非交换几何选讲

曲豆豆 码字
南七技校福利社 五道口分社

2019 年 3 月 23 日

第 01-6 稿

图：雾气朦胧的安徽合肥大蜀山森林公园
拍摄于 2014.5.31 - 10：44

在五道口也要红专并进、理实交融呀 ～

目录

第 1 章　Hochschild 理论

“读论文就是将非人话翻译成人话的过程，写论文就是将人话写成非人话的过程。”
“我写的公式也不一定对。。。但基本上是对的，up to sign”

1.1　结合代数的双模、余中心

我们需要**代数拓扑**、**同调代数**、**基础范畴论**的预备知识，并且采用同调代数的标准术语、记号，诸如链复形、上同调、导出函子等等。首先介绍基本的记号与概念。

在本课，我们给定一个特征 0 的含幺交换环 K（例如一个域），考虑含幺结合 K-代数 A（注意 A 未必是交换代数），并且 A 作为交换环 K 上的模是投射模（projective module）。A 的 K-代数结构给出如下 K-模同态：

$$\begin{aligned} A \otimes_K A &\to A \\ (a_1, a_2) &\mapsto a_1 a_2 \end{aligned}$$

由 A 的结合性，$(a_1a_2)a_3 = a_1(a_2a_3)$ 对 A 中任意元素 a_1, a_2, a_3 成立.

对于含幺结合 K-代数 A，回顾 A 的**反代数**（opposite algebra）A^{op}. 反代数 A^{op} 作为 K-模与 A 完全相同，记号如下：

$$\begin{aligned} \mathrm{id} : A &\to A^{\mathrm{op}} \\ x &\mapsto x^{\mathrm{op}} \end{aligned}$$

但是 A^{op} 具有与 A“相反”的乘法，具体地，对于 A^{op} 中的元素 $x^{\mathrm{op}}, y^{\mathrm{op}}$，成立

$$x^{\mathrm{op}} y^{\mathrm{op}} := (yx)^{\mathrm{op}}$$

定义 1.1.1. 对于含幺结合 K-代数 A，我们定义 K-代数 A^e 为

$$A^e := A \otimes_K A^{op}$$

即 A 与 A^{op} 的 $K-$ 代数张量积。

容易验证对于任何两个含幺结合 K-代数 A, B，总有

$$(A \otimes_K B)^{\mathrm{op}} = A^{\mathrm{op}} \otimes_K B^{\mathrm{op}}$$

从而容易得到

$$(A^{\mathrm{op}})^e = (A^e)^{\mathrm{op}}$$

对于 $K-$ 代数 A，回顾 **双 $A-$ 模**（A-bimodule）的概念如下：

定义 1.1.2. 对于 K-代数 A，双 A-模是指如下资料：

（*1*）K-模 M；

（*2*）A 在 M 上的左、右 K-线性作用，

并且满足相容性：$(a.m).b = a.(m.b)$ 对任意 $m \in M$ 以及 $a, b \in A$ 成立。

例如，A 本身自然有双 A-模结构，A 在其上的左、右作用即为左乘、右乘。再比如 K-模张量积 $A \otimes_K A$ 具有如下双 A-模结构：

$$b.(a_1 \otimes a_2) := (ba_1) \otimes a_2$$

$$(a_1 \otimes a_2).b := a_1 \otimes (a_2 b)$$

其中 $a_1, a_2, b \in A$.

再比如，对于 K-代数 A，考虑其对偶

$$A^* := \mathrm{Hom}(A, K)$$

则 A^* 具有以下的双 A-模结构：对任意 $a, x \in A$ 以及 $f \in A^*$，

$$\begin{cases} (a.f)(x) := f(xa) \\ (f.a)(x) := f(ax) \end{cases}$$

容易验证这的确使得 A^* 为双 A-模。

我们不再回顾左模、右模的概念了，也不去回顾右模与左模的平衡张量积。

性质 1.1.3. 设 M 为双 A-模，

（*1*）M 可自然地视为左 A^e-模：

$$(a_1 \otimes a_2^{op}).m = a_1.m.a_2$$

（*2*）M 可自然地视为右 A^e-模：

$$m.(a_1 \otimes a_2^{op}) = a_2.m.a_1$$

反之，左（右）A^e-模也可视为双 A-模。

证明. 容易验证。 □

特别地如果 M, N 都是双 A-模，那么考虑平衡张量积 $M \otimes_{A^e} N$，它的双 A-模结构具体如下：

$$a.(m \otimes n) = (a.m) \otimes n = m \otimes (n.a)$$

$$(m \otimes n).b = m \otimes (n.b) = (b.m) \otimes n$$

对于任何 $m \in M, n \in N, a, b \in A$ 成立。

定义 1.1.4. （余中心 *cocenter*）对于双 A-模 M，称双 A-模

$$M \otimes_{A^e} A$$

为 M 的**余中心**（*cocenter*）。

容易看出，对任意的 $m \in M, a \in A$，在余中心 $M \otimes_{A^e} A$ 当中，成立

$$(m.a) \otimes 1 = m \otimes (a.1) = m \otimes a = m \otimes (1.a) = (a.m) \otimes 1$$

从而 $(m.a - a.m) \otimes 1 = 0$. 事实上，$M$ 的余中心具有如下结构：

性质 1.1.5. 对于双 A-模 M，则有如下双 A-模同构

$$M \otimes_{A^e} A \cong M / \{(m.a - a.m) | a \in A, m \in M\}$$

证明. 考虑如下的双 A-模链复形

$$\partial_\bullet : A \otimes A \otimes A \to A \otimes A \to A \to 0$$

其中

$$\begin{aligned} \partial : a_1 \otimes a_2 \otimes a_3 &\mapsto a_1 a_2 \otimes a_3 - a_1 \otimes a_2 a_3 \\ a_1 \otimes a_2 &\mapsto a_1 a_2 \end{aligned}$$

容易验证 ∂^2=0（由 A 的结合性），从而 $\partial_\bullet$ 为双 A-模链复形。并且显然 $\partial : A \otimes A \to A$ 是满同态。

断言链复形 $\partial_\bullet$ 为正合（exact）的。事实上，$\partial_\bullet$ 到其自身的恒等链映射与零链映射是链同伦的。我们构造如下的链同伦 $h_\bullet$：

$$\begin{aligned} h: a_1 &\mapsto 1\otimes a_1 \\ a_1\otimes a_2 &\mapsto 1\otimes a_1\otimes a_2 \end{aligned}$$

容易验证，对于任意的 $\varphi = a_1\otimes a_2 \in A\otimes A$，成立

$$\begin{aligned} (\partial h + h\partial)\varphi &= (\partial h + h\partial)(a_1\otimes a_2) \\ &= \partial(1\otimes a_1\otimes a_2) + h(a_1a_2) \\ &= a_1\otimes a_2 - 1\otimes a_1a_2 + 1\otimes a_1a_2 \\ &= a_1\otimes a_2 = \varphi \end{aligned}$$

从而对于 $\varphi\in A\otimes A$，如果 $\partial\varphi = 0$，那么

$$\varphi = (\partial h + h\partial)\varphi = \partial(h\varphi)$$

这说明链复形 $\partial_\bullet$ 在 $A\otimes A$ 处正合，因此 $\partial_\bullet$ 是正合的。

接下来，将函子 $M\otimes_{A^e} -$ 作用于链复形 $\partial_\bullet$，得到如下的双 A-模链复形：

$$M\otimes_{A^e}\partial_\bullet : M\otimes A \to M \to M\otimes_{A^e} A \to 0$$

由张量函子的右正合性，上述链复形也是正合的。其中注意到双 A-模同构

$$\begin{aligned} M\otimes_{A^e}(A\otimes A\otimes A) &\cong M\otimes A \\ m\otimes(a_1\otimes a_2\otimes a_3) &\mapsto (a_3.m.a_1)\otimes a_2 \end{aligned}$$

以及双 A-模同构

$$\begin{aligned} M\otimes_{A^e}(A\otimes A) &\cong M \\ m\otimes(a_1\otimes a_2) &\mapsto a_2.m.a_1 \end{aligned}$$

于是正合列 $M\otimes_{A^e}\partial_\bullet$ 的边界映射有如下具体表达式：

$$\begin{aligned} M\otimes_{A^e}\partial : M\otimes A &\to M \\ m\otimes A &\mapsto m.a - a.m \end{aligned}$$

从而由正合性，易知

$$M\otimes_{A^e} A \cong M/\{(m.a - a.m) | a\in A, m\in M\}$$

□

可见，M 的余中心无非是商掉 M 当中“非交换的部分”所得到的“交换的部分”，如此望文生义。例如，如果 A 为交换 K-代数，那么 A 本身作为双 A-模，其余中心为 A 本身.

1.2 Hochschild 同调

定义 1.2.1. （*Hochschild* 同调）

对于双 A-模 M，以及非负整数 n，记

$$H_n(A,M) := \mathrm{Tor}_n^{A^e}(M,A)$$

称为 M 的第 n 个 *Hochschild* 同调。特别地，我们记

$$\mathrm{HH}_n(A) := H_n(A,A)$$

由定义以及导出函子的基础知识，容易知道双 $A-$ 模 M 的第 0 个 Hochschild 同调

$$H_0(A,M) = M \otimes_{A^e} A = M/\{(m.a - a.m)|a \in A, m \in M\}$$

正是 M 的余中心。注意 Hochschild 同调一般并不是环，仅仅能保证它是双 A-模。

具体地，由导出函子的定义，我们采用投射消解（projective resolution）来计算 Hochschild 同调。若双 A-模链复形

$$P_\bullet \to A := ... \to P_3 \to P_2 \to P_1 \to P_0 \to A \to 0$$

为双 A-模 A 的投射消解（正合，并且每个 $P_i (i \geq 0)$ 作为 K-模是投射的），那么

$$H_n(A,M) \cong H_n(M \otimes_{A^e} P_\bullet)$$

由同调代数的事实，它与投射消解 $P_\bullet$ 的选取无关。

事实上 Hochschild 同调可以与空间上的微分形式类比。作为一个具体计算例子，我们考虑 $\mathbb{C}$ 上的 n 元多项式代数

$$A := \mathbb{C}[x^1, x^2, ..., x^n]$$

注意到 A 作为 $\mathbb{C}$-代数是交换的，从而 $A = A^{\mathrm{op}}$. 我们记

$$A^{\mathrm{op}} = \mathbb{C}[y^1, y^2, ..., y^n] \quad A^e = \mathbb{C}[x^1, x^2, ..., x^n; y^1, y^2, ..., y^n]$$

性质 1.2.2. 考虑 $\mathbb{C}$-代数 $A := \mathbb{C}[x^1, x^2, ..., x^n]$，则其第 k 个 *Hochschild* 同调

$$\mathrm{HH}_k(A) \cong \Omega_A^k := A \otimes \bigwedge^k (\mathbb{C}^n)$$

是以 A 为系数的 k-形式。

证明. 我们给出 A 的投射消解，比如众所周知的 Koszul 消解

$$\mathcal{K}_A \to A \to 0$$

具体地，引入 n 个新的独立变元 $\eta^1, \eta^2, ..., \eta^n$ （视为复线性空间 $\mathbb{C}^n$ 的一组基），考虑环

$$\mathcal{K} := \frac{A^e[\eta^1, \eta^2, ..., \eta^n]}{\{(\eta^i\eta^j + \eta^j\eta^i)|i \neq j\}} = A^e \otimes \bigwedge^*(\mathbb{C}^n)$$

为以 A^e 为系数的外代数。

注意 $\mathcal{K}$ 有自然的分次：

$$\deg \eta^i = 1 \quad \deg x^i = \deg y^i = \deg 1 = 0$$

记 $\mathcal{K}_l$ 为 $\mathcal{K}$ 的 l 次分量（$0 \leq l \leq n$），即

$$\mathcal{K}_l = \bigoplus_{1 \leq i_1 < i_2 < ... < i_l \leq n} A^e \eta^{i_1} \wedge \eta^{i_2} \wedge ... \wedge \eta^{i_l} = A^e \otimes \bigwedge^l(\mathbb{C}^n)$$

此时 $K = \mathbb{C}$ 是域，因此 $\mathcal{K}$ （作为 K-模，即复线性空间）的投射性显然。我们定义 Koszul 复形 $(\mathcal{K}_A, \partial)$ 如下：

$$\mathcal{K}_A : ... \xrightarrow{\partial} \mathcal{K}_n \xrightarrow{\partial} \mathcal{K}_{n-1} \xrightarrow{\partial} ... \xrightarrow{\partial} \mathcal{K}_1 \xrightarrow{\partial} \mathcal{K}_0$$

其中边缘算子 ∂（首先是 A^e-模同态）满足

$$\partial \eta^i = x^i - y^i$$

以及与外微分相同的莱布尼茨法则：对任意 $\omega \in \mathcal{K}$，成立

$$\partial(\eta^i \wedge \omega) = \partial \eta^i \wedge \omega - \eta^i \wedge \partial \omega$$

再考虑连接映射

$$\begin{aligned} \varepsilon : \mathcal{K}_0 = A^c &\to A \\ x^i &\mapsto x^i \\ y^i &\mapsto x^i \end{aligned}$$

则众所周知，Koszul 复形

$$\mathcal{K}_A \xrightarrow{\varepsilon} A \to 0$$

为 A 的投射消解（证明从略）。我们以此计算 $\mathrm{HH}^\bullet(A)$. 我们注意到以下两个简单事实：

其一：对任何 $1 \leq l \leq n$，成立双 A-模同构

$$A \otimes_{A^e} \mathcal{K}_l = A \otimes_{A^e} A^e \otimes \bigwedge^l(\mathbb{C}^n) \cong A \otimes \bigwedge^l(\mathbb{C}^n)$$

其二：函子 $A\otimes_{A^e}-$ 作用于 Koszul 复形 $\mathcal{K}_A$ 之后，成立

$$A\otimes_{A^e}\partial=0$$

这是因为，对于任意 $f\in A$，在 $A\otimes_{A^e}A^e$ 当中总成立

$$f\otimes x^i=x^if\otimes 1=fx^i\otimes 1=f\otimes(x^i)^{\mathrm{op}}=f\otimes y^i$$

因此

$$f\otimes(x^i-y^i)=0\in A\otimes_{A^e}A^e$$

从而由 ∂ 的定义，容易看出 $A\otimes_{A^e}\partial=0$.

综上两方面，直接计算之，

$$\begin{aligned}\mathrm{HH}_k(A) &= H_k(A\otimes^L_{A^e}A)\\ &= H_k(A\otimes_{A^e}\mathcal{K}_A)\\ &= A\otimes_{A^e}\mathcal{K}_k\\ &= A\otimes\bigwedge^k(\mathbb{C}^n)\\ &= \Omega^k_A\end{aligned}$$

从而得证。 □

事实上对于一般的含幺结合 K-代数 A，$\mathrm{HH}_\bullet(A)$ 扮演了“微分形式”的角色。这是 Hochschild 同调的一种几何解释。

对于一般的 A，A 作为双 A-模，由一种典范的投射消解，称之为 **Bar-复形**：

定义 1.2.3. （*Bar-复形*）

对于含幺结合 K-代数 A，定义以下双 A-模链复形

$$\cdots\to B_2A\xrightarrow{b}B_1A\xrightarrow{b}B_0A\xrightarrow{b}A\to 0$$

如下：

$$B_nA:=A\otimes A^{\otimes n}\otimes A\ \ (n\geq 0)$$

$$b:\ a_0\otimes a_1\otimes\ldots\otimes a_n\ \ \mapsto\ \ \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k a_0\otimes a_1\otimes\ldots\otimes(a_ka_{k+1})\otimes\ldots\otimes a_n$$

称之为 ***Bar*-复形**。

首先容易验证 $b^2=0$，从而 $B_\bullet A \xrightarrow{b} A \to 0$ 确实是链复形。对于 $n\geq 1$，具体验证如下：

$$\begin{aligned}
b^2(a_0\otimes a_1\otimes ...\otimes a_n) &= b\left(\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k a_0\otimes a_1\otimes ...\otimes(a_k a_{k+1})\otimes ...\otimes a_n\right)\\
&= \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k b(a_0\otimes a_1\otimes ...\otimes(a_k a_{k+1})\otimes ...\otimes a_n)\\
&= \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\left[\sum_{l=0}^{k-2}(-1)^l a_0\otimes ...\otimes(a_l a_{l+1})\otimes ...\otimes(a_k a_{k+1})\otimes ...\otimes a_n\right.\\
&\quad +(-1)^{k-1}a_0\otimes ...\otimes(a_{k-1}a_k a_{k+1})\otimes ...\otimes a_n\\
&\quad +(-1)^k a_0\otimes ...\otimes(a_k a_{k+1}a_{k+2})\otimes ...\otimes a_n\\
&\quad \left.-\sum_{l=k+2}^{n-1}(-1)^l a_0\otimes ...\otimes(a_k a_{k+1})\otimes ...\otimes(a_l a_{l+1})\otimes ...\otimes a_n\right]\\
&= \sum_{\substack{0\leq k<l\leq n-1\\ l-k\geq 2}}\left(-(-1)^{k+l}+(-1)^{k+l}\right)a_0\otimes ...\otimes(a_k a_{k+1})\otimes ...\otimes(a_l a_{l+1})\otimes ...\otimes a_n\\
&\quad +\sum_{0\leq k\leq n-2}\left((-1)^{2k+1}+(-1)^{2k}\right)a_0\otimes ...\otimes(a_k a_{k+1}a_{k+2})\otimes ...\otimes a_n\\
&= 0
\end{aligned}$$

从而验证完毕。

我们可以把 $a_0\otimes ...\otimes a_n$ 想象为直线上依次排列的 $n+1$ 个质点，将算子 b 想象为相邻质点两两“碰撞”。

性质 1.2.4. 记号同之前，则 Bar-复形

$$B_\bullet A\to A\to 0$$

是 A 的投射消解。

证明. 对任意 $n\geq 0$，$B_n A=A\otimes A^{\otimes n}\otimes A$ 是投射 K-模（这是因为由最初的假定，A 是投射 K-模，从而其张量积也投射）于是我们只需再验证该链复形是正合的。

为此，我们构造链同伦

$$\begin{aligned}
h: B_{n-2}A &\to B_{n-1}A \quad (n\geq 1,\, B_{-1}A=A)\\
a_0\otimes ...\otimes a_n &\mapsto 1\otimes a_0\otimes ...\otimes a_n
\end{aligned}$$

只需验证 $hb+bh$=1，之后与性质1.1.5的证明类似。

注意到对于任意 $n\geq 0$，成立

$$bh(a_0\otimes ...\otimes a_n) = b(1\otimes a_0\otimes ...\otimes a_n)$$

$$
\begin{aligned}
&= a_0 \otimes ... \otimes a_n - \sum_{k=0}^{n-1} 1 \otimes a_0 \otimes ... \otimes (a_k a_{k+1}) \otimes ... \otimes a_n \\
&= a_0 \otimes ... \otimes a_n - 1 \otimes b(a_0 \otimes ... \otimes a_n) \\
&= (1 - hb) a_0 \otimes ... \otimes a_n
\end{aligned}
$$

因此 $bh + hb = 1$，证毕。 □

定义 1.2.5. 设 M 为双 A-模，定义 ***Hochschild* 链复形**

$$C_\bullet(A, M) := M \otimes_{A^e} B_\bullet A$$

$$\cdots M \otimes A^{\otimes 3} \to M \otimes A^{\otimes 2} \to M \otimes A \to M$$

方便起见，该链复形的边缘算子仍记作 b.

则易知 M 的 Hochdchild 同调无非是 Hochschlid 链复形的同调：

$$H_n(A, M) = H_n(C_\bullet(A, M))$$

注意到有双 A-模同构

$$C_n(A, M) = M \otimes_{A^e} \left(A \otimes A^{\otimes n} \otimes A\right) \cong M \otimes A^{\otimes n}$$

在此同构意义下，容易验证 $C_\bullet(A, M)$ 的边缘算子 b 有如下显示表达：

对任意 $m \in M$，以及 $a_1, a_2, ..., a_n \in A$，成立

$$
\begin{aligned}
b\left(m \otimes (a_1 \otimes ... \otimes a_n)\right) &= m \otimes_{A^e} \left(b(1 \otimes a_1 \otimes ... \otimes a_n \otimes 1)\right) \\
&= m \otimes_{A^e} [a_1 \otimes ... \otimes a_n \otimes 1 \\
&\quad + \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k 1 \otimes a_1 \otimes ... \otimes (a_k a_{k+1}) \otimes ... \otimes a_n \otimes 1 \\
&\quad + (-1)^n 1 \otimes a_1 \otimes ... \otimes a_n] \\
&= (m.a_1) \otimes a_2 \otimes ... \otimes a_n \\
&\quad + \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k m \otimes a_1 \otimes ... \otimes (a_k a_{k+1}) \otimes ... \otimes a_n \\
&\quad + (-1)^n (a_n.m) \otimes a_1 \otimes ... \otimes a_{n-1}
\end{aligned}
$$

Hochschlid 链复形的边缘算子的显式表达与 Bar-复形非常相似，从上式最右边的前两项可以看出；区别在于上式最右边的第三项。

注记 1.2.6. （*Hoschild* 同调的函子性）若 $\varphi : A \to B$ 为 K-代数同态，那么 ϕ 自然诱导 K-模同态

$$\varphi : \mathrm{HH}_\bullet(A) \to \mathrm{HH}_\bullet(B)$$

自行去定义何为 K-代数同态。此注记表明，$\mathrm{HH}_\bullet$ 其实是从 K-代数范畴到 K-模范畴的一个函子。

1.3 Hochschlid 上同调

对于双 A-模 M，既然我们已经考虑余中心 $M \otimes_{A^e} A$，那么我们自然也会去考虑 $\mathrm{Hom}_{A^e}(A, M)$. 我们称双 A-模 $\mathrm{Hom}_{A^e}(A, M)$ 为 M 的**导出中心**（derived center）。

性质 1.3.1. （导出中心的结构）对于双 A-模 M，则有双 A-模同构

$$\mathrm{Hom}_{A^e}(A, M) \cong \{m \in M | a.m - m.a = 0 \ \ \forall a \in A\}$$

容易验证 $\{m \in M | a.m - m.a = 0 \ \ \forall a \in A\}$ 为 M 的双 A-子模。粗俗地说，该子模由“与 A 中所有元素交换”的元素构成，故谓之“中心”。

证明. 对于任意的 $\varphi \in \mathrm{Hom}_{A^e}(A, M)$ 以及 $a \in A$，则 $\varphi(a)$ 的取值由 $\varphi(1)$ 完全决定：

$$\varphi(a) = \varphi(a.1) = a.\varphi(1)$$

而另一方面，

$$\varphi(a) = \varphi(1.a) = \varphi(1).a$$

从而有 $a.\varphi(1) = \varphi(1).a$. 于是我们可以构造如下双 $A-$ 模同态：

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Hom}_{A^e}(A, M) & \to & \{m \in M | a.m - m.a = 0 \ \ \forall a \in A\} \\ \varphi & \mapsto & \varphi(1) \end{array}$$

容易验证该模同态为同构。证毕。 □

然后我们考虑 $\mathrm{Hom}(-, M)$ 的导出函子，自然地去定义如下：

定义 1.3.2. （*Hochschild* 上同调）

对于双 A-模 M，以及 $n \geq 0$，定义 M 的第 n 个 *Hochschild* 上同调

$$H^n(A, M) = \mathrm{Ext}^n_{A^e}(A, M)$$

特别地，我们记

$$H^n(A) = \mathrm{Ext}^n_{A^e}(A, A)$$

由定义知，M 的第 0 个 Hochschild 上同调为 $\mathrm{Hom}_{A^e}(A,M)$，是 M 的导出中心。回顾 Bar-复形，我们考虑如下的 **Hochschild 上链复形**

$$C^\bullet(A,M) = \mathrm{Hom}_{A^e}(B_\bullet A, M)$$

该上链复形的微分算子 ∂ 由 Bar-复形 $B_\bullet A$ 的边缘算子 b 所诱导。则 M 的 Hochschild 上同调满足

$$H^n(A,M) = H^n(C^\bullet(A,M),\partial) = H^n(\mathrm{Hom}_{A^e}(B_\bullet A,M),\partial)$$

注意有自然的双 A-模同构

$$C^n(A,M) = \mathrm{Hom}_{A^e}(A\otimes A^{\otimes n}\otimes A, M) \cong \mathrm{Hom}(A^{\otimes n}, M)$$

（即取值于 M 的 n 重 K-线性映射）于是对于任意的 $\varphi \in C^n(A,M) = \mathrm{Hom}(A^{\otimes n}, M)$，容易知道 $\partial\varphi \in \mathrm{Hom}(A^{\otimes n+1}, M)$ 具有如下显式表达：对任意 $a_0, a_1, ..., a_m \in A$，

$$\begin{aligned} \partial\varphi(a_0,a_1,...,a_n) &= a_0.\varphi(a_1,a_2,...,a_n) \\ &\quad -\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\varphi(a_0,...;(a_k a_{k+1});...,a_n) \\ &\quad -(-1)^n\varphi(a_0,a_1,...,a_{n-1}).a_n \end{aligned}$$

接下来讨论 Hochschild 上同调的几何意义。我们已经知道第 0 个 Hochschild 上同调为 M 的导出中心；现在我们看 $H^1(A,M)$，我们将发现它是 A 的取值于 M 的外导子。

回顾**导子**（derivation）的概念如下：

定义 1.3.3. （导子）对于双 A-模 M，K-线性映射

$$D: A \to M$$

称为 A 的取值于 M 的**导子**（*derivation*），如果对任意的 $a_1, a_2 \in A$，成立

$$D(a_1a_2) = D(a_1).a_2 + a_1.D(a_2)$$

对于 $m \in M$ 我们定义

$$\begin{aligned} \mathrm{ad}_m : A &\to M \\ a &\mapsto [m,a] := m.a - a.m \end{aligned}$$

则容易验证 ad_m 为 A 的取值于 M 的导子，称形如这样的导子为**内导子**（inner derivation）。

我们记

$$\mathrm{Der}(A,M) := \{D: A\to M | D\text{为导子}\}$$

$$\mathrm{Inn}(A,M) := \{\mathrm{ad}_m \,|m \in M\} \subseteq \mathrm{Der}(A,M)$$

注意 $\mathrm{Inn}(A,M)$ 与 $\mathrm{Der}(A,M)$ 都有显然的 K-模结构，且前者是后者的 K-子模。

性质 1.3.4. （$H^1(A,M)$ 的结构）
对于双 A-模 M，成立

$$H^1(A,M) \cong \frac{\mathrm{Der}(A,M)}{\mathrm{Inn}(A,M)}$$

我们称上式右边的集合当中的元素为 A 的取值于 M 的**外导子**（outer derivation）。

证明. 只需考虑 Hochschild 上链复形

$$C^0(A,M) \xrightarrow{\partial^0} C^1(A,M) \xrightarrow{\partial^1} C^2(A,M) \to \cdots$$

我们只需具体计算之。对于 $\varphi \in C^1(A,M) \cong \mathrm{Hom}(A,M)$，则 $\partial^1\varphi \in C^2(A,M) \cong \mathrm{Hom}(A^{\otimes 2},M)$ 满足：对任意 $a_1,a_2 \in A$，成立

$$\partial^1\varphi(a_1,a_2) = a_1.\varphi(a_2) - \varphi(a_1a_2) + \varphi(a_1).a_2$$

可见 $\varphi \in \ker\partial^1$ 当且仅当 $\varphi \in \mathrm{Der}(A,M)$. 也就是说 $\ker\partial^1 = \mathrm{Der}(A,M)$.
另一方面，对于 $m \in C^0(A,M) \cong M$，以及 $a \in A$，成立

$$(\partial^0 m)(a) = a.m - m.a = -\mathrm{ad}_m(a)$$

因此 $\ker\partial^0 \cong \mathrm{Inn}(A,M)$. 从而

$$H^1(A,M) = \frac{\ker\partial^1}{\mathrm{Im}\,\partial^0} \cong \frac{\mathrm{Der}(A,M)}{\mathrm{Inn}(A,M)}$$

□

特别地，当 $M = A$ 时，

$$\mathrm{HH}^1(A) = \mathrm{Der}(A,A)/\mathrm{Inn}(A,A)$$

注意到 $\mathrm{Der}(A,A)$ 上面还有更多的结构：对于 $\forall D_1,D_2 \in \mathrm{Der}(A,A)$，定义

$$[D_1,D_2] := D_1 \circ D_2 - D_2 \circ D_1 : A \to A$$

容易验证 $[D_1,D_2]$ 仍然为 A 的导子，并且 $[-,-]$ 为 $\mathrm{Der}(A,A)$ 上的李括号（Lie bracket）。
另外容易验证

$$[\mathrm{Der}(A,A),\mathrm{Inn}(A,A)] \subseteq \mathrm{Inn}(A,A)$$

具体地，对于 $D \in \mathrm{Der}(A,A)$ 以及 $m \in M$，成立

$$[D, \mathrm{ad}_m] = \mathrm{ad}_{D(m)}$$

也就是说 $\mathrm{Inn}(A,A)$ 是 $\mathrm{Der}(A,A)$ 的理想。于是 $[-,-]$ 诱导了 $\mathrm{HH}^1(A) = \frac{\mathrm{Der}(A,A)}{\mathrm{Inn}(A,A)}$ 上的李括号结构.

如果 A 是交换 K-代数，则 $\mathrm{Inn}(A,A) = 0$。于是

$$\mathrm{HH}^1(A) \cong \mathrm{Der}(A,A)$$

可被认为是“切向量场”（此时 A 被认为是“函数环”）。

我们再去考虑 $H^2(A,M)$. 对于任意的

$$\varphi \in C^2(A,M) = \mathrm{Hom}(A^{\otimes 2}, M)$$

则对 $a_0, a_1, a_2 \in A$，成立

$$\partial\varphi(a_0,a_1,a_2) = a_0.\varphi(a_1,a_2) - \varphi(a_0a_1,a_2) + \varphi(a_0,a_1a_2) - \varphi(a_0,a_1).a_2$$

引理 1.3.5. 对于双 A-模 M，以及 $\varphi \in C^2(A,M) = \mathrm{Hom}(A^{\otimes 2}, M)$，我们令

$$\hat{A} := A \oplus M$$

并赋以如下的 K-代数结构：对于任意 $a_1, a_2 \in A$ 以及 $m_1, m_2 \in M$，规定 $\hat{A}$ 的乘法 $\hat{\bullet}_\varphi$ 为

$$(a_1 \oplus m_1)\hat{\bullet}_\varphi(a_2 \oplus m_2) := a_1a_2 \oplus [a_1.m_2 + m_1.a_2 + \varphi(a_1,a_2)]$$

那么 $(\hat{A}, \hat{\bullet}_\varphi)$ 为结合代数，当且仅当 $\partial\varphi = 0$.

证明. 这是简单的计算验证。对于任意的 $a_0, a_1, a_2 \in A$ 以及 $m_0, m_1, m_2 \in M$，直接计算之，

$$\begin{aligned} & [(a_0 \oplus m_0)\hat{\bullet}_\varphi(a_1 \oplus m_1)]\hat{\bullet}_\varphi(a_2 \oplus m_2) \\ = \; & a_0a_1a_2 \oplus [a_0a_1.m_2 + a_0.m_1.a_2 + m_0.a_1a_2 + \varphi(a_0,a_1).a_2 + \varphi(a_0a_1,a_2)] \end{aligned}$$

以及

$$\begin{aligned} & (a_0 \oplus m_0)\hat{\bullet}_\varphi[(a_1 \oplus m_1)\hat{\bullet}_\varphi(a_2 \oplus m_2)] \\ = \; & a_0a_1a_2 \oplus [a_0a_1.m_2 + a_0.m_1.a_2 + m_0.a_1a_2 + a_0.\varphi(a_1,a_2) + \varphi(a_0,a_1a_2)] \end{aligned}$$

因此 $\hat{\bullet}_\varphi$ 满足结合性，当且仅当

$$\varphi(a_0,a_1).a_2 + \varphi(a_0a_1,a_2) = a_0.\varphi(a_1,a_2) + \varphi(a_0,a_1a_2)$$

而此式等价于 $\partial\varphi = 0$. □

注意到在 $\hat{A}$ 当中，对任意的 $m_1, m_2 \in M$，以及任意 $\varphi \in C^2(A, M)$，总有 $m_1 \hat{\bullet}_\varphi m_2 = 0$. 于是我们不妨将“$A \oplus M$”当中的“$M$”理解为“一阶小量”。我们考虑 $\varphi = 0$ 时 $\hat{A}_0 := A \oplus M$ 的代数结构

$$(a_1 \oplus m_1) \bullet (a_2 \oplus m_2) := a_1 a_2 \oplus (a_1.m_2 + m_1.a_2)$$

显然 $(\hat{A}_0, \bullet)$ 为结合代数。若 $\partial\varphi = 0$，则结合代数 $(\hat{A}, \hat{\bullet}_\varphi)$ 为 $(\hat{A}_0, \bullet)$ 的**一阶形变**，而 φ 为其“形变参数”。

从而 M 的第 2 个 Hochschild 上同调

$$H^2(A, M) \cong \frac{\{\varphi | (\hat{A}, \hat{\bullet}_\varphi) \text{是结合代数}\}}{\mathrm{Im}(\partial : C^1(A, M) \to C^2(A, M))}$$

商掉的东西（$\mathrm{Im}\,\partial$）为形如以下的一类特殊的一阶形变：

$$\begin{aligned} \varphi_f : A \otimes A &\to M \\ a_1 \otimes a_2 &\mapsto a_1.f(a_2) + f(a_1).a_2 - f(a_1 a_2) \end{aligned}$$

其中 $f \in C^1(A, M) = \mathrm{Hom}(A, M)$，$\varphi_f = \partial f$.

Hochschild 上同调与 Hochschild 同调两者之间有如下自然的配对：

定义 1.3.6. 设 M, N 为双 A-模，则自然有如下配对：

$$C^n(A, M) \otimes C_n(A, N) \to N \otimes_{A^e} M$$

定义为：对任意 $f \in C^n(A, M) = \mathrm{Hom}(A^{\otimes n}, M)$ 以及任意 $y \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n \in C_n(A, N) = N \otimes A^{\otimes n}$，有

$$(f, y \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n) \mapsto y \otimes f(a_1, ..., a_n) \in N \otimes_{A^e} M$$

其中任意 $y \in N$，以及 $a_1, ..., a_n \in A$.

容易验证，该配对自然诱导了

$$H^n(A, M) \otimes H_n(A, N) \to N \otimes_{A^e} M$$

这是容易发现的（先限制，再下降，下降的良定性容易说明。）

特别地，当 $M = A, N = A^*$（其中 $A^* := \mathrm{Hom}(A, K)$）时，我们有双线性函数

$$H^n(A, A) \otimes H_n(A, A^*) \to A^* \otimes_{A^e} A \xrightarrow{\mathrm{ev}} K$$

我们考察一个 Hochschild 上同调的具体算例。

性质 1.3.7. 若 $A=\mathbb{C}[x^1,...,x^n]$ 为 $\mathbb{C}$ 上的 n 元多项式环，则

$$\mathrm{HH}^k(A)\cong \mathrm{Hom}\left(\bigwedge^k(\mathbb{C}^n),A\right)$$

证明. 对于这个特例，采用 Koszul 复形计算更佳简便。有关记号同性质1.2.2的证明过程. 考虑 Koszul 复形

$$\mathcal{K}_A:\cdots\xrightarrow{\partial}A^e\otimes\bigwedge^{k+1}(\mathbb{C}^n)\xrightarrow{\partial}A^e\otimes\bigwedge^{k}(\mathbb{C}^n)\xrightarrow{\partial}A^e\otimes\bigwedge^{k-1}(\mathbb{C}^n)\xrightarrow{\partial}\cdots$$

然后将函子 $\mathrm{Hom}_{A^e}(-,A)$ 作用于之上。注意到有 $\mathbb{C}$-线性同构

$$\begin{aligned}&\mathrm{Hom}_{A^e}\left(A^e\otimes\bigwedge^k(\mathbb{C}^n),A\right)\\ \cong\ &\mathrm{Hom}\left(\bigwedge^k(\mathbb{C}^n),\mathrm{Hom}_{A^e}(A^e,A)\right)\\ \cong\ &\mathrm{Hom}\left(\bigwedge^k(\mathbb{C}^n),A\right)\end{aligned}$$

此外再注意到，上链复形 $\mathrm{Hom}_{A^e}(\mathcal{K}_A,A)$ 的微分算子 $\mathrm{d}:=\mathrm{Hom}_{A^e}(\partial,A)=0$. 这是因为对于 $\varphi\in\mathrm{Hom}_{A^e}\left(A^e\otimes\bigwedge^k(\mathbb{C}^n),A\right)$，$\omega\in\bigwedge^{k+1}(\mathbb{C}^n)$ 以及 $f\in A^e$，成立

$$\mathrm{d}\varphi(f\otimes\omega)=\varphi(\partial(f\otimes\omega))$$

回顾 Koszul 复形边缘算子运算规则

$$\partial:\eta^i\mapsto x^i-y^i\in A^e$$

又由于 φ 为 A^e-模同态，从而对于任意 $\tilde{\omega}\in\bigwedge^k(\mathbb{C}^n)$，成立

$$\varphi(x^i\otimes\tilde{\omega})=x^i.\varphi(1\otimes\tilde{\omega})=\varphi(1\otimes\tilde{\omega}).x^i=\varphi((x^i)^{\mathrm{op}}\otimes\tilde{\omega})=\varphi(y^i\otimes\tilde{\omega})$$

也就是说 $\varphi((x^i-y^i)\otimes\tilde{\omega})=0$. 由此可见 $\mathrm{d}=0$. 综上可知

$$\mathrm{HH}^k(A)\cong \mathrm{Hom}\left(\bigwedge^k(\mathbb{C}^n),A\right)$$

□

注意到 $\mathrm{Hom}\left(\bigwedge^k(\mathbb{C}^n),A\right)$ 之中的元素形如

$$\sum_{1\le i_1<\ldots<i_k\le n}f_{i_1\ldots i_k}\partial_{i_1}\wedge\ldots\wedge\partial_{i_k}$$

回顾 $\mathrm{HH}_\bullet(A)$ 中的元素可被认为是“微分形式”，可见 $\mathrm{HH}^\bullet(A)$ 中的元素则是“多重切向量场”。

1.4 约化 Bar 复形

如果 $K \hookrightarrow A$ 为嵌入，那么我们可以更加方便地计算 Hochschild （上）同调：

定义 1.4.1. （约化 *Bar-*复形）(*reduced Bar-complex*)

对于 K-代数 A，如果 $K \hookrightarrow A$，那么考虑 K-模

$$\overline{A} := A/K$$

我们定义如下的约化 *Bar-*复形 $(\overline{B}_\bullet A, b)$：

$$\overline{B}_n A := A \otimes \overline{A}^{\otimes n} \otimes A \quad \forall i \geq 0$$

边缘算子 $b : \overline{B}_n A \to \overline{B}_{n-1} A$ 如下定义：

$$\begin{aligned} b\Big(a_0 \otimes (\overline{a_1} \otimes \cdots \otimes \overline{a_n}) \otimes a_{n+1}\Big) \quad := \quad & (a_0 a_1) \otimes (\overline{a_2} \otimes \cdots \otimes \overline{a_n}) \otimes a_{n+1} \\ + \quad & \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^i a_0 \otimes (\overline{a_1} \otimes \cdots (\overline{a_i a_{i+1}}) \otimes \cdots \otimes \overline{a_n}) \otimes a_{n+1} \\ + \quad & (-1)^n a_0 \otimes (\overline{a_1} \otimes \cdots \otimes \overline{a_{n-1}}) \otimes (a_n a_{n+1}) \end{aligned}$$

注意到 $\overline{B}_\bullet A$ 是 $B_\bullet A$ 的商模：

$$\overline{B}_n A = \frac{B_n A}{\{a_0 \otimes (a_1 \otimes \cdots \otimes a_{i-1} \otimes 1 \otimes a_{i+1} \otimes \cdots \otimes a_n) \otimes a_{n+1}\}}$$

容易发现约化 Bar-复形的“b”正是 Bar-复形的 b. 但是我们要验证 b 的良定性，即与代表元选取无关。这是容易验证的。于是我们得到以下链复形：

$$\overline{B}_\bullet A \to A \to 0$$

与之前 *Bar-*复形完全类似，我们容易验证此复形也是正合的。只需构造同伦算子

$$\begin{aligned} h : \overline{B}_{n-1} A \quad & \to \quad \overline{B}_n A \\ a_0 \otimes (\overline{a_1} \otimes \cdots \otimes \overline{a_{n-1}}) \otimes a_n \quad & \mapsto \quad 1 \otimes (\overline{a_0} \otimes \overline{a_1} \otimes \cdots \otimes \overline{a_n}) \otimes a_{n+1} \end{aligned}$$

验证 $bh + hb = 1$ 即可。

定义 1.4.2. （约化 *Hochschild*（上）链复形）

对于双 A-模 M，我们令

$$\begin{aligned}\overline{C}_\bullet(A,M) &:= M\otimes_{A^e}\overline{B}_\bullet A\cong M\otimes\overline{A}^{\otimes\bullet}\\ \overline{C}^\bullet(A,M) &:= \mathrm{Hom}_{A^e}(\overline{B}_\bullet A,M)\cong\mathrm{Hom}(\overline{A}^{\otimes\bullet},M)\end{aligned}$$

称之为关于 M 的约化 *Hochschild*（上）链复形。

事实上，约化 Hochschild（上）链复形的（上）同调自然同构于 Hochschild（上）同调——这是由以下代数引理保证的：

引理 1.4.3. 条件同上，则商映射

$$\pi_\bullet : C_\bullet(A,M)\twoheadrightarrow\overline{C}_\bullet(A,M)$$

所诱导的链映射

$$\pi_\bullet : (C_\bullet(A,M),d)\twoheadrightarrow(\overline{C}_\bullet(A,M),d)$$

为拟同构。

证明. 注意链映射 $\pi_\bullet$ 为满态射，只需再证明其核复形

$$\ker\pi_\bullet$$

是正合的即可。我们承认之（似乎不太好证）。 □

注意上述引理也适用于 Hochschild 上链复形的情形，完全类似，不再赘述。从而我们立刻有如下推论：

推论 1.4.4. 对于 K-代数 A，如果 $K\hookrightarrow A$ 为嵌入，则有自然同构：

$$\begin{aligned}H_\bullet(A,M) &\cong H_\bullet(\overline{C}_\bullet(A,M))\\ H^\bullet(A,M) &\cong H^\bullet(\overline{C}^\bullet(A,M))\end{aligned}$$

关于（约化）Bar-复形，我们还有另一种理解方式：关于 A 的（约化）Bar-复形是 A 与某个微分分次代数的自由乘积。

定义 1.4.5. （微分分次代数）

$\mathbb{Z}$-分次 K-代数

$$A := \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} A_n$$

称为**微分分次代数**（*differential graded algebra*），若它配以 K-线性算子 $\mathrm{d} : A \to A$，并且满足：

$$\begin{cases} \mathrm{d}(A_n) \subseteq A_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{Z} \\ \mathrm{d}^2 = 0 \\ \mathrm{d}(\alpha\beta) = (\mathrm{d}\alpha)\beta + (-1)^{\deg \alpha}\alpha(\mathrm{d}\beta) \quad \forall \alpha, \beta \in A, \text{并且 } \alpha \text{ 是齐次元} \end{cases}$$

“$\mathbb{Z}$-分次 K-代数”的定义将在后文（定义2.2.1）介绍。（其实大家都明白）

对于微分分次代数 (A, d)，由于 A 的分次以及 $\mathrm{d}^2 = 0$，从而自然有上链复形

$$\cdots \to A_{-1} \xrightarrow{\mathrm{d}} A_0 \xrightarrow{\mathrm{d}} A_1 \to \cdots$$

我们将此上链复形也记为 (A, d).

微分分次代数最直接的例子是，对于光滑流形 X，考虑 $A := \Omega^\bullet(X)$ 为 X 上的微分形式。A 上的乘法即为微分形式的外积 $\wedge$，微分结构即为外微分 d.

我们可以适当修改微分分次代数的定义，将条件“$\mathrm{d}(A_n) \subseteq A_{n+1}$”改为“$\mathrm{d}(A_n) \subseteq A_{n-1}$”，此时的微分算子我们习惯记为“$\partial$”. 对于这样的微分分次代数 (A, ∂)，它可以被视为链复形。

例子 1.4.6. 我们考虑如下 K-代数：

$$A := K[\varepsilon] := K \oplus K\varepsilon \oplus K\varepsilon^2 \oplus \cdots$$

其中 ε 为形式变量，并且规定 $\deg \varepsilon = 1$，由此诱导出 $K[\varepsilon]$ 的分次结构。其微分算子 ∂_ε 由以下诱导：

$$\partial_\varepsilon(1) = 0 \quad \partial_\varepsilon(\varepsilon) = 1$$

注意 $\deg \varepsilon = 1$，按照微分代数的定义可计算出

$$\partial_\varepsilon(\varepsilon^2) = \partial_\varepsilon(\varepsilon)\varepsilon + (-1)^{\deg \varepsilon}\varepsilon\partial_\varepsilon(\varepsilon) = \varepsilon - \varepsilon = 0$$

一般地，对于非负整数 n 我们有

$$\partial_\varepsilon(\varepsilon^n) = \begin{cases} 0 & n \text{ 为偶数} \\ \varepsilon^{n-1} & n \text{ 为奇数} \end{cases}$$

从而链复形 $(K[\varepsilon], \partial_\varepsilon)$：

$$\cdots \to K\varepsilon^4 \xrightarrow{0} K\varepsilon^3 \xrightarrow{1} K\varepsilon^2 \xrightarrow{0} K\varepsilon \xrightarrow{1} K \to 0$$

是正合的。其中 $1 : K\varepsilon^{2n+1} \to K\varepsilon^{2n}$ 将 ε^{2n+1} 映为 ε^{2n}.

众所周知，对于两个 K-代数 A, B，我们可以谈论它们的**自由乘积**（free product）$A * B$. 若 $A = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} A_n$ 是微分分次代数，其微分算子为 d，则容易知道 $A * B$ 自然也有微分分次代数结构：

$$\begin{cases} \deg b &= 0 \quad \forall b \in B \\ \deg a &= n \quad \forall a \in A_n \subseteq A \\ \mathrm{d}b &= 0 \quad \forall b \in B \end{cases}$$

容易知道 $A * B$ 中的 N 次齐次元必形如以下元素的有限和：

$$b_1 a_1 b_2 a_2 \cdots b_m a_m b_{m+1} \quad (b_i \in B\,,\, a_i \in A_{n_i}\,,\, \sum_{i=1}^{m} n_i = N)$$

性质 1.4.7. 对于 K-代数 A，则有链复形的同构

$$(B_\bullet A \to A, b) \cong (A * K[\varepsilon], \partial_\varepsilon)$$

其中 $(K[\varepsilon], \partial_\varepsilon)$ 为例子 *1.4.6* 当中的微分分次代数，视为链复形；同构映射为

$$\begin{aligned} \varphi_n : B_n A &\to (A * K[\varepsilon])_n \\ a_0 \otimes (a_1 \otimes \cdots \otimes a_n) \otimes a_{n+1} &\mapsto a_0 \varepsilon a_1 \varepsilon a_2 \cdots a_n \varepsilon a_{n+1} \end{aligned}$$

这给出了 Bar-复形的又一种理解方式。

证明. 容易验证 φ_n 为 K-模同构，且逆映射 φ_n^{-1} 由以下诱导：

$$\varepsilon^n \mapsto \underbrace{1\varepsilon 1\varepsilon 1 \cdots 1\varepsilon 1}_{n\text{个}\varepsilon}$$

然后只需验证 $\varphi_\bullet : (B_\bullet \to A, b) \to (A * K[\varepsilon], \partial_\varepsilon)$: 是链映射，也就是要验证交换关系 $\varphi \circ b = \partial_\varepsilon \circ \varphi$

$$\begin{tikzcd} B_n A \arrow[r, "b"] \arrow[d, "\varphi"] & B_{n-1} A \arrow[d, "\varphi"] \\ (K[\varepsilon] * A)_n \arrow[r, "\partial_\varepsilon"] & (K[\varepsilon] * A)_{n-1} \end{tikzcd}$$

而这容易验证，验证如下：

$$\begin{aligned} & \varphi \circ b(a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n \otimes a_{n+1}) \\ = \ & \varphi \left(\sum_{k=0}^{n} (-1)^k a_0 \otimes \cdots \otimes (a_k a_{k+1}) \otimes \cdots \otimes a_{n+1} \right) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{k=0}^{n}(-1)^k a_0\varepsilon a_1\varepsilon\cdots\varepsilon a_{n+1} \\
&= \partial_\varepsilon(a_0\varepsilon a_1\varepsilon\cdots a_n\varepsilon a_{n+1}) \\
&= \partial_\varepsilon\circ\varphi(a_0\otimes a_1\otimes\cdots\otimes a_n\otimes a_{n+1})
\end{aligned}
$$

□

我们还可以考虑 $(K[\varepsilon],\partial_\varepsilon)$ 的商代数 $K[\varepsilon]/\varepsilon^2$，易知 $(K[\varepsilon]/\varepsilon^2,\partial_\varepsilon)$ 也构成微分分次代数，从而也通过微分算子 ∂_ε 视为链复形。在此代数中，$\varepsilon^2=0$.

类似地，我们可以给出约化 Bar-复形的另一种理解方式：

性质 1.4.8. 对于 K-代数 A，则有链复形同构

$$(\overline{B}_\bullet A\to A,b)\cong(A*K[\varepsilon]/\varepsilon^2,\partial_\varepsilon)$$

只需注意到 $A*K[\varepsilon]/\varepsilon^2$ 当中的 n 次齐次元必形如以下元素的有限和：

$$a_0\varepsilon a_1\varepsilon\cdots a_n\varepsilon a_{n+1}\quad(a_i\in A)$$

证明. 完全类似。事实上此链复形同构映射由 $\varphi_n:B_nA\to(A*K[\varepsilon])_n$ 诱导，其良定性由下式保证：对任意 $1\le i\le n$，

$$
\begin{aligned}
&\varphi_n(a_0\otimes\cdots\otimes a_{i-1}\otimes 1\otimes a_{i+1}\otimes\cdots\otimes a_{n+1}) \\
&= a_0\varepsilon a_1\cdots a_{i-1}\varepsilon 1\varepsilon a_{i+1}\cdots\varepsilon a_{n+1} \\
&= a_0\varepsilon a_1\cdots a_{i-1}1\varepsilon^2 a_{i+1}\cdots\varepsilon a_{n+1} \\
&= 0 \mod \varepsilon^2
\end{aligned}
$$

□

本节最后简单介绍以下 Hochschild（上）同调与其它常见的（上）同调理论的关系。

例子 1.4.9. （群的上同调）

设 G 是一个群，$M\in\mathrm{Rep}(G)$ 为群 G 的一个左 K-表示，则有 G-模链复形

$$0\to M\xrightarrow{\delta}C^1(G,M)\xrightarrow{\delta}C^2(G,M)\xrightarrow{\delta}\ldots$$

其中

$$C^n(G,M):=\mathrm{Hom}(G^n,M)=\{f:G^n\to M\}$$

并且微分算子 δ 满足

$$\begin{cases} \delta(m)(g) &= g.m - m \\ (\delta f)(g_0, g_1, ..., g_n) &= g_0.f(g_1, g_2, ..., g_n) \\ & \quad -\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k f(g_1, ..., g_k g_{k+1}, ..., g_n) \\ & \quad -(-1)^n f(g_0, g_1, ..., g_{n-1}) \end{cases}$$

容易验证 $\delta^2 = 0$. 此链复形的上同调

$$H^\bullet(G, M) := H^\bullet(C^\bullet(G, M), \delta)$$

称之为**群的上同调** *(group cohomology)*

由 δ 的表达式容易看出，群的上同调与 Hochschild 上同调有以下关系：

性质 1.4.10. 设 G 是一个群，M 为群 G 的一个左 K-模，考虑群代数 $A := K[G]$，于是 M 自然有左 A-模结构。那么有同构：

$$H^\bullet(G, M) \cong H^\bullet(K[G], M)$$

其中左边为群 G 关于 M 的上同调，右边为群代数 $K[G]$ 关于 M 的 *Hichschild* 上同调。

注意 M 仅仅是左 $K[G]$-模，并没有双 $K[G]$-模结构呀，怎么谈论 Hochschild 上同调？

（强行规定 G 在 M 上的右作用恒为 1，通过 K-线性扩张得到 $K[G]$ 在 M 的右作用，这样就得到 M 的双 $K[G]$-模结构了。）

证明. 注意到 $\mathrm{Hom}(G^n, M)$ 中的元素可以自然地 K-线性延拓为 $\mathrm{Hom}(K[G]^n, M)$ 中的元素，这给出它们之间的同构。然后注意到 $A = K[G]$ 的 Hochschild 上链复形的微分算子的显式表达式，（见定义1.3.2的下方）它与群上同调相应的上链复形的微分算子显式表达式“相同”。细节从略。 □

若熟悉李代数同调，我们可以将李代数同调与其泛包络代数的 Hochschild 同调联系起来：

例子 1.4.11. （李代数同调）对于李代数 $\mathfrak{g}$，M 为李代数 $\mathfrak{g}$ 的一个左 K-模。令 $A := \mathcal{U}(\mathfrak{g})$ 为 $\mathfrak{g}$ 的泛包络代数，则 A 自然有左 A-模结构。（再通过某种“比较平凡”的方式给出右作用？与上例类似？）则有同构

$$H_\bullet(\mathcal{U}(\mathfrak{g}), M) \cong H_\bullet^{\mathrm{Lie}}(\mathfrak{g}, M)$$

其中左边是 A 关于 M 的 *Hochschild* 同调，右边是李代数同调。

并没有在此叙述**李代数同调**的定义。留给感兴趣者。此处从略。

事实上，也可以考虑**群的同调**、**李代数上同调**，它们也有对应的 Hochschild 同调、上同调。

1.5 Connes 复形 $C^\lambda_\bullet(A)$

与之前一样，我们仍假设 K 为特征零的含幺交换环，A 为 K-代数，且作为 K-模是投射的。不过，在从本节开始我们再新增一条假定：

$$\mathbb{Q} \hookrightarrow K$$

也就是说，有理数域能够嵌入到 K 中。（事实上，任何特征零的域都满足此假定。）

回顾对于 K-代数 A，若 A 交换，则其 Hochschild 同调 $\mathrm{HH}_\bullet(A)$ 可以被理解为“空间”A 上的“微分形式”。本节我们进一步研究 $\mathrm{HH}_\bullet(A)$.

记号 1.5.1. 对于 K-代数 A，双 A-模 $M = A$. 考虑其 *Hochschild* 链复形 $C_\bullet(A) := C_\bullet(A, A)$:

$$C_n(A) := C_n(A, A) \cong A^{\otimes n+1}$$

(回顾定义1.2.5). 我们考虑群 $\mathbb{Z}/(n+1)\mathbb{Z}$ 在 $C_n(A)$ 上的如下左 K-作用：记 $\mathbb{Z}/(n+1)\mathbb{Z}$ 的生成元为 λ，则

$$\begin{array}{rcl} \lambda : C_n(A) & \to & C_n(A) \\ a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n & \mapsto & (-1)^n a_n \otimes a_0 \otimes \cdots \otimes a_{n-1} \end{array}$$

考虑 $C_n(A)$ 模掉此群作用，所得的商 K-模记为

$$C^\lambda_n(A) := C_n(A)/(1-\lambda)$$

其中的元素称之为**循环余不变量**（*cyclic co-invariant*）。

容易验证，

$$\lambda^{n+1} a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n = (-1)^{n(n+1)} a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n = a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n$$

即 $\lambda^{n+1} = \mathrm{id}$. 可见这的确是 $\mathbb{Z}/(n+1)\mathbb{Z}$ 的作用。

回顾 Bar-复形，我们可以直观地视为“直线上依次排列质点，相邻两两碰撞”；而在这里，商掉 λ 循环作用后，直观地更像是“圆周上排列质点”。

我们将说明，Hochschild 链复形 $C_\bullet(A)$ 的边缘算子 b，沿商映射 $C_\bullet(A) \twoheadrightarrow C^\lambda_\bullet(A)$ 下降，诱导了 $C^\lambda_\bullet(A)$ 的链复形结构（称之为 Connes 复形）。

引理 1.5.2. 对于 K-代数 A，我们定义算子 $b' : C_\bullet(A) \to C_{\bullet-1}(A)$ 如下*:*

$$b' : C_n(A) \to C_{n-1}(A)$$

$$a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n \quad \mapsto \quad \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k a_0 \otimes \cdots \otimes (a_k a_{k+1}) \otimes \cdots \otimes a_n$$

则成立：

（*1*）$b' \circ b' = 0$,

（*2*）对任意 $n \geq 1$，则以下图表交换：

$$\begin{tikzcd} C_n(A) \arrow[r, "b'"] \arrow[d, "1-\lambda"] & C_{n-1}(A) \arrow[d, "1-\lambda"] \\ C_n(A) \arrow[r, "b"] & C_{n-1}(A) \end{tikzcd}$$

证明. 注意到有同构 $C_n(A) \cong B_n A (\cong A^{\otimes n+1})$，其中 $B_\bullet A$ 为 Bar-复形；容易看出这里定义的 b' 在此同构下，正是 Bar 复形当中的边缘算子，从而 $b' \circ b' = 0$，也就是说 $(C_\bullet(A), b')$ 是一个链复形，并且同构于 Bar-复形 $(B_\bullet A, b)$.（这里有轻微的记号混用：Bar-复形 $(B_\bullet A, b)$ 当中的"b"并不是本引理当中 Hochschild 链复形 $(C_\bullet(A), b)$ 当中的"b"，前者在此是临时记号。）

我们再来看（2）. 回顾 $b : C_n(A) \to C_{n-1}(A)$ 的显式表达式（见定义1.2.5的下方，并且令其中 $M = a$ 以及 $m = a_0$）（注意此图中的 b 与 b' 并不是同一个映射，它们的具体表达式相差一项），直接验算之：

$$\begin{aligned}
& (1-\lambda) \circ b'\big(a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n\big) \\
= \ & (1-\lambda) \left(\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k a_0 \otimes \cdots \otimes (a_k a_{k+1}) \otimes \cdots \otimes a_n \right) \\
= \ & \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k a_0 \otimes \cdots \otimes (a_k a_{k+1}) \otimes \cdots \otimes a_n \\
& + \sum_{k=0}^{n-2} (-1)^{k+n} a_n \otimes a_0 \otimes \cdots \otimes (a_k a_{k+1}) \otimes \cdots \otimes a_{n-1} \\
& - (a_{n-1} a_n) \otimes a_0 \otimes \cdots \otimes a_{n-2} \\
= \ & b(a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n) - (-1)^n (a_n a_0) \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_{n-1} \\
& + (-1)^n \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k a_n \otimes a_0 \otimes \cdots \otimes (a_k a_{k+1}) \otimes \cdots \otimes a_{n-1} \\
& - (a_{n-1} a_n) \otimes a_0 \otimes \cdots \otimes a_{n-2} \\
= \ & b\big(a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n - (-1)^n a_n \otimes a_0 \otimes \cdots \otimes a_{n-1}\big) \\
= \ & b \circ (1-\lambda)(a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n)
\end{aligned}$$

也就是说，

$$(1-\lambda) \circ b' = b \circ (1-\lambda)$$

从而此图表交换，证毕。 □

此图表的交换关系也可改写为

$$[b,\lambda] = (1-\lambda)\circ(b-b')$$

其中 $[b,\lambda] := b\circ\lambda - \lambda\circ b$.

此引理给出了链复形 $(C_\bullet(A), b')$ 与 $(C_\bullet(A), b)$ 之间的链映射：

$$(1-\lambda)_\bullet : (C_\bullet(A), b') \to (C_\bullet(A), b)$$

然而注意到

$$C_n^\lambda(A) := C_n(A)/(1-\lambda) = \operatorname{coker}(1-\lambda)_n$$

于是我们（在由 K-模链复形构成范畴当中）考虑链映射 $(1-\lambda)_\bullet$ 的余核，这给出了 $C_\bullet^\lambda(A)$ 的链复形结构：

定义 1.5.3. （*Connes* 复形）对于 K-代数 A，考虑链映射

$$(1-\lambda)_\bullet : (C_\bullet(A), b') \to (C_\bullet(A), b)$$

的余核链复形

$$(C_\bullet^\lambda(A), b^\lambda) := \operatorname{coker}[(1-\lambda)_\bullet]$$

称其为 ***Connes* 复形**。并且记

$$H_\bullet^\lambda(A) := H_\bullet(C_\bullet^\lambda(A))$$

称之为 A 的**循环同调**（*cyclic homology*）.

也就是说，有如下的交换图表：

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & C_{n+1} \arrow[r, "b'"] \arrow[d, "1-\lambda"] & C_n \arrow[r, "b'"] \arrow[d, "1-\lambda"] & C_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "1-\lambda"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & C_{n+1} \arrow[r, "b"] \arrow[d] & C_n \arrow[r, "b"] \arrow[d] & C_{n-1} \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & C_{n+1}^\lambda \arrow[r, "b^\lambda"] \arrow[d] & C_n^\lambda \arrow[r, "b^\lambda"] \arrow[d] & C_{n-1}^\lambda \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
& 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

此交换图表每一横行都为链复形，其中第三横行为 Connes 复形；每一列都是右短正合的。并且容易知道：Connes 复形的边缘算子 b^λ 正是 Hochschild 链复形的边缘算子 b 沿商映射 $C_\bullet(A) \twoheadrightarrow C_\bullet^\lambda(A)$ 的下降。

1.6 循环双复形 $CC_{\bullet\bullet}(A)$

引理 1.6.1. （平均算子）对于任意 K-代数 A，以及 $n \geq 0$，引入平均算子 $\mathcal{N} : C_n(A) \to C_n(A)$：

$$\mathcal{N} := 1 + \lambda + \lambda^2 + \cdots + \lambda^n$$

则此算子满足以下性质：

（1）$b'\mathcal{N} = \mathcal{N}b$

（2）$(1-\lambda)\mathcal{N} = \mathcal{N}(1-\lambda) = 0$. 此外，如果有理数域 $\mathbb{Q} \hookrightarrow K$，那么对于任意 $n \geq 0$，以下链复形是正合的：

$$\cdots \to C_n(A) \xrightarrow{\mathcal{N}} C_n(A) \xrightarrow{1-\lambda} C_n(A) \xrightarrow{\mathcal{N}} C_n(A) \xrightarrow{1-\lambda} C_n(A) \twoheadrightarrow C_n^{\lambda}(A) \to 0$$

证明. （1）任意固定 $n \geq 1$，为了区分算子在不同空间的作用，我们采用临时记号

$$\begin{cases} \lambda : C_n(A) \to C_n(A) \\ \overline{\lambda} : C_{n-1}(A) \to C_{n-1}(A) \end{cases} \qquad \begin{cases} \mathcal{N} := 1 + \lambda + \cdots + \lambda^n \\ \overline{\mathcal{N}} := 1 + \overline{\lambda} + \cdots + \overline{\lambda}^{n-1} \end{cases}$$

则在此记号下我们需要证 $b'\mathcal{N} = \overline{\mathcal{N}}b$.

定义缩并算子

$$\begin{aligned} s : C_n(A) &\to C_{n-1}(A) \\ a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n &\mapsto (a_0 a_1) \otimes \cdots \otimes a_n \end{aligned}$$

则容易验证（稍微注意一下正负号，确实都是正号）

$$b = \sum_{k=0}^{n} \overline{\lambda}^k s \lambda^{-k} \qquad b' = \sum_{k=0}^{n-1} \overline{\lambda}^k s \lambda^{-k}$$

于是有

$$b'\mathcal{N} = \left(\sum_{k=0}^{n-1} \overline{\lambda}^k s \lambda^{-k}\right) \left(\sum_{l=0}^{n} \lambda^l\right) = \sum_{\substack{0 \leq k \leq n-1 \\ 0 \leq l \leq n}} \overline{\lambda}^k s \lambda^l$$

同理也有

$$\overline{\mathcal{N}}b = \sum_{\substack{0 \leq k \leq n-1 \\ 0 \leq l \leq n}} \overline{\lambda}^k s \lambda^l$$

从而 $b'\mathcal{N} = \overline{\mathcal{N}}b$.

（2）给定 $n \geq 0$，注意到 $\lambda^{n+1} = 1$，从而

$$(1-\lambda)\mathcal{N} = (1-\lambda)(1+\lambda+\cdots+\lambda^n) = 1-\lambda^{n+1} = 0$$

同理 $\mathcal{N}(1-\lambda) = 0$. 因此该图表是链复形，只需再验证正合性。

现在假设 $\mathbb{Q}$ 是 K 的子环。我们构造如下链同伦：

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & C_n(A) \arrow[r, "\mathcal{N}"] \arrow[d, "\mathrm{id}"] & C_n(A) \arrow[r, "1-\lambda"] \arrow[d, "\mathrm{id}"] \arrow[dl, "g"'] & C_n(A) \arrow[r, "\mathcal{N}"] \arrow[d, "\mathrm{id}"] \arrow[dl, "f"'] & C_n(A) \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{id}"] \arrow[dl, "g"'] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & C_n(A) \arrow[r, "\mathcal{N}"] & C_n(A) \arrow[r, "1-\lambda"] & C_n(A) \arrow[r, "\mathcal{N}"] & C_n(A) \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

其中 $f, g : C_n(A) \to C_n(A)$ 定义为

$$\begin{cases} f := \frac{1}{n+1}(\lambda^{n-1} + 2\lambda^{n-2} + 3\lambda^{n-3} + \cdots + n) \\ g := \frac{1}{n+1} \end{cases}$$

（利用了 $\mathbb{Q} \hookrightarrow K$）则容易验证

$$f(1-\lambda) + \mathcal{N}g = g\mathcal{N} + (1-\lambda)f = 1$$

从而证毕。 □

特别地，当 K 为域时（注意我们总假定 $\operatorname{char} K = 0$）成立正合性。链同伦 f, g 的构造来自于（关于变元 λ 的多项式的）欧几里得辗转相除法。

由此引理，我们可构造出如下的**循环双复形** （cyclic bicomplex），记为 $CC_{\bullet\bullet}(A)$：

$$\begin{tikzcd}
\vdots \arrow[d, "b"] & \vdots \arrow[d, "-b'"] & \vdots \arrow[d, "b"] & \vdots \arrow[d, "-b'"] & \\
C_2(A) \arrow[d, "b"] & C_2(A) \arrow[l, "1-\lambda"'] \arrow[d, "-b'"] & C_2(A) \arrow[l, "\mathcal{N}"'] \arrow[d, "b"] & C_2(A) \arrow[l, "1-\lambda"'] \arrow[d, "-b'"] & \cdots \arrow[l] \\
C_1(A) \arrow[d, "b"] & C_1(A) \arrow[l, "1-\lambda"'] \arrow[d, "-b'"] & C_1(A) \arrow[l, "\mathcal{N}"'] \arrow[d, "b"] & C_1(A) \arrow[l, "1-\lambda"'] \arrow[d, "-b'"] & \cdots \arrow[l] \\
C_0(A) & C_0(A) \arrow[l, "1-\lambda"'] & C_0(A) \arrow[l, "\mathcal{N}"'] & C_0(A) \arrow[l, "1-\lambda"'] & \cdots \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

其中对于任意 $p, q \geq 0$，$CC_{p,q}(A) = C_p(A)$ 为该图表的从下往上第 p 行，从左往右第 q 列的节点；此图表的偶数列与奇数列为 $(C_\bullet(A), b)$ 与 $(C_\bullet(A), -b')$ 交替。并且注意到，此图表不是交换的，而是对于其中每一个方框都满足**反交换性**。

我们回顾一些同调代数工具：

定义 1.6.2. （双复形的全复形）

对于任意的含幺交换环 K（这里暂时不必假定 $\operatorname{char} K = 0$），以及 K-模双复形 $(A_{\bullet\bullet}, \mathrm{d}, \partial)$：

$$\begin{tikzcd}
\vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \\
A_{2,0} \arrow[d, "\mathrm{d}_{2,0}"] & A_{2,1} \arrow[l, "\partial_{2,1}"'] \arrow[d, "\mathrm{d}_{2,1}"] & A_{2,2} \arrow[l, "\partial_{2,2}"'] \arrow[d, "\mathrm{d}_{2,2}"] & \cdots \arrow[l] \\
A_{1,0} \arrow[d, "\mathrm{d}_{1,0}"] & A_{1,1} \arrow[l, "\partial_{1,1}"'] \arrow[d, "\mathrm{d}_{1,1}"] & A_{1,2} \arrow[l, "\partial_{1,2}"'] \arrow[d, "\mathrm{d}_{1,2}"] & \cdots \arrow[l] \\
A_{0,0} & A_{0,1} \arrow[l, "\partial_{2,1}"'] & A_{0,2} \arrow[l, "\partial_{2,2}"'] & \cdots \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

即：

$$\begin{cases} \mathrm{d}_{p,q} : A_{p,q} \to A_{p-1,q} \\ \partial_{p,q} : A_{p,q} \to A_{p,q-1} \end{cases}$$

使得该图表每一行、每一列都是链复形，并且满足反交换关系

$$\partial_{p-1,q} \circ \mathrm{d}_{p,q} + \mathrm{d}_{p,q-1} \circ \partial_{p,q} = 0$$

则我们定义双复形 $A_{\bullet\bullet}$ 的**全复形**（*total complex*）$(\mathrm{Tot}_\bullet(A_{\bullet\bullet}), d)$ 如下：

$$\begin{cases} \mathrm{Tot}_n(A_{\bullet\bullet}) & := \bigoplus\limits_{p+q=n} A_{p,q} \\ d_n & := \sum\limits_{p+q=n} (\mathrm{d}_{p,q} + \partial_{p,q}) \end{cases}$$

对于两个双复形 $A_{\bullet\bullet}$ 与 $A'_{\bullet\bullet}$，我们可以去定义双复形之间的态射 $f_{\bullet\bullet} : A_{\bullet\bullet} \to A'_{\bullet\bullet}$，进而考虑双复形范畴。双复形的态射自然诱导了相应的全复形之间的链映射，也就是说 Tot 具有函子性。我们还有以下同调代数工具：

引理 1.6.3. 设 $f_{\bullet\bullet} : A_{\bullet\bullet} \to A'_{\bullet\bullet}$ 为双复形之间的态射。如果对于任意 $n \geq 0$，链映射

$$f_{n,\bullet} : A_{n,\bullet} \to A'_{n,\bullet}$$

为拟同构（*quasi-isomorphism*），（即它诱导的任意阶同调对象之间的态射均为同构），那么链映射

$$\mathrm{Tot}_\bullet(f_{\bullet\bullet}) : \mathrm{Tot}_\bullet(A_{\bullet\bullet}) \to \mathrm{Tot}_\bullet(A'_{\bullet\bullet})$$

也为拟同构。

证明. 同调代数工具，承认之。 □

我们回到循环双复形 $CC_{\bullet\bullet}(A)$. 由上述同调代数工具，我们可以给出循环同调 $H^\lambda_\bullet(A) := H_\bullet(C^\lambda_\bullet(A))$ 的另一种定义：

定理 1.6.4. 对于 K-代数 A，假设 $\mathbb{Q} \hookrightarrow K$，记

$$HC_\bullet(A) := H_\bullet(\mathrm{Tot}_\bullet(CC_{\bullet\bullet}(A)))$$

为 A 的循环双复形的全复形的同调，那么有自然的同构

$$HC_\bullet(A) \cong H^\lambda_\bullet(A)$$

证明. 对于循环双复形 $CC_{\bullet\bullet}(A)$，我们再考虑另一个双复形 $CC'_{\bullet\bullet}(A)$ 如下：

$$\begin{tikzcd}
\vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \\
C^\lambda_2(A) \arrow[d, "b^\lambda_2"] & 0 \arrow[l] \arrow[d] & 0 \arrow[l] \arrow[d] & 0 \arrow[l] \arrow[d] & \cdots \arrow[l] \\
C^\lambda_1(A) \arrow[d, "b^\lambda_1"] & 0 \arrow[l] \arrow[d] & 0 \arrow[l] \arrow[d] & 0 \arrow[l] \arrow[d] & \cdots \arrow[l] \\
C^\lambda_0(A) & 0 \arrow[l] & 0 \arrow[l] & 0 \arrow[l] & \cdots \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

考虑双复形之间的态射

$$f_{\bullet\bullet} : CC_{\bullet\bullet}(A) \to CC'_{\bullet\bullet}(A)$$

其中 $f_{n,0} : C_n(A) \to C^\lambda_n(A)$ 为商映射。由引理1.6.1 知 $CC_{\bullet\bullet}(A)$ 的每一行都是正合的，从而容易验证 $f_{\bullet\bullet}$ 满足引理 1.6.3 的使用条件，因此我们有同构

$$H_\bullet(\mathrm{Tot}_\bullet(CC_{\bullet\bullet}(A))) \cong H_\bullet(\mathrm{Tot}_\bullet(CC'_{\bullet\bullet}(A)))$$

上式左边，由定义，即为 $HC_\bullet(A)$；而再注意到 $\mathrm{Tot}_\bullet(CC'_{\bullet\bullet})$ 正是 Connes 复形 $C^\lambda_\bullet$，从而上式右边为循环同调 $H^\lambda_\bullet(A)$. □

也就是说，循环同调（Connes 复形的同调）自然同构于循环双复形的全复形的同调。

1.7 Connes 算子 $\mathcal{B}$

我们将给出循环同调的更多等价定义方式，并计算一些具体例子。本节均假定 $\mathbb{Q} \hookrightarrow K$（甚至直接把 K 当成特征零的域）。我们需要更多的同调代数工具：

引理 1.7.1. （杀掉可缩复形）

对于 K-模链复形

$$\cdots \to A_{n+1} \oplus B_{n+1} \xrightarrow{\mathrm{d}} A_n \oplus B_n \xrightarrow{\mathrm{d}} A_{n-1} \oplus B_{n-1} \to \cdots$$

其中

$$\mathrm{d} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

并且 $(B_\bullet, \delta)$ 是可缩链复形，其同伦逆

$$h : B_\bullet \to B_{\bullet+1}$$

使得 $h\delta + \delta h = 1$. 那么下述图表交换：

$$\begin{tikzcd} \cdots \arrow[r] & A_{n+1} \arrow[r, "\alpha-\beta h\gamma"] \arrow[d, "\varphi"] & A_n \arrow[r, "\alpha-\beta h\gamma"] \arrow[d, "\varphi"] & A_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "\varphi"] & \cdots \\ \cdots \arrow[r] & A_{n+1} \oplus B_{n+1} \arrow[r, "\mathrm{d}"] & A_n \oplus B_n \arrow[r, "\mathrm{d}"] & A_{n-1} \oplus B_{n-1} \arrow[r] & \cdots \end{tikzcd}$$

并且此图表的每一行都为链复形，并且链映射

$$\varphi := \begin{pmatrix} 1 \\ -h\gamma \end{pmatrix}$$

为拟同构。

证明. 注意到 $\delta^2 = 0$，以及

$$0 = \mathrm{d}^2 = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} \alpha^2 + \beta\gamma & \alpha\beta + \beta\gamma \\ \gamma\alpha + \delta\gamma & \gamma\beta + \delta^2 \end{pmatrix}$$

从而我们有

$$\begin{cases} \alpha^2 &= -\beta\gamma \\ \alpha\beta &= -\beta\delta \\ \gamma\alpha &= -\delta\gamma \\ \gamma\beta &= 0 \end{cases}$$

再注意到 $h\delta+\delta h=1$，直接计算验证可知 $\varphi_\bullet$ 的确为链复形之间的链映射。细节略。

再注意链映射

$$\varphi_\bullet : (A_\bullet, \alpha-\beta h\gamma) \to (A_\bullet \oplus B_\bullet, \mathrm{d})$$

为单射，并且其余核

$$\operatorname{coker}\varphi_\bullet \cong (B_\bullet, \delta)$$

是正合的，因此 $\varphi_\bullet$ 为拟同构。 □

这个引理的功能是，如果给定的链复形 $(A_\bullet \oplus B_\bullet, \mathrm{d})$ 当中“含有正合的部分”$(B_\bullet, \delta)$，那我们可以把这个“正合的部分”剔除掉，得到一个“不那么冗余”的链复形 $(A_\bullet, \alpha-\beta h\delta)$，并且此复形与原来的复形的各阶同调自然同构。

我们将此引理用于循环双复形 $CC_{\bullet\bullet}(A)$ 的全复形 $\mathrm{Tot}_\bullet(CC_{\bullet\bullet}(A))$ 上。回顾 $CC_{\bullet\bullet}(A)$ 为如下双复形：

$$\begin{tikzcd}
\vdots \arrow[d, "b"] & \vdots \arrow[d, "-b'"] & \vdots \arrow[d, "b"] & \vdots \arrow[d, "-b'"] & \\
C_2(A) \arrow[d, "b"] & C_2(A) \arrow[l, "1-\lambda"'] \arrow[d, "-b'"] & C_2(A) \arrow[l, "\mathcal{N}"'] \arrow[d, "b"] & C_2(A) \arrow[l, "1-\lambda"'] \arrow[d, "-b'"] & \cdots \arrow[l] \\
C_1(A) \arrow[d, "b"] & C_1(A) \arrow[l, "1-\lambda"'] \arrow[d, "-b'"] & C_1(A) \arrow[l, "\mathcal{N}"'] \arrow[d, "b"] & C_1(A) \arrow[l, "1-\lambda"'] \arrow[d, "-b'"] & \cdots \arrow[l] \\
C_0(A) & C_0(A) \arrow[l, "1-\lambda"'] & C_0(A) \arrow[l, "\mathcal{N}"'] & C_0(A) \arrow[l, "1-\lambda"'] & \cdots \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

注意到该双复形的第偶数列为 Hochschild 链复形（链映射 b），第奇数列为 Bar-复形（链映射 $-b'$）. 注意 Bar-复形是正合的，并且有同伦逆

$$\begin{aligned}
h : C_n(A) &\to C_{n+1}(A) && (1.1)\\
a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n &\mapsto 1 \otimes a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n && (1.2)
\end{aligned}$$

使得 $b'h+hb'=1$.

现在，注意到

$$\begin{aligned}
\mathrm{Tot}_n(CC_{\bullet\bullet}(A)) &= \left(\bigoplus_{\substack{p+q=n\\ q\ \text{为偶数}}} CC_{p,q}(A)\right) \oplus \left(\bigoplus_{\substack{p+q=n\\ q\ \text{为奇数}}} CC_{p,q}(A)\right)\\
&=: X_n \oplus Y_n
\end{aligned}$$

也就是说，我们把循环双复形 $CC_{\bullet\bullet}(A)$ 的全复形 $(\mathrm{Tot}_\bullet(CC_{\bullet\bullet}(A)), \mathrm{d})$ 写为:

$$\cdots \to X_{n+1} \oplus Y_{n+1} \xrightarrow{\mathrm{d}} X_n \oplus Y_n \xrightarrow{\mathrm{d}} X_{n-1} \oplus Y_{n-1} \to \cdots$$

边缘算子矩阵 $\mathrm{d} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ 留给读者。但是要注意 $(Y_\bullet, \delta)$ 的正合性是由 Bar-复形 $(C_\bullet(A), -b')$ 的正合性所诱导的；δ 也存在同伦逆，仍记为 h.

综上，对 $\mathrm{Tot}_\bullet(CC_{\bullet\bullet}(A))$ 使用引理1.7.1，我们得到以下结果：

性质 1.7.2. 对于 K-代数 A，考虑以下双复形 $\mathcal{B}_{\bullet\bullet}(A)$:

$$\begin{tikzcd}
\vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] \\
A^{\otimes 3} \arrow[d, "b"] & A^{\otimes 2} \arrow[l, "\mathcal{B}"'] \arrow[d, "b"] & A \arrow[l, "\mathcal{B}"'] \\
A^{\otimes 2} \arrow[d, "b"] & A \arrow[l, "\mathcal{B}"'] & \\
A & &
\end{tikzcd}$$

此图表的最左下角为第 0 行 0 列，右下角空白处都为 0，具体地，

$$\mathcal{B}_{p,q}(A) = \begin{cases} CC_{p-q,2q}(A) & p \geq q \\ 0 & p < q \end{cases}$$

（也就是说，$\mathcal{B}_{\bullet\bullet}$ 的结点是由将循环双复形 $CC_{\bullet\bullet}(A)$ 的第奇数列（*Bar*-复形）都删掉，再将原来第 $2l$ 列整体向左、上各平移 l 格所得）其中 ***Connes* 算子**$\mathcal{B} : C_n(A) \to C_{n+1}(A)$ 定义为以下的复合：

$$\begin{tikzcd}
C_{n+1}(A) \arrow[d, "b"] & C_{n+1}(A) \arrow[l, "1-\lambda"'] \arrow[d, "-b'"] & C_{n+1}(A) \arrow[l, "\mathcal{N}"'] \arrow[d, "b"] \\
C_n(A) & C_n(A) \arrow[l, "1-\lambda"'] \arrow[u, bend left, "h"] & C_n(A) \arrow[l, bend left, "\mathcal{N}"]
\end{tikzcd}$$

$$\mathcal{B} := (1-\lambda)h\mathcal{N}$$

那么，存在自然的双复形单同态

$$\mathcal{B}_{\bullet\bullet}(A) \hookrightarrow CC_{\bullet\bullet}(A)$$

并且其诱导的全复形的链映射

$$\mathrm{Tot}_\bullet(\mathcal{B}_{\bullet\bullet}(A)) \hookrightarrow \mathrm{Tot}_\bullet(CC_{\bullet\bullet}(A))$$

为拟同构。

证明. 只需注意到

$$\mathrm{Tot}_n(\mathcal{B}_{\bullet\bullet}) = \left(\bigoplus_{\substack{p+q=n \\ q\ \text{为偶数}}} CC_{p,q}(A)\right) \hookrightarrow \mathrm{Tot}_n(CC_{\bullet\bullet}(A))$$

直接使用引理1.7.1，细节从略。但是要验证 $\mathcal{B}_{\bullet\bullet}(A)$ 的确是双复形，即需要验证反交换关系

$$\mathcal{B} \circ b + b \circ \mathcal{B}$$

而这是容易的，验证如下：

$$\begin{aligned} \mathcal{B} \circ b &= (1-\lambda)h\mathcal{N}b = (1-\lambda)hb'\mathcal{N} \\ &= (1-\lambda)(1-b'h)\mathcal{N} = (1-\lambda)\mathcal{N} - (1-\lambda)b'h\mathcal{N} \\ &= -b(1-\lambda)h\mathcal{N} = -b \circ \mathcal{B} \end{aligned}$$

从而证毕。 □

于是我们得到循环同调的又一等价定义：

$$H_\bullet^\lambda(A) \cong H_\bullet(\mathrm{Tot}_\bullet(\mathcal{B}_{\bullet\bullet}))$$

我们可以将链复形 $\mathrm{Tot}_\bullet(\mathcal{B}_{\bullet\bullet})$ 适当改写，使得形式更加美观：

性质 1.7.3. 对于 K-代数 A，以及形式变元 u，考虑如下链复形：

$$(CC_\bullet(A), b + u\mathcal{B})$$

其中

$$CC_n(A) := (C_\bullet(A)[u^{-1}])_n := \bigoplus_{k=0}^{\infty} u^{-k} C_{n-2k}(A)$$

（注意这是有限直和）换句话说，我们给定以下分次

$$\deg(b) = -1, \quad \deg(B) = 1, \quad \deg(u) = -2$$

那么此链复形的同调自然同构于循环同调：

$$H_\bullet(CC_\bullet(A), b + uB) \cong H_\bullet^\lambda(A)$$

证明. 这个几乎显然。注意到

$$\mathrm{Tot}_n(\mathcal{B}_{\bullet\bullet}(A)) = \bigoplus_{k=0}^{\infty} \mathcal{B}_{n-k,k}(A) = \bigoplus_{k=0}^{\infty} C_{n-2k}(A)$$

$$CC_n(A) \quad = \quad \bigoplus_{k=0}^{\infty} u^{-k} C_{n-2k}(A)$$

于是有自然的链复形同构

$$\begin{aligned} \mathrm{Tot}_\bullet(\mathcal{B}_{\bullet\bullet}(A)) &\to CC_\bullet(A) \\ \mathcal{B}_{n-k,k}(A) &\mapsto u^{-k} C_{n-2k}(A) \end{aligned}$$

容易验证此对应也保持相应的边缘算子。证毕。 □

注意，我们还可以考虑 $(CC_\bullet(A), b)$，它与 $(CC_\bullet(A), b+u\mathcal{B})$ 具有不同的边缘算子：前者的同调我们早已知道是 Hochschild 同调，而后者的同调为循环同调。

注记 1.7.4. （复几何的背景）

对于复流形 X，它作为光滑流形，有外微分算子 d；再注意到它的复结构，有算子 $\overline{\partial}$——前者代表拓扑，而后代表复几何。它们之间有关系

$$\mathrm{d} = \overline{\partial} + \partial$$

并且满足

$$\partial^2 = \overline{\partial}^2 = 0 \quad \partial\overline{\partial} + \overline{\partial}\partial = 0$$

我们考虑以下“拓扑与复几何之间的桥梁”：

$$\mathrm{d}_u := \overline{\partial} + u\partial$$

称此算子为霍奇滤链（*Hodge filtration*），其中 $0 \le u \le 1$. 注意 d_u 满足稳定性条件 $\mathrm{d}_u^2 = 0$，即 $\overline{\partial}$ 与 d 的“过渡”的任何一个“中间状态”都仍为外微分算子。

所以，似乎可以如下粗暴地对应？

复几何	非交换几何
复流形 X	K-代数 A
$\Omega_X^\bullet$	$CC_\bullet(A)$
$\overline{\partial}$	b
∂	$u\mathcal{B}$
d	$b+u\mathcal{B}$
$H_{\mathrm{DR}}^\bullet(X)$	$H_\bullet^\lambda(A)$
$H_{\overline{\partial}}^\bullet(X)$	$\mathrm{HH}_\bullet(A)$

这格表格似乎不太对吧，应该是 Hochschild 同调 $\mathrm{HH}_\bullet(A)$ 对应于“非交换版本的”微分形式 $\Omega^\bullet$，从之前的例子能看出来。

定义 1.7.5. （周期循环同调与负循环同调）对于 K-代数 A，与 $CC_\bullet(A)$ 类似，我们还可以去定义以下：

（*1*）定义**周期循环复形**（*periodic cyclic complex*）

$$CC_\bullet^{\mathrm{per}}(A) := (C_\bullet(A)((u)), b + u\mathcal{B})$$

该复形的同调

$$\mathrm{HC}_\bullet^{\mathrm{per}}(A) := H_\bullet(CC_\bullet^{\mathrm{per}}(A), b + uB)$$

称之为**周期循环同调**（*periodic cyclic homology*）。

（*2*）定义**负循环复形**（*negative cyclic complex*）

$$CC_\bullet^{-}(A) := (C_\bullet(A)[\![u]\!], b + uB)$$

该复形的同调

$$\mathrm{HC}_\bullet^{-}(A) := H_\bullet(CC_\bullet^{-}(A), b + uB)$$

称之为**负循环同调**（*negative cyclic homology*）。

注意上述定义当中的“$[\![u]\!]$”是指关于形式变元 u 的形式幂级数，而“$((u))$”为关于 u 的 Laurent 级数。由定义，显然有

$$CC_\bullet(A) \cong CC_\bullet^{\mathrm{per}}(A)/CC_\bullet^{-}(A)$$

至此，我们定义出了 $CC_\bullet(A), CC_\bullet^{\mathrm{per}}(A)$ 以及 $CC_\bullet^{-}(A)$。事实上，这三者都有深刻的物理背景，见下表：

非交换几何中的对象	几何、物理背景	几何、物理背景
$CC_\bullet^{per}(A)$	open-closed string states	de-Rham cohomology
$CC_\bullet(A)$	open string states	gauge theory
$CC_\bullet^{-}(A)$	closed string states	gravity

其中特别注意，周期循环同调是 de-Rham 上同调的“非交换版本”，我们将在后文举例说明。

1.8 循环同调的计算

回顾约化 Bar-复形 $\overline{B}_\bullet(A)$ （见定义1.4.1），我们可以类似地通过约化 Bar-复形来构造类似的“循环双复形”：在 $K \hookrightarrow A$ 的条件下，考虑约化 Hochschild 链复形

$$\overline{C}_n(A) := \overline{C}_n(A, A) \cong A \otimes \overline{A}^{\otimes n}$$

类似去定义循环算子 $\lambda:\overline{C}_n(A)\to\overline{C}_n(A)$，其显式表达式与非约化情形完全相同；以及平均算子

$$\mathcal{N}:\overline{C}_n(A,A)\cong A\otimes\overline{A}^{\otimes n}$$

可惜是错的，类似于此前的 $\lambda,\mathcal{N}$ 并不良定。比如

$$0=\lambda(0)=\lambda(a_0\otimes\overline{1})=-1\otimes\overline{\lambda}\neq 0$$

但是，Connes 算子 $\mathcal{B}:\overline{C}_n(A)\to\overline{C}_{n+1}(A)$ 是有意义的，运算规则与非约化情形完全相同，具体地，

$$\begin{aligned}
\mathcal{B}(a_0\otimes\overline{a_1}\otimes\cdots\otimes\overline{a_n}) &= \widetilde{(1-\lambda)}h\widetilde{\mathcal{N}}(a_0\otimes\overline{a_1}\otimes\cdots\otimes\overline{a_n})\\
&= \widetilde{(1-\lambda)}h\left(\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n(n+1-k)}a_k\otimes\overline{a_{k+1}}\otimes\cdots\otimes\overline{a_n}\otimes\overline{a_0}\otimes\cdots\otimes\overline{a_{k-1}}\right)\\
&= \widetilde{(1-\lambda)}\left(\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n(n+1-k)}1\otimes\overline{a_k}\otimes\overline{a_{k+1}}\otimes\cdots\otimes\overline{a_n}\otimes\overline{a_0}\otimes\cdots\otimes\overline{a_{k-1}}\right)\\
&= \sum_{k=0}^{n}(-1)^{nk}1\otimes\overline{a_k}\otimes\overline{a_{k+1}}\otimes\cdots\otimes\overline{a_n}\otimes\overline{a_0}\otimes\cdots\otimes\overline{a_{k-1}}
\end{aligned}$$

其中 $a_{-1}:=a_n$.

性质 1.8.1. 对于 K-代数 A，假设 $K\hookrightarrow A$，则有如下双复形 $\overline{\mathcal{B}}_{\bullet\bullet}(A)$:

$$\begin{tikzcd}
\vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] \\
A\otimes\overline{A}^{\otimes 2} \arrow[d] & A\otimes\overline{A} \arrow[l, "\mathcal{B}"'] \arrow[d, "b"] & A \arrow[l, "\mathcal{B}"'] \\
A\otimes\overline{A} \arrow[d, "b"] & A \arrow[l, "\mathcal{B}"'] & \\
A & &
\end{tikzcd}$$

记此双复形的全复形为 $\overline{CC}_\bullet(A):=\mathrm{Tot}_\bullet(\overline{\mathcal{B}}_{\bullet\bullet}(A))$，则有自然同构

$$H_\bullet^\lambda(A)\cong H_\bullet(\overline{CC}_\bullet(A))$$

也就是说，在 $K\hookrightarrow A$ 的条件下，我们可以用约化版本的双复形来计算循环同调。

证明. 考虑商映射 $\pi_\bullet : C_\bullet(A,A) \twoheadrightarrow \overline{C}_\bullet(A,A)$ 自然诱导的双复形同态

$$\pi_{\bullet\bullet} : \mathcal{B}_{\bullet\bullet}(A) \twoheadrightarrow \overline{\mathcal{B}}_{\bullet\bullet}(A)$$

注意 $\pi_{\bullet\bullet}$ 限制在双复形的每一列上，都为相应链复形的拟同构（这里使用了引理 1.4.3），因此根据引理1.6.3，其诱导的全复形之间的同态

$$\mathrm{Tot}_\bullet(\mathcal{B}_{\bullet\bullet}(A)) \twoheadrightarrow \mathrm{Tot}_\bullet(\overline{\mathcal{B}}_{\bullet\bullet}(A))$$

为拟同构。再注意性质 1.7.2，上式左边的同调即为循环同调，从而证毕。 □

与非约化情形类似，我们也可以

$$\mathrm{Tot}_\bullet(\overline{\mathcal{B}}_{\bullet\bullet}(A)) \cong \overline{C}_\bullet(A)[u^{-1}], b + u\mathcal{B})$$

甚至去定义“约化周期循环同调”、“约化负循环同调”，此处不再赘述。

本节接下来给出循环同调的一些典型的计算实例。

例子 1.8.2. 对于环 K，设 K-代数 $A = K$，那么其循环同调

$$H_n^\lambda(K) \cong \begin{cases} K & n \text{ 为偶数} \\ 0 & n \text{ 为奇数} \end{cases}$$

我们早已具体计算出 $K[x^1, x^2, ..., x^n]$ 的 Hochschild 同调，特别地 $\mathrm{HH}_\bullet(K)$ 只有第零个是非平凡的（同构于 K），其余都为 0. 不过，$H_\bullet^\lambda(K)$ 与 $\mathrm{HH}_\bullet(K)$ 并不相同。

证明. 我们采用最简便的方法去计算，当然采用约化循环双复形啦。在本例中，

$$\overline{A} = K/K = 0$$

从而双复形 $\overline{\mathcal{B}}_{\bullet\bullet}(K)$ 为以下：

$$\begin{tikzcd}
\vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] \\
0 \arrow[d] & 0 \arrow[l] \arrow[d] & 0 \arrow[l] \arrow[d] & K \arrow[l] \\
0 \arrow[d] & 0 \arrow[l] \arrow[d] & K \arrow[l] & \\
0 \arrow[d] & K \arrow[l] & & \\
K & & &
\end{tikzcd}$$

其全复形 $\overline{CC}_\bullet(K)$ 为以下

$$\cdots \to 0 \xrightarrow{0} K \xrightarrow{0} 0 \xrightarrow{0} K$$

从而易求循环同调。 □

当然我们也可以按照循环同调最原始的定义去计算，其实也不难算，如下：

另一种计算方式. 直接计算。此时，

$$C_n(K) \cong K^{\otimes n+1} \cong K$$

我们记其生成元

$$\varepsilon_n := \underbrace{1 \otimes 1 \otimes \cdots \otimes 1}_{n+1\text{个}} \in C_n(K)$$

容易验证算子 b 与算子 λ 的作用

$$b(\varepsilon_n) = \begin{cases} \varepsilon_{n-1} & n \text{ 为偶数} \\ 0 & n \text{ 为奇数} \end{cases} \qquad \lambda(\varepsilon_n) = \begin{cases} \varepsilon_n & n \text{ 为偶数} \\ -\varepsilon_n & n \text{ 为奇数} \end{cases}$$

因此，易知 Connes 复形 $C^{\lambda}_{\bullet}(K) := C_{\bullet}K/(1-\lambda)$ 具体如下：

$$\cdots \to 0 \xrightarrow{0} K \xrightarrow{0} 0 \xrightarrow{0} K$$

对它取同调，即得循环同调。 □

接下来，考虑 $A = K[x^1, x^2, ..., x^n]$ 为 n 元多项式环的情形，我们企图取计算 A 的循环同调。注意在之前我们已经使用 Koszul 复形求出了 $A = K[x^1, x^2, ..., x^n]$ 的 Hochschild 同调。

引理 1.8.3. *设 $A = K[x^1, x^2, ..., x^n]$ 为 n 元多项式环，考虑微分形式代数 $\Omega^{\bullet}_A := K[x^1, ..., x^n; \mathrm{d}x^1, ...\mathrm{d}x^n]$，注意 $\Omega^{\bullet}_A$ 上有外积运算 $\wedge$ 与外微分运算 d. 考虑以下 K-模同态*

$$\begin{aligned} \Phi : \overline{C}_p(A) &\to \Omega^p_A \\ a_0 \otimes \overline{a_1} \otimes \cdots \otimes \overline{a_p} &\mapsto \frac{1}{p!} a_0 \mathrm{d}a_1 \wedge \mathrm{d}a_2 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}a_p \end{aligned}$$

则 Φ 是良定的，并且成立：

$$\begin{cases} \Phi \circ b = 0 \\ \Phi \circ \mathcal{B} = \mathrm{d} \circ \Phi \end{cases}$$

其中 $b : \overline{C}_p(A) \to \overline{C}_{p-1}(A)$ 为约化 Hochschild 复形的边缘算子，$\mathcal{B} : \overline{C}_{p-1}(A) \to \overline{C}_p(A)$ 为约化的 Connes 算子。

证明. Φ 的良定性，即 $\overline{A}$ 中元素与代表元选取无关。而此代表元选取至多相差“常数项”（即 K 中元素），它在外微分 d 的作用下为零。因此 Φ 良定。

我们来验证 $\Phi \circ b = 0$. 暴力验证如下：

$$\Phi \circ b(a_0 \otimes \overline{a_1} \otimes \cdots \otimes \overline{a_n})$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{p!}\Big(a_0a_1\mathrm{d}a_2\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}a_p+\sum_{k=1}^{p-1}(-1)^k a_0\mathrm{d}a_1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}(a_ka_{k+1})\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}a_p \\
&\quad +(-1)^p a_0a_p\mathrm{d}a_1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}a_{p-1}\Big) \\
&= \frac{1}{p!}\Big(a_0a_1\mathrm{d}a_2\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}a_p+\sum_{k=1}^{p-1}(-1)^k a_0a_k\mathrm{d}a_1\wedge\cdots\wedge\widehat{\mathrm{d}a_k}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}a_p \\
&\quad +\sum_{k=1}^{p-1}(-1)^k a_0a_{k+1}\mathrm{d}a_1\wedge\cdots\wedge\widehat{\mathrm{d}a_{k+1}}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}a_p+(-1)^p a_0a_p\mathrm{d}a_1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}a_{p-1}\Big) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

第二个等式 $\Phi\circ\mathcal{B}=\mathrm{d}\circ\Phi$ 也容易直接验证：一方面，

$$
\begin{aligned}
&\Phi\circ\mathcal{B}(a_0\otimes\overline{a_1}\otimes\cdots\otimes\overline{a_n}) \\
=\ &\sum_{k=0}^{p}\frac{(-1)^{pk}}{(p+1)!}\Big(\mathrm{d}a_k\wedge\mathrm{d}a_{k+1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}a_p\Big)\wedge\Big(\mathrm{d}a_0\wedge\mathrm{d}a_1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}a_{k-1}\Big) \\
=\ &\frac{1}{p!}\mathrm{d}a_0\wedge\mathrm{d}a_1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}a_n
\end{aligned}
$$

而另一方面，

$$
\mathrm{d}\circ\Phi(a_0\otimes\overline{a_1}\otimes\cdots\otimes\overline{a_p})=\frac{1}{p!}\mathrm{d}(a_0\mathrm{d}a_1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}a_p)=\frac{1}{p!}\mathrm{d}a_0\wedge\mathrm{d}a_1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}a_p
$$

从而得证。 □

由此引理，我们即可去计算 $A:=K[x^1,x^2,...,x^n]$ 的循环同调。

性质 1.8.4. 对于 $A:=K[x^1,x^2,...,x^n]$，则其循环同调

$$
H_n^{\lambda}(A)\cong\begin{cases}(\Omega_A^n/\mathrm{d}\Omega_A^{n-1})\oplus K & n\ \text{为偶数}\\ \Omega_A^n/\mathrm{d}\Omega_A^{n-1} & n\ \text{为奇数}\end{cases}
$$

证明. 事实上，刚才的引理 1.8.3 表明，Φ 诱导以下两个双复形之间的态射：

$$
\begin{tikzcd}
\vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] \\
\overline{C}_2(A) \arrow[d, "b"] & \overline{C}_1(A) \arrow[l, "\mathcal{B}"'] \arrow[d, "b"] & \overline{C}_0(A) \arrow[l, "\mathcal{B}"'] \\
\overline{C}_1(A) \arrow[d, "b"] & \overline{C}_0(A) \arrow[l, "\mathcal{B}"'] & \\
\overline{C}_0(A) & &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] \\
\Omega_A^2 \arrow[d, "0"] & \Omega_A^1 \arrow[l, "\mathrm{d}"'] \arrow[d, "0"] & \Omega_A^0 \arrow[l, "\mathrm{d}"'] \\
\Omega_A^1 \arrow[d, "0"] & \Omega_A^0 \arrow[l, "\mathrm{d}"'] & \\
\Omega_A^0 & &
\end{tikzcd}
$$

（按村儿里的规矩，此处应该有立方交换图）

其中左边为 $\overline{\mathcal{B}}_{\bullet\bullet}(A)$，而右边的每一行均为 de-Rham 上链复形，每一列的边缘算子都为零。注意到 Φ 是满射，以及我们早已用 Koszul 复形得到的

$$H_n(\overline{C}_\bullet(A)) \cong \mathrm{HH}_n(A) \cong \Omega_A^n \cong H_n(\Omega_A^\bullet, 0)$$

从而双复形同态 Φ 限制在每一列上都为拟同构，于是由引理 1.6.3，立刻知道

$$\Phi : \mathrm{Tot}_\bullet(\overline{\mathcal{B}}_{\bullet\bullet}(A), b, \mathcal{B}) \to \mathrm{Tot}_\bullet(\Omega_A^\bullet, 0, \mathrm{d})$$

为拟同构。上式左边的同调即为 A 的循环同调，而右边的同调可以直接计算。只需要注意到（Poincare 引理）de-Rham 复形

$$\cdots \xrightarrow{\mathrm{d}} \Omega^\bullet(A) \xrightarrow{\mathrm{d}} \Omega^\bullet(A) \xrightarrow{\mathrm{d}} \Omega^\bullet(A) \to 0$$

的（上）同调满足

$$H^n(\Omega_A^\bullet, \mathrm{d}) = \begin{cases} K & n = 0 \\ 0 & n > 0 \end{cases}$$

因此容易计算出

$$H_n^\lambda(A) \cong \begin{cases} (\Omega_A^n / \mathrm{d}\Omega_A^{n-1}) \oplus K & n \text{ 为偶数} \\ \Omega_A^n / \mathrm{d}\Omega_A^{n-1} & n \text{ 为奇数} \end{cases}$$

□

注记 1.8.5. 容易知道，*Connes* 算子

$$\mathcal{B} : \overline{C}_n(A) \to \overline{C}_{n+1}(A)$$

在 $\ker b$ 上的限制，可以下降为 *Hochschild* 同调之间的同态

$$\mathcal{B} : \mathrm{HH}_n(A) \to \mathrm{HH}_{n+1}(A)$$

Hochschild 同调扮演的角色相当于微分形式，而此时 Connes 算子扮演的则是外微分。

注记 1.8.6. 双复形满同态

$$\Phi : (\overline{\mathcal{B}}_{\bullet\bullet}(A), b, \mathcal{B}) \twoheadrightarrow (\Omega_A^\bullet, 0, \mathrm{d})$$

其实是可裂（*split*）的。具体地，存在双复形同态

$$\begin{aligned} \eta : \Omega^\bullet(A) &\to \overline{C}_\bullet(A) \\ a_0 \mathrm{d}a_1 \wedge \mathrm{d}a_2 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}a_p &\mapsto \sum_{\sigma \in S_p} (-1)^{\operatorname{sgn} \sigma} a_0 \otimes a_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes a_{\sigma(p)} \end{aligned}$$

使得 $\Phi \circ \eta = \mathrm{id}$.

容易验证（简单的组合技巧）η 的确诱导了双复形同态

$$\eta : (\Omega_A^\bullet, 0, \mathrm{d}) \to (\overline{\mathcal{B}}_{\bullet\bullet}(A), b, \mathcal{B})$$

1.9 循环上同调

本章最后，简单介绍一下循环上同调（Cyclic cohomology）。对于双 A-模 M，回顾我们之前已经介绍的 Hochschild 上链复形

$$C^n(A, M) := \mathrm{Hom}(A^{\otimes n}, A)$$

特别地，当 $M = A$ 时，我们给出以下记号:

记号 1.9.1. 对于 K-代数 A，以及 $n \geq 0$，我们记 *Hochschild* 上链复形

$$C^n(A) := C^n(A, A) \cong \mathrm{Hom}(A^{\otimes n}, A) \cong \mathrm{Hom}(A^{\otimes n+1}, K)$$

并且将该 *Hochschild* 上链复形的微分算子记为 b^*.

我们此前考虑同构 $C_n(A) \cong A^{\otimes n+1}$，而 Hochschild 上链复形 $C^n(A) \cong \mathrm{Hom}(A^{\otimes n+1}, K)$ 恰为其对偶；微分算子 b^* 的作用即为 b 的对偶：即对任意 $f \in C^n(A) \cong \mathrm{Hom}(A^{\otimes n+1}, K)$ 以及 $\omega \in A^{\otimes n+2} \cong C_{n+1}(A)$，成立

$$(b^* f)(\omega) = f(b(\omega))$$

与循环余不变量对偶，我们可以谈论循环不变量：

定义 1.9.2. （循环不变量）

对于 $f \in C^n(A)$，称 f 为循环不变量（*cyclic invariant*），如果对任意的 $a_0,...,a_n \in A$，成立

$$f(a_0,a_1,...,a_n) = (-1)^n f(a_n,a_0,...,a_{n-1})$$

记 $C^n(A)$ 当中的循环不变量之全体为 $C^n_\lambda(A)$.

容易验证 $b^*(C^n_\lambda(A)) \subseteq C^{n+1}_\lambda(A)$，从而 $(C^\bullet_\lambda(A), b^*)$ 为 $(C^\bullet(A), b^*)$ 的子复形。（不必暴力验证了，由循环余不变量对偶过去就行）看图说话即可：

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & C_n(A) \arrow[r, "b'"] \arrow[d, "1-\lambda"] & C_{n-1}(A) \arrow[r] \arrow[d, "1-\lambda"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & C_n(A) \arrow[r, "b"] \arrow[d, two heads] & C_{n-1}(A) \arrow[r] \arrow[d, two heads] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & C^\lambda_n(A) \arrow[r] \arrow[d] & C^\lambda_{n-1}(A) \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
& 0 & 0 &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\cdots & C^n(A) \arrow[l] & C^{n-1}(A) \arrow[l, "b'^*"'] & \cdots \arrow[l] \\
\cdots & C^n(A) \arrow[l] \arrow[u, "1-\lambda^*"] & C^{n-1}(A) \arrow[l, "b^*"] \arrow[u, "1-\lambda^*"'] & \cdots \arrow[l] \\
\cdots & C^n_\lambda(A) \arrow[l] \arrow[u, hook] & C^{n-1}_\lambda(A) \arrow[l] \arrow[u, hook] & \cdots \arrow[l] \\
& 0 \arrow[u] & 0 \arrow[u] &
\end{tikzcd}$$

左图我们早已熟悉，注意它的每一列都是右正合的。将反变左正合函子 $\mathrm{Hom}(-,K)$ 作用于左图即得到右图，右图的每一列都是左正合的。

定义 1.9.3. （循环上同调）对于 K-代数 A 定义 A 的**循环上同调**（*cyclic cohomology*）

$$H^\bullet_\lambda(A) := \mathrm{HC}^\bullet(A) := H^\bullet(C^\bullet_\lambda(A), d^*)$$

作为例子，我们具体计算一下第零个循环上同调。

例子 1.9.4. 对于 K-代数 A，则有

$$H^0_\lambda(A) = \{f \in \mathrm{Hom}(A,K) | \forall x,y \in A, f(xy) = f(yx)\}$$

证明. 直接计算即可。只需考虑 Hochschild 上链复形

$$0 \to C^0_\lambda(A) \xrightarrow{b^*} C^1_\lambda(A) \xrightarrow{b^*} C^2_\lambda(A) \to \cdots$$

易知 $C^0_\lambda(A) = C^0(A) = \mathrm{Hom}(A,K)$，从而

$$H^0_\lambda(A) = \ker(b^* : C^0(A) \to C^1(A))$$

对于 $f \in \mathrm{Hom}(A, K)$，若 $b^* f = 0$，则对于任意 $x, y \in A$，有

$$0 = (b^* f)(x, y) = f(b(x \otimes y)) = f(xy - yx) = f(xy) - f(yx)$$

从而可知

$$H_\lambda^0(A) = \{f \in \mathrm{Hom}(A, K) | \forall x, y \in A, f(xy) = f(yx)\}$$

□

像 $H_\lambda^0(A)$ 当中的线性算子那样，满足

$$f(xy) = f(yx) \quad (\forall x, y \in A)$$

的线性算子称之为**迹算子**。

高阶的循环上同调可被认为是“导出的”迹算子。

第 2 章　乘积

2.1　分次模与 Koszul 符号法则

本节我们集中起来澄清一些关于分次模、分次代数的概念，并且力图阐明分次代数中出现的正负号。这里的“分次”如不加说明，指的都是 $\mathbb{Z}$-分次。

首先我们考虑分次 K-模。

定义 2.1.1. （分次 K-模范畴）

（*1*）称 K-模 M 为（$\mathbb{Z}$-）**分次 K-模**（*graded K-module*），若 M 具有如下分次结构：

$$M = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} M_k$$

（*2*）若 M, N 为分次 K-模，称 K-模同态 $f : M \to N$ 为次数为 d 的**齐次 K-模同态**，若对于任意 $n \in \mathbb{Z}$，成立

$$f(M_n) \subseteq N_{n+d}$$

对于分次代数，我们可以定义**齐次元**，以及齐次元的**次数**，不再赘述。对于齐次元 $a \in A$，将 a 的次数记为 $\deg a$，或者简记为 $|a|$.

平凡的例子：通常的 K-模自然有分次 K-模结构——只需将该模中的任何元素都认为是 0 次齐次元。

我们还可以谈论以分次 K-模为对象的范畴：

记号 2.1.2. （分次 K-模范畴）对于分次 K-模 M, N，对任意 $d \in \mathbb{Z}$，记

$$\mathrm{Hom}(M, N)_d := \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \mathrm{Hom}(M_n, N_{n+d})$$

即次数为 d 的分次 K 模同态之全体。再记

$$\mathrm{Hom}(M, N) := \bigoplus_{d \in \mathbb{Z}} \mathrm{Hom}(M, N)_d$$

称这里面的元素为分次 K-模同态。

我们考虑如下分次 K-模范畴，记为 $\underline{\mathrm{Mod}_K^{\mathbb{Z}}}$：

（1）$\mathrm{Obj} =$ 全体分次 K-模；

（2）$\mathrm{Mor}(M, N) = \mathrm{Hom}(M, N)$ 为分次 K-模同态。

注意对任何分次 K-模 M, N，$\mathrm{Hom}(M, N)$ 自然有分次 K-模结构，其中的 d 次齐次元即为 M 到 N 的次数为 d 的齐次同态。

对于两个分次 K-模，它们作为 K-模的张量积，也有自然的分次结构：

定义 2.1.3. （分次 K-模的张量积）对于分次 K-模 M, N，则张量积 $M \otimes N$ 自然有如下分次结构：

$$M \otimes N = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} (M \otimes N)_k$$

其中

$$(M \otimes N)_k := \bigoplus_{\substack{p,q \in \mathbb{Z} \\ p+q=k}} M_p \otimes N_q$$

容易验证这给出了 $M \otimes N$ 的分次 K-模结构。

定义 2.1.4. 对于分次 K-模 M, N，定义如下分次 K-模同态：

$$\begin{aligned} \tau : M \otimes N &\to N \otimes M \\ x \otimes y &\mapsto (-1)^{\deg x \deg y} y \otimes x \end{aligned}$$

其中 x, y 分别为 M, N 中的任意的齐次元。

这是一个次数为 0 的齐次 K-模同构，称之为**分次对合自同构**。注意这里的正负号。

记号 2.1.5. （*Kuszul* 符号法则）

设 M, M', N, N' 均为分次 K-模，则自然有如下的分次 K-模同态：

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}(M, N) \otimes \mathrm{Hom}(M', N') &\to \mathrm{Hom}(M \otimes M', N \otimes N') \\ (f \otimes g)(m \otimes m') &:= (-1)^{\deg g \deg m} f(m) \otimes g(m') \end{aligned}$$

其中 f, g, m, m' 分别为 $\mathrm{Hom}(M, N), \mathrm{Hom}(M', N'), M, M'$ 当中的任意齐次元。

依然注意正负号。以后我们总是默认 $f \otimes g$ 在 $m \otimes m'$ 上如此作用。

我们还可以定义分次 K-模的对偶模（与通常的对偶模仍然在正负号上有些区别）：

定义 2.1.6. （分次对偶模）对于分次 K-模 M，定义

$$M^* := \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} M_n^*$$

其中

$$M_n^* := \mathrm{Hom}(M_{-n}, \mathbb{Z})$$

易知 M^* 具有分次 K-模结构，并且有自然的配对

$$M_n^* \times M_{-n} \to K$$

注记 2.1.7. （分次 K-模上链复形）对于分次 K-模 C，以及 $\mathrm{d} \in \mathrm{Hom}(C, C)_1$，即次数为 1 的齐次同态。如果 $\mathrm{d} \circ \mathrm{d} = 0$，则自然有 K-模上链复形：

$$\cdots \to C_{-1} \xrightarrow{\mathrm{d}} C_0 \xrightarrow{\mathrm{d}} C_1 \xrightarrow{\mathrm{d}} C_2 \to \cdots$$

这是我们在同调代数当中早已熟知的。我们以后就将上链复形与带有 d 的分次 K-模等同。本节我们采用上链复形的语言（即 $\deg \mathrm{d} = 1$），链复形（$\deg \partial = -1$）的情形完全类似。

这里讲到的“上链复形”，与通常同调代数当中的上链复形在各种操作上都会可能相差正负号；为了区分，我们称这里的“上链复形”为“**分次上链复形**”。

我们还可以考虑分次上链复形 $(C_\bullet, \mathrm{d})$ 的分次对偶，仍为分次上链复形：

$$\cdots \to C_{-1}^* \xrightarrow{\mathrm{d}^*} C_0^* \xrightarrow{\mathrm{d}^*} C_1^* \xrightarrow{\mathrm{d}^*} C_2^* \to \cdots$$

定义 2.1.8. （分次上链复形的平移）对于分次 K-模上链复形 $(C_\bullet, \mathrm{d})$，定义分次上链复形 $(C_\bullet[1], \mathrm{d}_{[1]})$ 如下：

$$(C_\bullet[1])_n := C_{n+1}$$

并且微分算子 $\mathrm{d}_{[1]}$ 使得下图交换：

$$\begin{tikzcd}
(C[1])_n \arrow[r, "\mathrm{d}_{[1]}"] \arrow[d, equal] & (C[1])_{n+1} \arrow[d, equal] \\
C_{n+1} \arrow[r, "-\mathrm{d}"] & C_{n+2}
\end{tikzcd}$$

注意 $\mathrm{d}_{[1]}$ 当中的负号。类似地，对任意 $l \in \mathbb{Z}$，可以去定义 l-平移 $(C[l]_\bullet, \mathrm{d}_{[l]})$，特别注意符号

$$\mathrm{d}_{[l]} = (-1)^l \mathrm{d}$$

对于一般的分次 K-模，我们也可以考虑其平移，这无非是重新规定齐次元的次数。

定义 2.1.9. （分次上链复形的张量积）

对于分次上链复形 $(C_\bullet, \mathrm{d}_C)$ 与 $(D_\bullet, \mathrm{d}_D)$，定义 $(C \otimes D)_\bullet$ 的分次上链复形结构 d 如下：

$$\begin{aligned} \mathrm{d} : C_p \otimes D_q &\to C_{p+1} \otimes D_q \oplus C_p \otimes D_{q+1} \\ \mathrm{d} &= \mathrm{d}_C \otimes 1 + (-1)^p 1 \otimes \mathrm{d}_D \end{aligned}$$

仍然要注意正负号。容易验证 $\mathrm{d} \circ \mathrm{d} = 0$，从而 $((C \otimes D)_\bullet, \mathrm{d})$ 确实为分次上链复形。

对于分次 K-模，我们仍可以谈论对称张量、反对称张量：

定义 2.1.10. 设 V 为分次 K-模，对任意 $m \geq 0$，

（*1*）定义 m 阶**超对称张量空间**如下：

$$\mathrm{Sym}^m(V) = V^{\otimes m} / \sim$$

其中等价关系 $\sim$ 由以下生成：对任意齐次元 $\alpha, \beta \in V$，

$$\alpha \otimes \beta \sim (-1)^{\deg \alpha \deg \beta} \beta \otimes \alpha$$

（*2*）定义 m 阶**超反称张量空间**如下：

$$\bigwedge^m(V) := V^{\otimes m} / \sim$$

其中等价关系 $\sim$ 由以下生成：对任意齐次元 $\alpha, \beta \in V$，

$$\alpha \otimes \beta \sim -(-1)^{\deg \alpha \deg \beta} \beta \otimes \alpha$$

若 $V = V_0$ 为通常的 K-模，则 $Sym^n(V_0)$ 与 $\bigwedge^n(V_0)$ 即为通常的对称张量、外张量。

对于分次 K-模 V，以及任意的 $m \geq 0$，$\mathrm{Sym}^m(V)$ 有以下自然的分次 K-模结构：

$$\mathrm{Sym}^m(V) = \bigoplus_{d \in \mathbb{Z}} \left[\mathrm{Sym}^m(V)\right]_d$$

$$\left[\mathrm{Sym}^m(V)\right]_d := \mathrm{span}_K \left\{ v_1 \odot v_2 \odot \cdots \odot v_m \middle| \sum_{i=1}^n \deg v_i = d \right\}$$

超反称张量空间 $\bigwedge^m(V)$ 也有完全类似的分次 K-模结构。

回顾分次 K-模的平移，以下结果十分重要：

性质 2.1.11. 对于分次 K-模 V，以及任意 $n \geq 0$，则有分次 K-模同构:

$$\mathrm{Sym}^n(V[1]) \cong (\bigwedge^n(V))[n]$$

证明. 对于任意 $d \in \mathbb{Z}$，首先看看它们的齐次分量 $(\mathrm{Sym}^n(V[1]))_d$ 与 $\left((\bigwedge^n(V))[n]\right)_d$ 中的元素具有何种形式。我们用 $v_1, ..., v_n$ 表示 V 中的 $d_1, ..., d_n$ 次齐次元，根据定义容易验证

$$(\mathrm{Sym}^n(V[1]))_d = \mathrm{span}_K\{v_1 \odot v_2 \odot \cdots \odot v_n | d_1 + d_2 + \cdots d_n = n + d\}$$

$$\left((\bigwedge^n(V))[n]\right)_d = \mathrm{span}_K\{v_1 \wedge v_2 \wedge \cdots \wedge v_n | d_1 + d_2 + \cdots d_n = n + d\}$$

从而它们都为 $(V^{\otimes n})_{n+d}$ 的商模。

考虑 K-模自同构

$$\begin{aligned} \Phi_{n,d} : (V^{\otimes n})_{n+d} &\to (V^{\otimes n})_{n+d} \\ v_1 \otimes v_2 \otimes \cdots \otimes v_n &\mapsto (-1)^{d_1+2d_2+\cdots+nd_n} v_1 \otimes v_2 \otimes \cdots \otimes v_n \end{aligned}$$

断言该自同构 $\Phi_{n,d}$ 诱导了模同构

$$\begin{aligned} \varphi_{n,d} : (\mathrm{Sym}^n(V[1]))_d &\to \left((\bigwedge^n(V))[n]\right)_d \\ v_1 \odot v_2 \odot \cdots \odot v_n &\mapsto (-1)^{d_1+2d_2+\cdots+nd_n} v_1 \wedge v_2 \wedge \cdots \wedge v_n \end{aligned}$$

为此，只需要验证 $\varphi_{n,d}$ 的良定性（与代表元选取无关）。若 $\varphi_{n,d}$ 良定，则容易构造其逆映射，进而命题得证。

特别注意，$\mathrm{Sym}^n(V[1])$ 作为 $V^{\otimes n}$ 的商模，商掉的等价关系由

$$x \otimes y \sim (-1)^{(\deg x-1)(\deg y-1)} y \otimes x$$

生成，这直接由定义验证（要特别小心）；而 $(\bigwedge^n(V))[n]$ 作为 $V^{\otimes n}$ 的商模，商掉的等价关系由

$$x \otimes y \sim -(-1)^{\deg x \deg y} y \otimes x$$

生成。于是只需验证对任意 $1 \leq l \leq n_1$，成立

$$\Phi_{n,d}\Big(\cdots (v_l \otimes v_{l+1} - (-1)^{(d_l-1)(d_{l+1}-1)} v_{l+1} \otimes v_l) \cdots \Big)$$

$$
\begin{aligned}
&= (-1)^{\sum_{i=1}^{n} id_i}\Big(\cdots(v_l\otimes v_{l+1}-(-1)^{(d_l-1)(d_{l+1}-1)-d_{l+1}+d_l}v_{l+1}\otimes v_l)\cdots\Big)\\
&= (-1)^{\sum_{i=1}^{n} id_i}\Big(\cdots(v_l\otimes v_{l+1}+(-1)^{d_ld_{l+1}}v_{l+1}\otimes v_l)\cdots\Big)\\
&\equiv 0\in((\bigwedge^n(V))[n])_d
\end{aligned}
$$

□

2.2 分次代数与分次李代数

定义 2.2.1. （分次结合代数）对于结合 K-代数 A：

（1）称 A 为（$\mathbb{Z}$-）**分次结合代数**（*associative graded algebra*），若 A 具有分次 K-模结构：

$$A=\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}}A_n$$

并且与乘法相容：对任意 $k,l\in\mathbb{Z}$，有

$$A_k\cdot A_l\subseteq A_{k+l}$$

（2）若 A 为分次结合代数，称 A 为**分次交换代数**，若 A 还满足以下**分次交换性**：对任意 $a_k\in A_k,a_l\in A_l$，

$$a_k\cdot a_l=(-1)^{kl}a_l\cdot a_k$$

特别注意分次交换性的正负号。分次交换代数的典型例子是，光滑流形 X 上的微分形式 $\Omega_X^\bullet$，配以外积运算 $\wedge$.

不过注意，多项式代数 $K[x^1,...,x^n]$ 自然有分次结构，是分次代数，但它不满足分次交换性。（仅仅是“交换的分次代数”23333）

定义 2.2.2. （**分次李代数**）

K-代数 $(\mathfrak{g},[,])$ 称为**分次李代数**（*graded Lie algebra*），或者**李超代数** *(Lie super algebra)*，如果以下满足：

（1）$\mathfrak{g}$ 具有分次 $\mathfrak{g}=\bigoplus_{k\in\mathbb{Z}}\mathfrak{g}_k$，使得对任意 $k,l\in\mathbb{Z}$，成立

$$[\mathfrak{g}_k,\mathfrak{g}_l]\subseteq\mathfrak{g}_{k+l}$$

（2）乘法 $[,]:\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}\to\mathfrak{g}$ 满足如下**分次反交换性**：对 A 中任意齐次元 a,b，成立

$$[a,b]=-(-1)^{\deg a\deg b}[b,a]$$

（3）对于 A 中任何齐次元 a,b,c，成立如下**分次雅可比恒等式**：

$$(-1)^{\deg b\deg c}[c,[a,b]]+(-1)^{\deg c\deg a}[a,[b,c]]+(-1)^{\deg a\deg b}[b,[c,a]]=0$$

我们可以将“分次”（graded）与“超”（super）进行同义词替换，比如“分次雅可比恒等式”也可以称为“超雅可比恒等式”，“分次交换性”可以称为“超交换性”等等，甚至将“分次线性空间”称为“超空间”。

容易验证，超雅可比恒等式也可以改写为：

$$[c,[a,b]]=[c,[a,b]]+(-1)^{\deg a\deg c}[a,[c,b]]$$

也容易验证，对于李超代数 $(A,[,])$，则 $[,]$ 在 A 的零次分量 A_0 的限制，给出了 A_0 的李代数结构。回顾李代数的情形，李括号的雅可比恒等式反映了某种导子性质；而李超代数完全类似，上述超雅可比恒等式其实表明某种“超导子”性质。

记号 2.2.3. 为了省事，我们引入一个记号约定：对于分次代数或者分次李代数（以及后文将介绍的分次模），若 a 为其次元，我们简记

$$(-1)^a:=(-1)^{\deg a}$$

也就是说，(-1) 的幂次当中出现齐次元的次数时，省略“deg”。

例如，李超代数的超雅可比恒等式可简记为

$$(-1)^{bc}[c,[a,b]]+(-1)^{ca}[a,[b,c]]+(-1)^{ab}[b,[c,a]]=0$$

或者

$$[c,[a,b]]=[c,[a,b]]+(-1)^{ac}[a,[c,b]]$$

引理 2.2.4. （分次结合代数诱导分次李代数）

设 $(A,\cdot)$ 为分次结合代数，则其乘法自然诱导出 A 的分次李代数结构如下：定义

$$\begin{aligned}[,]:A\times A &\to A\\ [a,b] &:= a\cdot b-(-1)^{ab}b\cdot a\end{aligned}$$

其中任意 $a,b\in A$ 为齐次元。则 $(A,[,])$ 构成分次李代数，并且与 $(A,\cdot)$ 具有相同的分次。

这与由通常的结合代数通过“对易子”得到李代数的方式类似，不过要稍微注意正负号。

证明. 直接暴力验证即可，从略。注意这里的

$$(-1)^{ab} := (-1)^{\deg a \deg b} = (-1)^{ba}$$

为偷懒的记号。 □

我们可以考虑以分次 K-代数的范畴：

定义 2.2.5. （分次结合代数范畴）

我们定义如下的**分次结合 K-代数范畴**，记为 $\underline{\text{Ass-alg}_K^{\mathbb{Z}}}$：

（1）Obj = 全体分次结合 K-代数；

（2）Mor: 对任意两个分次结合 K-代数 A, B，

$$\mathrm{Hom}(A,B) := \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} (\mathrm{Hom}(A,B))_n$$

其中

$$(\mathrm{Hom}(A,B))_n := \{f \text{为 } K\text{-代数同态} | f(A_d) \subseteq B_{d+n}\, \forall d \in \mathbb{Z}\}$$

$(\mathrm{Hom}(A,B))_n$ 当中的元素称之为 n 次齐次 K-代数同态。

类似地，考虑**分次交换代数范畴**，它是分次结合代数范畴的全子范畴，记为

$$\underline{\text{Commu-alg}_K^{\mathbb{Z}}}$$

定义 2.2.6. （分次双 A-模）

设 $A = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} A_n$ 为分次结合 K-代数，M 为双 A-模，称 M 为**分次双 A-模**，若 M 配以分次 K-模结构

$$M = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} M_n$$

并且与 A 的模作用相容：对任意 $p, q \in \mathbb{Z}$，

$$A_p.M_q \subseteq M_{p+q}$$

$$M_p.A_q \subseteq M_{p+q}$$

然后对于两个分次双 A-模 M, N，也可以定义何为“分次双 A-模同态”，并且从 M 到 N 的分次双 A-模同态之全体，亦有自然的分次双 A-模结构。

特别地，对于分次 K-代数 A，A 自身有自然的分次双 A-模结构。

定义 2.2.7. （导子）对于分次 K-代数 A，以及分次双 A-模 M，称 K-线性同态

$$D : A \to M$$

为 A 的一个取值于 M 的**导子**，若对 A 中的任何齐次元 a, b，成立

$$D(ab) = D(a).b + (-1)^a a.D(b)$$

我们将 A 的取值于 M 的导子之全体记为 $\mathrm{Der}_0(A, M)$.

这个定义当中并没有用到 M 的分次。事实上对于一般的双 A-模 M，我们都可以如此谈论 $\mathrm{Der}_0(A, M)$.

导子的作用可以用如下交换图描述：

$$\begin{tikzcd}
A \otimes A \arrow[r, "m"] \arrow[d, "1\otimes D + D\otimes 1"'] & A \arrow[d, "D"] \\
A \otimes M \oplus M \otimes A \arrow[r, "m"] & M
\end{tikzcd}$$

其中 m 表示 A 中的乘法，然后特别注意 $1 \otimes D$ 以及 $D \otimes 1$ 在 $A \otimes A$ 上的作用服从 **Koszul 符号法则**（回顾记号2.1.5）.

定义 2.2.8. （超导子）

对于分次 K 代数 A 以及 $d \in \mathbb{Z}$，称次数为 d 的分次 K-模同态

$$D : A \to A$$

为次数为 d 的**超导子**，若满足如下的**超莱布尼茨法则**：对 A 中任何齐次元 a, b，成立

$$D(ab) = D(a)b + (-1)^{d \cdot \deg a} aD(b)$$

记次数为 d 的超导子之全体为 $\mathrm{Der}(A, A)_d$，并且记

$$\mathrm{Der}(A, A) := \bigoplus_{d \in \mathbb{Z}} \mathrm{Der}(A, A)_d$$

易知 $\mathrm{Der}(A,A)$ 有自然的分次 K-模结构。超导子 D 的作用可由如下交换图来描述：

$$\begin{tikzcd} A\otimes A \arrow[r, "D\otimes 1+1\otimes D"] \arrow[d, "m"] & A\otimes A \arrow[d, "m"] \\ A \arrow[r, "D"] & A \end{tikzcd}$$

注记 2.2.9. （微分分次代数）对于 K-代数 A，以及次数为 1 的超导子 $\mathrm{d}\in\mathrm{Der}(A,A)_1$，如果 $\mathrm{d}^2=0$，则 (A,d) 正是我们在之前（见定义*1.4.5*）定义的**微分分次代数**。

分次微分代数 (A,d) 自然可视为分次上链复形。当然我们也可以考虑次数为 -1 的超导子，亦可定义出类似版本的分次微分代数（不过我们更推荐使用上链复形的语言）。

引理 2.2.10. （由超导子构成的李超代数）

对于分次 K-代数 A，若 $D_1,D_2\in\mathrm{Der}(A,A)$ 为齐次的超导子，定义

$$[D_1,D_2]:=D_1\circ D_2-(-1)^{D_1D_2}D_2\circ D_1$$

则 $[D_1,D_2]$ 是次数为 $\deg D_1+\deg D_2$ 的超导子。从而我们定义了

$$[,]:\mathrm{Der}(A,A)\times\mathrm{Der}(A,A)\to\mathrm{Der}(A,A)$$

使得 $(\mathrm{Der}(A,A),[,])$ 为李超代数。

证明. 对于齐次超导子 D_1,D_2，只需要验证 $[D_1,D_2]$ 仍然是超导子，然后由引理2.2.4即可知 $(\mathrm{Der}(A,A),[,])$ 为李超代数。

暴力验证之（还是写一下过程吧），对 A 中任意齐次元 a_1,a_2，有

$$\begin{aligned}
& [D_1,D_2](a_1a_2)=\left(D_1D_2-(-1)^{D_1D_2}\right)(a_1a_2)\\
= \;& D_1\left(D_2(a_1)a_2+(-1)^{a_1D_2}a_1D_2(a_2)\right)\\
& -(-1)^{D_1D_2}D_2\left(D_1(a_1)a_2+(-1)^{a_1D_1}a_1D_1(a_2)\right)\\
= \;& D_1D_2(a_1)a_2+(-1)^{D_1(a_1+D_2)}{\color{red}D_2(a_1)D_1(a_2)}\\
& +(-1)^{a_1D_2}\left[{\color{blue}D_1(a_1)D_2(a_2)}+(-1)^{a_1D_1}a_1D_1D_2(a_2)\right]\\
& -(-1)^{D_1D_2}\Big[D_2D_1(a_1)a_2+(-1)^{D_2(D_1+a_1)}{\color{blue}D_1(a_1)D_2(a_2)}\\
& +(-1)^{a_1D_1}\left({\color{red}D_2(a_1)D_1(a_2)}+(-1)^{D_2a_1}a_1D_2D_1(a_2)\right)\Big]\\
= \;& \left[D_1D_2-(-1)^{D_1D_2}D_2D_1\right](a_1)a_2
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
& +(-1)^{a_1(D_1+D_2)}a_2\left[D_1D_2-(-1)^{D_1D_2}D_2D_1\right](a_2)\\
= \quad & [D_1,D_2](a_1)a_2+(-1)^{a_1(D_1+D_2)}a_1[D_1,D_2](a_2)
\end{aligned}
$$

可见 $[D_1, D_2]$ 确实是次数为 $(\deg D_1 + \deg D_2)$ 的超导子，证毕。 $\square$

最后简要介绍一下函子性：我们有遗忘函子

$$
\begin{aligned}
\underline{\text{Ass-alg}_K^{\mathbb{Z}}} &\to \underline{\text{Mod}_K^{\mathbb{Z}}}\\
\underline{\text{Commu-alg}_K^{\mathbb{Z}}} &\to \underline{\text{Mod}_K^{\mathbb{Z}}}
\end{aligned}
$$

我们考虑该函子的左伴随“自由分次结合代数”以及“自由分次交换代数”，即范畴论当中的“普遍真理”（呵呵呵呵呵呵）：

自由是遗忘的左伴随

定义 2.2.11. （张量代数 *or* 自由分次结合代数）

设 V 为分次 K-模，定义分次 K-模

$$T(V) := \bigoplus_{n\geq 0} V^{\otimes n}$$

其中 $V^{\otimes 0} := K$；并且张量积“$\otimes$”给出了 $T(V)$ 的乘法结构：

$$(v_1\otimes\cdots\otimes v_p)\otimes(v_{p+1}\otimes\cdots\otimes v_{p+q}) = v_1\otimes\cdots\otimes v_{p+q}$$

从而使得 $(T(V),\otimes)$ 为分次结合代数，称之为由 V 生成的**自由分次结合代数**。

这的确是一种非常“自由”的构造方式。并且容易验证 T 的函子性：

$$
\begin{aligned}
T:\underline{\text{Mod}_K^{\mathbb{Z}}} &\to \underline{\text{Ass-alg}_K^{\mathbb{Z}}}\\
V &\mapsto T(V)
\end{aligned}
$$

同样，我们可以考虑自由生成的分次交换代数：

定义 2.2.12. （自由分次交换代数）

设 V 为分次 K-模，定义分次 K-模

$$\text{Sym}(V) := \bigoplus_{n\geq 0}\text{Sym}^n(V)$$

其中 $\mathrm{Sym}^0(V) := K$；并且对称张量积“$\odot$”给出了 $\mathrm{Sym}(V)$ 的乘法结构：

$$(v_1 \odot \cdots \odot v_p) \odot (v_{p+1} \odot \cdots \odot v_{p+q}) = v_1 \odot \cdots \odot v_{p+q}$$

从而使得 $(\mathrm{Sym}(V), \odot)$ 为分次结合代数，称之为由 V 生成的**自由分次交换代数**。

也容易验证 Sym 的函子性：

$$\begin{aligned} \mathrm{Sym} : \underline{\mathrm{Mod}_K^{\mathbb{Z}}} &\to \underline{\text{Commu-alg}_K^{\mathbb{Z}}} \\ V &\mapsto \mathrm{Sym}(V) \end{aligned}$$

性质 2.2.13. （伴随对）对于任意分次 K-模 V，以及分次结合 K-代数 A、分次交换 K-代数 B，注意 A, B 首先是分次 K-模：

（*1*）存在（关于 V、A）自然的一一对应

$$\mathrm{Hom}_{\underline{\mathrm{Mod}_K^{\mathbb{Z}}}}(V, A) \cong \mathrm{Hom}_{\underline{\text{Ass-alg}_K^{\mathbb{Z}}}}(T(V), A)$$

（*2*）存在（关于 V、B）自然的一一对应

$$\mathrm{Hom}_{\underline{\mathrm{Mod}_K^{\mathbb{Z}}}}(V, B) \cong \mathrm{Hom}_{\underline{\text{Commu-alg}_K^{\mathbb{Z}}}}(\mathrm{Sym}(V), B)$$

证明. 易证，从略。 $\square$

用范畴论的语言，此性质表明，函子 T 与 Sym 分别为相应的遗忘函子的左伴随。或者还可以表述为如下泛性质，看图即可：

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, hook] \arrow[dr, "\forall f"'] & T(V) \arrow[d, dotted, "\exists!"] \\ & A \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} V \arrow[r, hook] \arrow[dr, "\forall f"'] & \mathrm{Sym}(V) \arrow[d, dotted, "\exists!"] \\ & B \end{tikzcd}$$

性质 2.2.14. 设 V 为分次 K-模，M 为 K-模，则有一一对应

$$\mathrm{Der}_0(T(V), M) \cong \mathrm{Hom}_K(V, M)$$

证明. 这个也几乎显然，从略。 $\square$

2.3 余代数与分次余代数

首先简要回顾一下**余代数**（co-algebra）的概念。对于 K-代数 A，A 上的乘法 $m : A \otimes A \to A$ 的结合性可用如下交换图来描述：

$$
\begin{tikzcd}
A \otimes A \otimes A \arrow[r, "m\otimes 1"] \arrow[d, "1\otimes m"] & A \otimes A \arrow[d, "m"] \\
A \otimes A \arrow[r, "m"] & A
\end{tikzcd}
$$

将上述图表中的箭头全部反向，即得到**余结合律**的概念：对于 K-模 A，以及 K-模同态 $\triangle : A \to A \otimes A$，若以下图表交换

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\triangle"] \arrow[d, "\triangle"] & A \otimes A \arrow[d, "\triangle\otimes 1"] \\
A \otimes A \arrow[r, "1\otimes\triangle"] & A \otimes A \otimes A
\end{tikzcd}
$$

则称 $\triangle$ 满足**余结合律**，运算"$\triangle$"称为**余乘**（co-product）. 类似地我们可以谈论**余交换律**，乘法 $m : A \otimes A \to A$ 与余乘 $\triangle : A \to A \otimes A$ 的交换律、余交换律分别由以下交换图表描述：

$$
\begin{tikzcd}
A \otimes A \arrow[rr, "\tau"] \arrow[dr, "m"'] & & A \otimes A \arrow[dl, "m"] \\
& A &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
A \otimes A & & A \otimes A \arrow[ll, "\tau"'] \\
& A \arrow[ul, "\triangle"] \arrow[ur, "\triangle"'] &
\end{tikzcd}
$$

其中 $\tau : x \otimes y \mapsto y \otimes x$ 为 $A \otimes A$ 的对合自同构。

对于 K-代数 A，我们总是假定 A 含幺。事实上，存在唯一的 K-代数同态

$$i : K \to A$$

而 A 的**幺元**$1 \in A$ 即为 $1 \in K$ 在该同态下的像。在此意义下，我们不妨重新定义什么是 A 的幺元：称 K-模同态 $i : K \to A$ 为 A 的幺元，如果以下图表交换：

$$
\begin{tikzcd}
& A & \\
K \otimes A \arrow[ur, equal, "\cong"] \arrow[r, "i\otimes 1"] & A \otimes A \arrow[u, "m"] & A \otimes K \arrow[ul, equal, "\cong"'] \arrow[l, "1\otimes i"']
\end{tikzcd}
$$

将以上图表的箭头全部反向，则得到**余幺元**（co-unit）的概念：对于配以余乘 $\triangle$ 的 K-模 A，称 K-模同态 $\varepsilon : A \to K$ 为关于 $\triangle$ 的 **余幺元**，如果以下图表交换：

$$\begin{tikzcd}
 & A \arrow[dl, equal, "\cong"'] \arrow[d, "\triangle"] \arrow[dr, equal, "\cong"] & \\
K \otimes A & A \otimes A \arrow[l, "\varepsilon\otimes 1"'] \arrow[r, "1\otimes\varepsilon"] & A \otimes K
\end{tikzcd}$$

对于 K-模 A，若 A 配以（满足余结合律的）余乘 $\triangle$，以及关于该余乘的余幺元 $\varepsilon : A \to K$，则称 $(A, \triangle, \varepsilon)$ 为 K-**余代数**。

若 $(A, \triangle_A)$ 与 $(B, \triangle_B)$ 都为 K-余代数，称 K-模同态 $\varphi : A \to B$ 为 K-**余代数同态**，如果对任意 $x \in A$，成立

$$\triangle_B(\varphi(x)) = \varphi(\triangle_A(x))$$

注记 2.3.1. 若 $(A, \triangle)$ 为 K-余代数，考虑对偶映射 $\triangle^* : (A \otimes A)^* \to A^*$，则 $(A^*, \triangle^*)$ 具有如下 K-代数结构：

$$A^* \otimes A^* \to (A \otimes A)^* \xrightarrow{\triangle^*} A^*$$

用反变函子 $\mathrm{Hom}(-, K)$ 翻转余代数图表的箭头而已；但是要注意，对一个代数取对偶，未必能得到余代数。也就是说，某种意义下余代数比代数包含更多的信息。

现在我们谈论余代数的分次版本。

定义 2.3.2. （分次余代数）

设 $A = \bigoplus\limits_{k\in\mathbb{Z}} A_k$ 为分次 K-模，$\triangle : A \to A \otimes A$ 为 A 的余乘（满足余结合律），称 $(A, \triangle)$ 为**分次余代数**（*graded co-algebra*），若 $\triangle$ 与 A 的分次满足以下相容性：任意 $k \in \mathbb{Z}$，

$$\triangle(A_k) \subseteq (A \otimes A)_k$$

我们自然也可以谈论 $\triangle$ 的**分次余交换性**，见下述交换图（与非分次情形完全一样）：

$$\begin{tikzcd}
A \otimes A & & A \otimes A \arrow[ll, "\tau"'] \\
 & A \arrow[ul, "\triangle"] \arrow[ur, "\triangle"'] &
\end{tikzcd}$$

不过要注意，这里的 τ 为分次对合自同构（见定义2.1.4），服从 Koszul 符号法则：

$$\tau : x \otimes y \mapsto (-1)^{xy} y \otimes x$$

定义 2.3.3. （余超导子）

对于分次 K-余代数 A，以及 $d \in \mathbb{Z}$，称次数为 d 的分次 K-模同态 $\delta : A \to A$ 为 d 次**齐次余超导子**，若以下图表交换

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "\triangle"'] & A \arrow[d, "\triangle"] \\ A \otimes A \arrow[r, "\delta\otimes 1+1\otimes\delta"] & A \otimes A \end{tikzcd}$$

即满足“**余莱布尼茨法则**”。

注意到上述图表默认 Koszul 符号法则。记 A 的 d 次齐次余超导子之全体为 $\mathrm{Coder}(A)_d$，以及

$$\mathrm{Coder}(A) := \bigoplus_{d\in\mathbb{Z}} \mathrm{Coder}(A)_d$$

称其中的元素为**余超导子**。与超导子类似，余超导子之全体也有李超代数结构：

性质 2.3.4. 对于 K-余代数 A，以及齐次余超导子 $D_1, D_2 \in \mathrm{Coder}(A)$，定义

$$[D_1, D_2] := D_1 \circ D_2 - (-1)^{D_1 D_2} D_2 \circ D_1$$

则 $[D_1, D_2] \in \mathrm{Coder}(A)$，进而 $(\mathrm{Coder}(A), [,])$ 构成李超代数。

证明. 与分次代数的超导子完全类似，直接验证即可，从略。 □

有了余超导子，可以相应地去定义**微分分次余代数**（differential graded co-algebra）：

定义 2.3.5. （微分分次余代数）对于 K-余代数 A，以及满足 $\delta^2 = 0$ 的 1 次齐次余超导子 δ，则称 (A, δ) 为微分分次余代数。

类似地，微分分次余代数自然可以视为分次上链复形。

注记 2.3.6. （*(co-)augmentation*）

（*1*）对于 K-代数 A，我们把从 A 到 K 的 K-模同态称为 *augmentation*；

（*2*）对于 K-余代数 A，我们把从 K 到 A 的 K-模同态称为 *co-augmentation*

与“幺元”的箭头刚好相反。笔者建议将 augmentation 意译为“赋值”。

例子 2.3.7. 设 V 为分次 K-模，考虑张量代数 $T(V) : \bigoplus_{n\geq 0} V^{\otimes n}$，定义

$$\begin{aligned} \triangle : T(V) &\to T(V)\otimes T(V) \\ v_1\otimes\cdots\otimes v_n &\mapsto \sum_{i=0}^{n}(v_1\otimes\cdots\otimes v_i)\otimes(v_{i+1}\otimes\cdots\otimes v_n) \end{aligned}$$

则 $(T(V),\triangle)$ 构成余代数。

容易验证如此 $\triangle$ 满足余结合律：

$$\begin{aligned} & (\triangle\otimes 1)\circ\triangle(v_1\otimes\cdots\otimes v_n) \\ = & \sum_{0\leq i\leq j\leq n}(a_1\otimes\cdots\otimes a_i)\otimes(a_{i+1}\otimes\cdots\otimes a_j)\otimes(a_{j+1}\otimes\cdots\otimes a_n) \\ = & (1\otimes\triangle)\circ\triangle(v_1\otimes\cdots\otimes v_n) \end{aligned}$$

并且配以余幺元 ε :

$$\varepsilon\big|_{V^{\otimes n}} = \begin{cases} 0 & \text{如果} n>0 \\ \mathrm{id}_K & \text{如果} n=0 \end{cases}$$

注记 2.3.8. $T(V)$ 还有另一个余乘结构 $\overline{\triangle}$

$$\overline{\triangle}(v_1\otimes ...\otimes v_n) := \sum_{i=1}^{n-1}(v_1\otimes\cdots\otimes v_i)\otimes(v_{i+1}\cdots v_n)$$

这也是容易验证的。不过这个余乘结构不存在余幺元。

2.4 多重切向量场与 Schouten-Nijenhuis 括号

众所周知，对于光滑流形 X，X 上的微分形式 $\Omega_X^\bullet$ 配以外积 $\wedge$ 构成分次交换代数（若再考虑外微分 d，还有微分分次代数结构）。本节我们介绍另一重要的经典例子：光滑流形上的多重切向量场，并给出其上的李超代数结构：Schouten-Nijenhuis 括号。

定义 2.4.1. （多重切向量场）对于光滑流形 X，称 X 的切丛的外积丛 $\bigwedge^*(TX)$ 的截面为**多重切向量场**（*polyvector field*）。并且记

$$\mathrm{PV}_X := \Gamma(X,\bigwedge\nolimits^*(TX))$$

为多重切向量场之全体。

PV_X 有显然的 $C^\infty(X)$-模结构。与微分形式类似，容易定义 PV_X 上的外积 $\wedge$，使得 $(\mathrm{PV}_X, \wedge)$ 为分次交换 $C^\infty(X)$-代数，其分次由以下给出：

$$\mathrm{PV}_X = \bigoplus_{k\geq 0} \mathrm{PV}_X^k$$

其中 PV_X^k 中的元素形如

$$\xi_1 \wedge \xi_2 \wedge \cdots \wedge \xi_k$$

的 $C^\infty(X)$-线性组合，其中 ξ_i 为 X 上的光滑切向量场。称 PV_X^k 中的元素为**k-向量**。

回顾 X 的切向量场的李括号 $[,]$ 运算，这给出了切向量场的李代数结构；接下来我们企图将李括号运算延拓到多重切向量场上，从而得到 $\mathrm{PV}_X[1]$ 的李超代数结构。（注意这里要平移一下分次，使得把切向量场视为零次元。）

定义 2.4.2. （*Schouten-Nijenhuis* 括号）

对于光滑流形 X，定义 PV_X 上的 $\mathbb{R}$-双线性映射

$$\begin{aligned} \{,\} : \mathrm{PV}_X^p \times \mathrm{PV}_X^q &\to \mathrm{PV}_X^{p+q-1} \\ \{f,g\} &= 0 \\ \{f,\xi\} &= (-1)^p\{\xi,f\} = \sum_{k=1}^{p}(-1)^k\xi_k(f)(\cdots\wedge\widehat{\xi_k}\wedge\cdots) \\ \{\xi,\eta\} &= \sum_{\substack{1\leq i\leq p\\ 1\leq j\leq q}}(-1)^{i+j}[\xi_i,\eta_j]\wedge(\cdots\wedge\widehat{\xi_i}\wedge\cdots)\wedge(\cdots\wedge\widehat{\eta_j}\wedge\cdots) \end{aligned}$$

其中任意 $f,g\in C^\infty(X) = \mathrm{PV}_X^0$ 以及

$$\xi = \xi_1\wedge\cdots\wedge\xi_p \qquad \eta = \eta_1\wedge\cdots\wedge\eta_q$$

我们需要验证 $\{,\}$ 的良定性：与 ξ,η 的代表元的选取无关。这只需暴力验证即可。从略。

性质 2.4.3. （*Schouten-Nijenhuis* 括号的性质）

对于光滑流形 X，则 $(\mathrm{PV}_X, \{,\})$ 满足如下性质：

（*1*）若 $\xi,\eta\in\mathrm{PV}_X^1$ 为通常的切向量场，则

$$\{\xi,\eta\} = [\xi,\eta]$$

（*2*）对任意 $p,q\geq 0$，任意 $\xi\in\mathrm{PV}_X^p$ 以及 $\eta\in\mathrm{PV}_X^q$，成立

$$\{\xi,\eta\} = -(-1)^{(p-1)(q-1)}\{\eta,\xi\}$$

(3) 对任意 $p,q,r \geq 0$，任意 $\xi \in \mathrm{PV}_X^p$ 以及 $\eta \in \mathrm{PV}_X^q, \phi \in \mathrm{PV}_X^r$，成立

$$\{\xi, \eta \wedge \phi\} = \{\xi, \eta\} \wedge \phi + (-1)^{(p-1)q} \eta \wedge \{\xi, \phi\}$$

证明. （1）（2）容易验证，从略；（3）暴力验证，建议使用数学归纳法。从略。 □

事实上，这三条性质可作为 Schouten-Nijenhuis 括号的公理：满足此性质的括号如果存在，只能如此定义。例如，对任意的 $f \in \mathrm{PV}_X^0 = C^\infty(X)$，以及 $\xi, \eta \in \mathrm{PV}_X^1$，如果 $\{,\}$ 满足上述三条性质，那么

$$\{\eta, f\xi\} = \{\eta, f \wedge \xi\} = \{\eta, f\}\xi + (-1)^{(1-1)\times 0} f\{\eta, \xi\} = \{\eta, f\}\xi + f[\eta, \xi]$$

但另一方面，又有

$$\{\eta, f\xi\} = [\eta, f\xi] = \eta(f)\xi + f[\eta, \xi]$$

比较两式，从而必有

$$\{\eta, f\} = \eta(f)$$

再反复使用超莱布尼茨法则（3）以及超反称性（2），即可得到 $\{,\}$ 的完整定义。

性质 2.4.4. 对于光滑流形 X，*Schouten-Nijenhuis* 括号 $\{,\}$ 满足如下超雅可比恒等式：对任意 $p,q,r \geq 0$ 以及任意 $\xi \in \mathrm{PV}_X^p, \eta \in \mathrm{PV}_X^q, \phi \in \mathrm{PV}_X^r$，成立

$$\{\xi, \{\eta, \phi\}\} = \{\{\xi, \eta\}, \phi\} + (-1)^{(p-1)(q-1)}\{\eta, \{\xi, \phi\}\}$$

从而 $(\mathrm{PV}_X[1], \{,\})$ 构成李超代数。

证明. 我们打算详细写出过程。在证明的过程中，我们将反复使用性质 2.4.3. 对任意的 $p,q,r > 0$，任取

$$\xi = \xi_1 \wedge \cdots \wedge \xi_p \in \mathrm{PV}_X^p$$
$$\eta = \eta_1 \wedge \cdots \wedge \eta_q \in \mathrm{PV}_X^q$$
$$\phi = \phi_1 \wedge \cdots \wedge \phi_r \in \mathrm{PV}_X^r$$
$$f, g, h \in \mathrm{PV}_X^0 = C^\infty(X)$$

为方便书写，我们引入如下记号：

$$\begin{aligned}
\overline{\xi_i} &:= \xi_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{\xi_i} \wedge \cdots \wedge \xi_p \quad \forall 1 \leq i \leq p \\
\overline{\eta_j} &:= \eta_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{\eta_j} \wedge \cdots \wedge \eta_q \quad \forall 1 \leq j \leq q \\
\overline{\phi_k} &:= \phi_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{\phi_k} \wedge \cdots \wedge \phi_r \quad \forall 1 \leq k \leq r
\end{aligned}$$

我们将对 p 归纳。

预备情形：若 $p=q=r=0$，则结论平凡。若 p,q,r 当中恰有两个为 0，不妨 $p=q=0$，此时 $r>0$，从而任取 $f,g\in \mathrm{PV}_X^0$ 以及 $\phi\in \mathrm{PV}_X^r$，此时的超雅可比恒等式为

$$\{f,\{g,\phi\}\}+\{g,\{f,\phi\}\}=0$$

注意到

$$\{f,\phi\}=\sum_{k=1}^{r}(-1)^k\phi_k(f)\overline{\phi_k}$$

从而有

$$\begin{aligned}\{f,\{g,\phi\}\} &= \{f,\sum_{k=1}^{r}(-1)^k\phi_k(g)\overline{\phi_k}\}\\ &= \sum_{k=1}^{r}\phi_k(g)\left(\sum_{j<k}(-1)^j\phi_j(f)\overline{\phi_{jk}}+\sum_{j>k}(-1)^{j+1}\phi_j(f)\overline{\phi_{kj}}\right)\\ &= \sum_{1\le i<j\le r}(-1)^{i+j}\left[\phi_i(g)\phi_j(f)-\phi_j(g)\phi_i(f)\right]\overline{\phi_{ij}}\end{aligned}$$

其中对于 $j<k$，简写记号

$$\overline{\phi_{jk}}:=\cdots\wedge\widehat{\phi_j}\wedge\cdots\wedge\widehat{\phi_k}\wedge\cdots$$

注意观察上式关于 f,g 的反对称性，容易发现 $\{f,\{g,\phi\}\}=-\{g,\{f,\phi\}\}$，从而证毕。

于是，我们在接下来的证明中，不妨 p,q,r 当中为零的至多只有一个。

p **的起始步**：现在开始对 p 归纳，首先考虑起始步 $p=0$. 由之前讨论，不妨 $q,r>0$. 任取 $f\in\mathrm{PV}_X^0$，只需证

$$\{f,\{\eta,\phi\}\}=\{\{f,\eta\},\phi\}+(-1)^{q-1}\{\eta,\{f,\phi\}\} \tag{$*$}$$

暴力展开验证之，注意到

$$\begin{aligned}\{f,\{\eta,\phi\}\} &= \sum_{j=1}^{q}\sum_{k=1}^{r}(-1)^{j+k}\{f,[\eta_j,\phi_k]\wedge\overline{\eta_j}\wedge\overline{\phi_k}\}\\ &= -\sum_{j=1}^{q}\sum_{k=1}^{r}(-1)^{j+k}[\eta_j,\phi_k](f)\overline{\eta_j}\wedge\overline{\phi_k}\\ &\quad -\sum_{j=1}^{q}\sum_{k=1}^{r}(-1)^{j+k}[\eta_j,\phi_k]\wedge\{f,\overline{\eta_j}\wedge\overline{\phi_k}\}\end{aligned}$$

再打开 $(*)$ 的右边：

$$\begin{aligned}\{\{f,\eta\},\phi\} &= \sum_{j=1}^{q}(-1)^j\{\eta_j(f)\overline{\eta_j},\phi\}\\ &= \sum_{j=1}^{q}(-1)^j\left[(-1)^{(q-1)(r-1)}\{\eta_j(f),\phi\}\wedge\overline{\eta_j}+\eta_j(f)\{\overline{\eta_j},\phi\}\right]\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{j=1}^{q}\sum_{k=1}^{r}(-1)^{j+k}\phi_k(\eta_j(f))\overline{\eta_j}\wedge\overline{\phi_k} \\
&\quad+\sum_{j=1}^{q}(-1)^{j}\eta_j(f)\{\overline{\eta_j},\phi\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(-1)^{q-1}\{\eta,\{f,\phi\}\} &= (-1)^{q-1}\sum_{k=1}^{r}(-1)^{k}\{\eta,\phi_k(f)\overline{\phi_k}\} \\
&= (-1)^{q-1}\sum_{k=1}^{r}(-1)^{k}\Big[\{\eta,\phi_k(f)\}\wedge\overline{\phi_k}+(-1)^{q-1}\phi_k(f)\{\overline{\eta,\overline{\phi_k}}\}\Big] \\
&= -\sum_{j=1}^{q}\sum_{k=1}^{r}(-1)^{j+k}\eta_j(\phi_k(f))\overline{\eta_j}\wedge\overline{\phi_k} \\
&\quad+\sum_{k=1}^{r}(-1)^{k}\phi_k(f)\{\eta,\overline{\phi_k}\}
\end{aligned}
$$

因此有

$$
\begin{aligned}
\{\{f,\eta\},\phi\}+(-1)^{q-1}\{\eta,\{f,\phi\}\} &= \sum_{j=1}^{q}\sum_{k=1}^{r}(-1)^{j+k}(\phi_k(\eta_j(f))-\eta_j(\phi_k(f)))\overline{\eta_j}\wedge\overline{\phi_k} \\
&\quad+\sum_{j=1}^{q}(-1)^{j}\eta_j(f)\{\overline{\eta_j},\phi\}+\sum_{k=1}^{r}(-1)^{k}\phi_k(f)\{\eta,\overline{\phi_k}\} \\
&= -\sum_{j=1}^{q}\sum_{k=1}^{r}(-1)^{j+k}[\eta_j,\phi_k](f)\overline{\eta_j}\wedge\overline{\phi_k} \\
&\quad+\sum_{j=1}^{q}(-1)^{j}\eta_j(f)\{\overline{\eta_j},\phi\}+\sum_{k=1}^{r}(-1)^{k}\phi_k(f)\{\eta,\overline{\phi_k}\}
\end{aligned}
$$

与 $(*)$ 式比较，只需要再验证恒等式

$$
-\sum_{j=1}^{q}\sum_{k=1}^{r}(-1)^{j+k}[\eta_j,\phi_k]\wedge\{f,\overline{\eta_j}\wedge\overline{\phi_k}\}=\sum_{j=1}^{q}(-1)^{j}\eta_j(f)\{\overline{\eta_j},\phi\}+\sum_{k=1}^{r}(-1)^{k}\phi_k(f)\{\eta,\overline{\phi_k}\}
$$

即可。而这只需将式子中的 Schouten-Nijenhuis 括号暴力展开，并且适当更改求和指标即可，从略。（不太想写了，打字好累 2333）

p 的归纳步： 如果该命题对 p 成立，则考虑

$$\xi' := \xi_0\wedge\xi\in \mathrm{PV}_X^{p+1}$$

其中任意 $\xi_0\in\mathrm{PV}_X^0$. 我们只需证

$$\{\xi',\{\eta,\phi\}\}=\{\{\xi',\eta\},\phi\}+(-1)^{p(q-1)}\{\eta,\{\xi',\phi\}\} \qquad (**)$$

注意反复使用 $\{,\}$ 的超反对称性、超莱布尼茨法则，以及关于 p 的归纳假设，我们简单（但暴力）验证如下：

$$\begin{aligned}
(**)\text{ 左边 } &= \{\xi_0\wedge\xi,\{\eta,\phi\}\}\\
&= (-1)^p\xi\wedge\{\xi_0,\{\eta,\phi\}\}+\xi_0\wedge\{\xi,\{\eta,\phi\}\}\\
&= (-1)^p\xi\wedge\Big(\{\{\xi_0,\eta\},\phi\}+\{\eta,\{\xi_0,\phi\}\}\Big)\\
&\quad+\xi_0\wedge\Big(\{\{\xi,\eta\},\phi\}+(-1)^{(p-1)(q-1)}\{\eta,\{\xi,\phi\}\}\Big)
\end{aligned}$$

其中最后一步等号用到了归纳假设。再看 $(**)$ 右边，需要格外小心正负号：

$$\begin{aligned}
(**)\text{ 右边 } &= (-1)^{p(q-1)+(p+q-1)(r-1)}\{\phi,\{\eta,\xi_0\wedge\xi\}\}-(-1)^{p(q-1)+p(r-1)}\{\eta,\{\phi,\xi_0\wedge\xi\}\}\\
&= (-1)^{p(q-1)+(p+q-1)(r-1)}\Big\{\phi,\eta,\xi_0\wedge\xi+(-1)^{q-1}\xi_0\wedge\{\eta,\xi\}\Big\}\\
&\quad-(-1)^{p(q+r)}\Big\{\eta,\{\phi,\xi_0\}\wedge\xi+(-1)^{r-1}\xi_0\wedge\{\phi,\xi\}\Big\}\\
&= (-1)^{p(q-1)+(p+q-1)(r-1)}\\
&\quad\Big[\{\phi,\{\eta,\xi_0\}\}\wedge\xi+(-1)^{(r-1)q}\{\eta,\xi_0\}\wedge\{\phi,\xi\}\\
&\qquad+(-1)^{q-1}\big(\{\phi,\xi_0\}\wedge\{\eta,\xi\}+(-1)^{r-1}\xi_0\wedge\{\phi,\{\eta,\xi\}\}\big)\Big]\\
&\quad-(-1)^{p(q+r)}\Big[\{\eta,\{\phi,\xi_0\}\}\wedge\xi+(-1)^{(q-1)r}\{\phi,\xi_0\}\wedge\{\eta,\xi\}\\
&\qquad+(-1)^{r-1}\big(\{\eta,\xi_0\}\wedge\{\phi,\xi\}+(-1)^{q-1}\xi_0\wedge\{\eta,\{\phi,\xi\}\}\big)\Big]\\
&= (-1)^p\xi\wedge\Big(\{\{\xi_0,\eta\},\phi\}+\{\eta,\{\xi_0,\phi\}\}\Big)\\
&\quad+\xi_0\wedge\Big(\{\{\xi,\eta\},\phi\}+(-1)^{(p-1)(q-1)}\{\eta,\{\xi,\phi\}\}\Big)\\
&= (**)\text{ 左边}
\end{aligned}$$

从而 $(**)$ 两边相等，归纳完毕。 □

归纳步当中主要是在验证正负号。

由于 Schouten-Nijenhuis 括号是切向量场李括号的“推广”，我们在以后更喜欢将它们都记作“[,]”（而“{,}”在以后常用来表示泊松括号）。

2.5 Shuffle 乘积

对于 $n\geq 1$，我们记 S_n 为 n 元对称群。

定义 2.5.1. （(p,q)-*Shuffle*）

对于正整数 p,q，称 $\sigma \in S_{p+q}$ 为一个 p,q-***Shuffle***，如果满足

$$\sigma(1) < \sigma(2) < ... < \sigma(p)$$

$$\sigma(p+1) < \sigma(p+2) < ... < \sigma(q)$$

全体 (p,q)-*Shuffle* 构成的集合记为 $\mathrm{Sh}_{p,q}$.

笔者建议将“Shuffle”意译为“**洗牌**”——因为 $\mathrm{Sh}_{p,q}$ 中的置换，好比将 $p+q$ 张扑克牌分为 p 张、q 张两组来洗牌。

容易知道，集合 $\mathrm{Sh}_{p,q}$ 的元素个数为

$$\frac{(p+q)!}{p!q!}$$

回到 Hochschild 链复形。我们已经知道，$\mathrm{HH}_\bullet(A)$ 是通常的光滑流形的微分形式 $\Omega^\bullet_X$ 的非交换版本。而对于微分形式 $\Omega^\bullet_X$，其上有外积 $\wedge$ 使之构成分次交换代数；我们也企图去定义非交换版本的外积。

定义 2.5.2. （*Shuffle* 乘积）

设 A, A' 为 K-代数，M, M' 分别为双 A, A'-模，我们定义如下的运算 $\times$，称之为 ***Shuffle* 乘积**：

$$\begin{array}{rcl} C_p(A,M) \times C_q(A',M') & \to & C_{p+q}(A\otimes A', M\otimes M') \\ (m, a_1, ..., a_p) \times (m', a'_1, ..., a'_q) & \mapsto & \displaystyle\sum_{\sigma\in Sh_{p,q}} (-1)^{|\sigma|}(m\otimes m', \sigma(a_1, ..., a_p, a'_1, ..., a'_q)) \end{array}$$

其中 $|\sigma| := \mathrm{sgn}\,\sigma$ 为置换的符号，$(m, a_1, ..., a_n) := m\otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n$ 为简单的记法；并且置换群 S_{p+q} 在 $A^{\otimes(p+q)}$ 上的作用为

$$\sigma(a_1, ..., a'_q) := (a_{\sigma^{-1}(1)}, ..., a_{\sigma^{-1}(q')})$$

注意在这里，群 S_{p+q} 在 $A^{\otimes(p+q)}$ 上的作用方式，下角标中出现的是“σ^{-1}”，如此规定是为了保证 S_{p+q} 的作用是左作用。

还要注意一点，A, A' 以及 M, M' 并不被假定有分次结构，$A\otimes A'$ 在 $M\otimes M'$ 上的模作用是通常的

$$(a\otimes a').(m\otimes m') = (a.m)\otimes(a'.m')$$

右模作用也类似，并不会出正负号，Koszul 符号法则在此平凡。

还要注意，

$$C_{p+q}(A\otimes A', M\otimes M') \cong (M\otimes M')\otimes (A\otimes A')^{\otimes(p+q)}$$

之中元素“$(m\otimes m', a_1, ..., a_p, a'_1, ..., a'_q)$”里面的“$a_i$”应该是 $a_i\otimes 1\in A\otimes A'$，以及“$a'_j$”应该是 $1\otimes a'_j\in A\otimes A'$.

还要注意 $A\otimes A'$ 的乘法满足 $a_i a'_j = a'_j a_i$ 交换。

性质 2.5.3. （*Shuffle* 乘积与 *Hochschild* 边缘算子相容）

记号同上，则对于任意 $x\in C_p(A,M)$，$y\in C_q(A',M')$，成立

$$b(x\times y) = b(x)\times y + (-1)^{\deg x} x\times b(y)$$

其中 $b: C_\bullet \to C_{\bullet-1}$ 为相应 *Hochschild* 链复形各自的边缘算子。

证明. 当然是暴力验证了，我们尽可能使用简练的记号。令

$$x = m\otimes (a_1, ..., a_p)$$

$$y = m'\otimes (a'_1, ..., a'_q)$$

首先看 $b(x\times y)$，我们按张量缩并的位置，以及 $A\otimes A'$ 当中的“元素类型”（形如 $1\otimes A'$ 或是 $A\otimes 1$）来分类，强行将它打开：

$$\begin{aligned}
b(x\times y) &= b\sum_{\sigma\in \mathrm{Sh}_{p,q}} (-1)^{|\sigma|}(m\otimes m')\otimes \sigma(a_1, ..., a_p, a'_1, ..., a'_q)\\
&= (m.a_1\otimes m')\otimes \sum_{\sigma\in \mathrm{Sh}_{p-1,q}} (-1)^{|\sigma|}\sigma(a_2, ..., a_p, a'_1, ..., a'_q)\\
&\quad +(m\otimes m'.a'_1)\otimes \sum_{\sigma\in \mathrm{Sh}_{p,q-1}} (-1)^{|\sigma|+p}\sigma(a_1, ..., a_p, a'_2, ..., a'_q)\\
&\quad +\sum_{i=1}^{p+q-1}(-1)^i (m\otimes m')\otimes \Bigg[\sum_{\substack{1\le \alpha<\beta\le p\\ \sigma\in \mathrm{Sh}_{p-2,q}}} (-1)^{|\sigma|+\alpha+\beta-1}\sigma(..., \underbrace{(a_\alpha a_\beta)}_{\text{第 } i,i+1 \text{ 个}}, ...)\\
&\qquad + \sum_{\substack{1\le \alpha\le p, 1\le\gamma\le q\\ \sigma\in \mathrm{Sh}_{p-1,q-1}}} (-1)^{|\sigma|+\alpha+\gamma+p-1}\sigma(..., \underbrace{(a_\alpha a'_\gamma)}_{\text{第 } i,i+1 \text{ 个}}, ...)\\
&\qquad + \sum_{\substack{1\le \alpha\le p, 1\le\gamma\le q\\ \sigma\in \mathrm{Sh}_{p-1,q-1}}} (-1)^{|\sigma|+\alpha+\gamma+p}\sigma(..., \underbrace{(a'_\gamma a_\alpha)}_{\text{第 } i,i+1 \text{ 个}}, ...)\\
&\qquad + \sum_{\substack{1\le \gamma<\delta\le q\\ \sigma\in \mathrm{Sh}_{p,q-2}}} (-1)^{|\sigma|+(\gamma+p)+(\delta+p)-1}\sigma(..., \underbrace{(a'_\gamma a'_\delta)}_{\text{第 } i,i+1 \text{ 个}}, ...)\Bigg]\\
&\quad +(-1)^{p+q}(a_n.m\otimes m')\sum_{\sigma\in \mathrm{Sh}_{p-1,q}} (-1)^{|\sigma|+q}(a_1, ..., a_{p-1}, a'_1, ..., a'_q)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
& +(-1)^{p+q}(m \otimes a_n'.m') \sum_{\sigma \in \mathrm{Sh}_{p,q-1}} (-1)^{|\sigma|}(a_1, ..., a_p, a_1', ..., a_{q-1}') \\
= \quad & [m.a_1 \otimes (a_2, ..., a_p)] \times y + (-1)^p x \times [m'.a_1' \otimes (a_2', ..., a_q')] \\
& + \left(\sum_{i=1}^{p-1} (-1)^i m \otimes (a_1, ..., a_i a_{i+1}, ..., a_p) \right) \times y \\
& +(-1)^p x \times \left(\sum_{i=1}^{q-1} (-1)^i m' \otimes (a_1', ..., a_i' a_{i+1}', ..., a_q') \right) \\
& +(-1)^p [a_p.m \otimes (a_1, ..., a_{p-1})] \times y + (-1)^{p+q} x \times [a_q'.m' \otimes (a_1', ..., a_{q-1}')] \\
= \quad & b(x) \times y + (-1)^p x \times b(y)
\end{aligned}
$$

从而证毕。 □

推论 2.5.4. 对于 K-代数 A, A'，若 M, M' 分别为双 A, A'-模，则 *Shuffle* 乘积诱导了链映射：

$$C_\bullet(A, M) \otimes C_\bullet(A', M') \xrightarrow{\times} C_\bullet(A \otimes A', M \otimes M')$$

并且该链映射诱导了 *Hochschild* 同调的同态

$$H_\bullet(A, M) \otimes H_\bullet(A', M') \xrightarrow{\times} H_\bullet(A \otimes A', M \otimes M')$$

证明. 仅仅是将

$$b(x \times y) = b(x) \times y + (-1)^{\deg x} x \times b(y)$$

换了一种说法。注意链复形张量积

$$C_\bullet(A, M) \otimes C_\bullet(A', M')$$

的边缘算子服从与定义 2.1.9 类似的规则。Shuffle 乘积在 Hochschild 同调的下降的良定性也易证。 □

特别地，当 $M = A, M' = A'$ 时 Shuffle 乘积诱导了同态：

$$\mathrm{HH}_\bullet(A) \otimes \mathrm{HH}_\bullet(A') \xrightarrow{\times} \mathrm{HH}_\bullet(A \otimes A')$$

定理 2.5.5. （*Künneth* 公式）

如果 K-代数 A, A' 作为 K-模都是平坦的，那么 *Shuffle* 乘积诱导的 *Hochschild* 同调之间的同态

$$\mathrm{HH}_\bullet(A) \otimes \mathrm{HH}_\bullet(A') \xrightarrow{\times} \mathrm{HH}_\bullet(A \otimes A')$$

为同构。

证明. 代数拓扑中的标准证明。从略。 $\square$

注意我们总是假定 A, A' 是投射 K-模，从而自然满足平坦性。

性质 2.5.6. 若 K-代数 A 是交换的，则 *Shuffle* 乘积诱导了 $\mathrm{HH}_\bullet(A)$ 的 K-代数结构，并且 $(\mathrm{HH}_\bullet(A), \times)$ 是分次交换的。

这就回到了通常交换的情形了。事实上 Shuffle 乘积的几何意义为微分形式的外积。

证明. 对于任意的 K-代数 A，注意张量积 $A \otimes A$ 也有 K-代数结构。断言：

$$\begin{aligned} \pi : A \otimes A &\to A \\ a \otimes b &\mapsto ab \end{aligned}$$

为 K-代数同态当且仅当 A 是交换代数。于是当 A 交换时，考虑 K-代数同态 $A \otimes A \xrightarrow{\pi} A$，由 Hochschild 同调的函子性，该同态诱导了

$$\mathrm{HH}_\bullet(A \otimes A) \xrightarrow{\mathrm{HH}_\bullet(\pi)} \mathrm{HH}_\bullet(A)$$

再注意 Shuffle 乘积诱导

$$\mathrm{HH}_\bullet(A) \otimes \mathrm{HH}_\bullet(A) \xrightarrow{\times} \mathrm{HH}_\bullet(A \otimes A)$$

将上述两个同态复合，即得到分次 K-代数 $(\mathrm{HH}_\bullet(A), \times)$.

容易验证此代数为分次交换的，验证如下：对任意 $p, q \geq 0$ 以及 $a_0, a_1, ..., a_p \in A$，$a'_0, a'_1, ..., a'_q \in A$，有

$$\begin{aligned} & [a_0 \otimes (a_1, ..., a_p)] \times [a'_0 \otimes (a'_1, ..., a'_q)] \\ = \ & (a_0 a'_0) \otimes \sum_{\sigma \in \mathrm{Sh}_{p,q}} (-1)^{|\sigma|} \sigma(a_1, ..., a_p; a'_1, ..., a'_q) \\ = \ & (a'_0 \otimes a_0) \otimes \sum_{\sigma \in \mathrm{Sh}_{q,p}} (-1)^{|\sigma| + pq} \sigma(a'_1, ..., a'_q; a_1, ..., a_p) \\ = \ & (-1)^{pq} [a'_0 \otimes (a'_1, ..., a'_q)] \times [a_0 \otimes (a_1, ..., a_p)] \end{aligned}$$

从而分次交换。 $\square$

性质 2.5.7. （*Shuffle* 乘积是非交换版本的外积）

若 $A = K[x^1, ..., x^n]$ 为多项式代数，则有 K-代数同构

$$(\mathrm{HH}_\bullet(A), \times) \cong (\Omega^\bullet_A, \wedge)$$

证明. 回顾性质1.8.4当中的双复形同态

$$\Phi : (\overline{\mathcal{B}}_{\bullet\bullet}(A), b, \mathcal{B}) \to (\Omega_A^{\bullet}, 0, \mathrm{d})$$

首先，容易验证 Shuffle 乘积可下降至

$$\overline{C}_{\bullet}(A) \otimes \overline{C}_{\bullet}(A) \xrightarrow{\times} \overline{C}_{\bullet}(A)$$

从而我们只需要验证对于任意 $x \in \overline{C}_p(A)$ 以及 $y \in \overline{C}_q(A)$，成立

$$\Phi(x \times y) = \Phi(x) \wedge \Phi(y)$$

对任意的 $p, q \geq 0$，以及 $x = a_0 \otimes (\overline{a_1}, ..., \overline{a_p}) \in \overline{C}_p(A)$，$y = a_0' \otimes (\overline{a_1}', ..., \overline{a_q}';) \in \overline{C}_q(A)$，从而

$$\begin{aligned}
\Phi(x \times y) &= \Phi\left(a_0 a_0' \otimes \sum_{\sigma \in \mathrm{Sh}_{p,q}} (-1)^{|\sigma|} \sigma(\overline{a_1}, ..., \overline{a_p}; \overline{a_1}', ..., \overline{a_q}')\right) \\
&= \frac{1}{(p+q)!} a_0 a_0' \sum_{\sigma \in \mathrm{Sh}_{p,q}} (-1)^{|\sigma|} \sigma(\mathrm{d}a_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}a_p \wedge \mathrm{d}a_1' \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}a_q') \\
&= \frac{1}{p!q!} a_0 a_0' \mathrm{d}a_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}a_p \wedge \mathrm{d}a_1' \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}a_q' \\
\Phi(x) \wedge \Phi(y) &= \left(\frac{1}{p!} a_0 \mathrm{d}a_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}a_p\right) \wedge \left(\frac{1}{q!} a_0' \mathrm{d}a_1' \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}a_q'\right) \\
&= \frac{1}{p!q!} a_0 a_0' \mathrm{d}a_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}a_p \wedge \mathrm{d}a_1' \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}a_q'
\end{aligned}$$

从而得证。 □

2.6 Cup 乘积与 Gerstenhaber 括号（部分细节待补）

对于 K-代数 A，回顾 Hochschild 上链复形

$$C^{\bullet}(A) := C^{\bullet}(A, A) = \bigoplus_{p \geq 0} C^p(A, A)$$

我们将介绍 $C^{\bullet}(A)$ 上的代数结构：cup 乘积。

定义 2.6.1. （*Cup* 乘积）

设 A 为 K-代数，定义 ***cup*** **乘积**

$$\cup : C^{\bullet}(A) \otimes C^{\bullet}(A) \to C^{\bullet}(A)$$

如下：对任意的 $f \in C^p(A)$，$g \in C^q(A)$，

$$\begin{aligned}
f \cup g &\in C^{p+q}(A) \\
(f \cup g)(a_1, ..., a_p; a_{p+1}, ..., a_q) &= f(a_1, ..., a_p) g(a_{p+1}, ..., a_{p+q})
\end{aligned}$$

我们已经知道，Hochschild 上同调是“非交换版本的多重切向量场”。注意多重切向量场具有外积运算，而 cup 乘积则是“非交换版本的外积”。我们将去说明这一点。

性质 2.6.2. （*cup* 乘积与 *Hochschild* 微分的相容性）

对于 K-代数 A，任意 $f, g \in C^\bullet(A)$，成立

$$\partial(f \cup g) = (\partial f) \cup g + (-1)^{\deg f} f \cup \partial g$$

证明. 暴力验证之。任取 $a_0, a_1, ..., a_{p+q} \in A$，成立

$$\begin{aligned}
& [(\partial f) \cup g + (-1)^p f \cup (\partial g)](a_0 — a_{p+q}) \\
= \ & a_0 f(a_1 — a_p) g(a_{p+1} — a_{p+q}) \\
& - \sum_{k=0}^{p-1} (-1)^k f(— a_k a_{k+1} —) g(a_{p+1} — a_{p+q}) \\
& - (-1)^p f(a_0 — a_{p-1}) a_p g(a_{p+1} — a_{p+q}) \\
& + (-1)^p f(a_0 — a_{p-1}) a_p g(a_{p+1} — a_{p+q}) \\
& - (-1)^p \sum_{l=0}^{q-1} f(a_0 — a_{p-1}) g(— a_{p+l} a_{p+l+1} —) \\
& - (-1)^{p+q} f(a_0 — a_{p-1}) g(a_p — a_{p+q-1}) a_{p+q} \\
= \ & a_0 (f \cup g)(a_1 — a_{p+q}) \\
& - \sum_{k=0}^{p+q-1} (-1)^k (f \cup g)(— a_k a_{k+1} —) \\
& - (-1)^{p+q} (f \cup g)(a_0 — a_{p+q-1}) a_{p+q} \\
= \ & \partial(f \cup g)(a_0 — a_{p+q})
\end{aligned}$$

从而证毕。 □

推论 2.6.3. *cup* 乘积诱导了如下同态：

$$\mathrm{HH}^p(A) \times \mathrm{HH}^q(A) \xrightarrow{\cup} \mathrm{HH}^{p+q}(A)$$

证明. 易验证良定性，几乎显然。 □

容易验证如此的 cup 乘积是结合的（之前 Shuffle 乘积的结合性也可直接看出来），于是我们得到分次结合 K-代数 $(\mathrm{HH}^\bullet(A), \cup)$。事实上，该 K-代数是分次交换的，这从 cup 乘积当中很难看出来（似乎非常不显然），我们下一节给出证明。

注记 2.6.4. 我们已经知道，*Hochschild* 上同调是“非交换版本的多重切向量场”；而 *cup* 乘积即为“多重切向量场的外积”的非交换版本。具体地，若 $A = K[x^1, ..., x^n]$ 为多项式环，则有 K-代数同构

$$(\mathrm{HH}^\bullet(A), \cup) \cong (\mathrm{PV}_A, \wedge)$$

我们知道，PV_X 上不仅有外积结构，还有 Schouten-Nijenhuis 括号；我们也要给出后者的非交换版本，使得 $\mathrm{HH}^\bullet(A)$ 为 Gerstenhaber 代数：

定义 2.6.5. *(Gerstenhaber 代数)*

设 $(A, \cdot)$ 为分次交换 K-代数，$A = \bigoplus_{k\in\mathbb{Z}} A^k$ 为其分次，并配以 K-双线性映射

$$\{,\} : A^p \otimes A^q \quad \to \quad A^{p+q-1}$$

称 $(A, \cdot, \{,\})$ 为 ***Gerstenhaber* 代数**，若 $\{,\}$ 满足以下公理：

（*1*）$(A, \cdot)$ 为分次结合代数；

（*2*）$(A[1], \{,\})$ 为李超代数；

（*3*）相容性：对 A 中的任意齐次元 x, y, z，成立

$$\{x, yz\} = \{x, y\}z + (-1)^{(x-1)y} y\{x, z\}$$

例如光滑流形 X 上 $(\mathrm{PV}_X, \wedge, \{,\})$，即多重切向量场、外积、Schouten-Nijenhuis 括号，构成 Gerstenhaber 代数。

Gerstenhaber 代数在物理学中常被称为“**经典 BV 代数**”（classical BV algebra）.

定义 2.6.6. （*Gerstenhaber* 乘积）

对于 K-代数 A，定义 $C^\bullet(A)$ 上的 K-双线性运算

$$\circ : C^p(A) \times C^q(A) \to C^{p+q-1}(A)$$

如下：对任意 $a_1, a_2, ..., a_{p+q-1} \in A$，以及 $f \in C^p(A), g \in C^q(A)$，

$$(f \circ g)(a_1 — a_{p+q-1}) := \sum_{i=1}^{p} (-1)^{(i-1)(q-1)} f(— a_{i-1}, g(a_i — a_{i+q-1}), a_{i+q} —)$$

运算“$\circ$”称为 ***Gerstenhaber* 乘积**。

性质 2.6.7. 对任意 $f \in C^p(A), g \in C^q(A)$，成立

$$\partial(f \circ g) - (\partial f) \circ g - (-1)^{p-1} f \circ \partial g = \pm[(f \cup g) - (-1)^{pq}(g \cup f)]$$

证明. purple 非常暴力的计算验证，等号右边的符号暂时没算清。从略。 □

以后抽空补上。上述等式的右边为"the failure of $\circ$ being a chain map measured by the commutativity of cup product".

(虽说上述等式右边的正负号暂时没算清楚) 但此结果已经暂时足够用了：

推论 2.6.8. 对于 K-代数 A，$(\mathrm{HH}^\bullet(A), \cup)$ 是分次交换的。

证明. 利用性质2.6.7，几乎显然。 □

$(\mathrm{HH}^\bullet(A), \cup)$ 的分次交换性是一个十分深刻的结论。

定义 2.6.9. （*Gerstenhaber* 括号）

$$\{f, g\} = f \circ g - (-1)^{(f-1)(g-1)} g \circ f$$

性质 2.6.10. 对于任意 $f, g \in C^\bullet(A)$ 为齐次元，成立

$$\partial\{f, g\} = \{\partial f, g\} \pm \{f, \partial g\}$$

证明. （待补） □

于是，Gerstenhaber 括号 $\{,\}$ 可下降到 $\mathrm{HH}^\bullet(A)$ 上，这是非交换版本的 Schouten-Nijenhuis 括号。

性质 2.6.11. 对于 K-代数 A，$(\mathrm{HH}^\bullet(A), \cup, \{,\})$ 构成 *Gerstenhaber* 代数。

证明. （待补） □

2.7 结合性

用 Gerstenhaber 括号，可以给出乘法结合性的另一种描述：对于 K-代数 A，考虑 A 的乘法结构

$$m : A \otimes A \to A$$

从而 m 自然视为 $C^2(A)$ 中的元素。

引理 2.7.1. *对于 K-模 A，以及 A 上的乘法结构*

$$m : A \otimes A \to A$$

那么 m 满足结合律当且仅当 $\{m, m\} = 0$. 其中 $\{,\}$ 为 $C^\bullet(A)$ 上的 Gerstenhaber 括号。

证明. 直接验证。注意到

$$\{m, m\} = m \circ m - (-1)^{(2-1)(2-1)} m \circ m = 2m \circ m$$

其中"$\circ$"为 Gerstenhaber 乘积。于是对任意的 $a_1, a_2, a_3 \in A$，都有

$$\begin{aligned}(m \circ m)(a_1, a_2, a_3) \quad &= \quad m(m(a_1, a_2), a_3) - m(a_1, m(a_2, a_3)) \\ & \quad\ (a_1 a_2)a_3 - a_1(a_2 a_3)\end{aligned}$$

因此 $\{m, m\} = 0$ 当且仅当 m 结合。 □

事实上，Hochschild 上链复形 $C^\bullet(A)$ 的微分算子 ∂ 也可以用 Gerstenhaber 括号来描述：

引理 2.7.2. *设 A 为 K-代数，其乘法为*

$$m : A \otimes A \to A$$

考虑 A 的 Hochschild 上链复形 $(C^\bullet(A), \partial)$，则有

$$\partial = \{-, m\}$$

证明. 给定 $q \geq 0$，对于任意的 $f \in C^q(A)$，只需要验证 $\partial f = \{f, m\}$，其中 $\{,\}$ 为 Gerstenhaber 括号。任取 $a_0, a_1, ..., a_q \in A$，一方面我们早已知道

$$\partial f(a_0, a_1, ..., a_q) = a_0 f(a_1, ..., a_q) - \sum_{k=1}^{q-1} (-1)^k f(a_0, ..., (a_k a_{k+1}), ..., a_q) - (-1)^q f(a_0, a_1, ..., a_{q-1}) a_q$$

另一方面，$\{f,m\} = f\circ m - (-1)^{q-1} m\circ f$，从而

$$\begin{aligned}
\{f,m\}(a_0,a_1,...,a_q) &= (f\circ m)(a_0,a_1,...,a_q) - (-1)^{q-1}(m\circ f)(a_0,a_1,...,a_q) \\
&= \sum_{k=0}^{q-1}(-1)^{k-1} f(a_0,...,m(a_k a_{k+1}),...,a_n) \\
&\quad -(-1)^{q-1}\left[m(f(a_0,...,a_{q-1}),a_q) + (-1)^q m(a_0,f(a_1,...,a_q))\right] \\
&= a_0 f(a_1,...,a_q) - \sum_{k=1}^{q-1}(-1)^k f(a_0,...,(a_k a_{k+1}),...,a_q) - (-1)^q f(a_0,a_1,...,a_{q-1})a_q
\end{aligned}$$

因此 $\partial f = \{f,m\}$，得证。 □

第 3 章　形变量子化

本章开始，正式搞一些事情。经典力学与量子力学的框架众所周知，大致如下：

	经典力学	量子力学
相空间	辛流形 (X,ω)	希尔伯特空间 $\mathcal{H}$
观测量	光滑函数	厄密特算子
演化方程	$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}=\{H,f\}$	$\frac{\mathrm{d}A_t}{\mathrm{d}t}=\frac{i}{\hbar}[\hat{H},A_t]$

我们将利用结合代数的 Hochschild（上）同调，以及 A_∞ 方法，来证明 Kontsevich 的 Formality theorem.

（待完善）

3.1　泊松几何与辛几何

本节简要回顾一下泊松几何。

定义 3.1.1. （泊松括号）

设 X 为光滑流形，$\{,\}: C^\infty(X)\times C^\infty(X)\to C^\infty(X)$ 为 $\mathbb{R}$-双线性映射。称 $\{,\}$ 为 X 上的**泊松括号** *(Poisson bracket)*，如果 $\{,\}$ 满足：对任意 $f,g,h\in C^\infty(X)$，成立

（*1*）反对称性：

$$\{f,g\}=-\{g,f\}$$

（*2*）*Jacobi* 恒等式：

$$\{f,\{g,h\}\}+\{g,\{h,f\}\}+\{h,\{f,g\}\}=0$$

（*3*）*Leibnitz* 法则：

$$\{f,gh\}=\{f,g\}h+g\{f,h\}$$

泊松括号的定义的（1）（2）表明 $(C^\infty(X),\{,\})$ 为李代数，而（3）表明对任意 $f\in C^\infty(X)$，映射

$$X_f: C^\infty(X)\ \rightarrow\ C^\infty(X)$$

$$g \quad \mapsto \quad \{f,g\}$$

为导子，从而 X_f 为 X 上的光滑切向量场，在局部坐标下形如 $X_f = X_f^i \frac{\partial}{\partial u^i}$. 于是有

$$\{f,g\} = X_f^i \frac{\partial g}{\partial u^i}$$

但又注意到 $\{f,g\} = -\{g,f\}$ 以及切向量场 X_g，从而易知泊松括号 $\{,\}$ 在局部坐标 (u^i) 下的表达式必形如

$$\{f,g\} = P^{ij} \frac{\partial f}{\partial u^i} \frac{\partial g}{\partial u^j}$$

并且容易验证：

引理 3.1.2. 设 $\{,\}$ 为光滑流形 X 上的泊松括号，并且在局部坐标 (u^i) 下的表达式为

$$\{f,g\} = P^{ij} \frac{\partial f}{\partial u^i} \frac{\partial g}{\partial u^j}$$

那么对任意指标 i,j,k，成立

$$P^{ij} = -P^{ji}$$

$$P^{is} \frac{\partial P^{jk}}{\partial u^s} + P^{js} \frac{\partial P^{ki}}{\partial u^s} + P^{ks} \frac{\partial P^{ij}}{\partial u^s} = 0$$

证明. 容易验证 $P^{ij} = -P^{ji}$ 等价于泊松括号的反对称性 $\{f,g\} = -\{g,f\}$，这是因为对任意光滑函数 f,g，局部上有

$$P^{ij} \frac{\partial f}{\partial u^i} \frac{\partial g}{\partial u^j} = \{f,g\} = -\{g,f\} = -P^{ij} \frac{\partial g}{\partial u^i} \frac{\partial f}{\partial u^j} = -P^{ji} \frac{\partial f}{\partial u^i} \frac{\partial g}{\partial u^j}$$

从而 $(P^{ij} + P^{ji}) \frac{\partial f}{\partial u^i} \frac{\partial g}{\partial u^j} = 0$，因此由 f,g 的任意性，有 $P^{ij} = -P^{ji}$.

再看第二个式子。事实上它等价于泊松括号的雅可比恒等式。对任意 $f,g,h \in C^\infty(X)$，局部坐标下有

$$\begin{aligned} \{f,\{g,h\}\} &= \{f, P^{ij} \frac{\partial g}{\partial u^i} \frac{\partial h}{\partial u^j}\} \\ &= P^{kl} \frac{\partial f}{\partial u^k} \frac{\partial P^{ij}}{\partial u^l} \frac{\partial g}{\partial u^i} \frac{\partial h}{\partial u^j} + P^{ij} P^{kl} \frac{\partial f}{\partial u^k} \left(\frac{\partial^2 g}{\partial u^i \partial u^l} \frac{\partial h}{\partial u^j} + \frac{\partial^2 h}{\partial u^j \partial u^l} \frac{\partial g}{\partial u^i} \right) \end{aligned}$$

将 f,g,h 轮换再相加，适当更改求和指标，合并整理得

$$\begin{aligned} & \{f,\{g,h\}\} + \{g,\{h,f\}\} + \{h,\{f,g\}\} \\ = & \frac{\partial f}{\partial u^i} \frac{\partial g}{\partial u^j} \frac{\partial h}{\partial u^k} \left(P^{is} \frac{\partial P^{jk}}{\partial u^s} + P^{js} \frac{\partial P^{ki}}{\partial u^s} + P^{ks} \frac{\partial P^{ij}}{\partial u^s} \right) + P^{kl} (P^{ij} + P^{ji}) \frac{\partial f}{\partial u^k} \frac{\partial^2 g}{\partial u^i \partial u^l} \frac{\partial h}{\partial u^j} \end{aligned}$$

$$+P^{kl}(P^{ij}+P^{ji})\frac{\partial g}{\partial u^k}\frac{\partial^2 h}{\partial u^i \partial u^l}\frac{\partial f}{\partial u^j}+P^{kl}(P^{ij}+P^{ji})\frac{\partial h}{\partial u^k}\frac{\partial^2 f}{\partial u^i \partial u^l}\frac{\partial g}{\partial u^j}$$

注意到 $P^{ij}=-P^{ji}$，以及 f,g,h 的任意性，从而有

$$P^{is}\frac{\partial P^{jk}}{\partial u^s}+P^{js}\frac{\partial P^{ki}}{\partial u^s}+P^{ks}\frac{\partial P^{ij}}{\partial u^s}=0$$

得证。 □

我们可以使用张量的语言来描述泊松括号结构：

定义 3.1.3. （泊松张量）对于光滑流形 X，以及 $P\in \mathrm{PV}_X^2$ 为 2-切向量场，在局部坐标下表达式为

$$P=P^{ij}\frac{\partial}{\partial u^i}\wedge\frac{\partial}{\partial u^j}$$

其中 $P^{ij}=-P^{ji}$. 称 P 为**泊松张量**（*Poisson tensor*），如果 P 在局部坐标下满足如下雅可比恒等式：

$$P^{is}\frac{\partial P^{jk}}{\partial u^s}+P^{js}\frac{\partial P^{ki}}{\partial u^s}+P^{ks}\frac{\partial P^{ij}}{\partial u^s}=0$$

容易看出泊松括号与泊松张量的一一对应关系：对于泊松括号 $\{,\}$，若局部上有 $\{f,g\}=P^{ij}\frac{\partial f}{\partial u^i}\frac{\partial g}{\partial u^j}$，则考虑泊松张量

$$P:=\frac{1}{2}P^{ij}\frac{\partial}{\partial u^i}\wedge\frac{\partial}{\partial u^j}$$

反过来，由泊松张量也能得到泊松括号。并且容易知道

$$\{f,g\}=\langle P,\mathrm{d}f\wedge\mathrm{d}g\rangle$$

事实上泊松张量的雅可比恒等式可以用 Schouten-Nijenhuis 括号等价刻画：

性质 3.1.4. 对于光滑流形 X，以及 $P\in \mathrm{PV}_X^2$，则 P 为泊松张量当且仅当

$$[P,P]=0$$

其中 $[,]$ 为 *Schouten-Nijenhuis* 括号（见定义*2.4.2*）。

证明. 局部坐标下验证。取局部坐标 (u^i)，令 $P=P^{ij}\frac{\partial}{\partial u^i}\wedge\frac{\partial}{\partial u^j}$，则有

$$[P,P]\quad=\quad[(P^{ij}\frac{\partial}{\partial u^i})\wedge\frac{\partial}{\partial u^j},(P^{kl}\frac{\partial}{\partial u^k})\wedge\frac{\partial}{\partial u^l}]$$

$$
\begin{aligned}
&= [P^{ij}\frac{\partial}{\partial u^i}, P^{kl}\frac{\partial}{\partial u^k}] \wedge \frac{\partial}{\partial u^j} \wedge \frac{\partial}{\partial u^l} - [P^{ij}\frac{\partial}{\partial u^i}, \frac{\partial}{\partial u^l}] \wedge \frac{\partial}{\partial u^j} \wedge P^{kl}\frac{\partial}{\partial u^k} \\
&\quad -[\frac{\partial}{\partial u^j}, P^{kl}\frac{\partial}{\partial u^k}] \wedge P^{ij}\frac{\partial}{\partial u^i} \wedge \frac{\partial}{\partial u^l} + [\frac{\partial}{\partial u^j}, \frac{\partial}{\partial u^l}] \wedge P^{ij}\frac{\partial}{\partial u^i} \wedge P^{kl}\frac{\partial}{\partial u^k}
\end{aligned}
$$

上式右端共有四项，首先注意最后一项

$$
[\frac{\partial}{\partial u^j}, \frac{\partial}{\partial u^l}] \wedge P^{ij}\frac{\partial}{\partial u^i} \wedge P^{kl}\frac{\partial}{\partial u^k} = P^{ij}P^{kl}\delta_{jl}\frac{\partial}{\partial u^j} \wedge \frac{\partial}{\partial u^i} \wedge \frac{\partial}{\partial u^k} = \sum_{j=1}^{n} P^{ij}P^{kj}\frac{\partial}{\partial u^j} \wedge \frac{\partial}{\partial u^i} \wedge \frac{\partial}{\partial u^k} = 0
$$

最后一个等号是因为指标 i, k 的（反）对称性；从而暴力展开，注意利用 $P^{ij} = -P^{ji}$ 以及适当更改求和指标，有

$$
\begin{aligned}
[P, P] &= [P^{ij}\frac{\partial}{\partial u^i}, P^{kl}\frac{\partial}{\partial u^k}] \wedge \frac{\partial}{\partial u^j} \wedge \frac{\partial}{\partial u^l} \\
&\quad -[P^{ij}\frac{\partial}{\partial u^i}, \frac{\partial}{\partial u^l}] \wedge \frac{\partial}{\partial u^j} \wedge P^{kl}\frac{\partial}{\partial u^k} - [\frac{\partial}{\partial u^j}, P^{kl}\frac{\partial}{\partial u^k}] \wedge P^{ij}\frac{\partial}{\partial u^i} \wedge \frac{\partial}{\partial u^l} \\
&= P^{ij}\frac{\partial P^{kl}}{\partial u^i}\frac{\partial}{\partial u^k} \wedge \frac{\partial}{\partial u^j} \wedge \frac{\partial}{\partial u^l} - P^{kl}\frac{\partial P^{ij}}{\partial u^k}\frac{\partial}{\partial u^i} \wedge \frac{\partial}{\partial u^j} \wedge \frac{\partial}{\partial u^l} \\
&\quad +P^{kl}\frac{\partial P^{ij}}{\partial u^l}\frac{\partial}{\partial u^i} \wedge \frac{\partial}{\partial u^j} \wedge \frac{\partial}{\partial u^k} - P^{ij}\frac{\partial P^{kl}}{\partial u^j}\frac{\partial}{\partial u^k} \wedge \frac{\partial}{\partial u^i} \wedge \frac{\partial}{\partial u^l} \\
&= \left(-P^{sj}\frac{\partial P^{ki}}{\partial u^s} - P^{sk}\frac{\partial P^{ij}}{\partial u^s} + P^{ks}\frac{\partial P^{ij}}{\partial u^s} - P^{js}\frac{\partial P^{ik}}{\partial u^s}\right)\frac{\partial}{\partial u^i} \wedge \frac{\partial}{\partial u^j} \wedge \frac{\partial}{\partial u^k} \\
&= -4P^{sj}\frac{\partial P^{ki}}{\partial u^s}\frac{\partial}{\partial u^i} \wedge \frac{\partial}{\partial u^j} \wedge \frac{\partial}{\partial u^k} \\
&= -8\sum_{i<j<k}\left(P^{sj}\frac{\partial P^{ki}}{\partial u^s} + P^{sk}\frac{\partial P^{ij}}{\partial u^s} + P^{si}\frac{\partial P^{jk}}{\partial u^s}\right)\frac{\partial}{\partial u^i} \wedge \frac{\partial}{\partial u^j} \wedge \frac{\partial}{\partial u^k}
\end{aligned}
$$

可见 $[P, P] = 0$ 当且仅当雅可比恒等式成立，证毕。 □

于是我们自然地引入泊松流形的概念：

定义 3.1.5. （泊松流形）
泊松流形（*Poisson manifold*）是指二元组 (X, P)，其中 X 为光滑流形，$P \in \mathrm{PV}_X^2$ 满足 $[P, P] = 0$.

众所周知，这是经典力学的几何模型。接下来看一些泊松流形的例子：

例子 3.1.6. *if* (X, ω) *is a sympletic manifold,*

$$
\omega = \frac{1}{2}\omega_{ij}\mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}x^j
$$

such that ω is non-degenerated ,$\omega_{ij} = -\omega_{ji}$, then

$$\omega^{-1} := \frac{1}{2}\omega^{ij}\partial_i \wedge \partial_j$$

is a Poisson bracket.where $(\omega^{ij}) := (\omega_{ij})^{-1}$

例子 3.1.7. *Let $\mathfrak{g}$ is a Lie algebra, $X := \mathfrak{g}^*$ its dual,*

$$[,] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$$

then

$$P_{\mathfrak{g}} \in \mathfrak{g} \otimes \bigwedge^2 \mathfrak{g}$$

(locally) if $\{e^i\}$ is a basis of $\mathfrak{g}$, $\{e_i\}$ its dual,

$$[e^i, e^j] = C_k^{ij} e^k$$

then

$$P_{\mathfrak{g}} = X^k C_k^{ij} \partial_i \wedge \partial_j$$

check: it satisfies Jacobi identity, i.e. $(\mathfrak{g}^*, P_{\mathfrak{g}})$ is a Possion manifold.

注记 3.1.8. *$P_{\mathfrak{g}}$ is not invertible $\iff$ $\mathfrak{g}^*$ is not sympletic.*

3.2 星积

Star product:

定义 3.2.1. *A star product $*$ on a Possion mfd (X, P) is a $\mathbb{R}[[\hbar]]$-linear map*

$$C^\infty(X)[[\hbar]] \times C^\infty(X)[[\hbar]] \to C^\infty(X)[[\hbar]]$$

$$f * g \mapsto \sum_{k \geq 0} \hbar^k C_k(f, g)$$

such that:

(1) $*$ is associative

(2) $f * g = fg \mod \hbar$

(3) $\frac{1}{2}(f * g - g * f) = \hbar\{f, g\} \mod \hbar^2$

(4) $C_k(f, g) = C_k^{i_1 \dots i_l; j_i, \dots, j_m}(\partial_{i_1} \dots \partial_{i_l} f)(\partial_{j_1} \dots \partial_{j_m} g)$, where $C_k^{\because}$ is in $C^\infty(X)$. (bi-differential operator)

*then, $(C^\infty, *)$ is the **deformation quantization** on (X, P).*

the first non-commutativity of $*$ is given by Poosson bracket.

Fundamental Question: [Dewilde lemote 1983] for a Poisson manifold, is there $\exists$ a deformation quantization?

[Fedosov 1983,1994]

例子 3.2.2. $(C^\infty(X), \{,\}) \rightsquigarrow (C^{\infty(X)[[\hbar]]}, *)$

$$X = \mathbb{R}^m$$

Poisson bracket

$$P = P^{ij}\partial_i \wedge \partial_j$$

where $P^{ij} \in \mathbb{R}$ *are constant. then we define*

例子 3.2.3. *when* $\mathbb{R}^m = \mathbb{R}^{2n}$ *even dimension,* $\{x^1, ..., x^n; p_1, ..., p_n\}$,

$$P = \sum \frac{\partial}{\partial p_i} \wedge \frac{\partial}{\partial x^i}$$

then Moyal product becomes Weyl algebra and

$$[x^i, p_j] = x^i * p_j - p_j * x^i = \hbar\delta_{ij}$$

例子 3.2.4. $\mathfrak{g}$ *Lie algebra,* $X = \mathfrak{g}^*$,$P_\mathfrak{g}$, *consider (quantum) universal evenloping algebra*

$$\mathcal{U}_\hbar(\mathfrak{g}) = \bigoplus_k \mathfrak{g}^k[[\hbar]]/\sim$$

the relation is

$$a \otimes b - b \otimes a = \hbar[a, b]$$

$$\mathcal{U}_\hbar(\mathfrak{g})\big|_{\hbar=1}$$

is universal evenloping algebra.

$$\mathcal{U}_\hbar(\mathfrak{g})\big|_{\hbar=0} = \mathrm{Sym}^\bullet(\mathfrak{g})$$

PBW theorem: there is a vector space bijienction:

$$\Phi : \mathrm{Sym}^\bullet(\mathfrak{g})[[\hbar]] \to \mathcal{U}_\hbar(\mathfrak{g})$$

$\mathcal{U}_\hbar(\mathfrak{g})$ has a natural associative algebra structure by $\otimes$, $\Phi^*(\otimes)$ defines an associative algebra structure on $\mathrm{Sym}^\bullet(\mathfrak{g})[[\hbar]] =: \mathcal{O}(X)[[\hbar]]$

Check: it is a deformation quantization of $(X, P_\mathfrak{g})$.

例子 3.2.5. *M is a mfd, $X = T^*M$ cotangent bundle, which admits a sympletic structure*

$$\omega = \sum \mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}p_i$$

$$\mathcal{O}(X) = \Gamma(M, \mathrm{Sym}^\bullet(TM))$$

$f \in \mathcal{O}(X)$,

$$f = f(x,p) = \sum_I f_I(X) p^I(X)$$

and ω^{-1} Poisson bracket $\{,\}$ is a Poisson algebra.

D_X differential operator on X. $\exists$ filtration by its order

$$D_X^{(0)} \subseteq D_X^{(1)} \subseteq ... \subseteq D_X^{(m)} ...$$

(consists of $\sum A^{i_1 ... i_k} \partial_{i_1} ... \partial_{i_k}$)

Check:

$$[D_X^{(m)}, D_X^{(n)}] \subseteq D_X^{(m+n-1)}$$

$$D_X^{(m)} \circ D_X^{(n)} \subseteq D_X^{(m+n)}$$

$$(D_X, \circ) \text{ is associative}$$

定义 3.2.6.

$$D_X^\hbar := \bigoplus_{m \geq 0} D_X^{(k)} \hbar^m \subseteq D_X[\hbar]$$

is a $\mathbb{R}[\hbar]$-module

HW: what is k in Def above?????

(such that $D_X^\hbar$ can be understood as a Deformation Quantization of $(\mathcal{O}(X), \{,\})$ over ring $\mathbb{R}[\hbar]$.

例子 3.2.7. *(Quantum torus)*

Let $V = \mathbb{Z}^n$,define the algebra

$$e^V := \{e^v | v \in V\}$$

with

$$e^{v_1} e^{v_2} := e^{v_1 + v_2}$$

then e^V is algebra function on $(\mathbb{C}^*)^n = \mathbb{C}[z_1^{\pm 1}, ..., z_n^{\pm 1}]$.

Let $\omega : V \times V \to \mathbb{Z}$ skew symmetric bilinear form

$$e^{v_1} *_\hbar e^{v_2} = e^{\hbar \omega(v_1, v_2)} e^{v_1 + v_2}$$

check: associativity and it is a D.Q. of Poisson bracket

$$\{e^{v_1}, e^{v_2}\} = \omega(v_1, v_2) e^{v_1 + v_2}$$

术语索引