非交换几何选讲

曲豆豆 码字
南七技校福利社 五道口分社

2019 年 4 月 8 日

第 01-8 稿

图：雾气朦胧的安徽合肥大蜀山森林公园

拍摄于 2014.5.31 - 10：44

在五道口也要红专并进、理实交融呀 ～

目录

第 1 章 Hochschild 理论

“读论文就是将非人话翻译成人话的过程，写论文就是将人话写成非人话的过程。”
“我写的公式也不一定对。。。但基本上是对的，up to sign”

1.1 结合代数的双模、余中心

我们需要**代数拓扑**、**同调代数**、**基础范畴论**的预备知识，并且采用同调代数的标准术语、记号，诸如链复形、上同调、导出函子等等。首先介绍基本的记号与概念。

在本课，我们给定一个特征 0 的含幺交换环 K（例如一个域），考虑含幺结合 K-代数 A（注意 A 未必是交换代数），并且 A 作为交换环 K 上的模是投射模（projective module）。A 的 K-代数结构给出如下 K-模同态：

$$\begin{aligned} A\otimes_K A &\to A \\ (a_1,a_2) &\mapsto a_1a_2 \end{aligned}$$

由 A 的结合性，$(a_1a_2)a_3=a_1(a_2a_3)$ 对 A 中任意元素 a_1,a_2,a_3 成立.

对于含幺结合 K-代数 A，回顾 A 的**反代数**（opposite algebra）A^{op}. 反代数 A^{op} 作为 K-模与 A 完全相同，记号如下：

$$\begin{aligned} \mathrm{id}: A &\to A^{\mathrm{op}} \\ x &\mapsto x^{\mathrm{op}} \end{aligned}$$

但是 A^{op} 具有与 A“相反”的乘法，具体地，对于 A^{op} 中的元素 $x^{\mathrm{op}},y^{\mathrm{op}}$，成立

$$x^{\mathrm{op}}y^{\mathrm{op}} := (yx)^{\mathrm{op}}$$

定义 1.1.1. （包络代数）

对于含幺结合 K-代数 A，我们定义 K-代数 A^e 为

$$A^e := A\otimes_K A^{op}$$

即 A 与 A^{op} 的 K-代数张量积。称 A^e 为 A 的**包络代数**（*enveloping algebra*）。

容易验证对于任何两个含幺结合 K-代数 A,B，总有

$$(A\otimes_K B)^{\mathrm{op}} = A^{\mathrm{op}}\otimes_K B^{\mathrm{op}}$$

从而容易得到

$$(A^{\mathrm{op}})^e = (A^e)^{\mathrm{op}}$$

对于 $K-$ 代数 A，回顾 **双 $A-$ 模**（A-bimodule）的概念如下：

定义 1.1.2. 对于 K-代数 A，双 A-模是指如下资料：

（1）K-模 M;

（2）A 在 M 上的左、右 K-线性作用，

并且满足相容性：$(a.m).b = a.(m.b)$ 对任意 $m\in M$ 以及 $a,b\in A$ 成立。

例如，A 本身自然有双 A-模结构，A 在其上的左、右作用即为左乘、右乘。再比如 K-模张量积 $A\otimes_K A$ 具有如下双 A-模结构：

$$b.(a_1\otimes a_2) := (ba_1)\otimes a_2$$

$$(a_1\otimes a_2).b := a_1\otimes (a_2 b)$$

其中 $a_1,a_2,b\in A$.

再比如，对于 K-代数 A，考虑其对偶

$$A^* := \mathrm{Hom}(A,K)$$

则 A^* 具有以下的双 A-模结构：对任意 $a,x\in A$ 以及 $f\in A^*$，

$$\begin{cases} (a.f)(x) := f(xa) \\ (f.a)(x) := f(ax) \end{cases}$$

容易验证这的确使得 A^* 为双 A-模。

我们不再回顾左模、右模的概念了，也不去回顾右模与左模的平衡张量积。

性质 1.1.3. 设 M 为双 A-模，

（1）M 可自然地视为左 A^e-模：

$$(a_1\otimes a_2^{op}).m = a_1.m.a_2$$

（2）M 可自然地视为右 A^e-模：

$$m.(a_1\otimes a_2^{op}) = a_2.m.a_1$$

反之，左（右）A^e-模也可视为双 A-模。

证明．容易验证。 □

特别地如果 M,N 都是双 A-模，那么考虑平衡张量积 $M\otimes_{A^e}N$，它的双 A-模结构具体如下：

$$a.(m\otimes n)=(a.m)\otimes n=m\otimes(n.a)$$

$$(m\otimes n).b=m\otimes(n.b)=(b.m)\otimes n$$

对于任何 $m\in M,n\in N,a,b\in A$ 成立。

定义 1.1.4. （余中心 *cocenter*）对于双 A-模 M，称双 A-模

$$M\otimes_{A^e}A$$

为 M 的**余中心**（*cocenter*）。

容易看出，对任意的 $m\in M,a\in A$，在余中心 $M\otimes_{A^e}A$ 当中，成立

$$(m.a)\otimes 1=m\otimes(a.1)=m\otimes a=m\otimes(1.a)=(a.m)\otimes 1$$

从而 $(m.a-a.m)\otimes 1=0$. 事实上，M 的余中心具有如下结构：

性质 1.1.5. 对于双 A-模 M，则有如下双 A-模同构

$$M\otimes_{A^e}A\cong M/\{(m.a-a.m)|a\in A,m\in M\}$$

证明．考虑如下的双 A-模链复形

$$\partial_\bullet : A\otimes A\otimes A\to A\otimes A\to A\to 0$$

其中

$$\begin{aligned}\partial : a_1\otimes a_2\otimes a_3 &\mapsto a_1a_2\otimes a_3-a_1\otimes a_2a_3\\ a_1\otimes a_2 &\mapsto a_1a_2\end{aligned}$$

容易验证 ∂^2=0（由 A 的结合性），从而 $\partial_\bullet$ 为双 A-模链复形。并且显然 $\partial : A\otimes A\to A$ 是满同态。

断言链复形 $\partial_\bullet$ 为正合（exact）的。事实上，$\partial_\bullet$ 到其自身的恒等链映射与零链映射是链同伦的。我们构造如下的链同伦 $h_\bullet$：

$$\begin{aligned} h: a_1 &\mapsto 1\otimes a_1 \\ a_1\otimes a_2 &\mapsto 1\otimes a_1\otimes a_2 \end{aligned}$$

容易验证，对于任意的 $\varphi = a_1\otimes a_2 \in A\otimes A$，成立

$$\begin{aligned} (\partial h + h\partial)\varphi &= (\partial h + h\partial)(a_1\otimes a_2) \\ &= \partial(1\otimes a_1\otimes a_2) + h(a_1a_2) \\ &= a_1\otimes a_2 - 1\otimes a_1a_2 + 1\otimes a_1a_2 \\ &= a_1\otimes a_2 = \varphi \end{aligned}$$

从而对于 $\varphi\in A\otimes A$，如果 $\partial\varphi = 0$，那么

$$\varphi = (\partial h + h\partial)\varphi = \partial(h\varphi)$$

这说明链复形 $\partial_\bullet$ 在 $A\otimes A$ 处正合，因此 $\partial_\bullet$ 是正合的。

接下来，将函子 $M\otimes_{A^e} -$ 作用于链复形 $\partial_\bullet$，得到如下的双 A-模链复形：

$$M\otimes_{A^e}\partial_\bullet : M\otimes A \to M \to M\otimes_{A^e} A \to 0$$

由张量函子的右正合性，上述链复形也是正合的。其中注意到双 A-模同构

$$\begin{aligned} M\otimes_{A^e}(A\otimes A\otimes A) &\cong M\otimes A \\ m\otimes(a_1\otimes a_2\otimes a_3) &\mapsto (a_3.m.a_1)\otimes a_2 \end{aligned}$$

以及双 A-模同构

$$\begin{aligned} M\otimes_{A^e}(A\otimes A) &\cong M \\ m\otimes(a_1\otimes a_2) &\mapsto a_2.m.a_1 \end{aligned}$$

于是正合列 $M\otimes_{A^e}\partial_\bullet$ 的边界映射有如下具体表达式：

$$\begin{aligned} M\otimes_{A^e}\partial : M\otimes A &\to M \\ m\otimes A &\mapsto m.a - a.m \end{aligned}$$

从而由正合性，易知

$$M\otimes_{A^e} A \cong M/\{(m.a - a.m) | a\in A, m\in M\}$$

□

可见，M 的余中心无非是商掉 M 当中“非交换的部分”所得到的“交换的部分”，如此望文生义。例如，如果 A 为交换 K-代数，那么 A 本身作为双 A-模，其余中心为 A 本身.

1.2 Hochschild 同调

定义 1.2.1. （*Hochschild* 同调）

对于双 A-模 M，以及非负整数 n，记

$$H_n(A,M) := \mathrm{Tor}_n^{A^e}(M,A)$$

称为 M 的第 n 个 *Hochschild* 同调。特别地，我们记

$$\mathrm{HH}_n(A) := H_n(A,A)$$

由定义以及导出函子的基础知识，容易知道双 $A-$ 模 M 的第 0 个 Hochschild 同调

$$H_0(A,M) = M \otimes_{A^e} A = M/\{(m.a - a.m) | a \in A, m \in M\}$$

正是 M 的余中心。注意 Hochschild 同调一般并不是环，仅仅能保证它是双 A-模。

具体地，由导出函子的定义，我们采用投射消解（projective resolution）来计算 Hochschild 同调。若双 A-模链复形

$$P_\bullet \to A := \ldots \to P_3 \to P_2 \to P_1 \to P_0 \to A \to 0$$

为双 A-模 A 的投射消解（正合，并且每个 $P_i (i \geq 0)$ 作为 K-模是投射的），那么

$$H_n(A,M) \cong H_n(M \otimes_{A^e} P_\bullet)$$

由同调代数的事实，它与投射消解 $P_\bullet$ 的选取无关。

事实上 Hochschild 同调可以与空间上的微分形式类比。作为一个具体计算例子，我们考虑 $\mathbb{C}$ 上的 n 元多项式代数

$$A := \mathbb{C}[x^1, x^2, \ldots, x^n]$$

注意到 A 作为 $\mathbb{C}$-代数是交换的，从而 $A = A^{\mathrm{op}}$. 我们记

$$A^{\mathrm{op}} = \mathbb{C}[y^1, y^2, \ldots, y^n] \quad A^e = \mathbb{C}[x^1, x^2, \ldots, x^n; y^1, y^2, \ldots, y^n]$$

性质 1.2.2. 考虑 $\mathbb{C}$-代数 $A := \mathbb{C}[x^1, x^2, \ldots, x^n]$，则其第 k 个 *Hochschild* 同调

$$\mathrm{HH}_k(A) \cong \Omega_A^k := A \otimes \bigwedge^k (\mathbb{C}^n)$$

是以 A 为系数的 k-形式。

证明. 我们给出 A 的投射消解，比如众所周知的 Koszul 消解

$$\mathcal{K}_A \to A \to 0$$

具体地，引入 n 个新的独立变元 $\eta^1, \eta^2, ..., \eta^n$ （视为复线性空间 $\mathbb{C}^n$ 的一组基），考虑环

$$\mathcal{K} := \frac{A^e[\eta^1, \eta^2, ..., \eta^n]}{\{(\eta^i\eta^j + \eta^j\eta^i) | i \neq j\}} = A^e \otimes \bigwedge^*(\mathbb{C}^n)$$

为以 A^e 为系数的外代数。

注意 $\mathcal{K}$ 有自然的分次：

$$\deg \eta^i = 1 \quad \deg x^i = \deg y^i = \deg 1 = 0$$

记 $\mathcal{K}_l$ 为 $\mathcal{K}$ 的 l 次分量（$0 \leq l \leq n$），即

$$\mathcal{K}_l = \bigoplus_{1 \leq i_1 < i_2 < ... < i_l \leq n} A^e \eta^{i_1} \wedge \eta^{i_2} \wedge ... \wedge \eta^{i_l} = A^e \otimes \bigwedge^l(\mathbb{C}^n)$$

此时 $K = \mathbb{C}$ 是域，因此 $\mathcal{K}$ （作为 K-模，即复线性空间）的投射性显然。我们定义 Koszul 复形 $(\mathcal{K}_A, \partial)$ 如下：

$$\mathcal{K}_A : ... \xrightarrow{\partial} \mathcal{K}_n \xrightarrow{\partial} \mathcal{K}_{n-1} \xrightarrow{\partial} ... \xrightarrow{\partial} \mathcal{K}_1 \xrightarrow{\partial} \mathcal{K}_0$$

其中边缘算子 ∂（首先是 A^e-模同态）满足

$$\partial \eta^i = x^i - y^i$$

以及与外微分相同的莱布尼茨法则：对任意 $\omega \in \mathcal{K}$，成立

$$\partial(\eta^i \wedge \omega) = \partial \eta^i \wedge \omega - \eta^i \wedge \partial \omega$$

再考虑连接映射

$$\begin{aligned} \varepsilon : \mathcal{K}_0 = A^c \quad &\to \quad A \\ x^i \quad &\mapsto \quad x^i \\ y^i \quad &\mapsto \quad x^i \end{aligned}$$

则众所周知，Koszul 复形

$$\mathcal{K}_A \xrightarrow{\varepsilon} A \to 0$$

为 A 的投射消解（证明从略）。我们以此计算 $\mathrm{HH}^\bullet(A)$. 我们注意到以下两个简单事实：

其一：对任何 $1 \leq l \leq n$，成立双 A-模同构

$$A \otimes_{A^e} \mathcal{K}_l = A \otimes_{A^e} A^e \otimes \bigwedge^l(\mathbb{C}^n) \cong A \otimes \bigwedge^l(\mathbb{C}^n)$$

其二：函子 $A \otimes_{A^e} -$ 作用于 Koszul 复形 $\mathcal{K}_A$ 之后，成立

$$A \otimes_{A^e} \partial = 0$$

这是因为，对于任意 $f \in A$，在 $A \otimes_{A^e} A^e$ 当中总成立

$$f \otimes x^i = x^i f \otimes 1 = f x^i \otimes 1 = f \otimes (x^i)^{\mathrm{op}} = f \otimes y^i$$

因此

$$f \otimes (x^i - y^i) = 0 \in A \otimes_{A^e} A^e$$

从而由 ∂ 的定义，容易看出 $A \otimes_{A^e} \partial = 0$.

综上两方面，直接计算之，

$$\begin{aligned} \mathrm{HH}_k(A) &= H_k(A \otimes^L_{A^e} A) \\ &= H_k(A \otimes_{A^e} \mathcal{K}_A) \\ &= A \otimes_{A^e} \mathcal{K}_k \\ &= A \otimes \bigwedge^k (\mathbb{C}^n) \\ &= \Omega^k_A \end{aligned}$$

从而得证。 □

事实上对于一般的含幺结合 K-代数 A，$\mathrm{HH}_\bullet(A)$ 扮演了“微分形式”的角色。这是 Hochschild 同调的一种几何解释。

对于一般的 A，A 作为双 A-模，由一种典范的投射消解，称之为 **Bar-复形**：

定义 1.2.3. （*Bar*-复形）

对于含幺结合 K-代数 A，定义以下双 A-模链复形

$$\cdots \to B_2 A \xrightarrow{b} B_1 A \xrightarrow{b} B_0 A \xrightarrow{b} A \to 0$$

如下：

$$B_n A := A \otimes A^{\otimes n} \otimes A \ \ (n \geq 0)$$

$$b: \ a_0 \otimes a_1 \otimes \ldots \otimes a_n \quad \mapsto \quad \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k a_0 \otimes a_1 \otimes \ldots \otimes (a_k a_{k+1}) \otimes \ldots \otimes a_n$$

称之为 ***Bar*-复形**。

首先容易验证 $b^2=0$，从而 $B_\bullet A \xrightarrow{b} A \to 0$ 确实是链复形。对于 $n\geq 1$，具体验证如下：

$$
\begin{aligned}
b^2(a_0\otimes a_1\otimes ...\otimes a_n) &= b\left(\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k a_0\otimes a_1\otimes ...\otimes (a_ka_{k+1})\otimes ...\otimes a_n\right)\\
&= \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k b(a_0\otimes a_1\otimes ...\otimes (a_ka_{k+1})\otimes ...\otimes a_n)\\
&= \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k \left[\sum_{l=0}^{k-2}(-1)^l a_0\otimes ...\otimes (a_la_{l+1})\otimes ...\otimes (a_ka_{k+1})\otimes ...\otimes a_n\right.\\
&\quad +(-1)^{k-1}a_0\otimes ...\otimes (a_{k-1}a_ka_{k+1})\otimes ...\otimes a_n\\
&\quad +(-1)^{k}a_0\otimes ...\otimes (a_ka_{k+1}a_{k+2})\otimes ...\otimes a_n\\
&\quad \left. -\sum_{l=k+2}^{n-1}(-1)^l a_0\otimes ...\otimes (a_ka_{k+1})\otimes ...\otimes (a_la_{l+1})\otimes ...\otimes a_n\right]\\
&= \sum_{\substack{0\leq k<l\leq n-1\\ l-k\geq 2}}\left(-(-1)^{k+l}+(-1)^{k+l}\right)a_0\otimes ...\otimes (a_ka_{k+1})\otimes ...\otimes (a_la_{l+1})\otimes ...\otimes a_n\\
&\quad +\sum_{0\leq k\leq n-2}\left((-1)^{2k+1}+(-1)^{2k}\right)a_0\otimes ...\otimes (a_ka_{k+1}a_{k+2})\otimes ...\otimes a_n\\
&= 0
\end{aligned}
$$

从而验证完毕。

我们可以把 $a_0\otimes ...\otimes a_n$ 想象为直线上依次排列的 $n+1$ 个质点，将算子 b 想象为相邻质点两两“碰撞”。

性质 1.2.4. 记号同之前，则 *Bar*-复形

$$B_\bullet A \to A \to 0$$

是 A 的投射消解。

证明. 对任意 $n\geq 0$，$B_nA=A\otimes A^{\otimes n}\otimes A$ 是投射 K-模（这是因为由最初的假定，A 是投射 K-模，从而其张量积也投射）于是我们只需再验证该链复形是正合的。

为此，我们构造链同伦

$$
\begin{aligned}
h: B_{n-2}A &\to B_{n-1}A \quad (n\geq 1,\, B_{-1}A=A)\\
a_0\otimes ...\otimes a_n &\mapsto 1\otimes a_0\otimes ...\otimes a_n
\end{aligned}
$$

只需验证 $hb+bh$=1，之后与性质1.1.5的证明类似。

注意到对于任意 $n\geq 0$，成立

$$bh(a_0\otimes ...\otimes a_n) = b(1\otimes a_0\otimes ...\otimes a_n)$$

$$
\begin{aligned}
&= a_0 \otimes ... \otimes a_n - \sum_{k=0}^{n-1} 1 \otimes a_0 \otimes ... \otimes (a_k a_{k+1}) \otimes ... \otimes a_n \\
&= a_0 \otimes ... \otimes a_n - 1 \otimes b(a_0 \otimes ... \otimes a_n) \\
&= (1 - hb)a_0 \otimes ... \otimes a_n
\end{aligned}
$$

因此 $bh + hb = 1$，证毕。 □

定义 1.2.5. 设 M 为双 A-模，定义 ***Hochschild*** **链复形**

$$C_\bullet(A, M) := M \otimes_{A^e} B_\bullet A$$

$$\cdots M \otimes A^{\otimes 3} \to M \otimes A^{\otimes 2} \to M \otimes A \to M$$

方便起见，该链复形的边缘算子仍记作 b.

则易知 M 的 Hochdchild 同调无非是 Hochschlid 链复形的同调：

$$H_n(A, M) = H_n(C_\bullet(A, M))$$

注意到有双 A-模同构

$$C_n(A, M) = M \otimes_{A^e} \left(A \otimes A^{\otimes n} \otimes A\right) \cong M \otimes A^{\otimes n}$$

在此同构意义下，容易验证 $C_\bullet(A, M)$ 的边缘算子 b 有如下显示表达：

对任意 $m \in M$，以及 $a_1, a_2, ..., a_n \in A$，成立

$$
\begin{aligned}
b\left(m \otimes (a_1 \otimes ... \otimes a_n)\right) &= m \otimes_{A^e} (b(1 \otimes a_1 \otimes ... \otimes a_n \otimes 1)) \\
&= m \otimes_{A^e} [a_1 \otimes ... \otimes a_n \otimes 1 \\
&\quad + \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k 1 \otimes a_1 \otimes ... \otimes (a_k a_{k+1}) \otimes ... \otimes a_n \otimes 1 \\
&\quad +(-1)^n 1 \otimes a_1 \otimes ... \otimes a_n] \\
&= (m.a_1) \otimes a_2 \otimes ... \otimes a_n \\
&\quad + \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k m \otimes a_1 \otimes ... \otimes (a_k a_{k+1}) \otimes ... \otimes a_n \\
&\quad +(-1)^n (a_n.m) \otimes a_1 \otimes ... \otimes a_{n-1}
\end{aligned}
$$

Hochschlid 链复形的边缘算子的显式表达与 Bar-复形非常相似，从上式最右边的前两项可以看出；区别在于上式最右边的第三项。

注记 1.2.6. （*Hoschild* 同调的函子性）若 $\varphi : A \to B$ 为 K-代数同态，那么 ϕ 自然诱导 K-模同态

$$\varphi : \mathrm{HH}_\bullet(A) \to \mathrm{HH}_\bullet(B)$$

自行去定义何为 K-代数同态。此注记表明，$\mathrm{HH}_\bullet$ 其实是从 K-代数范畴到 K-模范畴的一个函子。

1.3 Hochschlid 上同调

对于双 A-模 M，既然我们已经考虑余中心 $M \otimes_{A^e} A$，那么我们自然也会去考虑 $\mathrm{Hom}_{A^e}(A, M)$. 我们称双 A-模 $\mathrm{Hom}_{A^e}(A, M)$ 为 M 的**导出中心**（derived center）。

性质 1.3.1. （导出中心的结构）对于双 A-模 M，则有双 A-模同构

$$\mathrm{Hom}_{A^e}(A, M) \cong \{m \in M | a.m - m.a = 0 \ \ \forall a \in A\}$$

容易验证 $\{m \in M | a.m - m.a = 0 \ \ \forall a \in A\}$ 为 M 的双 A-子模。粗俗地说，该子模由“与 A 中所有元素交换”的元素构成，故谓之“中心”。

证明. 对于任意的 $\varphi \in \mathrm{Hom}_{A^e}(A, M)$ 以及 $a \in A$，则 $\varphi(a)$ 的取值由 $\varphi(1)$ 完全决定：

$$\varphi(a) = \varphi(a.1) = a.\varphi(1)$$

而另一方面，

$$\varphi(a) = \varphi(1.a) = \varphi(1).a$$

从而有 $a.\varphi(1) = \varphi(1).a$. 于是我们可以构造如下双 $A-$ 模同态：

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Hom}_{A^e}(A, M) & \to & \{m \in M | a.m - m.a = 0 \ \ \forall a \in A\} \\ \varphi & \mapsto & \varphi(1) \end{array}$$

容易验证该模同态为同构。证毕。 $\square$

然后我们考虑 $\mathrm{Hom}(-, M)$ 的导出函子，自然地去定义如下：

定义 1.3.2. （*Hochschild* 上同调）
对于双 A-模 M，以及 $n \geq 0$，定义 M 的第 n 个 *Hochschild* 上同调

$$H^n(A, M) = \mathrm{Ext}^n_{A^e}(A, M)$$

特别地，我们记

$$H^n(A) = \mathrm{Ext}^n_{A^e}(A, A)$$

由定义知，M 的第 0 个 Hochschild 上同调为 $\mathrm{Hom}_{A^e}(A,M)$，是 M 的导出中心。回顾 Bar-复形，我们考虑如下的 **Hochschild 上链复形**

$$C^\bullet(A,M)=\mathrm{Hom}_{A^e}(B_\bullet A,M)$$

该上链复形的微分算子 ∂ 由 Bar-复形 $B_\bullet A$ 的边缘算子 b 所诱导。则 M 的 Hochschild 上同调满足

$$H^n(A,M)=H^n(C^\bullet(A,M),\partial)=H^n(\mathrm{Hom}_{A^e}(B_\bullet A,M),\partial)$$

注意有自然的双 A-模同构

$$C^n(A,M)=\mathrm{Hom}_{A^e}(A\otimes A^{\otimes n}\otimes A,M)\cong \mathrm{Hom}(A^{\otimes n},M)$$

（即取值于 M 的 n 重 K-线性映射）于是对于任意的 $\varphi\in C^n(A,M)=\mathrm{Hom}(A^{\otimes n},M)$，容易知道 $\partial\varphi\in\mathrm{Hom}(A^{\otimes n+1},M)$ 具有如下显式表达：对任意 $a_0,a_1,...,a_m\in A$，

$$\begin{aligned}\partial\varphi(a_0,a_1,...,a_n) &= a_0.\varphi(a_1,a_2,...,a_n)\\ &\quad -\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\varphi(a_0,...;(a_ka_{k+1});...,a_n)\\ &\quad -(-1)^n\varphi(a_0,a_1,...,a_{n-1}).a_n\end{aligned}$$

接下来讨论 Hochschild 上同调的几何意义。我们已经知道第 0 个 Hochschild 上同调为 M 的导出中心；现在我们看 $H^1(A,M)$，我们将发现它是 A 的取值于 M 的外导子。

回顾**导子**（derivation）的概念如下：

定义 1.3.3. （导子）对于双 A-模 M，K-线性映射

$$D:A\to M$$

称为 A 的取值于 M 的**导子**（*derivation*），如果对任意的 $a_1,a_2\in A$，成立

$$D(a_1a_2)=D(a_1).a_2+a_1.D(a_2)$$

对于 $m\in M$ 我们定义

$$\begin{aligned}\mathrm{ad}_m:A &\to M\\ a &\mapsto [m,a]:=m.a-a.m\end{aligned}$$

则容易验证 ad_m 为 A 的取值于 M 的导子，称形如这样的导子为**内导子**（inner derivation）。

我们记

$$\mathrm{Der}(A,M):=\{D:A\to M|D\text{为导子}\}$$

$$\mathrm{Inn}(A,M) := \{\mathrm{ad}_m \,|m \in M\} \subseteq \mathrm{Der}(A,M)$$

注意 $\mathrm{Inn}(A,M)$ 与 $\mathrm{Der}(A,M)$ 都有显然的 K-模结构，且前者是后者的 K-子模。

性质 1.3.4. （$H^1(A,M)$ 的结构）

对于双 A-模 M，成立

$$H^1(A,M) \cong \frac{\mathrm{Der}(A,M)}{\mathrm{Inn}(A,M)}$$

我们称上式右边的集合当中的元素为 A 的取值于 M 的**外导子**（outer derivation）。

证明. 只需考虑 Hochschild 上链复形

$$C^0(A,M) \xrightarrow{\partial^0} C^1(A,M) \xrightarrow{\partial^1} C^2(A,M) \to \cdots$$

我们只需具体计算之。对于 $\varphi \in C^1(A,M) \cong \mathrm{Hom}(A,M)$，则 $\partial^1\varphi \in C^2(A,M) \cong \mathrm{Hom}(A^{\otimes 2},M)$ 满足：对任意 $a_1,a_2 \in A$，成立

$$\partial^1\varphi(a_1,a_2) = a_1.\varphi(a_2) - \varphi(a_1a_2) + \varphi(a_1).a_2$$

可见 $\varphi \in \ker\partial^1$ 当且仅当 $\varphi \in \mathrm{Der}(A,M)$. 也就是说 $\ker\partial^1 = \mathrm{Der}(A,M)$.

另一方面，对于 $m \in C^0(A,M) \cong M$，以及 $a \in A$，成立

$$(\partial^0 m)(a) = a.m - m.a = -\mathrm{ad}_m(a)$$

因此 $\ker\partial^0 \cong \mathrm{Inn}(A,M)$. 从而

$$H^1(A,M) = \frac{\ker\partial^1}{\mathrm{Im}\,\partial^0} \cong \frac{\mathrm{Der}(A,M)}{\mathrm{Inn}(A,M)}$$

□

特别地，当 $M = A$ 时，

$$\mathrm{HH}^1(A) = \mathrm{Der}(A,A)/\mathrm{Inn}(A,A)$$

注意到 $\mathrm{Der}(A,A)$ 上面还有更多的结构：对于 $\forall D_1,D_2 \in \mathrm{Der}(A,A)$，定义

$$[D_1,D_2] := D_1 \circ D_2 - D_2 \circ D_1 : A \to A$$

容易验证 $[D_1,D_2]$ 仍然为 A 的导子，并且 $[-,-]$ 为 $\mathrm{Der}(A,A)$ 上的李括号（Lie bracket）。

另外容易验证

$$[\mathrm{Der}(A,A),\mathrm{Inn}(A,A)] \subseteq \mathrm{Inn}(A,A)$$

具体地，对于 $D \in \mathrm{Der}(A, A)$ 以及 $m \in M$，成立

$$[D, \mathrm{ad}_m] = \mathrm{ad}_{D(m)}$$

也就是说 $\mathrm{Inn}(A, A)$ 是 $\mathrm{Der}(A, A)$ 的理想。于是 $[-, -]$ 诱导了 $\mathrm{HH}^1(A) = \frac{\mathrm{Der}(A,A)}{\mathrm{Inn}(A,A)}$ 上的李括号结构.

如果 A 是交换 K-代数，则 $\mathrm{Inn}(A, A) = 0$。于是

$$\mathrm{HH}^1(A) \cong \mathrm{Der}(A, A)$$

可被认为是“切向量场”（此时 A 被认为是“函数环”）。

我们再去考虑 $H^2(A, M)$. 对于任意的

$$\varphi \in C^2(A, M) = \mathrm{Hom}(A^{\otimes 2}, M)$$

则对 $a_0, a_1, a_2 \in A$，成立

$$\partial\varphi(a_0, a_1, a_2) = a_0.\varphi(a_1, a_2) - \varphi(a_0a_1, a_2) + \varphi(a_0, a_1a_2) - \varphi(a_0, a_1).a_2$$

引理 1.3.5. 对于双 A-模 M，以及 $\varphi \in C^2(A, M) = \mathrm{Hom}(A^{\otimes 2}, M)$，我们令

$$\hat{A} := A \oplus M$$

并赋以如下的 K-代数结构：对于任意 $a_1, a_2 \in A$ 以及 $m_1, m_2 \in M$，规定 $\hat{A}$ 的乘法 $\hat{\bullet}_\varphi$ 为

$$(a_1 \oplus m_1)\hat{\bullet}_\varphi(a_2 \oplus m_2) := a_1a_2 \oplus [a_1.m_2 + m_1.a_2 + \varphi(a_1, a_2)]$$

那么 $(\hat{A}, \hat{\bullet}_\varphi)$ 为结合代数，当且仅当 $\partial\varphi = 0$.

证明. 这是简单的计算验证。对于任意的 $a_0, a_1, a_2 \in A$ 以及 $m_0, m_1, m_2 \in M$，直接计算之，

$$\begin{aligned} & [(a_0 \oplus m_0)\hat{\bullet}_\varphi(a_1 \oplus m_1)]\hat{\bullet}_\varphi(a_2 \oplus m_2) \\ = \ & a_0a_1a_2 \oplus [a_0a_1.m_2 + a_0.m_1.a_2 + m_0.a_1a_2 + \varphi(a_0, a_1).a_2 + \varphi(a_0a_1, a_2)] \end{aligned}$$

以及

$$\begin{aligned} & (a_0 \oplus m_0)\hat{\bullet}_\varphi[(a_1 \oplus m_1)\hat{\bullet}_\varphi(a_2 \oplus m_2)] \\ = \ & a_0a_1a_2 \oplus [a_0a_1.m_2 + a_0.m_1.a_2 + m_0.a_1a_2 + a_0.\varphi(a_1, a_2) + \varphi(a_0, a_1a_2)] \end{aligned}$$

因此 $\hat{\bullet}_\varphi$ 满足结合性，当且仅当

$$\varphi(a_0, a_1).a_2 + \varphi(a_0a_1, a_2) = a_0.\varphi(a_1, a_2) + \varphi(a_0, a_1a_2)$$

而此式等价于 $\partial\varphi = 0$. □

注意到在 $\hat{A}$ 当中，对任意的 $m_1, m_2 \in M$，以及任意 $\varphi \in C^2(A, M)$，总有 $m_1 \hat{\bullet}_\varphi m_2 = 0$. 于是我们不妨将“$A \oplus M$”当中的“$M$”理解为“一阶小量”。我们考虑 $\varphi = 0$ 时 $\hat{A}_0 := A \oplus M$ 的代数结构

$$(a_1 \oplus m_1) \bullet (a_2 \oplus m_2) := a_1 a_2 \oplus (a_1.m_2 + m_1.a_2)$$

显然 $(\hat{A}_0, \bullet)$ 为结合代数。若 $\partial\varphi = 0$，则结合代数 $(\hat{A}, \hat{\bullet}_\varphi)$ 为 $(\hat{A}_0, \bullet)$ 的**一阶形变**，而 φ 为其“形变参数”。

从而 M 的第 2 个 Hochschild 上同调

$$H^2(A, M) \cong \frac{\{\varphi | (\hat{A}, \hat{\bullet}_\varphi)\text{是结合代数}\}}{\mathrm{Im}(\partial : C^1(A, M) \to C^2(A, M))}$$

商掉的东西（$\mathrm{Im}\,\partial$）为形如以下的一类特殊的一阶形变：

$$\begin{aligned} \varphi_f : A \otimes A &\to M \\ a_1 \otimes a_2 &\mapsto a_1.f(a_2) + f(a_1).a_2 - f(a_1 a_2) \end{aligned}$$

其中 $f \in C^1(A, M) = \mathrm{Hom}(A, M)$，$\varphi_f = \partial f$.

Hochschild 上同调与 Hochschild 同调两者之间有如下自然的配对：

定义 1.3.6. 设 M, N 为双 A-模，则自然有如下配对：

$$C^n(A, M) \otimes C_n(A, N) \to N \otimes_{A^e} M$$

定义为：对任意 $f \in C^n(A, M) = \mathrm{Hom}(A^{\otimes n}, M)$ 以及任意 $y \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n \in C_n(A, N) = N \otimes A^{\otimes n}$，有

$$(f, y \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n) \mapsto y \otimes f(a_1, \ldots, a_n) \in N \otimes_{A^e} M$$

其中任意 $y \in N$，以及 $a_1, \ldots, a_n \in A$.

容易验证，该配对自然诱导了

$$H^n(A, M) \otimes H_n(A, N) \to N \otimes_{A^e} M$$

这是容易发现的（先限制，再下降，下降的良定性容易说明。）

特别地，当 $M = A, N = A^*$（其中 $A^* := \mathrm{Hom}(A, K)$）时，我们有双线性函数

$$H^n(A, A) \otimes H_n(A, A^*) \to A^* \otimes_{A^e} A \xrightarrow{\mathrm{ev}} K$$

我们考察一个 Hochschild 上同调的具体算例。

性质 1.3.7. 若 $A=\mathbb{C}[x^1,...,x^n]$ 为 $\mathbb{C}$ 上的 n 元多项式环，则

$$\mathrm{HH}^k(A)\cong \mathrm{Hom}\left(\bigwedge^k(\mathbb{C}^n),A\right)$$

证明. 对于这个特例，采用 Koszul 复形计算更佳简便。有关记号同性质1.2.2的证明过程. 考虑 Koszul 复形

$$\mathcal{K}_A:\cdots\xrightarrow{\partial}A^e\otimes\bigwedge^{k+1}(\mathbb{C}^n)\xrightarrow{\partial}A^e\otimes\bigwedge^{k}(\mathbb{C}^n)\xrightarrow{\partial}A^e\otimes\bigwedge^{k-1}(\mathbb{C}^n)\xrightarrow{\partial}\cdots$$

然后将函子 $\mathrm{Hom}_{A^e}(-,A)$ 作用于之上。注意到有 $\mathbb{C}$-线性同构

$$\begin{aligned}&\mathrm{Hom}_{A^e}\left(A^e\otimes\bigwedge^k(\mathbb{C}^n),A\right)\\ \cong\ &\mathrm{Hom}\left(\bigwedge^k(\mathbb{C}^n),\mathrm{Hom}_{A^e}(A^e,A)\right)\\ \cong\ &\mathrm{Hom}\left(\bigwedge^k(\mathbb{C}^n),A\right)\end{aligned}$$

此外再注意到，上链复形 $\mathrm{Hom}_{A^e}(\mathcal{K}_A,A)$ 的微分算子 $\mathrm{d}:=\mathrm{Hom}_{A^e}(\partial,A)=0$. 这是因为对于 $\varphi\in\mathrm{Hom}_{A^e}\left(A^e\otimes\bigwedge^k(\mathbb{C}^n),A\right)$，$\omega\in\bigwedge^{k+1}(\mathbb{C}^n)$ 以及 $f\in A^e$，成立

$$\mathrm{d}\varphi(f\otimes\omega)=\varphi(\partial(f\otimes\omega))$$

回顾 Koszul 复形边缘算子运算规则

$$\partial:\eta^i\mapsto x^i-y^i\in A^e$$

又由于 φ 为 A^e-模同态，从而对于任意 $\tilde{\omega}\in\bigwedge^k(\mathbb{C}^n)$，成立

$$\varphi(x^i\otimes\tilde{\omega})=x^i.\varphi(1\otimes\tilde{\omega})=\varphi(1\otimes\tilde{\omega}).x^i=\varphi((x^i)^{\mathrm{op}}\otimes\tilde{\omega})=\varphi(y^i\otimes\tilde{\omega})$$

也就是说 $\varphi((x^i-y^i)\otimes\tilde{\omega})=0$. 由此可见 $\mathrm{d}=0$. 综上可知

$$\mathrm{HH}^k(A)\cong \mathrm{Hom}\left(\bigwedge^k(\mathbb{C}^n),A\right)$$

□

注意到 $\mathrm{Hom}\left(\bigwedge^k(\mathbb{C}^n),A\right)$ 之中的元素形如

$$\sum_{1\le i_1<...<i_k\le n}f_{i_1...i_k}\partial_{i_1}\wedge...\wedge\partial_{i_k}$$

回顾 $\mathrm{HH}_\bullet(A)$ 中的元素可被认为是“微分形式”，可见 $\mathrm{HH}^\bullet(A)$ 中的元素则是“多重切向量场”。

1.4 约化 Bar 复形

如果 $K \hookrightarrow A$ 为嵌入，那么我们可以更加方便地计算 Hochschild （上）同调：

定义 1.4.1. （约化 *Bar-*复形）(*reduced Bar-complex*)

对于 K-代数 A，如果 $K \hookrightarrow A$，那么考虑 K-模

$$\overline{A} := A/K$$

我们定义如下的约化 *Bar-*复形 $(\overline{B}_\bullet A, b)$:

$$\overline{B}_n A := A \otimes \overline{A}^{\otimes n} \otimes A \quad \forall i \geq 0$$

边缘算子 $b : \overline{B}_n A \to \overline{B}_{n-1} A$ 如下定义：

$$\begin{aligned} b\Big(a_0 \otimes (\overline{a_1} \otimes \cdots \otimes \overline{a_n}) \otimes a_{n+1}\Big) \quad := \quad & (a_0 a_1) \otimes (\overline{a_2} \otimes \cdots \otimes \overline{a_n}) \otimes a_{n+1} \\ + \quad & \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^i a_0 \otimes (\overline{a_1} \otimes \cdots (\overline{a_i a_{i+1}}) \otimes \cdots \otimes \overline{a_n}) \otimes a_{n+1} \\ + \quad & (-1)^n a_0 \otimes (\overline{a_1} \otimes \cdots \otimes \overline{a_{n-1}}) \otimes (a_n a_{n+1}) \end{aligned}$$

注意到 $\overline{B}_\bullet A$ 是 $B_\bullet A$ 的商模：

$$\overline{B}_n A = \frac{B_n A}{\{a_0 \otimes (a_1 \otimes \cdots \otimes a_{i-1} \otimes 1 \otimes a_{i+1} \otimes \cdots \otimes a_n) \otimes a_{n+1}\}}$$

容易发现约化 Bar-复形的“b”正是 Bar-复形的 b. 但是我们要验证 b 的良定性，即与代表元选取无关。这是容易验证的。于是我们得到以下链复形：

$$\overline{B}_\bullet A \to A \to 0$$

与之前 *Bar-*复形完全类似，我们容易验证此复形也是正合的。只需构造同伦算子

$$\begin{aligned} h : \overline{B}_{n-1} A \quad & \to \quad \overline{B}_n A \\ a_0 \otimes (\overline{a_1} \otimes \cdots \otimes \overline{a_{n-1}}) \otimes a_n \quad & \mapsto \quad 1 \otimes (\overline{a_0} \otimes \overline{a_1} \otimes \cdots \otimes \overline{a_n}) \otimes a_{n+1} \end{aligned}$$

验证 $bh + hb = 1$ 即可。

定义 1.4.2. （约化 *Hochschild*（上）链复形）

对于双 A-模 M，我们令

$$\begin{aligned}
\overline{C}_\bullet(A,M) &:= M\otimes_{A^e}\overline{B}_\bullet A\cong M\otimes\overline{A}^{\otimes\bullet}\\
\overline{C}^\bullet(A,M) &:= \mathrm{Hom}_{A^e}(\overline{B}_\bullet A,M)\cong\mathrm{Hom}(\overline{A}^{\otimes\bullet},M)
\end{aligned}$$

称之为关于 M 的约化 *Hochschild*（上）链复形。

事实上，约化 Hochschild（上）链复形的（上）同调自然同构于 Hochschild（上）同调——这是由以下代数引理保证的：

引理 1.4.3. 条件同上，则商映射

$$\pi_\bullet : C_\bullet(A,M)\twoheadrightarrow\overline{C}_\bullet(A,M)$$

所诱导的链映射

$$\pi_\bullet : (C_\bullet(A,M),d)\twoheadrightarrow(\overline{C}_\bullet(A,M),d)$$

为拟同构。

证明. 注意链映射 $\pi_\bullet$ 为满态射，只需再证明其核复形

$$\ker\pi_\bullet$$

是正合的即可。我们承认之（似乎不太好证）。 □

注意上述引理也适用于 Hochschild 上链复形的情形，完全类似，不再赘述。从而我们立刻有如下推论：

推论 1.4.4. 对于 K-代数 A，如果 $K\hookrightarrow A$ 为嵌入，则有自然同构：

$$\begin{aligned}
H_\bullet(A,M) &\cong H_\bullet(\overline{C}_\bullet(A,M))\\
H^\bullet(A,M) &\cong H^\bullet(\overline{C}^\bullet(A,M))
\end{aligned}$$

关于（约化）Bar-复形，我们还有另一种理解方式：关于 A 的（约化）Bar-复形是 A 与某个微分分次代数的自由乘积。

定义 1.4.5. （微分分次代数）

$\mathbb{Z}$-分次 K-代数
$$A := \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} A_n$$
称为**微分分次代数**（*differential graded algebra*），若它配以 K-线性算子 $\mathrm{d}: A \to A$，并且满足：
$$\begin{cases} \mathrm{d}(A_n) \subseteq A_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{Z} \\ \mathrm{d}^2 = 0 \\ \mathrm{d}(\alpha\beta) = (\mathrm{d}\alpha)\beta + (-1)^{\deg \alpha}\alpha(\mathrm{d}\beta) \quad \forall \alpha, \beta \in A, \text{ 并且 } \alpha \text{ 是齐次元} \end{cases}$$

“$\mathbb{Z}$-分次 K-代数”的定义将在后文（定义2.2.1）介绍。（其实大家都明白）

对于微分分次代数 (A, d)，由于 A 的分次以及 $\mathrm{d}^2 = 0$，从而自然有上链复形
$$\cdots \to A_{-1} \xrightarrow{\mathrm{d}} A_0 \xrightarrow{\mathrm{d}} A_1 \to \cdots$$
我们将此上链复形也记为 (A, d).

微分分次代数最直接的例子是，对于光滑流形 X，考虑 $A := \Omega^\bullet(X)$ 为 X 上的微分形式。A 上的乘法即为微分形式的外积 $\wedge$，微分结构即为外微分 d.

我们可以适当修改微分分次代数的定义，将条件“$\mathrm{d}(A_n) \subseteq A_{n+1}$”改为“$\mathrm{d}(A_n) \subseteq A_{n-1}$”，此时的微分算子我们习惯记为“$\partial$”. 对于这样的微分分次代数 (A, ∂)，它可以被视为链复形。

例子 1.4.6. 我们考虑如下 K-代数：
$$A := K[\varepsilon] := K \oplus K\varepsilon \oplus K\varepsilon^2 \oplus \cdots$$
其中 ε 为形式变量，并且规定 $\deg \varepsilon = 1$，由此诱导出 $K[\varepsilon]$ 的分次结构。其微分算子 ∂_ε 由以下诱导：
$$\partial_\varepsilon(1) = 0 \quad \partial_\varepsilon(\varepsilon) = 1$$

注意 $\deg \varepsilon = 1$，按照微分代数的定义可计算出
$$\partial_\varepsilon(\varepsilon^2) = \partial_\varepsilon(\varepsilon)\varepsilon + (-1)^{\deg \varepsilon}\varepsilon\partial_\varepsilon(\varepsilon) = \varepsilon - \varepsilon = 0$$
一般地，对于非负整数 n 我们有
$$\partial_\varepsilon(\varepsilon^n) = \begin{cases} 0 & n \text{ 为偶数} \\ \varepsilon^{n-1} & n \text{ 为奇数} \end{cases}$$
从而链复形 $(K[\varepsilon], \partial_\varepsilon)$：
$$\cdots \to K\varepsilon^4 \xrightarrow{0} K\varepsilon^3 \xrightarrow{1} K\varepsilon^2 \xrightarrow{0} K\varepsilon \xrightarrow{1} K \to 0$$

是正合的。其中 $1: K\varepsilon^{2n+1} \to K\varepsilon^{2n}$ 将 ε^{2n+1} 映为 ε^{2n}.

众所周知，对于两个 K-代数 A, B，我们可以谈论它们的**自由乘积**（free product）$A * B$. 若 $A = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} A_n$ 是微分分次代数，其微分算子为 d，则容易知道 $A * B$ 自然也有微分分次代数结构：

$$\begin{cases} \deg b &= 0 \quad \forall b \in B \\ \deg a &= n \quad \forall a \in A_n \subseteq A \\ \mathrm{d}b &= 0 \quad \forall b \in B \end{cases}$$

容易知道 $A * B$ 中的 N 次齐次元必形如以下元素的有限和：

$$b_1 a_1 b_2 a_2 \cdots b_m a_m b_{m+1} \quad (b_i \in B\,,\, a_i \in A_{n_i}\,,\, \sum_{i=1}^{m} n_i = N)$$

性质 1.4.7. 对于 K-代数 A，则有链复形的同构

$$(B_\bullet A \to A, b) \cong (A * K[\varepsilon], \partial_\varepsilon)$$

其中 $(K[\varepsilon], \partial_\varepsilon)$ 为例子 *1.4.6* 当中的微分分次代数，视为链复形；同构映射为

$$\begin{aligned} \varphi_n : B_n A &\to (A * K[\varepsilon])_n \\ a_0 \otimes (a_1 \otimes \cdots \otimes a_n) \otimes a_{n+1} &\mapsto a_0 \varepsilon a_1 \varepsilon a_2 \cdots a_n \varepsilon a_{n+1} \end{aligned}$$

这给出了 Bar-复形的又一种理解方式。

证明. 容易验证 φ_n 为 K-模同构，且逆映射 φ_n^{-1} 由以下诱导：

$$\varepsilon^n \mapsto \underbrace{1\varepsilon 1 \varepsilon 1 \cdots 1 \varepsilon 1}_{n\text{个}\varepsilon}$$

然后只需验证 $\varphi_\bullet : (B_\bullet \to A, b) \to (A * K[\varepsilon], \partial_\varepsilon)$: 是链映射，也就是要验证交换关系 $\varphi \circ b = \partial_\varepsilon \circ \varphi$

$$\begin{tikzcd} B_n A \arrow[r, "b"] \arrow[d, "\varphi"] & B_{n-1} A \arrow[d, "\varphi"] \\ (K[\varepsilon] * A)_n \arrow[r, "\partial_\varepsilon"] & (K[\varepsilon] * A)_{n-1} \end{tikzcd}$$

而这容易验证，验证如下：

$$\begin{aligned} & \varphi \circ b(a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n \otimes a_{n+1}) \\ = \quad & \varphi\left(\sum_{k=0}^{n} (-1)^k a_0 \otimes \cdots \otimes (a_k a_{k+1}) \otimes \cdots \otimes a_{n+1}\right) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{k=0}^{n}(-1)^k a_0\varepsilon a_1\varepsilon\cdots\varepsilon a_{n+1} \\
&= \partial_\varepsilon(a_0\varepsilon a_1\varepsilon\cdots a_n\varepsilon a_{n+1}) \\
&= \partial_\varepsilon\circ\varphi(a_0\otimes a_1\otimes\cdots\otimes a_n\otimes a_{n+1})
\end{aligned}
$$

□

我们还可以考虑 $(K[\varepsilon],\partial_\varepsilon)$ 的商代数 $K[\varepsilon]/\varepsilon^2$，易知 $(K[\varepsilon]/\varepsilon^2,\partial_\varepsilon)$ 也构成微分分次代数，从而也通过微分算子 ∂_ε 视为链复形。在此代数中，$\varepsilon^2=0$.

类似地，我们可以给出约化 Bar-复形的另一种理解方式：

性质 1.4.8. 对于 K-代数 A，则有链复形同构

$$(\overline{B}_\bullet A\to A,b)\cong(A*K[\varepsilon]/\varepsilon^2,\partial_\varepsilon)$$

只需注意到 $A*K[\varepsilon]/\varepsilon^2$ 当中的 n 次齐次元必形如以下元素的有限和：

$$a_0\varepsilon a_1\varepsilon\cdots a_n\varepsilon a_{n+1}\quad(a_i\in A)$$

证明. 完全类似。事实上此链复形同构映射由 $\varphi_n: B_nA\to(A*K[\varepsilon])_n$ 诱导，其良定性由下式保证：对任意 $1\le i\le n$，

$$
\begin{aligned}
&\varphi_n(a_0\otimes\cdots\otimes a_{i-1}\otimes 1\otimes a_{i+1}\otimes\cdots\otimes a_{n+1}) \\
=\ & a_0\varepsilon a_1\cdots a_{i-1}\varepsilon 1\varepsilon a_{i+1}\cdots\varepsilon a_{n+1} \\
=\ & a_0\varepsilon a_1\cdots a_{i-1}1\varepsilon^2 a_{i+1}\cdots\varepsilon a_{n+1} \\
=\ & 0 \mod \varepsilon^2
\end{aligned}
$$

□

本节最后简单介绍以下 Hochschild（上）同调与其它常见的（上）同调理论的关系。

例子 1.4.9. （群的上同调）

设 G 是一个群，$M\in\mathrm{Rep}(G)$ 为群 G 的一个左 K-表示，则有 G-模链复形

$$0\to M\xrightarrow{\delta}C^1(G,M)\xrightarrow{\delta}C^2(G,M)\xrightarrow{\delta}\dots$$

其中

$$C^n(G,M):=\mathrm{Hom}(G^n,M)=\{f:G^n\to M\}$$

并且微分算子 δ 满足

$$\begin{cases} \delta(m)(g) &= g.m - m \\ (\delta f)(g_0, g_1, \ldots, g_n) &= g_0.f(g_1, g_2, \ldots, g_n) \\ &\quad - \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k f(g_1, \ldots, g_k g_{k+1}, \ldots, g_n) \\ &\quad -(-1)^n f(g_0, g_1, \ldots, g_{n-1}) \end{cases}$$

容易验证 $\delta^2=0$. 此链复形的上同调

$$H^\bullet(G, M) := H^\bullet(C^\bullet(G, M), \delta)$$

称之为**群的上同调** *(group cohomology)*

由 δ 的表达式容易看出，群的上同调与 Hochschild 上同调有以下关系：

性质 1.4.10. 设 G 是一个群，M 为群 G 的一个左 K-模，考虑群代数 $A := K[G]$，于是 M 自然有左 A-模结构。那么有同构：

$$H^\bullet(G, M) \cong H^\bullet(K[G], M)$$

其中左边为群 G 关于 M 的上同调，右边为群代数 $K[G]$ 关于 M 的 *Hichschild* 上同调。

注意 M 仅仅是左 $K[G]$-模，并没有双 $K[G]$-模结构呀，怎么谈论 Hochschild 上同调？

（强行规定 G 在 M 上的右作用恒为 1，通过 K-线性扩张得到 $K[G]$ 在 M 的右作用，这样就得到 M 的双 $K[G]$-模结构了。）

证明. 注意到 $\mathrm{Hom}(G^n, M)$ 中的元素可以自然地 K-线性延拓为 $\mathrm{Hom}(K[G]^n, M)$ 中的元素，这给出它们之间的同构。然后注意到 $A = K[G]$ 的 Hochschild 上链复形的微分算子的显式表达式，（见定义1.3.2的下方）它与群上同调相应的上链复形的微分算子显式表达式"相同"。细节从略。 □

若熟悉李代数同调，我们可以将李代数同调与其泛包络代数的 Hochschild 同调联系起来：

例子 1.4.11. （李代数同调）对于李代数 $\mathfrak{g}$，M 为李代数 $\mathfrak{g}$ 的一个左 K-模。令 $A := \mathcal{U}(\mathfrak{g})$ 为 $\mathfrak{g}$ 的泛包络代数，则 A 自然有左 A-模结构。（再通过某种"比较平凡"的方式给出右作用？与上例类似？）则有同构

$$H_\bullet(\mathcal{U}(\mathfrak{g}), M) \cong H_\bullet^{\mathrm{Lie}}(\mathfrak{g}, M)$$

其中左边是 A 关于 M 的 *Hochschild* 同调，右边是李代数同调。

并没有在此叙述**李代数同调**的定义。留给感兴趣者。此处从略。

事实上，也可以考虑**群的同调**、**李代数上同调**，它们也有对应的 Hochschild 同调、上同调。

1.5 Connes 复形 $C^{\lambda}_{\bullet}(A)$

与之前一样，我们仍假设 K 为特征零的含幺交换环，A 为 K-代数，且作为 K-模是投射的。不过，在从本节开始我们再新增一条假定：

$$\mathbb{Q} \hookrightarrow K$$

也就是说，有理数域能够嵌入到 K 中。（事实上，任何特征零的域都满足此假定。）

回顾对于 K-代数 A，若 A 交换，则其 Hochschild 同调 $\mathrm{HH}_{\bullet}(A)$ 可以被理解为“空间”A 上的“微分形式”。本节我们进一步研究 $\mathrm{HH}_{\bullet}(A)$.

记号 1.5.1. 对于 K-代数 A，双 A-模 $M = A$. 考虑其 *Hochschild* 链复形 $C_{\bullet}(A) := C_{\bullet}(A, A)$:

$$C_n(A) := C_n(A, A) \cong A^{\otimes n+1}$$

(回顾定义1.2.5). 我们考虑群 $\mathbb{Z}/(n+1)\mathbb{Z}$ 在 $C_n(A)$ 上的如下左 K-作用：记 $\mathbb{Z}/(n+1)\mathbb{Z}$ 的生成元为 λ，则

$$\begin{array}{rcl} \lambda : C_n(A) & \to & C_n(A) \\ a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n & \mapsto & (-1)^n a_n \otimes a_0 \otimes \cdots \otimes a_{n-1} \end{array}$$

考虑 $C_n(A)$ 模掉此群作用，所得的商 K-模记为

$$C^{\lambda}_n(A) := C_n(A)/(1-\lambda)$$

其中的元素称之为**循环余不变量**（*cyclic co-invariant*）。

容易验证，

$$\lambda^{n+1} a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n = (-1)^{n(n+1)} a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n = a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n$$

即 $\lambda^{n+1} = \mathrm{id}$. 可见这的确是 $\mathbb{Z}/(n+1)\mathbb{Z}$ 的作用。

回顾 Bar-复形，我们可以直观地视为“直线上依次排列质点，相邻两两碰撞”；而在这里，商掉 λ 循环作用后，直观地更像是“圆周上排列质点”。

我们将说明，Hochschild 链复形 $C_{\bullet}(A)$ 的边缘算子 b，沿商映射 $C_{\bullet}(A) \twoheadrightarrow C^{\lambda}_{\bullet}(A)$ 下降，诱导了 $C^{\lambda}_{\bullet}(A)$ 的链复形结构（称之为 Connes 复形）。

引理 1.5.2. 对于 K-代数 A，我们定义算子 $b' : C_{\bullet}(A) \to C_{\bullet-1}(A)$ 如下：

$$b' : C_n(A) \to C_{n-1}(A)$$

$$a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n \quad \mapsto \quad \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k a_0 \otimes \cdots \otimes (a_k a_{k+1}) \otimes \cdots \otimes a_n$$

则成立：

（*1*）$b' \circ b' = 0$,

（*2*）对任意 $n \geq 1$，则以下图表交换：

$$\begin{tikzcd} C_n(A) \arrow[r, "b'"] \arrow[d, "1-\lambda"] & C_{n-1}(A) \arrow[d, "1-\lambda"] \\ C_n(A) \arrow[r, "b"] & C_{n-1}(A) \end{tikzcd}$$

证明. 注意到有同构 $C_n(A) \cong B_n A (\cong A^{\otimes n+1})$，其中 $B_\bullet A$ 为 Bar-复形；容易看出这里定义的 b' 在此同构下，正是 Bar 复形当中的边缘算子，从而 $b' \circ b' = 0$，也就是说 $(C_\bullet(A), b')$ 是一个链复形，并且同构于 Bar-复形 $(B_\bullet A, b)$.（这里有轻微的记号混用：Bar-复形 $(B_\bullet A, b)$ 当中的“b”并不是本引理当中 Hochschild 链复形 $(C_\bullet(A), b)$ 当中的“b”，前者在此是临时记号。）

我们再来看（2）. 回顾 $b : C_n(A) \to C_{n-1}(A)$ 的显式表达式（见定义1.2.5的下方，并且令其中 $M = a$ 以及 $m = a_0$）（注意此图中的 b 与 b' 并不是同一个映射，它们的具体表达式相差一项），直接验算之：

$$\begin{aligned}
& (1-\lambda) \circ b' \big(a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n\big) \\
= \;& (1-\lambda) \left(\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k a_0 \otimes \cdots \otimes (a_k a_{k+1}) \otimes \cdots \otimes a_n \right) \\
= \;& \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k a_0 \otimes \cdots \otimes (a_k a_{k+1}) \otimes \cdots \otimes a_n \\
& + \sum_{k=0}^{n-2} (-1)^{k+n} a_n \otimes a_0 \otimes \cdots \otimes (a_k a_{k+1}) \otimes \cdots \otimes a_{n-1} \\
& -(a_{n-1} a_n) \otimes a_0 \otimes \cdots \otimes a_{n-2} \\
= \;& b(a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n) - (-1)^n (a_n a_0) \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_{n-1} \\
& + (-1)^n \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k a_n \otimes a_0 \otimes \cdots \otimes (a_k a_{k+1}) \otimes \cdots \otimes a_{n-1} \\
& -(a_{n-1} a_n) \otimes a_0 \otimes \cdots \otimes a_{n-2} \\
= \;& b\big(a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n - (-1)^n a_n \otimes a_0 \otimes \cdots \otimes a_{n-1}\big) \\
= \;& b \circ (1-\lambda)(a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n)
\end{aligned}$$

也就是说，

$$(1-\lambda) \circ b' = b \circ (1-\lambda)$$

从而此图表交换，证毕。 $\square$

此图表的交换关系也可改写为

$$[b, \lambda] = (1 - \lambda) \circ (b - b')$$

其中 $[b, \lambda] := b \circ \lambda - \lambda \circ b$.

此引理给出了链复形 $(C_\bullet(A), b')$ 与 $(C_\bullet(A), b)$ 之间的链映射：

$$(1 - \lambda)_\bullet : (C_\bullet(A), b') \to (C_\bullet(A), b)$$

然而注意到

$$C_n^\lambda(A) := C_n(A)/(1 - \lambda) = \operatorname{coker}(1 - \lambda)_n$$

于是我们（在由 K-模链复形构成范畴当中）考虑链映射 $(1 - \lambda)_\bullet$ 的余核，这给出了 $C_\bullet^\lambda(A)$ 的链复形结构：

定义 1.5.3. （*Connes* 复形）对于 K-代数 A，考虑链映射

$$(1 - \lambda)_\bullet : (C_\bullet(A), b') \to (C_\bullet(A), b)$$

的余核链复形

$$(C_\bullet^\lambda(A), b^\lambda) := \operatorname{coker}[(1 - \lambda)_\bullet]$$

称其为 ***Connes* 复形**。并且记

$$H_\bullet^\lambda(A) := H_\bullet(C_\bullet^\lambda(A))$$

称之为 A 的**循环同调**（*cyclic homology*）.

也就是说，有如下的交换图表：

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & C_{n+1} \arrow[r, "b'"] \arrow[d, "1-\lambda"] & C_n \arrow[r, "b'"] \arrow[d, "1-\lambda"] & C_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "1-\lambda"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & C_{n+1} \arrow[r, "b"] \arrow[d, two heads] & C_n \arrow[r, "b"] \arrow[d, two heads] & C_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, two heads] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & C_{n+1}^\lambda \arrow[r, "b^\lambda"] \arrow[d] & C_n^\lambda \arrow[r, "b^\lambda"] \arrow[d] & C_{n-1}^\lambda \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
& 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

此交换图表每一横行都为链复形，其中第三横行为 Connes 复形；每一列都是右短正合的。并且容易知道：Connes 复形的边缘算子 b^λ 正是 Hochschild 链复形的边缘算子 b 沿商映射 $C_\bullet(A) \twoheadrightarrow C_\bullet^\lambda(A)$ 的下降。

1.6 循环双复形 $CC_{\bullet\bullet}(A)$

引理 1.6.1. （平均算子）对于任意 K-代数 A，以及 $n \geq 0$，引入平均算子 $\mathcal{N}: C_n(A) \to C_n(A)$：

$$\mathcal{N} := 1 + \lambda + \lambda^2 + \cdots + \lambda^n$$

则此算子满足以下性质：

（1）$b'\mathcal{N} = \mathcal{N}b$

（2）$(1-\lambda)\mathcal{N} = \mathcal{N}(1-\lambda) = 0$. 此外，如果有理数域 $\mathbb{Q} \hookrightarrow K$，那么对于任意 $n \geq 0$，以下链复形是正合的：

$$\cdots \to C_n(A) \xrightarrow{\mathcal{N}} C_n(A) \xrightarrow{1-\lambda} C_n(A) \xrightarrow{\mathcal{N}} C_n(A) \xrightarrow{1-\lambda} C_n(A) \twoheadrightarrow C_n^{\lambda}(A) \to 0$$

证明. （1）任意固定 $n \geq 1$，为了区分算子在不同空间的作用，我们采用临时记号

$$\begin{cases} \lambda : C_n(A) \to C_n(A) \\ \overline{\lambda} : C_{n-1}(A) \to C_{n-1}(A) \end{cases} \qquad \begin{cases} \mathcal{N} := 1 + \lambda + \cdots + \lambda^n \\ \overline{\mathcal{N}} := 1 + \overline{\lambda} + \cdots + \overline{\lambda}^{n-1} \end{cases}$$

则在此记号下我们需要证 $b'\mathcal{N} = \overline{\mathcal{N}}b$.

定义缩并算子

$$\begin{array}{rcl} s : C_n(A) & \to & C_{n-1}(A) \\ a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n & \mapsto & (a_0 a_1) \otimes \cdots \otimes a_n \end{array}$$

则容易验证（稍微注意一下正负号，确实都是正号）

$$b = \sum_{k=0}^{n} \overline{\lambda}^k s \lambda^{-k} \qquad b' = \sum_{k=0}^{n-1} \overline{\lambda}^k s \lambda^{-k}$$

于是有

$$b'\mathcal{N} = \left(\sum_{k=0}^{n-1} \overline{\lambda}^k s \lambda^{-k} \right) \left(\sum_{l=0}^{n} \lambda^l \right) = \sum_{\substack{0 \leq k \leq n-1 \\ 0 \leq l \leq n}} \overline{\lambda}^k s \lambda^l$$

同理也有

$$\overline{\mathcal{N}} b = \sum_{\substack{0 \leq k \leq n-1 \\ 0 \leq l \leq n}} \overline{\lambda}^k s \lambda^l$$

从而 $b'\mathcal{N} = \overline{\mathcal{N}}b$.

（2）给定 $n \geq 0$，注意到 $\lambda^{n+1} = 1$，从而

$$(1-\lambda)\mathcal{N} = (1-\lambda)(1+\lambda+\cdots+\lambda^n) = 1-\lambda^{n+1} = 0$$

同理 $\mathcal{N}(1-\lambda) = 0$. 因此该图表是链复形，只需再验证正合性。

现在假设 $\mathbb{Q}$ 是 K 的子环。我们构造如下链同伦：

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & C_n(A) \arrow[r, "\mathcal{N}"] \arrow[d, "\mathrm{id}"] & C_n(A) \arrow[r, "1-\lambda"] \arrow[d, "\mathrm{id}"] \arrow[dl, "g"'] & C_n(A) \arrow[r, "\mathcal{N}"] \arrow[d, "\mathrm{id}"] \arrow[dl, "f"'] & C_n(A) \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{id}"] \arrow[dl, "g"'] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & C_n(A) \arrow[r, "\mathcal{N}"] & C_n(A) \arrow[r, "1-\lambda"] & C_n(A) \arrow[r, "\mathcal{N}"] & C_n(A) \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

其中 $f, g : C_n(A) \to C_n(A)$ 定义为

$$\begin{cases} f := \frac{1}{n+1}(\lambda^{n-1} + 2\lambda^{n-2} + 3\lambda^{n-3} + \cdots + n) \\ g := \frac{1}{n+1} \end{cases}$$

（利用了 $\mathbb{Q} \hookrightarrow K$）则容易验证

$$f(1-\lambda) + \mathcal{N}g = g\mathcal{N} + (1-\lambda)f = 1$$

从而证毕。 □

特别地，当 K 为域时（注意我们总假定 $\operatorname{char} K = 0$）成立正合性。链同伦 f, g 的构造来自于（关于变元 λ 的多项式的）欧几里得辗转相除法。

由此引理，我们可构造出如下的**循环双复形**（cyclic bicomplex），记为 $CC_{\bullet\bullet}(A)$：

$$\begin{tikzcd}
\vdots \arrow[d, "b"] & \vdots \arrow[d, "-b'"] & \vdots \arrow[d, "b"] & \vdots \arrow[d, "-b'"] & \\
C_2(A) \arrow[d, "b"] & C_2(A) \arrow[l, "1-\lambda"'] \arrow[d, "-b'"] & C_2(A) \arrow[l, "\mathcal{N}"'] \arrow[d, "b"] & C_2(A) \arrow[l, "1-\lambda"'] \arrow[d, "-b'"] & \cdots \arrow[l] \\
C_1(A) \arrow[d, "b"] & C_1(A) \arrow[l, "1-\lambda"'] \arrow[d, "-b'"] & C_1(A) \arrow[l, "\mathcal{N}"'] \arrow[d, "b"] & C_1(A) \arrow[l, "1-\lambda"'] \arrow[d, "-b'"] & \cdots \arrow[l] \\
C_0(A) & C_0(A) \arrow[l, "1-\lambda"'] & C_0(A) \arrow[l, "\mathcal{N}"'] & C_0(A) \arrow[l, "1-\lambda"'] & \cdots \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

其中对于任意 $p, q \geq 0$，$CC_{p,q}(A) = C_p(A)$ 为该图表的从下往上第 p 行，从左往右第 q 列的节点；此图表的偶数列与奇数列为 $(C_\bullet(A), b)$ 与 $(C_\bullet(A), -b')$ 交替。并且注意到，此图表不是交换的，而是对于其中每一个方框都满足**反交换性**。

我们回顾一些同调代数工具：

定义 1.6.2. （双复形的全复形）

对于任意的含幺交换环 K（这里暂时不必假定 $\operatorname{char} K = 0$），以及 K-模双复形 $(A_{\bullet\bullet}, \mathrm{d}, \partial)$：

$$\begin{tikzcd}
\vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \\
A_{2,0} \arrow[d, "\mathrm{d}_{2,0}"] & A_{2,1} \arrow[l, "\partial_{2,1}"'] \arrow[d, "\mathrm{d}_{2,1}"] & A_{2,2} \arrow[l, "\partial_{2,2}"'] \arrow[d, "\mathrm{d}_{2,2}"] & \cdots \arrow[l] \\
A_{1,0} \arrow[d, "\mathrm{d}_{1,0}"] & A_{1,1} \arrow[l, "\partial_{1,1}"'] \arrow[d, "\mathrm{d}_{1,1}"] & A_{1,2} \arrow[l, "\partial_{1,2}"'] \arrow[d, "\mathrm{d}_{1,2}"] & \cdots \arrow[l] \\
A_{0,0} & A_{0,1} \arrow[l, "\partial_{2,1}"'] & A_{0,2} \arrow[l, "\partial_{2,2}"'] & \cdots \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

即：

$$\begin{cases} \mathrm{d}_{p,q} : A_{p,q} \to A_{p-1,q} \\ \partial_{p,q} : A_{p,q} \to A_{p,q-1} \end{cases}$$

使得该图表每一行、每一列都是链复形，并且满足反交换关系

$$\partial_{p-1,q} \circ \mathrm{d}_{p,q} + \mathrm{d}_{p,q-1} \circ \partial_{p,q} = 0$$

则我们定义双复形 $A_{\bullet\bullet}$ 的**全复形**（*total complex*）$(\mathrm{Tot}_\bullet(A_{\bullet\bullet}), d)$ 如下：

$$\begin{cases} \mathrm{Tot}_n(A_{\bullet\bullet}) & := \bigoplus_{p+q=n} A_{p,q} \\ d_n & := \sum_{p+q=n} (\mathrm{d}_{p,q} + \partial_{p,q}) \end{cases}$$

对于两个双复形 $A_{\bullet\bullet}$ 与 $A'_{\bullet\bullet}$，我们可以去定义双复形之间的态射 $f_{\bullet\bullet} : A_{\bullet\bullet} \to A'_{\bullet\bullet}$，进而考虑双复形范畴。双复形的态射自然诱导了相应的全复形之间的链映射，也就是说 Tot 具有函子性。我们还有以下同调代数工具：

引理 1.6.3. 设 $f_{\bullet\bullet} : A_{\bullet\bullet} \to A'_{\bullet\bullet}$ 为双复形之间的态射。如果对于任意 $n \geq 0$，链映射

$$f_{n,\bullet} : A_{n,\bullet} \to A'_{n,\bullet}$$

为拟同构（*quasi-isomorphism*），（即它诱导的任意阶同调对象之间的态射均为同构），那么链映射

$$\mathrm{Tot}_\bullet(f_{\bullet\bullet}) : \mathrm{Tot}_\bullet(A_{\bullet\bullet}) \to \mathrm{Tot}_\bullet(A'_{\bullet\bullet})$$

也为拟同构。

证明. 同调代数工具，承认之。 □

我们回到循环双复形 $CC_{\bullet\bullet}(A)$. 由上述同调代数工具，我们可以给出循环同调 $H^\lambda_\bullet(A) := H_\bullet(C^\lambda_\bullet(A))$ 的另一种定义：

定理 1.6.4. 对于 K-代数 A，假设 $\mathbb{Q} \hookrightarrow K$，记

$$HC_\bullet(A) := H_\bullet(\mathrm{Tot}_\bullet(CC_{\bullet\bullet}(A)))$$

为 A 的循环双复形的全复形的同调，那么有自然的同构

$$HC_\bullet(A) \cong H^\lambda_\bullet(A)$$

证明. 对于循环双复形 $CC_{\bullet\bullet}(A)$，我们再考虑另一个双复形 $CC'_{\bullet\bullet}(A)$ 如下：

$$\begin{tikzcd}
\vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \\
C^\lambda_2(A) \arrow[d, "b^\lambda_2"] & 0 \arrow[l] \arrow[d] & 0 \arrow[l] \arrow[d] & 0 \arrow[l] \arrow[d] & \cdots \arrow[l] \\
C^\lambda_1(A) \arrow[d, "b^\lambda_1"] & 0 \arrow[l] \arrow[d] & 0 \arrow[l] \arrow[d] & 0 \arrow[l] \arrow[d] & \cdots \arrow[l] \\
C^\lambda_0(A) & 0 \arrow[l] & 0 \arrow[l] & 0 \arrow[l] & \cdots \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

考虑双复形之间的态射

$$f_{\bullet\bullet} : CC_{\bullet\bullet}(A) \to CC'_{\bullet\bullet}(A)$$

其中 $f_{n,0} : C_n(A) \to C^\lambda_n(A)$ 为商映射。由引理1.6.1 知 $CC_{\bullet\bullet}(A)$ 的每一行都是正合的，从而容易验证 $f_{\bullet\bullet}$ 满足引理 1.6.3 的使用条件，因此我们有同构

$$H_\bullet(\mathrm{Tot}_\bullet(CC_{\bullet\bullet}(A))) \cong H_\bullet(\mathrm{Tot}_\bullet(CC'_{\bullet\bullet}(A)))$$

上式左边，由定义，即为 $HC_\bullet(A)$；而再注意到 $\mathrm{Tot}_\bullet(CC'_{\bullet\bullet})$ 正是 Connes 复形 $C^\lambda_\bullet$，从而上式右边为循环同调 $H^\lambda_\bullet(A)$. □

也就是说，循环同调（Connes 复形的同调）自然同构于循环双复形的全复形的同调。

1.7 Connes 算子 $\mathcal{B}$

我们将给出循环同调的更多等价定义方式，并计算一些具体例子。本节均假定 $\mathbb{Q} \hookrightarrow K$（甚至直接把 K 当成特征零的域）。我们需要更多的同调代数工具：

引理 1.7.1. （杀掉可缩复形）

对于 K-模链复形

$$\cdots \to A_{n+1} \oplus B_{n+1} \xrightarrow{\mathrm{d}} A_n \oplus B_n \xrightarrow{\mathrm{d}} A_{n-1} \oplus B_{n-1} \to \cdots$$

其中

$$\mathrm{d} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

并且 $(B_\bullet, \delta)$ 是可缩链复形，其同伦逆

$$h : B_\bullet \to B_{\bullet+1}$$

使得 $h\delta + \delta h = 1$. 那么下述图表交换：

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & A_{n+1} \arrow[r, "\alpha-\beta h\gamma"] \arrow[d, "\varphi"] & A_n \arrow[r, "\alpha-\beta h\gamma"] \arrow[d, "\varphi"] & A_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "\varphi"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & A_{n+1} \oplus B_{n+1} \arrow[r, "\mathrm{d}"] & A_n \oplus B_n \arrow[r, "\mathrm{d}"] & A_{n-1} \oplus B_{n-1} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

并且此图表的每一行都为链复形，并且链映射

$$\varphi := \begin{pmatrix} 1 \\ -h\gamma \end{pmatrix}$$

为拟同构。

证明. 注意到 $\delta^2 = 0$，以及

$$0 = \mathrm{d}^2 = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} \alpha^2 + \beta\gamma & \alpha\beta + \beta\gamma \\ \gamma\alpha + \delta\gamma & \gamma\beta + \delta^2 \end{pmatrix}$$

从而我们有

$$\begin{cases} \alpha^2 &= -\beta\gamma \\ \alpha\beta &= -\beta\delta \\ \gamma\alpha &= -\delta\gamma \\ \gamma\beta &= 0 \end{cases}$$

再注意到 $h\delta + \delta h = 1$，直接计算验证可知 $\varphi_\bullet$ 的确为链复形之间的链映射。细节略。

再注意链映射

$$\varphi_\bullet : (A_\bullet, \alpha - \beta h \gamma) \to (A_\bullet \oplus B_\bullet, \mathrm{d})$$

为单射，并且其余核

$$\operatorname{coker} \varphi_\bullet \cong (B_\bullet, \delta)$$

是正合的，因此 $\varphi_\bullet$ 为拟同构。 □

这个引理的功能是，如果给定的链复形 $(A_\bullet \oplus B_\bullet, \mathrm{d})$ 当中“含有正合的部分”$(B_\bullet, \delta)$，那我们可以把这个“正合的部分”剔除掉，得到一个“不那么冗余”的链复形 $(A_\bullet, \alpha - \beta h \delta)$，并且此复形与原来的复形的各阶同调自然同构。

我们将此引理用于循环双复形 $CC_{\bullet\bullet}(A)$ 的全复形 $\mathrm{Tot}_\bullet(CC_{\bullet\bullet}(A))$ 上。回顾 $CC_{\bullet\bullet}(A)$ 为如下双复形：

$$\begin{tikzcd}
\vdots \arrow[d, "b"] & \vdots \arrow[d, "-b'"] & \vdots \arrow[d, "b"] & \vdots \arrow[d, "-b'"] & \\
C_2(A) \arrow[d, "b"] & C_2(A) \arrow[l, "1-\lambda"'] \arrow[d, "-b'"] & C_2(A) \arrow[l, "\mathcal{N}"'] \arrow[d, "b"] & C_2(A) \arrow[l, "1-\lambda"'] \arrow[d, "-b'"] & \cdots \arrow[l] \\
C_1(A) \arrow[d, "b"] & C_1(A) \arrow[l, "1-\lambda"'] \arrow[d, "-b'"] & C_1(A) \arrow[l, "\mathcal{N}"'] \arrow[d, "b"] & C_1(A) \arrow[l, "1-\lambda"'] \arrow[d, "-b'"] & \cdots \arrow[l] \\
C_0(A) & C_0(A) \arrow[l, "1-\lambda"'] & C_0(A) \arrow[l, "\mathcal{N}"'] & C_0(A) \arrow[l, "1-\lambda"'] & \cdots \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

注意到该双复形的第偶数列为 Hochschild 链复形（链映射 b），第奇数列为 Bar-复形（链映射 $-b'$）. 注意 Bar-复形是正合的，并且有同伦逆

$$\begin{aligned} h : C_n(A) &\to C_{n+1}(A) && (1.1)\\ a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n &\mapsto 1 \otimes a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n && (1.2)\end{aligned}$$

使得 $b'h + hb' = 1$.

现在，注意到

$$\begin{aligned}\mathrm{Tot}_n(CC_{\bullet\bullet}(A)) &= \left(\bigoplus_{\substack{p+q=n \\ q\ \text{为偶数}}} CC_{p,q}(A) \right) \oplus \left(\bigoplus_{\substack{p+q=n \\ q\ \text{为奇数}}} CC_{p,q}(A) \right) \\ &=: X_n \oplus Y_n\end{aligned}$$

也就是说，我们把循环双复形 $CC_{\bullet\bullet}(A)$ 的全复形 $(\mathrm{Tot}_\bullet(CC_{\bullet\bullet}(A)), \mathrm{d})$ 写为:

$$\cdots \to X_{n+1} \oplus Y_{n+1} \xrightarrow{\mathrm{d}} X_n \oplus Y_n \xrightarrow{\mathrm{d}} X_{n-1} \oplus Y_{n-1} \to \cdots$$

边缘算子矩阵 $\mathrm{d} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ 留给读者。但是要注意 $(Y_\bullet, \delta)$ 的正合性是由 Bar-复形 $(C_\bullet(A), -b')$ 的正合性所诱导的；δ 也存在同伦逆，仍记为 h.

综上，对 $\mathrm{Tot}_\bullet(CC_{\bullet\bullet}(A))$ 使用引理1.7.1，我们得到以下结果：

性质 1.7.2. 对于 K-代数 A，考虑以下双复形 $\mathcal{B}_{\bullet\bullet}(A)$:

$$\begin{tikzcd}
\vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] \\
A^{\otimes 3} \arrow[d, "b"] & A^{\otimes 2} \arrow[l, "\mathcal{B}"'] \arrow[d, "b"] & A \arrow[l, "\mathcal{B}"'] \\
A^{\otimes 2} \arrow[d, "b"] & A \arrow[l, "\mathcal{B}"'] & \\
A & &
\end{tikzcd}$$

此图表的最左下角为第 0 行 0 列，右下角空白处都为 0，具体地，

$$\mathcal{B}_{p,q}(A) = \begin{cases} CC_{p-q,2q}(A) & p \geq q \\ 0 & p < q \end{cases}$$

（也就是说，$\mathcal{B}_{\bullet\bullet}$ 的结点是由将循环双复形 $CC_{\bullet\bullet}(A)$ 的第奇数列（*Bar*-复形）都删掉，再将原来第 $2l$ 列整体向左、上各平移 l 格所得）其中 ***Connes* 算子**$\mathcal{B} : C_n(A) \to C_{n+1}(A)$ 定义为以下的复合：

$$\begin{tikzcd}
C_{n+1}(A) \arrow[d, "b"] & C_{n+1}(A) \arrow[l, "1-\lambda"'] \arrow[d, shift left, "-b'"] & C_{n+1}(A) \arrow[l, "\mathcal{N}"'] \arrow[d, "b"] \\
C_n(A) & C_n(A) \arrow[l, "1-\lambda"'] \arrow[u, bend left, "h"] & C_n(A) \arrow[l, bend left, "\mathcal{N}"']
\end{tikzcd}$$

$$\mathcal{B} := (1-\lambda)h\mathcal{N}$$

那么，存在自然的双复形单同态

$$\mathcal{B}_{\bullet\bullet}(A) \hookrightarrow CC_{\bullet\bullet}(A)$$

并且其诱导的全复形的链映射

$$\mathrm{Tot}_\bullet(\mathcal{B}_{\bullet\bullet}(A)) \hookrightarrow \mathrm{Tot}_\bullet(CC_{\bullet\bullet}(A))$$

为拟同构。

证明. 只需注意到

$$\mathrm{Tot}_n(\mathcal{B}_{\bullet\bullet}) = \left(\bigoplus_{\substack{p+q=n \\ q\text{ 为偶数}}} CC_{p,q}(A) \right) \hookrightarrow \mathrm{Tot}_n(CC_{\bullet\bullet}(A))$$

直接使用引理1.7.1，细节从略。但是要验证 $\mathcal{B}_{\bullet\bullet}(A)$ 的确是双复形，即需要验证反交换关系

$$\mathcal{B} \circ b + b \circ \mathcal{B}$$

而这是容易的，验证如下：

$$\begin{aligned} \mathcal{B} \circ b &= (1-\lambda)h\mathcal{N}b = (1-\lambda)hb'\mathcal{N} \\ &= (1-\lambda)(1-b'h)\mathcal{N} = (1-\lambda)\mathcal{N} - (1-\lambda)b'h\mathcal{N} \\ &= -b(1-\lambda)h\mathcal{N} = -b \circ \mathcal{B} \end{aligned}$$

从而证毕。 □

于是我们得到循环同调的又一等价定义：

$$H_\bullet^\lambda(A) \cong H_\bullet(\mathrm{Tot}_\bullet(\mathcal{B}_{\bullet\bullet}))$$

我们可以将链复形 $\mathrm{Tot}_\bullet(\mathcal{B}_{\bullet\bullet})$ 适当改写，使得形式更加美观：

性质 1.7.3. 对于 K-代数 A，以及形式变元 u，考虑如下链复形：

$$(CC_\bullet(A), b + u\mathcal{B})$$

其中

$$CC_n(A) := (C_\bullet(A)[u^{-1}])_n := \bigoplus_{k=0}^{\infty} u^{-k} C_{n-2k}(A)$$

（注意这是有限直和）换句话说，我们给定以下分次

$$\deg(b) = -1, \quad \deg(B) = 1, \quad \deg(u) = -2$$

那么此链复形的同调自然同构于循环同调：

$$H_\bullet(CC_\bullet(A), b + uB) \cong H_\bullet^\lambda(A)$$

证明. 这个几乎显然。注意到

$$\mathrm{Tot}_n(\mathcal{B}_{\bullet\bullet}(A)) = \bigoplus_{k=0}^{\infty} \mathcal{B}_{n-k,k}(A) = \bigoplus_{k=0}^{\infty} C_{n-2k}(A)$$

$$CC_n(A) \quad = \quad \bigoplus_{k=0}^{\infty} u^{-k} C_{n-2k}(A)$$

于是有自然的链复形同构

$$\begin{aligned} \mathrm{Tot}_\bullet(\mathcal{B}_{\bullet\bullet}(A)) &\to CC_\bullet(A) \\ \mathcal{B}_{n-k,k}(A) &\mapsto u^{-k}C_{n-2k}(A) \end{aligned}$$

容易验证此对应也保持相应的边缘算子。证毕。 □

注意，我们还可以考虑 $(CC_\bullet(A), b)$，它与 $(CC_\bullet(A), b + u\mathcal{B})$ 具有不同的边缘算子：前者的同调我们早已知道是 Hochschild 同调，而后者的同调为循环同调。

注记 1.7.4. （复几何的背景）

对于复流形 X，它作为光滑流形，有外微分算子 d；再注意到它的复结构，有算子 $\bar{\partial}$——前者代表拓扑，而后代表复几何。它们之间有关系

$$\mathrm{d} = \bar{\partial} + \partial$$

并且满足

$$\partial^2 = \bar{\partial}^2 = 0 \quad \partial\bar{\partial} + \bar{\partial}\partial = 0$$

我们考虑以下“拓扑与复几何之间的桥梁”：

$$\mathrm{d}_u := \bar{\partial} + u\partial$$

称此算子为霍奇滤链（*Hodge filtration*），其中 $0 \le u \le 1$. 注意 d_u 满足稳定性条件 $\mathrm{d}_u^2 = 0$，即 $\bar{\partial}$ 与 d 的“过渡”的任何一个“中间状态”都仍为外微分算子。

所以，似乎可以如下粗暴地对应？

复几何	非交换几何
复流形 X	K-代数 A
$\Omega_X^\bullet$	$CC_\bullet(A)$
$\bar{\partial}$	b
∂	$u\mathcal{B}$
d	$b + u\mathcal{B}$
$H_{\mathrm{DR}}^\bullet(X)$	$H_\bullet^\lambda(A)$
$H_{\bar{\partial}}^\bullet(X)$	$\mathrm{HH}_\bullet(A)$

这格表格似乎不太对吧，应该是 Hochschild 同调 $\mathrm{HH}_\bullet(A)$ 对应于“非交换版本的”微分形式 $\Omega^\bullet$，从之前的例子能看出来。

定义 1.7.5. （周期循环同调与负循环同调）对于 K-代数 A，与 $CC_\bullet(A)$ 类似，我们还可以去定义以下：

（*1*）定义**周期循环复形**（*periodic cyclic complex*）

$$CC_\bullet^{\text{per}}(A) := (C_\bullet(A)((u)), b + u\mathcal{B})$$

该复形的同调

$$\text{HC}_\bullet^{\text{per}}(A) := H_\bullet(CC_\bullet^{\text{per}}(A), b + uB)$$

称之为**周期循环同调**（*periodic cyclic homology*）。

（*2*）定义**负循环复形**（*negative cyclic complex*）

$$CC_\bullet^-(A) := (C_\bullet(A)[\![u]\!], b + uB)$$

该复形的同调

$$\text{HC}_\bullet^-(A) := H_\bullet(CC_\bullet^-(A), b + uB)$$

称之为**负循环同调**（*negative cyclic homology*）。

注意上述定义当中的“$[\![u]\!]$”是指关于形式变元 u 的形式幂级数，而“$((u))$”为关于 u 的 Laurent 级数。由定义，显然有

$$CC_\bullet(A) \cong CC_\bullet^{\text{per}}(A)/CC_\bullet^-(A)$$

至此，我们定义出了 $CC_\bullet(A), CC_\bullet^{\text{per}}(A)$ 以及 $CC_\bullet^-(A)$。事实上，这三者都有深刻的物理背景，见下表：

非交换几何中的对象	几何、物理背景	几何、物理背景
$CC_\bullet^{per}(A)$	open-closed string states	de-Rham cohomology
$CC_\bullet(A)$	open string states	gauge theory
$CC_\bullet^-(A)$	closed string states	gravity

其中特别注意，周期循环同调是 de-Rham 上同调的“非交换版本”，我们将在后文举例说明。

1.8 循环同调的计算

回顾约化 Bar-复形 $\overline{B}_\bullet(A)$ （见定义1.4.1），我们可以类似地通过约化 Bar-复形来构造类似的“循环双复形”：在 $K \hookrightarrow A$ 的条件下，考虑约化 Hochschild 链复形

$$\overline{C}_n(A) := \overline{C}_n(A, A) \cong A \otimes \overline{A}^{\otimes n}$$

类似去定义循环算子 $\lambda : \overline{C}_n(A) \to \overline{C}_n(A)$，其显式表达式与非约化情形完全相同；以及平均算子

$$\mathcal{N} : \overline{C}_n(A, A) \cong A \otimes \overline{A}^{\otimes n}$$

可惜是错的，类似于此前的 $\lambda, \mathcal{N}$ 并不良定。比如

$$0 = \lambda(0) = \lambda(a_0 \otimes \overline{1}) = -1 \otimes \overline{\lambda} \neq 0$$

但是，Connes 算子 $\mathcal{B} : \overline{C}_n(A) \to \overline{C}_{n+1}(A)$ 是有意义的，运算规则与非约化情形完全相同，具体地，

$$\begin{aligned}
\mathcal{B}(a_0 \otimes \overline{a_1} \otimes \cdots \otimes \overline{a_n}) &= \widetilde{(1-\lambda)} h \widetilde{\mathcal{N}}(a_0 \otimes \overline{a_1} \otimes \cdots \otimes \overline{a_n}) \\
&= \widetilde{(1-\lambda)} h \left(\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n(n+1-k)} a_k \otimes \overline{a_{k+1}} \otimes \cdots \otimes \overline{a_n} \otimes \overline{a_0} \otimes \cdots \otimes \overline{a_{k-1}} \right) \\
&= \widetilde{(1-\lambda)} \left(\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n(n+1-k)} 1 \otimes \overline{a_k} \otimes \overline{a_{k+1}} \otimes \cdots \otimes \overline{a_n} \otimes \overline{a_0} \otimes \cdots \otimes \overline{a_{k-1}} \right) \\
&= \sum_{k=0}^{n} (-1)^{nk} 1 \otimes \overline{a_k} \otimes \overline{a_{k+1}} \otimes \cdots \otimes \overline{a_n} \otimes \overline{a_0} \otimes \cdots \otimes \overline{a_{k-1}}
\end{aligned}$$

其中 $a_{-1} := a_n$.

性质 1.8.1. 对于 K-代数 A，假设 $K \hookrightarrow A$，则有如下双复形 $\overline{\mathcal{B}}_{\bullet\bullet}(A)$：

$$\begin{tikzcd}
\vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] \\
A \otimes \overline{A}^{\otimes 2} \arrow[d, "b"] & A \otimes \overline{A} \arrow[l, "\mathcal{B}"'] \arrow[d, "b"] & A \arrow[l, "\mathcal{B}"'] \\
A \otimes \overline{A} \arrow[d, "b"] & A \arrow[l, "\mathcal{B}"'] & \\
A & &
\end{tikzcd}$$

记此双复形的全复形为 $\overline{CC}_\bullet(A) := \mathrm{Tot}_\bullet(\overline{\mathcal{B}}_{\bullet\bullet}(A))$，则有自然同构

$$H_\bullet^\lambda(A) \cong H_\bullet(\overline{CC}_\bullet(A))$$

也就是说，在 $K \hookrightarrow A$ 的条件下，我们可以用约化版本的双复形来计算循环同调。

证明. 考虑商映射 $\pi_\bullet : C_\bullet(A,A) \twoheadrightarrow \overline{C}_\bullet(A,A)$ 自然诱导的双复形同态

$$\pi_{\bullet\bullet} : \mathcal{B}_{\bullet\bullet}(A) \twoheadrightarrow \overline{\mathcal{B}}_{\bullet\bullet}(A)$$

注意 $\pi_{\bullet\bullet}$ 限制在双复形的每一列上，都为相应链复形的拟同构（这里使用了引理 1.4.3），因此根据引理1.6.3，其诱导的全复形之间的同态

$$\mathrm{Tot}_\bullet(\mathcal{B}_{\bullet\bullet}(A)) \twoheadrightarrow \mathrm{Tot}_\bullet(\overline{\mathcal{B}}_{\bullet\bullet}(A))$$

为拟同构。再注意性质 1.7.2，上式左边的同调即为循环同调，从而证毕。 □

与非约化情形类似，我们也可以

$$\mathrm{Tot}_\bullet(\overline{\mathcal{B}}_{\bullet\bullet}(A)) \cong \overline{C}_\bullet(A)[u^{-1}], b + u\mathcal{B})$$

甚至去定义“约化周期循环同调”、“约化负循环同调”，此处不再赘述。

本节接下来给出循环同调的一些典型的计算实例。

例子 1.8.2. 对于环 K，设 K-代数 $A = K$，那么其循环同调

$$H_n^\lambda(K) \cong \begin{cases} K & n \text{ 为偶数} \\ 0 & n \text{ 为奇数} \end{cases}$$

我们早已具体计算出 $K[x^1, x^2, ..., x^n]$ 的 Hochschild 同调，特别地 $\mathrm{HH}_\bullet(K)$ 只有第零个是非平凡的（同构于 K），其余都为 0. 不过，$H_\bullet^\lambda(K)$ 与 $\mathrm{HH}_\bullet(K)$ 并不相同。

证明. 我们采用最简便的方法去计算，当然采用约化循环双复形啦。在本例中，

$$\overline{A} = K/K = 0$$

从而双复形 $\overline{\mathcal{B}}_{\bullet\bullet}(K)$ 为以下：

$$\begin{tikzcd}
\vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] \\
0 & 0 \arrow[l] \arrow[d] & 0 \arrow[l] \arrow[d] & K \arrow[l] \\
0 \arrow[from=u] \arrow[d] & 0 \arrow[l] \arrow[d] & K \arrow[l] & \\
0 & K \arrow[l] & & \\
K \arrow[from=u] & & &
\end{tikzcd}$$

其全复形 $\overline{CC}_\bullet(K)$ 为以下

$$\cdots \to 0 \xrightarrow{0} K \xrightarrow{0} 0 \xrightarrow{0} K$$

从而易求循环同调。 □

当然我们也可以按照循环同调最原始的定义去计算，其实也不难算，如下：

另一种计算方式. 直接计算。此时，

$$C_n(K) \cong K^{\otimes n+1} \cong K$$

我们记其生成元

$$\varepsilon_n := \underbrace{1 \otimes 1 \otimes \cdots \otimes 1}_{n+1\text{个}} \in C_n(K)$$

容易验证算子 b 与算子 λ 的作用

$$b(\varepsilon_n) = \begin{cases} \varepsilon_{n-1} & n \text{ 为偶数} \\ 0 & n \text{ 为奇数} \end{cases} \qquad \lambda(\varepsilon_n) = \begin{cases} \varepsilon_n & n \text{ 为偶数} \\ -\varepsilon_n & n \text{ 为奇数} \end{cases}$$

因此，易知 Connes 复形 $C^\lambda_\bullet(K) := C_\bullet K/(1-\lambda)$ 具体如下：

$$\cdots \to 0 \xrightarrow{0} K \xrightarrow{0} 0 \xrightarrow{0} K$$

对它取同调，即得循环同调。 □

接下来，考虑 $A = K[x^1, x^2, ..., x^n]$ 为 n 元多项式环的情形，我们企图取计算 A 的循环同调。注意在之前我们已经使用 Koszul 复形求出了 $A = K[x^1, x^2, ..., x^n]$ 的 Hochschild 同调。

引理 1.8.3. 设 $A = K[x^1, x^2, ..., x^n]$ 为 n 元多项式环，考虑微分形式代数 $\Omega^\bullet_A := K[x^1, ..., x^n; \mathrm{d}x^1, ...\mathrm{d}x^n]$，注意 $\Omega^\bullet_A$ 上有外积运算 $\wedge$ 与外微分运算 d. 考虑以下 K-模同态

$$\begin{array}{rcl} \Phi : \overline{C}_p(A) & \to & \Omega^p_A \\ a_0 \otimes \overline{a_1} \otimes \cdots \otimes \overline{a_p} & \mapsto & \dfrac{1}{p!} a_0 \mathrm{d}a_1 \wedge \mathrm{d}a_2 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}a_p \end{array}$$

则 Φ 是良定的，并且成立：

$$\begin{cases} \Phi \circ b = 0 \\ \Phi \circ \mathcal{B} = \mathrm{d} \circ \Phi \end{cases}$$

其中 $b : \overline{C}_p(A) \to \overline{C}_{p-1}(A)$ 为约化 *Hochschild* 复形的边缘算子，$\mathcal{B} : \overline{C}_{p-1}(A) \to \overline{C}_p(A)$ 为约化的 *Connes* 算子。

证明. Φ 的良定性，即 $\overline{A}$ 中元素与代表元选取无关。而此代表元选取至多相差“常数项”（即 K 中元素），它在外微分 d 的作用下为零。因此 Φ 良定。

我们来验证 $\Phi \circ b = 0$. 暴力验证如下：

$$\Phi \circ b(a_0 \otimes \overline{a_1} \otimes \cdots \otimes \overline{a_n})$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{p!}\Bigg(a_0a_1\mathrm{d}a_2\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}a_p+\sum_{k=1}^{p-1}(-1)^k a_0\mathrm{d}a_1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}(a_ka_{k+1})\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}a_p \\
&\quad +(-1)^p a_0a_p\mathrm{d}a_1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}a_{p-1}\Bigg) \\
&= \frac{1}{p!}\Bigg(a_0a_1\mathrm{d}a_2\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}a_p+\sum_{k=1}^{p-1}(-1)^k a_0a_k\mathrm{d}a_1\wedge\cdots\wedge\widehat{\mathrm{d}a_k}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}a_p \\
&\quad +\sum_{k=1}^{p-1}(-1)^k a_0a_{k+1}\mathrm{d}a_1\wedge\cdots\wedge\widehat{\mathrm{d}a_{k+1}}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}a_p+(-1)^p a_0a_p\mathrm{d}a_1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}a_{p-1}\Bigg) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

第二个等式 $\Phi\circ\mathcal{B}=\mathrm{d}\circ\Phi$ 也容易直接验证：一方面，

$$
\begin{aligned}
&\Phi\circ\mathcal{B}(a_0\otimes\overline{a_1}\otimes\cdots\otimes\overline{a_n}) \\
=\;& \sum_{k=0}^{p}\frac{(-1)^{pk}}{(p+1)!}\Big(\mathrm{d}a_k\wedge\mathrm{d}a_{k+1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}a_p\Big)\wedge\Big(\mathrm{d}a_0\wedge\mathrm{d}a_1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}a_{k-1}\Big) \\
=\;& \frac{1}{p!}\mathrm{d}a_0\wedge\mathrm{d}a_1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}a_n
\end{aligned}
$$

而另一方面，

$$
\mathrm{d}\circ\Phi(a_0\otimes\overline{a_1}\otimes\cdots\otimes\overline{a_p})=\frac{1}{p!}\mathrm{d}(a_0\mathrm{d}a_1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}a_p)=\frac{1}{p!}\mathrm{d}a_0\wedge\mathrm{d}a_1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}a_p
$$

从而得证。 □

由此引理，我们即可去计算 $A:=K[x^1,x^2,...,x^n]$ 的循环同调。

性质 1.8.4. 对于 $A:=K[x^1,x^2,...,x^n]$，则其循环同调

$$
H_n^{\lambda}(A)\cong\begin{cases}(\Omega_A^n/\mathrm{d}\Omega_A^{n-1})\oplus K & n\ \text{为偶数}\\ \Omega_A^n/\mathrm{d}\Omega_A^{n-1} & n\ \text{为奇数}\end{cases}
$$

证明. 事实上，刚才的引理 1.8.3 表明，Φ 诱导以下两个双复形之间的态射：

$$
\begin{tikzcd}
\vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] \\
\overline{C}_2(A) \arrow[d, "b"] & \overline{C}_1(A) \arrow[l, "\mathcal{B}"'] \arrow[d, "b"] & \overline{C}_0(A) \arrow[l, "\mathcal{B}"'] \\
\overline{C}_1(A) \arrow[d, "b"] & \overline{C}_0(A) \arrow[l, "\mathcal{B}"'] & \\
\overline{C}_0(A) & &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] \\
\Omega_A^2 \arrow[d, "0"] & \Omega_A^1 \arrow[l, "\mathrm{d}"'] \arrow[d, "0"] & \Omega_A^0 \arrow[l, "\mathrm{d}"'] \\
\Omega_A^1 \arrow[d, "0"] & \Omega_A^0 \arrow[l, "\mathrm{d}"'] & \\
\Omega_A^0 & &
\end{tikzcd}
$$

（按村儿里的规矩，此处应该有立方交换图）

其中左边为 $\overline{\mathcal{B}}_{\bullet\bullet}(A)$，而右边的每一行均为 de-Rham 上链复形，每一列的边缘算子都为零。注意到 Φ 是满射，以及我们早已用 Koszul 复形得到的

$$H_n(\overline{C}_\bullet(A)) \cong \mathrm{HH}_n(A) \cong \Omega_A^n \cong H_n(\Omega_A^\bullet, 0)$$

从而双复形同态 Φ 限制在每一列上都为拟同构，于是由引理 1.6.3，立刻知道

$$\Phi : \mathrm{Tot}_\bullet(\overline{\mathcal{B}}_{\bullet\bullet}(A), b, \mathcal{B}) \to \mathrm{Tot}_\bullet(\Omega_A^\bullet, 0, \mathrm{d})$$

为拟同构。上式左边的同调即为 A 的循环同调，而右边的同调可以直接计算。只需要注意到（Poincare 引理）de-Rham 复形

$$\cdots \xrightarrow{\mathrm{d}} \Omega^\bullet(A) \xrightarrow{\mathrm{d}} \Omega^\bullet(A) \xrightarrow{\mathrm{d}} \Omega^\bullet(A) \to 0$$

的（上）同调满足

$$H^n(\Omega_A^\bullet, \mathrm{d}) = \begin{cases} K & n = 0 \\ 0 & n > 0 \end{cases}$$

因此容易计算出

$$H_n^\lambda(A) \cong \begin{cases} (\Omega_A^n / \mathrm{d}\Omega_A^{n-1}) \oplus K & n \text{ 为偶数} \\ \Omega_A^n / \mathrm{d}\Omega_A^{n-1} & n \text{ 为奇数} \end{cases}$$

$\square$

注记 1.8.5. 容易知道，*Connes* 算子

$$\mathcal{B} : \overline{C}_n(A) \to \overline{C}_{n+1}(A)$$

在 $\ker b$ 上的限制，可以下降为 *Hochschild* 同调之间的同态

$$\mathcal{B} : \mathrm{HH}_n(A) \to \mathrm{HH}_{n+1}(A)$$

Hochschild 同调扮演的角色相当于微分形式，而此时 Connes 算子扮演的则是外微分。

注记 1.8.6. 双复形满同态

$$\Phi : (\overline{\mathcal{B}}_{\bullet\bullet}(A), b, \mathcal{B}) \twoheadrightarrow (\Omega_A^\bullet, 0, \mathrm{d})$$

其实是可裂（*split*）的。具体地，存在双复形同态

$$\begin{aligned} \eta : \Omega^\bullet(A) &\to \overline{C}_\bullet(A) \\ a_0\mathrm{d}a_1 \wedge \mathrm{d}a_2 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}a_p &\mapsto \sum_{\sigma \in S_p} (-1)^{\operatorname{sgn}\sigma} a_0 \otimes a_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes a_{\sigma(p)} \end{aligned}$$

使得 $\Phi \circ \eta = \mathrm{id}$.

容易验证（简单的组合技巧）η 的确诱导了双复形同态

$$\eta : (\Omega_A^\bullet, 0, \mathrm{d}) \to (\overline{\mathcal{B}}_{\bullet\bullet}(A), b, \mathcal{B})$$

1.9 循环上同调

本章最后，简单介绍一下循环上同调（Cyclic cohomology）。对于双 A-模 M，回顾我们之前已经介绍的 Hochschild 上链复形

$$C^n(A, M) := \mathrm{Hom}(A^{\otimes n}, A)$$

特别地，当 $M = A$ 时，我们给出以下记号:

记号 1.9.1. 对于 K-代数 A，以及 $n \geq 0$，我们记 *Hochschild* 上链复形

$$C^n(A) := C^n(A, A) \cong \mathrm{Hom}(A^{\otimes n}, A) \cong \mathrm{Hom}(A^{\otimes n+1}, K)$$

并且将该 *Hochschild* 上链复形的微分算子记为 b^*.

我们此前考虑同构 $C_n(A) \cong A^{\otimes n+1}$，而 Hochschild 上链复形 $C^n(A) \cong \mathrm{Hom}(A^{\otimes n+1}, K)$ 恰为其对偶；微分算子 b^* 的作用即为 b 的对偶：即对任意 $f \in C^n(A) \cong \mathrm{Hom}(A^{\otimes n+1}, K)$ 以及 $\omega \in A^{\otimes n+2} \cong C_{n+1}(A)$，成立

$$(b^* f)(\omega) = f(b(\omega))$$

与循环余不变量对偶，我们可以谈论循环不变量：

定义 1.9.2. （循环不变量）

对于 $f \in C^n(A)$，称 f 为循环不变量（*cyclic invariant*），如果对任意的 $a_0, ..., a_n \in A$，成立

$$f(a_0, a_1, ..., a_n) = (-1)^n f(a_n, a_0, ..., a_{n-1})$$

记 $C^n(A)$ 当中的循环不变量之全体为 $C^n_\lambda(A)$.

容易验证 $b^*(C^n_\lambda(A)) \subseteq C^{n+1}_\lambda(A)$，从而 $(C^\bullet_\lambda(A), b^*)$ 为 $(C^\bullet(A), b^*)$ 的子复形。（不必暴力验证了，由循环余不变量对偶过去就行）看图说话即可：

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & C_n(A) \arrow[r, "b'"] \arrow[d, "1-\lambda"] & C_{n-1}(A) \arrow[r] \arrow[d, "1-\lambda"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & C_n(A) \arrow[r, "b"] \arrow[d, two heads] & C_{n-1}(A) \arrow[r] \arrow[d, two heads] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & C^\lambda_n(A) \arrow[r] \arrow[d] & C^\lambda_{n-1}(A) \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
& 0 & 0 &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\cdots & C^n(A) \arrow[l] & C^{n-1}(A) \arrow[l, "b'^*"'] & \cdots \arrow[l] \\
\cdots & C^n(A) \arrow[l] \arrow[u, "1-\lambda^*"] & C^{n-1}(A) \arrow[l, "b^*"] \arrow[u, "1-\lambda^*"] & \cdots \arrow[l] \\
\cdots & C^n_\lambda(A) \arrow[l] \arrow[u, hook] & C^{n-1}_\lambda(A) \arrow[l] \arrow[u, hook] & \cdots \arrow[l] \\
& 0 \arrow[u] & 0 \arrow[u] &
\end{tikzcd}$$

左图我们早已熟悉，注意它的每一列都是右正合的。将反变左正合函子 $\mathrm{Hom}(-, K)$ 作用于左图即得到右图，右图的每一列都是左正合的。

定义 1.9.3. （循环上同调）对于 K-代数 A 定义 A 的**循环上同调**（*cyclic cohomology*）

$$H^\bullet_\lambda(A) := \mathrm{HC}^\bullet(A) := H^\bullet(C^\bullet_\lambda(A), d^*)$$

作为例子，我们具体计算一下第零个循环上同调。

例子 1.9.4. 对于 K-代数 A，则有

$$H^0_\lambda(A) = \{f \in \mathrm{Hom}(A, K) | \forall x, y \in A, f(xy) = f(yx)\}$$

证明. 直接计算即可。只需考虑 Hochschild 上链复形

$$0 \to C^0_\lambda(A) \xrightarrow{b^*} C^1_\lambda(A) \xrightarrow{b^*} C^2_\lambda(A) \to \cdots$$

易知 $C^0_\lambda(A) = C^0(A) = \mathrm{Hom}(A, K)$，从而

$$H^0_\lambda(A) = \ker(b^* : C^0(A) \to C^1(A))$$

对于 $f \in \mathrm{Hom}(A,K)$，若 $b^*f=0$，则对于任意 $x,y \in A$，有

$$0=(b^*f)(x,y)=f(b(x\otimes y))=f(xy-yx)=f(xy)-f(yx)$$

从而可知

$$H^0_\lambda(A)=\{f\in \mathrm{Hom}(A,K)|\forall x,y\in A, f(xy)=f(yx)\}$$

$\square$

像 $H^0_\lambda(A)$ 当中的线性算子那样，满足

$$f(xy)=f(yx)\quad(\forall x,y\in A)$$

的线性算子称之为**迹算子**。

高阶的循环上同调可被认为是“导出的”迹算子。

第 2 章　乘积

2.1　分次模与 Koszul 符号法则

本节我们集中起来澄清一些关于分次模、分次代数的概念，并且力图阐明分次代数中出现的正负号。这里的“分次”如不加说明，指的都是 $\mathbb{Z}$-分次。

首先我们考虑分次 K-模。

定义 2.1.1. （分次 K-模范畴）

（*1*）称 K-模 M 为（$\mathbb{Z}$-）**分次 K-模**（*graded K-module*），若 M 具有如下分次结构：

$$M = \bigoplus_{k\in\mathbb{Z}} M_k$$

（*2*）若 M,N 为分次 K-模，称 K-模同态 $f: M \to N$ 为次数为 d 的**齐次 K-模同态**，若对于任意 $n \in \mathbb{Z}$，成立

$$f(M_n) \subseteq N_{n+d}$$

对于分次代数，我们可以定义**齐次元**，以及齐次元的**次数**，不再赘述。对于齐次元 $a \in A$，将 a 的次数记为 $\deg a$，或者简记为 $|a|$.

平凡的例子：通常的 K-模自然有分次 K-模结构——只需将该模中的任何元素都认为是 0 次齐次元。

我们还可以谈论以分次 K-模为对象的范畴：

记号 2.1.2. （分次 K-模范畴）对于分次 K-模 M,N，对任意 $d \in \mathbb{Z}$，记

$$\mathrm{Hom}(M,N)_d := \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \mathrm{Hom}(M_n, N_{n+d})$$

即次数为 d 的分次 K 模同态之全体。再记

$$\mathrm{Hom}(M,N) := \bigoplus_{d\in\mathbb{Z}} \mathrm{Hom}(M,N)_d$$

称这里面的元素为分次 K-模同态。

我们考虑如下分次 K-模范畴，记为 $\mathsf{Mod}_K^{\mathbb{Z}}$：

（1）Obj = 全体分次 K-模；

（2）$\mathrm{Mor}(M,N) = \mathrm{Hom}(M,N)$ 为分次 K-模同态。

注意对任何分次 K-模 M,N，$\mathrm{Hom}(M,N)$ 自然有分次 K-模结构，其中的 d 次齐次元即为 M 到 N 的次数为 d 的齐次同态。

对于两个分次 K-模，它们作为 K-模的张量积，也有自然的分次结构：

定义 2.1.3. （分次 K-模的张量积）对于分次 K-模 M,N，则张量积 $M\otimes N$ 自然有如下分次结构：

$$M\otimes N = \bigoplus_{k\in\mathbb{Z}} (M\otimes N)_k$$

其中

$$(M\otimes N)_k := \bigoplus_{\substack{p,q\in\mathbb{Z}\\ p+q=k}} M_p\otimes N_q$$

容易验证这给出了 $M\otimes N$ 的分次 K-模结构。

定义 2.1.4. 对于分次 K-模 M,N，定义如下分次 K-模同态：

$$\begin{aligned} \tau: M\otimes N &\to N\otimes M \\ x\otimes y &\mapsto (-1)^{\deg x \deg y} y\otimes x \end{aligned}$$

其中 x,y 分别为 M,N 中的任意的齐次元。

这是一个次数为 0 的齐次 K-模同构，称之为**分次对合自同构**。注意这里的正负号。

记号 2.1.5. （*Kuszul* 符号法则）

设 M,M',N,N' 均为分次 K-模，则自然有如下的分次 K-模同态：

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}(M,N)\otimes\mathrm{Hom}(M',N') &\to \mathrm{Hom}(M\otimes M', N\otimes N') \\ (f\otimes g)(m\otimes m') &:= (-1)^{\deg g \deg m} f(m)\otimes g(m') \end{aligned}$$

其中 f,g,m,m' 分别为 $\mathrm{Hom}(M,N), \mathrm{Hom}(M',N'), M, M'$ 当中的任意齐次元。

依然注意正负号。以后我们总是默认 $f \otimes g$ 在 $m \otimes m'$ 上如此作用。

我们还可以定义分次 K-模的对偶模（与通常的对偶模仍然在正负号上有些区别）：

定义 2.1.6. （分次对偶模）对于分次 K-模 M，定义

$$M^* := \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} M_n^*$$

其中

$$M_n^* := \mathrm{Hom}(M_{-n}, \mathbb{Z})$$

易知 M^* 具有分次 K-模结构，并且有自然的配对

$$M_n^* \times M_{-n} \to K$$

注记 2.1.7. （分次 K-模上链复形）对于分次 K-模 C，以及 $\mathrm{d} \in \mathrm{Hom}(C, C)_1$，即次数为 1 的齐次同态。如果 $\mathrm{d} \circ \mathrm{d} = 0$，则自然有 K-模上链复形：

$$\cdots \to C_{-1} \xrightarrow{\mathrm{d}} C_0 \xrightarrow{\mathrm{d}} C_1 \xrightarrow{\mathrm{d}} C_2 \to \cdots$$

这是我们在同调代数当中早已熟知的。我们以后就将上链复形与带有 d 的分次 K-模等同。本节我们采用上链复形的语言（即 $\deg \mathrm{d} = 1$），链复形（$\deg \partial = -1$）的情形完全类似。

这里讲到的“上链复形”，与通常同调代数当中的上链复形在各种操作上都会可能相差正负号；为了区分，我们称这里的“上链复形”为“**分次上链复形**”。

我们还可以考虑分次上链复形 $(C_\bullet, \mathrm{d})$ 的分次对偶，仍为分次上链复形：

$$\cdots \to C_{-1}^* \xrightarrow{\mathrm{d}^*} C_0^* \xrightarrow{\mathrm{d}^*} C_1^* \xrightarrow{\mathrm{d}^*} C_2^* \to \cdots$$

定义 2.1.8. （分次上链复形的平移）对于分次 K-模上链复形 $(C_\bullet, \mathrm{d})$，定义分次上链复形 $(C_\bullet[1], \mathrm{d}_{[1]})$ 如下：

$$(C_\bullet[1])_n := C_{n+1}$$

并且微分算子 $\mathrm{d}_{[1]}$ 使得下图交换：

$$\begin{tikzcd}
(C[1])_n \arrow[r, "\mathrm{d}_{[1]}"] \arrow[d, equal] & (C[1])_{n+1} \arrow[d, equal] \\
C_{n+1} \arrow[r, "-\mathrm{d}"] & C_{n+2}
\end{tikzcd}$$

注意 $\mathrm{d}_{[1]}$ 当中的负号。类似地，对任意 $l\in\mathbb{Z}$，可以去定义 l-平移 $(C[l]_\bullet,\mathrm{d}_{[l]})$，特别注意符号

$$\mathrm{d}_{[l]}=(-1)^l\mathrm{d}$$

对于一般的分次 K-模，我们也可以考虑其平移，这无非是重新规定齐次元的次数。

定义 2.1.9. （分次上链复形的张量积）

对于分次上链复形 $(C_\bullet,\mathrm{d}_C)$ 与 $(D_\bullet,\mathrm{d}_D)$，定义 $(C\otimes D)_\bullet$ 的分次上链复形结构 d 如下：

$$\begin{aligned}\mathrm{d}:C_p\otimes D_q &\to C_{p+1}\otimes D_q\oplus C_p\otimes D_{q+1}\\ \mathrm{d} &= \mathrm{d}_C\otimes 1+(-1)^p 1\otimes \mathrm{d}_D\end{aligned}$$

仍然要注意正负号。容易验证 $\mathrm{d}\circ\mathrm{d}=0$，从而 $((C\otimes D)_\bullet,\mathrm{d})$ 确实为分次上链复形。

对于分次 K-模，我们仍可以谈论对称张量、反对称张量：

定义 2.1.10. 设 V 为分次 K-模，对任意 $m\geq 0$，

（1）定义 m 阶**超对称张量空间**如下：

$$\mathrm{Sym}^m(V)=V^{\otimes m}/\sim$$

其中等价关系 $\sim$ 由以下生成：对任意齐次元 $\alpha,\beta\in V$，

$$\alpha\otimes\beta\sim(-1)^{\deg\alpha\deg\beta}\beta\otimes\alpha$$

（2）定义 m 阶**超反称张量空间**如下：

$$\bigwedge^m(V):=V^{\otimes m}/\sim$$

其中等价关系 $\sim$ 由以下生成：对任意齐次元 $\alpha,\beta\in V$，

$$\alpha\otimes\beta\sim-(-1)^{\deg\alpha\deg\beta}\beta\otimes\alpha$$

若 $V=V_0$ 为通常的 K-模，则 $Sym^n(V_0)$ 与 $\bigwedge^n(V_0)$ 即为通常的对称张量、外张量。

对于分次 K-模 V，以及任意的 $m\geq 0$，$\mathrm{Sym}^m(V)$ 有以下自然的分次 K-模结构：

$$\mathrm{Sym}^m(V)=\bigoplus_{d\in\mathbb{Z}}\left[\mathrm{Sym}^m(V)\right]_d$$

$$\left[\mathrm{Sym}^m(V)\right]_d := \mathrm{span}_K\left\{v_1\odot v_2\odot\cdots\odot v_m \Big| \sum_{i=1}^n \deg v_i = d\right\}$$

超反称张量空间 $\bigwedge^m(V)$ 也有完全类似的分次 K-模结构。

回顾分次 K-模的平移，以下结果十分重要：

性质 2.1.11. 对于分次 K-模 V，以及任意 $n\geq 0$，则有分次 K-模同构：

$$\mathrm{Sym}^n(V[1])\cong(\bigwedge^n(V))[n]$$

证明. 对于任意 $d\in\mathbb{Z}$，首先看看它们的齐次分量 $(\mathrm{Sym}^n(V[1]))_d$ 与 $\left((\bigwedge^n(V))[n]\right)_d$ 中的元素具有何种形式。我们用 $v_1,...,v_n$ 表示 V 中的 $d_1,...,d_n$ 次齐次元，根据定义容易验证

$$(\mathrm{Sym}^n(V[1]))_d = \mathrm{span}_K\{v_1\odot v_2\odot\cdots\odot v_n | d_1+d_2+\cdots d_n = n+d\}$$

$$\left((\bigwedge^n(V))[n]\right)_d = \mathrm{span}_K\{v_1\wedge v_2\wedge\cdots\wedge v_n | d_1+d_2+\cdots d_n = n+d\}$$

从而它们都为 $(V^{\otimes n})_{n+d}$ 的商模。

考虑 K-模自同构

$$\begin{aligned}\Phi_{n,d}:(V^{\otimes n})_{n+d} &\to (V^{\otimes n})_{n+d}\\ v_1\otimes v_2\otimes\cdots\otimes v_n &\mapsto (-1)^{d_1+2d_2+\cdots+nd_n}v_1\otimes v_2\otimes\cdots\otimes v_n\end{aligned}$$

断言该自同构 $\Phi_{n,d}$ 诱导了模同构

$$\begin{aligned}\varphi_{n,d}:(\mathrm{Sym}^n(V[1]))_d &\to \left((\bigwedge^n(V))[n]\right)_d\\ v_1\odot v_2\odot\cdots\odot v_n &\mapsto (-1)^{d_1+2d_2+\cdots+nd_n}v_1\wedge v_2\wedge\cdots\wedge v_n\end{aligned}$$

为此，只需要验证 $\varphi_{n,d}$ 的良定性（与代表元选取无关）。若 $\varphi_{n,d}$ 良定，则容易构造其逆映射，进而命题得证。

特别注意，$\mathrm{Sym}^n(V[1])$ 作为 $V^{\otimes n}$ 的商模，商掉的等价关系由

$$x\otimes y\sim(-1)^{(\deg x-1)(\deg y-1)}y\otimes x$$

生成，这直接由定义验证（要特别小心）；而 $(\bigwedge^n(V))[n]$ 作为 $V^{\otimes n}$ 的商模，商掉的等价关系由

$$x\otimes y\sim-(-1)^{\deg x\deg y}y\otimes x$$

生成。于是只需验证对任意 $1\leq l\leq n_1$，成立

$$\Phi_{n,d}\Big(\cdots(v_l\otimes v_{l+1}-(-1)^{(d_l-1)(d_{l+1}-1)}v_{l+1}\otimes v_l)\cdots\Big)$$

$$
\begin{aligned}
&= (-1)^{\sum_{i=1}^{n} id_i}\Big(\cdots(v_l\otimes v_{l+1}-(-1)^{(d_l-1)(d_{l+1}-1)-d_{l+1}+d_l}v_{l+1}\otimes v_l)\cdots\Big)\\
&= (-1)^{\sum_{i=1}^{n} id_i}\Big(\cdots(v_l\otimes v_{l+1}+(-1)^{d_ld_{l+1}}v_{l+1}\otimes v_l)\cdots\Big)\\
&\equiv 0\in((\bigwedge^n(V))[n])_d
\end{aligned}
$$

□

2.2 分次代数与分次李代数

定义 2.2.1. （分次结合代数）对于结合 K-代数 A：

（*1*）称 A 为（$\mathbb{Z}$-）**分次结合代数**（*associative graded algebra*），若 A 具有分次 K-模结构：

$$A=\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}}A_n$$

并且与乘法相容：对任意 $k,l\in\mathbb{Z}$，有

$$A_k\cdot A_l\subseteq A_{k+l}$$

（*2*）若 A 为分次结合代数，称 A 为**分次交换代数**，若 A 还满足以下**分次交换性**：对任意 $a_k\in A_k, a_l\in A_l$，

$$a_k\cdot a_l=(-1)^{kl}a_l\cdot a_k$$

特别注意分次交换性的正负号。分次交换代数的典型例子是，光滑流形 X 上的微分形式 $\Omega_X^\bullet$，配以外积运算 $\wedge$.

不过注意，多项式代数 $K[x^1,...,x^n]$ 自然有分次结构，是分次代数，但它不满足分次交换性。（仅仅是“交换的分次代数”23333）

定义 2.2.2. **（分次李代数）**

K-代数 $(\mathfrak{g},[,])$ 称为**分次李代数**（*graded Lie algebra*），或者**李超代数** *(Lie super algebra)*，如果以下满足：

（*1*）$\mathfrak{g}$ 具有分次 $\mathfrak{g}=\bigoplus_{k\in\mathbb{Z}}\mathfrak{g}_k$，使得对任意 $k,l\in\mathbb{Z}$，成立

$$[\mathfrak{g}_k,\mathfrak{g}_l]\subseteq\mathfrak{g}_{k+l}$$

（*2*）乘法 $[,]:\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}\to\mathfrak{g}$ 满足如下**分次反交换性**：对 A 中任意齐次元 a,b，成立

$$[a,b]=-(-1)^{\deg a\deg b}[b,a]$$

（3）对于 A 中任何齐次元 a,b,c，成立如下**分次雅可比恒等式**：

$$(-1)^{\deg b \deg c}[c,[a,b]] + (-1)^{\deg c \deg a}[a,[b,c]] + (-1)^{\deg a \deg b}[b,[c,a]] = 0$$

我们可以将“分次”（graded）与“超”（super）进行同义词替换，比如“分次雅可比恒等式”也可以称为“超雅可比恒等式”，“分次交换性”可以称为“超交换性”等等，甚至将“分次线性空间”称为“超空间”。

容易验证，超雅可比恒等式也可以改写为：

$$[c,[a,b]] = [c,[a,b]] + (-1)^{\deg a \deg c}[a,[c,b]]$$

也容易验证，对于李超代数 $(A,[,])$，则 $[,]$ 在 A 的零次分量 A_0 的限制，给出了 A_0 的李代数结构。回顾李代数的情形，李括号的雅可比恒等式反映了某种导子性质；而李超代数完全类似，上述超雅可比恒等式其实表明某种“超导子”性质。

记号 2.2.3. 为了省事，我们引入一个记号约定：对于分次代数或者分次李代数（以及后文将介绍的分次模），若 a 为其次元，我们简记

$$(-1)^a := (-1)^{\deg a}$$

也就是说，(-1) 的幂次当中出现齐次元的次数时，省略“deg”。

例如，李超代数的超雅可比恒等式可简记为

$$(-1)^{bc}[c,[a,b]] + (-1)^{ca}[a,[b,c]] + (-1)^{ab}[b,[c,a]] = 0$$

或者

$$[c,[a,b]] = [c,[a,b]] + (-1)^{ac}[a,[c,b]]$$

引理 2.2.4. （分次结合代数诱导分次李代数）

设 $(A,\cdot)$ 为分次结合代数，则其乘法自然诱导出 A 的分次李代数结构如下*:* 定义

$$\begin{aligned} [,] : A \times A &\to A \\ [a,b] &:= a \cdot b - (-1)^{ab} b \cdot a \end{aligned}$$

其中任意 $a,b \in A$ 为齐次元。则 $(A,[,])$ 构成分次李代数，并且与 $(A,\cdot)$ 具有相同的分次。

这与由通常的结合代数通过“对易子”得到李代数的方式类似，不过要稍微注意正负号。

证明. 直接暴力验证即可，从略。注意这里的

$$(-1)^{ab} := (-1)^{\deg a \deg b} = (-1)^{ba}$$

为偷懒的记号。 □

我们可以考虑以分次 K-代数的范畴：

定义 2.2.5. （分次结合代数范畴）

我们定义如下的**分次结合 K-代数范畴**，记为 $\mathsf{Ass\text{-}alg}_K^{\mathbb{Z}}$：

（1）$\mathrm{Obj} =$ 全体分次结合 K-代数；

（2）Mor: 对任意两个分次结合 K-代数 A, B，

$$\mathrm{Hom}(A,B) := \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} (\mathrm{Hom}(A,B))_n$$

其中

$$(\mathrm{Hom}(A,B))_n := \{f \text{为 } K\text{-代数同态} | f(A_d) \subseteq B_{d+n} \, \forall d \in \mathbb{Z}\}$$

$(\mathrm{Hom}(A,B))_n$ 当中的元素称之为 n 次齐次 K-代数同态。

类似地，考虑**分次交换代数范畴**，它是分次结合代数范畴的全子范畴，记为

$$\mathsf{Commu\text{-}alg}_K^{\mathbb{Z}}$$

定义 2.2.6. （分次双 A-模）

设 $A = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} A_n$ 为分次结合 K-代数，M 为双 A-模，称 M 为**分次双 A-模**，若 M 配以分次 K-模结构

$$M = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} M_n$$

并且与 A 的模作用相容：对任意 $p, q \in \mathbb{Z}$，

$$A_p.M_q \subseteq M_{p+q}$$

$$M_p.A_q \subseteq M_{p+q}$$

然后对于两个分次双 A-模 M, N，也可以定义何为“分次双 A-模同态”，并且从 M 到 N 的分次双 A-模同态之全体，亦有自然的分次双 A-模结构。

特别地，对于分次 K-代数 A，A 自身有自然的分次双 A-模结构。

定义 2.2.7. （导子）对于分次 K-代数 A，以及分次双 A-模 M，称 K-线性同态

$$D : A \to M$$

为 A 的一个取值于 M 的**导子**，若对 A 中的任何齐次元 a, b，成立

$$D(ab) = D(a).b + (-1)^a a.D(b)$$

我们将 A 的取值于 M 的导子之全体记为 $\mathrm{Der}_0(A, M)$.

这个定义当中并没有用到 M 的分次。事实上对于一般的双 A-模 M，我们都可以如此谈论 $\mathrm{Der}_0(A, M)$.

导子的作用可以用如下交换图描述：

$$\begin{tikzcd}
A \otimes A \arrow[r, "m"] \arrow[d, "1\otimes D + D\otimes 1"] & A \arrow[d, "D"] \\
A \otimes M \oplus M \otimes A \arrow[r, "m"] & M
\end{tikzcd}$$

其中 m 表示 A 中的乘法，然后特别注意 $1 \otimes D$ 以及 $D \otimes 1$ 在 $A \otimes A$ 上的作用服从 **Koszul 符号法则**（回顾记号2.1.5）.

定义 2.2.8. （超导子）

对于分次 K 代数 A 以及 $d \in \mathbb{Z}$，称次数为 d 的分次 K-模同态

$$D : A \to A$$

为次数为 d 的**超导子**，若满足如下的**超莱布尼茨法则**：对 A 中任何齐次元 a, b，成立

$$D(ab) = D(a)b + (-1)^{d \cdot \deg a} aD(b)$$

记次数为 d 的超导子之全体为 $\mathrm{Der}(A, A)_d$，并且记

$$\mathrm{Der}(A, A) := \bigoplus_{d \in \mathbb{Z}} \mathrm{Der}(A, A)_d$$

易知 $\mathrm{Der}(A,A)$ 有自然的分次 K-模结构。超导子 D 的作用可由如下交换图来描述：

$$\begin{tikzcd}
A\otimes A \arrow[r, "D\otimes 1+1\otimes D"] \arrow[d, "m"] & A\otimes A \arrow[d, "m"] \\
A \arrow[r, "D"] & A
\end{tikzcd}$$

注记 2.2.9. （微分分次代数）对于 K-代数 A，以及次数为 1 的超导子 $\mathrm{d}\in\mathrm{Der}(A,A)_1$，如果 $\mathrm{d}^2=0$，则 (A,d) 正是我们在之前（见定义*1.4.5*）定义的**微分分次代数**。

分次微分代数 (A,d) 自然可视为分次上链复形。当然我们也可以考虑次数为 -1 的超导子，亦可定义出类似版本的分次微分代数（不过我们更推荐使用上链复形的语言）。

引理 2.2.10. （由超导子构成的李超代数）

对于分次 K-代数 A，若 $D_1,D_2\in\mathrm{Der}(A,A)$ 为齐次的超导子，定义

$$[D_1,D_2]:=D_1\circ D_2-(-1)^{D_1D_2}D_2\circ D_1$$

则 $[D_1,D_2]$ 是次数为 $\deg D_1+\deg D_2$ 的超导子。从而我们定义了

$$[,]:\mathrm{Der}(A,A)\times\mathrm{Der}(A,A)\to\mathrm{Der}(A,A)$$

使得 $(\mathrm{Der}(A,A),[,])$ 为李超代数。

证明. 对于齐次超导子 D_1,D_2，只需要验证 $[D_1,D_2]$ 仍然是超导子，然后由引理2.2.4即可知 $(\mathrm{Der}(A,A),[,])$ 为李超代数。

暴力验证之（还是写一下过程吧），对 A 中任意齐次元 a_1,a_2，有

$$\begin{aligned}
& [D_1,D_2](a_1a_2)=\big(D_1D_2-(-1)^{D_1D_2}\big)(a_1a_2)\\
= \; & D_1\big(D_2(a_1)a_2+(-1)^{a_1D_2}a_1D_2(a_2)\big)\\
& -(-1)^{D_1D_2}D_2\big(D_1(a_1)a_2+(-1)^{a_1D_1}a_1D_1(a_2)\big)\\
= \; & D_1D_2(a_1)a_2+(-1)^{D_1(a_1+D_2)}D_2(a_1)D_1(a_2)\\
& +(-1)^{a_1D_2}\big[D_1(a_1)D_2(a_2)+(-1)^{a_1D_1}a_1D_1D_2(a_2)\big]\\
& -(-1)^{D_1D_2}\Big[D_2D_1(a_1)a_2+(-1)^{D_2(D_1+a_1)}D_1(a_1)D_2(a_2)\\
& +(-1)^{a_1D_1}\big(D_2(a_1)D_1(a_2)+(-1)^{D_2a_1}a_1D_2D_1(a_2)\big)\Big]\\
= \; & \big[D_1D_2-(-1)^{D_1D_2}D_2D_1\big](a_1)a_2
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+(-1)^{a_1(D_1+D_2)}a_2\big[D_1D_2-(-1)^{D_1D_2}D_2D_1\big](a_2)\\
=\quad&[D_1,D_2](a_1)a_2+(-1)^{a_1(D_1+D_2)}a_1[D_1,D_2](a_2)
\end{aligned}
$$

可见 $[D_1, D_2]$ 确实是次数为 $(\deg D_1 + \deg D_2)$ 的超导子，证毕。 $\square$

最后简要介绍一下函子性：我们有遗忘函子

$$
\begin{aligned}
\mathsf{Ass\text{-}alg}_K^{\mathbb{Z}} &\to \mathsf{Mod}_K^{\mathbb{Z}}\\
\mathsf{Commu\text{-}alg}_K^{\mathbb{Z}} &\to \mathsf{Mod}_K^{\mathbb{Z}}
\end{aligned}
$$

我们考虑该函子的左伴随“自由分次结合代数”以及“自由分次交换代数”，即范畴论当中的“普遍真理”（呵呵呵呵呵呵）：

自由是遗忘的左伴随

定义 2.2.11. （张量代数 *or* 自由分次结合代数）

设 V 为分次 K-模，定义分次 K-模

$$T(V) := \bigoplus_{n\geq 0} V^{\otimes n}$$

其中 $V^{\otimes 0} := K$；并且张量积“$\otimes$”给出了 $T(V)$ 的乘法结构：

$$(v_1\otimes\cdots\otimes v_p)\otimes(v_{p+1}\otimes\cdots\otimes v_{p+q}) = v_1\otimes\cdots\otimes v_{p+q}$$

从而使得 $(T(V),\otimes)$ 为分次结合代数，称之为由 V 生成的**自由分次结合代数**。

这的确是一种非常“自由”的构造方式。并且容易验证 T 的函子性：

$$
\begin{aligned}
T:\mathsf{Mod}_K^{\mathbb{Z}} &\to \mathsf{Ass\text{-}alg}_K^{\mathbb{Z}}\\
V &\mapsto T(V)
\end{aligned}
$$

同样，我们可以考虑自由生成的分次交换代数：

定义 2.2.12. （自由分次交换代数）

设 V 为分次 K-模，定义分次 K-模

$$\mathrm{Sym}(V) := \bigoplus_{n\geq 0}\mathrm{Sym}^n(V)$$

其中 $\mathrm{Sym}^0(V) := K$；并且对称张量积"$\odot$"给出了 $\mathrm{Sym}(V)$ 的乘法结构：

$$(v_1 \odot \cdots \odot v_p) \odot (v_{p+1} \odot \cdots \odot v_{p+q}) = v_1 \odot \cdots \odot v_{p+q}$$

从而使得 $(\mathrm{Sym}(V), \odot)$ 为分次结合代数，称之为由 V 生成的**自由分次交换代数**。

也容易验证 Sym 的函子性：

$$\begin{aligned} \mathrm{Sym} : \mathsf{Mod}_K^{\mathbb{Z}} &\to \mathsf{Commu\text{-}alg}_K^{\mathbb{Z}} \\ V &\mapsto \mathrm{Sym}(V) \end{aligned}$$

性质 2.2.13. （伴随对）对于任意分次 K-模 V，以及分次结合 K-代数 A、分次交换 K-代数 B，注意 A, B 首先是分次 K-模：

（*1*）存在（关于 V、A）自然的一一对应

$$\mathrm{Hom}_{\mathsf{Mod}_K^{\mathbb{Z}}}(V, A) \cong \mathrm{Hom}_{\mathsf{Ass\text{-}alg}_K^{\mathbb{Z}}}(T(V), A)$$

（*2*）存在（关于 V、B）自然的一一对应

$$\mathrm{Hom}_{\mathsf{Mod}_K^{\mathbb{Z}}}(V, B) \cong \mathrm{Hom}_{\mathsf{Commu\text{-}alg}_K^{\mathbb{Z}}}(\mathrm{Sym}(V), B)$$

证明. 易证，从略。 □

用范畴论的语言，此性质表明，函子 T 与 Sym 分别为相应的遗忘函子的左伴随。或者还可以表述为如下泛性质，看图即可：

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, hook] \arrow[dr, "\forall f"'] & T(V) \arrow[d, dashed, "\exists!"] \\ & A \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} V \arrow[r, hook] \arrow[dr, "\forall f"'] & \mathrm{Sym}(V) \arrow[d, dashed, "\exists!"] \\ & B \end{tikzcd}$$

性质 2.2.14. 设 V 为分次 K-模，M 为 K-模，则有一一对应

$$\mathrm{Der}_0(T(V), M) \cong \mathrm{Hom}_K(V, M)$$

证明. 这个也几乎显然，从略。 □

2.3 余代数与分次余代数

首先简要回顾一下**余代数**（co-algebra）的概念。对于 K-代数 A，A 上的乘法 $m : A\otimes A\to A$ 的结合性可用如下交换图来描述：

$$\begin{tikzcd} A\otimes A\otimes A \arrow[r, "m\otimes 1"] \arrow[d, "1\otimes m"] & A\otimes A \arrow[d, "m"] \\ A\otimes A \arrow[r, "m"] & A \end{tikzcd}$$

将上述图表中的箭头全部反向，即得到**余结合律**的概念：对于 K-模 A，以及 K-模同态 $\triangle : A\to A\otimes A$，若以下图表交换

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\triangle"] \arrow[d, "\triangle"] & A\otimes A \arrow[d, "\triangle\otimes 1"] \\ A\otimes A \arrow[r, "1\otimes\triangle"] & A\otimes A\otimes A \end{tikzcd}$$

则称 $\triangle$ 满足**余结合律**，运算“$\triangle$”称为**余乘**（co-product）. 类似地我们可以谈论**余交换律**，乘法 $m : A\otimes A\to A$ 与余乘 $\triangle : A\to A\otimes A$ 的交换律、余交换律分别由以下交换图表描述：

$$\begin{tikzcd} A\otimes A \arrow[rr, "\tau"] \arrow[dr, "m"'] & & A\otimes A \arrow[dl, "m"] \\ & A & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} A\otimes A & & A\otimes A \arrow[ll, "\tau"'] \\ & A \arrow[ul, "\triangle"] \arrow[ur, "\triangle"'] & \end{tikzcd}$$

其中 $\tau : x\otimes y\mapsto y\otimes x$ 为 $A\otimes A$ 的对合自同构。

对于 K-代数 A，我们总是假定 A 含幺。事实上，存在唯一的 K-代数同态

$$i : K\to A$$

而 A 的**幺元**$1\in A$ 即为 $1\in K$ 在该同态下的像。在此意义下，我们不妨重新定义什么是 A 的幺元：称 K-模同态 $i : K\to A$ 为 A 的幺元，如果以下图表交换：

$$\begin{tikzcd} & A & \\ K\otimes A \arrow[ur, equal, "\cong"] \arrow[r, "i\otimes 1"] & A\otimes A \arrow[u, "m"] & A\otimes K \arrow[ul, equal, "\cong"'] \arrow[l, "1\otimes i"'] \end{tikzcd}$$

将以上图表的箭头全部反向，则得到**余幺元**（co-unit）的概念：对于配以余乘 $\triangle$ 的 K-模 A，称 K-模同态 $\varepsilon: A \to K$ 为关于 $\triangle$ 的 **余幺元**，如果以下图表交换：

$$\begin{tikzcd}
& A \arrow[dl, equal, "\cong"'] \arrow[d, "\triangle"] \arrow[dr, equal, "\cong"] & \\
K \otimes A & A \otimes A \arrow[l, "\varepsilon\otimes 1"'] \arrow[r, "1\otimes\varepsilon"] & A \otimes K
\end{tikzcd}$$

对于 K-模 A，若 A 配以（满足余结合律的）余乘 $\triangle$，以及关于该余乘的余幺元 $\varepsilon: A \to K$，则称 $(A, \triangle, \varepsilon)$ 为 K-**余代数**。

若 $(A, \triangle_A)$ 与 $(B, \triangle_B)$ 都为 K-余代数，称 K-模同态 $\varphi: A \to B$ 为 K-**余代数同态**，如果对任意 $x \in A$，成立

$$\triangle_B(\varphi(x)) = \varphi(\triangle_A(x))$$

注记 2.3.1. 若 $(A, \triangle)$ 为 K-余代数，考虑对偶映射 $\triangle^*: (A \otimes A)^* \to A^*$，则 $(A^*, \triangle^*)$ 具有如下 K-代数结构：

$$A^* \otimes A^* \to (A \otimes A)^* \xrightarrow{\triangle^*} A^*$$

用反变函子 $\mathrm{Hom}(-, K)$ 翻转余代数图表的箭头而已；但是要注意，对一个代数取对偶，未必能得到余代数。也就是说，某种意义下余代数比代数包含更多的信息。

现在我们谈论余代数的分次版本。

定义 2.3.2. （分次余代数）

设 $A = \bigoplus\limits_{k \in \mathbb{Z}} A_k$ 为分次 K-模，$\triangle: A \to A \otimes A$ 为 A 的余乘（满足余结合律），称 $(A, \triangle)$ 为**分次余代数**（*graded co-algebra*），若 $\triangle$ 与 A 的分次满足以下相容性：任意 $k \in \mathbb{Z}$，

$$\triangle(A_k) \subseteq (A \otimes A)_k$$

我们自然也可以谈论 $\triangle$ 的**分次余交换性**，见下述交换图（与非分次情形完全一样）：

$$\begin{tikzcd}
A \otimes A & & A \otimes A \arrow[ll, "\tau"'] \\
& A \arrow[ul, "\triangle"] \arrow[ur, "\triangle"'] &
\end{tikzcd}$$

不过要注意，这里的 τ 为分次对合自同构（见定义2.1.4），服从 Koszul 符号法则：

$$\tau: x \otimes y \mapsto (-1)^{xy} y \otimes x$$

定义 2.3.3. （余超导子）

对于分次 K-余代数 A，以及 $d\in\mathbb{Z}$，称次数为 d 的分次 K-模同态 $\delta: A\to A$ 为 d 次**齐次余超导子**，若以下图表交换

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "\triangle"'] & A \arrow[d, "\triangle"] \\
A\otimes A \arrow[r, "\delta\otimes 1+1\otimes\delta"] & A\otimes A
\end{tikzcd}$$

即满足“**余莱布尼茨法则**”。

注意到上述图表默认 Koszul 符号法则。记 A 的 d 次齐次余超导子之全体为 $\mathrm{Coder}(A)_d$，以及

$$\mathrm{Coder}(A) := \bigoplus_{d\in\mathbb{Z}} \mathrm{Coder}(A)_d$$

称其中的元素为**余超导子**。与超导子类似，余超导子之全体也有李超代数结构：

性质 2.3.4. 对于 K-余代数 A，以及齐次余超导子 $D_1, D_2\in\mathrm{Coder}(A)$，定义

$$[D_1, D_2] := D_1\circ D_2 - (-1)^{D_1 D_2} D_2\circ D_1$$

则 $[D_1, D_2]\in\mathrm{Coder}(A)$，进而 $(\mathrm{Coder}(A), [,])$ 构成李超代数。

证明. 与分次代数的超导子完全类似，直接验证即可，从略。 □

有了余超导子，可以相应地去定义**微分分次余代数**（differential graded co-algebra）：

定义 2.3.5. （微分分次余代数）对于 K-余代数 A，以及满足 $\delta^2=0$ 的 1 次齐次余超导子 δ，则称 (A,δ) 为微分分次余代数。

类似地，微分分次余代数自然可以视为分次上链复形。

注记 2.3.6. （*(co-)augmentation*）

（*1*）对于 K-代数 A，我们把从 A 到 K 的 K-模同态称为 *augmentation*；

（*2*）对于 K-余代数 A，我们把从 K 到 A 的 K-模同态称为 *co-augmentation*

与“幺元”的箭头刚好相反。笔者建议将 augmentation 意译为“赋值”。

重要例子 2.3.7. 设 V 为分次 K-模，考虑张量代数 $T(V):\bigoplus_{n\geq 0} V^{\otimes n}$，定义

$$\begin{aligned}\triangle : T(V) &\to T(V)\otimes T(V)\\ v_1\otimes\cdots\otimes v_n &\mapsto \sum_{i=0}^{n}(v_1\otimes\cdots\otimes v_i)\otimes(v_{i+1}\otimes\cdots\otimes v_n)\end{aligned}$$

则 $(T(V),\triangle)$ 构成余代数。

容易验证如此 $\triangle$ 满足余结合律：

$$\begin{aligned}&(\triangle\otimes 1)\circ\triangle(v_1\otimes\cdots\otimes v_n)\\ =&\sum_{0\leq i\leq j\leq n}(a_1\otimes\cdots\otimes a_i)\otimes(a_{i+1}\otimes\cdots\otimes a_j)\otimes(a_{j+1}\otimes\cdots\otimes a_n)\\ =&(1\otimes\triangle)\circ\triangle(v_1\otimes\cdots\otimes v_n)\end{aligned}$$

并且配以余幺元 ε :

$$\varepsilon\big|_{V^{\otimes n}} = \begin{cases} 0 & \text{如果} n>0 \\ \mathrm{id}_K & \text{如果} n=0\end{cases}$$

注记 2.3.8. $T(V)$ 还有另一个余乘结构 $\overline{\triangle}$

$$\overline{\triangle}(v_1\otimes ...\otimes v_n) := \sum_{i=1}^{n-1}(v_1\otimes\cdots\otimes v_i)\otimes(v_{i+1}\cdots v_n)$$

这也是容易验证的。不过这个余乘结构不存在余幺元。

2.4 多重切向量场与 Schouten-Nijenhuis 括号

众所周知，对于光滑流形 X，X 上的微分形式 $\Omega_X^\bullet$ 配以外积 $\wedge$ 构成分次交换代数（若再考虑外微分 d，还有微分分次代数结构）。本节我们介绍另一重要的经典例子：光滑流形上的多重切向量场，并给出其上的李超代数结构：Schouten-Nijenhuis 括号。

定义 2.4.1. （多重切向量场）对于光滑流形 X，称 X 的切丛的外积丛 $\bigwedge^*(TX)$ 的截面为**多重切向量场**（*polyvector field*）。并且记

$$\mathrm{PV}_X := \Gamma(X,\bigwedge{}^*(TX))$$

为多重切向量场之全体。

PV_X 有显然的 $C^\infty(X)$-模结构。与微分形式类似，容易定义 PV_X 上的外积 $\wedge$，使得 $(\mathrm{PV}_X, \wedge)$ 为分次交换 $C^\infty(X)$-代数，其分次由以下给出：

$$\mathrm{PV}_X = \bigoplus_{k\geq 0} \mathrm{PV}_X^k$$

其中 PV_X^k 中的元素形如

$$\xi_1 \wedge \xi_2 \wedge \cdots \wedge \xi_k$$

的 $C^\infty(X)$-线性组合，其中 ξ_i 为 X 上的光滑切向量场。称 PV_X^k 中的元素为**k-向量**。

回顾 X 的切向量场的李括号 $[,]$ 运算，这给出了切向量场的李代数结构；接下来我们企图将李括号运算延拓到多重切向量场上，从而得到 $\mathrm{PV}_X[1]$ 的李超代数结构。（注意这里要平移一下分次，使得把切向量场视为零次元。）

定义 2.4.2. （*Schouten-Nijenhuis* 括号）

对于光滑流形 X，定义 PV_X 上的 $\mathbb{R}$-双线性映射

$$\begin{aligned}
\{,\} : \mathrm{PV}_X^p \times \mathrm{PV}_X^q &\to \mathrm{PV}_X^{p+q-1} \\
\{f, g\} &= 0 \\
\{f, \xi\} &= (-1)^p \{\xi, f\} = \sum_{k=1}^{p} (-1)^k \xi_k(f)(\cdots \wedge \widehat{\xi_k} \wedge \cdots) \\
\{\xi, \eta\} &= \sum_{\substack{1\leq i\leq p \\ 1\leq j\leq q}} (-1)^{i+j} [\xi_i, \eta_j] \wedge (\cdots \wedge \widehat{\xi_i} \wedge \cdots) \wedge (\cdots \wedge \widehat{\eta_j} \wedge \cdots)
\end{aligned}$$

其中任意 $f, g \in C^\infty(X) = \mathrm{PV}_X^0$ 以及

$$\xi = \xi_1 \wedge \cdots \wedge \xi_p \qquad \eta = \eta_1 \wedge \cdots \wedge \eta_q$$

我们需要验证 $\{,\}$ 的良定性：与 ξ, η 的代表元的选取无关。这只需暴力验证即可。从略。

性质 2.4.3. （*Schouten-Nijenhuis* 括号的性质）

对于光滑流形 X，则 $(\mathrm{PV}_X, \{,\})$ 满足如下性质：

（*1*）若 $\xi, \eta \in \mathrm{PV}_X^1$ 为通常的切向量场，则

$$\{\xi, \eta\} = [\xi, \eta]$$

（*2*）对任意 $p, q \geq 0$，任意 $\xi \in \mathrm{PV}_X^p$ 以及 $\eta \in \mathrm{PV}_X^q$，成立

$$\{\xi, \eta\} = -(-1)^{(p-1)(q-1)} \{\eta, \xi\}$$

（3）对任意 $p,q,r\geq 0$，任意 $\xi\in \mathrm{PV}_X^p$ 以及 $\eta\in \mathrm{PV}_X^q,\phi\in \mathrm{PV}_X^r$，成立

$$\{\xi,\eta\wedge\phi\}=\{\xi,\eta\}\wedge\phi+(-1)^{(p-1)q}\eta\wedge\{\xi,\phi\}$$

证明.（1）（2）容易验证，从略；（3）暴力验证，建议使用数学归纳法。从略。 □

事实上，这三条性质可作为 Schouten-Nijenhuis 括号的公理：满足此性质的括号如果存在，只能如此定义。例如，对任意的 $f\in \mathrm{PV}_X^0=C^\infty(X)$，以及 $\xi,\eta\in \mathrm{PV}_X^1$，如果 $\{,\}$ 满足上述三条性质，那么

$$\{\eta,f\xi\}=\{\eta,f\wedge\xi\}=\{\eta,f\}\xi+(-1)^{(1-1)\times 0}f\{\eta,\xi\}=\{\eta,f\}\xi+f[\eta,\xi]$$

但另一方面，又有

$$\{\eta,f\xi\}=[\eta,f\xi]=\eta(f)\xi+f[\eta,\xi]$$

比较两式，从而必有

$$\{\eta,f\}=\eta(f)$$

再反复使用超莱布尼茨法则（3）以及超反称性（2），即可得到 $\{,\}$ 的完整定义。

性质 2.4.4. 对于光滑流形 X，*Schouten-Nijenhuis* 括号 $\{,\}$ 满足如下超雅可比恒等式：对任意 $p,q,r\geq 0$ 以及任意 $\xi\in \mathrm{PV}_X^p,\eta\in \mathrm{PV}_X^q,\phi\in \mathrm{PV}_X^r$，成立

$$\{\xi,\{\eta,\phi\}\}=\{\{\xi,\eta\},\phi\}+(-1)^{(p-1)(q-1)}\{\eta,\{\xi,\phi\}\}$$

从而 $(\mathrm{PV}_X[1],\{,\})$ 构成李超代数。

证明. 我们打算详细写出过程。在证明的过程中，我们将反复使用性质 2.4.3. 对任意的 $p,q,r>0$，任取

$$\xi=\xi_1\wedge\cdots\wedge\xi_p\in \mathrm{PV}_X^p$$
$$\eta=\eta_1\wedge\cdots\wedge\eta_q\in \mathrm{PV}_X^q$$
$$\phi=\phi_1\wedge\cdots\wedge\phi_r\in \mathrm{PV}_X^r$$
$$f,g,h\in \mathrm{PV}_X^0=C^\infty(X)$$

为方便书写，我们引入如下记号：

$$\begin{aligned}\overline{\xi_i} &:= \xi_1\wedge\cdots\wedge\widehat{\xi_i}\wedge\cdots\wedge\xi_p \quad \forall 1\leq i\leq p\\ \overline{\eta_j} &:= \eta_1\wedge\cdots\wedge\widehat{\eta_j}\wedge\cdots\wedge\eta_q \quad \forall 1\leq j\leq q\\ \overline{\phi_k} &:= \phi_1\wedge\cdots\wedge\widehat{\phi_k}\wedge\cdots\wedge\phi_r \quad \forall 1\leq k\leq r\end{aligned}$$

我们将对 p 归纳。

预备情形：若 $p=q=r=0$，则结论平凡。若 p,q,r 当中恰有两个为 0，不妨 $p=q=0$，此时 $r>0$，从而任取 $f,g\in \mathrm{PV}_X^0$ 以及 $\phi\in\mathrm{PV}_X^r$，此时的超雅可比恒等式为

$$\{f,\{g,\phi\}\}+\{g,\{f,\phi\}\}=0$$

注意到

$$\{f,\phi\}=\sum_{k=1}^r(-1)^k\phi_k(f)\overline{\phi_k}$$

从而有

$$\begin{aligned}\{f,\{g,\phi\}\} &= \{f,\sum_{k=1}^r(-1)^k\phi_k(g)\overline{\phi_k}\}\\ &= \sum_{k=1}^r\phi_k(g)\left(\sum_{j<k}(-1)^j\phi_j(f)\overline{\phi_{jk}}+\sum_{j>k}(-1)^{j+1}\phi_j(f)\overline{\phi_{kj}}\right)\\ &= \sum_{1\le i<j\le r}(-1)^{i+j}\left[\phi_i(g)\phi_j(f)-\phi_j(g)\phi_i(f)\right]\overline{\phi_{ij}}\end{aligned}$$

其中对于 $j<k$，简写记号

$$\overline{\phi_{jk}}:=\cdots\wedge\widehat{\phi_j}\wedge\cdots\wedge\widehat{\phi_k}\wedge\cdots$$

注意观察上式关于 f,g 的反对称性，容易发现 $\{f,\{g,\phi\}\}=-\{g,\{f,\phi\}\}$，从而证毕。

于是，我们在接下来的证明中，不妨 p,q,r 当中为零的至多只有一个。

p **的起始步**：现在开始对 p 归纳，首先考虑起始步 $p=0$. 由之前讨论，不妨 $q,r>0$. 任取 $f\in\mathrm{PV}_X^0$，只需证

$$\{f,\{\eta,\phi\}\}=\{\{f,\eta\},\phi\}+(-1)^{q-1}\{\eta,\{f,\phi\}\} \tag{$*$}$$

暴力展开验证之，注意到

$$\begin{aligned}\{f,\{\eta,\phi\}\} &= \sum_{j=1}^q\sum_{k=1}^r(-1)^{j+k}\{f,[\eta_j,\phi_k]\wedge\overline{\eta_j}\wedge\overline{\phi_k}\}\\ &= -\sum_{j=1}^q\sum_{k=1}^r(-1)^{j+k}[\eta_j,\phi_k](f)\overline{\eta_j}\wedge\overline{\phi_k}\\ &\quad -\sum_{j=1}^q\sum_{k=1}^r(-1)^{j+k}[\eta_j,\phi_k]\wedge\{f,\overline{\eta_j}\wedge\overline{\phi_k}\}\end{aligned}$$

再打开 $(*)$ 的右边：

$$\begin{aligned}\{\{f,\eta\},\phi\} &= \sum_{j=1}^q(-1)^j\{\eta_j(f)\overline{\eta_j},\phi\}\\ &= \sum_{j=1}^q(-1)^j\left[(-1)^{(q-1)(r-1)}\{\eta_j(f),\phi\}\wedge\overline{\eta_j}+\eta_j(f)\{\overline{\eta_j},\phi\}\right]\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{j=1}^{q}\sum_{k=1}^{r}(-1)^{j+k}\phi_k(\eta_j(f))\overline{\eta_j}\wedge\overline{\phi_k} \\
&\quad +\sum_{j=1}^{q}(-1)^{j}\eta_j(f)\{\overline{\eta_j},\phi\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(-1)^{q-1}\{\eta,\{f,\phi\}\} &= (-1)^{q-1}\sum_{k=1}^{r}(-1)^{k}\{\eta,\phi_k(f)\overline{\phi_k}\} \\
&= (-1)^{q-1}\sum_{k=1}^{r}(-1)^{k}\left[\{\eta,\phi_k(f)\}\wedge\overline{\phi_k}+(-1)^{q-1}\phi_k(f)\{\overline{\eta,\overline{\phi_k}}\}\right] \\
&= -\sum_{j=1}^{q}\sum_{k=1}^{r}(-1)^{j+k}\eta_j(\phi_k(f))\overline{\eta_j}\wedge\overline{\phi_k} \\
&\quad +\sum_{k=1}^{r}(-1)^{k}\phi_k(f)\{\eta,\overline{\phi_k}\}
\end{aligned}
$$

因此有

$$
\begin{aligned}
\{\{f,\eta\},\phi\}+(-1)^{q-1}\{\eta,\{f,\phi\}\} &= \sum_{j=1}^{q}\sum_{k=1}^{r}(-1)^{j+k}(\phi_k(\eta_j(f))-\eta_j(\phi_k(f)))\overline{\eta_j}\wedge\overline{\phi_k} \\
&\quad +\sum_{j=1}^{q}(-1)^{j}\eta_j(f)\{\overline{\eta_j},\phi\}+\sum_{k=1}^{r}(-1)^{k}\phi_k(f)\{\eta,\overline{\phi_k}\} \\
&= -\sum_{j=1}^{q}\sum_{k=1}^{r}(-1)^{j+k}[\eta_j,\phi_k](f)\overline{\eta_j}\wedge\overline{\phi_k} \\
&\quad +\sum_{j=1}^{q}(-1)^{j}\eta_j(f)\{\overline{\eta_j},\phi\}+\sum_{k=1}^{r}(-1)^{k}\phi_k(f)\{\eta,\overline{\phi_k}\}
\end{aligned}
$$

与 $(*)$ 式比较，只需要再验证恒等式

$$
-\sum_{j=1}^{q}\sum_{k=1}^{r}(-1)^{j+k}[\eta_j,\phi_k]\wedge\{f,\overline{\eta_j}\wedge\overline{\phi_k}\}=\sum_{j=1}^{q}(-1)^{j}\eta_j(f)\{\overline{\eta_j},\phi\}+\sum_{k=1}^{r}(-1)^{k}\phi_k(f)\{\eta,\overline{\phi_k}\}
$$

即可。而这只需将式子中的 Schouten-Nijenhuis 括号暴力展开，并且适当更改求和指标即可，从略。（不太想写了，打字好累 2333）

p 的归纳步： 如果该命题对 p 成立，则考虑

$$
\xi' := \xi_0\wedge\xi\in \mathrm{PV}_X^{p+1}
$$

其中任意 $\xi_0\in \mathrm{PV}_X^0$. 我们只需证

$$
\{\xi',\{\eta,\phi\}\}=\{\{\xi',\eta\},\phi\}+(-1)^{p(q-1)}\{\eta,\{\xi',\phi\}\} \tag{$**$}
$$

注意反复使用 $\{,\}$ 的超反对称性、超莱布尼茨法则，以及关于 p 的归纳假设，我们简单（但暴力）验证如下：

$$\begin{aligned}
(**)\ \text{左边} &= \{\xi_0\wedge\xi,\{\eta,\phi\}\} \\
&= (-1)^p\xi\wedge\{\xi_0,\{\eta,\phi\}\}+\xi_0\wedge\{\xi,\{\eta,\phi\}\} \\
&= (-1)^p\xi\wedge\Big(\{\{\xi_0,\eta\},\phi\}+\{\eta,\{\xi_0,\phi\}\}\Big) \\
&\quad +\xi_0\wedge\Big(\{\{\xi,\eta\},\phi\}+(-1)^{(p-1)(q-1)}\{\eta,\{\xi,\phi\}\}\Big)
\end{aligned}$$

其中最后一步等号用到了归纳假设。再看 $(**)$ 右边，需要格外小心正负号：

$$\begin{aligned}
(**)\ \text{右边} &= (-1)^{p(q-1)+(p+q-1)(r-1)}\{\phi,\{\eta,\xi_0\wedge\xi\}\}-(-1)^{p(q-1)+p(r-1)}\{\eta,\{\phi,\xi_0\wedge\xi\}\} \\
&= (-1)^{p(q-1)+(p+q-1)(r-1)}\Big\{\phi,\eta,\xi_0\wedge\xi+(-1)^{q-1}\xi_0\wedge\{\eta,\xi\}\Big\} \\
&\quad -(-1)^{p(q+r)}\Big\{\eta,\{\phi,\xi_0\}\wedge\xi+(-1)^{r-1}\xi_0\wedge\{\phi,\xi\}\Big\} \\
&= (-1)^{p(q-1)+(p+q-1)(r-1)} \\
&\quad \Big[\{\phi,\{\eta,\xi_0\}\}\wedge\xi+(-1)^{(r-1)q}\{\eta,\xi_0\}\wedge\{\phi,\xi\} \\
&\qquad +(-1)^{q-1}\big(\{\phi,\xi_0\}\wedge\{\eta,\xi\}+(-1)^{r-1}\xi_0\wedge\{\phi,\{\eta,\xi\}\}\big)\Big] \\
&\quad -(-1)^{p(q+r)}\Big[\{\eta,\{\phi,\xi_0\}\}\wedge\xi+(-1)^{(q-1)r}\{\phi,\xi_0\}\wedge\{\eta,\xi\} \\
&\qquad +(-1)^{r-1}\big(\{\eta,\xi_0\}\wedge\{\phi,\xi\}+(-1)^{q-1}\xi_0\wedge\{\eta,\{\phi,\xi\}\}\big)\Big] \\
&= (-1)^p\xi\wedge\Big(\{\{\xi_0,\eta\},\phi\}+\{\eta,\{\xi_0,\phi\}\}\Big) \\
&\quad +\xi_0\wedge\Big(\{\{\xi,\eta\},\phi\}+(-1)^{(p-1)(q-1)}\{\eta,\{\xi,\phi\}\}\Big) \\
&= (**)\ \text{左边}
\end{aligned}$$

从而 $(**)$ 两边相等，归纳完毕。 □

归纳步当中主要是在验证正负号。

由于 Schouten-Nijenhuis 括号是切向量场李括号的“推广”，我们在以后更喜欢将它们都记作“[,]”（而“{,}”在以后常用来表示泊松括号）。

2.5 Shuffle 乘积

对于 $n\geq 1$，我们记 S_n 为 n 元对称群。

定义 2.5.1. （(p,q)-*Shuffle*）

对于正整数 p,q，称 $\sigma \in S_{p+q}$ 为一个 p,q-***Shuffle***，如果满足

$$\sigma(1) < \sigma(2) < \ldots < \sigma(p)$$

$$\sigma(p+1) < \sigma(p+2) < \ldots < \sigma(q)$$

全体 (p,q)-*Shuffle* 构成的集合记为 $\mathrm{Sh}_{p,q}$.

笔者建议将“Shuffle”意译为“**洗牌**”——因为 $\mathrm{Sh}_{p,q}$ 中的置换，好比将 $p+q$ 张扑克牌分为 p 张、q 张两组来洗牌。

容易知道，集合 $\mathrm{Sh}_{p,q}$ 的元素个数为

$$\frac{(p+q)!}{p!q!}$$

回到 Hochschild 链复形。我们已经知道，$\mathrm{HH}_\bullet(A)$ 是通常的光滑流形的微分形式 $\Omega^\bullet_X$ 的非交换版本。而对于微分形式 $\Omega^\bullet_X$，其上有外积 $\wedge$ 使之构成分次交换代数；我们也企图去定义非交换版本的外积。

定义 2.5.2. （*Shuffle* 乘积）

设 A, A' 为 K-代数，M, M' 分别为双 A, A'-模，我们定义如下的运算 $\times$，称之为 ***Shuffle* 乘积**：

$$\begin{array}{rcl} C_p(A,M) \times C_q(A',M') & \to & C_{p+q}(A \otimes A', M \otimes M') \\ (m, a_1, \ldots, a_p) \times (m', a'_1, \ldots, a'_q) & \mapsto & \displaystyle\sum_{\sigma \in Sh_{p,q}} (-1)^{|\sigma|} (m \otimes m', \sigma(a_1, \ldots, a_p, a'_1, \ldots, a'_q)) \end{array}$$

其中 $|\sigma| := \mathrm{sgn}\,\sigma$ 为置换的符号，$(m, a_1, \ldots, a_n) := m \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n$ 为简单的记法；并且置换群 S_{p+q} 在 $A^{\otimes(p+q)}$ 上的作用为

$$\sigma(a_1, \ldots, a'_q) := (a_{\sigma^{-1}(1)}, \ldots, a_{\sigma^{-1}(q')})$$

注意在这里，群 S_{p+q} 在 $A^{\otimes(p+q)}$ 上的作用方式，下角标中出现的是“σ^{-1}”，如此规定是为了保证 S_{p+q} 的作用是左作用。

还要注意一点，A, A' 以及 M, M' 并不被假定有分次结构，$A \otimes A'$ 在 $M \otimes M'$ 上的模作用是通常的

$$(a \otimes a').(m \otimes m') = (a.m) \otimes (a'.m')$$

右模作用也类似，并不会出正负号，Koszul 符号法则在此平凡。

还要注意，

$$C_{p+q}(A\otimes A',M\otimes M')\cong (M\otimes M')\otimes (A\otimes A')^{\otimes(p+q)}$$

之中元素“$(m\otimes m',a_1,...,a_p,a'_1,...,a'_q)$”里面的“$a_i$”应该是 $a_i\otimes 1\in A\otimes A'$，以及“$a'_j$”应该是 $1\otimes a'_j\in A\otimes A'$.

还要注意 $A\otimes A'$ 的乘法满足 $a_ia'_j=a'_ja_i$ 交换。

性质 2.5.3. （*Shuffle* 乘积与 *Hochschild* 边缘算子相容）

记号同上，则对于任意 $x\in C_p(A,M)$，$y\in C_q(A',M')$，成立

$$b(x\times y)=b(x)\times y+(-1)^{\deg x}x\times b(y)$$

其中 $b:C_\bullet\to C_{\bullet-1}$ 为相应 Hochschild 链复形各自的边缘算子。

证明. 当然是暴力验证了，我们尽可能使用简练的记号。令

$$x=m\otimes(a_1,...,a_p)$$

$$y=m'\otimes(a'_1,...,a'_q)$$

首先看 $b(x\times y)$，我们按张量缩并的位置，以及 $A\otimes A'$ 当中的“元素类型”（形如 $1\otimes A'$ 或是 $A\otimes 1$）来分类，强行将它打开：

$$\begin{aligned}
b(x\times y) &= b\sum_{\sigma\in \mathrm{Sh}_{p,q}}(-1)^{|\sigma|}(m\otimes m')\otimes\sigma(a_1,...,a_p,a'_1,...,a'_q)\\
&= (m.a_1\otimes m')\otimes\sum_{\sigma\in \mathrm{Sh}_{p-1,q}}(-1)^{|\sigma|}\sigma(a_2,...,a_p,a'_1,...,a'_q)\\
&\quad +(m\otimes m'.a'_1)\otimes\sum_{\sigma\in \mathrm{Sh}_{p,q-1}}(-1)^{|\sigma|+p}\sigma(a_1,...,a_p,a'_2,...,a'_q)\\
&\quad +\sum_{i=1}^{p+q-1}(-1)^i(m\otimes m')\otimes\Bigg[\sum_{\substack{1\le\alpha<\beta\le p\\ \sigma\in \mathrm{Sh}_{p-2,q}}}(-1)^{|\sigma|+\alpha+\beta-1}\sigma(...,\underbrace{(a_\alpha a_\beta)}_{\text{第 } i,i+1 \text{ 个}},...)\\
&\qquad +\sum_{\substack{1\le\alpha\le p,1\le\gamma\le q\\ \sigma\in \mathrm{Sh}_{p-1,q-1}}}(-1)^{|\sigma|+\alpha+\gamma+p-1}\sigma(...,\underbrace{(a_\alpha a'_\gamma)}_{\text{第 } i,i+1 \text{ 个}},...)\\
&\qquad +\sum_{\substack{1\le\alpha\le p,1\le\gamma\le q\\ \sigma\in \mathrm{Sh}_{p-1,q-1}}}(-1)^{|\sigma|+\alpha+\gamma+p}\sigma(...,\underbrace{(a'_\gamma a_\alpha)}_{\text{第 } i,i+1 \text{ 个}},...)\\
&\qquad +\sum_{\substack{1\le\gamma<\delta\le q\\ \sigma\in \mathrm{Sh}_{p,q-2}}}(-1)^{|\sigma|+(\gamma+p)+(\delta+p)-1}\sigma(...,\underbrace{(a'_\gamma a'_\delta)}_{\text{第 } i,i+1 \text{ 个}},...)\Bigg]\\
&\quad +(-1)^{p+q}(a_n.m\otimes m')\sum_{\sigma\in \mathrm{Sh}_{p-1,q}}(-1)^{|\sigma|+q}(a_1,...,a_{p-1},a'_1,...,a'_q)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
& +(-1)^{p+q}(m \otimes a'_n.m') \sum_{\sigma \in \mathrm{Sh}_{p,q-1}} (-1)^{|\sigma|}(a_1, ..., a_p, a'_1, ..., a'_{q-1}) \\
= \; & [m.a_1 \otimes (a_2, ..., a_p)] \times y + (-1)^p x \times [m'.a'_1 \otimes (a'_2, ..., a'_q)] \\
& + \left(\sum_{i=1}^{p-1} (-1)^i m \otimes (a_1, ..., a_i a_{i+1}, ..., a_p) \right) \times y \\
& +(-1)^p x \times \left(\sum_{i=1}^{q-1} (-1)^i m' \otimes (a'_1, ..., a'_i a'_{i+1}, ..., a'_q) \right) \\
& +(-1)^p [a_p.m \otimes (a_1, ..., a_{p-1})] \times y + (-1)^{p+q} x \times [a'_q.m' \otimes (a'_1, ..., a'_{q-1})] \\
= \; & b(x) \times y + (-1)^p x \times b(y)
\end{aligned}
$$

从而证毕。 □

推论 2.5.4. 对于 K-代数 A, A'，若 M, M' 分别为双 A, A'-模，则 *Shuffle* 乘积诱导了链映射：

$$C_\bullet(A, M) \otimes C_\bullet(A', M') \xrightarrow{\times} C_\bullet(A \otimes A', M \otimes M')$$

并且该链映射诱导了 *Hochschild* 同调的同态

$$H_\bullet(A, M) \otimes H_\bullet(A', M') \xrightarrow{\times} H_\bullet(A \otimes A', M \otimes M')$$

证明. 仅仅是将

$$b(x \times y) = b(x) \times y + (-1)^{\deg x} x \times b(y)$$

换了一种说法。注意链复形张量积

$$C_\bullet(A, M) \otimes C_\bullet(A', M')$$

的边缘算子服从与定义 2.1.9 类似的规则。Shuffle 乘积在 Hochschild 同调的下降的良定性也易证。 □

特别地，当 $M = A, M' = A'$ 时 Shuffle 乘积诱导了同态：

$$\mathrm{HH}_\bullet(A) \otimes \mathrm{HH}_\bullet(A') \xrightarrow{\times} \mathrm{HH}_\bullet(A \otimes A')$$

定理 2.5.5. （*Künneth* 公式）

如果 K-代数 A, A' 作为 K-模都是平坦的，那么 *Shuffle* 乘积诱导的 *Hochschild* 同调之间的同态

$$\mathrm{HH}_\bullet(A) \otimes \mathrm{HH}_\bullet(A') \xrightarrow{\times} \mathrm{HH}_\bullet(A \otimes A')$$

为同构。

证明. 代数拓扑中的标准证明。从略。 □

注意我们总是假定 A, A' 是投射 K-模，从而自然满足平坦性。

性质 2.5.6. 若 K-代数 A 是交换的，则 *Shuffle* 乘积诱导了 $\mathrm{HH}_\bullet(A)$ 的 K-代数结构，并且 $(\mathrm{HH}_\bullet(A), \times)$ 是分次交换的。

这就回到了通常交换的情形了。事实上 Shuffle 乘积的几何意义为微分形式的外积。

证明. 对于任意的 K-代数 A，注意张量积 $A \otimes A$ 也有 K-代数结构。断言：

$$\begin{aligned} \pi : A \otimes A &\to A \\ a \otimes b &\mapsto ab \end{aligned}$$

为 K-代数同态当且仅当 A 是交换代数。于是当 A 交换时，考虑 K-代数同态 $A \otimes A \xrightarrow{\pi} A$，由 Hochschild 同调的函子性，该同态诱导了

$$\mathrm{HH}_\bullet(A \otimes A) \xrightarrow{\mathrm{HH}_\bullet(\pi)} \mathrm{HH}_\bullet(A)$$

再注意 Shuffle 乘积诱导

$$\mathrm{HH}_\bullet(A) \otimes \mathrm{HH}_\bullet(A) \xrightarrow{\times} \mathrm{HH}_\bullet(A \otimes A)$$

将上述两个同态复合，即得到分次 K-代数 $(\mathrm{HH}_\bullet(A), \times)$.

容易验证此代数为分次交换的，验证如下：对任意 $p, q \geq 0$ 以及 $a_0, a_1, ..., a_p \in A$，$a'_0, a'_1, ..., a'_q \in A$，有

$$\begin{aligned} & [a_0 \otimes (a_1, ..., a_p)] \times [a'_0 \otimes (a'_1, ..., a'_q)] \\ = & (a_0 a'_0) \otimes \sum_{\sigma \in \mathrm{Sh}_{p,q}} (-1)^{|\sigma|} \sigma(a_1, ..., a_p; a'_1, ..., a'_q) \\ = & (a'_0 \otimes a_0) \otimes \sum_{\sigma \in \mathrm{Sh}_{q,p}} (-1)^{|\sigma| + pq} \sigma(a'_1, ..., a'_q; a_1, ..., a_p) \\ = & (-1)^{pq} [a'_0 \otimes (a'_1, ..., a'_q)] \times [a_0 \otimes (a_1, ..., a_p)] \end{aligned}$$

从而分次交换。 □

性质 2.5.7. （*Shuffle* 乘积是非交换版本的外积）

若 $A = K[x^1, ..., x^n]$ 为多项式代数，则有 K-代数同构

$$(\mathrm{HH}_\bullet(A), \times) \cong (\Omega^\bullet_A, \wedge)$$

证明. 回顾性质1.8.4当中的双复形同态

$$\Phi : (\overline{\mathcal{B}}_{\bullet\bullet}(A), b, \mathcal{B}) \to (\Omega_A^\bullet, 0, \mathrm{d})$$

首先，容易验证 Shuffle 乘积可下降至

$$\overline{C}_\bullet(A) \otimes \overline{C}_\bullet(A) \xrightarrow{\times} \overline{C}_\bullet(A)$$

从而我们只需要验证对于任意 $x \in \overline{C}_p(A)$ 以及 $y \in \overline{C}_q(A)$，成立

$$\Phi(x \times y) = \Phi(x) \wedge \Phi(y)$$

对任意的 $p, q \geq 0$，以及 $x = a_0 \otimes (\overline{a_1}, ..., \overline{a_p}) \in \overline{C}_p(A)$，$y = a_0' \otimes (\overline{a_1}', ..., \overline{a_q}';) \in \overline{C}_q(A)$，从而

$$\begin{aligned}
\Phi(x \times y) &= \Phi\left(a_0 a_0' \otimes \sum_{\sigma \in \mathrm{Sh}_{p,q}} (-1)^{|\sigma|} \sigma(\overline{a_1}, ..., \overline{a_p}; \overline{a_1}', ..., \overline{a_q}')\right) \\
&= \frac{1}{(p+q)!} a_0 a_0' \sum_{\sigma \in \mathrm{Sh}_{p,q}} (-1)^{|\sigma|} \sigma(\mathrm{d}a_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}a_p \wedge \mathrm{d}a_1' \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}a_q') \\
&= \frac{1}{p!q!} a_0 a_0' \mathrm{d}a_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}a_p \wedge \mathrm{d}a_1' \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}a_q' \\
\Phi(x) \wedge \Phi(y) &= \left(\frac{1}{p!} a_0 \mathrm{d}a_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}a_p\right) \wedge \left(\frac{1}{q!} a_0' \mathrm{d}a_1' \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}a_q'\right) \\
&= \frac{1}{p!q!} a_0 a_0' \mathrm{d}a_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}a_p \wedge \mathrm{d}a_1' \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}a_q'
\end{aligned}$$

从而得证。 □

2.6 Cup 乘积与 Gerstenhaber 括号（部分细节待补）

对于 K-代数 A，回顾 Hochschild 上链复形

$$C^\bullet(A) := C^\bullet(A, A) = \bigoplus_{p \geq 0} C^p(A, A)$$

我们将介绍 $C^\bullet(A)$ 上的代数结构：cup 乘积。

定义 2.6.1. （*Cup* 乘积）

设 A 为 K-代数，定义 ***cup*** **乘积**

$$\cup : C^\bullet(A) \otimes C^\bullet(A) \to C^\bullet(A)$$

如下：对任意的 $f \in C^p(A)$，$g \in C^q(A)$，

$$\begin{aligned}
f \cup g &\in C^{p+q}(A) \\
(f \cup g)(a_1, ..., a_p; a_{p+1}, ..., a_q) &= f(a_1, ..., a_p) g(a_{p+1}, ..., a_{p+q})
\end{aligned}$$

我们已经知道，Hochschild 上同调是“非交换版本的多重切向量场”。注意多重切向量场具有外积运算，而 cup 乘积则是“非交换版本的外积”。我们将去说明这一点。

性质 2.6.2. （*cup* 乘积与 *Hochschild* 微分的相容性）

对于 K-代数 A，任意 $f,g\in C^\bullet(A)$，成立

$$\partial(f\cup g)=(\partial f)\cup g+(-1)^{\deg f}f\cup\partial g$$

证明. 暴力验证之。任取 $a_0,a_1,\dots,a_{p+q}\in A$，成立

$$\begin{aligned}
& [(\partial f)\cup g+(-1)^p f\cup(\partial g)](a_0\text{—}a_{p+q}) \\
= \; & a_0f(a_1\text{—}a_p)g(a_{p+1}\text{—}a_{p+q}) \\
& -\sum_{k=0}^{p-1}(-1)^k f(\text{—}a_ka_{k+1}\text{—})g(a_{p+1}\text{—}a_{p+q}) \\
& -(-1)^p f(a_0\text{—}a_{p-1})a_pg(a_{p+1}\text{—}a_{p+q}) \\
& +(-1)^p f(a_0\text{—}a_{p-1})a_pg(a_{p+1}\text{—}a_{p+q}) \\
& -(-1)^p\sum_{l=0}^{q-1}f(a_0\text{—}a_{p-1})g(\text{—}a_{p+l}a_{p+l+1}\text{—}) \\
& -(-1)^{p+q}f(a_0\text{—}a_{p-1})g(a_p\text{—}a_{p+q-1})a_{p+q} \\
= \; & a_0(f\cup g)(a_1\text{—}a_{p+q}) \\
& -\sum_{k=0}^{p+q-1}(-1)^k(f\cup g)(\text{—}a_ka_{k+1}\text{—}) \\
& -(-1)^{p+q}(f\cup g)(a_0\text{—}a_{p+q-1})a_{p+q} \\
= \; & \partial(f\cup g)(a_0\text{—}a_{p+q})
\end{aligned}$$

从而证毕。 □

推论 2.6.3. *cup* 乘积诱导了如下同态：

$$\mathrm{HH}^p(A)\times\mathrm{HH}^q(A)\xrightarrow{\cup}\mathrm{HH}^{p+q}(A)$$

证明. 易验证良定性，几乎显然。 □

容易验证如此的 cup 乘积是结合的（之前 Shuffle 乘积的结合性也可直接看出来），于是我们得到分次结合 K-代数 $(\mathrm{HH}^\bullet(A),\cup)$。事实上，该 K-代数是分次交换的，这从 cup 乘积当中很难看出来（似乎非常不显然），我们下一节给出证明。

注记 2.6.4. 我们已经知道，*Hochschild* 上同调是“非交换版本的多重切向量场”；而 *cup* 乘积即为“多重切向量场的外积”的非交换版本。具体地，若 $A = K[x^1, ..., x^n]$ 为多项式环，则有 K-代数同构

$$(\mathrm{HH}^\bullet(A), \cup) \cong (\mathrm{PV}_A, \wedge)$$

我们知道，PV_X 上不仅有外积结构，还有 Schouten-Nijenhuis 括号；我们也要给出后者的非交换版本，使得 $\mathrm{HH}^\bullet(A)$ 为 Gerstenhaber 代数：

定义 2.6.5. *(Gerstenhaber 代数)*

设 $(A, \cdot)$ 为分次交换 K-代数，$A = \bigoplus_{k\in\mathbb{Z}} A^k$ 为其分次，并配以 K-双线性映射

$$\{,\} : A^p \otimes A^q \quad \to \quad A^{p+q-1}$$

称 $(A, \cdot, \{,\})$ 为 ***Gerstenhaber* 代数**，若 $\{,\}$ 满足以下公理：

（1）$(A, \cdot)$ 为分次结合代数；

（2）$(A[1], \{,\})$ 为李超代数；

（3）相容性：对 A 中的任意齐次元 x, y, z，成立

$$\{x, yz\} = \{x, y\}z + (-1)^{(x-1)y} y\{x, z\}$$

例如光滑流形 X 上 $(\mathrm{PV}_X, \wedge, \{,\})$，即多重切向量场、外积、Schouten-Nijenhuis 括号，构成 Gerstenhaber 代数。

Gerstenhaber 代数在物理学中常被称为**“经典 BV 代数”**（classical BV algebra）.

定义 2.6.6. （*Gerstenhaber* 乘积）

对于 K-代数 A，定义 $C^\bullet(A)$ 上的 K-双线性运算

$$\circ : C^p(A) \times C^q(A) \to C^{p+q-1}(A)$$

如下：对任意 $a_1, a_2, ..., a_{p+q-1} \in A$，以及 $f \in C^p(A), g \in C^q(A)$，

$$(f \circ g)(a_1 — a_{p+q-1}) := \sum_{i=1}^{p} (-1)^{(i-1)(q-1)} f(— a_{i-1}, g(a_i — a_{i+q-1}), a_{i+q} —)$$

运算“$\circ$”称为 ***Gerstenhaber* 乘积**。

性质 2.6.7. 对任意 $f \in C^p(A), g \in C^q(A)$，成立

$$\partial(f \circ g) - (\partial f) \circ g - (-1)^{p-1} f \circ \partial g = \pm[(f \cup g) - (-1)^{pq}(g \cup f)]$$

证明. purple 非常暴力的计算验证，等号右边的符号暂时没算清。从略。 □

以后抽空补上。上述等式的右边为“the failure of $\circ$ being a chain map measured by the commutativity of cup product”.

(虽说上述等式右边的正负号暂时没算清楚) 但此结果已经暂时足够用了：

推论 2.6.8. 对于 K-代数 A，$(\mathrm{HH}^\bullet(A), \cup)$ 是分次交换的。

证明. 利用性质2.6.7，几乎显然。 □

$(\mathrm{HH}^\bullet(A), \cup)$ 的分次交换性是一个十分深刻的结论。

定义 2.6.9. （*Gerstenhaber* 括号）

$$\{f, g\} = f \circ g - (-1)^{(f-1)(g-1)} g \circ f$$

性质 2.6.10. 对于任意 $f, g \in C^\bullet(A)$ 为齐次元，成立

$$\partial\{f, g\} = \{\partial f, g\} \pm \{f, \partial g\}$$

证明. （待补） □

于是，Gerstenhaber 括号 $\{,\}$ 可下降到 $\mathrm{HH}^\bullet(A)$ 上，这是非交换版本的 Schouten-Nijenhuis 括号。

性质 2.6.11. 对于 K-代数 A，$(\mathrm{HH}^\bullet(A), \cup, \{,\})$ 构成 *Gerstenhaber* 代数。

证明. （待补） □

2.7 结合性

用 Gerstenhaber 括号，可以给出乘法结合性的另一种描述：对于 K-代数 A，考虑 A 的乘法结构

$$m : A \otimes A \to A$$

从而 m 自然视为 $C^2(A)$ 中的元素。

引理 2.7.1. *对于 K-模 A，以及 A 上的乘法结构*

$$m : A \otimes A \to A$$

那么 m 满足结合律当且仅当 $\{m, m\} = 0$. 其中 $\{,\}$ 为 $C^\bullet(A)$ 上的 Gerstenhaber 括号。

证明. 直接验证。注意到

$$\{m, m\} = m \circ m - (-1)^{(2-1)(2-1)} m \circ m = 2m \circ m$$

其中“$\circ$”为 Gerstenhaber 乘积。于是对任意的 $a_1, a_2, a_3 \in A$，都有

$$\begin{aligned}(m \circ m)(a_1, a_2, a_3) &= m(m(a_1, a_2), a_3) - m(a_1, m(a_2, a_3)) \\ & (a_1 a_2) a_3 - a_1(a_2 a_3)\end{aligned}$$

因此 $\{m, m\} = 0$ 当且仅当 m 结合。 □

事实上，Hochschild 上链复形 $C^\bullet(A)$ 的微分算子 ∂ 也可以用 Gerstenhaber 括号来描述：

引理 2.7.2. *设 A 为 K-代数，其乘法为*

$$m : A \otimes A \to A$$

考虑 A 的 Hochschild 上链复形 $(C^\bullet(A), \partial)$，则有

$$\partial = \{-, m\}$$

证明. 给定 $q \geq 0$，对于任意的 $f \in C^q(A)$，只需要验证 $\partial f = \{f, m\}$，其中 $\{,\}$ 为 Gerstenhaber 括号。任取 $a_0, a_1, ..., a_q \in A$，一方面我们早已知道

$$\partial f(a_0, a_1, ..., a_q) = a_0 f(a_1, ..., a_q) - \sum_{k=1}^{q-1} (-1)^k f(a_0, ..., (a_k a_{k+1}), ..., a_q) - (-1)^q f(a_0, a_1, ..., a_{q-1}) a_q$$

另一方面，$\{f, m\} = f \circ m - (-1)^{q-1} m \circ f$，从而

$$
\begin{aligned}
\{f, m\}(a_0, a_1, ..., a_q) &= (f \circ m)(a_0, a_1, ..., a_q) - (-1)^{q-1}(m \circ f)(a_0, a_1, ..., a_q) \\
&= \sum_{k=0}^{q-1} (-1)^{k-1} f(a_0, ..., m(a_k a_{k+1}), ..., a_n) \\
&\quad -(-1)^{q-1}\left[m(f(a_0, ..., a_{q-1}), a_q) + (-1)^q m(a_0, f(a_1, ..., a_q))\right] \\
&= a_0 f(a_1, ..., a_q) - \sum_{k=1}^{q-1} (-1)^k f(a_0, ..., (a_k a_{k+1}), ..., a_q) - (-1)^q f(a_0, a_1, ..., a_{q-1}) a_q
\end{aligned}
$$

因此 $\partial f = \{f, m\}$，得证。 $\square$

第 3 章　间奏：形变量子化

本章开始，正式搞一些事情。经典力学与量子力学的框架众所周知，大致如下：

	经典力学	量子力学
相空间	辛流形 (X,ω)	希尔伯特空间 $\mathcal{H}$
观测量	光滑函数	厄密特算子
演化方程	$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}=\{H,f\}$	$\frac{\mathrm{d}A_t}{\mathrm{d}t}=\frac{i}{\hbar}[\hat{H},A_t]$

我们将利用结合代数的 Hochschild（上）同调，以及 A_∞ 方法，来证明 Kontsevich 的 Formality theorem.

（待完善）

3.1　泊松几何与辛几何

本节简要回顾一下泊松几何。

定义 3.1.1. （泊松括号）

设 X 为光滑流形，$\{,\}:C^\infty(X)\times C^\infty(X)\to C^\infty(X)$ 为 $\mathbb{R}$-双线性映射。称 $\{,\}$ 为 X 上的**泊松括号** *(Poisson bracket)*，如果 $\{,\}$ 满足：对任意 $f,g,h\in C^\infty(X)$，成立

（*1*）反对称性：

$$\{f,g\}=-\{g,f\}$$

（*2*）*Jacobi* 恒等式：

$$\{f,\{g,h\}\}+\{g,\{h,f\}\}+\{h,\{f,g\}\}=0$$

（*3*）*Leibnitz* 法则：

$$\{f,gh\}=\{f,g\}h+g\{f,h\}$$

泊松括号的定义的（1）（2）表明 $(C^\infty(X),\{,\})$ 为李代数，而（3）表明对任意 $f\in C^\infty(X)$，映射

$$X_f:C^\infty(X)\quad\to\quad C^\infty(X)$$

$$g \quad \mapsto \quad \{f,g\}$$

为导子，从而 X_f 为 X 上的光滑切向量场，在局部坐标下形如 $X_f = X_f^i \frac{\partial}{\partial u^i}$. 于是有

$$\{f,g\} = X_f^i \frac{\partial g}{\partial u^i}$$

但又注意到 $\{f,g\} = -\{g,f\}$ 以及切向量场 X_g，从而易知泊松括号 $\{,\}$ 在局部坐标 (u^i) 下的表达式必形如

$$\{f,g\} = P^{ij} \frac{\partial f}{\partial u^i} \frac{\partial g}{\partial u^j}$$

并且容易验证：

引理 3.1.2. 设 $\{,\}$ 为光滑流形 X 上的泊松括号，并且在局部坐标 (u^i) 下的表达式为

$$\{f,g\} = P^{ij} \frac{\partial f}{\partial u^i} \frac{\partial g}{\partial u^j}$$

那么对任意指标 i,j,k，成立

$$P^{ij} = -P^{ji}$$

$$P^{is} \frac{\partial P^{jk}}{\partial u^s} + P^{js} \frac{\partial P^{ki}}{\partial u^s} + P^{ks} \frac{\partial P^{ij}}{\partial u^s} = 0$$

证明. 容易验证 $P^{ij} = -P^{ji}$ 等价于泊松括号的反对称性 $\{f,g\} = -\{g,f\}$，这是因为对任意光滑函数 f,g，局部上有

$$P^{ij} \frac{\partial f}{\partial u^i} \frac{\partial g}{\partial u^j} = \{f,g\} = -\{g,f\} = -P^{ij} \frac{\partial g}{\partial u^i} \frac{\partial f}{\partial u^j} = -P^{ji} \frac{\partial f}{\partial u^i} \frac{\partial g}{\partial u^j}$$

从而 $(P^{ij} + P^{ji}) \frac{\partial f}{\partial u^i} \frac{\partial g}{\partial u^j} = 0$，因此由 f,g 的任意性，有 $P^{ij} = -P^{ji}$.

再看第二个式子。事实上它等价于泊松括号的雅可比恒等式。对任意 $f,g,h \in C^\infty(X)$，局部坐标下有

$$\begin{aligned} \{f,\{g,h\}\} &= \{f, P^{ij} \frac{\partial g}{\partial u^i} \frac{\partial h}{\partial u^j}\} \\ &= P^{kl} \frac{\partial f}{\partial u^k} \frac{\partial P^{ij}}{\partial u^l} \frac{\partial g}{\partial u^i} \frac{\partial h}{\partial u^j} + P^{ij} P^{kl} \frac{\partial f}{\partial u^k} \left(\frac{\partial^2 g}{\partial u^i \partial u^l} \frac{\partial h}{\partial u^j} + \frac{\partial^2 h}{\partial u^j \partial u^l} \frac{\partial g}{\partial u^i} \right) \end{aligned}$$

将 f,g,h 轮换再相加，适当更改求和指标，合并整理得

$$\begin{aligned} &\{f,\{g,h\}\} + \{g,\{h,f\}\} + \{h,\{f,g\}\} \\ = \; &\frac{\partial f}{\partial u^i} \frac{\partial g}{\partial u^j} \frac{\partial h}{\partial u^k} \left(P^{is} \frac{\partial P^{jk}}{\partial u^s} + P^{js} \frac{\partial P^{ki}}{\partial u^s} + P^{ks} \frac{\partial P^{ij}}{\partial u^s} \right) + P^{kl} (P^{ij} + P^{ji}) \frac{\partial f}{\partial u^k} \frac{\partial^2 g}{\partial u^i \partial u^l} \frac{\partial h}{\partial u^j} \end{aligned}$$

$$+P^{kl}(P^{ij}+P^{ji})\frac{\partial g}{\partial u^k}\frac{\partial^2 h}{\partial u^i \partial u^l}\frac{\partial f}{\partial u^j}+P^{kl}(P^{ij}+P^{ji})\frac{\partial h}{\partial u^k}\frac{\partial^2 f}{\partial u^i \partial u^l}\frac{\partial g}{\partial u^j}$$

注意到 $P^{ij}=-P^{ji}$，以及 f,g,h 的任意性，从而有

$$P^{is}\frac{\partial P^{jk}}{\partial u^s}+P^{js}\frac{\partial P^{ki}}{\partial u^s}+P^{ks}\frac{\partial P^{ij}}{\partial u^s}=0$$

得证。 □

我们可以使用张量的语言来描述泊松括号结构：

定义 3.1.3. （泊松张量）对于光滑流形 X，以及 $P\in \mathrm{PV}_X^2$ 为 2-切向量场，在局部坐标下表达式为

$$P=P^{ij}\frac{\partial}{\partial u^i}\wedge\frac{\partial}{\partial u^j}$$

其中 $P^{ij}=-P^{ji}$. 称 P 为**泊松张量**（*Poisson tensor*），如果 P 在局部坐标下满足如下雅可比恒等式：

$$P^{is}\frac{\partial P^{jk}}{\partial u^s}+P^{js}\frac{\partial P^{ki}}{\partial u^s}+P^{ks}\frac{\partial P^{ij}}{\partial u^s}=0$$

容易看出泊松括号与泊松张量的一一对应关系：对于泊松括号 $\{,\}$，若局部上有 $\{f,g\}=P^{ij}\frac{\partial f}{\partial u^i}\frac{\partial g}{\partial u^j}$，则考虑泊松张量

$$P:=\frac{1}{2}P^{ij}\frac{\partial}{\partial u^i}\wedge\frac{\partial}{\partial u^j}$$

反过来，由泊松张量也能得到泊松括号。并且容易知道

$$\{f,g\}=\langle P,\mathrm{d}f\wedge\mathrm{d}g\rangle$$

事实上泊松张量的雅可比恒等式可以用 Schouten-Nijenhuis 括号等价刻画：

性质 3.1.4. 对于光滑流形 X，以及 $P\in \mathrm{PV}_X^2$，则 P 为泊松张量当且仅当

$$[P,P]=0$$

其中 $[,]$ 为 *Schouten-Nijenhuis* 括号（见定义*2.4.2*）。

证明. 局部坐标下验证。取局部坐标 (u^i)，令 $P=P^{ij}\frac{\partial}{\partial u^i}\wedge\frac{\partial}{\partial u^j}$，则有

$$[P,P]=[(P^{ij}\frac{\partial}{\partial u^i})\wedge\frac{\partial}{\partial u^j},(P^{kl}\frac{\partial}{\partial u^k})\wedge\frac{\partial}{\partial u^l}]$$

$$
\begin{aligned}
= \quad & [P^{ij}\frac{\partial}{\partial u^i}, P^{kl}\frac{\partial}{\partial u^k}] \wedge \frac{\partial}{\partial u^j} \wedge \frac{\partial}{\partial u^l} - [P^{ij}\frac{\partial}{\partial u^i}, \frac{\partial}{\partial u^l}] \wedge \frac{\partial}{\partial u^j} \wedge P^{kl}\frac{\partial}{\partial u^k} \\
& -[\frac{\partial}{\partial u^j}, P^{kl}\frac{\partial}{\partial u^k}] \wedge P^{ij}\frac{\partial}{\partial u^i} \wedge \frac{\partial}{\partial u^l} + [\frac{\partial}{\partial u^j}, \frac{\partial}{\partial u^l}] \wedge P^{ij}\frac{\partial}{\partial u^i} \wedge P^{kl}\frac{\partial}{\partial u^k}
\end{aligned}
$$

上式右端共有四项，首先注意最后一项

$$
[\frac{\partial}{\partial u^j}, \frac{\partial}{\partial u^l}] \wedge P^{ij}\frac{\partial}{\partial u^i} \wedge P^{kl}\frac{\partial}{\partial u^k} = P^{ij}P^{kl}\delta_{jl}\frac{\partial}{\partial u^j} \wedge \frac{\partial}{\partial u^i} \wedge \frac{\partial}{\partial u^k} = \sum_{j=1}^{n} P^{ij}P^{kj}\frac{\partial}{\partial u^j} \wedge \frac{\partial}{\partial u^i} \wedge \frac{\partial}{\partial u^k} = 0
$$

最后一个等号是因为指标 i,k 的（反）对称性；从而暴力展开，注意利用 $P^{ij} = -P^{ji}$ 以及适当更改求和指标，有

$$
\begin{aligned}
[P,P] \quad = \quad & [P^{ij}\frac{\partial}{\partial u^i}, P^{kl}\frac{\partial}{\partial u^k}] \wedge \frac{\partial}{\partial u^j} \wedge \frac{\partial}{\partial u^l} \\
& -[P^{ij}\frac{\partial}{\partial u^i}, \frac{\partial}{\partial u^l}] \wedge \frac{\partial}{\partial u^j} \wedge P^{kl}\frac{\partial}{\partial u^k} - [\frac{\partial}{\partial u^j}, P^{kl}\frac{\partial}{\partial u^k}] \wedge P^{ij}\frac{\partial}{\partial u^i} \wedge \frac{\partial}{\partial u^l} \\
= \quad & P^{ij}\frac{\partial P^{kl}}{\partial u^i}\frac{\partial}{\partial u^k} \wedge \frac{\partial}{\partial u^j} \wedge \frac{\partial}{\partial u^l} - P^{kl}\frac{\partial P^{ij}}{\partial u^k}\frac{\partial}{\partial u^i} \wedge \frac{\partial}{\partial u^j} \wedge \frac{\partial}{\partial u^l} \\
& + P^{kl}\frac{\partial P^{ij}}{\partial u^l}\frac{\partial}{\partial u^i} \wedge \frac{\partial}{\partial u^j} \wedge \frac{\partial}{\partial u^k} - P^{ij}\frac{\partial P^{kl}}{\partial u^j}\frac{\partial}{\partial u^k} \wedge \frac{\partial}{\partial u^i} \wedge \frac{\partial}{\partial u^l} \\
= \quad & \left(-P^{sj}\frac{\partial P^{ki}}{\partial u^s} - P^{sk}\frac{\partial P^{ij}}{\partial u^s} + P^{ks}\frac{\partial P^{ij}}{\partial u^s} - P^{js}\frac{\partial P^{ik}}{\partial u^s}\right)\frac{\partial}{\partial u^i} \wedge \frac{\partial}{\partial u^j} \wedge \frac{\partial}{\partial u^k} \\
= \quad & -4P^{sj}\frac{\partial P^{ki}}{\partial u^s}\frac{\partial}{\partial u^i} \wedge \frac{\partial}{\partial u^j} \wedge \frac{\partial}{\partial u^k} \\
= \quad & -8\sum_{i<j<k}\left(P^{sj}\frac{\partial P^{ki}}{\partial u^s} + P^{sk}\frac{\partial P^{ij}}{\partial u^s} + P^{si}\frac{\partial P^{jk}}{\partial u^s}\right)\frac{\partial}{\partial u^i} \wedge \frac{\partial}{\partial u^j} \wedge \frac{\partial}{\partial u^k}
\end{aligned}
$$

可见 $[P,P] = 0$ 当且仅当雅可比恒等式成立，证毕。 □

于是我们自然地引入泊松流形的概念：

定义 3.1.5. （泊松流形）

泊松流形（*Poisson manifold*）是指二元组 (X,P)，其中 X 为光滑流形，$P \in \mathrm{PV}_X^2$ 满足 $[P,P] = 0$.

众所周知，这是经典力学的几何模型。接下来看一些泊松流形的例子：

重要例子 3.1.6. （由辛结构诱导的泊松结构）

设 (X,ω) 为辛流形，其中辛形式

$$
\omega = \frac{1}{2}\omega_{ij}\mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}x^j
$$

满足 $\mathrm{d}\omega=0$，并且使得系数矩阵 $(\omega_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ 在 X 上处处可逆、反对称。那么辛结构 ω 自然诱导泊松结构

$$\omega^{-1}:=\frac{1}{2}\omega^{ij}\partial_i\wedge\partial_j$$

其中矩阵 $(\omega^{ij}):=(\omega_{ij})^{-1}$.

证明. 我们只需验证雅可比恒等式

$$\omega^{is}\frac{\partial\omega^{jk}}{\partial u^s}+\omega^{js}\frac{\partial\omega^{ki}}{\partial u^s}+\omega^{ks}\frac{\partial\omega^{ij}}{\partial u^s}=0$$

一方面注意到逆矩阵求导公式 $\frac{\partial\omega^{-1}}{\partial u^s}=-\omega^{-1}\frac{\partial\omega}{\partial u^s}\omega^{-1}$，从而有

$$\omega^{is}\frac{\partial\omega^{jk}}{\partial u^s}=-\omega^{is}\omega^{jm}\omega^{nk}\frac{\partial\omega_{mn}}{\partial u^s}$$

对 i,j,k 轮换求和，有

$$\omega^{is}\frac{\partial\omega^{jk}}{\partial u^s}+\omega^{js}\frac{\partial\omega^{ki}}{\partial u^s}+\omega^{ks}\frac{\partial\omega^{ij}}{\partial u^s}=\omega^{is}\omega^{jm}\omega^{kn}\left(\frac{\partial\omega_{mn}}{\partial u^s}+\frac{\partial\omega_{ns}}{\partial u^m}+\frac{\partial\omega_{sm}}{\partial u^n}\right)$$

另一方面，由于 $\mathrm{d}\omega=0$，从而有

$$\begin{aligned}0&=\mathrm{d}(\omega_{ij}\mathrm{d}x^i\wedge\mathrm{d}x^j)\\&=\frac{\partial\omega_{ij}}{\partial u^k}\mathrm{d}x^i\wedge\mathrm{d}x^j\wedge\mathrm{d}x^k\\&=\sum_{i<j<k}2\left(\frac{\partial\omega_{ij}}{\partial u^k}+\frac{\partial\omega_{jk}}{\partial u^i}+\frac{\partial\omega_{ki}}{\partial u^j}\right)\mathrm{d}x^i\wedge\mathrm{d}x^j\wedge\mathrm{d}x^k\end{aligned}$$

因此有

$$\frac{\partial\omega_{ij}}{\partial u^k}+\frac{\partial\omega_{jk}}{\partial u^i}+\frac{\partial\omega_{ki}}{\partial u^j}=0$$

综上两方面，证毕。 □

众所周知，这个例子来自经典力学。事实上，此泊松结构有如下不依赖局部坐标的表达方式：对任意 $f\in C^\infty(X)$，存在唯一的切向量场 X_f 使得

$$\mathrm{d}f+i_{X_f}(\omega)=0$$

称此 X_f 为 f 的**哈密顿向量场**。于是，对于任意的 $f,g\in C^\infty(X)$，辛结构 ω 诱导的泊松括号满足

$$\{f,g\}=\omega(X_f,X_g)$$

以上是我们在经典力学中熟知的。下一个例子更“接近”经典力学：

重要例子 3.1.7. （光滑流形余切丛上的典范辛结构）

设 M 为 n 维光滑流形，$X := T^*M$ 为 X 的余切丛，则定义 X 上的**典范 1-形式**$\theta \in \Omega_X^1$ 为：

$$\theta|_{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{p})}(\boldsymbol{v},\xi) := \langle \boldsymbol{p}, \boldsymbol{v} \rangle$$

其中 $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{p}) \in X$，$(\boldsymbol{v},\xi) \in T_{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{p})}(X)$，以及 $\boldsymbol{v} \in T_{\boldsymbol{x}}M$. 记 X 上的 2-形式

$$\omega := -\mathrm{d}\theta$$

称 ω 为 T^*M 上的**典范辛形式**。

考虑 $X = T^*M$ 的局部坐标 $(x^1, x^2, ..., x^n; p_1, p_2, ..., p_n)$，其中 x^i 为 M 上的局部坐标。则容易知道典范 1-形式 θ 与典范辛形式 ω 在该局部坐标下的表达式分别为

$$\theta = \sum_{i=1}^{n} p_i \mathrm{d}x^i$$

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}p_i$$

上述 ω 给出了余切丛 T^*M 的辛流形结构，该辛结构诱导泊松结构，于是我们可以谈论 $X = T^*M$ 上的泊松括号。

注记 3.1.8. 记号承上，则存在典范的线性同态

$$\begin{aligned} \varphi : \Gamma(M, TM) &\to C^\infty(X) \\ \varphi(\eta)|_{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{p})} &= \langle \boldsymbol{p}, \eta \rangle \end{aligned}$$

即，通过“非常自然的方式”，将底流形 M 上的切向量场视为余切丛 $X = T^*M$ 上的光滑函数。该线性同态可以自然延拓到切丛的对称张量丛的截面上：

$$\varphi : \Gamma(M, \mathrm{Sym}(TM)) \to C^\infty(X)$$

无非是“函数的相乘”而已。

性质 3.1.9. 设 M 为光滑流形，考虑 $X = T^*M$ 上的典范辛结构，$\varphi : \Gamma(M, TM) \to C^\infty(X)$ 同上，则对 M 的任意的切向量场 f, g，成立

$$\varphi([f,g]) = -\{\varphi(f), \varphi(g)\}$$

其中左边“$[,]$”为 M 上的切向量场的李括号，右边 $\{,\}$ 为辛流形 X 上的泊松括号。

证明. 局部坐标下验证。取 X 的局部坐标 $(x^1, ..., x^n; p_1, ..., p_n)$，记

$$f = f^i \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad g = g^i \frac{\partial}{\partial x^i}$$

则容易知道

$$\varphi(f) = f^i(\boldsymbol{x}) p_i, \quad \varphi(g) = g^i(\boldsymbol{x}) p_i$$

注意 X 上的泊松张量

$$P = \frac{\partial}{\partial x^i} \wedge \frac{\partial}{\partial p_i}$$

因此有

$$\begin{aligned} \{\varphi(f), \varphi(g)\} &= \left\langle \frac{\partial}{\partial x^s} \wedge \frac{\partial}{\partial p_s}, \mathrm{d}\varphi(f) \wedge \mathrm{d}\varphi(g) \right\rangle \\ &= \left(g^s \frac{\partial f^i}{\partial x^s} - f^s \frac{\partial g^i}{\partial x^s} \right) p_i \end{aligned}$$

而另一方面，

$$[f, g] = \left(f^s \frac{\partial g^i}{\partial x^s} - g^s \frac{\partial f^i}{\partial x^s} \right) \frac{\partial}{\partial x^i} \quad \Longrightarrow \quad \varphi([f, g]) = \left(f^s \frac{\partial g^i}{\partial x^s} - g^s \frac{\partial f^i}{\partial x^s} \right) p_i$$

从而 $\varphi([f, g]) = -\{\varphi(f), \varphi(g)\}$，得证。 $\square$

3.2 形变量子化与 Moyal 星积

我们开始讨论形变量子化。（此处应该写几句 introduction）

定义 3.2.1. （星积）

对于泊松流形 (X, P)，称 $\mathbb{R}[\![\hbar]\!]$-双线性映射

$$\begin{aligned} C^\infty(X)[\![\hbar]\!] \times C^\infty(X)[\![\hbar]\!] &\to C^\infty(X)[\![\hbar]\!] \\ f \star g &\mapsto \sum_{k \geq 0} C_k(f, g) \hbar^k \end{aligned}$$

为 (X, P) 上的**星积**（*star product*），如果 $\star$ 是结合的，并且对对任意 $f, g \in C^\infty(X)$，以下成立：

(1) $\hbar \to 0$ 时退化为通常的函数乘法：

$$f \star g = fg \mod \hbar$$

(2) $*$ 的“一阶非交换性”由泊松括号给出：

$$f \star g - g \star f = \hbar \{f, g\} \mod \hbar^2$$

(3) 对于每个 $k \geq 0$，C_k 为双微分算子：

$$C_k(f,g) = \sum_{\max\{l,m\}=k} C_k^{i_1...i_l;j_1,...,j_m} (\partial_{i_1}...\partial_{i_l} f)(\partial_{j_1}...\partial_{j_m} g)$$

其中系数 $C_k^{i_1...i_l;j_1,...,j_m} \in C^\infty(X)$.

此时，也称 $(C^\infty(X), \star)$ 为 (X, P) 的**形变量子化** (deformation quantization)。

这里的 $\hbar$ 为形式变元（物理背景为普朗克常量，这是心照不宣的）。由定义容易知道，对任意 $f \in C^\infty(X)$，成立

$$1 \star f = f \star 1 = f$$

其中 $1 \in C^\infty(X)$ 为值恒为 1 的常值函数。

此外，容易知道双微分算子

$$C_0(f,g) = fg$$

以及我们不妨

$$C_1(f,g) = \{f,g\}$$

一个基本的问题是，任给一个泊松流形 (X, P)，它的形变量子化是否一定存在？答案是肯定的，Kontsevich 用非交换几何的工具给出了证明——这也是我们在后文要详细介绍的。对于辛流形的特殊情况，形变量子化的存在性相对比较容易证明，据说辛流形的形变量子化与 Atiyah-Singer 指标定理有联系。

我们先来看一些例子：

重要例子 3.2.2. （*Moyal* 乘积）设 $X = \mathbb{R}^n$，并配以泊松张量

$$P = P^{ij} \frac{\partial}{\partial x^i} \wedge \frac{\partial}{\partial x^j}$$

其中 P^{ij} 皆为常数，则我们定义如下乘积：对任意 $f, g \in C^\infty(X)$，

$$(f \star g)(x) := e^{\hbar P^{ij} \frac{\partial}{\partial y_i} \frac{\partial}{\partial z_j}} f(y) g(z) \Big|_{y=z=x}$$

则 $\star$ 给出了 (X, P) 的形变量子化。

把算子指数打开，该星积 $*$ 的定义式可以显式地写为

$$f \star g = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\hbar^k}{k!} \sum_{\substack{i_1,...,i_k \\ j_1,...,j_k}} P^{i_1 j_1} P^{i_2 j_2} \cdots P^{i_k j_k} (\partial_{i_1} \partial_{i_2} \cdots \partial_{i_k} f)(\partial_{j_1} \partial_{j_2} \cdots \partial_{j_k} g)$$

容易验证如此定义的 $\star$ 满足
$$f\star g=fg+\frac{\hbar}{2}\{f,g\}+o(\hbar)$$
我们只需要再验证 $\star$ 满足结合律，证明如下：

证明. 直接将 $(f\star g)\star h$ 暴力展开，对任意 $m\geq 0$，计算 $\hbar^m$ 的系数。

为书写方便，引入一些记号：我们常用 $I=(i_1,i_2,...,i_s)$ 来表示长度为 s 的多重指标，其中 $i_1,...,i_s$ 取值于 $\{1,2,...,n\}$，它们之中允许相同、计次序。设多重指标 $|I|=|J|=s$，其中 $I=(i_1,...,i_s)$ 以及 $J=(j_1,...,j_s)$，则对于 $f\in C^\infty(X)$，我们记
$$\partial_I(f):=\partial_{i_1}\cdots\partial_{i_s}f$$
$$P^{I;J}:=P^{i_1j_1}P^{i_2j_2}\dots P^{i_sj_s}$$
以及，对于任意两个多重指标 $|S|=s$ 以及 $|T|=t$（允许 $s\neq t$），则记 ST 为 S 与 T 的顺次连接（文字乘法），其长度为 $s+t$。对于多重指标 S，视它为序列，则可以考虑其子列 S'，记为 $S'\subseteq S$.

在此记号下，$\star$ 的显式表达式为
$$f\star g=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\hbar^k}{k!}\sum_{|I|=|J|=k}P^{I,J}(\partial_I f)(\partial_J g)$$

现在，我们直接计算 $(f\star g)\star h$ 的 $\hbar^m$-系数，计算过程中会反复用到“算两次”的组合技巧：
$$\begin{aligned}
[(f\star g)\star h]_m &= \sum_{l=0}^{m}\big((f\star g)_l\star h\big)_{m-l}\\
&= \sum_{l=0}^{m}\frac{1}{l!}\sum_{|I|=|J|=l}P^{I;J}\big((\partial_I f\partial_J g)\star h\big)_{m-l}\\
&= \sum_{l=0}^{m}\frac{1}{l!(m-l)!}\sum_{|I|=|J|=l}\sum_{|R|=|S|=m-l}P^{IR;JS}\partial_R(\partial_I f\partial_J g)(\partial_S h)\\
&= \sum_{l=0}^{m}\frac{1}{l!(m-l)!}\sum_{|I|=|J|=l}\sum_{|R|=m-l}\sum_{\substack{R_1\subseteq R\\ R_2:=R\setminus R_1}}(\partial_{IR_1}f)(\partial_{JR_2}g)\sum_{|S|=m-l}P^{IR;JS}(\partial_S h)\\
&= \sum_{l=0}^{m}\frac{1}{l!(m-l)!}\sum_{|I|=|J|=l}\sum_{u+v=m-l}\sum_{\substack{|R_1|=u\\ |R_2|=v}}\frac{(m-l)!}{u!v!}(\partial_{IR_1}f)(\partial_{JR_2}g)\sum_{|S|=m-l}P^{IR;JS}(\partial_S h)\\
&= \sum_{\substack{0\leq i,k\leq m\\ i+k\geq m}}\frac{1}{(m-i)!(i+k-m)!(m-k)!}\sum_{\substack{|I|=i\\ |K|=k}}\sum_{\substack{|J_1|=m-k\\ |J_2|=m-i}}P^{IJ_2;J_1K}(\partial_I f)(\partial_{J_1J_2}g)(\partial_K h)
\end{aligned}$$
容易观察出上式关于 f,h 的对称性：
$$[(f\star g)\star h]_m=(-1)^m[(h\star g)\star f]_m$$
此外也容易验证（也是从显式表达式直接看出来）
$$(f\star g)_m=(-1)^m(g\star f)_m$$

从而有

$$\begin{aligned}
[(f\star g)\star h]_m &= (-1)^m[(h\star g)\star f]_m\\
&= (-1)^m\sum_{l=0}^{m}[(h\star g)_l\star f]_{m-l}\\
&= (-1)^m\sum_{l=0}^{m}(-1)^{m-l}(-1)^l[f\star(g\star h)_l]_{m-l}\\
&= [f\star(g\star h)]_m
\end{aligned}$$

从而证毕。 □

（似乎有更简单的方法？某些算子指数的性质直接秒掉？）

特别地，考虑经典力学“位置 -动量”的经典情形：

例子 3.2.3. （*Moyal-Weyl* 代数）

设 $X=\mathbb{R}^{2n}$ 为偶数维线性空间，坐标函数记为 $\{x^1,...,x^n;p_1,...,p_n\}$，配以标准的泊松结构

$$P=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x^i}\wedge\frac{\partial}{\partial p_i}$$

则 *Moyal* 星积 $\star$ 给出了

$$A:=\mathbb{R}[x^1,...,x^n;p_1,...,p_n;\hbar]$$

上的 *Weyl* 代数结构 $\star: A\times A\to A$.

例如，在此情形下，容易计算出

$$x^i\star p_j=x^ip_j+\frac{1}{2}\hbar\delta^i_j$$

事实上，星积 $\star$ 可以抽象为如下的代数版本（不一定要局限于辛流形上的函数）：

定义 3.2.4. （代数版本的形变量子化）

设 $(A,\cdot,\{,\})$ 为**泊松代数**（*Poisson algebra*），即 $(A,\cdot)$ 为含幺交换结合 K-代数，$(A,\{,\})$ 为李代数，并且满足莱布尼茨法则

$$\{f,gh\}=\{f,g\}h+g\{f,h\}$$

称 $K[\![\hbar]\!]$-双线性映射

$$\star: A[\![\hbar]\!]\times A[\![\hbar]\!]\to A[\![\hbar]\!]$$

为 $(A,\cdot,\{,\})$ 的形变量子化，如果 $\star$ 满足结合性，以及对任意 $f,g\in A$,

$$f\star g=fg+\frac{\hbar}{2}\{f,g\}+o(\hbar)$$

明显地，A 的几何背景为辛流形上的光滑函数环。

记号 3.2.5. 设 M 为光滑流形，$X = T^*M$ 为 M 的余切丛，配以典范辛结构

$$\omega = \sum \mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}p_i$$

我们记

$$\mathcal{O}(X) = \Gamma(M, \mathrm{Sym}(TM))$$

注意 $\mathcal{O}(X)$ 中的元素可视为 X 上的光滑函数（见注记*3.1.8*），它配以 X 上的泊松括号构成泊松代数。我们考虑 $(\mathcal{O}(X), \{,\})$ 的形变量子化。

（这里有坑待填）

D_X differential operator on X. $\exists$ filtration by its order

$$D_X^{(0)} \subseteq D_X^{(1)} \subseteq ... \subseteq D_X^{(m)} ...$$

(consists of $\sum A^{i_1 ... i_k} \partial_{i_1} ... \partial_{i_k}$)

Check:

$$[D_X^{(m)}, D_X^{(n)}] \subseteq D_X^{(m+n-1)}$$
$$D_X^{(m)} \circ D_X^{(n)} \subseteq D_X^{(m+n)}$$
$$(D_X, \circ) \text{ is associative}$$

$$D_X^{\hbar} := \bigoplus_{m \geq 0} D_X^{(k)} \hbar^m \subseteq D_X[\hbar]$$

is a $\mathbb{R}[\hbar]$-module

HW: what is k in Def above?????

(such that $D_X^{\hbar}$ can be understood as a Deformation Quantization of $(\mathcal{O}(X), \{,\})$ over ring $\mathbb{R}[\hbar]$.)

我们再看一个重要例子：

重要例子 3.2.6. （环面泊松代数）

考虑如下的 $\mathbb{R}$-代数

$$e^V := \mathrm{span}_{\mathbb{R}} \{ e^{v} | v = (v^1, ..., v^n) \in \mathbb{Z}^n \}$$

并且定义乘法

$$e^{v_1} e^{v_2} = e^{v_1 + v_2}$$

则 $(e^V,\cdot)$ 为含幺交换结合 $\mathbb{R}$-代数。令 ω 为 $\mathbb{R}^n$ 上的一个反对称双线性型，定义

$$\begin{aligned} \{,\}: e^V \times e^V &\to e^V \\ \{e^{v_1}, e^{v_2}\} &\mapsto \omega(v_1, v_2) e^{v_1+v_2} \end{aligned}$$

则 $(e^V,\cdot,\{\})$ 构成泊松代数。

证明. 只需验证 $\{,\}$ 的雅可比恒等式与莱布尼茨法则。对任意 $x,y,z \in \mathbb{Z}^n$，有

$$\begin{aligned} \{e^x, e^y e^z\} &= \{e^x, e^{y+z}\} \\ &= \omega(x, y+z) e^{x+y+z} \\ &= \omega(x,y) e^{x+y} e^z + \omega(x,z) e^{x+z} e^y \\ &= \{e^x, e^y\} e^z + e^y \{e^x, e^z\} \end{aligned}$$

从而莱布尼茨法则成立。再看雅可比恒等式：

$$\begin{aligned} \{\{e^x, e^y\}, e^z\} &= \omega(x,y)\{e^{x+y}, e^z\} \\ &= \omega(x,y)\omega(x+y,z) e^{x+y+z} \\ &= [\omega(x,y)\omega(y,z) - \omega(z,x)\omega(x,y)] e^{x+y+z} \end{aligned}$$

之后对 x,y,z 轮换求和，立刻得到。 □

注意到这里的 ω 可以是退化的。考虑标准环面

$$T^n := \{(z_1, z_2, ..., z_n) \in \mathbb{C}^n | z_i \in \mathbb{C},\ |z_i| = 1\}$$

则注意到 e^V 中的元素可以通过以下方式视为 T^n 上的光滑函数：

$$\begin{aligned} e^V &\hookrightarrow C^\infty(T^n) \\ v = (v_1, v_2, ..., v_n) &\mapsto z_1^{v_1} z_2^{v_2} \cdots z_n^{v_n} \end{aligned}$$

容易知道 e^V 在函数空间 $C^\infty(T^n)$ 当中稠密，这是傅里叶展开的标准技术。

我们考虑泊松代数 $(e^V,\{,\})$ 的形变量子化：

性质 3.2.7. （量子环面）

记号承上，记 $\hbar$ 为形式变元，定义 $\mathbb{R}[\![\hbar]\!]$-双线性映射

$$\begin{aligned} \star: e^V[\![\hbar]\!] \times e^V[\![\hbar]\!] &\to e^V[\![\hbar]\!] \\ e^x \star e^y &:= e^{\hbar\omega(x,y)} e^{x+y} \end{aligned}$$

则 $(e^V[\![\hbar]\!],\star)$ 为 $(e^V,\{,\})$ 的形变量子化。

证明. 这几乎是显然的。首先对任意 $x,y,z \in \mathbb{Z}^n$，有

$$(e^x \star e^y) \star e^z = e^{\hbar\omega(x,y)} e^{x+y} \star e^z = e^{\hbar(\omega(x,y)+\omega(x+y,z))} e^{x+y+z}$$

再直接验证 $e^x \star (e^y \star e^z)$ 即可证明结合性。

另一方面，

$$\begin{aligned} e^x \star e^y &= e^{\hbar\omega(x,y)} e^{x+y} \\ &= e^{x+y} + \frac{1}{2}\hbar\omega(x,y)e^{x+y} + o(\hbar) \\ &= e^x e^y + \frac{1}{2}\hbar\{e^x, e^y\} + o(\hbar) \end{aligned}$$

从而证毕。 □

3.3 重要例子：李代数的对偶

本节给出泊松流形的重要例子：有限维李代数的对偶空间上的典范泊松结构——并且探讨其形变量子化。

重要例子 3.3.1. （李代数的对偶）

设 $(\mathfrak{g}, [,])$ 为（有限维）李代数，考虑 $X := \mathfrak{g}^*$ 为其对偶，取 $\{e^1, e^2, ..., e^n\}$ 为 $\mathfrak{g}$ 的一组基，$\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ 为 $\mathfrak{g}^*$ 当中相应的对偶基。用 X^i 来表示 $X = \mathfrak{g}^*$ 中的点在基 $\{e_i\}$ 下的坐标。记李代数 $\mathfrak{g}$ 的结构常数为

$$[e^i, e^j] = C_k^{ij} e^k$$

那么我们给出 $X = \mathfrak{g}^*$ 的泊松张量如下：

$$P_{\mathfrak{g}} = \frac{1}{2} X^k C_k^{ij} e_i \wedge e_j$$

则 $(X, P_{\mathfrak{g}})$ 为泊松流形。

证明. 先考虑 P 的良定性。事实上，上述泊松张量可以内蕴地写成如下：对任意 $\xi \in X = \mathfrak{g}^*$，以及 $f, g \in C^\infty(\mathfrak{g}^*)$，

$$\{f, g\}_{P_{\mathfrak{g}}}(\xi) = \xi([\mathrm{d}f, \mathrm{d}g])$$

其中 $\mathrm{d}f \in T_\xi^* \mathfrak{g}^* \cong (\mathfrak{g}^*)^* \cong \mathfrak{g}$. 局部坐标下，记 $\xi = X^i e_i$，则

$$\begin{aligned} \xi([\mathrm{d}f, \mathrm{d}g]) &= \left\langle X^i e_i, [\frac{\partial f}{\partial X^j} e^j, \frac{\partial g}{\partial X^k} e^k] \right\rangle \\ &= X^i C_k^{ij} \frac{\partial f}{\partial X^i} \frac{\partial g}{\partial X^j} \end{aligned}$$

另一方面也容易验证上式右边也与以下相等：

$$\left\langle \frac{1}{2} X^k C_k^{ij} e_i \wedge e_j, \mathrm{d}f \wedge \mathrm{d}g \right\rangle$$

于是 $P_{\mathfrak{g}}$ 良定（与局部坐标选取无关）。接下来验证它的确为泊松张量，局部坐标下暴力验证即可：注意到

$$P_{\mathfrak{g}}^{is} \frac{\partial P_{\mathfrak{g}}^{jk}}{\partial X^s} = P_{\mathfrak{g}}^{is} \frac{\partial}{\partial X^s} \left(X^t C_t^{jk} \right) = X^l C_l^{is} C_s^{jk}$$

其中注意结构常数 C_k^{ij} 作为 X 上的函数，是常值的。对 i,j,k 轮换相加，有

$$P_{\mathfrak{g}}^{is} \frac{\partial P_{\mathfrak{g}}^{jk}}{\partial X^s} + P_{\mathfrak{g}}^{js} \frac{\partial P_{\mathfrak{g}}^{ki}}{\partial X^s} + P_{\mathfrak{g}}^{ks} \frac{\partial P_{\mathfrak{g}}^{ij}}{\partial X^s} = X^l \left(C_l^{is} C_s^{jk} + C_l^{js} C_s^{ki} + C_l^{ks} C_s^{ij} \right) = 0$$

其中第二个等号是因为李代数 $\mathfrak{g}$ 的雅可比恒等式。从而证毕。 □

如此通过李代数对偶得到的泊松流形称为线性泊松流形。容易知道，$(P_{\mathfrak{g}}^{ij})$ 可逆当且仅当 $P_{\mathfrak{g}}$ 可由 X 上的辛结构诱导。

此外注意到，$\mathfrak{g}$ 中的向量 v 自然视为 $X = \mathfrak{g}^*$ 上的线性函数: 对任意 $\xi \in X = \mathfrak{g}^*$，

$$v(\xi) := \langle \xi, v \rangle$$

在此意义下，$\mathfrak{g}$ 的基向量 e^i 即为 X 上的坐标函数 X^i.

性质 3.3.2. 对于有限维李代数 $\mathfrak{g}$，任意 $u,v \in \mathfrak{g}$ 视为 X 上的线性函数，则泊松括号满足

$$\{u,v\}_{P_{\mathfrak{g}}} = [u,v]$$

其中右端 $[,]$ 为 $\mathfrak{g}$ 中的李括号。

证明. 用泊松张量 $P_{\mathfrak{g}}$ 的内蕴定义

$$\{f,g\}_{P_{\mathfrak{g}}}(\xi) = \xi([f,g])$$

来看，是显然的。 □

接下来再看另一个重要例子：李代数对偶 $\mathfrak{g}^*$ （见例子3.3.1）的形变量子化。我们引入量子包络代数：

定义 3.3.3. （量子包络代数）

设 $\mathfrak{g}$ 为（有限维）李代数，我们定义 $\mathfrak{g}$ 的**量子包络代数**（*quantum enveloping algebra*）$\mathcal{U}_\hbar(\mathfrak{g})$ 如下：

$$\mathcal{U}_\hbar(\mathfrak{g}) := \bigoplus_{k\geq 0} \mathfrak{g}^{\otimes k}[\![\hbar]\!]/\sim$$

其中关系 $\sim$ 为以下生成的理想：

$$a\otimes b - b\otimes a = \hbar[a,b]$$

这里的 $\hbar$ 依然是形式变元。注意到若 $\hbar=0$ 时，得到的是对称张量代数 $\mathrm{Sym}(\mathfrak{g})$；$\hbar=1$ 时则为熟知的泛包络代数 $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$.

关于量子包络代数 $\mathcal{U}_\hbar(\mathfrak{g})$，有以下 **PBW 定理**，我们述而不证：

性质 3.3.4. （量子包络代数的 *PBW* 定理）

对于李代数 $\mathfrak{g}$，则以下映射为线性双射：

$$\begin{aligned}\Phi: \mathrm{Sym}(\mathfrak{g})[\![\hbar]\!] &\to \mathcal{U}_\hbar(\mathfrak{g})\\ x_1\otimes\cdots\otimes x_k &\mapsto \frac{1}{k!}\sum_{\sigma\in S_k} x_{\sigma(1)}\otimes\cdots\otimes x_{\sigma(k)}\end{aligned}$$

证明. Φ 的良定性显然，双射性的证明从略。 □

注意量子包络代数 $\mathcal{U}_\hbar(\mathfrak{g})$ 的乘法结构由张量运算 $\otimes$ 给出，考虑 PBW 定理中的 Φ，则 $\Phi^*(\otimes)$ 给出了 $\mathrm{Sym}(\mathfrak{g})[\![\hbar]\!]$ 的乘法结构，易知该乘法是结合的（需要 check，不过比较容易），并且与 $\mathrm{Sym}(\mathfrak{g})[\![\hbar]\!]$ 上通常的乘法（张量运算 $\otimes$）不同。我们将结合代数 $(\mathrm{Sym}(\mathfrak{g})[\![\hbar]\!],\Phi^*(\otimes))$ 记作 $\mathcal{O}(X)[\![\hbar]\!]$，其中 $X=\mathfrak{g}^*$ 为李代数 $\mathfrak{g}$ 的辛流形。

注意到 $\mathfrak{g}\cong(\mathfrak{g}^*)^*$ 中的元素可视为 $X=\mathfrak{g}^*$ 上的线性函数，于是 $\mathrm{Sym}(\mathfrak{g})$ 中的元素为 X 中的多项式函数，这也是我们将 $\mathrm{Sym}(\mathfrak{g})$ 记为 $\mathcal{O}(X)$ 的原因。我们只考虑 $X=\mathfrak{g}^*$ 上的多项式函数。

重要例子 3.3.5. （李代数对偶 $\mathfrak{g}^*$ 的形变量子化）

对于（有限维）李代数 $\mathfrak{g}$，记号承上，则 $\mathcal{O}(X)[\![\hbar]\!]$ 为泊松流形 $(X,P_{\mathfrak{g}})$ 的形变量子化，其星积为 $\Phi^{-1}(\otimes)$.

证明. 记 $\star:=\Phi^*(\otimes)$，首先 $\star$ 的结合性容易验证：对于任意的 $x,y,z\in\mathrm{Sym}(\mathfrak{g})$，则

$$(x\star y)\star z = \Phi^{-1}(\Phi(x)\otimes\Phi(y))\star z = \Phi^{-1}\big((\Phi(x)\otimes\Phi(y))\otimes\Phi(z)\big)$$

从而由 $(\mathcal{U}_\hbar(\mathfrak{g}),\otimes)$ 的结合性，立得 $\star$ 的结合性。

接下来只需验证对任意 $x,y\in\mathrm{Sym}(\mathfrak{g})$，成立

$$x\star y = xy+\frac{\hbar}{2}\{x,y\}_{P_\mathfrak{g}}+o(\hbar)$$

现在对于任意 $x,y\in\mathrm{Sym}(\mathfrak{g})$，不妨

$$x=x_1x_2\cdots x_p \quad y=y_1y_2\cdots y_q$$

（对称张量积省略之，无非是函数的乘法）我们先考虑 $p=q=1$ 的简单情形。此时

$$\begin{aligned}
x\star y &= \Phi^{-1}(x\otimes y)\\
&= \Phi^{-1}\left(\frac{x\otimes y+y\otimes x}{2}+\frac{x\otimes y-y\otimes x}{2}\right)\\
&= xy+\Phi^{-1}\left(\frac{\hbar[x,y]}{2}\right)\\
&= xy+\frac{\hbar}{2}\{x,y\}_{P_\mathfrak{g}}
\end{aligned}$$

从而得证（其中最后一个等式利用了性质 3.3.2）。

接下来看一般情形。一般情形待补 估计还是暴力组合恒等式 □

3.4 Kontsevich 量子化公式

本节我们介绍 Kontsevich 的著名结果：任何泊松流形 (X,P) 都存在形变量子化；并且星积 $\star$ 可以显式地构造出。我们只介绍结果（星积 $\star$ 的具体构造），暂不给出证明。

为描述 Kontsevich 的量子化公式，我们需要一些图论组合的准备：

定义 3.4.1. （带标记的有向图）

（*1*）带标记的有向图是指形如 $(\Gamma_0,\Gamma_1,\varepsilon)$ 的三元组，其中 Γ_0,Γ_1 为任意集合，$\varepsilon:\Gamma_1\to\Gamma_0\times\Gamma_0$.

（*2*）对于带标记的有向图 $\Gamma=(\Gamma_0,\Gamma_1,\varepsilon)$，我们称 Γ_0 为 Γ 的顶点集，Γ_1 为 Γ 的边集；对于 $e\in\Gamma_1$，定义

$$\begin{aligned}
s(e)&:=\pi_1\circ\varepsilon(e)\\
t(e)&:=\pi_2\circ\varepsilon(e)
\end{aligned}$$

分别称之为 e 的**始点**（*source*）与**终点**（*tail*），其中 $\pi_1,\pi_2:\Gamma_0\times\Gamma_0\to\Gamma_0$ 为典范的投影映射。

组合意义明显，但要注意它与图论当中的“有向图”有细微区别。例如对于 $\Gamma_0 = \{X, Y, Z\}$，$\Gamma_1 = \{a, b\}$，以下两个图

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & X \arrow[dl, "a"'] \arrow[dr, "b"] & \\
Y & & Z
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & X \arrow[dl, "b"'] \arrow[dr, "a"] & \\
Y & & Z
\end{tikzcd}
$$

并不相同（它们的 ε 不相同）。

我们再引入一些图论的概念。对于 $e \in \Gamma_1$，如果 $s(e) = t(e)$，则称 e 为**闭路**（loop）；对于 $e_1, e_2 \in \Gamma_1$，如果 $s(e_1) = s(e_2)$ 并且 $t(e_1) = t(e_2)$，则称 Γ_0 的子集 e_1, e_2 为**双箭头**（double arrow）。类似地可以定义“多箭头”。

记号 3.4.2. 对于非负整数 n，我们记 G_n 为满足以下条件的带标记的有向图 $\Gamma = (\Gamma_0, \Gamma_1, \varepsilon)$ 构成的集合：

（1）$\Gamma_0 = \{1, 2, ..., n\} \sqcup \{L, R\}$，其中 L, R 为形式变元；

（2）$\Gamma_1 = \{a_1, ..., a_n; b_1, ..., b_n\}$，并且对任意 $q \leq i \leq n$，都有 $s(a_i) = s(b_i) = i$；

（3）图 Γ 当中不含有回路，不含有双箭头。

例如，集合 G_0 当中只有一个元素 $(\Gamma_0, \Gamma_1, \varepsilon)$，其中 $\Gamma_0 = \{L, R\}$，$\Gamma_1 = \varnothing$，$\varepsilon = \varnothing$；也就是说，只有 L, R 两个顶点，没有边。

再比如，集合 G_1 当中有两个元素，如下：

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & 1 \arrow[dl, "a_1"'] \arrow[dr, "b_1"] & \\
L & & R
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & 1 \arrow[dl, "b_1"'] \arrow[dr, "a_1"] & \\
L & & R
\end{tikzcd}
$$

再例如，以下三个带标记的有向图都是 G_2 当中的元素：

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & 1 \arrow[dl, "a_1"'] \arrow[drr, "b_1"] & 2 \arrow[dll, "a_2"] \arrow[dr, "b_2"] & \\
L & & & R
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & 1 \arrow[r, "b_1"] \arrow[dl, "a_1"'] & 2 \arrow[dll, "a_2"] \arrow[dr, "b_2"] & \\
L & & & R
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & 1 \arrow[r, bend left, "a_1"] \arrow[dl, "b_1"'] & 2 \arrow[l, bend left, "b_2"] \arrow[dll, bend left, "a_2"] & \\
L & & & R
\end{tikzcd}
$$

容易知道 G_2 当中有 $(3 \times 2)^2 = 36$ 个元素，在此不一一列举。一般地，G_n 的元素个数为

$$|G_n| = \left[n(n+1)\right]^n$$

现在，考虑泊松流形 (X, P)，其中泊松张量 P 再局部坐标下为

$$P = P^{ij} \frac{\partial}{\partial u^i} \wedge \frac{\partial}{\partial u^j}$$

给定 $\Gamma \in G_n$，我们定义如下的 n 阶双微分算子：

定义 3.4.3. 对于 N 维泊松流形 (X,P)，以及 $\Gamma \in G_n$，定义 $C^\infty(X)$ 上的 n 阶双微分算子

$$B_\Gamma : C^\infty(X) \times C^\infty(X) \to C^\infty(X)$$

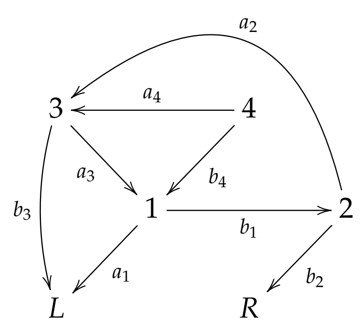
如下：对任意 $f,g \in C^\infty(X)$，在局部坐标下，

$$\begin{aligned} B_\Gamma(f,g) \quad = \quad & \left[\prod_{k=1}^{n}\left(\prod_{\{m|t(a_m)=k\}} \partial_{a_m} \prod_{\{l|t(a_l)=k\}} \partial_{b_l} P^{a_k b_k}\right)\right] \\ & \left(\prod_{\{m|t(a_m)=L\}} \partial_{a_m} \prod_{\{l|t(b_l)=L\}} \partial_{b_l} f\right)\left(\prod_{\{m|t(a_m)=R\}} \partial_{a_m} \prod_{\{l|t(b_l)=R\}} \partial_{b_l} g\right) \end{aligned}$$

这个公式的表述方式不太像人话。粗俗地说，图 Γ 的顶点 $m \in \{1,2,...,m\}$ 被视为泊松张量的分量 $P^{a_m b_m}$，图 Γ 的边（Γ_1）中的元素视为张量求和指标。如果有一条边 a_l（切转：b_l）指向顶点 m，那么我们对 $P^{a_m b_m}$ 求偏导 ∂_{a_l}（切转：∂_{b_l}）；如果有边 a_m 指向顶点 L，那么我们对函数 $f \in C^\infty(X)$ 求偏导 ∂_{a_m}……

我们不妨举例说明一下：

例子 3.4.4. 考虑带标记的有向图 $\Gamma \in G_4$ 如下：



那么双微分算子 B_Γ 的表达式为：对任意 $f,g \in C^\infty(X)$，

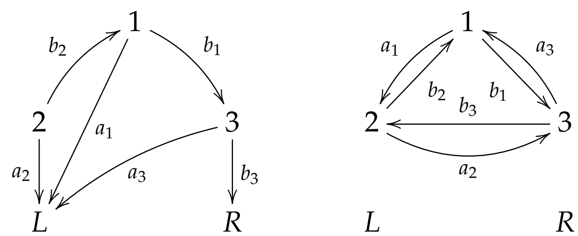
$$B_\Gamma(f,g) = (\partial_{a_3} P^{a_1 b_1})(\partial_{b_1}\partial_{b_4} P^{a_2 b_2})(\partial_{a_2}\partial_{a_4} P^{a_3 b_3})(P^{a_4 b_4})(\partial_{a_1}\partial_{b_3} f)(\partial_{b_2} g)$$

注意上式右边服从爱因斯坦求和约定，$a_1,...,a_4;b_1,...,b_4$ 为求和指标。

具体的操作如下：首先看顶点 1，考察哪些箭头（边）指向 1，发现只有箭头 a_3 指向 1，于是写下字符串“$(\partial_{a_3} P^{a_1 b_1})$”；之后考察顶点 2，发现 b_2, b_4 指向该点，于是紧接着写下字符串“$(\partial_{b_1}\partial_{b_4} P^{a_2 b_2})$”……之后一直这么做下去，注意到顶点 L,R 分别对应 f,g.

再举一例:

例子 3.4.5. 设带标记的有向图 $\Gamma, \Gamma' \in G_3$ 依次为如下：



则对于 $f, g \in C^\infty(X)$，有

$$
\begin{aligned}
B_\Gamma(f,g) &= (\partial_{b_2} P^{a_1 b_1})(P^{a_2 b_2})(\partial_{b_1} P^{a_3 b_3})(\partial_{a_1}\partial_{a_2}\partial_{a_3} f)(\partial_{b_3} g) \\
B_{\Gamma'}(f,g) &= (\partial_{b_2}\partial_{a_3} P^{a_1 b_1})(\partial_{b_3}\partial_{a_1} P^{a_2 b_2})(\partial_{b_1}\partial_{a_2} P^{a_3 b_3}) f g
\end{aligned}
$$

通过上述例子，我们已熟悉了双微分算子 B_Γ 的定义。不过，距离完整介绍 Kontsevich 形变量子化公式，还有较长的路要走。事实上，Kontsevich 构造的星积 $\star$ 形如

$$
f \star g = \sum_{n=0}^{\infty} \hbar^n \left(\sum_{\Gamma \in G_n} \omega_\Gamma B_\Gamma(f,g) \right)
$$

其中 $\omega_\Gamma \in \mathbb{R}$ 为系数，其具体定义即将被介绍。

记号 3.4.6. 考虑双曲平面（*hyperbolic plane*）$\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z \geq 0\}$，配以标准的双曲度量

$$
\mathrm{d}s^2 = \frac{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2}{y^2}
$$

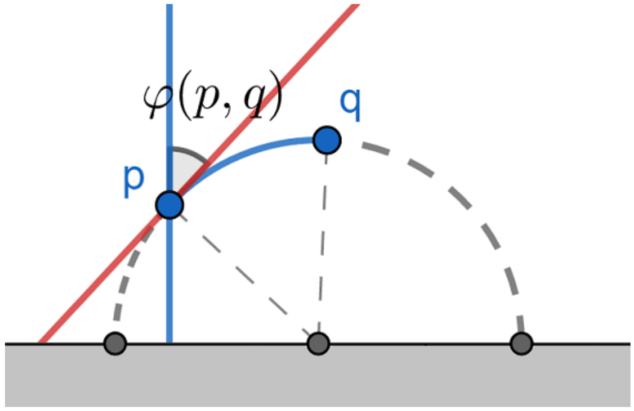
对于任意 $p \neq q \in \mathbb{H}$，我们记 $\ell(p,q)$ 为 $\mathbb{H}$ 上由 p 到 q 的测地线；再记 $\varphi(p,q)$ 为测地线 $\ell(p,q)$ 到 $\ell(p,\infty)$ 的夹角。

众所周知，双曲平面上的测地线必形如垂直于 x 轴的直线，或者圆心位于 x 轴的上半圆弧。对于 $p, q \in \mathbb{H}$，夹角 $\varphi(p,q)$ 的示意见下图。

事实上，由初等平面几何容易给出 $\varphi(p,q)$ 的显式表达式：

$$
\varphi(p,q) = \arg\left(\frac{q - \overline{p}}{q - p}\right)
$$

以上出现的夹角、辐角可以取任意的分支。



图：测地线 $\ell(p,q)$、$\ell(p,\infty)$，以及夹角 $\varphi(p,q)$.

记号 3.4.7. 对于 $n \geq 0$，定义

$$\mathrm{Conf}_n(\mathbb{H}) := \{(p_1,...,p_n) \in \mathbb{H} | p_i \neq p_j, \forall i \neq j\}$$

则 $\mathrm{Conf}_n(\mathbb{H})$ 有自然的 $2n$ 维光滑流形结构（$\mathbb{R}^{2n}$ 的开子流形）。

对于图 $\Gamma = (\Gamma_0, \Gamma_1, \varepsilon) \in G_n$，以及 $e \in \Gamma_1$，定义流形 $\mathrm{Conf}_n(\mathbb{H})$ 上的光滑函数 φ_e 如下：

$$\begin{aligned} \varphi_e : \mathrm{Conf}_n(\mathbb{H}) &\to \mathbb{R} \\ (p_1,...,p_n) &\mapsto \varphi(p_{s(e)}, p_{t(e)}) \end{aligned}$$

其中特别规定 $p_L = 0 \in \overline{\mathbb{H}}$，以及 $p_R = 1 \in \overline{\mathbb{H}}$

粗俗地说，对于图 $\Gamma \in G_n$，$\mathrm{Conf}_n(\mathbb{H})$ 当中的一个元素 $\boldsymbol{p}$ 可以视为“将图 Γ 嵌入双曲平面 $\mathbb{H}$ 的一种方式”：图 Γ 的“一般顶点”的位置由 $\boldsymbol{p}$ 给出，“特殊顶点”L, R 分别位于 $0,1$；图 Γ 当中的边对应于 $\mathbb{H}$ 中的测地线。此时，φ_e 可以认为是边 e 的“倾斜角”。

定义 3.4.8. 对于图 $\Gamma \in G_n$，定义

$$\omega_\Gamma = \frac{1}{n!(2\pi)^{2n}} \int_{\mathrm{Conf}_n(\mathbb{H})} \bigwedge_{i=1}^{n} (\mathrm{d}\varphi_{a_i} \wedge \mathrm{d}\varphi_{b_i})$$

这是 $2n$-形式在 $2n$-维流形上的积分。但需要验证此积分的收敛性，这里从略。注意积分号前的系数 $\frac{1}{n!(2\pi)^{2n}}$ 是精心挑选的，我们稍后给出解释。

现在，我们可以完整地陈述以下定理：

定理 3.4.9. *(Kontsevich)*

任意的泊松流形 (X, P) 都存在形变量子化，并且星积可以由以下公式显式给出：

$$f \star g = \sum_{n=0}^{\infty} \hbar^n \left(\sum_{\Gamma \in G_n} \omega_\Gamma B_\Gamma(f, g) \right)$$

在此述而不证。构造如此星积 $\star$ 的动机、想法，来自于量子场论等物理背景，我们在后文会介绍之。

例子 3.4.10. （ω_Γ 最基本的显式计算）

我们考虑简单（但重要的）情形:$\Gamma, \Gamma' \in G_1$ 分别为如下：

$$\begin{tikzcd} & 1 \arrow[dl, "a_1"'] \arrow[dr, "b_1"] & \\ L & & R \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & 1 \arrow[dl, "b_1"'] \arrow[dr, "a_1"] & \\ L & & R \end{tikzcd}$$

那么有

$$\omega_\Gamma = \frac{1}{2} \quad , \quad \omega_{\Gamma'} = -\frac{1}{2}$$

证明. 我们只需要求 ω_Γ，而注意到 Γ 与 Γ' 的区别仅仅是两条边对换，从而倾斜角 $\varphi_{\Gamma,a_1} = \varphi_{\Gamma',b_1}$，$\varphi_{\Gamma,b_1} = \varphi_{\Gamma',a_1}$，再由外积的反对称性，容易观察出 $\omega_\Gamma = -\omega_{\Gamma'}$.

现在计算 ω_Γ. 此时 $n = 1$，$\mathrm{Conf}_1(\mathbb{H}) \cong H$，对任意的 $z = x + iy \in \mathbb{H} \cong \mathrm{Conf}_1(\mathbb{H})$，由初等几何容易知道

$$\varphi_{a_1}(z) = -2 \arg z$$
$$\varphi_{b_1}(z) = -2 \arg(z - 1)$$

（允许相差 2π 的整数倍，这无所谓）从而

$$\mathrm{d}\varphi_{a_1}(z) = -2\mathrm{d} \arctan\left(\frac{y}{x}\right) = -2\frac{x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x}{x^2 + y^2}$$

同理

$$\mathrm{d}\varphi_{b_1}(z) = -2\frac{(x-1)\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x}{(x-1)^2 + y^2}$$

因此有

$$\begin{aligned} \omega_\Gamma &= \frac{1}{1!(2\pi)^{2\times 1}} \int_{\mathrm{Conf}_1(\mathbb{H})} \mathrm{d}\varphi_{a_1} \wedge \mathrm{d}\varphi_{b_1} \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \int_{\mathbb{H}} \frac{4y}{(x^2 + y^2)\left((x-1)^2 + y^2\right)} \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \\ &= \frac{1}{\pi^2} \int_0^\pi \sin\theta \mathrm{d}\theta \int_0^\infty \frac{1}{r^2 - 2r\cos\theta + 1} \mathrm{d}r \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{\pi^2}\int_0^\pi (\pi-\theta)\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2}$$

□

注记 3.4.11. 事实上，如果泊松张量的分量 P^{ij} 在局部上是常值的，那么 *Kontsevich* 给出的量子化公式刚好是 *Moyal* 星积（见例子*3.2.2*），从而 *Kontsevich* 量子化 $\star_K$ 是 *Moyal* 星积 $\star_M$ 的推广。回顾我们此前已经给出了 *Moyal* 星积的显式表达式

$$f\star_M g = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\hbar^k}{k!}\sum_{|I|=|J|=k} P^{I,J}(\partial_I f)(\partial_J g)$$

证明. 我们来考察 P^{ij} 为常数的情形。对于 $n\geq 0$，以及 $\Gamma\in G_n$，注意到如果 Γ 当中有箭头不指向 L 且不指向 R，则双微分算子 B_Γ 当中含有对 P^ij 求导的项，因此 $B_\Gamma = 0$，对 $\star_K$ 没有贡献。从而我们只需要考虑 G_n 的子集

$$\widetilde{G_n} := \{\Gamma\in G_n | t(a_i)\in\{L,R\}, \forall 1\leq i\leq n\}$$

即，$\widetilde{G_n}$ 当中的图具有性质：每个箭头都指向 L 或者 R；并且容易知道 $\widetilde{G_n}$ 当中有 2^n 个元素。现在，

$$f\star_K g = \sum_{n=0}^{\infty}\hbar^n\sum_{\Gamma\in\widetilde{G_n}}\omega_\Gamma B_\Gamma(f,g)$$

再注意到，对于任意 $\Gamma,\Gamma'\in\widetilde{G_n}$，都有

$$\omega_\Gamma B_\Gamma = \omega_{\Gamma'}B_{\Gamma'}$$

这是由于两个 $1-$ 形式的外积具有反交换性，以及泊松张量分量 P^{ij} 关于指标的反对称性。从而我们不妨取 $\widetilde{G_n}$ 中的代表元 $\Gamma^n\in\widetilde{G_n}\subseteq G_n$，其中 Γ^n 满足：所有的边 a_i 都指向 L，所有的边 b_i 都指向 R. 从而

$$\begin{aligned} f\star_K g &= \sum_{n=0}^{\infty}\hbar^n 2^n\omega_{\Gamma^n}B_{\Gamma^n}(f,g) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\hbar^n 2^n\omega_{\Gamma^n}(P^{a_1b_1}\cdots P^{a_nb_n})(\partial_{a_1}\cdots\partial_{a_n}f)(\partial_{b_1}\cdots\partial_{b_n}g)\end{aligned}$$

最后再注意到

$$\begin{aligned}\omega_{\Gamma^n} &= \frac{1}{n!(2\pi)^{2n}}\int_{\mathbb{H}^n}\bigwedge_{i=1}^{n}(\mathrm{d}\varphi_{a_i}(z_i)\wedge\mathrm{d}\varphi_{b_i}(z_i)) \\ &= \frac{1}{n!(2\pi)^{2n}}\prod_{i=1}^{n}\left(\int_{\mathbb{H}}\mathrm{d}\varphi_{a_i}(z_i)\wedge\mathrm{d}\varphi_{b_i}(z_i)\right) \\ &= \frac{(2\pi^2)^n}{n!(2\pi)^{2n}} = \frac{1}{n!2^n}\end{aligned}$$

因此 Kontsevich 量子化 $\star_K$ 满足

$$\begin{aligned} f \star_K g &= \sum_{n=0}^{\infty} \hbar^n 2^n \frac{1}{n! 2^n} (P^{a_1 b_1} \cdots P^{a_n b_n})(\partial_{a_1} \cdots \partial_{a_n} f)(\partial_{b_1} \cdots \partial_{b_n} g) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\hbar^n}{n!} (P^{a_1 b_1} \cdots P^{a_n b_n})(\partial_{a_1} \cdots \partial_{a_n} f)(\partial_{b_1} \cdots \partial_{b_n} g) \end{aligned}$$

这正是 Moyal 乘积的表达式。 □

第 4 章　量子场论的背景

现在我们开始逐渐去理解 Kontsevich 的形变量子化的构造；为此需要一些**量子场论**（quantum field theory，简称 QFT）背景知识。

4.1　Grassmann 变量与 BV 算子

大致地说（并非严格的数学表述），一个**物理系统** 包括以下要素：**场空间**（space of fields）$\mathcal{E}$ 与**作用量** （action functional）$\mathcal{S}$， 其中场空间 $\mathcal{E}$ 通常为无穷维空间，作用量

$$\mathcal{S}:\mathcal{E}\to\mathbb{C}$$

为场空间 $\mathcal{E}$ 上的函数。

在经典物理中，态的演化常用变分的临界来描述态的演化：

$$\mathrm{Crit}(\mathcal{S})=\{\delta\mathcal{S}=0\}$$

上式中的 $\mathrm{Crit}(\mathcal{S})$ 称为 $\mathcal{S}$ 的 critical locus，δ 为某个变分导数。

而在量子物理中，态的演化与积分

$$\int_{\mathcal{E}}\mathcal{O}e^{i\mathcal{S}/\hbar}$$

有关，其中 $\mathcal{O}$ 为 $\mathcal{E}$ 上的函数，称之为**观测量**（observable）；上述积分称之为**“路径积分”**（path integral）。

不过要注意，$\mathcal{E}$ 是无穷维空间，在 $\mathcal{E}$ 上面积分是说不清道不明的事情；我们至今还未完全搞明白此积分的严格定义。我们在本讲义只谈论“数学上的事情”，数学上暂时没说清楚的东西避而不谈。

例子 4.1.1. 作为场空间 $\mathcal{E}$ 的例子，以下是近代物理中的常见对象：

标量场论	$\mathcal{S}=$ 流形 X 上的全体光滑函数
规范理论	$\mathcal{S}=$ 向量丛 $E\to X$ 上的全体联络
σ-模型	$\mathcal{S}=$ 流形 σ 与 X 之间的全体光滑映射
引力理论	$\mathcal{S}=$ 流形 X 上的全体黎曼度量

我们再举一些作用量 $\mathcal{S}$ 的例子：

例子 4.1.2. （作用量）

（*1*）在标量场论 $\mathcal{E} = C^\infty(X)$ 中，对于 X 上的光滑函数 $\varphi \in \mathcal{E}$，定义

$$\mathcal{S}[\varphi] = \int_X |\nabla \varphi|^2$$

称之为能量泛函。

（*2*）在规范理论当中，对于 $A \in \mathcal{E}$ 为向量丛 $E \to X$ 上的联络，记其曲率张量为

$$F_A := \mathrm{d}A + \frac{1}{2}[A, A]$$

定义如下的**杨 -米尔斯泛函** *(Yang-Mills functional)*

$$\mathrm{YM}[A] := \int_X F_A \wedge *F_A$$

一个重要的问题是，如何去构造路径积分

$$\int_{\mathcal{E}} \theta e^{i\mathcal{S}/\hbar}$$

我们介绍 **BV 方法**（Batalin-Vilkovisky method），其主要思想是用同调理论来解释测度论。

我们来考察有限维的情形。设 X 为 n 维紧致定向流形，$\Omega \in \Omega^n_X$ 为 X 上的一个体积形式，则 X 上的紧支光滑函数 f 关于该体积形式的积分可以视为如下：

$$\begin{aligned} \int_X : C^\infty_c(X) &\to \mathbb{R} \\ f &\mapsto \int_X f\Omega \end{aligned}$$

我们考虑

$$\Omega_c(X) := \bigoplus_{p \geq 0} \Omega^p_c(X)$$

为紧支的微分形式，以及 $\mathrm{d} : \Omega^p_c(X) \to \Omega^{p+1}_c(X)$ 为 de Rham 外微分。众所周知，

$$H^n(\Omega^\bullet_c(X), \mathrm{d}) \cong \mathbb{R}$$

此式可以给出积分 $\int_X$ 的同调解释：

$$\begin{aligned} \int_X : C^\infty_c(X) &\to \mathbb{R} \\ f &\mapsto [f\Omega] \in H^n(\Omega^\bullet_c(X), \mathrm{d}) \cong \mathbb{R} \end{aligned}$$

粗俗地说，我们把求 f 关于体积形式 Ω 的积分视为取 $f\Omega$ 的同调类；在此意义下，de Rham 复形 $(\Omega^\bullet_C, \mathrm{d})$ 扮演了“测度”的角色。

在物理上我们常要面对无穷维空间，于是在此意义下，我们需要关心 $n \to \infty$ 时，$H^n(X)$ 是何物。这是难以说清楚的，我们不妨换一个角度来看。

定义 4.1.3. 设 X 为 n 维紧致定向流形，Ω 为 X 上的一个体积形式，则有 Ω 诱导了多重切向量场 $\mathrm{PV}^\bullet(X)$ 与微分形式 $\Omega_X^\bullet$ 之间的 C^∞-线性同构

$$\begin{aligned}\Gamma_\Omega : \mathrm{PV}^k(X) &\to \Omega_X^{n-k}\\ V &\mapsto V \lrcorner \Omega\end{aligned}$$

其中 $V \lrcorner \Omega$ 为 V 关于 Ω 的缩并.

在局部坐标下，若 $\Omega = \mathrm{d}x^1 \wedge \mathrm{d}x^2 \cdots \wedge \mathrm{d}x^n$，

$$V = \partial_{i_1} \wedge \partial_{i_2} \wedge \cdots \wedge \partial_{i_k}$$

为多重切向量场，其中指标 $i_1 < i_2 < \cdots < i_k$，则容易知道

$$\Gamma_\Omega(V) = V \lrcorner \Omega = (-1)^{(i_1-1)+(i_2-1)+\cdots+(i_k-1)} \cdots \wedge \widehat{\mathrm{d}x^{i_1}} \wedge \cdots \wedge \widehat{\mathrm{d}x^{i_k}} \wedge \cdots$$

例子 4.1.4.
$$(\partial_2 \wedge \partial_3) \lrcorner (\mathrm{d}x^1 \wedge \mathrm{d}x^2 \wedge \mathrm{d}x^3 \wedge \mathrm{d}x^4) = -\mathrm{d}x^1 \wedge \mathrm{d}x^4$$

以此为例，缩并的运算规则可以理解为：∂_i 向右移动与 $\mathrm{d}x^i$ 相遇而湮灭，其中在 ∂_i 移动的过程中穿过几个对象（∂_j 或者 $\mathrm{d}x^j$）就改变几次正负号（这符合 Koszul 符号法则的“精神”）。

例如，如果 $\Omega = e^{f(x)}\mathrm{d}x^1 \wedge \mathrm{d}x^2 \wedge \mathrm{d}x^3 \wedge \mathrm{d}x^4$，则

$$\Gamma_\Omega(\partial_2 \wedge \partial_3) = e^{f(x)}\mathrm{d}x^1 \wedge \mathrm{d}x^4$$

再比如，对于体积形式 Ω 本身，有
$$\Gamma_\Omega^{-1}(\Omega) = 1$$
也就是说 $1 \in \mathrm{PV}^0(X)$ 对应于 $\Omega \in \Omega_X^n$.

当 $V \in \mathrm{PV}^1(X)$ 为切向量场时，$V \lrcorner \Omega = i_V(\Omega)$ 就是我们熟悉的内乘运算。

注记 4.1.5. （多重切向量场的内乘）类似于关于切向量场 X 的内乘算子 $i_X : \Omega_X^\bullet \to \Omega_X^{\bullet-1}$，我们也可以考虑多重切向量场 $V \in \mathrm{PV}^p(X)$ 的内乘

$$i_V : \Omega_X^\bullet \to \Omega_X^{\bullet-p}$$

使得对任意 $\omega \in \Omega_X^r\,(r \geq p)$，以及任意 $W \in \mathrm{PV}^{r-p}(X)$，成立

$$\langle i_V(\omega), W \rangle = \langle \omega, V \wedge W \rangle$$

特别注意，对于多重切向量场 $V \in \mathrm{PV}^\bullet(X)$ 以及体积形式 Ω，一般来说

$$V \lrcorner \Omega \neq i_V(\Omega)$$

它们两者之间会相差一些奇怪的正负号。我们这里的 $\mathrm{PV}^k(X)$ 与 Ω_X^{n-k} 的对应是通过缩并实现的，而不是内乘。

定义 4.1.6. （*BV* 算子）

对于 n 维光滑定向流形 X，设 $\Omega \in \Omega_X^n$ 为 X 上的一个体积形式，定义算子 $\triangle_\Omega : \mathrm{PV}^k(X) \to \mathrm{PV}^{k-1}(X)$，使得下图交换：

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{PV}^k(X) \arrow[r, "\triangle_\Omega"] \arrow[d, equal, "\Gamma_\Omega"'] & \mathrm{PV}^{k-1}(X) \arrow[d, equal, "\Gamma_\Omega"'] \\
\Omega_X^{n-k} \arrow[r, "\mathrm{d}"] & \Omega_X^{n-k+1}
\end{tikzcd}$$

称 $\triangle_\Omega$ 为 ***BV* 算子**（*Batalin-Vilkovisky operator*）。

无非是将 de Rham 上链复形 $(\Omega_X^\bullet, \mathrm{d})$ 通过体积形式同构为上链复形 $(\mathrm{PV}^\bullet(X), \triangle_\Omega)$，其实没干什么事情。特别注意我们规定 $\mathrm{PV}^k(X)$ 的次数为 $-k$，使得 $\triangle_\Omega$ 是次数为 1 的微分算子（而不被看作边缘算子）。

注意到此时有上同调群的同构

$$H^n(\Omega_X^\bullet, \mathrm{d}) \cong H^0(\mathrm{PV}^\bullet(X), \triangle_\Omega)$$

回顾我们对积分 $\int_X f\Omega$ 的同调解释，从而有

$$\int_X : f \mapsto [f] \in H^0(\mathrm{PV}^\bullet(X), \triangle_\Omega)$$

也就是说我们可以把求函数 f 关于体积形式 Ω 的积分转化成取 f 在 $(\mathrm{PV}^\bullet(X), \triangle_\Omega)$ 的第零个同调类。这样的好处是，容易向维数 $n \to \infty$ 的情形推广，毕竟无论维数 n 如何升高，我们取的总是第零个同调。

不过这样的代价是，问题转化为“如何构造无穷维空间上的 BV 算子”。

注记 4.1.7. （广义散度）

事实上，如果 $v \in \mathrm{PV}^1(X)$ 为 X 上的切向量场，则

$$\triangle_\Omega(v) = \mathrm{div}_\Omega(v)$$

正是我们熟悉的关于体积形式 Ω 的散度。

于是我们也俗称 BV 算子为多重切向量场的“广义散度”。

为了书写方便，我们引入一套高效的语言：Grassmann 变量。

记号 4.1.8. （*Grassmann* 变量）

对于 n 维流形 X，以及 X 的局部坐标卡 $U \subseteq X$，我们考虑分次交换 $\mathbb{R}$-代数

$$C^\infty(U) \otimes \mathrm{Free}\{\theta_1, \theta_2, ..., \theta_n\} / \sim$$

其中生成关系 $\sim$ 为由 $\{\theta_i\theta_j + \theta_j\theta_i | 1 \le i, j \le n\}$ 生成的理想。其中分次结构由

$$\deg \theta_i = -1 \quad \forall 1 \le i \le n$$

给出。

容易发现，无非是将 $\mathrm{PV}^\bullet(U)$ 当中的 ∂_i 重新写为 θ_i，从而局部上

$$\mathrm{PV}^\bullet(U) = C^\infty(U)[\theta_1, ..., \theta_n]$$

换句话说，X 上的多重切向量场（局部上）可以写为关于局部坐标 $x^1, ..., x^n$ 以及 Grassmann 变量的函数

$$\mu = \mu(x^1, ..., x^n; \theta_1, ..., \theta_n) \in \mathrm{PV}^\bullet(X)$$

这里的 Grassmann 变量 θ_i 是不是 Doubrovin-Zhang 可积系统里面的“超变量”？

定义 4.1.9. 对于流形 X，局部坐标下我们定义 -1 阶超导子

$$\frac{\partial}{\partial \theta_i} : \mathrm{PV}^\bullet(X) \to \mathrm{PV}^\bullet(X)$$

使得成立

$$\frac{\partial}{\partial \theta_i} f(x^1, ..., x^n) = 0, \qquad \frac{\partial}{\partial \theta_i} \theta_j = \delta^i_j$$

$\frac{\partial}{\partial \theta_i}$ 服从 -1 阶超导子的超莱布尼茨法则，即对任意 $f, g \in \mathrm{PV}^\bullet(X)$ 为齐次元，成立

$$\frac{\partial}{\partial \theta_i}(fg) = \frac{\partial f}{\partial \theta_i} g + (-1)^{\deg f} f \frac{\partial g}{\partial \theta_i}$$

容易验证，超导子 $\frac{\partial}{\partial \theta_i}$ 满足关系

$$\frac{\partial}{\partial \theta_i}\frac{\partial}{\partial \theta_j} = -\frac{\partial}{\partial \theta_j}\frac{\partial}{\partial \theta_i}$$

对任意 $1 \leq i, j \leq n$ 成立。特别地，$\left(\frac{\partial}{\partial\theta_i}\right)^2 = 0$.

性质 4.1.10. （*BV 算子的 Grassmann 变量表达式*）
　　对于定向流形 X，设体积形式

$$\Omega = e^{f(x)} \mathrm{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^n$$

则关于 Ω 的 BV 算子 $\triangle_\Omega$ 在 Grassmann 变量的意义下具有表达式

$$\triangle_\Omega = \frac{\partial}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial\theta_i} + \frac{\partial f}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial\theta_i}$$

证明. 直接验证之。对于任意

$$V = \mu(x^1, ..., x^n)\theta_{i_1} \cdots \theta_{i_k} \in \mathrm{PV}^k(X)$$

则有

$$\begin{aligned}
\triangle_\Omega V &= \Gamma_\Omega^{-1} \circ \mathrm{d} \circ \Gamma_\Omega(V) \\
&= \Gamma_\Omega^{-1} \circ \mathrm{d}\left[(-1)^{(i_1-1)+\cdots+(i_k-k)} \mu e^f \widehat{\mathrm{d}x^{i_1}} \wedge \cdots \wedge \widehat{\mathrm{d}x^{i_k}}\right] \\
&= (-1)^{(i_1-1)+\cdots+(i_k-k)} \Gamma_\Omega^{-1}\left[(\frac{\partial\mu}{\partial x^i} + \mu\frac{\partial f}{\partial x^i})e^f \sum_{l=1}^{k}(-1)^{i_l-l}\widehat{\mathrm{d}x^{i_1}} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{i_l} \wedge \cdots \wedge \widehat{\mathrm{d}x^{i_k}}\right] \\
&= (\frac{\partial\mu}{\partial x^i} + \mu\frac{\partial f}{\partial x^i})\sum_{l=1}^{k}(-1)^{l-1}\theta_{i_1} \cdots \widehat{\theta_{i_l}} \cdots \theta_{i_k} \\
&= \left[\frac{\partial}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial\theta_i} + \frac{\partial f}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial\theta_i}\right](V)
\end{aligned}$$

从而证毕。 □

　　注意到 BV 算子的表达式

$$\triangle_\Omega = \frac{\partial}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial\theta_i} + \frac{\partial f}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial\theta_i}$$

长得像二阶微分算子，甚至很像拉普拉斯算子——$\triangle_\Omega$ 因此也被称为 **奇拉普拉斯算子**（odd Laplacian）。

性质 4.1.11. *设 X 为定向流形，$\Omega = e^{f(x)} \mathrm{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^n$ 为 X 的一个体积形式，$\triangle_\Omega$ 为关于 Ω 的 BV 算子。定义*

$$\{,\} : \mathrm{PV}^\bullet(X) \times \mathrm{PV}^\bullet(X) \to \mathrm{PV}^\bullet(X)$$

$$\{\alpha,\beta\} := \triangle_\Omega(\alpha\wedge\beta) - (\triangle_\Omega\alpha)\wedge\beta - (-1)^{|\alpha|}\alpha\wedge\triangle_\Omega\beta$$

即，"$\triangle$ 成为超导子的代价"。那么 $\{,\}$ 不依赖于体积形式 Ω 的选取。

证明. 直接验证即可。对任意 $\alpha\in \mathrm{PV}^p(X)$ 以及 $\beta\in\mathrm{PV}^q(X)$，成立

$$\begin{aligned}
\triangle_\Omega(\alpha\wedge\beta) &= \frac{\partial}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial\theta_i}(\alpha\wedge\beta) + \frac{\partial f}{\partial x^j}\frac{\partial}{\partial\theta_j}(\alpha\wedge\beta)\\
&= \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\frac{\partial\alpha}{\partial\theta_i}\wedge\beta + (-1)^p\alpha\wedge\frac{\partial\beta}{\partial\theta_i}\right) + \frac{\partial f}{\partial x^i}\left(\frac{\partial\alpha}{\partial\theta_i}\wedge\beta + (-1)^p\alpha\wedge\frac{\partial\beta}{\partial\theta_i}\right)\\
&= \frac{\partial^2\alpha}{\partial x^i\partial\theta_i}\wedge\beta + \frac{\partial\alpha}{\partial\theta_i}\wedge\frac{\partial\beta}{\partial x^i} + (-1)^p\frac{\partial\alpha}{\partial x^i}\wedge\frac{\partial\beta}{\partial\theta_i}\\
&\quad +(-1)^p\alpha\wedge\frac{\partial^2\beta}{\partial x^i\partial\theta_i} + \frac{\partial f}{\partial x^i}\frac{\partial\alpha}{\partial\theta_i}\wedge\beta + (-1)^p\frac{\partial f}{\partial x^i}\alpha\wedge\frac{\partial\beta}{\partial\theta_i}\\
&= (\triangle_\Omega\alpha)\wedge\beta + (-1)^p\alpha\wedge(\triangle_\Omega\beta)\\
&\quad +\frac{\partial\alpha}{\partial\theta_i}\wedge\frac{\partial\beta}{\partial x^i} + (-1)^p\frac{\partial\alpha}{\partial x^i}\frac{\partial\beta}{\partial\theta_i}
\end{aligned}$$

从而得到

$$\{\alpha,\beta\} = \frac{\partial\alpha}{\partial\theta_i}\wedge\frac{\partial\beta}{\partial x^i} + (-1)^p\frac{\partial\alpha}{\partial x^i}\wedge\frac{\partial\beta}{\partial\theta_i}$$

从而与 Ω 的选取无关。 □

我们之前也见过类似的运算：Schouten-Nijenhuis 括号（见定义2.4.2）；而这里的 $\{,\}$ 是"另一个版本的 Schouten-Nijenhuis 括号"：

引理 4.1.12. 定义 4.1.11 中的括号

$$\{,\}:\mathrm{PV}^p(X)\times\mathrm{PV}^q(X)\to\mathrm{PV}^{p+q-1}(X)$$

满足性质：对任意 $\alpha\in\mathrm{PV}^p(X),\beta\in\mathrm{PV}^q(X),\gamma\in\mathrm{PV}^r(X)$，成立：

（1）超反交换性

$$\{\alpha,\beta\} = (-1)^{pq}\{\beta,\alpha\}$$

（2）超莱布尼茨法则

$$\{\alpha,\beta\wedge\gamma\} = \{\alpha,\beta\}\wedge\gamma + (-1)^{(p-1)q}\beta\wedge\{\alpha,\gamma\}$$

（3）若 $p=q=1$，则 $\{,\}$ 退化为切向量场李括号：

$$\{\alpha,\beta\} = [\alpha,\beta]$$

注意超反交换性（1）与性质2.4.3 的（2）在正负号上有所出入。

证明. 使用表达式

$$\{\alpha,\beta\} = \frac{\partial\alpha}{\partial\theta_i}\wedge\frac{\partial\beta}{\partial x^i} + (-1)^p\frac{\partial\alpha}{\partial x^i}\wedge\frac{\partial\beta}{\partial\theta_i} \tag{$*$}$$

直接验证即可，并不困难。对于 $\alpha\in\mathrm{PV}^p(X)$, $\beta\in\mathrm{PV}^q(X)$ 以及 $\gamma\in\mathrm{PV}^r(X)$，有

$$\begin{aligned}
\{\alpha,\beta\} &= \frac{\partial\alpha}{\partial\theta_i}\wedge\frac{\partial\beta}{\partial x^i} + (-1)^p\frac{\partial\alpha}{\partial x^i}\wedge\frac{\partial\beta}{\partial\theta_i}\\
&= (-1)^{(p-1)q}\frac{\partial\beta}{\partial x^i}\wedge\frac{\partial\alpha}{\partial\theta_i} + (-1)^{p+p(q-1)}\frac{\partial\beta}{\partial\theta_i}\wedge\frac{\partial\alpha}{\partial x^i}\\
&= (-1)^{pq}\left(\frac{\partial\beta}{\partial\theta_i}\wedge\frac{\partial\alpha}{\partial x^i} + (-1)^q\frac{\partial\beta}{\partial x^i}\wedge\frac{\partial\alpha}{\partial\theta_i}\right)\\
&= (-1)^{pq}\{\beta,\alpha\}
\end{aligned}$$

于是超反交换性成立；再看超莱布尼茨法则，

$$\begin{aligned}
\{\alpha,\beta\wedge\gamma\} &= \frac{\partial\alpha}{\partial\theta_i}\wedge\frac{\partial}{\partial x^i}(\beta\wedge\gamma) + (-1)^p\frac{\partial\alpha}{\partial x^i}\wedge\frac{\partial}{\partial\theta_i}(\beta\wedge\gamma)\\
&= \frac{\partial\alpha}{\partial\theta_i}\wedge\left(\frac{\partial\beta}{\partial x^i}\wedge\gamma + \beta\wedge\frac{\partial\gamma}{\partial x^i}\right) + (-1)^p\frac{\partial\alpha}{\partial x^i}\wedge\left(\frac{\partial\beta}{\partial\theta_i}\wedge\gamma + (-1)^q\beta\wedge\frac{\partial\gamma}{\partial\theta_i}\right)\\
&= \{\alpha,\beta\}\wedge\gamma + (-1)^{q(p-1)}\beta\wedge\frac{\partial\alpha}{\partial\theta_i}\wedge\frac{\partial\gamma}{\partial x^i} + (-1)^{pq+p+q}\beta\wedge\frac{\partial\alpha}{\partial x^i}\wedge\frac{\partial\gamma}{\partial\theta_i}\\
&= \{\alpha,\beta\}\wedge\gamma + (-1)^{(p-1)q}\beta\wedge\{\alpha,\gamma\}
\end{aligned}$$

而（3）是更加容易验证的，从略。 □

可以体会到 Grassmann 变量 θ_i 以及超导子 $\frac{\partial}{\partial\theta_i}$ 在张量计算上的优越性：将本该必然面对的数学归纳法、组合恒等式转化为直接的暴力计算。

事实上，我们还可以用 $(*)$ 来暴力验证 $\{,\}$ 的超雅可比恒等式：

$$(-1)^{pr}\{\{\alpha,\beta\},\gamma\} + (-1)^{qp}\{\{\beta,\gamma\},\alpha\} + (-1)^{rq}\{\{\gamma,\alpha\},\beta\} = 0$$

或者换句话说

$$\{\alpha,\{\beta,\gamma\}\} = (-1)^{p-1}\{\{\alpha,\beta\},\gamma\} + (-1)^{(p-1)(q-1)}\{\beta,\{\alpha,\gamma\}\}$$

（但是这个看起来不像是导子的样子）（此处待仔细验证）

4.2 从一维 Gauss 积分到费曼图

首先我们考察一个 BV 算子的例子：

重要例子 4.2.1. 考虑一维流形 $X=\mathbb{R}$，体积形式

$$\Omega := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} \mathrm{d}x$$

则 BV 算子

$$\triangle_\Omega = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial \theta} - x\frac{\partial}{\partial \theta}$$

特别地，我们得到

$$\int_{\mathbb{R}} x^k \Omega = \begin{cases} 0 & x = 2k+1 \\ (2k-1)!! & x = 2k \end{cases}$$

证明. 注意

$$\Omega = e^{-\frac{1}{2}(x^2 - \log 2\pi)} \mathrm{d}x$$

从而由性质4.1.10，直接写出

$$\triangle_\Omega = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial \theta} - x\frac{\partial}{\partial \theta}$$

注意到积分的（上）同调解释

$$\begin{aligned} \int_X : C^\infty &\to H^0(\mathrm{PV}^\bullet(X), \triangle_\Omega) \cong \mathbb{R} \\ g &\mapsto [g] \end{aligned}$$

而注意到对任意 $x^k\theta \in \mathrm{PV}^1(X)$，在 $H^0(\mathrm{PV}^\bullet(X), \triangle_\Omega)$ 当中成立

$$0 = [\triangle \Omega x^k \theta] = (\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial \theta} - x\frac{\partial}{\partial \theta})[x^k\theta] = k[x^{k-1}] - x^{k+1}$$

因此对任意 $k \geq 0$，成立

$$[x^{k+2}] = (k+1)[x^k]$$

递推得

$$[x^n] = \begin{cases} (2k-1)!![1] & n = 2k \\ (2k)!![x] & n = 2k+1 \end{cases}$$

最后注意到

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} \mathrm{d}x = 1 \qquad \int_{\mathbb{R}} \frac{x}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} \mathrm{d}x = 0$$

从而完。 □

引理 4.2.2. 条件接上，仍考虑体积形式

$$\Omega := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} \mathrm{d}x$$

定义算子 $\mathcal{U} : \mathbb{R}[x,\theta] \to \mathbb{R}[x,\theta]$ 为

$$\mathcal{U} := e^{\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}}$$

则 BV 算子 $\triangle_\Omega$ 满足

$$\triangle_\Omega = \mathcal{U}^{-1}(-x\frac{\partial}{\partial \theta})\mathcal{U}$$

证明. 注意到众所周知的公式

$$e^A B e^{-A} = e^{\mathrm{ad}_A} B$$

特别地，在这里

$$A = -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}, \qquad B = -x\frac{\partial}{\partial \theta}$$

注意到

$$[A,B] = \frac{1}{2}[\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}, x\frac{\partial}{\partial \theta}] = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial \theta}$$

进而

$$[A,[A,B]] = -\frac{1}{2}[\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial \theta}] = 0$$

于是

$$\begin{aligned}
\mathcal{U}^{-1}(-x\frac{\partial}{\partial \theta})\mathcal{U} &= x^A B e^{-A} = e^{\mathrm{ad}\,A} B \\
&= B + [A,B] = -x\frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial \theta} = \triangle_\Omega
\end{aligned}$$

从而得证。 □

此引理表明，有如下的交换图表：

$$\begin{array}{ccc}
\mathbb{R}[x,\theta] & \xrightarrow{\triangle_\Omega} & \mathbb{R}[x] \\
\downarrow \mathcal{U} & & \downarrow \mathcal{U} \\
\mathbb{R}[x,\theta] & \xrightarrow{-x\frac{\partial}{\partial \theta}} & \mathbb{R}[x]
\end{array}$$

以及 $\mathcal{U}$ 诱导上同调群的同构

$$\mathcal{U} : H^0(\mathbb{R}[x,\theta], \triangle_\Omega) \xrightarrow{\sim} H^0(\mathbb{R}[x,\theta], -x\frac{\partial}{\partial \theta})$$

性质 4.2.3. 条件承上，则对于任意的多项式函数 $g \in \mathbb{R}[x]$，成立

$$\int_{\mathbb{R}} g\Omega = e^{-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}}\Big|_{x=0} g$$

证明. 只需要考虑 $[\mathcal{U}(g)] \in H^0(\mathbb{R}[x,\theta], -x\frac{\partial}{\partial\theta})$。注意到对任意 $k \geq 0$,

$$-x\frac{\partial}{\partial\theta}(x^k\theta) = -x^{k+1}$$

也就是说在 $H^0(\mathbb{R}[x,\theta], -x\frac{\partial}{\partial\theta})$ 当中，$[x^k] = 0$ 对任意 $k \geq 1$ 成立，从而

$$[\mathcal{U}(g)] = \mathcal{U}(g)(0) = e^{-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}}\Big|_{x=0} g$$

从而易得。 □

这个性质将求积分转化为求导，大大简化运算。（与复变函数的留数定理异曲同工？）

更一般地，容易证明对任意 $g \in \mathbb{R}[x]$

$$\int_{\mathbb{R}} g(x+a)\Omega = e^{\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}}\Big|_{x=a} g(x)$$

重要例子 4.2.4. 现在我们考虑积分

$$\int_{\mathbb{R}} e^{\left(-\frac{1}{2}x^2+\frac{\lambda}{3!}(x+a)^3\right)/\hbar}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2\pi\hbar}}$$

其中 $\lambda, a \in \mathbb{R}$，在这里体积形式 $\Omega = e^{-\frac{1}{2}x^2/\hbar}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2\pi\hbar}}$.

此式中的"$-\frac{1}{2}x^2$"在物理上可以认为是"自由能"，三次项 $\frac{\lambda}{3!}(x+a)^3$ 则为"相互作用能"。相互作用能的存在，使得此积分发散。

处理该积分有两种常见方式：其一是将它视为复平面上的积分，并且重新规定积分路径（这会出现 Airy 函数）；或者考察它的（$\hbar \to 0$ 的）渐近展开

$$\sum_{n\geq 0}\frac{1}{n!}\int_{\mathbb{R}}\left(\frac{\lambda(x+a)^3}{3!\hbar}\right)^n e^{-\frac{1}{2}x^2/\hbar}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2\pi\hbar}}$$

在此我们选择后者，将 $e^{-\frac{1}{2}x^2/\hbar}$ 展开，被积函数展开后的每一项

$$\frac{1}{n!}\int_{\mathbb{R}}\left(\frac{\lambda(x+a)^3}{3!\hbar}\right)^n e^{-\frac{1}{2}x^2/\hbar}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2\pi\hbar}}$$

都可以使用同调的方法计算（与之前的例子完全类似）：直接套用性质4.1.10，此时的 BV 算子为 $\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial\theta}-\frac{x}{\hbar}\frac{\partial}{\partial\theta}$，其实不妨相差常数倍，令

$$\triangle_\Omega := \hbar\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial\theta}-x\frac{\partial}{\partial\theta}$$

并且令

$$\mathcal{U}_\hbar := e^{\frac{\hbar}{2}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}}$$

则与之前完全类似，有

$$\triangle_\Omega = \mathcal{U}_\hbar^{-1}\circ\left(-x\frac{\partial}{\partial\theta}\right)\circ\mathcal{U}_\hbar$$

从而易知

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} e^{\left(-\frac{1}{2}x^2+\frac{\lambda}{3!}(x+a)^3\right)/\hbar}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2\pi\hbar}} &\sim \sum_{m\geq 0}\frac{1}{m!}\int_{\mathbb{R}}\left(\frac{\lambda(x+a)^3}{3!\hbar}\right)^m e^{-\frac{1}{2}x^2/\hbar}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2\pi\hbar}}\\
&= \sum_{m\geq 0}\frac{1}{m!}e^{\frac{1}{2}\hbar\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}}\left(\frac{\lambda x^3}{3!\hbar}\right)^m\Bigg|_{x=a}\\
&= \sum_{k,m\geq 0}\frac{1}{k!}\frac{1}{m!}\left(\frac{1}{2}\hbar\partial_a^2\right)^k\left(\frac{\lambda a^3}{3!\hbar}\right)^m
\end{aligned}$$

上式最右端具有组合意义，我们接下来详细说明。记 $\mathcal{P} := \frac{1}{2}\hbar\partial_a^2$ 称之为**传播子**（propagator），再记 $\mathcal{I}(a) := \frac{\lambda a^3}{3!}$ 为“相互作用能”，则上式为

$$\int_{\mathbb{R}} e^{\left(-\frac{1}{2}x^2+\frac{\lambda}{3!}(x+a)^3\right)/\hbar}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2\pi\hbar}} \sim \sum_{k,m\geq 0}\frac{1}{k!}\frac{1}{m!}\mathcal{P}^k\left(\frac{\mathcal{I}(a)}{\hbar}\right)^m$$

我们先来观察 $k=1$ 的情形，看看 $\mathcal{P}\mathcal{I}^m(a)$ 是什么东西。记 $\mathcal{P}_s=\mathcal{P}_t:=\sqrt{\hbar/2}\partial_a$，则有

$$\mathcal{P}=\mathcal{P}_t\mathcal{P}_s$$

再令 $\mathcal{I}_1=\mathcal{I}_2=\cdots=\mathcal{I}_m:=\mathcal{I}$，则

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}\mathcal{I}^m(a) &= \mathcal{P}_t\mathcal{P}_s\left(\mathcal{I}_1(a)\mathcal{I}_2(a)\cdots\mathcal{I}_m(a)\right)\\
&= \mathcal{P}_t\left(\sum_{u=1}^m\mathcal{I}_1(a)\cdots\mathcal{P}_s\mathcal{I}_u(a)\cdots\mathcal{I}_m(a)\right)\\
&= \Bigg(\sum_{1\leq u<v\leq m}\mathcal{I}_1(a)\cdots\mathcal{P}_s\mathcal{I}_u(a)\cdots\mathcal{P}_t\mathcal{I}_v(a)\cdots\mathcal{I}_m(a)\\
&\quad+\sum_{1\leq u\leq m}\mathcal{I}_1(a)\cdots\mathcal{P}_t\mathcal{P}_s\mathcal{I}_u(a)\cdots\mathcal{I}_m(a)\\
&\quad+\sum_{1\leq v<u\leq m}\mathcal{I}_1(a)\cdots\mathcal{P}_t\mathcal{I}_v(a)\cdots\mathcal{P}_s\mathcal{I}_u(a)\cdots\mathcal{I}_m(a)\Bigg)
\end{aligned}$$

我们将 $\mathcal{I}_1,...,\mathcal{I}_m$ 视为 m 个“顶点”，将

$$\mathcal{I}_1(a)\cdots\mathcal{P}_s\mathcal{I}_u(a)\cdots\mathcal{P}_t\mathcal{I}_v(a)\cdots\mathcal{I}_m(a)$$

视为从“顶点” u 出发，到“顶点” v 的“有向边”，则上式可以粗俗地说成“对所有的 m 个顶点、1 条边的图求和”。类似地，考虑

$$\mathcal{P}^k\mathcal{I}^m(a)=\underbrace{\mathcal{P}\cdots\mathcal{P}}_{k}\underbrace{\mathcal{I}(a)\cdots\mathcal{I}(a)}_{m}$$

然后类似地展开，得到“对所有 m 个顶点、k 条边的图求和”。

我们将以上严格表述之，然后得到**费曼图展开公式**。我们之前在介绍 Kontsevich 量子化公式的时候引入了“带标记的有向图”的概念（见定义3.4.1）。在这里，我们允许出现回路（即，始点与终点相同的有向边），也允许出现“多箭头”（即从某个点出发到某个点的边可能不止一条）。但是我们要求顶点集与边集都是有限集。

记号 4.2.5. （带标记的有向图的有向底图）对于带标记的有向图 $\Gamma=(\Gamma_0,\Gamma_1,\varepsilon)$，则 Γ 可以遗忘为图论当中通常的**多重有向图**，后者称为前者的**有向底图**，记为 $\underline{\Gamma}$.

遗忘的方式为“将边的名称去掉”。此操作是显然的，例如

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r, bend left, "a"] \arrow[r, bend right, "b"'] & 2 \end{tikzcd} \quad\rightsquigarrow\quad \begin{tikzcd} 1 \arrow[r, bend left] \arrow[r, bend right] & 2 \end{tikzcd}$$

我们更习惯将带标记的有向图 Γ 的顶点集记为 V，边集记为 E （原来使用的记号 Γ_0,Γ_1 废止）。对于有限集 V,E，定义集合

$$\mathcal{G}_{V,E}:=\{\text{以 } V \text{ 为顶点集，以 } E \text{ 为边集的全体带标记的有向图之全体}\}$$

则容易构造一一对应 $\mathcal{G}_{V,E}\cong\{\varepsilon:E\to V\times V\}$.

定义 4.2.6. （置换群 $S_V\times S_E$ 在集合 $\mathcal{G}_{V,E}$ 上的作用）

对于有限集合 V,E，定义群 $S_V\times S_E$ 在集合 $\mathcal{G}_{V,E}$ 上的作用如下：对 $\mathcal{G}_{V,E}$ 中的任意元素 $\varepsilon:E\to V\times V$，以及置换 $\sigma\in S_V,\tau\in S_E$，令

$$(\sigma,\tau).\varepsilon=(\sigma\times\sigma)\circ\varepsilon\circ\tau^{-1}$$

其中

$$\begin{aligned}\sigma\times\sigma:V\times V &\to V\times V\\ (v_1,v_2)&\mapsto(\sigma(v_1),\sigma(v_2))\end{aligned}$$

讲人话，无非是将带标记的有向图的各顶点、各边的名称重新排列一下。例如，$V = \{1,2,3\}$, $E = \{a,b,c\}$，带标记的有向图

$$\Gamma = \begin{tikzcd} 1 \arrow[r, bend left, "a"] & 2 \arrow[l, bend left, "b"] \arrow[r, "c"] & 3 \end{tikzcd}$$

考虑置换

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \qquad \tau = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & a \end{pmatrix}$$

则有

$$(\sigma,\tau).\Gamma = \begin{tikzcd} 1 \arrow[r, bend left, "b"] & 3 \arrow[l, bend left, "c"] \arrow[r, "a"] & 2 \end{tikzcd} = \begin{tikzcd} 1 \arrow[rr, bend left, "b"] & 2 & 3 \arrow[l, "a"'] \arrow[ll, bend left, "c"] \end{tikzcd}$$

以下性质显然成立：

引理 4.2.7. 对于有限集合 V, E，以及 $\Gamma, \Gamma' \in \mathcal{G}_{V,E}$，则它们的有向底图（作为多重有向图）同构，当且仅当它们位于群 $S_v \times S_E$ 在 $\mathcal{G}_{V,E}$ 作用的同一个轨道上。

也就是说，群 $S_V \times S_E$ 作用的轨道类，无非是有向底图的同构类。

例子 4.2.8. 考虑如下两个带标记的有向图

$$\Gamma := \begin{tikzcd} 1 \arrow[r, bend left, "a"] \arrow[r, bend right, "b"'] & 2 \arrow[r, "c"] & 3 \end{tikzcd}$$

$$\Gamma' := \begin{tikzcd} 1 & 2 \arrow[l, "b"'] & 3 \arrow[l, bend right, "c"'] \arrow[l, bend left, "a"] \end{tikzcd}$$

则显然 $\Gamma \neq \Gamma'$.

考虑它们的有向底图

$$\underline{\Gamma} := \begin{tikzcd} 1 \arrow[r, bend left] \arrow[r, bend right] & 2 \arrow[r] & 3 \end{tikzcd} \qquad \underline{\Gamma'} := \begin{tikzcd} 1 & 2 \arrow[l] & 3 \arrow[l, bend right] \arrow[l, bend left] \end{tikzcd}$$

则 $\underline{\Gamma} \neq \underline{\Gamma'}$；但是它们作为多重有向图是同构的。

例子 4.2.9. （$|V| = 3, |E| = 2$ 的轨道类）

令 $V=\{1,2,3\}, E=\{a,b\}$，我们给出 $S_V\times S_E$ 在 $\mathcal{G}_{V,E}$ 作用的轨道类如下：

轨道类	轨道长度
$\bullet \longrightarrow \bullet \longrightarrow \bullet$	12
$\bullet \longrightarrow \bullet \longleftarrow \bullet$	6
$\bullet \longleftarrow \bullet \longrightarrow \bullet$	6
$[\bullet] \longrightarrow \bullet \quad \bullet$	12
$[\bullet] \longleftarrow \bullet \quad \bullet$	12
$[\bullet] \quad \bullet \longrightarrow \bullet$	12
$\bullet \rightleftarrows \bullet \quad \bullet$	6
$\bullet \rightrightarrows \bullet \quad \bullet$	6
$[[\bullet]] \quad \bullet \quad \bullet$	3
$[\bullet] \quad [\bullet] \quad \bullet$	6

这里用有向底图的同构类来表示轨道类。表格中的方括号的含义是，以方括号内的顶点为端点的一条闭路（即从该点出发指向自己的箭头）；嵌套两层方括号就是两条闭路，以此类推。

不要忘记，我们引入这些图论概念，是为了描述求导运算。

记号 4.2.10. （费曼规则）（*Feynman's rule*）

对于带标记的有向图 $\Gamma=(V,E,\varepsilon)$，定义

$$w_\Gamma(\mathcal{P},\mathcal{I}(a)):=\prod_{v\in V}\frac{\mathcal{P}_s^{S(v)}\mathcal{P}_t^{T(v)}\mathcal{I}(a)}{\hbar}=\hbar^{-|V|}\prod_{v\in V}\mathcal{P}_s^{S(v)}\mathcal{P}_t^{T(v)}\mathcal{I}(a)$$

其中 $\mathcal{P}:=\frac{1}{2}\hbar\partial_a^2$ 为传播子，$\mathcal{P}_s=\mathcal{P}_t:=\sqrt{\hbar/2}\partial_a$，$\mathcal{I}(a):=\frac{\lambda a^3}{3!}$ 为“相互作用能”。并且对于顶点 $v\in V$，

$$S(v):=|\{e\in E|s(e)=v\}|$$

$$T(v):=|\{e\in E|t(e)=v\}|$$

分别为顶点 v 的**出度**与**入度**。

翻译成人话，对于带标记的有向图（实际上多重有向图足矣，边的名称没贡献）Γ，我们按照

如下规则给该图赋值：首先对图 Γ 的每一个顶点赋值，“有几条边经过此点，就求几次导”；然后将所有顶点的数值相乘。

例子 4.2.11. 注意到这里的 $\mathcal{I}(a)=\frac{\lambda a^3}{3!}$ 为关于 a 的三次多项式，而 $\mathcal{P}_s=\mathcal{P}_t$ 为一阶微分算子，从而如果图 Γ 的某个顶点的度数（入度与出度之和）大于三，那么 $w_\Gamma(\mathcal{P},\mathcal{I})=0$

因此，我们只需要考虑每个顶点的度数都不超过 3 的图，这些 Γ 才能使得 $w_\Gamma(\mathcal{P},\mathcal{I})$ 取值非平凡。

引理 4.2.12.

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} e^{\left(-\frac{1}{2}x^2+\frac{\lambda}{3!}(x+a)^3\right)/\hbar}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2\pi\hbar}} &\sim \sum_{k,m\geq 0}\frac{1}{k!}\frac{1}{m!}\left(\frac{1}{2}\hbar\partial_a^2\right)^k\left(\frac{\lambda a^3}{3!\hbar}\right)^m\\ &= \sum_{k,m\geq 0}\frac{1}{k!}\frac{1}{m!}\sum_{\Gamma\in\mathcal{G}_{m,k}} w_\Gamma(\mathcal{P},\mathcal{I})\end{aligned}$$

其中 $\mathcal{G}_{m,k}:=\mathcal{G}_{\{v_1,\ldots,v_m\},\{e_1,\ldots,e_k\}}$，视为 m 个顶点、k 条边的带标记的有向图之全体。

此式的等号显然成立，仅仅是换了一种说法。

我们将给出因子 $\frac{1}{k!}\frac{1}{m!}$ 的组合解释。注意到置换群 $S_m\times S_k$ 在 $\mathcal{G}_{m,k}$ 的作用，其轨道之全体记为 $\underline{\mathcal{G}_{m,k}}$，则由之前的论述，$\underline{\mathcal{G}_{m,k}}$ 可被视为 m 个顶点、k 条边的多重有向图之全体。再注意多重有向图也可按照费曼规则赋值（甚至多重无向图也可以）。

定义 4.2.13. （带标记的有向图的自同构群）

对于带标记的有向图 $\Gamma\in\mathcal{G}_{m,k}$，定义其自同构群

$$\operatorname{Aut}(\Gamma):=\{\varphi\in S_m\times S_k|\varphi.\Gamma=\Gamma\}$$

其实就是群 $S_m\times S_k$ 在 Γ 处的稳定子群。

对于多重有向图 $\underline{\Gamma}\in\underline{\mathcal{G}_{m,k}}$，则 $\underline{\Gamma}$ 可视为 $S_m\times_k$ 在 $\mathcal{G}_{m,k}$ 作用的一条轨道，该轨道的长度记作 $\ell(\underline{\Gamma})$；而对于带标记的有向图 Γ，记 $\ell(\Gamma)$ 为 Γ 所在轨道的长度。则由群论的轨道计数知，

$$\begin{aligned} m^{2k}=|\mathcal{G}_{m,k}| &= \sum_{\underline{\Gamma}\in\underline{\mathcal{G}_{m,k}}}\ell(\underline{\Gamma})\\ m!k!=|S_m\times S_k| &= \ell(\Gamma)|\operatorname{Aut}(\Gamma)| \quad (\forall\Gamma\in\mathcal{G}_{m,k})\end{aligned}$$

而对于多重有向图 $\underline{\Gamma}$，我们不去定义它的自同构群，但是注意到

$$|\operatorname{Aut}(\underline{\Gamma})|:=|\operatorname{Aut}(\Gamma)|$$

是良定的，与代表元的选取无关，因为同一轨道的不同元素的稳定子群共轭。

综上所述，我们得到了如下费曼图公式：

定理 4.2.14. （费曼图公式）（*Feynman diagram formula*）

记号同上，则有

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} e^{\left(-\frac{1}{2}x^2+\frac{\lambda}{3!}(x+a)^3\right)/\hbar}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2\pi\hbar}} &\sim \sum_{k,m\geq 0}\sum_{\Gamma\in\underline{\mathcal{G}}_{k,m}}\frac{w_\Gamma(\mathcal{P},\mathcal{I})}{|\operatorname{Aut}(\Gamma)|}\\ &= \sum_{\substack{\Gamma\text{取遍}\\ \text{多重有向图}}}\frac{w_\Gamma(\mathcal{P},\mathcal{I})}{|\operatorname{Aut}(\Gamma)|}\end{aligned}$$

证明. 这是显然的，只需要注意到

$$\begin{aligned}\frac{1}{k!}\frac{1}{m!}\sum_{\Gamma\in\mathcal{G}_{m,k}}w_\Gamma(\mathcal{P},\mathcal{I}) &= \frac{1}{|S_k\times S_m|}\sum_{\Gamma\in\underline{\mathcal{G}}_{m,k}}\ell(\Gamma)w_\Gamma(\mathcal{P},\mathcal{I})\\ &= \sum_{\Gamma\in\underline{\mathcal{G}}_{m,k}}\frac{\ell(\Gamma)w_\Gamma(\mathcal{P},\mathcal{I})}{\ell(\Gamma)|\operatorname{Aut}(\Gamma)|} = \sum_{\Gamma\in\underline{\mathcal{G}}_{m,k}}\frac{w_\Gamma(\mathcal{P},\mathcal{I})}{|\operatorname{Aut}(\Gamma)|}\end{aligned}$$

□

注意到我们公式中的图 Γ 可以有很多“连通分支”，若进一步将连通分支“分解”之，费曼图公式可以写得更加紧凑。

记号 4.2.15. （*1*）多重有向图 Γ 可自然地被遗忘为多重（无向）图 $\widehat{\Gamma}$，后者称为前者的**无向底图**。对于带标记的有向图，类似定义其无向底图（先遗忘为多重有向图）。

（*2*）称带标记的有向图（或者多重有向图）是连通的，如果其无向底图连通。

（*3*）对于多重有向图 Γ，自行定义其**连通分支**。注意连通分支依然是多重有向图。

对于两个多重有向图 Γ 与 Γ'，自行定义它们的**无交并**$\Gamma\sqcup\Gamma'$（常简记为 $\Gamma\Gamma'$，这仍然是一个多重有向图）。容易知道，对任何多重有向图 Γ，Γ 可被唯一分解为其连通分支的无交并：

$$\Gamma\cong\Gamma_1^{d_1}\Gamma_2^{d_2}\cdots\Gamma_l^{d_l}$$

其中 $\Gamma_1,...,\Gamma_l$ 为 Γ 的互不同构的连通分支，$d_i\geq 1$，

$$\Gamma_i^{d_i}:=\underbrace{\Gamma_i\Gamma_i\cdots\Gamma_i}_{d_i\text{个}}$$

引理 4.2.16. 记号、条件承上，如果

$$\Gamma \cong \Gamma_1^{d_1}\Gamma_2^{d_2}\cdots\Gamma_l^{d_l}$$

则多重有向图 Γ 的自同构群阶数满足：

$$|\operatorname{Aut}(\Gamma)| = \left(\prod_{i=1}^{l} |\operatorname{Aut}(\Gamma_i)|^{d_i}\right)\left(\prod_{i=1}^{l} d_i!\right)$$

证明大意. 不妨将 Γ 视为带标记的有向图（任取一个代表元即可），且 $\Gamma \in \mathcal{G}_{m,k}$. 一方面，易证上式的"$\geq$"，构造即可。另一方面，我们要说明 $|\operatorname{Aut}(\Gamma)|$ 中的元素"只有这些"，细节从略。真的仅仅是限于篇幅... $\square$

定理 4.2.17. （费曼图公式：指数形式）

记号承上，则成立

$$\int_{\mathbb{R}} e^{\left(-\frac{1}{2}x^2+\frac{\lambda}{3!}(x+a)^3\right)/\hbar}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2\pi\hbar}} \sim \sum_{\substack{\Gamma\text{取遍}\\ \text{多重有向图}}} \frac{w_\Gamma(\mathcal{P},\mathcal{I})}{|\operatorname{Aut}(\Gamma)|} = \exp\left(\sum_{\substack{\Gamma\text{取遍}\\ \text{连通的多重有向图}}} \frac{w_\Gamma(\mathcal{P},\mathcal{I})}{|\operatorname{Aut}(\Gamma)|}\right)$$

其中等号右边的"exp"为按照指数运算规则形式地展开。

证明. 只需验证上式中的等号。

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{\Gamma\text{取遍}\\ \text{多重有向图}}} \frac{w_\Gamma(\mathcal{P},\mathcal{I})}{|\operatorname{Aut}(\Gamma)|} &= \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{\gamma=0}^{\infty}\left(\sum_{\substack{d_1,\dots,d_r\geq 1\\ d_1+\cdots+d_r=\gamma}}\ \sum_{\substack{\Gamma_1,\dots,\Gamma_r\text{连通}\\ \text{互不同构}}} \frac{w_{\Gamma_1^{d_1}\cdots\Gamma_r^{d_r}}(\mathcal{P},\mathcal{I})}{|\operatorname{Aut}(\Gamma_1^{d_1}\cdots\Gamma_r^{d_r})|}\right)\\
&= \sum_{\gamma=0}^{\infty}\sum_{r=0}^{\infty}\left(\sum_{\substack{d_1,\dots,d_r\geq 1\\ d_1+\cdots+d_r=\gamma}}\ \sum_{\substack{\Gamma_1,\dots,\Gamma_r\text{连通}\\ \text{互不同构}}} \frac{1}{d_1!}\cdots\frac{1}{d_r!}\prod_{j=1}^{r}\left(\frac{w_{\Gamma_j}(\mathcal{P},\mathcal{I})}{|\operatorname{Aut}(\Gamma_j)|}\right)^{d_j}\right)\\
&= \sum_{\gamma=0}^{\infty}\frac{1}{\gamma!}\left(\sum_{\substack{\Gamma\text{取遍}\\ \text{连通的多重有向图}}} \frac{w_\Gamma(\mathcal{P},\mathcal{I})}{|\operatorname{Aut}(\Gamma)|}\right)^{\gamma}\\
&= \exp\left(\sum_{\substack{\Gamma\text{取遍}\\ \text{连通的多重有向图}}} \frac{w_\Gamma(\mathcal{P},\mathcal{I})}{|\operatorname{Aut}(\Gamma)|}\right)
\end{aligned}$$

$\square$

4.3 重整化群流算子

我们已通过 BV 上同调给出了渐近展开

$$\int_{\mathbb{R}} e^{\left(\frac{1}{2}x^2+\frac{\lambda(x+a)^3}{3!}\right)/\hbar}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2\pi\hbar}} \quad \sim \quad e^{\frac{\hbar}{2}\partial_a^2}e^{\frac{\lambda(x+a)^3}{3!\hbar}}$$

并给出了组合解释——费曼图展开。若令

$$w(\mathcal{P},\mathcal{I}) := \hbar \sum_{\substack{\Gamma\text{取遍}\\ \textbf{连通的}\text{多重有向图}}} \frac{w_\Gamma(\mathcal{P},I)}{|\operatorname{Aut}(\Gamma)|}$$

则有指数型费曼图公式

$$e^{w(\mathcal{P},\mathcal{I})/\hbar} = e^{\mathcal{P}}e^{\mathcal{I}/\hbar}$$

其中 $\mathcal{P}=\frac{1}{2}\hbar\partial^2$ 为传播子。

上式中的“相互作用项”$\mathcal{I}(x)=\frac{\lambda x^3}{3!}$ 可以如下推广之：

记号 4.3.1. 记空间

$$\mathbb{R}[x][\![\hbar]\!]^+ := x^3\mathbb{R}[x]\oplus\hbar\mathbb{R}[x][\![\hbar]\!]\subseteq\mathbb{R}[x][\![\hbar]\!]$$

对于 $\mathcal{I}\in\mathbb{R}[x][\![\hbar]\!]$，称 $\mathcal{I}$ 为相互作用能。

任取 $\mathcal{I}\in\mathbb{R}[x][\![\hbar]\!]^+$，以及带标记的有向图（或者多重有向图）$\Gamma=(V,E,\varepsilon)$，我们可类似地按照费曼规则（详见记号4.2.10）给图 Γ 赋值：

$$w_\Gamma(\mathcal{P},\mathcal{I}) := \hbar^{-|V|}\prod_{v\in V}\mathcal{P}_s^{S(v)}\mathcal{P}_t^{T(v)}\mathcal{I}(a)\in\mathbb{R}[x][\![\hbar]\!]^+$$

其中 $\mathcal{P}=\frac{1}{2}\hbar\partial_x^2$ 为传播子。

接下来，我们要将费曼图推广。对于相互作用能 $\mathcal{I}\in\mathbb{R}[x][\![\hbar]\!]^+$，令

$$\mathcal{I}=\sum_{k\geq 0}\mathcal{I}'_k x^k$$

其中 $\mathcal{I}'_k\in\mathbb{R}[\![\hbar]\!]$ 为形式幂级数。记 $\mathcal{I}_k:=\mathcal{I}'_k x^k$，于是 $\mathcal{I}$ 被分解为 $\mathcal{I}=\sum_{k=0}^{\infty}\mathcal{I}_k$.

一方面我们早已知道

$$\int_{\mathbb{R}} e^{\left(\frac{1}{2}x^2+\mathcal{I}(x+a)\right)/\hbar}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2\pi\hbar}} \sim e^{\frac{\hbar}{2}\partial_a^2}e^{\mathcal{I}(a)/\hbar}$$

之后直接将右边展开，得到费曼图解释。但另一方面我们还可以如此展开：

$$\begin{aligned} e^{\frac{\hbar}{2}\partial_a^2}e^{\mathcal{I}(a)/\hbar} &= e^{\frac{\hbar}{2}\partial_a^2}e^{\frac{1}{\hbar}\sum\limits_{k\geq 0}\mathcal{I}_k(a)} \\ &= e^{\frac{\hbar}{2}\partial_a^2}\sum_{q=0}^{\infty}\frac{1}{q!}\left(\frac{1}{\hbar}\sum_{k=0}^{\infty}\mathcal{I}_k(a)\right)^q \end{aligned}$$

$$= \quad e^{\frac{\hbar}{2}\partial_a^2}\left(\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{\substack{0\le k_1<\ldots<k_r\\ d_1,\ldots,d_r\ge 0}}\frac{\hbar^{-(d_1+\cdots+d_r)}}{d_1!\cdots d_r!}\prod_{j=1}^{r}\mathcal{I}_{k_j}^{d_j}(a)\right)$$

观察上式，仍将微分算子级数 $e^{\frac{\hbar}{2}\partial_a^2}$ 理解为“添加有向边”；而括号里的一长串也有组合解释——**带权的顶点集**。给“带权的顶点集”顺次添加“有向边”，就得到比“带标记的有向图的顶点集 V”更为复杂的组合结构。大致地说，以前我们给图的所有顶点都赋以相同的 $\mathcal{I}(a)$，但是现在给图的不同顶点赋以不同的 $\mathcal{I}_k(a)$.

定义 4.3.2. （顶点带权的带标记的有向图）

顶点带权的带标记的有向图是指如下资料：

$$(V,E,\varepsilon,W,\varphi)$$

并且满足：

（*1*）(V,E,ε) 为带标记的有向图；

（*2*）W 为集合，$\varphi: V\to W$

我们称 W 为权集，在这里 $W=\{\mathcal{I}_0,\mathcal{I}_1,\ldots\}\subseteq\mathbb{R}[x][\![\hbar]\!]^+$.

我们可以按照加权的类型对顶点带权的带标记的有向图分类。比如，此图有 d_1 个顶点赋以权 $\mathcal{I}_{k_1}$，d_2 个顶点赋以权 $\mathcal{I}_{k_2}$，……，d_r 个顶点赋以权 $\mathcal{I}_{k_r}$，则称该图为“$\mathcal{I}_{k_1}^{d_1}\cdots\mathcal{I}_{k_r}^{d_r}$ 型”的。

性质 4.3.3. 对于传播子 $\mathcal{P}=\frac{1}{2}\hbar\partial_x^2$，以及 $\mathcal{I}\in\mathbb{R}[x][\![h]\!]^+$，定义

$$w(\mathcal{P},\mathcal{I}):=\hbar\sum_{\substack{\Gamma\text{取遍}\\ \text{连通的多重有向图}}}\frac{w_\Gamma(\mathcal{P},I)}{|\operatorname{Aut}(\Gamma)|}$$

那么算子

$$\begin{aligned} w(\mathcal{P},\text{-}):\mathbb{R}[x][\![h]\!]^+ &\to \mathbb{R}[x][\![h]\!]^+\\ \mathcal{I} &\mapsto w(\mathcal{P},\mathcal{I}) \end{aligned}$$

是良定的，并且具有逆算子 $w(-\mathcal{P},\text{-})$.

证明. 任取 $\mathcal{I}\in\mathbb{R}[x][\![\hbar]\!]^+$，则有

$$w(\mathcal{P},\mathcal{I})=\hbar\sum_{\substack{\Gamma\text{取遍}\\ \text{连通的多重有向图}}}\frac{w_\Gamma(\mathcal{P},I)}{|\operatorname{Aut}(\Gamma)|}=\sum_{\substack{G\in\mathbb{Z}\\ D\ge 0}}\lambda_{G,D}\hbar^G x^D$$

其中 $\lambda_{G,D} \in \mathbb{R}$. 为证明良定性，我们需要说明以下三点：

（1）若 $G<0$，则 $\lambda_{G,D}=0$；

（2）$\lambda_{0,0}=\lambda_{0,1}=\lambda_{0,2}=0$；

（3）对任意 $G\geq 0$，使得 $\lambda_{G,D}$ 非零的 D 至多有限个。

$$I=\sum_{k,g\geq 0} I_{k,g}\hbar^g$$

where $I_{k,g}$ has degree k polynomial on x.

If $I_{k,g}\neq 0$, then $2g-2+k\geq 0$ and equality holds only if when $g=1,k=0$. we need to prove

$$\hbar\sum_{\Gamma}\frac{\omega_\Gamma(\mathcal{P},I)}{\hbar}$$

is well defined, and in $\mathbb{R}[\![x,\hbar]\!]^+$.

Let Γ be a connected graph,

.... □

$$\mathbb{R}[\![x,\hbar]\!]^+\to\mathbb{R}[\![x,\hbar]\!]^+$$

$$I\mapsto\omega(\Gamma,I)$$

$$e^{\omega(\Gamma,I)/\hbar}=e^{\hbar\mathcal{P}}e^{I/\hbar}$$

$\omega_(\Gamma,-)$ is called **renormalization group flow operator**.

4.4 n 维 Gauss 积分

For $\mathbb{R}^n$,consider

$$\int_{\mathbb{R}^n}\prod_{i=1}^n\frac{\mathrm{d}x^i}{\sqrt{2\pi\hbar}}e^{(-\frac{1}{2}Q(x)+I(x+a))/\hbar}$$

where $Q(x)=\sum Q_{ij}x^ix^j$ quadratic ,and $(Q_{ij})>0$ positive.

$$I(x)\in\mathbb{R}[\![x^i,\hbar]\!]^+$$

at least cubic in x^i modulo $\hbar$.

the volume form

$$e^{-\frac{1}{2\hbar}Q(x)}\prod_{i=1}^n\frac{\mathrm{d}x^i}{\sqrt{2\pi\hbar}}$$

$$\triangle=\hbar\sum_i\frac{\partial}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial\theta_i}-\sum_{i,j}Q_{ij}x^i\frac{\partial}{\partial\theta_j}=\mathcal{U}^{-1}(-\sum_{ij}Q_{ij}x^i\frac{\partial}{\partial\theta_j})\mathcal{U}$$

where

$$\mathcal{U}=e^{\frac{1}{2}\hbar Q^{ij}\frac{\partial}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial x^j}}$$

where $(Q^{ij}) = (Q_{ij})^{-1}$. Then

$$\int_{\mathbb{R}^n} \prod_{i=1}^{n} \frac{\mathrm{d}x^i}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{(-\frac{1}{2}Q(x)+I(x+a))/\hbar} = \frac{1}{\sqrt{\det Q}} \left(e^{\frac{1}{2}\hbar Q^{ij}\frac{\partial}{\partial a^i}\frac{\partial}{\partial a^j}} e^{I(a)/\hbar} \right) = \frac{1}{\sqrt{\det Q}} \exp\left(\sum_{\Gamma-\text{connected graph}} \frac{\omega_\Gamma(a)}{Aut(\Gamma)} \right)$$

Similarly,

$$\mathcal{P} = \frac{1}{2}\sum_{i,j} Q^{ij}\frac{\partial}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial x^j}$$

$$\omega(\mathcal{P}, -) : \mathbb{R}[\![x^i, \hbar]\!]^+ \to \mathbb{R}[\![x^i, \hbar]\!]^+$$

$$I \mapsto \omega(\mathcal{P}, I)$$

$$e^{\omega(\mathcal{P},I)/\hbar\,''} = {}'' e^{\hbar\mathcal{P}} e^{I/\hbar}$$

it is well defined, invertible...

Now, $\mathbb{R}^n$ when $n'' \to {}''\infty$...

4.5 例子：ϕ^4-场论

Quantum field theory case:

例子 4.5.1. *Scalar field theory,*$\mathbb{R}^D$*.*

$$\mathcal{E} = C^\infty(\mathbb{R}^D)$$

smooth functions ,

$$\mathbb{R}^n \rightsquigarrow \mathcal{E}$$

$$\mathcal{S}[phi] = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^D} |\mathrm{d}\phi|^2 + \frac{\lambda}{4!}\int_{\mathbb{R}^D} \phi^4$$

for $\phi \in \mathcal{E}$*. we want*

$$\int_{\mathcal{E}} e^{-\mathcal{S}[\phi]/\hbar}[D\phi]$$

finite dimension ,

$$\mathbb{R}^n = map(n\text{points}, \mathbb{R})$$

so,

$$\mathcal{E} = C^\infty(\mathbb{R}^D)'' = {}'' \lim_{N\to\infty} C^\infty(N\text{points})$$

（取密密麻麻的点？格点场论）

$$i\text{index} \rightsquigarrow x \in \mathbb{R}^D$$

$$\sum_i \rightsquigarrow \int_{\mathbb{R}^D} \mathrm{d}x$$

free part:

$$\frac{1}{2}\int_X |\mathrm{d}\phi|^2 = \frac{1}{2}\int_X \phi D\phi$$

where $D = -\sum_i \frac{\partial}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial x^i}$ be laplacian:

$$D : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$$

propagator

$$\mathcal{P} = D^{-1} = D^{-1}_{x,y}$$

(is called Green's function integral kernel)

$$\Phi : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$$

operator, has kernel $\Phi(x,y)$ if

$$\Phi(f)(x) = \int \mathrm{d}y \Phi(x,y) f(y)$$

eg. $\Phi = \mathrm{id} \iff \Phi(x,y) = \delta(x-y)$ delta function.

$$D^{-1} \to D^{-1}(x,y) = \frac{1}{|x-y|^{D-2}}$$

singularity comes from infinite dimensional nature. (Ultra-Violet singularity 紫外发散)

Renormalization(I)

Last time:

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^n} e^{(-\frac{1}{2}\sum x^i Q^{ij} x^j + I(x+a))/\hbar} \prod_{i=1}^{n} \frac{\mathrm{d}x^i}{\sqrt{2\pi\hbar}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{\det Q}} e^{\frac{1}{2}\hbar Q^{ij}\frac{\partial}{\partial a^i}\frac{\partial}{\partial a^j}} e^{I(a)/\hbar} \\
&= \frac{1}{\sqrt{\det Q}} \exp\left(\sum_\Gamma \frac{\omega_\Gamma(P,a)}{Aut\Gamma}\right)
\end{aligned}$$

Field theory example:

ϕ^4-theory on $\mathbb{R}^4$

$$\begin{aligned}
\mathcal{E} &= C_c^\infty(\mathbb{R}^4) \\
\mathcal{S}[\phi] &= \int_{\mathbb{R}^4} \frac{1}{2}\phi D\phi + \frac{\lambda}{4!}\int_{\mathbb{R}^4} \phi^4 \\
&:= Q(\phi) + I(\phi)
\end{aligned}$$

$$\int_{\mathcal{E}} [D\phi] e^{-\mathcal{S}[\phi]/\hbar}" = " \frac{1}{\sqrt{\det Q}} \exp\left(\sum_\Gamma \frac{\omega_\Gamma(\mathcal{P}, I)}{|Aut(\Gamma)|}\right)$$

Feymann rule...$G(x,y)$ satisfy

$$D_x G(x,y) = \delta(x,y)$$

(analogue $Q_{ij}Q^{jk} = \delta_i^k$) (Green's function)

where

$$D = -\sum_i \frac{\partial}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial x^i}$$

is the Laplacian...

in $\mathbb{R}^4$,

$$G(x, y) = \frac{1}{|x-y|^2}$$

(in general on $\mathbb{R}^d$, $G(x, y) \sim \frac{1}{|x-y|^{d-2}}$ when $d \geq 3$)

Feyman graph formula:

tree level ($\hbar^0$)

$$\mathcal{E} = C_c^\infty(\mathbb{R}^4)$$

（这个无穷维空间是有拓扑的）（这个空间上的广义函数？）

这个例子讲完了，我们稍微再复杂一点，下面呢。。。

in general, for a tree diagram (loop = 0) **HW:** the Feymann integral is well-defined.

One loop($\hbar^1$) (ill defined..) (Ultra-Violent divergent...) 发散的原因是“两个点离得太近，能量太高”

处理这种发散，引入“重整化”

idea of renormalization:

observe: Green function G is the "inverse of Laplacian".

$$D^{-1} = \int_0^\infty e^{-tD}\mathrm{d}t$$

e^{-tD} is "Heat operator"..

e^{-tD} is represented by an integral kernel $h_t(x, y)$ such that

$$(e^{-tD}\phi)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} h_t(x, y)\phi(y)\mathrm{d}y$$

on $\mathbb{R}^d$,

$$h_t(x, y) = \frac{1}{(4\pi t)^{d/2}} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}}$$

check:

$$(\partial_t + D_x)h_t(x, y) = 0$$

性质 4.5.2. *(1) h_t is smooth if $t > 0$, and $h_t \to \delta(x, y)$ when $t \to 0$.*

(2) semi-group prop:

$$\int_{\mathrm{d}y} h_{t_1}(x_1, y) h_{t_2}(y, x_2) = h_{t_1+t_2}(x, y)$$

i.e.

$$e^{-t_1 D} e^{-t_2 D} = e^{-(t_1+t_2)D}$$

and we have

$$G(x, y) = \int_0^{\infty} \mathrm{d}t h_t(x, y)$$

introduce cut-off paramaters

$$0 < \varepsilon < L < +\infty$$

Define

$$P_{\varepsilon}^{L}(x, y) = \int_{\varepsilon}^{L} \mathrm{d}h_t(x, y)$$

is smooth(called regularized propagator). ε is called uv(紫外) cut-off, L is called IR(红外) cut-off.

idea: Replace the propagator G by P_{ε}^{L} and analyze the behavior of the graph as $\varepsilon \to 0$ and $L \to \infty$.

Eg:

$$\begin{aligned}
(1) &= \lambda^2 \int_{\mathbb{R}^4} \mathrm{d}x \phi^4(x) \int_{\varepsilon}^{L} \frac{\mathrm{d}t_1}{(4\pi t_1)^2} \frac{\mathrm{d}t_2}{(4\pi t_2)^2} \int_{\mathbb{R}^4} e^{-\frac{|y|^2}{4t_1} - \frac{|y|^2}{4t_2}} \\
&= \lambda^2 \int_{\mathbb{R}^4} \mathrm{d}x \phi^4(x) \int_{\varepsilon}^{L} \frac{\mathrm{d}t_1}{(4\pi t_1)^2} \frac{\mathrm{d}t_2}{(4\pi t_2)^2} \frac{(2\pi)^2}{(\frac{1}{2t_1} + \frac{1}{2t_2})^2} \\
&= \frac{\lambda^2}{(4\pi)^2} \int_{\mathbb{R}^4} \mathrm{d}x \phi^4(x) \int_{\varepsilon}^{L} \frac{\mathrm{d}t_1 \mathrm{d}t_2}{(t_1 + t_2)^2} \\
&= -\frac{\lambda^2 \log \varepsilon}{(4\pi)^2} \int_{\mathbb{R}^4} \mathrm{d}x \phi(x)^4 + \text{terms smooth when } \varepsilon \to 0
\end{aligned}$$

idea: $\lambda \to \lambda(\varepsilon)$ depend on ε. Consider add the following to $\mathcal{S}$:

$$I_1^{CT}(\varepsilon) = \frac{\hbar \lambda^2 \log \varepsilon}{(4\pi)^2} \int \mathrm{d}x \phi^4$$

（CT: counter term... 用来抵消发散）

$$\begin{aligned}
&\mathcal{S} \mapsto \mathcal{S} + I^{CT}(\varepsilon) \\
&= \frac{1}{2} \int \phi D \phi + \frac{\lambda}{4!} \mathrm{d}x \phi^4 + \frac{\hbar \lambda^2 \log \varepsilon}{(4\pi)^2} \int \mathrm{d}x \phi^4
\end{aligned}$$

Feymann rule

定理 4.5.3 (Physics). （物理中少数几个正儿八经的定理）

there exists

$$\lambda(\varepsilon) = \lambda + \hbar \frac{\lambda^2 \log \varepsilon}{(4\pi)^2} + \hbar^2 + \cdots$$

$$= \lambda + \sum_{g \geq 1} \hbar^g G_g(\lambda, \varepsilon)$$

(dependents on λ, ε*, singular as* $\varepsilon \to 0$*.)*

such that Let

$$I^\varepsilon = \frac{\lambda(\varepsilon)}{4!} \int_{\mathbb{R}^4} \mathrm{d}x \phi(x)^4$$

then

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \sum_{\Gamma} \frac{\omega_P(P_\varepsilon^L, I^\varepsilon)}{|Aut(\Gamma)|}$$

exists.

这个定理挺难证。。。不证了。。。

例子 4.5.4. *Quantum mechanics (QFT in dimension 1)*

field:

$$\gamma : \mathbb{R} \to a \ space$$

$$t \mapsto \gamma(t)$$

$$\mathcal{S}[\gamma] = \frac{1}{2} \int \mathbb{R} \mathrm{d}t |\gamma'(t)|^2$$

is called energy...

"Physics fact": For $x, y \in \mathbb{R}^d$,consider

$$\int_{\substack{\gamma:[0,t] \to \mathbb{R}^d \\ \gamma(0)=x, \quad \gamma(t)=y}} [D\gamma] e^{-\mathcal{S}[\gamma]/\hbar} = h_t(x, y)$$

"the second story":first order formula,

$$\mathcal{S} \to \mathcal{S}[\cdots]$$

还是下一节课再讲吧。。。

4.6 同伦重整化

Homotopic Renormalization

Recall:

$$\int \rightsquigarrow \textbf{BV homology}$$

scalar field theory in $\mathbb{R}^4$.

∞-dimension$\rightsquigarrow$ UV-divergence.

定义 4.6.1. *A differential BV (or DGBV) is a triple* $(\mathcal{A}, Q, \triangle)$*,s.t.*

(1)$\mathcal{A}$ *is a graded commutative algebra with product*$\cdot$

(2)$Q : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ *is a graded derivation of degree* 1*.*

(3)$\triangle : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ *is a "2-nd differential operator" (BV operator),such that* $\deg \triangle = 1, \triangle^2 = 0$*.*

(4)$[Q, \triangle] := Q \circ \triangle + (-1)^{1+1} \triangle \circ Q = 0$

we define the BV-bracket

$$\{\alpha, \beta\} := \triangle(\alpha\beta) - (\triangle\alpha)\beta - (-1)^{\alpha}\alpha\triangle\beta$$

This bracket , has degree 1, satisfies:

(1)graded Jacobi identity

(2)Leibniz rule...

(BV-algebra...)(similar as Gerstenhaber algebra)

例子 4.6.2. *M is a manifold with volume form* Ω*,*

$$\mathcal{A} := \mathrm{PV}^{\bullet}(M) \textit{with wedge product} \wedge$$

$$\triangle := \textit{divergence operator with } \Omega$$

$$Q = 0$$

in local coordinate,$\Omega = e^f \mathrm{d}^n x$*,*

$$\triangle = \sum_i \frac{\partial}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial \theta_i} - \sum_i \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial \theta_i}$$

例子 4.6.3. *Let X be a complex manifold of complex dimension* d*,*

$$\Omega \in H^0(X, K_X)$$

is a holomorphic volume form(nowhere vanishing),where $K_X := \bigwedge^d T_X^{1,0}$

Then (X, Ω) *is called a CY manifold(Calabi-Yau).*

$$\mathrm{PV}^{p,q}(X) := \Omega^{p,q}(X, \bigwedge^p T_X^{1,0}) \xrightarrow{\lrcorner \Omega} \Omega^{d-p,q}(X)$$

$$\bar{\partial} : \mathrm{PV}^{p,q} \to \mathrm{PV}^{p,q-1}$$

$$\triangle : \mathrm{PV}^{p,q} \to \mathrm{PV}^{p-1,q}$$

Then we have a DGBV:

$$\mathcal{A} := \mathrm{PV}^{\bullet,\bullet}(X)$$

$$Q := \overline{\partial}$$

$$\triangle = \text{divergence}$$

(Hodge theory,deformation theory)

$$\deg \mathrm{PV}^{p,q}(X) = q - p$$

定义 4.6.4. *Let $(\mathcal{A}, Q, \triangle)$ be a DGBV. $I_0 \in \mathcal{A}_0$(i.e. degree$=0$) is said to satisfy classical master equation(CME), if*

$$QI_0 + \frac{1}{2}\{I_0, I_0\} = 0$$

（这个方程长得有点像联络，而且是曲率为 0 的那种）

$$Q + \{I_0, -\} \curvearrowright \mathcal{A}$$

this operator acts as a differential, i.e.

$$(Q + \{I_0, -\})^2 = 0$$

(check,need to use Jacobi identity, HW)

This bracket is also called ”odd Poisson structure”...

Fact: any action functional with gauge symmetry leads to a solution of CME. (What the fuck is ”guage symmetry”?)

(quantum version)

$$I = I_0 + I_1\hbar + I_2\hbar^2 \in \mathcal{A}[\![\hbar]\!]$$

is said to satisfy Quantum master equation, if

$$QI + \hbar\triangle I + \frac{1}{2}\{I, I\} = 0$$

(when $\hbar \to 0$, go back to ”classical”)

(比较 $\hbar$ 各项系数，有无穷多个方程)

HW:

$$\text{QMF} \iff (Q + \hbar\triangle)e^{I/\hbar} = 0$$

i.e. , $e^{I/\hbar}$ is the analogue of ”closed differential form”.

$$\rightsquigarrow \int e^{I/\hbar} \quad \text{in Physis: Quantum gauge symmetry}$$

（某种意义下的不变的测度）

$$\xrightarrow{?} \int \alpha e^{I/\hbar} =: \langle \alpha \rangle$$

co-relator function

classical observable

$$Obs^{cl} := H^0(\mathcal{A}, Q + \{I, -\})$$

(is called classical BRST)

quantum observable

$$Obs^q = H^0(\mathcal{A}[\![\hbar]\!], Q + \hbar\triangle + \{I, -\})$$

if $\alpha \in Obs^q$, then

$$(Q + \hbar\triangle)\alpha + \{I, \alpha\} = 0 \iff \Big(Q + \hbar\triangle)(\alpha e^{I/\hbar}) = 0\Big)$$

(i.e. $\alpha e^{I/\hbar}$ is a ”closed form”)

例子 4.6.5. *(from singularity theory)*

$$\mathcal{A} := \mathbb{C}[z^i, \theta_i]$$

where $\deg \theta_i = -1$*(super variable).*

$$f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$$

is a polynomial, such that $f(z)$ *has a isolated singularity at* $z = 0$*,*

$$\mathrm{Crit}(f) = \{z \in \mathbb{C}^n | \partial_i f(z) = 0\}$$

then $\mathrm{Crit}(f) = \{0\}$*.*

Then ,there is a DGBV:

$$Q = 0$$

$$\triangle = \sum_i \frac{\partial}{\partial z^i} \frac{\partial}{\partial \theta_i}$$

and f *solves CME:* $\{f, f\} = 0$*(trivial...),and also satisfies QMF:* $\triangle e^{f/\hbar} = 0$*.*

then , the classical observable

$$Obs^{cl} = H^0(\mathcal{A}, \{f, -\}) = \text{Koszul resolution of } \mathbf{Crit}(f) = \mathbb{C}[z^i]/(\partial_i f)$$

is called "Milnor ring",parametrizing deformations of f. This Milnor ring is an Artinian ring(so, of finite length),

$$\mu := \dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[z^i]/(\partial_i f)$$

is called Milnor ring..

例子 4.6.6. $f(z) = z^{n+1}$,*(A_n-singularity),*

$$Jac(f) = \mathbb{C}[z]/z^n$$

$$\mu = n$$

Check:

$$Obs^q \cong \Omega^n_{holo}[\![\hbar]\!]/(\hbar \mathrm{d} + \mathrm{d}f\wedge)$$

called (formal) Brieshorn lattice.

Obs^q describes complex oscillatory integral.

Rmk: Singularity leads to a mixed Hodge theory.

$\hbar$ =Hodge filtration.

QFT is a ∞-dimensional version of Hodge theory.

(-1)**-symplectic geometry(BV-formalism)**

Toy model: Consider (V, Q, ω),where (V, Q) is a finite dimensional complex,

$$Q : V \to V, Q^2 = 0$$

$$\omega : \bigwedge^2 V \to \mathbb{C}$$

symplectic pair(non-degenerate) of degree -1. And ω is compactible with Q:

$$Q(\omega) = 0 \iff \omega(Q(-), -) + \omega(-, Q(-)) = 0$$

(V, Q, ω) is called degree (-1)-symplectic space.

We can construct a DGBV algebra

$$\mathcal{A} = \mathcal{O}(v) = \prod_{n\geq 0} \mathrm{Sym}^n(V^*)$$

Q is the induced derivation on $\mathcal{A}$. (Eg:

$$(QI)(\alpha_1 \otimes \cdots \otimes \alpha_n) = \sum_i \pm I(\alpha_1, ..., \hat{\alpha_i}, ..., \alpha_n)$$

)

$\omega : V^* \cong V[1]$, example: $\omega = \mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}\theta_i$.

$$\omega \in \bigwedge^2(V^*) \longleftarrow \bigwedge^2(V[1]) = \mathrm{Sym}^2(V)[2]$$

$K = \omega^{-1} \in \mathrm{Sym}^2(V), \deg(K) = 1$ is the Poisson kernel of ω.

locally,

$$\omega = \mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}\theta_i$$

$$K = \frac{\partial}{\partial x^i} \otimes \frac{\partial}{\partial \theta_i} + \frac{\partial}{\partial \theta_i} \otimes \frac{\partial}{\partial x^i}$$

We define the BV operator

$$\triangle_K : \mathcal{O}(V) \to \mathcal{O}(V)$$

$$\mathrm{Sym}^n(V^*) \to \mathrm{Sym}^{n-2}(V^*)$$

by contracting with $K \in \mathrm{Sym}^2(V)$.

Expicitly

$$\triangle_K(\alpha_1 \otimes \ldots \otimes \alpha_n) = \sum_{i,j} \pm \langle K, \alpha_i, \alpha_j \rangle \alpha_1 \otimes \ldots \hat{\alpha}_i \ldots \hat{\alpha}_j \ldots \otimes \alpha_n$$

性质 4.6.7. *(HW)*

$$(\mathcal{A} = \mathcal{O}(V), Q, \triangle_K)$$

is a DGBV algebra.

eg: $\mathcal{A} = \mathbb{C}[x^i, \theta_i]$,$\omega = \mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}\theta_i$, and

$$\triangle_K = \frac{\partial}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial \theta_i}$$

QFT case

$$V, Q \rightsquigarrow \mathcal{E}^\bullet = \Gamma(X, E^\bullet)$$

smooth section of some graded bundle $E^\bullet$.

$$\cdots \xrightarrow{Q} \mathcal{E}^{-1} \xrightarrow{Q} \mathcal{E}^0 \xrightarrow{Q} \mathcal{E}^1 \to \cdots$$

Q is a differential operator, $Q^2 = 0$. (∞-dimension)

$$\omega \rightsquigarrow \text{local } (-1)\text{-symplectic pair}$$

$$\omega(\alpha, \beta) = \int_X \langle \alpha, \beta \rangle, \quad \alpha, \beta \in \mathcal{E}$$

$K = \omega^{-1} = \delta$-function supported on$X \subseteq X \times X$. (UV-divergence)

$V^* \to \mathcal{E}^*$ is distribution...

$\triangle_K \curvearrowright$ Distribution is ill-defined!

术语索引