

# 非交换几何选讲

曲豆豆 码字  
南七技校福利社 五道口分社  
2019 年 3 月 29 日  
第 01-7 稿



图：雾气朦胧的安徽合肥大蜀山森林公园  
拍摄于 2014.5.31 - 10: 44

---

在五道口也要红专并进、理实交融呀～

# 目录

<b>1</b>	<b>Hochschild 理论</b>	<b>3</b>
1.1	结合代数的双模、余中心	3
1.2	Hochschild 同调	7
1.3	Hochschild 上同调	12
1.4	约化 Bar 复形	18
1.5	Connes 复形 $C_{\bullet}^{\lambda}(A)$	24
1.6	循环双复形 $CC_{\bullet\bullet}(A)$	27
1.7	Connes 算子 $\mathcal{B}$	31
1.8	循环同调的计算	36
1.9	循环上同调	42
<b>2</b>	<b>乘积</b>	<b>45</b>
2.1	分次模与 Koszul 符号法则	45
2.2	分次代数与分次李代数	50
2.3	余代数与分次余代数	57
2.4	多重切向量场与 Schouten-Nijenhuis 括号	60
2.5	Shuffle 乘积	65
2.6	Cup 乘积与 Gerstenhaber 括号（部分细节待补）	70
2.7	结合性	74
<b>3</b>	<b>形变量子化</b>	<b>76</b>
3.1	泊松几何与辛几何	76
3.2	形变量子化与 Moyal 星积	82
3.3	重要例子：李代数的对偶	88
3.4	间奏：Kontsevich 量子化公式	91
3.5	量子场论背景、BV 算子	98
3.6	费曼图	102

# 第 1 章 Hochschild 理论

“读论文就是将非人话翻译成人话的过程，写论文就是将人话写成非人话的过程。”

“我写的公式也不一定对。。。但基本上是对的，up to sign”

## 1.1 结合代数的双模、余中心

我们需要代数拓扑、同调代数、基础范畴论的预备知识，并且采用同调代数的标准术语、记号，诸如链复形、上同调、导出函子等等。首先介绍基本的记号与概念。

在本课，我们给定一个特征 0 的含么交换环  $K$ （例如一个域），考虑含么结合  $K$ -代数  $A$ （注意  $A$  未必是交换代数），并且  $A$  作为交换环  $K$  上的模是投射模（projective module）。 $A$  的  $K$ -代数结构给出如下  $K$ -模同态：

$$\begin{aligned} A \otimes_K A &\rightarrow A \\ (a_1, a_2) &\mapsto a_1 a_2 \end{aligned}$$

由  $A$  的结合性， $(a_1 a_2) a_3 = a_1 (a_2 a_3)$  对  $A$  中任意元素  $a_1, a_2, a_3$  成立。

对于含么结合  $K$ -代数  $A$ ，回顾  $A$  的反代数（opposite algebra） $A^{\text{op}}$ 。反代数  $A^{\text{op}}$  作为  $K$ -模与  $A$  完全相同，记号如下：

$$\begin{aligned} \text{id} : A &\rightarrow A^{\text{op}} \\ x &\mapsto x^{\text{op}} \end{aligned}$$

但是  $A^{\text{op}}$  具有与  $A$  “相反”的乘法，具体地，对于  $A^{\text{op}}$  中的元素  $x^{\text{op}}, y^{\text{op}}$ ，成立

$$x^{\text{op}} y^{\text{op}} := (yx)^{\text{op}}$$

**定义 1.1.1.** 对于含么结合  $K$ -代数  $A$ ，我们定义  $K$ -代数  $A^e$  为

$$A^e := A \otimes_K A^{\text{op}}$$

即  $A$  与  $A^{\text{op}}$  的  $K$ -代数张量积。

容易验证对于任何两个含么结合  $K$ -代数  $A, B$ , 总有

$$(A \otimes_K B)^{\text{op}} = A^{\text{op}} \otimes_K B^{\text{op}}$$

从而容易得到

$$(A^{\text{op}})^e = (A^e)^{\text{op}}$$

对于  $K$ -代数  $A$ , 回顾双  $A$ -模 ( $A$ -bimodule) 的概念如下:

**定义 1.1.2.** 对于  $K$ -代数  $A$ , 双  $A$ -模是指如下资料:

(1)  $K$ -模  $M$ ;

(2)  $A$  在  $M$  上的左、右  $K$ -线性作用,

并且满足相容性:  $(a.m).b = a.(m.b)$  对任意  $m \in M$  以及  $a, b \in A$  成立。

例如,  $A$  本身自然有双  $A$ -模结构,  $A$  在其上的左、右作用即为左乘、右乘。再比如  $K$ -模张量积  $A \otimes_K A$  具有如下双  $A$ -模结构:

$$b.(a_1 \otimes a_2) := (ba_1) \otimes a_2$$

$$(a_1 \otimes a_2).b := a_1 \otimes (a_2 b)$$

其中  $a_1, a_2, b \in A$ .

再比如, 对于  $K$ -代数  $A$ , 考虑其对偶

$$A^* := \text{Hom}(A, K)$$

则  $A^*$  具有以下的双  $A$ -模结构: 对任意  $a, x \in A$  以及  $f \in A^*$ ,

$$\begin{cases} (a.f)(x) := f(xa) \\ (f.a)(x) := f(ax) \end{cases}$$

容易验证这的确使得  $A^*$  为双  $A$ -模。

我们不再回顾左模、右模的概念了, 也不去回顾右模与左模的平衡张量积。

**性质 1.1.3.** 设  $M$  为双  $A$ -模,

(1)  $M$  可自然地视为左  $A^e$ -模:

$$(a_1 \otimes a_2^{\text{op}}).m = a_1.m.a_2$$

(2)  $M$  可自然地视为右  $A^e$ -模:

$$m.(a_1 \otimes a_2^{\text{op}}) = a_2.m.a_1$$

反之, 左 (右)  $A^e$ -模也可视为双  $A$ -模。

证明. 容易验证。 □

特别地如果  $M, N$  都是双  $A$ -模, 那么考虑平衡张量积  $M \otimes_{A^e} N$ , 它的双  $A$ -模结构具体如下:

$$a.(m \otimes n) = (a.m) \otimes n = m \otimes (n.a)$$

$$(m \otimes n).b = m \otimes (n.b) = (b.m) \otimes n$$

对于任何  $m \in M, n \in N, a, b \in A$  成立。

**定义 1.1.4.** (余中心 *cocenter*) 对于双  $A$ -模  $M$ , 称双  $A$ -模

$$M \otimes_{A^e} A$$

为  $M$  的余中心 (*cocenter*)。

容易看出, 对任意的  $m \in M, a \in A$ , 在余中心  $M \otimes_{A^e} A$  当中, 成立

$$(m.a) \otimes 1 = m \otimes (a.1) = m \otimes a = m \otimes (1.a) = (a.m) \otimes 1$$

从而  $(m.a - a.m) \otimes 1 = 0$ . 事实上,  $M$  的余中心具有如下结构:

**性质 1.1.5.** 对于双  $A$ -模  $M$ , 则有如下双  $A$ -模同构

$$M \otimes_{A^e} A \cong M / \{(m.a - a.m) | a \in A, m \in M\}$$

证明. 考虑如下的双  $A$ -模链复形

$$\partial_{\bullet} : A \otimes A \otimes A \rightarrow A \otimes A \rightarrow A \rightarrow 0$$

其中

$$\partial : a_1 \otimes a_2 \otimes a_3 \mapsto a_1 a_2 \otimes a_3 - a_1 \otimes a_2 a_3$$

$$a_1 \otimes a_2 \mapsto a_1 a_2$$

容易验证  $\partial^2=0$  (由  $A$  的结合性), 从而  $\partial_{\bullet}$  为双  $A$ -模链复形。并且显然  $\partial : A \otimes A \rightarrow A$  是满同态。

断言链复形  $\partial_\bullet$  为正合 (exact) 的。事实上,  $\partial_\bullet$  到其自身的恒等链映射与零链映射是链同伦的。我们构造如下的链同伦  $h_\bullet$ :

$$\begin{aligned} h : a_1 &\mapsto 1 \otimes a_1 \\ a_1 \otimes a_2 &\mapsto 1 \otimes a_1 \otimes a_2 \end{aligned}$$

容易验证, 对于任意的  $\varphi = a_1 \otimes a_2 \in A \otimes A$ , 成立

$$\begin{aligned} (\partial h + h \partial) \varphi &= (\partial h + h \partial)(a_1 \otimes a_2) \\ &= \partial(1 \otimes a_1 \otimes a_2) + h(a_1 a_2) \\ &= a_1 \otimes a_2 - 1 \otimes a_1 a_2 + 1 \otimes a_1 a_2 \\ &= a_1 \otimes a_2 = \varphi \end{aligned}$$

从而对于  $\varphi \in A \otimes A$ , 如果  $\partial \varphi = 0$ , 那么

$$\varphi = (\partial h + h \partial) \varphi = \partial(h \varphi)$$

这说明链复形  $\partial_\bullet$  在  $A \otimes A$  处正合, 因此  $\partial_\bullet$  是正合的。

接下来, 将函子  $M \otimes_{A^e} -$  作用于链复形  $\partial_\bullet$ , 得到如下的双  $A$ -模链复形:

$$M \otimes_{A^e} \partial_\bullet : M \otimes A \rightarrow M \rightarrow M \otimes_{A^e} A \rightarrow 0$$

由张量函子的右正合性, 上述链复形也是正合的。其中注意到双  $A$ -模同构

$$\begin{aligned} M \otimes_{A^e} (A \otimes A \otimes A) &\cong M \otimes A \\ m \otimes (a_1 \otimes a_2 \otimes a_3) &\mapsto (a_3.m.a_1) \otimes a_2 \end{aligned}$$

以及双  $A$ -模同构

$$\begin{aligned} M \otimes_{A^e} (A \otimes A) &\cong M \\ m \otimes (a_1 \otimes a_2) &\mapsto a_2.m.a_1 \end{aligned}$$

于是正合列  $M \otimes_{A^e} \partial_\bullet$  的边界映射有如下具体表达式:

$$\begin{aligned} M \otimes_{A^e} \partial : M \otimes A &\rightarrow M \\ m \otimes A &\mapsto m.a - a.m \end{aligned}$$

从而由正合性, 易知

$$M \otimes_{A^e} A \cong M / \{(m.a - a.m) | a \in A, m \in M\}$$

□

可见,  $M$  的余中心无非是商掉  $M$  当中“非交换的部分”所得到的“交换的部分”, 如此望文生义。例如, 如果  $A$  为交换  $K$ -代数, 那么  $A$  本身作为双  $A$ -模, 其余中心为  $A$  本身。

## 1.2 Hochschild 同调

**定义 1.2.1.** (*Hochschild* 同调)

对于双  $A$ -模  $M$ , 以及非负整数  $n$ , 记

$$H_n(A, M) := \text{Tor}_n^{A^e}(M, A)$$

称为  $M$  的第  $n$  个 *Hochschild* 同调。特别地, 我们记

$$\text{HH}_n(A) := H_n(A, A)$$

由定义以及导出函子的基础知识, 容易知道双  $A$ -模  $M$  的第 0 个 Hochschild 同调

$$H_0(A, M) = M \otimes_{A^e} A = M / \{(m.a - a.m) | a \in A, m \in M\}$$

正是  $M$  的余中心。注意 Hochschild 同调一般并不是环, 仅仅能保证它是双  $A$ -模。

具体地, 由导出函子的定义, 我们采用投射消解 (projective resolution) 来计算 Hochschild 同调。若双  $A$ -模链复形

$$P_\bullet \rightarrow A := \dots \rightarrow P_3 \rightarrow P_2 \rightarrow P_1 \rightarrow P_0 \rightarrow A \rightarrow 0$$

为双  $A$ -模  $A$  的投射消解 (正合, 并且每个  $P_i (i \geq 0)$  作为  $K$ -模是投射的), 那么

$$H_n(A, M) \cong H_n(M \otimes_{A^e} P_\bullet)$$

由同调代数的事实, 它与投射消解  $P_\bullet$  的选取无关。

事实上 Hochschild 同调可以与空间上的微分形式类比。作为一个具体计算例子, 我们考虑  $\mathbb{C}$  上的  $n$  元多项式代数

$$A := \mathbb{C}[x^1, x^2, \dots, x^n]$$

注意到  $A$  作为  $\mathbb{C}$ -代数是交换的, 从而  $A = A^{\text{op}}$ . 我们记

$$A^{\text{op}} = \mathbb{C}[y^1, y^2, \dots, y^n] \quad A^e = \mathbb{C}[x^1, x^2, \dots, x^n; y^1, y^2, \dots, y^n]$$

**性质 1.2.2.** 考虑  $\mathbb{C}$ -代数  $A := \mathbb{C}[x^1, x^2, \dots, x^n]$ , 则其第  $k$  个 *Hochschild* 同调

$$\text{HH}_k(A) \cong \Omega_A^k := A \otimes \bigwedge^k (\mathbb{C}^n)$$

是以  $A$  为系数的  $k$ -形式。

证明. 我们给出  $A$  的投射消解, 比如众所周知的 Koszul 消解

$$\mathcal{K}_A \rightarrow A \rightarrow 0$$

具体地, 引入  $n$  个新的独立变元  $\eta^1, \eta^2, \dots, \eta^n$  (视为复线性空间  $\mathbb{C}^n$  的一组基), 考虑环

$$\mathcal{K} := \frac{A^e[\eta^1, \eta^2, \dots, \eta^n]}{\{(\eta^i \eta^j + \eta^j \eta^i) | i \neq j\}} = A^e \otimes \bigwedge^*(\mathbb{C}^n)$$

为以  $A^e$  为系数的外代数。

注意  $\mathcal{K}$  有自然的分次:

$$\deg \eta^i = 1 \quad \deg x^i = \deg y^i = \deg 1 = 0$$

记  $\mathcal{K}_l$  为  $\mathcal{K}$  的  $l$  次分量 ( $0 \leq l \leq n$ ), 即

$$\mathcal{K}_l = \bigoplus_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_l \leq n} A^e \eta^{i_1} \wedge \eta^{i_2} \wedge \dots \wedge \eta^{i_l} = A^e \otimes \bigwedge^l(\mathbb{C}^n)$$

此时  $K = \mathbb{C}$  是域, 因此  $\mathcal{K}$  (作为  $K$ -模, 即复线性空间) 的投射性显然。我们定义 Koszul 复形  $(\mathcal{K}_A, \partial)$  如下:

$$\mathcal{K}_A : \dots \xrightarrow{\partial} \mathcal{K}_n \xrightarrow{\partial} \mathcal{K}_{n-1} \xrightarrow{\partial} \dots \xrightarrow{\partial} \mathcal{K}_1 \xrightarrow{\partial} \mathcal{K}_0$$

其中边缘算子  $\partial$  (首先是  $A^e$ -模同态) 满足

$$\partial \eta^i = x^i - y^i$$

以及与外微分相同的莱布尼茨法则: 对任意  $\omega \in \mathcal{K}$ , 成立

$$\partial(\eta^i \wedge \omega) = \partial \eta^i \wedge \omega - \eta^i \wedge \partial \omega$$

再考虑连接映射

$$\begin{aligned} \varepsilon : \mathcal{K}_0 = A^e &\rightarrow A \\ x^i &\mapsto x^i \\ y^i &\mapsto x^i \end{aligned}$$

则众所周知, Koszul 复形

$$\mathcal{K}_A \xrightarrow{\varepsilon} A \rightarrow 0$$

为  $A$  的投射消解 (证明从略)。我们以此计算  $\mathrm{HH}^\bullet(A)$ 。我们注意到以下两个简单事实:

其一: 对任何  $1 \leq l \leq n$ , 成立双  $A$ -模同构

$$A \otimes_{A^e} \mathcal{K}_l = A \otimes_{A^e} A^e \otimes \bigwedge^l(\mathbb{C}^n) \cong A \otimes \bigwedge^l(\mathbb{C}^n)$$



其二：函子  $A \otimes_{A^e} -$  作用于 Koszul 复形  $\mathcal{K}_A$  之后，成立

$$A \otimes_{A^e} \partial = 0$$

这是因为，对于任意  $f \in A$ ，在  $A \otimes_{A^e} A^e$  当中总成立

$$f \otimes x^i = x^i f \otimes 1 = f x^i \otimes 1 = f \otimes (x^i)^{\text{op}} = f \otimes y^i$$

因此

$$f \otimes (x^i - y^i) = 0 \in A \otimes_{A^e} A^e$$

从而由  $\partial$  的定义，容易看出  $A \otimes_{A^e} \partial = 0$ 。

综上两方面，直接计算之，

$$\begin{aligned} \text{HH}_k(A) &= H_k(A \otimes_{A^e}^L A) \\ &= H_k(A \otimes_{A^e} \mathcal{K}_A) \\ &= A \otimes_{A^e} \mathcal{K}_k \\ &= A \otimes \bigwedge^k(\mathbb{C}^n) \\ &= \Omega_A^k \end{aligned}$$

从而得证。 □

事实上对于一般的含么结合  $K$ -代数  $A$ ， $\text{HH}_\bullet(A)$  扮演了“微分形式”的角色。这是 Hochschild 同调的一种几何解释。

对于一般的  $A$ ， $A$  作为双  $A$ -模，由一种典范的投射消解，称之为 **Bar-复形**：

**定义 1.2.3.** (*Bar-复形*)

对于含么结合  $K$ -代数  $A$ ，定义以下双  $A$ -模链复形

$$\cdots \rightarrow B_2 A \xrightarrow{b} B_1 A \xrightarrow{b} B_0 A \xrightarrow{b} A \rightarrow 0$$

如下：

$$B_n A := A \otimes A^{\otimes n} \otimes A \quad (n \geq 0)$$

$$b : a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n \mapsto \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes (a_k a_{k+1}) \otimes \cdots \otimes a_n$$

称之为 **Bar-复形**。

首先容易验证  $b^2 = 0$ , 从而  $B_\bullet A \xrightarrow{b} A \rightarrow 0$  确实是链复形。对于  $n \geq 1$ , 具体验证如下:

$$\begin{aligned}
b^2(a_0 \otimes a_1 \otimes \dots \otimes a_n) &= b \left( \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k a_0 \otimes a_1 \otimes \dots \otimes (a_k a_{k+1}) \otimes \dots \otimes a_n \right) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k b(a_0 \otimes a_1 \otimes \dots \otimes (a_k a_{k+1}) \otimes \dots \otimes a_n) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \left[ \sum_{l=0}^{k-2} (-1)^l a_0 \otimes \dots \otimes (a_l a_{l+1}) \otimes \dots \otimes (a_k a_{k+1}) \otimes \dots \otimes a_n \right. \\
&\quad + (-1)^{k-1} a_0 \otimes \dots \otimes (a_{k-1} a_k a_{k+1}) \otimes \dots \otimes a_n \\
&\quad + (-1)^k a_0 \otimes \dots \otimes (a_k a_{k+1} a_{k+2}) \otimes \dots \otimes a_n \\
&\quad \left. - \sum_{l=k+2}^{n-1} (-1)^l a_0 \otimes \dots \otimes (a_k a_{k+1}) \otimes \dots \otimes (a_l a_{l+1}) \otimes \dots \otimes a_n \right] \\
&= \sum_{\substack{0 \leq k < l \leq n-1 \\ l-k \geq 2}} \left( -(-1)^{k+l} + (-1)^{k+l} \right) a_0 \otimes \dots \otimes (a_k a_{k+1}) \otimes \dots \otimes (a_l a_{l+1}) \otimes \dots \otimes a_n \\
&\quad + \sum_{0 \leq k \leq n-2} \left( (-1)^{2k+1} + (-1)^{2k} \right) a_0 \otimes \dots \otimes (a_k a_{k+1} a_{k+2}) \otimes \dots \otimes a_n \\
&= 0
\end{aligned}$$

从而验证完毕。

我们可以把  $a_0 \otimes \dots \otimes a_n$  想象为直线上依次排列的  $n+1$  个质点, 将算子  $b$  想象为相邻质点两两“碰撞”。

**性质 1.2.4.** 记号同之前, 则  $Bar$ -复形

$$B_\bullet A \rightarrow A \rightarrow 0$$

是  $A$  的投射消解。

证明. 对任意  $n \geq 0$ ,  $B_n A = A \otimes A^{\otimes n} \otimes A$  是投射  $K$ -模 (这是因为由最初的假定,  $A$  是投射  $K$ -模, 从而其张量积也投射) 于是我们只需再验证该链复形是正合的。

为此, 我们构造链同伦

$$\begin{aligned}
h : B_{n-2} A &\rightarrow B_{n-1} A \quad (n \geq 1, B_{-1} A = A) \\
a_0 \otimes \dots \otimes a_n &\mapsto 1 \otimes a_0 \otimes \dots \otimes a_n
\end{aligned}$$

只需验证  $hb + bh = 1$ , 之后与性质 1.1.5 的证明类似。

注意到对于任意  $n \geq 0$ , 成立

$$bh(a_0 \otimes \dots \otimes a_n) = b(1 \otimes a_0 \otimes \dots \otimes a_n)$$

$$\begin{aligned}
&= a_0 \otimes \dots \otimes a_n - \sum_{k=0}^{n-1} 1 \otimes a_0 \otimes \dots \otimes (a_k a_{k+1}) \otimes \dots \otimes a_n \\
&= a_0 \otimes \dots \otimes a_n - 1 \otimes b(a_0 \otimes \dots \otimes a_n) \\
&= (1 - hb)a_0 \otimes \dots \otimes a_n
\end{aligned}$$

因此  $bh + hb = 1$ ，证毕。 □

**定义 1.2.5.** 设  $M$  为双  $A$ -模，定义 **Hochschild 链复形**

$$C_\bullet(A, M) := M \otimes_{A^e} B_\bullet A$$

$$\dots M \otimes A^{\otimes 3} \rightarrow M \otimes A^{\otimes 2} \rightarrow M \otimes A \rightarrow M$$

方便起见，该链复形的边缘算子仍记作  $b$ 。

则易知  $M$  的 Hochschild 同调无非是 Hochschild 链复形的同调：

$$H_n(A, M) = H_n(C_\bullet(A, M))$$

注意到有双  $A$ -模同构

$$C_n(A, M) = M \otimes_{A^e} (A \otimes A^{\otimes n} \otimes A) \cong M \otimes A^{\otimes n}$$

在此同构意义下，容易验证  $C_\bullet(A, M)$  的边缘算子  $b$  有如下显示表达：

对任意  $m \in M$ ，以及  $a_1, a_2, \dots, a_n \in A$ ，成立

$$\begin{aligned}
b(m \otimes (a_1 \otimes \dots \otimes a_n)) &= m \otimes_{A^e} (b(1 \otimes a_1 \otimes \dots \otimes a_n \otimes 1)) \\
&= m \otimes_{A^e} [a_1 \otimes \dots \otimes a_n \otimes 1 \\
&\quad + \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k 1 \otimes a_1 \otimes \dots \otimes (a_k a_{k+1}) \otimes \dots \otimes a_n \otimes 1 \\
&\quad + (-1)^n 1 \otimes a_1 \otimes \dots \otimes a_n] \\
&= (m \cdot a_1) \otimes a_2 \otimes \dots \otimes a_n \\
&\quad + \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k m \otimes a_1 \otimes \dots \otimes (a_k a_{k+1}) \otimes \dots \otimes a_n \\
&\quad + (-1)^n (a_n \cdot m) \otimes a_1 \otimes \dots \otimes a_{n-1}
\end{aligned}$$

Hochschild 链复形的边缘算子的显式表达与 Bar-复形非常相似，从上式最右边的前两项可以看出；区别在于上式最右边的第三项。

**注记 1.2.6.** (*Hochschild* 同调的函子性) 若  $\varphi: A \rightarrow B$  为  $K$ -代数同态，那么  $\varphi$  自然诱导  $K$ -模同态

$$\varphi: \text{HH}_\bullet(A) \rightarrow \text{HH}_\bullet(B)$$

自行去定义何为  $K$ -代数同态。此注记表明,  $\mathrm{HH}_\bullet$  其实是从  $K$ -代数范畴到  $K$ -模范畴的一个函子。

### 1.3 Hochschild 上同调

对于双  $A$ -模  $M$ , 既然我们已经考虑余中心  $M \otimes_{A^e} A$ , 那么我们自然也会去考虑  $\mathrm{Hom}_{A^e}(A, M)$ . 我们称双  $A$ -模  $\mathrm{Hom}_{A^e}(A, M)$  为  $M$  的导出中心 (derived center)。

**性质 1.3.1.** (导出中心的结构) 对于双  $A$ -模  $M$ , 则有双  $A$ -模同构

$$\mathrm{Hom}_{A^e}(A, M) \cong \{m \in M \mid a.m - m.a = 0 \ \forall a \in A\}$$

容易验证  $\{m \in M \mid a.m - m.a = 0 \ \forall a \in A\}$  为  $M$  的双  $A$ -子模。粗俗地说, 该子模由 “与  $A$  中所有元素交换” 的元素构成, 故谓之 “中心”。

证明. 对于任意的  $\varphi \in \mathrm{Hom}_{A^e}(A, M)$  以及  $a \in A$ , 则  $\varphi(a)$  的取值由  $\varphi(1)$  完全决定:

$$\varphi(a) = \varphi(a.1) = a.\varphi(1)$$

而另一方面,

$$\varphi(a) = \varphi(1.a) = \varphi(1).a$$

从而有  $a.\varphi(1) = \varphi(1).a$ . 于是我们可以构造如下双  $A$ -模同态:

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{A^e}(A, M) &\rightarrow \{m \in M \mid a.m - m.a = 0 \ \forall a \in A\} \\ \varphi &\mapsto \varphi(1) \end{aligned}$$

容易验证该模同态为同构。证毕。 □

然后我们考虑  $\mathrm{Hom}(-, M)$  的导出函子, 自然地去定义如下:

**定义 1.3.2.** (*Hochschild* 上同调)

对于双  $A$ -模  $M$ , 以及  $n \geq 0$ , 定义  $M$  的第  $n$  个 *Hochschild* 上同调

$$H^n(A, M) = \mathrm{Ext}_{A^e}^n(A, M)$$

特别地, 我们记

$$H^n(A) = \mathrm{Ext}_{A^e}^n(A, A)$$

由定义知,  $M$  的第 0 个 Hochschild 上同调为  $\text{Hom}_{A^e}(A, M)$ , 是  $M$  的导出中心。回顾 Bar-复形, 我们考虑如下的 **Hochschild 上链复形**

$$C^\bullet(A, M) = \text{Hom}_{A^e}(B_\bullet A, M)$$

该上链复形的微分算子  $\partial$  由 Bar-复形  $B_\bullet A$  的边缘算子  $b$  所诱导。则  $M$  的 Hochschild 上同调满足

$$H^n(A, M) = H^n(C^\bullet(A, M), \partial) = H^n(\text{Hom}_{A^e}(B_\bullet A, M), \partial)$$

注意有自然的双  $A$ -模同构

$$C^n(A, M) = \text{Hom}_{A^e}(A \otimes A^{\otimes n} \otimes A, M) \cong \text{Hom}(A^{\otimes n}, M)$$

(即取值于  $M$  的  $n$  重  $K$ -线性映射) 于是对于任意的  $\varphi \in C^n(A, M) = \text{Hom}(A^{\otimes n}, M)$ , 容易知道  $\partial\varphi \in \text{Hom}(A^{\otimes n+1}, M)$  具有如下显式表达: 对任意  $a_0, a_1, \dots, a_m \in A$ ,

$$\begin{aligned} \partial\varphi(a_0, a_1, \dots, a_n) &= a_0 \cdot \varphi(a_1, a_2, \dots, a_n) \\ &\quad - \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \varphi(a_0, \dots, (a_k a_{k+1}), \dots, a_n) \\ &\quad - (-1)^n \varphi(a_0, a_1, \dots, a_{n-1}) \cdot a_n \end{aligned}$$

接下来讨论 Hochschild 上同调的几何意义。我们已经知道第 0 个 Hochschild 上同调为  $M$  的导出中心; 现在我们看  $H^1(A, M)$ , 我们将发现它是  $A$  的取值于  $M$  的外导子。

回顾导子 (derivation) 的概念如下:

**定义 1.3.3.** (导子) 对于双  $A$ -模  $M$ ,  $K$ -线性映射

$$D : A \rightarrow M$$

称为  $A$  的取值于  $M$  的导子 (derivation), 如果对任意的  $a_1, a_2 \in A$ , 成立

$$D(a_1 a_2) = D(a_1) \cdot a_2 + a_1 \cdot D(a_2)$$

对于  $m \in M$  我们定义

$$\begin{aligned} \text{ad}_m : A &\rightarrow M \\ a &\mapsto [m, a] := m \cdot a - a \cdot m \end{aligned}$$

则容易验证  $\text{ad}_m$  为  $A$  的取值于  $M$  的导子, 称形如这样的导子为**内导子** (inner derivation)。

我们记

$$\text{Der}(A, M) := \{D : A \rightarrow M \mid D \text{ 为导子}\}$$

$$\text{Inn}(A, M) := \{\text{ad}_m \mid m \in M\} \subseteq \text{Der}(A, M)$$

注意  $\text{Inn}(A, M)$  与  $\text{Der}(A, M)$  都有显然的  $K$ -模结构，且前者是后者的  $K$ -子模。

**性质 1.3.4.** ( $H^1(A, M)$  的结构)

对于双  $A$ -模  $M$ ，成立

$$H^1(A, M) \cong \frac{\text{Der}(A, M)}{\text{Inn}(A, M)}$$

我们称上式右边的集合当中的元素为  $A$  的取值于  $M$  的**外导子** (outer derivation)。

证明. 只需考虑 Hochschild 上链复形

$$C^0(A, M) \xrightarrow{\partial^0} C^1(A, M) \xrightarrow{\partial^1} C^2(A, M) \rightarrow \cdots$$

我们只需具体计算之。对于  $\varphi \in C^1(A, M) \cong \text{Hom}(A, M)$ ，则  $\partial^1 \varphi \in C^2(A, M) \cong \text{Hom}(A^{\otimes 2}, M)$  满足：对任意  $a_1, a_2 \in A$ ，成立

$$\partial^1 \varphi(a_1, a_2) = a_1 \cdot \varphi(a_2) - \varphi(a_1 a_2) + \varphi(a_1) \cdot a_2$$

可见  $\varphi \in \ker \partial^1$  当且仅当  $\varphi \in \text{Der}(A, M)$ 。也就是说  $\ker \partial^1 = \text{Der}(A, M)$ 。

另一方面，对于  $m \in C^0(A, M) \cong M$ ，以及  $a \in A$ ，成立

$$(\partial^0 m)(a) = a \cdot m - m \cdot a = -\text{ad}_m(a)$$

因此  $\ker \partial^0 \cong \text{Inn}(A, M)$ 。从而

$$H^1(A, M) = \frac{\ker \partial^1}{\text{Im } \partial^0} \cong \frac{\text{Der}(A, M)}{\text{Inn}(A, M)}$$

□

特别地，当  $M = A$  时，

$$\text{HH}^1(A) = \text{Der}(A, A) / \text{Inn}(A, A)$$

注意到  $\text{Der}(A, A)$  上面还有更多的结构：对于  $\forall D_1, D_2 \in \text{Der}(A, A)$ ，定义

$$[D_1, D_2] := D_1 \circ D_2 - D_2 \circ D_1 : A \rightarrow A$$

容易验证  $[D_1, D_2]$  仍然为  $A$  的导子，并且  $[-, -]$  为  $\text{Der}(A, A)$  上的李括号 (Lie bracket)。

另外容易验证

$$[\text{Der}(A, A), \text{Inn}(A, A)] \subseteq \text{Inn}(A, A)$$

具体地, 对于  $D \in \text{Der}(A, A)$  以及  $m \in M$ , 成立

$$[D, \text{ad}_m] = \text{ad}_{D(m)}$$

也就是说  $\text{Inn}(A, A)$  是  $\text{Der}(A, A)$  的理想。于是  $[-, -]$  诱导了  $\text{HH}^1(A) = \frac{\text{Der}(A, A)}{\text{Inn}(A, A)}$  上的李括号结构。

如果  $A$  是交换  $K$ -代数, 则  $\text{Inn}(A, A) = 0$ 。于是

$$\text{HH}^1(A) \cong \text{Der}(A, A)$$

可被认为是“切向量场”(此时  $A$  被认为是“函数环”)。

我们再去考虑  $H^2(A, M)$ . 对于任意的

$$\varphi \in C^2(A, M) = \text{Hom}(A^{\otimes 2}, M)$$

则对  $a_0, a_1, a_2 \in A$ , 成立

$$\partial\varphi(a_0, a_1, a_2) = a_0 \cdot \varphi(a_1, a_2) - \varphi(a_0 a_1, a_2) + \varphi(a_0, a_1 a_2) - \varphi(a_0, a_1) \cdot a_2$$

**引理 1.3.5.** 对于双  $A$ -模  $M$ , 以及  $\varphi \in C^2(A, M) = \text{Hom}(A^{\otimes 2}, M)$ , 我们令

$$\hat{A} := A \oplus M$$

并赋以如下的  $K$ -代数结构: 对于任意  $a_1, a_2 \in A$  以及  $m_1, m_2 \in M$ , 规定  $\hat{A}$  的乘法  $\hat{\bullet}_\varphi$  为

$$(a_1 \oplus m_1) \hat{\bullet}_\varphi (a_2 \oplus m_2) := a_1 a_2 \oplus [a_1 \cdot m_2 + m_1 \cdot a_2 + \varphi(a_1, a_2)]$$

那么  $(\hat{A}, \hat{\bullet}_\varphi)$  为结合代数, 当且仅当  $\partial\varphi = 0$ 。

证明. 这是简单的计算验证。对于任意的  $a_0, a_1, a_2 \in A$  以及  $m_0, m_1, m_2 \in M$ , 直接计算之,

$$\begin{aligned} & [(a_0 \oplus m_0) \hat{\bullet}_\varphi (a_1 \oplus m_1)] \hat{\bullet}_\varphi (a_2 \oplus m_2) \\ &= a_0 a_1 a_2 \oplus [a_0 a_1 \cdot m_2 + a_0 \cdot m_1 \cdot a_2 + m_0 \cdot a_1 a_2 + \varphi(a_0, a_1) \cdot a_2 + \varphi(a_0 a_1, a_2)] \end{aligned}$$

以及

$$\begin{aligned} & (a_0 \oplus m_0) \hat{\bullet}_\varphi [(a_1 \oplus m_1) \hat{\bullet}_\varphi (a_2 \oplus m_2)] \\ &= a_0 a_1 a_2 \oplus [a_0 a_1 \cdot m_2 + a_0 \cdot m_1 \cdot a_2 + m_0 \cdot a_1 a_2 + a_0 \cdot \varphi(a_1, a_2) + \varphi(a_0, a_1 a_2)] \end{aligned}$$

因此  $\hat{\bullet}_\varphi$  满足结合性, 当且仅当

$$\varphi(a_0, a_1) \cdot a_2 + \varphi(a_0 a_1, a_2) = a_0 \cdot \varphi(a_1, a_2) + \varphi(a_0, a_1 a_2)$$

而此式等价于  $\partial\varphi = 0$ 。 □

注意到在  $\hat{A}$  当中, 对任意的  $m_1, m_2 \in M$ , 以及任意  $\varphi \in C^2(A, M)$ , 总有  $m_1 \hat{\bullet}_\varphi m_2 = 0$ . 于是我们不妨将 “ $A \oplus M$ ” 当中的 “ $M$ ” 理解为 “一阶小量”。我们考虑  $\varphi = 0$  时  $\hat{A}_0 := A \oplus M$  的代数结构

$$(a_1 \oplus m_1) \bullet (a_2 \oplus m_2) := a_1 a_2 \oplus (a_1 \cdot m_2 + m_1 \cdot a_2)$$

显然  $(\hat{A}_0, \bullet)$  为结合代数。若  $\partial\varphi = 0$ , 则结合代数  $(\hat{A}, \hat{\bullet}_\varphi)$  为  $(\hat{A}_0, \bullet)$  的一阶形变, 而  $\varphi$  为其 “形变参数”。

从而  $M$  的第 2 个 Hochschild 上同调

$$H^2(A, M) \cong \frac{\{\varphi | (\hat{A}, \hat{\bullet}_\varphi) \text{ 是结合代数}\}}{\text{Im}(\partial : C^1(A, M) \rightarrow C^2(A, M))}$$

商掉的东西 ( $\text{Im } \partial$ ) 为形如以下的一类特殊的一阶形变:

$$\begin{aligned} \varphi_f : A \otimes A &\rightarrow M \\ a_1 \otimes a_2 &\mapsto a_1 \cdot f(a_2) + f(a_1) \cdot a_2 - f(a_1 a_2) \end{aligned}$$

其中  $f \in C^1(A, M) = \text{Hom}(A, M)$ ,  $\varphi_f = \partial f$ .

Hochschild 上同调与 Hochschild 同调两者之间有如下自然的配对:

**定义 1.3.6.** 设  $M, N$  为双  $A$ -模, 则自然有如下配对:

$$C^n(A, M) \otimes C_n(A, N) \rightarrow N \otimes_{A^e} M$$

定义为: 对任意  $f \in C^n(A, M) = \text{Hom}(A^{\otimes n}, M)$  以及任意  $y \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n \in C_n(A, N) = N \otimes A^{\otimes n}$ , 有

$$(f, y \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n) \mapsto y \otimes f(a_1, \dots, a_n) \in N \otimes_{A^e} M$$

其中任意  $y \in N$ , 以及  $a_1, \dots, a_n \in A$ .

容易验证, 该配对自然诱导了

$$H^n(A, M) \otimes H_n(A, N) \rightarrow N \otimes_{A^e} M$$

这是容易发现的 (先限制, 再下降, 下降的良好性容易说明。)

特别地, 当  $M = A, N = A^*$  (其中  $A^* := \text{Hom}(A, K)$ ) 时, 我们有双线性函数

$$H^n(A, A) \otimes H_n(A, A^*) \rightarrow A^* \otimes_{A^e} A \xrightarrow{\text{ev}} K$$

我们考察一个 Hochschild 上同调的具体算例。



性质 1.3.7. 若  $A = \mathbb{C}[x^1, \dots, x^n]$  为  $\mathbb{C}$  上的  $n$  元多项式环, 则

$$\mathrm{HH}^k(A) \cong \mathrm{Hom}\left(\bigwedge^k(\mathbb{C}^n), A\right)$$

证明. 对于这个特例, 采用 Koszul 复形计算更佳简便. 有关记号同性质 1.2.2 的证明过程. 考虑 Koszul 复形

$$\mathcal{K}_A : \dots \xrightarrow{\partial} A^e \otimes \bigwedge^{k+1}(\mathbb{C}^n) \xrightarrow{\partial} A^e \otimes \bigwedge^k(\mathbb{C}^n) \xrightarrow{\partial} A^e \otimes \bigwedge^{k-1}(\mathbb{C}^n) \xrightarrow{\partial} \dots$$

然后将函子  $\mathrm{Hom}_{A^e}(-, A)$  作用于之上. 注意到有  $\mathbb{C}$ -线性同构

$$\begin{aligned} & \mathrm{Hom}_{A^e}\left(A^e \otimes \bigwedge^k(\mathbb{C}^n), A\right) \\ & \cong \mathrm{Hom}\left(\bigwedge^k(\mathbb{C}^n), \mathrm{Hom}_{A^e}(A^e, A)\right) \\ & \cong \mathrm{Hom}\left(\bigwedge^k(\mathbb{C}^n), A\right) \end{aligned}$$

此外再注意到, 上链复形  $\mathrm{Hom}_{A^e}(\mathcal{K}_A, A)$  的微分算子  $d := \mathrm{Hom}_{A^e}(\partial, A) = 0$ . 这是因为对于  $\varphi \in \mathrm{Hom}_{A^e}\left(A^e \otimes \bigwedge^k(\mathbb{C}^n), A\right)$ ,  $\omega \in \bigwedge^{k+1}(\mathbb{C}^n)$  以及  $f \in A^e$ , 成立

$$d\varphi(f \otimes \omega) = \varphi(\partial(f \otimes \omega))$$

回顾 Koszul 复形边缘算子运算规则

$$\partial : \eta^i \mapsto x^i - y^i \in A^e$$

又由于  $\varphi$  为  $A^e$ -模同态, 从而对于任意  $\tilde{\omega} \in \bigwedge^k(\mathbb{C}^n)$ , 成立

$$\varphi(x^i \otimes \tilde{\omega}) = x^i \cdot \varphi(1 \otimes \tilde{\omega}) = \varphi(1 \otimes \tilde{\omega}) \cdot x^i = \varphi((x^i)^{\mathrm{op}} \otimes \tilde{\omega}) = \varphi(y^i \otimes \tilde{\omega})$$

也就是说  $\varphi((x^i - y^i) \otimes \tilde{\omega}) = 0$ . 由此可见  $d = 0$ . 综上所述可知

$$\mathrm{HH}^k(A) \cong \mathrm{Hom}\left(\bigwedge^k(\mathbb{C}^n), A\right)$$

□

注意到  $\mathrm{Hom}\left(\bigwedge^k(\mathbb{C}^n), A\right)$  之中的元素形如

$$\sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} f_{i_1 \dots i_k} \partial_{i_1} \wedge \dots \wedge \partial_{i_k}$$

回顾  $\mathrm{HH}_\bullet(A)$  中的元素可被认为是“微分形式”, 可见  $\mathrm{HH}^\bullet(A)$  中的元素则是“多重切向量场”。

## 1.4 约化 Bar 复形

如果  $K \hookrightarrow A$  为嵌入, 那么我们可以更加方便地计算 Hochschild (上) 同调:

**定义 1.4.1.** (约化 Bar-复形) (*reduced Bar-complex*)

对于  $K$ -代数  $A$ , 如果  $K \hookrightarrow A$ , 那么考虑  $K$ -模

$$\bar{A} := A/K$$

我们定义如下的约化 Bar-复形  $(\bar{B}_\bullet A, b)$ :

$$\bar{B}_n A := A \otimes \bar{A}^{\otimes n} \otimes A \quad \forall i \geq 0$$

边缘算子  $b: \bar{B}_n A \rightarrow \bar{B}_{n-1} A$  如下定义:

$$\begin{aligned} b(a_0 \otimes (\bar{a}_1 \otimes \cdots \otimes \bar{a}_n) \otimes a_{n+1}) &:= (a_0 a_1) \otimes (\bar{a}_2 \otimes \cdots \otimes \bar{a}_n) \otimes a_{n+1} \\ &+ \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^i a_0 \otimes (\bar{a}_1 \otimes \cdots \otimes (\bar{a}_i \bar{a}_{i+1}) \otimes \cdots \otimes \bar{a}_n) \otimes a_{n+1} \\ &+ (-1)^n a_0 \otimes (\bar{a}_1 \otimes \cdots \otimes \bar{a}_{n-1}) \otimes (a_n a_{n+1}) \end{aligned}$$

注意到  $\bar{B}_\bullet A$  是  $B_\bullet A$  的商模:

$$\bar{B}_n A = \frac{B_n A}{\{a_0 \otimes (a_1 \otimes \cdots \otimes a_{i-1} \otimes 1 \otimes a_{i+1} \otimes \cdots \otimes a_n) \otimes a_{n+1}\}}$$

容易发现约化 Bar-复形的“ $b$ ”正是 Bar-复形的  $b$ . 但是我们要验证  $b$  的良好性, 即与代表元选取无关。这是容易验证的。于是我们得到以下链复形:

$$\bar{B}_\bullet A \rightarrow A \rightarrow 0$$

与之前 Bar-复形完全类似, 我们容易验证此复形也是正合的。只需构造同伦算子

$$\begin{aligned} h: \bar{B}_{n-1} A &\rightarrow \bar{B}_n A \\ a_0 \otimes (\bar{a}_1 \otimes \cdots \otimes \bar{a}_{n-1}) \otimes a_n &\mapsto 1 \otimes (\bar{a}_0 \otimes \bar{a}_1 \otimes \cdots \otimes \bar{a}_n) \otimes a_{n+1} \end{aligned}$$

验证  $bh + hb = 1$  即可。

**定义 1.4.2.** (约化 Hochschild (上) 链复形)

对于双  $A$ -模  $M$ ，我们令

$$\begin{aligned}\overline{C}_\bullet(A, M) &:= M \otimes_{A^e} \overline{B}_\bullet A \cong M \otimes \overline{A}^{\otimes \bullet} \\ \overline{C}^\bullet(A, M) &:= \operatorname{Hom}_{A^e}(\overline{B}_\bullet A, M) \cong \operatorname{Hom}(\overline{A}^{\otimes \bullet}, M)\end{aligned}$$

称之为关于  $M$  的约化 Hochschild (上) 链复形。

事实上，约化 Hochschild (上) 链复形的 (上) 同调自然同构于 Hochschild (上) 同调——这是由以下代数引理保证的：

**引理 1.4.3.** 条件同上，则商映射

$$\pi_\bullet : C_\bullet(A, M) \rightarrow \overline{C}_\bullet(A, M)$$

所诱导的链映射

$$\pi_\bullet : (C_\bullet(A, M), d) \rightarrow (\overline{C}_\bullet(A, M), d)$$

为拟同构。

证明. 注意链映射  $\pi_\bullet$  为满态射，只需再证明其核复形

$$\ker \pi_\bullet$$

是正合的即可。我们承认之（似乎不太好证）。  $\square$

注意上述引理也适用于 Hochschild 上链复形的情形，完全类似，不再赘述。从而我们立刻有如下推论：

**推论 1.4.4.** 对于  $K$ -代数  $A$ ，如果  $K \hookrightarrow A$  为嵌入，则有自然同构：

$$\begin{aligned}H_\bullet(A, M) &\cong H_\bullet(\overline{C}_\bullet(A, M)) \\ H^\bullet(A, M) &\cong H^\bullet(\overline{C}^\bullet(A, M))\end{aligned}$$

关于 (约化) Bar-复形，我们还有另一种理解方式：关于  $A$  的 (约化) Bar-复形是  $A$  与某个微分分次代数的自由乘积。

**定义 1.4.5.** (微分分次代数)

$\mathbb{Z}$ -分次  $K$ -代数

$$A := \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} A_n$$

称为微分分次代数 (*differential graded algebra*), 若它配以  $K$ -线性算子  $d: A \rightarrow A$ , 并且满足:

$$\begin{cases} d(A_n) \subseteq A_{n+1} & \forall n \in \mathbb{Z} \\ d^2 = 0 \\ d(\alpha\beta) = (d\alpha)\beta + (-1)^{\deg \alpha} \alpha(d\beta) & \forall \alpha, \beta \in A, \text{ 并且 } \alpha \text{ 是齐次元} \end{cases}$$

“ $\mathbb{Z}$ -分次  $K$ -代数”的定义将在后文 (定义2.2.1) 介绍。(其实大家都明白)

对于微分分次代数  $(A, d)$ , 由于  $A$  的分次以及  $d^2 = 0$ , 从而自然有上链复形

$$\cdots \rightarrow A_{-1} \xrightarrow{d} A_0 \xrightarrow{d} A_1 \rightarrow \cdots$$

我们将此上链复形也记为  $(A, d)$ .

微分分次代数最直接的例子是, 对于光滑流形  $X$ , 考虑  $A := \Omega^\bullet(X)$  为  $X$  上的微分形式。 $A$  上的乘法即为微分形式的外积  $\wedge$ , 微分结构即为外微分  $d$ .

我们可以适当修改微分分次代数的定义, 将条件 “ $d(A_n) \subseteq A_{n+1}$ ” 改为 “ $d(A_n) \subseteq A_{n-1}$ ”, 此时的微分算子我们习惯记为 “ $\partial$ ”. 对于这样的微分分次代数  $(A, \partial)$ , 它可以被视为链复形。

**例子 1.4.6.** 我们考虑如下  $K$ -代数:

$$A := K[\varepsilon] := K \oplus K\varepsilon \oplus K\varepsilon^2 \oplus \cdots$$

其中  $\varepsilon$  为形式变量, 并且规定  $\deg \varepsilon = 1$ , 由此诱导出  $K[\varepsilon]$  的分次结构。其微分算子  $\partial_\varepsilon$  由以下诱导:

$$\partial_\varepsilon(1) = 0 \quad \partial_\varepsilon(\varepsilon) = 1$$

注意  $\deg \varepsilon = 1$ , 按照微分代数的定义可计算出

$$\partial_\varepsilon(\varepsilon^2) = \partial_\varepsilon(\varepsilon)\varepsilon + (-1)^{\deg \varepsilon} \varepsilon \partial_\varepsilon(\varepsilon) = \varepsilon - \varepsilon = 0$$

一般地, 对于非负整数  $n$  我们有

$$\partial_\varepsilon(\varepsilon^n) = \begin{cases} 0 & n \text{ 为偶数} \\ \varepsilon^{n-1} & n \text{ 为奇数} \end{cases}$$

从而链复形  $(K[\varepsilon], \partial_\varepsilon)$ :

$$\cdots \rightarrow K\varepsilon^4 \xrightarrow{0} K\varepsilon^3 \xrightarrow{1} K\varepsilon^2 \xrightarrow{0} K\varepsilon \xrightarrow{1} K \rightarrow 0$$

是正合的。其中  $1 : K\varepsilon^{2n+1} \rightarrow K\varepsilon^{2n}$  将  $\varepsilon^{2n+1}$  映为  $\varepsilon^{2n}$ 。

众所周知，对于两个  $K$ -代数  $A, B$ ，我们可以谈论它们的自由乘积（free product） $A * B$ 。若  $A = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} A_n$  是微分分次代数，其微分算子为  $d$ ，则容易知道  $A * B$  自然也有微分分次代数结构：

$$\begin{cases} \deg b = 0 & \forall b \in B \\ \deg a = n & \forall a \in A_n \subseteq A \\ db = 0 & \forall b \in B \end{cases}$$

容易知道  $A * B$  中的  $N$  次齐次元必形如以下元素的有限和：

$$b_1 a_1 b_2 a_2 \cdots b_m a_m b_{m+1} \quad (b_i \in B, a_i \in A_{n_i}, \sum_{i=1}^m n_i = N)$$

**性质 1.4.7.** 对于  $K$ -代数  $A$ ，则有链复形的同构

$$(B_\bullet A \rightarrow A, b) \cong (A * K[\varepsilon], \partial_\varepsilon)$$

其中  $(K[\varepsilon], \partial_\varepsilon)$  为例子 1.4.6 当中的微分分次代数，视为链复形；同构映射为

$$\begin{aligned} \varphi_n : B_n A &\rightarrow (A * K[\varepsilon])_n \\ a_0 \otimes (a_1 \otimes \cdots \otimes a_n) \otimes a_{n+1} &\mapsto a_0 \varepsilon a_1 \varepsilon a_2 \cdots \varepsilon a_n \varepsilon a_{n+1} \end{aligned}$$

这给出了 Bar-复形的又一种理解方式。

证明. 容易验证  $\varphi_n$  为  $K$ -模同构，且逆映射  $\varphi_n^{-1}$  由以下诱导：

$$\varepsilon^n \mapsto \underbrace{1\varepsilon 1\varepsilon 1 \cdots 1\varepsilon 1}_{n \uparrow \varepsilon}$$

然后只需验证  $\varphi_\bullet : (B_\bullet \rightarrow A, b) \rightarrow (A * K[\varepsilon], \partial_\varepsilon)$ ：是链映射，也就是要验证交换关系  $\varphi \circ b = \partial_\varepsilon \circ \varphi$

$$\begin{array}{ccc} B_n A & \xrightarrow{b} & B_{n-1} A \\ \downarrow \varphi & & \downarrow \varphi \\ (K[\varepsilon] * A)_n & \xrightarrow{\partial_\varepsilon} & (K[\varepsilon] * A)_{n-1} \end{array}$$

而这容易验证，验证如下：

$$\begin{aligned} &\varphi \circ b(a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n \otimes a_{n+1}) \\ &= \varphi \left( \sum_{k=0}^n (-1)^k a_0 \otimes \cdots \otimes (a_k a_{k+1}) \otimes \cdots \otimes a_{n+1} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=0}^n (-1)^k a_0 \varepsilon a_1 \varepsilon \cdots \varepsilon a_{n+1} \\
&= \partial_\varepsilon (a_0 \varepsilon a_1 \varepsilon \cdots a_n \varepsilon a_{n+1}) \\
&= \partial_\varepsilon \circ \varphi(a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n \otimes a_{n+1})
\end{aligned}$$

□

我们还可以考虑  $(K[\varepsilon], \partial_\varepsilon)$  的商代数  $K[\varepsilon]/\varepsilon^2$ , 易知  $(K[\varepsilon]/\varepsilon^2, \partial_\varepsilon)$  也构成微分分次代数, 从而也通过微分算子  $\partial_\varepsilon$  视为链复形。在此代数中,  $\varepsilon^2 = 0$ 。

类似地, 我们可以给出约化 Bar-复形的另一种理解方式:

**性质 1.4.8.** 对于  $K$ -代数  $A$ , 则有链复形同构

$$(\bar{B}_\bullet A \rightarrow A, b) \cong (A * K[\varepsilon]/\varepsilon^2, \partial_\varepsilon)$$

只需注意到  $A * K[\varepsilon]/\varepsilon^2$  当中的  $n$  次齐次元必形如以下元素的有限和:

$$a_0 \varepsilon a_1 \varepsilon \cdots a_n \varepsilon a_{n+1} \quad (a_i \in A)$$

证明. 完全类似。事实上此链复形同构映射由  $\varphi_n : B_n A \rightarrow (A * K[\varepsilon])_n$  诱导, 其良定性由下式保证: 对任意  $1 \leq i \leq n$ ,

$$\begin{aligned}
&\varphi_n(a_0 \otimes \cdots \otimes a_{i-1} \otimes 1 \otimes a_{i+1} \otimes \cdots \otimes a_{n+1}) \\
&= a_0 \varepsilon a_1 \cdots a_{i-1} \varepsilon 1 \varepsilon a_{i+1} \cdots \varepsilon a_{n+1} \\
&= a_0 \varepsilon a_1 \cdots a_{i-1} 1 \varepsilon^2 a_{i+1} \cdots \varepsilon a_{n+1} \\
&= 0 \pmod{\varepsilon^2}
\end{aligned}$$

□

本节最后简单介绍以下 Hochschild (上) 同调与其它常见的 (上) 同调理论的关系。

**例子 1.4.9.** (群的上同调)

设  $G$  是一个群,  $M \in \text{Rep}(G)$  为群  $G$  的一个左  $K$ -表示, 则有  $G$ -模链复形

$$0 \rightarrow M \xrightarrow{\delta} C^1(G, M) \xrightarrow{\delta} C^2(G, M) \xrightarrow{\delta} \cdots$$

其中

$$C^n(G, M) := \text{Hom}(G^n, M) = \{f : G^n \rightarrow M\}$$

并且微分算子  $\delta$  满足

$$\begin{cases} \delta(m)(g) = g.m - m \\ (\delta f)(g_0, g_1, \dots, g_n) = g_0.f(g_1, g_2, \dots, g_n) \\ \quad - \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k f(g_1, \dots, g_k g_{k+1}, \dots, g_n) \\ \quad - (-1)^n f(g_0, g_1, \dots, g_{n-1}) \end{cases}$$

容易验证  $\delta^2=0$ . 此链复形的上同调

$$H^\bullet(G, M) := H^\bullet(C^\bullet(G, M), \delta)$$

称之为群的上同调 (*group cohomology*)

由  $\delta$  的表达式容易看出, 群的上同调与 Hochschild 上同调有以下关系:

**性质 1.4.10.** 设  $G$  是一个群,  $M$  为群  $G$  的一个左  $K$ -模, 考虑群代数  $A := K[G]$ , 于是  $M$  自然有左  $A$ -模结构。那么有同构:

$$H^\bullet(G, M) \cong H^\bullet(K[G], M)$$

其中左边为群  $G$  关于  $M$  的上同调, 右边为群代数  $K[G]$  关于  $M$  的 *Hochschild* 上同调。

**注意**  $M$  仅仅是左  $K[G]$ -模, 并没有双  $K[G]$ -模结构呀, 怎么谈论 Hochschild 上同调?

(强行规定  $G$  在  $M$  上的右作用恒为 1, 通过  $K$ -线性扩张得到  $K[G]$  在  $M$  的右作用, 这样就得到  $M$  的双  $K[G]$ -模结构了。)

证明. 注意到  $\text{Hom}(G^n, M)$  中的元素可以自然地  $K$ -线性延拓为  $\text{Hom}(K[G]^n, M)$  中的元素, 这给出它们之间的同构。然后注意到  $A = K[G]$  的 Hochschild 上链复形的微分算子的显式表达式, (见定义 1.3.2 的下方) 它与群上同调相应的上链复形的微分算子显式表达式 “相同”。细节从略。  $\square$

若熟悉李代数同调, 我们可以将李代数同调与其泛包络代数的 Hochschild 同调联系起来:

**例子 1.4.11.** (李代数同调) 对于李代数  $\mathfrak{g}$ ,  $M$  为李代数  $\mathfrak{g}$  的一个左  $K$ -模。令  $A := \mathcal{U}(\mathfrak{g})$  为  $\mathfrak{g}$  的泛包络代数, 则  $A$  自然有左  $A$ -模结构。(再通过某种 “比较平凡” 的方式给出右作用? 与上例类似?) 则有同构

$$H_\bullet(\mathcal{U}(\mathfrak{g}), M) \cong H_\bullet^{\text{Lie}}(\mathfrak{g}, M)$$

其中左边是  $A$  关于  $M$  的 *Hochschild* 同调, 右边是李代数同调。

并没有在此叙述李代数同调的定义。留给感兴趣者。此处从略。

事实上, 也可以考虑群的同调、李代数上同调, 它们也有对应的 Hochschild 同调、上同调。

## 1.5 Connes 复形 $C_\bullet^\lambda(A)$

与之前一样，我们仍假设  $K$  为特征零的含么交换环， $A$  为  $K$ -代数，且作为  $K$ -模是投射的。不过，在从本节开始我们再新增一条假定：

$$\mathbb{Q} \hookrightarrow K$$

也就是说，有理数域能够嵌入到  $K$  中。（事实上，任何特征零的域都满足此假定。）

回顾对于  $K$ -代数  $A$ ，若  $A$  交换，则其 Hochschild 同调  $\mathrm{HH}_\bullet(A)$  可以被理解为“空间” $A$  上的“微分形式”。本节我们进一步研究  $\mathrm{HH}_\bullet(A)$ 。

**记号 1.5.1.** 对于  $K$ -代数  $A$ ，双  $A$ -模  $M = A$ 。考虑其 Hochschild 链复形  $C_\bullet(A) := C_\bullet(A, A)$ ：

$$C_n(A) := C_n(A, A) \cong A^{\otimes n+1}$$

(回顾定义 1.2.5). 我们考虑群  $\mathbb{Z}/(n+1)\mathbb{Z}$  在  $C_n(A)$  上的如下左  $K$ -作用：记  $\mathbb{Z}/(n+1)\mathbb{Z}$  的生成元为  $\lambda$ ，则

$$\begin{aligned} \lambda : C_n(A) &\rightarrow C_n(A) \\ a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n &\mapsto (-1)^n a_n \otimes a_0 \otimes \cdots \otimes a_{n-1} \end{aligned}$$

考虑  $C_n(A)$  模掉此群作用，所得的商  $K$ -模记为

$$C_n^\lambda(A) := C_n(A)/(1 - \lambda)$$

其中的元素称之为循环余不变量 (cyclic co-invariant)。

容易验证，

$$\lambda^{n+1} a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n = (-1)^{n(n+1)} a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n = a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n$$

即  $\lambda^{n+1} = \mathrm{id}$ . 可见这的确是  $\mathbb{Z}/(n+1)\mathbb{Z}$  的作用。

回顾 Bar-复形，我们可以直观地视为“直线上依次排列质点，相邻两两碰撞”；而在这里，商掉  $\lambda$  循环作用后，直观地更像是“圆周上排列质点”。

我们将说明，Hochschild 链复形  $C_\bullet(A)$  的边缘算子  $b$ ，沿商映射  $C_\bullet(A) \twoheadrightarrow C_\bullet^\lambda(A)$  下降，诱导了  $C_\bullet^\lambda(A)$  的链复形结构（称之为 Connes 复形）。

**引理 1.5.2.** 对于  $K$ -代数  $A$ ，我们定义算子  $b' : C_\bullet(A) \rightarrow C_{\bullet-1}(A)$  如下：

$$b' : C_n(A) \rightarrow C_{n-1}(A)$$



$$a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n \mapsto \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k a_0 \otimes \cdots \otimes (a_k a_{k+1}) \otimes \cdots \otimes a_n$$

则成立:

(1)  $b' \circ b' = 0$ ,

(2) 对任意  $n \geq 1$ , 则以下图表交换:

$$\begin{array}{ccc} C_n(A) & \xrightarrow{b'} & C_{n-1}(A) \\ \downarrow 1-\lambda & & \downarrow 1-\lambda \\ C_n(A) & \xrightarrow{b} & C_{n-1}(A) \end{array}$$

证明. 注意到有同构  $C_n(A) \cong B_n A (\cong A^{\otimes n+1})$ , 其中  $B_\bullet A$  为 Bar-复形; 容易看出这里定义的  $b'$  在此同构下, 正是 Bar 复形当中的边缘算子, 从而  $b' \circ b' = 0$ , 也就是说  $(C_\bullet(A), b')$  是一个链复形, 并且同构于 Bar-复形  $(B_\bullet A, b)$ . (这里有轻微的记号混用: Bar-复形  $(B_\bullet A, b)$  当中的 “ $b$ ” 并不是本引理当中 Hochschild 链复形  $(C_\bullet(A), b)$  当中的 “ $b$ ”, 前者在此是临时记号.)

我们再来看 (2). 回顾  $b: C_n(A) \rightarrow C_{n-1}(A)$  的显式表达式 (见定义 1.2.5 的下方, 并且令其中  $M = a$  以及  $m = a_0$ ) (注意此图中的  $b$  与  $b'$  并不是同一个映射, 它们的具体表达式相差一项), 直接验算之:

$$\begin{aligned} & (1-\lambda) \circ b'(a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n) \\ = & (1-\lambda) \left( \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k a_0 \otimes \cdots \otimes (a_k a_{k+1}) \otimes \cdots \otimes a_n \right) \\ = & \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k a_0 \otimes \cdots \otimes (a_k a_{k+1}) \otimes \cdots \otimes a_n \\ & + \sum_{k=0}^{n-2} (-1)^{k+n} a_n \otimes a_0 \otimes \cdots \otimes (a_k a_{k+1}) \otimes \cdots \otimes a_{n-1} \\ & - (a_{n-1} a_n) \otimes a_0 \otimes \cdots \otimes a_{n-2} \\ = & b(a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n) - (-1)^n (a_n a_0) \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_{n-1} \\ & + (-1)^n \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k a_n \otimes a_0 \otimes \cdots \otimes (a_k a_{k+1}) \otimes \cdots \otimes a_{n-1} \\ & - (a_{n-1} a_n) \otimes a_0 \otimes \cdots \otimes a_{n-2} \\ = & b(a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n - (-1)^n a_n \otimes a_0 \otimes \cdots \otimes a_{n-1}) \\ = & b \circ (1-\lambda)(a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n) \end{aligned}$$

也就是说,

$$(1-\lambda) \circ b' = b \circ (1-\lambda)$$

从而此图表交换，证毕。 □

此图表的交换关系也可改写为

$$[b, \lambda] = (1 - \lambda) \circ (b - b')$$

其中  $[b, \lambda] := b \circ \lambda - \lambda \circ b$ .

此引理给出了链复形  $(C_\bullet(A), b')$  与  $(C_\bullet(A), b)$  之间的链映射：

$$(1 - \lambda)_\bullet : (C_\bullet(A), b') \rightarrow (C_\bullet(A), b)$$

然而注意到

$$C_n^\lambda(A) := C_n(A) / (1 - \lambda)_n = \text{coker}(1 - \lambda)_n$$

于是我们（在由  $K$ -模链复形构成范畴当中）考虑链映射  $(1 - \lambda)_\bullet$  的余核，这给出了  $C_\bullet^\lambda(A)$  的链复形结构：

**定义 1.5.3.** (*Connes 复形*) 对于  $K$ -代数  $A$ ，考虑链映射

$$(1 - \lambda)_\bullet : (C_\bullet(A), b') \rightarrow (C_\bullet(A), b)$$

的余核链复形

$$(C_\bullet^\lambda(A), b^\lambda) := \text{coker}[(1 - \lambda)_\bullet]$$

称其为 **Connes 复形**。并且记

$$H_\bullet^\lambda(A) := H_\bullet(C_\bullet^\lambda(A))$$

称之为  $A$  的循环同调 (*cyclic homology*) .

也就是说，有如下的交换图表：

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & C_{n+1} & \xrightarrow{b'} & C_n & \xrightarrow{b'} & C_{n-1} \longrightarrow \cdots \\ & & \downarrow 1-\lambda & & \downarrow 1-\lambda & & \downarrow 1-\lambda \\ \cdots & \longrightarrow & C_{n+1} & \xrightarrow{b} & C_n & \xrightarrow{b} & C_{n-1} \longrightarrow \cdots \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \cdots & \longrightarrow & C_{n+1}^\lambda & \xrightarrow{b^\lambda} & C_n^\lambda & \xrightarrow{b^\lambda} & C_{n-1}^\lambda \longrightarrow \cdots \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & & 0 & & 0 & & 0 \end{array}$$

此交换图表每一横行都为链复形，其中第三横行为 Connes 复形；每一列都是右短正合的。并且容易知道：Connes 复形的边缘算子  $b^\lambda$  正是 Hochschild 链复形的边缘算子  $b$  沿商映射  $C_\bullet(A) \twoheadrightarrow C_\bullet^\lambda(A)$  的下降。

## 1.6 循环双复形 $CC_{\bullet\bullet}(A)$

引理 1.6.1. (平均算子) 对于任意  $K$ -代数  $A$ , 以及  $n \geq 0$ , 引入平均算子  $\mathcal{N}: C_n(A) \rightarrow C_n(A)$ :

$$\mathcal{N} := 1 + \lambda + \lambda^2 + \cdots + \lambda^n$$

则此算子满足以下性质:

$$(1) \quad b'\mathcal{N} = \mathcal{N}b$$

(2)  $(1 - \lambda)\mathcal{N} = \mathcal{N}(1 - \lambda) = 0$ . 此外, 如果有理数域  $\mathbb{Q} \hookrightarrow K$ , 那么对于任意  $n \geq 0$ , 以下链复形是正合的:

$$\cdots \rightarrow C_n(A) \xrightarrow{\mathcal{N}} C_n(A) \xrightarrow{1-\lambda} C_n(A) \xrightarrow{\mathcal{N}} C_n(A) \xrightarrow{1-\lambda} C_n(A) \rightarrow C_n^\lambda(A) \rightarrow 0$$

证明. (1) 任意固定  $n \geq 1$ , 为了区分算子在不同空间的作用, 我们采用临时记号

$$\begin{cases} \lambda: C_n(A) \rightarrow C_n(A) \\ \bar{\lambda}: C_{n-1}(A) \rightarrow C_{n-1}(A) \end{cases} \quad \begin{cases} \mathcal{N} := 1 + \lambda + \cdots + \lambda^n \\ \bar{\mathcal{N}} := 1 + \bar{\lambda} + \cdots + \bar{\lambda}^{n-1} \end{cases}$$

则在此记号下我们需要证  $b'\mathcal{N} = \bar{\mathcal{N}}b$ .

定义缩并算子

$$\begin{aligned} s: C_n(A) &\rightarrow C_{n-1}(A) \\ a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n &\mapsto (a_0 a_1) \otimes \cdots \otimes a_n \end{aligned}$$

则容易验证 (稍微注意一下正负号, 确实都是正号)

$$b = \sum_{k=0}^n \bar{\lambda}^k s \lambda^{-k} \quad b' = \sum_{k=0}^{n-1} \bar{\lambda}^k s \lambda^{-k}$$

于是有

$$b'\mathcal{N} = \left( \sum_{k=0}^{n-1} \bar{\lambda}^k s \lambda^{-k} \right) \left( \sum_{l=0}^n \lambda^l \right) = \sum_{\substack{0 \leq k \leq n-1 \\ 0 \leq l \leq n}} \bar{\lambda}^k s \lambda^l$$

同理也有

$$\bar{\mathcal{N}}b = \sum_{\substack{0 \leq k \leq n-1 \\ 0 \leq l \leq n}} \bar{\lambda}^k s \lambda^l$$

从而  $b'\mathcal{N} = \bar{\mathcal{N}}b$ .

(2) 给定  $n \geq 0$ , 注意到  $\lambda^{n+1} = 1$ , 从而

$$(1 - \lambda)\mathcal{N} = (1 - \lambda)(1 + \lambda + \cdots + \lambda^n) = 1 - \lambda^{n+1} = 0$$

同理  $\mathcal{N}(1 - \lambda) = 0$ . 因此该图表是链复形, 只需再验证正合性。

现在假设  $\mathbb{Q}$  是  $K$  的子环。我们构造如下链同伦:

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & C_n(A) & \xrightarrow{\mathcal{N}} & C_n(A) & \xrightarrow{1-\lambda} & C_n(A) & \xrightarrow{\mathcal{N}} & C_n(A) & \longrightarrow & \cdots \\ & & \downarrow \text{id} & \nearrow g & \downarrow \text{id} & \nearrow f & \downarrow \text{id} & \nearrow g & \downarrow \text{id} & & \\ \cdots & \longrightarrow & C_n(A) & \xrightarrow{\mathcal{N}} & C_n(A) & \xrightarrow{1-\lambda} & C_n(A) & \xrightarrow{\mathcal{N}} & C_n(A) & \longrightarrow & \cdots \end{array}$$

其中  $f, g: C_n(A) \rightarrow C_n(A)$  定义为

$$\begin{cases} f := \frac{1}{n+1}(\lambda^{n-1} + 2\lambda^{n-2} + 3\lambda^{n-3} + \cdots + n) \\ g := \frac{1}{n+1} \end{cases}$$

(利用了  $\mathbb{Q} \hookrightarrow K$ ) 则容易验证

$$f(1 - \lambda) + \mathcal{N}g = g\mathcal{N} + (1 - \lambda)f = 1$$

从而证毕。 □

特别地, 当  $K$  为域时 (注意我们总假定  $\text{char } K = 0$ ) 成立正合性。链同伦  $f, g$  的构造来自于 (关于变元  $\lambda$  的多项式的) 欧几里得辗转相除法。

由此引理, 我们可构造出如下的循环双复形 (cyclic bicomplex), 记为  $CC_{\bullet\bullet}(A)$ :

$$\begin{array}{ccccccc} \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \downarrow b & & \downarrow -b' & & \downarrow b & & \downarrow -b' \\ C_2(A) & \xleftarrow{1-\lambda} & C_2(A) & \xleftarrow{\mathcal{N}} & C_2(A) & \xleftarrow{1-\lambda} & C_2(A) & \xleftarrow{\quad} \cdots \\ \downarrow b & & \downarrow -b' & & \downarrow b & & \downarrow -b' \\ C_1(A) & \xleftarrow{1-\lambda} & C_1(A) & \xleftarrow{\mathcal{N}} & C_1(A) & \xleftarrow{1-\lambda} & C_1(A) & \xleftarrow{\quad} \cdots \\ \downarrow b & & \downarrow -b' & & \downarrow b & & \downarrow -b' \\ C_0(A) & \xleftarrow{1-\lambda} & C_0(A) & \xleftarrow{\mathcal{N}} & C_0(A) & \xleftarrow{1-\lambda} & C_0(A) & \xleftarrow{\quad} \cdots \end{array}$$

其中对于任意  $p, q \geq 0$ ,  $CC_{p,q}(A) = C_p(A)$  为该图表的从下往上第  $p$  行, 从左往右第  $q$  列的节点; 此图表的偶数列与奇数列  $(C_{\bullet}(A), b)$  与  $(C_{\bullet}(A), -b')$  交替。并且注意到, 此图表不是交换的, 而是对于其中每一个方框都满足反交换性。

我们回顾一些同调代数工具:

定义 1.6.2. (双复形的全复形)

对于任意的含么交换环  $K$  (这里暂时不必假定  $\text{char } K = 0$ ), 以及  $K$ -模双复形  $(A_{\bullet\bullet}, d, \partial)$ :

$$\begin{array}{ccccccc}
 & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
 & A_{2,0} & \xleftarrow{\partial_{2,1}} & A_{2,1} & \xleftarrow{\partial_{2,2}} & A_{2,2} & \xleftarrow{\quad} \cdots \\
 & \downarrow d_{2,0} & & \downarrow d_{2,1} & & \downarrow d_{2,2} & \\
 & A_{1,0} & \xleftarrow{\partial_{1,1}} & A_{1,1} & \xleftarrow{\partial_{1,2}} & A_{1,2} & \xleftarrow{\quad} \cdots \\
 & \downarrow d_{1,0} & & \downarrow d_{1,1} & & \downarrow d_{1,2} & \\
 & A_{0,0} & \xleftarrow{\partial_{0,1}} & A_{0,1} & \xleftarrow{\partial_{0,2}} & A_{0,2} & \xleftarrow{\quad} \cdots
 \end{array}$$

即:

$$\begin{cases} d_{p,q} : A_{p,q} \rightarrow A_{p-1,q} \\ \partial_{p,q} : A_{p,q} \rightarrow A_{p,q-1} \end{cases}$$

使得该图表每一行、每一列都是链复形, 并且满足反交换关系

$$\partial_{p-1,q} \circ d_{p,q} + d_{p,q-1} \circ \partial_{p,q} = 0$$

则我们定义双复形  $A_{\bullet\bullet}$  的全复形 (total complex)  $(\text{Tot}_{\bullet}(A_{\bullet\bullet}), d)$  如下:

$$\begin{cases} \text{Tot}_n(A_{\bullet\bullet}) := \bigoplus_{p+q=n} A_{p,q} \\ d_n := \sum_{p+q=n} (d_{p,q} + \partial_{p,q}) \end{cases}$$

对于两个双复形  $A_{\bullet\bullet}$  与  $A'_{\bullet\bullet}$ , 我们可以去定义双复形之间的态射  $f_{\bullet\bullet} : A_{\bullet\bullet} \rightarrow A'_{\bullet\bullet}$ , 进而考虑双复形范畴。双复形的态射自然诱导了相应的全复形之间的链映射, 也就是说  $\text{Tot}$  具有函子性。我们还有以下同调代数工具:

引理 1.6.3. 设  $f_{\bullet\bullet} : A_{\bullet\bullet} \rightarrow A'_{\bullet\bullet}$  为双复形之间的态射。如果对于任意  $n \geq 0$ , 链映射

$$f_{n,\bullet} : A_{n,\bullet} \rightarrow A'_{n,\bullet}$$

为拟同构 (quasi-isomorphism), (即它诱导的任意阶同调对象之间的态射均为同构), 那么链映射

$$\text{Tot}_{\bullet}(f_{\bullet\bullet}) : \text{Tot}_{\bullet}(A_{\bullet\bullet}) \rightarrow \text{Tot}_{\bullet}(A'_{\bullet\bullet})$$

也为拟同构。

证明. 同调代数工具, 承认之.  $\square$

我们回到循环双复形  $CC_{\bullet\bullet}(A)$ . 由上述同调代数工具, 我们可以给出循环同调  $H_{\bullet}^{\lambda}(A) := H_{\bullet}(C_{\bullet}^{\lambda}(A))$  的另一种定义:

**定理 1.6.4.** 对于  $K$ -代数  $A$ , 假设  $\mathbb{Q} \hookrightarrow K$ , 记

$$HC_{\bullet}(A) := H_{\bullet}(\text{Tot}_{\bullet}(CC_{\bullet\bullet}(A)))$$

为  $A$  的循环双复形的全复形的同调, 那么有自然的同构

$$HC_{\bullet}(A) \cong H_{\bullet}^{\lambda}(A)$$

证明. 对于循环双复形  $CC_{\bullet\bullet}(A)$ , 我们再考虑另一个双复形  $CC'_{\bullet\bullet}(A)$  如下:

$$\begin{array}{ccccccc} & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ C_2^{\lambda}(A) & \leftarrow & 0 & \leftarrow & 0 & \leftarrow & 0 & \leftarrow \dots \\ & \downarrow b_2^{\lambda} & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ C_1^{\lambda}(A) & \leftarrow & 0 & \leftarrow & 0 & \leftarrow & 0 & \leftarrow \dots \\ & \downarrow b_1^{\lambda} & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ C_0^{\lambda}(A) & \leftarrow & 0 & \leftarrow & 0 & \leftarrow & 0 & \leftarrow \dots \end{array}$$

考虑双复形之间的态射

$$f_{\bullet\bullet} : CC_{\bullet\bullet}(A) \rightarrow CC'_{\bullet\bullet}(A)$$

其中  $f_{n,0} : C_n(A) \rightarrow C_n^{\lambda}(A)$  为商映射. 由引理1.6.1 知  $CC_{\bullet\bullet}(A)$  的每一行都是正合的, 从而容易验证  $f_{\bullet\bullet}$  满足引理 1.6.3 的使用条件, 因此我们有同构

$$H_{\bullet}(\text{Tot}_{\bullet}(CC_{\bullet\bullet}(A))) \cong H_{\bullet}(\text{Tot}_{\bullet}(CC'_{\bullet\bullet}(A)))$$

上式左边, 由定义, 即为  $HC_{\bullet}(A)$ ; 而再注意到  $\text{Tot}_{\bullet}(CC'_{\bullet\bullet})$  正是 Connes 复形  $C_{\bullet}^{\lambda}$ , 从而上式右边为循环同调  $H_{\bullet}^{\lambda}(A)$ .  $\square$

也就是说, 循环同调 (Connes 复形的同调) 自然同构于循环双复形的全复形的同调。

## 1.7 Connes 算子 $\beta$

我们将给出循环同调的更多等价定义方式，并计算一些具体例子。本节均假定  $\mathbb{Q} \hookrightarrow K$ （甚至直接把  $K$  当成特征零的域）。我们需要更多的同调代数工具：

**引理 1.7.1.**（杀掉可缩复形）

对于  $K$ -模链复形

$$\cdots \rightarrow A_{n+1} \oplus B_{n+1} \xrightarrow{d} A_n \oplus B_n \xrightarrow{d} A_{n-1} \oplus B_{n-1} \rightarrow \cdots$$

其中

$$d = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

并且  $(B_\bullet, \delta)$  是可缩链复形，其同伦逆

$$h : B_\bullet \rightarrow B_{\bullet+1}$$

使得  $h\delta + \delta h = 1$ . 那么下述图表交换：

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & A_{n+1} & \xrightarrow{\alpha - \beta h \gamma} & A_n & \xrightarrow{\alpha - \beta h \gamma} & A_{n-1} \longrightarrow \cdots \\ & & \downarrow \varphi & & \downarrow \varphi & & \downarrow \varphi \\ \cdots & \longrightarrow & A_{n+1} \oplus B_{n+1} & \xrightarrow{d} & A_n \oplus B_n & \xrightarrow{d} & A_{n-1} \oplus B_{n-1} \longrightarrow \cdots \end{array}$$

并且此图表的每一行都为链复形，并且链映射

$$\varphi := \begin{pmatrix} 1 \\ -h\gamma \end{pmatrix}$$

为拟同构。

证明. 注意到  $\delta^2 = 0$ ，以及

$$0 = d^2 = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} \alpha^2 + \beta\gamma & \alpha\beta + \beta\gamma \\ \gamma\alpha + \delta\gamma & \gamma\beta + \delta^2 \end{pmatrix}$$

从而我们有

$$\begin{cases} \alpha^2 &= -\beta\gamma \\ \alpha\beta &= -\beta\delta \\ \gamma\alpha &= -\delta\gamma \\ \gamma\beta &= 0 \end{cases}$$

再注意到  $h\delta + \delta h = 1$ ，直接计算验证可知  $\varphi_\bullet$  的确为链复形之间的链映射。细节略。

再注意链映射

$$\varphi_\bullet : (A_\bullet, \alpha - \beta h \gamma) \rightarrow (A_\bullet \oplus B_\bullet, d)$$

为单射，并且其余核

$$\text{coker } \varphi_\bullet \cong (B_\bullet, \delta)$$

是正合的，因此  $\varphi_\bullet$  为拟同构。  $\square$

这个引理的功能是，如果给定的链复形  $(A_\bullet \oplus B_\bullet, d)$  当中“含有正合的部分”  $(B_\bullet, \delta)$ ，那我们可以把这个“正合的部分”剔除掉，得到一个“不那么冗余”的链复形  $(A_\bullet, \alpha - \beta h \delta)$ ，并且此复形与原来的复形的各阶同调自然同构。

我们将此引理用于循环双复形  $CC_{\bullet\bullet}(A)$  的全复形  $\text{Tot}_\bullet(CC_{\bullet\bullet}(A))$  上。回顾  $CC_{\bullet\bullet}(A)$  为如下双复形：

$$\begin{array}{ccccccc} \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \downarrow b & & \downarrow -b' & & \downarrow b & & \downarrow -b' \\ C_2(A) & \xleftarrow{1-\lambda} & C_2(A) & \xleftarrow{\mathcal{N}} & C_2(A) & \xleftarrow{1-\lambda} & C_2(A) \xleftarrow{\quad} \cdots \\ \downarrow b & & \downarrow -b' & & \downarrow b & & \downarrow -b' \\ C_1(A) & \xleftarrow{1-\lambda} & C_1(A) & \xleftarrow{\mathcal{N}} & C_1(A) & \xleftarrow{1-\lambda} & C_1(A) \xleftarrow{\quad} \cdots \\ \downarrow b & & \downarrow -b' & & \downarrow b & & \downarrow -b' \\ C_0(A) & \xleftarrow{1-\lambda} & C_0(A) & \xleftarrow{\mathcal{N}} & C_0(A) & \xleftarrow{1-\lambda} & C_0(A) \xleftarrow{\quad} \cdots \end{array}$$

注意到该双复形的第偶数列 Hochschild 链复形（链映射  $b$ ），第奇数列 Bar-复形（链映射  $-b'$ ）。注意 Bar-复形是正合的，并且有同伦逆

$$h : C_n(A) \rightarrow C_{n+1}(A) \tag{1.1}$$

$$a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n \mapsto 1 \otimes a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n \tag{1.2}$$

使得  $b'h + hb' = 1$ 。

现在，注意到

$$\begin{aligned} \text{Tot}_n(CC_{\bullet\bullet}(A)) &= \left( \bigoplus_{\substack{p+q=n \\ q \text{ 为偶数}}} CC_{p,q}(A) \right) \oplus \left( \bigoplus_{\substack{p+q=n \\ q \text{ 为奇数}}} CC_{p,q}(A) \right) \\ &=: X_n \oplus Y_n \end{aligned}$$

也就是说，我们把循环双复形  $CC_{\bullet\bullet}(A)$  的全复形  $(\text{Tot}_\bullet(CC_{\bullet\bullet}(A)), d)$  写为：

$$\cdots \rightarrow X_{n+1} \oplus Y_{n+1} \xrightarrow{d} X_n \oplus Y_n \xrightarrow{d} X_{n-1} \oplus Y_{n-1} \rightarrow \cdots$$



边缘算子矩阵  $d = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$  留给读者。但是要注意  $(Y_\bullet, \delta)$  的正合性是由 Bar-复形  $(C_\bullet(A), -b')$  的正合性所诱导的； $\delta$  也存在同伦逆，仍记为  $h$ 。

综上，对  $\text{Tot}_\bullet(CC_{\bullet\bullet}(A))$  使用引理1.7.1，我们得到以下结果：

**性质 1.7.2.** 对于  $K$ -代数  $A$ ，考虑以下双复形  $B_{\bullet\bullet}(A)$ ：

$$\begin{array}{ccccc}
 \vdots & & \vdots & & \vdots \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 A^{\otimes 3} & \xleftarrow{B} & A^{\otimes 2} & \xleftarrow{B} & A \\
 \downarrow b & & \downarrow b & & \\
 A^{\otimes 2} & \xleftarrow{B} & A & & \\
 \downarrow b & & & & \\
 A & & & & 
 \end{array}$$

此图表的最左下角为第 0 行 0 列，右下角空白处都为 0，具体地，

$$B_{p,q}(A) = \begin{cases} CC_{p-q,2q}(A) & p \geq q \\ 0 & p < q \end{cases}$$

（也就是说， $B_{\bullet\bullet}$  的结点是由将循环双复形  $CC_{\bullet\bullet}(A)$  的第奇数列（Bar-复形）都删掉，再将原来第  $2l$  列整体向左、上各平移  $l$  格所得）其中 **Connes 算子**  $B : C_n(A) \rightarrow C_{n+1}(A)$  定义为以下的复合：

$$\begin{array}{ccccc}
 C_{n+1}(A) & \xleftarrow{1-\lambda} & C_{n+1}(A) & \xleftarrow{\mathcal{N}} & C_{n+1}(A) \\
 \downarrow b & & \uparrow h \downarrow -b' & & \downarrow b \\
 C_n(A) & \xleftarrow{1-\lambda} & C_n(A) & \xleftarrow{\mathcal{N}} & C_n(A)
 \end{array}$$

$$B := (1 - \lambda)h\mathcal{N}$$

那么，存在自然的双复形单同态

$$B_{\bullet\bullet}(A) \hookrightarrow CC_{\bullet\bullet}(A)$$

并且其诱导的全复形的链映射

$$\text{Tot}_\bullet(B_{\bullet\bullet}(A)) \hookrightarrow \text{Tot}_\bullet(CC_{\bullet\bullet}(A))$$

为拟同构。

证明. 只需注意到

$$\mathrm{Tot}_n(\mathcal{B}_{\bullet\bullet}) = \left( \bigoplus_{\substack{p+q=n \\ q \text{ 为偶数}}} \mathrm{CC}_{p,q}(A) \right) \hookrightarrow \mathrm{Tot}_n(\mathrm{CC}_{\bullet\bullet}(A))$$

直接使用引理1.7.1, 细节从略。但是要验证  $\mathcal{B}_{\bullet\bullet}(A)$  的确是双复形, 即需要验证反交换关系

$$\mathcal{B} \circ b + b \circ \mathcal{B}$$

而这是容易的, 验证如下:

$$\begin{aligned} \mathcal{B} \circ b &= (1 - \lambda)h\mathcal{N}b = (1 - \lambda)hb'\mathcal{N} \\ &= (1 - \lambda)(1 - b'h)\mathcal{N} = (1 - \lambda)\mathcal{N} - (1 - \lambda)b'h\mathcal{N} \\ &= -b(1 - \lambda)h\mathcal{N} = -b \circ \mathcal{B} \end{aligned}$$

从而证毕。 □

于是我们得到循环同调的又一等价定义:

$$H_{\bullet}^{\lambda}(A) \cong H_{\bullet}(\mathrm{Tot}_{\bullet}(\mathcal{B}_{\bullet\bullet}))$$

我们可以将链复形  $\mathrm{Tot}_{\bullet}(\mathcal{B}_{\bullet\bullet})$  适当改写, 使得形式更加美观:

**性质 1.7.3.** 对于  $K$ -代数  $A$ , 以及形式变元  $u$ , 考虑如下链复形:

$$(\mathrm{CC}_{\bullet}(A), b + u\mathcal{B})$$

其中

$$\mathrm{CC}_n(A) := (\mathrm{C}_{\bullet}(A)[u^{-1}])_n := \bigoplus_{k=0}^{\infty} u^{-k} \mathrm{C}_{n-2k}(A)$$

(注意这是有限直和) 换句话说, 我们给定以下分次

$$\deg(b) = -1, \quad \deg(B) = 1, \quad \deg(u) = -2$$

那么此链复形的同调自然同构于循环同调:

$$H_{\bullet}(\mathrm{CC}_{\bullet}(A), b + u\mathcal{B}) \cong H_{\bullet}^{\lambda}(A)$$

证明. 这个几乎显然. 注意到

$$\mathrm{Tot}_n(\mathcal{B}_{\bullet\bullet}(A)) = \bigoplus_{k=0}^{\infty} \mathcal{B}_{n-k,k}(A) = \bigoplus_{k=0}^{\infty} \mathrm{C}_{n-2k}(A)$$

$$CC_n(A) = \bigoplus_{k=0}^{\infty} u^{-k} C_{n-2k}(A)$$

于是有自然的链复形同构

$$\begin{aligned} \text{Tot}_{\bullet}(\mathcal{B}_{\bullet\bullet}(A)) &\rightarrow CC_{\bullet}(A) \\ \mathcal{B}_{n-k,k}(A) &\mapsto u^{-k} C_{n-2k}(A) \end{aligned}$$

容易验证此对应也保持相应的边缘算子。证毕。  $\square$

注意，我们还可以考虑  $(CC_{\bullet}(A), b)$ ，它与  $(CC_{\bullet}(A), b + u\mathcal{B})$  具有不同的边缘算子：前者的同调我们早已知道是 Hochschild 同调，而后者的同调为循环同调。

**注记 1.7.4.** (复几何的背景)

对于复流形  $X$ ，它作为光滑流形，有外微分算子  $d$ ；再注意到它的复结构，有算子  $\bar{\partial}$ ——前者代表拓扑，而后代表复几何。它们之间有关系

$$d = \bar{\partial} + \partial$$

并且满足

$$\partial^2 = \bar{\partial}^2 = 0 \quad \partial\bar{\partial} + \bar{\partial}\partial = 0$$

我们考虑以下“拓扑与复几何之间的桥梁”：

$$d_u := \bar{\partial} + u\partial$$

称此算子为霍奇滤链 (Hodge filtration)，其中  $0 \leq u \leq 1$ 。注意  $d_u$  满足稳定性条件  $d_u^2 = 0$ ，即  $\bar{\partial}$  与  $d$  的“过渡”的任何一个“中间状态”都仍为外微分算子。

所以，似乎可以如下粗暴地对应？

复几何	非交换几何
复流形 $X$	$K$ -代数 $A$
$\Omega_X^{\bullet}$	$CC_{\bullet}(A)$
$\bar{\partial}$	$b$
$\partial$	$u\mathcal{B}$
$d$	$b + u\mathcal{B}$
$H_{\text{DR}}^{\bullet}(X)$	$H_{\bullet}^{\lambda}(A)$
$H_{\bar{\partial}}^{\bullet}(X)$	$HH_{\bullet}(A)$

这表格似乎不太对吧，应该是 Hochschild 同调  $HH_{\bullet}(A)$  对应于“非交换版本的”微分形式  $\Omega^{\bullet}$ ，从之前的例子能看出来。

定义 1.7.5. (周期循环同调与负循环同调) 对于  $K$ -代数  $A$ , 与  $CC_{\bullet}(A)$  类似, 我们还可以去定义以下:

(1) 定义周期循环复形 (periodic cyclic complex)

$$CC_{\bullet}^{\text{per}}(A) := (C_{\bullet}(A)((u)), b + uB)$$

该复形的同调

$$HC_{\bullet}^{\text{per}}(A) := H_{\bullet}(CC_{\bullet}^{\text{per}}(A), b + uB)$$

称之为周期循环同调 (periodic cyclic homology)。

(2) 定义负循环复形 (negative cyclic complex)

$$CC_{\bullet}^{-}(A) := (C_{\bullet}(A)[[u]], b + uB)$$

该复形的同调

$$HC_{\bullet}^{-}(A) := H_{\bullet}(CC_{\bullet}^{-}(A), b + uB)$$

称之为负循环同调 (negative cyclic homology)。

注意上述定义当中的 “ $[[u]]$ ” 是指关于形式变元  $u$  的形式幂级数, 而 “ $((u))$ ” 为关于  $u$  的 Laurent 级数。由定义, 显然有

$$CC_{\bullet}(A) \cong CC_{\bullet}^{\text{per}}(A) / CC_{\bullet}^{-}(A)$$

至此, 我们定义出了  $CC_{\bullet}(A)$ ,  $CC_{\bullet}^{\text{per}}(A)$  以及  $CC_{\bullet}^{-}(A)$ 。事实上, 这三者都有深刻的物理背景, 见下表:

非交换几何中的对象	几何、物理背景	几何、物理背景
$CC_{\bullet}^{\text{per}}(A)$	open-closed string states	de-Rham cohomology
$CC_{\bullet}(A)$	open string states	gauge theory
$CC_{\bullet}^{-}(A)$	closed string states	gravity

其中特别注意, 周期循环同调是 de-Rham 上同调的 “非交换版本”, 我们将在后文举例说明。

## 1.8 循环同调的计算

回顾约化 Bar-复形  $\bar{B}_{\bullet}(A)$  (见定义1.4.1), 我们可以类似地通过约化 Bar-复形来构造类似的 “循环双复形”: 在  $K \hookrightarrow A$  的条件下, 考虑约化 Hochschild 链复形

$$\bar{C}_n(A) := \bar{C}_n(A, A) \cong A \otimes \bar{A}^{\otimes n}$$

类似去定义循环算子  $\lambda: \overline{C}_n(A) \rightarrow \overline{C}_n(A)$ ，其显式表达式与非约化情形完全相同；以及平均算子

$$\mathcal{N}: \overline{C}_n(A, A) \cong A \otimes \overline{A}^{\otimes n}$$

可惜是错的，类似于此前的  $\lambda, \mathcal{N}$  并不良定。比如

$$0 = \lambda(0) = \lambda(a_0 \otimes \overline{1}) = -1 \otimes \overline{\lambda} \neq 0$$

但是，Connes 算子  $\mathcal{B}: \overline{C}_n(A) \rightarrow \overline{C}_{n+1}(A)$  是有意义的，运算规则与非约化情形完全相同，具体地，

$$\begin{aligned} \mathcal{B}(a_0 \otimes \overline{a_1} \otimes \cdots \otimes \overline{a_n}) &= \widetilde{(1-\lambda)} h \widetilde{\mathcal{N}}(a_0 \otimes \overline{a_1} \otimes \cdots \otimes \overline{a_n}) \\ &= \widetilde{(1-\lambda)} h \left( \sum_{k=0}^n (-1)^{n(n+1-k)} a_k \otimes \overline{a_{k+1}} \otimes \cdots \otimes \overline{a_n} \otimes \overline{a_0} \otimes \cdots \otimes \overline{a_{k-1}} \right) \\ &= \widetilde{(1-\lambda)} \left( \sum_{k=0}^n (-1)^{n(n+1-k)} 1 \otimes \overline{a_k} \otimes \overline{a_{k+1}} \otimes \cdots \otimes \overline{a_n} \otimes \overline{a_0} \otimes \cdots \otimes \overline{a_{k-1}} \right) \\ &= \sum_{k=0}^n (-1)^{nk} 1 \otimes \overline{a_k} \otimes \overline{a_{k+1}} \otimes \cdots \otimes \overline{a_n} \otimes \overline{a_0} \otimes \cdots \otimes \overline{a_{k-1}} \end{aligned}$$

其中  $a_{-1} := a_n$ .

性质 1.8.1. 对于  $K$ -代数  $A$ ，假设  $K \hookrightarrow A$ ，则有如下双复形  $\overline{B}_{\bullet\bullet}(A)$ :

$$\begin{array}{ccccc} \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ A \otimes \overline{A}^{\otimes 2} & \xleftarrow{\mathcal{B}} & A \otimes \overline{A} & \xleftarrow{\mathcal{B}} & A \\ \downarrow b & & \downarrow b & & \\ A \otimes \overline{A} & \xleftarrow{\mathcal{B}} & A & & \\ \downarrow b & & & & \\ A & & & & \end{array}$$

记此双复形的全复形为  $\overline{CC}_{\bullet}(A) := \text{Tot}_{\bullet}(\overline{B}_{\bullet\bullet}(A))$ ，则有自然同构

$$H_{\bullet}^{\lambda}(A) \cong H_{\bullet}(\overline{CC}_{\bullet}(A))$$

也就是说，在  $K \hookrightarrow A$  的条件下，我们可以用约化版本的双复形来计算循环同调。

证明. 考虑商映射  $\pi_{\bullet} : C_{\bullet}(A, A) \rightarrow \overline{C}_{\bullet}(A, A)$  自然诱导的双复形同态

$$\pi_{\bullet\bullet} : B_{\bullet\bullet}(A) \rightarrow \overline{B}_{\bullet\bullet}(A)$$

注意  $\pi_{\bullet\bullet}$  限制在双复形的每一列上, 都为相应链复形的拟同构 (这里使用了引理 1.4.3), 因此根据引理 1.6.3, 其诱导的全复形之间的同态

$$\text{Tot}_{\bullet}(B_{\bullet\bullet}(A)) \rightarrow \text{Tot}_{\bullet}(\overline{B}_{\bullet\bullet}(A))$$

为拟同构。再注意性质 1.7.2, 上式左边的同调即为循环同调, 从而证毕。  $\square$

与非约化情形类似, 我们也可以

$$\text{Tot}_{\bullet}(\overline{B}_{\bullet\bullet}(A)) \cong \overline{C}_{\bullet}(A)[u^{-1}], b + u\mathcal{B}$$

甚至去定义“约化周期循环同调”、“约化负循环同调”, 此处不再赘述。

本节接下来给出循环同调的一些典型的计算实例。

**例子 1.8.2.** 对于环  $K$ , 设  $K$ -代数  $A = K$ , 那么其循环同调

$$H_n^{\lambda}(K) \cong \begin{cases} K & n \text{ 为偶数} \\ 0 & n \text{ 为奇数} \end{cases}$$

我们早已具体计算出  $K[x^1, x^2, \dots, x^n]$  的 Hochschild 同调, 特别地  $\text{HH}_{\bullet}(K)$  只有第零个是非平凡的 (同构于  $K$ ), 其余都为 0. 不过,  $H_{\bullet}^{\lambda}(K)$  与  $\text{HH}_{\bullet}(K)$  并不相同。

证明. 我们采用最简便的方法去计算, 当然采用约化循环双复形啦。在本例中,

$$\overline{A} = K/K = 0$$

从而双复形  $\overline{B}_{\bullet\bullet}(K)$  为以下:

$$\begin{array}{ccccccc} & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longleftarrow & 0 & \longleftarrow & 0 & \longleftarrow & K \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longleftarrow & 0 & \longleftarrow & K & & \\ \downarrow & & \downarrow & & & & \\ 0 & \longleftarrow & K & & & & \\ \downarrow & & & & & & \\ K & & & & & & \end{array}$$

其全复形  $\overline{CC}_{\bullet}(K)$  为以下

$$\cdots \rightarrow 0 \xrightarrow{0} K \xrightarrow{0} 0 \xrightarrow{0} K$$

从而易求循环同调。  $\square$

当然我们也可以按照循环同调最原始的定义去计算，其实也不难算，如下：

另一种计算方式. 直接计算。此时，

$$C_n(K) \cong K^{\otimes n+1} \cong K$$

我们记其生成元

$$\varepsilon_n := \underbrace{1 \otimes 1 \otimes \cdots \otimes 1}_{n+1 \text{ 个}} \in C_n(K)$$

容易验证算子  $b$  与算子  $\lambda$  的作用

$$b(\varepsilon_n) = \begin{cases} \varepsilon_{n-1} & n \text{ 为偶数} \\ 0 & n \text{ 为奇数} \end{cases} \quad \lambda(\varepsilon_n) = \begin{cases} \varepsilon_n & n \text{ 为偶数} \\ -\varepsilon_n & n \text{ 为奇数} \end{cases}$$

因此，易知 Connes 复形  $C_\bullet^\lambda(K) := C_\bullet K / (1 - \lambda)$  具体如下：

$$\cdots \rightarrow 0 \xrightarrow{0} K \xrightarrow{0} 0 \xrightarrow{0} K$$

对它取同调，即得循环同调。 □

接下来，考虑  $A = K[x^1, x^2, \dots, x^n]$  为  $n$  元多项式环的情形，我们企图取计算  $A$  的循环同调。注意在之前我们已经使用 Koszul 复形求出了  $A = K[x^1, x^2, \dots, x^n]$  的 Hochschild 同调。

**引理 1.8.3.** 设  $A = K[x^1, x^2, \dots, x^n]$  为  $n$  元多项式环，考虑微分形式代数  $\Omega_A^\bullet := K[x^1, \dots, x^n; dx^1, \dots, dx^n]$ ，注意  $\Omega_A^\bullet$  上有外积运算  $\wedge$  与外微分运算  $d$ 。考虑以下  $K$ -模同态

$$\begin{aligned} \Phi: \overline{C}_p(A) &\rightarrow \Omega_A^p \\ a_0 \otimes \overline{a_1} \otimes \cdots \otimes \overline{a_p} &\mapsto \frac{1}{p!} a_0 da_1 \wedge da_2 \wedge \cdots \wedge da_p \end{aligned}$$

则  $\Phi$  是良定的，并且成立：

$$\begin{cases} \Phi \circ b = 0 \\ \Phi \circ \mathcal{B} = d \circ \Phi \end{cases}$$

其中  $b: \overline{C}_p(A) \rightarrow \overline{C}_{p-1}(A)$  为约化 Hochschild 复形的边缘算子， $\mathcal{B}: \overline{C}_{p-1}(A) \rightarrow \overline{C}_p(A)$  为约化的 Connes 算子。

证明.  $\Phi$  的良定性，即  $\overline{A}$  中元素与代表元选取无关。而此代表元选取至多相差“常数项”（即  $K$  中元素），它在外微分  $d$  的作用下为零。因此  $\Phi$  良定。

我们来验证  $\Phi \circ b = 0$ 。暴力验证如下：

$$\Phi \circ b(a_0 \otimes \overline{a_1} \otimes \cdots \otimes \overline{a_n})$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{p!} \left( a_0 a_1 da_2 \wedge \cdots \wedge da_p + \sum_{k=1}^{p-1} (-1)^k a_0 da_1 \wedge \cdots \wedge d(a_k a_{k+1}) \wedge \cdots \wedge da_p \right. \\
&\quad \left. + (-1)^p a_0 a_p da_1 \wedge \cdots \wedge da_{p-1} \right) \\
&= \frac{1}{p!} \left( a_0 a_1 da_2 \wedge \cdots \wedge da_p + \sum_{k=1}^{p-1} (-1)^k a_0 a_k da_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{da_k} \wedge \cdots \wedge da_p \right. \\
&\quad \left. + \sum_{k=1}^{p-1} (-1)^k a_0 a_{k+1} da_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{da_{k+1}} \wedge \cdots \wedge da_p + (-1)^p a_0 a_p da_1 \wedge \cdots \wedge da_{p-1} \right) \\
&= 0
\end{aligned}$$

第二个等式  $\Phi \circ \mathcal{B} = d \circ \Phi$  也容易直接验证：一方面，

$$\begin{aligned}
&\Phi \circ \mathcal{B}(a_0 \otimes \overline{a_1} \otimes \cdots \otimes \overline{a_n}) \\
&= \sum_{k=0}^p \frac{(-1)^{pk}}{(p+1)!} (da_k \wedge da_{k+1} \wedge \cdots \wedge da_p) \wedge (da_0 \wedge da_1 \wedge \cdots \wedge da_{k-1}) \\
&= \frac{1}{p!} da_0 \wedge da_1 \wedge \cdots \wedge da_n
\end{aligned}$$

而另一方面，

$$d \circ \Phi(a_0 \otimes \overline{a_1} \otimes \cdots \otimes \overline{a_p}) = \frac{1}{p!} d(a_0 da_1 \wedge \cdots \wedge da_p) = \frac{1}{p!} da_0 \wedge da_1 \wedge \cdots \wedge da_p$$

从而得证。 □

由此引理，我们即可去计算  $A := K[x^1, x^2, \dots, x^n]$  的循环同调。

**性质 1.8.4.** 对于  $A := K[x^1, x^2, \dots, x^n]$ ，则其循环同调

$$H_n^\lambda(A) \cong \begin{cases} (\Omega_A^n / d\Omega_A^{n-1}) \oplus K & n \text{ 为偶数} \\ \Omega_A^n / d\Omega_A^{n-1} & n \text{ 为奇数} \end{cases}$$



证明. 事实上, 刚才的引理 1.8.3 表明,  $\Phi$  诱导以下两个双复形之间的态射:

$$\begin{array}{ccc}
 \vdots & \vdots & \vdots \\
 \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
 \overline{C}_2(A) & \xleftarrow{\mathcal{B}} \overline{C}_1(A) & \xleftarrow{\mathcal{B}} \overline{C}_0(A) \\
 \downarrow b & \downarrow b & \\
 \overline{C}_1(A) & \xleftarrow{\mathcal{B}} \overline{C}_0(A) & \\
 \downarrow b & & \\
 \overline{C}_0(A) & & 
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 \vdots & \vdots & \vdots \\
 \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
 \Omega_A^2 & \xleftarrow{d} \Omega_A^1 & \xleftarrow{d} \Omega_A^0 \\
 \downarrow 0 & \downarrow 0 & \\
 \Omega_A^1 & \xleftarrow{d} \Omega_A^0 & \\
 \downarrow 0 & & \\
 \Omega_A^0 & & 
 \end{array}$$

(按村儿里的规矩, 此处应该有立方交换图)

其中左边为  $\overline{\mathcal{B}}_{\bullet\bullet}(A)$ , 而右边的每一行均为 de-Rham 上链复形, 每一列的边缘算子都为零。注意到  $\Phi$  是满射, 以及我们早已用 Koszul 复形得到的

$$H_n(\overline{C}_{\bullet}(A)) \cong HH_n(A) \cong \Omega_A^n \cong H_n(\Omega_A^{\bullet}, 0)$$

从而双复形同态  $\Phi$  限制在每一列上都为拟同构, 于是由引理 1.6.3, 立刻知道

$$\Phi : \text{Tot}_{\bullet}(\overline{\mathcal{B}}_{\bullet\bullet}(A), b, \mathcal{B}) \rightarrow \text{Tot}_{\bullet}(\Omega_A^{\bullet}, 0, d)$$

为拟同构。上式左边的同调即为  $A$  的循环同调, 而右边的同调可以直接计算。只需要注意到 (Poincare 引理) de-Rham 复形

$$\dots \xrightarrow{d} \Omega^{\bullet}(A) \xrightarrow{d} \Omega^{\bullet}(A) \xrightarrow{d} \Omega^{\bullet}(A) \rightarrow 0$$

的 (上) 同调满足

$$H^n(\Omega_A^{\bullet}, d) = \begin{cases} K & n = 0 \\ 0 & n > 0 \end{cases}$$

因此容易计算出

$$H_n^{\lambda}(A) \cong \begin{cases} (\Omega_A^n / d\Omega_A^{n-1}) \oplus K & n \text{ 为偶数} \\ \Omega_A^n / d\Omega_A^{n-1} & n \text{ 为奇数} \end{cases}$$

□

注记 1.8.5. 容易知道, Connes 算子

$$\mathcal{B} : \overline{C}_n(A) \rightarrow \overline{C}_{n+1}(A)$$

在  $\ker b$  上的限制, 可以下降为 Hochschild 同调之间的同态

$$\mathcal{B} : HH_n(A) \rightarrow HH_{n+1}(A)$$

Hochschild 同调扮演的角色相当于微分形式，而此时 Connes 算子扮演的则是外微分。

**注记 1.8.6.** 双复形满同态

$$\Phi : (\overline{\mathcal{B}}_{\bullet\bullet}(A), b, \mathcal{B}) \twoheadrightarrow (\Omega_A^\bullet, 0, d)$$

其实是可裂 (*split*) 的。具体地，存在双复形同态

$$\begin{aligned} \eta : \Omega^\bullet(A) &\rightarrow \overline{\mathcal{C}}_\bullet(A) \\ a_0 da_1 \wedge da_2 \wedge \cdots \wedge da_p &\mapsto \sum_{\sigma \in S_p} (-1)^{\text{sgn } \sigma} a_0 \otimes a_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes a_{\sigma(p)} \end{aligned}$$

使得  $\Phi \circ \eta = \text{id}$ .

容易验证 (简单的组合技巧)  $\eta$  的确诱导了双复形同态

$$\eta : (\Omega_A^\bullet, 0, d) \rightarrow (\overline{\mathcal{B}}_{\bullet\bullet}(A), b, \mathcal{B})$$

## 1.9 循环上同调

本章最后，简单介绍一下循环上同调 (Cyclic cohomology)。对于双  $A$ -模  $M$ ，回顾我们之前已经介绍的 Hochschild 上链复形

$$C^n(A, M) := \text{Hom}(A^{\otimes n}, M)$$

特别地，当  $M = A$  时，我们给出以下记号：

**记号 1.9.1.** 对于  $K$ -代数  $A$ ，以及  $n \geq 0$ ，我们记 *Hochschild* 上链复形

$$C^n(A) := C^n(A, A) \cong \text{Hom}(A^{\otimes n}, A) \cong \text{Hom}(A^{\otimes n+1}, K)$$

并且将该 *Hochschild* 上链复形的微分算子记为  $b^*$ 。

我们此前考虑同构  $C_n(A) \cong A^{\otimes n+1}$ ，而 Hochschild 上链复形  $C^n(A) \cong \text{Hom}(A^{\otimes n+1}, K)$  恰为其对偶；微分算子  $b^*$  的作用即为  $b$  的对偶：即对任意  $f \in C^n(A) \cong \text{Hom}(A^{\otimes n+1}, K)$  以及  $\omega \in A^{\otimes n+2} \cong C_{n+1}(A)$ ，成立

$$(b^* f)(\omega) = f(b(\omega))$$

与循环余不变量对偶，我们可以谈论循环不变量：

**定义 1.9.2.** (循环不变量)

对于  $f \in C^n(A)$ , 称  $f$  为循环不变量 (cyclic invariant), 如果对任意的  $a_0, \dots, a_n \in A$ , 成立

$$f(a_0, a_1, \dots, a_n) = (-1)^n f(a_n, a_0, \dots, a_{n-1})$$

记  $C^n(A)$  当中的循环不变量之全体为  $C_\lambda^n(A)$ .

容易验证  $b^*(C_\lambda^n(A)) \subseteq C_\lambda^{n+1}(A)$ , 从而  $(C_\lambda^\bullet(A), b^*)$  为  $(C^\bullet(A), b^*)$  的子复形。(不必暴力验证了, 由循环余不变量对偶过去就行) 看图说话即可:

$$\begin{array}{ccccccc}
 \cdots & \longrightarrow & C_n(A) & \xrightarrow{b'} & C_{n-1}(A) & \longrightarrow & \cdots \\
 & & \downarrow 1-\lambda & & \downarrow 1-\lambda & & \\
 \cdots & \longrightarrow & C_n(A) & \xrightarrow{b} & C_{n-1}(A) & \longrightarrow & \cdots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 \cdots & \longrightarrow & C_n^\lambda(A) & \longrightarrow & C_{n-1}^\lambda(A) & \longrightarrow & \cdots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & & 
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccccccc}
 \cdots & \longleftarrow & C^n(A) & \xleftarrow{b'^*} & C^{n-1}(A) & \longleftarrow & \cdots \\
 & & \uparrow 1-\lambda^* & & \uparrow 1-\lambda^* & & \\
 \cdots & \longleftarrow & C^n(A) & \xleftarrow{b^*} & C^{n-1}(A) & \longleftarrow & \cdots \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \\
 \cdots & \longleftarrow & C_\lambda^n(A) & \longleftarrow & C_\lambda^{n-1}(A) & \longleftarrow & \cdots \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \\
 & & 0 & & 0 & & 
 \end{array}$$

左图我们早已熟悉, 注意它的每一列都是右正合的。将反变左正合函子  $\text{Hom}(-, K)$  作用于左图即得到右图, 右图的每一列都是左正合的。

**定义 1.9.3.** (循环上同调) 对于  $K$ -代数  $A$  定义  $A$  的循环上同调 (cyclic cohomology)

$$H_\lambda^\bullet(A) := \text{HC}^\bullet(A) := H^\bullet(C_\lambda^\bullet(A), d^*)$$

作为例子, 我们具体计算一下第零个循环上同调。

**例子 1.9.4.** 对于  $K$ -代数  $A$ , 则有

$$H_\lambda^0(A) = \{f \in \text{Hom}(A, K) \mid \forall x, y \in A, f(xy) = f(yx)\}$$

证明. 直接计算即可。只需考虑 Hochschild 上链复形

$$0 \rightarrow C_\lambda^0(A) \xrightarrow{b^*} C_\lambda^1(A) \xrightarrow{b^*} C_\lambda^2(A) \rightarrow \cdots$$

易知  $C_\lambda^0(A) = C^0(A) = \text{Hom}(A, K)$ , 从而

$$H_\lambda^0(A) = \ker(b^* : C^0(A) \rightarrow C^1(A))$$

对于  $f \in \text{Hom}(A, K)$ , 若  $b^*f = 0$ , 则对于任意  $x, y \in A$ , 有

$$0 = (b^*f)(x, y) = f(b(x \otimes y)) = f(xy - yx) = f(xy) - f(yx)$$

从而可知

$$H_\lambda^0(A) = \{f \in \text{Hom}(A, K) | \forall x, y \in A, f(xy) = f(yx)\}$$

□

像  $H_\lambda^0(A)$  当中的线性算子那样, 满足

$$f(xy) = f(yx) \quad (\forall x, y \in A)$$

的线性算子称之为**迹算子**。

高阶的循环上同调可被认为是“导出的”迹算子。

## 第2章 乘积

### 2.1 分次模与 Koszul 符号法则

本节我们集中起来澄清一些关于分次模、分次代数的概念，并且力图阐明分次代数中出现的正负号。这里的“分次”如不加说明，指的都是  $\mathbb{Z}$ -分次。

首先我们考虑分次  $K$ -模。

**定义 2.1.1.** (分次  $K$ -模范畴)

(1) 称  $K$ -模  $M$  为  $(\mathbb{Z}-)$  分次  $K$ -模 (*graded  $K$ -module*), 若  $M$  具有如下分次结构:

$$M = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} M_k$$

(2) 若  $M, N$  为分次  $K$ -模, 称  $K$ -模同态  $f: M \rightarrow N$  为次数为  $d$  的齐次  $K$ -模同态, 若对于任意  $n \in \mathbb{Z}$ , 成立

$$f(M_n) \subseteq N_{n+d}$$

对于分次代数, 我们可以定义齐次元, 以及齐次元的次数, 不再赘述。对于齐次元  $a \in A$ , 将  $a$  的次数记为  $\deg a$ , 或者简记为  $|a|$ .

平凡的例子: 通常的  $K$ -模自然有分次  $K$ -模结构——只需将该模中的任何元素都认为是 0 次齐次元。

我们还可以谈论以分次  $K$ -模为对象的范畴:

**记号 2.1.2.** (分次  $K$ -模范畴) 对于分次  $K$ -模  $M, N$ , 对任意  $d \in \mathbb{Z}$ , 记

$$\mathrm{Hom}(M, N)_d := \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \mathrm{Hom}(M_n, N_{n+d})$$

即次数为  $d$  的分次  $K$  模同态之全体。再记

$$\mathrm{Hom}(M, N) := \bigoplus_{d \in \mathbb{Z}} \mathrm{Hom}(M, N)_d$$

称这里面的元素为分次  $K$ -模同态。

我们考虑如下分次  $K$ -模范畴，记为  $\text{Mod}_K^{\mathbb{Z}}$ ：

- (1)  $\text{Obj} =$  全体分次  $K$ -模；
- (2)  $\text{Mor}(M, N) = \text{Hom}(M, N)$  为分次  $K$ -模同态。

注意对任何分次  $K$ -模  $M, N$ ， $\text{Hom}(M, N)$  自然有分次  $K$ -模结构，其中的  $d$  次齐次元即为  $M$  到  $N$  的次数为  $d$  的齐次同态。

对于两个分次  $K$ -模，它们作为  $K$ -模的张量积，也有自然的分次结构：

**定义 2.1.3.** (分次  $K$ -模的张量积) 对于分次  $K$ -模  $M, N$ ，则张量积  $M \otimes N$  自然有如下分次结构：

$$M \otimes N = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} (M \otimes N)_k$$

其中

$$(M \otimes N)_k := \bigoplus_{\substack{p, q \in \mathbb{Z} \\ p+q=k}} M_p \otimes N_q$$

容易验证这给出了  $M \otimes N$  的分次  $K$ -模结构。

**定义 2.1.4.** 对于分次  $K$ -模  $M, N$ ，定义如下分次  $K$ -模同态：

$$\begin{aligned} \tau : M \otimes N &\rightarrow N \otimes M \\ x \otimes y &\mapsto (-1)^{\deg x \deg y} y \otimes x \end{aligned}$$

其中  $x, y$  分别为  $M, N$  中的任意的齐次元。

这是一个次数为 0 的齐次  $K$ -模同构，称之为分次对合自同构。注意这里的正负号。

**记号 2.1.5.** ( $Koszul$  符号法则)

设  $M, M', N, N'$  均为分次  $K$ -模，则自然有如下的分次  $K$ -模同态：

$$\begin{aligned} \text{Hom}(M, N) \otimes \text{Hom}(M', N') &\rightarrow \text{Hom}(M \otimes M', N \otimes N') \\ (f \otimes g)(m \otimes m') &:= (-1)^{\deg g \deg m} f(m) \otimes g(m') \end{aligned}$$

其中  $f, g, m, m'$  分别为  $\text{Hom}(M, N), \text{Hom}(M', N'), M, M'$  当中的任意齐次元。

依然注意正负号。以后我们总是默认  $f \otimes g$  在  $m \otimes m'$  上如此作用。  
我们还可以定义分次  $K$ -模的对偶模（与通常的对偶模仍然在正负号上有些区别）：

**定义 2.1.6.**（分次对偶模）对于分次  $K$ -模  $M$ ，定义

$$M^* := \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} M_n^*$$

其中

$$M_n^* := \text{Hom}(M_{-n}, \mathbb{Z})$$

易知  $M^*$  具有分次  $K$ -模结构，并且有自然的配对

$$M_n^* \times M_{-n} \rightarrow K$$

**注记 2.1.7.**（分次  $K$ -模上链复形）对于分次  $K$ -模  $C$ ，以及  $d \in \text{Hom}(C, C)_1$ ，即次数为 1 的齐次同态。如果  $d \circ d = 0$ ，则自然有  $K$ -模上链复形：

$$\cdots \rightarrow C_{-1} \xrightarrow{d} C_0 \xrightarrow{d} C_1 \xrightarrow{d} C_2 \rightarrow \cdots$$

这是我们在同调代数当中早已熟知的。我们以后就将上链复形与带有  $d$  的分次  $K$ -模等同。本节我们采用上链复形的语言（即  $\deg d = 1$ ），链复形（ $\deg \partial = -1$ ）的情形完全类似。

这里讲到的“上链复形”，与通常同调代数当中的上链复形在各种操作上都会可能相差正负号；为了区分，我们称这里的“上链复形”为“分次上链复形”。

我们还可以考虑分次上链复形  $(C_\bullet, d)$  的分次对偶，仍为分次上链复形：

$$\cdots \rightarrow C_{-1}^* \xrightarrow{d^*} C_0^* \xrightarrow{d^*} C_1^* \xrightarrow{d^*} C_2^* \rightarrow \cdots$$

**定义 2.1.8.**（分次上链复形的平移）对于分次  $K$ -模上链复形  $(C_\bullet, d)$ ，定义分次上链复形  $(C_\bullet[1], d_{[1]})$  如下：

$$(C_\bullet[1])_n := C_{n+1}$$

并且微分算子  $d_{[1]}$  使得下图交换：

$$\begin{array}{ccc} (C[1])_n & \xrightarrow{d_{[1]}} & (C[1])_{n+1} \\ \parallel & & \parallel \\ C_{n+1} & \xrightarrow{-d} & C_{n+2} \end{array}$$

注意  $d_{[1]}$  当中的负号。类似地，对任意  $l \in \mathbb{Z}$ ，可以去定义  $l$ -平移  $(C[l]_{\bullet}, d_{[l]})$ ，特别注意符号

$$d_{[l]} = (-1)^l d$$

对于一般的分次  $K$ -模，我们也可以考虑其平移，这无非是重新规定齐次元的次数。

**定义 2.1.9.** (分次上链复形的张量积)

对于分次上链复形  $(C_{\bullet}, d_C)$  与  $(D_{\bullet}, d_D)$ ，定义  $(C \otimes D)_{\bullet}$  的分次上链复形结构  $d$  如下：

$$\begin{aligned} d : C_p \otimes D_q &\rightarrow C_{p+1} \otimes D_q \oplus C_p \otimes D_{q+1} \\ d &= d_C \otimes 1 + (-1)^p 1 \otimes d_D \end{aligned}$$

仍然要注意正负号。容易验证  $d \circ d = 0$ ，从而  $((C \otimes D)_{\bullet}, d)$  确实为分次上链复形。对于分次  $K$ -模，我们仍可以谈论对称张量、反对称张量：

**定义 2.1.10.** 设  $V$  为分次  $K$ -模，对任意  $m \geq 0$ ，

(1) 定义  $m$  阶超对称张量空间如下：

$$\text{Sym}^m(V) = V^{\otimes m} / \sim$$

其中等价关系  $\sim$  由以下生成：对任意齐次元  $\alpha, \beta \in V$ ，

$$\alpha \otimes \beta \sim (-1)^{\deg \alpha \deg \beta} \beta \otimes \alpha$$

(2) 定义  $m$  阶超反称张量空间如下：

$$\bigwedge^m(V) := V^{\otimes m} / \sim$$

其中等价关系  $\sim$  由以下生成：对任意齐次元  $\alpha, \beta \in V$ ，

$$\alpha \otimes \beta \sim -(-1)^{\deg \alpha \deg \beta} \beta \otimes \alpha$$

若  $V = V_0$  为通常的  $K$ -模，则  $\text{Sym}^n(V_0)$  与  $\bigwedge^n(V_0)$  即为通常的对称张量、外张量。对于分次  $K$ -模  $V$ ，以及任意的  $m \geq 0$ ， $\text{Sym}^m(V)$  有以下自然的分次  $K$ -模结构：

$$\text{Sym}^m(V) = \bigoplus_{d \in \mathbb{Z}} [\text{Sym}^m(V)]_d$$



$$[\mathrm{Sym}^m(V)]_d := \mathrm{span}_K \left\{ v_1 \odot v_2 \odot \cdots \odot v_m \mid \sum_{i=1}^m \deg v_i = d \right\}$$

超反称张量空间  $\wedge^m(V)$  也有完全类似的分次  $K$ -模结构。

回顾分次  $K$ -模的平移，以下结果十分重要：

**性质 2.1.11.** 对于分次  $K$ -模  $V$ ，以及任意  $n \geq 0$ ，则有分次  $K$ -模同构：

$$\mathrm{Sym}^n(V[1]) \cong (\wedge^n(V))[n]$$

证明. 对于任意  $d \in \mathbb{Z}$ ，首先看看它们的齐次分量  $(\mathrm{Sym}^n(V[1]))_d$  与  $((\wedge^n(V))[n])_d$  中的元素具有何种形式。我们用  $v_1, \dots, v_n$  表示  $V$  中的  $d_1, \dots, d_n$  次齐次元，根据定义容易验证

$$(\mathrm{Sym}^n(V[1]))_d = \mathrm{span}_K \{ v_1 \odot v_2 \odot \cdots \odot v_n \mid d_1 + d_2 + \cdots + d_n = n + d \}$$

$$((\wedge^n(V))[n])_d = \mathrm{span}_K \{ v_1 \wedge v_2 \wedge \cdots \wedge v_n \mid d_1 + d_2 + \cdots + d_n = n + d \}$$

从而它们都为  $(V^{\otimes n})_{n+d}$  的商模。

考虑  $K$ -模自同构

$$\begin{aligned} \Phi_{n,d} : (V^{\otimes n})_{n+d} &\rightarrow (V^{\otimes n})_{n+d} \\ v_1 \otimes v_2 \otimes \cdots \otimes v_n &\mapsto (-1)^{d_1+2d_2+\cdots+nd_n} v_1 \otimes v_2 \otimes \cdots \otimes v_n \end{aligned}$$

断言该自同构  $\Phi_{n,d}$  诱导了模同构

$$\begin{aligned} \varphi_{n,d} : (\mathrm{Sym}^n(V[1]))_d &\rightarrow ((\wedge^n(V))[n])_d \\ v_1 \odot v_2 \odot \cdots \odot v_n &\mapsto (-1)^{d_1+2d_2+\cdots+nd_n} v_1 \wedge v_2 \wedge \cdots \wedge v_n \end{aligned}$$

为此，只需要验证  $\varphi_{n,d}$  的良好性（与代表元选取无关）。若  $\varphi_{n,d}$  良定，则容易构造其逆映射，进而命题得证。

特别注意， $\mathrm{Sym}^n(V[1])$  作为  $V^{\otimes n}$  的商模，商掉的等价关系由

$$x \otimes y \sim (-1)^{(\deg x - 1)(\deg y - 1)} y \otimes x$$

生成，这直接由定义验证（**要特别小心**）；而  $(\wedge^n(V))[n]$  作为  $V^{\otimes n}$  的商模，商掉的等价关系由

$$x \otimes y \sim -(-1)^{\deg x \deg y} y \otimes x$$

生成。于是只需验证对任意  $1 \leq l \leq n_1$ ，成立

$$\Phi_{n,d} \left( \cdots (v_l \otimes v_{l+1} - (-1)^{(d_l-1)(d_{l+1}-1)} v_{l+1} \otimes v_l) \cdots \right)$$

$$\begin{aligned}
&= (-1)^{\sum_{i=1}^n id_i} \left( \cdots (v_l \otimes v_{l+1} - (-1)^{(d_l-1)(d_{l+1}-1)-d_{l+1}+d_l} v_{l+1} \otimes v_l) \cdots \right) \\
&= (-1)^{\sum_{i=1}^n id_i} \left( \cdots (v_l \otimes v_{l+1} + (-1)^{d_l d_{l+1}} v_{l+1} \otimes v_l) \cdots \right) \\
&\equiv 0 \in ((\bigwedge^n(V))[n])_d
\end{aligned}$$

□

## 2.2 分次代数与分次李代数

**定义 2.2.1.** (分次结合代数) 对于结合  $K$ -代数  $A$ :

(1) 称  $A$  为  $(\mathbb{Z}-)$  分次结合代数 (associative graded algebra), 若  $A$  具有分次  $K$ -模结构:

$$A = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} A_n$$

并且与乘法相容: 对任意  $k, l \in \mathbb{Z}$ , 有

$$A_k \cdot A_l \subseteq A_{k+l}$$

(2) 若  $A$  为分次结合代数, 称  $A$  为分次交换代数, 若  $A$  还满足以下分次交换性: 对任意  $a_k \in A_k, a_l \in A_l$ ,

$$a_k \cdot a_l = (-1)^{kl} a_l \cdot a_k$$

特别注意分次交换性的正负号。分次交换代数的典型例子是, 光滑流形  $X$  上的微分形式  $\Omega_X^\bullet$ , 配以外积运算  $\wedge$ 。

不过注意, 多项式代数  $K[x^1, \dots, x^n]$  自然有分次结构, 是分次代数, 但它不满足分次交换性。  
(仅仅是“交换的分次代数” 23333)

**定义 2.2.2.** (分次李代数)

$K$ -代数  $(\mathfrak{g}, [\cdot, \cdot])$  称为分次李代数 (graded Lie algebra), 或者李超代数 (Lie super algebra), 如果以下满足:

(1)  $\mathfrak{g}$  具有分次  $\mathfrak{g} = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} \mathfrak{g}_k$ , 使得对任意  $k, l \in \mathbb{Z}$ , 成立

$$[\mathfrak{g}_k, \mathfrak{g}_l] \subseteq \mathfrak{g}_{k+l}$$

(2) 乘法  $[\cdot, \cdot]: \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$  满足如下分次反交换性: 对  $A$  中任意齐次元  $a, b$ , 成立

$$[a, b] = -(-1)^{\deg a \deg b} [b, a]$$

(3) 对于  $A$  中任何齐次元  $a, b, c$ , 成立如下分次雅可比恒等式:

$$(-1)^{\deg b \deg c} [c, [a, b]] + (-1)^{\deg c \deg a} [a, [b, c]] + (-1)^{\deg a \deg b} [b, [c, a]] = 0$$

我们可以将“分次”(graded)与“超”(super)进行同义词替换, 比如“分次雅可比恒等式”也可以称为“超雅可比恒等式”, “分次交换性”可以称为“超交换性”等等, 甚至将“分次线性空间”称为“超空间”。

容易验证, 超雅可比恒等式也可以改写为:

$$[c, [a, b]] = [c, [a, b]] + (-1)^{\deg a \deg c} [a, [c, b]]$$

也容易验证, 对于李超代数  $(A, [\cdot, \cdot])$ , 则  $[\cdot, \cdot]$  在  $A$  的零次分量  $A_0$  的限制, 给出了  $A_0$  的李代数结构。回顾李代数的情形, 李括号的雅可比恒等式反映了某种导子性质; 而李超代数完全类似, 上述超雅可比恒等式其实表明某种“超导子”性质。

**记号 2.2.3.** 为了省事, 我们引入一个记号约定: 对于分次代数或者分次李代数 (以及后文将介绍的分次模), 若  $a$  为其次元, 我们简记

$$(-1)^a := (-1)^{\deg a}$$

也就是说,  $(-1)$  的幂次当中出现齐次元的次数时, 省略“deg”。

例如, 李超代数的超雅可比恒等式可简记为

$$(-1)^{bc} [c, [a, b]] + (-1)^{ca} [a, [b, c]] + (-1)^{ab} [b, [c, a]] = 0$$

或者

$$[c, [a, b]] = [c, [a, b]] + (-1)^{ac} [a, [c, b]]$$

**引理 2.2.4.** (分次结合代数诱导分次李代数)

设  $(A, \cdot)$  为分次结合代数, 则其乘法自然诱导出  $A$  的分次李代数结构如下: 定义

$$\begin{aligned} [\cdot, \cdot] : A \times A &\rightarrow A \\ [a, b] &:= a \cdot b - (-1)^{ab} b \cdot a \end{aligned}$$

其中任意  $a, b \in A$  为齐次元。则  $(A, [\cdot, \cdot])$  构成分次李代数, 并且与  $(A, \cdot)$  具有相同的分次。

这与由通常的结合代数通过“对易子”得到李代数的方式类似，不过要稍微注意正负号。

证明. 直接暴力验证即可，从略。注意这里的

$$(-1)^{ab} := (-1)^{\deg a \deg b} = (-1)^{ba}$$

为偷懒的记号。 □

我们可以考虑以分次  $K$ -代数的范畴：

**定义 2.2.5.** (分次结合代数范畴)

我们定义如下的分次结合  $K$ -代数范畴，记为  $\text{Ass-}\mathbf{alg}_K^{\mathbb{Z}}$ ：

- (1)  $\text{Obj} =$  全体分次结合  $K$ -代数；
- (2)  $\text{Mor}$ : 对任意两个分次结合  $K$ -代数  $A, B$ ,

$$\text{Hom}(A, B) := \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} (\text{Hom}(A, B))_n$$

其中

$$(\text{Hom}(A, B))_n := \{f \text{ 为 } K\text{-代数同态} \mid f(A_d) \subseteq B_{d+n} \forall d \in \mathbb{Z}\}$$

$(\text{Hom}(A, B))_n$  当中的元素称之为  $n$  次齐次  $K$ -代数同态。

类似地，考虑分次交换代数范畴，它是分次结合代数范畴的全子范畴，记为

$$\text{Commu-}\mathbf{alg}_K^{\mathbb{Z}}$$

**定义 2.2.6.** (分次双  $A$ -模)

设  $A = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} A_n$  为分次结合  $K$ -代数， $M$  为双  $A$ -模，称  $M$  为分次双  $A$ -模，若  $M$  配以分次  $K$ -模结构

$$M = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} M_n$$

并且与  $A$  的模作用相容：对任意  $p, q \in \mathbb{Z}$ ,

$$A_p \cdot M_q \subseteq M_{p+q}$$

$$M_p \cdot A_q \subseteq M_{p+q}$$

然后对于两个分次双  $A$ -模  $M, N$ ，也可以定义何为“分次双  $A$ -模同态”，并且从  $M$  到  $N$  的分次双  $A$ -模同态之全体，亦有自然的分次双  $A$ -模结构。

特别地，对于分次  $K$ -代数  $A$ ， $A$  自身有自然的分次双  $A$ -模结构。

**定义 2.2.7.** (导子) 对于分次  $K$ -代数  $A$ ，以及分次双  $A$ -模  $M$ ，称  $K$ -线性同态

$$D : A \rightarrow M$$

为  $A$  的一个取值于  $M$  的导子，若对  $A$  中的任何齐次元  $a, b$ ，成立

$$D(ab) = D(a).b + (-1)^a a.D(b)$$

我们将  $A$  的取值于  $M$  的导子之全体记为  $\text{Der}_0(A, M)$ 。

这个定义当中并没有用到  $M$  的分次。事实上对于一般的双  $A$ -模  $M$ ，我们都可以如此谈论  $\text{Der}_0(A, M)$ 。

导子的作用可以用如下交换图描述：

$$\begin{array}{ccc} A \otimes A & \xrightarrow{m} & A \\ \downarrow 1 \otimes D + D \otimes 1 & & \downarrow D \\ A \otimes M \oplus M \otimes A & \xrightarrow{m} & M \end{array}$$

其中  $m$  表示  $A$  中的乘法，然后特别注意  $1 \otimes D$  以及  $D \otimes 1$  在  $A \otimes A$  上的作用服从 **Koszul 符号法则**（回顾记号 2.1.5）。

**定义 2.2.8.** (超导子)

对于分次  $K$  代数  $A$  以及  $d \in \mathbb{Z}$ ，称次数为  $d$  的分次  $K$ -模同态

$$D : A \rightarrow A$$

为次数为  $d$  的超导子，若满足如下的超莱布尼茨法则：对  $A$  中任何齐次元  $a, b$ ，成立

$$D(ab) = D(a)b + (-1)^{d \cdot \deg a} aD(b)$$

记次数为  $d$  的超导子之全体为  $\text{Der}(A, A)_d$ ，并且记

$$\text{Der}(A, A) := \bigoplus_{d \in \mathbb{Z}} \text{Der}(A, A)_d$$

易知  $\text{Der}(A, A)$  有自然的分次  $K$ -模结构。超导子  $D$  的作用可由如下交换图来描述：

$$\begin{array}{ccc} A \otimes A & \xrightarrow{D \otimes 1 + 1 \otimes D} & A \otimes A \\ \downarrow m & & \downarrow m \\ A & \xrightarrow{D} & A \end{array}$$

**注记 2.2.9.** (微分分次代数) 对于  $K$ -代数  $A$ ，以及次数为 1 的超导子  $d \in \text{Der}(A, A)_1$ ，如果  $d^2 = 0$ ，则  $(A, d)$  正是我们在之前 (见定义 1.4.5) 定义的分次微分代数。

分次微分代数  $(A, d)$  自然可视为分次上链复形。当然我们也可以考虑次数为  $-1$  的超导子，亦可定义出类似版本的分次微分代数 (不过我们更推荐使用上链复形的语言)。

**引理 2.2.10.** (由超导子构成的李超代数)

对于分次  $K$ -代数  $A$ ，若  $D_1, D_2 \in \text{Der}(A, A)$  为齐次的超导子，定义

$$[D_1, D_2] := D_1 \circ D_2 - (-1)^{D_1 D_2} D_2 \circ D_1$$

则  $[D_1, D_2]$  是次数为  $\deg D_1 + \deg D_2$  的超导子。从而我们定义了

$$[, ] : \text{Der}(A, A) \times \text{Der}(A, A) \rightarrow \text{Der}(A, A)$$

使得  $(\text{Der}(A, A), [,])$  为李超代数。

**证明.** 对于齐次超导子  $D_1, D_2$ ，只需要验证  $[D_1, D_2]$  仍然是超导子，然后由引理 2.2.4 即可知  $(\text{Der}(A, A), [,])$  为李超代数。

暴力验证之 (还是写一下过程吧)，对  $A$  中任意齐次元  $a_1, a_2$ ，有

$$\begin{aligned} [D_1, D_2](a_1 a_2) &= (D_1 D_2 - (-1)^{D_1 D_2})(a_1 a_2) \\ &= D_1(D_2(a_1)a_2 + (-1)^{a_1 D_2} a_1 D_2(a_2)) \\ &\quad - (-1)^{D_1 D_2} D_2(D_1(a_1)a_2 + (-1)^{a_1 D_1} a_1 D_1(a_2)) \\ &= D_1 D_2(a_1)a_2 + (-1)^{D_1(a_1+D_2)} D_2(a_1) D_1(a_2) \\ &\quad + (-1)^{a_1 D_2} [D_1(a_1) D_2(a_2) + (-1)^{a_1 D_1} a_1 D_1 D_2(a_2)] \\ &\quad - (-1)^{D_1 D_2} [D_2 D_1(a_1)a_2 + (-1)^{D_2(D_1+a_1)} D_1(a_1) D_2(a_2) \\ &\quad + (-1)^{a_1 D_1} (D_2(a_1) D_1(a_2) + (-1)^{D_2 a_1} a_1 D_2 D_1(a_2))] \\ &= [D_1 D_2 - (-1)^{D_1 D_2} D_2 D_1](a_1) a_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + (-1)^{a_1(D_1+D_2)} a_2 [D_1 D_2 - (-1)^{D_1 D_2} D_2 D_1] (a_2) \\
& = [D_1, D_2] (a_1) a_2 + (-1)^{a_1(D_1+D_2)} a_1 [D_1, D_2] (a_2)
\end{aligned}$$

可见  $[D_1, D_2]$  确实是次数为  $(\deg D_1 + \deg D_2)$  的超导子，证毕。  $\square$

最后简要介绍一下函子性：我们有遗忘函子

$$\begin{aligned}
\text{Ass-}\mathbf{alg}_K^{\mathbb{Z}} & \rightarrow \mathbf{Mod}_K^{\mathbb{Z}} \\
\text{Commu-}\mathbf{alg}_K^{\mathbb{Z}} & \rightarrow \mathbf{Mod}_K^{\mathbb{Z}}
\end{aligned}$$

我们考虑该函子的左伴随“自由分次结合代数”以及“自由分次交换代数”，即范畴论当中的“普遍真理”（呵呵呵呵呵呵）：

## 自由是遗忘的左伴随

**定义 2.2.11.** （张量代数 or 自由分次结合代数）

设  $V$  为分次  $K$ -模，定义分次  $K$ -模

$$T(V) := \bigoplus_{n \geq 0} V^{\otimes n}$$

其中  $V^{\otimes 0} := K$ ；并且张量积“ $\otimes$ ”给出了  $T(V)$  的乘法结构：

$$(v_1 \otimes \cdots \otimes v_p) \otimes (v_{p+1} \otimes \cdots \otimes v_{p+q}) = v_1 \otimes \cdots \otimes v_{p+q}$$

从而使得  $(T(V), \otimes)$  为分次结合代数，称之为由  $V$  生成的自由分次结合代数。

这的确是一种非常“自由”的构造方式。并且容易验证  $T$  的函子性：

$$\begin{aligned}
T : \mathbf{Mod}_K^{\mathbb{Z}} & \rightarrow \mathbf{Ass-}\mathbf{alg}_K^{\mathbb{Z}} \\
V & \mapsto T(V)
\end{aligned}$$

同样，我们可以考虑自由生成的分次交换代数：

**定义 2.2.12.** （自由分次交换代数）

设  $V$  为分次  $K$ -模，定义分次  $K$ -模

$$\text{Sym}(V) := \bigoplus_{n \geq 0} \text{Sym}^n(V)$$

其中  $\text{Sym}^0(V) := K$ ；并且对称张量积 “ $\odot$ ” 给出了  $\text{Sym}(V)$  的乘法结构：

$$(v_1 \odot \cdots \odot v_p) \odot (v_{p+1} \odot \cdots \odot v_{p+q}) = v_1 \odot \cdots \odot v_{p+q}$$

从而使得  $(\text{Sym}(V), \odot)$  为分次结合代数，称之为由  $V$  生成的自由分次交换代数。

也容易验证  $\text{Sym}$  的函子性：

$$\begin{aligned} \text{Sym} : \text{Mod}_K^{\mathbb{Z}} &\rightarrow \text{Commu-alg}_K^{\mathbb{Z}} \\ V &\mapsto \text{Sym}(V) \end{aligned}$$

**性质 2.2.13.** (伴随对) 对于任意分次  $K$ -模  $V$ ，以及分次结合  $K$ -代数  $A$ 、分次交换  $K$ -代数  $B$ ，注意  $A, B$  首先是分次  $K$ -模：

(1) 存在 (关于  $V, A$ ) 自然的一一对应

$$\text{Hom}_{\text{Mod}_K^{\mathbb{Z}}}(V, A) \cong \text{Hom}_{\text{Ass-alg}_K^{\mathbb{Z}}}(T(V), A)$$

(2) 存在 (关于  $V, B$ ) 自然的一一对应

$$\text{Hom}_{\text{Mod}_K^{\mathbb{Z}}}(V, B) \cong \text{Hom}_{\text{Commu-alg}_K^{\mathbb{Z}}}(\text{Sym}(V), B)$$

证明. 易证，从略。 □

用范畴论的语言，此性质表明，函子  $T$  与  $\text{Sym}$  分别为相应的遗忘函子的左伴随。或者还可以表述为如下泛性质，看图即可：

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\quad} & T(V) \\ & \searrow \forall f & \downarrow \exists! \\ & & A \end{array} \quad \begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\quad} & \text{Sym}(V) \\ & \searrow \forall f & \downarrow \exists! \\ & & B \end{array}$$

**性质 2.2.14.** 设  $V$  为分次  $K$ -模， $M$  为  $K$ -模，则有一一对应

$$\text{Der}_0(T(V), M) \cong \text{Hom}_K(V, M)$$

证明. 这个也几乎显然，从略。 □



## 2.3 余代数与分次余代数

首先简要回顾一下余代数（co-algebra）的概念。对于  $K$ -代数  $A$ ， $A$  上的乘法  $m: A \otimes A \rightarrow A$  的结合性可用如下交换图来描述：

$$\begin{array}{ccc}
 A \otimes A \otimes A & \xrightarrow{m \otimes 1} & A \otimes A \\
 \downarrow 1 \otimes m & & \downarrow m \\
 A \otimes A & \xrightarrow{m} & A
 \end{array}$$

将上述图表中的箭头全部反向，即得到余结合律的概念：对于  $K$ -模  $A$ ，以及  $K$ -模同态  $\Delta: A \rightarrow A \otimes A$ ，若以下图表交换

$$\begin{array}{ccc}
 A & \xrightarrow{\Delta} & A \otimes A \\
 \downarrow \Delta & & \downarrow \Delta \otimes 1 \\
 A \otimes A & \xrightarrow{1 \otimes \Delta} & A \otimes A \otimes A
 \end{array}$$

则称  $\Delta$  满足余结合律，运算“ $\Delta$ ”称为余乘（co-product）。类似地我们可以谈论余交换律，乘法  $m: A \otimes A \rightarrow A$  与余乘  $\Delta: A \rightarrow A \otimes A$  的交换律、余交换律分别由以下交换图表描述：

$$\begin{array}{ccc}
 A \otimes A & \xrightarrow{\tau} & A \otimes A \\
 \searrow m & & \swarrow m \\
 & A &
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{ccc}
 A \otimes A & \xleftarrow{\tau} & A \otimes A \\
 \swarrow \Delta & & \searrow \Delta \\
 & A &
 \end{array}$$

其中  $\tau: x \otimes y \mapsto y \otimes x$  为  $A \otimes A$  的对合自同构。

对于  $K$ -代数  $A$ ，我们总是假定  $A$  含幺。事实上，存在唯一的  $K$ -代数同态

$$i: K \rightarrow A$$

而  $A$  的幺元  $1 \in A$  即为  $1 \in K$  在该同态下的像。在此意义下，我们不妨重新定义什么是  $A$  的幺元：称  $K$ -模同态  $i: K \rightarrow A$  为  $A$  的幺元，如果以下图表交换：

$$\begin{array}{ccccc}
 & & A & & \\
 & \nearrow \cong & \uparrow m & \nwarrow \cong & \\
 K \otimes A & \xrightarrow{i \otimes 1} & A \otimes A & \xleftarrow{1 \otimes i} & A \otimes K
 \end{array}$$

将以上图表的箭头全部反向，则得到余么元（co-unit）的概念：对于配以余乘  $\Delta$  的  $K$ -模  $A$ ，称  $K$ -模同态  $\varepsilon: A \rightarrow K$  为关于  $\Delta$  的余么元，如果以下图表交换：

$$\begin{array}{ccccc}
 & & A & & \\
 & \nearrow \cong & \downarrow \Delta & \nwarrow \cong & \\
 K \otimes A & \xleftarrow{\varepsilon \otimes 1} & A \otimes A & \xrightarrow{1 \otimes \varepsilon} & A \otimes K
 \end{array}$$

对于  $K$ -模  $A$ ，若  $A$  配以（满足余结合律的）余乘  $\Delta$ ，以及关于该余乘的余么元  $\varepsilon: A \rightarrow K$ ，则称  $(A, \Delta, \varepsilon)$  为  $K$ -余代数。

若  $(A, \Delta_A)$  与  $(B, \Delta_B)$  都为  $K$ -余代数，称  $K$ -模同态  $\varphi: A \rightarrow B$  为  $K$ -余代数同态，如果对任意  $x \in A$ ，成立

$$\Delta_B(\varphi(x)) = \varphi(\Delta_A(x))$$

**注记 2.3.1.** 若  $(A, \Delta)$  为  $K$ -余代数，考虑对偶映射  $\Delta^*: (A \otimes A)^* \rightarrow A^*$ ，则  $(A^*, \Delta^*)$  具有如下  $K$ -代数结构：

$$A^* \otimes A^* \rightarrow (A \otimes A)^* \xrightarrow{\Delta^*} A^*$$

用反变函子  $\text{Hom}(-, K)$  翻转余代数图表的箭头而已；但是要注意，对一个代数取对偶，未必能得到余代数。也就是说，某种意义上余代数比代数包含更多的信息。

现在我们谈论余代数的分次版本。

**定义 2.3.2.** （分次余代数）

设  $A = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} A_k$  为分次  $K$ -模， $\Delta: A \rightarrow A \otimes A$  为  $A$  的余乘（满足余结合律），称  $(A, \Delta)$  为分次余代数（graded co-algebra），若  $\Delta$  与  $A$  的分次满足以下相容性：任意  $k \in \mathbb{Z}$ ，

$$\Delta(A_k) \subseteq (A \otimes A)_k$$

我们自然也可以谈论  $\Delta$  的分次余交换性，见下述交换图（与非分次情形完全一样）：

$$\begin{array}{ccc}
 A \otimes A & \xleftarrow{\tau} & A \otimes A \\
 & \nearrow \Delta & \nwarrow \Delta \\
 & A &
 \end{array}$$

不过要注意，这里的  $\tau$  为分次对合自同构（见定义2.1.4），服从 Koszul 符号法则：

$$\tau: x \otimes y \mapsto (-1)^{xy} y \otimes x$$

**定义 2.3.3. (余超导子)**

对于分次  $K$ -余代数  $A$ , 以及  $d \in \mathbb{Z}$ , 称次数为  $d$  的分次  $K$ -模同态  $\delta: A \rightarrow A$  为  $d$  次齐次余超导子, 若以下图表交换

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\delta} & A \\ \Delta \downarrow & & \downarrow \Delta \\ A \otimes A & \xrightarrow{\delta \otimes 1 + 1 \otimes \delta} & A \otimes A \end{array}$$

即满足“余莱布尼茨法则”。

注意到上述图表默认 Koszul 符号法则。记  $A$  的  $d$  次齐次余超导子之全体为  $\text{Coder}(A)_d$ , 以及

$$\text{Coder}(A) := \bigoplus_{d \in \mathbb{Z}} \text{Coder}(A)_d$$

称其中的元素为余超导子。与超导子类似, 余超导子之全体也有李超代数结构:

**性质 2.3.4.** 对于  $K$ -余代数  $A$ , 以及齐次余超导子  $D_1, D_2 \in \text{Coder}(A)$ , 定义

$$[D_1, D_2] := D_1 \circ D_2 - (-1)^{D_1 D_2} D_2 \circ D_1$$

则  $[D_1, D_2] \in \text{Coder}(A)$ , 进而  $(\text{Coder}(A), [,])$  构成李超代数。

证明. 与分次代数的超导子完全类似, 直接验证即可, 从略。 □

有了余超导子, 可以相应地去定义微分分次余代数 (differential graded co-algebra):

**定义 2.3.5. (微分分次余代数)** 对于  $K$ -余代数  $A$ , 以及满足  $\delta^2 = 0$  的 1 次齐次余超导子  $\delta$ , 则称  $(A, \delta)$  为微分分次余代数。

类似地, 微分分次余代数自然可以视为分次上链复形。

**注记 2.3.6. ((co-)augmentation)**

- (1) 对于  $K$ -代数  $A$ , 我们把从  $A$  到  $K$  的  $K$ -模同态称为 *augmentation*;
- (2) 对于  $K$ -余代数  $A$ , 我们把从  $K$  到  $A$  的  $K$ -模同态称为 *co-augmentation*

与“么元”的箭头刚好相反。笔者建议将 augmentation 意译为“赋值”。

**重要例子 2.3.7.** 设  $V$  为分次  $K$ -模, 考虑张量代数  $T(V) : \bigoplus_{n \geq 0} V^{\otimes n}$ , 定义

$$\begin{aligned} \Delta : T(V) &\rightarrow T(V) \otimes T(V) \\ v_1 \otimes \cdots \otimes v_n &\mapsto \sum_{i=0}^n (v_1 \otimes \cdots \otimes v_i) \otimes (v_{i+1} \otimes \cdots \otimes v_n) \end{aligned}$$

则  $(T(V), \Delta)$  构成余代数。

容易验证如此  $\Delta$  满足余结合律:

$$\begin{aligned} &(\Delta \otimes 1) \circ \Delta(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n) \\ &= \sum_{0 \leq i \leq j \leq n} (a_1 \otimes \cdots \otimes a_i) \otimes (a_{i+1} \otimes \cdots \otimes a_j) \otimes (a_{j+1} \otimes \cdots \otimes a_n) \\ &= (1 \otimes \Delta) \circ \Delta(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n) \end{aligned}$$

并且配以余么元  $\varepsilon$ :

$$\varepsilon|_{V^{\otimes n}} = \begin{cases} 0 & \text{如果 } n > 0 \\ \text{id}_K & \text{如果 } n = 0 \end{cases}$$

**注记 2.3.8.**  $T(V)$  还有另一个余乘结构  $\overline{\Delta}$

$$\overline{\Delta}(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n) := \sum_{i=1}^{n-1} (v_1 \otimes \cdots \otimes v_i) \otimes (v_{i+1} \otimes \cdots \otimes v_n)$$

这也是容易验证的。不过这个余乘结构不存在余么元。

## 2.4 多重切向量场与 Schouten-Nijenhuis 括号

众所周知, 对于光滑流形  $X$ ,  $X$  上的微分形式  $\Omega_X^\bullet$  配以外积  $\wedge$  构成分次交换代数 (若再考虑外微分  $d$ , 还有微分分次代数结构)。本节我们介绍另一重要的经典例子: 光滑流形上的多重切向量场, 并给出其上的李超代数结构: Schouten-Nijenhuis 括号。

**定义 2.4.1.** (多重切向量场) 对于光滑流形  $X$ , 称  $X$  的切丛的外积丛  $\wedge^*(TX)$  的截面为多重切向量场 (polyvector field)。并且记

$$PV_X := \Gamma(X, \wedge^*(TX))$$

为多重切向量场之全体。

$PV_X$  有显然的  $C^\infty(X)$ -模结构。与微分形式类似，容易定义  $PV_X$  上的外积  $\wedge$ ，使得  $(PV_X, \wedge)$  为分次交换  $C^\infty(X)$ -代数，其分次由以下给出：

$$PV_X = \bigoplus_{k \geq 0} PV_X^k$$

其中  $PV_X^k$  中的元素形如

$$\xi_1 \wedge \xi_2 \wedge \cdots \wedge \xi_k$$

的  $C^\infty(X)$ -线性组合，其中  $\xi_i$  为  $X$  上的光滑切向量场。称  $PV_X^k$  中的元素为  $k$ -向量。

回顾  $X$  的切向量场的李括号  $[\cdot, \cdot]$  运算，这给出了切向量场的李代数结构；接下来我们企图将李括号运算延拓到多重切向量场上，从而得到  $PV_X[1]$  的李超代数结构。（注意这里要平移一下分次，使得把切向量场视为零次元。）

#### 定义 2.4.2. (*Schouten-Nijenhuis* 括号)

对于光滑流形  $X$ ，定义  $PV_X$  上的  $\mathbb{R}$ -双线性映射

$$\begin{aligned} \{\cdot, \cdot\} : PV_X^p \times PV_X^q &\rightarrow PV_X^{p+q-1} \\ \{f, g\} &= 0 \\ \{f, \xi\} &= (-1)^p \{\xi, f\} = \sum_{k=1}^p (-1)^k \xi_k(f) (\cdots \wedge \widehat{\xi_k} \wedge \cdots) \\ \{\xi, \eta\} &= \sum_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq q}} (-1)^{i+j} [\xi_i, \eta_j] \wedge (\cdots \wedge \widehat{\xi_i} \wedge \cdots) \wedge (\cdots \wedge \widehat{\eta_j} \wedge \cdots) \end{aligned}$$

其中任意  $f, g \in C^\infty(X) = PV_X^0$  以及

$$\xi = \xi_1 \wedge \cdots \wedge \xi_p \quad \eta = \eta_1 \wedge \cdots \wedge \eta_q$$

我们需要验证  $\{\cdot, \cdot\}$  的良定性：与  $\xi, \eta$  的代表元的选取无关。这只需暴力验证即可。从略。

#### 性质 2.4.3. (*Schouten-Nijenhuis* 括号的性质)

对于光滑流形  $X$ ，则  $(PV_X, \{\cdot, \cdot\})$  满足如下性质：

(1) 若  $\xi, \eta \in PV_X^1$  为通常的切向量场，则

$$\{\xi, \eta\} = [\xi, \eta]$$

(2) 对任意  $p, q \geq 0$ ，任意  $\xi \in PV_X^p$  以及  $\eta \in PV_X^q$ ，成立

$$\{\xi, \eta\} = -(-1)^{(p-1)(q-1)} \{\eta, \xi\}$$

(3) 对任意  $p, q, r \geq 0$ , 任意  $\xi \in \text{PV}_X^p$  以及  $\eta \in \text{PV}_X^q, \phi \in \text{PV}_X^r$ , 成立

$$\{\xi, \eta \wedge \phi\} = \{\xi, \eta\} \wedge \phi + (-1)^{(p-1)q} \eta \wedge \{\xi, \phi\}$$

证明. (1)(2) 容易验证, 从略; (3) 暴力验证, 建议使用数学归纳法. 从略.  $\square$

事实上, 这三条性质可作为 Schouten-Nijenhuis 括号的公理: 满足此性质的括号如果存在, 只能如此定义. 例如, 对任意的  $f \in \text{PV}_X^0 = C^\infty(X)$ , 以及  $\xi, \eta \in \text{PV}_X^1$ , 如果  $\{, \}$  满足上述三条性质, 那么

$$\{\eta, f\xi\} = \{\eta, f \wedge \xi\} = \{\eta, f\}\xi + (-1)^{(1-1)\times 0} f\{\eta, \xi\} = \{\eta, f\}\xi + f[\eta, \xi]$$

但另一方面, 又有

$$\{\eta, f\xi\} = [\eta, f\xi] = \eta(f)\xi + f[\eta, \xi]$$

比较两式, 从而必有

$$\{\eta, f\} = \eta(f)$$

再反复使用超莱布尼茨法则 (3) 以及超反称性 (2), 即可得到  $\{, \}$  的完整定义.

**性质 2.4.4.** 对于光滑流形  $X$ , Schouten-Nijenhuis 括号  $\{, \}$  满足如下超雅可比恒等式: 对任意  $p, q, r \geq 0$  以及任意  $\xi \in \text{PV}_X^p, \eta \in \text{PV}_X^q, \phi \in \text{PV}_X^r$ , 成立

$$\{\xi, \{\eta, \phi\}\} = \{\{\xi, \eta\}, \phi\} + (-1)^{(p-1)(q-1)} \{\eta, \{\xi, \phi\}\}$$

从而  $(\text{PV}_X[1], \{, \})$  构成李超代数.

证明. 我们打算详细写出过程. 在证明的过程中, 我们将反复使用性质 2.4.3. 对任意的  $p, q, r > 0$ , 任取

$$\xi = \xi_1 \wedge \cdots \wedge \xi_p \in \text{PV}_X^p$$

$$\eta = \eta_1 \wedge \cdots \wedge \eta_q \in \text{PV}_X^q$$

$$\phi = \phi_1 \wedge \cdots \wedge \phi_r \in \text{PV}_X^r$$

$$f, g, h \in \text{PV}_X^0 = C^\infty(X)$$

为方便书写, 我们引入如下记号:

$$\overline{\xi_i} := \xi_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{\xi_i} \wedge \cdots \wedge \xi_p \quad \forall 1 \leq i \leq p$$

$$\overline{\eta_j} := \eta_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{\eta_j} \wedge \cdots \wedge \eta_q \quad \forall 1 \leq j \leq q$$

$$\overline{\phi_k} := \phi_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{\phi_k} \wedge \cdots \wedge \phi_r \quad \forall 1 \leq k \leq r$$

我们将对  $p$  归纳。

**预备情形：**若  $p = q = r = 0$ ，则结论平凡。若  $p, q, r$  当中恰有两个为 0，不妨  $p = q = 0$ ，此时  $r > 0$ ，从而任取  $f, g \in \text{PV}_X^0$  以及  $\phi \in \text{PV}_X^r$ ，此时的超雅可比恒等式为

$$\{f, \{g, \phi\}\} + \{g, \{f, \phi\}\} = 0$$

注意到

$$\{f, \phi\} = \sum_{k=1}^r (-1)^k \phi_k(f) \overline{\phi_k}$$

从而有

$$\begin{aligned} \{f, \{g, \phi\}\} &= \{f, \sum_{k=1}^r (-1)^k \phi_k(g) \overline{\phi_k}\} \\ &= \sum_{k=1}^r \phi_k(g) \left( \sum_{j < k} (-1)^j \phi_j(f) \overline{\phi_{jk}} + \sum_{j > k} (-1)^{j+1} \phi_j(f) \overline{\phi_{kj}} \right) \\ &= \sum_{1 \leq i < j \leq r} (-1)^{i+j} [\phi_i(g) \phi_j(f) - \phi_j(g) \phi_i(f)] \overline{\phi_{ij}} \end{aligned}$$

其中对于  $j < k$ ，简写记号

$$\overline{\phi_{jk}} := \cdots \wedge \widehat{\phi_j} \wedge \cdots \wedge \widehat{\phi_k} \wedge \cdots$$

注意观察上式关于  $f, g$  的反对称性，容易发现  $\{f, \{g, \phi\}\} = -\{g, \{f, \phi\}\}$ ，从而证毕。

于是，我们在接下来的证明中，不妨  $p, q, r$  当中为零的至多只有一个。

**$p$  的起始步：**现在开始对  $p$  归纳，首先考虑起始步  $p = 0$ 。由之前讨论，不妨  $q, r > 0$ 。任取  $f \in \text{PV}_X^0$ ，只需证

$$\{f, \{\eta, \phi\}\} = \{\{f, \eta\}, \phi\} + (-1)^{q-1} \{\eta, \{f, \phi\}\} \quad (*)$$

暴力展开验证之，注意到

$$\begin{aligned} \{f, \{\eta, \phi\}\} &= \sum_{j=1}^q \sum_{k=1}^r (-1)^{j+k} \{f, [\eta_j, \phi_k] \wedge \overline{\eta_j} \wedge \overline{\phi_k}\} \\ &= - \sum_{j=1}^q \sum_{k=1}^r (-1)^{j+k} [\eta_j, \phi_k](f) \overline{\eta_j} \wedge \overline{\phi_k} \\ &\quad - \sum_{j=1}^q \sum_{k=1}^r (-1)^{j+k} [\eta_j, \phi_k] \wedge \{f, \overline{\eta_j} \wedge \overline{\phi_k}\} \end{aligned}$$

再打开  $(*)$  的右边：

$$\begin{aligned} \{\{f, \eta\}, \phi\} &= \sum_{j=1}^q (-1)^j \{\eta_j(f) \overline{\eta_j}, \phi\} \\ &= \sum_{j=1}^q (-1)^j \left[ (-1)^{(q-1)(r-1)} \{\eta_j(f), \phi\} \wedge \overline{\eta_j} + \eta_j(f) \{\overline{\eta_j}, \phi\} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{j=1}^q \sum_{k=1}^r (-1)^{j+k} \phi_k(\eta_j(f)) \bar{\eta}_j \wedge \bar{\phi}_k \\
&\quad + \sum_{j=1}^q (-1)^j \eta_j(f) \{\bar{\eta}_j, \phi\} \\
(-1)^{q-1} \{\eta, \{f, \phi\}\} &= (-1)^{q-1} \sum_{k=1}^r (-1)^k \{\eta, \phi_k(f) \bar{\phi}_k\} \\
&= (-1)^{q-1} \sum_{k=1}^r (-1)^k \left[ \{\eta, \phi_k(f)\} \wedge \bar{\phi}_k + (-1)^{q-1} \phi_k(f) \{\eta, \bar{\phi}_k\} \right] \\
&= - \sum_{j=1}^q \sum_{k=1}^r (-1)^{j+k} \eta_j(\phi_k(f)) \bar{\eta}_j \wedge \bar{\phi}_k \\
&\quad + \sum_{k=1}^r (-1)^k \phi_k(f) \{\eta, \bar{\phi}_k\}
\end{aligned}$$

因此有

$$\begin{aligned}
\{\{f, \eta\}, \phi\} + (-1)^{q-1} \{\eta, \{f, \phi\}\} &= \sum_{j=1}^q \sum_{k=1}^r (-1)^{j+k} (\phi_k(\eta_j(f)) - \eta_j(\phi_k(f))) \bar{\eta}_j \wedge \bar{\phi}_k \\
&\quad + \sum_{j=1}^q (-1)^j \eta_j(f) \{\bar{\eta}_j, \phi\} + \sum_{k=1}^r (-1)^k \phi_k(f) \{\eta, \bar{\phi}_k\} \\
&= - \sum_{j=1}^q \sum_{k=1}^r (-1)^{j+k} [\eta_j, \phi_k](f) \bar{\eta}_j \wedge \bar{\phi}_k \\
&\quad + \sum_{j=1}^q (-1)^j \eta_j(f) \{\bar{\eta}_j, \phi\} + \sum_{k=1}^r (-1)^k \phi_k(f) \{\eta, \bar{\phi}_k\}
\end{aligned}$$

与 (\*) 式比较, 只需要再验证恒等式

$$- \sum_{j=1}^q \sum_{k=1}^r (-1)^{j+k} [\eta_j, \phi_k] \wedge \{f, \bar{\eta}_j \wedge \bar{\phi}_k\} = \sum_{j=1}^q (-1)^j \eta_j(f) \{\bar{\eta}_j, \phi\} + \sum_{k=1}^r (-1)^k \phi_k(f) \{\eta, \bar{\phi}_k\}$$

即可。而这只需将式子中的 Schouten-Nijenhuis 括号暴力展开, 并且适当更改求和指标即可, 从略。(不太想写了, 打字好累 2333)

$p$  的归纳步: 如果该命题对  $p$  成立, 则考虑

$$\zeta' := \zeta_0 \wedge \zeta \in \mathbf{PV}_X^{p+1}$$

其中任意  $\zeta_0 \in \mathbf{PV}_X^0$ . 我们只需证

$$\{\zeta', \{\eta, \phi\}\} = \{\{\zeta', \eta\}, \phi\} + (-1)^{p(q-1)} \{\eta, \{\zeta', \phi\}\} \quad (** )$$



注意反复使用  $\{, \}$  的超反对称性、超莱布尼茨法则，以及关于  $p$  的归纳假设，我们简单（但暴力）验证如下：

$$\begin{aligned}
 (**) \text{ 左边} &= \{\xi_0 \wedge \xi, \{\eta, \phi\}\} \\
 &= (-1)^p \xi \wedge \{\xi_0, \{\eta, \phi\}\} + \xi_0 \wedge \{\xi, \{\eta, \phi\}\} \\
 &= (-1)^p \xi \wedge \left( \{\{\xi_0, \eta\}, \phi\} + \{\eta, \{\xi_0, \phi\}\} \right) \\
 &\quad + \xi_0 \wedge \left( \{\{\xi, \eta\}, \phi\} + (-1)^{(p-1)(q-1)} \{\eta, \{\xi, \phi\}\} \right)
 \end{aligned}$$

其中最后一步等号用到了归纳假设。再看  $(**)$  右边，需要格外小心正负号：

$$\begin{aligned}
 (**) \text{ 右边} &= (-1)^{p(q-1)+(p+q-1)(r-1)} \{\phi, \{\eta, \xi_0 \wedge \xi\}\} - (-1)^{p(q-1)+p(r-1)} \{\eta, \{\phi, \xi_0 \wedge \xi\}\} \\
 &= (-1)^{p(q-1)+(p+q-1)(r-1)} \left\{ \phi, \eta, \xi_0 \wedge \xi + (-1)^{q-1} \xi_0 \wedge \{\eta, \xi\} \right\} \\
 &\quad - (-1)^{p(q+r)} \left\{ \eta, \{\phi, \xi_0\} \wedge \xi + (-1)^{r-1} \xi_0 \wedge \{\phi, \xi\} \right\} \\
 &= (-1)^{p(q-1)+(p+q-1)(r-1)} \\
 &\quad \left[ \{\phi, \{\eta, \xi_0\}\} \wedge \xi + (-1)^{(r-1)q} \{\eta, \xi_0\} \wedge \{\phi, \xi\} \right. \\
 &\quad \left. + (-1)^{q-1} (\{\phi, \xi_0\} \wedge \{\eta, \xi\} + (-1)^{r-1} \xi_0 \wedge \{\phi, \{\eta, \xi\}\}) \right] \\
 &\quad - (-1)^{p(q+r)} \left[ \{\eta, \{\phi, \xi_0\}\} \wedge \xi + (-1)^{(q-1)r} \{\phi, \xi_0\} \wedge \{\eta, \xi\} \right. \\
 &\quad \left. + (-1)^{r-1} (\{\eta, \xi_0\} \wedge \{\phi, \xi\} + (-1)^{q-1} \xi_0 \wedge \{\eta, \{\phi, \xi\}\}) \right] \\
 &= (-1)^p \xi \wedge \left( \{\{\xi_0, \eta\}, \phi\} + \{\eta, \{\xi_0, \phi\}\} \right) \\
 &\quad + \xi_0 \wedge \left( \{\{\xi, \eta\}, \phi\} + (-1)^{(p-1)(q-1)} \{\eta, \{\xi, \phi\}\} \right) \\
 &= (**) \text{ 左边}
 \end{aligned}$$

从而  $(**)$  两边相等，归纳完毕。  $\square$

归纳步当中主要是在验证正负号。

由于 Schouten-Nijenhuis 括号是切向量场李括号的“推广”，我们在以后更喜欢将它们都记作 “[,]”（而 “{,}” 在以后常用来表示泊松括号）。

## 2.5 Shuffle 乘积

对于  $n \geq 1$ ，我们记  $S_n$  为  $n$  元对称群。

**定义 2.5.1.**  $((p, q)\text{-Shuffle})$

对于正整数  $p, q$ , 称  $\sigma \in S_{p+q}$  为一个  $p, q$ -*Shuffle*, 如果满足

$$\sigma(1) < \sigma(2) < \dots < \sigma(p)$$

$$\sigma(p+1) < \sigma(p+2) < \dots < \sigma(q)$$

全体  $(p, q)$ -*Shuffle* 构成的集合记为  $\text{Sh}_{p,q}$ .

笔者建议将“Shuffle”意译为“洗牌”——因为  $\text{Sh}_{p,q}$  中的置换，好比将  $p+q$  张扑克牌分为  $p$  张、 $q$  张两组来洗牌。

容易知道，集合  $\text{Sh}_{p,q}$  的元素个数为

$$\frac{(p+q)!}{p!q!}$$

回到 Hochschild 链复形。我们已经知道， $\text{HH}_\bullet(A)$  是通常的光滑流形的微分形式  $\Omega_X^\bullet$  的非交换版本。而对于微分形式  $\Omega_X^\bullet$ ，其上有外积  $\wedge$  使之构成分次交换代数；我们也企图去定义非交换版本的外积。

### 定义 2.5.2. (*Shuffle* 乘积)

设  $A, A'$  为  $K$ -代数， $M, M'$  分别为双  $A, A'$ -模，我们定义如下的运算  $\times$ ，称之为 *Shuffle* 乘积：

$$\begin{aligned} C_p(A, M) \times C_q(A', M') &\rightarrow C_{p+q}(A \otimes A', M \otimes M') \\ (m, a_1, \dots, a_p) \times (m', a'_1, \dots, a'_q) &\mapsto \sum_{\sigma \in \text{Sh}_{p,q}} (-1)^{|\sigma|} (m \otimes m', \sigma(a_1, \dots, a_p, a'_1, \dots, a'_q)) \end{aligned}$$

其中  $|\sigma| := \text{sgn } \sigma$  为置换的符号， $(m, a_1, \dots, a_n) := m \otimes a_1 \otimes \dots \otimes a_n$  为简单的记法；并且置换群  $S_{p+q}$  在  $A^{\otimes(p+q)}$  上的作用为

$$\sigma(a_1, \dots, a'_q) := (a_{\sigma^{-1}(1)}, \dots, a_{\sigma^{-1}(q')})$$

注意在这里，群  $S_{p+q}$  在  $A^{\otimes(p+q)}$  上的作用方式，下角标中出现的是“ $\sigma^{-1}$ ”，如此规定是为了保证  $S_{p+q}$  的作用是左作用。

还要注意一点， $A, A'$  以及  $M, M'$  并不被假定有分次结构， $A \otimes A'$  在  $M \otimes M'$  上的模作用是通常的

$$(a \otimes a').(m \otimes m') = (a.m) \otimes (a'.m')$$

右模作用也类似，并不会出正负号，Koszul 符号法则在此平凡。

还要注意,

$$C_{p+q}(A \otimes A', M \otimes M') \cong (M \otimes M') \otimes (A \otimes A')^{\otimes(p+q)}$$

之中元素 “ $(m \otimes m', a_1, \dots, a_p, a'_1, \dots, a'_q)$ ” 里面的 “ $a_i$ ” 应该是  $a_i \otimes 1 \in A \otimes A'$ , 以及 “ $a'_j$ ” 应该是  $1 \otimes a'_j \in A \otimes A'$ .

还要注意  $A \otimes A'$  的乘法满足  $a_i a'_j = a'_j a_i$  交换。

**性质 2.5.3.** (*Shuffle* 乘积与 *Hochschild* 边缘算子相容)

记号同上, 则对于任意  $x \in C_p(A, M)$ ,  $y \in C_q(A', M')$ , 成立

$$b(x \times y) = b(x) \times y + (-1)^{\deg x} x \times b(y)$$

其中  $b: C_\bullet \rightarrow C_{\bullet-1}$  为相应 *Hochschild* 链复形各自的边缘算子。

证明. 当然是暴力验证了, 我们尽可能使用简练的记号. 令

$$x = m \otimes (a_1, \dots, a_p)$$

$$y = m' \otimes (a'_1, \dots, a'_q)$$

首先看  $b(x \times y)$ , 我们按张量缩并的位置, 以及  $A \otimes A'$  当中的 “元素类型” (形如  $1 \otimes A'$  或是  $A \otimes 1$ ) 来分类, 强行将它打开:

$$\begin{aligned} b(x \times y) &= b \sum_{\sigma \in \text{Sh}_{p,q}} (-1)^{|\sigma|} (m \otimes m') \otimes \sigma(a_1, \dots, a_p, a'_1, \dots, a'_q) \\ &= (m \cdot a_1 \otimes m') \otimes \sum_{\sigma \in \text{Sh}_{p-1,q}} (-1)^{|\sigma|} \sigma(a_2, \dots, a_p, a'_1, \dots, a'_q) \\ &\quad + (m \otimes m' \cdot a'_1) \otimes \sum_{\sigma \in \text{Sh}_{p,q-1}} (-1)^{|\sigma|+p} \sigma(a_1, \dots, a_p, a'_2, \dots, a'_q) \\ &\quad + \sum_{i=1}^{p+q-1} (-1)^i (m \otimes m') \otimes \left[ \sum_{\substack{1 \leq \alpha < \beta \leq p \\ \sigma \in \text{Sh}_{p-2,q}}} (-1)^{|\sigma|+\alpha+\beta-1} \sigma(\dots, \underbrace{(a_\alpha a_\beta)}_{\text{第 } i, i+1 \text{ 个}}, \dots) \right. \\ &\quad + \sum_{\substack{1 \leq \alpha \leq p, 1 \leq \gamma \leq q \\ \sigma \in \text{Sh}_{p-1,q-1}}} (-1)^{|\sigma|+\alpha+\gamma+p-1} \sigma(\dots, \underbrace{(a_\alpha a'_\gamma)}_{\text{第 } i, i+1 \text{ 个}}, \dots) \\ &\quad + \sum_{\substack{1 \leq \alpha \leq p, 1 \leq \gamma \leq q \\ \sigma \in \text{Sh}_{p-1,q-1}}} (-1)^{|\sigma|+\alpha+\gamma+p} \sigma(\dots, \underbrace{(a'_\gamma a_\alpha)}_{\text{第 } i, i+1 \text{ 个}}, \dots) \\ &\quad \left. + \sum_{\substack{1 \leq \gamma < \delta \leq q \\ \sigma \in \text{Sh}_{p,q-2}}} (-1)^{|\sigma|+(\gamma+p)+(\delta+p)-1} \sigma(\dots, \underbrace{(a'_\gamma a'_\delta)}_{\text{第 } i, i+1 \text{ 个}}, \dots) \right] \\ &\quad + (-1)^{p+q} (a_n \cdot m \otimes m') \sum_{\sigma \in \text{Sh}_{p-1,q}} (-1)^{|\sigma|+q} (a_1, \dots, a_{p-1}, a'_1, \dots, a'_q) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +(-1)^{p+q}(m \otimes a'_n \cdot m') \sum_{\sigma \in \text{Sh}_{p,q-1}} (-1)^{|\sigma|} (a_1, \dots, a_p, a'_1, \dots, a'_{q-1}) \\
= & [m \cdot a_1 \otimes (a_2, \dots, a_p)] \times y + (-1)^p x \times [m' \cdot a'_1 \otimes (a'_2, \dots, a'_q)] \\
& + \left( \sum_{i=1}^{p-1} (-1)^i m \otimes (a_1, \dots, a_i a_{i+1}, \dots, a_p) \right) \times y \\
& + (-1)^p x \times \left( \sum_{i=1}^{q-1} (-1)^i m' \otimes (a'_1, \dots, a'_i a'_{i+1}, \dots, a'_q) \right) \\
& + (-1)^p [a_p \cdot m \otimes (a_1, \dots, a_{p-1})] \times y + (-1)^{p+q} x \times [a'_q \cdot m' \otimes (a'_1, \dots, a'_{q-1})] \\
= & b(x) \times y + (-1)^p x \times b(y)
\end{aligned}$$

从而证毕。  $\square$

**推论 2.5.4.** 对于  $K$ -代数  $A, A'$ , 若  $M, M'$  分别为双  $A, A'$ -模, 则 *Shuffle* 乘积诱导了链映射:

$$C_{\bullet}(A, M) \otimes C_{\bullet}(A', M') \xrightarrow{\sim} C_{\bullet}(A \otimes A', M \otimes M')$$

并且该链映射诱导了 *Hochschild* 同调的同态

$$H_{\bullet}(A, M) \otimes H_{\bullet}(A', M') \xrightarrow{\sim} H_{\bullet}(A \otimes A', M \otimes M')$$

证明. 仅仅是将

$$b(x \times y) = b(x) \times y + (-1)^{\deg x} x \times b(y)$$

换了一种说法. 注意链复形张量积

$$C_{\bullet}(A, M) \otimes C_{\bullet}(A', M')$$

的边缘算子服从与定义 2.1.9 类似的规则. *Shuffle* 乘积在 *Hochschild* 同调的下降的良好性也易证.  $\square$

特别地, 当  $M = A, M' = A'$  时 *Shuffle* 乘积诱导了同态:

$$\text{HH}_{\bullet}(A) \otimes \text{HH}_{\bullet}(A') \xrightarrow{\sim} \text{HH}_{\bullet}(A \otimes A')$$

**定理 2.5.5.** (*Künneth* 公式)

如果  $K$ -代数  $A, A'$  作为  $K$ -模都是平坦的, 那么 *Shuffle* 乘积诱导的 *Hochschild* 同调之间的同态

$$\text{HH}_{\bullet}(A) \otimes \text{HH}_{\bullet}(A') \xrightarrow{\sim} \text{HH}_{\bullet}(A \otimes A')$$

为同构。

证明. 代数拓扑中的标准证明。从略。 □

注意我们总是假定  $A, A'$  是投射  $K$ -模, 从而自然满足平坦性。

**性质 2.5.6.** 若  $K$ -代数  $A$  是交换的, 则 *Shuffle* 乘积诱导了  $\mathrm{HH}_\bullet(A)$  的  $K$ -代数结构, 并且  $(\mathrm{HH}_\bullet(A), \times)$  是分次交换的。

这就回到了通常交换的情形了。事实上 *Shuffle* 乘积的几何意义为微分形式的外积。

证明. 对于任意的  $K$ -代数  $A$ , 注意张量积  $A \otimes A$  也有  $K$ -代数结构。断言:

$$\begin{aligned}\pi: A \otimes A &\rightarrow A \\ a \otimes b &\mapsto ab\end{aligned}$$

为  $K$ -代数同态当且仅当  $A$  是交换代数。于是当  $A$  交换时, 考虑  $K$ -代数同态  $A \otimes A \xrightarrow{\pi} A$ , 由 Hochschild 同调的函子性, 该同态诱导了

$$\mathrm{HH}_\bullet(A \otimes A) \xrightarrow{\mathrm{HH}_\bullet(\pi)} \mathrm{HH}_\bullet(A)$$

再注意 *Shuffle* 乘积诱导

$$\mathrm{HH}_\bullet(A) \otimes \mathrm{HH}_\bullet(A) \xrightarrow{\times} \mathrm{HH}_\bullet(A \otimes A)$$

将上述两个同态复合, 即得到分次  $K$ -代数  $(\mathrm{HH}_\bullet(A), \times)$ 。

容易验证此代数为分次交换的, 验证如下: 对任意  $p, q \geq 0$  以及  $a_0, a_1, \dots, a_p \in A$ ,  $a'_0, a'_1, \dots, a'_q \in A$ , 有

$$\begin{aligned}& [a_0 \otimes (a_1, \dots, a_p)] \times [a'_0 \otimes (a'_1, \dots, a'_q)] \\&= (a_0 a'_0) \otimes \sum_{\sigma \in \mathrm{Sh}_{p,q}} (-1)^{|\sigma|} \sigma(a_1, \dots, a_p; a'_1, \dots, a'_q) \\&= (a'_0 \otimes a_0) \otimes \sum_{\sigma \in \mathrm{Sh}_{q,p}} (-1)^{|\sigma|+pq} \sigma(a'_1, \dots, a'_q; a_1, \dots, a_p) \\&= (-1)^{pq} [a'_0 \otimes (a'_1, \dots, a'_q)] \times [a_0 \otimes (a_1, \dots, a_p)]\end{aligned}$$

从而分次交换。 □

**性质 2.5.7.** (*Shuffle* 乘积是非交换版本的外积)

若  $A = K[x^1, \dots, x^n]$  为多项式代数, 则有  $K$ -代数同构

$$(\mathrm{HH}_\bullet(A), \times) \cong (\Omega_A^\bullet, \wedge)$$

证明. 回顾性质1.8.4当中的双复形同态

$$\Phi : (\overline{\mathcal{B}}_{\bullet\bullet}(A), b, \mathcal{B}) \rightarrow (\Omega_A^\bullet, 0, d)$$

首先, 容易验证 Shuffle 乘积可下降至

$$\overline{\mathcal{C}}_\bullet(A) \otimes \overline{\mathcal{C}}_\bullet(A) \xrightarrow{\times} \overline{\mathcal{C}}_\bullet(A)$$

从而我们只需要验证对于任意  $x \in \overline{\mathcal{C}}_p(A)$  以及  $y \in \overline{\mathcal{C}}_q(A)$ , 成立

$$\Phi(x \times y) = \Phi(x) \wedge \Phi(y)$$

对任意的  $p, q \geq 0$ , 以及  $x = a_0 \otimes (\overline{a}_1, \dots, \overline{a}_p) \in \overline{\mathcal{C}}_p(A)$ ,  $y = a'_0 \otimes (\overline{a}'_1, \dots, \overline{a}'_q) \in \overline{\mathcal{C}}_q(A)$ , 从而

$$\begin{aligned} \Phi(x \times y) &= \Phi \left( a_0 a'_0 \otimes \sum_{\sigma \in \text{Sh}_{p,q}} (-1)^{|\sigma|} \sigma(\overline{a}_1, \dots, \overline{a}_p; \overline{a}'_1, \dots, \overline{a}'_q) \right) \\ &= \frac{1}{(p+q)!} a_0 a'_0 \sum_{\sigma \in \text{Sh}_{p,q}} (-1)^{|\sigma|} \sigma(\mathrm{d}a_1 \wedge \dots \wedge \mathrm{d}a_p \wedge \mathrm{d}a'_1 \wedge \dots \wedge \mathrm{d}a'_q) \\ &= \frac{1}{p!q!} a_0 a'_0 \mathrm{d}a_1 \wedge \dots \wedge \mathrm{d}a_p \wedge \mathrm{d}a'_1 \wedge \dots \wedge \mathrm{d}a'_q \\ \Phi(x) \wedge \Phi(y) &= \left( \frac{1}{p!} a_0 \mathrm{d}a_1 \wedge \dots \wedge \mathrm{d}a_p \right) \wedge \left( \frac{1}{q!} a'_0 \mathrm{d}a'_1 \wedge \dots \wedge \mathrm{d}a'_q \right) \\ &= \frac{1}{p!q!} a_0 a'_0 \mathrm{d}a_1 \wedge \dots \wedge \mathrm{d}a_p \wedge \mathrm{d}a'_1 \wedge \dots \wedge \mathrm{d}a'_q \end{aligned}$$

从而得证。 □

## 2.6 Cup 乘积与 Gerstenhaber 括号（部分细节待补）

对于  $K$ -代数  $A$ , 回顾 Hochschild 上链复形

$$C^\bullet(A) := C^\bullet(A, A) = \bigoplus_{p \geq 0} C^p(A, A)$$

我们将介绍  $C^\bullet(A)$  上的代数结构: cup 乘积。

**定义 2.6.1.** (*Cup* 乘积)

设  $A$  为  $K$ -代数, 定义 **cup** 乘积

$$\cup : C^\bullet(A) \otimes C^\bullet(A) \rightarrow C^\bullet(A)$$

如下: 对任意的  $f \in C^p(A)$ ,  $g \in C^q(A)$ ,

$$\begin{aligned} f \cup g &\in C^{p+q}(A) \\ (f \cup g)(a_1, \dots, a_p; a_{p+1}, \dots, a_{p+q}) &= f(a_1, \dots, a_p) g(a_{p+1}, \dots, a_{p+q}) \end{aligned}$$

我们已经知道，Hochschild 上同调是“非交换版本的多重切向量场”。注意多重切向量场具有外积运算，而 cup 乘积则是“非交换版本的外积”。我们将去说明这一点。

**性质 2.6.2.** (*cup* 乘积与 Hochschild 微分的相容性)

对于  $K$ -代数  $A$ ，任意  $f, g \in C^\bullet(A)$ ，成立

$$\partial(f \cup g) = (\partial f) \cup g + (-1)^{\deg f} f \cup \partial g$$

证明. 暴力验证之。任取  $a_0, a_1, \dots, a_{p+q} \in A$ ，成立

$$\begin{aligned} & [(\partial f) \cup g + (-1)^p f \cup (\partial g)](a_0 \cdots a_{p+q}) \\ = & a_0 f(a_1 \cdots a_p) g(a_{p+1} \cdots a_{p+q}) \\ & - \sum_{k=0}^{p-1} (-1)^k f(\cdots a_k a_{k+1} \cdots) g(a_{p+1} \cdots a_{p+q}) \\ & - (-1)^p f(a_0 \cdots a_{p-1}) a_p g(a_{p+1} \cdots a_{p+q}) \\ & + (-1)^p f(a_0 \cdots a_{p-1}) a_p g(a_{p+1} \cdots a_{p+q}) \\ & - (-1)^p \sum_{l=0}^{q-1} f(a_0 \cdots a_{p-1}) g(\cdots a_{p+l} a_{p+l+1} \cdots) \\ & - (-1)^{p+q} f(a_0 \cdots a_{p-1}) g(a_p \cdots a_{p+q-1}) a_{p+q} \\ = & a_0 (f \cup g)(a_1 \cdots a_{p+q}) \\ & - \sum_{k=0}^{p+q-1} (-1)^k (f \cup g)(\cdots a_k a_{k+1} \cdots) \\ & - (-1)^{p+q} (f \cup g)(a_0 \cdots a_{p+q-1}) a_{p+q} \\ = & \partial(f \cup g)(a_0 \cdots a_{p+q}) \end{aligned}$$

从而证毕。 □

**推论 2.6.3.** *cup* 乘积诱导了如下同态：

$$\mathrm{HH}^p(A) \times \mathrm{HH}^q(A) \xrightarrow{\cup} \mathrm{HH}^{p+q}(A)$$

证明. 易验证良定性，几乎显然。 □

容易验证如此的 *cup* 乘积是结合的（之前 Shuffle 乘积的结合性也可直接看出来），于是我们得到分次结合  $K$ -代数  $(\mathrm{HH}^\bullet(A), \cup)$ 。事实上，该  $K$ -代数是分次交换的，这从 *cup* 乘积当中很难看出来（似乎非常不显然），我们下一节给出证明。

**注记 2.6.4.** 我们已经知道, *Hochschild* 上同调是“非交换版本的多重切向量场”; 而 *cup* 乘积即为“多重切向量场的外积”的非交换版本。具体地, 若  $A = K[x^1, \dots, x^n]$  为多项式环, 则有  $K$ -代数同构

$$(\mathrm{HH}^\bullet(A), \cup) \cong (\mathrm{PV}_A, \wedge)$$

我们知道,  $\mathrm{PV}_X$  上不仅有外积结构, 还有 Schouten-Nijenhuis 括号; 我们也要给出后者的非交换版本, 使得  $\mathrm{HH}^\bullet(A)$  为 Gerstenhaber 代数:

**定义 2.6.5.** (*Gerstenhaber* 代数)

设  $(A, \cdot)$  为分次交换  $K$ -代数,  $A = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} A^k$  为其分次, 并配以  $K$ -双线性映射

$$\{, \} : A^p \otimes A^q \rightarrow A^{p+q-1}$$

称  $(A, \cdot, \{, \})$  为 **Gerstenhaber** 代数, 若  $\{, \}$  满足以下公理:

- (1)  $(A, \cdot)$  为分次结合代数;
- (2)  $(A[1], \{, \})$  为李超代数;
- (3) 相容性: 对  $A$  中的任意齐次元  $x, y, z$ , 成立

$$\{x, yz\} = \{x, y\}z + (-1)^{(x-1)y}y\{x, z\}$$

例如光滑流形  $X$  上  $(\mathrm{PV}_X, \wedge, \{, \})$ , 即多重切向量场、外积、Schouten-Nijenhuis 括号, 构成 Gerstenhaber 代数。

Gerstenhaber 代数在物理学中常被称为“经典 **BV** 代数” (classical BV algebra)。

**定义 2.6.6.** (*Gerstenhaber* 乘积)

对于  $K$ -代数  $A$ , 定义  $C^\bullet(A)$  上的  $K$ -双线性运算

$$\circ : C^p(A) \times C^q(A) \rightarrow C^{p+q-1}(A)$$

如下: 对任意  $a_1, a_2, \dots, a_{p+q-1} \in A$ , 以及  $f \in C^p(A), g \in C^q(A)$ ,

$$(f \circ g)(a_1 \cdots a_{p+q-1}) := \sum_{i=1}^p (-1)^{(i-1)(q-1)} f(-a_{i-1}, g(a_i \cdots a_{i+q-1}), a_{i+q} \cdots)$$

运算“ $\circ$ ”称为 **Gerstenhaber** 乘积。



性质 2.6.7. 对任意  $f \in C^p(A), g \in C^q(A)$ , 成立

$$\partial(f \circ g) - (\partial f) \circ g - (-1)^{p-1} f \circ \partial g = \pm[(f \cup g) - (-1)^{pq}(g \cup f)]$$

证明. purple 非常暴力的计算验证, 等号右边的符号暂时没算清。从略。  $\square$

以后抽空补上。上述等式的右边为 “the failure of  $\circ$  being a chain map measured by the commutativity of cup product” .

(虽说上述等式右边的正负号暂时没算清楚) 但此结果已经暂时足够用了:

推论 2.6.8. 对于  $K$ -代数  $A$ ,  $(\mathrm{HH}^\bullet(A), \cup)$  是分次交换的。

证明. 利用性质2.6.7, 几乎显然。  $\square$

$(\mathrm{HH}^\bullet(A), \cup)$  的分次交换性是一个十分深刻的结论。

定义 2.6.9. (*Gerstenhaber* 括号)

$$\{f, g\} = f \circ g - (-1)^{(f-1)(g-1)} g \circ f$$

性质 2.6.10. 对于任意  $f, g \in C^\bullet(A)$  为齐次元, 成立

$$\partial\{f, g\} = \{\partial f, g\} \pm \{f, \partial g\}$$

证明. (待补)  $\square$

于是, Gerstenhaber 括号  $\{, \}$  可下降到  $\mathrm{HH}^\bullet(A)$  上, 这是非交换版本的 Schouten-Nijenhuis 括号。

性质 2.6.11. 对于  $K$ -代数  $A$ ,  $(\mathrm{HH}^\bullet(A), \cup, \{, \})$  构成 *Gerstenhaber* 代数。

证明. (待补)  $\square$

## 2.7 结合性

用 Gerstenhaber 括号，可以给出乘法结合性的另一种描述：对于  $K$ -代数  $A$ ，考虑  $A$  的乘法结构

$$m : A \otimes A \rightarrow A$$

从而  $m$  自然视为  $C^2(A)$  中的元素。

**引理 2.7.1.** 对于  $K$ -模  $A$ ，以及  $A$  上的乘法结构

$$m : A \otimes A \rightarrow A$$

那么  $m$  满足结合律当且仅当  $\{m, m\} = 0$ 。其中  $\{, \}$  为  $C^\bullet(A)$  上的 Gerstenhaber 括号。

证明. 直接验证。注意到

$$\{m, m\} = m \circ m - (-1)^{(2-1)(2-1)} m \circ m = 2m \circ m$$

其中 “ $\circ$ ” 为 Gerstenhaber 乘积。于是对任意的  $a_1, a_2, a_3 \in A$ ，都有

$$\begin{aligned} (m \circ m)(a_1, a_2, a_3) &= m(m(a_1, a_2), a_3) - m(a_1, m(a_2, a_3)) \\ &= (a_1 a_2) a_3 - a_1 (a_2 a_3) \end{aligned}$$

因此  $\{m, m\} = 0$  当且仅当  $m$  结合。 □

事实上，Hochschild 上链复形  $C^\bullet(A)$  的微分算子  $\partial$  也可以用 Gerstenhaber 括号来描述：

**引理 2.7.2.** 设  $A$  为  $K$ -代数，其乘法为

$$m : A \otimes A \rightarrow A$$

考虑  $A$  的 Hochschild 上链复形  $(C^\bullet(A), \partial)$ ，则有

$$\partial = \{-, m\}$$

证明. 给定  $q \geq 0$ ，对于任意的  $f \in C^q(A)$ ，只需要验证  $\partial f = \{f, m\}$ ，其中  $\{, \}$  为 Gerstenhaber 括号。任取  $a_0, a_1, \dots, a_q \in A$ ，一方面我们早已知道

$$\partial f(a_0, a_1, \dots, a_q) = a_0 f(a_1, \dots, a_q) - \sum_{k=1}^{q-1} (-1)^k f(a_0, \dots, (a_k a_{k+1}), \dots, a_q) - (-1)^q f(a_0, a_1, \dots, a_{q-1}) a_q$$

另一方面,  $\{f, m\} = f \circ m - (-1)^{q-1} m \circ f$ , 从而

$$\begin{aligned}
\{f, m\}(a_0, a_1, \dots, a_q) &= (f \circ m)(a_0, a_1, \dots, a_q) - (-1)^{q-1} (m \circ f)(a_0, a_1, \dots, a_q) \\
&= \sum_{k=0}^{q-1} (-1)^{k-1} f(a_0, \dots, m(a_k a_{k+1}), \dots, a_n) \\
&\quad - (-1)^{q-1} [m(f(a_0, \dots, a_{q-1}), a_q) + (-1)^q m(a_0, f(a_1, \dots, a_q))] \\
&= a_0 f(a_1, \dots, a_q) - \sum_{k=1}^{q-1} (-1)^k f(a_0, \dots, (a_k a_{k+1}), \dots, a_q) - (-1)^q f(a_0, a_1, \dots, a_{q-1}) a_q
\end{aligned}$$

因此  $\partial f = \{f, m\}$ , 得证。 □

## 第3章 形变量子化

本章开始，正式搞一些事情。经典力学与量子力学的框架众所周知，大致如下：

	经典力学	量子力学
相空间	辛流形 $(X, \omega)$	希尔伯特空间 $\mathcal{H}$
观测量	光滑函数	厄密特算子
演化方程	$\frac{df}{dt} = \{H, f\}$	$\frac{dA_t}{dt} = \frac{i}{\hbar} [\hat{H}, A_t]$

我们将利用结合代数的 Hochschild (上) 同调，以及  $A_\infty$  方法，来证明 Kontsevich 的 Formality theorem.

(待完善)

### 3.1 泊松几何与辛几何

本节简要回顾一下泊松几何。

**定义 3.1.1.** (泊松括号)

设  $X$  为光滑流形， $\{, \}: C^\infty(X) \times C^\infty(X) \rightarrow C^\infty(X)$  为  $\mathbb{R}$ -双线性映射。称  $\{, \}$  为  $X$  上的泊松括号 (Poisson bracket)，如果  $\{, \}$  满足：对任意  $f, g, h \in C^\infty(X)$ ，成立

(1) 反对称性：

$$\{f, g\} = -\{g, f\}$$

(2) Jacobi 恒等式：

$$\{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} = 0$$

(3) Leibnitz 法则：

$$\{f, gh\} = \{f, g\}h + g\{f, h\}$$

泊松括号的定义的 (1) (2) 表明  $(C^\infty(X), \{, \})$  为李代数，而 (3) 表明对任意  $f \in C^\infty(X)$ ，映射

$$X_f : C^\infty(X) \rightarrow C^\infty(X)$$

$$g \mapsto \{f, g\}$$

为导子, 从而  $X_f$  为  $X$  上的光滑切向量场, 在局部坐标下形如  $X_f = X_f^i \frac{\partial}{\partial u^i}$ . 于是有

$$\{f, g\} = X_f^i \frac{\partial g}{\partial u^i}$$

但又注意到  $\{f, g\} = -\{g, f\}$  以及切向量场  $X_g$ , 从而易知泊松括号  $\{, \}$  在局部坐标  $(u^i)$  下的表达式必形如

$$\{f, g\} = P^{ij} \frac{\partial f}{\partial u^i} \frac{\partial g}{\partial u^j}$$

并且容易验证:

**引理 3.1.2.** 设  $\{, \}$  为光滑流形  $X$  上的泊松括号, 并且在局部坐标  $(u^i)$  下的表达式为

$$\{f, g\} = P^{ij} \frac{\partial f}{\partial u^i} \frac{\partial g}{\partial u^j}$$

那么对任意指标  $i, j, k$ , 成立

$$\begin{aligned} P^{ij} &= -P^{ji} \\ P^{is} \frac{\partial P^{jk}}{\partial u^s} + P^{js} \frac{\partial P^{ki}}{\partial u^s} + P^{ks} \frac{\partial P^{ij}}{\partial u^s} &= 0 \end{aligned}$$

证明. 容易验证  $P^{ij} = -P^{ji}$  等价于泊松括号的反对称性  $\{f, g\} = -\{g, f\}$ , 这是因为对任意光滑函数  $f, g$ , 局部上有

$$P^{ij} \frac{\partial f}{\partial u^i} \frac{\partial g}{\partial u^j} = \{f, g\} = -\{g, f\} = -P^{ji} \frac{\partial g}{\partial u^i} \frac{\partial f}{\partial u^j} = -P^{ji} \frac{\partial f}{\partial u^i} \frac{\partial g}{\partial u^j}$$

从而  $(P^{ij} + P^{ji}) \frac{\partial f}{\partial u^i} \frac{\partial g}{\partial u^j} = 0$ , 因此由  $f, g$  的任意性, 有  $P^{ij} = -P^{ji}$ .

再看第二个式子. 事实上它等价于泊松括号的雅可比恒等式. 对任意  $f, g, h \in C^\infty(X)$ , 局部坐标下有

$$\begin{aligned} \{f, \{g, h\}\} &= \{f, P^{ij} \frac{\partial g}{\partial u^i} \frac{\partial h}{\partial u^j}\} \\ &= P^{kl} \frac{\partial f}{\partial u^k} \frac{\partial P^{ij}}{\partial u^l} \frac{\partial g}{\partial u^i} \frac{\partial h}{\partial u^j} + P^{ij} P^{kl} \frac{\partial f}{\partial u^k} \left( \frac{\partial^2 g}{\partial u^i \partial u^l} \frac{\partial h}{\partial u^j} + \frac{\partial^2 h}{\partial u^j \partial u^l} \frac{\partial g}{\partial u^i} \right) \end{aligned}$$

将  $f, g, h$  轮换再相加, 适当更改求和指标, 合并整理得

$$\begin{aligned} &\{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} \\ &= \frac{\partial f}{\partial u^i} \frac{\partial g}{\partial u^j} \frac{\partial h}{\partial u^k} \left( P^{is} \frac{\partial P^{jk}}{\partial u^s} + P^{js} \frac{\partial P^{ki}}{\partial u^s} + P^{ks} \frac{\partial P^{ij}}{\partial u^s} \right) + P^{kl} (P^{ij} + P^{ji}) \frac{\partial f}{\partial u^k} \frac{\partial^2 g}{\partial u^i \partial u^l} \frac{\partial h}{\partial u^j} \end{aligned}$$

$$+P^{kl}(P^{ij}+P^{ji})\frac{\partial g}{\partial u^k}\frac{\partial^2 h}{\partial u^i\partial u^l}\frac{\partial f}{\partial u^j}+P^{kl}(P^{ij}+P^{ji})\frac{\partial h}{\partial u^k}\frac{\partial^2 f}{\partial u^i\partial u^l}\frac{\partial g}{\partial u^j}$$

注意到  $P^{ij} = -P^{ji}$ ，以及  $f, g, h$  的任意性，从而有

$$P^{is}\frac{\partial P^{jk}}{\partial u^s}+P^{js}\frac{\partial P^{ki}}{\partial u^s}+P^{ks}\frac{\partial P^{ij}}{\partial u^s}=0$$

得证。 □

我们可以使用张量的语言来描述泊松括号结构：

**定义 3.1.3.** (泊松张量) 对于光滑流形  $X$ ，以及  $P \in \text{PV}_X^2$  为 2-切向量场，在局部坐标下表达式为

$$P = P^{ij}\frac{\partial}{\partial u^i} \wedge \frac{\partial}{\partial u^j}$$

其中  $P^{ij} = -P^{ji}$ . 称  $P$  为泊松张量 (Poisson tensor)，如果  $P$  在局部坐标下满足如下雅可比恒等式：

$$P^{is}\frac{\partial P^{jk}}{\partial u^s}+P^{js}\frac{\partial P^{ki}}{\partial u^s}+P^{ks}\frac{\partial P^{ij}}{\partial u^s}=0$$

容易看出泊松括号与泊松张量的一一对应关系：对于泊松括号  $\{, \}$ ，若局部上有  $\{f, g\} = P^{ij}\frac{\partial f}{\partial u^i}\frac{\partial g}{\partial u^j}$ ，则考虑泊松张量

$$P := \frac{1}{2}P^{ij}\frac{\partial}{\partial u^i} \wedge \frac{\partial}{\partial u^j}$$

反过来，由泊松张量也能得到泊松括号。并且容易知道

$$\{f, g\} = \langle P, df \wedge dg \rangle$$

事实上泊松张量的雅可比恒等式可以用 Schouten-Nijenhuis 括号等价刻画：

**性质 3.1.4.** 对于光滑流形  $X$ ，以及  $P \in \text{PV}_X^2$ ，则  $P$  为泊松张量当且仅当

$$[P, P] = 0$$

其中  $[\cdot, \cdot]$  为 Schouten-Nijenhuis 括号 (见定义 2.4.2)。

证明. 局部坐标下验证。取局部坐标  $(u^i)$ ，令  $P = P^{ij}\frac{\partial}{\partial u^i} \wedge \frac{\partial}{\partial u^j}$ ，则有

$$[P, P] = [(P^{ij}\frac{\partial}{\partial u^i}) \wedge \frac{\partial}{\partial u^j}, (P^{kl}\frac{\partial}{\partial u^k}) \wedge \frac{\partial}{\partial u^l}]$$

$$\begin{aligned}
&= [P^{ij} \frac{\partial}{\partial u^i}, P^{kl} \frac{\partial}{\partial u^k}] \wedge \frac{\partial}{\partial u^j} \wedge \frac{\partial}{\partial u^l} - [P^{ij} \frac{\partial}{\partial u^i}, \frac{\partial}{\partial u^l}] \wedge \frac{\partial}{\partial u^j} \wedge P^{kl} \frac{\partial}{\partial u^k} \\
&\quad - [\frac{\partial}{\partial u^j}, P^{kl} \frac{\partial}{\partial u^k}] \wedge P^{ij} \frac{\partial}{\partial u^i} \wedge \frac{\partial}{\partial u^l} + [\frac{\partial}{\partial u^j}, \frac{\partial}{\partial u^l}] \wedge P^{ij} \frac{\partial}{\partial u^i} \wedge P^{kl} \frac{\partial}{\partial u^k}
\end{aligned}$$

上式右端共有四项，首先注意最后一项

$$[\frac{\partial}{\partial u^j}, \frac{\partial}{\partial u^l}] \wedge P^{ij} \frac{\partial}{\partial u^i} \wedge P^{kl} \frac{\partial}{\partial u^k} = P^{ij} P^{kl} \delta_{jl} \frac{\partial}{\partial u^j} \wedge \frac{\partial}{\partial u^i} \wedge \frac{\partial}{\partial u^k} = \sum_{j=1}^n P^{ij} P^{kj} \frac{\partial}{\partial u^j} \wedge \frac{\partial}{\partial u^i} \wedge \frac{\partial}{\partial u^k} = 0$$

最后一个等号是因为指标  $i, k$  的（反）对称性；从而暴力展开，注意利用  $P^{ij} = -P^{ji}$  以及适当更改求和指标，有

$$\begin{aligned}
[P, P] &= [P^{ij} \frac{\partial}{\partial u^i}, P^{kl} \frac{\partial}{\partial u^k}] \wedge \frac{\partial}{\partial u^j} \wedge \frac{\partial}{\partial u^l} \\
&\quad - [P^{ij} \frac{\partial}{\partial u^i}, \frac{\partial}{\partial u^l}] \wedge \frac{\partial}{\partial u^j} \wedge P^{kl} \frac{\partial}{\partial u^k} - [\frac{\partial}{\partial u^j}, P^{kl} \frac{\partial}{\partial u^k}] \wedge P^{ij} \frac{\partial}{\partial u^i} \wedge \frac{\partial}{\partial u^l} \\
&= P^{ij} \frac{\partial P^{kl}}{\partial u^i} \frac{\partial}{\partial u^k} \wedge \frac{\partial}{\partial u^j} \wedge \frac{\partial}{\partial u^l} - P^{kl} \frac{\partial P^{ij}}{\partial u^k} \frac{\partial}{\partial u^i} \wedge \frac{\partial}{\partial u^j} \wedge \frac{\partial}{\partial u^l} \\
&\quad + P^{kl} \frac{\partial P^{ij}}{\partial u^l} \frac{\partial}{\partial u^i} \wedge \frac{\partial}{\partial u^j} \wedge \frac{\partial}{\partial u^k} - P^{ij} \frac{\partial P^{kl}}{\partial u^j} \frac{\partial}{\partial u^k} \wedge \frac{\partial}{\partial u^i} \wedge \frac{\partial}{\partial u^l} \\
&= \left( -P^{sj} \frac{\partial P^{ki}}{\partial u^s} - P^{sk} \frac{\partial P^{ij}}{\partial u^s} + P^{ks} \frac{\partial P^{ij}}{\partial u^s} - P^{js} \frac{\partial P^{ik}}{\partial u^s} \right) \frac{\partial}{\partial u^i} \wedge \frac{\partial}{\partial u^j} \wedge \frac{\partial}{\partial u^k} \\
&= -4P^{sj} \frac{\partial P^{ki}}{\partial u^s} \frac{\partial}{\partial u^i} \wedge \frac{\partial}{\partial u^j} \wedge \frac{\partial}{\partial u^k} \\
&= -8 \sum_{i < j < k} \left( P^{sj} \frac{\partial P^{ki}}{\partial u^s} + P^{sk} \frac{\partial P^{ij}}{\partial u^s} + P^{si} \frac{\partial P^{jk}}{\partial u^s} \right) \frac{\partial}{\partial u^i} \wedge \frac{\partial}{\partial u^j} \wedge \frac{\partial}{\partial u^k}
\end{aligned}$$

可见  $[P, P] = 0$  当且仅当雅可比恒等式成立，证毕。  $\square$

于是我们自然地引入泊松流形的概念：

### 定义 3.1.5. （泊松流形）

泊松流形（Poisson manifold）是指二元组  $(X, P)$ ，其中  $X$  为光滑流形， $P \in \text{PV}_X^2$  满足  $[P, P] = 0$ .

众所周知，这是经典力学的几何模型。接下来看一些泊松流形的例子：

### 重要例子 3.1.6. （由辛结构诱导的泊松结构）

设  $(X, \omega)$  为辛流形，其中辛形式

$$\omega = \frac{1}{2} \omega_{ij} dx^i \wedge dx^j$$

满足  $d\omega = 0$ ，并且使得系数矩阵  $(\omega_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$  在  $X$  上处处可逆、反对称。那么辛结构  $\omega$  自然诱导泊松结构

$$\omega^{-1} := \frac{1}{2} \omega^{ij} \partial_i \wedge \partial_j$$

其中矩阵  $(\omega^{ij}) := (\omega_{ij})^{-1}$ 。

证明. 我们只需验证雅可比恒等式

$$\omega^{is} \frac{\partial \omega^{jk}}{\partial u^s} + \omega^{js} \frac{\partial \omega^{ki}}{\partial u^s} + \omega^{ks} \frac{\partial \omega^{ij}}{\partial u^s} = 0$$

一方面注意到逆矩阵求导公式  $\frac{\partial \omega^{-1}}{\partial u^s} = -\omega^{-1} \frac{\partial \omega}{\partial u^s} \omega^{-1}$ ，从而有

$$\omega^{is} \frac{\partial \omega^{jk}}{\partial u^s} = -\omega^{is} \omega^{jm} \omega^{nk} \frac{\partial \omega_{mn}}{\partial u^s}$$

对  $i, j, k$  轮换求和，有

$$\omega^{is} \frac{\partial \omega^{jk}}{\partial u^s} + \omega^{js} \frac{\partial \omega^{ki}}{\partial u^s} + \omega^{ks} \frac{\partial \omega^{ij}}{\partial u^s} = \omega^{is} \omega^{jm} \omega^{kn} \left( \frac{\partial \omega_{mn}}{\partial u^s} + \frac{\partial \omega_{ns}}{\partial u^m} + \frac{\partial \omega_{sm}}{\partial u^n} \right)$$

另一方面，由于  $d\omega = 0$ ，从而有

$$\begin{aligned} 0 &= d(\omega_{ij} dx^i \wedge dx^j) \\ &= \frac{\partial \omega_{ij}}{\partial u^k} dx^i \wedge dx^j \wedge dx^k \\ &= \sum_{i < j < k} 2 \left( \frac{\partial \omega_{ij}}{\partial u^k} + \frac{\partial \omega_{jk}}{\partial u^i} + \frac{\partial \omega_{ki}}{\partial u^j} \right) dx^i \wedge dx^j \wedge dx^k \end{aligned}$$

因此有

$$\frac{\partial \omega_{ij}}{\partial u^k} + \frac{\partial \omega_{jk}}{\partial u^i} + \frac{\partial \omega_{ki}}{\partial u^j} = 0$$

综上两方面，证毕。  $\square$

众所周知，这个例子来自经典力学。事实上，此泊松结构有如下不依赖局部坐标的表达方式：对任意  $f \in C^\infty(X)$ ，存在唯一的切向量场  $X_f$  使得

$$df + i_{X_f}(\omega) = 0$$

称此  $X_f$  为  $f$  的哈密顿向量场。于是，对于任意的  $f, g \in C^\infty(X)$ ，辛结构  $\omega$  诱导的泊松括号满足

$$\{f, g\} = \omega(X_f, X_g)$$

以上是我们在经典力学中熟知的。下一个例子更“接近”经典力学：



**重要例子 3.1.7.** (光滑流形余切丛上的典范辛结构)

设  $M$  为  $n$  维光滑流形,  $X := T^*M$  为  $X$  的余切丛, 则定义  $X$  上的典范 1-形式  $\theta \in \Omega_X^1$  为:

$$\theta|_{(x,p)}(v, \xi) := \langle p, v \rangle$$

其中  $(x, p) \in X$ ,  $(v, \xi) \in T_{(x,p)}(X)$ , 以及  $v \in T_x M$ . 记  $X$  上的 2-形式

$$\omega := -d\theta$$

称  $\omega$  为  $T^*M$  上的典范辛形式。

考虑  $X = T^*M$  的局部坐标  $(x^1, x^2, \dots, x^n; p_1, p_2, \dots, p_n)$ , 其中  $x^i$  为  $M$  上的局部坐标。则容易知道典范 1-形式  $\theta$  与典范辛形式  $\omega$  在该局部坐标下的表达式分别为

$$\begin{aligned}\theta &= \sum_{i=1}^n p_i dx^i \\ \omega &= \sum_{i=1}^n dx^i \wedge dp_i\end{aligned}$$

上述  $\omega$  给出了余切丛  $T^*M$  的辛流形结构, 该辛结构诱导泊松结构, 于是我们可以谈论  $X = T^*M$  上的泊松括号。

**注记 3.1.8.** 记号承上, 则存在典范的线性同态

$$\begin{aligned}\varphi : \Gamma(M, TM) &\rightarrow C^\infty(X) \\ \varphi(\eta)|_{(x,p)} &= \langle p, \eta \rangle\end{aligned}$$

即, 通过“非常自然的方式”, 将底流形  $M$  上的切向量场视为余切丛  $X = T^*M$  上的光滑函数。该线性同态可以自然延拓到切丛的对称张量丛的截面上:

$$\varphi : \Gamma(M, \text{Sym}(TM)) \rightarrow C^\infty(X)$$

无非是“函数的相乘”而已。

**性质 3.1.9.** 设  $M$  为光滑流形, 考虑  $X = T^*M$  上的典范辛结构,  $\varphi : \Gamma(M, TM) \rightarrow C^\infty(X)$  同上, 则对  $M$  的任意的切向量场  $f, g$ , 成立

$$\varphi([f, g]) = -\{\varphi(f), \varphi(g)\}$$

其中左边 “[, ]” 为  $M$  上的切向量场的李括号, 右边  $\{, \}$  为辛流形  $X$  上的泊松括号。

证明. 局部坐标下验证. 取  $X$  的局部坐标  $(x^1, \dots, x^n; p_1, \dots, p_n)$ , 记

$$f = f^i \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad g = g^i \frac{\partial}{\partial x^i}$$

则容易知道

$$\varphi(f) = f^i(x) p_i, \quad \varphi(g) = g^i(x) p_i$$

注意  $X$  上的泊松张量

$$P = \frac{\partial}{\partial x^i} \wedge \frac{\partial}{\partial p_i}$$

因此有

$$\begin{aligned} \{\varphi(f), \varphi(g)\} &= \left\langle \frac{\partial}{\partial x^s} \wedge \frac{\partial}{\partial p_s}, d\varphi(f) \wedge d\varphi(g) \right\rangle \\ &= \left( g^s \frac{\partial f^i}{\partial x^s} - f^s \frac{\partial g^i}{\partial x^s} \right) p_i \end{aligned}$$

而另一方面,

$$[f, g] = \left( f^s \frac{\partial g^i}{\partial x^s} - g^s \frac{\partial f^i}{\partial x^s} \right) \frac{\partial}{\partial x^i} \implies \varphi([f, g]) = \left( f^s \frac{\partial g^i}{\partial x^s} - g^s \frac{\partial f^i}{\partial x^s} \right) p_i$$

从而  $\varphi([f, g]) = -\{\varphi(f), \varphi(g)\}$ , 得证。 □

## 3.2 形变量子化与 Moyal 星积

我们开始讨论形变量子化。 (此处应该写几句 introduction)

**定义 3.2.1.** (星积)

对于泊松流形  $(X, P)$ , 称  $\mathbb{R}[[\hbar]]$ -双线性映射

$$\begin{aligned} C^\infty(X)[[\hbar]] \times C^\infty(X)[[\hbar]] &\rightarrow C^\infty(X)[[\hbar]] \\ f \star g &\mapsto \sum_{k \geq 0} C_k(f, g) \hbar^k \end{aligned}$$

为  $(X, P)$  上的星积 (star product), 如果  $\star$  是结合的, 并且对任意  $f, g \in C^\infty(X)$ , 以下成立:

(1)  $\hbar \rightarrow 0$  时退化为通常的函数乘法:

$$f \star g = fg \mod \hbar$$

(2)  $\star$  的“一阶非交换性”由泊松括号给出:

$$f \star g - g \star f = \hbar \{f, g\} \mod \hbar^2$$

(3) 对于每个  $k \geq 0$ ,  $C_k$  为双微分算子:

$$C_k(f, g) = \sum_{\max\{l, m\}=k} C_k^{i_1 \dots i_l j_1 \dots j_m} (\partial_{i_1} \dots \partial_{i_l} f) (\partial_{j_1} \dots \partial_{j_m} g)$$

其中系数  $C_k^{i_1 \dots i_l j_1 \dots j_m} \in C^\infty(X)$ .

此时, 也称  $(C^\infty(X), \star)$  为  $(X, P)$  的形变量子化 (deformation quantization)。

这里的  $\hbar$  为形式变元 (物理背景为普朗克常量, 这是心照不宣的)。由定义容易知道, 对任意  $f \in C^\infty(X)$ , 成立

$$1 \star f = f \star 1 = f$$

其中  $1 \in C^\infty(X)$  为值恒为 1 的常值函数。

此外, 容易知道双微分算子

$$C_0(f, g) = fg$$

以及我们不妨

$$C_1(f, g) = \{f, g\}$$

一个基本的问题是, 任给一个泊松流形  $(X, P)$ , 它的形变量子化是否一定存在? 答案是肯定的, Kontsevich 用非交换几何的工具给出了证明——这也是我们在后文要详细介绍的。对于辛流形的特殊情况, 形变量子化的存在性相对比较容易证明, 据说辛流形的形变量子化与 Atiyah-Singer 指标定理有联系。

我们先来看一些例子:

**重要例子 3.2.2.** (Moyal 乘积) 设  $X = \mathbb{R}^n$ , 并配以泊松张量

$$P = P^{ij} \frac{\partial}{\partial x^i} \wedge \frac{\partial}{\partial x^j}$$

其中  $P^{ij}$  皆为常数, 则我们定义如下乘积: 对任意  $f, g \in C^\infty(X)$ ,

$$(f \star g)(x) := e^{\hbar P^{ij} \frac{\partial}{\partial y_i} \frac{\partial}{\partial z_j}} f(y) g(z) \Big|_{y=z=x}$$

则  $\star$  给出了  $(X, P)$  的形变量子化。

把算子指数打开, 该星积  $\star$  的定义式可以显式地写为

$$f \star g = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\hbar^k}{k!} \sum_{\substack{i_1, \dots, i_k \\ j_1, \dots, j_k}} P^{i_1 j_1} P^{i_2 j_2} \dots P^{i_k j_k} (\partial_{i_1} \partial_{i_2} \dots \partial_{i_k} f) (\partial_{j_1} \partial_{j_2} \dots \partial_{j_k} g)$$

容易验证如此定义的  $\star$  满足

$$f \star g = fg + \frac{\hbar}{2}\{f, g\} + o(\hbar)$$

我们只需要再验证  $\star$  满足结合律，证明如下：

证明. 直接将  $(f \star g) \star h$  暴力展开，对任意  $m \geq 0$ ，计算  $\hbar^m$  的系数。

为书写方便，引入一些记号：我们常用  $I = (i_1, i_2, \dots, i_s)$  来表示长度为  $s$  的多重指标，其中  $i_1, \dots, i_s$  取值于  $\{1, 2, \dots, n\}$ ，它们之中允许相同、计次序。设多重指标  $|I| = |J| = s$ ，其中  $I = (i_1, \dots, i_s)$  以及  $J = (j_1, \dots, j_s)$ ，则对于  $f \in C^\infty(X)$ ，我们记

$$\partial_I(f) := \partial_{i_1} \cdots \partial_{i_s} f$$

$$P^{I;J} := P^{i_1 j_1} P^{i_2 j_2} \cdots P^{i_s j_s}$$

以及，对于任意两个多重指标  $|S| = s$  以及  $|T| = t$ （允许  $s \neq t$ ），则记  $ST$  为  $S$  与  $T$  的顺次连接（文字乘法），其长度为  $s+t$ 。对于多重指标  $S$ ，视它为序列，则可以考虑其子列  $S'$ ，记为  $S' \subseteq S$ 。

在此记号下， $\star$  的显式表达式为

$$f \star g = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\hbar^k}{k!} \sum_{|I|=|J|=k} P^{I;J} (\partial_I f) (\partial_J g)$$

现在，我们直接计算  $(f \star g) \star h$  的  $\hbar^m$ -系数，计算过程中会反复用到“算两次”的组合技巧：

$$\begin{aligned} [(f \star g) \star h]_m &= \sum_{l=0}^m ((f \star g)_l \star h)_{m-l} \\ &= \sum_{l=0}^m \frac{1}{l!} \sum_{|I|=|J|=l} P^{I;J} ((\partial_I f \partial_J g) \star h)_{m-l} \\ &= \sum_{l=0}^m \frac{1}{l!(m-l)!} \sum_{|I|=|J|=l} \sum_{|R|=|S|=m-l} P^{IR;JS} \partial_R (\partial_I f \partial_J g) (\partial_S h) \\ &= \sum_{l=0}^m \frac{1}{l!(m-l)!} \sum_{|I|=|J|=l} \sum_{|R|=m-l} \sum_{\substack{R_1 \subseteq R \\ R_2 := R \setminus R_1}} (\partial_{IR_1} f) (\partial_{JR_2} g) \sum_{|S|=m-l} P^{IR;JS} (\partial_S h) \\ &= \sum_{l=0}^m \frac{1}{l!(m-l)!} \sum_{|I|=|J|=l} \sum_{u+v=m-l} \sum_{\substack{|R_1|=u \\ |R_2|=v}} \frac{(m-l)!}{u!v!} (\partial_{IR_1} f) (\partial_{JR_2} g) \sum_{|S|=m-l} P^{IR;JS} (\partial_S h) \\ &= \sum_{\substack{0 \leq i, k \leq m \\ i+k \geq m}} \frac{1}{(m-i)!(i+k-m)!(m-k)!} \sum_{\substack{|I|=i \\ |K|=k}} \sum_{\substack{|J_1|=m-k \\ |J_2|=m-i}} P^{IJ_2;J_1K} (\partial_I f) (\partial_{J_1 J_2} g) (\partial_K h) \end{aligned}$$

容易观察出上式关于  $f, h$  的对称性：

$$[(f \star g) \star h]_m = (-1)^m [(h \star g) \star f]_m$$

此外也容易验证（也是从显式表达式直接看出来）

$$(f \star g)_m = (-1)^m (g \star f)_m$$

从而有

$$\begin{aligned}
[(f \star g) \star h]_m &= (-1)^m [(h \star g) \star f]_m \\
&= (-1)^m \sum_{l=0}^m [(h \star g)_l \star f]_{m-l} \\
&= (-1)^m \sum_{l=0}^m (-1)^{m-l} (-1)^l [f \star (g \star h)]_{m-l} \\
&= [f \star (g \star h)]_m
\end{aligned}$$

从而证毕。 □

(似乎有更简单的方法? 某些算子指数的性质直接秒掉?)

特别地, 考虑经典力学“位置-动量”的经典情形:

**例子 3.2.3.** (*Moyal-Weyl* 代数)

设  $X = \mathbb{R}^{2n}$  为偶数维线性空间, 坐标函数记为  $\{x^1, \dots, x^n; p_1, \dots, p_n\}$ , 配以标准的泊松结构

$$P = \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x^i} \wedge \frac{\partial}{\partial p_i}$$

则 *Moyal* 星积  $\star$  给出了

$$A := \mathbb{R}[x^1, \dots, x^n; p_1, \dots, p_n; \hbar]$$

上的 *Weyl* 代数结构  $\star: A \times A \rightarrow A$ .

例如, 在此情形下, 容易计算出

$$x^i \star p_j = x^i p_j + \frac{1}{2} \hbar \delta_j^i$$

事实上, 星积  $\star$  可以抽象为如下的代数版本 (不一定要局限于辛流形上的函数):

**定义 3.2.4.** (代数版本的形变量子化)

设  $(A, \cdot, \{, \})$  为泊松代数 (*Poisson algebra*), 即  $(A, \cdot)$  为含么交换结合  $K$ -代数,  $(A, \{, \})$  为李代数, 并且满足莱布尼茨法则

$$\{f, gh\} = \{f, g\}h + g\{f, h\}$$

称  $K[[\hbar]]$ -双线性映射

$$\star: A[[\hbar]] \times A[[\hbar]] \rightarrow A[[\hbar]]$$

为  $(A, \cdot, \{, \})$  的形变量子化, 如果  $\star$  满足结合性, 以及对任意  $f, g \in A$ ,

$$f \star g = fg + \frac{\hbar}{2} \{f, g\} + o(\hbar)$$

明显地,  $A$  的几何背景为辛流形上的光滑函数环。

**记号 3.2.5.** 设  $M$  为光滑流形,  $X = T^*M$  为  $M$  的余切丛, 配以典范辛结构

$$\omega = \sum dx^i \wedge dp_i$$

我们记

$$\mathcal{O}(X) = \Gamma(M, \text{Sym}(TM))$$

注意  $\mathcal{O}(X)$  中的元素可视为  $X$  上的光滑函数 (见注记 3.1.8), 它配以  $X$  上的泊松括号构成泊松代数。我们考虑  $(\mathcal{O}(X), \{, \})$  的形变量子化。

(这里有坑待填)

$D_X$  differential operator on  $X$ .  $\exists$  filtration by its order

$$D_X^{(0)} \subseteq D_X^{(1)} \subseteq \dots \subseteq D_X^{(m)} \dots$$

(consists of  $\sum A^{i_1 \dots i_k} \partial_{i_1} \dots \partial_{i_k}$ )

Check:

$$[D_X^{(m)}, D_X^{(n)}] \subseteq D_X^{(m+n-1)}$$

$$D_X^{(m)} \circ D_X^{(n)} \subseteq D_X^{(m+n)}$$

$(D_X, \circ)$  is associative

$$D_X^{\hbar} := \bigoplus_{m \geq 0} D_X^{(k)} \hbar^m \subseteq D_X[\hbar]$$

is a  $\mathbb{R}[\hbar]$ -module

HW: what is  $k$  in Def above????

(such that  $D_X^{\hbar}$  can be understood as a Deformation Quantization of  $(\mathcal{O}(X), \{, \})$  over ring  $\mathbb{R}[\hbar]$ .)

我们再看一个重要例子:

**重要例子 3.2.6.** (环面泊松代数)

考虑如下的  $\mathbb{R}$ -代数

$$e^V := \text{span}_{\mathbb{R}} \{e^v | v = (v^1, \dots, v^n) \in \mathbb{Z}^n\}$$

并且定义乘法

$$e^{v_1} e^{v_2} = e^{v_1 + v_2}$$

则  $(e^V, \cdot)$  为含么交换结合  $\mathbb{R}$ -代数。令  $\omega$  为  $\mathbb{R}^n$  上的一个反对称双线性型，定义

$$\begin{aligned}\{, \} : e^V \times e^V &\rightarrow e^V \\ \{e^{v_1}, e^{v_2}\} &\mapsto \omega(v_1, v_2)e^{v_1+v_2}\end{aligned}$$

则  $(e^V, \cdot, \{, \})$  构成泊松代数。

证明。只需验证  $\{, \}$  的雅可比恒等式与莱布尼茨法则。对任意  $x, y, z \in \mathbb{Z}^n$ ，有

$$\begin{aligned}\{e^x, e^y e^z\} &= \{e^x, e^{y+z}\} \\ &= \omega(x, y+z)e^{x+y+z} \\ &= \omega(x, y)e^{x+y}e^z + \omega(x, z)e^{x+z}e^y \\ &= \{e^x, e^y\}e^z + e^y\{e^x, e^z\}\end{aligned}$$

从而莱布尼茨法则成立。再看雅可比恒等式：

$$\begin{aligned}\{\{e^x, e^y\}, e^z\} &= \omega(x, y)\{e^{x+y}, e^z\} \\ &= \omega(x, y)\omega(x+y, z)e^{x+y+z} \\ &= [\omega(x, y)\omega(y, z) - \omega(z, x)\omega(x, y)]e^{x+y+z}\end{aligned}$$

之后对  $x, y, z$  轮换求和，立刻得到。 □

注意到这里的  $\omega$  可以是退化的。考虑标准环面

$$T^n := \{(z_1, z_2, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n \mid |z_i| = 1\}$$

则注意到  $e^V$  中的元素可以通过以下方式视为  $T^n$  上的光滑函数：

$$\begin{aligned}e^V &\hookrightarrow C^\infty(T^n) \\ v = (v_1, v_2, \dots, v_n) &\mapsto z_1^{v_1} z_2^{v_2} \cdots z_n^{v_n}\end{aligned}$$

容易知道  $e^V$  在函数空间  $C^\infty(T^n)$  当中稠密，这是傅里叶展开的标准技术。

我们考虑泊松代数  $(e^V, \{, \})$  的形变量子化：

### 性质 3.2.7. (量子环面)

记号承上，记  $\hbar$  为形式变元，定义  $\mathbb{R}[[\hbar]]$ -双线性映射

$$\begin{aligned}\star : e^V[[\hbar]] \times e^V[[\hbar]] &\rightarrow e^V[[\hbar]] \\ e^x \star e^y &:= e^{\hbar\omega(x, y)} e^{x+y}\end{aligned}$$

则  $(e^V[[\hbar]], \star)$  为  $(e^V, \{, \})$  的形变量子化。

证明. 这几乎是显然的. 首先对任意  $x, y, z \in \mathbb{Z}^n$ , 有

$$(e^x \star e^y) \star e^z = e^{\hbar\omega(x,y)} e^{x+y} \star e^z = e^{\hbar(\omega(x,y) + \omega(x+y,z))} e^{x+y+z}$$

再直接验证  $e^x \star (e^y \star e^z)$  即可证明结合性.

另一方面,

$$\begin{aligned} e^x \star e^y &= e^{\hbar\omega(x,y)} e^{x+y} \\ &= e^{x+y} + \frac{1}{2} \hbar \omega(x,y) e^{x+y} + o(\hbar) \\ &= e^x e^y + \frac{1}{2} \hbar \{e^x, e^y\} + o(\hbar) \end{aligned}$$

从而证毕. □

### 3.3 重要例子：李代数的对偶

本节给出泊松流形的重要例子：有限维李代数的对偶空间上的典范泊松结构——并且探讨其形变量子化。

#### 重要例子 3.3.1. (李代数的对偶)

设  $(\mathfrak{g}, [\cdot, \cdot])$  为 (有限维) 李代数, 考虑  $X := \mathfrak{g}^*$  为其对偶, 取  $\{e^1, e^2, \dots, e^n\}$  为  $\mathfrak{g}$  的一组基,  $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  为  $\mathfrak{g}^*$  当中相应的对偶基. 用  $X^i$  来表示  $X = \mathfrak{g}^*$  中的点在基  $\{e_i\}$  下的坐标. 记李代数  $\mathfrak{g}$  的结构常数为

$$[e^i, e^j] = C_k^{ij} e^k$$

那么我们给出  $X = \mathfrak{g}^*$  的泊松张量如下:

$$P_{\mathfrak{g}} = \frac{1}{2} X^k C_k^{ij} e_i \wedge e_j$$

则  $(X, P_{\mathfrak{g}})$  为泊松流形。

证明. 先考虑  $P$  的良定性. 事实上, 上述泊松张量可以内蕴地写成如下: 对任意  $\xi \in X = \mathfrak{g}^*$ , 以及  $f, g \in C^\infty(\mathfrak{g}^*)$ ,

$$\{f, g\}_{P_{\mathfrak{g}}}(\xi) = \xi([df, dg])$$

其中  $df \in T_{\xi}^* \mathfrak{g}^* \cong (\mathfrak{g}^*)^* \cong \mathfrak{g}$ . 局部坐标下, 记  $\xi = X^i e_i$ , 则

$$\begin{aligned} \xi([df, dg]) &= \left\langle X^i e_i, \left[ \frac{\partial f}{\partial X^j} e^j, \frac{\partial g}{\partial X^k} e^k \right] \right\rangle \\ &= X^i C_k^{ij} \frac{\partial f}{\partial X^i} \frac{\partial g}{\partial X^j} \end{aligned}$$



另一方面也容易验证上式右边也与以下相等：

$$\left\langle \frac{1}{2} X^k C_k^{ij} e_i \wedge e_j, df \wedge dg \right\rangle$$

于是  $P_{\mathfrak{g}}$  良定（与局部坐标选取无关）。接下来验证它的确为泊松张量，局部坐标下暴力验证即可：注意到

$$P_{\mathfrak{g}}^{is} \frac{\partial P_{\mathfrak{g}}^{jk}}{\partial X^s} = P_{\mathfrak{g}}^{is} \frac{\partial}{\partial X^s} (X^t C_t^{jk}) = X^l C_l^{is} C_s^{jk}$$

其中注意结构常数  $C_k^{ij}$  作为  $X$  上的函数，是常值的。对  $i, j, k$  轮换相加，有

$$P_{\mathfrak{g}}^{is} \frac{\partial P_{\mathfrak{g}}^{jk}}{\partial X^s} + P_{\mathfrak{g}}^{js} \frac{\partial P_{\mathfrak{g}}^{ki}}{\partial X^s} + P_{\mathfrak{g}}^{ks} \frac{\partial P_{\mathfrak{g}}^{ij}}{\partial X^s} = X^l (C_l^{is} C_s^{jk} + C_l^{js} C_s^{ki} + C_l^{ks} C_s^{ij}) = 0$$

其中第二个等号是因为李代数  $\mathfrak{g}$  的雅可比恒等式。从而证毕。  $\square$

如此通过李代数对偶得到的泊松流形称为线性泊松流形。容易知道， $(P_{\mathfrak{g}}^{ij})$  可逆当且仅当  $P_{\mathfrak{g}}$  可由  $X$  上的辛结构诱导。

此外注意到， $\mathfrak{g}$  中的向量  $v$  自然视为  $X = \mathfrak{g}^*$  上的线性函数：对任意  $\zeta \in X = \mathfrak{g}^*$ ,

$$v(\zeta) := \langle \zeta, v \rangle$$

在此意义下， $\mathfrak{g}$  的基向量  $e^i$  即为  $X$  上的坐标函数  $X^i$ 。

**性质 3.3.2.** 对于有限维李代数  $\mathfrak{g}$ ，任意  $u, v \in \mathfrak{g}$  视为  $X$  上的线性函数，则泊松括号满足

$$\{u, v\}_{P_{\mathfrak{g}}} = [u, v]$$

其中右端  $[,]$  为  $\mathfrak{g}$  中的李括号。

证明. 用泊松张量  $P_{\mathfrak{g}}$  的内蕴定义

$$\{f, g\}_{P_{\mathfrak{g}}}(\zeta) = \zeta([f, g])$$

来看，是显然的。  $\square$

接下来再看另一个重要例子：李代数对偶  $\mathfrak{g}^*$ （见例子3.3.1）的形变量子化。我们引入量子包络代数：

**定义 3.3.3.** (量子包络代数)

设  $\mathfrak{g}$  为 (有限维) 李代数, 我们定义  $\mathfrak{g}$  的量子包络代数 (quantum enveloping algebra)  $\mathcal{U}_\hbar(\mathfrak{g})$  如下:

$$\mathcal{U}_\hbar(\mathfrak{g}) := \bigoplus_{k \geq 0} \mathfrak{g}^{\otimes k}[[\hbar]] / \sim$$

其中关系  $\sim$  为以下生成的理想:

$$a \otimes b - b \otimes a = \hbar[a, b]$$

这里的  $\hbar$  依然是形式变元。注意到若  $\hbar = 0$  时, 得到的是对称张量代数  $\text{Sym}(\mathfrak{g})$ ;  $\hbar = 1$  时则为熟知的泛包络代数  $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ .

关于量子包络代数  $\mathcal{U}_\hbar(\mathfrak{g})$ , 有以下 **PBW 定理**, 我们述而不证:

**性质 3.3.4.** (量子包络代数的 PBW 定理)

对于李代数  $\mathfrak{g}$ , 则以下映射为线性双射:

$$\begin{aligned} \Phi : \text{Sym}(\mathfrak{g})[[\hbar]] &\rightarrow \mathcal{U}_\hbar(\mathfrak{g}) \\ x_1 \otimes \cdots \otimes x_k &\mapsto \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} x_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes x_{\sigma(k)} \end{aligned}$$

证明.  $\Phi$  的良好性显然, 双射性的证明从略。 □

注意量子包络代数  $\mathcal{U}_\hbar(\mathfrak{g})$  的乘法结构由张量运算  $\otimes$  给出, 考虑 PBW 定理中的  $\Phi$ , 则  $\Phi^*(\otimes)$  给出了  $\text{Sym}(\mathfrak{g})[[\hbar]]$  的乘法结构, 易知该乘法是结合的 (需要 check, 不过比较容易), 并且与  $\text{Sym}(\mathfrak{g})[[\hbar]]$  上通常的乘法 (张量运算  $\otimes$ ) 不同。我们将结合代数  $(\text{Sym}(\mathfrak{g})[[\hbar]], \Phi^*(\otimes))$  记作  $\mathcal{O}(X)[[\hbar]]$ , 其中  $X = \mathfrak{g}^*$  为李代数  $\mathfrak{g}$  的辛流形。

注意到  $\mathfrak{g} \cong (\mathfrak{g}^*)^*$  中的元素可视为  $X = \mathfrak{g}^*$  上的线性函数, 于是  $\text{Sym}(\mathfrak{g})$  中的元素为  $X$  中的多项式函数, 这也是我们将  $\text{Sym}(\mathfrak{g})$  记为  $\mathcal{O}(X)$  的原因。我们只考虑  $X = \mathfrak{g}^*$  上的多项式函数。

**重要例子 3.3.5.** (李代数对偶  $\mathfrak{g}^*$  的形变量子化)

对于 (有限维) 李代数  $\mathfrak{g}$ , 记号承上, 则  $\mathcal{O}(X)[[\hbar]]$  为泊松流形  $(X, P_\mathfrak{g})$  的形变量子化, 其星积为  $\Phi^{-1}(\otimes)$ .

证明. 记  $\star := \Phi^*(\otimes)$ , 首先  $\star$  的结合性容易验证: 对于任意的  $x, y, z \in \text{Sym}(\mathfrak{g})$ , 则

$$(x \star y) \star z = \Phi^{-1}(\Phi(x) \otimes \Phi(y)) \star z = \Phi^{-1}((\Phi(x) \otimes \Phi(y)) \otimes \Phi(z))$$

从而由  $(\mathcal{U}_\hbar(\mathfrak{g}), \otimes)$  的结合性, 立得  $\star$  的结合性。

接下来只需验证对任意  $x, y \in \text{Sym}(\mathfrak{g})$ , 成立

$$x \star y = xy + \frac{\hbar}{2} \{x, y\}_{P_{\mathfrak{g}}} + o(\hbar)$$

现在对于任意  $x, y \in \text{Sym}(\mathfrak{g})$ , 不妨

$$x = x_1 x_2 \cdots x_p \quad y = y_1 y_2 \cdots y_q$$

(对称张量积省略之, 无非是函数的乘法) 我们先考虑  $p = q = 1$  的简单情形。此时

$$\begin{aligned} x \star y &= \Phi^{-1}(x \otimes y) \\ &= \Phi^{-1}\left(\frac{x \otimes y + y \otimes x}{2} + \frac{x \otimes y - y \otimes x}{2}\right) \\ &= xy + \Phi^{-1}\left(\frac{\hbar[x, y]}{2}\right) \\ &= xy + \frac{\hbar}{2} \{x, y\}_{P_{\mathfrak{g}}} \end{aligned}$$

从而得证 (其中最后一个等式利用了性质 3.3.2)。

接下来看一般情形。一般情形待补 估计还是暴力组合恒等式

□

### 3.4 间奏：Kontsevich 量子化公式

本节我们介绍 Kontsevich 的著名结果：任何泊松流形  $(X, P)$  都存在形变量子化；并且星积  $\star$  可以显式地构造出。我们只介绍结果 (星积  $\star$  的具体构造), 暂不给出证明。

为描述 Kontsevich 的量子化公式, 我们需要一些图论组合的准备：

**定义 3.4.1.** (带标记的有向图)

(1) 带标记的有向图是指形如  $(\Gamma_0, \Gamma_1, \varepsilon)$  的三元组, 其中  $\Gamma_0, \Gamma_1$  为任意集合,  $\varepsilon: \Gamma_1 \rightarrow \Gamma_0 \times \Gamma_0$ .

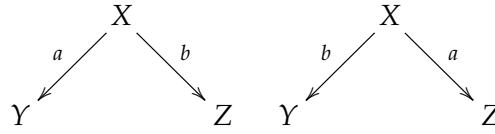
(2) 对于带标记的有向图  $\Gamma = (\Gamma_0, \Gamma_1, \varepsilon)$ , 我们称  $\Gamma_0$  为  $\Gamma$  的顶点集,  $\Gamma_1$  为  $\Gamma$  的边集; 对于  $e \in \Gamma_1$ , 定义

$$s(e) := \pi_1 \circ \varepsilon(e)$$

$$t(e) := \pi_2 \circ \varepsilon(e)$$

分别称之为  $e$  的始点 (source) 与终点 (tail), 其中  $\pi_1, \pi_2: \Gamma_0 \times \Gamma_0 \rightarrow \Gamma_0$  为典范的投影映射。

组合意义明显，但要注意它与图论当中的“有向图”有细微区别。例如对于  $\Gamma_0 = \{X, Y, Z\}$ ,  $\Gamma_1 = \{a, b\}$ ，以下两个图



并不相同（它们的  $\varepsilon$  不相同）。

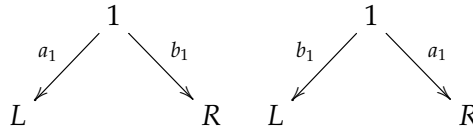
我们再引入一些图论的概念。对于  $e \in \Gamma_1$ ，如果  $s(e) = t(e)$ ，则称  $e$  为闭路（loop）；对于  $e_1, e_2 \in \Gamma_1$ ，如果  $s(e_1) = s(e_2)$  并且  $t(e_1) = t(e_2)$ ，则称  $\Gamma_0$  的子集  $e_1, e_2$  为双箭头（double arrow）。类似地可以定义“多箭头”。

**记号 3.4.2.** 对于非负整数  $n$ ，我们记  $G_n$  为满足以下条件的带标记的有向图  $\Gamma = (\Gamma_0, \Gamma_1, \varepsilon)$  构成的集合：

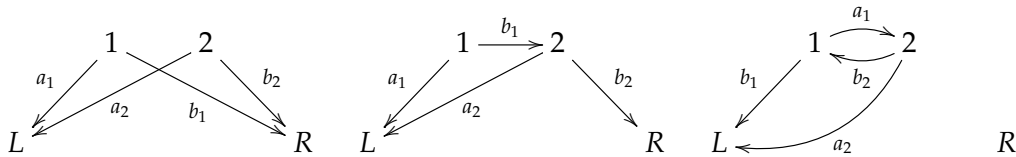
- (1)  $\Gamma_0 = \{1, 2, \dots, n\} \sqcup \{L, R\}$ ，其中  $L, R$  为形式变元；
- (2)  $\Gamma_1 = \{a_1, \dots, a_n; b_1, \dots, b_n\}$ ，并且对任意  $q \leq i \leq n$ ，都有  $s(a_i) = s(b_i) = i$ ；
- (3) 图  $\Gamma$  当中不含有回路，不含有双箭头。

例如，集合  $G_0$  当中只有一个元素  $(\Gamma_0, \Gamma_1, \varepsilon)$ ，其中  $\Gamma_0 = \{L, R\}$ ， $\Gamma_1 = \emptyset$ ， $\varepsilon = \emptyset$ ；也就是说，只有  $L, R$  两个顶点，没有边。

再比如，集合  $G_1$  当中有两个元素，如下：



再例如，以下三个带标记的有向图都是  $G_2$  当中的元素：



容易知道  $G_2$  当中有  $(3 \times 2)^2 = 36$  个元素，在此不一一列举。一般地， $G_n$  的元素个数为

$$|G_n| = [n(n+1)]^n$$

现在，考虑泊松流形  $(X, P)$ ，其中泊松张量  $P$  再局部坐标下为

$$P = P^{ij} \frac{\partial}{\partial u^i} \wedge \frac{\partial}{\partial u^j}$$

给定  $\Gamma \in G_n$ ，我们定义如下的  $n$  阶双微分算子：

定义 3.4.3. 对于  $N$  维泊松流形  $(X, P)$ , 以及  $\Gamma \in G_n$ , 定义  $C^\infty(X)$  上的  $n$  阶双微分算子

$$B_\Gamma : C^\infty(X) \times C^\infty(X) \rightarrow C^\infty(X)$$

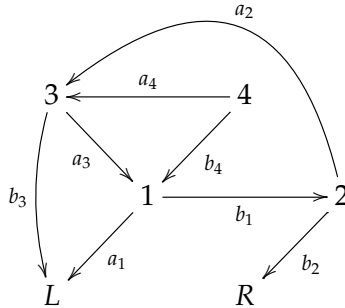
如下: 对任意  $f, g \in C^\infty(X)$ , 在局部坐标下,

$$B_\Gamma(f, g) = \left[ \prod_{k=1}^n \left( \prod_{\{m|t(a_m)=k\}} \partial_{a_m} \prod_{\{l|t(a_l)=k\}} \partial_{b_l} P^{a_k b_k} \right) \right] \left( \prod_{\{m|t(a_m)=L\}} \partial_{a_m} \prod_{\{l|t(b_l)=L\}} \partial_{b_l} f \right) \left( \prod_{\{m|t(a_m)=R\}} \partial_{a_m} \prod_{\{l|t(b_l)=R\}} \partial_{b_l} g \right)$$

这个公式的表述方式不太像人话。粗俗地说, 图  $\Gamma$  的顶点  $m \in \{1, 2, \dots, m\}$  被视为泊松张量的分量  $P^{a_m b_m}$ , 图  $\Gamma$  的边  $(\Gamma_1)$  中的元素视为张量求和指标。如果有一条边  $a_l$  (切转:  $b_l$ ) 指向顶点  $m$ , 那么我们对  $P^{a_m b_m}$  求偏导  $\partial_{a_l}$  (切转:  $\partial_{b_l}$ ); 如果有边  $a_m$  指向顶点  $L$ , 那么我们对函数  $f \in C^\infty(X)$  求偏导  $\partial_{a_m} \dots$

我们不妨举例说明一下:

例子 3.4.4. 考虑带标记的有向图  $\Gamma \in G_4$  如下:



那么双微分算子  $B_\Gamma$  的表达式为: 对任意  $f, g \in C^\infty(X)$ ,

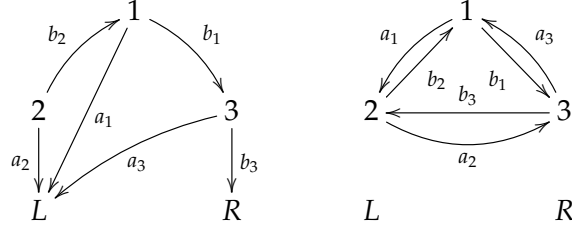
$$B_\Gamma(f, g) = (\partial_{a_3} P^{a_1 b_1}) (\partial_{b_1} \partial_{b_4} P^{a_2 b_2}) (\partial_{a_2} \partial_{a_4} P^{a_3 b_3}) (P^{a_4 b_4}) (\partial_{a_1} \partial_{b_3} f) (\partial_{b_2} g)$$

注意上式右边服从爱因斯坦求和约定,  $a_1, \dots, a_4; b_1, \dots, b_4$  为求和指标。

具体的操作如下: 首先看顶点 1, 考察哪些箭头 (边) 指向 1, 发现只有箭头  $a_3$  指向 1, 于是写下字符串 “ $(\partial_{a_3} P^{a_1 b_1})$ ”; 之后考察顶点 2, 发现  $b_2, b_4$  指向该点, 于是紧接着写下字符串 “ $(\partial_{b_1} \partial_{b_4} P^{a_2 b_2})$ ” ……之后一直这么做下去, 注意到顶点  $L, R$  分别对应  $f, g$ .

再举一例:

例子 3.4.5. 设带标记的有向图  $\Gamma, \Gamma' \in G_3$  依次为如下:



则对于  $f, g \in C^\infty(X)$ , 有

$$\begin{aligned} B_\Gamma(f, g) &= (\partial_{b_2} P^{a_1 b_1})(P^{a_2 b_2})(\partial_{b_1} P^{a_3 b_3})(\partial_{a_1} \partial_{a_2} \partial_{a_3} f)(\partial_{b_3} g) \\ B_{\Gamma'}(f, g) &= (\partial_{b_2} \partial_{a_3} P^{a_1 b_1})(\partial_{b_3} \partial_{a_1} P^{a_2 b_2})(\partial_{b_1} \partial_{a_2} P^{a_3 b_3}) f g \end{aligned}$$

通过上述例子, 我们已熟悉了双微分算子  $B_\Gamma$  的定义。不过, 距离完整介绍 Kontsevich 形变量子化公式, 还有较长的路要走。事实上, Kontsevich 构造的星积  $\star$  形如

$$f \star g = \sum_{n=0}^{\infty} \hbar^n \left( \sum_{\Gamma \in G_n} \omega_\Gamma B_\Gamma(f, g) \right)$$

其中  $\omega_\Gamma \in \mathbb{R}$  为系数, 其具体定义即将被介绍。

记号 3.4.6. 考虑双曲平面 (hyperbolic plane)  $\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im } z \geq 0\}$ , 配以标准的双曲度量

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}$$

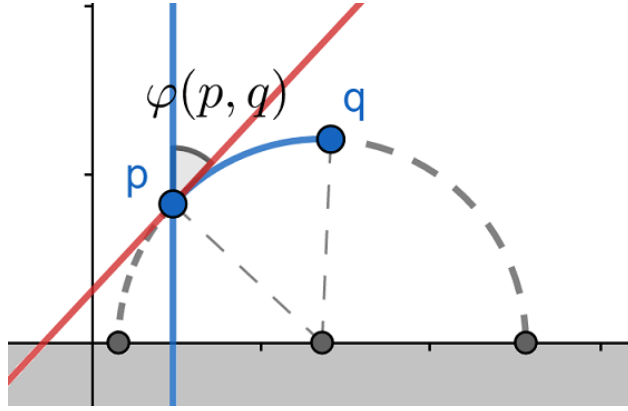
对于任意  $p \neq q \in \mathbb{H}$ , 我们记  $\ell(p, q)$  为  $\mathbb{H}$  上由  $p$  到  $q$  的测地线; 再记  $\varphi(p, q)$  为测地线  $\ell(p, q)$  到  $\ell(p, \infty)$  的夹角。

众所周知, 双曲平面上的测地线必形如垂直于  $x$  轴的直线, 或者圆心位于  $x$  轴的上半圆弧。对于  $p, q \in \mathbb{H}$ , 夹角  $\varphi(p, q)$  的示意图下图。

事实上, 由初等平面几何容易给出  $\varphi(p, q)$  的显式表达式:

$$\varphi(p, q) = \arg \left( \frac{q - \bar{p}}{q - p} \right)$$

以上出现的夹角、辐角可以取任意的分支。



图：测地线  $\ell(p, q)$ 、 $\ell(p, \infty)$ ，以及夹角  $\varphi(p, q)$ 。

记号 3.4.7. 对于  $n \geq 0$ ，定义

$$\text{Conf}_n(\mathbb{H}) := \{(p_1, \dots, p_n) \in \mathbb{H} \mid p_i \neq p_j, \forall i \neq j\}$$

则  $\text{Conf}_n(\mathbb{H})$  有自然的  $2n$  维光滑流形结构 ( $\mathbb{R}^{2n}$  的开子流形)。

对于图  $\Gamma = (\Gamma_0, \Gamma_1, \varepsilon) \in G_n$ ，以及  $e \in \Gamma_1$ ，定义流形  $\text{Conf}_n(\mathbb{H})$  上的光滑函数  $\varphi_e$  如下：

$$\begin{aligned} \varphi_e : \text{Conf}_n(\mathbb{H}) &\rightarrow \mathbb{R} \\ (p_1, \dots, p_n) &\mapsto \varphi(p_{s(e)}, p_{t(e)}) \end{aligned}$$

其中特别规定  $p_L = 0 \in \overline{\mathbb{H}}$ ，以及  $p_R = 1 \in \overline{\mathbb{H}}$

粗俗地说，对于图  $\Gamma \in G_n$ ， $\text{Conf}_n(\mathbb{H})$  当中的一个元素  $p$  可以视为“将图  $\Gamma$  嵌入双曲平面  $\mathbb{H}$  的一种方式”：图  $\Gamma$  的“一般顶点”的位置由  $p$  给出，“特殊顶点”  $L, R$  分别位于  $0, 1$ ；图  $\Gamma$  当中的边对应于  $\mathbb{H}$  中的测地线。此时， $\varphi_e$  可以认为是边  $e$  的“倾斜角”。

定义 3.4.8. 对于图  $\Gamma \in G_n$ ，定义

$$\omega_\Gamma = \frac{1}{n!(2\pi)^{2n}} \int_{\text{Conf}_n(\mathbb{H})} \bigwedge_{i=1}^n (d\varphi_{a_i} \wedge d\varphi_{b_i})$$

这是  $2n$ -形式在  $2n$ -维流形上的积分。但需要验证此积分的收敛性，这里从略。注意积分号前的系数  $\frac{1}{n!(2\pi)^{2n}}$  是精心挑选的，我们稍后给出解释。

现在，我们可以完整地陈述以下定理：

**定理 3.4.9. (Kontsevich)**

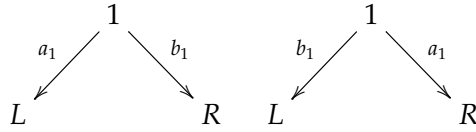
任意的泊松流形  $(X, P)$  都存在形变量子化, 并且星积可以由以下公式显式给出:

$$f \star g = \sum_{n=0}^{\infty} \hbar^n \left( \sum_{\Gamma \in G_n} \omega_{\Gamma} B_{\Gamma}(f, g) \right)$$

在此述而不证。构造如此星积  $\star$  的动机、想法, 来自于量子场论等物理背景, 我们在后文会介绍之。

**例子 3.4.10. ( $\omega_{\Gamma}$  最基本的显式计算)**

我们考虑简单 (但重要的) 情形:  $\Gamma, \Gamma' \in G_1$  分别为如下:



那么有

$$\omega_{\Gamma} = \frac{1}{2}, \quad \omega_{\Gamma'} = -\frac{1}{2}$$

证明. 我们只要求  $\omega_{\Gamma}$ , 而注意到  $\Gamma$  与  $\Gamma'$  的区别仅仅是两条边对换, 从而倾斜角  $\varphi_{\Gamma, a_1} = \varphi_{\Gamma', b_1}$ ,  $\varphi_{\Gamma, b_1} = \varphi_{\Gamma', a_1}$ , 再由外积的反对称性, 容易观察出  $\omega_{\Gamma} = -\omega_{\Gamma'}$ .

现在计算  $\omega_{\Gamma}$ . 此时  $n = 1$ ,  $\text{Conf}_1(\mathbb{H}) \cong H$ , 对任意的  $z = x + iy \in \mathbb{H} \cong \text{Conf}_1(\mathbb{H})$ , 由初等几何容易知道

$$\begin{aligned} \varphi_{a_1}(z) &= -2 \arg z \\ \varphi_{b_1}(z) &= -2 \arg(z - 1) \end{aligned}$$

(允许相差  $2\pi$  的整数倍, 这无所谓) 从而

$$d\varphi_{a_1}(z) = -2d \arctan\left(\frac{y}{x}\right) = -2 \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2}$$

同理

$$d\varphi_{b_1}(z) = -2 \frac{(x-1)dy - ydx}{(x-1)^2 + y^2}$$

因此有

$$\begin{aligned} \omega_{\Gamma} &= \frac{1}{1!(2\pi)^{2 \times 1}} \int_{\text{Conf}_1(\mathbb{H})} d\varphi_{a_1} \wedge d\varphi_{b_1} \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \int_{\mathbb{H}} \frac{4y}{(x^2 + y^2)((x-1)^2 + y^2)} dx \wedge dy \\ &= \frac{1}{\pi^2} \int_0^{\pi} \sin \theta d\theta \int_0^{\infty} \frac{1}{r^2 - 2r \cos \theta + 1} dr \end{aligned}$$



$$= \frac{1}{\pi^2} \int_0^\pi (\pi - \theta) d\theta = \frac{1}{2}$$

□

**注记 3.4.11.** 事实上, 如果泊松张量的分量  $P^{ij}$  在局部上是常值的, 那么 *Kontsevich* 给出的量子化公式刚好是 *Moyal* 星积 (见例子 3.2.2), 从而 *Kontsevich* 量子化  $\star_K$  是 *Moyal* 星积  $\star_M$  的推广。回顾我们此前已经给出了 *Moyal* 星积的显式表达式

$$f \star_M g = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\hbar^k}{k!} \sum_{|I|=|J|=k} P^{IJ} (\partial_I f) (\partial_J g)$$

证明. 我们来考察  $P^{ij}$  为常数的情形。对于  $n \geq 0$ , 以及  $\Gamma \in G_n$ , 注意到如果  $\Gamma$  当中有箭头不指向  $L$  且不指向  $R$ , 则双微分算子  $B_\Gamma$  当中含有对  $P^{ij}$  求导的项, 因此  $B_\Gamma = 0$ , 对  $\star_K$  没有贡献。从而我们只需要考虑  $G_n$  的子集

$$\widetilde{G}_n := \{\Gamma \in G_n \mid t(a_i) \in \{L, R\}, \forall 1 \leq i \leq n\}$$

即,  $\widetilde{G}_n$  当中的图具有性质: 每个箭头都指向  $L$  或者  $R$ ; 并且容易知道  $\widetilde{G}_n$  当中有  $2^n$  个元素。现在,

$$f \star_K g = \sum_{n=0}^{\infty} \hbar^n \sum_{\Gamma \in \widetilde{G}_n} \omega_\Gamma B_\Gamma(f, g)$$

再注意到, 对于任意  $\Gamma, \Gamma' \in \widetilde{G}_n$ , 都有

$$\omega_\Gamma B_\Gamma = \omega_{\Gamma'} B_{\Gamma'}$$

这是由于两个 1- 形式的外积具有反交换性, 以及泊松张量分量  $P^{ij}$  关于指标的反对称性。从而我们不妨取  $\widetilde{G}_n$  中的代表元  $\Gamma^n \in \widetilde{G}_n \subseteq G_n$ , 其中  $\Gamma^n$  满足: 所有的边  $a_i$  都指向  $L$ , 所有的边  $b_i$  都指向  $R$ . 从而

$$\begin{aligned} f \star_K g &= \sum_{n=0}^{\infty} \hbar^n 2^n \omega_{\Gamma^n} B_{\Gamma^n}(f, g) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \hbar^n 2^n \omega_{\Gamma^n} (P^{a_1 b_1} \cdots P^{a_n b_n}) (\partial_{a_1} \cdots \partial_{a_n} f) (\partial_{b_1} \cdots \partial_{b_n} g) \end{aligned}$$

最后再注意到

$$\begin{aligned} \omega_{\Gamma^n} &= \frac{1}{n! (2\pi)^{2n}} \int_{\mathbb{H}^n} \bigwedge_{i=1}^n (d\varphi_{a_i}(z_i) \wedge d\varphi_{b_i}(z_i)) \\ &= \frac{1}{n! (2\pi)^{2n}} \prod_{i=1}^n \left( \int_{\mathbb{H}} d\varphi_{a_i}(z_i) \wedge d\varphi_{b_i}(z_i) \right) \\ &= \frac{(2\pi^2)^n}{n! (2\pi)^{2n}} = \frac{1}{n! 2^n} \end{aligned}$$

因此 Kontsevich 量子化  $\star_K$  满足

$$\begin{aligned} f \star_K g &= \sum_{n=0}^{\infty} \hbar^n 2^n \frac{1}{n! 2^n} (P^{a_1 b_1} \dots P^{a_n b_n}) (\partial_{a_1} \dots \partial_{a_n} f) (\partial_{b_1} \dots \partial_{b_n} g) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\hbar^n}{n!} (P^{a_1 b_1} \dots P^{a_n b_n}) (\partial_{a_1} \dots \partial_{a_n} f) (\partial_{b_1} \dots \partial_{b_n} g) \end{aligned}$$

这正是 Moyal 乘积的表达式。 □

### 3.5 量子场论背景、BV 算子

现在我们开始逐渐去理解 Kontsevich 的形变量子化的构造；为此需要一些量子场论（quantum field theory，简称 QFT）背景知识。

大致地说（并非严格的数学表述），一个物理系统 包括以下要素：**场空间**（space of fields） $\mathcal{E}$  与**作用量**（action functional） $\mathcal{S}$ ，其中场空间  $\mathcal{E}$  通常为无穷维空间，作用量

$$\mathcal{S} : \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{C}$$

为场空间  $\mathcal{E}$  上的函数。

在经典物理中，态的演化常用变分的临界来描述态的演化：

$$\text{Crit}(\mathcal{S}) = \{\delta \mathcal{S} = 0\}$$

上式中的  $\text{Crit}(\mathcal{S})$  称为  $\mathcal{S}$  的 critical locus， $\delta$  为某个变分导数。

而在量子物理中，态的演化与积分

$$\int_{\mathcal{E}} \mathcal{O} e^{i\mathcal{S}/\hbar}$$

有关，其中  $\mathcal{O}$  为  $\mathcal{E}$  上的函数，称之为**观测量**（observable）；上述积分称之为“**路径积分**”（path integral）。

不过要注意， $\mathcal{E}$  是无穷维空间，在  $\mathcal{E}$  上面积分是说不清道不明的事情；我们至今还未完全搞明白此积分的严格定义。我们在本讲义只谈论“数学上的事情”，数学上暂时没说清楚的东西避而不谈。

**例子 3.5.1.** 作为场空间  $\mathcal{E}$  的例子，以下是近代物理中的常见对象：

标量场论	$\mathcal{S} =$ 流形 $X$ 上的全体光滑函数
规范理论	$\mathcal{S} =$ 向量丛 $E \rightarrow X$ 上的全体联络
$\sigma$ -模型	$\mathcal{S} =$ 流形 $\sigma$ 与 $X$ 之间的全体光滑映射
引力理论	$\mathcal{S} =$ 流形 $X$ 上的全体黎曼度量

我们再举一些作用量  $\mathcal{S}$  的例子：

例子 3.5.2. (作用量)

(1) 在标量场论  $\mathcal{E} = C^\infty(X)$  中, 对于  $X$  上的光滑函数  $\varphi \in \mathcal{E}$ , 定义

$$\mathcal{S}[\varphi] = \int_X |\nabla \varphi|^2$$

称之为能量泛函。

(2) 在规范理论当中, 对于  $A \in \mathcal{E}$  为向量丛  $E \rightarrow X$  上的联络, 记其曲率张量为

$$F_A := dA + \frac{1}{2}[A, A]$$

定义如下的杨-米尔斯泛函 (Yang-Mills functional)

$$\text{YM}[A] := \int_X F_A \wedge *F_A$$

一个重要的问题是, 如何去构造路径积分

$$\int_{\mathcal{E}} \theta e^{i\mathcal{S}/\hbar}$$

我们介绍 **BV 方法** (Batalin-Vilkovisky), 其主要思想是用同调理论来解释测度论。

我们来考察有限维的情形。设  $X$  为  $n$  维紧致可定向流形,  $\Omega \in \Omega_X^n$  为  $X$  上的一个体积形式, 则  $X$  上的紧支光滑函数  $f$  关于该体积形式的积分可以视为如下:

$$\begin{aligned} \int_X : C_c^\infty(X) &\rightarrow \mathbb{R} \\ f &\mapsto \int_X f \Omega \end{aligned}$$

我们考虑

$$\Omega_c(X) := \bigoplus_{p \geq 0} \Omega_c^p(X)$$

为紧支的微分形式, 以及  $d : \Omega_c^p(X) \rightarrow \Omega_c^{p+1}(X)$  为 de Rham 外微分。众所周知,

$$H^n(\Omega_c^\bullet(X), d) \cong \mathbb{R}$$

此式可以给出积分  $\int_X$  的同调解释:

$$\begin{aligned} \int_X : C_c^\infty(X) &\rightarrow \mathbb{R} \\ f &\mapsto [f\Omega] \in H^n(\Omega_c^\bullet(X), d) \cong \mathbb{R} \end{aligned}$$

粗俗地说, 我们把求  $f$  关于体积形式  $\Omega$  的积分视为取  $f\Omega$  的同调类; 在此意义下, de Rham 复形  $(\Omega_c^\bullet, d)$  扮演了“测度”的角色。

在物理上我们常要面对无穷维空间, 于是在此意义下, 我们需要关心  $n \rightarrow \infty$  时,  $H^n(X)$  是何物。这是难以说清楚的, 我们不妨换一个角度来看。

**定义 3.5.3.** 设  $X$  为  $n$  维紧致定向流形,  $\Omega$  为  $X$  上的一个体积形式, 则有  $\Omega$  诱导了多重切向量场  $\text{PV}^\bullet(X)$  与微分形式  $\Omega_X^\bullet$  之间的  $C^\infty$ -线性同构

$$\begin{aligned}\Gamma_\Omega : \text{PV}^k(X) &\rightarrow \Omega_X^{n-k} \\ V &\mapsto i_V(\Omega)\end{aligned}$$

其中  $i_V(\Omega)$  为  $V$  关于  $\Omega$  的缩并, 满足对任意  $W \in \text{PV}^{n-k}(X)$ ,

$$\langle i_V(\Omega), W \rangle = \langle \Omega, V \wedge W \rangle$$

当  $V \in \text{PV}^1(X)$  为切向量场时,  $i_V$  就是我们熟悉的内乘运算。  
在局部坐标下, 若  $\Omega = dx^1 \wedge dx^2 \cdots \wedge dx^n$ ,

$$V = \partial_{i_1} \wedge \partial_{i_2} \wedge \cdots \wedge \partial_{i_k}$$

为多重切向量场, 其中指标  $i_1 < i_2 < \cdots < i_k$ , 则容易知道

$$\Gamma_\Omega(V) = i_V(\Omega) = (-1)^{i_1+i_2+\cdots+i_k} (-1)^{\frac{k(k+1)}{2}} \cdots \wedge \widehat{dx^{i_1}} \wedge \cdots \wedge \widehat{dx^{i_k}} \wedge \cdots$$

$$\Delta \leftrightarrow d$$

this "Δ" is called "divergence operator w.r.t the volume form". when  $x \in \text{PV}^1(X)$ , check:  $\Delta(v) = \div v$ .

$$d^2 = 0 \Rightarrow \Delta^2 = 0$$

$$\text{PV}^n \xrightarrow{\Delta} \text{PV}^{n-1} \xrightarrow{\Delta} \text{PV}^{n-2} \rightarrow \cdots$$

$\Delta$  is also called "BV operator".

$$\int_{BV} := H_0(\Delta)$$

good news: 0 doesn't depend on  $\dim(X)$ ! (so, we can  $n \rightarrow \infty$ ???)

**Difficulty:** when  $n \rightarrow \infty$ , we need to construct  $\Delta$ .

**例子 3.5.4.** Let  $X$  is a manifold of finite dimension,  $\dim X = n$ , local coordinate  $\{x^1, \dots, x^n\}$  in  $\mathcal{U} \subseteq X$ , volume form

$$\Omega = e^{f(x)} dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$$

$$\Omega^\bullet(\mathcal{U}) := C^\infty(\mathcal{U})[dx^1, \dots, dx^n]$$

where  $dx^i \wedge dx^j = -dx^j \wedge dx^i$ .

$$PV^\bullet(\mathcal{U}) := C^\infty(\mathcal{U})[\partial_1, \dots, \partial_n] \text{ where } \partial^i \wedge \partial^j = -\partial^j \wedge \partial^i.$$

introduce grassman variables  $\theta_1, \dots, \theta_n$ , ( $\theta_i \cong \partial_i$ )

define

$$PV^\bullet(\mathcal{U}) := C^\infty(\mathcal{U})[\theta_1, \dots, \theta_n]$$

**性质 3.5.5.**

$$\Omega = e^{f(x)} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$$

$$PV = C^\infty(u)[\theta_1, \dots, \theta_n]$$

then

$$\Delta_\Omega = \sum_i \frac{\partial}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial \theta_i} - \sum_i \partial_i f(x) \frac{\partial}{\partial \theta_i}$$

(Odd Laplacian) (这是 BV 算子的等价定义。。。)

证明.

□

**定义 3.5.6.** Given  $\Delta_\Omega$  (BV operator), we define

$$\{, \} : PV \times PV \rightarrow \mathbb{V}$$

$$\{\alpha, \beta\} := \Delta_\Omega(\alpha \wedge \beta) - (\Delta_\Omega \alpha) \wedge \beta - (-1)^{|\alpha|} \alpha \wedge \Delta_\Omega \beta$$

the failure of  $\Delta_\Omega$  being a derivation.

Check:  $\{, \}$  is a Schouten-Nijenhuis bracket (up to sign). (independent of the choice of  $f(x)$ )

In particular,  $\{, \}$  is independent of choice of  $\Omega$ .

**Quantization**

$$\{, \} \stackrel{?}{\rightarrow} \Delta_\Omega$$

这个过程与量子化的过程是一样的?? WTF??

### 3.6 费曼图

#### Feymann Diagram

例子 3.6.1.  $X = \mathbb{R}$ ,

$$\Omega = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx$$

$$\int : \mathbb{R}[x] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$g \mapsto \int_{\mathbb{R}} g \Omega$$

$PV = \mathbb{R}[x, \theta]$ , and

$$\Delta_{\Omega} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \theta} - x \frac{\partial}{\partial \theta}$$

$$\int_{BV} : \mathbb{R}[x, \theta] \mapsto H^0(\Delta_{\Omega})$$

if  $g = g(x)$ , then  $\Delta_{\Omega} g = 0$ . Let  $[g]$  be the  $\Delta_{\Omega}$ -homology class,

$$\Delta_{\Omega}(x^{m-1}\Omega) = (m-1)x^{m-2} - x^m$$

$$\Rightarrow [x^m] = (m-1)[x^{m-2}]$$

so,

$$[x^m] = \begin{cases} 0 & m \text{ is odd} \\ (2k-1)!![1] & m = 2k \end{cases}$$

so,

$$\int_{\mathbb{R}} x^{2k} \Omega = (2k-1)!! \int_{\mathbb{R}} \Omega = (2k-1)!!$$

introduce the operator

$$\mathcal{U} := e^{\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \theta}} : \mathbb{R}[x, \theta] \rightarrow \mathbb{R}[x, \theta]$$

引理 3.6.2.

$$\Delta_{\Omega} = \mathcal{U}^{-1}(-x \frac{\partial}{\partial \theta}) \mathcal{U}$$

证明. use the formula

$$e^A B e^{-A} = e^{\text{ad}_A} B$$

then

$$\Delta_{\Omega} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \theta} - x \frac{\partial}{\partial \theta}$$

$$A = -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x}$$

$$B = -x \frac{\partial}{\partial \theta}$$

then

$$e^A B e^{-A} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \theta}$$

where  $[A, [A, B]] = 0$ . □

so,

$$\mathcal{U} \circ \triangle_{\Omega} = (-x \frac{\partial}{\partial \theta}) \circ \mathcal{U}$$

so,

$$\mathcal{U} : (\mathbb{R}[x, \theta, \triangle_{\Omega}]) \rightarrow (\mathbb{R}[x, m\theta], -x \frac{\partial}{\partial \theta})$$

is a co-chain map.

$$H^{\bullet}(\mathbb{R}[x, \theta], -x \frac{\partial}{\partial \theta})$$

$$\mathbb{R}[x] \theta \xrightarrow{-x \frac{\partial}{\partial \theta}} \mathbb{R}[x]$$

$$g \mapsto -xg(0)$$

$$H^{-1} = 0, H^0 = \mathbb{R}.$$

$$\mathcal{U}[g(x)]_{\triangle_{\Omega}} = [\mathcal{U}(g)(x)]_{-x \frac{\partial}{\partial \theta}} = [\mathcal{U}(g)(0)]_{-x \frac{\partial}{\partial \theta}} = \mathcal{U}(g)(0)[1]$$

so,

$$\int_{\mathbb{R}} g(x) \Omega = \mathcal{U}(g)(0) = e^{\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x}}|_{x=0} g(x)$$

More generally, check:

$$\int_{\mathbb{R}} g(x+a) \Omega = e^{\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x}}|_{x=a} g(x)$$

**例子 3.6.3.** Consider the integral

$$\int_{\mathbb{R}} e^{(-\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3!}x^3)/\hbar} \frac{dx}{\sqrt{2\pi\hbar}}$$

this integral is not convergent.... how to deal with it?

(1) Change the integration Contour inside  $\mathbb{C}$  (Airy function)

(2) We consider only the asymptotic series

$$\sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} \int \left( \frac{\lambda x^{3^n}}{3! \hbar} \right) e^{-\frac{1}{2}x^2/\hbar} \frac{dx}{\sqrt{2\pi\hbar}}$$

$$\triangle_{Omg} = \hbar \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \theta} - x \frac{\partial}{\partial \theta}$$

$$\mathcal{U}_{\hbar} = e^{\frac{\hbar}{2} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x}}$$

then

introduce graph with cubic vertex,

each edge: we put  $\hbar \frac{\partial}{\partial a} \frac{\partial}{\partial a}$

each point: we put  $\frac{\lambda a^3}{3! \hbar}$

$$\omega_{\gamma}(a)$$

by the above rule.

**定理 3.6.4.** (Feymann graph formula)

this integration is

$$\int_{\mathbb{R}} e^{(-\frac{1}{2}x^2 + \frac{\lambda}{3}(x+a)^3)/\hbar} \frac{dx}{\sqrt{2\pi\hbar}} = \sum_{\Gamma: \text{trivalent graphs}} \frac{w_{\Gamma}(a)}{|Aut(\gamma)|} = \sum$$

证明. check.

□

In general, consider



# 术语索引

- action functional 作用量, 98  
augmentation, 59  
Bar-复形, 9  
classical BV algebra 经典 BV 代数, 72  
co-algebra 余代数, 57  
co-product 余乘, 57  
co-unit 余幺元, 58  
cocenter 余中心, 5  
Connes' complex Connes 复形, 26  
Connes' operator Connes 算子, 33  
critical locus, 98  
cup product, 70  
cyclic bicomplex 循环双复形, 28  
cyclic co-invariant 循环余不变量, 24  
cyclic cohomology 循环上同调, 43  
cyclic homology 循环同调, 26  
cyclic invariant 循环不变量, 43  
deformation quantization 形变量子化, 83  
derivation 导子, 13  
derived center 导出中心, 12  
differential graded algebra 微分分次代数, 20  
differential graded co-algebra 微分分次余代数, 59  
exact 正合, 6  
Gerstenhaber algebra, 72  
Gerstenhaber product, 72  
graded  $K$ -module 分次  $K$ -模, 45  
graded algebra 分次代数, 50  
graded co-algebra 分次余代数, 58  
graded Lie algebra 分次李代数, 50  
group cohomology 群的上同调, 23  
Hamiltonian 哈密顿量, 76  
Hochschild 同调, 7  
Hochschild 上同调, 12  
Hochschild 上链复形, 13  
Hochschild 链复形, 11  
Hodge filtration 霍奇滤链, 35  
inner derivation 内导子, 13  
Lie bracket 李括号, 14  
Lie super algebra 李超代数, 50  
Moyal product, 83  
negative cyclic complex 负循环复形, 36  
observable 观测量, 76, 98  
opposite algebra 反代数, 3  
outer derivation 外导子, 14  
path integral 路径积分, 98  
periodic cyclic complex 周期循环复形, 36  
phase space 相空间, 76  
Poisson algebra 泊松代数, 85  
Poisson bracket 泊松括号, 76  
Poisson manifold 泊松流形, 79  
Poisson tensor 泊松张量, 78  
polyvector field 多重切向量场, 60  
projective module 投射模, 3  
projective resolution 投射消解, 7

quantum enveloping algebra 量子包络代数, 90

quantum field theory 量子场论, 98

quasi-isomorphism 拟同构, 29

reduced Bar-complex 约化 Bar-复形, 18

Schouten-Nijenhuis 括号, 61

shuffle product, 66

space of fields 场空间, 98

star product 星积, 82

symplectic manifold 辛流形, 76

total complex 全复形, 29

Yang-Mills functional 杨-米尔斯泛函, 99