非交换几何选讲

曲豆豆 码字
南七技校福利社 五道口分社

2019 年 3 月 10 日

第 01-2 稿

图：雾气朦胧的安徽合肥大蜀山森林公园
拍摄于 2014.5.31 - 10：44

在五道口也要红专并进、理实交融呀 ～

目录

第 1 章　Hochschild 理论

1.1　结合代数的双模、余中心

我们需要**代数拓扑**、**同调代数**的预备知识，并且采用同调代数的标准术语、记号，诸如链复形、上同调、导出函子等等。首先介绍基本的记号与概念。

在本课，我们给定一个特征 0 的含幺交换环 K（例如一个域），考虑含幺结合 K-代数 A（注意 A 未必是交换代数），并且 A 作为交换环 K 上的模是投射模（projective module）。A 的 K-代数结构给出如下 K-模同态：

$$\begin{aligned} A \otimes_K A &\to A \\ (a_1, a_2) &\mapsto a_1 a_2 \end{aligned}$$

由 A 的结合性，$(a_1a_2)a_3 = a_1(a_2a_3)$ 对 A 中任意元素 a_1, a_2, a_3 成立.

对于含幺结合 K-代数 A，回顾 A 的**反代数**（opposite algebra）A^{op}. 反代数 A^{op} 作为 K-模与 A 完全相同，记号如下：

$$\begin{aligned} \mathrm{id} : A &\to A^{\mathrm{op}} \\ x &\mapsto x^{\mathrm{op}} \end{aligned}$$

但是 A^{op} 具有与 A“相反”的乘法，具体地，对于 A^{op} 中的元素 $x^{\mathrm{op}}, y^{\mathrm{op}}$，成立

$$x^{\mathrm{op}} y^{\mathrm{op}} := (yx)^{\mathrm{op}}$$

定义 1.1.1. 对于含幺结合 K-代数 A，我们定义 K-代数 A^e 为

$$A^e := A \otimes_K A^{op}$$

即 A 与 A^{op} 的 $K-$ 代数张量积。

容易验证对于任何两个含幺结合 K-代数 A, B，总有

$$(A \otimes_K B)^{\mathrm{op}} = A^{\mathrm{op}} \otimes_K B^{\mathrm{op}}$$

从而容易得到

$$(A^{\mathrm{op}})^e = (A^e)^{\mathrm{op}}$$

对于 $K-$ 代数 A，回顾 **双 $A-$ 模**（A-bimodule）的概念如下：

定义 1.1.2. 对于 K-代数 A，双 A-模是指如下资料：

（1）K-模 M；

（2）A 在 M 上的左、右 K-线性作用，

并且满足相容性：$(a.m).b = a.(m.b)$ 对任意 $m \in M$ 以及 $a, b \in A$ 成立。

例如，A 本身自然有双 A-模结构，A 在其上的左、右作用即为左乘、右乘。再比如 K-模张量积 $A \otimes_K A$ 具有如下双 A-模结构：

$$b.(a_1 \otimes a_2) := (ba_1) \otimes a_2$$

$$(a_1 \otimes a_2).b := a_1 \otimes (a_2 b)$$

其中 $a_1, a_2, b \in A$.

我们不再回顾左模、右模的概念了，也不去回顾右模与左模的平衡张量积。

性质 1.1.3. 设 M 为双 A-模，

（1）M 可自然地视为左 A^e-模：

$$(a_1 \otimes a_2^{op}).m = a_1.m.a_2$$

（2）M 可自然地视为右 A^e-模：

$$m.(a_1 \otimes a_2^{op}) = a_2.m.a_1$$

反之，左（右）A^e-模也可视为双 A-模。

证明. 容易验证。 □

特别地如果 M, N 都是双 A-模，那么考虑平衡张量积 $M \otimes_{A^e} N$，它的双 A-模结构具体如下：

$$a.(m \otimes n) = (a.m) \otimes n = m \otimes (n.a)$$

$$(m \otimes n).b = m \otimes (n.b) = (b.m) \otimes n$$

对于任何 $m \in M, n \in N, a, b \in A$ 成立。

定义 1.1.4. （余中心 *cocenter*）对于双 A-模 M，称双 A-模

$$M \otimes_{A^e} A$$

为 M 的**余中心**（*cocenter*）。

容易看出，对任意的 $m \in M, a \in A$，在余中心 $M \otimes_{A^e} A$ 当中，成立

$$(m.a) \otimes 1 = m \otimes (a.1) = m \otimes a = m \otimes (1.a) = (a.m) \otimes 1$$

从而 $(m.a - a.m) \otimes 1 = 0$. 事实上，$M$ 的余中心具有如下结构：

性质 1.1.5. 对于双 A-模 M，则有如下双 A-模同构

$$M \otimes_{A^e} A \cong M/\{(m.a - a.m) | a \in A, m \in M\}$$

证明. 考虑如下的双 A-模链复形

$$\partial_\bullet : A \otimes A \otimes A \to A \otimes A \to A \to 0$$

其中

$$\begin{aligned} \partial : a_1 \otimes a_2 \otimes a_3 &\mapsto a_1a_2 \otimes a_3 - a_1 \otimes a_2a_3 \\ a_1 \otimes a_2 &\mapsto a_1a_2 \end{aligned}$$

容易验证 ∂^2=0（由 A 的结合性），从而 $\partial_\bullet$ 为双 A-模链复形。并且显然 $\partial : A \otimes A \to A$ 是满同态。

断言链复形 $\partial_\bullet$ 为正合（exact）的。事实上，$\partial_\bullet$ 到其自身的恒等链映射与零链映射是链同伦的。我们构造如下的链同伦 $h_\bullet$：

$$\begin{aligned} h : a_1 &\mapsto 1 \otimes a_1 \\ a_1 \otimes a_2 &\mapsto 1 \otimes a_1 \otimes a_2 \end{aligned}$$

容易验证，对于任意的 $\varphi = a_1 \otimes a_2 \in A \otimes A$，成立

$$\begin{aligned} (\partial h + h\partial)\varphi &= (\partial h + h\partial)(a_1 \otimes a_2) \\ &= \partial(1 \otimes a_1 \otimes a_2) + h(a_1a_2) \\ &= a_1 \otimes a_2 - 1 \otimes a_1a_2 + 1 \otimes a_1a_2 \\ &= a_1 \otimes a_2 = \varphi \end{aligned}$$

从而对于 $\varphi \in A \otimes A$，如果 $\partial\varphi = 0$，那么

$$\varphi = (\partial h + h\partial)\varphi = \partial(h\varphi)$$

这说明链复形 $\partial_\bullet$ 在 $A \otimes A$ 处正合，因此 $\partial_\bullet$ 是正合的。

接下来，将函子 $M \otimes_{A^e} -$ 作用于链复形 $\partial_\bullet$，得到如下的双 A-模链复形：

$$M \otimes_{A^e} \partial_\bullet : M \otimes A \to M \to M \otimes_{A^e} A \to 0$$

由张量函子的右正合性，上述链复形也是正合的。其中注意到双 A-模同构

$$\begin{aligned} M \otimes_{A^e} (A \otimes A \otimes A) \quad &\cong \quad M \otimes A \\ m \otimes (a_1 \otimes a_2 \otimes a_3) \quad &\mapsto \quad (a_3.m.a_1) \otimes a_2 \end{aligned}$$

以及双 A-模同构

$$\begin{aligned} M \otimes_{A^e} (A \otimes A) \quad &\cong \quad M \\ m \otimes (a_1 \otimes a_2) \quad &\mapsto \quad a_2.m.a_1 \end{aligned}$$

于是正合列 $M \otimes_{A^e} \partial_\bullet$ 的边界映射有如下具体表达式：

$$\begin{aligned} M \otimes_{A^e} \partial : M \otimes A \quad &\to \quad M \\ m \otimes A \quad &\mapsto \quad m.a - a.m \end{aligned}$$

从而由正合性，易知

$$M \otimes_{A^e} A \cong M/\{(m.a - a.m) | a \in A, m \in M\}$$

□

可见，M 的余中心无非是商掉 M 当中“非交换的部分”所得到的“交换的部分”，如此望文生义。例如，如果 A 为交换 K-代数，那么 A 本身作为双 A-模，其余中心为 A 本身.

1.2 Hochschild 同调

定义 1.2.1. （*Hochschild* 同调）

对于双 A-模 M，以及非负整数 n，记

$$H_n(A, M) := \mathrm{Tor}_n^{A^e}(M, A)$$

称为 M 的第 n 个 *Hochschild* 同调。特别地，我们记

$$\mathrm{HH}_n(A) := H_n(A, A)$$

由定义以及导出函子的基础知识，容易知道双 $A-$ 模 M 的第 0 个 Hochschild 同调

$$H_0(A,M) = M \otimes_{A^e} A = M/\{(m.a - a.m)|a \in A, m \in M\}$$

正是 M 的余中心。注意 Hochschild 同调一般并不是环，仅仅能保证它是双 A-模。

具体地，由导出函子的定义，我们采用投射消解（projective resolution）来计算 Hochschild 同调。若双 A-模链复形

$$P_\bullet \to A := ... \to P_3 \to P_2 \to P_1 \to P_0 \to A \to 0$$

为双 A-模 A 的投射消解（正合，并且每个 $P_i(i \geq 0)$ 作为 K-模是投射的），那么

$$H_n(A,M) \cong H_n(M \otimes_{A^e} P_\bullet)$$

由同调代数的事实，它与投射消解 $P_\bullet$ 的选取无关。

事实上 Hochschild 同调可以与空间上的微分形式类比。作为一个具体计算例子，我们考虑 $\mathbb{C}$ 上的 n 元多项式代数

$$A := \mathbb{C}[x^1, x^2, ..., x^n]$$

注意到 A 作为 $\mathbb{C}$-代数是交换的，从而 $A = A^{\mathrm{op}}$. 我们记

$$A^{\mathrm{op}} = \mathbb{C}[y^1, y^2, ..., y^n] \quad A^e = \mathbb{C}[x^1, x^2, ..., x^n; y^1, y^2, ..., y^n]$$

性质 1.2.2. *考虑 $\mathbb{C}$-代数 $A := \mathbb{C}[x^1, x^2, ..., x^n]$，则其第 k 个 Hochschild 同调*

$$\mathrm{HH}_k(A) \cong A \otimes \bigwedge^k(\mathbb{C}^n)$$

是以 A 为系数的 k-形式。

证明. 我们给出 A 的投射消解，比如众所周知的 Koszul 消解

$$\mathcal{K}_A \to A \to 0$$

具体地，引入 n 个新的独立变元 $\eta^1, \eta^2, ..., \eta^n$ （视为复线性空间 $\mathbb{C}^n$ 的一组基），考虑环

$$\mathcal{K} := \frac{A^e[\eta^1, \eta^2, ..., \eta^n]}{\{(\eta^i\eta^j + \eta^j\eta^i)|i \neq j\}} = A^e \otimes \bigwedge^*(\mathbb{C}^n)$$

为以 A^e 为系数的外代数。

注意 $\mathcal{K}$ 有自然的分次：

$$\deg \eta^i = 1 \quad \deg x^i = \deg y^i = \deg 1 = 0$$

记 $\mathcal{K}_l$ 为 $\mathcal{K}$ 的 l 次分量（$0 \leq l \leq n$），即

$$\mathcal{K}_l = \bigoplus_{1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_l \leq n} A^e \eta^{i_1} \wedge \eta^{i_2} \wedge \ldots \wedge \eta^{i_l} = A^e \otimes \bigwedge\nolimits^l (\mathbb{C}^n)$$

此时 $K = \mathbb{C}$ 是域，因此 $\mathcal{K}$ （作为 K-模，即复线性空间）的投射性显然。我们定义 Koszul 复形 $(\mathcal{K}_A, \partial)$ 如下：

$$\mathcal{K}_A : \ldots \xrightarrow{\partial} \mathcal{K}_n \xrightarrow{\partial} \mathcal{K}_{n-1} \xrightarrow{\partial} \ldots \xrightarrow{\partial} \mathcal{K}_1 \xrightarrow{\partial} \mathcal{K}_0$$

其中边缘算子 ∂（首先是 A^e-模同态）满足

$$\partial \eta^i = x^i - y^i$$

以及与外微分相同的莱布尼茨法则：对任意 $\omega \in \mathcal{K}$，成立

$$\partial(\eta^i \wedge \omega) = \partial \eta^i \wedge \omega - \eta^i \wedge \partial \omega$$

再考虑连接映射

$$\begin{aligned} \varepsilon : \mathcal{K}_0 = A^c &\to A \\ x^i &\mapsto x^i \\ y^i &\mapsto x^i \end{aligned}$$

则众所周知，Koszul 复形

$$\mathcal{K}_A \xrightarrow{\varepsilon} A \to 0$$

为 A 的投射消解（证明从略）。我们以此计算 $\mathrm{HH}^\bullet(A)$. 我们注意到以下两个简单事实：

其一：对任何 $1 \leq l \leq n$，成立双 A-模同构

$$A \otimes_{A^e} \mathcal{K}_l = A \otimes_{A^e} A^e \otimes \bigwedge\nolimits^l (\mathbb{C}^n) \cong A \otimes \bigwedge\nolimits^l (\mathbb{C}^n)$$

其二：函子 $A \otimes_{A^e} -$ 作用于 Koszul 复形 $\mathcal{K}_A$ 之后，成立

$$A \otimes_{A^e} \partial = 0$$

这是因为，对于任意 $f \in A$，在 $A \otimes_{A^e} A^e$ 当中总成立

$$f \otimes x^i = x^i f \otimes 1 = f x^i \otimes 1 = f \otimes (x^i)^{\mathrm{op}} = f \otimes y^i$$

因此

$$f \otimes (x^i - y^i) = 0 \in A \otimes_{A^e} A^e$$

从而由 ∂ 的定义，容易看出 $A \otimes_{A^e} \partial = 0$.

综上两方面，直接计算之，

$$\begin{aligned}\mathrm{HH}_k(A) &= H_k(A\otimes^L_{A^e} A)\\ &= H_k(A\otimes_{A^e}\mathcal{K}_A)\\ &= A\otimes_{A^e}\mathcal{K}_k\\ &= A\otimes\bigwedge^k(\mathbb{C}^n)\end{aligned}$$

从而得证。 □

事实上对于一般的含幺结合 K-代数 A，$\mathrm{HH}_\bullet(A)$ 扮演了“微分形式”的角色。这是 Hochschild 同调的一种几何解释。

对于一般的 A，A 作为双 A-模，由一种典范的投射消解，称之为 **Bar-复形**：

定义 1.2.3. （*Bar*-复形）

对于含幺结合 K-代数 A，定义以下双 A-模链复形

$$\cdots\to B_2A\xrightarrow{b}B_1A\xrightarrow{b}B_0A\xrightarrow{b}A\to 0$$

如下：

$$B_nA := A\otimes A^{\otimes n}\otimes A\ \ (n\geq 0)$$

$$b:\ a_0\otimes a_1\otimes ...\otimes a_n\quad\mapsto\quad\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k a_0\otimes a_1\otimes ...\otimes(a_ka_{k+1})\otimes ...\otimes a_n$$

称之为 ***Bar*-复形**。

首先容易验证 $b^2=0$，从而 $B_\bullet A \xrightarrow{b} A \to 0$ 确实是链复形。对于 $n\geq 1$，具体验证如下：

$$\begin{aligned}
b^2(a_0\otimes a_1\otimes ...\otimes a_n) &= b\left(\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k a_0\otimes a_1\otimes ...\otimes(a_k a_{k+1})\otimes ...\otimes a_n\right)\\
&= \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k b(a_0\otimes a_1\otimes ...\otimes(a_k a_{k+1})\otimes ...\otimes a_n)\\
&= \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\left[\sum_{l=0}^{k-2}(-1)^l a_0\otimes ...\otimes(a_l a_{l+1})\otimes ...\otimes(a_k a_{k+1})\otimes ...\otimes a_n\right.\\
&\quad +(-1)^{k-1}a_0\otimes ...\otimes(a_{k-1}a_k a_{k+1})\otimes ...\otimes a_n\\
&\quad +(-1)^k a_0\otimes ...\otimes(a_k a_{k+1}a_{k+2})\otimes ...\otimes a_n\\
&\quad \left.-\sum_{l=k+2}^{n-1}(-1)^l a_0\otimes ...\otimes(a_k a_{k+1})\otimes ...\otimes(a_l a_{l+1})\otimes ...\otimes a_n\right]\\
&= \sum_{\substack{0\leq k<l\leq n-1\\ l-k\geq 2}}\left(-(-1)^{k+l}+(-1)^{k+l}\right)a_0\otimes ...\otimes(a_k a_{k+1})\otimes ...\otimes(a_l a_{l+1})\otimes ...\otimes a_n\\
&\quad +\sum_{0\leq k\leq n-2}\left((-1)^{2k+1}+(-1)^{2k}\right)a_0\otimes ...\otimes(a_k a_{k+1}a_{k+2})\otimes ...\otimes a_n\\
&= 0
\end{aligned}$$

从而验证完毕。

我们可以把 $a_0\otimes ...\otimes a_n$ 想象为直线上依次排列的 $n+1$ 个质点，将算子 b 想象为相邻质点两两“碰撞”。

性质 1.2.4. 记号同之前，则 Bar-复形

$$B_\bullet A\to A\to 0$$

是 A 的投射消解。

证明. 对任意 $n\geq 0$，$B_nA=A\otimes A^{\otimes n}\otimes A$ 是投射 K-模（这是因为由最初的假定，A 是投射 K-模，从而其张量积也投射）于是我们只需再验证该链复形是正合的。

为此，我们构造链同伦

$$\begin{aligned}
h: B_{n-2}A &\to B_{n-1}A \quad (n\geq 1,\ B_{-1}A=A)\\
a_0\otimes ...\otimes a_n &\mapsto 1\otimes a_0\otimes ...\otimes a_n
\end{aligned}$$

只需验证 $hb+bh$=1，之后与性质1.1.5的证明类似。

注意到对于任意 $n \geq 0$，成立

$$\begin{aligned} bh(a_0 \otimes \ldots \otimes a_n) &= b(1 \otimes a_0 \otimes \ldots \otimes a_n) \\ &= a_0 \otimes \ldots \otimes a_n - \sum_{k=0}^{n-1} 1 \otimes a_0 \otimes \ldots \otimes (a_k a_{k+1}) \otimes \ldots \otimes a_n \\ &= a_0 \otimes \ldots \otimes a_n - 1 \otimes b(a_0 \otimes \ldots \otimes a_n) \\ &= (1 - hb) a_0 \otimes \ldots \otimes a_n \end{aligned}$$

因此 $bh + hb = 1$，证毕。 □

定义 1.2.5. 设 M 为双 A-模，定义 ***Hochschild* 链复形**

$$C_\bullet(A, M) := M \otimes_{A^e} B_\bullet A$$

$$\cdots M \otimes A^{\otimes 3} \to M \otimes A^{\otimes 2} \to M \otimes A \to M$$

方便起见，该链复形的边缘算子仍记作 b.

则易知 M 的 Hochdchild 同调无非是 Hochschlid 链复形的同调：

$$H_n(A, M) = H_n(C_\bullet(A, M))$$

注意到有双 A-模同构

$$C_n(A, M) = M \otimes_{A^e} \left(A \otimes A^{\otimes n} \otimes A\right) \cong M \otimes A^{\otimes n}$$

在此同构意义下，容易验证 $C_\bullet(A, M)$ 的边缘算子 b 有如下显示表达：

对任意 $m \in M$，以及 $a_1, a_2, \ldots, a_n \in A$，成立

$$\begin{aligned} b\left(m \otimes (a_1 \otimes \ldots \otimes a_n)\right) &= m \otimes_{A^e} \left(b(1 \otimes a_1 \otimes \ldots \otimes a_n \otimes 1)\right) \\ &= m \otimes_{A^e} [a_1 \otimes \ldots \otimes a_n \otimes 1 \\ &\quad + \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k 1 \otimes a_1 \otimes \ldots \otimes (a_k a_{k+1}) \otimes \ldots \otimes a_n \otimes 1 \\ &\quad + (-1)^n 1 \otimes a_1 \otimes \ldots \otimes a_n] \\ &= (m.a_1) \otimes a_2 \otimes \ldots \otimes a_n \\ &\quad + \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k m \otimes a_1 \otimes \ldots \otimes (a_k a_{k+1}) \otimes \ldots \otimes a_n \\ &\quad + (-1)^n (a_n.m) \otimes a_1 \otimes \ldots \otimes a_{n-1} \end{aligned}$$

Hochschlid 链复形的边缘算子的显式表达与 Bar-复形非常相似，从上式最右边的前两项可以看出；区别在于上式最右边的第三项。

1.3 Hochschlid 上同调

对于双 A-模 M，既然我们已经考虑余中心 $M \otimes_{A^e} A$，那么我们自然也会去考虑 $\mathrm{Hom}_{A^e}(A, M)$. 我们称双 A-模 $\mathrm{Hom}_{A^e}(A, M)$ 为 M 的**导出中心**（derived center）。

性质 1.3.1. （导出中心的结构）对于双 A-模 M，则有双 A-模同构

$$\mathrm{Hom}_{A^e}(A, M) \cong \{m \in M | a.m - m.a = 0 \ \ \forall a \in A\}$$

容易验证 $\{m \in M | a.m - m.a = 0 \ \ \forall a \in A\}$ 为 M 的双 A-子模。粗俗地说，该子模由“与 A 中所有元素交换”的元素构成，故谓之“中心”。

证明. 对于任意的 $\varphi \in \mathrm{Hom}_{A^e}(A, M)$ 以及 $a \in A$，则 $\varphi(a)$ 的取值由 $\varphi(1)$ 完全决定：

$$\varphi(a) = \varphi(a.1) = a.\varphi(1)$$

而另一方面，

$$\varphi(a) = \varphi(1.a) = \varphi(1).a$$

从而有 $a.\varphi(1) = \varphi(1).a$. 于是我们可以构造如下双 $A-$ 模同态：

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{A^e}(A, M) &\to \{m \in M | a.m - m.a = 0 \ \ \forall a \in A\} \\ \varphi &\mapsto \varphi(1) \end{aligned}$$

容易验证该模同态为同构。证毕。 $\square$

然后我们考虑 $\mathrm{Hom}(-, M)$ 的导出函子，自然地去定义如下：

定义 1.3.2. （*Hochschild* 上同调）

对于双 A-模 M，以及 $n \geq 0$，定义 M 的第 n 个 *Hochschild* 上同调

$$H^n(A, M) = \mathrm{Ext}^n_{A^e}(A, M)$$

特别地，我们记

$$H^n(A) = \mathrm{Ext}^n_{A^e}(A, A)$$

由定义知，M 的第 0 个 Hochschild 上同调为 $\mathrm{Hom}_{A^e}(A, M)$，是 M 的导出中心。回顾 Bar-复形，我们考虑如下的 **Hochschild 上链复形**

$$C^\bullet(A, M) = \mathrm{Hom}_{A^e}(B_\bullet A, M)$$

该上链复形的微分算子 ∂ 由 Bar-复形 $B_\bullet A$ 的边缘算子 b 所诱导。则 M 的 Hochschild 上同调满足

$$H^n(A,M) = H^n(C^\bullet(A,M),\partial) = H^n(\mathrm{Hom}_{A^e}(B_\bullet A,M),\partial)$$

注意有自然的双 A-模同构

$$C^n(A,M) = \mathrm{Hom}_{A^e}(A\otimes A^{\otimes n}\otimes A,M) \cong \mathrm{Hom}(A^{\otimes n},M)$$

（即取值于 M 的 n 重 K-线性映射）于是对于任意的 $\varphi\in C^n(A,M)=\mathrm{Hom}(A^{\otimes n},M)$，容易知道 $\partial\varphi\in\mathrm{Hom}(A^{\otimes n+1},M)$ 具有如下显式表达：对任意 $a_0,a_1,...,a_m\in A$，

$$\begin{aligned}\partial\varphi(a_0,a_1,...,a_n) &= a_0.\varphi(a_1,a_2,...,a_n)\\ &\quad -\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\varphi(a_0,...;(a_ka_{k+1});...,a_n)\\ &\quad -(-1)^n\varphi(a_0,a_1,...,a_{n-1}).a_n\end{aligned}$$

接下来讨论 Hochschild 上同调的几何意义。我们已经知道第 0 个 Hochschild 上同调为 M 的导出中心；现在我们看 $H^1(A,M)$，我们将发现它是 A 的取值于 M 的外导子。

回顾**导子**（derivation）的概念如下：

定义 1.3.3. （导子）对于双 A-模 M，K-线性映射

$$D: A\to M$$

称为 A 的取值于 M 的**导子**（*derivation*），如果对任意的 $a_1,a_2\in A$，成立

$$D(a_1a_2) = D(a_1).a_2 + a_1.D(a_2)$$

对于 $m\in M$ 我们定义

$$\begin{aligned}\mathrm{ad}_m: A &\to M\\ a &\mapsto [m,a] := m.a - a.m\end{aligned}$$

则容易验证 ad_m 为 A 的取值于 M 的导子，称形如这样的导子为**内导子**（inner derivation）。

我们记

$$\mathrm{Der}(A,M) := \{D: A\to M | D\text{为导子}\}$$

$$\mathrm{Inn}(A,M) := \{\mathrm{ad}_m | m\in M\}\subseteq \mathrm{Der}(A,M)$$

注意 $\mathrm{Inn}(A,M)$ 与 $\mathrm{Der}(A,M)$ 都有显然的 K-模结构，且前者是后者的 K-子模。

性质 1.3.4. （$\mathrm{HH}^1(A,M)$ 的结构）

对于双 A-模 M，成立

$$\mathrm{HH}^1(A,M) \cong \frac{\mathrm{Der}(A,M)}{\mathrm{Inn}(A,M)}$$

我们称上式右边的集合当中的元素为 A 的取值于 M 的**外导子**（outer derivation）。

证明. 只需考虑 Hochschild 上链复形

$$C^0(A,M) \xrightarrow{\partial^0} C^1(A,M) \xrightarrow{\partial^1} C^2(A,M) \to \cdots$$

我们只需具体计算之。对于 $\varphi \in C^1(A,M) \cong \mathrm{Hom}(A,M)$，则 $\partial^1\varphi \in C^2(A,M) \cong \mathrm{Hom}(A^{\otimes 2},M)$ 满足：对任意 $a_1,a_2 \in A$，成立

$$\partial^1\varphi(a_1,a_2) = a_1.\varphi(a_2) - \varphi(a_1a_2) + \varphi(a_1).a_2$$

可见 $\varphi \in \ker\partial^1$ 当且仅当 $\varphi \in \mathrm{Der}(A,M)$. 也就是说 $\ker\partial^1 = \mathrm{Der}(A,M)$.

另一方面，对于 $m \in C^0(A,M) \cong M$，以及 $a \in A$，成立

$$(\partial^0 m)(a) = a.m - m.a = -\,\mathrm{ad}_m(a)$$

因此 $\ker\partial^0 \cong \mathrm{Inn}(A,M)$. 从而

$$\mathrm{HH}^1(A,M) = \frac{\ker\partial^1}{\mathrm{Im}\,\partial^0} \cong \frac{\mathrm{Der}(A,M)}{\mathrm{Inn}(A,M)}$$

□

特别地，当 $M=A$ 时，

$$\mathrm{HH}^1(A) = \mathrm{Der}(A,A)/\mathrm{Inn}(A,A)$$

注意到 $\mathrm{Der}(A,A)$ 上面还有更多的结构：对于 $\forall D_1,D_2 \in \mathrm{Der}(A,A)$，定义

$$[D_1,D_2] := D_1\circ D_2 - D_2\circ D_1 : A \to A$$

容易验证 $[D_1,D_2]$ 仍然为 A 的导子，并且 $[-,-]$ 为 $\mathrm{Der}(A,A)$ 上的李括号（Lie bracket）。

另外容易验证

$$[\mathrm{Der}(A,A),\mathrm{Inn}(A,A)] \subseteq \mathrm{Inn}(A,A)$$

具体地，对于 $D \in \mathrm{Der}(A,A)$ 以及 $m \in M$，成立

$$[D,\mathrm{ad}_m] = \mathrm{ad}_{D(m)}$$

也就是说 $\mathrm{Inn}(A,A)$ 是 $\mathrm{Der}(A,A)$ 的理想。于是 $[-,-]$ 诱导了 $\mathrm{HH}^1(A)=\frac{\mathrm{Der}(A,A)}{\mathrm{Inn}(A,A)}$ 上的李括号结构.

如果 A 是交换 K-代数，则 $\mathrm{Inn}(A,A)=0$。于是

$$\mathrm{HH}^1(A)\cong \mathrm{Der}(A,A)$$

可被认为是“切向量场”（此时 A 被认为是“函数环”）。

我们再去考虑 $\mathrm{HH}^2(A,M)$. 对于任意的

$$\varphi\in C^2(A,M)=\mathrm{Hom}(A^{\otimes 2},M)$$

则对 $a_0,a_1,a_2\in A$，成立

$$\partial\varphi(a_0,a_1,a_2)=a_0.\varphi(a_1,a_2)-\varphi(a_0a_1,a_2)+\varphi(a_0,a_1a_2)-\varphi(a_0,a_1).a_2$$

引理 1.3.5. 对于双 A-模 M，以及 $\varphi\in C^2(A,M)=\mathrm{Hom}(A^{\otimes 2},M)$，我们令

$$\hat{A}:=A\oplus M$$

并赋以如下的 K-代数结构：对于任意 $a_1,a_2\in A$ 以及 $m_1,m_2\in M$，规定 $\hat{A}$ 的乘法 $\hat{\bullet}_\varphi$ 为

$$(a_1\oplus m_1)\hat{\bullet}_\varphi(a_2\oplus m_2):=a_1a_2\oplus[a_1.m_2+m_1.a_2+\varphi(a_1,a_2)]$$

那么 $(\hat{A},\hat{\bullet}_\varphi)$ 为结合代数，当且仅当 $\partial\varphi=0$.

证明. 这是简单的计算验证。对于任意的 $a_0,a_1,a_2\in A$ 以及 $m_0,m_1,m_2\in M$，直接计算之，

$$\begin{aligned}&[(a_0\oplus m_0)\hat{\bullet}_\varphi(a_1\oplus m_1)]\hat{\bullet}_\varphi(a_2\oplus m_2)\\ =\;&a_0a_1a_2\oplus[a_0a_1.m_2+a_0.m_1.a_2+m_0.a_1a_2+\varphi(a_0,a_1).a_2+\varphi(a_0a_1,a_2)]\end{aligned}$$

以及

$$\begin{aligned}&(a_0\oplus m_0)\hat{\bullet}_\varphi[(a_1\oplus m_1)\hat{\bullet}_\varphi(a_2\oplus m_2)]\\ =\;&a_0a_1a_2\oplus[a_0a_1.m_2+a_0.m_1.a_2+m_0.a_1a_2+a_0.\varphi(a_1,a_2)+\varphi(a_0,a_1a_2)]\end{aligned}$$

因此 $\hat{\bullet}_\varphi$ 满足结合性，当且仅当

$$\varphi(a_0,a_1).a_2+\varphi(a_0a_1,a_2)=a_0.\varphi(a_1,a_2)+\varphi(a_0,a_1a_2)$$

而此式等价于 $\partial\varphi=0$. □

注意到在 $\hat{A}$ 当中，对任意的 $m_1, m_2 \in M$，以及任意 $\varphi \in C^2(A,M)$，总有 $m_1 \hat{\bullet}_\varphi m_2 = 0$. 于是我们不妨将“$A \oplus M$”当中的“$M$”理解为“一阶小量”。我们考虑 $\varphi = 0$ 时 $\hat{A}_0 := A \oplus M$ 的代数结构

$$(a_1 \oplus m_1) \bullet (a_2 \oplus m_2) := a_1 a_2 \oplus (a_1.m_2 + m_1.a_2)$$

显然 $(\hat{A}_0, \bullet)$ 为结合代数。若 $\partial\varphi = 0$，则结合代数 $(\hat{A}, \hat{\bullet}_\varphi)$ 为 $(\hat{A}_0, \bullet)$ 的**一阶形变**，而 φ 为其“形变参数”。

从而 M 的第 2 个 Hochschild 上同调

$$H^2(A,M) \cong \frac{\{\varphi | (\hat{A}, \hat{\bullet}_\varphi)\text{是结合代数}\}}{\mathrm{Im}(\partial : C^1(A,M) \to C^2(A,M))}$$

商掉的东西（$\mathrm{Im}\,\partial$）为形如以下的一类特殊的一阶形变：

$$\begin{aligned} \varphi_f : A \otimes A &\to M \\ a_1 \otimes a_2 &\mapsto a_1.f(a_2) + f(a_1).a_2 - f(a_1 a_2) \end{aligned}$$

其中 $f \in C^1(A,M) = \mathrm{Hom}(A,M)$，$\varphi_f = \partial f$.

我们考察一个 Hochschild 上同调的具体算例。

性质 1.3.6. 若 $A = \mathbb{C}[x^1, ..., x^n]$ 为 $\mathbb{C}$ 上的 n 元多项式环，则

$$\mathrm{HH}^k(A) \cong \mathrm{Hom}\left(\bigwedge^k(\mathbb{C}^n), A\right)$$

证明. 对于这个特例，采用 Koszul 复形计算更佳简便。有关记号同性质1.2.2的证明过程. 考虑 Koszul 复形

$$\mathcal{K}_A : \cdots \xrightarrow{\partial} A^e \otimes \bigwedge^{k+1}(\mathbb{C}^n) \xrightarrow{\partial} A^e \otimes \bigwedge^k(\mathbb{C}^n) \xrightarrow{\partial} A^e \otimes \bigwedge^{k-1}(\mathbb{C}^n) \xrightarrow{\partial} \cdots$$

然后将函子 $\mathrm{Hom}_{A^e}(-, A)$ 作用于之上。注意到有 $\mathbb{C}$-线性同构

$$\begin{aligned} &\mathrm{Hom}_{A^e}\left(A^e \otimes \bigwedge^k(\mathbb{C}^n), A\right) \\ \cong\ &\mathrm{Hom}\left(\bigwedge^k(\mathbb{C}^n), \mathrm{Hom}_{A^e}(A^e, A)\right) \\ \cong\ &\mathrm{Hom}\left(\bigwedge^k(\mathbb{C}^n), A\right) \end{aligned}$$

此外再注意到，上链复形 $\mathrm{Hom}_{A^e}(\mathcal{K}_A, A)$ 的微分算子 $\mathrm{d} := \mathrm{Hom}_{A^e}(\partial, A) = 0$. 这是因为对于 $\varphi \in \mathrm{Hom}_{A^e}\left(A^e \otimes \bigwedge^k(\mathbb{C}^n), A\right)$，$\omega \in \bigwedge^{k+1}(\mathbb{C}^n)$ 以及 $f \in A^e$，成立

$$\mathrm{d}\varphi(f \otimes \omega) = \varphi(\partial(f \otimes \omega))$$

回顾 Koszul 复形边缘算子运算规则

$$\partial : \eta^i \mapsto x^i - y^i \in A^e$$

又由于 φ 为 A^e-模同态，从而对于任意 $\tilde{\omega} \in \bigwedge^k(\mathbb{C}^n)$，成立

$$\varphi(x^i \otimes \tilde{\omega}) = x^i.\varphi(1 \otimes \tilde{\omega}) = \varphi(1 \otimes \tilde{\omega}).x^i = \varphi((x^i)^{\mathrm{op}} \otimes \tilde{\omega}) = \varphi(y^i \otimes \tilde{\omega})$$

也就是说 $\varphi((x^i - y^i) \otimes \tilde{\omega}) = 0$. 由此可见 $\mathrm{d} = 0$. 综上可知

$$\mathrm{HH}^k(A) \cong \mathrm{Hom}\left(\bigwedge^k(\mathbb{C}^n), A\right)$$

□

注意到 $\mathrm{Hom}\left(\bigwedge^k(\mathbb{C}^n), A\right)$ 之中的元素形如

$$\sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_k \le n} f_{i_1 \ldots i_k} \partial_{i_1} \wedge \ldots \wedge \partial_{i_k}$$

回顾 $\mathrm{HH}_\bullet(A)$ 中的元素可被认为是“微分形式”，可见 $\mathrm{HH}^\bullet(A)$ 中的元素则是“多重切向量场”。

1.4 Hochschild（上）同调的例子

定义 1.4.1. （约化 *Bar*-复形）（*reduced Bar-complex*）

对于 K-代数 A，则视 K 为 A 的 K-子模，并且令 K-模

$$\overline{A} := A/K$$

我们定义如下的约化 *Bar*-复形 $(\overline{B}_\bullet A, b)$：

$$\overline{B}_n A := A \otimes \overline{A}^{\otimes n} \otimes A \quad \forall i \geq 0$$

边缘算子 $b : \overline{B}_n A \to \overline{B}_{n-1} A$ 如下定义：

$$\begin{aligned} b\Big(a_0 \otimes (\overline{a_1} \otimes \cdots \otimes \overline{a_n}) \otimes a_{n+1}\Big) \quad &:= \quad (a_0 a_1) \otimes (\overline{a_2} \otimes \cdots \otimes \overline{a_n}) \otimes a_{n+1} \\ &+ \quad \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^i a_0 \otimes (\overline{a_1} \otimes \cdots (\overline{a_i a_{i+1}}) \otimes \cdots \otimes \overline{a_n}) \otimes a_{n+1} \\ &+ \quad (-1)^n a_0 \otimes (\overline{a_1} \otimes \cdots \otimes \overline{a_{n-1}}) \otimes (a_n a_{n+1}) \end{aligned}$$

注意到 $\overline{B}_\bullet A$ 是 $B_\bullet A$ 的商模：

$$\overline{B}_n A = \frac{B_n A}{\{a_0 \otimes (a_1 \otimes \cdots \otimes a_{i-1} \otimes 1 \otimes a_{i+1} \otimes \cdots \otimes a_n) \otimes a_{n+1}\}}$$

容易发现约化 Bar-复形的“b”正是 Bar-复形的 b. 但是我们要验证 b 的良定性，即与代表元选取无关。这是容易验证的。进而，我们可以由约化 Bar-复形构造 A 的投射消解：

$$\overline{B}_\bullet A \to A \to 0$$

与之前 *Bar*-复形完全类似，我们容易验证此复形也是正合的。只需构造同伦算子

$$\begin{aligned} h : \overline{B}_{n-1}A &\to \overline{B}_n A \\ a_0 \otimes (\overline{a_1} \otimes \cdots \otimes \overline{a_{n-1}}) \otimes a_n &\mapsto 1 \otimes (\overline{a_0} \otimes \overline{a_1} \otimes \cdots \otimes \overline{a_n}) \otimes a_{n+1} \end{aligned}$$

验证 $bh + hb = 1$ 即可。

定义 1.4.2. （约化 *Hochschild*（上）链复形）

对于双 A-模 M，我们令

$$\begin{aligned} \overline{C}_\bullet(A, M) &:= M \otimes_{A^e} \overline{B}_\bullet A \cong M \otimes \overline{A}^{\otimes \bullet} \\ \overline{C}^\bullet(A, M) &:= \mathrm{Hom}_{A^e}(\overline{B}_\bullet A, M) \cong \mathrm{Hom}(\overline{A}^{\otimes \bullet}, M) \end{aligned}$$

称之为关于 M 的约化 *Hochschild*（上）链复形。

由于约化 Bar-复形也是 A 的投射消解，从而我们也可以由约化 Hochschild（上）链复形来计算 Hochschild（上）同调：

$$H_\bullet(\overline{C}_\bullet(A, M)) = H_\bullet(A, M)$$

$$H^\bullet(\overline{C}^\bullet(A, M)) = H^\bullet(A, M)$$

关于（约化）Bar-复形，我们还有另一种理解方式：关于 A 的（约化）Bar-复形是 A 与某个微分分次代数的自由乘积。

定义 1.4.3. （微分分次代数）

$\mathbb{Z}$-分次 K-代数

$$A := \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} A_n$$

称为**微分分次代数**（*differential graded algebra*），若它配以 K-线性算子 $\mathrm{d} : A \to A$，并且满足：

$$\begin{cases} \mathrm{d}(A_n) \subseteq A_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{Z} \\ \mathrm{d}^2 = 0 \\ \mathrm{d}(\alpha\beta) = (\mathrm{d}\alpha)\beta + (-1)^{\deg \alpha}\alpha(\mathrm{d}\beta) \quad \forall \alpha, \beta \in A, \text{并且 } \alpha \text{ 是齐次元} \end{cases}$$

对于微分分次代数 (A, d)，由于 A 的分次以及 $\mathrm{d}^2 = 0$，从而自然有上链复形

$$\cdots \to A_{-1} \xrightarrow{\mathrm{d}} A_0 \xrightarrow{\mathrm{d}} A_1 \to \cdots$$

我们将此上链复形也记为 (A, d).

微分分次代数最直接的例子是，对于光滑流形 X，考虑 $A := \Omega^\bullet(X)$ 为 X 上的微分形式。A 上的乘法即为微分形式的外积 $\wedge$，微分结构即为外微分 d.

我们可以适当修改微分分次代数的定义，将条件"$\mathrm{d}(A_n) \subseteq A_{n+1}$"改为"$\mathrm{d}(A_n) \subseteq A_{n-1}$"，此时的微分算子我们习惯记为"$\partial$". 对于这样的微分分次代数 (A, ∂)，它可以被视为链复形。

例子 1.4.4. 我们考虑如下 K-代数：

$$A := K[\varepsilon] := K \oplus K\varepsilon \oplus K\varepsilon^2 \oplus \cdots$$

其中 ε 为形式变量，并且规定 $\deg \varepsilon = 1$，由此诱导出 $K[\varepsilon]$ 的分次结构。其微分算子 ∂_ε 由以下诱导：

$$\partial_\varepsilon(1) = 0 \quad \partial_\varepsilon(\varepsilon) = 1$$

注意 $\deg \varepsilon = 1$，按照微分代数的定义可计算出

$$\partial_\varepsilon(\varepsilon^2) = \partial_\varepsilon(\varepsilon)\varepsilon + (-1)^{\deg \varepsilon}\varepsilon\partial_\varepsilon(\varepsilon) = \varepsilon - \varepsilon = 0$$

一般地，对于非负整数 n 我们有

$$\partial_\varepsilon(\varepsilon^n) = \begin{cases} 0 & n \text{ 为偶数} \\ \varepsilon^{n-1} & n \text{ 为奇数} \end{cases}$$

从而链复形 $(K[\varepsilon], \partial_\varepsilon)$：

$$\cdots \to K\varepsilon^4 \xrightarrow{0} K\varepsilon^3 \xrightarrow{1} K\varepsilon^2 \xrightarrow{0} K\varepsilon \xrightarrow{1} K \to 0$$

是正合的。其中 $1 : K\varepsilon^{2n+1} \to K\varepsilon^{2n}$ 将 ε^{2n+1} 映为 ε^{2n}.

众所周知，对于两个 K-代数 A, B，我们可以谈论它们的**自由乘积**（free product）$A * B$. 若 $A = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} A_n$ 是微分分次代数，其微分算子为 d，则容易知道 $A * B$ 自然也有微分分次代数结构：

$$\begin{cases} \deg b &= 0 & \forall b \in B \\ \deg a &= n & \forall a \in A_n \subseteq A \\ \mathrm{d}b &= 0 & \forall b \in B \end{cases}$$

容易知道 $A * B$ 中的 N 次齐次元必形如以下元素的有限和：

$$b_1 a_1 b_2 a_2 \cdots b_m a_m b_{m+1} \quad (b_i \in B\,,\, a_i \in A_{n_i}\,,\, \sum_{i=1}^m n_i = N)$$

性质 1.4.5. 对于 K-代数 A，则有链复形的同构

$$(B_\bullet A \to A, b) \cong (A * K[\varepsilon], \partial_\varepsilon)$$

其中 $(K[\varepsilon], \partial_\varepsilon)$ 为例子 *1.4.4* 当中的微分分次代数，视为链复形；同构映射为

$$\begin{array}{rcl} \varphi_n : B_n A & \to & (A * K[\varepsilon])_n \\ a_0 \otimes (a_1 \otimes \cdots \otimes a_n) \otimes a_{n+1} & \mapsto & a_0 \varepsilon a_1 \varepsilon a_2 \cdots a_n \varepsilon a_{n+1} \end{array}$$

这给出了 Bar-复形的又一种理解方式。

证明. 容易验证 φ_n 为 K-模同构，且逆映射 φ_n^{-1} 由以下诱导：

$$\varepsilon^n \mapsto \underbrace{1\varepsilon 1\varepsilon 1 \cdots 1\varepsilon 1}_{n\text{个}\varepsilon}$$

然后只需验证 $\varphi_\bullet : (B_\bullet \to A, b) \to (A * K[\varepsilon], \partial_\varepsilon)$: 是链映射，也就是要验证交换关系 $\varphi \circ b = \partial_\varepsilon \circ \varphi$

$$\begin{tikzcd} B_n A \arrow[r, "b"] \arrow[d, "\varphi"] & B_{n-1} A \arrow[d, "\varphi"] \\ (K[\varepsilon] * A)_n \arrow[r, "\partial_\varepsilon"] & (K[\varepsilon] * A)_{n-1} \end{tikzcd}$$

而这容易验证，验证如下：

$$\begin{aligned} & \varphi \circ b(a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n \otimes a_{n+1}) \\ = \; & \varphi \left(\sum_{k=0}^{n} (-1)^k a_0 \otimes \cdots \otimes (a_k a_{k+1}) \otimes \cdots \otimes a_{n+1} \right) \\ = \; & \sum_{k=0}^{n} (-1)^k a_0 \varepsilon a_1 \varepsilon \cdots \varepsilon a_{n+1} \\ = \; & \partial_\varepsilon (a_0 \varepsilon a_1 \varepsilon \cdots a_n \varepsilon a_{n+1}) \\ = \; & \partial_\varepsilon \circ \varphi (a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n \otimes a_{n+1}) \end{aligned}$$

□

我们还可以考虑 $(K[\varepsilon], \partial_\varepsilon)$ 的商代数 $K[\varepsilon]/\varepsilon^2$，易知 $(K[\varepsilon]/\varepsilon^2, \partial_\varepsilon)$ 也构成微分分次代数，从而也通过微分算子 ∂_ε 视为链复形。在此代数中，$\varepsilon^2 = 0$.

类似地，我们可以给出约化 Bar-复形的另一种理解方式：

性质 1.4.6. 对于 K-代数 A，则有链复形同构

$$(\overline{B}_\bullet A \to A, b) \cong (A * K[\varepsilon]/\varepsilon^2, \partial_\varepsilon)$$

只需注意到 $A * K[\varepsilon]/\varepsilon^2$ 当中的 n 次齐次元必形如以下元素的有限和：

$$a_0\varepsilon a_1\varepsilon \cdots a_n\varepsilon a_{n+1} \quad (a_i \in A)$$

证明. 完全类似。事实上此链复形同构映射由 $\varphi_n : B_nA \to (A * K[\varepsilon])_n$ 诱导，其良定性由下式保证：对任意 $1 \le i \le n$，

$$\begin{aligned}
& \varphi_n(a_0 \otimes \cdots \otimes a_{i-1} \otimes 1 \otimes a_{i+1} \otimes \cdots \otimes a_{n+1}) \\
= \ & a_0\varepsilon a_1 \cdots a_{i-1}\varepsilon 1\varepsilon a_{i+1} \cdots \varepsilon a_{n+1} \\
= \ & a_0\varepsilon a_1 \cdots a_{i-1} 1\varepsilon^2 a_{i+1} \cdots \varepsilon a_{n+1} \\
= \ & 0 \mod \varepsilon^2
\end{aligned}$$

□

本节最后简单介绍以下 Hochschild（上）同调与其它常见的（上）同调理论的关系。

例子 1.4.7. （群的上同调）

设 G 是一个群，$M \in \mathrm{Rep}(G)$ 为群 G 的一个左 K-表示，则有 G-模链复形

$$0 \to M \xrightarrow{\delta} C^1(G,M) \xrightarrow{\delta} C^2(G,M) \xrightarrow{\delta} \ldots$$

其中

$$C^n(G,M) := \mathrm{Hom}(G^n, M) = \{f : G^n \to M\}$$

并且微分算子 δ 满足

$$\begin{cases}
\delta(m)(g) = g.m - m \\
(\delta f)(g_0, g_1, \ldots, g_n) = g_0.f(g_1, g_2, \ldots, g_n) \\
\qquad - \sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k f(g_1, \ldots, g_k g_{k+1}, \ldots, g_n) \\
\qquad -(-1)^n f(g_0, g_1, \ldots, g_{n-1})
\end{cases}$$

容易验证 δ^2=0. 此链复形的上同调

$$H^\bullet(G,M) := H^\bullet(C^\bullet(G,M), \delta)$$

称之为**群的上同调** *(group cohomology)*

由 δ 的表达式容易看出，群的上同调与 Hochschild 上同调有以下关系：

性质 1.4.8. *设 G 是一个群，M 为群 G 的一个左 K-模，考虑群代数 $A := K[G]$，于是 M 自然有左 A-模结构。那么有同构：*

$$H^\bullet(G, M) \cong H^\bullet(K[G], M)$$

其中左边为群 G 关于 M 的上同调，右边为群代数 $K[G]$ 关于 M 的 Hichschild 上同调。

注意 M 仅仅是左 $K[G]$-模，并没有双 $K[G]$-模结构呀，怎么谈论 Hochschild 上同调？

（强行规定 G 在 M 上的右作用恒为 1，通过 K-线性扩张得到 $K[G]$ 在 M 的右作用，这样就得到 M 的双 $K[G]$-模结构了。）

证明. 注意到 $\mathrm{Hom}(G^n, M)$ 中的元素可以自然地 K-线性延拓为 $\mathrm{Hom}(K[G]^n, M)$ 中的元素，这给出它们之间的同构。然后注意到 $A = K[G]$ 的 Hochschild 上链复形的微分算子的显式表达式，（见定义1.3.2的下方）它与群上同调相应的上链复形的微分算子显式表达式“相同”。细节从略。 □

若熟悉李代数同调，我们可以将李代数同调与其泛包络代数的 Hochschild 同调联系起来：

例子 1.4.9. *（李代数同调）对于李代数 $\mathfrak{g}$，M 为李代数 $\mathfrak{g}$ 的一个左 K-模。令 $A := \mathcal{U}(\mathfrak{g})$ 为 $\mathfrak{g}$ 的泛包络代数，则 A 自然有左 A-模结构。（再通过某种“比较平凡”的方式给出右作用？与上例类似？）则有同构*

$$H_\bullet(\mathcal{U}(\mathfrak{g}), M) \cong H_\bullet^{\mathrm{Lie}}(\mathfrak{g}, M)$$

其中左边是 A 关于 M 的 Hochschild 同调，右边是李代数同调。

并没有在此叙述**李代数同调**的定义。留给感兴趣者。此处从略。

事实上，也可以考虑**群的同调、李代数上同调**，它们也有对应的 Hochschild 同调、上同调。

1.5 循环同调

回顾对于 K-代数 A，若 A 交换，则其 Hochschild 同调 $\mathrm{HH}_\bullet(A)$ 可以被理解为“空间” A 上的“微分形式”。本节我们进一步研究 $\mathrm{HH}_\bullet(A)$.

记号 1.5.1. *对于 K-代数 A，双 A-模 $M = A$. 考虑其 Hochschild 链复形 $C_\bullet(A) := C_\bullet(A, A)$:*

$$C_n(A) := C_n(A, A) \cong A^{\otimes n+1}$$

(回顾定义1.2.5). 我们考虑群 $\mathbb{Z}/(n+1)\mathbb{Z}$ 在 $C_n(A)$ 上的如下左 K-作用：记 $\mathbb{Z}/(n+1)\mathbb{Z}$ 的生成元为 λ，则

$$\begin{aligned} \lambda : C_n(A) &\to C_n(A) \\ a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n &\mapsto (-1)^n a_n \otimes a_0 \otimes \cdots \otimes a_{n-1} \end{aligned}$$

考虑 $C_n(A)$ 模掉此群作用，所得的商 K-模记为

$$C_n^\lambda(A) := C_n(A)/(1-\lambda)$$

其中的元素称之为**循环余不变量**（*cyclic co-invariant*）。

容易验证，

$$\lambda^{n+1}a_0\otimes a_1\otimes\cdots\otimes a_n = (-1)^{n(n+1)}a_0\otimes a_1\otimes\cdots\otimes a_n = a_0\otimes a_1\otimes\cdots\otimes a_n$$

即 $\lambda^{n+1}=\mathrm{id}$. 可见这的确是 $\mathbb{Z}/(n+1)\mathbb{Z}$ 的作用。

回顾 Bar-复形，我们可以直观地视为“直线上依次排列质点，相邻两两碰撞”；而在这里，商掉 λ 循环作用后，直观地更像是“圆周上排列质点”。

我们将说明，Hochschild 链复形 $C_\bullet(A)$ 的边缘算子 b，沿商映射 $C_\bullet(A)\twoheadrightarrow C_\bullet^\lambda(A)$ 下降，诱导了 $C_\bullet^\lambda(A)$ 的链复形结构（称之为 Connes 复形）。

引理 1.5.2. 对于 K-代数 A，我们定义算子 $b': C_\bullet(A)\to C_{\bullet-1}(A)$ 如下*:*

$$\begin{array}{rcl} b': C_n(A) & \to & C_{n-1}(A) \\ a_0\otimes a_1\otimes\cdots\otimes a_n & \mapsto & \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k a_0\otimes\cdots\otimes(a_k a_{k+1})\otimes\cdots\otimes a_n \end{array}$$

则成立：

（*1*）$b'\circ b'=0$,

（*2*）对任意 $n\geq 1$，则以下图表交换：

$$\begin{tikzcd} C_n(A) \arrow[r, "b'"] \arrow[d, "1-\lambda"] & C_{n-1}(A) \arrow[d, "1-\lambda"] \\ C_n(A) \arrow[r, "b"] & C_{n-1}(A) \end{tikzcd}$$

证明. 注意到有同构 $C_n(A)\cong B_nA(\cong A^{\otimes n+1})$，其中 $B_\bullet A$ 为 Bar-复形；容易看出这里定义的 b' 在此同构下，正是 Bar 复形当中的边缘算子，从而 $b'\circ b'=0$，也就是说 $(C_\bullet(A),b')$ 是一个链复形，并且同构于 Bar-复形 $(B_\bullet A,b)$.（这里有轻微的记号混用：Bar-复形 $(B_\bullet A,b)$ 当中的“b”并不是本引理当中 Hochschild 链复形 $(C_\bullet(A),b)$ 当中的“b”，前者在此是临时记号。）

我们再来看（2）. 回顾 $b: C_n(A)\to C_{n-1}(A)$ 的显式表达式（见定义1.2.5的下方，并且令其中 $M=a$ 以及 $m=a_0$）（注意此图中的 b 与 b' 并不是同一个映射，它们的具体表达式相差一

项），直接验算之：

$$
\begin{aligned}
& (1-\lambda)\circ b'\big(a_0\otimes a_1\otimes\cdots\otimes a_n\big) \\
= & (1-\lambda)\left(\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k a_0\otimes\cdots\otimes\big(a_k a_{k+1}\big)\otimes\cdots\otimes a_n\right) \\
= & \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k a_0\otimes\cdots\otimes\big(a_k a_{k+1}\big)\otimes\cdots\otimes a_n \\
& +\sum_{k=0}^{n-2}(-1)^{k+n} a_n\otimes a_0\otimes\cdots\otimes\big(a_k a_{k+1}\big)\otimes\cdots\otimes a_{n-1} \\
& -\big(a_{n-1}a_n\big)\otimes a_0\otimes\cdots\otimes a_{n-2} \\
= & b\big(a_0\otimes a_1\otimes\cdots\otimes a_n\big)-(-1)^n\big(a_n a_0\big)\otimes a_1\otimes\cdots\otimes a_{n-1} \\
& +(-1)^n\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k a_n\otimes a_0\otimes\cdots\otimes\big(a_k a_{k+1}\big)\otimes\cdots\otimes a_{n-1} \\
& -\big(a_{n-1}a_n\big)\otimes a_0\otimes\cdots\otimes a_{n-2} \\
= & b\big(a_0\otimes a_1\otimes\cdots\otimes a_n-(-1)^n a_n\otimes a_0\otimes\cdots\otimes a_{n-1}\big) \\
= & b\circ(1-\lambda)(a_0\otimes a_1\otimes\cdots\otimes a_n)
\end{aligned}
$$

也就是说，

$$(1-\lambda)\circ b' = b\circ(1-\lambda)$$

从而此图表交换，证毕。 □

此图表的交换关系也可改写为

$$[b,\lambda] = (1-\lambda)\circ(b-b')$$

其中 $[b,\lambda] := b\circ\lambda-\lambda\circ b.$

此引理给出了链复形 $(C_\bullet(A),b')$ 与 $(C_\bullet(A),b)$ 之间的链映射：

$$(1-\lambda)_\bullet : (C_\bullet(A),b')\to(C_\bullet(A),b)$$

然而注意到

$$C_n^\lambda(A) := C_n(A)/(1-\lambda) = \mathrm{coker}(1-\lambda)_n$$

于是我们（在由 K-模链复形构成范畴当中）考虑链映射 $(1-\lambda)_\bullet$ 的余核，这给出了 $C_\bullet^\lambda(A)$ 的链复形结构：

定义 1.5.3. （*Connes* 复形）对于 K-代数 A，考虑链映射

$$(1-\lambda)_\bullet : (C_\bullet(A),b')\to(C_\bullet(A),b)$$

的余核链复形

$$(C^\lambda_\bullet(A), b^\lambda) := \operatorname{coker}[(1-\lambda)_\bullet]$$

称其为 ***Connes* 复形**。并且记

$$H^\lambda_\bullet(A) := H_\bullet(C^\lambda_\bullet(A))$$

称之为 A 的**循环同调**（*cyclic homology*）.

也就是说，有如下的交换图表：

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & C_{n+1} \arrow[r, "b'"] \arrow[d, "1-\lambda"] & C_n \arrow[r, "b'"] \arrow[d, "1-\lambda"] & C_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "1-\lambda"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & C_{n+1} \arrow[r, "b"] \arrow[d, two heads] & C_n \arrow[r, "b"] \arrow[d, two heads] & C_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, two heads] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & C^\lambda_{n+1} \arrow[r, "b^\lambda"] \arrow[d] & C^\lambda_n \arrow[r, "b^\lambda"] \arrow[d] & C^\lambda_{n-1} \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

此交换图表每一横行都为链复形，其中第三横行为 Connes 复形；每一列都是右短正合的。并且容易知道：Connes 复形的边缘算子 b^λ 正是 Hochschild 链复形的边缘算子 b 沿商映射 $C_\bullet(A) \twoheadrightarrow C^\lambda_\bullet(A)$ 的下降。

引理 1.5.4. （平均算子）对于任意 K-代数 A，以及 $n \geq 0$，引入平均算子 $\mathcal{N} : C_n(A) \to C_n(A)$:

$$\mathcal{N} := 1 + \lambda + \lambda^2 + \cdots + \lambda^n$$

则此算子满足以下性质:

（*1*） $b'\mathcal{N} = \mathcal{N}b$

（*2*） $(1-\lambda)\mathcal{N} = \mathcal{N}(1-\lambda) = 0$. 此外，如果有理数域 $\mathbb{Q} \hookrightarrow K$，那么对于任意 $n \geq 0$，以下链复形是正合的:

$$\cdots \to C_n(A) \xrightarrow{\mathcal{N}} C_n(A) \xrightarrow{1-\lambda} C_n(A) \xrightarrow{\mathcal{N}} C_n(A) \xrightarrow{1-\lambda} C_n(A) \twoheadrightarrow C^\lambda_n(A) \to 0$$

证明. （1）任意固定 $n \geq 1$，为了区分算子在不同空间的作用，我们采用临时记号

$$\begin{cases} \lambda : C_n(A) \to C_n(A) \\ \overline{\lambda} : C_{n-1}(A) \to C_{n-1}(A) \end{cases} \qquad \begin{cases} \mathcal{N} := 1 + \lambda + \cdots + \lambda^n \\ \overline{\mathcal{N}} := 1 + \overline{\lambda} + \cdots + \overline{\lambda}^{n-1} \end{cases}$$

则在此记号下我们需要证 $b'\mathcal{N}=\overline{\mathcal{N}}b$.

定义缩并算子

$$\begin{aligned} s: C_n(A) &\to C_{n-1}(A) \\ a_0\otimes a_1\otimes\cdots\otimes a_n &\mapsto (a_0a_1)\otimes\cdots\otimes a_n \end{aligned}$$

则容易验证（稍微注意一下正负号，确实都是正号）

$$b=\sum_{k=0}^{n}\overline{\lambda}^k s\lambda^{-k} \qquad b'=\sum_{k=0}^{n-1}\overline{\lambda}^k s\lambda^{-k}$$

于是有

$$b'\mathcal{N}=\left(\sum_{k=0}^{n-1}\overline{\lambda}^k s\lambda^{-k}\right)\left(\sum_{l=0}^{n}\lambda^l\right)=\sum_{\substack{0\le k\le n-1\\ 0\le l\le n}}\overline{\lambda}^k s\lambda^l$$

同理也有

$$\overline{\mathcal{N}}b=\sum_{\substack{0\le k\le n-1\\ 0\le l\le n}}\overline{\lambda}^k s\lambda^l$$

从而 $b'\mathcal{N}=\overline{\mathcal{N}}b$.

（2）给定 $n\ge 0$，注意到 $\lambda^{n+1}=1$，从而

$$(1-\lambda)\mathcal{N}=(1-\lambda)(1+\lambda+\cdots+\lambda^n)=1-\lambda^{n+1}=0$$

同理 $\mathcal{N}(1-\lambda)=0$. 因此该图表是链复形，只需再验证正合性。

现在假设 $\mathbb{Q}$ 是 K 的子环。我们构造如下链同伦：

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & C_n(A) \arrow[r, "\mathcal{N}"] \arrow[d, "\mathrm{id}"] & C_n(A) \arrow[r, "1-\lambda"] \arrow[d, "\mathrm{id}"] \arrow[dl, "g"'] & C_n(A) \arrow[r, "\mathcal{N}"] \arrow[d, "\mathrm{id}"] \arrow[dl, "f"'] & C_n(A) \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{id}"] \arrow[dl, "g"'] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & C_n(A) \arrow[r, "\mathcal{N}"] & C_n(A) \arrow[r, "1-\lambda"] & C_n(A) \arrow[r, "\mathcal{N}"] & C_n(A) \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

其中 $f,g: C_n(A)\to C_n(A)$ 定义为

$$\begin{cases} f:=\frac{1}{n+1}(\lambda^{n-1}+2\lambda^{n-2}+3\lambda^{n-3}+\cdots+n) \\ g:=\frac{1}{n+1} \end{cases}$$

（利用了 $\mathbb{Q}\hookrightarrow K$）则容易验证

$$f(1-\lambda)+\mathcal{N}g=g\mathcal{N}+(1-\lambda)f=1$$

从而证毕。 $\square$

特别地，当 K 为域时（注意我们总假定 $\operatorname{char} K = 0$）成立正合性。链同伦 f, g 的构造来自于（关于变元 λ 的多项式的）欧几里得辗转相除法。

由此引理，我们可构造出如下的**循环双复形** （cyclic bicomplex），记为 $CC_{\bullet\bullet}(A)$：

$$
\begin{tikzcd}
\vdots \arrow[d, "b"] & \vdots \arrow[d, "-b'"] & \vdots \arrow[d, "b"] & \vdots \arrow[d, "-b'"] & \\
C_2(A) \arrow[d, "b"] & C_2(A) \arrow[l, "1-\lambda"'] \arrow[d, "-b'"] & C_2(A) \arrow[l, "\mathcal{N}"'] \arrow[d, "b"] & C_2(A) \arrow[l, "1-\lambda"'] \arrow[d, "-b'"] & \cdots \arrow[l] \\
C_1(A) \arrow[d, "b"] & C_1(A) \arrow[l, "1-\lambda"'] \arrow[d, "-b'"] & C_1(A) \arrow[l, "\mathcal{N}"'] \arrow[d, "b"] & C_1(A) \arrow[l, "1-\lambda"'] \arrow[d, "-b'"] & \cdots \arrow[l] \\
C_0(A) & C_0(A) \arrow[l, "1-\lambda"'] & C_0(A) \arrow[l, "\mathcal{N}"'] & C_0(A) \arrow[l, "1-\lambda"'] & \cdots \arrow[l]
\end{tikzcd}
$$

其中对于任意 $p, q \geq 0$，$CC_{p,q}(A) = C_p(A)$ 为该图表的从下往上第 p 行，从左往右第 q 列的节点；此图表的偶数列与奇数列为 $(C_\bullet(A), b)$ 与 $(C_\bullet(A), -b')$ 交替。并且注意到，此图表不是交换的，而是对于其中每一个方框都满足**反交换性**。

我们回顾一些同调代数工具：

定义 1.5.5. （双复形的全复形）

对于任意的含幺交换环 K（这里暂时不必假定 $\operatorname{char} K = 0$），以及 K-模双复形 $(A_{\bullet\bullet}, \mathrm{d}, \partial)$：

$$
\begin{tikzcd}
\vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \\
A_{2,0} \arrow[d, "\mathrm{d}_{2,0}"] & A_{2,1} \arrow[l, "\partial_{2,1}"'] \arrow[d, "\mathrm{d}_{2,1}"] & A_{2,2} \arrow[l, "\partial_{2,2}"'] \arrow[d, "\mathrm{d}_{2,2}"] & \cdots \arrow[l] \\
A_{1,0} \arrow[d, "\mathrm{d}_{1,0}"] & A_{1,1} \arrow[l, "\partial_{1,1}"'] \arrow[d, "\mathrm{d}_{1,1}"] & A_{1,2} \arrow[l, "\partial_{1,2}"'] \arrow[d, "\mathrm{d}_{1,2}"] & \cdots \arrow[l] \\
A_{0,0} & A_{0,1} \arrow[l, "\partial_{2,1}"'] & A_{0,2} \arrow[l, "\partial_{2,2}"'] & \cdots \arrow[l]
\end{tikzcd}
$$

即：

$$
\begin{cases}
\mathrm{d}_{p,q} : A_{p,q} \to A_{p-1,q} \\
\partial_{p,q} : A_{p,q} \to A_{p,q-1}
\end{cases}
$$

使得该图表每一行、每一列都是链复形，并且满足反交换关系

$$
\partial_{p-1,q} \circ \mathrm{d}_{p,q} + \mathrm{d}_{p,q-1} \circ \partial_{p,q} = 0
$$

则我们定义双复形 $A_{\bullet\bullet}$ 的**全复形**（*total complex*）$(\mathrm{Tot}_\bullet(A_{\bullet\bullet}), d)$ 如下：

$$\begin{cases} \mathrm{Tot}_n(A_{\bullet\bullet}) & := \bigoplus_{p+q=n} A_{p,q} \\ d_n & := \sum_{p+q=n} (\mathrm{d}_{p,q} + \partial_{p,q}) \end{cases}$$

对于两个双复形 $A_{\bullet\bullet}$ 与 $A'_{\bullet\bullet}$，我们可以去定义双复形之间的态射 $f_{\bullet\bullet} : A_{\bullet\bullet} \to A'_{\bullet\bullet}$，进而考虑双复形范畴。双复形的态射自然诱导了相应的全复形之间的链映射，也就是说 Tot 具有函子性。我们还有以下同调代数工具：

引理 1.5.6. 设 $f_{\bullet\bullet} : A_{\bullet\bullet} \to A'_{\bullet\bullet}$ 为双复形之间的态射。如果对于任意 $n \geq 0$，链映射

$$f_{n,\bullet} : A_{n,\bullet} \to A'_{n,\bullet}$$

为拟同构（*quasi-isomorphism*），（即它诱导的任意阶同调对象之间的态射均为同构），那么链映射

$$\mathrm{Tot}_\bullet(f_{\bullet\bullet}) : \mathrm{Tot}_\bullet(A_{\bullet\bullet}) \to \mathrm{Tot}_\bullet(A'_{\bullet\bullet})$$

也为拟同构。

证明. 同调代数工具，承认之。 □

我们回到循环双复形 $CC_{\bullet\bullet}(A)$. 由上述同调代数工具，我们可以给出循环同调 $H^\lambda_\bullet(A) := H_\bullet(C^\lambda_\bullet(A))$ 的另一种定义：

定理 1.5.7. 对于 K-代数 A，假设 $\mathbb{Q} \hookrightarrow K$，记

$$HC_\bullet(A) := H_\bullet(\mathrm{Tot}_\bullet(CC_{\bullet\bullet}(A)))$$

为 A 的循环双复形的全复形的同调，那么有自然的同构

$$HC_\bullet(A) \cong H^\lambda_\bullet(A)$$

证明. 对于循环双复形 $CC_{\bullet\bullet}(A)$，我们再考虑另一个双复形 $CC'_{\bullet\bullet}(A)$ 如下：

$$
\begin{tikzcd}
\vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \\
C_2^\lambda(A) \arrow[d, "b_2^\lambda"] & 0 \arrow[l] \arrow[d] & 0 \arrow[l] \arrow[d] & 0 \arrow[l] \arrow[d] & \cdots \arrow[l] \\
C_1^\lambda(A) \arrow[d, "b_1^\lambda"] & 0 \arrow[l] \arrow[d] & 0 \arrow[l] \arrow[d] & 0 \arrow[l] \arrow[d] & \cdots \arrow[l] \\
C_0^\lambda(A) & 0 \arrow[l] & 0 \arrow[l] & 0 \arrow[l] & \cdots \arrow[l]
\end{tikzcd}
$$

考虑双复形之间的态射

$$f_{\bullet\bullet} : CC_{\bullet\bullet}(A) \to CC'_{\bullet\bullet}(A)$$

其中 $f_{n,0} : C_n(A) \to C_n^\lambda(A)$ 为商映射。由引理1.5.4 知 $CC_{\bullet\bullet}(A)$ 的每一行都是正合的，从而容易验证 $f_{\bullet\bullet}$ 满足引理 1.5.6 的使用条件，因此我们有同构

$$H_\bullet(\mathrm{Tot}_\bullet(CC_{\bullet\bullet}(A))) \cong H_\bullet(\mathrm{Tot}_\bullet(CC'_{\bullet\bullet}(A)))$$

上式左边，由定义，即为 $HC_\bullet(A)$；而再注意到 $\mathrm{Tot}_\bullet(CC'_{\bullet\bullet})$ 正是 Connes 复形 $C_\bullet^\lambda$，从而上式右边为循环同调 $H_\bullet^\lambda(A)$. □

也就是说，循环同调（Connes 复形的同调）自然同构于循环双复形的全复形的同调。

1.6 循环同调的例子

我们将给出循环同调的更多等价定义方式，并计算一些具体例子。我们需要更多的同调代数工具：

引理 1.6.1. （杀掉可缩复形）

对于 K-模链复形

$$\cdots \to A_{n+1} \oplus B_{n+1} \xrightarrow{\mathrm{d}} A_n \oplus B_n \xrightarrow{\mathrm{d}} A_{n-1} \oplus B_{n-1} \to \cdots$$

其中

$$\mathrm{d} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

并且 $(B_\bullet, \delta)$ 是可缩链复形，其同伦逆

$$h : B_\bullet \to B_{\bullet+1}$$

使得 $h\delta+\delta h=1$. 那么下述图表交换:

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & A_{n+1} \arrow[r, "\alpha-\beta h\gamma"] \arrow[d, "\varphi"] & A_n \arrow[r, "\alpha-\beta h\gamma"] \arrow[d, "\varphi"] & A_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "\varphi"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & A_{n+1}\oplus B_{n+1} \arrow[r, "\mathrm{d}"] & A_n\oplus B_n \arrow[r, "\mathrm{d}"] & A_{n-1}\oplus B_{n-1} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

并且此图表的每一行都为链复形，并且链映射

$$\varphi := \begin{pmatrix} 1 \\ -h\gamma \end{pmatrix}$$

为拟同构。

证明. 注意到 $\delta^2=0$，以及

$$0=\mathrm{d}^2=\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix} \alpha^2+\beta\gamma & \alpha\beta+\beta\gamma \\ \gamma\alpha+\delta\gamma & \gamma\beta+\delta^2 \end{pmatrix}$$

从而我们有

$$\begin{cases} \alpha^2 &= -\beta\gamma \\ \alpha\beta &= -\beta\delta \\ \gamma\alpha &= -\delta\gamma \\ \gamma\beta &= 0 \end{cases}$$

再注意到 $h\delta+\delta h=1$，直接计算验证可知 $\varphi_\bullet$ 的确为链复形之间的链映射。细节略。

再注意链映射

$$\varphi_\bullet : (A_\bullet, \alpha-\beta h\gamma) \to (A_\bullet\oplus B_\bullet, \mathrm{d})$$

为单射，并且其余核

$$\operatorname{coker}\varphi_\bullet \cong (B_\bullet, \delta)$$

是正合的，因此 $\varphi_\bullet$ 为拟同构。 □

这个引理的功能是，如果给定的链复形 $(A_\bullet\oplus B_\bullet, \mathrm{d})$ 当中“含有正合的部分”$(B_\bullet, \delta)$，那我们可以把这个“正合的部分”剔除掉，得到一个“不那么冗余”的链复形 $(A_\bullet, \alpha-\beta h\delta)$，并且此复形与原来的复形的各阶同调自然同构。

我们将此引理用于循环双复形 $CC_{\bullet\bullet}(A)$ 的全复形 $\mathrm{Tot}_\bullet(CC_{\bullet\bullet}(A))$ 上。回顾 $CC_{\bullet\bullet}(A)$ 为如下双复形:

$$\begin{tikzcd}
\vdots \arrow[d, "b"] & \vdots \arrow[d, "-b'"] & \vdots \arrow[d, "b"] & \vdots \arrow[d, "-b'"] & \\
C_2(A) \arrow[d, "b"] & C_2(A) \arrow[l, "1-\lambda"'] \arrow[d, "-b'"] & C_2(A) \arrow[l, "\mathcal{N}"'] \arrow[d, "b"] & C_2(A) \arrow[l, "1-\lambda"'] \arrow[d, "-b'"] & \cdots \arrow[l] \\
C_1(A) \arrow[d, "b"] & C_1(A) \arrow[l, "1-\lambda"'] \arrow[d, "-b'"] & C_1(A) \arrow[l, "\mathcal{N}"'] \arrow[d, "b"] & C_1(A) \arrow[l, "1-\lambda"'] \arrow[d, "-b'"] & \cdots \arrow[l] \\
C_0(A) & C_0(A) \arrow[l, "1-\lambda"'] & C_0(A) \arrow[l, "\mathcal{N}"'] & C_0(A) \arrow[l, "1-\lambda"'] & \cdots \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

注意到该双复形的第偶数列为 Hochschild 链复形（链映射 b），第奇数列为 Bar-复形（链映射 $-b'$）. 注意 Bar-复形是正合的，并且有同伦逆

$$h : C_n(A) \to C_{n+1}(A) \tag{1.1}$$

$$a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n \mapsto 1 \otimes a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n \tag{1.2}$$

使得 $b'h + hb' = 1$.

现在，注意到

$$\begin{aligned}
\mathrm{Tot}_n(CC_{\bullet\bullet}(A)) &= \left(\bigoplus_{\substack{p+q=n \\ q \text{ 为偶数}}} CC_{p,q}(A) \right) \oplus \left(\bigoplus_{\substack{p+q=n \\ q \text{ 为奇数}}} CC_{p,q}(A) \right) \\
&=: X_n \oplus Y_n
\end{aligned}$$

也就是说，我们把循环双复形 $CC_{\bullet\bullet}(A)$ 的全复形 $(\mathrm{Tot}_\bullet, \mathrm{d})$ 写为:

$$\cdots \to X_{n+1} \oplus Y_{n+1} \xrightarrow{\mathrm{d}} X_n \oplus Y_n \xrightarrow{\mathrm{d}} X_{n-1} \oplus Y_{n-1} \to \cdots$$

边缘算子矩阵 $\mathrm{d} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ 留给读者。但是要注意 $(Y_\bullet, \delta)$ 的正合性是由 Bar-复形 $(C_\bullet(A), -b')$ 的正合性所诱导的；δ 也存在同伦逆，仍记为 h.

综上，对 $\mathrm{Tot}_\bullet(CC_{\bullet\bullet}(A))$ 使用引理1.6.1，我们得到以下结果：

定理 1.6.2. 对于 K-代数 A，考虑以下双复形 $\mathcal{B}_{\bullet\bullet}(A)$:

$$\begin{tikzcd}
\vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] \\
A^{\otimes 3} \arrow[d, "b"] & A^{\otimes 2} \arrow[l, "\mathcal{B}"'] \arrow[d, "b"] & A \arrow[l, "\mathcal{B}"'] \\
A^{\otimes 2} \arrow[d, "b"] & A \arrow[l, "\mathcal{B}"'] & \\
A & &
\end{tikzcd}$$

Cyclic v.s. de Rham

Today:

性质 1.6.3.

$$B \circ b + b \circ B = 0$$

where B is Connes' operator

Easy to check.

$$(C_\bullet(A)[u^{-1}], b + uB)$$

$$C_\bullet(A)[u^{-1}] := C_\bullet(A) \oplus C_\bullet(A)u^{-1} \oplus C_\bullet(A)u^{-2} \oplus \cdots$$

性质 1.6.4.

$$H_\bullet^\lambda(A) \cong H_\bullet(C_\bullet(A)[u^{-1}], b + uB)$$

$(b + uB)^2 = 0$

$$\deg(b) = -1, \quad \deg(B) = 1, \quad \deg(u) = -2$$

where u is a formal variable.

注记 1.6.5. *(Geometry anelogue)* ***Hodge theory***

A complex m.f.d., X, complex(or algebraic) geometry, has an operator $\bar{\partial}$;

topology: consider de-rham operator $\mathrm{d} = \partial + \bar{\partial}$.

Consider $\mathrm{d}_u := \bar{\partial} + u\partial$, called "Hodge filtration". A bridge between "topology" and "complex geometry".

"Stability condition".

Periodic cyclic homology

$$CC_\bullet^{per}(A) := (C_\bullet(A)((u)), b + uB)$$

$$H_\bullet(CC_\bullet^{per}(A), b + uB)$$

is called periodic cyclic homology.

negative cyclic homology

$$CC_\bullet^-(A) := (C_\bullet(A)[u], b+uB)$$

$$CC_\bullet^{per} \rightsquigarrow \text{de rham homologyopen-closed string states}$$

$$CC_\bullet(A) \rightsquigarrow \text{open string states} \leftrightsquigarrow \text{gauge theory}$$

$$CC_\bullet^-(A) \rightsquigarrow \text{closed string states} \leftrightsquigarrow \text{gravity}$$

Why "B" is like de-rham differential?

$$B : \overline{C}_n(A) \to \overline{C}_{n+1}(A)$$

$$a_0 \otimes \overline{a_1} \otimes \ldots \otimes \overline{a_n} \mapsto \sum_i \pm 1 \otimes \overline{a_i} \otimes \cdots \otimes \overline{a_n} \otimes \ldots \otimes \overline{a_{i-1}}$$

$$H_\bullet(\overline{C}_\bullet(A)[u^{-1}], b+uB) \cong \text{cyclic homology of } A$$

例子 1.6.6. *Consider $A = K$ as K-algebra. $\overline{A} = 0$. So,*

$$\overline{A}_\bullet A = A \otimes "0"$$

$$b = 0 \quad B = 0$$

$$\overline{\bullet}(A)[]u^{-1} \rightsquigarrow HC_n(K) = \begin{cases} K & n \geq 0 \ \mathit{even} \\ 0 & \mathit{otherwise} \end{cases}$$

$$K, Ku^{-1}, Ku^{-2} \ldots H_\bullet(\mathbb{C}P^\infty = B \cup (1))$$

$$C_\bullet^\lambda A = C_\bullet(K)/(1-\lambda)$$

$$C_n(K) : 1 \overbrace{\otimes 1 \otimes \ldots \otimes 1}^{n} =: \varepsilon_n$$

$$\lambda(\varepsilon_n) = (-1)^n \varepsilon_n$$

$$\begin{cases} \varepsilon \mathit{even\ is\ cyclic\ invariant} \\ \varepsilon \mathit{odd} = 0 \ \mathit{in} C_\bullet^\lambda(K) \end{cases}$$

$$b(\varepsilon_{2m}) = \varepsilon_{2m-1}$$

$$0 = bacts\ on C^{\lambda}_{\bullet}(K)$$

$$H^{\lambda}_{\bullet}(K) = C^{\lambda}_{\bullet}(K) = K\varepsilon_0 \oplus K\varepsilon_2 \oplus ...$$

compute it by 3 ways...

例子 1.6.7. $A = K[x^i]$,*then* $\mathrm{HH}_{\bullet}(A) = \Omega^{\bullet}(A) = \mathbb{C}[x^i, \mathrm{d}x^i]$. *Explicitly, we define*

$$\Phi : \overline{C}_p(A) \to \Omega^p(A)$$

$$a_0 \otimes \overline{a_1} \otimes ... \otimes \overline{A_p} \mapsto \frac{1}{p!} a_0 \mathrm{d}a_1 \wedge \mathrm{d}a_2 \wedge ... \wedge \mathrm{d}a_p$$

Check: $\Phi \circ b = 0.i.e.$

$$\Phi : (\overline{C_{\bullet}(A)}, b) \to (\Omega^0(A), 0)$$

si a chain map.

So, we have an isomorphism

$$\mathrm{HH}_{\bullet}(A) \cong \Omega^{\bullet}(A)$$

Check:

$$\Phi \circ B = \mathrm{d} \circ \Phi$$

So,

$$\Phi : (\bar{(}C)_{\bullet}(A), b, B) \to (\Omega^{\bullet}(A), 0, \mathrm{d})$$

Cyclic homology,

$$\Phi : (\bar{(}C)_{\bullet}(A), b + uB) \to (\Omega^{\bullet}(A)[u^{-1}], u\mathrm{d})$$

If $A = K[x^i]$

$$\cdots \xrightarrow{\mathrm{d}} \Omega^{\bullet}(A) \xrightarrow{\mathrm{d}} \Omega^{\bullet}(A) \xrightarrow{\mathrm{d}} \Omega^{\bullet}(A) \to 0$$

then

$$H_{\bullet}(\Omega^{\bullet}(A), \mathrm{d}) = H_0 = K$$

"Poincare lemma"

性质 1.6.8.

$$HC_{\bullet}(K[x^i]) = \frac{\Omega^{\bullet}(A)}{d\Omega^{\bullet}(A)} \oplus u^{-1}K[u^{-1}]$$

注记 1.6.9. *Phi has a splitting*

$$\eta : \Omega^\bullet(A) \to \overline{C}_\bullet(A)$$
$$a_0 \mathrm{d}a_1 \wedge \mathrm{d}a_2 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}a_p \mapsto \sum_{\sigma \in S_p} (-1)^{|\sigma|} a_0 \otimes a_{\sigma(1)} \otimes \ldots \otimes a_{\sigma(p)}$$

Check:$b \circ \eta = 0$.

So, $\eta : \Omega^\bullet(A) \to \mathrm{HH}_\bullet(A)$ *which is inverse of* Φ.

1.7 循环上同调

Cyclic cohomology

$$C_n(A) \cong A^{\otimes n+1}$$

定义 1.7.1.

$$C^n(A) := \mathrm{Hom}(A^{\otimes n+1}, K)$$

with $f \in C^n(A)$ *is called cyclic invariant if*

$$f(a_0, a_1, \ldots, a_n) = (-1)^n f(a_n, a_0, \ldots, a_{n-1})$$

cyclic cochains form a subcomplex

$$C^n_\lambda(A) \subseteq C^n(A)$$

which is dual to

$$C_n(A) \to C^\lambda_n(A)$$

$$b^* : C^n_\lambda(A) \to C^{n+1}_\lambda(A)$$

定义 1.7.2. *Cyclic cohomology*

$$H^\bullet(H^\bullet_\lambda(A), d^*) =: H^\bullet_\lambda(A) = HC^\bullet(A)$$

例子 1.7.3.

$$f \in C^0_\lambda(A) : A \to K$$

$$b^* f \in C^1_\lambda(A)$$

$$b^*f(a_0,a_1) = f(b(a_0 \otimes a_1)) = f(a_0a_1 - a_1a_0)$$

$$b^* = 0 \iff f : A/[A,A] \to K$$

f behaves like "trace". $HC^0(A)$="trace operators"

Pairing M, N are bi-module,then there is a pairing

$$C^n(A,M) \otimes C_0(A,N) \to N \otimes_{A^e} M$$

So,

$$H^n(A,M) \otimes H_n(A,N) \to N \otimes_{A^e} M$$

$$H^n(A,A^*) \otimes H_n(A,A) \to A^* \otimes_{A^e} A \xrightarrow{ev} K$$

术语索引