

非交换几何选讲

曲豆豆 码字
南七技校福利社 五道口分社
2019 年 3 月 24 日
第 01-6 稿



图：雾气朦胧的安徽合肥大蜀山森林公园
拍摄于 2014.5.31 - 10: 44

在五道口也要红专并进、理实交融呀～

目录

1	Hochschild 理论	3
1.1	结合代数的双模、余中心	3
1.2	Hochschild 同调	7
1.3	Hochschild 上同调	12
1.4	约化 Bar 复形	18
1.5	Connes 复形 $C_{\bullet}^{\lambda}(A)$	24
1.6	循环双复形 $CC_{\bullet\bullet}(A)$	27
1.7	Connes 算子 \mathcal{B}	31
1.8	循环同调的计算	36
1.9	循环上同调	42
2	乘积	45
2.1	分次模与 Koszul 符号法则	45
2.2	分次代数与分次李代数	50
2.3	余代数与分次余代数	57
2.4	多重切向量场与 Schouten-Nijenhuis 括号	60
2.5	Shuffle 乘积	65
2.6	Cup 乘积与 Gerstenhaber 括号（部分细节待补）	70
2.7	结合性	74
3	形变量子化	76
3.1	泊松几何与辛几何	76
3.2	星积	81

第 1 章 Hochschild 理论

“读论文就是将非人话翻译成人话的过程，写论文就是将人话写成非人话的过程。”

“我写的公式也不一定对。。。但基本上是对的，up to sign”

1.1 结合代数的双模、余中心

我们需要代数拓扑、同调代数、基础范畴论的预备知识，并且采用同调代数的标准术语、记号，诸如链复形、上同调、导出函子等等。首先介绍基本的记号与概念。

在本课，我们给定一个特征 0 的含幺交换环 K （例如一个域），考虑含幺结合 K -代数 A （注意 A 未必是交换代数），并且 A 作为交换环 K 上的模是投射模（projective module）。 A 的 K -代数结构给出如下 K -模同态：

$$\begin{aligned} A \otimes_K A &\rightarrow A \\ (a_1, a_2) &\mapsto a_1 a_2 \end{aligned}$$

由 A 的结合性， $(a_1 a_2) a_3 = a_1 (a_2 a_3)$ 对 A 中任意元素 a_1, a_2, a_3 成立。

对于含幺结合 K -代数 A ，回顾 A 的反代数（opposite algebra） A^{op} 。反代数 A^{op} 作为 K -模与 A 完全相同，记号如下：

$$\begin{aligned} \text{id} : A &\rightarrow A^{\text{op}} \\ x &\mapsto x^{\text{op}} \end{aligned}$$

但是 A^{op} 具有与 A “相反”的乘法，具体地，对于 A^{op} 中的元素 $x^{\text{op}}, y^{\text{op}}$ ，成立

$$x^{\text{op}} y^{\text{op}} := (yx)^{\text{op}}$$

定义 1.1.1. 对于含幺结合 K -代数 A ，我们定义 K -代数 A^e 为

$$A^e := A \otimes_K A^{\text{op}}$$

即 A 与 A^{op} 的 K -代数张量积。

容易验证对于任何两个含么结合 K -代数 A, B , 总有

$$(A \otimes_K B)^{\text{op}} = A^{\text{op}} \otimes_K B^{\text{op}}$$

从而容易得到

$$(A^{\text{op}})^e = (A^e)^{\text{op}}$$

对于 K -代数 A , 回顾双 A -模 (A -bimodule) 的概念如下:

定义 1.1.2. 对于 K -代数 A , 双 A -模是指如下资料:

(1) K -模 M ;

(2) A 在 M 上的左、右 K -线性作用,

并且满足相容性: $(a.m).b = a.(m.b)$ 对任意 $m \in M$ 以及 $a, b \in A$ 成立。

例如, A 本身自然有双 A -模结构, A 在其上的左、右作用即为左乘、右乘。再比如 K -模张量积 $A \otimes_K A$ 具有如下双 A -模结构:

$$b.(a_1 \otimes a_2) := (ba_1) \otimes a_2$$

$$(a_1 \otimes a_2).b := a_1 \otimes (a_2b)$$

其中 $a_1, a_2, b \in A$.

再比如, 对于 K -代数 A , 考虑其对偶

$$A^* := \text{Hom}(A, K)$$

则 A^* 具有以下的双 A -模结构: 对任意 $a, x \in A$ 以及 $f \in A^*$,

$$\begin{cases} (a.f)(x) := f(xa) \\ (f.a)(x) := f(ax) \end{cases}$$

容易验证这的确使得 A^* 为双 A -模。

我们不再回顾左模、右模的概念了, 也不去回顾右模与左模的平衡张量积。

性质 1.1.3. 设 M 为双 A -模,

(1) M 可自然地视为左 A^e -模:

$$(a_1 \otimes a_2^{\text{op}}).m = a_1.m.a_2$$

(2) M 可自然地视为右 A^e -模:

$$m.(a_1 \otimes a_2^{\text{op}}) = a_2.m.a_1$$

反之, 左 (右) A^e -模也可视为双 A -模。

证明. 容易验证。 □

特别地如果 M, N 都是双 A -模, 那么考虑平衡张量积 $M \otimes_{A^e} N$, 它的双 A -模结构具体如下:

$$a.(m \otimes n) = (a.m) \otimes n = m \otimes (n.a)$$

$$(m \otimes n).b = m \otimes (n.b) = (b.m) \otimes n$$

对于任何 $m \in M, n \in N, a, b \in A$ 成立。

定义 1.1.4. (余中心 *cocenter*) 对于双 A -模 M , 称双 A -模

$$M \otimes_{A^e} A$$

为 M 的余中心 (*cocenter*)。

容易看出, 对任意的 $m \in M, a \in A$, 在余中心 $M \otimes_{A^e} A$ 当中, 成立

$$(m.a) \otimes 1 = m \otimes (a.1) = m \otimes a = m \otimes (1.a) = (a.m) \otimes 1$$

从而 $(m.a - a.m) \otimes 1 = 0$. 事实上, M 的余中心具有如下结构:

性质 1.1.5. 对于双 A -模 M , 则有如下双 A -模同构

$$M \otimes_{A^e} A \cong M / \{(m.a - a.m) | a \in A, m \in M\}$$

证明. 考虑如下的双 A -模链复形

$$\partial_{\bullet} : A \otimes A \otimes A \rightarrow A \otimes A \rightarrow A \rightarrow 0$$

其中

$$\partial : a_1 \otimes a_2 \otimes a_3 \mapsto a_1 a_2 \otimes a_3 - a_1 \otimes a_2 a_3$$

$$a_1 \otimes a_2 \mapsto a_1 a_2$$

容易验证 $\partial^2=0$ (由 A 的结合性), 从而 ∂_{\bullet} 为双 A -模链复形。并且显然 $\partial : A \otimes A \rightarrow A$ 是满同态。

断言链复形 ∂_\bullet 为正合 (exact) 的。事实上, ∂_\bullet 到其自身的恒等链映射与零链映射是链同伦的。我们构造如下的链同伦 h_\bullet :

$$\begin{aligned} h : a_1 &\mapsto 1 \otimes a_1 \\ a_1 \otimes a_2 &\mapsto 1 \otimes a_1 \otimes a_2 \end{aligned}$$

容易验证, 对于任意的 $\varphi = a_1 \otimes a_2 \in A \otimes A$, 成立

$$\begin{aligned} (\partial h + h \partial) \varphi &= (\partial h + h \partial)(a_1 \otimes a_2) \\ &= \partial(1 \otimes a_1 \otimes a_2) + h(a_1 a_2) \\ &= a_1 \otimes a_2 - 1 \otimes a_1 a_2 + 1 \otimes a_1 a_2 \\ &= a_1 \otimes a_2 = \varphi \end{aligned}$$

从而对于 $\varphi \in A \otimes A$, 如果 $\partial \varphi = 0$, 那么

$$\varphi = (\partial h + h \partial) \varphi = \partial(h \varphi)$$

这说明链复形 ∂_\bullet 在 $A \otimes A$ 处正合, 因此 ∂_\bullet 是正合的。

接下来, 将函子 $M \otimes_{A^e} -$ 作用于链复形 ∂_\bullet , 得到如下的双 A -模链复形:

$$M \otimes_{A^e} \partial_\bullet : M \otimes A \rightarrow M \rightarrow M \otimes_{A^e} A \rightarrow 0$$

由张量函子的右正合性, 上述链复形也是正合的。其中注意到双 A -模同构

$$\begin{aligned} M \otimes_{A^e} (A \otimes A \otimes A) &\cong M \otimes A \\ m \otimes (a_1 \otimes a_2 \otimes a_3) &\mapsto (a_3.m.a_1) \otimes a_2 \end{aligned}$$

以及双 A -模同构

$$\begin{aligned} M \otimes_{A^e} (A \otimes A) &\cong M \\ m \otimes (a_1 \otimes a_2) &\mapsto a_2.m.a_1 \end{aligned}$$

于是正合列 $M \otimes_{A^e} \partial_\bullet$ 的边界映射有如下具体表达式:

$$\begin{aligned} M \otimes_{A^e} \partial : M \otimes A &\rightarrow M \\ m \otimes A &\mapsto m.a - a.m \end{aligned}$$

从而由正合性, 易知

$$M \otimes_{A^e} A \cong M / \{(m.a - a.m) | a \in A, m \in M\}$$

□

可见, M 的余中心无非是商掉 M 当中“非交换的部分”所得到的“交换的部分”, 如此望文生义。例如, 如果 A 为交换 K -代数, 那么 A 本身作为双 A -模, 其余中心为 A 本身。

1.2 Hochschild 同调

定义 1.2.1. (*Hochschild* 同调)

对于双 A -模 M , 以及非负整数 n , 记

$$H_n(A, M) := \text{Tor}_n^{A^e}(M, A)$$

称为 M 的第 n 个 *Hochschild* 同调。特别地, 我们记

$$\text{HH}_n(A) := H_n(A, A)$$

由定义以及导出函子的基础知识, 容易知道双 A -模 M 的第 0 个 Hochschild 同调

$$H_0(A, M) = M \otimes_{A^e} A = M / \{(m.a - a.m) | a \in A, m \in M\}$$

正是 M 的余中心。注意 Hochschild 同调一般并不是环, 仅仅能保证它是双 A -模。

具体地, 由导出函子的定义, 我们采用投射消解 (projective resolution) 来计算 Hochschild 同调。若双 A -模链复形

$$P_\bullet \rightarrow A := \dots \rightarrow P_3 \rightarrow P_2 \rightarrow P_1 \rightarrow P_0 \rightarrow A \rightarrow 0$$

为双 A -模 A 的投射消解 (正合, 并且每个 $P_i (i \geq 0)$ 作为 K -模是投射的), 那么

$$H_n(A, M) \cong H_n(M \otimes_{A^e} P_\bullet)$$

由同调代数的事实, 它与投射消解 P_\bullet 的选取无关。

事实上 Hochschild 同调可以与空间上的微分形式类比。作为一个具体计算例子, 我们考虑 \mathbb{C} 上的 n 元多项式代数

$$A := \mathbb{C}[x^1, x^2, \dots, x^n]$$

注意到 A 作为 \mathbb{C} -代数是交换的, 从而 $A = A^{\text{op}}$. 我们记

$$A^{\text{op}} = \mathbb{C}[y^1, y^2, \dots, y^n] \quad A^e = \mathbb{C}[x^1, x^2, \dots, x^n; y^1, y^2, \dots, y^n]$$

性质 1.2.2. 考虑 \mathbb{C} -代数 $A := \mathbb{C}[x^1, x^2, \dots, x^n]$, 则其第 k 个 *Hochschild* 同调

$$\text{HH}_k(A) \cong \Omega_A^k := A \otimes \bigwedge^k (\mathbb{C}^n)$$

是以 A 为系数的 k -形式。

证明. 我们给出 A 的投射消解, 比如众所周知的 Koszul 消解

$$\mathcal{K}_A \rightarrow A \rightarrow 0$$

具体地, 引入 n 个新的独立变元 $\eta^1, \eta^2, \dots, \eta^n$ (视为复线性空间 \mathbb{C}^n 的一组基), 考虑环

$$\mathcal{K} := \frac{A^e[\eta^1, \eta^2, \dots, \eta^n]}{\{(\eta^i \eta^j + \eta^j \eta^i) | i \neq j\}} = A^e \otimes \bigwedge^*(\mathbb{C}^n)$$

为以 A^e 为系数的外代数。

注意 \mathcal{K} 有自然的分次:

$$\deg \eta^i = 1 \quad \deg x^i = \deg y^i = \deg 1 = 0$$

记 \mathcal{K}_l 为 \mathcal{K} 的 l 次分量 ($0 \leq l \leq n$), 即

$$\mathcal{K}_l = \bigoplus_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_l \leq n} A^e \eta^{i_1} \wedge \eta^{i_2} \wedge \dots \wedge \eta^{i_l} = A^e \otimes \bigwedge^l(\mathbb{C}^n)$$

此时 $K = \mathbb{C}$ 是域, 因此 \mathcal{K} (作为 K -模, 即复线性空间) 的投射性显然。我们定义 Koszul 复形 $(\mathcal{K}_A, \partial)$ 如下:

$$\mathcal{K}_A : \dots \xrightarrow{\partial} \mathcal{K}_n \xrightarrow{\partial} \mathcal{K}_{n-1} \xrightarrow{\partial} \dots \xrightarrow{\partial} \mathcal{K}_1 \xrightarrow{\partial} \mathcal{K}_0$$

其中边缘算子 ∂ (首先是 A^e -模同态) 满足

$$\partial \eta^i = x^i - y^i$$

以及与外微分相同的莱布尼茨法则: 对任意 $\omega \in \mathcal{K}$, 成立

$$\partial(\eta^i \wedge \omega) = \partial \eta^i \wedge \omega - \eta^i \wedge \partial \omega$$

再考虑连接映射

$$\begin{aligned} \varepsilon : \mathcal{K}_0 = A^e &\rightarrow A \\ x^i &\mapsto x^i \\ y^i &\mapsto x^i \end{aligned}$$

则众所周知, Koszul 复形

$$\mathcal{K}_A \xrightarrow{\varepsilon} A \rightarrow 0$$

为 A 的投射消解 (证明从略)。我们以此计算 $\mathrm{HH}^\bullet(A)$ 。我们注意到以下两个简单事实:

其一: 对任何 $1 \leq l \leq n$, 成立双 A -模同构

$$A \otimes_{A^e} \mathcal{K}_l = A \otimes_{A^e} A^e \otimes \bigwedge^l(\mathbb{C}^n) \cong A \otimes \bigwedge^l(\mathbb{C}^n)$$

其二：函子 $A \otimes_{A^e} -$ 作用于 Koszul 复形 \mathcal{K}_A 之后，成立

$$A \otimes_{A^e} \partial = 0$$

这是因为，对于任意 $f \in A$ ，在 $A \otimes_{A^e} A^e$ 当中总成立

$$f \otimes x^i = x^i f \otimes 1 = f x^i \otimes 1 = f \otimes (x^i)^{\text{op}} = f \otimes y^i$$

因此

$$f \otimes (x^i - y^i) = 0 \in A \otimes_{A^e} A^e$$

从而由 ∂ 的定义，容易看出 $A \otimes_{A^e} \partial = 0$.

综上两方面，直接计算之，

$$\begin{aligned} \text{HH}_k(A) &= H_k(A \otimes_{A^e}^L A) \\ &= H_k(A \otimes_{A^e} \mathcal{K}_A) \\ &= A \otimes_{A^e} \mathcal{K}_k \\ &= A \otimes \bigwedge^k (\mathbb{C}^n) \\ &= \Omega_A^k \end{aligned}$$

从而得证。 □

事实上对于一般的含么结合 K -代数 A ， $\text{HH}_\bullet(A)$ 扮演了“微分形式”的角色。这是 Hochschild 同调的一种几何解释。

对于一般的 A ， A 作为双 A -模，由一种典范的投射消解，称之为 **Bar-复形**：

定义 1.2.3. (*Bar-复形*)

对于含么结合 K -代数 A ，定义以下双 A -模链复形

$$\cdots \rightarrow B_2 A \xrightarrow{b} B_1 A \xrightarrow{b} B_0 A \xrightarrow{b} A \rightarrow 0$$

如下：

$$B_n A := A \otimes A^{\otimes n} \otimes A \quad (n \geq 0)$$

$$b : a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n \mapsto \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes (a_k a_{k+1}) \otimes \cdots \otimes a_n$$

称之为 **Bar-复形**。

首先容易验证 $b^2 = 0$, 从而 $B_\bullet A \xrightarrow{b} A \rightarrow 0$ 确实是链复形。对于 $n \geq 1$, 具体验证如下:

$$\begin{aligned}
b^2(a_0 \otimes a_1 \otimes \dots \otimes a_n) &= b \left(\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k a_0 \otimes a_1 \otimes \dots \otimes (a_k a_{k+1}) \otimes \dots \otimes a_n \right) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k b(a_0 \otimes a_1 \otimes \dots \otimes (a_k a_{k+1}) \otimes \dots \otimes a_n) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \left[\sum_{l=0}^{k-2} (-1)^l a_0 \otimes \dots \otimes (a_l a_{l+1}) \otimes \dots \otimes (a_k a_{k+1}) \otimes \dots \otimes a_n \right. \\
&\quad + (-1)^{k-1} a_0 \otimes \dots \otimes (a_{k-1} a_k a_{k+1}) \otimes \dots \otimes a_n \\
&\quad + (-1)^k a_0 \otimes \dots \otimes (a_k a_{k+1} a_{k+2}) \otimes \dots \otimes a_n \\
&\quad \left. - \sum_{l=k+2}^{n-1} (-1)^l a_0 \otimes \dots \otimes (a_k a_{k+1}) \otimes \dots \otimes (a_l a_{l+1}) \otimes \dots \otimes a_n \right] \\
&= \sum_{\substack{0 \leq k < l \leq n-1 \\ l-k \geq 2}} \left(-(-1)^{k+l} + (-1)^{k+l} \right) a_0 \otimes \dots \otimes (a_k a_{k+1}) \otimes \dots \otimes (a_l a_{l+1}) \otimes \dots \otimes a_n \\
&\quad + \sum_{0 \leq k \leq n-2} \left((-1)^{2k+1} + (-1)^{2k} \right) a_0 \otimes \dots \otimes (a_k a_{k+1} a_{k+2}) \otimes \dots \otimes a_n \\
&= 0
\end{aligned}$$

从而验证完毕。

我们可以把 $a_0 \otimes \dots \otimes a_n$ 想象为直线上依次排列的 $n+1$ 个质点, 将算子 b 想象为相邻质点两两“碰撞”。

性质 1.2.4. 记号同之前, 则 Bar -复形

$$B_\bullet A \rightarrow A \rightarrow 0$$

是 A 的投射消解。

证明. 对任意 $n \geq 0$, $B_n A = A \otimes A^{\otimes n} \otimes A$ 是投射 K -模 (这是因为由最初的假定, A 是投射 K -模, 从而其张量积也投射) 于是我们只需再验证该链复形是正合的。

为此, 我们构造链同伦

$$\begin{aligned}
h : B_{n-2} A &\rightarrow B_{n-1} A \quad (n \geq 1, B_{-1} A = A) \\
a_0 \otimes \dots \otimes a_n &\mapsto 1 \otimes a_0 \otimes \dots \otimes a_n
\end{aligned}$$

只需验证 $hb + bh = 1$, 之后与性质 1.1.5 的证明类似。

注意到对于任意 $n \geq 0$, 成立

$$bh(a_0 \otimes \dots \otimes a_n) = b(1 \otimes a_0 \otimes \dots \otimes a_n)$$

$$\begin{aligned}
&= a_0 \otimes \dots \otimes a_n - \sum_{k=0}^{n-1} 1 \otimes a_0 \otimes \dots \otimes (a_k a_{k+1}) \otimes \dots \otimes a_n \\
&= a_0 \otimes \dots \otimes a_n - 1 \otimes b(a_0 \otimes \dots \otimes a_n) \\
&= (1 - hb)a_0 \otimes \dots \otimes a_n
\end{aligned}$$

因此 $bh + hb = 1$ ，证毕。 □

定义 1.2.5. 设 M 为双 A -模，定义 **Hochschild 链复形**

$$C_\bullet(A, M) := M \otimes_{A^e} B_\bullet A$$

$$\dots M \otimes A^{\otimes 3} \rightarrow M \otimes A^{\otimes 2} \rightarrow M \otimes A \rightarrow M$$

方便起见，该链复形的边缘算子仍记作 b 。

则易知 M 的 Hochschild 同调无非是 Hochschild 链复形的同调：

$$H_n(A, M) = H_n(C_\bullet(A, M))$$

注意到有双 A -模同构

$$C_n(A, M) = M \otimes_{A^e} (A \otimes A^{\otimes n} \otimes A) \cong M \otimes A^{\otimes n}$$

在此同构意义下，容易验证 $C_\bullet(A, M)$ 的边缘算子 b 有如下显示表达：

对任意 $m \in M$ ，以及 $a_1, a_2, \dots, a_n \in A$ ，成立

$$\begin{aligned}
b(m \otimes (a_1 \otimes \dots \otimes a_n)) &= m \otimes_{A^e} (b(1 \otimes a_1 \otimes \dots \otimes a_n \otimes 1)) \\
&= m \otimes_{A^e} [a_1 \otimes \dots \otimes a_n \otimes 1 \\
&\quad + \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k 1 \otimes a_1 \otimes \dots \otimes (a_k a_{k+1}) \otimes \dots \otimes a_n \otimes 1 \\
&\quad + (-1)^n 1 \otimes a_1 \otimes \dots \otimes a_n] \\
&= (m \cdot a_1) \otimes a_2 \otimes \dots \otimes a_n \\
&\quad + \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k m \otimes a_1 \otimes \dots \otimes (a_k a_{k+1}) \otimes \dots \otimes a_n \\
&\quad + (-1)^n (a_n \cdot m) \otimes a_1 \otimes \dots \otimes a_{n-1}
\end{aligned}$$

Hochschild 链复形的边缘算子的显式表达与 Bar-复形非常相似，从上式最右边的前两项可以看出；区别在于上式最右边的第三项。

注记 1.2.6. (*Hochschild* 同调的函子性) 若 $\varphi: A \rightarrow B$ 为 K -代数同态，那么 φ 自然诱导 K -模同态

$$\varphi: \text{HH}_\bullet(A) \rightarrow \text{HH}_\bullet(B)$$

自行去定义何为 K -代数同态。此注记表明, HH_\bullet 其实是从 K -代数范畴到 K -模范畴的一个函子。

1.3 Hochschild 上同调

对于双 A -模 M , 既然我们已经考虑余中心 $M \otimes_A A$, 那么我们自然也会去考虑 $\mathrm{Hom}_{A^e}(A, M)$. 我们称双 A -模 $\mathrm{Hom}_{A^e}(A, M)$ 为 M 的导出中心 (derived center)。

性质 1.3.1. (导出中心的结构) 对于双 A -模 M , 则有双 A -模同构

$$\mathrm{Hom}_{A^e}(A, M) \cong \{m \in M \mid a.m - m.a = 0 \ \forall a \in A\}$$

容易验证 $\{m \in M \mid a.m - m.a = 0 \ \forall a \in A\}$ 为 M 的双 A -子模。粗俗地说, 该子模由 “与 A 中所有元素交换” 的元素构成, 故谓之 “中心”。

证明. 对于任意的 $\varphi \in \mathrm{Hom}_{A^e}(A, M)$ 以及 $a \in A$, 则 $\varphi(a)$ 的取值由 $\varphi(1)$ 完全决定:

$$\varphi(a) = \varphi(a.1) = a.\varphi(1)$$

而另一方面,

$$\varphi(a) = \varphi(1.a) = \varphi(1).a$$

从而有 $a.\varphi(1) = \varphi(1).a$. 于是我们可以构造如下双 A -模同态:

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{A^e}(A, M) &\rightarrow \{m \in M \mid a.m - m.a = 0 \ \forall a \in A\} \\ \varphi &\mapsto \varphi(1) \end{aligned}$$

容易验证该模同态为同构。证毕。 □

然后我们考虑 $\mathrm{Hom}(-, M)$ 的导出函子, 自然地去定义如下:

定义 1.3.2. (*Hochschild* 上同调)

对于双 A -模 M , 以及 $n \geq 0$, 定义 M 的第 n 个 *Hochschild* 上同调

$$H^n(A, M) = \mathrm{Ext}_{A^e}^n(A, M)$$

特别地, 我们记

$$H^n(A) = \mathrm{Ext}_{A^e}^n(A, A)$$

由定义知, M 的第 0 个 Hochschild 上同调为 $\text{Hom}_{A^e}(A, M)$, 是 M 的导出中心。回顾 Bar-复形, 我们考虑如下的 **Hochschild 上链复形**

$$C^\bullet(A, M) = \text{Hom}_{A^e}(B_\bullet A, M)$$

该上链复形的微分算子 ∂ 由 Bar-复形 $B_\bullet A$ 的边缘算子 b 所诱导。则 M 的 Hochschild 上同调满足

$$H^n(A, M) = H^n(C^\bullet(A, M), \partial) = H^n(\text{Hom}_{A^e}(B_\bullet A, M), \partial)$$

注意有自然的双 A -模同构

$$C^n(A, M) = \text{Hom}_{A^e}(A \otimes A^{\otimes n} \otimes A, M) \cong \text{Hom}(A^{\otimes n}, M)$$

(即取值于 M 的 n 重 K -线性映射) 于是对于任意的 $\varphi \in C^n(A, M) = \text{Hom}(A^{\otimes n}, M)$, 容易知道 $\partial\varphi \in \text{Hom}(A^{\otimes n+1}, M)$ 具有如下显式表达: 对任意 $a_0, a_1, \dots, a_m \in A$,

$$\begin{aligned} \partial\varphi(a_0, a_1, \dots, a_n) &= a_0 \cdot \varphi(a_1, a_2, \dots, a_n) \\ &\quad - \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \varphi(a_0, \dots, (a_k a_{k+1}), \dots, a_n) \\ &\quad - (-1)^n \varphi(a_0, a_1, \dots, a_{n-1}) \cdot a_n \end{aligned}$$

接下来讨论 Hochschild 上同调的几何意义。我们已经知道第 0 个 Hochschild 上同调为 M 的导出中心; 现在我们看 $H^1(A, M)$, 我们将发现它是 A 的取值于 M 的外导子。

回顾导子 (derivation) 的概念如下:

定义 1.3.3. (导子) 对于双 A -模 M , K -线性映射

$$D : A \rightarrow M$$

称为 A 的取值于 M 的导子 (derivation), 如果对任意的 $a_1, a_2 \in A$, 成立

$$D(a_1 a_2) = D(a_1) \cdot a_2 + a_1 \cdot D(a_2)$$

对于 $m \in M$ 我们定义

$$\begin{aligned} \text{ad}_m : A &\rightarrow M \\ a &\mapsto [m, a] := m \cdot a - a \cdot m \end{aligned}$$

则容易验证 ad_m 为 A 的取值于 M 的导子, 称形如这样的导子为**内导子** (inner derivation)。

我们记

$$\text{Der}(A, M) := \{D : A \rightarrow M \mid D \text{ 为导子}\}$$

$$\text{Inn}(A, M) := \{\text{ad}_m \mid m \in M\} \subseteq \text{Der}(A, M)$$

注意 $\text{Inn}(A, M)$ 与 $\text{Der}(A, M)$ 都有显然的 K -模结构，且前者是后者的 K -子模。

性质 1.3.4. ($H^1(A, M)$ 的结构)

对于双 A -模 M ，成立

$$H^1(A, M) \cong \frac{\text{Der}(A, M)}{\text{Inn}(A, M)}$$

我们称上式右边的集合当中的元素为 A 的取值于 M 的**外导子** (outer derivation)。

证明. 只需考虑 Hochschild 上链复形

$$C^0(A, M) \xrightarrow{\partial^0} C^1(A, M) \xrightarrow{\partial^1} C^2(A, M) \rightarrow \cdots$$

我们只需具体计算之。对于 $\varphi \in C^1(A, M) \cong \text{Hom}(A, M)$ ，则 $\partial^1 \varphi \in C^2(A, M) \cong \text{Hom}(A^{\otimes 2}, M)$ 满足：对任意 $a_1, a_2 \in A$ ，成立

$$\partial^1 \varphi(a_1, a_2) = a_1 \cdot \varphi(a_2) - \varphi(a_1 a_2) + \varphi(a_1) \cdot a_2$$

可见 $\varphi \in \ker \partial^1$ 当且仅当 $\varphi \in \text{Der}(A, M)$ 。也就是说 $\ker \partial^1 = \text{Der}(A, M)$ 。

另一方面，对于 $m \in C^0(A, M) \cong M$ ，以及 $a \in A$ ，成立

$$(\partial^0 m)(a) = a \cdot m - m \cdot a = -\text{ad}_m(a)$$

因此 $\ker \partial^0 \cong \text{Inn}(A, M)$ 。从而

$$H^1(A, M) = \frac{\ker \partial^1}{\text{Im } \partial^0} \cong \frac{\text{Der}(A, M)}{\text{Inn}(A, M)}$$

□

特别地，当 $M = A$ 时，

$$\text{HH}^1(A) = \text{Der}(A, A) / \text{Inn}(A, A)$$

注意到 $\text{Der}(A, A)$ 上面还有更多的结构：对于 $\forall D_1, D_2 \in \text{Der}(A, A)$ ，定义

$$[D_1, D_2] := D_1 \circ D_2 - D_2 \circ D_1 : A \rightarrow A$$

容易验证 $[D_1, D_2]$ 仍然为 A 的导子，并且 $[-, -]$ 为 $\text{Der}(A, A)$ 上的李括号 (Lie bracket)。

另外容易验证

$$[\text{Der}(A, A), \text{Inn}(A, A)] \subseteq \text{Inn}(A, A)$$

具体地, 对于 $D \in \text{Der}(A, A)$ 以及 $m \in M$, 成立

$$[D, \text{ad}_m] = \text{ad}_{D(m)}$$

也就是说 $\text{Inn}(A, A)$ 是 $\text{Der}(A, A)$ 的理想。于是 $[-, -]$ 诱导了 $\text{HH}^1(A) = \frac{\text{Der}(A, A)}{\text{Inn}(A, A)}$ 上的李括号结构。

如果 A 是交换 K -代数, 则 $\text{Inn}(A, A) = 0$ 。于是

$$\text{HH}^1(A) \cong \text{Der}(A, A)$$

可被认为是“切向量场”(此时 A 被认为是“函数环”)。

我们再去考虑 $H^2(A, M)$. 对于任意的

$$\varphi \in C^2(A, M) = \text{Hom}(A^{\otimes 2}, M)$$

则对 $a_0, a_1, a_2 \in A$, 成立

$$\partial\varphi(a_0, a_1, a_2) = a_0 \cdot \varphi(a_1, a_2) - \varphi(a_0 a_1, a_2) + \varphi(a_0, a_1 a_2) - \varphi(a_0, a_1) \cdot a_2$$

引理 1.3.5. 对于双 A -模 M , 以及 $\varphi \in C^2(A, M) = \text{Hom}(A^{\otimes 2}, M)$, 我们令

$$\hat{A} := A \oplus M$$

并赋以如下的 K -代数结构: 对于任意 $a_1, a_2 \in A$ 以及 $m_1, m_2 \in M$, 规定 \hat{A} 的乘法 $\hat{\bullet}_\varphi$ 为

$$(a_1 \oplus m_1) \hat{\bullet}_\varphi (a_2 \oplus m_2) := a_1 a_2 \oplus [a_1 \cdot m_2 + m_1 \cdot a_2 + \varphi(a_1, a_2)]$$

那么 $(\hat{A}, \hat{\bullet}_\varphi)$ 为结合代数, 当且仅当 $\partial\varphi = 0$ 。

证明. 这是简单的计算验证。对于任意的 $a_0, a_1, a_2 \in A$ 以及 $m_0, m_1, m_2 \in M$, 直接计算之,

$$\begin{aligned} & [(a_0 \oplus m_0) \hat{\bullet}_\varphi (a_1 \oplus m_1)] \hat{\bullet}_\varphi (a_2 \oplus m_2) \\ &= a_0 a_1 a_2 \oplus [a_0 a_1 \cdot m_2 + a_0 \cdot m_1 \cdot a_2 + m_0 \cdot a_1 a_2 + \varphi(a_0, a_1) \cdot a_2 + \varphi(a_0 a_1, a_2)] \end{aligned}$$

以及

$$\begin{aligned} & (a_0 \oplus m_0) \hat{\bullet}_\varphi [(a_1 \oplus m_1) \hat{\bullet}_\varphi (a_2 \oplus m_2)] \\ &= a_0 a_1 a_2 \oplus [a_0 a_1 \cdot m_2 + a_0 \cdot m_1 \cdot a_2 + m_0 \cdot a_1 a_2 + a_0 \cdot \varphi(a_1, a_2) + \varphi(a_0, a_1 a_2)] \end{aligned}$$

因此 $\hat{\bullet}_\varphi$ 满足结合性, 当且仅当

$$\varphi(a_0, a_1) \cdot a_2 + \varphi(a_0 a_1, a_2) = a_0 \cdot \varphi(a_1, a_2) + \varphi(a_0, a_1 a_2)$$

而此式等价于 $\partial\varphi = 0$ 。 □

注意到在 \hat{A} 当中, 对任意的 $m_1, m_2 \in M$, 以及任意 $\varphi \in C^2(A, M)$, 总有 $m_1 \hat{\bullet}_\varphi m_2 = 0$. 于是我们不妨将 “ $A \oplus M$ ” 当中的 “ M ” 理解为 “一阶小量”。我们考虑 $\varphi = 0$ 时 $\hat{A}_0 := A \oplus M$ 的代数结构

$$(a_1 \oplus m_1) \bullet (a_2 \oplus m_2) := a_1 a_2 \oplus (a_1 \cdot m_2 + m_1 \cdot a_2)$$

显然 (\hat{A}_0, \bullet) 为结合代数。若 $\partial\varphi = 0$, 则结合代数 $(\hat{A}, \hat{\bullet}_\varphi)$ 为 (\hat{A}_0, \bullet) 的一阶形变, 而 φ 为其 “形变参数”。

从而 M 的第 2 个 Hochschild 上同调

$$H^2(A, M) \cong \frac{\{\varphi | (\hat{A}, \hat{\bullet}_\varphi) \text{ 是结合代数}\}}{\text{Im}(\partial : C^1(A, M) \rightarrow C^2(A, M))}$$

商掉的东西 ($\text{Im } \partial$) 为形如以下的一类特殊的一阶形变:

$$\begin{aligned} \varphi_f : A \otimes A &\rightarrow M \\ a_1 \otimes a_2 &\mapsto a_1 \cdot f(a_2) + f(a_1) \cdot a_2 - f(a_1 a_2) \end{aligned}$$

其中 $f \in C^1(A, M) = \text{Hom}(A, M)$, $\varphi_f = \partial f$.

Hochschild 上同调与 Hochschild 同调两者之间有如下自然的配对:

定义 1.3.6. 设 M, N 为双 A -模, 则自然有如下配对:

$$C^n(A, M) \otimes C_n(A, N) \rightarrow N \otimes_{A^e} M$$

定义为: 对任意 $f \in C^n(A, M) = \text{Hom}(A^{\otimes n}, M)$ 以及任意 $y \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n \in C_n(A, N) = N \otimes A^{\otimes n}$, 有

$$(f, y \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n) \mapsto y \otimes f(a_1, \dots, a_n) \in N \otimes_{A^e} M$$

其中任意 $y \in N$, 以及 $a_1, \dots, a_n \in A$.

容易验证, 该配对自然诱导了

$$H^n(A, M) \otimes H_n(A, N) \rightarrow N \otimes_{A^e} M$$

这是容易发现的 (先限制, 再下降, 下降的良好性容易说明。)

特别地, 当 $M = A, N = A^*$ (其中 $A^* := \text{Hom}(A, K)$) 时, 我们有双线性函数

$$H^n(A, A) \otimes H_n(A, A^*) \rightarrow A^* \otimes_{A^e} A \xrightarrow{\text{ev}} K$$

我们考察一个 Hochschild 上同调的具体算例。

性质 1.3.7. 若 $A = \mathbb{C}[x^1, \dots, x^n]$ 为 \mathbb{C} 上的 n 元多项式环, 则

$$\mathrm{HH}^k(A) \cong \mathrm{Hom}\left(\bigwedge^k(\mathbb{C}^n), A\right)$$

证明. 对于这个特例, 采用 Koszul 复形计算更佳简便. 有关记号同性质 1.2.2 的证明过程. 考虑 Koszul 复形

$$\mathcal{K}_A : \dots \xrightarrow{\partial} A^e \otimes \bigwedge^{k+1}(\mathbb{C}^n) \xrightarrow{\partial} A^e \otimes \bigwedge^k(\mathbb{C}^n) \xrightarrow{\partial} A^e \otimes \bigwedge^{k-1}(\mathbb{C}^n) \xrightarrow{\partial} \dots$$

然后将函子 $\mathrm{Hom}_{A^e}(-, A)$ 作用于之上. 注意到有 \mathbb{C} -线性同构

$$\begin{aligned} & \mathrm{Hom}_{A^e}\left(A^e \otimes \bigwedge^k(\mathbb{C}^n), A\right) \\ & \cong \mathrm{Hom}\left(\bigwedge^k(\mathbb{C}^n), \mathrm{Hom}_{A^e}(A^e, A)\right) \\ & \cong \mathrm{Hom}\left(\bigwedge^k(\mathbb{C}^n), A\right) \end{aligned}$$

此外再注意到, 上链复形 $\mathrm{Hom}_{A^e}(\mathcal{K}_A, A)$ 的微分算子 $d := \mathrm{Hom}_{A^e}(\partial, A) = 0$. 这是因为对于 $\varphi \in \mathrm{Hom}_{A^e}\left(A^e \otimes \bigwedge^k(\mathbb{C}^n), A\right)$, $\omega \in \bigwedge^{k+1}(\mathbb{C}^n)$ 以及 $f \in A^e$, 成立

$$d\varphi(f \otimes \omega) = \varphi(\partial(f \otimes \omega))$$

回顾 Koszul 复形边缘算子运算规则

$$\partial : \eta^i \mapsto x^i - y^i \in A^e$$

又由于 φ 为 A^e -模同态, 从而对于任意 $\tilde{\omega} \in \bigwedge^k(\mathbb{C}^n)$, 成立

$$\varphi(x^i \otimes \tilde{\omega}) = x^i \cdot \varphi(1 \otimes \tilde{\omega}) = \varphi(1 \otimes \tilde{\omega}) \cdot x^i = \varphi((x^i)^{\mathrm{op}} \otimes \tilde{\omega}) = \varphi(y^i \otimes \tilde{\omega})$$

也就是说 $\varphi((x^i - y^i) \otimes \tilde{\omega}) = 0$. 由此可见 $d = 0$. 综上可知

$$\mathrm{HH}^k(A) \cong \mathrm{Hom}\left(\bigwedge^k(\mathbb{C}^n), A\right)$$

□

注意到 $\mathrm{Hom}\left(\bigwedge^k(\mathbb{C}^n), A\right)$ 之中的元素形如

$$\sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} f_{i_1 \dots i_k} \partial_{i_1} \wedge \dots \wedge \partial_{i_k}$$

回顾 $\mathrm{HH}_\bullet(A)$ 中的元素可被认为是“微分形式”, 可见 $\mathrm{HH}^\bullet(A)$ 中的元素则是“多重切向量场”。

1.4 约化 Bar 复形

如果 $K \hookrightarrow A$ 为嵌入, 那么我们可以更加方便地计算 Hochschild (上) 同调:

定义 1.4.1. (约化 Bar-复形) (*reduced Bar-complex*)

对于 K -代数 A , 如果 $K \hookrightarrow A$, 那么考虑 K -模

$$\bar{A} := A/K$$

我们定义如下的约化 Bar-复形 $(\bar{B}_\bullet A, b)$:

$$\bar{B}_n A := A \otimes \bar{A}^{\otimes n} \otimes A \quad \forall i \geq 0$$

边缘算子 $b: \bar{B}_n A \rightarrow \bar{B}_{n-1} A$ 如下定义:

$$\begin{aligned} b(a_0 \otimes (\bar{a}_1 \otimes \cdots \otimes \bar{a}_n) \otimes a_{n+1}) &:= (a_0 a_1) \otimes (\bar{a}_2 \otimes \cdots \otimes \bar{a}_n) \otimes a_{n+1} \\ &+ \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^i a_0 \otimes (\bar{a}_1 \otimes \cdots \otimes (\bar{a}_i \bar{a}_{i+1}) \otimes \cdots \otimes \bar{a}_n) \otimes a_{n+1} \\ &+ (-1)^n a_0 \otimes (\bar{a}_1 \otimes \cdots \otimes \bar{a}_{n-1}) \otimes (a_n a_{n+1}) \end{aligned}$$

注意到 $\bar{B}_\bullet A$ 是 $B_\bullet A$ 的商模:

$$\bar{B}_n A = \frac{B_n A}{\{a_0 \otimes (a_1 \otimes \cdots \otimes a_{i-1} \otimes 1 \otimes a_{i+1} \otimes \cdots \otimes a_n) \otimes a_{n+1}\}}$$

容易发现约化 Bar-复形的“ b ”正是 Bar-复形的 b . 但是我们要验证 b 的良好性, 即与代表元选取无关。这是容易验证的。于是我们得到以下链复形:

$$\bar{B}_\bullet A \rightarrow A \rightarrow 0$$

与之前 Bar-复形完全类似, 我们容易验证此复形也是正合的。只需构造同伦算子

$$\begin{aligned} h: \bar{B}_{n-1} A &\rightarrow \bar{B}_n A \\ a_0 \otimes (\bar{a}_1 \otimes \cdots \otimes \bar{a}_{n-1}) \otimes a_n &\mapsto 1 \otimes (\bar{a}_0 \otimes \bar{a}_1 \otimes \cdots \otimes \bar{a}_n) \otimes a_{n+1} \end{aligned}$$

验证 $bh + hb = 1$ 即可。

定义 1.4.2. (约化 Hochschild (上) 链复形)

对于双 A -模 M ，我们令

$$\begin{aligned}\overline{C}_\bullet(A, M) &:= M \otimes_{A^e} \overline{B}_\bullet A \cong M \otimes \overline{A}^{\otimes \bullet} \\ \overline{C}^\bullet(A, M) &:= \operatorname{Hom}_{A^e}(\overline{B}_\bullet A, M) \cong \operatorname{Hom}(\overline{A}^{\otimes \bullet}, M)\end{aligned}$$

称之为关于 M 的约化 Hochschild (上) 链复形。

事实上，约化 Hochschild (上) 链复形的 (上) 同调自然同构于 Hochschild (上) 同调——这是由以下代数引理保证的：

引理 1.4.3. 条件同上，则商映射

$$\pi_\bullet : C_\bullet(A, M) \twoheadrightarrow \overline{C}_\bullet(A, M)$$

所诱导的链映射

$$\pi_\bullet : (C_\bullet(A, M), d) \twoheadrightarrow (\overline{C}_\bullet(A, M), d)$$

为拟同构。

证明. 注意链映射 π_\bullet 为满态射，只需再证明其核复形

$$\ker \pi_\bullet$$

是正合的即可。我们承认之（似乎不太好证）。 \square

注意上述引理也适用于 Hochschild 上链复形的情形，完全类似，不再赘述。从而我们立刻有如下推论：

推论 1.4.4. 对于 K -代数 A ，如果 $K \hookrightarrow A$ 为嵌入，则有自然同构：

$$\begin{aligned}H_\bullet(A, M) &\cong H_\bullet(\overline{C}_\bullet(A, M)) \\ H^\bullet(A, M) &\cong H^\bullet(\overline{C}^\bullet(A, M))\end{aligned}$$

关于 (约化) Bar-复形，我们还有另一种理解方式：关于 A 的 (约化) Bar-复形是 A 与某个微分分次代数的自由乘积。

定义 1.4.5. (微分分次代数)

\mathbb{Z} -分次 K -代数

$$A := \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} A_n$$

称为微分分次代数 (*differential graded algebra*), 若它配以 K -线性算子 $d: A \rightarrow A$, 并且满足:

$$\begin{cases} d(A_n) \subseteq A_{n+1} & \forall n \in \mathbb{Z} \\ d^2 = 0 \\ d(\alpha\beta) = (d\alpha)\beta + (-1)^{\deg \alpha} \alpha(d\beta) & \forall \alpha, \beta \in A, \text{ 并且 } \alpha \text{ 是齐次元} \end{cases}$$

“ \mathbb{Z} -分次 K -代数”的定义将在后文 (定义2.2.1) 介绍。(其实大家都明白)

对于微分分次代数 (A, d) , 由于 A 的分次以及 $d^2 = 0$, 从而自然有上链复形

$$\cdots \rightarrow A_{-1} \xrightarrow{d} A_0 \xrightarrow{d} A_1 \rightarrow \cdots$$

我们将此上链复形也记为 (A, d) .

微分分次代数最直接的例子是, 对于光滑流形 X , 考虑 $A := \Omega^\bullet(X)$ 为 X 上的微分形式。 A 上的乘法即为微分形式的外积 \wedge , 微分结构即为外微分 d .

我们可以适当修改微分分次代数的定义, 将条件 “ $d(A_n) \subseteq A_{n+1}$ ” 改为 “ $d(A_n) \subseteq A_{n-1}$ ”, 此时的微分算子我们习惯记为 “ ∂ ”. 对于这样的微分分次代数 (A, ∂) , 它可以被视为链复形。

例子 1.4.6. 我们考虑如下 K -代数:

$$A := K[\varepsilon] := K \oplus K\varepsilon \oplus K\varepsilon^2 \oplus \cdots$$

其中 ε 为形式变量, 并且规定 $\deg \varepsilon = 1$, 由此诱导出 $K[\varepsilon]$ 的分次结构。其微分算子 ∂_ε 由以下诱导:

$$\partial_\varepsilon(1) = 0 \quad \partial_\varepsilon(\varepsilon) = 1$$

注意 $\deg \varepsilon = 1$, 按照微分代数的定义可计算出

$$\partial_\varepsilon(\varepsilon^2) = \partial_\varepsilon(\varepsilon)\varepsilon + (-1)^{\deg \varepsilon} \varepsilon \partial_\varepsilon(\varepsilon) = \varepsilon - \varepsilon = 0$$

一般地, 对于非负整数 n 我们有

$$\partial_\varepsilon(\varepsilon^n) = \begin{cases} 0 & n \text{ 为偶数} \\ \varepsilon^{n-1} & n \text{ 为奇数} \end{cases}$$

从而链复形 $(K[\varepsilon], \partial_\varepsilon)$:

$$\cdots \rightarrow K\varepsilon^4 \xrightarrow{0} K\varepsilon^3 \xrightarrow{1} K\varepsilon^2 \xrightarrow{0} K\varepsilon \xrightarrow{1} K \rightarrow 0$$

是正合的。其中 $1 : K\varepsilon^{2n+1} \rightarrow K\varepsilon^{2n}$ 将 ε^{2n+1} 映为 ε^{2n} 。

众所周知，对于两个 K -代数 A, B ，我们可以谈论它们的自由乘积（free product） $A * B$ 。若 $A = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} A_n$ 是微分分次代数，其微分算子为 d ，则容易知道 $A * B$ 自然也有微分分次代数结构：

$$\begin{cases} \deg b = 0 & \forall b \in B \\ \deg a = n & \forall a \in A_n \subseteq A \\ db = 0 & \forall b \in B \end{cases}$$

容易知道 $A * B$ 中的 N 次齐次元必形如以下元素的有限和：

$$b_1 a_1 b_2 a_2 \cdots b_m a_m b_{m+1} \quad (b_i \in B, a_i \in A_{n_i}, \sum_{i=1}^m n_i = N)$$

性质 1.4.7. 对于 K -代数 A ，则有链复形的同构

$$(B_\bullet A \rightarrow A, b) \cong (A * K[\varepsilon], \partial_\varepsilon)$$

其中 $(K[\varepsilon], \partial_\varepsilon)$ 为例子 1.4.6 当中的微分分次代数，视为链复形；同构映射为

$$\begin{aligned} \varphi_n : B_n A &\rightarrow (A * K[\varepsilon])_n \\ a_0 \otimes (a_1 \otimes \cdots \otimes a_n) \otimes a_{n+1} &\mapsto a_0 \varepsilon a_1 \varepsilon a_2 \cdots \varepsilon a_n \varepsilon a_{n+1} \end{aligned}$$

这给出了 Bar-复形的另一种理解方式。

证明. 容易验证 φ_n 为 K -模同构，且逆映射 φ_n^{-1} 由以下诱导：

$$\varepsilon^n \mapsto \underbrace{1 \varepsilon 1 \varepsilon 1 \cdots 1 \varepsilon 1}_{n \uparrow \varepsilon}$$

然后只需验证 $\varphi_\bullet : (B_\bullet \rightarrow A, b) \rightarrow (A * K[\varepsilon], \partial_\varepsilon)$ ：是链映射，也就是要验证交换关系 $\varphi \circ b = \partial_\varepsilon \circ \varphi$

$$\begin{array}{ccc} B_n A & \xrightarrow{b} & B_{n-1} A \\ \downarrow \varphi & & \downarrow \varphi \\ (K[\varepsilon] * A)_n & \xrightarrow{\partial_\varepsilon} & (K[\varepsilon] * A)_{n-1} \end{array}$$

而这容易验证，验证如下：

$$\begin{aligned} &\varphi \circ b(a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n \otimes a_{n+1}) \\ &= \varphi \left(\sum_{k=0}^n (-1)^k a_0 \otimes \cdots \otimes (a_k a_{k+1}) \otimes \cdots \otimes a_{n+1} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=0}^n (-1)^k a_0 \varepsilon a_1 \varepsilon \cdots \varepsilon a_{n+1} \\
&= \partial_\varepsilon (a_0 \varepsilon a_1 \varepsilon \cdots a_n \varepsilon a_{n+1}) \\
&= \partial_\varepsilon \circ \varphi(a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n \otimes a_{n+1})
\end{aligned}$$

□

我们还可以考虑 $(K[\varepsilon], \partial_\varepsilon)$ 的商代数 $K[\varepsilon]/\varepsilon^2$, 易知 $(K[\varepsilon]/\varepsilon^2, \partial_\varepsilon)$ 也构成微分分次代数, 从而也通过微分算子 ∂_ε 视为链复形。在此代数中, $\varepsilon^2 = 0$ 。

类似地, 我们可以给出约化 Bar-复形的另一种理解方式:

性质 1.4.8. 对于 K -代数 A , 则有链复形同构

$$(\bar{B}_\bullet A \rightarrow A, b) \cong (A * K[\varepsilon]/\varepsilon^2, \partial_\varepsilon)$$

只需注意到 $A * K[\varepsilon]/\varepsilon^2$ 当中的 n 次齐次元必形如以下元素的有限和:

$$a_0 \varepsilon a_1 \varepsilon \cdots a_n \varepsilon a_{n+1} \quad (a_i \in A)$$

证明. 完全类似。事实上此链复形同构映射由 $\varphi_n : B_n A \rightarrow (A * K[\varepsilon])_n$ 诱导, 其良定性由下式保证: 对任意 $1 \leq i \leq n$,

$$\begin{aligned}
&\varphi_n(a_0 \otimes \cdots \otimes a_{i-1} \otimes 1 \otimes a_{i+1} \otimes \cdots \otimes a_{n+1}) \\
&= a_0 \varepsilon a_1 \cdots a_{i-1} \varepsilon 1 \varepsilon a_{i+1} \cdots \varepsilon a_{n+1} \\
&= a_0 \varepsilon a_1 \cdots a_{i-1} 1 \varepsilon^2 a_{i+1} \cdots \varepsilon a_{n+1} \\
&= 0 \pmod{\varepsilon^2}
\end{aligned}$$

□

本节最后简单介绍以下 Hochschild (上) 同调与其它常见的 (上) 同调理论的关系。

例子 1.4.9. (群的上同调)

设 G 是一个群, $M \in \text{Rep}(G)$ 为群 G 的一个左 K -表示, 则有 G -模链复形

$$0 \rightarrow M \xrightarrow{\delta} C^1(G, M) \xrightarrow{\delta} C^2(G, M) \xrightarrow{\delta} \cdots$$

其中

$$C^n(G, M) := \text{Hom}(G^n, M) = \{f : G^n \rightarrow M\}$$

并且微分算子 δ 满足

$$\begin{cases} \delta(m)(g) = g.m - m \\ (\delta f)(g_0, g_1, \dots, g_n) = g_0.f(g_1, g_2, \dots, g_n) \\ \quad - \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k f(g_1, \dots, g_k g_{k+1}, \dots, g_n) \\ \quad - (-1)^n f(g_0, g_1, \dots, g_{n-1}) \end{cases}$$

容易验证 $\delta^2=0$. 此链复形的上同调

$$H^\bullet(G, M) := H^\bullet(C^\bullet(G, M), \delta)$$

称之为群的上同调 (*group cohomology*)

由 δ 的表达式容易看出, 群的上同调与 Hochschild 上同调有以下关系:

性质 1.4.10. 设 G 是一个群, M 为群 G 的一个左 K -模, 考虑群代数 $A := K[G]$, 于是 M 自然有左 A -模结构。那么有同构:

$$H^\bullet(G, M) \cong H^\bullet(K[G], M)$$

其中左边为群 G 关于 M 的上同调, 右边为群代数 $K[G]$ 关于 M 的 *Hochschild* 上同调。

注意 M 仅仅是左 $K[G]$ -模, 并没有双 $K[G]$ -模结构呀, 怎么谈论 Hochschild 上同调?

(强行规定 G 在 M 上的右作用恒为 1, 通过 K -线性扩张得到 $K[G]$ 在 M 的右作用, 这样就得到 M 的双 $K[G]$ -模结构了。)

证明. 注意到 $\text{Hom}(G^n, M)$ 中的元素可以自然地 K -线性延拓为 $\text{Hom}(K[G]^n, M)$ 中的元素, 这给出它们之间的同构。然后注意到 $A = K[G]$ 的 Hochschild 上链复形的微分算子的显式表达式, (见定义 1.3.2 的下方) 它与群上同调相应的上链复形的微分算子显式表达式 “相同”。细节从略。 \square

若熟悉李代数同调, 我们可以将李代数同调与其泛包络代数的 Hochschild 同调联系起来:

例子 1.4.11. (李代数同调) 对于李代数 \mathfrak{g} , M 为李代数 \mathfrak{g} 的一个左 K -模。令 $A := \mathcal{U}(\mathfrak{g})$ 为 \mathfrak{g} 的泛包络代数, 则 A 自然有左 A -模结构。(再通过某种 “比较平凡” 的方式给出右作用? 与上例类似?) 则有同构

$$H_\bullet(\mathcal{U}(\mathfrak{g}), M) \cong H_\bullet^{\text{Lie}}(\mathfrak{g}, M)$$

其中左边是 A 关于 M 的 *Hochschild* 同调, 右边是李代数同调。

并没有在此叙述李代数同调的定义。留给感兴趣者。此处从略。

事实上, 也可以考虑群的同调、李代数上同调, 它们也有对应的 Hochschild 同调、上同调。

1.5 Connes 复形 $C_\bullet^\lambda(A)$

与之前一样，我们仍假设 K 为特征零的含么交换环， A 为 K -代数，且作为 K -模是投射的。不过，在从本节开始我们再新增一条假定：

$$\mathbb{Q} \hookrightarrow K$$

也就是说，有理数域能够嵌入到 K 中。（事实上，任何特征零的域都满足此假定。）

回顾对于 K -代数 A ，若 A 交换，则其 Hochschild 同调 $\mathrm{HH}_\bullet(A)$ 可以被理解为“空间” A 上的“微分形式”。本节我们进一步研究 $\mathrm{HH}_\bullet(A)$ 。

记号 1.5.1. 对于 K -代数 A ，双 A -模 $M = A$ 。考虑其 Hochschild 链复形 $C_\bullet(A) := C_\bullet(A, A)$ ：

$$C_n(A) := C_n(A, A) \cong A^{\otimes n+1}$$

(回顾定义 1.2.5). 我们考虑群 $\mathbb{Z}/(n+1)\mathbb{Z}$ 在 $C_n(A)$ 上的如下左 K -作用：记 $\mathbb{Z}/(n+1)\mathbb{Z}$ 的生成元为 λ ，则

$$\begin{aligned} \lambda : C_n(A) &\rightarrow C_n(A) \\ a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n &\mapsto (-1)^n a_n \otimes a_0 \otimes \cdots \otimes a_{n-1} \end{aligned}$$

考虑 $C_n(A)$ 模掉此群作用，所得的商 K -模记为

$$C_n^\lambda(A) := C_n(A)/(1 - \lambda)$$

其中的元素称之为循环余不变量 (cyclic co-invariant)。

容易验证，

$$\lambda^{n+1} a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n = (-1)^{n(n+1)} a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n = a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n$$

即 $\lambda^{n+1} = \mathrm{id}$. 可见这的确是 $\mathbb{Z}/(n+1)\mathbb{Z}$ 的作用。

回顾 Bar-复形，我们可以直观地视为“直线上依次排列质点，相邻两两碰撞”；而在这里，商掉 λ 循环作用后，直观地更像是“圆周上排列质点”。

我们将说明，Hochschild 链复形 $C_\bullet(A)$ 的边缘算子 b ，沿商映射 $C_\bullet(A) \twoheadrightarrow C_\bullet^\lambda(A)$ 下降，诱导了 $C_\bullet^\lambda(A)$ 的链复形结构（称之为 Connes 复形）。

引理 1.5.2. 对于 K -代数 A ，我们定义算子 $b' : C_\bullet(A) \rightarrow C_{\bullet-1}(A)$ 如下：

$$b' : C_n(A) \rightarrow C_{n-1}(A)$$

$$a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n \mapsto \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k a_0 \otimes \cdots \otimes (a_k a_{k+1}) \otimes \cdots \otimes a_n$$

则成立:

(1) $b' \circ b' = 0$,

(2) 对任意 $n \geq 1$, 则以下图表交换:

$$\begin{array}{ccc} C_n(A) & \xrightarrow{b'} & C_{n-1}(A) \\ \downarrow 1-\lambda & & \downarrow 1-\lambda \\ C_n(A) & \xrightarrow{b} & C_{n-1}(A) \end{array}$$

证明. 注意到有同构 $C_n(A) \cong B_n A (\cong A^{\otimes n+1})$, 其中 $B_\bullet A$ 为 Bar-复形; 容易看出这里定义的 b' 在此同构下, 正是 Bar 复形当中的边缘算子, 从而 $b' \circ b' = 0$, 也就是说 $(C_\bullet(A), b')$ 是一个链复形, 并且同构于 Bar-复形 $(B_\bullet A, b)$. (这里有轻微的记号混用: Bar-复形 $(B_\bullet A, b)$ 当中的 “ b ” 并不是本引理当中 Hochschild 链复形 $(C_\bullet(A), b)$ 当中的 “ b ”, 前者在此是临时记号.)

我们再来看 (2). 回顾 $b: C_n(A) \rightarrow C_{n-1}(A)$ 的显式表达式 (见定义 1.2.5 的下方, 并且令其中 $M = a$ 以及 $m = a_0$) (注意此图中的 b 与 b' 并不是同一个映射, 它们的具体表达式相差一项), 直接验算之:

$$\begin{aligned} & (1-\lambda) \circ b'(a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n) \\ = & (1-\lambda) \left(\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k a_0 \otimes \cdots \otimes (a_k a_{k+1}) \otimes \cdots \otimes a_n \right) \\ = & \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k a_0 \otimes \cdots \otimes (a_k a_{k+1}) \otimes \cdots \otimes a_n \\ & + \sum_{k=0}^{n-2} (-1)^{k+n} a_n \otimes a_0 \otimes \cdots \otimes (a_k a_{k+1}) \otimes \cdots \otimes a_{n-1} \\ & - (a_{n-1} a_n) \otimes a_0 \otimes \cdots \otimes a_{n-2} \\ = & b(a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n) - (-1)^n (a_n a_0) \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_{n-1} \\ & + (-1)^n \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k a_n \otimes a_0 \otimes \cdots \otimes (a_k a_{k+1}) \otimes \cdots \otimes a_{n-1} \\ & - (a_{n-1} a_n) \otimes a_0 \otimes \cdots \otimes a_{n-2} \\ = & b(a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n - (-1)^n a_n \otimes a_0 \otimes \cdots \otimes a_{n-1}) \\ = & b \circ (1-\lambda)(a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n) \end{aligned}$$

也就是说,

$$(1-\lambda) \circ b' = b \circ (1-\lambda)$$

从而此图表交换，证毕。 □

此图表的交换关系也可改写为

$$[b, \lambda] = (1 - \lambda) \circ (b - b')$$

其中 $[b, \lambda] := b \circ \lambda - \lambda \circ b$.

此引理给出了链复形 $(C_\bullet(A), b')$ 与 $(C_\bullet(A), b)$ 之间的链映射：

$$(1 - \lambda)_\bullet : (C_\bullet(A), b') \rightarrow (C_\bullet(A), b)$$

然而注意到

$$C_n^\lambda(A) := C_n(A) / (1 - \lambda)_n = \text{coker}(1 - \lambda)_n$$

于是我们（在由 K -模链复形构成范畴当中）考虑链映射 $(1 - \lambda)_\bullet$ 的余核，这给出了 $C_\bullet^\lambda(A)$ 的链复形结构：

定义 1.5.3. (*Connes 复形*) 对于 K -代数 A ，考虑链映射

$$(1 - \lambda)_\bullet : (C_\bullet(A), b') \rightarrow (C_\bullet(A), b)$$

的余核链复形

$$(C_\bullet^\lambda(A), b^\lambda) := \text{coker}[(1 - \lambda)_\bullet]$$

称其为 **Connes 复形**。并且记

$$H_\bullet^\lambda(A) := H_\bullet(C_\bullet^\lambda(A))$$

称之为 A 的循环同调 (*cyclic homology*) .

也就是说，有如下的交换图表：

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & C_{n+1} & \xrightarrow{b'} & C_n & \xrightarrow{b'} & C_{n-1} \longrightarrow \cdots \\ & & \downarrow 1-\lambda & & \downarrow 1-\lambda & & \downarrow 1-\lambda \\ \cdots & \longrightarrow & C_{n+1} & \xrightarrow{b} & C_n & \xrightarrow{b} & C_{n-1} \longrightarrow \cdots \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \cdots & \longrightarrow & C_{n+1}^\lambda & \xrightarrow{b^\lambda} & C_n^\lambda & \xrightarrow{b^\lambda} & C_{n-1}^\lambda \longrightarrow \cdots \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & & 0 & & 0 & & 0 \end{array}$$

此交换图表每一横行都为链复形，其中第三横行为 Connes 复形；每一列都是右短正合的。并且容易知道：Connes 复形的边缘算子 b^λ 正是 Hochschild 链复形的边缘算子 b 沿商映射 $C_\bullet(A) \twoheadrightarrow C_\bullet^\lambda(A)$ 的下降。

1.6 循环双复形 $CC_{\bullet\bullet}(A)$

引理 1.6.1. (平均算子) 对于任意 K -代数 A , 以及 $n \geq 0$, 引入平均算子 $\mathcal{N}: C_n(A) \rightarrow C_n(A)$:

$$\mathcal{N} := 1 + \lambda + \lambda^2 + \cdots + \lambda^n$$

则此算子满足以下性质:

$$(1) \quad b'\mathcal{N} = \mathcal{N}b$$

(2) $(1 - \lambda)\mathcal{N} = \mathcal{N}(1 - \lambda) = 0$. 此外, 如果有理数域 $\mathbb{Q} \hookrightarrow K$, 那么对于任意 $n \geq 0$, 以下链复形是正合的:

$$\cdots \rightarrow C_n(A) \xrightarrow{\mathcal{N}} C_n(A) \xrightarrow{1-\lambda} C_n(A) \xrightarrow{\mathcal{N}} C_n(A) \xrightarrow{1-\lambda} C_n(A) \rightarrow C_n^\lambda(A) \rightarrow 0$$

证明. (1) 任意固定 $n \geq 1$, 为了区分算子在不同空间的作用, 我们采用临时记号

$$\begin{cases} \lambda: C_n(A) \rightarrow C_n(A) \\ \bar{\lambda}: C_{n-1}(A) \rightarrow C_{n-1}(A) \end{cases} \quad \begin{cases} \mathcal{N} := 1 + \lambda + \cdots + \lambda^n \\ \bar{\mathcal{N}} := 1 + \bar{\lambda} + \cdots + \bar{\lambda}^{n-1} \end{cases}$$

则在此记号下我们需要证 $b'\mathcal{N} = \bar{\mathcal{N}}b$.

定义缩并算子

$$\begin{aligned} s: C_n(A) &\rightarrow C_{n-1}(A) \\ a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n &\mapsto (a_0 a_1) \otimes \cdots \otimes a_n \end{aligned}$$

则容易验证 (稍微注意一下正负号, 确实都是正号)

$$b = \sum_{k=0}^n \bar{\lambda}^k s \lambda^{-k} \quad b' = \sum_{k=0}^{n-1} \bar{\lambda}^k s \lambda^{-k}$$

于是有

$$b'\mathcal{N} = \left(\sum_{k=0}^{n-1} \bar{\lambda}^k s \lambda^{-k} \right) \left(\sum_{l=0}^n \lambda^l \right) = \sum_{\substack{0 \leq k \leq n-1 \\ 0 \leq l \leq n}} \bar{\lambda}^k s \lambda^l$$

同理也有

$$\bar{\mathcal{N}}b = \sum_{\substack{0 \leq k \leq n-1 \\ 0 \leq l \leq n}} \bar{\lambda}^k s \lambda^l$$

从而 $b'\mathcal{N} = \bar{\mathcal{N}}b$.

(2) 给定 $n \geq 0$, 注意到 $\lambda^{n+1} = 1$, 从而

$$(1 - \lambda)\mathcal{N} = (1 - \lambda)(1 + \lambda + \cdots + \lambda^n) = 1 - \lambda^{n+1} = 0$$

同理 $\mathcal{N}(1 - \lambda) = 0$. 因此该图表是链复形, 只需再验证正合性。

现在假设 \mathbb{Q} 是 K 的子环。我们构造如下链同伦:

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & C_n(A) & \xrightarrow{\mathcal{N}} & C_n(A) & \xrightarrow{1-\lambda} & C_n(A) & \xrightarrow{\mathcal{N}} & C_n(A) & \longrightarrow & \cdots \\ & & \downarrow \text{id} & \nearrow g & \downarrow \text{id} & \nearrow f & \downarrow \text{id} & \nearrow g & \downarrow \text{id} & & \\ \cdots & \longrightarrow & C_n(A) & \xrightarrow{\mathcal{N}} & C_n(A) & \xrightarrow{1-\lambda} & C_n(A) & \xrightarrow{\mathcal{N}} & C_n(A) & \longrightarrow & \cdots \end{array}$$

其中 $f, g: C_n(A) \rightarrow C_n(A)$ 定义为

$$\begin{cases} f := \frac{1}{n+1}(\lambda^{n-1} + 2\lambda^{n-2} + 3\lambda^{n-3} + \cdots + n) \\ g := \frac{1}{n+1} \end{cases}$$

(利用了 $\mathbb{Q} \hookrightarrow K$) 则容易验证

$$f(1 - \lambda) + \mathcal{N}g = g\mathcal{N} + (1 - \lambda)f = 1$$

从而证毕。 □

特别地, 当 K 为域时 (注意我们总假定 $\text{char } K = 0$) 成立正合性。链同伦 f, g 的构造来自于 (关于变元 λ 的多项式的) 欧几里得辗转相除法。

由此引理, 我们可构造出如下的循环双复形 (cyclic bicomplex), 记为 $CC_{\bullet\bullet}(A)$:

$$\begin{array}{ccccccc} \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \downarrow b & & \downarrow -b' & & \downarrow b & & \downarrow -b' \\ C_2(A) & \xleftarrow{1-\lambda} & C_2(A) & \xleftarrow{\mathcal{N}} & C_2(A) & \xleftarrow{1-\lambda} & C_2(A) \xleftarrow{\quad} \cdots \\ \downarrow b & & \downarrow -b' & & \downarrow b & & \downarrow -b' \\ C_1(A) & \xleftarrow{1-\lambda} & C_1(A) & \xleftarrow{\mathcal{N}} & C_1(A) & \xleftarrow{1-\lambda} & C_1(A) \xleftarrow{\quad} \cdots \\ \downarrow b & & \downarrow -b' & & \downarrow b & & \downarrow -b' \\ C_0(A) & \xleftarrow{1-\lambda} & C_0(A) & \xleftarrow{\mathcal{N}} & C_0(A) & \xleftarrow{1-\lambda} & C_0(A) \xleftarrow{\quad} \cdots \end{array}$$

其中对于任意 $p, q \geq 0$, $CC_{p,q}(A) = C_p(A)$ 为该图表的从下往上第 p 行, 从左往右第 q 列的节点; 此图表的偶数列与奇数列 $(C_{\bullet}(A), b)$ 与 $(C_{\bullet}(A), -b')$ 交替。并且注意到, 此图表不是交换的, 而是对于其中每一个方框都满足反交换性。

我们回顾一些同调代数工具:

定义 1.6.2. (双复形的全复形)

对于任意的含么交换环 K (这里暂时不必假定 $\text{char } K = 0$), 以及 K -模双复形 $(A_{\bullet\bullet}, d, \partial)$:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
 & A_{2,0} & \xleftarrow{\partial_{2,1}} & A_{2,1} & \xleftarrow{\partial_{2,2}} & A_{2,2} & \xleftarrow{\quad} \cdots \\
 & \downarrow d_{2,0} & & \downarrow d_{2,1} & & \downarrow d_{2,2} & \\
 & A_{1,0} & \xleftarrow{\partial_{1,1}} & A_{1,1} & \xleftarrow{\partial_{1,2}} & A_{1,2} & \xleftarrow{\quad} \cdots \\
 & \downarrow d_{1,0} & & \downarrow d_{1,1} & & \downarrow d_{1,2} & \\
 & A_{0,0} & \xleftarrow{\partial_{0,1}} & A_{0,1} & \xleftarrow{\partial_{0,2}} & A_{0,2} & \xleftarrow{\quad} \cdots
 \end{array}$$

即:

$$\begin{cases} d_{p,q} : A_{p,q} \rightarrow A_{p-1,q} \\ \partial_{p,q} : A_{p,q} \rightarrow A_{p,q-1} \end{cases}$$

使得该图表每一行、每一列都是链复形, 并且满足反交换关系

$$\partial_{p-1,q} \circ d_{p,q} + d_{p,q-1} \circ \partial_{p,q} = 0$$

则我们定义双复形 $A_{\bullet\bullet}$ 的全复形 (total complex) $(\text{Tot}_{\bullet}(A_{\bullet\bullet}), d)$ 如下:

$$\begin{cases} \text{Tot}_n(A_{\bullet\bullet}) := \bigoplus_{p+q=n} A_{p,q} \\ d_n := \sum_{p+q=n} (d_{p,q} + \partial_{p,q}) \end{cases}$$

对于两个双复形 $A_{\bullet\bullet}$ 与 $A'_{\bullet\bullet}$, 我们可以去定义双复形之间的态射 $f_{\bullet\bullet} : A_{\bullet\bullet} \rightarrow A'_{\bullet\bullet}$, 进而考虑双复形范畴。双复形的态射自然诱导了相应的全复形之间的链映射, 也就是说 Tot 具有函子性。我们还有以下同调代数工具:

引理 1.6.3. 设 $f_{\bullet\bullet} : A_{\bullet\bullet} \rightarrow A'_{\bullet\bullet}$ 为双复形之间的态射。如果对于任意 $n \geq 0$, 链映射

$$f_{n,\bullet} : A_{n,\bullet} \rightarrow A'_{n,\bullet}$$

为拟同构 (quasi-isomorphism), (即它诱导的任意阶同调对象之间的态射均为同构), 那么链映射

$$\text{Tot}_{\bullet}(f_{\bullet\bullet}) : \text{Tot}_{\bullet}(A_{\bullet\bullet}) \rightarrow \text{Tot}_{\bullet}(A'_{\bullet\bullet})$$

也为拟同构。

证明. 同调代数工具, 承认之. \square

我们回到循环双复形 $CC_{\bullet\bullet}(A)$. 由上述同调代数工具, 我们可以给出循环同调 $H_{\bullet}^{\lambda}(A) := H_{\bullet}(C_{\bullet}^{\lambda}(A))$ 的另一种定义:

定理 1.6.4. 对于 K -代数 A , 假设 $\mathbb{Q} \hookrightarrow K$, 记

$$HC_{\bullet}(A) := H_{\bullet}(\text{Tot}_{\bullet}(CC_{\bullet\bullet}(A)))$$

为 A 的循环双复形的全复形的同调, 那么有自然的同构

$$HC_{\bullet}(A) \cong H_{\bullet}^{\lambda}(A)$$

证明. 对于循环双复形 $CC_{\bullet\bullet}(A)$, 我们再考虑另一个双复形 $CC'_{\bullet\bullet}(A)$ 如下:

$$\begin{array}{ccccccc} & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ C_2^{\lambda}(A) & \longleftarrow & 0 & \longleftarrow & 0 & \longleftarrow & 0 & \longleftarrow \cdots \\ \downarrow b_2^{\lambda} & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\ C_1^{\lambda}(A) & \longleftarrow & 0 & \longleftarrow & 0 & \longleftarrow & 0 & \longleftarrow \cdots \\ \downarrow b_1^{\lambda} & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\ C_0^{\lambda}(A) & \longleftarrow & 0 & \longleftarrow & 0 & \longleftarrow & 0 & \longleftarrow \cdots \end{array}$$

考虑双复形之间的态射

$$f_{\bullet\bullet} : CC_{\bullet\bullet}(A) \rightarrow CC'_{\bullet\bullet}(A)$$

其中 $f_{n,0} : C_n(A) \rightarrow C_n^{\lambda}(A)$ 为商映射. 由引理1.6.1 知 $CC_{\bullet\bullet}(A)$ 的每一行都是正合的, 从而容易验证 $f_{\bullet\bullet}$ 满足引理 1.6.3 的使用条件, 因此我们有同构

$$H_{\bullet}(\text{Tot}_{\bullet}(CC_{\bullet\bullet}(A))) \cong H_{\bullet}(\text{Tot}_{\bullet}(CC'_{\bullet\bullet}(A)))$$

上式左边, 由定义, 即为 $HC_{\bullet}(A)$; 而再注意到 $\text{Tot}_{\bullet}(CC'_{\bullet\bullet})$ 正是 Connes 复形 C_{\bullet}^{λ} , 从而上式右边为循环同调 $H_{\bullet}^{\lambda}(A)$. \square

也就是说, 循环同调 (Connes 复形的同调) 自然同构于循环双复形的全复形的同调。

1.7 Connes 算子 β

我们将给出循环同调的更多等价定义方式，并计算一些具体例子。本节均假定 $\mathbb{Q} \hookrightarrow K$ （甚至直接把 K 当成特征零的域）。我们需要更多的同调代数工具：

引理 1.7.1.（杀掉可缩复形）

对于 K -模链复形

$$\cdots \rightarrow A_{n+1} \oplus B_{n+1} \xrightarrow{d} A_n \oplus B_n \xrightarrow{d} A_{n-1} \oplus B_{n-1} \rightarrow \cdots$$

其中

$$d = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

并且 (B_\bullet, δ) 是可缩链复形，其同伦逆

$$h : B_\bullet \rightarrow B_{\bullet+1}$$

使得 $h\delta + \delta h = 1$. 那么下述图表交换：

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & A_{n+1} & \xrightarrow{\alpha - \beta h \gamma} & A_n & \xrightarrow{\alpha - \beta h \gamma} & A_{n-1} \longrightarrow \cdots \\ & & \downarrow \varphi & & \downarrow \varphi & & \downarrow \varphi \\ \cdots & \longrightarrow & A_{n+1} \oplus B_{n+1} & \xrightarrow{d} & A_n \oplus B_n & \xrightarrow{d} & A_{n-1} \oplus B_{n-1} \longrightarrow \cdots \end{array}$$

并且此图表的每一行都为链复形，并且链映射

$$\varphi := \begin{pmatrix} 1 \\ -h\gamma \end{pmatrix}$$

为拟同构。

证明. 注意到 $\delta^2 = 0$ ，以及

$$0 = d^2 = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} \alpha^2 + \beta\gamma & \alpha\beta + \beta\gamma \\ \gamma\alpha + \delta\gamma & \gamma\beta + \delta^2 \end{pmatrix}$$

从而我们有

$$\begin{cases} \alpha^2 &= -\beta\gamma \\ \alpha\beta &= -\beta\delta \\ \gamma\alpha &= -\delta\gamma \\ \gamma\beta &= 0 \end{cases}$$

再注意到 $h\delta + \delta h = 1$ ，直接计算验证可知 φ_\bullet 的确为链复形之间的链映射。细节略。

再注意链映射

$$\varphi_\bullet : (A_\bullet, \alpha - \beta h \gamma) \rightarrow (A_\bullet \oplus B_\bullet, d)$$

为单射，并且其余核

$$\text{coker } \varphi_\bullet \cong (B_\bullet, \delta)$$

是正合的，因此 φ_\bullet 为拟同构。 \square

这个引理的功能是，如果给定的链复形 $(A_\bullet \oplus B_\bullet, d)$ 当中“含有正合的部分” (B_\bullet, δ) ，那我们可以把这个“正合的部分”剔除掉，得到一个“不那么冗余”的链复形 $(A_\bullet, \alpha - \beta h \delta)$ ，并且此复形与原来的复形的各阶同调自然同构。

我们将此引理用于循环双复形 $CC_{\bullet\bullet}(A)$ 的全复形 $\text{Tot}_\bullet(CC_{\bullet\bullet}(A))$ 上。回顾 $CC_{\bullet\bullet}(A)$ 为如下双复形：

$$\begin{array}{ccccccc} \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \downarrow b & & \downarrow -b' & & \downarrow b & & \downarrow -b' \\ C_2(A) & \xleftarrow{1-\lambda} & C_2(A) & \xleftarrow{\mathcal{N}} & C_2(A) & \xleftarrow{1-\lambda} & C_2(A) \xleftarrow{\dots} \\ \downarrow b & & \downarrow -b' & & \downarrow b & & \downarrow -b' \\ C_1(A) & \xleftarrow{1-\lambda} & C_1(A) & \xleftarrow{\mathcal{N}} & C_1(A) & \xleftarrow{1-\lambda} & C_1(A) \xleftarrow{\dots} \\ \downarrow b & & \downarrow -b' & & \downarrow b & & \downarrow -b' \\ C_0(A) & \xleftarrow{1-\lambda} & C_0(A) & \xleftarrow{\mathcal{N}} & C_0(A) & \xleftarrow{1-\lambda} & C_0(A) \xleftarrow{\dots} \end{array}$$

注意到该双复形的第偶数列 Hochschild 链复形（链映射 b ），第奇数列 Bar-复形（链映射 $-b'$ ）。注意 Bar-复形是正合的，并且有同伦逆

$$h : C_n(A) \rightarrow C_{n+1}(A) \quad (1.1)$$

$$a_0 \otimes a_1 \otimes \dots \otimes a_n \mapsto 1 \otimes a_0 \otimes a_1 \otimes \dots \otimes a_n \quad (1.2)$$

使得 $b'h + hb' = 1$ 。

现在，注意到

$$\begin{aligned} \text{Tot}_n(CC_{\bullet\bullet}(A)) &= \left(\bigoplus_{\substack{p+q=n \\ q \text{ 为偶数}}} CC_{p,q}(A) \right) \oplus \left(\bigoplus_{\substack{p+q=n \\ q \text{ 为奇数}}} CC_{p,q}(A) \right) \\ &=: X_n \oplus Y_n \end{aligned}$$

也就是说，我们把循环双复形 $CC_{\bullet\bullet}(A)$ 的全复形 $(\text{Tot}_\bullet(CC_{\bullet\bullet}(A)), d)$ 写为：

$$\dots \rightarrow X_{n+1} \oplus Y_{n+1} \xrightarrow{d} X_n \oplus Y_n \xrightarrow{d} X_{n-1} \oplus Y_{n-1} \rightarrow \dots$$

边缘算子矩阵 $d = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ 留给读者。但是要注意 (Y_\bullet, δ) 的正合性是由 Bar-复形 $(C_\bullet(A), -b')$ 的正合性所诱导的； δ 也存在同伦逆，仍记为 h 。

综上，对 $\text{Tot}_\bullet(CC_{\bullet\bullet}(A))$ 使用引理1.7.1，我们得到以下结果：

性质 1.7.2. 对于 K -代数 A ，考虑以下双复形 $B_{\bullet\bullet}(A)$ ：

$$\begin{array}{ccccc}
 \vdots & & \vdots & & \vdots \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 A^{\otimes 3} & \xleftarrow{B} & A^{\otimes 2} & \xleftarrow{B} & A \\
 \downarrow b & & \downarrow b & & \\
 A^{\otimes 2} & \xleftarrow{B} & A & & \\
 \downarrow b & & & & \\
 A & & & &
 \end{array}$$

此图表的最左下角为第 0 行 0 列，右下角空白处都为 0，具体地，

$$B_{p,q}(A) = \begin{cases} CC_{p-q,2q}(A) & p \geq q \\ 0 & p < q \end{cases}$$

（也就是说， $B_{\bullet\bullet}$ 的结点是由将循环双复形 $CC_{\bullet\bullet}(A)$ 的第奇数列（Bar-复形）都删掉，再将原来第 $2l$ 列整体向左、上各平移 l 格所得）其中 **Connes 算子** $B : C_n(A) \rightarrow C_{n+1}(A)$ 定义为以下的复合：

$$\begin{array}{ccccc}
 C_{n+1}(A) & \xleftarrow{1-\lambda} & C_{n+1}(A) & \xleftarrow{\mathcal{N}} & C_{n+1}(A) \\
 \downarrow b & & \uparrow h \downarrow -b' & & \downarrow b \\
 C_n(A) & \xleftarrow{1-\lambda} & C_n(A) & \xleftarrow{\mathcal{N}} & C_n(A)
 \end{array}$$

$$B := (1 - \lambda)h\mathcal{N}$$

那么，存在自然的双复形单同态

$$B_{\bullet\bullet}(A) \hookrightarrow CC_{\bullet\bullet}(A)$$

并且其诱导的全复形的链映射

$$\text{Tot}_\bullet(B_{\bullet\bullet}(A)) \hookrightarrow \text{Tot}_\bullet(CC_{\bullet\bullet}(A))$$

为拟同构。

证明. 只需注意到

$$\mathrm{Tot}_n(\mathcal{B}_{\bullet\bullet}) = \left(\bigoplus_{\substack{p+q=n \\ q \text{ 为偶数}}} \mathrm{CC}_{p,q}(A) \right) \hookrightarrow \mathrm{Tot}_n(\mathrm{CC}_{\bullet\bullet}(A))$$

直接使用引理1.7.1, 细节从略。但是要验证 $\mathcal{B}_{\bullet\bullet}(A)$ 的确是双复形, 即需要验证反交换关系

$$\mathcal{B} \circ b + b \circ \mathcal{B}$$

而这是容易的, 验证如下:

$$\begin{aligned} \mathcal{B} \circ b &= (1 - \lambda)h\mathcal{N}b = (1 - \lambda)hb'\mathcal{N} \\ &= (1 - \lambda)(1 - b'h)\mathcal{N} = (1 - \lambda)\mathcal{N} - (1 - \lambda)b'h\mathcal{N} \\ &= -b(1 - \lambda)h\mathcal{N} = -b \circ \mathcal{B} \end{aligned}$$

从而证毕。 □

于是我们得到循环同调的又一等价定义:

$$H^\lambda_\bullet(A) \cong H_\bullet(\mathrm{Tot}_\bullet(\mathcal{B}_{\bullet\bullet}))$$

我们可以将链复形 $\mathrm{Tot}_\bullet(\mathcal{B}_{\bullet\bullet})$ 适当改写, 使得形式更加美观:

性质 1.7.3. 对于 K -代数 A , 以及形式变元 u , 考虑如下链复形:

$$(\mathrm{CC}_\bullet(A), b + u\mathcal{B})$$

其中

$$\mathrm{CC}_n(A) := (\mathrm{C}_\bullet(A)[u^{-1}])_n := \bigoplus_{k=0}^{\infty} u^{-k} \mathrm{C}_{n-2k}(A)$$

(注意这是有限直和) 换句话说, 我们给定以下分次

$$\deg(b) = -1, \quad \deg(B) = 1, \quad \deg(u) = -2$$

那么此链复形的同调自然同构于循环同调:

$$H_\bullet(\mathrm{CC}_\bullet(A), b + u\mathcal{B}) \cong H^\lambda_\bullet(A)$$

证明. 这个几乎显然。注意到

$$\mathrm{Tot}_n(\mathcal{B}_{\bullet\bullet}(A)) = \bigoplus_{k=0}^{\infty} \mathcal{B}_{n-k,k}(A) = \bigoplus_{k=0}^{\infty} \mathrm{C}_{n-2k}(A)$$

$$CC_n(A) = \bigoplus_{k=0}^{\infty} u^{-k} C_{n-2k}(A)$$

于是有自然的链复形同构

$$\begin{aligned} \text{Tot}_{\bullet}(\mathcal{B}_{\bullet\bullet}(A)) &\rightarrow CC_{\bullet}(A) \\ \mathcal{B}_{n-k,k}(A) &\mapsto u^{-k} C_{n-2k}(A) \end{aligned}$$

容易验证此对应也保持相应的边缘算子。证毕。 \square

注意，我们还可以考虑 $(CC_{\bullet}(A), b)$ ，它与 $(CC_{\bullet}(A), b + u\mathcal{B})$ 具有不同的边缘算子：前者的同调我们早已知道是 Hochschild 同调，而后者的同调为循环同调。

注记 1.7.4. (复几何的背景)

对于复流形 X ，它作为光滑流形，有外微分算子 d ；再注意到它的复结构，有算子 $\bar{\partial}$ ——前者代表拓扑，而后代表复几何。它们之间有关系

$$d = \bar{\partial} + \partial$$

并且满足

$$\partial^2 = \bar{\partial}^2 = 0 \quad \partial\bar{\partial} + \bar{\partial}\partial = 0$$

我们考虑以下“拓扑与复几何之间的桥梁”：

$$d_u := \bar{\partial} + u\partial$$

称此算子为霍奇滤链 (Hodge filtration)，其中 $0 \leq u \leq 1$ 。注意 d_u 满足稳定性条件 $d_u^2 = 0$ ，即 $\bar{\partial}$ 与 d 的“过渡”的任何一个“中间状态”都仍为外微分算子。

所以，似乎可以如下粗暴地对应？

复几何	非交换几何
复流形 X	K -代数 A
Ω_X^{\bullet}	$CC_{\bullet}(A)$
$\bar{\partial}$	b
∂	$u\mathcal{B}$
d	$b + u\mathcal{B}$
$H_{\text{DR}}^{\bullet}(X)$	$H_{\bullet}^{\lambda}(A)$
$H_{\bar{\partial}}^{\bullet}(X)$	$HH_{\bullet}(A)$

这格表格似乎不太对吧，应该是 Hochschild 同调 $HH_{\bullet}(A)$ 对应于“非交换版本的”微分形式 Ω^{\bullet} ，从之前的例子能看出来。

定义 1.7.5. (周期循环同调与负循环同调) 对于 K -代数 A , 与 $CC_{\bullet}(A)$ 类似, 我们还可以去定义以下:

(1) 定义周期循环复形 (periodic cyclic complex)

$$CC_{\bullet}^{\text{per}}(A) := (C_{\bullet}(A)((u)), b + uB)$$

该复形的同调

$$HC_{\bullet}^{\text{per}}(A) := H_{\bullet}(CC_{\bullet}^{\text{per}}(A), b + uB)$$

称之为周期循环同调 (periodic cyclic homology)。

(2) 定义负循环复形 (negative cyclic complex)

$$CC_{\bullet}^{-}(A) := (C_{\bullet}(A)[[u]], b + uB)$$

该复形的同调

$$HC_{\bullet}^{-}(A) := H_{\bullet}(CC_{\bullet}^{-}(A), b + uB)$$

称之为负循环同调 (negative cyclic homology)。

注意上述定义当中的 “ $[[u]]$ ” 是指关于形式变元 u 的形式幂级数, 而 “ $((u))$ ” 为关于 u 的 Laurent 级数。由定义, 显然有

$$CC_{\bullet}(A) \cong CC_{\bullet}^{\text{per}}(A) / CC_{\bullet}^{-}(A)$$

至此, 我们定义出了 $CC_{\bullet}(A)$, $CC_{\bullet}^{\text{per}}(A)$ 以及 $CC_{\bullet}^{-}(A)$ 。事实上, 这三者都有深刻的物理背景, 见下表:

非交换几何中的对象	几何、物理背景	几何、物理背景
$CC_{\bullet}^{\text{per}}(A)$	open-closed string states	de-Rham cohomology
$CC_{\bullet}(A)$	open string states	gauge theory
$CC_{\bullet}^{-}(A)$	closed string states	gravity

其中特别注意, 周期循环同调是 de-Rham 上同调的 “非交换版本”, 我们将在后文举例说明。

1.8 循环同调的计算

回顾约化 Bar-复形 $\bar{B}_{\bullet}(A)$ (见定义1.4.1), 我们可以类似地通过约化 Bar-复形来构造类似的 “循环双复形”: 在 $K \hookrightarrow A$ 的条件下, 考虑约化 Hochschild 链复形

$$\bar{C}_n(A) := \bar{C}_n(A, A) \cong A \otimes \bar{A}^{\otimes n}$$

类似去定义循环算子 $\lambda: \overline{C}_n(A) \rightarrow \overline{C}_n(A)$ ，其显式表达式与非约化情形完全相同；以及平均算子

$$\mathcal{N}: \overline{C}_n(A, A) \cong A \otimes \overline{A}^{\otimes n}$$

可惜是错的，类似于此前的 λ, \mathcal{N} 并不良定。比如

$$0 = \lambda(0) = \lambda(a_0 \otimes \overline{1}) = -1 \otimes \overline{\lambda} \neq 0$$

但是，Connes 算子 $\mathcal{B}: \overline{C}_n(A) \rightarrow \overline{C}_{n+1}(A)$ 是有意义的，运算规则与非约化情形完全相同，具体地，

$$\begin{aligned} \mathcal{B}(a_0 \otimes \overline{a_1} \otimes \cdots \otimes \overline{a_n}) &= \widetilde{(1-\lambda)} h \widetilde{\mathcal{N}}(a_0 \otimes \overline{a_1} \otimes \cdots \otimes \overline{a_n}) \\ &= \widetilde{(1-\lambda)} h \left(\sum_{k=0}^n (-1)^{n(n+1-k)} a_k \otimes \overline{a_{k+1}} \otimes \cdots \otimes \overline{a_n} \otimes \overline{a_0} \otimes \cdots \otimes \overline{a_{k-1}} \right) \\ &= \widetilde{(1-\lambda)} \left(\sum_{k=0}^n (-1)^{n(n+1-k)} 1 \otimes \overline{a_k} \otimes \overline{a_{k+1}} \otimes \cdots \otimes \overline{a_n} \otimes \overline{a_0} \otimes \cdots \otimes \overline{a_{k-1}} \right) \\ &= \sum_{k=0}^n (-1)^{nk} 1 \otimes \overline{a_k} \otimes \overline{a_{k+1}} \otimes \cdots \otimes \overline{a_n} \otimes \overline{a_0} \otimes \cdots \otimes \overline{a_{k-1}} \end{aligned}$$

其中 $a_{-1} := a_n$.

性质 1.8.1. 对于 K -代数 A ，假设 $K \hookrightarrow A$ ，则有如下双复形 $\overline{B}_{\bullet\bullet}(A)$:

$$\begin{array}{ccccc} \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ A \otimes \overline{A}^{\otimes 2} & \xleftarrow{\mathcal{B}} & A \otimes \overline{A} & \xleftarrow{\mathcal{B}} & A \\ \downarrow b & & \downarrow b & & \\ A \otimes \overline{A} & \xleftarrow{\mathcal{B}} & A & & \\ \downarrow b & & & & \\ A & & & & \end{array}$$

记此双复形的全复形为 $\overline{CC}_{\bullet}(A) := \text{Tot}_{\bullet}(\overline{B}_{\bullet\bullet}(A))$ ，则有自然同构

$$H_{\bullet}^{\lambda}(A) \cong H_{\bullet}(\overline{CC}_{\bullet}(A))$$

也就是说，在 $K \hookrightarrow A$ 的条件下，我们可以用约化版本的双复形来计算循环同调。

证明. 考虑商映射 $\pi_{\bullet} : C_{\bullet}(A, A) \rightarrow \overline{C}_{\bullet}(A, A)$ 自然诱导的双复形同态

$$\pi_{\bullet\bullet} : B_{\bullet\bullet}(A) \rightarrow \overline{B}_{\bullet\bullet}(A)$$

注意 $\pi_{\bullet\bullet}$ 限制在双复形的每一列上, 都为相应链复形的拟同构 (这里使用了引理 1.4.3), 因此根据引理 1.6.3, 其诱导的全复形之间的同态

$$\text{Tot}_{\bullet}(B_{\bullet\bullet}(A)) \rightarrow \text{Tot}_{\bullet}(\overline{B}_{\bullet\bullet}(A))$$

为拟同构。再注意性质 1.7.2, 上式左边的同调即为循环同调, 从而证毕。 \square

与非约化情形类似, 我们也可以

$$\text{Tot}_{\bullet}(\overline{B}_{\bullet\bullet}(A)) \cong \overline{C}_{\bullet}(A)[u^{-1}], b + u\mathcal{B}$$

甚至去定义“约化周期循环同调”、“约化负循环同调”, 此处不再赘述。

本节接下来给出循环同调的一些典型的计算实例。

例子 1.8.2. 对于环 K , 设 K -代数 $A = K$, 那么其循环同调

$$H_n^{\lambda}(K) \cong \begin{cases} K & n \text{ 为偶数} \\ 0 & n \text{ 为奇数} \end{cases}$$

我们早已具体计算出 $K[x^1, x^2, \dots, x^n]$ 的 Hochschild 同调, 特别地 $\text{HH}_{\bullet}(K)$ 只有第零个是非平凡的 (同构于 K), 其余都为 0. 不过, $H_{\bullet}^{\lambda}(K)$ 与 $\text{HH}_{\bullet}(K)$ 并不相同。

证明. 我们采用最简便的方法去计算, 当然采用约化循环双复形啦。在本例中,

$$\overline{A} = K/K = 0$$

从而双复形 $\overline{B}_{\bullet\bullet}(K)$ 为以下:

$$\begin{array}{ccccccc} & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longleftarrow & 0 & \longleftarrow & 0 & \longleftarrow & K \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longleftarrow & 0 & \longleftarrow & K & & \\ \downarrow & & \downarrow & & & & \\ 0 & \longleftarrow & K & & & & \\ \downarrow & & & & & & \\ K & & & & & & \end{array}$$

其全复形 $\overline{CC}_{\bullet}(K)$ 为以下

$$\cdots \rightarrow 0 \xrightarrow{0} K \xrightarrow{0} 0 \xrightarrow{0} K$$

从而易求循环同调。 \square

当然我们也可以按照循环同调最原始的定义去计算，其实也不难算，如下：

另一种计算方式. 直接计算。此时，

$$C_n(K) \cong K^{\otimes n+1} \cong K$$

我们记其生成元

$$\varepsilon_n := \underbrace{1 \otimes 1 \otimes \cdots \otimes 1}_{n+1 \text{ 个}} \in C_n(K)$$

容易验证算子 b 与算子 λ 的作用

$$b(\varepsilon_n) = \begin{cases} \varepsilon_{n-1} & n \text{ 为偶数} \\ 0 & n \text{ 为奇数} \end{cases} \quad \lambda(\varepsilon_n) = \begin{cases} \varepsilon_n & n \text{ 为偶数} \\ -\varepsilon_n & n \text{ 为奇数} \end{cases}$$

因此，易知 Connes 复形 $C_\bullet^\lambda(K) := C_\bullet K / (1 - \lambda)$ 具体如下：

$$\cdots \rightarrow 0 \xrightarrow{0} K \xrightarrow{0} 0 \xrightarrow{0} K$$

对它取同调，即得循环同调。 □

接下来，考虑 $A = K[x^1, x^2, \dots, x^n]$ 为 n 元多项式环的情形，我们企图取计算 A 的循环同调。注意在之前我们已经使用 Koszul 复形求出了 $A = K[x^1, x^2, \dots, x^n]$ 的 Hochschild 同调。

引理 1.8.3. 设 $A = K[x^1, x^2, \dots, x^n]$ 为 n 元多项式环，考虑微分形式代数 $\Omega_A^\bullet := K[x^1, \dots, x^n; dx^1, \dots, dx^n]$ ，注意 Ω_A^\bullet 上有外积运算 \wedge 与外微分运算 d 。考虑以下 K -模同态

$$\begin{aligned} \Phi: \overline{C}_p(A) &\rightarrow \Omega_A^p \\ a_0 \otimes \overline{a_1} \otimes \cdots \otimes \overline{a_p} &\mapsto \frac{1}{p!} a_0 da_1 \wedge da_2 \wedge \cdots \wedge da_p \end{aligned}$$

则 Φ 是良定的，并且成立：

$$\begin{cases} \Phi \circ b = 0 \\ \Phi \circ \mathcal{B} = d \circ \Phi \end{cases}$$

其中 $b: \overline{C}_p(A) \rightarrow \overline{C}_{p-1}(A)$ 为约化 Hochschild 复形的边缘算子， $\mathcal{B}: \overline{C}_{p-1}(A) \rightarrow \overline{C}_p(A)$ 为约化的 Connes 算子。

证明. Φ 的良定性，即 \overline{A} 中元素与代表元选取无关。而此代表元选取至多相差“常数项”（即 K 中元素），它在外微分 d 的作用下为零。因此 Φ 良定。

我们来验证 $\Phi \circ b = 0$ 。暴力验证如下：

$$\Phi \circ b(a_0 \otimes \overline{a_1} \otimes \cdots \otimes \overline{a_n})$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{p!} \left(a_0 a_1 da_2 \wedge \cdots \wedge da_p + \sum_{k=1}^{p-1} (-1)^k a_0 da_1 \wedge \cdots \wedge d(a_k a_{k+1}) \wedge \cdots \wedge da_p \right. \\
&\quad \left. + (-1)^p a_0 a_p da_1 \wedge \cdots \wedge da_{p-1} \right) \\
&= \frac{1}{p!} \left(a_0 a_1 da_2 \wedge \cdots \wedge da_p + \sum_{k=1}^{p-1} (-1)^k a_0 a_k da_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{da_k} \wedge \cdots \wedge da_p \right. \\
&\quad \left. + \sum_{k=1}^{p-1} (-1)^k a_0 a_{k+1} da_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{da_{k+1}} \wedge \cdots \wedge da_p + (-1)^p a_0 a_p da_1 \wedge \cdots \wedge da_{p-1} \right) \\
&= 0
\end{aligned}$$

第二个等式 $\Phi \circ \mathcal{B} = d \circ \Phi$ 也容易直接验证：一方面，

$$\begin{aligned}
&\Phi \circ \mathcal{B}(a_0 \otimes \overline{a_1} \otimes \cdots \otimes \overline{a_n}) \\
&= \sum_{k=0}^p \frac{(-1)^{pk}}{(p+1)!} (da_k \wedge da_{k+1} \wedge \cdots \wedge da_p) \wedge (da_0 \wedge da_1 \wedge \cdots \wedge da_{k-1}) \\
&= \frac{1}{p!} da_0 \wedge da_1 \wedge \cdots \wedge da_n
\end{aligned}$$

而另一方面，

$$d \circ \Phi(a_0 \otimes \overline{a_1} \otimes \cdots \otimes \overline{a_p}) = \frac{1}{p!} d(a_0 da_1 \wedge \cdots \wedge da_p) = \frac{1}{p!} da_0 \wedge da_1 \wedge \cdots \wedge da_p$$

从而得证。 □

由此引理，我们即可去计算 $A := K[x^1, x^2, \dots, x^n]$ 的循环同调。

性质 1.8.4. 对于 $A := K[x^1, x^2, \dots, x^n]$ ，则其循环同调

$$H_n^\lambda(A) \cong \begin{cases} (\Omega_A^n / d\Omega_A^{n-1}) \oplus K & n \text{ 为偶数} \\ \Omega_A^n / d\Omega_A^{n-1} & n \text{ 为奇数} \end{cases}$$

证明. 事实上, 刚才的引理 1.8.3 表明, Φ 诱导以下两个双复形之间的态射:

$$\begin{array}{ccc}
 \vdots & \vdots & \vdots \\
 \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
 \overline{C}_2(A) & \xleftarrow{\mathcal{B}} \overline{C}_1(A) & \xleftarrow{\mathcal{B}} \overline{C}_0(A) \\
 \downarrow b & & \downarrow b \\
 \overline{C}_1(A) & \xleftarrow{\mathcal{B}} \overline{C}_0(A) & \\
 \downarrow b & & \\
 \overline{C}_0(A) & &
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 \vdots & \vdots & \vdots \\
 \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
 \Omega_A^2 & \xleftarrow{d} \Omega_A^1 & \xleftarrow{d} \Omega_A^0 \\
 \downarrow 0 & & \downarrow 0 \\
 \Omega_A^1 & \xleftarrow{d} \Omega_A^0 & \\
 \downarrow 0 & & \\
 \Omega_A^0 & &
 \end{array}$$

(按村儿里的规矩, 此处应该有立方交换图)

其中左边为 $\overline{\mathcal{B}}_{\bullet\bullet}(A)$, 而右边的每一行均为 de-Rham 上链复形, 每一列的边缘算子都为零。注意到 Φ 是满射, 以及我们早已用 Koszul 复形得到的

$$H_n(\overline{\mathcal{C}}_{\bullet}(A)) \cong HH_n(A) \cong \Omega_A^n \cong H_n(\Omega_A^{\bullet}, 0)$$

从而双复形同态 Φ 限制在每一列上都为拟同构, 于是由引理 1.6.3, 立刻知道

$$\Phi : \text{Tot}_{\bullet}(\overline{\mathcal{B}}_{\bullet\bullet}(A), b, \mathcal{B}) \rightarrow \text{Tot}_{\bullet}(\Omega_A^{\bullet}, 0, d)$$

为拟同构。上式左边的同调即为 A 的循环同调, 而右边的同调可以直接计算。只需要注意到 (Poincare 引理) de-Rham 复形

$$\dots \xrightarrow{d} \Omega^{\bullet}(A) \xrightarrow{d} \Omega^{\bullet}(A) \xrightarrow{d} \Omega^{\bullet}(A) \rightarrow 0$$

的 (上) 同调满足

$$H^n(\Omega_A^{\bullet}, d) = \begin{cases} K & n = 0 \\ 0 & n > 0 \end{cases}$$

因此容易计算出

$$H_n^{\lambda}(A) \cong \begin{cases} (\Omega_A^n / d\Omega_A^{n-1}) \oplus K & n \text{ 为偶数} \\ \Omega_A^n / d\Omega_A^{n-1} & n \text{ 为奇数} \end{cases}$$

□

注记 1.8.5. 容易知道, Connes 算子

$$\mathcal{B} : \overline{C}_n(A) \rightarrow \overline{C}_{n+1}(A)$$

在 $\ker b$ 上的限制, 可以下降为 Hochschild 同调之间的同态

$$\mathcal{B} : HH_n(A) \rightarrow HH_{n+1}(A)$$

Hochschild 同调扮演的角色相当于微分形式，而此时 Connes 算子扮演的则是外微分。

注记 1.8.6. 双复形满同态

$$\Phi : (\overline{\mathcal{B}}_{\bullet\bullet}(A), b, \mathcal{B}) \twoheadrightarrow (\Omega_A^\bullet, 0, d)$$

其实是可裂 (*split*) 的。具体地，存在双复形同态

$$\begin{aligned} \eta : \Omega^\bullet(A) &\rightarrow \overline{\mathcal{C}}_\bullet(A) \\ a_0 da_1 \wedge da_2 \wedge \cdots \wedge da_p &\mapsto \sum_{\sigma \in S_p} (-1)^{\text{sgn } \sigma} a_0 \otimes a_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes a_{\sigma(p)} \end{aligned}$$

使得 $\Phi \circ \eta = \text{id}$.

容易验证 (简单的组合技巧) η 的确诱导了双复形同态

$$\eta : (\Omega_A^\bullet, 0, d) \rightarrow (\overline{\mathcal{B}}_{\bullet\bullet}(A), b, \mathcal{B})$$

1.9 循环上同调

本章最后，简单介绍一下循环上同调 (Cyclic cohomology)。对于双 A -模 M ，回顾我们之前已经介绍的 Hochschild 上链复形

$$C^n(A, M) := \text{Hom}(A^{\otimes n}, M)$$

特别地，当 $M = A$ 时，我们给出以下记号：

记号 1.9.1. 对于 K -代数 A ，以及 $n \geq 0$ ，我们记 *Hochschild* 上链复形

$$C^n(A) := C^n(A, A) \cong \text{Hom}(A^{\otimes n}, A) \cong \text{Hom}(A^{\otimes n+1}, K)$$

并且将该 *Hochschild* 上链复形的微分算子记为 b^* 。

我们此前考虑同构 $C_n(A) \cong A^{\otimes n+1}$ ，而 Hochschild 上链复形 $C^n(A) \cong \text{Hom}(A^{\otimes n+1}, K)$ 恰为其对偶；微分算子 b^* 的作用即为 b 的对偶：即对任意 $f \in C^n(A) \cong \text{Hom}(A^{\otimes n+1}, K)$ 以及 $\omega \in A^{\otimes n+2} \cong C_{n+1}(A)$ ，成立

$$(b^* f)(\omega) = f(b(\omega))$$

与循环余不变量对偶，我们可以谈论循环不变量：

定义 1.9.2. (循环不变量)

对于 $f \in C^n(A)$, 称 f 为循环不变量 (cyclic invariant), 如果对任意的 $a_0, \dots, a_n \in A$, 成立

$$f(a_0, a_1, \dots, a_n) = (-1)^n f(a_n, a_0, \dots, a_{n-1})$$

记 $C^n(A)$ 当中的循环不变量之全体为 $C_\lambda^n(A)$.

容易验证 $b^*(C_\lambda^n(A)) \subseteq C_\lambda^{n+1}(A)$, 从而 $(C_\lambda^\bullet(A), b^*)$ 为 $(C^\bullet(A), b^*)$ 的子复形。(不必暴力验证了, 由循环余不变量对偶过去就行) 看图说话即可:

$$\begin{array}{ccccccc}
 \cdots & \longrightarrow & C_n(A) & \xrightarrow{b'} & C_{n-1}(A) & \longrightarrow & \cdots \\
 & & \downarrow 1-\lambda & & \downarrow 1-\lambda & & \\
 \cdots & \longrightarrow & C_n(A) & \xrightarrow{b} & C_{n-1}(A) & \longrightarrow & \cdots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 \cdots & \longrightarrow & C_n^\lambda(A) & \longrightarrow & C_{n-1}^\lambda(A) & \longrightarrow & \cdots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & &
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccccccc}
 \cdots & \longleftarrow & C^n(A) & \xleftarrow{b'^*} & C^{n-1}(A) & \longleftarrow & \cdots \\
 & & \uparrow 1-\lambda^* & & \uparrow 1-\lambda^* & & \\
 \cdots & \longleftarrow & C^n(A) & \xleftarrow{b^*} & C^{n-1}(A) & \longleftarrow & \cdots \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \\
 \cdots & \longleftarrow & C_\lambda^n(A) & \longleftarrow & C_\lambda^{n-1}(A) & \longleftarrow & \cdots \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \\
 & & 0 & & 0 & &
 \end{array}$$

左图我们早已熟悉, 注意它的每一列都是右正合的。将反变左正合函子 $\text{Hom}(-, K)$ 作用于左图即得到右图, 右图的每一列都是左正合的。

定义 1.9.3. (循环上同调) 对于 K -代数 A 定义 A 的循环上同调 (cyclic cohomology)

$$H_\lambda^\bullet(A) := \text{HC}^\bullet(A) := H^\bullet(C_\lambda^\bullet(A), d^*)$$

作为例子, 我们具体计算一下第零个循环上同调。

例子 1.9.4. 对于 K -代数 A , 则有

$$H_\lambda^0(A) = \{f \in \text{Hom}(A, K) \mid \forall x, y \in A, f(xy) = f(yx)\}$$

证明. 直接计算即可。只需考虑 Hochschild 上链复形

$$0 \rightarrow C_\lambda^0(A) \xrightarrow{b^*} C_\lambda^1(A) \xrightarrow{b^*} C_\lambda^2(A) \rightarrow \cdots$$

易知 $C_\lambda^0(A) = C^0(A) = \text{Hom}(A, K)$, 从而

$$H_\lambda^0(A) = \ker(b^* : C^0(A) \rightarrow C^1(A))$$

对于 $f \in \text{Hom}(A, K)$, 若 $b^*f = 0$, 则对于任意 $x, y \in A$, 有

$$0 = (b^*f)(x, y) = f(b(x \otimes y)) = f(xy - yx) = f(xy) - f(yx)$$

从而可知

$$H_\lambda^0(A) = \{f \in \text{Hom}(A, K) | \forall x, y \in A, f(xy) = f(yx)\}$$

□

像 $H_\lambda^0(A)$ 当中的线性算子那样, 满足

$$f(xy) = f(yx) \quad (\forall x, y \in A)$$

的线性算子称之为**迹算子**。

高阶的循环上同调可被认为是“导出的”迹算子。

第 2 章 乘积

2.1 分次模与 Koszul 符号法则

本节我们集中起来澄清一些关于分次模、分次代数的概念，并且力图阐明分次代数中出现的正负号。这里的“分次”如不加说明，指的都是 \mathbb{Z} -分次。

首先我们考虑分次 K -模。

定义 2.1.1. (分次 K -模范畴)

(1) 称 K -模 M 为 $(\mathbb{Z}-)$ 分次 K -模 (*graded K -module*), 若 M 具有如下分次结构:

$$M = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} M_k$$

(2) 若 M, N 为分次 K -模, 称 K -模同态 $f: M \rightarrow N$ 为次数为 d 的齐次 K -模同态, 若对于任意 $n \in \mathbb{Z}$, 成立

$$f(M_n) \subseteq N_{n+d}$$

对于分次代数, 我们可以定义齐次元, 以及齐次元的次数, 不再赘述。对于齐次元 $a \in A$, 将 a 的次数记为 $\deg a$, 或者简记为 $|a|$.

平凡的例子: 通常的 K -模自然有分次 K -模结构——只需将该模中的任何元素都认为是 0 次齐次元。

我们还可以谈论以分次 K -模为对象的范畴:

记号 2.1.2. (分次 K -模范畴) 对于分次 K -模 M, N , 对任意 $d \in \mathbb{Z}$, 记

$$\mathrm{Hom}(M, N)_d := \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \mathrm{Hom}(M_n, N_{n+d})$$

即次数为 d 的分次 K 模同态之全体。再记

$$\mathrm{Hom}(M, N) := \bigoplus_{d \in \mathbb{Z}} \mathrm{Hom}(M, N)_d$$

称这里面的元素为分次 K -模同态。

我们考虑如下分次 K -模范畴，记为 $\underline{\text{Mod}}_K^{\mathbb{Z}}$ ：

- (1) $\text{Obj} =$ 全体分次 K -模；
- (2) $\text{Mor}(M, N) = \text{Hom}(M, N)$ 为分次 K -模同态。

注意对任何分次 K -模 M, N ， $\text{Hom}(M, N)$ 自然有分次 K -模结构，其中的 d 次齐次元即为 M 到 N 的次数为 d 的齐次同态。

对于两个分次 K -模，它们作为 K -模的张量积，也有自然的分次结构：

定义 2.1.3. (分次 K -模的张量积) 对于分次 K -模 M, N ，则张量积 $M \otimes N$ 自然有如下分次结构：

$$M \otimes N = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} (M \otimes N)_k$$

其中

$$(M \otimes N)_k := \bigoplus_{\substack{p, q \in \mathbb{Z} \\ p+q=k}} M_p \otimes N_q$$

容易验证这给出了 $M \otimes N$ 的分次 K -模结构。

定义 2.1.4. 对于分次 K -模 M, N ，定义如下分次 K -模同态：

$$\begin{aligned} \tau : M \otimes N &\rightarrow N \otimes M \\ x \otimes y &\mapsto (-1)^{\deg x \deg y} y \otimes x \end{aligned}$$

其中 x, y 分别为 M, N 中的任意的齐次元。

这是一个次数为 0 的齐次 K -模同构，称之为分次对合自同构。注意这里的正负号。

记号 2.1.5. ($Koszul$ 符号法则)

设 M, M', N, N' 均为分次 K -模，则自然有如下的分次 K -模同态：

$$\begin{aligned} \text{Hom}(M, N) \otimes \text{Hom}(M', N') &\rightarrow \text{Hom}(M \otimes M', N \otimes N') \\ (f \otimes g)(m \otimes m') &:= (-1)^{\deg g \deg m} f(m) \otimes g(m') \end{aligned}$$

其中 f, g, m, m' 分别为 $\text{Hom}(M, N), \text{Hom}(M', N'), M, M'$ 当中的任意齐次元。

依然注意正负号。以后我们总是默认 $f \otimes g$ 在 $m \otimes m'$ 上如此作用。

我们还可以定义分次 K -模的对偶模（与通常的对偶模仍然在正负号上有些区别）：

定义 2.1.6.（分次对偶模）对于分次 K -模 M ，定义

$$M^* := \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} M_n^*$$

其中

$$M_n^* := \text{Hom}(M_{-n}, \mathbb{Z})$$

易知 M^* 具有分次 K -模结构，并且有自然的配对

$$M_n^* \times M_{-n} \rightarrow K$$

注记 2.1.7.（分次 K -模上链复形）对于分次 K -模 C ，以及 $d \in \text{Hom}(C, C)_1$ ，即次数为 1 的齐次同态。如果 $d \circ d = 0$ ，则自然有 K -模上链复形：

$$\cdots \rightarrow C_{-1} \xrightarrow{d} C_0 \xrightarrow{d} C_1 \xrightarrow{d} C_2 \rightarrow \cdots$$

这是我们在同调代数当中早已熟知的。我们以后就将上链复形与带有 d 的分次 K -模等同。本节我们采用上链复形的语言（即 $\deg d = 1$ ），链复形（ $\deg \partial = -1$ ）的情形完全类似。

这里讲到的“上链复形”，与通常同调代数当中的上链复形在各种操作上都会可能相差正负号；为了区分，我们称这里的“上链复形”为“分次上链复形”。

我们还可以考虑分次上链复形 (C_\bullet, d) 的分次对偶，仍为分次上链复形：

$$\cdots \rightarrow C_{-1}^* \xrightarrow{d^*} C_0^* \xrightarrow{d^*} C_1^* \xrightarrow{d^*} C_2^* \rightarrow \cdots$$

定义 2.1.8.（分次上链复形的平移）对于分次 K -模上链复形 (C_\bullet, d) ，定义分次上链复形 $(C_\bullet[1], d_{[1]})$ 如下：

$$(C_\bullet[1])_n := C_{n+1}$$

并且微分算子 $d_{[1]}$ 使得下图交换：

$$\begin{array}{ccc} (C[1])_n & \xrightarrow{d_{[1]}} & (C[1])_{n+1} \\ \parallel & & \parallel \\ C_{n+1} & \xrightarrow{-d} & C_{n+2} \end{array}$$

注意 $d_{[1]}$ 当中的负号。类似地，对任意 $l \in \mathbb{Z}$ ，可以去定义 l -平移 $(C[l]_{\bullet}, d_{[l]})$ ，特别注意符号

$$d_{[l]} = (-1)^l d$$

对于一般的分次 K -模，我们也可以考虑其平移，这无非是重新规定齐次元的次数。

定义 2.1.9. (分次上链复形的张量积)

对于分次上链复形 (C_{\bullet}, d_C) 与 (D_{\bullet}, d_D) ，定义 $(C \otimes D)_{\bullet}$ 的分次上链复形结构 d 如下：

$$\begin{aligned} d : C_p \otimes D_q &\rightarrow C_{p+1} \otimes D_q \oplus C_p \otimes D_{q+1} \\ d &= d_C \otimes 1 + (-1)^p 1 \otimes d_D \end{aligned}$$

仍然要注意正负号。容易验证 $d \circ d = 0$ ，从而 $((C \otimes D)_{\bullet}, d)$ 确实为分次上链复形。对于分次 K -模，我们仍可以谈论对称张量、反对称张量：

定义 2.1.10. 设 V 为分次 K -模，对任意 $m \geq 0$ ，

(1) 定义 m 阶超对称张量空间如下：

$$\text{Sym}^m(V) = V^{\otimes m} / \sim$$

其中等价关系 \sim 由以下生成：对任意齐次元 $\alpha, \beta \in V$ ，

$$\alpha \otimes \beta \sim (-1)^{\deg \alpha \deg \beta} \beta \otimes \alpha$$

(2) 定义 m 阶超反称张量空间如下：

$$\bigwedge^m(V) := V^{\otimes m} / \sim$$

其中等价关系 \sim 由以下生成：对任意齐次元 $\alpha, \beta \in V$ ，

$$\alpha \otimes \beta \sim -(-1)^{\deg \alpha \deg \beta} \beta \otimes \alpha$$

若 $V = V_0$ 为通常的 K -模，则 $\text{Sym}^n(V_0)$ 与 $\bigwedge^n(V_0)$ 即为通常的对称张量、外张量。对于分次 K -模 V ，以及任意的 $m \geq 0$ ， $\text{Sym}^m(V)$ 有以下自然的分次 K -模结构：

$$\text{Sym}^m(V) = \bigoplus_{d \in \mathbb{Z}} [\text{Sym}^m(V)]_d$$

$$[\mathrm{Sym}^m(V)]_d := \mathrm{span}_K \left\{ v_1 \odot v_2 \odot \cdots \odot v_m \mid \sum_{i=1}^m \deg v_i = d \right\}$$

超反称张量空间 $\wedge^m(V)$ 也有完全类似的分次 K -模结构。

回顾分次 K -模的平移，以下结果十分重要：

性质 2.1.11. 对于分次 K -模 V ，以及任意 $n \geq 0$ ，则有分次 K -模同构：

$$\mathrm{Sym}^n(V[1]) \cong (\wedge^n(V))[n]$$

证明. 对于任意 $d \in \mathbb{Z}$ ，首先看看它们的齐次分量 $(\mathrm{Sym}^n(V[1]))_d$ 与 $((\wedge^n(V))[n])_d$ 中的元素具有何种形式。我们用 v_1, \dots, v_n 表示 V 中的 d_1, \dots, d_n 次齐次元，根据定义容易验证

$$(\mathrm{Sym}^n(V[1]))_d = \mathrm{span}_K \{ v_1 \odot v_2 \odot \cdots \odot v_n \mid d_1 + d_2 + \cdots + d_n = n + d \}$$

$$((\wedge^n(V))[n])_d = \mathrm{span}_K \{ v_1 \wedge v_2 \wedge \cdots \wedge v_n \mid d_1 + d_2 + \cdots + d_n = n + d \}$$

从而它们都为 $(V^{\otimes n})_{n+d}$ 的商模。

考虑 K -模自同构

$$\begin{aligned} \Phi_{n,d} : (V^{\otimes n})_{n+d} &\rightarrow (V^{\otimes n})_{n+d} \\ v_1 \otimes v_2 \otimes \cdots \otimes v_n &\mapsto (-1)^{d_1+2d_2+\cdots+nd_n} v_1 \otimes v_2 \otimes \cdots \otimes v_n \end{aligned}$$

断言该自同构 $\Phi_{n,d}$ 诱导了模同构

$$\begin{aligned} \varphi_{n,d} : (\mathrm{Sym}^n(V[1]))_d &\rightarrow ((\wedge^n(V))[n])_d \\ v_1 \odot v_2 \odot \cdots \odot v_n &\mapsto (-1)^{d_1+2d_2+\cdots+nd_n} v_1 \wedge v_2 \wedge \cdots \wedge v_n \end{aligned}$$

为此，只需要验证 $\varphi_{n,d}$ 的良好性（与代表元选取无关）。若 $\varphi_{n,d}$ 良定，则容易构造其逆映射，进而命题得证。

特别注意， $\mathrm{Sym}^n(V[1])$ 作为 $V^{\otimes n}$ 的商模，商掉的等价关系由

$$x \otimes y \sim (-1)^{(\deg x - 1)(\deg y - 1)} y \otimes x$$

生成，这直接由定义验证（**要特别小心**）；而 $(\wedge^n(V))[n]$ 作为 $V^{\otimes n}$ 的商模，商掉的等价关系由

$$x \otimes y \sim -(-1)^{\deg x \deg y} y \otimes x$$

生成。于是只需验证对任意 $1 \leq l \leq n_1$ ，成立

$$\Phi_{n,d} \left(\cdots (v_l \otimes v_{l+1} - (-1)^{(d_l-1)(d_{l+1}-1)} v_{l+1} \otimes v_l) \cdots \right)$$

$$\begin{aligned}
&= (-1)^{\sum_{i=1}^n id_i} \left(\cdots (v_l \otimes v_{l+1} - (-1)^{(d_l-1)(d_{l+1}-1)-d_{l+1}+d_l} v_{l+1} \otimes v_l) \cdots \right) \\
&= (-1)^{\sum_{i=1}^n id_i} \left(\cdots (v_l \otimes v_{l+1} + (-1)^{d_l d_{l+1}} v_{l+1} \otimes v_l) \cdots \right) \\
&\equiv 0 \in ((\bigwedge^n(V))[n])_d
\end{aligned}$$

□

2.2 分次代数与分次李代数

定义 2.2.1. (分次结合代数) 对于结合 K -代数 A :

(1) 称 A 为 $(\mathbb{Z}-)$ 分次结合代数 (associative graded algebra), 若 A 具有分次 K -模结构:

$$A = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} A_n$$

并且与乘法相容: 对任意 $k, l \in \mathbb{Z}$, 有

$$A_k \cdot A_l \subseteq A_{k+l}$$

(2) 若 A 为分次结合代数, 称 A 为分次交换代数, 若 A 还满足以下分次交换性: 对任意 $a_k \in A_k, a_l \in A_l$,

$$a_k \cdot a_l = (-1)^{kl} a_l \cdot a_k$$

特别注意分次交换性的正负号。分次交换代数的典型例子是, 光滑流形 X 上的微分形式 Ω_X^\bullet , 配以外积运算 \wedge 。

不过注意, 多项式代数 $K[x^1, \dots, x^n]$ 自然有分次结构, 是分次代数, 但它不满足分次交换性。
(仅仅是“交换的分次代数” 23333)

定义 2.2.2. (分次李代数)

K -代数 $(\mathfrak{g}, [\cdot, \cdot])$ 称为分次李代数 (graded Lie algebra), 或者李超代数 (Lie super algebra), 如果以下满足:

(1) \mathfrak{g} 具有分次 $\mathfrak{g} = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} \mathfrak{g}_k$, 使得对任意 $k, l \in \mathbb{Z}$, 成立

$$[\mathfrak{g}_k, \mathfrak{g}_l] \subseteq \mathfrak{g}_{k+l}$$

(2) 乘法 $[\cdot, \cdot]: \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ 满足如下分次反交换性: 对 A 中任意齐次元 a, b , 成立

$$[a, b] = -(-1)^{\deg a \deg b} [b, a]$$

(3) 对于 A 中任何齐次元 a, b, c , 成立如下分次雅可比恒等式:

$$(-1)^{\deg b \deg c} [c, [a, b]] + (-1)^{\deg c \deg a} [a, [b, c]] + (-1)^{\deg a \deg b} [b, [c, a]] = 0$$

我们可以将“分次”(graded)与“超”(super)进行同义词替换, 比如“分次雅可比恒等式”也可以称为“超雅可比恒等式”, “分次交换性”可以称为“超交换性”等等, 甚至将“分次线性空间”称为“超空间”。

容易验证, 超雅可比恒等式也可以改写为:

$$[c, [a, b]] = [c, [a, b]] + (-1)^{\deg a \deg c} [a, [c, b]]$$

也容易验证, 对于李超代数 $(A, [\cdot, \cdot])$, 则 $[\cdot, \cdot]$ 在 A 的零次分量 A_0 的限制, 给出了 A_0 的李代数结构。回顾李代数的情形, 李括号的雅可比恒等式反映了某种导子性质; 而李超代数完全类似, 上述超雅可比恒等式其实表明某种“超导子”性质。

记号 2.2.3. 为了省事, 我们引入一个记号约定: 对于分次代数或者分次李代数 (以及后文将介绍的分次模), 若 a 为其次元, 我们简记

$$(-1)^a := (-1)^{\deg a}$$

也就是说, (-1) 的幂次当中出现齐次元的次数时, 省略“deg”。

例如, 李超代数的超雅可比恒等式可简记为

$$(-1)^{bc} [c, [a, b]] + (-1)^{ca} [a, [b, c]] + (-1)^{ab} [b, [c, a]] = 0$$

或者

$$[c, [a, b]] = [c, [a, b]] + (-1)^{ac} [a, [c, b]]$$

引理 2.2.4. (分次结合代数诱导分次李代数)

设 (A, \cdot) 为分次结合代数, 则其乘法自然诱导出 A 的分次李代数结构如下: 定义

$$\begin{aligned} [\cdot, \cdot] : A \times A &\rightarrow A \\ [a, b] &:= a \cdot b - (-1)^{ab} b \cdot a \end{aligned}$$

其中任意 $a, b \in A$ 为齐次元。则 $(A, [\cdot, \cdot])$ 构成分次李代数, 并且与 (A, \cdot) 具有相同的分次。

这与由通常的结合代数通过“对易子”得到李代数的方式类似，不过要稍微注意正负号。

证明. 直接暴力验证即可，从略。注意这里的

$$(-1)^{ab} := (-1)^{\deg a \deg b} = (-1)^{ba}$$

为偷懒的记号。 □

我们可以考虑以分次 K -代数的范畴：

定义 2.2.5. (分次结合代数范畴)

我们定义如下的分次结合 K -代数范畴，记为 $\underline{\text{Ass-alg}}_K^{\mathbb{Z}}$ ：

- (1) $\text{Obj} =$ 全体分次结合 K -代数；
- (2) Mor : 对任意两个分次结合 K -代数 A, B ,

$$\text{Hom}(A, B) := \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} (\text{Hom}(A, B))_n$$

其中

$$(\text{Hom}(A, B))_n := \{f \text{ 为 } K\text{-代数同态} \mid f(A_d) \subseteq B_{d+n} \forall d \in \mathbb{Z}\}$$

$(\text{Hom}(A, B))_n$ 当中的元素称之为 n 次齐次 K -代数同态。

类似地，考虑分次交换代数范畴，它是分次结合代数范畴的全子范畴，记为

$$\underline{\text{Commu-alg}}_K^{\mathbb{Z}}$$

定义 2.2.6. (分次双 A -模)

设 $A = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} A_n$ 为分次结合 K -代数， M 为双 A -模，称 M 为分次双 A -模，若 M 配以分次 K -模结构

$$M = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} M_n$$

并且与 A 的模作用相容：对任意 $p, q \in \mathbb{Z}$,

$$A_p \cdot M_q \subseteq M_{p+q}$$

$$M_p \cdot A_q \subseteq M_{p+q}$$

然后对于两个分次双 A -模 M, N ，也可以定义何为“分次双 A -模同态”，并且从 M 到 N 的分次双 A -模同态之全体，亦有自然的分次双 A -模结构。

特别地，对于分次 K -代数 A ， A 自身有自然的分次双 A -模结构。

定义 2.2.7. (导子) 对于分次 K -代数 A ，以及分次双 A -模 M ，称 K -线性同态

$$D : A \rightarrow M$$

为 A 的一个取值于 M 的导子，若对 A 中的任何齐次元 a, b ，成立

$$D(ab) = D(a).b + (-1)^a a.D(b)$$

我们将 A 的取值于 M 的导子之全体记为 $\text{Der}_0(A, M)$ 。

这个定义当中并没有用到 M 的分次。事实上对于一般的双 A -模 M ，我们都可以如此谈论 $\text{Der}_0(A, M)$ 。

导子的作用可以用如下交换图描述：

$$\begin{array}{ccc} A \otimes A & \xrightarrow{m} & A \\ \downarrow 1 \otimes D + D \otimes 1 & & \downarrow D \\ A \otimes M \oplus M \otimes A & \xrightarrow{m} & M \end{array}$$

其中 m 表示 A 中的乘法，然后特别注意 $1 \otimes D$ 以及 $D \otimes 1$ 在 $A \otimes A$ 上的作用服从 **Koszul** 符号法则（回顾记号 2.1.5）。

定义 2.2.8. (超导子)

对于分次 K 代数 A 以及 $d \in \mathbb{Z}$ ，称次数为 d 的分次 K -模同态

$$D : A \rightarrow A$$

为次数为 d 的超导子，若满足如下的超莱布尼茨法则：对 A 中任何齐次元 a, b ，成立

$$D(ab) = D(a)b + (-1)^{d \cdot \deg a} aD(b)$$

记次数为 d 的超导子之全体为 $\text{Der}(A, A)_d$ ，并且记

$$\text{Der}(A, A) := \bigoplus_{d \in \mathbb{Z}} \text{Der}(A, A)_d$$

易知 $\text{Der}(A, A)$ 有自然的分次 K -模结构。超导子 D 的作用可由如下交换图来描述：

$$\begin{array}{ccc} A \otimes A & \xrightarrow{D \otimes 1 + 1 \otimes D} & A \otimes A \\ \downarrow m & & \downarrow m \\ A & \xrightarrow{D} & A \end{array}$$

注记 2.2.9. (微分分次代数) 对于 K -代数 A ，以及次数为 1 的超导子 $d \in \text{Der}(A, A)_1$ ，如果 $d^2 = 0$ ，则 (A, d) 正是我们在之前 (见定义 1.4.5) 定义的分次微分代数。

分次微分代数 (A, d) 自然可视为分次上链复形。当然我们也可以考虑次数为 -1 的超导子，亦可定义出类似版本的分次微分代数 (不过我们更推荐使用上链复形的语言)。

引理 2.2.10. (由超导子构成的李超代数)

对于分次 K -代数 A ，若 $D_1, D_2 \in \text{Der}(A, A)$ 为齐次的超导子，定义

$$[D_1, D_2] := D_1 \circ D_2 - (-1)^{D_1 D_2} D_2 \circ D_1$$

则 $[D_1, D_2]$ 是次数为 $\deg D_1 + \deg D_2$ 的超导子。从而我们定义了

$$[,] : \text{Der}(A, A) \times \text{Der}(A, A) \rightarrow \text{Der}(A, A)$$

使得 $(\text{Der}(A, A), [,])$ 为李超代数。

证明. 对于齐次超导子 D_1, D_2 ，只需要验证 $[D_1, D_2]$ 仍然是超导子，然后由引理 2.2.4 即可知 $(\text{Der}(A, A), [,])$ 为李超代数。

暴力验证之 (还是写一下过程吧)，对 A 中任意齐次元 a_1, a_2 ，有

$$\begin{aligned} [D_1, D_2](a_1 a_2) &= (D_1 D_2 - (-1)^{D_1 D_2})(a_1 a_2) \\ &= D_1(D_2(a_1)a_2 + (-1)^{a_1 D_2} a_1 D_2(a_2)) \\ &\quad - (-1)^{D_1 D_2} D_2(D_1(a_1)a_2 + (-1)^{a_1 D_1} a_1 D_1(a_2)) \\ &= D_1 D_2(a_1)a_2 + (-1)^{D_1(a_1+D_2)} D_2(a_1) D_1(a_2) \\ &\quad + (-1)^{a_1 D_2} [D_1(a_1) D_2(a_2) + (-1)^{a_1 D_1} a_1 D_1 D_2(a_2)] \\ &\quad - (-1)^{D_1 D_2} [D_2 D_1(a_1)a_2 + (-1)^{D_2(D_1+a_1)} D_1(a_1) D_2(a_2) \\ &\quad + (-1)^{a_1 D_1} (D_2(a_1) D_1(a_2) + (-1)^{D_2 a_1} a_1 D_2 D_1(a_2))] \\ &= [D_1 D_2 - (-1)^{D_1 D_2} D_2 D_1](a_1) a_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +(-1)^{a_1(D_1+D_2)}a_2[D_1D_2-(-1)^{D_1D_2}D_2D_1](a_2) \\
& = [D_1, D_2](a_1)a_2 + (-1)^{a_1(D_1+D_2)}a_1[D_1, D_2](a_2)
\end{aligned}$$

可见 $[D_1, D_2]$ 确实是次数为 $(\deg D_1 + \deg D_2)$ 的超导子，证毕。 \square

最后简要介绍一下函子性：我们有遗忘函子

$$\begin{aligned}
\underline{\text{Ass-alg}}_K^{\mathbb{Z}} & \rightarrow \underline{\text{Mod}}_K^{\mathbb{Z}} \\
\underline{\text{Commu-alg}}_K^{\mathbb{Z}} & \rightarrow \underline{\text{Mod}}_K^{\mathbb{Z}}
\end{aligned}$$

我们考虑该函子的左伴随“自由分次结合代数”以及“自由分次交换代数”，即范畴论当中的“普遍真理”（呵呵呵呵呵呵）：

自由是遗忘的左伴随

定义 2.2.11.（张量代数 or 自由分次结合代数）

设 V 为分次 K -模，定义分次 K -模

$$T(V) := \bigoplus_{n \geq 0} V^{\otimes n}$$

其中 $V^{\otimes 0} := K$ ；并且张量积“ \otimes ”给出了 $T(V)$ 的乘法结构：

$$(v_1 \otimes \cdots \otimes v_p) \otimes (v_{p+1} \otimes \cdots \otimes v_{p+q}) = v_1 \otimes \cdots \otimes v_{p+q}$$

从而使得 $(T(V), \otimes)$ 为分次结合代数，称之为由 V 生成的自由分次结合代数。

这的确是一种非常“自由”的构造方式。并且容易验证 T 的函子性：

$$\begin{aligned}
T : \underline{\text{Mod}}_K^{\mathbb{Z}} & \rightarrow \underline{\text{Ass-alg}}_K^{\mathbb{Z}} \\
V & \mapsto T(V)
\end{aligned}$$

同样，我们可以考虑自由生成的分次交换代数：

定义 2.2.12.（自由分次交换代数）

设 V 为分次 K -模，定义分次 K -模

$$\text{Sym}(V) := \bigoplus_{n \geq 0} \text{Sym}^n(V)$$

其中 $\text{Sym}^0(V) := K$ ；并且对称张量积 “ \odot ” 给出了 $\text{Sym}(V)$ 的乘法结构：

$$(v_1 \odot \cdots \odot v_p) \odot (v_{p+1} \odot \cdots \odot v_{p+q}) = v_1 \odot \cdots \odot v_{p+q}$$

从而使得 $(\text{Sym}(V), \odot)$ 为分次结合代数，称之为由 V 生成的自由分次交换代数。

也容易验证 Sym 的函子性：

$$\begin{aligned} \text{Sym} : \underline{\text{Mod}}_K^{\mathbb{Z}} &\rightarrow \underline{\text{Commu-alg}}_K^{\mathbb{Z}} \\ V &\mapsto \text{Sym}(V) \end{aligned}$$

性质 2.2.13. (伴随对) 对于任意分次 K -模 V ，以及分次结合 K -代数 A 、分次交换 K -代数 B ，注意 A, B 首先是分次 K -模：

(1) 存在 (关于 V, A) 自然的一一对应

$$\text{Hom}_{\underline{\text{Mod}}_K^{\mathbb{Z}}}(V, A) \cong \text{Hom}_{\underline{\text{Ass-alg}}_K^{\mathbb{Z}}}(\text{Sym}(V), A)$$

(2) 存在 (关于 V, B) 自然的一一对应

$$\text{Hom}_{\underline{\text{Mod}}_K^{\mathbb{Z}}}(V, B) \cong \text{Hom}_{\underline{\text{Commu-alg}}_K^{\mathbb{Z}}}(\text{Sym}(V), B)$$

证明. 易证，从略。 □

用范畴论的语言，此性质表明，函子 T 与 Sym 分别为相应的遗忘函子的左伴随。或者还可以表述为如下泛性质，看图即可：

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\quad} & T(V) \\ & \searrow \forall f & \downarrow \exists! \\ & & A \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\quad} & \text{Sym}(V) \\ & \searrow \forall f & \downarrow \exists! \\ & & B \end{array}$$

性质 2.2.14. 设 V 为分次 K -模， M 为 K -模，则有一一对应

$$\text{Der}_0(T(V), M) \cong \text{Hom}_K(V, M)$$

证明. 这个也几乎显然，从略。 □

2.3 余代数与分次余代数

首先简要回顾一下余代数（co-algebra）的概念。对于 K -代数 A ， A 上的乘法 $m: A \otimes A \rightarrow A$ 的结合性可用如下交换图来描述：

$$\begin{array}{ccc}
 A \otimes A \otimes A & \xrightarrow{m \otimes 1} & A \otimes A \\
 \downarrow 1 \otimes m & & \downarrow m \\
 A \otimes A & \xrightarrow{m} & A
 \end{array}$$

将上述图表中的箭头全部反向，即得到余结合律的概念：对于 K -模 A ，以及 K -模同态 $\Delta: A \rightarrow A \otimes A$ ，若以下图表交换

$$\begin{array}{ccc}
 A & \xrightarrow{\Delta} & A \otimes A \\
 \downarrow \Delta & & \downarrow \Delta \otimes 1 \\
 A \otimes A & \xrightarrow{1 \otimes \Delta} & A \otimes A \otimes A
 \end{array}$$

则称 Δ 满足余结合律，运算“ Δ ”称为余乘（co-product）。类似地我们可以谈论余交换律，乘法 $m: A \otimes A \rightarrow A$ 与余乘 $\Delta: A \rightarrow A \otimes A$ 的交换律、余交换律分别由以下交换图表描述：

$$\begin{array}{ccc}
 A \otimes A & \xrightarrow{\tau} & A \otimes A \\
 \searrow m & & \swarrow m \\
 & A &
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{ccc}
 A \otimes A & \xleftarrow{\tau} & A \otimes A \\
 \swarrow \Delta & & \searrow \Delta \\
 & A &
 \end{array}$$

其中 $\tau: x \otimes y \mapsto y \otimes x$ 为 $A \otimes A$ 的对合自同构。

对于 K -代数 A ，我们总是假定 A 含幺。事实上，存在唯一的 K -代数同态

$$i: K \rightarrow A$$

而 A 的幺元 $1 \in A$ 即为 $1 \in K$ 在该同态下的像。在此意义下，我们不妨重新定义什么是 A 的幺元：称 K -模同态 $i: K \rightarrow A$ 为 A 的幺元，如果以下图表交换：

$$\begin{array}{ccccc}
 & & A & & \\
 & \nearrow \cong & \uparrow m & \nwarrow \cong & \\
 K \otimes A & \xrightarrow{i \otimes 1} & A \otimes A & \xleftarrow{1 \otimes i} & A \otimes K
 \end{array}$$

将以上图表的箭头全部反向，则得到余么元（co-unit）的概念：对于配以余乘 Δ 的 K -模 A ，称 K -模同态 $\varepsilon: A \rightarrow K$ 为关于 Δ 的余么元，如果以下图表交换：

$$\begin{array}{ccccc}
 & & A & & \\
 & \nearrow \cong & \downarrow \Delta & \nwarrow \cong & \\
 K \otimes A & \xleftarrow{\varepsilon \otimes 1} & A \otimes A & \xrightarrow{1 \otimes \varepsilon} & A \otimes K
 \end{array}$$

对于 K -模 A ，若 A 配以（满足余结合律的）余乘 Δ ，以及关于该余乘的余么元 $\varepsilon: A \rightarrow K$ ，则称 (A, Δ, ε) 为 K -余代数。

若 (A, Δ_A) 与 (B, Δ_B) 都为 K -余代数，称 K -模同态 $\varphi: A \rightarrow B$ 为 K -余代数同态，如果对任意 $x \in A$ ，成立

$$\Delta_B(\varphi(x)) = \varphi(\Delta_A(x))$$

注记 2.3.1. 若 (A, Δ) 为 K -余代数，考虑对偶映射 $\Delta^*: (A \otimes A)^* \rightarrow A^*$ ，则 (A^*, Δ^*) 具有如下 K -代数结构：

$$A^* \otimes A^* \rightarrow (A \otimes A)^* \xrightarrow{\Delta^*} A^*$$

用反变函子 $\text{Hom}(-, K)$ 翻转余代数图表的箭头而已；但是要注意，对一个代数取对偶，未必能得到余代数。也就是说，某种意义上余代数比代数包含更多的信息。

现在我们谈论余代数的分次版本。

定义 2.3.2. （分次余代数）

设 $A = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} A_k$ 为分次 K -模， $\Delta: A \rightarrow A \otimes A$ 为 A 的余乘（满足余结合律），称 (A, Δ) 为分次余代数（graded co-algebra），若 Δ 与 A 的分次满足以下相容性：任意 $k \in \mathbb{Z}$ ，

$$\Delta(A_k) \subseteq (A \otimes A)_k$$

我们自然也可以谈论 Δ 的分次余交换性，见下述交换图（与非分次情形完全一样）：

$$\begin{array}{ccc}
 A \otimes A & \xleftarrow{\tau} & A \otimes A \\
 & \nearrow \Delta & \nwarrow \Delta \\
 & A &
 \end{array}$$

不过要注意，这里的 τ 为分次对合自同构（见定义2.1.4），服从 Koszul 符号法则：

$$\tau: x \otimes y \mapsto (-1)^{xy} y \otimes x$$

定义 2.3.3. (余超导子)

对于分次 K -余代数 A , 以及 $d \in \mathbb{Z}$, 称次数为 d 的分次 K -模同态 $\delta: A \rightarrow A$ 为 d 次齐次余超导子, 若以下图表交换

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\delta} & A \\ \Delta \downarrow & & \downarrow \Delta \\ A \otimes A & \xrightarrow{\delta \otimes 1 + 1 \otimes \delta} & A \otimes A \end{array}$$

即满足“余莱布尼茨法则”。

注意到上述图表默认 Koszul 符号法则。记 A 的 d 次齐次余超导子之全体为 $\text{Coder}(A)_d$, 以及

$$\text{Coder}(A) := \bigoplus_{d \in \mathbb{Z}} \text{Coder}(A)_d$$

称其中的元素为余超导子。与超导子类似, 余超导子之全体也有李超代数结构:

性质 2.3.4. 对于 K -余代数 A , 以及齐次余超导子 $D_1, D_2 \in \text{Coder}(A)$, 定义

$$[D_1, D_2] := D_1 \circ D_2 - (-1)^{D_1 D_2} D_2 \circ D_1$$

则 $[D_1, D_2] \in \text{Coder}(A)$, 进而 $(\text{Coder}(A), [,])$ 构成李超代数。

证明. 与分次代数的超导子完全类似, 直接验证即可, 从略。 □

有了余超导子, 可以相应地去定义微分分次余代数 (differential graded co-algebra):

定义 2.3.5. (微分分次余代数) 对于 K -余代数 A , 以及满足 $\delta^2 = 0$ 的 1 次齐次余超导子 δ , 则称 (A, δ) 为微分分次余代数。

类似地, 微分分次余代数自然可以视为分次上链复形。

注记 2.3.6. ((co-)augmentation)

- (1) 对于 K -代数 A , 我们把从 A 到 K 的 K -模同态称为 *augmentation*;
- (2) 对于 K -余代数 A , 我们把从 K 到 A 的 K -模同态称为 *co-augmentation*

与“么元”的箭头刚好相反。笔者建议将 augmentation 意译为“赋值”。

例子 2.3.7. 设 V 为分次 K -模, 考虑张量代数 $T(V) : \bigoplus_{n \geq 0} V^{\otimes n}$, 定义

$$\begin{aligned} \Delta : T(V) &\rightarrow T(V) \otimes T(V) \\ v_1 \otimes \cdots \otimes v_n &\mapsto \sum_{i=0}^n (v_1 \otimes \cdots \otimes v_i) \otimes (v_{i+1} \otimes \cdots \otimes v_n) \end{aligned}$$

则 $(T(V), \Delta)$ 构成余代数。

容易验证如此 Δ 满足余结合律:

$$\begin{aligned} &(\Delta \otimes 1) \circ \Delta(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n) \\ &= \sum_{0 \leq i \leq j \leq n} (a_1 \otimes \cdots \otimes a_i) \otimes (a_{i+1} \otimes \cdots \otimes a_j) \otimes (a_{j+1} \otimes \cdots \otimes a_n) \\ &= (1 \otimes \Delta) \circ \Delta(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n) \end{aligned}$$

并且配以余么元 ε :

$$\varepsilon|_{V^{\otimes n}} = \begin{cases} 0 & \text{如果 } n > 0 \\ \text{id}_K & \text{如果 } n = 0 \end{cases}$$

注记 2.3.8. $T(V)$ 还有另一个余乘结构 $\overline{\Delta}$

$$\overline{\Delta}(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n) := \sum_{i=1}^{n-1} (v_1 \otimes \cdots \otimes v_i) \otimes (v_{i+1} \otimes \cdots \otimes v_n)$$

这也是容易验证的。不过这个余乘结构不存在余么元。

2.4 多重切向量场与 Schouten-Nijenhuis 括号

众所周知, 对于光滑流形 X , X 上的微分形式 Ω_X^\bullet 配以外积 \wedge 构成分次交换代数 (若再考虑外微分 d , 还有微分分次代数结构)。本节我们介绍另一重要的经典例子: 光滑流形上的多重切向量场, 并给出其上的李超代数结构: Schouten-Nijenhuis 括号。

定义 2.4.1. (多重切向量场) 对于光滑流形 X , 称 X 的切丛的外积丛 $\wedge^*(TX)$ 的截面为多重切向量场 (polyvector field)。并且记

$$PV_X := \Gamma(X, \wedge^*(TX))$$

为多重切向量场之全体。

PV_X 有显然的 $C^\infty(X)$ -模结构。与微分形式类似，容易定义 PV_X 上的外积 \wedge ，使得 (PV_X, \wedge) 为分次交换 $C^\infty(X)$ -代数，其分次由以下给出：

$$PV_X = \bigoplus_{k \geq 0} PV_X^k$$

其中 PV_X^k 中的元素形如

$$\xi_1 \wedge \xi_2 \wedge \cdots \wedge \xi_k$$

的 $C^\infty(X)$ -线性组合，其中 ξ_i 为 X 上的光滑切向量场。称 PV_X^k 中的元素为 k -向量。

回顾 X 的切向量场的李括号 $[\cdot, \cdot]$ 运算，这给出了切向量场的李代数结构；接下来我们企图将李括号运算延拓到多重切向量场上，从而得到 $PV_X[1]$ 的李超代数结构。（注意这里要平移一下分次，使得把切向量场视为零次元。）

定义 2.4.2. (*Schouten-Nijenhuis* 括号)

对于光滑流形 X ，定义 PV_X 上的 \mathbb{R} -双线性映射

$$\begin{aligned} \{\cdot, \cdot\} : PV_X^p \times PV_X^q &\rightarrow PV_X^{p+q-1} \\ \{f, g\} &= 0 \\ \{f, \xi\} &= (-1)^p \{\xi, f\} = \sum_{k=1}^p (-1)^k \xi_k(f) (\cdots \wedge \widehat{\xi_k} \wedge \cdots) \\ \{\xi, \eta\} &= \sum_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq q}} (-1)^{i+j} [\xi_i, \eta_j] \wedge (\cdots \wedge \widehat{\xi_i} \wedge \cdots) \wedge (\cdots \wedge \widehat{\eta_j} \wedge \cdots) \end{aligned}$$

其中任意 $f, g \in C^\infty(X) = PV_X^0$ 以及

$$\xi = \xi_1 \wedge \cdots \wedge \xi_p \quad \eta = \eta_1 \wedge \cdots \wedge \eta_q$$

我们需要验证 $\{\cdot, \cdot\}$ 的良好性：与 ξ, η 的代表元的选取无关。这只需暴力验证即可。从略。

性质 2.4.3. (*Schouten-Nijenhuis* 括号的性质)

对于光滑流形 X ，则 $(PV_X, \{\cdot, \cdot\})$ 满足如下性质：

(1) 若 $\xi, \eta \in PV_X^1$ 为通常的切向量场，则

$$\{\xi, \eta\} = [\xi, \eta]$$

(2) 对任意 $p, q \geq 0$ ，任意 $\xi \in PV_X^p$ 以及 $\eta \in PV_X^q$ ，成立

$$\{\xi, \eta\} = -(-1)^{(p-1)(q-1)} \{\eta, \xi\}$$

(3) 对任意 $p, q, r \geq 0$, 任意 $\xi \in \text{PV}_X^p$ 以及 $\eta \in \text{PV}_X^q, \phi \in \text{PV}_X^r$, 成立

$$\{\xi, \eta \wedge \phi\} = \{\xi, \eta\} \wedge \phi + (-1)^{(p-1)q} \eta \wedge \{\xi, \phi\}$$

证明. (1)(2) 容易验证, 从略; (3) 暴力验证, 建议使用数学归纳法. 从略. \square

事实上, 这三条性质可作为 Schouten-Nijenhuis 括号的公理: 满足此性质的括号如果存在, 只能如此定义. 例如, 对任意的 $f \in \text{PV}_X^0 = C^\infty(X)$, 以及 $\xi, \eta \in \text{PV}_X^1$, 如果 $\{, \}$ 满足上述三条性质, 那么

$$\{\eta, f\xi\} = \{\eta, f \wedge \xi\} = \{\eta, f\}\xi + (-1)^{(1-1)\times 0} f\{\eta, \xi\} = \{\eta, f\}\xi + f[\eta, \xi]$$

但另一方面, 又有

$$\{\eta, f\xi\} = [\eta, f\xi] = \eta(f)\xi + f[\eta, \xi]$$

比较两式, 从而必有

$$\{\eta, f\} = \eta(f)$$

再反复使用超莱布尼茨法则 (3) 以及超反称性 (2), 即可得到 $\{, \}$ 的完整定义.

性质 2.4.4. 对于光滑流形 X , Schouten-Nijenhuis 括号 $\{, \}$ 满足如下超雅可比恒等式: 对任意 $p, q, r \geq 0$ 以及任意 $\xi \in \text{PV}_X^p, \eta \in \text{PV}_X^q, \phi \in \text{PV}_X^r$, 成立

$$\{\xi, \{\eta, \phi\}\} = \{\{\xi, \eta\}, \phi\} + (-1)^{(p-1)(q-1)} \{\eta, \{\xi, \phi\}\}$$

从而 $(\text{PV}_X[1], \{, \})$ 构成李超代数.

证明. 我们打算详细写出过程. 在证明的过程中, 我们将反复使用性质 2.4.3. 对任意的 $p, q, r > 0$, 任取

$$\xi = \xi_1 \wedge \cdots \wedge \xi_p \in \text{PV}_X^p$$

$$\eta = \eta_1 \wedge \cdots \wedge \eta_q \in \text{PV}_X^q$$

$$\phi = \phi_1 \wedge \cdots \wedge \phi_r \in \text{PV}_X^r$$

$$f, g, h \in \text{PV}_X^0 = C^\infty(X)$$

为方便书写, 我们引入如下记号:

$$\overline{\xi_i} := \xi_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{\xi_i} \wedge \cdots \wedge \xi_p \quad \forall 1 \leq i \leq p$$

$$\overline{\eta_j} := \eta_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{\eta_j} \wedge \cdots \wedge \eta_q \quad \forall 1 \leq j \leq q$$

$$\overline{\phi_k} := \phi_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{\phi_k} \wedge \cdots \wedge \phi_r \quad \forall 1 \leq k \leq r$$

我们将对 p 归纳。

预备情形：若 $p = q = r = 0$ ，则结论平凡。若 p, q, r 当中恰有两个为 0，不妨 $p = q = 0$ ，此时 $r > 0$ ，从而任取 $f, g \in \text{PV}_X^0$ 以及 $\phi \in \text{PV}_X^r$ ，此时的超雅可比恒等式为

$$\{f, \{g, \phi\}\} + \{g, \{f, \phi\}\} = 0$$

注意到

$$\{f, \phi\} = \sum_{k=1}^r (-1)^k \phi_k(f) \overline{\phi_k}$$

从而有

$$\begin{aligned} \{f, \{g, \phi\}\} &= \{f, \sum_{k=1}^r (-1)^k \phi_k(g) \overline{\phi_k}\} \\ &= \sum_{k=1}^r \phi_k(g) \left(\sum_{j < k} (-1)^j \phi_j(f) \overline{\phi_{jk}} + \sum_{j > k} (-1)^{j+1} \phi_j(f) \overline{\phi_{kj}} \right) \\ &= \sum_{1 \leq i < j \leq r} (-1)^{i+j} [\phi_i(g) \phi_j(f) - \phi_j(g) \phi_i(f)] \overline{\phi_{ij}} \end{aligned}$$

其中对于 $j < k$ ，简写记号

$$\overline{\phi_{jk}} := \cdots \wedge \widehat{\phi_j} \wedge \cdots \wedge \widehat{\phi_k} \wedge \cdots$$

注意观察上式关于 f, g 的反对称性，容易发现 $\{f, \{g, \phi\}\} = -\{g, \{f, \phi\}\}$ ，从而证毕。

于是，我们在接下来的证明中，不妨 p, q, r 当中为零的至多只有一个。

p 的起始步：现在开始对 p 归纳，首先考虑起始步 $p = 0$ 。由之前讨论，不妨 $q, r > 0$ 。任取 $f \in \text{PV}_X^0$ ，只需证

$$\{f, \{\eta, \phi\}\} = \{\{f, \eta\}, \phi\} + (-1)^{q-1} \{\eta, \{f, \phi\}\} \quad (*)$$

暴力展开验证之，注意到

$$\begin{aligned} \{f, \{\eta, \phi\}\} &= \sum_{j=1}^q \sum_{k=1}^r (-1)^{j+k} \{f, [\eta_j, \phi_k] \wedge \overline{\eta_j} \wedge \overline{\phi_k}\} \\ &= - \sum_{j=1}^q \sum_{k=1}^r (-1)^{j+k} [\eta_j, \phi_k](f) \overline{\eta_j} \wedge \overline{\phi_k} \\ &\quad - \sum_{j=1}^q \sum_{k=1}^r (-1)^{j+k} [\eta_j, \phi_k] \wedge \{f, \overline{\eta_j} \wedge \overline{\phi_k}\} \end{aligned}$$

再打开 $(*)$ 的右边：

$$\begin{aligned} \{\{f, \eta\}, \phi\} &= \sum_{j=1}^q (-1)^j \{\eta_j(f) \overline{\eta_j}, \phi\} \\ &= \sum_{j=1}^q (-1)^j \left[(-1)^{(q-1)(r-1)} \{\eta_j(f), \phi\} \wedge \overline{\eta_j} + \eta_j(f) \{\overline{\eta_j}, \phi\} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{j=1}^q \sum_{k=1}^r (-1)^{j+k} \phi_k(\eta_j(f)) \bar{\eta}_j \wedge \bar{\phi}_k \\
&\quad + \sum_{j=1}^q (-1)^j \eta_j(f) \{\bar{\eta}_j, \phi\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(-1)^{q-1} \{\eta, \{f, \phi\}\} &= (-1)^{q-1} \sum_{k=1}^r (-1)^k \{\eta, \phi_k(f) \bar{\phi}_k\} \\
&= (-1)^{q-1} \sum_{k=1}^r (-1)^k \left[\{\eta, \phi_k(f)\} \wedge \bar{\phi}_k + (-1)^{q-1} \phi_k(f) \{\eta, \bar{\phi}_k\} \right] \\
&= - \sum_{j=1}^q \sum_{k=1}^r (-1)^{j+k} \eta_j(\phi_k(f)) \bar{\eta}_j \wedge \bar{\phi}_k \\
&\quad + \sum_{k=1}^r (-1)^k \phi_k(f) \{\eta, \bar{\phi}_k\}
\end{aligned}$$

因此有

$$\begin{aligned}
\{\{f, \eta\}, \phi\} + (-1)^{q-1} \{\eta, \{f, \phi\}\} &= \sum_{j=1}^q \sum_{k=1}^r (-1)^{j+k} (\phi_k(\eta_j(f)) - \eta_j(\phi_k(f))) \bar{\eta}_j \wedge \bar{\phi}_k \\
&\quad + \sum_{j=1}^q (-1)^j \eta_j(f) \{\bar{\eta}_j, \phi\} + \sum_{k=1}^r (-1)^k \phi_k(f) \{\eta, \bar{\phi}_k\} \\
&= - \sum_{j=1}^q \sum_{k=1}^r (-1)^{j+k} [\eta_j, \phi_k](f) \bar{\eta}_j \wedge \bar{\phi}_k \\
&\quad + \sum_{j=1}^q (-1)^j \eta_j(f) \{\bar{\eta}_j, \phi\} + \sum_{k=1}^r (-1)^k \phi_k(f) \{\eta, \bar{\phi}_k\}
\end{aligned}$$

与 (*) 式比较, 只需要再验证恒等式

$$- \sum_{j=1}^q \sum_{k=1}^r (-1)^{j+k} [\eta_j, \phi_k] \wedge \{f, \bar{\eta}_j \wedge \bar{\phi}_k\} = \sum_{j=1}^q (-1)^j \eta_j(f) \{\bar{\eta}_j, \phi\} + \sum_{k=1}^r (-1)^k \phi_k(f) \{\eta, \bar{\phi}_k\}$$

即可。而这只需将式子中的 Schouten-Nijenhuis 括号暴力展开, 并且适当更改求和指标即可, 从略。(不太想写了, 打字好累 2333)

p 的归纳步: 如果该命题对 p 成立, 则考虑

$$\zeta' := \zeta_0 \wedge \zeta \in \mathbf{PV}_X^{p+1}$$

其中任意 $\zeta_0 \in \mathbf{PV}_X^0$. 我们只需证

$$\{\zeta', \{\eta, \phi\}\} = \{\{\zeta', \eta\}, \phi\} + (-1)^{p(q-1)} \{\eta, \{\zeta', \phi\}\} \quad (**)$$

注意反复使用 $\{, \}$ 的超反对称性、超莱布尼茨法则，以及关于 p 的归纳假设，我们简单（但暴力）验证如下：

$$\begin{aligned}
 (**) \text{ 左边} &= \{\xi_0 \wedge \xi, \{\eta, \phi\}\} \\
 &= (-1)^p \xi \wedge \{\xi_0, \{\eta, \phi\}\} + \xi_0 \wedge \{\xi, \{\eta, \phi\}\} \\
 &= (-1)^p \xi \wedge \left(\{\{\xi_0, \eta\}, \phi\} + \{\eta, \{\xi_0, \phi\}\} \right) \\
 &\quad + \xi_0 \wedge \left(\{\{\xi, \eta\}, \phi\} + (-1)^{(p-1)(q-1)} \{\eta, \{\xi, \phi\}\} \right)
 \end{aligned}$$

其中最后一步等号用到了归纳假设。再看 $(**)$ 右边，需要格外小心正负号：

$$\begin{aligned}
 (**) \text{ 右边} &= (-1)^{p(q-1)+(p+q-1)(r-1)} \{\phi, \{\eta, \xi_0 \wedge \xi\}\} - (-1)^{p(q-1)+p(r-1)} \{\eta, \{\phi, \xi_0 \wedge \xi\}\} \\
 &= (-1)^{p(q-1)+(p+q-1)(r-1)} \left\{ \phi, \eta, \xi_0 \wedge \xi + (-1)^{q-1} \xi_0 \wedge \{\eta, \xi\} \right\} \\
 &\quad - (-1)^{p(q+r)} \left\{ \eta, \{\phi, \xi_0\} \wedge \xi + (-1)^{r-1} \xi_0 \wedge \{\phi, \xi\} \right\} \\
 &= (-1)^{p(q-1)+(p+q-1)(r-1)} \\
 &\quad \left[\{\phi, \{\eta, \xi_0\}\} \wedge \xi + (-1)^{(r-1)q} \{\eta, \xi_0\} \wedge \{\phi, \xi\} \right. \\
 &\quad \left. + (-1)^{q-1} (\{\phi, \xi_0\} \wedge \{\eta, \xi\} + (-1)^{r-1} \xi_0 \wedge \{\phi, \{\eta, \xi\}\}) \right] \\
 &\quad - (-1)^{p(q+r)} \left[\{\eta, \{\phi, \xi_0\}\} \wedge \xi + (-1)^{(q-1)r} \{\phi, \xi_0\} \wedge \{\eta, \xi\} \right. \\
 &\quad \left. + (-1)^{r-1} (\{\eta, \xi_0\} \wedge \{\phi, \xi\} + (-1)^{q-1} \xi_0 \wedge \{\eta, \{\phi, \xi\}\}) \right] \\
 &= (-1)^p \xi \wedge \left(\{\{\xi_0, \eta\}, \phi\} + \{\eta, \{\xi_0, \phi\}\} \right) \\
 &\quad + \xi_0 \wedge \left(\{\{\xi, \eta\}, \phi\} + (-1)^{(p-1)(q-1)} \{\eta, \{\xi, \phi\}\} \right) \\
 &= (**) \text{ 左边}
 \end{aligned}$$

从而 $(**)$ 两边相等，归纳完毕。 \square

归纳步当中主要是在验证正负号。

由于 Schouten-Nijenhuis 括号是切向量场李括号的“推广”，我们在以后更喜欢将它们都记作 “[,]”（而 “{,}” 在以后常用来表示泊松括号）。

2.5 Shuffle 乘积

对于 $n \geq 1$ ，我们记 S_n 为 n 元对称群。

定义 2.5.1. $((p, q)\text{-Shuffle})$

对于正整数 p, q , 称 $\sigma \in S_{p+q}$ 为一个 p, q -*Shuffle*, 如果满足

$$\sigma(1) < \sigma(2) < \dots < \sigma(p)$$

$$\sigma(p+1) < \sigma(p+2) < \dots < \sigma(q)$$

全体 (p, q) -*Shuffle* 构成的集合记为 $\text{Sh}_{p,q}$.

笔者建议将“Shuffle”意译为“洗牌”——因为 $\text{Sh}_{p,q}$ 中的置换，好比将 $p+q$ 张扑克牌分为 p 张、 q 张两组来洗牌。

容易知道，集合 $\text{Sh}_{p,q}$ 的元素个数为

$$\frac{(p+q)!}{p!q!}$$

回到 Hochschild 链复形。我们已经知道， $\text{HH}_\bullet(A)$ 是通常的光滑流形的微分形式 Ω_X^\bullet 的非交换版本。而对于微分形式 Ω_X^\bullet ，其上有外积 \wedge 使之构成分次交换代数；我们也企图去定义非交换版本的外积。

定义 2.5.2. (*Shuffle* 乘积)

设 A, A' 为 K -代数， M, M' 分别为双 A, A' -模，我们定义如下的运算 \times ，称之为 *Shuffle* 乘积：

$$\begin{aligned} C_p(A, M) \times C_q(A', M') &\rightarrow C_{p+q}(A \otimes A', M \otimes M') \\ (m, a_1, \dots, a_p) \times (m', a'_1, \dots, a'_q) &\mapsto \sum_{\sigma \in \text{Sh}_{p,q}} (-1)^{|\sigma|} (m \otimes m', \sigma(a_1, \dots, a_p, a'_1, \dots, a'_q)) \end{aligned}$$

其中 $|\sigma| := \text{sgn } \sigma$ 为置换的符号， $(m, a_1, \dots, a_n) := m \otimes a_1 \otimes \dots \otimes a_n$ 为简单的记法；并且置换群 S_{p+q} 在 $A^{\otimes(p+q)}$ 上的作用为

$$\sigma(a_1, \dots, a'_q) := (a_{\sigma^{-1}(1)}, \dots, a_{\sigma^{-1}(q')})$$

注意在这里，群 S_{p+q} 在 $A^{\otimes(p+q)}$ 上的作用方式，下角标中出现的是“ σ^{-1} ”，如此规定是为了保证 S_{p+q} 的作用是左作用。

还要注意一点， A, A' 以及 M, M' 并不被假定有分次结构， $A \otimes A'$ 在 $M \otimes M'$ 上的模作用是通常的

$$(a \otimes a').(m \otimes m') = (a.m) \otimes (a'.m')$$

右模作用也类似，并不会出正负号，Koszul 符号法则在此平凡。

还要注意,

$$C_{p+q}(A \otimes A', M \otimes M') \cong (M \otimes M') \otimes (A \otimes A')^{\otimes(p+q)}$$

之中元素 “ $(m \otimes m', a_1, \dots, a_p, a'_1, \dots, a'_q)$ ” 里面的 “ a_i ” 应该是 $a_i \otimes 1 \in A \otimes A'$, 以及 “ a'_j ” 应该是 $1 \otimes a'_j \in A \otimes A'$.

还要注意 $A \otimes A'$ 的乘法满足 $a_i a'_j = a'_j a_i$ 交换。

性质 2.5.3. (*Shuffle* 乘积与 *Hochschild* 边缘算子相容)

记号同上, 则对于任意 $x \in C_p(A, M)$, $y \in C_q(A', M')$, 成立

$$b(x \times y) = b(x) \times y + (-1)^{\deg x} x \times b(y)$$

其中 $b: C_\bullet \rightarrow C_{\bullet-1}$ 为相应 *Hochschild* 链复形各自的边缘算子。

证明. 当然是暴力验证了, 我们尽可能使用简练的记号. 令

$$x = m \otimes (a_1, \dots, a_p)$$

$$y = m' \otimes (a'_1, \dots, a'_q)$$

首先看 $b(x \times y)$, 我们按张量缩并的位置, 以及 $A \otimes A'$ 当中的 “元素类型” (形如 $1 \otimes A'$ 或是 $A \otimes 1$) 来分类, 强行将它打开:

$$\begin{aligned} b(x \times y) &= b \sum_{\sigma \in \text{Sh}_{p,q}} (-1)^{|\sigma|} (m \otimes m') \otimes \sigma(a_1, \dots, a_p, a'_1, \dots, a'_q) \\ &= (m \cdot a_1 \otimes m') \otimes \sum_{\sigma \in \text{Sh}_{p-1,q}} (-1)^{|\sigma|} \sigma(a_2, \dots, a_p, a'_1, \dots, a'_q) \\ &\quad + (m \otimes m' \cdot a'_1) \otimes \sum_{\sigma \in \text{Sh}_{p,q-1}} (-1)^{|\sigma|+p} \sigma(a_1, \dots, a_p, a'_2, \dots, a'_q) \\ &\quad + \sum_{i=1}^{p+q-1} (-1)^i (m \otimes m') \otimes \left[\sum_{\substack{1 \leq \alpha < \beta \leq p \\ \sigma \in \text{Sh}_{p-2,q}}} (-1)^{|\sigma|+\alpha+\beta-1} \sigma(\dots, \underbrace{(a_\alpha a_\beta)}_{\text{第 } i, i+1 \text{ 个}}, \dots) \right. \\ &\quad + \sum_{\substack{1 \leq \alpha \leq p, 1 \leq \gamma \leq q \\ \sigma \in \text{Sh}_{p-1,q-1}}} (-1)^{|\sigma|+\alpha+\gamma+p-1} \sigma(\dots, \underbrace{(a_\alpha a'_\gamma)}_{\text{第 } i, i+1 \text{ 个}}, \dots) \\ &\quad + \sum_{\substack{1 \leq \alpha \leq p, 1 \leq \gamma \leq q \\ \sigma \in \text{Sh}_{p-1,q-1}}} (-1)^{|\sigma|+\alpha+\gamma+p} \sigma(\dots, \underbrace{(a'_\gamma a_\alpha)}_{\text{第 } i, i+1 \text{ 个}}, \dots) \\ &\quad \left. + \sum_{\substack{1 \leq \gamma < \delta \leq q \\ \sigma \in \text{Sh}_{p,q-2}}} (-1)^{|\sigma|+(\gamma+p)+(\delta+p)-1} \sigma(\dots, \underbrace{(a'_\gamma a'_\delta)}_{\text{第 } i, i+1 \text{ 个}}, \dots) \right] \\ &\quad + (-1)^{p+q} (a_n \cdot m \otimes m') \sum_{\sigma \in \text{Sh}_{p-1,q}} (-1)^{|\sigma|+q} (a_1, \dots, a_{p-1}, a'_1, \dots, a'_q) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +(-1)^{p+q}(m \otimes a'_n.m') \sum_{\sigma \in \text{Sh}_{p,q-1}} (-1)^{|\sigma|}(a_1, \dots, a_p, a'_1, \dots, a'_{q-1}) \\
= & [m.a_1 \otimes (a_2, \dots, a_p)] \times y + (-1)^p x \times [m'.a'_1 \otimes (a'_2, \dots, a'_q)] \\
& + \left(\sum_{i=1}^{p-1} (-1)^i m \otimes (a_1, \dots, a_i a_{i+1}, \dots, a_p) \right) \times y \\
& + (-1)^p x \times \left(\sum_{i=1}^{q-1} (-1)^i m' \otimes (a'_1, \dots, a'_i a'_{i+1}, \dots, a'_q) \right) \\
& + (-1)^p [a_p.m \otimes (a_1, \dots, a_{p-1})] \times y + (-1)^{p+q} x \times [a'_q.m' \otimes (a'_1, \dots, a'_{q-1})] \\
= & b(x) \times y + (-1)^p x \times b(y)
\end{aligned}$$

从而证毕。 \square

推论 2.5.4. 对于 K -代数 A, A' , 若 M, M' 分别为双 A, A' -模, 则 *Shuffle* 乘积诱导了链映射:

$$C_{\bullet}(A, M) \otimes C_{\bullet}(A', M') \xrightarrow{\sim} C_{\bullet}(A \otimes A', M \otimes M')$$

并且该链映射诱导了 *Hochschild* 同调的同态

$$H_{\bullet}(A, M) \otimes H_{\bullet}(A', M') \xrightarrow{\sim} H_{\bullet}(A \otimes A', M \otimes M')$$

证明. 仅仅是将

$$b(x \times y) = b(x) \times y + (-1)^{\deg x} x \times b(y)$$

换了一种说法. 注意链复形张量积

$$C_{\bullet}(A, M) \otimes C_{\bullet}(A', M')$$

的边缘算子服从与定义 2.1.9 类似的规则. *Shuffle* 乘积在 *Hochschild* 同调的下降的良好性也易证. \square

特别地, 当 $M = A, M' = A'$ 时 *Shuffle* 乘积诱导了同态:

$$\text{HH}_{\bullet}(A) \otimes \text{HH}_{\bullet}(A') \xrightarrow{\sim} \text{HH}_{\bullet}(A \otimes A')$$

定理 2.5.5. (*Künneth* 公式)

如果 K -代数 A, A' 作为 K -模都是平坦的, 那么 *Shuffle* 乘积诱导的 *Hochschild* 同调之间的同态

$$\text{HH}_{\bullet}(A) \otimes \text{HH}_{\bullet}(A') \xrightarrow{\sim} \text{HH}_{\bullet}(A \otimes A')$$

为同构。

证明. 代数拓扑中的标准证明。从略。 □

注意我们总是假定 A, A' 是投射 K -模, 从而自然满足平坦性。

性质 2.5.6. 若 K -代数 A 是交换的, 则 *Shuffle* 乘积诱导了 $\mathrm{HH}_\bullet(A)$ 的 K -代数结构, 并且 $(\mathrm{HH}_\bullet(A), \times)$ 是分次交换的。

这就回到了通常交换的情形了。事实上 *Shuffle* 乘积的几何意义为微分形式的外积。

证明. 对于任意的 K -代数 A , 注意张量积 $A \otimes A$ 也有 K -代数结构。断言:

$$\begin{aligned}\pi: A \otimes A &\rightarrow A \\ a \otimes b &\mapsto ab\end{aligned}$$

为 K -代数同态当且仅当 A 是交换代数。于是当 A 交换时, 考虑 K -代数同态 $A \otimes A \xrightarrow{\pi} A$, 由 Hochschild 同调的函子性, 该同态诱导了

$$\mathrm{HH}_\bullet(A \otimes A) \xrightarrow{\mathrm{HH}_\bullet(\pi)} \mathrm{HH}_\bullet(A)$$

再注意 *Shuffle* 乘积诱导

$$\mathrm{HH}_\bullet(A) \otimes \mathrm{HH}_\bullet(A) \xrightarrow{\times} \mathrm{HH}_\bullet(A \otimes A)$$

将上述两个同态复合, 即得到分次 K -代数 $(\mathrm{HH}_\bullet(A), \times)$ 。

容易验证此代数为分次交换的, 验证如下: 对任意 $p, q \geq 0$ 以及 $a_0, a_1, \dots, a_p \in A$, $a'_0, a'_1, \dots, a'_q \in A$, 有

$$\begin{aligned}& [a_0 \otimes (a_1, \dots, a_p)] \times [a'_0 \otimes (a'_1, \dots, a'_q)] \\&= (a_0 a'_0) \otimes \sum_{\sigma \in \mathrm{Sh}_{p,q}} (-1)^{|\sigma|} \sigma(a_1, \dots, a_p; a'_1, \dots, a'_q) \\&= (a'_0 \otimes a_0) \otimes \sum_{\sigma \in \mathrm{Sh}_{q,p}} (-1)^{|\sigma|+pq} \sigma(a'_1, \dots, a'_q; a_1, \dots, a_p) \\&= (-1)^{pq} [a'_0 \otimes (a'_1, \dots, a'_q)] \times [a_0 \otimes (a_1, \dots, a_p)]\end{aligned}$$

从而分次交换。 □

性质 2.5.7. (*Shuffle* 乘积是非交换版本的外积)

若 $A = K[x^1, \dots, x^n]$ 为多项式代数, 则有 K -代数同构

$$(\mathrm{HH}_\bullet(A), \times) \cong (\Omega_A^\bullet, \wedge)$$

证明. 回顾性质1.8.4当中的双复形同态

$$\Phi : (\overline{\mathcal{B}}_{\bullet\bullet}(A), b, \mathcal{B}) \rightarrow (\Omega_A^\bullet, 0, d)$$

首先, 容易验证 Shuffle 乘积可下降至

$$\overline{\mathcal{C}}_\bullet(A) \otimes \overline{\mathcal{C}}_\bullet(A) \xrightarrow{\times} \overline{\mathcal{C}}_\bullet(A)$$

从而我们只需要验证对于任意 $x \in \overline{\mathcal{C}}_p(A)$ 以及 $y \in \overline{\mathcal{C}}_q(A)$, 成立

$$\Phi(x \times y) = \Phi(x) \wedge \Phi(y)$$

对任意的 $p, q \geq 0$, 以及 $x = a_0 \otimes (\overline{a}_1, \dots, \overline{a}_p) \in \overline{\mathcal{C}}_p(A)$, $y = a'_0 \otimes (\overline{a}'_1, \dots, \overline{a}'_q) \in \overline{\mathcal{C}}_q(A)$, 从而

$$\begin{aligned} \Phi(x \times y) &= \Phi \left(a_0 a'_0 \otimes \sum_{\sigma \in \text{Sh}_{p,q}} (-1)^{|\sigma|} \sigma(\overline{a}_1, \dots, \overline{a}_p; \overline{a}'_1, \dots, \overline{a}'_q) \right) \\ &= \frac{1}{(p+q)!} a_0 a'_0 \sum_{\sigma \in \text{Sh}_{p,q}} (-1)^{|\sigma|} \sigma(\mathbf{d}a_1 \wedge \dots \wedge \mathbf{d}a_p \wedge \mathbf{d}a'_1 \wedge \dots \wedge \mathbf{d}a'_q) \\ &= \frac{1}{p!q!} a_0 a'_0 \mathbf{d}a_1 \wedge \dots \wedge \mathbf{d}a_p \wedge \mathbf{d}a'_1 \wedge \dots \wedge \mathbf{d}a'_q \\ \Phi(x) \wedge \Phi(y) &= \left(\frac{1}{p!} a_0 \mathbf{d}a_1 \wedge \dots \wedge \mathbf{d}a_p \right) \wedge \left(\frac{1}{q!} a'_0 \mathbf{d}a'_1 \wedge \dots \wedge \mathbf{d}a'_q \right) \\ &= \frac{1}{p!q!} a_0 a'_0 \mathbf{d}a_1 \wedge \dots \wedge \mathbf{d}a_p \wedge \mathbf{d}a'_1 \wedge \dots \wedge \mathbf{d}a'_q \end{aligned}$$

从而得证。 □

2.6 Cup 乘积与 Gerstenhaber 括号（部分细节待补）

对于 K -代数 A , 回顾 Hochschild 上链复形

$$C^\bullet(A) := C^\bullet(A, A) = \bigoplus_{p \geq 0} C^p(A, A)$$

我们将介绍 $C^\bullet(A)$ 上的代数结构: cup 乘积。

定义 2.6.1. (*Cup* 乘积)

设 A 为 K -代数, 定义 **cup** 乘积

$$\cup : C^\bullet(A) \otimes C^\bullet(A) \rightarrow C^\bullet(A)$$

如下: 对任意的 $f \in C^p(A)$, $g \in C^q(A)$,

$$\begin{aligned} f \cup g &\in C^{p+q}(A) \\ (f \cup g)(a_1, \dots, a_p; a_{p+1}, \dots, a_{p+q}) &= f(a_1, \dots, a_p) g(a_{p+1}, \dots, a_{p+q}) \end{aligned}$$

我们已经知道，Hochschild 上同调是“非交换版本的多重切向量场”。注意多重切向量场具有外积运算，而 cup 乘积则是“非交换版本的外积”。我们将去说明这一点。

性质 2.6.2. (*cup* 乘积与 Hochschild 微分的相容性)

对于 K -代数 A ，任意 $f, g \in C^\bullet(A)$ ，成立

$$\partial(f \cup g) = (\partial f) \cup g + (-1)^{\deg f} f \cup \partial g$$

证明. 暴力验证之。任取 $a_0, a_1, \dots, a_{p+q} \in A$ ，成立

$$\begin{aligned} & [(\partial f) \cup g + (-1)^p f \cup (\partial g)](a_0 \cdots a_{p+q}) \\ = & a_0 f(a_1 \cdots a_p) g(a_{p+1} \cdots a_{p+q}) \\ & - \sum_{k=0}^{p-1} (-1)^k f(\cdots a_k a_{k+1} \cdots) g(a_{p+1} \cdots a_{p+q}) \\ & - (-1)^p f(a_0 \cdots a_{p-1}) a_p g(a_{p+1} \cdots a_{p+q}) \\ & + (-1)^p f(a_0 \cdots a_{p-1}) a_p g(a_{p+1} \cdots a_{p+q}) \\ & - (-1)^p \sum_{l=0}^{q-1} f(a_0 \cdots a_{p-1}) g(\cdots a_{p+l} a_{p+l+1} \cdots) \\ & - (-1)^{p+q} f(a_0 \cdots a_{p-1}) g(a_p \cdots a_{p+q-1}) a_{p+q} \\ = & a_0 (f \cup g)(a_1 \cdots a_{p+q}) \\ & - \sum_{k=0}^{p+q-1} (-1)^k (f \cup g)(\cdots a_k a_{k+1} \cdots) \\ & - (-1)^{p+q} (f \cup g)(a_0 \cdots a_{p+q-1}) a_{p+q} \\ = & \partial(f \cup g)(a_0 \cdots a_{p+q}) \end{aligned}$$

从而证毕。 □

推论 2.6.3. *cup* 乘积诱导了如下同态：

$$\mathrm{HH}^p(A) \times \mathrm{HH}^q(A) \xrightarrow{\cup} \mathrm{HH}^{p+q}(A)$$

证明. 易验证良定性，几乎显然。 □

容易验证如此的 *cup* 乘积是结合的（之前 Shuffle 乘积的结合性也可直接看出来），于是我们得到分次结合 K -代数 $(\mathrm{HH}^\bullet(A), \cup)$ 。事实上，该 K -代数是分次交换的，这从 *cup* 乘积当中很难看出来（似乎非常不显然），我们下一节给出证明。

注记 2.6.4. 我们已经知道, *Hochschild* 上同调是“非交换版本的多重切向量场”; 而 *cup* 乘积即为“多重切向量场的外积”的非交换版本。具体地, 若 $A = K[x^1, \dots, x^n]$ 为多项式环, 则有 K -代数同构

$$(\mathrm{HH}^\bullet(A), \cup) \cong (\mathrm{PV}_A, \wedge)$$

我们知道, PV_X 上不仅有外积结构, 还有 Schouten-Nijenhuis 括号; 我们也要给出后者的非交换版本, 使得 $\mathrm{HH}^\bullet(A)$ 为 Gerstenhaber 代数:

定义 2.6.5. (*Gerstenhaber* 代数)

设 (A, \cdot) 为分次交换 K -代数, $A = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} A^k$ 为其分次, 并配以 K -双线性映射

$$\{, \} : A^p \otimes A^q \rightarrow A^{p+q-1}$$

称 $(A, \cdot, \{, \})$ 为 **Gerstenhaber** 代数, 若 $\{, \}$ 满足以下公理:

- (1) (A, \cdot) 为分次结合代数;
- (2) $(A[1], \{, \})$ 为李超代数;
- (3) 相容性: 对 A 中的任意齐次元 x, y, z , 成立

$$\{x, yz\} = \{x, y\}z + (-1)^{(x-1)y}y\{x, z\}$$

例如光滑流形 X 上 $(\mathrm{PV}_X, \wedge, \{, \})$, 即多重切向量场、外积、Schouten-Nijenhuis 括号, 构成 Gerstenhaber 代数。

Gerstenhaber 代数在物理学中常被称为“经典 **BV** 代数” (classical BV algebra)。

定义 2.6.6. (*Gerstenhaber* 乘积)

对于 K -代数 A , 定义 $C^\bullet(A)$ 上的 K -双线性运算

$$\circ : C^p(A) \times C^q(A) \rightarrow C^{p+q-1}(A)$$

如下: 对任意 $a_1, a_2, \dots, a_{p+q-1} \in A$, 以及 $f \in C^p(A), g \in C^q(A)$,

$$(f \circ g)(a_1 \cdots a_{p+q-1}) := \sum_{i=1}^p (-1)^{(i-1)(q-1)} f(-a_{i-1}, g(a_i \cdots a_{i+q-1}), a_{i+q} \cdots)$$

运算“ \circ ”称为 **Gerstenhaber** 乘积。

性质 2.6.7. 对任意 $f \in C^p(A), g \in C^q(A)$, 成立

$$\partial(f \circ g) - (\partial f) \circ g - (-1)^{p-1} f \circ \partial g = \pm[(f \cup g) - (-1)^{pq}(g \cup f)]$$

证明. purple 非常暴力的计算验证, 等号右边的符号暂时没算清。从略。 \square

以后抽空补上。上述等式的右边为 “the failure of \circ being a chain map measured by the commutativity of cup product” .

(虽说上述等式右边的正负号暂时没算清楚) 但此结果已经暂时足够用了:

推论 2.6.8. 对于 K -代数 A , $(\mathrm{HH}^\bullet(A), \cup)$ 是分次交换的。

证明. 利用性质2.6.7, 几乎显然。 \square

$(\mathrm{HH}^\bullet(A), \cup)$ 的分次交换性是一个十分深刻的结论。

定义 2.6.9. (*Gerstenhaber* 括号)

$$\{f, g\} = f \circ g - (-1)^{(f-1)(g-1)} g \circ f$$

性质 2.6.10. 对于任意 $f, g \in C^\bullet(A)$ 为齐次元, 成立

$$\partial\{f, g\} = \{\partial f, g\} \pm \{f, \partial g\}$$

证明. (待补) \square

于是, Gerstenhaber 括号 $\{, \}$ 可下降到 $\mathrm{HH}^\bullet(A)$ 上, 这是非交换版本的 Schouten-Nijenhuis 括号。

性质 2.6.11. 对于 K -代数 A , $(\mathrm{HH}^\bullet(A), \cup, \{, \})$ 构成 *Gerstenhaber* 代数。

证明. (待补) \square

2.7 结合性

用 Gerstenhaber 括号，可以给出乘法结合性的另一种描述：对于 K -代数 A ，考虑 A 的乘法结构

$$m : A \otimes A \rightarrow A$$

从而 m 自然视为 $C^2(A)$ 中的元素。

引理 2.7.1. 对于 K -模 A ，以及 A 上的乘法结构

$$m : A \otimes A \rightarrow A$$

那么 m 满足结合律当且仅当 $\{m, m\} = 0$ 。其中 $\{, \}$ 为 $C^\bullet(A)$ 上的 Gerstenhaber 括号。

证明. 直接验证。注意到

$$\{m, m\} = m \circ m - (-1)^{(2-1)(2-1)} m \circ m = 2m \circ m$$

其中 “ \circ ” 为 Gerstenhaber 乘积。于是对任意的 $a_1, a_2, a_3 \in A$ ，都有

$$\begin{aligned} (m \circ m)(a_1, a_2, a_3) &= m(m(a_1, a_2), a_3) - m(a_1, m(a_2, a_3)) \\ &= (a_1 a_2) a_3 - a_1 (a_2 a_3) \end{aligned}$$

因此 $\{m, m\} = 0$ 当且仅当 m 结合。 □

事实上，Hochschild 上链复形 $C^\bullet(A)$ 的微分算子 ∂ 也可以用 Gerstenhaber 括号来描述：

引理 2.7.2. 设 A 为 K -代数，其乘法为

$$m : A \otimes A \rightarrow A$$

考虑 A 的 Hochschild 上链复形 $(C^\bullet(A), \partial)$ ，则有

$$\partial = \{-, m\}$$

证明. 给定 $q \geq 0$ ，对于任意的 $f \in C^q(A)$ ，只需要验证 $\partial f = \{f, m\}$ ，其中 $\{, \}$ 为 Gerstenhaber 括号。任取 $a_0, a_1, \dots, a_q \in A$ ，一方面我们早已知道

$$\partial f(a_0, a_1, \dots, a_q) = a_0 f(a_1, \dots, a_q) - \sum_{k=1}^{q-1} (-1)^k f(a_0, \dots, (a_k a_{k+1}), \dots, a_q) - (-1)^q f(a_0, a_1, \dots, a_{q-1}) a_q$$

另一方面, $\{f, m\} = f \circ m - (-1)^{q-1} m \circ f$, 从而

$$\begin{aligned}
\{f, m\}(a_0, a_1, \dots, a_q) &= (f \circ m)(a_0, a_1, \dots, a_q) - (-1)^{q-1} (m \circ f)(a_0, a_1, \dots, a_q) \\
&= \sum_{k=0}^{q-1} (-1)^{k-1} f(a_0, \dots, m(a_k a_{k+1}), \dots, a_n) \\
&\quad - (-1)^{q-1} [m(f(a_0, \dots, a_{q-1}), a_q) + (-1)^q m(a_0, f(a_1, \dots, a_q))] \\
&= a_0 f(a_1, \dots, a_q) - \sum_{k=1}^{q-1} (-1)^k f(a_0, \dots, (a_k a_{k+1}), \dots, a_q) - (-1)^q f(a_0, a_1, \dots, a_{q-1}) a_q
\end{aligned}$$

因此 $\partial f = \{f, m\}$, 得证。 □

第3章 形变量子化

本章开始，正式搞一些事情。经典力学与量子力学的框架众所周知，大致如下：

	经典力学	量子力学
相空间	辛流形 (X, ω)	希尔伯特空间 \mathcal{H}
观测量	光滑函数	厄密特算子
演化方程	$\frac{df}{dt} = \{H, f\}$	$\frac{dA_t}{dt} = \frac{i}{\hbar} [\hat{H}, A_t]$

我们将利用结合代数的 Hochschild (上) 同调，以及 A_∞ 方法，来证明 Kontsevich 的 Formality theorem.

(待完善)

3.1 泊松几何与辛几何

本节简要回顾一下泊松几何。

定义 3.1.1. (泊松括号)

设 X 为光滑流形， $\{, \}: C^\infty(X) \times C^\infty(X) \rightarrow C^\infty(X)$ 为 \mathbb{R} -双线性映射。称 $\{, \}$ 为 X 上的泊松括号 (Poisson bracket)，如果 $\{, \}$ 满足：对任意 $f, g, h \in C^\infty(X)$ ，成立

(1) 反对称性：

$$\{f, g\} = -\{g, f\}$$

(2) Jacobi 恒等式：

$$\{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} = 0$$

(3) Leibnitz 法则：

$$\{f, gh\} = \{f, g\}h + g\{f, h\}$$

泊松括号的定义的 (1) (2) 表明 $(C^\infty(X), \{, \})$ 为李代数，而 (3) 表明对任意 $f \in C^\infty(X)$ ，映射

$$X_f : C^\infty(X) \rightarrow C^\infty(X)$$

$$g \mapsto \{f, g\}$$

为导子, 从而 X_f 为 X 上的光滑切向量场, 在局部坐标下形如 $X_f = X_f^i \frac{\partial}{\partial u^i}$. 于是有

$$\{f, g\} = X_f^i \frac{\partial g}{\partial u^i}$$

但又注意到 $\{f, g\} = -\{g, f\}$ 以及切向量场 X_g , 从而易知泊松括号 $\{, \}$ 在局部坐标 (u^i) 下的表达式必形如

$$\{f, g\} = P^{ij} \frac{\partial f}{\partial u^i} \frac{\partial g}{\partial u^j}$$

并且容易验证:

引理 3.1.2. 设 $\{, \}$ 为光滑流形 X 上的泊松括号, 并且在局部坐标 (u^i) 下的表达式为

$$\{f, g\} = P^{ij} \frac{\partial f}{\partial u^i} \frac{\partial g}{\partial u^j}$$

那么对任意指标 i, j, k , 成立

$$\begin{aligned} P^{ij} &= -P^{ji} \\ P^{is} \frac{\partial P^{jk}}{\partial u^s} + P^{js} \frac{\partial P^{ki}}{\partial u^s} + P^{ks} \frac{\partial P^{ij}}{\partial u^s} &= 0 \end{aligned}$$

证明. 容易验证 $P^{ij} = -P^{ji}$ 等价于泊松括号的反对称性 $\{f, g\} = -\{g, f\}$, 这是因为对任意光滑函数 f, g , 局部上有

$$P^{ij} \frac{\partial f}{\partial u^i} \frac{\partial g}{\partial u^j} = \{f, g\} = -\{g, f\} = -P^{ji} \frac{\partial g}{\partial u^i} \frac{\partial f}{\partial u^j} = -P^{ji} \frac{\partial f}{\partial u^i} \frac{\partial g}{\partial u^j}$$

从而 $(P^{ij} + P^{ji}) \frac{\partial f}{\partial u^i} \frac{\partial g}{\partial u^j} = 0$, 因此由 f, g 的任意性, 有 $P^{ij} = -P^{ji}$.

再看第二个式子. 事实上它等价于泊松括号的雅可比恒等式. 对任意 $f, g, h \in C^\infty(X)$, 局部坐标下有

$$\begin{aligned} \{f, \{g, h\}\} &= \{f, P^{ij} \frac{\partial g}{\partial u^i} \frac{\partial h}{\partial u^j}\} \\ &= P^{kl} \frac{\partial f}{\partial u^k} \frac{\partial P^{ij}}{\partial u^l} \frac{\partial g}{\partial u^i} \frac{\partial h}{\partial u^j} + P^{ij} P^{kl} \frac{\partial f}{\partial u^k} \left(\frac{\partial^2 g}{\partial u^i \partial u^l} \frac{\partial h}{\partial u^j} + \frac{\partial^2 h}{\partial u^j \partial u^l} \frac{\partial g}{\partial u^i} \right) \end{aligned}$$

将 f, g, h 轮换再相加, 适当更改求和指标, 合并整理得

$$\begin{aligned} &\{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} \\ &= \frac{\partial f}{\partial u^i} \frac{\partial g}{\partial u^j} \frac{\partial h}{\partial u^k} \left(P^{is} \frac{\partial P^{jk}}{\partial u^s} + P^{js} \frac{\partial P^{ki}}{\partial u^s} + P^{ks} \frac{\partial P^{ij}}{\partial u^s} \right) + P^{kl} (P^{ij} + P^{ji}) \frac{\partial f}{\partial u^k} \frac{\partial^2 g}{\partial u^i \partial u^l} \frac{\partial h}{\partial u^j} \end{aligned}$$

$$+P^{kl}(P^{ij}+P^{ji})\frac{\partial g}{\partial u^k}\frac{\partial^2 h}{\partial u^i\partial u^l}\frac{\partial f}{\partial u^j}+P^{kl}(P^{ij}+P^{ji})\frac{\partial h}{\partial u^k}\frac{\partial^2 f}{\partial u^i\partial u^l}\frac{\partial g}{\partial u^j}$$

注意到 $P^{ij} = -P^{ji}$ ，以及 f, g, h 的任意性，从而有

$$P^{is}\frac{\partial P^{jk}}{\partial u^s}+P^{js}\frac{\partial P^{ki}}{\partial u^s}+P^{ks}\frac{\partial P^{ij}}{\partial u^s}=0$$

得证。 □

我们可以使用张量的语言来描述泊松括号结构：

定义 3.1.3. (泊松张量) 对于光滑流形 X ，以及 $P \in \text{PV}_X^2$ 为 2-切向量场，在局部坐标下表达式为

$$P = P^{ij}\frac{\partial}{\partial u^i} \wedge \frac{\partial}{\partial u^j}$$

其中 $P^{ij} = -P^{ji}$. 称 P 为泊松张量 (Poisson tensor)，如果 P 在局部坐标下满足如下雅可比恒等式：

$$P^{is}\frac{\partial P^{jk}}{\partial u^s}+P^{js}\frac{\partial P^{ki}}{\partial u^s}+P^{ks}\frac{\partial P^{ij}}{\partial u^s}=0$$

容易看出泊松括号与泊松张量的一一对应关系：对于泊松括号 $\{, \}$ ，若局部上有 $\{f, g\} = P^{ij}\frac{\partial f}{\partial u^i}\frac{\partial g}{\partial u^j}$ ，则考虑泊松张量

$$P := \frac{1}{2}P^{ij}\frac{\partial}{\partial u^i} \wedge \frac{\partial}{\partial u^j}$$

反过来，由泊松张量也能得到泊松括号。并且容易知道

$$\{f, g\} = \langle P, \text{d}f \wedge \text{d}g \rangle$$

事实上泊松张量的雅可比恒等式可以用 Schouten-Nijenhuis 括号等价刻画：

性质 3.1.4. 对于光滑流形 X ，以及 $P \in \text{PV}_X^2$ ，则 P 为泊松张量当且仅当

$$[P, P] = 0$$

其中 $[\cdot, \cdot]$ 为 Schouten-Nijenhuis 括号 (见定义 2.4.2)。

证明. 局部坐标下验证。取局部坐标 (u^i) ，令 $P = P^{ij}\frac{\partial}{\partial u^i} \wedge \frac{\partial}{\partial u^j}$ ，则有

$$[P, P] = [(P^{ij}\frac{\partial}{\partial u^i}) \wedge \frac{\partial}{\partial u^j}, (P^{kl}\frac{\partial}{\partial u^k}) \wedge \frac{\partial}{\partial u^l}]$$

$$\begin{aligned}
&= [P^{ij} \frac{\partial}{\partial u^i}, P^{kl} \frac{\partial}{\partial u^k}] \wedge \frac{\partial}{\partial u^j} \wedge \frac{\partial}{\partial u^l} - [P^{ij} \frac{\partial}{\partial u^i}, \frac{\partial}{\partial u^l}] \wedge \frac{\partial}{\partial u^j} \wedge P^{kl} \frac{\partial}{\partial u^k} \\
&\quad - [\frac{\partial}{\partial u^j}, P^{kl} \frac{\partial}{\partial u^k}] \wedge P^{ij} \frac{\partial}{\partial u^i} \wedge \frac{\partial}{\partial u^l} + [\frac{\partial}{\partial u^j}, \frac{\partial}{\partial u^l}] \wedge P^{ij} \frac{\partial}{\partial u^i} \wedge P^{kl} \frac{\partial}{\partial u^k}
\end{aligned}$$

上式右端共有四项，首先注意最后一项

$$[\frac{\partial}{\partial u^j}, \frac{\partial}{\partial u^l}] \wedge P^{ij} \frac{\partial}{\partial u^i} \wedge P^{kl} \frac{\partial}{\partial u^k} = P^{ij} P^{kl} \delta_{jl} \frac{\partial}{\partial u^j} \wedge \frac{\partial}{\partial u^i} \wedge \frac{\partial}{\partial u^k} = \sum_{j=1}^n P^{ij} P^{kj} \frac{\partial}{\partial u^j} \wedge \frac{\partial}{\partial u^i} \wedge \frac{\partial}{\partial u^k} = 0$$

最后一个等号是因为指标 i, k 的（反）对称性；从而暴力展开，注意利用 $P^{ij} = -P^{ji}$ 以及适当更改求和指标，有

$$\begin{aligned}
[P, P] &= [P^{ij} \frac{\partial}{\partial u^i}, P^{kl} \frac{\partial}{\partial u^k}] \wedge \frac{\partial}{\partial u^j} \wedge \frac{\partial}{\partial u^l} \\
&\quad - [P^{ij} \frac{\partial}{\partial u^i}, \frac{\partial}{\partial u^l}] \wedge \frac{\partial}{\partial u^j} \wedge P^{kl} \frac{\partial}{\partial u^k} - [\frac{\partial}{\partial u^j}, P^{kl} \frac{\partial}{\partial u^k}] \wedge P^{ij} \frac{\partial}{\partial u^i} \wedge \frac{\partial}{\partial u^l} \\
&= P^{ij} \frac{\partial P^{kl}}{\partial u^i} \frac{\partial}{\partial u^k} \wedge \frac{\partial}{\partial u^j} \wedge \frac{\partial}{\partial u^l} - P^{kl} \frac{\partial P^{ij}}{\partial u^k} \frac{\partial}{\partial u^i} \wedge \frac{\partial}{\partial u^j} \wedge \frac{\partial}{\partial u^l} \\
&\quad + P^{kl} \frac{\partial P^{ij}}{\partial u^l} \frac{\partial}{\partial u^i} \wedge \frac{\partial}{\partial u^j} \wedge \frac{\partial}{\partial u^k} - P^{ij} \frac{\partial P^{kl}}{\partial u^j} \frac{\partial}{\partial u^k} \wedge \frac{\partial}{\partial u^i} \wedge \frac{\partial}{\partial u^l} \\
&= \left(-P^{sj} \frac{\partial P^{ki}}{\partial u^s} - P^{sk} \frac{\partial P^{ij}}{\partial u^s} + P^{ks} \frac{\partial P^{ij}}{\partial u^s} - P^{js} \frac{\partial P^{ik}}{\partial u^s} \right) \frac{\partial}{\partial u^i} \wedge \frac{\partial}{\partial u^j} \wedge \frac{\partial}{\partial u^k} \\
&= -4P^{sj} \frac{\partial P^{ki}}{\partial u^s} \frac{\partial}{\partial u^i} \wedge \frac{\partial}{\partial u^j} \wedge \frac{\partial}{\partial u^k} \\
&= -8 \sum_{i < j < k} \left(P^{sj} \frac{\partial P^{ki}}{\partial u^s} + P^{sk} \frac{\partial P^{ij}}{\partial u^s} + P^{si} \frac{\partial P^{jk}}{\partial u^s} \right) \frac{\partial}{\partial u^i} \wedge \frac{\partial}{\partial u^j} \wedge \frac{\partial}{\partial u^k}
\end{aligned}$$

可见 $[P, P] = 0$ 当且仅当雅可比恒等式成立，证毕。 \square

于是我们自然地引入泊松流形的概念：

定义 3.1.5. （泊松流形）

泊松流形（Poisson manifold）是指二元组 (X, P) ，其中 X 为光滑流形， $P \in \text{PV}_X^2$ 满足 $[P, P] = 0$.

众所周知，这是经典力学的几何模型。接下来看一些泊松流形的例子：

例子 3.1.6. （辛流形）

设 (X, ω) 为辛流形，其中辛形式

$$\omega = \frac{1}{2} \omega_{ij} dx^i \wedge dx^j$$

满足 $d\omega = 0$ ，并且使得系数矩阵 $(\omega_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ 在 X 上处处可逆、反对称。那么辛结构 ω 自然诱导泊松结构

$$\omega^{-1} := \frac{1}{2} \omega^{ij} \partial_i \wedge \partial_j$$

其中矩阵 $(\omega^{ij}) := (\omega_{ij})^{-1}$ 。

证明. 我们只需验证雅可比恒等式

$$\omega^{is} \frac{\partial \omega^{jk}}{\partial u^s} + \omega^{js} \frac{\partial \omega^{ki}}{\partial u^s} + \omega^{ks} \frac{\partial \omega^{ij}}{\partial u^s} = 0$$

一方面注意到逆矩阵求导公式 $\frac{\partial \omega^{-1}}{\partial u^s} = -\omega^{-1} \frac{\partial \omega}{\partial u^s} \omega^{-1}$ ，从而有

$$\omega^{is} \frac{\partial \omega^{jk}}{\partial u^s} = -\omega^{is} \omega^{jm} \omega^{nk} \frac{\partial \omega_{mn}}{\partial u^s}$$

对 i, j, k 轮换求和，有

$$\omega^{is} \frac{\partial \omega^{jk}}{\partial u^s} + \omega^{js} \frac{\partial \omega^{ki}}{\partial u^s} + \omega^{ks} \frac{\partial \omega^{ij}}{\partial u^s} = \omega^{is} \omega^{jm} \omega^{kn} \left(\frac{\partial \omega_{mn}}{\partial u^s} + \frac{\partial \omega_{ns}}{\partial u^m} + \frac{\partial \omega_{sm}}{\partial u^n} \right)$$

另一方面，由于 $d\omega = 0$ ，从而有

$$\begin{aligned} 0 &= d(\omega_{ij} dx^i \wedge dx^j) \\ &= \frac{\partial \omega_{ij}}{\partial u^k} dx^i \wedge dx^j \wedge dx^k \\ &= \sum_{i < j < k} 2 \left(\frac{\partial \omega_{ij}}{\partial u^k} + \frac{\partial \omega_{jk}}{\partial u^i} + \frac{\partial \omega_{ki}}{\partial u^j} \right) dx^i \wedge dx^j \wedge dx^k \end{aligned}$$

因此有

$$\frac{\partial \omega_{ij}}{\partial u^k} + \frac{\partial \omega_{jk}}{\partial u^i} + \frac{\partial \omega_{ki}}{\partial u^j} = 0$$

综上两方面，证毕。 □

众所周知，这个例子来自经典力学。事实上，此泊松结构有如下不依赖局部坐标的表达方式：对任意 $f \in C^\infty(X)$ ，存在唯一的切向量场 X_f 使得

$$df + i_{X_f}(\omega) = 0$$

称此 X_f 为 f 的**哈密顿向量场**。于是，对于任意的 $f, g \in C^\infty(X)$ ，辛结构 ω 诱导的泊松括号满足

$$\{f, g\} = \omega(X_f, X_g)$$

以上是我们在经典力学中熟知的。

例子 3.1.7. (李代数的对偶)

设 $(\mathfrak{g}, [\cdot, \cdot])$ 为 (有限维) 李代数, 考虑 $X := \mathfrak{g}^*$ 为其对偶, 取 $\{e^1, e^2, \dots, e^n\}$ 为 \mathfrak{g} 的一组基, $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ 为 \mathfrak{g}^* 当中相应的对偶基. 用 X^i 来表示 $X = \mathfrak{g}^*$ 中的点在基 $\{e_i\}$ 下的坐标. 记李代数 \mathfrak{g} 的结构常数为

$$[e^i, e^j] = C_k^{ij} e^k$$

那么我们给出 $X = \mathfrak{g}^*$ 的泊松张量如下:

$$P_{\mathfrak{g}} = \frac{1}{2} X^k C_k^{ij} e_i \wedge e_j$$

则 $(X, P_{\mathfrak{g}})$ 为泊松流形。

证明. 先考虑 P 的良定性. 事实上, 上述泊松张量可以内蕴地写成如下: 对任意 $\xi \in X = \mathfrak{g}^*$, 以及 $f, g \in C^\infty(\mathfrak{g}^*)$,

$$\{f, g\}|_{\xi} = \xi([df, dg])$$

其中 $df \in T_{\xi}^* \mathfrak{g}^* \cong (\mathfrak{g}^*)^* \cong \mathfrak{g}$. 局部坐标下, 记 $\xi = X^i e_i$, 则

$$\begin{aligned} \xi([df, dg]) &= \left\langle X^i e_i, \left[\frac{\partial f}{\partial X^j} e^j, \frac{\partial g}{\partial X^k} e^k \right] \right\rangle \\ &= X^i C_k^{ij} \frac{\partial f}{\partial X^i} \frac{\partial g}{\partial X^j} \end{aligned}$$

另一方面也容易验证上式右边也与以下相等:

$$\left\langle \frac{1}{2} X^k C_k^{ij} e_i \wedge e_j, df \wedge dg \right\rangle$$

于是 $P_{\mathfrak{g}}$ 良定 (与局部坐标选取无关). 接下来验证它的确为泊松张量, 局部坐标下暴力验证即可: 注意到

$$P_{\mathfrak{g}}^{is} \frac{\partial P_{\mathfrak{g}}^{jk}}{\partial X^s} = P_{\mathfrak{g}}^{is} \frac{\partial}{\partial X^s} (X^t C_t^{jk}) = X^l C_l^{is} C_s^{jk}$$

其中注意结构常数 C_k^{ij} 作为 X 上的函数, 是常值的. 对 i, j, k 轮换相加, 有

$$P_{\mathfrak{g}}^{is} \frac{\partial P_{\mathfrak{g}}^{jk}}{\partial X^s} + P_{\mathfrak{g}}^{js} \frac{\partial P_{\mathfrak{g}}^{ki}}{\partial X^s} + P_{\mathfrak{g}}^{ks} \frac{\partial P_{\mathfrak{g}}^{ij}}{\partial X^s} = X^l (C_l^{is} C_s^{jk} + C_l^{js} C_s^{ki} + C_l^{ks} C_s^{ij}) = 0$$

其中第二个等号是因为李代数 \mathfrak{g} 的雅可比恒等式. 从而证毕. \square

如此通过李代数对偶得到的泊松流形称为线性泊松流形. 容易知道, $(P_{\mathfrak{g}}^{ij})$ 可逆当且仅当 $P_{\mathfrak{g}}$ 可由 X 上的辛结构诱导.

3.2 星积

Star product:

定义 3.2.1. A star product $*$ on a Poisson mfd (X, P) is a $\mathbb{R}[[\hbar]]$ -linear map

$$C^\infty(X)[[\hbar]] \times C^\infty(X)[[\hbar]] \rightarrow C^\infty(X)[[\hbar]]$$

$$f * g \mapsto \sum_{k \geq 0} \hbar^k C_k(f, g)$$

such that:

(1) $*$ is associative

(2) $f * g = fg \mod \hbar$

(3) $\frac{1}{2}(f * g - g * f) = \hbar \{f, g\} \mod \hbar^2$

(4) $C_k(f, g) = C_k^{i_1 \dots i_l; j_1 \dots j_m}(\partial_{i_1} \dots \partial_{i_l} f)(\partial_{j_1} \dots \partial_{j_m} g)$, where C_k^{\dots} is in $C^\infty(X)$. (bi-differential operator)

then, $(C^\infty, *)$ is the **deformation quantization** on (X, P) .

the first non-commutativity of $*$ is given by Poisson bracket.

Fundamental Question: [Dewilde lemore 1983] for a Poisson manifold, is there \exists a deformation quantization?

[Fedosov 1983, 1994]

例子 3.2.2. $(C^\infty(X), \{, \}) \rightsquigarrow (C^\infty(X)[[\hbar]], *)$

$$X = \mathbb{R}^m$$

Poisson bracket

$$P = P^{ij} \partial_i \wedge \partial_j$$

where $P^{ij} \in \mathbb{R}$ are constant. then we define

例子 3.2.3. when $\mathbb{R}^m = \mathbb{R}^{2n}$ even dimension, $\{x^1, \dots, x^n; p_1, \dots, p_n\}$,

$$P = \sum \frac{\partial}{\partial p_i} \wedge \frac{\partial}{\partial x^i}$$

then Moyal product becomes Weyl algebra and

$$[x^i, p_j] = x^i * p_j - p_j * x^i = \hbar \delta_{ij}$$

例子 3.2.4. \mathfrak{g} Lie algebra, $X = \mathfrak{g}^*, P_{\mathfrak{g}}$, consider (quantum) universal enveloping algebra

$$\mathcal{U}_{\hbar}(\mathfrak{g}) = \bigoplus_k \mathfrak{g}^k[[\hbar]] / \sim$$

the relation is

$$a \otimes b - b \otimes a = \hbar[a, b]$$

$$\mathcal{U}_\hbar(\mathfrak{g})|_{\hbar=1}$$

is universal enveloping algebra.

$$\mathcal{U}_\hbar(\mathfrak{g})|_{\hbar=0} = \text{Sym}^\bullet(\mathfrak{g})$$

PBW theorem: there is a vector space bijection:

$$\Phi : \text{Sym}^\bullet(\mathfrak{g})[[\hbar]] \rightarrow \mathcal{U}_\hbar(\mathfrak{g})$$

$\mathcal{U}_\hbar(\mathfrak{g})$ has a natural associative algebra structure by \otimes , $\Phi^*(\otimes)$ defines an associative algebra structure on $\text{Sym}^\bullet(\mathfrak{g})[[\hbar]] =: \mathcal{O}(X)[[\hbar]]$

Check: it is a deformation quantization of $(X, P_\mathfrak{g})$.

例子 3.2.5. M is a mfd, $X = T^*M$ cotangent bundle, which admits a symplectic structure

$$\omega = \sum dx^i \wedge dp_i$$

$$\mathcal{O}(X) = \Gamma(M, \text{Sym}^\bullet(TM))$$

$$f \in \mathcal{O}(X),$$

$$f = f(x, p) = \sum_I f_I(X) p^I(X)$$

and ω^{-1} Poisson bracket $\{, \}$ is a Poisson algebra.

D_X differential operator on X . \exists filtration by its order

$$D_X^{(0)} \subseteq D_X^{(1)} \subseteq \dots \subseteq D_X^{(m)} \dots$$

(consists of $\sum A^{i_1 \dots i_k} \partial_{i_1} \dots \partial_{i_k}$)

Check:

$$[D_X^{(m)}, D_X^{(n)}] \subseteq D_X^{(m+n-1)}$$

$$D_X^{(m)} \circ D_X^{(n)} \subseteq D_X^{(m+n)}$$

$$(D_X, \circ) \text{ is associative}$$

定义 3.2.6.

$$D_X^\hbar := \bigoplus_{m \geq 0} D_X^{(k)} \hbar^m \subseteq D_X[\hbar]$$

is a $\mathbb{R}[\hbar]$ -module

HW: what is k in Def above????

(such that D_X^{\hbar} can be understood as a Deformation Quantization of $(\mathcal{O}(X), \{, \})$ over ring $\mathbb{R}[\hbar]$).

例子 **3.2.7.** (*Quantum torus*)

Let $V = \mathbb{Z}^n$, define the algebra

$$e^V := \{e^v | v \in V\}$$

with

$$e^{v_1} e^{v_2} := e^{v_1 + v_2}$$

then e^V is algebra function on $(\mathbb{C}^*)^n = \mathbb{C}[z_1^{\pm 1}, \dots, z_n^{\pm 1}]$.

Let $\omega : V \times V \rightarrow \mathbb{Z}$ skew symmetric bilinear form

$$e^{v_1} *_\hbar e^{v_2} = e^{\hbar \omega(v_1, v_2)} e^{v_1 + v_2}$$

check: associativity and it is a D.Q. of Poisson bracket

$$\{e^{v_1}, e^{v_2}\} = \omega(v_1, v_2) e^{v_1 + v_2}$$

术语索引

- augmentation, 59
- Bar-复形, 9
- classical BV algebra 经典 BV 代数, 72
- co-algebra 余代数, 57
- co-product 余乘, 57
- co-unit 余幺元, 58
- cocenter 余中心, 5
- Connes' complex Connes 复形, 26
- Connes' operator Connes 算子, 33
- cup product, 70
- cyclic bicomplex 循环双复形, 28
- cyclic co-invariant 循环余不变量, 24
- cyclic cohomology 循环上同调, 43
- cyclic homology 循环同调, 26
- cyclic invariant 循环不变量, 43
- derivation 导子, 13
- derived center 导出中心, 12
- differential graded algebra 微分分次代数, 20
- differential graded co-algebra 微分分次余代数, 59
- exact 正合, 6
- Gerstenhaber algebra, 72
- Gerstenhaber product, 72
- graded K -module 分次 K -模, 45
- graded algebra 分次代数, 50
- graded co-algebra 分次余代数, 58
- graded Lie algebra 分次李代数, 50
- group cohomology 群的上同调, 23
- Hamiltonian 哈密顿量, 76
- Hochschild 同调, 7
- Hochschild 上同调, 12
- Hochschild 上链复形, 13
- Hochschild 链复形, 11
- Hodge filtration 霍奇滤链, 35
- inner derivation 内导子, 13
- Lie bracket 李括号, 14
- Lie super algebra 李超代数, 50
- negative cyclic complex 负循环复形, 36
- observable 观测量, 76
- opposite algebra 反代数, 3
- outer derivation 外导子, 14
- periodic cyclic complex 周期循环复形, 36
- phase space 相空间, 76
- Poisson bracket 泊松括号, 76
- Poisson manifold 泊松流形, 79
- Poisson tensor 泊松张量, 78
- polyvector field 多重切向量场, 60
- projective module 投射模, 3
- projective resolution 投射消解, 7
- quasi-isomorphism 拟同构, 29
- reduced Bar-complex 约化 Bar-复形, 18
- Schouten-Nijenhuis 括号, 61
- shuffle product, 66
- symplectic manifold 辛流形, 76
- total complex 全复形, 29