非交换几何选讲

曲豆豆 码字
南七技校福利社 五道口分社
2019 年 2 月 28 日
第 01 稿

图：雾气朦胧的安徽合肥大蜀山森林公园
拍摄于 2014.5.31 - 10：44

在五道口也要红专并进、理实交融呀 ～

目录

第 1 章　非交换代数

1.1　结合代数的双模、余中心

我们需要**代数拓扑**、**同调代数**的预备知识，并且采用同调代数的标准术语、记号，诸如链复形、上同调、导出函子等等。首先介绍基本的记号与概念。

在本课，我们给定一个特征 0 的含幺交换环 K（例如一个域），考虑含幺结合 K-代数 A（注意 A 未必是交换代数），并且 A 作为交换环 K 上的模是投射模（projective module）。A 的 K-代数结构给出如下 K-模同态：

$$\begin{array}{rcl} A \otimes_K A & \to & A \\ (a_1, a_2) & \mapsto & a_1 a_2 \end{array}$$

由 A 的结合性，$(a_1a_2)a_3 = a_1(a_2a_3)$ 对 A 中任意元素 a_1, a_2, a_3 成立.

对于含幺结合 K-代数 A，回顾 A 的**反代数**（opposite algebra）A^{op}. 反代数 A^{op} 作为 K-模与 A 完全相同，记号如下：

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{id} : A & \to & A^{\mathrm{op}} \\ x & \mapsto & x^{\mathrm{op}} \end{array}$$

但是 A^{op} 具有与 A“相反”的乘法，具体地，对于 A^{op} 中的元素 $x^{\mathrm{op}}, y^{\mathrm{op}}$，成立

$$x^{\mathrm{op}} y^{\mathrm{op}} := (yx)^{\mathrm{op}}$$

定义 1.1.1. 对于含幺结合 K-代数 A，我们定义 K-代数 A^e 为

$$A^e := A \otimes_K A^{op}$$

即 A 与 A^{op} 的 $K-$ 代数张量积。

容易验证对于任何两个含幺结合 K-代数 A, B，总有

$$(A \otimes_K B)^{\mathrm{op}} = A^{\mathrm{op}} \otimes_K B^{\mathrm{op}}$$

从而容易得到

$$(A^{\mathrm{op}})^e = (A^e)^{\mathrm{op}}$$

对于 $K-$ 代数 A，回顾 **双** $A-$ **模**（A-bimodule）的概念如下：

定义 1.1.2. 对于 K-代数 A，双 A-模是指如下资料：

（1）K-模 M；

（2）A 在 M 上的左、右 K-线性作用，

并且满足相容性：$(a.m).b = a.(m.b)$ 对任意 $m \in M$ 以及 $a, b \in A$ 成立。

例如，A 本身自然有双 A-模结构，A 在其上的左、右作用即为左乘、右乘。再比如 K-模张量积 $A \otimes_K A$ 具有如下双 A-模结构：

$$b.(a_1 \otimes a_2) := (ba_1) \otimes a_2$$

$$(a_1 \otimes a_2).b := a_1 \otimes (a_2 b)$$

其中 $a_1, a_2, b \in A$.

我们不再回顾左模、右模的概念了，也不去回顾右模与左模的平衡张量积。

性质 1.1.3. 设 M 为双 A-模，

（1）M 可自然地视为左 A^e-模：

$$(a_1 \otimes a_2^{op}).m = a_1.m.a_2$$

（2）M 可自然地视为右 A^e-模：

$$m.(a_1 \otimes a_2^{op}) = a_2.m.a_1$$

反之，左（右）A^e-模也可视为双 A-模。

证明. 容易验证。 □

特别地如果 M, N 都是双 A-模，那么考虑平衡张量积 $M \otimes_{A^e} N$，它的双 A-模结构具体如下：

$$a.(m \otimes n) = (a.m) \otimes n = m \otimes (n.a)$$

$$(m \otimes n).b = m \otimes (n.b) = (b.m) \otimes n$$

对于任何 $m \in M, n \in N, a, b \in A$ 成立。

定义 1.1.4. （余中心 *cocenter*）对于双 A-模 M，称双 A-模

$$M \otimes_{A^e} A$$

为 M 的**余中心**（*cocenter*）。

容易看出，对任意的 $m \in M, a \in A$，在余中心 $M \otimes_{A^e} A$ 当中，成立

$$(m.a) \otimes 1 = m \otimes (a.1) = m \otimes a = m \otimes (1.a) = (a.m) \otimes 1$$

从而 $(m.a - a.m) \otimes 1 = 0$. 事实上，$M$ 的余中心具有如下结构：

性质 1.1.5. 对于双 A-模 M，则有如下双 A-模同构

$$M \otimes_{A^e} A \cong M/\{(m.a - a.m) | a \in A, m \in M\}$$

证明. 考虑如下的双 A-模链复形

$$\partial_\bullet : A \otimes A \otimes A \to A \otimes A \to A \to 0$$

其中

$$\begin{aligned} \partial : a_1 \otimes a_2 \otimes a_3 &\mapsto a_1 a_2 \otimes a_3 - a_1 \otimes a_2 a_3 \\ a_1 \otimes a_2 &\mapsto a_1 a_2 \end{aligned}$$

容易验证 ∂^2=0（由 A 的结合性），从而 $\partial_\bullet$ 为双 A-模链复形。并且显然 $\partial : A \otimes A \to A$ 是满同态。

断言链复形 $\partial_\bullet$ 为正合（exact）的。事实上，$\partial_\bullet$ 到其自身的恒等链映射与零链映射是链同伦的。我们构造如下的链同伦 $h_\bullet$：

$$\begin{aligned} h : a_1 &\mapsto 1 \otimes a_1 \\ a_1 \otimes a_2 &\mapsto 1 \otimes a_1 \otimes a_2 \end{aligned}$$

容易验证，对于任意的 $\varphi = a_1 \otimes a_2 \in A \otimes A$，成立

$$\begin{aligned} (\partial h + h\partial)\varphi &= (\partial h + h\partial)(a_1 \otimes a_2) \\ &= \partial(1 \otimes a_1 \otimes a_2) + h(a_1 a_2) \\ &= a_1 \otimes a_2 - 1 \otimes a_1 a_2 + 1 \otimes a_1 a_2 \\ &= a_1 \otimes a_2 = \varphi \end{aligned}$$

从而对于 $\varphi \in A \otimes A$，如果 $\partial\varphi = 0$，那么

$$\varphi = (\partial h + h\partial)\varphi = \partial(h\varphi)$$

这说明链复形 $\partial_\bullet$ 在 $A \otimes A$ 处正合，因此 $\partial_\bullet$ 是正合的。

接下来，将函子 $M \otimes_{A^e} -$ 作用于链复形 $\partial_\bullet$，得到如下的双 A-模链复形：

$$M \otimes_{A^e} \partial_\bullet : M \otimes A \to M \to M \otimes_{A^e} A \to 0$$

由张量函子的右正合性，上述链复形也是正合的。其中注意到双 A-模同构

$$\begin{aligned} M \otimes_{A^e} (A \otimes A \otimes A) &\cong M \otimes A \\ m \otimes (a_1 \otimes a_2 \otimes a_3) &\mapsto (a_3.m.a_1) \otimes a_2 \end{aligned}$$

以及双 A-模同构

$$\begin{aligned} M \otimes_{A^e} (A \otimes A) &\cong M \\ m \otimes (a_1 \otimes a_2) &\mapsto a_2.m.a_1 \end{aligned}$$

于是正合列 $M\otimes_{A^e}\partial_\bullet$ 的边界映射有如下具体表达式：

$$\begin{array}{rcl} M\otimes_{A^e}\partial : M\otimes A & \to & M \\ m\otimes A & \mapsto & m.a-a.m \end{array}$$

从而由正合性，易知

$$M\otimes_{A^e} A\cong M/\{(m.a-a.m)|a\in A, m\in M\}$$

□

可见，M 的余中心无非是商掉 M 当中“非交换的部分”所得到的“交换的部分”，如此望文生义。例如，如果 A 为交换 K-代数，那么 A 本身作为双 A-模，其余中心为 A 本身.

1.2 Hochschild 同调

定义 1.2.1. （*Hochschild* 同调）

对于双 A-模 M，以及非负整数 n，记

$$H_n(A,M):=\mathrm{Tor}_n^{A^e}(M,A)$$

称为 M 的第 n 个 *Hochschild* 同调。特别地，我们记

$$\mathrm{HH}_n(A):=H_n(A,A)$$

由定义以及导出函子的基础知识，容易知道双 $A-$ 模 M 的第 0 个 Hochschild 同调

$$H_0(A,M)=M\otimes_{A^e}A=M/\{(m.a-a.m)|a\in A, m\in M\}$$

正是 M 的余中心。注意 Hochschild 同调一般并不是环，仅仅能保证它是双 A-模。

具体地，由导出函子的定义，我们采用投射消解（projective resolution）来计算 Hochschild 同调。若双 A-模链复形

$$P_\bullet\to A:=...\to P_3\to P_2\to P_1\to P_0\to A\to 0$$

为双 A-模 A 的投射消解（正合，并且每个 $P_i(i\geq 0)$ 作为 K-模是投射的），那么

$$H_n(A,M)\cong H_n(M\otimes_{A^e}P_\bullet)$$

由同调代数的事实，它与投射消解 $P_\bullet$ 的选取无关。

事实上 Hochschild 同调可以与空间上的微分形式类比。作为一个具体计算例子，我们考虑 $\mathbb{C}$ 上的 n 元多项式代数

$$A:=\mathbb{C}[x^1,x^2,...,x^n]$$

注意到 A 作为 $\mathbb{C}$-代数是交换的，从而 $A=A^{\mathrm{op}}$. 我们记

$$A^{\mathrm{op}}=\mathbb{C}[y^1,y^2,...,y^n]\quad A^e=\mathbb{C}[x^1,x^2,...,x^n;y^1,y^2,...,y^n]$$

性质 1.2.2. 考虑 $\mathbb{C}$-代数 $A := \mathbb{C}[x^1, x^2, ..., x^n]$，则其第 k 个 *Hochschild* 同调

$$\mathrm{HH}_k(A) \cong A \otimes \bigwedge^k(\mathbb{C}^n)$$

是以 A 为系数的 k-形式。

证明. 我们给出 A 的投射消解，比如众所周知的 Koszul 消解

$$\mathcal{K}_A \to A \to 0$$

具体地，引入 n 个新的独立变元 $\eta^1, \eta^2, ..., \eta^n$ （视为复线性空间 $\mathbb{C}^n$ 的一组基），考虑环

$$\mathcal{K} := \frac{A^e[\eta^1, \eta^2, ..., \eta^n]}{\{(\eta^i\eta^j + \eta^j\eta^i) | i \neq j\}} = A^e \otimes \bigwedge^*(\mathbb{C}^n)$$

为以 A^e 为系数的外代数。

注意 $\mathcal{K}$ 有自然的分次：

$$\deg \eta^i = 1 \quad \deg x^i = \deg y^i = \deg 1 = 0$$

记 $\mathcal{K}_l$ 为 $\mathcal{K}$ 的 l 次分量（$0 \leq l \leq n$），即

$$\mathcal{K}_l = \bigoplus_{1 \leq i_1 < i_2 < ... < i_l \leq n} A^e \eta^{i_1} \wedge \eta^{i_2} \wedge ... \wedge \eta^{i_l} = A^e \otimes \bigwedge^l(\mathbb{C}^n)$$

此时 $K = \mathbb{C}$ 是域，因此 $\mathcal{K}$ （作为 K-模，即复线性空间）的投射性显然。我们定义 Koszul 复形 $(\mathcal{K}_A, \partial)$ 如下：

$$\mathcal{K}_A : ... \xrightarrow{\partial} \mathcal{K}_n \xrightarrow{\partial} \mathcal{K}_{n-1} \xrightarrow{\partial} ... \xrightarrow{\partial} \mathcal{K}_1 \xrightarrow{\partial} \mathcal{K}_0$$

其中边缘算子 ∂（首先是 A^e-模同态）满足

$$\partial \eta^i = x^i - y^i$$

以及与外微分相同的莱布尼茨法则：对任意 $\omega \in \mathcal{K}$，成立

$$\partial(\eta^i \wedge \omega) = \partial\eta^i \wedge \omega - \eta^i \wedge \partial\omega$$

再考虑连接映射

$$\begin{array}{rcl} \varepsilon : \mathcal{K}_0 = A^c & \to & A \\ x^i & \mapsto & x^i \\ y^i & \mapsto & x^i \end{array}$$

则众所周知，Koszul 复形

$$\mathcal{K}_A \xrightarrow{\varepsilon} A \to 0$$

为 A 的投射消解（证明从略）。我们以此计算 $\mathrm{HH}^\bullet(A)$. 我们注意到以下两个简单事实：

其一：对任何 $1 \leq l \leq n$，成立双 A-模同构

$$A \otimes_{A^e} \mathcal{K}_l = A \otimes_{A^e} A^e \otimes \bigwedge^l(\mathbb{C}^n) \cong A \otimes \bigwedge^l(\mathbb{C}^n)$$

其二：函子 $A \otimes_{A^e} -$ 作用于 Koszul 复形 $\mathcal{K}_A$ 之后，成立

$$A \otimes_{A^e} \partial = 0$$

这是因为，对于任意 $f \in A$，在 $A \otimes_{A^e} A^e$ 当中总成立

$$f \otimes x^i = x^i f \otimes 1 = f x^i \otimes 1 = f \otimes (x^i)^{\mathrm{op}} = f \otimes y^i$$

因此

$$f \otimes (x^i - y^i) = 0 \in A \otimes_{A^e} A^e$$

从而由 ∂ 的定义，容易看出 $A \otimes_{A^e} \partial = 0$.

综上两方面，直接计算之，

$$\begin{aligned} \mathrm{HH}_k(A) &= H_k(A \otimes^L_{A^e} A) \\ &= H_k(A \otimes_{A^e} \mathcal{K}_A) \\ &= A \otimes_{A^e} \mathcal{K}_k \\ &= A \otimes \bigwedge^k(\mathbb{C}^n) \end{aligned}$$

从而得证。 □

事实上对于一般的含幺结合 K-代数 A，$\mathrm{HH}_\bullet(A)$ 扮演了“微分形式”的角色。这是 Hochschild 同调的一种几何解释。

对于一般的 A，A 作为双 A-模，由一种典范的投射消解，称之为 **Bar-复形**：

定义 1.2.3. （*Bar-复形*）

对于含幺结合 K-代数 A，定义以下双 A-模链复形

$$\cdots \to B_2 A \xrightarrow{b} B_1 A \xrightarrow{b} B_0 A \xrightarrow{b} A \to 0$$

如下：

$$B_n A := A \otimes A^{\otimes n} \otimes A \;\; (n \geq 0)$$

$$b:\; a_0 \otimes a_1 \otimes \ldots \otimes a_n \quad \mapsto \quad \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k a_0 \otimes a_1 \otimes \ldots \otimes (a_k a_{k+1}) \otimes \ldots \otimes a_n$$

称之为 ***Bar*-复形**。

首先容易验证 $b^2=0$，从而 $B_\bullet A \xrightarrow{b} A \to 0$ 确实是链复形。对于 $n\geq 1$，具体验证如下：

$$
\begin{aligned}
b^2(a_0\otimes a_1\otimes ...\otimes a_n) &= b\left(\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k a_0\otimes a_1\otimes ...\otimes(a_k a_{k+1})\otimes ...\otimes a_n\right)\\
&= \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k b(a_0\otimes a_1\otimes ...\otimes(a_k a_{k+1})\otimes ...\otimes a_n)\\
&= \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\Bigg[\sum_{l=0}^{k-2}(-1)^l a_0\otimes ...\otimes(a_l a_{l+1})\otimes ...\otimes(a_k a_{k+1})\otimes ...\otimes a_n\\
&\quad +(-1)^{k-1}a_0\otimes ...\otimes(a_{k-1}a_k a_{k+1})\otimes ...\otimes a_n\\
&\quad +(-1)^k a_0\otimes ...\otimes(a_k a_{k+1}a_{k+2})\otimes ...\otimes a_n\\
&\quad -\sum_{l=k+2}^{n-1}(-1)^l a_0\otimes ...\otimes(a_k a_{k+1})\otimes ...\otimes(a_l a_{l+1})\otimes ...\otimes a_n\Bigg]\\
&= \sum_{\substack{0\leq k<l\leq n-1\\ l-k\geq 2}}\left(-(-1)^{k+l}+(-1)^{k+l}\right)a_0\otimes ...\otimes(a_k a_{k+1})\otimes ...\otimes(a_l a_{l+1})\otimes ...\otimes a_n\\
&\quad +\sum_{0\leq k\leq n-2}\left((-1)^{2k+1}+(-1)^{2k}\right)a_0\otimes ...\otimes(a_k a_{k+1}a_{k+2})\otimes ...\otimes a_n\\
&= 0
\end{aligned}
$$

从而验证完毕。

我们可以把 $a_0\otimes ...\otimes a_n$ 想象为直线上依次排列的 $n+1$ 个质点，将算子 b 想象为相邻质点两两“碰撞”。

性质 1.2.4. *记号同之前，则 Bar-复形*

$$B_\bullet A\to A\to 0$$

是 A 的投射消解。

证明. 对任意 $n\geq 0$，$B_nA=A\otimes A^{\otimes n}\otimes A$ 是投射 K-模（这是因为由最初的假定，A 是投射 K-模，从而其张量积也投射）于是我们只需再验证该链复形是正合的。

为此，我们构造链同伦

$$
\begin{aligned}
h: B_{n-2}A &\to B_{n-1}A \quad (n\geq 1,\ B_{-1}A=A)\\
a_0\otimes ...\otimes a_n &\mapsto 1\otimes a_0\otimes ...\otimes a_n
\end{aligned}
$$

只需验证 $hb+bh$=1，之后与性质1.1.5的证明类似。

注意到对于任意 $n\geq 0$，成立

$$
\begin{aligned}
bh(a_0\otimes ...\otimes a_n) &= b(1\otimes a_0\otimes ...\otimes a_n)\\
&= a_0\otimes ...\otimes a_n-\sum_{k=0}^{n-1}1\otimes a_0\otimes ...\otimes(a_k a_{k+1})\otimes ...\otimes a_n\\
&= a_0\otimes ...\otimes a_n-1\otimes b(a_0\otimes ...\otimes a_n)\\
&= (1-hb)a_0\otimes ...\otimes a_n
\end{aligned}
$$

因此 $bh+hb=1$，证毕。 $\square$

定义 1.2.5. 设 M 为双 A-模，定义 ***Hochschild*** **链复形**

$$C_\bullet(A,M):=M\otimes_{A^e}B_\bullet A$$

$$\cdots M\otimes A^{\otimes 3}\to M\otimes A^{\otimes 2}\to M\otimes A\to M$$

方便起见，该链复形的边缘算子仍记作 b.

则易知 M 的 Hochdchild 同调无非是 Hochschlid 链复形的同调：

$$H_n(A,M)=H_n(C_\bullet(A,M))$$

注意到有双 A-模同构

$$C_n(A,M)=M\otimes_{A^e}\left(A\otimes A^{\otimes n}\otimes A\right)\cong M\otimes A^{\otimes n}$$

在此同构意义下，容易验证 $C_\bullet(A,M)$ 的边缘算子 b 有如下显示表达：

对任意 $m\in M$，以及 $a_1,a_2,...,a_n\in A$，成立

$$\begin{aligned}
b\left(m\otimes(a_1\otimes...\otimes a_n)\right) &= m\otimes_{A^e}\left(b(1\otimes a_1\otimes...\otimes a_n\otimes 1)\right)\\
&= m\otimes_{A^e}[a_1\otimes...\otimes a_n\otimes 1\\
&\quad+\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k 1\otimes a_1\otimes...\otimes(a_k a_{k+1})\otimes...\otimes a_n\otimes 1\\
&\quad+(-1)^n 1\otimes a_1\otimes...\otimes a_n]\\
&= (m.a_1)\otimes a_2\otimes...\otimes a_n\\
&\quad+\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k m\otimes a_1\otimes...\otimes(a_k a_{k+1})\otimes...\otimes a_n\\
&\quad+(-1)^n(a_n.m)\otimes a_1\otimes...\otimes a_{n-1}
\end{aligned}$$

Hochschlid 链复形的边缘算子的显式表达与 Bar-复形非常相似，从上式最右边的前两项可以看出；区别在于上式最右边的第三项。

1.3 Hochschlid 上同调

对于双 A-模 M，既然我们已经考虑余中心 $M\otimes_{A^e}A$，那么我们自然也会去考虑 $\mathrm{Hom}_{A^e}(A,M)$. 我们称双 A-模 $\mathrm{Hom}_{A^e}(A,M)$ 为 M 的**导出中心**（derived center）。

性质 1.3.1. （导出中心的结构）对于双 A-模 M，则有双 A-模同构

$$\mathrm{Hom}_{A^e}(A,M)\cong\{m\in M|a.m-m.a=0\ \ \forall a\in A\}$$

容易验证 $\{m \in M | a.m - m.a = 0 \ \forall a \in A\}$ 为 M 的双 A-子模。粗俗地说，该子模由“与 A 中所有元素交换”的元素构成，故谓之“中心”。

证明. 对于任意的 $\varphi \in \mathrm{Hom}_{A^e}(A, M)$ 以及 $a \in A$，则 $\varphi(a)$ 的取值由 $\varphi(1)$ 完全决定：

$$\varphi(a) = \varphi(a.1) = a.\varphi(1)$$

而另一方面，

$$\varphi(a) = \varphi(1.a) = \varphi(1).a$$

从而有 $a.\varphi(1) = \varphi(1).a$. 于是我们可以构造如下双 $A-$ 模同态：

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Hom}_{A^e}(A, M) & \to & \{m \in M | a.m - m.a = 0 \ \forall a \in A\} \\ \varphi & \mapsto & \varphi(1) \end{array}$$

容易验证该模同态为同构。证毕。 □

然后我们考虑 $\mathrm{Hom}(-, M)$ 的导出函子，自然地去定义如下：

定义 1.3.2. （*Hochschild* 上同调）

对于双 A-模 M，以及 $n \geq 0$，定义 M 的第 n 个 *Hochschild* 上同调

$$H^n(A, M) = \mathrm{Ext}^n_{A^e}(A, M)$$

特别地，我们记

$$H^n(A) = \mathrm{Ext}^n_{A^e}(A, A)$$

由定义知，M 的第 0 个 Hochschild 上同调为 $\mathrm{Hom}_{A^e}(A, M)$，是 M 的导出中心。回顾 Bar-复形，我们考虑如下的 **Hochschild 上链复形**

$$C^\bullet(A, M) = \mathrm{Hom}_{A^e}(B_\bullet A, M)$$

该上链复形的微分算子 ∂ 由 Bar-复形 $B_\bullet A$ 的边缘算子 b 所诱导。则 M 的 Hochschild 上同调满足

$$H^n(A, M) = H^n(C^\bullet(A, M), \partial) = H^n(\mathrm{Hom}_{A^e}(B_\bullet A, M), \partial)$$

注意有自然的双 A-模同构

$$C^n(A, M) = \mathrm{Hom}_{A^e}(A \otimes A^{\otimes n} \otimes A, M) \cong \mathrm{Hom}(A^{\otimes n}, M)$$

（即取值于 M 的 n 重 K-线性映射）于是对于任意的 $\varphi \in C^n(A, M) = \mathrm{Hom}(A^{\otimes n}, M)$，容易知道 $\partial\varphi \in \mathrm{Hom}(A^{\otimes n+1}, M)$ 具有如下显式表达：对任意 $a_0, a_1, ..., a_m \in A$，

$$\begin{array}{rcl} \partial\varphi(a_0, a_1, ..., a_n) & = & a_0.\varphi(a_1, a_2, ..., a_n) \\ & & -\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \varphi(a_0, ...; (a_k a_{k+1}); ..., a_n) \\ & & -(-1)^n \varphi(a_0, a_1, ..., a_{n-1}).a_n \end{array}$$

接下来讨论 Hochschild 上同调的几何意义。我们已经知道第 0 个 Hochschild 上同调为 M 的导出中心；现在我们看 $H^1(A, M)$，我们将发现它是 A 的取值于 M 的外导子。

回顾**导子**（derivation）的概念如下：

定义 1.3.3. （导子）对于双 A-模 M，K-线性映射

$$D : A \to M$$

称为 A 的取值于 M 的**导子**（*derivation*），如果对任意的 $a_1, a_2 \in A$，成立

$$D(a_1 a_2) = D(a_1).a_2 + a_1.D(a_2)$$

对于 $m \in M$ 我们定义

$$\begin{aligned} \mathrm{ad}_m : A &\to M \\ a &\mapsto [m, a] := m.a - a.m \end{aligned}$$

则容易验证 ad_m 为 A 的取值于 M 的导子，称形如这样的导子为**内导子**（inner derivation）。

我们记

$$\mathrm{Der}(A, M) := \{D : A \to M | D\text{为导子}\}$$

$$\mathrm{Inn}(A, M) := \{\mathrm{ad}_m | m \in M\} \subseteq \mathrm{Der}(A, M)$$

注意 $\mathrm{Inn}(A, M)$ 与 $\mathrm{Der}(A, M)$ 都有显然的 K-模结构，且前者是后者的 K-子模。

性质 1.3.4. （$\mathrm{HH}^1(A, M)$ 的结构）

对于双 A-模 M，成立

$$\mathrm{HH}^1(A, M) \cong \frac{\mathrm{Der}(A, M)}{\mathrm{Inn}(A, M)}$$

我们称上式右边的集合当中的元素为 A 的取值于 M 的**外导子**（outer derivation）。

证明. 只需考虑 Hochschild 上链复形

$$C^0(A, M) \xrightarrow{\partial^0} C^1(A, M) \xrightarrow{\partial^1} C^2(A, M) \to \cdots$$

我们只需具体计算之。对于 $\varphi \in C^1(A, M) \cong \mathrm{Hom}(A, M)$，则 $\partial^1\varphi \in C^2(A, M) \cong \mathrm{Hom}(A^{\otimes 2}, M)$ 满足：对任意 $a_1, a_2 \in A$，成立

$$\partial^1\varphi(a_1, a_2) = a_1.\varphi(a_2) - \varphi(a_1 a_2) + \varphi(a_1).a_2$$

可见 $\varphi \in \ker \partial^1$ 当且仅当 $\varphi \in \mathrm{Der}(A, M)$. 也就是说 $\ker \partial^1 = \mathrm{Der}(A, M)$.

另一方面，对于 $m \in C^0(A, M) \cong M$，以及 $a \in A$，成立

$$(\partial^0 m)(a) = a.m - m.a = -\mathrm{ad}_m(a)$$

因此 $\ker \partial^0 \cong \mathrm{Inn}(A,M)$. 从而

$$\mathrm{HH}^1(A,M) = \frac{\ker \partial^1}{\mathrm{Im}\, \partial^0} \cong \frac{\mathrm{Der}(A,M)}{\mathrm{Inn}(A,M)}$$

□

特别地，当 $M = A$ 时，

$$\mathrm{HH}^1(A) = \mathrm{Der}(A,A)/\mathrm{Inn}(A,A)$$

注意到 $\mathrm{Der}(A,A)$ 上面还有更多的结构：对于 $\forall D_1, D_2 \in \mathrm{Der}(A,A)$，定义

$$[D_1, D_2] := D_1 \circ D_2 - D_2 \circ D_1 : A \to A$$

容易验证 $[D_1, D_2]$ 仍然为 A 的导子，并且 $[-,-]$ 为 $\mathrm{Der}(A,A)$ 上的李括号（Lie bracket）。

另外容易验证

$$[\mathrm{Der}(A,A), \mathrm{Inn}(A,A)] \subseteq \mathrm{Inn}(A,A)$$

具体地，对于 $D \in \mathrm{Der}(A,A)$ 以及 $m \in M$，成立

$$[D, \mathrm{ad}_m] = \mathrm{ad}_{D(m)}$$

也就是说 $\mathrm{Inn}(A,A)$ 是 $\mathrm{Der}(A,A)$ 的理想。于是 $[-,-]$ 诱导了 $\mathrm{HH}^1(A) = \frac{\mathrm{Der}(A,A)}{\mathrm{Inn}(A,A)}$ 上的李括号结构.

如果 A 是交换 K-代数，则 $\mathrm{Inn}(A,A) = 0$。于是

$$\mathrm{HH}^1(A) \cong \mathrm{Der}(A,A)$$

可被认为是“切向量场”（此时 A 被认为是“函数环”）。

我们再去考虑 $\mathrm{HH}^2(A,M)$. 对于任意的

$$\varphi \in C^2(A,M) = \mathrm{Hom}(A^{\otimes 2}, M)$$

则对 $a_0, a_1, a_2 \in A$，成立

$$\partial\varphi(a_0,a_1,a_2) = a_0.\varphi(a_1,a_2) - \varphi(a_0a_1,a_2) + \varphi(a_0,a_1a_2) - \varphi(a_0,a_1).a_2$$

引理 1.3.5. 对于双 A-模 M，以及 $\varphi \in C^2(A,M) = \mathrm{Hom}(A^{\otimes 2}, M)$，我们令

$$\hat{A} := A \oplus M$$

并赋以如下的 K-代数结构：对于任意 $a_1, a_2 \in A$ 以及 $m_1, m_2 \in M$，规定 $\hat{A}$ 的乘法 $\hat{\bullet}_\varphi$ 为

$$(a_1 \oplus m_1)\hat{\bullet}_\varphi(a_2 \oplus m_2) := a_1a_2 \oplus [a_1.m_2 + m_1.a_2 + \varphi(a_1,a_2)]$$

那么 $(\hat{A}, \hat{\bullet}_\varphi)$ 为结合代数，当且仅当 $\partial\varphi = 0$.

证明. 这是简单的计算验证。对于任意的 $a_0, a_1, a_2 \in A$ 以及 $m_0, m_1, m_2 \in M$，直接计算之，

$$\begin{aligned}
& [(a_0 \oplus m_0)\hat{\bullet}_\varphi(a_1 \oplus m_1)]\hat{\bullet}_\varphi(a_2 \oplus m_2) \\
= \;& a_0a_1a_2 \oplus [a_0a_1.m_2 + a_0.m_1.a_2 + m_0.a_1a_2 + \varphi(a_0,a_1).a_2 + \varphi(a_0a_1,a_2)]
\end{aligned}$$

以及

$$
\begin{aligned}
& (a_0 \oplus m_0) \hat{\bullet}_\varphi [(a_1 \oplus m_1) \hat{\bullet}_\varphi (a_2 \oplus m_2)] \\
= \quad & a_0 a_1 a_2 \oplus [a_0 a_1.m_2 + a_0.m_1.a_2 + m_0.a_1 a_2 + a_0.\varphi(a_1, a_2) + \varphi(a_0, a_1 a_2)]
\end{aligned}
$$

因此 $\hat{\bullet}_\varphi$ 满足结合性，当且仅当

$$\varphi(a_0, a_1).a_2 + \varphi(a_0 a_1, a_2) = a_0.\varphi(a_1, a_2) + \varphi(a_0, a_1 a_2)$$

而此式等价于 $\partial\varphi = 0$. □

注意到在 $\hat{A}$ 当中，对任意的 $m_1, m_2 \in M$，以及任意 $\varphi \in C^2(A, M)$，总有 $m_1 \hat{\bullet}_\varphi m_2 = 0$. 于是我们不妨将"$A \oplus M$"当中的"$M$"理解为"一阶小量"。我们考虑 $\varphi = 0$ 时 $\hat{A}_0 := A \oplus M$ 的代数结构

$$(a_1 \oplus m_1) \bullet (a_2 \oplus m_2) := a_1 a_2 \oplus (a_1.m_2 + m_1.a_2)$$

显然 $(\hat{A}_0, \bullet)$ 为结合代数。若 $\partial\varphi = 0$，则结合代数 $(\hat{A}, \hat{\bullet}_\varphi)$ 为 $(\hat{A}_0, \bullet)$ 的**一阶形变**，而 φ 为其"形变参数"。

从而 M 的第 2 个 Hochschild 上同调

$$H^2(A, M) \cong \frac{\{\varphi | (\hat{A}, \hat{\bullet}_\varphi) \text{是结合代数}\}}{\mathrm{Im}(\partial : C^1(A, M) \to C^2(A, M))}$$

商掉的东西（$\mathrm{Im}\,\partial$）为形如以下的一类特殊的一阶形变：

$$
\begin{aligned}
\varphi_f : A \otimes A \quad & \to \quad M \\
a_1 \otimes a_2 \quad & \mapsto \quad a_1.f(a_2) + f(a_1).a_2 - f(a_1 a_2)
\end{aligned}
$$

其中 $f \in C^1(A, M) = \mathrm{Hom}(A, M)$，$\varphi_f = \partial f$.

我们考察一个 Hochschild 上同调的具体算例。

性质 1.3.6. 若 $A = \mathbb{C}[x^1, ..., x^n]$ 为 $\mathbb{C}$ 上的 n 元多项式环，则

$$\mathrm{HH}^k(A) \cong \mathrm{Hom}\left(\bigwedge\nolimits^k(\mathbb{C}^n), A\right)$$

证明. 对于这个特例，采用 Koszul 复形计算更佳简便。有关记号同性质1.2.2的证明过程. 考虑 Koszul 复形

$$\mathcal{K}_A : \cdots \xrightarrow{\partial} A^e \otimes \bigwedge\nolimits^{k+1}(\mathbb{C}^n) \xrightarrow{\partial} A^e \otimes \bigwedge\nolimits^{k}(\mathbb{C}^n) \xrightarrow{\partial} A^e \otimes \bigwedge\nolimits^{k-1}(\mathbb{C}^n) \xrightarrow{\partial} \cdots$$

然后将函子 $\mathrm{Hom}_{A^e}(-, A)$ 作用于之上。注意到有 $\mathbb{C}$-线性同构

$$
\begin{aligned}
& \mathrm{Hom}_{A^e}\left(A^e \otimes \bigwedge\nolimits^k(\mathbb{C}^n), A\right) \\
\cong \quad & \mathrm{Hom}\left(\bigwedge\nolimits^k(\mathbb{C}^n), \mathrm{Hom}_{A^e}(A^e, A)\right) \\
\cong \quad & \mathrm{Hom}\left(\bigwedge\nolimits^k(\mathbb{C}^n), A\right)
\end{aligned}
$$

此外再注意到，上链复形 $\mathrm{Hom}_{A^e}(\mathcal{K}_A, A)$ 的微分算子 $\mathrm{d} := \mathrm{Hom}_{A^e}(\partial, A) = 0$. 这是因为对于 $\varphi \in \mathrm{Hom}_{A^e}\left(A^e \otimes \bigwedge^k(\mathbb{C}^n), A\right)$，$\omega \in \bigwedge^{k+1}(\mathbb{C}^n)$ 以及 $f \in A^e$，成立

$$\mathrm{d}\varphi(f \otimes \omega) = \varphi(\partial(f \otimes \omega))$$

回顾 Koszul 复形边缘算子运算规则

$$\partial : \eta^i \mapsto x^i - y^i \in A^e$$

又由于 φ 为 A^e-模同态，从而对于任意 $\tilde{\omega} \in \bigwedge^k(\mathbb{C}^n)$，成立

$$\varphi(x^i \otimes \tilde{\omega}) = x^i.\varphi(1 \otimes \tilde{\omega}) = \varphi(1 \otimes \tilde{\omega}).x^i = \varphi((x^i)^{\mathrm{op}} \otimes \tilde{\omega}) = \varphi(y^i \otimes \tilde{\omega})$$

也就是说 $\varphi((x^i - y^i) \otimes \tilde{\omega}) = 0$. 由此可见 $\mathrm{d} = 0$. 综上可知

$$\mathrm{HH}^k(A) \cong \mathrm{Hom}\left(\bigwedge^k(\mathbb{C}^n), A\right)$$

□

注意到 $\mathrm{Hom}\left(\bigwedge^k(\mathbb{C}^n), A\right)$ 之中的元素形如

$$\sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_k \le n} f_{i_1 \ldots i_k} \partial_{i_1} \wedge \ldots \wedge \partial_{i_k}$$

回顾 $\mathrm{HH}_\bullet(A)$ 中的元素可被认为是“微分形式”，可见 $\mathrm{HH}^\bullet(A)$ 中的元素则是“多重切向量场”。

1.4 先帝创业未半而中道崩殂

（待补）

术语索引