广义 Frobenius 流形讲义

(可积系统进阶) 1.25 版

曲豆豆整理

2024 年 5 月 20 日

图: 曲豆豆穿上博士服, 就好像真的是博士一样.

摘要

Frobenius 流形理论的一个重要内容是关于半单 Frobenius 流形与一类双哈密顿可积方程簇之间联系的 Dubrovin-Zhang 理论. 在有关 Hodge 积分、等变 Gromov-Witten 不变量等的研究中, 人们发现某些著名可积系统与一类广义 Frobenius 流形联系密切. 与通常的 Frobenius 流形相比, 这类广义 Frobenius 流形的单位向量场关于 Frobenius 流形的度量不再平坦, 故我们称其为具有非平坦单位的广义 Frobenius 流形, 简称广义 Frobenius 流形. 本讲义企图将 Dubrovin-Zhang 理论推广到这类广义 Frobenius 流形.

为此, 首先从广义 Frobenius 流形的几何结构出发构造了一簇具有双哈密顿结构的流体力学型可积方程簇, 即广义 Frobenius 流形的主方程簇. 可以证明这一可积方程簇具有 tau 结构与 Virasoro 对称, 并且这些 Virasoro 对称可以由通过广义 Frobenius 流形的单值数据所构造而来的一族 Virasoro 算子的系数来表示. 然后利用 Virasoro 对称在 tau 函数上的作用的线性化条件研究了广义 Frobenius 流形的主方程簇的形变, 导出广义 Frobenius 流形的圈方程; 圈方程的解所对应的拟 Miura 变换给出了其主方程簇的一个形变, 我们称之为主方程簇的拓扑形变.

最后, 本讲义将上述理论应用到两个重要的广义 Frobenius 流形的例子, 通过具体求解它们的圈方程给出了其主方程簇的拓扑形变的低亏格近似, 并提出了这两个主方程簇的拓扑形变与可积系统理论中三个重要的可积方程簇之间联系的猜想, 这三个可积方程簇分别为 Volterra 方程簇 (也称为离散 KdV 方程簇)、q-形变 KdV 方程簇以及 Ablowitz-Ladik 方程簇.

关键词: 广义 Frobenius 流形, 主方程簇, Tau 结构, Virasoro 对称.

目录

0. 引言

Frobenius 流形是二维拓扑场论 (2D TFT) 的 primary free energy 所满足的 Witten-Dijkgraaf-Verlinde-Verlinde 结合性方程 (简称 WDVV 方程) [10, 58, 59] 的几何模型, 由 Dubrovin 在上世纪 90 年代引入 [14]. Frobenius 流形 M 首先是光滑 (或解析) 流形, 其上每一点 $p \in M$ 处的切空间都具有 Frobenius 代数结构 $(A_p, \langle\,,\rangle, \cdot)$, 此代数结构光滑 (或解析) 地依赖于点 p, 并且双线性型 $\langle\,,\rangle$ 所构成的 $(0,2)$-型张量场 η 是平坦度量, Frobenius 代数的乘法单位元构成的切向量场 e (即单位向量场) 满足

$$\nabla e = 0, \tag{0.1}$$

其中 ∇ 是关于度量 η 的 Levi-Civita 联络. 此外, Frobenius 流形的定义还要求其 Frobenius 代数的乘法结构与度量 η 满足某些对称性条件与拟齐次性条件, 详见 [15] 或者本文的定义1.1. 取 Frobenius 流形 M 的一组关于度量 η 的平坦坐标 $(v^1, \ldots, v^n)$, 在此局部坐标下, 记 Frobenius 乘法 $\cdot$ 的结构常数 $c_{\alpha\beta}^{\gamma}$ 如下:

$$\frac{\partial}{\partial v^\alpha} \cdot \frac{\partial}{\partial v^\beta} = c_{\alpha\beta}^{\gamma} \frac{\partial}{\partial v^\gamma}, \tag{0.2}$$

则可以证明在 M 上局部存在函数 $F = F(v)$ 使得 $c_{\alpha\beta}^{\gamma} = \eta^{\gamma\delta} \dfrac{\partial^3 F}{\partial v^\delta \partial v^\alpha \partial v^\beta}$, 其中逆矩阵 $(\eta^{\alpha\beta}) = (\eta_{\alpha\beta})^{-1}$. 上述 $F(v)$ 称为 Frobenius 流形的势函数. 于是 Frobenius 代数的结合性等价于 F 满足如下 WDVV 方程:

$$\frac{\partial^3 F}{\partial v^\alpha \partial v^\beta \partial v^\lambda} \eta^{\lambda\mu} \frac{\partial^3 F}{\partial v^\mu \partial v^\gamma \partial v^\delta} = \frac{\partial^3 F}{\partial v^\delta \partial v^\beta \partial v^\lambda} \eta^{\lambda\mu} \frac{\partial^3 F}{\partial v^\mu \partial v^\gamma \partial v^\alpha}. \tag{0.3}$$

在文献 [14] 中, 研究 Frobenius 流形的主要动机是从 WDVV 方程的解, 也就是从相应的 Frobenius 流形出发, 重构相应的二维拓扑场论的完整信息. 二维拓扑场论的零亏格部分的重构由文献 [13] 所给出, 在此之中, 由 Frobenius 流形所确定的某个具有双哈密顿结构的流体力学型可积方程簇, 也就是所谓主方程簇 (Principal Hierarchy), 起到关键作用. n 维 Frobenius 流形 M 的主方程簇形如

$$\frac{\partial v^\alpha}{\partial t^{\beta,q}} = \{v^\alpha, H_{\beta,q}\}_1 = \eta^{\alpha\gamma} \partial_x \frac{\partial \theta_{\beta,q+1}}{\partial v^\gamma}, \quad 1 \le \beta \le n,\ q \ge 0, \tag{0.4}$$

其中 $\{v^\alpha\}$ 为 M 的平坦坐标, 视为方程簇的未知函数; 时间变量 $\{t^{\beta,q}\}_{1\le\beta\le n, q\ge 0}$ 为该方程簇的自变量; 哈密顿结构 $\{,\}_1 = \eta^{\alpha\beta}\partial_x$ 以及哈密顿量

$$H_{\beta,q} = \int \theta_{\beta,q+1}(v)\, \mathrm{d}x$$

都由 M 的几何结构所确定, 详见 [15, 16, 26]. 由于自变量 $t^{\beta,q}$ 的指标 β 取遍 $1,\ldots,n$, 从而称主方程簇包含 n 串流. 由于 M 单位向量场 e 平坦, 从而可适当选取平坦坐标 v^α, 使得 $e=\frac{\partial}{\partial v^1}$. 在此坐标选取下, 主方程簇的 $\frac{\partial}{\partial t^{1,0}}$-流满足

$$\frac{\partial v^\alpha}{\partial t^{1,0}}=v^\alpha_x, \tag{0.5}$$

这恰为沿空间变量 x 的平移所生成的流. Frobenius 流形的主方程簇具有 tau 结构, 其任何解 $v^\alpha=v^\alpha(x;\mathbf{t})$ 都存在相应的 tau 函数 $\tau^{[0]}=\tau^{[0]}(x;\mathbf{t})$, 使得

$$v^\alpha=\eta^{\alpha\beta}\frac{\partial^2\log\tau^{[0]}}{\partial x\partial t^{\beta,0}}. \tag{0.6}$$

取主方程簇的某个特解, 使得相应 $\tau^{[0]}$ 额外满足*弦方程* (string equation)

$$L_{-1}\tau^{[0]}:=\sum_{p\geq 0}t^{\alpha,p+1}\frac{\partial\tau^{[0]}}{\partial t^{\alpha,p}}+\frac{1}{2}\eta_{\alpha\beta}t^{\alpha,0}t^{\beta,0}\tau^{[0]}-\frac{\partial\tau^{[0]}}{\partial x}=0, \tag{0.7}$$

则 $\mathcal{F}_0:=\log\tau^{[0]}$ 给出了相应的二维拓扑场论的零亏格自由能.

在 Frobenius 流形的半单性假设下, 文献 [23, 26] 给出了二维拓扑场论的完整信息 (也就是所谓 "全亏格部分") 的重构方法. 该方法从主方程簇的对称性出发, 注意主方程簇具有一系列对称 $\frac{\partial}{\partial s_m}$, $m\geq -1$, 这些对称满足 Virasoro 交换关系 $\left[\frac{\partial}{\partial s_m},\frac{\partial}{\partial s_{m'}}\right]=(m-m')\frac{\partial}{\partial s_{m+m'}}$, 并且能够提升至主方程簇的 tau 覆盖 (换言之, $\frac{\partial}{\partial s_m}$ 可良定地作用于 tau 函数 $\tau^{[0]}$); 考虑将 Frobenius 流形的主方程簇做形如

$$v^\alpha\mapsto w^\alpha=v^\alpha+\eta^{\alpha\gamma}\partial_x\partial_{t^{\gamma,0}}\sum_{k\geq 1}\varepsilon^k\mathcal{F}^{[k]}, \tag{0.8}$$

的拟 Miura 变换 (quasi-Miura transformation), 其中 $\mathcal{F}^{[k]}$ 是 M 的无穷 jet 空间 $J^\infty(M)$ 上的函数, 使得变换之后的可积方程簇

$$\frac{\partial w^\alpha}{\partial t^{\beta,q}}=K^\alpha_{\beta,q}(w;w_x,w_{xx},\ldots) \tag{0.9}$$

的 tau 函数 $\tau=\exp\left(\mathcal{F}^{[0]}+\sum_{k\geq 1}\varepsilon^k\mathcal{F}^{[k]}\right)$ 的 Virasoro 对称满足线性化条件

$$\frac{\partial\tau}{\partial s_m}=L_m\tau,\quad m\geq -1 \tag{0.10}$$

其中 L_m 是由 M 所确定的一族满足 Virasoro 交换关系的线性微分算子, 其定义见 [25]. 主方程簇(0.4)的由上述线性化条件(0.10)所确定的形变 (0.9) 称为*拓扑形变* (topological deformation). 若该二维拓扑场论的 Virasoro 猜想成立, 则主方程簇的拓扑形变的满足弦方程的解的 tau 函数给出了该二维拓扑场论的配分函数 (partition function)[28]. Dubrovin 与张友金证明, 线性化条件(0.10)成立当且仅当(0.8)中的 $\Delta\mathcal{F} = \sum_{k\geq 1} \varepsilon^k \mathcal{F}^{[k]}$ 满足某个非线性偏微分方程, 该方程称为 Frobenius 流形的*圈方程* (loop equation)[26]. 于是, 主方程簇的拓扑形变可通过求解圈方程来具体计算. 此外, Dubrovin 与张友金还证明了在 M 半单的情形下, 圈方程的解存在且在相差常数项级数 $b_1\varepsilon^{-1} + b_2 + b_3\varepsilon + \ldots$ 意义下唯一 [26].

半单 Frobenius 流形的主方程簇的拓扑形变依然是具有双哈密顿结构的可积方程簇 [26, 41]. 一维 Frobenius 流形 $F = \frac{v^3}{6}$ 的主方程簇的拓扑形变恰对应于著名的 KdV 方程簇, 这个断言最先由 Witten 提出, 并被 Kontsevich 所证明, 详见 [37, 59]. 除了 KdV 方程簇, 其它已知的形如某些半单 Frobenius 流形的主方程簇的拓扑形变的可积方程簇主要包括*拓展 Toda 方程簇* (extended Toda hierarchy)[8] 以及 A 型, D 型, E 型无扭仿射李代数的 Drinfeld-Sokolov 方程簇 [12]; 这两者的 Frobenius 流形分别对应于复射影直线 $\mathbb{CP}^1$ 的 Gromov-Witten 不变量以及 A 型, D 型, E 型单奇点的 FJRW 不变量.

而在研究与 Frobenius 流形有关的奇点理论, Gromov-Witten 理论, 量子 K-理论以及可积系统理论的过程中, 人们发现需要将 Frobenius 流形的概念作推广. Manin 与 Hertling 在 [35] 当中研究了一类弱版本的 Frobenius 流形, 称为 *F-流形*; 在 F-流形中, 通常 Frobenius 流形的平坦度量存在性条件被某个与切空间上的 Frobenius 代数结构有关的更弱的条件所取代. 若在 F-流形上额外引入满足某种相容性条件的平坦联络与平坦单位向量场, 就能得到所谓*平坦 F-流形*的概念 [33, 50]. 平坦 F-流形与流体力学型可积方程簇的关系以及相应可积方程簇的形变的有关的研究详见文献 [46, 3, 4].

与 F-流形不同, 本文研究另一类广义 Frobenius 流形的主方程簇的拓扑形变及其与可积系统的关系, 主要结果包含于预印本 [40]. 这类广义 Frobenius 流形, 相比 Dubrovin 的原始定义, 仅将单位向量场 e 的平坦性条件(0.1), 即 $\nabla e = 0$, 修改为 $\nabla e \neq 0$; 因此这类广义 Frobenius 流形被称为*具有非平坦单位的广义 Frobenius 流形*, 本文简称*广义 Frobenius 流形*.

研究这类具有非平坦单位的广义 Frobenius 流形的动机来自于 Brini 所提出的一个猜想, 该猜想断言 Ablowitz-Ladik 方程簇与 resolved conifold 的等变 Gromov-Witten 不变量之间具有某种密切关系, 详见文献 [5]. Brini 在 [5] 中猜测, Ablowitz-Ladik 方程簇的某个特定的 tau 函数给出了 resolved conifold 在反对角作用下的等变 Gromov-Witten 不变量的生成函数, 并且在亏格 1 近似下验证了该猜测. 随后在 [6, 7] 之中, Brini 及其合作者证明了 Ablowitz-Ladik 方程簇的无色散极限 (dispersionless limit) 恰为二维广义 Frobenius 流形

$$F = \frac{1}{2}(v^1)^2 v^2 + v^1 \mathrm{e}^{v^2} + \frac{1}{2}(v^1)^2 \log v^1, \tag{0.11}$$

的主方程簇的一部分, 其中 v^1, v^2 为平坦坐标, 单位向量场 $e = \dfrac{v^1\partial_{v^1} - \partial_{v^2}}{v^1 - \mathrm{e}^{v^2}}$ 非平坦 (细节见后文例4.2); 于是自然要问, 通常的半单 Frobenius 流形的主方程簇的拓扑形变的构造方法能不能推广到这类广义 Frobenius 流形上? 也就是说, 能否类似地通过拟 Miura 变换(0.8), 使得该变换将无色散 Ablowitz-Ladik 方程簇与相应带色散的方程簇联系起来, 从而给 Brini 关于该可积方程簇与 resolved conifold 的等变 Gromov-Witten 不变量之间关系的猜想以强力支持. 研究这类广义 Frobenius 流形的另一个动机来自于某类特殊的三次 Hodge 积分 (cubic Hodge integral) 与 Volterra 方程簇 (也称离散 KdV 方程簇) 之间的关系, 见文献 [18, 19]. 这个关系表明, 该三次 Hodge 积分的生成函数给出了 Volterra 方程簇的某个特定的 tau 函数. 上述 Volterra 方程簇具有双哈密顿结构, 并且其无色散极限来自于一维广义 Frobenius 流形

$$F = \frac{1}{12} v^4 \tag{0.12}$$

的主方程簇的一部分 [56], 其中 $v = v^1$ 为平坦坐标, 单位向量场 $e = \dfrac{1}{2v}\partial_v$ 非平坦 (细节见后文例4.1). 从该广义 Frobenius 出发来重构 Volterra 方程簇, 能够令人更深入理解上文所述三次 Hodge 积分与 Volterra 方程簇之间的关系.

对于具有非平坦单位的广义 Frobenius 流形, 完全可以像通常 Frobenius 流形那样引入方程簇(0.4), 并且可以证明此方程簇具有 Virasoro 对称与 tau 结构. 如果想利用 tau 函数的 Virasoro 对称的线性化条件(0.10) 来给出主方程簇的拓扑形变, 那么就需要把主方程簇的 Virasoro 对称提升至其 tau 覆盖, 并把 tau 函数的 Virasoro 对称表示为某个特定的线性微分算子的作用. 然而, 由于广义 Frobenius 流形的单位向量场 e 非平坦, 通常 (具有平坦单位向量场)Frobenius

流形理论中的一些关键的推导过程无法直接照搬. 与通常 Frobeinus 流形不同, 广义 Frobenius 流形所给出的方程簇(0.4) 不再包含沿空间变量 x 平移所给出的流, 特别地, (0.5)不再成立. 这导致方程簇(0.4)的 Virasoro 对称无法提升至其 tau 覆盖.

解决此问题的关键之处在于引入一串新的流

$$\frac{\partial v^\alpha}{\partial t^{0,q}} = \eta^{\alpha\gamma}\partial_x \frac{\partial \theta_{0,q+1}}{\partial v^\gamma}, \quad q \in \mathbb{Z}, \tag{0.13}$$

这串新增的流当中包括沿空间变量 x 平移的流 $\frac{\partial}{\partial t^{0,0}} = \frac{\partial}{\partial x}$, 并且与方程簇(0.4)中的流都交换. 新增这串流之后的方程簇(0.4)称为广义 Frobenius 流形的*主方程簇*. 本文证明了广义 Frobenius 流形的主方程簇也具有 Virasoro 对称与 tau 结构, 其 tau 函数 τ 与坐标函数 v^α 满足关系

$$v^\alpha = \eta^{\alpha\beta}\frac{\partial^2 \log\tau}{\partial x \partial t^{\beta,0}}, \tag{0.14}$$

并且其 Virasoro 对称 $\{\frac{\partial}{\partial s_m}\}_{m\geq -1}$ 能够提升至相应的 tau 覆盖, 在相应的 tau 函数上的作用可以表示为某组满足 Virasoro 交换关系的线性微分算子 $\{L_m\}_{m\geq -1}$. 为给出 n 维广义 Frobenius 流形 M 的 Virasoro 对称 $\frac{\partial}{\partial s_m}$ 与 Virasoro 算子 L_m 的表达式并且推导广义 Frobenius 流形的圈方程, 需要从 M 出发, 在 $\widetilde{M} = \mathbb{C}\times M\times\mathbb{C}$ 上定义某个 Frobenius 结构, 使得 $\widetilde{M}$ 为 $(n+2)$ 维 (具有平坦单位的)Frobenius 流形, 然后借助与 $\widetilde{M}$ 的 Frobenius 流形结构有关的几何对象, 包括单值性数据 (monodromy data), 周期 (period) 等. 此外值得注意的是, $\widetilde{M}$ 上的 Frobenius 代数必有幂零元, 从而 $\widetilde{M}$ 是一类特殊的非半单 Frobenius 流形. 不难看出这类非半单 Frobenius 流形与本文所主要研究的单位向量场非平坦的广义 Frobenius 流形具有密切联系. 建立这类非半单 Frobenius 流形的一般理论也是值得研究的有趣课题 [57].

广义 Frobenius 流形的圈方程的解给出了主方程簇的一个*拟 Miura 变换*, 进而由此得到的主方程簇的形变, 即*拓扑形变*. 作为应用, 本文更深入地研究了广义 Frobenius 流形两个重要例子: 一维流形(0.12) 以及二维流形(0.11). 在例子中, 通过具体求解相应的圈方程, 给出它们的主方程簇的拓扑形变的低亏格近似, 进而提出关于主方程簇的拓扑形变与 q-形变 KdV 方程簇、Volterra 方程簇以及 Ablowitz-Ladik 方程簇等可积系统之间的联系的猜想.

本讲义内容安排

- 第 2 章介绍广义 Frobenius 流形的基础知识, 包括概念与基本性质, 主方程簇及其 tau 覆盖的构造, 并引入 n 维广义 Frobenius 流形的 $(n+2)$ 维相伴 Frobenius 流形.
- 第 3 章证明广义 Frobenius 流形的主方程簇具有 Virasoro 对称, 并且该对称可以提升至主方程簇的 tau 覆盖. 为描述提升至 tau 覆盖的 Virasoro 对称, 需要引入广义 Frobenius 流形的周期以及某个拉普拉斯型积分, 见该章第 1 节.
- 第 4 章首先引入一族关于广义 Frobenius 流形的线性微分算子, 并推导出与 Virasoro 对称关于这族线性微分算子的线性化条件等价的圈方程, 从而给出广义 Frobenius 流形的主方程簇的拓扑形变.
- 第 5 章研究广义 Frobenius 流形的两个重要例子, 并断言它们的主方程簇的拓扑形变与一些著名的可积系统有密切联系, 这些可积系统包括 Volterra 方程簇, q-形变 KdV 方程簇以及 Ablowitz-Ladik 方程簇等.
- 第 6 章介绍一些与广义 Frobenius 流形相关的其它问题, 包括零亏格 Virasoro 约束, 一维广义 Frobenius 流形的分类, 以及广义 Frobenius 流形的其它例子. 此外, 该章最后一节提出了更多新的问题.
- 附录 A 给出了文中定理2.8的证明, 附录 B 给出了广义 Frobenius 流形 M_{AL}(4.76)的亏格 2 自由能 $\mathcal{F}_2$ 的完整表达式.

1. 广义 Frobenius 流形

Dubrovin 最初在 [15] 当中引入 Frobenius 流形的概念, 而本文的研究对象广义 Frobenius 流形是其推广. 本章介绍广义 Frobenius 流形的概念及其基本性质.

1.1 概念与基本性质

定义 1.1. *称光滑 (或解析) 流形 M 是* **具有非平坦单位的广义 *Frobenius* 流形***, 如果 M 的每一点 p 处的切空间都具有 Frobenius 代数结构 $A_p = (\cdot, \langle\ ,\ \rangle, e)$ (即*

$\mathbb{R}$ 或 $\mathbb{C}$ 上的含幺交换结合代数, 并且其乘法运算 “$\cdot$” 关于非退化对称双线性型 $\langle\ ,\ \rangle$ 不变, e 是乘法运算 “$\cdot$” 的单位元), 并且该 *Frobenius* 代数结构 A_p 光滑 (或解析) 地依赖于点 $p \in M$ 的选取, 此外还要满足如下公理:

公理 1. 双线性型 $\langle\ ,\ \rangle$ 所对应的 $(0,2)$-型张量场 η 是 M 上的平坦度量 (即相应的黎曼曲率张量恒为零), 并且 $\nabla e \neq 0$(这里的 ∇ 是关于度量 η 的 *Levi-Civita* 联络);

公理 2. 定义 M 上的 $(0,3)$-型张量场 c: $(X,Y,Z) \mapsto \langle X \cdot Y, Z\rangle$, 则 $(0,4)$-型张量场

$$\nabla c : (W,X,Y,Z) \mapsto \nabla_W c(X,Y,Z), \quad \forall W,X,Y,Z \in \mathrm{Vect}(M) \tag{1.1}$$

是 4-对称的. 换言之, 对任意切向量场 X_1, X_2, X_3, X_4 以及对称群 S_4 中的任何置换 σ, 均成立

$$\nabla c(X_1, X_2, X_3, X_4) = \nabla c(X_{\sigma(1)}, X_{\sigma(2)}, X_{\sigma(3)}, X_{\sigma(4)}).$$

公理 3. 存在 M 上的切向量场 E, 使得 $(1,1)$-型张量场 ∇E 可对角化, $\nabla\nabla E = 0$, 并且存在常数 d 使得

$$\mathcal{L}_E(a \cdot b) = \mathcal{L}_E a \cdot b + a \cdot \mathcal{L}_E b + a \cdot b \tag{1.2}$$

$$\mathcal{L}_E\langle a, b\rangle = \langle \mathcal{L}_E a, b\rangle + \langle a, \mathcal{L}_E b\rangle + (2-d)\langle a, b\rangle. \tag{1.3}$$

上式中的切向量场 E 称为**欧拉向量场**, $\mathcal{L}_E$ 是指沿欧拉向量场向量场 E 的李导数, 常数 d 称为 M 的 ***charge***.

与 Dubrovin 所给出的 Frobenius 流形的原始定义相比, 上述定义仅仅将条件 $\nabla e = 0$ 改为 $\nabla e \neq 0$; 换言之, 乘法单位向量场 e 关于度量 η 非平坦. 这也是具有非平坦单位的广义 Frobenius 流形名称的由来. 为叙述方便, 后文将其简称为**广义 Frobenius 流形**.

注释 1.1. 本文中所提到的度量 仅仅是指非退化对称双线性型, 并不像通常黎曼几何那样要求正定性; 这不影响谈论相应的联络, 曲率等概念.

注释 1.2. 本文用符号 e 表示广义 *Frobenius* 流形的单位向量场; 而自然对数的底用符号 e 来表示. 此外, 符号 d 在本文表示广义 *Frobenius* 流形的 *charge*, 而微分算子用符号 d 表示. 它们的区别均在于字体.

首先, 广义 Frobenius 流形 M 仍然满足 (通常) Frobenius 流形的一些基本性质 [15]. 给定点 $p \in M$, 在 p 点某邻域 U 内取关于度量 η 的 (局部) 平坦坐标 $v^1, \ldots, v^n$, 记

$$\eta_{\alpha\beta} = \langle \partial_\alpha, \partial_\beta \rangle, \quad (\eta^{\alpha\beta}) = (\eta_{\alpha\beta})^{-1}, \tag{1.4}$$

其中 $\partial_\alpha = \dfrac{\partial}{\partial v^\alpha}$. Frobenius 代数的结构常数 $c^\gamma_{\alpha\beta} = c^\gamma_{\alpha\beta}(v)$ 定义为

$$\partial_\alpha \cdot \partial_\beta = c^\gamma_{\alpha\beta} \partial_\gamma, \quad \alpha, \beta = 1, \ldots, n, \tag{1.5}$$

特别注意, 本文遵循如下的爱因斯坦求和约定: 对上下重复出现的希腊字母从 1 到 n 自动求和, 其中 n 为流形 M 的维数. 此外对于 M 上的张量, 本文默认使用度量 η 来升降其上下指标. 由于度量 η 是平坦度量, 本文也采用如下约定: 在关于 η 的平坦坐标 $\{v^\alpha\}$ 下, 沿切向量场 X 的关于度量 η 的协变导数 ∇_X 常简写为 ∂_X; 此外, $\nabla_{\frac{\partial}{\partial v^\alpha}}$ 简写为 ∂_α, 这在平坦坐标下并不会与切向量场 $\partial_\alpha = \dfrac{\partial}{\partial v^\alpha}$ 混淆. 由广义 Frobenius 流形的定义可知, (局部) 存在函数 $F = F(v)$, 使得

$$\frac{\partial^3 F}{\partial v^\alpha \partial v^\beta \partial v^\gamma} = \eta_{\gamma\xi} c^\xi_{\alpha\beta}, \tag{1.6}$$

$$\partial_E F = (3-d)F + \frac{1}{2} A_{\alpha\beta} v^\alpha v^\beta + B_\alpha v^\alpha + C, \tag{1.7}$$

其中 $A_{\alpha\beta}, B_\alpha, C$ 为确定的常数, 并且函数 $c^\gamma_{\alpha\beta}$ 满足如下 Witten-Dijkgraaf-Verlinde-Verlinde 结合性方程 (简称 WDVV 方程)

$$c^\xi_{\alpha\beta} c^\delta_{\xi\gamma} = c^\xi_{\gamma\beta} c^\delta_{\xi\alpha}, \quad \forall \alpha, \beta, \gamma, \delta = 1, \ldots, n. \tag{1.8}$$

函数 $F(v)$ 称为广义 Frobenius 流形的势函数.

记 $(1,1)$-型张量

$$\mu = \frac{2-d}{2} - \nabla E, \tag{1.9}$$

则由(1.3)可知

$$\mu\eta + \eta\mu = 0. \tag{1.10}$$

因为 ∇E 可对角化, 所以可以取平坦坐标 $v^1, \ldots, v^n$，使得在此坐标下,

$$\mu := \mathrm{diag}(\mu_1, \ldots, \mu_n), \tag{1.11}$$

其中 $\mu_1,\dots,\mu_n$ 为常数, 并且欧拉向量场 E 形如

$$E = E^\alpha \partial_\alpha = \sum_{\alpha=1}^{n} \left[\left(1 - \frac{d}{2} - \mu_\alpha\right) v^\alpha + r^\alpha \right] \partial_\alpha, \tag{1.12}$$

其中 $r^1,\dots,r^n$ 为常数; 此外, 对任意 $\alpha = 1,\dots,n$, 如果 $r^\alpha \neq 0$, 则必有 $\mu_\alpha = 1 - \frac{d}{2}$.

与通常 Frobenius 流形一样, 广义 Frobenius 流形的相交形式 (intersection form)$g = (g^{\alpha\beta})$ 由下式所定义:

$$g(\omega_1,\omega_2) = i_E(\omega_1 \cdot \omega_2), \quad \forall \omega_1,\omega_2 \in T_v^* M, \tag{1.13}$$

其中, 度量 $\eta = \langle , \rangle$ 诱导了切空间 T_vM 与余切空间 T_v^*M 的同构, 在此同构下, 切空间 T_vM 上的 Frobenius 乘法结构自然诱导余切空间 T_v^*M 上的乘法结构. 在此平坦坐标下, 有

$$g^{\alpha\beta}(v) = (dv^\alpha, dv^\beta)_v = E^\gamma c_\gamma^{\alpha\beta}, \tag{1.14}$$

并且可以证明 g 的 Levi-Civita 联络的反变 Christoffel 系数形如

$$\Gamma_\gamma^{\alpha\beta} = \left(\frac{1}{2} - \mu_\beta\right) c_\gamma^{\alpha\beta}, \tag{1.15}$$

其中 $c_\gamma^{\alpha\beta} = \eta^{\alpha\lambda} c_{\lambda\gamma}^\beta$. 用与 [15] 完全一样的方法可以证明, 相交形式 g 与平坦度量 η 诱导了 M 上的一组平坦度量束 (flat pencil) $g^{\alpha\beta} - \lambda\eta^{\alpha\beta}$.

命题 1.3. *设 M 为广义 Frobenius 流形, 则 (局部) 存在函数 $\varphi(v)$ 使得下式成立:*

$$e^\alpha = \eta^{\alpha\beta} \frac{\partial\varphi}{\partial v^\beta}, \quad E^\alpha = g^{\alpha\beta} \frac{\partial\varphi}{\partial v^\beta}. \tag{1.16}$$

上式中的 e^α, E^α 分别为单位向量场 $e = e^\alpha\partial_\alpha$ 与欧拉向量场 $E = E^\alpha\partial_\alpha$ 在给定平坦坐标下的系数.

证明. 首先证明 (局部) 存在满足第一个关系式(1.16)的函数 φ. 为此, 只需要验证如下相容性条件

$$\partial^\alpha e^\beta = \partial^\beta e^\alpha, \tag{1.17}$$

其中 $\partial^\alpha = \eta^{\alpha\beta}\partial_\beta$. 事实上, 由 $e \cdot \partial_\alpha = \partial_\alpha$ 可知 $e^\gamma c_{\gamma\xi}^\beta = \delta_\xi^\beta$, 从而有

$$0 = e^\gamma \partial^\alpha \left(e^\xi c_{\gamma\xi}^\beta\right) = e^\gamma \left(\left(\partial^\alpha e^\xi\right) c_{\gamma\xi}^\beta + e^\xi c_{\gamma\xi}^{\alpha\beta}\right) = \partial^\alpha e^\beta + e^\gamma e^\xi c_{\gamma\xi}^{\alpha\beta}, \tag{1.18}$$

由此可知

$$\partial^\alpha e^\beta = -e^\gamma e^\xi c^{\alpha\beta}_{\gamma\xi} = \partial^\beta e^\alpha. \tag{1.19}$$

注意上述推导过程中用到了记号 $c^{\alpha\beta}_{\gamma\xi} = \partial_\xi c^{\alpha\beta}_\gamma$.

而第二个关系式(1.16) 的正确性由以下所保证:

$$g^{\alpha\beta}\frac{\partial\varphi}{\partial v^\beta} = E^\xi c^\alpha_{\xi\gamma}\eta^{\gamma\beta}\frac{\partial\varphi}{\partial v^\beta} = E^\xi c^\alpha_{\xi\gamma}e^\gamma = E^\xi\delta^\alpha_\xi = E^\alpha. \tag{1.20}$$

综上, 本命题得证. □

注意到通常 (具有平坦单位向量场的) Frobenius 流形平凡地满足上述命题. 这是因为, 如果 $\nabla e = 0$, 则可适当选取平坦坐标 v^α, 使得在此局部坐标下 $e = \dfrac{\partial}{\partial v^1}$; 此时可取 $\varphi = v_1$, 其中 $v_1 = \eta_{1\alpha}v^\alpha$.

注释 1.4. *接下来, 若不加特别说明, 符号 ∇ 用来表示关于度量 η 的梯度算子, 不再表示 Levi-civita 联络. 换言之, 对于 M 上的函数 f, 梯度向量场 $\nabla f = \partial^\alpha f\partial_\alpha = \eta^{\alpha\beta}(\partial_\beta f)\partial_\alpha$. 在此记号下, (1.16)中的第一个式子可改写为 $e = \nabla\varphi$; 换言之, 单位向量场 e 一定是某个 (局部定义的) 函数 φ 的梯度场.*

命题 1.5. *对于广义 Frobenius 流形, 以下等式成立:*

$$[E, e] = -e, \quad \nabla\langle E, e\rangle = (1-d)e. \tag{1.21}$$

这里出现的 ∇ 是指关于度量 η 的梯度.

证明. 由(1.2)容易推出第一个式子(1.21)成立. 再结合(1.17)式可知,

$$\begin{aligned}\eta_{\alpha\beta}E^\alpha\partial^\gamma e^\beta &= \eta_{\alpha\beta}E^\alpha\partial^\beta e^\gamma = -e^\gamma + e^\alpha\partial_\alpha E^\gamma\\ &= -e^\gamma + e^\gamma\left(\frac{2-d}{2} - \mu_\gamma\right) = -\left(\frac{d}{2} + \mu_\gamma\right)e^\gamma.\end{aligned} \tag{1.22}$$

再注意(1.10), 从而

$$\begin{aligned}\partial^\gamma\langle E, e\rangle = (\partial^\gamma E^\alpha)e^\beta\eta_{\alpha\beta} + E^\alpha(\partial^\gamma e^\beta)\eta_{\alpha\beta} &= \eta^{\gamma\xi}(\partial_\xi E^\alpha)e^\beta\eta_{\alpha\beta} - \left(\frac{d}{2} + \mu_\gamma\right)e^\gamma\\ = \left[\left(\frac{2-d}{2} + \mu_\gamma\right) - \left(\frac{d}{2} + \mu_\gamma\right)\right]e^\gamma &= (1-d)e^\gamma,\end{aligned} \tag{1.23}$$

因此第二个式子(1.21)也成立. 综上, 本命题得证. □

由(1.21)可知, 如果广义 Frobenius 流形 M 的 charge $d \neq 1$, 则命题1.3 当中的函数 φ 可以取为

$$\varphi = \frac{\langle E, e\rangle}{1-d}. \tag{1.24}$$

与通常 Frobenius 流形类似, 广义 Frobenius 流形 M 也具有形变平坦联络 (deformed flat connection)$\widetilde{\nabla}$ 如下:

$$\widetilde{\nabla}_u v = \nabla_u v + z u \cdot v, \quad \forall u, v \in \mathrm{Vect}(M), \tag{1.25}$$

其中参数 $z \in \mathbb{C}^*$. 上述联络可被延拓为 $M \times \mathbb{C}^*$ 上的平坦的仿射联络如下:

$$\widetilde{\nabla}_u \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} = 0, \quad \widetilde{\nabla}_{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} = 0, \tag{1.26}$$

$$\widetilde{\nabla}_{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}} v = \partial_z v + E \cdot v - \frac{1}{z}\mu v, \tag{1.27}$$

其中 u, v 是 $M \times \mathbb{C}^*$ 上的沿 $\mathbb{C}^*$ 方向的分量为 0 的切向量场. 可以取关于此联络的形如下式的形变平坦坐标 $\tilde{v}^1(v; z), \ldots, \tilde{v}^n(v; z)$ (证明细节见 [16, 26]):

$$(\tilde{v}_1(v, z), \ldots, \tilde{v}_n(v, z)) = (\theta_1(v, z), \ldots, \theta_n(v, z)) z^\mu z^R, \tag{1.28}$$

使得

$$\zeta_\alpha = \frac{\partial \tilde{v}_\alpha}{\partial v^\gamma} \mathrm{d}v^\gamma + 0\, \mathrm{d}z, \quad \alpha = 1, \ldots, n \tag{1.29}$$

给出了方程组 $\widetilde{\nabla}\zeta = 0$ 的一组基础解系. 切向量场 $\xi_\alpha, \alpha = 1, \ldots, n$ 称为形变平坦联络 $\widetilde{\nabla}$ 的**水平截面** (horizontal section)[16]. 这里出现的常值矩阵 μ, R 称为广义 Frobenius 流形 M 在 $z = 0$ 处的 **单值性数据** (monodromy data), 其中 μ 来自(1.9)式, $R = R_1 + \cdots + R_m$(其中 m 为某个确定的正整数) 满足如下关系:

$$(R_s)^\alpha_\beta \neq 0 \quad \Longrightarrow \quad \mu_\alpha - \mu_\beta = s, \tag{1.30}$$

$$R_s^{\mathrm{T}} \eta = (-1)^{s+1} \eta R_s, \quad \forall\, s \geq 1. \tag{1.31}$$

函数 $\theta_\alpha(v; z)$ 在 $z = 0$ 附近解析, 并且可以表示为下述形式:

$$\theta_\alpha(v; z) = \sum_{p \geq 0} \theta_{\alpha,p}(v) z^p, \quad \alpha = 1, \ldots, n, \tag{1.32}$$

其中 $\theta_{\alpha,p}, \alpha = 1, \ldots, n, p \geq 0$ 是 M 上 (局部定义的) 函数. 记

$$\xi_{\alpha,p} = \xi^\gamma_{\alpha,p} \partial_\gamma = \nabla \theta_{\alpha,p}, \quad \alpha = 1, \ldots, n,\ p \geq 0, \tag{1.33}$$

则上述这些切向量场满足微分递推关系

$$\partial_\alpha \xi_{\beta,p+1} = c_{\alpha\beta}^\gamma \xi_{\gamma,p}, \tag{1.34}$$

以及拟齐次性条件

$$\partial_E \xi_{\alpha,p} = (p + \mu_\alpha - \mu)\xi_{\alpha,p} + \sum_{s=1}^{p} (R_s)_\alpha^\gamma \xi_{\gamma,p-s}. \tag{1.35}$$

可以额外要求上述形变平坦坐标满足如下的归一化条件

$$\xi_\alpha(v;0) = \xi_{\alpha,0} = \partial_\alpha, \tag{1.36}$$

$$\langle \xi_\alpha(v;-z), \xi_\beta(v;z)\rangle = \eta_{\alpha\beta}, \tag{1.37}$$

其中

$$\xi_\alpha(v;z) = \sum_{p\geq 0} \xi_{\alpha,p} z^p, \quad \alpha = 1,\ldots,n. \tag{1.38}$$

注释 1.6. 一般来说, 方程(1.34)–(1.37) 并不能唯一确定切向量场 $\xi_{\alpha,p}$, 这是因为, 在利用微分递推关系(1.34) 由 $\theta_{\alpha,p}(\alpha = 1,\ldots,n)$ 出发来求解 $\theta_{\alpha,p+1}$ 的过程中存在着如下自由度

$$\xi_{\alpha,p+1} \mapsto \xi_{\alpha,p+1} + a_{\alpha,p+1}, \tag{1.39}$$

其中常系数向量场 $a_{\alpha,p+1} = a_{\alpha,p+1}^\gamma \partial_\gamma$ 满足关系

$$(p+1+\mu_\alpha - \mu_\gamma) a_{\alpha,p+1}^\gamma = 0, \quad a_{\alpha,p+1}^\gamma \eta_{\gamma\beta} = (-1)^p a_{\beta,p+1}^\gamma \eta_{\gamma\alpha}. \tag{1.40}$$

接下来, 本文将取定一组满足方程(1.34)–(1.37) 的切向量场 $\xi_{\alpha,p}$; 此外, 下一节将取定一组满足关系(1.33)的函数 $\theta_{\alpha,p}$.

1.2 广义 Frobenius 流形的主方程簇

对于具有平坦单位向量场的通常 Frobenius 流形 M, 形变平坦联络 $\tilde{\nabla}$ 的水平截面 $\theta_{\alpha,p}$ 诱导了定义在无穷 jet 空间 $J^\infty(M)$ 上的哈密顿可积方程簇

$$\frac{\partial v^\alpha}{\partial t^{\beta,q}} = \eta^{\alpha\gamma} \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \theta_{\beta,q+1}}{\partial v^\gamma}\right) = \eta^{\alpha\gamma} \frac{\partial^2 \theta_{\beta,q+1}}{\partial v^\gamma \partial v^\xi} v_x^\xi, \quad 1 \leq \alpha,\beta \leq n,\ q \geq 0, \tag{1.41}$$

该方程簇称为 Frobenius 流形 M 的主方程簇 (Principal Hierarchy). 而广义 Frobenius 流形也可诱导形如(1.41)的可积方程簇, 并且这个可积方程簇具有

双哈密顿结构、tau 结构与无穷多个 Virasoro 对称, 这与通常的 Frobenius 流形完全一样. 然而与通常 Frobenius 流形不同的是, 由于广义 Frobenius 流形的单位向量场 e 未必平坦, 关于沿空间变量 x 平移的流未必属于可积方程簇主方程簇, 并且方程簇(1.41)的 Virasoro 对称未必能提升至该方程簇的 tau 函数. 这是研究广义 Frobenius 流形的主要困难之处. 为克服上述困难, 需要额外引入一串与该方程簇交换的流, 本文将这串新的流与方程簇(1.41) 统称为广义 Frobenius 流形的主方程簇. 接下来将构造这串额外引入的流.

接下来, 本文用 M 来表示 n 维广义 Frobenius 流形.

引理 1.7. *存在切向量场 $\xi_{0,p} \in \mathrm{Vect}(M)$, $(p \geq 0)$ 以及常数 $r_p^\alpha \in \mathbb{C}$, $(p \geq 1,\ \alpha = 1, 2, \ldots, n)$ 使得如下关系成立:*

$$\xi_{0,0} = e, \quad \xi_{0,1} = v^\alpha \partial_\alpha, \tag{1.42}$$

$$\partial_\alpha \xi_{0,p}^\gamma = c_{\alpha\beta}^\gamma \xi_{0,p-1}^\beta, \quad \alpha, \gamma = 1, \ldots, n,\ p \geq 1. \tag{1.43}$$

$$\partial_E \xi_{0,p} = \left(p - \frac{d}{2} - \mu\right) \xi_{0,p} + \sum_{s=1}^{p} r_s^\lambda \xi_{\lambda,p-s}, \quad p \geq 0, \tag{1.44}$$

并且常数 r_p^α 满足如下关系:

$$r_1^\alpha = r^\alpha, \tag{1.45}$$

$$r_p^\alpha \neq 0 \quad \Longrightarrow \quad \mu_\alpha + \frac{d}{2} = p. \tag{1.46}$$

这里的常数 r^α 来自欧拉向量场 E 的系数, 见(1.12)式.

证明. 为证明向量场 $\xi_{0,p}$ 与常数 r_p^α 的存在性, 考虑对 $p \geq 0$ 使用数学归纳法. 首先, 由(1.21)式以及欧拉向量场的表达式(1.12)可知(1.42)–(1.46)对 $p = 0, 1$ 成立. 对任意正整数 k, 如果对任意 $1 \leq p \leq k$ 以及 $1 \leq \alpha \leq n$, 已证明存在满足关系(1.42)–(1.46) 的切向量场 $\xi_{0,p}$ 与常数 r_p^α, 则由 WDVV 方程(1.8), 容易验证存在满足微分递推关系(1.43)的切向量场 $\xi_{0,k+1} = \xi_{0,k+1}^\gamma \partial_\gamma$. 再注意到

$$\begin{aligned}
&\partial_E \left(\partial_\alpha \cdot \xi_{0,k}\right)^\lambda \\
&= \left(\partial_E c_{\alpha\beta}^\lambda\right) \xi_{0,k}^\beta + c_{\alpha\beta}^\lambda \partial_E \xi_{0,k}^\beta \\
&= \left(\mu_\alpha + \mu_\beta - \mu_\lambda + \frac{d}{2}\right) c_{\alpha\beta}^\lambda \xi_{0,k}^\beta + c_{\alpha\beta}^\lambda \left(\left(k - \frac{d}{2} - \mu_\beta\right) \xi_{0,k}^\beta + \sum_{s=1}^{k} r_s^\varepsilon \xi_{\varepsilon,k-s}^\beta\right)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= (k+\mu_\alpha-\mu_\lambda)c^\lambda_{\alpha\beta}\xi^\beta_{0,k}+\sum_{s=1}^{k} r^\varepsilon_s c^\lambda_{\alpha\beta}\xi^\beta_{\varepsilon,k-s}\\
&= (k+\mu_\alpha-\mu_\lambda)\partial_\alpha\xi^\lambda_{0,k+1}+\sum_{s=1}^{k} r^\varepsilon_s \partial_\alpha\xi^\lambda_{\varepsilon,k+1-s},
\end{aligned}
\tag{1.47}
$$

从而

$$
\begin{aligned}
\partial_\alpha\left(\partial_E\xi_{0,k+1}\right) &= \left(1-\frac{d}{2}-\mu_\alpha\right)\partial_\alpha\xi_{0,k+1}+\partial_E\left(\partial_\alpha\cdot\xi_{0,p}\right)\\
&= \left(k+1-\frac{d}{2}-\mu\right)\partial_\alpha\xi_{0,k+1}+\sum_{s=1}^{k} r^\varepsilon_s\partial_\alpha\xi_{\varepsilon,k+1-s}.
\end{aligned}
\tag{1.48}
$$

因此存在常数 r^α_{k+1} 使得

$$
\begin{aligned}
\partial_E\xi_{0,p+1} &= \left(k+1-\frac{d}{2}-\mu\right)\xi_{0,k+1}+\sum_{s=1}^{k} r^\varepsilon_s\xi_{\varepsilon,k+1-s}+r^\varepsilon_{k+1}\partial_\varepsilon\\
&= \left(k+1-\frac{d}{2}-\mu\right)\xi_{0,p+1}+\sum_{s=1}^{k+1} r^\varepsilon_s\xi_{\varepsilon,k+1-s}.
\end{aligned}
\tag{1.49}
$$

注意上式也可改写为

$$
\partial_E\xi^\alpha_{0,k+1} = \left(k+1-\frac{d}{2}-\mu_\alpha\right)\xi^\alpha_{0,k+1}+\sum_{s=1}^{k} r^\varepsilon_s\xi^\alpha_{\varepsilon,k+1-s}+r^\alpha_{k+1},
\tag{1.50}
$$

从而, 如有必要, 可给向量场 $\xi^\alpha_{0,k+1}$ 适当加上某个特定的常系数向量场, 使得调整后的向量场对应的 r^α_{k+1} 满足 $p=k+1$ 时的条件(1.46). 引理得证. □

注释 1.8. *需要注意, 在利用微分递推关系(1.43)由 $\xi^\alpha_{0,p-1}$ 出发构造 $\xi^\alpha_{0,p}$ 的过程中依然存在如下的额外自由度:*

$$
\xi_{0,p}\mapsto\xi_{0,p}+a_{0,p},
\tag{1.51}
$$

其中常系数向量场 $a_{0,p}$ 满足条件

$$
\left(p-\frac{d}{2}-\mu\right)a_{0,p}=0.
\tag{1.52}
$$

接下来, 本文将取定一组满足上述引理所述条件的切向量场 $\xi_{0,p}(p\geq 0)$.

注释 1.9. 如果 M 具有平坦单位向量场 (即为通常的 Frobenius 流形), 取平坦坐标 $\{v^\alpha\}$ 使得单位向量场在该坐标下形如 $e = \dfrac{\partial}{\partial v^1}$, 此时有 $r^\alpha = (R_1)^\alpha_1$. 在此坐标下, 向量场 $\xi_{0,p}$ 可以取为

$$\xi_{0,p}(v) = \xi_{1,p}(v), \quad p \ge 0, \tag{1.53}$$

常数 r^ε_k 可以取为

$$r^\varepsilon_k = (R_k)^\varepsilon_1. \tag{1.54}$$

引理 1.10. 记 $\xi_{0,-p} = \xi^\gamma_{0,-p}\partial_\gamma (p \ge 1)$ 是 M 上的由如下递推关系

$$\xi_{0,0} = e, \quad \xi_{0,-p} = \partial_e \xi_{0,-p+1}, \quad p \ge 1. \tag{1.55}$$

所递归定义的切向量场, 则以下关系成立:

$$\partial_\alpha \xi^\gamma_{0,-p} = c^\gamma_{\alpha\beta}\xi^\beta_{0,-p-1}, \quad \alpha, \gamma = 1, \dots, n,\ p \ge 0, \tag{1.56}$$

$$\partial_E \xi_{0,-p} = \left(-p - \frac{d}{2} - \mu\right)\xi_{0,-p}, \quad p \ge 0. \tag{1.57}$$

证明. 为证明关系式(1.56)与(1.57), 我们对 $p \ge 0$ 采用数学归纳法. 首先, 由(1.17)–(1.21)可知

$$\begin{aligned} c^\gamma_{\alpha\beta}\xi^\beta_{0,-1} &= c^\gamma_{\alpha\beta}\partial_e \xi^\beta_{0,0} = c^\gamma_{\alpha\beta}\partial_e e^\beta = c^\gamma_{\alpha\beta} e^\lambda \partial_\lambda e^\beta \\ &= \partial_\lambda\left(e^\beta c^\gamma_{\alpha\beta}\right) e^\lambda - e^\lambda e^\beta c^\gamma_{\alpha\beta\lambda} \\ &= -e^\lambda e^\beta c^\gamma_{\alpha\beta\lambda} = \partial_\alpha e^\gamma = \partial_\alpha \xi^\gamma_{0,0}, \end{aligned} \tag{1.58}$$

以及

$$\begin{aligned} \partial_E \xi_{0,0} &= \partial_E e^\gamma \partial_\gamma = -e + e^\gamma \partial_\gamma E = -e + e^\gamma\left(1 - \frac{d}{2} - \mu_\gamma\right)\partial_\gamma \\ &= \left(-\frac{d}{2} - \mu\right) e = \left(-\frac{d}{2} - \mu\right)\xi_{0,0}, \end{aligned} \tag{1.59}$$

从而当 $p = 0$ 时(1.56)与(1.57)成立. 接下来, 对于任意正整数 k, 假设(1.56)与(1.57)对任意 $0 \le p \le k-1$ 都成立, 则

$$\begin{aligned} \partial_\alpha \xi^\gamma_{0,-k} &= \partial_\alpha \partial_e \xi^\gamma_{0,-k+1} = \partial_\alpha\left(e^\lambda \partial_\lambda \xi^\gamma_{0,-k+1}\right) \\ &= (\partial_\alpha e^\lambda)\partial_\lambda \xi^\gamma_{0,-k+1} + e^\lambda \partial_\lambda \partial_\alpha \xi^\gamma_{0,-k+1} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= (\partial_\alpha e^\lambda) c^\gamma_{\lambda\beta} \xi^\beta_{0,-k} + e^\lambda \partial_\lambda \left(c^\gamma_{\alpha\beta} \xi^\beta_{0,-k} \right) \\
&= (\partial_\alpha e^\lambda) c^\gamma_{\lambda\beta} \xi^\beta_{0,-k} + e^\lambda \left(\partial_\lambda c^\gamma_{\alpha\beta} \right) \xi^\beta_{0,-k} + c^\gamma_{\alpha\beta} \partial_e \xi^\beta_{0,-k} \\
&= (\partial_\alpha e^\lambda) c^\gamma_{\lambda\beta} \xi^\beta_{0,-k} + e^\lambda \left(\partial_\lambda c^\gamma_{\alpha\beta} \right) \xi^\beta_{0,-k} + c^\gamma_{\alpha\beta} \xi^\beta_{0,-k-1} \\
&= (\partial_\alpha e^\lambda) c^\gamma_{\lambda\beta} \xi^\beta_{0,-k} + \left(\partial_\alpha (e^\lambda c^\gamma_{\lambda\beta}) - (\partial_\alpha e^\lambda) c^\gamma_{\lambda\beta} \right) \xi^\beta_{0,-k} + c^\gamma_{\alpha\beta} \xi^\beta_{0,-k-1} \\
&= c^\gamma_{\alpha\beta} \xi^\beta_{0,-k-1}, \qquad (1.60)
\end{aligned}
$$

以及

$$
\begin{aligned}
\partial_E \xi_{0,-k} = \partial_E \partial_e \xi_{0,-k+1} &= \partial_{[E,e]} \xi_{0,-k+1} + \partial_e \partial_E \xi_{0,-k+1} \\
&= -\partial_e \xi_{0,-k+1} + \partial_e \left(-k + 1 - \frac{d}{2} - \mu \right) \xi_{0,-k+1} \\
&= \left(-k - \frac{d}{2} - \mu \right) \xi_{0,-k}, \qquad (1.61)
\end{aligned}
$$

因此当 $p = k$ 时(1.56)与(1.57)也成立. 综上所述, 本引理得证. □

注释 1.11. *如果 M 的单位向量场平坦 (即 M 为通常 Frobenius 流形), 则切向量场 $\xi_{0,-p} (p \geq 1)$ 恒为零.*

现在, 我们将取定一组满足关系(1.33)的函数 $\theta_{\alpha,p}$ $(1 \leq \alpha \leq n, p \geq 0)$. 为此, 需要如下命题:

命题 1.12. *取定方程(1.34)–(1.37)的一组解 $\xi_{\alpha,p} \in \mathrm{Vect}(M)$, $\alpha = 1, \ldots, n, p \geq 0$, 并且取定满足引理1.7所述条件的一组 $\xi_{0,p} \in \mathrm{Vect}(M)$, $p \geq 0$, 则如下定义的函数*

$$
\theta_{\alpha,p} = \sum_{k=0}^{p} (-1)^k \langle \xi_{0,k+1}, \xi_{\alpha,p-k} \rangle, \quad 1 \leq \alpha \leq n, \ p \geq 0 \qquad (1.62)
$$

满足关系式(1.33)以及拟齐次性条件

$$
\partial_E \theta_{\alpha,p} = \left(p + 1 - \frac{d}{2} + \mu_\alpha \right) \theta_{\alpha,p} + \sum_{s=1}^{p} \theta_{\varepsilon,p-s} (R_s)^\varepsilon_\alpha + (-1)^p r^\varepsilon_{p+1} \eta_{\varepsilon\alpha}, \qquad (1.63)
$$

其中常数 r^ε_p 来自引理1.7.

证明. 由微分递推关系(1.34)以及(1.43)可得

$$
\partial_\beta \theta_{\alpha,p} = \sum_{k=0}^{p} (-1)^k \Big(\langle \partial_\beta \cdot \xi_{0,k}, \xi_{\alpha,p-k} \rangle + \langle \xi_{0,k+1}, \partial_\beta \cdot \xi_{\alpha,p-k-1} \rangle \Big)
$$

$$= \langle \partial_\beta \cdot \xi_{0,0}, \xi_{\alpha,p}\rangle = \langle \partial_\beta, \xi_{\alpha,p}\rangle = \eta_{\beta\gamma}\xi^\gamma_{\alpha,p}, \tag{1.64}$$

从而(1.33) 成立. 而验证拟齐次性条件(1.63)需要利用关系式 (1.10)(1.35)(1.37)以及(1.44)。由以上可得,

$$\begin{aligned}
\partial_E\theta_{\alpha,p} &= \sum_{k=0}^{p}(-1)^k\Big(\langle \partial_E\xi_{0,k+1}, \xi_{\alpha,p-k}\rangle + \langle \xi_{0,k+1}, \partial_E\xi_{\alpha,p-k}\rangle\Big) \\
&= \sum_{k=0}^{p}(-1)^k\left(\langle (k+1-\frac{d}{2}-\mu)\xi_{0,k+1}, \xi_{\alpha,p-k}\rangle + \sum_{s=1}^{k+1} r^\varepsilon_s\langle \xi_{\varepsilon,k+1-s}, \xi_{\alpha,p-k}\rangle\right) \\
&\quad + \sum_{k=0}^{p}(-1)^k\left(\langle \xi_{0,k+1}, (p-k+\mu_\alpha-\mu)\xi_{\alpha,p-k}\rangle + \sum_{s=1}^{p-k}(R_s)^\varepsilon_\alpha\langle \xi_{0,k+1}, \xi_{\varepsilon,p-k-s}\rangle\right) \\
&= \left(p+1-\frac{d}{2}+\mu_\alpha\right)\sum_{k=0}^{p}(-1)^k\langle \xi_{0,k+1}, \xi_{\alpha,p-k}\rangle \\
&\quad + \sum_{s=1}^{p+1} r^\varepsilon_s\sum_{k=s-1}^{p}(-1)^k\langle \xi_{\varepsilon,k+1-s}, \xi_{\alpha,p-k}\rangle + \sum_{s=1}^{p}(R_s)^\varepsilon_\alpha\sum_{k=0}^{p-s}(-1)^k\langle \xi_{0,k+1}, \xi_{\varepsilon,p-k-s}\rangle \\
&= \left(p+1-\frac{d}{2}+\mu_\alpha\right)\theta_{\alpha,p} + \sum_{s=1}^{p}(R_s)^\varepsilon_\alpha\theta_{\varepsilon,p-s} + (-1)^p r^\varepsilon_{p+1}\eta_{\varepsilon\alpha}.
\end{aligned} \tag{1.65}$$

综上所述, 本命题得证. □

命题 1.13. *对任意 $p\in\mathbb{Z}$, 存在 M 上的函数 $\theta_{0,p}$ 以及常数 $c_p\in\mathbb{C}$, 使得成立*

$$\nabla\theta_{0,p} = \xi_{0,p}, \quad p\in\mathbb{Z} \tag{1.66}$$

以及如下拟齐次性条件

$$\partial_E\theta_{0,p} = (p-d+1)\theta_{0,p} + \sum_{s=1}^{p} r^\varepsilon_s\theta_{\varepsilon,p-s} + c_p, \quad p\in\mathbb{Z}, \tag{1.67}$$

其中本文约定, 当 $p<0$ 且 $\varepsilon\neq 0$ 时, $\theta_{\varepsilon,p}=0$; 此外, 常数 $c_p\neq 0$ 仅当 $p=d-1\in\mathbb{Z}$ 且 p 为偶数.

证明. 满足条件(1.66)与(1.67)的函数 $\theta_{0,p}$ $(p\in\mathbb{Z})$ 的存在性可由微分递推关系(1.43)(1.56)以及 WDVV 方程(1.8)推出. 而当 $p=2q+1$ 为奇数时, 特别

选取

$$\theta_{0,p}=\begin{cases}\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{p-1}(-1)^k\langle\xi_{0,p-k},\xi_{0,k+1}\rangle, & p>0,\\ \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{-p-1}(-1)^k\langle\xi_{0,p+1+k},\xi_{0,-k}\rangle, & p<0,\end{cases}\tag{1.68}$$

则容易验证上式定义的 $\theta_{0,p}$ 的确满足(1.66), 并且由拟齐次性条件(1.44)(1.57)可以验证此时 $c_p=0$. 而 p 为偶数并且 $p\neq d-1$ 时, 将 $\theta_{0,p}$ 适当加上某个常数, 可以使得调整之后的 $\theta_{0,p}$ 所对应的 c_p 恰为零. 综上, 本命题得证. □

由(1.62)(1.68) 以及(1.36)(1.42)(1.55)可知

$$\begin{cases}\theta_{0,0}=\varphi, \quad \theta_{0,1}=\frac{1}{2}v^\gamma v_\gamma, \quad \theta_{0,-1}=\frac{1}{2}e^\gamma e_\gamma,\\ \theta_{\alpha,0}=v_\alpha, \quad \forall\,\alpha=1,\dots,n,\end{cases}\tag{1.69}$$

其中函数 φ 来自命题1.3. 当 $d\neq 1$ 时, 可以通过加上某个适当的常数来调整 φ, 使得 $\theta_{0,0}=\varphi$ 满足拟齐次性条件 (1.67) 并使得相应的常数 $c_0=0$.

现在引入广义 Frobenius 流形 M 的主方程簇.

定义 1.2. *广义 Frobenius 流形 M 的* **主方程簇** *(Principal Hierarchy) 是指如下的演化型偏微分方程组:*

$$\begin{cases}\frac{\partial v^\alpha}{\partial t^{\beta,q}}=\eta^{\alpha\gamma}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\theta_{\beta,q+1}}{\partial v^\gamma}\right), & 1\le\beta\le n,\ q\ge 0,\\ \frac{\partial v^\alpha}{\partial t^{0,q}}=\eta^{\alpha\gamma}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\theta_{0,q+1}}{\partial v^\gamma}\right), & q\in\mathbb{Z},\end{cases}\tag{1.70}$$

其中 $\theta_{\alpha,p\ge0}$, $\theta_{0,q\in\mathbb{Z}}$ 来自于命题1.12与命题1.13.

利用 WDVV 方程(1.8)容易证明上述定义的主方程簇中的流两两交换; 并且由(1.69)可知上述定义的主方程簇包含沿空间变量 x 平移的流, 即

$$\frac{\partial v^\alpha}{\partial t^{0,0}}=v^\alpha_x,\tag{1.71}$$

从而为方便起见, 在后文中不妨将时间变量 $t^{0,0}$ 与空间变量 x 视为等同, 即

$$t^{0,0}=x.\tag{1.72}$$

此外注意到, 广义 Frobenius 流形的主方程簇也可改写为

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial t^{\alpha,p}} = \partial_x \nabla\theta_{\alpha,p+1} = \nabla\theta_{\alpha,p}\cdot v_x, \quad 1\le\alpha\le n,\, p\ge 0 \\ \dfrac{\partial v}{\partial t^{0,q}} = \partial_x \nabla\theta_{0,p+1} = \nabla\theta_{0,q}\cdot v_x, \quad q\in\mathbb{Z}, \end{cases}, \tag{1.73}$$

其中 $v := (v^1,\dots,v^n)^{\mathrm{T}}$, and $v_x := (v_x^1,\dots,v_x^n)^{\mathrm{T}}$.

M 的无穷 jet 空间 $J^\infty(M)$ 上具有双哈密顿结构 (即, 两个相容的哈密顿算子) $\mathcal{P}_a = (\mathcal{P}_a^{\alpha\beta})$, $a=1,2$ 如下:

$$\mathcal{P}_1^{\alpha\beta} = \eta^{\alpha\beta}\partial_x, \quad \mathcal{P}_2^{\alpha\beta} = g^{\alpha\beta}\partial_x + \Gamma_\gamma^{\alpha\beta}v_x^\gamma, \tag{1.74}$$

其中相交形式 $g^{\alpha\beta}$ 及其反变 Christoffel 系数 $\Gamma_\gamma^{\alpha\beta}$ 见(1.14)(1.15). 主方程簇(1.70)是关于上述双哈密顿结构的双哈密顿可积方程簇, 更确切地说, 主方程簇的流可以改写为如下的哈密顿形式:

$$\frac{\partial v^\alpha}{\partial t^{j,q}} = \mathcal{P}_1^{\alpha\gamma}\frac{\delta H_{j,q}}{\delta v^\gamma}, \quad \alpha = 1,\dots,n,\ (j,q)\in\mathcal{I}, \tag{1.75}$$

并且对任意 $\alpha,\beta = 1,\dots,n$, $q\ge 0$, $p\in\mathbb{Z}$ 都成立如下双哈密顿递推关系

$$\mathcal{P}_2^{\alpha\gamma}\frac{\delta H_{\beta,q-1}}{\delta v^\gamma} = \left(q+\frac{1}{2}+\mu_\beta\right)\mathcal{P}_1^{\alpha\gamma}\frac{\delta H_{\beta,q}}{\delta v^\gamma} + \sum_{s=1}^{q}(R_s)_\beta^\lambda \mathcal{P}_1^{\alpha\gamma}\frac{\delta H_{\lambda,q-s}}{\delta v^\gamma}, \tag{1.76}$$

$$\mathcal{P}_2^{\alpha\gamma}\frac{\delta H_{0,p-1}}{\delta v^\gamma} = \left(p+\frac{1}{2}-\frac{d}{2}\right)\mathcal{P}_1^{\alpha\gamma}\frac{\delta H_{0,p}}{\delta v^\gamma} + \sum_{s=1}^{p} r_s^\lambda \mathcal{P}_1^{\alpha\gamma}\frac{\delta H_{\lambda,p-s}}{\delta v^\gamma}, \tag{1.77}$$

其中指标集 $\mathcal{I}$ 的定义为

$$\mathcal{I} = \Big(\{1,\dots,n\}\times\mathbb{Z}_{\ge 0}\Big)\cup\Big(\{0\}\times\mathbb{Z}\Big), \tag{1.78}$$

哈密顿量 $H_{j,q}$, $(j,q)\in\mathcal{I}$ 的定义为

$$H_{j,q} = \int \theta_{j,q+1}(v(x))\,\mathrm{d}x. \tag{1.79}$$

1.3 主方程簇的 tau 结构与 tau 覆盖

本节将按照类似于 [15, 26] 的方法引入广义 Frobenius 流形 M 的主方程簇的 tau 结构与 tau 覆盖.

记 $\{\theta_{i,p} \,|\, (i,p)\in\mathcal{I}\}$ 是广义 Frobenius 流形 M 上的满足命题1.12, 1.13 的一族函数, 其中指标集 I 的定义见(1.78)式. 记 $\{\Omega_{i,p;j,q} \mid (i,p),(j,q)\in\mathcal{I}\}$ 是定义在 M 上的由下式所确定的一族函数:

$$\Omega_{\alpha,p;\beta,q} = \sum_{k=0}^{q}(-1)^k\langle\nabla\theta_{\alpha,p+k+1}, \nabla\theta_{\beta,q-k}\rangle, \tag{1.80}$$

$$\Omega_{0,p';\beta,q} = \sum_{k=0}^{q}(-1)^k\langle\nabla\theta_{0,p'+1+k}, \nabla\theta_{\beta,q-k}\rangle, \tag{1.81}$$

$$\Omega_{\alpha,p;0,q'} = \sum_{k=0}^{p}(-1)^k\langle\nabla\theta_{\alpha,p-k}, \nabla\theta_{0,q'+1+k}\rangle, \tag{1.82}$$

$$\Omega_{0,p';0,q'} = \begin{cases} \displaystyle\sum_{k=0}^{p'-1}(-1)^k\langle\nabla\theta_{0,p'-k}, \nabla\theta_{0,q'+1+k}\rangle + (-1)^{p'}\theta_{0,p'+q'}, & p'\geq 0, \\ \displaystyle\sum_{k=0}^{-p'-1}(-1)^k\langle\nabla\theta_{0,p'+1+k}, \nabla\theta_{0,q'-k}\rangle + (-1)^{p'}\theta_{0,p'+q'}, & p'<0. \end{cases} \tag{1.83}$$

其中 $\alpha,\beta = 1,\ldots,n$, $p,q\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$, 以及 $p',q'\in\mathbb{Z}$. 此外, 本文还做如下约定: 当 $i\neq 0, p<0$ 或者 $j\neq 0, q<0$ 时, 令 $\Omega_{i,p;j,q}=0$.

命题 1.14. *上述定义的函数 $\Omega_{i,p;j,q}$ 满足以下关系:*

$$\Omega_{0,0;i,p} = \theta_{i,p}, \quad \Omega_{i,p;j,q} = \Omega_{j,q;i,p}, \quad \nabla\Omega_{i,p;j,q} = \nabla\theta_{i,p}\cdot\nabla\theta_{j,q}, \tag{1.84}$$

并且主方程簇(1.70)的任意一组解 $v(\mathbf{t}) = (v^1(\mathbf{t}),\ldots,v^n(\mathbf{t}))$ 都满足以下关系:

$$\frac{\partial\theta_{i,p}}{\partial t^{j,q}} = \partial_x\Omega_{i,p;j,q}, \tag{1.85}$$

其中函数 $\theta_{i,p}$ 与 $\Omega_{i,p;j,q}$ 的独立变量 v^α 均应当理解为 $v^\alpha(\mathbf{t})$, 这里采用紧凑记号 $\mathbf{t} = (t^{i,p})_{(i,p)\in\mathcal{I}}$.

证明. 由(1.37)(1.68)以及微分递推关系 (1.34)(1.43)(1.56) 可以验证(1.84)式. 而(1.85)式也可由微分递推关系与主方程簇的定义直接验证. 所有的计算过程都是直接的, 只需按部就班, 但较繁琐, 故从略. 综上所述, 本命题得证. □

需要注意的是, 上述定义的 $\Omega_{\alpha,p;\beta,q}, \alpha,\beta = 1,2,\ldots,n, p,q\geq 0$ 恰与 Dubrovin 的原始定义 [15]

$$\Omega_{\alpha\beta}(z,w) = \frac{\langle\nabla\theta_\alpha(z), \nabla\theta_\beta(w)\rangle - \eta_{\alpha\beta}}{z+w}, \tag{1.86}$$

相同, 其中生成函数 $\Omega_{\alpha\beta}(z,w)$ 的定义是

$$\Omega_{\alpha\beta}(z,w) := \sum_{p,q\geq 0} \Omega_{\alpha,p;\beta,q} z^p w^q, \quad 1 \leq \alpha, \beta \leq n. \tag{1.87}$$

接下来仿照 [20] 引入广义 Frobenius 流形的主方程簇的 tau 覆盖.

定义 1.3. 下述关于未知函数 f, $f_{i,p}$, v^α 的演化型偏微分方程组

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial t^{j,q}} = f_{j,q}, \\ \dfrac{\partial f_{i,p}}{\partial t^{j,q}} = \Omega_{i,p;j,q}, \\ \dfrac{\partial v^\alpha}{\partial t^{j,q}} = \eta^{\alpha\gamma}\partial_x \Omega_{\gamma,0;j,q} \end{cases} \tag{1.88}$$

称为广义 *Frobenius* 流形 M 的主方程簇的 ***tau* 覆盖** *(tau cover)*, 其中 $(i,p),(j,q) \in \mathcal{I}$, $\alpha = 1,\ldots,n$.

给定 tau 覆盖(1.88)的一组解

$$\{f(\mathbf{t}), f_{i,p}(\mathbf{t}), v^\alpha(\mathbf{t}) \mid (i,p) \in \mathcal{I}, \alpha = 1,\ldots,n\}, \tag{1.89}$$

称函数 $\tau^{[0]} = \exp f$ 为主方程簇(1.70)的解

$$v(\mathbf{t}) = (v^1(\mathbf{t}),\ldots,v^n(\mathbf{t})) \tag{1.90}$$

的 **tau 函数** (tau function). 易知主方程簇的解与相应的 tau 函数满足如下关系:

$$v^\alpha = \eta^{\alpha\gamma}\frac{\partial^2 \log\tau^{[0]}}{\partial t^{0,0}\partial t^{\gamma,0}} = \eta^{\alpha\gamma}\frac{\partial^2 \log\tau^{[0]}}{\partial x \partial t^{\gamma,0}}. \tag{1.91}$$

沿用 [15, 26] 的思路, 可以取定广义 Frobenius 流形 M 的主方程簇的 tau 覆盖的一类特解. 为此, 首先取定 M 上的一点 $p_0 \in M$ (不妨点 p_0 为 M 的局部平坦坐标 $\{v^\alpha\}$ 的原点) 以及一组常数 $c^{i,p}$, $(i,p) \in \mathcal{I}$, 使得这组常数当中的非零元至多有限个, 并且满足

$$c^{0,0}e^\alpha(v_0) + c^{\alpha,0} = -\sum_{(i,p)\in\mathcal{I},\, p\neq 0} c^{i,p}\nabla^\alpha\theta_{i,p}(v_0), \tag{1.92}$$

此外还要使得下述 $n \times n$ 矩阵

$$\left(\sum_{(i,p)\in\mathcal{I}} c^{i,p}\frac{\partial^2\theta_{i,p}}{\partial v^\alpha \partial v^\beta}(v_0)\right) \tag{1.93}$$

可逆. 例如, 常数 $c^{i,p}$ 可以取为

$$c^{i,p} = \begin{cases} 1 & \text{如果 } (i,p) = (0,1) \\ 0 & \text{其余情况} \end{cases}. \tag{1.94}$$

接下来, 采用与 [15, 26] 完全相同的方法可以说明下述欧拉-拉格朗日方程

$$\sum_{(i,p)\in\mathcal{I}} \tilde{t}^{i,p}\nabla\theta_{i,p}(v(\mathbf{t})) = 0 \tag{1.95}$$

唯一确定了主方程簇(1.70)的满足初值条件

$$v(\mathbf{t})|_{\mathbf{t}=0} = p_0 \tag{1.96}$$

的一组解 $v(\mathbf{t})$. 在此我们记

$$\tilde{t}^{i,p} = t^{i,p} - c^{i,p}, \quad (i,p) \in \mathcal{I}, \tag{1.97}$$

并且将时间变量 $t^{0,0}$ 与空间变量 x 视为等同. 对于上述方法所得到的主方程簇的解 $v(\mathbf{t})$, 也可按照类似 [15] 的办法引入如下零亏格自由能 (genus zero free energy):

$$\mathcal{F}_0(\mathbf{t}) := \frac{1}{2}\sum_{(i,p),(j,q)\in\mathcal{I}} \tilde{t}^{i,p}\tilde{t}^{j,q}\Omega_{i,p;j,q}(v(\mathbf{t})), \tag{1.98}$$

由此可得到主方程簇的 tau 覆盖(1.88)的一组解

$$\begin{cases} f(\mathbf{t}) = \mathcal{F}_0(\mathbf{t}), \\ f_{i,p}(\mathbf{t}) = \displaystyle\sum_{(j,q)\in\mathcal{I}} \tilde{t}^{j,q}\Omega_{i,p;j,q}(v(\mathbf{t})), \\ v = v(\mathbf{t}). \end{cases} \tag{1.99}$$

以上关于 tau 函数的各断言的证明过程与通常 Frobenius 流形的情形完全类似, 详见 [15] 或 [26], 这里从略.

1.4 广义 Frobenius 流形的 $(n+2)$ 维相伴 Frobenius 流形

对于 n 维广义 Frobenius 流形 M, 本节将引入某个与 M 有关的具有平坦单位向量场的 $(n+2)$ 维 Frobenius 流形 $\widetilde{M}$, 称为 M 的$(n+2)$ 维相伴 Frobenius

流形. 这个 $(n+2)$ 维 Frobenius 流形的构造最初由 Mironov 与 Taimanov 在 [51] 中给出. 而 n 维广义 Frobenius 流形 M 的 $(n+2)$ 维相伴 Frobenius 流形将用于研究 M 的主方程簇的 Virasoro 对称及其线性化.

引理 1.15 (见 [51] 的 Lemma 3)**.** *设 $F = F(v^1,\dots,v^n)$, $E = E^\alpha\partial_\alpha$ 分别为 n 维广义 Frobenius 流形 M 的势函数与欧拉向量场, d 为 M 的 charge, 则 $\widetilde{M} = \mathbb{C}\times M\times\mathbb{C}$ 上的函数*

$$\widetilde{F}(v^0,v^1,\dots,v^n,v^{n+1}) := \frac{1}{2}(v^0)^2v^{n+1} + \frac{1}{2}v^0v^\alpha v_\alpha + F(v^1,\dots,v^n) \tag{1.100}$$

给出了 $\widetilde{M}$ 上的 Frobenius 流形结构, 并且 $\widetilde{M}$ 具有平坦坐标 $v^0,v^1,\dots,v^n,v^{n+1}$ 以及平坦单位向量场 $\tilde{e} = \frac{\partial}{\partial v^0}$. 此外, Frobenius 流形 $\widetilde{M}$ 的 charge 也为 d, 并且其平坦度量与欧拉向量场分别为

$$\tilde{\eta} := \begin{pmatrix} & & 1 \\ & \eta & \\ 1 & & \end{pmatrix} \tag{1.101}$$

与

$$\widetilde{E} = v^0\frac{\partial}{\partial v^0} + E + \left((1-d)v^{n+1} + c_0\right)\frac{\partial}{\partial v^{n+1}}, \tag{1.102}$$

其中常数 c_0 来自引理1.13, v^0,v^{n+1} 分别是 $\widetilde{M} = \mathbb{C}\times M\times\mathbb{C}$ 的沿第一个与最后一个 $\mathbb{C}$ 的分量的坐标.

证明. 按部就班直接验证即可, 从略. □

注释 1.16. *容易验证 $\widetilde{M}$ 的 Frobenius 乘法运算 $\tilde{\cdot}$ 如下:*

$$\partial_0\tilde{\cdot}\partial_0 = \partial_0, \quad \partial_0\tilde{\cdot}\partial_\alpha = \partial_\alpha, \quad \partial_0\tilde{\cdot}\partial_{n+1} = \partial_{n+1}, \tag{1.103}$$

$$\partial_\alpha\tilde{\cdot}\partial_\beta = c^\gamma_{\alpha\beta}\partial_\gamma + \eta_{\alpha\beta}\partial_{n+1}, \tag{1.104}$$

$$\partial_\alpha\tilde{\cdot}\partial_{n+1} = 0, \quad \partial_{n+1}\tilde{\cdot}\partial_{n+1} = 0. \tag{1.105}$$

特别地, 切向量场 $\partial_{n+1} = \frac{\partial}{\partial v^{n+1}}$ 是 $\widetilde{M}$ 的 Frobenius 代数中的幂零元, 因此 $\widetilde{M}$ 的 Frobenius 代数不是半单的, 从而 $\widetilde{M}$ 一定不是半单 Frobenius 流形.

注释 1.17. 容易验证, 映射

$$\imath\colon M \hookrightarrow \widetilde{M}, \quad (v^1,\dots,v^n)\mapsto (0,v^1,\dots,v^n,\theta_{0,0}(v^1,\dots,v^n)) \tag{1.106}$$

保持 (广义)Frobenius 流形的 Frobenius 乘法结构以及平坦度量, 从而通过此映射, 自然将 M 视为 $\widetilde{M}$ 的 Frobenius 子流形.

$\widetilde{M}$ 在 $z=0$ 处的单值性数据 (monodromy data) $\tilde{\mu}, \widetilde{R}=\widetilde{R}_1+\widetilde{R}_2+\dots$ 可以由 M 的单值性数据 μ, R 以及来自引理1.7 与命题1.13的常数 r_p^α, c_p 所给出. 具体地说, 可以证明下述 $\tilde{\mu}, \widetilde{R}$

$$\tilde{\mu}=\begin{pmatrix}\mu_0 & & \\ & \mu & \\ & & \mu_{n+1}\end{pmatrix}, \quad \widetilde{R}_s=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ \mathbf{r}_s & R_s & 0\\ c_{s-1} & \mathbf{r}_s^\dagger & 0\end{pmatrix}, \quad s\geq 1, \tag{1.107}$$

是 $\widetilde{M}$ 的一组单值数据, 其中 μ 来自(1.9)式,

$$\mu_0=-\frac{d}{2}, \quad \mu_{n+1}=\frac{d}{2}, \tag{1.108}$$

$\mathbf{r}_s, \mathbf{r}_s^\dagger$ 分别为由下式所确定的常值列向量与行向量:

$$\mathbf{r}_s=(r_s^1, r_s^2,\dots,r_s^n)^{\mathrm{T}}, \quad \mathbf{r}_s^\dagger=(r_{s,1}\dots,r_{s,n}) \tag{1.109}$$

其中

$$r_{s,\alpha}:=(-1)^{s+1}r_s^\beta\eta_{\alpha\beta}. \tag{1.110}$$

容易验证上述常值矩阵 $\tilde{\eta}, \tilde{\mu}$ 与 $\widetilde{R}$ 满足关系 (1.10)(1.30)以及(1.31). 为证明 $\tilde{\mu}, \widetilde{R}$ 确实构成 $\widetilde{M}$ 在 $z=0$ 处的一组单值性数据, 只需证明下述命题:

命题 1.18 ([57]). 设 $\widetilde{M}$ 是 n 维广义 *Frobenius* 流形 M 的 $(n+2)$ 维相伴 *Frobenius* 流形, $\theta_{\alpha,p}$, $\theta_{0,p}$ 是 M 上由命题*1.12*与命题*1.13*所给出的函数. 记 $\widetilde{M}$ 上的函数

$$\tilde{\theta}_{0,p}=\sum_{k=0}^{p-1}\frac{(v^0)^k}{k!}\theta_{0,p-k}+v^{n+1}\frac{(v^0)^p}{p!}, \tag{1.111}$$

$$\tilde{\theta}_{n+1,p}=\frac{(v^0)^{p+1}}{(p+1)!}, \quad p\geq 0, \tag{1.112}$$

$$\tilde{\theta}_{\alpha,p}=\sum_{k=0}^{p}\frac{(v^0)^k}{k!}\theta_{\alpha,p-k}, \quad 1\leq\alpha\leq n,\ p\geq 0, \tag{1.113}$$

则

$$(\tilde{\theta}_0(z),\ldots,\tilde{\theta}_{n+1}(z))z^{\tilde{\mu}}z^{\widetilde{R}} \tag{1.114}$$

给出了 $\widetilde{M}$ 的一组形变平坦坐标, 其中

$$\tilde{\theta}_i(z) := \sum_{p\geq 0}\tilde{\theta}_{i,p}z^p, \quad 0\leq i\leq n+1. \tag{1.115}$$

此外, $\widetilde{M}$ 上的函数 $\tilde{\theta}_{i,p}$ 满足如下关系:

$$\tilde{\theta}_{i,0} = \sum_{j=0}^{n+1}\tilde{\eta}_{ij}v^j, \tag{1.116}$$

$$\tilde{\theta}_{i,p} = \frac{\partial\tilde{\theta}_{i,p+1}}{\partial v^0}, \quad 0\leq i\leq n+1, \quad p\geq 0. \tag{1.117}$$

证明. 等式(1.116)(1.117)容易验证. 而证明(1.114) 确实是 $\widetilde{M}$ 的形变平坦坐标, 等价于证明如下的微分递推关系与拟齐次性条件成立:

$$\frac{\partial^2\tilde{\theta}_{\ell,p+1}}{\partial v^i\partial v^j} = \sum_{k=0}^{n+1}\tilde{c}_{ij}^k\frac{\partial\tilde{\theta}_{\ell,p}}{\partial v^k}, \quad 0\leq i,j,\ell\leq n+1,\, p\geq 0, \tag{1.118}$$

$$\partial_{\widetilde{E}}\widetilde{\nabla}\tilde{\theta}_{i,p} = (p+\tilde{\mu}_i-\tilde{\mu})\widetilde{\nabla}\tilde{\theta}_{i,p} + \sum_{s=1}^{p}\widetilde{\nabla}\tilde{\theta}_{j,p-s}(\widetilde{R}_s)_i^j, \quad 0\leq i\leq n+1,\, p\geq 0, \tag{1.119}$$

其中 $\widetilde{E}$ 来自于(1.102)式, $\widetilde{\nabla}\tilde{\theta}_{i,p}$ 是函数 $\tilde{\theta}_{i,p}$ 关于度量 $\tilde{\eta}$ 的梯度向量场, 并且

$$\tilde{c}_{ij}^k = \sum_{\ell=0}^{n+1}\tilde{\eta}^{k\ell}\frac{\partial^3\widetilde{F}}{\partial v^i\partial v^j\partial v^\ell}, \quad 0\leq i,j,k\leq n+1. \tag{1.120}$$

上述微分递推关系与拟齐次性条件均过按部就班直接计算验证, 故在此从略. 综上所述, 本命题得证. □

注释 1.19. 对于 $\widetilde{M}$ 上的函数 $\tilde{f}$, 记

$$\tilde{f}|_M := \imath^*(\tilde{f}), \tag{1.121}$$

其中映射 $\imath\colon M\hookrightarrow\widetilde{M}$ 见注释 *1.17*. 上述 $\tilde{f}|_M$ 称为 $\tilde{f}$ 在 M 上的**限制** *(restriction)*. 于是, 首先容易验证

$$v^0|_M = 0, \quad v^\alpha|_M = v^\alpha, \quad v^{n+1}|_M = \theta_{0,0}, \tag{1.122}$$

此外, 还有

$$\tilde{\theta}_{0,p}|_M = \theta_{0,p}, \quad \tilde{\theta}_{\alpha,p}|_M = \theta_{\alpha,p}, \quad \tilde{\theta}_{n+1,p}|_M = 0, \quad p \geq 0. \tag{1.123}$$

特别注意, 函数 $\theta_{0,-p}$ 与常数 $c_{-p}(p > 0)$ 并不出现于 $\tilde{\theta}_{i,p}$ 与 $\widetilde{R}$ 的上述构造中。此外也容易验证如下等式成立:

$$\frac{\partial}{\partial v^0}\left(\tilde{\theta}_0(z), \tilde{\theta}_\gamma(z), \tilde{\theta}_{n+1}(z)\right)\Big|_M = (z\theta_0(z), z\theta_\gamma(z), 1), \tag{1.124}$$

$$\frac{\partial}{\partial v^\alpha}\left(\tilde{\theta}_0(z), \tilde{\theta}_\gamma(z), \tilde{\theta}_{n+1}(z)\right)\Big|_M = \left(\frac{\partial\theta_0(z)}{\partial v^\alpha} - e_\alpha, \frac{\partial\theta_\gamma(z)}{\partial v^\alpha}, 0\right), \tag{1.125}$$

其中 $\theta_0(z) = \sum_{p=0}^{\infty} \theta_{0,p} z^p$.

2. 主方程簇及其 tau 覆盖的 Virasoro 对称

本章将说明广义 Frobenius 流形的主方程簇(1.70) 具有无穷多个 Virasoro 对称，并且这些对称可提升至主方程簇的 tau 覆盖(1.88). 而描述该 Virasoro 对称需要用到广义 Frobenius 流形 (及其 $(n+2)$ 维相伴 Frobenius 流形) 的周期 (period) 以及与之相关的某个重要的拉普拉斯型积分公式.

2.1 广义 Frobenius 流形的周期与拉普拉斯型积分

本节介绍广义 Frobenius 流形 M 的周期 (period). 与通常 Frobenius 的周期 (详见 [15, 16, 26]) 相比, 广义 Frobenius 流形的周期所满足的性质与之略有不同. 接下来将取定 M 的一组特定的周期用于表示主方程簇的 tau 覆盖的 Virasoro 对称.

任取复参数 $\lambda \in \mathbb{C}$, 记 M 的闭子集

$$\Sigma_\lambda := \left\{ v \in M \,\middle|\, \det(g^{\alpha\beta} - \lambda\eta^{\alpha\beta})|_v = 0 \right\}, \tag{2.1}$$

其中 $g = (g^{\alpha\beta})$ 为 M 的相交形式, 见(1.13)(1.14)式, 则逆矩阵

$$(g_{\alpha\beta}(\lambda)) := (g^{\alpha\beta} - \lambda\eta^{\alpha\beta})^{-1} \tag{2.2}$$

给出了 $M \setminus \Sigma_\lambda$ 上的平坦度量 $(\,,\,)_\lambda$. 在关于平坦度量 η 的平坦坐标 $v^1, \ldots, v^n$ 下, 平坦度量 $(\,,\,)_\lambda$ 的 Levi-Civita 联络 $\nabla(\lambda)$ 满足

$$\nabla(\lambda)^\alpha \, \mathrm{d}v^\beta = (g^{\alpha\gamma} - \lambda \eta^{\alpha\gamma}) \nabla(\lambda)_\gamma \, \mathrm{d}v^\beta = \Gamma^{\alpha\beta}_\gamma \, \mathrm{d}v^\gamma, \tag{2.3}$$

其中 $\Gamma^{\alpha\beta}_\gamma$ 恰为相交形式 $g^{\alpha\beta}$ 的反变 Christoffel 系数, 见(1.15)式. 可在 $M \setminus \Sigma_\lambda$ 的某个开子集上取一族平坦坐标 $p_1(v;\lambda), \ldots, p_n(v;\lambda)$ of $(\,,\,)_\lambda$, 使得下述方程成立

$$\nabla(\lambda) \, \mathrm{d}p_\alpha = 0, \quad \alpha = 1, \ldots, n. \tag{2.4}$$

此方程可改写为

$$\partial_\gamma \nabla p_\alpha = -(\mathcal{U} - \lambda I)^{-1} \mathcal{C}_\gamma \left(\mu + \frac{1}{2}\right) \nabla p_\alpha, \tag{2.5}$$

其中 ∇p_α 是 p_α 关于度量 η 的梯度向量场, $\mathcal{U}, \mathcal{C}_\gamma$ 分别为关于欧拉向量场 E 与坐标向量场 ∂_γ 的 Frobenius 乘法算子, 即

$$\mathcal{U}^\alpha_\beta = E^\gamma c^\alpha_{\gamma\beta}, \quad (\mathcal{C}_\gamma)^\alpha_\beta = c^\alpha_{\gamma\beta}. \tag{2.6}$$

通过直接验证相容性条件, 容易证明可以适当选取函数 p_α，使得 p_α 额外满足方程

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} \nabla p_\alpha = (\mathcal{U} - \lambda I)^{-1} \left(\mu + \frac{1}{2}\right) \nabla p_\alpha. \tag{2.7}$$

方程(2.5)与(2.7)统称为广义 Frobenius 流形的 **Gauss-Manin 方程**. Gauss-Manin 方程的解称为广义 Frobenius 流形 M 的**周期** (period).

设 $p_1(v;\lambda), \ldots, p_n(v,\lambda)$ 是 n 维广义 Frobenius 流形 M 的一组线性无关的周期, 则 Gram 矩阵 $(G^{\alpha\beta})$ 的各矩阵元

$$G^{\alpha\beta} = \left(\frac{\partial}{\partial p_\alpha}, \frac{\partial}{\partial p_\beta}\right)_\lambda \tag{2.8}$$

均为常数, 并且其逆矩阵 $(G_{\alpha\beta}) = (G^{\alpha\beta})^{-1}$ 满足

$$G_{\alpha\beta} = \nabla p_\alpha^{\mathrm{T}} \eta (\mathcal{U} - \lambda I) \nabla p_\beta. \tag{2.9}$$

此外注意到, Gauss-Manin 方程表明周期 p 满足如下关系:

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} \nabla p_\alpha = -\partial_e \nabla p_\alpha, \tag{2.10}$$

其中 e 是广义 Frobenius 流形 M 的单位向量场. 对于通常 (具有平坦单位向量场的)Frobenius 流形, 可以适当选取其周期 p_α, 使得等式

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}p_\alpha = -\partial_e p_\alpha \tag{2.11}$$

成立; 然而对于广义 Frobenius 流形, 上述等式一般来说并不成立.

对于广义 Frobenius 流形 M, 也可按照 [17, 26] 中的方法引入如下 **正则周期** (regularized period):

$$\left(p_1^{(\nu)}(v;\lambda), \dots, p_n^{(\nu)}(v;\lambda)\right) = \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{z}} \mathrm{e}^{-\lambda z}(\theta_1(z), \dots, \theta_n(z)) z^{\mu+\nu} z^R, \tag{2.12}$$

特别注意, (2.12) 式右边的拉普拉斯型积分应当通过下述公式

$$\begin{aligned} &\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda z} z^{p+\mu+\nu-\frac{1}{2}} z^R \,\mathrm{d}z \\ &= \sum_{s\geq 0} \left[\mathrm{e}^{R\partial_\nu}\right]_s \Gamma\left(p+\mu+\nu+s+\frac{1}{2}\right) \lambda^{-(p+\mu+\nu+s+\frac{1}{2})}\lambda^{-R} \end{aligned} \tag{2.13}$$

来理解为关于形式参数 λ 的形式幂级数, 其中 $p \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, \nu \in \mathbb{C}$, 这样的目的是避免对(2.12)式右端积分的积分路径选取的繁琐讨论; 事实上, 本文的所有计算过程都仅仅是关于参数 λ 的形式计算. 对于关于矩阵 μ, R 的多项式 $P(\mu, R)$ 以及非负整数 s, 定义 $P(\mu, R)$ 的 s-分量如下:

$$[P(\mu, R)]_s := \sum_{\lambda \in \mathrm{Spec}\,\mu} \pi_{\lambda+s} P(\mu, R)\pi_\lambda, \tag{2.14}$$

其中 $\pi_\lambda\colon V \to V_\lambda$ 是 $\mathbb{C}^n$ 上的到算子 μ 的特征子空间 V_λ 的投影算子. 特别地, 对于 $R = R_1 + R_2 + \dots$(有限求和), 成立

$$[R]_s = R_s, \qquad [R^2]_s = \sum_{k\geq 1} R_k R_{s-k}. \tag{2.15}$$

算子 μ 不含半整数特征值的情形称为**非共振情形** (non-resonant case). 在非共振情形, 下式右边的极限存在,

$$(p_1(v;\lambda), \dots, p_n(v;\lambda)) = \lim_{\nu\to 0}\left(p_1^{(\nu)}(v;\lambda), \dots, p_n^{(\nu)}(v;\lambda)\right), \tag{2.16}$$

并且可以验证 (见 [17, 26]) 此式恰给出广义 Frobenius 流形 M 的一组线性无关的周期, 并且相应的 Gram 矩阵 $G=(G^{\alpha\beta})$ 的表达式为

$$G=-\frac{1}{2\pi}\left(\mathrm{e}^{\pi\mathrm{i}R}\mathrm{e}^{\pi\mathrm{i}\mu}+\mathrm{e}^{-\pi\mathrm{i}R}\mathrm{e}^{-\pi\mathrm{i}\mu}\right)\eta^{-1}. \tag{2.17}$$

后文中也需要用到 M 的 $(n+2)$ 维相伴 Frobenius 流形 $\widetilde{M}$ 的周期. 我们回忆, $\widetilde{M}$ 的单值性数据 (monodromy data)$\tilde{\mu}$, $\widetilde{R}$ 已在(1.107)式给出, $\widetilde{M}$ 上的函数 $\tilde{\theta}_{0,p},\dots,\tilde{\theta}_{n+1,p}$ 已在(1.115)式给出. 如果 $\tilde{\mu}$ 不含半整数特征值, 则下式给出 $\widetilde{M}$ 的一组线性无关的周期:

$$(\tilde{p}_0,\tilde{p}_1,\dots,\tilde{p}_n,\tilde{p}_{n+1})=\lim_{\nu\to 0}\left(\tilde{p}_0^{(\nu)},\tilde{p}_1^{(\nu)},\dots,\tilde{p}_n^{(\nu)},\tilde{p}_{n+1}^{(\nu)}\right), \tag{2.18}$$

其中, 此式右边是由与(2.12)完全类似的拉普拉斯型积分所给出的正则周期, 其具体表达式如下:

$$\begin{aligned}&\left(\tilde{p}_0^{(\nu)},\tilde{p}_1^{(\nu)},\dots,\tilde{p}_n^{(\nu)},\tilde{p}_{n+1}^{(\nu)}\right)\\ &=\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{z}}\mathrm{e}^{-\lambda z}\left(\tilde{\theta}_0(z),\tilde{\theta}_1(z),\dots,\tilde{\theta}_n(z),\tilde{\theta}_{n+1}(z)\right)z^{\tilde{\mu}+\nu}z^{\widetilde{R}},\end{aligned} \tag{2.19}$$

并且相应的 Gram 矩阵 $\widetilde{G}=(\widetilde{G}^{ij})$ 的表达式为

$$\widetilde{G}=-\frac{1}{2\pi}\left(\mathrm{e}^{\pi\mathrm{i}\widetilde{R}}\mathrm{e}^{\pi\mathrm{i}\tilde{\mu}}+\mathrm{e}^{-\pi\mathrm{i}\widetilde{R}}\mathrm{e}^{-\pi\mathrm{i}\tilde{\mu}}\right)\tilde{\eta}^{-1}, \tag{2.20}$$

上式中的 $\tilde{\eta}$ 来自(1.101)式.

关于拉普拉斯型积分, 有如下重要公式:

引理 2.1 ([26, 42]). *设 $\left\{a_p^{\alpha}\,\middle|\,p\in\mathbb{Z},\ \alpha=1,2,\dots,n\right\}$ 是某个特定的 $\mathbb{C}$-代数中的一族形式变量, 记 $\mathbf{a}_p:=(a_p^1,\dots,a_p^n)^{\mathrm{T}}$. 定义行向量值函数*

$$\phi^{(\nu)}(\mathbf{a};\lambda):=\int_0^{\infty}\frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{z}}\mathrm{e}^{-\lambda z}\sum_{p\in\mathbb{Z}}\mathbf{a}_p^{\mathrm{T}}\eta z^{p+\mu+\nu}z^{R}, \tag{2.21}$$

则如下等式成立:

$$-\frac{1}{2}\frac{\partial\phi_{\alpha}^{(\nu)}(\mathbf{a};\lambda)}{\partial\lambda}G^{\alpha\beta}(\nu)\frac{\partial\phi_{\beta}^{(-\nu)}(\mathbf{a};\lambda)}{\partial\lambda}=\frac{1}{2}\sum_{p,q\in\mathbb{Z}}\sum_{s\geq 0}\frac{1}{\lambda^{p+q+s+3}}\mathbf{a}_p^{\mathrm{T}}\eta\mathrm{N}_{p,q}(s;\nu)\mathbf{a}_q, \tag{2.22}$$

其中

$$(G^{\alpha\beta}(\nu)) = -\frac{1}{2\pi}\left(\mathrm{e}^{\pi \mathrm{i} R}\mathrm{e}^{\pi \mathrm{i}(\mu+\nu)} + \mathrm{e}^{-\pi \mathrm{i} R}\mathrm{e}^{-\pi \mathrm{i}(\mu+\nu)}\right)\eta^{-1}, \tag{2.23}$$

$$\mathrm{N}_{p,q}(s;\nu) = \frac{1}{\pi}\left[\mathrm{e}^{R\partial_\nu}\right]_s\left(\Gamma(p+\mu+\nu+s+\frac{3}{2})\cos\left(\pi(\mu+\nu)\right)\Gamma(q-\mu-\nu+\frac{3}{2})\right). \tag{2.24}$$

证明. 与通常 Frobenius 流形的情形完全类似, 仅用到单值性数据 μ, R 的代数运算性质, 并未涉及单位向量场 e 的平坦性. 其证明完全照搬 [26, 42], 在此从略. □

特别注意 $\mathrm{N}_{p,q}(s;\nu)$ 是关于形变参数 ν 的多项式, 从而对任何广义 Frobenius 流形 M, (2.22)式的左边都是良定义的; 即使算子 μ 具有半整数特征值 (即共振情形) 导致 $\phi^{(\nu)}$ 在 $\nu=0$ 处发散, (2.22)式左边在 $\nu=0$ 处依然良定义.

对于 n 维广义 Frobenius 流形 M 的 $(n+2)$ 维相伴 Frobenius 流形 $\widetilde{M}$, 也引入相应的 $(n+2)$ 维行向量值函数如下:

$$\tilde{\phi}^{(\nu)}(\mathbf{a};\lambda) := \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{z}}\mathrm{e}^{-\lambda z}\sum_{p\in\mathbb{Z}}\mathbf{a}_p^{\mathrm{T}}\tilde{\eta}z^{p+\tilde{\mu}+\nu}z^{\widetilde{R}}, \tag{2.25}$$

其中 $\mathbf{a}_p = (a_p^0, \ldots, a_p^{n+1})^{\mathrm{T}}$, 且 $\left\{a_p^i \,\middle|\, p\in\mathbb{Z},\ 0\le i\le n+1\right\}$ 是某个特定的 $\mathbb{C}$-代数中的一族形式变量. 则 $(n+2)$ 维版本的公式(2.22)也成立.

2.2 主方程簇的 Virasoro 对称

本节研究广义 Frobenius 流形的主方程簇 (1.70)的 Virasoro 对称. 首先回忆, 方程簇(1.70) 的**对称** (symmetry) 是指形如

$$\frac{\partial v}{\partial s} = S(v, v_x, \ldots; \mathbf{t}) \tag{2.26}$$

的演化型方程, 并且要求它与 $\dfrac{\partial}{\partial t^{\alpha,p}}$ $(1\le\alpha\le n,\ p\ge 0)$ 以及 $\dfrac{\partial}{\partial t^{0,p}}$ $(p\in\mathbb{Z})$ 都交换, 即

$$\left[\frac{\partial}{\partial s}, \frac{\partial}{\partial t^{\alpha,p}}\right] = \left[\frac{\partial}{\partial s}, \frac{\partial}{\partial t^{0,q}}\right] = 0, \quad 1\le\alpha\le n,\ p\ge 0,\ q\in\mathbb{Z}. \tag{2.27}$$

方程簇的所有对称在通常的交换子运算下构成李代数 [25].

定理 2.2. *广义 Frobenius 流形的主方程簇*(1.70) *具有如下*伽利略对称 *(Galilean symmetry):*

$$\frac{\partial v}{\partial s_{-1}} = e + \sum_{(i,p)\in\mathcal{I}} t^{i,p+1} \frac{\partial v}{\partial t^{i,p}}, \tag{2.28}$$

其中 $e = e^\alpha \partial_\alpha$ 是 M 的单位向量场.

证明. 首先验证

$$\left[\frac{\partial}{\partial s_{-1}}, \frac{\partial}{\partial t^{\beta,q}}\right] v^\lambda = 0, \quad 1 \le \beta \le n,\ q \ge 0,\ 1 \le \lambda \le n \tag{2.29}$$

成立. 直接计算可得

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial}{\partial s_{-1}} \circ \frac{\partial}{\partial t^{\beta,q}}\right) v^\lambda &= \sum_{s\ge 0} \left(\frac{\partial}{\partial v^{\gamma,s}} \frac{\partial v^\lambda}{\partial t^{\beta,q}}\right) \partial_x^s \left(e^\gamma + \sum_{\alpha,p} t^{\alpha,p+1} \frac{\partial v^\gamma}{\partial t^{\alpha,p}} + \sum_{p\in\mathbb{Z}} t^{0,p} \frac{\partial v^\gamma}{\partial t^{0,p-1}}\right) \\
&= e^\gamma \frac{\partial}{\partial v^\gamma} \frac{\partial v^\lambda}{\partial t^{\beta,q}} + e_x^\gamma \frac{\partial}{\partial v^{\gamma,1}} \frac{\partial v^\lambda}{\partial t^{\beta,q}} + \frac{\partial v^\gamma}{\partial t^{0,-1}} \left(\frac{\partial}{\partial v^{\gamma,1}} \frac{\partial v^\lambda}{\partial t^{\beta,q}}\right) \\
&\quad + \sum_{\alpha,p} t^{\alpha,p+1} \frac{\partial^2 v^\lambda}{\partial t^{\alpha,p} \partial t^{\beta,q}} + \sum_{p\in\mathbb{Z}} t^{0,p} \frac{\partial^2 v^\lambda}{\partial t^{0,p-1} \partial t^{\beta,q}} \\
&= \sum_{\alpha,p} t^{\alpha,p+1} \frac{\partial^2 v^\lambda}{\partial t^{\alpha,p} \partial t^{\beta,q}} + \sum_{p\in\mathbb{Z}} t^{0,p} \frac{\partial^2 v^\lambda}{\partial t^{0,p-1} \partial t^{\beta,q}} \\
&\quad + e^\gamma \frac{\partial}{\partial v^\gamma} \frac{\partial v^\lambda}{\partial t^{\beta,q}} + 2 e_x^\gamma \partial_\gamma \partial^\lambda \theta_{\beta,q+1},
\end{aligned} \tag{2.30}$$

以及

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{\partial}{\partial t^{\beta,q}} \circ \frac{\partial}{\partial s_{-1}}\right) v^\lambda \\
&= \frac{\partial e^\lambda}{\partial t^{\beta,q}} + \frac{\partial v^\lambda}{\partial t^{\beta,q-1}} + \sum_{\alpha,p} t^{\alpha,p+1} \frac{\partial^2 v^\lambda}{\partial t^{\alpha,p} \partial t^{\beta,q}} + \sum_{p\in\mathbb{Z}} t^{0,p} \frac{\partial^2 v^\lambda}{\partial t^{0,p-1} \partial t^{\beta,q}}.
\end{aligned} \tag{2.31}$$

因此只需证明等式

$$e^\gamma \frac{\partial}{\partial v^\gamma} \frac{\partial v^\lambda}{\partial t^{\beta,q}} + 2 e_x^\gamma \partial_\gamma \partial^\lambda \theta_{\beta,q+1} = \frac{\partial e^\lambda}{\partial t^{\beta,q}} + \frac{\partial v^\lambda}{\partial t^{\beta,q-1}}, \tag{2.32}$$

成立. 而这是因为,

$$e^\gamma \frac{\partial}{\partial v^\gamma} \frac{\partial v^\lambda}{\partial t^{\beta,q}} + 2 e_x^\gamma \partial_\gamma \partial^\lambda \theta_{\beta,q+1}$$

$$
\begin{aligned}
&= e^{\gamma}\left(\partial_\gamma\partial^\lambda\theta_{\beta,q+1}\right)_x + 2e^{\gamma}_x\partial_\gamma\partial^\lambda\theta_{\beta,q+1} = \partial_x\left(e^{\gamma}\partial_\gamma\partial^\lambda\theta_{\beta,q+1}\right) + e^{\gamma}_x\partial_\gamma\partial^\lambda\theta_{\beta,q+1} \\
&= \partial_x\left(e^{\gamma}c^{\lambda}_{\gamma\varepsilon}\partial^\varepsilon\theta_{\beta,q}\right) + (\partial_\delta e^{\gamma})c^{\lambda}_{\gamma\varepsilon}(\partial^\varepsilon\theta_{\beta,q})v^\delta_x = \partial_x\partial^\lambda\theta_{\beta,q} - e^{\gamma}c^{\lambda}_{\delta\gamma\varepsilon}(\partial^\varepsilon\theta_{\beta,q})v^\delta_x \\
&= \frac{\partial v^\lambda}{\partial t^{\beta,q-1}} + (\partial^\lambda e^{\gamma})c_{\delta\gamma\varepsilon}(\partial^\varepsilon\theta_{\beta,q})v^\delta_x = \frac{\partial v^\lambda}{\partial t^{\beta,q-1}} + (\partial^\gamma e^{\lambda})c_{\delta\gamma\varepsilon}(\partial^\varepsilon\theta_{\beta,q})v^\delta_x \\
&= \frac{\partial v^\lambda}{\partial t^{\beta,q-1}} + \frac{\partial e^\lambda}{\partial t^{\beta,q}}.
\end{aligned} \tag{2.33}
$$

类似计算也可以验证等式

$$
\left[\frac{\partial}{\partial s_{-1}}, \frac{\partial}{\partial t^{0,q}}\right] v^\lambda = 0, \quad q \in \mathbb{Z} \tag{2.34}
$$

成立. 综上, 本定理得证. □

接下来的定理表明, 主方程簇的上述伽利略对称可以提升至 tau 覆盖(1.88).

定理 2.3. *主方程簇的 tau 覆盖*(1.88)*具有如下伽利略对称:*

$$
\frac{\partial f}{\partial s_{-1}} = \sum_{(i,p)\in\mathcal{I}} t^{i,p+1} f_{i,p} + \frac{1}{2}\eta_{\alpha\beta}t^{\alpha,0}t^{\beta,0}, \tag{2.35}
$$

$$
\frac{\partial f_{i,p}}{\partial s_{-1}} = f_{i,p-1} + \sum_{(j,q)\in\mathcal{I}} t^{j,q+1}\Omega_{i,p;j,q} + \eta_{\alpha\beta}t^{\alpha,0}\delta^\beta_i\delta^0_p, \quad (i,p)\in\mathcal{I}, \tag{2.36}
$$

$$
\frac{\partial v^\gamma}{\partial s_{-1}} = e^\gamma + \sum_{(i,p)\in\mathcal{I}} t^{i,p+1}\frac{\partial v^\gamma}{\partial t^{i,p}}, \quad \gamma = 1,\dots,n. \tag{2.37}
$$

本文在此约定, 当 $i \neq 0$ *且* $p < 0$ *时,* $f_{i,p} := 0$.

证明. 只需验证

$$
\left[\frac{\partial}{\partial t^{j,q}}, \frac{\partial}{\partial s_{-1}}\right] f = 0, \quad \left[\frac{\partial}{\partial t^{j,q}}, \frac{\partial}{\partial s_{-1}}\right] f_{i,p} = 0, \quad (i,p),\ (j,q)\in\mathcal{I}. \tag{2.38}
$$

而上式中的第一个关系显然成立, 故只需验证第二个. 事实上, 直接计算可得

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{\partial}{\partial t^{j,q}} \circ \frac{\partial}{\partial s_{-1}}\right) f_{i,p} &= \Omega_{i,p-1;j,q} + \Omega_{i,p;j,q-1} \\
&\quad + \sum_{(k,r)\in\mathcal{I}} t^{j,q+1}\frac{\partial\Omega_{i,p;k,r}}{\partial t^{j,q}} + \eta_{\alpha\beta}\delta^\alpha_i\delta^\beta_j\delta^0_p\delta^0_q,
\end{aligned} \tag{2.39}
$$

$$
\left(\frac{\partial}{\partial s_{-1}} \circ \frac{\partial}{\partial t^{j,q}}\right) f_{i,p} = \frac{\partial}{\partial s_{-1}}\Omega_{i,p;j,q} = \frac{\partial v^\alpha}{\partial s_{-1}}\partial_\alpha\Omega_{i,p;j,q}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \left(e^{\alpha} + \sum_{(k,r)\in\mathcal{I}} t^{k,r+1} \frac{\partial v^{\alpha}}{\partial t^{k,r}} \right) \partial_{\alpha}\Omega_{i,p;j,q} \\
&= \partial_e \Omega_{i,p;j,q} + \sum_{(k,r)\in\mathcal{I}} t^{k,r+1} \frac{\partial \Omega_{i,p;j,q}}{\partial t^{k,r}},
\end{aligned} \tag{2.40}
$$

在此本文约定

$$
\Omega_{i,p;j,q} := 0, \quad 如果\ i \neq 0,\ p < 0. \tag{2.41}
$$

再注意到

$$
\frac{\partial \Omega_{i,p;k,r}}{\partial t^{j,q}} = \frac{\partial^3 f}{\partial t^{i,p} \partial t^{j,q} \partial t^{k,r}} = \frac{\partial \Omega_{i,p;j,q}}{\partial t^{k,r}}, \tag{2.42}
$$

从而只需验证如下等式

$$
\partial_e \Omega_{i,p;j,q} = \Omega_{i,p-1;j,q} + \Omega_{i,p;j,q-1} + \eta_{\alpha\beta} \delta_i^{\alpha} \delta_j^{\beta} \delta_p^0 \delta_q^0, \quad (i,p),(j,q) \in \mathcal{I} \tag{2.43}
$$

成立. 而由(1.34)(1.43)以及(1.55)式可知

$$
\partial_e \nabla \theta_{i,p} = \nabla \theta_{i,p-1}, \tag{2.44}
$$

再结合(1.80)-(1.83), 容易证明(2.43)式. 综上, 本定理得证. □

注释 2.4. *如果去掉主方程簇当中的 $\frac{\partial}{\partial t^{0,p}}$, $p \in \mathbb{Z}$ 这串流则所得方程簇仍具有伽利略对称如下*

$$
\frac{\partial v^{\gamma}}{\partial s_{-1}} = e^{\gamma} + x \frac{\partial e^{\gamma}}{\partial v^{\xi}} v_x^{\xi} + \sum_{p\geq 0} t^{\alpha,p+1} \frac{\partial v^{\gamma}}{\partial t^{\alpha,p}}. \tag{2.45}
$$

但是, 此情形下的伽利略对称一般不能提升至相应的 tau 覆盖. 这也是把额外的流 $\frac{\partial}{\partial t^{0,p}}$, $p \in \mathbb{Z}$ 引入主方程簇的动机之一.

将双哈密顿递推算子

$$
\mathcal{R} := \mathcal{P}_2 \mathcal{P}_1^{-1} = \mathcal{U} + \mathcal{C}(v_x) \left(\frac{1}{2} + \mu \right) \partial_x^{-1} \tag{2.46}
$$

作用于伽利略对称 $\frac{\partial v}{\partial s_{-1}}$, 可得到主方程簇的新的对称如下:

$$
\frac{\partial v}{\partial s_0} := \mathcal{R} \frac{\partial v}{\partial s_{-1}} = E + \sum_{p\geq 0} \left(p + \mu_{\alpha} + \frac{1}{2} \right) t^{\alpha,p} \frac{\partial v}{\partial t^{\alpha,p}} + \sum_{p\in\mathbb{Z}} \left(p - \frac{d}{2} + \frac{1}{2} \right) t^{0,p} \frac{\partial v}{\partial t^{0,p}}
$$

$$+\sum_{p\geq 0}\sum_{s\geq 1}(R_s)^{\varepsilon}_{\alpha}t^{\alpha,p}\frac{\partial v}{\partial t^{\varepsilon,p-s}}+\sum_{p\in\mathbb{Z}}\sum_{s\geq 1}r^{\varepsilon}_s t^{0,p}\frac{\partial v}{\partial t^{\varepsilon,p-s}}. \tag{2.47}$$

不断地重复此操作, 可得主方程簇的一系列对称

$$\frac{\partial v}{\partial s_{m+1}}:=\mathcal{R}\frac{\partial v}{\partial s_m},\quad m\geq -1, \tag{2.48}$$

这些对称 $\{\frac{\partial}{\partial s_m}\}_{m\geq -1}$ 统称主方程簇的 **Virasoro 对称**. 但是, 这样得到的对称往往是**非局部的** (non-local). 本文希望避免这种非局部性, 为此采取的方法是将主方程簇的这些对称提升至 tau 覆盖.

2.3 tau 覆盖的 Virasoro 对称

正如上一节所述, 主方程簇(1.70)满足伽利略对称(2.28), 并且该对称可提升至 tau 覆盖(1.88), 即定理2.3. 而本节将证明由双哈密顿递推算子不断作用所得的一系列对称(2.48) 都可提升至 tau 覆盖, 提升后的对称都是局部的; 其证明方法是直接给出提升后的对称的具体表达式.

为给出这族对称的具体表达式, 首先对 $0\leq i\leq n+1$ 引入记号

$$\begin{aligned}\widetilde{S}^{(\nu)}_i&=\widetilde{S}^{(\nu)}_i(\mathbf{t},\frac{\partial f}{\partial \mathbf{t}};\lambda)\\&=\left(\int_0^\infty\frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{z}}\mathrm{e}^{-\lambda z}\left[\sum_{p\geq 0}\left(f_{0,p},f_{\bullet,p},(-1)^{p+1}t^{-p-1}_{n+1}\right)z^p\right]z^{\tilde{\mu}+\nu}z^{\widetilde{R}}\right)_i\\&\quad+\left(\int_0^\infty\frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{z}}\mathrm{e}^{-\lambda z}\left[\sum_{p\geq 0}(-1)^p\left((-1)^pf_{0,-p-1},t^p_{\bullet},t^p_{n+1}\right)z^{-p-1}\right]z^{\tilde{\mu}+\nu}z^{\widetilde{R}}\right)_i\end{aligned} \tag{2.49}$$

上式中的 λ 是形式参数, 行向量 $f_{\bullet,p}$ 与 $t^p_{\bullet}$ 的定义分别为

$$f_{\bullet,p}=(f_{1,p},\dots,f_{n,p}),\quad t^p_{\bullet}=(t^p_1,t^p_2,...,t^p_n), \tag{2.50}$$

其中 $t^p_\alpha:=\eta_{\alpha\beta}t^{\beta,p}$, 以及 $t^p_{n+1}:=t^{0,p}$. 本文接下来都将采用类似的紧凑记号. 再引入如下 $(n+2)$ 维行向量

$$\widetilde{S}^{(\nu)}=(\widetilde{S}^{(\nu)}_0,\widetilde{S}^{(\nu)}_{\bullet},\widetilde{S}^{(\nu)}_{n+1}). \tag{2.51}$$

特别注意, 将(2.25)所定义的 $\tilde{\phi}^{(\nu)}(\mathbf{a};\lambda)$ 做如下替换

$$a_p^i \mapsto \begin{cases} (-1)^{p+1}t^{0,-p-1}, & i=0; \\ \eta^{i\beta}f_{\beta,p}, & 1\le i\le n,\ p\ge 0; \\ (-1)^{p+1}t^{i,-p-1}, & 1\le i\le n,\ p<0; \\ f_{0,p}, & i=n+1 \end{cases} \tag{2.52}$$

即可得到本节引入的 $\widetilde{S}^{(\nu)}(\mathbf{t},\frac{\partial f}{\partial \mathbf{t}};\lambda)$.

注意到命题1.13所引入的一族常数 $\{c_p\}_{p\in\mathbb{Z}}$ 中的非零元个数至多为 1, 并且如果 $c_p\neq 0$ 对某个 $p<0$ 成立, 则广义 Frobenius 流形 M 的 charge d 必为负奇数, 并且此时 $p=d-1$. 现在, 对于整数 $p,q\in\mathbb{Z}$, 引入形式幂级数 $C_{p,q}(\lambda)$ 如下: $C_{p,q}(\lambda)\neq 0$ **仅当** M 的 charge d 是负奇数, 并且 $p+q\le d-1$; 此时, 令

$$\begin{aligned} C_{p,q}(\lambda) &= \sum_{m\ge -1}\frac{C_{m;p,q}}{\lambda^{m+2}} \\ &= \frac{(-1)^p c_{d-1}}{2\lambda^{d+1-p-q}}\sum_{k=0}^{d-1-p-q}(-1)^k\left(p-\frac{d}{2}+\frac{1}{2}\right)^{[k]}\left(q-\frac{d}{2}+\frac{1}{2}\right)^{[d-1-p-q-k]}, \end{aligned} \tag{2.53}$$

其中, 对于 $x\in\mathbb{C}$, 记 $x^{[0]}=1$, 以及

$$x^{[k]} := x(x+1)\cdots(x+k-1),\quad k\ge 1. \tag{2.54}$$

直接验证易知, 常数 $C_{m;p,q}\neq 0$ **仅当** $p+q+m=d-1$, $m\ge 0$ 且 d 是负奇数.

对于某个环 R 上的关于 λ 的形式幂级数 $A(\lambda):=\sum_{m\in\mathbb{Z}}A_m\lambda^m\in R[\![\lambda,\frac{1}{\lambda}]\!]$, 记

$$[A(\lambda)]_- := \sum_{m<0}A_m\lambda^m. \tag{2.55}$$

定理 2.5. *下式所定义的流 $\frac{\partial}{\partial s_m}$, $m\ge -1$ 是广义 Frobenius 流形 M 的主方程簇的 tau 覆盖(1.88)的对称:*

$$\frac{\partial}{\partial s} = \sum_{m\ge -1}\frac{1}{\lambda^{m+2}}\frac{\partial}{\partial s_m}, \tag{2.56}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial s} &= -\frac{1}{2}\lim_{\nu\to 0}\left[\frac{\partial \widetilde{S}_i^{(\nu)}}{\partial\lambda}\widetilde{G}^{ij}(\nu)\frac{\partial \widetilde{S}_j^{(-\nu)}}{\partial\lambda}\right]_- + \sum_{p,q\in\mathbb{Z}} C_{p,q}(\lambda)t^{0,p}t^{0,q}, && (2.57)\\
\frac{\partial f_{i,p}}{\partial s} &= \frac{\partial}{\partial t^{i,p}}\frac{\partial f}{\partial s}, && (2.58)\\
\frac{\partial v^\alpha}{\partial s} &= \lim_{\nu\to 0}\left[\frac{\partial \widetilde{S}_i^{(\nu)}}{\partial\lambda}\widetilde{G}^{ij}(\nu)\left(\partial_x\tilde{\partial}^\alpha\tilde{p}_j^{(-\nu)}\right)\Big|_M\right]_- \\
&\quad + \lim_{\nu\to 0}\left[\partial_x\partial^\alpha\xi^{(\nu)}(\lambda)\widetilde{G}^{n+1,0}(\nu)\frac{\partial \widetilde{S}_{n+1}^{(-\nu)}}{\partial\lambda}\right]_- - \left(\frac{1}{E-\lambda e}\right)^\alpha, && (2.59)
\end{aligned}$$

其中 $\widetilde{M}$ 上的函数在 M 上的限制已在(1.122)中定义; $\tilde{p}_i^{(\nu)}$ 是 $\widetilde{M}$ 的由拉普拉斯型积分(2.19)所给出的正则周期,

$$\begin{aligned}
\xi^{(\nu)}(\lambda) &= \sum_{p\geq 0}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda z}\theta_{0,-p}z^{-p-\frac{d}{2}+\nu-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}z\\
&= \sum_{p\geq 0}\theta_{0,-p}\lambda^{p+\frac{d}{2}-\frac{1}{2}}\Gamma\left(-p-\frac{d}{2}+\nu+\frac{1}{2}\right); && (2.60)
\end{aligned}$$

此外, M 的切向量场

$$\frac{1}{E-\lambda e} := -\sum_{m\geq -1}\frac{1}{\lambda^{m+2}}E^{m+1} \tag{2.61}$$

是切向量场 $E-\lambda e$ 关于 M 上的 *Frobenius* 代数结构的乘法逆元.

需要注意, 本文总将形式参数 λ 视为模长充分大的复数, 从而 $E-\lambda e$ 可逆. 这里只对非共振情形 (算子 $\tilde{\mu}$ 不含半整数特征值的情形) 来证明上述定理; 在此情形下, 以下极限

$$\begin{aligned}
\widetilde{S}_i &= \lim_{\nu\to 0}\widetilde{S}_i^{(\nu)}, \quad \widetilde{G}^{ij} = \lim_{\nu\to 0}\widetilde{G}^{ij}(\nu),\\
\tilde{p}_i &= \lim_{\nu\to 0}\tilde{p}_i^{(\nu)}, \quad \xi(\lambda) = \lim_{\nu\to 0}\xi^{(\nu)}(\lambda)
\end{aligned} \tag{2.62}$$

均存在. 而一般情形的证明也完全类似, 故这里省略. 证明此定理需要若干引理.

引理 2.6. 如果算子 $\tilde{\mu}$ 不含半整数特征值, 则成立

$$\partial_{t^{\alpha,0}}\frac{\partial\widetilde{S}}{\partial\lambda} = -\tilde{\partial}_\alpha(\tilde{p}_0,\tilde{p}_\bullet,\tilde{p}_{n+1})\Big|_M - \partial_\alpha(\xi(\lambda),\mathbf{0},0), \tag{2.63}$$

$$\partial_x \frac{\partial \widetilde{S}}{\partial \lambda} = -\,\tilde{\partial}_0(\tilde{p}_0, \tilde{p}_\bullet, \tilde{p}_{n+1})\Big|_M - (\psi(\lambda), \mathbf{0}, 0), \tag{2.64}$$

其中 $\tilde{p}_i$ 是 $\widetilde{M}$ 的由(2.18)所定义的周期, 注意它是 $\widetilde{M}$ 上的函数, 通过(1.122)所定义的限制映射将其视为 M 上的函数; 此外,

$$\begin{aligned}\xi(\lambda) &:= \sum_{p\geq 0} \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda z} \theta_{0,-p} z^{-p-\frac{d}{2}-\frac{1}{2}}\, \mathrm{d}z \\ &= \sum_{p\geq 0} \theta_{0,-p} \lambda^{p+\frac{d}{2}-\frac{1}{2}} \Gamma\left(-p-\frac{d}{2}+\frac{1}{2}\right),\end{aligned} \tag{2.65}$$

$$\begin{aligned}\psi(\lambda) &:= \sum_{p\geq 0} \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda z} \theta_{0,-p-1} z^{-p-\frac{d}{2}-\frac{1}{2}}\, \mathrm{d}z \\ &= \sum_{p\geq 0} \theta_{0,-p-1} \lambda^{p+\frac{d}{2}-\frac{1}{2}} \Gamma\left(-p-\frac{d}{2}+\frac{1}{2}\right).\end{aligned} \tag{2.66}$$

证明. 由(1.111)(1.113)(1.124)(1.125) 式所给出的 $\tilde{\theta}_i(z)$ 与 $\theta_\alpha(z)$ 之间的关系, 并注意到对 $(i,p) \in \mathcal{I}$ 成立 $\Omega_{\alpha,0;i,p} = \partial_\alpha \theta_{i,p+1}$, 可得

$$\begin{aligned}\partial_{t^{\alpha,0}} \frac{\partial \widetilde{S}}{\partial \lambda} =& -\,\partial_{t^{\alpha,0}} \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{z}} \mathrm{e}^{-\lambda z} \sum_{p\geq 0} \left(f_{0,p}, f_{\bullet,p}, (-1)^{p+1} t^{0,-p-1}\right) z^{p+1} z^{\tilde{\mu}} z^{\widetilde{R}} \\ & -\,\partial_{t^{\alpha,0}} \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{z}} \mathrm{e}^{-\lambda z} \sum_{p\geq 0} (-1)^p \left((-1)^p f_{0,-p-1}, t^p_\bullet, t^{n+1,p}\right) z^{-p} z^{\tilde{\mu}} z^{\widetilde{R}} \\ =& -\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{z}} \mathrm{e}^{-\lambda z} \sum_{p\geq 0} \left(\Omega_{\alpha,0;0,p}, \Omega_{\alpha,0;\bullet,p}, 0\right) z^{p+1} z^{\tilde{\mu}} z^{\widetilde{R}} \\ & - \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{z}} \mathrm{e}^{-\lambda z} \sum_{p\geq 0} \left(\Omega_{\alpha,0;0,-p-1}, \eta_{\alpha\bullet}\delta_{p,0}, 0\right) z^{-p} z^{\tilde{\mu}} z^{\widetilde{R}} \\ =& -\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{z}} \mathrm{e}^{-\lambda z} \sum_{p\geq 0} \left(\partial_\alpha \theta_0(z) - e_\alpha, \partial_\alpha \theta_\bullet(z), 0\right) z^{\tilde{\mu}} z^{\widetilde{R}} \\ & - \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda z} \sum_{p\geq 0} \left(\partial_\alpha \theta_{0,-p}, \mathbf{0}, 0\right) \begin{pmatrix} z^{-p-\frac{d}{2}-\frac{1}{2}} & \mathbf{0} & 0 \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix} \mathrm{d}z \\ =& -\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{z}} \mathrm{e}^{-\lambda z} \left(\tilde{\partial}_\alpha \tilde{\theta}_0(z), \tilde{\partial}_\alpha \tilde{\theta}_\bullet(z), \tilde{\partial}_\alpha \tilde{\theta}_{n+1}(z)\right)\Big|_{M^n} z^{\tilde{\mu}} z^{\widetilde{R}} - \partial_\alpha(\xi(\lambda), \mathbf{0}, 0) \\ =& -\,\tilde{\partial}_\alpha(\tilde{p}_0, \tilde{p}_\bullet, \tilde{p}_{n+1})\Big|_{M^n} - \partial_\alpha(\xi(\lambda), \mathbf{0}, 0),\end{aligned} \tag{2.67}$$

所以等式(2.63)成立. 类似计算也可说明等式(2.64)成立. 综上, 本引理证毕. □

接下来的引理表明, (2.57)–(2.59)式所定义的流的确与 $v^\alpha=\eta^{\alpha\beta}\partial_x\partial_{t^{\beta,0}}f$ 相容.

引理 2.7. 如果 $\tilde{\mu}$ 不含半整数特征值, 则以下等式成立:

$$\begin{aligned}&-\frac{1}{2}\eta^{\alpha\beta}\partial_x\partial_{t^{\beta,0}}\left[\frac{\partial\widetilde{S}_i}{\partial\lambda}\widetilde{G}^{ij}\frac{\partial\widetilde{S}_j}{\partial\lambda}\right]_-\\&=\left[\frac{\partial\widetilde{S}_i}{\partial\lambda}\widetilde{G}^{ij}\partial_x(\tilde{\partial}^\alpha\tilde{p}_j)\right]_-+\left[\partial_x\partial^\alpha\xi(\lambda)\widetilde{G}^{n+1,0}\frac{\partial\widetilde{S}_{n+1}}{\partial\lambda}\right]_--\left(\frac{1}{E-\lambda e}\right)^\alpha.\end{aligned}\tag{2.68}$$

证明. 由(1.107)式所给出的 $\tilde{\mu}$ 与 $\widetilde{R}$ 的定义可知

$$\mathrm{e}^{\pi i\tilde{\mu}}=\begin{pmatrix}\mathrm{e}^{-\frac{\pi id}{2}}&&\\&\mathrm{e}^{\pi i\mu}&\\&&\mathrm{e}^{\frac{\pi id}{2}}\end{pmatrix},\quad \mathrm{e}^{\pi i\widetilde{R}}=\begin{pmatrix}1&\mathbf{0}&0\\ *&\mathrm{e}^{\pi iR}&\mathbf{0}\\ *&*&1\end{pmatrix},\tag{2.69}$$

所以(2.20)式中的 Gram 矩阵 $(\widetilde{G}^{ij})$ 形如

$$\widetilde{G}=\begin{pmatrix}0&\mathbf{0}&-\frac{1}{\pi}\cos\frac{\pi d}{2}\\ \mathbf{0}&G&*\\ -\frac{1}{\pi}\cos\frac{\pi d}{2}&*&*\end{pmatrix}.\tag{2.70}$$

特别地,

$$\widetilde{G}^{0,0}=\widetilde{G}^{\alpha,0}=\widetilde{G}^{0,\alpha}=0,\tag{2.71}$$

$$\widetilde{G}^{n+1,0}=\widetilde{G}^{0,n+1}=-\frac{1}{\pi}\cos\frac{\pi d}{2}.\tag{2.72}$$

因此有

$$\begin{aligned}&-\frac{1}{2}\partial_x\partial_{t^{\alpha,0}}\left[\frac{\partial\widetilde{S}_i}{\partial\lambda}\widetilde{G}^{ij}\frac{\partial\widetilde{S}_j}{\partial\lambda}\right]_-\\&=\partial_x\left[(\tilde{\partial}_\alpha\tilde{p}_i)\Big|_M\widetilde{G}^{ij}\frac{\partial\widetilde{S}_j}{\partial\lambda}\right]_-+\partial_x\left[\partial_\alpha\xi(\lambda)\widetilde{G}^{0,j}\frac{\partial\widetilde{S}_j}{\partial\lambda}\right]_-\\&=\left[\partial_x\left(\tilde{\partial}_\alpha\tilde{p}_i\right)\Big|_M\widetilde{G}^{ij}\frac{\partial\widetilde{S}_j}{\partial\lambda}\right]_--\left[\left(\tilde{\partial}_\alpha\tilde{p}_i\right)\Big|_M\widetilde{G}^{ij}\left(\tilde{\partial}_0\tilde{p}_j\right)\Big|_M\right]_-\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&- \left[\left(\tilde{\partial}_\alpha \tilde{p}_{n+1}\right)\Big|_M \widetilde{G}^{n+1,0}\psi(\lambda)\right]_- + \left[\partial_x\partial_\alpha\xi(\lambda)\widetilde{G}^{0,n+1}\frac{\partial \widetilde{S}_{n+1}}{\partial\lambda}\right]_- \\
&- \left[\partial_\alpha\xi(\lambda)\widetilde{G}^{0,n+1}\left(\tilde{\partial}_0\tilde{p}_{n+1}\right)\Big|_M\right]_- .
\end{aligned}
\tag{2.73}
$$

再由等式

$$
\left(\tilde{\partial}_\alpha \tilde{p}_{n+1}\right)\Big|_M = 0, \quad \left(\tilde{\partial}_0 \tilde{p}_{n+1}\right)\Big|_M = \lambda^{-\frac{d}{2}-\frac{1}{2}}\Gamma\left(\frac{d}{2}+\frac{1}{2}\right) \tag{2.74}
$$

可得

$$
\begin{aligned}
&- \left[\left(\tilde{\partial}_\alpha \tilde{p}_{n+1}\right)\Big|_M \widetilde{G}^{n+1,0}\psi(\lambda)\right]_- - \left[\partial_\alpha\xi(\lambda)\widetilde{G}^{0,n+1}\left(\tilde{\partial}_0\tilde{p}_{n+1}\right)\Big|_M\right]_- \\
=& \frac{1}{\pi}\cos\frac{\pi d}{2}\left[\sum_{p\geq 0}\partial_\alpha\theta_{0,-p}\lambda^{p+\frac{d}{2}-\frac{1}{2}}\Gamma\left(-p-\frac{d}{2}+\frac{1}{2}\right)\cdot\lambda^{-\frac{d}{2}-\frac{1}{2}}\Gamma\left(\frac{d}{2}+\frac{1}{2}\right)\right]_- \\
=& \frac{1}{\pi}\cos\frac{\pi d}{2}\cdot\partial_\alpha\theta_{0,0}\lambda^{-1}\Gamma\left(\frac{1-d}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1+d}{2}\right) = \frac{e_\alpha}{\lambda}.
\end{aligned}
\tag{2.75}
$$

另一方面, 由 $(n+2)$ 维相伴 Frobenius 流形 $\widetilde{M}$ 的周期 $\tilde{p}_i$ 的定义可知

$$
\left(\tilde{\partial}_\alpha\tilde{p}_i\right)\widetilde{G}^{ij}\left(\tilde{\partial}_0\tilde{p}_j\right) = \left(\left(\tilde{g}^{ij}-\lambda\tilde{\eta}^{ij}\right)^{-1}\right)_{\alpha,0}, \tag{2.76}
$$

其中

$$
(\tilde{g}^{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{0} & v^0 \\ \mathbf{0} & g^{\alpha\beta}+v^0\eta^{\alpha\beta} & E^\bullet \\ v^0 & E_\bullet\eta^{-1} & (1-d)v^{n+1}+c_0 \end{pmatrix} \tag{2.77}
$$

是 Frobenius 流形 $\widetilde{M}$ 的相交形式. 注意到 $\widetilde{M}$ 上的乘以欧拉向量场 $\widetilde{E}$ 的算子 $\widetilde{\mathcal{U}} = (\sum_{k=0}^{n+1}\tilde{g}^{ik}\tilde{\eta}_{kj})$ 满足关系

$$
\left(\widetilde{\mathcal{U}}-\lambda\tilde{I}\right)^{-1}\Big|_M = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\lambda} & \mathbf{0} & 0 \\ \frac{1}{\lambda}(\mathcal{U}-\lambda I)^{-1}E^\bullet & (\mathcal{U}-\lambda I)^{-1} & \mathbf{0} \\ \frac{1}{\lambda^2}X_{n+1,0} & \frac{1}{\lambda}E_\bullet(\mathcal{U}-\lambda I)^{-1} & -\frac{1}{\lambda} \end{pmatrix}, \tag{2.78}
$$

其中 $\tilde{I}$ 是 $(n+2)\times(n+2)$ 单位矩阵 (恒等算子), 且

$$
X_{n+1,0} := E_\bullet(\mathcal{U}-\lambda I)^{-1}E^\bullet - (1-d)\theta_{0,0} - c_0. \tag{2.79}
$$

由此可得

$$
\begin{aligned}
&\left[\left(\tilde{\partial}_\alpha \tilde{p}_i\right)\Big|_M \widetilde{G}^{ij}\left(\tilde{\partial}_0 \tilde{p}_j\right)\Big|_M\right]_- \\
=&\left(\left(\tilde{g}^{ij}-\lambda\tilde{\eta}^{ij}\right)^{-1}\Big|_M\right)_{\alpha,0}=\left(\tilde{\eta}(\widetilde{\mathcal{U}}-\lambda\tilde{I})^{-1}\Big|_M\right)_{\alpha,0} \\
=&\frac{1}{\lambda}\left[\eta(\mathcal{U}-\lambda I)^{-1}E^{\bullet}\right]^{\alpha}=\frac{1}{\lambda}\left[E_{\bullet}(\mathcal{U}-\lambda I)^{-1}\right]_{\alpha}=\left(\frac{e}{\lambda}+\frac{1}{E-\lambda e}\right)_{\alpha}. \qquad (2.80)
\end{aligned}
$$

上式推导过程中使用了等式

$$(\mathcal{U}-\lambda I)^{-1}=\eta\left((\mathcal{U}-\lambda I)^{-1}\right)^{\mathrm{T}}\eta^{-1}, \qquad (2.81)$$

$$\frac{1}{\lambda}E_{\bullet}(\mathcal{U}-\lambda I)^{-1}=\frac{1}{\lambda}\left(\frac{E}{E-\lambda e}\right)_{\bullet}=\left(\frac{e}{\lambda}+\frac{1}{E-\lambda e}\right)_{\bullet}, \qquad (2.82)$$

而上述两式中的第二个等式成立是因为 $(\mathcal{U}-\lambda I)\dfrac{E}{E-\lambda e}=E$. 因此有

$$
\begin{aligned}
&-\frac{1}{2}\partial_x\partial t^{\alpha,0}\left[\frac{\partial\widetilde{S}_i}{\partial\lambda}\widetilde{G}^{ij}\frac{\partial\widetilde{S}_j}{\partial\lambda}\right]_- \\
=&\left[\partial_x\left(\tilde{\partial}_\alpha\tilde{p}_i\right)\Big|_{M^n}\widetilde{G}^{ij}\frac{\partial\widetilde{S}_j}{\partial\lambda}\right]_- -\left(\frac{e}{\lambda}+\frac{1}{E-\lambda e}\right)_{\alpha}+\left[\partial_x\partial_\alpha\xi(\lambda)\widetilde{G}^{0,n+1}\frac{\partial\widetilde{S}_{n+1}}{\partial\lambda}\right]_- +\frac{e_\alpha}{\lambda} \\
=&\left[\partial_x\left(\tilde{\partial}_\alpha\tilde{p}_i\right)\Big|_{M^n}\widetilde{G}^{ij}\frac{\partial\widetilde{S}_j}{\partial\lambda}\right]_- +\left[\partial_x\partial_\alpha\xi(\lambda)\widetilde{G}^{0,n+1}\frac{\partial\widetilde{S}_{n+1}}{\partial\lambda}\right]_- -\left(\frac{1}{E-\lambda e}\right)_{\alpha}.
\end{aligned}
\qquad (2.83)
$$

综上, 本引理得证. □

定理 2.8. *对任意 $m\geq -1$ 以及 $(i,p),(j,q)\in\mathcal{I}$, 成立如下等式:*

$$
\begin{aligned}
&\partial_{\frac{1}{E-\lambda e}}\Omega_{i,p;j,q}:=-\sum_{m\geq -1}\frac{1}{\lambda^{m+2}}\partial_{E^{m+1}}\Omega_{i,p;j,q} \\
=&\lim_{\nu\to 0}\left[\left(\frac{\partial}{\partial t^{i,p}}\frac{\partial\widetilde{S}^{(\nu)}_{i'}}{\partial\lambda}\right)\widetilde{G}^{i'j'}(\nu)\left(\frac{\partial}{\partial t^{j,q}}\frac{\partial\widetilde{S}^{(-\nu)}_{j'}}{\partial\lambda}\right)\right]_- -2\delta_{i,0}\delta_{j,0}C_{p,q}(\lambda), \qquad (2.84)
\end{aligned}
$$

其中 $C_{p,q}(\lambda)$ 由 (2.53)式所定义.

上述定理的证明详见本文附录6.1.

现在开始证明非共振情形 (即 $\tilde{\mu}$ 不含半整数特征值的情形) 下的定理 2.5.

定理2.5的证明. 为证明(2.57)–(2.59) 的确是主方程簇的 tau 覆盖(1.88)的对称, 需要验证交换关系

$$\left[\frac{\partial}{\partial s},\frac{\partial}{\partial t^{k,\ell}}\right]f=0,\qquad \left[\frac{\partial}{\partial s},\frac{\partial}{\partial t^{k,\ell}}\right]f_{i,p}=0,\qquad \left[\frac{\partial}{\partial s},\frac{\partial}{\partial t^{k,\ell}}\right]v^{\alpha}=0 \tag{2.85}$$

对任意 $(i,p),(k,\ell)\in\mathcal{I}$ 以及 $\alpha=1,2,\dots,n$ 都成立. 由(2.58) 式容易看出, 第一个交换关系 $\left[\frac{\partial}{\partial s},\frac{\partial}{\partial t^{k,\ell}}\right]f=0$ 平凡成立, 再由(2.59)可知

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial s}\frac{\partial f_{i,p}}{\partial t^{k,\ell}}&=\frac{\partial}{\partial s}\Omega_{i,p;k,\ell}=\partial_\gamma\Omega_{i,p;k,\ell}\frac{\partial v^\gamma}{\partial s}\\&=\partial_\gamma\Omega_{i,p;k,\ell}\left(\left[\frac{\partial\widetilde{S}_{i'}}{\partial\lambda}\widetilde{G}^{i'j'}\partial_x\tilde{\partial}^\gamma\tilde{p}_{j'}\right]_-+\left[\partial_x\partial^\gamma\xi(\lambda)\widetilde{G}^{n+1,0}\frac{\partial\widetilde{S}_{n+1}}{\partial\lambda}\right]_-\right)\Bigg|_M\\&\quad-\partial_{\frac{1}{E-\lambda e}}\Omega_{i,p;k,\ell}.\end{aligned}\tag{2.86}$$

另一方面, 由定理2.8可得

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t^{k,\ell}}\frac{\partial f_{i,p}}{\partial s}&=\frac{\partial}{\partial t^{k,\ell}}\frac{\partial}{\partial t^{i,p}}\left(-\frac{1}{2}\left[\frac{\partial\widetilde{S}_{i'}}{\partial\lambda}\widetilde{G}^{i'j'}\frac{\partial\widetilde{S}_{j'}}{\partial\lambda}\right]_-+\sum_{s,q\in\mathbb{Z}}C_{s,q}(\lambda)t^{0,s}t^{0,q}\right)\\&=-\frac{\partial}{\partial t^{k,\ell}}\left[\left(\frac{\partial}{\partial t^{i,p}}\frac{\partial\widetilde{S}_{i'}}{\partial\lambda}\right)\widetilde{G}^{i'j'}\frac{\partial\widetilde{S}_{j'}}{\partial\lambda}\right]_-+2\delta_{i,0}\delta_{k,0}C_{p,\ell}(\lambda)\\&=-\left[\left(\frac{\partial}{\partial t^{i,p}}\frac{\partial\widetilde{S}_{i'}}{\partial\lambda}\right)\widetilde{G}^{i'j'}\left(\frac{\partial}{\partial t^{k,\ell}}\frac{\partial\widetilde{S}_{j'}}{\partial\lambda}\right)\right]_-+2\delta_{i,0}\delta_{k,0}C_{p,\ell}(\lambda)\\&\quad-\left[\left(\frac{\partial^2}{t^{i,p}t^{k,\ell}}\frac{\partial\widetilde{S}_{i'}}{\partial\lambda}\right)\widetilde{G}^{i'j'}\frac{\partial\widetilde{S}_{j'}}{\partial\lambda}\right]_-\\&=-\partial_{\frac{1}{E-\lambda e}}\Omega_{i,p;k,\ell}-\left[\left(\frac{\partial^2}{t^{i,p}t^{k,\ell}}\frac{\partial\widetilde{S}_{i'}}{\partial\lambda}\right)\widetilde{G}^{i'j'}\frac{\partial\widetilde{S}_{j'}}{\partial\lambda}\right]_-.\end{aligned}\tag{2.87}$$

再注意到

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial t^{i,p}\partial t^{k,\ell}}\frac{\partial\widetilde{S}}{\partial\lambda}=&-\int_0^\infty\frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{z}}\mathrm{e}^{-\lambda z}\sum_{q\geq0}\left(\frac{\partial^2f_{0,q}}{\partial t^{i,p}\partial t^{k,\ell}},\frac{\partial^2f_{\bullet,q}}{\partial t^{i,p}\partial t^{k,\ell}},0\right)z^{q+1}z^{\tilde{\mu}}z^{\widetilde{R}}\\&-\int_0^\infty\frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{z}}\mathrm{e}^{-\lambda z}\sum_{q\geq0}\left(\frac{\partial^2f_{0,-q-1}}{\partial t^{i,p}\partial t^{k,\ell}},\mathbf{0},0\right)z^{-q}z^{\tilde{\mu}}z^{\widetilde{R}}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= -\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{z}} \mathrm{e}^{-\lambda z} \sum_{q\geq 0} \left(\frac{\partial \Omega_{i,p;k,\ell}}{\partial t^{0,q}}, \frac{\partial \Omega_{i,p;k,\ell}}{\partial t^{\bullet,q}}, 0 \right) z^{q+1} z^{\tilde{\mu}} z^{\widetilde{R}} \\
&\quad - \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{z}} \mathrm{e}^{-\lambda z} \sum_{q\geq 0} \left(\frac{\partial \Omega_{i,p;k,\ell}}{\partial t^{0,-q-1}}, \mathbf{0}, 0 \right) z^{-q} z^{\tilde{\mu}} z^{\widetilde{R}} \\
&= -\partial_\gamma \Omega_{i,p;k,\ell} \partial_x \left((\tilde{\partial}^\gamma \tilde{p}_0, \tilde{\partial}^\gamma \tilde{p}_\bullet, \tilde{\partial}^\gamma \tilde{p}_{n+1}) + (\partial^\gamma \xi(\lambda), \mathbf{0}, 0) \right) \Big|_M,
\end{aligned}
\tag{2.88}
$$

从而推出 $\left[\dfrac{\partial}{\partial s}, \dfrac{\partial}{\partial t^{k,\ell}}\right] f_{i,p} = 0$, 因此(2.85)式的第二个关系得证. 特别地, 成立

$$
\left[\frac{\partial}{\partial s}, \frac{\partial}{\partial t^{i,p}}\right] f_{\beta,0} = 0, \quad \forall\,(i,p) \in \mathcal{I},\ \beta = 1, 2, \ldots, n. \tag{2.89}
$$

最后, 由(2.68)与(2.89)可得

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t^{i,p}} \frac{\partial v^\alpha}{\partial s} &= \eta^{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial t^{i,p}} \left(\partial_x \frac{\partial f_{\beta,0}}{\partial s} \right) = \eta^{\alpha\beta} \partial_x \left(\frac{\partial}{\partial t^{i,p}} \frac{\partial}{\partial s} f_{\beta,0} \right) \\
&= \eta^{\alpha\beta} \partial_x \left(\frac{\partial}{\partial s} \frac{\partial}{\partial t^{i,p}} f_{\beta,0} \right) = \frac{\partial}{\partial s} \left(\eta^{\alpha\beta} \partial_x \Omega_{i,p;\beta,0} \right) = \frac{\partial}{\partial s} \frac{\partial v^\alpha}{\partial t^{i,p}},
\end{aligned}
\tag{2.90}
$$

这表明 $\left[\dfrac{\partial}{\partial s}, \dfrac{\partial}{\partial t^{k,\ell}}\right] v^\alpha = 0$. 综上, 本定理得证. □

注释 2.9. 由引理*2.1*易知, 定理*2.5*所给出的对称 $\dfrac{\partial f}{\partial s_m}$, $m \geq -1$ 必形如

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial s_m} = &\sum_{(i,p),(j,q)\in\mathcal{I}} a_m^{i,p;j,q} \frac{\partial f}{\partial t^{i,p}} \frac{\partial f}{\partial t^{j,q}} + \sum_{(i,p),(j,q)\in\mathcal{I}} b_{m;j,q}^{i,p} t^{j,q} \frac{\partial f}{\partial t^{i,p}} \\
&+ \sum_{(i,p),(j,q)\in\mathcal{I}} c_{m;i,p;j,q} t^{i,p} t^{j,q} + \sum_{p,q\in\mathbb{Z}} C_{m;p,q} t^{0,p} t^{0,q},
\end{aligned}
\tag{2.91}
$$

其中 $a_m^{i,p;j,q}$, $b_{m;j,q}^{i,p}$, $c_{m;i,p;j,q} \in \mathbb{C}$ 是特定的常数. 本文引入这些常数的如下生成函数:

$$
a^{i,p;j,q}(\lambda) := \sum_{m\geq -1} \frac{a_m^{i,p;j,q}}{\lambda^{m+2}}, \tag{2.92}
$$

$$
b_{j,q}^{i,p}(\lambda) := \sum_{m\geq -1} \frac{b_{m;j,q}^{i,p}}{\lambda^{m+2}}, \tag{2.93}
$$

$$c_{i,p;j,q}(\lambda) := \sum_{m\geq -1} \frac{c_{m;i,p;j,q}}{\lambda^{m+2}}. \tag{2.94}$$

一般地, 对于某个特定的$\mathbb{C}$-代数中的一族形式变元$\left\{\Phi^{i,p},\,\Psi_{j,q}\,\middle|\,(i,p),(j,q)\in\mathcal{I}\right\}$, 记

$$\widetilde{S}^{(\nu)}(\Phi,\Psi;\lambda) := \widetilde{S}^{(\nu)}(\mathbf{t},\frac{\partial f}{\partial \mathbf{t}};\lambda)\Big|_{t^{i,p}\mapsto\Phi^{i,p},\,f_{j,q}\mapsto\Psi_{j,q}}, \tag{2.95}$$

则以下等式成立:

$$\begin{aligned}
&-\frac{1}{2}\lim_{\nu\to 0}\left[\frac{\partial \widetilde{S}^{(\nu)}_i(\Phi,\Psi;\lambda)}{\partial\lambda}\widetilde{G}^{ij}(\nu)\frac{\partial\widetilde{S}^{(-\nu)}_j(\Phi,\Psi;\lambda)}{\partial\lambda}\right]_-\\
=&\sum_{(i,p),(j,q)\in\mathcal{I}} a^{i,p;j,q}(\lambda)\Psi_{i,p}\Psi_{j,q}+\sum_{(i,p),(j,q)\in\mathcal{I}} b^{i,p}_{j,q}(\lambda)\Phi^{j,q}\Psi_{i,p}\\
&+\sum_{(i,p),(j,q)\in\mathcal{I}} c_{i,p;j,q}(\lambda)\Phi^{i,p}\Phi^{j,q}.
\end{aligned} \tag{2.96}$$

定义 2.1. 称(2.91)式与(2.53)式中的常数 $a^{i,p;j,q}_m$, $b^{i,p}_{m;j,q}$, $c_{m;i,p;j,q}$ 以及 $C_{m;p,q}$ 为广义 *Frobenius* 流形 M 的 ***拓展 Virasoro 系数*** *(extended Virasoro coefficient)*.

广义 Frobenius 流形的拓展 Virasoro 系数可由公式 (2.22)–(2.24) 直接计算, 由此容易验证以下基本性质:

$$a^{i,p;j,q}_m = 0, \qquad \text{如果 } i=0 \text{ 或 } j=0, \tag{2.97}$$

$$b^{0,q}_{m;i,p} \neq 0, \qquad \text{仅当 } i=0 \text{ 且 } q=p+m, \tag{2.98}$$

$$b^{i,q}_{m;i,p} = \delta^q_{p+m}\left(p+\mu_i+\frac{1}{2}\right)^{[m+1]}, \tag{2.99}$$

其中 $(i,p),(j,q)\in\mathcal{I}$, $m\geq -1$, 符号 $x^{[m]}$ 的定义详见 (2.54).

3. Virasoro 对称的线性化条件与圈方程

3.1 广义 Frobenius 流形的 Virasoro 算子

本节将利用广义 Frobenius 流形 M 在 $z=0$ 处的单值性数据 η,μ,R, 以及在引理1.7与命题1.13当中取定的常数 $\mathbf{r}_s=(r^1_s,\dots,r^n_s)^{\mathrm{T}}$, $s\geq 1$ 以及 c_p, $p\in\mathbb{Z}$, 构造一族满足 Virasoro 交换关系的线性微分算子 (即 Virasoro 算子).

文献 [25, 26] 当中给出了通常 (具有平坦单位的)Frobenius 流形的 Virasoro 算子的构造方法; 将此方法用于 n 维广义 Frobenius 流形 M 的 $(n+2)$ 维相伴 Frobenius 流形 $\widetilde{M}$ (见引理1.15), 并将所得 Virasoro 算子稍加改动, 即得到广义 Frobenius 流形 M 的 Virasoro 算子.

定义海森堡代数 (Heisenberg algebra)$\mathcal{H}$ 如下: $\mathcal{H}$ 由 a_p^i, $(0 \leq i \leq n+1$, $p \in \mathbb{Z})$ 与恒等算子 $\mathbf{1}$ 线性张成, 并且这组生成元满足交换关系

$$\begin{cases} [\mathbf{1}, a_p^i] = 0, \\ [a_p^i, a_q^j] = (-1)^p \tilde{\eta}^{ij} \delta_{p+q+1,0} \cdot \mathbf{1}. \end{cases} \tag{3.1}$$

引入正规序 (normal ordering): $\cdot$: 如下:

$$: a_p^i a_q^j := \begin{cases} a_q^j a_p^i, & \text{如果 } p \geq 0,\ q < 0, \\ a_p^i a_q^j, & \text{其余情况,} \end{cases} \tag{3.2}$$

则 Frobenius 流形 $\widetilde{M}$ 的 Virasoro 算子定义为

$$\begin{aligned} \tilde{L}(\lambda) &= \sum_{m \geq -1} \frac{\tilde{L}_m}{\lambda^{m+2}} \\ &= -\frac{1}{2} \lim_{\nu \to 0} : \frac{\partial \tilde{\phi}_i^{(\nu)}}{\partial \lambda} \widetilde{G}^{ij}(\nu) \frac{\partial \tilde{\phi}_j^{(-\nu)}}{\partial \lambda} : + \frac{1}{4\lambda^2} \mathrm{tr} \left(\frac{1}{4} - \tilde{\mu}^2 \right), \end{aligned} \tag{3.3}$$

其中 $\tilde{\phi}^{(\nu)} = \tilde{\phi}^{(\nu)}(\mathbf{a}; \lambda)$ 的定义见(2.25)式.

上述算子满足交换关系

$$[\tilde{L}_m, \tilde{L}_n] = (m-n)\tilde{L}_{m+n}, \quad m, n \geq -1. \tag{3.4}$$

对于 $0 \leq i, j \leq n+1, p \in \mathbb{Z}$, 取

$$a_p^i := \begin{cases} \tilde{\eta}^{ij} \dfrac{\partial}{\partial t^{j,p}}, & p \geq 0, \\ (-1)^{p+1} t^{i,-p-1}, & p < 0, \end{cases} \tag{3.5}$$

则得到海森堡代数在以 $t^{i,p}$, $0 \leq i \leq n+1, p \geq 0$ 为自变量的函数构成的空间上的一个实现, 这族线性微分算子 $\tilde{L}_m$ 作用在该函数空间上.

接下来将适当修改(3.3)式所定义的 Virasoro 算子, 并取海森堡代数 $\mathcal{H}$ 的另一种实现, 来得到广义 Frobenius 流形 M 的 Virasoro 算子. 考虑海森堡代数

的如下实现:

$$a_p^i := \begin{cases} (-1)^{p+1} t^{0,-p-1}, & i=0,\ p\in\mathbb{Z}, \\ \eta^{i\beta}\dfrac{\partial}{\partial t^{\beta,p}}, & i=1,\dots,n,\ p\geq 0, \\ (-1)^{p+1} t^{i,-p-1}, & i=1,\dots,n,\ p<0, \\ \dfrac{\partial}{\partial t^{0,p}}, & i=n+1,\ p\in\mathbb{Z}. \end{cases} \tag{3.6}$$

定义 3.1. *广义 Frobenius 流形 M 的 Virasoro 算子是指下述线性微分算子:*

$$\begin{aligned} L(\mathbf{t}, \frac{\partial}{\partial \mathbf{t}}; \lambda) &= \sum_{m\geq -1} \frac{L_m(\mathbf{t}, \frac{\partial}{\partial \mathbf{t}})}{\lambda^{m+2}} \\ &= -\frac{1}{2}\lim_{\nu\to 0} : \frac{\partial \tilde{\phi}_i^{(\nu)}}{\partial \lambda} \widetilde{G}^{ij}(\nu) \frac{\partial \tilde{\phi}_j^{(-\nu)}}{\partial \lambda} : + \sum_{p,q\in\mathbb{Z}} C_{p,q}(\lambda) t^{0,p} t^{0,q} \\ &\quad + \frac{1}{4\lambda^2}\mathrm{tr}\left(\frac{1}{4} - \mu^2\right), \end{aligned} \tag{3.7}$$

其中 $\tilde{\phi}^{(\nu)} = \tilde{\phi}^{(\nu)}(\mathbf{a};\lambda)$ 的定义见(2.25)式, 海森堡代数的生成元 $\mathbf{a}_p = (a_p^0, \dots, a_p^{n+1})^{\mathrm{T}}$ 的实现取为(3.6)式, 形式幂级数 $C_{p,q}(\lambda)$ 的定义见 (2.53)式, 并选取正规序 *(normal ordering)* $:\cdot:$ 使得微分算子强制位于右侧.

特别注意, 在 (3.7)式中出现的 μ 是 $n\times n$ 矩阵, 而非 $(n+2)\times(n+2)$ 矩阵 $\tilde{\mu}$. 由上述定义可知, 广义 Frobenius 流形 M 的 Virasoro 算子 $L_m, m\geq -1$ 形如

$$\begin{aligned} L_m(\mathbf{t}, \frac{\partial}{\partial \mathbf{t}}) = &\sum_{(i,p),(j,q)\in\mathcal{I}} a_m^{i,p;j,q} \frac{\partial^2}{\partial t^{i,p}\partial t^{j,q}} + \sum_{(i,p),(j,q)\in\mathcal{I}} b_{m;i,p}^{j,q} t^{i,p} \frac{\partial}{\partial t^{j,q}} \\ &+ \sum_{(i,p),(j,q)\in\mathcal{I}} c_{m;i,p;j,q} t^{i,p} t^{j,q} + \sum_{p,q\in\mathbb{Z}} C_{m;p,q} t^{0,p} t^{0,q} \\ &+ \frac{1}{4}\delta_{m,0}\mathrm{tr}\left(\frac{1}{4} - \mu^2\right)\cdot \mathbf{1}, \end{aligned} \tag{3.8}$$

其中出现的常数 $a_m^{i,p;j,q}, b_{m;i,p}^{j,q}, c_{m;i,p;j,q}$ 与 $C_{m;p,q}$ 恰为定义2.1当中所引入的拓展 Virasoro 系数. 由(2.22)式与(2.24)式, 容易验证关于 Virasoro 算子 L_m 的如下等价表达式 (详见 [25]):

$$L_m(\mathbf{t}, \frac{\partial}{\partial \mathbf{t}}) = \frac{1}{2}\sum_{p,q\in\mathbb{Z}} (-1)^{p+1} : \mathbf{a}_q^{\mathrm{T}} \tilde{\eta} \left[P_m(\tilde{\mu} - p, \tilde{R})\right]_{m-1-q-p} \mathbf{a}_p :$$

$$
\begin{aligned}
&+\sum_{p,q\in\mathbb{Z}} C_{m;p,q} t^{0,p} t^{0,q} \\
&+\frac{1}{4}\delta_{m,0}\mathrm{tr}\left(\frac{1}{4}-\mu^2\right)\mathbf{1}, \quad m\geq -1.
\end{aligned} \tag{3.9}
$$

这里的 $\mathbf{a}_p=(a_p^0,\ldots,a_p^{n+1})^{\mathrm{T}}$ 取(3.6)的实现, $\tilde{\eta},\tilde{\mu},\widetilde{R}$ 是 $\widetilde{M}$ 在 $z=0$ 处的单值性数据, 其表达式见 (1.101)与(1.107)式. $(n+2)\times(n+2)$ 矩阵 P_m 的定义如下:

$$
P_m(\tilde{\mu},\tilde{R}) := \begin{cases} \mathrm{e}^{\tilde{R}\partial_x}\displaystyle\prod_{j=0}^{m}\left(x+\tilde{\mu}+j-\frac{1}{2}\right)\Bigg|_{x=0}, & m\geq 0, \\ 1, & m=-1, \end{cases} \tag{3.10}
$$

其 k-分量 $[P_m]_k$ 的定义见 (2.14)式.

命题 3.1. *广义 Frobenius 流形 M 的 Virasoro 算子 $\{L_m\}_{m\geq -1}$ 满足如下 Virasoro 交换关系:*

$$
[L_m,L_k]=(m-k)L_{m+k}, \quad m,k\geq -1. \tag{3.11}
$$

证明. 文献 [25, 26] 当中已经证明了通常 Frobenius 流形的 Virasoro 算子满足 Virasoro 交换关系, 而广义 Frobenius 流形的情形与之完全类似, 只需再额外验证涉及附加项 $\displaystyle\sum_{p,q\in\mathbb{Z}} C_{m;p,q}t^{0,p}t^{0,q}$ 的部分. 注意到, 算子 L_k 中与 $\displaystyle\sum_{p,q\in\mathbb{Z}} C_{m;p,q}t^{0,p}t^{0,q}$ 具有非平凡交换子的项只有

$$
\sum_{p\in\mathbb{Z}} b_{k;0,p}^{0,p+k} t^{0,p}\frac{\partial}{\partial t^{0,p+k}}, \tag{3.12}
$$

此断言由(2.97)–(2.99)式所保证. 代入显式表达式(2.53)与(2.99), 下述交换子

$$
\left[\sum_{p,q\in\mathbb{Z}} C_{m;p,q}t^{0,p}t^{0,q}, \sum_{p\in\mathbb{Z}} b_{k;0,p}^{0,p+k} t^{0,p}\frac{\partial}{\partial t^{0,p+k}}\right] \tag{3.13}
$$

可直接计算, 从而最终证明 $\{L_m\}_{m\geq -1}$ 满足 Virasoro 交换关系. 计算细节从略, 本命题得证. $\square$

本节最后将给出算子 L_{-1}, L_0, L_1 与 L_2 的显式表达式. 回忆之前所引入的

$\widetilde{R}_{s;1} := \widetilde{R}_s = \begin{pmatrix} 0 & & \\ \mathbf{r}_s & R_s & \\ c_{s-1} & \mathbf{r}_s^\dagger & 0 \end{pmatrix}$. 容易验证, 对于 $k \geq 2$, 有

$$\tilde{R}_{s;k} := [\tilde{R}^k]_s = \begin{pmatrix} 0 & & \\ \langle R\mathbf{r} \rangle_{s;k} & R_{s;k} & \\ \langle \mathbf{r}^\dagger R\mathbf{r} \rangle_{s;k} & \langle \mathbf{r}^\dagger R \rangle_{s;k} & 0 \end{pmatrix}, \tag{3.14}$$

其中 $R_{s;k} := [R^k]_s$, 且记

$$\langle R\mathbf{r} \rangle_{s;k} = \sum_{\ell \geq 1} R_{\ell;k-1} \mathbf{r}_{s-\ell}, \tag{3.15}$$

$$\langle \mathbf{r}^\dagger R \rangle_{s;k} = \sum_{\ell \geq 1} \mathbf{r}_{s-\ell}^\dagger R_{\ell;k-1}, \tag{3.16}$$

$$\langle \mathbf{r}^\dagger R\mathbf{r} \rangle_{s;k} = \sum_{p+q+t=s} \mathbf{r}_p^\dagger R_{q;k-2} \mathbf{r}_t. \tag{3.17}$$

使用上述记号, 并约定当 $\alpha \neq 0$ 且 $p < 0$ 时 $\dfrac{\partial}{\partial t^{\alpha,p}} = 0$, 则通过直接计算可知, 广义 Frobenius 流形 M 的前 4 个 Virasoro 算子 $L_m (m = -1, 0, 1, 2)$ 的显式表达式如下:

$$L_{-1} = \sum_{p \geq 0} t^{\alpha,p+1} \frac{\partial}{\partial t^{\alpha,p}} + \sum_{p \in \mathbb{Z}} t^{0,p+1} \frac{\partial}{\partial t^{0,p}} + \frac{1}{2} \eta_{\alpha\beta} t^{\alpha,0} t^{\beta,0}. \tag{3.18}$$

$$\begin{aligned} L_0 = & \sum_{p \geq 0} \left(p + \mu_\alpha + \frac{1}{2} \right) t^{\alpha,p} \frac{\partial}{\partial t^{\alpha,p}} + \sum_{p \in \mathbb{Z}} \left(p - \frac{d}{2} + \frac{1}{2} \right) t^{0,p} \frac{\partial}{\partial t^{0,p}} \\ & + \sum_{p \geq 0} \sum_{s \geq 1} (R_s)_\alpha^\varepsilon t^{\alpha,p} \frac{\partial}{\partial t^{\varepsilon,p-s}} + \sum_{p \in \mathbb{Z}} \sum_{s \geq 1} r_s^\varepsilon t^{0,p} \frac{\partial}{\partial t^{\varepsilon,p-s}} \\ & + \frac{1}{2} \sum_{p,q \geq 0} (-1)^p \eta_{\alpha\varepsilon} (R_{p+q+1})_\beta^\varepsilon t^{\alpha,p} t^{\beta,q} \\ & + \sum_{p \geq 0} \sum_{s \geq 1} (-1)^{p+s+1} (r_s)_\alpha t^{0,s-1-p} t^{\alpha,p} + \frac{1}{2} \sum_{p,q \in \mathbb{Z}} (-1)^p c_{p+q} t^{0,p} t^{0,q} \\ & + \frac{1}{4} \mathrm{tr} \left(\frac{1}{4} - \mu^2 \right) \cdot \mathbf{1}. \end{aligned} \tag{3.19}$$

$$\begin{aligned} L_1 = & \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4} - \mu^2 \right)_\varepsilon^\alpha \eta^{\varepsilon\beta} \frac{\partial^2}{\partial t^{\alpha,0} \partial t^{\beta,0}} \\ & + \sum_{p \geq 0} \left(p + \mu_\alpha + \frac{1}{2} \right) \left(p + \mu_\alpha + \frac{3}{2} \right) t^{\alpha,p} \frac{\partial}{\partial t^{\alpha,p+1}} \end{aligned}$$

$$+\sum_{p\in\mathbb{Z}}\left(p-\frac{d}{2}+\frac{1}{2}\right)\left(p-\frac{d}{2}+\frac{3}{2}\right)t^{0,p}\frac{\partial}{\partial t^{0,p+1}}$$
$$+2\sum_{p\geq 0,\,s\geq 1}(R_s)^{\varepsilon}_{\alpha}(p+\mu_\alpha+1)t^{\alpha,p}\frac{\partial}{\partial t^{\varepsilon,p+1-s}}$$
$$+2\sum_{p\in\mathbb{Z},\,s\geq 1}r^{\varepsilon}_{s}\left(p-\frac{d}{2}+1\right)t^{0,p}\frac{\partial}{\partial t^{\varepsilon,p+1-s}}$$
$$+\sum_{p\geq 0,\,s\geq 2}(R_{s;2})^{\varepsilon}_{\alpha}t^{\alpha,p}\frac{\partial}{\partial t^{\varepsilon,p+1-s}}+\sum_{p\in\mathbb{Z},\,s\geq 2}\langle R\mathbf{r}\rangle^{\varepsilon}_{s;2}t^{0,p}\frac{\partial}{\partial t^{\varepsilon,p+1-s}}$$
$$+\sum_{p,q\geq 0}(-1)^{q}(p+\mu_\alpha+1)(R_{p+q+2})^{\varepsilon}_{\alpha}\eta_{\varepsilon\beta}t^{\alpha,p}t^{\beta,q}$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{p,q\geq 0}(-1)^{q}(R_{p+q+2;2})^{\varepsilon}_{\alpha}\eta_{\varepsilon\beta}t^{\alpha,p}t^{\beta,q}+\sum_{p\geq 0,\,s\geq 2}(-1)^{p+s}\left(\langle\mathbf{r}^{\dagger}R\rangle_{s;2}\right)_{\alpha}t^{0,s-2-p}t^{\alpha,p}$$
$$+2\sum_{p\geq 0,\,s\geq 1}(-1)^{p+s}(p+\mu_\alpha+1)(r_s)_{\alpha}t^{0,s-2-p}t^{\alpha,p}$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{p\in\mathbb{Z},\,s\geq 2}(-1)^{p}\langle\mathbf{r}^{\dagger}R\mathbf{r}\rangle_{s;2}t^{0,s-2-p}t^{0,p}+\frac{1}{2}\sum_{p,q\in\mathbb{Z}}(-1)^{p}c_{p+q+1}(q-p)t^{0,p}t^{0,q}. \quad (3.20)$$
$$L_2=\frac{1}{2}\left(-3\mu_\alpha^2+3\mu_\alpha+\frac{1}{4}\right)(R_1)^{\alpha}_{\lambda}\eta^{\lambda\beta}\frac{\partial^2}{\partial t^{\alpha,0}\partial t^{\beta,0}}$$
$$+\left(\frac{1}{2}-\mu_\alpha\right)\left(\frac{3}{2}-\mu_\alpha\right)\eta^{\alpha\beta}\left(\frac{1}{2}-\mu_\beta\right)\frac{\partial^2}{\partial t^{\alpha,0}\partial t^{\beta,1}}$$
$$+\sum_{p\geq 0}\left(p+\mu_\alpha+\frac{1}{2}\right)\left(p+\mu_\alpha+\frac{3}{2}\right)\left(p+\mu_\alpha+\frac{5}{2}\right)t^{\alpha,p}\frac{\partial}{\partial t^{\alpha,p+2}}$$
$$+\sum_{p\in\mathbb{Z}}\left(p-\frac{d}{2}+\frac{1}{2}\right)\left(p-\frac{d}{2}+\frac{3}{2}\right)\left(p-\frac{d}{2}+\frac{5}{2}\right)t^{0,p}\frac{\partial}{\partial t^{0,p+2}}$$
$$+\sum_{p\geq 0,\,s\geq 1}\left[3\left(p+\mu_\alpha+\frac{1}{2}\right)^2+6\left(p+\mu_\alpha+\frac{1}{2}\right)+2\right](R_s)^{\varepsilon}_{\alpha}t^{\alpha,p}\frac{\partial}{\partial t^{\varepsilon,p+2-s}}$$
$$+\sum_{p\in\mathbb{Z},\,s\geq 1}\left[3\left(p-\frac{d}{2}+\frac{1}{2}\right)^2+6\left(p-\frac{d}{2}+\frac{1}{2}\right)+2\right]r^{\varepsilon}_{s}t^{0,p}\frac{\partial}{\partial t^{\varepsilon,p+2-s}}$$
$$+\sum_{p\geq 0,\,s\geq 2}3\left(p+\mu_\alpha+\frac{3}{2}\right)(R_{s;2})^{\varepsilon}_{\alpha}t^{\alpha,p}\frac{\partial}{\partial t^{\varepsilon,p+2-s}}$$
$$+\sum_{p\in\mathbb{Z},\,s\geq 2}3\left(p-\frac{d}{2}+\frac{3}{2}\right)\langle R\mathbf{r}\rangle^{\varepsilon}_{s;2}t^{0,p}\frac{\partial}{\partial t^{\varepsilon,p+2-s}}$$
$$+\sum_{p\geq 0,\,s\geq 3}(R_{s;3})^{\varepsilon}_{\alpha}t^{\alpha,p}\frac{\partial}{\partial t^{\varepsilon,p+2-s}}+\sum_{p\in\mathbb{Z}}\sum_{s\geq 3}\langle R\mathbf{r}\rangle^{\varepsilon}_{s;3}t^{0,p}\frac{\partial}{\partial t^{\varepsilon,p+2-s}}$$

$$
\begin{aligned}
&+\frac{1}{2}\sum_{p,q\geq 0}(-1)^q\Big[(R_{p+q+3;3})^\varepsilon_\alpha+3\left(p+\mu_\alpha+\frac{3}{2}\right)(R_{p+q+3;2})^\varepsilon_\alpha\\
&\qquad+[\frac{3}{4}(2p+2\mu_\alpha+3)^2-1](R_{p+q+3})^\varepsilon_\alpha\Big]\eta_{\varepsilon\beta}t^{\alpha,p}t^{\beta,q}\\
&+\sum_{p\geq 0,\, s\geq 1}(-1)^{s+p+1}\left[3\left(p+\mu_\alpha+\frac{1}{2}\right)^2+6\left(p+\mu_\alpha+\frac{1}{2}\right)+2\right](r_s)_\alpha t^{0,s-3-p}t^{\alpha,p}\\
&+\sum_{p\geq 0,\, s\geq 2}(-1)^{s+p+1}3\left(p+\mu_\alpha+\frac{3}{2}\right)\left(\langle\mathbf{r}^\dagger R\rangle_{s;2}\right)_\alpha t^{0,s-3-p}t^{\alpha,p}\\
&+\sum_{p\geq 0,\, s\geq 2}(-1)^{s+p+1}\left(\langle\mathbf{r}^\dagger R\rangle_{s;3}\right)_\alpha t^{0,s-3-p}t^{\alpha,p}\\
&+\frac{3}{4}\sum_{p,q\in\mathbb{Z}}(-1)^q(p-q)\langle\mathbf{r}^\dagger R\mathbf{r}\rangle_{p+q+3;2}t^{0,p}t^{0,q}+\frac{1}{2}\sum_{p,q\in\mathbb{Z}}(-1)^p\langle\mathbf{r}^\dagger R\mathbf{r}\rangle_{p+q+3;3}t^{0,p}t^{0,q}\\
&+\frac{1}{2}\sum_{p,q\in\mathbb{Z}}(-1)^p c_{p+q+2}\Big[\left(p+\frac{1}{2}-\frac{d}{2}\right)\left(p+\frac{3}{2}-\frac{d}{2}\right)+\left(q+\frac{1}{2}-\frac{d}{2}\right)\left(q+\frac{3}{2}-\frac{d}{2}\right)\\
&\qquad-\left(p+\frac{1}{2}-\frac{d}{2}\right)\left(q+\frac{1}{2}-\frac{d}{2}\right)\Big]t^{0,p}t^{0,q}.
\end{aligned}\tag{3.21}
$$

3.2 Virasoro 对称的线性化条件与圈方程

考察对主方程簇(1.70)做形如

$$v^\alpha\mapsto w^\alpha=v^\alpha+\eta^{\alpha\gamma}\partial_x\partial_{t^{\gamma,0}}\sum_{k\geq 1}\varepsilon^k\mathcal{F}^{[k]},\tag{3.22}$$

的某个特定的拟 Miura 变换 (quasi-Miura transformation) 后所得的可积方程簇

$$\frac{\partial w^\alpha}{\partial t^{i,p}}=K^\alpha_{i,p}(w;w_x,w_{xx},\dots),\quad (i,p)\in\mathcal{I},\ \alpha=1,2,\dots,n\tag{3.23}$$

其中 $\mathcal{F}^{[k]}=\mathcal{F}^{[k]}(v;v_x,\dots,v^{(m_k)})$ 是无穷 jet 空间 $J^\infty(M)$ 上的函数. 记

$$\mathcal{F}=\varepsilon^{-2}f+\Delta\mathcal{F},\quad \Delta\mathcal{F}=\sum_{k\geq 1}\varepsilon^{k-2}\mathcal{F}^{[k]},\tag{3.24}$$

则拟 Miura 变换(3.22) 给出了 M 的主方程簇的 tau 覆盖(1.88)的形如

$$\varepsilon\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial t^{j,q}}=\mathcal{F}_{j,q},\quad \varepsilon\frac{\partial\mathcal{F}_{i,p}}{\partial t^{j,q}}=\hat{\Omega}_{i,p;j,q},\quad \frac{\partial w^\alpha}{\partial t^{j,q}}=\eta^{\alpha\gamma}\partial_x\hat{\Omega}_{\gamma,0;j,q}\tag{3.25}$$

的形变, 其中函数 $\hat{\Omega}_{i,p;j,q}=\hat{\Omega}_{i,p;j,q}(w;w_x,\dots)$ 由

$$\hat{\Omega}_{i,p;j,q}=\left(\Omega_{i,p;j,q}(v)+\varepsilon^2\frac{\partial^2\Delta\mathcal{F}}{\partial t^{i,p}\partial t^{j,q}}\right)\bigg|_{v\to v(w,w_x,\dots)}\tag{3.26}$$

所定义. 主方程簇的 tau 覆盖的上述形变也具有 Virasoro 对称, 其形如

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial s} = \varepsilon^{-2}\frac{\partial f}{\partial s} + \sum_{k\geq 1}\varepsilon^{k-2}\sum_{r\geq 1}\frac{\partial \mathcal{F}^{[k]}}{\partial v^{\zeta,r}}\partial_x^r\frac{\partial v^\zeta}{\partial s}, \tag{3.27}$$

$$\frac{\partial \mathcal{F}_{i,p}}{\partial s} = \varepsilon\frac{\partial}{\partial t^{i,p}}\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial s}, \tag{3.28}$$

$$\frac{\partial w^\alpha}{\partial s} = \eta^{\alpha\gamma}\varepsilon^2\partial_x\partial_{t^{\gamma,0}}\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial s}, \tag{3.29}$$

其中 $\frac{\partial}{\partial s} = \sum_{m\geq -1}\frac{1}{\lambda^{m+2}}\frac{\partial}{\partial s_m}$.

如果上述 Virasoro 对称在形变后的主方程簇(3.23)的 tau 函数

$$\tau = \exp\left(\mathcal{F}\right) \tag{3.30}$$

的作用形如

$$\frac{\partial \tau}{\partial s_m} = L_m(\varepsilon^{-1}\mathbf{t}, \varepsilon\frac{\partial}{\partial \mathbf{t}})\tau, \quad m \geq -1, \tag{3.31}$$

其中 Virasoro 算子 $L_m(\varepsilon^{-1}\mathbf{t}, \varepsilon\frac{\partial}{\partial \mathbf{t}})$ 由(3.8)所定义, 则称拟 Miura 变换(3.22)将 Virasoro 对称**线性化**. 容易验证, **线性化条件** (3.31)可改写为

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial s} =& \varepsilon^2\sum_{(i,p),(j,q)\in\mathcal{I}}a^{i,p;j,q}(\lambda)\left(\frac{\partial^2\mathcal{F}}{\partial t^{i,p}\partial t^{j,q}} + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t^{i,p}}\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t^{j,q}}\right)\\ &+ \sum_{(i,p),(j,q)\in\mathcal{I}}b^{i,p}_{j,q}(\lambda)t^{j,q}\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t^{i,p}} + \varepsilon^{-2}\sum_{(i,p),(j,q)\in\mathcal{I}}c_{i,p;j,q}(\lambda)t^{i,p}t^{j,q}\\ &+ \varepsilon^{-2}\sum_{p,q\in\mathbb{Z}}C_{p,q}(\lambda)t^{0,p}t^{0,q} + \frac{1}{4\lambda^2}\mathrm{tr}\left(\frac{1}{4}-\mu^2\right),\end{aligned} \tag{3.32}$$

由此自然得出如下引理:

引理 3.2. *拟 Miura 变换(3.22) 将 M 的主方程簇的 Virasoro 对称线性化, 当且仅当定义在无穷 jet 空间 $J^\infty(M)$ 上的函数 $\Delta\mathcal{F} = \sum_{k\geq 1}\varepsilon^{k-2}\mathcal{F}^{[k]}$ 满足方程*

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Delta\mathcal{F}}{\partial s} =& \mathcal{D}(\Delta\mathcal{F}) + \sum_{(i,p),(j,q)\in\mathcal{I}}a^{i,p;j,q}(\lambda)\frac{\partial^2 f}{\partial t^{i,p}\partial t^{j,q}}\\ &+ \varepsilon^2\sum_{(i,p),(j,q)\in\mathcal{I}}a^{i,p;j,q}(\lambda)\left(\frac{\partial^2\Delta\mathcal{F}}{\partial t^{i,p}\partial t^{j,q}} + \frac{\partial \Delta\mathcal{F}}{\partial t^{i,p}}\frac{\partial \Delta\mathcal{F}}{\partial t^{j,q}}\right)\end{aligned}$$

$$+\frac{1}{4\lambda^2}\mathrm{tr}\left(\frac{1}{4}-\mu^2\right), \tag{3.33}$$

其中线性微分算子 $\mathcal{D}$ 的定义如下:

$$\mathcal{D}=\sum_{(i,p),(j,q)\in\mathcal{I}}2a^{i,p;j,q}(\lambda)\frac{\partial f}{\partial t^{i,p}}\frac{\partial}{\partial t^{j,q}}+\sum_{(i,p),(j,q)\in\mathcal{I}}b^{j,q}_{i,p}(\lambda)t^{i,p}\frac{\partial}{\partial t^{j,q}}, \tag{3.34}$$

其中

$$\frac{\partial\Delta\mathcal{F}}{\partial s}=\sum_{r\geq 0}\frac{\partial\Delta\mathcal{F}}{\partial v^{\gamma,r}}\partial_x^r\frac{\partial v^\gamma}{\partial s}. \tag{3.35}$$

下述引理将给出算子 $\mathcal{D}$ 的更具体的表达式:

引理 3.3. *记 $\widetilde{M}$ 为 n 为广义 Frobenius 流形 M 的 $(n+2)$ 维相伴 Frobenius 流形, 任意取定 $\widetilde{M}$ 的一组线性无关的周期 $\{\tilde{p}_0,\tilde{p}_1,\ldots,\tilde{p}_{n+1}\}$, 并记与之相应的 Gram 矩阵为 $\widetilde{G}=(\widetilde{G}^{ij})$. 则对无穷 jet 空间 $J^\infty(M)$ 上的任意函数 $\Delta\mathcal{F}$, 如下关系成立:*

$$\begin{aligned}\mathcal{D}(\Delta\mathcal{F})=&\frac{\partial\Delta\mathcal{F}}{\partial s}+\sum_{s\geq 0}\frac{\partial\Delta\mathcal{F}}{\partial v^{\gamma,s}}\partial_x^s\left(\frac{1}{E-\lambda e}\right)^\gamma-\frac{1}{\lambda}\sum_{s\geq 1}\frac{\partial\Delta\mathcal{F}}{\partial v^{\gamma,s}}s\partial_x^s e^\gamma\\&+\sum_{s\geq 1}\frac{\partial\Delta\mathcal{F}}{\partial v^{\gamma,s}}\sum_{k=1}^{s}\binom{s}{k}\left((\partial_x^{k-1}\tilde{\partial}_0\tilde{p}_i)\widetilde{G}^{ij}\left(\partial_x^{s+1-k}\tilde{\partial}^\gamma\tilde{p}_j\right)\right)\Big|_M.\end{aligned} \tag{3.36}$$

特别注意, 上述公式(3.36) 与 $\widetilde{M}$ 的周期 $\{\tilde{p}_i\}$ 的选取无关; 特别地, 当 $\tilde{\mu}$ 不含半整数特征值时, 可取 $\{\tilde{p}_i\}$ 为拉普拉斯型积分(2.18)所给出的那组周期.

证明. 这里只对 $\tilde{\mu}$ 不含半整数特征值的非共振情形进行证明, 一般情形的证明完全类似. 沿用(2.49)与(2.62)式所定义的 $\widetilde{S}_i=\widetilde{S}_i(\mathbf{t},\frac{\partial f}{\partial\mathbf{t}};\lambda)$, 由拉普拉斯型积分与拓展 Virasoro 系数之间的关系(2.96)可知

$$\begin{aligned}\mathcal{D}(\Delta\mathcal{F})=&\left[\frac{\partial\widetilde{S}_i}{\partial\lambda}\widetilde{G}^{ij}\left(\int_0^\infty\frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{z}}\mathrm{e}^{-\lambda z}\sum_{p\geq 0}\left(\frac{\partial\Delta\mathcal{F}}{\partial t^{0,p}},\frac{\partial\Delta\mathcal{F}}{\partial t^{\bullet,p}},0\right)z^{p+1}z^{\tilde{\mu}}z^{\widetilde{R}}\right)_j\right]_-\\&+\left[\frac{\partial\widetilde{S}_i}{\partial\lambda}\widetilde{G}^{ij}\left(\int_0^\infty\frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{z}}\mathrm{e}^{-\lambda z}\sum_{p\geq 0}\left(\frac{\partial\Delta\mathcal{F}}{\partial t^{0,-p-1}},\mathbf{0},0\right)z^{-p}z^{\tilde{\mu}}z^{\widetilde{R}}\right)_j\right]_-.\end{aligned} \tag{3.37}$$

利用(1.123)–(1.125)以及(2.64)式，可将(3.37)右边的第一项改写为

$$\begin{aligned}
&\left[\frac{\partial \widetilde{S}_i}{\partial \lambda}\widetilde{G}^{ij}\left(\int_0^{\infty}\frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{z}}\mathrm{e}^{-\lambda z}\sum_{p\geq 0}\left(\frac{\partial \Delta\mathcal{F}}{\partial t^{0,p}},\frac{\partial \Delta\mathcal{F}}{\partial t^{\bullet,p}},0\right)z^{p+1}z^{\tilde{\mu}}z^{\widetilde{R}}\right)_j\right]_-\\
&=\sum_{s\geq 0}\frac{\partial \Delta\mathcal{F}}{\partial v^{\gamma,s}}\left[\frac{\partial \widetilde{S}_i}{\partial \lambda}\widetilde{G}^{ij}\left(\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{z}}\mathrm{e}^{-\lambda z}\sum_{p\geq 0}\partial_x^s\left(\frac{\partial v^{\gamma}}{\partial t^{0,p}},\frac{\partial v^{\gamma}}{\partial t^{\bullet,p}},0\right)z^{p+1}z^{\tilde{\mu}}z^{\widetilde{R}}\right)_j\right]_-\\
&=\sum_{s\geq 0}\frac{\partial \Delta\mathcal{F}}{\partial v^{\gamma,s}}\left[\frac{\partial \widetilde{S}_i}{\partial \lambda}\widetilde{G}^{ij}\left(\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{z}}\mathrm{e}^{-\lambda z}\partial_x^{s+1}\left(\partial^{\gamma}\theta_0(z)-e^{\gamma},\partial^{\gamma}\theta_{\bullet}(z),0\right)z^{\tilde{\mu}}z^{\widetilde{R}}\right)_j\right]_-\\
&=\sum_{s\geq 0}\frac{\partial \Delta\mathcal{F}}{\partial v^{\gamma,s}}\left[\frac{\partial \widetilde{S}_j}{\partial \lambda}\widetilde{G}^{ij}\partial_x^{s+1}\left(\tilde{\partial}^{\gamma}\tilde{p}_j\right)\Big|_M\right]_-\\
&=\sum_{s\geq 0}\frac{\partial \Delta\mathcal{F}}{\partial v^{\gamma,s}}\partial_x^s\left[\frac{\partial \widetilde{S}_i}{\partial \lambda}\widetilde{G}^{ij}\partial_x\left(\tilde{\partial}^{\gamma}\tilde{p}_j\right)\Big|_M\right]_-\\
&\quad-\sum_{s\geq 1}\frac{\partial \Delta\mathcal{F}}{\partial v^{\gamma,s}}\sum_{k=1}^{s}\binom{s}{k}\left[\left(\partial_x^k\frac{\partial \widetilde{S}_i}{\partial \lambda}\right)\widetilde{G}^{ij}\partial_x^{s+1-k}\left(\tilde{\partial}^{\gamma}\tilde{p}_j\right)\Big|_M\right]_-\\
&=\sum_{s\geq 0}\frac{\partial \Delta\mathcal{F}}{\partial v^{\gamma,s}}\partial_x^s\left[\frac{\partial \widetilde{S}_i}{\partial \lambda}\widetilde{G}^{ij}\partial_x\left(\tilde{\partial}^{\gamma}\tilde{p}_j\right)\Big|_M\right]_-\\
&\quad+\sum_{s\geq 1}\frac{\partial \Delta\mathcal{F}}{\partial v^{\gamma,s}}\sum_{k=1}^{s}\binom{s}{k}\left(\left(\partial_x^{k-1}\tilde{\partial}_0\tilde{p}_i\right)\widetilde{G}^{ij}\left(\partial_x^{s+1-k}\tilde{\partial}^{\gamma}\tilde{p}_j\right)\right)\Big|_M.
\end{aligned}\tag{3.38}$$

类似地, 由(2.74)与(2.60)式可将(3.37)右边的第二项改写为

$$\begin{aligned}
&\left[\frac{\partial \widetilde{S}_i}{\partial \lambda}\widetilde{G}^{ij}\left(\int_0^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{-\lambda z}}{\sqrt{z}}\sum_{p\geq 0}\left(\frac{\partial \Delta\mathcal{F}}{\partial t^{0,-p-1}};\mathbf{0};0\right)z^{-p}z^{\tilde{\mu}}z^{\widetilde{R}}\right)_j\right]_-\\
&=\left[\frac{\partial \widetilde{S}_{n+1}}{\partial \lambda}\widetilde{G}^{n+1,0}\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-\lambda z}\sum_{p\geq 0}\frac{\partial \Delta\mathcal{F}}{\partial t^{0,-p-1}}z^{-p-\frac{d}{2}-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}z\right]_-\\
&=\sum_{s\geq 0}\frac{\partial \Delta\mathcal{F}}{\partial v^{\gamma,s}}\left[\frac{\partial \widetilde{S}_{n+1}}{\partial \lambda}\widetilde{G}^{n+1,0}\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-\lambda z}\partial_x^s\left(\partial_x\partial^{\gamma}\theta_{0,-p}\right)z^{-p-\frac{d}{2}-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}z\right]_-\\
&=\sum_{s\geq 0}\frac{\partial \Delta\mathcal{F}}{\partial v^{\gamma,s}}\partial_x^s\left[\frac{\partial \widetilde{S}_{n+1}}{\partial \lambda}\widetilde{G}^{n+1,0}\partial_x\partial^{\gamma}\xi(\lambda)\right]_-
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&-\sum_{s\ge 1}\frac{\partial\Delta\mathcal{F}}{\partial v^{\gamma,s}}\sum_{k=1}^{s}\binom{s}{k}\left[\left(\partial_x^k\frac{\partial\widetilde{S}_{n+1}}{\partial\lambda}\widetilde{G}^{n+1,0}\left(\partial_x^{s+1-k}\partial^\gamma\xi(\lambda)\right)\right)\right]_-\\
&=\sum_{s\ge 0}\frac{\partial\Delta\mathcal{F}}{\partial v^{\gamma,s}}\partial_x^s\left[\frac{\partial\widetilde{S}_{n+1}}{\partial\lambda}\widetilde{G}^{n+1,0}\partial_x\partial^\gamma\xi(\lambda)\right]_-\\
&\quad-\sum_{s\ge 1}\frac{\partial\Delta\mathcal{F}}{\partial v^{\gamma,s}}\binom{s}{1}\left[-\lambda^{-\frac{d}{2}-\frac{1}{2}}\Gamma\left(\frac{d}{2}+\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{-1}{\pi}\cos\frac{\pi d}{2}\cdot\partial_x^s\partial^\gamma\xi(\lambda)\right]_-\\
&=\sum_{s\ge 0}\frac{\partial\Delta\mathcal{F}}{\partial v^{\gamma,s}}\partial_x^s\left[\frac{\partial\widetilde{S}_{n+1}}{\partial\lambda}\widetilde{G}^{n+1,0}\partial_x\partial^\gamma\xi(\lambda)\right]_- -\frac{1}{\lambda}\sum_{s\ge 1}\frac{\partial\Delta\mathcal{F}}{\partial v^{\gamma,s}}s\partial_x^s e^\gamma. \qquad (3.39)
\end{aligned}
$$

最后再由(2.59)式, 可得

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{D}(\Delta\mathcal{F})\\
&=\sum_{s\ge 0}\frac{\partial\Delta\mathcal{F}}{\partial v^{\gamma,s}}\partial_x^s\left[\frac{\partial\widetilde{S}_i}{\partial\lambda}\widetilde{G}^{ij}\partial_x\left(\tilde{\partial}^\gamma\tilde{p}_j\right)\Big|_M\right]_- +\sum_{s\ge 0}\frac{\partial\Delta\mathcal{F}}{\partial v^{\gamma,s}}\partial_x^s\left[\frac{\partial\widetilde{S}_{n+1}}{\partial\lambda}\widetilde{G}^{n+1,0}\partial_x\partial^\gamma\xi(\lambda)\right]_-\\
&\quad+\sum_{s\ge 1}\frac{\partial\Delta\mathcal{F}}{\partial v^{\gamma,s}}\sum_{k=1}^{s}\binom{s}{k}\left(\left(\partial_x^{k-1}\tilde{\partial}_0\tilde{p}_i\right)\widetilde{G}^{ij}\left(\partial_x^{s+1-k}\tilde{\partial}^\gamma\tilde{p}_j\right)\right)\Big|_M-\frac{1}{\lambda}\sum_{s\ge 1}\frac{\partial\Delta\mathcal{F}}{\partial v^{\gamma,s}}s\partial_x^s e^\gamma\\
&=\sum_{s\ge 0}\frac{\partial\Delta\mathcal{F}}{\partial v^{\gamma,s}}\partial_x^s\left[\frac{\partial v^\gamma}{\partial s}+\left(\frac{1}{E-\lambda e}\right)^\gamma\right]-\frac{1}{\lambda}\sum_{s\ge 1}\frac{\partial\Delta\mathcal{F}}{\partial v^{\gamma,s}}s\partial_x^s e^\gamma\\
&\quad+\sum_{s\ge 1}\frac{\partial\Delta\mathcal{F}}{\partial v^{\gamma,s}}\sum_{k=1}^{s}\binom{s}{k}\left(\left(\partial_x^{k-1}\tilde{\partial}_0\tilde{p}_i\right)\widetilde{G}^{ij}\left(\partial_x^{s+1-k}\tilde{\partial}^\gamma\tilde{p}_j\right)\right)\Big|_M\\
&=\frac{\partial\Delta\mathcal{F}}{\partial s}+\sum_{s\ge 0}\frac{\partial\Delta\mathcal{F}}{\partial v^{\gamma,s}}\partial_x^s\left(\frac{1}{E-\lambda e}\right)^\gamma-\frac{1}{\lambda}\sum_{s\ge 1}\frac{\partial\Delta\mathcal{F}}{\partial v^{\gamma,s}}s\partial_x^s e^\gamma\\
&\quad+\sum_{s\ge 1}\frac{\partial\Delta\mathcal{F}}{\partial v^{\gamma,s}}\sum_{k=1}^{s}\binom{s}{k}\left((\partial_x^{k-1}\tilde{\partial}_0\tilde{p}_i)\widetilde{G}^{ij}\left(\partial_x^{s+1-k}\tilde{\partial}^\gamma\tilde{p}_j\right)\right)\Big|_M. \qquad (3.40)
\end{aligned}
$$

综上, 本引理证毕. □

沿用 [26] 中的记号, 这里也类似引入**星乘** (star product) 运算 $*$ 如下:

$$
\left(\sum_{k\ge 0}\theta_{i_k,p_k}\lambda^{-k+s}\right)*\left(\sum_{\ell\ge 0}\theta_{j_\ell,q_\ell}\lambda^{-\ell+t}\right)=\sum_{m\ge 0}\left(\sum_{k=0}^{m}\Omega_{i_k,p_k;j_{m-k},q_{m-k}}\right)\lambda^{-m+s+t} \qquad (3.41)
$$

其中 $(i_k,p_k),(j_\ell,q_\ell)\in\mathcal{I}$, $s,t\in\mathbb{C}$. 特别地有 $\theta_{i,p}*\theta_{j,q}=\Omega_{i,p;j,q}$. 注意到正则周期 $p_\alpha^{(\nu)}(\lambda)$ 是形如 $\sum_{k\geq 0}\theta_{i_k,p_k}\lambda^{-k+s}$ 的项的线性组合, 其中 $s\in\mathbb{C}$ 是特定的常数, 从而 $\dfrac{\partial p_\alpha^{(\nu)}}{\partial\lambda}*\dfrac{\partial p_\beta^{(-\nu)}}{\partial\lambda}$ 是良定的. 此外, 由(1.84)可知星乘运算满足如下性质: 若 $f(v;\lambda)$ 与 $g(v;\lambda)$ 是形如 $\sum_{k\geq 0}\theta_{i_k,p_k}\lambda^{-k+s}$ 的函数, 则

$$\nabla(f*g)=\nabla f\cdot\nabla g, \tag{3.42}$$

其中 ∇ 是关于度量 η 的梯度算子, 等号右边的 $\cdot$ 是切空间上 Frobenius 代数结构中的乘法运算.

定理 3.4. *线性化条件(3.31)成立, 当且仅当 $\Delta\mathcal{F}$ 满足如下偏微分方程:*

$$\begin{aligned}
&\sum_{s\geq 0}\frac{\partial\Delta\mathcal{F}}{\partial v^{\gamma,s}}\partial_x^s\left(\frac{1}{E-\lambda e}\right)^\gamma-\frac{1}{\lambda}\sum_{s\geq 1}\frac{\partial\Delta\mathcal{F}}{\partial v^{\gamma,s}}s\partial_x^s e^\gamma\\
&+\sum_{s\geq 1}\frac{\partial\Delta\mathcal{F}}{\partial v^{\gamma,s}}\sum_{k=1}^{s}\binom{s}{k}\left(\left((\partial_x^{k-1}\tilde\partial_0\tilde p_i\right)\widetilde{G}^{ij}\left(\partial_x^{s+1-k}\tilde\partial^\gamma\tilde p_j\right)\right)\Big|_M\\
=&\frac{\varepsilon^2}{2}\sum_{k,\ell\geq 0}\left(\frac{\partial\Delta\mathcal{F}}{\partial v^{\alpha,k}}\frac{\partial\Delta\mathcal{F}}{\partial v^{\beta,\ell}}+\frac{\partial^2\Delta\mathcal{F}}{\partial v^{\alpha,k}\partial v^{\beta,\ell}}\right)(\partial_x^{k+1}\partial^\alpha p_\omega)G^{\omega\rho}(\partial_x^{\ell+1}\partial^\beta p_\rho)\\
&+\frac{\varepsilon^2}{2}\sum_{k\geq 0}\frac{\partial\Delta\mathcal{F}}{\partial v^{\alpha,k}}\partial_x^{k+1}\left[\nabla\frac{\partial p_\omega}{\partial\lambda}\cdot\nabla\frac{\partial p_\rho}{\partial\lambda}\cdot v_x\right]^\alpha G^{\omega\rho}\\
&+\frac{1}{2}G^{\alpha\beta}\frac{\partial p_\alpha}{\partial\lambda}*\frac{\partial p_\beta}{\partial\lambda}-\frac{1}{4\lambda^2}\mathrm{tr}\left(\frac{1}{4}-\mu^2\right),
\end{aligned}\tag{3.43}$$

其中星乘运算 $*$ 的定义见 (3.41)式, $\{\tilde p_i\}$ 是 $\widetilde{M}$ 的任意一组线性无关的周期, $\widetilde{G}=(\widetilde{G}^{ij})$ 是与之相应的 Gram 矩阵; $\{p_\alpha\}$ 是 M 的任意一组线性无关的周期, $G=(G^{\alpha\beta})$ 是与之相应的 Gram 矩阵.

方程(3.43)称为广义 Frobenius 流形 M 的**圈方程** (loop equation). 注意圈方程 (3.43) 与 $M,\widetilde{M}$ 的周期的选取均无关, 从而在非共振情形 (即 $\tilde\mu$ 不含半整数特征值) 可以将 p_α 与 $\tilde p_i$ 分别取为由拉普拉斯型积分 (2.16)与(2.18) 所给出的周期.

证明. 这里仅证明 $\tilde\mu$ 不含半整数特征值的情形; 一般情形的证明完全类似. 由

引理3.2与引理3.3可知, 线性化条件(3.31)成立当且仅当 $\Delta\mathcal{F}$ 满足如下方程:

$$\begin{aligned}0 =& \sum_{s\geq 0}\frac{\partial\Delta\mathcal{F}}{\partial v^{\gamma,s}}\partial_x^s\left(\frac{1}{E-\lambda e}\right)^\gamma - \frac{1}{\lambda}\sum_{s\geq 1}\frac{\partial\Delta\mathcal{F}}{\partial v^{\gamma,s}}s\partial_x^s e^\gamma \\ &+ \sum_{s\geq 1}\frac{\partial\Delta\mathcal{F}}{\partial v^{\gamma,s}}\sum_{k=1}^{s}\binom{s}{k}\left((\partial_x^{k-1}\tilde{\partial}_0\tilde{p}_i)\widetilde{G}^{ij}\left(\partial_x^{s+1-k}\tilde{\partial}^\gamma\tilde{p}_j\right)\right)\Big|_M \\ &+ \varepsilon^2\sum_{(i,p),(j,q)\in\mathcal{I}} a^{i,p;j,q}(\lambda)\left(\frac{\partial\Delta\mathcal{F}}{\partial t^{i,p}}\frac{\partial\Delta\mathcal{F}}{\partial t^{j,q}} + \frac{\partial^2\Delta\mathcal{F}}{\partial t^{i,p}\partial t^{j,q}}\right) \\ &+ \sum_{(i,p),(j,q)\in\mathcal{I}} a^{i,p;j,q}(\lambda)\frac{\partial^2\mathcal{F}_0}{\partial t^{i,p}\partial t^{j,q}} + \frac{1}{4\lambda^2}\mathrm{tr}\left(\frac{1}{4}-\mu^2\right).\end{aligned} \tag{3.44}$$

而由(2.96)可得

$$\begin{aligned}&\varepsilon^2\sum_{(i,p),(j,q)\in\mathcal{I}} a^{i,p;j,q}(\lambda)\frac{\partial\Delta\mathcal{F}}{\partial t^{i,p}}\frac{\partial\Delta\mathcal{F}}{\partial t^{j,q}} \\ =& -\frac{\varepsilon^2}{2}\Bigg[\left(\int_0^\infty\frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{z}}\mathrm{e}^{-\lambda z}\sum_{p\geq 0}\left(\frac{\partial\Delta\mathcal{F}}{\partial t^{0,p}},\frac{\partial\Delta\mathcal{F}}{\partial t^{\bullet,p}},0\right)z^{p+1}z^{\tilde{\mu}}z^{\widetilde{R}}\right)_i\widetilde{G}^{ij} \\ &\times\left(\int_0^\infty\frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{z}}\mathrm{e}^{-\lambda z}\sum_{q\geq 0}\left(\frac{\partial\Delta\mathcal{F}}{\partial t^{0,q}},\frac{\partial\Delta\mathcal{F}}{\partial t^{\bullet,q}},0\right)z^{q+1}z^{\tilde{\mu}}z^{\widetilde{R}}\right)_j\Bigg]_- \\ =& -\frac{\varepsilon^2}{2}\sum_{k,\ell\geq 0}\frac{\partial\Delta\mathcal{F}}{\partial v^{\alpha,k}}\frac{\partial\Delta\mathcal{F}}{\partial v^{\beta,\ell}}\left(\left(\partial_x^{k+1}\tilde{\partial}^\alpha\tilde{p}_i\right)\widetilde{G}^{ij}\left(\partial_x^{\ell+1}\tilde{\partial}^\beta\tilde{p}_j\right)\right)\Big|_M \\ =& -\frac{\varepsilon^2}{2}\sum_{k,\ell\geq 0}\frac{\partial\Delta\mathcal{F}}{\partial v^{\alpha,k}}\frac{\partial\Delta\mathcal{F}}{\partial v^{\beta,\ell}}\left(\partial_x^{k+1}\partial^\alpha p_\omega\right)G^{\omega\rho}\left(\partial_x^{\ell+1}\partial^\beta p_\rho\right).\end{aligned} \tag{3.45}$$

同样方法, 也可直接验证等式

$$\begin{aligned}&\varepsilon^2\sum_{(i,p),(j,q)\in\mathcal{I}} a^{i,p;j,q}(\lambda)\frac{\partial^2\Delta\mathcal{F}}{\partial t^{i,p}\partial t^{j,q}} \\ =& -\frac{\varepsilon^2}{2}\sum_{k,\ell\geq 0}\frac{\partial^2\Delta\mathcal{F}}{\partial v^{\alpha,k}\partial v^{\beta,\ell}}\left(\partial_x^{k+1}\partial^\alpha p_\omega\right)G^{\omega\rho}\left(\partial_x^{\ell+1}\partial^\beta p_\rho\right) \\ &-\frac{\varepsilon^2}{2}\sum_{k\geq 0}\frac{\partial\Delta\mathcal{F}}{\partial v^{\alpha,k}}\partial_x^{k+1}\left[\nabla\frac{\partial p_\omega}{\partial\lambda}\cdot\nabla\frac{\partial p_\rho}{\partial\lambda}\cdot v_x\right]^\alpha G^{\omega\rho},\end{aligned} \tag{3.46}$$

与

$$
\begin{aligned}
&\sum_{(i,p),(j,q)\in\mathcal{I}} a^{i,p;j,q}(\lambda)\frac{\partial^2 f}{\partial t^{i,p}\partial t^{j,q}}\\
=&\sum_{(i,p),(j,q)\in\mathcal{I}} a^{i,p;j,q}(\lambda)\theta_{i,p}*\theta_{j,q}=-\frac{1}{2}G^{\alpha\beta}\frac{\partial p_\alpha}{\partial\lambda}*\frac{\partial p_\beta}{\partial\lambda}. \qquad (3.47)
\end{aligned}
$$

成立. 综上所述, 本定理得证. □

3.3 广义 Frobenius 流形的拟周期与圈方程的最终化简形式

本节将化简广义 Frobenius 流形的圈方程(3.43)式等号右边的

$$
\left(\left((\partial_x^{k-1}\tilde{\partial}_0\tilde{p}_i\right)\widetilde{G}^{ij}\left(\partial_x^{s+1-k}\tilde{\partial}^\gamma\tilde{p}_j\right)\right)\Big|_M \qquad (3.48)
$$

项, 使得圈方程的最终表达式中不再显含与 $(n+2)$ 维相伴 Frobenius 流形 $\widetilde{M}$ 有关的量. 注意圈方程(3.43)实际上与 M, $\widetilde{M}$ 的周期选取无关, 从而可以通过特殊选取 $\widetilde{M}$ 的一组周期来实现此化简.

命题 3.5. *对于 n 维广义 Frobenius 流形 M, 存在 M 的一组线性无关的周期 $p_1(v;\lambda),\dots,p_n(v;\lambda)$, 使得这组周期满足如下的拟齐次性条件:*

$$
\left(\partial_E+\lambda\frac{\partial}{\partial\lambda}\right)\nabla p_\alpha+\left(\mu+\frac{1}{2}\right)\nabla p_\alpha=0, \qquad (3.49)
$$

$$
\left(\partial_E+\lambda\frac{\partial}{\partial\lambda}\right)\frac{\partial p_\alpha}{\partial\lambda}+\frac{1+d}{2}\frac{\partial p_\alpha}{\partial\lambda}=0. \qquad (3.50)
$$

*M 的额外满足上述条件的周期称为***拟齐次周期**.

证明. 设 $p(v;\lambda)$ 是 Gauss-Manin 方程 (2.5) (2.7)的解, 则

$$
\begin{aligned}
\partial_E\nabla p=E^\alpha\partial_\alpha\nabla p&=-\mathcal{U}(\mathcal{U}-\lambda I)^{-1}\left(\mu+\frac{1}{2}\right)\nabla p\\
&=-\left(\mu+\frac{1}{2}\right)\nabla p-\lambda(\mathcal{U}-\lambda I)^{-1}\left(\mu+\frac{1}{2}\right)\nabla p\\
&=-\lambda\frac{\partial}{\partial\lambda}\nabla p-\left(\mu+\frac{1}{2}\right)\nabla p, \qquad (3.51)
\end{aligned}
$$

因此等式(3.49)对任何周期 $p(v;\lambda)$ 总是自动成立. 由此可知, $\forall\,\alpha=1,\dots,n$, 有

$$
\begin{aligned}
&\partial^\alpha\left[\left(\partial_E+\lambda\frac{\partial}{\partial\lambda}\right)\frac{\partial p}{\partial\lambda}\right]\\
&=\left(\frac{2-d}{2}+\mu_\alpha\right)\frac{\partial}{\partial\lambda}\partial^\alpha p+\left(\partial_E+\lambda\frac{\partial}{\partial\lambda}\right)\frac{\partial}{\partial\lambda}\partial^\alpha p\\
&=\left(-\frac{d}{2}+\mu_\alpha\right)\frac{\partial}{\partial\lambda}\partial^\alpha p+\frac{\partial}{\partial\lambda}\left[\left(\partial_E+\lambda\frac{\partial}{\partial\lambda}\right)\partial^\alpha p\right]\\
&=\partial^\alpha\left(-\frac{d+1}{2}\frac{\partial p}{\partial\lambda}\right),
\end{aligned}
\tag{3.52}
$$

因此存在仅依赖于参数 λ 的函数 $c=c(\lambda)$ 使得

$$
\left(\partial_E+\lambda\frac{\partial}{\partial\lambda}\right)\frac{\partial p}{\partial\lambda}+\frac{1+d}{2}\frac{\partial p}{\partial\lambda}=c(\lambda). \tag{3.53}
$$

任取如下欧拉型的常微分方程

$$
\lambda y'(\lambda)+\frac{1+d}{2}y(\lambda)=c(\lambda) \tag{3.54}
$$

的解 $y=y(\lambda)$, 并考虑替换

$$
p\mapsto\hat{p}:=p-\int y(\lambda)\,\mathrm{d}\lambda, \tag{3.55}
$$

则 $\hat{p}$ 仍然满足 Gauss-Manin 方程(2.5)(2.7), 并额外满足拟齐次性条件(3.50). 综上所述, 本命题得证. □

注释 3.6. *同时满足 Gauss-Manin 方程(2.5)(2.7) 与拟齐次性条件(3.50)的函数 $p(v;\lambda)$ 依然有如下自由度:*

$$
p(v;\lambda)\mapsto p(v;\lambda)+a\lambda^{\frac{1-d}{2}}+b, \tag{3.56}
$$

其中 a,b 是任意常数. 还要注意, 由拉普拉斯型积分(2.16)所给出的周期不一定是拟齐次的.

注释 3.7. *如果 M 具有平坦单位向量场 $e=\frac{\partial}{\partial v^1}$, 则 $\mu_1=-\frac{d}{2}$. 此时容易证明, 任何满足条件 $\frac{\partial}{\partial\lambda}p=-\partial_e p$ 的周期 $p(v;\lambda)$ 一定是拟齐次的. 因此, 拟齐次性条件 (3.49)(3.50) 是通常 (单位向量场平坦的)Frobenius 流形的周期的附加条件 $\frac{\partial}{\partial\lambda}p=-\partial_e p$ 的推广.*

注释 3.8. 如果 M 的周期 $p(v;\lambda)$ 是拟齐次的, 则对任意 $\alpha=1,2,\ldots,n$ 都成立

$$\partial^\alpha\left[\left(\partial_E+\lambda\frac{\partial}{\partial\lambda}+\frac{d-1}{2}\right)p\right]=\frac{\partial}{\partial\lambda}\left[\left(\partial_E+\lambda\frac{\partial}{\partial\lambda}+\frac{d-1}{2}\right)p\right]=0,\tag{3.57}$$

从而

$$\left(\partial_E+\lambda\frac{\partial}{\partial\lambda}+\frac{d-1}{2}\right)p=\text{常数}.\tag{3.58}$$

如果 M 的 *charge* $d\neq 1$, 则可适当调整(3.56)式中的参数 b, 使得(3.58)式右边的常数项为零.

接下来, 本文将介绍如何从 M 的一组线性无关的拟齐次周期出发来构造 $\widetilde{M}$ 的一组线性无关的周期 $\tilde{p}_0,\ldots,\tilde{p}_{n+1}$, 并且这组周期还满足 $\frac{\partial}{\partial\lambda}\tilde{p}_i=-\partial_{\tilde{e}}\tilde{p}_i$, $\forall i=0,1,\ldots,n+1$, 其中 $\tilde{e}=\frac{\partial}{\partial v^0}$ 为 $\widetilde{M}$ 的 (平坦) 单位向量场, 从而周期 $\tilde{p}_i$ 也是拟齐次的.

引理 3.9. 设 $p_1(v;\lambda),\ldots,p_n(v;\lambda)$ 是广义 *Frobenius* 流形 M 的一族线性无关的周期, $Q=Q(v;\lambda)$ 是 $M\times\mathbb{C}$ 上的函数, 则 $\widetilde{M}$ 上的如下定义的函数 $\tilde{p}_0,\ldots,\tilde{p}_{n+1}$

$$\tilde{p}_0(v^0,v,v^{n+1};\lambda)=Q(v;\lambda-v^0)+v^{n+1}(\lambda-v^0)^{\frac{d-1}{2}},\tag{3.59}$$

$$\tilde{p}_\alpha(v^0,v,v^{n+1};\lambda)=p_\alpha(v;\lambda-v^0),\tag{3.60}$$

$$\tilde{p}_{n+1}(v^0,v,v^{n+1};\lambda)=\begin{cases}(\lambda-v^0)^{\frac{1-d}{2}} & \text{如果}\quad d\neq 1\\ \log(\lambda-v^0) & \text{如果}\quad d=1\end{cases}\tag{3.61}$$

构成 $\widetilde{M}$ 的一组线性无关的周期, 当且仅当 M 的周期 $p_1,\ldots,p_n$ 是拟齐次的, 并且函数 $Q(v;\lambda)$ 满足如下微分方程组:

$$(\mathcal{U}-\lambda I)\partial_\gamma\nabla Q=-\mathcal{C}_\gamma\left(\mu+\frac{1}{2}\right)\nabla Q+\frac{d-1}{2}\lambda^{\frac{d-1}{2}}\partial_\gamma,\tag{3.62}$$

$$(\mathcal{U}-\lambda I)\frac{\partial}{\partial\lambda}\nabla Q=\left(\mu+\frac{1}{2}\right)\nabla Q-\frac{d-1}{2}\lambda^{\frac{d-3}{2}}E,\tag{3.63}$$

$$\left(\partial_E+\lambda\frac{\partial}{\partial\lambda}\right)\nabla Q+\left(\mu+\frac{1}{2}\right)\nabla Q=0,\tag{3.64}$$

$$\left(\partial_E+\lambda\frac{\partial}{\partial\lambda}\right)\frac{\partial Q}{\partial\lambda}+\frac{d+1}{2}\frac{\partial Q}{\partial\lambda}=0.\tag{3.65}$$

证明. 直接将上述 $\tilde{p}_0,\ldots,\tilde{p}_{n+1}$ 代入 $\widetilde{M}$ 的周期所应该满足的 Gauss-Manin 方程即可, 计算过程从略, 本引理证毕. □

注意到, 线性 (非齐次) 微分方程组(3.62)(3.63) 的齐次部分恰为周期所应满足的 Gauss-Manin 方程(2.5)(2.7), 因此如果 $Q(v;\lambda)$ 是方程组(3.62)(3.63) 的解, 那么对于 M 的任何周期 $p=p(v;\lambda)$, 函数 $Q+p$ 也是此方程组的解. 再注意到, 方程组(3.64)(3.65)恰好与拟齐次性条件(3.49)(3.50)相同. 因此, 对于 $d=1$ 的特殊情形, 满足上述要求的 $Q(v;\lambda)$ 可以取为 M 的任何一个拟齐次周期.

下面证明满足方程(3.62)–(3.65)的函数 $Q(v;\lambda)$ 的存在性.

引理 3.10. *存在 M 上的切向量场 $Y(v;\lambda)=Y^\alpha(v;\lambda)\partial_\alpha$, 使得*

$$(\mathcal{U}-\lambda I)\partial_\gamma Y=-\mathcal{C}_\gamma\left(\mu+\frac{1}{2}\right)Y+\frac{d-1}{2}\lambda^{\frac{d-1}{2}}\partial_\gamma, \tag{3.66}$$

$$(\mathcal{U}-\lambda I)\frac{\partial}{\partial\lambda}Y=\left(\mu+\frac{1}{2}\right)Y-\frac{d-1}{2}\lambda^{\frac{d-3}{2}}E \tag{3.67}$$

对任意 $\gamma=1,2,\ldots,n$ 均成立.

证明. 任取 M 的一组线性无关的拟齐次周期 $p_1(v;\lambda),\ldots,p_n(v;\lambda)$, 并记 $G=(G^{\alpha\beta})$ 为这组周期的 Gram 矩阵, 令

$$Y=-\lambda^{\frac{d-1}{2}}PG\left(\partial_E+\lambda\frac{\partial}{\partial\lambda}\right)p_\bullet^{\mathrm{T}}, \tag{3.68}$$

其中

$$P:=(\nabla p_1,\ldots,\nabla p_n),\quad p_\bullet=(p_1,p_2,\ldots,p_n). \tag{3.69}$$

则由(3.57)以及 P,G 的运算性质, 直接计算可以验证上述定义的切向量场 Y 满足方程(3.66)(3.67), 计算过程从略. 综上, 本引理得证. □

定理 3.11. *设 $p_1(v;\lambda),\ldots,p_n(v,\lambda)$ 是广义 Frobenius 流形 M 的一组线性无关的拟齐次周期, 向量场 $Y=Y(v;\lambda)$ 由(3.68)所给出, 则存在 $M\times\mathbb{C}$ 上的函数 $Q=Q(v;\lambda)$ 使得 $\nabla Q=Y$, 并且 Q 满足(3.64)(3.65)式. 函数 $Q(v;\lambda)$ 与 $p_\alpha(v;\lambda)$, $\alpha=1,\ldots,n$ 通过(3.59)–(3.61)式给出 $\widetilde{M}$ 的一组线性无关的周期 $\tilde{p}_i$, $i=0,\ldots,n+1$, 这组周期满足 $\dfrac{\partial}{\partial\lambda}\tilde{p}_i=-\partial_{\tilde{e}}\tilde{p}_i$. 此外, $\widetilde{M}$ 的这组周期 $\tilde{p}_i$ 的 Gram 矩阵 $\widetilde{G}=(\widetilde{G}^{ij})$ 形如*

$$\widetilde{G}=\begin{pmatrix}0&\mathbf{0}&\dfrac{2}{1-d}\\ \mathbf{0}&G&\mathbf{0}\\ \dfrac{2}{1-d}&\mathbf{0}&*\end{pmatrix},\quad \text{如果}\quad d\neq 1, \tag{3.70}$$

$$\widetilde{G}=\begin{pmatrix}0 & \mathbf{0} & 1\\ \mathbf{0} & G & \mathbf{0}\\ 1 & \mathbf{0} & *\end{pmatrix},\quad \text{如果}\quad d=1. \tag{3.71}$$

注释 3.12. 上式右边矩阵中的星号 “$*$” 是指某常数, 本文暂不关心其具体取值.

证明. 首先将(3.58)式改写为

$$\left(\partial_E+\lambda\frac{\partial}{\partial\lambda}\right)p_\bullet^{\mathrm{T}}=a_\bullet^{\mathrm{T}}+\frac{1-d}{2}p_\bullet^{\mathrm{T}}, \tag{3.72}$$

其中 $a_\bullet$ 是某个常值的 n 维行向量. 于是向量场 $Y=Y(v;\lambda)$ 满足

$$\begin{aligned}Y=&-\lambda^{\frac{d-1}{2}}PG\left(a_\bullet^{\mathrm{T}}+\frac{1-d}{2}p_\bullet^{\mathrm{T}}\right)\\ =&\nabla\left(\frac{d-1}{4}\lambda^{\frac{d-1}{2}}p_\bullet Gp_\bullet^{\mathrm{T}}-\lambda^{\frac{d-1}{2}}p_\bullet Ga_\bullet^{\mathrm{T}}\right),\end{aligned} \tag{3.73}$$

从而函数

$$Q_0(v;\lambda)=\lambda^{\frac{d-1}{2}}\left(\frac{d-1}{4}p_\bullet Gp_\bullet^{\mathrm{T}}-p_\bullet Ga_\bullet^{\mathrm{T}}\right) \tag{3.74}$$

满足 $\nabla Q_0=Y$, 进而满足方程(3.62)(3.63). 接下来, 与命题3.5的证明过程完全类似, 易知可以给 Q_0 适当加上某个特定的函数 $c=c(\lambda)$, 使得调整之后所得函数 $Q=Q_0+c(\lambda)$ 满足方程(3.62)–(3.65). 通过直接计算可知周期(3.59)–(3.61)的 Gram 矩阵 $\widetilde{G}$ 形如(3.70)或(3.71), 计算过程从略. 综上, 定理证毕. □

定义 3.2. 设 $p_1(v;\lambda),\ldots,p_n(v;\lambda)$ 是广义 *Frobenius* 流形 M 的一组线性无关的拟齐次周期, 则称由定理*3.11*所确定的函数 $Q(v;\lambda)$ 是 M 的关于 $p_1,\ldots,p_n$ 的**拟周期** *(quasi-period)*.

注释 3.13. 如果 M 具有平坦单位向量场 $e=\dfrac{\partial}{\partial v^1}$, 则对 M 的任何一组满足 $\partial_e p_\alpha=-\dfrac{\partial p_\alpha}{\partial\lambda}$ 的线性无关的周期 $p_1,\ldots,p_n$, 有

$$\begin{aligned}Y&=-\lambda^{\frac{d-1}{2}}PG\left(\partial_E+\lambda\frac{\partial}{\partial\lambda}\right)p_\bullet^{\mathrm{T}}=-\lambda^{\frac{d-1}{2}}PG\partial_{E-\lambda e}p_\bullet^{\mathrm{T}}\\ &=-\lambda^{\frac{d-1}{2}}PGP^{\mathrm{T}}\eta(E-\lambda e)=-\lambda^{\frac{d-1}{2}}(\mathcal{U}-\lambda)^{-1}(E-\lambda e)\\ &=-\lambda^{\frac{d-1}{2}}e,\end{aligned} \tag{3.75}$$

因此相应的拟周期 $Q(v;\lambda)$ 可以取为

$$Q=-\lambda^{\frac{d-1}{2}}v_1+c(\lambda) \tag{3.76}$$

其中 $c(\lambda)$ 为某个特定的关于 λ 的函数.

下面开始化简圈方程(3.43).

定理 3.14. *广义 Frobenius 流形 M 的圈方程(3.43) 可改写为如下形式:*

$$\begin{aligned}
&\sum_{s\ge 0}\frac{\partial\Delta\mathcal{F}}{\partial v^{\gamma,s}}\partial_x^s\left(\frac{1}{E-\lambda e}\right)^{\gamma}+\sum_{s\ge 1}\frac{\partial\Delta\mathcal{F}}{\partial v^{\gamma,s}}s\partial_x^s\left[\left(\partial^{\gamma}p_{\alpha}\right)G^{\alpha\beta}\left(\partial_e+\frac{\partial}{\partial\lambda}\right)p_{\beta}\right]\\
&-\sum_{s\ge 1}\frac{\partial\Delta\mathcal{F}}{\partial v^{\gamma,s}}\sum_{k=1}^{s}\binom{s}{k}\left(\partial_x^{k-1}\frac{\partial p_{\alpha}}{\partial\lambda}\right)G^{\alpha\beta}\left(\partial_x^{s+1-k}\partial^{\gamma}p_{\beta}\right)\\
=&\frac{\varepsilon^2}{2}\sum_{k,\ell\ge 0}\left(\frac{\partial\Delta\mathcal{F}}{\partial v^{\alpha,k}}\frac{\partial\Delta\mathcal{F}}{\partial v^{\beta,\ell}}+\frac{\partial^2\Delta\mathcal{F}}{\partial v^{\alpha,k}\partial v^{\beta,\ell}}\right)(\partial_x^{k+1}\partial^{\alpha}p_{\omega})G^{\omega\rho}(\partial_x^{\ell+1}\partial^{\beta}p_{\rho})\\
&+\frac{\varepsilon^2}{2}\sum_{k\ge 0}\frac{\partial\Delta\mathcal{F}}{\partial v^{\alpha,k}}\partial_x^{k+1}\left[\nabla\frac{\partial p_{\omega}}{\partial\lambda}\cdot\nabla\frac{\partial p_{\rho}}{\partial\lambda}\cdot v_x\right]^{\alpha}G^{\omega\rho}\\
&+\frac{1}{2}G^{\alpha\beta}\frac{\partial p_{\alpha}}{\partial\lambda}*\frac{\partial p_{\beta}}{\partial\lambda}-\frac{1}{4\lambda^2}\mathrm{tr}\left(\frac{1}{4}-\mu^2\right),
\end{aligned} \tag{3.77}$$

其中 $p_1,\dots,p_n$ 是 M 的任何一组线性无关的周期, $(G^{\alpha\beta})$ 是这组周期的 Gram 矩阵.

证明. 因为圈方程(3.43)与 M 的周期 $\{p_\alpha\}$ 以及 $\widetilde{M}$ 的周期 $\{\tilde{p}_i\}$ 的选取均无关, 因此不妨取 $\{p_\alpha\}$ 为 M 的一组线性无关的拟齐次周期, 取 $\{\tilde{p}_i\}$ 为 $\widetilde{M}$ 的由 $\{p_\alpha\}$ 及其拟周期 $Q(v;\lambda)$ 按照(3.59)–(3.61)所给出的那组周期. 注意 $\{\tilde{p}_i\}$ 的 Gram 矩阵 $(\widetilde{G}^{ij})$ 的表达式形如(3.70)或(3.71), 从而圈方程(3.43)的等号左边可化简为

$$\begin{aligned}
&\sum_{s\ge 0}\frac{\partial\Delta\mathcal{F}}{\partial v^{\gamma,s}}\partial_x^s\left(\frac{1}{E-\lambda e}\right)^{\gamma}-\frac{1}{\lambda}\sum_{s\ge 1}\frac{\partial\Delta\mathcal{F}}{\partial v^{\gamma,s}}s\partial_x^s e^{\gamma}-\frac{1}{\lambda^{\frac{d+1}{2}}}\sum_{s\ge 1}\frac{\partial\Delta\mathcal{F}}{\partial v^{\gamma,s}}s\partial_x^s\partial^{\gamma}Q\\
&-\sum_{s\ge 1}\frac{\partial\Delta\mathcal{F}}{\partial v^{\gamma,s}}\sum_{k=1}^{s}\binom{s}{k}\left(\partial_x^{k-1}\frac{\partial p_{\alpha}}{\partial\lambda}\right)G^{\alpha\beta}\left(\partial_x^{s+1-k}\partial^{\gamma}p_{\beta}\right).
\end{aligned} \tag{3.78}$$

再利用 $Y=\nabla Q$ 的显式表达式(3.68), 并注意公式 $PG\partial_{E-\lambda e}p_{\bullet}^{\mathrm{T}}=e$, 可得

$$-\frac{1}{\lambda}\sum_{s\ge 1}\frac{\partial\Delta\mathcal{F}}{\partial v^{\gamma,s}}s\partial_x^s e^{\gamma}-\frac{1}{\lambda^{\frac{d+1}{2}}}\sum_{s\ge 1}\frac{\partial\Delta\mathcal{F}}{\partial v^{\gamma,s}}s\partial_x^s\partial^{\gamma}Q$$

$$
\begin{aligned}
&= -\frac{1}{\lambda}\sum_{s\geq 1}\frac{\partial\Delta\mathcal{F}}{\partial v^{\gamma,s}}s\partial_x^s e^\gamma + \frac{1}{\lambda}\sum_{s\geq 1}\frac{\partial\Delta\mathcal{F}}{\partial v^{\gamma,s}}s\partial_x^s\left[PG\left(\partial_E+\lambda\frac{\partial}{\partial\lambda}\right)p_\bullet^{\mathrm{T}}\right]^\gamma \\
&= \frac{1}{\lambda}\sum_{s\geq 1}\frac{\partial\Delta\mathcal{F}}{\partial v^{\gamma,s}}s\partial_x^s\left[PG\partial_{E-\lambda e}p_\bullet^{\mathrm{T}} - e + \lambda PG\left(\partial_e+\frac{\partial}{\partial\lambda}\right)p_\bullet^{\mathrm{T}}\right]^\gamma \\
&= \sum_{s\geq 1}\frac{\partial\Delta\mathcal{F}}{\partial v^{\gamma,s}}s\partial_x^s\left[PG\left(\partial_e+\frac{\partial}{\partial\lambda}\right)p_\bullet^{\mathrm{T}}\right]^\gamma \\
&= \sum_{s\geq 1}\frac{\partial\Delta\mathcal{F}}{\partial v^{\gamma,s}}s\partial_x^s\left[\left(\partial^\gamma p_\alpha\right)G^{\alpha\beta}\left(\partial_e+\frac{\partial}{\partial\lambda}\right)p_\beta\right],
\end{aligned} \tag{3.79}
$$

因此当 $\{p_\alpha\}$ 为 M 的拟齐次周期时, 圈方程(3.43)等价于(3.77). 而另一方面, 从方程(3.77)的表达式可以看出, 此方程实际上与 M 的周期 p_α 的选取无关. 综上所述, 本定理得证. □

注释 3.15. *如果 M 具有平坦单位向量场 $e = \dfrac{\partial}{\partial v^1}$, 则圈方程(3.77) 恰好就是通常 Frobenius 流形的众所周知的圈方程, 见 [26]. 这是因为, 此时可以取 M 的一组满足 $\partial_e p_\alpha = -\dfrac{\partial}{\partial\lambda}p_\alpha$ 的线性无关的周期.*

我们今后将会证明在广义 Frobenius 流形 M 满足某种半单性条件的假设下, M 的圈方程的解存在, 且 (在相差常数意义下) 唯一. 圈方程的解给出一个拟 Miura 变换(3.22), 进而给出了广义 Frobenius 流形的主方程簇(3.23) 的一个形变. 本文的下一章将研究广义 Frobenius 流形的两个具体例子, 并断言它们的主方程簇的上述形变分别与 Hodge 积分以及 resolved conifold 在反对角作用下的等变 Gromov-Witten 不变量具有密切联系. 从而, 称广义 Frobenius 流形的主方程簇的上述形变为拓扑形变 (topological deformation).

4. 两个重要例子

本章将绍广义 Frobenius 流形的两个重要例子, 并指出它们与一些著名的可积系统, 包括 Volterra 方程簇, q-形变 KdV 方程簇以及 Abolwitz-Ladik 方程簇, 之间的关系. 这两个广义 Frobenius 流形的维数分别是 1 与 2.

4.1 q-形变 KdV 方程簇与 Volterra 方程簇

本节研究如下例子.

例子 4.1. *考察如下 1 维广义 Frobenius 流形:*

$$F = \frac{1}{12}v^4, \tag{4.1}$$

其中 $v = v^1$ 是平坦坐标, 相应的平坦度量 η, 单位向量场 e 与欧拉向量场 E 在此坐标下分别为

$$\eta = 1, \quad e = \frac{1}{2v}\partial_v, \quad E = \frac{1}{2}v\partial_v. \tag{4.2}$$

该广义 Frobenius 流形的 charge $d = 1$, 单值性数据 $\mu = R = 0$.

易知其主方程簇的哈密顿密度 $\theta_{\alpha,p}$ 可以取

$$\theta_{0,0} = \frac{1}{2}\log v, \tag{4.3}$$

$$\theta_{0,p} = \frac{2^{p-1}(2p-2)!!}{(2p)!}v^{2p}, \quad p \geq 1 \tag{4.4}$$

$$\theta_{0,-p} = (-1)^{p+1}\frac{(2p-1)!}{2^{p+1}(2p)!!}v^{-2p}, \quad p \geq 1, \tag{4.5}$$

$$\theta_{1,p} = \frac{1}{p!}\frac{v^{2p+1}}{2p+1}, \quad p \geq 0. \tag{4.6}$$

它们满足拟齐次性条件(1.63)(1.67), 其中

$$r_p^{\varepsilon} = 0, \quad c_p = \frac{1}{4}\delta_{p,0}. \tag{4.7}$$

该广义 Frobenius 流形的主方程簇(1.70)的前几串流的具体表达式为

$$\frac{\partial v}{\partial t^{0,-3}} = -\frac{15}{8v^6}v_x, \quad \frac{\partial v}{\partial t^{0,-2}} = \frac{3}{4v^4}v_x, \quad \frac{\partial v}{\partial t^{0,-1}} = -\frac{1}{2v^2}v_x, \tag{4.8}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t^{0,0}} = v_x, \quad \frac{\partial v}{\partial t^{0,1}} = 2v^2 v_x, \quad \frac{\partial v}{\partial t^{0,2}} = \frac{4}{3}v^4 v_x, \tag{4.9}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t^{1,0}} = 2vv_x, \quad \frac{\partial v}{\partial t^{1,1}} = 2v^3 v_x, \quad \frac{\partial v}{\partial t^{1,2}} = v^5 v_x. \tag{4.10}$$

主方程簇的 tau 函数 $\tau^{[0]} = \mathrm{e}^f$ 定义为

$$\frac{\partial^2 \log\tau^{[0]}}{\partial t^{\alpha,p}\partial t^{\beta,q}} = \Omega_{\alpha,p;\beta,q} = \partial_x^{-1}\frac{\partial\theta_{\alpha,p}}{\partial t^{\beta,q}}. \tag{4.11}$$

特别地, 有

$$\log v = 2\frac{\partial^2\log\tau^{[0]}}{\partial x^2}, \quad v = \frac{\partial^2\log\tau^{[0]}}{\partial x\partial t^{1,0}}. \tag{4.12}$$

该广义 Frobenius 流形的 Virasoro 算子(3.7)为

$$L_{-1}=\sum_{p\in\mathbb{Z}}t^{0,p+1}\frac{\partial}{\partial t^{0,p}}+\sum_{p\geq 0}t^{1,p+1}\frac{\partial}{\partial t^{1,p}}+\frac{1}{2}t^{1,0}t^{1,0} \tag{4.13}$$

$$L_0=\sum_{p\in\mathbb{Z}}pt^{0,p}\frac{\partial}{\partial t^{0,p}}+\sum_{p\geq 0}\left(p+\frac{1}{2}\right)t^{1,p}\frac{\partial}{\partial t^{1,p}}+\frac{1}{8}\sum_{p\in\mathbb{Z}}(-1)^p t^{0,p}t^{0,-p}+\frac{1}{16} \tag{4.14}$$

$$\begin{aligned}L_m=&\frac{1}{2}\sum_{p=0}^{m-1}\frac{(2p+1)!!(2m-2p-1)!!}{2^{m+1}}\frac{\partial^2}{\partial t^{1,p}\partial t^{1,m-1-p}}\\&+\sum_{p\geq 1}\frac{(p+m)!}{(p-1)!}\left(t^{0,p}\frac{\partial}{\partial t^{0,p+m}}+(-1)^{m+1}t^{0,-p-m}\frac{\partial}{\partial t^{0,-p}}\right)\\&+\sum_{p\geq 0}\frac{(2p+2m+1)!!}{2^{m+1}(2p-1)!!}t^{1,p}\frac{\partial}{\partial t^{1,p+m}}\\&+\frac{1}{4}\sum_{p\geq 1}(-1)^{p+m}\frac{(p+m)!}{(p-1)!}\left(\sum_{k=p}^{p+m}\frac{1}{k}\right)t^{0,p}t^{0,-m-p}\\&+\frac{1}{8}\sum_{p=0}^{m}(-1)^m p!(m-p)!t^{0,-p}t^{0,p-m},\quad\forall m\geq 1.\end{aligned} \tag{4.15}$$

该广义 Frobenius 流形的周期可以取为

$$p(v,\lambda)=\log\left(v+\sqrt{v^2-\lambda}\right), \tag{4.16}$$

相应的 Gram 矩阵 $(G^{\alpha\beta})=1$, 此外直接计算可知

$$\frac{\partial p}{\partial\lambda}*\frac{\partial p}{\partial\lambda}=\frac{1}{8\lambda^2}-\frac{1}{8}\frac{1}{(v^2-\lambda)^2}. \tag{4.17}$$

因此该广义 Frobenius 流形的圈方程(3.77)为

$$\begin{aligned}&\sum_{s\geq 0}\frac{\partial\Delta\mathcal{F}}{\partial v^{(s)}}\partial_x^s\frac{1}{2v(v^2-\lambda)}+\sum_{s\geq 1}\frac{\partial\Delta\mathcal{F}}{\partial v^{(s)}}s\partial_x^s\left[\frac{1}{2\lambda}\left(\frac{1}{\sqrt{v^2-\lambda}}-\frac{1}{v}\right)\right]\\&\quad+\sum_{s\geq 1}\frac{\partial\Delta\mathcal{F}}{\partial v^{(s)}}\sum_{k=1}^{s}\binom{s}{k}\left[\partial_x^{k-1}\frac{1}{2\lambda}\left(\frac{v}{\sqrt{v^2-\lambda}}-1\right)\right]\left(\partial_x^{s+1-k}\frac{1}{\sqrt{v^2-\lambda}}\right)\\&=\frac{1}{2}\varepsilon^2\sum_{k,\ell\geq 0}\left(\frac{\partial\Delta\mathcal{F}}{\partial v^{(k)}}\frac{\partial\Delta\mathcal{F}}{\partial v^{(\ell)}}+\frac{\partial^2\Delta\mathcal{F}}{\partial v^{(k)}\partial v^{(\ell)}}\right)\left(\partial_x^{k+1}\frac{1}{\sqrt{v^2-\lambda}}\right)\left(\partial_x^{\ell+1}\frac{1}{\sqrt{v^2-\lambda}}\right)\end{aligned}$$

$$+\frac{1}{2}\varepsilon^2\sum_{k\geq 0}\frac{\partial\Delta\mathcal{F}}{\partial v^{(k)}}\partial_x^{k+1}\frac{v^2v_x}{(v^2-\lambda)^3}-\frac{1}{16}\frac{1}{(v^2-\lambda)^2}. \tag{4.18}$$

此方程在相差常系数幂级数 $a_1\varepsilon^{-1}+a_2+a_3\varepsilon+\ldots$ 意义下具有唯一解

$$\Delta\mathcal{F}=\sum_{k\geq 1}\varepsilon^{k-2}\mathcal{F}^{[k]}=\sum_{g\geq 1}\varepsilon^{2g-2}\mathcal{F}_g(v,v_x,\ldots,v^{(3g-2)}). \tag{4.19}$$

例如, 比较圈方程两边 ε^0 项系数, 有

$$\frac{1}{(v^2-\lambda)^2}\left(\frac{1}{16}-\frac{3}{2}v_x\frac{\partial\mathcal{F}_1}{\partial v_x}\right)+\frac{1}{2v^2(v^2-\lambda)}\left(v\frac{\partial\mathcal{F}_1}{\partial v}-2v_x\frac{\partial\mathcal{F}_1}{\partial v_x}\right)=0, \tag{4.20}$$

从而解得

$$\mathcal{F}_1=\frac{1}{24}\log v_x+\frac{1}{12}\log v. \tag{4.21}$$

接下来可通过比较 ε 的更高次项系数来递归求解 $\mathcal{F}_g, g\geq 2$. 例如, 可以解得

$$\mathcal{F}_2=\frac{v_{xx}}{120v}-\frac{v_x^2}{120v^2}+\frac{vv^{(4)}}{576v_x^2}+\frac{37v^{(3)}}{2880v_x}+\frac{vv_{xx}^3}{180v_x^4}-\frac{11v_{xx}^2}{960v_x^2}-\frac{7vv_{xx}v^{(3)}}{960v_x^3} \tag{4.22}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_3=&\frac{v^{(4)}}{1512v}-\frac{v_{xx}^2}{504v^2}-\frac{v_x^4}{252v^4}+\frac{v^2v^{(7)}}{20736v_x^3}+\frac{91vv^{(6)}}{103680v_x^2}+\frac{913v^{(5)}}{241920v}\\&-\frac{103v^2(v^{(4)})^2}{120960v_x^4}+\frac{59v^2(v^{(3)})^3}{16128v_x^5}-\frac{v_xv^{(3)}}{378v^2}-\frac{1669(v^{(3)})^2}{145152v_x^2}-\frac{5v^2v_{xx}^6}{162v_x^8}+\frac{13vv_{xx}^5}{252v_x^6}\\&-\frac{193v_{xx}^4}{8064v_x^4}+\frac{v_x^2v_{xx}}{126v^3}-\frac{7v^2v_{xx}v^{(6)}}{11520v_x^4}-\frac{53v^2v^{(3)}v^{(5)}}{40320v_x^4}+\frac{353v^2v_{xx}^2v^{(5)}}{80640v_x^5}\\&-\frac{419vv_{xx}v^{(5)}}{60480v_x^3}-\frac{9169vv^{(3)}v^{(4)}}{725760v_x^3}-\frac{83v^2v_{xx}^3v^{(4)}}{3780v_x^6}+\frac{545vv_{xx}^2v^{(4)}}{16128v_x^4}-\frac{3727v_{xx}v^{(4)}}{241920v_x^2}\\&+\frac{59v^2v_{xx}^4v^{(3)}}{756v_x^7}-\frac{5555vv_{xx}^3v^{(3)}}{48384v_x^5}+\frac{325v_{xx}^2v^{(3)}}{6912v_x^3}-\frac{83v^2v_{xx}^2(v^{(3)})^2}{1792v_x^6}\\&+\frac{97vv_{xx}(v^{(3)})^2}{2016v_x^4}+\frac{1273v^2v_{xx}v^{(3)}v^{(4)}}{80640v_x^5},\end{aligned} \tag{4.23}$$

其中 $v^{(s)}=\partial_x^s v$, $s\geq 1$.

注释 4.1. 注意到, 若考虑如下变量替换

$$v\to \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}v},\quad \varepsilon\to-\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\epsilon, \tag{4.24}$$

则在相差常数意义下, 函数 $\mathcal{F}_1(v,v_x)+\varepsilon^2\mathcal{F}_2(v,v_x,\ldots,v^{(4)})$ 恰为文献 *[22]* 的 *(26)(27)* 式中的函数 $H_1(v,v_x)+\epsilon^2 H_2(v_x,v_{xx},v^{(3)},v^{(4)})$, 后者是某个特殊的三次 *Hodge* 积分 *(cubic Hodge integral)* 的亏格 *1* 与亏格 *2* 部分的生成函数, 亦可见文献 *[18, 19]*.

现在考察主方程簇(1.70) 通过拟 Miura 变换(3.22), 即

$$w=v+\varepsilon^2\frac{\partial^2\mathcal{F}_1}{\partial x\partial t^{1,0}}+\varepsilon^4\frac{\partial^2\mathcal{F}_2}{\partial x\partial t^{1,0}}+\ldots \tag{4.25}$$

所得的拓扑形变(3.23). 为了简化形变后的方程簇的表达式, 引入新的未知函数

$$\begin{aligned}U&=\frac{1}{2}\frac{\Lambda-\Lambda^{-1}}{\sqrt{2}\mathrm{i}\varepsilon\partial_x}\left(v+\varepsilon^2\frac{\partial^2\mathcal{F}_1}{\partial x\partial t^{1,0}}+\varepsilon^4\frac{\partial^2\mathcal{F}_2}{\partial x\partial t^{1,0}}+\ldots\right)\\&=w-\frac{\varepsilon^2}{3}w_{xx}+\frac{\varepsilon^4}{30}w^{(4)}-\frac{\varepsilon^6}{630}w^{(6)}+\ldots,\end{aligned} \tag{4.26}$$

其中

$$\Lambda=\mathrm{e}^{\sqrt{2}\mathrm{i}\varepsilon\partial_x}=\mathrm{e}^{\epsilon\partial_x},\quad \epsilon=\sqrt{2}\mathrm{i}\varepsilon. \tag{4.27}$$

于是, 在 ε^6-近似下, 可以验证 U 满足方程

$$\frac{\partial U}{\partial t^{1,0}}=\frac{4U}{\sqrt{2}\mathrm{i}\varepsilon}\frac{\Lambda-1}{\Lambda+1}U=\frac{4U}{\epsilon}\frac{\Lambda-1}{\Lambda+1}U. \tag{4.28}$$

此方程恰为文献 [30] 中所引入的q-形变 KdV 方程 (q-deformed KdV equation), 它可以表示为如下 Lax 形式:

$$\frac{\partial L}{\partial t^{1,0}}=-\frac{4}{\epsilon}\left[\left(L^{\frac{1}{2}}\right)_+,L\right], \tag{4.29}$$

其中 Lax 算子

$$L=\Lambda^2+U\Lambda+1. \tag{4.30}$$

可以验证, 主方程簇的 $t^{1,1}$-流与 $t^{1,2}$-流在 ε^6-近似下分别可以表示为如下的 Lax 形式:

$$\frac{\partial L}{\partial t^{1,1}}=\frac{32}{3\epsilon}\left[\left(L^{\frac{3}{2}}\right)_+-\frac{3}{2}\left(L^{\frac{1}{2}}\right)_+,L\right], \tag{4.31}$$

$$\frac{\partial L}{\partial t^{1,2}}=-\frac{256}{15\epsilon}\left[\left(L^{\frac{5}{2}}\right)_+-\frac{5}{2}\left(L^{\frac{3}{2}}\right)_++\frac{15}{8}\left(L^{\frac{1}{2}}\right)_+,L\right]. \tag{4.32}$$

下面介绍q-形变 KdV 方程簇及其双哈密顿结构 (来自 [39]), 并提出关于广义 Frobeinus 流形(4.1)的主方程簇的拓扑形变与 q-形变 KdV 方程簇之间关系的一个猜想.

定义 4.1. *所谓 q-形变 KdV 方程簇, 是指如下微分-差分方程组:*

$$\epsilon\frac{\partial L}{\partial\tau^k}=a_k\left[\left(L^{\frac{2k+1}{2}}\right)_+,L\right],\quad k\geq 0,\tag{4.33}$$

其中 a_k 为非零常数, Lax 算子 L 见(4.30)式.

命题 4.2. *q-形变 KdV 方程簇(4.33)可以表示为如下的哈密顿形式:*

$$\epsilon\frac{\partial U}{\partial\tau^k}=\mathcal{P}_1\frac{\delta H_k}{\delta U},\tag{4.34}$$

其中哈密顿算子 $\mathcal{P}_1$ 为

$$\mathcal{P}_1=\Lambda-\Lambda^{-1},\tag{4.35}$$

相应的哈密顿量 H_k 为

$$H_k=\sum_{n\in\mathbb{Z}}h_k(n),\quad h_k=\frac{2a_k}{2k+3}\operatorname{Res}L^{\frac{2k+3}{2}}.\tag{4.36}$$

在此, 对于算子 $K=\sum_{k\in\mathbb{Z}}\alpha_k\Lambda^k$, 记其留数 $\operatorname{Res}K=\alpha_0$; 对于泛函 $H=\sum_{n\in\mathbb{Z}}h(n)$, 定义其变分导数

$$\frac{\delta H}{\delta U(n)}=\sum_{l\in\mathbb{Z}}\Lambda^{-l}\left(\frac{\partial h(n)}{\partial U(n+l)}\right).\tag{4.37}$$

证明. 首先注意到 q-形变 KdV 方程簇(4.33)的流满足

$$\begin{aligned}\epsilon\frac{\partial U}{\partial\tau^k}&=a_k\left[\left(L^{\frac{2k+1}{2}}\right)_+,L\right]\Lambda^{-1}=a_k\operatorname{Res}\left(\left[\left(L^{\frac{2k+1}{2}}\right)_+,L\right]\Lambda^{-1}\right)\\&=a_k\operatorname{Res}\left(\left(L^{\frac{2k+1}{2}}\right)_+(\Lambda+U+\Lambda^{-1})-L\left(L^{\frac{2k+1}{2}}\right)_+\Lambda^{-1}\right)\\&=a_k\operatorname{Res}\left(L^{\frac{2k+1}{2}}(U+\Lambda^{-1})-(U\Lambda+1)L^{\frac{2k+1}{2}}\Lambda^{-1}\right)\\&=a_kU(1-\Lambda)\operatorname{Res}L^{\frac{2k+1}{2}}.\end{aligned}\tag{4.38}$$

为导出 q-形变 KdV 方程簇的哈密顿形式(4.34), 首先考虑形如

$$\omega=\sum_{l\in\mathbb{Z}}f_l\delta U^{(l)},\tag{4.39}$$

变分 1-形式构成的空间 (其中 f_l 是关于 $U^{(k)}(n)=U(n+k)(k\in\mathbb{Z})$ 的光滑函数), 并在该空间上引入等价关系 $\sim$, 使得对任意 1-形式 ω_1,ω_2, 关系 $\omega_1\sim\omega_2$ 成立当且仅当 $\omega_1-\omega_2=(\Lambda-1)\omega'$, 其中 ω' 为某个 1-形式. 在此等价意义下, 易知

$$\delta h_k=\sum_{l\in\mathbb{Z}}\frac{\partial h_k}{\partial U^{(l)}}\delta U^{(l)}\sim\frac{\delta H_k}{\delta U}\delta U. \tag{4.40}$$

另一方面, 由 h_k 的定义(4.47)式可知

$$\begin{aligned}\delta h_k&\sim a_k\operatorname{Res}\left(L^{\frac{2k+1}{2}}\delta L\right)=a_k\operatorname{Res}\left(L^{\frac{2k+1}{2}}\delta U\cdot\Lambda\right)\\&\sim a_k\operatorname{Res}\left(\delta U\cdot\Lambda L^{\frac{2k+1}{2}}\right),\end{aligned}\tag{4.41}$$

从而得到

$$\frac{\delta H_k}{\delta U}=a_k\operatorname{Res}\left(\Lambda L^{\frac{2k+1}{2}}\right). \tag{4.42}$$

因此, 为证明关系式(4.34), 只需验证

$$U(1-\Lambda)\operatorname{Res}L^{\frac{2k+1}{2}}=(\Lambda-\Lambda^{-1})\operatorname{Res}\left(\Lambda L^{\frac{2k+1}{2}}\right),\quad k\geq 0. \tag{4.43}$$

上述等式成立, 因为

$$\begin{aligned}U(1-\Lambda)\operatorname{Res}L^{\frac{2k+1}{2}}&=\operatorname{Res}\left(UL^{\frac{2k+1}{2}}-U\Lambda L^{\frac{2k+1}{2}}\Lambda^{-1}\right)\\&=\operatorname{Res}\left(L^{\frac{2k+1}{2}}U+(\Lambda^2+1-L)L^{\frac{2k+1}{2}}\Lambda^{-1}\right)\\&=\Lambda\operatorname{Res}\left(\Lambda L^{\frac{2k+1}{2}}\right)+\operatorname{Res}\left(L^{\frac{2k+1}{2}}(U+\Lambda^{-1}-L\Lambda^{-1})\right)\\&=(\Lambda-\Lambda^{-1})\operatorname{Res}\left(\Lambda L^{\frac{2k+1}{2}}\right).\end{aligned}\tag{4.44}$$

从而命题得证. □

接下来, 引入算子

$$\mathcal{P}_2=U\frac{\Lambda-1}{\Lambda+1}U, \tag{4.45}$$

则有如下命题:

命题 4.3. *q-形变 KdV 方程簇(4.33) 也可改写为*

$$\epsilon\frac{\partial U}{\partial\tau^k}=\mathcal{P}_2\frac{\delta G_k}{\delta U}, \tag{4.46}$$

其中哈密顿量 G_k 如下:

$$G_k=\sum_{n\in\mathbb{Z}}g_k(n),\quad g_k=-a_k\sum_{j=0}^{k}\frac{2}{2j+1}\operatorname{Res}L^{\frac{2j+1}{2}}. \tag{4.47}$$

证明. 与推导(4.42)的方法类似, 易知

$$\frac{\delta G_k}{\delta U} = -a_k \sum_{j=0}^{k} \operatorname{Res}\left(\Lambda L^{\frac{2j-1}{2}}\right), \tag{4.48}$$

其中特别注意 $\operatorname{Res}\left(\Lambda L^{\frac{2j-1}{2}}\right) = \begin{cases} 1 & \text{如果 } j=0 \\ 0 & \text{如果 } j<0 \end{cases}$. 然后由(4.38)可知, 关系式(4.46)等价于

$$\frac{1-\Lambda}{1+\Lambda} \sum_{j=0}^{k} \operatorname{Res}\left(U\Lambda L^{\frac{2j-1}{2}}\right) = (1-\Lambda) \operatorname{Res} L^{\frac{2k+1}{2}}. \tag{4.49}$$

事实上, 对任意 $0 \leq j \leq k$, 成立

$$\begin{aligned} &\operatorname{Res}\left(U\Lambda L^{\frac{2j-1}{2}}\right) = \operatorname{Res}\left((L-\Lambda^2-1)L^{\frac{2j-1}{2}}\right) \\ =& \operatorname{Res} L^{\frac{2j+1}{2}} - \Lambda^2 \operatorname{Res}\left(L^{\frac{2j-1}{2}}\Lambda^2\right) - \operatorname{Res} L^{\frac{2j-1}{2}} \\ =& \operatorname{Res} L^{\frac{2j+1}{2}} - \Lambda^2 \operatorname{Res}\left(L^{\frac{2j-1}{2}}(L-U\Lambda-1)\right) - \operatorname{Res} L^{\frac{2j-1}{2}} \\ =& (1-\Lambda^2)\left(\operatorname{Res} L^{\frac{2j+1}{2}} - \operatorname{Res} L^{\frac{2j-1}{2}}\right) + \Lambda \operatorname{Res}\left(U\Lambda L^{\frac{2j-1}{2}}\right), \end{aligned} \tag{4.50}$$

从而得到

$$(1-\Lambda) \operatorname{Res}\left(U\Lambda L^{\frac{2j-1}{2}}\right) = (1-\Lambda^2)\left(\operatorname{Res} L^{\frac{2j+1}{2}} - \operatorname{Res} L^{\frac{2j-1}{2}}\right). \tag{4.51}$$

将上式两边对指标 j 从 0 到 k 求和, 然后将算子 $\frac{1}{1+\Lambda}$ 作用于等号两边, 即可得到(4.49)式, 从而本命题得证. □

注释 4.4. *考察双哈密顿递推算子*

$$\mathcal{R} = \mathcal{P}_2 \circ \mathcal{P}_1^{-1} = U\frac{\Lambda-1}{\Lambda+1}U\frac{1}{\Lambda-\Lambda^{-1}}, \tag{4.52}$$

则由命题4.3, 易知 q-形变 KdV 方程簇(4.33)的流满足如下递推关系:

$$\mathcal{R}\frac{\partial U}{\partial \tau^{k-1}} = -\frac{a_{k-1}}{a_k}\frac{\partial U}{\partial \tau^k} + \frac{\partial U}{\partial \tau^{k-1}}, \quad k \geq 1. \tag{4.53}$$

接下来利用超流形 $\widehat{M}$ 上的超变量及其局部泛函空间上的 Schouten 括号的语言来验证 (4.35)(4.45)所给出的算子 $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2$ 构成双哈密顿结构. 这方面的

知识与记号详见 [43, 45]. 记 θ 为与 U 对偶的超变量, 分别引入关于 $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2$ 的局部泛函 I, J 如下:

$$I = \frac{1}{2}\int \theta\mathcal{P}_1\theta\,\mathrm{d}x = \int \theta\theta^+\,\mathrm{d}x, \tag{4.54}$$

$$J = \frac{1}{2}\int \theta\mathcal{P}_2\theta\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \theta U\frac{\Lambda-1}{\Lambda+1}(U\theta)\,\mathrm{d}x, \tag{4.55}$$

则 $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2$ 构成双哈密顿结构当且仅当相应的局部泛函 I, J 满足

$$[I, I] = [I, J] = [J, J] = 0, \tag{4.56}$$

其中 $[,]$ 是超流形 $\widehat{M}$ 上的局部泛函空间上的 Schouten 括号. 易求变分导数

$$\frac{\delta I}{\delta U} = 0, \quad \frac{\delta I}{\delta\theta} = \theta^+ - \theta^-, \tag{4.57}$$

从而 $[I, I] = 2\int \frac{\delta I}{\delta\theta}\frac{\delta I}{\delta U}\,\mathrm{d}x = 0$. 又因为

$$\begin{aligned}
\delta J &= \frac{1}{2}\int \left((\delta\theta\cdot U + \theta\delta U)\frac{\Lambda-1}{\Lambda+1}(U\theta) + \theta U\frac{\Lambda-1}{\Lambda+1}(\delta U\cdot\theta + U\delta\theta)\right)\,\mathrm{d}x \\
&= \int \left(\delta\theta\cdot U\frac{\Lambda-1}{\Lambda+1}(U\theta) + \delta U\cdot\theta\frac{\Lambda-1}{\Lambda+1}(U\theta)\right)\,\mathrm{d}x,
\end{aligned} \tag{4.58}$$

从而

$$\frac{\delta J}{\delta U} = \theta\frac{\Lambda-1}{\Lambda+1}(U\theta), \quad \frac{\delta J}{\delta\theta} = U\frac{\Lambda-1}{\Lambda+1}(U\theta), \tag{4.59}$$

因此

$$\begin{aligned}
[I, J] &= \int \left(\frac{\delta I}{\delta\theta}\frac{\delta J}{\delta U} + \frac{\delta I}{\delta U}\frac{\delta J}{\delta\theta}\right)\,\mathrm{d}x = \int (\theta^+ - \theta^-)\theta\frac{\Lambda-1}{\Lambda+1}(U\theta)\,\mathrm{d}x \\
&= -2\int (\theta^+ - \theta^-)\theta\frac{1}{\Lambda+1}(U\theta)\,\mathrm{d}x \\
&= -2\int \left(\theta^+\theta\frac{1}{\Lambda+1}(U\theta) - \theta\theta^+\frac{\Lambda}{\Lambda+1}(U\theta)\right)\,\mathrm{d}x \\
&= -2\int \theta^+\theta U\theta\,\mathrm{d}x = 0,
\end{aligned} \tag{4.60}$$

$$[J, J] = 2\int \frac{\delta J}{\delta\theta}\frac{\delta J}{\delta U}\,\mathrm{d}x = 2\int U\frac{\Lambda-1}{\Lambda+1}(U\theta)\cdot\theta\frac{\Lambda-1}{\Lambda+1}(U\theta)\,\mathrm{d}x$$

$$= -2\int U\theta\left[\frac{\Lambda-1}{\Lambda+1}(U\theta)\cdot\frac{\Lambda-1}{\Lambda+1}(U\theta)\right]\mathrm{d}x=0, \tag{4.61}$$

综上所述, $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2$ 构成双哈密顿结构.

注释 4.5. *若引入向量场 $Z=\frac{1}{U^-}\theta$, 则有*

$$\begin{aligned}
[J,Z] &= \int\left(\frac{\delta J}{\delta\theta}\frac{\delta Z}{\delta U}+\frac{\delta J}{\delta U}\frac{\delta Z}{\delta\theta}\right)\mathrm{d}x\\
&= \int\left(U\frac{\Lambda-1}{\Lambda+1}(U\theta)\cdot\left(-\frac{1}{U^2}\theta^+\right)+\theta\frac{\Lambda-1}{\Lambda+1}(U\theta)\cdot\frac{1}{U^-}\right)\mathrm{d}x\\
&= \int\left(\frac{1}{U}\theta^+\left(U\theta-\frac{2}{\Lambda+1}(U\theta)\right)-\frac{2}{U^-}\theta\frac{1}{\Lambda+1}(U\theta)\right)\mathrm{d}x\\
&= \int\left(\theta^+\theta+\frac{2}{U}\frac{1}{\Lambda+1}(U\theta)\theta^++\frac{2}{U^-}\frac{1}{\Lambda+1}(U\theta)\theta\right)\mathrm{d}x\\
&= \int\left(\theta^+\theta+\frac{2}{U}\frac{1}{\Lambda+1}(U\theta)\theta^++\frac{2}{U}\frac{\Lambda}{\Lambda+1}(U\theta)\theta^+\right)\mathrm{d}x\\
&= \int\left(\theta^+\theta+2\theta\theta^+\right)\mathrm{d}x=\int\theta\theta^+\,\mathrm{d}x=I.
\end{aligned} \tag{4.62}$$

换言之, 存在向量场 Z 使得 $[J,Z]=I$.

注释 4.6. *双哈密顿结构 $(\mathcal{P}_1,\mathcal{P}_2)$ 的中心不变量 (详见 [21, 44]) 为*

$$c(\lambda)=-\frac{1}{24}, \tag{4.63}$$

其中 $\lambda=\frac{U^2}{4}$ 是该双哈密顿结构的正则坐标 (canonical coordinate). 若考察双哈密顿结构 $(\mathcal{P}_2,\mathcal{P}_1)$, 则相应的中心不变量为 $\tilde{c}(\tilde{\lambda})=\frac{1}{24\tilde{\lambda}}$, 其中 $\tilde{\lambda}=\frac{1}{\lambda}$.

接下来考察主方程簇拓扑形变的 $\frac{\partial}{\partial t^{0,p}}$-流 ($p\in\mathbb{Z}$). 引入新的未知函数

$$\begin{aligned}
W &= -\left(\Lambda^{\frac{1}{2}}+\Lambda^{-\frac{1}{2}}\right)\log U=-2\log v+\varepsilon^2 w_1(v,v_x,\dots)+\dots\\
&= w+\varepsilon^2 w_1(v,v_x,\dots)+\dots,
\end{aligned} \tag{4.64}$$

则在 ε^6-近似下, 可以验证 W 满足如下 Volterra 方程 (也称为离散 KdV 方程, 详见 [36, 49]):

$$\frac{\partial W}{\partial t^{0,-1}}=-\frac{1}{4\epsilon}\left(\Lambda-\Lambda^{-1}\right)\mathrm{e}^W, \tag{4.65}$$

这是一个著名的可积系统, 最初用于描述人口演化 [47, 48, 55]. 此方程与某个特殊三次 Hodge 积分的关系见 [18, 19], 这个关系与前文所述函数 $\mathcal{F}_1+\varepsilon^2\mathcal{F}_2$ 与特殊三次 Hodge 积分之间的关系是一致的. 引入 Lax 算子

$$\mathcal{L}=\Lambda+\mathrm{e}^{W}\Lambda^{-1}, \tag{4.66}$$

则 Volterra 方程可以表示为如下 Lax 形式:

$$\epsilon\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial t^{0,-1}}=-\frac{1}{4}\left[\left(\mathcal{L}^2\right)_+,\mathcal{L}\right]. \tag{4.67}$$

可以验证, 主方程簇的 $t^{0,-2}$-流与 $t^{0,-3}$-流在 ε^6-近似下分别可以表示为如下 Lax 形式:

$$\epsilon\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial t^{0,-2}}=\frac{1}{16}\left[\left(\mathcal{L}^4\right)_+,\mathcal{L}\right], \tag{4.68}$$

$$\epsilon\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial t^{0,-3}}=-\frac{1}{32}\left[\left(\mathcal{L}^6\right)_+,\mathcal{L}\right]. \tag{4.69}$$

注释 4.7. 由 W 与 U 之间的转换关系(4.64)可知

$$\mathrm{e}^{W^{\frac12+}}=\frac{1}{UU^+},\quad \mathrm{e}^{W^{\frac12-}}=\frac{1}{UU^-}, \tag{4.70}$$

其中 $W^{\frac12\pm}:=\Lambda^{\pm\frac12}W$. 下面计算双哈密顿结构 $(\mathcal{P}_1,\mathcal{P}_2)$ 在 W-坐标下的表达式. 引入算子

$$\mathcal{J}=\frac{\partial W}{\partial U^{\frac12+}}\Lambda^{\frac12}+\frac{\partial W}{\partial U^{\frac12-}}\Lambda^{-\frac12}=\left(\Lambda^{\frac12}+\Lambda^{-\frac12}\right)\circ\frac{1}{U} \tag{4.71}$$

以及 $\mathcal{J}^\dagger=\frac{1}{U}\circ\left(\Lambda^{\frac12}+\Lambda^{-\frac12}\right)$, 其中 $U^{\frac12\pm}:=\Lambda^{\pm\frac12}U$, 则(4.35)式引入的哈密顿算子 $\mathcal{P}_1$ 在 W-坐标下的表达式为

$$\begin{aligned}\hat{\mathcal{P}}_1=\mathcal{J}\mathcal{P}_1\mathcal{J}^\dagger&=\left(\Lambda^{\frac12}+\Lambda^{-\frac12}\right)\frac{1}{U}\left(\frac{1}{U^+}\Lambda U-U\Lambda^{-1}\frac{1}{U^-}\right)\frac{1}{U}\left(\Lambda^{\frac12}+\Lambda^{-\frac12}\right)\\&=\left(\Lambda^{\frac12}+\Lambda^{-\frac12}\right)\left(\mathrm{e}^{W^{\frac12+}}\Lambda-\Lambda^{-1}\mathrm{e}^{W^{\frac12-}}\right)\left(\Lambda^{\frac12}+\Lambda^{-\frac12}\right)\\&=(\Lambda+1)\,\mathrm{e}^{W}(\Lambda+1)-\left(1+\Lambda^{-1}\right)\mathrm{e}^{W}\left(1+\Lambda^{-1}\right),\end{aligned} \tag{4.72}$$

并且(4.45)中的哈密顿算子 $\mathcal{P}_2$ 在 W-坐标下的表达式为

$$\hat{\mathcal{P}}_2=\mathcal{J}\mathcal{P}_2\mathcal{J}^\dagger=\Lambda-\Lambda^{-1}. \tag{4.73}$$

注意到, $(\hat{\mathcal{P}}_2,\hat{\mathcal{P}}_1)$ 恰好是 *[18]* 所给出的 *Volterra* 方程簇的双哈密顿结构.

对于该广义 Frobenius 流形的主方程簇的拓扑形变与 q-形变 KdV 方程簇以及 Volterra 方程簇之间的关系, 本文提出如下猜想:

猜想 4.8. *对任意 $k \geq 0$, $m \geq 1$, 由*(4.1)(4.2)*式所定义的广义 Frobenius 流形的主方程簇的拓扑形变中的 $\dfrac{\partial}{\partial t^{1,k}}$-流与 $\dfrac{\partial}{\partial t^{0,-m}}$-流可以分别表示为如下的 Lax 形式:*

$$\epsilon \frac{\partial L}{\partial t^{1,k}} = \sum_{\ell=0}^{k} (-1)^{k+\ell+1} \frac{2^{3k-\ell+2}}{\ell!(2k-2\ell+1)!!} \left[\left(L^{k-\ell+\frac{1}{2}} \right)_+, L \right], \quad k \geq 0 \tag{4.74}$$

$$\epsilon \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t^{0,-m}} = (-1)^m \frac{(m-1)!}{2^{2m}} \left[\left(\mathcal{L}^{2m} \right)_+, \mathcal{L} \right], \quad m \geq 1. \tag{4.75}$$

其中 Lax 算子 L 与 $\mathcal{L}$ 的定义分别为(4.30)*式与*(4.66)*式.*

而该广义 Frobenius 流形的 $\dfrac{\partial}{\partial t^{0,p}}$-流 $(p \geq 0)$ 的拓扑形变对应于哪个可积系统呢? 本文暂时没有答案. 此问题值得进一步研究.

4.2 Ablowitz-Ladik 方程簇

例子 4.2. *考察如下的 2 维广义 Frobenius 流形 M_{AL}*

$$F = \frac{1}{2}(v^1)^2 v^2 + v^1 \mathrm{e}^{v^2} + \frac{1}{2}(v^1)^2 \log v^1, \tag{4.76}$$

其平坦度量, 单位向量场与欧拉向量场分别为

$$\eta = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad e = \frac{v^1 \partial_{v^1} - \partial_{v^2}}{v^1 - \mathrm{e}^{v^2}}, \quad E = v^1 \partial_{v^1} + \partial_{v^2}. \tag{4.77}$$

该广义 Frobenius 流形的 charge $d = 1$, 单值性数据为

$$\mu = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \\ & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad R = R_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}. \tag{4.78}$$

该广义 Frobenius 流形与无色散 Ablowitz-Ladik 方程簇之间的关系由 [6] 给出, 也可见 [38].

M_{AL} 主方程簇的哈密顿密度 $\theta_{2,p}$, $p \geq 0$ 与 $\theta_{0,-p}$, $p \geq 0$ 的表达式为

$$\theta_{2,p} = \frac{1}{(p+1)!}\sum_{k=0}^{p+1}\binom{p+1}{k}\binom{p+k}{k}\mathrm{e}^{kv^2}\left(v^1 - \mathrm{e}^{v^2}\right)^{p+1-k} \tag{4.79}$$

$$\theta_{0,0} = v^2 - \log\left(v^1 - \mathrm{e}^{v^2}\right) \tag{4.80}$$

$$\theta_{0,-p} = \frac{(-1)^p(p-1)!p!}{(v^1 - \mathrm{e}^{v^2})^{2p}}\theta_{2,p-1}, \qquad p \geq 1, \tag{4.81}$$

而 $\theta_{0,p}$ 与 $\theta_{1,p}(p \geq 0)$ 的前几项为

$$\theta_{0,1} = v^1 v^2, \tag{4.82}$$

$$\theta_{0,2} = \frac{1}{2}(v^2+1)(v^1)^2 + (v^2-1)\mathrm{e}^{v^2}v^1, \tag{4.83}$$

$$\theta_{0,3} = \frac{1}{12}v^1\left[(2v^2+3)(v^1)^2 + 6\mathrm{e}^{v^2}(2v^2-1)v^1 + \mathrm{e}^{2v^2}(6v^2-9)\right], \tag{4.84}$$

$$\theta_{1,0} = v^2, \tag{4.85}$$

$$\theta_{1,1} = (v^2 + \log v^1)v^1 + (\mathrm{e}^{v^2} - v^1), \tag{4.86}$$

$$\theta_{1,2} = (v^2 + \log v^1)\theta_{2,1} + \frac{1}{4}\left(\mathrm{e}^{2v^2} - 4\mathrm{e}^{v^2}v^1 - (v^1)^2\right), \tag{4.87}$$

$$\theta_{1,3} = (v^2 + \log v^1)\theta_{2,2} + \frac{1}{18}\left(\mathrm{e}^{3v^2} - 9\mathrm{e}^{2v^2}v^1 - 27\mathrm{e}^{v^2}(v^1)^2 - (v^1)^3\right). \tag{4.88}$$

M_{AL} 的 Virasoro 算子为

$$L_{-1} = \sum_{p\geq 0}\left(t^{1,p+1}\frac{\partial}{\partial t^{1,p}} + t^{2,p+1}\frac{\partial}{\partial t^{2,p}}\right) + \sum_{p\in\mathbb{Z}} t^{0,p+1}\frac{\partial}{\partial t^{0,p}} + t^{1,0}t^{2,0}, \tag{4.89}$$

$$\begin{aligned} L_0 = {} & \sum_{p\in\mathbb{Z}} p t^{0,p}\frac{\partial}{\partial t^{0,p}} + \sum_{p\geq 1} p\left(t^{1,p}\frac{\partial}{\partial t^{1,p}} + t^{2,p-1}\frac{\partial}{\partial t^{2,p-1}}\right) \\ & + \sum_{p\geq 1}\left(t^{0,p}\frac{\partial}{\partial t^{2,p-1}} + 2t^{1,p}\frac{\partial}{\partial t^{2,p-1}}\right) + \sum_{p\geq 0}(-1)^p t^{0,-p}t^{1,p} + t^{1,0}t^{1,0}, \end{aligned} \tag{4.90}$$

$$\begin{aligned} L_{m\geq 1} = {} & \sum_{p=1}^{m-1} p!(m-p)!\frac{\partial^2}{\partial t^{2,p-1}\partial t^{2,m-p-1}} \\ & + \sum_{p\geq 1}\frac{(p+m)!}{(p-1)!}\left(t^{0,p}\frac{\partial}{\partial t^{0,p+m}} + (-1)^{m+1}t^{0,-p-m}\frac{\partial}{\partial t^{0,-p}}\right. \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\quad +t^{1,p}\frac{\partial}{\partial t^{1,p+m}}+t^{2,p-1}\frac{\partial}{\partial t^{2,p+m-1}}\Bigg)\\
&+\sum_{p=0}^{m-1}(-1)^p p!(m-p)!t^{0,-p}\frac{\partial}{\partial t^{2,-p+m-1}}\\
&+\sum_{p\geq 1}\frac{(p+m)!}{(p-1)!}\left(\sum_{k=p}^{p+m}\frac{1}{k}\right)t^{0,p}\frac{\partial}{\partial t^{2,p+m-1}}\\
&+2m!t^{1,0}\frac{\partial}{\partial t^{2,m-1}}+2\sum_{p\geq 1}\frac{(p+m)!}{(p-1)!}\left(\sum_{k=p}^{p+m}\frac{1}{k}\right)t^{1,p}\frac{\partial}{\partial t^{2,p+m-1}}\\
&+(-1)^m m!t^{0,-m}t^{1,0}+\sum_{p\geq 1}(-1)^{p+m}\frac{(p+m)!}{(p-1)!}\left(\sum_{k=p}^{p+m}\frac{1}{k}\right)t^{0,-p-m}t^{1,p}.
\end{aligned}
\tag{4.91}
$$

M_{AL} 的相交形式为

$$
(g^{\alpha\beta})=\begin{pmatrix}2v^1\mathrm{e}^{v^2} & v^1+\mathrm{e}^{v^2}\\ v^1+\mathrm{e}^{v^2} & 2\end{pmatrix}. \tag{4.92}
$$

M_{AL} 的一组线性无关的周期可以取为

$$
p_1=\log\left(v^1-\lambda-\mathrm{e}^{v^2}+\sqrt{D}\right)-\frac{v^2}{2},\quad p_2=v^2 \tag{4.93}
$$

上述周期都是拟齐次的, 相应的 Gram 矩阵为

$$
(G^{\alpha\beta})=\begin{pmatrix}-2 & 0\\ 0 & \frac{1}{2}\end{pmatrix}. \tag{4.94}
$$

容易验证

$$
\frac{1}{E-\lambda e}=\frac{v^1(3\mathrm{e}^{v^2}+v^1-\lambda)\partial_{v^1}-(\mathrm{e}^{v^2}+3v^1-\lambda)\partial_{v^2}}{(v^1-\mathrm{e}^{v^2})D}, \tag{4.95}
$$

$$
\frac{1}{2}G^{\alpha\beta}\frac{\partial p_\alpha}{\partial\lambda}*\frac{\partial p_\beta}{\partial\lambda}=-\frac{v^1\mathrm{e}^{v^2}}{D^2}, \tag{4.96}
$$

其中 $D=(\lambda-v^1-\mathrm{e}^{v^2})^2-4v^1\mathrm{e}^{v^2}$. 因此, M_{AL} 的圈方程(3.77)为

$$
\sum_{s\geq 0}\left(\frac{\partial\Delta\mathcal{F}}{\partial v^{1,s}}\partial_x^s\frac{v^1(3\mathrm{e}^{v^2}+v^1-\lambda)}{(v^1-\mathrm{e}^{v^2})D}-\frac{\partial\Delta\mathcal{F}}{\partial v^{2,s}}\partial_x^s\frac{\mathrm{e}^{v^2}+3v^1-\lambda}{(v^1-\mathrm{e}^{v^2})D}\right)
$$

$$
\begin{aligned}
&-\frac{1}{\lambda}\sum_{s\geq 1} s\left(\frac{\partial\Delta\mathcal{F}}{\partial v^{1,s}}\partial_x^s\frac{v^1}{v^1-\mathrm{e}^{v^2}}-\frac{\partial\Delta\mathcal{F}}{\partial v^{2,s}}\partial_x^s\frac{1}{v^1-\mathrm{e}^{v^2}}\right)\\
&-\frac{1}{2\lambda}\sum_{s\geq 1}\sum_{k=1}^{s}\binom{s}{k}\left(\partial_x^{k-1}\frac{\lambda+v^1-\mathrm{e}^{v^2}}{\sqrt{D}}\right)\\
&\quad\times\left(\frac{\partial\Delta\mathcal{F}}{\partial v^{1,s}}\partial_x^{s+1-k}\frac{\lambda-v^1-\mathrm{e}^{v^2}}{\sqrt{D}}+\frac{\partial\Delta\mathcal{F}}{\partial v^{2,s}}\partial_x^{s+1-k}\frac{2}{\sqrt{D}}\right)\\
=&-\frac{1}{4}\varepsilon^2\sum_{k,\ell\geq 0}\left[\left(\frac{\partial\Delta\mathcal{F}}{\partial v^{1,k}}\frac{\partial\Delta\mathcal{F}}{\partial v^{1,\ell}}+\frac{\partial^2\Delta\mathcal{F}}{\partial v^{1,k}\partial v^{1,\ell}}\right)\partial_x^{k+1}\frac{\lambda-v^1-\mathrm{e}^{v^2}}{\sqrt{D}}\cdot\partial_x^{\ell+1}\frac{\lambda-v^1-\mathrm{e}^{v^2}}{\sqrt{D}}\right.\\
&+4\left(\frac{\partial\Delta\mathcal{F}}{\partial v^{1,k}}\frac{\partial\Delta\mathcal{F}}{\partial v^{2,\ell}}+\frac{\partial^2\Delta\mathcal{F}}{\partial v^{1,k}\partial v^{2,\ell}}\right)\partial_x^{k+1}\frac{\lambda-v^1-\mathrm{e}^{v^2}}{\sqrt{D}}\cdot\partial_x^{\ell+1}\frac{1}{\sqrt{D}}\\
&\left.+4\left(\frac{\partial\Delta\mathcal{F}}{\partial v^{2,k}}\frac{\partial\Delta\mathcal{F}}{\partial v^{2,\ell}}+\frac{\partial^2\Delta\mathcal{F}}{\partial v^{2,k}\partial v^{2,\ell}}\right)\partial_x^{k+1}\frac{1}{\sqrt{D}}\cdot\partial_x^{\ell+1}\frac{1}{\sqrt{D}}\right]\\
&-\varepsilon^2\sum_{k\geq 0}\left[\frac{\partial\Delta\mathcal{F}}{\partial v^{1,k}}\partial_x^{k+1}\frac{e^{v^2}\left(Kv_x^1-2v^1\mathrm{e}^{v^2}\left((\mathrm{e}^{v^2}-v^1)^2-\lambda^2\right)v_x^2\right)}{D^3}\right.\\
&\left.-\frac{\partial\Delta\mathcal{F}}{\partial v^{2,k}}\partial_x^{k+1}\frac{e^{v^2}\left(2\left((\mathrm{e}^{v^2}-v^1)^2-\lambda^2\right)v_x^1-Kv_x^2\right)}{D^3}\right]-\frac{v^1\mathrm{e}^{v^2}}{D^2},
\end{aligned}
\tag{4.97}
$$

其中

$$
K=(v^1+\mathrm{e}^{v^2})D+8\lambda v^1\mathrm{e}^{v^2}.
\tag{4.98}
$$

上述圈方程在相差常数项级数 $b_1\varepsilon^{-1}+b_2+b_3\varepsilon+\dots$ 意义下具有唯一解

$$
\Delta\mathcal{F}=\sum_{k\geq 1}\varepsilon^{k-2}\mathcal{F}^{[k]}=\sum_{g\geq 1}\varepsilon^{2g-2}\mathcal{F}_g(v^1,v^2,v_x^1,v_x^2,\dots,v^{1,3g-2},v^{2,3g-2}).
\tag{4.99}
$$

例如, 比较 ε^0 的系数可知 $\mathcal{F}_1$ 满足方程

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial\mathcal{F}_1}{\partial v^1}\frac{v^1(3\mathrm{e}^{v^2}+v^1-\lambda)}{(v^1-\mathrm{e}^{v^2})D}-\frac{\partial\mathcal{F}_1}{\partial v^2}\frac{\mathrm{e}^{v^2}+3v^1-\lambda}{(v^1-\mathrm{e}^{v^2})D}+\frac{\partial\mathcal{F}_1}{\partial v_x^1}\partial_x\frac{v^1(3\mathrm{e}^{v^2}+v^1-\lambda)}{(v^1-\mathrm{e}^{v^2})D}\\
&-\frac{\partial\mathcal{F}_1}{\partial v_x^2}\partial_x\frac{\mathrm{e}^{v^2}+3v^1-\lambda}{(v^1-\mathrm{e}^{v^2})D}-\frac{1}{\lambda}\left(\frac{\partial\mathcal{F}_1}{\partial v_x^1}\partial_x\frac{v^1}{v^1-\mathrm{e}^{v^2}}-\frac{\partial\mathcal{F}_1}{\partial v_x^2}\partial_x\frac{1}{v^1-\mathrm{e}^{v^2}}\right)\\
&-\frac{\lambda+v^1-\mathrm{e}^{v^2}}{2\lambda\sqrt{D}}\left(\frac{\partial\mathcal{F}_1}{\partial v_x^1}\partial_x\frac{\lambda-v^1-\mathrm{e}^{v^2}}{\sqrt{D}}+\frac{\partial\mathcal{F}_1}{\partial v_x^2}\partial_x\frac{2}{\sqrt{D}}\right)+\frac{v^1\mathrm{e}^{v^2}}{D^2}=0,
\end{aligned}
\tag{4.100}
$$

由此解得

$$\mathcal{F}_1 = \frac{1}{24}\log\left((v^1_x)^2 - v^1 \mathrm{e}^{v^2}(v^2_x)^2\right) + \frac{1}{12}\log\left(v^1 - \mathrm{e}^{v^2}\right) - \frac{1}{8}\log v^1 - \frac{1}{24}v^2. \quad (4.101)$$

注释 4.9. 上述 $\mathcal{F}_1$ 经过变量替换

$$v^1 = \mathrm{e}^v(\mathrm{e}^w - 1), \quad v^2 = v + w \quad (4.102)$$

并取 $\lambda = 1$ 之后, 在相差常数意义下恰为 *resolved conifold* 关于反对角作用的等变 *Gromov-Witten* 不变量的亏格 *1* 自由能 *[5]:*

$$\hat{\mathcal{F}}_1 = \frac{1}{24}\log\left(v'(x)^2 + \frac{\lambda^2 \mathrm{e}^{w(x)}}{1 - \mathrm{e}^{w(x)}}w'(x)^2\right) + \frac{1}{12}\mathrm{Li}_1\left(\mathrm{e}^{w(x)}\right) - \frac{w(x)}{24}. \quad (4.103)$$

其中, 变量替换(4.102)建立了 M_{AL} 的及其 *almost dual* 的平坦坐标之间的联系 *[6].*

现在考察 M_{AL} 的主方程簇的拓扑形变与 Ablowitz-Ladik 方程簇 (详见 [1, 2, 6, 38, 54]) 的正流

$$\frac{\partial L}{\partial t_k} = \frac{1}{(k+1)!}[(L^{k+1})_+, L], \quad k \geq 0, \quad (4.104)$$

之间的关系, 其中 Lax 算子 L 为

$$\begin{aligned} L &= (1 - Q\Lambda^{-1})^{-1}(\Lambda - P) \\ &= \Lambda + Q - P + Q(\Lambda - Q)^{-1}(Q - P), \end{aligned} \quad (4.105)$$

这里 $\Lambda := \mathrm{e}^{\varepsilon\partial_x}$. Ablowitz-Ladik 方程簇的正流的前两项分别为

$$\varepsilon P_{t_0} = P(Q^+ - Q), \quad \varepsilon Q_{t_0} = Q(Q^+ - Q^- - P + P^-). \quad (4.106)$$

$$\varepsilon P_{t_1} = \frac{1}{2}P(PQ - PQ^+ + P^-Q - P^+Q^+ + Q^+Q^{++} + Q^+Q^+ - QQ^- - Q^2), \quad (4.107)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon Q_{t_1} = \frac{1}{2}Q(&P^2 - P^-P^- - P^+Q^+ - 2PQ^+ - PQ + P^-Q + 2P^-Q^- + P^{--}Q^- \\ &+ Q^+Q^{++} + Q^+Q^+ + QQ^+ - Q^-Q^{--} - QQ^- - Q^-Q^-), \end{aligned} \quad (4.108)$$

详见 [38]. 这里采用记号 $P^\pm = \Lambda^\pm P, Q^\pm = \Lambda^\pm Q$.

注释 4.10. 本文以及 *[38]* 中所谓 *Ablowitz-Ladik* 方程簇(4.104)–(4.108) 在可积系统文献中更常被称为相对论 *Toda* 方程簇 *(relativistic Toda hierarchy)*, 详见 *[52]* 或 *[54]*. 感谢中国矿业大学 (北京) 刘青平教授指出 *Ablowitz-Ladik* 方程簇与相对论 *Toda* 方程簇的上述联系.

引入新的未知函数

$$U = Q - P, \quad W = \log Q, \tag{4.109}$$

并且令

$$w^1 = U - \frac{\varepsilon}{2} U_x + \frac{\varepsilon^2}{12} U_{xx}, \tag{4.110}$$

$$w^2 = W - \frac{\varepsilon}{2} \partial_x \log U + \frac{\varepsilon^2}{12} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{2U_x - (2\mathrm{e}^W + U) W_x}{U} \right) + \frac{\varepsilon^3}{12} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{(U U_{xx} - U_x^2)\mathrm{e}^W}{U^3} \right), \tag{4.111}$$

则 Ablowitz-Ladik 方程簇的第一个正流 $\frac{\partial}{\partial t_0}$ 可表示为

$$\begin{aligned}\frac{\partial w^1}{\partial t_0} &= \mathrm{e}^{w^2} w^1_x + \mathrm{e}^{w^2} w^1 w^2_x \\ &+ \frac{\varepsilon^2 \mathrm{e}^{w^2}}{24 (w^1)^2} \Big(5 (w^1_x)^3 + 4 \mathrm{e}^{w^2} (w^1_x)^2 w^2_x - 5 w^1 (w^1_x)^2 w^2_x - 8 \mathrm{e}^{w^2} w^1 w^1_x (w^2_x)^2 \\ &+ 8 \mathrm{e}^{w^2} (w^1)^2 (w^2_x)^3 - 10 w^1 w^1_x w^1_{xx} - 4 \mathrm{e}^{w^2} w^1 w^2_x w^1_{xx} + 6 (w^1)^2 w^2_x w^1_{xx} \\ &- 4 \mathrm{e}^{w^2} w^1 w^1_x w^2_{xx} + 2 (w^1)^2 w^1_x w^2_{xx} + 16 \mathrm{e}^{w^2} (w^1)^2 w^2_x w^2_{xx} + 2 (w^1)^3 w^2_x w^2_{xx} \\ &+ 6 (w^1)^2 w^1_{xxx} + 4 \mathrm{e}^{w^2} (w^1)^2 w^2_{xxx} + 2 (w^1)^3 w^2_{xxx} \Big) + O(\varepsilon^4),\end{aligned} \tag{4.112}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial w^2}{\partial t_0} &= w^1_x + \mathrm{e}^{w^2} w^2_x \\ &+ \frac{\varepsilon^2 \mathrm{e}^{w^2}}{24 (w^1)^3} \big(6 (w^1_x)^3 - 3 w^1 (w^1_x)^2 w^2_x - 8 w^1 w^1_x w^1_{xx} + 2 (w^1)^2 w^2_x w^1_{xx} \\ &+ 2 (w^1)^3 w^2_x w^2_{xx} + 2 (w^1)^2 w^1_{xxx} + 2 (w^1)^3 w^2_{xxx} \big) + O(\varepsilon^4).\end{aligned} \tag{4.113}$$

可以验证, 这个流在 ε^3-近似下恰为 M_{AL} 的主方程簇(3.23) 的拓扑形变中的 $\frac{\partial}{\partial t^{2,0}}$-流, 其中未知函数 w^1, w^2 与主方程簇中的未知函数 v^1, v^2 通过拟 Miura

变换(3.22)相联系, 换言之,

$$w^1=\varepsilon^2\frac{\partial^2\log\tau}{\partial x\partial t^{2,0}}=v^1+\varepsilon^2\frac{\partial^2\Delta\mathcal{F}}{\partial x\partial t^{2,0}}, \tag{4.114}$$

$$w^2=\varepsilon^2\frac{\partial^2\log\tau}{\partial x\partial t^{1,0}}=v^2+\varepsilon^2\frac{\partial^2\Delta\mathcal{F}}{\partial x\partial t^{1,0}}, \tag{4.115}$$

上式中的 tau 函数 τ 的定义为

$$\log\tau=\varepsilon^{-2}f+\sum_{g\geq 1}\varepsilon^{2g-2}\mathcal{F}_g=\varepsilon^{-2}f+\Delta\mathcal{F}. \tag{4.116}$$

同样也可以验证, Ablowitz-Ladik 方程簇的第二个正流 $\frac{\partial}{\partial t_1}$ 与 M_{AL} 的主方程簇的拓扑形变中的 $\frac{\partial}{\partial t^{2,1}}$-流也有这样的对应关系.

本文也求解了 M_{AL} 的亏格 2 自由能 $\mathcal{F}_2$; 它的具体表达式比较复杂, 详见附录6.2. 有了 $\mathcal{F}_2$ 的具体表达式之后, 即可将(4.110)(4.111)式的右边加上某个 ε^4 项, 此时可以验证 Ablowitz-Ladik 方程簇的前两个正流与 M_{AL} 的主方程簇的拓扑形变的 $\frac{\partial}{\partial t^{2,p}}$-流 $(p=0,1)$ 的上述对应关系在 ε^4-近似下成立. 事实上, 本文猜测, 经过下述 Miura 变换

$$U=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\varepsilon^k}{(k+1)!}\partial_x^k w^1, \tag{4.117}$$

$$W=\left(\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{\varepsilon^k}{(k+1)!}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^k\right)\left(\sum_{\ell=0}^{\infty}\frac{\varepsilon^\ell}{(\ell+1)!}\left(\frac{\partial}{\partial t^{1,0}}\right)^\ell\right)w^2, \tag{4.118}$$

之后, Ablowitz-Ladik 方程簇(4.104)的正流 $\frac{\partial}{\partial t_k}$ 恰为 M_{AL} 的主方程簇的拓扑形变的 $\frac{\partial}{\partial t^{2,k}}$-流. 换言之, 有如下猜想:

猜想 4.11. *设 τ 是由(4.76)(4.77)式定义的广义 Frobenius 流形 M_{AL} 的主方程簇的拓扑形变的 tau 函数, 则如下两个特殊的二点函数*

$$U=\varepsilon(\Lambda-1)\frac{\partial\log\tau}{\partial t^{2,0}},\quad W=\left(1-\Lambda^{-1}\right)\left(\mathrm{e}^{\varepsilon\frac{\partial}{\partial t^{1,0}}}-1\right)\log\tau \tag{4.119}$$

满足 Ablowitz-Ladik 方程簇(4.104)的正流 (这里将时间变量 $t^{2,k}$ 与 t_k 等同), 其中 $\Lambda=\mathrm{e}^{\varepsilon\frac{\partial}{\partial x}}$.

注释 4.12. 由(4.114)(4.115)式可知, 关系式(4.117)(4.118)可由(4.119)式推出. 未知函数 U, W 与 *tau* 函数的上述关系是杨迪与周春辉在研究 *resolved conifold* 关于反对角作用的等变 *Gromov-Witten* 不变量与 *Ablowitz-Ladik* 方程簇之间的关系时得到的 *[56]*.

5. 结论与展望

本文研究了具有非平坦单位的广义 Frobenius 流形与可积方程簇之间的关系. 对每个广义 Frobenius 流形, 本文构造了与之相应的主方程簇; 该主方程簇由无穷多个两两交换的流构成, 是通常 (具有平坦单位的)Frobenius 流形的主方程簇的类似版本. 本文证明了广义 Frobenius 流形的主方程簇具有 tau 覆盖, 并且具有可提升至 tau 覆盖的 Virasoro 对称; 并推导出与 Virasoro 对称在 tau 函数的作用的线性化条件等价的一个关系式, 即广义 Frobenius 流形的圈方程. 圈方程的解 (如果存在唯一) 给出了主方程簇的一个拟 Miura 变换, 进而得到主方程簇的拓扑形变. 最后研究了广义 Frobenius 流形的两个重要例子, 并断言它们与 q-形变 KdV 方程簇, Volterra 方程簇以及 Ablowitz-Ladik 方程簇等重要的可积方程簇具有密切联系.

除了上述主要结果, 本文还初步研究了其它问题, 包括零亏格 Virasoro 约束、一维广义 Frobenius 流形的分类、广义 Frobenius 流形的其它例子等. 本章介绍这些问题及其研究进展. 此外, 本章最后一节将提出更多未解决的新问题.

5.1 零亏格 Virasoro 约束

对于广义 Frobenius 流形 M, 记 $\mathcal{F}_0$ 是由(1.98)式所定义的零亏格自由能. 如果 M 的圈方程(3.77)的解

$$\Delta\mathcal{F} = \sum_{k\geq 1} \varepsilon^{k-2}\mathcal{F}^{[k]} = \sum_{g\geq 1} \varepsilon^{2g-2}\mathcal{F}_g(v, v_x, v_{xx}, \dots) \tag{5.1}$$

存在, 则易知 (详见 [26]) 相应的 tau 函数

$$\tau = \exp\left(\varepsilon^{-2}\mathcal{F}_0 + \Delta\mathcal{F}\right) \tag{5.2}$$

满足如下 Virasoro 约束:

$$L_m(\varepsilon^{-1}\tilde{\mathbf{t}}, \varepsilon\frac{\partial}{\partial \mathbf{t}})\tau = 0, \quad m \geq -1, \tag{5.3}$$

其中 Virasoro 算子 L_m 的定义见(3.7), 平移时间 $\tilde{\mathbf{t}}=(\tilde{t}^{i,p})_{(i,p)\in\mathcal{I}}$ 见(1.98)式的上方. 特别地, 在(5.3)式中令 $\varepsilon\to 0$, 比较 ε^{-2} 项的系数得

$$\mathrm{e}^{-\varepsilon^{-2}\mathcal{F}_0(\mathbf{t})}L_m(\varepsilon^{-1}\tilde{\mathbf{t}},\varepsilon\frac{\partial}{\partial\mathbf{t}})\mathrm{e}^{\varepsilon^{-2}\mathcal{F}_0(\mathbf{t})}=O(1),\quad \varepsilon\to 0,\quad \forall m\geq -1. \tag{5.4}$$

对于 $m\geq -1$, 记

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_{m,0}:=&\sum_{(i,p),(j,q)\in\mathcal{I}}a_m^{i,p;j,q}\frac{\partial\mathcal{F}_0}{\partial t^{i,p}}\frac{\partial\mathcal{F}_0}{\partial t^{j,q}}+\sum_{(i,p),(j,q)\in\mathcal{I}}b_{m;i,p}^{j,q}\tilde{t}^{i,p}\frac{\partial\mathcal{F}_0}{\partial t^{j,q}}\\&+\sum_{(i,p),(j,q)\in\mathcal{I}}c_{m;i,p;j,q}\tilde{t}^{i,p}\tilde{t}^{j,q}+\sum_{(i,p),(j,q)\in\mathcal{I}}\delta_{i,0}\delta_{j,0}C_{m;p,q}\tilde{t}^{i,p}\tilde{t}^{j,q},\end{aligned} \tag{5.5}$$

则由(3.8)可知, (5.4)式等价于

$$\mathcal{A}_{m,0}=0,\quad \forall\, m\geq -1. \tag{5.6}$$

上式称为 Virasoro 约束(5.3)的零亏格近似, 简称零亏格 Virasoro 约束.

综上所述, 如果圈方程(3.77)的解存在, 那么(1.98)式所定义的零亏格自由能 $\mathcal{F}_0$ 首先要满足零亏格 Virasoro 约束(5.6). 本文尚未证明圈方程(3.77)的解的存在性, 但能够证明零亏格 Virasoro 约束(5.6)式总成立. 即有如下结论:

命题 5.1. *对于广义 Frobenius 流形 M, (1.98)式所定义的零亏格自由能 $\mathcal{F}_0$ 满足零亏格 Virasoro 约束(5.6)式.*

为证明此命题, 首先需要两个引理.

引理 5.2. *对于广义 Frobenius 流形 M, 设 $v(\mathbf{t})$ 是欧拉-拉格朗日方程(1.95)的一个解, 则对 M 上的任何切向量场 $X=X^\alpha\partial_\alpha$ 都成立*

$$\sum_{(i,p),(j,q)\in\mathcal{I}}\tilde{t}^{i,p}\tilde{t}^{j,q}(\partial_X\Omega_{i,p;j,q})(v(\mathbf{t}))=0. \tag{5.7}$$

证明. 注意到 $\Omega_{i,p;j,q}$ 满足(1.84)式, 所以有

$$\begin{aligned}&\sum_{(i,p),(j,q)\in\mathcal{I}}\tilde{t}^{i,p}\tilde{t}^{j,q}(\partial_X\Omega_{i,p;j,q})(v(\mathbf{t}))\\=&\sum_{(i,p),(j,q)\in\mathcal{I}}\tilde{t}^{i,p}\tilde{t}^{j,q}\langle X,\nabla\Omega_{i,p;j,q}\rangle(v(\mathbf{t}))\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{(i,p),(j,q)\in\mathcal{I}} \tilde{t}^{i,p}\tilde{t}^{j,q}\langle X, \nabla\theta_{i,p}\cdot\nabla\theta_{j,q}\rangle(v(\mathbf{t})) \\
&= \sum_{(i,p)\in\mathcal{I}} \tilde{t}^{i,p}\langle (X\cdot\nabla\theta_{i,p})(v(\mathbf{t})), \sum_{(j,q)\in\mathcal{I}} \tilde{t}^{j,q}\nabla\theta_{j,q}(v(\mathbf{t}))\rangle = 0,
\end{aligned} \tag{5.8}
$$

其中最后一个等号成立是因为欧拉-拉格朗日方程 (1.95). □

特别地, 后文推导过程中将取 $X = E^{m+1}$, $m \geq -1$.

引理 5.3. *对于广义 Frobenius 流形 M, 则(2.84)式成立当且仅当*

$$
\begin{aligned}
\partial_{E^{m+1}}\Omega_{i,p;j,q} = 2 &\sum_{(k,r),(l,s)\in\mathcal{I}} a_m^{k,r;l,s}\Omega_{i,p;k,r}\Omega_{l,s;j,q} \\
&+ \sum_{(k,r)\in\mathcal{I}} \left(b_{m;i,p}^{k,r}\Omega_{k,r;j,q} + b_{m;j,q}^{k,r}\Omega_{i,p;k,r}\right) \\
&+ 2c_{m;i,p;j,q} + 2\delta_{i,0}\delta_{j,0}C_{m;p,q}
\end{aligned} \tag{5.9}
$$

对任意 $m \geq -1$ 都成立, 其中 $(i,p),(j,q) \in \mathcal{I}$, $a_m^{i,p;j,q}, b_{m;i,p}^{j,q}, c_{m;i,p;j,q}$ and $C_{m,p,q}$ 是定义2.1当中的拓展 Virasoro 系数.

证明. 由 $\widetilde{S}_i^{(\nu)}$ 的定义式(2.49) 以及拉普拉斯型积分与拓展 Virasoro 系数之间的关系(2.96)可知

$$
\begin{aligned}
&\lim_{\nu\to 0}\left[\left(\frac{\partial}{\partial t^{i,p}}\frac{\partial \widetilde{S}_{i'}^{(\nu)}}{\partial\lambda}\right)\widetilde{G}^{i'j'}(\nu)\left(\frac{\partial}{\partial t^{j,q}}\frac{\partial \widetilde{S}_{j'}^{(-\nu)}}{\partial\lambda}\right)\right]_- - 2\delta_{i,0}\delta_{j,0}C_{p,q}(\lambda) \\
=& -2\sum_{(i',p'),(j',q')\in\mathcal{I}} a^{i',p';j',q'}(\lambda)\Omega_{i,p;j',q'}\Omega_{i',p';j,q} \\
&- \sum_{(i',p'),(j',q')\in\mathcal{I}} \left(b_{j',q'}^{i',p'}(\lambda)\Omega_{i,p;i',p'}\delta_{j,q}^{j',q'} + b_{i',p'}^{j',q'}(\lambda)\Omega_{j',q';j,q}\delta_{i,p}^{i',p'}\right) \\
&- 2\sum_{(i',p'),(j',q')\in\mathcal{I}} c_{i',p';j',q'}(\lambda)\delta_{i,p}^{i',p'}\delta_{j,q}^{j',q'} - 2\delta_{i,0}\delta_{j,0}C_{p,q}(\lambda), \\
=& -2\sum_{(k,r),(l,s)\in\mathcal{I}} a^{k,r;l,s}(\lambda)\Omega_{i,p;k,r}\Omega_{l,s;j,q} \\
&- \sum_{(k,r)\in\mathcal{I}} \left(b_{i,p}^{k,r}(\lambda)\Omega_{k,r;j,q} + b_{j,q}^{k,r}(\lambda)\Omega_{i,p;k,r}\right) \\
&- 2c_{i,p;j,q}(\lambda) - 2\delta_{i,0}\delta_{j,0}C_{p,q}(\lambda),
\end{aligned} \tag{5.10}
$$

比较(2.84)式的 λ 的各幂次的系数即可得到(5.9). 引理得证. □

本文将在附录6.1中证明(2.84)式成立, 从而结合上述引理可知(5.9)式成立. 下面开始证明 $\mathcal{F}_0$ 满足零亏格 Virasoro 约束.

命题5.1的证明. 对于 $m \geq -1$, 由引理 5.2以及(5.9)式, 并注意(1.99)式, 可得

$$
\begin{aligned}
\mathcal{A}_{m,0} = & \sum_{(i,p),(j,q)\in\mathcal{I}} \sum_{(k,r),(l,s)\in\mathcal{I}} a_m^{i,p;j,q} \tilde{t}^{k,r} \tilde{t}^{l,s} \Omega_{i,p;k,r} \Omega_{l,s;j,q} \\
& + \sum_{(i,p),(j,q)\in\mathcal{I}} \sum_{(k,r)\in\mathcal{I}} b_{m;i,p}^{j,q} \tilde{t}^{i,p} \tilde{t}^{k,r} \Omega_{j,q;k,r} \\
& + \sum_{(i,p),(j,q)\in\mathcal{I}} c_{m;i,p;j,q} \tilde{t}^{i,p} \tilde{t}^{j,q} + \sum_{(i,p),(j,q)\in\mathcal{I}} \delta_{i,0}\delta_{j,0} c_{m;p;q} \tilde{t}^{i,p} \tilde{t}^{j,q} \\
= & \frac{1}{2} \sum_{(i,p),(j,q)\in\mathcal{I}} \tilde{t}^{i,p} \tilde{t}^{j,q} \partial_{E^{m+1}} \Omega_{i,p;j,q} = 0,
\end{aligned}
\tag{5.11}
$$

即 $\mathcal{F}_0$ 满足零亏格 Virasoro 约束(5.6), 从而命题5.1得证. □

5.2 广义 Frobenius 流形的等价关系与一维分类

本小节介绍一维广义 Frobenius 流形的分类. 在此之前, 首先引入广义 Frobenius 流形的如下等价关系:

定义 5.1. *称两个广义 Frobenius 流形 M, M' 等价, 如果存在光滑或解析的同胚映射 $h\colon M \to M'$, 使得*

$$
\mathrm{d}h(E) = E', \quad h^*(\eta') = \eta, \quad h^*(c') = kc \tag{5.12}
$$

对某个非零常数 k 成立, 其中 E, η 与 E', η' 分别是 M 与 M' 的平坦度量与欧拉向量场, c, c' 分别是 M, M' 的 $(0,3)$-型张量, 见定义1.1.

由上述定义易知, 如果 M 与 M' 等价, 则它们的 charge 相等, 即 $d = d'$; 此外还有 $\mathrm{d}h(e) = ke'$.

注释 5.4. *设 M 为广义 Frobenius 流形, $E, c_{\alpha\beta\gamma}, \eta$ 分别是定义1.1中的欧拉向量场, $(0,3)$-型张量与平坦度量, 则对任意非零常数 k, (E, kc, η) 也使得 M 成为广义 Frobenius 流形; 易知广义 Frobenius 流形 (M, E, kc, η) 与 (M, E, c, η) 等价. 设 $\{v^\alpha\}$ 是广义 Frobenius 流形 M 的一组 (局部) 平坦坐标, 则在此坐标下, (局部) 存在势函数 $F = F(v)$ 使得 $c_{\alpha\beta\gamma} = \dfrac{\partial^3 F}{\partial v^\alpha \partial v^\beta \partial v^\gamma}$. 则局部上看, 势函数 $F(v)$*

乘以非零常数倍之后所得的新的广义 *Frobenius* 流形与原广义 *Frobenius* 流形等价.

在上述等价意义下, 一维广义 Frobenius 流形有如下分类:

命题 5.5. *在广义 Frobenius 流形的等价意义下, 一维广义 Frobenius 流形可分为四族等价类, 各等价类的代表元如下表:*

charge	欧拉向量场	势函数	单位向量场
$d=2$	$E=r\partial_v$	$F=\mathrm{e}^{\frac{v}{r}}$	$e=r^3\mathrm{e}^{-\frac{v}{r}}\partial_v$
$d=3$	$E=-\frac{1}{2}v\partial_v$	$F=\log v$	$e=\frac{1}{2}v^3\partial_v$
$d=4$	$E=-v\partial_v$	$F=v\log v$	$e=-v^2\partial_v$
$d\neq 2,3,4$	$E=\frac{2-d}{2}v\partial_v$	$F=v^{\frac{6-2d}{2-d}}$	$e=-\frac{1}{4}\frac{(d-2)^3}{(d-3)(d-4)}v^{\frac{d}{d-2}}\partial_v$

其中在平坦坐标 v 下, 平坦度量 $\eta=1$; 上述表格中出现的 $r\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$ 为参数.

证明. 对于一维广义 Frobenius 流形 M, 总可以取平坦坐标 v, 使得在此坐标下平坦度量 $\eta=1$. 从而由(1.10)可知 $\mu=0$. 在适当的平移变换 $v\mapsto v+v_0$(v_0 是常数) 下, 欧拉向量场(1.12)可表示为

$$E=\left(\frac{2-d}{2}v+r\right)\partial_v, \tag{5.13}$$

其中 r 为常数, 并且 $r\neq 0$ 仅当 $d=2$. 为确定 M 的 Frobenius 乘法结构 $c=c_{111}$, 只需确定 M 的势函数 $F=F(v)$. 固定局部坐标 v, 则对 M 的分类问题显然可转化为对势函数 F 的分类问题, 其中势函数 F 乘以常数倍, 加上某个二次函数均视为同一函数. 势函数 F 满足拟齐次性条件(1.7). 此外注意一维广义 Frobenius 流形上的任何函数 F 都自动满足 WDVV 方程(1.8).

为通过求解拟齐次性条件(1.7)来分类势函数 F, 首先要分类欧拉向量场 E.

1. 如果(5.13)式中的欧拉向量场系数 $r\neq 0$, 则 charge $d=2$, 此时 $E=r\partial_v$, 进而拟齐次性条件(1.7)为

$$rF'=F+Av^2+Bv+C, \tag{5.14}$$

其中 A, B, C 为常数. 任取常数 a, b, c, 记 $F = \hat{F} + av^2 + bv + c$, 则 $\hat{F}$ 满足微分方程

$$r\hat{F}' = \hat{F} + (a+A)v^2 + (b - 2ra + B)v + (c - rb + C), \tag{5.15}$$

于是可适当选取 a, b, c, 使得相应的 $\hat{F}$ 满足微分方程

$$r\hat{F}' = \hat{F}, \tag{5.16}$$

解得 $\hat{F} = C\mathrm{e}^{\frac{v}{r}}$, 其中 C 为 (非零) 常数. 注意 $\hat{F}$ 与 F 仅相差二次函数, 这不影响相应的 Frobenius 结构. 于是在等价意义下 (允许势函数相差常数倍), 可取代表元 $F = \mathrm{e}^{\frac{v}{r}}$. 此时, Frobenius 乘法结构常数 $c = c_{111} = F'''(v) = \dfrac{1}{r^3}\mathrm{e}^{\frac{v}{r}}$, 单位向量场 $e = r^3\mathrm{e}^{-\frac{v}{r}}\partial_v$.

2. 如果(5.13)式中的欧拉向量场系数 $r = 0$, 则拟齐次性条件(1.7)为

$$\frac{2-d}{2}vF' = (3-d)F + Av^2 + Bv + C. \tag{5.17}$$

同样方法, 考虑变换 $F = \hat{F} + av^2 + bv + c$, 则 $\hat{F}$ 满足微分方程

$$\frac{2-d}{2}v\hat{F}' = (3-d)\hat{F} + (a+A)v^2 + \left[\left(2 - \frac{d}{2}\right)b + B\right]v + \left[(3-d)c + C\right]. \tag{5.18}$$

   (a) 如果 charge $d = 3$, 则适当选取常数 a, b, c, 可使得相应的 $\hat{F}$ 满足微分方程

   $$-\frac{1}{2}v\hat{F}' = C, \tag{5.19}$$

   解得 $\hat{F} = -2C\log v$. 在等价意义下, 可取势函数代表元 $F = \log v$.

   (b) 如果 charge $d = 4$, 则适当选取常数 a, b, c, 可使得相应的 $\hat{F}$ 满足微分方程

   $$v\hat{F}' = \hat{F} - Bv, \tag{5.20}$$

   解得 $\hat{F} = -Bv\log v$. 在等价意义下, 可取势函数代表元 $F = v\log v$.

   (c) 如果 charge $d = 2$, 则适当选取常数 a, b, c 可使 $\hat{F} = 0$, 舍去.

(d) 一般地, 如果 charge $d \neq 2,3,4$, 则适当选取常数 a,b,c, 可使得相应的 $\hat{F}$ 满足微分方程

$$v\hat{F}' = \frac{6-2d}{2-d}\hat{F}, \tag{5.21}$$

此时可取势函数代表元 $F = v^{\frac{6-2d}{2-d}}$.

综上所述, 得到表格所述的四族等价类, 命题得证. □

注释 5.6. *特别注意, 上述分类表中所述 $d=3$, $F=\log v$ 的一维广义 Frobenius 流形出现于对某种 negative spin version 的 Witten's r-spin class 及其相关的可积方程簇的研究当中, 见近期 (2022 年) 文献 [9].*

5.3 一些非平凡例子

对于广义 Frobenius 流形, 除了第4章所介绍的两个重要例子之外, 还有更多有趣的例子, 这些例子也有助于加深对广义 Frobenius 流形的理解.

首先, 回忆命题1.13当中引入的一系列常数 c_p, $p \in \mathbb{Z}$, 这些常数之中至多只有一个非零元, 并且 $c_p \neq 0$ 仅当 $p = d-1$ 且 p 为偶数. 这些常数与广义 Frobenius 流形 M 本身性质有关, 其中 $c_{p\geq 0}$ 出现于 $(n+2)$ 维相伴 Frobenius 流形 $\widetilde{M}$ 的单值性数据中, 见(1.107)式. 例如, (4.1)式所述的广义 Frobenius 流形 $F = \frac{v^4}{12}$, 其 $c_0 = \frac{1}{4}$. 然而 $c_{p<0}$ 并未出现于 $\widetilde{M}$ 的单值数据当中, 我们尚未知晓 $c_{p<0}$ 是否有几何解释.

本节的第一个例子是一例非平凡的 $c_{p<0}$.

例子 5.1. *考察如下的一维广义 Frobenius 流形*

$$F = \frac{27}{80}v^{\frac{8}{3}}, \qquad E = \frac{3}{2}v\partial v, \qquad e = v^{\frac{1}{3}}\partial_v \tag{5.22}$$

其中 v 为平坦坐标, 此坐标下的平坦度量 $\eta = 1$.

由(1.55)式可解得

$$\nabla\theta_{0,0} = e = v^{\frac{1}{3}}\partial_v, \tag{5.23}$$

$$\nabla\theta_{0,-1} = \partial_e\nabla\theta_{0,0} = \frac{1}{3}v^{-\frac{1}{3}}\partial_v, \tag{5.24}$$

$$\nabla\theta_{0,-2} = \partial_e\nabla\theta_{0,-1} = -\frac{1}{9v}\partial_v, \tag{5.25}$$

从而 $\theta_{0,-2} = \int -\frac{1}{9v}\,\mathrm{d}v = -\frac{1}{9}\log v + a$, 其中 $a \in \mathbb{C}$ 为常数. 于是 $\theta_{0,-2}$ 满足

$$\partial_E \theta_{0,-2} = \frac{3}{2} v \partial_v \left(-\frac{1}{9}\log v + a \right) = -\frac{1}{6}, \tag{5.26}$$

与(1.67)比较, 可得

$$c_{-2} = -\frac{1}{6}, \tag{5.27}$$

从而这是 $c_{p<0}$ 的一个非平凡例子.

接下来, 回忆引理1.7当中引入的常数 $r_p^\alpha, p \geq 1, 1 \leq \alpha \leq n$. 这些常数出现于 $\widetilde{M}$ 的单值性数据当中, 见(1.107)式. 特别地, 当 $p = 1$ 时, r_1^α 恰为欧拉向量场(1.12)中的系数 r^α. 本节的第二个例子是一例非平凡的 $r_{p>1}^\alpha$.

例子 5.2. *考察如下一维广义 Frobenius 流形*

$$F = v^{\frac{3}{2}}, \qquad E = -2v\partial_v, \qquad e = -\frac{8}{3} v^{\frac{3}{2}} \partial_v \tag{5.28}$$

其中 v 为平坦坐标, 此坐标下的平坦度量 $\eta = 1$. 此外, 注意 charge $d = 6$.

容易解得哈密顿密度 $\theta_{i,p}$ 的梯度向量如下:

$$\nabla\theta_{0,-p} = (-1)^{p+1} \frac{4^{p+1}(p+2)!}{3^{p+1}} v^{\frac{p+3}{2}} \partial_v \qquad p \geq 0 \tag{5.29}$$

$$\nabla\theta_{1,p} = \frac{3^p}{4^p p!} v^{-\frac{p}{2}} \partial_v \qquad p \geq 0 \tag{5.30}$$

$$\nabla\theta_{0,p} = \begin{cases} v\partial_v & p = 1 \\ -\frac{3}{4} v^{\frac{1}{2}} \partial_v & p = 2 \\ \frac{1}{2} \frac{3^{p-1}}{4^{p-1}(p-3)!} v^{\frac{3-p}{2}} \left(a + 2H_{p-3} + \log v \right) \partial_v & p \geq 3 \end{cases}, \tag{5.31}$$

其中 $H_p := \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k}$, 并特别约定 $H_0 = 0$; $a \in \mathbb{C}$ 是任意给定的参数. 这个参数 a 恰印证了注释1.8所言, 这里的 $\nabla\theta_{0,p}$ 的选取存在自由度. 特别注意

$$\nabla\theta_{0,p} = \frac{1}{2} \frac{3^{p-1}}{4^{p-1}(p-3)!} v^{\frac{3-p}{2}} \left(2H_{p-3} + \log v \right) \partial_v + \frac{9a}{32} \nabla\theta_{1,p-3}. \tag{5.32}$$

直接计算可知 $\nabla\theta_{0,p}$ 满足关系

$$\partial_E \nabla\theta_{0,p} = (p-3)\nabla\theta_{0,p} - \frac{9}{16}\nabla\theta_{1,p-3}, \tag{5.33}$$

与拟齐次性条件(1.44)比较可得 $r_3^1 = -\dfrac{9}{16}$. 从而这是 $r_{p>1}^{\alpha}$ 的一个非平凡例子.

更进一步, 可以证明相应的 3 维相伴 Frobenius 流形 $\widetilde{M}$ 的单值性数据 $\tilde{\mu}, \widetilde{R}$ 分别为

$$\tilde{\mu} = \begin{pmatrix} -3 & & \\ & 0 & \\ & & 3 \end{pmatrix}, \qquad \widetilde{R} = \widetilde{R}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -\dfrac{9}{16} & 0 & 0 \\ 0 & -\dfrac{9}{16} & 0 \end{pmatrix}. \tag{5.34}$$

证明上述论断, 只需验证 $(\widetilde{R}_6)_0^2 = 0$, 即 $c_5 = 0$. 由(1.62)(1.68)直接计算得

$$\theta_{1,2} = \sum_{k=0}^{2} (-1)^k \langle \nabla\theta_{0,k+1}, \nabla\theta_{1,2-k}\rangle = \frac{9}{32}(a + 3 + \log v) \tag{5.35}$$

$$\theta_{0,5} = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{4} \langle \nabla\theta_{0,5-k}, \nabla\theta_{0,k+1}\rangle = \frac{81}{2048}(a + 3 + \log v)^2 + \frac{405}{2048}, \tag{5.36}$$

从而 $\partial_E \theta_{0,5} = -\dfrac{9}{16}\theta_{1,2} = r_3^1 \theta_{1,2}$. 再与拟齐次性条件(1.67)比较, 可知 $c_5 = 0$. 断言得证.

本节最后, 回忆定义3.2中引入的广义 Frobenius 流形的拟周期 $Q = Q(v; \lambda)$. M 的拟周期 $Q(v; \lambda)$ 可用于构造 $\widetilde{M}$ 的周期, 见(3.59)–(3.61)式. 在相差某个仅依赖 λ 的函数 $c(\lambda)$ 意义下, $Q(v; \lambda)$ 可取为(3.74)式的等号右端. 特别地, 若 M 的 charge $d = 1$, 则拟周期 Q 是 M 的某个周期, 这种情形下的拟周期是平凡的. 第4章所详细研究的两个广义 Frobenius 流形的 charge d 都等于 1, 于是它们的拟周期 Q 都平凡. 本节第三个例子是一例 charge $d \neq 1$ 的广义 Frobenius 流形, 从中可见非平凡的拟周期.

例子 5.3. *考察如下一维广义 Frobenius 流形*

$$F = \mathrm{e}^v, \quad E = \partial_v, \quad e = \mathrm{e}^{-v}\partial_v, \tag{5.37}$$

其中 v 为平坦坐标, 此坐标下的平坦度量 $\eta = 1$. 此外, 注意 charge $d = 2$, 单值性数据 $\mu = R = 0$.

该广义 Frobenius 流形的相交形式为

$$(g^{\alpha\beta}) = \mathrm{e}^v, \tag{5.38}$$

通过直接求解 Gauss-Manin 方程可知, 该广义 Frobenius 流形的拟齐次周期可取为

$$p(v;\lambda)=\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\arcsin\sqrt{\lambda \mathrm{e}^{-v}},\tag{5.39}$$

与之相应的 Gram 矩阵 $(G^{\alpha\beta})=4$. 容易解得相应的拟周期为

$$Q(v;\lambda)=\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\arcsin^2\sqrt{\lambda \mathrm{e}^{-v}}.\tag{5.40}$$

此外, 本文还研究了该广义 Frobenius 流形的圈方程及其主方程簇的拓扑形变. 直接计算可知, 向量场 $\frac{1}{E-\lambda e}=\frac{\partial_v}{\mathrm{e}^v(\mathrm{e}^v-\lambda)}$, 并且

$$G^{\alpha\beta}\frac{\partial p_\alpha}{\partial\lambda}*\frac{\partial p_\beta}{\partial\lambda}=4\frac{\partial p}{\partial\lambda}*\frac{\partial p}{\partial\lambda}=\frac{1}{8\lambda^2}-\frac{1}{8(\mathrm{e}^v-\lambda)^2},\tag{5.41}$$

从而该广义 Frobenius 流形的圈方程(3.77)为

$$\begin{aligned}
&\sum_{s\geq 0}\frac{\partial\Delta\mathcal{F}}{\partial v^{(s)}}\partial_x^s\left(\frac{1}{\mathrm{e}^v(\mathrm{e}^v-\lambda)}-\frac{s}{\lambda\mathrm{e}^v}+\frac{sK_0}{\lambda^{\frac{3}{2}}\sqrt{\mathrm{e}^v-\lambda}}\right)\\
&\quad+\sum_{s\geq 1}\frac{\partial\Delta\mathcal{F}}{\partial v^{(s)}}\sum_{k=1}^{s}\binom{s}{k}\left[\partial_x^{k-1}\left(\frac{1}{\lambda\sqrt{\mathrm{e}^v-\lambda}}-\frac{K_0}{\lambda^{\frac{3}{2}}}\right)\right]\left(\partial_x^{s+1-k}\frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}^v-\lambda}}\right)\\
&=\frac{1}{2}\varepsilon^2\sum_{k,\ell\geq 0}\left(\frac{\partial\Delta\mathcal{F}}{\partial v^{(k)}}\frac{\partial\Delta\mathcal{F}}{\partial v^{(\ell)}}+\frac{\partial^2\Delta\mathcal{F}}{\partial v^{(k)}\partial v^{(\ell)}}\right)\left(\partial_x^{k+1}\frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}^v-\lambda}}\right)\left(\partial_x^{\ell+1}\frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}^v-\lambda}}\right)\\
&\quad+\frac{1}{2}\varepsilon^2\sum_{k\geq 0}\frac{\partial\Delta\mathcal{F}}{\partial v^{(k)}}\partial_x^{k+1}\frac{\mathrm{e}^{2v}v_x}{4(\mathrm{e}^v-\lambda)^3}-\frac{1}{16(\mathrm{e}^v-\lambda)^2},
\end{aligned}\tag{5.42}$$

其中

$$K_0:=\arcsin\sqrt{\lambda\mathrm{e}^{-v}},\quad \Delta\mathcal{F}=\sum_{g\geq 1}\varepsilon^{2g-2}\mathcal{F}_g.\tag{5.43}$$

递归解得 $\Delta\mathcal{F}$ 的前三个低亏格部分 $\mathcal{F}_1,\mathcal{F}_2,\mathcal{F}_3$ 如下:

$$\mathcal{F}_1=\frac{1}{24}\log v_x+\frac{1}{12}v,\tag{5.44}$$

$$\mathcal{F}_2=\frac{49\mathrm{e}^v v_x^2}{5760}+\frac{\mathrm{e}^v v_{xx}}{64}-\frac{11\mathrm{e}^v v_{xx}^2}{1920v_x^2}+\frac{\mathrm{e}^v v_{xx}^3}{360v_x^4}+\frac{37\mathrm{e}^v v^{(3)}}{5760v_x}-\frac{7\mathrm{e}^v v_{xx}v^{(3)}}{1920v_x^3}+\frac{\mathrm{e}^v v^{(4)}}{1152v_x^2},\tag{5.45}$$

$$\mathcal{F}_3=\frac{17273\mathrm{e}^{2v}v_x^4}{2903040}+\frac{449\mathrm{e}^{2v}v_x^2v_{xx}}{17280}+\frac{1921\mathrm{e}^{2v}v_{xx}^2}{241920}+\frac{209\mathrm{e}^{2v}v_{xx}^3}{48384v_x^2}-\frac{1951\mathrm{e}^{2v}v_{xx}^4}{193536v_x^4}$$

$$
\begin{aligned}
&+\frac{13\mathrm{e}^{2v}v_{xx}^5}{1008v_x^6}-\frac{5\mathrm{e}^{2v}v_{xx}^6}{648v_x^8}+\frac{49291\mathrm{e}^{2v}v_xv^{(3)}}{2903040}-\frac{1411\mathrm{e}^{2v}v_{xx}v^{(3)}}{193536v_x}+\frac{551\mathrm{e}^{2v}v_{xx}^2v^{(3)}}{27648v_x^3}\\
&-\frac{5555\mathrm{e}^{2v}v_{xx}^3v^{(3)}}{193536v_x^5}+\frac{59\mathrm{e}^{2v}v_{xx}^4v^{(3)}}{3024v_x^7}-\frac{2825\mathrm{e}^{2v}(v^{(3)})^2}{580608v_x^2}+\frac{97\mathrm{e}^{2v}v_{xx}(v^{(3)})^2}{8064v_x^4}\\
&-\frac{83\mathrm{e}^{2v}v_{xx}^2(v^{(3)})^2}{7168v_x^6}+\frac{59\mathrm{e}^{2v}(v^{(3)})^3}{64512v_x^5}+\frac{19829\mathrm{e}^{2v}v^{(4)}}{2903040}-\frac{3223\mathrm{e}^{2v}v_{xx}v^{(4)}}{483840v_x^2}\\
&+\frac{545\mathrm{e}^{2v}v_{xx}^2v^{(4)}}{64512v_x^4}-\frac{83\mathrm{e}^{2v}v_{xx}^3v^{(4)}}{15120v_x^6}-\frac{9169\mathrm{e}^{2v}v^{(3)}v^{(4)}}{2903040v_x^3}+\frac{1273\mathrm{e}^{2v}v_{xx}v^{(3)}v^{(4)}}{322560v_x^5}\\
&-\frac{103\mathrm{e}^{2v}(v^{(4)})^2}{483840v_x^4}+\frac{1601\mathrm{e}^{2v}v^{(5)}}{967680v_x}-\frac{419\mathrm{e}^{2v}v_{xx}v^{(5)}}{241920v_x^3}+\frac{353\mathrm{e}^{2v}v_{xx}^2v^{(5)}}{322560v_x^5}\\
&-\frac{53\mathrm{e}^{2v}v^{(3)}v^{(5)}}{161280v_x^4}+\frac{91\mathrm{e}^{2v}v^{(6)}}{414720v_x^2}-\frac{7\mathrm{e}^{2v}v_{xx}v^{(6)}}{46080v_x^4}+\frac{\mathrm{e}^{2v}v^{(7)}}{82944v_x^3}. \qquad (5.46)
\end{aligned}
$$

圈方程的上述解给出主方程簇的 (ε^6-近似下的)Miura 变换, 从而由此得到主方程簇的 (ε^6-近似下的) 拓扑形变. 本文猜测这个广义 Frobenius 流形的主方程簇的拓扑形变也对应于某个重要的可积方程簇, 但目前尚未知晓究竟是哪个可积方程簇. 这个问题将在今后研究.

本节最后, 我们来写出该广义 Frobenius 流形的 Virasoro 算子的显式表达式, 这有助于以后深入研究此例. 直接求解易知其主方程簇的哈密顿密度 $\theta_{i,p}$ 可以取为

$$
\theta_{0,p}=\begin{cases}\dfrac{1}{2}v^2 & p=1\\ \dfrac{1}{(p-1)!(p-1)}(v-H_{p-1})\mathrm{e}^{(p-1)v} & p\geq 2\end{cases} \qquad (5.47)
$$

$$
\theta_{0,-p}=\frac{(-1)^{p+1}p!}{p+1}\mathrm{e}^{-(p+1)v}, \qquad p\geq 0 \qquad (5.48)
$$

$$
\theta_{1,p}=\begin{cases}v & p=0\\ \dfrac{1}{p!p}\mathrm{e}^{pv} & p\geq 1\end{cases}, \qquad (5.49)
$$

其中 $H_p=\dfrac{1}{1}+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{p}$. 由此易知常数 $c_p=0, \forall p\in\mathbb{Z}$, 并且 $r_s^1=\begin{cases}1 & s=1\\ 0 & s>1\end{cases}$,

从而其 3 维相伴 Frobenius 流形的单值性数据为

$$\tilde{\mu} = \begin{pmatrix} -1 & & \\ & 0 & \\ & & 1 \end{pmatrix}, \quad \widetilde{R} = \widetilde{R}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{5.50}$$

从而由(3.9)(3.10)直接计算可得

$$L_{-1} = \sum_{p\in\mathbb{Z}} t^{0,p+1}\frac{\partial}{\partial t^{0,p}} + \sum_{p\geq 0} t^{1,p+1}\frac{\partial}{\partial t^{1,p}} + \frac{1}{2}t^{1,0}t^{1,0} \tag{5.51}$$

$$\begin{aligned} L_0 = &\sum_{p\in\mathbb{Z}}\left(p-\frac{1}{2}\right)t^{0,p}\frac{\partial}{\partial t^{0,p}} + \sum_{p\geq 0}\left(p+\frac{1}{2}\right)t^{1,p}\frac{\partial}{\partial t^{1,p}} \\ &+ \sum_{p\geq 0} t^{0,p+1}\frac{\partial}{\partial t^{1,p}} + \sum_{p\geq 0}(-1)^p t^{0,-p}t^{1,p} + \frac{1}{16}, \end{aligned} \tag{5.52}$$

并且对一般的 $m\geq 1$, 有

$$\begin{aligned} L_m = &\frac{1}{2}\sum_{p=0}^{m-1}\frac{(2p+1)!!(2m-2p-1)!!}{2^{m+1}}\frac{\partial^2}{\partial t^{1,p}\partial t^{1,m-1-p}} \\ &+ \sum_{p\geq 0}\frac{(2p+2m+1)!!}{2^{m+1}(2p-1)!!}\left(t^{0,p+1}\frac{\partial}{\partial t^{0,p+m+1}} + (-1)^{m+1}t^{0,-p-m}\frac{\partial}{\partial t^{0,-p}}\right) \\ &+ \sum_{p=0}^{m-1}(-1)^{p+1}\frac{(2p+1)!!(2m-2p-1)!!}{2^{m+1}}t^{0,-p}\frac{\partial}{\partial t^{0,m-p}} \\ &+ \sum_{p\geq 0}\frac{(2p+2m+1)!!}{2^{m+1}(2p-1)!!}t^{1,p}\frac{\partial}{\partial t^{1,p+m}} \\ &+ \sum_{p=0}^{m-1}(-1)^{p+m}\frac{(2p+1)!!(2m-2p-1)!!}{2^m} \\ &\times\left(\sum_{k=0}^{p}\frac{1}{2k+1} - \sum_{k=0}^{m-1-p}\frac{1}{2k+1}\right)t^{0,p+1-m}\frac{\partial}{\partial t^{1,p}} \\ &+ \sum_{p\geq 0}\frac{(2p+2m+1)!!}{2^m(2p-1)!!}\left(\sum_{k=p}^{p+m}\frac{1}{2k+1}\right)\left(t^{0,p+1}\frac{\partial}{\partial t^{1,p+m}} + (-1)^{p+m}t^{0,-m-p}t^{1,p}\right) \\ &+ \sum_{p=0}^{m-1}(-1)^m\frac{(2p+1)!!(2m-2p-1)!!}{2^m} \end{aligned}$$

$$\times\left[\left(\sum_{0\le i<j\le p}-\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{m-1-p}+\sum_{0\le i<j\le m-1-p}\right)\frac{1}{(2i+1)(2j+1)}\right]t^{0,-p}t^{0,p+1-m}$$
$$+\sum_{p\ge 0}(-1)^{p+m}\frac{(2p+2m+1)!!}{2^{m-1}(2p-1)!!}\left(\sum_{0\le i<j\le m}\frac{1}{(2i+1)(2j+1)}\right)t^{0,p+1}t^{0,-m-p}. \tag{5.53}$$

5.4 后续工作展望

本文的一系列结果也自然引出更多新的问题, 这些新问题值得今后继续研究. 下面展示部分新问题.

1. **关于广义 Frobenius 流形主方程簇的拓扑形变的理论.**

   (a) 圈方程(3.77)解的存在唯一性. 对于通常 (具有平坦单位向量场) 的 Frobenius 流形 M, [26] 已经证明在某种半单性假设下, M 的圈方程的解存在, 并且在相差常数项级数 $b_1\varepsilon^{-1}+b_2+b_3\varepsilon+\dots$ 意义下唯一; 本文猜测广义 Frobenius 流形也有同样的结果, 而且证明方法也类似. 本文具体求解了 3 例广义 Frobenius 流形的圈方程 (第4章的两例, 以及例5.3), 它们均支持此猜测.

   (b) 亏格 *1* 自由能 $\mathcal{F}_1$ 的一般表达式. 通常 Frobenius 流形 M 的圈方程的解 $\Delta\mathcal{F}=\sum_{g\ge1}\varepsilon^{2g-2}\mathcal{F}_g(v,v_x,\dots,v^{(3g-2)})$ 的亏格 1 部分 $\mathcal{F}_1=\mathcal{F}_1(v,v_x)$ 的表达式最初由文献 [11] 给出, 如下:
   $$\mathcal{F}_1=\frac{1}{24}\log\det\left(c^{\alpha}_{\beta\gamma}v^{\gamma}_x\right)+G(v), \tag{5.54}$$
   其中 $G(v)$ 是 M 上的某个特定的函数, 它由 Getzler 方程 [31] 所确定, 称为 G-函数. 关于 G-函数的更多内容也可见 [23, 25, 26]. 而对于广义 Frobenius 流形, 本文猜测其亏格 1 自由能 $\mathcal{F}_1$ 也形如(5.54)式. 此问题的关键在于如何定义广义 Frobenius 流形的 G-函数.

2. **关于具体的可积系统.**

   (a) 1 维广义 Frobenius 流形 $F=\dfrac{v^4}{12}$ 与 q-形变 KdV 方程簇以及 Volterra 方程簇的关系. 详见前文所述猜想4.8. 此外, 该广义 Frobenius 流形的主方程簇的拓扑形变的 $\dfrac{\partial}{\partial t^{0,p}}$-流所对应的可积系统目前仍未知.

(b) 2 维广义 Frobenius 流形 M_{AL} 与 Ablowitz-Ladik 方程簇的关系. 详见前文所述猜想4.11. 此外, 注意 Carlet, Dubrovin 与张友金在 Toda 方程簇的研究 [8] 中, 通过适当定义 $\log L$ (其中 $L = \Lambda + v + \mathrm{e}^u \Lambda^{-1}$ 为 Toda 方程簇的 Lax 算子) 引入一串新的对数流, 从而得到*拓展 Toda 方程簇* (extended Toda hierarchy); 本文猜测可以对 Ablowitz-Ladik 方程簇(4.104)做类似的事情, 即新引入一串对数流, 得到所谓 "拓展 Ablowitz-Ladik 方程簇", 并且这串对数流能够与 M_{AL} 的主方程簇的拓扑形变的 $\dfrac{\partial}{\partial t^{1,p}}$-流建立联系.

(c) *其它广义 Frobenius 流形所对应的可积系统*. 广义 Frobenius 流形 $F = \mathrm{e}^v$(见例5.3) 以及 $F = \log v$(见注释5.6) 可能也与某些重要的可积系统有联系. 它们所对应的可积系统目前仍未知.

3. **广义 Frobeinus 流形的分类与构造**. 本文5.2节给出了一维广义 Frobenius 流形的分类, 于是自然要问二维广义 Frobenius 流形的分类. 事实上, 二维广义 Frobenius 流形的分类非常复杂, 其复杂性首先体现在种类繁多(至少能分为十几族等价类), 其次是 "几乎所有" 的势函数 $F = F(v^1, v^2)$ 都无法显式写出, 而是由一些无比复杂的非线性微分方程所确定. 于是退而求其次, 本文猜测分类某些特殊形式的势函数 F, 比如 F 为多项式的情形, 可能会有新的发现. 具体来说, 有限 Coxeter 群的轨道空间具有 Frobenius 流形结构, 这种 Frobenius 流形的势函数是平坦坐标的多项式函数, 详见 [15]; 随后 Dubrovin 与张友金在一类称为*拓展仿射外尔群* (extended affine Weyl group) 的离散群的轨道空间上构造了 Frobenius 流形结构, 这类 Frobenius 流形的势函数是关于 $v^1, \ldots, v^{n-1}, \mathrm{e}^{v^n}$ 的多项式, 其中 $v^1, \ldots, v^n$ 是其平坦坐标 [24]. 而对于广义 Frobenius 流形, 有理由相信通过适当方法可以在某些特定的离散群的轨道空间上构造广义 Frobenius 流形, 并且这样构造的广义 Frobenius 流形的势函数具有某些较 "好" 的表达式. 总之, 广义 Frobenius 流形的分类与构造问题也有待进一步研究.

6. 附录

6.1 定理2.8的证明

在此证明定理2.8. 由命题5.3 可知, 只需证明(5.9)对任意 $m \geq -1$ 均成立; 然而, 由文献 [35] 所证明的交换关系

$$[E^{m+1}, E^{k+1}] = (k-m)E^{m+k+1}, \qquad \forall\, m, k \geq -1 \tag{6.1}$$

以及 Virasoro 算子的交换关系(3.11), 易知只需证明(5.9)式, 即

$$\begin{aligned}\partial_{E^{m+1}}\Omega_{i,p;j,q} = 2 &\sum_{(k,r),(l,s)\in\mathcal{I}} a_m^{k,r;l,s}\Omega_{i,p;k,r}\Omega_{l,s;j,q}\\ &+\sum_{(k,r)\in\mathcal{I}}\left(b_{m;i,p}^{k,r}\Omega_{k,r;j,q}+b_{m;j,q}^{k,r}\Omega_{i,p;k,r}\right)\\ &+2c_{m;i,p;j,q}+2\delta_{i,0}\delta_{j,0}C_{m;p,q},\end{aligned} \tag{6.2}$$

对 $m=-1,0,1,2$ 成立即可. 当 $m=-1,0,1,2$ 时的拓展 Virasoro 系数可通过与(3.18)–(3.21)式所显式给出的 Virasoro 算子比较系数得到. 对于通常 (具有平坦单位的)Frobenius 流形, 文献 [25] 给出了 $\partial_{E^{m+1}}\Omega_{\alpha,p;\beta,q}$, $(m=-1,0,1,2)$ 的详细计算过程; 而广义 Frobenius 流形的相关计算与之类似, 但需要特别计算 $\Omega_{0,p;\alpha,q}$ 以及 $\Omega_{0,p;0,q}$ 沿欧拉向量场 E 的幂次的导数.

为简化叙述, 需要引入一些临时记号. 记 $(n+1)\times(n+1)$ 矩阵

$$\widehat{\mu} = \begin{pmatrix}\mu_0 & \\ & \mu\end{pmatrix}, \quad \widehat{R}_s = \begin{pmatrix}0 & \\ \mathbf{r}_s & R_s\end{pmatrix}, \quad s\geq 1, \tag{6.3}$$

其中 $\mu_0 = -\dfrac{d}{2}$, 再记 $\widehat{R} = \sum_{s\geq 1}\widehat{R}_s$. 引入 $n\times(n+1)$ 矩阵值函数

$$\widehat{\Theta}_p(z) := \sum_{k\geq 0}\Big(\nabla\theta_{0,p+k}, \nabla\theta_{1,p+k}, \ldots, \nabla\theta_{n,p+k}\Big)z^k, \quad p\in\mathbb{Z}, \tag{6.4}$$

在此约定当 $i\neq 0$ 且 $p<0$ 时 $\theta_{i,p}=0$; 记 $n\times n$ 矩阵值函数

$$\Theta(w) = \sum_{k\geq 0}\Big(\nabla\theta_{1,k}, \ldots, \nabla\theta_{n,k}\Big)w^k. \tag{6.5}$$

用上述记号, 可将拟齐次性条件(1.35) (1.44)以及(1.57)表示为如下形式:

$$\partial_E \Theta(w) = \Theta(w)\mathrm{D}_w - \mu\Theta(w), \tag{6.6}$$

$$\partial_E \widehat{\Theta}_p(w) = \left(p - \mu + w\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}w}\right)\widehat{\Theta}_p(w) + \sum_{l\geq 0}\widehat{\Theta}_{p-l}(w)\widehat{B}_l, \tag{6.7}$$

其中

$$\widehat{B}_0 := \widehat{\mu}, \quad \widehat{B}_l := \widehat{R}_l \quad \text{for } l \geq 1, \tag{6.8}$$

并且右作用于矩阵值函数 $X(w) = \sum_{k\geq 0} X_k w^k$ 的算子 D_w 由

$$X(w)\mathrm{D}_w = w\frac{\mathrm{d}X(w)}{\mathrm{d}w} + X(w)B(w), \quad B(w) = \mu + \sum_{s\geq 1} R_s w^s. \tag{6.9}$$

所定义.

另一方面, 由公式(1.34)(1.43)与(1.56)可知

$$\partial_Y \Theta(w) = w\mathcal{C}(Y)\Theta(w), \tag{6.10}$$

$$\partial_Y \widehat{\Theta}_p(w) = \mathcal{C}(Y)\widehat{\Theta}_{p-1}(w), \tag{6.11}$$

对 M 上的任何切向量场 $Y = Y^\alpha\partial_\alpha$ 都成立, 其中 $(\mathcal{C}(Y))^\alpha_\beta = Y^\varepsilon c^\alpha_{\varepsilon\beta}$. 特别地, 将 Y 取为欧拉向量场 E, 得到

$$\partial_E \Theta(w) = w\mathcal{U}\Theta(w), \tag{6.12}$$

$$\partial_E \widehat{\Theta}_p(w) = \mathcal{U}\widehat{\Theta}_{p-1}(w), \tag{6.13}$$

其中 $\mathcal{U} = (\mathcal{U}^\alpha_\beta) = \left(E^\gamma c^\alpha_{\beta\gamma}\right)$ 是与欧拉向量场作 Frobenius 乘法的算子.

引入 $(n+1)\times n$ 矩阵值函数 $\hat{\Omega}_p(w), p \in \mathbb{Z}, w \in \mathbb{C}$ 如下

$$\left(\hat{\Omega}_p(w)\right)_{i,\beta} = \sum_{q\geq 0}\Omega_{i,p;\beta,q}w^q, \quad 0 \leq i \leq n,\ 1 \leq \beta \leq n, \tag{6.14}$$

这里遵循如下约定: 当 $i \neq 0$ 且 $p < 0$ 时, $\Omega_{i,p;\beta,q} = 0$. 由关系式(1.37)可知, (1.80)–(1.81)所定义的函数 $\Omega_{i,p;j,q}$ 可重新表示为

$$\hat{\Omega}_p(w) = \widehat{\Theta}^{\mathrm{T}}_{p+1}(-w)\eta\Theta(w) + (-1)^p\chi_{p<0}\begin{pmatrix}0\\ \eta\end{pmatrix}w^{-p-1}, \quad p \in \mathbb{Z}, \tag{6.15}$$

在此, 本文采用如下记号: 对于命题 P,

$$\chi_{\mathrm{P}} := \begin{cases} 1 & \text{如果 P 是真命题}, \\ 0 & \text{如果 P 是假命题}, \end{cases} \tag{6.16}$$

再记

$$\widetilde{\widehat{\Omega}}_p(w) := \widehat{\Theta}_{p+1}^{\mathrm{T}}(-w)\eta\Theta(w), \quad p \in \mathbb{Z}, \tag{6.17}$$

则有

$$\hat{\Omega}_p(w) = \widetilde{\widehat{\Omega}}_p(w) + (-1)^p \chi_{p<0} \begin{pmatrix} 0 \\ \eta \end{pmatrix} w^{-p-1}. \tag{6.18}$$

注释 6.1. *需要注意, 以上引入的带 "$\widetilde{\quad}$" 的记号与 $(n+2)$ 维相伴 Frobenius 流形 $\widetilde{M}$ 没有关系, 仅仅是为方便计算与表述所临时引入的记号.*

引入前文所述的各种记号之后, 下面正式开始计算

$$\partial_{E^s}\hat{\Omega}_p(w), \quad \partial_{E^s}\Omega_{0,p;0,q}, \quad p, q \in \mathbb{Z},\ s = 0, 1, 2, 3, \tag{6.19}$$

从而证明定理2.8.

我们回忆, 沿单位向量场的导数 $\partial_e\Omega_{i,p;j,q}$ 已经在(2.43)当中计算完成. 由关系式(1.84)可知

$$\begin{aligned} \partial_e\Omega_{i,p;j,q} &= \langle e, \nabla\Omega_{i,p;j,q}\rangle = \langle e, \nabla\theta_{i,p}\cdot\nabla\theta_{j,q}\rangle \\ &= \langle e\cdot\nabla\theta_{i,p}, \nabla\theta_{j,q}\rangle = \langle\nabla\theta_{i,p}, \nabla\theta_{j,q}\rangle, \end{aligned} \tag{6.20}$$

因此有如下恒等式:

$$\langle\nabla\theta_{i,p}, \nabla\theta_{j,q}\rangle = \Omega_{i,p-1;j,q} + \Omega_{i,p;j,q-1} + \eta_{\alpha\beta}\delta_i^\alpha\delta_j^\beta\delta_{p,0}\delta_{q,0}, \quad (i,p),(j,q) \in \mathcal{I}. \tag{6.21}$$

事实上, 上述等式对任意 $(i,p),(j,q) \in \{0,1,\ldots,n\}\times\mathbb{Z}$ 都成立, 注意我们始终采用如下约定: 当 $\alpha \neq 0$ 且 $p < 0$ 时 $\Omega_{\alpha,p;j,q} = 0$.

接下来开始计算 $\partial_E\hat{\Omega}_p(w)$.

命题 6.2. *以下等式成立:*

$$\begin{aligned} \partial_E\hat{\Omega}_p(w) = &\left(p + \widehat{\mu} + \frac{1}{2}\right)\widetilde{\widehat{\Omega}}_p(w) + \sum_{s\geq 1}\widehat{R}_s^{\mathrm{T}}\widetilde{\widehat{\Omega}}_{p-s}(w) \\ &+ \widetilde{\widehat{\Omega}}_p(w)\left(\mathrm{D}_w + \frac{1}{2}\right), \quad p \in \mathbb{Z}. \end{aligned} \tag{6.22}$$

证明. 由关系式(6.6)(6.7)(6.15) 以及(1.10)可得

$$\begin{aligned}
\partial_E\hat{\Omega}_p(w) &= \left(\partial_E\widehat{\Theta}_{p+1}^{\mathrm{T}}(-w)\right)\eta\Theta(w) + \widehat{\Theta}_{p+1}^{\mathrm{T}}(-w)\eta\partial_E\Theta(w)\\
&= \left[\left(p+1-w\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}w}\right)\widehat{\Theta}_{p+1}^{\mathrm{T}}(-w)\right]\eta\Theta(w) - \widehat{\Theta}_{p+1}^{\mathrm{T}}(-w)\mu\eta\Theta(w)\\
&\quad + \sum_{l\geq 0}\widehat{B}_l^{\mathrm{T}}\widehat{\Theta}_{p+1-l}^{\mathrm{T}}(-w)\eta\Theta(w) + \widehat{\Theta}_{p+1}^{\mathrm{T}}(-w)\eta\Big(\Theta(w)\mathrm{D}_w - \mu\Theta(w)\Big)\\
&= \Big(p+\widehat{\mu}+1\Big)\Theta_{p+1}^{\mathrm{T}}(-w)\eta\Theta(w) + \sum_{s\geq 1}\widehat{R}_s^{\mathrm{T}}\Theta_{p+1-s}^{\mathrm{T}}(-w)\eta\Theta(w)\\
&\quad + \Big[\Theta_{p+1}^{\mathrm{T}}(-w)\eta\Theta(w)\Big]\mathrm{D}_w\\
&= \left(p+\widehat{\mu}+\frac{1}{2}\right)\widetilde{\widehat{\Omega}}_p(w) + \sum_{s\geq 1}\widehat{R}_s^{\mathrm{T}}\widetilde{\widehat{\Omega}}_{p-s}(w) + \widetilde{\widehat{\Omega}}_p(w)\left(\mathrm{D}_w+\frac{1}{2}\right).
\end{aligned} \tag{6.23}$$

从而命题得证. □

接下来计算 $\partial_{E^2}\hat{\Omega}_p(w)$. 记

$$\widehat{\Theta}_p = \widehat{\Theta}_p(w)\big|_{w=0} = \Big(\nabla\theta_{0,p}, \nabla\theta_{1,p}, \ldots, \nabla\theta_{n,p}\Big), \quad p\in\mathbb{Z}. \tag{6.24}$$

则易知

$$\frac{1}{w}\widehat{\Theta}_{p-1}^{\mathrm{T}}(-w) + \widehat{\Theta}_p^{\mathrm{T}}(-w) = \frac{1}{w}\widehat{\Theta}_{p-1}^{\mathrm{T}}, \tag{6.25}$$

$$\partial_E\widehat{\Theta}_{p+1}^{\mathrm{T}} = (p+1)\widehat{\Theta}_{p+1}^{\mathrm{T}} - \widehat{\Theta}_{p+1}^{\mathrm{T}}\mu + \sum_{l\geq 0}\widehat{B}_l^{\mathrm{T}}\widehat{\Theta}_{p+1-l}^{\mathrm{T}}, \tag{6.26}$$

其中 $\widehat{B}_0 = \widehat{\mu}$, $\widehat{B}_s = \widehat{R}_s$, $s\geq 1$. 先证明一个常用引理.

引理 6.3. 对任意 $\forall p\in\mathbb{Z}$, 如下等式成立:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{w}\widehat{\Theta}_p^{\mathrm{T}}\eta\mu\Theta(w)\\
&= -\Big(p+\widehat{\mu}\Big)\widetilde{\widehat{\Omega}}_p(w) - \sum_{s\geq 1}\widehat{R}_s^{\mathrm{T}}\widetilde{\widehat{\Omega}}_{p-s}(w) + \left(\widetilde{\widehat{\Omega}}_{p-1}(w)\frac{1}{w}\right)\Big(\mathrm{D}_w+1\Big).
\end{aligned} \tag{6.27}$$

特别地, 对任意 $p,q\in\mathbb{Z}$, $\alpha,\beta\in\{1,\ldots,n\}$, 成立

$$\nabla\theta_{0,p+1}^{\mathrm{T}}\eta\mu\nabla\theta_{\beta,q} = (q+\mu_\beta)\,\Omega_{0,p;\beta,q} - \left(p+1-\frac{d}{2}\right)\Omega_{0,p+1;\beta,q-1}$$

$$
\begin{aligned}
&+\sum_{s\geq 1}\Omega_{0,p;\varepsilon,q-s}(R_s)^{\varepsilon}_{\beta}-\sum_{s\geq 1}r^{\varepsilon}_{s}\Omega_{\varepsilon,p+1-s;\beta,q-1}\\
&+(-1)^q\chi_{q\geq 1}\chi_{p+q\geq 0}r^{\varepsilon}_{p+q+1}\eta_{\varepsilon\beta},
\end{aligned}
\tag{6.28}
$$

$$
\begin{aligned}
\nabla\theta^{\mathrm{T}}_{\alpha,p+1}\eta\mu\nabla\theta_{\beta,q}=&(q+\mu_\beta)\Omega_{\alpha,p;\beta,q}-(p+1+\mu_\alpha)\Omega_{\alpha,p+1;\beta,q-1}\\
&+\sum_{s\geq 1}(R_s)^{\varepsilon}_{\beta}\Omega_{\alpha,p;\varepsilon,q-s}-\sum_{s\geq 1}(R_s)^{\varepsilon}_{\alpha}\Omega_{\varepsilon,p+1-s;\beta,q-1}\\
&+(-1)^p\eta_{\alpha\varepsilon}(R_{p+q+1})^{\varepsilon}_{\beta}\chi_{p\geq 0}\chi_{q\geq 1}+\eta\mu\delta_{p,-1}\delta_{q,0}.
\end{aligned}
\tag{6.29}
$$

证明. 由关系式(6.12)(6.13)(6.25) 以及 $\mathcal{U}^{\mathrm{T}}\eta=\eta\mathcal{U}$ 可知

$$
\begin{aligned}
\partial_E\hat{\Omega}_p(w)=&\widehat{\Theta}^{\mathrm{T}}_p(-w)\mathcal{U}^{\mathrm{T}}\eta\Theta(w)+\widehat{\Theta}^{\mathrm{T}}_{p+1}(-w)\eta\partial_E\Theta(w)\\
=&\left[\frac{1}{w}\widehat{\Theta}^{\mathrm{T}}_p(-w)+\widehat{\Theta}^{\mathrm{T}}_{p+1}(-w)\right]\eta\partial_E\Theta(w)\\
=&\frac{1}{w}\widehat{\Theta}^{\mathrm{T}}_p\eta\Big(\Theta(w)\mathrm{D}_w-\mu\Theta(w)\Big)\\
=&-\frac{1}{w}\Theta^{\mathrm{T}}_p\eta\mu\Theta(w)+\left(\frac{1}{w}\Theta^{\mathrm{T}}_p\eta\Theta(w)\right)(\mathrm{D}_w+1),
\end{aligned}
\tag{6.30}
$$

进而推出

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{w}\widehat{\Theta}^{\mathrm{T}}_p\eta\mu\Theta(w)=&\left(\frac{1}{w}\Theta^{\mathrm{T}}_p\eta\Theta(w)\right)(\mathrm{D}_w+1)-\partial_E\hat{\Omega}_p(w)\\
=&\left(\frac{1}{w}\widetilde{\widetilde{\Omega}}_{p-1}(w)+\widetilde{\widetilde{\Omega}}_p(w)\right)(\mathrm{D}_w+1)-\partial_E\hat{\Omega}_p(w).
\end{aligned}
\tag{6.31}
$$

将上述等式与(6.22)比较, 即可推出(6.27). 引理得证. □

命题 6.4. 下述等式成立:

$$
\begin{aligned}
\partial_{E^2}\hat{\Omega}_p(w)=&\widetilde{\widetilde{\Omega}}_p(0)\left(\frac{1}{4}-\mu^2\right)\eta^{-1}\Omega(0,w)\\
&+\left(p+\widehat{\mu}+\frac{1}{2}\right)\left(p+\widehat{\mu}+\frac{3}{2}\right)\widetilde{\widetilde{\Omega}}_{p+1}(w)\\
&+\sum_{l\geq 1}2\Big(p+\widehat{\mu}+1\Big)\widehat{R}^{\mathrm{T}}_l\widetilde{\widetilde{\Omega}}_{p+1-l}(w)+\sum_{l\geq 2}\widehat{R}^{\mathrm{T}}_{l;2}\widetilde{\widetilde{\Omega}}_{p+1-l}(w)\\
&+\left[\widetilde{\widetilde{\Omega}}_p(w)\frac{1}{w}\left(\mathrm{D}_w+\frac{1}{2}\right)\left(\mathrm{D}_w+\frac{3}{2}\right)\right]_+,\quad p\in\mathbb{Z}.
\end{aligned}
\tag{6.32}
$$

其中 $\widehat{R}_{l;2}=[\widehat{R}^2]_l$, 分次 $[-]_l$ 的定义与(2.14)完全类似, 只需将其中 $n\times n$ 的矩阵 μ, R 换成 $(n+1)\times(n+1)$ 的矩阵 $\widehat{\mu}, \widehat{R}$; 关于形式变元 z, w 的 $n\times n$ 矩阵值形式幂级数 $\Omega(z,w)$ 由

$$\Big(\Omega(z,w)\Big)_{\alpha\beta}=\sum_{p,q\geq 0}\Omega_{\alpha,p;\beta,q}z^p w^q, \tag{6.33}$$

所定义; 对于任何矩阵值洛朗级数 $A=\sum_{k\geq s}A_k w^k$, 记 $[A]_+=\sum_{k\geq 0}A_k w^k$.

证明. 由关系式(6.10)–(6.13) (6.25)(6.26)以及 $\mathcal{U}^{\mathrm{T}}\eta=\eta\mathcal{U}$ 可得

$$\begin{aligned}
\partial_{E^2}\hat{\Omega}_p(w)&=\partial_{E^2}\left(\widehat{\Theta}^{\mathrm{T}}_{p+1}(-w)\eta\Theta(w)\right)\\
&=\widehat{\Theta}^{\mathrm{T}}_{p}(-w)(\mathcal{U}^{\mathrm{T}})^2\eta\Theta(w)+w\widehat{\Theta}^{\mathrm{T}}_{p+1}(-w)\eta\mathcal{U}^2\Theta(w)\\
&=\widehat{\Theta}^{\mathrm{T}}_{p}(-w)\mathcal{U}^{\mathrm{T}}\eta\mathcal{U}\Theta(w)+w\widehat{\Theta}^{\mathrm{T}}_{p+1}(-w)\mathcal{U}^{\mathrm{T}}\eta\mathcal{U}\Theta(w)\\
&=\left(\frac{1}{w}\partial_E\widehat{\Theta}^{\mathrm{T}}_{p+1}(-w)+\partial_E\widehat{\Theta}^{\mathrm{T}}_{p+2}(-w)\right)\eta\Big(\partial_E\Theta(w)\Big)\\
&=\left(\frac{1}{w}\partial_E\widehat{\Theta}^{\mathrm{T}}_{p+1}\right)\eta\Big(\partial_E\Theta(w)\Big)\\
&=\frac{1}{w}\Big[(p+1)\widehat{\Theta}^{\mathrm{T}}_{p+1}-\widehat{\Theta}^{\mathrm{T}}_{p+1}\mu+\sum_{l\geq 0}\widehat{B}^{\mathrm{T}}_l\widehat{\Theta}^{\mathrm{T}}_{p+1-l}\Big]\eta\Big(\Theta(w)\mathrm{D}_w-\mu\Theta(w)\Big).
\end{aligned}\tag{6.34}$$

然后由(6.27)可得

$$\begin{aligned}
&\partial_{E^2}\hat{\Omega}_p(w)=\frac{1}{w}\widehat{\Theta}^{\mathrm{T}}_{p+1}\mu\eta\mu\Theta(w)+(p+1)^2\widetilde{\widehat{\Omega}}_{p+1}(w)\\
&\quad+\sum_{l\geq 0}\widehat{B}^{\mathrm{T}}_l(2p+2-l)\widetilde{\widehat{\Omega}}_{p+1-l}(w)+\sum_{l\geq 0}\widehat{B}^{\mathrm{T}}_{l;2}\widetilde{\widehat{\Omega}}_{p+1-l}(w)+\widetilde{\widehat{\Omega}}_p(w)\frac{1}{w}(\mathrm{D}_w+1)^2\\
&=\frac{1}{w}\widehat{\Theta}^{\mathrm{T}}_{p+1}\mu\eta\mu\Theta(w)+\Big(p+\widehat{\mu}+1\Big)^2\widetilde{\widehat{\Omega}}_{p+1}(w)\\
&\quad+2\sum_{s\geq 1}\Big(p+\widehat{\mu}+1\Big)\widehat{R}^{\mathrm{T}}_s\widetilde{\widehat{\Omega}}_{p+1-s}(w)+\sum_{s\geq 2}\widehat{R}^{\mathrm{T}}_{s;2}\widetilde{\widehat{\Omega}}_{p+1-s}(w)+\widetilde{\widehat{\Omega}}_p(w)\frac{1}{w}(\mathrm{D}_w+1)^2\\
&=\frac{1}{w}\widehat{\Theta}^{\mathrm{T}}_{p+1}\mu\eta\mu\Theta(w)+\left(p+\widehat{\mu}+\frac{1}{2}\right)\left(p+\widehat{\mu}+\frac{3}{2}\right)\widetilde{\widehat{\Omega}}_{p+1}(w)\\
&\quad+2\sum_{s\geq 1}\Big(p+\widehat{\mu}+1\Big)\widehat{R}^{\mathrm{T}}_s\widetilde{\widehat{\Omega}}_{p+1-s}(w)+\sum_{s\geq 2}\widehat{R}^{\mathrm{T}}_{s;2}\widetilde{\widehat{\Omega}}_{p+1-s}(w)
\end{aligned}$$

$$
+\widetilde{\widetilde{\widehat{\Omega}}}_p(w)\frac{1}{w}\left(\mathrm{D}_w+\frac{1}{2}\right)\left(\mathrm{D}_w+\frac{3}{2}\right)+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{w}\widetilde{\widetilde{\widehat{\Omega}}}_p(w)+\widetilde{\widetilde{\widehat{\Omega}}}_{p+1}(w)\right), \tag{6.35}
$$

其中 $\widehat{B}_{l;2}:=[\widehat{B}^2]_l=[(\widehat{\mu}+\widehat{R})^2]_l$. 另一方面, 注意

$$
\widehat{\Theta}_p^{\mathrm{T}}=\widetilde{\widetilde{\widehat{\Omega}}}_{p-1}(0)\eta^{-1}, \tag{6.36}
$$

$$
\Theta(w)=I+w\eta^{-1}\Omega(0,w) \tag{6.37}
$$

对任意 $p\in\mathbb{Z}$ 成立, 并利用(6.21), 可得

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{w}\Big(\widetilde{\widetilde{\widehat{\Omega}}}_p(w)-\widetilde{\widetilde{\widehat{\Omega}}}_p(0)\Big)+\widetilde{\widetilde{\widehat{\Omega}}}_{p+1}(w)\\
=&\frac{1}{w}\widehat{\Theta}_{p+1}^{\mathrm{T}}\eta\Big(\Theta(w)-I\Big)=\widetilde{\widetilde{\widehat{\Omega}}}_p(0)\eta^{-1}\Omega(0,w),
\end{aligned} \tag{6.38}
$$

以及

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{w}\Theta_{p+1}^{\mathrm{T}}\mu\eta\mu\Theta(w)&=\frac{1}{w}\widetilde{\widetilde{\widehat{\Omega}}}_p(0)\eta^{-1}\mu\eta\mu\Big(w\eta^{-1}\Omega(0,w)+I\Big)\\
&=-\widetilde{\widetilde{\widehat{\Omega}}}_p(0)\mu^2\eta^{-1}\Omega(0,w)-\frac{1}{w}\widetilde{\widetilde{\widehat{\Omega}}}_p(0)\mu^2.
\end{aligned} \tag{6.39}
$$

综上所述, 有

$$
\begin{aligned}
&\partial_{E^2}\hat{\Omega}_p(w)\\
=&\widetilde{\widetilde{\widehat{\Omega}}}_p(0)\left(\frac{1}{4}-\mu^2\right)\eta^{-1}\Omega(0,w)+\left(p+\widehat{\mu}+\frac{1}{2}\right)\left(p+\widehat{\mu}+\frac{3}{2}\right)\widetilde{\widetilde{\widehat{\Omega}}}_{p+1}(w)\\
&+\sum_{l\geq1}2\Big(p+\widehat{\mu}+1\Big)\widehat{R}_l^{\mathrm{T}}\widetilde{\widetilde{\widehat{\Omega}}}_{p+1-l}(w)+\sum_{l\geq2}\widehat{R}_{l;2}^{\mathrm{T}}\widetilde{\widetilde{\widehat{\Omega}}}_{p+1-l}(w)\\
&+\left[\frac{1}{w}\widetilde{\widetilde{\widehat{\Omega}}}_p(0)\left(\frac{1}{4}-\mu^2\right)+\widetilde{\widetilde{\widehat{\Omega}}}_p(w)\frac{1}{w}\left(\mathrm{D}_w+\frac{1}{2}\right)\left(\mathrm{D}_w+\frac{3}{2}\right)\right]\\
=&\widetilde{\widetilde{\widehat{\Omega}}}_p(0)\left(\frac{1}{4}-\mu^2\right)\eta^{-1}\Omega(0,w)+\left(p+\widehat{\mu}+\frac{1}{2}\right)\left(p+\widehat{\mu}+\frac{3}{2}\right)\widetilde{\widetilde{\widehat{\Omega}}}_{p+1}(w)\\
&+\sum_{l\geq1}2\Big(p+\widehat{\mu}+1\Big)\widehat{R}_l^{\mathrm{T}}\widetilde{\widetilde{\widehat{\Omega}}}_{p+1-l}(w)+\sum_{l\geq2}\widehat{R}_{l;2}^{\mathrm{T}}\widetilde{\widetilde{\widehat{\Omega}}}_{p+1-l}(w)\\
&+\left[\widetilde{\widetilde{\widehat{\Omega}}}_p(w)\frac{1}{w}\left(\mathrm{D}_w+\frac{1}{2}\right)\left(\mathrm{D}_w+\frac{3}{2}\right)\right]_+,
\end{aligned} \tag{6.40}
$$

从而命题得证. □

现在开始准备计算 $\partial_{E^3}\hat{\Omega}_p(w)$. 为此, 引入 $n\times n$ 矩阵值函数

$$\mathcal{C} := \left.\frac{\mathrm{d}\Theta(w)}{\mathrm{d}w}\right|_{w=0} = \eta^{-1}\Omega(0,0) = \big(\nabla\theta_{1,1},\dots,\nabla\theta_{n,1}\big), \tag{6.41}$$

则易知 $(\partial_\alpha\mathcal{C})^\beta_\gamma = c^\beta_{\alpha\gamma}$, 于是再由(1.35)式, 可得

$$\mathcal{U} = (1-\mu)\mathcal{C} + \mathcal{C}\mu + R_1. \tag{6.42}$$

此外, 对 M 上的任何切向量场 $Y = Y^\alpha\partial_\alpha$, 成立

$$\partial_Y\mathcal{C} = \mathcal{C}(Y), \tag{6.43}$$

其中 $\mathcal{C}(Y)$ 的定义见(6.10). 特别地, 成立

$$\partial_E\mathcal{C} = \mathcal{U}, \quad \partial_{E^2}\mathcal{C} = \mathcal{U}^2. \tag{6.44}$$

引理 6.5. *以下等式对任意 $i = 0,1,\dots,n$ 与 $p\in\mathbb{Z}$ 都成立:*

$$\mathcal{C}\nabla\theta_{i,p} = \nabla\theta_{i,p+1} + \eta^{-1}\Omega_{\bullet,1;i,p-1} - \delta_{p+1,0}\delta^\beta_i\partial_\beta, \tag{6.45}$$

其中 $n\times 1$ 矩阵 $\Omega_{\bullet,1;i,p-1}$ 的定义为 $(\Omega_{1,1;i,p-1},\dots,\Omega_{n,1;i,p-1})^{\mathrm{T}}$, 且向量场 ∂_β 自然视为 $n\times 1$ 矩阵 $(0,\dots,1,\dots,0)^{\mathrm{T}}$, 其中元素 "1" 位于第 β 行.

证明. 由等式(1.37)可知

$$\partial_\alpha\theta_{\beta,1} = \partial_\beta\theta_{\alpha,1}, \qquad 1\le\alpha,\beta\le n. \tag{6.46}$$

从而, 对任意给定的 $1\le\gamma\le n$, 由关系式(6.21)以及 $\Omega_{i,p;j,q}$ 的定义可得

$$\begin{aligned}\big(\mathcal{C}\nabla\theta_{i,p}\big)^\gamma &= \mathcal{C}^\gamma_\varepsilon\partial^\varepsilon\theta_{i,p} = \eta^{\gamma\beta}\partial_\beta\theta_{\varepsilon,1}\partial^\varepsilon\theta_{i,p} = \eta^{\gamma\beta}\partial_\varepsilon\theta_{\beta,1}\partial^\varepsilon\theta_{i,p}\\ &= \eta^{\gamma\beta}\langle\nabla\theta_{\beta,1},\nabla\theta_{i,p}\rangle\\ &= \eta^{\gamma\beta}\big(\Omega_{\beta,0;i,p} + \Omega_{\beta,1;i,p-1}\big)\\ &= \eta^{\gamma\beta}\big(\partial_\beta\theta_{i,p+1} - \delta_{p+1,0}\delta^\gamma_i\eta_{\beta\gamma} + \Omega_{\beta,1;i,p-1}\big)\\ &= \partial^\gamma\theta_{i,p+1} + \eta^{\gamma\beta}\Omega_{\beta,1;i,p-1} - \delta_{p+1,0}\delta^\gamma_i,\end{aligned} \tag{6.47}$$

因此关系式(6.45)成立, 引理得证. □

关系式(6.45)可被改写为如下矩阵形式:

$$\widehat{\Theta}_p^{\mathrm{T}}\mathcal{C}^{\mathrm{T}} = \widehat{\Theta}_{p+1}^{\mathrm{T}} + \partial_w\widetilde{\widetilde{\widehat{\Omega}}}_{p-1}(0)\eta^{-1}, \tag{6.48}$$

$$\widehat{\Theta}_p^{\mathrm{T}}(w)\mathcal{C}^{\mathrm{T}} = \widehat{\Theta}_{p+1}^{\mathrm{T}}(w) + \sum_{k\geq 0}\big(\partial_w\widetilde{\widetilde{\widehat{\Omega}}}_{p+k-1}(0)\big)\eta^{-1}w^k, \tag{6.49}$$

$$\mathcal{C}\Theta(w) = \frac{1}{w}(\Theta(w) - I) + w\eta^{-1}\partial_z\Omega(0,w) \tag{6.50}$$

其中微分算子 ∂_w, ∂_z 的定义如下:

$$\partial_w\widetilde{\widetilde{\widehat{\Omega}}}_{p-1}(0) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}w}\widetilde{\widetilde{\widehat{\Omega}}}_{p-1}(w)\bigg|_{w=0}, \quad \partial_z\Omega(0,w) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\Omega(z,w)\bigg|_{z=0}, \tag{6.51}$$

$\Omega(z,w)$ 的定义见(6.33).

引理 6.6. *对任意 $p\in\mathbb{Z}$, 以下等式成立:*

$$\begin{aligned}\widehat{\Theta}_p^{\mathrm{T}}\eta\mu\mathcal{C} = &-(p+\widehat{\mu})\widetilde{\widetilde{\widehat{\Omega}}}_p(0) - \sum_{s\geq 1}\widehat{R}_s^{\mathrm{T}}\widetilde{\widetilde{\widehat{\Omega}}}_{p-s}(0)\\ &+ \partial_w\widetilde{\widetilde{\widehat{\Omega}}}_{p-1}(0)(\mu+1) + \widetilde{\widetilde{\widehat{\Omega}}}_{p-1}(0)R_1,\end{aligned} \tag{6.52}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{C}^{\mathrm{T}}\mu\eta\Theta(w) = &-\eta\Theta(w)\big(\mathrm{D}_w - 1\big)\frac{1}{w} + w(1+\mu)\partial_z\Omega(0,w)\\ &+ R_1^{\mathrm{T}}\eta\Theta(w) - (1+\mu)\eta\cdot\frac{1}{w}.\end{aligned} \tag{6.53}$$

证明. 由(6.27)式可知

$$\widehat{\Theta}_p^{\mathrm{T}}\eta\mu\Theta(w) = -(p+\widehat{\mu})\widetilde{\widetilde{\widehat{\Omega}}}_p(w)w - \sum_{s\geq 1}\widehat{R}_s^{\mathrm{T}}\widetilde{\widetilde{\widehat{\Omega}}}_{p-s}(w)w + \widetilde{\widetilde{\widehat{\Omega}}}_{p-1}(w)\mathrm{D}_w. \tag{6.54}$$

再结合 $\mathcal{C}$ 的定义式(6.41)可知引理成立. □

引理 6.7. *对任意 $p\in\mathbb{Z}$, 如下等式成立:*

$$\begin{aligned}\partial_{E^2}\widehat{\Theta}_p^{\mathrm{T}}(w) = &\left(p+\widehat{\mu}-\frac{1}{2}+w\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}w}\right)\left(p+\widehat{\mu}+\frac{1}{2}+w\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}w}\right)\widehat{\Theta}_{p+1}^{\mathrm{T}}(w)\\ &+2\sum_{s\geq 1}\left(p+\widehat{\mu}+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}w}\right)\widehat{R}_s^{\mathrm{T}}\widehat{\Theta}_{p+1-s}^{\mathrm{T}}(w) + \sum_{s\geq 2}\widehat{R}_{s;2}^{\mathrm{T}}\widehat{\Theta}_{p+1-s}^{\mathrm{T}}(w)\\ &+\sum_{k\geq 0}\partial_w\widetilde{\widetilde{\widehat{\Omega}}}_{p-k+1}(0)\eta^{-1}\left(\mu-\frac{1}{2}\right)\left(\mu-\frac{3}{2}\right)w^k\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\quad - 2\widehat{\Theta}_p^{\mathrm{T}}(w) R_1^{\mathrm{T}}(\mu - 1) + \widehat{\Theta}_p^{\mathrm{T}}(w)\left(\frac{1}{4} - \mu^2\right)\mathcal{C}^{\mathrm{T}}, \qquad (6.55)\\
\partial_{E^2}\Theta(w) &= \Theta(w)\left(\mathrm{D}_w - \frac{1}{2}\right)\left(\mathrm{D}_w - \frac{3}{2}\right)\frac{1}{w} - \frac{1}{w}\left(\frac{1}{2} - \mu\right)\left(\frac{3}{2} - \mu\right)\\
&\quad + w\left(\frac{1}{2} - \mu\right)\left(\frac{3}{2} - \mu\right)\eta^{-1}\partial_z\Omega(0, w)\\
&\quad - 2(\mu - 1)R_1\Theta(w) + \mathcal{C}\left(\frac{1}{4} - \mu^2\right)\Theta(w). \qquad (6.56)
\end{aligned}
$$

证明. 通过用两种不同方法计算 $\partial_E\partial_E\widehat{\Theta}_p(w)$, 可证明此引理. 一方面, 由(6.11)(6.42)以及(6.43)可知

$$
\begin{aligned}
&\partial_E\partial_E\Theta_p(w)\\
&= \partial_E\big(\mathcal{U}\widehat{\Theta}_{p-1}(w)\big) = \big[(1-\mu)\mathcal{U} + \mathcal{U}\mu\big]\widehat{\Theta}_{p-1}(w) + \mathcal{U}^2\widehat{\Theta}_{p-2}(w)\\
&= \partial_{E^2}\widehat{\Theta}_{p-1}(w) + 2(1-\mu)\partial_E\widehat{\Theta}_p(w) - (1-\mu)\mathcal{U}\widehat{\Theta}_{p-1}(w) + \mathcal{U}\mu\widehat{\Theta}_{p-1}(w)\\
&= \partial_{E^2}\widehat{\Theta}_{p-1}(w) + 2(1-\mu)\partial_E\widehat{\Theta}_p(w)\\
&\quad - (1-\mu)\big[(1-\mu)\mathcal{C} + \mathcal{C}\mu + R_1\big]\widehat{\Theta}_{p-1}(w)\\
&\quad + \big[(1-\mu)\mathcal{C} + \mathcal{C}\mu + R_1\big]\mu\widehat{\Theta}_{p-1}(w)\\
&= \partial_{E^2}\widehat{\Theta}_{p-1}(w) + 2(1-\mu)\partial_E\widehat{\Theta}_p(w) - (1-\mu)^2\mathcal{C}\widehat{\Theta}_{p-1}(w)\\
&\quad + 2(\mu-1)R_1\widehat{\Theta}_{p-1}(w) + \mathcal{C}\mu^2\widehat{\Theta}_{p-1}(w), \qquad (6.57)
\end{aligned}
$$

从而

$$
\begin{aligned}
\partial_{E^2}\widehat{\Theta}_{p-1}(w) &= \partial_E\partial_E\widehat{\Theta}_p(w) - 2(1-\mu)\partial_E\widehat{\Theta}_p(w) + (1-\mu)^2\mathcal{C}\widehat{\Theta}_{p-1}(w)\\
&\quad - 2(\mu-1)R_1\widehat{\Theta}_{p-1}(w) - \mathcal{C}\mu^2\widehat{\Theta}_{p-1}(w). \qquad (6.58)
\end{aligned}
$$

另一方面, 由(6.7)可得

$$
\begin{aligned}
&\partial_E\partial_E\widehat{\Theta}_p^{\mathrm{T}}(w)\\
&= \partial_E\left[\left(p + \widehat{\mu} + w\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}w}\right)\widehat{\Theta}_p^{\mathrm{T}}(w) + \sum_{s\geq 1}\widehat{R}_s^{\mathrm{T}}\widehat{\Theta}_{p-s}^{\mathrm{T}}(w) - \widehat{\Theta}_p^{\mathrm{T}}(w)\mu\right]\\
&= \left(p + \widehat{\mu} + w\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}w}\right)\left[\left(p + \widehat{\mu} + w\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}w}\right)\widehat{\Theta}_p^{\mathrm{T}}(w) + \sum_{s\geq 1}\widehat{R}_s^{\mathrm{T}}\widehat{\Theta}_{p-s}^{\mathrm{T}}(w) - \widehat{\Theta}_p^{\mathrm{T}}(w)\mu\right]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+\sum_{s\geq 1}\widehat{R}_s^{\mathrm{T}}\left[\left(p-s+\widehat{\mu}+w\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}w}\right)\widehat{\Theta}_{p-s}^{\mathrm{T}}(w)+\sum_{l\geq 1}\widehat{R}_l^{\mathrm{T}}\widehat{\Theta}_{p-s-l}^{\mathrm{T}}(w)-\widehat{\Theta}_{p-s}^{\mathrm{T}}(w)\mu\right]\\
&-\left[\left(p+\widehat{\mu}+w\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}w}\right)\widehat{\Theta}_p^{\mathrm{T}}(w)+\sum_{s\geq 1}\widehat{R}_s^{\mathrm{T}}\widehat{\Theta}_{p-s}^{\mathrm{T}}(w)-\widehat{\Theta}_p^{\mathrm{T}}(w)\mu\right]\mu\\
=&\left(p+\widehat{\mu}+w\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}w}\right)^2\widehat{\Theta}_p^{\mathrm{T}}(w)+2\sum_{s\geq 1}\left(p+\widehat{\mu}+w\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}w}\right)\widehat{R}_s^{\mathrm{T}}\widehat{\Theta}_{p-s}^{\mathrm{T}}(w)\\
&-2\left(p+\widehat{\mu}+w\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}w}\right)\widehat{\Theta}_p^{\mathrm{T}}(w)\mu-2\sum_{s\geq 1}\widehat{R}_s^{\mathrm{T}}\widehat{\Theta}_{p-s}^{\mathrm{T}}(w)\mu\\
&+\sum_{s\geq 2}\widehat{R}_{s;2}^{\mathrm{T}}\widehat{\Theta}_{p-s}^{\mathrm{T}}(w)+\widehat{\Theta}_p^{\mathrm{T}}(w)\mu^2. \qquad (6.59)
\end{aligned}
$$

将此关系与(6.58)(6.49)相结合, 可得(6.55)式. (6.56)式的证明方法与之完全类似, 这里从略. 综上, 本引理得证. □

命题 6.8. 对任意 $p\in\mathbb{Z}$, 成立

$$
\begin{aligned}
\partial_{E^3}\hat{\Omega}_p(w)=&\,\widetilde{\widehat{\Omega}}_p(0)\left(\frac{1}{2}-\mu\right)\left(\frac{3}{2}-\mu\right)\eta^{-1}\left(\frac{1}{2}-\mu\right)\partial_z\Omega(0,w)\\
&+\partial_w\widetilde{\widehat{\Omega}}_p(0)\left(\frac{1}{2}-\mu\right)\eta^{-1}\left(\frac{1}{2}-\mu\right)\left(\frac{3}{2}-\mu\right)\Omega(0,w)\\
&+\widetilde{\widehat{\Omega}}_p(0)\left(-3\mu^2+3\mu+\frac{1}{4}\right)R_1\eta^{-1}\Omega(0,w)\\
&+\left(p+\widehat{\mu}+\frac{1}{2}\right)\left(p+\widehat{\mu}+\frac{3}{2}\right)\left(p+\widehat{\mu}+\frac{5}{2}\right)\widetilde{\widehat{\Omega}}_{p+2}(w)\\
&+\sum_{s\geq 1}\left[3\left(p+\widehat{\mu}+\frac{1}{2}\right)^2+6\left(p+\widehat{\mu}+\frac{1}{2}\right)+2\right]\widehat{R}_s^{\mathrm{T}}\widetilde{\widehat{\Omega}}_{p+2-s}(w)\\
&+\sum_{s\geq 2}3\left(p+\widehat{\mu}+\frac{3}{2}\right)\widehat{R}_{s;2}^{\mathrm{T}}\widetilde{\widehat{\Omega}}_{p+2-s}(w)+\sum_{s\geq 3}\widehat{R}_{s;3}^{\mathrm{T}}\widetilde{\widehat{\Omega}}_{p+2-s}(w)\\
&+\left[\widetilde{\widehat{\Omega}}_p(w)\frac{1}{w^2}\left(\mathrm{D}_w+\frac{1}{2}\right)\left(\mathrm{D}_w+\frac{3}{2}\right)\left(\mathrm{D}_w+\frac{5}{2}\right)\right]_+. \qquad (6.60)
\end{aligned}
$$

证明. 由命题6.2, 6.4 的证明过程以及关系式(6.10)–(6.11)与(6.25)可得

$$
\begin{aligned}
\partial_E\hat{\Omega}_p(w)&=\widehat{\Theta}_p^{\mathrm{T}}(-w)\eta\mathcal{U}\Theta(w)+w\widehat{\Theta}_{p+1}^{\mathrm{T}}(-w)\eta\mathcal{U}\Theta(w)\\
&=\widehat{\Theta}_p^{\mathrm{T}}\eta\mathcal{U}\Theta(w), \qquad (6.61)
\end{aligned}
$$

$$\partial_{E^2}\hat{\Omega}_p(w) = \frac{1}{w}\Big(\partial_E\widehat{\Theta}^{\mathrm{T}}_{p+1}\Big)\eta\Big(\partial_E\Theta(w)\Big)$$
$$= \widehat{\Theta}^{\mathrm{T}}_p\mathcal{U}^{\mathrm{T}}\eta\mathcal{U}\Theta(w) = \widehat{\Theta}^{\mathrm{T}}_p\eta\mathcal{U}^2\Theta(w). \tag{6.62}$$

另一方面, 由(6.42)–(6.43)式可得

$$\partial_{E^2}\mathcal{U} = (1-\mu)\mathcal{U}^2 + \mathcal{U}^2\mu, \tag{6.63}$$

因此有

$$\begin{aligned}
&\partial_{E^3}\hat{\Omega}_p(w)\\
&= \widehat{\Theta}^{\mathrm{T}}_p(-w)(\mathcal{U}^{\mathrm{T}})^3\eta\Theta(w) + w\widehat{\Theta}^{\mathrm{T}}_{p+1}(-w)\eta\mathcal{U}^3\Theta(w)\\
&= \widehat{\Theta}^{\mathrm{T}}_p(-w)(\mathcal{U}^{\mathrm{T}})^2\eta\mathcal{U}\Theta(w) + w\widehat{\Theta}^{\mathrm{T}}_{p+1}(-w)\eta\mathcal{U}\cdot\mathcal{U}^2\Theta(w)\\
&= \partial_{E^2}\Big(\widehat{\Theta}^{\mathrm{T}}_{p+1}(-w)\eta\mathcal{U}\Theta(w)\Big) - \widehat{\Theta}^{\mathrm{T}}_{p+1}(-w)\eta\Big(\partial_{E^2}\mathcal{U}\Big)\Theta(w)\\
&= \sum_{k\geq 0}(-1)^k\partial_{E^2}\partial_E\hat{\Omega}_{p+1+k}(w)\cdot w^k - \widehat{\Theta}^{\mathrm{T}}_{p+1}(-w)\eta\big[(1-\mu)\mathcal{U}^2 + \mathcal{U}^2\mu\big]\Theta(w)\\
&= \sum_{k\geq 0}(-1)^k\partial_{E^2}\partial_E\hat{\Omega}_{p+1+k}(w)\cdot w^k - 2\widehat{\Theta}^{\mathrm{T}}_{p+1}(-w)\eta\mathcal{U}^2\Theta(w)\\
&\quad + \widehat{\Theta}^{\mathrm{T}}_{p+1}(-w)\eta\left(\mu+\frac{1}{2}\right)\mathcal{U}^2\Theta(w) + \widehat{\Theta}^{\mathrm{T}}_{p+1}(-w)(\mathcal{U}^{\mathrm{T}})^2\eta\left(\frac{1}{2}-\mu\right)\Theta(w)\\
&= \sum_{k\geq 0}\partial_{E^2}(\partial_E-2)\hat{\Omega}_{p+1+k}(w)\cdot(-w)^k + \frac{1}{w}\widehat{\Theta}^{\mathrm{T}}_{p+1}(-w)\eta\left(\mu+\frac{1}{2}\right)\partial_{E^2}\Theta(w)\\
&\quad + \partial_{E^2}\widehat{\Theta}^{\mathrm{T}}_{p+2}(-w)\left(\mu+\frac{1}{2}\right)\eta\Theta(w).
\end{aligned} \tag{6.64}$$

于是, 利用(6.22)(6.27)(6.32)(6.48)–(6.56)式, 通过直接计算可得(6.60)式, 从而本定理得证. □

下面开始计算 $\partial_{E^s}\Omega_{0,p;0,q}$, 其中 $s=0,1,2,3$, $p,q\in\mathbb{Z}$.

命题 6.9. *对任意 $p,q\in\mathbb{Z}$, 以下关系成立:*

$$\partial_e\Omega_{0,p;0,q} = \Omega_{0,p-1;0,q} + \Omega_{0,p;0,q-1}. \tag{6.65}$$

$$\begin{aligned}
\partial_E\Omega_{0,p;0,q} &= \Big(p+q+1-d\Big)\Omega_{0,p;0,q}\\
&\quad + \sum_{s\geq 1} r_s^{\varepsilon}\Omega_{\varepsilon,p-s;0,q} + \sum_{s\geq 1} r_s^{\varepsilon}\Omega_{0,p;\varepsilon,q-s} + (-1)^p c_{p+q}.
\end{aligned} \tag{6.66}$$

$$
\begin{aligned}
&\partial_{E^2}\Omega_{0,p;0,q} \\
&= \Omega_{0,p;\bullet,0}\left(\frac{1}{4}-\mu^2\right)\eta^{-1}\Omega_{\bullet,0;0,q} + \left(p-\frac{d}{2}+\frac{1}{2}\right)\left(p-\frac{d}{2}+\frac{3}{2}\right)\Omega_{0,p+1;0,q} \\
&\quad + \left(q-\frac{d}{2}+\frac{1}{2}\right)\left(q-\frac{d}{2}+\frac{3}{2}\right)\Omega_{0,p;0,q+1} \\
&\quad + 2\left(p-\frac{d}{2}+1\right)\sum_{s\geq 1} r_s^{\varepsilon}\Omega_{\varepsilon,p+1-s;0,q} + 2\left(q-\frac{d}{2}+1\right)\sum_{s\geq 1} r_s^{\varepsilon}\Omega_{0,p;\varepsilon,q+1-s} \\
&\quad + \sum_{s\geq 2}\langle R\mathbf{r}\rangle_{s;2}^{\varepsilon}\Omega_{\varepsilon,p+1-s;0,q} + \sum_{s\geq 2}\langle R\mathbf{r}\rangle_{s;2}^{\varepsilon}\Omega_{0,p;\varepsilon,q+1-s} \\
&\quad + (-1)^p\chi_{p+q\geq 0}\langle \mathbf{r}^{\dagger}R\mathbf{r}\rangle_{p+q+2;2} + (-1)^p(q-p)c_{p+q+1},
\end{aligned} \tag{6.67}
$$

$$
\begin{aligned}
&\partial_{E^3}\Omega_{0,p;0,q} \\
&= \Omega_{0,p;\bullet,0}\left(\frac{1}{2}-\mu\right)\left(\frac{3}{2}-\mu\right)\eta^{-1}\left(\frac{1}{2}-\mu\right)\Omega_{\bullet,1;0,q} \\
&\quad + \Omega_{0,p;\bullet,1}\left(\frac{1}{2}-\mu\right)\eta^{-1}\left(\frac{1}{2}-\mu\right)\left(\frac{3}{2}-\mu\right)\Omega_{\bullet,0;0,q} \\
&\quad + \Omega_{0,p;\bullet 0}\left(-3\mu^2+3\mu+\frac{1}{4}\right)R_1\eta^{-1}\Omega_{\bullet,0;0,q} \\
&\quad + \left(p-\frac{d}{2}+\frac{1}{2}\right)\left(p-\frac{d}{2}+\frac{3}{2}\right)\left(p-\frac{d}{2}+\frac{5}{2}\right)\Omega_{0,p+2;0,q} \\
&\quad + \left(q-\frac{d}{2}+\frac{1}{2}\right)\left(q-\frac{d}{2}+\frac{3}{2}\right)\left(q-\frac{d}{2}+\frac{5}{2}\right)\Omega_{0,p;0,q+2} \\
&\quad + \left[3\left(p-\frac{d}{2}+\frac{1}{2}\right)^2 + 6\left(p-\frac{d}{2}+\frac{1}{2}\right)+2\right]\sum_{s\geq 1} r_s^{\varepsilon}\Omega_{\varepsilon,p+2-s;0,q} \\
&\quad + \left[3\left(q-\frac{d}{2}+\frac{1}{2}\right)^2 + 6\left(q-\frac{d}{2}+\frac{1}{2}\right)+2\right]\sum_{s\geq 1} r_s^{\varepsilon}\Omega_{0,p;\varepsilon,q+2-s} \\
&\quad + \sum_{s\geq 2} 3\left(p-\frac{d}{2}+\frac{3}{2}\right)\langle R\mathbf{r}\rangle_{s;2}^{\varepsilon}\Omega_{\varepsilon,p+2-s;0,q} \\
&\quad + \sum_{s\geq 2} 3\left(q-\frac{d}{2}+\frac{3}{2}\right)\langle R\mathbf{r}\rangle_{s;2}^{\varepsilon}\Omega_{0,p;\varepsilon,q+2-s} \\
&\quad + \sum_{s\geq 3}\langle R\mathbf{r}\rangle_{s;3}^{\varepsilon}\Omega_{\varepsilon,p+2-s;0,q} + \sum_{s\geq 3}\langle R\mathbf{r}\rangle_{s;3}^{\varepsilon}\Omega_{0,p;\varepsilon,q+2-s} \\
&\quad + (-1)^q\cdot\frac{3}{2}(p-q)\langle \mathbf{r}^{\dagger}R\mathbf{r}\rangle_{p+q+3;2} + (-1)^p\langle \mathbf{r}^{\dagger}R\mathbf{r}\rangle_{p+q+3;3}
\end{aligned}
$$

$$+(-1)^p c_{p+q+2}\left[\left(p-\frac{d}{2}+\frac{1}{2}\right)\left(p-\frac{d}{2}+\frac{3}{2}\right)+\left(q-\frac{d}{2}+\frac{1}{2}\right)\left(q-\frac{d}{2}+\frac{3}{2}\right)\right.$$
$$\left.-\left(p-\frac{d}{2}+\frac{1}{2}\right)\left(q-\frac{d}{2}+\frac{3}{2}\right)\right], \tag{6.68}$$

其中, 将 $n\times 1$ 矩阵 $(\Omega_{i,p;1,q},\ldots,\Omega_{i,p;n,q})$ 简记为 $\Omega_{i,p;\bullet,q}$, 将 $1\times n$ 矩阵 $(\Omega_{1,p;j,q},\ldots,\Omega_{n,p;j,q})^{\mathrm{T}}$ 简记为 $\Omega_{\bullet,p;j,q}$.

证明. 由(2.43)式可以推出(6.65), 由(1.83)(1.67)(1.44)以及(6.21) 通过直接计算可以验证(6.66), 于是只需再计算 $\partial_{E^2}\Omega_{0,p;0,q}$ 与 $\partial_{E^3}\Omega_{0,p;0,q}$ 即可.

由关系式(1.84)可知

$$\begin{aligned}\partial_E\Omega_{0,p;0,q}&=\langle E,\nabla\Omega_{0,p;0,q}\rangle=\langle E,\nabla\theta_{0,p}\cdot\nabla\theta_{0,q}\rangle=\langle E\cdot\nabla\theta_{0,p},\nabla\theta_{0,q}\rangle\\&=\nabla\theta_{0,p}^{\mathrm{T}}\mathcal{U}^{\mathrm{T}}\eta\nabla\theta_{0,q}=\left(\partial_E\nabla\theta_{0,p+1}^{\mathrm{T}}\right)\eta\nabla\theta_{0,q},\end{aligned} \tag{6.69}$$

然后再由关系式(1.44)可以给出计算 $\partial_E\Omega_{0,p;0,q}$ 的另一种方法. 将所得结果与(6.66)比较, 可得

$$\begin{aligned}\nabla\theta_{0,p+1}^{T}\eta\mu\nabla\theta_{0,q}=&\left(q-\frac{d}{2}\right)\Omega_{0,p;0,q}-\left(p+1-\frac{d}{2}\right)\Omega_{0,p+1;0,q-1}\\&+\sum_{s\geq 1}r_s^{\varepsilon}\Omega_{0,p;\varepsilon,q-s}-\sum_{s\geq 1}r_s^{\varepsilon}\Omega_{\varepsilon,p+1-s;0,q-1}+(-1)^p c_{p+q}.\end{aligned} \tag{6.70}$$

然后由(1.84)(1.44)与(1.57)可得

$$\begin{aligned}&\partial_{E^2}\Omega_{0,p;0,q}\\&=\langle E^2,\nabla\theta_{0,p}\cdot\nabla\theta_{0,q}\rangle=\langle E\cdot\nabla\theta_{0,p},E\cdot\nabla\theta_{0,q}\rangle=\langle\partial_E\nabla\theta_{0,p+1},\partial_E\nabla\theta_{0,q+1}\rangle\\&=\left[\nabla\theta_{0,p+1}^{\mathrm{T}}\left(p+1-\frac{d}{2}-\mu\right)+\sum_{s\geq 1}r_s^{\varepsilon}\nabla\theta_{\varepsilon,p+1-s}^{\mathrm{T}}\right]\\&\qquad\times\eta\left[\left(q+1-\frac{d}{2}-\mu\right)\nabla\theta_{0,q+1}+\sum_{s\geq 1}r_s^{\lambda}\nabla\theta_{\lambda,q+1-s}\right]\\&=\left(p+1-\frac{d}{2}\right)\left(q+1-\frac{d}{2}\right)\langle\nabla\theta_{0,p+1},\nabla\theta_{0,q+1}\rangle\\&\quad+\left[-\left(p+1-\frac{d}{2}\right)+\left(q+1-\frac{d}{2}\right)\right]\nabla\theta_{0,p+1}^{\mathrm{T}}\eta\mu\nabla\theta_{0,q+1}+\nabla\theta_{0,p+1}^{\mathrm{T}}\mu\eta\mu\nabla\theta_{0,q+1}\\&\quad+\left(q+1-\frac{d}{2}\right)\sum_{s\geq 1}r_s^{\varepsilon}\langle\nabla\theta_{\varepsilon,p+1-s},\nabla\theta_{0,q+1}\rangle\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\left(p+1-\frac{d}{2}\right)\sum_{s\geq 1} r_s^{\varepsilon}\langle\nabla\theta_{0,p+1},\nabla\theta_{\varepsilon,q+1-s}\rangle\\
&-\sum_{s\geq 1} r_s^{\varepsilon}\nabla\theta_{\varepsilon,p+1-s}^{\mathrm{T}}\eta\mu\nabla\theta_{0,q+1}+\sum_{s\geq 1} r_s^{\lambda}\nabla\theta_{0,p+1}^{\mathrm{T}}\eta\mu\nabla\theta_{\lambda,q+1-s}\\
&+\sum_{k,l\geq 1} r_k^{\varepsilon}r_l^{\lambda}\langle\nabla\theta_{\varepsilon,p+1-k},\nabla\theta_{\lambda,q+1-l}\rangle,
\end{aligned}
\tag{6.71}
$$

再结合 (6.21) (6.28) (6.29)以及(6.70)式, 可知 (6.67)式成立.

最后来计算 $\partial_{E^3}\Omega_{0,p;0,q}$. 由引理6.5, 并仿照引理6.6的证明过程, 易证

$$
\mathcal{C}\nabla\theta_{0,p}=\nabla\theta_{0,p+1}+\eta^{-1}\Omega_{\bullet,1;0,p-1}
\tag{6.72}
$$

$$
\nabla\theta_{0,p}^{\mathrm{T}}\eta\mathcal{C}=\nabla\theta_{0,p+1}^{\mathrm{T}}\eta+\Omega_{0,p-1;\bullet,1},
\tag{6.73}
$$

$$
\begin{aligned}
\nabla\theta_{0,p}^{\mathrm{T}}\eta\mu\mathcal{C}=\;&\Omega_{0,p-1;\bullet,1}(1+\mu)-\left(p-\frac{d}{2}\right)\nabla\theta_{0,p+1}^{\mathrm{T}}\eta\\
&+\nabla\theta_{0,p}^{\mathrm{T}}\eta R_1-\sum_{s\geq 1} r_s^{\varepsilon}\nabla\theta_{\varepsilon,p+1-s}^{\mathrm{T}}\eta-(-1)^p\chi_{p\geq 0}(r_{p+1})_{\bullet}.
\end{aligned}
\tag{6.74}
$$

再由公式 (1.44) (1.57) (1.84) 以及(6.42) (6.61) (6.69)可得

$$
\begin{aligned}
&\partial_{E^3}\Omega_{0,p;0,q}\\
=\;&\langle E^3,\nabla\theta_{0,p}\cdot\nabla\theta_{0,q}\rangle=\nabla\theta_{0,p}^{\mathrm{T}}\eta\mathcal{U}^3\nabla\theta_{0,q}=\left(\partial_E\nabla\theta_{0,p+1}^{\mathrm{T}}\right)\eta\mathcal{U}\left(\partial_E\nabla\theta_{0,q+1}\right)\\
=\;&\left[\nabla\theta_{0,p+1}^{\mathrm{T}}\left(p+1-\frac{d}{2}-\mu\right)+\sum_{s\geq 1} r_s^{\varepsilon}\nabla\theta_{\varepsilon,p+1-s}^{\mathrm{T}}\right]\eta\mathcal{U}\\
&\times\left[\left(q+1-\frac{d}{2}-\mu\right)\nabla\theta_{0,q+1}+\sum_{s\geq 1} r_s^{\varepsilon}\nabla\theta_{\varepsilon,q+1-s}\right]\\
=\;&\left(p+1-\frac{d}{2}\right)\left(q+1-\frac{d}{2}\right)\nabla\theta_{0,p+1}^{\mathrm{T}}\eta\mathcal{U}\nabla\theta_{0,q+1}\\
&-\left(q+1-\frac{d}{2}\right)\nabla\theta_{0,p+1}^{\mathrm{T}}\mu\eta\mathcal{U}\nabla\theta_{0,q+1}-\left(p+1-\frac{d}{2}\right)\nabla\theta_{0,p+1}^{\mathrm{T}}\eta\mathcal{U}\mu\nabla\theta_{0,q+1}\\
&-\sum_{s\geq 1} r_s^{\varepsilon}\nabla\theta_{0,p+1}^{\mathrm{T}}\mu\eta\mathcal{U}\nabla\theta_{\varepsilon,q+1-s}-\sum_{s\geq 1} r_s^{\varepsilon}\nabla\theta_{\varepsilon,p+1-s}^{\mathrm{T}}\eta\mathcal{U}\mu\nabla\theta_{0,q+1}\\
&+\nabla\theta_{0,p+1}^{\mathrm{T}}\mu\eta\mathcal{U}\mu\nabla\theta_{0,q+1}\\
&+\left(q+1-\frac{d}{2}\right)\sum_{s\geq 1} r_s^{\varepsilon}\nabla\theta_{\varepsilon,p+1-s}^{\mathrm{T}}\eta\mathcal{U}\nabla\theta_{0,q+1}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+\left(p+1-\frac{d}{2}\right)\sum_{s\geq 1} r_s^{\varepsilon}\nabla\theta_{0,p+1}^{\mathrm{T}}\eta\mathcal{U}\nabla\theta_{\varepsilon,q+1-s}\\
&+\sum_{k,l\geq 1} r_k^{\varepsilon} r_l^{\lambda}\nabla\theta_{\varepsilon,p+1-k}^{\mathrm{T}}\eta\mathcal{U}\nabla\theta_{\lambda,q+1-l}.\\
=&\left(p+1-\frac{d}{2}\right)\left(q+1-\frac{d}{2}\right)\partial_E\Omega_{0,p+1;0,q+1}\\
&+\left(q+1-\frac{d}{2}\right)\nabla\theta_{0,p+1}^{\mathrm{T}}\eta\mu\mathcal{U}\nabla\theta_{0,q+1}-\left(p+1-\frac{d}{2}\right)\nabla\theta_{0,p+1}^{\mathrm{T}}\eta\mathcal{U}\mu\nabla\theta_{0,q+1}\\
&+\sum_{s\geq 1} r_s^{\varepsilon}\nabla_{0,p+1}^{\mathrm{T}}\eta\mu\big(\partial_E\nabla\theta_{\varepsilon,q+2-s}\big)-\sum_{s\geq 1} r_s^{\varepsilon}\big(\partial_E\nabla\theta_{\varepsilon,p+2-s}^{\mathrm{T}}\big)\eta\mu\nabla\theta_{0,q+1}\\
&+\nabla\theta_{0,p+1}^{\mathrm{T}}\mu\eta\big[(1-\mu)\mathcal{C}+\mathcal{C}\mu+R_1\big]\mu\nabla\theta_{0,q+1}\\
&+\left(q+1-\frac{d}{2}\right)\sum_{s\geq 1} r_s^{\varepsilon}\partial_E\Omega_{\varepsilon,p+1-s;0,q+1}+\left(p+1-\frac{d}{2}\right)\sum_{s\geq 1} r_s^{\varepsilon}\partial_E\Omega_{0,p+1;\varepsilon,q+1-s}\\
&+\sum_{k,l\geq 1} r_k^{\varepsilon} r_l^{\lambda}\partial_E\Omega_{\varepsilon,p+1-k;\lambda,q+1-l}.
\end{aligned}\tag{6.75}
$$

另一方面, 对任意参数 $x,y\in\mathbb{C}$, 成立

$$
\begin{aligned}
&\left(q+1-\frac{d}{2}\right)\nabla\theta_{0,p+1}^{\mathrm{T}}\eta\mu\mathcal{U}\nabla\theta_{0,q+1}\\
=&\left(q-\frac{d}{2}+x\right)\nabla\theta_{0,p+1}^{\mathrm{T}}\eta\mu\big(\partial_E\nabla\theta_{0,q+2}\big)\\
&+(1-x)\nabla\theta_{0,p+1}^{\mathrm{T}}\eta\mu\big[(1-\mu)\mathcal{C}+\mathcal{C}\mu+R_1\big]\nabla\theta_{0,q+1}\\
=&\left(q-\frac{d}{2}+x\right)\nabla\theta_{0,p+1}^{\mathrm{T}}\eta\mu\big(\partial_E\nabla\theta_{0,q+2}\big)+(1-x)\nabla\theta_{0,p+1}^{\mathrm{T}}\eta\mu\mathcal{C}\nabla\theta_{0,q+1}\\
&-(1-x)\nabla\theta_{0,p+1}^{\mathrm{T}}\eta\mu^2\big(\mathcal{C}\nabla\theta_{0,q+1}\big)+(1-x)\big(\nabla\theta_{0,p+1}^{\mathrm{T}}\eta\mu\mathcal{C}\big)\mu\nabla\theta_{0,q+1}\\
&+(1-x)\nabla\theta_{0,p+1}^{\mathrm{T}}\eta\mu R_1\nabla\theta_{0,q+1}\\
=&\left(q-\frac{d}{2}+x\right)\nabla\theta_{0,p+1}^{\mathrm{T}}\eta\mu\big(\partial_E\nabla\theta_{0,q+2}\big)\\
&+(1-x-y)\nabla\theta_{0,p+1}^{\mathrm{T}}\eta\mu\big(\mathcal{C}\nabla\theta_{0,q+1}\big)+y\big(\nabla\theta_{0,p+1}^{\mathrm{T}}\eta\mu\mathcal{C}\big)\nabla\theta_{0,q+1}\\
&-(1-x)\nabla\theta_{0,p+1}^{\mathrm{T}}\eta\mu^2\big(\mathcal{C}\nabla\theta_{0,q+1}\big)+(1-x)\big(\nabla\theta_{0,p+1}^{\mathrm{T}}\eta\mu\mathcal{C}\big)\mu\nabla\theta_{0,q+1}\\
&+(1-x)\nabla\theta_{0,p+1}^{\mathrm{T}}\eta\mu R_1\nabla\theta_{0,q+1}.
\end{aligned}\tag{6.76}
$$

特别地, 取 $x=\frac{5}{4}, y=\frac{3}{8}$, 并将(6.75)式最后一个等号右边的第二项替换为上述

表达式, 并利用关系式 (1.35) (6.22) (6.28) (6.29) (6.66) (6.70)以及(6.72)–(6.74), 直接计算验证可知(6.68)成立. 综上, 本命题得证. □

6.2 M_{AL} 的亏格 2 自由能

回忆4.2节所研究的广义 Frobenius 流形 M_{AL}, 这里给出其亏格 2 自由能 $\mathcal{F}_2$ 的具体表达式. 记

$$A := \mathrm{e}^{v^2} - v^1, \quad B := (v^1)^2(v^2_x)^2 - (v^1_x)^2, \quad C := \mathrm{e}^{v^2}v^1(v^2_x)^2 - (v^1_x)^2 \tag{6.77}$$

以及

$$b := v^1v^2_x + v^1_x, \tag{6.78}$$

则通过直接求解 M_{AL} 的圈方程可得

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_2 = &-\frac{(v^2_x)^2}{2880} - \frac{\mathrm{e}^{2v^2}(v^2_x)^2}{240(v^1)^2} - \frac{7\mathrm{e}^{v^2}(v^2_x)^2}{1440v^1} + \frac{(v^1)^2(v^2_x)^2}{240A^2} + \frac{7\mathrm{e}^{v^2}v^2_xv^1_x}{720(v^1)^2} + \frac{v^2_xv^1_x}{1440v^1} - \frac{v^1v^2_xv^1_x}{120A^2} \\
&+ \frac{(v^1_x)^2}{240A^2} - \frac{19\mathrm{e}^{v^2}(v^1_x)^2}{1440(v^1)^3} - \frac{13(v^1_x)^2}{2880(v^1)^2} - \frac{(v^1_x)^3}{720(v^1)^3v^2_x} + \frac{(v^1_x)^4}{288(v^1)^4(v^2_x)^2} + \frac{(v^1)^{11}(v^2_x)^{12}}{240AB^5} \\
&- \frac{(v^1)^{10}(v^2_x)^{11}v^1_x}{120AB^5} - \frac{(v^1)^9(v^2_x)^{10}(v^1_x)^2}{48AB^5} + \frac{(v^1)^8(v^2_x)^9(v^1_x)^3}{24AB^5} + \frac{47(v^1)^7(v^2_x)^8(v^1_x)^4}{960AB^5} \\
&- \frac{(v^1)^6(v^2_x)^7(v^1_x)^5}{12AB^5} - \frac{11(v^1)^5(v^2_x)^6(v^1_x)^6}{320AB^5} + \frac{(v^1)^4(v^2_x)^5(v^1_x)^7}{12AB^5} + \frac{(v^1)^3(v^2_x)^4(v^1_x)^8}{48AB^5} \\
&- \frac{(v^1)^2(v^2_x)^3(v^1_x)^9}{24AB^5} - \frac{3v^1(v^2_x)^2(v^1_x)^{10}}{160AB^5} + \frac{v^2_x(v^1_x)^{11}}{120AB^5} + \frac{(v^1)^{10}(v^2_x)^{12}(v^1_x)^2}{288B^5C} + \frac{(v^1)^9(v^2_x)^{11}(v^1_x)^3}{120B^5C} \\
&- \frac{23(v^1)^8(v^2_x)^{10}(v^1_x)^4}{1152B^5C} - \frac{35(v^1)^7(v^2_x)^9(v^1_x)^5}{576B^5C} - \frac{137(v^1)^6(v^2_x)^8(v^1_x)^6}{5760B^5C} + \frac{103(v^1)^5(v^2_x)^7(v^1_x)^7}{576B^5C} \\
&+ \frac{29(v^1)^4(v^2_x)^6(v^1_x)^8}{192B^5C} - \frac{79(v^1)^3(v^2_x)^5(v^1_x)^9}{288B^5C} - \frac{281(v^1)^2(v^2_x)^4(v^1_x)^{10}}{960B^5C} + \frac{67v^1(v^2_x)^3(v^1_x)^{11}}{288B^5C} \\
&+ \frac{343(v^2_x)^2(v^1_x)^{12}}{1152B^5C} - \frac{299v^2_x(v^1_x)^{13}}{2880v^1B^5C} - \frac{827(v^1_x)^{14}}{5760(v^1)^2B^5C} + \frac{11(v^1_x)^{15}}{576(v^1)^3v^2_xB^5C} \\
&+ \frac{(v^1_x)^{16}}{36(v^1)^4(v^2_x)^2B^5C} - \frac{7(v^1)^5(v^2_x)^6(v^1_x)^4}{960AB^4} - \frac{7(v^1)^3(v^2_x)^4(v^1_x)^6}{480AB^4} - \frac{7v^1(v^2_x)^2(v^1_x)^8}{480AB^4} \\
&+ \frac{(v^1)^8(v^2_x)^{10}(v^1_x)^4}{80B^4C^2} + \frac{43(v^1)^7(v^2_x)^9(v^1_x)^5}{1440B^4C^2} - \frac{5(v^1)^6(v^2_x)^8(v^1_x)^6}{72B^4C^2} - \frac{523(v^1)^5(v^2_x)^7(v^1_x)^7}{2880B^4C^2} \\
&+ \frac{13(v^1)^4(v^2_x)^6(v^1_x)^8}{640B^4C^2} + \frac{77(v^1)^3(v^2_x)^5(v^1_x)^9}{180B^4C^2} + \frac{263(v^1)^2(v^2_x)^4(v^1_x)^{10}}{1152B^4C^2} - \frac{709v^1(v^2_x)^3(v^1_x)^{11}}{1440B^4C^2} \\
&- \frac{2273(v^2_x)^2(v^1_x)^{12}}{5760B^4C^2} + \frac{401v^2_x(v^1_x)^{13}}{1440v^1B^4C^2} + \frac{259(v^1_x)^{14}}{960(v^1)^2B^4C^2} - \frac{179(v^1_x)^{15}}{2880(v^1)^3v^2_xB^4C^2} \\
&- \frac{77(v^1_x)^{16}}{1152(v^1)^4(v^2_x)^2B^4C^2} + \frac{7(v^1)^6(v^2_x)^8(v^1_x)^4}{960B^4C} + \frac{7(v^1)^4(v^2_x)^6(v^1_x)^6}{480B^4C} + \frac{7(v^1)^2(v^2_x)^4(v^1_x)^8}{480B^4C}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\frac{31(v^1)^6(v^2_x)^8(v^1_x)^6}{1920B^3C^3}+\frac{2(v^1)^5(v^2_x)^7(v^1_x)^7}{45B^3C^3}-\frac{133(v^1)^4(v^2_x)^6(v^1_x)^8}{1920B^3C^3}-\frac{(v^1)^3(v^2_x)^5(v^1_x)^9}{5B^3C^3}\\
&+\frac{(v^1)^2(v^2_x)^4(v^1_x)^{10}}{36B^3C^3}+\frac{v^1(v^2_x)^3(v^1_x)^{11}}{3B^3C^3}+\frac{23(v^2_x)^2(v^1_x)^{12}}{192B^3C^3}-\frac{11v^2_x(v^1_x)^{13}}{45v^1B^3C^3}-\frac{271(v^1_x)^{14}}{1920(v^1)^2B^3C^3}\\
&+\frac{(v^1_x)^{15}}{15(v^1)^3v^2_xB^3C^3}+\frac{269(v^1_x)^{16}}{5760(v^1)^4(v^2_x)^2B^3C^3}+\frac{7(v^1)^6(v^2_x)^8(v^1_x)^4}{1920B^3C^2}+\frac{7(v^1)^4(v^2_x)^6(v^1_x)^6}{640B^3C^2}\\
&+\frac{7(v^1)^2(v^2_x)^4(v^1_x)^8}{640B^3C^2}+\frac{43(v^1)^4(v^2_x)^6(v^1_x)^8}{5760B^2C^4}+\frac{(v^1)^3(v^2_x)^5(v^1_x)^9}{45B^2C^4}-\frac{107(v^1)^2(v^2_x)^4(v^1_x)^{10}}{5760B^2C^4}\\
&-\frac{v^1(v^2_x)^3(v^1_x)^{11}}{15B^2C^4}+\frac{v^2_x(v^1_x)^{13}}{15v^1B^2C^4}+\frac{(v^1_x)^{14}}{45(v^1)^2B^2C^4}-\frac{(v^1_x)^{15}}{45(v^1)^3v^2_xB^2C^4}-\frac{(v^1_x)^{16}}{90(v^1)^4(v^2_x)^2B^2C^4}\\
&+\frac{7(v^1)^4(v^2_x)^6(v^1_x)^6}{960B^2C^3}+\frac{7(v^1)^2(v^2_x)^4(v^1_x)^8}{960B^2C^3}+\frac{7(v^1)^2(v^2_x)^4(v^1_x)^8}{1920BC^4}\\
&-\frac{v^2_{xx}}{160}-\frac{\mathrm{e}^{v^2}v^2_{xx}}{72v^1}+\frac{\mathrm{e}^{v^2}v^1_xv^2_{xx}}{720(v^1)^2v^2_x}+\frac{v^1_xv^2_{xx}}{360v^1v^2_x}+\frac{(v^1_x)^2v^2_{xx}}{720(v^1)^2(v^2_x)^2}+\frac{(v^1_x)^3v^2_{xx}}{360(v^1)^3(v^2_x)^3}\\
&-\frac{(v^1)^9(v^2_x)^8v^2_{xx}}{240AB^4}+\frac{(v^1)^7(v^2_x)^6(v^1_x)^2v^2_{xx}}{60AB^4}-\frac{(v^1)^5(v^2_x)^4(v^1_x)^4v^2_{xx}}{40AB^4}+\frac{(v^1)^3(v^2_x)^2(v^1_x)^6v^2_{xx}}{60AB^4}\\
&-\frac{v^1(v^1_x)^8v^2_{xx}}{240AB^4}+\frac{13(v^1)^8(v^2_x)^8(v^1_x)^2v^2_{xx}}{1440B^4C}+\frac{13(v^1)^7(v^2_x)^7(v^1_x)^3v^2_{xx}}{720B^4C}-\frac{391(v^1)^6(v^2_x)^6(v^1_x)^4v^2_{xx}}{5760B^4C}\\
&-\frac{7(v^1)^5(v^2_x)^5(v^1_x)^5v^2_{xx}}{45B^4C}+\frac{29(v^1)^4(v^2_x)^4(v^1_x)^6v^2_{xx}}{160B^4C}+\frac{53(v^1)^3(v^2_x)^3(v^1_x)^7v^2_{xx}}{120B^4C}\\
&-\frac{653(v^1)^2(v^2_x)^2(v^1_x)^8v^2_{xx}}{2880B^4C}-\frac{103v^1v^2_x(v^1_x)^9v^2_{xx}}{180B^4C}+\frac{49(v^1_x)^{10}v^2_{xx}}{360B^4C}+\frac{253(v^1_x)^{11}v^2_{xx}}{720v^1v^2_xB^4C}\\
&-\frac{61(v^1_x)^{12}v^2_{xx}}{1920(v^1)^2(v^2_x)^2B^4C}-\frac{(v^1_x)^{13}v^2_{xx}}{12(v^1)^3(v^2_x)^3B^4C}+\frac{443(v^1)^6(v^2_x)^6(v^1_x)^4v^2_{xx}}{5760B^3C^2}\\
&+\frac{53(v^1)^5(v^2_x)^5(v^1_x)^5v^2_{xx}}{720B^3C^2}-\frac{527(v^1)^4(v^2_x)^4(v^1_x)^6v^2_{xx}}{1440B^3C^2}-\frac{83(v^1)^3(v^2_x)^3(v^1_x)^7v^2_{xx}}{180B^3C^2}\\
&+\frac{611(v^1)^2(v^2_x)^2(v^1_x)^8v^2_{xx}}{960B^3C^2}+\frac{113v^1v^2_x(v^1_x)^9v^2_{xx}}{120B^3C^2}-\frac{139(v^1_x)^{10}v^2_{xx}}{288B^3C^2}-\frac{143(v^1_x)^{11}v^2_{xx}}{180v^1v^2_xB^3C^2}\\
&+\frac{779(v^1_x)^{12}v^2_{xx}}{5760(v^1)^2(v^2_x)^2B^3C^2}+\frac{173(v^1_x)^{13}v^2_{xx}}{720(v^1)^3(v^2_x)^3B^3C^2}+\frac{21(v^1)^4(v^2_x)^4(v^1_x)^6v^2_{xx}}{160B^2C^3}\\
&+\frac{(v^1)^3(v^2_x)^3(v^1_x)^7v^2_{xx}}{8B^2C^3}-\frac{69(v^1)^2(v^2_x)^2(v^1_x)^8v^2_{xx}}{160B^2C^3}-\frac{113v^1v^2_x(v^1_x)^9v^2_{xx}}{240B^2C^3}+\frac{15(v^1_x)^{10}v^2_{xx}}{32B^2C^3}\\
&+\frac{17(v^1_x)^{11}v^2_{xx}}{30v^1v^2_xB^2C^3}-\frac{27(v^1_x)^{12}v^2_{xx}}{160(v^1)^2(v^2_x)^2B^2C^3}-\frac{53(v^1_x)^{13}v^2_{xx}}{240(v^1)^3(v^2_x)^3B^2C^3}+\frac{(v^1)^2(v^2_x)^2(v^1_x)^8v^2_{xx}}{15BC^4}\\
&+\frac{v^1v^2_x(v^1_x)^9v^2_{xx}}{15BC^4}-\frac{2(v^1_x)^{10}v^2_{xx}}{15BC^4}-\frac{2(v^1_x)^{11}v^2_{xx}}{15v^1v^2_xBC^4}+\frac{(v^1_x)^{12}v^2_{xx}}{15(v^1)^2(v^2_x)^2BC^4}+\frac{(v^1_x)^{13}v^2_{xx}}{15(v^1)^3(v^2_x)^3BC^4}\\
&+\frac{(v^2_{xx})^2}{960(v^2_x)^2}+\frac{11\mathrm{e}^{v^2}(v^2_{xx})^2}{1440v^1(v^2_x)^2}-\frac{v^1_x(v^2_{xx})^2}{1440v^1(v^2_x)^3}-\frac{7(v^1_x)^2(v^2_{xx})^2}{2880(v^1)^2(v^2_x)^4}-\frac{29(v^1_x)^4(v^2_{xx})^2}{288(v^1)^2(v^2_x)^4C}\\
&+\frac{17(v^1)^8(v^2_x)^6(v^1_x)^2(v^2_{xx})^2}{360B^4C}-\frac{19(v^1)^7(v^2_x)^5(v^1_x)^3(v^2_{xx})^2}{720B^4C}-\frac{11(v^1)^6(v^2_x)^4(v^1_x)^4(v^2_{xx})^2}{45B^4C}\\
&+\frac{19(v^1)^5(v^2_x)^3(v^1_x)^5(v^2_{xx})^2}{180B^4C}+\frac{91(v^1)^4(v^2_x)^2(v^1_x)^6(v^2_{xx})^2}{180B^4C}-\frac{19(v^1)^3v^2_x(v^1_x)^7(v^2_{xx})^2}{120B^4C}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&-\frac{47(v^1)^2(v^1_x)^8(v^2_{xx})^2}{90B^4C}+\frac{19v^1(v^1_x)^9(v^2_{xx})^2}{180v^2_xB^4C}+\frac{97(v^1_x)^{10}(v^2_{xx})^2}{360(v^2_x)^2B^4C}-\frac{19(v^1_x)^{11}(v^2_{xx})^2}{720v^1(v^2_x)^3B^4C}\\
&-\frac{(v^1_x)^{12}(v^2_{xx})^2}{18(v^1)^2(v^2_x)^4B^4C}+\frac{619(v^1)^6(v^2_x)^4(v^1_x)^4(v^2_{xx})^2}{2880B^3C^2}-\frac{73(v^1)^5(v^2_x)^3(v^1_x)^5(v^2_{xx})^2}{1440B^3C^2}\\
&-\frac{1549(v^1)^4(v^2_x)^2(v^1_x)^6(v^2_{xx})^2}{1440B^3C^2}+\frac{73(v^1)^3v^2_x(v^1_x)^7(v^2_{xx})^2}{480B^3C^2}+\frac{31(v^1)^2(v^1_x)^8(v^2_{xx})^2}{16B^3C^2}\\
&-\frac{73v^1(v^1_x)^9(v^2_{xx})^2}{480v^2_xB^3C^2}-\frac{2171(v^1_x)^{10}(v^2_{xx})^2}{1440(v^2_x)^2B^3C^2}+\frac{73(v^1_x)^{11}(v^2_{xx})^2}{1440v^1(v^2_x)^3B^3C^2}+\frac{1241(v^1_x)^{12}(v^2_{xx})^2}{2880(v^1)^2(v^2_x)^4B^3C^2}\\
&+\frac{29(v^1)^4(v^2_x)^2(v^1_x)^6(v^2_{xx})^2}{96B^2C^3}-\frac{(v^1)^3v^2_x(v^1_x)^7(v^2_{xx})^2}{40B^2C^3}-\frac{487(v^1)^2(v^1_x)^8(v^2_{xx})^2}{480B^2C^3}+\frac{v^1(v^1_x)^9(v^2_{xx})^2}{20v^2_xB^2C^3}\\
&+\frac{539(v^1_x)^{10}(v^2_{xx})^2}{480(v^2_x)^2B^2C^3}-\frac{(v^1_x)^{11}(v^2_{xx})^2}{40v^1(v^2_x)^3B^2C^3}-\frac{197(v^1_x)^{12}(v^2_{xx})^2}{480(v^1)^2(v^2_x)^4B^2C^3}+\frac{2(v^1)^2(v^1_x)^8(v^2_{xx})^2}{15BC^4}\\
&-\frac{4(v^1_x)^{10}(v^2_{xx})^2}{15(v^2_x)^2BC^4}+\frac{2(v^1_x)^{12}(v^2_{xx})^2}{15(v^1)^2(v^2_x)^4BC^4}+\frac{(v^2_{xx})^3}{90(v^2_x)^4}-\frac{2v^1_x(v^2_{xx})^3}{45v^1(v^2_x)^5}-\frac{4(v^1_x)^9(v^2_{xx})^3}{45v^1(v^2_x)^5C^4}\\
&-\frac{14(v^1_x)^7(v^2_{xx})^3}{45v^1(v^2_x)^5C^3}+\frac{(v^1_x)^4(v^2_{xx})^3}{5(v^2_x)^4C^2}-\frac{2(v^1_x)^5(v^2_{xx})^3}{5v^1(v^2_x)^5C^2}+\frac{(v^1_x)^2(v^2_{xx})^3}{15(v^2_x)^4C}-\frac{2(v^1_x)^3(v^2_{xx})^3}{9v^1(v^2_x)^5C}\\
&+\frac{2(v^1)^8(v^2_x)^4(v^1_x)^2(v^2_{xx})^3}{45B^4C}-\frac{8(v^1)^6(v^2_x)^2(v^1_x)^4(v^2_{xx})^3}{45B^4C}+\frac{4(v^1)^4(v^1_x)^6(v^2_{xx})^3}{15B^4C}\\
&-\frac{8(v^1)^2(v^1_x)^8(v^2_{xx})^3}{45(v^2_x)^2B^4C}+\frac{2(v^1_x)^{10}(v^2_{xx})^3}{45(v^2_x)^4B^4C}+\frac{7(v^1)^6(v^2_x)^2(v^1_x)^4(v^2_{xx})^3}{90B^3C^2}-\frac{7(v^1)^4(v^1_x)^6(v^2_{xx})^3}{30B^3C^2}\\
&+\frac{7(v^1)^2(v^1_x)^8(v^2_{xx})^3}{30(v^2_x)^2B^3C^2}-\frac{7(v^1_x)^{10}(v^2_{xx})^3}{90(v^2_x)^4B^3C^2}+\frac{4(v^1)^4(v^1_x)^6(v^2_{xx})^3}{15B^2C^3}-\frac{8(v^1)^2(v^1_x)^8(v^2_{xx})^3}{15(v^2_x)^2B^2C^3}\\
&+\frac{4(v^1_x)^{10}(v^2_{xx})^3}{15(v^2_x)^4B^2C^3}+\frac{4(v^1)^2(v^1_x)^8(v^2_{xx})^3}{45(v^2_x)^2BC^4}-\frac{4(v^1_x)^{10}(v^2_{xx})^3}{45(v^2_x)^4BC^4}\\
&+\frac{\mathrm{e}^{v^2}v^1_{xx}}{80(v^1)^2}+\frac{v^1_{xx}}{160v^1}+\frac{v^1_xv^1_{xx}}{480(v^1)^2v^2_x}-\frac{(v^1_x)^2v^1_{xx}}{160(v^1)^3(v^2_x)^2}-\frac{(v^1)^6(v^2_x)^6v^1_xv^1_{xx}}{40AB^3b}-\frac{v^2_x(v^1_x)^8v^1_{xx}}{40bC^4}\\
&-\frac{3(v^1)^2(v^2_x)^3(v^1_x)^6v^1_{xx}}{40bBC^3}+\frac{v^1(v^2_x)^2(v^1_x)^7v^1_{xx}}{40bBC^3}+\frac{3v^2_x(v^1_x)^8v^1_{xx}}{40bBC^3}-\frac{3(v^1)^4(v^2_x)^5(v^1_x)^4v^1_{xx}}{40bB^2C^2}\\
&+\frac{3(v^1)^3(v^2_x)^4(v^1_x)^5v^1_{xx}}{40bB^2C^2}+\frac{3(v^1)^2(v^2_x)^3(v^1_x)^6v^1_{xx}}{20bB^2C^2}-\frac{v^1(v^2_x)^2(v^1_x)^7v^1_{xx}}{20bB^2C^2}-\frac{3v^2_x(v^1_x)^8v^1_{xx}}{40bB^2C^2}\\
&-\frac{v^2_xv^1_xv^1_{xx}}{40C}+\frac{(v^1)^7(v^2_x)^8v^1_xv^1_{xx}}{40bB^3C}+\frac{(v^1)^8(v^2_x)^8v^1_{xx}}{240AB^4}+\frac{(v^1)^7(v^2_x)^7v^1_xv^1_{xx}}{40AB^4}\\
&-\frac{(v^1)^6(v^2_x)^6(v^1_x)^2v^1_{xx}}{24AB^4}+\frac{(v^1)^4(v^2_x)^4(v^1_x)^4v^1_{xx}}{40AB^4}-\frac{(v^1)^2(v^2_x)^2(v^1_x)^6v^1_{xx}}{60AB^4}+\frac{(v^1_x)^8v^1_{xx}}{240AB^4}\\
&-\frac{(v^1)^5(v^2_x)^6(v^1_x)^6v^1_{xx}}{15B^4C^2}+\frac{(v^1)^3(v^2_x)^4(v^1_x)^8v^1_{xx}}{15B^4C^2}-\frac{11(v^1)^8(v^2_x)^9v^1_xv^1_{xx}}{480B^4C}\\
&+\frac{(v^1)^7(v^2_x)^8(v^1_x)^2v^1_{xx}}{120B^4C}+\frac{(v^1)^6(v^2_x)^7(v^1_x)^3v^1_{xx}}{24B^4C}+\frac{313(v^1)^5(v^2_x)^6(v^1_x)^4v^1_{xx}}{1920B^4C}\\
&-\frac{3(v^1)^4(v^2_x)^5(v^1_x)^5v^1_{xx}}{16B^4C}-\frac{233(v^1)^3(v^2_x)^4(v^1_x)^6v^1_{xx}}{480B^4C}+\frac{7(v^1)^2(v^2_x)^3(v^1_x)^7v^1_{xx}}{24B^4C}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+\frac{619v^1(v_x^2)^2(v_x^1)^8v_{xx}^1}{960B^4C}-\frac{19v_x^2(v_x^1)^9v_{xx}^1}{96B^4C}-\frac{193(v_x^1)^{10}v_{xx}^1}{480v^1B^4C}+\frac{(v_x^1)^{11}v_{xx}^1}{20(v^1)^2v_x^2B^4C}\\
&+\frac{37(v_x^1)^{12}v_{xx}^1}{384(v^1)^3(v_x^2)^2B^4C}-\frac{47(v^1)^6(v_x^2)^7(v_x^1)^3v_{xx}^1}{480B^3C^2}-\frac{17(v^1)^5(v_x^2)^6(v_x^1)^4v_{xx}^1}{1920B^3C^2}\\
&+\frac{73(v^1)^4(v_x^2)^5(v_x^1)^5v_{xx}^1}{240B^3C^2}+\frac{49(v^1)^3(v_x^2)^4(v_x^1)^6v_{xx}^1}{96B^3C^2}-\frac{23(v^1)^2(v_x^2)^3(v_x^1)^7v_{xx}^1}{40B^3C^2}\\
&-\frac{329v^1(v_x^2)^2(v_x^1)^8v_{xx}^1}{320B^3C^2}+\frac{121v_x^2(v_x^1)^9v_{xx}^1}{240B^3C^2}+\frac{85(v_x^1)^{10}v_{xx}^1}{96v^1B^3C^2}-\frac{77(v_x^1)^{11}v_{xx}^1}{480(v^1)^2v_x^2B^3C^2}\\
&-\frac{171(v_x^1)^{12}v_{xx}^1}{640(v^1)^3(v_x^2)^2B^3C^2}-\frac{17(v^1)^4(v_x^2)^5(v_x^1)^5v_{xx}^1}{120B^2C^3}-\frac{29(v^1)^3(v_x^2)^4(v_x^1)^6v_{xx}^1}{480B^2C^3}\\
&+\frac{29(v^1)^2(v_x^2)^3(v_x^1)^7v_{xx}^1}{80B^2C^3}+\frac{217v^1(v_x^2)^2(v_x^1)^8v_{xx}^1}{480B^2C^3}-\frac{17v_x^2(v_x^1)^9v_{xx}^1}{40B^2C^3}-\frac{287(v_x^1)^{10}v_{xx}^1}{480v^1B^2C^3}\\
&+\frac{43(v_x^1)^{11}v_{xx}^1}{240(v^1)^2v_x^2B^2C^3}+\frac{37(v_x^1)^{12}v_{xx}^1}{160(v^1)^3(v_x^2)^2B^2C^3}-\frac{(v^1)^2(v_x^2)^3(v_x^1)^7v_{xx}^1}{15BC^4}-\frac{v^1(v_x^2)^2(v_x^1)^8v_{xx}^1}{24BC^4}\\
&+\frac{13v_x^2(v_x^1)^9v_{xx}^1}{120BC^4}+\frac{2(v_x^1)^{10}v_{xx}^1}{15v^1BC^4}-\frac{(v_x^1)^{11}v_{xx}^1}{15(v^1)^2v_x^2BC^4}-\frac{(v_x^1)^{12}v_{xx}^1}{15(v^1)^3(v_x^2)^2BC^4}\\
&+\frac{v_{xx}^2v_{xx}^1}{160v^1(v_x^2)^2}-\frac{v_x^1v_{xx}^2v_{xx}^1}{480(v^1)^2(v_x^2)^3}+\frac{(v_x^1)^6v_{xx}^2v_{xx}^1}{32v^1(v_x^2)^2C^3}-\frac{(v_x^1)^2v_x^2v_x^1v_{xx}^2v_{xx}^1}{15C^2}-\frac{(v_x^1)^3v_{xx}^2v_{xx}^1}{5v_x^2C^2}\\
&+\frac{(v_x^1)^4v_{xx}^2v_{xx}^1}{16v^1(v_x^2)^2C^2}-\frac{v_x^1v_{xx}^2v_{xx}^1}{15v_x^2C}+\frac{(v_x^1)^2v_{xx}^2v_{xx}^1}{32v^1(v_x^2)^2C}+\frac{(v^1)^{10}(v_x^2)^9v_x^1v_{xx}^2v_{xx}^1}{15B^4C^2}\\
&-\frac{(v^1)^8(v_x^2)^7(v_x^1)^3v_{xx}^2v_{xx}^1}{15B^4C^2}+\frac{(v^1)^6(v_x^2)^5(v_x^1)^5v_{xx}^2v_{xx}^1}{15B^4C^2}-\frac{(v^1)^4(v_x^2)^3(v_x^1)^7v_{xx}^2v_{xx}^1}{15B^4C^2}\\
&-\frac{(v^1)^8(v_x^2)^7v_x^1v_{xx}^2v_{xx}^1}{15B^4C}+\frac{(v^1)^7(v_x^2)^6(v_x^1)^2v_{xx}^2v_{xx}^1}{40B^4C}+\frac{59(v^1)^6(v_x^2)^5(v_x^1)^3v_{xx}^2v_{xx}^1}{240B^4C}\\
&-\frac{(v^1)^5(v_x^2)^4(v_x^1)^4v_{xx}^2v_{xx}^1}{10B^4C}-\frac{77(v^1)^4(v_x^2)^3(v_x^1)^5v_{xx}^2v_{xx}^1}{80B^4C}+\frac{3(v^1)^3(v_x^2)^2(v_x^1)^6v_{xx}^2v_{xx}^1}{20B^4C}\\
&+\frac{43(v^1)^2v_x^2(v_x^1)^7v_{xx}^2v_{xx}^1}{30B^4C}-\frac{v^1(v_x^1)^8v_{xx}^2v_{xx}^1}{10B^4C}-\frac{457(v_x^1)^9v_{xx}^2v_{xx}^1}{480v_x^2B^4C}+\frac{(v_x^1)^{10}v_{xx}^2v_{xx}^1}{40v^1(v_x^2)^2B^4C}\\
&+\frac{19(v_x^1)^{11}v_{xx}^2v_{xx}^1}{80(v^1)^2(v_x^2)^3B^4C}-\frac{173(v^1)^6(v_x^2)^5(v_x^1)^3v_{xx}^2v_{xx}^1}{480B^3C^2}+\frac{3(v^1)^5(v_x^2)^4(v_x^1)^4v_{xx}^2v_{xx}^1}{80B^3C^2}\\
&+\frac{109(v^1)^4(v_x^2)^3(v_x^1)^5v_{xx}^2v_{xx}^1}{80B^3C^2}-\frac{9(v^1)^3(v_x^2)^2(v_x^1)^6v_{xx}^2v_{xx}^1}{80B^3C^2}-\frac{67(v^1)^2v_x^2(v_x^1)^7v_{xx}^2v_{xx}^1}{24B^3C^2}\\
&+\frac{9v^1(v_x^1)^8v_{xx}^2v_{xx}^1}{80B^3C^2}+\frac{577(v_x^1)^9v_{xx}^2v_{xx}^1}{240v_x^2B^3C^2}-\frac{3(v_x^1)^{10}v_{xx}^2v_{xx}^1}{80v^1(v_x^2)^2B^3C^2}-\frac{359(v_x^1)^{11}v_{xx}^2v_{xx}^1}{480(v^1)^2(v_x^2)^3B^3C^2}\\
&-\frac{67(v^1)^4(v_x^2)^3(v_x^1)^5v_{xx}^2v_{xx}^1}{120B^2C^3}+\frac{3(v^1)^3(v_x^2)^2(v_x^1)^6v_{xx}^2v_{xx}^1}{160B^2C^3}+\frac{227(v^1)^2v_x^2(v_x^1)^7v_{xx}^2v_{xx}^1}{120B^2C^3}\\
&-\frac{3v^1(v_x^1)^8v_{xx}^2v_{xx}^1}{80B^2C^3}-\frac{253(v_x^1)^9v_{xx}^2v_{xx}^1}{120v_x^2B^2C^3}+\frac{3(v_x^1)^{10}v_{xx}^2v_{xx}^1}{160v^1(v_x^2)^2B^2C^3}+\frac{31(v_x^1)^{11}v_{xx}^2v_{xx}^1}{40(v^1)^2(v_x^2)^3B^2C^3}\\
&-\frac{4(v^1)^2v_x^2(v_x^1)^7v_{xx}^2v_{xx}^1}{15BC^4}+\frac{8(v_x^1)^9v_{xx}^2v_{xx}^1}{15v_x^2BC^4}-\frac{4(v_x^1)^{11}v_{xx}^2v_{xx}^1}{15(v^1)^2(v_x^2)^3BC^4}+\frac{(v_{xx}^2)^2v_{xx}^1}{30v^1(v_x^2)^4}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+\frac{(v_x^1)^8(v_{xx}^2)^2v_{xx}^1}{15v^1(v_x^2)^4C^4}+\frac{(v_x^1)^6(v_{xx}^2)^2v_{xx}^1}{5v^1(v_x^2)^4C^3}-\frac{8(v_x^1)^3(v_{xx}^2)^2v_{xx}^1}{15(v_x^2)^3C^2}+\frac{7(v_x^1)^4(v_{xx}^2)^2v_{xx}^1}{30v^1(v_x^2)^4C^2}\\
&-\frac{2v_x^1(v_{xx}^2)^2v_{xx}^1}{15(v_x^2)^3C}+\frac{2(v_x^1)^2(v_{xx}^2)^2v_{xx}^1}{3v^1(v_x^2)^4C}+\frac{3(v^1)^5(v_x^2)^2(v_x^1)^4(v_{xx}^2)^2v_{xx}^1}{5B^3C^2}-\frac{9(v^1)^3(v_x^1)^6(v_{xx}^2)^2v_{xx}^1}{5B^3C^2}\\
&+\frac{9v^1(v_x^1)^8(v_{xx}^2)^2v_{xx}^1}{5(v_x^2)^2B^3C^2}-\frac{3(v_x^1)^{10}(v_{xx}^2)^2v_{xx}^1}{5v^1(v_x^2)^4B^3C^2}-\frac{2(v^1)^4v_x^2(v_x^1)^5(v_{xx}^2)^2v_{xx}^1}{3B^2C^3}+\frac{3(v^1)^3(v_x^1)^6(v_{xx}^2)^2v_{xx}^1}{5B^2C^3}\\
&+\frac{4(v^1)^2(v_x^1)^7(v_{xx}^2)^2v_{xx}^1}{3v_x^2B^2C^3}-\frac{6v^1(v_x^1)^8(v_{xx}^2)^2v_{xx}^1}{5(v_x^2)^2B^2C^3}-\frac{2(v_x^1)^9(v_{xx}^2)^2v_{xx}^1}{3(v_x^2)^3B^2C^3}+\frac{3(v_x^1)^{10}(v_{xx}^2)^2v_{xx}^1}{5v^1(v_x^2)^4B^2C^3}\\
&-\frac{4(v^1)^2(v_x^1)^7(v_{xx}^2)^2v_{xx}^1}{15v_x^2BC^4}+\frac{v^1(v_x^1)^8(v_{xx}^2)^2v_{xx}^1}{5(v_x^2)^2BC^4}+\frac{4(v_x^1)^9(v_{xx}^2)^2v_{xx}^1}{15(v_x^2)^3BC^4}-\frac{(v_x^1)^{10}(v_{xx}^2)^2v_{xx}^1}{5v^1(v_x^2)^4BC^4}\\
&+\frac{(v_{xx}^1)^2}{576(v^1)^2(v_x^2)^2}-\frac{7v_x^1(v_{xx}^1)^2}{288v^1v_x^2C}+\frac{3(v^1)^8(v_x^2)^8(v_{xx}^1)^2}{160B^4C}-\frac{229(v^1)^6(v_x^2)^6(v_x^1)^2(v_{xx}^1)^2}{1440B^4C}\\
&+\frac{323(v^1)^4(v_x^2)^4(v_x^1)^4(v_{xx}^1)^2}{720B^4C}-\frac{139(v^1)^2(v_x^2)^2(v_x^1)^6(v_{xx}^1)^2}{240B^4C}+\frac{511(v_x^1)^8(v_{xx}^1)^2}{1440B^4C}\\
&-\frac{121(v_x^1)^{10}(v_{xx}^1)^2}{1440(v^1)^2(v_x^2)^2B^4C}+\frac{419(v^1)^6(v_x^2)^6(v_x^1)^2(v_{xx}^1)^2}{2880B^3C^2}-\frac{71(v^1)^5(v_x^2)^5(v_x^1)^3(v_{xx}^1)^2}{1440B^3C^2}\\
&-\frac{217(v^1)^4(v_x^2)^4(v_x^1)^4(v_{xx}^1)^2}{288B^3C^2}+\frac{71(v^1)^3(v_x^2)^3(v_x^1)^5(v_{xx}^1)^2}{480B^3C^2}+\frac{111(v^1)^2(v_x^2)^2(v_x^1)^6(v_{xx}^1)^2}{80B^3C^2}\\
&-\frac{71v^1v_x^2(v_x^1)^7(v_{xx}^1)^2}{480B^3C^2}-\frac{1579(v_x^1)^8(v_{xx}^1)^2}{1440B^3C^2}+\frac{71(v_x^1)^8(v_{xx}^1)^2}{1440v^1v_x^2B^3C^2}+\frac{913(v_x^1)^9(v_{xx}^1)^2}{2880(v^1)^2(v_x^2)^2B^3C^2}\\
&+\frac{41(v^1)^4(v_x^2)^4(v_x^1)^4(v_{xx}^1)^2}{160B^2C^3}-\frac{(v^1)^3(v_x^2)^3(v_x^1)^5(v_{xx}^1)^2}{40B^2C^3}-\frac{421(v^1)^2(v_x^2)^2(v_x^1)^6(v_{xx}^1)^2}{480B^2C^3}\\
&+\frac{v^1v_x^2(v_x^1)^7(v_{xx}^1)^2}{20B^2C^3}+\frac{473(v_x^1)^8(v_{xx}^1)^2}{480B^2C^3}-\frac{(v_x^1)^9(v_{xx}^1)^2}{40v^1v_x^2B^2C^3}-\frac{35(v_x^1)^{10}(v_{xx}^1)^2}{96(v^1)^2(v_x^2)^2B^2C^3}\\
&+\frac{2(v^1)^2(v_x^2)^2(v_x^1)^6(v_{xx}^1)^2}{15BC^4}-\frac{4(v_x^1)^8(v_{xx}^1)^2}{15BC^4}+\frac{2(v_x^1)^{10}(v_{xx}^1)^2}{15(v^1)^2(v_x^2)^2BC^4}+\frac{(v_x^1)^6v_{xx}^2(v_{xx}^1)^2}{15(v_x^2)^2C^4}\\
&+\frac{2(v_x^1)^4v_{xx}^2(v_{xx}^1)^2}{15(v_x^2)^2C^3}+\frac{(v_x^1)^2v_{xx}^2(v_{xx}^1)^2}{10(v_x^2)^2C^2}-\frac{8(v_x^1)^3v_{xx}^2(v_{xx}^1)^2}{15v^1(v_x^2)^3C^2}+\frac{v_{xx}^2(v_{xx}^1)^2}{30(v_x^2)^2C}-\frac{2v_x^1v_{xx}^2(v_{xx}^1)^2}{15v^1(v_x^2)^3C}\\
&+\frac{(v^1)^6(v_x^2)^4(v_x^1)^2v_{xx}^2(v_{xx}^1)^2}{5B^3C^2}-\frac{3(v^1)^4(v_x^2)^2(v_x^1)^4v_{xx}^2(v_{xx}^1)^2}{5B^3C^2}+\frac{3(v^1)^2(v_x^1)^6v_{xx}^2(v_{xx}^1)^2}{5B^3C^2}\\
&-\frac{(v_x^1)^8v_{xx}^2(v_{xx}^1)^2}{5(v_x^2)^2B^3C^2}+\frac{2(v^1)^4(v_x^2)^2(v_x^1)^4v_{xx}^2(v_{xx}^1)^2}{5B^2C^3}-\frac{2(v^1)^3v_x^2(v_x^1)^5v_{xx}^2(v_{xx}^1)^2}{3B^2C^3}\\
&-\frac{4(v^1)^2(v_x^1)^6v_{xx}^2(v_{xx}^1)^2}{5B^2C^3}+\frac{4v^1(v_x^1)^7v_{xx}^2(v_{xx}^1)^2}{3v_x^2B^2C^3}+\frac{2(v_x^1)^8v_{xx}^2(v_{xx}^1)^2}{5(v_x^2)^2B^2C^3}-\frac{2(v_x^1)^9v_{xx}^2(v_{xx}^1)^2}{3v^1(v_x^2)^3B^2C^3}\\
&+\frac{(v^1)^2(v_x^1)^6v_{xx}^2(v_{xx}^1)^2}{5BC^4}-\frac{4v^1(v_x^1)^7v_{xx}^2(v_{xx}^1)^2}{15v_x^2BC^4}-\frac{(v_x^1)^8v_{xx}^2(v_{xx}^1)^2}{5(v_x^2)^2BC^4}+\frac{4(v_x^1)^9v_{xx}^2(v_{xx}^1)^2}{15v^1(v_x^2)^3BC^4}\\
&-\frac{4(v_x^1)^5(v_{xx}^1)^3}{45v_x^2C^4}-\frac{2(v_x^1)^3(v_{xx}^1)^3}{15v_x^2C^3}-\frac{2v_x^1(v_{xx}^1)^3}{45v_x^2C^2}+\frac{(v_x^1)^2(v_{xx}^1)^3}{15v^1(v_x^2)^2C^2}+\frac{(v^1)^7(v_x^2)^6(v_{xx}^1)^3}{90B^4C}\\
&-\frac{2(v^1)^5(v_x^2)^4(v_x^1)^2(v_{xx}^1)^3}{45B^4C}+\frac{(v^1)^3(v_x^2)^2(v_x^1)^4(v_{xx}^1)^3}{15B^4C}-\frac{2v^1(v_x^1)^6(v_{xx}^1)^3}{45B^4C}+\frac{(v_x^1)^8(v_{xx}^1)^3}{45v^1(v_x^2)^2B^4C}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+\frac{(v^1)^5(v^2_x)^4(v^1_x)^2(v^1_{xx})^3}{30B^3C^2}-\frac{(v^1)^3(v^2_x)^2(v^1_x)^4(v^1_{xx})^3}{10B^3C^2}+\frac{v^1(v^1_x)^6(v^1_{xx})^3}{10B^3C^2}-\frac{(v^1_x)^8(v^1_{xx})^3}{30v^1(v^2_x)^2B^3C^2}\\
&+\frac{8(v^1)^3(v^2_x)^2(v^1_x)^4(v^1_{xx})^3}{45B^2C^3}-\frac{16v^1(v^1_x)^6(v^1_{xx})^3}{45B^2C^3}+\frac{8(v^1_x)^8(v^1_{xx})^3}{45v^1(v^2_x)^2B^2C^3}+\frac{4v^1(v^1_x)^6(v^1_{xx})^3}{45BC^4}\\
&-\frac{4(v^1_x)^8(v^1_{xx})^3}{45v^1(v^2_x)^2BC^4}\\
&-\frac{v^2_{xxx}}{480v^2_x}-\frac{\mathrm{e}^{v^2}v^2_{xxx}}{120v^1v^2_x}+\frac{v^1_xv^2_{xxx}}{480v^1(v^2_x)^2}+\frac{(v^1_x)^2v^2_{xxx}}{480(v^1)^2(v^2_x)^3}-\frac{7(v^1_x)^6v^2_{xxx}}{240v^2_xC^3}+\frac{7(v^1_x)^8v^2_{xxx}}{240(v^1)^2(v^2_x)^3C^3}\\
&-\frac{7(v^1_x)^4v^2_{xxx}}{144v^2_xC^2}+\frac{13(v^1_x)^5v^2_{xxx}}{1440v^1(v^2_x)^2C^2}+\frac{11(v^1_x)^6v^2_{xxx}}{160(v^1)^2(v^2_x)^3C^2}-\frac{31(v^1_x)^2v^2_{xxx}}{1440v^2_xC}+\frac{(v^1_x)^3v^2_{xxx}}{90v^1(v^2_x)^2C}\\
&+\frac{(v^1_x)^4v^2_{xxx}}{24(v^1)^2(v^2_x)^3C}-\frac{7v^2_{xx}v^2_{xxx}}{480(v^2_x)^3}+\frac{7v^1_xv^2_{xx}v^2_{xxx}}{160v^1(v^2_x)^4}-\frac{7(v^1_x)^6v^2_{xx}v^2_{xxx}}{120(v^2_x)^3C^3}+\frac{7(v^1_x)^7v^2_{xx}v^2_{xxx}}{120v^1(v^2_x)^4C^3}\\
&-\frac{21(v^1_x)^4v^2_{xx}v^2_{xxx}}{160(v^2_x)^3C^2}+\frac{77(v^1_x)^5v^2_{xx}v^2_{xxx}}{480v^1(v^2_x)^4C^2}-\frac{7(v^1_x)^2v^2_{xx}v^2_{xxx}}{80(v^2_x)^3C}+\frac{7(v^1_x)^3v^2_{xx}v^2_{xxx}}{48v^1(v^2_x)^4C}-\frac{7v^1_{xx}v^2_{xxx}}{480v^1(v^2_x)^3}\\
&+\frac{7(v^1_x)^5v^1_{xx}v^2_{xxx}}{120(v^2_x)^2C^3}-\frac{7(v^1_x)^6v^1_{xx}v^2_{xxx}}{120v^1(v^2_x)^3C^3}+\frac{49(v^1_x)^3v^1_{xx}v^2_{xxx}}{480(v^2_x)^2C^2}-\frac{21(v^1_x)^4v^1_{xx}v^2_{xxx}}{160v^1(v^2_x)^3C^2}+\frac{7v^1_xv^1_{xx}v^2_{xxx}}{160(v^2_x)^2C}\\
&-\frac{7(v^1_x)^2v^1_{xx}v^2_{xxx}}{80v^1(v^2_x)^3C}-\frac{v^1_{xxx}}{160v^1v^2_x}+\frac{v^1_xv^1_{xxx}}{1440(v^1)^2(v^2_x)^2}+\frac{7(v^1_x)^5v^1_{xxx}}{240C^3}-\frac{7(v^1_x)^7v^1_{xxx}}{240(v^1)^2(v^2_x)^2C^3}\\
&+\frac{23(v^1_x)^3v^1_{xxx}}{480C^2}-\frac{13(v^1_x)^4v^1_{xxx}}{1440v^1v^2_xC^2}-\frac{49(v^1_x)^5v^1_{xxx}}{720(v^1)^2(v^2_x)^2C^2}+\frac{11v^1_xv^1_{xxx}}{480C}-\frac{11(v^1_x)^2v^1_{xxx}}{720v^1v^2_xC}\\
&-\frac{11(v^1_x)^3v^1_{xxx}}{288(v^1)^2(v^2_x)^2C}-\frac{7v^2_{xx}v^1_{xxx}}{480v^1(v^2_x)^3}+\frac{7(v^1_x)^5v^2_{xx}v^1_{xxx}}{120(v^2_x)^2C^3}-\frac{7(v^1_x)^6v^2_{xx}v^1_{xxx}}{120v^1(v^2_x)^3C^3}+\frac{49(v^1_x)^3v^2_{xx}v^1_{xxx}}{480(v^2_x)^2C^2}\\
&-\frac{21(v^1_x)^4v^2_{xx}v^1_{xxx}}{160v^1(v^2_x)^3C^2}+\frac{7v^1_xv^2_{xx}v^1_{xxx}}{160(v^2_x)^2C}-\frac{7(v^1_x)^2v^2_{xx}v^1_{xxx}}{80v^1(v^2_x)^3C}-\frac{7(v^1_x)^4v^1_{xx}v^1_{xxx}}{120v^2_xC^3}+\frac{7(v^1_x)^5v^1_{xx}v^1_{xxx}}{120v^1(v^2_x)^2C^3}\\
&-\frac{7(v^1_x)^2v^1_{xx}v^1_{xxx}}{96v^2_xC^2}+\frac{49(v^1_x)^3v^1_{xx}v^1_{xxx}}{480v^1(v^2_x)^3C^2}-\frac{7v^1_{xx}v^1_{xxx}}{480v^2_xC}+\frac{7v^1_xv^1_{xx}v^1_{xxx}}{160v^1(v^2_x)^2C}\\
&+\frac{v^2_{xxxx}}{288(v^2_x)^2}-\frac{v^1_xv^2_{xxxx}}{144v^1(v^2_x)^3}+\frac{(v^1_x)^4v^2_{xxxx}}{144(v^2_x)^2C^2}-\frac{(v^1_x)^5v^2_{xxxx}}{144v^1(v^2_x)^3C^2}+\frac{(v^1_x)^2v^2_{xxxx}}{96(v^2_x)^2C}\\
&-\frac{(v^1_x)^3v^2_{xxxx}}{72v^1(v^2_x)^3C}+\frac{v^1_{xxxx}}{288v^1(v^2_x)^2}-\frac{(v^1_x)^3v^1_{xxxx}}{144v^2_xC^2}+\frac{(v^1_x)^4v^1_{xxxx}}{144v^1(v^2_x)^2C^2}-\frac{v^1_xv^1_{xxxx}}{144v^2_xC}+\frac{(v^1_x)^2v^1_{xxxx}}{96v^1(v^2_x)^2C}.
\end{aligned}
\tag{6.79}
$$

参考文献

[1] Ablowitz M J, Ladik J F. Nonlinear differential-difference equations [J]. J Math Phys, 1975, 16: 598-603.

[2] Ablowitz M J, Ladik J F. Nonlinear differential-difference equations and Fourier analysis [J]. J Math Phys, 1976, 17: 1011-1018.

[3] Arsie A, Buryak A, Lorenzoni P, Rossi P. Semisimple flat F-manifolds in higher genus [J/OL]. arXiv preprint: 2001.05599, 2020.

[4] Arsie A, Buryak A, Lorenzoni P, Rossi P. Flat F-manifolds, F-CohFTs, and integrable hierarchies [J]. Comm Math Phys, 2021, 388: 291-328.

[5] Brini A. The local Gromov-Witten theory of $\mathbb{CP}^1$ and integrable hierarchies [J]. Comm Math Phys, 2012, 313: 571-605.

[6] Brini A, Carlet G, Rossi P. Integrable hierarchies and the mirror model of local $\mathbb{CP}^1$ [J]. Phys D, 2012, 241: 2156-2167.

[7] Brini A, Carlet G, Romano S, Rossi P. Rational reductions of the 2D-Toda hierarchy and mirror symmetry [J]. J Eur Math Soc, 2017, 19: 835-880.

[8] Carlet G, Dubrovin B, Zhang Y. The extended Toda hierarchy [J]. Mosc Math J, 2004, 4: 313-332, 534.

[9] Chidambaram N K, Garcia-Failde E, Giacchetto A. Relations on $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$ and the negative r-spin Witten conjecture [J/OL]. arXiv preprint:2205.15621, 2022.

[10] Dijkgraaf R, Verlinde H, Verlinde E. Topological strings in $d < 1$ [J]. Nuclear Phys B, 1991, 352: 59-86.

[11] Dijkgraaf R, Witten E. Mean field theory, topological field theory, and multi-matrix models [J]. Nuclear Phys B, 1990, 342 (3): 486-522.

[12] Drinfeld V G, Sokolov V V. Lie algebras and equations of Korteweg-de Vries type [J]. J Soviet Math, 1985, 30: 1975-2036. Translated from Itogi

Nauki i Tekhniki. Seriya Sovremennye Problemy Matematiki (Noveishie Dostizheniya) [J]. 1984, 24: 81-180.

[13] Dubrovin B. Integrable systems in topological field theory [J]. Nuclear Phys B, 1992, 379: 627-689.

[14] Dubrovin B. Integrable systems and classification of 2-dimensional topological field theories [J]. Progr Math, 1993, 115: 313-359.

[15] Dubrovin B. Geometry of 2D topological field theories [M] // Donagi R, Dubrovin B, Frenkel E, Previato E. Integrable systems and quantum groups. Berlin: Springer, 1996: 120-348.

[16] Dubrovin B. Painlevé transcendents in two-dimensional topological field theory[M] // The Painlevé property. New York: Springer, 1999: 287-412.

[17] Dubrovin B. On almost duality for Frobenius manifolds[J]. Translations of the American Mathematical Society-Series 2, 2004, 212: 75-132.

[18] Dubrovin B, Liu S Q, Yang D, Zhang Y. Hodge integrals and tau-symmetric integrable hierarchies of Hamiltonian evolutionary PDEs[J]. Adv Math, 2016, 293: 382-435.

[19] Dubrovin B, Liu S Q, Yang D, Zhang Y. Hodge-GUE correspondence and the discrete KdV equation [J]. Comm Math Phys, 2020, 379: 461-490.

[20] Dubrovin B, Liu S Q, Zhang Y. Bihamiltonian cohomologies and integrable hierarchies II: the tau structures [J]. Comm Math Phys, 2018, 361: 467-524.

[21] Dubrovin B, Liu S Q, Zhang Y. On Hamiltonian perturbations of hyperbolic systems of conservation laws I: Quasi-Triviality of bi-Hamiltonian perturbations [J]. Commun Pure Appl Anal, 2006, 59 (4): 559-615.

[22] Dubrovin B, Yang D. On cubic Hodge integrals and random matrices [J]. Commun Number Theory Phys, 2017, 11: 311-336.

[23] Dubrovin B, Zhang Y. Bihamiltonian hierarchies in 2D topological field theory at one-loop approximation [J]. Comm Math Phys, 1998, 198: 311-361.

[24] Dubrovin B, Zhang Y. Extended affine Weyl groups and Frobenius manifolds [J]. Compos Math, 1998, 111 (2): 167-219.

[25] Dubrovin B, Zhang Y. Frobenius manifolds and Virasoro constraints [J]. Selecta Math, 1999, 5: 423-466.

[26] Dubrovin B, Zhang Y. Normal forms of hierarchies of integrable PDEs, Frobenius manifolds and Gromov-Witten invariants [J/OL]. arXiv preprint: math/0108160, 2001.

[27] Dubrovin B, Zhang Y. Virasoro symmetries of the extended Toda hierarchy [J]. Comm Math Phys, 2004, 250: 161-193.

[28] Eguchi T, Hori K, Xiong C S. Quantum cohomology and Virasoro algebra [J]. Phys Lett B, 1997, 402: 71-80.

[29] Fan H, Jarvis T, Ruan Y. The Witten equation, mirror symmetry, and quantum singularity theory [J]. Ann of Math, 2013, 178: 1-106.

[30] Frenkel E. Deformations of the KdV hierarchy and related soliton equations [J]. Internat Math Res Notices, 1996, 1996: 55-76.

[31] Getzler E. Intersection theory on $\overline{\mathcal{M}}_{1,4}$ and elliptic Gromov-Witten invariants [J]. J Am Math Soc, 1997, 10 (4): 973-998.

[32] Getzler E. The Toda conjecture[J/OL]. arXiv preprint math/0108108, 2001.

[33] Getzler E. The jet-space of a Frobenius manifold and higher-genus Gromov-Witten invariants [M] //Frobenius manifolds. Vieweg+ Teubner Verlag, 2004: 45-89.

[34] Givental A B, Milanov T E. Simple singularities and integrable hierarchies [M] //The breadth of symplectic and Poisson geometry. Boston: Birkhäuser, 2005: 173-201.

[35] Hertling C, Manin Yu. Weak Frobenius manifolds [J]. Int Math Res Not IMRN, 1999, 1999: 277-286.

[36] Kac M, van Moerbeke P. On an explicitly soluble system of nonlinear differential equations related to certain Toda lattices [J]. Adv Math, 1975, 16: 160-169.

[37] Kontsevich M. Intersection theory on the moduli space of curves and the matrix Airy function [J]. Comm Math Phys, 1992, 147: 1-23.

[38] 由于某些原因, 这篇文献保密.

[39] 由于某些原因, 这篇文献保密.

[40] 由于某些原因, 这篇文献保密.

[41] Liu S Q, Wang Z, Zhang Y. Linearization of Virasoro symmetries associated with semisimple Frobenius manifolds [J/OL]. arXiv preprint: 2109.01846, 2021.

[42] Liu S Q, Yang D, Zhang Y, Zhou J. The Virasoro-like algebra of a Frobenius manifold [J/OL]. arXiv preprint: 2112.07526, 2021.

[43] Liu S Q, Zhang Y. Bihamiltonian cohomologies and integrable hierarchies I: a special case [J]. Comm Math Phys, 2013, 324 (3): 897-935.

[44] Liu S Q, Zhang Y. Deformations of semisimple bihamiltonian structures of hydrodynamic type [J]. J Geom Phys, 2005, 54 (4): 427-453.

[45] Liu S Q, Zhang Y. Jacobi structures of evolutionary partial differential equations [J]. Adv Math, 2011, 227 (1): 73-130.

[46] Lorenzoni P, Pedroni M, Raimondo A. F-manifolds and integrable systems of hydrodynamic type [J]. Arch Math, 2011, 47: 163-180.

[47] Lotka A J. Contribution to the theory of periodic reaction [J]. J Phys Chem, 1910, 14: 271-274.

[48] Lotka A J. Analytical note on certain rhythmic relations in organic systems [J]. Proc Nat Acad Sci, 1920, 6: 410-415.

[49] Manakov S V. Complete integrability and stochastization of discrete dynamical systems [J]. Soviet Physics JETP, 1975, 40: 269-274.

[50] Manin Yu. F-manifolds with flat structure and Dubrovin's duality [J]. Adv Math, 2005, 198: 5-26.

[51] Mironov A E, Taimanov I A. On some algebraic examples of Frobenius manifolds [J]. Teoret Mat Fiz, 2007, 151: 195-206.

[52] Oevel W, Fuchssteiner B, Zhang H, et al. Mastersymmetries, angle variables, and recursion operator of the relativistic Toda lattice [J]. J Math Phys, 1989, 30(11): 2664-2670.

[53] Okounkov A, Pandharipande R. Virasoro constraints for target curves [J], Invent Math, 2006, 163: 47-108.

[54] Suris Y B. The problem of integrable discretization: Hamiltonian approach [M]. Basel: Birkhäuser, 2012.

[55] Doob J L, Vito Volterra. Leçons sur la Théorie Mathématique de la Lutte pour la Vie [J]. Bull Am Math Soc, 1936, 42(5): 304-305.

[56] 由于某些原因, 这篇文献保密.

[57] 由于某些原因, 这篇文献保密.

[58] Witten E. On the structure of the topological phase of two-dimensional gravity [J]. Nuclear Phys B, 1990, 340: 281-332.

[59] Witten E. Two dimensional gravity and intersection theory on moduli space [J], Surveys in Diff Geom, 1991, 1: 243-310.

[60] Zhang Y. On the CP1 topological sigma model and the Toda lattice hierarchy [J]. J Geom Phys, 2002, 40: 215-232.