辛几何初步

(学习笔记) 1.92 版

曲豆豆 整理

2025 年 8 月 3 日

图: 曲豆豆穿上博士服, 就好像真的是博士一样.

目录

0. 物理学背景

> "一切的一切都导向这样一个结果: 物理学从来就没有存在过, 将来也不会存在. 我知道自己这样做是不负责任的, 但别无选择."
>
> ——刘慈欣《三体》

辛结构来自于理论力学, 尤其是**量子化** (即从经典物理迈向量子物理的过程). 为给学习辛几何提供充足的动机, 这里有必要简要回忆一下有关的物理背景, 即使本章所介绍的物理学内容并不详细也并不全面. 读者若想学习更多物理, 可以查阅如下资料: Vaisman [44] 的第一章, Woodhouse [47], Arnold [6] 的第三章, Abraham-Marsden [1] 的第三, 五章, Siegel-Moser [37] 的第一章, Kirillov [22] 的第 15.4 节.

0.1 经典力学的基本方程

经典力学的主要目的是描述物理系统随时间的演化. 在经典力学中, 物理系统的状态被某个 n 维 (光滑, 实) 流形 M 上的点 $\boldsymbol{q}$ 所表示. 这里的流形 M 称为**位形空间** (configuration space). 流形 M 上的点 $\boldsymbol{q}$ 在局部坐标下可表示为 $\boldsymbol{q}=(q^1,q^2,...,q^n)^{\mathrm{T}}$; 这里的坐标 q^i, $i=1,...,n$ 称为**位置变量**. 物理系统随时间的演化可表示为流形 M 上的 (光滑) 曲线 $t\mapsto\boldsymbol{q}(t)$, 局部坐标表示为 $t\mapsto q^i(t)$, $i=1,...,n$.

0.1.1 欧拉-拉格朗日方程

拉格朗日力学认为, 决定物理系统随时间演化的是物理系统的**拉格朗日量**. 物理系统的拉格朗日量 $L=L(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}};t)$ 是 $TM\times\mathbb{R}$ 上的函数, 其中 TM 是位形空间 M 的**切丛**; 分量 $\dot{\boldsymbol{q}}$ 的物理含义是**速度**, 几何上看是切空间 $T_{\boldsymbol{q}}M$ 中的向量. 在具体的物理问题中, 拉格朗日量通常为

$$L=T-V,$$

其中 T,V 分别为该物理系统的动能与势能.

众所周知, M 上的光滑曲线 $\gamma\colon t\mapsto\gamma(t)$ 可以自然提升为 TM 上的曲线 $\tilde{\gamma}\colon t\mapsto(\gamma(t),\dot{\gamma}(t))$. 对于 M 上的曲线 $\gamma\colon[t_0,t_1]\to M$, 定义

$$\mathcal{S}[\gamma]:=\int_{t_0}^{t_1}L(\gamma(t),\dot{\gamma}(t);t)\mathrm{d}t,$$

这里的 $\mathcal{S}$ 称为**作用量**, 它是关于演化路径 γ 的泛函.

如果某物理系统在 $t=t_0,t_1$ 时刻的状态分别为 $\boldsymbol{q}_0,\boldsymbol{q}_1$, 则拉格朗日力学认为, 该物理系统从 $\boldsymbol{q}_0$ 到 $\boldsymbol{q}_1$ 的演化路径 $\boldsymbol{q}(t)$ 是满足 $\gamma(t_0)=\boldsymbol{q}_0,\gamma(t_1)=\boldsymbol{q}_1$ 的所有可能的路径 γ 当中使得作用量 $\mathcal{S}[\gamma]$ 取到极值的那一条, 这就是著名的**最小作用量原理**. 利用变分法容易推出 (这里从略), 上述最小作用量原理等价于演化路径 $\boldsymbol{q}(t)$ 满足如下方程:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}^i}-\frac{\partial L}{\partial q^i}=0,\quad i=1,...,n, \tag{0.1}$$

其中 $L=L(\boldsymbol{q}(t),\dot{\boldsymbol{q}}(t);t)$. 此方程是未知函数 $\boldsymbol{q}(t)$ 的关于时间 t 的二阶常微分方程, 称为**欧拉-拉格朗日方程**, 这是拉格朗日力学的基本方程.

0.1.2 哈密顿正则方程

切丛 TM 上的点 $(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})$ 能够表示物理系统在某时刻的状态 (位置) 以及状态的瞬时变化 (速度). 而物理学中, **动量**往往是比速度更加基本的物理量, 我们也可以用位置与动量来描述物理系统的状态及其瞬时变化. 若 $L=L(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}};t)$ 是物理系统的拉格朗日量, 则物理系统的**动量**在局部坐标下的表示为

$$p_i:=\frac{\partial L}{\partial\dot{q}^i},\quad i=1,...,n.$$

几何上看, 动量 $\boldsymbol{p}=(p_1,...,p_n)$ 是余切空间 $T^*_{\boldsymbol{q}}M$ 中的向量. 拉格朗日量 L 诱导了

$$\begin{aligned}TM\quad&\to\quad T^*M\\(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})\quad&\mapsto\quad(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p}),\end{aligned}$$

即**勒让德变换**, 其中 T^*M 是位形空间 M 的**余切丛**, 它在物理学中也叫做**相空间**.

相应地, 支配系统演化的拉格朗日量 $L(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}; t)$ 也有余切丛的版本. 引入

$$H(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}; t) := \sum_{i=1}^{n} p_i \dot{q}^i - L(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}; t),$$

上述 $H = H(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}; t)$ 是 $T^*M \times \mathbb{R}$ 上的函数, 称为该物理系统的**哈密顿量**. 在具体的物理问题中, 哈密顿量通常具有表达式

$$H = T + V,$$

其中 T, V 分别为系统的总动能与势能. 换言之, 哈密顿量往往是该物理系统的总能量.

哈密顿力学认为, 哈密顿量 $H = H(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}; t)$ 支配物理系统演化, 物理系统的演化路径 $t \mapsto (\boldsymbol{q}(t), \boldsymbol{p}(t))$ 满足如下方程:

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{q}} = \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{p}} \\ \dot{\boldsymbol{p}} = -\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{q}} \end{cases}, \tag{0.2}$$

这是未知函数 $(\boldsymbol{q}(t), \boldsymbol{p}(t))$ 关于时间变量 t 的一阶常微分方程, 称为**哈密顿正则方程**, 是哈密顿力学的基本方程. 注意这里采用紧凑记号 $\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{q}} = \left(\frac{\partial H}{\partial q^1}, \dots, \frac{\partial H}{\partial q^n}\right)$, 而 $\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{p}}$ 也类似. 容易验证, 哈密顿正则方程(0.2)与欧拉-拉格朗日方程(0.1)等价.

0.1.3 哈密顿-雅可比方程

若物理系统从 $t = 0$ 时刻的初始状态 $\boldsymbol{q}(0) = \boldsymbol{a} = (a^1, \dots, a^n)^{\mathrm{T}}$ 经过时间 t 之后演化至状态 $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{q}(t)$, 则我们知道, 演化路径 $\boldsymbol{q}(t)$ 是所有可能的路径 γ 当中使得作用量 $\mathcal{S}[\gamma]$ 取到极值的那一条; 我们把相应的极值记作 S. 则 S 与初状态 $\boldsymbol{a}$, 末状态 $\boldsymbol{q}$ 以及初, 末状态的时间间隔 t 有关, 即 $S = S(\boldsymbol{q}, t; \boldsymbol{a})$. 用变分法可以导出 (此处从略) 最小作用量 $S = S(\boldsymbol{q}, t; \boldsymbol{a})$ 所满足的偏微分方程, 如下:

$$H\left(\boldsymbol{q}, \frac{\partial S}{\partial \boldsymbol{q}}; t\right) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0, \tag{0.3}$$

其中 $H=H(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p};t)$ 是系统的哈密顿量. 此方程称为**哈密顿-雅可比方程**, 同样可以认为是经典力学的基本方程.

给定系统的初始位置 $\boldsymbol{a}$ 以及初始动量 $\boldsymbol{b}$, 如何通过求解哈密顿-雅可比方程来得到该系统随时间的演化 $\boldsymbol{q}(t)$ 呢? 设 $S=S(\boldsymbol{q},t;\boldsymbol{a})$ 是哈密顿-雅可比方程(0.3)的一个解, 并且假设 $\det\left(\frac{\partial^2 S}{\partial q^i\partial a^j}\right)\neq 0$, 则由隐函数定理可知方程组

$$\frac{\partial S}{\partial a^i}=b_i,\quad i=1,...,n$$

(局部) 唯一地确定了函数

$$q^i(t)=\psi^i(t;\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}),\quad i=1,...,n.$$

之后再令

$$p_i(t):=\frac{\partial S}{\partial q^i}\left(\boldsymbol{q}(t),t;\boldsymbol{a}\right)=\varphi_i(t;\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}),\quad i=1,...,n,$$

则可以直接验证如此构造的 $(\boldsymbol{q}(t),\boldsymbol{p}(t))$ 满足哈密顿正则方程(0.2). 这是因为, 将哈密顿-雅可比方程(0.3)两边求偏导 $\frac{\partial}{\partial a^j}$ 可得

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial H}{\partial p_i}\frac{\partial^2 S}{\partial q^i\partial a^j}+\frac{\partial S}{\partial t\partial a^j}=0;$$

另一方面, 将方程 $\frac{\partial S}{\partial a^j}=b_j$ 两边对时间 t 求导可得

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 S}{\partial q^i\partial a^j}\dot{q}^i+\frac{\partial S}{\partial t\partial a^j}=0,$$

联立上述两式, 整理得

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 S}{\partial q^i\partial a^j}\left(\frac{\partial H}{\partial p_i}-\dot{q}^i\right)=0,\quad j=1,...,n,$$

再由非退化性假设 $\det\left(\frac{\partial^2 S}{\partial q^i\partial a^j}\right)\neq 0$ 立刻得到 $\dot{q}^i=\frac{\partial H}{\partial p_i}$, 恰为哈密顿正则方程(0.2)的第一式. 类似地, 将哈密顿-雅可比方程(0.3)两边求偏导 $\frac{\partial}{\partial q^i}$ 得到

$$\frac{\partial H}{\partial q^i}+\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial H}{\partial p_j}\frac{\partial^2 S}{\partial q^i\partial q^j}+\frac{\partial^2 S}{\partial q^i\partial t}=0;$$

又将方程 $p_i = \frac{\partial S}{\partial q^i}$ 两边对时间 t 求导得

$$\dot{p}_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 S}{\partial q^i \partial q^j}\dot{q}^j + \frac{\partial^2 S}{\partial q^i \partial t}.$$

比较上述两式并注意 $\frac{\partial H}{\partial p_j} = \dot{q}^j$, 易得 $\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q^i}$, 即哈密顿正则方程(0.2)的第二式.

0.2 哈密顿力学的几何解释

可以用更加几何的语言来重新描述哈密顿力学.

0.2.1 哈密顿向量场

哈密顿正则方程(0.2)可以改写为如下矩阵形式:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix} \boldsymbol{q} \\ \boldsymbol{p} \end{pmatrix} = \mathcal{P}\left(\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{q}}, \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{p}}\right)^{\mathrm{T}}, \tag{0.4}$$

其中 $2n \times 2n$ 反对称矩阵

$$\mathcal{P} = \begin{pmatrix} & \boldsymbol{I}_n \\ -\boldsymbol{I}_n & \end{pmatrix} \tag{0.5}$$

称为**哈密顿算子** (也俗称 “哈密顿结构”). 引入 T^*M 上的切向量场

$$X_H := \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial H}{\partial p_i}\frac{\partial}{\partial q^i} - \frac{\partial H}{\partial q^i}\frac{\partial}{\partial p_i}\right), \tag{0.6}$$

称为**哈密顿向量场**, 则哈密顿正则方程(0.2) 可改写为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\gamma(t) = X_H(\gamma(t)),$$

其中未知函数 $\gamma(t) = (\boldsymbol{q}(t), \boldsymbol{p}(t))$ 视为 T^*M 上的曲线. 换言之, 物理系统的演化路径 $\gamma(t) = (\boldsymbol{q}(t), \boldsymbol{p}(t))$ 是沿哈密顿向量场 X_H 的**积分曲线**. 更一般地, 对于 T^*M 上的函数 $f = f(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p})$, 当 $(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p})$ 随时间演化时, f 自然视为关于时间 t 的函数, 即 $f(t) = f(\boldsymbol{q}(t), \boldsymbol{p}(t))$. 在此意义下, 容易验证

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial q^i}\frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial q^i}\right) = X_H(f). \tag{0.7}$$

0.2.2 余切丛上的典范微分

我们已在局部坐标下引入辛算子(0.5)与哈密顿向量场(0.6). 这里给出它们在 T^*M 的内蕴定义. 对于流形 M, 记 $\pi\colon T^*M \to M$ 为典范投影, 则对任意 $(q,\rho) \in T^*M$ (其中 $\rho \in T_q^*M$), 典范投影 π 诱导拉回映射

$$\pi^*_{(q,\rho)}\colon T_q^*M \to T^*_{(q,\rho)}(T^*M).$$

注意到余切丛 T^*M 上的点 (q,ρ) 对应着余切向量 $\rho \in T_q^*M$. 于是, 在 T^*M 上有自然的微分 1-形式 $\theta = \theta_M \in \Omega^1(T^*M)$, 使得对任意 $(q,\rho) \in T^*M$,

$$\theta|_{(q,\rho)} := \pi^*_{(q,\rho)}(\rho). \tag{0.8}$$

上式所确定的 $\theta \in \Omega^1(T^*M)$ 称为余切丛 T^*M 上的**典范 1-形式**.

取定 M 的一组局部坐标 (q^i), 将此局部坐标扩充为 T^*M 的局部坐标 (q^i, p_i), 使得 p_i 表示余切向量在基 $\{\mathrm{d}q^i\}$ 下的各分量系数. 容易验证, 在如此 (q^i, p_i) 下, θ 具有表达式

$$\theta = p_i \mathrm{d}q^i := \sum_{i=1}^{n} p_i \mathrm{d}q^i. \tag{0.9}$$

下面通过典范 1-形式 θ 对切向量场的作用, 给出 θ 的内蕴表达:

题 **0.1.** *设 M 为光滑流形, $\theta \in \Omega^1(T^*M)$ 为其典范 1-形式, 则对余切丛 T^*M 上的切向量场 $\tilde{X}$, 函数 $\theta(\tilde{X}) \in C^\infty(T^*M)$ 在点 $(q,\rho) \in T^*M$ 的值满足*

$$\theta(\tilde{X})|_{(q,\rho)} = \rho\left((\pi_{(q,\rho)})_* \tilde{X}\right). \tag{0.10}$$

[提示: 这是(0.8)的直接推论, 也可用局部表达式(0.9)直接验证.]

典范 1-形式 θ 也可用泛性质来刻画. 注意 M 上的 1-形式 $\alpha \in \Omega^1(M)$ 是余切丛 T^*M 的光滑截面, 即光滑映射 $\alpha\colon M \to T^*M$. 在此意义下, 容易验证存在唯一的 $\theta \in \Omega^1(T^*M)$ 使得

$$\alpha^*\theta = \alpha, \quad \forall\, \alpha \in \Omega^1(M). \tag{0.11}$$

满足上述泛性质的 θ 恰为 T^*M 上的典范 1-形式.

引入 $\omega=\omega_M\in\Omega^2(T^*M)$ 如下:

$$\omega:=-\mathrm{d}\theta, \tag{0.12}$$

称为余切丛 T^*M 的**典范辛结构**. 在局部坐标 (q^i,p_i) 下, ω_M 具有表达式

$$\omega=\mathrm{d}q^i\wedge\mathrm{d}p_i:=\sum_{i=1}^n\mathrm{d}q^i\wedge\mathrm{d}p_i.$$

作为微分 2-形式, ω 使得 T^*M 的每一点处的切空间具有反对称双线性型; 在局部坐标 (q^i,p_i) 下, 该反对称双线性型的矩阵表示为 $\begin{pmatrix} & \boldsymbol{I}_n \\ -\boldsymbol{I}_n & \end{pmatrix}$, 恰为(0.5)中的哈密顿算子 (这里是凑巧, 具体见后文3.1.1小节).

由于双线性型 ω 非退化, 从而对于 T^*M 上的任意 (光滑) 函数 $H=H(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p})$, 总可以谈论函数 H 关于 ω 的梯度. H 关于 ω 的**梯度** $\operatorname{grad}H\in\operatorname{Vect}(T^*M)$ 首先是 T^*M 上的切向量场, 它被方程

$$\omega(\operatorname{grad}H,X)=\mathrm{d}H(X),\quad \forall X\in\operatorname{Vect}(T^*M) \tag{0.13}$$

所唯一确定. 在局部坐标 (q^i,p_i) 下, 容易验证

$$\operatorname{grad}H=\sum_{i=1}^n\left(\frac{\partial H}{\partial p_i}\frac{\partial}{\partial q^i}-\frac{\partial H}{\partial q^i}\frac{\partial}{\partial p_i}\right)=X_H.$$

也就是说, 哈密顿向量场 X_H 恰为 H 关于典范辛形式 ω_M 的梯度向量场. 此外注意, 用**内乘** (缩并) 的语言可以将(0.13)改写为更紧凑的形式:

$$X_H\lrcorner\,\omega=\mathrm{d}H. \tag{0.14}$$

事实上, 对任何光滑函数 $f\in C^\infty(T^*M)$, 总可谈论相应的哈密顿向量场 $X_f:=\operatorname{grad}f$, 它由关系 $X_f\lrcorner\,\omega=\mathrm{d}f$ 所唯一确定, 详见后文3.1.1小节.

0.2.3 泊松括号

对于 T^*M 上的光滑函数 f,g, 引入

$$\{f,g\}=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial q^i}\frac{\partial g}{\partial p_i}-\frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial q^i}\right), \tag{0.15}$$

则 $\{f,g\}$ 也是 T^*M 上的光滑函数, 称为 f 与 g 的**泊松括号**. 在此记号下, 容易验证哈密顿正则方程(0.2)可改写为

$$\dot{q}^i=\{q^i,H\},\quad \dot{p}_i=\{p_i,H\},\qquad i=1,...,n.$$

一般地, T^*M 上的函数 $f=f(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p})$ 随时间演化的方程(0.7)可改写为

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}=\{f,H\}.$$

事实上, 泊松括号 $\{,\}$ 是整体定义的, 与局部坐标 (q^i,p_i) 的选取无关. 直接验证可知, 下述定义与 (0.15)式等价:

定义 0.2. *余切丛 T^*M 上的泊松括号 $\{,\}$ 是指如下映射:*

$$\begin{aligned}\{,\}:C^\infty(T^*M)\times C^\infty(T^*M)&\to C^\infty(T^*M)\\(f,g)&\mapsto\{f,g\}:=\omega_M(X_f,X_g).\end{aligned}\tag{0.16}$$

其中 ω_M 是 T^*M 的典范辛结构, X_f,X_g 分别为函数 f,g 的哈密顿向量场.

可见 $\{,\}$ 是反对称, 双线性的. 再注意(0.14)式, 可知

$$\{f,g\}=-X_f(g)=X_g(f).$$

0.3 从经典物理到量子物理

对于给定的经典物理系统, 我们希望找到它在量子物理中的相应版本. 寻找经典物理系统的量子版本的过程就是所谓**量子化** (quantization).

在量子物理中, 物理系统的状态由某个希尔伯特空间 $\mathcal{H}$ 中的向量来表示 [1], 物理量由 $\mathcal{H}$ 上的厄米特算子来表示; 量子系统随时间的演化由某个特

[1]本书中的希尔伯特空间都默认在复数域 $\mathbb{C}$ 上.

定的物理量 $\widehat{H}$ 所支配, 这里的 $\widehat{H}$ 称为量子系统的哈密顿量; 物理量 $\widehat{f}$ 随时间的演化满足**薛定谔方程**

$$\frac{\mathrm{d}\widehat{f}}{\mathrm{d}t}=-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}[\widehat{f},\widehat{H}],$$

其中 i 为虚数单位, 实数 $\hbar$ 为**普朗克常数**, $[\widehat{f},\widehat{H}]=\widehat{f}\widehat{H}-\widehat{H}\widehat{f}$ 是线性算子的**交换子** (也叫**李括号**). 经典物理与量子物理的基本原理对照如下:

	经典物理	量子物理
态空间	相空间 T^*M	希尔伯特空间 $\mathcal{H}$
态	点 $(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p})\in T^*M$	向量 $\lvert\psi\rangle\in\mathcal{H}$
物理量	函数 $f(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p})\in C^\infty(T^*M)$	$\mathcal{H}$ 上的厄米特算子 $\widehat{f}$
系统随时间演化	$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}=\{f,H\}$	$\frac{\mathrm{d}\widehat{f}}{\mathrm{d}t}=-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}[\widehat{f},\widehat{H}]$

给定经典物理系统 T^*M, 我们希望找到一个希尔伯特空间 $\mathcal{H}$, 以及映射 $T^*M\to\mathcal{H}$, 使得任意函数 $f\in C^\infty(T^*M)$ 都对应于 $\mathcal{H}$ 上的某个厄米特算子 $\widehat{f}$, 并且满足

- 常值函数 $1\in C^\infty(T^*M)$ 对应于恒等算子 $\widehat{\mathbf{1}}=\mathrm{id}_{\mathcal{H}}$;
- 对任意 $f,g\in C^\infty(T^*M)$, $\widehat{\{f,g\}}=-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}[\widehat{f},\widehat{g}]$.

这便是我们所希望的**量子化**. 一个自然的问题是, 满足上述性质的量子化一定存在吗? 如果不存在, 那能否退而求其次? 这些问题留待后文探讨.

1. 辛代数

> “是的，整个人类历史也是偶然，从石器时代到今天，都没什么重大变故，真幸运. 但既然是幸运，就有结束的一天；现在我告诉你，结束了，做好思想准备吧.”
>
> ——刘慈欣《三体》

任取光滑流形 M, 余切丛 T^*M 与其典范辛结构 ω_M(见(0.12)式) 构成的二元组 (T^*M, ω_M) 是**辛流形**的重要例子. 所谓辛流形, 也就是辛几何的研究对象, 局部上看是**辛空间**. 而辛空间则是 $\mathbb{R}$-线性空间附加某种额外结构 (所谓 “辛结构”). 本章介绍与辛空间有关的线性代数知识. 这方面的课外读物主要如下: Vaisman[44] 的第二章, Abraham-Marsden[1] 的第三章, 以及 E.Artin[7].

1.1 辛空间

我们采用如下记号约定:

- $\mathbb{F}$ 是特征零域, 即 $\operatorname{char}\mathbb{F} = 0$ (通常取 $\mathbb{F} = \mathbb{R}$);
- V 是有限维 $\mathbb{F}$-线性空间, 并且 $\dim_{\mathbb{F}} V = m$, 其中 m 是正整数.
- 若 $\underline{\mathbf{e}} = (\boldsymbol{e}_1, ..., \boldsymbol{e}_m)$ 为线性空间 V 的一组 $\mathbb{F}$-基, 则对偶空间 V^* 的相应的对偶基记为 $\underline{\mathbf{e}}^* := (\boldsymbol{e}_1^*, ..., \boldsymbol{e}_m^*)$. 上述基向量满足关系 $\boldsymbol{e}_i^*(\boldsymbol{e}_j) = \delta_{ij}$.

1.1.1 反对称双线性型及其标准形

定义 1.1. **辛空间**是指二元组 (V, ω), 其中:

- V 是有限维 $\mathbb{F}$-线性空间,
- $\omega\colon V \times V \to \mathbb{F}$ 是非退化, 反对称双线性型, 称为 V 上的**辛结构**.

所谓非退化, 是指对任意 $\boldsymbol{v}\in V$, 如果 $\omega(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})=0$ 对任意 $\boldsymbol{w}\in V$ 都成立, 则 $\boldsymbol{v}=0$. 再注意到 $\operatorname{char}\mathbb{F}=0$(通常取 $\mathbb{F}=\mathbb{R}$), 从而由 ω 的反对称性可知 $\omega(\boldsymbol{v},\boldsymbol{v})=0$ 对任意 $\boldsymbol{v}\in V$ 都成立.

任取辛空间 V 的一组基 $\underline{\mathbf{e}}=(\boldsymbol{e}_1,...,\boldsymbol{e}_m)$, 则双线性型 ω 在该基下的矩阵 $\omega_{\underline{\mathbf{e}}}=(\omega_{ij})$, 其矩阵元

$$\omega_{ij}=\omega(\boldsymbol{e}_i,\boldsymbol{e}_j),\quad 1\leq i,j\leq m.$$

双线性型 ω 非退化 $\Leftrightarrow$ 矩阵 $\omega_{\underline{\mathbf{e}}}$ 满秩; 双线性型 ω 反对称 $\Leftrightarrow$ 矩阵 $\omega_{\underline{\mathbf{e}}}$ 反对称.

不妨将辛空间与**内积空间**对比, 后者具有的内积是**对称**双线性型, 可以特殊选取一组基 (标准正交基) 使得内积在该基下的矩阵是单位阵; 而对于辛空间, 也可以特殊选取一组基, 使得辛结构 ω 在该基下的矩阵具有某种标准形. 一般结论如下:

性质 1.2. *设 V 为 m 维 $\mathbb{R}$-线性空间.*

1. *若 s 是 V 上的的对称双线性型, 则存在 $p,q\geq 0$ $(p+q\leq m)$ 以及 V 的一组基 $\underline{\mathbf{e}}$, 使得 s 在基 $\underline{\mathbf{e}}$ 下的矩阵 $s_{\underline{\mathbf{e}}}$ 形如*

$$s_{\underline{\mathbf{e}}}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_p & & \\ & -\boldsymbol{I}_q & \\ & & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}.$$

2. *若 ω 是 V 上的反对称双线性型, 则存在 $0\leq r\leq \frac{m}{2}$, 以及 V 的一组基 $\underline{\mathbf{e}}$, 使得 ω 在基 $\underline{\mathbf{e}}$ 下的矩阵 $\omega_{\underline{\mathbf{e}}}$ 形如*

$$\omega_{\underline{\mathbf{e}}}=\begin{pmatrix} & \boldsymbol{I}_r & \\ -\boldsymbol{I}_r & & \\ & & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}.$$

证明. 这是线性代数中众所周知的结果. 满足 (1) 所述性质的基 $\underline{\mathbf{e}}$ 可由众所周知的 **Gram-Schmidt 正交化**方法来构造; 而 (2) 的证明思路也类似 Gram-Schmidt 正交化, 大致步骤如下: 不妨 $\omega\neq 0$, 则存在非零向量 $\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2\in V$ 使得 $\omega(\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2)\neq 0$. 适当将 $\boldsymbol{v}_2$ 乘以常数倍, 使得 $\omega(\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2)=1$. 易知 $\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2$ 线性无关, 从而子空间

$$V_1:=\operatorname{span}_{\mathbb{R}}\{\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2\}$$

的维数是 2, 且 $\omega|_{V_1}$ 在基 $(\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2)$ 下的矩阵为 $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. 再考虑子空间

$$V_1^{\perp} := \{\boldsymbol{v}\in V \,|\, \omega(\boldsymbol{v},\boldsymbol{v}_1)=\omega(\boldsymbol{v},\boldsymbol{v}_2)=0\},$$

则容易验证 $V_1\cap V_1^{\perp}=\{0\}$. 再注意对任意 $\boldsymbol{v}\in V$,

$$\boldsymbol{v}-\omega(\boldsymbol{v},\boldsymbol{v}_2)\boldsymbol{v}_1+\omega(\boldsymbol{v},\boldsymbol{v}_1)\boldsymbol{v}_2\in V_1^{\perp},$$

从而可知 $V=V_1\oplus V_1^{\perp}$. 之后在子空间 $(V_1^{\perp},\omega|_{V_1^{\perp}})$ 上继续上述操作即可. □

上述性质中的第 (2) 条, 也就是反对称双线性型的标准形的部分, 不仅适用于实数域 $\mathbb{R}$, 实际上在任何满足 $\operatorname{char}\mathbb{F}\neq 2$ 的域 $\mathbb{F}$ 上都成立. 特别地, 对于辛空间 (V,ω), 注意辛结构 ω 非退化, 从而由性质1.2立刻推出:

推论 1.3. 设 (V,ω) 是 m 维辛空间, 则存在整数 n 使得 $m=2n$, 并且存在 V 的基 $\underline{\mathbf{e}}=(\boldsymbol{e}_1,\dots,\boldsymbol{e}_n,\boldsymbol{f}_1,\dots,\boldsymbol{f}_n)$, 使得

$$\omega_{\underline{\mathbf{e}}}=\boldsymbol{J}:=\begin{pmatrix} & \boldsymbol{I}_n \\ -\boldsymbol{I}_n & \end{pmatrix}. \tag{1.1}$$

特别地, 辛空间一定是偶数维空间. 满足上述性质的基 $\underline{\mathbf{e}}$ 称为**辛基**.

辛结构 ω 在辛基下的矩阵 $\boldsymbol{J}$ 恰为(0.5)中的辛算子.

1.1.2 外代数与辛形式

辛结构 ω 作为反对称双线性型, 也可以用**外代数**的语言来表述. 回忆一些相关记号. 设 V 为 m 维 $\mathbb{F}$-线性空间, $0\le p\le m$, 则 V 上的 p-外向量空间

$$\bigwedge\nolimits^p V:=\operatorname{span}_{\mathbb{F}}\left\{\boldsymbol{v}_{i_1}\wedge\boldsymbol{v}_{i_2}\wedge\cdots\wedge\boldsymbol{v}_{i_p}\,\middle|\,1\le i_1<\cdots<i_p\le m,\ \boldsymbol{v}_{i_j}\in V\right\},$$

并特别规定 $\bigwedge^0 V=\mathbb{F}$. 若 $\underline{\mathbf{e}}=(\boldsymbol{e}_1,\dots,\boldsymbol{e}_m)$ 为 V 的一组基, 则

$$\left\{\boldsymbol{e}_{i_1}\wedge\boldsymbol{e}_{i_2}\wedge\cdots\wedge\boldsymbol{e}_{i_p}\,\middle|\,1\le i_1<\cdots<i_p\le m\right\}$$

构成 $\bigwedge^p V$ 的一组基, 从而 $\dim_{\mathbb{F}}\bigwedge^p V=\binom{m}{p}$. 记 $\mathcal{A}^p(V,\mathbb{F})$ 为 V 上的取值于 $\mathbb{F}$ 的全反称 p 重线性函数构成的线性空间, 对于 $\boldsymbol{u}_1^*,\dots,\boldsymbol{u}_p^*\in V^*$ 以及 $\boldsymbol{v}_1,\dots,\boldsymbol{v}_p\in V$, 通过

$$\boldsymbol{u}_1^*\wedge\cdots\wedge\boldsymbol{u}_p^*(\boldsymbol{v}_1,\dots,\boldsymbol{v}_p):=\det(\boldsymbol{u}_i^*(\boldsymbol{v}_j))$$

自然将 p-外向量 $\boldsymbol{u}_1^*\wedge\cdots\wedge\boldsymbol{u}_p^*\in\bigwedge^p V^*$ 视为 $\mathcal{A}^p(V,\mathbb{F})$ 中的元素, 这给出了同构

$$\mathcal{A}^p(V,\mathbb{F})\cong\bigwedge^p V^*.$$

特别地, 辛空间 (V,ω) 的辛结构 $\omega\in\mathcal{A}^2(V,\mathbb{F})$ 自然视为 $\bigwedge^2 V^*$ 中的元素. 容易验证, 任取 V 的一组基 $\underline{\mathbf{e}}=(\boldsymbol{e}_1,\dots,\boldsymbol{e}_m)$, 记相应的对偶基为 $\underline{\mathbf{e}}^*=(\boldsymbol{e}_1^*,\dots,\boldsymbol{e}_m^*)$, 则

$$\omega_{\underline{\mathbf{e}}}=(\omega_{ij})\quad\Leftrightarrow\quad\omega=\sum_{i<j}\omega_{ij}\boldsymbol{e}_i^*\wedge\boldsymbol{e}_j^*,$$

其中矩阵元 $\omega_{ij}:=\omega(\boldsymbol{e}_i,\boldsymbol{e}_j)$. 以上是辛结构的矩阵表示与外向量表示之间的关系. 用外向量的语言, 可将性质1.2(2) 与推论1.3改写为:

推论 1.4. 设 V 是 m 维 $\mathbb{F}$-线性空间, $\omega\in\bigwedge^2 V^*$, 则存在自然数 $r\le\frac{m}{2}$ 以及 V 的一组基 $\underline{\mathbf{e}}=(\boldsymbol{e}_1,\dots,\boldsymbol{e}_m)$, 使得

$$\omega=\sum_{i=1}^{r}\boldsymbol{e}_i^*\wedge\boldsymbol{e}_{r+i}^*.$$

此外, 若 ω 非退化, 则 $m=2n$ 为偶数, 且存在 V 的一组基 $\underline{\mathbf{e}}=(\boldsymbol{e}_1,\dots,\boldsymbol{e}_n;\boldsymbol{f}_1,\dots,\boldsymbol{f}_n)$, 使得 $\omega=\sum\limits_{i=1}^{n}\boldsymbol{e}_i^*\wedge\boldsymbol{f}_i^*$.

设 (V,ω) 是 $2n$ 维辛空间, 取 V 的一组辛基 $(\boldsymbol{e}_1,\dots,\boldsymbol{e}_n;\boldsymbol{f}_1,\dots,\boldsymbol{f}_n)$, 则 $\omega=\sum\limits_{i=1}^{n}\boldsymbol{e}_i^*\wedge\boldsymbol{f}_i^*$, 直接计算可知

$$\omega^n=n!(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\tau$$

其中 $\tau=\boldsymbol{e}_1^*\wedge\cdots\wedge\boldsymbol{e}_n^*\wedge\boldsymbol{f}_1^*\wedge\cdots\wedge\boldsymbol{f}_n^*\in\bigwedge^{2n}V^*$ 是空间 V 的**体积形式**, 它给出了 V 上的**定向**. 同样直接计算可知, 如果反对称双线性型 $\omega\in\bigwedge^2 V^*$ 是退化的, 则由推论1.4可知 $\omega^n=0$. 综上所述, 我们有:

性质 1.5. 设 V 是 $2n$ 维 $\mathbb{F}$-线性空间, $\omega\in\bigwedge^2 V^*$. 则 ω 非退化当且仅当 $\omega^n\neq 0$; 并且此时, 辛结构 ω 诱导了 V 的体积形式

$$\tau_\omega:=\frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{n!}\omega^n.\tag{1.2}$$

本小节最后, 我们注意, 对于线性空间 V 以及 $\omega \in \bigwedge^2 V^*$, 则 ω 诱导从 V 到 V^* 的线性映射 $\omega^\flat$ 如下:

$$\begin{aligned} \omega^\flat \colon V &\to V^* \\ \boldsymbol{v} &\mapsto \left[\omega^\flat(\boldsymbol{v}) \colon \boldsymbol{w} \mapsto \omega(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})\right]. \end{aligned} \tag{1.3}$$

回忆外向量的**内乘**运算

$$\begin{aligned} i \colon V \times \bigwedge^q V^* &\to \bigwedge^{q-1} V^* \\ (\boldsymbol{v}, \theta) &\mapsto \boldsymbol{v} \lrcorner \theta, \end{aligned}$$

使得 $(\boldsymbol{v} \lrcorner \theta)(\boldsymbol{v}_1, ..., \boldsymbol{v}_{q-1}) = \theta(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}_1, ..., \boldsymbol{v}_{q-1})$. 在此意义下, 容易验证

$$\omega^\flat(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{v} \lrcorner \omega. \tag{1.4}$$

此外, 易知 ω 是辛结构 (非退化) 当且仅当 $\omega^\flat$ 是 V 与 V^* 的同构.

1.1.3 正交性

与欧氏空间类似, 在辛空间中也可以谈论向量的正交性:

定义 1.6. 对于辛空间 (V, ω) 中的向量 $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$, 如果 $\omega(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = 0$, 则称向量 $\boldsymbol{u}$ 与 $\boldsymbol{v}$ **正交**, 记作 $\boldsymbol{u} \perp \boldsymbol{v}$.

很显然, (辛) 正交关系 $\perp$ 具有对称性, 即 $\boldsymbol{u} \perp \boldsymbol{v}$ 当且仅当 $\boldsymbol{v} \perp \boldsymbol{u}$. 一个自然的问题是, 正交性是否能够 "良好地" 推广到任何更一般的双线性型上?

定理 1.7. (Birkhoff-von Neumann) 设 V 为 $\mathbb{F}$-线性空间, $f \in V^* \otimes V^*$ 是 V 上的双线性型. 如果对任意 $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V$ 都成立

$$f(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad f(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}) = 0,$$

则 f 是对称的或者反对称的.

由此定理可见, 能 "良好地" 谈论正交性的空间只有欧氏空间与辛空间.

证明. 如果 f 反对称, 则对任意 $\boldsymbol{v} \in V$ 都有 $f(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}) = 0$. 现在, 假设 f 不是反对称的, 则存在 $\boldsymbol{v} \in V$ 使得 $f(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}) \neq 0$. 只需证明 f 是对称的.

断言 1: $\forall \boldsymbol{x} \in V$, $f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}) = f(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{x})$. 这是因为, 对任意 $\lambda \in \mathbb{F}$,

$$f(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{x} + \lambda \boldsymbol{v}) = f(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{x}) + \lambda f(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}).$$

注意 $f(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}) \neq 0$, 从而可以适当选取 λ 使得 $f(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{x} + \lambda \boldsymbol{v}) = 0$, 从而由题设可得 $f(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{x} + \lambda \boldsymbol{v}) = f(\boldsymbol{x} + \lambda \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}) = 0$, 整理得 $f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}) = f(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{x})$.

断言 2: 对任意 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$, 如果 $f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}) \neq 0$, 那么 $f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = f(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})$. 这是因为, 对任意 $\lambda \in \mathbb{F}$,

$$f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} + \lambda \boldsymbol{v}) = f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + \lambda f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}).$$

注意 $f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}) \neq 0$, 从而可以适当选取 λ 使得 $f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} + \lambda \boldsymbol{v}) = 0$, 从而由题设可得 $f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} + \lambda \boldsymbol{v}) = f(\boldsymbol{y} + \lambda \boldsymbol{v}, \boldsymbol{x}) = 0$, 利用断言 1 可整理得 $f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = f(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})$.

最后, 如果 $f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}) = f(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{v}) = 0$, 则对任意 $\lambda \in \mathbb{F}$,

$$f(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{v}, \boldsymbol{y} + \lambda \boldsymbol{v}) = f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + \lambda f(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}),$$

从而可适当选取参数 λ 使得 $f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{v}, \boldsymbol{y}+\lambda \boldsymbol{v}) = 0$, 从而由题设得 $f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{v}, \boldsymbol{y}+\lambda \boldsymbol{v}) = f(\boldsymbol{y} + \lambda \boldsymbol{v}, \boldsymbol{x} + \boldsymbol{v}) = 0$, 整理得 $f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = f(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})$.

综上所述, 定理得证. □

1.1.4 辛空间的例子

现在来看辛空间的具体例子.

例 **1.8.** $2n$ 维线性空间 $\mathbb{F}^{2n}$, 配以标准辛结构 ω 如下:

$$\omega(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = \boldsymbol{v}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{J} \boldsymbol{w},$$

其中 $\boldsymbol{J} = \begin{pmatrix} & \boldsymbol{I}_n \\ -\boldsymbol{I}_n & \end{pmatrix}$. 则 $(\mathbb{F}^{2n}, \omega)$ 是辛空间, 且辛结构 ω 在 $\mathbb{F}^{2n}$ 的标准基下的矩阵为 $\boldsymbol{J}$. 推论1.3表明任何 $2n$ 维辛空间都“同构”于上述 $(\mathbb{F}^{2n}, \omega)$.

例 **1.9.** 对有限维 $\mathbb{F}$-线性空间 W, 则 $V := W \oplus W^*$ 具有如下典范辛结构

$$\begin{aligned} \omega \colon V \times V &\to \mathbb{F} \\ \big((\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{u}_1^*), (\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{u}_2^*)\big) &\mapsto \boldsymbol{u}_2^*(\boldsymbol{v}_1) - \boldsymbol{u}_1^*(\boldsymbol{v}_2). \end{aligned}$$

这是余切丛 T^*M 的典范辛结构(0.12)的局部平凡化. 任取 W 的一组基 $\underline{\mathbf{e}} = (\boldsymbol{e}_1, ..., \boldsymbol{e}_n)$, 则 $(\underline{\mathbf{e}}, \underline{\mathbf{e}}^*)$ 构成 $V = W \oplus W^*$ 的一组基. 容易验证典范辛结构在此基下的矩阵为

$$\omega_{(\underline{\mathbf{e}},\underline{\mathbf{e}}^*)} = \begin{pmatrix} & \boldsymbol{I}_n \\ -\boldsymbol{I}_n & \end{pmatrix}.$$

例 **1.10.** 设 V 为有限维 $\mathbb{F}$-线性空间, $\omega \in \bigwedge^2 V^*$. 注意到

$$\ker \omega^\flat = \{\boldsymbol{v} \in V \mid \omega(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = 0, \forall \boldsymbol{w} \in V\}.$$

考虑商空间 $V_0 := V / \ker \omega^\flat$, 记商映射 $\pi\colon V \to V_0$, 则存在唯一 $\omega_0 \in \bigwedge^2 V_0^*$, 使图表

$$\begin{tikzcd} V \times V \arrow[r, "\omega"] \arrow[d, "\pi\times\pi"'] & \mathbb{F} \\ V_0 \times V_0 \arrow[ur, dashed, "\omega_0"'] & \end{tikzcd}$$

交换. 此时, 容易验证 ω_0 非退化, 从而 (V_0, ω_0) 是辛空间.

辛空间 (V_0, ω_0) 称为 (V, ω) 的**辛约化**.

例 **1.11.** 设 $V \cong \mathbb{C}^n$ 是 n 维 $\mathbb{C}$-线性空间, 则 V 自然看作 $2n$ 维 $\mathbb{R}$-线性空间. 设 $\langle , \rangle$ 是 V 上的一个厄米特内积, 定义

$$\begin{aligned} \omega\colon V \times V &\to \mathbb{R} \\ (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) &\mapsto -\mathrm{Im}\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}\rangle, \end{aligned}$$

则易知 ω 是 $V \cong \mathbb{R}^{2n}$ 上的辛结构, 称为厄米特结构 $\langle , \rangle$ 的诱导辛结构.

我们约定厄米特内积关于第二个分量是共轭线性的, 即

$$\langle \boldsymbol{v}, \lambda \boldsymbol{w}\rangle = \overline{\lambda}\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}\rangle, \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}. \tag{1.5}$$

任取 V 关于厄米特内积 $\langle , \rangle$ 的一组 $\mathbb{C}$-标准正交基 $\underline{\mathbf{e}} = (\boldsymbol{e}_1, ..., \boldsymbol{e}_n)$, 记 $\boldsymbol{f}_i := \sqrt{-1}\boldsymbol{e}_i$, 则 $(\boldsymbol{e}_1, ..., \boldsymbol{e}_n; \boldsymbol{f}_1, ..., \boldsymbol{f}_n)$ 构成 V 的一组 $\mathbb{R}$-基. 在这组基下, 容易验证诱导辛结构 ω 的矩阵恰为 $\boldsymbol{J} = \begin{pmatrix} & \boldsymbol{I}_n \\ -\boldsymbol{I}_n & \end{pmatrix}$.

1.2 辛映射与辛群

定义辛空间 (V, ω) 后, 自然要研究辛空间之间 "保持辛结构" 的映射.

1.2.1 辛群的概念与基本性质

定义 1.12. 对于辛空间 (V_1, ω_1), (V_2, ω_2), 以及线性映射 $\phi\colon V_1 \to V_2$, 如果

$$\omega_2(\phi\boldsymbol{v}, \phi\boldsymbol{w}) = \omega_1(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}), \quad \forall\, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in V_1,$$

则称 ϕ 为**辛(线性)映射**.

众所周知, 线性映射 $\phi\colon V_1 \to V_2$ 诱导拉回映射

$$\phi^*\colon \bigwedge^2 V_2^* \to \bigwedge^2 V_1^*.$$

在此意义下, 可以给出辛映射的等价定义: ϕ 是辛映射当且仅当

$$\phi^*\omega_2 = \omega_1. \tag{1.6}$$

辛映射一定是单射. 这是因为对任意 $\mathbf{0} \neq \boldsymbol{v} \in V_1$, 如果辛映射 $\phi\colon V_1 \to V_2$ 使得 $\phi\boldsymbol{v} = \mathbf{0}$, 则由 ω_1 的非退化性可知存在 $\boldsymbol{w} \in V_1$ 使得 $\omega_1(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) \neq 0$, 从而

$$0 \neq \omega_1(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = \omega_2(\phi\boldsymbol{v}, \phi\boldsymbol{w}) = \omega_2(\mathbf{0}, \phi\boldsymbol{w}) = 0,$$

产生矛盾. 特别地, 如果 $\dim V_1 = \dim V_2 < \infty$, 则辛映射 $\phi\colon V_1 \to V_2$ 是双射, 从而是辛空间的同构; 此时称 ϕ 为**辛同构** (symplectomorphism).

如果 $V_1 = V_2 =: V$, 则 V 到自身的辛同构之全体在映射复合下构成群:

定义 1.13. 对于辛空间 (V, ω), 则

$$\mathrm{Sp}(V, \omega) := \{\phi\colon V \to V \mid \phi \text{ 是辛映射}\}$$

关于通常的映射复合构成群, 这个群称为**辛群**, 其元素称为**辛变换**.

取定辛空间 (V, ω) 的一组辛基 $\underline{\mathbf{e}} = (\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_n; \boldsymbol{f}_1, \dots, \boldsymbol{f}_n)$, 考虑辛变换 $\phi \in \mathrm{Sp}(V, \omega)$ 在该基下的矩阵 $\boldsymbol{M} = \phi_{\underline{\mathbf{e}}} \in \mathrm{GL}(2n, \mathbb{F})$, 则容易验证

$$\boldsymbol{M}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{J}\boldsymbol{M} = \boldsymbol{J}, \tag{1.7}$$

其中 $\boldsymbol{J} = \begin{pmatrix} & \boldsymbol{I}_n \\ -\boldsymbol{I}_n & \end{pmatrix}$. 引入辛矩阵的概念如下:

定义 1.14. 给定域 $\mathbb{F}$ 以及正整数 n, 记

$$\mathrm{Sp}(n,\mathbb{F}) := \left\{ \boldsymbol{M} \in \mathrm{GL}(2n,\mathbb{F}) \,\middle|\, \boldsymbol{M}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{J}\boldsymbol{M} = \boldsymbol{J} \right\}, \tag{1.8}$$

$\mathrm{Sp}(n,\mathbb{F})$ 中的矩阵称为**辛矩阵**.

$\mathrm{Sp}(n,\mathbb{F})$ 关于通常的矩阵乘法构成群. 对于任意辛空间 (V,ω), 若 $\dim V = 2n$, 则易知有群同构 $\mathrm{Sp}(V,\omega) \cong \mathrm{Sp}(n,\mathbb{F})$.

对于 $2n \times 2n$ 矩阵 $\boldsymbol{M}$, 考虑矩阵分块 $\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D} \end{pmatrix}$, 其中子矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的尺寸是 $n \times n$, 则直接验证可知, $\boldsymbol{M} \in \mathrm{Sp}(n,\mathbb{F})$ 当且仅当

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C} = \boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}, \quad \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D} = \boldsymbol{D}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}, \quad \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D} - \boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B} = \boldsymbol{I}_n. \tag{1.9}$$

对于辛矩阵 $\boldsymbol{M}$, 将(1.7)两边取行列式可得 $(\det \boldsymbol{M})^2 = 1$, 从而推出辛矩阵的行列式必为 ± 1. 而令人惊奇的是, 辛矩阵的行列式实际上只能是 1.

定理 1.15. 对于辛空间 (V,ω) 以及辛变换 $\phi \in \mathrm{Sp}(V,\omega)$, 则

$$\det \phi = 1.$$

换言之, 对任意辛矩阵 $\boldsymbol{M} \in \mathrm{Sp}(n,\mathbb{F})$, $\det \boldsymbol{M} = 1$.

证明. 记 $\dim V = 2n$. ϕ 是辛映射表明 $\phi^*\omega = \omega$, 从而 $\phi^*(\omega^n) = \omega^n$. 另一方面, 注意 $\omega^n \in \bigwedge^{2n} V^*$, 从而对任意 $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_{2n} \in V$,

$$(\phi^*\omega^n)(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_{2n}) = \omega^n(\phi\boldsymbol{v}_1, \ldots, \phi\boldsymbol{v}_{2n}) = (\det \phi)\omega^n(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_{2n}),$$

从而 $\phi^*\omega^n = (\det \phi)\omega^n$. 综上所述, $\det \phi = 1$, 得证. □

注 **1.16.** 上述定理也有不用外代数的“初等”证明, 见后文的注1.21 与注1.23.

性质 1.17. 若 λ 是辛矩阵 $\boldsymbol{M} \in \mathrm{Sp}(n,\mathbb{F})$ 的特征值, 则 $\frac{1}{\lambda}$ 也是 $\boldsymbol{M}$ 的特征值.

证明. 注意 $\boldsymbol{M}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{J}\boldsymbol{M} = \boldsymbol{J}$ 且 $\det \boldsymbol{M} \neq 0$, 从而

$$\det(\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{M}) = \det\left(\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{M}^{\mathrm{T}}\right) = \det\left(\boldsymbol{J}^{-1}(\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{M}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{J}\right)$$

$$= \det\left(\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{M}^{-1}\right) = \frac{\lambda^{2n}}{\det \boldsymbol{M}} \det\left(\frac{1}{\lambda}\boldsymbol{I} - \boldsymbol{M}\right),$$

从而 λ 是 M 的特征值当且仅当 $\frac{1}{\lambda}$ 是 $\boldsymbol{M}$ 的特征值. □

1.2.2 辛平延

下面开始研究一些特殊的辛变换. 不如将辛空间与欧氏空间类比. 众所周知, 欧氏空间 (V, g) 中有一类特殊的正交变换, 称为**反射**:

$$r_{\boldsymbol{w}} \colon \boldsymbol{v} \mapsto \boldsymbol{v} - 2\frac{g(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})}{g(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{w})}\boldsymbol{w},$$

其中 g 为欧氏内积. 上述正交变换几何意义是将向量 $\boldsymbol{v}$ 沿以 $\boldsymbol{w}$ 为法向量的超平面作镜面反射. 众所周知, 任何正交变换都可分解为有限多个反射的复合, 换言之, 全体反射变换构成正交变换群 $\mathrm{O}(V, g)$ 的一组生成元.

而在辛空间 (V, ω) 中, 也可类似定义 "反射" 变换.

定义 1.18. 对于辛空间 (V, ω), 向量 $\boldsymbol{w} \in V$ 以及参数 $\lambda \in \mathbb{F}$, 记映射

$$\begin{aligned} \tau_{\boldsymbol{w},\lambda} \colon V &\to V \\ \boldsymbol{v} &\mapsto \boldsymbol{v} + \lambda\omega(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})\boldsymbol{w}, \end{aligned} \tag{1.10}$$

则容易验证 $\tau_{\boldsymbol{w},\lambda}$ 是辛变换 (细节留给读者). 形如上述 $\tau_{\boldsymbol{w},\lambda}$ 的辛变换称为**辛平延**(*symplecitc transvection*).

接下来将证明, 任何辛变换 $\phi \in \mathrm{Sp}(V, \omega)$ 都可分解为有限多个辛平延的复合, 换言之, 全体辛平延构成辛群 $\mathrm{Sp}(V, \omega)$ 的一组生成元. 为此首先证明一个引理.

引理 1.19. 设辛空间 (V, ω) 中的向量 $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{v}_2$ 满足 $\omega(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{v}_1) = \omega(\boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{v}_2) = 1$, 则存在辛变换 $\phi \in \mathrm{Sp}(V, \omega)$ 使得

$$\phi\boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{u}_2, \quad \phi\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{v}_2,$$

并且 ϕ 形如有限多个辛平延的复合.

证明. 为说话方便, 将 $\mathrm{Sp}(V, \omega)$ 的由辛平延生成的子群临时记作 $\mathrm{Sp}'(V, \omega)$.

断言 1: 存在 $\phi \in \mathrm{Sp}'(V, \omega)$, 使得 $\phi \boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{u}_2$. 这是因为, 如果 $\omega(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2) \neq 0$, 则

$$\begin{aligned}\boldsymbol{u}_2 &= \boldsymbol{u}_1 + (\boldsymbol{u}_2 - \boldsymbol{u}_1) \\ &= \boldsymbol{u}_1 + \frac{1}{\omega(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2)} \omega(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2 - \boldsymbol{u}_1)(\boldsymbol{u}_2 - \boldsymbol{u}_1),\end{aligned}$$

从而取 $\phi = \tau_{\boldsymbol{u}_2 - \boldsymbol{u}_1, \omega(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2)^{-1}}$ 即可; 而如果 $\omega(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2) = 0$, 则由 ω 的非退化性 (以及 $\operatorname{char} \mathbb{F} = 0$ 的假设) 可知存在 $\boldsymbol{u}_0 \in V$ 使得 $\omega(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_0)$ 与 $\omega(\boldsymbol{u}_0, \boldsymbol{u}_2)$ 都不为零, 从而存在辛平延 τ, τ' 使得 $\tau \boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{u}_0$, $\tau' \boldsymbol{u}_0 = \boldsymbol{u}_2$, 因此只需要取 $\phi = \tau' \circ \tau \in \mathrm{Sp}'(V, \omega)$ 即可. 综上, 断言得证, 从而接下来我们可以不妨假设 $\boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{u}_2 =: \boldsymbol{u}$.

断言 2: 存在 $\tau \in \mathrm{Sp}'(V, \omega)$, 使得 $\tau \boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}$ 且 $\tau \boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{v}_2$. 这是因为, 如果 $\omega(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2) \neq 0$, 则取 $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{v}_1$, $\lambda = \frac{1}{\omega(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2)}$, 容易验证辛平延 $\phi := \tau_{\boldsymbol{w}, \lambda}$ 满足要求 (细节留给读者); 而如果 $\omega(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2) = 0$, 则

$$\omega(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{u}) = -1 \neq 0, \quad \omega(\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}_2) = 1 \neq 0,$$

从而存在辛平延 τ, τ', 使得 $\tau \boldsymbol{u} = \tau' \boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}$ 并且 $\tau \boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{u}$, $\tau'(\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{u}) = \boldsymbol{v}_2$, 因此容易验证 $\phi := \tau' \circ \tau$ 即为所求.

综合断言 1 与断言 2, 引理得证. □

定理 1.20. 辛空间 (V, ω) 上的任何辛变换 ϕ 都形如有限多个辛平延的复合.

沿用前文记号, 将 $\mathrm{Sp}(V, \omega)$ 的由辛平延生成的子群临时记作 $\mathrm{Sp}'(V, \omega)$, 则这个定理断言 $\mathrm{Sp}(V, \omega) = \mathrm{Sp}'(V, \omega)$.

证明. 记 $\dim V = 2n$, 对 n 归纳. 当 $n = 1$ 时, 取 V 的一组辛基 $(\boldsymbol{e}, \boldsymbol{f})$, 则由引理1.19可知, 存在 $\tau \in \mathrm{Sp}'(V, \omega)$ 使得 $\tau \circ \phi(\boldsymbol{e}) = \boldsymbol{e}$, $\tau \circ \phi(\boldsymbol{f}) = \boldsymbol{f}$, 从而 $\tau \circ \phi = \mathrm{id}_V$, 所以 $\phi = \tau^{-1} \in \mathrm{Sp}'(V, \omega)$, 得证.

如果 $n > 1$, 取 V 的一组辛基 $(\boldsymbol{e}_1, ..., \boldsymbol{e}_n; \boldsymbol{f}_1, ..., \boldsymbol{f}_n)$, 记 V 的子空间

$$V_1 := \mathrm{span}\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{f}_1\}, \quad V_2 := \mathrm{span}\{\boldsymbol{e}_2, ..., \boldsymbol{e}_n; \boldsymbol{f}_2, ..., \boldsymbol{f}_n\},$$

则 V_1, V_2 都是辛空间, $V = V_1 \oplus V_2$, 并且特别注意

$$V_2 = V_1^{\perp} := \left\{ \boldsymbol{v} \in V \middle| \boldsymbol{v} \perp \boldsymbol{w}, \forall \boldsymbol{w} \in V_1 \right\}. \tag{1.11}$$

由引理1.19可知, 存在辛平延 $\tau \in \mathrm{Sp}(V', \omega)$ 使得 $\tau \circ \phi(\boldsymbol{e}_1) = \boldsymbol{e}_1, \tau \circ \phi(\boldsymbol{f}_1) = \boldsymbol{f}_1$. 记 $\phi' := \tau \circ \phi$, 则由(1.11)易知 V_1, V_2 都是 V 的 ϕ'-不变子空间, 并且 $\phi'|_{V_1} = \mathrm{id}_{V_1}, \phi'|_{V_2} \in \mathrm{Sp}(V_2, \omega|_{V_2})$. 之后对 $\phi'|_{V_2}$ 使用归纳假设, 并将子空间 V_2 的辛平延自然看成 V 的辛平延, 从而定理得证. $\square$

注 1.21. 对于辛平延 $\tau_{\boldsymbol{w},\lambda}$ ($\boldsymbol{w} \neq \boldsymbol{0}$), 由 ω 的非退化性可知 $\boldsymbol{w}^{\perp} := \{\boldsymbol{v} \in V \mid \boldsymbol{v} \perp \boldsymbol{w}\}$ 是 V 的超平面 (余维数为 1). 注意 $\boldsymbol{w}^{\perp}$ 是 $\tau_{\boldsymbol{w},\lambda}$-不变子空间, 并且 $\tau_{\boldsymbol{w},\lambda}|_{\boldsymbol{w}^{\perp}} = \mathrm{id}$. 此外还注意到 $\boldsymbol{w} \in \boldsymbol{w}^{\perp}$. 将 $\boldsymbol{w}$ 扩充为 $\boldsymbol{w}^{\perp}$ 的一组基 $(\boldsymbol{w}; \boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_{2n-2})$. 再将此基扩充为 V 的一组基 $\underline{\mathbf{w}} = (\boldsymbol{w}; \boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_{2n-2}; \boldsymbol{w}')$, 则辛平延 $\tau_{\boldsymbol{w},\lambda}$ 在基 $\underline{\mathbf{w}}$ 下的矩阵为 $(\tau_{\boldsymbol{w},\lambda})_{\underline{\mathbf{w}}} = \begin{pmatrix} 1 & & x \\ & \boldsymbol{I}_{2n-2} & \\ & & 1 \end{pmatrix}$, 其中 $x = \lambda\omega(\boldsymbol{w}', \boldsymbol{w})$. 因此 $\det \tau_{\boldsymbol{w},\lambda} = \det\left((\tau_{\boldsymbol{w},\lambda})_{\underline{\mathbf{w}}}\right) = 1$, 换言之, 辛平延的行列式等于 1. 结合定理1.20, 我们再次证明了定理1.15.

1.2.3 基本辛矩阵

接下来从矩阵的角度来研究辛群. 我们回忆, $2n \times 2n$ 矩阵 $\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D} \end{pmatrix}$ 是辛矩阵当且仅当(1.9)成立. 容易验证以下三类矩阵都是辛矩阵:

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{J} &:= \begin{pmatrix} & \boldsymbol{I}_n \\ -\boldsymbol{I}_n & \end{pmatrix}, \\
\boldsymbol{U}_{\boldsymbol{V}} &:= \begin{pmatrix} \boldsymbol{V} & \\ & \boldsymbol{V}^{-\mathrm{T}} \end{pmatrix}, \quad \text{其中 } \boldsymbol{V} \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{F}), \boldsymbol{V}^{-\mathrm{T}} := (\boldsymbol{V}^{-1})^{\mathrm{T}}, \\
\boldsymbol{T}_{\boldsymbol{S}} &:= \begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_n & \boldsymbol{S} \\ & \boldsymbol{I}_n \end{pmatrix}, \quad \text{其中 } \boldsymbol{S}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{S}.
\end{aligned} \tag{1.12}
$$

上述三类辛矩阵称为**基本辛矩阵**. 本小节将证明任何辛矩阵都形如有限多个基本辛矩阵的乘积, 换言之, 全体基本辛矩阵构成 $\mathrm{Sp}(n, \mathbb{F})$ 的一组生成元.

定理 1.22. 任何辛矩阵 $\boldsymbol{M} \in \mathrm{Sp}(n, \mathbb{F})$ 都可分解为有限多个基本辛矩阵的乘积.

证明. 考虑矩阵分块 $\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D} \end{pmatrix}$, 其中 $\boldsymbol{A}$ 的尺寸是 $n \times n$.

1. 记 $r := \operatorname{rank} \boldsymbol{A}$, 则存在 $\boldsymbol{V}_1, \boldsymbol{V}_2 \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{F})$ 使得 $\boldsymbol{V}_1 \boldsymbol{A} \boldsymbol{V}_2 = \begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_r & \\ & \boldsymbol{O}_{n-r} \end{pmatrix}$. 然后考虑变换 $\boldsymbol{M} \mapsto \boldsymbol{U}_{\boldsymbol{V}_1} \boldsymbol{M} \boldsymbol{U}_{\boldsymbol{V}_2}$. 接下来不妨只考察 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_r & \\ & \boldsymbol{O}_{n-r} \end{pmatrix}$ 的情形.

2. 将子矩阵 $\boldsymbol{C}$ 分块为 $\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{C}_{11} & \boldsymbol{C}_{12} \\ \boldsymbol{C}_{21} & \boldsymbol{C}_{22} \end{pmatrix}$, 其中 $\boldsymbol{C}_{11}$ 的尺寸是 $r \times r$. 代入(1.9)的第一式, 整理得 $\begin{cases} \boldsymbol{C}_{11}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{C}_{11} \\ \boldsymbol{C}_{12} = \boldsymbol{O} \end{cases}$, 从而 $\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{C}_{11} & \\ \boldsymbol{C}_{21} & \boldsymbol{C}_{22} \end{pmatrix}$. 特别地, (如果 $r < n$, 则)$\boldsymbol{C}_{22}$ 可逆 (否则 $\boldsymbol{M}$ 的第 $r+1, r+2, \dots, n$ 列线性相关, 与 $\boldsymbol{M}$ 是可逆矩阵矛盾), 从而存在参数 $\lambda \in \mathbb{F}$ 使得

$$\boldsymbol{A}' := \boldsymbol{A} + \lambda \boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_r + \lambda \boldsymbol{C}_{11} & \\ \lambda \boldsymbol{C}_{21} & \lambda \boldsymbol{C}_{22} \end{pmatrix}$$

是可逆矩阵, 即 $\operatorname{rank} \boldsymbol{A}' = n$. 取定此 λ, 考虑变换 $\boldsymbol{M} \mapsto \boldsymbol{T}_{\lambda \boldsymbol{I}} \boldsymbol{M}$. 从而不妨只考虑 $\operatorname{rank} \boldsymbol{A} = n$ 的情形. 然后重复步骤 1, 不妨只考察 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{I}_n$ 的情形.

3. 当 $\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_n & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D} \end{pmatrix}$ 时, 由(1.9)式可知 $\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{C}$, 从而 $\boldsymbol{T}_{\boldsymbol{C}} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_n & \boldsymbol{C} \\ & \boldsymbol{I}_n \end{pmatrix}$ 是基本辛矩阵. 考虑变换

$$\boldsymbol{M} \mapsto \boldsymbol{M}' := \left(\boldsymbol{J}^{-1} \boldsymbol{T}_{\boldsymbol{C}} \boldsymbol{J}\right) \boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_n & \\ -\boldsymbol{C} & \boldsymbol{I}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_n & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_n & \boldsymbol{B} \\ & \boldsymbol{D} - \boldsymbol{C}\boldsymbol{B} \end{pmatrix}.$$

注意 $\boldsymbol{M}' \in \mathrm{Sp}(n, \mathbb{F})$, 从而由(1.9)易知 $\boldsymbol{M}' = \boldsymbol{T}_{\boldsymbol{B}}$.

综上所述, 定理证毕. □

注 **1.23.** 容易验证上述三类基本辛矩阵 $\boldsymbol{J}, \boldsymbol{U}_V, \boldsymbol{T}_S$ 的行列式都是 1, 从而由上述定理立刻推出辛矩阵的行列式是 1, 再次证明定理1.15.

1.3 子空间

本节研究辛空间的子空间. 给定域 $\mathbb{F}$ 上的 $2n$ 维辛空间 (V,ω) 子空间 $W \subseteq V$, 一般来说, 双线性型 ω 在 W 上的限制 $\omega|_W$ 可能退化, 这导致 W 不是辛空间. 而由性质1.2可知, 总存在 W 的基

$$\underline{\mathbf{e}} = (\boldsymbol{e}_1, ..., \boldsymbol{e}_l; \boldsymbol{f}_1, ..., \boldsymbol{f}_l; \boldsymbol{h}_1, ..., \boldsymbol{h}_{k-2l}) \tag{1.13}$$

使得 $\omega_{\underline{\mathbf{e}}} = \begin{pmatrix} & \boldsymbol{I}_l & \\ -\boldsymbol{I}_l & & \\ & & \boldsymbol{O}_{k-2l} \end{pmatrix}$, 其中 $k := \dim W$, $2l := \operatorname{rank} \omega|_W$. 上述 $(k, 2l) = (\dim W, \operatorname{rank} \omega|_W)$ 将 V 的子空间分为不同种类.

1.3.1 辛子空间与迷向子空间

定义 1.24. 设 W 是辛空间 (V,ω) 的子空间, 记

$$\begin{aligned} W^{\perp} &:= \{\boldsymbol{v} \in V \,|\, \omega(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = 0, \forall \boldsymbol{w} \in W\}, \\ \operatorname{rad} W &:= \{\boldsymbol{w}' \in W \,|\, \omega(\boldsymbol{w}', \boldsymbol{w}) = 0, \forall \boldsymbol{w} \in W\} = W \cap W^{\perp}, \\ W^{\mathrm{red}} &:= W / \operatorname{rad} W. \end{aligned}$$

注意 $\operatorname{rad} W = \ker(\omega|_W)^{\flat}$, 从而由例1.10可知 W^{red} 具有自然的辛结构, 这是子空间 W 的辛约化. 取子空间 W 的基(1.13), 则 $\boldsymbol{h}_1, ..., \boldsymbol{h}_{k-2l}$ 构成 $\operatorname{rad} W$ 的一组基.

双线性型 ω 的非退化性可以得到如下维数公式:

性质 1.25. 设 W 是辛空间 (V,ω) 的子空间, 则

$$\dim W + \dim W^{\perp} = \dim V, \tag{1.14}$$

进而有

$$(W^{\perp})^{\perp} = W. \tag{1.15}$$

证明. 记

$$W^\circ := \{\varphi \in V^* \mid \varphi(\boldsymbol{w}) = 0, \forall \boldsymbol{w} \in W\} \subseteq V^*,$$

则有自然的线性同构

$$W^\circ \cong (V/W)^*.$$

另一方面, ω 的非退化性使得(1.3)式中的 $\omega^\flat: V \to V^*$ 是线性同构, 又容易验证 $\omega^\flat(W^\perp) = W^\circ$, 于是有线性同构 $W^\perp \cong W^\circ$. 因此 $W^\perp \cong (V/W)^*$. 故

$$\dim W^\perp = \dim(V/W)^* = \dim V - \dim W,$$

从而(1.14)式得证. 再看(1.15)式, 首先显然有 $(W^\perp)^\perp \supseteq W$; 再由维数公式(1.14)得

$$\dim(W^\perp)^\perp = \dim V - \dim W^\perp = \dim V - (\dim V - \dim W) = \dim W,$$

从而 $(W^\perp)^\perp = W$. □

题 1.26. 设 W, W' 是辛空间 (V, ω) 的子空间, 验证以下关系:

1. $W' \subseteq W \Rightarrow W^\perp \subseteq (W')^\perp$,
2. $(W + W')^\perp = W^\perp \cap (W')^\perp$,
3. $(W \cap W')^\perp = W^\perp + (W')^\perp$.

在辛空间的各种子空间当中, 首先注意到这两类:

定义 1.27. 设 W 是辛空间 (V, ω) 的子空间,

1. 如果 $\omega|_W$ 非退化, 则称 W 是 V 的**辛子空间**.

2. 如果 $\omega|_W = 0$, 则称 W 是 V 的**迷向子空间**(*isotropic subspace*).

容易验证, W 是 V 的辛子空间当且仅当 $\operatorname{rad} W = 0$, 当且仅当 $W \cap W^\perp = 0$, 当且仅当 $V = W \oplus W^\perp$, 当且仅当 $W^\perp$ 也是 V 的辛子空间.

而 W 是 V 的迷向子空间当且仅当 $W \subseteq W^\perp$, 当且仅当 $\operatorname{rad} W = W$.

例 1.28. 对于辛空间 (V,ω) 中的向量 $\boldsymbol{e},\boldsymbol{f}$, 如果 $\omega(\boldsymbol{e},\boldsymbol{f})=1$, 则称有序对 $(\boldsymbol{e},\boldsymbol{f})$ 为双曲对 (hyperbolic pair), 此时它们张成的子空间

$$P:=\operatorname{span}\{\boldsymbol{e},\boldsymbol{f}\}$$

是 2 维的, 称为双曲平面 (hyperbolic plane). 双曲平面是 V 的辛子空间.

由性质1.2的证明过程可知, $2n$ 维辛空间 (V,ω) 必形如 n 个双曲平面的正交直和:

$$V=P_1\oplus P_2\oplus\cdots\oplus P_n. \tag{1.16}$$

此外, 若双曲平面 $P_1,P_2,...,P_s$ $(s<n)$ 两两正交, 则存在双曲平面 $P_{s+1},...,P_n$ 使得(1.16)成立, 这与线性代数中的 "基扩充" 十分类似.

题 1.29. 举例说明: 若 W_1,W_2 是 (V,ω) 的辛子空间, 则 $W_1\cap W_2$ 未必是辛子空间.

例 1.30. 设 W 是辛空间 (V,ω) 的子空间, 则:

- 如果 $\dim W=1$, 则 W 是 V 的迷向子空间.
- $\operatorname{rad} W$ 显然也是 V 的迷向子空间.

性质 1.31. 设 W 是辛空间 (V,ω) 的子空间, 则:

1. 存在 V 的辛子空间 U, 使得 $W=U\oplus\operatorname{rad}W$, 因此辛空间的任何子空间都可分解为辛子空间与迷向子空间的直和.
2. 若 W 是 V 的迷向子空间, 则 $\dim W\le\frac{1}{2}\dim V$.
3. 如果 $\overline{W}$ 是 V 的辛子空间并且 $\overline{W}\supseteq W$, 则 $\dim\overline{W}\ge 2k-2l$, 其中 $k:=\dim W$, $2l:=\operatorname{rank}\omega|_W$.

证明. 取 W 的一组形如(1.13)的基, 则显然 $\operatorname{rad}W=\operatorname{span}\{\boldsymbol{h}_1,...,\boldsymbol{h}_{k-2l}\}$, 此时取 $U=\operatorname{span}\{\boldsymbol{e}_1,...,\boldsymbol{e}_l;\boldsymbol{f}_1,...,\boldsymbol{f}_l\}$ 即可. 如果 W 是迷向子空间, 则 $W\subseteq W^\perp$, 从而 $\dim W\le\dim W^\perp$, 再注意维数公式(1.14)即可. 最后看 (3), 取辛子空间 U 使得 $W=U\oplus\operatorname{rad}W$, 则 $\overline{W}\cap U^\perp$ 也是辛空间 (为什么?), 并且 $\operatorname{rad}W$ 是 $\overline{W}\cap U^\perp$ 的迷向子空间, 因此

$$k-2l=\dim\operatorname{rad}W\le\frac{1}{2}\dim(\overline{W}\cap U^\perp)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\dim \overline{W} - \dim U\right) = \frac{1}{2}\left(\dim \overline{W} - 2l\right),$$

整理得到 $\dim \overline{W} \geq 2k - 2l$. $\square$

1.3.2 子空间的辛等价不变量

设 W 是辛空间 (V, ω) 的子空间, 记 $k := \dim W$, $2l := \operatorname{rank} \omega|_W$, 我们自然考虑用有序组 $(k, 2l)$ 来描述 V 的 "不同种类" 的子空间. 更具体地, 对于 V 的子空间 W, W', 如果存在辛同构 $\phi \in \mathrm{Sp}(V, \omega)$ 使得 $W' = \phi(W)$, 则称 W 与 W' **辛等价**; 辛等价显然是 V 的子空间之间的等价关系, 我们所关心的分类问题正是在辛等价意义下.

首先, 如果子空间 W 与 W' 辛等价, 则显然有

$$\dim W = \dim W' \quad \text{且} \quad \operatorname{rank} \omega|_W = \operatorname{rank} \omega|_{W'}.$$

而本小节将证明, 上式也是 W 与 W' 辛等价的充分条件, 从而 $(\dim W, \operatorname{rank} \omega|_W)$ 是子空间在辛等价意义下的全系不变量. 为此我们需要如下基扩充引理.

引理 1.32. 设 $W = U \oplus \operatorname{rad} W$ 是辛空间 (V, ω) 的子空间, 其中 U 是辛子空间. 任取 $\operatorname{rad} W$ 的一组基 $\{\boldsymbol{h}_1, ..., \boldsymbol{h}_s\}$, 则存在向量 $\boldsymbol{h}_1', ..., \boldsymbol{h}_s' \in U^\perp$, 使得对任意 $1 \leq i \leq s$, $(\boldsymbol{h}_i, \boldsymbol{h}_i')$ 是双曲对, 并且有正交直和 $P_1 \oplus \cdots \oplus P_s$, 其中 $P_i := \operatorname{span}\{\boldsymbol{h}_i, \boldsymbol{h}_i'\}$.
特别地, 存在辛子空间 $\overline{W}$, 使得 $\overline{W} \supseteq W$, 并且 $\dim \overline{W} = 2k - 2l$, 其中 $k := \dim W$, $2l := \operatorname{rank} \omega|_W$.

证明. 对 $s = \dim \operatorname{rad} W$ 归纳. $s = 0$ 的情形是平凡的. 当 $s \geq 1$ 时, $\operatorname{rad} W = \operatorname{span}\{\boldsymbol{h}_1, ..., \boldsymbol{h}_s\}$. 记 $X := \operatorname{span}\{\boldsymbol{h}_2, ..., \boldsymbol{h}_s\}$, 则 $\operatorname{rad} W = \mathbb{F}\boldsymbol{h}_1 \oplus X$. 注意 $\boldsymbol{h}_1 \notin X = (X^\perp)^\perp$, 从而存在 $\boldsymbol{h}_1' \in X^\perp$ 使得 $\omega(\boldsymbol{h}_1, \boldsymbol{h}_1') \neq 0$. 将 $\boldsymbol{h}_1'$ 适当乘以常数倍, 不妨 $\omega(\boldsymbol{h}_1, \boldsymbol{h}_1') = 1$; 再将 $\boldsymbol{h}_1'$ 适当加上 U 中的向量, 不妨 $\boldsymbol{h}_1' \in X^\perp \cap U^\perp = (X \oplus U)^\perp$. 记双曲平面 $P_1 = \operatorname{span}\{\boldsymbol{h}_1, \boldsymbol{h}_1'\}$, 再记子空间 $W' := W \oplus \mathbb{F}\boldsymbol{h}_1'$, 则

$$W' = X \oplus (U \oplus P_1),$$

且 $X = \operatorname{rad} W'$, $\dim \operatorname{rad} W' = \dim X = s - 1$. 再对 W' 用归纳假设即可.

特别地, 取辛子空间 $\overline{W} := P_1 \oplus \cdots \oplus P_s \oplus U$, 则 $\overline{W} \supseteq W$, 并且容易验证 $\dim \overline{W} = 2k - 2l$. $\square$

满足上述性质的辛子空间 $\overline{W}$ 称为子空间 W 的**辛包** (symplectic hull). 换言之, W 的辛包是包含 W 的辛子空间之维数最低者. 特别注意, 子空间的辛包可能不唯一.

定理 1.33. 设 W, W' 是辛空间 (V,ω) 的子空间, 则 W 与 W' 辛等价当且仅当

$$\dim W = \dim W' \quad 且 \quad \operatorname{rank}\omega|_W = \operatorname{rank}\omega|_{W'}. \tag{1.17}$$

证明. 若存在辛同构 $\phi \in \mathrm{Sp}(V,\omega)$ 使得 $W' = \phi(W)$, 则(1.17)显然成立. 反之, 如果(1.17)成立, 记

$$2l := \operatorname{rank}\omega|_W, \quad s := \dim W - \operatorname{rank}\omega|_W,$$

分别取 W, W' 的形如(1.13)的基

$$\underline{\mathbf{e}} = (\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_l; \boldsymbol{f}_1, \dots, \boldsymbol{f}_l; \boldsymbol{h}_1, \dots, \boldsymbol{h}_s), \quad \underline{\mathbf{e}}' = (\boldsymbol{e}'_1, \dots, \boldsymbol{e}'_l; \boldsymbol{f}'_1, \dots, \boldsymbol{f}'_l; \boldsymbol{h}'_1, \dots, \boldsymbol{h}'_s),$$

使得 $\omega|_W$ 与 $\omega|_{W'}$ 在相应基下的矩阵都为 $\begin{pmatrix} & \boldsymbol{I}_l & \\ -\boldsymbol{I}_l & & \\ & & \boldsymbol{O}_s \end{pmatrix}$; 再由引理1.32, 可知存在 V 中的向量 $\boldsymbol{k}_1, \dots, \boldsymbol{k}_s$ 与 $\boldsymbol{k}'_1, \dots, \boldsymbol{k}'_s$, 使得

$$\overline{W} := W \oplus \operatorname{span}\{\boldsymbol{k}_i \,|\, 1 \le i \le s\}, \quad \overline{W}' := W' \oplus \operatorname{span}\{\boldsymbol{k}'_i \,|\, 1 \le i \le s\},$$

分别是 W, W' 的辛闭包, 并且

$$(\omega|_{\overline{W}})_{(\underline{\mathbf{e}};\boldsymbol{k}_1,\dots,\boldsymbol{k}_l)} = (\omega|_{\overline{W}'})_{(\underline{\mathbf{e}}';\boldsymbol{k}'_1,\dots,\boldsymbol{k}'_l)} = \begin{pmatrix} & \boldsymbol{I}_l & & \\ -\boldsymbol{I}_l & & & \\ & & & \boldsymbol{I}_s \\ & & -\boldsymbol{I}_s & \end{pmatrix}.$$

定义线性映射 $\psi\colon \overline{W} \to \overline{W}'$ 如下:

$$\psi(\boldsymbol{e}_i) = \boldsymbol{e}'_i, \quad \psi(\boldsymbol{f}_i) = \boldsymbol{f}'_i, \quad \psi(\boldsymbol{h}_i) = \boldsymbol{h}'_i, \quad \psi(\boldsymbol{k}_i) = \boldsymbol{k}'_i,$$

则显然 ψ 是辛空间 $\overline{W}$ 与 $\overline{W}'$ 之间的辛同构. 注意 $\overline{W}$ 与 $\overline{W}'$ 都是 V 的辛子空间且维数相等, 从而 $\overline{W}^{\perp}$ 与 $(\overline{W}')^{\perp}$ 也都是 V 的辛子空间且维数相等, 从

而存在辛同构 $\psi^\perp\colon \overline{W}^\perp \to (\overline{W}')^\perp$. 再注意 $V = \overline{W} \oplus \overline{W}^\perp = \overline{W}' \oplus (\overline{W}')^\perp$, 从而映射

$$\phi := \psi \oplus \psi^\perp \in \mathrm{Sp}(V, \omega),$$

并且 $\phi(W) = W'$, 因此 W 与 W' 辛等价. 定理得证. □

1.3.3 拉格朗日子空间

除了辛子空间与迷向子空间, 我们还关心如下的特殊子空间:

定义 1.34. 设 W 是辛空间 (V, ω) 的子空间,

1. 如果 $W \supseteq W^\perp$, 则称 W 是 V 的**余迷向子空间**(*coisotropic subspace*);

2. 如果 $W = W^\perp$, 则称 W 是 V 的**拉格朗日子空间**(*Lagrangian subspace*).

与迷向子空间的情形类似, 若 W 是 V 的余迷向子空间, 则由维数公式(1.14)容易证明 $\dim W \geq \frac{1}{2}\dim V$. 此外, 容易验证 W 是 V 的余迷向子空间当且仅当 $W^\perp$ 是 V 的迷向子空间, 当且仅当 $\mathrm{rad}\, W = W^\perp$; 并且此时 $W^{\mathrm{red}} = W/W^\perp$.

对于 (V, ω) 的拉格朗日子空间 L, 易证 $\dim L = \frac{1}{2}\dim V$. 事实上,

$$\begin{aligned}
&L \text{ 是 } V \text{ 的拉格朗日子空间}\\
\Leftrightarrow\ &L \text{ 同时是 } V \text{ 的迷向子空间与余迷向子空间}\\
\Leftrightarrow\ &L \text{ 是 } V \text{ 的迷向子空间且 } \dim L = \frac{1}{2}\dim V\\
\Leftrightarrow\ &L \text{ 是 } V \text{ 的余迷向子空间且 } \dim L = \frac{1}{2}\dim V\\
\Leftrightarrow\ &L \text{ 是 } V \text{ 的极大迷向子空间}\\
\Leftrightarrow\ &L \text{ 是 } V \text{ 的极小余迷向子空间;}
\end{aligned}$$

上述 “极大” 与 “极小” 是在通常的包含偏序下的.

我们有关于拉格朗日子空间的如下重要引理:

引理 1.35. *(辛约化引理).* 设 V 为辛空间, W 是 V 的余迷向子空间, L 是 V 的拉格朗日子空间, 记典范投影 $\pi\colon W \twoheadrightarrow W^{\mathrm{red}} = W/W^{\perp}$, 则 $\pi(L\cap W)$ 是 W^{red} 的拉格朗日子空间. 特别地, 如果还满足 $V = L+W$, 那么 $\pi|_{L\cap W}\colon L\cap W \to W^{\mathrm{red}}$ 是单射.

证明. 记 $2n := \dim V$, 则 $\dim L = n$. 显然 $\pi(L\cap W)$ 是 W^{red} 的迷向子空间. 注意 $W^{\perp} \subseteq W$ 以及维数公式(1.14), 可知

$$\begin{aligned}
\dim \pi(L\cap W) &= \dim(L\cap W) - \dim(L\cap W^{\perp}) \\
&= \dim(L\cap W) - \left(2n - \dim(L\cap W^{\perp})^{\perp}\right) \\
&= \dim(L\cap W) + \dim\left(L^{\perp} + (W^{\perp})^{\perp}\right) - 2n \\
&= \dim(L\cap W) + \dim\left(L+W\right) - 2n \\
&= \dim L + \dim W - 2n \\
&= \dim W - n.
\end{aligned}$$

另一方面,

$$\begin{aligned}
\dim W^{\mathrm{red}} &= \dim(W/W^{\perp}) = \dim W - \dim W^{\perp} \\
&= \dim W - (\dim V - \dim W) = 2\left(\dim W - n\right),
\end{aligned}$$

因此 $\dim W^{\mathrm{red}} = 2\dim \pi(L\cap W)$, 从而 $\pi(L\cap W)$ 是 W^{red} 的拉格朗日子空间.

特别地, 当 $V = L+W$ 时, 注意

$$\ker \pi|_{L\cap W} = L\cap W^{\perp} = (L^{\perp}+W)^{\perp} = (L+W)^{\perp} = V^{\perp} = 0,$$

所以 $\pi|_{L\cap W}$ 是单射. □

我们回忆微分拓扑学中的**横截性** (的线性代数版本): 对于线性空间 V 及其子空间 W_1 与 W_2, 如果 $V = W_1 + W_2$, 则称 W_1 与 W_2 (在 V 中) **横截相交**, 简称**横截**. 特别地, 对于辛空间 (V,ω) 的拉格朗日子空间 L_1, L_2, 注意维数关系 $\dim L_1 = \dim L_2 = \frac{1}{2}\dim V$, 从而易知:

$$L_1 \text{ 与 } L_2 \text{ 横截} \quad\Leftrightarrow\quad L_1\cap L_2 = 0 \quad\Leftrightarrow\quad V = L_1\oplus L_2.$$

引理 1.36. 设 L, L' 是辛空间 (V, ω) 的一组彼此横截的拉格朗日子空间, $\underline{\mathbf{e}} = (\boldsymbol{e}_1, ..., \boldsymbol{e}_n)$ 是 L 的一组基. 则存在 L' 的一组基 $\underline{\mathbf{e}}' = (\boldsymbol{e}'_1, ..., \boldsymbol{e}'_n)$, 使得 $(\underline{\mathbf{e}}, \underline{\mathbf{e}}')$ 构成 V 的一组辛基.

证明. 对 L 的基 $\underline{\mathbf{e}}$ 使用引理1.32, 取向量组 $\underline{\mathbf{f}} = (\boldsymbol{f}_1, ..., \boldsymbol{f}_n)$, 使得 $(\underline{\mathbf{e}}, \underline{\mathbf{f}})$ 构成 V 的一组辛基. 注意 L 与 L' 横截, $V = L \oplus L'$, 从而对每个 $\boldsymbol{f}_i$, 存在唯一的 $\widetilde{\boldsymbol{e}}_i \in L$ 以及 $\boldsymbol{e}'_i \in L'$, 使得 $\boldsymbol{f}_i = \widetilde{\boldsymbol{e}}_i + \boldsymbol{e}'_i$, 并且显然 $\boldsymbol{e}'_i \neq 0$. 取 $\underline{\mathbf{e}}' = (\boldsymbol{e}'_1, ..., \boldsymbol{e}'_n)$, 容易验证 $\underline{\mathbf{e}}'$ 是 L' 的一组基, 并且 $(\underline{\mathbf{e}}, \underline{\mathbf{e}}')$ 构成 V 的一组辛基. □

性质 1.37. 对于辛空间 (V, ω) 的任何两个拉格朗日子空间 L, L', 存在拉格朗日子空间 L'', 使得 L'' 与 L, L' 都横截.

证明. 如果 L 与 L' 横截, 则有引理1.36可知存在 L 的一组基 $\underline{\mathbf{e}} = (\boldsymbol{e}_1, ..., \boldsymbol{e}_n)$ 以及 L' 的一组基 $\underline{\mathbf{e}}' = (\boldsymbol{e}'_1, ..., \boldsymbol{e}'_n)$ 使得 $(\underline{\mathbf{e}}, \underline{\mathbf{e}}')$ 构成 V 的一组辛基. 此时取 $L'' := \operatorname{span}\{\boldsymbol{e}_i + \boldsymbol{e}'_i \,|\, 1 \leq i \leq n\}$ 即可.

一般地, 首先注意到 $L + L'$ 是余迷向的, 这是因为

$$(L + L')^{\perp} = L^{\perp} \cap (L')^{\perp} = L \cap L' \subseteq L + L'.$$

因此 $\operatorname{rad}(L + L') = L \cap L'$, 故 $(L + L')^{\mathrm{red}} = (L + L')/(L \cap L')$. 记 $\pi\colon L + L' \twoheadrightarrow (L + L')^{\mathrm{red}}$ 为相应的商映射. 于是, 由引理1.35可知 $\widetilde{L} := \pi(L)$ 与 $\widetilde{L}' := \pi(L')$ 都是 $(L + L')^{\mathrm{red}}$ 的拉格朗日子空间, 且在 $(L + L')^{\mathrm{red}}$ 中相互横截. 于是存在拉格朗日子空间 $\widetilde{L}'' \subseteq (L + L')^{\mathrm{red}}$, 使得 $\widetilde{L}''$ 与 $\widetilde{L}, \widetilde{L}'$ 都横截. 令 $\overline{L}'' := \pi^{-1}(\widetilde{L}'')$, 则易知 $\overline{L}''$ 是 V 的拉格朗日子空间, 并且 $\overline{L}'' \cap L = \overline{L}'' \cap L' = L \cap L'$.

任取 $L \cap L'$ 在 $\overline{L}''$ 中的一个补空间 T, 使得

$$\overline{L}'' = (L \cap L') \oplus T.$$

注意 $\operatorname{rad}(L + L') = L \cap L'$, 对 $L + L'$ 使用引理1.17知存在迷向子空间 $Q \subseteq T^{\perp}$, 使得 $Q \cap (L + L') = 0$, $\dim Q = \dim(L \cap L')$, 且 $(L + L') \oplus Q$ 是 V 的辛子空间. 取 $L'' := T \oplus Q$, 易验证 L'' 与 L, L' 都横截, 且是 V 的拉格朗日子空间. 得证. □

1.4 拉格朗日-格拉斯曼流形

众所周知, n 维 (实) 线性空间 V 的全体 m 维子空间构成的集合 $\mathrm{Gr}(V,m)$ 具有自然的光滑流形结构, 即**格拉斯曼流形** (Grassmannian). 对于辛空间 (V,ω), 我们记

$$\mathcal{L}(V) := \left\{L \subseteq V \,\middle|\, L \text{ 是 } V \text{ 的拉格朗日子空间}\right\}, \tag{1.18}$$

即 V 的全体拉格朗日子流形构成的集合. 显然 $\mathcal{L}(V)$ 是 $\mathrm{Gr}(V,n)$ 的子集.

1.4.1 辛群在 $\mathcal{L}(V)$ 上的作用

对于辛空间 (V,ω), 则辛群 $\mathrm{Sp}(V,\omega)$ 在 $\mathcal{L}(V)$ 上有如下自然的作用:

$$\begin{aligned}\mathrm{Sp}(V,\omega)\times\mathcal{L}(V) &\to \mathcal{L}(V),\\ (\phi,L) &\mapsto \phi(L).\end{aligned}$$

由定理1.33可知, 对任意 $L, L' \in \mathcal{L}(V)$, 都存在辛同构 $\phi \in \mathrm{Sp}(V,\omega)$ 使得 $\phi(L) = L'$. 换言之, $\mathrm{Sp}(V,\omega)$ 在 $\mathcal{L}(V)$ 的作用是**可迁**的.

考虑辛群作用的稳定子群. 给定 $L \in \mathcal{L}(V)$, 记

$$G_L := \{\phi \in \mathrm{Sp}(n,\omega) \mid \phi(L) = L\}. \tag{1.19}$$

G_L 显然是 $\mathrm{Sp}(V,\omega)$ 的子群, 称为拉格朗日子空间 L 的**迷向群** (isotropic group). 迷向群 G_L 在 $\mathrm{Sp}(V,\omega)$ 中的陪集之全体与 $\mathcal{L}(V)$ 有自然的一一对应:

$$\mathrm{Sp}(V,\omega)/G_L \cong \mathcal{L}(V). \tag{1.20}$$

<u>注</u> **1.38.** 我们可以用矩阵的语言更具体地描述迷向群 G_L. 取定 L 的一组基 $\underline{\mathbf{e}} = (\boldsymbol{e}_1, ..., \boldsymbol{e}_n)$, 用引理1.32将其扩充为 V 的一组辛基 $(\boldsymbol{e}_1, ..., \boldsymbol{e}_n; \boldsymbol{f}_1, ..., \boldsymbol{f}_n)$. 在这组辛基下, 辛群 $\mathrm{Sp}(V,\omega)$ 同构于矩阵群 $\mathrm{Sp}(n,\mathbb{F})$. 此时, 容易验证

$$G_L \cong \left\{\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{B}\\ & \boldsymbol{D}\end{pmatrix} \in \mathrm{GL}(2n,\mathbb{F}) \,\middle|\, \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D} = \boldsymbol{D}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B},\ \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D} = \boldsymbol{I}_n\right\}. \tag{1.21}$$

若读者熟悉李群相关知识, 可知当 $\mathbb{F}=\mathbb{R}$ 时(1.20)式给出了 $\mathcal{L}(V)$ 的**齐性空间** (homogeneous space) 结构, 从而 $\mathcal{L}(V)$ 是光滑流形, 这正是**拉格朗日-格拉斯曼流形**. 接下来, 我们将利用拉格朗日子空间的横截性来具体给出 $\mathcal{L}(V)$ 的一族局部坐标卡.

对于拉格朗日子空间 $L\in\mathcal{L}(V)$, 记

$$\mathcal{T}(L):=\{L'\in\mathcal{L}(V)\,|\,L\cap L'=0\}\,, \tag{1.22}$$

即与 L 横截的所有拉格朗日子空间之全体.

迷向群 G_L 在 $\mathcal{T}(L)$ 上有自然的作用: 对任意 $L'\in\mathcal{T}(L)$ 以及 $\phi\in G_L$, 容易验证 $\phi(L')\in\mathcal{T}(L)$. 断言$G_L$ 在 $\mathcal{T}(L)$ 上的作用是可迁的. 这是因为, 对任意 $L',L''\in\mathcal{T}(L)$, 取定 L 的一组基 $\underline{\mathbf{e}}=(\boldsymbol{e}_1,...,\boldsymbol{e}_n)$, 利用引理1.36分别取 L',L'' 的基 $\underline{\mathbf{e}}'=(\boldsymbol{e}_1',...,\boldsymbol{e}_n')$ 以及 $\underline{\mathbf{e}}''=(\boldsymbol{e}_1'',...,\boldsymbol{e}_n'')$, 使得 $(\underline{\mathbf{e}},\underline{\mathbf{e}}')$ 与 $(\underline{\mathbf{e}},\underline{\mathbf{e}}'')$ 都是 V 的辛基; 取线性变换 $\phi\colon V\to V$, 使得 $\phi\boldsymbol{e}_i=\boldsymbol{e}_i$, $\phi\boldsymbol{e}_i'=\boldsymbol{e}_i''$, 则显然 $\phi\in G_L$, 并且 $\phi(L')=L''$.

给定 $L'\in\mathcal{T}(L)$, 记稳定子群

$$G_{L,L'}:=\{\phi\in G_L\,|\,\phi(L')=L'\}=G_L\cap G_{L'},$$

它是 G_L 的子群, 并且它在 G_L 中的陪集之全体与 $\mathcal{T}(L)$ 自然一一对应:

$$G_L/G_{L,L'}\cong\mathcal{T}(L).$$

注 **1.39.** 亦可用矩阵语言更具体地描述群 $G_{L,L'}$. 对于 $L'\in\mathcal{T}(L)$, 利用引理1.36分别取定 L,L' 的基 $\underline{\mathbf{e}}=(\boldsymbol{e}_1,...,\boldsymbol{e}_n)$ 与 $\underline{\mathbf{e}}'=(\boldsymbol{e}_1',...,\boldsymbol{e}_n')$, 使得 $(\underline{\mathbf{e}},\underline{\mathbf{e}}')$ 构成 V 的辛基. 在此辛基下, 迷向群 G_L 依然有矩阵表示(1.21), 并且容易验证

$$G_{L,L'}\cong\left\{\left.\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}&\\&\boldsymbol{A}^{-\mathrm{T}}\end{pmatrix}\,\right|\,\boldsymbol{A}\in\mathrm{GL}(n,\mathbb{F})\right\}\cong\mathrm{GL}(n,\mathbb{F}). \tag{1.23}$$

进而容易验证

$$\mathcal{T}(L)\cong G_L/G_{L,L'}\cong\left\{\left.\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}&\boldsymbol{S}\\&\boldsymbol{I}\end{pmatrix}\,\right|\,\boldsymbol{S}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{S}\right\}\cong\mathbb{F}^{\frac{n(n+1)}{2}}.$$

这启发我们: $\mathcal{T}(L)$ 具有 $\frac{n(n+1)}{2}$ 维**仿射空间**结构.

1.4.2 $\mathcal{T}(L)$ 的仿射空间结构

众所周知, **仿射空间** (affine space) 是指三元组 (A, V, π), 其中 A 为集合, V 为 $\mathbb{F}$-线性空间, 并且映射 $\pi\colon A \times A \to V$ 满足如下性质:

1. 对任意 $a \in A$, $\pi|_{\{a\}\times A}\colon A \to V, b \mapsto \pi(a,b)$ 是双射;

2. 任意 $a, b, c \in A$, 成立 $\pi(a,b) + \pi(b,c) = \pi(a,c)$.

在仿射空间 (A, V, π) 中, 对于 $a, b \in A$, 习惯将 $\pi(a,b)$ 俗称为"以 a 为始点且以 b 为终点的向量"; 该仿射空间的维数 $\dim A := \dim V$.

在注1.39中, 我们在一组选取特殊的基下来显式表示 $\mathcal{T}(L)$, 从而容易给出 $\mathcal{T}(L)$ 的仿射空间结构, 但这种表示方法依赖坐标选取. 事实上, $\mathcal{T}(L)$ 具有不依赖坐标选取的自然的仿射空间结构.

大致来说, 对于 $L', L'' \in \mathcal{T}(L)$, 则 L'' 可以看成某个线性映射 $\varepsilon\colon L' \to L$ 的图像, 该 ε 自然可以看成双线性函数 $L' \times L^* \to \mathbb{F}$, 其中 L^* 是 L 的对偶空间; 再注意辛结构 ω 给出自然同构 $L' \cong L^*$, 由此将上述双线性函数看成双线性型 $Q_{L'L''}\colon L^* \times L^* \to \mathbb{F}$. 可以验证 $Q_{L'L''}$ 是对称双线性型, 即 $Q_{L'L''} \in \mathrm{Sym}^2(L^*)$. 这就给出了映射 $\pi\colon \mathcal{T}(L) \times \mathcal{T}(L) \to \mathrm{Sym}^2(L^*)$, $(L', L'') \mapsto Q_{L'L''}$, 可以验证 $(\mathcal{T}(L), \mathrm{Sym}^2(L^*), \pi)$ 是仿射空间.

接下来将上述想法的具体细节逐步补全.

引理 1.40. *给定辛空间 (V, ω) 的拉格朗日子空间 L, 则对任意 $L', L'' \in \mathcal{T}(L)$,*

1. *对任意 $\boldsymbol{x}' \in L'$, 存在唯一 $\boldsymbol{y} \in L$ 使得 $\boldsymbol{x}' + \boldsymbol{y} \in L''$. 这给出了一个从 L' 到 L 的映射 $\varepsilon_{L'L''}\colon \boldsymbol{x}' \mapsto \boldsymbol{y}$, 易知 $\varepsilon_{L'L''}\colon L' \to L$ 是线性映射.*

2. *存在唯一的线性同构 $\lambda_{L'}\colon L^* \to L'$, 使得对任意 $\psi \in L^*$, $\boldsymbol{x} \in L$ 都有*
$$\omega(\lambda_{L'}\psi, \boldsymbol{x}) = \psi(\boldsymbol{x}).$$

此外, 上述定义的 $\varepsilon_{L'L''}$ 与 $\lambda_{L'}$ 满足如下关系: 对任意 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in L'$,
$$\omega(\boldsymbol{x}, \varepsilon_{L'L''}\boldsymbol{y}) + \omega(\varepsilon_{L'L''}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 0.$$

证明. 注意 $V = L'' \oplus L$, 从而每个 $\boldsymbol{x}' \in L'$ 都可唯一分解为 $\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{x}'' + \boldsymbol{x}$, 其中 $\boldsymbol{x}'' \in L''$, $\boldsymbol{x} \in L$. 取 $\boldsymbol{y} := -\boldsymbol{x}$ 即可, 之后容易验证 $\varepsilon_{L'L''}$ 的良定性. 由 ω 的非退化性容易给出 $\lambda_{L'}$. 现在对任意 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in L'$, 则 $\boldsymbol{x} + \varepsilon_{L'L''}\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y} + \varepsilon_{L'L''}\boldsymbol{y} \in L''$. 注意 $\omega|_{L''} = 0$, 于是

$$\omega(\boldsymbol{x} + \varepsilon_{L'L''}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} + \omega_{L'L''}\boldsymbol{y}) = 0.$$

再注意 L, L' 也是 V 的迷向子空间, 从而上式整理得

$$\omega(\boldsymbol{x}, \varepsilon_{L'L''}\boldsymbol{y}) + \omega(\varepsilon_{L'L''}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 0,$$

引理得证. □

性质 1.41. *给定辛空间 (V, ω) 的拉格朗日子空间 L, 对任意 $L', L'' \in \mathcal{T}(L)$, 定义双线性型 $Q_{L'L''}$ 如下:*

$$\begin{aligned} Q_{L'L''} \colon L^* \times L^* &\to \mathbb{F} \\ (\phi, \psi) &\mapsto \phi\left(\varepsilon_{L'L''}(\lambda_{L'}\psi)\right), \end{aligned} \tag{1.24}$$

其中 $\varepsilon_{L'L''}$ 与 $\lambda_{L'}$ 的定义见引理1.40, 则 $Q_{L'L''} \in \mathrm{Sym}^2(L^*)$. 换言之, 对任意 $\phi, \psi \in L^*$,

$$Q_{L'L''}(\phi, \psi) = Q_{L'L''}(\psi, \phi).$$

证明. 注意引理1.40中的有关定义与性质, 直接验证得

$$\begin{aligned} Q_{L'L''}(\phi, \psi) &= \phi\left(\varepsilon_{L'L''}(\lambda_{L'}\psi)\right) = \omega\left(\lambda_{L'}\phi,\, \varepsilon_{L'L''}(\lambda_{L'}\psi)\right) \\ &= \omega\left(\lambda_{L'}\psi,\, \varepsilon_{L'L''}(\lambda_{L'}\phi)\right) = \psi\left(\varepsilon_{L'L''}(\lambda_{L'}\phi)\right) = Q_{L'L''}(\psi, \phi), \end{aligned}$$

从而得证. □

以下是本小节的主要结果:

定理 1.42. *给定辛空间 (V, ω) 的拉格朗日子空间 L, 则 $(\mathcal{T}(L), \mathrm{Sym}^2(L^*), \pi)$ 是仿射空间, 其中 $\pi \colon (L', L'') \mapsto Q_{L'L''}$, 而 $Q_{L'L''}$ 的含义见性质1.41.*

证明. 对任意 $L' \in \mathcal{T}(L)$, 首先验证

$$
\begin{aligned}
\pi_{L'}\colon \mathcal{T}(L) &\to \mathrm{Sym}^2(L^*) \\
L'' &\mapsto Q_{L'L''}
\end{aligned}
$$

是双射. 为此, 只需给出该映射的逆. 注意到 $Q \in \mathrm{Sym}^2(L^*)$ 自然诱导线性映射

$$
\begin{aligned}
Q^\flat\colon L^* &\to (L^*)^* \\
\phi &\mapsto Q(\phi, \text{-}),
\end{aligned}
$$

从而易知存在唯一的 $\varepsilon_Q\colon L' \to L$ 使得下图交换:

$$
\begin{tikzcd}
L^* \arrow[r, "Q^\flat"] & (L^*)^* \\
L' \arrow[u, equal, "\lambda_{L'}", "\cong"'] \arrow[r, dashed, "\varepsilon_Q"] & L \arrow[u, equal, "\cong"']
\end{tikzcd}
$$

其中线性同构 $\lambda_{L'}\colon L' \to L^*$ 见引理1.40. 令

$$
L'' := \{\boldsymbol{x}' + \varepsilon_Q \boldsymbol{x}' \mid \boldsymbol{x}' \in L'\},
$$

即线性映射 ε_Q 的图像. 容易验证 $L'' \in \mathcal{T}(L)$, 并且映射 $\varepsilon_Q \mapsto L''$ 恰为 $\pi_{L'}\colon \mathcal{T}(L) \to \mathrm{Sym}^2(L^*)$ 的逆, 从而 $\pi_{L'}$ 是双射.

对任意 $L_1, L_2, L_3 \in \mathcal{T}(L)$, 容易验证

$$
\begin{aligned}
\lambda_{L_2}\psi &= \lambda_{L_1}\psi + \varepsilon_{L_1L_2}(\lambda_{L_1}\psi) \\
\varepsilon_{L_1L_3}\boldsymbol{x} &= \varepsilon_{L_1L_2}\boldsymbol{x} + \varepsilon_{L_2L_3}(\boldsymbol{x} + \varepsilon_{L_1L_2}\boldsymbol{x})
\end{aligned}
$$

对任意 $\psi \in L^*$, $\boldsymbol{x} \in L_1$ 都成立 (留给读者), 从而对任意 $\phi, \psi \in L^*$ 都有

$$
\begin{aligned}
&(Q_{L_1L_2} + Q_{L_2L_3})(\phi, \psi) \\
=\ &\phi(\varepsilon_{L_1L_2}\lambda_{L_1}\psi) + \phi(\varepsilon_{L_2L_3}\lambda_{L_2}\psi) \\
=\ &\phi(\varepsilon_{L_1L_2}\lambda_{L_1}\psi + \varepsilon_{L_2L_3}(\lambda_{L_1} + \varepsilon_{L_1L_2}\lambda_{L_1})\psi) \\
=\ &\phi(\varepsilon_{L_1L_3}\lambda_{L_1}\psi) = Q_{L_1L_3}(\phi, \psi),
\end{aligned}
$$

这表明对任意 $L_1, L_2, L_3 \in \mathcal{T}(L)$ 都有 $Q_{L_1L_2} + Q_{L_1L_3} = Q_{L_1L_3}$, 定理得证. $\square$

注 **1.43.** 易知 $\{\mathcal{T}(L) \,|\, L \in \mathcal{L}(V)\}$ 给出了 $\mathcal{L}(V)$ 的一族局部坐标卡, 这使得 $\mathcal{L}(V)$ 是 $\frac{n(n+1)}{2}$ 维光滑流形.

题 **1.44.** 给定辛空间 (V, ω) 的拉格朗日子空间 L, 以及 $L', L'' \in \mathcal{T}(L)$, 证明: L' 横截于 L'' 当且仅当二次型 $Q_{L'L''}$ 非退化.

1.5 实辛空间的复结构

从本节开始, 我们研究实数域上的辛空间, 即取 $\mathbb{F} = \mathbb{R}$.

1.5.1 $\mathbb{R}^{2n}$ 的标准辛结构与复结构

众所周知, 偶数维实线性空间 $\mathbb{R}^{2n}$ 有如下的标准结构:

1. 标准**欧氏结构**. 正定对称双线性型 (欧氏内积) $g\colon \mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}$,

$$g(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) := \boldsymbol{v}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{w} = \sum_{k=1}^{2n} v_k w_k.$$

2. 标准**辛结构**. 非退化反对称双线性型 $\omega\colon \mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}$,

$$\omega(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) := \boldsymbol{v}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{J} \boldsymbol{w} = \sum_{k=1}^{n} \left(v_k w_{n+k} - v_{n+k} w_k\right),$$

其中 $\boldsymbol{J} = \begin{pmatrix} & \boldsymbol{I}_n \\ -\boldsymbol{I}_n & \end{pmatrix}$.

3. 标准**复结构**. 可将 $\mathbb{R}^{2n}$ 通过如下方式等同于 n 维复线性空间 $\mathbb{C}^n$:

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^{2n} &\to \mathbb{C}^n \\ \begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y} \end{pmatrix} &\mapsto \boldsymbol{x} + \mathrm{i}\boldsymbol{y}, \end{aligned}$$

其中 $\mathrm{i} = \sqrt{-1}$ 为虚数单位. 借助 $\mathbb{C}^n$ 的复线性结构, 可以谈论 $\mathbb{R}^{2n}$ 中的向量与虚数的数乘: 对于 $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^{2n}$, 令 $\mathrm{i}.\boldsymbol{v} = -\boldsymbol{J}\boldsymbol{v}$. 一般地, 对于复数 $z = a + b\mathrm{i}\,(a, b \in \mathbb{R})$ 以及 $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^{2n}$, 成立 $z.\boldsymbol{v} = a\boldsymbol{v} - b\boldsymbol{J}\boldsymbol{v}$.

此外, 在上述同构 $\mathbb{R}^{2n} \cong \mathbb{C}^n$ 下, 自然可以将 $\mathbb{R}^{2n}$ 的标准辛结构 ω 搬运到 $\mathbb{C}^n$ 上. 容易验证, 对于 $\boldsymbol{z}_1, \boldsymbol{z}_2 \in \mathbb{C}^n$,

$$\omega(\boldsymbol{z}_1, \boldsymbol{z}_2) = \mathrm{Im}(\boldsymbol{z}_1^\dagger \boldsymbol{z}_2), \tag{1.25}$$

其中 $\boldsymbol{z}_1^\dagger := \overline{\boldsymbol{z}}_1^{\mathrm{T}}$ 为共轭转置.

4. 标准**厄米特结构**. 定义 $\mathbb{R}^{2n}$ 上的双线性型 $h\colon \mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{C}$ 如下:

$$h(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) := g(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) - \mathrm{i}\,\omega(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}). \tag{1.26}$$

容易验证, 上述 h 满足如下众所周知的性质: 对任意 $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^{2n}$ 以及 $z \in \mathbb{C}$,

(a) 共轭对称性: $h(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = \overline{h(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{v})}$.

(b) 共轭双线性: $h(z\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = zh(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}),\ h(\boldsymbol{v}, z\boldsymbol{w}) = \overline{z}h(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})$.

(c) 正定性: $h(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}) \geq 0$, 等号成立当且仅当 $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$.

在 $\mathbb{R}^{2n}$ 的欧氏结构下, 可以谈论**正交基**; 在 $\mathbb{R}^{2n}$ 的辛结构下, 可以谈论**辛基**; 在 $\mathbb{R}^{2n}$ 的复结构下, 可以谈论**复基** (复线性空间的基); 在 $\mathbb{R}^{2n}$ 的厄米特结构下, 可以谈论**酉基** (厄米特正交基). 这些概念众所周知, 不再赘述.

性质 1.45. ($\mathbb{R}^{2n}$ 的拉格朗日子空间)

1. 对于 $2n \times n$ 实矩阵 $\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{X} \\ \boldsymbol{Y} \end{pmatrix}$, 则 $\boldsymbol{M}$ 的列向量张成的空间是 $\mathbb{R}^{2n}$ 的拉格朗日子空间当且仅当矩阵 $\boldsymbol{M}$ 满秩, 并且

$$\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}.$$

2. 对于 $\mathbb{R}^{2n}$ 的 n 维子空间 L, 则 L 是拉格朗日子空间当且仅当存在 L 的一组基 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, ..., \boldsymbol{e}_n$, 使得这组基是 $\mathbb{R}^{2n}$ 的酉基, 换言之,

$$h(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j) = \delta_{ij}, \qquad \forall\, i, j = 1, 2, ..., n.$$

证明. (1). 只需注意 $\boldsymbol{M}$ 的列向量张成的空间是迷向子空间当且仅当 $\boldsymbol{M}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{J}\boldsymbol{M} = \boldsymbol{0}$, 其余细节留给读者. (2). 总可以取 L 的一组正交基 $\boldsymbol{e}_1, ..., \boldsymbol{e}_n$, 使得 $g(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j) =$

δ_{ij}. 如果 L 是拉格朗日子空间, 则 L 是迷向子空间, 于是 $\omega(\boldsymbol{e}_i,\boldsymbol{e}_j)=0$. 因此 $h(\boldsymbol{e}_i,\boldsymbol{e}_j)=g(\boldsymbol{e}_i,\boldsymbol{e}_j)-\mathrm{i}\,\omega(\boldsymbol{e}_i,\boldsymbol{e}_j)=\delta_{ij}$, 故 $\boldsymbol{e}_1,\dots,\boldsymbol{e}_n$ 是 $\mathbb{R}^{2n}$ 的一组酉基. 反之类似, 留给读者. □

$\mathbb{R}^{2n}$ 的线性变换群 $\mathrm{GL}(2n,\mathbb{R})$ 的保持欧氏结构, 辛结构, 复结构, 厄米特结构的子群分别称为**正交群**, **辛群**, **复线性群**, **酉群**:

$$\begin{aligned}
\mathrm{O}(2n) &:= \left\{\boldsymbol{M}\in\mathrm{GL}(2n,\mathbb{R})\,\middle|\, g(\boldsymbol{M}\boldsymbol{v},\boldsymbol{M}\boldsymbol{w})=g(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}),\ \forall\,\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}\in\mathbb{R}^{2n}\right\}\\
&= \left\{\boldsymbol{M}\in\mathrm{GL}(2n,\mathbb{R})\,\middle|\, \boldsymbol{M}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}=\boldsymbol{I}_{2n}\right\}\\
\mathrm{Sp}(n,\mathbb{R}) &:= \left\{\boldsymbol{M}\in\mathrm{GL}(2n,\mathbb{R})\,\middle|\, \omega(\boldsymbol{M}\boldsymbol{v},\boldsymbol{M}\boldsymbol{w})=\omega(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}),\ \forall\,\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}\in\mathbb{R}^{2n}\right\}\\
&= \left\{\boldsymbol{M}\in\mathrm{GL}(2n,\mathbb{R})\,\middle|\, \boldsymbol{M}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{J}\boldsymbol{M}=\boldsymbol{J}\right\}\\
\mathrm{GL}(n,\mathbb{C}) &:= \left\{\boldsymbol{M}\in\mathrm{GL}(2n,\mathbb{R})\,\middle|\, \boldsymbol{M}(\mathrm{i}.\boldsymbol{v})=\mathrm{i}.\boldsymbol{M}\boldsymbol{v},\ \forall\,\boldsymbol{v}\in\mathbb{R}^{2n}\right\}\\
&= \{\boldsymbol{M}\in\mathrm{GL}(2n,\mathbb{R})\,|\,\boldsymbol{M}\boldsymbol{J}=\boldsymbol{J}\boldsymbol{M}\}\\
\mathrm{U}(n) &:= \left\{\boldsymbol{M}\in\mathrm{GL}(2n,\mathbb{R})\,\middle|\, h(\boldsymbol{M}\boldsymbol{v},\boldsymbol{M}\boldsymbol{w})=h(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}),\ \forall\,\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}\in\mathbb{R}^{2n}\right\}\\
&= \left\{\boldsymbol{M}\in\mathrm{GL}(2n,\mathbb{R})\,\middle|\, \boldsymbol{M}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}=\boldsymbol{I}_{2n},\ \boldsymbol{M}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{J}\boldsymbol{M}=\boldsymbol{J}\right\}.
\end{aligned}$$

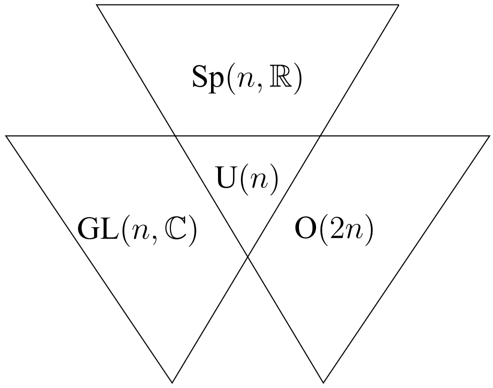
特别注意 $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ 中的元素都形如 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{X} & -\boldsymbol{Y}\\ \boldsymbol{Y} & \boldsymbol{X}\end{pmatrix}$. 容易验证, 通过对应

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{X} & -\boldsymbol{Y}\\ \boldsymbol{Y} & \boldsymbol{X}\end{pmatrix}\mapsto\boldsymbol{X}+\mathrm{i}\boldsymbol{Y},$$

可将 $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ 视为通常意义下的 n 阶可逆复方阵乘法群. 此外, 容易验证以下关系:

性质 1.46.

$$\mathrm{U}(n)=\mathrm{O}(2n)\cap\mathrm{Sp}(n,\mathbb{R})=\mathrm{Sp}(n,\mathbb{R})\cap\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})=\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})\cap\mathrm{O}(2n).$$



性质1.46示意图

证明. 易证, 留给读者. □

本小节最后, 我们继续研究拉格朗日-格拉斯曼流形 $\mathcal{L}(\mathbb{R}^{2n})$ 的结构.

定理 1.47. 记 $\mathcal{L}(\mathbb{R}^{2n})$ 是标准辛空间 $\mathbb{R}^{2n}$ 的全体拉格朗日子空间构成的集合, 则

$$\mathcal{L}(\mathbb{R}^{2n}) \cong \mathrm{U}(n)/\mathrm{O}(n).$$

证明. 注意 $\mathrm{U}(n)$ 中的线性变换将 $\mathbb{R}^{2n}$ 的酉基变为另一组酉基, 再结合性质1.45的第 (2) 部分, 易知 $\mathrm{U}(n)$ 中的变换将 $\mathbb{R}^{2n}$ 中的拉格朗日子空间变为拉格朗日子空间, 即酉群 $\mathrm{U}(n)$ 以自然的方式作用于 $\mathcal{L}(\mathbb{R}^{2n})$. 容易验证这个群作用是可迁的. 取 $L_0 := \mathrm{span}_{\mathbb{R}}\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, ..., \boldsymbol{e}_n\} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^{2n})$, 容易验证稳定子群

$$\begin{aligned}
\mathrm{U}(n)_{L_0} &:= \{\boldsymbol{M} \in \mathrm{U}(n) \mid \boldsymbol{M}(L_0) = L_0\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \\ & \boldsymbol{A} \end{pmatrix} \middle| \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{I}_n \right\} \cong \mathrm{O}(n),
\end{aligned}$$

从而 $\mathcal{L}(\mathbb{R}^{2n}) \cong \mathrm{U}(n)/\mathrm{O}(n)$. □

1.5.2 实辛空间的 ω-正定相容复结构, Kähler 空间

上一小节已介绍 $\mathbb{R}^{2n}$ 上的欧氏结构, 辛结构与复结构, 而本节讲给出上述概念在一般的 $\mathbb{R}$-线性空间上的不依赖坐标的表述. 首先看复结构.

定义 1.48. 设 V 是 $\mathbb{R}$-线性空间, $J \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(V)$ 是 V 上的线性变换. 如果

$$J^2 = -\mathrm{id}_V,$$

则称 J 是 V 的一个**复结构**.

容易验证, 线性空间 V 存在复结构, 当且仅当 $\dim_{\mathbb{R}} V$ 是偶数 (简单习题). 若 J 是 V 的一个复结构, 则 (V, J) 有众所周知的 $\mathbb{C}$-线性空间结构:

$$\mathrm{i}.\boldsymbol{v} := J\boldsymbol{v},$$

其中 $\mathrm{i} = \sqrt{-1}$. 若 $\underline{\mathbf{e}} = (\boldsymbol{e}_1, ..., \boldsymbol{e}_n)$ 是 (V, J) 的一组 $\mathbb{C}$-基, 则容易验证 $(\underline{\mathbf{e}}, \underline{J\mathbf{e}}) = (\boldsymbol{e}_1, ..., \boldsymbol{e}_n; J\boldsymbol{e}_1, ..., J\boldsymbol{e}_n)$ 是 V 的一组 $\mathbb{R}$-基, 且 J 在该基下的矩阵

$$J_{(\underline{\mathbf{e}}, \underline{J\mathbf{e}})} = \begin{pmatrix} & -\boldsymbol{I}_n \\ \boldsymbol{I}_n & \end{pmatrix} = -\boldsymbol{J}.$$

对于 $\mathbb{R}$-线性空间 V, 无论其是否给定复结构, 总可自然得到一个 $\mathbb{C}$-线性空间

$$V_{\mathbb{C}} := V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}, \tag{1.27}$$

称为 $\mathbb{R}$-线性空间 V 的**复化** (complexification). 注意 $2n$ 维 $\mathbb{R}$-线性空间 V 的复结构 $J \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(V)$ 可 $\mathbb{C}$-线性延拓为 $J_{\mathbb{C}} \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V_{\mathbb{C}})$. 易知 $J_{\mathbb{C}}$ 具有特征值 $\pm\mathrm{i}$, 并且

$$\begin{aligned} V_{1,0} &:= \{\boldsymbol{v} - \mathrm{i}J\boldsymbol{v} \,|\, \boldsymbol{v} \in V\}, \\ V_{0,1} &:= \{\boldsymbol{v} + \mathrm{i}J\boldsymbol{v} \,|\, \boldsymbol{v} \in V\} \end{aligned} \tag{1.28}$$

分别是 $J_{\mathbb{C}}$ 的属于特征值 $\mathrm{i}, -\mathrm{i}$ 的 $\mathbb{C}$-特征子空间, 且 $V_{\mathbb{C}}$ 是上述两个子空间的直和:

$$V_{\mathbb{C}} = V_{1,0} \oplus V_{0,1}.$$

容易验证, 映射

$$\begin{aligned} V &\to V_{1,0} \\ \boldsymbol{v} &\mapsto \frac{1}{\sqrt{2}}(\boldsymbol{v} - \mathrm{i}J\boldsymbol{v}) \end{aligned} \tag{1.29}$$

给出了 $\mathbb{C}$-线性空间 (V, J) 与 $(V_{1,0}, \mathrm{i})$ 之间的 $\mathbb{C}$-线性同构.

定义 1.49. 对于实辛空间 (V,ω), $J\in\mathrm{End}_{\mathbb{R}}(V)$ 是 V 的复结构. 如果

$$\omega(J\boldsymbol{v},J\boldsymbol{w})=\omega(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}),\qquad\forall\,\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}\in V,\tag{1.30}$$

则称复结构 J 与辛结构 ω **相容**, 或者称 J 是 **ω-相容的**.

对于实辛空间 (V,ω) 的 ω-相容复结构 J, 定义 V 上的双线性型 $g=g_J$ 如下:

$$g(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}):=\omega(\boldsymbol{v},J\boldsymbol{w})\qquad\forall\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}\in V,\tag{1.31}$$

则容易验证 g 是对称双线性型, 这是因为对任意 $\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}\in V$,

$$\begin{aligned}g(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})&=\omega(\boldsymbol{v},J\boldsymbol{w})=-\omega(J\boldsymbol{w},\boldsymbol{v})=-\omega(J^2\boldsymbol{w},J\boldsymbol{v})\\&=\omega(\boldsymbol{w},J\boldsymbol{v})=g(\boldsymbol{w},\boldsymbol{v}).\end{aligned}$$

此外也易知 $g(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})=g(J\boldsymbol{v},J\boldsymbol{w})$. 但一般来说, 上述 g 并不一定满足正定性, 从而仅仅是**伪欧氏度量**; 而如果 g 恰好满足正定性, 我们有:

定义 1.50. 记号承上. 对于辛空间 (V,ω) 的 ω-相容复结构 J, 如果(1.31)式中的双线性型 g 满足正定性, 即

$$g(\boldsymbol{v},\boldsymbol{v})=\omega(\boldsymbol{v},J\boldsymbol{v})\geq 0\qquad\forall\,\boldsymbol{v}\in V,$$

则称复结构 J 是**ω-正定相容的**; 此时称三元组 (V,ω,J) 为 ***Kähler* 空间**.

对于 Kähler 空间 (V,ω,J), 可将相应的欧氏内积 g 延拓为 $V_{\mathbb{C}}$ 上的共轭双线性型 $g_{\mathbb{C}}$, 再将 $g_{\mathbb{C}}$ 限制在子空间 $V_{1,0}$ 上, 最后通过 $V_{1,0}$ 与 V 的同构(1.29), 可得 V 上的一个复值双线性型, 称为 Kähler 空间 (V,J,ω) 的**厄米特结构**. 具体构造如下: 通过

$$\begin{aligned}g_{\mathbb{C}}(\mathrm{i}\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})&:=\mathrm{i}g(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})\\g_{\mathbb{C}}(\boldsymbol{v},\mathrm{i}\boldsymbol{w})&:=-\mathrm{i}g(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})\end{aligned},\quad\forall\,\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}\in V$$

将 $g\colon V\times V\to\mathbb{R}$ 延拓为 $g_{\mathbb{C}}\colon V_{\mathbb{C}}\times V_{\mathbb{C}}\to\mathbb{C}$. 再令 $h\colon V\times V\to\mathbb{C}$ 如下:

$$\begin{aligned}h(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})&:=g_{\mathbb{C}}\left(\frac{\boldsymbol{v}-\mathrm{i}J\boldsymbol{v}}{\sqrt{2}},\frac{\boldsymbol{w}-\mathrm{i}J\boldsymbol{w}}{\sqrt{2}}\right)\\&=g(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})-\mathrm{i}\omega(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}),\end{aligned}\tag{1.32}$$

则容易验证 h 是复线性空间 (V,J) 的一个厄米特内积, 它关于第二个分量共轭线性.

既然每个 ω-正定相容复结构 J 都对应一个欧氏内积 g, 那反过来, 能否从一个欧氏内积出发来构造一个 ω-正定相容复结构? 设 γ 是实辛空间 (V,ω) 的一个欧氏内积, 易知存在算子 $A \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(V)$, 使得

$$\omega(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}) = \gamma(A\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}) \qquad \forall\, \boldsymbol{v},\boldsymbol{w} \in V.$$

由 ω 的反对称性容易验证

$$\gamma(A\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}) = \gamma(\boldsymbol{v},-A\boldsymbol{w}),$$

换言之, 算子 A 是 γ-反自伴的, 从而 A^2 是 γ-自伴算子. 再注意到

$$\gamma(A^2\boldsymbol{v},\boldsymbol{v}) = -\gamma(A\boldsymbol{v},A\boldsymbol{v}) \le 0,$$

考虑 A^2 的特征值, 易知存在唯一的 γ-自伴算子 B, 使得

$$B^2 = -A^2,$$

并且 $\gamma(B\boldsymbol{v},\boldsymbol{v}) \ge 0$ 对任意 $\boldsymbol{v} \in V$ 都成立. 引入算子

$$J_\gamma := AB^{-1}. \tag{1.33}$$

考察 A, B 的特征子空间, 容易证明 $AB^{-1} = B^{-1}A$, 因此

$$J_\gamma^2 = AB^{-1}\cdot B^{-1}A = A(-A^{-2})A = -\mathrm{id}_V,$$

这表明 J_γ 是 V 的一个复结构. 断言 J_γ 是 ω-相容的, 这是因为对任意 $\boldsymbol{v},\boldsymbol{w} \in V$ 都有

$$\begin{aligned}\omega(J_\gamma\boldsymbol{v},J_\gamma\boldsymbol{w}) &= \omega(AB^{-1}\boldsymbol{v},B^{-1}A\boldsymbol{w}) = \gamma(A^2B^{-1}\boldsymbol{v},B^{-1}A\boldsymbol{w}) = -\gamma(B\boldsymbol{v},B^{-1}A\boldsymbol{w})\\ &= -\gamma(\boldsymbol{v},BB^{-1}A\boldsymbol{w}) = -\gamma(\boldsymbol{v},A\boldsymbol{w}) = \omega(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}).\end{aligned}$$

最后验证 J_γ 的正定性. 注意

$$g_\gamma(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}) := \omega(\boldsymbol{v},J_\gamma\boldsymbol{w}) = \gamma(A\boldsymbol{v},AB^{-1}\boldsymbol{w}) = \gamma(\boldsymbol{v},-A^2B^{-1}\boldsymbol{w}) = \gamma(\boldsymbol{v},B\boldsymbol{w}),$$

以及算子 B 的 γ-正定性, 可知 $g_\gamma(\boldsymbol{v},\boldsymbol{v})=\gamma(\boldsymbol{v},B\boldsymbol{v})\geq 0$. 因此 J_γ 是 ω-正定相容的.

注 1.51. 在上述证明中, A 是 γ-反自伴算子, 这也记作 $A^*=-A$, 其中 A^* 是 A 的 γ-伴随. 事实上, $B=\sqrt{AA^*}$ 在矩阵论中俗称 "正定算子开根", 且

$$A=\sqrt{AA^*}J$$

是算子 A 的极分解.

注 1.52. 对于实辛空间 (V,ω), 我们建立了如下对应:

$$\{V \text{ 的 } \omega\text{-正定相容复结构}\} \underset{\psi}{\overset{\phi}{\rightleftarrows}} \{V \text{ 的欧氏内积}\}$$

其中 $\phi\colon J\mapsto\omega(-,J-)$, 以及(1.33)式所给出的 $\psi\colon\gamma\mapsto J_\gamma$. 容易验证

$$\psi\circ\phi=\mathrm{id},$$

从而 ψ 是满射 (但一般来说不是单射).

题 1.53. 设 J_0,J_1 都是辛空间 (V,ω) 的 ω-正定相容复结构, 则对任意 $t\in[0,1]$,

$$J_t:=(1-t)J_0+tJ_1$$

也是 ω-正定相容复结构. 即 (V,ω) 的所有 ω-正定相容复结构组成凸集.

对于 Kähler 空间 (V,ω,J), 考虑由(1.31)定义的欧氏内积 g, 以及(1.32)所定义的厄米特内积 h. 与众所周知的 $\mathbb{R}^{2n}$ 情形完全一样, 可以考虑 $\mathrm{GL}(V,\mathbb{R})$ 的一些特殊子群. 保持厄米特内积的线性变换构成的群为酉群, 记作 $\mathrm{U}(V,h)$; 保持欧氏内积的线性变换构成的群为正交群, 记作 $\mathrm{O}(V,g)$; 保持复结构的线性变换群为复线性群, 记作 $\mathrm{GL}(V,J)$; 此外还有辛群 $\mathrm{Sp}(V,\omega)$. 易验证

$$\mathrm{U}(V,h)=\mathrm{O}(V,g)\cap\mathrm{GL}(V,J)=\mathrm{GL}(V,J)\cap\mathrm{Sp}(V,\omega)=\mathrm{Sp}(V,\omega)\cap\mathrm{O}(V,g).$$

对于 Kähler 空间 (V,ω,J) 的拉格朗日子空间 L, 任取 L 的一组 g-正交基 $\underline{\mathbf{e}}=(\boldsymbol{e}_1,\ldots,\boldsymbol{e}_n)$, 则容易验证 $\underline{\mathbf{e}}$ 也是 V 的一组 h-酉基. 反之, V 的任何一组 h-酉基所 $\mathbb{R}$-线性张成的子空间都是拉格朗日子空间. 注意酉群 $\mathrm{U}(V,h)$ 将

酉基变成另一组酉基, 从而易得 $\mathrm{U}(V,h)$ 在 $\mathcal{L}(V)$ 上的作用. 与 $\mathbb{R}^{2n}$ 的情形一样, 类似可得

$$\mathcal{L}(V) \cong \mathrm{U}(n)/\mathrm{O}(n).$$

1.5.3 复化辛空间的正定拉格朗日子空间

对于 $2n$ 维 $\mathbb{R}$-辛空间 (V,ω), 自然要问其上有多少个 ω-正定相容复结构. 记

$$\mathcal{J} := \mathcal{J}(V,\omega) := \left\{ J \,\middle|\, J \text{ 是 } V \text{ 上的 } \omega\text{-正定相容复结构} \right\}, \tag{1.34}$$

即 ω-正定相容复结构的 "模空间". 本小节将研究 $\mathcal{J}(V,\omega)$ 的结构.

先引入一些概念与记号. 将辛结构 ω 自然 $\mathbb{C}$-线性延拓至 $V_{\mathbb{C}} := V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$, 延拓后记作 $\omega_{\mathbb{C}}$, 则 $(V_{\mathbb{C}}, \omega_{\mathbb{C}})$ 是复数域 $\mathbb{C}$ 上的辛空间. 于是可以谈论 $V_{\mathbb{C}}$ 的拉格朗日子空间. 再注意到, $V_{\mathbb{C}}$ 中的向量都形如 $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_1 + \mathrm{i}\boldsymbol{v}_2$, 其中 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \in V$, 此时记 $\overline{\boldsymbol{v}} := \boldsymbol{v}_1 - \mathrm{i}\boldsymbol{v}_2$, 称为向量 $\boldsymbol{v}$ 的共轭. 对于 $V_{\mathbb{C}}$ 的子空间 W, 记 $\overline{W} := \{\overline{\boldsymbol{w}} \,|\, \boldsymbol{w} \in W\}$. 对于复线性变换 $\phi \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V_{\mathbb{C}})$, 如果 ϕ 是某个实线性变换 $\phi' \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(V)$ 复线性延拓得到的, 则称 ϕ 是实的. 容易验证, $\phi \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V_{\mathbb{C}})$ 是实的当且仅当 ϕ 与取共轭运算可交换, 即对任意 $\boldsymbol{v} \in V_{\mathbb{C}}$ 都有 $\overline{\phi\boldsymbol{v}} = \phi\overline{\boldsymbol{v}}$.

定义 1.54. 给定 $\mathbb{R}$-辛空间 (V,ω), 以及 $(V_{\mathbb{C}}, \omega_{\mathbb{C}})$ 的 $\mathbb{C}$-拉格朗日子空间 F. 如果对任意 $0 \neq \boldsymbol{v} \in F$ 都有

$$-\mathrm{i}\,\omega_{\mathbb{C}}(\boldsymbol{v}, \overline{\boldsymbol{v}}) > 0, \tag{1.35}$$

则称 $\mathbb{C}$-拉格朗日子空间 F 是**正定**的. 记

$$\mathcal{L}_+ := \mathcal{L}_+(V,\omega) := \left\{ F \,\middle|\, F \text{ 是 } (V_{\mathbb{C}}, \omega_{\mathbb{C}}) \text{ 的正定拉格朗日子空间} \right\}. \tag{1.36}$$

我们回忆, 辛空间 (V,ω) 的上的每一个复结构 J 都给出了 $V_{\mathbb{C}}$ 的直和分解

$$V_{\mathbb{C}} = V_{1,0} \oplus V_{0,1},$$

其中 $V_{1,0}$ 与 $V_{0,1}$ 分别是 $J_{\mathbb{C}}$ 的属于特征值 $\mathrm{i}, -\mathrm{i}$ 的特征子空间.

如果 $J \in \mathcal{J}(V,\omega)$, 则相应的 $V_{1,0} \in \mathcal{L}_+(V,\omega)$. 这是因为, 对任意 $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in$

$V_{1,0}$,

$$\omega_{\mathbb{C}}(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})=\omega_{\mathbb{C}}(J_{\mathbb{C}}\boldsymbol{v},J_{\mathbb{C}}\boldsymbol{w})=\omega_{\mathbb{C}}(\mathrm{i}\boldsymbol{v},\mathrm{i}\boldsymbol{w})=-\omega_{\mathbb{C}}(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}),$$

于是 $\omega_{\mathbb{C}}(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})=0$, 再考察 $V_{1,0}$ 的维数, 可知 $V_{1,0}$ 是 $V_{\mathbb{C}}$ 的拉格朗日子空间. 对于 $V_{\mathbb{C}}$ 中的任何向量 $\boldsymbol{v}$, 存在 $\boldsymbol{w}\in V$ 使得 $\boldsymbol{v}=\frac{1}{\sqrt{2}}(\boldsymbol{w}-\mathrm{i}J\boldsymbol{w})$, 从而

$$-\mathrm{i}\,\omega_{\mathbb{C}}(\boldsymbol{v},\overline{\boldsymbol{v}})=-\frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\mathbb{C}}\left(\boldsymbol{w}-\mathrm{i}J\boldsymbol{w},\boldsymbol{w}+\mathrm{i}J\boldsymbol{w}\right)=\omega(\boldsymbol{w},J\boldsymbol{w})>0,$$

因此 $\mathbb{C}$-拉格朗日子空间 $V_{1,0}$ 是正定的. 事实上, 有如下结果:

性质 1.55. *对于 $\mathbb{R}$-辛空间 (V,ω), 有如下的一一对应:*

$$\mathcal{J}(V,\omega)\cong\mathcal{L}_+(V,\omega),\tag{1.37}$$

上式两端的含义见(1.34)与(1.36)式.

证明. 对于 $J\in\mathcal{J}(V,\omega)$, 已经验证 $J_{\mathbb{C}}$ 的属于特征值 i 的特征子空间 $V_{1,0}\in\mathcal{L}_+(V,\omega)$, 这给出了从 $\mathcal{J}(V,\omega)$ 到 $\mathcal{L}_+(V,\omega)$ 的映射. 只需构造该映射的逆.

对于 $F\in\mathcal{L}_+(V,\omega)$, 断言: $F\cap\overline{F}=\{\mathbf{0}\}$. 这是因为, 如果存在 $\mathbf{0}\neq\boldsymbol{v}\in F\cap\overline{F}$, 则由 F 的正定性以及 $\boldsymbol{v}\in F$ 可知 $-\mathrm{i}\omega_{\mathbb{C}}(\boldsymbol{v},\overline{\boldsymbol{v}})>0$; 另一方面, 注意 $\overline{\boldsymbol{v}}\in F$ 以及 F 的迷向性, 可知 $\omega_{\mathbb{C}}(\boldsymbol{v},\overline{\boldsymbol{v}})=0$, 产生矛盾, 断言得证. 于是有直和分解

$$V_{\mathbb{C}}=F\oplus\overline{F}.$$

在此分解下, $V_{\mathbb{C}}$ 中的向量 $\boldsymbol{v}$ 可唯一表示为

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}^++\boldsymbol{v}^-,$$

其中 $\boldsymbol{v}^+\in F$, $\boldsymbol{v}^-\in\overline{F}$. 定义 $J\in\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V_{\mathbb{C}})$ 如下:

$$J|_F=\mathrm{i}\cdot\mathrm{id}_F,\quad J|_{\overline{F}}=-\mathrm{i}\cdot\mathrm{id}_{\overline{F}}.$$

则显然 $J^2=-\mathrm{id}_{V_{\mathbb{C}}}$, 并且容易验证对任意 $\boldsymbol{v}\in V_{\mathbb{C}}$ 都有 $\overline{J\boldsymbol{v}}=J\overline{\boldsymbol{v}}$, 这表明 $J|_V\in\mathrm{End}_{\mathbb{R}}(V)$, 从而 J 是 (V,ω) 的复结构. 下面验证 $J\in\mathcal{J}(V,\omega)$.

首先验证复结构 J 是 ω-相容的. 注意 $\overline{F}$ 也是拉格朗日子空间, 从而 $F,\overline{F}$ 都是迷向子空间. 于是, 对任意 $\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}\in V_{\mathbb{C}}$,

$$\omega_{\mathbb{C}}(J\boldsymbol{v},J\boldsymbol{w})=\omega_{\mathbb{C}}(\mathrm{i}\boldsymbol{v}^+-\mathrm{i}\boldsymbol{v}^-,\mathrm{i}\boldsymbol{w}^+-\mathrm{i}\boldsymbol{w}^-)$$

$$= \omega_{\mathbb{C}}(\boldsymbol{v}^+, \boldsymbol{w}^-) + \omega_{\mathbb{C}}(\boldsymbol{v}^-, \boldsymbol{w}^+) = \omega_{\mathbb{C}}(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}),$$

可见复结构 J 是 ω-相容的. 再验证 J 的正定性. 对任意 $\mathbf{0} \neq \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}^+ + \boldsymbol{v}^- \in V$, 注意 $\overline{\boldsymbol{v}^+} = \boldsymbol{v}^-$ 以及拉格朗日子空间 F 的正定性, 可得

$$\begin{aligned}\omega(\boldsymbol{v}, J\boldsymbol{v}) &= \omega_{\mathbb{C}}(\boldsymbol{v}^+ + \boldsymbol{v}^-, \mathrm{i}\boldsymbol{v}^+ - \mathrm{i}\boldsymbol{v}^-)\\ &= -2\mathrm{i}\omega_{\mathbb{C}}(\boldsymbol{v}^+, \boldsymbol{v}^-) = -2\mathrm{i}\omega_{\mathbb{C}}(\boldsymbol{v}^+, \overline{\boldsymbol{v}^+}) > 0,\end{aligned}$$

因此 $J \in \mathcal{J}(V, \omega)$. 这就给出了从 $\mathcal{L}_+(V, \omega)$ 到 $\mathcal{J}(V, \omega)$ 的一个映射, 并且该映射显然与前文所述 $J \mapsto V_{\mathbb{C}}^+$ 互逆, 这建立了 $\mathcal{L}_+(V, \omega)$ 与 $\mathcal{J}(V, \omega)$ 的一一对应, 命题得证. □

回忆辛群在拉格朗日子空间上的作用. 对于 $\phi \in \mathrm{Sp}(V, \omega)$ 以及 $F \in \mathcal{L}_+(V, \omega)$, 通过复线性延拓自然将 ϕ 看成复辛群 $\mathrm{Sp}(V_{\mathbb{C}}, \omega_{\mathbb{C}})$ 中的元素, 从而 $\phi(F)$ 也是 $V_{\mathbb{C}}$ 的拉格朗日子空间. 事实上, $\phi(F) \in \mathcal{L}_+(V, \omega)$, 这是因为对任意 $\boldsymbol{v}' \in \phi(F)$, 存在 $\boldsymbol{v} \in F$ 使得 $\boldsymbol{v}' = \phi\boldsymbol{v}$, 从而

$$-\mathrm{i}\omega_{\mathbb{C}}(\boldsymbol{v}', \overline{\boldsymbol{v}'}) = -\mathrm{i}\omega_{\mathbb{C}}(\phi\boldsymbol{v}, \overline{\phi\boldsymbol{v}}) = -\mathrm{i}\omega_{\mathbb{C}}(\phi\boldsymbol{v}, \phi\overline{\boldsymbol{v}}) = -\mathrm{i}\omega_{\mathbb{C}}(\boldsymbol{v}, \overline{\boldsymbol{v}}) > 0.$$

从而 $(\phi, F) \mapsto \phi(F)$ 给出了实辛群 $\mathrm{Sp}(V, \omega)$ 在 $\mathcal{L}_+(V, \omega)$ 上的作用. 事实上:

性质 1.56. *对于 $2n$ 维 $\mathbb{R}$-辛空间 (V, ω), 有如下一一对应:*

$$\mathcal{L}_+(V, \omega) \cong \mathrm{Sp}(n, \mathbb{R})/\mathrm{U}(n). \tag{1.38}$$

证明. 上文已给出实辛群 $\mathrm{Sp}(V, \omega) \cong \mathrm{Sp}(n, \mathbb{R})$ 在 $\mathcal{L}_+(V, \omega)$ 上的作用. 断言该作用是可迁的. 对任意 $F \in \mathcal{L}_+(V, \omega)$, 容易验证

$$\begin{aligned} h_F\colon F \times F &\to \mathbb{C}\\ (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) &\mapsto -\mathrm{i}\omega_{\mathbb{C}}(\boldsymbol{v}, \overline{\boldsymbol{w}})\end{aligned}$$

是 F 上的厄米特内积. 任取 F 的一组 h_F-酉基 $\underline{\mathbf{e}} = (\boldsymbol{e}_1, ..., \boldsymbol{e}_n)$, 则容易验证 $(\underline{\mathbf{e}}, -\mathrm{i}\overline{\underline{\mathbf{e}}}) := (\boldsymbol{e}_1, ..., \boldsymbol{e}_n; -\mathrm{i}\overline{\boldsymbol{e}_1}, ..., -\mathrm{i}\overline{\boldsymbol{e}_n})$ 是 $V_{\mathbb{C}}$ 的一组辛基. 同理, 对于 $F' \in \mathcal{L}_+(V, \omega)$, 取定 F' 的一组 $h_{F'}$-酉基 $\underline{\mathbf{e}}'$, 则相应有 $V_{\mathbb{C}}$ 的一组辛基 $(\underline{\mathbf{e}}', -\mathrm{i}\overline{\underline{\mathbf{e}}'})$. 定义 $\phi \in \mathrm{Sp}(V_{\mathbb{C}}, \omega_{\mathbb{C}})$ 如下:

$$\phi\colon \boldsymbol{e}_i \mapsto \boldsymbol{e}_i', \quad \overline{\boldsymbol{e}_i} \mapsto \overline{\boldsymbol{e}_i'} \qquad \forall\, 1 \le i \le n,$$

注意 ϕ 与取共轭可交换, 从而 $\phi \in \mathrm{Sp}(V,\omega)$. 又显然 $\phi(F) = F'$, 从而 $\mathrm{Sp}(V,\omega)$ 在 $\mathcal{L}_+(V,\omega)$ 的作用可迁. 接下来, 给定 $F \in \mathcal{L}_+(V,\omega)$, 若 $\phi \in \mathrm{Sp}(V,\omega)$ 满足 $\phi(F) = F$, 则容易验证 $\phi|_F \in \mathrm{U}(F, h_F)$. 这表明实辛群 $\mathrm{Sp}(V,\omega)$ 在 $\mathcal{L}_+(V,\omega)$ 的作用的稳定子群同构于酉群 $\mathrm{U}(n)$, 从而得证. □

题 **1.57.** 通过一一对应(1.37), 可将 $\mathrm{Sp}(V,\omega)$ 在 $\mathcal{L}_+(V,\omega)$ 的作用搬运到 $\mathcal{J}(V,\omega)$ 上. 试直接验证, 上述方式所得的群作用的显式表达式如下:

$$\begin{aligned} \mathrm{Sp}(V,\omega) \times \mathcal{J}(V,\omega) &\to \mathcal{J}(V,\omega) \\ (\phi, J) &\mapsto \phi J \phi^{-1}, \end{aligned}$$

并直接验证上述群作用的可迁性, 并计算稳定子群, 从而再次证明性质1.56.

[提示: 在证明可迁性时, 注意到对于每个 $J \in \mathcal{J}(V,\omega)$, 考虑(1.32)式给出的厄米特内积, 取关于此厄米特内积的一组酉基, 并将该酉基扩充为 V 的一组辛基. 通过类似的基向量一一对应, 容易找到所需要的 $\phi \in \mathrm{Sp}(V,\omega)$.]

1.5.4 Siegel 上半平面

给定 $2n$ 维 $\mathbb{R}$-辛空间 (V,ω), 则 (V,ω) 的 Kähler 结构的模空间, 即全体 ω-正定相容复结构之全体 $\mathcal{J}(V,\omega)$ 满足

$$\mathcal{J}(V,\omega) \cong \mathcal{L}_+(V,\omega) \cong \mathrm{Sp}(n,\mathbb{R})/\mathrm{U}(n).$$

注意 $\mathrm{Sp}(n,\mathbb{R})/\mathrm{U}(n)$ 赋予了 $\mathcal{J}(V,\omega)$ 齐性空间的结构. 本小节将给出流形 $\mathcal{J}(V,\omega)$ 的一个参数化, 其参数空间就是所谓 **Siegel 上半平面**.

如果 $V_{\mathbb{C}}$ 的 $\mathbb{C}$-子空间 W 满足 $W = \overline{W}$, 则称 W 是**实**的. 断言: W 是实的当且仅当 W 是 V 的某个 $\mathbb{R}$-子空间的复化. 这是因为, 如果 $W = \overline{W}$, 则对任意 $\boldsymbol{w} \in W$, $\mathrm{Re}\,\boldsymbol{w} := \frac{\boldsymbol{w}+\overline{\boldsymbol{w}}}{2} \in W$, 可以验证 W 是 $\mathrm{Re}\,W := \{\mathrm{Re}\,\boldsymbol{w} \,|\, \boldsymbol{w} \in W\} \subseteq V$ 的复化; 反之, V 的子空间的复化显然是 $V_{\mathbb{C}}$ 的实子空间.

对于 $(V_{\mathbb{C}}, \omega_{\mathbb{C}})$ 的两个拉格朗日子空间 $F, L_{\mathbb{C}}$, 如果 F 是正定的, $L_{\mathbb{C}}$ 是实的, 则 F 与 $L_{\mathbb{C}}$ 横截. 这是因为, 如果存在 $\mathbf{0} \neq \boldsymbol{v} \in F \cap L_{\mathbb{C}}$, 则由 F 的正定性可得 $-\mathrm{i}\omega_{\mathbb{C}}(\boldsymbol{v}, \overline{\boldsymbol{v}}) > 0$; 而另一方面, 存在 V 的 $\mathbb{R}$-子空间 L 使得 $L_{\mathbb{C}} = L \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$, 易知 L 是 (V,ω) 的拉格朗日子空间, 向量 $\boldsymbol{v} \in L_{\mathbb{C}}$ 可唯一写成 $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{x} + \mathrm{i}\boldsymbol{y}$, 其中 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in L$, 从而

$$\omega_{\mathbb{C}}(\boldsymbol{v}, \overline{\boldsymbol{v}}) = \omega_{\mathbb{C}}(\boldsymbol{x} + \mathrm{i}\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x} - \mathrm{i}\boldsymbol{y}) = -2\mathrm{i}\omega(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 0,$$

产生矛盾, 断言得证. 取定 (V,ω) 的拉格朗日子空间 L, 则 $L_{\mathbb{C}} := L\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{C}$ 是 $(V_{\mathbb{C}},\omega_{\mathbb{C}})$ 的**实**拉格朗日子空间. 回忆(1.22)式中的 $\mathcal{T}(L)$, 则易知上述断言表明

$$\mathcal{L}_+(V,\omega)\subseteq\mathcal{T}(L_{\mathbb{C}}).$$

注意 $\mathcal{T}(L_{\mathbb{C}})$ 具有 $\frac{n(n+1)}{2}$ 维 $\mathbb{C}$-仿射空间结构, 从而 (V,ω) 的 Kähler 结构模空间 $\mathcal{J}(V,\omega)\cong\mathcal{L}_+(V,\omega)$ 可以视为 $\mathbb{C}^{\frac{n(n+1)}{2}}$ 的某个子集.

现在, 任取 (V,ω) 的一组辛基 $(\underline{\mathbf{e}},\underline{\mathbf{f}})$, 记 $L:=\operatorname{span}_{\mathbb{R}}\underline{\mathbf{e}}$, $L':=\operatorname{span}_{\mathbb{R}}\underline{\mathbf{f}}$, 则 L,L' 均为拉格朗日子空间, 且 $V=L\oplus L'$. 考虑 V,L,L' 的复化, 则 $(\underline{\mathbf{e}},\underline{\mathbf{f}})$ 也是 $V_{\mathbb{C}}$ 的一组 $\mathbb{C}$-辛基, $V_{\mathbb{C}}=L_{\mathbb{C}}\oplus L'_{\mathbb{C}}$, 并且 $L_{\mathbb{C}}$ 是 $V_{\mathbb{C}}$ 的实拉格朗日子空间, 从而 $\mathcal{L}_+(V,\omega)\subseteq\mathcal{T}(L_{\mathbb{C}})$.

题 1.58. *记号承上, 证明: 对任意 $F\in\mathcal{T}(L_{\mathbb{C}})$, 存在唯一 $\phi\in\operatorname{Sp}(V_{\mathbb{C}},\omega_{\mathbb{C}})$, 使得*

$$\phi|_{L_{\mathbb{C}}}=\operatorname{id}_{L_{\mathbb{C}}},\quad \phi(L'_{\mathbb{C}})=F. \tag{1.39}$$

此外, 上式所确定的 ϕ 在基 $(\underline{\mathbf{e}},\underline{\mathbf{f}})$ 下的矩阵 $\phi_{(\underline{\mathbf{e}},\underline{\mathbf{f}})}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_n & \boldsymbol{Z}\\ & \boldsymbol{I}_n\end{pmatrix}$, 其中 $\boldsymbol{Z}\in\mathbb{C}^{n\times n}$ 满足 $\boldsymbol{Z}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{Z}$. [提示: 与注1.39对照]

这给出了 $\mathcal{T}(L_{\mathbb{C}})$ 与 $\left\{\boldsymbol{Z}\in\mathbb{C}^{n\times n}\,\middle|\,\boldsymbol{Z}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{Z}\right\}\cong\mathbb{C}^{\frac{n(n+1)}{2}}$ 的一一对应. 易知在上述记号下,

$$F=\operatorname{span}_{\mathbb{C}}\left\{(\underline{\mathbf{e}},\underline{\mathbf{f}})\begin{pmatrix}\boldsymbol{Z}\\ \boldsymbol{I}_n\end{pmatrix}\right\}:=\operatorname{span}_{\mathbb{C}}\left(\underline{\mathbf{e}}\boldsymbol{Z}+\underline{\mathbf{f}}\right).$$

而若 $F\in\mathcal{T}(L_{\mathbb{C}})$ 是正定的, 则其相应的 $\boldsymbol{Z}$ 要满足额外的条件.

定理 1.59. *记号承上, 则题1.58给出如下一一对应:*

$$\mathcal{L}_+(V,\omega)\cong\mathfrak{H}^n, \tag{1.40}$$

其中

$$\mathfrak{H}^n:=\left\{\boldsymbol{Z}\in\mathbb{C}^{n\times n}\,\middle|\,\boldsymbol{Z}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{Z},\ \operatorname{Im}\boldsymbol{Z}>0\right\} \tag{1.41}$$

*称为 **Siegel** 上半平面, 上式中的不等号是实对称方阵正定性的偏序.*

证明. 对于 $F\in\mathcal{L}_+(V,\omega)\subseteq\mathcal{T}(L_{\mathbb{C}})$, 记(1.39)式所确定的辛变换 ϕ 在基 $(\underline{\mathbf{e}},\underline{\mathbf{f}})$

下的矩阵为 $\begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_n & \boldsymbol{Z} \\ & \boldsymbol{I}_n \end{pmatrix}$, 则 F 中的任何向量 $\boldsymbol{v}$ 都形如

$$\boldsymbol{v} = (\underline{\mathbf{e}}, \underline{\mathbf{f}}) \begin{pmatrix} \boldsymbol{Z} \\ \boldsymbol{I}_n \end{pmatrix} \boldsymbol{v}_*,$$

其中 $\boldsymbol{v}_* \in \mathbb{C}^n$ 为列向量, 是 $\boldsymbol{v}$ 在 F 的基 $(\underline{\mathbf{e}}\boldsymbol{Z} + \underline{\mathbf{f}})$ 下的坐标. 于是,

$$\begin{aligned} -\mathrm{i}\omega_{\mathbb{C}}(\boldsymbol{v}, \overline{\boldsymbol{v}}) &= -\mathrm{i}\boldsymbol{v}_*^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{Z}^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{I}_n^{\mathrm{T}})\boldsymbol{J} \begin{pmatrix} \overline{\boldsymbol{Z}} \\ \overline{\boldsymbol{I}}_n \end{pmatrix} \overline{\boldsymbol{v}}_* \\ &= -\mathrm{i}\boldsymbol{v}_*^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{Z}, \boldsymbol{I}_n) \begin{pmatrix} & \boldsymbol{I}_n \\ -\boldsymbol{I}_n & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{\boldsymbol{Z}} \\ \boldsymbol{I}_n \end{pmatrix} \overline{\boldsymbol{v}_*} \\ &= -\mathrm{i}\boldsymbol{v}_*^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{Z} - \overline{\boldsymbol{Z}})\overline{\boldsymbol{v}}_* = 2\boldsymbol{v}_*^{\mathrm{T}}(\mathrm{Im}\,\boldsymbol{Z})\overline{\boldsymbol{v}}_*. \end{aligned}$$

可见 $F \in \mathcal{L}_+(V, \omega)$ 当且仅当 $\mathrm{Im}\,\boldsymbol{Z}$ 是正定矩阵. 容易验证这给出了 $\mathcal{L}_+(V, \omega)$ 与 $\mathfrak{H}^n$ 的一一对应. $\square$

通过上述同构 $\mathcal{L}_+(V, \omega) \cong \mathfrak{H}^n$, 可将辛群 $\mathrm{Sp}(V, \omega)$ 在 $\mathcal{L}_+(V, \omega)$ 上的作用搬运到 $\mathfrak{H}^n$ 上. 我们来给出此群作用的显式表示. 对于辛变换 $\phi \in \mathrm{Sp}(V, \omega)$, 将它与其在辛基 $(\underline{\mathbf{e}}, \underline{\mathbf{f}})$ 下的矩阵 $\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D} \end{pmatrix} \in \mathrm{Sp}(n, \mathbb{R})$ 等同, 其中 $\boldsymbol{A}$ 的尺寸为 $n \times n$. 对于 $F \in \mathcal{L}_+(V, \omega)$, 则存在唯一 $\boldsymbol{Z} \in \mathfrak{H}^n$ 使得 $F = \mathrm{span}_{\mathbb{C}} \left\{ (\underline{\mathbf{e}}, \underline{\mathbf{f}}) \begin{pmatrix} \boldsymbol{Z} \\ \boldsymbol{I}_n \end{pmatrix} \right\}$, 于是

$$\begin{aligned} \phi(F) &= \mathrm{span}_{\mathbb{C}} \left\{ (\phi\underline{\mathbf{e}}, \phi\underline{\mathbf{f}}) \begin{pmatrix} \boldsymbol{Z} \\ \boldsymbol{I}_n \end{pmatrix} \right\} = \mathrm{span}_{\mathbb{C}} \left\{ (\underline{\mathbf{e}}, \underline{\mathbf{f}}) \begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{Z} \\ \boldsymbol{I}_n \end{pmatrix} \right\} \\ &= \mathrm{span}_{\mathbb{C}} \left\{ (\underline{\mathbf{e}}, \underline{\mathbf{f}}) \begin{pmatrix} \boldsymbol{AZ} + \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{CZ} + \boldsymbol{D} \end{pmatrix} \right\}. \end{aligned}$$

又因为 $\phi(F) \in \mathcal{L}_+(V, \omega)$, 故存在唯一 $\boldsymbol{Z}' \in \mathfrak{H}^n$ 使得 $\phi(F) = \mathrm{span}_{\mathbb{C}} \left\{ (\underline{\mathbf{e}}, \underline{\mathbf{f}}) \begin{pmatrix} \boldsymbol{Z}' \\ \boldsymbol{I}_n \end{pmatrix} \right\}$, 与上式比较, 可知 $\boldsymbol{Z}' = (\boldsymbol{AZ} + \boldsymbol{B})(\boldsymbol{CZ} + \boldsymbol{D})^{-1}$. 这给出了 $\mathrm{Sp}(n, \mathbb{R})$ 在 Siegel 上半平面 $\mathfrak{H}^n$ 上的作用, 我们总结如下:

定义 1.60. 对于 $\boldsymbol{M}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D}\end{pmatrix}\in \mathrm{Sp}(n,\mathbb{R})$ 以及 $\boldsymbol{Z}\in\mathfrak{H}^n$, 记

$$\boldsymbol{M}\langle\boldsymbol{Z}\rangle := (\boldsymbol{A}\boldsymbol{Z}+\boldsymbol{B})(\boldsymbol{C}\boldsymbol{Z}+\boldsymbol{D})^{-1}. \tag{1.42}$$

结合前文可知, (1.42)确实给出了辛矩阵群 $\mathrm{Sp}(n,\mathbb{R})$ 在 Siegel 上半平面 $\mathfrak{H}^n$ 上的作用, 并且该作用是可迁的, 且在任意一点处的稳定子群都同构于酉群 $\mathrm{U}(n)$. 一个有意思的问题是, 能否不依赖于辛几何意义, 用纯代数 (纯矩阵计算技巧) 来重新证明上述群作用的良定性与可迁性?

对于 $\boldsymbol{M}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D}\end{pmatrix}\in \mathrm{GL}(2n,\mathbb{R})$, 回忆(1.9)式: $\boldsymbol{M}\in\mathrm{Sp}(n,\mathbb{R})$ 当且仅当

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}=\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A},\quad \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}=\boldsymbol{D}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B},\quad \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}-\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{I}_n.$$

另一方面, 注意 $\boldsymbol{M}\in\mathrm{Sp}(n,\mathbb{R}) \iff \boldsymbol{M}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{J}\boldsymbol{M}=\boldsymbol{J} \iff (\boldsymbol{M}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{J})(\boldsymbol{M}\boldsymbol{J})=-\boldsymbol{I}_{2n} \iff (\boldsymbol{M}\boldsymbol{J})(\boldsymbol{M}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{J})=-\boldsymbol{I}_{2n}$, 由此也容易验证 $\boldsymbol{M}\in\mathrm{Sp}(n,\mathbb{R})$ 的另一组充分必要条件:

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{C}\boldsymbol{D}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{D}\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{A}\boldsymbol{D}^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{B}\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{I}_n.$$

引理 1.61. 对于 $\boldsymbol{M}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D}\end{pmatrix}\in \mathrm{Sp}(n,\mathbb{R})$ 以及 $\boldsymbol{Z}\in\mathfrak{H}^n$, 则 $\det(\boldsymbol{C}\boldsymbol{Z}+\boldsymbol{D})\neq 0$.

这保证了(1.42)式有意义. 但这个引理并不太显然.

证明. 先考虑 $\boldsymbol{Z}=\mathrm{i}\boldsymbol{I}_n$ 的特殊情况. 此时有

$$\begin{aligned}\overline{(\boldsymbol{C}\boldsymbol{Z}+\boldsymbol{D})}(\boldsymbol{C}\boldsymbol{Z}+\boldsymbol{D})^{\mathrm{T}} &= (-\mathrm{i}\boldsymbol{C}+\boldsymbol{D})(\mathrm{i}\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{D}^{\mathrm{T}})\\ &= (\boldsymbol{C}\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{D}\boldsymbol{D}^{\mathrm{T}})+\mathrm{i}(\boldsymbol{C}\boldsymbol{D}^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{D}\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}})\\ &= \boldsymbol{C}\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{D}\boldsymbol{D}^{\mathrm{T}}.\end{aligned}$$

于是, 如果 $\det(\boldsymbol{C}\boldsymbol{Z}+\boldsymbol{D})=0$, 则存在列向量 $\boldsymbol{0}\neq\boldsymbol{v}\in\mathbb{C}^n$ 使得

$$\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{C}\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{D}\boldsymbol{D}^{\mathrm{T}})\overline{\boldsymbol{v}}=0,$$

这迫使 $\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}=\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}=\boldsymbol{0}$, 从而 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{C},\boldsymbol{D})<n$, 与 $\det\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D}\end{pmatrix}\neq 0$ 矛盾.

于是我们证明了: 对任意 $\boldsymbol{M}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D}\end{pmatrix}\in\mathrm{Sp}(n,\mathbb{R})$, $\det(\mathrm{i}\boldsymbol{C}+\boldsymbol{D})\neq 0$.

而对于一般的 $\boldsymbol{Z}\in\mathfrak{H}^n$, 断言: 存在 $\boldsymbol{M}'\in\mathrm{Sp}(n,\mathbb{R})$ 使得 $\boldsymbol{Z}=\boldsymbol{M}'\langle\mathrm{i}\boldsymbol{I}_n\rangle$. 为证明此断言, 我们记 $\boldsymbol{Z}=\boldsymbol{X}+\mathrm{i}\boldsymbol{Y}$, 其中 $\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}$ 为 n 阶实对称方阵. 注意 $\boldsymbol{Y}$ 是严格正定方阵, 从而存在 $\boldsymbol{A}_1\in\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ 使得 $\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{A}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_1$. 取 $\boldsymbol{M}':=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_1^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_1^{-\mathrm{T}}\\ & \boldsymbol{A}_1^{-1}\end{pmatrix}$, 则容易验证 $\boldsymbol{M}'\in\mathrm{Sp}(n,\mathbb{R})$, 并且 $\boldsymbol{Z}=\boldsymbol{M}'\langle\mathrm{i}\boldsymbol{I}_n\rangle$. 断言得证.

下证 $\det(\boldsymbol{C}\boldsymbol{Z}+\boldsymbol{D})\neq 0$. 由上述断言, 取 $\boldsymbol{M}'=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}' & \boldsymbol{B}'\\ \boldsymbol{C}' & \boldsymbol{D}'\end{pmatrix}$ 使得 $\boldsymbol{Z}=\boldsymbol{M}'\langle\mathrm{i}\boldsymbol{I}_n\rangle$, 即 $\boldsymbol{Z}=(\mathrm{i}\boldsymbol{A}'+\boldsymbol{B}')(\mathrm{i}\boldsymbol{C}'+\boldsymbol{D}')^{-1}$. 于是

$$\boldsymbol{M}\boldsymbol{M}'=\begin{pmatrix} * & * \\ \boldsymbol{C}\boldsymbol{A}'+\boldsymbol{D}\boldsymbol{C}' & \boldsymbol{C}\boldsymbol{B}'+\boldsymbol{D}\boldsymbol{D}'\end{pmatrix}\in\mathrm{Sp}(n,\mathbb{R}),$$

从而矩阵 $\mathrm{i}(\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}'+\boldsymbol{D}\boldsymbol{C}')+(\boldsymbol{C}\boldsymbol{B}'+\boldsymbol{D}\boldsymbol{D}')$ 可逆. 又因为

$$\begin{aligned}&(\boldsymbol{C}\boldsymbol{Z}+\boldsymbol{D})(\mathrm{i}\boldsymbol{C}'+\boldsymbol{D}')\\ =&\left[\boldsymbol{C}(\mathrm{i}\boldsymbol{A}'+\boldsymbol{B}')(\mathrm{i}\boldsymbol{C}'+\boldsymbol{D}')^{-1}+\boldsymbol{D}\right](\mathrm{i}\boldsymbol{C}'+\boldsymbol{D}')\\ =&\boldsymbol{C}(\mathrm{i}\boldsymbol{A}'+\boldsymbol{B}')+\boldsymbol{D}(\mathrm{i}\boldsymbol{C}'+\boldsymbol{D}')\\ =&\mathrm{i}(\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}'+\boldsymbol{D}\boldsymbol{C}')+(\boldsymbol{C}\boldsymbol{B}'+\boldsymbol{D}\boldsymbol{D}'),\end{aligned}$$

由此可知 $\boldsymbol{C}\boldsymbol{Z}+\boldsymbol{D}$ 可逆, 证毕. □

除了要验证(1.42)的右边的 $\boldsymbol{C}\boldsymbol{Z}+\boldsymbol{D}$ 可逆, 也要验证 $\boldsymbol{M}\langle\boldsymbol{Z}\rangle$ 仍然在 $\mathfrak{H}^n$ 当中.

引理 1.62. *对任意 $\boldsymbol{M}\in\mathrm{Sp}(n,\mathbb{R})$ 以及 $\boldsymbol{Z}\in\mathfrak{H}^n$, 都有 $\boldsymbol{M}\langle\boldsymbol{Z}\rangle\in\mathfrak{H}^n$.*

证明. 记 $\boldsymbol{M}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D}\end{pmatrix}$, 则由上一个引理可知 $\boldsymbol{C}\boldsymbol{Z}+\boldsymbol{D}$ 可逆. 于是, 为验证 $\boldsymbol{M}\langle\boldsymbol{Z}\rangle$ 是对称矩阵, 只需验证 $(\boldsymbol{C}\boldsymbol{Z}+\boldsymbol{D})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}\langle\boldsymbol{Z}\rangle(\boldsymbol{C}\boldsymbol{Z}+\boldsymbol{D})$ 是对称矩阵. 直接计算可得

$$(\boldsymbol{C}\boldsymbol{Z}+\boldsymbol{D})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}\langle\boldsymbol{Z}\rangle(\boldsymbol{C}\boldsymbol{Z}+\boldsymbol{D})=(\boldsymbol{C}\boldsymbol{Z}+\boldsymbol{D})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{Z}+\boldsymbol{B})$$

$$= \boldsymbol{Z}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Z} + \boldsymbol{Z}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B} + \boldsymbol{D}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Z} + \boldsymbol{D}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}.$$

注意 $\boldsymbol{Z}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{Z}$ 以及(1.9)式, 易验证上式右边对称. 因此 $(\boldsymbol{M}\langle\boldsymbol{Z}\rangle)^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{M}\langle\boldsymbol{Z}\rangle$, 即

$$(\boldsymbol{A}\boldsymbol{Z}+\boldsymbol{B})(\boldsymbol{C}\boldsymbol{Z}+\boldsymbol{D})^{-1} = (\boldsymbol{C}\boldsymbol{Z}+\boldsymbol{D})^{-\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{Z}+\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}. \tag{1.43}$$

从而由(1.9)(1.43)式, 直接计算得

$$\begin{aligned}
&(\boldsymbol{C}\overline{\boldsymbol{Z}}+\boldsymbol{D})^{\mathrm{T}}\left(\boldsymbol{M}\langle\boldsymbol{Z}\rangle - \overline{\boldsymbol{M}\langle\boldsymbol{Z}\rangle}\right)(\boldsymbol{C}\boldsymbol{Z}+\boldsymbol{D})\\
&= (\boldsymbol{C}\overline{\boldsymbol{Z}}+\boldsymbol{D})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{Z}+\boldsymbol{B}) - (\boldsymbol{A}\overline{\boldsymbol{Z}}+\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{C}\boldsymbol{Z}+\boldsymbol{D})\\
&= \overline{\boldsymbol{Z}}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A} - \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C})\boldsymbol{Z} + (\boldsymbol{D}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C})\boldsymbol{Z}\\
&\qquad + \overline{\boldsymbol{Z}}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B} - \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}) + (\boldsymbol{D}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B} - \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D})\\
&= \boldsymbol{Z} - \overline{\boldsymbol{Z}},
\end{aligned}$$

因此 $\operatorname{Im}\boldsymbol{M}\langle\boldsymbol{Z}\rangle$ 正定当且仅当 $\operatorname{Im}\boldsymbol{Z}$ 正定. 综上, $\boldsymbol{M}\langle\boldsymbol{Z}\rangle \in \mathfrak{H}^n$. □

题 1.63. 证明: (1.42)式给出了辛矩阵群 $\mathrm{Sp}(n,\mathbb{R})$ 在 Siegel 上半平面 $\mathfrak{H}^n$ 上的作用, 该作用是可迁的, 且在 $\mathrm{i}\boldsymbol{I}_n \in \mathfrak{H}^n$ 处的稳定子群恰为 $\mathrm{U}(n)$. 从而再次证明 $\mathfrak{H}^n \cong \mathrm{Sp}(n,\mathbb{R})/\mathrm{U}(n)$. [提示: 还需要验证对任意 $\boldsymbol{M},\boldsymbol{M}' \in \mathrm{Sp}(n,\mathbb{R})$ 以及 $\boldsymbol{Z} \in \mathfrak{H}^n$, 都有 $(\boldsymbol{M}\boldsymbol{M}')\langle\boldsymbol{Z}\rangle = \boldsymbol{M}\langle\boldsymbol{M}'\langle\boldsymbol{Z}\rangle\rangle$, 这个直接的矩阵计算验证留给读者. 该群作用的可迁性已在引理1.61当中证明.]

题 1.64. 证明: 下述映射 (称为 Cayley 变换)

$$\boldsymbol{Z} \mapsto \boldsymbol{W} := (\boldsymbol{Z} - \mathrm{i}\boldsymbol{I}_n)(\boldsymbol{Z} + \mathrm{i}\boldsymbol{I}_n)^{-1}, \qquad \boldsymbol{Z} \in \mathfrak{H}^n$$

给出了从 Siegel 上半平面 $\mathfrak{H}^n$ 到

$$\mathfrak{D}^n := \left\{\boldsymbol{W} \in \mathbb{C}^{n\times n} \,\middle|\, \boldsymbol{W}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{W},\ \boldsymbol{W}^{\mathrm{T}}\overline{\boldsymbol{W}} < \boldsymbol{I}_n\right\}$$

的全纯同构, 其中上式的不等号是厄米特矩阵正定偏序意义下的.
[提示: 注意上述 Cayley 变换的逆映射为

$$\boldsymbol{W} \mapsto \boldsymbol{Z} := \mathrm{i}(\boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{W})^{-1}(\boldsymbol{I}_n + \boldsymbol{W}),$$

并考虑与引理1.62证明方法类似的矩阵技巧.]

题 1.65. 考察 $n=1$ 的简单情况, 此时 $\mathrm{Sp}(1,\mathbb{R}) \cong \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$, $\mathrm{U}(1) \cong \mathrm{SO}(2)$, 并且 $\mathfrak{H}^1 \cong \mathbb{H} := \{z = x + \mathrm{i}y \,|\, x, y \in \mathbb{R},\ y > 0\}$ 为通常的上半复平面.

1. 验证: $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ 在 $\mathbb{H}$ 上的相应的群作用具有如下表达:

$$z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}, \quad \text{其中 } \boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{R}).$$

2. 验证: $\mathbb{H}$ 上的如下度量 (称为庞加莱度量)

$$\mathrm{d}s^2 = \frac{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2}{y^2}$$

是 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$-不变的.

Siegel 上半平面与阿贝尔簇、模形式等数学领域密切相关. 最开始是由 Siegel 开始研究整系数辛群 $\mathrm{Sp}(n,\mathbb{Z})$(或它的子群) 在 $\mathfrak{H}^n$ 上的全纯或亚纯函数上的作用的不变性质, 可见 [36]. 一段时间以来, Siegel 所引入的这一系列数学对象成为了辛几何的主题. 关于 Siegel 上半平面的更多内容也可参考 [5] 或 [34]. 而如今, 辛几何包括了更多具体的研究主题, 我们将在后续章节初步介绍之.

2. 辛流形

“不不, 别说在哪, 一知道在哪, 世界就变得一张地图一样小了, 不知道在哪, 世界才广阔呢.”

“那好, 咱们就努力迷路吧.”

——刘慈欣《三体 II • 黑暗森林》

众所周知, 黎曼流形是欧氏空间的“整体化”, 复流形是复线性空间的“整体化”. 类似地, 也可谈论辛空间的“整体化”, 即所谓**辛流形**, 这是辛几何的主要研究对象. 本章将通过几个重要例子来研究辛流形的基本性质. 本章内容来自 Aebischer[4] 第 2 章, 也可见 Abraham-Marsden[1] 第 3.2 节.

2.1 辛流形的基本概念与性质

大致上, 辛流形是光滑 (实) 流形, 并且局部同构于标准辛空间 $\mathbb{R}^{2n}$.

2.1.1 辛流形, 辛映射, 简单例子

定义 2.1. 对于光滑流形 M, 以及 2-形式 $\omega \in \Omega^2(M)$, 如果 ω 处处非退化, 且

$$\mathrm{d}\omega = 0, \tag{2.1}$$

则称 (M, ω) 为**辛流形**, ω 为相应的**辛形式**.

ω 处处非退化, 是指对于 M 上的任意一点 p, $\omega|_p$ 都是 T_pM 上的非退化反对称双线性型, 从而 $(T_pM, \omega|_p)$ 是辛空间. 由于辛空间一定是偶数维空间, 从而易知辛流形一定是偶数维流形, 记 $\dim M = 2n$. 注意性质1.5, 可知 ω^n 是 M 的一个体积形式, 在 M 上处处非零, 从而 M 可定向. 因此: *辛流形必为偶数维可定向流形.*

辛流形的定义要求 $\mathrm{d}\omega = 0$, 从而 ω 是 M 的某个 de Rham 上同调类 $[\omega] \in \mathrm{H}^2_{\mathrm{dR}}(M)$ 的代表元. 记 $\dim M = 2n$, 则 $[\omega^n] \in \mathrm{H}^{2n}_{\mathrm{dR}}(M)$. 如果 M 是紧流形, 则 $[\omega^n] \neq 0$, 这是因为: 如果存在 $\eta \in \Omega^{2n-1}(M)$ 使得 $\omega^n = \mathrm{d}\eta$, 则由

Stokes 公式得

$$\int_M \omega^n = \int_M \mathrm{d}\eta = 0,$$

与 ω^n 是 M 的体积形式矛盾, 断言得证. 进而对任意 $1 \leq k \leq n$ 都有 $[\omega^k] \neq 0$. 因此: 紧辛流形的偶数阶 de Rham 上同调群非平凡.

接下来考虑辛流形之间的态射.

定义 2.2. 设 (M,ω) 与 (M,ω') 为辛流形, $f\colon M \to M'$ 为光滑映射. 如果

$$f^*\omega' = \omega,$$

则称 f 为**辛映射**. 如果辛映射 f 是微分同胚, 则易知 $f^{-1}\colon M' \to M$ 也是辛映射, 此时称 f 为**辛同胚**.

由定义得, $f\colon M \to M'$ 是辛映射当且仅当对任意 $p \in M$, 切映射

$$f_*\colon T_pM \to T_{f(p)}M'$$

是辛线性映射.

例 **2.3.** 以下是辛流形的简单例子:

1. 辛线性空间 (V,ω) 是辛流形. 平凡的例子. 我们在处理这类辛流形时, 往往将其与 $\mathbb{R}^{2n}, \mathbb{C}^n, T^*\mathbb{R}^n$ 三者等同.

2. 二维紧定向曲面具有辛流形结构. 这是因为, 可定向保证其存在 (处处非零的) 体积形式 ω, 再注意曲面的维数是 2, 从而易知 ω 是辛形式.

3. 若 (M_1,ω_1) 与 (M_2,ω_2) 都是辛流形, 则 $(M_1 \times M_2, \pi_1^*\omega_1 + \pi_2^*\omega_2)$ 也是辛流形. 其中 $M_1 \times M_2$ 为通常的乘积流形, $\pi_i\colon M_1 \times M_2 \to M_i\,(i = 1,2)$ 为典范投影.

4. Kähler 流形都是辛流形. 这是复几何中众所周知的结果, 详见后文2.3节.

5. 光滑流形的余切丛具有典范的辛流形结构. 详见前文0.2.2小节.

题 **2.4.** 考虑二维球面 $S^2 := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$. 对于 $\boldsymbol{p} \in S^2 \subseteq \mathbb{R}^3$, 将切空间 $T_{\boldsymbol{p}}S^2$ 视为 $\mathbb{R}^3$ 中的超平面, 对任意 $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in T_{\boldsymbol{p}}S^2$, 令

$$\omega(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) := \langle \boldsymbol{p}, \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w} \rangle,$$

其中 $\langle , \rangle$ 与 $\times$ 分别为欧氏空间 $\mathbb{R}^3$ 的标准内积与外积. 上述 ω 是 S^2 的辛形式, (S^2, ω) 是辛流形.

考虑用 $\mathbb{R}^3$ 的柱坐标分量 (θ, z) 将球面 S^2 参数化, 即 $\begin{cases} x = \sqrt{1-z^2}\cos\theta \\ y = \sqrt{1-z^2}\sin\theta \\ z = z \end{cases}$,

其中 $\theta \in (0, 2\pi)$, $z \in (-1, 1)$. 可以验证 (留给读者), S^2 的上述辛形式 ω 在柱坐标 (θ, z) 下的表达式为 $\omega = \mathrm{d}\theta \wedge \mathrm{d}z$.

题 2.5. 考虑 $\mathbb{R}^2 = \{(q, p) \mid q, p \in \mathbb{R}\}$ 的标准辛结构 $\omega = \mathrm{d}q \wedge \mathrm{d}p$. 则变换

$$\begin{pmatrix} \tilde{q} \\ \tilde{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ln\left(p + \sqrt{1+p^2}\right) \\ -q\sqrt{1+p^2} \end{pmatrix}$$

是 $\mathbb{R}^2$ 的辛自同胚, 且该变换的逆变换为

$$\begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\tilde{p}}{\cosh\tilde{q}} \\ \sinh\tilde{q} \end{pmatrix}.$$

[提示: 直接计算验证 $\mathrm{d}\tilde{q} \wedge \mathrm{d}\tilde{p} = \mathrm{d}q \wedge \mathrm{d}p$.]

题 2.6. 光滑流形之间的微分同胚 $f\colon M \to M'$ 自然诱导余切丛的辛同胚 $f_\sharp\colon T^*M \to T^*M'$, $(p, \xi) \mapsto (f(p), (f^*)^{-1}(\xi))$ 使得下图交换:

$$\begin{tikzcd} T^*M \arrow[r, "f_\sharp"] \arrow[d, "\pi"'] & T^*M' \arrow[d, "\pi'"] \\ M \arrow[r, "f"] & M' \end{tikzcd}.$$

证明. 容易验证上述定义的 $f_\sharp$ 是微分同胚, 且上图显然交换. 只需验证 $f_\sharp$ 是辛映射. 记 θ, θ' 分别为余切丛 T^*M, T^*M' 上的典范 1-形式, 回忆典范 1-形式 θ, θ' 由泛性质(0.11)所唯一确定. 对任意 $\alpha \in \Omega^1(M)$, 将 α 视为光滑截面 $\alpha\colon M \to T^*M$, 则由 $f_\sharp$ 的定义可以验证 $f_\sharp \circ \alpha = (f^*)^{-1}(\alpha) \circ f$, 从而

$$\begin{aligned} \alpha^*\left(f_\sharp^*\theta'\right) &= (f_\sharp \circ \alpha)^*(\theta') \\ &= \left((f^*)^{-1}(\alpha) \circ f\right)^*(\theta') \\ &= f^*\left(\left((f^*)^{-1}(\alpha)\right)^*(\theta')\right) \end{aligned}$$

$$= f^*\left((f^*)^{-1}(\alpha)\right) = \alpha,$$

因此 $f_\sharp^*(\theta') = \theta$. 再注意余切丛的辛形式与典范 1-形式的关系(0.12)式, 有

$$f_\sharp^*(\omega') = -f_\sharp^*(\mathrm{d}\theta') = -\mathrm{d}\left(f_\sharp^*(\theta')\right) = -\mathrm{d}\theta = \omega,$$

因此 $f_\sharp$ 是辛映射, 得证. □

2.1.2 拉格朗日子流形, 生成函数

正如辛线性空间有拉格朗日子空间, 也可谈论辛流形的 "拉格朗日子流形". 顾名思义, 我们有:

定义 2.7. 对于辛流形 (M, ω), 称浸入子流形

$$f\colon L \to M$$

是**拉格朗日浸入**, 如果 $f^*\omega = 0$ 在 L 处处成立, 并且 $\dim L = \frac{1}{2}\dim M$. 此外, 若 f 是嵌入子流形, 则称 L 是 M 的**拉格朗日子流形**.

这里的 "浸入"(immersion) 是指切映射 f_* 处处是单射, 而 "嵌入" 还要求 $f\colon L \to M$ 也是单射. 容易看出上述定义的等价表述: 到辛流形 (M, ω) 的光滑浸入 $f\colon L \to M$ 是拉格朗日浸入, 当且仅当对任意 $x \in L$,

$$f_*(T_xL) \subseteq T_{f(x)}M$$

是拉格朗日子空间.

注 **2.8.** 也可类似定义 "迷向子流形" 以及 "余迷向子流形", 细节留给读者.

拉格朗日子流形在辛几何中扮演十分重要的角色, 并且与很多其他的数学物理分支都有密切联系. 下面介绍拉格朗日子流形的若干重要例子.

性质 2.9. 设 M 是光滑流形, $\alpha \in \Omega^1(M)$ 为 M 上的 1-形式, 自然也是余切丛 T^*M 的截面. 则

$$\alpha\colon M \to T^*M$$

是拉格朗日浸入 (其实也是嵌入) 当且仅当 $\mathrm{d}\alpha = 0$.

特别地, 对于光滑函数 $S \in C^\infty(M)$, 则有拉格朗日嵌入 $\mathrm{d}S\colon M \to$

T^*M, 此时称 S 为该拉格朗日嵌入的**生成函数**.

证明. 记 θ 为余切从 T^*M 的典范 1-形式, 详见(0.11), 则 T^*M 的典范辛结构 $\omega = -\mathrm{d}\theta$, 即(0.12). 从而对于 $\alpha \in \Omega^1(M)$,

$$\alpha^*\omega = \alpha^*(-\mathrm{d}\theta) = -\mathrm{d}(\alpha^*\theta) = -\mathrm{d}\alpha.$$

于是 $\alpha^*\omega = 0$ 当且仅当 $\mathrm{d}\alpha = 0$. 而维数关系 $\dim M = \frac{1}{2}\dim T^*M$ 平凡成立, 从而命题得证. □

- 特别地, 当 $M = \mathbb{R}^n$ 时, $\alpha \in \Omega^1(\mathbb{R}^n)$ 可以自然视为光滑映射

  $$\alpha\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n,$$

  或者 $\mathbb{R}^n$ 上的向量场 $\boldsymbol{\alpha}$. 此时, α 是拉格朗日浸入当且仅当向量场 $\boldsymbol{\alpha}$ 是梯度场, 即存在函数 $S \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ 使得 $\boldsymbol{\alpha} = \nabla S$; 这里的 S 即生成函数. 此时, 子流形 $\alpha(\mathbb{R}^n) \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ 恰为映射 α 的**图像**.

- 另一种特殊情形是 $\alpha = 0$, 即零截面. 相应的拉格朗日子流形为

  $$M \subseteq T^*M.$$

  事实上, 所有的拉格朗日子流形 "在某种意义下" 都形如此, 这详见后文推论2.36.

性质 2.10. 设 L 是余切从 $\pi\colon T^*M \to M$ 的拉格朗日子流形, 并且对任意 $m \in \pi(L)$, L 与纤维 $\pi^{-1}(m)$ 横截相交, 且恰有一个交点. 则 $U := \pi(L)$ 是 M 的开子集, 且存在闭 1-形式 $\alpha\colon U \to T^*M$ 使得

$$L = \alpha(U).$$

特别地, 如果 L 是可缩空间, 则存在函数 $S \in C^\infty(U)$, 使得 $L = \mathrm{d}S(U)$; 换言之, S 是拉格朗日子流形 L 的生成函数.

证明. 由横截性易知 $\pi|_L\colon L \to M$ 是浸入, 又由于它是单射, 从而为嵌入. 再注意维数 $\dim L = \dim M$, 易知 $\pi|_L\colon L \to U$ 是微分同胚. 考虑从 U 到 T^*M 的映射

$$\alpha := i_L \circ (\pi|_L)^{-1},$$

其中 $i_L\colon L\to T^*M$ 为典范嵌入, 则显然 $L=\alpha(U)$; 由于 L 是拉格朗日子流形, 从而由性质2.9 可知 $\alpha\in\Omega^1(U)$ 满足 $\mathrm{d}\alpha=0$, 从而得证. $\square$

不过, 有些拉格朗日子流形并不是某个函数的图像 (或者某个丛的截面), 例如:

例 2.11.(Whitney 球面) 对于 n 维单位球面

$$S^n:=\left\{(\boldsymbol{x},y)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}\,\middle|\,\|\boldsymbol{x}\|^2+y^2=1\right\},\tag{2.2}$$

则映射

$$\begin{aligned}f\colon S^n&\to\ \mathbb{C}^n\\(\boldsymbol{x},y)&\mapsto\ (1+2\mathrm{i}y)\boldsymbol{x}\end{aligned}\tag{2.3}$$

是拉格朗日浸入. 其中 $\mathbb{C}^n\cong\mathbb{R}^{2n}$ 具有标准辛结构(1.25).

证明. 直接暴力验证. 对于 $(\boldsymbol{x},y)\in S^n$, 易知切空间

$$T_{(\boldsymbol{x},y)}S^n=\left\{(\boldsymbol{v},u)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}\,\middle|\,\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{v}+yu=0\right\}.$$

对于切向量 $(\boldsymbol{v},u)\in T_{(\boldsymbol{x},y)}S^n$, 易知切映射 f_* 满足

$$f_*(\boldsymbol{v},u)=\boldsymbol{v}+2\mathrm{i}(u\boldsymbol{x}+y\boldsymbol{v}),$$

从而易知 f 为浸入. 于是, 对于切向量 $(\boldsymbol{v}_1,u_1),(\boldsymbol{v}_2,u_2)\in T_{(\boldsymbol{x},y)}S^n$, 我们有

$$\begin{aligned}&\omega\left(f_*(\boldsymbol{v}_1,u_1),f_*(\boldsymbol{v}_2,u_2)\right)\\=&\operatorname{Im}\left(\left(\boldsymbol{v}_1^{\mathrm{T}}-2\mathrm{i}(u_1\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}+y\boldsymbol{v}_1^{\mathrm{T}})\right)\left(\boldsymbol{v}_2+2\mathrm{i}(u_2\boldsymbol{x}+y\boldsymbol{v}_2)\right)\right)\\=&\,2\left(u_2\boldsymbol{v}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}-u_1\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{v}_2\right)=2\left(-u_1u_2y+u_1u_2y\right)=0,\end{aligned}$$

从而 $f^*\omega=0$. 又 $\dim S^n=n=\frac{1}{2}\dim_{\mathbb{R}}\mathbb{C}^n$, 从而命题得证. $\square$

不过注意, 上述 f 并不是嵌入子流形: f 将 S^n 的南北极点 $(\mathbf{0},\pm1)$ 映到同一个点 $\mathbf{0}\in\mathbb{C}^n$, 这也是 f 唯一的二重点. S^n 在映射 f 下的像同胚于粘合南北极点后的球面, 例如 $n=1$ 时为 “8 字形”.

用生成函数来构造拉格朗日浸入的方法可以推广到更一般情形. 以光滑流形 $M=\mathbb{R}^n$ 为例, 更一般的**生成函数**形如 $S\in C^\infty(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^k)$, 其中 k 为某个非负整数. 根据性质2.9, 我们有拉格朗日浸入

$$\mathrm{d}S\colon \mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^k\to T^*(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^k)\cong\mathbb{C}^n\times\mathbb{C}^k,$$

在某点处的切映射 $(\mathrm{d}S)_*$ 使得

$$L:=(\mathrm{d}S)_*(\mathbb{R}^n\oplus\mathbb{R}^k)$$

是 $\mathbb{C}^n\oplus\mathbb{C}^k$ 的拉格朗日子空间. 而注意 $\mathbb{C}^n\oplus\mathbb{C}^k$ 具有余迷向子空间

$$W:=\mathbb{C}^n\oplus\mathbb{R}^k,$$

并且 $W^{\mathrm{red}}:=W/W^\perp\cong\mathbb{C}^n$ (记号同引理1.35), 相应的商映射 $\pi\colon W\to W^{\mathrm{red}}$ 恰为到 $\mathbb{C}^n$ 的典范投影. 从而利用引理1.35, 可将 $\mathbb{C}^n\oplus\mathbb{C}^k$ 的拉格朗日子空间 L 约化为 $\mathbb{C}^n\cong W^{\mathrm{red}}$ 的拉格朗日子空间 $\pi(L\cap W)$.

上述想法能够给出一类拉格朗日浸入子流形的构造:

定理 2.12. 设 M 是 n 维光滑流形, k 为非负整数,

$$S\colon M\times\mathbb{R}^k\to\mathbb{R}$$

为光滑函数. 记

$$\tilde{M}:=\left\{(x,\boldsymbol{t})\in M\times\mathbb{R}^k\;\middle|\;\frac{\partial S}{\partial t^1}(x,\boldsymbol{t})=\frac{\partial S}{\partial t^2}(x,\boldsymbol{t})=\cdots=\frac{\partial S}{\partial t^k}(x,\boldsymbol{t})=0\right\},$$

其中 $\boldsymbol{t}=(t^1,...,t^k)$ 为 $\mathbb{R}^k$ 的标准坐标. 如果余切向量组

$$\left\{\mathrm{d}\left(\frac{\partial S}{\partial t^i}\right)\;\middle|\;i=1,2,...,k\right\}\tag{2.4}$$

在 $\tilde{M}$ 处处线性无关, 则映射

$$\begin{aligned} j_S\colon \tilde{M}&\to T^*M\\ (x,\boldsymbol{t})&\mapsto(x,\mathrm{d}_xS_{\boldsymbol{t}})\end{aligned}\tag{2.5}$$

是拉格朗日浸入, 其中 $S_{\boldsymbol{t}}\colon M\to\mathbb{R}$, $x\mapsto S(x,\boldsymbol{t})$ 是 M 上的函数, $\mathrm{d}_x\colon C^\infty(M)\to T_x^*M$ 为取外微分之后在点 x 处的值.

证明. 虽然如前面所说, 利用引理1.35可以给出更优雅的证明, 但这里我们选择暴力验证.

1. 取定 M 的局部坐标 $\boldsymbol{x}=(x^1,...,x^n)$. 则(2.4)的线性无关性表明映射 $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t})\mapsto\left(\frac{\partial S}{\partial t^1},...,\frac{\partial S}{\partial t^n}\right)^{\mathrm{T}}$ 的 Jacobi 矩阵

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} \frac{\partial^2 S}{\partial t^1\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial^2 S}{\partial t^1\partial x^n} & \frac{\partial^2 S}{\partial t^1\partial t^1} & \cdots & \frac{\partial^2 S}{\partial t^1\partial t^k} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2 S}{\partial t^k\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial^2 S}{\partial t^k\partial x^n} & \frac{\partial^2 S}{\partial t^k\partial t^1} & \cdots & \frac{\partial^2 S}{\partial t^k\partial t^k} \end{array}\right)_{k\times(n+k)} \tag{2.6}$$

在 $\tilde{M}$ 处处满秩, 从而由正则原像定理可知 $\tilde{M}$ 是 $M\times\mathbb{R}^k$ 的子流形.

在局部坐标 $x^1,...,x^n$ 下, 容易验证 $\tilde{M}$ 在点 $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t})$ 处的切空间为

$$\begin{aligned} &T_{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t})}\tilde{M} \\ =&\left\{(\boldsymbol{v},\boldsymbol{s})\in\mathbb{R}^n\oplus\mathbb{R}^k\;\middle|\; v^\alpha\frac{\partial^2 S}{\partial x^\alpha\partial t^i}+s^j\frac{\partial^2 S}{\partial t^j\partial t^i}=0,\ 1\le i\le k\right\}. \end{aligned} \tag{2.7}$$

这里我们临时约定用希腊字母表示 $\{1,2,...,n\}$ 中的指标, 用拉丁字母表示 $\{1,2,...,k\}$ 中的指标. 也容易验证切映射 $(j_S)_*$ 满足

$$(j_S)_*(\boldsymbol{v},\boldsymbol{s})=\left(\boldsymbol{v}\,;\,v^\alpha\frac{\partial^2 S}{\partial x^\alpha\partial x^\bullet}+s^i\frac{\partial^2 S}{\partial t^i\partial x^\bullet}\right). \tag{2.8}$$

2. 断言: j_S 是浸入. 这是因为, 如果切向量 $(\boldsymbol{v},\boldsymbol{s})\in T_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{t}}\tilde{M}$ 使得 $(j_S)_*(\boldsymbol{v},\boldsymbol{s})=\mathbf{0}$, 则由(2.8)可知

$$\boldsymbol{v}=\mathbf{0},\quad v^\alpha\frac{\partial^2 S}{\partial x^\alpha\partial x^\beta}+s^i\frac{\partial^2 S}{\partial t^i\partial x^\beta}=0,\qquad 1\le\beta\le n,$$

再结合切向量本身的性质(2.7), 易知

$$s^i\frac{\partial^2 S}{\partial t^i\partial x^\alpha}=s^i\frac{\partial^2 S}{\partial t^i\partial t^j}=0,\quad \forall 1\le\alpha\le n,\ 1\le j\le k,$$

这与矩阵(2.6)满秩相矛盾. 从而断言得证.

3. 对于切向量 $(\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{s}_1),(\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{s}_2)\in T_{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t})}\tilde{M}$, 注意(2.7)并直接计算得

$$\omega\left((j_S)_*(\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{s}_1),(j_S)_*(\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{s}_2)\right)$$

$$
\begin{aligned}
&= - v_1^\alpha\left(v_2^\beta\frac{\partial^2 S}{\partial x^\beta\partial x^\alpha}+s_2^i\frac{\partial^2 S}{\partial t^i\partial x^\alpha}\right)+v_2^\alpha\left(v_1^\beta\frac{\partial^2 S}{\partial x^\beta\partial x^\alpha}+s_1^i\frac{\partial^2 S}{\partial t^i\partial x^\alpha}\right)\\
&= - s_2^i v_1^\alpha\frac{\partial^2 S}{\partial x^\alpha\partial t^i}+s_1^i v_2^\alpha\frac{\partial^2 S}{\partial x^\alpha\partial t^i}=s_1^j s_2^i\frac{\partial^2 S}{\partial t^i\partial t^j}-s_1^j s_2^i\frac{\partial^2 S}{\partial t^j\partial t^i}=0,
\end{aligned}
$$

从而余切丛 T^*M 的典范辛结构 ω 满足 $j_S^*\omega=0$.

最后, 又显然有 $\dim\tilde{M}=n=\frac{1}{2}\dim T^*M$, 从而定理得证. $\square$

例 2.13. 对于光滑流形 $M=\mathbb{R}^n$ 以及 $k=1$, 考虑生成函数

$$
\begin{aligned}
S\colon \mathbb{R}^n\times\mathbb{R} &\to \mathbb{R}\\
(\boldsymbol{x},y) &\mapsto y\|\boldsymbol{x}\|^2+\frac{y^3}{3}-y,
\end{aligned}
$$

则按照定理2.12, 相应的 $\tilde{M}$ 为

$$
\tilde{M}:=\left\{(\boldsymbol{x},y)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}\,\middle|\,\|\boldsymbol{x}\|^2+y^2=1\right\}\cong S^n,
$$

相应的拉格朗日浸入 $j_S\colon\tilde{M}\to T^*\mathbb{R}^n\cong\mathbb{R}^{2n}$ 满足

$$
j_S(\boldsymbol{x},y)=(\boldsymbol{x},2y\boldsymbol{x}),
$$

这恰为(2.3). 于是我们再次得到了 Whitney 球面 (例2.11) 的构造.

拉格朗日子流形也与**奇点理论**密切相关. 我们这里暂不去深入探讨此话题, 而是仅仅举一例来说明.

例 2.14.(多项式的 unfolding). 对每个 $\boldsymbol{x}=(x_1,\dots,x_{n-1})\in\mathbb{R}^{n-1}$, 记多项式

$$
p_{\boldsymbol{x}}=\lambda^{n+1}+x_1\lambda^{n-1}+x_2\lambda^{n-2}+\cdots+x_{n-1}\lambda\in\mathbb{R}[\lambda].
$$

考虑如下的生成函数

$$
\begin{aligned}
S\colon\mathbb{R}^{n-1}\times\mathbb{R}&\to\mathbb{R}\\
(\boldsymbol{x},\lambda)&\mapsto p_{\boldsymbol{x}}(\lambda),
\end{aligned}
$$

按定理2.12的方式可得

$$
\tilde{M}=\left\{(\boldsymbol{x},\lambda)\in\mathbb{R}^{n-1}\times\mathbb{R}\,\middle|\,p'_{\boldsymbol{x}}(\lambda)=0\right\}.
$$

注意 $\frac{\partial^2 S}{\partial x_{n-1}\partial\lambda}\equiv 1$, 由此利用正则原像定理容易推出 $\tilde{M}$ 确实是 $\mathbb{R}^{n-1}\times\mathbb{R}$ 的子流形. $\tilde{M}$ 在每个 $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^{n-1}$ 上的切片恰为 $p_{\boldsymbol{x}}$ 的驻点集. 相应的拉格朗日浸入 $j_S\colon \tilde{M}\to T^*\mathbb{R}^{n-1}$ 为

$$j_S(\boldsymbol{x},\lambda)=\left(\boldsymbol{x};\frac{\partial p_{\boldsymbol{x}}}{\partial x_1}(\lambda),\dots,\frac{\partial p_{\boldsymbol{x}}}{\partial x_{n-1}}(\lambda)\right).$$

2.1.3 更多例子: 余法丛, 拉格朗日-格拉斯曼流形

本节给出拉格朗日子流形的更多例子. 在上一小节我们用生成函数方法 (即性质2.9, 或更一般地, 定理2.12) 构造了余切丛 T^*M 的一类拉格朗日 (浸入) 子流形. 而 T^*M 还有另一类常见的拉格朗日子流形, 即**余法丛** (conormal bundle).

定义 2.15. *对于光滑流形的浸入 $f\colon L\to M$, 称 L 上的向量丛*

$$N^*f:=\{(x,\varphi)\in f^*(T^*M)\,|\,\langle\varphi,f_*X\rangle=0,\ \forall X\in T_xL\}\tag{2.9}$$

*为浸入子流形 L 的***余法丛**.

在上述定义式中, $x\in L$ 为 L 上的点, 而余切向量 $\varphi\in T^*_{f(x)}M$, $\langle,\rangle$ 是余切向量与切向量的配对. 对于 $(x,\varphi)\in N^*f$, 由定义可知余切向量 φ 扮演了子空间 $f_*(T_xL)\subseteq T_{f(x)}M$ 上的 "法向量".

记 $k:=\dim L$, $n:=\dim M$, 则易知向量丛 N^*f 的秩为 $n-k$, 从而

$$\dim N^*f=k+(n-k)=n=\frac{1}{2}\dim T^*M.$$

另外, 余法丛 N^*f 自然是余切丛 T^*M 的浸入子流形: 我们有映射

$$\begin{aligned}\tilde{f}\colon N^*f&\to T^*M\\ (x,\varphi)&\mapsto (f(x),\varphi),\end{aligned}\tag{2.10}$$

容易验证 $\tilde{f}$ 是浸入, 并且下述图表

$$\begin{tikzcd} N^*f \arrow[r, "\tilde{f}"] \arrow[d, "\pi_L"'] & T^*M \arrow[d, "\pi_M"] \\ L \arrow[r, "f"] & M \end{tikzcd}\tag{2.11}$$

交换, 其中 π_L,π_M 为丛投影. 上述映射 $\tilde{f}$ 称为 f 的**典范提升**.

性质 2.16. 设 $f\colon L \to N$ 为光滑流形的浸入, 则典范提升 $\tilde{f}\colon N^*f \to T^*M$ 是拉格朗日浸入.

证明. 记 ω 为余切丛 T^*M 的典范辛结构. 由前文可知, 只需再验证 $\tilde{f}^*\omega = 0$ 即可. 为此, 考虑 T^*M 的典范 1-形式 θ, 断言: $\tilde{f}^*\theta = 0$, 从而命题得证.

这是因为, 对任意 $(x,\varphi) \in N^*f$ 以及切向量 $X \in T_{(x,\varphi)}N^*f$, 注意典范 1-形式的性质(0.8)以及交换图(2.11), 可得

$$\begin{aligned}\left\langle \tilde{f}^*\theta, X\right\rangle &= \left\langle \theta, \tilde{f}_*X\right\rangle = \left\langle \pi_M^*\varphi, \tilde{f}_*X\right\rangle = \left\langle \varphi, \left((\pi_M)_* \circ \tilde{f}_*\right) X\right\rangle \\ &= \langle \varphi, f_*\left((\pi_L)_*X\right)\rangle = 0,\end{aligned}$$

其中最后一个等号用到余法丛的定义. 命题得证. □

生成函数与**余法丛**这两者可以看作某种更一般构造的两钟特殊情况.

题 2.17. 设 $f\colon L \to M$ 为光滑流形的浸入, 函数 $S \in C^\infty(L)$. 记

$$N_S^*f := \{(x,\varphi) \in f^*(T^*M) \mid \langle \varphi, f_*X\rangle = \langle \mathrm{d}S, X\rangle,\ \forall X \in T_xL\} \tag{2.12}$$

则映射

$$\begin{aligned}\tilde{f}_S\colon N_S^*f &\to T^*M \\ (x,\varphi) &\mapsto (f(x),\varphi)\end{aligned}$$

是拉格朗日浸入.

注意对于一般的 S, N_S^*f 不再是 L 上的向量丛, 而是更一般的**纤维丛**. 依然容易验证 $\tilde{f}_S$ 是浸入, 以及维数关系 $\dim N_S^*f = \frac{1}{2}\dim T^*M$.

证明. 记 θ 为 T^*M 的典范 1-形式. 对于 $(x,\varphi) \in N_S^*f$ 以及 $X \in T_{(x,\varphi)}N_S^*f$, 仿照性质2.16的证明过程 (留给读者) 易知

$$\left\langle \tilde{f}_S^*\theta, X\right\rangle = \langle \varphi, f_*\left((\pi_L)_*X\right)\rangle = \langle \mathrm{d}S, (\pi_L)_*X\rangle = \langle \pi_L^*(\mathrm{d}S), X\rangle\,,$$

因此 $\tilde{f}_S^*\theta = \pi_L^*(\mathrm{d}S) = \mathrm{d}(S \circ \pi_L)$, 从而立刻得到 $f_S^*\omega = -\mathrm{d}^2(S \circ \pi_L) = 0$, 命题得证. □

注 2.18. 考察上题的如下特殊情形:

1. 当 $L=M$, 且 $f=\mathrm{id}_M$ 时, N_S^*f 恰为性质2.9中的生成函数构造.

2. 当 S 为常函数时, $\mathrm{d}S\equiv 0$, 此时恰为通常的余法丛.

3. 此外, 若 $L=\{x\}$ 为单点集, 不妨 $x\in M$, 则 N_S^*f 是余切丛 T^*M 在点 x 处的纤维.

辛空间 V 的拉格朗日子空间之全体 $\mathcal{L}(V)$ 具有自然的光滑流形结构, 即**拉格朗日-格拉斯曼流形** (回忆前文1.4节). 特别地, 当 $V=\mathbb{R}^{2n}\cong\mathbb{C}^n$ 为标准辛空间时, 定理1.47表明

$$\mathcal{L}(\mathbb{C}^n)\cong \mathrm{U}(n)/\mathrm{O}(n),$$

从而 $\mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$ 中的点可以视为某个酉矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的等价类

$$[\boldsymbol{A}]:=\{\boldsymbol{X}\boldsymbol{A}\mid \boldsymbol{X}\in\mathrm{O}(n)\}\,. \tag{2.13}$$

而下述拉格朗日子流形的例子与拉格朗日-格拉斯曼流形 $\mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$ 有关.

题 **2.19.** 记 $\mathrm{Sym}(n,\mathbb{C})$ 为 n 阶复对称方阵之全体.

1. $\mathrm{Sym}(n,\mathbb{C})$ 作为 $\mathbb{C}^{n\times n}\cong\mathbb{C}^{n^2}$ 的 $\mathbb{C}$-子空间, 继承 $\mathbb{C}^{n^2}$ 的标准辛结构(1.25), 这使得 $\mathrm{Sym}(n,\mathbb{C})$ 为辛空间. 验证: 在上述意义下, $\mathrm{Sym}(n,\mathbb{C})$ 的辛结构 ω 满足
$$\omega(\boldsymbol{S}_1,\boldsymbol{S}_2)=\mathrm{Im}\,\mathrm{tr}\left(\boldsymbol{S}_1^\dagger\boldsymbol{S}_2\right), \tag{2.14}$$
其中 $\boldsymbol{S}_1,\boldsymbol{S}_2\in\mathrm{Sym}(n,\mathbb{C})$, $()^\dagger$ 为复矩阵的共轭转置.

2. 定义映射
$$\begin{aligned}\Phi\colon \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)&\to \mathrm{Sym}(n,\mathbb{C})\\ [\boldsymbol{A}]&\mapsto \boldsymbol{A}^\mathrm{T}\boldsymbol{A},\end{aligned} \tag{2.15}$$
验证: Φ 为良定 (与 $[\boldsymbol{A}]$ 的代表元选取无关) 的单射. [提示: 良定性显然. 对于酉矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$, 如果 $\boldsymbol{A}^\mathrm{T}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}^\mathrm{T}\boldsymbol{B}$, 则由酉矩阵的性质易知 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{-1}=\overline{\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{-1}}$, 从而 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{-1}\in\mathrm{O}(n)$, 这表明 $[\boldsymbol{A}]=[\boldsymbol{B}]$.]

我们来证明(2.15)中的映射 $\Phi\colon \mathcal{L}(\mathbb{C}^n) \to \mathrm{Sym}(n,\mathbb{C})$ 是拉格朗日浸入. 为此, 首先考虑 $\mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$ 的切空间以及 Φ 的切映射. 注意 $\mathcal{L}(\mathbb{C}^n)=\mathrm{U}(n)/\mathrm{O}(n)$ 是酉群 $\mathrm{U}(n)$ 的齐性空间, 从而由李群李代数的基础知识可知

$$T_{[\boldsymbol{I}]}\mathcal{L}(\mathbb{C}^n)=T_{\boldsymbol{I}}\left(\mathrm{U}(n)/\mathrm{O}(n)\right)\cong \mathfrak{u}(n)/\mathfrak{o}(n)\cong \mathrm{i}\,\mathrm{Sym}(n,\mathbb{R}),$$

其中 $\boldsymbol{I}$ 为 n 阶单位方阵, $\mathrm{Sym}(n,\mathbb{R})$ 为 n 阶实对称方阵之全体, $\mathrm{i}:=\sqrt{-1}$ 为虚数单位,

$$\begin{aligned}\mathfrak{u}(n)&:=\left\{\boldsymbol{X}\in\mathbb{C}^{n\times n}\,\middle|\,\boldsymbol{X}^{\dagger}=-\boldsymbol{X}\right\},\\ \mathfrak{o}(n)&=\left\{\boldsymbol{X}\in\mathbb{R}^{n\times n}\,\middle|\,\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}=-\boldsymbol{X}\right\}\end{aligned}$$

分别为李群 $\mathrm{U}(n),\mathrm{O}(n)$ 的李代数. 而对于一般的 $[\boldsymbol{A}]\in\mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$, 切空间

$$T_{[\boldsymbol{A}]}\mathcal{L}(\mathbb{C}^n)\cong \boldsymbol{A}\cdot T_{[\boldsymbol{I}]}\mathcal{L}(\mathbb{C}^n)=\{\boldsymbol{A}\boldsymbol{H}\mid \boldsymbol{H}\in\mathrm{i}\,\mathrm{Sym}(n,\mathbb{R})\}.$$

注意切空间的上述取法与 $[\boldsymbol{A}]$ 的代表元选取有关. 特别地,

$$\dim_{\mathbb{R}}\mathcal{L}(\mathbb{C}^n)=\dim_{\mathbb{R}}\mathrm{Sym}(n,\mathbb{R})=\frac{1}{2}\dim_{\mathbb{R}}\mathrm{Sym}(n,\mathbb{C}).\tag{2.16}$$

而我们更习惯通过如下方式

$$\begin{aligned}\mathrm{i}\,\mathrm{Sym}(n,\mathbb{R})&\to T_{[\boldsymbol{A}]}\mathcal{L}(\mathbb{C}^n)\\ \boldsymbol{H}&\mapsto \boldsymbol{A}\boldsymbol{H}\end{aligned}\tag{2.17}$$

将 $T_{[\boldsymbol{A}]}\mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$ 等同于 $\mathrm{i}\,\mathrm{Sym}(n,\mathbb{R})$. 此同构同样依赖 $[\boldsymbol{A}]$ 的代表元选取.

题 **2.20.** 记号承上. 对于 $[\boldsymbol{A}]\in\mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$,

1. 在切空间同构(2.17)意义下, 验证: (2.15)中的映射 Φ 在点 $[\boldsymbol{A}]$ 处的切映射 $\Phi_*^{[\boldsymbol{A}]}$ 满足

$$\begin{aligned}\Phi_*^{[\boldsymbol{A}]}\colon \mathrm{i}\,\mathrm{Sym}(n,\mathbb{R})&\to \mathrm{Sym}(n,\mathbb{C})\\ \boldsymbol{H}&\mapsto \boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{H},\end{aligned}\tag{2.18}$$

并注意上述 $\Phi_*^{[\boldsymbol{A}]}$ 与 $[\boldsymbol{A}]$ 的代表元选取无关. [提示: 由 $\Phi_*^{[\boldsymbol{A}]}(\boldsymbol{H})=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big|_{t=0}(\boldsymbol{A}+t\boldsymbol{A}\boldsymbol{H})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}+t\boldsymbol{A}\boldsymbol{H})$ 直接计算即可.]

2. 验证: 切映射 $\Phi_*^{[\boldsymbol{A}]}$ 是单射, 从而结合题2.19的第 2 问可知 $\Phi\colon \mathcal{L}(\mathbb{C}^n) \to \mathrm{Sym}(\mathbb{C}^n)$ 是嵌入子流形. [提示: 对于切向量 $\boldsymbol{H} \in \mathrm{i}\,\mathrm{Sym}(n,\mathbb{R})$, 注意 $\boldsymbol{A}$ 是酉矩阵, 容易验证 $\Phi_*^{[\boldsymbol{A}]}\boldsymbol{H} = \boldsymbol{0}$ 当且仅当

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{H}\boldsymbol{A}^\dagger = \overline{\boldsymbol{A}\boldsymbol{H}\boldsymbol{A}^\dagger},$$

从而当且仅当 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{H}\boldsymbol{A}^\dagger$ 是实对称方阵, 而实对称方阵可对角化且特征值全是实数. 再注意 $\boldsymbol{H}$ 酉相似于 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{H}\boldsymbol{A}^\dagger$, 故它们具有相同的特征值. 但是, $\boldsymbol{H} \in \mathrm{i}\,\mathrm{Sym}(n,\mathbb{R})$ 表明 $\boldsymbol{H}$ 的特征值为纯虚数 (包括 0). 因此 $\boldsymbol{H}$ 的特征值全为 0, 从而 $\boldsymbol{H} = \boldsymbol{0}$.]

3. 结合(2.14)与(2.18), 直接暴力验证映射(2.15)使得 $\mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$ 是 $\mathrm{Sym}(n,\mathbb{C})$ 的拉格朗日子流形. [提示: 注意运用矩阵的迹的运算性质 $\mathrm{tr}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}) = \mathrm{tr}(\boldsymbol{B}\boldsymbol{A})$.]

题 2.21. 记号承上. 设 ω 为(2.14)所给出的 $\mathrm{Sym}(n,\mathbb{C})$ 的辛结构.

1. 验证: $\mathrm{i}\,\mathrm{Sym}(n,\mathbb{R})$ 是 $\mathrm{Sym}(n,\mathbb{C})$ 的拉格朗日子空间.

2. 对于酉矩阵 $\boldsymbol{A}$, 验证:

$$L_{\boldsymbol{A}} := \left\{\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}\boldsymbol{A} \,\middle|\, \boldsymbol{X} \in \mathrm{i}\,\mathrm{Sym}(n,\mathbb{R})\right\}$$

   也是 $\mathrm{Sym}(n,\mathbb{C})$ 的拉格朗日子空间.

3. 对于切向量 $\boldsymbol{H} \in \mathrm{i}\,\mathrm{Sym}(n,\mathbb{R})$, 验证: (2.18)中的切映射 $\Phi_*^{[\boldsymbol{A}]}$ 满足

$$\Phi_*^{[\boldsymbol{A}]}\boldsymbol{H} = \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\left(\boldsymbol{A}\boldsymbol{H}\boldsymbol{A}^\dagger - \overline{\boldsymbol{A}\boldsymbol{H}\boldsymbol{A}^\dagger}\right)\boldsymbol{A},$$

   因此立刻看出切映射 $\Phi_*^{[\boldsymbol{A}]}$ 的像集落在拉格朗日子空间 $L_{\boldsymbol{A}}$ 当中, 进而再次验证 $\Phi^*\omega = 0$.

注 2.22. 除了本节所介绍的生成函数, 余法丛以及拉格朗日-格拉斯曼流形, 还有一类非常重要的拉格朗日子流形, 即 Liouville 可积系统的水平集, 详见后文3.3.1小节.

2.2 Darboux-Moser-Weinstein 理论

本节讨论辛流形的局部性质. 其中的一个重要结果是: *辛流形局部辛同胚于标准辛空间*. 具体地说, 对于 $2n$ 维辛流形 (M,ω) 上任意一点 p, 存在 p 附近的局部坐标 $(x^1,...,x^{2n})$, 使得在此局部坐标下 $\omega=\sum\limits_{i=1}^{n}\mathrm{d}x^i\wedge\mathrm{d}x^{n+i}$. 这正是所谓 **Darboux 定理**. 作为辛几何中的基本定理, 此定理表明辛流形的局部是平凡的, 即 “没有局部信息”.

上述定理的大致证明思路如下: 先随便取一个局部坐标卡 $\varphi\colon U\to\mathbb{R}^{2n}$, 记 ω_0 为 $\mathbb{R}^{2n}$ 的标准辛结构; 一般来说 $\varphi^*\omega_0\neq\omega$, 而我们要通过某种方式将映射 φ 光滑地 “形变” 到符合要求的样子. 其中涉及一个关键的技术细节, 它被叫做 **Moser 技巧**.

凭借 Moser 技巧及一些微分拓扑工具, 我们将对辛流形的局部性质有更深入的研究. 其中关于拉格朗日子流形的 **Weinstein 邻域定理**格外重要. 上述关于辛流形局部性质的理论被统称为 *Darboux-Moser-Weinstein 理论*.

2.2.1 同痕, 含时向量场, Cartan 公式

本小节介绍施展 Moser 技巧所需要的微分几何知识.

定义 2.23. 设 M 为光滑流形, $F\colon M\times\mathbb{R}\to M$ 为光滑映射. 如果对任意 $t\in\mathbb{R}$, 映射 $F_t\colon M\to M,\, p\mapsto F(p,t)$ 都是微分同胚, 并且 $F_0=\mathrm{id}_M$, 则称 F 是 M 的一个**同痕**(*isotopy*).

设 F 是 M 的一个同痕, 则对任意点 $p\in M$, 都有 M 上的光滑曲线 $t\mapsto F_t(p):=F(p,t)$. 流形 M 上的点 p 随时间变量 t 而变化, 可以考虑相应的速度向量场. 引入 (与时间变量 t 有关的) 切向量场

$$\begin{aligned}X_F\colon M\times\mathbb{R}&\to TM\\(p,t)&\mapsto X_F(t)|_p:=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}F_{t+s}\left(F_t^{-1}(p)\right)\bigg|_{s=0}\end{aligned}\tag{2.19}$$

称为沿 F 的 **(含时) 向量场**.

由定义知同痕 F 与其切向量场 X_F 满足微分方程

$$\frac{\mathrm{d}F_t(p)}{\mathrm{d}t}=X_F(t)|_{F_t(p)},\tag{2.20}$$

换言之, 对任意 $\varphi \in C^\infty(M)$ 以及 $t \in \mathbb{R}$, 成立

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\varphi \circ F_t) = (X_F(t)\varphi) \circ F_t. \tag{2.21}$$

反之, 由常微分方程理论 (解的局部存在性), 对于流形 M 上的 (含时) 向量场 $X\colon M \times \mathbb{R} \to TM$, 以及 $(p, t_0) \in M \times \mathbb{R}$, 都存在开邻域 $p \in U \subseteq M$ 以及 $\varepsilon > 0$, 以及光滑映射 $F\colon U \times (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon) \to M$, 使得对任意 $t \in (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$, $F_t\colon p \mapsto F(p, t)$ 都是从 U 到 $F_t(U)$ 的微分同胚, $F_{t_0} = \mathrm{id}_U$, 并且 F_t 满足(2.20)式. 上述 F_t 称为 (含时) 切向量场 $X(t)$ 生成的**流**.

注 **2.24.** 对于通常的切向量场 X(不含时间变量 t), 其生成的 (局部) 流 F_t 也记作 e^{tX}, 称为关于 X 的指数映射.

众所周知, 沿切向量场 X 的**李导数**

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_X\colon \Omega^k(M) &\to \Omega^k(M) \\ \omega &\mapsto \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\exp tX)^*\omega\bigg|_{t=0}. \end{aligned} \tag{2.22}$$

满足如下 **Cartan 公式**:

$$\mathcal{L}_X = i_X \circ \mathrm{d} + \mathrm{d} \circ i_X, \tag{2.23}$$

其中 $\mathrm{d}\colon \Omega^k(M) \to \Omega^{k+1}(M)$ 是外微分算子, 而

$$\begin{aligned} i_X\colon \Omega^{k+1}(M) &\to \Omega^k(M), \\ \omega &\mapsto X \lrcorner\, \omega \end{aligned}$$

是切向量场 X 的内乘算子, 其定义为

$$(i_X\omega)(X_1, X_2, \dots, X_k) = \omega(X, X_1, X_2, \dots, X_k). \tag{2.24}$$

我们以一个简单的求导公式来结束本小节:

引理 2.25. 设 M 为光滑流形, U 为 M 的非空开子集, I 为开区间, $F\colon U \times I \to M$ 为光滑映射, 满足对任意 $t \in I$, $F_t\colon U \to F_t(U)$, $p \mapsto F(p, t)$ 都是微分同胚. 记 $X_F(t)$ 为沿 F 的含时向量场. 则对任何微分

形式 $\omega \in \Omega^\bullet(M)$, 成立

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(F_t^*\omega\right) = F_t^*\left(\mathcal{L}_{X_F(t)}\omega\right). \tag{2.25}$$

证明. 给定 $t \in I$, 取 $\varepsilon > 0$ 使得 $I' := (t-\varepsilon, t+\varepsilon) \subseteq I$, 则对任意 $s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, 有如下交换图:

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "j_t"] \arrow[d, "F_{t+s}"'] & U \times I' \arrow[d, "\psi_s"] \\ M & U \times I \arrow[l, "F"'] \end{tikzcd}$$

即 $F_{t+s} = F \circ \psi_s \circ j_t$, 其中 $\begin{cases} j_t \colon p \mapsto (p,t) \\ \psi_s \colon (p,t) \mapsto (p, t+s) \end{cases}$. 此外还有 $F_t = F \circ j_t$.

再注意到, 对于 $p \in U$ 都有 $X_F(t)|_{p'} = F_*\left(\frac{\partial}{\partial s}\Big|_{(p,t)}\right)$, 其中 $p' := F_t(p)$, 因此

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(F_t^*\omega\right) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(F_{t+s}^*\omega\right)\Big|_{s=0} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(j_t^* \circ \psi_s^* \circ F^*\omega\right)\Big|_{s=0} = j_t^* \circ \mathcal{L}_{\frac{\partial}{\partial s}}\left(F^*\omega\right) \\ &= j_t^* \circ F^*\left(\mathcal{L}_{F_*\frac{\partial}{\partial s}}\omega\right) = (F \circ j_t)^*\left(\mathcal{L}_{X_F(t)}\omega\right) = F_t^*\left(\mathcal{L}_{X_F(t)}\omega\right), \end{aligned}$$

从而命题得证. □

2.2.2 Moser 技巧, Darboux 定理

有了上述准备, 我们先来证明 Darboux 定理:

定理 2.26. (Darboux定理) 设 ω, ω' 是光滑流形 M 上的两个辛形式, $p \in M$. 如果 $\omega|_p = \omega'|_p$, 则存在点 p 的邻域 U, 以及微分同胚 $f \colon U \to f(U)$, 使得

$$f^*(\omega') = \omega.$$

证明. (Moser 技巧). 对于每个 $t \in [0,1]$, 记 $\omega_t := (1-t)\omega + t\omega' \in \Omega^2(M)$. 我们将取点 p 的某个邻域 U, 并构造同痕 $F \colon U \times [0,1] \to M$, 使得

$$\begin{aligned} F_0 &= \mathrm{id}_U, \\ F_t^*\omega_t &= \omega, \quad \forall t \in [0,1], \end{aligned} \tag{2.26}$$

其中 $F_t(p) := F(p,t)$. 如果找到这样的 F, 则取 $f = F_1$ 即证明此定理.

接下来求解满足(2.26)的 F. 记 $X_F(t)$ 为 F 的含时向量场, 我们来考察 $X_F(t)$ 需要满足什么性质. 由(2.25)(2.26)式, 并注意 $\mathrm{d}\omega = \mathrm{d}\omega' = 0$ 以及 Cartan 公式(2.23), 有

$$\begin{aligned} 0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(F_t^*\omega_t\right) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(F_s^*\omega_t\right)\Big|_{s=t} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(F_t^*\omega_s\right)\Big|_{s=t} \\ &= F_t^*\left(\mathcal{L}_{X_F(t)}\omega_t + \omega' - \omega\right) \\ &= F_t^*\left(\mathrm{d}\left(X_F(t)\lrcorner\,\omega_t\right) + \omega' - \omega\right). \end{aligned}$$

又注意 $\mathrm{d}(\omega' - \omega) = 0$, 从而由庞加莱引理可知存在点 p 的邻域 U 以及 $\eta \in \Omega^1(U)$ 使得 $\omega' - \omega = \mathrm{d}\eta$; 适当调整 η, 不妨 $\eta|_p = 0$, 从而

$$0 = F_t^*\mathrm{d}\left(X_F(t)\lrcorner\,\omega_t + \eta\right).$$

于是只需要寻找满足如下 **Moser 方程**

$$X_F(t)\lrcorner\,\omega_t + \eta = 0, \qquad t \in [0,1]. \tag{2.27}$$

的含时向量场 $X_F(t)$ 即可.

断言: 这样的 $X_F(t)$ 在点 p 附近存在. 事实上, 此断言的正确性由 ω_t 的非退化性所保证. 具体来说, 由于辛形式 ω, ω' 处处非退化, 且 $\omega|_p = \omega'|_p$, 从而对每个 $t \in [0,1]$, $\omega_t|_p = \omega|_p$ 非退化, 于是 ω_t 在点 p 的某个 (与 t 有关的) 邻域内非退化. 注意闭区间 $[0,1]$ 的紧性, 用有限覆盖定理可知证明存在 p 的某个邻域 U 使得对任意 $t \in [0,1]$, ω_t 在 U 中处处非退化 (细节留给读者). 从而存在含时切向量场 $X_F\colon U \times [0,1] \to TM$ 满足(2.27).

注意 $\eta|_p = 0$, 所以上述断言中的 $X_F(t)$ 满足: 对任意 $t \in [0,1]$ 都有 $X_F(t)|_p = 0$. 所以曲线

$$\gamma\colon [0,1] \to M, \quad t \mapsto p,$$

即 $\gamma(t) \equiv p$, 是 $X_F(t)$ 的一条积分曲线. 从而由常微分方程理论, 可以证明存在 p 的邻域 U 以及 $F\colon U \times [0,1] \to M$ 使得 F 是含时切向量场 $X_F(t)$ 生成的流 (可以承认它, 或详见 [25] 的第 237 页). 由之前讨论, 如此得到的 F 显然满足(2.26)式, 定理得证. □

推论 2.27. 设 (M,ω) 是 $2n$ 维辛流形, 则对任意 $p \in M$, 存在 p 处的局部坐标卡 $\varphi\colon U \to \mathbb{R}^{2n}$, 使得 $\omega = \varphi^*\omega_0$, 其中 $\omega_0 = \sum_{i=1}^n \mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}x^{n+i}$ 是 $\mathbb{R}^{2n}$ 的标准辛结构.

证明. 这是定理2.26的直接推论, 留给读者. □

Darboux 定理可以给出辛流形的另一种等价定义. 首先, $2n$ 维标准辛空间 $(\mathbb{R}^{2n},\omega_0)$(及其开子集) 是辛流形; 如果光滑映射 $\varphi\colon \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^{2n}$ 满足 $\varphi^*\omega_0 = \omega_0$, 则称 φ 为辛映射. 于是由 Darboux 定理可以验证, 以下是辛流形的等价定义:

定义 2.28. 设 M 为第二可数 *Hausdorff* 空间, 如果存在 M 的一族开覆盖 $\{U_\alpha\}$ 以及连续映射 $\varphi_\alpha\colon U_\alpha \to \mathbb{R}^{2n}$, 使得 φ_α 是 U_α 与 $\varphi_\alpha(U_\alpha)$ 的同胚, 并且对任意 $U_\alpha \cap U_\beta \neq \varnothing$, 转移映射

$$\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}\colon \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \to \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$$

是辛映射, 则称 M 是辛流形.

如果空间 M 满足定义2.28, 则容易验证 $\varphi_\alpha^*(\omega_0) = \varphi_\beta^*(\omega_0)$ 在 $U_\alpha \cap U_\beta$ 中成立, 其中 ω_0 为 $\mathbb{R}^{2n}$ 的标准辛结构, 于是将这些 $\varphi_\alpha^*(\omega_0)$ 粘合起来就得到在 M 整体定义的满足定义2.1 的辛形式; 反之, 若 $\omega \in \Omega^2(M)$ 满足定义2.1, 则由 Darboux 定理易知存在形如定义2.28的坐标卡 $\{(U_\alpha,\varphi_\alpha)\}$. 可见辛流形与光滑流形、复流形一样, 其定义可用转移映射的语言写成统一形式:

光滑流形	转移映射 $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ 是**光滑**映射
复流形	转移映射 $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ 是**全纯**映射
辛流形	转移映射 $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ 是**辛**映射

运用 Moser 技巧, 我们还可以回答另一个有趣的问题. 我们回忆, 辛结构是某个 de Rham 上同调类 $[\omega] \in \mathrm{H}^2_{\mathrm{dR}}(M)$ 的代表元. 现在设 ω_0,ω_1 是光滑流形 M 上的两个辛结构, 如果 (M,ω_0) 与 (M,ω_1) 是辛同胚的, 则这两个辛结构所代表的上同调类显然相同, 即 $[\omega_0] = [\omega_1]$. 此结论反过来是否也成立? Moser 给出的答案是: 在一定的假设条件下, 逆命题也是对的.

定理 2.29. *(Moser).* 设 M 是紧流形, $\omega_0, \omega_1 \in \Omega^2(M)$ 是 M 上的两个辛结构, 满足 $[\omega_0] = [\omega_1] \in \mathrm{H}^2_{\mathrm{dR}}(M)$, 并且对任意 $t \in [0,1]$,

$$\omega_t := (1-t)\omega_0 + t\omega_1$$

非退化 (从而也是辛结构). 则存在同痕

$$F \colon M \times [0,1] \to M$$

使得对任意 $t \in [0,1]$ 都有 $F_t^* \omega_t = \omega_0$. 特别地, F_1 给出了 (M, ω_0) 与 (M, ω_1) 的辛同胚.

证明. 由 $[\omega_0] = [\omega_1]$ 可知, 存在 $\eta \in \Omega^1(M)$ 使得 $\omega_1 - \omega_0 = \mathrm{d}\eta$. 而 ω_t 的非退化性保证了 Moser 方程(2.27)

$$X_{F(t)} \lrcorner \omega_t + \eta = 0$$

的光滑解 $X_{F(t)}$ 存在唯一. 由 M 的紧性可知该含时向量场 $X_{F(t)}$ 生成的流可以整体定义, 即存在光滑映射

$$F \colon M \times [0,1] \to M$$

使得 $X_{F(t)}$ 是 F 的含时向量场 (先考虑 $X_{F(t)}$ 再 M 的每一点处局部生成的流, 再对 M 使用有限覆盖. 细节留给读者). 与 Darboux 定理 (定理2.26) 证明过程完全类似, 易知此 F 满足题设. 从而本定理得证. □

2.2.3 管状邻域, 相对 Moser 定理

为更进一步研究辛流形的局部性质, 我们需要一些微分拓扑. 对于光滑流形 M 的正则子流形 $M' \subseteq M$, 以及子流形上的一点 $p \in M'$, 则有**法空间**

$$N_pM' := T_pM / T_pM' \tag{2.28}$$

以及 M' 上的**法丛** (normal bundle)

$$N_{M/M'} := \coprod_{p \in M'} N_pM'. \tag{2.29}$$

注意 M' 也自然视为 $N_{M/M'}$ 的子流形, 其同构于 $N_{M/M'}$ 的零截面. 设 $V \supseteq M'$ 为 M' 在 $N_{M/M'}$ 中的一个邻域, 如果对任意 $p \in M'$, $V \cap N_pM'$ 都是线性空间 N_pM' 的凸子集, 则称 V 是 M' 的**凸邻域**.

定理 2.30. *(管状邻域定理). 设 M' 是光滑流形 M 的正则子流形, 则存在 M' 的邻域 $U \subseteq M$ 以及光滑映射 $\varphi\colon U \to N_{M/M'}$, 使得下图交换:*

$$\begin{tikzcd} U \arrow[rr, "\varphi"] & & N_{M/M'} \\ & M' \arrow[ul, "i"] \arrow[ur, "i_0"'] & \end{tikzcd}$$

并且 $\varphi\colon U \to V := \varphi(U)$ 是微分同胚, V 是 M' 的凸邻域.

此定理的证明详见任何一本微分拓扑教材, 这里从略. 满足上述定理条件的 U 称为子流形 M' 的**管状邻域** (tubular neighborhood). 由凸邻域的定义易知 M' 是 $V(\cong U)$ 的形变收缩, 从而有:

引理 2.31. *记号承上, 则对任意 $k \geq 0$, 嵌入映射 $i\colon M' \hookrightarrow U$ 诱导各阶 de Rham 上同调群同构:*

$$i^*\colon \mathrm{H}^{\ell}_{\mathrm{dR}}(U) \cong \mathrm{H}^{\ell}_{\mathrm{dR}}(M'). \tag{2.30}$$

证明. 由管状邻域的定义, 存在微分同胚 $\varphi\colon U \cong V \subseteq N_{M/M'}$. 凭借此微分同胚, 我们不妨在凸邻域 $V \subseteq N_{M/M'}$ 上考虑, 即, 将 U 等同于 V. 易知 $i_0^*\colon \mathrm{H}^{\ell}_{\mathrm{dR}}(V) \to \mathrm{H}^{\ell}_{\mathrm{dR}}(M')$ 是满同态, 于是我们只需再证明 i_0^* 是单同态. 为此我们用代数拓扑中的**链同伦**标准技术.

对于 $t \in [0,1]$, 考虑映射

$$\begin{aligned} \rho_t\colon V &\to V, \\ (x,v) &\mapsto (x,tv). \end{aligned}$$

V 的凸性使得该映射良定 (这正是 V 到 M' 的形变收缩). 此外, 易知

$$\rho_0 = i_0 \circ \pi, \qquad \rho_1 = \mathrm{id}_V, \tag{2.31}$$

其中 $\pi\colon N_{M/M'} \to M'$ 为丛投影, $i_0\colon M' \hookrightarrow N_{M/M'}$ 为零截面. 记 $X_\rho(t)$ 为沿

ρ_t 的含时向量场, 即

$$X_\rho(t)|_p := \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\Big|_{s=0}\rho_{t+s}(p) \in T_pV.$$

引入算子 $Q\colon \Omega^\ell(V) \to \Omega^{\ell-1}(V)$ 如下: 对于 $\omega \in \Omega^\ell(V)$,

$$Q\omega := \int_0^1 \rho_t^*\left(X_\rho(t)\lrcorner\,\omega\right)\mathrm{d}t, \tag{2.32}$$

则有

$$\begin{aligned}
&Q\mathrm{d}\omega + \mathrm{d}Q\omega \\
=& \int_0^1 \rho_t^*\left(X_\rho(t)\lrcorner\,\mathrm{d}\omega\right)\mathrm{d}t + \mathrm{d}\int_0^1 \rho_t^*\left(X_\rho(t)\lrcorner\,\omega\right)\mathrm{d}t \\
=& \int_0^1 \rho_t^*\left[\left(i_{X_\rho(t)}\circ \mathrm{d} + \mathrm{d}\circ i_{X_\rho(t)}\right)\omega\right]\mathrm{d}t \\
=& \int_0^1 \rho_t^*\left(\mathcal{L}_{X_\rho(t)}\omega\right)\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\rho_t^*\omega\right)\mathrm{d}t = \rho_1^*\omega - \rho_0^*\omega.
\end{aligned}$$

因此, 算子 Q 满足如下等式:

$$\rho_1^* - \rho_0^* = \mathrm{d}\circ Q - Q\circ \mathrm{d}, \tag{2.33}$$

示意图如下:

$$\begin{tikzcd}
\Omega^{\ell-1}(V) \arrow[r, "\mathrm{d}"] & \Omega^\ell(V) \arrow[r, "\mathrm{d}"] \arrow[dl, "Q"'] \arrow[d, "\rho_1^*-\rho_0^*"] & \Omega^{\ell+1}(V) \arrow[dl, "Q"] \\
\Omega^{\ell-1}(V) \arrow[r, "\mathrm{d}"] & \Omega^\ell(V) \arrow[r, "\mathrm{d}"] & \Omega^{\ell+1}(V)
\end{tikzcd}$$

于是, 对于任意 $[\omega] \in \mathrm{H}^\ell_{\mathrm{dR}}(V)$, 记 ω 为上同调类 $[\omega]$ 的一个代表元, 则由(2.31), (2.33)可知

$$\omega - \pi^*(i_0^*\omega) = \rho_1^*(\omega) - \rho_0^*(\omega) = \mathrm{d}(Q\omega) + Q(\mathrm{d}\omega) = \mathrm{d}(Q\omega),$$

从而 $[\omega] = \pi^*\left(i_0^*[\omega]\right)$, 这表明 $i_0^*\colon \mathrm{H}^\ell_{\mathrm{dR}}(V) \to \mathrm{H}^\ell_{\mathrm{dR}}(M')$ 是单同态, 从而得证. $\square$

利用上述引理与 Moser 技巧, 我们可以得到 Darboux 定理的如下推广:

定理 2.32. *(相对 Moser 定理).* 设 M' 是 M 的紧子流形, $i\colon M' \hookrightarrow M$ 为典范嵌入, ω_0, ω_1 为 M 上的两个辛形式. 如果

$$\omega_0|_p = \omega_1|_p, \quad \forall p \in M', \tag{2.34}$$

则存在 M' 的邻域 $U_0, U_1 \subseteq M$ 以及微分同胚 $\varphi\colon U_0 \to U_1$ 使得图表

$$\begin{tikzcd} U_0 \arrow[rr, "\varphi"] & & U_1 \\ & M' \arrow[ul, "i"] \arrow[ur, "i"'] & \end{tikzcd}$$

交换, 并且 $\varphi^*\omega_1 = \omega_0$.

特别地, 取 $M' = \{p\}$ 为独点集, 就得到 Darboux 定理 (定理2.26).

证明. 取 M' 管状邻域 $U \subseteq M$, 注意 $i^*(\omega - \omega') = 0$, 从而由引理(2.31)可知存在 $\mu \in \Omega^1(U)$ 使得

$$\omega_0 - \omega_1 = \mathrm{d}\mu.$$

此外, 易知可以要求 μ 额外满足 $\mu|_{M'} \equiv 0$. 对每个 $t \in [0,1]$, 记 $\omega_t := (1-t)\omega_0 + t\omega_1$, 适当缩小邻域 U, 不妨 ω_t 在 U 上总是非退化的, 从而为 U 上的辛形式. 设 $X(t)$ 是满足如下 **Moser 方程**

$$X(t) \lrcorner \omega_t + \mu = 0 \tag{2.35}$$

的含时向量场, 由 M' 的紧性可知存在 $X(t)$ 生成的流

$$\rho\colon U \times [0,1] \to M$$

使得 $\rho_t^*\omega_t = \omega_0$(这里不妨再适当缩小 U), 特别地 $\rho_1^*\omega_1 = \omega_0$. 此外, 由于 $\mu|_{M'} \equiv 0$, 从而易知 Moser 方程的解 $X(t)$ 满足 $X(t)|_p = 0, \forall p \in M'$, $t \in [0,1]$. 由此易知 $\rho_1|_{M' \cap U} = \mathrm{id}$. 取 $\varphi = \rho_1, U_0 = U, U_1 = \varphi(U)$ 即可得证. □

2.2.4 Weinstein 邻域定理

本节我们介绍一个与相对 Moser 定理 (定理2.32) 类似的定理:

定理 2.33. *(Weinstein 邻域定理, [46]).* 设 M' 是 M 的紧子流形, $i\colon M' \hookrightarrow M$ 为典范嵌入, ω_0, ω_1 为 M 上的两个辛形式. 如果 M' 关于辛形式 ω_0, ω_1 都是 M 的拉格朗日子流形, 即 $\dim M' = \frac{1}{2}\dim M$ 且

$$i^*\omega_0 = i^*\omega_1 = 0, \tag{2.36}$$

则存在 M' 的邻域 $U_0, U_1 \subseteq M$ 以及微分同胚 $\varphi\colon U_0 \to U_1$ 使得图表

$$\begin{tikzcd} U_0 \arrow[rr, "\varphi"] & & U_1 \\ & M' \arrow[ul, "i"] \arrow[ur, "i"'] & \end{tikzcd}$$

交换, 并且 $\varphi^*\omega_1 = \omega_0$.

在证明之前, 先注意此定理与相对 Moser 定理 (定理2.32) 的条件 (2.34), (2.36)的区别. 对于微分形式 $\omega \in \Omega^k(M)$ 以及 $p \in M'$, 注意 $\omega|_p \in \bigwedge^k T_p^* M$ 是 ω 在 p 处的值, 并不同于拉回形式 $i^*\omega$; 并且 $i^*\omega = 0$ 一般不能推出 $\omega|_p = 0,\ \forall p \in M'$. 于是这个定理并非相对 Moser 定理的显然推论.

我们先考察这个定理的线性代数版本. 设 (V, ω) 为辛空间, $L \subseteq V$ 为拉格朗日子空间, W 是 L 在 V 中的一个补空间 (不必是拉格朗日子空间), 则有一种典范的方式将 W 改造为 L 的拉格朗日补空间. 确切地说, 断言: 存在线性映射 $\mathcal{A}\colon W \to L$, 使得

$$W' := \{w + \mathcal{A}w \mid w \in W\}$$

是 V 的拉格朗日子空间, 且 $V = L \oplus W'$. 注意到, 这样的 $\mathcal{A}$ 需要满足

$$\begin{aligned} 0 &= \omega(w_1 + \mathcal{A}w_1, w_2 + \mathcal{A}w_2) \\ &= \omega(w_1, w_2) + \omega(w_1, \mathcal{A}w_2) + \omega(\mathcal{A}w_1, w_2), \end{aligned} \tag{2.37}$$

其中 w_1, w_2 取遍 W. 再注意辛形式 ω 诱导的线性映射

$$\begin{aligned} \iota\colon L &\to W^* \\ v &\mapsto (\iota_v\colon w \mapsto \omega(v, w)) \end{aligned}$$

是同构, 这是因为 $\dim L = \dim W^*$, 并且 $\ker \iota = L \cap W^\perp = L^\perp \cap W^\perp = (L + W)^\perp = \{0\}$. 因此对于任意 $w_1 \in W$, 存在唯一的 $\mathcal{A}w_1 \in L$, 使得在 W^*

中成立
$$-\frac{1}{2}\omega(w_1,\cdot)=\omega(\mathcal{A}w_1,\cdot),$$
容易验证映射 $w_1\mapsto\mathcal{A}w_1$ 是线性的, 并且确实满足(2.37).

下面给出定理2.33的线性代数版本.

引理 2.34. 设 V 为 $2n$ 维线性空间, $\omega_0,\omega_1\in\bigwedge^2(V^*)$ 是辛形式, $L\subseteq V$ 在 ω_0,ω_1 意义下都是拉格朗日子空间. 则对于 L 的任何一个补空间 W, 存在线性同构 $\mathcal{B}\in\mathrm{GL}(V)$ 使得
$$\mathcal{B}|_L=\mathrm{id}_L,\qquad \mathcal{B}^*\omega_1=\omega_0, \tag{2.38}$$
并且上述 $\mathcal{B}$ 的选取典范地依赖于 W.

证明. 首先按照上文所述的方式将 W 改造成 L 关于 ω_0,ω_1 的拉格朗日补空间, 分别记作 W_0,W_1. 类似地, ω_0 与 ω_1 分别自然诱导线性同构 $W_0\cong L^*$ 以及 $W_1\cong L^*$. 从而存在唯一的线性映射 $\mathcal{B}'\colon W_0\to W_1$ 使下述图表交换:
$$\begin{tikzcd} W_0 \arrow[rr, "\mathcal{B}'"] \arrow[dr, "\omega_0"'] & & W_1 \arrow[dl, "\omega_1"] \\ & L^* & \end{tikzcd},$$
换言之, $\mathcal{B}'$ 满足
$$\omega_1(\mathcal{B}'w_0,w)=\omega_0(w_0,w),\qquad \forall\, w_0\in W_0,\ w\in L.$$
注意 $V=W_0\oplus L$, 我们取线性算子 $\mathcal{B}\in\mathrm{End}(V)$ 如下:
$$\mathcal{B}(w_0+w)=\mathcal{B}'w_0+w,\qquad \forall\, w_0\in W_0,\ w\in L,$$
则易验证 $\mathcal{B}$ 是线性同构, 并且满足(2.38). 此外, 由以上讨论可知, $\mathcal{B}$ 的选取典范地依赖于 W. □

最后, 为证明定理2.33, 我们还需要一个微分拓扑的引理.

引理 2.35. *(Whitney 扩张引理).* 设 M 是 n 维光滑流形, $M'\subseteq M$ 是 k 维紧子流形, $k<n$, 并且任意 $p\in M'$, 都有线性同构 $\mathcal{B}_p\in\mathrm{GL}(T_pM)$ 使得 $\mathcal{B}_p|_{T_pM'}=\mathrm{id}_{T_pM'}$, 且 $\mathcal{B}_p$ 光滑地依赖于 p. 则存在 M' 的邻域 $U\subseteq M$

以及正则嵌入 $h\colon U \to M$ 使得

$$h|_{M'} = \mathrm{id}_{M'}, \qquad \mathrm{d}h_p = \mathcal{B}_p \quad \forall\, p \in M'.$$

证明. 取定 M 上的一个黎曼度量 g, 对于充分小的正数 $\varepsilon > 0$, 记 M' 的邻域

$$U_\varepsilon = \left\{ \exp_g(X)p \,\middle|\, p \in M', X \in T_pM', g(X,X)^{\frac{1}{2}} < \varepsilon \right\},$$

其中 $\exp_g$ 是关于黎曼度量 g 的指数映射. 由 M' 的紧性, 易知当 ε 充分小时, 对任意 $q \in U_\varepsilon$, 存在唯一的 $p \in M'$ 以及 $X \in (T_pM')^{\perp_g} \subseteq T_pM$ 使得 $q = \exp_g(X)p$, 这里的 "$\perp_g$" 是指关于内积 $g|_p$ 的正交补.

适当缩小 ε, 取 $U = U_{\varepsilon'} \subseteq U_\varepsilon$, 则取

$$\begin{aligned} h\colon U &\to M \\ q &\mapsto \exp_g(\mathcal{B}_pX)p \end{aligned}$$

即可, 其中 $p \in M', X \in T_pM$ 通过上述方式光滑地依赖于 p. □

定理2.33的证明. 取定 M 上的一个黎曼度量 g, 对每个 $p \in M'$, 记

$$W_p := (T_pM')^{\perp_g} \subseteq T_pM,$$

即 T_pM' 关于内积 $g|_p$ 的正交补. 对每个 $p \in M'$, 由引理2.34可知 W_p 诱导线性同构 $\mathcal{B}_p \in \mathrm{GL}(T_pM)$ 使得

$$\mathcal{B}_p|_{T_pM'} = \mathrm{id}_{T_pM'}, \qquad \mathcal{B}_p^*(\omega_1|_p) = \omega_0|_p.$$

此外, 由 $\mathcal{B}_p$ 选取的典范性可知其光滑地依赖于 $p \in M'$.

于是由 Whitney 扩张引理 (引理2.35) 可知存在 M' 的邻域 $U \subseteq M$ 以及正则嵌入 $h\colon U \to M$ 使得

$$h|_{M'} = \mathrm{id}_{M'}, \qquad \mathrm{d}h_p = \mathcal{B}_p, \quad \forall\, p \in M'.$$

进而可知, 对任意 $p \in M'$ 都有

$$(h^*\omega_1)|_p = (\mathrm{d}h_p)^*(\omega_1|_p) = \mathcal{B}_p^*(\omega_1|_p) = \omega_0|_p.$$

最后, 对 $h^*\omega_1$ 与 ω_0 使用相对 Moser 定理 (定理2.32), 可知存在 M' 的邻域 U_0(只需适当缩小 U) 以及正则嵌入 $f\colon U_0 \to U \subseteq M$ 使得

$$f|_{M'} = \mathrm{id}|_{M'}, \qquad f^*(h^*\omega_1) = \omega_0.$$

取 $\varphi\colon h \circ f$ 以及 $U_1 = \varphi(U_0)$ 即可. 定理2.33得证. □

我们知道光滑流形 M 的余切丛 T^*M 有自然的辛结构, M 作为 T^*M 的零截面, 是拉格朗日子流形. 而 Weinstein 邻域定理表明, 紧拉格朗日子流形 M' 的某个邻域总是辛同胚于余切丛 T^*M' 的零截面的某个邻域:

推论 2.36. 设 M' 是辛流形 (M,ω) 的紧拉格朗日子流形, 则存在 M' 的邻域 $U \subseteq M$, $V \subseteq T^*M'$, 以及微分同胚 $\varphi\colon U \to V$, 使得图表

$$\begin{tikzcd} U \arrow[rr, "\varphi"] & & V \\ & M' \arrow[ul, "i"] \arrow[ur, "i"'] & \end{tikzcd}$$

交换, 并且 $\varphi^*(\omega_0) = \omega$, 其中 ω_0 是余切丛 T^*M' 的典范辛结构.

证明. 由管状邻域定理, M' 的某个邻域 $U \subseteq M$ 微分同胚于法丛 $N_{M/M'}$ 的零截面的某个开邻域 V'. 注意 M' 是拉格朗日子流形, 通过辛结构 ω 可以自然将法丛 $N_{M/M'}$ 同构于余切丛 T^*M'. 记 $V \subseteq T^*M'$ 为 V' 在此同构下的像, 再记 $\omega_1 \in \Omega^1(U)$ 为 T^*M' 的典范辛结构关于该同构的拉回. 最后再对 U 上的两个辛结构 ω, ω_1 使用 Weinstein 邻域定理即可. □

2.3 Kähler 流形

Kähler 流形是黎曼流形、复流形与辛流形三者的完美融合, 不仅是复几何中的重要研究对象, 也与辛几何联系密切, 是辛流形的重要例子. 本节先介绍复几何的基本语言, 然后介绍 Kähler 流形的基本概念与性质.

2.3.1 近复结构与复结构

在1.5.2小节, 我们知道辛空间 (V,ω) 总存在与辛结构正定相容的复结构 J, 使得 (V,ω,J) 为 Kähler 空间. 作为辛空间的"整体化", 辛流形也有类似结论, 这将沟通**辛几何**与**复几何**. 首先从复结构说起.

定义 2.37. 对于光滑流形 M 以及 M 上的 $(1,1)$-型张量 J, 如果对任意 $p \in M$,

$$J_p \in T_pM \otimes T_p^*M \cong \mathrm{End}(T_pM) \text{ 满足 } J_p^2 = -\mathrm{id}_{T_pM},$$

则称 J 是 M 的一个**近复结构** *(almost complex structure)*, (M,J) 为**近复流形**.

由上述定义可知 J 是 M 的近复结构当且仅当在每一点 $p \in M$ 处, J_p 是切空间 T_pM 的复结构, 从而近复流形一定是偶数维流形.

复流形一定是近复流形. 若 M 是复流形, 取 M 的一族全纯坐标卡 $\{\varphi_\alpha\colon U_\alpha \to \mathbb{C}^n\}$, 记 J_0 是 $\mathbb{C}^n \cong \mathbb{R}^{2n}$ 的标准复结构 (见1.5.1小节), 则 $\{\varphi_\alpha^* J_0\}$ 可粘合为在 M 整体定义的 $(1,1)$-张量场 J, 此 J 为 M 的近复结构. 注意到, 在复流形 M 的全纯局部坐标 $(z^1, z^2, ..., z^n) = (x^1, ..., x^n; y^1, ..., y^n)$ 下, 张量场 J 的各分量系数均为常数.

定义 2.38. 对于辛流形 (M,ω) 的近复结构 J, 如果对任意切向量场 $X, Y \in \mathrm{Vect}(M)$ 都成立

$$\omega(JX, JY) = \omega(X,Y),$$

则称 J 是 ω-相容的; 此外, 如果 J 是 ω-相容的, 并且

$$g(X,Y) := \omega(X, JY) \tag{2.39}$$

是 M 上的黎曼度量, 则称近复结构 J 是 ω-正定相容的.

这几乎照搬定义1.50. 可以验证, 若复结构 J 是 ω-相容的, 则(2.39)所定义的 $(0,2)$-型张量场 g 总是对称的; 从而 J 是 ω-正定相容的当且仅当 g 正定.

性质 2.39. 辛流形 (M,ω) 总存在 ω-正定相容的近复结构.

特别地, 辛流形一定是近复流形.

证明. 众所周知, 任何光滑流形上都存在黎曼度量. 任取 M 的一个黎曼度

量 γ, 然后仿照(1.33)的方法即可给出 ω-正定相容的近复结构 J. 细节从略, 留给读者练习. □

至此, 光滑流形 M 上已有三种结构: 辛结构 ω, 近复结构 J 以及黎曼度量 g. 这之中的任何两者都可谈论某种 "相容性". 我们总结如下表:

资料	相容性条件	产物	可积性问题
(ω, J)	$\omega(JX, TY) = \omega(X, Y)$ $\omega(X, JX) > 0,\ X \neq 0$	$g(X, Y) := \omega(X, JY)$ 是黎曼度量	g 是否平坦?
(g, J)	$g(JX, JY) = g(X, Y)$ (J 是 g-正交的)	$\omega(X, Y) := g(JX, Y)$ 是非退化 2-形式	ω 是否为闭形式?
(ω, g)	(极分解)	近复结构 J	J 是否 "可积"?

然而一般来说, *近复流形未必是复流形*. 近复流形 (M, J) 是复流形当且仅当存在 M 的一族局部坐标卡, 使得 J 在该局部坐标下的各分量系数都是常数. 如果 J 满足上述性质, 则称近复结构 J 是**可积**的. 可积的近复结构也叫**复结构**.

为研究近复结构何时是复结构, 引入如下张量:

定义 2.40. *对于近复流形 (M, J), 以及切向量场 $X, Y \in \mathrm{Vect}(M)$, 记切向量场*

$$\mathcal{N}_J(X, Y) = [JX, JY] - J[X, JY] - J[JX, Y] - [X, Y], \tag{2.40}$$

其中 $[,]$ 是切向量场通常的李括号. 则可以验证 $\mathcal{N}_J$ 是 M 上的 $(1, 2)$-型张量场, 该张量场称为近复结构 J 的 ***Nijenhuis* 张量**.

题 **2.41.** *验证上述 $\mathcal{N}_J$ 的如下基本性质:*

1. 对任意切向量场 $X, Y \in \mathrm{Vect}(M)$ 都有

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_J(Y, X) &= -\mathcal{N}_J(X, Y), \\ \mathcal{N}_J(JX, JY) &= -\mathcal{N}_J(X, Y), \end{aligned}$$

   特别地, $\mathcal{N}_J(X, X) = \mathcal{N}_J(X, JX) = 0$.

2. 对任意切向量场 $X, Y \in \mathrm{Vect}(M)$ 以及光滑函数 $f \in C^\infty(M)$ 都有

$$\mathcal{N}_J(fX, Y) = f\mathcal{N}_J(X, Y) = \mathcal{N}_J(X, fY),$$

从而 J 确实是 M 上的张量场.

3. 若近复结构 J 可积 (即在某局部坐标下 J 的各分量系数都是常数), 则 $\mathcal{N}_J \equiv 0$.

题 **2.42.** 若近复结构 J 在 M 某局部坐标 $(v^1, v^2, ..., v^m)$ 具有表达式

$$J = J^i_j \frac{\partial}{\partial v^i} \otimes \mathrm{d}v^j,$$

则 Nijenhuis 张量在该局部坐标下的表达式为 $\mathcal{N}_J = (\mathcal{N}_J)^k_{ij} \frac{\partial}{\partial v^k} \otimes \mathrm{d}v^i \otimes \mathrm{d}v^j$, 其中

$$(\mathcal{N}_J)^k_{ij} = \left(\partial_i J^k_\ell - \partial_\ell J^k_i\right) J^\ell_j - \left(\partial_j J^k_\ell - \partial_\ell J^k_j\right) J^\ell_i.$$

[提示: 直接计算验证即可, 注意 $J^2 = \mathrm{id}$ 意味着 $J^\ell_j J^j_i = -\delta^\ell_i$, 两边求偏导得 $\partial_k J^\ell_j \cdot J^j_i + J^\ell_j \partial_k J^j_i = 0$.]

定理 2.43. (Newlander-Nirenberg). 设 J 是光滑流形 M 的近复结构, 则

$$J\text{ 可积} \quad \Longleftrightarrow \quad \text{Nijenhuis 张量 } \mathcal{N}_J \equiv 0.$$

必要性显然; 充分性的证明过程复杂, 需要较深的分析工具, 这里从略, 感兴趣者移步原文献 [32], 或参考 Demailly[14] 第 8.11 节. 事实上, 近复结构 J 的可积性有多种不同版本的充分必要条件 (将在后文介绍), 这导致 Newlander-Nirenberg 定理有多种不同的版本. 若假定 M 是实解析流形, 并且复结构 J 是实解析张量, 则相应版本的 Newlander-Nirenberg 定理有初等证明, 只需用到分布可积性的 Frobenius 定理的解析版本, 细节可见各类复几何教材, 例如 Voison[45] 第 2.2.3 节.

推论 2.44. 二维可定向曲面具有复结构.

这很早以前就众所周知, 但用辛结构与近复结构的知识再证一遍也无妨.

证明. 对于 2 维可定向曲面 M, M 上的任何一个体积形式 ω 都使得 (M,ω) 是辛流形; 任取 ω-正定相容的近复结构 J, 注意 $\mathcal{N}_J(X,JX)\equiv 0$, 且 X 与 JX 构成 TM 的整体标架, 因此 $\mathcal{N}_J\equiv 0$, 从而由 Newlander-Nirenberg 定理可知 J 是 M 的复结构. □

2.3.2 复切丛, (p,q)-形式, J-全纯曲线

依然从 $2n$ 维近复流形 (M,J) 谈起, 交代一些复几何中众所周知的记号. 对于每一点 $p\in M$, 对切空间 T_pM(注意这是 $2n$ 维 $\mathbb{R}$-线性空间) 作类似(1.27)-(1.28)的操作:

- $T_{p,\mathbb{C}}M := T_pM\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{C}$ 为切空间 T_pM 的复化, 这是 $2n$ 维 $\mathbb{C}$-向量空间. 记
$$T_{\mathbb{C}}M := \coprod_{p\in M} T_{p,\mathbb{C}}M,$$
这是 M 上的秩为 $2n$ 的复向量丛, 称为**复切丛**.
$$\mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}(M) := \Gamma(M,T_{\mathbb{C}}M)\cong \mathrm{Vect}(M)\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{C}$$
为 $T_{\mathbb{C}}M$ 的光滑截面之全体, 其中的元素称为 M 上的**复切向量场**.

- 将近复结构 $J_p\in\mathrm{End}(T_pM)$ 自然地 $\mathbb{C}$-线性延拓为 $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(T_{p,\mathbb{C}}M)$ 中的元素, 延拓后仍记作 J_p. 则 J_p 具有特征值 $\pm\mathrm{i}$, 相应的特征子空间分别记作:
$$\begin{aligned} T_{(1,0),p}M &:= \{\boldsymbol{v}\in T_{p,\mathbb{C}}M \mid J_p\boldsymbol{v}=\mathrm{i}\boldsymbol{v}\} = \{\boldsymbol{v}-\mathrm{i}J_p\boldsymbol{v} \mid \boldsymbol{v}\in T_{p,\mathbb{C}}M\}, \\ T_{(0,1),p}M &:= \{\boldsymbol{v}\in T_{p,\mathbb{C}}M \mid J_p\boldsymbol{v}=-\mathrm{i}\boldsymbol{v}\} = \{\boldsymbol{v}+\mathrm{i}J_p\boldsymbol{v} \mid \boldsymbol{v}\in T_{p,\mathbb{C}}M\}, \end{aligned}$$
分别称为 M 在点 p 处的 $(1,0)$**-切空间**与 $(0,1)$**-切空间**, 它们都是 n 维 $\mathbb{C}$-线性空间. 再记相应的复向量丛
$$T_{1,0}M := \coprod_{p\in M} T_{(1,0),p}M, \qquad T_{0,1}M := \coprod_{p\in M} T_{(0,1),p}M,$$
分别称为 M 上的 $(1,0)$**-切丛**与 $(0,1)$**-切丛**. 其上的光滑截面之全体分别记作
$$\mathrm{Vect}_{1,0}(M) := \Gamma(M,T_{1,0}M), \qquad \mathrm{Vect}_{0,1}(M) := \Gamma(M,T_{0,1}M),$$

上述两个空间中的元素分别称为 M 上的 $(1,0)$-**切向量场**与 $(0,1)$-**切向量场**.

显然有如下复向量丛同构:

$$T_{\mathbb{C}}M \cong T_{1,0}M \oplus T_{0,1}M. \tag{2.41}$$

此外, 也容易证明以下:

题 2.45. 设 (M,J) 为 $2n$ 维近复流形.

1. 近复结构 J 使得 TM 具有复向量丛结构. 在此意义下,
$$\begin{aligned}\pi_{1,0}\colon TM &\to T_{1,0}M\\ X &\mapsto \frac{1}{2}(X - \mathrm{i}JX)\end{aligned}$$
诱导了复向量丛同构 $TM \cong T_{1,0}M$.

2. 注意 $\mathbb{C}$ 上的复数共轭运算 $z \mapsto \bar{z}$, 自行定义复切空间 $T_{p,\mathbb{C}}M := T_pM \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ 上的共轭运算, 进而定义复向量丛 $T_{1,0}M$ 与 $T_{0,1}M$ 的共轭丛, 分别记作 $\overline{T_{1,0}M}$ 与 $\overline{T_{0,1}M}$, 并验证复向量丛同构.
$$\overline{T_{1,0}M} \cong T_{0,1}M, \qquad \overline{T_{0,1}M} \cong T_{1,0}M.$$

如果 J 可积 (即 (M,J) 是复流形), 取复坐标 $z^1, z^2, ..., z^n$, 其中

$$z^i := x^i + \mathrm{i}y^i, \quad i = 1,2,...,n, \tag{2.42}$$

在此坐标下, 近复结构 J 满足

$$J\frac{\partial}{\partial x^i} = \frac{\partial}{\partial y^i}, \quad J\frac{\partial}{\partial y^i} = -\frac{\partial}{\partial x^i}. \tag{2.43}$$

此时引入复切向量

$$\frac{\partial}{\partial z^i} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x^i} - \mathrm{i}\frac{\partial}{\partial y^i}\right), \qquad \frac{\partial}{\partial \bar{z}^i} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x^i} + \mathrm{i}\frac{\partial}{\partial y^i}\right), \tag{2.44}$$

则容易验证 $\{\frac{\partial}{\partial z^1}, ..., \frac{\partial}{\partial z^n}\}$ 与 $\{\frac{\partial}{\partial \bar{z}^1}, ..., \frac{\partial}{\partial \bar{z}^n}\}$ 分别构成 $T_{1,0}M$ 与 $T_{0,1}M$ 的 (局部) 标架. 在此局部坐标下, M 上的 $(1,0)$-切向量场都形如

$$X = \sum_{i=1}^{n} X^i \frac{\partial}{\partial z^i},$$

其中 X^i 为光滑函数. 于是容易验证: 若近复结构 J 可积, 则对任意 $X, Y \in \mathrm{Vect}_{1,0}(M)$, $[X,Y] \in \mathrm{Vect}_{1,0}(M)$, 其中 $[,]$ 是切向量场的李括号, 自然 $\mathbb{C}$-线性延拓至复切向量场上.

题 **2.46.** 对于近复流形 (M, J), 证明以下两者等价:

1. $\forall X, Y \in \mathrm{Vect}_{1,0}(M)$, $[X,Y] \in \mathrm{Vect}_{1,0}(M)$.

2. Nijenhuis 张量 $\mathcal{N}_J \equiv 0$.

[提示: 注意到 (1, 0)-切向量场 X 必形如 $X = X' - \mathrm{i}JX'$, 其中 $X' \in \mathrm{Vect}(M)$, 同理 $Y = Y' - \mathrm{i}JY'$. 由 $[X,Y] \in \mathrm{Vect}_{1,0}(M)$ 可知 $J[X,Y] = \mathrm{i}[X,Y]$. 将此式中的 X, Y 用实切向量场 X', Y' 表示, 并比较实部与虚部, 即可发现 Nijenhuis 张量 $\mathcal{N}_J$. 这是 Nijenhuis 张量(2.40)的引入动机.]

注 **2.47.** 上题的条件 (1) 也可简记为 $[T_{1,0}M, T_{1,0}M] \subseteq T_{1,0}M$, 即 $T_{1,0}M$ 作为 $T_{\mathbb{C}}M$ 的分布, 满足 Frobenius 可积性条件. 若 M 是实解析流形, 则由解析版本的 Frobenius 可积性定理可以证明此时 J 可积, 从而证明 Newlander-Nirenberg 定理的实解析情形.

接下来引入 $2n$ 维近复流形 (M, J) 上的复微分形式. 设 $p \in M$ 为 M 上的一点.

- $T^*_{p,\mathbb{C}}M := T^*_pM \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ 为余切空间的复化, 记

$$T^*_{\mathbb{C}}M := \coprod_{p \in M} T^*_{p,\mathbb{C}}M,$$

  这是 M 上的秩为 $2n$ 的复向量丛, 称为**复余切丛**. 对于 $k \in \mathbb{N}^*$, 称 $\bigwedge^k(T^*_{\mathbb{C}}M)$ 为 M 上的复化 k-形式丛, 这是秩为 $\binom{2n}{k}$ 的复向量丛, 其光滑截面称为**复 k-形式**; 其光滑截面之全体记作

$$\Omega^k(M, \mathbb{C}) := \Gamma\left(M, \bigwedge^k(T^*_{\mathbb{C}}M)\right) \cong \Omega^k(M) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}.$$

- 近复结构 J 也自然视为 $T^*_{p,\mathbb{C}}M$ 上的线性变换, 此线性变换具有特征值 $\pm\mathrm{i}$. 此时

$$T^*_{p,\mathbb{C}}M \cong T^*_{(1,0),p}M \oplus T^*_{(0,1),p}M,$$

其中 $T^*_{(1,0),p}M$ 与 $T^*_{(0,1),p}M$ 分别为 J 的属于特征值 $\mathrm{i}, -\mathrm{i}$ 的特征子空间. 对于 $p, q \in \mathbb{N}^*$, 记

$$\bigwedge^{p,q}(T^*_{\mathbb{C}}M) := \left(\bigwedge^p T^*_{1,0}M\right) \wedge \left(\bigwedge^q T^*_{0,1}M\right),$$

称为 M 上的光滑 (p,q)**-形式丛**, 这是 M 上的秩为 $\binom{n}{p}\binom{n}{q}$ 的复向量丛, 其光滑截面称为 (p,q)**-形式**, 再记

$$\Omega^{p,q}(M) := \Gamma\left(M, \bigwedge^{p,q}(T^*_{\mathbb{C}}M)\right)$$

为 M 上的光滑 (p,q)-形式之全体. 容易验证, 对任意 $k \geq 0$ 都有

$$\begin{aligned} \bigwedge^k(T^*_{\mathbb{C}}M) &= \bigoplus_{\substack{p+q=k \\ p,q\geq 0}} \bigwedge^{p,q}(T^*_{\mathbb{C}}M), \\ \Omega^k(M,\mathbb{C}) &= \bigoplus_{\substack{p+q=k \\ p,q\geq 0}} \Omega^{p,q}(M). \end{aligned}$$

若 (M,J) 是复流形, 取复坐标 $z^i = x^i + \mathrm{i}y^i$ $(i = 1,2,...,n)$, 并记 $\bar{z}^i := x^i - \mathrm{i}y^i$, 则 (p,q)-形式 $\omega \in \Omega^{p,q}M$ 在此局部坐标下形如

$$\begin{aligned} \omega &= \sum_{|I|=p,\,|J|=q} \omega_{I,J} \mathrm{d}z^I \wedge \mathrm{d}\bar{z}^J \\ &:= \sum_{\substack{1\leq i_1<\cdots<i_p\leq n \\ 1\leq j_1<\cdots<j_q\leq n}} \omega_{i_1\cdots i_p j_1\cdots j_q} \mathrm{d}z^{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}z^{i_p} \wedge \mathrm{d}\bar{z}^{j_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}\bar{z}^{j_q}, \end{aligned}$$

其中 $\omega_{I,J}$ 是 (局部定义的) 复值光滑函数.

最后介绍近复流形之间的全纯映射.

定义 2.48. 设 $f\colon (M,J) \to (M',J')$ 是近复流形之间的光滑映射, 如果切映射 $f_*\colon T_pM \to T_{f(p)M'}$ 是复线性映射, 即

$$f_* \circ J = J' \circ f_*,$$

则称 f 是**全纯映射**. 特别地, 从 (M,J) 到 $\mathbb{C}$ 的全纯映射称为 J**-全纯函数**.

例如, 如果 (M,J) 是复流形, 则复坐标 $z^1, z^2, ..., z^n$ 都是局部定义的 J-全纯函数, 并且 $\mathrm{d}z^1, ..., \mathrm{d}z^n$ 是 $\mathbb{C}$-线性无关的, 从而 $\mathrm{d}z^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}z^n \neq 0$. 事实上, 容易证明:

题 2.49. 设 (M,J) 是 $2n$ 维近复流形, 则 J 可积 $\iff$ 对任意 $p\in M$, 在 p 的某邻域 U 上存在 J-全纯函数 $z^1,\dots,z^n$, 使得 $\mathrm{d}z^1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}z^n\neq 0$ 在 U 上恒成立.

[提示: 只证 $\Leftarrow$. 注意到 z^i 是 J-全纯函数 $\Leftrightarrow$ $\mathrm{d}z^i$ 是 $(1,0)$-形式, 于是 $0\neq \mathrm{d}z^1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}z^n\in\Omega^{n,0}(U)$. 取复共轭得 $0\neq\mathrm{d}\bar{z}^1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}\bar{z}^n\in\Omega^{0,n}(U)$. 从而

$$\left(\mathrm{d}z^1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}z^n\right)\wedge\left(\mathrm{d}\bar{z}^1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}\bar{z}^n\right)\neq 0.$$

记 $z^i=x^i+\mathrm{i}y^i$, 其中 x^i 与 y^i 分别为函数 z^i 的实部与虚部, 注意 $\mathrm{d}z^i\wedge\mathrm{d}\bar{z}^i=-2\mathrm{i}\mathrm{d}x^i\wedge\mathrm{d}y^i$, 从而推出 $\mathrm{d}x^1\wedge\mathrm{d}y^1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^n\wedge\mathrm{d}y^n\neq 0$, 因此 $\mathrm{d}x^1,\dots,\mathrm{d}x^n,\mathrm{d}y^1,\dots,\mathrm{d}y^n$ 是 $\mathbb{R}$-线性无关的, 从而由反函数定理可知 $x^1,\dots,x^n;y^1,\dots,y^n$ 构成 M 的一族局部坐标, 并且在此坐标下 J 的各分量系数为常数, 从而 J 可积.]

注 2.50. 上题表明, 近复结构 J 可积当且仅当局部存在 “足够多的”J-全纯函数. 然而, 可以证明, 一般的近复流形并不存在 J-全纯函数, 局部上也不存在.

辛流形 (M,ω) 必存在 ω-正定相容的近复结构 J. 近复流形上一般没有 J-全纯函数, 但是有很多 “J-全纯曲线”. 所谓 **J-全纯曲线**, 也叫**伪全纯曲线**, 是指从 $\mathbb{C}$ 到 (M,J) 的全纯映射; 此概念由 Gromov 引入, 此后成为研究辛几何的重要工具.

2.3.3 $\bar\partial$ 算子, Dolbeault 上同调

设 (M,J) 为 $2n$ 维近复流形, 将外微分算子

$$\mathrm{d}\colon\Omega^\bullet(M)\to\Omega^{\bullet+1}(M)$$

自然地 $\mathbb{C}$-线性延拓为 $\mathrm{d}\colon\Omega^\bullet(M,\mathbb{C})\to\Omega^{\bullet+1}(M,\mathbb{C})$, 并考察其在 (p,q)-形式上的作用.

引理 2.51. 设 (M,J) 为 $2n$ 维近复流形, 则对任意 $p,q\geq 0$,

$$\mathrm{d}\Omega^{p,q}(M)\subseteq\Omega^{p+2,q-1}(M)\oplus\Omega^{p+1,q}(M)\oplus\Omega^{p,q+1}(M)\oplus\Omega^{p-1,q+2}(M).$$

证明. 记 $k:=p+q$, 则对于 $\alpha\in\Omega^{p,q}(M)$ 以及切向量场 $X_0,X_1,\dots,X_p\in$

$\mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}(M)$, 由众所周知的外微分公式

$$(\mathrm{d}\alpha)(X_0, X_1, ..., X_k) = \sum_{i=0}^{k}(-1)^i X_i(\alpha(X_0, ..., \widehat{X}_i, ..., X_k)) + \sum_{0\leq i<j\leq k}(-1)^{i+j}\alpha([X_i, X_j], X_0, ..., \widehat{X}_i, ..., \widehat{X}_j, ..., X_k) \tag{2.45}$$

可以看出, 如果 $X_0, ..., X_k$ 之中有超过 $p+2$ 个 $(1,0)$-向量, 或者有超过 $q+2$ 个 $(0,1)$-向量, 则 $(\mathrm{d}\alpha)(X_0, X_1, ..., X_k) = 0$. 这表明 $\mathrm{d}\alpha$ 只可能有 $(p+2, q-1), (p+1, q), (p, q+1)$ 以及 $(p-1, q+2)$-分量, 引理得证. □

也可以从另一个角度来理解上述引理. 取 $\{\theta^1, ..., \theta^n\}$ 为 $(1,0)$-形式丛的一组局部标架, 则 $\{\overline{\theta}^1, ..., \overline{\theta}^n\}$ 是 $(0,1)$-形式丛的一组局部标架. 在此局部标架下, $\alpha \in \Omega^{p,q}(M)$ 可以表示为

$$\alpha = \sum_{\substack{|I|=p\\|J|=q}} \alpha_{I,J}\theta^I \wedge \overline{\theta}^J,$$

其中 $I = (i_1, ..., i_p), J = (j_1, ..., j_q)$ 为多重指标, $\theta^I = \theta^{i_1} \wedge \cdots \wedge \theta^{i_p}$, $\overline{\theta}^J$ 也类似, $\alpha_{I,J}$ 为 M 上的 (局部) 光滑函数. 注意

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\theta^i, \mathrm{d}\overline{\theta}^j &\in \mathrm{d}\Omega^1(M, \mathbb{C}) \subseteq \Omega^2(M, \mathbb{C}) \\ &= \Omega^{2,0}(M) \oplus \Omega^{1,1}(M) \oplus \Omega^{0,2}(M),\end{aligned}$$

再注意外微分运算的 Leibniz 法则

$$\mathrm{d}(\omega \wedge \eta) = \mathrm{d}\omega \wedge \eta + (-1)^{\deg \omega} \wedge \mathrm{d}\eta,$$

容易验证引理2.51(细节留给读者).

定义 2.52. 对于 $2n$ 维近复流形 (M, J), 定义算子

$$\begin{aligned}\partial &\colon \Omega^{p,q}(M) \to \Omega^{p+1,q}(M), \\ \bar{\partial} &\colon \Omega^{p,q}(M) \to \Omega^{p,q+1}(M)\end{aligned}$$

如下: 对于 $\alpha \in \Omega^{p,q}(M)$, $\partial\alpha, \bar{\partial}\alpha$ 分别是 $\mathrm{d}\alpha$ 的 $(p+1, q)$-分量与 $(p, q+1)$-分量.

当 (M, J) 是复流形时, 取复坐标 $z^1, ..., z^n$, 则对于 (p, q)-形式

$$\alpha = \sum_{\substack{|I|=p \\ |J|=q}} \alpha_{I,J} \mathrm{d}z^I \wedge \mathrm{d}\bar{z}^J,$$

容易验证算子 $\partial, \bar{\partial}$ 具有表达式

$$\begin{aligned}
\partial\alpha &= \sum_{\substack{|I|=p \\ |J|=q}} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \alpha_{I,J}}{\partial z^i} \mathrm{d}z^i \wedge \mathrm{d}z^I \wedge \mathrm{d}\bar{z}^J, \\
\bar{\partial}\alpha &= \sum_{\substack{|I|=p \\ |J|=q}} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \alpha_{I,J}}{\partial \bar{z}^j} \mathrm{d}\bar{z}^j \wedge \mathrm{d}z^I \wedge \mathrm{d}\bar{z}^J,
\end{aligned}$$

其中 $\frac{\partial}{\partial z^i}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}^j}$ 见(2.44)式; 并且有

$$\mathrm{d} = \partial + \bar{\partial}.$$

而对于一般的近复流形 (M, J), 等式 $\mathrm{d} = \partial + \bar{\partial}$ 未必成立.

定理 2.53. (Newlander-Nirenberg). *设 (M, J) 为 $2n$ 维近复流形, 则以下等价:*

1. *近复结构 J 可积.*
2. *局部存在 J-全纯函数 $z^1, ..., z^n$ 使得 $\mathrm{d}z^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}z^n \neq 0$ 恒成立.*
3. *$[T_{1,0}M, T_{1,0}M] \subseteq T_{1,0}M$.*
4. *$\mathcal{N}_J \equiv 0$.*
5. *$\mathrm{d} = \partial + \bar{\partial}$.*

证明. (1)⇔(2): 见题2.49. (1)⇔(4): 见定理2.43. (3)⇔(4): 见题2.46. (1)⇒(5): 复坐标下直接验证即可. 只需再证明 (5)⇒(3).

如果 $\mathrm{d} = \partial + \bar{\partial}$, 则对任意 $\theta \in \Omega^{0,1}(M)$, $\mathrm{d}\theta$ 没有 $(2, 0)$-分量, 从而对任意 $X, Y \in \mathrm{Vect}_{1,0}(M)$, $(\mathrm{d}\theta)(X, Y) = 0$. 另一方面,

$$(\mathrm{d}\theta)(X, Y) = X(\theta(Y)) - Y(\theta(X)) - \theta([X, Y]) = -\theta([X, Y]),$$

即对任意 $(0,1)$-形式 θ, $\theta([X,Y])=0$, 这表明切向量场 $[X,Y]$ 没有 $(0,1)$-分量, 即 $[X,Y]\in \mathrm{Vect}_{1,0}(M)$, 从而 (3) 成立. 定理得证. □

推论 2.54. 若 (M,J) 是复流形, 则有恒等式

$$\partial^2=0, \qquad \partial\bar\partial+\bar\partial\partial=0, \qquad \bar\partial^2=0.$$

证明. 注意 $0=\mathrm{d}^2=(\partial+\bar\partial)^2=\partial^2+(\partial\bar\partial+\bar\partial\partial)+\bar\partial^2$, 然后比较 (p,q)-阶数即可. □

在复流形 (M,J) 中 $\bar\partial^2=0$, 从而对任意 $p\geq 0$ 都有**上链复形**

$$\Omega^{p,\bullet}(M)\colon \quad 0\to\Omega^{p,0}(M)\xrightarrow{\bar\partial}\Omega^{p,1}(M)\xrightarrow{\bar\partial}\cdots\xrightarrow{\bar\partial}\Omega^{p,n}(M)\xrightarrow{\bar\partial}\cdots$$

定义 2.55. 设 (M,J) 为复流形, 对任意 $p,q\geq 0$, 称

$$\mathrm{H}^{p,q}_{\bar\partial}(M):=\frac{\ker(\bar\partial\colon\Omega^{p,q}(M)\to\Omega^{p,q+1}(M))}{\mathrm{im}(\bar\partial\colon\Omega^{p,q-1}(M)\to\Omega^{p,q}(M))} \tag{2.46}$$

为 M 的第 (p,q) 阶 ***Dolbeault* 上同调**.

特别地, $\mathrm{H}^{p,0}(M)=\left\{\alpha\in\Omega^{p,0}(M)\,\middle|\,\bar\partial\alpha=0\right\}$, 其中元素称为 M 上的**全纯 p-形式**. 可以证明 $\bar\partial$ 算子也有类似的庞加莱引理, 即 $\bar\partial$-闭形式是局部 $\bar\partial$-恰当的:

引理 2.56. (Dolbeault-Grothendieck引理). 设 M 为复流形, $\alpha\in\Omega^{p,q}(M)$, 如果 $\bar\partial\alpha=0$, 则对任意 $p\in M$, 存在 p 的邻域 U 以及 $\beta\in\Omega^{p,q-1}(U)$, 使得 $\alpha=\bar\partial\beta$.

证明. 见任何一本复几何教材, 例如 Voison[45] 的第 2.3.2 节. 这里从略. □

2.3.4 Kähler 流形, 厄米特结构

回忆性质2.39, 辛流形 (M,ω) 必存在 ω-正定相容的近复结构 J. 一般来说, J 并不唯一, 而且未必可积. 如果 (M,ω) 存在 ω-正定相容且可积的近复结构 J, 则称 (M,ω,J) 是 **Kähler 流形**. 总结如下:

定义 2.57. 对于光滑流形 M, 如果 M 存在辛结构 ω 以及复结构 J, 使得对任意 $p \in M$, (T_pM, ω_p, J_p) 是 Kähler 空间 (见定义1.50), 则称三元组 (M, ω, J) 是 ***Kähler* 流形**.

可见 Kähler 流形既是辛流形又是复流形. 再令

$$g(X,Y) := \omega(X, JY), \qquad \forall\, X, Y \in \mathrm{Vect}(M), \tag{2.47}$$

则由 Kähler 流形的定义可知, 上述 g 是 M 上的黎曼度量, (M, g) 是黎曼流形. 再令

$$h(X,Y) := g(X,Y) - \mathrm{i}\omega(X,Y), \qquad \forall\, X, Y \in \mathrm{Vect}(M), \tag{2.48}$$

则容易验证对任意 $p \in M$, h_p 是 $\mathbb{C}$-线性空间 (T_pM, J_p) 上的厄米特内积.

定义 2.58. 对于 $2n$ 维近复流形 (M, J), 以及 $h \in \Gamma(M, (T^*_{\mathbb{C}}M)^{\otimes 2})$.

1. 如果对任意 $p \in M$, h_p 是 (T_pM, J_p) 上的厄米特内积, 则称 h 是近复流形 (M, J) 的**厄米特结构**.

2. 若 h 是近复流形 (M, J) 的厄米特结构, 则容易验证

$$g = \mathrm{Re}\, h, \qquad \omega = -\mathrm{Im}\, h$$

分别是 M 上的黎曼度量与非退化反对称 $(0, 2)$-张量 (视为 2-形式). 称 ω 为 h 的**厄米特形式** (或者 ***Kähler* 形式**).

题 2.59. 证明: 近复流形 (M, J) 必存在厄米特结构.

[提示: 任取 M 的黎曼度量 $\tilde{g}$, 再令 $g(X,Y) := \tilde{g}(X,Y) + \tilde{g}(JX, JY)$, 则 g 也是黎曼度量, 并且满足 $g(JX, JY) = g(X,Y)$. 再令 $\omega(X,Y) := g(JX, Y)$, 则 ω 是 M 上的非退化反对称 $(0, 2)$-张量. 容易验证 $h := g - \mathrm{i}\omega$ 是 (M, J) 的厄米特结构.]

对于复流形 (M, J), 设 h 为 (M, J) 的厄米特结构, ω 为 h 的厄米特形式. 一般来说 ω 未必是闭形式. 如果 $\mathrm{d}\omega = 0$, 则 (M, ω, J) 为 Kähler 流形. 这是 Kähler 流形更常见的等价定义. 总之, Kähler 流形是具有 "好的" 复结构的辛流形, 也是具有 "好的" 厄米特结构的复流形.

现在设 (M,J) 是复流形, h 是厄米特结构. 取复坐标 $z^i=x^i+\mathrm{i}y^i\,(i=1,\dots,n)$, 注意 $J\frac{\partial}{\partial x^i}=\frac{\partial}{\partial y^i}$. 对于 $1\le i,j\le n$, 记

$$h_{ij}:=h\left(\frac{\partial}{\partial x^i},\frac{\partial}{\partial x^j}\right), \tag{2.49}$$

则容易验证 $h_{ji}=\overline{h_{ij}}$, $H:=(h_{ij})\in\mathbb{C}^{n\times n}$ 是正定厄米特矩阵, 并且

$$h\left(\frac{\partial}{\partial x^i},\frac{\partial}{\partial y^j}\right)=-\mathrm{i}h_{ij},\quad h\left(\frac{\partial}{\partial y^i},\frac{\partial}{\partial x^j}\right)=\mathrm{i}h_{ij},\quad h\left(\frac{\partial}{\partial y^i},\frac{\partial}{\partial y^j}\right)=h_{ij}.$$

在此局部坐标下, 直接验算可知厄米特形式 $\omega=-\operatorname{Im}h$ 满足

$$\begin{aligned}\omega\left(\frac{\partial}{\partial x^i},\frac{\partial}{\partial x^j}\right)=\omega\left(\frac{\partial}{\partial y^i},\frac{\partial}{\partial y^j}\right)&=-\operatorname{Im}h_{ij},\\ \omega\left(\frac{\partial}{\partial x^i},\frac{\partial}{\partial y^j}\right)=-\omega\left(\frac{\partial}{\partial y^i},\frac{\partial}{\partial x^j}\right)&=\operatorname{Re}h_{ij}.\end{aligned} \tag{2.50}$$

将 ω 作 $\mathbb{C}$-双线性延拓, 视作 $\omega\in\Omega^2(M)\subseteq\Omega^2(M,\mathbb{C})$. 则易验证:

性质 2.60. 设 h 为复流形 (M,J) 上的厄米特结构, 则在复坐标 $z^i=x^i+\mathrm{i}y^i\,(1\le i\le n)$ 下, 厄米特形式 ω 具有局部表达式

$$\omega=\frac{\mathrm{i}}{2}\sum_{i,j=1}^n h_{ij}\mathrm{d}z^i\wedge\mathrm{d}\bar{z}^j, \tag{2.51}$$

其中 h_{ij} 见(2.49)式. 特别地, $\omega\in\Omega^{1,1}(M)\cap\Omega^2(M)$.

证明. 注意厄米特形式 ω 是 J-不变的, 即对任意 $X,Y\in\operatorname{Vect}_{\mathbb{C}}(M)$, $\omega(JX,JY)=\omega(X,Y)$. 于是对任意 $1\le i,j\le n$,

$$\omega\left(\frac{\partial}{\partial z^i},\frac{\partial}{\partial z^j}\right)=\omega\left(J\frac{\partial}{\partial z^i},J\frac{\partial}{\partial z^j}\right)=\omega\left(\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial z^i},\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial z^j}\right)=-\omega(\frac{\partial}{\partial z^i},\frac{\partial}{\partial z^j}),$$

从而 $\omega\left(\frac{\partial}{\partial z^i},\frac{\partial}{\partial z^j}\right)=0$. 同理 $\omega\left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}^i},\frac{\partial}{\partial \bar{z}^j}\right)=0$. 最后, 由(2.44)(2.50)式直接计算得

$$\begin{aligned}\omega\left(\frac{\partial}{\partial z^i},\frac{\partial}{\partial \bar{z}^j}\right)&=\frac{1}{4}\omega\left(\frac{\partial}{\partial x^i}-\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial y^i},\frac{\partial}{\partial x^j}+\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial y^j}\right)\\&=\frac{\mathrm{i}}{2}\left(\operatorname{Re}h_{ij}+\mathrm{i}\operatorname{Im}h_{ij}\right)=\frac{\mathrm{i}}{2}h_{ij},\end{aligned}$$

从而(2.51)式成立. □

注 2.61. 在复流形 M 的复坐标 $(z_1,...,z_n)$ 下, 厄米特结构 h 可以写为

$$h=\sum_{i,j=1}^{n} h_{ij}\,\mathrm{d}z^i\otimes\mathrm{d}\bar{z}^j, \tag{2.52}$$

下面考察 Kähler 流形的一些基本性质.

引理 2.62. (i$\partial\bar{\partial}$-引理). 设 h 是复流形 (M,J) 上的厄米特结构, ω 为 h 的厄米特形式. 则 $\mathrm{d}\omega=0$ 当且仅当局部存在 $\mathbb{R}$-值光滑函数 ρ 使得

$$\omega=\frac{\mathrm{i}}{2}\partial\bar{\partial}\rho. \tag{2.53}$$

此时, 函数 ρ 称为 (M,ω,J) 的 (局部)***Kähler* 势**.

证明. 如果 $\omega=\frac{\mathrm{i}}{2}\partial\bar{\partial}\rho$, 则显然 $\mathrm{d}\omega=\frac{\mathrm{i}}{2}(\partial+\bar{\partial})\partial\bar{\partial}\rho=0$, 从而 (M,ω,J) 是 Kähler 流形. 另一方面, 如果 $\mathrm{d}\omega=0$, 则由庞加莱引理可知局部存在 $\eta\in\Omega^1(M)$ 使得

$$\omega=\mathrm{d}\eta.$$

考察 η 的 $(1,0)$ 分量与 $(0,1)$ 分量: $\eta=\eta^{1,0}+\eta^{0,1}$, 注意 η 是实形式, 即 $\eta=\overline{\eta}$, 从而 $\eta^{0,1}=\overline{\eta^{1,0}}$. 再由

$$\omega=\mathrm{d}\eta=(\partial+\bar{\partial})(\eta^{1,0}+\eta^{0,1})=\partial\eta^{1,0}+\left(\partial\eta^{0,1}+\bar{\partial}\eta^{1,0}\right)+\bar{\partial}\eta^{1,0}$$

以及 $\omega\in\Omega^{1,1}(M)$, 比较上式两边的 (p,q)-阶数得

$$\partial\eta^{1,0}=\bar{\partial}\eta^{0,1}=0,\qquad \omega=\partial\eta^{0,1}+\bar{\partial}\eta^{1,0}.$$

从而 $\eta^{0,1}$ 是 $\bar{\partial}$-闭的, 由引理2.56可知局部存在 $\varphi\in\Omega^{0,0}(M)$ 使得

$$\eta^{0,1}=\bar{\partial}\varphi,$$

于是 $\eta^{1,0}=\overline{\eta^{0,1}}=\partial\overline{\varphi}$, 故

$$\omega=\partial\eta^{0,1}+\bar{\partial}\eta^{1,0}=\partial\bar{\partial}(\varphi-\overline{\varphi}),$$

取 $\rho=-2\mathrm{i}(\varphi-\overline{\varphi})$ 即可, 并且显然 ρ 是光滑 $\mathbb{R}$-值函数. □

定理 2.63. (*Kähler* 测地坐标). 设 h 是复流形 (M,J) 的厄米特结构, ω 是 h 的厄米特形式. 则 $\mathrm{d}\omega=0$ 当且仅当对任意 $p\in M$, 存在以 p 为中心的局部复坐标 $z^1,...,z^n$, 使得在此坐标下

$$\begin{aligned}\omega&=\frac{\mathrm{i}}{2}\sum_{k=1}^{n}\mathrm{d}z^k\wedge\mathrm{d}\bar{z}^k+O(|z|^2)\\&=\sum_{i=1}^{n}\mathrm{d}x^i\wedge\mathrm{d}y^i+O(|z|^2).\end{aligned}\tag{2.54}$$

此时, 称上述复坐标为 ***Kähler* 测地坐标**.

证明. 若 ω 形如2.54式, 则显然 $\mathrm{d}\omega=0$. 另一方面, 当 $\mathrm{d}\omega=0$ 时, 对任意点 $p\in M$, 总可以取以 p 为中心的复坐标 $z^1,z^2,...,z^n$, 使得厄米特系数矩阵 $H=(h_{ij})$ 在 p 点处为单位阵, 从而 $\omega_p=\frac{\mathrm{i}}{2}\sum_{i=k}^{n}\mathrm{d}z^k\wedge\mathrm{d}\bar{z}^k$. 于是在该坐标下, 厄米特形式 ω 可以写为

$$\omega=\frac{\mathrm{i}}{2}\sum_{i,j=1}^{n}(\delta_{ij}+\omega_{ij})\mathrm{d}z^i\wedge\mathrm{d}\bar{z}^j+O(|z|^2),$$

其中 ω_{ij} 是关于 $z^k,\bar{z}^k$ 的 $\mathbb{C}$-线性函数, 于是可以考察其全纯部分 ω_{ij}^{hol}(含 z_k) 与反全纯部分 ω_{ij}^{ant}(含 $\bar{z}_k$):

$$\omega_{ij}=\omega_{ij}^{\text{hol}}+\omega_{ij}^{\text{ant}}.$$

由 $\omega=\overline{\omega}$ 可知 $\overline{\omega_{ij}}=\omega_{ji}$, 从而

$$\overline{\omega_{ij}^{\text{hol}}}=\omega_{ji}^{\text{ant}}.\tag{2.55}$$

直接计算 $\mathrm{d}\omega$ 得

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\omega&=\frac{\mathrm{i}}{2}(\partial+\bar{\partial})\sum_{i,j=1}^{n}\omega_{ij}\mathrm{d}z^i\wedge\mathrm{d}\bar{z}^j+O(|z|)\\&=\frac{\mathrm{i}}{2}\sum_{i,j,k=1}^{n}\frac{\partial\omega_{ij}^{\text{hol}}}{\partial z_k}\mathrm{d}z^k\wedge\mathrm{d}z^i\wedge\mathrm{d}\bar{z}^j\\&\quad+\frac{\mathrm{i}}{2}\sum_{i,j,k=1}^{n}\frac{\partial\omega_{ij}^{\text{ant}}}{\partial\bar{z}^k}\mathrm{d}z^i\wedge\mathrm{d}\bar{z}^j\wedge\mathrm{d}\bar{z}^k+O(|z|),\end{aligned}$$

又因为 $\mathrm{d}\omega=0$, 比较系数得 $\frac{\partial \omega_{ij}^{\mathrm{hol}}}{\partial z^k}=\frac{\partial \omega_{kj}^{\mathrm{hol}}}{\partial z^i}+O(|z|)$. 又因为 $\omega_{ij}^{\mathrm{hol}}$ 是关于 $z_1,...,z_n$ 的线性函数, $\frac{\partial \omega_{ij}^{\mathrm{hol}}}{\partial z^k}$ 是常数, 因此

$$\frac{\partial \omega_{ij}^{\mathrm{hol}}}{\partial z^k}=\frac{\partial \omega_{kj}^{\mathrm{hol}}}{\partial z^i}.$$

于是由庞加莱引理, 局部存在全纯函数 $\phi_j\,(j=1,2,...,n)$ 使得

$$\frac{\partial \phi_j}{\partial z^i}=\omega_{ij}^{\mathrm{hol}},\quad 1\le i,j\le n,$$

不妨 ϕ_j 在点 p 处的值都为 0 (事实上 ϕ_j 是关于 z 的二次函数). 引入

$$w^i:=z^i+\phi^i\qquad i=1,2,...,n$$

(其中 $\phi^i:=\phi_i$), 并注意 $\omega_{ij}=O(|z|)$ 与(2.55)式, 易知

$$\mathrm{d}z^i=\mathrm{d}w^i-\sum_{k=1}^n\omega_{ki}^{\mathrm{hol}}\mathrm{d}w^k+O(|z|^2),\qquad \mathrm{d}\bar{z}^i=\mathrm{d}\bar{w}^i-\sum_{k=1}^n\omega_{ik}^{\mathrm{ant}}\mathrm{d}\bar{w}^k+O(|z|^2),$$

从而

$$\begin{aligned}\omega&=\frac{\mathrm{i}}{2}\sum_{i,j=1}^n(\delta_{ij}+\omega_{ij})\mathrm{d}z^i\wedge\mathrm{d}\bar{z}^j+O(|z|^2)\\&=\frac{\mathrm{i}}{2}\sum_{i,j=1}^n(\delta_{ij}+\omega_{ij})\left(\mathrm{d}w^i-\sum_{k=1}^n\omega_{ki}^{\mathrm{hol}}\mathrm{d}w^k\right)\wedge\left(\mathrm{d}\bar{w}^j-\sum_{\ell=1}^n\omega_{j\ell}^{\mathrm{ant}}\mathrm{d}\bar{w}^\ell\right)+O(|z|^2)\\&=\frac{\mathrm{i}}{2}\sum_{k=1}^n\mathrm{d}w^k\wedge\mathrm{d}\bar{w}^k+O(|w|^2).\end{aligned}$$

从而复坐标 $w^1,w^2,...,w^n$ 符合题设, 得证. □

注 2.64. 与 Darboux 定理的推论(2.27)对比, 自然要问: Kähler 流形上是否存在复坐标 $z^i=x^i+\mathrm{i}y^i$, 使得辛形式在此坐标下形如

$$\omega=\sum_{i=1}^n\mathrm{d}x^i\wedge\mathrm{d}y^i,$$

即再把(2.54)式末尾的 $O(|z|^2)$ 去掉?

如果真有如此坐标, 那么相应的黎曼度量 $g(X,Y)=\omega(X,JY)$ 在此坐标下为 $g=\sum_{i=1}^n(\mathrm{d}x^i\otimes\mathrm{d}x^i+\mathrm{d}y^i\otimes\mathrm{d}y^i)$, 显然 g 为平坦度量. 但是一般来说, Kähler 流形的度量 g 未必平坦. 度量 g 的曲率是如此坐标系存在性的障碍.

2.3.5 例子: 非 Kähler 的 4 维紧辛流形

辛流形 (M,ω) 必存在 ω-正定相容的近复结构 J, 这样的 J 未必唯一. 自然要问: 在 M 的所有 ω-正定相容的近复结构中, 是否一定存在可积的近复结构? 换言之, 辛流形是否一定具有 Kähler 结构?

答案是否定的. 本小节将引入一个 4 维紧辛流形, 并证明它不存在 Kähler 结构. 这个例子早在 1964 年被 Kodaira 研究 (见 [23] 的 Theorem 19), 随后在 1976 年被 Thurston[41] 再次发现.

首先不加证明地陈述紧 Kähler 流形的一些重要性质.

性质 2.65. 设 (M,J,ω) 是紧 *Kähler* 流形, 则对任意 $k\geq 0$,

1. $\mathrm{H}^k(M,\mathbb{C}):=\mathrm{H}^k(M)\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{C}$ 是有限维 $\mathbb{C}$-线性空间.
2. $\mathrm{H}^k(M,\mathbb{C})\cong\bigoplus\limits_{p+q=k}\mathrm{H}^{p,q}(M)$.
3. $\overline{\mathrm{H}^{p,q}(M)}=\mathrm{H}^{q,p}(M)$.

其中 $\mathrm{H}^{p,q}(M)$ 是 M 的 Dolbeault 上同调, 见(2.46)式; 再注意 $\mathrm{H}^{p,q}(M)$ 作为 $\mathrm{H}^{p+q}(M,\mathbb{C}):=\mathrm{H}^{p+q}(M)\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{C}$ 的子空间, 自然可以谈论其中元素的复共轭, 从而 $\overline{\mathrm{H}^{p,q}(M)}$ 良定.

证明. 这是紧 Kähler 流形 Hodge 理论中众所周知的结果, 见任何一本复几何教材, 例如 Demailly[14], Voison[45] 等. □

题 2.66. 证明: 紧 Kähler 流形的奇数阶 Betti 数是偶数.

[提示: 即对任意奇数 k, $b^k(M):=\dim\mathrm{H}^k(M)$ 是偶数. 这是性质2.65的简单推论. 后文将用此命题来说明某个紧流形不具有 Kähler 结构.]

下面介绍 Kodaira-Thurston 所构造的紧辛流形. 考虑 $\mathbb{Z}^2\times\mathbb{Z}^2$ 的如下群结构:

题 2.67. 在 $\Gamma:=\mathbb{Z}^2\times\mathbb{Z}^2=\{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})\,|\,\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\in\mathbb{Z}^2\}$ 中定义二元运算 $\star$ 如下:

$$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})\star(\boldsymbol{a}',\boldsymbol{b}'):=(\boldsymbol{a}'+\boldsymbol{a},\mathcal{S}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b}'+\boldsymbol{b}),$$

其中 $\mathcal{S}_{\boldsymbol{a}}:=\begin{pmatrix}1&a_2\\0&1\end{pmatrix}\in\mathrm{End}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}^2)$, $\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix}\in\mathbb{Z}^2$. 证明: $(\Gamma,\star)$ 是群.

[提示: 将 Γ 中的元素 $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$ 写成矩阵形式 $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$, 则易知运算 $\star$ 满足

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \star \begin{pmatrix} a_1' & b_1' \\ a_2' & b_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1'+a_1 & b_1'+b_1+a_2b_2' \\ a_2'+a_2 & b_2'+b_2 \end{pmatrix}.$$

直接验证 $\star$ 满足结合律, 并且 $\star$-单位元为 $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, 元素 $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \in \Gamma$ 的 $\star$-逆元为 $\begin{pmatrix} -a_1 & -b_1+a_2b_2 \\ -a_2 & -b_2 \end{pmatrix}$.]

定义 2.68. (Kodaira-Thurston流形). 设 $(\Gamma,\star)$ 是题2.67所定义的群. 定义群 Γ 在 $\mathbb{R}^4=\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2$ 上的作用如下:

$$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}).(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) := (\boldsymbol{x}+\boldsymbol{a}, \mathcal{S}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{y}+\boldsymbol{b}),$$

其中 $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \in \Gamma$, $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2$, $\mathcal{S}_{\boldsymbol{a}} = \begin{pmatrix} 1 & a_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^2)$. 易知这确实是群 $(\Gamma,\star)$ 在 $\mathbb{R}^4$ 上的离散作用, 称该作用的轨道空间

$$M := \mathbb{R}^4/\Gamma \tag{2.56}$$

为 *Kodaira-Thurston* 流形.

易知群 Γ 在 $\mathbb{R}^4 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix} \middle| x_1,x_2,y_1,y_2\in\mathbb{R} \right\}$ 上的作用给出了如下等价关系:

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix} &\sim \begin{pmatrix} x_1+1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} x_1 & y_1+1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix} \\ &\sim \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2+1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} x_1 & y_1+y_2 \\ x_2+1 & y_2 \end{pmatrix},\end{aligned}$$

从而容易验证 (留给读者):

题 **2.69.** 记号承上, 则:

1. $M := \mathbb{R}^4/\Gamma$ 是 4 维紧流形, 并且同胚于 $S^1 \times ((I \times T^2)/\sim)$, 其中 $S^1 := \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, $T^2 := S^1 \times S^1$ 分别是圆周与环面, $I := [0,1]$ 为闭区间, 且等价关系 $\sim$ 如下定义:

$$(0,(y_1,y_2)) \sim (1,(y_1+y_2,y_2)), \qquad \forall (y_1,y_2) \in T^2.$$

2. 对任意 $\boldsymbol{g} = (\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) \in \Gamma$, 群作用 $\varphi_{\boldsymbol{g}} \colon (\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \mapsto \boldsymbol{g}.(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ 保持 $\mathbb{R}^4$ 上的辛结构

$$\omega := \mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2 + \mathrm{d}y_1 \wedge \mathrm{d}y_2$$

   不变, 即 $\varphi_{\boldsymbol{g}}^*\omega = \omega$. 因此 ω 可下降至 $M = \mathbb{R}^4/\Gamma$, 使得 M 为紧辛流形.

最后通过研究 M 的拓扑来说明其不存在 Kähler 结构. 注意商映射 $\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4/\Gamma$ 是 M 的万有覆叠, 由代数拓扑相关知识可知 M 的基本群 $\pi_1(M) \cong \Gamma$, 从而同调群

$$\mathrm{H}_1(M,\mathbb{Z}) = \Gamma/[\Gamma,\Gamma] \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}, \tag{2.57}$$

其中 $[\Gamma,\Gamma]$ 是 Γ 的换位子群.

题 **2.70.** 证明: 换位子群 $[\Gamma,\Gamma] = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & n \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \Gamma \,\middle|\, n \in \mathbb{Z} \right\} \cong \mathbb{Z}$, 从而验证(2.57)式.

[提示: 考察 Γ 中的元素 $\boldsymbol{g} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ 与 $\boldsymbol{h} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, 计算换位子 $[\boldsymbol{g},\boldsymbol{h}] := \boldsymbol{g}\boldsymbol{h}\boldsymbol{g}^{-1}\boldsymbol{h}^{-1}$. 注意这里的 $(\cdot)^{-1}$ 不是通常矩阵乘法的逆, 而是关于 $\star$ 的逆.]

推论 2.71. *Kodaira-Thurston 流形 $M := \mathbb{R}^4/\Gamma$ 不存在 Kähler 结构.*

证明. 由(2.57)可知 M 的 Betti 数 $b^1(M) = 3$, 这与题2.66矛盾. □

与此相关的更多例子也可见 Fernández[17].

2.4 余伴随轨道

相比前文与后文, 本节将花费更多笔墨来回顾**李群**、**李代数**及其表示. 李群李代数的工具可以用来构造流形, 尤其是一类辛流形. 设 G 是李群, $\mathfrak{g}$ 是其李代数, 则李群 G 在 $\mathfrak{g}$ 的对偶空间 $\mathfrak{g}^*$ 上有自然的作用 Ad^*, 称为**余伴随表示**. 该群作用的轨道, 即**余伴随轨道**, 在一定条件下具有辛流形结构.

余伴随轨道由 Kirillov 引入, 见 [22] 的第 15 章.

2.4.1 李群李代数回顾

本小节回顾李群李代数相关的基本概念与性质. 众所周知, **李群**是具有群结构的光滑流形, 并且其群运算 (乘法, 取逆) 是光滑映射. 李群 G 的群乘法单位元记作 e. 常见的李群有一般线性群 $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$, 正交群 $\mathrm{O}(n)$, 酉群 $\mathrm{U}(n)$, 以及辛群 $\mathrm{Sp}(2n,\mathbb{R})$ 等. 李群之间的光滑的群同态称为李群同态.

对于李群 G 中的元素 g, **左平移**映射

$$\begin{aligned} l_g\colon G &\to G \\ h &\mapsto gh \end{aligned} \tag{2.58}$$

是 G 的微分自同胚.

定义 2.72. 对于李群 G,

1. 记 $\mathrm{Vect}_l(G) := \{X \in \mathrm{Vect}(G) \,|\, \forall g \in G,\ (l_g)_* X = X\}$, 其中的元素称为李群 G 的**左不变切向量场**.
2. 对于 $q \geq 0$, 记 $\Omega_l^q(G) := \left\{\omega \in \Omega^q(G) \,\middle|\, \forall g \in G,\ l_g^* \omega = \omega\right\}$, 其中元素称为李群 G 的**左不变 q-形式**.

左不变切向量场 X 被 X 在群乘法单位元 $e \in G$ 处的取值唯一确定: 对任意 $X \in \mathrm{Vect}_l(G)$ 以及 $g \in G$, $X|_g = (l_g)_*(X|_e)$. 这诱导线性空间同构

$$\mathrm{Vect}_l(G) \cong T_e G. \tag{2.59}$$

容易验证李群 G 的左不变切向量场关于李括号 $[,]$ 运算封闭, 即对任意 $X, Y \in \mathrm{Vect}_l(G)$, $[X,Y] \in \mathrm{Vect}_l(G)$. 通过同构(2.59)自然将 $\mathrm{Vect}_l(G)$ 上的李括号 $[,]$ 视为 $\mathfrak{g} := T_e G$ 上的二元运算, 所得 $(\mathfrak{g}, [,])$ 称为 G 的**李代数**.

注 2.73. 在通常的李群李代数教材中, $\mathfrak{g}$ 中元素是切空间 $T_e G$ 中的向量; 而我们常常不加声明地将 $\mathfrak{g}$ 中元素视为 G 的左不变切向量场.

定义 2.74. 设 $\mathfrak{g}$ 是域 $\mathbb{F}$ 上的线性空间, $[,]\colon \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ 为二元运算, 如果 $[,]$ 是双线性、反对称的, 并且下述 ***Jacobi* 恒等式**

$$[[X,Y],Z] + [[Y,Z],X] + [[Z,X],Y] = 0$$

对任意 $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$ 都成立, 则称 $(\mathfrak{g}, [,])$ 为**李代数**.

例如, 李群 G 的左不变切向量场空间 $\mathfrak{g} := T_eG \cong \mathrm{Vect}_l(G)$ 配以切向量场李括号 $[,]$ 构成李代数. 另一个常见例子是, $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) = \mathbb{R}^{n\times n}$ 配以交换子 $[A, B] = AB - BA$ 构成李代数, 称为一般线性李代数.

设 $\mathfrak{g}$ 是李群 G 的李代数, 则对于 $X \in \mathfrak{g}$, 存在 $\varepsilon > 0$ 以及光滑曲线

$$\begin{aligned} \gamma_X \colon (-\varepsilon, \varepsilon) &\to G \\ t &\mapsto \mathrm{e}^{tX} \end{aligned} \tag{2.60}$$

使得 $\gamma_X(0) = e$, 并且该曲线是 X 所对应的左不变切向量场的积分曲线. 可以证明, 存在 $\mathfrak{g}$ 在原点 $\mathbf{0}$ 的邻域 $U \subseteq \mathfrak{g}$, 使得映射

$$\begin{aligned} \exp\colon U &\to G \\ X &\mapsto \gamma_X(1) = \mathrm{e}^X \end{aligned}$$

良定. 如此映射 exp 称为李群 G 的**指数映射**. 事实上, 指数映射 exp 是 $\mathfrak{g}$ 与 G 的在原点 $\mathbf{0} \in \mathfrak{g}$ 处的局部微分同胚, 且在 $\mathbf{0}$ 处的切映射是恒等映射.

接下来回忆李群、李代数的表示.

定义 2.75. 设 G 为李群, V 为有限维 $\mathbb{R}$-线性空间, 则李群同态

$$\rho\colon G \to \mathrm{GL}(V)$$

称为李群 G 在 V 上的作用, 或**表示**. 此时也称 ρ 是 V 的**$\mathfrak{g}$-模**结构.

为说话方便, 我们往往省略 ρ, 简称 V 是李群 G 的表示, 或者 V 是 G-模. 此外, 也常将 $(\rho(g))(v)$ 简记为 $g.v$.

对于李群 G 的元素 g, 共轭作用

$$\begin{aligned} c_g\colon G &\to G \\ h &\mapsto ghg^{-1} \end{aligned} \tag{2.61}$$

满足 $c_g(e) = e$, 考察 c_g 在 $e \in G$ 处的切映射

$$\mathrm{Ad}_g := (c_g)_*|_e \in \mathrm{GL}(T_eG) = \mathrm{GL}(\mathfrak{g}),$$

其中 $\mathfrak{g}$ 是 G 的李代数. 这给出了映射

$$\mathrm{Ad}\colon G \to \mathrm{GL}(\mathfrak{g}).$$

容易验证 Ad 是李群 G 在其李代数 $\mathfrak{g}$ 上的作用, 称为李群 G 的**伴随表示**.

通过线性同构 $\mathfrak{g} = T_eG \cong \mathrm{Vect}_l(G)$, 将 Ad_g 视为 $\mathrm{GL}(\mathrm{Vect}_l(G))$ 中的元素. 在此意义下, 我们来给出伴随表示的显式表达. 对于 $g \in G$, 记

$$\begin{aligned} l_g\colon G \to G, &\qquad h \mapsto gh \\ r_g\colon G \to G, &\qquad h \mapsto hg \end{aligned} \tag{2.62}$$

分别为李群 G 的左、右平移. 显然对任意 $g_1, g_2 \in G$ 都有 $l_{g_1} \circ r_{g_2} = r_{g_2} \circ l_{g_1}$; 并且 $c_g = l_g \circ r_{g^{-1}}$. 事实上, 对于 $X \in \mathrm{Vect}_l(G)$,

$$\mathrm{Ad}_g X = (c_g)_* X = (l_g \circ r_{g^{-1}})_* X = (r_{g^{-1}})_*((l_g)_* X) = (r_{g^{-1}})_* X. \tag{2.63}$$

也就是说, G 在左不变切向量场的伴随作用是对切向量场的右平移.

定义 2.76. 设 $\mathfrak{g}$ 是域 $\mathbb{F}$ 上的李代数, V 是有限维 $\mathbb{F}$-线性空间, $\rho\colon \mathfrak{g} \to \mathrm{GL}(V)$ 是 $\mathbb{F}$-线性映射. 如果对任意 $X, Y \in \mathfrak{g}$ 都有

$$\rho([X,Y]) = \rho(X) \circ \rho(Y) - \rho(Y) \circ \rho(X),$$

则称 ρ 是李代数 $\mathfrak{g}$ 在 V 上的**表示**, 也称 ρ 是 V 的**$\mathfrak{g}$-模**结构.

李群的表示诱导其李代数的表示. 设 $\rho\colon G \to \mathrm{GL}(V)$ 是李群 G 的表示, 记 $\mathfrak{g}$ 为李群 G 的李代数, 则可以验证 ρ 在 $e \in G$ 处的切映射

$$\rho_*\colon \mathfrak{g} \to \mathrm{GL}(V)$$

是李代数 $\mathfrak{g}$ 的表示. 具体地, 对于 $X \in \mathfrak{g}, v \in V$, 成立

$$\rho_*(X)v = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\rho\left(\mathrm{e}^{tX}\right)v\bigg|_{t=0}.$$

反之, 可以证明当 G 连通时, ρ 被相应的李代数表示 ρ_* 唯一确定.

特别地, 对于李群 G 的伴随表示 Ad, 其诱导的李代数表示

$$\mathrm{ad} := \mathrm{Ad}_*\colon \mathfrak{g} \to \mathrm{GL}(\mathfrak{g})$$

满足 $\mathrm{ad}(X)Y = [X,Y]$, 这称为李代数 $\mathfrak{g}$ 的**伴随表示**.

最后再简要介绍一下李群与李代数的上同调. 对于李群 G 的左不变微分形式 $\omega \in \Omega_l^q$, 容易验证 $\mathrm{d}\omega \in \Omega_l^{q+1}$, 从而有上链复形

$$\mathrm{d}\colon \Omega_l^\bullet(G) \to \Omega_l^\bullet(G). \tag{2.64}$$

与左不变切向量场类似, 左不变微分形式 ω 也由其在单位元 e 处的取值唯一确定, 即有线性空间同构

$$\Omega_l^q(G) \cong \bigwedge^q(T_e^*G) = \bigwedge^q\mathfrak{g}^*.$$

于是可将外微分 d 自然视为从 $\bigwedge^q\mathfrak{g}^*$ 到 $\bigwedge^{q+1}\mathfrak{g}^*$ 的线性映射. 容易验证, 对于 $\omega \in \bigwedge^q\mathfrak{g}^*$ 以及 $X_0, X_1, ..., X_q \in \mathfrak{g}$, 成立

$$\begin{aligned}&(\mathrm{d}\omega)(X_0, X_1, ..., X_q)\\ &= \sum_{0\le i<j\le q}(-1)^{i+j}\omega\left([X_i, X_j], X_1, ..., \widehat{X}_i, ..., \widehat{X}_j, ..., X_q\right).\end{aligned} \tag{2.65}$$

[提示: 与外微分公式(2.45)比较, 并注意对于左不变微分形式 ω 以及左不变切向量场 $X_1, ..., X_q, \omega(X_1, ..., X_q)$ 是 G 上的常值函数] . 称

$$\mathrm{H}^q(\mathfrak{g}) := \frac{\operatorname{im}\left(\mathrm{d}\colon \bigwedge^q\mathfrak{g}^* \to \bigwedge^{q+1}\mathfrak{g}^*\right)}{\ker\left(\mathrm{d}\colon \bigwedge^{q-1}\mathfrak{g}^* \to \bigwedge^q\mathfrak{g}^*\right)} \tag{2.66}$$

为李代数 $\mathfrak{g}$ 的第 q 阶上同调. 可以证明, 若 G 为紧李群, 则其李代数上同调 $\mathrm{H}^q(\mathfrak{g})$ 同构于 de Rham 上同调 $\mathrm{H}^q_{\mathrm{dR}}(G)$.

李代数上同调的概念可以脱离李群, 推广到更一般情形. 设 $\mathfrak{g}$ 为李代数, $\rho\colon \mathfrak{g} \to \mathrm{GL}(V)$ 是 $\mathfrak{g}$ 的一个表示, 则对于任意 $q \ge 0$, 记

$$C^q(\mathfrak{g}, V) := \bigwedge^q\mathfrak{g}^* \otimes V.$$

对于 $\omega \otimes v \in C^q(\mathfrak{g}, V)$, 其中 $v \in V$, 定义 $\mathrm{d}_V(\omega \otimes v) \in C^{q+1}(\mathfrak{g}, V)$ 如下:

$$\begin{aligned}&[\mathrm{d}_V(\omega\otimes v)](X_0, ..., X_q)\\ &:= \sum_{i=0}^{q}(-1)^i\omega(X_0, ..., \widehat{X}_i, ..., X_q) \otimes \rho(X_i)v\\ &\qquad + \sum_{i<j}(-1)^{i+j}\omega([X_i, X_j], X_0, ..., \widehat{X}_i, ..., \widehat{X}_j, ..., X_q) \otimes v,\end{aligned} \tag{2.67}$$

其中 $X_0, ..., X_q$ 是 $\mathfrak{g}$ 中的任意向量. 可以验证 $\mathrm{d}_V: C^\bullet(\mathfrak{g}, V) \to C^\bullet(\mathfrak{g}, V)$ 是上链复形 (注意与外微分公式(2.45)比较), 相应的上同调

$$\mathrm{H}^q(\mathfrak{g}, V) := \frac{\ker(\mathrm{d}_V: C^q(\mathfrak{g}, V) \to C^{q+1}(\mathfrak{g}, V))}{\operatorname{im}(\mathrm{d}_V: C^{q-1}(\mathfrak{g}, V) \to C^q(\mathfrak{g}, V))}$$

称为李代数 $\mathfrak{g}$ 的第 q 阶 V-系数上同调.

李代数上同调 $\mathrm{H}^\bullet(\mathfrak{g}, V)$ 能够反映出关于李代数 $\mathfrak{g}$ 结构的很多信息, 限于篇幅这里不多加介绍.

2.4.2 余伴随表示，李群在辛流形上的作用

先回忆李群表示的一些构造方法. 设 V, W 是李群 G 的两个有限维表示. 对于 $g \in G, v \in V, w \in W$,

1. 定义 G 在 V^* 上的作用为: $(g.T)(v) := T(g^{-1}.v)$, 其中 $T \in V^*$;
2. 定义 G 在 $V \otimes W$ 上的作用为: $g.(v \otimes w) = g.v \otimes g.w$;
3. 定义 G 在 $V \wedge W$ 上的作用为: $g.(v \wedge w) = g.v \wedge g.w$,

容易验证它们良定 (确实也是李群 G 的表示), 分别称为表示的对偶, 张量积, 外积. 特别地, 由李群 G 的伴随表示 Ad 以及上述构造, 自然定义李群 G 在 $\bigwedge^\bullet \mathfrak{g}^* \cong \Omega_l^\bullet(G)$ 上的作用, 这就是李群 G 的**余伴随表示**.

题 2.77. 补全余伴随表示 Ad^* 的定义, 并验证: 对于 $g \in G$ 以及 $\omega \in \Omega_l^\bullet(G)$,

$$\mathrm{Ad}_g^*(\omega) = r_g^*\omega, \tag{2.68}$$

其中右平移映射 r_g 见(2.62)式.

[提示: 回忆(2.63)式, 并注意 $l_g^*\omega = \omega$.]

我们先考察 G 在 $\bigwedge^2 \mathfrak{g}^* \cong \Omega_l^2(G)$ 上的余伴随作用, 在本节的最后一小节还将考察 G 在 $\mathfrak{g}^* \cong \Omega_l^1(G)$ 上的余伴随作用.

定义 2.78. 给定李群 G 在辛流形 (M, ω) 上的光滑作用, 即光滑映射

$$G \times M \to M, \quad (g, m) \mapsto g.m.$$

1. 对于 $g \in G$ 以及 $m \in M$, 定义光滑映射 λ_g, ρ_m 如下:

$$\begin{aligned} \lambda_g &: M \to M, \qquad m \mapsto g.m, \\ \rho_m &: G \to M, \qquad g \mapsto g.m. \end{aligned} \tag{2.69}$$

2. 如果对任意 $g \in G$ 都成立

$$\lambda_g^*\omega = \omega,$$

则称 G **辛作用于** M, 也称 (M, ω) 是**G-辛流形**.

容易验证上述 λ_g, ρ_m 满足关系

$$\begin{aligned} \lambda_g \circ \rho_m &= \rho_m \circ l_g, \\ \rho_{g.m} &= \rho_m \circ r_g. \end{aligned} \tag{2.70}$$

映射 ρ_m 可以把辛流形 M 上的微分形式拉回到 G 上. 容易验证以下:

引理 2.79. 设 G 为李群, (M, ω) 为 G-辛流形, $\mathfrak{g}$ 是 G 的李代数. 则 G 在 M 上的作用诱导映射

$$\begin{aligned} \Psi \colon M &\to Z^2(\mathfrak{g}) \\ m &\mapsto \rho_m^* \omega, \end{aligned} \tag{2.71}$$

其中 $Z^2(\mathfrak{g}) \cong \{\omega \in \Omega_l^2(G) \,|\, \mathrm{d}\omega = 0\}$. 此外, 对任意 $g \in G$, 有交换图

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\Psi"] \arrow[d, "\lambda_g"'] & Z^2(\mathfrak{g}) \arrow[d, "\mathrm{Ad}_g^*"] \\ M \arrow[r, "\Psi"] & Z^2(\mathfrak{g}) \end{tikzcd}$$

其中 Ad^* 为李群 G 的余伴随表示, 见(2.68)式.

证明. 对任意 $g \in G$, 有

$$\begin{aligned} l_g^* \Psi(m) &= l_g^*(\rho_m^* \omega) = (\rho_m \circ l_g)^* \omega = (\lambda_g \circ \rho_m)^* \omega \\ &= \rho_m^*(\lambda_g^* \omega) = \rho_m^* \omega = \Psi(m), \end{aligned}$$

从而 $\Psi(m) \in \Omega_l^2(G)$. 又因为 $\mathrm{d}\Psi(m) = \mathrm{d}(\rho_m^* \omega) = \rho_m^*(\mathrm{d}\omega) = 0$, 从而 $\Psi(m) \in Z^2(\mathfrak{g})$, 故 Ψ 良定. 进而, 对任意 $m \in M$,

$$\begin{aligned} (\Psi \circ \lambda_g)(m) &= \Psi(g.m) = \rho_{g.m}^* \omega = (\rho_m \circ r_g)^* \omega \\ &= r_g^*(\rho_m^* \omega) = \mathrm{Ad}_g^*(\Psi(m)) = (\mathrm{Ad}_g^* \circ \Psi)(m), \end{aligned}$$

从而 $\Psi \circ \lambda_g = \mathrm{Ad}_g^* \circ \Psi$, 上述图表交换. $\square$

可见, 映射 Ψ 把 G 在 M 上作用的轨道映为 G 在 $Z^2(\mathfrak{g})$ 的余伴随作用的轨道, 即**余伴随轨道**. 特别地, 若 G 在 M 上的作用可迁, 则 $\Psi(M)$ 是 $Z^2(\mathfrak{g})$ 的一条 G-余伴随轨道.

2.4.3 李子代数与李子群, 李群的辛约化

对于李群 G 在辛流形 (M,ω) 上的可迁辛作用, (2.71)中的 Ψ 将 M 映为 $Z^2(\mathfrak{g})$ 上的一条 G-余伴随轨道. 其中 $\mathfrak{g}$ 为 G 的李代数. 反过来, 自然要问: 给定 $\omega \in Z^2(\mathfrak{g})$, 即 ω 为左不变闭 2-形式, 则 ω 所在的余伴随轨道 $G^{\#}\omega$ 是否来自于某个辛流形? 即是否存在辛流形 (M,ω) 以及 G 在 M 上的可迁辛作用, 使得 $G^{\#}\omega = \Psi(M)$?

如果确实有这样的辛流形 M, 则 M 形如

$$M \cong G/H,$$

其中 $H \subseteq G$ 是 G 的某个闭子群; 此外还应当存在齐性空间 G/H 上的辛形式 ϖ, 使得 $\omega = \pi^*\varpi \in Z^2(\mathfrak{g})$, 其中 $\pi\colon G \to G/H$ 为典范投影. 而如何寻找这样的李子群 H 呢? 由李群理论, 我们来考察相应的李子代数.

引理 2.80. 设 G 为李群, $\mathfrak{g}$ 是 G 的李代数, $\omega \in Z^2(\mathfrak{g})$ 是 G 上的左不变闭 2-形式, 则

$$\mathfrak{h}_\omega := \{X \in \mathfrak{g} \,|\, X \lrcorner\, \omega = 0\} \tag{2.72}$$

是 $\mathfrak{g}$ 的李子代数. 此外, $\mathfrak{h}_\omega = \{0\}$ 当且仅当 ω 非退化.

证明. 对任意切向量场 $X, Y \in \mathfrak{h}_\omega$, 只需验证 $[X,Y] \in \mathfrak{h}_\omega$. 注意李导数

$$\mathcal{L}_Y\omega = Y \lrcorner\, (\mathrm{d}\omega) + \mathrm{d}(Y \lrcorner\, \omega) = 0$$

(见 Cartan 公式(2.23)式), 从而对任意左不变切向量场 $Z \in \mathfrak{g}$, 注意 $\omega(X,Z)$ 是常数, 于是

$$\begin{aligned}
0 &= \mathcal{L}_Y\omega(X,Z) \\
&= (\mathcal{L}_Y\omega)(X,Z) + \omega([Y,X],Z) + \omega(X,[Y,Z]) \\
&= ([Y,X] \lrcorner\, \omega)(Z) + (X \lrcorner\, \omega)([Y,Z]) \\
&= ([Y,X] \lrcorner\, \omega)(Z),
\end{aligned}$$

从而由 Z 的任意性得 $[Y,X] \lrcorner\, \omega = 0$, 因此 $[X,Y] \in \mathfrak{h}_\omega$. 当 ω 非退化时, 显然 $\mathfrak{h}_\omega = \{0\}$, 引理得证. □

由李群理论, $\mathfrak{g}$ 的李子代数 $\mathfrak{h}_\omega$ 对应于 G 的某个连通李子群 H_ω.

引理 2.81. 记号承上, 则存在 G 的连通李子群 H_ω, 使得 $\mathfrak{h}_\omega$ 是 H_ω 的李代数, 并且满足上述性质的 H_ω 唯一.

证明. 这是李群理论当中众所周知的结果, 我们在此简要回顾. 取 $\mathfrak{h}_\omega$ 的一组基 $X_1, X_2, ..., X_{n-k}$, 其中 $k := n - \dim \mathfrak{h}_\omega$. 将这些 X_i 视为 G 上的左不变切向量场, 则这族切向量场张成 M 上的一个 $(n-k)$ 维分布 Δ:

$$\forall a \in G, \quad \Delta(a) := \mathrm{span}\{X_i|_a\}_{1 \leq i \leq n-k} = (l_a)_* T_e G \subseteq T_a G, \tag{2.73}$$

注意 $\mathfrak{h}_\omega$ 是 $\mathfrak{g}$ 的李子代数, 关于李括号运算封闭, 易知 Δ 是可积的, 从而由积分子流形的 **Frobenius 定理**, 取经过点 $e \in G$ 的服从分布 Δ 的极大积分子流形, 并记该子流形为 H_ω. 由 H_ω 的构造可知对任意 $h \in H_\omega$,

$$T_h H_\omega = (l_h)_* \mathfrak{h}_\omega.$$

断言 H_ω 为 G 的连通李子群. 由极大积分子流形的定义, H_ω 显然连通. 又对任意 $h \in H$, 考虑连通子流形 $h^{-1}H$, 显然 $e \in h^{-1}H$, 又容易验证 $h^{-1}H$ 也服从分布 Δ, 从而由极大积分子流形的唯一性可得 $h^{-1}H_\omega = H_\omega$. 因此 H 是 G 的子群. 注意积分子流形 H_ω 是**正则子流形**, 从而可以验证 H_ω 上的乘法、取逆运算光滑, 因此 H_ω 是 G 的连通李子群.

最后, 由积分子流形的局部唯一性以及拓扑群的基本性质 (单位元的邻域构成拓扑群的生成元) 容易验证 H_ω 的唯一性. □

若满足上述性质 H_ω 是 G 的闭子群, 则齐性空间

$$M_\omega := G/H_\omega$$

是光滑流形. 事实上, M_ω 还具有自然的辛结构:

定理 2.82. 设 G 为李群, $\omega \in Z^2(\mathfrak{g})$ 是 G 上的左不变闭 2-形式. 如果满足引理2.81的李子群 H_ω 是闭子群, 则在齐性空间 $M_\omega := G/H_\omega$ 上存在唯一的辛形式 $\tilde{\omega}$, 使得

$$\omega = \pi^* \tilde{\omega},$$

其中 $\pi \colon G \to G/H_\omega$ 是典范投影.

证明. 对任意 $\tilde{a} \in M_\omega$ 以及 $\tilde{X}, \tilde{Y} \in T_{\tilde{a}} M_\omega$, 任取 $a \in \pi^{-1}(\tilde{a})$, 以及 $X, Y \in T_a G$ 使得 $\pi_* X = \tilde{X}, \pi_* Y = \tilde{Y}$. 定义

$$\tilde{\omega}(\tilde{X}, \tilde{Y}) := \omega(X, Y).$$

断言上述 $\tilde{\omega}(\tilde{X}, \tilde{Y})$ 是良定的, 其值与 a, X, Y 的选取无关, 从而 $\tilde{\omega} \in \Omega^2(M_\omega)$. 这是因为, 对于固定的 $a \in \pi^{-1}(\tilde{a})$, 若另选符合定义的 $X', Y' \in T_a G$, 则 $X - X', Y - Y' \in (l_a)_* \mathfrak{h}_\omega$, 从而 $i_{X-X'}\omega = i_{Y-Y'}\omega = 0$, 由此易知 $\omega(X, Y) = \omega(X', Y')$. 接下来, 若另选 $a' \in \pi^*(\tilde{a})$, 记 $g := a'a^{-1} \in G$, 并记 $T_{a'}G$ 中的向量 $X' := (l_g)_* X, Y' := (l_g)_* Y$. 则由 $\pi \circ l_{g^{-1}} = \pi$ 可知

$$\pi_* X' = \pi_* (l_{g^{-1}})_* X' = \pi_* X = \tilde{X},$$

同理 $\pi_* Y' = \tilde{Y}$. 再由 ω 的左不变性可知

$$\omega(X', Y') = (l_g^* \omega)(X, Y) = \omega(X, Y).$$

因此 $\tilde{\omega}(\tilde{X}, \tilde{Y})$ 的值也与 a 的选取无关, 从而 $\tilde{\omega} \in \Omega^2(X, Y)$ 良定, 并且显然 $\omega = \pi^* \tilde{\omega}$. 接下来只需验证 $\tilde{\omega}$ 是非退化、闭的.

记号承上, 如果 $\tilde{X} \in T_{\tilde{a}} M_\omega$ 使得 $i_{\tilde{X}} \tilde{\omega} = 0$, 则由 $\tilde{\omega}$ 的定义可知, 对任意 $X \in T_a G$, 如果 $\pi_* X = \tilde{X}$, 则 $i_X \omega = 0$, 即 $X \in (l_a)_* \mathfrak{g}_\omega$, 从而 $\tilde{X} = \pi_* X = 0$, 这表明 $\tilde{\omega}$ 非退化. 再注意 $\pi^*(\mathrm{d}\tilde{\omega}) = \mathrm{d}(\pi^* \tilde{\omega}) = \mathrm{d}\omega = 0$, 又因为切映射 π_* 是满射从而拉回映射 π^* 是单射, 因此 $\mathrm{d}\tilde{\omega} = 0$, 故 $\tilde{\omega}$ 是闭的. 综上所述, $\tilde{\omega}$ 是 $M_\omega := G/H_\omega$ 的辛结构. □

注 **2.83.** 在适当的局部坐标下显式写出上述 $\tilde{\omega}$ 的表达式, 如下:

记号承上, 任取 $a \in \pi^*(a)$, 记 N_a 为过 a 点的服从分布 Δ(见(2.73)式) 的极大积分子流形 (这其实是子群 H_ω 的陪集), 则存在 a 附近的局部坐标 $x^1, x^2, ..., x^n$, 使得

$$N_a = \left\{ (x^1, x^2, ..., x^n) \,\middle|\, x^1 = x^2 = \cdots = x^k = 0 \right\},$$

其中 $k := \dim M_\omega = n - \dim \mathfrak{g}_\omega$. 此时, $\{\frac{\partial}{\partial x^{k+1}}, ..., \frac{\partial}{\partial x^n}\}$ 构成切空间 $T_a N_a = (l_a)_* \mathfrak{g}_\omega$ 的一组基, 并且 M_ω 在点 $\tilde{a} = \pi(a)$ 处有局部坐标 $x^1, x^2, ..., x^k$. 由 N_a

的定义知 $\frac{\partial}{\partial x^{k+l}} \lrcorner \omega = 0$, $(1 \leq l \leq n-k)$, 因此 ω 在局部坐标 $x^1, ..., x^n$ 下的表达式形如

$$\omega = \sum_{1 \leq i < j \leq k} \omega_{ij} \mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}x^j,$$

易知在 $\tilde{a} \in M_\omega$ 的局部坐标 $x^1, ..., x^k$ 下, $\tilde{\omega}$ 的表达式恰为

$$\omega = \sum_{1 \leq i < j \leq k} \omega_{ij} \mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}x^j.$$

注 **2.84.** 从李群 G 以及 $\omega \in Z^2(\mathfrak{g})$ 出发构造辛流形 (M_ω, ϖ) 的上述过程其实是一种特殊的辛约化. 辛约化的最基本例子见前文例1.10.

大致来说, 辛约化是将流形 M 的某个商空间 $M/\sim$ 赋予辛结构的操作. 我们在后文还将专门探讨它.

2.4.4 余伴随轨道 $G^{\#}\omega$ 与 G-辛流形

给定李群 G 以及左不变闭 2-形式 $\omega \in Z^2(\mathfrak{g})$, 假设引理2.81所确定的李子群 H_ω 是闭的, 则定理2.82给出了齐性空间 $M_\omega := G/H_\omega$ 的典范的辛结构. 李群 G 在 M_ω 上有典范的群作用.

题 **2.85.** *记号承上, 验证: 李群 G 在 M_ω 上的群作用是可迁的辛作用.*

证明. 可迁性显然. 只需再验证对任意 $g \in G$, $\lambda_g^* \tilde{\omega} = \tilde{\omega}$, 其中 $\tilde{\omega}$ 是 M_ω 的典范辛结构, $\lambda_g \colon M_\omega \to M_\omega$ 见定义2.78. 注意下述图表交换:

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "l_g"] \arrow[d, "\pi"'] & G \arrow[d, "\pi"] \\ M_\omega \arrow[r, "\lambda_g"] & M_\omega \end{tikzcd}$$

从而

$$\pi^*(\lambda_g^* \tilde{\omega}) = l_g^*(\pi^* \tilde{\omega}) = l_g^* \omega = \omega = \pi^* \tilde{\omega},$$

又注意拉回映射 π^* 是单射, 因此 $\lambda_g^* \tilde{\omega} = \tilde{\omega}$, 得证. □

既然 G 在 M_ω 上的作用是可迁的辛作用, 则由引理2.79可知, (2.71)式所确定的映射 $\Psi \colon M_\omega \to Z^2(\mathfrak{g})$ 将 M_ω 映为 $Z^2(\mathfrak{g})$ 的某条 G-余伴随轨道.

推论 2.86. 条件与记号承上, 则 $\Psi(M_\omega) = G^\# \omega := \left\{ \mathrm{Ad}_g^* \omega \,\middle|\, g \in G \right\}$.

证明. 记 $\tilde{e} := \pi(e) = eH_\omega$ 是单位元 $e \in G$ 在 M_ω 中的像, 注意 $\rho_{\tilde{e}} = \pi$, 其中 $\rho_{\tilde{e}}$ 见定义2.78. 于是

$$\Psi(\tilde{e}) = \rho_{\tilde{e}}^* \tilde{\omega} = \pi^* \tilde{\omega} = \omega,$$

因此 $\Psi(M_\omega)$ 是 $\omega \in Z^2(\mathfrak{g})$ 所在的 G-余伴随轨道, 即 $G^\# \omega$. □

也就是说, 对 G 的每一条余伴随轨道 $G^\# \omega$ (其中 $\omega \in Z^2(\mathfrak{g})$, 并且假设 H_ω 是 G 的闭子群), 都存在 G-辛流形 (M, ω) 使得 $G^\# \omega = \Psi(M)$. 接下来自然要问, 这样的 G-辛流形是唯一的吗?

定理 2.87. 设 G 为李群, 其李代数为 $\mathfrak{g}$, $\omega \in Z^2(\mathfrak{g})$. 设 (M, Ω) 为 G-辛流形, 且 G 在 M 上的作用可迁, 如果 $G^\# \omega = \Psi(M)$, 则:

1. 存在 G 的闭子群 H 使得 $M \cong G/H$, 并且 $\omega = \rho_{eH}^* \Omega$ (注意 $\rho_{eH}\colon G \to G/H$ 恰为典范投影).

2. 李子群 H_ω 是 H 的包含单位元的连通分支, 其中 H_ω 的定义见引理2.81. 从而 $M_\omega := G/H_\omega$ 是 $M = G/H$ 的覆叠空间.

即, 满足 $\Psi(M) = G^\# \omega$ 的 G-辛流形 M 在相差覆叠的意义下唯一.

证明. 任取 $m \in M$, 由 $\Psi(M) = G^\# \omega$ 可知存在 $g \in G$ 使得 $\Psi(m) = \mathrm{Ad}_g^* \omega$, 即 $\rho_m^* \Omega = \Psi(m) = \mathrm{Ad}_g^* \omega = r_g^* \omega$, 于是

$$\omega = r_{g^{-1}}^* \left(\rho_m^* \Omega \right) = \left(\rho_m \circ r_{g^{-1}} \right)^* \Omega = \rho_{g^{-1}m}^* \Omega.$$

令 $H := \{ h \in G \,|\, hg^{-1}m = g^{-1}m \}$, 即 $g^{-1}m \in M$ 的稳定子群, 则 $M \cong G/H$, 且易验证 $\omega = \rho_{eH}^* \Omega$.

为验证 H_ω 是上述 H 的连通分支 (一般来说 H 未必连通), 只需验证闭子群 H 与 H_ω 的李代数相同, 都是 $\mathfrak{h}_\omega$, 然后再由 H_ω 的极大连通性即可. 事实上, 对任意 $X \in \mathfrak{g}$, 有

$$\begin{aligned}
X \in \mathfrak{h}_\omega \Leftrightarrow X \lrcorner \omega = 0 &\Leftrightarrow X \lrcorner \rho_{eH}^* \Omega = 0 \\
&\Leftrightarrow \rho_{eH}^* \left((\rho_{eH})_* X \lrcorner \Omega \right) = 0 \\
&\Leftrightarrow (\rho_{eH})_* X \lrcorner \Omega = 0 && (\rho_{eH}^* \text{ 是单射})
\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow (\rho_{eH})_* X = 0 \qquad \text{(辛形式 } \Omega \text{ 非退化)}$$

$$\Leftrightarrow X \in \mathfrak{h} := \operatorname{Lie} H \qquad \text{(注意 } \mathfrak{h} \cong T_e H)$$

(其中 $X \lrcorner \omega := i_X \omega$), 从而 $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_\omega$, 得证. □

2.4.5 Kirillov-Kostant-Souriau 定理, 简单例子与注记

对于 $\omega \in Z^2(\mathfrak{g})$, 前文已引入 G 的子群 H_ω, 并且假定 H_ω 是闭子群, 则齐性空间 $M_\omega := G/H_\omega$ 具有自然的辛结构. 然而 H_ω 何时是闭的? 一个充分条件是, ω 为恰当形式, 即存在 $\beta \in \mathfrak{g}^* \cong \Omega_l^1(G)$ 使得 $\omega = \mathrm{d}\beta$.

我们还将看到, 对任意 $\beta \in \mathfrak{g}^*$, 余伴随轨道 $G^\# \beta$ 总具有辛结构.

引理 2.88. 设 G 为李群, $\mathfrak{g}$ 是 G 的李代数, $\beta \in \mathfrak{g}^* \cong \Omega_l^1(G)$, $\omega := \mathrm{d}\beta \in B^2(\mathfrak{g}) \subseteq Z^2(\mathfrak{g})$, 则稳定子群

$$G_\beta := \left\{ g \in G \,\middle|\, \operatorname{Ad}_g^* \beta = \beta \right\}$$

是 G 的闭子群, 且 G_β 与 H_ω 的李代数相同, 从而 H_ω 是 G_β 的连通分支, 特别地 H_ω 是 G 的闭子群.

证明. 只需计算 G_β 的李代数即可. 对任意 $X \in \mathfrak{g}$, 有

$$\begin{aligned} X \in \operatorname{Lie} G_\beta &\Leftrightarrow \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \operatorname{Ad}_{\mathrm{e}^{tX}}^* \beta \right|_{t=0} = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall Y \in \mathfrak{g},\ \beta\left(\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \operatorname{Ad}_{\mathrm{e}^{-tX}} Y \right|_{t=0} \right) = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall Y \in \mathfrak{g},\ -\beta([X, Y]) = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall Y \in \mathfrak{g},\ (\mathrm{d}\beta)(X, Y) = 0 \\ &\Leftrightarrow X \lrcorner \omega = 0 \Leftrightarrow X \in \mathfrak{h}_\omega, \end{aligned}$$

因此 $\operatorname{Lie} G_\beta = \mathfrak{h}_\omega$. 由 H_ω 的极大连通性知 H_ω 是 G_β 的一个连通分支. □

定理 2.89. (Kirillov-Kostant-Souriau). 设 G 为李群, $\mathfrak{g}$ 是 G 的李代数, $\beta \in \mathfrak{g}^* \cong \Omega_l^1(G)$, 则余伴随轨道 $G^\# \beta \cong G/G_\beta$ 存在辛结构 $\tilde{\omega}$, 使得

$$\pi_\beta^* \tilde{\omega} = \mathrm{d}\beta, \tag{2.74}$$

其中 G_β 的定义见引理2.88, $\pi_\beta\colon G\to G/G_\beta$ 为典范投影. 此外, 若记 $\omega:=\mathrm{d}\beta\in Z^2(\mathfrak{g})$, 则定理2.82中的辛流形 M_ω 是 $G^\#\beta$ 的覆叠空间.

证明. 由稳定子群 G_β 的定义容易把余伴随轨道 $G^\#\beta$ 与齐性空间 G/G_β 等同. 辛结构 $\tilde{\omega}$ 的构造方法与定理2.82完全类似, 留给读者. 其余断言可由引理2.88直接得到. □

题 2.90. 记号承上, 则 $G^\#\beta$ 的辛结构 $\tilde{\omega}$ 满足

$$\tilde{\omega}(\tilde{X},\tilde{Y})=-\beta([X,Y]), \tag{2.75}$$

其中 $X,Y\in\mathfrak{g}$, $\tilde{X}=(\pi_\beta)_*X$, $\tilde{Y}=(\pi_\beta)_*Y$.

题 2.91. 记 $\mathfrak{g}$ 为李群 G 的李代数, 如果

$$\mathrm{H}^1(\mathfrak{g})=\mathrm{H}^2(\mathfrak{g})=\{0\},$$

则对每个 $\omega\in Z^2(\mathfrak{g})$, 存在唯一 $\beta\in\mathfrak{g}^*$ 使得 $\omega=\mathrm{d}\beta$, 并且

$$\mathrm{d}\colon G^\#\beta\to G^\#\omega$$

是良定的双射. 此外, 下述两个集合之前也有自然的一一对应:

$$\left\{G^\#\beta\,\middle|\,\beta\in\mathfrak{g}^*\right\}\cong\left\{G^\#\omega\,\middle|\,\omega\in Z^2(\mathfrak{g})\right\}.$$

[提示: 李代数上同调的定义见(2.66)式, 直接用定义即可.]

本节最后, 我们考察余伴随轨道的一个基础例子.

例 2.92. 令 $G:=\mathrm{SO}(3)$ 为 $\mathbb{R}^3$ 上的特殊正交变换群, 则 G 的李代数为

$$\mathfrak{so}(3)=\left\{\boldsymbol{X}\in\mathbb{R}^{3\times3}\,\middle|\,\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}=-\boldsymbol{X}\right\}.$$

任取 $\mathfrak{so}(3)^*$ 中的非零元 β, 证明: 稳定子群

$$G_\beta\cong\mathrm{SO}(2),$$

相应的余伴随轨道 $G^\#\beta\cong\mathrm{SO}(3)/\mathrm{SO}(2)\cong S^2$, 由此再次得到球面 S^2 的辛结构 (注意与题2.4对照).

解. 取李代数 $\mathfrak{so}(3)$ 的一组基 $\{\boldsymbol{E}_x, \boldsymbol{E}_y, \boldsymbol{E}_z\}$, 其中

$$\boldsymbol{E}_x := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{E}_y := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{E}_z := \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

容易验证交换关系

$$[\boldsymbol{E}_x, \boldsymbol{E}_y] = \boldsymbol{E}_z, \quad [\boldsymbol{E}_y, \boldsymbol{E}_z] = \boldsymbol{E}_x, \quad [\boldsymbol{E}_z, \boldsymbol{E}_x] = \boldsymbol{E}_y,$$

从而有李代数同构

$$\begin{aligned} \iota\colon \mathfrak{so}(3) &\to (\mathbb{R}^3, \times) \\ (\boldsymbol{E}_x, \boldsymbol{E}_y, \boldsymbol{E}_z) &\mapsto (\boldsymbol{e}_x, \boldsymbol{e}_y, \boldsymbol{e}_z), \end{aligned}$$

其中 “$\times$” 是通常的 $\mathbb{R}^3$ 矢量叉乘, $(\boldsymbol{e}_x, \boldsymbol{e}_y, \boldsymbol{e}_z)$ 是 $\mathbb{R}^3$ 的标准基. 易知上述同构映射 ι 被以下性质所唯一确定: 对任意 $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^3$, $\boldsymbol{X} \in \mathfrak{so}(3)$ 都有

$$\boldsymbol{X}\boldsymbol{v} = \iota(\boldsymbol{X}) \times \boldsymbol{v}. \tag{2.76}$$

由此易知 G 的伴随表示满足: 对任意 $g \in G$ 以及 $\boldsymbol{X} \in \mathfrak{so}(3)$ 都有

$$\iota(\operatorname{Ad}_g \boldsymbol{X}) = g\iota(\boldsymbol{X}), \tag{2.77}$$

细节留给读者 (注意 $\operatorname{Ad}_g \boldsymbol{X} = g\boldsymbol{X}g^{-1}$). 这表明 ι 给出了 G 在 $\mathfrak{so}(3)$ 上的伴随表示与在 $\mathbb{R}^3$ 上的典范表示之间的同构. 接下来不妨省略 ι, 将 $\mathfrak{so}(3)$ 与 $\mathbb{R}^3$ 等同.

通过 $\mathbb{R}^3$ 上的标准欧氏内积 $\langle , \rangle$ 将 $\mathfrak{so}(3)^* \cong (\mathbb{R}^3)^*$ 与 $\mathbb{R}^3$ 等同, 在此意义下, 余伴随表示具有如下显式表达: 对任意 $g \in G$, $\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^3$,

$$\langle \operatorname{Ad}^*_g \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{v} \rangle = \langle \boldsymbol{\beta}, g^{-1}\boldsymbol{v} \rangle = \langle g\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{v} \rangle,$$

因此 $\operatorname{Ad}^*_g \boldsymbol{\beta} = g\boldsymbol{\beta}$, 即 $\mathfrak{so}(3)^* \xrightarrow{\iota^*} (\mathbb{R}^3)^* \xrightarrow{\langle , \rangle} \mathbb{R}^3$ 给出了 G 的余伴随表示与典范表示之间的同构. 由此立刻看出余伴随轨道

$$G^{\#}\boldsymbol{\beta} = \left\{ \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \|\boldsymbol{v}\| = \|\boldsymbol{\beta}\| \right\} \cong S^2, \tag{2.78}$$

即半径为 $b := \|\boldsymbol{\beta}\|$ 的球面; 并且稳定子群 $G_\beta = \{g \in G \mid g\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\beta}\}$, 即绕 $\boldsymbol{\beta}$ 的旋转变换构成的群, 它显然同构于 $\mathrm{SO}(2)$.

下面显式写出 $G^{\#}\beta$ 的辛结构 $\tilde{\omega}$, 这关键是要用到(2.75)式. 依然将 $G^{\#}\boldsymbol{\beta} := G/G_{\boldsymbol{\beta}}$ 视为 $\mathbb{R}^3$ 的子集, 见(2.78)式. 则易知对任意 $g \in G$, 典范投影 $\pi_{\boldsymbol{\beta}} \colon G \to G/G_{\boldsymbol{\beta}}$ 满足

$$\pi_{\boldsymbol{\beta}}(g) = g\boldsymbol{\beta}.$$

为方便计算, 不妨 $\boldsymbol{\beta} = b\boldsymbol{e}_z$, 其中 $b := \|\boldsymbol{\beta}\| > 0$, 则切空间 $T_{\boldsymbol{\beta}}(G^{\#}\boldsymbol{\beta})$ 自然地等同于 $\mathbb{R}^2$; 通过 ι 将 $T_{\boldsymbol{I}}G = \mathfrak{so}(3)$ 等同于 $\mathbb{R}^3$, 在此意义下容易验证切映射 $(\pi_{\boldsymbol{\beta}})_* \colon T_{\boldsymbol{I}}G \to T_{\boldsymbol{\beta}}(G^{\#}\boldsymbol{\beta})$ 满足

$$(\pi_{\boldsymbol{\beta}})_*\boldsymbol{e}_x = -b\boldsymbol{e}_y, \quad (\pi_{\boldsymbol{\beta}})_*\boldsymbol{e}_y = b\boldsymbol{e}_x, \quad (\pi_{\boldsymbol{\beta}})_*\boldsymbol{e}_z = \boldsymbol{0}.$$

将上式与(2.75)式结合, 容易验证 $G^{\#}\boldsymbol{\beta}$ 的诱导辛结构 $\tilde{\omega}$ 满足

$$\tilde{\omega}(\boldsymbol{e}_x, \boldsymbol{e}_y) = -\frac{1}{b},$$

其中 $\boldsymbol{e}_x, \boldsymbol{e}_y$ 切空间 $T_{\boldsymbol{\beta}}(G^{\#}\boldsymbol{\beta}) \cong \mathbb{R}^2$ 的标准基. 这只是 $\tilde{\omega}$ 在点 $\boldsymbol{\beta}$ 处的表达式, 由 $\tilde{\omega}$ 的 G-不变性容易得到 $\tilde{\omega}$ 在其他点处的表达. 事实上, 在 $G^{\#}\boldsymbol{\beta} \cong \mathbb{R}^2$ 的球坐标 $\begin{cases} x = b\sin\theta\cos\varphi \\ y = b\sin\theta\sin\varphi \\ z = b\cos\theta \end{cases}$ 下, 可以验证 (留给读者)

$$\tilde{\omega} = -b\sin\theta\,\mathrm{d}\theta \wedge \mathrm{d}\varphi.$$

该 $\tilde{\omega}$ 与题2.4中的辛结构相差常数倍. □

2.5 复射影空间

复射影空间 $\mathbb{CP}^n$ 是辛流形的重要例子, 此外 $\mathbb{CP}^n$ 还具有 Kähler 结构与余伴随轨道结构. 本节将详细介绍之.

众所周知, 复射影空间 $\mathbb{CP}^n$ 是 $\mathbb{C}^{n+1}$ 的所有 1 维复子空间之全体, 即

$$\mathbb{CP}^n := (\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{\boldsymbol{0}\})/\sim,$$

其中等价关系 $\sim$ 满足: $\lambda\boldsymbol{w} \sim \boldsymbol{w}$, 其中 $\boldsymbol{0} \neq \boldsymbol{w} \in \mathbb{C}^{n+1}, 0 \neq \lambda \in \mathbb{C}$. 记商映射

$$\begin{aligned} \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{\boldsymbol{0}\} &\to \mathbb{CP}^n \\ \boldsymbol{w} = (w^0, \ldots, w^n)^{\mathrm{T}} &\mapsto \boldsymbol{w}_\sim \end{aligned} \tag{2.79}$$

众所周知, $\mathbb{CP}^n$ 是复流形. 记 $U_0 := \{\boldsymbol{w}_\sim \in \mathbb{CP}^n \,|\, w_0 \neq 0\}$, 以及映射

$$
\begin{aligned}
\varphi_0 \colon U_0 &\to \mathbb{C}^n \\
\boldsymbol{w} &\mapsto \boldsymbol{z} = (z^1, ..., z^n)^{\mathrm{T}} := \left(\frac{w^1}{w^0}, ..., \frac{w^n}{w^0}\right)^{\mathrm{T}},
\end{aligned}
\tag{2.80}
$$

则 (U_0, φ_0) 是 $\mathbb{CP}^n$ 的一个局部坐标卡, $\boldsymbol{z} = (z^1, ..., z^n)^{\mathrm{T}}$ 为相应的复坐标, 这给出了 $\mathbb{CP}^n$ 的复结构. 本节接下来的具体计算都发生在此局部坐标上.

2.5.1 Fubini-Study 度量

复射影空间 $\mathbb{CP}^n$ 不仅是复流形, 其上还有某种意义下自然的厄米特结构, 称为 **Fubini-Study 度量**. 该厄米特结构使得 $\mathbb{CP}^n$ 成为 Kähler 流形.

注 2.93. 回忆 $\mathbb{C}^{n+1}$ 的标准厄米特结构 $\langle\!\langle , \rangle\!\rangle$ 如下:

$$
\langle\!\langle \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta} \rangle\!\rangle := \boldsymbol{\eta}^\dagger \boldsymbol{\xi},
\tag{2.81}
$$

其中 $\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}$ 是 $n+1$ 维列向量, $\boldsymbol{\eta}^\dagger := (\overline{\boldsymbol{\eta}})^{\mathrm{T}}$. 该记号约定保证了 $\langle\!\langle , \rangle\!\rangle$ 关于第 2 个分量是共轭线性的, 与前文1.5.1小节保持一致.

对任意非零向量 $\boldsymbol{w} \in \mathbb{C}^{n+1}$, 回忆(2.79)式, 易知可将 $\mathbb{CP}^n$ 在 $\boldsymbol{w}_\sim := \pi(\boldsymbol{w})$ 处的切空间自然等同于

$$
(\mathbb{C}\boldsymbol{w})^\perp := \left\{\boldsymbol{\xi}' \in \mathbb{C}^{n+1} \,\middle|\, \langle\!\langle \boldsymbol{\xi}', \boldsymbol{w} \rangle\!\rangle = 0\right\} \cong \mathbb{C}^n \subseteq \mathbb{C}^{n+1}.
\tag{2.82}
$$

从而可将 $\mathbb{C}^{n+1}$ 的标准厄米特结构搬运到 $\mathbb{CP}^n$ 上.

为此, 考虑 $\mathbb{C}^{n+1}$ 中的 $2n+1$ 维单位球面

$$
S^{2n+1} := \left\{\boldsymbol{w} \in \mathbb{C}^{n+1} \,\middle|\, \boldsymbol{w}^\dagger \boldsymbol{w} = 1\right\},
\tag{2.83}
$$

复射影空间 $\mathbb{CP}^n$ 也可视为 S^{2n+1} 的商空间, 即

$$
\mathbb{CP}^n \cong S^{2n+1}/\mathrm{U}(1),
$$

其中酉群 $\mathrm{U}(1)$ 在 S^{2n+1} 上的作用为 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}.(w^0, ..., w^n)^{\mathrm{T}} = \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} w^0, ..., \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} w^n\right)^{\mathrm{T}}$. 在此意义下, 记相应的商映射为

$$
\begin{aligned}
\pi \colon S^{2n+1} &\to \mathbb{CP}^n \\
\boldsymbol{w} &\mapsto \boldsymbol{w}_\sim.
\end{aligned}
\tag{2.84}
$$

则在此意义下, 对任意 $w_\sim \in \mathbb{CP}^n$, 有切空间同构

$$T_{\boldsymbol{w}_\sim}\mathbb{CP}^n \cong T_{\boldsymbol{w}}S^{2n+1}/\ker\pi_* \cong (\mathbb{C}\boldsymbol{w})^\perp \subseteq \mathbb{C}^{n+1}, \tag{2.85}$$

其中 $\boldsymbol{w} \in S^{2n+1}$ 使得 $\pi(\boldsymbol{w}) = \boldsymbol{w}_\sim$. 注意包含关系

$$(\mathbb{C}\boldsymbol{w})^\perp \subseteq T_{\boldsymbol{w}}S^{2n+1} \subseteq \mathbb{C}^{n+1},$$

在此意义下, 切空间同构 $(\mathbb{C}\boldsymbol{w})^\perp \cong T_{\boldsymbol{w}_\sim}\mathbb{CP}^n$ 由切映射 $\pi_*\colon T_{\boldsymbol{w}}S^{2n+1} \to T_{\boldsymbol{w}_\sim}\mathbb{CP}^n$ 在子空间 $(\mathbb{C}\boldsymbol{w})^\perp$ 上的限制所诱导.

定义 2.94. 记号承上. 对于 $\boldsymbol{w}_\sim \in \mathbb{CP}^n$, 取定 $\boldsymbol{w} \in S^{2n+1}$ 使得 $\boldsymbol{w}_\sim = \pi(\boldsymbol{w})$. 则对任意 $\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta} \in T_{\boldsymbol{w}_\sim}\mathbb{CP}^n$, 存在唯一的 $\boldsymbol{\xi}', \boldsymbol{\eta}' \in (\mathbb{C}\boldsymbol{w})^\perp$ 使得

$$\pi_*(\boldsymbol{\xi}') = \boldsymbol{\xi}, \qquad \pi_*(\boldsymbol{\eta}') = \boldsymbol{\eta}.$$

此时令

$$h(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}) := \langle\!\langle \boldsymbol{\xi}', \boldsymbol{\eta}' \rangle\!\rangle, \tag{2.86}$$

则易知上式与 $\boldsymbol{w} \in \pi^{-1}(\boldsymbol{w}_\sim)$ 的选取无关. 可以验证上述 h 是 $\mathbb{CP}^n$ 的厄米特结构. 该 h 称为 $\mathbb{CP}^n$ 的 ***Fubini-Study* 度量**.

下面计算 Fubini-Study 度量在局部坐标卡(2.80)下的表达式. 对于 $\boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} w_0 \\ \hat{\boldsymbol{w}} \end{pmatrix} \in S^{2n+1} \subseteq \mathbb{C}^{n+1}$, 易知 $\boldsymbol{z} := (\varphi_0 \circ \pi)(\boldsymbol{w}) = \frac{\hat{\boldsymbol{w}}}{w_0}$, 从而对任意 $\boldsymbol{\xi}' = \begin{pmatrix} \xi_0' \\ \hat{\boldsymbol{\xi}}' \end{pmatrix} \in (\mathbb{C}\boldsymbol{w})^\perp \subseteq T_{\boldsymbol{w}}S^{2n+1}$, 有

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\xi} &:= (\varphi_0 \circ \pi)_*(\boldsymbol{\xi}') = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} (\varphi_0 \circ \pi)(\boldsymbol{w} + t\boldsymbol{\xi}') \\ &= \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \frac{\hat{\boldsymbol{w}} + t\hat{\boldsymbol{\xi}}'}{w_0 + t\xi_0'} = -\frac{\xi_0'\hat{\boldsymbol{w}}}{w_0^2} + \frac{\hat{\boldsymbol{\xi}}'}{w_0}. \end{aligned} \tag{2.87}$$

现在给定 $\boldsymbol{z} \in \mathbb{C}^n = \varphi_0(U_0)$, 以及 $\boldsymbol{\xi} \in T_{\boldsymbol{z}}\mathbb{C}^n \cong \mathbb{C}^n$, 取

$$\boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} w_0 \\ \hat{\boldsymbol{w}} \end{pmatrix} := \frac{1}{(1 + \|\boldsymbol{z}\|)^{\frac{1}{2}}} \begin{pmatrix} 1 \\ \boldsymbol{z} \end{pmatrix} \in S^{2n+1}, \tag{2.88}$$

如果 $\boldsymbol{\xi}' = \begin{pmatrix} \xi_0' \\ \hat{\boldsymbol{\xi}}' \end{pmatrix} \in (\mathbb{C}\boldsymbol{w})^{\perp}$ 使得 $(\varphi_0 \circ \pi)_* \boldsymbol{\xi}' = \boldsymbol{\xi}$, 则由(2.87)(2.88)式以及 $\boldsymbol{z}^{\dagger}\boldsymbol{\xi}' = 0$, 整理得

$$\begin{cases} -\xi_0' \boldsymbol{z} + \hat{\boldsymbol{\xi}}' = \frac{\boldsymbol{\xi}}{(1+\|\boldsymbol{z}\|)^{\frac{1}{2}}}, \\ \xi_0' + \boldsymbol{z}^{\dagger}\hat{\boldsymbol{\xi}}' = 0, \end{cases} \quad \text{即} \quad \begin{pmatrix} 1 & \boldsymbol{z}^{\dagger} \\ -\boldsymbol{z} & \boldsymbol{I}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_0' \\ \hat{\boldsymbol{\xi}}' \end{pmatrix} = \frac{1}{(1+\|\boldsymbol{z}\|^2)^{\frac{1}{2}}} \begin{pmatrix} 0 \\ \boldsymbol{\xi} \end{pmatrix},$$

注意逆矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & \boldsymbol{z}^{\dagger} \\ -\boldsymbol{z} & \boldsymbol{I}_n \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{1+\|\boldsymbol{z}\|^2} \begin{pmatrix} 1 & -\boldsymbol{z}^{\dagger} \\ \boldsymbol{z} & (1+\|\boldsymbol{z}\|^2)\boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{z}\boldsymbol{z}^{\dagger} \end{pmatrix}$, 从而解得

$$\boldsymbol{\xi}' = \begin{pmatrix} \xi_0' \\ \hat{\boldsymbol{\xi}}' \end{pmatrix} = \frac{1}{(1+\|\boldsymbol{z}\|^2)^{\frac{1}{2}}} \begin{pmatrix} 0 \\ \boldsymbol{\xi} \end{pmatrix} - \frac{\boldsymbol{z}^{\dagger}\boldsymbol{\xi}}{(1+\|\boldsymbol{z}\|^2)^{\frac{3}{2}}} \begin{pmatrix} 1 \\ \boldsymbol{z} \end{pmatrix}. \tag{2.89}$$

由此式可立即算出 Fubini-Study 度量在局部坐标(2.80)下的表达式:

定理 2.95. *设 h 为 $\mathbb{CP}^n$ 的 Fubini-Study 度量, 则在局部坐标(2.80)下, 对任意 $\boldsymbol{z} \in \mathbb{C}^n = \varphi_0(U_0)$, 以及 $\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta} \in \mathbb{C}^n \cong T_{\boldsymbol{z}}\mathbb{C}^n$, 都有*

$$h(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}) = \frac{\boldsymbol{\eta}^{\dagger}\boldsymbol{\xi}}{1+\|\boldsymbol{z}\|^2} - \frac{\boldsymbol{\eta}^{\dagger}\boldsymbol{z}\boldsymbol{z}^{\dagger}\boldsymbol{\xi}}{(1+\|\boldsymbol{z}\|^2)^2}. \tag{2.90}$$

证明. 对于 $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{C}^n \cong T_{\boldsymbol{z}}\mathbb{C}^n$, 相应 $\boldsymbol{\xi}' \in (\mathbb{C}\boldsymbol{w})^{\perp}$ 的表达式见(2.89), 类似也有 $\boldsymbol{\eta}'$, 于是由

$$h(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}) := \langle\!\langle \boldsymbol{\xi}', \boldsymbol{\eta}' \rangle\!\rangle = (\boldsymbol{\eta}')^{\dagger}\boldsymbol{\xi}'$$

直接计算即可, 过程留给读者. □

推论 2.96. *在局部坐标(2.80)下, Fubini-Study 度量具有显式表达*

$$h = \sum_{i,j=1}^{n} \left(\frac{\delta_{ij}}{1+\|\boldsymbol{z}\|^2} - \frac{\bar{z}_i z_j}{(1+\|\boldsymbol{z}\|^2)^2} \right) \mathrm{d}z^i \otimes \mathrm{d}\bar{z}^j. \tag{2.91}$$

并且相应的 Kähler 形式 $\omega = -\mathrm{Im}h$ 为

$$\omega = \frac{\mathrm{i}}{2} \sum_{i,j=1}^{n} \left(\frac{\delta_{ij}}{1+\|\boldsymbol{z}\|^2} - \frac{\bar{z}_i z_j}{(1+\|\boldsymbol{z}\|^2)^2} \right) \mathrm{d}z^i \wedge \mathrm{d}\bar{z}^j. \tag{2.92}$$

这里的 $z_i := z^i$, $\bar{z}_i := \bar{z}^i$.

证明. 由(2.90)式直接得到

$$h\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right) = \frac{\delta_{ij}}{1+\|\boldsymbol{z}\|^2} - \frac{\overline{z}_i z_j}{(1+\|\boldsymbol{z}\|^2)^2},$$

再结合(2.49)(2.51)(2.52)即可. □

对于(2.92)式中的 Kähler 形式 ω, 可以直接计算验证 $\mathrm{d}\omega = 0$(感兴趣的读者选做), 从而 Fubini-Study 度量使得 $\mathbb{CP}^n$ 成为 Kähler 流形. 除了直接计算验证, 后文还将通过其他更简洁的方法来说明 $\mathrm{d}\omega = 0$.

本小节最后, 我们介绍 Fubini-Study 度量的另一种自然的引入方式. 记 $\mathrm{Herm}(\mathbb{C}^{n+1}) := \left\{\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{(n+1)\times(n+1)} \,\middle|\, \boldsymbol{A}^\dagger = \boldsymbol{A}\right\}$ 为 $(n+1)$ 阶厄米特方阵之全体, 视为 $(n+1)^2$ 维 $\mathbb{R}$-线性空间. 注意 $\mathrm{Herm}(\mathbb{C}^{n+1})$ 的标准欧氏内积为

$$\begin{aligned} q\colon \mathrm{Herm}(\mathbb{C}^{n+1}) \times \mathrm{Herm}(\mathbb{C}^{n+1}) &\to \mathbb{R} \\ (\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}) &\mapsto \mathrm{tr}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}). \end{aligned} \tag{2.93}$$

题 2.97. 定义 $\phi\colon S^{2n+1} \to \mathrm{Herm}(\mathbb{C}^{n+1})$ 如下: $\phi(\boldsymbol{w}) = \boldsymbol{w}\boldsymbol{w}^\dagger$, 则存在唯一的映射 $\phi_\sim\colon \mathbb{CP}^n \to \mathrm{Herm}(\mathbb{C}^{n+1})$ 使得图表

$$\begin{tikzcd} S^{2n+1} \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "\pi"'] & \mathrm{Herm}(\mathbb{C}^{n+1}) \\ \mathbb{CP}^n \arrow[ur, dashed, "\phi_\sim"'] & \end{tikzcd}$$

交换. 该 $\phi_\sim$ 将 $\mathbb{CP}^n$ 嵌入到欧氏空间 $(\mathrm{Herm}(\mathbb{C}^n), q)$. 试计算黎曼度量 $\phi_\sim^* q$ 在局部坐标(2.80)下的表达式, 并研究它与 Fubini-Study 度量的关系.

解. 对于 $\boldsymbol{z} \in \mathbb{C}^n$, 易知

$$(\phi_\sim \circ \varphi_0)(\boldsymbol{z}) = \frac{1}{1+\|\boldsymbol{z}\|^2}\begin{pmatrix} 1 & \boldsymbol{z}^\dagger \\ \boldsymbol{z} & \boldsymbol{z}\boldsymbol{z}^\dagger \end{pmatrix},$$

于是对任意 $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{C}^n \cong T_{\boldsymbol{z}}\mathbb{C}^n$, 有

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\xi}' &:= (\phi_\sim \circ \varphi_0)_*(\boldsymbol{\xi}) \\ &= \frac{1}{1+\|\boldsymbol{z}\|^2}\begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\xi}^\dagger \\ \boldsymbol{\xi} & \boldsymbol{\xi}\boldsymbol{z}^\dagger + \boldsymbol{z}\boldsymbol{\xi}^\dagger \end{pmatrix} - \frac{\boldsymbol{z}^\dagger\boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{\xi}^\dagger\boldsymbol{z}}{(1+\|\boldsymbol{z}\|^2)^2}\begin{pmatrix} 1 & \boldsymbol{z}^\dagger \\ \boldsymbol{z} & \boldsymbol{z}\boldsymbol{z}^\dagger \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

于是对任意 $\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta} \in \mathbb{C}^n \cong T_{\boldsymbol{z}}\mathbb{C}^n$, 直接计算可得

$$\begin{aligned}\tilde{g}(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}) := \ & (\phi_\sim \circ \varphi_0)^* q(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}) = q(\boldsymbol{\xi}', \boldsymbol{\eta}') = \operatorname{tr}(\boldsymbol{\xi}' \boldsymbol{\eta}') \\ = \ & \frac{\boldsymbol{\xi}^\dagger \boldsymbol{\eta} + \boldsymbol{\eta}^\dagger \boldsymbol{\xi}}{1 + \|\boldsymbol{z}\|^2} - \frac{\xi^\dagger \boldsymbol{z}\boldsymbol{z}^\dagger \boldsymbol{\eta} + \boldsymbol{\eta}^\dagger \boldsymbol{z}\boldsymbol{z}^\dagger \boldsymbol{\xi}}{(1 + \|\boldsymbol{z}\|^2)^2}.\end{aligned}$$

与(2.90)式比较可得 $\tilde{g} = 2\mathrm{Re}\, h$. 记 $\tilde{h}$ 是由黎曼度量 $\tilde{g}$ 与复结构 J 所诱导的厄米特结构, 即

$$\tilde{h}(X, Y) := g(X, Y) - \mathrm{i} g(JX, Y),$$

则 $\tilde{h} = 2h$, 其中 h 为 Fubini-Study 度量, 见(2.91). □

2.5.2 $\mathbb{CP}^n$ 的 Kähler 结构

记 ω 为 $\mathbb{CP}^n$ 上由 Fubini-Study 度量所诱导的 Kähler 形式, 其局部表达式见(2.92). 本小节将用除直接计算外的方法说明 $\mathrm{d}\omega = 0$, 再次验证 $\mathbb{CP}^n$ 为 Kähler 流形.

注意特殊酉群 $\mathrm{SU}(n+1)$ 在 $\mathbb{CP}^n$ 上有自然的作用: 对于 $\boldsymbol{A} \in \mathrm{SU}(n+1)$ 以及 $\boldsymbol{w} \in S^{2n+1} \subseteq \mathbb{C}^{n+1}$, 令 $\boldsymbol{A}.\boldsymbol{w}_\sim := (\boldsymbol{A}\boldsymbol{w})_\sim$. 显然该群作用保持 $\mathbb{CP}^n$ 的 Fubini-Study 度量.

题 2.98. 验证: $\mathrm{SU}(n+1)$ 在 $\mathbb{CP}^n$ 的上述作用可迁, 并且在 $\boldsymbol{w}_\sim \in \mathbb{CP}^n$ 处的稳定子群

$$\mathrm{SU}(n+1)_{\boldsymbol{w}_\sim} \cong \mathrm{U}((\mathbb{C}\boldsymbol{w})^\perp) \cong \mathrm{U}(n),$$

从而在该群作用意义下有 $\mathbb{CP}^n \cong \mathrm{SU}(n+1)/\mathrm{U}(n)$.

接下来我们需要一个技术性引理. 一般地, 给定光滑流形 M 与群 G, 以及 G 在 M 上的作用

$$\begin{aligned} G \times M &\to M \\ (g, m) &\mapsto \lambda_g(m), \end{aligned}$$

使得对每个 $g \in G$, λ_g 都是光滑映射. 对每个 $m \in M$, 记稳定子群

$$G_m := \{g \in G \,|\, \lambda_g(m) = m\},$$

则 G_m 在 T_mM 上有 $\mathbb{R}$-线性表示

$$\begin{aligned} \Lambda_m\colon G_m &\to \operatorname{End}(T_mM) \\ g &\mapsto (\lambda_g)_*. \end{aligned} \tag{2.94}$$

引理 2.99. (Mumford判别法). *设 G 是群, (M,J) 是近复流形, $\omega \in \Omega^2(M)$. 如果 G 在 M 上的作用 $(g,m)\mapsto \lambda_g(m)$ 同时满足如下条件*

1. *任意 $g\in G$, λ_g 是光滑映射, 且 $\lambda_g^*\omega=\omega$;*

2. *任意 $m\in M$, $J_m\in\Lambda_m(G_m)$, 其中 Λ_m 见(2.94)式,*

则 $\mathrm{d}\omega=0$.

证明. 由条件易知 G 也保持 $\mathrm{d}\omega$ 不变, 即对任意 $g\in G$, $\lambda_g^*(\mathrm{d}\omega)=\mathrm{d}\omega$. 现在对每个 $m\in M$, 取 $g\in G_m$ 使得 $J_m=\Lambda_m(g)=(\lambda_g)_*$. 则对任意 $X,Y,Z\in T_mM$,

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\omega(X,Y,Z) &= (\lambda_g^*\mathrm{d}\omega)(X,Y,Z) \\ &= \mathrm{d}\omega((\lambda_g)_*X,(\lambda_g)_*Y,(\lambda_g)_*Z) = \mathrm{d}\omega(J_mX,J_mY,J_mZ), \end{aligned}$$

再注意 $J^2=-\mathrm{id}$, 从而

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\omega(X,Y,Z) &= \mathrm{d}\omega(J_mX,J_mY,J_mZ) \\ &= \mathrm{d}\omega(J_m^2X,J_m^2Y,J_m^2Z) = -\mathrm{d}\omega(X,Y,Z), \end{aligned}$$

由此易知 $\mathrm{d}\omega=0$, 得证. □

将上述引理应用于 $\mathrm{SU}(n+1)$ 在 $\mathbb{CP}^n$ 上的作用 (题(2.98)), 立刻得到:

推论 2.100. *Fubini-Study 度量的 Kähler 形式(2.92)满足 $\mathrm{d}\omega=0$.*

证明. 由 Fubini-Study 度量的定义可知 $\mathrm{SU}(n+1)$ 保持厄米特度量 h, 从而保持 Kähler 形式 $\omega=-\mathrm{Im}h$. 对任意 $\boldsymbol{w}\in S^{2n+1}\subseteq\mathbb{C}^{n+1}$, 定义线性变换 $s_{\boldsymbol{w}}\in\operatorname{End}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^{n+1})$ 如下:

$$s_{\boldsymbol{w}}(\boldsymbol{\xi}')=\begin{cases}(-\mathrm{i})^n\boldsymbol{\xi}' & \text{如果 } \boldsymbol{\xi}'\in\mathbb{C}\boldsymbol{w}, \\ \mathrm{i}\boldsymbol{\xi}' & \text{如果 } \boldsymbol{\xi}'\in(\mathbb{C}\boldsymbol{w})^{\perp}.\end{cases}$$

则易知 $s_{\boldsymbol{w}} \in \mathrm{SU}(n+1)$, 并且 $\lambda_{s_{\boldsymbol{w}}}(\boldsymbol{w}_\sim) = \boldsymbol{w}_\sim$, 其中 $\boldsymbol{w}_\sim := \pi(\boldsymbol{w}) \in \mathbb{CP}^n$. 此外容易验证对任意 $\boldsymbol{\xi}' \in (\mathbb{C}\boldsymbol{w})^\perp \cong T_{\boldsymbol{w}_\sim}\mathbb{CP}^n$ 都有

$$[\Lambda_{\boldsymbol{w}_\sim}(s_{\boldsymbol{w}})](\boldsymbol{\xi}') = \mathrm{i}\boldsymbol{\xi}' = J_{\boldsymbol{w}_\sim}\boldsymbol{\xi}',$$

即 $J_{\boldsymbol{w}_\sim} = \Lambda_{\boldsymbol{w}_\sim}(s_{\boldsymbol{w}})$. 从而使用引理2.99即可. □

除了上述技巧外, 我们回忆 Kähler 势函数的 $\mathrm{i}\partial\bar{\partial}$-引理 (即引理2.62), 下面给出 Fubini-Study 度量的势函数.

性质 2.101. 定义 $\mathbb{C}^n$ 上的光滑实值函数

$$\rho(\boldsymbol{z}) := \log\left(1 + \|\boldsymbol{z}\|^2\right), \tag{2.95}$$

则(2.92)式的 *Kähler* 形式 ω 满足 $\omega = \frac{\mathrm{i}}{2}\partial\bar{\partial}\rho$.

证明. 直接计算即可, 留给读者. □

特别注意, $\mathrm{d}\omega = 0$ 是上述性质的直接推论.

2.5.3 $\mathbb{CP}^n$ 的余伴随轨道结构

本小节将说明 $\mathbb{CP}^n$ 可以实现为特殊酉群 $\mathrm{SU}(n+1)$ 的余伴随轨道, 从而具有辛流形结构. 在本小节我们记

$$G := \mathrm{SU}(n+1) = \left\{\boldsymbol{A} \in \mathrm{GL}(n+1,\mathbb{C}) \;\middle|\; \boldsymbol{A}^\dagger\boldsymbol{A} = \boldsymbol{I}_{n+1}\right\}.$$

众所周知, $G = \mathrm{SU}(n+1)$ 的李代数为

$$\mathfrak{g} := \mathfrak{su}(n+1) = \left\{\boldsymbol{X} \in \mathfrak{gl}(n+1,\mathbb{C}) \;\middle|\; \boldsymbol{X}^\dagger = -\boldsymbol{X},\ \mathrm{tr}\boldsymbol{X} = 0\right\}. \tag{2.96}$$

$\mathfrak{g}$ 上具有如下标准欧氏内积 $\langle , \rangle$:

$$\langle \boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}\rangle = \mathrm{Re}\,\mathrm{tr}(\boldsymbol{X}^\dagger\boldsymbol{Y}). \tag{2.97}$$

上述内积自然诱导 $\mathfrak{g}^*$ 与 $\mathfrak{g}$ 的 $\mathbb{R}$-线性同构. 在此同构意义下我们将 $\mathfrak{g}^*$ 与 $\mathfrak{g}$ 等同. 众所周知, G 在 $\mathfrak{g}$ 上的伴随表示满足 $\mathrm{Ad}_{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{X} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{X}\boldsymbol{A}^{-1}$, 其中 $\boldsymbol{A} \in G$, $\boldsymbol{X} \in \mathfrak{g}$.

题 2.102. 对于 $\boldsymbol{A} \in G$, $\boldsymbol{X} \in \mathfrak{g}$, 则成立

$$\operatorname{Ad}^*_{\boldsymbol{A}} \boldsymbol{X} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{X}\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{X}\boldsymbol{A}^{\dagger}, \tag{2.98}$$

这里通过欧氏内积(2.97)将 $\boldsymbol{X}$ 视为 $\mathfrak{g}^*$ 中的元素.

证明. 对任意 $\boldsymbol{Y} \in \mathfrak{g}$, 注意

$$\begin{aligned}\langle \operatorname{Ad}^*_{\boldsymbol{A}} \boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y} \rangle &= \langle \boldsymbol{X}, \operatorname{Ad}_{\boldsymbol{A}^{-1}} \boldsymbol{Y} \rangle = \langle \boldsymbol{X}, \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{Y}\boldsymbol{A} \rangle \\ &= \operatorname{Re}\operatorname{tr}\left(\boldsymbol{X}^{\dagger}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{Y}\boldsymbol{A}\right) = \operatorname{Re}\operatorname{tr}\left(\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}^{\dagger}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{Y}\right) \\ &= \operatorname{Re}\operatorname{tr}\left((\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}\boldsymbol{A}^{-1})^{\dagger}\boldsymbol{Y}\right) = \langle \boldsymbol{A}\boldsymbol{X}\boldsymbol{A}^{-1}, \boldsymbol{Y} \rangle,\end{aligned}$$

因此 $\operatorname{Ad}^*_{\boldsymbol{A}} \boldsymbol{X} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{X}\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{X}\boldsymbol{A}^{\dagger}$. □

定理 2.103. 取定 $\mathfrak{g} := \mathfrak{su}(n+1)$ 中的元素

$$\boldsymbol{X}_0 := \mathrm{i}\begin{pmatrix} -1 & \\ & \frac{1}{n}\boldsymbol{I}_n \end{pmatrix}, \tag{2.99}$$

则其稳定子群 $G_{\boldsymbol{X}_0} := \{\boldsymbol{A} \in G \,|\, \operatorname{Ad}^*_{\boldsymbol{A}} \boldsymbol{X}_0 = \boldsymbol{X}_0\}$ 满足

$$G_{\boldsymbol{X}_0} = \left\{ \begin{pmatrix} t & \\ & \boldsymbol{T} \end{pmatrix} \middle|\, \boldsymbol{T} \in \mathrm{U}(n),\ t = (\det \boldsymbol{T})^{-1} \right\} \cong \mathrm{U}(n). \tag{2.100}$$

进而余伴随轨道 $G^{\#}\boldsymbol{X}_0 \cong G/G_{\boldsymbol{X}_0} \cong \mathrm{SU}(n+1)/\mathrm{U}(n) \cong \mathbb{CP}^n$.

证明. 对于 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \boldsymbol{a}_{12}^{\dagger} \\ \boldsymbol{a}_{21} & \boldsymbol{A}_{22} \end{pmatrix} \in G_{\boldsymbol{X}_0}$, 直接计算得

$$\operatorname{Ad}^*_{\boldsymbol{A}} \boldsymbol{X}_0 = \boldsymbol{A}\boldsymbol{X}_0\boldsymbol{A}^{\dagger} = \mathrm{i}\begin{pmatrix} -a_{11}\bar{a}_{11} + \frac{1}{n}\boldsymbol{a}_{12}^{\dagger}\boldsymbol{a}_{12} & * \\ * & * \end{pmatrix}.$$

又由 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\dagger} = \boldsymbol{I}_{n+1}$ 得 $a_{11}\bar{a}_{11} + \boldsymbol{a}_{12}^{\dagger}\boldsymbol{a}_{12} = 1$, 从而比较 $\boldsymbol{X}_0 = \operatorname{Ad}_{\boldsymbol{A}} \boldsymbol{X}_0$ 等号两边左上角矩阵元可得 $\boldsymbol{a}_{12}\boldsymbol{a}_{12}^{\dagger} = \boldsymbol{0}$, 于是 $\boldsymbol{a}_{12} = \boldsymbol{0}$. 进而(2.100)式易证. 再结合题2.98可知 $G^{\#}\boldsymbol{X}_0 \cong \mathbb{CP}^n$. □

在此意义下, $\mathbb{CP}^n$ 的辛结构由(2.75)式所给出.

3. 哈密顿系统

> 那个篝火余烬旁的孩子, 由外向乐观变得孤僻自闭了.
>
> ——刘慈欣《三体 II・黑暗森林》

我们已在前文0.2小节介绍了哈密顿力学的一些背景. 而本章将研究哈密顿向量场、泊松括号一般理论, 并初步介绍可积系统. 这部分内容可参考 Cushman[12], Giorgilli[19], Bolsinov[9] 以及 Rudolph[33] 等书, 这些书中有丰富的例子.

3.1 哈密顿向量场

我们回忆, 在经典力学中, 辛流形 (M, ω) 上的点代表物理系统的某种状态, 该物理系统随时间的演化由某个光滑函数 $H \in C^\infty(M)$ 所支配, 这个 H 即为物理系统的**哈密顿量**. 一般地, 对于光滑函数 $H \in C^\infty(M)$, 称三元组 (M, ω, H) 为**哈密顿系统**. 此时, 辛流形 M 常被物理学家称为**相空间**; 在物理中 M 往往是某个光滑流形的余切丛.

3.1.1 哈密顿向量场与哈密顿算子

定义 3.1. 在哈密顿系统 (X, ω, H) 中, 存在唯一的切向量场 $X_H \in \mathrm{Vect}(M)$ 使得

$$X_H \lrcorner \omega = \mathrm{d}H, \tag{3.1}$$

这个向量场称为 H 的**哈密顿向量场**.

X_H 的存在唯一性由 ω 的非退化性可得. 再回忆前文(0.6)式. 例如, 对于标准辛空间 $\mathbb{R}^{2n}$ 中, 在局部坐标 $(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p})$ 下, $\omega = \sum_{i=1}^n \mathrm{d}q^i \wedge \mathrm{d}p_i$, 此时

$$X_H = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial}{\partial q^i} - \frac{\partial H}{\partial q^i} \frac{\partial}{\partial p_i} \right),$$

即前文(0.6)式.

哈密顿向量场有如下基本性质:

定理 3.2. 设 (M,ω,H) 为哈密顿系统, X_H 是 H 的哈密顿向量场, 则

1. (能量守恒). $\mathcal{L}_{X_H}H=0.$
2. (*Liouville* 定理). $\mathcal{L}_{X_H}\omega=0.$

证明. 注意 $\mathrm{d}\omega=0$ 以及 Cartan 公式(2.23), 有

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{X_H}H &= X_H(H)=\mathrm{d}H(X_H)=(X_H\lrcorner\omega)(X_H)=\omega(X_H,X_H)=0,\\ \mathcal{L}_{X_H}\omega &= X_H\lrcorner\mathrm{d}\omega+\mathrm{d}(X_H\lrcorner\omega)=X_H\lrcorner 0+\mathrm{d}(\mathrm{d}H)=0,\end{aligned}$$

从而得证. □

设 $\gamma\colon(-\varepsilon,\varepsilon)\to M$ 是哈密顿向量场 X_H 的**积分曲线**, 即满足

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\gamma(t)=X_H|_{\gamma(t)},$$

则 $\mathcal{L}_{X_H}H=0$ 表明 $H(\gamma(t))$ 是关于 t 的常值函数, 即物理系统在随时间演化的过程中能量守恒. 再记 X_H 生成的**流** (回忆2.2.1小节) 为

$$F\colon U\times(-\varepsilon,\varepsilon)\to M,\quad (p,t)\mapsto F_t(p),$$

其中 U 为 M 的某个开子集, 则对任意 $|t|<\varepsilon$, 上述 Liouville 定理表明 $F_t^*\omega=\omega$, 即 F_t 是 (局部) 辛同胚. 进而 F_t 也保持辛体积 τ_ω (1.2)不变.

下面考察哈密顿向量场在一般局部坐标下的显式表示.

性质 3.3. 给定辛流形 (X,ω) 的局部坐标 $(x^1,...,x^m)$, 在该坐标下记

$$\omega=\sum_{1\le i<j\le m}\omega_{ij}\mathrm{d}x^i\wedge\mathrm{d}x^j,$$

并规定 $\omega_{ji}:=-\omega_{ij}$, 此时记 $\Omega:=(\omega_{ij})$ 为 ω 的系数矩阵. 则对任意 $H\in C^\infty(M)$, 哈密顿向量场 $X_H=X^i\frac{\partial}{\partial x^i}$ 的系数 X^i 满足

$$\begin{pmatrix}X^1\\ \vdots\\ X^m\end{pmatrix}=-\Omega^{-1}\left(\frac{\partial H}{\partial x^1},\cdots,\frac{\partial H}{\partial x^m}\right)^{\mathrm{T}}. \tag{3.2}$$

证明. 记哈密顿向量场 $X_H = X^i\frac{\partial}{\partial x^i}$, 由定义直接计算如下:

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}H &= X_H \lrcorner \omega = X^i\frac{\partial}{\partial x^i}\lrcorner\left(\sum_{1\le j<k\le m}\omega_{jk}\mathrm{d}x^j\wedge\mathrm{d}x^k\right)\\
&= \frac{1}{2}X^i\omega_{jk}\frac{\partial}{\partial x^i}\lrcorner\left(\mathrm{d}x^j\wedge\mathrm{d}x^k\right) = \frac{1}{2}X^i\omega_{jk}\left(\delta_i^j\mathrm{d}x^k - \delta_i^k\mathrm{d}x^j\right)\\
&= \frac{1}{2}X^i\left(\omega_{ik}-\omega_{ki}\right)\mathrm{d}x^k = X^i\omega_{ik}\mathrm{d}x^k = -\omega_{ki}X^i\mathrm{d}x^k,
\end{aligned}$$

再结合 $\mathrm{d}H = \frac{\partial H}{\partial x^k}\mathrm{d}x^k$ 即可得证. □

注 **3.4.** 记号承上, 在局部坐标 $(x^1,\dots,x^m)$ 下, 记矩阵

$$\mathcal{P} := -\Omega^{-1}, \tag{3.3}$$

称为哈密顿算子 (或哈密顿结构). 这是(0.5)式的一般情形.

性质 3.5. 在辛流形 (M,ω) 的局部坐标 $(x^1,\dots,x^m)$ 下, 若 $\gamma\colon t\mapsto (x^1(t),\dots,x^m(t))$ 是哈密顿向量场 X_H 的一条积分曲线, 其中 $H\in C^\infty(M)$, 则

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix} x^1\\ \vdots\\ x^m\end{pmatrix} = \mathcal{P}\left(\frac{\partial H}{\partial x^1},\cdots,\frac{\partial H}{\partial x^m}\right)^{\mathrm{T}}. \tag{3.4}$$

上式即为物理系统随时间演化的**哈密顿方程**. 进而对 $f\in C^\infty(M)$ 有

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} := X_H(f) = \mathcal{P}\left(\frac{\partial f}{\partial x^1},\dots,\frac{\partial f}{\partial x^m}\right)^{\mathrm{T}} = \mathcal{P}^{ij}\frac{\partial f}{\partial x^j},$$

这是力学量随时间的演化方程.

证明. 记 $X_H = \sum_{i=1}^m X^i\frac{\partial}{\partial x^i}$, 则积分曲线 γ 应满足 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x^i = X^i$, 之后结合(3.2)(3.3)即可. □

例如在标准辛流形 $\mathbb{R}^{2n}\cong T^*\mathbb{R}^n$ 的典范坐标 $(q^1,\dots,q^n;p_1,\dots,p_n)$ 下, 辛结构 $\omega = \sum_{i=1}^n \mathrm{d}q^i\wedge\mathrm{d}p_i$ 的系数矩阵 $\Omega = \begin{pmatrix} & \boldsymbol{I}_n\\ -\boldsymbol{I}_n & \end{pmatrix}$, 于是相应的哈密顿

算子 $\mathcal{P}=-\Omega^{-1}=\begin{pmatrix} & \boldsymbol{I}_n \\ -\boldsymbol{I}_n & \end{pmatrix}$, 哈密顿方程为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix}\boldsymbol{q}\\ \boldsymbol{p}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} & \boldsymbol{I}_n \\ -\boldsymbol{I}_n & \end{pmatrix}\left(\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{q}},\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{p}}\right)^{\mathrm{T}},$$

与(0.4)式吻合.

本小节最后, 我们从哈密顿向量场的角度给出辛同胚的一个充要条件:

性质 3.6. *设 $(M,\omega),(M',\omega')$ 是辛流形, $f\colon M\to M'$ 为微分同胚. 则 f 为辛同胚当且仅当对任意 $H\in C^\infty(M')$, 向量场 X_{f^*H} 与 X_H 是 f-相关的, 即对任意 $p\in M$, 在切空间 $T_{f(p)}M'$ 上成立 $f_*(X_{f^*H})=X_H$.*

证明. 用定义直接验证即可, 注意到:

$$\begin{aligned}&\forall\, H\in C^\infty(M'),\quad f_*(X_{f^*H})=X_H \qquad (3.5)\\ \Leftrightarrow&\forall\, H\in C^\infty(M'),\ \forall\, Y\in \mathrm{Vect}(M),\quad \omega'\left(f_*(X_{f^*H}),f_*Y\right)=\omega'(X_H,f_*Y)\end{aligned}$$

而 $\omega'\left(f_*(X_{f^*H}),f_*Y\right)=(f^*\omega')(X_{f^*H},Y)$, 以及

$$\begin{aligned}&\omega'(X_H,f_*Y)=(X_H\lrcorner\,\omega')(f_*Y)=(\mathrm{d}H)(f_*Y)=(\mathrm{d}(f^*H))(Y)\\ =&(X_{f^*H}\lrcorner\,\omega)(Y)=\omega(X_{f^*H},Y),\end{aligned}$$

因此(3.5)成立当且仅当

$$\forall\, H\in C^\infty(M'),\ \forall\, Y\in \mathrm{Vect}(M),\quad (f^*\omega')(X_{f^*H},Y)=\omega(X_{f^*H},Y),$$

而这当且仅当 $f^*\omega'=\omega$, 从而命题得证. □

3.1.2 局部哈密顿向量场

鉴于哈密顿向量场的重要性, 有必要为其专门引入记号:

定义 3.7. *设 (M,ω) 为辛流形, X 为 M 上的切向量场.*

1. *如果存在 $H\in C^\infty(M)$ 使得 $X=X_H$, 则称 X 为* **哈密顿向量场**.

2. 如果对任意 $x \in M$, 都存在 x 的邻域 U 以及 U 上的光滑函数 H, 使得 $X = X_H$ 在 U 上成立, 则称 X 为**局部哈密顿向量场**, 或者**泊松向量场**.

(M, ω) 上的哈密顿向量场与局部哈密顿向量场之全体分别记作 $\mathrm{Ham}(M, \omega)$ 与 $\mathrm{Ham}^{\circ}(M, \omega)$.

在不产生歧义的情况下, 我们常常简记为 $\mathrm{Ham}(M)$ 与 $\mathrm{Ham}^{\circ}(M)$. 首先注意 $\mathrm{Ham}(M)$ 是 $\mathrm{Ham}^{\circ}(M)$ 的 $\mathbb{R}$-子空间.

性质 3.8. 设 X 是辛流形 (M, ω) 上的切向量场, 则以下等价:

1. $X \in \mathrm{Ham}^{\circ}(M)$;

2. $\mathrm{d}(X \lrcorner \omega) = 0$;

3. $\mathcal{L}_X \omega = 0$.

证明. 若 $X \in \mathrm{Ham}^{\circ}(M)$, 则局部存在光滑函数 H 使得 $\mathrm{d}H = X \lrcorner \omega$, 因此 $\mathrm{d}(X \lrcorner \omega) = 0$; 反之用庞加莱引理即可. 而由 Cartan 公式(2.23)以及 $\mathrm{d}\omega = 0$ 易知 (2)⇔(3). □

题 **3.9.** 验证: $\mathrm{Ham}^{\circ}(M)$ 是 $\mathrm{Vect}(M)$ 的李子代数.

[提示: 即验证 $\forall X, Y \in \mathrm{Ham}^{\circ}(M)$, $[X, Y] \in \mathrm{Ham}^{\circ}(M)$. 为此, 注意恒等式 $\mathcal{L}_{[X,Y]} = \mathcal{L}_X \circ \mathcal{L}_Y - \mathcal{L}_Y \circ \mathcal{L}_X$ 以及性质3.8的 (3).]

性质 3.10. 对于辛流形 (M, ω), 成立

$$\dim_{\mathbb{R}} \frac{\mathrm{Ham}^{\circ}(M)}{\mathrm{Ham}(M)} = b^1(M), \tag{3.6}$$

其中 $b^1(M) := \dim_{\mathbb{R}} H^1(M; \mathbb{R})$ 为 M 的第 1 个 *Betti* 数.

证明. 只需注意映射 $\mathrm{Vect}(M) \to \Omega^1(M)$, $X \mapsto X \lrcorner \omega$ 诱导线性同构

$$\mathrm{Ham}^{\circ}(M) \cong Z^1(M, \mathbb{R}), \quad \mathrm{Ham}(M) \cong B^1(M, \mathbb{R}),$$

因此 $\frac{\mathrm{Ham}^{\circ}(M)}{\mathrm{Ham}(M)} \cong \frac{Z^1(M,\mathbb{R})}{B^1(M,\mathbb{R})} = H^1(M, \mathbb{R})$, 从而得证. □

注 3.11. 在辛流形 (M,ω) 中, 有短正合列

$$0 \to \mathbb{R} \to C^\infty(M) \xrightarrow{j} \mathrm{Ham}(M) \to 0, \tag{3.7}$$

其中 $\mathbb{R}$ 视为 M 上的常值函数之全体, $j\colon H \mapsto X_H$.

该短正合列称为辛流形 (M,ω) 的**基本正合列**. 事实上, 这不仅是 $\mathbb{R}$-线性同态的整合列, 而且还是李代数同态的正合列: 我们将赋予 $C^\infty(M)$ 李代数结构, 即**泊松括号**, 详见下一节.

本小节最后, 来看局部哈密顿向量场的具体例子.

例 3.12. 考虑环面 $T^2 := \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$, 在局部坐标 (x,y) 下, 其标准辛结构 $\omega := \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$. 任取不全为零的实数 a,b, 记切向量场

$$X = a\frac{\partial}{\partial x} + b\frac{\partial}{\partial y},$$

则 $X \in \mathrm{Ham}^\circ(T^2)$, 但是 $X \notin \mathrm{Ham}(T^2)$.

证明. 直接计算得 $X \lrcorner \omega = -b\mathrm{d}x + a\mathrm{d}y$, 从而 $\mathrm{d}(X \lrcorner \omega) = 0$, 因此 $X \in \mathrm{Ham}^\circ(T^2)$. 如果存在 $H \in C^\infty(T^2)$ 使得 $X = X_H$, 注意 H 是紧流形上的光滑函数, 从而必有极值点, 在极值点处 $\mathrm{d}H = 0$, 从而 $X_H = 0$, 但是 X 处处非零, 这产生矛盾. 因此 $X \notin \mathrm{Ham}(M)$. □

3.1.3 例子: 带电粒子在电磁场中的运动

哈密顿系统在电磁场理论中也有重要应用, 这里举一例介绍之. 考虑质量 m, 电荷量 e 的粒子在真空中恒定电磁场的运动. 设

$$\boldsymbol{E} = (E_x, E_y, E_z)^{\mathrm{T}}, \quad \boldsymbol{B} = (B_x, B_y, B_z)^{\mathrm{T}}$$

为 $\mathbb{R}^3$ 上的切向量场, 分别称为**电场强度**与**磁感应强度**, 它们满足

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0, \quad \nabla \times \boldsymbol{E} = \boldsymbol{0}. \tag{3.8}$$

回忆 $\mathbb{R}^3$ 的梯度, 旋度, 散度与外微分的关系并结合上式, 自然将电场强度 $\boldsymbol{E}$ 视为 1-形式, 将磁感应强度 $\boldsymbol{B}$ 视为 2-形式, 即引入

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &:= E_x\mathrm{d}q_x + E_y\mathrm{d}q_y + E_z\mathrm{d}q_z \\ \mathcal{B} &:= B_x\mathrm{d}q_y \wedge \mathrm{d}q_z - B_y\mathrm{d}q_x \wedge \mathrm{d}q_z + B_z\mathrm{d}q_x \wedge \mathrm{d}q_y. \end{aligned} \tag{3.9}$$

在此记号下, (3.8)式可改写为

$$\mathrm{d}\mathcal{B}=0,\quad \mathrm{d}\mathcal{E}=0, \tag{3.10}$$

从而存在函数 $\varphi\in C^\infty(\mathbb{R}^3)$ 使得

$$\mathcal{E}=-\mathrm{d}\varphi, \tag{3.11}$$

函数 φ 即为通常的**电势**.

题 3.13. 记号承上, 验证 $M:=T^*\mathbb{R}^3\cong\mathbb{R}^6=\{(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p})\,|\,\boldsymbol{q},\boldsymbol{p}\in\mathbb{R}^3\}$ 上的 2-形式

$$\omega:=\omega_0-e\mathcal{B} \tag{3.12}$$

是辛结构, 其中 ω_0 是 $T^*\mathbb{R}^3$ 的标准辛结构.

解. 由(3.10)式可知 $\mathrm{d}\omega=0$. 为证明 ω 非退化, 只需说明 ω 的系数矩阵 $\Omega=(\omega_{ij})$ 可逆. 而直接计算得 $\Omega=\begin{pmatrix}-e\tilde{\boldsymbol{B}} & \boldsymbol{I}_3\\ -\boldsymbol{I}_3 & \boldsymbol{0}\end{pmatrix}$, 其中

$$\tilde{\boldsymbol{B}}:=\begin{pmatrix}0 & B_z & -B_y\\ -B_z & 0 & B_x\\ B_y & -B_x & 0\end{pmatrix}. \tag{3.13}$$

从而显然 Ω 可逆, 并且相应的哈密顿算子 $\mathcal{P}:=-\Omega^{-1}$ 为

$$\mathcal{P}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{0} & \boldsymbol{I}_3\\ -\boldsymbol{I}_3 & e\tilde{\boldsymbol{B}}\end{pmatrix}. \tag{3.14}$$

$\square$

性质 3.14. 记号承上, 定义 $M=T^*\mathbb{R}^3$ 上的光滑函数

$$H(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p}):=\frac{1}{2m}(p_x^2+p_y^2+p_z^2)+e\varphi(\boldsymbol{q}), \tag{3.15}$$

其中 m,e 为常数, φ 满足(3.11)式. 则哈密顿系统 (M,ω,H) 的哈密顿方

程等价于

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{q}}{\mathrm{d}t} &= \boldsymbol{v}\\ \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t} &= e\boldsymbol{E} + e\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B},\end{aligned} \tag{3.16}$$

其中辛结构 ω 见(3.12)式, $\boldsymbol{v} := \frac{\boldsymbol{p}}{m}$ 为粒子的速度.

证明. 注意(3.13)式中的矩阵 $\tilde{\boldsymbol{B}}$ 满足如下性质:

$$\tilde{\boldsymbol{B}}\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}, \quad \forall\, \boldsymbol{v}\in\mathbb{R}^3,$$

再结合(3.4)(3.14)式即可. □

(3.15)式右边的两项分别是粒子的动能与电势能, 而(3.16)第二式右边的两项分别是粒子所受的电场力与洛伦兹力.

3.1.4 例子: 黎曼流形, 测地线

哈密顿系统也常出现于几何学. 一个有意思的例子是, 黎曼几何中的**测地线**也可用哈密顿系统来描述.

例 3.15. 设 (M,g) 为黎曼流形, 则黎曼度量 g 自然诱导微分同胚

$$\psi_g\colon TM\to T^*M.$$

由此将余切丛 T^*M 上的典范辛结构 ω 搬运至切丛 TM

$$\omega^* := \psi_g^*\omega, \tag{3.17}$$

得到辛流形 (TM,ω^*).

取定 M 的一组局部坐标 $(q^1,\ldots,q^n)$, 并将该坐标自然地扩充为 T^*M 的局部坐标 $(q^i;p_j)$ 以及 TM 的局部坐标 $(q^i;v^j)$, 其中 p_j 为基 $\{\mathrm{d}q^j\}$ 下的坐标分量 (动量), v^j 为基 $\{\frac{\partial}{\partial q^j}\}$ 下的坐标分量 (速度).

记黎曼度量 g 在局部坐标 $\{q^i\}$ 下的表达式为

$$g = g_{ij}\mathrm{d}q^i\otimes\mathrm{d}q^j,$$

并记 $(g^{ij}) = (g_{ij})^{-1}$, 则容易验证 (留给读者)

$$\psi_g^*(p_i) = g_{ij}v^j. \tag{3.18}$$

回忆余切丛 T^*M 的典范 1-形式(0.9)

$$\theta = p_i \mathrm{d}q^i$$

使得典范辛形式 $\omega = -\mathrm{d}\theta$. 从而由(3.17)(3.18)直接计算得

$$\begin{aligned}
\omega^* &= \psi_g^*\omega = -\psi_g^*(\mathrm{d}\theta) = -\mathrm{d}\left(\psi_g^*\theta\right) \\
&= -\mathrm{d}\left(g_{ij}v^j\mathrm{d}q^i\right) = -\left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial q^k}v^j\mathrm{d}q^k \wedge \mathrm{d}q^i + g_{ij}\mathrm{d}v^j \wedge \mathrm{d}v^k\right) \\
&= g_{ij}\mathrm{d}q^i \wedge \mathrm{d}v^j + \sum_{1\le i<j\le n}\left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial q^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial q^i}\right)v^k\mathrm{d}q^i \wedge \mathrm{d}q^j
\end{aligned} \tag{3.19}$$

于是辛形式 ω^* 在局部坐标 $(q^i; v^j)$ 下的系数矩阵为

$$\Omega = \begin{pmatrix} \boldsymbol{K} & \boldsymbol{g} \\ -\boldsymbol{g} & \boldsymbol{0} \end{pmatrix}, \tag{3.20}$$

其中 $\boldsymbol{g} := (g_{ij})$, $\boldsymbol{K} := (K_{ij})$, 并且

$$K_{ij} := \left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial q^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial q^i}\right)v^k. \tag{3.21}$$

于是相应的哈密顿算子

$$\mathcal{P} = -\Omega^{-1} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{0} & \boldsymbol{g}^{-1} \\ -\boldsymbol{g}^{-1} & -\boldsymbol{g}^{-1}\boldsymbol{K}\boldsymbol{g}^{-1} \end{pmatrix}. \tag{3.22}$$

性质 3.16. 记号承上. 对于黎曼流形 (M, g), 引入切丛上的光滑函数 $H \in C^\infty(TM)$ 如下: 对于 $q \in M$ 以及 $X \in T_qM$,

$$H(q, X) := \frac{1}{2}g(X, X)|_q, \tag{3.23}$$

则 H 关于辛形式 ω^* 的哈密顿向量场 X_H 在局部坐标 $(q^i; v^j)$ 下的表达

式为

$$X_H = v^i \frac{\partial}{\partial q^i} - \Gamma^i_{k\ell} v^k v^\ell \frac{\partial}{\partial v^i}, \tag{3.24}$$

其中

$$\Gamma^i_{k\ell} := \frac{1}{2} g^{ij} \left(\frac{\partial g_{kj}}{\partial q^\ell} + \frac{\partial g_{\ell j}}{\partial q^k} - \frac{\partial g_{k\ell}}{\partial q^j} \right) \tag{3.25}$$

为黎曼度量 g 的 *Levi-Civita* 联络的 *Christoffel* 符号.

证明. 记 $X_H = X_1^i \frac{\partial}{\partial q^i} + X_2^i \frac{\partial}{\partial v^i}$, 利用哈密顿算子的语言(3.2)(3.22)得

$$\begin{pmatrix} X_1^\bullet \\ X_2^\bullet \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \boldsymbol{g}^{-1} \\ -\boldsymbol{g}^{-1} & -\boldsymbol{g}^{-1}\boldsymbol{K}\boldsymbol{g}^{-1} \end{pmatrix} \left(\frac{\partial H}{\partial q^\bullet}, \frac{\partial H}{\partial v^\bullet} \right)^{\mathrm{T}},$$

并注意 H 具有局部表达式 $H = \frac{1}{2} g_{ij} v^i v^j$, 因此 H 的哈密顿向量场

$$\begin{aligned} X_H &= \left(\boldsymbol{g}^{-1} (\frac{\partial H}{\partial v^\bullet})^{\mathrm{T}} \right)^i \frac{\partial}{\partial q^i} + \left(-\boldsymbol{g}^{-1} (\frac{\partial H}{\partial q^\bullet})^{\mathrm{T}} - \boldsymbol{g}^{-1}\boldsymbol{K}\boldsymbol{g}^{-1} (\frac{\partial H}{\partial v^\bullet})^{\mathrm{T}} \right)^i \frac{\partial}{\partial v^i} \\ &= g^{ij} \frac{\partial H}{\partial v^j} \frac{\partial}{\partial q^i} - g^{ij} \left(\frac{\partial H}{\partial q^j} + K_{jk} g^{k\ell} \frac{\partial H}{\partial v^\ell} \right) \frac{\partial}{\partial v^i} \\ &= v^i \frac{\partial}{\partial q^i} - \frac{1}{2} g^{ij} \left(2 \frac{\partial g_{j\ell}}{\partial q^k} - \frac{\partial g_{k\ell}}{\partial q^j} \right) v^k v^\ell \frac{\partial}{\partial v^i} \\ &= v^i \frac{\partial}{\partial q^i} - \frac{1}{2} g^{ij} \left(\frac{\partial g_{j\ell}}{\partial q^k} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial q^\ell} - \frac{\partial g_{k\ell}}{\partial q^j} \right) v^k v^\ell \frac{\partial}{\partial v^i} \\ &= v^i \frac{\partial}{\partial q^i} - \Gamma^i_{k\ell} v^k v^\ell \frac{\partial}{\partial v^i}, \end{aligned}$$

从而得证. □

由此立即得到:

推论 3.17. 记号承上, 则哈密顿系统 (TM, ω^*, H) 的演化方程为

$$\dot{q}^i = v^i, \qquad \dot{v}^i = -\Gamma^i_{jk} v^j v^k,$$

其中 $\dot{q}^i := \frac{\mathrm{d}q^i(t)}{\mathrm{d}t}$, $\dot{v}^i := \frac{\mathrm{d}v^i(t)}{\mathrm{d}t}$.

上述演化方程可改写为关于 $q^i(t)$ 的二阶常微分方程

$$\ddot{q}^i + \Gamma^i_{jk} \dot{q}^j \dot{q}^k = 0, \tag{3.26}$$

这恰为黎曼几何中众所周知的**测地线方程**. 换言之, 哈密顿向量场 X_H 的积分曲线在 M 上的投影恰为黎曼流形 (M,g) 的测地线.

3.1.5 例子: 李群的余切丛

光滑流形的余切丛具有典范的辛流形结构, 而对于李群这类特殊的光滑流形, 其余切丛的辛结构有更具体的描述. 众所周知, *李群的余切丛是平凡丛*, 这是因为可以取一组左不变 1-形式作为整体标架. 更具体地, 对于 n 维李群 G, 由如下同构:

$$\begin{aligned} \chi\colon G\times\mathfrak{g}^* &\to T^*G \\ (a,\mu) &\mapsto (a,\mu_a), \end{aligned} \tag{3.27}$$

注意在此我们将 $\mathfrak{g}^*$ 等同于 $\Omega^1_l(G)$, 即将 $\mathfrak{g}^*$ 中的元素视为 G 上的左不变 1-形式. 上述同构不仅是光滑流形的同构, 而且是李群同构 (此时 $\mathfrak{g}^*\cong\mathbb{R}^n$ 关于向量加法构成李群). 此外, 注意下述图表显然交换:

$$\begin{tikzcd} G\times\mathfrak{g}^* \arrow[rr, "\chi"] \arrow[dr, "\pi_1"'] & & T^*G \arrow[dl, "\pi"] \\ & G & \end{tikzcd} \tag{3.28}$$

于是, 自然可以将余切丛 T^*G 的典范辛结构 ω 搬运至 $G\times\mathfrak{g}^*$, 即

$$\tilde{\omega}:=\chi^*\omega\in\Omega^2(G\times\mathfrak{g}^*)$$

是 $G\times\mathfrak{g}^*$ 上的辛结构. 本小节的目标是给出 $\chi^*\omega$ 的显式表达.

为此, 只需对任意给定的 $(a,\mu)\in G\times\mathfrak{g}^*$ 以及 $X,Y\in T_aG$, $\alpha,\beta\in T_\mu\mathfrak{g}^*$, 写出 $\tilde{\omega}_{(a,\mu)}((X,\alpha),(Y,\beta))$ 的值即可; 而由 $\tilde{\omega}$ 的定义, 上述表达式等于 $\omega_{(a,\mu_a)}(\chi_*(X,\alpha),\chi_*(Y,\beta))$. 然而, 切映射 χ_* 很难被显式写清楚; 我们需要采用其它方法, 并充分利用李群结构.

引理 3.18. *记号承上, 并记 $\tilde{\theta}:=\chi^*\theta$, 其中 θ 是 T^*G 的典范 1-形式. 则对任意 $(a,\mu)\in G\times\mathfrak{g}^*$ 以及 $X\in T_aG$, $\alpha\in T_\mu\mathfrak{g}^*$, 成立*

$$\tilde{\theta}_{(a,\mu)}(X,\alpha)=\mu_a(X). \tag{3.29}$$

证明. 注意(0.10)(3.28)式, 直接验算如下:

$$\begin{aligned}\tilde{\theta}_{(a,\mu)}(X,\alpha) &= (\chi^*\theta)_{(a,\mu)}(X,\alpha) = \theta_{(a,\mu_a)}(\chi_*(X,\alpha))\\ &= \mu_a\left(\pi_* \circ \chi_*(X,\alpha)\right) = \mu_a(X),\end{aligned}$$

从而得证. □

注意 $\tilde{\omega} = -\mathrm{d}\tilde{\theta}$, 又已知 $\tilde{\theta}$ 的显式表达, 从而用外微分公式(2.45)就能给出 $\tilde{\omega}$ 的显式表达. 但在具体操作上, 我们需要注意: 描述李群上的微分形式, 只需写出该微分形式在左不变切向量场的作用即可; 这相比于给出在一般切向量场上的作用, 其实不会丢失信息.

现在, 为描述李群 $G \times \mathfrak{g}^*$ 上的 2-形式 $\tilde{\omega}$, 只需考虑 $\tilde{\omega}$ 对 $G \times \mathfrak{g}^*$ 上的左不变切向量场的作用. 而 $G \times \mathfrak{g}^*$ 的左不变切向量场形如 (X,α), 这里 $X \in \mathrm{Vect}_l(G)$, 而 α 则是 $\mathfrak{g}^*$ 上的常值切向量场, 也自然等同于 $\mathfrak{g}^*$ 中的某个向量. 充分利用左不变切向量场与左不变 1-形式的性质可得:

性质 3.19. 记号承上, 设 G 为李群, $(a,\mu) \in G \times \mathfrak{g}^*$, 则对于 G 上的左不变切向量场 $X, Y \in \mathrm{Vect}_l(G)$ 以及 $\mathfrak{g}^*$ 上的常值切向量场 $\alpha, \beta \in \mathrm{Vect}_l(\mathfrak{g}^*) \cong \mathfrak{g}^*$, 则成立

$$\tilde{\omega}_{(a,\mu)}\left((X,\alpha),(Y,\beta)\right) = \beta(X) - \alpha(Y) + \mu([X,Y]). \tag{3.30}$$

证明. 对 $\tilde{\omega} = -\mathrm{d}\tilde{\theta}$ 使用外微分公式(2.45), 并结合引理3.18即可, 注意充分利用 μ, X, Y, α, β 的左不变性, 细节留给读者. □

注 **3.20.** 注意对于左不变切向量场 X, Y 以及左不变 1-形式 $\mu \in \mathfrak{g}^*$, 用外微分公式(2.45)容易验证 $\mu([X,Y]) = -\mathrm{d}\mu(X,Y)$. 因此(3.30)式可改写为

$$\tilde{\omega}_{(a,\mu)}\left((X,\alpha),(Y,\beta)\right) = \beta(X) - \alpha(Y) - \mathrm{d}\mu(X,Y), \tag{3.31}$$

这个式子其实是 $\tilde{\omega}$ 的逐点定义, 即对于任意 $(a,\mu) \in G \times \mathfrak{g}^*$ 以及 $X, Y \in T_aG$, $\alpha, \beta \in T_\mu\mathfrak{g}^* \cong \mathfrak{g}^*$, (3.31)式都成立.

本小节最后, 对于辛流形 $(G \times \mathfrak{g}^*, \tilde{\omega})$ 的光滑函数 $H \in C^\infty(G \times \mathfrak{g}^*)$, 我们来写出相应的哈密顿向量场 X_H 的显式表达.

题 **3.21.** 记号承上, 设 X_H 是辛流形 $(G\times\mathfrak{g}^*,\tilde{\omega})$ 上关于哈密顿量 $H\in C^\infty(G\times\mathfrak{g}^*)$ 的哈密顿向量场, 记 X_H 点 $(a,\mu)\in G\times\mathfrak{g}^*$ 处的取值为 $X_H|_{(a,\mu)}=(A,\rho)$, 其中 $A\in T_aG, \rho\in T_\mu\mathfrak{g}^*$, 则成立

$$\begin{aligned} A &= (\mathrm{d}H_a)_\mu \\ \rho &= -A\lrcorner\,\mathrm{d}\mu-(\mathrm{d}H_\mu)_a, \end{aligned} \tag{3.32}$$

其中 $H_a\colon \mu\mapsto H(a,\mu)$ 是 $\mathfrak{g}^*$ 上的光滑函数, $H_\mu\colon a\mapsto H(a,\mu)$ 是 G 上的光滑函数, 并且 $(\mathrm{d}H_a)_\mu\in T_\mu^*\mathfrak{g}^*\cong(\mathfrak{g}^*)^*\cong\mathfrak{g}\cong T_aG$, 即将 $(\mathrm{d}H_a)_\mu$ 自然视为 G 在点 a 处的切向量.

证明. 由哈密顿向量场的定义(3.1)可知对任意 $Y\in T_aG, \beta\in T_\mu\mathfrak{g}^*$ 都有

$$\begin{aligned} &\tilde{\omega}_{(a,\mu)}((A,\rho),(Y,\beta))=(\mathrm{d}H)_{(a,\mu)}(Y,\beta)=(Y,\beta)H \\ =&Y(H_\mu)+\beta(H_a)=(\mathrm{d}H_\mu)_a(Y)+(\mathrm{d}H_a)_\mu(\beta). \end{aligned}$$

另一方面, 再结合(3.31)式, 可得

$$\beta(A)-\rho(Y)-\mathrm{d}\mu(A,Y)=(\mathrm{d}H_\mu)_a(Y)+(\mathrm{d}H_a)_\mu(\beta)$$

对任意 $Y\in T_aG, \beta\in T_\mu\mathfrak{g}^*$ 都成立. 在此令 $Y=0$, 并注意 β 的任意性可得 $A=(\mathrm{d}H_a)_\mu$; 之后令 $\beta=0$ 并注意 Y 的任意性容易得到 $\rho=-A\lrcorner\,\mathrm{d}\mu-(\mathrm{d}H_\mu)_a$, 得证. □

3.2 泊松括号 (II)

我们早在(0.16)式就已经引入泊松括号的概念. 容易将此概念推广到一般的辛流形上.

3.2.1 泊松括号的基本性质

定义 3.22. 对于辛流形 (M,ω), 定义映射 $\{,\}\colon C^\infty(M)\times C^\infty(M)\to C^\infty(M)$ 如下:

$$\{f,g\}:=\omega(X_f,X_g),\quad \forall\, f,g\in C^\infty(M), \tag{3.33}$$

其中 X_f, X_g 分别为 f, g 的哈密顿向量场.

容易看出 $\{,\}$ 是 $\mathbb{R}$-双线性的, 并且具有反对称性 $\{f,g\} = -\{g,f\}$. 有哈密顿向量场的定义还容易得到

$$\{f,g\} = -X_f(g) = X_g(f). \tag{3.34}$$

特别地, 在哈密顿系统 (M,ω,H) 中, 物理量 $f \in C^\infty(M)$ 随时间 (即沿哈密顿向量场 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} := X_H$) 的演化方程可改写为

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = \{f,H\}. \tag{3.35}$$

若 $\{f,H\} = 0$, 则称 f 是哈密顿系统 (M,ω,H) 的一个**守恒量**, 也叫做**运动积分**或者**首次积分**.

性质 3.23. 设 f, g 为辛流形 (M,ω) 上的光滑函数, 则

$$X_{\{f,g\}} = -[X_f, X_g]. \tag{3.36}$$

特别地, $\mathrm{Ham}(M)$ 关于向量场李括号运算构成李代数, 且是 $\mathrm{Ham}^\circ(M)$ 的李子代数.

证明. 任意取定光滑切向量场 $Y \in \mathrm{Vect}(M)$, 则

$$(X_{\{f,g\}} \lrcorner\, \omega)(Y) = (\mathrm{d}\{f,g\})(Y) = Y(\{f,g\}). \tag{3.37}$$

而由 Cartan 公式(2.23)与外微分公式(2.45), 并注意 $\mathrm{d}\omega = 0$ 以及(3.34)等关系, 直接计算得

$$\begin{aligned}
Y(\{f,g\}) &= \mathcal{L}_Y(\omega(X_f,X_g)) \\
&= (\mathcal{L}_Y\omega)(X_f,X_g) + \omega([Y,X_f],X_g) + \omega(X_f,[Y,X_g]) \\
&= (\mathrm{d}(Y \lrcorner\, \omega))(X_f,X_g) - [Y,X_f](g) + [Y,X_g](f) \\
&= X_f(\omega(Y,X_g)) - X_g(\omega(Y,X_f)) - \omega(Y,[X_f,X_g]) \\
&\quad - [Y,X_f](g) + [Y,X_g](f) \\
&= -X_f(Y(g)) + X_g(Y(f)) + ([X_f,X_g] \lrcorner\, \omega)(Y) \\
&\quad - [Y,X_f](g) + [Y,X_g](f)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= ([X_f, X_g] \lrcorner \omega)(Y) - Y(X_f(g)) + Y(X_g(f)) \\
&= ([X_f, X_g] \lrcorner \omega)(Y) + 2Y(\{f, g\}),
\end{aligned}
$$

对照上式最左边与最右边得 $Y(\{f,g\}) = (-[X_g, Y_g] \lrcorner \omega)(Y)$. 再由(3.37)得

$$
(X_{\{f,g\}} \lrcorner \omega)(Y) = (-[X_f, X_g] \lrcorner \omega)(Y).
$$

注意上式中 Y 的任意性, 立刻得到 $X_{\{f,g\}} = -[X_f, X_g]$. □

泊松括号具有如下基本性质:

性质 3.24. *设 $\{,\}$ 是辛流形 (M, ω) 上的泊松括号, 则对任意 $f, g, h \in C^\infty(M)$,*

1. *$\{,\}$ 是反对称的双线性映射;*
2. *(Jacobi 恒等式). $\{\{f,g\},h\} + \{\{g,h\},f\} + \{\{h,f\},g\} = 0$;*
3. *(Leibniz 法则). $\{f, gh\} = \{f,g\}h + g\{f,h\}$.*

证明. (1) 易证; 由于 $\{f, gh\} = -X_f(gh) = -X_f(g)h - gX_f(h) = \{f,g\}h + g\{f,h\}$, 从而 (3) 成立. 又由(3.36)式得

$$
\begin{aligned}
&\{\{f,g\},h\} = -X_{\{f,g\}}h = [X_f, X_g](h) \\
&= X_f(X_g(h)) - X_g(X_f(h)) = \{f, \{g,h\}\} - \{g, \{f,h\}\},
\end{aligned}
$$

从而易知 (2) 成立. 证毕. □

上述性质的 (3) 表明, 对任意函数 f, 映射 $g \mapsto \{f,g\}$ 是关于函数通常乘法运算的导子, 即满足类似乘积求导的运算性质; 而 (2) 表明 $g \mapsto \{f,g\}$ 是关于函数泊松括号运算的导子, 因为 Jacobi 恒等式可改写为

$$
\{f, \{g,h\}\} = \{\{f,g\},h\} + \{g, \{f,h\}\}.
$$

此外, (1)(2) 还表明 $(C^\infty(M), \{,\})$ 是李代数.

注 3.25. 性质3.23与性质3.24表明, 基本正合列

$$
0 \to \mathbb{R} \to C^\infty(M) \xrightarrow{-j} \mathrm{Ham}(M) \to 0, \tag{3.38}
$$

是李代数同态的正合列. (仔细与前文注3.11对比).

本小节最后, 我们用哈密顿算子 (见注3.4) 的语言给出泊松括号在局部坐标下的表达式.

性质 3.26. 在辛流形 (M,ω) 的局部坐标 $(x^1,...,x^m)$ 下, 记 ω 的系数矩阵 $\Omega=(\omega_{ij})$, $\mathcal{P}:=-\Omega^{-1}$ 为相应的哈密顿算子. 则对于 $f,g\in C^\infty(M)$, 成立

$$\{f,g\}=(\mathrm{Jac}\,f)\mathcal{P}(\mathrm{Jac}\,g)^{\mathrm{T}}, \tag{3.39}$$

其中 $\mathrm{Jac}\colon f\mapsto\left(\frac{\partial f}{\partial x^1},...,\frac{\partial f}{\partial x^m}\right)$ 为函数的 *Jacobi* 矩阵. 特别地,

$$\{x^i,x^j\}=\mathcal{P}^{ij}\qquad 1\le i,j\le n. \tag{3.40}$$

证明. 将(3.2)改写为 $X_f=\mathcal{P}(\mathrm{Jac}\,f)^{\mathrm{T}}$, 注意这里将 X_f 等同于其局部坐标分量排成的列向量. 再注意 $\mathcal{P}^{\mathrm{T}}=-\mathcal{P}$, 从而

$$\begin{aligned}\{f,g\}&=\omega(X_f,X_g)=X_f^{\mathrm{T}}\Omega X_g\\&=(\mathrm{Jac}\,f)\mathcal{P}^{\mathrm{T}}\Omega\mathcal{P}(\mathrm{Jac}\,g)^{\mathrm{T}}=(\mathrm{Jac}\,f)\mathcal{P}(\mathrm{Jac}\,g)^{\mathrm{T}},\end{aligned}$$

命题得证. □

例 3.27. 设 M 为光滑流形, 取定局部坐标 $(q^1,...,q^n)$, 则余切丛 T^*M 具有典范坐标 $(q^1,...,q^n;p_1,...,p_n)$ 使得典范辛结构在该坐标下为

$$\omega=\sum_{i=1}^n \mathrm{d}q^i\wedge\mathrm{d}p_i.$$

此时, 坐标函数 p_i,q^j 的泊松括号为

$$\{q^i,q^j\}=\{p_i,p_j\}=0,\quad\{q^i,p_j\}=\delta^i_j. \tag{3.41}$$

与性质3.6类似, 也可从泊松括号的角度给出辛同胚的一个充要条件:

题 3.28. 设 $(M,\omega),(M',\omega')$ 为辛流形, $f\colon M\to M'$ 为微分同胚. 则 f 为辛同胚当且仅当对任意 $H,K\in C^\infty(M')$ 都成立

$$\{f^*H,f^*K\}=f^*\{H,K\}.$$

证明. 留给读者练习. 要充分利用泊松括号的定义以及性质3.6. □

3.2.2 泊松 2-向量场

辛流形 (M,ω) 上的泊松括号 $\{,\}$ 满足性质3.24的 (1)(3), 这表明泊松括号其实应该是流形上的某种张量场. 事实确实如此, 它属于**多重向量场** (poly-vector field).

定义 3.29. 设 M 是 n 维光滑流形, $p \geq 0$, 则称

$$\mathrm{PV}^p(M) := \Gamma\left(M, \bigwedge^p TM\right) \tag{3.42}$$

中的元素为 M 上的**p-向量场**.

换言之, p-向量场是指切丛的 p 次外积丛的光滑截面. 根据定义可知, $\mathrm{PV}^0(M) = C^\infty(M)$, $\mathrm{PV}^1(M) = \mathrm{Vect}(M)$, 其中元素分别是光滑函数与通常的切向量场. 而在局部坐标 $(x^1, ..., x^m)$ 下, p-向量场 $P \in \mathrm{PV}^p(M)$ 的一般表达式形如

$$P = P^{i_1 i_2 \cdots i_p} \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \wedge \frac{\partial}{\partial x^{i_2}} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial}{\partial x^{i_p}}.$$

p-向量场与 p-微分形式之间有自然的配对; 而对于 $p \geq q$, p-向量场与 q-微分形式可以**缩并**, 缩并后得到 $(p-q)$-向量场. 具体地, 对于 $P \in \mathrm{PV}^p(M)$ 以及 $\alpha \in \Omega^q(M)$, 则 $\alpha \lrcorner P \in \mathrm{PV}^{p-q}(M)$ 由下式所定义:

$$(\alpha \lrcorner P)(\beta) := P(\alpha \wedge \beta), \qquad \forall \beta \in \Omega^{p-q}(M). \tag{3.43}$$

我们也可以向右缩并, 定义 $P \llcorner \alpha \in \mathrm{PV}^{p-q}(M)$ 如下:

$$(P \llcorner \alpha)(\beta) := P(\beta \wedge \alpha), \qquad \forall \beta \in \Omega^{p-q}(M). \tag{3.44}$$

而在辛流形中, 由泊松括号的性质3.24中的 (1)(3), 结合 p-向量场的定义, 不难看出泊松括号其实就是一个 2-向量场:

性质 3.30. 设 (M,ω) 是辛流形, 则存在唯一的 $\Pi \in \mathrm{PV}^2(M)$ 使得辛结构 ω 所诱导的泊松括号 $\{,\}$ 满足如下性质:

$$\{f, g\} = \Pi(\mathrm{d}f, \mathrm{d}g), \qquad \forall f, g \in C^\infty(M). \tag{3.45}$$

上述 2-向量场 Π 称为辛流形 (M,ω) 的**泊松结构** (也可以叫做**哈密顿结构**), 我们往往不加声明地把它与泊松括号 $\{,\}$ 等同. 易知 Π 在局部坐标

$(x^1, ..., x^m)$ 下的表达式为

$$\Pi = \sum_{i<j} \mathcal{P}^{ij} \frac{\partial}{\partial x^i} \wedge \frac{\partial}{\partial x^j} = \frac{1}{2} \mathcal{P}^{ij} \frac{\partial}{\partial x^i} \wedge \frac{\partial}{\partial x^j}, \tag{3.46}$$

其中 $\mathcal{P}^{ij}$ 恰为哈密顿算子(3.3)的系数.

哈密顿向量场与泊松 2-向量场的关系如下:

性质 3.31. 设 $\Pi \in \mathrm{PV}^2(M)$ 为辛流形 (M, ω) 的泊松结构, 则对任意 $f \in C^\infty(M)$, 哈密顿向量场 X_f 满足

$$X_f = \Pi \llcorner \mathrm{d}f. \tag{3.47}$$

证明. 对任意 $g \in C^\infty(M)$, 直接验证得

$$(\Pi \llcorner \mathrm{d}f)(g) = \Pi(\mathrm{d}g, \mathrm{d}f) = \{g, f\} = X_f(g),$$

从而由 g 的任意性立刻得到 $\Pi \llcorner \mathrm{d}f = X_f$, 命题得证. □

注 **3.32.** 泊松括号一定是某个 2-向量场; 反之, 对任意 $\Pi \in \mathrm{PV}^2(M)$, 用(3.45)式也能定义出一个括号 $\{,\}$, 并且如此定义的括号自动满足性质3.24的 (1)(3), 但一般未必满足 (2), 即 Jacobi 恒等式.

这是因为, 对于 2-向量场 $\Pi = \frac{1}{2}\mathcal{P}^{ij}\frac{\partial}{\partial x^i} \wedge \frac{\partial}{\partial x^j}$, 局部坐标直接计算可知其诱导的括号 $\{,\}$ 满足 Jacobi 恒等式当且仅当

$$\frac{\partial \mathcal{P}^{ij}}{\partial x^s}\mathcal{P}^{sk} + \frac{\partial \mathcal{P}^{jk}}{\partial x^s}\mathcal{P}^{si} + \frac{\partial \mathcal{P}^{ki}}{\partial x^s}\mathcal{P}^{sj} = 0, \tag{3.48}$$

而这并非平凡成立.

3.2.3 Schouten-Nijenhuis 括号

光滑流形的向量场有众所周知的李括号运算

$$\begin{aligned} [,]:\ \mathrm{Vect}(M) \times \mathrm{Vect}(M) &\to \mathrm{Vect}(M) \\ (X, Y) &\mapsto [X, Y] = \mathcal{L}_X Y, \end{aligned}$$

这种李括号可以自然地延拓到多重向量场 $\mathrm{PV}^\bullet(M) := \bigoplus_{p \geq 0} \mathrm{PV}^k(M)$ 上.

定理 3.33. 设 M 是光滑流形, 则唯一的 $\mathbb{R}$-双线性映射

$$[,]\colon \ \mathrm{PV}^\bullet(M)\times\mathrm{PV}^\bullet(M)\to\mathrm{PV}^\bullet(M), \tag{3.49}$$

使得对任意 $P\in\mathrm{PV}^p(M)$, $Q\in\mathrm{PV}^q(M)$, $R\in\mathrm{PV}^r(M)$ 都成立:

1. $[P,Q]\in\mathrm{PV}^{p+q-1}(M)$. 特别规定当 $p=q=0$ 时 $[P,Q]=0$;
2. 对任意 $X\in\mathrm{Vect}(M)$, $[X,P]=\mathcal{L}_XP$;
3. $[P,Q]=-(-1)^{(p-1)(q-1)}[Q,P]$;
4. $[P,Q\wedge R]=[P,Q]\wedge R+(-1)^{(p-1)q}Q\wedge[P,R]$.

满足上述性质的括号称为 ***Schouten-Nijenhuis* 括号**.

可见当 $P,Q\in\mathrm{PV}^1(M)=\mathrm{Vect}(M)$ 时, Schouten-Nijenhuis 括号 $[P,Q]$ 恰为通常的李括号; 而对于 $P\in\mathrm{Vect}(M)$, $f\in C^\infty(M)$, 有 $[P,f]=P(f)$.

证明. 先证明 $[,]$ 的唯一性. 对 p,q 用数学归纳法, 反复使用上述 4 条运算法则可以验证对任意 $X_1,...,X_p;Y_1,...,Y_q\in\mathrm{Vect}(M)$ 都有

$$\begin{aligned}&[X_1\wedge X_2\wedge\cdots\wedge X_p\,,Y_1\wedge Y_2\wedge\cdots\wedge Y_q]\\=&\sum_{i=1}^p\sum_{j=1}^q(-1)^{i+j}[X_i,Y_j]\wedge\left(X_1\wedge\cdots\wedge\widehat{X}_i\wedge\cdots\wedge X_p\right)\\&\qquad\wedge\left(Y_1\wedge\cdots\wedge\widehat{Y}_j\wedge\cdots\wedge Y_q\right),\end{aligned} \tag{3.50}$$

这将 $[,]$ 唯一确定. 至于存在性, 则需要验证上述 4 条运算法则无矛盾, 其证明较为枯燥, 故从略. 感兴趣者可参考 [11], [28] 等文献. □

注 3.34. Schouten-Nijenhuis 括号有多种不同版本的定义, 其区别在于采用不同的正负号约定, 例如在 [26], [43] 等文献中规定 $[P,Q]=(-1)^{pq}[Q,P]$.

题 3.35. 由定理3.33中的运算法则 (3)(4) 直接验证

$$[Q\wedge R,P]=Q\wedge[R,P]+(-1)^{r(p-1)}[[Q,P],R] \tag{3.51}$$

对任意 $P\in\mathrm{PV}^p(M)$, $Q\in\mathrm{PV}^q(M)$, $R\in\mathrm{PV}^r(M)$ 都成立.

而对于 2-向量场 $\Pi \in \mathrm{PV}^2(M)$, 本小节的主要结论为:

定理 3.36. *设 Π 为光滑流形 M 上的 2-向量场, 则 Π 所诱导的括号 $\{,\}$(见注3.32) 满足 Jacobi 恒等式当且仅当*

$$[\Pi, \Pi] = 0. \tag{3.52}$$

证明. 任取局部坐标 $(x^1, ..., x^n)$, 在此坐标下记 $\Pi = \frac{1}{2}\mathcal{P}^{ij}\frac{\partial}{\partial x^i} \wedge \frac{\partial}{\partial x^j}$, 不妨系数矩阵 $\mathcal{P} = (\mathcal{P}^{ij})$ 反对称. 则由显式表达式(3.50)直接计算可得

$$\begin{aligned}
[\Pi, \Pi] &= \frac{1}{4}\left[\mathcal{P}^{ij}\frac{\partial}{\partial x^i} \wedge \frac{\partial}{\partial x^j}, \mathcal{P}^{k\ell}\frac{\partial}{\partial x^k} \wedge \frac{\partial}{\partial x^\ell}\right] \\
&= \frac{1}{4}\left(\left[\mathcal{P}^{ij}\frac{\partial}{\partial x^i}, \mathcal{P}^{k\ell}\frac{\partial}{\partial x^k}\right] \wedge \frac{\partial}{\partial x^j} \wedge \frac{\partial}{\partial x^\ell}\right. \\
&\qquad - \left[\mathcal{P}^{ij}\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^\ell}\right] \wedge \frac{\partial}{\partial x^j} \wedge \mathcal{P}^{k\ell}\frac{\partial}{\partial x^k} \\
&\qquad \left. - \left[\frac{\partial}{\partial x^j}, \mathcal{P}^{k\ell}\frac{\partial}{\partial x^k}\right] \wedge \mathcal{P}^{ij}\frac{\partial}{\partial x^i} \wedge \frac{\partial}{\partial x^\ell}\right) \\
&= -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \mathcal{P}^{ij}}{\partial x^s}\mathcal{P}^{sk} - \frac{\partial \mathcal{P}^{ik}}{\partial x^s}\mathcal{P}^{sj}\right)\frac{\partial}{\partial x^i} \wedge \frac{\partial}{\partial x^j} \wedge \frac{\partial}{\partial x^k} \\
&= -\frac{\partial \mathcal{P}^{ij}}{\partial x^s}\mathcal{P}^{sk}\frac{\partial}{\partial x^i} \wedge \frac{\partial}{\partial x^j} \wedge \frac{\partial}{\partial x^k} \\
&= -2\sum_{i<j<k}\left(\frac{\partial \mathcal{P}^{ij}}{\partial x^s}\mathcal{P}^{sk} + \frac{\partial \mathcal{P}^{jk}}{\partial x^s}\mathcal{P}^{si} + \frac{\partial \mathcal{P}^{ki}}{\partial x^s}\mathcal{P}^{sj}\right)\frac{\partial}{\partial x^i} \wedge \frac{\partial}{\partial x^j} \wedge \frac{\partial}{\partial x^k}.
\end{aligned}$$

可见 $[\Pi, \Pi] = 0$ 当且仅当(3.48)成立, 从而当且仅当其诱导的括号 $\{,\}$ 满足 Jacobi 恒等式, 定理得证. □

此外, 也可以用也可用 Schouten-Nijenhuis 括号的语言给出哈密顿向量场 (3.1)(3.2)(3.47) 的又一等价定义:

性质 3.37. *设 $\Pi \in \mathrm{PV}^2(M)$ 是辛流形 (M, ω) 的泊松结构, 则对任意光滑函数 $f \in C^\infty(M)$ 都成立*

$$X_f = [\Pi, f]. \tag{3.53}$$

证明. 在局部坐标 $(x^1, x^2, ..., x^n)$ 下记 $\Pi = \frac{1}{2}\mathcal{P}^{ij}\frac{\partial}{\partial x^i} \wedge \frac{\partial}{\partial x^j}$, 则

$$\begin{aligned}
[\Pi, f] &= \left[\frac{1}{2}\mathcal{P}^{ij}\frac{\partial}{\partial x^i} \wedge \frac{\partial}{\partial x^j}, f\right] = \frac{1}{2}\mathcal{P}^{ij}\left(\frac{\partial}{\partial x^i} \cdot \frac{\partial f}{\partial x^j} - \frac{\partial f}{\partial x^i} \cdot \frac{\partial}{\partial x^j}\right) \\
&= \mathcal{P}^{ij}\frac{\partial f}{\partial x^j}\frac{\partial}{\partial x^i} = X_f,
\end{aligned}$$

从而得证. □

本小节最后, 我们再补充一些 Schouten-Nijenhuis 括号的基本性质. 定理(3.33)中的运算法则 (3)(4) 分别被称为 **超反对称性**, **超 Leibniz 法则**, 这里的 "超" 字可暂时地粗俗理解为表达式中所含 (-1) 的幂次. 与通常李括号类似, 一般的 Schouten-Nijenhuis 括号满足如下**超 Jacobi 恒等式**:

题 3.38. 对于光滑流形 M 以及 $p, q, r \geq 0$, 则

$$(-1)^{(p-1)(r-1)}[P, [Q, R]] + (-1)^{(q-1)(p-1)}[Q, [R, P]] + (-1)^{(r-1)(q-1)}[R, [P, Q]] = 0 \tag{3.54}$$

对任意 $P \in \mathrm{PV}^p(M), Q \in \mathrm{PV}^q(M), R \in \mathrm{PV}^r(M)$ 都成立.

[提示: 这个题的验证过程不重要, 且太枯燥, 建议跳过并且承认此结论. 对于时间充足想消磨时间的读者, 可以直接用(3.50)式暴力验证 (不推荐), 而对 $p + q + r$ 归纳是更佳的做法.]

注 3.39. 容易验证超 Jacobi 恒等式(3.54)可改写为

$$[P, [Q, R]] = [[P, Q], R] + (-1)^{(p-1)(q-1)}[Q, [P, R]]. \tag{3.55}$$

若记 $\mathcal{L}_P\colon \mathrm{PV}^q(M) \to \mathrm{PV}^{q+p-1}(M)$, $Q \mapsto [P, Q]$, 则(3.55)表明 $\mathcal{L}_P$ 是关于 "乘法" 运算 $[,]$ 的 "超导子"; 而前文提到的超 Leibnitz 法则表明 $\mathcal{L}_P$ 是关于 "乘法" 运算 $\wedge$ 的 "超导子". 此外, (3.55)式还可写为更紧凑的形式:

$$\mathcal{L}_{[P,Q]} = \mathcal{L}_P \circ \mathcal{L}_Q - (-1)^{(p-1)(q-1)}\mathcal{L}_Q \circ \mathcal{L}_P. \tag{3.56}$$

3.2.4 泊松流形及其基本例子

我们可以脱离辛结构而谈论更一般的泊松结构.

定义 3.40. 设 M 是光滑流形, $\Pi \in \mathrm{PV}^2(M)$, 如果 $[\Pi,\Pi]=0$, 则称 Π 是 M 的**泊松结构** (或**哈密顿结构**); 此时称 (M,Π) 为**泊松流形**.

通过(3.45)式, 泊松结构 Π 可等价地表示为相应的**泊松括号** $\{,\}$. 泊松结构在局部坐标 $(x^1,...,x^m)$ 下的表达式形如(3.46), 这里 $\mathcal{P}=(\mathcal{P}^{ij})$ 为相应的哈密顿算子; 相应的泊松括号满足 $\{x^i,x^j\}=\mathcal{P}^{ij}$.

对任意 $H\in C^\infty(M)$, 由(3.53)可以给出相应的**哈密顿向量场** X_H; 将沿哈密顿向量场的流视为系统随时间的演化, 相应的**哈密顿方程**同(3.35); 此时称三元组 (M,Π,H) 为**哈密顿系统**. 这是哈密顿系统的 "真正" 定义, 辛流形的情形 (见3.1节开头) 是其特殊情况.

对于泊松流形 (M,Π), 也可像3.1.2小节一样类似定义

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Ham}(M,\Pi) &:= \{X\in \mathrm{Vect}(M)\,|\,\exists\, H\in C^\infty(M),\ X=[\Pi,H]\}\,,\\
\mathrm{Ham}^\circ(M,\Pi) &:= \{X\in \mathrm{Vect}(M)\,|\,[\Pi,X]=0\}\,,
\end{aligned}
$$

其中元素分别称为**哈密顿向量场**与**局部哈密顿向量场** (或**泊松向量场**). 由 Schouten-Nijenhuis 括号的运算性质(3.54)易知 $\mathrm{Ham}(M,\Pi)\subseteq \mathrm{Ham}^\circ(M,\Pi)$. 此外, 若泊松结构 Π 来自于辛结构 ω, 则可以验证上述定义等价于前文的定义3.7(留给读者练习).

自然地, 也可定义泊松流形之间的态射:

定义 3.41. 对于泊松流形 M,N 之间的光滑映射 $\Phi\colon M\to N$, 如果对任意 $f,g\in C^\infty(N)$ 都有

$$
\Phi^*\{f,g\}=\{\Phi^*f,\Phi^*g\},
$$

则称 Φ 为**泊松映射**.

我们目前最熟悉的例子应该是辛结构诱导的泊松结构:

例 3.42. 设 (M,ω) 为辛流形, 则辛结构 ω 自然诱导泊松结构 Π, 使得相应的泊松括号形如(3.33), 从而 (M,Π) 为泊松流形.

但反过来, 泊松结构未必来自于辛结构. 在局部坐标下, 我们回忆 $(\mathcal{P}^{ij})=-(\omega^{ij})^{-1}$; 因此泊松结构由辛结构所诱导当且仅当其系数矩阵 (哈密顿算子) 可逆. 可见泊松流形是辛流形的推广. 对泊松流形的系统研究构成一个专

门的数学分支, 即所谓**泊松几何**. 其内容超出本讲义范围, 感兴趣者可参考 [11], [43] 等教材. 限于篇幅, 本小节接下来只简要介绍泊松流形的基本例子, 而在后续章节将重新回到辛流形的主线内容.

例 **3.43.**(平凡泊松结构) 对于任意光滑流形 M, 取 $\Pi = 0 \in \mathrm{PV}^2(M)$, 则 (M, Π) 是泊松流形.

我们回忆, 辛流形都是偶数维, 可定向, 偶数阶上同调群非平凡的流形 (见2.1.1小节); 然而泊松流形就没有这些拓扑限制, 任何流形都可以成为泊松流形 (至少总有上述平凡泊松结构).

接下来考虑线性空间 $V = \mathbb{R}^m$ 上的泊松结构 (以及相应的泊松括号). 我们将 V 上的线性函数之全体, 即 V^*, 自然视为 $C^\infty(V)$ 的子空间, 即

$$V^* \subseteq C^\infty(V).$$

此外, V 上的泊松括号 $\{,\}$ 被它在线性函数空间上的限制 $\{,\}|_{V^* \times V^*}$ 所唯一确定. 这是因为, 任取 V 的一组基 $\{\boldsymbol{e}_i\}$, 记相应的坐标函数为 $\{x^i\}$, 由泊松括号的运算性质可知在局部坐标 $(x^1, ..., x^m)$ 下成立

$$\{f, g\} = \frac{\partial f}{\partial x^i}\frac{\partial g}{\partial x^j}\{x^i, x^j\}, \quad \forall f, g \in C^\infty(V). \tag{3.57}$$

因此 $\{,\}$ 被线性函数之间的泊松括号 $\{x^i, x^j\}$ 所唯一确定.

例 **3.44.**(常系数泊松结构) 对任意 m 阶反对称矩阵 $(c^{ij}) \in \mathbb{R}^{m \times m}$, 都有 $V = \mathbb{R}^m$ 上的泊松括号

$$\{x^i, x^j\} = c^{ij}.$$

相应的 2-向量 $\Pi = \frac{1}{2}c^{ij}\frac{\partial}{\partial x^i} \wedge \frac{\partial}{\partial x^j}$. 容易验证 (但必须要验证)$[\Pi, \Pi] = 0$, 从而这确实是泊松结构.

例 **3.45.**(线性泊松结构) 对于线性空间 $V = \mathbb{R}^m$ 上的泊松括号 $\{,\}$, 如果对任意 $\lambda, \mu \in V^*$ 都有 $\{\lambda, \mu\} \in V^*$, 则称 $\{,\}$ 为线性泊松括号, 相应的泊松结构 Π 为线性泊松结构.

在关于 V 的某组基的局部坐标 $(x^1, ..., x^m)$ 下, 线性泊松括号形如

$$\{x^i, x^j\} = c_k^{ij} x^k, \tag{3.58}$$

其中 c_k^{ij} 为常数. 由定义可知, 线性泊松括号 $\{,\}$ 自然给出 V^* 上的 $\mathbb{R}$-**代数结构**

$$\{,\}\colon V^*\times V^*\to V^*.$$

而泊松括号的反对称性与 Jacobi 恒等式意味着 $(V^*,\{,\})$ 是**李代数**, 此时局部表达式(3.58)中的 c_k^{ij} 是该李代数相应的结构常数. 反之, V^* 的李代数结构也自然给出 V 上的线性泊松结构. 因此有如下自然的一一对应:

$$\{V \text{ 上的线性泊松结构}\}\cong\{V^* \text{ 上的李代数结构}\}. \tag{3.59}$$

正因如此, 线性泊松结构也被称为**李-泊松结构**.

题 **3.46.** 设 $(\mathfrak{g},[,])$ 是有限维 $\mathbb{R}$-李代数, 记 $\{,\}$ 为 $V:=\mathfrak{g}^*$ 的李-泊松括号, 并且记映射

$$\mathrm{ev}\colon \mathfrak{g}\xrightarrow{\sim}(\mathfrak{g}^*)^*\subseteq C^\infty(\mathfrak{g}^*).$$

1. 证明: 对任意 $X,Y\in\mathfrak{g}$, 成立

$$\{\mathrm{ev}(X),\mathrm{ev}(Y)\}=\mathrm{ev}([X,Y]);$$

2. 证明: 对任意 $f,g\in C^\infty(\mathfrak{g}^*)$ 以及 $\xi\in\mathfrak{g}^*$, 成立

$$\{f,g\}(\xi)=\langle\xi,\,[\mathrm{d}_\xi f,\mathrm{d}_\xi g]\rangle, \tag{3.60}$$

其中 $\langle,\rangle$ 是 $\mathfrak{g}$ 与 $\mathfrak{g}^*$ 的配对, 并且 $\mathrm{d}_\xi\colon C^\infty(\mathfrak{g}^*)\to\mathfrak{g}$ 是如下若干映射的复合:

$$C^\infty(\mathfrak{g}^*)\xrightarrow{\mathrm{d}}\Omega^1(\mathfrak{g}^*)\xrightarrow{\mathrm{ev}_\xi}T_\xi^*\mathfrak{g}^*\cong(\mathfrak{g}^*)^*\cong\mathfrak{g}.$$

[提示: 可以考虑在局部坐标下直接验证, 留给读者.]

自然可以谈论 $\mathfrak{g}^*$ 上的哈密顿向量场. 记号承上, 考虑复合映射

$$\mathscr{A}\colon\mathfrak{g}\xrightarrow{\mathrm{ev}}C^\infty(\mathfrak{g}^*)\xrightarrow{[\Pi,\cdot]}\mathrm{Vect}(\mathfrak{g}^*),$$

其中 $[\Pi,\cdot]\colon f\mapsto[\Pi,f]$ 将函数 f 映为关于李-泊松结构 Π 的哈密顿向量场.

题 **3.47.** 记号承上, 则对任意 $X\in\mathfrak{g}$ 以及 $\xi\in\mathfrak{g}^*$, 则在 $T_\xi\mathfrak{g}^*\cong\mathfrak{g}^*$ 中成立

$$\mathscr{A}(X)|_\xi=\mathrm{ad}_X^*\,\xi,$$

其中 $\mathrm{ad}^*\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}^*)$ 是李代数 $\mathfrak{g}$ 在 $\mathfrak{g}^*$ 上的余伴随表示.

[提示: 我们曾在2.4节研究过余伴随表示. 至于李代数的余伴随表示, 无非是伴随表示的对偶表示, 其定义为

$$\langle \mathrm{ad}^*_X \xi, Y\rangle := -\langle \xi, [X, Y]\rangle,$$

其中 $X, Y \in \mathfrak{g}$ 以及 $\xi \in \mathfrak{g}^*$.]

证明. 取定 $\mathfrak{g}$ 的一组基 $\{\boldsymbol{e}^i\}$, 记 $\mathfrak{g}^*$ 在对偶基 $\{\boldsymbol{e}_i^*\}$ 下的局部坐标为 $\{x^i\}$, 则 $\mathrm{ev}(\boldsymbol{e}^i) = x^i$. 再记李代数 $\mathfrak{g}$ 在基 $\{\boldsymbol{e}^i\}$ 下的结构常数为 $[\boldsymbol{e}^i, \boldsymbol{e}^j] = c_k^{ij}\boldsymbol{e}^k$. 则容易验证 $\mathscr{A}(\boldsymbol{e}^i) = -c_k^{ij}x^k\frac{\partial}{\partial x^j}$, 从而对于 $\xi = \xi^i\boldsymbol{e}_i^* \in \mathfrak{g}^*$ 有

$$\mathscr{A}(\boldsymbol{e}^i)|_\xi = -c_k^{ij}\xi^k\boldsymbol{e}_j^* \in \mathfrak{g}^*,$$

于是 $\langle \mathscr{A}(\boldsymbol{e}^i)|_\xi, \boldsymbol{e}^j\rangle = -c_k^{ij}\xi^k = -\langle[\boldsymbol{e}^i, \boldsymbol{e}^j], \xi\rangle$, 这表明 $\mathscr{A}(\boldsymbol{e}^i)|_\xi = \mathrm{ad}^*_{\boldsymbol{e}^i}\xi$. 从而得证. □

题 3.48. 接上题, 则泊松流形 $(\mathfrak{g}^*, \{,\})$ 上的关于哈密顿量 $H \in C^\infty(\mathfrak{g}^*)$ 的演化方程为

$$\frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}t} = \mathrm{ad}^*_{\mathrm{d}_\xi H}\xi, \tag{3.61}$$

这里 $t \mapsto \xi := \xi(t)$ 是 $\mathfrak{g}^*$ 上的曲线.

证明. 事实上, 对一般的 $f \in C^\infty(\mathfrak{g}^*)$ 以及 $\xi \in \mathfrak{g}^*$ 都有

$$\left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}\right|_\xi = \{f, H\}|_\xi = \langle \xi, [\mathrm{d}_\xi f, \mathrm{d}_\xi H]\rangle = \left\langle \mathrm{ad}^*_{\mathrm{d}_\xi H}\xi, \mathrm{d}_\xi f\right\rangle,$$

从而沿哈密顿向量场 X_H 的积分曲线 $t \mapsto \xi(t)$ 满足(3.61)式, 得证. □

注 3.49. 回忆 $\mathfrak{g}^*$ 上的余伴随轨道 (见前文2.4.5小节). 由方程(3.61)可以直接看出, $\mathfrak{g}^*$ 上的关于李-泊松结构的哈密顿演化曲线 $t \mapsto \xi(t)$ 一定落在 $\mathfrak{g}^*$ 的某个余伴随轨道内.

我们再来欣赏李-泊松括号的一个具体例子:

题 3.50.(欧拉陀螺). 考虑李代数 $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(3) := \left\{\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{3\times3} \,\middle|\, \boldsymbol{A}^\mathrm{T} = -\boldsymbol{A}\right\}$, 则众所周知 $(\mathfrak{g}, [,]) \cong (\mathbb{R}^3, \times)$, 即 $\mathbb{R}^3$ 的外积运算构成的李代数. 记 $\{,\}$ 为 $\mathfrak{g}^* \cong \mathbb{R}^3$ 上相应的李-泊松括号.

1. 对任意 $f, g \in C^\infty(\mathfrak{g}^*) \cong C^\infty(\mathbb{R}^3)$, 以及 $\boldsymbol{x} = (x, y, z) \in \mathfrak{g}^* \cong \mathbb{R}^3$, 验证

$$\{f, g\}(\boldsymbol{x}) = (\nabla f(\boldsymbol{x}) \times \nabla g(\boldsymbol{x})) \cdot \boldsymbol{x} = \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} & \frac{\partial g}{\partial z} \\ x & y & z \end{vmatrix};$$

2. 对于如下哈密顿量 $H \in C^\infty(\mathfrak{g}^*) \cong C^\infty(\mathbb{R}^3)$

$$H(x, y, z) = \frac{x^2}{2I_x} + \frac{y^2}{2I_y} + \frac{z^2}{2I_z},$$

其中常数 $I_x, I_y, I_z > 0$, 写出相应的哈密顿方程.

答案. 可以先直接写出李-泊松括号 $\{,\}$ 的哈密顿算子 $\mathcal{P} = \begin{pmatrix} 0 & z & -y \\ -z & 0 & x \\ y & -x & 0 \end{pmatrix}$, 然后由(3.4)直接得到相应的哈密顿演化方程如下:

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{I_y - I_z}{I_y I_z} yz, \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{I_z - I_x}{I_z I_x} zx, \\ \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{I_x - I_y}{I_x I_y} xy. \end{cases}$$

此方程恰为自由刚体绕其质心定点转动的欧拉方程 (与物理学中习惯的形式相差负号), 描述了刚体角速度 $\boldsymbol{\omega} = (x, y, z)$ 随时间的变化, 其中 I_x, I_y, I_z 是刚体的三个主转动惯量. □

此方程所描述的物理系统称为**欧拉陀螺**, 是经典力学中的重要例子. 关于它的讨论以及与之相关的结论十分丰富, 限于篇幅本讲义不更多介绍, 感兴趣者可参考 [8] 等教材.

既然有常系数泊松结构、线性泊松结构, 那么自然也会有 "二次泊松结构", 其系数 $\mathcal{P}^{ij}$ 是关于线性局部坐标 x^i 的二次函数, 其一般形式为

$$\{x^i, x^j\} = c^{ij}_{k\ell} x^k x^\ell,$$

其中 $c^{ij}_{k\ell}$ 为常数. 我们不打算讨论上述一般情形, 而只介绍如下特例:

例 **3.51.** 给定反对称矩阵 $\boldsymbol{A}=(a^{ij})\in\mathbb{R}^{m\times m}$, 则

$$\Pi_{\boldsymbol{A}}:=\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{m}a^{ij}x^ix^j\frac{\partial}{\partial x^i}\wedge\frac{\partial}{\partial x^j}\tag{3.62}$$

是 $\mathbb{R}^m$ 上的泊松结构, 相应的泊松括号 $\{,\}_{\boldsymbol{A}}$ 满足 $\{x^i,x^j\}_{\boldsymbol{A}}=a^{ij}x^ix^j$.

[提示: 需要验证 $[\Pi,\Pi]=0$, 这依赖 $\boldsymbol{A}$ 的反对称性. 细节留给读者.]

题 **3.52.**(Lotka-Volterra 方程) 给定反对称矩阵 $\boldsymbol{A}=(a^{ij})\in\mathbb{R}^{m\times m}$, 记 $\Pi_{\boldsymbol{A}}$ 为 $\mathbb{R}^m$ 的由(3.62)式所定义的泊松结构. 考虑流形

$$M:=\left\{(x^1,...,x^m)\in\mathbb{R}^m\,\middle|\,x^i>0,\ i=1,...,m\right\}.$$

给定常数 $\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_m\in\mathbb{R}$, 则关于 $(M,\Pi_{\boldsymbol{A}})$ 上的哈密顿量

$$H:=\sum_{i=1}^{m}\left(x^i-\lambda_i\log x^i\right)$$

的哈密顿方程为

$$\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}t}=\varepsilon^ix^i+\sum_{j=1}^{m}a^{ij}x^ix^j,\qquad 1\le i\le m,\tag{3.63}$$

其中 $\varepsilon^i:=\lambda_ja^{ji}$.

方程(3.63)是著名的 **Lotka-Volterra 方程**, 它描述了某生态系统中的 m 个物种的种群密度 x^i 随时间的变化. 常数 ε^i 描述了第 i 个物种的繁殖能力, 而 a^{ij} 描述了第 i 个物种与第 j 个物种的相互影响. 关于此生态系统模型的更多内容可见 [20].

3.2.5 辛叶

辛流形有自然泊松结构. 另一方面, 泊松流形虽然未必是辛流形, 但可以验证其某些的子流形有自然的辛结构, 并且这些辛子流形构成该泊松流形的**叶状结构** (foliation), 这正是所谓**辛叶**.

定义 3.53. 对于泊松流形 (M,Π) 以及点 $p\in M$, 记

$$D_p^{\Pi}:=\Pi\llcorner(T_p^*M):=\left\{\Pi\llcorner\alpha\,\middle|\,\alpha\in T_p^*M\right\}\subseteq T_pM,$$

则 $D^\Pi := \coprod_{p\in M} D_p^\Pi$ 是 M 上的分布, 称为泊松结构 Π 的**特征分布**.

由(3.47)可知, 特征分布 D^Π 是由 (局部) 哈密顿向量场所张成的分布. 而 (局部) 哈密顿向量场关于李括号运算封闭, 因此由积分子流形的 Frobenius 定理可知, 特征分布 D^Π 是可积的, 相应的积分子流形总存在, 并且关于 D^Π 的极大积分子流形之全体给出了 M 的叶状结构.

特征分布 D^Π 的积分子流形具有自然的辛流形结构:

定理 3.54. 设 N 是泊松流形 (M,Π) 的关于特征分布 D^Π 的一个积分子流形, 则存在唯一的 2-形式 $\omega \in \Omega^2(N)$, 使得 (N,ω) 是辛流形, 并且自然嵌入映射 $(N,\omega) \hookrightarrow (M,\Pi)$ 是泊松映射.

证明. 如果 N 上的非退化 2-形式 ω 使得 $(N,\omega) \hookrightarrow (M,\Pi)$ 是泊松映射, 则容易验证 ω 只能如下选取: 对任意 $p \in N$ 以及 $f,g \in C^\infty(M)$,

$$\omega_p(X_f, X_g) = \{f,g\}(p), \tag{3.64}$$

其中 X_f, X_g 分别是 f,g 的 (关于泊松结构 Π 的) 哈密顿向量场. 注意 $T_pN = D_p^\Pi$ 恰由哈密顿向量场张成, 从而容易验证上式确实唯一确定了 N 上的一个 2-形式 ω, 并容易验证 ω 非退化.

只需再验证(3.64)中的 ω 是闭的. 由外微分公式(2.45)以及泊松括号的雅可比恒等式可知, 对任意 $f,g,h \in C^\infty(M)$ 都有

$$\begin{aligned}
&(\mathrm{d}\omega)(X_f, X_g, X_h)\\
=&X_f(\omega(X_g,X_h)) - X_g(\omega(X_f,X_h)) + X_h(\omega(X_f,X_g))\\
&\quad -\omega([X_f,X_g],X_h) + \omega([X_f,X_h],X_g) - \omega([X_g,X_h],X_f)\\
=&-2\left(\{f,\{g,h\}\} + \{g,\{h,f\}\} + \{h,\{f,g\}\}\right) = 0,
\end{aligned}$$

因此 $\mathrm{d}\omega = 0$, 定理得证. □

下面考察一些例子.

例 **3.55.**(平凡例子) 对于光滑流形 M, 取平凡泊松结构 $\Pi = 0$, 则 D^Π 的每个积分子流形都是独点集.

而接下来的例子非常重要, 将前文所介绍的**余伴随轨道**的辛结构 (定理2.89) 与**李-泊松结构** (例3.45) 联系起来.

例 3.56.(李-泊松结构的辛叶) 设 $\mathfrak{g}$ 是李群 G 的李代数, Π 是 $\mathfrak{g}^*$ 上的李-泊松结构, $\xi \in \mathfrak{g}^*$, 则由题3.48与注3.49可知, 特征分布 D^Π 满足

$$D^\Pi_\xi = \{\mathrm{ad}^*_X \xi \,|\, X \in \mathfrak{g}\},$$

因此 D^Π 的过点 ξ 的极大积分子流形恰为余伴随轨道 $G^\# \xi$(的连通分支).

我们记 $N := G^\# \xi$ 为过点 $\xi \in \mathfrak{g}^*$ 的辛叶 (余伴随轨道). 本节定理3.54给出了 N 上的一个辛结构, 记作 ω; 然而, 作为余伴随轨道, 定理2.89也给出了 N 上的辛结构, 记作 $\tilde{\omega}$. 自然要问: 这两个辛结构是否有联系?

为此, 我们先考察 ω. 对于 $X, Y \in T_\xi N = D^\Pi_\xi$, 则 (局部) 存在 $\mathfrak{g}^*$ 上的函数 f, g 使得

$$X = \mathrm{ad}^*_{\mathrm{d}_\xi f}\, \xi = X_f(\xi), \quad Y = \mathrm{ad}^*_{\mathrm{d}_\xi g}\, \xi = X_g(\xi), \tag{3.65}$$

其中 $\mathrm{d}_\xi \colon C^\infty(\mathfrak{g}^*) \to \mathfrak{g}$ 详见题3.46. 从而由(3.60)(3.64)可知

$$\omega_\xi(X, Y) = \{\mathrm{d}_\xi f, \mathrm{d}_\xi g\}(\xi) = \langle \xi, [\mathrm{d}_\xi f, \mathrm{d}_\xi g]\rangle. \tag{3.66}$$

而另一方面, 在余伴随轨道的角度, 我们回忆, $\xi \in \mathfrak{g}^*$ 诱导了李群作用 $G \to \mathfrak{g}^*, g \mapsto \mathrm{Ad}^*_g \xi$. 在此意义下, 余伴随轨道 $N = G^\# \xi \cong G/G_\xi$, 其中 G_ξ 为李群 G 的稳定子群. 记 $\pi_\xi \colon G \to G/G_\xi$ 为商映射. 此外, 我们将点 $\xi \in \mathfrak{g}^*$ 等同于李群 G 上的左不变 1-形式. 在此意义下, 余伴随轨道的辛结构 $\tilde{\omega}$ 在点 $\xi \in \mathfrak{g}^*$ 处的取值 $\tilde{\omega}_\xi$ 由

$$\pi^*_\xi(\tilde{\omega}_\xi) = \mathrm{d}\xi$$

唯一确定. 特别地, 在(3.65)中, 我们重新记 $\tilde{X} := \mathrm{d}_\xi f$, $\tilde{Y} := \mathrm{d}_\xi g$, 则 $\tilde{X}, \tilde{Y} \in \mathfrak{g} \in T_e G$, 之后容易验证

$$(\pi_\xi)_* \tilde{X} = X \in T_\xi(G^\# \xi), \quad (\pi_\xi)_* \tilde{Y} = Y \in T_\xi(G^\# \xi),$$

因此辛结构 $\tilde{\omega}$ 满足

$$\begin{aligned}
\tilde{\omega}_\xi(X, Y) &= (\mathrm{d}\xi)(\tilde{X}, \tilde{Y}) \\
&= \tilde{X}(\xi(\tilde{Y})) - \tilde{Y}(\xi(\tilde{X})) - \xi([\tilde{X}, \tilde{Y}]) \\
&= -\langle \xi, [\mathrm{d}_\xi f, \mathrm{d}_\xi g]\rangle,
\end{aligned} \tag{3.67}$$

注意上式中将 $\tilde{X},\tilde{Y}$ 视为李群 G 的左不变向量场, 并把 ξ 视为 G 上的左不变 1-形式. 对照(3.66)(3.67)两式可知:

$$\omega = -\tilde{\omega},$$

即, $\mathfrak{g}^*$ 的辛叶的辛结构 (相差正负号意义下) 恰为余伴随轨道的辛结构.

至此结束对泊松流形的讨论, 后文将重回辛流形的主线内容.

3.3 Liouville 可积系统

对于辛流形上的哈密顿系统 (M,ω,H), 自然想研究沿哈密顿向量场 X_H 的流. 如果该系统 "有足够多的守恒量", 那么沿 X_H 的演化行为具有良好的性质. 这类特殊的哈密顿系统性质优良, 被称为可积系统.

3.3.1 定义与基本注记

定义 3.57. 对于哈密顿系统 (M,ω,H), 其中 (M,ω) 是 $2n$ 维辛流形. 如果存在 M 上的光滑函数 $H_1 := H,\ H_2,...,H_n$, 使得以下成立

1. $\{H_i,H_j\}=0, \forall 1\le i,j\le n$;
2. $\mathrm{d}H_1,...,\mathrm{d}H_n$ 在 M 的某个稠密开集上处处线性无关,

则称 $(M,\omega;\mathscr{H})$ 是 ***Liouville* 可积系统**, 其中

$$\begin{aligned} \mathscr{H}: M &\to \mathbb{R}^n \\ m &\mapsto (H_1(m),...,H_n(m))^{\mathrm{T}}; \end{aligned} \tag{3.68}$$

或者称 (M,ω,H) 是**完全可积**的.

上述 Liouville 可积系统也俗称**哈密顿可积系统**, 或简称**可积系统**. 对于 Liouville 可积系统 $(M,\omega;\mathscr{H})$, 我们有以下简单性质:

1. 由定义的 (1) 可知, 对任意 $2\le i\le n$ 都有 $\{H_i,H\}=0$, 从而 $H_2,H_3,...,H_n$ 都是守恒量. 记 X_{H_i} 为 H_i 的哈密顿向量场, 则定义的 (1) 等价于 $[X_{H_i},X_{H_j}]=0$, 即 $\{X_{H_i}\}$ 两两交换; 也等价于 $\omega(X_{H_i},X_{H_j})=0$, 从

而 $\{X_{H_i}\,|\,1\le i\le n\}$ 所张成的线性空间是相应点处切空间的迷向子空间.

2. 由 ω 的非退化性, $\mathrm{d}H_1,...,\mathrm{d}H_n$ 线性无关等价于 $X_{H_1},...,X_{H_n}$ 线性无关. 因此, 在 M 的某稠密开集 U 上, $X_{H_1},...,X_{H_n}$ 张成的空间是切空间的 n 维迷向子空间, 即拉格朗日子空间. 此外该线性无关性还表明, 稠密开集 U 中的点是映射 $\mathscr{H}$ 的正则点.

3. 取定 $m\in M$ 为 $\mathscr{H}$ 的一个正则点, $\boldsymbol{h}:=\mathscr{H}(m)\in\mathbb{R}^n$. 则由微分拓扑中的正则原像定理,
$$M_{\boldsymbol{h}}:=\mathscr{H}^{-1}(\boldsymbol{h}) \tag{3.69}$$
是 M 的 n 维子流形. 对任意 $m'\in M_{\boldsymbol{h}}$, 由 $\{H_i,H_j\}=0$ 可知, 从 m' 出发沿向量场 X_{H_i} 的积分曲线始终落在 $M_{\boldsymbol{h}}$ 内, 从而 $X_{H_i}|_{m'}\in T_{m'}M_{\boldsymbol{h}}$. 进而易知 $X_{H_1},...,X_{H_n}$ 构成切空间 $T_{m'}M_{\boldsymbol{h}}$ 的一组基. 特别地, $T_{m'}M_{\boldsymbol{h}}$ 是 $T_{m'}M$ 的拉格朗日子空间. 于是 $M_{\boldsymbol{h}}$ 是 M 的**拉格朗日子流形**. 这是拉格朗日子流形的又一类重要例子.

4. 记号承上, 再记 M 上的分布
$$D^{\mathscr{H}}:=\coprod_{m\in M}\operatorname{span}\left\{X_{H_i}(m)\,|\,1\le i\le n\right\},$$
即哈密顿向量场 $X_{H_1},...,X_{H_n}$ 张成的分布. 由 $[X_{H_i},X_{H_j}]=0$ 可知分布 $D^{\mathscr{H}}$ 是可积的, 从而由分布的 Frobenius 定理知 $M_{\boldsymbol{h}}$ 在正则点 m 附近存在局部坐标 $\boldsymbol{u}=(u^1,...,u^n)$ 使得
$$\frac{\partial}{\partial u^i}=X_{H_i},\quad 1\le i\le n. \tag{3.70}$$

注 **3.58.** 事实上, 由更强版本的 Frobenius 定理 (例如 Stefan-Sussmann, 见 [38, 39]) 可以得到, M 在正则点 m 附近存在局部坐标 $(u^1,...,u^n;u^{n+1},...,u^{2n})$, 使得在 $m\in M$ 的某个开邻域内成立
$$X_{H_i}=\frac{\partial}{\partial u^i},\qquad 1\le i\le n.$$
我们承认此结果. 此结果将在后文3.4.1小节中有应用.

下面看一些简单例子. 首先是平凡情形:

例 **3.59.** 若 $\dim M = 2$, 则其上的任何哈密顿系统显然都完全可积.

哈密顿可积系统的例子往往来自物理. 众所周知的**单摆**、**一维谐振子**都是 $\dim M = 2$ 的平凡情形, 这里从略. 我们将在接下来的若干小节介绍更多有意思的例子.

3.3.2 例子: 球面摆, 双摆, 混沌现象

我们回忆众所周知的**单摆**: 竖直平面上的一根理想轻杆一端被固定, 另一端连接某个质点, 该质点在重力与杆的弹力作用下运动. 换言之, 也可认为质点被束缚在竖直平面内的某圆周上.

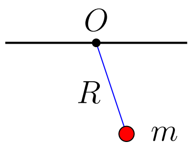


图: 单摆

我们将单摆推广到 3 维, 即质点在日常生活的 3 维空间而不是竖直平面的情形; 换言之, 质点被束缚在某个球面 S^2 上, 如此物理模型称为**球面摆**. 日常生活中, 球面摆可以是小孩子的玩具; 但在这里, 我们把它作为 Liouville 可积系统的例子.

例 **3.60.** (球面摆). 质量为 m 的质点被束缚在半径为 R 的光滑球面, 在重力作用下运动. 该系统的相空间

$$M := \left\{(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}) \in T^*\mathbb{R}^3 \,\middle|\, \|\boldsymbol{q}\| = R,\ \boldsymbol{q} \cdot \boldsymbol{p} = 0\right\} \tag{3.71}$$

是 $T^*\mathbb{R}^3$ 的辛子流形, 可以验证它辛同胚于 T^*S^2. 该系统的哈密顿量

$$H = \frac{\|\boldsymbol{p}\|^2}{2m} + mgq_z, \tag{3.72}$$

其中 $(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p})$ 是 $T^*\mathbb{R}^3$ 的典范坐标, $\boldsymbol{q} = (q_x, q_y, q_z)$, $\boldsymbol{p} = (p_x, p_y, p_z)$ 分别为质点的位置与动量, 常数 $g > 0$ 为重力加速度.

由物理常识可知, 在此系统中, 质点**角动量**的 z-分量

$$L_z := q_x p_y - q_y p_x$$

是守恒量. 这是因为, 由泊松括号的运算性质以及(3.41)易知

$$\begin{aligned}
\{L_z, H\} &= \left\{q_x p_y - q_y p_x, \frac{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}{2m} + mgq_z\right\} \\
&= \frac{1}{2m}\left\{q_x p_y - q_y p_x, p_x^2 + p_y^2\right\} \\
&= \frac{1}{2m}\Big(\{q_x, p_x^2\}p_y - \{q_y, p_y^2\}p_x\Big) = \frac{1}{m}(p_x p_y - p_y p_x) = 0.
\end{aligned}$$

此外, 可直接验证 $\mathrm{d}L_z$ 与 $\mathrm{d}H$ 在 M 的某稠密开集上处处线性无关 (留给读者), 从而 $(M, \omega; H, L_z)$ 是 Liouville 可积系统.

下面取辛流形 $M \subseteq T^*\mathbb{R}^3$ 的一组合适的局部坐标, 并在该坐标下重新观察此系统. 取 S^2 的球坐标 (θ, φ) 如下

$$\begin{cases} q_x = R\sin\theta\cos\varphi \\ q_y = R\sin\theta\sin\varphi \\ q_z = -R\cos\theta \end{cases}, \tag{3.73}$$

这里的 θ 是 $\boldsymbol{q}$ 与 z 轴负方向的夹角. 我们希望将此 (θ, φ) 扩充为 M 的一组局部坐标 $(\theta, \varphi; p_\theta, p_\varphi)$, 使得典范辛结构 ω(在 M 上的限制) 形如

$$\omega = \mathrm{d}\theta \wedge \mathrm{d}p_\theta + \mathrm{d}\varphi \wedge \mathrm{d}p_\varphi,$$

从而有形如(3.41)的典范的泊松交换关系

$$\begin{aligned}
&\{\theta, \varphi\} = \{p_\theta, p_\varphi\} = \{\theta, p_\varphi\} = \{\varphi, p_\theta\} = 0, \\
&\{\theta, p_\theta\} = \{\varphi, p_\varphi\} = 1.
\end{aligned} \tag{3.74}$$

由题2.6可知, 这样的 p_θ, p_φ 应满足

$$(\mathrm{d}q_x, \mathrm{d}q_y, \mathrm{d}q_z)\begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix} = (\mathrm{d}\theta, \mathrm{d}\varphi)\begin{pmatrix} p_\theta \\ p_\varphi \end{pmatrix}$$

(即保持余切丛上的典范 1-形式(0.9)不变), 由此解得

$$\begin{aligned} p_\theta &= Rp_x\cos\theta\cos\varphi + Rp_y\cos\theta\sin\varphi + Rp_z\sin\theta, \\ p_\varphi &= -Rp_x\sin\theta\sin\varphi + Rp_y\sin\theta\cos\varphi. \end{aligned} \tag{3.75}$$

下面给出哈密顿量(3.72)在坐标 $(\theta,\varphi;p_\theta,p_\varphi)$ 下的表达式, 为此需要计算 $\|\boldsymbol{p}\|^2$. 注意(3.71)中的约束条件 $\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{p}=0$ 可改写为

$$p_z = -\frac{q_xp_x+q_yp_y}{q_z} = p_x\tan\theta\cos\varphi + p_y\tan\theta\sin\varphi, \tag{3.76}$$

将此式代入(3.75)消去 p_z, 整理得

$$\begin{pmatrix} p_\theta \\ p_\varphi \end{pmatrix} = R\begin{pmatrix} \frac{1}{\cos\theta} & \\ & \sin\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_x \\ p_y \end{pmatrix},$$

因此

$$\begin{pmatrix} p_x \\ p_y \end{pmatrix} = \frac{1}{R}\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_\theta\cos\theta \\ \frac{p_\varphi}{\sin\theta} \end{pmatrix}, \tag{3.77}$$

于是立刻得到

$$p_x^2+p_y^2 = \frac{1}{R^2}\left(p_\theta^2\cos^2\theta + \frac{p_\varphi^2}{\sin^2\theta}\right).$$

结合(3.76)(3.77)可得

$$p_z = \frac{\sin\theta}{R}p_\theta, \tag{3.78}$$

由此容易得到哈密顿量(3.72)的球坐标表示

$$H = \frac{1}{2mR^2}\left(p_\theta^2 + \frac{p_\varphi^2}{\sin^2\theta}\right) - mgR\cos\theta. \tag{3.79}$$

注意上述表达式不显含 φ, 从而立刻观察出 p_φ 是守恒量 (用(3.74)式直接验证 $\{p_\varphi,H\}=0$). 事实上, 由(3.75)可知

$$p_\varphi = q_xp_y - q_yp_x = L_z,$$

即 p_φ 恰为角动量的 z-分量! 并且在此坐标下, $\mathrm{d}H$ 与 $\mathrm{d}p_\varphi$ 的线性无关性是显见的. 至于坐标 p_θ, 由(3.78)得 $p_\theta = \frac{R}{\sin\theta}p_z$, 其物理意义留给读者思考.

注 3.61. 单摆的另一种著名的推广是双摆. 如下图所示, 竖直平面内的质量为 m_1, m_2 的质点被长度为 l_1, l_2 的两条轻杆连接, 其中一条轻杆的一端被固定在原点. 两质点在重力与轻杆弹力作用下运动.

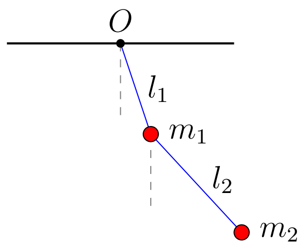
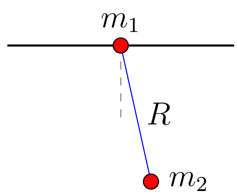


图: 双摆

可以证明双摆不是可积系统, 除了哈密顿量 (总能量) 之外没有第二个 (非平凡的) 守恒量. 该系统的演化行为对初始条件极端敏感, 缺乏可预测性, 即具有所谓的**混沌**现象. 这是与可积性截然相反的性质. 大致来说, 哈密顿系统的守恒量越少, 随时间演化的行为就越不规则, 越容易产生混沌. 混沌理论是动力系统中的艰深课题, 超出本笔记范围.

接下来考察双摆的一个变种, 这个系统是 Liouville 可积的.

例 3.62. 如下图, 长度为 R 的理想轻杆两端分别连接质量为 m_1, m_2 的质点, 其中质点 m_1 被束缚在光滑水平横杆上, 两质点在重力与轻杆弹力作用下在竖直平面内运动.



记 m_1, m_2 的位置分别为 $(q_1, 0)$ 与 (q_x, q_y), 相应的动量分别为 $(p_1, 0)$ 与 (p_x, p_y). 此系统的哈密顿量为

$$H = \frac{p_1^2}{2m_1} + \frac{p_x^2 + p_y^2}{2m_2} + m_2 g q_y. \tag{3.80}$$

我们先来写出该系统的相空间 M. 首先 M 是 $T^*(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2)$ 的辛子流形. 注意两质点的距离始终为 R, 并且在运动过程中两质点速度的沿轻杆分量

相等. 由这两个约束条件立刻得到

$$M=\left\{(q_1,p_1;\boldsymbol{q},\boldsymbol{p})\in T^*(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^2)\;\middle|\;\begin{array}{c}(q_x-q_1)^2+q_y^2=R^2,\\ \left(\frac{p_x}{m_2}-\frac{p_1}{m_1}\right)\sin\theta-\frac{p_y}{m_2}\cos\theta=0\end{array}\right\},\tag{3.81}$$

其中 θ 是两质点连线与 y 轴负方向的夹角, $\tan\theta=\frac{q_x-q_1}{q_y}$.

由物理常识不难发现, 该系统总动量的水平分量 $p:=p_1+p_x$ 是守恒量 (亦可直接验证 $\{p,H\}=0$), 并且可以 $\mathrm{d}p$ 与 $\mathrm{d}H$ 在 M 的某稠密开集上处处线性无关, 因此有 Liouivlle 可积系统 $(M,\omega;H,p)$.

接下来适当选取 M 的一组局部坐标, 并在此坐标下重新观察该系统. 记典范投影 $\pi\colon T^*(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^2)\to\mathbb{R}\times\mathbb{R}^2$, 则

$$\pi(M)=\left\{(q_1,\boldsymbol{q})\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^2\;\middle|\;(q_x-q_1)^2+q_y^2=R^2\right\}\cong\mathbb{R}\times S^1.$$

考虑两质点**质心**的水平位置

$$q_0:=\frac{m_1q_1+m_2q_x}{m_1+m_2}$$

以及两质点连线与 y 轴负方向夹角 θ, 则 (q_0,θ) 构成 $\pi(M)\cong\mathbb{R}\times S^1$ 的一组局部坐标:

$$\left\{\begin{aligned} q_1&=q_0-\tfrac{m_2}{m_1+m_2}R\sin\theta,\\ q_x&=q_0+\tfrac{m_1}{m_1+m_2}R\sin\theta,\\ q_y&=-R\cos\theta.\end{aligned}\right.\tag{3.82}$$

希望将此 (q_0,θ) 扩充为 M 的局部坐标 $(q_0,\theta;p_0,p_\theta)$, 使得 $T^*(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^2)$ 的典范辛结构 $\omega=\mathrm{d}q_1\wedge\mathrm{d}p_1+\mathrm{d}q_x\wedge\mathrm{d}p_x+\mathrm{d}q_y\wedge\mathrm{d}p_y$ 在 M 上的限制形如

$$\omega=\mathrm{d}q_0\wedge\mathrm{d}p_0+\mathrm{d}\theta\wedge\mathrm{d}p_\theta.$$

与例3.60的做法类似, 只需使得 p_0,p_θ 满足

$$(\mathrm{d}q_0,\mathrm{d}\theta)\begin{pmatrix}p_0\\p_\theta\end{pmatrix}=(\mathrm{d}q_1,\mathrm{d}q_x,\mathrm{d}q_y)\begin{pmatrix}p_1\\p_x\\p_y\end{pmatrix},$$

由此解得

$$\left\{\begin{aligned} p_0&=p_1+p_x,\\ p_\theta&=-\tfrac{m_2}{m_1+m_2}Rp_0\cos\theta+\tfrac{m_1}{m_1+m_2}Rp_x\cos\theta+Rp_y\sin\theta.\end{aligned}\right.\tag{3.83}$$

注意上述 p_0 恰为两质点总动量的水平分量. 易知上述 $(q_0,\theta;p_0,p_\theta)$ 是 M 的一组局部坐标, 并给出了 M 与余切丛 $T^*(\mathbb{R}\times S^1)$ 的辛同胚.

题 **3.63.** 哈密顿量(3.80)在局部坐标 $(q_0,\theta;p_0,p_\theta)$ 下的表达式为

$$H=\frac{p_0^2}{2(m_1+m_2)}+\frac{m_1+m_2}{m_2}\frac{p_\theta^2}{2(m_1+m_2\sin^2\theta)R^2}-m_2gR\cos\theta.$$

[提示: 由(3.81)中的约束条件以及(3.82)-(3.83), 可以暴力地将 p_1,p_x,p_y,q_y 用这组新的局部坐标来表示, 然后代入哈密顿量的表达式. 计算过程十分枯燥繁琐, 建议借助符号计算软件.]

上述表达式右边共三项, 第一项是系统质心的动能, 第三项是重力势能; 至于第二项, 可以认为是某种相对动能.

3.3.3 例子: Kepler 问题, 两体问题, 三体问题

我们继续考察 Liouville 可积系统的例子. 本小节的例子来自天体物理.

例 **3.64.**(中心势场中的粒子) 三维空间内的质量为 m 的质点在某个势场中运动, 势场关于原点旋转对称. 确切地说, 该系统的相空间

$$M=T^*(\mathbb{R}^3\setminus\{0\}),$$

哈密顿量

$$H=\frac{\boldsymbol{p}^2}{2m}+V(\|\boldsymbol{q}\|), \tag{3.84}$$

其中 $\boldsymbol{q},\boldsymbol{p}$ 分别为粒子的位置与动量, 函数 $V\colon(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ 为粒子的势能, 它只与粒子到中心的距离有关.

由物理常识不难发现, 质点**角动量**

$$\boldsymbol{L}:=\boldsymbol{q}\times\boldsymbol{p} \tag{3.85}$$

守恒 (其中 “$\times$” 为 $\mathbb{R}^3$ 中通常的叉乘), 从而其分量 L_x,L_y,L_z 都是守恒量. 我们也可直接验证此断言: 首先写出哈密顿量 H(3.84)生成的流如下

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{q}}{\mathrm{d}t}=\frac{\boldsymbol{p}}{m},\quad \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t}=-\frac{V'(\|\boldsymbol{q}\|)}{\|\boldsymbol{q}\|}\boldsymbol{q},$$

从而有

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{q}\times\boldsymbol{p}) = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{q}}{\mathrm{d}t}\times\boldsymbol{p}+\boldsymbol{q}\times\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t}\\ &= \frac{\boldsymbol{p}}{m}\times\boldsymbol{p}-\frac{V'(\|\boldsymbol{q}\|)}{\|\boldsymbol{q}\|}\boldsymbol{q}\times\boldsymbol{q} = \boldsymbol{0},\end{aligned}$$

因此角动量 $\boldsymbol{L}$ 的三个分量 L_x, L_y, L_z 都是守恒量.

注意该系统的相空间 $M = T^*(\mathbb{R}^3\setminus\{0\})$ 是 6 维辛流形, 由前文关于 Liouville 可积系统的讨论, M 上至多有 3 个 “相互独立” 的守恒量; 而现在至少已经有 H, L_x, L_y, L_z 这 4 个守恒量了. 问题出在哪里呢?

题 3.65. 直接验证 $T^*(\mathbb{R}^3)$ 上的如下关系式:

$$\begin{array}{l|l} L_x = q_yp_z - q_zp_y & \{L_x, L_y\} = L_z \\ L_y = q_zp_x - q_xp_z & \{L_y, L_z\} = L_x \\ L_z = q_xp_y - q_yp_x & \{L_z, L_x\} = L_y \end{array} \tag{3.86}$$

可见 L_x, L_y, L_z 彼此的泊松括号并不为零, 不符合 Liouville 可积系统的要求. 尽管如此, 该系统依然是 Liouville 可积的, 这是因为我们可以选取 H, L^2, L_z 作为三个独立的守恒量, 其中 $\boldsymbol{L}^2 := \boldsymbol{L}\cdot\boldsymbol{L} = L_x^2+L_y^2+L_z^2$.

题 3.66. 记号承上, 直接验证 $(M,\omega; H, \boldsymbol{L}^2, L_z)$ 是 Liouville 可积系统.

若在(3.84)中取

$$V(\|\boldsymbol{q}\|) := -\frac{k}{\|\boldsymbol{q}\|},$$

其中 k 为某常数, 则得到众所周知的 Kepler 问题: 行星 (即质点 m) 在恒星 (原点) 的万有引力作用下的运动. 此时, 势函数 V 的特殊性导致该系统具有更深层的守恒量, 可以验证向量

$$\boldsymbol{R} := \frac{\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{L}}{km} - \frac{\boldsymbol{q}}{\|\boldsymbol{q}\|} \tag{3.87}$$

(的三个分量) 是守恒量, 该向量称为 **Lenz-Runge 矢量**.

题 3.67. 验证 Lenz-Runge 矢量(3.87)(的三个分量) 是守恒量.

[提示: 哈密顿量 $H = \frac{p^2}{2m} - \frac{k}{\|q\|}$ 生成的流为

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{q}}{\mathrm{d}t} = \frac{\boldsymbol{p}}{m}, \quad \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t} = -\frac{k}{\|\boldsymbol{q}\|^3}\boldsymbol{q},$$

并注意角动量守恒 $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{0}$, 然后直接计算 $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{R}}{\mathrm{d}t}$ 即可, 留给读者.]

注意 $\boldsymbol{L}\times\boldsymbol{q}=\boldsymbol{0}$, 这表明质点始终在与角动量 $\boldsymbol{L}$ 垂直的平面上运动, 因此在求解此哈密顿系统时我们可以不妨角动量 $\boldsymbol{L}$ 沿 z 轴方向, 质点 m 在 xOy 平面内运动, 从而简化问题. 至于 Lenz-Runge 矢量 $\boldsymbol{R}$, 注意 $\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{L}=\boldsymbol{0}$, 从而 $\boldsymbol{R}$ 位于质点轨迹所在平面. 众所周知, Kepler 问题中质点运动轨迹是圆锥曲线; 事实上 $\boldsymbol{R}$ 与该圆锥曲线的形状有关. 限于篇幅, 本笔记不再更多介绍其具体细节.

在开普勒问题中, 我们实际上假定中心天体 (原点) 位置固定; 这是一种理想的近似, 适用于中心天体的质量远远大于另一个天体的情形. 比它更真实的情况是, 两个天体 (质点) 在相互的引力下运动, 彼此互相影响.

例 **3.68.**(两体问题) 三维空间中质量分别为 m_1, m_2 的两个质点在相互的万有引力作用下运动. 两质点的位置分别记作 $\boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{q}_2$, 动量分别记作 $\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2$. 该系统的相空间为

$$M=T^*((\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3)\setminus\Delta), \tag{3.88}$$

其中 $\Delta:=\{(\boldsymbol{q}_1,\boldsymbol{q}_2)\in\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3 \mid \boldsymbol{q}_1=\boldsymbol{q}_2\}$, 哈密顿量

$$H=\frac{\boldsymbol{p}_1^2}{2m_1}+\frac{\boldsymbol{p}_2^2}{2m_2}-\frac{k}{\|\boldsymbol{q}_1-\boldsymbol{q}_2\|}, \tag{3.89}$$

其中 k 为给定的常数.

由物理常识不难发现, 该系统**总动量**与**总角动量**

$$\boldsymbol{P}:=\boldsymbol{p}_1+\boldsymbol{p}_2, \quad \boldsymbol{L}:=\boldsymbol{q}_1\times\boldsymbol{p}_1+\boldsymbol{q}_2\times\boldsymbol{p}_2$$

的各分量都是守恒量 (留给读者验证); 再包括哈密顿量 H, 我们已找到该系统的至少 7 个守恒量. 与研究 Kepler 问题时遇到的情况类似, 这些守恒量的泊松括号并非两两交换, 于是我们需要重新适当选取. 一种自然的想法是, 先给相空间 M(3.88)重新选取一个 “好的” 局部坐标: 引入

$$\begin{aligned}\boldsymbol{q}_0 &:= \frac{m_1}{m_1+m_2}\boldsymbol{q}_1+\frac{m_2}{m_1+m_2}\boldsymbol{q}_2,\\ \boldsymbol{q}_{\mathrm{rel}} &:= \boldsymbol{q}_2-\boldsymbol{q}_1,\end{aligned} \tag{3.90}$$

它们分别为两质点的**质心位置**与**相对位置**. 易知这给出了微分同胚

$$(\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3)\setminus\Delta\cong\mathbb{R}^3\times(\mathbb{R}^3\setminus\{\boldsymbol{0}\})$$

$$(\boldsymbol{q}_1,\boldsymbol{q}_2)\mapsto(\boldsymbol{q}_0,\boldsymbol{q}_{\text{rel}}).$$

与之前研究球面摆 (例3.60) 与变种双摆 (例3.62) 时的方法类似, 希望将此 $(\boldsymbol{q}_0,\boldsymbol{q}_{\text{rel}})$ 扩充为相空间 M 的一组辛坐标 $(\boldsymbol{q}_0,\boldsymbol{q}_{\text{rel}};\boldsymbol{p}_0,\boldsymbol{p}_{\text{rel}})$, 使得 M 的典范辛结构 $\omega=\sum_{i=1}^3(q_{0,i}\wedge p_{0,i}+q_{\text{rel},i}\wedge p_{\text{rel},i})$. 如此 $\boldsymbol{p}_0,\boldsymbol{p}_{\text{rel}}$ 应满足

$$(\mathrm{d}\boldsymbol{q}_1^{\mathrm{T}},\mathrm{d}\boldsymbol{q}_2^{\mathrm{T}})\begin{pmatrix}\boldsymbol{p}_1\\ \boldsymbol{p}_2\end{pmatrix}=(\mathrm{d}\boldsymbol{q}_0^{\mathrm{T}},\mathrm{d}\boldsymbol{q}_{\text{rel}}^{\mathrm{T}})\begin{pmatrix}\boldsymbol{p}_0\\ \boldsymbol{p}_{\text{rel}}\end{pmatrix},$$

由此解得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{p}_0&=\boldsymbol{p}_1+\boldsymbol{p}_2,\\ \boldsymbol{p}_{\text{rel}}&=-\frac{m_2}{m_1+m_2}\boldsymbol{p}_1+\frac{m_1}{m_1+m_2}\boldsymbol{p}_2.\end{aligned}\tag{3.91}$$

注意 $\boldsymbol{p}_0$ 恰为两质点的总动量 $\boldsymbol{P}$, 而 $\boldsymbol{p}_{\text{rel}}$ 可以被认为是某种相对动量. 在坐标 $(\boldsymbol{q}_0,\boldsymbol{q}_{\text{rel}};\boldsymbol{p}_0,\boldsymbol{p}_{\text{rel}})$ 下, 哈密顿量 H(3.89)可改写为

$$\begin{aligned}H&=\frac{\boldsymbol{p}_1^2}{2m_1}+\frac{\boldsymbol{p}_2^2}{2m_2}-\frac{k}{\|\boldsymbol{q}_1-\boldsymbol{q}_2\|}\\ &=\frac{1}{2m_1}\left(-\boldsymbol{p}_{\text{rel}}+\frac{m_1}{m_1+m_2}\boldsymbol{p}_0\right)^2+\frac{1}{2m_2}\left(\boldsymbol{p}_{\text{rel}}+\frac{m_2}{m_1+m_2}\boldsymbol{p}_0\right)^2-\frac{k}{\|\boldsymbol{q}_{\text{rel}}\|}\\ &=\left(\frac{1}{2m_1}+\frac{1}{2m_2}\right)\boldsymbol{p}_{\text{rel}}^2+\frac{1}{2(m_1+m_2)}\boldsymbol{p}_0^2-\frac{k}{\|\boldsymbol{q}_{\text{rel}}\|}\\ &=:\frac{\boldsymbol{p}_0^2}{2M}+\frac{\boldsymbol{p}_{\text{rel}}^2}{2\mu}-\frac{k}{\|\boldsymbol{q}_{\text{rel}}\|},\end{aligned}\tag{3.92}$$

其中

$$M:=m_1+m_2,\qquad \mu:=\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}\tag{3.93}$$

分别称为两体系统**总质量**与**约化质量**; 哈密顿量在新坐标下的表达式(3.92)右边共有 3 项, 第一项是**质心动能**, 最后一项是**引力势能**, 而中间那项则是某种意义下的 “相对动能”. 由(3.92)式可以看出, 该哈密顿系统可以分解为两个 “子系统” 的 “直积”: 其中一个是质量为 M 的质点的自由运动, 其相空间为 $(\boldsymbol{q}_0,\boldsymbol{p}_0)$-空间, 另一个是质量为 μ 的质点的 Kepler 问题, 其相空间为 $(\boldsymbol{q}_{\text{rel}},\boldsymbol{p}_{\text{rel}})$-空间, 这两个子系统 “相互独立”.

题 **3.69.** 根据上文, 写出 “两个哈密顿系统的直积” 的定义, 并显式写出哈密顿系统(3.92)的 6 个两两交换的守恒量, 由此说明此哈密顿系统是 Liouville 可积的.

注 3.70. 如果是 3 个质点, 而不是 2 个质点, 在相互引力作用下的运动呢?

这便是著名的**三体问题**. 与前文提到的双摆 (注3.61) 类似, 可以证明三体系统不是 Liouville 可积的, 其哈密顿向量场生成的流 (随时间的演化) 具有**混沌现象**, 行为复杂, 对初值条件极端敏感. 不过, 三体系统的一种简化版本是 Liouville 可积的: 将两个质点的位置固定, 考虑第三个质点在前两个质点的引力场中的运动. 对其细节感兴趣的读者可见 Rudolph[33] 书中的 Example 11.1.4.

3.3.4 例子: Toda 链, Lax 算子表示

本小节以 **Toda 链**这个著名的 Liouville 可积系统为例, 介绍经典可积系统理论中的一些基本概念, 方法与技巧.

例 3.71.(Toda 链, [42]) 考虑位于一条直线上的 n 个质点, 其位置依次为 $q^1, ..., q^n$, 动量依次为 $p_1, ..., p_n$. 该系统的哈密顿量为

$$H = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} p_k^2 + \sum_{k=1}^{n-1} \mathrm{e}^{2(q^k - q^{k+1})}. \tag{3.94}$$

与之前所介绍的各种力学系统类似, 该系统的相空间自然取为

$$T^*\mathbb{R}^n = \{(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}) \,|\, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^n\},$$

并配以余切丛的典范辛结构, 相应的泊松括号为(3.41).

该系统可以用来描述含有 n 个原子的直线形分子的运动: 相邻两个原子 q^k, q^{k+1} 的相互作用势能为 $\mathrm{e}^{2(q^k - q^{k+1})}$, 而不相邻的原子之间的相互作用被忽略不计. 容易验证沿哈密顿量 H (3.94)的演化方程为

$$\begin{aligned} \dot{q}^k &= p_k, \\ \dot{p}_\ell &= 2\left(\mathrm{e}^{2(q^{\ell-1} - q^\ell)} - \mathrm{e}^{2(q^\ell - q^{\ell+1})}\right), \\ \dot{p}_1 &= -2\mathrm{e}^{2(q^1 - q^2)}, \qquad \dot{p}_n = 2\mathrm{e}^{2(q^{n-1} - q^n)}, \end{aligned} \tag{3.95}$$

其中 $1 \le k \le n$, $2 \le \ell \le n-1$.

由物理常识容易发现, 除了哈密顿量 H, 该系统的总动量 $p := \sum_{i=1}^n p_i$ 是守恒量. 接下来一系列技巧性的构造将给出此系统的更多守恒量.

题 3.72. 对于 $1 \le k \le n-1$ 以及 $1 \le \ell \le n$, 引入函数

$$a_k := \mathrm{e}^{q^k - q^{k+1}}, \qquad b_\ell := p_\ell. \tag{3.96}$$

1. 验证如下关系式:

$$\{a_k, a_\ell\} = \{b_k, b_\ell\} = 0, \qquad \{a_k, b_\ell\} = a_k(\delta_{k\ell} - \delta_{k+1,\ell}), \tag{3.97}$$

   其中 $\{,\}$ 为 $T^*\mathbb{R}^n$ 的典范泊松括号(3.41);

2. 验证: 函数 a_k, b_ℓ 沿哈密顿量 H 的演化方程为

$$\begin{aligned} \dot{a}_k &= a_k(b_k - b_{k+1}), \\ \dot{b}_\ell &= 2(a_{\ell-1}^2 - a_\ell^2), \\ \dot{b}_1 &= -2a_1^2, \qquad \dot{b}_n = 2a_{n-1}^2, \end{aligned} \tag{3.98}$$

   [提示: 由(3.95)改写而来.]

上述新变量 a_k, b_ℓ 最初由 Flaschka 引入 [18], 故称为 Toda 链的 **Flaschka 坐标**. 而更有意思的是:

题 3.73. 记号承上. 引入 $n \times n$ 矩阵

$$\begin{aligned} L &:= \begin{pmatrix} b_1 & a_1 & & \\ a_1 & b_2 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & a_{n-1} \\ & & a_{n-1} & b_n \end{pmatrix}, \\ M &:= \begin{pmatrix} 0 & -a_1 & & \\ a_1 & 0 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -a_{n-1} \\ & & a_{n-1} & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{3.99}$$

验证: 演化方程(3.98)等价于

$$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t} = [M, L]. \tag{3.100}$$

.

在可积系统理论中,上述 L 称为 Toda 链(3.98)的 **Lax 算子**, 二元组 (L, M) 称为 **Lax 对**; 形如(3.100)的方程也常被叫做 **Lax 方程**. 根据某些经验, 若演化方程能改写成 Lax 方程的样子, 那我们就可以轻易找出更多的守恒量, 从而该系统某种意义下是可积的. 比如说:

性质 3.74. 记号承上, 对于 $0 \leq p \leq n-1$, 记

$$H_p := \frac{1}{p+1}\mathrm{tr}\left(L^{p+1}\right), \tag{3.101}$$

则 $H_p\,(0 \leq p \leq n-1)$ 都是系统(3.100)的守恒量.

证明. 我们回忆, 矩阵的**迹**具有如下性质: 对任意方阵 A, B, C, 都有

$$\begin{aligned}
\mathrm{tr}(AB) &= \mathrm{tr}(BA),\\
\mathrm{tr}([A,B]C) &= \mathrm{tr}(A[B,C]).
\end{aligned}$$

注意用此性质, 我们有

$$\frac{\mathrm{d}H_p}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{p+1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathrm{tr}\left(L^{p+1}\right) = \mathrm{tr}\left(L^p\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t}\right) = \mathrm{tr}\left(L^p[M,L]\right) = \mathrm{tr}\left(M[L,L^p]\right) = 0,$$

从而得证. □

例如, 容易验证

$$\begin{aligned}
H_0 &= \mathrm{tr}(L) = \sum_{k=1}^{n} b_k,\\
H_1 &= \frac{1}{2}\mathrm{tr}\left(L^2\right) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} b_k^2 + \sum_{k=1}^{n-1} a_k^2,
\end{aligned}$$

分别是系统的总动量与总能量 (哈密顿量)(3.94). 至于之后的 $H_2, H_3 \ldots$ 有什么物理含义呢? 笔者尚不知晓.

注 **3.75.** 记号承上, 记 $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ 是 Lax 算子 L 的 n 个特征值, 则有

$$H_p = \frac{1}{p+1}\mathrm{tr}\left(L^{p+1}\right) = \frac{1}{p+1}\sum_{k=1}^{n}\lambda_k^{p+1}. \tag{3.102}$$

这表明 $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ 是守恒量. 换言之, Lax 算子的谱 (特征值) 在随时间演化过程中不变.

题 **3.76.** 设 $t \mapsto (L(t), M(t))$ 是 Lax 方程(3.100)的一个解, 其初值为 $(L(0), M(0))$. 证明: 存在 (定义在 $t=0$ 附近的) 矩阵值函数 $g(t)$, 使得满足初值条件 $g(0)=I$, 并且

$$\begin{cases} L(t) = g(t)L(0)g^{-1}(t), \\ M(t) = \frac{\mathrm{d}g(t)}{\mathrm{d}t} g^{-1}(t). \end{cases} \tag{3.103}$$

证明. 注意 $M(t)$ 已经给定. 直接取 $g(t)$ 为线性系统

$$\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t}(t) = M(t)g(t)$$

的满足初值 $g(0)=I$ 的解, 然后直接验证 $\tilde{L}(t) := g(t)L(0)g^{-1}(t)$ 满足 Lax 方程(3.100), 并且初值 $\tilde{L}(0) = L(0)$, 其细节留给读者. 从而由解的唯一性可知 $\tilde{L}(t) = L(t)$, 得证. □

注意此题中的 $g(t)$ 是 $L(t)$ 与 $L(0)$ 的相似过渡矩阵, 这表明矩阵 $L(t)$ 始终其初值 $L(0)$ 相似, 特别地, 我们再次证明了 L 的特征值是守恒量. 在可积系统理论中, $t \mapsto L(t) = g(t)L(0)g^{-1}(t)$ 称为 Lax 算子的**等谱形变**.

注 **3.77.** 在相空间 $T^*\mathbb{R}^n$ 的一般点 (某稠密开集内的点) 处, Lax 算子 L 的 n 个特征值 $\lambda_1, ..., \lambda_n$ 两两互异, 此时有

$$\mathrm{d}H_p = \mathrm{tr}\,(L^p \mathrm{d}L) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^p \mathrm{d}\lambda_k.$$

于是由众所周知的 Vandermonde 行列式易知 $\mathrm{d}H_0, \mathrm{d}H_1, ..., \mathrm{d}H_{n-1}$ 线性无关.

现在我们已经找到了 Toda 链(3.95)的 n 个独立的守恒量 $H_0, ..., H_{n-1}$. 断言这 n 个守恒量使得 Toda 链是 Liouville 可积的. 为证明此, 只需要验证它们两两交换, 即 $\{H_p, H_q\} = 0$ 对任意 $0 \le k, \ell \le n-1$ 成立. 等价地, 只需要验证沿哈密顿向量场 X_{H_p} 的流两两交换. 下面我们用可积系统理论中处理 Lax 方程的独特技巧来显式写出哈密顿向量场生成的流 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t^p} := X_{H_p}$ $(0 \le p \le n-1)$, 进而直接验证流的交换性 $[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t^p}, \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t^q}] = 0$.

引入如下记号: 对于任意的 n 阶方阵 $\boldsymbol{X} = (X_{ij}) \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$, 有

$$\boldsymbol{X} = \sum_{i,j=1}^{n} X_{ij} \boldsymbol{E}_{ij},$$

其中 $\boldsymbol{E}_{ij}$ 是 n 阶方阵, 其第 i 行 j 列的矩阵元为 1, 其余所有的矩阵元都为 0. 考虑矩阵 $\boldsymbol{X}$ 的如下分解:

$$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{X}_u + \boldsymbol{X}_d + \boldsymbol{X}_l,$$

其中

$$\boldsymbol{X}_u := \sum_{i<j} X_{ij}\boldsymbol{E}_{ij}, \quad \boldsymbol{X}_d := \sum_{i=1}^{n} X_{ii}\boldsymbol{E}_{ii}, \quad \boldsymbol{X}_l := \sum_{i>j} X_{ij}\boldsymbol{E}_{ij}, \tag{3.104}$$

分别为矩阵 $\boldsymbol{X}$ 的 **(严格) 上三角部分**, **对角部分**与 **(严格) 下三角部分**.

对于 n 阶方阵 $\boldsymbol{X} \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$, 在本小节临时定义

$$\boldsymbol{X}_+ := \boldsymbol{X}_l - \boldsymbol{X}_l^{\mathrm{T}}, \qquad \boldsymbol{X}_- := \boldsymbol{X}_u + \boldsymbol{X}_l^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{X}_d, \tag{3.105}$$

分别 (临时地) 称为 $\boldsymbol{X}$ 的**正部**与**负部**. 容易验证 $\boldsymbol{X}_+$ 是反对称的, 而 $\boldsymbol{X}_-$ 是上三角的.

题 3.78. 记号承上. 验证: $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{X}_+ + \boldsymbol{X}_-$ 诱导线性空间的直和分解

$$\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R}) = \mathfrak{o}(n) \oplus \mathfrak{t}(n,\mathbb{R}), \tag{3.106}$$

其中 $\mathfrak{o}(n)$ 为 n 阶反对称实方阵之全体 (正交李代数), $\mathfrak{t}(n,\mathbb{R})$ 为 n 阶上三角实方阵之全体 (上三角李代数), 注意它们都是 $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$ 的李子代数.

例如, 对于(3.99)给出的 Lax 对 (L,M), 有 $M = L_+$.

定理 3.79. *记号承上, 则对任意 $0 \le p \le n-1$, 守恒量 H_p 生成的流 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t^p} = X_{H_p}$ 满足 Lax 方程*

$$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t^p} = [(L^p)_+, L]\,. \tag{3.107}$$

特别地, 当 $p=1$ 时上述方程即为(3.100).

在证明之前, 先来观察一下这个方程. 注意 L 是对称矩阵, 并且只在主对角线与两条副对角线上才可能有非零元 (即, 矩阵元 $L_{ij} \neq 0$ 仅当 $|i-j| \le 1$). 而(3.107)等号右边的那个矩阵显然也具有此性质吗? 这似乎不太显然.

一方面, 由正部 $()_+$ 的定义知 $(L^p)_+$ 是反对称矩阵, 又因为 L 是对称矩阵, 从而直接验证可知 $[(L^p)_+, L]$ 是对称矩阵. 另一方面, 注意 $L^p = (L^p)_+ +$

$(L^p)_-$, 而 $[L^p, L] = 0$, 从而

$$[(L^p)_+, L] = -[(L^p)_-, L].$$

注意 $(L^p)_-$ 是上三角阵, 并且当 $i > j+1$ 时 $L_{ij} = 0$, 从而矩阵乘法直接验证可知当 $i > j+1$ 时 $[(L^p)_-, L]$ 的 (i,j) 分量也为 0. 综上所述, $[(L^p)_+, L]$ 是对称矩阵, 并且其 (i,j) 分量非零 $\Rightarrow |i-j| \le 1$.

定理3.79的证明. 首先, 我们有

$$\begin{aligned}
&\mathrm{d}H_p = \mathrm{tr}\left(L^p \mathrm{d}L\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} \mathrm{tr}\left(L^p \boldsymbol{E}_{k,k+1}\right) \mathrm{d}a_k + \sum_{\ell=1}^{n} \mathrm{tr}\left(L^p \boldsymbol{E}_{\ell\ell}\right) \mathrm{d}b_\ell + \sum_{k=1}^{n-1} \mathrm{tr}\left(L^p \boldsymbol{E}_{k+1,k}\right) \mathrm{d}a_k,
\end{aligned}$$

从而得到

$$\begin{aligned}
\frac{\partial H_p}{\partial a_k} &= 2\mathrm{tr}\left(L^p \boldsymbol{E}_{k,k+1}\right), \\
\frac{\partial H_p}{\partial b_\ell} &= \mathrm{tr}\left(L^p \boldsymbol{E}_{\ell\ell}\right).
\end{aligned} \tag{3.108}$$

为验证(3.107)式, 应该逐一验证两边的各个矩阵元相等. 而由之前讨论, 只需要验证等号两边的 $(k+1,k)$-分量与 (ℓ,ℓ)-分量即可.

注意到, 对于方阵 $\boldsymbol{X} = (X_{ij})$, 其矩阵元 X_{ij} 可表示为

$$X_{ij} = \mathrm{tr}\left(\boldsymbol{E}_{ji}\boldsymbol{X}\right),$$

于是对于 $1 \le k \le n-1$, (3.107)右边的 $(k+1,k)$-分量为

$$\begin{aligned}
[(L^p)_+, L]_{k+1,k} &= \mathrm{tr}\left(\boldsymbol{E}_{k,k+1}[(L^p)_+, L]\right) = \mathrm{tr}\left([L, \boldsymbol{E}_{k,k+1}](L^p)_+\right) \\
&= \mathrm{tr}\left([L, \boldsymbol{E}_{k,k+1}]_d (L^p)_+ + [L, \boldsymbol{E}_{k,k+1}]_u (L^p)_+\right) \\
&= \mathrm{tr}\left([L, \boldsymbol{E}_{k,k+1}]_u L^p\right),
\end{aligned} \tag{3.109}$$

其中 $()_d$ 与 $()_u$ 的定义见(3.104). 特别注意上式最后一个等号成立的原因: $[L, \boldsymbol{E}_{k,k+1}]_d$ 是对角阵, 且 $(L^p)_+$ 是反对称阵, 所以 $\mathrm{tr}([L, \boldsymbol{E}_{k,k+1}]_d (L^p)_+) = 0$; $(L^p)_-$ 是上三角阵, 而 $[L, \boldsymbol{E}_{k,k+1}]_u$ 严格上三角, 因此 $\mathrm{tr}([L, \boldsymbol{E}_{k,k+1}]_u (L^p)_-) = 0$. 接下来, 再注意到

$$\mathrm{tr}\left([L, \boldsymbol{E}_{k,k+1}]L^p\right) = \mathrm{tr}\left([L^p, L]\boldsymbol{E}_{k,k+1}\right) = 0,$$

并回忆(3.97)(3.108), 继续化简整理(3.109)如下:

$$
\begin{aligned}
&[(L^p)_+, L]_{k+1,k} = \operatorname{tr}\left([L, \boldsymbol{E}_{k,k+1}]_u L^p\right) \\
=& -\operatorname{tr}\left([L, \boldsymbol{E}_{k,k+1}]_d L^p\right) \\
=& a_k \operatorname{tr}\left(L^p(\boldsymbol{E}_{kk} - \boldsymbol{E}_{k+1,k+1})\right) \\
=& a_k \left(\frac{\partial H_p}{\partial b_k} - \frac{\partial H_p}{\partial b_{k+1}}\right) \\
=& \{a_k, H_p\} = \frac{\mathrm{d}a_k}{\mathrm{d}t^p} = \left(\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t^p}\right)_{k+1,k},
\end{aligned}
\tag{3.110}
$$

这就验证了(3.107)两边的 $(k+1,k)$-分量相等.

用类似的矩阵技巧也可以验证, 对于 $1 \le \ell \le n$, 下述等式成立:

$$
[(L^p)_+, L]_{\ell\ell} = 2\operatorname{tr}\left([L, \boldsymbol{E}_{\ell\ell}]_u L^p\right),
$$

进而验证 (3.107)两边的 (ℓ,ℓ)-分量相等, 其细节留给读者练习. 定理证毕. □

一般来说, 若一系列守恒量所生成的流能同时写成 Lax 方程(3.107)的样子, 则可按某种标准套路来验证这些流两两交换. 例如, 对于本节所介绍的 Toda 方程, 我们有:

性质 3.80. *Toda 方程簇(3.107)的流 $\frac{\partial}{\partial t^p}$, $0 \le p \le n-1$ 两两交换. 具体地说, 对任意 $0 \le p, q \le n-1$ 都有*

$$
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t^p}\left(\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t^q}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t^q}\left(\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t^p}\right). \tag{3.111}
$$

证明. 首先容易验证对任意非负整数 $s \ge 0$, 以及 $0 \le p \le n-1$ 都有

$$
\frac{\mathrm{d}(L^s)}{\mathrm{d}t^p} = [(L^p)_+, L^s],
$$

并注意投影算子 $()_+ \colon \mathfrak{gl}(n,\mathbb{R}) \to \mathfrak{o}(n)$, $\boldsymbol{X} \mapsto \boldsymbol{X}_+$ 作为线性算子, 显然与导子 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t^p}$ 交换, 因此有

$$
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t^p}\left(\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t^q}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t^p}[(L^q)_+, L]
$$

$$
\begin{aligned}
&= \left[\left(\frac{\mathrm{d}(L^q)}{\mathrm{d}t^p}\right)_+, L\right] + \left[(L^q)_+, \frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t^p}\right] \\
&= \left[[(L^p)_+, L^q]_+, L\right] + [(L^q)_+, [(L^p)_+, L]] \qquad (3.112)
\end{aligned}
$$

特别注意(3.106)中所述, $\mathfrak{o}(n), \mathfrak{t}(n,\mathbb{R})$ 都是李子代数, 从而容易验证 (请读者仔细检查, 并体会其巧妙之处)

$$
\begin{aligned}
[(L^p)_+, L^q]_+ &= [(L^p)_+, (L^q)_+]_+ + [(L^p)_+, (L^q)_-]_+ \\
&= [(L^p)_+, (L^q)_+] + [L^p, (L^q)_-]_+ \\
&= [(L^p)_+, (L^q)_+] - [L^p, (L^q)_+]_+ ,
\end{aligned}
$$

从而(3.112)可继续变形如下:

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t^p}\left(\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t^q}\right) &= \left[[(L^p)_+, L^q]_+, L\right] + [(L^q)_+, [(L^p)_+, L]] \\
&= [[(L^p)_+, (L^q)_+], L] - \left[[L^p, (L^q)_+]_+, L\right] \\
&\quad + [(L^q)_+, [(L^p)_+, L]] \\
&= \left[[(L^q)_+, L^p]_+, L\right] + [(L^p)_+, [(L^q)_+, L]] , \qquad (3.113)
\end{aligned}
$$

其中最后一步用到了矩阵交换子的 Jacobi 恒等式. 对比(3.112)与(3.113)两式的最右边, 可知(3.111)成立, 证毕. □

现在, 我们离最终结果只有一步之遥:

定理 3.81. *记号承上, 则 $H_0, H_1, ..., H_{n-1}$ 这 n 个守恒量使得 Toda 链(3.95)是 Liouville 可积系统.*

证明. 性质3.80表明, 对任意 $0 \leq p, q \leq n-1$ 都成立

$$
[X_{H_p}, X_{H_q}](a_k) = [X_{H_p}, X_{H_q}](b_\ell) = 0,
$$

其中 $1 \leq k \leq n-1, 1 \leq \ell \leq n$. 但这还并不能推出 $[X_{H_p}, X_{H_q}] = 0$.

引入相空间 $T^*\mathbb{R}^n$ 上的函数

$$
a_n := \frac{q^1 + q^1 + \cdots q^n}{n}
$$

(物理含义: 这 n 个质点的质心位置), 则容易验证 $\mathrm{d}a_1, ..., \mathrm{d}a_n; \mathrm{d}b_1, ..., \mathrm{d}b_n$ 处处线性无关, 构成 $T^*\mathbb{R}^n$ 的余切丛的一族标架. 于是, 如果还能证明

$$[X_{H_p}, X_{H_q}](a_n) = 0, \tag{3.114}$$

那就能够得到 $[X_{H_p}, X_{H_q}] = 0$, 进而完成此定理的证明.

下面通过对 $p+q$ 归纳来证明(3.114). 初始情况 $p = q = 0$ 是平凡的. 对于 $p \geq 1$, 利用(3.108)可得

$$\begin{aligned}\{a_n, H_p\} &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial H_p}{\partial b_k} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\mathrm{tr}\left(L^p \boldsymbol{E}_{kk}\right)\\ &= \frac{1}{n}\mathrm{tr}(L^p) = \frac{p}{n}H_{p-1},\end{aligned}$$

而 $\{a_n, H_0\} = 1$. 因此当 $p+q \geq 1$ 时, 不妨 p, q 都不为零 (p, q 当中存在 0 的情形类似), 由泊松括号与哈密顿向量场的有关公式可得

$$\begin{aligned}[X_{H_p}, X_{H_q}](a_n) &= \{\{H_p, H_q\}, a_n\}\\ &= \{\{H_p, a_n\}, H_q\} + \{H_p, \{H_q, a_n\}\}\\ &= -\frac{p}{n}\{H_{p-1}, H_q\} - \frac{q}{n}\{H_p, H_{q-1}\} = 0,\end{aligned}$$

其中最后一步用到了归纳假设. 定理得证. □

注 3.82. 本节所介绍的关于 Lax 算子的一系列技巧, 包括一连串守恒量的构造, 沿这些守恒量的流的显式表达, 以及验证这些流之间的交换性. 这些其实是可积系统理论中的标准套路, 最早被用于研究浅水波的 KdV 方程

$$u_t = uu_x + u_{xxx}. \tag{3.115}$$

上述方程是关于未知函数 $u = u(x,t)$ 的非线性偏微分方程. Lax 最先发现上述 KdV 方程(3.115)等价于

$$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t} = [M, L],$$

其中微分算子

$$L := \partial_x^2 + u, \quad M := \partial_x^3 + \frac{3}{2}u\partial_x + \frac{3}{4}u_x.$$

KdV 方程描述了一元函数 $u(x)$ 随时间 t 的演化. 函数 $u(x)$ 所在的某个无穷维空间当中也有泊松结构 (无穷维泊松流形), 使得 KdV 方程是 (无穷维) 哈密顿系统. 更进一步, 也能通过 Lax 算子来构造 KdV 方程的一连串 (无穷多个) 两两交换的守恒量, 出这些守恒量所生成的流也能用 Lax 算子来显式表达. 上述无穷维哈密顿可积系统的内容超出本讲义的范围, 对此感兴趣的读者可以翻阅 [30] 或 [15].

3.3.5 Adler-Kostant-Symes 构造

在上一小节, 我们将 Toda 链的演化方程(3.95)改写为 Lax 形式(3.100), 进而技巧性地构造出一系列两两交换的守恒量. 而本小节将给出这种 Lax 形式在李-泊松流形上的一般构造.

给定 (有限维 $\mathbb{R}$-) 李代数 $\mathfrak{g}$, 则 $\mathfrak{g}^*$ 上有典范的**李-泊松结构** (例3.45, 以及(3.60)式), 并且对于函数 $H \in C^\infty(\mathfrak{g}^*)$, 我们知道 $\mathfrak{g}^*$ 上的由 H 生成的哈密顿演化方程为

$$\frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}t} = \mathrm{ad}^*_{\mathrm{d}_\xi H}\,\xi,$$

详见前文(3.61). 而对偶空间 $\mathfrak{g}^*$ 总是同构于 $\mathfrak{g}$, 若通过 "适当的" 方式把 $\mathfrak{g}^*$ 上的上述演化方程搬运到 $\mathfrak{g}$ 上, 我们就能发现 Lax 方程.

定义 3.83. 李代数 $\mathfrak{g}$ 上的对称双线性型 $\kappa\colon \mathfrak{g}\times\mathfrak{g}\to\mathbb{R}$ 称为 ***Killing* 型**, 如果对任意 $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$ 都成立

$$\kappa([X,Y],Z) = \kappa(X,[Y,Z]). \tag{3.116}$$

对一般的有限维李代数 $\mathfrak{g}$, 容易验证

$$\kappa(X,Y) := \mathrm{tr}(\mathrm{ad}_X\,\mathrm{ad}_Y)$$

总是 Killing 型, 其中 $\mathrm{ad}_X\colon Y\mapsto[X,Y]$ 是 $\mathfrak{g}$ 上的线性变换. 而对于矩阵李代数 (即 $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$ 的子代数, 其中元素为 $n\times n$ 矩阵), 其 Killing 型可以取为

$$\kappa(X,Y) := \mathrm{tr}(XY).$$

李代数 $\mathfrak{g}$ 上的任何非退化对称双线性型都能自然诱导 $\mathfrak{g}$ 与 $\mathfrak{g}^*$ 的线性同

构; 然而, 我们目前更关心非退化 Killing 型 κ 所诱导的同构

$$\begin{aligned} \iota_\kappa \colon \mathfrak{g} &\to \mathfrak{g}^* \\ X &\mapsto (Y \mapsto \kappa(X,Y)). \end{aligned} \tag{3.117}$$

题 3.84. 设有限维 $\mathbb{R}$-李代数 $\mathfrak{g}$ 具有非退化的 Killing 型 κ, 给定 $H \in C^\infty(\mathfrak{g}^*)$. 如果 $\mathfrak{g}^*$ 上的曲线 $t \mapsto \xi(t) \in \mathfrak{g}^*$ 满足哈密顿演化方程(3.61), 则 $L(t) := \iota_\kappa^{-1}(\xi(t)) \in \mathfrak{g}$ 满足 Lax 方程

$$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t} = [M, L],$$

其中 $M := \mathrm{d}_\xi H \in \mathfrak{g}$. 换言之, 同构 ι_κ 将 $\mathfrak{g}^*$ 上的哈密顿演化方程改写为 $\mathfrak{g}$ 上的上述 Lax 方程.

证明. 对任意 $X \in \mathfrak{g}$, 由相关定义按部就班验证如下:

$$\begin{aligned} \kappa\left(\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t}, X\right) &= \left\langle \frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}t}, X \right\rangle = \left\langle \mathrm{ad}^*_{\mathrm{d}_\xi H}\, \xi, X \right\rangle \\ = -\left\langle \xi, [\mathrm{d}_\xi H, X] \right\rangle &= -\kappa\left(L, [\mathrm{d}_\xi H, X]\right) = \kappa\left([\mathrm{d}_\xi H, L], X\right), \end{aligned}$$

注意最后一个等号依赖 Killing 型的性质. 于是由 X 的任意性与 κ 的非退化性立刻得到 $\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t} = [\mathrm{d}_\xi H, L]$, 得证. □

上述只是一种简化情形, 还不足以推广上一小节的 Toda 链. 现在我们来考虑更一般的情况. 给定李代数 $\mathfrak{g}$ 的子代数直和分解

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_+ \oplus \mathfrak{g}_-, \tag{3.118}$$

即, 上式右边是线性空间的直和, 并且 $\mathfrak{g}_+, \mathfrak{g}_-$ 都是 $\mathfrak{g}$ 的李子代数. 对于 $X \in \mathfrak{g}$, 记 X_+, X_- 分别为 X 在 $\mathfrak{g}_+, \mathfrak{g}_-$ 的分量, 分别称为 X 的正部与负部. 子空间直和分解自然给出对偶空间的同构

$$\mathfrak{g}^* \cong \mathfrak{g}_+^* \oplus \mathfrak{g}_-^*, \tag{3.119}$$

在此意义下, $\mathfrak{g}_+^*$ 与 $\mathfrak{g}_-^*$ 自然被视为 $\mathfrak{g}^*$ 的子空间.

对于一般的泊松流形 (M,Π), 函数 $H \in C^\infty(M)$ 称为 **Casimir 函数**, 如果相应的哈密顿向量场 $X_H = 0$. 特别地, 对于李-泊松流形 $\mathfrak{g}^*$ 的情形, $H \in C^\infty(\mathfrak{g}^*)$ 是 Casimir 函数当且仅当 $\mathrm{ad}^*_{\mathrm{d}_\xi H}\xi = 0$ 对任意 $\xi \in \mathfrak{g}^*$ 都成立.

李-泊松流形 $\mathfrak{g}^*$ 上的 Casimir 函数所生成的哈密顿流总是平凡的, 但将 Casimir 函数限制在子空间 $\mathfrak{g}_+^*$ 上, 就会出现不平凡的结果.

定理 3.85. *(Adler-Kostant-Symes 构造,[2, 24, 40]).*
对于有限维 $\mathbb{R}$-李代数 $\mathfrak{g}$ 的子代数直和分解 $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_+ \oplus \mathfrak{g}_-$, 并注意对偶空间的同构(3.119), 则

1. 对任意函数 $H \in C^\infty(\mathfrak{g}^*)$, 记 $H_+ := H|_{\mathfrak{g}_+^*} \in C^\infty(\mathfrak{g}_+^*)$ 为 H 在子空间 $\mathfrak{g}_+^*$ 上的限制. 注意 $\mathfrak{g}_+$ 的李代数结构使得 $\mathfrak{g}_+^*$ 也具有李-泊松结构. 则在 $\mathfrak{g}_+^*$ 中, 函数 H_+ 所生成的哈密顿演化方程为

$$\frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}t} = \mathrm{ad}^*_{(\mathrm{d}_\xi H)_+}\xi.$$

2. 若 $\mathfrak{g}$ 具有非退化 *Killing* 型 κ, 记 $\iota_\kappa\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}^*$ 为 κ 诱导的线性同构. 若 $\mathfrak{g}_+^*$ 中的曲线 $t \mapsto \xi(t)$ 满足 *(1)* 中的哈密顿演化方程, 则 $L(t) := \iota_\kappa^{-1}(\xi(t)) \in \mathfrak{g}_+$ 满足 *Lax* 方程

$$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t} = [(\mathrm{d}_\xi H)_+, L]. \tag{3.120}$$

3. 对于 $\mathfrak{g}^*$ 上的 *Casimir* 函数 H, K, 总成立

$$\{H_+, K_+\} = 0, \tag{3.121}$$

其中 H_+, K_+ 分别是 H, K 在子空间 $\mathfrak{g}_+^*$ 上的限制, 而上式的 $\{,\}$ 是 $\mathfrak{g}_+^*$ 上的李-泊松括号.

证明. 对任意 $H \in C^\infty(\mathfrak{g}^*)$, H_+ 所生成的哈密顿演化方程为 $\frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}t} = \mathrm{ad}^*_{\mathrm{d}^+_\xi H_+}\xi$, 其中 d^+ 为子流形 $\mathfrak{g}_+^*$ 上的外微分算子, d^+_ξ 的含义也类似. 容易验证对任意

$\xi \in \mathfrak{g}_+^*$ 都有如下交换图

$$\begin{tikzcd} C^\infty(\mathfrak{g}^*) \arrow[r, "()_+"] \arrow[d, "\mathrm{d}_\xi"'] & C^\infty(\mathfrak{g}_+^*) \arrow[d, "\mathrm{d}_\xi^+"] \\ \mathfrak{g} \arrow[r, "()_+"] & \mathfrak{g}_+ \end{tikzcd}$$

换言之, 有 $\mathrm{d}_\xi^+ H_+ = (\mathrm{d}_\xi H)_+$, 从而 (1) 得证. 而 (2) 与题3.84完全类似, 留给读者. 下证 (3). 对于 $\mathfrak{g}^*$ 上的 Casimir 函数 H, K, 由 Casimir 函数的定义容易验证, 对任意 $X \in \mathfrak{g}$ 以及 $\xi \in \mathfrak{g}^*$ 都有

$$\langle \xi, [X, \mathrm{d}_\xi H] \rangle = \langle \xi, [X, \mathrm{d}_\xi K] \rangle = 0,$$

细节留给读者. 利用上述等式, 并注意 $\mathrm{d}_\xi H = (\mathrm{d}_\xi H)_+ + (\mathrm{d}_\xi H)_-$, 从而对任意 $\xi \in \mathfrak{g}_+^*$, 成立

$$\begin{aligned} \{H_+, K_+\}(\xi) &= \left\langle \xi, [\mathrm{d}_\xi^+ H_+, \mathrm{d}_\xi^+ K_+] \right\rangle = \langle \xi, [(\mathrm{d}_\xi H)_+, (\mathrm{d}_\xi K)_+] \rangle \\ &= \langle \xi, [\mathrm{d}_\xi H, \mathrm{d}_\xi K] \rangle - \langle \xi, [(\mathrm{d}_\xi H)_-, \mathrm{d}_\xi K] \rangle \\ &\quad - \langle \xi, [\mathrm{d}_\xi H, (\mathrm{d}_\xi K)_-] \rangle + \langle \xi, [(\mathrm{d}_\xi H)_-, (\mathrm{d}_\xi K)_-] \rangle \\ &= \langle \xi, [(\mathrm{d}_\xi H)_-, (\mathrm{d}_\xi K)_-] \rangle \\ &= 0, \end{aligned}$$

其中最后一个等号是因为 $\mathfrak{g}_-^*$ 也是李子代数, $[(\mathrm{d}_\xi H)_-, (\mathrm{d}_\xi K)_-] \in \mathfrak{g}^*$, 而 $\xi \in \mathfrak{g}_+^*$. 综上, 定理得证. □

下面考察该定理的具体应用, 并由此重新研究上一小节的 Toda 链.

题 3.86. 对于一般线性李代数 $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{n\times n}$, 注意 $\mathfrak{g}$ 与 $\mathfrak{g}^*$ 中的元素都自然视为 n 阶实方阵. 取 $\mathfrak{g}$ 的非退化 Killing 型:

$$\kappa(X, Y) = \mathrm{tr}(XY), \tag{3.122}$$

在此意义下, 配对映射 $\langle , \rangle \colon \mathfrak{g}^* \times \mathfrak{g}$ 为

$$\langle X, Y \rangle = \kappa(X, Y) = \mathrm{tr}(XY).$$

1. 对任意 $X \in \mathfrak{g}$, 验证

$$\iota_\kappa(X) = X. \tag{3.123}$$

2. 对任意 $X \in \mathfrak{g}^*$ 以及 $Y \in \mathfrak{g}$, 验证

$$\mathrm{ad}_X^* Y = [X, Y]. \tag{3.124}$$

题 3.87. 对于一般线性李代数 $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$, 沿用上题的记号与约定, 考虑 $\mathfrak{g}^*$ 上的函数 (即(3.101)式)

$$H_k(\xi) = \frac{1}{k+1} \mathrm{tr}(\xi^{k+1}), \qquad \xi \in \mathfrak{g}^*, k \geq 0. \tag{3.125}$$

1. 对任意 $\xi \in \mathfrak{g}^*$, 验证

$$\mathrm{d}_\xi H_k = \xi^k. \tag{3.126}$$

2. 验证: H_k 是 $\mathfrak{g}^*$ 上的 Casimir 函数.

证明. 注意到, 对任意 $\eta \in \mathfrak{g}^*$, 有

$$\begin{aligned} \langle \eta, \mathrm{d}_\xi H_k \rangle &= \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} H_k(\xi + \varepsilon\eta) = \frac{1}{k+1} \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} \mathrm{tr}\left((\xi + \varepsilon\eta)^{k+1}\right) \\ &= \mathrm{tr}\left(\xi^k \eta\right) = \left\langle \eta, \xi^k \right\rangle, \end{aligned}$$

因此 $\mathrm{d}_\xi H_k = \xi^k$. 进而 H_k 的哈密顿向量场 X_{H_k} 满足

$$X_{H_k}(\xi) = \mathrm{ad}^*_{\mathrm{d}_\xi H_k} \xi = [\mathrm{d}_\xi H_k, \xi] = \left[\xi^k, \xi\right] = 0,$$

所以 H_k 是 $\mathfrak{g}^*$ 上的 Casimir 函数, 证毕. □

现在, 是时候重写上一小节的 Toda 链了. 回忆李代数 $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ 的子代数直和分解(3.106)

$$\begin{aligned} \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) &= \mathfrak{t}(n, \mathbb{R}) \oplus \mathfrak{o}(n) \\ &= \mathfrak{g}_+ \oplus \mathfrak{g}_-, \end{aligned} \tag{3.127}$$

但特别注意: 与上一小节相反, 现在我们把上三角子代数 $\mathfrak{t}(n, \mathbb{R})$ 规定为 $\mathfrak{g}$ 的正部 (事实上这才是真正的取法), 即, 对于 $X \in \mathfrak{g}$, X_+ 是 X 的上三角分量, 而 X_- 才是 X 的反对称分量. 在非退化 Killing 型 κ(3.122)的意义下, $\mathfrak{g}_+^*$ 与 $\mathfrak{g}_-^*$ 自然被视为 $\mathfrak{g}$ 的子空间:

$$\mathfrak{g}_+^* \cong (\mathfrak{g}_-)^\perp, \qquad \mathfrak{g}_-^* \cong (\mathfrak{g}_+)^\perp, \tag{3.128}$$

这里的 $()^{\perp}$ 是指 Killing 型 κ 意义下的正交补.

题 3.88. 记号承上,

1. 在同构(3.128)意义下, 验证:

$$\begin{aligned}\mathfrak{g}_+^* &\cong \mathrm{Sym}(n,\mathbb{R}) := \left\{\boldsymbol{X}\in\mathbb{R}^{n\times n}\,\middle|\,\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{X}\right\},\\ \mathfrak{g}_-^* &\cong \mathfrak{t}^+(n,\mathbb{R}) := \left\{\boldsymbol{X}\in\mathbb{R}^{n\times n}\,\middle|\,X_{ij}=0,\ \forall i\geq j\right\}.\end{aligned}$$

换言之, $\mathfrak{g}_+^*$ 与 $\mathfrak{g}_-^*$ 分别是由对称方阵, 严格上三角方阵构成的子空间. 此时, 对任意 $\boldsymbol{X}\in\mathfrak{g}^*=\mathfrak{g}_+^*\oplus\mathfrak{g}_-^*$, 验证:

$$\boldsymbol{X}_+^*=\boldsymbol{X}_l+\boldsymbol{X}_l^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{X}_d,\qquad \boldsymbol{X}_-^*=\boldsymbol{X}_u-\boldsymbol{X}_l^{\mathrm{T}},\tag{3.129}$$

其中 $\boldsymbol{X}_+^*,\boldsymbol{X}_-^*$ 分别是 $\boldsymbol{X}$ 在 $\mathfrak{g}_+^*,\mathfrak{g}_-^*$ 中的分量, $()_u,()_d,()_l$ 的含义同(3.104).

2. 考虑上三角子代数 $\mathfrak{g}_+=\mathfrak{t}(n,\mathbb{R})$ 的李群

$$G_+:=\exp(\mathfrak{g}_+)=\{g\in\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})\,|\,\det g\neq 0,\ g_{ij}=0,\ \forall i>j\},$$

即上三角子群. 而 G_+ 在 $\mathfrak{g}_+^*\cong\mathrm{Sym}(n,\mathbb{R})$ 上有余伴随作用. 取定

$$\xi_0:=\begin{pmatrix}\frac{p}{n} & 1 & & \\ 1 & \frac{p}{n} & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1\\ & & 1 & \frac{p}{n}\end{pmatrix}\in\mathfrak{g}_+^*,$$

其中 p 为给定的常数. 验证: 余伴随轨道

$$G_+^{\#}\xi_0=\left\{\begin{pmatrix}b_1 & a_1 & & \\ a_1 & b_2 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & a_{n-1}\\ & & a_{n-1} & b_n\end{pmatrix}\,\middle|\,\begin{array}{c}a_1,\dots,a_{n-1};b_1,\dots,b_n\in\mathbb{R},\\ \sum\limits_{\ell=1}^n b_\ell=p\end{array}\right\}\cong\mathbb{R}^{2n-2},$$

这正是(3.99)式的 Lax 算子 L 所在的空间.

3. 验证: 余伴随轨道 $G_+^\# \xi_0$ 作为李-泊松流形 $\mathfrak{g}_+^*$ 的辛叶 (见3.2.5小节), 其李-泊松括号 $\{,\}$ 满足

$$\begin{aligned} \{a_k, a_\ell\} &= \{b_k, b_\ell\} = 0, \\ \{a_k, b_\ell\} &= a_k(\delta_{k+1,\ell} - \delta_{k\ell}), \end{aligned} \tag{3.130}$$

它刚好是 Toda 链的泊松括号(3.97)的 (-1) 倍. 这里的 a_k, b_ℓ 视为 $G_+^\# \xi_0$ 上的坐标函数.

解. (1) 留给读者. 至于 (2), 对一般的

$$g = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & \cdots & g_{1n} \\ & g_{22} & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & g_{n-1,n} \\ & & & g_{nn} \end{pmatrix} \in G_+,$$

我们来计算 $\mathrm{Ad}_g^* \xi_0$. 由相关定义, 对任意 $X \in \mathfrak{g}_+ \cong \mathfrak{t}(n, \mathbb{R})$ 都有

$$\begin{aligned} \mathrm{tr}\left(\mathrm{Ad}_g^* \xi_0 \cdot X\right) &= \left\langle \mathrm{Ad}_g^* \xi_0, X \right\rangle = \langle \xi_0, \mathrm{Ad}_{g^{-1}} X \rangle \\ &= \left\langle \xi_0, g^{-1} X g \right\rangle = \mathrm{tr}\left(\xi_0 g^{-1} X g\right) = \mathrm{tr}\left(g \xi_0 g^{-1} \cdot X\right), \end{aligned}$$

这表明 $\mathrm{Ad}_g^* \xi_0 - g\xi_0 g^{-1} \in (\mathfrak{g}_+)^\perp = \mathfrak{g}_-^*$. 而 $\mathrm{Ad}_g^* \xi_0 \in \mathfrak{g}_+^*$, 从而易知

$$\mathrm{Ad}_g^* \xi_0 = \left(g \xi_0 g^{-1}\right)_+^* .$$

注意(3.129)以及上式, 直接计算得

$$\mathrm{Ad}_g^* \xi_0 = \begin{pmatrix} b_1 & a_1 & & \\ a_1 & b_2 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & a_{n-1} \\ & & a_{n-1} & b_n \end{pmatrix},$$

其中

$$a_i = \frac{g_{i+1,i+1}}{g_{ii}}, \quad 1 \le i \le n-1$$

$$b_i = \begin{cases} \frac{p}{n} + \frac{g_{12}}{g_{11}} & i=1, \\ \frac{p}{n} + \frac{g_{i,i+1}}{g_{ii}} - \frac{g_{i-1,i}}{g_{i-1,i-1}} & 2 \le i \le n-1, \\ \frac{p}{n} - \frac{g_{n-1,n}}{g_{n-1,n-1}} & i=n, \end{cases}$$

其余留给读者. 至于 (3), 自然将 a_k, b_ℓ 视为辛叶 (余伴随轨道)$G_+^\#\xi_0$ 上的坐标函数, 它们分别是 $\mathfrak{g}^*$ 上的函数 $\boldsymbol{X} \mapsto X_{k,k+1}$, $\boldsymbol{X} \mapsto X_{\ell\ell}$ 在 $G_+^\#\xi_0$ 上的限制. 于是对任意 $\xi \in \mathfrak{g}_+^*$,

$$\mathrm{d}_\xi a_k = \boldsymbol{E}_{k,k+1}, \quad \mathrm{d}_\xi b_\ell = \boldsymbol{E}_{\ell\ell},$$

并注意 $\xi^\mathrm{T} = \xi$, 从而

$$\begin{aligned} \{a_k, b_\ell\}(\xi) &= \langle \xi, [\mathrm{d}_\xi a_k, \mathrm{d}_\xi b_\ell] \rangle = \langle \xi, [\boldsymbol{E}_{k,k+1}, \boldsymbol{E}_{\ell\ell}] \rangle \\ &= (\delta_{k+1,\ell} - \delta_{k\ell}) \mathrm{tr}\left(\xi \boldsymbol{E}_{k,k+1}\right) = (\delta_{k+1,\ell} - \delta_{k\ell}) \mathrm{tr}\left(\boldsymbol{E}_{k+1,k}\xi^\mathrm{T}\right) \\ &= (\delta_{k+1,\ell} - \delta_{k\ell}) \xi_{k,k+1} = (\delta_{k+1,\ell} - \delta_{k\ell}) a_k(\xi), \end{aligned}$$

因此 $\{a_k, b_\ell\} = (\delta_{k+1,\ell} - \delta_{k\ell}) a_k$. 同理可以验证 $\{a_k, a_\ell\} = \{b_k, b_\ell\} = 0$. □

题 3.89. 利用题3.87与定理3.85的 (3), 再次证明(3.101)式中的 Toda 链的守恒量 $H_p\,(0 \le p \le n-1)$ 两两交换, 并与性质3.80中的技巧性证明相对照.

3.4 作用-角坐标

再考察了 Liouville 可积系统的众多例子之后, 我们来研究其一般性质. 沿用3.3.1小节的记号约定, 给定可积系统 $(M, \omega, \mathscr{H})$, 其中 (M, ω) 是 $2n$ 维辛流形, $\mathscr{H}\colon M \to \mathbb{R}^n$, $m \mapsto (H_1, \ldots, H_n)^\mathrm{T}$ 为 n 个两两交换的守恒量. 对于 $\mathscr{H}$ 的正则点 $m \in M$, 其正则值 $\boldsymbol{h} := \mathscr{H}(m)$. 本节将介绍子流形 $M_{\boldsymbol{h}} := \mathscr{H}^{-1}(\boldsymbol{h})$ 在点 m 附近的局部性质, 并了初步了解其整体性质.

3.4.1 Liouville 环面

先来初步考察正则点附近的局部性质.

定理 3.90. 设 $(M, \omega, \mathscr{H})$ 为 *Liouville* 可积系统, $m \in M$ 为映射 $\mathscr{H}\colon M \to \mathbb{R}^n$ 的一个正则点, 则存在 $m \in M$ 的开邻域 U, 以及 U

上的光滑函数 $G^1, ..., G^n$, 使得以下成立:

1. $(G^1, ..., G^n; H_1, ..., H_n)$ 是 M 在 m 附近的 *Darboux* 坐标, 即成立

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} G^i \wedge H_i. \tag{3.131}$$

2. 记 $\Phi^i \colon (-\varepsilon, \varepsilon) \times M \to M$, $(t, m) \mapsto \Phi_t^i(m)$ 为哈密顿向量场 X_{H_i} 生成的流, 则对任意 $1 \leq i, j \leq n$ 都有

$$G^i\left(\Phi_t^j(m)\right) = G^i(m) + t\delta^{ij}. \tag{3.132}$$

换言之, Φ^i 在局部坐标 $(G, H) = (G^1, ..., G^n; H_1, ..., H_n)$ 下具有表达式

$$\Phi_t^i(G, H) = (G^1, ..., G^i + t, ..., G^n; H).$$

证明. 按照注3.58所言, 先取 m 附近的一组坐标

$$\boldsymbol{u} = (u^1, ..., u^n; u^{n+1}, ..., u^{2n}),$$

使得对 $1 \leq i \leq n$, 哈密顿向量场 $X_{H_i} = \frac{\partial}{\partial u^i}$, 从而有

$$u^i(\Phi_t^j(m)) = u^i(m) + t\delta^{ij}, \qquad 1 \leq i, j \leq n. \tag{3.133}$$

将 $\boldsymbol{u}$ 的前 n 个分量作适当调整, 就得到我们想要的 G^i. 具体如下:

1. 注意到对任意 $1 \leq i, j \leq n$ 都有

$$\{u^i, H_j\} = X_{H_j}(u^i) = \langle \mathrm{d}u^i, X_{H_j} \rangle = \left\langle \mathrm{d}u^i, \frac{\partial}{\partial u^j} \right\rangle = \delta_j^i,$$

以及 $\{H_i, H_j\} = 0$, 从而易知 $\mathrm{d}u^1, ..., \mathrm{d}u^n; \mathrm{d}H_1, ..., \mathrm{d}H_n$ 在 m 附近线性无关, 故 $(u^1, ..., u^n; H_1, ..., H_n)$ 构成 m 附近的一组局部坐标; 此外, 易知辛结构 ω 在该坐标下形如

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{d}u^i \wedge \mathrm{d}H_i + \sum_{i,j=1}^{n} h^{ij} \mathrm{d}H_i \wedge \mathrm{d}H_j, \tag{3.134}$$

其中 $h^{ij} = h^{ij}(u^1, ..., u^n; H_1, ..., H_n)$ 为光滑函数, 且 $h^{ij} = -h^{ji}$.

2. 直接计算易知, 2-形式 $\mathrm{d}u^i \wedge \mathrm{d}H_i$ 与 $\mathrm{d}H_i \wedge \mathrm{d}H_j$ 都是 Φ^i-不变的 $(i = 1, 2, ..., n)$. 而辛形式 ω 总是 Φ^i-不变的 (见定理3.2), 因此函数 h^{ij} 也是 Φ^i-不变的, 这表明 h^{ij} 不显含 $u^1, ..., u^n$, 只与 $H_1, ..., H_n$ 有关. 换言之, 存在 $\boldsymbol{h} := \mathscr{H}(m) \in \mathbb{R}^n$ 附近的光滑函数 k_{ij} 使得成立

$$\sum_{i,j=1}^{n} h^{ij}\mathrm{d}H_i \wedge \mathrm{d}H_j = \mathscr{H}^* \left(\sum_{i,j=1}^{n} k_{ij}\mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}x^j \right),$$

其中 $x^1, ..., x^n$ 为 $\mathbb{R}^n$ 的标准坐标, 注意 $\mathscr{H}^*(x^i) = H_i$.

3. 由 $\mathrm{d}\omega = 0$ 可知

$$\begin{aligned} \mathscr{H}^* \left(\mathrm{d} \sum_{i,j=1}^{n} k_{ij}\mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}x^j \right) &= \mathrm{d} \left(\sum_{i,j=1}^{n} h^{ij}\mathrm{d}H_i \wedge \mathrm{d}H_j \right) \\ &= \mathrm{d} \left(\omega - \sum_{i=1}^{n} \mathrm{d}u^i \wedge \mathrm{d}H_i \right) = 0. \end{aligned}$$

$m \in M$ 是 $\mathscr{H}$ 的正则点表明切映射 $\mathscr{H}_*$ 在 m 附近为满射, 从而拉回映射 $\mathscr{H}^*$ 在 m 附近是单射, 从而由上式可得

$$\mathrm{d} \left(\sum_{i,j=1}^{n} k_{ij}\mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}x^j \right) = 0.$$

进而由庞加莱引理, 存在 $\boldsymbol{h} := \mathscr{H}(m) \in \mathbb{R}^n$ 附近的 1-形式

$$\alpha = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathrm{d}x^i,$$

使得

$$\sum_{i,j=1}^{n} k_{ij}\mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}x^j = \mathrm{d}\alpha.$$

4. 对于 $1 \leq i \leq n$, 引入 $m \in M$ 附近的函数

$$G^i := u^i + \alpha_i \circ \mathscr{H},$$

断言: $(G^1, ..., G^n)$ 满足定理条件. 首先, G^i 显然满足(3.132); 而辛形式 ω 可写为

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{d}u^i \wedge \mathrm{d}H_i + \sum_{i,j=1}^{n} h^{ij}\mathrm{d}H_i \wedge \mathrm{d}H_j$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^{n} \mathrm{d}\left(G^i - \alpha_i \circ \mathscr{H}\right) \wedge \mathrm{d}H_i + \mathscr{H}^* \left(\sum_{i,j=1}^{n} k_{ij} \mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}x^j \right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \mathrm{d}G^i \wedge \mathrm{d}H_i - \mathscr{H}^* \left(\sum_{i=1}^{n} \mathrm{d}\alpha_i \wedge \mathrm{d}x^i \right) + \mathscr{H}^* \left(\sum_{i,j=1}^{n} k_{ij} \mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}x^j \right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \mathrm{d}G^i \wedge \mathrm{d}H_i + \mathscr{H}^* \left(\sum_{i,j=1}^{n} k_{ij} \mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}x^j - \mathrm{d}\alpha \right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \mathrm{d}G^i \wedge \mathrm{d}H_i.
\end{aligned}
$$

从而定理得证. □

注 **3.91.** 由上述证明过程可以看出, G^i 并不是唯一的, 它至少有如下的自由度: 在证明过程第 3 步中的 $\alpha \mapsto \alpha + \mathrm{d}\eta$, 其中 η 为 $\boldsymbol{h} := \mathscr{H}(m) \in \mathbb{R}^n$ 附近的光滑函数. 相应地, 若 $\{G^i\}$ 满足定理条件, 则对上述 η, $\{G^i + \frac{\partial \eta}{\partial x^i} \circ \mathscr{H}\}$ 也满足定理条件.

对于 $\mathscr{H}$ 的正则点 $m \in M$, 记 Σ_m 为水平集 $\mathscr{H}^{-1}(\mathscr{H}(m))$ 的包含 m 的连通分支. 我们已经知道 Σ_m 是 M 的 n 维子流形, 且哈密顿向量场 X_{H_i} $(1 \leq i \leq n)$ 可限制为 Σ_m 的切向量场. 如果 $\phi_m^i : t \mapsto \Phi_t^i(m)$ 在 $\mathbb{R}$ 上整体定义, 则称 Σ_m 上的向量场 X_{H_i} 是**完备的**.

定理 3.92. *对于 Liouville 可积系统 $(M, \omega, \mathscr{H})$, 记号同上.*

1. *如果哈密顿向量场 X_{H_i} $(1 \leq i \leq n)$ 在 Σ_m 完备, 则存在 $0 \leq k \leq n$, 使得 Σ_m 同胚于 $T^k \times \mathbb{R}^{n-k}$, 其中 $T^k := (S^1)^k$ 为 k 维环面.*

2. *特别地, 如果 Σ_m 是紧的, 则 Σ_m 同胚于环面 T^n.*

证明. (2) 是 (1) 的简单推论, 我们只证 (1).

1. 由于 $X_{H_1}, \ldots, X_{H_n}$ 生成的流两两交换, 并且这些哈密顿向量场 X_{H_i} 完备, 从而易知有良定的映射

$$
\begin{aligned}
\Psi : \mathbb{R}^n \times \Sigma_m &\to \Sigma_m \\
(\boldsymbol{t}, p) &\mapsto \Psi_{\boldsymbol{t}}(p) := (\Phi_{t^1}^1 \circ \cdots \circ \Phi_{t^n}^n)(p),
\end{aligned}
$$

这是加法群 $\mathbb{R}^n$ 在 Σ_m 上的群作用. 对任意 $p\in\Sigma_m$, 记

$$\begin{aligned}\psi_p\colon \mathbb{R}^n &\to \Sigma_m\\ \boldsymbol{t} &\mapsto \Psi_{\boldsymbol{t}}(p).\end{aligned}$$

由于 $X_{H_1},...,X_{H_n}$ 处处线性无关, 从而对任意 $p\in\Sigma_m$, 由 ψ_p 的定义以及隐函数定理可知 ψ_p 是局部微分同胚. 特别地, ψ_p 是开映射.

2. 断言: 对任意 $p\in\Sigma_m$, ψ_p 是满射. 事实上, 我们已经知道像集 $\psi_p(\mathbb{R}^n)$ 是 Σ_m 的非空开子集, 从而由 Σ_m 的连通性, 只需再说明 $\psi_p(\mathbb{R}^n)$ 是 Σ_m 的闭子集即可. 若 $\mathbb{R}^n$ 中的点列 $\{\boldsymbol{t}_j\}_{j=1}^{\infty}$ 使得 $p_j:=\psi_p(\boldsymbol{t}_j)$ 收敛于点 $p'\in\Sigma_m$, 则取足够小的 $\varepsilon>0$ 使得当 j 充分大时 $p_j\in\psi_{p'}(I_\varepsilon)$, 其中 $I_\varepsilon:=(-\varepsilon,\varepsilon)^n$ 是 $\mathbf{0}\in\mathbb{R}^n$ 的开邻域, 并且它同胚于 $\psi_{p'}(I_\varepsilon)$. 因此存在正整数 N 以及 $\boldsymbol{t}_0\in I_\varepsilon$ 使得

$$\psi_p(\boldsymbol{t}_N)=:p_N=\psi_{p'}(\boldsymbol{t}_0),$$

从而易知 $p'=\psi_p(\boldsymbol{t}_N-\boldsymbol{t}_0)\in\psi_p(\mathbb{R}^n)$, 从而像集 $\psi_p(\mathbb{R}^n)$ 是 Σ_m 的闭子集. 断言得证.

3. 取定 $p\in\Sigma_m$, 记稳定子群

$$\mathrm{Stab}_{\mathbb{R}^n}(p):=\{\boldsymbol{t}\in\mathbb{R}^n\,|\,\psi_p(\boldsymbol{t})=p\},$$

则由 ψ_p 是满射可知 $\Sigma_m\cong\mathbb{R}^n/\,\mathrm{Stab}_{\mathbb{R}^n}(p)$. 又由于 ψ_p 是开映射, 从而易知稳定子群 $\mathrm{Stab}_{\mathbb{R}^n}(p)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的离散子群. 而众所周知, $\mathbb{R}^n$ 的离散子群都由 k 个线性无关的向量 $\mathbb{Z}$-张成, 其同构于 $\mathbb{Z}^k$, 其中 $0\le k\le n$, 从而

$$\Sigma_m\cong\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^k\cong T^k\times\mathbb{R}^{n-k}.$$

定理得证. □

3.4.2 Arnold-Liouville 定理

参考文献

[1] Abraham R, Marsden J E. *Foundations of mechanics* [M]. American Mathematical Society, 2008.

[2] Adler M. *On a trace functional for formal pseudo-differential operators and the symplectic structure of the Korteweg-deVries type equations* [J]. Inventiones mathematicae, 1978, 50: 219-248.

[3] Adler M, Van Moerbeke P, Vanhaecke P. *Algebraic integrability, Painlevé geometry and Lie algebras* [M]. Springer Science & Business Media, 2013.

[4] Aebischer B, Borer M, Kälin M, et al. *Symplectic Geometry: an Introduction based on the Seminar in Bern, 1992* [M]. Birkhäuser, 2013.

[5] Andrianov A. *Introduction to Siegel modular forms and Dirichlet series* [M]. Springer Science & Business Media, 2008.

[6] Arnol'd V I. *Mathematical methods of classical mechanics* [M]. Springer Science & Business Media, 2013.

[7] Artin E. *Geometric Algebra* [J]. Interscience Publ Inc, NY, London, 1957.

[8] Audin M. *Spinning tops: A course on integrable systems* [M]. Cambridge University Press, 1999.

[9] Bolsinov A V, Fomenko A T. *Integrable Hamiltonian systems: geometry, topology, classification* [M]. CRC press, 2004.

[10] 陈童. *经典力学新讲: 现代导引* [OL]. 链接: https://newquanta.com/

[11] Crainic M, Fernandes R L, Mărcuţ I. *Lectures on Poisson geometry* [M]. American Mathematical Society, 2021.

[12] Cushman R H, Bates L M. *Global aspects of classical integrable systems* [M]. Basel: Birkhäuser, 1997.

[13] Da Silva A C, Da Salva A C. *Lectures on symplectic geometry* [M]. Berlin: Springer, 2001.

[14] Demailly J P. *Complex analytic and differential geometry* [M]. Grenoble: Université de Grenoble I, 1997.

[15] Dickey L A. *Soliton equations and Hamiltonian systems* [M]. World scientific, 2003.

[16] Eichler M. *Introduction to the Theory of Algebraic Numbers and Fuctions* [M]. Academic Press, 1966.

[17] Fernández M, Gotay M J, Gray A. *Compact parallelizable four-dimensional symplectic and complex manifolds* [J]. Proceedings of the American Mathematical Society, 1988, 103(4): 1209-1212.

[18] Flaschka H. *The Toda lattice. II. Existence of integrals* [J]. Physical Review B, 1974, 9(4): 1924.

[19] Giorgilli A. *Notes on Hamiltonian dynamical systems* [M]. Cambridge University Press, 2022.

[20] Hofbauer J, Sigmund K. *Evolutionary games and population dynamics* [M]. Cambridge University Press, 1998.

[21] Jacobson N. *Basic algebra I* [M]. Courier Corporation, 2012.

[22] Kirillov A A. *Elements of the theory of representations* [J]. Springer-Verlag Berlin-New York, 1976.

[23] Kodaira K. *On the structure of compact complex analytic surfaces, I* [J]. American Journal of Mathematics, 1964, 86(4): 751-798.

[24] Kostant B. *The solution to a generalized Toda lattice and representation theory* [J]. Advances in Mathematics, 1979, 34(3): 195-338.

[25] Lee J M. *Introduction to smooth manifolds (second edition)* [M]. Springer, Graduate Texts in Mathematics 218, 2012.

[26] Liu S Q (刘思齐). *Lecture notes on bihamiltonian structures and their central invariants* [J]. B-Model Gromov-Witten Theory, 2018: 573-625.

[27] Liu S Q (刘思齐), Zhang Y (张友金). *Bihamiltonian cohomologies and integrable hierarchies I: a special case* [J]. Communications in Mathematical Physics, 2013, 324: 897-935.

[28] Marle C M. *The Schouten-Nijenhuis bracket and interior products* [J]. Journal of Geometry and Physics, 1997, 23(3-4): 350-359.

[29] McDuff D, Salamon D. *Introduction to symplectic topology* [M]. Oxford University Press, 2017.

[30] Miwa T, Jimbo M, Date E. *Solitons: Differential equations, symmetries and infinite dimensional algebras* [M]. Cambridge university press, 2000.

[31] Moshayedi N. *Lectures on Symplectic Geometry, Poisson Geometry, Deformation Quantization and Quantum Field Theory* [J]. arXiv preprint arXiv:2012.14662, 2020.

[32] Newlander A, Nirenberg L. *Complex analytic coordinates in almost complex manifolds* [J]. Annals of Mathematics, 1957: 391-404.

[33] Rudolph G, Schmidt M, Schmidt M. *Differential geometry and mathematical physics* [M]. Springer, 2012.

[34] Satake I. *Algebraic structures of symmetric domains* [M]. Princeton University Press, 2014.

[35] Semenov-Tian-Shansky M A. *What is a classical r-matrix?* [J]. Funktsional'nyi Analiz i ego Prilozheniya, 1983, 17(4): 17-33.

[36] Siegel C L. *Topics in Complex Function Theory, Volume 3: Abelian Functions and Modular Functions of Several Variables* [M]. John Wiley & Sons, 1989.

[37] Siegel C L, Moser J K. *Lectures on Celestial Mechanics* [J]. Springer-Verlag, Berlin. 1971.

[38] Stefan P. *Accessible sets, orbits, and foliations with singularities* [J]. Proceedings of the London Mathematical Society, 1974, 3(4): 699-713.

[39] Sussmann H J. *Orbits of families of vector fields and integrability of distributions* [J]. Transactions of the American Mathematical Society, 1973, 180: 171-188.

[40] Symes W W. *Systems of Toda type, inverse spectral problems, and representation theory* [J]. Inventiones mathematicae, 1980, 59(1): 13-51.

[41] Thurston W P. *Some simple examples of symplectic manifolds* [J]. Proceedings of the American Mathematical Society, 1976, 55(2): 467-468.

[42] Toda M. *Wave propagation in anharmonic lattices* [J]. Journal of the Physical Society of Japan, 1967, 23(3): 501-506.

[43] Vaisman I. *Lectures on the geometry of Poisson manifolds* [M]. Birkhäuser, 2012.

[44] Vaisman I. *Symplectic geometry and secondary characteristic classes* [M]. Boston: Birkhäuser, 1987.

[45] Voison C. *Hodge Theory and Complex Algebraic Geometry, I* [M]. Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 2002, 76.

[46] Weinstein A. *Symplectic manifolds and their Lagrangian submanifolds* [J]. Advances in mathematics, 1971, 6(3): 329-346.

[47] Woodhouse N. *Geometric Quantization* [J]. Clarendon. 1980.