函数的奇偶性 · 鸡娃填鸭讲义

小鸡娃

2021 年 10 月 21 日

机缘巧合, 笔者有幸拜读了江苏省太湖高级中学万金珠老师的函数奇偶性公开课讲义, 收获颇丰. 但笔者认为这份讲义过于偏重观察与归纳, 而缺乏抽象. (这可能是公开课的原因, 大家都懂) . 直观是很好的手段, 但不是最终目的.

而这份讲义, 是笔者的哗众取宠搞笑之作 (用来培养锻炼抽象思维, 弥补那份讲义的我认为的所谓不足) , 为大家提供一个反面教材. 相信如果用这份讲义上课, 会被领导骂死, 也会被学生家长投诉死, 但会让一部分学生爽死.

1 函数奇偶性的概念

定义 1.1. *对于 $\mathbb{R}$ 的非空子集 X, 如果*

$$\forall x \in X, -x \in X,$$

则称集合 X 关于原点对称.

例如, $\mathbb{R}$ 的子集 $[-1,1]$, $(-2,2)$, $(-2,-1] \cup [1,2)$ 都是关于原点对称的; 而区间 $(1,2)$ 不是. 再比如, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}$ 也都是关于原点对称的, 而 $\mathbb{N}$ 不是.

定义 1.2. *设集合 $X \subseteq \mathbb{R}$ 关于原点对称, 给定函数 $f \colon X \to \mathbb{R}$.*

1. *如果 $\forall x \in X, f(-x) = -f(x)$, 则称 f 为***奇函数***;*
2. *如果 $\forall x \in X, f(-x) = f(x)$, 则称 f 为***偶函数***.*

注意, 当谈论奇函数与偶函数时, 前提是函数的定义域关于原点对称.

例子 1.2.1. *我们有一些简单例子:*

1. 函数 $f(x) = x$ 是奇函数, $f(x) = |x|$ 是偶函数, $f(x) = x^2$ 是偶函数.
2. 常值函数 $f(x) = a$ ($a \in \mathbb{R}$ 是某个常数) 是偶函数.
3. 函数 $f(x) = x + 1$ 不是奇函数, 也不是偶函数.

4. 恒为零的常值函数 $f(x)=0$ 既是奇函数又是偶函数.

(等以后学习了指数函数、对数函数、幂函数、三角函数之后，我们将有更多有意思的具体例子。)

2 函数奇偶性的几何性质

奇函数与偶函数有如下的几何直观:

定理 2.1. *设 $X\subseteq\mathbb{R}$ 关于原点对称, $f\colon X\to\mathbb{R}$. 记平面 $\mathbb{R}^2$ 的子集*

$$\Gamma_f:=\left\{(x,f(x))\in\mathbb{R}^2\middle|x\in X\right\}$$

(这称为函数 f 的图像). 则有:

1. f 是奇函数当且仅当 Γ_f 关于平面原点中心对称.

2. f 是偶函数当且仅当 Γ_f 关于 y 轴对称.

证明留作练习. □

我们不妨画几个奇函数, 偶函数的图像, 多看几眼感受一下.

3 课后作业

在下面的习题中, 我们总假设 $X\subseteq\mathbb{R}$ 是关于原点对称的集合. 题目中所有具体的函数的定义域, 若不特别说明, 都默认是使得函数有意义的最大定义域.

1. 已知 $f\colon X\to\mathbb{R}$ 是奇函数, 并且 $0\in X$. 证明: $f(0)=0$.
2. 设集合 $X\subseteq\mathbb{R}$ 为关于原点对称, 函数 $f\colon X\to\mathbb{R}$. 试证明:
   (a) f 是奇函数, 当且仅当 $\forall x\in X\cap[0,+\infty)$, $f(-x)=-f(x)$.
   (b) f 是偶函数, 当且仅当 $\forall x\in X\cap(0,+\infty)$, $f(-x)=f(x)$.
3. 判断以下函数的奇偶性 (即判断它们是否为奇函数, 是否为偶函数):
   (a) $f(x)=x^5+\sqrt{5}x^3-\pi x$.
   (b) $f(x)=\dfrac{x^2+5}{3x^4+|x|+1}$.

(c) $f(x) = \begin{cases} x+1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ x-1 & x < 0 \end{cases}.$

4. 设集合 $X \subseteq \mathbb{R}$ 为关于原点对称. 试证明:

   (a) 定义在 X 上, 取值恒为零的常值函数是奇函数.

   (b) 若 f, g 都是 X 上的奇函数, 则 $f+g$ 也是奇函数.

   (c) 若 f 为 X 上的奇函数, 则 $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, λf 也是奇函数.

5. 模仿上题, 证明关于偶函数的类似结果.

6. 设集合 $X \subseteq \mathbb{R}$ 为关于原点对称, 试证明如下:

   (a) 对于任意函数 $f\colon X \to \mathbb{R}$, 则 $f_0(x) := \dfrac{f(x)+f(-x)}{2}$ 是偶函数.

   (b) 对于任意函数 $f\colon X \to \mathbb{R}$, 则 $f_1(x) := \dfrac{f(x)-f(-x)}{2}$ 是奇函数.

   (c) 如果函数 $f\colon X \to \mathbb{R}$ 既是奇函数又是偶函数, 则 $f \equiv 0$.

7. 设集合 $X \subseteq \mathbb{R}$ 为关于原点对称, 证明: X 上的任何函数都能**唯一**表示为一个奇函数与一个偶函数之和. [提示: 利用上一题.]

8. 设集合 $X \subseteq \mathbb{R}$ 为关于原点对称. 给定函数 $f, g\colon X \to \mathbb{R}$. 试证明:

   (a) 若 f, g 都是奇函数, 则 fg 是偶函数.

   (b) 若 f 是奇函数, g 是偶函数, 则 fg 是奇函数.

   (c) 若 f, g 都是偶函数呢?

9. 设集合 $X \subseteq \mathbb{R}$ 为关于原点对称, $f\colon X \to \mathbb{R}$. 函数 g 的定义域包含 f 的值域. 试证明:

   (a) 若 f 为偶函数, 则复合函数 $g(f(x))$ 是偶函数.

   (b) 若 f 为奇函数, 是否有类似结果?