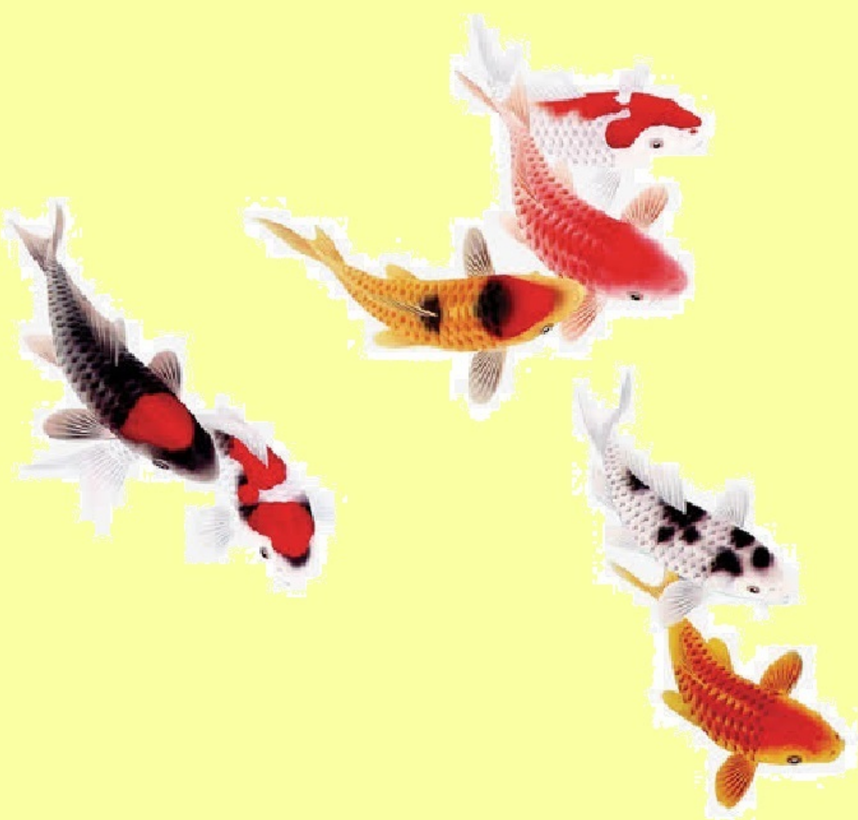
GTM 235

紧李群

Math4015　　0.29 版

曲豆豆 翻译
原著: Mark R. Sepanski
2021 年 6 月 11 日



本书为 Mark R. Sepanski

Compact Lie Groups

的非官方 (野生) 中译本. 仅供学习交流.

目录

1 紧李群

1.1 基础概念

1.1.1 流形

李理论 (Lie theory) 是研究代数, 分析, 几何等领域产生的对称性的学科. 粗略地说, **李群** (Lie group) 同时具有**群**和**流形**的结构. 本节我们回顾流形的定义 [更多细节可见 [8] 或者 [88]] . 给定 $n \in \mathbb{N}$.

定义 1.1. *对于拓扑空间 M, 如果 M 是第二可数 [即存在可数拓扑基] Hausdorff 的空间, 并且局部同胚于 $\mathbb{R}^n$ 的开子集, 则称 M 为 n 维* **拓扑流形** *(topological manifold)* .

这意味着对所有的 $m \in M$, 存在 m 的开邻域 U 以及 $\mathbb{R}^n$ 的开子集 V, 使得存在同胚 $\varphi\colon U \to V$. 这样的同胚映射 φ 称为 **坐标卡** (chart) .

定义 1.2. *n 维* **光滑流形** *(smooth manifold) 是指如下资料: 拓扑流形 M 以及它的一族坐标卡 $\{\varphi_\alpha\colon U_\alpha \to V_\alpha\}$ [称之为 坐标图册 (atlas)] ; 并满足如下性质:*

1. $M = \bigcup_\alpha U_\alpha$,
2. *对任意满足 $U_\alpha \cap U_\beta \neq \varnothing$ 的 α, β, 转移映射 $\varphi_{\alpha,\beta} := \varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}\colon \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \to \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的光滑映射.*

*以后将光滑流形简称为***流形***.*

一个基本结论是, 这样的坐标图册可以唯一扩充为一个极大的坐标图册. 以后我们不妨约定流形的坐标图册都是极大的.

除了 $\mathbb{R}^n$, 流形的常见例子是 n **维球面** (sphere)

$$S^n := \left\{x \in \mathbb{R}^{n+1} \,\middle|\, \|x\| = 1\right\},$$

其中 $\|\cdot\|$ 维标准欧氏范数; 另一个例子是 n **维环面** (torus)

$$T^n = \underbrace{S^1 \times \cdots \times S^1}_{n\text{个}}.$$

另一个重要的流形是 **实射影空间** (real projective space) , $\mathbb{P}(\mathbb{R}^n)$, 它是 n 维紧流形, 由 $\mathbb{P}^{n+1}$ 中的所有 [过原点的] 直线构成, 也可视为 $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ 模掉等价关系 $x \sim \lambda x$, $x \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$, $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ 而得到, 也可视为 S^n 模掉等价关系 $x \sim -x$, $x \in S^n$ 而得到. 更一般地, **格拉斯曼流形** (Grassmannian) $\mathrm{Gr}_k(\mathbb{R}^n)$ 由 $\mathbb{R}^n$ 的所有 k 维子空间构成, 它是一个 $k(n-k)$ 维的紧流形, 当 $k=1$ 时退化为 $\mathbb{P}(\mathbb{R}^{n-1})$.

记 $\mathrm{M}_{n,m}(\mathbb{F})$ 为域 $\mathbb{F}$ 上的所有 $n \times m$ 矩阵构成的集合, 其中 $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ 或 $\mathbb{C}$. 看矩阵的每个分量, 可将 $\mathrm{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ 等同于 $\mathbb{R}^{nm}$, 将 $\mathrm{M}_{n,m}(\mathbb{C})$ 等同于 $\mathbb{R}^{2nm}$. 注意行列式是 $\mathrm{M}_{n,n}(\mathbb{F})$ 上的连续函数, 从而 $\det^{-1}\{0\}$ 为闭子集. 因此 **一般线性群** (general linear group)

$$\mathrm{GL}(n, \mathbb{F}) = \left\{g \in \mathrm{M}_{n,n}(\mathbb{F}) \,\middle|\, g\text{是可逆矩阵}\right\} \tag{1.3}$$

为 $\mathrm{M}_{n,n}(\mathbb{F})$ 的开子集, 因此是流形. 同样的想法, 对于 $\mathbb{F}$ 上的任何有限维线性空间 V, 记 $\mathrm{GL}(V)$ 为 V 上的可逆线性变换之全体.

1.1.2 李群

定义 1.4. *称光滑流形 G 为* **李群** *(Lie group) , 如果 G 具有群结构, 并且满足:*

1. *乘法映射 $\mu\colon G \times G \to G$, $\mu(g, g') := gg'$ 是光滑映射;*
2. *取逆映射 $\iota\colon G \to G$, $\iota(g) := g^{-1}$ 是光滑映射.*

一个平凡的例子是, 加法群 $\mathbb{R}^n$ 是李群. 稍微有点意思的李群例子是 S^1, 将 S^1 视为

$$S^1 \cong \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| = 1\},$$

则其群结构继承了 $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ 的乘法结构.

然而, 目前为止最有趣的李群是 $\mathrm{GL}(n,\mathbb{F})$. 为验证 $\mathrm{GL}(n,\mathbb{F})$ 是李群, 首先注意它的乘法是光滑的, 这是因为它关于每个坐标分量都是多项式映射. 验证取逆映射是光滑的则需要一些线性代数的标准结论 $g^{-1} = \mathrm{adj}(g)/\det g$, 其中 $\mathrm{adj}(g)$ 为 g 的代数余子式排成的矩阵的转置. 特别地, $\mathrm{adj}(g)$ 的各坐标分量都是 g 的坐标分量的多项式函数, 而且 $\det g$ 是 $\mathrm{GL}(n,\mathbb{F})$ 上的非零多项式函数, 因此取逆映射是光滑的.

给出更多李群的例子则需要更多的工具. 事实上, 以后我们见到的绝大多数例子都其实是 $\mathrm{GL}(n,\mathbb{F})$ 的子群. 最后, 我们继续介绍李群的概念.

1.1.3　李子群与同态

回忆流形 M 的**浸入子流形** (immersed submanifold) N 是指某个流形 N' 在某个**单浸入** $\varphi\colon N' \to M$ [即光滑单射, 且其微分在 N' 处处满秩] 下的像, 并且配以流形结构使得 $\varphi\colon N' \to N$ 为微分同胚. 在微分几何中我们熟知, N 的拓扑未必与 N 作为 M 的子集的诱导拓扑相同. 若浸入子流形 N 的拓扑与 M 所诱导的子空间拓扑相同, 则称 N 为**正则子流形**, 或者**嵌入子流形**.

定义 1.5. *李群 G 的* **李子群** *(Lie subgroup)　H 是某个李群 H' 在某个单浸入同态 $\varphi\colon H' \to G$ 下的像, 并且 H 配以李群结构使得 $\varphi\colon H' \to H$ 为微分同胚.*

上述映射 φ 首先要求是光滑的. 然而, 在习题 4.13 中我们将看到, 其实只需要验证 φ 是连续的.

作为流形, 李子群未必是正则子流形. 典型的例子是直线沿着无理角度缠绕于环面 [见习题 1.5] . 然而, 正则李子群将扮演特殊的角色, 也存在判断李子群是否为正则李子群的简单判据.

定理 1.6. *设 G 为李群, $H \subseteq G$ 为子群 [并未假定 H 有流形结构] . 则 H 是正则李子群当且仅当 H 是闭的.*

证明这个定理需要花很多工夫. 尽管一些必要的工具将在 §4.1.2 节发展, 但

它的证明几乎完全是微分几何课程的内容. 为方便起见, 并且又由于这个定理仅仅用在 §1.1.4, §1.3.2 节来构造几个李群的例子, 于是这个定理证明从略, 留作习题 4.28. 我们还有另一个有用的定理, 类似原因, 它的证明也留给微分几何课程 [例如 [8] 或 [88]] . 注意到, 一旦定理**??**成立, 则该定理立刻就能被推出.

定理 1.7. *设 H 为李群 G 的闭子群. 则商空间 G/H 存在唯一的流形结构, 使得投影映射 $\pi\colon G \to G/H$ 是光滑的, 进而存在从 G/H 到 G 的局部光滑截面.*

然后, 定理1.6 的下述直接推论是一种构造新的李群的非常有用的方法. 该推论需要用到一个众所周知的结论: 若 $f\colon H \to M$ 为流形之间的光滑映射且 $f(H) \subseteq N$, 其中 N 为 M 的正则子流形, 则 $f\colon H \to N$ 也是光滑映射 [见 [8] 或者 [88]] .

推论 1.8. *李群的闭子群关于它的相对拓扑是李群.*

构造李群的另一个常用的工具是微分几何中的**秩定理** (rank theorem).

定义 1.9. *李群之间的***同态** *是指它们之间的光滑的群同态.*

定理 1.10. *若 G, G' 为李群, $\varphi\colon G \to G'$ 为李群同态, 则 φ 是常秩映射, 且 $\ker\varphi$ 为 G 的正则李子群, 且维数为 $\dim G - \operatorname{rank}\varphi$, 其中 $\operatorname{rank}\varphi$ 是映射 φ 的微分的秩.*

证明. 众所周知 [见 [8]] , 若光滑映射 φ 是常秩的, 则 $\varphi^{-1}(e)$ 是 G 的维数为 $\dim G - \operatorname{rank}\varphi$ 的正则子流形. 又因为 $\ker\varphi$ 是子群, 从而只需证明 φ 是常秩映射. 记 l_g 为关于 g 的左平移. 由于 φ 为群同态, 从而 $\varphi \circ l_g = l_{\varphi(g)} \circ \varphi$, 又因为 l_g 为微分同胚, 从而两边取微分可知 φ 是常秩的. □

1.1.4 典型紧李群

有了推论1.8的帮助，就很容易构造新的李群. 第一个例子是 **特殊线性群** (special linear group)

$$\mathrm{SL}(n,\mathbb{F}) = \{g \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{F}) \,|\, \det g = 1\}\,.$$

由于 $\mathrm{SL}(n,\mathbb{F})$ 是 $\mathrm{GL}(n,\mathbb{F})$ 的闭子群, 从而它是李群.

用同样的方法, 我们接下来定义四类紧李群, 它们统称 **典型紧李群** (classical compact Lie group) : $\mathrm{SO}(2n+1)$, $\mathrm{SO}(2n)$, $\mathrm{SU}(n)$ 以及 $\mathrm{Sp}(n)$.

1.1.4.1. $\mathrm{SO}(n)$. 首先我们定义 **正交群** (orthogonal group)

$$\mathrm{O}(n) := \left\{g \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{R}) \,\middle|\, g^t g = I\right\},$$

其中 g^t 为矩阵 g 的转置. 正交群是 $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ 的闭子群, 从而推论1.8表明 $\mathrm{O}(n)$ 为李群. 由于正交矩阵的每一列都是单位向量, 从而从拓扑上看, $\mathrm{O}(n)$ 可视为 $\underbrace{S^{n-1}\times\cdots\times S^{n-1}}_{n个} \subseteq \mathbb{R}^{n^2}$ 的闭子集. 特别地, $\mathrm{O}(n)$ 为紧李群.

特殊正交群 (special orthogonal group) , 也叫做 **旋转群** (rotation group) , 其定义为

$$\mathrm{SO}(n) := \{g \in \mathrm{O}(n) \,|\, \det g = 1\}\,.$$

这是 $\mathrm{O}(n)$ 的闭子群. 于是 $\mathrm{SO}(n)$ 也是紧李群.

事实上 $\mathrm{SO}(n)$ 的性质与 n 的奇偶性密切相关, 尽管现在难以看出来; 我们将在 §6.1.4 节介绍. 为此, 我们将特殊正交群分为两类: $\mathrm{SO}(2n+1)$ 与 $\mathrm{SO}(2n)$.

1.1.4.2. $\mathrm{SU}(n)$. **酉群** (unitary group) 定义为

$$\mathrm{U}(n) := \{g \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{C}) \,|\, g^* g = I\},$$

其中 g^* 是 g 的复共轭转置. 酉群是 $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ 的闭子群, 从 $\mathrm{U}(n)$ 是李群. 由于酉矩阵的每一列都是单位向量, 从而在拓扑上看, $\mathrm{U}(n)$ 可视为 $\underbrace{S^{2n-1}\times\cdots\times S^{2n-1}}_{n个} \subseteq \mathbb{R}^{2n^2}$ 的闭子集. 特别地, $\mathrm{U}(n)$ 是紧李群.

类似, 我们定义 **特殊酉群** (special unitary group)

$$\mathrm{SU}(n) := \{g \in \mathrm{U}(n) \,|\, \det g = 1\}\,.$$

同样, 这是 $\mathrm{U}(n)$ 的闭子群, 从而 $\mathrm{SU}(n)$ 仍然是紧李群. 其 $n = 2$ 的特殊情形在以后尤其重要. 可以直接验证 [习题 1.8]

$$\mathrm{SU}(2) = \left\{ \begin{pmatrix} a & -\bar{b} \\ b & \bar{a} \end{pmatrix} \,\middle|\, a, b \in \mathbb{C},\ |a|^2 + |b|^2 = 1 \right\}, \tag{1.11}$$

从而在拓扑上, $\mathrm{SU}(2) \cong S^3$.

1.1.4.3. 最后一种典型紧李群, 称为 **辛群** (symplectic group) , 其定义为

$$\mathrm{Sp}(n) := \{g \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{H}) \,|\, g^* g = I\}\,, \tag{1.12}$$

其中 $\mathbb{H} := \{a + \mathrm{i}b + \mathrm{j}c + \mathrm{k}d \,|\, a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$ 是 **四元数** (quaternion) , g^* 为四元数共轭转置. 但要注意, $\mathbb{H}$ 是非交换可除代数, 从而 $\mathrm{GL}(n, \mathbb{H})$ 理解起来要稍微复杂. 理解清楚它, (**1.12**)式才能成为 $\mathrm{Sp}(n)$ 的真正定义.

首先, 我们将 $\mathbb{H}^n$ 视为关于数乘的*右*向量空间, 记 $M_{n,n}(\mathbb{H})$ 为 $\mathbb{H}$ 上的 $n \times n$ 矩阵环. 考虑矩阵*左*乘作用, $M_{n,n}(\mathbb{H})$ 中的元素可视为 $\mathbb{H}^n$ 上的 $\mathbb{H}$-线性变换. 因此我们自然地搬运(**1.3**)式中 $\mathrm{GL}(n, \mathbb{F})$ 的定义, 类似定义 $\mathrm{GL}(n, \mathbb{H}) = \{g \in M_{n,n}(\mathbb{H})|$ g是 $\mathbb{H}^n$上的可逆线性变换$\}$.

接下来验证 $\mathrm{GL}(n, \mathbb{H})$ 是李群. 不幸的是, 这需要多花些工夫. 在 §1.1.2 节 $\mathrm{GL}(n, \mathbb{F})$ 的情形中用到的行列式不再对 $\mathrm{GL}(n, \mathbb{H})$ 有效. 我们另寻它法, 用如下方式将 $\mathrm{GL}(n, \mathbb{H})$ 嵌入到 $\mathrm{GL}(2n, \mathbb{C})$ 当中.

注意到任何四元数 $v \in \mathbb{H}$ 能唯一写成 $v = a + \mathrm{j}b$, 其中 $a, b \in \mathbb{C}$. 从而存在良定的 $\mathbb{C}$-线性同构 $\vartheta \colon \mathbb{H}^n \to \mathbb{C}^{2n}$, 满足 $\vartheta(v_1, ..., v_n) = (a_1, ..., a_n; b_1, ..., b_n)$, 其中 $v_p = a_p + \mathrm{j}b_p$, $a_p, b_p \in \mathbb{C}$. 由此来定义 $\mathbb{C}$-代数单同态 $\widetilde{\vartheta} \colon M_{n,n}(\mathbb{H}) \to M_{2n,2n}(\mathbb{C})$, 使得 $\widetilde{\vartheta}X := \vartheta \circ X \circ \vartheta^{-1}$, 其中将矩阵 $X \in M_{n,n}(\mathbb{H})$ 自然等同于线性映射. 直接验证 [习题 1.12] 可知, 若 $X = A + \mathrm{j}B$, $A, B \in M_{n,n}(\mathbb{C})$, 则

$$\widetilde{\vartheta}(A + \mathrm{j}B) = \begin{pmatrix} A & -\overline{B} \\ B & \overline{A} \end{pmatrix}, \tag{1.13}$$

其中 $\overline{A}$ 为矩阵 A 的复共轭. 因此 $\widetilde{\vartheta}$ 是从 $M_{n,n}(\mathbb{H})$ 到如下空间的 $\mathbb{C}$-代数同构:

$$M_{2n,2n}(\mathbb{C})_{\mathbb{H}} := \left\{ \begin{pmatrix} A & -\overline{B} \\ B & \overline{A} \end{pmatrix} \middle| A, B \in M_{n,n}(\mathbb{C}) \right\}.$$

另一种理解方式是考虑关于 j 的数乘映射 r_{j}, 即*右乘*j. 容易验证 [习题 1.12] 对任意 $z \in \mathbb{C}^{2n}$ 成立 $\vartheta r_{\mathrm{j}} \vartheta^{-1} z = J\overline{z}$, 其中

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}.$$

因为 ϑ 是 $\mathbb{C}$-线性同构, 从而 $\widetilde{\vartheta}$ 的像集里的元素 $Y \in M_{2n,2n}(\mathbb{C})$ 与 $\vartheta r_{\mathrm{j}} \vartheta^{-1}$ 交换, 即 $M_{2n,2n}(\mathbb{C})_{\mathbb{H}} = \left\{ Y \in M_{2n,2n}(\mathbb{C}) \,\middle|\, YJ = J\overline{Y} \right\}$.

最后, 注意到 X 可逆当且仅当 $\widetilde{\vartheta}X$ 可逆. 特别地, $M_{n,n}(\mathbb{H})$ 看作 $\mathbb{R}^{4n^2}$, 又因为 $\det \circ \widetilde{\vartheta}$ 是连续函数, 从而 $\mathrm{GL}(n, \mathbb{H})$ 是 $(\det \circ \widetilde{\vartheta})^{-1}\{0\}$ 的补集, 从而是 $M_{n,n}(\mathbb{H})$ 的开子集, 于是 $\mathrm{GL}(n, \mathbb{H})$ 显然是李群. 进而由推论1.8可知, 方程(**1.12**)表明 $\mathrm{Sp}(n)$ 是李群. 与之前例子一样, $\mathrm{Sp}(n)$ 是紧李群, 因为其中的矩阵的每一列都是 $\mathbb{H}^n \cong \mathbb{R}^{4n}$ 的单位向量.

话说, Dieudonné 在 $M_{n,n}(\mathbb{H})$ 上定义了合适的行列式 [见 [2], 151-158] . 这个行列式满足通常行列式所满足的绝大多数好的性质, 并且使得 $\mathrm{Sp}(n)$ 中的矩阵的行列式都是 1.

除了(**1.12**)式, $\mathrm{Sp}(n)$ 还有另一种实现方式. 借助同构 $\widetilde{\vartheta}$, 只需描述 $\mathrm{Sp}(n)$ 关于 $\widetilde{\vartheta}$ 的像. 首先容易验证对于 $X \in M_{n,n}(\mathbb{H})$ 都有 $\widetilde{\vartheta}(X^*) = (\widetilde{\vartheta}X)^*$ [习题 1.12] , 因此可知 $\widetilde{\vartheta}\,\mathrm{Sp}(n) = \mathrm{U}(2n) \cap M_{2n,2n}(\mathbb{C})_{\mathbb{H}}$. 这个结果可以进一步改写. 定义

$$\mathrm{Sp}(n, \mathbb{C}) := \left\{ g \in \mathrm{GL}(2n, \mathbb{C}) \,\middle|\, g^t J g = J \right\},$$

则 $\mathrm{U}(2n) \cap M_{2n,2n}(\mathbb{C})_{\mathbb{H}} = \mathrm{U}(2n) \cap \mathrm{Sp}(n, \mathbb{C})$. 因此 $\widetilde{\vartheta}$ 给出同构

$$\begin{aligned} \mathrm{Sp}(n) &\cong \mathrm{U}(2n) \cap M_{2n,2n}(\mathbb{C})_{\mathbb{H}} \\ &= \mathrm{U}(2n) \cap \mathrm{Sp}(n, \mathbb{C}). \end{aligned} \tag{1.14}$$

1.1.5 习题

习题 1.1 证明 S^n 是流形, 并且只用两张坐标卡就能给出它的流形结构.

习题 1.2

(a) 证明 $\mathrm{Gr}_k(\mathbb{R}^n)$ 可以实现为 $M_{n,k}(\mathbb{R})$ 中的秩为 k 的矩阵之全体, 模掉等价关系 $X \sim Xg$, 其中 $X \in M_{n,k}$ 的秩为 k, $g \in \mathrm{GL}(k, \mathbb{R})$. 再给出它的另一种实现方法, 从而证明 $\mathrm{Gr}_k(\mathbb{R}^n)$ 是紧的.

(b) 对于 $\{1, 2, ..., n\}$ 的 k 元子集 S, 以及 $X \in M_{n,k}(\mathbb{R})$, 记 $X|_S$ 为 X 的由 S 中的元素所标记的那些行组成的 $k \times k$ 子矩阵, 记 $U_S := \left\{X \in M_{n,k}(\mathbb{R}) \,\middle|\, X|_S \text{可逆}\right\}$. 再定义映射 $\varphi_S \colon U_S \to M_{(n-k),k}(\mathbb{R})$, 使得 $\varphi_S(X) = [X(X|_S)^{-1}]|_{S^c}$. 利用这些定义来证明 $\mathrm{Gr}_k(\mathbb{R}^n)$ 是 $k(n-k)$ 维流形.

习题 1.3

(a) 证明: 定义1.4 中的条件 1,2 可以用 $(g_1, g_2) \mapsto g_1 g_2^{-1}$ 光滑这一个条件来代替.

(b) 证明: 定义1.4 中的条件 1 蕴含条件 2.

习题 1.4 若 U 是李群 G 的包含单位元 e 的开集, 证明: 存在 e 的开邻域 $V \subseteq U$, 使得 $VV^{-1} \subseteq U$, 其中 $VV^{-1} := \left\{vw^{-1} \,\middle|\, v, w \in V\right\}$.

习题 1.5 取定 $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, 考虑 T^2 的子群 $R_{a,b} := \left\{(e^{2\pi \mathrm{i} at}, e^{2\pi \mathrm{i} bt}) \,\middle|\, t \in \mathbb{R}\right\}$.

(a) 若 $\dfrac{a}{b} \in \mathbb{Q}$, 且 $\dfrac{a}{b} = \dfrac{p}{q}$, 其中 $p, q \in \mathbb{Z}$ 互素. 随着参数 t 变化, 证明当 $R_{a,b}$ 的第一个分量绕 S^1 旋转 p 圈时, 第二个分量绕了 q 圈. 从而推出 $R_{a,b}$ 是闭的, 从而是微分同胚于 S^1 的正则李子群.

(b) 若 $\dfrac{a}{b} \neq \mathbb{Q}$, 证明 $R_{a,b}$ 不重复地环绕无限多圈. 因此李子群 $R_{a,b}$ 微分同胚于 $\mathbb{R}$, 但不是正则李子群.

(c) 当 a 或者 b 等于 0 时会怎样?

习题 1.6

(a) 利用定理1.10以及映射 $\det \colon \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ 来证明 $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$ 是李群, 且维数是 $n^2 - 1$.

(b) 证明：从 $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ 到 $\{X \in M_{n,n}(\mathbb{R}) \,|\, X^t = X\}$ 的映射 $X \mapsto XX^t$ 的秩为 $\dfrac{n(n+1)}{2}$ 的常秩映射. 由此利用定理1.10证明 $\mathrm{O}(n)$ 是李群，且维数是 $\dfrac{n(n-1)}{2}$.

(c) 利用 $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ 上的映射 $X \mapsto XX^*$ 证明: $\mathrm{U}(n)$ 是李群, 且维数是 n^2.

(d) 利用 $\mathrm{GL}(n,\mathbb{H})$ 上的映射 $X \mapsto XX^*$ 证明: $\mathrm{Sp}(n)$ 是李群, 且维数是 $2n^2+n$.

习题 1.7 记 $Z(G) := \{z \in G \,|\, zg = gz, \forall g \in G\}$ 为李群 G 的**中心**. 证明:

(a) $Z(\mathrm{U}(n)) \cong S^1$, 且当 $n \geq 2$ 时 $Z(\mathrm{SU}(n)) \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

(b) $Z(\mathrm{O}(2n)) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$; $n \geq 2$ 时 $Z(\mathrm{SO}(2n)) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, $Z(\mathrm{SO}(2)) \cong \mathrm{SO}(2)$.

(c) 对于 $n \geq 1$, $Z(\mathrm{O}(2n+1)) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, 且 $Z(\mathrm{SO}(2n+1)) = \{I\}$.

(d) $Z(\mathrm{Sp}(n)) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

习题 1.8 直接验证(**1.11**)式.

习题 1.9

(a) 设 $A \subseteq \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ 是由对角元都是正数的对角阵构成的子群, $N \subseteq \mathrm{GL}(n,R)$ 为对角元都是 1 的上三角阵构成的子群. 利用 Gram-Schmidt 正交化方法, 证明通常的矩阵乘法给出了从 $\mathrm{O}(n) \times A \times N$ 到 $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ 的微分同胚. 这称为可逆矩阵的 **Iwasawa 分解**或者 **KAN 分解**. 特别地, 作为拓扑空间, 证明 $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R}) \cong \mathrm{O}(n) \times \mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2}}$, 以及 $\mathrm{SL}(n,\mathbb{R}) \cong \mathrm{SO}(n) \times \mathbb{R}^{\frac{(n+2)(n-1)}{2}}$.

(b) 记 $A \subseteq \mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ 是由对角元都是正实数的对角阵构成的子群, $N \subseteq \mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ 是由对角元都是 1 的上三角阵构成的子群. 证明通常的矩阵乘法给出了从 $\mathrm{U}(n) \times A \times N$ 到 $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ 的微分同胚. 特别地, 作为拓扑空间, 证明 $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C}) \cong \mathrm{U}(n) \times \mathbb{R}^{n^2}$, 以及 $\mathrm{SL}(n,\mathbb{C}) \cong \mathrm{SU}(n) \times \mathbb{R}^{n^2-1}$.

习题 1.10 设 $N \subseteq \mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ 是对角元全为 1 的上三角阵构成的子群, $\overline{N} \subseteq \mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ 是对角元全为 1 的下三角阵构成的子群, W 为置换矩阵 [即每行, 每列都只有一个非零元] 构成的子群. 利用高斯消元法证明 $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C}) \cong \coprod_{w \in W} \overline{N}wN$. 这称为 $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ 的 **Bruhat 分解**.

习题 1.11

(a) 设 $P \subseteq \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ 为正定对称实矩阵之全体. 证明矩阵乘法给出了从 $P \times \mathrm{O}(n)$ 到 $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ 之间的双射.

(b) 设 $H \subseteq \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ 为正定厄米之全体. 证明矩阵乘法给出了从 $H \times \mathrm{U}(n)$ 到 $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ 之间的双射.

习题 1.12

(a) 证明 $\widetilde{\vartheta}$ 满足(**1.13**)式.

(b) 证明对任意 $z \in \mathbb{C}^{2n}$ 都成立 $\vartheta r_{\mathrm{j}} \vartheta^{-1} z = J\overline{z}$.

(c) 证明对任意 $X \in M_{n,n}(\mathbb{H})$ 都成立 $\widetilde{\vartheta}(X^*) = (\widetilde{\vartheta} X)^*$.

习题 1.13 对于 $u, v \in \mathbb{H}^n$, 令 $(v, u) := \sum_{p=1}^{n} v_p \overline{u_p}$.

(a) 证明对任意 $X \in M_{n,n}(\mathbb{H})$ 都成立 $(Xv, u) = (v, X^* u)$.

(b) 证明 $\mathrm{Sp}(n) = \{g \in M_{n,n}(\mathbb{H}) \mid (gv, gu) = (v, u),\ \forall v, u \in \mathbb{H}^n\}$.

1.2 基础拓扑

1.2.1 连通性

我们回忆, 拓扑空间称为**连通**的, 如果它不能写成两个非空开集的无交并. 拓扑空间称为**道路连通**的, 如果任何两点都能用连续的道路相连. 虽然一般来说这两个概念不等价, 但对于流形来说它们等价. 甚至还可以把连续道路换成光滑道路.

首先是一个以后常用到的技巧性工具.

定理 1.15. 设 G 是连通李群, U 是 e 的一个邻域. 那么 U 生成 G, 也就是说, $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} U^n$, 其中 U^n 是由 U 中的 n 元素的乘积构成的集合.

证明. 不妨 U 是开集, 记 $V := U \cap U^{-1} \subseteq U$, 其中 U^{-1} 为 U 中所有元素的逆构成的集合. 由于取逆映射连续, 从而 V 是开集. 令 $H := \bigcup_{n=1}^{\infty} H^n$, 则易知 H 是包含 e 的开子群. 对任意 $g \in G$, 记陪集 $gH := \{gh \,|\, h \in H\}$. 则 gH 是包含 g 的开集, 因为左乘 g^{-1} 的映射是连续的. 因此 G 为所有形如 gH 的开子集之并. 若对 G/H 中的每个陪集取代表元 $g_\alpha H$, 则 $G = \coprod_\alpha g_\alpha H$. 因此 G 的连通性意味着 G/H 中仅有一个元素, 换言之 $eH = G$, 从而得证. □

我们仍缺乏判断李群 G 是否连通的一般方法. 接下来我们就来填补这个空缺.

定义 1.16. 对于李群 G, 记 G^0 为 G 的包含 e 的连通分支.

引理 1.17. 设 G 为李群, 则连通分支 G^0 是 G 的正则李子群. 对任意 $g_1 \in G$, 记 G^1 为 G 的包含 g_1 的连通分支, 则有 $G^1 = g_1 G^0$.

证明. 先证第二部分. 由于左乘 g_1 是同胚, 从而 $g_1 G^0$ 也是 G 的一个连通分支. 但因为 $e \in G^0$, 从而 $g_1 \in g_1 G^0$, 从而 $g_1 G^0 \cap G^1 \neq \varnothing$. 因为它们都是连通分支, 所以 $G^1 = g_1 G^0$, 从而引理的第二部分得证.

再回去证第一部分, 只需验证 G^0 是子群. 由于取逆映射是同胚, $(G^0)^{-1}$ 也是 G 的连通分支. 同样道理, 得到 $(G^0)^{-1} = G^0$, 因为它们都包含 e. 最后, 给定 $g_1 \in G^0$, 因为 $e, g_1^{-1} \in G_0$, 从而连通分支 $g_1 G^0$ 与 G^0 都包含 g_1, 因此 $g_1 G^0 = G^0$. 从而 G^0 是子群, 得证. □

定理 1.18. 设 G 是李群, H 为 G 的连通李子群. 如果 G/H 也连通, 则 G 连通.

证明. 因为 H 连通且包含 e, $H \subseteq G^0$, 因此有良定的连续映射 $\pi\colon G/H \to G/G^0$, 满足 $\pi(gH) = gG^0$. 显然 G/G^0 的商拓扑是离散拓扑. 而 G/H 的连通性迫使 $\pi(G/H)$ 连通, 所以只能有 $\pi(G/H) = \{eG^0\}$. 又因为 π 是满射, 因此 $G/G^0 = \{eG^0\}$, 这表明 $G = G^0$. □

定义 1.19. 设 G 为李群, M 为流形.

1. G 在 M 上的**作用**是指满足以下性质的光滑映射 $G \times M \to M$, $(g,m) \mapsto g \cdot m$, $g \in G, m \in M$:
   (a) $e \cdot m = m, \forall m \in M$,
   (b) $g_1 \cdot (g_2 \cdot m) = (g_1 g_2) \cdot m, \forall g_1, g_2 \in G, m \in M$.
2. 上述作用称为**可迁的** (transitive), 如果对任意 $m, n \in M$, 都存在 $g \in G$ 使得 $g \cdot m = n$.
3. 点 $m \in M$ 的**稳定化子** (stabilizer) $G^m := \{g \in G \,|\, g \cdot m = m\}$.

若 G 在 M 上的作用可迁, 则对于任意 $m_0 \in M$, 显然 [由定理1.7] m_0 关于群 G 作用的轨道诱导了从 G/G^{m_0} 到 M 的微分同胚.

定理 1.20. 典型紧李群 $\mathrm{SO}(n)$, $\mathrm{SU}(n)$, $\mathrm{Sp}(n)$ 都是连通的.

证明. 先考虑 $\mathrm{SO}(n)$. 对 n 归纳. 首先 $\mathrm{SO}(1) = \{1\}$ 显然连通. 然后考虑 $\mathrm{SO}(n)$ 通过矩阵乘法给出的在 $S^{n-1} \subseteq \mathbb{R}^n$ 上的可迁作用. 当 $n \geq 2$ 时, 易知北极点 $N = (1, 0, ..., 0)$ 的稳定化子同构于 $\mathrm{SO}(n-1)$, 归纳假设断言它连通. 从这个可迁作用可得 $\mathrm{SO}(n)/\mathrm{SO}(n)^N \cong S^{n-1}$, 注意 S^{n-1} 是连通的. 从而利用定理1.18即可.

$\mathrm{SU}(n)$ 的情形完全类似, 只需将 $\mathbb{R}^n$ 换成 $\mathbb{C}^n$, 归纳起始步 $\mathrm{SU}(1) \cong S^1$. 至于 $\mathrm{Sp}(n)$, 只需将 $\mathbb{R}^n$ 换成 $\mathbb{H}^n$, 归纳起始步 $\mathrm{Sp}(1) \cong \{v \in \mathbb{H} \,|\, |v| = 1\} \cong S^3$. □

1.2.2 万有覆盖

对于连通李群 G, 我们回忆 G 的**基本群** $\pi_1(G)$ 是指固定端点的闭路的同伦等价类构成的群. 如果 $\pi_1(G)$ 平凡, 则称李群 G 是**单连通**的.

拓扑学和微分几何中的覆盖理论 [更多细节见 [69],[8] 或者 [88]] 断言 G 存在 [同构意义下] 唯一的单连通覆盖空间 $\widetilde{G}$, 也就是说 $\widetilde{G}$ 是连通且单连通的, 配以**覆盖映射** $\pi\colon \widetilde{G} \to G$. 我们回忆覆盖映射 π 是光滑的满射, 并且任意 $g \in G$ 都存在连通邻域 $g \in U \subseteq G$, 使得 π 在 $\pi^{-1}(U)$ 的每个连通分支上的限制都是映到 U 的微分同胚.

引理 1.21. *若 H 是连通李群 G 的离散正规子群，则 H 包含于 G 的中心.*

证明. 对任意 $h \in H$, 考虑 $C_h := \{ghg^{-1} \mid g \in G\}$. 因为 C_h 是连通集 G 在连续映射下的像, 从而 C_h 连通. H 的正规性表明 $C_h \subseteq H$. H 的离散性与 C_h 的连通性表明 C_h 是独点集. 又显然 $h \in C_h$, 从而 $C_h = \{h\}$, 从而 h 属于群 G 的中心. □

定理 1.22. *设 G 是连通李群.*

1. *万有覆盖 $\widetilde{G}$ 是李群.*
2. *若 $\pi \colon \widetilde{G} \to G$ 为覆盖映射, $\widetilde{Z} := \ker \pi$, 则 $\widetilde{Z}$ 是 $\widetilde{G}$ 的离散子群, 且包含于 G 的中心.*
3. *π 诱导群同构与微分同胚 $G \cong \widetilde{G}/\widetilde{Z}$.*
4. *$\pi_1(G) \cong \widetilde{Z}$.*

证明. 由于覆盖空间具有提升性质 [*对任何连通且单连通的光滑流形 M 以及光滑映射 $f \colon M \to G$, 取定 $m_0 \in M$ 以及 $g_0 \in \pi^{-1}(f(m_0))$, 都存在唯一光滑映射 $\widetilde{f} \colon M \to \widetilde{G}$, 使得 $\pi \circ \widetilde{f} = f$ 以及 $\widetilde{f}(m_0) = g_0$*] 可将 G 的李群结构提升为 $\widetilde{G}$ 的李群结构, 并且使得 π 为李群同构. 为说明这一点, 考虑映射 $s \colon \widetilde{G} \times \widetilde{G} \to G$, 使得 $s(\widetilde{g}, \widetilde{h}) = \pi(\widetilde{g})\pi(\widetilde{h})^{-1}$, 然后任意取定一个 $\widetilde{e} \in \pi^{-1}(e)$. 则存在唯一的提升映射 $\widetilde{s} \colon \widetilde{G} \times \widetilde{G} \to \widetilde{G}$ 使得 $\pi \circ \widetilde{s} = s$. 接下来定义 $\widetilde{G}$ 的群结构, 令 $\widetilde{h}^{-1} := \widetilde{s}(\widetilde{e}, \widetilde{h})$ 以及 $\widetilde{g}\widetilde{h} := \widetilde{s}(\widetilde{g}, \widetilde{h}^{-1})$. 可以直接验证这是 $\widetilde{G}$ 的李群结构, 且使得 π 是李群同态 [*习题 1.21*].

从而我们构造了连通且单连通的李群 $\widetilde{G}$, 并且覆盖映射 $\pi \colon \widetilde{G} \to G$ 同时也是李群同态. 从而 $\widetilde{Z} := \ker \pi$ 是 $\widetilde{G}$ 的离散正规子群, 因此由引理1.21可知它包含于 G 的中心. 从而 π 诱导了 $\widetilde{G}/\widetilde{Z}$ 与 G 的微分同胚. 最后再由覆盖空间, deck 变换的理论的标准结果 [见 [8]] 容易得到 $\pi_1(G)$. □

引理 1.23. *Sp(1) 与 SU(2) 是单连通的, 且彼此同构. 它们都是 SO(3) 的单连通覆盖, 从而 SO(3) 同构于 Sp(1)/$\{\pm 1\}$ 或者 SU(2)/$\{\pm I\}$.*

证明. §1.1.4.3 的 $\widetilde{\vartheta}$ 给出了 $\mathrm{Sp}(1)$ 与 $\mathrm{SU}(2)$ 的同构. 由于它们都拓扑同胚于 S^3, 从而引理前部分得证.

至于后半部分, 定义 $\mathbb{H}$ 上的实内积 $(,)$, 满足 $(u,v)=\mathrm{Re}(u\overline{v}), \forall\, u,v\in\mathbb{H}$. 通过取定正交基 $\{1,\mathrm{i},\mathrm{j},\mathrm{k}\}$, 我们将 $\mathbb{H}$ 等同于 $\mathbb{R}^4$, 此时 $(,)$ 为 $\mathbb{R}^4$ 的标准欧氏内积. 记 $1^{\perp}:=\mathrm{Im}(\mathbb{H}):=\{v\in\mathbb{H}\,|\,(1,v)=0\}$ 为**纯虚四元数**集合, 它也是由 $\{\mathrm{i},\mathrm{j},\mathrm{k}\}$ 张成的 $\mathbb{R}$-线性子空间. 特别地, 我们将 $\mathrm{O}(3)$ 等同于 $\mathrm{O}(\mathrm{Im}(\mathbb{H}))\equiv\{\mathbb{R}\text{-线性变换}\, T\colon \mathrm{Im}(\mathbb{H})\to\mathrm{Im}(\mathbb{H})\,|\,(Tu,Tv)=(u,v),\forall\, u,v\in\mathrm{Im}(\mathbb{H})\}$, 并且把连通分支 $\mathrm{O}(\mathrm{Im}(\mathbb{H}))^0$ 等同于 $\mathrm{SO}(3)$.

定义光滑同态 $\mathrm{Ad}\colon \mathrm{Sp}(1)\to\mathrm{O}(\mathrm{Im}(\mathbb{H}))^0$, 为 $(\mathrm{Ad}(g))(u)=gu\overline{g}, \forall\, g\in\mathrm{Sp}(1), u\in\mathrm{Im}(\mathbb{H})$. 为说明这是良定的, 首先将 $\mathrm{Ad}(g)$ 视为 $\mathbb{H}$ 上的 $\mathbb{R}$-线性变换. 由 $g\overline{g}=1$ $(\forall\, g\in\mathrm{Sp}(1))$ 可知 $\mathrm{Ad}(g)$ 保持内积 $(,)$ 不变. 由由于 $\mathrm{Ad}(g)$ 固定 1, 从而 $\mathrm{Ad}(g)$ 保持 $\mathrm{Im}(\mathbb{H})$. 又由 $\mathrm{Sp}(1)$ 的连通性可得 $\mathrm{Ad}(g)\in\mathrm{O}(\mathrm{Im}(\mathbb{H}))^0$.

众所周知 $\mathrm{SO}(3)$ 由旋转变换构成 [*习题 1.22*] . 为说明 Ad 是满射, 只需说明所有的旋转都在 Ad 的像集当中. 对于单位向量 $v\in\mathrm{Im}(\mathbb{H})$, 则可将 v 扩充为 $\mathrm{Im}(\mathbb{H})$ 的一组基 $\{v,u,w\}$, 使得它们满足与 $\{\mathrm{i},\mathrm{j},\mathrm{k}\}$ 相同的乘法运算性质. 通过简单计算, 容易证明 $\mathrm{Ad}(\cos\theta+v\sin\theta)$ 保持 v 不变, 且限制在 uw 平面上是旋转角度 2θ 的变换 [*习题 1.23*] . 因此 Ad 是满射. 同样的计算也易知 $\ker\mathrm{Ad}=\{\pm1\}$. 因为 [*连通的*] 单连通覆盖是唯一的, 从而证毕. □

在 §6.33 节将发展一套直接计算 $\pi_1(G)$ 的方法. 而现在我们利用高阶同伦正合列来计算典型紧李群的基本群.

定理 1.24.

1. $\pi_1(\mathrm{SO}(2))\cong\mathbb{Z}$, *而当* $n\geq 3$ *时* $\pi_1(\mathrm{SO}(n))\cong\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.
2. *当* $n\geq 2$ *时* $\mathrm{SU}(n)$ *是单连通的.*
3. *当* $n\geq 1$ *时* $\mathrm{Sp}(n)$ *是单连通的.*

证明. 先看 $\mathrm{SO}(n)$. 首先 $\mathrm{SO}(2)\cong S^1$, $\pi_1(\mathrm{SO}(2))\cong\mathbb{Z}$. 回忆定理1.20里面给出了 $\mathrm{SO}(n)$ 在 S^{n-1} 上的作用, 且该作用的稳定化子同构于 $\mathrm{SO}(n-1)$. 于是有正合列 $\{1\}\to\mathrm{SO}(n-1)\to\mathrm{SO}(n)\to S^{n-1}\to\{1\}$, 它诱导了高阶同伦群的长正合列 [见

[51] p.296]

$$\cdots \to \pi_2(S^{n-1}) \to \pi_1(\mathrm{SO}(n-1)) \to \pi_1(\mathrm{SO}(n)) \to \pi_1(S^{n-1}) \to \cdots$$

当 $n \geq 3$ 时, $\pi_1(\mathrm{SO}(n-1))$ 是平凡的, 从而正合列为

$$\pi_2(S^{n-1}) \to \pi_1(\mathrm{SO}(n-1)) \to \pi_1(\mathrm{SO}(n)) \to \{1\}.$$

因为当 $n \geq 4$ 时 $\pi_2(S^{n-1})$ 平凡, 从而利用上述正合列归纳易得 $\pi_1(\mathrm{SO}(n)) \cong \pi_1(\mathrm{SO}(3)), n \geq 4$. 从而只需证明 $\pi_1(\mathrm{SO}(3)) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, 而这由引理1.23与定理1.22直接得到.

对于 $\mathrm{SU}(n)$, 如定理1.20, 有正合列 $\{1\} \to \mathrm{SU}(n-1) \to \mathrm{SU}(n) \to S^{2n-1} \to \{1\}$. 由于当 $n \geq 3$ 时 $\pi_1(S^{2n-1})$ 与 $\pi_2(S^{2n-1})$ 是平凡的 [其实 $n=2$ 也如此, 但这里用不到], 高阶同伦群的长正合列可得 $\pi_1(\mathrm{SU}(n)) \cong \pi_1(\mathrm{SU}(2)), n \geq 2$. 而引理1.23表明 $\pi_1(\mathrm{SU}(2))$ 平凡.

至于 $\mathrm{Sp}(n)$, 相应的正合列为 $\{1\} \to \mathrm{Sp}(n-1) \to \mathrm{Sp}(n) \to S^{4n-1} \to \{1\}$. 由于 $n \geq 2$ 时 $\pi_1(S^{4n-1})$ 与 $\pi_2(S^{4n-1})$ 都平凡 [$n=1$ 也如此], 因此长正合列表明 $\pi_1(\mathrm{Sp}(n)) \cong \pi_1(\mathrm{Sp}(1)), n \geq 1$. 而引理1.23表明 $\pi_1(\mathrm{Sp}(1))$ 平凡. □

作为定理1.22与1.24的直接推论, 当 $n \geq 3$ 时 $\mathrm{SO}(n)$ 存在二叶的的连通, 单连通覆盖空间. 这个单连通李群称为 $\mathrm{Spin}_n(\mathbb{R})$, 它满足如下正合列:

$$\{1\} \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to \mathrm{Spin}_n(\mathbb{R}) \to \mathrm{SO}(n) \to \{I\}. \tag{1.25}$$

引理1.23表明 $\mathrm{Spin}_3(\mathbb{R}) \cong \mathrm{SU}(2) \cong \mathrm{Sp}(1)$. 对于更大的 n, 我们将在 §1.3.2 节显式构造 $\mathrm{Spin}_n(\mathbb{R})$.

1.2.3 习题

习题 1.14 对于连通李群 G, 证明: 即使去掉流形定义当中的第二可数假设, 仍能推出 G 是第二可数的.

习题 1.15 证明李群的开子群一定是闭子群.

习题 1.16 证明 $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ 与 $\mathrm{SL}(n,\mathbb{C})$ 是连通的.

习题 1.17 证明 $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ 有两个连通分支: $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})^0 = \{g \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{R}) \mid \det g > 0\}$,

另一个分支是 $\{g \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{R}) \mid \det g < 0\}$. 此外, 证明 $\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$ 是连通的.

习题 1.18 证明 $\mathrm{O}(2n+1) \cong \mathrm{SO}(2n+1) \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ 同时为流形与群的同构. 特别地, $\mathrm{O}(2n+1)$ 有两个连通分支, 其中一个是 $\mathrm{O}(2n+1)^0 = \mathrm{SO}(2n+1)$.

习题 1.19

(a) 证明 $\mathrm{O}(2n) \cong \mathrm{SO}(2n) \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ 是流形的同构. 特别地, $\mathrm{O}(2n)$ 具有两个连通分支, 其中一个为 $\mathrm{O}(2n)^0 = \mathrm{SO}(2n)$.

(b) 证明 $\mathrm{O}(2n)$ 作为群并不 同构于 $\mathrm{SO}(2n)\times(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$, 而是同构于半直积 $\mathrm{SO}(2n)\rtimes(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$. 在此群同构意义下具体描述 $\mathrm{SO}(2n) \rtimes (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ 的乘法结构.

习题 1.20 证明 $\mathrm{U}(n) \cong (\mathrm{SU}(n) \times S^1)/(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ 同时为群与流形的同构. 特别地, $\mathrm{U}(n)$ 是连通的.

习题 1.21 详细验证定理1.22的证明细节, 尤其是将 G 的李群结构提升到 $\widetilde{G}$ 且使得 $\pi\colon \widetilde{G} \to G$ 为李群同态.

习题 1.22 设 $\mathcal{R}_3 \subseteq \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ 为 $\mathbb{R}^3$ 中所有绕原点的旋转构成的集合. 证明 $\mathcal{R}_3 = \mathrm{SO}(3)$.

习题 1.23

(a) 设 $v \in \mathrm{Im}(\mathbb{H})$ 为单位向量, 证明 v 可以扩充为 $\mathrm{Im}(\mathbb{H})$ 的一组基 $\{v,u,w\}$, 使得它们具有与 $\{\mathrm{i},\mathrm{j},\mathrm{k}\}$ 相同的乘法运算性质.

(b) 证明引理1.23中的 $\mathrm{Ad}(\cos\theta + v\sin\theta)$ 保持 v 不动, 且限制在 $\{u,w\}$ 平面上是旋转 2θ 角度的变换.

习题 1.24 记 $\mathfrak{su}(2) := \left\{ \begin{pmatrix} \mathrm{i}x & -\bar{b} \\ b & -\mathrm{i}x \end{pmatrix} \middle|\, b \in \mathbb{C},\, x \in \mathbb{R} \right\}$, 以及 $(X,Y) = \dfrac{1}{2}\mathrm{tr}(XY^*)$, $\forall X,Y \in \mathfrak{su}(2)$. 再令 $(\mathrm{Ad}\, g)X := gXg^{-1}$, $g \in \mathrm{SU}(2)$, $X \in \mathfrak{su}(2)$. 仿照引理1.23的证明方法, 直接证明 $\mathrm{Ad}\colon \mathrm{SU}(2) \to \mathrm{SO}(3)$ 是良定的, 且给出了 $\mathrm{SU}(2)$ 到 $\mathrm{SO}(3)$ 的 [单连通] 二叶覆盖.

1.3 SO(n) 的二叶覆盖

1.4 积分

名词英汉对照