\varphi \in \text{Hom}_{A^e}(A^e \otimes \wedge^k(\mathbb{C}^n), A)$ ,  $\omega \in \wedge^{k+1}(\mathbb{C}^n)$  以及  $f \in A^e$ , 成立

$$d\varphi(f \otimes \omega) = \varphi(\partial(f \otimes \omega))$$

回顾 Koszul 复形边缘算子运算规则

$$\partial : \eta^i \mapsto x^i - y^i \in A^e$$

又由于  $\varphi$  为  $A^e$ -模同态，从而对于任意  $\tilde{\omega} \in \wedge^k(\mathbb{C}^n)$ , 成立

$$\varphi(x^i \otimes \tilde{\omega}) = x^i \cdot \varphi(1 \otimes \tilde{\omega}) = \varphi(1 \otimes \tilde{\omega}) \cdot x^i = \varphi((x^i)^{\text{op}} \otimes \tilde{\omega}) = \varphi(y^i \otimes \tilde{\omega})$$

也就是说  $\varphi((x^i - y^i) \otimes \tilde{\omega}) = 0$ . 由此可见  $d = 0$ . 综上可知

$$\text{HH}^k(A) \cong \text{Hom}\left(\wedge^k(\mathbb{C}^n), A\right)$$

□

注意到  $\text{Hom}\left(\wedge^k(\mathbb{C}^n), A\right)$  之中的元素形如

$$\sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} f_{i_1 \dots i_k} \partial_{i_1} \wedge \dots \wedge \partial_{i_k}$$

回顾  $\text{HH}_\bullet(A)$  中的元素可被认为是“微分形式”，可见  $\text{HH}^\bullet(A)$  中的元素则是“多重切向量场”。

## 1.4 约化 Hochschild (上) 同调

**定义 1.4.1.** (约化 Bar-复形) (*reduced Bar-complex*)

对于  $K$ -代数  $A$ , 则视  $K$  为  $A$  的  $K$ -子模, 并且令  $K$ -模

$$\overline{A} := A/K$$

我们定义如下的约化 Bar-复形  $(\overline{B}_\bullet A, b)$ :

$$\overline{B}_n A := A \otimes \overline{A}^{\otimes n} \otimes A \quad \forall i \geq 0$$

边缘算子  $b : \overline{B}_n A \rightarrow \overline{B}_{n-1} A$  如下定义:

$$\begin{aligned} b(a_0 \otimes (\overline{a_1} \otimes \dots \otimes \overline{a_n}) \otimes a_{n+1}) &:= (a_0 a_1) \otimes (\overline{a_2} \otimes \dots \otimes \overline{a_n}) \otimes a_{n+1} \\ &+ \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^i a_0 \otimes (\overline{a_1} \otimes \dots \otimes (\overline{a_i a_{i+1}}) \otimes \dots \otimes \overline{a_n}) \otimes a_{n+1} \\ &+ (-1)^n a_0 \otimes (\overline{a_1} \otimes \dots \otimes \overline{a_{n-1}}) \otimes (a_n a_{n+1}) \end{aligned}$$

注意到  $\overline{B}_\bullet A$  是  $B_\bullet A$  的商模:

$$\overline{B}_n A = \frac{B_n A}{\{a_0 \otimes (a_1 \otimes \dots \otimes a_{i-1} \otimes 1 \otimes a_{i+1} \otimes \dots \otimes a_n) \otimes a_{n+1}\}}$$

check "b" is well defined.

$$b(a_0 \otimes \dots \otimes a_{i-1} \otimes 1 \otimes a_{i+1} \otimes \dots \otimes a_{n+1}) = \dots + (\dots)$$

So,... well defined.

resolution:  $\bar{B}_\bullet A \rightarrow A \rightarrow 0$ ,

**Reduced Hochschild Chain complex**

$$\bar{C}_\bullet(A, M) := M \otimes_{A^e} \bar{B}_\bullet A = M \otimes \bar{A}^\bullet$$

$$H_\bullet(\bar{C}_\bullet(A, M)) = H_\bullet(A, M)$$

Reduced Hochschild cochain complex

$$\bar{C}^\bullet(A, M) = \text{Hom}(\bar{A}^\bullet, M)$$

Another way to understand  $B_\bullet A, \bar{B}_\bullet A$

**定义 1.4.2.** *A differential graded algebra*

$$A := \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} A_n$$

$$A_n \cdot : A_m \mapsto A_{n+m}$$

with

$$d : A \rightarrow A$$

derivation,  $d^2 = 0, d : A_n \rightarrow A_{n+1}$

$$d(\alpha\beta) = (d\alpha)\beta + (-1)^{|\alpha|}\alpha(d\beta)$$

**性质 1.4.3.** *the bar resolution  $[B_\bullet \rightarrow A] \cong A * K[\varepsilon]$  (free product), and  $b = \partial_\varepsilon$*

"proof".

$$[B_\bullet A \rightarrow A] \mapsto A * K[\varepsilon]$$

$$a_0 \otimes \dots \otimes a_n \mapsto a_0 \varepsilon a_1 \varepsilon \dots a_{n-1} \varepsilon a_n$$

this is bijective.

$$\partial_\varepsilon : a_0 \varepsilon a_1 \varepsilon \dots a_{n-1} \varepsilon a_n \mapsto a_0 a_1 \varepsilon \dots - a_0 \varepsilon a_1 a_2 \dots$$

...

check

□

Similarly, reduced Bar-complex

$$[\bar{B}_\bullet A \rightarrow A] \cong A * K[\varepsilon] / \varepsilon^2$$



例子 1.4.4. (Group (co)homology)

Let  $G$  be a group,  $M \in \text{Rep}(G)$  is a left module, then we obtain a complex

$$M \xrightarrow{\delta} C^1(G, M) \xrightarrow{\delta} C^2(G, M) \xrightarrow{\delta} \dots$$

where

$$C^n(G, M) := \text{Hom}(G^n, M) = \{f : G^n \rightarrow M\}$$

the differential  $\delta$  s.t.

$$\delta(m)(g) = g.m - m$$

$$(\delta f)(g_0, g_1, \dots, g_n) = g_0 f(g_1, \dots, g_n) - f(g_0 g_1, g_2, \dots) + \dots + f(g_0, \dots, g_{n-1} g_n) \pm f(g_0, \dots, g_{n-1})$$

check  $\delta^2 = 0$ , this cohomology

$$H^\bullet(C^\bullet(G, M), \delta) = H^\bullet(G, M)$$

group homology

Let  $A = K[G]$  group algebra with right  $A$ -action. then

$$H^\bullet(G, M) \cong H^\bullet(K[G], M)$$

hochschild cohomology.

例子 1.4.5. (Lie algebra (co)homology)

$\mathfrak{g}$ : Lie algebra,  $M$  is a  $\mathfrak{g}$ -module. consider  $A := \mathcal{U}(\mathfrak{g})$  universal enveloping algebra,  $M$  is a left  $A$ -module, with

$$H_\bullet(\mathcal{U}(\mathfrak{g}), M) = H_\bullet^{\text{Lie}}(\mathfrak{g}, M)$$

## 1.5 循环（上）同调

$\text{HH}_\bullet(A) \rightsquigarrow$  noncommutative differential forms.

$B \leftarrow \text{de rham}$

cyclic group action

$$C_\bullet(A, A) = C_\bullet(A) = A \otimes A$$

$$C_n(A) = A^{\otimes n+1}$$

we consider the  $\mathbb{Z}/(n+1)\mathbb{Z}$  acting on  $C_n A$ ,

$$\lambda : C_n(A) \rightarrow C_n(A)$$

$$a_0 \otimes a_1 \otimes \dots \otimes a_n \mapsto (-1)^n a_n \otimes a_0 \otimes \dots \otimes a_{n-1}$$

then  $\lambda$  is generator,

$$\lambda^{n+1} = (-1)^{n(n+1)} = 1$$

Let

$$C_\bullet^\lambda(A) := C_\bullet(A) / (1 - \lambda)$$

cyclic co-invariant.

性质 1.5.1. *Hochschild differential*  $b$  (on  $C_\bullet(A)$ ) induces a differential on  $C_\bullet(A)/(1-\lambda)$

证明. Let us define

$$b' : C_\bullet(A) \rightarrow C_{\bullet-1}(A)$$

$$b'(a_0 \otimes \dots \otimes a_n) = a_0 a_1 \otimes a_2 \otimes \dots \pm \dots \pm a_0 \otimes a_1 \otimes \dots \otimes a_{n-1} a_n$$

$$((C_\bullet(A), b') = (B_\bullet A \rightarrow A))$$

claim that

$$(1-\lambda)b' = b(1-\lambda)$$

$$[b, \lambda] = (1-\lambda)(b-b')$$

In particular,  $b : \text{Im}(1-\lambda) \mapsto \text{Im}(1-\lambda)$

”proof”:

□

so,  $b$  acts on  $C_\bullet^\lambda(A) = C_\bullet(A)/(1-\lambda)$ , called **Connes' complex**

$$H_\bullet^\lambda(A) = H_\bullet(C_\bullet^\lambda(A), b)$$

Introduce

$$\mathcal{N} : C_n(A) \rightarrow C_n(A)$$

性质 1.5.2.

$$b'\mathcal{N} = Nb$$

we have an exact sequence

定义 1.5.3. *the cyclic bi-complex*  $CC_\bullet(A)$

Let  $\text{Tot}(CC_\bullet(A))$  be the total complex of  $CC_\bullet(A)$  with a natural map of complexes

$$\text{Tot}(CC_\bullet(A)) \rightarrow C_\bullet^\lambda(A)$$

is a quasi-isomorphism.

$$HC_\bullet(A) := H_\bullet(\text{Tot}(CC_\bullet(A))) \cong H_\bullet^\lambda(A)$$

Intuitively, we can delete ”exact sequence” and get rid of 蓝色框框,

## 1.6 始有一如，独一之神，其名在阿尔达称为伊露维塔。

# 术语索引

Bar-复形, 8

cocenter 余中心, 4

derivation 导子, 12

derived center 导出中心, 10

exact 正合, 5

Hochschild 同调, 6

Hochschild 上同调, 11

Hochschild 上链复形, 11

Hochschild 链复形, 10

inner derivation 内导子, 12

Lie bracket 李括号, 13

opposite algebra 反代数, 3

outer derivation 外导子, 12

projective module 投射模, 3

projective resolution 投射消解, 6

reduced Bar-complex 约化 Bar-复形, 15