GTM 235

紧李群

Math4015 2.61.1 初稿完结版

曲豆豆 翻译
原著: Mark R. Sepanski
2022 年 5 月 10 日

本书为 Mark R. Sepanski

Compact Lie Groups

的非官方 (野生) 中译本. 仅供学习交流.

目录

前言

As an undergraduate, I was offered a reading course on the representation theory of finite groups. When I learned this basically meant studying homomorphisms from groups into matrices, I was not impressed. In its place I opted for a reading course on the much more glamorous sounding topic of multilinear algebra. Ironically, when I finally took a course on representation theory from B. Kostant in graduate school, I was immediately captivated. In broad terms, representation theory is simply the study of symmetry. In practice, the theory often begins by classifying all the ways in which a group acts on vector spaces and then moves into questions of decomposition, unitarity, geometric realizations, and special structures. In general, each of these problems is extremely difficult. However in the case of compact Lie groups, answers to most of these questions are well understood. As a result, the theory of compact Lie groups is used extensively as a stepping stone in the study of noncompact Lie groups.

Regarding prerequisites for this text, the reader must first be familiar with the definition of a group and basic topology. Secondly, elementary knowledge of differential geometry is assumed. Students lacking a formal course in manifold theory will be able to follow most of this book if they are willing to take a few facts on faith. This mostly consists of accepting the existence of an invariant integral in §1.4.1. In a bit more detail, the notion of a submanifold is used in §1.1.3, the theory of covering spaces is used in §1.2, §1.3, §4.2.3, and §7.3.6, integral curves are used in §4.1.2, and Frobenius' theorem on integral submanifolds is used in the proof of Theorem 4.14. A third prerequisite is elementary functional analysis. Again, students lacking formal course work in this area can follow most of the text if they are willing to assume a few facts. In particular, the Spectral Theorem for normal bounded operators is used in the proof of Theorem 3.12, vector-valued integration is introduced in §3.2.2, and the Spectral Theorem for compact self-adjoint operators is used in the proof of Lemma 3.13.

The text assumes no prior knowledge of Lie groups or Lie algebras and so all the necessary theory is developed here. Students already familiar with Lie groups can quickly skim most of Chapters 1 and 4. Similarly, students familiar with Lie algebras can quickly skim most of Chapter 6.

The book is organized as follows. Chapter 1 lays out the basic definitions, examples, and theory of compact Lie groups. Though the construction of the spin groups in §1.3 is very important to later representation theory and mathematical physics, this material can be easily omitted on a first reading. Doing so allows for a more rapid transition to the harmonic analysis in Chapter 3. A similar remark holds for the construction of the spin representations in §2.1.2.4. Chapter 2 introduces the concept of a finite-dimensional representation. Examples, Schur's Lemma, unitarity, and the canonical decomposition are developed here. Chapter 3 begins with matrix coefficients and character theory. It culminates in the celebrated Peter-Weyl Theorem and its corresponding Fourier theory.

Up through Chapter 3, the notion of a Lie algebra is unnecessary. In order to progress further, Chapter 4 takes up their study. Since this book works with compact Lie groups, it suffices to consider linear Lie groups which allows for a fair amount of differential geometry to be bypassed. Chapter 5 examines maximal tori and Cartan subalgebras. The Maximal Torus Theorem, Dynkin's Formula, the Commutator Theorem, and basic structural results are given. Chapter 6 introduces weights, roots, the Cartan involution, the Killing form, the standard $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$, various lattices, and the Weyl group. Chapter 7 uses all this technology to prove the Weyl Integration Formula, the Weyl Character Formula, the Highest Weight Theorem, and the Borel-Weil Theorem.

Since this work is intended as a textbook, most references are given only in the bibliography. The interested reader may consult [61] or [34] for brief historical outlines of the theory. With that said, there are a number of resources that had a powerful impact on this work and to which I am greatly indebted. First, the excellent lectures of B. Kostant and D. Vogan shaped my view of the subject. Notes from those lectures were used extensively in certain sections of this text. Second, any book written by A. Knapp on Lie theory is a tremendous asset to all students in the field. In particular, [61] was an extremely valuable resource. Third, although many other works deserve recommendation, there are four outstanding texts that were especially influential: [34] by Duistermaat and Kolk, [72] by Rossmann, [70] by Onishchik and Vinberg, and [52] by Hoffmann and Morris. Many thanks also go to C. Conley who took up the onerous burden of reading certain parts of the text and making helpful suggestions. Finally, the author is grateful to the Baylor Sabbatical Committee for its support during parts of the preparation of this text.

Mark Sepanski

March 2006

1　紧李群

1.1　基础概念

1.1.1　流形

李理论 (Lie theory) 是研究代数, 分析, 几何等领域产生的对称性的学科. 粗略地说, **李群** (Lie group) 同时具有**群**和**流形**的结构. 本节我们回顾流形的定义 [更多细节可见 [8] 或者 [88]] . 给定 $n \in \mathbb{N}$.

定义 1.1. *对于拓扑空间 M, 如果 M 是第二可数 [即存在可数拓扑基] Hausdorff 的空间, 并且局部同胚于 $\mathbb{R}^n$ 的开子集, 则称 M 为 n 维* **拓扑流形** *(topological manifold)* .

这意味着对所有的 $m \in M$, 存在 m 的开邻域 U 以及 $\mathbb{R}^n$ 的开子集 V, 使得存在同胚 $\varphi\colon U \to V$. 这样的同胚映射 φ 称为 **坐标卡** (chart) .

定义 1.2. *n 维* **光滑流形** *(smooth manifold) 是指如下资料: 拓扑流形 M 以及它的一族坐标卡 $\{\varphi_\alpha\colon U_\alpha \to V_\alpha\}$ [称之为 坐标图册 (atlas)] ; 并满足如下性质:*

1. $M = \bigcup\limits_\alpha U_\alpha$,
2. *对任意满足 $U_\alpha \cap U_\beta \neq \varnothing$ 的 α, β, 转移映射 $\varphi_{\alpha,\beta} := \varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}\colon \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \to \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的光滑映射.*

*以后将光滑流形简称为***流形***.*

一个基本结论是, 这样的坐标图册可以唯一扩充为一个极大的坐标图册. 以后我们不妨约定流形的坐标图册都是极大的.

除了 $\mathbb{R}^n$, 流形的常见例子是 n **维球面** (sphere)

$$S^n := \left\{x \in \mathbb{R}^{n+1} \,\middle|\, \|x\| = 1\right\},$$

其中 $\|\cdot\|$ 维标准欧氏范数; 另一个例子是 n **维环面** (torus)

$$T^n = \underbrace{S^1 \times \cdots \times S^1}_{n\text{个}}.$$

另一个重要的流形是 **实射影空间** (real projective space) , $\mathbb{P}(\mathbb{R}^n)$, 它是 n 维紧流形, 由 $\mathbb{P}^{n+1}$ 中的所有 [过原点的] 直线构成, 也可视为 $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ 模掉等价关系 $x \sim \lambda x$, $x \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$, $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ 而得到, 也可视为 S^n 模掉等价关系 $x \sim -x$, $x \in S^n$ 而得到. 更一般地, **格拉斯曼流形** (Grassmannian) $\mathrm{Gr}_k(\mathbb{R}^n)$ 由 $\mathbb{R}^n$ 的所有 k 维子空间构成, 它是一个 $k(n-k)$ 维的紧流形, 当 $k = 1$ 时退化为 $\mathbb{P}(\mathbb{R}^{n-1})$.

记 $\mathrm{M}_{n,m}(\mathbb{F})$ 为域 $\mathbb{F}$ 上的所有 $n \times m$ 矩阵构成的集合, 其中 $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ 或 $\mathbb{C}$. 看矩阵的每个分量, 可将 $\mathrm{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ 等同于 $\mathbb{R}^{nm}$, 将 $\mathrm{M}_{n,m}(\mathbb{C})$ 等同于 $\mathbb{R}^{2nm}$. 注意行列式是 $\mathrm{M}_{n,n}(\mathbb{F})$ 上的连续函数, 从而 $\det^{-1}\{0\}$ 为闭子集. 因此 **一般线性群** (general linear group)

$$\mathrm{GL}(n, \mathbb{F}) = \left\{g \in \mathrm{M}_{n,n}(\mathbb{F}) \,\middle|\, g\text{是可逆矩阵}\right\} \tag{1.3}$$

为 $\mathrm{M}_{n,n}(\mathbb{F})$ 的开子集, 因此是流形. 同样的想法, 对于 $\mathbb{F}$ 上的任何有限维线性空间 V, 记 $\mathrm{GL}(V)$ 为 V 上的可逆线性变换之全体.

1.1.2 李群

定义 1.4. *称光滑流形 G 为* **李群** *(Lie group) , 如果 G 具有群结构, 并且满足:*

1. *乘法映射 $\mu\colon G \times G \to G$, $\mu(g, g') := gg'$ 是光滑映射;*
2. *取逆映射 $\iota\colon G \to G$, $\iota(g) := g^{-1}$ 是光滑映射.*

一个平凡的例子是, 加法群 $\mathbb{R}^n$ 是李群. 稍微有点意思的李群例子是 S^1, 将 S^1 视为

$$S^1 \cong \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| = 1\},$$

则其群结构继承了 $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ 的乘法结构.

然而, 目前为止最有趣的李群是 $\mathrm{GL}(n,\mathbb{F})$. 为验证 $\mathrm{GL}(n,\mathbb{F})$ 是李群, 首先注意它的乘法是光滑的, 这是因为它关于每个坐标分量都是多项式映射. 验证取逆映射是光滑的则需要一些线性代数的标准结论 $g^{-1}=\mathrm{adj}(g)/\det g$, 其中 $\mathrm{adj}(g)$ 为 g 的代数余子式排成的矩阵的转置. 特别地, $\mathrm{adj}(g)$ 的各坐标分量都是 g 的坐标分量的多项式函数, 而且 $\det g$ 是 $\mathrm{GL}(n,\mathbb{F})$ 上的非零多项式函数, 因此取逆映射是光滑的.

给出更多李群的例子则需要更多的工具. 事实上, 以后我们见到的绝大多数例子都其实是 $\mathrm{GL}(n,\mathbb{F})$ 的子群. 最后, 我们继续介绍李群的概念.

1.1.3 李子群与同态

回忆流形 M 的**浸入子流形** (immersed submanifold) N 是指某个流形 N' 在某个**单浸入** $\varphi\colon N'\to M$ [即光滑单射, 且其微分在 N' 处处满秩] 下的像, 并且配以流形结构使得 $\varphi\colon N'\to N$ 为微分同胚. 在微分几何中我们熟知, N 的拓扑未必与 N 作为 M 的子集的诱导拓扑相同. 若浸入子流形 N 的拓扑与 M 所诱导的子空间拓扑相同, 则称 N 为**正则子流形**, 或者**嵌入子流形**.

定义 1.5. *李群 G 的* **李子群** *(Lie subgroup) H 是某个李群 H' 在某个单浸入同态 $\varphi\colon H'\to G$ 下的像, 并且 H 配以李群结构使得 $\varphi\colon H'\to H$ 为微分同胚.*

上述映射 φ 首先要求是光滑的. 然而, 在习题 4.13 中我们将看到, 其实只需要验证 φ 是连续的.

作为流形, 李子群未必是正则子流形. 典型的例子是直线沿着无理角度缠绕于环面 [见习题 1.5] . 然而, 正则李子群将扮演特殊的角色, 也存在判断李子群是否为正则李子群的简单判据.

定理 1.6. *设 G 为李群, $H\subseteq G$ 为子群 [并未假定 H 有流形结构] . 则 H 是正则李子群当且仅当 H 是闭的.*

证明这个定理需要花很多工夫. 尽管一些必要的工具将在 §4.1.2 节发展, 但

它的证明几乎完全是微分几何课程的内容. 为方便起见, 并且又由于这个定理仅仅用在 §1.1.4, §1.3.2 节来构造几个李群的例子, 于是这个定理证明从略, 留作习题 4.28. 我们还有另一个有用的定理, 类似原因, 它的证明也留给微分几何课程 [例如 [8] 或 [88]] . 注意到, 一旦定理4.6成立, 则该定理立刻就能被推出.

定理 1.7. *设 H 为李群 G 的闭子群. 则商空间 G/H 存在唯一的流形结构, 使得投影映射 $\pi\colon G\to G/H$ 是光滑的, 进而存在从 G/H 到 G 的局部光滑截面.*

然后, 定理1.6 的下述直接推论是一种构造新的李群的非常有用的方法. 该推论需要用到一个众所周知的结论: 若 $f\colon H\to M$ 为流形之间的光滑映射且 $f(H)\subseteq N$, 其中 N 为 M 的正则子流形, 则 $f\colon H\to N$ 也是光滑映射 [见 [8] 或者 [88]] .

推论 1.8. *李群的闭子群关于它的相对拓扑是李群.*

构造李群的另一个常用的工具是微分几何中的**秩定理** (rank theorem).

定义 1.9. *李群之间的***同态** *是指它们之间的光滑的群同态.*

定理 1.10. *若 G,G' 为李群, $\varphi\colon G\to G'$ 为李群同态, 则 φ 是常秩映射, 且 $\ker\varphi$ 为 G 的正则李子群, 且维数为 $\dim G-\operatorname{rank}\varphi$, 其中 $\operatorname{rank}\varphi$ 是映射 φ 的微分的秩.*

证明. 众所周知 [见 [8]] , 若光滑映射 φ 是常秩的, 则 $\varphi^{-1}(e)$ 是 G 的维数为 $\dim G-\operatorname{rank}\varphi$ 的正则子流形. 又因为 $\ker\varphi$ 是子群, 从而只需证明 φ 是常秩映射. 记 l_g 为关于 g 的左平移. 由于 φ 为群同态, 从而 $\varphi\circ l_g=l_{\varphi(g)}\circ\varphi$, 又因为 l_g 为微分同胚, 从而两边取微分可知 φ 是常秩的. □

1.1.4 典型紧李群

有了推论1.8的帮助, 就很容易构造新的李群. 第一个例子是 **特殊线性群** (special linear group)

$$\mathrm{SL}(n,\mathbb{F}) = \{g \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{F}) \,|\, \det g = 1\}.$$

由于 $\mathrm{SL}(n,\mathbb{F})$ 是 $\mathrm{GL}(n,\mathbb{F})$ 的闭子群, 从而它是李群.

用同样的方法, 我们接下来定义四类紧李群, 它们统称 **典型紧李群** (classical compact Lie group) : $\mathrm{SO}(2n+1)$, $\mathrm{SO}(2n)$, $\mathrm{SU}(n)$ 以及 $\mathrm{Sp}(n)$.

1.1.4.1. $\mathrm{SO}(n)$. 首先我们定义 **正交群** (orthogonal group)

$$\mathrm{O}(n) := \left\{g \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{R}) \,\middle|\, g^t g = I\right\},$$

其中 g^t 为矩阵 g 的转置. 正交群是 $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ 的闭子群, 从而推论1.8表明 $\mathrm{O}(n)$ 为李群. 由于正交矩阵的每一列都是单位向量, 从而从拓扑上看, $\mathrm{O}(n)$ 可视为 $\underbrace{S^{n-1} \times \cdots \times S^{n-1}}_{n\text{个}} \subseteq \mathbb{R}^{n^2}$ 的闭子集. 特别地, $\mathrm{O}(n)$ 为紧李群.

特殊正交群 (special orthogonal group) , 也叫做 **旋转群** (rotation group) , 其定义为

$$\mathrm{SO}(n) := \{g \in \mathrm{O}(n) \,|\, \det g = 1\}.$$

这是 $\mathrm{O}(n)$ 的闭子群. 于是 $\mathrm{SO}(n)$ 也是紧李群.

事实上 $\mathrm{SO}(n)$ 的性质与 n 的奇偶性密切相关, 尽管现在难以看出来; 我们将在 §6.1.4 节介绍. 为此, 我们将特殊正交群分为两类: $\mathrm{SO}(2n+1)$ 与 $\mathrm{SO}(2n)$.

1.1.4.2. $\mathrm{SU}(n)$. **酉群** (unitary group) 定义为

$$\mathrm{U}(n) := \{g \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{C}) \,|\, g^* g = I\},$$

其中 g^* 是 g 的复共轭转置. 酉群是 $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ 的闭子群, 从 $\mathrm{U}(n)$ 是李群. 由于酉矩阵的每一列都是单位向量, 从而在拓扑上看, $\mathrm{U}(n)$ 可视为 $\underbrace{S^{2n-1} \times \cdots \times S^{2n-1}}_{n\text{个}} \subseteq \mathbb{R}^{2n^2}$ 的闭子集. 特别地, $\mathrm{U}(n)$ 是紧李群.

类似, 我们定义 **特殊酉群** (special unitary group)

$$\mathrm{SU}(n) := \{g \in \mathrm{U}(n) \,|\, \det g = 1\}\,.$$

同样, 这是 $\mathrm{U}(n)$ 的闭子群, 从而 $\mathrm{SU}(n)$ 仍然是紧李群. 其 $n=2$ 的特殊情形在以后尤其重要. 可以直接验证 [习题 1.8]

$$\mathrm{SU}(2) = \left\{ \begin{pmatrix} a & -\bar{b} \\ b & \bar{a} \end{pmatrix} \middle|\, a, b \in \mathbb{C},\ |a|^2 + |b|^2 = 1 \right\}, \tag{1.11}$$

从而在拓扑上, $\mathrm{SU}(2) \cong S^3$.

1.1.4.3. 最后一种典型紧李群, 称为 **辛群** (symplectic group) , 其定义为

$$\mathrm{Sp}(n) := \{g \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{H}) \,|\, g^* g = I\}\,, \tag{1.12}$$

其中 $\mathbb{H} := \{a + \mathrm{i}b + \mathrm{j}c + \mathrm{k}d \,|\, a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$ 是 **四元数** (quaternion) , g^* 为四元数共轭转置. 但要注意, $\mathbb{H}$ 是非交换可除代数, 从而 $\mathrm{GL}(n, \mathbb{H})$ 理解起来要稍微复杂. 理解清楚它, (**1.12**)式才能成为 $\mathrm{Sp}(n)$ 的真正定义.

首先, 我们将 $\mathbb{H}^n$ 视为关于数乘的*右*向量空间, 记 $M_{n,n}(\mathbb{H})$ 为 $\mathbb{H}$ 上的 $n \times n$ 矩阵环. 考虑矩阵*左*乘作用, $M_{n,n}(\mathbb{H})$ 中的元素可视为 $\mathbb{H}^n$ 上的 $\mathbb{H}$-线性变换. 因此我们自然地搬运(**1.3**)式中 $\mathrm{GL}(n, \mathbb{F})$ 的定义, 类似定义 $\mathrm{GL}(n, \mathbb{H}) = \{g \in M_{n,n}(\mathbb{H}) |$ g是 $\mathbb{H}^n$上的可逆线性变换$\}$.

接下来验证 $\mathrm{GL}(n, \mathbb{H})$ 是李群. 不幸的是, 这需要多花些工夫. 在 §1.1.2 节 $\mathrm{GL}(n, \mathbb{F})$ 的情形中用到的行列式不再对 $\mathrm{GL}(n, \mathbb{H})$ 有效. 我们另寻它法, 用如下方式将 $\mathrm{GL}(n, \mathbb{H})$ 嵌入到 $\mathrm{GL}(2n, \mathbb{C})$ 当中.

注意到任何四元数 $v \in \mathbb{H}$ 能唯一写成 $v = a + \mathrm{j}b$, 其中 $a, b \in \mathbb{C}$. 从而存在良定的 $\mathbb{C}$-线性同构 $\vartheta\colon \mathbb{H}^n \to \mathbb{C}^{2n}$, 满足 $\vartheta(v_1, ..., v_n) = (a_1, ..., a_n; b_1, ..., b_n)$, 其中 $v_p = a_p + \mathrm{j}b_p$, $a_p, b_p \in \mathbb{C}$. 由此来定义 $\mathbb{C}$-代数单同态 $\widetilde{\vartheta}\colon M_{n,n}(\mathbb{H}) \to M_{2n,2n}(\mathbb{C})$, 使得 $\widetilde{\vartheta}X := \vartheta \circ X \circ \vartheta^{-1}$, 其中将矩阵 $X \in M_{n,n}(\mathbb{H})$ 自然等同于线性映射. 直接验证 [习题 1.12] 可知, 若 $X = A + \mathrm{j}B$, $A, B \in M_{n,n}(\mathbb{C})$, 则

$$\widetilde{\vartheta}(A + \mathrm{j}B) = \begin{pmatrix} A & -\overline{B} \\ B & \overline{A} \end{pmatrix}, \tag{1.13}$$

其中 $\overline{A}$ 为矩阵 A 的复共轭. 因此 $\widetilde{\vartheta}$ 是从 $M_{n,n}(\mathbb{H})$ 到如下空间的 $\mathbb{C}$-代数同构:

$$M_{2n,2n}(\mathbb{C})_{\mathbb{H}} := \left\{ \begin{pmatrix} A & -\overline{B} \\ B & \overline{A} \end{pmatrix} \,\middle|\, A, B \in M_{n,n}(\mathbb{C}) \right\}.$$

另一种理解方式是考虑关于 j 的数乘映射 r_{j}, 即右乘j. 容易验证 [习题 1.12] 对任意 $z \in \mathbb{C}^{2n}$ 成立 $\vartheta r_{\mathrm{j}} \vartheta^{-1} z = J\overline{z}$, 其中

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}.$$

因为 ϑ 是 $\mathbb{C}$-线性同构, 从而 $\widetilde{\vartheta}$ 的像集里的元素 $Y \in M_{2n,2n}(\mathbb{C})$ 与 $\vartheta r_{\mathrm{j}} \vartheta^{-1}$ 交换, 即 $M_{2n,2n}(\mathbb{C})_{\mathbb{H}} = \left\{ Y \in M_{2n,2n}(\mathbb{C}) \,\middle|\, YJ = J\overline{Y} \right\}$.

最后, 注意到 X 可逆当且仅当 $\widetilde{\vartheta}X$ 可逆. 特别地, $M_{n,n}(\mathbb{H})$ 看作 $\mathbb{R}^{4n^2}$, 又因为 $\det \circ \widetilde{\vartheta}$ 是连续函数, 从而 $\mathrm{GL}(n, \mathbb{H})$ 是 $(\det \circ \widetilde{\vartheta})^{-1}\{0\}$ 的补集, 从而是 $M_{n,n}(\mathbb{H})$ 的开子集, 于是 $\mathrm{GL}(n, \mathbb{H})$ 显然是李群. 进而由推论1.8可知, 方程(**1.12**)表明 $\mathrm{Sp}(n)$ 是李群. 与之前例子一样, $\mathrm{Sp}(n)$ 是紧李群, 因为其中的矩阵的每一列都是 $\mathbb{H}^n \cong \mathbb{R}^{4n}$ 的单位向量.

话说, Dieudonné 在 $M_{n,n}(\mathbb{H})$ 上定义了合适的行列式 [见 [2], 151-158] . 这个行列式满足通常行列式所满足的绝大多数好的性质, 并且使得 $\mathrm{Sp}(n)$ 中的矩阵的行列式都是 1.

除了(**1.12**)式, $\mathrm{Sp}(n)$ 还有另一种实现方式. 借助同构 $\widetilde{\vartheta}$, 只需描述 $\mathrm{Sp}(n)$ 关于 $\widetilde{\vartheta}$ 的像. 首先容易验证对于 $X \in M_{n,n}(\mathbb{H})$ 都有 $\widetilde{\vartheta}(X^*) = (\widetilde{\vartheta}X)^*$ [习题 1.12] , 因此可知 $\widetilde{\vartheta}\,\mathrm{Sp}(n) = \mathrm{U}(2n) \cap M_{2n,2n}(\mathbb{C})_{\mathbb{H}}$. 这个结果可以进一步改写. 定义

$$\mathrm{Sp}(n, \mathbb{C}) := \left\{ g \in \mathrm{GL}(2n, \mathbb{C}) \,\middle|\, g^t J g = J \right\},$$

则 $\mathrm{U}(2n) \cap M_{2n,2n}(\mathbb{C})_{\mathbb{H}} = \mathrm{U}(2n) \cap \mathrm{Sp}(n, \mathbb{C})$. 因此 $\widetilde{\vartheta}$ 给出同构

$$\begin{aligned} \mathrm{Sp}(n) &\cong \mathrm{U}(2n) \cap M_{2n,2n}(\mathbb{C})_{\mathbb{H}} \\ &= \mathrm{U}(2n) \cap \mathrm{Sp}(n, \mathbb{C}). \end{aligned} \tag{1.14}$$

1.1.5 习题

习题 1.1 证明 S^n 是流形, 并且只用两张坐标卡就能给出它的流形结构.

习题 1.2

(a) 证明 $\mathrm{Gr}_k(\mathbb{R}^n)$ 可以实现为 $M_{n,k}(\mathbb{R})$ 中的秩为 k 的矩阵之全体, 模掉等价关系 $X \sim Xg$, 其中 $X \in M_{n,k}$ 的秩为 k, $g \in \mathrm{GL}(k, \mathbb{R})$. 再给出它的另一种实现方法, 从而证明 $\mathrm{Gr}_k(\mathbb{R}^n)$ 是紧的.

(b) 对于 $\{1, 2, ..., n\}$ 的 k 元子集 S, 以及 $X \in M_{n,k}(\mathbb{R})$, 记 $X|_S$ 为 X 的由 S 中的元素所标记的那些行组成的 $k\times k$ 子矩阵, 记 $U_S := \left\{X \in M_{n,k}(\mathbb{R}) \,\middle|\, X|_S\text{可逆}\right\}$. 再定义映射 $\varphi_S\colon U_S \to M_{(n-k),k}(\mathbb{R})$, 使得 $\varphi_S(X) = [X(X|_S)^{-1}]|_{S^c}$. 利用这些定义来证明 $\mathrm{Gr}_k(\mathbb{R}^n)$ 是 $k(n-k)$ 维流形.

习题 1.3

(a) 证明: 定义1.4 中的条件 1,2 可以用 $(g_1, g_2) \mapsto g_1 g_2^{-1}$ 光滑这一个条件来代替.

(b) 证明: 定义1.4 中的条件 1 蕴含条件 2.

习题 1.4 若 U 是李群 G 的包含单位元 e 的开集, 证明: 存在 e 的开邻域 $V \subseteq U$, 使得 $VV^{-1} \subseteq U$, 其中 $VV^{-1} := \left\{vw^{-1} \,\middle|\, v, w \in V\right\}$.

习题 1.5 取定 $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, 考虑 T^2 的子群 $R_{a,b} := \left\{(e^{2\pi \mathrm{i} at}, e^{2\pi \mathrm{i} bt}) \,\middle|\, t \in \mathbb{R}\right\}$.

(a) 若 $\dfrac{a}{b} \in \mathbb{Q}$, 且 $\dfrac{a}{b} = \dfrac{p}{q}$, 其中 $p, q \in \mathbb{Z}$ 互素. 随着参数 t 变化, 证明当 $R_{a,b}$ 的第一个分量绕 S^1 旋转 p 圈时, 第二个分量绕了 q 圈. 从而推出 $R_{a,b}$ 是闭的, 从而是微分同胚于 S^1 的正则李子群.

(b) 若 $\dfrac{a}{b} \neq \mathbb{Q}$, 证明 $R_{a,b}$ 不重复地环绕无限多圈. 因此李子群 $R_{a,b}$ 微分同胚于 $\mathbb{R}$, 但不是正则李子群.

(c) 当 a 或者 b 等于 0 时会怎样?

习题 1.6

(a) 利用定理1.10以及映射 $\det\colon \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ 来证明 $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$ 是李群, 且维数是 $n^2 - 1$.

(b) 证明: 从 $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ 到 $\left\{X \in M_{n,n}(\mathbb{R}) \,\middle|\, X^t = X\right\}$ 的映射 $X \mapsto XX^t$ 的秩为 $\dfrac{n(n+1)}{2}$ 的常秩映射. 由此利用定理1.10证明 $\mathrm{O}(n)$ 是李群, 且维数是 $\dfrac{n(n-1)}{2}$.

(c) 利用 $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ 上的映射 $X \mapsto XX^*$ 证明: $\mathrm{U}(n)$ 是李群, 且维数是 n^2.

(d) 利用 $\mathrm{GL}(n,\mathbb{H})$ 上的映射 $X \mapsto XX^*$ 证明: $\mathrm{Sp}(n)$ 是李群, 且维数是 $2n^2+n$.

习题 1.7 记 $Z(G) := \{z \in G \mid zg = gz, \forall g \in G\}$ 为李群 G 的**中心**. 证明:

(a) $Z(\mathrm{U}(n)) \cong S^1$, 且当 $n \geq 2$ 时 $Z(\mathrm{SU}(n)) \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

(b) $Z(\mathrm{O}(2n)) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$; $n \geq 2$ 时 $Z(\mathrm{SO}(2n)) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, $Z(\mathrm{SO}(2)) \cong \mathrm{SO}(2)$.

(c) 对于 $n \geq 1$, $Z(\mathrm{O}(2n+1)) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, 且 $Z(\mathrm{SO}(2n+1)) = \{I\}$.

(d) $Z(\mathrm{Sp}(n)) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

习题 1.8 直接验证(**1.11**)式.

习题 1.9

(a) 设 $A \subseteq \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ 是由对角元都是正数的对角阵构成的子群, $N \subseteq \mathrm{GL}(n,R)$ 为对角元都是 1 的上三角阵构成的子群. 利用 Gram-Schmidt 正交化方法, 证明通常的矩阵乘法给出了从 $\mathrm{O}(n) \times A \times N$ 到 $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ 的微分同胚. 这称为可逆矩阵的 **Iwasawa 分解**或者 **KAN 分解**. 特别地, 作为拓扑空间, 证明 $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R}) \cong \mathrm{O}(n) \times \mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2}}$, 以及 $\mathrm{SL}(n,\mathbb{R}) \cong \mathrm{SO}(n) \times \mathbb{R}^{\frac{(n+2)(n-1)}{2}}$.

(b) 记 $A \subseteq \mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ 是由对角元都是正实数的对角阵构成的子群, $N \subseteq \mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ 是由对角元都是 1 的上三角阵构成的子群. 证明通常的矩阵乘法给出了从 $\mathrm{U}(n) \times A \times N$ 到 $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ 的微分同胚. 特别地, 作为拓扑空间, 证明 $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C}) \cong \mathrm{U}(n) \times \mathbb{R}^{n^2}$, 以及 $\mathrm{SL}(n,\mathbb{C}) \cong \mathrm{SU}(n) \times \mathbb{R}^{n^2-1}$.

习题 1.10 设 $N \subseteq \mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ 是对角元全为 1 的上三角阵构成的子群, $\overline{N} \subseteq \mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ 是对角元全为 1 的下三角阵构成的子群, W 为置换矩阵 [即每行, 每列都只有一个非零元] 构成的子群. 利用高斯消元法证明 $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C}) \cong \coprod_{w \in W} \overline{N} w N$. 这称为 $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ 的 **Bruhat 分解**.

习题 1.11

(a) 设 $P \subseteq \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ 为正定对称实矩阵之全体. 证明矩阵乘法给出了从 $P \times \mathrm{O}(n)$ 到 $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ 之间的双射.

(b) 设 $H \subseteq \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ 为正定厄米之全体. 证明矩阵乘法给出了从 $H \times \mathrm{U}(n)$ 到 $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ 之间的双射.

习题 1.12

(a) 证明 $\widetilde{\vartheta}$ 满足(**1.13**)式.

(b) 证明对任意 $z \in \mathbb{C}^{2n}$ 都成立 $\vartheta r_{\mathrm{j}} \vartheta^{-1} z = J\overline{z}$.

(c) 证明对任意 $X \in M_{n,n}(\mathbb{H})$ 都成立 $\widetilde{\vartheta}(X^*) = (\widetilde{\vartheta} X)^*$.

习题 1.13 对于 $u, v \in \mathbb{H}^n$, 令 $(v, u) := \sum_{p=1}^{n} v_p \overline{u_p}$.

(a) 证明对任意 $X \in M_{n,n}(\mathbb{H})$ 都成立 $(Xv, u) = (v, X^* u)$.

(b) 证明 $\mathrm{Sp}(n) = \{g \in M_{n,n}(\mathbb{H}) \mid (gv, gu) = (v, u), \forall v, u \in \mathbb{H}^n\}$.

1.2 基础拓扑

1.2.1 连通性

我们回忆, 拓扑空间称为**连通**的, 如果它不能写成两个非空开集的无交并. 拓扑空间称为**道路连通**的, 如果任何两点都能用连续的道路相连. 虽然一般来说这两个概念不等价, 但对于流形来说它们等价. 甚至还可以把连续道路换成光滑道路.

首先是一个以后常用到的技巧性工具.

定理 1.15. 设 G 是连通李群, U 是 e 的一个邻域. 那么 U 生成 G, 也就是说, $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} U^n$, 其中 U^n 是由 U 中的 n 元素的乘积构成的集合.

证明. 不妨 U 是开集, 记 $V := U \cap U^{-1} \subseteq U$, 其中 U^{-1} 为 U 中所有元素的逆构成的集合. 由于取逆映射连续, 从而 V 是开集. 令 $H := \bigcup_{n=1}^{\infty} H^n$, 则易知 H 是包

含 e 的开子群. 对任意 $g \in G$, 记陪集 $gH := \{gh \,|\, h \in H\}$. 则 gH 是包含 g 的开集, 因为左乘 g^{-1} 的映射是连续的. 因此 G 为所有形如 gH 的开子集之并. 若对 G/H 中的每个陪集取代表元 $g_\alpha H$, 则 $G = \coprod_\alpha g_\alpha H$. 因此 G 的连通性意味着 G/H 中仅有一个元素, 换言之 $eH = G$, 从而得证. □

我们仍缺乏判断李群 G 是否连通的一般方法. 接下来我们就来填补这个空缺.

定义 1.16. *对于李群 G, 记 G^0 为 G 的包含 e 的连通分支.*

引理 1.17. *设 G 为李群, 则连通分支 G^0 是 G 的正则李子群. 对任意 $g_1 \in G$, 记 G^1 为 G 的包含 g_1 的连通分支, 则有 $G^1 = g_1 G^0$.*

证明. 先证第二部分. 由于左乘 g_1 是同胚, 从而 $g_1 G^0$ 也是 G 的一个连通分支. 但因为 $e \in G^0$, 从而 $g_1 \in g_1 G^0$, 从而 $g_1 G^0 \cap G^1 \neq \varnothing$. 因为它们都是连通分支, 所以 $G^1 = g_1 G^0$, 从而引理的第二部分得证.

再回去证第一部分, 只需验证 G^0 是子群. 由于取逆映射是同胚, $(G^0)^{-1}$ 也是 G 的连通分支. 同样道理, 得到 $(G^0)^{-1} = G^0$, 因为它们都包含 e. 最后, 给定 $g_1 \in G^0$, 因为 $e, g_1^{-1} \in G^0$, 从而连通分支 $g_1 G^0$ 与 G^0 都包含 g_1, 因此 $g_1 G^0 = G^0$. 从而 G^0 是子群, 得证. □

定理 1.18. *设 G 是李群, H 为 G 的连通李子群. 如果 G/H 也连通, 则 G 连通.*

证明. 因为 H 连通且包含 e, $H \subseteq G^0$, 因此有良定的连续映射 $\pi\colon G/H \to G/G^0$, 满足 $\pi(gH) = gG^0$. 显然 G/G^0 的商拓扑是离散拓扑. 而 G/H 的连通性迫使 $\pi(G/H)$ 连通, 所以只能有 $\pi(G/H) = \{eG^0\}$. 又因为 π 是满射, 因此 $G/G^0 = \{eG^0\}$, 这表明 $G = G^0$. □

定义 1.19. 设 G 为李群, M 为流形.

1. G 在 M 上的**作用**是指满足以下性质的光滑映射 $G \times M \to M$, $(g, m) \mapsto g \cdot m$, $g \in G, m \in M$:
   (a) $e \cdot m = m, \forall m \in M$,
   (b) $g_1 \cdot (g_2 \cdot m) = (g_1 g_2) \cdot m, \forall g_1, g_2 \in G, m \in M$.
2. 上述作用称为**可迁的** (transitive), 如果对任意 $m, n \in M$, 都存在 $g \in G$ 使得 $g \cdot m = n$.
3. 点 $m \in M$ 的**稳定化子** (stabilizer) $G^m := \{g \in G \mid g \cdot m = m\}$.

若 G 在 M 上的作用可迁, 则对于任意 $m_0 \in M$, 显然 [由定理1.7] m_0 关于群 G 作用的轨道诱导了从 G/G^{m_0} 到 M 的微分同胚.

定理 1.20. 典型紧李群 $\mathrm{SO}(n)$, $\mathrm{SU}(n)$, $\mathrm{Sp}(n)$ 都是连通的.

证明. 先考虑 $\mathrm{SO}(n)$. 对 n 归纳. 首先 $\mathrm{SO}(1) = \{1\}$ 显然连通. 然后考虑 $\mathrm{SO}(n)$ 通过矩阵乘法给出的在 $S^{n-1} \subseteq \mathbb{R}^n$ 上的可迁作用. 当 $n \geq 2$ 时, 易知北极点 $N = (1, 0, ..., 0)$ 的稳定化子同构于 $\mathrm{SO}(n-1)$, 归纳假设断言它连通. 从这个可迁作用可得 $\mathrm{SO}(n)/\mathrm{SO}(n)^N \cong S^{n-1}$, 注意 S^{n-1} 是连通的. 从而利用定理1.18即可.

$\mathrm{SU}(n)$ 的情形完全类似, 只需将 $\mathbb{R}^n$ 换成 $\mathbb{C}^n$, 归纳起始步 $\mathrm{SU}(1) \cong S^1$. 至于 $\mathrm{Sp}(n)$, 只需将 $\mathbb{R}^n$ 换成 $\mathbb{H}^n$, 归纳起始步 $\mathrm{Sp}(1) \cong \{v \in \mathbb{H} \mid |v| = 1\} \cong S^3$. □

1.2.2 万有覆盖

对于连通李群 G, 我们回忆 G 的**基本群** $\pi_1(G)$ 是指固定端点的闭路的同伦等价类构成的群. 如果 $\pi_1(G)$ 平凡, 则称李群 G 是**单连通**的.

拓扑学和微分几何中的覆盖理论 [更多细节见 [69],[8] 或者 [88]] 断言 G 存在 [同构意义下] 唯一的单连通覆盖空间 $\widetilde{G}$, 也就是说 $\widetilde{G}$ 是连通且单连通的, 配以**覆盖映射** $\pi\colon \widetilde{G} \to G$. 我们回忆覆盖映射 π 是光滑的满射, 并且任意 $g \in G$ 都存在连通邻域 $g \in U \subseteq G$, 使得 π 在 $\pi^{-1}(U)$ 的每个连通分支上的限制都是映到 U 的微分同胚.

引理 1.21. 若 H 是连通李群 G 的离散正规子群, 则 H 包含于 G 的中心.

证明. 对任意 $h \in H$, 考虑 $C_h := \{ghg^{-1} \,|\, g \in G\}$. 因为 C_h 是连通集 G 在连续映射下的像, 从而 C_h 连通. H 的正规性表明 $C_h \subseteq H$. H 的离散性与 C_h 的连通性表明 C_h 是独点集. 又显然 $h \in C_h$, 从而 $C_h = \{h\}$, 从而 h 属于群 G 的中心. □

定理 1.22. 设 G 是连通李群.

1. 万有覆盖 $\widetilde{G}$ 是李群.
2. 若 $\pi\colon \widetilde{G} \to G$ 为覆盖映射, $\widetilde{Z} := \ker\pi$, 则 $\widetilde{Z}$ 是 $\widetilde{G}$ 的离散子群, 且包含于 G 的中心.
3. π 诱导群同构与微分同胚 $G \cong \widetilde{G}/\widetilde{Z}$.
4. $\pi_1(G) \cong \widetilde{Z}$.

证明. 由于覆盖空间具有提升性质 [对任何连通且单连通的光滑流形 M 以及光滑映射 $f\colon M \to G$, 取定 $m_0 \in M$ 以及 $g_0 \in \pi^{-1}(f(m_0))$, 都存在唯一光滑映射 $\widetilde{f}\colon M \to \widetilde{G}$, 使得 $\pi \circ \widetilde{f} = f$ 以及 $\widetilde{f}(m_0) = g_0$] 可将 G 的李群结构提升为 $\widetilde{G}$ 的李群结构, 并且使得 π 为李群同构. 为说明这一点, 考虑映射 $s\colon \widetilde{G} \times \widetilde{G} \to G$, 使得 $s(\widetilde{g}, \widetilde{h}) = \pi(\widetilde{g})\pi(\widetilde{h})^{-1}$, 然后任意取定一个 $\widetilde{e} \in \pi^{-1}(e)$. 则存在唯一的提升映射 $\widetilde{s}\colon \widetilde{G} \times \widetilde{G} \to \widetilde{G}$ 使得 $\pi \circ \widetilde{s} = s$. 接下来定义 $\widetilde{G}$ 的群结构, 令 $\widetilde{h}^{-1} := \widetilde{s}(\widetilde{e}, \widetilde{h})$ 以及 $\widetilde{g}\widetilde{h} := \widetilde{s}(\widetilde{g}, \widetilde{h}^{-1})$. 可以直接验证这是 $\widetilde{G}$ 的李群结构, 且使得 π 是李群同态 [习题 1.21] .

从而我们构造了连通且单连通的李群 $\widetilde{G}$, 并且覆盖映射 $\pi\colon \widetilde{G} \to G$ 同时也是李群同态. 从而 $\widetilde{Z} := \ker\pi$ 是 $\widetilde{G}$ 的离散正规子群, 因此由引理1.21可知它包含于 G 的中心. 从而 π 诱导了 $\widetilde{G}/\widetilde{Z}$ 与 G 的微分同胚. 最后再由覆盖空间, deck 变换的理论的标准结果 [见 [8]] 容易得到 $\pi_1(G)$. □

引理 1.23. $\mathrm{Sp}(1)$ 与 $\mathrm{SU}(2)$ 是单连通的, 且彼此同构. 它们都是 $\mathrm{SO}(3)$ 的单连通覆盖, 从而 $\mathrm{SO}(3)$ 同构于 $\mathrm{Sp}(1)/\{\pm 1\}$ 或者 $\mathrm{SU}(2)/\{\pm I\}$.

证明. §1.1.4.3 的 $\widetilde{\vartheta}$ 给出了 $\mathrm{Sp}(1)$ 与 $\mathrm{SU}(2)$ 的同构. 由于它们都拓扑同胚于 S^3, 从而引理前部分得证.

至于后半部分, 定义 $\mathbb{H}$ 上的实内积 $(,)$, 满足 $(u,v)=\mathrm{Re}(u\overline{v}), \forall\, u,v\in\mathbb{H}$. 通过取定正交基 $\{1,\mathrm{i},\mathrm{j},\mathrm{k}\}$, 我们将 $\mathbb{H}$ 等同于 $\mathbb{R}^4$, 此时 $(,)$ 为 $\mathbb{R}^4$ 的标准欧氏内积. 记 $1^{\perp}:=\mathrm{Im}(\mathbb{H}):=\{v\in\mathbb{H}\,|\,(1,v)=0\}$ 为**纯虚四元数**集合, 它也是由 $\{\mathrm{i},\mathrm{j},\mathrm{k}\}$ 张成的 $\mathbb{R}$-线性子空间. 特别地, 我们将 $\mathrm{O}(3)$ 等同于 $\mathrm{O}(\mathrm{Im}(\mathbb{H}))\equiv\{\mathbb{R}\text{-线性变换}\, T\colon \mathrm{Im}(\mathbb{H})\to\mathrm{Im}(\mathbb{H})\,|\,(Tu,Tv)=(u,v), \forall\, u,v\in\mathrm{Im}(\mathbb{H})\}$, 并且把连通分支 $\mathrm{O}(\mathrm{Im}(\mathbb{H}))^0$ 等同于 $\mathrm{SO}(3)$.

定义光滑同态 $\mathrm{Ad}\colon \mathrm{Sp}(1)\to\mathrm{O}(\mathrm{Im}(\mathbb{H}))^0$, 为 $(\mathrm{Ad}(g))(u)=gu\overline{g}, \forall\, g\in\mathrm{Sp}(1), u\in\mathrm{Im}(\mathbb{H})$. 为说明这是良定的, 首先将 $\mathrm{Ad}(g)$ 视为 $\mathbb{H}$ 上的 $\mathbb{R}$-线性变换. 由 $g\overline{g}=1$ $(\forall\, g\in\mathrm{Sp}(1))$ 可知 $\mathrm{Ad}(g)$ 保持内积 $(,)$ 不变. 又由于 $\mathrm{Ad}(g)$ 固定 1, 从而 $\mathrm{Ad}(g)$ 保持 $\mathrm{Im}(\mathbb{H})$. 又由 $\mathrm{Sp}(1)$ 的连通性可得 $\mathrm{Ad}(g)\in\mathrm{O}(\mathrm{Im}(\mathbb{H}))^0$.

众所周知 $\mathrm{SO}(3)$ 由旋转变换构成 [习题 1.22] . 为说明 Ad 是满射, 只需说明所有的旋转都在 Ad 的像集当中. 对于单位向量 $v\in\mathrm{Im}(\mathbb{H})$, 则可将 v 扩充为 $\mathrm{Im}(\mathbb{H})$ 的一组基 $\{v,u,w\}$, 使得它们满足与 $\{\mathrm{i},\mathrm{j},\mathrm{k}\}$ 相同的乘法运算性质. 通过简单计算, 容易证明 $\mathrm{Ad}(\cos\theta+v\sin\theta)$ 保持 v 不变, 且限制在 uw 平面上是旋转角度 2θ 的变换 [习题 1.23] . 因此 Ad 是满射. 同样的计算也易知 $\ker\mathrm{Ad}=\{\pm1\}$. 因为 [连通的] 单连通覆盖是唯一的, 从而证毕. □

在 §6.33 节将发展一套直接计算 $\pi_1(G)$ 的方法. 而现在我们利用高阶同伦正合列来计算典型紧李群的基本群.

定理 1.24.

1. $\pi_1(\mathrm{SO}(2))\cong\mathbb{Z}$, 而当 $n\geq 3$ 时 $\pi_1(\mathrm{SO}(n))\cong\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.
2. 当 $n\geq 2$ 时 $\mathrm{SU}(n)$ 是单连通的.
3. 当 $n\geq 1$ 时 $\mathrm{Sp}(n)$ 是单连通的.

证明. 先看 $\mathrm{SO}(n)$. 首先 $\mathrm{SO}(2)\cong S^1$, $\pi_1(\mathrm{SO}(2))\cong\mathbb{Z}$. 回忆定理1.20里面给出了 $\mathrm{SO}(n)$ 在 S^{n-1} 上的作用, 且该作用的稳定化子同构于 $\mathrm{SO}(n-1)$. 于是有正合列 $\{1\}\to\mathrm{SO}(n-1)\to\mathrm{SO}(n)\to S^{n-1}\to\{1\}$, 它诱导了高阶同伦群的长正合列 [见

[51] p.296]

$$\cdots \to \pi_2(S^{n-1}) \to \pi_1(\mathrm{SO}(n-1)) \to \pi_1(\mathrm{SO}(n)) \to \pi_1(S^{n-1}) \to \cdots$$

当 $n \geq 3$ 时, $\pi_1(\mathrm{SO}(n-1))$ 是平凡的, 从而正合列为

$$\pi_2(S^{n-1}) \to \pi_1(\mathrm{SO}(n-1)) \to \pi_1(\mathrm{SO}(n)) \to \{1\}.$$

因为当 $n \geq 4$ 时 $\pi_2(S^{n-1})$ 平凡, 从而利用上述正合列归纳易得 $\pi_1(\mathrm{SO}(n)) \cong \pi_1(\mathrm{SO}(3)), n \geq 4$. 从而只需证明 $\pi_1(\mathrm{SO}(3)) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, 而这由引理1.23与定理1.22直接得到.

对于 $\mathrm{SU}(n)$, 如定理1.20, 有正合列 $\{1\} \to \mathrm{SU}(n-1) \to \mathrm{SU}(n) \to S^{2n-1} \to \{1\}$. 由于当 $n \geq 3$ 时 $\pi_1(S^{2n-1})$ 与 $\pi_2(S^{2n-1})$ 是平凡的 [其实 $n = 2$ 也如此, 但这里用不到] , 高阶同伦群的长正合列可得 $\pi_1(\mathrm{SU}(n)) \cong \pi_1(\mathrm{SU}(2)), n \geq 2$. 而引理1.23表明 $\pi_1(\mathrm{SU}(2))$ 平凡.

至于 $\mathrm{Sp}(n)$, 相应的正合列为 $\{1\} \to \mathrm{Sp}(n-1) \to \mathrm{Sp}(n) \to S^{4n-1} \to \{1\}$. 由于 $n \geq 2$ 时 $\pi_1(S^{4n-1})$ 与 $\pi_2(S^{4n-1})$ 都平凡 [$n = 1$ 也如此] , 因此长正合列表明 $\pi_1(\mathrm{Sp}(n)) \cong \pi_1(\mathrm{Sp}(1)), n \geq 1$. 而引理1.23表明 $\pi_1(\mathrm{Sp}(1))$ 平凡. □

作为定理1.22与1.24的直接推论, 当 $n \geq 3$ 时 $\mathrm{SO}(n)$ 存在二叶的的连通, 单连通覆盖空间. 这个单连通李群称为 $\mathrm{Spin}_n(\mathbb{R})$, 它满足如下正合列:

$$\{1\} \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to \mathrm{Spin}_n(\mathbb{R}) \to \mathrm{SO}(n) \to \{I\}. \tag{1.25}$$

引理1.23表明 $\mathrm{Spin}_3(\mathbb{R}) \cong \mathrm{SU}(2) \cong \mathrm{Sp}(1)$. 对于更大的 n, 我们将在 §1.3.2 节显式构造 $\mathrm{Spin}_n(\mathbb{R})$.

1.2.3 习题

习题 1.14 对于连通李群 G, 证明: 即使去掉流形定义当中的第二可数假设, 仍能推出 G 是第二可数的.

习题 1.15 证明李群的开子群一定是闭子群.

习题 1.16 证明 $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ 与 $\mathrm{SL}(n, \mathbb{C})$ 是连通的.

习题 1.17 证明 $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ 有两个连通分支: $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})^0 = \{g \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) \mid \det g > 0\}$,

另一个分支是 $\{g \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) \mid \det g < 0\}$. 此外, 证明 $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$ 是连通的.

习题 1.18 证明 $\mathrm{O}(2n+1) \cong \mathrm{SO}(2n+1) \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ 同时为流形与群的同构. 特别地, $\mathrm{O}(2n+1)$ 有两个连通分支, 其中一个是 $\mathrm{O}(2n+1)^0 = \mathrm{SO}(2n+1)$.

习题 1.19

(a) 证明 $\mathrm{O}(2n) \cong \mathrm{SO}(2n) \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ 是流形的同构. 特别地, $\mathrm{O}(2n)$ 具有两个连通分支, 其中一个为 $\mathrm{O}(2n)^0 = \mathrm{SO}(2n)$.

(b) 证明 $\mathrm{O}(2n)$ 作为群并不 同构于 $\mathrm{SO}(2n) \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$, 而是同构于半直积 $\mathrm{SO}(2n) \rtimes (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$. 在此群同构意义下具体描述 $\mathrm{SO}(2n) \rtimes (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ 的乘法结构.

习题 1.20 证明 $\mathrm{U}(n) \cong (\mathrm{SU}(n) \times S^1)/(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ 同时为群与流形的同构. 特别地, $\mathrm{U}(n)$ 是连通的.

习题 1.21 详细验证定理1.22的证明细节, 尤其是将 G 的李群结构提升到 $\widetilde{G}$ 且使得 $\pi \colon \widetilde{G} \to G$ 为李群同态.

习题 1.22 设 $\mathcal{R}_3 \subseteq \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ 为 $\mathbb{R}^3$ 中所有绕原点的旋转构成的集合. 证明 $\mathcal{R}_3 = \mathrm{SO}(3)$.

习题 1.23

(a) 设 $v \in \mathrm{Im}(\mathbb{H})$ 为单位向量, 证明 v 可以扩充为 $\mathrm{Im}(\mathbb{H})$ 的一组基 $\{v, u, w\}$, 使得它们具有与 $\{\mathrm{i}, \mathrm{j}, \mathrm{k}\}$ 相同的乘法运算性质.

(b) 证明引理1.23中的 $\mathrm{Ad}(\cos\theta + v\sin\theta)$ 保持 v 不动, 且限制在 $\{u, w\}$ 平面上是旋转 2θ 角度的变换.

习题 1.24 记 $\mathfrak{su}(2) := \left\{ \begin{pmatrix} \mathrm{i}x & -\bar{b} \\ b & -\mathrm{i}x \end{pmatrix} \middle| \, b \in \mathbb{C}, \, x \in \mathbb{R} \right\}$, 以及 $(X, Y) = \dfrac{1}{2}\mathrm{tr}(XY^*)$, $\forall X, Y \in \mathfrak{su}(2)$. 再令 $(\mathrm{Ad}\, g)X := gXg^{-1}$, $g \in \mathrm{SU}(2)$, $X \in \mathfrak{su}(2)$. 仿照引理1.23的证明方法, 直接证明 $\mathrm{Ad} \colon \mathrm{SU}(2) \to \mathrm{SO}(3)$ 是良定的, 且给出了 $\mathrm{SU}(2)$ 到 $\mathrm{SO}(3)$ 的 [单连通] 二叶覆盖.

1.3 SO(n) 的二叶覆盖

在 §1.2.2 节末, 我们知道 SO(n), $n \geq 3$ 具有单连通的二叶覆盖, 称为 $\mathrm{Spin}_n(\mathbb{R})$. 在引理1.23的证明过程中, 我们用 Sp(1) 或 SU(2) 来实现 $\mathrm{Spin}_3(\mathbb{R})$. 这之中的关键想法是把 SO(3) 视为 $\mathbb{R}^3$ 的旋转变换群, 然后利用四元数 $\mathbb{H}$ 的结构, 通过共轭作用来实现相差正负号的旋转.

本节将给出 $\mathrm{Spin}_n(\mathbb{R})$ 的一般构造. 构造过程中涉及的代数不再是 $\mathbb{H}$, 而是它的推广, 称为**克利福德代数**, $\mathcal{C}_n(\mathbb{R})$; 此外也不止构造旋转变换, 更要考虑对应于反射变换的共轭作用.

1.3.1 克利福德代数

尽管克利福德代数的理论很容易被推广 [见习题 1.30], 而为达我们的目的, 只考虑配以标准欧氏内积 $(\cdot,\cdot)$ 的 $\mathbb{R}^n$ 的情形就足够了. 回忆 $\mathbb{R}^n$ 上的**张量代数** $\mathcal{T}_n(\mathbb{R}) = \bigoplus_{k=0}^{\infty} \underbrace{\mathbb{R}^n \otimes \mathbb{R}^n \otimes \cdots \otimes \mathbb{R}^n}_{k个}$, 它具有基 $\{1\} \cup \{x_{i_1} \otimes x_{i_2} \otimes \cdots \otimes x_{i_k} \,|\, 1 \leq i_k \leq n\}$, 其中 $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的一组基.

定义 1.26. 克利福德代数 *(Clifford algebra)* *定义为*

$$\mathcal{C}_n(\mathbb{R}) := \mathcal{T}_n(\mathbb{R})/\mathcal{I},$$

其中 $\mathcal{I}$ 是 $\mathcal{T}_n(\mathbb{R})$ 的由如下元素生成的理想:

$$\left\{(x \otimes x + |x|^2) \,\middle|\, x \in \mathbb{R}^n\right\}.$$

我们约定, 用

$$x_1 x_2 \cdots x_k$$

来表示对于克利福德代数中的元素 $x_1 \otimes x_2 \otimes \cdots \otimes x_k + \mathcal{I} \in \mathcal{C}_n(\mathbb{R})$, 其中 $x_1, x_2, ..., x_n \in \mathbb{R}^n$.

特别地, 对于 $x \in \mathbb{R}^n$, 在 $\mathcal{C}_n(\mathbb{R})$ 中成立

$$x^2 = -|x|^2. \tag{1.27}$$

利用等式 $xy + yx = (x+y)^2 - x^2 - y^2$, $x, y \in \mathbb{R}^n$, 从而易知(**1.27**)等价于: 对任意 $x, y \in \mathbb{R}^n$, 在 $\mathcal{C}_n(\mathbb{R})$ 中成立

$$xy + yx = -2(x, y). \tag{1.28}$$

可以直接验证 [留作习题 1.25]

$$\mathcal{C}_0(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}, \quad \mathcal{C}_1(\mathbb{R}) \cong \mathbb{C}, \quad \mathcal{C}_2(\mathbb{R}) \cong \mathbb{H}.$$

更一般地, 记 $\mathbb{R}^n$ 的**标准正交基**为 $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$, 其中 $e_k = (0, ..., 0, 1, 0, ..., 0)$ 为第 k 分量为 1, 其余分量为 0 的向量. 显然 $\{1\} \cup \{e_{i_1} e_{i_2} \cdots e_{i_k} \,|\, k > 0, 1 \le i_k \le n\}$ 张成 $\mathcal{C}_n(\mathbb{R})$, 但这有冗余. 首先注意 $\mathcal{C}_n(\mathbb{R})$ 继承了 $\mathcal{T}_n(\mathbb{R})$ 的由分次结构所诱导的**滤链** (filtration) 结构. 相差低次项意义下, 可利用关系(**1.28**)来交换 e_{i_j} 的乘法次序, 从而可以拿掉(**1.27**)的乘积 $e_{i_1} e_{i_2} \cdots e_{i_k}$ 中重复出现的 e_{i_j}. 对滤链的次数如此归纳下去, 可知

$$\{1\} \cup \{e_{i_1} e_{i_2} \cdots e_{i_k} \,|\, 1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_k \le n,\ k \ge 1\} \tag{1.29}$$

张成 $\mathcal{C}_n(\mathbb{R})$, 从而 $\dim \mathcal{C}_n(\mathbb{R}) \le 2^n$. 事实上, 我们马上就要证明(**1.29**)构成 $\mathcal{C}_n(\mathbb{R})$ 的一组基, 从而 $\dim \mathcal{C}_n(\mathbb{R}) = 2^n$. 我们的做法是构造一个线性同构 $\Psi\colon \mathcal{C}_n(\mathbb{R}) \to \bigwedge \mathbb{R}^n$, 其中 $\bigwedge \mathbb{R}^n = \bigoplus_{k=0}^{n} \bigwedge^k \mathbb{R}^n$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的**外代数**.

首先, 我们回忆一些多重线性代数.

定义 1.30.

1. 对于 $x \in \mathbb{R}^n$, 定义**外乘** $\varepsilon(x)\colon \bigwedge^k \mathbb{R}^n \to \bigwedge^{k+1} \mathbb{R}^n$ 如下:

$$(\varepsilon(x))(y) = x \wedge y, \quad \forall y \in \bigwedge^k \mathbb{R}^n.$$

2. 对于 $x \in \mathbb{R}^n$, 定义**内乘** $\iota(x)\colon \bigwedge^k \mathbb{R}^n \to \bigwedge^{k-1} \mathbb{R}^n$ 如下:

$$(\iota(x))(y_1 \wedge y_2 \wedge \cdots \wedge y_k) = \sum_{i=1}^{k} (-1)^{i+1} (x, y_i) y_1 \wedge y_2 \wedge \cdots \wedge \widehat{y_i} \wedge \cdots \wedge y_k,$$

其中 $y_i \in \mathbb{R}^n$, $\widehat{y_i}$ 是指去掉该项.

由多重线性代数的知识, 容易验证 [习题 1.26] $\iota(x)$ 是 $\varepsilon(x)$ 关于 $\bigwedge \mathbb{R}^n$ 的自然双线性型的伴随算子. 特别地, $\varepsilon(x)^2 = \iota(x)^2 = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$. 此外也容易验证 [习题 1.26] 如下关系:

$$\varepsilon(x)\iota(x) + \iota(x)\varepsilon(x) = m_{|x|^2}, \tag{1.31}$$

其中 $m_{|x|^2}$ 是数乘 $|x|^2$ 的标量算子.

定义 1.32.

1. 对于 $x \in \mathbb{R}^n$, 定义算子 $L_x\colon \bigwedge \mathbb{R}^n \to \bigwedge \mathbb{R}^n$ 为 $L_x := \varepsilon(x) - \iota(x)$.
2. 对于 $x \in \mathbb{R}^n$, 记 $\Phi(x) := L_x \in \mathrm{End}(\bigwedge \mathbb{R}^n)$. 这自然诱导代数同态 $\mathcal{T}_n(\mathbb{R}) \to \mathrm{End}(\bigwedge \mathbb{R}^n)$, 将该同态记作 Φ.

注意(**1.31**)式表明 $L_x^2 + m_{|x|^2} = 0$, 从而 $\Phi(\mathcal{I}) = 0$. 特别地, Φ 的定义可下降至 $\mathcal{C}_n(\mathbb{R})$.

定义 1.33.

1. 不妨稍微混用记号, 记 $\Phi\colon \mathcal{C}_n(\mathbb{R}) \to \mathrm{End}(\bigwedge \mathbb{R}^n)$ 为原有的 $\Phi\colon \mathcal{T}_n(\mathbb{R}) \to \mathrm{End}(\bigwedge \mathbb{R}^n)$ 所诱导的定义在 $\mathcal{C}_n(\mathbb{R})$ 上的同态.
2. 定义映射 $\Psi\colon \mathcal{C}_n(\mathbb{R}) \to \bigwedge \mathbb{R}^n$, 使得 $\Psi(v) = (\Phi(v))(1)$.

例如, 对于 $x_i \in \mathbb{R}^n$, $\Psi(x_1) = (\varepsilon(x_1) - \iota(x_1))1 = x_1$, 以及

$$
\begin{aligned}
\Psi(x_1x_2) &= (\varepsilon(x_1) - \iota(x_1))(\varepsilon(x_2) - \iota(x_2))1 \\
&= (\varepsilon(x_1) - \iota(x_1))x_2 \\
&= x_1 \wedge x_2 - (x_1, x_2).
\end{aligned}
$$

一般地,

$$
\Psi(x_1x_2\cdots x_k) = x_1 \wedge x_2 \wedge \cdots \wedge x_k + \left(\bigoplus_{i\geq 1} \bigwedge^{k-2i} \mathbb{R}^n \text{ 当中的某元素}\right). \tag{1.34}
$$

对 k 归纳容易证明上式 [留作习题 1.34] . 一样地对次数归纳, 从(**1.34**)式立刻得出 Ψ 为满射. 再计算一下维数, 可知 Ψ 是线性同构. 综上所述:

定理 1.35. 映射 $\Psi\colon \mathcal{C}_n(\mathbb{R}) \to \bigwedge \mathbb{R}^n$ 是线性空间的同构, 从而 $\dim \mathcal{C}_n(\mathbb{R}) = 2^n$, 并且(**1.29**)构成 $\mathcal{C}_n(\mathbb{R})$ 的一组基.

于是在标准正交基 [或任何单位正交基] 下, $\mathcal{C}_n(\mathbb{R})$ 的代数结构格外简单. 具体地说, $\mathcal{C}_n(\mathbb{R})$ 由以下向量 $\mathbb{R}$-线性张成: $\{1\} \cup \left\{e_{i_1}e_{i_2}\cdots e_{i_k} \middle| 1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n\right\}$, 其代数关系由以下生成: $e_i^2 = -1$, $e_ie_j = -e_je_i$, $\forall i \neq j$.

1.3.2 $\mathrm{Spin}_n(\mathbb{R})$ 与 $\mathrm{Pin}_n(\mathbb{R})$

接下来, 注意到 $\mathcal{T}_n(\mathbb{R})$ 能够分解为如下两个子空间的直和: 由 $\mathbb{R}^n$ 中偶数个向量的张量积所张成的子空间, 以及由 $\mathbb{R}^n$ 中奇数个向量的张量积所张成的子空间. 由于 $\mathcal{I}$ 由这种偶数次的元素生成, 从而这个子空间分解能够自然地下降到 $\mathcal{C}_n(\mathbb{R})$ 上.

定义 1.36.

1. 记 $\mathcal{C}_n^+(\mathbb{R})$ 是 $\mathcal{C}_n(\mathbb{R})$ 的由所有形如 $\mathbb{R}^n$ 中**偶数**个向量的乘积的元素所张成的子代数.
2. 记 $\mathcal{C}_n^-(\mathbb{R})$ 是 $\mathcal{C}_n(\mathbb{R})$ 的由所有形如 $\mathbb{R}^n$ 中**奇数**个向量的乘积的元素所张成的子空间. 于是成立线性空间直和分解 $\mathcal{C}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{C}_n^+(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{C}_n^-(\mathbb{R})$.
3. 定义 $\mathcal{C}_n(\mathbb{R})$ 的自同态 α, 使得 α 在 $\mathcal{C}_n^\pm$ 上的限制分别为数乘 ± 1. 称该 α 为 $\mathcal{C}_n(\mathbb{R})$ 的**主对合** *(main involution)*.
4. 定义 $\mathcal{C}_n(\mathbb{R})$ 上的反对合运算 $*$, 使得

$$(x_1 x_2 \cdots x_k)^* = (-1)^k x_k \cdots x_2 x_1, \quad x_i \in \mathbb{R}^n.$$

该运算称为 $\mathcal{C}_n(\mathbb{R})$ 的**共轭** *(conjugation)*.

接下来的定义适用于 $n \geq 1$ 的情形. 不过, 由于(**1.25**)式, 我们只关心 $n \geq 3$ 的情形. [$n = 1, 2$ 时的细节留作习题 1.34] .

定义 1.37.

1. 令 $\mathrm{Spin}_n(\mathbb{R}) := \left\{g \in \mathcal{C}_n^+(\mathbb{R}) \,\middle|\, gg^* = 1,\, gxg^* \in \mathbb{R}^n,\, \forall x \in \mathbb{R}^n\right\}$.
2. 令 $\mathrm{Pin}_n(\mathbb{R}) := \{g \in \mathcal{C}_n(\mathbb{R}) \,|\, gg^* = 1,\, \alpha(g)xg^* \in \mathbb{R}^n,\, \forall x \in \mathbb{R}^n\}$. 特别地, 注意 $\mathrm{Spin}_n(\mathbb{R}) \subseteq \mathrm{Pin}_n(\mathbb{R})$.
3. 对于 $g \in \mathrm{Pin}_n(\mathbb{R})$ 以及 $x \in \mathbb{R}^n$, 定义群同态 $\mathcal{A}\colon \mathrm{Pin}_n(\mathbb{R}) \to \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$, 使得 $(\mathcal{A}g)x = \alpha(g)xg^*$. 特别地, 当 $g \in \mathrm{Spin}_n(\mathbb{R})$ 时, $(\mathcal{A}g)x = gxg^*$.

把左乘 $v \in \mathcal{C}_n(\mathbb{R})$ 的运算视为 $\mathrm{End}(\mathcal{C}_n(\mathbb{R}))$ 中的元素, 从而利用行列式容易说明 $\mathcal{C}_n(\mathbb{R})$ 中的可逆元构成的集合构成 $\mathcal{C}_n(\mathbb{R})$ 的开子群. 从而易知可逆元构成的集合是李群. 又由于 $\mathrm{Spin}_n(\mathbb{R})$ 与 $\mathrm{Pin}_n(\mathbb{R})$ 都是该李群的闭子群, 从而推论1.8 表明 $\mathrm{Spin}_n(\mathbb{R})$ 与 $\mathrm{Pin}_n(\mathbb{R})$ 也都是李群.

引理 1.38. *$\mathcal{A}$ 为从 $\mathrm{Pin}_n(\mathbb{R})$ 到 $\mathrm{O}(n)$ 的覆盖映射, 并且 $\ker \mathcal{A} = \{\pm 1\}$. 从而有如下正合列:*

$$\{1\} \to \{\pm 1\} \to \mathrm{Pin}_n(\mathbb{R}) \xrightarrow{\mathcal{A}} \mathrm{O}(n) \to \{I\}.$$

证明.

- 断言: $\mathcal{A}$ 将 $\mathrm{Pin}_n(\mathbb{R})$ 映入 $\mathrm{O}(n)$. 利用(**1.27**)式, 以及共轭运算 $*$ 在 $\mathbb{R}^n$ 上的限制是乘以 -1, 计算如下:

$$\begin{aligned} |(\mathcal{A}g)x|^2 &= -\left(\alpha(g)xg^*\right)^2 = -\left(\alpha(g)xg^*\right)\left(\alpha(g)xg^*\right) = \alpha(g)xg^*\left(\alpha(g)xg^*\right)^* \\ &= \alpha(g)xg^*gx^*\alpha(g)^* = \alpha(g)xx^*\alpha(g)^* = -\alpha(g)x^2\alpha(g)^* = |x|^2\alpha(gg^*) \\ &= |x|^2. \end{aligned}$$

  因此 $\mathcal{A}g \in \mathrm{O}(n)$.

- 断言: $\mathcal{A}\colon \mathrm{Pin}_n(\mathbb{R}) \to \mathrm{O}(n)$ 为满射. 众所周知 [见习题 1.32], 正交矩阵可以写成一系列反射的乘积. 从而只需证明反射变换都属于 $\mathcal{A}$ 的像集. 对于 $\mathbb{R}^n$ 中的单位向量 $x \in S^{n-1}$, 记 r_x 为关于与 x 垂直的超平面的反射变换. 注意到 $xx^* = -x^2 = |x|^2 = 1$, 因此 $\alpha(x)xx^* = -xxx^* = -x$. 若 $y \in \mathbb{R}^n$ 使得 $(x, y) = 0$, 则由(**1.28**)可知 $xy = -yx$, 从而 $\alpha(x)yx^* = xyx = -x^2y = y$. 因此 $x \in \mathrm{Pin}_n(\mathbb{R})$, 并且 $\mathcal{A}x = r_x$.

- 断言: $\ker\mathcal{A} = \{\pm 1\}$. 因为 $\mathbb{R} \cap \mathrm{Pin}_n(\mathbb{R}) = \{\pm 1\}$, 而等号右边显然包含于 $\ker\mathcal{A}$, 因此只需证明 $\ker\mathcal{A} \subseteq \mathbb{R}$. 若 $g \in \mathrm{Pin}_n(\mathbb{R})$ 满足 $\mathcal{A}g = I$, 则 $g^* = g^{-1}$, 且对任意 $x \in \mathbb{R}^n$, $\alpha(g)x = xg$. 将 g 在标准基(**1.29**)下展开, 易知 g 可唯一地表示为 $g = e_1a + b$, 其中 a, b 为 1 与 $e_2, e_3, ..., e_n$ 的线性组合. 考虑 $x = e_1$ 的特殊情形, 此时 $\alpha(e_1a + b)e_1 = e_1(e_1a + b)$, 于是 $-e_1\alpha(a)e_1 + \alpha(b)e_1 = -a + e_1b$. 因为 a, b 都不含有 e_1, 从而 $\alpha(a)e_1 = e_1a$, $\alpha(b)e_1 = e_1b$. 因此 $a + e_1b = -a + e_1b$, 这表明 $a = 0$, 从而 g 的表达式中不含有 e_1. 类似地, 同理可得 g 的表达式中不含有 e_k, $1 \le k \le n$, 从而 $g \in \mathbb{R}$.

- 断言: $\mathcal{A}$ 为覆盖映射. 因为 $\ker\mathcal{A} = \{\pm 1\}$, 从而由定理1.10可知 $\mathcal{A}$ 为常秩映射, 记 $N = \operatorname{rank}\mathcal{A} = \dim\mathrm{Pin}_n(\mathbb{R})$. 对任意 $g \in \mathrm{Pin}_n(\mathbb{R})$, 微分几何学中的秩定理 [见 [8]] 断言存在 g 的局部坐标 (U, φ) 以及 $\mathcal{A}g$ 的局部坐标 (V, ψ), 使得 $\psi \circ \mathcal{A} \circ \varphi^{-1}(x_1, ..., x_N) = (x_1, ..., x_N, 0, ..., 0)$, 这里共有 $\dim\mathrm{O}(n) - N$ 个 0. 利用 $\mathrm{Pin}_n(\mathbb{R})$ 的第二可数性以及 Baire 纲定理, $\mathcal{A}$ 为满射意味着 $\dim\mathrm{O}(n) = N$. 特别地, $\mathcal{A}$ 在 U 上的限制映射是映到 V 的微分同胚. 因为 $\ker\mathcal{A} = \{\pm 1\}$, 从而 $\mathcal{A}$ 也是从 $-U$ 到 V 的微分同胚. 最后, $\mathcal{A}$ 限制在 U 上是单射表明 $(-U) \cap U = \varnothing$, 从而 U 和 $-U$ 是 $\mathcal{A}^{-1}(V)$ 的全部两个连通分支.

□

引理 1.39. $\mathrm{Pin}_n(\mathbb{R})$ 与 $\mathrm{Spin}_n(\mathbb{R})$ 为紧李群，并且

$$\begin{aligned}\mathrm{Pin}_n(\mathbb{R}) &= \left\{x_1\cdots x_k \,\middle|\, x_i\in S^{n-1},\ 1\le k\le 2n\right\}\\ \mathrm{Spin}_n(\mathbb{R}) &= \left\{x_1x_2\cdots x_{2k} \,\middle|\, x_i\in S^{n-1},\ 1\le 2k\le 2n\right\},\end{aligned}$$

并且 $\mathrm{Spin}_n(\mathbb{R})=\mathcal{A}^{-1}(\mathrm{SO}(n))$.

证明. 在引理1.38的证明中我们知道，对任意 $x\in S^{n-1}\in\mathrm{Spin}_n(\mathbb{R})$ 都有 $\mathcal{A}x=r_x$. 由于 $\mathrm{O}(n)$ 中的元素都能写成至多 $2n$ 个反射变换的乘积，并且 $\mathcal{A}$ 为满同态，$\ker\mathcal{A}=\{\pm1\}$，所以 $\mathrm{Pin}_n(\mathbb{R})=\left\{x_1\cdots x_k \,\middle|\, x_i\in S^{n-1}, 1\le k\le 2n\right\}$. 从而由关系式 $\mathrm{Spin}_n(\mathbb{R})=\mathrm{Pin}_n(\mathbb{R})\cap\mathcal{A}_n^+(\mathbb{R})$ 立刻得出 $\mathrm{Spin}_n(\mathbb{R})=\{x_1x_2\cdots x_{2k}\mid x_i\in S^{n-1}, 1\le 2k\le 2n\}$. 特别地，$\mathrm{Pin}_n(\mathbb{R})$ 与 $\mathrm{Spin}_n(\mathbb{R})$ 紧致. 此外，因为 $\det r_x=-1$，从而最后一个等式等价于说 $\mathrm{Spin}_n(\mathbb{R})=\mathcal{A}^{-1}(\mathrm{SO}(n))$. □

定理 1.40.

1. 当 $n\ge2$ 时，$\mathrm{Pin}_n(\mathbb{R})$ 具有两个连通分支，且 $\mathrm{Spin}_n(\mathbb{R})=\mathrm{Pin}_n(\mathbb{R})^0$.
2. 当 $n\ge2$ 时 $\mathrm{Spin}_n(\mathbb{R})$ 连通，且 $n\ge3$ 时 $\mathrm{Spin}_n(\mathbb{R})$ 是 $\mathrm{SO}(n)$ 的连通，单连通的二叶覆盖，且 $\mathcal{A}$ 为相应的覆盖映射，$\ker\mathcal{A}=\{\pm1\}$. 换言之，有如下正合列：

$$\{1\}\to\{\pm1\}\to\mathrm{Spin}_n(\mathbb{R})\xrightarrow{\mathcal{A}}\mathrm{SO}(n)\to\{I\}.$$

证明. 当 $n\ge2$ 时，考虑道路 $t\mapsto\gamma(t)=\cos t+e_1e_2\sin t$. 注意 $\gamma(t)=e_1(-e_1\cos t+e_2\sin t)$，从而 $\gamma(t)\in\mathrm{Spin}_n(\mathbb{R})$，从而 $\{\pm1\}$ 两点之间可被 $\mathrm{Spin}_n(\mathbb{R})$ 中的道路相连. 由引理1.38与1.39，我们知道 $\mathrm{Spin}_n(\mathbb{R})$ 时 $\mathrm{SO}(n)$ 的二叶覆盖，因此 $\mathrm{Spin}_n(\mathbb{R})$ 连通. 于是，当 $n\ge3$ 时，定理1.24与连通，单连通覆盖的唯一性表明 $\mathrm{Spin}_n(\mathbb{R})$ 是 $\mathrm{SO}(n)$ 的连通，单连通覆盖.

最后，取定 $x_0\in S^{n-1}$. 显然 $\mathrm{Pin}_n(\mathbb{R})=x_0\,\mathrm{Spin}_n(\mathbb{R})\coprod\mathrm{Spin}_n(\mathbb{R})$. 我们知道 $\mathcal{A}$ 是从 $\mathrm{Pin}_n(\mathbb{R})$ 到 $\mathrm{O}(n)$ 的连续满射. 因为 $O(n)$ 不连通，但 $x_0\,\mathrm{Spin}_n(\mathbb{R})$ 与

$\mathrm{Spin}_n(\mathbb{R})$ 连通, 于是 $x_0 \,\mathrm{Spin}_n(\mathbb{R}) \coprod \mathrm{Spin}_n(\mathbb{R})$ 不可能连通. 因此 $x_0 \,\mathrm{Spin}_n(\mathbb{R})$ 与 $\mathrm{Spin}_n(\mathbb{R})$ 是 $\mathrm{Pin}_n(\mathbb{R})$ 的两个连通分支. □

1.3.3 习题

习题 1.25 证明 $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}$, $\mathcal{C}_1(\mathbb{R}) \cong \mathbb{C}$, $\mathcal{C}_2(\mathbb{R}) \cong \mathbb{H}$.

习题 1.26

(a) 考虑 $\bigwedge \mathbb{R}^n$ 的如下内积: 对于 $k \neq l$, 则 $(x_1 \wedge x_2 \wedge \cdots \wedge x_k, y_1 \wedge y_2 \wedge \cdots \wedge \cdots \wedge y_l) = 0$; 而 $k = l$ 时该式等于 $\det(x_i, y_j)$. 证明: 在该内积意义下, $\iota(x) = \varepsilon(x)^*$.

(b) 证明: 对任意 $x \in \mathbb{R}^n$, $\varepsilon(x)\iota(x) + \iota(x)\varepsilon(x) = m_{|x|^2}$.

习题 1.27 证明(**1.34**)式与定理1.35.

习题 1.28 设 $u, v \in \mathcal{C}_n(\mathbb{R})$. 证明: $uv = 1$ 当且仅当 $vu = 1$.

习题 1.29 设 $n \geq 3$. 证明多项式 $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2$ 在 $\mathbb{C}$ 上不可约. 然而, $x_1^2 + x_2^2 + \cdots x_n^2$ 在 $\mathcal{C}_n(\mathbb{R})$ 中可以分解为一次因式的乘积.

习题 1.30 设 $(\cdot,\cdot)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 或 $\mathbb{C}^n$ 上的任意的对称双线性型. 试推广克利福德代数的定义1.26, 但这里要把理想 $\mathcal{I}$ 的生成元 $x \otimes x + |x|^2$ 改成 $x \otimes x - (x, x)$. 然后证明定理1.35的相应版本也成立. 如果 $\mathbb{R}^n$ 上的双线性型 $(\cdot,\cdot)$ 的符号为 p, q, 则相应的克利福德代数记作 $\mathcal{C}_{p,q}(\mathbb{R})$ [于是 $\mathcal{C}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{C}_{0,n}(\mathbb{R})$] ; 如果 $(\cdot,\cdot)$ 是 $\mathbb{C}^n$ 上的负点乘, 相应的克利福德代数记作 $\mathcal{C}_n(\mathbb{C})$.

习题 1.31 证明: 映射 $\mathcal{C}_{n-1}(\mathbb{R}) \to \mathcal{C}_n^+(\mathbb{R})$, $a + b \mapsto a + be_n$, $\forall a \in \mathcal{C}_{n-1}^+$, $b \in \mathcal{C}_{n-1}^-$, 诱导了代数同构 $\mathcal{C}_{n-1}(\mathbb{R}) \cong \mathcal{C}_n^+(\mathbb{R})$. 从而推出 $\dim \mathcal{C}_n^+(\mathbb{R}) = 2^{n-1}$.

习题 1.32 通过对 n 归纳来证明任何 $g \in \mathrm{O}(n)$ 都能表示为至多 $2n$ 个反射变换的复合. [提示: 对于 $g \in \mathrm{O}(n)$, 若 $ge_1 \neq e_1$, 则存在反射 r_1, 使得 $r_1 g e_1 = e_1$. 然后利用正交性, 归纳.]

习题 1.33 证明: $\mathcal{A}(\cos t + e_1 e_2 \sin t) = \begin{pmatrix} \cos 2t & -\sin 2t & 0 \\ \sin 2t & \cos 2t & 0 \\ 0 & 0 & I_{n-2} \end{pmatrix}$.

习题 1.34

(a) 在同构 $\mathcal{C}_1(\mathbb{R}) \cong \mathbb{C}$, $e_1 \mapsto i$ 意义下, 证明 $\mathrm{Pin}_1(\mathbb{R}) = \{\pm 1, \pm i\}$, $\mathrm{Spin}_1(\mathbb{R}) = \{\pm 1\}$, 并且 $\mathcal{A}(\pm 1) = I$, $\mathcal{A}(\pm i) = -I$.

(b) 在同构 $\mathcal{C}_2(\mathbb{R}) \cong \mathbb{H}$, $e_1 \mapsto i$, $e_2 \mapsto j$, $e_1e_2 \mapsto k$ 意义下, 证明 $\mathrm{Pin}_2(\mathbb{R}) = \{\cos\theta + k\sin\theta, i\sin\theta + j\cos\theta\}$, 以及 $\mathrm{Spin}_2(\mathbb{R}) = \{\cos\theta + k\sin\theta\}$, 并且 $\mathcal{A}(\cos\theta + k\sin\theta)$ 为在 ij-平面上旋转 2θ 的变换.

习题 1.35 证明: 当 n 为奇数时, $\mathrm{Spin}_n(\mathbb{R})$ 的中心为 $\{\pm 1\}$; 而当 n 为偶数时, $\mathrm{Spin}_n(\mathbb{R})$ 的中心为 $\{\pm 1, \pm e_1e_2\cdots e_n\}$.

习题 1.36

(a) 把定义1.36, 1.37中的 $\mathbb{R}$ 换成 $\mathbb{C}$, 从而定义 $\mathrm{Spin}_n(\mathbb{C})$ [参考习题 1.30] . 仿照定理1.40证明相应的 $\mathcal{A}$ 使得 $\mathrm{Spin}_n(\mathbb{C})$ 为 $SO(n,\mathbb{C}) := \{g \in SL(n,\mathbb{C}) \mid (gx, gy) = (x,y), \forall x,y \in \mathbb{C}^n\}$ 的连通二叶覆盖, 其中 $(\cdot,\cdot)$ 为 $\mathbb{C}^n$ 的负点乘.

(b) 把定义1.36, 1.37 中的 $\mathcal{C}_n(\mathbb{R})$ 换成 $\mathcal{C}_{p,q}(\mathbb{R})$ [见习题 1.30] , 从而定义 $\mathrm{Spin}_{p,q}(\mathbb{R})$. 仿照定理1.40证明相应的 $\mathcal{A}$ 使得 $\mathrm{Spin}_{p,q}(\mathbb{R})$ 为 $SO(p,q)^0$ 的二叶覆盖, 其中 $SO(p,q) := \{g \in SL(n,\mathbb{R}) \mid (gx,gy) = (x,y), \forall x,y \in \mathbb{R}^n\}$, $(\cdot,\cdot)$ 为 $\mathbb{R}^n$ 上的符号为 p,q 的双线性型.

(c) 对于 $p,q > 0$, 且不全为 1, 证明 $\mathrm{Spin}_{p,q}(\mathbb{R})$ 是连通的. 而当 $p = q = 1$ 时, $\mathrm{Spin}_{1,1}(\mathbb{R})$ 有两个连通分支.

习题 1.37

(a) 记 $\mathfrak{so}(n) := \{X \in M_{n,n}(\mathbb{R}) \mid X^t = -X\}$, 以及 $\mathfrak{q} = \sum_{i\neq j} \mathbb{R}e_ie_j \subseteq \mathcal{C}_n(\mathbb{R})$. 证明 $\mathfrak{so}(n)$ 与 $\mathfrak{q}$ 都对李括号 $[x,y] = xy - yx$ 运算封闭.

(b) 证明: $E_{ij} - E_{ji} \mapsto \frac{1}{2}e_ie_j$ 诱导了李代数同构 $\mathfrak{so}(n) \to \mathfrak{q}$, 其中 $\{E_{ij}\}$ 为 $M_{n,n}(\mathbb{R})$ 的由矩阵元构成的标准基.

1.4 积分

1.4.1 体积形式

设 $\Phi: M \to N$ 为流形之间的光滑映射, 记 $\mathrm{d}\Phi\colon T_p(M) \to T_{\Phi(p)}(N)$ 为 Φ 的**微分**, 其中 $T_p(M)$ 是 M 在 p 点处的**切空间**. 再记 $\Phi^*\colon T^*_{\Phi(p)}(N) \to T^*_p(M)$ 为映射 Φ 的**拉回**, 其中 $T^*_p(M)$ 为 M 在 p 处的**余切空间**. 像通常那样, 我们把拉回的概念拓展到外代数上, 得到外代数同态 $\Phi^*\colon \bigwedge T^*_{\Phi(p)}(N) \to \bigwedge T^*_p(M)$.

对于 n 维流形 M, 若存在处处非零的光滑 n-形式 $\omega_M \in \bigwedge^*_n(M)$, 则称 M 是**可定向的**, 这里的 $\bigwedge^*_n(M)$ 为 M 的余切丛的**外 n-丛**. 此时, ω_M 确定了 M 的一个**定向**, 使得可以谈论 n-形式在 M 上的积分.

设 ω_M, ω_N 分别为 M, N 上的处处非零的 n-形式, 分别确定了 M, N 的定向. 若 $\Phi\colon M \to N$ 为微分同胚, 则存在 M 上的非零函数 c, 使得 $\Phi^*\omega_N = c\omega_M$. 若 $c > 0$, 则称 Φ 是**保定向的**; 否则称 Φ 是**反定向的**. 类似地, 称 M 的坐标卡 (U, φ) 为关于 ω_M 的**定向坐标卡**, 如果 U 为开集, 并且 $\varphi\colon U \to \varphi(U) \subseteq \mathbb{R}^n$ 关于 $\omega_M|_U$ 以及 $\varphi(U)$ 的标准体积形式 $\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_n|_{\varphi(U)}$ 是保定向的.

设 (U, φ) 为 M 的一个定向坐标卡, ω 为紧支于 U 的连续 n-形式, 我们回忆, ω 关于 ω_M 所诱导的定向的**积分**为

$$\int_M \omega := \int_{\varphi(U)} (\varphi^{-1})^*\omega.$$

与往常一样 [细节见 [8],[88]] , 把 ω 紧支于 U 的条件放宽为: 考虑 M 的定向坐标卡的覆盖, 然后考虑这族坐标覆盖的**单位分解**, 将 ω 乘以这些单位分解, 在每个坐标卡里用上述定义计算, 最后把所有坐标卡的计算结果相加.

微分几何中的**变量替换公式**是众所周知的. 若 $\Phi\colon M \to N$ 为定向流形的微分同胚, ω' 为 N 上的紧支连续 n-形式, 则

$$\int_N \omega' = \pm \int_M \Phi^*\omega', \tag{1.41}$$

若 Φ 保定向, 则上式右边符号取 "+", 否则取 "−". 当 Φ 为覆盖映射时, (**1.41**)也有类似版本. 若 $\Psi\colon M \to N$ 为定向流形之间的 m-叶覆盖映射, ω' 为 N 上的紧支连续 n-形式, 则

$$m\int_N \omega' = \pm \int \Psi^*\omega', \tag{1.42}$$

上式右边符号同样取决于 Ψ 是否保定向. 利用单位分解与覆盖映射的定义, 由(**1.41**)是可直接证明之 [见习题 1.39] .

最后, 取定 M 的一个**体积形式**, 可以谈论 M 上的函数的积分. 体积形式 ω_M 是指确定 M 的定向的处处非零的 n-形式. 对于 M 上的紧支连续函数 f, f 关于该体积形式的积分定义为

$$\int_M f := \int f\omega_M.$$

容易证明 [习题 1.40] , 当把体积形式 ω_M 换成 $c\omega_M$, 其中 $c \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ 时, 积分 $\int_M f$ 变成原来的 $|c|$ 倍 [注意当 $c<0$ 时, 流形 M 的定向也随之改变] . 特别地, 积分 $\int_M f$ 的值仅仅依赖于体积形式 [相差正负号意义下] 的选取.

1.4.2　不变积分

设 G 为 n 维李群.

定义 1.43.

1. 分别记 l_g, r_g 为关于 $g \in G$ 的 **左平移** *(left translation)* 与**右平移**. 即: $l_g(h) = gh$, $r_g(h) = hg$, $\forall h \in G$.
2. 对于 G 的体积形式 ω_G, 如果 $\forall g \in G$, $l_g^*\omega_G = \omega_G$, 则称 ω_G 是 **左不变的** *(left invariant)* ; 若 $\forall g \in G$, $r_g^*\omega_G = \omega_G$, 则称 ω_G 是**右不变的**.

引理 1.44.

1. 相差非零常数倍意义下，G 存在唯一的左不变体积形式.
2. 若 G 为紧李群，则相差 ± 1 倍意义下，G 存在唯一的左不变体积形式 ω_G，使得满足归一化条件 $\int_G 1 = 1$.

证明. 因为 $\dim \bigwedge_n^*(G)_e = 1$，从而相差常数倍意义下，存在唯一的 $\omega_e \in \bigwedge_n^*(G)_e$. 该 ω_e 可通过下述方式唯一地延拓为 G 上的一个左不变体积形式 ω：对任意 $g \in G$，令 $\omega_g := l_{g^{-1}}^* \omega_e$. 至于 (2)，注意将体积形式 ω 乘以常数得到 $c\omega$ 时，相应的积分变成原来的 $|c|$ 倍. 由于 G 是紧的，关于体积形式 ω 的积分 $\int_G 1$ 有限. 从而相差正负号的意义下存在唯一的常数 c 使得关于体积形式 $c\omega$ 的积分 $\int_G 1 = 1$. □

定义 1.45. 对于紧李群 G，记 ω_G 为 G 的归一化左不变体积形式，即，关于 ω_G 成立 $\int_G 1 = 1$. 则对任意 $f \in C(G)$，记

$$\int_G f(g)\,\mathrm{d}g := \int_G f = \int_G f\omega_G$$

关于 ω_G 所诱导的定向的积分. 由 *Riesz* 表示定理，$\mathrm{d}g$ 可被完备化为 G 上的一个博雷尔测度，该测度称为 **哈尔测度** *(Harr measure)*． *[细节见 [37] 或 [73].]*

若能取 G 的合适的局部坐标，则可以利用 $\omega_g = l_{g^{-1}}^* \omega_e$ 来把体积形式拉到欧氏空间里 [见习题 1.44]．

定理 1.46. 设 G 为紧李群，则 $\mathrm{d}g$ 是左不变的，右不变的，且关于取逆也是不变的，即：对任意 $h \in G$ 以及 G 的博雷尔可积函数 f，都成立

$$\int_G f(hg)\,\mathrm{d}g = \int_G f(gh)\,\mathrm{d}g = \int_G f(g^{-1})\,\mathrm{d}g = \int_G f(g)\,\mathrm{d}g.$$

证明. 只需考虑连续函数 f. 测度 $\mathrm{d}g$ 的左不变性由体积形式 ω_G 的左不变性与变量替换公式(**1.41**)直接得到 [注意 l_h 显然保定向]:

$$\begin{aligned}\int_G f(hg)\,\mathrm{d}g &= \int_G (f\circ l_h)\omega_G = \int_G (f\circ l_h)(l_h^*\omega_G)\\ &= \int_G l_h^*(f\omega_G) = \int_G f\omega_G = \int_G f(g)\,\mathrm{d}g.\end{aligned}$$

再看右不变性. 首先注意 l_g 与 r_g 交换, 从而 n-形式 $r_g^*\omega_G$ 也是左不变的. 从而由引理1.44可知存在常数 $c(g)\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ 使得 $r_g^*\omega_G = c(g)^{-1}\omega_G$. 由于 $r_g\circ r_h = r_{hg}$, 从而**模函数** (modular function) $c\colon G\to\mathbb{R}\setminus\{0\}$ 为群同态. 于是由 G 的紧性可知 $|c(g)|=1$ [见习题 1.41] .

因为 r_g 保定向当且仅当 $c(g)>0$, 从而由有关定义以及(**1.41**)式可知

$$\begin{aligned}\int_G f(gh)\,\mathrm{d}g &= \int_G (f\circ r_h)\omega_G = c(h)\int_G (f\circ r_h)(r_h^*\omega_G)\\ &= c(h)\int_G r_h^*(f\omega_G) = c(h)\,\mathrm{sgn}(c(h))\int_G f\omega_G = \int_G f(g)\,\mathrm{d}g.\end{aligned}$$

该测度也在变换 $g\mapsto g^{-1}$ 下不变, 证明方式完全类似, 留作习题 1.42. □

我们已经知道, ω_G 是 G 的 [相差正负号意义下] 唯一的归一化左不变体积形式. 更一般地, 相应的测度 $\mathrm{d}G$ 也是 G 上唯一的归一化左不变博雷尔测度.

定理 1.47. 对于紧李群 G, 测度 $\mathrm{d}g$ 是使得 G 的测度为 1 的唯一的左不变博雷尔测度.

证明. 设 $\mathrm{d}h$ 是另一个满足题设的测度. 则对任意给定的非负可测函数 f, 由相关定义以及富比尼 (Fubini) 定理可知

$$\begin{aligned}\int_G f(g)\,\mathrm{d}g &= \int_G\int_G f(g)\,\mathrm{d}g\,\mathrm{d}h = \int_G\int_G f(gh)\,\mathrm{d}g\,\mathrm{d}h\\ &= \int_G\int_G f(gh)\,\mathrm{d}h\,\mathrm{d}g = \int_G\int_G f(h)\,\mathrm{d}h\,\mathrm{d}g = \int_G f(h)\,\mathrm{d}h,\end{aligned}$$

从而 $\mathrm{d}g = \mathrm{d}h$. □

1.4.3 富比尼定理

富比尼定理可以将重积分的计算转化为相对容易计算的累次积分. 这也适用于紧李群的情况. 我们考虑 H_1, H_2 为紧李群, $G = H_1 \times H_2$ 的特殊情况, 此时富比尼 (Fubini) 定理表明对 G 上的可积函数 f, 成立

$$\int_{H_1 \times H_2} f(g)\,\mathrm{d}g = \int_{H_1} \left(\int_{H_2} f(h_1 h_2)\,\mathrm{d}h_2 \right) \mathrm{d}h_1.$$

更一般地, 设 G 为李群, H 为 G 的闭子群, 则定理1.7表明 G/H 为流形. 一般来说 G/H 未必可定向 [见习题 1.38] . 接下来的定理则要告诉我们当 G/H 可定向时, 如何用 G, H 的不变测度 $\mathrm{d}g, \mathrm{d}h$ 来构造 G/H 上的测度. 稍微混用一下记号, 我们把 $g \in G$ 在 G/H 上的左作用也用 l_g 来表示.

定理 1.48. *设 H 为紧李群 G 的闭子群. 如果对任意 $h \in H$, l_h^* 都是 $\bigwedge_{\mathrm{top}}^*(G/H)_{eH}$ 上的恒等映射 [注意当 H 连通时, 此条件总是自动成立] , 则在相差常数倍意义下, 存在 G/H 上的唯一的 G-不变体积形式 $\omega_{G/H}$ 以及相应的左不变博雷尔测度 $\mathrm{d}(gH)$. 相差正负号意义下, $\omega_{G/H}$ 可由归一化条件所唯一确定, 使得*

$$\int_{G/H} F = \int_G f \circ \pi,$$

其中 $\pi\colon G \to G/H$ 为典范投影, F 是 G/H 上的可积函数. 此时, 对 G 上任意的可积函数 f, 成立

$$\int_G f(g)\,\mathrm{d}g = \int_{G/H} \left(\int_H f(gh)\,\mathrm{d}h \right) \mathrm{d}(gH).$$

证明. 先考虑 G/H 上的左不变测度的存在性. 与引理1.44的证明类似, 先任取非零的 $\omega_{eH} \in \bigwedge_{\mathrm{top}}^*(G/H)_{eH}$, 如果 $\omega_{gH} := l_{g^{-1}}^* \omega_{eH}$ 是良定的, 则该 ω 显然左不变, 并且相差常数倍意义下唯一. 而该良定性等价于说, 对任意 $h \in H, g \in G$, 在 $\bigwedge_{\mathrm{top}}^*(G/H)_{eH}$ 上成立 $l_{g^{-1}}^* = l_{(gh)^{-1}}^*$. 因为 $l_{gh} = l_g \circ l_h$, 从而 $\omega_{G/H}$ 存在当且仅当 $\forall h \in H$, l_h^* 为 $\bigwedge_{\mathrm{top}}^*(G/H)_{eH}$ 上的恒等映射.

因为 $\bigwedge_{\mathrm{top}}^*(G/H)_{eH}$ 是一维空间, 从而对任意 $h \in H$, 存在非零常数 $c(h)$ 使得 $l_h^* \omega_{eH} = c(h)\omega_{eH}$. 等式 $l_{hh'} = l_h \circ l_{h'}$ 表明 $c\colon H \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$ 为群同态, 从而

由 G 的紧性可知 $c(h) \in \{\pm 1\}$. 若 H 连通, 则 H 在 c 下的像也连通, 于是必有 $c(h) \equiv 1$, 因此 $\omega_{G/H}$ 存在.

若 $\omega_{G/H}$ 存在, 则由于 $\mathrm{d}h$ 为不变测度, 从而 $g \mapsto \displaystyle\int_H f(gh)\,\mathrm{d}h$ 也可看成 G/H 上的函数. 先考察特征函数, 可知 $f \mapsto \displaystyle\int_{G/H}\left(\int_H f(gh)\,\mathrm{d}h\right)\mathrm{d}(gH)$ 确定了 G 的一个归一化左不变测度. 由定理1.47可知该测度就是 $\mathrm{d}g$. 从而本定理第 2 个式子成立. 特别地, 取 $f = F \circ \pi$, 立刻得到第 1 个式子. □

1.4.4　习题

习题 1.38

(a) 证明 S^{2n} 的对径映射 $x \mapsto -x$ 是反定向的.

(b) 证明 $\mathbb{P}(\mathbb{R}^{2n})$ 不可定向.

(c) 构造紧李群 G 以及 G 的闭子群 H, 使得 $G/H \cong \mathbb{P}(\mathbb{R}^{2n})$.

习题 1.39 设 $\Psi\colon M \to N$ 为定向流形之间的 m-叶覆盖映射, ω' 为 N 上的连续紧支 n-形式. 证明:

$$m\int_N \omega' = \pm\int_M \Psi^*\omega'.$$

其中等号右边的正负号取决于 Ψ 是否保定向.

习题 1.40 设 f 为定向流形 M 上的紧支连续函数, 证明: 若把体积形式 ω_M 改成 $c\omega_M$, 其中 $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, 则积分 $\displaystyle\int_M f$ 变为原来的 $|c|$ 倍.

习题 1.41 设 G 是紧李群, $c\colon \mathbb{R} \setminus \{0\}$ 为李群同态, 则 $c(g) \in \{\pm 1\}, \forall g \in G$. 而若 G 连通, 则必有 $c \equiv 1$.

习题 1.42

(a) 设 f 为紧李群 G 上的连续函数, 证明 $\displaystyle\int_G f(g^{-1})\,\mathrm{d}g = \int_G f(g)\,\mathrm{d}g$.

(b) 若 φ 为 G 的光滑自同构, 则 $\displaystyle\int_G f \circ \varphi = \int_G f$.

习题 1.43 设李群 $G=\left\{\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 1\end{pmatrix}\middle|\, x,y\in\mathbb{R},\, x>0\right\}$. 证明: 李群 G 的左不变测度与右不变测度分别为 $x^{-2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ 与 $x^{-1}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

习题 1.44 设 G 为李群, $\varphi\colon U\to V\subseteq\mathbb{R}^n$ 为 G 的在幺元 e 附近的坐标卡, $e\in U$, $\varphi(e)=0$. 设 f 是 G 上的紧支于 U 的可积函数.

(a) 对于 $x\in V$, 记 $g=g(x)=\varphi^{-1}(x)\in U$. 证明: 映射 $l_x=\varphi\circ l_{g^{-1}}\circ\varphi^{-1}$ 在 x 的邻域良定.

(b) 记 $\left|\dfrac{\partial l_x}{\partial x}|_x\right|$ 为映射 l_x 在 x 处的雅可比矩阵的行列式的绝对值, 即 $\left|\dfrac{\partial l_x}{\partial x}|_x\right|=|\det J|$, 其中雅可比矩阵 J 的分量为 $J_{ij}=\dfrac{\partial(l_x)_j}{\partial x_i}|_x$. 试通过把关系 $\omega_g=l_{g^{-1}}^*\omega_e$ 拉回, 证明归一化的左不变测度 $\mathrm{d}g$ 满足

$$\int_G f\,\mathrm{d}g=\int_V(f\circ\varphi^{-1})(x)\left|\frac{\partial l_x}{\partial x}|_x\right|\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n.$$

(c) 把上一小问的 l_x 换成 $r_x=\varphi\circ r_{g^{-1}}\circ\varphi^{-1}$, 类似得到右不变测度的表达式.

(d) 记 $\left\{\dfrac{\partial}{\partial x_i}|_y\right\}_{i=1,\dots,n}$ 为切空间 $T_y(\mathbb{R}^n)$ 的标准基. 证明: 雅可比矩阵 J 是切空间 $T_e(G)$ 的两组基 $\left\{\mathrm{d}(l_{g^{-1}}\circ\varphi^{-1})(\dfrac{\partial}{\partial x_i}|_x)\right\}_{i=1,\dots,n}$ 与 $\left\{\mathrm{d}\varphi^{-1}(\dfrac{\partial}{\partial x_i}|_0)\right\}_{i=1,\dots,n}$ 之间的过渡矩阵; 换言之, $\mathrm{d}(l_{g^{-1}}\circ\varphi^{-1})(\dfrac{\partial}{\partial x_i}|_x)=\sum_j J_{ij}\,\mathrm{d}\varphi^{-1}(\dfrac{\partial}{\partial x_j}|_0)$.

(e) 取定 $T_e(G)$ 的一组基 $\{v_i\}_{i=1,\dots,n}$. 设 C 为基 $\left\{\mathrm{d}(l_{g^{-1}}\circ\varphi^{-1})(\dfrac{\partial}{\partial x_i}|_x)\right\}_{i=1,\dots,n}$ 与 $\{v_i\}_{i=1,\dots,n}$ 之间的过渡矩阵, 即 $\mathrm{d}(l_{g^{-1}}\circ\varphi^{-1})(\dfrac{\partial}{\partial x_i}|_x)=\sum_j C_{ij}v_j$. 证明: 相差常数倍意义下, $\mathrm{d}g$ 满足

$$\int_G f\,\mathrm{d}g=\int_V(f\circ\varphi^{-1})(x)|\det C|\,\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n.$$

(f) 设 H 为紧李群 G 的闭子群, $\varphi\colon U\to V\subseteq\mathbb{R}^n$ 为 G/H 的局部坐标卡, 满足 $eH\in U$, $\varphi(eH)=0\in V$. 若对任意 $h\in H$, l_h^* 为 $\bigwedge_{\mathrm{top}}^*(G/H)_{eH}$ 上的恒等映射 [当 H 连通时, 这总是自动成立], F 为 G/H 上的紧支于 U 的可积函数.

取定 $T_{eH}(G/H)$ 的一组基 $\{v_i\}_{i=1,\dots,n}$, 类似上一小问定义矩阵 C. 证明在相差常数倍意义下, $\mathrm{d}(gH)$ 满足

$$\int_{G/H} F\,\mathrm{d}(gH) = \int_V (F\circ\varphi^{-1})(x)|\det C|\,\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n.$$

习题 1.45

(a) 视 $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ 为 $M_{n,n}(\mathbb{R})$ 的稠密开子集, 并把 $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ 上的函数自然视为 $M_{n,n}(\mathbb{R})$ 上的函数 [只需令函数在 $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ 的补集上的取值为零] . 证明: $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ 的左, 右不变测度均为

$$\int_{\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})} f(g)\,\mathrm{d}g = \int_{M_{n,n}(\mathbb{R})} f(X)|\det X|^{-n}\,\mathrm{d}X,$$

其中 $\mathrm{d}X$ 为 $M_{n,n}(\mathbb{R})\cong\mathbb{R}^{n^2}$ 的标准欧氏测度. 特别地, 乘法群 $\mathbb{R}^\times=\mathbb{R}\setminus\{0\}$ 的不变测度为 $\dfrac{\mathrm{d}x}{|x|}$.

(b) 证明乘法群 $\mathbb{C}^\times$ 的不变测度为 $\dfrac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$, 其中自然等同 $\mathbb{C}^\times\subseteq\mathbb{C}\cong\mathbb{R}^2$.

(c) 证明乘法群 $\mathbb{H}^\times$ 的不变测度为 $\dfrac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v}{(x^2+y^2+u^2+v^2)^2}$, 其中自然等同 $\mathbb{H}^\times\subseteq\mathbb{H}\cong\mathbb{R}^4$.

习题 1.46

(a) 对于 S^2, 证明它关于 $\mathrm{SO}(3)$ 作用的归一化不变测度由积分

$$\frac{1}{4\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} F(\cos\theta\sin\phi,\sin\theta\sin\phi,\cos\phi)\sin\phi\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi$$

给出.

(b) 设 f 为定义在 $\mathrm{SO}(3)$ 上的函数, 对于 $X\in\mathrm{SO}(3)$, $f(X)$ 的值等于 X 的右下角 2×2 子矩阵的行列式. 试计算 $\displaystyle\int_{\mathrm{SO}(3)} f$.

习题 1.47 记

$$\alpha(\theta)=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta & 0\\ \sin\theta & \cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix},\quad \beta(\theta)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta\\ 0 & \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix},$$

$$\gamma(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

(a) 验证 $(\cos\theta\sin\phi, \sin\theta\sin\phi, \cos\phi) = \alpha(\theta)\beta(\phi)\boldsymbol{e}_3$, 其中 $\boldsymbol{e}_3 = (0,0,1)$. 利用同构 $S^2 \cong \mathrm{SO}(3)/\mathrm{SO}(2)$ 证明: 任意 $g \in \mathrm{SO}(3)$ 都可表示为 $g = \alpha(\theta)\beta(\phi)\alpha(\psi)$, 其中 $0 \le \theta, \psi \le 2\pi$, $0 \le \phi \le \pi$, 且当 $\phi \ne 0, \pi$ 时 (θ, ϕ, ψ) 是唯一的. SO(3) 的坐标 (θ, ϕ, ψ) 称为 **欧拉角** (Euler angle) .

(b) 将 $(\theta, \phi, \psi) \mapsto g = \alpha(\theta)\beta(\phi)\alpha(\psi)$ 视为映到 $M_{3,3}(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^9$ 的映射. 证明:

$$\begin{aligned} g^{-1}\frac{\partial g}{\partial\theta} &= \beta'(0)\sin\phi\cos\psi + \gamma'(0)\sin\phi\sin\psi + \alpha'(0)\cos\phi, \\ g^{-1}\frac{\partial g}{\partial\phi} &= \beta'(0)\sin\psi - \gamma'(0)\cos\psi, \\ g^{-1}\frac{\partial g}{\partial\psi} &= \alpha'(0) \end{aligned}$$

对任意 $0 < \theta, \psi < 2\pi$, $0 < \phi < \pi$ 均成立, 从而推出, 映射 $(\theta, \phi, \psi) \mapsto \alpha(\theta)\beta(\phi)\alpha(\psi)$ 的逆映射构成 SO(3) 的一张关于某稠密开集的坐标卡.

(c) 利用习题 1.44 的结论, 证明 SO(3) 的不变测度由积分

$$\int_{\mathrm{SO}(3)} f(g)\,\mathrm{d}g = \frac{1}{8\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} f(\alpha(\theta)\beta(\phi)\alpha(\psi))\sin\phi\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}\psi$$

给出, 其中 f 为 SO(3) 上的可积函数.

习题 1.48 记

$$\alpha(\theta) = \begin{pmatrix} e^{i\frac{\theta}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{\theta}{2}} \end{pmatrix}, \quad \beta(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} & -\sin\frac{\theta}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2} & \cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}.$$

用类似上一题的方法, 证明 SU(2) 的不变测度满足

$$\int_{\mathrm{SU}(2)} f(g)\,\mathrm{d}g = \frac{1}{8\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} f(\alpha(\theta)\beta(\phi)\alpha(\psi))\sin\phi\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}\psi.$$

2 表示论

李群常作为**对称性**的抽象化身. 然而, 研究李群的常用方法是研究它在线性空间上的作用, 即**表示** (representation). 本章我们研究李群的有限维表示.

2.1 基础概念

2.1.1 定义

定义 2.1. *李群 G 在有限维复向量空间 V 上的* **表示** *(representation) 是指李群同态 $\pi\colon G \to \mathrm{GL}(V)$. 此时称 $\dim_{\mathbb{C}} V$ 为该表示的***维数***.*

严格地讲, 我们应该把表示写作二元组 (π, V). 然而, 在没有歧义的情况下, 我们习惯把表示 (π, V) 简记为 π 或者 V. "(π, V) 是李群 G 的表示" 有很多同义表述, 比如 "V 是 G-**模**", 或者 "G **作用**于 V" 等等. 此外, 为方便起见, 对于李群 G 的表示 π, 我们常用

$$gv \quad 或者 \quad g\cdot v$$

来代替 $(\pi(g))(v)$, 其中 $g \in G$, $v \in V$.

尽管李群同态的定义 [定义1.9] 要求映射的光滑性, 但我们将证明, π 的连续性足以推出光滑性 [习题 4.13] . 我们最终也要研究无限维向量空间. 无限维向量空间的情况更复杂, 需要把定义稍作修改 [定义 3.11] . 而这个修改不影响有限维情形.

我们称两个表示等价, 如果在相差基变换的意义下它们相同. 回忆 $\mathrm{Hom}(V, V')$ 是指从 V 到 V' 的所有线性映射构成的集合.

定义 2.2. 设 (π, V) 与 (π', V') 是李群 G 的两个有限维表示.

1. $T \in \mathrm{Hom}(V, V')$ 称为**G-映射**, 如果 $T \circ \pi(g) = \pi'(g) \circ T$, $\forall g \in G$.
2. 全体 G-映射构成的集合记作 $\mathrm{Hom}_G(V, V')$.
3. 如果存在 $T \in \mathrm{Hom}_G(V, V')$ 为双射, 则称表示 V, V' **等价**, 记作 $V \cong V'$.

2.1.2 例子

设 G 为李群. G 在有限维空间 V 上的表示 π 光滑地赋予每个 $g \in G$ 在 V 上的可逆线性变换的角色, 并且对任何 $g, g' \in G$ 都有

$$\pi(g)\pi(g') = \pi(gg').$$

最无趣的例子为 $\pi \colon G \to \mathrm{GL}(1, \mathbb{C}) = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $g \mapsto 1$, $\forall g \in G$, 尽管它有时也很重要. 这个一维表示称为 **平凡表示** (trivial representation) . 更一般地, 称 G 在向量空间上的作用是**平凡的**, 如果每个 $g \in G$ 在该空间上的作用都是恒等算子.

2.1.2.1. 标准表示. 设 G 为 $\mathrm{GL}(n, \mathbb{F}), \mathrm{SL}(n, \mathbb{F}), \mathrm{U}(n), \mathrm{SU}(n)$ 之一, 则 G 在 $\mathbb{C}^n$ 上有自然的作用: 对于 $g \in G$, 注意 g 为矩阵, 令 g 在 $\mathbb{C}^n$ 的作用为矩阵左乘. 这给出了 G 的一个表示, 该表示称为 **标准表示** (standard representation) .

2.1.2.2. SU(2). 本例将给出构造新表示的一种一般方法: 若给定 G 在空间 M 上的一个作用, 则 G 自然地作用于 M 上的函数 [或者函数的某些推广] 空间.

先考虑 $\mathrm{SU}(2)$ 在 $\mathbb{C}^2$ 的标准二维表示: 即矩阵 $g \in \mathrm{SU}(2)$ 左乘于向量 $\eta \in \mathbb{C}^2$, 简记为 $g\eta$. 记

$$V_n(\mathbb{C}^2)$$

为 $\mathbb{C}^2$ 上的 n 次齐次多项式构成的空间. 显然 $\left\{ z_1^k z_2^{n-k} \,\middle|\, 0 \le k \le n \right\}$ 构成 $V_n(\mathbb{C}^2)$ 的一组基, 从而 $\dim V_n(\mathbb{C}^2) = n + 1$.

定义 $\mathrm{SU}(2)$ 在 $V_n(\mathbb{C}^2)$ 上的作用为:

$$(g \cdot P)(\eta) := P(g^{-1}\eta),$$

其中 $g\in \mathrm{SU}(2)$, $P\in V_n(\mathbb{C}^2)$, $\eta\in\mathbb{C}^2$. 我们来验证这的确是表示, 只需注意

$$\begin{aligned}[g_1\cdot(g_2\cdot P)](\eta) &= (g_2\cdot P)(g_1^{-1}\eta)=P(g_2^{-1}g_1^{-1}\eta)=P((g_1g_2)^{-1}\eta)\\ &= [(g_1g_2)\cdot P](\eta),\end{aligned}$$

从而 $g_1\cdot(g_2\cdot P)=(g_1g_2)\cdot P$. 而光滑性与保持逆运算是显然的, 于是 G 在 $V_n(\mathbb{C}^2)$ 的上述作用给出了 G 的一个 $n+1$ 维表示.

尽管这个表示非常简单, 但它在表示论的理论框架中十分重要. 我们来详细写一下这个表示. 对于 $g=\begin{pmatrix}a & -\bar b\\ b & \bar a\end{pmatrix}\in\mathrm{SU}(2)$, 则 $g^{-1}=\begin{pmatrix}\bar a & \bar b\\ -b & a\end{pmatrix}$, 从而 $g^{-1}\eta=(\bar a\eta_1+\bar b\eta_2,-b\eta_1+a\eta_2)$, 其中 $\eta=(\eta_1,\eta_2)$. 特别地, 对于 $P=z_1^kz_2^{n-k}$, 成立 $(g\cdot P)(\eta)=(\bar a\eta_1+\bar b\eta_2)^k(-b\eta_1+a\eta_2)^{n-k}$, 从而

$$\textbf{(2.3)}\qquad \begin{pmatrix}a & -\bar b\\ b & \bar a\end{pmatrix}\cdot(z_1^kz_2^{n-k})=(\bar a\eta_1+\bar b\eta_2)^k(-b\eta_1+a\eta_2)^{n-k}.$$

我们来看 SU(2) 的另一族表示. 令

$$V_n'$$

为次数不超过 n 的一元多项式构成的向量空间. 显然 $\left\{z^k\,\middle|\,0\le k\le n\right\}$ 构成 V_n' 的一组基, 从而 V_n' 也是 $n+1$ 维的. 对于 $g=\begin{pmatrix}a & -\bar b\\ b & \bar a\end{pmatrix}\in\mathrm{SU}(2)$, 定义 g 在 V_n' 上的作用为

$$\textbf{(2.4)}\qquad (g\cdot Q)(u)=(-bu+a)^nQ\left(\frac{\bar a u+\bar b}{-bu+a}\right),$$

其中 $Q\in V_n'$, $u\in\mathbb{C}$. 容易验证这给出了 SU(2) 的一个表示 [习题 2.1] .

其实这个新的表示与之前的同构, 即 $V_n'\cong V_n(\mathbb{C}^2)$. 这是因为, 可以构造 SU(2)-模同构 $T\colon V_n(\mathbb{C}^2)\to V_n'$, 使得 $(TP)(u)=P(u,1)$, $\forall P\in V_n(\mathbb{C}^2)$, $u\in\mathbb{C}$. 该映射显然是线性双射; 由定义验证它是 SU(2)-映射, 如下:

$$\begin{aligned}[T(g\cdot P)](u) &= (g\cdot P)(u,1)=P(\bar a u+b,-bu+a)\\ &= (-bu+a)^nP\left(\frac{\bar a u+\bar b}{-bu+a},1\right)\\ &= (-bu+a)^n(TP)(u)=[g\cdot(TP)](u),\end{aligned}$$

从而得到我们希望的关系 $T(g\cdot P)=g\cdot(TP)$.

2.1.2.3. $\mathrm{O}(n)$ **与调和多项式**. 令

$$V_m(\mathbb{R}^n)$$

为 $\mathbb{R}^n$ 上的 m 次齐次 $\mathbb{C}$-多项式构成的向量空间. 则

$$\left\{x_1^{k_1}x_2^{k_2}\cdots x_n^{k_n}\,\middle|\, k_i\in\mathbb{N},\, k_1+k_2+\cdots+k_n=m\right\}$$

构成 $V_m(\mathbb{R}^n)$ 的一组基. 可以证明 $\dim V_m(\mathbb{R}^n)=\binom{m+n-1}{m}$ [习题 2.4] . 定义 $\mathrm{O}(n)$ 在 $V_m(\mathbb{R}^n)$ 上的作用如下: 对于 $g\in\mathrm{O}(n)$, $P\in V_m(\mathbb{R}^n)$, $x\in\mathbb{R}^n$,

$$(g\cdot P)(x):=P(g^{-1}x).$$

与 §2.1.2.2 一样, 这给出了一个表示. 事实上, 这个表示包含着一个更小的, 甚至某种意义下更好的表示.

记 $\Delta=\partial_{x_1}^2+\cdots+\partial_{x_n}^2$ 为 $\mathbb{R}^n$ 上的**拉普拉斯算子**. 利用链式法则与 $\mathrm{O}(n)$ 的定义, 众所周知, Δ 与 $\mathrm{O}(n)$ 的作用可交换, 即 $\Delta(g\cdot P)=g\cdot(\Delta P)$ [习题 2.5] .

定义 2.5. 记 $\mathcal{H}_m(\mathbb{R}^n)$ 为 $\mathbb{R}^n$ 上的 m 次齐次**调和多项式** 构成的线性子空间, 即 $\mathcal{H}_m(\mathbb{R}^n):=\{P\in V_m(\mathbb{R}^n)\,|\,\Delta P=0\}$.

对于 $P\in\mathcal{H}_m(\mathbb{R}^n)$ 以及 $g\in\mathrm{O}(n)$, 成立 $\Delta(g\cdot P)=g\cdot(\Delta P)=0$, 从而 $g\cdot P\in\mathcal{H}_m(\mathbb{R}^n)$. 特别地, $\mathrm{O}(n)$ 在 $V_m(\mathbb{R}^n)$ 上的作用可以下降为 $\mathrm{O}(n)$ [当然也可以是 $\mathrm{SO}(n)$] 在 $\mathcal{H}_m(\mathbb{R}^n)$ 上的作用. 可以证明这个表示不再包含 "更小的" 表示.

2.1.2.4. 旋表示与半旋表示. $\mathrm{SO}(n)$ 的任何一个表示 (π,V) 都自然给出 $\mathrm{Spin}_n(\mathbb{R})$ 的表示 $(\pi\circ\mathcal{A},V)$, 其中 $\mathcal{A}$ 为 $\mathrm{Spin}_n(\mathbb{R})$ 到 $\mathrm{SO}(n)$ 的覆盖映射. 通过这种方式得到的 $\mathrm{Spin}_n(\mathbb{R})$ 的表示都有如下性质: $-1\in\mathrm{Spin}_n(\mathbb{R})$ 扮演恒等算子的角色. 本小节我们构造一类重要的表示, 称为 $\mathrm{Spin}_n(\mathbb{R})$ 的**旋表示**. 这个表示是非平凡的, 它不能由 $\mathrm{SO}(n)$ 的表示通过上述方式得到.

令 $(\cdot,\cdot)$ 为 $\mathbb{C}^n$ 的标准复点乘给出的对称双线性型. 当 n 为偶数时, 记 $n=2m$; 否则记 $n=2m+1$. 回忆: $\mathbb{C}^n$ 的子空间 W 称为 **迷向的** (isotropic) , 如果 $(\cdot,\cdot)$ 在 W 上的限制恒为零. 众所周知, $\mathbb{C}^n$ 有如下直和分解:

$$\mathbb{C}^n=\begin{cases}W\oplus W' & \text{若 } n \text{ 为偶数}\\ W\oplus W'\oplus\mathbb{C}e_0 & \text{若 } n \text{ 为奇数}\end{cases},\tag{2.6}$$

其中 W, W' 为极大迷向子空间 [维数为 m] , e_0 是与 $W \oplus W'$ 正交的向量, 并且满足 $(e_0, e_0) = 1$. 其实, 当 n 为偶数时, 我们取 $W = \{(z_1, ..., z_m, iz_1, ..., iz_m) \,|\, z_k \in \mathbb{C}\}$, $W' = \{(z_1, ..., z_m, -iz_1, ..., -iz_m) \,|\, z_k \in \mathbb{C}\}$. 当 n 为奇数时, 取 $W = \{(z_1, ..., z_m, iz_1, ..., iz_m, 0) \mid z_k \in \mathbb{C}\}$, $W' = \{(z_1, ..., z_m, -iz_1, ..., -iz_m, 0) \,|\, z_k \in \mathbb{C}\}$, 以及 $e_0 = (0, ..., 0, 1)$.

与前文所介绍的表示相比, 将要介绍的旋表示相当复杂. 我们先列出有关定义, 然后慢慢验证这些定义的良定性. 回忆引理1.39,

$$\mathrm{Spin}_n(\mathbb{R}) = \left\{x_1 x_2 \cdots x_{2k} \,\middle|\, x_i \in S^{n-1},\, 2 \le 2k \le 2n\right\}.$$

定义 2.7.

1. $S := \bigwedge W$ 中的元素称为 **旋量** *(spinor)* , 下文所述 $\mathrm{Spin}_n(\mathbb{R})$ 在 S 上的作用称为 **旋表示** *(spin representation)* .
2. 若 $n = 2m$ 为偶数, 定义 $\mathrm{Spin}_n(\mathbb{R})$ 在 S 上的作用为:
$$x \mapsto \varepsilon(w) - 2\iota(w'),$$
其中 $x \in S^{n-1}$, $x = w + w'$ 是关于直和分解 $\mathbb{R}^n \subseteq \mathbb{C}^n = W \oplus W'$ 的唯一分解.
3. 记 $S^+ := \bigwedge^+ W = \bigoplus_k \bigwedge^{2k} W$, $S^- := \bigwedge^- W = \bigoplus_k \bigwedge^{2k+1} W$. 则有直和分解 $S = S^+ \oplus S^-$.
4. 若 n 为偶数, 则 $\mathrm{Spin}_n(\mathbb{R})$ 的上述旋表示保持子空间 S^+, S^- 不变, 从而这两个子空间也自然是 $\mathrm{Spin}_n(\mathbb{R})$ 的表示, 称为 **半旋表示** *(half-spin representation)* .
5. 若 $n = 2m + 1$ 为奇数, 定义 $\mathrm{Spin}_n(\mathbb{R})$ 在 S 上的作用为:
$$x \mapsto \varepsilon(w) - 2\iota(w') + (-1)^{\deg} m_{i\zeta},$$
其中 $x \in S^{n-1}$ 关于直和分解 $\mathbb{R}^n \subseteq \mathbb{C}^n = W \oplus W' \oplus \mathbb{C}e_0$ 唯一分解为 $x = w + w' + \zeta e_0$, 算子 $(-1)^{\deg}$ 在子空间 $\bigwedge^{\pm} W$ 上的作用分别为数乘 ± 1, $m_{i\zeta}$ 为数乘 $i\zeta$ 的标量算子.

为验证上述定义的良定性, 首先令 $\mathcal{C}_n(\mathbb{C}) := \mathcal{C}_n(\mathbb{R}) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$. 由 $\mathcal{C}_n(\mathbb{R})$ 的定义易知

$\mathcal{C}_n(\mathbb{C})$ 其实就是 $\mathcal{T}(\mathbb{C}^n)$ 商掉理想 $\{(z\otimes z+(z,z))\,|\,z\in\mathbb{C}^n\}$, 或者 $\{z_1\otimes z_2+z_2\otimes z_1+2(z_1,z_2)\,|\,z_i\in\mathbb{C}^n\}$ [习题 1.30] .

由于 $\mathrm{Spin}_n(\mathbb{R})\subseteq\mathcal{C}_n(\mathbb{C})$, $\mathcal{C}_n(\mathbb{C})$ 本身就自然是 $\mathrm{Spin}_n(\mathbb{R})$ 的一个表示, 该表示通过克利福德代数的左乘来实现. 在此表示下, $-1\in\mathrm{Spin}_n(\mathbb{R})$ 扮演了标量算子 m_{-1} 的角色, 从而这个表示非平凡 [并不是由 $\mathrm{SO}(n)$ 的表示得到] . 然而我们定义的旋表示比这个表示 "小" 得多. 构造这个更小的表示的一种方法是, 把 $\mathrm{Spin}_n(\mathbb{R})$ 的左乘作用限制到 $\mathcal{C}_n(\mathbb{C})$ 的某个左理想上. 此时 [习题 2.12] , $\mathcal{C}_n(\mathbb{C})$ 同构于某个自同态环.

定理 2.8. 成立如下 $\mathbb{C}$-代数同构:

$$\mathcal{C}_n(\mathbb{C})\cong\begin{cases}\mathrm{End}\bigwedge W & \text{若 } n \text{ 为偶数}\\ \left(\mathrm{End}\bigwedge W\right)\oplus\left(\mathrm{End}\bigwedge W\right) & \text{若 } n \text{ 为奇数}\end{cases}.$$

证明. 当 n 为偶数时: 对于 $z=w+w'\in\mathbb{C}^n$, 定义 $\widetilde{\Phi}\colon\mathbb{C}^n\to\mathrm{End}\bigwedge W$ 为

$$\widetilde{\Phi}(z)=\varepsilon(w)-2\iota(w').$$

将它拓展为代数同态 $\widetilde{\Phi}\colon\mathcal{T}_n(\mathbb{C})\to\mathrm{End}\bigwedge W$. 容易验证 [习题 2.6] $\widetilde{\Phi}(z)^2=m_{-2(w,w')}=m_{-(z,z)}$. 从而 $\widetilde{\Phi}$ 可下降为 $\widetilde{\Phi}\colon\mathcal{C}_n(\mathbb{C})\to\mathrm{End}\bigwedge W$.

欲证 $\widetilde{\Phi}$ 为同构, 只需验证 $\widetilde{\Phi}$ 为满射, 这是因为 $\mathcal{C}_n(\mathbb{C})$ 与 $\mathrm{End}\bigwedge W$ 的维数都是 2^n. 取定 W 的一组基 $\{w_1,...,w_m\}$, 再令 $\{w_1',...,w_m'\}\subseteq W'$ 为 W 关于该基的对偶基, 即 $(w_1,w_j')=\delta_{ij}$. 在此基下, $\widetilde{\Phi}$ 的行为一目了然: 对于 $1\le i_1<\cdots<i_k\le m$, 则 $\widetilde{\Phi}(w_{i_1}\cdots w_{i_k}w_{i_i}'\cdots w_{i_k}')$ 杀掉所有的 $\bigwedge^p W$, $p<k$; 将 $\bigwedge^k W$ 映到 $\mathbb{C}w_{i_1}\wedge\cdots\wedge w_{i_k}$; 并且保持 $\bigwedge^p W$ 不变, $p>k$. 对 $n-k$ 归纳, 容易证明对任意 $1\le i_1<\cdots<i_k\le m$, 从 $\bigwedge W$ 到 $\mathbb{C}w_{i_1}\wedge\cdots\wedge w_{i_k}$ 的投影映射都属于 $\widetilde{\Phi}$ 的像集. 不断使用 $\widetilde{\Phi}(w_i)$ 与 $\widetilde{\Phi}(w_j')$, 可得到将 $w_{i_1}\wedge\cdots\wedge w_{i_k}$ 映为 $w_{j_1}\wedge\cdots\wedge w_{j_l}$ 的映射. 这意味着 $\widetilde{\Phi}$ 为满射 [用熟悉的矩阵语言, $\widetilde{\Phi}$ 的像集包含每一个矩阵单元 E_{ij}] .

当 n 为奇数时: 对于 $z=w+w'+\zeta e_0\in\mathbb{C}^n$, 令 $\widetilde{\Phi}^{\pm}\colon\mathbb{C}^n\to\mathrm{End}\bigwedge W$ 为

$$\widetilde{\Phi}^{\pm}(z)=\varepsilon(w)-2\iota(w')\pm(-1)^{\deg}m_{i\zeta}.$$

将它们拓展为代数同态 $\widetilde{\Phi}\colon \mathcal{T}_n(\mathbb{C}) \to \operatorname{End}\bigwedge W$. 容易验证 [习题 2.6] $\widetilde{\Phi}(z)^2 = m_{-(z,z)}$, 从而将 $\widetilde{\Phi}^{\pm}$ 下降为 $\widetilde{\Phi}^{\pm}\colon \mathcal{C}_n(\mathbb{C}) \to \operatorname{End}\bigwedge W$. 然后我们定义 $\widetilde{\Phi}\colon \mathcal{C}_n(\mathbb{C}) \to \left(\operatorname{End}\bigwedge W\right) \oplus \left(\operatorname{End}\bigwedge W\right)$, 使得 $\widetilde{\Phi}(v) = (\Phi^+(v), \Phi^-(v))$.

欲证 $\widetilde{\Phi}$ 为同构, 只需验证 $\widetilde{\Phi}$ 为满射, 这是因为 $\mathcal{C}_n(\mathbb{C})$ 与 $\left(\operatorname{End}\bigwedge W\right) \oplus \left(\operatorname{End}\bigwedge W\right)$ 的维数都是 2^n. 证明它是满射的过程与偶数的情形类似, 留作习题 2.7. □

定理 2.9. 成立如下 $\mathbb{C}$-代数同构:

$$\mathcal{C}_n^+(\mathbb{C}) \cong \begin{cases} \left(\operatorname{End}\bigwedge^+ W\right) \oplus \left(\operatorname{End}\bigwedge^- W\right) & \text{若 } n \text{ 为偶数} \\ \operatorname{End}\bigwedge W & \text{若 } n \text{ 为奇数} \end{cases}.$$

证明. 当 n 为偶数时: 由定理2.8证明过程中 $\widetilde{\Phi}$ 的定义可知, $\widetilde{\Phi}(\mathcal{C}_n^+(\mathbb{C}))$ 中的算子保持 $\bigwedge^{\pm} W$ 不变. 于是, 限制在 $\mathcal{C}_n^+(\mathbb{C})$ 上, $\widetilde{\Phi}$ 可视为映到 $\left(\operatorname{End}\bigwedge^+ W\right) \oplus \left(\operatorname{End}\bigwedge^- W\right)$ 的映射. 由于我们已经直到这个映射是单射, 从而只需计算维数, 验证 $\dim\left[\left(\operatorname{End}\bigwedge^+ W\right) \oplus \left(\operatorname{End}\bigwedge^- W\right)\right] = \dim \mathcal{C}_n^+(\mathbb{C})$. 其实容易验证 [习题 2.9] 它们的维数都是 2^{n-1}. 例如, **1.34**式以及定理1.35表明 $\dim \mathcal{C}_n^+(\mathbb{C}) = 2^{n-1}$. 此外, 习题 1.31 证明了 $\mathcal{C}_{n-1}(\mathbb{R}) \cong \mathcal{C}_n^+(\mathbb{R})$.

当 n 为奇数时: 此时, $\widetilde{\Phi}(\mathcal{C}_n^+(\mathbb{C}))$ 中的算子不再保持 $\bigwedge^{\pm} W$ 不变. 不过, 将 $\widetilde{\Phi}^+$ 限制到 $\mathcal{C}_n^+(\mathbb{C})$, 可得从 $\mathcal{C}_n^+(\mathbb{C})$ 到 $\operatorname{End}\bigwedge W$ 的同态 [当然也可以用 $\widetilde{\Phi}^-$] . 由构造可知 $\widetilde{\Phi}^+$ 为满射. 从而欲证它为同构, 只需要计算维数, 验证 $\dim \operatorname{End}\bigwedge W = \dim \mathcal{C}_n^+(\mathbb{C})$. 而早已知道 [习题 2.9] 它们的维数都是 2^{n-1}. □

最后, 终于可以引入旋表示了. 注意 $\mathrm{Spin}_n(\mathbb{R}) \subseteq \mathcal{C}_n^+(\mathbb{C})$, 将定理2.9中的代数同态 $\widetilde{\Phi}$(n 为偶数) 或者 $\widetilde{\Phi}^+$(n 为奇数) 限制在 $\mathrm{Spin}_n(\mathbb{R})$ 上, 即可得到定义2.7中的旋表示. 当 n 为偶数时, 可将目标域限制到 $\operatorname{End}\bigwedge^{\pm} W$ 上, 得到两个半旋表示. 最后, $1 \in \mathrm{Spin}_n(\mathbb{R})$ 在旋表示中扮演了标量算子 m_{-1}, 从而如前文断言, 旋表示是非平凡的 [并非来自于 $\mathrm{SO}(n)$ 的表示] .

2.1.3 习题

习题 2.1 验证(**2.4**)式定义了 SU(2) 在 V_n' 上的表示.

习题 2.2

(a) 计算 $\left\{\mathrm{diag}(e^{i\theta}, e^{-i\theta}) \,\middle|\, \theta \in \mathbb{R}\right\} \subseteq \mathrm{SU}(2)$ 在 $V_n(\mathbb{C}^2)$ 的公共特征子空间. 也就是说, 求出所有的非零向量 $P \in V_n(\mathbb{C}^2)$, 使得对任意 $\theta \in \mathbb{R}$ 都存在 $\lambda_\theta \in \mathbb{C}$ 使得 $\left(\mathrm{diag}(e^{i\theta}, e^{-i\theta})\right) \cdot P = \lambda_\theta P$.

(b) 计算 SO(2) 在 $V_m(\mathbb{C}^2)$ 与 $\mathcal{H}_m(\mathbb{C}^2)$ 的公共特征子空间.

(c) 计算

$$\left\{(\cos\theta_1 + e_1e_2\sin\theta_1)(\cos\theta_2 + e_3e_4\sin\theta_2) \middle| \theta_i \in \mathbb{R}\right\} \subseteq \mathrm{Spin}_4(\mathbb{R})$$

在半旋表示 $S^{\pm}$ 的公共特征子空间.

习题 2.3 定义 $V_n(\mathbb{C}^2)$ 的如下厄米特内积:

$$\left(\sum_k a_k z_1^k z_2^{n-k}, \sum_k b_k z_1^k z_2^{n-k}\right) = \sum_k k!(n-k)! a_k \bar{b}_k.$$

对于 $g \in \mathrm{SU}(2)$, 证明对任意 $P, P' \in V_n(\mathbb{C}^2)$, $(gP, gP') = (P, P')$.

习题 2.4 证明集合 $\left\{x_1^{k_1}x_2^{k_2}\cdots x_n^{k_n} \,\middle|\, k_i \in \mathbb{N},\, k_1+k_2+\cdots+k_n = m\right\}$ 的元素个数为 $\binom{m+n-1}{m}$.

习题 2.5 对于 $g \in \mathrm{O}(n)$ 以及 $\mathbb{R}^n$ 上的光滑函数 f, 证明 $\Delta(f \circ l_g) = (\Delta f) \circ l_g$, 其中 $l_g(x) = gx$.

习题 2.6

(a) 当 n 为偶数时, 对于 $z = w + w' \in \mathbb{C}^n$, $w \in W$, $w' \in W'$, 令 $\widetilde{\Phi}(z) = \varepsilon(w) - 2\iota(w')$, 证明: $\widetilde{\Phi}(z)^2 = m_{-2(w,w')} = m_{-(z,z)}$.

(b) 当 n 为奇数时, 对于 $z = w + w' + \zeta e_0 \in \mathbb{C}^n$, $w \in W$, $w' \in W'$, $\zeta \in \mathbb{C}$, 令 $\widetilde{\Phi}(z) = \varepsilon(w) - 2\iota(w') \pm (-1)^{\deg} m_{i\zeta}$, 证明: $\widetilde{\Phi}(z)^2 = m_{-2(w,w')-\zeta^2} = m_{-(z,z)}$.

习题 2.7 在定理2.8的证明中, 验证当 n 为奇数时 $\widetilde{\Phi}$ 为满射.

习题 2.8 利用定理2.8计算 $\mathcal{C}_n(\mathbb{C})$ 的中心.

习题 2.9 在定理2.9中, 直接验证当 n 为偶数时 $\dim \mathcal{C}_n^+(\mathbb{C})$ 与

$$\dim \left[\left(\operatorname{End} \bigwedge^+ W \right) \oplus \left(\operatorname{End} \bigwedge^- W \right) \right]$$

都等于 2^{n-1}; 而 n 为奇数时, $\dim \bigwedge W = 2^{n-1}$.

习题 2.10 在表示等价意义下, 证明旋表示和半旋表示与 $\mathbb{C}^n$ 的极大迷向分解 [见(**2.6**)式] 选取无关.

习题 2.11 对于奇数 n, 我们用 $\widetilde{\Phi}^+$ 定义了 $\mathrm{Spin}_n(\mathbb{R})$ 在 $\bigwedge W$ 的旋表示. 证明: 把 $\widetilde{\Phi}^+$ 换成 $\widetilde{\Phi}^-$, 所得的表示与原来等价.

习题 2.12 沿用定理2.8的记号.

(a) 当 n 为偶数时, 令 $w_0' = w_1' \cdots w_m' \in \mathcal{C}_n(\mathbb{C})$, 令 $\mathcal{J}$ 为 $\mathcal{C}_n(\mathbb{C})$ 的由 w_0' 生成的左理想. 定义线性映射 $T\colon \bigwedge W \to \mathcal{J}$, 使得 $T(w_{i_1} \wedge \cdots \wedge w_{i_k}) = w_{i_1} \cdots w_{i_k} w_0'$. 证明 T 是良定的, 且为 $\mathrm{Spin}_n(\mathbb{R})$-模同态 [关于旋表示 $\bigwedge W$ 以及在 $\mathcal{J}$ 的克利福德左乘作用] .

(b) 当 n 为奇数时, 令 $w_0' = (1 - ie_0) w_1' \cdots w_m'$, 试类似构造从旋表示 $\bigwedge W$ 到 $\mathcal{C}_n(\mathbb{C})$ 的某个左理想的 $\mathrm{Spin}_n(\mathbb{R})$-模同态.

习题 2.13 定义 $\bigwedge W$ 上的如下非退化双线性型 $(\cdot,\cdot)$, 使得当 $k + l \neq m$ 时 $\left(\bigwedge^k W, \bigwedge^l W \right) = 0$, 并且要求对任意 $u \in \bigwedge^k W, v \in \bigwedge^{n-k} W$, 成立 $\alpha(u^*) \wedge v = (u,v) v_1 \wedge \cdots \wedge w_m$ [有关记号见 §1.3.2] .

(a) 证明: 当 $m \equiv 0,3 \mod 4$ 时, $(\cdot,\cdot)$ 是对称双线性型; 而 $m \equiv 1,2 \mod 4$ 时为反对称双线性型.

(b) 证明: 在旋表示下, 对任意 $u, v \in S = \bigwedge W$ 以及 $g \in \mathrm{Spin}_n(\mathbb{R})$, 成立 $(g \cdot u, g \cdot v) = (u,v)$.

(c) 当 n 为偶数时, 证明: 若 m 为偶数, 则 $(\cdot,\cdot)$ 在 $S^\pm = \bigwedge^\pm W$ 的限制非退化; 若 m 为奇数, 则该限制恒为零.

2.2 表示的构造

2.2.1 构造新的表示

给定李群 G 的一个或者两个表示, 我们可以利用线性代数中的基本操作来构造新的表示. 比如说, 已知向量空间 V, W, 则可以构造出如下的新的向量空间: 直和 $V \oplus W$, 张量积 $V \otimes W$, 线性映射构成的空间 $\mathrm{Hom}(V, W)$. 从张量积出发, 还可构造出张量代数 $\mathcal{T}(V) = \bigoplus_{k=0}^{\infty} V^{\otimes k}$, 以及它的商空间, 诸如**外代数** $\bigwedge V = \bigoplus_{k=0}^{\dim V} \bigwedge^k V$, **对称代数** $S(V) = \bigoplus_{k=0}^{\infty} S^k(V)$. 还有其它构造, 比如**对偶空间** $V^* = \mathrm{Hom}(V, \mathbb{C})$, **共轭空间** $\overline{V}$ [即, 加法结构与原来的 V 相同; 而新的数乘结构 $\cdot'$ 满足 $z \cdot' v = \bar{z}v$, $\forall z \in \mathbb{C}$, $v \in V$] . 以上这些新的向量空间都可配以相应的 G-模结构, 见如下定义:

定义 2.10. *设 V, W 为李群 G 的两个有限维表示.*

1. *定义 G 在 $V \oplus W$ 上的作用: $g(v, w) = (gv, gw)$.*
2. *定义 G 在 $V \otimes W$ 上的作用: $g \sum v_i \otimes w_j = \sum gv_i \otimes gw_j$.*
3. *定义 G 在 $\mathrm{Hom}(V, W)$ 上的作用: $(gT)(v) = g[T(g^{-1}v)]$.*
4. *定义 G 在 $V^{\otimes k}$ 上的作用: $g \sum v_{i_1} \otimes \cdots \otimes v_{i_k} = \sum (gv_{i_1}) \otimes \cdots \otimes (gv_{i_k})$.*
5. *定义 G 在 $\bigwedge^k V$ 上的作用: $g \sum v_{i_1} \wedge \cdots \wedge v_{i_k} = \sum (gv_{i_1}) \wedge \cdots \wedge (gv_{i_k})$.*
6. *定义 G 在 $S^k(V)$ 上的作用: $g \sum v_{i_1} \cdots v_{i_k} = \sum (gv_{i_1}) \cdots (gv_{i_k})$.*
7. *定义 G 在 V^* 上的作用: $(gT)(v) = T(g^{-1}v)$.*
8. *G 在 $\overline{V}$ 上的作用与在 V 上相同.*

我们需要验证上述这些构造的确是表示, 这些验证都容易. 我们在这里验证 (3) 和 (5), 其余留作习题 2.14. 对于 (3), 光滑性与可逆性都显然, 只需验证改作用与群乘法结构相容: 对任意 $g_1, g_2 \in G$, $T \in \mathrm{Hom}(V, W)$, $v \in V$, 只需注意:

$$[g_1(g_2T)](v) = g_1\left[(g_2T)\left(g_1^{-1}v\right)\right] = g_1g_2\left[T(g_2^{-1}g_1^{-1}v)\right] = [(g_1g_2)T](v).$$

对于 (5), 回忆 $\bigwedge^k V$ 是 $V^{\otimes k}$ 商掉理想 $\mathcal{I}_k$, 其中理想 $\mathcal{I}_k$ 由 $\{v \otimes v \mid v \in V\}$ 生成.

由于 (4) 是表示, 从而只需证明 G 在 $V^{\otimes k}$ 的作用保持 $\mathcal{I}_k$ 不变, 然而这是显然的.

再说一些需要特别注意的事情. 对于 (1) 中的 $V \oplus W$, 由 V 和 W 各自给定的一组基出发, 可自然构造出 $V \oplus W$ 的一组基. 在该基下, G 中元素在 $V \oplus W$ 上的作用可表示为矩阵 $\begin{pmatrix} * & 0 \\ 0 & * \end{pmatrix}$ 的左乘作用, 其中左上分块为 G 在 V 上作用的矩阵, 右下分块为 G 在 W 上作用的矩阵.

对于 (7) 中的 V^*, 取定 V 的一组基 $\mathcal{B} = \{v_i\}_{i=1}^n$, 令 $\mathcal{B}^* = \{v_i^*\}_{i=1}^n$ 为 V^* 关于 $\mathcal{B}$ 的对偶基, 即, 当 $i = j$ 时 $v_i^*(v_j)$ 的值为 1, $i \neq j$ 时该值为 0. 利用该基, 将 V 与 V^* 分别通过如下坐标映射等同于 $\mathbb{C}^n$: $\left[\sum_i c_i v_i\right]_{\mathcal{B}} = (c_1, ..., c_n)^\top$, $\left[\sum_i c_i v_i^*\right]_{\mathcal{B}^*} = (c_1, ..., c_n)^\top$. 在该基下, $g \in G$ 在 V, V^* 的作用可用矩阵来表示, 使得对任意 $v \in V$, $T \in V^*$ 都满足 $[g \cdot v]_{\mathcal{B}} = M_g[v]_{\mathcal{B}}$, $[g \cdot T]_{\mathcal{B}^*} = M'_g[T]_{\mathcal{B}^*}$. 特别地, $[M_g]_{ij} = v_i^*(g \cdot v_j)$, $[M'_g]_{ij} = \left(g \cdot v_j^*\right)(v_i)$. 因此 $[M'_g]_{ij} = v_j^*(g^{-1} \cdot v_i) = [M_{g^{-1}}]_{ji}$, 因此 $M'_g = M_g^{-1,\top}$. 换言之, 可适当选取基, 使得 G 的作用可实现为矩阵乘法, 并且 G 在 V^* 作用的矩阵等于 G 在 V 作用的矩阵的**逆转置**.

对于 (8) 中的 $\overline{V}$, 取定 V 的一组基, G 中元素 g 在 V 上的作用在此基下可表示为矩阵, 沿用前文记号 M_g. 为检验 g 在 $v \in \overline{V}$ 的作用, 注意 $\overline{V}$ 的数乘运算是原来 V 的数乘运算的共轭. 特别地, 在 $\overline{V}$ 中, $g \cdot v$ 可实现为矩阵 $\overline{M_g}$ 的乘法. 换言之, 取定 V 的基后, $g \in G$ 在 $V, \overline{V}$ 的作用可实现为矩阵乘法, 并且 g 在 $\overline{V}$ 上作用的矩阵是 g 在 V 上作用的矩阵的共轭.

还要注意, 上面构造的这些表示之间并非毫无联系. 比如, (7) 中的 V^* 其实是 (3) 中的 $\mathrm{Hom}(V, W)$ 在 $W = \mathbb{C}$ [平凡表示] 时的特殊情况. 此外, (4), (5), (6) 都不过是反复使用 (2). 还有, 作为表示, 成立 $V^* \otimes W \cong \mathrm{Hom}(V, W)$ [习题 2.15] ; 若 G 是紧李群, 还有 $V^* \cong \overline{V}$ [推论2.20] .

2.2.2 不可约表示与舒尔引理

现在我们由很多方法来把多个表示 “组合” 在一起, 于是有必要对表示进行分类. 为此有必要搞清楚表示的 “最小的” 基本单元.

定义 2.11. 设 G 为李群, V 是 G 的有限维表示.

1. 称 V 的子空间 U 是**G-不变的** (*G-invariant*), 如果对任意 $g \in G$ 都有 $gU \subseteq U$. 则 U 自然也是 G 的一个表示. 此时也称 U 是 V 的**子模** (*submodule*) 或者**子表示** (*subrepresentation*).
2. 称非零表示 V 是**不可约的** (*irreducible*), 如果它的 G-不变子空间只有 $\{0\}$ 和 V. 反之, 称非零表示 V 是**可约的** (*reducible*), 如果 V 存在**真**G-不变子空间 [即, 不等于 0, V] .

易知有限维非零表示 V 是不可约的, 当且仅当对任意 $v \in V \setminus \{0\}$ 都有

$$V = \operatorname{span}_{\mathbb{C}} \{gv \,|\, g \in G\},$$

因为这刚好等价于 V 没有真 G-不变子空间. 例如, 众所周知, §2.1.2.1 中的标准表示都满足这个条件, 从而这些标准表示都不可约.

对更一般的表示, 我们几乎很难运用上述结论, 此时需要别的重要工具, 例如下述定理:

定理 2.12. 舒尔引理 (*Schur's lemma*) .
设 V, W 为李群 G 的有限维不可约表示, 则

$$\dim \operatorname{Hom}_G(V, W) = \begin{cases} 1 & \text{若 } V \cong W \\ 0 & \text{若 } V \ncong W. \end{cases}$$

证明. 若存在 $0 \neq T \in \operatorname{Hom}_G(V, W)$, 则 $\ker T$ 是 G-不变的, 且不等于 V. 从而由 V 的不可约性可知 T 为单射. 类似地, T 的像集也是 G-不变的, 且不为零, 从而 W 的不可约性表明 T 是满射. 因此 T 为双射. 因此, 存在非零的 $T \in \operatorname{Hom}_G(V, W)$ 当且仅当 $V \cong W$.

反之, 当 $V \cong W$ 时, 取定 G-同构映射 $T_0 \in \operatorname{Hom}_G(V, W)$. 则对于 $T \in \operatorname{Hom}_G(V, W)$, $T \circ T_0^{-1} \in \operatorname{Hom}_G(V, V)$. 因为 V 是有限维 $\mathbb{C}$-向量空间, 从而 $T \circ T_0^{-1}$ 存在本征值 λ. 注意 $\ker(T \circ T_0^{-1} - \lambda I)$ 非零且 G-不变, 从而不可约性表明 $T \circ T_0^{-1} - \lambda I = 0$, 从而 $\operatorname{Hom}_G(V, W) = \mathbb{C} T_0$. □

于是, 由舒尔引理可知, 对有限维不可约表示 V, 成立

$$\mathrm{Hom}_G(V,V)=\mathbb{C}I. \tag{2.13}$$

2.2.3 酉表示

定义 2.14. 设 V 是李群 G 的一个表示.

1. 称二元函数 $(\cdot,\cdot)\colon V\times V\to\mathbb{C}$ 是**G-不变的**, 如果对任意 $g\in G$, $v,v'\in V$ 都有 $(gv,gv')=(v,v')$.
2. 称李群 G 的表示 V 为 **酉表示** *(unitarity representation)* , 如果 V 存在 G-不变 (厄米特) 内积.

非紧群往往有很多的非酉表示 [例如习题 2.18] . 而紧李群的表示则有更好的性质.

定理 2.15. 紧李群的表示都是酉表示.

证明. 设紧李群 G 的表示 V. 先取定 V 上的一个内积 $\langle\cdot,\cdot\rangle$, 然后令

$$(v,v')=\int_G\langle gv,gv'\rangle\,\mathrm{d}g.$$

因为 G 紧致, $g\mapsto\langle gv,gv'\rangle$ 连续, 从而上述 $(\cdot,\cdot)$ 良定. 这个二次型显然也是厄米特的, 并且由 $\mathrm{d}g$ 的右不变性易知该厄米特型是 G-不变的. 最后只需验证正定性. 由定义知, 当 $v\neq 0$ 时, $\langle gv,gv\rangle>0$, 从而 $(v,v)=\displaystyle\int_G\langle gv,gv\rangle\,\mathrm{d}g>0$, 得证. □

定理2.15为紧李群表示论的多数内容奠定了基础. 它表明, 紧李群 G 的表示 (π,V) 不仅仅是映到 $\mathrm{GL}(V)$ 群同态 $\pi\colon G\to\mathrm{GL}(V)$; 更是映到 V 的关于 G-不变内积的**酉群**的群同态 [习题 2.20] .

定义 2.16. 李群 G 的有限维表示称为 **完全可约的** *(completely reducible)* , 若该表示能够分解为不可约子模的直和.

在非紧李群中, 往往会出现可约但不完全可约的表示 [习题 2.18]. 而紧李群的表示又更加简单. 顺便一说, 下述结论的类似版本对紧李群的无限维酉表示也成立 [推论3.15].

推论 2.17. 紧李群的有限维表示是完全可约的.

证明. 设 V 是紧李群 G 的有限维表示, 并且可约. 取 V 的 G-不变内积 $(\cdot,\cdot)$. 设 $W \subseteq V$ 是真 G-不变子空间, 则有正交直和分解 $V = W \oplus W^{\perp}$. 注意正交补 $W^{\perp}$ 也是 G-不变子空间, 这是因为对任意 $w' \in W^{\perp}$, $w \in W$ 都有 $(gw', w) = (w', g^{-1}w) = 0$. 最后, 注意 V 的维数有限, 对维数归纳即得证. □

于是, 紧李群 G 的有限维表示 V 可以写为

$$V \cong \bigoplus_{i=1}^{N} n_i V_i, \tag{2.18}$$

其中 $\{V_i \,|\, 1 \leq i \leq N\}$ 为 G 的一些互不等价的不可约表示构成的集合, $n_i V_i = V_i \oplus \cdots \oplus V_i$ (共 n_i 个). 要研究 G 的表示, 只需要先搞清楚 G 的不可约表示, 再去计算 n_i. 我们将在 §2.2.4 给出一个关于 n_i 的关系式.

我们仍需要花大量精力来理解不可约表示. 本小节剩余篇幅将或多或少去回答这个问题. 在 §3.3 节我们将通过研究 G 上的函数来推导关于 G 的全体不可约表示构成的集合的大量结论. 尽管如此, 我们在 §7.3.5 之前仍然不能完全分类, 构造出所有的不可约表示. 在 §7.3.5 我们介绍 **最高权** (highest weight) 及其相应的结构.

推论 2.19. 设 V 是紧李群 G 的有限维表示, 则 V 不可约当且仅当 $\dim \operatorname{Hom}_G(V,V) = 1$.

证明. 若 V 不可约, 则舒尔引理 (定理2.12) 表明 $\dim \operatorname{Hom}_G(V,V) = 1$. 反之, 若 V 可约, 则有真子模的直和分解 $V = W \oplus W'$. 特别地, 这表明 $\dim \operatorname{Hom}_G(V,V) \geq 2$, 这是因为至少有向每个直和项的投影. 因此, $\dim \operatorname{Hom}_G(V,V) = 1$ 表明 V 不可约. □

紧李群的无限维酉表示也有上述类似结果 (定理3.12).

推论 2.20.

1. 设 V 是紧李群 G 的有限维表示, 则 $\overline{V} \cong V^*$.
2. 若 V 不可约, 则 G-不变内积在相差正常数倍意义下唯一.

证明. 先证 (1). 设 $(\cdot,\cdot)$ 为 V 的一个 G-不变内积. 定义线性双射 $T\colon \overline{V} \to V^*$, 使得 $Tv = (\cdot, v)$, $\forall v \in \overline{V}$. 容易验证 T 是 G-模同态, 这是因为 $g(Tv) = (g^{-1}\cdot, v) = (\cdot, gv) = T(gv)$.

(2). 设 V 不可约. 若 $(\cdot,\cdot)'$ 是 V 的另一个 G-不变内积, 则类似构造线性双射 $T'\colon \overline{V} \to V^*$, $T'v = (\cdot, v)'$. 而舒尔引理 (定理2.12) 表明 $\dim \mathrm{Hom}_G(\overline{V}, V^*) = 1$. 又因为 T, T' 都属于 $\mathrm{Hom}_G(\overline{V}, V^*)$, 从而存在常数 $c \in \mathbb{C}$ 使得 $T' = cT$, 因此对任意 $v \in V$ 都有 $(\cdot, v)' = c(\cdot, v)$. 显然 $c \in \mathbb{R}$ 且 $c > 0$. □

推论 2.21. 设 V 为紧李群 G 的有限维表示, $(\cdot,\cdot)$ 为 V 的 G-不变内积. 若 V_1, V_2 是 V 的不可约子模, 且互不等价, 则 $V_1 \perp V_2$, 即 $(V_1, V_2) = 0$.

证明. 考虑 $W := \{v_1 \in V_1 \mid (v_1, V_2) = 0\}$. 因为内积 $(\cdot,\cdot)$ 是 G-不变的, 从而 W 是 V_1 的子模. 假如 $(V_1, V_2) \neq 0$, 也就是 $W \neq V_1$, 则不可约性表明 $W = \{0\}$, 从而 $(\cdot,\cdot)$ 给出了 $V_1 \times V_2$ 的非退化二次型. 从而 $v_1 \mapsto (\cdot, v_1)$ 诱导同构 $\overline{V_1} \cong V_2^*$. 这表明 $V_1 \cong \overline{V_2}^* \cong V_2$. □

2.2.4 典范分解

定义 2.22.

1. 设 G 为紧李群, 将 G 的有限维不可约 (酉) 表示的等价类构成的集合记作 $\widehat{G}$. 对每个 $[\pi] \in \widehat{G}$, 如有必要, 取定它的一个代表元 (π, E_π).
2. 设 V 是 G 的有限维表示. 对于 $[\pi] \in \widehat{G}$, 记 $V_{[\pi]}$ 为 V 的能写为同构于 E_π 的不可约子模的直和的最大子空间. 子模 $V_{[\pi]}$ 称为 V 的π**-部分**.
3. 记 $m_\pi := \dfrac{\dim V_{[\pi]}}{\dim E_\pi}$, 称为 π 在 V 中的重数. 换言之, $V_{[\pi]} \cong m_\pi E_\pi$.

首先, 需要验证 $V_{[\pi]}$ 的良定性. 以下引理还表明 $V_{[\pi]}$ 其实是 V 的**所有**同构于 E_π 的子模的和.

引理 2.23. 若 V_1, V_2 都形如同构于 E_π 的子模的直和, 则 $V_1 + V_2$ 也如此.

证明. 由于维数有限, 易知只需要验证: 若 $\{W_i\}$ 为 G-子模, W_1 不可约且 $W_1 \not\subseteq W_2 \oplus \cdots \oplus W_n$, 则 $W_1 \cap (W_2 \oplus \cdots \oplus W_n) = \{0\}$. 事实上, 注意 $W_1 \cap (W_2 \oplus \cdots \oplus W_n)$ 是 W_1 的 G-子模, 从而由 W_1 的不可约性以及题设可证. $\square$

若 V, W 为李群 G 的表示, 且 $V \cong W \oplus W$, 那么要注意到该直和分解不是典范的. 例如, 任取非零常数 $c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, 则 $W' := \{(w, cw) \mid w \in W\}$ 与 $W'' := \{(w, -cw) \mid w \in W\}$ 也都是 W 的子模, 并且都同构于 W, 且 $V \cong W' \oplus W''$. 下述结论给出了处理这种选取不唯一性的一般方法, 并给出了计算(**2.18**)中的 n_i 的公式.

定理 2.24. 设 V 是紧李群 G 的有限维表示.

1. 存在如下的 G-模同构 ι_π:

$$\iota_\pi\colon \mathrm{Hom}_G(E_\pi, V)\otimes E_\pi \xrightarrow{\cong} V_{[\pi]},$$

使得对任意 $T\in \mathrm{Hom}_G(E_\pi, V)$, $v\in V$, $T\otimes v\mapsto T(v)$. 特别地, 不可约表示 π 在 V 中的重数

$$m_\pi = \dim \mathrm{Hom}_G(E_\pi, V).$$

2. 成立如下的 G-模同构:

$$\bigoplus_{[\pi]\in\widehat{G}} \mathrm{Hom}_G(E_\pi, V)\otimes E_\pi \xrightarrow{\cong} V = \bigoplus_{[\pi]\in\widehat{G}} V_{[\pi]}.$$

证明. (1). 对于非零的 $T\in \mathrm{Hom}_G(E_\pi, V)$, 则由 E_π 的不可约性可知 $\ker T=\{0\}$, 从而 T 是 E_π 到 $T(E_\pi)$ 的同构, 所以 $T(E_\pi)\subseteq V_{[\pi]}$, 从而 ι_π 良定. 然后, 由 G 在 $\mathrm{Hom}(E_\pi, V)$ 上的作用方式以及 $\mathrm{Hom}_G(E_\pi, V)$ 的定义可知, G 在 $\mathrm{Hom}_G(E_\pi, V)$ 的作用平凡. 因此 $g(T\otimes v) = T\otimes(gv)$, 从而 $\iota_\pi(g(T\otimes v)) = T(gv) = gT(v) = g\iota_\pi(T\otimes v)$, 从而 ι_π 是 G-模同态. 为证明 ι_π 是满同态, 取 $V_{[\pi]}$ 的直和项 $V_1\cong E_\pi$, 相应的同构映射记作 $T\colon E_\pi\to V_1$. 则 $T\in \mathrm{Hom}_G(E_\pi, V)$, V_1 显然包含于 ι_π 的像空间. 最后, 我们通过计算维数来证明 ι_π 是满射. 记 $V_{[\pi]} = V_1\oplus\cdots\oplus V_{m_\pi}$, $V_i\cong E_\pi$. 则由舒尔引理 (定理2.12) 可知

$$\begin{aligned}
\dim \mathrm{Hom}_G(E_\pi, V) &= \dim \mathrm{Hom}_G(E_\pi, V_{[\pi]}) = \dim \mathrm{Hom}_G(E_\pi, V_1\oplus\cdots\oplus V_{m_\pi})\\
&= \sum_{i=1}^{m_\pi} \dim \mathrm{Hom}_G(E_\pi, V_i) = m_\pi.
\end{aligned}$$

因此 $\dim \mathrm{Hom}_G(E_\pi, V)\otimes E_\pi = m_\pi \dim E_\pi = \dim V_{[\pi]}$.

(2). 只需证明 $V = \bigoplus_{[\pi]\in\widehat{G}} V_{[\pi]}$. 注意(**2.18**)式 $V = \sum_{[\pi]\in\widehat{G}} V_{[\pi]}$, 再由推论2.21知该和为直和. □

这个结果可以推广到紧李群的无限维酉表示, 详见后文定理3.19.

2.2.5 习题

习题 2.14 验证定义2.10所述的确为表示.

习题 2.15 设 V, W 为李群 G 的有限维表示.

(a) 考虑从 $V^* \otimes W$ 到 $\mathrm{Hom}(V, W)$ 的映射 $T \otimes w \mapsto wT(\cdot)$. 证明该映射给出了 $V^* \otimes W$ 与 $\mathrm{Hom}(V, W)$ 的 G-模同构.

(b) 证明如下的 G-模同构: $V \otimes V \cong S^2(V) \oplus \bigwedge^2(V)$.

习题 2.16 设 V 为李群 G 的有限维不可约表示. 证明 V^* 也不可约.

习题 2.17 本题考虑 $V_n(\mathbb{C}^2)$ 的一种自然推广. 设 W 为李群 G 的表示. 定义 $V_n(W)$ 为 W 上的 n 次齐次多项式构成的空间, 定义 G 在 $V_n(W)$ 上的作用为 $(gP)(\eta) = P(g^{-1}\eta)$. 证明: 对任意 $T_1 \cdots T_n \in S^n(W^*)$, 将 T_i 视为 W 上的函数, 则这诱导 G-模同构 $S^n(W^*) \cong V_n(W)$.

习题 2.18

(a) 证明映射 $\pi\colon t \mapsto \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 给出了加法群 $\mathbb{R}$ 在 $\mathbb{C}^2$ 的一个表示.

(b) 证明该表示不是酉表示.

(c) 求该表示的所有子表示.

(d) 证明该表示可约但不完全可约.

习题 2.19 利用舒尔引理 (定理2.12) 快速求出 §2.1.2.1 中所述的具有标准表示的李群的中心.

习题 2.20 设 $(\cdot, \cdot)$ 是 $\mathbb{C}^n$ 的一个内积. 证明

$$\mathrm{U}(n) \cong \left\{ g \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C}) \,\middle|\, (gv, gv') = (v, v'), \forall v, v' \in \mathbb{C}^n \right\}.$$

习题 2.21

(a) 利用(**2.13**)式证明: 阿贝尔李群的有限维不可约表示都是一维的.

(b) 分类 S^1 的所有不可约表示, 并证明 $\widehat{S^1} \cong \mathbb{Z}$.

(c) 计算 $S^1 \cong \mathrm{SO}(2)$ 在 $\mathbb{C}^2$ 的标准表示的不可约直和项.

(d) 证明李群光滑同胚 $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ 必满足微分方程 $\varphi' = [\varphi'(0)]\,\varphi$. 由此证明 $\mathbb{R}^n$ 的所有不可约表示与集合 $\mathbb{C}$ 有自然一一对应, 其中酉表示对应于 $i\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$.

(e) 利用上一小问证明乘法群 $\mathbb{R}^+$ 的不可约表示与集合 $\mathbb{C}$ 一一对应, 其中酉表示对应于 $i\mathbb{R}$.

(f) 试求出加法群 $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ 与乘法群 $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ 的所有不可约表示.

习题 2.22 设 V 是紧李群 G 的有限维表示. 证明 V 上的全体 G-不变内积构成的集合同构于 $\mathrm{Hom}_G(\overline{V}, V^*)$.

习题 2.23 设 $\pi_i\colon V_i \to \mathrm{U}(n)$ 为紧李群 G 的两个等价的不可约 (酉) 表示.

(a) 利用推论2.20证明: 存在酉变换 $f\colon V_1 \to V_2$ 使得 $\pi_1 = \pi_2 \circ f$.

(b) 去掉不可约的条件, 试推广上一小问的类似结论.

习题 2.24 设 V 是紧李群 G 的有限维表示, $W \subseteq V$ 为子表示. 证明: 对任意 $[\pi] \in \widehat{G}$, 成立 $W_{[\pi]} \subseteq V_{[\pi]}$.

习题 2.25 设 V 为紧李群 G 的有限维表示. 证明: G-模自同态的全体构成的集合同构于 $\prod\limits_{[\pi]\in\widehat{G}} \mathrm{GL}(m_\pi, \mathbb{C})$, 其中 m_π 为 $[\pi]$ 在 V 中的重数.

2.3 不可约表示的例子

2.3.1 SU(2) 与 $V_n(\mathbb{C}^2)$

本小节我们证明之前在 §2.1.2.2 小节构造的 SU(2) 的表示 $V_n(\mathbb{C}^2)$ 是不可约的. 事实上, 我们以后 [定理3.32] 将证明, 在等价意义下, 它们是 SU(2) 的所有的不可约表示. 本小节用到的技巧将在第 §4 章发展为强大的技术, 即研究李群 G 的切空间. 我们也将系统地研究这种技术 [见引理6.6] .

设 $H \subseteq V_n(\mathbb{C}^2)$ 是非零的不变子空间. 由(**2.3**)可知

$$\mathrm{diag}(e^{i\theta}, e^{-i\theta}) \cdot (z_1^k z_2^{n-k}) = e^{i(n-2k)\theta} z_1^k z_2^{n-k}. \tag{2.25}$$

注意到公共特征子空间的特征值 $e^{i(n-2k)\theta}$ 两两不同, 并且子群 $\{\mathrm{diag}(e^{i\theta}, e^{-i\theta})\}$ 保持 H 不变, 所以 H 必然由某些公共特征向量 $z_1^k z_2^{n-k}$ 张成. 特别地, 存在某个 k_0, 使得 $z_1^{k_0} z_2^{n-k_0} \in H$.

考虑 $K_t = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \in \mathrm{SU}(2)$ 以及 $\eta_t = \begin{pmatrix} \cos t & i\sin t \\ i\sin t & \cos t \end{pmatrix} \in \mathrm{SU}(2)$. 因为 H 是 SU(2)-不变的, 从而 $\frac{1}{2}(K_t \pm i\eta_t) z_1^{k_0} z_2^{n-k_0} \in H$. 因此,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{1}{2}(K_t \pm i\eta_t) z_1^{k_0} z_2^{n-k_0}\right]\Big|_{t=0} \in H.$$

利用(**2.3**)式, 简单计算 [留作习题 2.26] 可得

$$\textbf{(2.26)}\qquad \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[(K_t \pm i\eta_t) z_1^{k_0} z_2^{n-k_0}\right]\Big|_{t=0} = \begin{cases} k_0 z_1^{k_0-1} z_2^{n-k_0+1} & \text{若取 “+”} \\ (k_0-n) z_1^{k_0+1} z_2^{n-k_0-1} & \text{若取 “−”} \end{cases}.$$

由此归纳可知 $V_n(\mathbb{C}^2) \subseteq H$, 因此 $V_n(\mathbb{C}^2)$ 不可约.

2.3.2 SO(n) 与调和多项式

本小节我们证明 SO(n) 在调和多项式空间 $\mathcal{H}_m(\mathbb{R}^n) \subseteq V_m(\mathbb{R}^n)$ 上的表示 [记号见 §2.1.2.3] 不可约. 设 $D_m(\mathbb{R}^n)$ 为 $\mathbb{R}^n$ 上的复常系数 m 阶偏微分算子构成的空间. 对应关系 $x_i \mapsto \partial_{x_i}$ 生成了从 $\bigoplus_m V_m(\mathbb{R}^n)$ 到 $\bigoplus_m D_m(\mathbb{R}^n)$ 的代数同构. 一般地, 对于 $q \in \bigoplus_m V_m(\mathbb{R}^n)$, 记与之对应的 $\bigoplus_m D_m(\mathbb{R}^n)$ 中的偏微分算子为 ∂_q.

定义 $V_m(\mathbb{R}^n)$ 上的厄米特内积 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 如下: 对于 $p, q \in V_m(\mathbb{R}^n)$, $\langle p, q\rangle := \partial_{\overline{q}} p$. 注意到 $\left\{x_1^{k_1} x_2^{k_2} \cdots x_n^{k_n} \,\middle|\, k_i \in \mathbb{N},\, k_1 + k_2 + \cdots + k_n = m\right\}$ 构成 $V_m(\mathbb{R}^n)$ 的关于 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 的一组正交基, 从而易知它的确是内积. 事实上, 内积 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 是 O(n)-不变的 [见习题 2.27] , 虽然后面用不到这个结果.

引理 2.27. 在 $V_m(\mathbb{R}^n)$ 的内积 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 下, 成立 $\mathcal{H}_m(\mathbb{R}^n)^{\perp} = |x|^2 V_{m-2}(\mathbb{R}^n)$, 其中 $|x|^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \in V_2(\mathbb{R}^n)$. 进而, 成立 O($n$)-模同构

$$V_m(\mathbb{R}^n) \cong \mathcal{H}_m(\mathbb{R}^n) \oplus \mathcal{H}_{m-2}(\mathbb{R}^n) \oplus \mathcal{H}_{m-4}(\mathbb{R}^n) \oplus \cdots.$$

证明. 对于 $p \in V_m(\mathbb{R}^n)$, $q \in V_{m-2}(\mathbb{R}^n)$, 则有 $\langle p, |x|^2 q\rangle = \partial_{|x|^2\overline{q}} p = \partial_{\overline{q}} \triangle p = \langle \triangle p, q\rangle$. 因此 $\left[|x|^2 V_{m-2}(\mathbb{R}^n)\right]^{\perp} = \mathcal{H}_m(\mathbb{R}^n)$, 于是

$$\textbf{(2.28)}\qquad V_m(\mathbb{R}^n) = \mathcal{H}_m(\mathbb{R}^n) \oplus |x|^2 V_{m-2}(\mathbb{R}^n).$$

归纳地, 得到

$$V_m(\mathbb{R}^n) = \mathcal{H}_m(\mathbb{R}^n) \oplus |x|^2\mathcal{H}_{m-2}(\mathbb{R}^n) \oplus |x|^4\mathcal{H}_{m-4}(\mathbb{R}^n) \oplus \cdots .$$

最后再注意到 $\mathrm{O}(n)$ 保持 $|x|^{2k}$ 不动即可. □

直接计算, 易知 $\dim \mathcal{H}_m(\mathbb{R}^1) = 0, \forall m \geq 2$. 当 $n \geq 2$ 时, 显然 $\dim V_m(\mathbb{R}^n) > \dim V_{m-1}(\mathbb{R}^n)$, 并且 $\dim \mathcal{H}_m(\mathbb{R}^n) > 1$.

引理 2.29. 设 U, V, W 为紧李群 G 的有限维表示, 并且 $U \oplus V \cong U \oplus W$, 则成立 $V \cong W$.

证明. 考虑(**2.18**), 作分解 $U \cong \bigoplus_{[\pi]\in\widehat{G}} m_\pi E_\pi$, $V \cong \bigoplus_{[\pi]\in\widehat{G}} m'_\pi E_\pi$, $W \cong \bigoplus_{[\pi]\in\widehat{G}} m''_\pi E_\pi$. 题设条件 $U \oplus V \cong U \oplus W$ 表明 $m_\pi + m'_\pi = m_\pi + m''_\pi$, 从而 $m'_\pi = m''_\pi$, $V \cong W$. □

定义 2.30. 设 H 为李群 G 的李子群, V 为 G 的表示, 则将 G 在 V 上的作用限制在 H 上, 自然得到 H 在 V 上的表示, 记 H 在 V 上的这个表示为 $V|_H$.

在本小节剩余部分, 通过嵌入 $g \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix}$ 将 $\mathrm{O}(n-1)$ 视为 $\mathrm{O}(n)$ 的李子群.

引理 2.31.

$$\mathcal{H}_m(\mathbb{R}^n)|_{\mathrm{O}(n-1)} \cong \mathcal{H}_m(\mathbb{R}^{n-1}) \oplus \mathcal{H}_{m-1}(\mathbb{R}^{n-1}) \oplus \cdots \oplus \mathcal{H}_0(\mathbb{R}^{n-1}).$$

证明. 任意 $p \in V_m(\mathbb{R}^n)$ 可被唯一写为 $p = \sum_{k=0}^{m} x_1^k p_k$, 使得 $p_k \in V_{m-k}(\mathbb{R}^{n-1})$, 其中这里视 $\mathbb{R}^n$ 为 $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1}$. 因为 $\mathrm{O}(n-1)$ 在 x_1^k 的作用平凡, 于是

$$V_m(\mathbb{R}^n)|_{\mathrm{O}(n-1)} \cong \bigoplus_{k=0}^{m} V_{m-k}(\mathbb{R}^{n-1}). \tag{2.32}$$

先利用(**2.28**)式 [限制在 $\mathrm{O}(n-1)$ 上], 再用(**2.32**), 可得

$$V_m(\mathbb{R}^n)|_{\mathrm{O}(n-1)} \cong \mathcal{H}_m(\mathbb{R}^n)|_{\mathrm{O}(n-1)} \oplus \bigoplus_{k=0}^{m-2} V_{m-2-k}(\mathbb{R}^{n-1}).$$

另一方面, 先用(**2.32**)再用(**2.28**)可得

$$\begin{aligned} V_m(\mathbb{R}^n)|_{\mathrm{O}(n-1)} &\cong \bigoplus_{k=0}^{m}\left[\mathcal{H}_{m-k}(\mathbb{R}^{n-1}) \oplus V_{m-2-k}(\mathbb{R}^{n-1})\right] \\ &= \left[\bigoplus_{k=0}^{m}\mathcal{H}_{m-k}(\mathbb{R}^{n-1})\right] \oplus \left[\bigoplus_{k=0}^{m-2} V_{m-2-k}(\mathbb{R}^{n-1})\right]. \end{aligned}$$

最后由引理2.29即可. □

定理 2.33. $\mathcal{H}_m(\mathbb{R}^n)$ 是不可约 $\mathrm{O}(n)$-模. 事实上, 当 $n \geq 3$ 时它也是 $\mathrm{SO}(n)$-不可约的.

证明. $n=2$ 的情形留作习题 2.31. 接下来假定 $n \geq 3$.

断言: 在相差常数倍意义下, $\mathcal{H}_m(\mathbb{R}^n)|_{\mathrm{SO}(n-1)}$ 存在唯一的 $\mathrm{SO}(n-1)$-不变函数. 若 $f \in \mathcal{H}_m(\mathbb{R}^n)$ 非零且 $\mathrm{SO}(n)$-不变, 则 f 在 $\mathbb{R}^n$ 的每个 [球心位于原点的] 球面上的限制都是常函数, 即 f 为径向函数. f 的齐次性迫使 f 形如 $f = C|x|^m$, 其中 C 为某常数. 简单计算容易验证 $\triangle f = 0$ 迫使 $m = 0$. 因此只有 $\mathcal{H}_0(\mathbb{R}^n)$ 当中才包含 $\mathrm{SO}(n)$-不变函数. 至此, 再利用引理2.31即可证明断言.

断言: 若 V 为 S^{n-1} 上的函数空间的某个非零的有限维 $\mathrm{SO}(n)$-不变子空间, 则 V 中必存在非零的 $\mathrm{SO}(n-1)$-不变函数. 这里 $\mathrm{SO}(n)$ 在 V 上的作用与往常一样, 由 $(gf)(s) = f(g^{-1}s)$ 所给出. 由于 $\mathrm{SO}(n)$ 在 S^{n-1} 的作用可迁, 且 V 非零, 从而存在 $f \in V$ 使得 $f(1,0,...,0) \neq 0$. 定义 $\widetilde{f}(s) = \displaystyle\int_{\mathrm{SO}(n-1)} f(gs)\,\mathrm{d}g$. 取 V 的一组基 $\{f_i\}$, 则 $f(gs) = (g^{-1}f)(s) \in V$, 于是存在光滑函数 c_i, 使得 $f(gs) = \displaystyle\sum_i c_i(g)f_i(s)$. 于是积分可得 $\widetilde{f} \in V$. 由相关定义易知 $\widetilde{f}$ 是 $\mathrm{SO}(n-1)$-不变的. 最后注意 $\widetilde{f}(1,0,...,0) = f(1,0,...,0) \neq 0$, 从而 $\widetilde{f} \neq 0$.

断言: $\mathcal{H}_m(\mathbb{R}^n)$ 是不可约 $\mathrm{SO}(n)$-模. 假设 $\mathcal{H}_m(\mathbb{R}^n) = V_1 \oplus V_2$ 为真子模直和分解. 那么 V_i 中存在非零的 $\mathrm{SO}(n-1)$-不变函数 f_i, $i = 1, 2$. 由齐次性可知将每

个 V_i 中的函数在 S^{n-1} 上的限制都是单射. 因此, f_1 与 f_2 线性无关. 而另一方面, $\mathcal{H}_m(\mathbb{R}^n)$ 只有一个独立的 SO$(n-1)$-不变函数. 这产生矛盾.

□

用一点点泛函分析 [习题 3.14] 可以进一步证明 $L^2(S^{n-1}) = \bigoplus_{m=0}^{\infty} \mathcal{H}_m(\mathbb{R}^n)|_{S^{n-1}}$ (希尔伯特空间直和), 并且 $\mathcal{H}_m(\mathbb{R}^n)|_{S^{n-1}}$ 是球面 S^{n-1} 的拉普拉斯算子的属于特征值 $-m(n+m-2)$ 的特征子空间.

2.3.3　旋表示与半旋表示

在 §2.1.2.4 小节我们构造了 n 为奇数时 $\mathrm{Spin}_n(\mathbb{R})$ 的旋表示 $S = \bigwedge W$ 以及 n 为偶数时的半旋表示 $S^{\pm} = \bigwedge^{\pm} W$, 其中 W 为 $\mathbb{C}^n$ 的极大迷向子空间. 本小节我们证明这些表示不可约.

当 $n = 2m$ 为偶数时, 令 $W = \{(z_1, ..., z_m; iz_1, ..., iz_m) \,|\, z_k \in \mathbb{C}\}$, $W' = \{(z_1, ..., z_m; -iz_1, ..., -iz_m) \,|\, z_k \in \mathbb{C}\}$. 通过向前 m 个坐标分量投影, 将 W 等同于 $\mathbb{C}^m$. 对于 $x = (x_1, ..., x_m)$, $y = (y_1, ..., y_m) \in \mathbb{R}^m$, 记 $(x, y) = (x_1, ..., x_m; y_1, ..., y_m) \in \mathbb{R}^n$. 特别地, 注意 $(x, y) = \frac{1}{2}(x - iy, i(x - iy)) + \frac{1}{2}(x + iy, -i(x + iy))$. 由定义2.7, 再注意我们将 W 与 $\mathbb{C}^m$ 等同, 记 $((a, -ia), (b, ib)) = 2(a, b)$, 从而 $\mathrm{Spin}_{2m}(\mathbb{R})$ 在 $\bigwedge^{\pm} \mathbb{C}^m \cong S^{\pm}$ 的半旋表示由以下方式诱导: (x, y) 的作用效果为算子

$$\frac{1}{2}\varepsilon(x - iy) - 2\iota(x + iy). \tag{2.34}$$

当 $n = 2m + 1$ 为奇数时, 令 $W = \{(z_1, ..., z_m; iz_1, ..., iz_m; 0) \,|\, z_k \in \mathbb{C}\}$, $W' = \{(z_1, ..., z_m; -iz_1, ..., -iz_m; 0) \,|\, z_k \in \mathbb{C}\}$, 再令 $e_0 = (0, ..., 0, 1)$. 与之前一样, 通过向前 m 个坐标分量投影, 将 W 等同于 $\mathbb{C}^m$. 对于 $x = (x_1, ..., x_m)$, $y = (y_1, ..., y_m) \in \mathbb{R}^m$ 以及 $u \in \mathbb{R}$, 记 $(x, y, u) = (x_1, ..., x_m; y_1, ..., y_m; u) \in \mathbb{R}^n$. 特别地, 注意 $(x, y, u) = \frac{1}{2}(x - iy, i(x - iy), 0) + \frac{1}{2}(x + iy, -i(x + iy), 0) + (0, 0, u)$. 由定义2.7, 再注意我们将 W 与 $\mathbb{C}^m$ 等同, 从而 $\mathrm{Spin}_{2m+1}(\mathbb{R})$ 在 $\bigwedge \mathbb{C}^m \cong S$ 的旋表示由以下方式诱导: (x, y, u) 的作用效果为算子

$$\frac{1}{2}\varepsilon(x - iy) - 2\iota(x + iy) + (-1)^{\deg} m_{iu}. \tag{2.35}$$

定理 2.36. 当 n 为偶数时, $\mathrm{Spin}_n(\mathbb{R})$ 的半旋表示 $S^{\pm}$ 不可约; 当 n 为奇数时, $\mathrm{Spin}_n(\mathbb{R})$ 的旋表示 S 不可约.

证明. 在 $\mathbb{R}^n$ 的标准基 $\{e_j\}_{j=1}^n$ 下, 给定 $1 \leq i, j \leq m$, 简单计算得

$$(e_j \pm ie_{j+m})(e_k \pm ie_{k+m}) = e_je_k \pm i(e_je_{k+m} + e_{j+m}e_k) - e_{j+m}e_{k+m}.$$

因为 e_je_k, e_je_{k+m}, $e_{j+m}e_k$ 与 $e_{j+m}e_{k+m}$ 都属于 $\mathrm{Spin}_n(\mathbb{R})$, 从而(**2.34**)与(**2.35**)表明, $\bigwedge \mathbb{C}^m$ 上的算子 $\varepsilon(e_j)\varepsilon(e_k)$ 与 $\iota(e_j)\iota(e_k)$ 能够写成 $\mathrm{Spin}_n(\mathbb{R})$ 在 $\bigwedge \mathbb{C}^m$ 上的作用的线性组合.

当 n 为偶数时, 设 W 为 $S^+ \cong \bigwedge^+ \mathbb{C}^m$ 或者 $S^- \cong \bigwedge^- \mathbb{C}^m$ 非零 $\mathrm{Spin}_n(\mathbb{R})$-子模. 不断使用算子 $\varepsilon(e_j)\varepsilon(e_k)$ 可以证明 W 当中含有 $\bigwedge^m \mathbb{C}^m$ 或者 $\bigwedge^{m-1} \mathbb{C}^m$ 中的非零向量. 若是前者, 由于 $\dim \bigwedge^m \mathbb{C}^m = 1$, 于是不断使用算子 $\iota(e_j)\iota(e_k)$ 可以生成 $\bigwedge^{\pm} \mathbb{C}^m$; 若是后者, 则通过算子 $\iota(e_j)\iota(e_k)$ 与 $\varepsilon(e_{j'})\varepsilon(e_k)$ 可生成 $\bigwedge^{m-1} \mathbb{C}^m$, 之后再用算子 $\iota(e_j)\iota(e_k)$ 去生成全部 $S^{\pm}$. 从而半旋表示 $S^{\pm}$ 不可约.

类似地, 当 n 为奇数时, 考虑 $(e_j \pm ie_{j+m})e_n$, 可证明算子 $\varepsilon(e_j)(-1)^{\deg}$ 与 $\iota(e_j)(-1)^{\deg}$ 可表示为 $\mathrm{Spin}_n(\mathbb{R})$ 在 $S \cong \bigwedge \mathbb{C}^m$ 上的作用的线性组合. 因此, 对于 $S \cong \bigwedge \mathbb{C}^n$ 的任意非零子模 W, 对 W 中的某个非零向量不断作用于算子 $\varepsilon(e_j)(-1)^{\deg}$ 与 $\iota(e_j)(-1)^{\deg}$ 即可生成全部 $\bigwedge \mathbb{C}^m$, 从而 $W = \bigwedge \mathbb{C}^m$, 因此 $S \cong \bigwedge \mathbb{C}^m$ 不可约. □

2.3.4 习题

习题 2.26 验证(**2.26**)式.

习题 2.27

(a) 对于 $g \in \mathrm{O}(n)$, 用链式法则验证对 $\mathbb{R}^n$ 的任意光滑函数 f 都成立 $\partial_{g \cdot x_i} f = g \cdot (\partial_{x_i}(g^{-1} \cdot f))$.

(b) 对于 $g \in \mathrm{O}(n)$, 证明对任意 $p \in V_m(\mathbb{R}^n)$ 都成立 $\partial_{g \cdot p} f = g \cdot (\partial_p(g^{-1} \cdot f))$.

(c) 证明 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 是 $V_m(\mathbb{R}^n)$ 的 $\mathrm{O}(n)$-不变内积.

习题 2.28 对任意 $p \in V_m(\mathbb{R}^n)$, 证明存在唯一 $h \in \bigoplus_k \mathcal{H}_{m-2k}(\mathbb{R}^n)$, 使得

$$p|_{S^{n-1}} = h|_{S^{n-1}}.$$

习题 2.29 证明 $\triangle\colon V_m(\mathbb{R}^n) \to V_{m-2}(\mathbb{R}^n)$ 为 $\mathrm{O}(n)$-模满同态.

习题 2.30 证明 $\dim \mathcal{H}_0(\mathbb{R}^n) = 1$, $\dim \mathcal{H}_1(\mathbb{R}^n) = n$; 而当 $m \geq 2$ 时 $\dim \mathcal{H}_m(\mathbb{R}^n) = \dfrac{(2m+n-2)(m+n-3)!}{m!(n-2)!}$.

习题 2.31 证明 $\mathcal{H}_m(\mathbb{R}^2)$ 是 $\mathrm{O}(2)$-不可约的, 但当 $m \geq 2$ 时不是 $\mathrm{SO}(2)$-不可约的.

习题 2.32 习题 2.32-习题 2.34 将给出用**再生核** ([6]) 证明 $\mathcal{H}_m(\mathbb{R}^n)$ 的不可约性的大体步骤. 设 $\mathcal{H}$ 为空间 X 上的一些函数所构成的希尔伯特空间, 并且 $\mathcal{H}$ 对取共轭封闭, 并且对任意 $x \in X$, 赋值映射 $f \mapsto f(x)$ 是 $\mathcal{H}$ 上的连续线性泛函. 记 $(\cdot,\cdot)$ 为 $\mathcal{H}$ 上的内积. 于是, 对任意 $x \in X$, 存在唯一的 $\phi_x \in \mathcal{H}$, 使得 $f(x) = (f, \phi_x)$, $\forall f \in \mathcal{H}, x \in X$. 函数 $\Phi\colon X \times X \to \mathbb{C}$, $(x,y) \mapsto (\phi_y, \phi_x)$ 称为 **再生核** (reproducing kernel) .

(a) 证明对任意 $x, y \in X$, $f \in \mathcal{H}$, 成立 $\Phi(x,y) = \phi_y(x)$, $f(x) = (f, \Phi(\cdot, x))$.

(b) 证明 $\operatorname{span}\{\phi_x \,|\, x \in X\}$ 在 $\mathcal{H}$ 中稠密.

(c) 若 $\{e_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ 为 $\mathcal{H}$ 的一组完备标准正交基, 则 $\Phi(x,y) = \sum_\alpha e_\alpha(x)\overline{e_\alpha(y)}$.

(d) 若存在 X 上的测度 μ, 使得 $\mathcal{H}$ 是 $L^2(X, \mathrm{d}\mu)$ 的闭子空间, 则 $f(x) = \int_X \overline{\Phi(y,x)} f(y)\,\mathrm{d}\mu(y)$.

习题 2.33 设李群 G 在空间 X 上的作用可迁. 取定 $x_0 \in X$, 则 $X \cong G/H$, 其中 $H = G^{x_0}$. G 中元素 g 在 X 上的函数 f 上的作用为 $(gf)(x) := f(g^{-1}x)$, $\forall x \in X$. 设该作用保持 $\mathcal{H}$ 不变, 且为酉表示, 并且 $\mathcal{H}^H := \{f \in \mathcal{H} \,|\, hf = f, \forall h \in H\}$ 的维数为 1.

(a) 证明对任意 $x, y \in X$, $g \in G$, 成立 $g\phi_x = \phi_{gx}$, $\Phi(gx, gy) = \Phi(x,y)$.

(b) 设 W 为 $\mathcal{H}$ 的非零 G-不变闭子空间, Φ_W 为其再生核. 证明函数 $x \mapsto \Phi_W(x, x_0)$ 属于 $\mathcal{H}^H$.

(c) 证明 G 在 $\mathcal{H}$ 上的表示不可约.

习题 2.34 现在令 $\mathcal{H}=\mathcal{H}_m(\mathbb{R}^n)\subseteq V_m(\mathbb{R}^n)$, 这里通过把限制在 S^{n-1} 上, 将 $V_m(\mathbb{R}^n)$ 视为 $L^2(S^{n-1})$ 的子空间. 记 $p_0=(1,0,...,0)$.

(a) 证明 $V_m(\mathbb{R}^n)^{\mathrm{O}(n-1)}$ 由如下函数构成:

$$x\mapsto\sum_{j=0}^{\lfloor\frac{m}{2}\rfloor}(-1)^j c_j(x,x)^j(x,p_0)^{k-2j},$$

其中 $c_j\in\mathbb{C}$ 为常数.

(b) 求出 c_j 所满足的线性递推关系, 并证明 $\dim\mathcal{H}_m(\mathbb{R}^n)=1$.

(c) 证明 $\mathcal{H}_m(\mathbb{R}^n)$ 是不可约 $\mathrm{O}(n)$-模.

(d) 证明当 $n\geq 3$ 时 $\mathcal{H}_m(\mathbb{R}^n)$ 也是不可约 $\mathrm{SO}(n)$-模.

习题 2.35 设 $G=\mathrm{U}(n)$, $V_{p,q}(\mathbb{C}^n)$ 为关于变量 $z_1,...,z_n$ 次数为 p, 关于 $\overline{z_1},...,\overline{z_n}$ 次数为 q 的齐次多项式函数构成的空间, G 在其上有自然的作用. 定义 $V_{p,q}(\mathbb{C}^n)$ 上的算子 $\triangle_{p,q}=\sum_j\partial_{z_j}\partial_{\overline{z_j}}$, 再令 $\mathcal{H}_{p,q}(\mathbb{C}^n)=V_{p,q}(\mathbb{C}^n)\cap\ker\triangle_{p,q}$. 考虑限制在球面 S^{2n-1} 上, 利用与之前三题类似的方法证明如下:

(a) 证明 $\triangle_{p,q}\colon V_{p,q}(\mathbb{C}^n)\to V_{p-1,q-1}(\mathbb{C}^n)$ 是 G-模满同态.

(b) 证明 $\mathcal{H}_m(\mathbb{R}^{2n})\cong\bigoplus_{p+q=m}\mathcal{H}_{p,q}(\mathbb{C}^n)$.

(c) 证明 $\mathcal{H}_{p,q}(\mathbb{C}^n)$ 是 $\mathrm{U}(n)$-不可约的.

(d) 证明 $\mathcal{H}_{p,q}(\mathbb{C}^n)$ 也是 $\mathrm{SU}(n)$-不可约的.

习题 2.36 当 n 为偶数时, 证明 $\mathrm{Spin}_n(\mathbb{R})$ 的半旋表示 S^+ 与 S^- 不等价.

3 调和分析

在本章我们始终假设 G 为**紧**李群. 本章我们研究 G 上的各种函数空间, 比如连续函数空间 $C(G)$, 关于哈尔测度 $\mathrm{d}g$ 的平方可积函数空间 $L^2(G)$. 我们将研究这些函数空间在 G 的左, 右平移作用下的性质.

3.1 矩阵系数

3.1.1 舒尔正交关系

设 (π, V) 是紧李群 G 的有限维酉表示, 相应的不变内积记作 $(\cdot,\cdot)$. 取 V 的一组基 $\{v_i\}$, 令 $\{V_i^*\}$ 为相应的**对偶基**, 即 $(v_i, v_j^*) = \delta_{ij}$, 其中当 $i=j$ 时 $\delta_{ij=1}$, 否则 $\delta_{ij}=0$. 在这组基下, 线性变换 $\pi(g)\colon V \to V$, $g \in G$ 可用矩阵表示, 并且该矩阵的 (i,j)-分量为

$$(gv_j, v_i^*).$$

显然函数 $g \mapsto (gv_j, v_i^*)$ 为 G 上的复数值光滑函数. 研究这样的函数的线性组合将会是研究紧李群的有力工具.

定义 3.1. 紧李群 G 上的形如 $f_{u,v}^V(g) = (gu, v)$ 的函数称为 G 的 **矩阵系数** *(matrix coefficient)* , 其中 V 是 G 的有限维酉表示, $(\cdot,\cdot)$ 为 V 的相应的不变内积, $u, v \in V$. G 的所有矩阵系数构成的集合记作 $\mathrm{MC}(G)$.

引理 3.2. $\mathrm{MC}(G)$ 是 G 的全体光滑函数构成的代数的子代数, 并且包含常值函数. 对于每个 $[\pi] \in \widehat{G}$, 记 $\{v_i^\pi\}_{i=1}^{n_\pi}$ 为 E_π 的一组基, 则 $\left\{ f_{v_i^\pi, v_j^\pi}^{E_\pi} \,\middle|\, [\pi] \in \widehat{G},\, 1 \le i,j \le n_\pi \right\}$ 为 $\mathrm{MC}(G)$ 的一组基.

证明. 由定义可知, 矩阵系数显然是 G 上的光滑函数. 对于 G 的酉表示 V, V', 相应的不变内积分别记作 $(\cdot,\cdot)_V$ 与 $(\cdot,\cdot)_{V'}$, 则直和 $V \oplus V'$ 关于内积 $\big((u,v),(u',v')\big)_{V\oplus V'} =$

$(u,u')_V+(v,v')_{V'}$ 也是 G 的酉表示; 并且张量积 $V\otimes V'$ 关于如下内积

$$\left(\sum_i u_i\otimes v_i,\sum_j u'_j\otimes v'_j\right)_{V\otimes V'}=\sum_{i,j}(u_i,u'_j)_V(v_i,v'_j)_{V'}$$

也是 G 的酉表示 [留作习题 3.1]. 因此 $cf^V_{u,u'}+f^{V'}_{v,v'}=f^{V\oplus V'}_{(cu,v),(u',v')}$, 从而 $\mathrm{MC}(G)$ 是 G 上的光滑函数空间的子空间; 再注意 $f^V_{u,u'}f^{V'}_{v,v'}=f^{V\otimes V'}_{u\otimes v,u'\otimes v'}$, 于是 $\mathrm{MC}(G)$ 是代数. 而常函数显然是平凡表示的矩阵系数.

最后, 为证明此引理的后半部分, 首先对 G 的表示 V 作不可约正交直和分解 $V=\bigoplus_i V_i$ [习题 3.2], 使得每个 $V_i\cong E_{\pi_i}$. 此时, 任意 $v,v'\in V$ 都可相应分解为 $v=\sum_i v_i$, $v'=\sum_i v'_i$, 其中 $v_i,v'_i\in V_i$, 于是 $f^V_{v,v'}=\sum_i f^{V_i}_{v_i,v'_i}$. 若取 $T_i\colon V_i\to E_{\pi_i}$ 为 G-模同构, 那么 $(T_iv_i,T_iv'_i)_{E_{\pi_i}}=(v_i,v'_i)_V$ 给出了 E_{π_i} 的酉结构, 并且使得 $f^V_{v,v'}=\sum_i f^{E_{\pi_i}}_{T_iv_i,T_iv'_i}$. 将 T_iv_i 和 $T_iv'_i$ 在 E_{π_i} 的基下展开即得证. □

定理 3.3. 舒尔正交关系 *(Schur orthogonality relation)*. 设 U,V 是紧李群 G 的有限维不可约酉表示, 相应的不变内积分别记作 $(\cdot,\cdot)_U$ 与 $(\cdot,\cdot)_V$. 则对于任意 $u_i\in U$, $v_i\in V$, $(i=1,2)$, 成立

$$\int_G (gu_1,u_2)_U\overline{(gv_1,v_2)_V}\,\mathrm{d}g=\begin{cases}0 & 若\ U\ncong V\\ \dfrac{1}{\dim V}(u_1,v_1)_V\overline{(u_2,v_2)_V} & 若\ U=V.\end{cases}$$

证明. 对于给定的 $u\in U$, $v\in V$, 定义线性映射 $T_{u,v}\colon U\to V$ 为 $T_{u,v}(\cdot)=v(\cdot,u)_U$. 为表述严谨, 我们把 G 的表示 U,V 完整地记作 (π_U,U), (π_V,V). 于是, 在 U,V 的给定的基下, 定义在 G 上的函数 $g\mapsto\pi_U(g)\circ T_{u,v}\circ\pi_V^{-1}(g)$ 可以视为矩阵值函数. 对矩阵的每个分量分别作积分 [也就是 §3.2.2 当中的向量值积分], 定义线性映射 $\widetilde{T}_{u,v}\colon U\to V$ 如下:

$$\widetilde{T}_{u,v}=\int_G\pi_U(g)\circ T_{u,v}\circ\pi_V^{-1}(g)\,\mathrm{d}g.$$

对任意 $h\in G$, 测度 $\mathrm{d}g$ 的不变性表明

$$\pi_U(h)\circ\widetilde{T}_{u,v}\ =\ \int_G\pi_U(hg)\circ T_{u,v}\circ\pi_V^{-1}(g)\,\mathrm{d}g$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_G \pi_U(g)\circ T_{u,v}\circ \pi_V^{-1}(h^{-1}g)\,\mathrm{d}g \\
&= \widetilde{T}_{u,v}\circ \pi_V(h),
\end{aligned}
$$

从而 $\widetilde{T}_{u,v}\in \mathrm{Hom}_G(U,V)$. 不可约性与舒尔引理 (定理2.12) 表明 $\widetilde{T}_{u,v}=cI$, 其中 $c=c(u,v)\in\mathbb{C}$ 是与 u,v 有关的常数, 并且当 $U\ncong V$ 时 $c=0$. 利用有关定义, 作换元积分 $g\mapsto g^{-1}$ 可得

$$
\begin{aligned}
c(u_1,v_1)_V &= (\widetilde{T}_{u_2,v_2}u_1,v_1)_V=\int_G (gT_{u_2,v_2}g^{-1}u_1,v_1)_V\,\mathrm{d}g \\
&= \int_G \left((g^{-1}u_1,u_2)_U gv_2,v_1\right)_V\,\mathrm{d}g=\int_G (gu_1,u_2)_U(g^{-1}v_2,v_1)_V\,\mathrm{d}g \\
&= \int_G (gu_1,u_2)_U(v_2,gv_1)_V\,\mathrm{d}g=\int_G (gu_1,u_2)_U\overline{(gv_1,v_2)}_V\,\mathrm{d}g.
\end{aligned}
$$

这就证明了 $U\ncong V$ 的情况. 而当 $U=V$ 时, 只需计算常数 c. 对等式 $cI=\widetilde{T}_{u_2,v_2}$ 两边取迹可得

$$
\begin{aligned}
c\dim V &= \mathrm{tr}\,\widetilde{T}_{u_2,v_2}=\int_G \mathrm{tr}\left[g\circ T_{u_2,v_2}\circ g^{-1}\right]\,\mathrm{d}g \\
&= \int_G \mathrm{tr}\,T_{u_2,v_2}\,\mathrm{d}g=\mathrm{tr}\,T_{u_2,v_2}.
\end{aligned}
$$

为快速计算 $\mathrm{tr}\,T_{u_2,v_2}$(不妨 $v_2\neq 0$), 将向量 v_2 扩充为 $U=V$ 的一组基. 因为 $T_{u_2,v_2}(\cdot)=v_2(\cdot,u_2)_V$, 从而在这组特殊选取的基下立刻看出 $\mathrm{tr}\,T_{u_2,v_2}=(v_2,u_2)_V$, 从而 $c=\dfrac{1}{\dim V}\overline{(u_2,v_2)}_V$, 得证. □

若 $U\cong V$, $T\colon U\to V$ 为 G-模同构, 则推论2.20表明存在正常数 $c\in\mathbb{R}$ 使得 $(u_1,u_2)_U=c(Tu_1,Tu_2)_V$. 在此情形下, 舒尔正交关系为

$$
\int_G (gu_1,u_2)_U\overline{(gv_1,v_2)}_V\,\mathrm{d}g=\frac{c}{\dim V}(Tu_1,v_1)_V\overline{(Tu_2,V_2)}_V.
$$

当然, 只要把 T 换成 $\sqrt{c}T$, 就能不妨令常数 $c=1$.

3.1.2 特征标理论

定义 3.4. 紧李群 G 关于有限维表示 (π,V) 的 **特征标** *(character)* χ_V 是指定义在 G 上的函数 $\chi_V(g)=\mathrm{tr}\,\pi(g)$.

特征标将会成为研究紧李群表示的强大工具. 我们将在定理3.7中证明, 在等价意义下, 紧李群的表示被其特征标完全确定. 注意当 $\dim V > 1$ 时, 上述特征标一般**不是**群同态.

定理 3.5. 设 V, V_i 为紧李群 G 的有限维表示, 则成立以下:

1. $\chi_V \in \mathrm{MC}(G)$.
2. $\chi_V(e) = \dim V$.
3. 若 $V_1 \cong V_2$, 则 $\chi_{V_1} = \chi_{V_2}$.
4. 对任意 $g, h \in G$, 成立 $\chi_V(hgh^{-1}) = \chi_V(g)$.
5. $\chi_{V_1 \oplus V_2} = \chi_{V_1} + \chi_{V_2}$.
6. $\chi_{V_1 \otimes V_2} = \chi_{V_1}\chi_{V_2}$.
7. $\chi_{V^*}(g) = \chi_{\overline{V}}(g) = \overline{\chi_V(g)} = \chi_V(g^{-1})$.
8. $\chi_{\mathbb{C}}(g) = 1$, 其中 $\mathbb{C}$ 为 G 的平凡表示.

证明. 这些的证明都是直接的, 这里只证 (1),(4),(5),(7), 其余留作习题 [见习题 3.3] . 对于 (1), 取 V 的关于 G-不变内积 $(\cdot,\cdot)$ 的一组标准正交基 $\{v_i\}$, 则有 $\chi_V(g) = \sum_i (gv_i, v_i)$, 因此 $\chi_V \in \mathrm{MC}(G)$. 对于 (4), 注意到

$$\chi_V(hgh^{-1}) = \mathrm{tr}\left[\pi(h)\pi(g)\pi(h)^{-1}\right] = \mathrm{tr}\,\pi(g) = \chi_V(g).$$

对于 (5), §2.2.1 节已经说明, G 在 $V_1 \oplus V_2$ 上的作用可以表示为形如 $\begin{pmatrix} * & 0 \\ 0 & * \end{pmatrix}$ 的分块对角矩阵, 其中左上角为 G 在 V_1 上的作用的矩阵, 右下角为 G 在 V_2 上的作用的矩阵. 然后取迹即可. 对于 (7), 等价关系 $V^* \cong \overline{V}$ 表明 $\chi_{V^*}(g) = \chi_{\overline{V}}(g)$. 由 §2.2.1 节可知, g 在 $\overline{V}$ 的作用的矩阵是 g 在 V 上的作用的矩阵的共轭, 从而两边取迹得到 $\chi_{\overline{V}}(g) = \overline{\chi_V(g)}$. 类似地, g 在 V^* 的作用的矩阵是 g 在 V 上的作用的矩阵的逆转置, 从而取迹得 $\chi_{V^*}(g) = \chi_V(g^{-1})$. □

定义 3.6. 设 V 是李群 G 的有限维表示, 则记 $V^G := \{v \in V \mid gv = v, \forall g \in G\}$. 换言之, V^G 为 V 的所有的同构于平凡表示的子表示的和.

下述定理将计算不可约表示的特征标的 L^2-内积.

定理 3.7. 设 V, W 为紧李群 G 的有限维表示.

1. V, W 的特征标满足如下:
$$\int_G \chi_V(g)\overline{\chi_W(g)}\,\mathrm{d}g = \dim \mathrm{Hom}_G(V, W).$$
特别地, 有 $\int_G \chi_V(g)\,\mathrm{d}g = \dim V^G$. 此外, 若 V, W 不可约, 则
$$\int_G \chi_V(g)\overline{\chi_W(g)}\,\mathrm{d}g = \begin{cases} 0 & \text{若 } V \ncong W \\ 1 & \text{若 } V \cong W \end{cases}.$$
2. 在表示等价意义下, V 被其特征标 χ_V 所完全确定. 换言之, $\chi_V = \chi_W$ 当且仅当 $V \cong W$. 特别地, 对于 G 的表示 V_i, 则 $V \cong \bigoplus_i n_i V_i$ 当且仅当 $\chi_V = \sum_i n_i \chi_{V_i}$.
3. V 为不可约表示当且仅当 $\int_G |\chi_V(g)|^2\,\mathrm{d}g = 1$.

证明. 先考虑 V, W 都不可约的情形. 分别取 V, W 关于 G-不变内积 $(\cdot,\cdot)_V$, $(\cdot,\cdot)_W$ 的一组标准正交基 $\{v_i\}$, $\{w_j\}$. 则成立
$$\chi_V(g)\overline{\chi_W(g)} = \sum_{i,j} (gv_i, v_i)_V \overline{(gw_j, w_j)_W},$$
从而舒尔正交关系 (定理3.3) 表明当 $V \ncong W$ 时 $\int_G \chi_V(g)\overline{\chi_W(g)}\,\mathrm{d}g = 0$. 而当 $V \cong W$ 时, $\chi_W = \chi_V$, 从而由舒尔正交关系得
$$\int_G \chi_V(g)\overline{\chi_V(g)}\,\mathrm{d}g = \frac{1}{\dim V}\sum_{i,j} |(v_i, v_j)_V|^2 = 1.$$

而对一般的 V, W, 作不可约直和分解 $V \cong \bigoplus_{[\pi]\in\widehat{G}} m_\pi E_\pi$, $W \cong \bigoplus_{[\pi]\in\widehat{G}} n_\pi E_\pi$, 则

$$\begin{aligned}
\int_G \chi_V(g)\overline{\chi_W(g)}\,\mathrm{d}g &= \sum_{[\pi],[\pi']\in\widehat{G}} m_\pi n_{\pi'} \int_G \chi_{E_\pi}(g)\overline{\chi_{E_{\pi'}}(g)}\,\mathrm{d}g \\
&= \sum_{[\pi]\in\widehat{G}} m_\pi n_\pi = \sum_{[\pi],[\pi']\in\widehat{G}} m_\pi n_{\pi'} \dim \mathrm{Hom}_G(E_\pi, E_{\pi'}) \\
&= \dim \mathrm{Hom}_G\left(\bigoplus_{[\pi]\in\widehat{G}} m_\pi E_\pi, \bigoplus_{[\pi]\in\widehat{G}} n_\pi E_\pi\right) \\
&= \dim \mathrm{Hom}_G(V, W).
\end{aligned}$$

由此, 再利用定理2.24, 容易证明本定理其余部分. 特别地, 因为 V^G 为 V 的同构于平凡表示的部分的直和, $\dim \mathrm{Hom}_G(\mathbb{C}, V) = \dim V^G$, 因此 $\dim V^G = \int_G \chi_{\mathbb{C}}(g)\overline{\chi_V(g)}\,\mathrm{d}g = \int_G \overline{\chi_V(g)}\,\mathrm{d}g$. 因为 $\dim V^G$ 为实数, 取共轭不改变它的值, 于是 (1) 的剩余部分得证.

至于 (2), 注意 V 完全由各不可约表示的重数 $m_\pi = \dim \mathrm{Hom}_G(E_\pi, V)$ 所确定, $[\pi] \in \widehat{G}$. 而重数 $m_\pi = \int_G \chi_{E_\pi}(g)\overline{\chi_V(g)}\,\mathrm{d}g$. 因此 V 由 χ_V 完全确定. 至于 (3), 由推论2.19可知 V 不可约当且仅当 $\dim \mathrm{Hom}_G(V, V) = 1$. 而这等价于 $\int_G \chi_V(g)\overline{\chi_V(g)}\,\mathrm{d}g = 1$. □

作为特征标理论的强大应用, 我们在用紧李群 G_1, G_2 的不可约表示来完全分类紧李群直积 $G_1 \times G_2$ 的所有不可约表示. 相应结论表明, 我们本质上只需要研究尽量 “小” 的紧李群的表示.

定义 3.8. 设 V_1 是紧李群 G_i 的有限维表示, $i = 1, 2$, 则定义 $G_1 \times G_2$ 在 $V_1 \otimes V_2$ 上的表示如下: $(g_1, g_2)\sum_i v_{i_1} \otimes v_{i_2} := \sum_i (g_1 v_{i_1}) \otimes (g_2 v_{i_2})$.

定理 3.9. 对于紧李群 $G_i\,(i = 1, 2)$, 设 W 为 $G_1 \times G_2$ 的有限维表示. 则 W 不可约当且仅当存在 G_i 的有限维不可约表示 V_i 使得 $W \cong V_1 \otimes V_2$.

证明. 若 V_i 为 G_i 的有限维不可约表示, 则 $\int_{G_i} |\chi_{V_i}(g)|^2 \,\mathrm{d}g = 1$. 由于 $\chi_{V_1\otimes V_2}(g_1,g_2) = \chi_{V_1}(g_1)\chi_{V_2}(g_2)$ [留作习题 2.3] , 并且由哈尔测度的唯一性可知 $\mathrm{d}g_1\,\mathrm{d}g_2$ 是 $G_1\times G_2$ 的一个哈尔测度, 所以

$$\begin{aligned} &\int_{G_1\times G_2} |\chi_{V_1\otimes V_2}(g_1,g_2)|^2 \,\mathrm{d}g_1\,\mathrm{d}g_2 \\ &= \left(\int_{G_1} |\chi_{V_1}(g_1)|^2 \,\mathrm{d}g_1\right)\left(\int_{G_2} |\chi_{V_2}(g_2)|^2 \,\mathrm{d}g_2\right) \\ &= 1, \end{aligned} \tag{3.10}$$

所以 $V_1\otimes V_2$ 是 $G_1\times G_2$-不可约的.

反之, 考虑 $G_1\times G_2$-不可约模 W. 将 G_1 视为 $G_1\times\{e\}$, 将 G_2 视为 $\{e\}\times G_2$, 作 W 关于 G_2 的不可约分解:

$$W \cong \bigoplus_{[\pi]\in\widehat{G_2}} \mathrm{Hom}_{G_2}(E_\pi, W)\otimes E_\pi,$$

上述模同构由 G_2-模同态 Φ: $\mathrm{Hom}_{G_2}(E_\pi,W)\otimes E_\pi \to W$, $T\otimes V \mapsto T(v)$ 所诱导. 注意 G_2 在 $\mathrm{Hom}_{G_2}(E_\pi,W)$ 的作用是平凡的, $\mathrm{Hom}_{G_2}(E_\pi,W)$ 也可通过以下方式视为 G_1-模: $(g_1T)(v) := (g_1,e)T(v)$. 这样, $\bigoplus_{[\pi]\in\widehat{G_2}} \mathrm{Hom}_{G_2}(E_\pi,W)\otimes E_\pi$ 自然是 $G_1\times G_2$ 的一个表示, 再断言 Φ 为它到 W 的 $G_1\times G_2$-模同构: 这是因为

$$\begin{aligned} (g_1,g_2)\Phi(T\otimes v) &= (g_1,e)(e,g_2)\Phi(T\otimes v) = (g_1,e)\Phi(T\otimes g_2v) \\ &= (g_1,e)T(g_2v) = (g_1T)(g_2v) = \Phi((g_1T)\otimes(g_2v)). \end{aligned}$$

因为 W 不可约, 从而恰有一个 $[\pi]\in\widehat{G_2}$, 使得

$$W \cong \mathrm{Hom}_{G_2}(E_\pi,W)\otimes E_\pi.$$

注意 E_π 是 G_2-不可约的, 从而通过类似(**3.10**)的计算易知 $\mathrm{Hom}_{G_2}(E_\pi,W)$ 是 G_1-不可约的. □

由本定理, 容易推出 $\widehat{G_1\times G_2} \cong \widehat{G_1}\times\widehat{G_2}$ [留作习题 3.10] .

3.1.3 习题

习题 3.1 若 V, V' 是李群 G 的有限维酉表示, 相应的不变内积分别为 $(\cdot,\cdot)_V$ 与 $(\cdot,\cdot)'$. 证明: $V \oplus V'$ 上的二次型 $\big((u,u'),(v,v')\big) := (u,v) + (u',v')'$ 是 G-不变的, $V \otimes V'$ 上的二次型

$$\left(\sum_i u_i \otimes u_i', \sum_j v_j \otimes v_j'\right) := \sum_{i,j} (u_i, v_j)(u_i', v_j')'$$

也是 G-不变的.

习题 3.2 证明: 紧李群的任何有限维酉表示都能写成不可约子表示的 **正交**直和.

习题 3.3 完成定理3.5的证明. 此外, 对于紧李群 G_i 的有限维表示 V_i, 证明 $\chi_{V_1 \otimes V_2}(g_1, g_2) = \chi_{V_1}(g_1)\chi_{V_2}(g_2)$.

习题 3.4 易知有限群 G 作用于有限集合 M, 则定义 G 在 $C(M) := \{f\colon M \to \mathbb{C}\}$ 上的作用为 $(gf)(m) = f(g^{-1}m)$. 证明: $\chi_{C(M)}(g) = |M^g|$, 其中 $M^g := \{m \in M \mid gm = m\}$.

习题 3.5 回忆 $\mathrm{SU}(2)$ 的表示 $V_n(\mathbb{C}^2)$, 见 §2.1.2.2.

(a) 对于 $g \in \mathrm{SU}(2)$, 用矩阵 g 的特征值来表示 $\chi_{V_n(\mathbb{C}^2)}(g)$.

(b) 通过计算特征标, 证明如下 **Clebsch-Gordan 公式**:

$$V_n(\mathbb{C}^2) \otimes V_m(\mathbb{C}^2) \cong \bigoplus_{j=0}^{\min\{n,m\}} V_{n+m-2j}(\mathbb{C}^2).$$

习题 3.6

(a) 回忆 §2.1.2.3 节介绍的 $\mathrm{SO}(3)$ 的表示 $V_m(\mathbb{R}^3)$ 与 $\mathcal{H}_m(\mathbb{R}^3)$. 对如下的 $g \in \mathrm{SO}(3)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix},$$

计算 $\chi_{V_m(\mathbb{R}^3)}(g)$ 与 $\chi_{\mathcal{H}_m(\mathbb{R}^3)}(g)$.

(b) 回忆 §2.1.2.4 节所介绍的 $\mathrm{Spin}(4)$ 的半旋表示 $S^{\pm}$. 试计算 $\chi_{S^{\pm}}(g)$, 其中 $g = (\cos\theta_1 + e_1e_2\sin\theta_1)(\cos\theta_2 + e_3e_4\sin\theta_2) \in \mathrm{Spin}(4)$.

习题 3.7 设 V 是李群 G 的有限维表示. 证明: $\chi_{\bigwedge^2 V}(g)=\dfrac{1}{2}\left(\chi_V(g)^2-\chi_V(g^2)\right)$, 并且 $\chi_{S^2V}(g)=\dfrac{1}{2}\left(\chi_V(g)^2+\chi_V(g^2)\right)$. 进而由此证明 $V\otimes V\cong S^2V\oplus\bigwedge^2 V$ [见习题 2.15] .

习题 3.8 对于紧李群 G 的有限维表示 (π,V), 若存在实向量空间 V_0 使得 V_0 具有 G-模结构, 并且 G 在 V 上的作用是 G 在 V_0 的作用的复化 [即 $V=V_0\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{C}$] , 则称表示 (π,V) 是**实型的**. 如果存在具有 G-模结构的四元数向量空间, 使得 G 在 V 上的作用为 G 在该四元数向量空间上的作用的标量限制, 则称 (π,V) 是**四元数型的**. 若 (π,V) 既不是实型的也不是四元数型的, 则称它为**复型的**.

(a) 证明: V 是实型的当且仅当 V 存在 G-不变非退化对称双线性型; V 是四元数型的当且仅当 V 存在 G-不变非退化反对称双线性型.

(b) 证明: V 上的 G-不变双线性型构成的集合为 $\mathrm{Hom}_G(V\otimes V,\mathbb{C})\cong\mathrm{Hom}_G(V,V^*)$ [见习题 2.15] .

(c) 接下来假设 V 不可约. 证明: V 是复型的当且仅当 $V\ncong V^*$; 而当 $V\cong V^*$ 时, 利用习题 3.7 的结论断言 V 是实型或者四元数型之一, 但不可能都是.

(d) 利用定理3.7与习题 3.7 中的特征标公式, 证明

$$\int_G \chi_V(g^2)\,\mathrm{d}g=\begin{cases}1 & \text{若 } V \text{ 为实型}\\ 0 & \text{若 } V \text{ 为复型}\\ -1 & \text{若 } V \text{ 为四元数型.}\end{cases}$$

(e) 若 χ_V 为实值函数, 证明 V 是实型或四元数型.

习题 3.9 设 (π,V) 是紧李群 G 的有限维表示. 利用酉表示以及特征子空间分解来证明 $|\chi_V(g)|\le\dim V$, 并且等号成立当且仅当 $\pi(g)$ 为标量算子.

习题 3.10 考虑紧李群 G_i 的不可约表示 $[\pi_i]\in\widehat{G_i}$. 证明: 映射 $(E_{\pi_1},E_{\pi_2})\mapsto E_{\pi_1}\otimes E_{\pi_2}$ 诱导集合同构 $\widehat{G_1}\times\widehat{G_2}\cong\widehat{G_1\times G_2}$.

3.2 无限维表示

在很多应用情景下, 往往需要把 “表示” 定义中的 “有限维” 要求去掉, 即考虑无限维表示. 由于无限维空间比有限维情况复杂, 我们需要稍微修改有关定义;

而这些修改不会影响有限维情形. 也许有点让人失望的是, 这样修改后, 紧李群的无限维表示理论最终会转化为有限维理论.

3.2.1 基本定义与舒尔引理

我们知道, **拓扑向量空间**是配以拓扑结构的向量空间, 使得加法与数乘都是连续映射. 对于拓扑向量空间 V, V', 记 $\mathrm{Hom}(V, V')$ 为从 V 到 V' 的**连续**线性变换构成的集合, 记 $\mathrm{GL}(V)$ 为 $\mathrm{Hom}(V, V)$ 的全体可逆元构成的集合.

下述定义 [见定义2.1,2.2与2.11] 相比有限维情形做了一些修改, 这有助于我们研究无限维表示. 在无限维情形下, 主要的变化是要求李群的作用关于两个变量都连续, 以及自由地使用形容词 “连续” 和 “闭”.

定义 3.11.

1. 李群 G 在拓扑向量空间 V 上的**表示** 是指二元组 (π, V), 其中 $\pi\colon G \to \mathrm{GL}(V)$ 为群同态, 并且映射 $G \times V \to V$, $(g, v) \mapsto \pi(g)(v)$ 是连续映射.
2. 对于李群 G 在拓扑向量空间上的表示 (π, V) 与 (π', V'), 称 $T \in \mathrm{Hom}(V, V')$ 为 G-模同态或 G-映射, 如果 $T \circ \pi = \pi' \circ T$.
3. 所有 G-映射之全体记作 $\mathrm{Hom}_G(V, V')$.
4. 若存在双射 $T \in \mathrm{Hom}_G(V, V')$, 则称表示 V 与 V' 等价, 记作 $V \cong V'$.
5. 子空间 $U \subseteq V$ 称为 G-不变的, 如果 $gU \subseteq U$, $\forall g \in G$. 此时, 若 U 为**闭**子空间, 则 U 本身也是 G 的表示, 称为子模或子表示.
6. G 的非零表示 V 称为不可约的, 如果 V 的**闭**G-不变子空间只有 $\{0\}$ 和 V. 非零表示 V 是可约的, 如果存在 V 的**闭**G-不变**真**子空间.

绝大多数情况下, 我们要研究的有趣的在拓扑向量空间上的表示是 **希尔伯特空间**上的**酉表示**, 即, 李群 G 在完备内积空间上的表示, 并且该空间的内积是 G-不变的2.14. 更一般地, 很多结论在豪斯多夫**局部凸空间**, 或者特别地, **Fréchet 空间** [见 [37]] 上也仍然成立. 我们回忆, 局部凸空间是一种拓扑向量空间, 它的拓扑由一族半范数所诱导. 而 Fréchet 空间是完备的豪斯多夫局部凸空间, 并且其拓扑由可数个半范数所诱导.

希尔伯特空间上的酉表示的第一个例子是 S^1 在 $L^2(S^1)$ 上的作用 $(\pi(e^{i\theta})f)(e^{i\alpha}) := f(e^{i(\alpha-\theta)})$, $\forall e^{i\theta} \in S^1$, $f \in L^2(S^1)$. 我们后面会看到 [见引理3.20]，这个例子能够推广到任意紧李群.

接下来介绍升级版的舒尔引理 [见定理2.12]，使得能够处理希尔伯特空间上的酉表示.

定理 3.12. 舒尔引理. 设 V, W 为李群 G 在希尔伯特空间上的酉表示. 若 V, W 都不可约, 则

$$\dim \mathrm{Hom}_G(V, W) = \begin{cases} 1 & \text{若 } V \cong W \\ 0 & \text{若 } V \ncong W. \end{cases}$$

一般地, 表示 V 不可约当且仅当 $\mathrm{Hom}_G(V, V) = \mathbb{C}I$.

证明. 先考虑 V, W 都不可约的情形. 若 $T \in \mathrm{Hom}_G(V, W)$ 非零, 则 $\ker T$ 是 V 的真闭子空间, 并且 G-不变, 从而不可约性迫使 $\ker T = \{0\}$. 类似地, T 的像集非零且 G-不变, 从而连续性与不可约性表明 $\overline{\mathrm{range}\, T} = W$.

考虑 T 的伴随映射 $T^*\colon W \to V$, 由伴随映射的定义直接验证 $T^* \in \mathrm{Hom}_G(W, V)$, 并且 $T^* \neq 0$, T^* 为单射并且像集稠密 [留作习题 3.11]. 令 $S = T^* \circ T \in \mathrm{Hom}_G(V, V)$, 则 $S^* = S$. 在有限维情形, 我们用特征值的存在性来完成证明. 然而在无限维情形, 特征值 (点谱) 一般来说未必存在. 为克服这一障碍, 我们祭出泛函分析中的一个标准定理.

有界正规算子的谱定理 [详见泛函分析标准教材, 例如 [74] 或 [30]] 断言, 存在复平面上的投影算子值测度 E, 使得 $S = \displaystyle\int_{\sigma(S)} \lambda\, \mathrm{d}E$, 其中 $\sigma(S)$ 为 S 的谱集. 此外, V 上的有界线性算子与 S 交换当且仅当它与每个 $E(\triangle)$ 都交换, 其中 $\triangle$ 取遍 $\sigma(S)$ 的博雷尔子集. 注意积分 $\displaystyle\int_{\sigma(S)} \lambda\, \mathrm{d}E$, 谱定理还断言, S 是形如 $\displaystyle\sum_i \lambda_i E(\triangle_i)$ 的算子在算子范数意义下的极限, 其中 $\{\triangle_i\}$ 是 $\sigma(S)$ 的一个划分, $\lambda_i \in \triangle_i$.

由于 $S \in \mathrm{Hom}_G(V, V)$, 从而对任意 $g \in G$, $\pi(g)$ 与 $E(\triangle)$ 交换, 从而 $E(\triangle) \in \mathrm{Hom}_G(V, V)$. 我们已经知道, $\mathrm{Hom}_G(V, V)$ 的非零元都是单射, 然而 $E(\triangle)$ 是投影算子, 从而 $E(\triangle)$ 只能为 0 或 I. 因此存在 (可能为 0 的) 常数 k 使得

$\sum_i \lambda_i E(\triangle_i) = kI$. 特别地, S 是恒等算子的常数倍. 又因为 $S \neq 0$, 从而 S 是恒等算子的非零常数倍. 因此 T 可逆, $V \cong W$.

现在设 $T_i \in \mathrm{Hom}_G(V, W)$ 非零. 令 $S := T_2^{-1} \circ T_1 \in \mathrm{Hom}_G(V, V)$, 然后把 S 改写为 $S = \frac{1}{2}[(S + S^*) - i(iS - iS^*)]$. 对自伴 G-模同态 $S + S^*$ 与 $iS - iS^*$ 使用与前文类似的论证方式, 可以推出 S 为恒等算子的常数倍. 这就完成了本定理前半部分的证明.

为证明后半部分, 只需要证明当 V 可约时 $\dim \mathrm{Hom}_G(V, V) \geq 2$. 对于真 G-子模 $U \subseteq V$, 由酉表示性质易知正交补 $U^\perp$ 也是真 G-子模. 向 $U, U^\perp$ 的正交投影就至少贡献了 $\mathrm{Hom}_G(V, V)$ 里的两个线性无关的元素. □

3.2.2 G-有限向量

在此之后章节, 本书将经常需要用到紧集上的 **向量值积分**. 对于有限维向量的情形, 只需要对向量的每个分量分别积分即可, 例如在定理3.7的证明中我们用这种有限维向量的积分来定义算子 $\widetilde{T}_{u,v}$. 对于希尔伯特空间中的向量, 通过取极限容易推广这种向量值积分. 而对于更一般情形, 泛函分析给出了处理这种算子值积分的一般理论 [详见 [74]] . 注意, 在本章我们一直假定 G 是紧李群.

设 V 是豪斯多夫局部凸拓扑向量空间, $f\colon G \to V$ 为连续函数. 则 V 中存在唯一元素, 记作

$$\int_G f(g)\,\mathrm{d}g,$$

使得对任意连续线性泛函 $T \in \mathrm{Hom}(V, \mathbb{C})$ 都成立 $T\left(\int_G f(g)\,\mathrm{d}g\right) = \int_G T(f(g))\,\mathrm{d}g$. 而当 V 是 Fréchet 空间时, $\int_G f(g)\,\mathrm{d}g$ 是如下元素的极限:

$$\sum_{i=1}^{n} f(g_i)\,\mathrm{d}g(\triangle_i),$$

其中 $\{\triangle_i\}_{i=1}^n$ 为 G 的有限博雷尔划分, $g_i \in \triangle_i$, 并且 $\mathrm{d}g(\triangle_i)$ 为 $\triangle_i$ 关于不变测度 $\mathrm{d}g$ 的体积.

我们回忆, V 上的线性算子 T 称为**正定**的, 如果对任意 $v \in V$, $(Tv, v) \geq 0$ 且不恒为零; 线性算子 T 称为**紧算子**, 如果 V 的单位球关于 T 的像集的闭包是紧

集. 一个泛函分析的标准结果是, V 上的紧算子构成集合是 V 上的有界算子关于算子复合运算构成的代数的闭 [左右双边] 理想. [详见 [74] 或者 [30]] .

现在, 我们要建立紧李群在希尔伯特空间上的酉表示的 **典范分解** [定理2.24的无限维版本] . 而实现这个目标的第一步是最难的, 其核心在于如下引理:

引理 3.13. *设 (π, V) 是紧李群 G 在希尔伯特空间 V 上的酉表示. 则存在 V 的有限维 (闭)G-子表示.*

证明. 任意取定 V 的一个紧自伴正定算子 $T_0 \in \mathrm{Hom}(V, V)$, 例如可以取非零的有限秩正交投影算子. 利用取值于 $\mathrm{Hom}(V, V)$ 的向量值积分, 定义算子

$$T := \int_G \pi(g) \circ T_0 \circ \pi(g)^{-1} \,\mathrm{d}g.$$

由于 T 是形如 $\sum\limits_i \mathrm{d}g(\triangle_i)\pi(g_i) \circ T_0 \circ \pi(g_i)^{-1}$, $g_i \in \triangle_i \subseteq G$ 的算子的极限, 从而 T 依然是紧算子. 由于测度 $\mathrm{d}g$ 左不变, 易知 T 是 G-不变的, 即 $T \in \mathrm{Hom}_G(V, V)$ [与定理3.7证明过程中的 $\widetilde{T}_{u,v}$ 的处理方式完全类似] . 由 T_0 的正定性, 容易验证

$$(Tv, v) = \int_G (\pi(g) T_0 \pi(g)^{-1} v, v) \,\mathrm{d}g = \int_G (T_0 \pi(g)^{-1} v, \pi(g)^{-1} v) \,\mathrm{d}g > 0,$$

其中 $(\cdot, \cdot)$ 为 V 的 G-不变内积, 因此 $T \neq 0$. 再注意 T_0 是自伴算子, 从而易知 T 也是自伴算子.

最后, 我们祭出泛函分析中的一个标准定理来完成证明. **紧自伴算子的谱定理** [详见 [74] 或者 [30]] 表明, 存在 T 的非零特征值 λ, 使得属于 λ 的 [非零] 特征子空间是有限维的. 于是, 该特征子空间 $\ker(T - \lambda I)$ 是我们想要的有限维非零 G-不变闭子空间. $\square$

对于一族希尔伯特空间 $\{(V_\alpha, (\cdot, \cdot)_\alpha)\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$, 我们回忆**希尔伯特空间直和**

$$\widehat{\bigoplus_{\alpha \in \mathcal{A}}} V_\alpha := \left\{ (v_\alpha) \;\middle|\; v_\alpha \in V_\alpha,\ \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} \|v_\alpha\|_\alpha^2 < \infty \right\}$$

是关于内积 $\big((v_\alpha), (v'_\alpha)\big) := \sum\limits_\alpha (v_\alpha, v'_\alpha)_\alpha$ 的希尔伯特空间, 并且 $\bigoplus\limits_\alpha V_\alpha$ 是其稠密子空间, 且对于互异的 $\alpha, \beta \in V$ 成立 $V_\alpha \perp V_\beta$.

定义 3.14. 设 V 是李群 G 在拓扑向量空间上的表示, 称向量 $v \in V$ 为**G-有限向量** *(G-finite vector)*, 如果 Gv 张成的子空间是有限维的. 记 G-有限向量构成的集合为 $V_{G\text{-fin}}$, 即

$$V_{G\text{-fin}} := \{v \in V \mid \dim \operatorname{span}\{gv | g \in G\} < \infty\}.$$

下述推论表明, 紧李群在希尔伯特空间上的酉表示实际上没有什么新东西.

推论 3.15. 设 (π, V) 是紧李群 G 在希尔伯特空间 V 上的酉表示. 则存在一族有限维不可约 G-子模 $V_\alpha \subseteq V$ 使得

$$V \cong \widehat{\bigoplus_{\alpha}} V_\alpha.$$

特别地, G 的不可约酉表示一定是有限维的. 此外, G-有限向量构成的集合 $V_{G\text{-fin}}$ 是 V 的稠密子集.

证明. 佐恩引理断言, 如果一个偏序集的任何全序子集都有上界, 那么该偏序集存在极大元. 特别地, 考虑有满足以下性质的集合 $\{V_\alpha \mid \alpha \in \mathcal{A}\}$ 构成的集合族:

1. 每个 V_α 都是有限维不可约 G-子模;
2. 对于互异的 $\alpha, \beta \in \mathcal{A}$, $V_\alpha \perp V_\beta$.

这个集合族在通常的集合包含关系下构成偏序集, 通过取并集可知它的任何全序子集都有上界, 满足佐恩引理条件. 取该集合族的一个极大元 $\{V_\alpha \mid \alpha \in \mathcal{A}\}$. 如果 $\widehat{\bigoplus_{\alpha}} V_\alpha \neq V$, 则正交补 $\left(\widehat{\bigoplus_{\alpha}} V_\alpha\right)^{\perp}$ 是非零 G-不变闭子空间, 从而它本身也是 G 在希尔伯特空间上的酉表示. 特别地, 引理3.13与推论2.17 表明存在有限维不可约 G-不变闭子空间 $V_\gamma \subseteq \left(\widehat{\bigoplus_{\alpha}} V_\alpha\right)^{\perp}$. 而这与 $\{V_\alpha | \alpha \in \mathcal{A}\}$ 的极大性矛盾. □

与 §2.2.4 小节的例子类似, 上述分解也不典范. 我们在下一小节来改进它.

3.2.3 典范分解

首先, 我们把定义2.22升级到无限维情形. 实际上要做的修改仅仅是把 (有限) 直和换成希尔伯特空间直和.

定义 3.16. 设 V 是紧李群 G 在希尔伯特空间上的酉表示. 对于 $[\pi] \in \widehat{G}$, 记 $V_{[\pi]}$ 为 V 的形如若干同构于 E_π 的不可约子模的希尔伯特空间直和的最大的空间. 子模 $V_{[\pi]}$ 称为 V 的**π-部分**.

与有限维情形类似, 上述 $V_{[\pi]}$ 是良定的, 而且等于 V 的所有同构于 E_π 的子模的和的闭包. 这个断言也依赖 Zorn 引理, 证明方法与推论3.15类似 [留作习题 3.12] .

引理 3.17. 设 V 是紧李群 G 在希尔伯特空间上的酉表示, 相应的不变内积为 $(\cdot,\cdot)_V$. 记 E_π, $[\pi] \in \widehat{G}$ 为 G 的一个不可约表示, 相应的不变内积为 $(\cdot,\cdot)_{E_\pi}$. 则存在 $\mathrm{Hom}_G(E_\pi, V)$ 上的内积 $(\cdot,\cdot)_{\mathrm{Hom}}$ 使得 $\mathrm{Hom}_G(E_\pi, V)$ 为希尔伯特空间. 其中, $(\cdot,\cdot)_{\mathrm{Hom}}$ 满足 $(T_1, T_2)_{\mathrm{Hom}} I = T_2^* \circ T_1$; 换言之, 对任意 $T_i \in \mathrm{Hom}_G(E_\pi, V)$, $x_i \in E_\pi$ 都有

$$(T_1, T_2)_{\mathrm{Hom}}(x_1, x_2)_{E_\pi} = (T_1 x_1, T_2 x_2)_V. \tag{3.18}$$

此外, $\|T\|_{\mathrm{Hom}}$ 等于 T 的算子范数.

证明. 容易验证 T_2 的算子伴随 $T_2^* \in \mathrm{Hom}_G(V, E_\pi)$ 也是 G-映射, 这是因为对任意 $x \in E_\pi$, $v \in V$ 都成立

$$\begin{aligned}(T_2^*(gv), x)_{E_\pi} &= (gv, T_2 x)_V = (v, T_2(g^{-1}x))_V = (T_2^* v, g^{-1}x)_{E_\pi} \\ &= (gT_2^* v, x)_{E_\pi}.\end{aligned}$$

于是 $T_2^* \circ T_1 \in \mathrm{Hom}_G(E_\pi, E_\pi)$. 从而由舒尔引理可知存在常数 $(T_1, T_2)_{\mathrm{Hom}} \in \mathbb{C}$ 使得 $(T_1, T_2)_{\mathrm{Hom}} I = T_2^* \circ T_1$.

由 $(\cdot,\cdot)_{\mathrm{Hom}}$ 的定义可知它显然是 $\mathrm{Hom}_G(E_\pi, V)$ 上的厄米特型, 并且

$$(T_1 x_1, T_2 x_2)_V = (T_2^*(T_1 x_1), x_2)_{E_\pi} = ((T_1, T_2)_{\mathrm{Hom}} x_1, x_2)_{E_\pi}$$

$$= \quad (T_1, T_2)_{\mathrm{Hom}}(x_1, x_2)_{E_\pi}.$$

特别地, 对于 $T \in \mathrm{Hom}_G(E_\pi, V)$, $\|T\|_{\mathrm{Hom}}$ 等于 $\|Tx\|_V$ 与 $\|x\|_{E_\pi}$ 相除, 其中 $x \in E_\pi$ 为任意非零向量. 因此 $\|T\|_{\mathrm{Hom}}$ 等于 T 作为 $\mathrm{Hom}_G(E_\pi, V)$ 中元素的算子范数. 因此 $(\cdot,\cdot)_{\mathrm{Hom}}$ 为 $\mathrm{Hom}_G(E_\pi, V)$ 上的内积, 并且使得 $\mathrm{Hom}_G(E_\pi, V)$ 为希尔伯特空间. □

注意(**3.18**)式与 E_π 的不变内积的选取无关. 具体地说, 若把 $(\cdot,\cdot)_{E_\pi}$ 乘以常数倍, 则 T_2^* 相应变为原来的该常数倍, 因此 $(\cdot,\cdot)_{\mathrm{Hom}_G(E_\pi,V)}$ 变为原来的该常数的倒数倍, 从而 $(\cdot,\cdot)_{E_\pi}$ 与 $(\cdot,\cdot)_{\mathrm{Hom}_G(E_\pi,V)}$ 的乘积仍然保持不变.

设 V_i 为希尔伯特空间, 相应内积记作 $(\cdot,\cdot)_i$. 我们回忆, **希尔伯特空间张量积** $V_1 \widehat{\otimes} V_2$ 是指空间 $V_1 \otimes V_2$ 关于内积 $(v_1 \otimes v_2, v_1' \otimes v_2') := (v_1, v_1')_1 (v_2, v_2')_2$ 的完备化 [见习题 3.1] .

定理 3.19. ***(典范分解)***. *设 V 为紧李群 G 在希尔伯特空间上的酉表示.*

1. *存在 (酉)G-模同构*

$$\iota_\pi \colon \mathrm{Hom}_G(E_\pi, V) \widehat{\otimes} E_\pi \xrightarrow{\cong} V_{[\pi]},$$

   使得对任意 $T \in \mathrm{Hom}_G(E_\pi, V)$ 以及 $v \in V$, 成立 $\iota_\pi(T \otimes v) = T(v)$.

2. *成立以下 (酉)G-模同构:*

$$\widehat{\bigoplus_{[\pi]\in\widehat{G}}} \mathrm{Hom}_G(E_\pi, V) \widehat{\otimes} E_\pi \xrightarrow{\cong} V = \widehat{\bigoplus_{[\pi]\in\widehat{G}}} V_{[\pi]}.$$

证明. 与定理2.24证明类似, ι_π 是良定的, 从 $\mathrm{Hom}_G(E_\pi, V) \otimes E_\pi$ 到 $V_{[\pi]}$ 的 G-模同态, 并且像集稠密 (注意 $V_{[\pi]}$ 是由它的若干不可约子模的希尔伯特空间直和, 而不是定理2.24中的有限直和). 引理3.17表明 ι_π 是酉算子, 从而 ι_π 是单射, 从而唯一地延拓到希尔伯特空间张量积 $\mathrm{Hom}_G(E_\pi, V) \widehat{\otimes} E_\pi$ 上. 最后再注意推论3.15表明 V 为 $\sum_{[\pi]\in\widehat{G}} V_{[\pi]}$ 的闭包, 推论2.21表明该和为直和. □

3.2.4 习题

习题 3.11 设 V, W 为紧李群 G 在希尔伯特空间上的酉表示, $T \in \mathrm{Hom}_G(V, W)$ 为单射且像集稠密. 证明: $T^* \in \mathrm{Hom}_G(W, V)$, T^* 为单射且像集稠密.

习题 3.12 设 V 为紧李群 G 在希尔伯特空间上的酉表示, 取定 $[\pi] \in \widehat{G}$.

(a) 考虑所有满足以下性质的集合 $\{V_\alpha \mid \alpha \in V\}$ 构成的集合族:

- 每个 V_α 都是 V 的同构于 E_π 的子模.
- 对于互异的 $\alpha, \beta \in \mathcal{A}$, 成立 $V_\alpha \perp V_\beta$.

取该集合族的包含偏序关系. 利用佐恩引理证明该集合族存在包含偏序下的极大元.

(b) 取一个极大元 $\{V_\alpha \mid \alpha \in \mathcal{A}\}$. 证明: 正交投影 $P\colon V \to \left(\widehat{\bigoplus_{\alpha \in \mathcal{A}}} V_\alpha\right)^\perp$ 为 G-模同态. 若 $V_\gamma \subseteq V$ 是同构于 E_π 的子模, 利用不可约性与极大性证明 $P(V_\gamma) = \{0\}$.

(c) 证明定义3.16中的 $V_{[\pi]}$ 是良定的, 并且 $V_{[\pi]}$ 为 V 的所有同构于 E_π 的子模的和的闭包.

习题 3.13 回忆 $\widehat{S^1} \cong \mathbb{Z}$, S^1 的不可约表示都是一维的, 并且必形如 $\pi_n(e^{i\theta}) = e^{in\theta}$, $n \in \mathbb{Z}$ [见习题 2.21] . 视 $L^2(S^1)$ 为 S^1 的酉表示, 使得对于 $f \in L^2(S^1)$ 成立 $(e^{i\theta} \cdot f)(e^{i\alpha}) = f(e^{i(\alpha-\theta)})$. 试计算 $\mathrm{Hom}_{S^1}(\pi_n, L^2(S^1))$, 并由此推出 $L^2(S^1) = \widehat{\bigoplus_{n \in \mathbb{Z}}} \mathbb{C}e^{in\theta}$.

习题 3.14 利用习题 2.28 与定理2.33证明:

$$L^2(S^{n-1}) = \widehat{\bigoplus_{m \in \mathbb{N}}} \mathcal{H}_m(\mathbb{R}^n)|_{S^{n-1}}, \quad n \geq 2$$

为 $\mathrm{O}(n)$-模 ($n \geq 3$ 时也是 $\mathrm{SO}(n)$-模) $L^2(S^{n-1})$ 的典范分解, 其中 $\mathrm{O}(n)$(或 $\mathrm{SO}(n)$, $n \geq 3$) 在其上的作用是通常的 $(gf)(v) = f(g^{-1}v)$.

习题 3.15 注意李群 $\mathbb{R}$ 的不可约酉表示都是一维的, 且必形如 $\pi_r(x) = e^{irx}$, $r \in \mathbb{R}$ [习题 2.21] . 考虑 $\mathbb{R}$ 在 $L^2(\mathbb{R})$ 上的作用 $(x \cdot f)(y) = f(y - x)$, $\forall f \in L^2(\mathbb{R})$. 证明 $L^2(\mathbb{R})_{\pi_r} = \{0\}$, 从而推出 $L^2(\mathbb{R}) \neq \widehat{\bigoplus_{r \in \mathbb{R}}} L^2(\mathbb{R})_{\pi_r}$.

3.3 Peter-Weyl 定理

设 G 为紧李群, 本节我们要将函数空间 $L^2(G)$ 在函数的左, 右平移意义下作分解. 为此, 利用典范分解, 我们只需要计算 $\mathrm{Hom}_G(E_\pi, L^2(G))$. 但我们并不打算直接去计算它, 而是先去计算更容易处理的 $\mathrm{Hom}_G(E_\pi, C(G)_{G\text{-fin}})$ [见引理3.23] . 利用 Stone-Weierstrass 定理 [见定理3.25] 可以证明 $C(G)_{G\text{-fin}}$ 在 $L^2(G)$ 中稠密. 于是这个稠密性使得我们能够计算出 $\mathrm{Hom}_G(E_\pi, L^2(G))$.

3.3.1 正则表示

紧李群 G 上的连续函数空间 $C(G)$ 关于范数 $\|f\|_{C(G)} := \sup\limits_{g\in G}|f(g)|$ 是巴拿赫空间; 平方可积函数空间 $L^2(G)$ 关于范数 $\|f\|_{L^2(G)} = \left(\int_G |f(g)|^2\,\mathrm{d}g\right)^{\frac{1}{2}}$ 是希尔伯特空间. G 在这两个函数空间上都自然有如下的左作用 l_g 与右作用 r_g:

$$\begin{aligned}(l_g f)(h) &= f(g^{-1}h),\\ (r_g f)(h) &= f(hg).\end{aligned}$$

接下来的定理表明, 它们的确是紧李群 G 的 (无限维) 表示. 它们分别称为 **左正则表示** (left regular representation) 与 **右正则表示**.

引理 3.20. *紧李群 G 在 $C(G)$ 与 $L^2(G)$ 上的左, 右作用都是表示, 并且保持相应空间的范数.*

证明. 注意定义3.11, 我们只需要验证映射 $(g, f) \mapsto l_g f$ 是连续的 [右作用 r_g 也完全类似] . 首先考虑 $C(G)$ 的情形. 注意到

$$\begin{aligned}|f_1(g_1^{-1}h) - f_2(g_2^{-1}h)| &\le |f_1(g_1^{-1}h) - f_1(g_2^{-1}h)| + |f_1(g_2^{-1}h) - f_2(g_2^{-1}h)|\\ &\le |f_1(g_1^{-1}h) - f_1(g_2^{-1}h)| + \|f_1 - f_2\|_{C(G)}.\end{aligned}$$

因为 f_1 是紧集 G 上的连续函数, 且映射 $g \mapsto g^{-1}h$ 连续, 从而当 (g_1, f_1) 充分接近 (g_2, f_2) 时, $\|l_{g_1} f_1 - l_{g_2} f_2\|_{C(G)}$ 充分小.

再看 $L^2(G)$ 的情形. 对于 $f_i \in L^2(G)$, 任取 $f \in C(G)$, 则有

$$\begin{aligned}
\|l_{g_1} f_1 - l_{g_2} f_2\|_{L^2(G)} &= \|f_1 - l_{g_1^{-1}g_2} f_2\|_{L^2(G)} \\
&\leq \|f_1 - f_2\|_{L^2(G)} + \|f_2 - l_{g_1^{-1}g_2} f_2\|_{L^2(G)} \\
&= \|f_1 - f_2\|_{L^2(G)} + \|l_{g_1} f_2 - l_{g_2} f_2\|_{L^2(G)} \\
&\leq \|f_1 - f_2\|_{L^2(G)} + \|l_{g_1} f_2 - l_{g_1} f\|_{L^2(G)} \\
&\qquad + \|l_{g_1} f - l_{g_2} f\|_{L^2(G)} + \|l_{g_2} f - l_{g_2} f_2\|_{L^2(G)} \\
&= \|f_1 - f_2\|_{L^2(G)} + 2\|f_2 - f\|_{L^2(G)} + \|l_{g_1} f - l_{g_2} f\|_{L^2(G)} \\
&\leq \|f_1 - f_2\|_{L^2(G)} + 2\|f_2 - f\|_{L^2(G)} + \|l_{g_1} f - l_{g_2} f\|_{C(G)}.
\end{aligned}$$

因为我们可以取 f 在 L^2 意义下充分接近 f_2, 并且已经证明 G 在 $C(G)$ 的作用是连续的, 从而得证. □

本节第一个重要定理是, $C(G)$ 的 G-有限向量构成的集合恰为 $\mathrm{MC}(G)$, 即 G 的矩阵系数之全体. 虽然 $C(G)$ 有两种不同的 G-模结构 l_g, r_g, 但我们能够证明在这两种模结构意义下的 G-有限向量都一样 [详见定理3.21]. 从而我们用 $C(G)_{G\text{-fin}}$ 来表示 $C(G)$ 的 G-有限向量并不会产生歧义.

定理 3.21. *设 G 为紧李群.*

1. *$C(G)$ 关于 G 的左作用 l_g 的 G-有限向量构成的集合等于 $C(G)$ 关于 G 的右作用 r_g 的 G-有限向量构成的集合.*
2. *$C(G)_{G\text{-fin}} = \mathrm{MC}(G)$.*

证明. 首先证明关于 G 的左作用的 $C(G)_{G\text{-fin}}$ 恰为 $\mathrm{MC}(G)$. 设 $f^V_{u,v}(g) = (gu, v)$ 是 G 的一个矩阵系数, 其中 V 是 G 的一个有限维酉表示, $(\cdot,\cdot)$ 是 V 的不变内积, $u, v \in V$. 则 $(l_g f^V_{u,v})(h) = (g^{-1}hu, v) = (hu, gv)$, 因此 $l_g f^V_{u,v} = f^V_{u,gv}$. 因此 $\{l_g f^V_{u,v} \,|\, g \in G\} \subseteq \{f^V_{u,v'} \,|\, v' \in V\}$. 又因为 V 是有限维空间, 所以 $f^V_{u,v} \in C(G)_{G\text{-fin}}$, 因此 $\mathrm{MC}(G) \subseteq C(G)_{G\text{-fin}}$.

反之, 设 $f \in C(G)_{G\text{-fin}}$. 由定义可知, 存在关于左作用的有限维子模 $V \subseteq C(G)$ 使得 $f \in V$. 因为 $\overline{gf} = g\overline{f}$, 所以 $\overline{V} := \{\overline{v} \,|\, v \in V\}$ 也是 $C(G)$ 的有限维子模. 记 $(\cdot,\cdot)$ 为 $C(G)$ 的 L^2-内积在 V 上的限制. 函数在单位元 $e \in G$ 的赋值映射

是 $\overline{V}$ 上的连续线性泛函, 从而存在 $\overline{v}_0 \in \overline{V}$ 使得对任意 $\overline{v} \in \overline{V}$ 都有 $\overline{v}(e) = (\overline{v}, \overline{v}_0)$. 特别地, $\overline{f}(g) = l_{g^{-1}}\overline{f}(e) = (l_{g^{-1}}f, \overline{v}_0) = (\overline{f}, l_g\overline{v}_0)$. 所以 $f = f^{\overline{V}}_{\overline{v}_0, \overline{f}} \in \mathrm{MC}(G)$. 因此 $C(G)_{G\text{-}\mathrm{fin}} \subseteq \mathrm{MC}(G)$. 这就完成了本定理第 (2) 部分 [关于左作用] 的证明.

再看第 (1) 部分. 设 $f \in C(G)$ 为左 G-有限向量. 则由之前论证可知 f 等于某个矩阵系数 $f^V_{u,v}$. 因此 $(r_g f)(h) = (hgu, v)$, 从而 $r_g f = f^V_{gu,v}$. 因为 $\{gu \,|\, g \in G\}$ 包含于有限维空间 V, 因此已知左 G-有限向量一定也是右 G-有限向量.

反之, 设 $f \in C(G)$ 为右 G-有限向量. 与之前类似, 取 $C(G)$ 的关于右作用的一个有限维子模 V, 使得 $f \in V$. 记 $(\cdot, \cdot)$ 为 L^2-内积在 V 上的限制. 函数在单位元 $e \in G$ 的赋值映射是 V 上的连续线性泛函, 从而存在 $v_0 \in V$ 使得对任意 $v \in V$ 都成立 $v(e) = (v, v_0)$. 特别地, $f(g) = r_g f(e) = (r_g f, v_0)$. 于是 $f = f^V_{f,v_0} \in \mathrm{MC}(G)$, 所以右 G-有限向量一定也是左 G-有限向量. □

类比之前介绍的典范分解, 我们希望把 $C(G)_{G\text{-}\mathrm{fin}}$ [关于 G 的左作用] 分解为若干形如

$$\mathrm{Hom}_G(E_\pi, C(G)_{G\text{-}\mathrm{fin}}) \otimes E_\pi$$

的直和, 其中 $[\pi] \in \widehat{G}$. 此时, 注意到 l_g 在 $\mathrm{Hom}_G(E_\pi, C(G)_{G\text{-}\mathrm{fin}})$ 的作用是平凡的, 从而 G 在 $C(G)_{G\text{-}\mathrm{fin}}$ 的左作用完全由 E_π 来承担. 然而, 定理3.21表明 $C(G)_{G\text{-}\mathrm{fin}}$ 实际上具有 $G \times G$-模结构, 使得 $((g_1, g_2)f)(g) = (r_{g_1} l_{g_2} f)(g) = f(g_2^{-1} g g_1)$. 于是类比定理3.9, 我们自然希望 $\mathrm{Hom}_G(E_\pi, C(G)_{G\text{-}\mathrm{fin}})$ 能够承担 G 的右作用. 也就是说, 赋予 $\mathrm{Hom}_G(E_\pi, C(G)_{G\text{-}\mathrm{fin}})$ 与 §2.2.1 节所定义的平凡的 G-模结构有所不同的另一种 G-模结构. 注意 G 在 $C(G)$ 上的作用为通常的左作用, 在此意义下, 我们定义 G 在 $\mathrm{Hom}_G(E_\pi, C(G)_{G\text{-}\mathrm{fin}})$ 以及 $\mathrm{Hom}_G(E_\pi, C(G))$ 的第二种作用如下: 对任意 $g \in G$, $x \in E_\pi$, $T \in \mathrm{Hom}_G(E_\pi, C(G))$,

$$(gT)(x) := r_g(Tx). \tag{3.22}$$

我们来验证上述定义是良定的. 只需注意到

$$l_{g_1}((g_2T)(x)) = l_{g_1} r_{g_2}(Tx) = r_{g_2} l_{g_1}(Tx) = r_{g_2}(T(g_1 x))((g_2T)(g_1 x)),$$

从而 $g_2 T \in \mathrm{Hom}_G(E_\pi, C(G))$. 而当 $T \in \mathrm{Hom}_G(E_\pi, C(G)_{G\text{-}\mathrm{fin}})$ 时, 由定理3.21可知 $g_2 T \in \mathrm{Hom}_G(E_\pi, C(G)_{G\text{-}\mathrm{fin}})$ 也成立.

下述引理是 §7.4.1 节的 **Frobenius 互反律**的特殊情况. 它的证明过程并不依赖 E_π 的不可约性.

引理 3.23. 考虑紧李群 G 在 $C(G)$ 上的左作用, 以及由(3.22)所定义的 G 在 $\mathrm{Hom}_G(E_\pi, C(G))$ 的作用. 在此意义下, 有如下 G-模同构

$$\mathrm{Hom}_G(E_\pi, C(G)) = \mathrm{Hom}_G(E_\pi, C(G)_{G\text{-fin}}) \cong E_\pi^*.$$

相应的 G-模同构映射如下给出: $T \in \mathrm{Hom}_G(E_\pi, C(G)_{G\text{-fin}})$ 对应于 $\lambda_T \in E_\pi^*$, 使得对于 $x \in E_\pi$,

$$\lambda_T(x) = (Tx)(e).$$

证明. 首先验证映射 $T \mapsto \lambda_T$ 的确是 G-模同态. 这是因为, 对任意 $g \in G$, $x \in E_\pi$,

$$\begin{aligned}(g\lambda_T)(x) &= \lambda_T(g^{-1}x) = (T(g^{-1}x))(e) = (l_{g^{-1}}(Tx))(e) = (Tx)(g)\\ &= (r_g(Tx))(e) = ((gT)(x))(e) = \lambda_{gT}(x),\end{aligned}$$

从而 $g\lambda_T = \lambda_{gT}$.

断言该映射可逆, 并且逆映射

$$\begin{aligned} E_\pi^* &\to \mathrm{Hom}_G(E_\pi, C(G)_{G\text{-fin}})\\ \lambda &\mapsto T_\lambda\end{aligned}$$

满足

$$(T_\lambda(x))(h) = \lambda(h^{-1}x), \quad \forall h \in G.$$

先验证上述映射良定. 只需注意

$$(l_g(T_\lambda(x)))(h) = (T_\lambda(x))(g^{-1}h) = \lambda(h^{-1}gx) = (T_\lambda(gx))(h),$$

从而 $l_g(T_\lambda(x)) = T_\lambda(gx)$. 这表明 T_λ 的确是 G-模同态; 因为 E_π 是有限维空间, 从而 $T_\lambda(x) \in C(G)_{G\text{-fin}}$. 再验证上述两个映射确时互逆. 只需注意

$$\lambda_{T_\lambda}(x) = (T_\lambda(x))(e) = \lambda(x)$$

以及

$$(T_{\lambda_T}(x))(h) = \lambda_T(h^{-1}x) = (T(h^{-1}x))(e) = (l_{h^{-1}}(Tx))(e) = (Tx)(h).$$

因此 $\mathrm{Hom}_G(E_\pi, C(G)_{G\text{-fin}}) \cong E_\pi^*$.

最后, 我们证明 $\mathrm{Hom}_G(E_\pi, C(G)_{G\text{-}\mathrm{fin}}) = \mathrm{Hom}_G(E_\pi, C(G))$. 只需注意到映射 $T \mapsto \lambda_T$ 其实也是从 $\mathrm{Hom}_G(E_\pi, C(G))$ 到 E_π^* 的良定映射, 并且它的逆映射仍然是 $\lambda \mapsto T_\lambda$. 而 $T_\lambda \in \mathrm{Hom}_G(E_\pi, C(G)_{G\text{-}\mathrm{fin}})$, 从而得证. □

注意 E_π 的不变内积按通常的方式自然地诱导了 E_π^* 的不变内积, 但上述同构关于此内积与引理3.17给出的 $\mathrm{Hom}_G(E_\pi, C(G))$ 的内积**未必**是酉的. 不过, 我们可以将该同构适当乘以一个与 $\dim E_\pi$ 有关的常数系数来解决这个问题. 该常数的具体表达式见 §3.4 节.

3.3.2 Peter-Weyl 定理

对于 $n \in \mathbb{Z}$, 我们有 S^1 的不可约表示 (π_n, E_{π_n}), 其中 $E_{\pi_n} = \mathbb{C}$, $\pi_n \colon S^1 \to \mathrm{GL}(1, \mathbb{C})$ 满足 $(\pi_n(g))(x) = g^n x$, $\forall g \in S^1$, $x \in E_{\pi_n}$. 这是 S^1 的全部不可约表示 [见习题 3.13] , 于是有集合同构 $\widehat{S^1} \cong \mathbb{Z}$. 定义 S^1 上的函数 $f_n \colon S^1 \to \mathbb{C}$, $g \mapsto f_n(g) = g^n$. 傅立叶分析的标准结论表明, $\{f_n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ 是 $L^2(S^1)$ 的一组标准正交基. 考虑对应 $1 \in E_{\pi_n} \mapsto f_n$, 我们也可以说成立 $L^2(S^1) \cong \widehat{\bigoplus_{n \in \mathbb{Z}}} E_{\pi_n}$. 该同构它甚至是关于 $L^2(S^1)$ 的右正则作用的 G-模同构.

我们希望把上述现象推广到一般的非交换李群上, 使得上述同构与左, 右正则作用都相容. 而此时情况更加复杂, 我们需要重新审视上述例子. 考虑如下映射 $E_{\pi_n}^* \otimes E_{\pi_n} \to L^2(S^1)$, $\lambda \otimes x \mapsto f_{\lambda \otimes x}$, 其中函数 $f_{\lambda \otimes x}(g) = \lambda(\pi_n(g^{-1})x)$, $\forall g \in S^1$. 注意到对于 $1^* \in E_{\pi_n}^*$, $1^* \colon 1 \in E_{\pi_n} \mapsto 1 \in \mathbb{C}$, 那么成立 $f_{1^* \otimes 1} = f_{-n}$. 于是有如下同构:

$$\widehat{\bigoplus_{\pi_n \in \widehat{S^1}}} E_{\pi_n}^* \otimes E_{\pi_n} \cong L^2(S^1).$$

此外, 容易验证上述同构甚至是 $S^1 \times S^1$-模同构, 其中 $(g_1, g_2) \in S^1 \times S^1$ 在 $L^2(S^1)$ 上的作用为 $r_{g_1} \circ l_{g_2}$. 因此, S^1 上的傅立叶分析理论可以直接由 S^1 的表示论所推出. 这个结果可以推广到任意紧李群.

定理 3.24. 设 G 为紧李群, 考虑 $G\times G$ 在 $C(G)_{G\text{-fin}}$ 上的作用 $(g_1,g_2)\mapsto r_{g_1}\circ l_{g_2}$. 在此意义下, 成立如下的 $G\times G$-模同构

$$C(G)_{G\text{-fin}}\cong\bigoplus_{[\pi]\in\widehat{G}}E_\pi^*\otimes E_\pi,$$

相应的同构映射如下: 元素 $\lambda\otimes x\in E_\pi^*\otimes E_\pi$ 对应于函数 $f_{\lambda\otimes x}\in C(G)_{G\text{-fin}}$, 其中 $f_{\lambda\otimes x}(g)=\lambda(g^{-1}x)$, $g\in G$.

证明. 利用引理3.23 与定理3.21, 证明本定理并不比证明定理2.24难多少. 首先验证该映射是 $G\times G$-模同态. 这只需注意

$$((g_1,g_2)f_{\lambda\otimes x})(g)=\lambda(g_1^{-1}g^{-1}g_2x)=(g_1\lambda)(g^{-1}g_2x)=f_{g_1\lambda\otimes g_2x}.$$

断言该映射为满射. 引理3.2表明只需要证明每个矩阵系数 $f_{u,v}^{E_\pi}(g)=(gu,v)$ 都能被取到, 其中 $[\pi]\in\widehat{G}$, $u,v\in E_\pi$, $(\cdot,\cdot)$ 为 E_π 的不变内积. 因为 $C(G)_{G\text{-fin}}$ 关于取复共轭运算封闭, 从而只需证明每个 $\overline{f_{u,v}^{E_\pi}}(g)=(v,gu)=(g^{-1}v,u)$ 都能被取到. 此时, 只需取 $\lambda=(\cdot,u)$, 则有 $f_{\lambda\otimes v}=\overline{f_{u,v}^{E_\pi}}$.

还需要证明该映射为单射. 取定该映射的核空间中的某个元素, 则该元素属于某个有限直和空间 $W=\bigoplus_{i=1}^{N}E_\pi^*\otimes E_\pi$. 接下来的讨论中, 我们把该映射限制在 W 上. 那么该映射的核空间是 W 的 $G\times G$-不变子空间. 考虑核空间的 $G\times G$-不可约子模分解, 可知该核空间要么是 $\{0\}$, 要么是某些 $E_\pi^*\otimes E_\pi$ 的直和. 注意到对于非零的 $\lambda\otimes x\in E_\pi^*\otimes E_\pi$, 函数 $f_{\lambda\otimes x}$ 非零. 于是核空间必为 $\{0\}$. □

定理 3.25. ***(Peter-Weyl 定理).*** 设 G 为紧李群, 则 $C(G)_{G\text{-fin}}$ 是 $C(G)$ 的稠密子空间, 也是 $L^2(G)$ 的稠密子空间.

证明. 由于 $C(G)$ 在 $L^2(G)$ 中稠密, 从而只需证明前者. 注意到 $C(G)_{G\text{-fin}}$ 是代数, 关于取复共轭封闭, 并且包含常值函数 1. 因此, 由 **Stone-Weierstrass 定理**, 只需证明 $C(G)_{G\text{-fin}}$ 分离 G 中的点. 注意 G 上的左平移, 易知只需证明对任意 $g_0\in G, g_0\neq e$, 存在函数 $f\in C(G)_{G\text{-fin}}$ 使得 $f(g_0)\neq f(e)$.

由于 G 是豪斯多夫空间, 且 G 上的左平移是连续映射, 从而可以取 e 的开邻域 U, 使得 $U\cap(g_0U)=\varnothing$. 集合 U 的特征函数 χ_U 是 $L^2(G)$ 的非零元. 因为 $l_{g_0}\chi_U=\chi_{g_0U}$, 从而 $(l_{g_0}\chi_U,\chi_U)=0$. 又因为 $(\chi_U,\chi_U)>0$, 从而 l_{g_0} 不是 $L^2(G)$ 上的恒等算子. 对 G 在 $L^2(G)$ 的左作用使用推论3.15, 将 $L^2(G)$ 分解为 $L^2(G)=\widehat{\bigoplus_{\alpha}}V_\alpha$. 特别地, 存在有限维不可约 G-子模 $V_{\alpha_0}\subseteq L^2(G)$, 使得 l_{g_0} 在 V_{α_0} 上的限制不是 V_{α_0} 上的恒等算子. 于是存在 $x\in V_{\alpha_0}$ 使得 $l_{g_0}x\neq x$, 从而存在 $y\in V_{\alpha_0}$ 使得 $(l_{g_0}x,y)\neq(x,y)$. 矩阵系数 $f=f_{x,y}^{V_{\alpha_0}}$ 即为所求. □

把上述稠密性结论与典范分解以及引理3.23 版本的 Frobenius 互反律相结合, 我们便可将 $L^2(G)$ 作希尔伯特空间直和分解. 由于这些结论联系密切, 下述推论也常被叫做 **Peter-Weyl** 定理.

推论 3.26. 设 G 为紧李群, 考虑 $L^2(G)$ 的 $G\times G$-模结构 $(g_1,g_2)\mapsto r_{g_1}\circ l_{g_2}$. 在此意义下, 成立如下 $G\times G$-模同构

$$L^2(G)\cong\widehat{\bigoplus_{[\pi]\in\widehat{G}}}E_\pi^*\otimes E_\pi.$$

相应的同构映射为: $\lambda\otimes v\in E_\pi^*\otimes E_\pi$ 对应于函数 $f_{\lambda\otimes v}$, 其中 $f_{\lambda\otimes v}(g)=\lambda(g^{-1}v)$, $g\in G$. 沿用与引理*3.23*相同的约定, 则进一步成立 G-模同构

$$\operatorname{Hom}_G(E_\pi,L^2(G))=\operatorname{Hom}_G(E_\pi,C(G))\cong E_\pi^*.$$

证明. 关于 G 在 $L^2(G)$ 的左作用, 典范分解表明成立如下 G-模同构:

$$\iota\colon\widehat{\bigoplus_{[\pi]\in\widehat{G}}}\operatorname{Hom}_G(E_\pi,L^2(G))\widehat{\otimes}E_\pi\to L^2(G),$$

其中 $\iota(T\otimes v)=T(v)$, $\forall T\in\operatorname{Hom}_G(E_\pi,L^2(G))$, $v\in L^2(G)$. 考虑自然嵌入 $\operatorname{Hom}_G(E_\pi,C(G))\hookrightarrow\operatorname{Hom}_G(E_\pi,L^2(G))$ 以及引理3.23, 易知存在单射 $\kappa\colon E_\pi^*\hookrightarrow\operatorname{Hom}_G(E_\pi,L^2(G))$, 使得对任意 $\lambda\in E_\pi^*$, $\kappa(\lambda)=T_\lambda\in\operatorname{Hom}_G(E_\pi,L^2(G))$ 满足 $(T_\lambda(v))(g)=\lambda(g^{-1}v)$. 我们首先断言 κ 为同构.

反证法. 若 $\kappa(E_\pi^*)$ 为 $\operatorname{Hom}_G(E_\pi,L^2(G))$ 的真子集, 由于 ι 为同构且 E_π^* 有限维, 从而 $\iota(\kappa(E_\pi^*)\otimes E_\pi)$ 是 $\iota(\operatorname{Hom}_G(E_\pi,L^2(G))\otimes E_\pi)$ 的真闭子集. 从而可以取非

零的 $f \in \iota(\mathrm{Hom}_G(E_\pi, L^2(G)) \otimes E_\pi)$ 使得 f 与子空间 $\iota(\kappa(E_\pi^*) \otimes E_\pi)$ 正交. 注意到 $\iota(\mathrm{Hom}_G(E_\pi, L^2(G)) \otimes E_\pi)$ 实际上是 $L^2(G)$ 关于 G 的左正则表示的 π-部分, 以及推论2.21, 可知 f 与 $\iota\left(\bigoplus_{[\pi]\in\widehat{G}} \kappa(E_\pi^*) \otimes E_\pi\right)$ 正交. 因为 $\iota(T_\lambda \otimes v) = T_\lambda(v) = f_{\lambda\otimes v}$, 从而定理3.24表明 f 垂直于 $C(G)_{G\text{-fin}}$. 这与 Peter-Weyl 定理产生矛盾, 因此 $E_\pi^* \cong \mathrm{Hom}_G(E_\pi, L^2(G))$.

因此映射 $\lambda \otimes v \mapsto f_{\lambda\otimes v}$ 诱导同构 $\widehat{\bigoplus_{[\pi]\in\widehat{G}}} E_\pi^* \otimes E_\pi \cong L^2(G)$. 定理3.24的证明过程表明, 该映射在子空间 $\bigoplus_{[\pi]\in\widehat{G}} E_\pi^* \otimes E_\pi$ 上的限制是 $G \times G$-模同态. 因为该子空间稠密, 从而由连续性得证. □

引理3.17给出了 $E_\pi^* \cong \mathrm{Hom}_G(E_\pi, L^2(G))$ 的一个内积结构. 在 §3.4 节我们将该同构映射乘以适当常数倍, 使得该乘以常数倍之后的同构是酉的.

3.3.3　一些应用

3.3.3.1.　$L^2(G)$ 完备的单位正交基, 紧李群的忠实表示

推论 3.27. *设 G 为紧李群. 对每个 $[\pi] \in \widehat{G}$, 取 E_π 的一组标准正交基 $\{v_i^\pi\}_{i=1}^{n_\pi}$. 那么*

$$\left\{ (\dim E_\pi)^{\frac{1}{2}} f^{E_\pi}_{v_i^\pi, v_j^\pi} \,\middle|\, [\pi] \in \widehat{G},\ 1 \le i, j \le n_\pi \right\}$$

是 $L^2(G)$ 的一组完备单位正交基.

证明. 这是引理3.2, 舒尔正交关系, 定理3.21 与 Peter-Weyl 定理的直接推论. □

定理 3.28. *任何紧李群 G 都存在 (有限维) 忠实表示. 也就是说, 存在 G 的有限维表示 (π, V), 使得 π 为单射.*

证明. Peter-Weyl 定理的证明过程中, 我们证明了一个中间结论: 对任意 $g_1 \in G$, $g_1 \neq e$, 存在 G 的有限维表示 (π_1, V_1) 使得 $\pi_1(g_1)$ 不是恒等算子. 此时, $\ker \pi_1$ 为 G 的真闭李子群, 从而是紧李群. 由于 $\ker \pi_1$ 是 G 的正则子流形, 不包含 e 的任何开邻域, 因此 $\dim \ker \pi_1 < \dim G$. 若 $\dim \ker \pi_1 > 0$, 则任取 $g_2 \in (\ker \pi_1)^0$, $g_2 \neq e$, 再取 G 的有限维表示 (π_2, V_2) 使得 $\pi_2(g_2)$ 不是恒等算子. 于是 $\ker(\pi_1 \oplus \pi_2)$ 是紧李群, 并且 $\dim \ker(\pi_1 \oplus \pi_2) < \dim \ker \pi_1$.

不断这么操作, 最终会得到 G 的一系列表示 (π_i, V_i), $1 \leq i \leq N$, 使得 $\dim \ker(\pi_1 \oplus \cdots \oplus \pi_n) = 0$. 由于 G 紧, 从而 $\ker(\pi_1 \oplus \cdots \oplus \pi_n)$ 必为有限集 $\{h_1, ..., h_M\}$, 其中 $h_i \in G$. 最后再取 G 的有限维表示 (π_{N+i}, V_{N+i}), $i = 1, ..., M$, 使得每个 π_{N+i} 都不是恒等算子. 则 $\pi_1 \oplus \cdots \oplus \pi_{N+M}$ 为 G 的忠实表示. □

从而任何紧李群都同构于线性群 $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ 的某个闭子群. 再结合定理2.15, 可知紧李群必同构于酉群 $\mathrm{U}(n)$ 的闭子群.

3.3.3.2. 类函数

定义 3.29. 设 G 为李群. 函数 $f \in C(G)$ 称为 *(连续)* **类函数** *(class function)* , 如果对任意 $g, h \in G$ 都成立 $f(ghg^{-1}) = f(h)$. 类似地, $f \in L^2(G)$ 称为**L^2-类函数**, 如果对任意 $g \in G$, $f(ghg^{-1}) = f(h)$ 关于 $h \in G$ 几乎处处成立.

定理 3.30. 设 G 为紧李群, χ 为 G 的所有不可约特征标之全体, 即 $\chi = \left\{ \chi_{E_\pi} \,\middle|\, [\pi] \in \widehat{G} \right\}$.

1. 集合 χ 张成 $C(G)_{G\text{-fin}}$ 中的连续类函数构成的子空间.
2. χ 张成的空间是连续类函数空间的稠密子空间.
3. χ 是 L^2-类函数空间的一组完备单位正交基.

特别地, 上述定理的 (3) 表明, 对于 L^2-类函数 f, 在 L^2-收敛意义下成立

$$f = \sum_{[\pi] \in \widehat{G}} (f, \chi_{E_\pi})_{L^2(G)} \chi_{E_\pi},$$

并且有

$$\|f\|_{L^2(G)}^2=\sum_{[\pi]\in\widehat{G}}\left|(f,\chi_{E_\pi})_{L^2(G)}\right|^2.$$

证明. (1). 回忆定理3.24, 成立如下 $G\times G$-模同构 $C(G)_{G\text{-fin}}\cong\bigoplus_{[\pi]\in\widehat{G}}E_\pi^*\otimes E_\pi$. 通过对角嵌入 $G\hookrightarrow G\times G$, $g\mapsto(g,g)$, 我们将 $C(G)_{G\text{-fin}}$ 与 $E_\pi^*\otimes E_\pi$ 视为 G-模. 在此意义下, 对于 $f\in C(G)_{G\text{-fin}}$, $(gf)(h)=f(g^{-1}hg)$. 从而 f 为类函数当且仅当对任意 $g\in G$ 都成立 $gf=f$.

再回忆习题 2.15 中的同构 $E_\pi^*\otimes E_\pi\cong\mathrm{Hom}(E_\pi,E_\pi)$ 由映射 $\lambda\otimes v\mapsto v\lambda(\cdot)$ 所诱导, 其中 $\lambda\in E_\pi^*, v\in E_\pi$. 于是在对角嵌入意义下, 成立如下 G-模同构

$$C(G)_{G\text{-fin}}\cong\bigoplus_{[\pi]\in\widehat{G}}\mathrm{Hom}(E_\pi,E_\pi). \tag{3.31}$$

在此意义下, 对于 $T\in\mathrm{Hom}(E_\pi,E_\pi)$, $gT=T,\forall g\in G$ 当且仅当 $T\in\mathrm{Hom}_G(E_\pi,E_\pi)$. 由舒尔引理, 这当且仅当 $T\in\mathbb{C}I_{E_\pi}$, 其中 I_{E_π} 为 E_π 上的恒等算子. 因此 $C(G)_{G\text{-fin}}$ 中的类函数构成的子空间同构于 $\bigoplus_{[\pi]\in\widehat{G}}\mathbb{C}I_{E_\pi}$.

取 E_π 的关于不变内积 $(\cdot,\cdot)$ 的一组标准正交基 $\{x_i\}$, 则 $I_{E_\pi}=\sum_i(\cdot,x_i)x_i$. 从而恒等算子 I_{E_π} 对应于 $E_\pi^*\otimes E_\pi$ 中的元素 $\sum_i(\cdot,x_i)\otimes x_i$, 进而对应于 $C(G)_{G\text{-fin}}$ 中的元素 $g\mapsto\sum_i(g^{-1}x_i,x_i)$. 因为 $(g^{-1}x_i,x_i)=\overline{(gx_i,x_i)}$, 因此(3.31)中的 I_{E_π} 所对应的类函数恰为 $\overline{\chi_{E_\pi}}$. 从而由引理3.2与定理3.21, (1) 得证.

再看 (2). 设 f 为连续类函数. 由 Peter-Weyl 定理, 对任意 $\varepsilon>0$, 存在 $\varphi\in C(G)_{G\text{-fin}}$ 使得 $\|f-\varphi\|_{C(G)}<\varepsilon$. 定义函数 $\widetilde{\varphi}(h)=\int_G\varphi(g^{-1}hg)\,\mathrm{d}g$, 那么 $\widetilde{\varphi}$ 为连续类函数. 再注意 f 为类函数, 从而

$$\begin{aligned}\|f-\widetilde{\varphi}\|_{C(G)}&=\sup_{h\in G}|f(h)-\widetilde{\varphi}(h)|=\sup_{h\in G}\left|\int_G\left(f(g^{-1}hg)-\varphi(g^{-1}h(g))\right)\mathrm{d}g\right|\\&\le\sup_{h\in G}\int_G\left|f(g^{-1}hg)-\varphi(g^{-1}hg)\right|\mathrm{d}g\le\|f-\varphi\|_{C(G)}<\varepsilon.\end{aligned}$$

接下来只需证明 $\widetilde{\varphi}\in\operatorname{span}\chi$.

为此, 使用定理3.24, 令 $\varphi(g)=\sum_i (gx_i,y_i)$, 其中 $x_i,y_i\in E_{\pi_i}$. 因此 $\widetilde{\varphi}(h)=\sum_i\left(\int_G g^{-1}hgx_i\,\mathrm{d}g\,,\,y_i\right)$. 注意到, E_{π_i} 上的算子 $\int_G g^{-1}hg\,\mathrm{d}g$ 是 G-模同态, 因此由舒尔引理, 它是 E_{π_i} 上的标量算子. 在 E_{π_i} 上取迹, 有

$$\chi_{E_{\pi_i}}(h)=\operatorname{tr}\left(\int_G g^{-1}hg\,\mathrm{d}g\right)=\operatorname{tr}\left(c_iI_{E_{\pi_i}}\right)=c_i\dim E_{\pi_i},$$

因此 $\widetilde{\varphi}(h)=\sum_i\frac{(x_i,y_i)}{\dim E_{\pi_i}}\chi_{E_{\pi_i}}(h)$, 从而 (2) 得证.

最后看 (3). 设 $f\in L^2(G)$ 为 L^2-类函数. 由 Peter-Weyl 定理, 对任意 $\varepsilon>0$, 取 $\varphi\in C(G)_{G\text{-fin}}$ 使得 $\|f-\varphi\|_{L^2(G)}<\varepsilon$, 则有 $\widetilde{\varphi}\in\operatorname{span}\chi$. 使用积分版本的闵可夫斯基不等式, 再注意 G 上的不变积分, 有

$$\begin{aligned}
\|f-\widetilde{\varphi}\|_{L^2(G)} &= \left(\int_G |f(h)-\widetilde{\varphi}(h)|\,\mathrm{d}h\right)^{\frac{1}{2}}\\
&= \left(\int_G\left|\int_G\left(f(g^{-1}hg)-\varphi(g^{-1}hg)\right)\,\mathrm{d}g\right|^2\,\mathrm{d}h\right)^{\frac{1}{2}}\\
&\le \int_G\left(\int_G\left|f(g^{-1}hg)-\varphi(g^{-1}hg)\right|^2\,\mathrm{d}h\right)^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}g\\
&= \int_G\left(\int_G|f(h)-\varphi(h)|^2\,\mathrm{d}h\right)^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}g\\
&= \|f-\varphi\|_{L^2(G)}<\varepsilon.
\end{aligned}$$

最后再用舒尔正交关系以及希尔伯特空间基本理论即可. □

3.3.3.3. SU(2) 的不可约表示的分类. 我们在 §2.1.2.2 节介绍了 SU(2) 的表示 $V_n(\mathbb{C}^2)$, 之后在 §2.3.1 节证明这些表示不可约. 考虑这些表示的维数, 显然它们两两互不同构. 事实上, 在同构意义下 SU(2) 的不可约表示只有这些 [我们将在习题 6.8 给出此命题的纯代数证明] .

定理 3.32. 映射 $n\mapsto V_n(\mathbb{C}^2)$ 是 $\mathbb{N}$ 与 $\widehat{\mathrm{SU}(2)}$ 的一一对应.

证明. 通过嵌入映射 $S^1 \hookrightarrow \mathrm{SU}(2)$, $e^{i\theta} \mapsto \begin{pmatrix} e^{i\theta} & \\ & e^{-i\theta} \end{pmatrix}$, 视 S^1 为 $\mathrm{SU}(2)$ 的子群. 利用(**2.25**)式, 容易计算 $V_n(\mathbb{C}^2)$ 的特征标在 S^1 上的限制

$$\chi_{V_n(\mathbb{C}^2)}(e^{i\theta}) = \sum_{k=0}^{n} e^{i(n-2k)\theta}. \tag{3.33}$$

简单归纳可知, (**3.33**)表明 $\mathrm{span}\left\{\chi_{V_n(\mathbb{C}^2)}(e^{i\theta}) \,\middle|\, n \in \mathbb{N}\right\}$ 等于 $\mathrm{span}\left\{\cos n\theta \,|\, n \in \mathbb{N}\right\}$ [见习题 3.21] .

因为 $\mathrm{SU}(2)$ 的每个元素都可相似对角化为某个 $e^{\pm i\theta} \in S^1$, 从而容易证明 [见习题 3.21] $\mathrm{SU}(2)$ 上的函数在 S^1 上的限制给出了如下两个空间之间的保持范数的双射: $\mathrm{SU}(2)$ 的连续类函数空间与 S^1 的连续偶函数空间.

由傅立叶分析基础知识, $\mathrm{span}\left\{\cos n\theta \,|\, n \in \mathbb{N}\right\}$ 在 S^1 上的连续偶函数空间中稠密. 因此 $\mathrm{span}\left\{\chi_{V_n(\mathbb{C}^2)}(e^{i\theta}) \,\middle|\, n \in \mathbb{N}\right\}$ 在 $\mathrm{SU}(2)$ 的连续类函数空间中稠密. 于是, 定理3.30的 (3) 表明 $\mathrm{SU}(2)$ 不再有其它不可约特征标. 最后注意定理3.7即可. □

注意 $\dim V_n(\mathbb{C}^2) = n + 1$, 因此维数是 $\mathrm{SU}(2)$ 的不可约表示的完全不变量.

3.3.4　习题

习题 3.16 回忆 $\widehat{S^1} \cong \mathbb{Z}$ [见习题 3.13] . 试利用本节的定理来重新建立 S^1 上经典的傅立叶分析理论. 即证明三角多项式张成的空间 $\mathrm{span}\left\{e^{in\theta} \,\middle|\, n \in \mathbb{Z}\right\}$ 在 $C(S^1)$ 中稠密, 并且 $\left\{e^{in\theta} \,\middle|\, \theta \in \mathbb{Z}\right\}$ 是 $L^2(S^1)$ 的一组完备正交基.

习题 3.17 设 G 为紧李群.

(a) 利用习题 3.10 的结论 $\widehat{G \times G} \cong \widehat{G} \times \widehat{G}$, 以及 G-有限向量的性质, 证明: 在同构 $C(G)_{G\text{-fin}} \cong \bigoplus_{[\pi]\in\widehat{G}} E_\pi^* \otimes E_\pi$ 意义下, $C(G)_{C\text{-fin}}$ 的不可约 $G \times G$-子模必形如 $\bigoplus_{[\pi]\in\mathcal{A}} E_\pi^* \otimes E_\pi$, 其中 $\mathcal{A} \subseteq \widehat{G}$.

(b) 设 $\pi\colon G \to \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ 是 G 的一个忠实表示. 对于 $g \in G$, 记 $\pi_{ij}(g)$ 为矩阵 $\pi(g)$ 的第 (i, j) 分量. 证明: $\{\pi_{ij}, \overline{\pi_{ij}} \,|\, 1 \le i, j \le n\}$ 是 $C(G)_{G\text{-fin}} = \mathrm{MC}(G)$ 的一组 $\mathbb{C}$-代数生成元. 特别地, $C(G)_{G\text{-fin}}$ 是有限生成 $\mathbb{C}$-代数.

(c) 设 V 是 G 的一个忠实表示. 证明: G 的任何不可约表示都是某个 $V^{\otimes n}\otimes\overline{V}^{\otimes m}$ 的子表示, 其中 $m,n\in\mathbb{N}$.

习题 3.18 设 G 为紧李群. 令 G' 为 G 的由 $\left\{ghg^{-1}h^{-1}\,\middle|\,g,h\in G\right\}$ 生成的子群, 称为 G 的**换位子群** (commutator subgroup). 那么, G 为阿贝尔群当且仅当 $G'=\{e\}$. 再注意到 G' 在 G 的一维表示上的作用为恒等算子. 试由此证明: 紧李群 G 为阿贝尔群当且仅当 G 的所有不可约表示都是一维的. [对照习题 2.21] .

习题 3.19 设 G 为有限群.

(a) 证明 $\displaystyle\int_G f(g)\,\mathrm{d}g=\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}f(g)$.

(b) 利用特征标理论证明 G 的 [互不等价的] 不可约表示的个数等于 G 的共轭类个数.

(c) 证明 $|G|$ 等于 G 的所有 [互不等价的] 不可约表示的维数的平方和.

习题 3.20 设紧李群 G 不是有限群, 证明: $\widehat{G}$ 是可数无限集.

习题 3.21 考虑嵌入 $S^1\hookrightarrow\mathrm{SU}(2)$, $e^{i\theta}\mapsto\begin{pmatrix}e^{i\theta} & \\ & e^{-i\theta}\end{pmatrix}$.

(a) 证明: $\operatorname{span}\left\{\chi_{V_n(\mathbb{C}^2)}(e^{i\theta})\,\middle|\,n\in\mathbb{N}\right\}=\operatorname{span}\{\cos n\theta\,|\,n\in\mathbb{N}\}$.

(b) 证明: $SU(2)$ 上的函数在 S^1 上的限制给出了如下两个空间之间的保持范数的双射: $\mathrm{SU}(2)$ 上的连续类函数空间与 S^1 上的连续偶函数空间. [更一般结果见 §7.3.1 节] .

习题 3.22 依然考虑嵌入 $S^1\hookrightarrow\mathrm{SU}(2)$.

(a) 对于 $\mathrm{SU}(2)$ 的不可约表示 $V_n(\mathbb{C}^2)$, 证明 $\chi_{V_n(\mathbb{C}^2)}(e^{i\theta})=\dfrac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}$, $\theta\notin\pi\mathbb{Z}$.

(b) 设 f 为 $\mathrm{SU}(2)$ 上的连续类函数. 证明:

$$\int_{\mathrm{SU}(2)}f(g)\,\mathrm{d}g=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(\mathrm{diag}(e^{i\theta},e^{-i\theta}))\sin^2\theta\,\mathrm{d}\theta.$$

提示: 先证明上式对 $f=\chi_{V_n(\mathbb{C}^2)}$ 成立. [见习题 7.9] .

习题 3.23

(a) 设 V 为紧李群 G 的不可约表示. 证明: 对任意 $h,k\in G$,

$$\dim V\int_G \chi_V(g^{-1}hgk)\,\mathrm{d}g=\chi_V(h)\chi_V(k).$$

(b) 反之, 设 [不恒为零的] 函数 $f\in C(G)$ 满足 $\int_G f(g^{-1}hgk)\,\mathrm{d}g=f(h)f(k)$, $\forall h,k\in G$, 证明: 存在 G 的不可约表示 V, 使得 $f=(\dim V)^{-1}\chi_V$.

习题 3.24

(a) 利用同构 $\mathrm{SO}(3)\cong\mathrm{SU}(2)/\{\pm I\}$ 以及引理1.23证明: $\mathrm{SO}(3)$ 的全体 [互不等价的] 不可约表示一一对应于 $\left\{V_{2n}(\mathbb{C}^2)\,\middle|\,n\in\mathbb{N}\right\}$.

(b) 使用定理2.33以及习题 2.30, 通过计算空间维数, 证明以下 $\mathrm{SO}(3)$-模同构: $V_{2n}(\mathbb{C}^2)\cong\mathcal{H}_n(\mathbb{R}^3)$. 由此推出 $\left\{\mathcal{H}_n(\mathbb{R}^3)\,\middle|\,n\in\mathbb{N}\right\}$ 是 $\mathrm{SO}(3)$ 的所有不可约表示.

(c) 利用习题 3.5 证明

$$\mathcal{H}_n(\mathbb{R}^3)\otimes\mathcal{H}_m(\mathbb{R}^3)\cong\bigoplus_{j=0}^{\min\{n,m\}}\mathcal{H}_{n+m-j}(\mathbb{R}^3).$$

3.4 傅立叶理论

众所周知, S^1 上的傅立叶变换可以视为同构$\widehat{\ }$: $L^2(S^1)\to\ell^2(\mathbb{Z})$, 使得对任意 $f\in L^2(S^1)$,

$$\widehat{f}(n)=\int_{S^1}f(e^{i\theta})e^{-in\theta}\frac{\mathrm{d}\theta}{2\pi},$$

并且 $\|f\|=\|\widehat{f}\|$. 该映射的逆映射由**傅立叶级数**给出:

$$f(e^{i\theta})=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\widehat{f}(n)e^{in\theta},$$

该级数在 $L^2(S^1)$ 中收敛. 众所周知, 即使 $f\in C(S^1)$, 上述傅立叶级数也未必逐点收敛于 f. 而再加上任意正阶数的利普西茨连续性条件, 就能保证傅立叶级数一致收敛.

我们把 $\dfrac{\mathrm{d}\theta}{2\pi}$ 视为 S^1 的不变测度, 把指标集 $\mathbb{Z}$ 对应于 $\widehat{S^1}$, 其中 $n\in\mathbb{Z}$ 对应于 S^1 的 [一维] 不可约表示 $e^{i\theta}\mapsto e^{in\theta}$. 这样貌似可以把 S^1 的情况推广到任意紧李群 G. 事实上, **标量傅立叶变换** (定理3.43) 给出了如下酉同构:

$$\{L^2(G)\text{-类函数}\}\cong \ell^2(\widehat{G}).$$

注意当 $G=S^1$ 时, 由于 S^1 是阿贝尔群, “类函数” 条件自动废除.

而当 G 不是阿贝尔群时, 为了研究 $L^2(G)$, 我们引入**算子傅立叶变换** (定理3.38). 相关定理断言, 成立如下酉同构:

$$L^2(G)\cong \widehat{\bigoplus_{[\pi]\in\widehat{G}}}\operatorname{End}(E_\pi).$$

特别注意, 上述同构也保持两边的 $\mathbb{C}$-代数结构. 当 $G=S^1$ 时, 注意 $\operatorname{End}(E_\pi)\cong\mathbb{C}$, 从而上式右边退化为 $\ell^2(\widehat{G})$.

上述定理证明所需要的大多数准备知识已经在推论3.26当中完成. 只需要再调整一下相关的同构映射中的系数.

3.4.1 卷积

设 G 为紧李群. 对于线性空间 V, 记 $\operatorname{End}(V):=\operatorname{Hom}(V,V)$ 为 V 上的线性变换构成的空间. 由于 G 的体积有限, $L^2(G)\subseteq L^1(G)$, 从而下述定义良定:

定义 3.34. *设 G 为紧李群, $[\pi]\in\widehat{G}$, $f\in L^2(g)$.*

1. *定义映射 $\pi\colon L^2(G)\to\operatorname{End}(E_\pi)$ 如下:*

$$(\pi(f))(v):=\int_G f(g)gv\,\mathrm{d}g,\quad \forall v\in E_\pi.$$

2. *定义 $\widetilde{f}(g)\in L^2(G)$ 为 $\widetilde{f}(g):=\overline{f(g^{-1})}$.*

在标准的傅立叶分析课程中 [见 [37],[73], 或者习题 3.25] , 我们定义了 **卷积** (convolution) 算子 $*\colon L^2(G)\times L^2(G)\to C(G)$ 如下:

$$(f_1*f_2)(g)=\int_G f_1(gh^{-1})f_2(h)\,\mathrm{d}h,$$

其中 $f_i \in L^2(G)$, $g \in G$.

引理 3.35. 设 G 为紧李群, $[\pi] \in \widehat{G}$, 其不变内积为 $(\cdot,\cdot)$. $f_i, f \in L^2(G)$, $v_i \in E_\pi$. 则成立:

1. $\pi(f_1 * f_2) = \pi(f_1) \circ \pi(f_2)$.
2. $(\pi(f_1)v_1, v_2) = (v_1, \pi(\widetilde{f})v_2)$. 换言之, $\pi(f)^* = \pi(\widetilde{f})$.

证明. (1). 对于 $v \in E_\pi$, 利用富比尼定理, 以及换元积分 $g \mapsto gh$, 直接计算得

$$\begin{aligned}
\pi(f_1 * f_2)(v) &= \int_G \int_G f_1(gh^{-1}) f_2(h) gv \, \mathrm{d}h \, \mathrm{d}g \\
&= \int_G \int_G f_1(g) f_2(h) ghv \, \mathrm{d}g \, \mathrm{d}h \\
&= \int_G f_1(g) g \left(\int_G f_2(h) hv \, \mathrm{d}h \right) \mathrm{d}g \\
&= \pi(f_1)(\pi(f_2)(v)).
\end{aligned}$$

至于 (2), 只需直接计算验证如下:

$$\begin{aligned}
(\pi(f)v_1, v_2) &= \int_G f(g)(gv_1, v_2) \, \mathrm{d}g = \int_G (v_1, \overline{f(g)} g^{-1} v_2) \, \mathrm{d}g \\
&= \int_G (v_1, \widetilde{f}(g) g v_2) \, \mathrm{d}g = (v_1, \pi(\widetilde{f})v_2).
\end{aligned}$$

□

3.4.2 Plancherel 定理

接下来的定义源于推论3.26. 我们考虑将分解 $L^2(G) \cong \widehat{\bigoplus_{[\pi] \in \widehat{G}}} E_\pi^* \otimes E_\pi$ 与同构 $E_\pi^* \otimes E_\pi \cong \mathrm{End}(E_\pi)$ 相结合.

设 G 为紧李群, $[\pi] \in \widehat{G}$, E_π 上的不变内积记作 $(\cdot,\cdot)$. 那么 $\mathrm{End}(E_\pi)$ 关于如下 **希尔伯特-施密特内积** (Hilbert-Schmidt inner product) 构成希尔伯特空间:

$$(T, S)_{\mathrm{HS}} := \mathrm{tr}\,(S^* \circ T) = \sum_i (Tv_i, SV_i),$$

其中 $T, S \in \mathrm{End}(E_\pi)$, S^* 为 S 关于不变内积 $(\cdot,\cdot)$ 的伴随算子, $\{v_i\}$ 是 E_π 的一组单位在正交基. 相应的希尔伯特-施密特范数为

$$\|T\|_{\mathrm{HS}} := \mathrm{tr}\,(T^*T)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_i \|Tv_i\|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

我们用 $\mathrm{End}(E_\pi)_{\mathrm{HS}}$ 来表示配以希尔伯特-施密特内积的希尔伯特空间 $\mathrm{End}(E_\pi)$.

定义 3.36. *设 G 为紧李群. 定义希尔伯特空间 $\mathrm{Op}(\widehat{G})$ 如下:*

$$\mathrm{Op}(\widehat{G}) := \widehat{\bigoplus_{[\pi]\in\widehat{G}}} \mathrm{End}(E_\pi)_{\mathrm{HS}}.$$

定义 $\mathrm{Op}(\widehat{G})$ 的 $\mathbb{C}$-代数结构如下:

$$(T_\pi)_{[\pi]\in\widehat{G}}(S_\pi)_{[\pi]\in\widehat{G}} := \left((\dim E_\pi)^{-\frac{1}{2}} T_\pi \circ S_\pi\right)_{[\pi]\in\widehat{G}}.$$

定义 $\mathrm{Op}(\widehat{G})$ 的 $G\times G$-模结构如下:

$$(g_1, g_2)(T_\pi)_{[\pi]\in\widehat{G}} := \left(\pi(g_2)\circ T_\pi \circ \pi(g_1^{-1})\right)_{[\pi]\in\widehat{G}},$$

其中 $g_i \in G$, $T_\pi \in \mathrm{End}(E_\pi)$.

要注意一些事情. 首先, 注意 $\mathrm{End}(E_\pi)_{\mathrm{HS}}$ 的内积结构与 E_π 的不变内积选取无关, 这是因为将 E_π 的内积乘以常数倍并不影响伴随算子 S^*. 其次, 还需要验证 $\mathrm{Op}(\widehat{G})$ 的 $\mathbb{C}$-代数结构与 $G\times G$-模结构都良定, 这个验证留作习题 3.26.

定义 3.37. *设 G 为紧李群, 定义* **算子傅立叶变换** *(operator valued Fourier transformation) $\mathcal{F}\colon L^2(G)\to \mathrm{Op}(\widehat{G})$ 如下:*

$$\mathcal{F}f := \left((\dim E_\pi)^{\frac{1}{2}}\pi(f)\right)_{[\pi]\in\widehat{G}}.$$

对于 $T_\pi \in \mathrm{End}(E_\pi)$, 我们将 G 上的光滑函数 $g \mapsto \mathrm{tr}(T_\pi \circ \pi(g^{-1}))$ 简记为 $\mathrm{tr}(T_\pi \circ g^{-1})$.

定义 3.37. 续. 记号同上, 定义 **算子傅立叶逆变换** *(inverse operator valued Fourier transformation)* $\mathcal{I}\colon \operatorname{Op}(\widehat{G}) \to L^2(G)$ 如下:

$$\mathcal{I}(T_\pi)_{[\pi]\in\widehat{G}} := \sum_{[\pi]\in\widehat{G}} (\dim E_\pi)^{\frac{1}{2}} \operatorname{tr}(T_\pi \circ g^{-1}).$$

需要验证 $\mathcal{F}$ 与 $\mathcal{I}$ 的良定性, 还要验证 $\mathcal{F}$ 与 $\mathcal{I}$ 互逆. 接下来我们会验证这些. 在接下来的定理中, 我们将 $L^2(G)$ 视为关于卷积运算 $*$ 的 $\mathbb{C}$-代数; 而 $L^2(G)$ 的 $G\times G$-模结构依然是 $(g_1,g_2)\mapsto r_{g_1}\circ l_{g_2}$, 即对于 $g_i, g\in G$, $f\in L^2(G)$, 成立 $((g_1,g_2)f)(g) = f(g_2^{-1}gg_1)$.

定理 3.38. *Plancherel* 定理. 设 G 为紧李群, 则 $\mathcal{F}$ 与 $\mathcal{I}$ 良定, 互逆, 且同时为酉同构, $\mathbb{C}$-代数同构, $G\times G$-模同构.

也就是说, 成立线性同构

$$\mathcal{F}\colon L^2(G) \xrightarrow{\cong} \operatorname{Op}(\widehat{G}),$$

并且对任意 $f, f_i \in L^2(G)$, $g_i\in G$, 成立 $\|f\|_{L^2(G)} = \|\mathcal{F}f\|_{\operatorname{Op}(\widehat{G})}$, $\mathcal{F}(f_1 * f_2) = (\mathcal{F}f_1)(\mathcal{F}f_2)$, $\mathcal{F}((g_1,g_2)f) = (g_1,g_2)(\mathcal{F}f)$; 此外, $\mathcal{F}^{-1} = \mathcal{I}$.

证明. 在推论3.26中, 我们通过将 $\lambda\otimes v\in E_\pi^*\otimes E_\pi$ 映到 $f_{\lambda\otimes v}$, 建立了同构 $L^2(G)\cong \widehat{\bigoplus_{[\pi]\in\widehat{G}}} E_\pi^*\otimes E_\pi$, 其中 $f_{\lambda\otimes v}(g) = \lambda(g^{-1}v)$, $\forall g\in G$. 因为 $\operatorname{Op}(\widehat{G})\cong \widehat{\bigoplus_{[\pi]\in\widehat{G}}} \operatorname{End}(E_\pi)_{\mathrm{HS}}$, 并且在定义在稠密子集上的同构映射可以唯一地延拓到整个空间上, 从而只需要验证 $\mathcal{F}$ 在 $\operatorname{span}\{f_{\lambda\otimes v}\,|\,\lambda\otimes v\in E_\pi^*\otimes E_\pi\}$ 上的限制映射是映到 $\operatorname{End}(E_\pi)$ 的酉, $\mathbb{C}$-代数, $G\times G$-模同构, 且其逆映射为 $\mathcal{I}$. 其中, $\operatorname{End}(E_\pi)$ 在自然嵌入 $\operatorname{End}(E_\pi)\hookrightarrow \operatorname{Op}(\widehat{G})$ 意义下自然视为 $\operatorname{Op}(\widehat{G})$ 的子空间.

记 E_π 的 G-不变内积为 $(\cdot,\cdot)$. 任意 $\lambda\in E_\pi^*$ 都可唯一写成 $\lambda = (\cdot, v)$, $\exists v\in E_\pi$. 于是问题转化为计算 $\pi'(f_{(\cdot,v_1)\otimes v_2})$, 其中 $[\pi']\in\widehat{G}$, $v_i\in E_\pi$. 为此, 记 $(\cdot,\cdot)'$ 为 $E_{\pi'}$ 的不变内积, 任取 $w_i\in E_{\pi'}$, 直接计算得

$$(\pi'(f_{(\cdot,v_1)\otimes v_2})(w_1), w_2)' \;=\; \int_G (\pi(g^{-1})v_2, v_1)(\pi'(g)w_1, w_2)'\,\mathrm{d}g$$

$$= \int_G (\pi'(g)w_1, w_2)'\overline{(\pi(g)v_1, v_2)}\,\mathrm{d}g.$$

若 $\pi' \ncong \pi$, 则舒尔正交关系表明 $(\pi'(f_{(\cdot,v_1)\otimes v_2})(w_1), w_2)' = 0$, 因此 $\pi'(f_{(\cdot,v_1)\otimes v_2}) = 0$. 因此 $\mathcal{F}$ 的确把 $\mathrm{span}\,\{f_{\lambda\otimes v} \,|\, \lambda \otimes v \in E_\pi^* \otimes E_\pi\}$ 映到 $\mathrm{End}(E_\pi)$. 而如果 $\pi' \cong \pi$, 则舒尔正交关系表明

$$(\pi(f_{(\cdot,v_1)\otimes v_2})(w_1), w_2) = (\dim E_\pi)^{-1}(w_1, v_1)\overline{(w_2, v_2)}.$$

特别地, $\pi(f_{(\cdot,v_1)\otimes v_2}) = (\dim E_\pi)^{-1}(\cdot, v_1)v_2$, 因此

$$\mathcal{F}f_{(\cdot,v_1)\otimes v_2} = (\dim E_\pi)^{-\frac{1}{2}}(\cdot, v_2)v_2.$$

从而易知 $\mathcal{F}\colon \mathrm{span}\,\{f_{\lambda\otimes v} \,|\, \lambda \otimes v \in E_\pi^* \otimes E_\pi\} \to \mathrm{End}(E_\pi)$ 是满射, 然后通过计算维数可知他为线性同构.

断言 $\mathcal{I}$ [在 $\mathrm{End}(E_\pi)$ 上的限制] 是 $\mathcal{F}$ 的逆映射. 将 $\|v_2\|^{-1}v_2$ 扩充为 E_π 的一组单位正交基, 我们来计算迹:

$$\begin{aligned}
\mathrm{tr}\left([(\cdot, v_1)v_2] \circ \pi(g^{-1})\right) &= \left([[(\cdot, v_1)v_2] \circ \pi(g^{-1})]\,(\frac{v_2}{\|v_2\|}), \frac{v_2}{\|v_2\|}\right) \\
&= \left(\pi(g^{-1})v_2, v_1\right) = f_{(\cdot,v_1)\otimes v_2}(g).
\end{aligned}$$

因此

$$\mathcal{I}\left((\dim E_\pi)^{\frac{1}{2}}(\cdot, v_1)v_2\right) = f_{(\cdot,v_1)\otimes v_2}, \tag{3.39}$$

以及 $\mathcal{I} = \mathcal{F}^{-1}$.

接下来验证酉同构. 由舒尔正交关系, 直接计算得

$$\begin{aligned}
\left(f_{(\cdot,v_1)\otimes v_2}, f_{(\cdot,v_3)\otimes v_4}\right)_{L^2(G)} &= \int_G (g1^{-1}v_2, v_1)\overline{(g_1^{-1}v_4, v_3)}\,\mathrm{d}g \\
&= (\dim E_\pi)^{-1}(v_2, v_4)\overline{(v_1, v_3)}.
\end{aligned}$$

为计算希尔伯特-施密特范数, 我们首先注意 $(\cdot, v_3)v_4 \in \mathrm{End}(E_\pi)_{\mathrm{HS}}$ 的伴随算子为 $(\cdot, v_4)v_3$. 这是因为

$$((v_5, v_3)v_4, v_6) = (v_5, v_3)(v_4, v_6) = (v_5, (v_6, v_4)v_3).$$

从而

$$\left(\mathcal{F}f_{(\cdot,v_1)v_2}, \mathcal{F}f_{(\cdot,v_3)v_4}\right)_{\mathrm{HS}} = (\dim E_\pi)^{-1}((\cdot, v_1)v_2, (\cdot, v_3)v_4)_{\mathrm{HS}}$$

$$
\begin{aligned}
&= (\dim E_\pi)^{-1} \operatorname{tr}[((\cdot, v_1)v_2, v_4)v_3] \\
&= (\dim E_\pi)^{-1}(v_2, v_4) \operatorname{tr}[(\cdot, v_1)v_3] \\
&= (\dim E_\pi)^{-1}(v_2, v_4)\left((\frac{v_3}{\|v_3\|}, v_1)v_3, \frac{v_3}{\|v_3\|}\right) \\
&= (\dim E_\pi)^{-1}(v_2, v_4)(v_3, v_1) \\
&= \left(f_{(\cdot,v_1)\otimes v_2}, f_{(\cdot,v_3)\otimes v_4}\right)_{L^2(G)},
\end{aligned}
$$

因此 $\mathcal{F}$ 是酉同构.

再验证 $\mathcal{F}$ 是 $\mathbb{C}$-代数同构. 这只需直接利用引理3.35, 注意 $\pi(f_1 * f_2) = \pi(f_1) \circ \pi(f_2)$. 因此

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F}(f_1 * f_2) &= (\dim E_\pi)^{\frac{1}{2}}\pi(f_1) \circ \pi(f_2) \\
&= (\dim E_\pi)^{\frac{1}{2}}\mathcal{F}f_1 \circ \mathcal{F}f_2 = (\mathcal{F}f_1)(\mathcal{F}f_2).
\end{aligned}
$$

最后, 验证 $\mathcal{F}$ 是 $G \times G$-模同构. 首先注意到

$$
\begin{aligned}
\left((g_1, g_2)f_{(\cdot,v_1)v_2}\right)(g) &= f_{(\cdot,v_1)\otimes v_2}(g_2^{-1}gg_1) = (g_1^{-1}g^{-1}g_2v_2, v_1) \\
&= (g^{-1}g_2v_2, g_1v_1) = f_{(\cdot,g_1v_1)\otimes g_2v_2}(g).
\end{aligned}
$$

因此

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F}((g_1, g_2)f_{(\cdot,v_1)\otimes v_2}) &= \mathcal{F}f_{(\cdot,g_1v_1)\otimes g_2v_2} = (\dim E_\pi)^{-\frac{1}{2}}(\cdot, g_1v_1)g_2v_2 \\
&= \pi(g_2) \circ (\cdot, v_1)v_2 \circ \pi(g_1^{-1}) = (g_1, g_2)(\mathcal{F}f),
\end{aligned}
$$

从而定理得证. □

推论 3.40. 设 G 为紧李群, $f, f_i \in L^2(G)$.

1. 成立如下 ***Parseval-Plancherel*** 公式:

$$
\|f\|_{L^2(G)}^2 = \sum_{[\pi]\in\widehat{G}} \dim E_\pi \|\pi(f)\|_{\mathrm{HS}}^2.
$$

证明. 这是 Plancherel 定理的直接推论. □

推论 3.40. 续.

2. 在自然嵌入 $\mathrm{End}(E_\pi) \hookrightarrow \mathrm{Op}(\widehat{G})$ 意义下, 成立 $\mathcal{I}I_{E_\pi} = (\dim E_\pi)^{\frac{1}{2}}\chi_{\overline{E_\pi}}$, 其中 $I_{E_\pi} \in \mathrm{End}(E_\pi)$ 为恒等算子. 进一步, 在 L^2 意义下成立

$$f = \sum_{[\pi]\in\widehat{G}} (\dim E_\pi) f * \chi_{E_\pi}.$$

3. 成立

$$(f_1, f_2)_{L^2(G)} = \sum_{[\pi]\in\widehat{G}} (\dim E_\pi) \operatorname{tr}\pi(\widetilde{f_2} * f_1).$$

证明. 注意 $(\dim E_\pi)^{\frac{1}{2}} I_{E_\pi}$ 在 $\mathrm{Op}(\widehat{G})$ 上的代数乘法作用是到 $\mathrm{End}(E_\pi)$ 的投影, 从而如果我们证明了 $\mathcal{I}I_{E_\pi} = (\dim E_\pi)^{\frac{1}{2}}\chi_{\overline{E_\pi}}$, 那么由 Plancherel 定理即可得到 (2) 的其余部分. 虽然 $\mathcal{I}I_{E_\pi} = (\dim E_\pi)^{\frac{1}{2}}\chi_{\overline{E_\pi}}$ 实际上已经在定理3.30当中证过了, 但它很容易直接验证. 取 E_π 的一组单位正交基 $\{x_i\}$, 记 E_π 的 G-不变内积为 $(\cdot,\cdot)$, 那么 $I_{E_\pi} = \sum_i (\cdot, x_i)x_i$. 因此由定理3.5可得 $\mathcal{I}E_\pi = (\dim E_\pi)^{\frac{1}{2}}\chi_{\overline{E_\pi}}$.

至于 (3), 由 Plancherel 定理与引理3.35可得

$$\begin{aligned}(f_1, f_2)_{L^2(G)} &= (\mathcal{F}f_1, \mathcal{F}f_2)_{\mathrm{HS}} \\ &= \sum_{[\pi]\in\widehat{G}} (\dim E_\pi) \operatorname{tr}\left(\pi(f_2)^* \circ \pi(f_1)\right) \\ &= \sum_{[\pi]\in\widehat{G}} (\dim E_\pi) \operatorname{tr}\pi\left(\widetilde{f_2} * f_1\right).\end{aligned}$$

□

定义 3.41. 设 G 为紧李群, $f \in L^2(G)$, $[\pi] \in \widehat{G}$. 定义如下 **标量傅立叶变换** *(scalar valued Fourier transform)* :

$$\widehat{f}(\pi) = \operatorname{tr}\pi(f).$$

注意 $\widehat{f}$ 还可由如下公式来计算:

$$\widehat{f}(\pi)=\int_G f(g)\chi_{E_\pi}(g)\,\mathrm{d}g=(f,\chi_{\overline{E_\pi}})_{L^2(G)},$$

这是因为, 取 E_π 的一组单位正交基 $\{v_i\}$, 则

$$\widehat{f}(\pi)=\sum_i(\pi(f)v_i,v_i)=\int_G f(g)\sum_i(gv_i,v_i)\,\mathrm{d}g.$$

定理 3.42. 标量傅立叶逆定理. 设 G 为紧李群, $f\in\operatorname{span}\big(L^2(G)*L^2(G)\big)\subseteq C(G)$. 则成立

$$f(e)=\sum_{[\pi]\in\widehat{G}}(\dim E_\pi)\widehat{f}(\pi).$$

证明. 对于 $f=f_1*f_2$, $f_i\in L^2(G)$, 则由推论3.40,

$$\begin{aligned}f(e)&=\int_G f_1(g^{-1})f_2(g)\,\mathrm{d}g=\int_G f_2(g)\overline{\widetilde{f_1}(g)}\,\mathrm{d}g\\&=(f_2,\widetilde{f_1})_{L^2(G)}=\sum_{[\pi]\in\widehat{G}}(\dim E_\pi)\operatorname{tr}\pi(f_1*f_2).\end{aligned}$$

□

我们说过, 即使 $G=S^1$, 当 f 仅仅是连续函数时标量傅立叶逆定理也不一定成立. 然而, 利用李代数的技巧以及 Plancherel 定理, 可以证明当 f 连续可微时标量傅立叶逆定理成立. 特别地, 当 f 光滑时标量傅立叶逆定理成立.

定理 3.43. 设 G 为紧李群, 则映射 $f\mapsto(\widehat{f}(\pi))_{[\pi]\in\widehat{G}}$ 诱导如下酉同构:

$$\{L^2(G)\text{-类函数}\}\cong\ell^2(\widehat{G}).$$

对于 $[\gamma]\in\widehat{G}$, 特征标 χ_{E_γ} 被该同构映到 $(\delta_{\pi,\overline{\gamma}})_{[\pi]\in\widehat{G}}$, 其中当 $\pi\cong\overline{\gamma}$ 时 $\delta_{\pi,\overline{\gamma}}=1$, 否则该值为 0.

证明. 其实已经在定理3.30当中证过了. 不妨在此再直接验证一下. 注意

$$\widehat{\chi_{E_\gamma}}(\pi) = \int_G \chi_{E_\gamma}(g)\chi_{E_\pi}(g)\,\mathrm{d}g,$$

从而定理3.7表明 χ_{E_π} 被映到 $(\delta_{\pi,\bar{\gamma}})_{[\pi]\in\widehat{G}}$. 又因为 $\left\{\chi_{E_\pi}\,\middle|\,[\pi]\in\widehat{G}\right\}$ 是 $\{L^2(G)$-类函数$\}$ 的单位正交基, 从而证毕. □

3.4.3 投影算子与更一般的空间

设 G 是紧李群, (γ, V) 是 G 在希尔伯特空间上的酉表示. 对于 $[\pi]\in\widehat{G}$, 易知 $(\dim E_\pi)\gamma(\chi_{\overline{E_\pi}})$ 是 V 到 $V_{[\pi]}$ 的正交投影, G-模同态. 事实上, 这个结论可以推广到比希尔伯特空间更一般的空间上.

现在我们仅仅假设 V 是豪斯多夫完备局部凸空间. 相应地, G-有限向量, π-部分等概念直接从 §3.2.2, §3.2.3 节照搬如下:

定义 3.44. 设 (V,γ) 是紧李群 G 在豪斯多夫完备局部凸空间上的表示.

1. 对于 $v\in V$, 若 $\operatorname{span}\{\gamma(G)v\}$ 是有限维空间, 则称 v 为 G-有限向量. V 的 G-有限向量构成的集合记作 $V_{G\text{-fin}}$.
2. 对于 $[\pi]\in\widehat{G}$, 记 $V^0_{[\pi]}$ 为 V 的所有同构于 E_π 的子模的和.
3. 闭包 $V_{[\pi]} := \overline{V^0_{[\pi]}}$ 称为 V 的 π-部分.

定理 3.45. 设 (V,γ) 是紧李群 G 在豪斯多夫完备局部凸空间上的表示.

1. 对于 $[\pi],[\pi']\in\widehat{G}$, 算子 $(\dim E_\pi)\gamma(\chi_{\overline{E_\pi}})$ 为 G-模同态, 且为 V 到 $V_{[\pi]}$ 的投影. 即, 该算子在 $V_{[\pi]}$ 上的限制为恒等算子, 而在 $V_{[\pi']}$, $\pi'\not\cong\pi$ 上的作用为零.
2. 若 (V,γ) 为希尔伯特空间上的酉表示, 则 $(\dim E_\pi)\gamma(\chi_{\overline{E_\pi}})$ 也是自伴算子, 从而为正交投影.

证明. (1). 对于 $g\in G$, $v\in V$, 注意

$$\left(g\gamma(\chi_{E_\pi})g^{-1}\right)v \;=\; \int_G \chi_{E_\pi}(h)ghg^{-1}v\,\mathrm{d}h = \int_G \chi_{E_\pi}(g^{-1}hg)hv\,\mathrm{d}h$$

$$= \int_G \chi_{E_\pi}(h) h v \, \mathrm{d}h = \gamma(\chi_{E_\pi}) v,$$

从而 $\gamma(\chi_{E_\pi})$ 为 G-模同态. 将此结论用于表示 $E_{\pi'}$, 舒尔引理表明 $\pi'(\chi_{\overline{E_\pi}}) = c_{\pi',\pi} I_{E_\pi}$, 其中 $c_{\pi',\pi} \in \mathbb{C}$ 为常数. 两边取迹, 有

$$(\dim E_{\pi'}) c_{\pi',\pi} = \int_G \overline{\chi_{E_\pi}(g)} \operatorname{tr} \pi'(g) \, \mathrm{d}g = \int_G \chi_{E_{\pi'}}(g) \overline{\chi_{E_\pi}(g)} \, \mathrm{d}g.$$

从而由定理3.7可得, 当 $\pi' \not\cong \pi$ 时 $c_{\pi',\pi} = 0$; 而当 $\pi' = \pi$ 时 $c_{\pi',\pi} = (\dim E_\pi)^{-1}$. 因为任何 $v \in V^0_{[\pi']}$ 都属于 V 的某个同构于 $E_{\pi'}$ 的子模, 从而当 $\pi' = \pi$ 时 $(\dim E_\pi)\pi'(\chi_{\overline{E_\pi}})$ 在 $V^0_{[\pi']}$ 上的作用为恒等算子; 而 $\pi' \not\cong \pi$ 时该作用为零. 最后由连续性, (1) 得证.

(2). 引理3.35表明 $\gamma(\chi_{E_\pi})^* = \gamma(\widetilde{\chi_{E_\pi}})$. 而定理3.5表明 $\widetilde{\chi_{E_\pi}} = \chi_{E_\pi}$. □

定理 3.46. 设 (V, γ) 是紧李群 G 在豪斯多夫完备局部凸空间上的表示. 则:

1. $V_{G\text{-fin}} = \bigoplus_{[\pi] \in \widehat{G}} V^0_{[\pi]}$.
2. $V_{G\text{-fin}}$ 在 V 中稠密.
3. 若 V 不可约, 则 V 有限维.

证明. (1). 由推论2.17易知 $V_{G\text{-fin}} = \sum_{[\pi] \in \widehat{G}} V^0_{[\pi]}$, 因此只需要验证它是直和. 而这由定理3.45中的投影算子显然得到.

(2). 利用 **Hahn-Banach 定理**, 只需证明: 若 $\lambda \in V^*$ 在 $V_{G\text{-fin}}$ 恒为零, 则 $\lambda = 0$. 对于 $x \in V$, 定义 $f_x \in C(G)$ 为 $f_x(g) = \lambda(gx)$. 显然 $\lambda = 0$ 当且仅当 $f_x = 0, \forall x \in V$. 我们准备利用推论3.40. 注意

$$\begin{aligned} (f_x * \chi_{E_\pi})(g) &= \int_G \lambda(ghx)\chi_{E_\pi}(h^{-1}) \, \mathrm{d}h = \lambda\left(\int_G \overline{\chi_{E_\pi}(h)} ghx \, \mathrm{d}h\right) \\ &= \lambda(g\pi(\chi_{\overline{E_\pi}})x) = f_{\pi(\chi_{\overline{E_\pi}})x}(g). \end{aligned}$$

定理3.45表明 $\pi(\chi_{\overline{E_\pi}})x \in V_{[\pi]}$, 并且 λ 在每个 $V_{[\pi]}$ 都恒为零, 从而由连续性可知 $f_x * \chi_{E_\pi} = 0$. 因此 $f_x = 0$, (2) 得证.

(3). 注意到 (2) 表明 V 包含某个有限维不可约子模 W. 因为有限维子空间都是闭子空间, 从而不可约性表明 $V = W$. □

特别地, 上述定理表明, 即使把表示空间的考虑范围扩大到更一般的豪斯多夫完备局部凸空间, G 的全体不可约表示依然是 $\widehat{G}$.

下述推论将在 §7.4 节用到:

推论 3.47. *设 G 为紧李群. 设子空间 $\mathcal{S} \subseteq C(G)$ 配以满足如下性质的拓扑:*

1. *$\mathcal{S}$ 在 $C(G)$ 稠密.*
2. *$\mathcal{S}$ 是豪斯多夫完备局部凸空间.*
3. *$\mathcal{S}$ 的拓扑强于一致拓扑 [即, 关于 $\mathcal{S}$ 的拓扑收敛的函数列也在 $C(G)$ 收敛].*
4. *$\mathcal{S}$ 关于 l_g, r_g 不变, 且在此作用下, $\mathcal{S}$ 为 $G \times G$-模.*

那么, $\mathcal{S}_{G\text{-fin}} = V_{G\text{-fin}}$.

证明. 显然 $\mathcal{S}_\pi \subseteq C(G)_{[\pi]}, \forall [\pi] \in \widehat{G}$. 注意定理3.24, $C(G)_{[\pi]} \cong E_\pi^* \otimes E_\pi$. 反证法, 假设存在 $[\pi] \in \widehat{G}$ 使得 $\mathcal{S}_{[\pi]} \subsetneqq C(G)_{[\pi]}$, 则存在非零函数 $f \in C(G)_{[\pi]}$, 使得在 L^2-内积下成立 $f \perp \mathcal{S}_{[\pi]}$. 再由推论3.26与定理3.46 可得 $f \perp \mathcal{S}_{G\text{-fin}}$. 但是, 由题设条件 (1),(3) 可知 $\mathcal{S}_{G\text{-fin}}$ 在 $L^2(G)$ 稠密, 这产生矛盾. □

例如, $\mathcal{S}$ 可以是 G 的光滑函数空间或者实解析函数空间. 这个推论可以理解为: $C(G)_{G\text{-fin}}$ 是 G 上的在表示论中 "有意义的" 最小的测试函数空间; 相应地, 拓扑对偶 $C(G)^*_{G\text{-fin}}$ 是 G 上 "最大的" 广义函数空间.

3.4.4 习题

习题 3.25 设 G 为紧李群, $f_i \in L^2(G)$, $g \in G$, 试通过估计 $\sup_{h\in G} |(l_g(f_1 * f_2))(h) - (f_1 * f_2)(h)|$ 来证明 $f_1 * f_2 \in C(G)$.

习题 3.26 设 V 为有限维向量空间, $\|\cdot\|$ 为 $\mathrm{End}(V)$ 的算子范数.

(a) 证明: 对任意 $T, S \in \mathrm{End}(V)$, $\|T \circ S\|_{\mathrm{HS}} \leq \|T\| \|S\|_{\mathrm{HS}}$, 并且 $\|T\| \leq \|T\|_{\mathrm{HS}}$.

(b) 设 G 为紧李群. 证明: 对于 $(T_\pi)_{[\pi]\in\widehat{G}}, (S_\pi)_{[\pi]\in\widehat{G}} \in \mathrm{Op}(\widehat{G})$, 则 $((\dim E_\pi)^{-\frac{1}{2}} T_\pi \circ S_\pi)_{[\pi]\in\widehat{G}} \in \mathrm{Op}(\widehat{G})$. 在这里, 常数因子 $(\dim E_\pi)^{-\frac{1}{2}}$ 是必须的吗?

(c) 证明: 对于 $g_i \in G$, 成立 $(g_2 \circ T_\pi \circ g_1^{-1}) \in \mathrm{Op}(\widehat{G})$, 并且验证 $\mathrm{Op}(\widehat{G})$ 的确为 $G \times G$-模.

习题 3.27 设 G 为紧李群, $f \in \mathrm{span}\,\big(L^2(G) * L^2(G)\big) \subseteq C(G)$. 证明:

$$f(g) = \sum_{[\pi]\in\widehat{G}} (\dim E_\pi)\widehat{(r_g f)}(\pi).$$

习题 3.28 $C(G)$ 关于卷积运算构成 $\mathbb{C}$-代数. 证明: 此代数的中心元由不可约特征标 $\left\{\chi_{E_\pi} \,\middle|\, [\pi] \in \widehat{G}\right\}$ 张成.

习题 3.29 接习题 3.22. 设 f 为 SU(2) 上的光滑类函数, 证明:

$$f(I) = \frac{2}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\int_0^{\pi} f(\mathrm{diag}(e^{i\theta}, e^{-i\theta}))\sin\theta\sin(n+1)\theta\,\mathrm{d}\theta.$$

习题 3.30 设 G 为紧李群. 证明 G 是阿贝尔群当且仅当 $C(G)$ 的卷积运算交换.

习题 3.31 设 V 是紧李群 G 在豪斯多夫完备局部凸空间上的表示. 对于 $[\pi] \in \widehat{G}$, 证明: $V_{[\pi]}^0$ 为形如若干同构于 E_π 的子模的直和的最大子空间.

习题 3.32 设 (γ, V) 是紧李群 G 在豪斯多夫完备局部凸空间上的表示, f 为 G 上的连续类函数.

(a) 证明: $\forall g \in G$, $\gamma(f)$ 与 $\gamma(g)$ 交换.

(b) 证明: $\forall [\pi] \in \widehat{G}$, $\pi(f)$ 在 $V_{[\pi]}$ 上的作用为 $(\dim E_\pi)^{-1}(f, \chi_{\overline{E_\pi}})_{L^2(G)}$.

习题 3.33 设 (γ, V) 是紧李群 G 在豪斯多夫完备局部凸空间上的表示, $[\pi] \in \widehat{G}$, $v \in V_{[\pi]}^0$, $S = \mathrm{span}\,\{\pi(G)v\}$. 对于 $\lambda \in S^*$, 定义 $f_\lambda \in C(G)$ 为 $f_\lambda(g) = \lambda(g^{-1}v)$. 由此证明: $\dim S \le (\dim E_\pi)^2$.

4 李代数

李群往往是非线性的, 然而通过考虑李群单位元处的切空间可以将李群的研究 "线性化". 线性化之后研究对象是所谓的**李代数** (Lie algebra). 通常来说线性空间的结构比群结构简单, 由此, 李代数成为研究李群及其表示的强大武器.

4.1 基础概念

4.1.1 线性李群的李代数

设 M 为流形. 我们知道, M 上的 **向量场** (vector field) 是指**切丛** $TM = \bigcup_{m\in M} T_mM$ 的光滑截面. 若 G 为李群, $g \in G$, 则左乘映射 $l_g\colon G \to G$, $h \mapsto gh$ 为微分同胚. G 的切向量场 X 称为**左不变向量场**, 若对任意 $g \in G$ 都有 $\mathrm{d}l_g X = X$. 由于 G 在自身的左乘作用可迁, 从而 G 在乘法单位元 e 处的切空间 T_eG 与 G 的左不变向量场构成的空间有自然的一一对应, 该对应将 $v \in T_eG$ 映为切向量场 $X_g = \mathrm{d}l_g v$, $g \in G$; 反之, 将 G 的左不变向量场 X 映为 $v = X_e \in T_eG$.

由基本的微分几何知识可知, 左不变向量场关于切向量场的**李括号** [详见 [8] 或 [88]] 运算封闭. 凭借左不变向量场空间与切空间 T_eG 的一一对应, 自然得到切空间 T_eG 的一个代数结构, 这称为李群 G 的 **李代数** (Lie algebra) .

我们对紧李群更感兴趣. 此时, 我们可以不用太多的微分几何. 定理3.28表明紧李群 G 一定是线性群, 换言之, G 同构与 $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ 的某个闭子群. 而 $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ 的李子群的李代数具有显式的矩阵表达, 这也是本章要介绍的. 顺便一提, 本章的结论都容易推广到任意李群上.

于是, 我们要把 T_eG 视为 $T_I(\mathrm{GL}(n,\mathbb{C}))$ 的子空间, 并在其上定义代数结构. 由于 $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ 是 $\mathrm{M}_{n,n}(\mathbb{C}) \cong \mathbb{R}^{2n^2}$ 的稠密开集, 我们不妨将 $T_I(\mathrm{GL}(n,\mathbb{C}))$ 等同于 $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$, 其中

$$\mathfrak{gl}(n,\mathbb{F}) := \mathrm{M}_{n,n}(\mathbb{F}).$$

而将他们两者等同的方式正是在 $\mathbb{R}^{2n^2}$ 中标准的做法. 具体地说, 对于任意 $X \in$

$T_I(\mathrm{GL}(n,\mathbb{C}))$, 取光滑曲线 $\gamma\colon(-\varepsilon,\varepsilon)\to\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ 使得 $\gamma(0)=I$, 其中 $\varepsilon>0$; 则对 $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ 上任意的光滑函数 f, $X(f)=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(f\circ\gamma)|_{t=0}$; 映射 $X\mapsto\gamma'(0)$ 给出了从 $T_I(\mathrm{GL}(n,\mathbb{C}))$ 到 $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$ 的双射.

定义 4.1. *设 G 为 $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ 的李子群.*

1. *G 的***李代数** *(Lie algebra) 是指如下线性空间*

$$\mathfrak{g}:=\left\{\gamma'(0)\,\middle|\,\gamma\colon(-\varepsilon,\varepsilon)\to G,\ \text{为光滑曲线},\ \varepsilon>0,\ \gamma(0)=I\right\}\subseteq\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C}).$$

2. *$\mathfrak{g}$ 上的***李括号** *(Lie bracket) 定义为*

$$[X,Y]:=XY-YX.$$

对于一般的紧李群 G, 定理3.28表明存在忠实表示 $\pi\colon G\to\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$. 将 G 等同于 G 在 π 下的像, 则 G 可视为 $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ 的闭子群. 在此意义下, 用定义4.1来定义 G 的李代数. 我们将在 §4.2.1 节证明, 这种定义方式在同构意义下良定.

定理 4.2. *设 G 为 $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ 的李子群.*

1. *$\mathfrak{g}$ 为实线性空间.*
2. *$\mathfrak{g}$ 的李括号是双线性, 反对称的, 并且满足如下* **雅可比恒等式** *(Jacobi identity) : $\forall X,Y,Z\in\mathfrak{g}$,*

$$[[X,Y],Z]+[[Y,Z],X]+[[Z,X],Y]=0.$$

3. *$\mathfrak{g}$ 关于李括号运算封闭, 从而的确构成代数.*

证明. 设 $X_i=\gamma_i'(0)\in\mathfrak{g}$. 对于 $r\in\mathbb{R}$, 在 $0\in\mathbb{R}$ 的充分小邻域内定义 G 上的曲线 $\gamma(t)=\gamma_1(rt)\gamma_2(t)$, 则

$$\gamma'(0)=\left(r\gamma_1'(rt)\gamma_2(t)+\gamma_1(rt)\gamma_2'(t)\right)|_{t=0}=rX_1+X_2,$$

从而 $\mathfrak{g}$ 为实向量空间.

由李括号的定义容易证明 (2), 留做习题 4.1. 为证明 $\mathfrak{g}$ 关于李括号运算封闭, 考虑定义在 $0\in\mathbb{R}$ 附近的 G 上的光滑曲线 $\sigma_s\colon t\mapsto\gamma_1(s)\gamma_2(t)(\gamma_1(s))^{-1}$. 特别地,

$\sigma_s'(0) = \gamma_1(s)X_2(\gamma_1(s))^{-1} \in \mathfrak{g}$. 因为 $s \mapsto \sigma_s'(0)$ 实有限维向量空间上的光滑曲线, 从而它的切向量也属于 $\mathfrak{g}$. 求导 $\left.\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\right|_{s=0}$, 有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\gamma_1(s)X_2(\gamma_1(s))^{-1}\right)\Big|_{s=0} = X_1X_2 - X_2X_1 = [X_1, X_2],$$

因此 $[X_1, X_2] \in \mathfrak{g}$. □

4.1.2 指数映射

设 G 为 $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ 的李子群, $g \in G$. 由于 G 为 $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ 的子流形, 从而自然把切空间 T_gG 按通常的方式等同于

$$\left\{\gamma\colon (-\varepsilon,\varepsilon) \to G \text{ 为光滑曲线}, \varepsilon > 0, \gamma'(0) \,\middle|\, \gamma(0) = g\right\}. \tag{4.3}$$

其中, 我们通过如下方式把 $\gamma'(0)$ 视为 T_gG 中的元素: 对于 g 附近的光滑函数 f, 令 $\gamma'(0)f := \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(f \circ \gamma)|_{t=0}$. 现在, 若光滑曲线 $\gamma\colon (-\varepsilon,\varepsilon) \to G$, $\varepsilon > 0$ 满足 $\gamma(0) = I$, 则对任意给定 $g \in G$, 曲线 $\sigma(t) := g\gamma(t)$ 满足 $\sigma(0) = g$, $\sigma'(0) = g\gamma'(0)$. 因为左乘映射是微分自同胚, 从而(4.3)式将切空间 T_gG 等同于集合

$$g\mathfrak{g} := \{gX \mid X \in \mathfrak{g}\}.$$

以后, 我们自动将它们等同.

定义 4.4. 设 G 为 $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ 的李子群, $X \in \mathfrak{g}$.

1. 定义 G 上的切向量场 $\widetilde{X}$, 使得 $\widetilde{X}_g = gX$, $\forall g \in G$.
2. 记 γ_X 为切向量场 $\widetilde{X}$ 的从原点 I 出发的 **积分曲线** *(integral curve)* , 即, γ_X 是 G 上的满足以下性质的唯一的极大的光滑曲线:

$$\gamma_X(0) = I, \quad \gamma_X'(t) = \widetilde{X}_{\gamma_X(t)} = \gamma_X(t)X.$$

众所周知, 常微分方程的有关理论保证了积分曲线的存在唯一性 [详见 [8] 或 [88]] .

定理 4.5. 设 G 为 $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ 的李子群, $X \in \mathfrak{g}$.

1. 积分曲线 γ_X 满足

$$\gamma_X(t) = \exp(tX) = e^{tX} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} X^n.$$

2. 此外, 积分曲线 γ_X 是完备的, 进而是群同态. 即, $\gamma_X(t)$ 在 $t \in \mathbb{R}$ 都有定义, 换言之, $\forall t \in \mathbb{R}$, $e^{tX} \in \mathbb{R}$.

证明. 容易证明, $t \mapsto e^{tX}$ 是从 $\mathbb{R}$ 到 $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ 的光滑群同态 [留作习题 4.3] . 于是, 首先将 G 的切向量场 $\widetilde{X}$ 通过以下方式延拓到 $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ 上: $\forall g \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$, 令 $\widetilde{X}_g = gX$. 由于 $e^{0X} = I$, $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} e^{tX} = e^{tX} X$, 从而 $t \mapsto e^{tX}$ 是向量场 $\widetilde{X}$ 在 I 附近的 [唯一的] 积分曲线. 该曲线显然完备. 另一方面, 因为 G 是 $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ 的子流形, 首先将 γ_X 视为 $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ 中的曲线, 该曲线依然是 $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ 上的沿切向量场 $\widetilde{X}$ 的在 I 附近的积分曲线. 从而由唯一性可知, 在 γ_X 的定义域内成立 $\gamma_X(t) = e^{tX}$. 特别地, 存在 $\varepsilon > 0$ 使得 $\gamma_X(t) = e^{tX}$, $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. 因此 $e^{tX} \in G$, $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. 从而对于任意 $m \in \mathbb{N}$, $e^{mtX} = (e^{tX})^m \in G$, 这表明对任意 $t \in \mathbb{R}$ 都有 $e^{tX} \in G$. 证毕. □

此定理表明, 对任意 $X \in \mathfrak{g}$, 映射 $t \mapsto e^{tX}$ 为从 $\mathbb{R}$ 到 G 的光滑映射.

定理 4.6. 设 G 为 $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ 的李子群.

1. $\mathfrak{g} = \left\{X \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{C}) \,\middle|\, e^{tX} \in G, \forall t \in \mathbb{R}\right\}$.
2. 指数映射 $\exp\colon \mathfrak{g} \to G$ 为 $\mathbf{0}$ 附近的局部微分同胚. 即. 存在 $\mathbf{0} \in \mathfrak{g}$ 的某个邻域, 使得 $\exp$ 将此邻域微分同胚于 $I \in G$ 的某邻域.
3. 若 G 连通, 则 $\exp \mathfrak{g}$ 是群 G 的一组生成元.

证明. 由定理4.5直接得到 $\mathfrak{g} \subseteq \left\{X \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{C}) \,\middle|\, e^{tX} \in G, \forall t \in \mathbb{R}\right\}$. 反之, 若 $X \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$ 满足 $\forall t \in \mathbb{R}$, $e^{tX} \in G$, 则求导 $\left.\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}$, 之后由相关定义可得 $X \in \mathfrak{g}$.

再看 (2). 由**逆映射定理**, 只需证明指数映射 $\exp\colon \mathfrak{g} \to G$ 在 $\mathbf{0}$ 处的微分可逆. 事实上, 我们断言 $\exp$ 在 $\mathbf{0}$ 处的微分为 $\mathfrak{g}$ 上的恒等映射. 这是因为, 对任

意 $X \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$, exp 的微分将 X 映到 $\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}e^{tX}\right|_{t=0} = X$, 从而得证. 而 (3) 是定理1.15的直接推论. □

由上述定理立刻可知, 对于 $X \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$, 若 $\exists \varepsilon > 0, \forall t \in (-\varepsilon,\varepsilon), e^{tX} \in G$, 则 $X \in \mathfrak{g}$. 但要特别注意, $e^X \in G$ 并不是 $X \in \mathfrak{g}$ 的充分条件 [见习题 4.9] . 一般来说, exp 不是满射 [见习题 4.7] . 而当 G 为连通紧群时, 我们将在 §5.1.4 节证明 $G = \exp\mathfrak{g}$.

4.1.3 典型紧李群的李代数

我们已经知道, $\mathrm{GL}(n,\mathbb{F})$ 的李代数为 $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{F})$. 于是, 容易知道 $\mathrm{SL}(,\mathbb{F})$ 的李代数为

$$\mathfrak{sl}(n,\mathbb{F}) := \{X \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{F}) \,|\, \operatorname{tr} X = 0\}.$$

这是因为, 由定理4.6可知, 若 X 属于 $\mathrm{SL}(n,\mathbb{F})$ 的李代数, 则对任意 $t \in \mathbb{R}$ 都有 $1 = \det e^{tX} = e^{t \operatorname{tr} X}$ [见习题 4.3] . 两边求导 $\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}$ 得 $0 = \operatorname{tr} X$. 反之, 若 $\operatorname{tr} X = 0$, 则 $\det e^{tX} = e^{t \operatorname{tr} X} = 1$, 从而 X 属于 $\mathrm{SL}(n,\mathbb{F})$ 的李代数.

我们还要计算典型紧李群的李代数.

4.1.3.1. SU(n). 首先断言酉群 $\mathrm{U}(n)$ 的李代数为

$$\mathfrak{u}(n) = \{X \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{C}) \,|\, X^* = -X\}.$$

依然使用定理4.6. 若 X 属于 $\mathrm{U}(n)$ 的李代数, 则 $I = e^{tX}\left(e^{tX}\right)^* = e^{tX}e^{tX^*}$ [习题 4.3] . 两边求导 $\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}$ 得 $0 = X + X^*$. 反之, 若 $X = -X^*$, 则 $e^{tX}e^{tX^*} = I$, 从而 X 属于 $\mathrm{U}(n)$ 的李代数.

而计算 $\mathrm{SU}(n)$ 的李代数时, 只需要再结合行列式为 1 的条件, 这与 $\mathrm{SL}(n,\mathbb{F})$ 的处理方式一样. 从而易知 $\mathrm{SU}(n)$ 的李代数为

$$\mathfrak{su}(n) = \{X \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{C}) \,|\, X^* = -X, \operatorname{tr} X = 0\}.$$

因为切空间维数与流形维数相同, 从而我们得到一个计算 $\mathrm{U}(n)$ 与 $\mathrm{SU}(n)$ 的维数的简单方法. 由 $\dim\mathfrak{u}(n) = 2\frac{n(n-1)}{2} + n = n^2$, 从而李群 $\mathrm{U}(n)$ 的维数也是 n^2. 同样地, $\dim \mathrm{SU}(n) = \dim\mathfrak{su}(n) = 2\frac{n(n-1)}{2} + n - 1 = n^2 - 1$.

4.1.3.2. SO(n). 对于 $X \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$, 将之前的 X^* 换成 $X^\top$, 与 U(n), SU(n) 的做法类似, 容易求出 O(n) 与 SO(n) 的李代数. 它们的李代数分别为:

$$\begin{aligned} \mathfrak{o}(n) &= \left\{X \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{R}) \,\middle|\, X^\top = -X\right\} \\ \mathfrak{so}(n) &= \left\{X \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{R}) \,\middle|\, X^\top = -X,\ \operatorname{tr} X = 0\right\} = \mathfrak{o}(n). \end{aligned}$$

注意 $\mathrm{SO}(n) = \mathrm{O}(n)^0$, 从而这两个李群在 I 处的切空间相同. 特别地, 这两个李群的维数相同, 都等于 $\dim \mathfrak{o}(n) = \dfrac{n(n-1)}{2}$.

4.1.3.3. $\mathfrak{sp}(n)$. 回忆 §1.1.4.3 小节, 我们用两种方式来构造李群 Sp(n). 对每一种方式, 我们在此都给出相应的李代数.

第一种构造方式是 $\mathrm{Sp}(n) = \{g \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{H}) \,|\, g^*g = I\}$. 由于 $\mathrm{GL}(n,\mathbb{H})$ 是 $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{H}) = \mathrm{M}_{n,n}(\mathbb{H}) \cong \mathbb{R}^{4n^2}$ 的稠密开集, 从而切空间 $T_I\,\mathrm{GL}(n,\mathbb{H})$ 自然等同于 $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{H})$, 于是 Sp$(n)$ 的李代数自然为 $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{H})$ 的子代数. 与 U(n) 的做法类似, 易知 Sp(n) 的李代数为

$$\mathfrak{sp}(n) = \{X \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{H}) \,|\, X^* = -X\}.$$

特别地, $\dim \mathrm{Sp}(n) = \dim \mathfrak{sp}(n) = 4\dfrac{n(n-1)}{2} + 3n = 2n^2 + n$.

Sp(n) 的另一种构造方式是 $\mathrm{Sp}(n) \cong \mathrm{U}(2n) \cap \mathrm{Sp}(n,\mathbb{C})$, 其中 $\mathrm{Sp}(n,\mathbb{C}) = \left\{g \in \mathrm{GL}(2n,\mathbb{C}) \,\middle|\, g^\top J g = J\right\}$,

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}.$$

从而 Sp(n) 的李代数为

$$\mathfrak{sp}(n) \cong \mathfrak{u}(2n) \cap \mathfrak{sp}(n,\mathbb{C}),$$

其中 Sp$(n,\mathbb{C})$ 的李代数为

$$\mathfrak{sp}(n,\mathbb{C}) = \left\{X \in \mathfrak{gl}(2n,\mathbb{C}) \,\middle|\, X^\top J = -JX\right\}.$$

在此, 只需要检查 $\mathfrak{sp}(n,\mathbb{C})$ 确实为 Sp$(n,\mathbb{C})$ 的李代数. 依然使用定理4.6, 若 X 属于 Sp$(n,\mathbb{C})$ 的李代数, 则对任意 $t \in \mathbb{R}$ 都有 $e^{tX^\top} J e^{tX} = J$. 两边求导 $\left.\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}$ 得 $0 = X^\top J + JX$. 反之, 若 $X^\top J = -JX$, 则 $JXJ^{-1} = -X^\top$, 从而 $e^{tX^\top} J e^{tX} J^{-1} = e^{tX^\top} e^{tJXJ^{-1}} = e^{tX^\top} e^{-tX^\top} = I$, 从而 X 属于 $\mathfrak{sp}(n,\mathbb{C})$ 的李代数.

4.1.4 习题

习题 4.1 设 G 为 $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ 的李子群. 验证 G 的李代数的李括号双线性, 反对称, 并且满足雅可比恒等式.

习题 4.2 回忆 §1.1.4.3 节(**1.13**)式中的映射 $\widetilde{\vartheta}\colon \mathbb{H}\to \mathrm{M}_{2,2}(\mathbb{C})$.

(a) 证明 $\widetilde{\vartheta}$ 诱导李群同构 $\mathrm{Sp}(1)\cong \mathrm{SU}(2)$.

(b) 证明:

$$\widetilde{\vartheta}\mathrm{i}=\begin{pmatrix} i & 0\\ 0 & -i\end{pmatrix},\quad \widetilde{\vartheta}\mathrm{j}=\begin{pmatrix} 0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix},\quad \widetilde{\vartheta}\mathrm{k}=\begin{pmatrix} 0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix}.$$

(c) 记 $\mathrm{Im}(\mathbb{H}):=\mathrm{span}_{\mathbb{R}}\{\mathrm{i},\mathrm{j},\mathrm{k}\}$, 并且定义 $\mathrm{Im}(\mathbb{H})$ 的代数结构为 $[u,v]:=2\mathrm{Im}(u,v)=uv-\overline{uv}=uv-vu$, $\forall u,v\in\mathrm{Im}(\mathbb{H})$. 证明: $\widetilde{\vartheta}$ 诱导李代数同构 $\mathrm{Im}(\mathbb{H})\cong\mathfrak{su}(2)$.

习题 4.3 设 $X,Y\in\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$.

(a) 证明: 映射 $t\mapsto e^{tX}$ 为 $\mathbb{R}$ 到 $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ 的光滑群同态.

(b) 若 X,Y 交换, 证明 $e^{X+Y}=e^Xe^Y$, 并举例说明当 X,Y 不交换时该式未必成立.

(c) 证明: $\det e^X=e^{\mathrm{tr}\,X}$, $(e^X)^*=e^{X^*}$, $(e^X)^{-1}=e^{-X}$, $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}e^{tX}=e^{tX}X=Xe^{tX}$, 并且对任意 $A\in\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ 都有 $Ae^XA^{-1}=e^{AXA^{-1}}$.

习题 4.4 设 $x,y\in\mathbb{R}$.

(a) 验证以下:

$$\begin{aligned}
\exp\begin{pmatrix} x & -y\\ y & x\end{pmatrix} &= e^x\begin{pmatrix} \cos y & -\sin y\\ \sin y & \cos y\end{pmatrix}\\
\exp\begin{pmatrix} x & y\\ y & x\end{pmatrix} &= e^x\begin{pmatrix} \cosh y & \sinh y\\ \sinh y & \cosh y\end{pmatrix}\\
\exp\begin{pmatrix} x & 0\\ y & x\end{pmatrix} &= e^x\begin{pmatrix} 1 & 0\\ y & 1\end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

(b) 证明 $\mathfrak{gl}(2,\mathbb{R})$ 中的任何矩阵都 (实) 相似于以下三类矩阵之一: $\begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} x & y \\ y & x \end{pmatrix}$ 以及 $\begin{pmatrix} x & 0 \\ y & x \end{pmatrix}$.

习题 4.5 $\mathbb{R}^n$ 中的 **欧氏运动群** (Euclidean motion group) 是指由 $\mathbb{R}^n$ 上的形如 $\boldsymbol{x} \mapsto \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}$ 的变换构成的群, 其中 $\boldsymbol{A} \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$, $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$.

(a) 证明: 欧氏运动群同构于如下线性群

$$\left\{ \begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{b} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \,\middle|\, \boldsymbol{A} \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{R}),\ \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n \right\}.$$

(b) 利用幂级数, 给出 $\dfrac{e^{\boldsymbol{A}} - I}{\boldsymbol{A}}$ 的恰当定义.

(c) 证明欧氏运动群的李代数的指数映射为

$$\exp \begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{b} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\boldsymbol{A}} & \dfrac{e^{\boldsymbol{A}} - I}{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{b} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

习题 4.6

(a) 设 $X \in \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$,

$$X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix},$$

其中 $a,b,c \in \mathbb{C}$. 设 $\lambda \in \mathbb{C}$ 满足 $\lambda^2 = a^2 + bc$. 证明: $e^X = (\cosh\lambda)I + \dfrac{\sinh\lambda}{\lambda}X$.

(b) 设 $X \in \mathfrak{so}(3)$,

$$X = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix},$$

其中 $a,b,c \in \mathbb{R}$. 记 $\theta := \sqrt{a^2+b^2+c^2}$. 证明:

$$e^X = I + \frac{\sin\theta}{\theta}X + \frac{1-\cos\theta}{\theta^2}X^2.$$

并且证明 e^X 是绕轴 $(c,-b,a)$ 旋转角度 θ 的变换.

习题 4.7

(a) 证明指数映射 $\exp\colon \mathfrak{sl}(2,\mathbb{R}) \to \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ **不是**满射. 事实上, exp 的像集的补集由相似于 $\begin{pmatrix} -1 & \pm 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ 的矩阵构成. [即, 特征值全为 -1, 但不等于 $-I$ 的矩阵] .

(b) 求 $\mathfrak{gl}(2,\mathbb{R})$ 在指数映射下的像集.

习题 4.8

(a) 利用若尔当标准型, 证明 $\exp\colon \mathfrak{gl}(n,\mathbb{C}) \to \mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ 为满射.

(b) 证明 $\exp\colon \mathfrak{u}(n) \to \mathrm{U}(n)$, $\exp\colon \mathfrak{su}(n) \to \mathrm{SU}(n)$ 为满射.

(c) 证明 $\exp\colon \mathfrak{so}(n) \to \mathrm{SO}(n)$ 为满射.

(d) 证明 $\exp\colon \mathfrak{sp}(n) \to \mathrm{Sp}(n)$ 为满射.

习题 4.9 试构造 $X \in \mathfrak{gl}(2,\mathbb{C})$, 使得 $e^X \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ 但 $X \notin \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$.

习题 4.10 设 G 为 $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ 的李子群. 证明: $G^0 = \{I\}$ 当且仅当 $\mathfrak{g} = \{0\}$.

习题 4.11 设 G 为 $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ 的李子群, $\varphi\colon \mathbb{R} \to G$ 为连续同态.

(a) 证明: φ 为光滑同态当且仅当 φ 在 0 处光滑.

(b) 设 U 为 $0 \in \mathfrak{g}$ 的邻域, 使得 exp 在 U 上为单射. 证明可以将 φ 重新线性参数化, 也就是说, 存在 $0 \neq s \in \mathbb{R}$, 使得将 $\varphi(t)$ 替换为 $\varphi(st)$ 之后, 成立 $\varphi([-1,1]) \subseteq \exp U$.

(c) 若 $X \in U$ 使得 $\exp X = 1$, 证明 $\varphi(t) = e^{tX}$, $\forall t \in \mathbb{Q}$.

(d) 证明 $\varphi(t) = e^{tX}$, $\forall t \in \mathbb{R}$, 从而推出 φ 为实解析映射. 特别地, φ 光滑.

习题 4.12 设 G 为 $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ 的李子群. 取定 $\mathfrak{g}$ 的一组基 $\{X_i\}_{i=1}^m$, $(m \leq n)$.

(a) 通过计算映射微分, 证明映射

$$(t_1, ..., t_m) \mapsto e^{t_1 X_1} \cdots e^{t_m X_m}$$

是 $0 \in \mathbb{R}^m$ 附近的微分同胚. 坐标 $(t_1, ..., t_m)$ 称为 G 的**第二类坐标**.

(b) 证明映射

$$(t_1, ..., t_m) \mapsto e^{t_1X_1+\cdots+t_mX_m}$$

是 $0 \in \mathbb{R}^m$ 附近的微分同胚. 坐标 $(t_1, ..., t_m)$ 称为 G 的**第一类坐标**.

习题 4.13 设 G, H 为一般线性群的李子群, $\varphi\colon H \to G$ 为连续同态. 利用习题 4.11 与 4.12, 证明 φ 实际上是实解析映射, 从而为光滑同态.

习题 4.14 设 $B(\cdot,\cdot)$ 为 $\mathbb{F}^n$ 上的双线性型. 记

$$\begin{aligned}\mathrm{Aut}(B) &:= \{g \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{F}) \,|\, (gv, gw) = (v, w),\ v, w \in \mathbb{F}^n\}\\ \mathrm{Der}(B) &:= \{X \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{F}) \,|\, (Xv, w) = -(v, Xw),\ v, w \in \mathbb{F}^n\}.\end{aligned}$$

证明: $\mathrm{Aut}(B)$ 是 $\mathrm{GL}(n,\mathbb{F})$ 的闭子群, 其李代数为 $\mathrm{Der}(B)$.

习题 4.15 设 $\cdot$ 为 $\mathbb{F}^n$ 上的一个代数结构. 记

$$\begin{aligned}\mathrm{Aut}(B) &:= \{g \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{F}) \,|\, g(v\cdot w) = gv\cdot gw,\ v, w \in \mathbb{F}^n\}\\ \mathrm{Der}(B) &:= \{X \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{F}) \,|\, X(v\cdot w) = Xv\cdot w + v\cdot Xw,\ v, w \in \mathbb{F}^n\}.\end{aligned}$$

证明: $\mathrm{Aut}(\cdot)$ 为 $\mathrm{GL}(n,\mathbb{F})$ 的李子群, 其李代数为 $\mathrm{Der}(\cdot)$.

习题 4.16 设 G 为 $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ 的李子群. 利用指数映射证明: 存在 $I \in G$ 的邻域 U, 使得 U 不包含 G 的异于 $\{e\}$ 的李子群.

习题 4.17 对于 $X, Y \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$. 证明: $e^{X+Y} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(e^{\frac{X}{n}}e^{\frac{Y}{n}}\right)^n$.

4.2 进一步的构造

4.2.1 李代数同态

定义 4.7. 设 $\varphi\colon H \to G$ 是线性李群的同态. 则定义 φ 的**微分** $\mathrm{d}\varphi\colon \mathfrak{h} \to \mathfrak{g}$ 如下:

$$\mathrm{d}\varphi(X) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\varphi(e^{tX})\Big|_{t=0}.$$

由定理4.6与定义4.1可知这是良定的. 由链式法则易知, 若 $\gamma\colon \mathbb{R} \to G$ 为光滑映射且满足 $\gamma'(0) = X$, 则 $\mathrm{d}\varphi$ 也可以用公式 $\mathrm{d}\varphi(X) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\varphi(\gamma(t))\Big|_{t=0}$ 来计算. 若

将李代数 $\mathfrak{h}, \mathfrak{g}$ 等同于李群在单位元处的切空间, 则容易验证该 $\mathrm{d}\varphi$ 其实就是通常微分几何意义下的**切映射** $\mathrm{d}\varphi\colon T_IH \to T_IG$. 特别地, $\mathrm{d}\varphi$ 为线性映射, 且满足复合律 $\mathrm{d}(\varphi_1 \circ \varphi_2) = \mathrm{d}\varphi_1 \circ \mathrm{d}\varphi_2$. 这也可以用链式法则直接验证 [留做习题 4.18] .

定理 4.8. *设 $\varphi, \varphi_i\colon H \to G$ 为线性李群的同态.*

1. *以下图表交换:*

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{h} \arrow[r, "\mathrm{d}\varphi"] \arrow[d, "\exp"'] & \mathfrak{g} \arrow[d, "\exp"] \\ H \arrow[r, "\varphi"] & G \end{tikzcd}$$

换言之, $\exp \circ \mathrm{d}\varphi = \varphi \circ \exp$, 或者 $e^{\mathrm{d}\varphi X} = \varphi(e^X)$, $\forall X \in \mathfrak{h}$.

2. *微分 $\mathrm{d}\varphi$ 是李代数同态, 即对任意 $X, Y \in \mathfrak{h}$, 成立*

$$\mathrm{d}\varphi[X, Y] = [\mathrm{d}\varphi X, \mathrm{d}\varphi Y].$$

3. *若 H 为连通李群且 $\mathrm{d}\varphi_1 = \mathrm{d}\varphi_2$, 则 $\varphi_1 = \varphi_2$.*

证明. (1). 注意 φ 为群同态, 从而

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\varphi(e^X) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\varphi(e^{(t+s)X})\Big|_{s=0} = \varphi(e^{tX})\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\varphi(e^{sX})\Big|_{s=0} = \varphi(e^{tX})\,\mathrm{d}\varphi X.$$

因此, $t \mapsto \varphi(e^{tX})$ 是切向量场 $\widetilde{\mathrm{d}\varphi X}$ 在 I 附近的积分曲线. 从而由定理4.5立刻得到 $\varphi(e^{tX}) = e^{t\,\mathrm{d}\varphi X}$.

(2). 由已经证明的 (1), 以及 φ 为群同态, 可知 $\varphi(e^{tX}e^{sY}e^{-tX}) = e^{t\,\mathrm{d}\varphi X}e^{s\,\mathrm{d}\varphi Y}e^{-t\,\mathrm{d}\varphi X}$. 此式两边求导 $\frac{\partial}{\partial s}\Big|_{s=0}$, 并将 $e^{tX}e^{sY}e^{-tX}$ 改写为 $e^{se^{tX}Ye^{-tX}}$ [习题 4.3] , 可得

$$\mathrm{d}\varphi(e^{tX}Ye^{-tX}) = e^{t\,\mathrm{d}\varphi X}\,\mathrm{d}\varphi Y e^{-t\,\mathrm{d}\varphi X}.$$

再求导 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0}$, 得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\mathrm{d}\varphi(e^{tX}Ye^{-tX})\right)\Big|_{t=0} = \mathrm{d}\varphi X\,\mathrm{d}\varphi Y - \mathrm{d}\varphi Y\,\mathrm{d}\varphi X = [\mathrm{d}\varphi X, \mathrm{d}\varphi Y].$$

而利用 $\mathrm{d}\varphi$ 的线性性可得

$$\mathrm{d}\varphi[X, Y] = \mathrm{d}\varphi(XY - YX) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}\varphi(e^{tX}Ye^{-tX})\Big|_{t=0} = [\mathrm{d}\varphi X, \mathrm{d}\varphi Y].$$

至于 (3), 由已经证明的 (1) 可知 φ_1 与 φ_2 在 $\exp\mathfrak{h}$ 上的限制相同. 再利用定理4.6, 并注意 φ_i 为群同态即可. □

利用此定理, 我们可以在李代数同构意义下恰当定义紧李群的李代数. 具体来说, 若 G_i 为紧李群, $\varphi\colon G_1\to G_2$ 为李群同构. 由于 $\varphi\circ\varphi^{-1}$ 与 $\varphi^{-1}\circ\varphi$ 为恒等映射, 两边取微分可知 $\mathrm{d}\varphi$ 为李代数 $\mathfrak{g}_1$ 与 $\mathfrak{g}_2$ 的同构.

从加法群 $\mathbb{R}$ 到李群 G 的光滑群同态称为 G 的 **单参数子群** (one-parameter subgroup) . 下述推论表明, G 的单参数子群一定形如 $t\mapsto e^{tX}$, 其中 $X\in\mathfrak{g}$.

推论 4.9. 设 G 为 $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ 的李子群, $\gamma\colon\mathbb{R}\to G$ 为光滑同态, 即 $\gamma(s+t)=\gamma(s)\gamma(t)$, $\forall s,t\in\mathbb{R}$. 记 $X:=\gamma'(0)$. 则成立 $\gamma(t)=e^{tX}$.

证明. 将乘法群 $\mathbb{R}^+$ 视为 $\mathrm{GL}(1,\mathbb{C})$ 的李子群. 定义李群同态 $\widetilde{\gamma},\sigma\colon\mathbb{R}^+\to G$ 分别为: $\widetilde{\gamma}=\gamma\circ\ln$, $\sigma(x)=e^{(\ln x)X}$. 则

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\widetilde{\gamma}(x) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\widetilde{\gamma}(e^{tX})\Big|_{t=0}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\gamma(tx)\Big|_{t=0}=xX\\
\mathrm{d}\sigma(x) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sigma(e^{tx})\Big|_{t=0}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}e^{txX}\Big|_{t=0}=xX.
\end{aligned}$$

从而由定理4.8得 $\widetilde{\gamma}=\sigma$, 从而 $\gamma(t)=e^{tX}$. □

取定 $\mathfrak{g}$ 的某一组基, 可自然地将 $\mathrm{GL}(\mathfrak{g})$ 与 $\mathrm{End}(\mathfrak{g})$ 分别等同于 $\mathrm{GL}(\dim\mathfrak{g},\mathbb{R})$ 与 $\mathfrak{gl}(\dim\mathfrak{g},\mathbb{R})$. 此时, 定义 $\exp\colon\mathrm{End}(\mathfrak{g})\to\mathrm{GL}(\mathfrak{g})$ 使得 $e^T:=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}T^k$, $T\in\mathrm{End}(\mathfrak{g})$, 其中 $T^kX:=\underbrace{(T\circ\cdots\circ T)}_{k\text{个}}X$, $X\in\mathfrak{g}$.

定义 4.10. 设 G 为 $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ 的李子群.

1. 对于 $g \in G$, 定义**共轭** $c_g\colon G \to G$, 使得 $c_g(h) = ghg^{-1}$, $\forall h \in G$. 易知 c_g 为群 G 的自同态.
2. G 在 $\mathfrak{g}$ 上的**伴随表示** $\mathrm{Ad}\colon G \to \mathrm{GL}(\mathfrak{g})$ 定义为 $\mathrm{Ad}(g) = \mathrm{d}c_g$.
3. 李代数 $\mathfrak{g}$ 在 $\mathfrak{g}$ 上的**伴随表示** $\mathrm{ad}\colon \mathfrak{g} \to \mathrm{End}(\mathfrak{g})$ 定义为 $\mathrm{ad} = \mathrm{d}\,\mathrm{Ad}$. 换言之, 对于 $X, Y \in \mathfrak{g}$, $(\mathrm{ad}\,X)Y = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathrm{Ad}(e^{tX})Y)\Big|_{t=0}$.

需要注意, $\mathfrak{g}$ 是实线性空间而非复线性空间. 除去这一点, Ad 的确满足李群表示的关键性质

$$\mathrm{Ad}(g_1g_2) = \mathrm{Ad}(g_1)\,\mathrm{Ad}(g_2),$$

上式可以通过对 $c_{g_1g_2} = c_{g_1}c_{g_2}$ 两边求微分得到. 更具体地, $\mathrm{d}c_g(X) = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(ge^{tX}g^{-1})\Big|_{t=0}$, 从而

$$\mathrm{Ad}(g)X = gXg^{-1}.$$

从而由定理4.8可得

$$c_g e^X = e^{\mathrm{Ad}(g)X}.$$

而注意简单事实 $ge^Xg^{-1} = e^{gXg^{-1}}$, 上式也是线性代数中众所周知的.

进一步, $((\mathrm{d}\,\mathrm{Ad})(X))(Y) = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}e^{tX}Ye^{-tX}\Big|_{t=0}$, 从而

$$(\mathrm{ad}\,X)Y = XY - YX = [X,Y].$$

再利用定理4.8, 可得

$$\mathrm{Ad}(e^X) = e^{\mathrm{ad}\,X}. \tag{4.11}$$

我们将在 §6.1 节正式介绍李代数的表示. 到那时, 我们将知道, ad 是李代数 $\mathfrak{g}$ 在其自身上的表示.

4.2.2 李子代数与李子群

设 M 为流形, ξ, η 为 M 上的切向量场, 我们回忆切向量场的**李括号**定义为 $[\xi,\eta] = \xi\circ\eta - \eta\circ\xi$. 特别地, 当 $M = \mathbb{R}^n$ 时, 容易验证 [习题 4.19] 切向量场

$\xi = \sum_i \xi_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i}$ 与 $\eta = \sum_i \eta_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i}$ 的李括号有如下显式表达式:

$$[\xi, \eta] = \sum_{i,j}\left(\xi_j\frac{\partial \eta_i}{\partial x_j} - \eta_j\frac{\partial \xi_i}{\partial x_j}\right)\frac{\partial}{\partial x_i}. \tag{4.12}$$

对于 $M = \mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$, 注意到 $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ 可通过如下方式视为 $\mathrm{M}_{n,n}(\mathbb{C}) \cong \mathbb{R}^{2n^2} \cong \mathbb{R}^{n^2} \times \mathbb{R}^{n^2}$ 的开子集: 对于 $Z \in \mathrm{M}_{n,n}(\mathbb{C})$, 分解实部虚部 $Z = X + iY$, $X, Y \in \mathrm{M}_{n,n}(\mathbb{R})$, 之后将 Z 视为 (X, Y). 现在对于 $A \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$, A 诱导 $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ 上的切向量场 $\widetilde{A}$, 使得 $\widetilde{A}$ 在点 $Z \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ 处的取值为 ZA. [回忆(**4.3**)式附近, 我们将切空间 T_gG 自然等同于 $g\mathfrak{g}$] , 也就是说, $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ 上的切向量场 $\widetilde{A}$ 自然等同于 $\mathbb{R}^{2n^2}$ 的去掉行列式为零的点所得开集上的切向量场

$$\partial_A = \sum_{i,j,k}\mathrm{Re}(z_{ik}A_{kj})\frac{\partial}{\partial x_{ij}} + \sum_{i,j,k}\mathrm{Im}(z_{ik}A_{kj})\frac{\partial}{\partial y_{ij}}.$$

引理 4.13. 对于 $A, B \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$, 则成立

$$[\partial_A, \partial_B] = \partial_{[A,B]}.$$

证明. 方便起见, 不妨只证明 $A, B \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$ 的情况, 而一般 $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$ 的情况留给读者. 此时, ∂_A 具有更简单的表达式 $\partial_A = \sum_{i,j,k} x_{ik}A_{kj}\frac{\partial}{\partial x_{ij}}$. 定义 δ_{ip} 如下: 当指标 $i \neq p$ 时 $\delta_{ip} = 0$, 否则 $\delta_{ip} = 1$. 则由(**4.12**), 直接计算得

$$\begin{aligned}
[\partial_A, \partial_B] &= \sum_{i,j}\sum_{p,q}\left(\sum_k x_{pk}A_{kq}\delta_{ip}B_{qj} - \sum_k x_{pk}B_{kq}\delta_{ip}A_{qj}\right)\frac{\partial}{\partial x_{ij}} \\
&= \sum_{i,j}\sum_{q,k} x_{ik}(A_{kq}B_{qj} - B_{kq}A_{qj})\frac{\partial}{\partial x_{ij}} \\
&= \sum_{i,j}\sum_{k} x_{ik}[A,B]_{kj}\frac{\partial}{\partial x_{ij}} = \partial_{[A,B]}.
\end{aligned}$$

□

对我们而言，上述引理的重要之处在于，若取定 $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$ 的一个 k 维李子代数 $\mathfrak{h}$，则由此引理可知切向量场族 $\{\partial_X \mid X \in \mathfrak{h}\}$ 关于李括号运算封闭. 另一方面，这族切向量场在 $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ 的每一点处都确定了该点切空间的一个 k 维子空间，也就是说这族切向量场确定了 $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ 的切丛的一个秩为 k 的子丛. 从而，由微分几何中众所周知的 **Frobenius 定理** [详见 [8] 或 [88]]，该子丛将 $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ 划分为**积分子流形**的叶状结构. 特别地，$\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ 存在唯一的极大子流形 H，使得 $I \in H$，并且对任意 $h \in H$ 都成立 $T_hH = \{(\partial_X)_h \mid X \in \mathfrak{h}\}$，其中 $(\partial_X)_h$ 为切向量场 ∂_X 在 h 处的取值. 也就是说，H 在 h 处的切空间自然等同于 $h\mathfrak{h}$，即 $\left\{\gamma'(0) \,\middle|\, \gamma(0) = h,\, \gamma\colon (-\varepsilon,\varepsilon) \to H \text{ 光滑}, \varepsilon > 0\right\} = h\mathfrak{h}$. 最后注意，这些积分子流形，诸如 H，是**正则子流形**，它们满足如下性质：若 $f\colon M \to G$ 为流形之间的光滑映射并且 $f(M) \subseteq H$，则 $f\colon M \to H$ 也光滑 [详见 [88]].

定理 4.14. *设 G 为 $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ 的李子群. 则有如下一一对应:*

$$\{G \text{ 的连通李子群}\} \xleftrightarrow{1-1} \{\mathfrak{g} \text{ 的李子代数}\}.$$

并且满足: 若 H 为 G 的连通李子群，则 H 所对应的 $\mathfrak{g}$ 的李子代数恰为 H 的李代数.

证明. 设 $\mathfrak{h}$ 为 $\mathfrak{g}$ 的李子代数，取 G 的极大连通子流形 H 使得 $I \in H$，且 $T_hH \cong h\mathfrak{h}$，$\forall h \in H$. 断言 H 为 G 的李子群. 这是因为，对于 $h_0 \in H$，考虑连通子流形 $h_0^{-1}H$，它显然包含 I，并且由于 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(h_0^{-1}\gamma(t))\Big|_{t=0} = h_0^{-1}\gamma'(0)$，从而 $h_0^{-1}H$ 在点 $h_0^{-1}h$ 处的切空间为 $h_0^{-1}h\mathfrak{h}$. 从而由积分子流形的唯一性可知 $h_0^{-1}H = H$. 类似也可说明 $h_0H = H$. 因此 H 是 G 的子群. 由本定理前面的注记，注意 H 的乘法，取逆运算都在 H 上光滑，从而 H 为 G 的李子群. 因此，该对应为满射.

还需要说明该对应为单射. 若 H, H' 为 G 的连通李子群，满足 $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}'$. 利用指数映射以及定理4.6，可知 H 与 H' 在 I 附近相同. 又因为 H 与 H' 都连通，从而 $H = H'$. $\square$

4.2.3 李代数同态与李群同态

定理 4.15. *设 H,G 为连通的线性李群, $\varphi\colon H\to G$ 为李群同态. 则 φ 为覆盖映射当且仅当 $\mathrm{d}\varphi\colon \mathfrak{h}\to\mathfrak{g}$ 为线性同构.*

证明. 若 φ 为覆盖映射, 则存在 $I\in H$ 的邻域 U, 以及 $I\in G$ 的邻域 V, 使得限制映射 $\varphi\colon U\to V$ 是微分同胚, 从而 φ 在 I 处的微分 $\mathrm{d}\varphi$ 为同构.

反之, 若 $\mathrm{d}\varphi$ 为同构, 则由**逆映射定理**, 存在 $I\in H$ 的邻域 U_0, $I\in G$ 的邻域 V_0, 使得限制映射 $\varphi\colon U_0\to V_0$ 是微分同胚. 特别地, $\ker\varphi\cap U_0=\{I\}$. 取 $I\in V_0$ 的连通邻域 V 使得 $VV^{-1}\subseteq V_0$ [习题 1.4] , 再令 $U:=\varphi^{-1}V\cap U_0$, 从而 U 连通, $UU^{-1}\subseteq U_0$, $\varphi\colon U\to V$ 依然是微分同胚.

由于 φ 为群同构, $\varphi^{-1}V=U\ker\varphi$. 为验证 φ 在 $I\in G$ 处满足覆盖映射的条件, 我们断言 $\varphi^{-1}V$ 的所有连通分支为 $\{U\gamma\,|\,\gamma\in\ker\varphi\}$. 为此, 只需验证对于不同的 $\gamma_i\in\ker\varphi$, $U\gamma_1\cap U\gamma_2=\varnothing$. 假如 $u_i\in U$, $\gamma_i\in\ker\varphi$ 满足 $u_1\gamma_1=u_2\gamma_2$, 则 $\gamma_2\gamma_1^{-1}=u_2^{-1}u_1\in U_0\cap\ker\varphi$, 从而迫使 $\gamma_2\gamma_1^{-1}=I$, 得证.

还需要验证 φ 在任意 $g\in G$ 处都满足覆盖映射的条件. 为此, 首先注意 φ 是满射, 这是因为 φ 为群同态, 其像集包含 $I\in G$ 的某个邻域, 并且 G 连通 [见定理1.15] . 取 $h\in H$ 使得 $\varphi(h)=g$, 则 gV 是 $g\in G$ 的连通邻域, $\varphi^{-1}(gV)=hU\ker\varphi$. 而 $hU\ker\varphi$ 的全体连通分支显然为 $\{hU\gamma\,|\,\gamma\in\ker\varphi\}$. 又因为 φ 在 $hU\gamma$ 上的限制显然是映到 gV 的微分同胚, 因此 φ 是覆盖映射. □

定理 4.16. *设 H,G 为连通的线性李群, 并且 H 单连通, $\psi\colon\mathfrak{h}\to\mathfrak{g}$ 为李代数同态. 则存在唯一的李群同态 $\varphi\colon H\to G$ 使得 $\mathrm{d}\varphi=\psi$.*

证明. 利用定理4.8容易证明唯一性. 下证存在性. 设 H 为 $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ 的李子群, G 为 $\mathrm{GL}(m,\mathbb{C})$ 的李子群, 则自然将 $H\times G$ 视为 $\mathrm{GL}(n+m,\mathbb{C})$ 的分块对角子群. 此时, 李群 $H\times G$ 的李代数显然是 $\mathfrak{h}$ 与 $\mathfrak{g}$ 的直和, 并且为 $\mathfrak{gl}(n+m,\mathbb{C})$ 子代数. 特别注意, 在此意义下 $\mathfrak{h}$ 与 $\mathfrak{g}$ 交换. 我们定义

$$\mathfrak{a}:=\{X+\psi X\,|\,X\in\mathfrak{h}\}\subseteq\mathfrak{h}\oplus\mathfrak{g}.$$

注意 ψ 为李代数同态, 容易验证 $\mathfrak{a}$ 是 $\mathfrak{h}+\mathfrak{g}$ 的李子代数, 这是因为对任意 $X, Y \in \mathfrak{h}$, 成立

$$[X+\psi X, Y+\psi Y]=[X, Y]+[\psi X, \psi Y]=[X, Y]+\psi[X, Y].$$

设 A 为 $H \times G$ 的关于李代数 $\mathfrak{a}$ 的李子群 [利用定理4.14] , 记 π_H, π_G 分别为 A 到 H, G 的投影同态. 由定义易知 $\mathrm{d}\pi_H(X+\psi X)=X$, $\mathrm{d}\pi_G(X+\psi X)=\psi X$. 因此 $\mathrm{d}\pi_H\colon \mathfrak{a} \to \mathfrak{h}$ 是李代数同构, 从而定理4.15表明 $\pi_H\colon A \to H$ 是覆盖映射. 又因为 H 单连通, 从而 $\pi_H\colon A \to H$ 是李群同构. 于是, 令 $\varphi:=\pi_G \circ \pi_H^{-1}$, 则 $\varphi\colon H \to G$ 即为所求. 证毕. □

但要注意, 当 H 不是单连通李群时, 上述定理不再成立 [习题 4.20] .

4.2.4 习题

习题 4.18 设 $\varphi\colon H \to G$ 为线性李群的同态.

(a) 利用 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(e^{tsX}e^{tY}\right)|_{t=0}=sX+Y$, $X, Y \in \mathfrak{h}$, 证明 $\mathrm{d}\varphi\colon \mathfrak{h} \to \mathfrak{g}$ 是线性映射.

(b) 设 $\varphi'\colon K \to H$ 为线性李群的同态. 证明: $\mathrm{d}(\varphi \circ \varphi')=\mathrm{d}\varphi \circ \mathrm{d}\varphi'$.

习题 4.19 验证(**4.12**)式.

习题 4.20 利用旋表示, 说明定理4.16在 H 不是单连通李群时不成立.

习题 4.21 我们记

$$H=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}, \quad E=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \quad F=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}.$$

(a) 验证 $[H, E]=2E$, $[H, F]=-2F$, $[E, F]=H$.

(b) 在 $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ 的 Ad 作用意义下, 试求 $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ 的所有李子代数.

习题 4.22 设 H, G 为线性李群, $H \subseteq G$.

(a) 证明 H 在 G 中的**中心化子**

$$Z_G(H)=\{g \in G \mid gh=hg,\ h \in H\}$$

是 G 的李子群, 并且其李代数为

$$\mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(H) := \{X \in \mathfrak{g} \,|\, \mathrm{Ad}(h)X = X,\ h \in H\}\,.$$

(b) 若 $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$, 证明 $\mathfrak{h}$ 在 G 中的**中心化子**

$$Z_G(\mathfrak{h}) := \{g \in G \,|\, \mathrm{Ad}(g)X = X,\ X \in \mathfrak{h}\}$$

是 G 的李子群, 并且其李代数为

$$\mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}) := \{Y \in \mathfrak{g} \,|\, [Y, X] = 0,\ X \in \mathfrak{h}\}\,.$$

(c) 若 H 是 G 的连通李子群, 证明 $Z_G(H) = Z_G(\mathfrak{h})$, $\mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(H) = \mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$.

习题 4.23 设 G, H 是线性李群, $G \subseteq H$, 且 G 连通.

(a) 证明: H 在 G 中的**正规化子**

$$N_G(H) := \left\{g \in G \,\middle|\, gHg^{-1} = H\right\}$$

是 G 的李子群, 并且其李代数为

$$\mathfrak{n}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}) = \{Y \in \mathfrak{g} \,|\, [Y, \mathfrak{h}] = H\}\,.$$

(b) 证明: H 是 G 的正规子群当且仅当 $\mathfrak{h}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的理想.

习题 4.24 设 $\varphi\colon H \to G$ 是线性李群之间的同态.

(a) 证明: $\ker\varphi$ 是 H 的闭李子群, 其李代数为 $\ker \mathrm{d}\varphi$.

(b) 证明: G 的李子群 $\varphi(H)$ 的李代数是 $\mathrm{d}\varphi\mathfrak{h}$.

习题 4.25 设 G 是线性李群, 并且其李代数 $\mathfrak{g}$ 满足 $\mathrm{span}\,[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \mathfrak{g}$. 证明:

$$\mathrm{tr}(\mathrm{ad}\,X) = 0, \forall\, X \in \mathfrak{g}.$$

习题 4.26 设 $X, Y \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$.

(a) 证明: $e^{tX}e^{tY} = e^{t(X+Y)+\frac{1}{2}t^2[X,Y]+O(t^3)}$, $t \to 0$.

(b) 证明: $e^{tX}e^{tY}e^{-tX}=e^{tY+t^2[X,Y]+O(t^3)}$, $t\to 0$.

习题 4.27 设 $X,Y\in\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$. 证明: $e^{[X,Y]}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(e^{\frac{X}{n}}e^{\frac{Y}{n}}e^{-\frac{X}{n}}e^{-\frac{Y}{n}}\right)^{n^2}$.

习题 4.28 本题的目标是证明定理1.6. 先回忆微分几何里一件众所周知的事情: m 维流形 M 的 n 维子流形 N 是正则子流形, 当且仅当对任意 $p\in N$, 存在 p 在 M 中的邻域 U, 以及局部坐标卡 $\varphi\colon U\to\mathbb{R}^m$, 使得 $N\cap U=\varphi^{-1}(\mathbb{R}^n)$, 其中 $\mathbb{R}^n$ 自然地视为 $\mathbb{R}^m$ 的子空间 [详见 [8]] . 这样的局部坐标卡称为**立方体坐标卡** (cubical chart). 现在, 设 $G\subseteq\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ 为线性李群, H 是 G 的子群 [并未假设 H 具有流形结构!] .

(a) 首先, 若 H 是 G 的正则子流形, 我们来证明 H 是闭的. 为此, 取 H 中的点列 $h_i\in H$, 使得 $h_i\to h$, $h\in G$, 我们只需证明 $h\in H$. 现在取 G 在单位元 e 附近的立方体坐标卡 U. 证明: 存在 $e\in G$ 的邻域 V,W, 使得 $V^{-1}V\subseteq\overline{W}\subseteq U$. 然后, 注意当 i,j 充分大时 $h_i^{-1}h_j\in V^{-1}V$. 由此证明 $h\in H$, 进而推出 H 是闭集.

(b) 接下来开始证明定理的另一半. 现在只假设 H 是闭子群. 记

$$\mathfrak{h}:=\left\{X\in\mathfrak{g}\,\middle|\,e^{tX}\in H,\,t\in\mathbb{R}\right\}.$$

证明: 对任意 $X,Y\in\mathfrak{g}$, $e^{tX}e^{tY}=e^{t(X+Y)+O(t^2)}$, 并由此归纳证明

$$e^{t(X+Y)}=\lim_{n\to\infty}\left(e^{\frac{t}{n}X}e^{\frac{t}{n}Y}\right)^n.$$

由此推出 $\mathfrak{h}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的子空间. 然后任取 $\mathfrak{h}$ 在 $\mathfrak{g}$ 中的一个补空间 $\mathfrak{s}$, 使得 $\mathfrak{g}=\mathfrak{h}\oplus\mathfrak{s}$.

(c) 我们暂时如下假设: **不存在** $0\in\mathfrak{g}$ 的邻域 V, 使得 $\exp(\mathfrak{h}\cap V)=H\cap\exp V$. 在此假设下, 并且注意到映射 $(Y,Z)\mapsto e^Ye^Z$ 为 $\mathfrak{s}\oplus\mathfrak{h}\to G$ 的在 $(0,0)$ 附近的局部微分同胚, 证明: 存在一列非零的 $Y_n\in\mathfrak{s}$, 使得 $Y_n\to 0$, $e^{Y_n}\in H$. 然后, 适当取 $\{Y_n\}$ 的子列, 不妨设序列 $Y_n/\|Y_n\|$ 收敛于某个 $0\neq Y\in\mathfrak{s}$.

(d) 任意 $t\in\mathbb{R}$, 证明: 存在 $k_n\in\mathbb{Z}$, 使得 $k_n\|Y_n\|\to t$, 从而推出 $(e^{Y_n})^{k_n}\to e^{tY}$.

(e) 证明 $Y\in\mathfrak{h}$, 从而与第 (c) 小问的假设产生矛盾. 于是, 存在 $0\in\mathfrak{g}$ 的邻域 V, 使得 $\exp\colon\mathfrak{h}\cap V\to H\cap\exp V$ 是微分同胚.

(f) 对任意 $h\in H$, 考虑 h 在 G 中的邻域 $U:=h\exp V$, 以及坐标映射 $\varphi:=\exp^{-1}\circ l_h^{-1}\colon G\to\mathfrak{g}$. 证明 $\varphi^{-1}(\mathfrak{h})=H\cap U$, 从而 H 是正则子流形, 证毕.

5 阿贝尔李群及其结构

由于紧李群 G 总可视为酉群 $\mathrm{U}(n)$ 的李子群 [见定理3.28, 定理2.15] , 从而任何矩阵 $g \in G$ 都能被 $\mathrm{U}(n)$ 相似对角化. 而本章的核心定理将断言, 任何矩阵 $g \in G$ 其实能被 $G \subseteq \mathrm{U}(n)$ 相似对角化. 由此可以推出一系列深远的结果, 包括紧李群的各种结构定理.

5.1 阿贝尔子群与阿贝尔子代数

5.1.1 极大环与嘉当子代数

设李群 G. 我们回忆, 如果对任意 $g_i \in G$ 都成立 $g_1 g_2 = g_2 g_1$, 则称 G 是**阿贝尔李群** (Abelian Lie group); 类似地, 对于 $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$ 的李子代数 $\mathfrak{a}$, 如果任意 $X, Y \in \mathfrak{a}$ 都有 $[X,Y]=0$, 则称 $\mathfrak{a}$ 是**阿贝尔李代数** (Abelian Lie algebra).

定理 5.1. *设 G 是 $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ 的李子群.*

1. *对于 $X, Y \in \mathfrak{g}$, 则 $[X,Y]=0$ 当且仅当对任意 $s,t \in \mathbb{R}$, e^{sX} 与 e^{tY} 交换; 此时, $e^{X+Y}=e^X e^Y$.*
2. *设 A 为 G 的连通李子群, 其李代数为 $\mathfrak{a}$. 则 A 为阿贝尔李群当且仅当 $\mathfrak{a}$ 为阿贝尔李代数.*

证明. 注意 (2) 显然可由 (1) 与定理1.15, 定理4.6直接推出, 从而只证明 (1). 我们知道, 当 $[X,Y]=0$ 时, $e^{tX+sY}=e^{tX}e^{sY}$ [习题 4.3] . 再注意 $e^{tX+sY}=e^{sY+tX}$, 从而 e^{tX} 与 e^{sY} 交换. 反之, 若 e^{tX} 与 e^{sY} 交换, 则 $e^{tX}e^{sY}e^{-tX}=e^{sY}$, 两边依次求导 $\left.\frac{\partial}{\partial s}\right|_{s=0}$, $\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}$ 即得 $XY-YX=0$, 得证. □

从所周知 [习题 5.1] , $\mathbb{R}^n$ 的离散加法子群在相差可逆线性变换意义下必形如

$$\Gamma_k = \{x=(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n \mid x_1,\dots,x_k\in\mathbb{Z},\ x_{k+1}=\cdots=x_n=0\}.$$

我们回忆，**环面** (torus) 是指同构于 $T^k := (S^1)^k \cong \mathbb{R}^k/\Gamma_k = \mathbb{R}^k/\mathbb{Z}^k$ 的李群.

定理 5.2.

1. *紧阿贝尔李群必同构于 $T^k \times F$，其中 F 为有限阿贝尔群. 特别地，紧连通阿贝尔李群是环面.*
2. *若 G 为紧阿贝尔李群，则指数映射 $\exp$ 是映到 G^0 的满射 [其中 G^0 是 $e \in G$ 所在的 G 的连通分支].*

证明. 设 G 是紧阿贝尔李群. 由定理5.1可知，$\exp\colon \mathfrak{g} \to G^0$ 为阿贝尔群同态. 再由定理1.15与定理4.6可知 $\exp$ 为满射，于是 $G^0 \cong \mathfrak{g}/\ker(\exp)$. 注意线性空间同构 $\mathfrak{g} \cong \mathbb{R}^{\dim \mathfrak{g}}$，定理4.6表明 $\ker(\exp)$ 是离散的，从而存在 $k \le \dim \mathfrak{g}$ 使得 $\ker(\exp) \cong \Gamma_k$. 于是 $G^0 \cong \mathbb{R}^{\dim \mathfrak{g}}/\Gamma_k \cong T^k \times \mathbb{R}^{\dim \mathfrak{g}-k}$. 但注意 G 是紧的，这迫使 $k = \dim \mathfrak{g}$，从而 $G^0 \cong T^{\dim \mathfrak{g}}$.

接下来，由紧性可知 G/G^0 是有限阿贝尔群，从而由群论众所周知的结果可知，G/G_0 必同构于有限乘积 $\prod_{i\in\mathcal{I}}(\mathbb{Z}/n_i\mathbb{Z})$，$n_i \in \mathbb{N}$. 对每个指标 $i \in \mathcal{I}$，我们取定 $g_i \in G$，使得 g_i 在 $G \twoheadrightarrow G/G^0 \twoheadrightarrow \mathbb{Z}/n_j\mathbb{Z}$ 下的像为 $\delta_{ij} + n_j\mathbb{Z}$，$\forall j \in \mathcal{I}$. 则有 $g_i^{n_i} \in G^0$，从而存在 $X_i \in \mathfrak{g}$ 使得 $g_i^{n_i} = e^{n_i X_i}$. 令 $h_i := g_i e^{-X_i}$，则 h_i 与 g_i 位于 G 的同一连通分支，并且 $h_i^{n_i} = I$. 我们取定这组 $\{h_i\}_{i\in\mathcal{I}}$. 于是，容易验证，映射

$$\begin{aligned} G^0 \times \prod_{i\in\mathcal{I}}(\mathbb{Z}/n_i\mathbb{Z}) &\to G \\ (g, (m_i + n_i\mathbb{Z})_{i\in\mathcal{I}}) &\mapsto g\prod_{i\in\mathcal{I}} h_i^{m_i} \end{aligned}$$

为群同构. 证毕. □

定义 5.3. *设 G 为紧李群，其李代数为 $\mathfrak{g}$.*

1. *G 的极大连通阿贝尔子群称为 G 的* **极大环** *(maximal torus)* .
2. *$\mathfrak{g}$ 的极大阿贝尔李子代数称为 $\mathfrak{g}$ 的* **嘉当子代数** *(Cartan subalgebra)* .

于是, 定理5.2表明紧李群 G 的极大环 T 实际上同构于某个环面 T^k. 要注意的是, 当以后离开紧李群范畴时, 嘉当子代数的定义需要稍微调整.

定理 5.4. 设 G 为紧李群, T 为 G 的连通李子群. 则 T 是 G 的极大环当且仅当其李代数 $\mathfrak{t}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的嘉当子代数. 特别地, 极大环与嘉当子代数存在.

证明. 定理4.14与定理5.1直接推出 T 是极大环当且仅当 $\mathfrak{t}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的嘉当子代数. 而极大阿贝尔李子代数显然存在, 从而极大环也显然存在. □

5.1.2 例子

我们在 §4.1.3 小节介绍了典型紧李群的李代数.

5.1.2.1. SU(n). 回忆 U(n) 的李代数为 $\mathfrak{u}(n) = \{X \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C}) \,|\, X^* = -X\}$. 考虑

$$T = \left\{\operatorname{diag}(e^{i\theta_1}, ..., e^{i\theta_n}) \,\middle|\, \theta_i \in \mathbb{R}\right\},$$
$$\mathfrak{t} = \{\operatorname{diag}(i\theta_1, ..., i\theta_n) \,|\, \theta_i \in \mathbb{R}\} \tag{5.5}$$

显然 $\mathfrak{t}$ 是连通李群 T 的李代数. 容易验证 $\mathfrak{t}$ 是 $\mathfrak{u}(n)$ 的极大阿贝尔李子代数 [习题 5.2] , 从而 T 是 U(n) 的极大环, $\mathfrak{t}$ 是相应的嘉当子代数.

而对于 SU(n), 相应的李代数为 $\mathfrak{su}(n) = \{X \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C}) \,|\, X^* = -X, \operatorname{tr} X = 0\}$. 其极大环与嘉当子代数类似构造. 只需要在(**5.5**)附加条件 $\sum_{i=1}^{n} \theta_i = 0$ 即可.

5.1.2.2. Sp(n). 辛群 Sp(n) 的第一种实现方式是

$$\operatorname{Sp}(n) = \{g \in \operatorname{GL}(n, \mathbb{H}) \,|\, g^* g = I\},$$

相应的李代数 $\mathfrak{sp}(n) = \{X \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{H}) \,|\, X^* = -X\}$. 用类似(**5.5**)的方式即可构造极大环 T 与嘉当子代数 $\mathfrak{t}$. 容易直接验证这样的 $\mathfrak{t}$ 的确是嘉当子代数 [习题 5.2] .

Sp(n) 的另一种实现方式是

$$\operatorname{Sp}(n) \cong \operatorname{U}(2n) \cap \operatorname{Sp}(2n, \mathbb{C}),$$

其李代数 $\mathfrak{sp}(n) \cong \mathfrak{u}(2n) \cap \mathfrak{sp}(n, \mathbb{C})$. 令

$$\begin{aligned} T &= \left\{ \operatorname{diag}(e^{i\theta_1}, ..., e^{i\theta_n}; e^{-i\theta_1}, ..., e^{-i\theta_n}) \,\middle|\, \theta_i \in \mathbb{R} \right\} \\ \mathfrak{t} &= \{ \operatorname{diag}(i\theta_1, ..., i\theta_n; -i\theta_1, ..., -i\theta_n) \,|\, \theta_i \in \mathbb{R} \}. \end{aligned}$$

则可以验证 T 为极大环, $\mathfrak{t}$ 为相应的嘉当子代数.

5.1.2.3. SO$(2n)$. 正交群 SO$(2n)$ 的李代数

$$\mathfrak{so}(2n) = \left\{ X \in \mathfrak{gl}(2n, \mathbb{R}) \,\middle|\, X^\top = -X, \operatorname{tr} X = 0 \right\}.$$

定义如下分块对角阵

$$\begin{aligned} T &= \left\{ \left(\begin{array}{ccccc} \cos\theta_1 & \sin\theta_1 & & & \\ -\sin\theta_1 & \cos\theta_1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \cos\theta_n & \sin\theta_n \\ & & & -\sin\theta_n & \cos\theta_n \end{array} \right) \middle|\, \theta_i \in \mathbb{R} \right\} \\ \mathfrak{t} &= \left\{ \left(\begin{array}{ccccc} 0 & \theta_1 & & & \\ -\theta_1 & 0 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 0 & \theta_n \\ & & & -\theta_n & 0 \end{array} \right) \middle|\, \theta_i \in \mathbb{R} \right\}. \end{aligned}$$

可以验证 T 是极大环, $\mathfrak{t}$ 是相应的嘉当子代数 [习题 5.2] .

5.1.2.4. SO$(2n+1)$. 正交群 SO$(2n+1)$ 的李代数

$$\mathfrak{so}(2n+1) = \left\{ X \in \mathfrak{gl}(2n+1, \mathbb{R}) \,\middle|\, X^\top = -X, \operatorname{tr} X = 0 \right\}.$$

定义如下分块对角阵

$$T = \left\{ \left(\begin{array}{cccccc} \cos\theta_1 & \sin\theta_1 & & & & \\ -\sin\theta_1 & \cos\theta_1 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & \cos\theta_n & \sin\theta_n & \\ & & & -\sin\theta_n & \cos\theta_n & \\ & & & & & 1 \end{array} \right) \middle|\, \theta_i \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\mathfrak{t} \quad = \quad \left\{ \left. \begin{pmatrix} 0 & \theta_1 & & & & \\ -\theta_1 & 0 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & 0 & \theta_n & \\ & & & -\theta_n & 0 & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix} \right| \theta_i \in \mathbb{R} \right\}.$$

可以验证 T 是极大环, $\mathfrak{t}$ 是相应的嘉当子代数［习题 5.2］.

5.1.3　嘉当子代数的共轭定理

引理 5.6. 设 G 为紧李群, (π, V) 是 G 的有限维表示.

1. 存在 V 的 G-不变内积 $(\cdot,\cdot)$, 使得在此内积下 $\mathrm{d}\pi(X)$ 是反厄米特变换, 即对任意 $X \in \mathfrak{g}$, $v, w \in V$, $(\mathrm{d}\pi(X)v, w) = -(v, \mathrm{d}\pi(X)w)$.
2. 存在 $\mathfrak{g}$ 上的 Ad-不变内积 $(\cdot,\cdot)$, 即对任意 $g \in G$, $Y_i \in \mathfrak{g}$, 成立 $(\mathrm{Ad}(g)Y_1, \mathrm{Ad}(g)Y_2) = (Y_1, Y_2)$; 并且在此内积下, ad 是反对称变换, 即成立 $(\mathrm{ad}(X)Y_1, Y_2) = -(Y_1, \mathrm{ad}(X)Y_2)$.

证明. (2) 显然是 (1) 的特殊情形, 只需取 π 为 G 在 $\mathfrak{g}$ 上的伴随表示 Ad 即可. 下证 (1). 定理2.15保证了不变内积的存在性. 任取 V 的一个 G-不变内积, 对等式 $(\pi(e^{tX})Y_1, \pi(e^{tX})Y_2) = (Y_1, Y_2)$ 两边求导 $\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}$ 即可得到 $(\mathrm{d}\pi(X)Y_1, Y_2) + (Y_1, \mathrm{d}\pi(X)Y_2) = 0$. □

引理 5.7. 设 G 为紧李群, $\mathfrak{t}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的一个嘉当子代数. 则存在 $X \in \mathfrak{t}$, 使得 $\mathfrak{t} = \mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(X) := \{Y \in \mathfrak{g} \,|\, [Y, X] = 0\}$.

证明. 通过任取 $\mathfrak{t}$ 的一组基, 利用 $\mathfrak{t}$ 的极大性容易证明存在 $\mathfrak{t}$ 中的一组线性无关的向量 $\{X_i\}_{i=1}^n$, $X_i \in \mathfrak{t}$, 使得 $\mathfrak{t} = \bigcap_{i=1}^n \ker(\mathrm{ad}\, X_i)$. 接下来我们将证明存在 $t \in \mathbb{R}$ 使得 $\ker(\mathrm{ad}(X_1 + tX_2)) = \ker(\mathrm{ad}\, X_1) \cap \ker(\mathrm{ad}\, X_2)$. 一旦证明该断言, 我们只需反复利用该断言归纳, 从而证明本引理.

取 $\mathfrak{g}$ 的一个不变内积，使得 ad 关于该内积是反对称的. 记 $\mathfrak{k}_X := \ker(\operatorname{ad} X)$, $\mathfrak{t}_X := (\ker(\operatorname{ad} X))^{\perp}$. 易知 $\mathfrak{r}_X$ 是 $\operatorname{ad} X$-不变子空间. 由于 $\mathfrak{g} = \mathfrak{k}_X \oplus \mathfrak{r}_X$, 从而易证 $\mathfrak{r}_X$ 是 $\operatorname{ad} X$ 作用于 $\mathfrak{g}$ 的像集.

设 $X, Y \in \mathfrak{t}$, 则 X 与 Y 交换, 从而由定理4.8可知 $\mathfrak{r}_X$ 与 $\mathfrak{k}_X$ 也是 $\operatorname{ad} Y$-不变子空间. 从而成立空间分解

$$\mathfrak{g} = (\mathfrak{k}_X \cap \mathfrak{k}_Y) \oplus (\mathfrak{k}_X \cap \mathfrak{r}_Y) \oplus (\mathfrak{r}_X \cap \mathfrak{k}_Y) \oplus (\mathfrak{r}_X \cap \mathfrak{r}_Y).$$

若 $\mathfrak{r}_X \cap \mathfrak{r}_Y = \{0\}$, 则 $\mathfrak{k}_X \cap \mathfrak{k}_Y = \ker(\operatorname{ad}(X+Y))$. 否则, 对于实数 t, 考虑线性变换 $\operatorname{ad}(X + tY)$ 在空间 $\mathfrak{r}_X \cap \mathfrak{r}_Y$ 上的限制, 然后考虑此线性变换的行列式. 该行列式是关于 t 的多项式, 并且当 $t = 0$ 时非零. 因此存在 $t_0 \neq 0$ 使得 $\operatorname{ad}(X + t_0 Y)$ 是 $\mathfrak{r}_X \cap \mathfrak{r}_Y$ 上的可逆线性变换. 综上, 无论哪种情形, 总存在 $t_0 \in \mathbb{R}$ 使得 $\ker(\operatorname{ad}(X + t_0 Y)) = \mathfrak{k}_X \cap \mathfrak{k}_Y$. □

定义 5.8. *设 G 为紧李群, $X \in \mathfrak{g}$. 若 $\mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(X)$ 是 $\mathfrak{g}$ 的嘉当子代数, 则称 X 为 $\mathfrak{g}$ 的* **正则元** *(regular element)* .

我们将在 §7.2.1 节证明, $\mathfrak{g}$ 的正则元构成 $\mathfrak{g}$ 的稠密开子集.

定理 5.9. *设 G 为紧李群, $\mathfrak{t}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的一个嘉当子代数. 则对任意 $X \in \mathfrak{g}$, 存在 $g \in G$ 使得 $\operatorname{Ad}(g)X \in \mathfrak{t}$.*

证明. 取 $\mathfrak{g}$ 的 Ad-不变内积 $(\cdot,\cdot)$. 由引理5.7, 取 $Y \in \mathfrak{g}$ 使得 $\mathfrak{t} = \mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(Y)$. 则只需找到 $g_0 \in G$ 使得 $[\operatorname{Ad}(g_0)X, Y] = 0$. 而这等价于对任意 $Z \in \mathfrak{g}$, $([\operatorname{Ad}(g_0)X, Y], Z) = 0$. 利用 ad 的反对称性 (引理5.6), 这等价于证明 $(Y, [Z, \operatorname{Ad}(g_0)X]) = 0$.

考虑定义在 G 上的光滑函数 $f(g) = (Y, \operatorname{Ad}(g)X)$. 注意 G 是紧的, 从而取 $g_0 \in G$ 使得 f 在 g_0 处取到最大值. 于是, 对任意 $Z \in \mathfrak{g}$, 函数 $t \mapsto (Y, \operatorname{Ad}(e^{tZ}) \operatorname{Ad}(g_0)X)$ 在 $t = 0$ 处取到最大值. 求导 $\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}$ 得 $0 = (Y, [Z, \operatorname{Ad}(g_0)X])$. 从而此 g_0 即为所求. □

这个定理相应的群论版本也对, 但证明更加困难 [见 §5.1.4 小节] .

推论 5.10. 设 G 为紧李群, 其李代数为 $\mathfrak{g}$.

1. G 在 $\mathfrak{g}$ 的全体嘉当子代数上的 Ad-作用可迁.
2. G 在 G 的全体极大环上的共轭作用可迁.

证明. (1). 设嘉当子代数 $\mathfrak{t}_i = \mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(X_i)$, 其中 $X_i \in \mathfrak{g}$ 为相应的正则元. 由定理5.9, 取 $g \in G$ 使得 $\mathrm{Ad}(g)X_1 \in \mathfrak{t}_2$. 注意 $\mathrm{Ad}(g)$ 为李代数同态 (定理4.8), 从而

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ad}(g)\mathfrak{t}_1 &= \{\mathrm{Ad}(g)Y \in \mathfrak{g} \,|\, [Y, X_1] = 0\} \\
&= \left\{Y' \in \mathfrak{g} \,\middle|\, [\mathrm{Ad}(g)^{-1}Y', X_1] = 0\right\} \\
&= \left\{Y' \in \mathfrak{g} \,\middle|\, [Y', \mathrm{Ad}(g)X_1] = 0\right\} = \mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(\mathrm{Ad}(g)X_1).
\end{aligned}$$

由于 $\mathrm{Ad}(g)X_1 \in \mathfrak{t}_2$, $\mathfrak{t}_2$ 是阿贝尔李代数, 从而 $\mathrm{Ad}(g)\mathfrak{t}_1 \supseteq \mathfrak{t}_2$. 注意 $\mathrm{Ad}(g)$ 为李代数同态, 从而 $\mathrm{Ad}(g)\mathfrak{t}_1$ 仍是阿贝尔李代数. 从而由嘉当子代数的极大性可知 $\mathrm{Ad}(g)\mathfrak{t}_1 = \mathfrak{t}_2$.

(2). 设 G 的极大环 T_i, 相应的嘉当子代数记为 $\mathfrak{t}_i$. 注意定理5.2, $T_i = \exp \mathfrak{t}_i$. 再由定理4.8可得

$$c_g T_1 = c_g \exp \mathfrak{t}_1 = \exp(\mathrm{Ad}(g)\mathfrak{t}_1) = \exp \mathfrak{t}_2 = T_2.$$

□

5.1.4　极大环定理

引理 5.11. 设 G 为连通紧李群, 则 G 的伴随表示的核为 G 的中心. 换言之, $\mathrm{Ad}(g) = I$ 当且仅当 $g \in Z(G) := \{h \in G \,|\, gh = hg\}$.

证明. 对于 $g \in G$, 如果 c_g 为恒等映射, 则其微分 $\mathrm{Ad}(g)$ 也是恒等算子. 反之, 若 $\mathrm{Ad}(g) = I$, 则 $c_g e^X = e^{\mathrm{Ad}(g)X} = e^X$, $\forall X \in \mathfrak{g}$. 因此 c_g 在 $I \in G$ 的某个邻域上是恒等映射. 由于 G 连通, c_g 为群同态, 从而利用定理1.15可知 c_g 是 G 上的恒等映射. □

定理 5.12. 极大环定理 *(maximal torus theorem)* . 设 G 是连通紧李群, T 是 G 的一个极大环, $g_0 \in G$. 则成立:

1. 存在 $g \in G$ 使得 $gg_0g^{-1} \in T$.
2. 指数映射 $\exp\colon \mathfrak{g} \to G$ 是满射.

证明. 利用定理5.2, 定理4.8与定理5.9, 易知

$$\bigcup_{g\in G} c_g T = \bigcup_{g\in G} c_g \exp \mathfrak{t} = \bigcup_{g\in G} \exp(\mathrm{Ad}(g)\mathfrak{t}) = \exp \mathfrak{g}.$$

因此 $\bigcup\limits_{g\in G} c_g T = G$ 当且仅当 $\exp \mathfrak{g} = G$. 也就是说, (1) 与 (2) 等价.

接下来通过对 $\dim \mathfrak{g}$ 归纳, 证明 (2). 若 $\dim \mathfrak{g} = 1$, 则 $\mathfrak{g}$ 是阿贝尔李代数, 从而定理5.2表明 $\exp \mathfrak{g} = G$. 而当 $\dim \mathfrak{g} > 1$ 时, 我们将利用归纳假设, 证明 $\exp \mathfrak{g}$ 在 G 中即开又闭, 从而完成证明. 首先, 注意 $\exp \mathfrak{g} = \bigcup\limits_{g\in G} c_g T$ 是紧集 $G \times T$ 在某个连续映射下的像集, 从而是紧集, 从而是 G 中的闭集. 接下来只需证明 $\exp \mathfrak{g}$ 是 G 的开集.

任取 $X_0 \in \mathfrak{g}$, 记 $g_0 := \exp X_0$. 只需证明 $\exp \mathfrak{g}$ 包含 g_0 在 G 中的某个开邻域. 由定理4.6, 不妨 $x_0 \neq 0$. 注意引理5.6, 取 $\mathfrak{g}$ 上的一个 Ad-不变内积 $(\cdot, \cdot)$, 于是 $\mathrm{Ad}(g_0)$ 是 $\mathfrak{g}$ 上的关于该内积的酉算子. 令

$$\begin{aligned} \mathfrak{a} &:= \mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(g_0) = \{Y \in \mathfrak{g} \mid \mathrm{Ad}(g_0)Y = Y\} \\ \mathfrak{b} &:= \mathfrak{a}^{\perp}, \end{aligned}$$

则 $\mathfrak{g} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{b}$, 并且 $\mathrm{Ad}(g_0) - I$ 在 $\mathfrak{b}$ 上的限制是 $\mathfrak{b}$ 上的可逆线性变换. 注意 $X_0 \in \mathfrak{a}$, 这是因为 $\mathrm{Ad}(\exp X_0)X_0 = e^{\mathrm{ad}(X_0)}X_0 = X_0$.

考虑如下光滑映射 $\varphi\colon \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{b} \to G$, $\varphi(X, Y) := g_0^{-1}e^Y g_0 e^X e^{-Y}$. 按通常的方式将切空间等同为线性子空间, 我们计算映射 φ 在 0 处的微分如下:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\varphi(X, 0) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\varphi(tX, 0)|_{t=0} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}e^{tX}|_{t=0} = X \\ \mathrm{d}\varphi(0, Y) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\varphi(0, tY)|_{t=0} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(g_0^{-1}e^{tY}g_0e^{-tY}\right)|_{t=0} = (\mathrm{Ad}(g_0) - I)Y. \end{aligned}$$

因此 $\mathrm{d}\varphi$ 是线性同构, 从而 $\{g_0^{-1}e^Y g_0 e^X e^{-Y}\,|\,X\in\mathfrak{a},\,Y\in\mathfrak{b}\}$ 包含 $I\in\mathfrak{g}$ 的某个开邻域. 注意 $l_{g_0^{-1}}$ 是微分同胚, 从而

$$\left\{e^Y g_0 e^X e^{-Y}\middle|X\in\mathfrak{a},\,Y\in\mathfrak{b}\right\}$$

包含 $g_0\in G$ 的某个开邻域.

令 $A:=Z_G(g_0)^0=\{g\in G\,|\,gg_0=g_0g\}^0$, 则 A 是 G 的闭子群, 从而是紧李群. 将条件 $gg_0=g_0g$ 改写为 $c_{g_0}g=g$, 可以证明李群 A 的李代数是 $\mathfrak{a}$ [见上一章的习题 4.22]. 特别地, $e^{\mathfrak{a}}\subseteq A$. 又因为 $g_0\in A$, 从而 $g_0e^{\mathfrak{a}}\subseteq A$. 因此

$$\left\{e^Y g_0 e^X e^{-Y}\,\middle|\,X\in\mathfrak{a},\,Y\in\mathfrak{b}\right\}\subseteq\left\{e^Y A e^{-Y}\,\middle|\,Y\in\mathfrak{b}\right\},$$

从而 $\bigcup\limits_{g\in G}g^{-1}Ag$ 包含 $g_0\in G$ 的某个开邻域.

注意 $X_0\in\mathfrak{g}$, 从而 $\dim\mathfrak{a}\geq 1$. 如果 $\dim\mathfrak{a}<\dim\mathfrak{g}$, 则由归纳假设知 $A=\exp\mathfrak{a}$, 从而 $\bigcup\limits_{g\in G}g^{-1}Ag=\bigcup\limits_{g\in G}\exp(\mathrm{Ad}(g)\mathfrak{a})\subseteq\exp\mathfrak{g}$, 从而 $\exp\mathfrak{g}$ 包含 $g_0\in G$ 的某个开邻域, 得证.

而如果 $\dim\mathfrak{a}=\dim\mathfrak{g}$, 则 $\mathrm{Ad}(g_0)=I$, 从而由引理5.11知 $g_0\in Z(G)$. 设 $\mathfrak{t}$ 为包含 X_0 的嘉当子代数, 则由定理5.9知 $\mathfrak{g}=\bigcup\limits_{g\in G}\mathrm{Ad}(g)\mathfrak{t}$. 对任意 $X\in\mathfrak{t}$, 注意 $g_0=e^{X_0}\in Z(G)$, $[X,X_0]=0$, 从而对任意 $g\in G$,

$$g_0\exp(\mathrm{Ad}(g)X)=g_0c_ge^X=c_g(e^{X_0}e^X)=c_ge^{X_0+X}=\exp(\mathrm{Ad}(g)(X_0+X)).$$

因为 $X_0+X\in\mathfrak{t}$, 从而 $g_0\exp\mathfrak{g}\subseteq\exp\mathfrak{g}$. 而定理4.6表明 $\exp\mathfrak{g}$ 包含 $I\in G$ 的某开邻域, 从而 $g_0\exp\mathfrak{g}$ 包含 g_0 的某开邻域. 最后注意包含关系 $g_0\exp\mathfrak{g}\subseteq\exp\mathfrak{g}$, 得证. □

推论 5.13. *设 G 为连通紧李群, T 是 G 的一个极大环. 则成立:*

1. *$Z_G(T)=T$. 其中 $Z_G(T):=\{g\in G\,|\,gt=tg,\,t\in T\}$. 特别地, T 是 G 的极大阿贝尔子群.*
2. *$Z(G)\subseteq T$.*

证明. (2) 显然是 (1) 的直接推论. 只证 (1). 显然 $T \subseteq Z_G(T)$. 反之, 对于 $g_0 \in Z_G(T)$, 考虑 G 的连通闭子群 $Z_G(g_0)^0$, 则 $Z_G(g_0)^0$ 也是连通紧李群. 而由极大环定理, 存在 $X_0 \in \mathfrak{g}$ 使得 $g_0 = e^{X_0}$. 考虑 $Z_G(g_0)$ 中的曲线 $t \mapsto e^{tX_0}$, 从而 $g_0 \in Z_G(g_0)^0$. 再注意 T 连通, 且包含 I, 于是 $T \subseteq Z_G(g_0)^0$, 从而 T 也是 $Z_G(g_0)^0$ 的极大环. 对紧李群 $Z_G(g_0)^0$ 使用极大环定理, 存在 $h \in Z_G(g_0)^0$ 使得 $c_h g_0 \in T$. 但是由相关定义, 显然 $c_h g_0 = g_0$, 从而 $g_0 \in T$, 得证. □

但要注意, 极大阿贝尔子群未必是极大环 [习题 5.6] .

5.1.5 习题

习题 5.1 设 Γ 为 $\mathbb{R}^n$ 的离散子群. 设 e_1 为 Γ 中的一个**不可除元** (indivisible element) [即满足: 任意 $m \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{m}e_1 \notin \Gamma$] . 试证明 $\Gamma/\mathbb{Z}e_1$ 是 $\mathbb{R}^n/\mathbb{R}e_1$ 的离散子群. 进而通过归纳, 证明 Γ 同构于某个 Γ_k.

习题 5.2 对 §5.1.2 中的每个典型紧李群, 验证相应的 $T, \mathfrak{t}$ 的确是它们的极大环, 嘉当子代数.

习题 5.3 证明: 一般线性群的连通阿贝尔李子群必同构于某个 $T^k \times \mathbb{R}^n$.

习题 5.4 试分类紧李群 $T^k \times (\mathbb{Z}/n_1\mathbb{Z}) \times \cdots \times (\mathbb{Z}/n_k\mathbb{Z})$ 的不可约表示.

习题 5*. (Kronecker 定理). 考虑 $T^k \cong \mathbb{R}^k/\mathbb{Z}^k$, 给定 $x = (x_i) \in \mathbb{R}^k$. 证明以下四条等价:

(a) 集合 $\{1, x_1, ..., x_n\}$ 是 $\mathbb{Q}$-线性相关的.

(b) 存在整系数非零向量 $n = (n_i) \in \mathbb{Z}^k$ 使得 $n \cdot x \in \mathbb{Z}$.

(c) 存在非平凡同态 $\pi\colon \mathbb{R}^k/\mathbb{Z}^k \to S^1$, 使得 $x + \mathbb{Z}^k \in \ker \pi$.

(d) 集合 $\overline{\mathbb{Z}x + \mathbb{Z}^k} \neq \mathbb{R}^k/\mathbb{Z}^k$.

习题 5.5 在 $\mathrm{Spin}_{2n}(\mathbb{R})$ 或 $\mathrm{Spin}_{2n+1}(\mathbb{R})$ 中, 令

$$T = \{(\cos t_1 + e_1e_2 \sin t_1) \cdots (\cos t_n + e_1e_2 \sin t_n) \,|\, t_k \in \mathbb{R}\}.$$

证明 T 是极大环 [回忆习题 1.33] .

习题 5.6 试构造 $\mathrm{SO}(3)$ 的同构于 $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$ 的阿贝尔子群, 注意该子群不是极大环.

习题 5.7 设 H 是紧李群 G 的连通闭子群, 证明 $\exp\mathfrak{h} = H$.

习题 5.8 设 G 为一般线性群的连通李子群. 证明 G 的中心 $Z(G)$ 是的闭子群, 其李代数为 $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ [见习题 4.22] .

习题 5.9 设 G 为连通紧李群. 证明 G 的中心 $Z(G)$ 等于 G 的所有极大环之交.

习题 5.10 设 G 为连通紧李群. 证明: 对任意 $g \in G$ 与任意 $n \in \mathbb{N}$, 存在 $h \in G$ 使得 $h^n = g$.

习题 5.11 对于 $\mathrm{SO}(3)$ 的极大环

$$T = \left\{ \left(\begin{matrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix} \right) \middle| \theta \in \mathbb{R} \right\}.$$

试构造 $g \in \mathrm{SO}(3)$, 使得 $Z_G(g)^0 = T$, 但 $Z_G(g)$ 不连通.

习题 5.12 设 G 为连通紧李群, S 是 G 的连通阿贝尔李子群.

(a) 对于 $g \in Z_G(S)$, 证明存在 G 的极大环 T, 使得 $g \in T$, $S \subseteq T$.

(b) 证明 $Z_G(S)$ 是所有的包含 S 的 G 的极大环的并, 从而连通.

(c) 对于 $g \in G$, 证明 $Z_G(g)^0$ 是所有的包含 g 的 G 的极大环的并.

习题 5.13 设 G 为连通紧李群, 并且具有**复流形**结构, 使得群运算都是全纯的. 则映射 $g \mapsto \mathrm{Ad}(g)$, $g \in G$ 也是全纯映射. 证明: G 是阿贝尔群, 从而 G 同构于某个 $\mathbb{C}^n/\Gamma$, 其中 Γ 是 $\mathbb{C}^n$ 的离散子群.

5.2 紧李群的结构理论

5.2.1 指数映射 II

5.2.1.1. 局部微分同胚. 设 G 为 $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ 的李子群. 在定理4.6中我们已经知道指数映射 $\exp\colon \mathfrak{g} \to G$ 是 0 附近的局部微分同胚. 事实上, 还有更佳的结论. 介绍

它之前, 我们先用幂级数来定义算子

$$\frac{I-e^{-\operatorname{ad}X}}{\operatorname{ad}X}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)!}(\operatorname{ad}X)^n,$$

其中 $X\in\mathfrak{g}$.

定理 5.14. *设 G 是 $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ 的李子群, $\gamma\colon\mathbb{R}\to\mathfrak{g}$ 为光滑曲线.*

1. *成立如下求导公式:*

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}e^{\gamma(t)} &= e^{\gamma(t)}\left(\frac{I-e^{-\operatorname{ad}\gamma(t)}}{\operatorname{ad}\gamma(t)}\right)(\gamma'(t))\\ &= \left[\left(\frac{e^{\operatorname{ad}\gamma(t)}-I}{\operatorname{ad}\gamma(t)}\right)(\gamma'(t))\right]e^{\gamma(t)}.\end{aligned}$$

2. *对于 $X\in\mathfrak{g}$, 指数映射 $\exp\colon\mathfrak{g}\to G$ 是 X 附近的局部微分同胚当且仅当 $\mathfrak{g}$ 上的线性变换 $\operatorname{ad}X$ 的特征值构成的集合与 $2\pi i\mathbb{Z}\setminus\{0\}$ 不交.*

证明. 先假设 (1) 成立, 我们来证明 (2). 取 $\gamma(t)=X+tY$, $X,Y\in\mathfrak{g}$. 我们利用此曲线 $\gamma(t)$ 来计算 $\exp$ 在 $X\in\mathfrak{g}$ 处的微分. 引理5.6表明 $\operatorname{ad}X$ 是正规算子, 从而可对角化. 对于 $\operatorname{ad}X$ 的特征值 $\lambda\in\mathbb{C}$, 若 Y 是关于 λ 的特征向量, $(\operatorname{ad}X)Y=\lambda Y$, 则

$$\left(\frac{I-e^{-\operatorname{ad}X}}{\operatorname{ad}X}\right)(Y)=\begin{cases}\dfrac{1-e^{-\lambda}}{\lambda}Y & 若\ \lambda\neq 0\\ Y & 若\ \lambda=0\end{cases}.$$

从而上式等于零当且仅当 $\lambda\in 2\pi i\mathbb{Z}\setminus\{0\}$. 从而用**逆映射定理**, 容易证明 (2).

再看 (1). 虽然可以直接幂级数展开暴力验证, 但我们这里采用一个小技巧. 定义 $\varphi\colon\mathbb{R}^2\to G$ 如下:

$$\varphi(s,t)=e^{-s\gamma(t)}\frac{\partial}{\partial t}e^{s\gamma(t)}.$$

则只需证明 $\varphi(1,t)=\left(\dfrac{I-e^{-\operatorname{ad}\gamma(t)}}{\operatorname{ad}\gamma(t)}\right)(\gamma'(t))$. 首先注意 $\varphi(0,t)=0$, 于是 $\varphi(1,t)=$

$\int_0^1 \frac{\partial}{\partial s}\varphi(s,t)\,\mathrm{d}s$. 而

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial s}\varphi(s,t) &= -\gamma(t)e^{-s\gamma(t)}\frac{\partial}{\partial t}e^{s\gamma(t)} + e^{-s\gamma(t)}\frac{\partial}{\partial t}\left[\gamma(t)e^{s\gamma(t)}\right] \\
&= -e^{-s\gamma(t)}\gamma(t)\frac{\partial}{\partial t}e^{s\gamma(t)} + e^{-s\gamma(t)}\gamma'(t)e^{s\gamma(t)} + e^{-s\gamma(t)}\gamma(t)\frac{\partial}{\partial t}e^{s\gamma(t)} \\
&= e^{-s\gamma(t)}\gamma'(t)e^{s\gamma(t)}.
\end{aligned}$$

从而再由(**4.11**), 可知 $\frac{\partial}{\partial s}\varphi(s,t) = \mathrm{Ad}(e^{-s\gamma(t)})\gamma'(t) = e^{-s\,\mathrm{ad}\,\gamma(t)}\gamma'(t)$. 因此

$$\begin{aligned}
\varphi(1,t) &= \int_0^1 e^{-s\,\mathrm{ad}\,\gamma(t)}\gamma'(t)\,\mathrm{d}s = \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-s)^n}{n!}(\mathrm{ad}\,\gamma(t))^n\gamma'(t)\,\mathrm{d}s \\
&= \left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n s^{n+1}}{(n+1)!}(\mathrm{ad}\,\gamma(t))^n\gamma'(t)\right)\Bigg|_{s=0}^{s=1} \\
&= \left(\frac{I - e^{-\,\mathrm{ad}\,\gamma(t)}}{\mathrm{ad}\,\gamma(t)}\right)\gamma'(t),
\end{aligned}$$

从而得证. 至于 (1) 的另一部分, 只需注意 $l_{e^{\gamma(t)}} = r_{e^{\gamma(t)}}\circ\mathrm{Ad}(e^{\gamma(t)}) = r_{e^{\gamma(t)}}\circ e^{\mathrm{ad}\,\gamma(t)}$, 其中 $l_{e^{\gamma(t)}}$ 与 $r_{e^{\gamma(t)}}$ 分别是 $e^{\gamma(t)}$ 的左乘, 右乘作用. □

5.2.1.2. 邓肯公式. 设 G 为 $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ 的李子群, $X_i \in \mathfrak{g}$. 我们将李括号的迭代

$$[X_n, ..., [X_3, [X_2, X_1]]\cdots]$$

简记为 $[X_n, ..., X_3, X_2, X_1]$. 更进一步, 我们将

$$[\underbrace{X_n, ..., X_n}_{i_n\text{个}}, ..., \underbrace{X_1, ..., X_1}_{i_1\text{个}}]$$

简记为 $[X_n^{(i_n)}, ..., X_1^{(i_1)}]$.

尽管我们都知道 Campbell-Baker-Hausdorff 级数 [见 [21],[5] 或 [49]] , 但下述显式表达式其实来自邓肯 (Dynkin)([35]). 为证明此公式, 我们注意如下众所周知的结果: $\ln(X)$ 是 e^X 在 $X = I$ 附近的反函数, 其中 $\ln(1+X) := \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}X^n$ 在 $X = 0$ 附近绝对收敛 [习题 5.15] .

定理 5.15. 邓肯公式 *(Dynkin's formula)* . 设 G 为 $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ 的李子群. 则对于 $0\in\mathfrak{g}$ 的某个充分小邻域内的 X,Y, 存在 $Z\in\mathfrak{g}$ 使得

$$e^Xe^Y=e^Z,$$

其中 Z 由如下公式给出:

$$Z=\sum\frac{(-1)^{n+1}}{n}\frac{1}{(i_1+j_1)+\cdots+(i_n+j_n)}\frac{[X^{(i_1)},Y^{(j_1)},...,X^{(i_n)},Y^{(j_n)}]}{i_1!j_1!\cdots i_n!j_n!},$$

上述求和取遍集合 $\left\{(i_1,...,i_n;j_1,...,j_n)\in\mathbb{N}^{2n}\,\middle|\,n\geq 0,i_k+j_k\geq 1,\forall 1\leq k\leq n\right\}$.

证明. 此证明来自 [34]. 由定理4.6, 取 $0\in\mathfrak{g}$ 的邻域 U_0, 使得 $\exp$ 在 U_0 上的限制是局部微分同胚, 即 $\ln\colon \exp U_0\to U_0$ 为其逆映射. 再取 $0\in\mathfrak{g}$ 的开邻域 $U\subseteq U_0$ 使得 $(\exp U)^2(\exp U)^{-2}\subseteq\exp U_0$ [这利用了李群乘法的连续性, 见习题 1.4] . 对任意 $X,Y\in U$, 记曲线 $\gamma\colon[0,1]\to\exp U$, $t\mapsto e^{tX}e^{tY}$. 利用公式5.14对其求导 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$, 得

$$\left[\left(\frac{e^{\operatorname{ad}Z(t)}-I}{\operatorname{ad}Z(t)}\right)(Z'(t))\right]e^{Z(t)}=Xe^{Z(t)}+e^{Z(t)}Y.$$

由于 $Z(t)\in U_0$, $\exp$ 在 $Z(t)$ 附近是微分同胚, 从而由定理5.14可知 $\left(\frac{I-e^{-\operatorname{ad}Z(t)}}{\operatorname{ad}Z(t)}\right)$ 是 $\mathfrak{g}$ 上的可逆线性变换. 注意 $e^{Z(t)}=e^{tX}e^{tY}$, 于是 $\operatorname{Ad}(e^{Z(t)})=\operatorname{Ad}(e^{tX})\operatorname{Ad}(e^{tY})$, 从而由(**4.11**)式得 $e^{\operatorname{ad}Z(t)}=e^{t\operatorname{ad}X}e^{t\operatorname{ad}Y}$. 因此

$$\begin{aligned}Z'(t)&=\left(\frac{\operatorname{ad}Z(t)}{e^{\operatorname{ad}Z(t)}-I}\right)(X+\operatorname{Ad}(e^{Z(t)})Y)=\left(\frac{\operatorname{ad}Z(t)}{e^{\operatorname{ad}Z(t)}-I}\right)(X+e^{\operatorname{ad}Z(t)}Y)\\&=\left(\frac{\operatorname{ad}Z(t)}{e^{\operatorname{ad}Z(t)}-I}\right)(X+e^{t\operatorname{ad}X}e^{t\operatorname{ad}Y}Y)=\left(\frac{\operatorname{ad}Z(t)}{e^{\operatorname{ad}Z(t)}-I}\right)(X+e^{t\operatorname{ad}X}Y).\end{aligned}$$

记 $A:=\operatorname{ad}Z(t)$, 注意恒等式 $A=\ln(I+(e^A-I))=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}(e^A-I)^n$, 再注意 $e^A=e^{t\operatorname{ad}X}e^{t\operatorname{ad}Y}$, 从而有

$$\frac{\operatorname{ad}Z(t)}{e^{\operatorname{ad}Z(t)}-I}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}(e^{t\operatorname{ad}X}e^{t\operatorname{ad}Y}-I)^{n-1}.$$

因此,

$$\begin{aligned} Z'(t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} (e^{t\,\mathrm{ad}\,X} e^{t\,\mathrm{ad}\,Y} - I)^{n-1} (X + e^{t\,\mathrm{ad}\,X} Y) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \left[\sum_{\substack{i,j \geq 0 \\ (i,j) \neq (0,0)}} \frac{t^{i+j}}{i!j!} (\mathrm{ad}\,X)^i (\mathrm{ad}\,Y)^j \right]^{n-1} \left(X + \left(\sum_{i=0}^{\infty} \frac{t^i}{i!} (\mathrm{ad}\,X)^i \right) Y \right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \left[\sum \frac{t^{i_1+j_1+\cdots+i_{n-1}+j_{n-1}}}{i_1!j_1!\cdots i_{n-1}!j_{n-1}!} [X^{(i_1)}, Y^{(j_1)}, ..., X^{(i_{n-1})}, Y^{(j_{n-1})}, X] \right. \\ &\quad \left. + \sum \frac{t^{i_1+j_1+\cdots+i_{n-1}+j_{n-1}+i_n}}{i_1!j_1!\cdots i_{n-1}!j_{n-1}!i_n!} [X^{(i_1)}, Y^{(j_1)}, ..., X^{(i_{n-1})}, Y^{(j_{n-1})}, X^{(i_n)}, Y] \right], \end{aligned}$$

上式等号最右边的第二, 三个求和号都是取遍所有的 $i_k, j_k \in \mathbb{N}$, $i_k + j_k \geq 1$, $\forall 1 \leq k \leq n-1$; 而 i_n 取遍 $\mathbb{N}$. 最后由于 $Z(0) = 0$, $Z(1) = \int_0^1 Z'(t)\,\mathrm{d}t$. 如此积分一次即得证. □

在邓肯公式中, Z 的那一坨具体表达式其实并不重要, 此表达式在实际计算中很难用; 而重要的是, 此公式告诉我们, Z 可以仅用 X, Y 的李括号来表示.

推论 5.16. 设 N 为 $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ 的连通李子群, 并且 N 的李代数 $\mathfrak{n}$ 中的所有元素都是**严格上三角**矩阵 [即 $\forall X \in \mathfrak{n}$, $\forall i \geq j$, $X_{ij} = 0$], 那么指数映射 $\exp\colon \mathfrak{n} \to N$ 是满射.

证明. 容易验证对任意 n 个 n 阶严格上三角矩阵 $X_1, ..., X_n$ 都成立 $[X_n, ..., X_2, X_1] = 0$; 再注意到对于严格上三角矩阵 X, e^X 是 X 的多项式 [习题 5.18]. 特别地, 对于 $0 \in \mathfrak{n}$ 某足够小邻域内的 X, Y，由邓肯公式可知存在 Z 使得 $e^X e^Y = e^Z$, 并且 Z 是关于 X, Y 的多项式. 此时, 等式 $e^X e^Y = e^Z$ 等号两边都是关于 X, Y 的 (二元) 多项式, 且这两个多项式在 $0 \in \mathfrak{n} \times \mathfrak{n}$ 的某个开邻域内相等, 从而在整个 $\mathfrak{n} \times \mathfrak{n}$ 上都相等. 注意 Z 仅涉及 $\mathfrak{n}$ 的代数结构, 从而易知对任意 $X, Y \in \mathfrak{n}$, $Z \in \mathfrak{n}$. 这就证明了 $(\exp \mathfrak{n})^2 \subseteq \exp \mathfrak{n}$. 再由 $\exp \mathfrak{n}$ 是群 N 的一组生成元 [定理1.15], 立刻得到 $\exp \mathfrak{n} = N$. □

5.2.2 李代数的结构

设 G_i 为线性李群, 则由定理4.16的证明过程可知, 李代数直和 $\mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2$ 是李群乘积 $G_1 \times G_2$ 的李代数; 其中对于 $X_i, Y_i \in \mathfrak{g}_i$, $[X_1 + X_2, Y_1 + Y_2] = [X_1, Y_1] + [X_2, Y_2]$.

定义 5.17. 设 $\mathfrak{g}$ 是线性李群 G 的李代数.

1. 称 $\mathfrak{g}$ 是 **单李代数** *(simple Lie algebra)* ，如果 $\dim \mathfrak{g} > 1$ 并且 $\mathfrak{g}$ 没有非平凡理想. (换言之, $\mathfrak{g}$ 非阿贝尔, 且 $\mathfrak{g}$ 的理想只有 $\{0\}$ 与 $\mathfrak{g}$.)
2. 称 $\mathfrak{g}$ 是 **半单李代数** *(semisimple Lie algebra)* ，如果 $\mathfrak{g}$ 形如若干单李代数的直和.
3. 称 $\mathfrak{g}$ 是 **既约李代数** *(reductive Lie algebra)* ，如果 $\mathfrak{g}$ 形如一个半单李代数与一个阿贝尔李代数的直和.
4. 记 $\mathfrak{g}'$ 是 $\mathfrak{g}$ 的由 $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ 生成的理想, 即 $\mathfrak{g}' := \operatorname{span}[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$.

定理 5.18. 设 G 为紧李群, 则 G 的李代数 $\mathfrak{g}$ 是既约的, 并且

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}' \oplus \mathfrak{z}(\mathfrak{g}),$$

其中阿贝尔李代数 $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) := \{X \in \mathfrak{g} \mid [X, \mathfrak{g}] = 0\}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的中心, 且 $\mathfrak{g}' := [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ 是半单李代数. 更进一步, 存在 $\mathfrak{g}'$ 的单理想 $\mathfrak{s}_i$ 使得

$$\mathfrak{g}' = \bigoplus_{i=1}^{k} \mathfrak{s}_i,$$

使得 $[\mathfrak{s}_i, \mathfrak{s}_j] = 0, \forall\, i \neq j$, 并且 $\operatorname{span}[\mathfrak{s}_i, \mathfrak{s}_i] = \mathfrak{s}_i$.

证明. 由引理5.6, 取 $\mathfrak{g}$ 上的 Ad-不变厄米特内积 $(\cdot, \cdot)$, 则 $\forall\, X \in \mathfrak{g}$, $\operatorname{ad} X$ 关于此内积是反厄米特的. 由此易知, 对于 $\mathfrak{g}$ 的理想 $\mathfrak{a}$, 正交补 $\mathfrak{a}^{\perp}$ 仍是理想. 于是, $\mathfrak{g}$ 可以分解为极小理想的正交直和:

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{s}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{s}_k \oplus \mathfrak{z}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{z}_n, \tag{5.19}$$

其中 $\dim \mathfrak{s}_i > 1$, $\dim \mathfrak{z}_j = 1$. 由于 $\mathfrak{s}_i$ 是理想, $[\mathfrak{s}_i, \mathfrak{s}_j] \subseteq \mathfrak{s}_i \cap \mathfrak{s}_j$, 这表明当 $i \neq j$ 时

$[\mathfrak{s}_i, \mathfrak{s}_j] = 0$, 且 $[\mathfrak{s}_i, \mathfrak{s}_i] \subseteq \mathfrak{s}_i$. 类似地, $[\mathfrak{s}_i, \mathfrak{z}_j] = 0$, 且 $i \neq j$ 时 $[\mathfrak{z}_i, \mathfrak{z}_j] = 0$. 特别注意 $\dim \mathfrak{z}_i = 1$ 以及 $[\cdot, \cdot]$ 的反对称性, 从而也有 $[\mathfrak{z}_i, \mathfrak{z}_i] = 0$.

从而特别地, 有 $\mathfrak{z}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{z}_n \subseteq \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$. 另一方面, 对任意 $Z \in \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$, 将 Z 作关于(**5.19**)式的分解 $Z = \sum\limits_i S_i + \sum\limits_j Z_j$, 则 $0 = [Z, \mathfrak{s}_i] = [S_i, \mathfrak{s}_i]$. 从而 $S_i \in \mathfrak{z}(g)$. 再注意 $\mathfrak{s}_i$ 的极小性以及 $\dim \mathfrak{s}_i > 1$, 这迫使 $S_i = 0$. 因此 $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) = \mathfrak{z}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{z}_n$. 剩下只需证明 $\operatorname{span}[\mathfrak{s}_i, \mathfrak{s}_i] = \mathfrak{s}_i$. 而这源于 $\mathfrak{s}_i$ 的极小性. 因为 $\mathfrak{s}_i$ 不包含于 $\mathfrak{g}$ 的中心, $\dim \operatorname{span}[\mathfrak{s}_i, \mathfrak{s}_i] \geq 1$; 而它不可能严格小于 $\dim \mathfrak{s}_i$, 否则 $\operatorname{span}[\mathfrak{s}_i, \mathfrak{s}_i]$ 是 $\mathfrak{s}_i$ 的真理想, 产生矛盾. □

单李代数的分类是李代数理论中的重要结果 [详见 [56],[61] 或 [70]] . 值得注意的是, 单李代数的种类相对来说其实很少. 我们将在 §6.1.2 小节研究复化的李代数, 并且将证明, 复化的单李代数分为 4 个可数无限族以及 5 个例外单李代数. 这 4 族李代数分别来自于典型紧李群 $\mathrm{SU}(n)$, $\mathrm{SO}(2n+1)$, $\mathrm{Sp}(n)$, $\mathrm{SO}(2n)$; 而其余 5 个例外单李代数分别叫做 G_2, F_4, E_6, E_7, E_8, 它们的维数分别为 $14, 52, 78, 133, 248$.

5.2.3 换位子群定理

定义 5.20. 设 G 为线性李群, 则称 G 的由

$$\left\{g_1 g_2 g_1^{-1} g_2^{-1} \,\middle|\, g_i \in G\right\}$$

生成的正规子群为 G 的**换位子群**, 记为 G'.

一般来说, G' 可能不是闭子群; 但对紧李群来说, 不会出这种怪事.

定理 5.21. 设 G 为连通紧李群, 则换位子群 G' 是 G 的连通闭正规子群, 并且其李代数为 $\mathfrak{g}'$.

证明. 由定理3.28, 不妨 G 是某个 $\mathrm{U}(n)$ 的闭子群, 则 G 有在 $\mathbb{C}^n$ 上的表示. 考虑此表示的不可约分解 $\mathbb{C}^n \cong \mathbb{C}^{n_1} \oplus \cdots \oplus \mathbb{C}^{n_k}$, $n_1 + \cdots + n_k = n$, $n_i \geq 1$. 于是 G 自然视为 $\mathrm{U}(n_1) \times \cdots \times \mathrm{U}(n_k)$ 的闭子群, 相应的投影映射 $\pi_i \colon G \to \mathrm{U}(n_i)$ 自然视为

G 的不可约表示.

考虑李群同态 $\varphi\colon G \to \underbrace{S^1 \times \cdots \times S^1}_{k\text{个}}$, $g \mapsto (\det(\pi_i(g)))_{i=1}^k$. 记 G 的闭子群 $H := \ker\varphi$. 接下来将证明 $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}'$ 以及 $H^0 = G'$, 从而完成定理证明.

首先由定理4.6易知 $\mathfrak{h} = \ker \mathrm{d}\varphi$ [习题 4.24] , 并注意 $Z(G)$ 的李代数是 $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ [习题 4.22 或习题 5.8] . 对于 $Z \in \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$, 成立 $e^{tZ} \in Z(G)$, 从而由舒尔引理可知, $\pi_i e^{tZ} = c_i(t)I$, 其中 $c_i(t)$ 是与 Z, t 有关的常数, 且 $c_i(0) = 1$. 求导 $\left.\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}$ 得

$$Z = \begin{pmatrix} c_1'(0)I_{n_1} & & & \\ & c_2'(0)I_{n_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & c_k'(0)I_{n_k} \end{pmatrix},$$

因此 $\mathrm{d}\varphi(Z) = (n_i c_i'(0))_{i=1}^k$. 这表明, $Z \in \ker \mathrm{d}\varphi$ 当且仅当 $Z = 0$. 另一方面, 由于 $\mathfrak{g}'$ 由 $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ 张成, 从而任意 $X \in \mathfrak{g}'$, 显然 $\mathrm{tr}(\mathrm{d}\pi_i X) = 0$ [习题 5.20] , 于是 $\det \pi_i e^{tX} = 1$ [习题 4.3] , 因此 $\mathfrak{g}' \subseteq \ker \mathrm{d}\varphi$. 再结合定理5.18, 可得 $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}'$.

接下来研究 G'. 记 $U := \left\{g_1 g_2 g_1^{-1} g_2^{-1} \,\middle|\, g_i \in G\right\}$. 则 U 是 $G \times G$ 在某显然的连续映射下的像, 从而连通. 又因为 $I \in U$, $I \in U^j$, $G' = \bigcup\limits_j U^j$, 从而 G' 连通.

由行列式的运算性质与换位子的定义, 易知 $\pi_i G' \subseteq \mathrm{SU}(n_i)$, 从而 $G' \subseteq H$. 由 G' 的连通性, 只需要再验证 $H^0 \subseteq G'$. 为此, 由定理1.15, 只需证明 G' 包含 $I \in H$ 的某个开邻域.

对任意 $X, Y \in \mathfrak{h}$, 定义 $c_{X,Y}(t)\colon \mathbb{R} \to H \cap G'$ 如下:

$$c_{X,Y}(t) := \begin{cases} e^{\sqrt{t}X} e^{\sqrt{t}Y} e^{-\sqrt{t}X} e^{-\sqrt{t}Y} & t \geq 0 \\ e^{\sqrt{|t|}X} e^{-\sqrt{|t|}Y} e^{-\sqrt{|t|}X} e^{\sqrt{|t|}Y} & t < 0 \end{cases}.$$

利用邓肯公式 [见习题 5.21, 可参考习题 4.26 或者习题 5.16] 或者直接幂级数展开, 容易证明当 $t \to 0$ 时 $c_{X,Y}(t) = e^{t[X,Y] + O(|t|^{\frac{3}{2}})}$, 因此 $c_{X,Y}$ 连续可微, 且 $c_{X,Y}'(0) = [X, Y]$.

取 $\mathfrak{g}'$ 的一组基 $\{[X_i, Y_i]\}_{i=1}^p$, 定义映射 $c\colon \mathbb{R}^p \to H$, $(t_1, ..., t_p) \mapsto \prod\limits_{i=1}^p c_{X_i,Y_i}(t)$.

注意 $c'_{X,Y}(0)=[X,Y]$, 由此易知 c 在 0 处的微分给出了到 $\mathfrak{h}$ 的线性同构 [见习题 4.12] . 因此 c 的像集包含 $I\in H$ 的某开邻域. 再注意 $c(t)\in G'$, 从而得证. □

5.2.4 紧李群的结构

定理 5.22. 设 G 是连通紧李群, 则:

1. 成立 $G=G'Z(G)^0$, 并且 $Z(G')=G'\cap Z(G)$ 是有限阿贝尔群, $Z(G)^0$ 是环面, 并且
$$G\cong\left[G'\times Z(G)^0\right]/F,$$
其中 $F:=\left\{(f,f^{-1})\,\middle|\,f\in G'\cap Z(G)^0\right\}$ 是 $G'\times Z(G)^0$ 的有限阿贝尔子群.
2. 记 $\mathfrak{g}'=\mathfrak{s}_1\oplus\cdots\oplus\mathfrak{s}_k$ 为定理5.18中的单李子代数分解, 再令 $S_i:=\exp\mathfrak{s}_i$. 则 S_i 是 G' 的连通闭正规子群, 其李代数为 $\mathfrak{s}_i$; 此外, S_i 的真闭正规子群必是有限, 离散群, 且包含于 G 的中心; 最后, 群同态 $S_1\times\cdots\times S_k\to G'$, $(s_1,...,s_k)\mapsto s_1\cdots s_k$ 是满同态, 且该同态核 F' 是有限的, 且包含于 G 的中心, 从而
$$G'\cong(S_1\times\cdots S_k)/F'.$$

证明. (1). 注意 G' 是闭子群, 从而紧. 于是由极大环定理与换位子群定理知 $G'=\exp\mathfrak{g}'$. 注意李代数分解 $\mathfrak{g}=\mathfrak{g}'\oplus\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$, 并且 $Z(G)$ 的李代数是 $\mathfrak{z}(g)$, 从而再注意定理5.1与定理5.2, 可知 $\exp\mathfrak{g}=G'Z(G)^0$. 因此 $G=G'Z(G)^0$. 由此容易验证 $Z(G')=G'\cap Z(G)$.

沿用定理5.21证明的中间步骤, 对于任意 $Z\in Z(G)$, Z 必形如

$$Z=\begin{pmatrix}c_1I_{n_1}&&&\\&c_2I_{n_2}&&\\&&\ddots&\\&&&c_kI_{n_k}\end{pmatrix},$$

如果再有 $Z\in G'$, 则 $c_1^{n_1}=\cdots=c_k^{n_k}=1$, 因此 c_i 必为 n_i-次单位根. 特别地, $G'\cap Z(G)$ 是有限阿贝尔群. 最后, 考虑显然的群同态 $G'\times Z(G)^0\to G$, $(g,z)\mapsto gz$,

该同态的核显然是定理所述的 F.

再看 (2). 注意当 $i \neq j$ 时 $[\mathfrak{s}_i, \mathfrak{s}_j] = 0$, 再注意 $G' = \exp \mathfrak{g}'$, 从而易知 $G' = S_1 \cdots S_k$, 且 $S_i, S_j\,(i \neq j)$ 交换. 只需再证明 S_i 是 G' 的闭子群. 为此, 我们把 $\mathrm{Ad}(g)$ 在 $\mathfrak{s}_i$ 上的限制记作 $\mathrm{Ad}(g)|_{\mathfrak{s}_i}$, 令 $K_i := \left\{g \in G' \,\middle|\, \mathrm{Ad}(g)|_{\mathfrak{s}_j} = I,\, j \neq i\right\}^0$. 显然 K_i 是 G' 的连通闭子群. 我们断言 $K_i = S_i$.

注意 $X \in \mathfrak{k}_i$ 当且仅当 $e^{tX} \in K_i, t \in \mathbb{R}$, 这当且仅当 $\mathrm{Ad}(e^{tX})|_{\mathfrak{s}_j} = e^{t\,\mathrm{ad}(X)}|_{\mathfrak{s}_j} = I, \forall j \neq i$. 求导 $\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}$, 可知 $X \in \mathfrak{k}_i$ 当且仅当 $[X, \mathfrak{s}_j] = 0, \forall j \neq i$. 注意 $\mathfrak{s}_j$ 是理想, 且 $\mathrm{span}[\mathfrak{s}_j, \mathfrak{s}_j] = \mathfrak{s}_j$, $[\mathfrak{s}_i, \mathfrak{s}_j] = 0, \forall i \neq j$; 考虑 X 关于 $\mathfrak{s}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{s}_k$ 的分解, 容易证明 $\mathfrak{k}_i = \mathfrak{s}_i$. 因此 $K_i = \exp \mathfrak{k}_i = S_i$. 特别地, S_i 是连通闭正规子群, 其李代数为 $\mathfrak{s}_i$.

设 N 为 S_i 的正规李子群, 则任意 $s \in S_i$, $c_s N = N$. 注意 $\mathrm{Ad}(s)$ 是 c_s 的微分, 从而 $\mathrm{Ad}(s)\mathfrak{n} = \mathfrak{n}$. 再注意 ad 是 Ad 的微分, 从而任意 $X \in \mathfrak{s}_i$, $\mathrm{ad}(X)\mathfrak{n} \subseteq \mathfrak{n}$, 因此 $\mathfrak{n}$ 是 $\mathfrak{s}_i$ 的理想 [习题 4.23] . 从而 $\mathfrak{s}_i$ 的定义迫使 $\mathfrak{n} = \{0\}$ 或 $\mathfrak{s}_i$. 特别地, 若 N 是真正规子群, 且为闭子群 (从而紧), 则 $N^0 = \exp \mathfrak{n}$, 从而 N 必为有限, 离散群. 再由引理1.21知 N 包含于 G' 的中心, 从而包含于 G 的中心 [注意 $Z(G') = G' \cap Z(G)$] . 最后, 注意到映射 $(s_1, ..., s_k) \mapsto s_1 \cdots s_k$ 的微分显然是恒等映射, 从而 F' 是离散群, 且正规. 类似易知 F' 也包含于 G 的中心. □

上述定理把对连通紧李群的研究化为对单李代数对应的连通紧李群的研究.

5.2.5　习题

习题 5.14 设矩阵 $X \in \mathfrak{gl}(b, \mathbb{C})$ 可对角化, 其全部特征值为 $\{\lambda_i\}_{i=1}^n$. 证明: 线性变换 $\mathrm{ad}(X)$ 的全部特征值为 $\{\lambda_i - \lambda_j\}_{i,j=1}^n$.

习题 5.15 证明: $\ln(I+X) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} X^n$ 在 $I \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ 附近良定; 并且在相应定义域内, $\ln X$ 是 e^X 的反函数.

习题 5.16 设 G 是 $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ 的李子群. 对 $0 \in \mathfrak{g}$ 的某充分小邻域内的 X, Y, 证明

$$e^X e^Y = e^{X+Y+\frac{1}{2}[X,Y]+\frac{1}{12}[X,[X,Y]]+\frac{1}{12}[Y,[Y,X]]+\frac{1}{24}[Y,[X,[Y,X]]]+\cdots}.$$

习题 5.17 设 G 是 $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ 的李子群. 对 $0 \in \mathfrak{g}$ 的某充分小邻域内的 X, Y, 记 $e^X e^Y = e^Z$. 试模仿邓肯公式的证明过程, 从 $e^{Z(t)} = e^{tX} e^Y$ 出发, 证明 Z 也可以

写成如下形式:

$$Z=\sum\frac{(-1)^n}{n+1}\frac{1}{i_1+\cdots+i_n+1}\frac{[X^{(i_i)},Y^{(j_1)},...,X^{(i_n)},Y^{(j_n)},X]}{i_1!j_1!\cdots i_n!j_n!}.$$

习题 5.18 设 $X,X_i\in\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$ 是严格上三角阵. 证明 $X_n\cdots X_2X_1=0$, 从而证明 $[X_n,...,[X_3,[X_2,X_1]]]=0$, 并且 e^X 是关于 X 的多项式.

习题 5.19 设 N_i 是 $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ 的连通李子群, 其李代数 $\mathfrak{n}_i$ 中的元素都是严格上三角阵, $\psi\colon\mathfrak{n}_1\to\mathfrak{n}_2$ 是线性映射. 证明 ψ 诱导良定的李群同态 $\varphi\colon N_1\to N_2$, $\varphi(e^X)=e^{\psi X}$ 当且仅当 ψ 是李代数同态.

习题 5.20 对任意 $X,Y\in\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$, 证明 $\operatorname{tr}XY=\operatorname{tr}YX$.

习题 5.21 在定理5.21的证明中, 验证 $c_{X,Y}(t)=e^{t[X,Y]+O(|t|^{\frac{3}{2}})}$.

习题 5.22

(a) 利用矩阵对角化的技巧, 直接验证 $\mathrm{U}(n)'=\mathrm{SU}(n)$.

(b) 证明 $\mathrm{GL}(n,\mathbb{F})'=\mathrm{SL}(n,\mathbb{F})$.

习题 5.23 设李群 $G\subseteq\mathrm{U}(n)$, 证明行列式映射 $\det\colon G\to S^1$ 的微分是取迹映射.

习题 5.24 设李群 $G\subseteq\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$.

(a) 证明 G' 是使得 G 的商群 G/G' 是阿贝尔群的最小正规子群.

(b) 证明 $\mathfrak{g}'$ 是使得商代数 $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}'$ 是阿贝尔李代数的最小理想.

习题 5.25 设 G 是连通紧李群. 按定理5.22的记号约定, 记 $G=S_1\cdots S_kZ(G)^0$. 证明 G 的任何闭正规李子群都形如若干 S_i 与某个中心子群相乘.

6 根系及其结构

考虑嘉当子代数关于 ad-作用的公共特征值，我们将能得到李群及其李代数的很多信息，例如从中读出李群的基本群 (§6.3.3 小节). 此外, 这也是紧李群的不可约表示的分类 (§7) 的关键步骤.

6.1 根系

6.1.1 李代数的表示

定义 6.1. 设 $\mathfrak{g}$ 是 $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ 的某李子群的李代数.

1. 李代数 $\mathfrak{g}$ 的**表示**是指二元组 (ψ, V), 其中 V 是有限维 $\mathbb{C}$-线性空间, $\psi\colon \mathfrak{g} \to \mathrm{End}(V)$ 是线性映射, 并且满足 $\psi([X,Y]) = \psi(X)\circ\psi(Y) - \psi(Y)\circ\psi(X)$, $\forall X,Y \in \mathfrak{g}$.
2. 称 $\mathfrak{g}$ 的表示 (ψ, V) 是**不可约的**, 如果 V 没有非平凡的 $\psi(\mathfrak{g})$-不变子空间 [换言之, V 的 $\psi(\mathfrak{g})$-不变子空间只有 $\{0\}$ 与 V]. 否则, 称 (ψ, V) 是可约的.

与李群表示类似, 在没有歧义时我们也常习惯把李代数的表示 (ψ, V) 简写为 ψ 或 V. 此外也常把 $\psi(X)v, (X\in\mathfrak{g}, v\in V)$ 简写为 $X\cdot v$ 或 Xv.

如果 V 是 m 维线性空间, 则在 V 的给定的一组基下, 自然将表示 ψ 视为李代数同态 $\psi\colon \mathfrak{g}\to\mathfrak{gl}(m,\mathbb{C})$, 即 ψ 是线性映射且满足 $\psi[X,Y] = [\psi X, \psi Y]$. 以后我们不加声明地将它们等同.

定理 6.2. 设 G 是 $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ 的李子群, (π, V) 是李群 G 的一个有限维表示, 则:

1. $(\mathrm{d}\pi, V)$ 是李代数 $\mathfrak{g}$ 的表示, 并且满足 $e^{\mathrm{d}\pi X} = \pi(e^X)$. 其中 $\mathrm{d}\pi(X) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\pi(e^{tX})\Big|_{t=0}$, $X \in \mathfrak{g}$. 此外若 G 连通, 则 π 被 $\mathrm{d}\pi$ 所完全确定.
2. 若 G 连通, 则 V 的子空间 W 是 $\pi(G)$-不变的, 当且仅当 W 是 $\mathrm{d}\pi(\mathfrak{g})$-不变的. 特别地, V 是 G 的不可约表示当且仅当 V 是 $\mathfrak{g}$ 的不可约表示.
3. 若 G 连通, 则 V 不可约当且仅当 V 上的与所有 $\mathrm{d}\pi(\mathfrak{g})$ 都交换的线性算子只有标量算子 (恒等算子的常数倍).

证明. 第 (1) 部分可由定理4.8直接得到, 只需注意李群同态 $\pi\colon G \to \mathrm{GL}(V)$, 再取 V 的一组基即可. 而由 $e^{\mathrm{d}\pi X} = \pi(e^X)$, $\mathrm{d}\pi$ 的定义, 再注意 $\exp\mathfrak{g}$ 是群 G 的一组生成元, 容易证明 (2). 最后, 将 G 嵌入 $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$, 给定 $T \in \mathrm{End}(V)$. 注意 $[T, \mathrm{d}\pi X] = 0$ 当且仅当 $e^{t\,\mathrm{ad}(\mathrm{d}\pi X)}T = T$, $t \in \mathbb{R}$, 这当且仅当 $\mathrm{Ad}(e^{t\,\mathrm{d}\pi X})T = T$, 这当且仅当 T 与 $e^{t\,\mathrm{d}\pi X} = \pi(e^{tX})$ 交换. 注意 G 连通, 从而由 (2) 与舒尔引理可证明 (3). $\square$

第一个例子是, 考虑李群 $G \subseteq \mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ 在一维线性空间 $\mathbb{C}$ 上的平凡表示 $(\pi, \mathbb{C})$, 则 $\mathrm{d}\pi = 0$. 其李代数 $\mathfrak{g}$ 的相应的表示也成为**平凡表示**.

第二个例子是, 考虑李群 $G \subseteq \mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ 在 $\mathbb{C}^n$ 上的标准表示 $(\pi, \mathbb{C}^n)$, 则对任意 $v \in \mathbb{C}^n$, $\mathrm{d}\pi(X)v = Xv$. 李代数 $\mathfrak{g}$ 的相应的表示也叫做**标准表示**. 我们已经知道, 当 G 为 $\mathrm{GL}(m,\mathbb{F}), \mathrm{SL}(n,\mathbb{F})$, $\mathrm{U}(n)$, $\mathrm{SU}(n)$ 或 $\mathrm{SO}(n)$ 时, 李群 G 的标准表示是不可约的; 因此相应的李代数 $\mathfrak{g}$ 的标准表示也不可约.

最后回忆 $\mathrm{SU}(2)$ 在 $V_n(\mathbb{C}^2)$ 上的作用 [§2.1.2.2 小节]

$$\begin{pmatrix} a & -\bar{b} \\ b & \bar{a} \end{pmatrix} \cdot z_1^k z_2^{n-k} = (\bar{a}z_1 + \bar{b}z_2)^k(-bz_1 + az_2)^{n-k}.$$

在 §4.1.3 小节, 我们给出 $\mathfrak{su}(2) = \left\{ \begin{pmatrix} ix & -\overline{w} \\ w & -ix \end{pmatrix} \middle| x \in \mathbb{R}, w \in \mathbb{C} \right\}$. 用幂级数直接计算或者用推论4.9, 容易验证 $\exp tX = (\cos\lambda t)I + \frac{\sin\lambda t}{\lambda}X$, 其中 $\lambda = \sqrt{\det X}$

[习题 6.2]．从而李代数 $\mathfrak{su}(2)$ 在 $V_n(\mathbb{C}^2)$ 的作用为

$$\begin{aligned} X\cdot(z_1^k z_2^{n-k}) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\left.\begin{pmatrix}\cos\lambda t+\dfrac{ix}{\lambda}\sin\lambda t & -\dfrac{\overline{w}}{\lambda}\sin\lambda t\\ \dfrac{w}{\lambda}\sin\lambda t & \cos\lambda t-\dfrac{ix}{\lambda}\sin\lambda t\end{pmatrix}\cdot z_1^k z_2^{n-k}\right)\right|_{t=0}\\ &=k(-ixz_1+\overline{w}z_2)z_1^{k-1}+(n-k)(-wz_1+ixz_2)z_1^k z_2^{n-k-1}\\ &=k\overline{w}z_1^{k-1}z_2^{n-k+1}+i(n-2k)xz_1^k z_2^{n-k}+(k-n)wz_1^{k+1}z_2^{n-k-1}. \end{aligned} \tag{6.3}$$

利用(**6.3**)式以及定理6.2, 容易证明 $V_n(\mathbb{C}^2)$ 是不可约的.

正如可以通过已有的李群表示去构造新的李群表示, 我们可用线性代数的手段构造新的李代数表示. 容易验证 [留做习题 6.1]，定义2.10所述的李群表示的微分给出如下的李代数表示:

定义 6.4. 设 V, W 是 $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ 的某李子群的李代数 $\mathfrak{g}$ 的表示, 则定义:

1. 定义 $\mathfrak{g}$ 在 $V\oplus W$ 上的作用: $X(v,w)=(Xv,Xw)$.
2. 定义 $\mathfrak{g}$ 在 $V\otimes W$ 上的作用: $X\sum v_i\otimes w_j=\sum Xv_i\otimes w_j+\sum v_i\otimes Xw_j$.
3. 定义 $\mathfrak{g}$ 在 $\mathrm{Hom}(V,W)$ 上的作用: $(XT)(v)=XT(v)-T(Xv)$.
4. 定义 $\mathfrak{g}$ 在 $V^{\otimes k}$ 上的作用:
$$X\sum v_{i_1}\otimes\cdots\otimes v_{i_k}=\sum(Xv_{i_1})\otimes\cdots\otimes v_{i_k}+\cdots+\sum v_{i_1}\otimes\cdots\otimes(Xv_{i_k}).$$
5. 定义 $\mathfrak{g}$ 在 $\bigwedge^k V$ 上的作用:
$$X\sum v_{i_1}\wedge\cdots\wedge v_{i_k}=\sum(Xv_{i_1})\wedge\cdots\wedge v_{i_k}+\cdots+\sum v_{i_1}\wedge\cdots\wedge(Xv_{i_k}).$$
6. 定义 $\mathfrak{g}$ 在 $S^k(V)$ 上的作用:
$$X\sum v_{i_1}\cdots v_{i_k}=\sum(Xv_{i_1})\cdots v_{i_k}+\cdots+\sum v_{i_1}\cdots(Xv_{i_k}).$$
7. 定义 $\mathfrak{g}$ 在 V^* 上的作用: $(XT)(v)=-T(Xv)$.
8. $\mathfrak{g}$ 在 $\overline{V}$ 上的作用与在 V 上相同.

6.1.2 李代数的复化

定义 6.5. 设 $\mathfrak{g}$ 是 $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ 的某李子群的李代数.

1. 称 $\mathbb{C}$-李代数 $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} := \mathfrak{g}\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{C}$ 为李代数 $\mathfrak{g}$ 的 **复化** *(complexification)* . 其中 $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ 的李括号是 $\mathfrak{g}$ 的李括号的自然的 $\mathbb{C}$-线性扩张.
2. 对于李代数 $\mathfrak{g}$ 的表示 (ψ,V), 将 ψ 的定义域自然地 $\mathbb{C}$-线性延拓到 $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$. 称 (ψ,V) 是 $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$-不可约的, 如果 V 不存在非平凡 $\psi(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$-不变子空间.

注意复矩阵都能分解为一个厄米特矩阵和一个反厄米特矩阵之和, 从而易知 $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})=\mathfrak{u}(n)\oplus i\mathfrak{u}(n)$. 于是, 对于紧李群 $G\subseteq \mathrm{U}(n)$ 的李代数 $\mathfrak{g}$, 其复化 $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ 自然等同于 $\mathfrak{g}\oplus i\mathfrak{g}$, 并且它的李括号继承自 $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$ [习题 6.3] . 我们以后不加声明将它们等同. 特别地, $\mathfrak{u}(n)_{\mathbb{C}}=\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$. 类似还有 $\mathfrak{su}(n)_{\mathbb{C}}=\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})$,

$$\mathfrak{so}(n)_{\mathbb{C}}=\mathfrak{so}(n,\mathbb{C}):=\left\{X\in\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})\,\middle|\,X^{\top}=-X\right\}.$$

此外, 由 §4.1.3 小节的 $\mathfrak{sp}(n)=\mathfrak{u}(2n)\cap\mathfrak{sp}(n,\mathbb{C})$, 易知 $\mathfrak{sp}(n)_{\mathbb{C}}=\mathfrak{sp}(n,\mathbb{C})$ [详见习题 6.3] .

引理 6.6. 设 $\mathfrak{g}$ 是 $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ 的某个李子群的李代数, (ψ,V) 是 $\mathfrak{g}$ 的一个表示. 则 V 是 $\mathfrak{g}$ 的不可约表示当且仅当 V 是 $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ 的不可约表示.

证明. 注意我们谈论的 V 是复线性空间, V 的子空间 W 是 $\mathbb{C}$-子空间. 从而显然 W 是 $\psi(\mathfrak{g})$-不变的当且仅当 W 是 $\psi(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$-不变的. □

重要例子: 取 $\mathfrak{su}(2)_{\mathbb{C}}=\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ 的如下**标准基**:

$$E=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\qquad H=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\qquad F=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$$

[习题 4.21] . 注意 $E=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}-\frac{i}{2}\begin{pmatrix}0&i\\i&0\end{pmatrix}$, 从而根据(6.3)式, 容易显式写出 E 在 $V_n(\mathbb{C}^2)$ 上的作用:

$$E\cdot(z_1^kz_2^{n-k}) \;=\; \frac{1}{2}\left[-kz_1^{k-1}z_2^{n-k+1}-(k-n)z_1^{k+1}z_2^{n-k-1}\right]$$

$$
\begin{aligned}
& -\frac{i}{2}\left[-ikz_1^{k-1}z_2^{n-k+1}+i(k-n)z_1^{k+1}z_2^{n-k-1}\right] \\
= \;& -kz_1^{k-1}z_2^{n-k+1}.
\end{aligned}
$$

类似计算可得 H, F 在 $V_n(\mathbb{C}^2)$ 上的作用 [留作习题 6.4]：

$$
\begin{aligned}
H\cdot(z_1^kz_2^{n-k}) &= (n-2k)z_1^kz_2^{n-k} \\
F\cdot(z_1^kz_2^{n-k}) &= (k-n)z_1^{k+1}z_2^{n-k-1}.
\end{aligned}
\tag{6.7}
$$

从上式可以直接证明 $V_n(\mathbb{C}^2)$ 的不可约性 [习题 6.7]．

6.1.3 权

设 G 为紧李群, (π, V) 是 G 的有限维表示. 取定 G 的嘉当子代数 $\mathfrak{t}$, $\mathfrak{t}_{\mathbb{C}}$ 为 $\mathfrak{t}$ 的复化. 由引理5.6知存在 V 上的 G-不变厄米特内积, 关于该内积, $\mathrm{d}\pi(\mathfrak{g})$ 与 $\mathrm{d}\pi(i\mathfrak{g})$ 在 V 上的作用分别是反厄米特的与厄米特的. 因此 $\mathfrak{t}_{\mathbb{C}}$ 在 V 上的作用是一族两两交换的正规算子, 从而能够**同时对角化**. 因此, 下述定义是良定的:

定义 6.8. 设 G 为紧李群, (π, V) 是 G 的有限维表示, $\mathfrak{t}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的一个嘉当子代数. 则存在有限集合 $\Delta(V) = \Delta(V, \mathfrak{t}_{\mathbb{C}}) \subseteq \mathfrak{t}_{\mathbb{C}}^*$, 使得

$$V = \bigoplus_{\alpha\in\Delta(V)} V_\alpha,$$

其中

$$V_\alpha = \{v \in V \mid \mathrm{d}\pi(H)v = \alpha(H)v,\ H \in \mathfrak{t}_{\mathbb{C}}\} \neq \{0\}.$$

称集合 $\Delta(V)$ 中的元素为 V 的 **权** *(weight)* ，空间 V 的上述直和分解称为 V 关于 $\mathfrak{t}_{\mathbb{C}}$ 的 **权空间分解** *(weight space decomposition)* ．

例如, 取 $G = \mathrm{SU}(2)$, $V = V_n(\mathbb{C}^2)$, $\mathfrak{t}$ 为 $\mathfrak{su}(2)$ 中的对角阵构成的嘉当子代数. 记 $\alpha_m \in \mathfrak{t}_{\mathbb{C}}^*$ 使得 $\alpha_m(H) = m$. 则由(**6.7**)可知 $V_n(\mathbb{C}^2)$ 有权空间分解 $V_n(\mathbb{C}^2) = \bigoplus\limits_{k=0}^{n} V_n(\mathbb{C}^2)_{\alpha_{n-2k}}$, 其中 $V_n(\mathbb{C}^2)_{\alpha_{n-2k}} = \mathbb{C}z_1^kz_2^{n-k}$.

定理 6.9. 设 G 为紧李群, (π, V) 是 G 的有限维表示, T 是 G 的一个极大环, $V = \bigoplus_{\alpha\in\Delta(V,\mathfrak{t}_{\mathbb{C}})} V_\alpha$ 为 V 的权空间分解. 则:

1. 对任意 $\alpha \in \Delta(V)$, α 在 $\mathfrak{t}$ 上的取值为纯虚数, 在 $i\mathfrak{t}$ 上的取值为实数.
2. 对任意 $t \in T$, 令 $H \in \mathfrak{t}$ 使得 $e^H = t$. 则成立 $tv_\alpha = e^{\alpha(H)}v_\alpha, \forall\, v_\alpha \in V_\alpha$.

证明. 注意 $\mathrm{d}\pi$ 在 $\mathfrak{t}$ 上的取值都是反厄米特的, 在 $i\mathfrak{t}$ 上的取值都是厄米特的, 从而易证 (1). 至于 (2), 只需注意 $\exp\mathfrak{t} = T$ 与 $e^{\mathrm{d}\pi H} = \pi(e^H)$. □

由 $\mathbb{C}$-线性性易知 $\alpha \in \Delta(V)$ 被它在 $\mathfrak{t}$ 或 $i\mathfrak{t}$ 上的限制所完全确定. 于是我们可以根据需要, 根据语境把 $\alpha \in \mathfrak{t}_{\mathbb{C}}^*$ 视为 $(i\mathfrak{t})^*$ [实值函数] 或 $\mathfrak{t}^*$ [纯虚数值函数] 中的元素. 有的人 [本书不这样] 还把我们这里的 $i\mathfrak{t}$ 记作 $\mathfrak{t}_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$.

6.1.4 根

设 G 为紧李群. 对于 $g \in G$, 将 $\mathrm{Ad}(g)$ 在 $\mathfrak{g}$ 上的作用通过 $\mathbb{C}$-线性性自然延拓到 $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ 上. 于是, $(\mathrm{Ad}, \mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$ 是李群 G 的表示, 该表示的微分恰为 ad [的 $\mathbb{C}$-线性延拓] . 于是, 有权空间分解

$$\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} = \bigoplus_{\alpha\in\Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}},\mathfrak{t}_{\mathbb{C}})} \mathfrak{g}_\alpha.$$

这个权空间分解格外重要, 它配得上拥有专门的名称. 注意零权空间 $\mathfrak{g}_0 = \{Z \in \mathfrak{g}_{\mathbb{C}} \,|\, [H, Z] = 0,\ H \in \mathfrak{t}_{\mathbb{C}}\}$, 又因为 $\mathfrak{t}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的极大阿贝尔子代数, 于是

$$\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{t}_{\mathbb{C}}.$$

接下来我们会看到, 把这个零权空间与其他非零的权所对应的空间分开写会更方便。

定义 6.10. 设 G 为紧李群, $\mathfrak{t}$ 为 $\mathfrak{g}$ 的一个嘉当子代数. 则存在由 $\mathfrak{t}_{\mathbb{C}}^*$ 的由非零元构成的有限子集 $\Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$, 使得

$$\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{t}_{\mathbb{C}} \oplus \bigoplus_{\alpha\in\Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})} \mathfrak{g}_\alpha,$$

其中 $\mathfrak{g}_\alpha = \{Z \in \mathfrak{g}_{\mathbb{C}} \,|\, [H, Z] = \alpha(H)Z,\ H \in \mathfrak{t}_{\mathbb{C}}\} \neq \{0\}$. 我们称 $\Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$ 中的元素为李代数 $\mathfrak{g}$ 的 **根** *(root)* ; 称上述空间分解为 $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ 关于嘉当子代数 $\mathfrak{t}_{\mathbb{C}}$ 的 **根空间分解** *(root space decomposition)* .

定理 6.11. 设 G 为紧李群, (π, V) 是 G 的有限维表示, $\mathfrak{t}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的一个嘉当子代数. 则成立:

1. 对任意 $\alpha \in \Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}) \cup \{0\}$, $\beta \in \Delta(V)$, 成立 $\mathrm{d}\pi(\mathfrak{g}_\alpha)V_\beta \subseteq V_{\alpha+\beta}$.
2. 特别地, 对任意 $\alpha, \beta \in \Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}) \cup \{0\}$, $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] \subseteq \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$.
3. 取定 $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ 的 $\mathrm{Ad}(G)$-不变厄米特内积 $(\cdot,\cdot)$, 则对任意 $\alpha, \beta \in \Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}) \cup \{0\}$, 若 $\alpha + \beta \neq 0$, 则 $(\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta) = 0$.
4. 若 $\mathfrak{g}$ 的中心平凡（换言之, $\mathfrak{g}$ 半单）, 则 $\Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$ 线性张成 $\mathfrak{t}_{\mathbb{C}}^*$.

证明. (1). 任取 $H \in \mathfrak{t}_{\mathbb{C}}$, $X_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$, $v_\beta \in V_\beta$, 直接由有关定义计算验证如下:

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\pi(H)\,\mathrm{d}\pi(X_\alpha)v_\beta &= (\,\mathrm{d}\pi(X_\alpha)\,\mathrm{d}\pi(H) + [\,\mathrm{d}\pi(H),\,\mathrm{d}\pi(X_\alpha)])\,v_\beta \\
&= (\,\mathrm{d}\pi(X_\alpha)\,\mathrm{d}\pi(H) + \,\mathrm{d}\pi[H, X_\alpha])\,v_\beta \\
&= (\,\mathrm{d}\pi(X_\alpha)\,\mathrm{d}\pi(H) + \alpha(H)\,\mathrm{d}\pi X_\alpha)\,v_\beta \\
&= (\beta(H) + \alpha(H))\,\mathrm{d}\pi(X_\alpha)v_\beta,
\end{aligned}$$

因此 $\mathrm{d}\pi(X_\alpha)v_\beta \in V_{\alpha+\beta}$. 从而 (1) 成立, 特别地 (2) 也自然成立.

(3). 注意引理5.6, ad 是反厄米特的, 从而

$$\alpha(H)(X_\alpha, X_\beta) = ([H, X_\alpha], X_\beta) = -(X_\alpha, [H, X_\beta]) = -\beta(H)(X_\alpha, X_\beta).$$

(4). 对任意 $H \in \mathfrak{t}_{\mathbb{C}}$, 只需证明: 若任意 $\alpha \in \Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$, $\alpha(H) = 0$, 则 $H = 0$. 然而, 此条件等价于说 H 是 $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ 的中心元. 容易验证 $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}) = \mathfrak{z}(\mathfrak{g})_{\mathbb{C}}$ [习题 6.5] , 从而由 $\mathfrak{g}$ 的半单性与定理5.18即得 $H = 0$. □

我们将在 §6.2.3 小节证明, 对任意 $\alpha \in \Delta(\mathfrak{g}_\mathbb{C})$, $\dim \mathfrak{g}_\alpha = 1$, 并且在 $\Delta(\mathfrak{g}_\mathbb{C})$ 当中的形如 α 的非零常数倍的元素只有 $\pm\alpha$.

6.1.5　典型紧李群中的例子

本小节依次给出每个典型紧李群的李代数的根空间分解, 有关细节都容易直接验证 [习题 6.10] .

6.1.5.1. $\mathfrak{su}(n)$. 对于 $G = U(n)$, 则取 $\mathfrak{t} = \{\mathrm{diag}(i\theta_1, ..., i\theta_n) \,|\, \theta_i \in \mathbb{R}\}$, $\mathfrak{g}_\mathbb{C} = \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$, $\mathfrak{t}_\mathbb{C} = \{\mathrm{diag}(z_1, ..., z_n) \,|\, z_i \in \mathbb{C}\}$. 而对于 $G = \mathfrak{su}(n)$, 取 $\mathfrak{t} = \{\mathrm{diag}(i\theta_1, ..., i\theta_n) | \theta_i \in \mathbb{R}, \sum_i \theta_i = 0\}$. 无论是上述两种情形的何种, 都容易验证

$$\Delta(\mathfrak{g}_\mathbb{C}) = \{\pm(\varepsilon_i - \varepsilon_j) \,|\, 1 \le i < j \le n\},$$

其中 $\varepsilon_i(\mathrm{diag}(z_1, ..., z_n)) = z_i$. 在李代数理论中, 这个 **根系** (root system) [即所有根构成的集合, $\Delta(\mathfrak{g}_\mathbb{C})$] 称为 A_{n-1}. 相应的根空间分解为

$$\mathfrak{g}_{\varepsilon_i - \varepsilon_j} = \mathbb{C}E_{ij},$$

其中 $\{E_{ij}\}$ 是 $n \times n$ 矩阵空间的标准基.

6.1.5.2. $\mathfrak{sp}(n)$. 对于 $G = Sp(n) \cong U(2n) \cap Sp(n, \mathbb{C})$, 取 $\mathfrak{t} = \{\mathrm{diag}(i\theta_1, ..., i\theta_n; -i\theta_1, ..., -i\theta_n) | \theta_i \in \mathbb{R}\}$, 则 $\mathfrak{g}_\mathbb{C} = \mathfrak{sp}(n, \mathbb{C})$, $\mathfrak{t}_\mathbb{C} = \{\mathrm{diag}(z_1, ..., z_n; -z_1, ..., -z_n) | z_i \in \mathbb{C}\}$. 在李代数理论中, 这个根系称为 C_n. 相应的根空间分解为

$$\begin{aligned}
\mathfrak{g}_{\varepsilon_i - \varepsilon_j} &= \mathbb{C}(E_{ij} - E_{j+n, i+n}) \\
\mathfrak{g}_{\varepsilon_i + \varepsilon_j} &= \mathbb{C}(E_{i, j+n} + E_{j, i+n}) \\
\mathfrak{g}_{-\varepsilon_i - \varepsilon_j} &= \mathbb{C}(E_{i+n, j} + E_{j+n, i}) \\
\mathfrak{g}_{2\varepsilon_i} &= \mathbb{C}E_{i, i+n} \\
\mathfrak{g}_{-2\varepsilon_i} &= \mathbb{C}E_{i+n, i}.
\end{aligned}$$

6.1.5.3. $\mathfrak{so}(E_n)$. 至于 $SO(n)$, 直接计算会发现它的根空间分解比较复杂 [详见习题 6.14] . 若适当变量代换将嘉当子代数中的矩阵对角化, 那么计算会简化. 换

言之, 我们考虑某个与 SO(n) 同构的李代数. 我们定义

$$T_{2m}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} I_m & I_m \\ iI_m & -iI_m \end{pmatrix}, \qquad E_{2m}=\begin{pmatrix} 0 & I_m \\ I_m & 0 \end{pmatrix},$$

$$T_{2m+1}=\begin{pmatrix} T_{2m} & \\ & 1 \end{pmatrix}, \qquad E_{2m+1}=\begin{pmatrix} E_{2m} & \\ & 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathrm{SO}(E_n):=\left\{g\in \mathrm{SL}(n,\mathbb{C})\,\middle|\,\overline{g}=E_ngE_n,\, g^\top E_ng=E_n\right\},$$

$$\mathfrak{so}(E_n)=\left\{X\in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})\,\middle|\,\overline{X}=E_nXE_n,\, X^\top E_n+E_nX=0\right\},$$

$$\mathfrak{so}(E_n,\mathbb{C})=\left\{X\in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})\,\middle|\,X^\top E_n+E_nX=0\right\}.$$

注意 $E_n=T_n^\top T_n$, $\overline{T_n}=T_n^{-1,\top}$, 于是容易直接验证如下引理 [留作习题 6.12] :

引理 6.12. 记号同上, 则有:

1. SO(E_n) 是 SU(n) 的紧李子群, 其李代数为 $\mathfrak{so}(E_n)$, 该李代数的复化为 $\mathfrak{so}(E_n,\mathbb{C})$.
2. 映射 $g\mapsto T_n^{-1}gT_n$ 诱导李群同构 SO$(n)\cong$ SO(E_n).
3. 映射 $X\mapsto T_n^{-1}XT_n$ 诱导李代数同构 $\mathfrak{so}(n)\cong\mathfrak{so}(E_n)$, 以及 $\mathfrak{so}(n,\mathbb{C})\cong\mathfrak{so}(E_n,\mathbb{C})$.

此外, 当 $n=2m$ 时, 李群 SO(E_n) 的极大环可以取

$$T=\left\{\mathrm{diag}(e^{i\theta_1},...,e^{i\theta_m};e^{-i\theta_1},...,e^{-i\theta_m})\,\middle|\,\theta_i\in\mathbb{R}\right\},$$

相应的嘉当子代数为

$$\mathfrak{t}=\left\{\mathrm{diag}(i\theta_1,...,i\theta_m;-i\theta_1,...,-i\theta_m)\,|\,\theta_i\in\mathbb{R}\right\},$$

该嘉当子代数的复化为

$$\mathfrak{t}_{\mathbb{C}}=\left\{\mathrm{diag}(z_1,...,z_m;-z_1,...,-z_m)\,|\,z_i\in\mathbb{C}\right\}.$$

而当 $n=2m+1$ 时, 李群 SO(E_n) 的极大环可以取

$$T=\left\{\mathrm{diag}(e^{i\theta_1},...,e^{i\theta_m};e^{-i\theta_1},...,e^{-i\theta_m};1)\,\middle|\,\theta_i\in\mathbb{R}\right\},$$

相应的嘉当子代数为

$$\mathfrak{t}=\{\operatorname{diag}(i\theta_1,...,i\theta_m;-i\theta_1,...,-i\theta_m;0)\,|\,\theta_i\in\mathbb{R}\}\,,$$

该嘉当子代数的复化为

$$\mathfrak{t}_{\mathbb{C}}=\{\operatorname{diag}(z_1,...,z_m;-z_1,...,-z_m;0)\,|\,z_i\in\mathbb{C}\}\,.$$

6.1.5.4. $\mathfrak{so}(2n)$. 对于 $G=\mathrm{SO}(E_{2n})$, 由引理6.12下方所给出的嘉当子代数, 易知其根系为

$$\Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})=\{\pm(\varepsilon_i\pm\varepsilon_j)\,|\,1\leq i<j\leq n\}\,,$$

其中 $\varepsilon_i(\operatorname{diag}(z_1,...,z_n;-z_1,...,-z_n))=z_i$. 在李代数理论中, 这个根系称为 D_n. 相应的根空间分解为

$$\begin{aligned}
\mathfrak{g}_{\varepsilon_i-\varepsilon_j} &= \mathbb{C}(E_{ij}-E_{j+n,i+n})\\
\mathfrak{g}_{-\varepsilon_i+\varepsilon_j} &= \mathbb{C}(E_{ji}-E_{i+n,j+n})\\
\mathfrak{g}_{\varepsilon_i+\varepsilon_j} &= \mathbb{C}(E_{i,j+n}-E_{j,i+n})\\
\mathfrak{g}_{-\varepsilon_i-\varepsilon_j} &= \mathbb{C}(E_{i+n,j}-E_{j+n,i}).
\end{aligned}$$

6.1.5.5. $\mathfrak{so}(2n+1)$. 对于 $G=\mathrm{SO}(E_{2n+1})$, 由引理6.12下方所给出的嘉当子代数, 易知其根系为

$$\Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})=\{\pm(\varepsilon_i\pm\varepsilon_j)\,|\,1\leq i<j\leq n\}\cup\{\pm\varepsilon_i\,|\,1\leq i\leq n\}\,,$$

其中 $\varepsilon_i(\operatorname{diag}(z_1,...,z_n;-z_1,...,-z_n;0))=z_i$. 在李代数理论中, 这个根系称为 B_n. 相应的根空间分解为

$$\begin{aligned}
\mathfrak{g}_{\varepsilon_i-\varepsilon_j} &= \mathbb{C}(E_{ij}-E_{j+n,i+n})\\
\mathfrak{g}_{-\varepsilon_i+\varepsilon_j} &= \mathbb{C}(E_{ji}-E_{i+n,j+n})\\
\mathfrak{g}_{\varepsilon_i+\varepsilon_j} &= \mathbb{C}(E_{i,j+n}-E_{j,i+n})\\
\mathfrak{g}_{-\varepsilon_i-\varepsilon_j} &= \mathbb{C}(E_{i+n,j}-E_{j+n,i})\\
\mathfrak{g}_{\varepsilon_i} &= \mathbb{C}(E_{i,2n+1}-E_{2n+1,i+n})\\
\mathfrak{g}_{-\varepsilon_i} &= \mathbb{C}(E_{i+n,2n+1}-E_{2n+1,i}).
\end{aligned}$$

6.1.6 习题

习题 6.1 验证: 定义6.4是由定义2.10微分得到.

习题 6.2 对于 $X = \begin{pmatrix} ix & z \\ -\bar{z} & -ix \end{pmatrix}$, $x \in \mathbb{R}$, $z \in \mathbb{C}$, 记 $\lambda = \sqrt{x^2 + |z|^2}$. 证明: $e^X = (\cos\lambda)I + \dfrac{\sin\lambda}{\lambda}X$.

习题 6.3

(a) 证明: $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C}) = \mathfrak{u}(n) \oplus i\mathfrak{u}(n)$.

(b) 设 G 为 $\mathrm{U}(n)$ 的李子群, $\mathfrak{g}$ 为 G 的李代数. 证明映射 $X \otimes (a+ib) \mapsto aX + ibX$, $a, b \in \mathbb{R}$, $X \in \mathfrak{g}$ 诱导李代数同构 $\mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \cong \mathfrak{g} \oplus i\mathfrak{g}$.

(c) 证明: $\mathfrak{su}(n)_{\mathbb{C}} = \mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})$, 以及 $\mathfrak{so}(n)_{\mathbb{C}} = \mathfrak{so}(n,\mathbb{C})$.

(d) 证明: $\mathfrak{sp}(n)_{\mathbb{C}} \cong \mathfrak{sp}(n,\mathbb{C})$, 并且验证

$$\mathfrak{sp}(n,\mathbb{C}) = \left\{ \begin{pmatrix} X & Y \\ Z & -X^\top \end{pmatrix} \middle| X, Y, Z \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{C}),\ Y^\top = Y,\ Z^\top = Z \right\}.$$

(e) 证明: $\mathfrak{so}(E_{2n})_{\mathbb{C}} \cong \mathfrak{so}(E_{2n},\mathbb{C})$, 并且验证

$$\mathfrak{so}(E_{2n},\mathbb{C}) = \left\{ \begin{pmatrix} X & Y \\ Z & -X^\top \end{pmatrix} \middle| X, Y, Z \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{C}),\ Y^\top = -Y,\ Z^\top = -Z \right\}.$$

(f) 证明: $\mathfrak{so}(E_{2n+1})_{\mathbb{C}} \cong \mathfrak{so}(E_{2n+1},\mathbb{C})$, 并且验证

$$\mathfrak{so}(E_{2n+1},\mathbb{C}) = \left\{ \begin{pmatrix} X & Y & u \\ Z & -X^\top & v \\ -v^\top & -u^\top & 0 \end{pmatrix} \middle| \begin{array}{l} X, Y, Z \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{C}), \\ Y^\top = -Y,\ Z^\top = -Z,\ u, v \in \mathbb{C}^n \end{array} \right\}.$$

习题 6.4 验证(**6.7**)式.

习题 6.5 设 G 为紧李群, 证明: $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}) = \mathfrak{z}(\mathfrak{g})_{\mathbb{C}}$.

习题 6.6 设 G 是 $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ 的李子群, 并且 $\mathfrak{g}$ 半单.

(a) 证明: $\mathfrak{g}$ 的一维表示都是平凡表示, 即 $\mathfrak{g}$ 的作用恒为零.

(b) 证明: G 的一维表示都是平凡表示.

习题 6.7 利用(**6.7**)式验证 $V_n(\mathbb{C}^2)$ 是 SU(2) 的不可约表示.

习题 6.8 本题给出 SU(2) 的不可约表示的分类的代数证明［定理3.32的另证］.

(a) 设 V 为 SU(2) 的不可约表示. 证明: 存在非零向量 $v_0 \in V$, 使得 $Hv_0 = \lambda v_0$, $\lambda \in \mathbb{C}$, 并且 $Ev_0 = 0$.

(b) 记 $v_i = F^i v_0$. 证明: $Hv_i = (\lambda - 2i)v_i$, $Ev_i = i(\lambda - i + 1)v_{i-1}$.

(c) 设 m 为使得 $v_{m+1} = 0$ 的最小整数. 证明: $\{v_i\}_{i=0}^m$ 构成 V 的一组基.

(d) 证明: H 在 V 上的作用的迹为 0.

(e) 证明: $\lambda = m$. 进而证明 $V \cong V_m(\mathbb{C}^2)$.

习题 6.9

(a) 计算 SU(n) 在 $\mathbb{C}^n$ 上的标准表示的权空间分解.

(b) 计算 SO(n) 在 $\mathbb{C}^n$ 上的标准表示的权空间分解.

习题 6.10 验证 §6.1.5 小节的根系与根空间分解.

习题 6.11 设 G 为紧李群, $\mathfrak{t}$ 为 $\mathfrak{g}$ 的一个嘉当子代数. 利用根系理论直接证明: 存在 $X \in \mathfrak{t}$, 使得 $\mathfrak{t} = \mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(X)$.［引理5.7］.

习题 6.12 证明引理6.12.

习题 6.13 设 $\mathfrak{g}$ 为某线性李群 G 的李代数. 如果 $\dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{g}_{\mathbb{C}} > 1$, 并且 $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ 不存在非平凡 (复) 理想, 则称 $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ 为**单李代数**.

(a) 证明: $\mathfrak{g}$ 是单李代数当且仅当 $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ 是单李代数.

(b) 利用根空间分解证明当 $n \geq 2$ 时 $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$ 是单李代数.

(c) 证明: $n \geq 1$ 时 $\mathfrak{sp}(n, \mathbb{C})$ 是单李代数.

(d) 证明: $n \geq 3$ 时 $\mathfrak{so}(2n, \mathbb{C})$ 是单李代数; 而 $\mathfrak{so}(4, \mathbb{C}) \cong \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) \oplus \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$.

(e) 证明: $n \geq 1$ 时 $\mathfrak{so}(2n+1, \mathbb{C})$ 是单李代数.

习题 6.14

(a) 对于 $G = \mathrm{SO}(2n)$, 我们按 §5.1.2 小节, 取嘉当子代数

$$\mathfrak{t} = \left\{ \mathrm{diag}\left(\begin{pmatrix} 0 & \theta_1 \\ -\theta_1 & 0 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} 0 & \theta_n \\ -\theta_n & 0 \end{pmatrix} \right) \middle| \theta_i \in \mathbb{R} \right\},$$

$\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{so}(2n, \mathbb{C})$, 并且

$$\mathfrak{t}_{\mathbb{C}} = \left\{ \operatorname{diag}\left(\begin{pmatrix} 0 & z_1 \\ -z_1 & 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 & z_n \\ -z_n & 0 \end{pmatrix} \right) \,\middle|\, z_i \in \mathbb{C} \right\},$$

证明:

$$\Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{t}_{\mathbb{C}}) = \{\pm(\varepsilon_i \pm \varepsilon_j) \,|\, 1 \le i < j \le n\},$$

其中 $\varepsilon_j(\operatorname{diag}\left(\begin{pmatrix} 0 & z_1 \\ -z_1 & 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 & z_n \\ -z_n & 0 \end{pmatrix} \right)) = -iz_j$. 将 $2n \times 2n$ 矩阵自然分块为 n^2 个 2×2 矩阵. 对于 $\alpha = \pm\varepsilon_i \pm \varepsilon_j$, 证明: 根空间 $\mathfrak{g}_\alpha = \mathbb{C}E_\alpha$, 其中 E_α 的 ij-分块为 X_α, ji-分块为 $-X_\alpha^\top$, 其余分块皆为 0. 其中:

$$X_{\varepsilon_i - \varepsilon_j} = \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix}, \qquad X_{-\varepsilon_i + \varepsilon_j} = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix},$$

$$X_{\varepsilon_i + \varepsilon_j} = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ -i & -1 \end{pmatrix}, \qquad X_{-\varepsilon_i - \varepsilon_j} = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{pmatrix}.$$

(b) 对于 $G = \mathrm{SO}(2n+1)$, 我们按 §5.1.2 小节, 取嘉当子代数

$$\mathfrak{t} = \left\{ \operatorname{diag}\left(\begin{pmatrix} 0 & \theta_1 \\ -\theta_1 & 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 & \theta_n \\ -\theta_n & 0 \end{pmatrix}, 0 \right) \,\middle|\, \theta_i \in \mathbb{R} \right\},$$

$\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{so}(2n+1, \mathbb{C})$, 并且

$$\mathfrak{t}_{\mathbb{C}} = \left\{ \operatorname{diag}\left(\begin{pmatrix} 0 & z_1 \\ -z_1 & 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 & z_n \\ -z_n & 0 \end{pmatrix}, 0 \right) \,\middle|\, z_i \in \mathbb{C} \right\}.$$

证明:

$$\Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{t}_{\mathbb{C}}) = \{\pm(\varepsilon_i \pm \varepsilon_j) \,|\, 1 \le i < j \le n\} \cup \{\pm\varepsilon_i \,|\, 1 \le i \le n\},$$

其中 $\varepsilon_j(\operatorname{diag}\left(\begin{pmatrix} 0 & z_1 \\ -z_1 & 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 & z_n \\ -z_n & 0 \end{pmatrix}, 0 \right)) = -iz_j$. 对于 $\alpha = \pm(\varepsilon_i \pm \varepsilon_j)$, 根空间 $\mathfrak{g}_\alpha$ 为 $\mathfrak{so}(2n)$ 情形下的相应根空间在嵌入映射 $X \mapsto \begin{pmatrix} X & \\ & 0 \end{pmatrix}$ 下的像. 而对于 $\alpha = \pm\varepsilon_j$, 根空间 $\mathfrak{g}_\alpha = \mathbb{C}E_\alpha$. 其中矩阵 E_α 除了最后一行以及最后一列, 其余矩阵元都为零. 记 $v \in \mathbb{C}^{2n+1}$ 为 E_α 的最后一列, 证明 $v = e_{2j-1} \mp ie_{2j}$, 并且 E_α 的最后一行为 $-v^\top$.

6.2 标准 $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ 三元组

6.2.1 嘉当对合

定义 6.13. 设 G 为紧李群, 定义李代数 $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ 的对合 $\theta\colon \mathfrak{g}_{\mathbb{C}} \to \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ 为: $\theta(X\otimes z) = X\otimes\overline{z}$, $\forall X\in\mathfrak{g}$, $z\in\mathbb{C}$. 换言之, 对于 $Z\in\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$, 将 Z 唯一写成 $Z = X+iY$, 其中 $X,Y\in\mathfrak{g}\otimes 1$, 则 $\theta Z = X - iY$. 我们称此 θ 为 $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ 的 **嘉当对合** *(Cartan involution)* .

我们需要验证 θ 的确是李代数的对合, 只需简单计算即可 [留做习题 6.15] . 将 $\mathfrak{g}$ 自然嵌入 $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$, 则 $\mathfrak{g}$ 于 $i\mathfrak{g}$ 分别是 θ 的属于特征值 $+1$, -1 的特征子空间. 此外还注意到, 若 $\mathfrak{g}\subseteq\mathfrak{u}(n)$, 则对任意 $Z\in\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$, 成立 $\theta Z = -Z^*$; 这是因为对任意 $X\in\mathfrak{u}(n)$ 都有 $X^* = -X$. 特别地, 当 $\mathfrak{g}$ 为 $\mathfrak{u}(n), \mathfrak{su}(n)$, $\mathfrak{sp}(n)$, $\mathfrak{so}(n)$ 或 $\mathfrak{so}(E_n)$ 时, $\mathfrak{g}$ 中的元素 Z 都满足

$$\theta Z = -Z^*.$$

引理 6.14. 设 G 为紧李群, $\mathfrak{t}$ 为 $\mathfrak{g}$ 的嘉当子代数.

1. 对任意 $\alpha\in\Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$, 成立 $-\alpha\in\Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$, 并且 $\mathfrak{g}_{-\alpha} = \theta\mathfrak{g}_{\alpha}$.
2. $\theta\mathfrak{t}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{t}_{\mathbb{C}}$.

证明. 对于 $\alpha\in\Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})\cup\{0\}$, 注意 θ 是李代数对合, 从而只需验证 $\theta\mathfrak{g}_{\alpha}\subseteq\mathfrak{g}_{-\alpha}$. 任取 $\mathfrak{g}_{\alpha}$ 中的元素 $Z = X+iY$, $X,Y\in\mathfrak{g}\otimes 1$, 则对任意 $H\in\mathfrak{t}$,

$$\alpha(H)(X+iY) = [H, X+iY] = [H,X] + i[H,Y].$$

由于 $\alpha(H)\in i\mathbb{R}$ [定理6.9] , 再注意 $[H,X],[H,Y]\in\mathfrak{g}\otimes 1$, 从而

$$\alpha(H)X = i[H,Y], \qquad \alpha(H)Y = -i[H,X].$$

因此

$$[H,\theta Z] = [H,X] - i[H,Y] = -\alpha(H)(X-iY) = -\alpha(H)(\theta Z),$$

从而 $\theta Z\in\mathfrak{g}_{-\alpha}$, 得证. □

特别地, $\mathfrak{g}$ 可由 $\{Z+\theta Z \mid Z\in\mathfrak{g}_{\alpha},\ \alpha\in\Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})\cup\{0\}\}$ 张成.

6.2.2 基灵型

定义 6.15. 设 $\mathfrak{g}$ 是 $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ 的某李子群的李代数. 定义 $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ 上的 $\mathbb{C}$-双线性型 $B(X,Y) := \mathrm{tr}(\mathrm{ad}\,X \circ \mathrm{ad}\,Y)$, 称该双线性型为 **基灵型** *(Killing form)* .

定理 6.16. 设 $\mathfrak{g}$ 为紧李群 G 的李代数. 则成立:

1. 对任意 $X, Y \in \mathfrak{g}$, 在 $\mathfrak{g}$ 上成立 $B(X,Y) = \mathrm{tr}(\mathrm{ad}\,X \circ \mathrm{ad}\,Y)$.
2. 基灵型 B 是 Ad-不变的, 即对任意 $g \in G$, $X, Y \in \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ 都有 $B(X,Y) = B(\mathrm{Ad}(g)X, \mathrm{Ad}(g)Y)$.
3. 基灵型 B 是 ad-反对称的, 即对任意 $X, Y, Z \in \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ 都有 $B(\mathrm{ad}(Z)X, Y) = -B(X, \mathrm{ad}(Z)Y)$.
4. B 在 $\mathfrak{g}' \times \mathfrak{g}'$ 的限制是严格负定的.
5. 对于 $\alpha, \beta \in \Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}) \cup \{0\}$, 若 $\alpha + \beta \neq 0$, 则 B 在 $\mathfrak{g}_\alpha \times \mathfrak{g}_\beta$ 上的限制恒为零.
6. B 在 $\mathfrak{g}_\alpha \times \mathfrak{g}_{-\alpha}$ 上的限制非退化. 此外, 若 $\mathfrak{g}$ 半单, 则对于嘉当子代数 $\mathfrak{t}$, B 在 $\mathfrak{t}_{\mathbb{C}} \times \mathfrak{t}_{\mathbb{C}}$ 上的限制也非退化.
7. $\mathrm{rad}\,B := \{X \in \mathfrak{g}_{\mathbb{C}} \mid B(X, \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}) = 0\} = \mathfrak{z}(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$.
8. 若 $\mathfrak{g}$ 半单, 则双线性型 $(X,Y) := -B(X, \theta Y)$ 是 $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ 上的 Ad-不变厄米特内积.
9. 若 $\mathfrak{g}$ 是单李代数且 $\mathfrak{g} \subseteq \mathfrak{u}(n)$, 则存在正常数 $c > 0$ 使得 $B(X,Y) = c\,\mathrm{tr}(XY)$, $X, Y \in \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$.

证明. (1) 是显然的. 注意 $\mathrm{Ad}(g)$ 保持李括号 [定理4.8] , 从而 $\mathrm{ad}(\mathrm{Ad}(g)X) = \mathrm{Ad}(g)\,\mathrm{ad}(X)\,\mathrm{Ad}(g^{-1})$, 从而 (2) 得证. 特别地, 在 (2) 中取 $g = e^{tZ}$, $Z \in \mathfrak{g}$ 然后求导 $\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}$ 即可得到 (3) 在 $Z \in \mathfrak{g}$ 的情形, 而 $Z \in \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ 时利用 B 的 $\mathbb{C}$-双线性性即可.

再看 (4). 设 $X \in \mathfrak{g}$. 利用定理5.9, 取嘉当子代数 $\mathfrak{t}$ 使得 $X \in \mathfrak{t}$. 作关于该嘉当子代数的根空间分解, 易知 $B(X,X) = \sum_{\alpha \in \Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})} \alpha^2(X)$. 因为 G 是紧的, 从而由定理6.9可知 $\alpha(X) \in i\mathbb{R}$. 因此 B 在 $\mathfrak{g}$ 上是半负定的. 此外, $B(X,X) = 0$ 当且仅当

$\alpha(X)=0$ 对所有的 $\alpha\in\Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$ 都成立, 这当且仅当 $X\in\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$. 从而由定理5.18的分解 $\mathfrak{g}=\mathfrak{g}'\oplus\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ 可得 (4).

再看 (5). 对于 $X_\alpha\in\mathfrak{g}_\alpha$, $H\in\mathfrak{t}$, 由 (3) 可知

$$0=B(\mathrm{ad}(H)X_\alpha,X_\beta)+B(X_\alpha,\mathrm{ad}(H)X_\beta)=[(\alpha+\beta)(H)]B(X_\alpha,X_\beta),$$

从而由 $H\in\mathfrak{t}$ 的任意性, (5) 得证.

至于 (6), 注意 $\mathfrak{g}_{-\alpha}=\theta\mathfrak{g}_\alpha$. 从而对于 $X_\alpha=U_\alpha+iV_\alpha\in\mathfrak{g}_\alpha$, $U_\alpha,V_\alpha\in\mathfrak{g}$, 则 $U_\alpha-iV_\alpha\in\mathfrak{g}_{-\alpha}$, 并且

$$B(U_\alpha+iV_\alpha,U_\alpha-iV_\alpha)=B(U_\alpha,U_\alpha)+B(V_\alpha,V_\alpha). \tag{6.17}$$

由 (4) 易知, 上式等于零当且仅当 $X_\alpha\in\mathbb{C}\mathfrak{z}(\mathfrak{g})=\mathfrak{z}(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$ [习题 6.5] . 又因为 $\mathfrak{g}_\alpha\subseteq(\mathfrak{g}')_{\mathbb{C}}$, 从而 (6) 成立.

(7). 首先注意 $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})\subseteq\mathrm{rad}\,B$, 这是因为若 $Z\in\mathfrak{z}(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$ 则 $\mathrm{ad}\,Z=0$. 另一方面, 因为 $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}=\mathfrak{z}(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})\oplus(\mathfrak{g}')_{\mathbb{C}}$, 由根空间分解与 (6) 即可证明 (7).

至于 (8), 除了验证正定性, 其余验证都由定义显然. 而验证正定性, 只需利用根空间分解, 并注意 $\mathfrak{g}_{-\alpha}=\theta\mathfrak{g}_\alpha$, 再结合 (4)(5)(6) 以及(**6.17**)式. 从而 (8) 成立.

最后证明 (9). 首先, 对于 $X,Y\in\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$, 映射 $(X,Y)\mapsto\mathrm{tr}(XY)$ 是 Ad-不变的, 这是因为 $\mathrm{Ad}(g)X=gXg^{-1}$. 对于 $X\in\mathfrak{u}(n)$, X 可对角化, 且特征值均为纯虚数. 利用(**6.17**)式可知 $(X,Y)\mapsto\mathrm{tr}(X,Y)$ 是 $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ 上的非退化双线性型. 特别地, $-B(X,\theta Y)$ 与 $-\mathrm{tr}(X\theta Y)$ 都是 $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ 上的 Ad-不变厄米特内积. 然而, 因为 $\mathfrak{g}$ 是单李代数, 从而 $(\mathrm{ad},\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$ 是 $\mathfrak{g}$ 的不可约表示 [习题 6.17] , 因此 $(\mathrm{Ad},\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$ 是李群 G 的不可约表示 [引理6.6, 定理6.2] . 之后再由推论2.20完成证明. □

6.2.3 标准 $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$, $\mathfrak{su}(2)$-三元组

设 $\mathfrak{g}$ 为紧李群 G 的李代数, $\mathfrak{t}$ 为 $\mathfrak{g}$ 的嘉当子代数. 若 $\mathfrak{g}$ 半单, 则由定理6.16可知基灵型 B 在 $\mathfrak{t}$ 上的限制严格负定. 因此 B 在 $i\mathfrak{t}$ 上的限制是实线性空间 $i\mathfrak{t}$ 上的欧氏内积. 记 $(i\mathfrak{t})^*$ 为 $i\mathfrak{t}$ 的 $\mathbb{R}$-对偶空间, 即 $i\mathfrak{t}$ 上的实线性泛函之全体. 于是, 内积 B 通过如下方式诱导 $i\mathfrak{t}$ 与 $(i\mathfrak{t})^*$ 的同构:

定义 6.18. 设 G 为紧李群, 且 G 的李代数 $\mathfrak{g}$ 半单, 取 $\mathfrak{g}$ 的嘉当子代数 $\mathfrak{t}$, $\alpha \in (i\mathfrak{t})^*$. 则存在唯一元素, 记作 $u_\alpha \in i\mathfrak{t}$, 使得

$$\alpha(H) = B(H, u_\alpha), \quad \forall H \in i\mathfrak{t}.$$

若 $\alpha \neq 0$, 则记

$$h_\alpha := \frac{2u_\alpha}{B(u_\alpha, u_\alpha)}.$$

如果 $\mathfrak{g}$ 非半单, 则先把 B 限制到 $i\mathfrak{t}' \subseteq i\mathfrak{t}$ 上, 再类似定义 $u_\alpha \in i\mathfrak{t}'$. 对于 $\alpha \in \Delta(\mathfrak{g}_\mathbb{C})$, 注意 α 被它在 $i\mathfrak{t}$ 上的限制所唯一确定. 由定理6.9, α 在 $i\mathfrak{t}$ 上的限制是 $i\mathfrak{t}$ 上的实值线性泛函. 于是自然将 α 视为 $(i\mathfrak{t})^*$ 中的元素, 然后再按照定义6.18来定义 u_α 与 h_α. 注意, 通过 $\mathbb{C}$-线性扩张, $\alpha(H) = B(H, u_\alpha)$ 对所有 $H \in \mathfrak{t}_\mathbb{C}$ 都成立. 有时我们也把 h_α 记作 $\alpha^\vee$. 于是我们记

$$\Delta(\mathfrak{g}_\mathbb{C})^\vee := \{h_\alpha \,|\, \alpha \in \Delta(\mathfrak{g}_\mathbb{C})\}.$$

若 $\mathfrak{g} \subseteq \mathfrak{u}(n)$ 为单李代数, 则定理(6.16)表明, 存在常数 $c \in \mathbb{R}$ 使得 $B(X, Y) = c\,\mathrm{tr}(XY)$, $\forall X, Y \in \mathfrak{g}_\mathbb{C}$. 对于 $\alpha \in (i\mathfrak{t})^*$, 若通过关系式 $\alpha(H) = \mathrm{tr}(Hu'_\alpha)$ 与 $h'_\alpha = \dfrac{2u'_\alpha}{\mathrm{tr}(u'_\alpha u'_\alpha)}$ 来类似定义 $u'_\alpha, h'_\alpha \in i\mathfrak{t}$, 则 $u'_\alpha = cu_\alpha$, 但是 $h'_\alpha = h_\alpha$. 也就是说, 我们可以用 $(X, Y) \mapsto \mathrm{tr}(XY)$ 代替基灵型来计算 h_α.

对于典型紧李群, 相应的 h_α 都可以直接暴力计算 [见 §6.1.5 与习题 6.21]. 此外注意 $h_{-\alpha} = -h_\alpha$.

A_n 型根系: 对于 $\mathrm{SU}(n)$, $\mathfrak{t} = \left\{\mathrm{diag}(i\theta_1, ..., i\theta_n) \,\middle|\, \theta_i \in \mathbb{R}, \sum_i \theta_i = 0\right\}$, 则

$$h_{\varepsilon_i - \varepsilon_j} = E_i - E_j,$$

其中 $E_i = \mathrm{diag}(0, ..., 1, ..., 0)$, 第 i 个位置为 1, 其余位置全为 0.

C_n 型根系: 对于 $\mathrm{Sp}(n) \cong \mathrm{U}(2n) \cap \mathrm{Sp}(n, \mathbb{C})$, 取

$$\mathfrak{t} = \{\mathrm{diag}(i\theta_1, ..., i\theta_n; -i\theta_1, ..., -i\theta_n) \,|\, \theta_i \in \mathbb{R}\},$$

则

$$\begin{aligned} h_{\varepsilon_i-\varepsilon_j} &= (E_i - E_j) - (E_{i+n} - E_{j+n}) \\ h_{\varepsilon_i+\varepsilon_j} &= (E_i + E_j) - (E_{i+n} + E_{j+n}) \\ h_{2\varepsilon_i} &= E_i - E_{i+n}. \end{aligned}$$

D_n 型根系: 对于 $\mathrm{SO}(E_{2n})$, 取 $\mathfrak{t} = \{\mathrm{diag}(i\theta_1, ..., i\theta_n; -i\theta_1, ..., -i\theta_n) \,|\, \theta_i \in \mathbb{R}\}$, 则

$$\begin{aligned} h_{\varepsilon_i-\varepsilon_j} &= (E_i - E_j) - (E_{i+n} - E_{j+n}) \\ h_{\varepsilon_i+\varepsilon_j} &= (E_i + E_j) - (E_{i+n} + E_{j+n}). \end{aligned}$$

B_n 型根系: 对于 $\mathrm{SO}(E_{2n+1})$, 取 $\mathfrak{t} = \{\mathrm{diag}(i\theta_1, ..., i\theta_n; -i\theta_1, ..., -i\theta_n; 0) \,|\, \theta_i \in \mathbb{R}\}$, 则

$$\begin{aligned} h_{\varepsilon_i-\varepsilon_j} &= (E_i - E_j) - (E_{i+n} - E_{j+n}) \\ h_{\varepsilon_i+\varepsilon_j} &= (E_i + E_j) - (E_{i+n} + E_{j+n}) \\ h_{\varepsilon_i} &= 2E_i - 2E_{i+n}. \end{aligned}$$

引理 6.19. *设 G 为紧李群, $\mathfrak{t}$ 为 $\mathfrak{g}$ 的一个嘉当子代数, $\alpha \in \Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$. 则成立以下:*

1. $\alpha(h_\alpha) = 2$.
2. *对任意 $E \in \mathfrak{g}_\alpha$, $F \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$,*
$$[E, F] = B(E, F)u_\alpha = \frac{1}{2}B(E, F)B(u_\alpha, u_\alpha)h_\alpha.$$
3. *任取非零向量 $E \in \mathfrak{g}_\alpha$, 令 $F := -\theta E$, 则可以将 E 适当乘以实数倍 (F 也随之乘以该实数倍), 使得新得到的 E, F 满足关系 $[E, F] = h_\alpha$.*

证明. 由定义容易直接验证 (1):

$$\alpha(h_\alpha) = \frac{2\alpha(u_\alpha)}{B(u_\alpha, u_\alpha)} = \frac{2B(u_\alpha, u_\alpha)}{B(u_\alpha, u_\alpha)} = 2.$$

再看 (2). 由定理6.11可知 $[E, F] \in \mathfrak{t}_{\mathbb{C}}$. 从而对任意 $H \in \mathfrak{t}_{\mathbb{C}}$, 有

$$B([E, F], H) = B(E, [F, H]) = \alpha(H)B(E, F) = B(u_\alpha, H)B(E, F)$$

$$= \quad B(B(E,F)u_\alpha, H).$$

注意定理6.16, 基灵型 B 在 $\mathfrak{t}_\mathbb{C}$ 非退化, 从而 (2) 得证. 至于 (3), 若将 E 换成 cE, 则 c 只需要满足

$$c^2 = \frac{2}{-B(E,\theta E)B(u_\alpha,u_\alpha)},$$

这个条件是能达到的, 因为定理6.16保证了 $-B(E,\theta E) > 0$, $B(u_\alpha,u_\alpha) > 0$. □

为即将介绍下一个定理, 我们回忆, 定理6.16表明 B 在 $\mathfrak{g}_\alpha \times \mathfrak{g}_{-\alpha}$ 的限制非退化, 且 $(X,Y) \mapsto -B(X,\theta Y)$ 是 $\mathfrak{g}'_\mathbb{C}$ 上的 Ad-不变厄米特内积.

定理 6.20. *设 G 为紧李群, $\mathfrak{t}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的一个嘉当子代数, $\alpha \in \Delta(\mathfrak{g}_\mathbb{C})$. 取定非零元 $E_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$, 令 $F_\alpha = -\theta E_\alpha$. 通过引理6.19, 适当将 E_α, F_α 乘以常数倍, 使得 $[E_\alpha, F_\alpha] = H_\alpha := h_\alpha$.*

1. *成立李代数同构 $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C}) \cong \mathrm{span}_\mathbb{C}\{E_\alpha, H_\alpha, F_\alpha\}$, 其中 $\{E_\alpha, H_\alpha, F_\alpha\}$ 分别对应于 $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ 的如下标准基:*

$$E = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ & 0 \end{pmatrix}, \qquad H = \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix}, \qquad F = \begin{pmatrix} 0 & \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. *记 $\mathcal{I}_\alpha = iH_\alpha$, $\mathcal{J}_\alpha = -E_\alpha + F_\alpha$, $\mathcal{K}_\alpha = -i(E_\alpha + F_\alpha)$, 则 $\mathcal{I}_\alpha, \mathcal{J}_\alpha, \mathcal{K}_\alpha \in \mathfrak{g}$, 并且成立李代数同构 $\mathfrak{su}(2) \cong \mathrm{span}_\mathbb{R}\{\mathcal{I}_\alpha, \mathcal{J}_\alpha, \mathcal{K}_\alpha\}$, 其中 $\{\mathcal{I}_\alpha, \mathcal{J}_\alpha, \mathcal{K}_\alpha\}$ 分别对应于 $\mathfrak{su}(2)$ 的标准基*

$$\begin{pmatrix} i & \\ & -i \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} & -1 \\ 1 & \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} & -i \\ -i & \end{pmatrix}.$$

   [见习题 4.2, $\mathrm{Im}(\mathbb{H}) \cong \mathfrak{su}(2)$.]

3. *存在李群同态 $\varphi_\alpha\colon \mathrm{SU}(2) \to G$, 使得李代数同态 $\mathrm{d}\varphi_\alpha\colon \mathfrak{su}(2) \to \mathfrak{g}$ 恰为 (2) 中的李代数同构所诱导, 并且该李代数同态的复化 $\mathrm{d}\varphi_\alpha\colon \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C}) \to \mathfrak{g}_\mathbb{C}$ 恰为 (1) 中的李代数同构所诱导.*
4. *φ_α 在 G 中同态像是 G 的李子群, 该李子群必同构于 $\mathrm{SU}(2)$ 或者 $\mathrm{SO}(3)$ 之一, 取决于 φ_α 的核是 $\{I\}$ 还是 $\{\pm I\}$.*

证明. (1). 由引理6.19以及有关定义, 容易验证 $[H_\alpha, E_\alpha] = 2E_\alpha$, $[H_\alpha, F_\alpha] = -2F_\alpha$, $[E_\alpha, F_\alpha] = H_\alpha$, 这恰好与 $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ 的标准基的交换关系相同, 从而 (1) 证毕 [详见习题 4.21] . 再看 (2), 由定义易知 $\mathcal{I}_\alpha, \mathcal{J}_\alpha, \mathcal{K}_\alpha$ 都被 θ 作用不变, 因此 $\mathcal{I}_\alpha, \mathcal{J}_\alpha, \mathcal{K}_\alpha \in \mathfrak{g}$. 而交换关系 $[\mathcal{I}_\alpha, \mathcal{J}_\alpha] = 2\mathcal{K}_\alpha$, $[\mathcal{J}_\alpha, \mathcal{K}_\alpha] = 2\mathcal{I}_\alpha$, $[\mathcal{K}_\alpha, \mathcal{I}_\alpha] = 2\mathcal{J}_\alpha$ 都容易验证, 因此 $\mathfrak{su}(2) \cong \mathrm{span}_{\mathbb{R}}\{\mathcal{I}_\alpha, \mathcal{J}_\alpha, \mathcal{K}_\alpha\}$ [习题 4.2] . 再看 (3), 我们回忆, SU(2) 是单连通的, 这是因为 SU(2) 拓扑同胚于 S^3, 从而定理4.16 保证了李群同态 φ_α 存在. 最后证明 (4). 由定义, $d\varphi_\alpha$ 为单同态, 从而 $\ker\varphi_\alpha$ 是 SU(2) 的离散正规子群, 因此由引理1.21可知, $\ker\varphi_\alpha$ 包含于 SU(2) 的中心. 而注意引理1.23, SU(2) 的中心为 $\{\pm I\}$, $\mathrm{SO}(3) \cong \mathrm{SU}(2)/\{\pm I\}$, 从而得证. □

定义 6.21. *设 G 为紧李群, $\mathfrak{t}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的一个嘉当子代数, $\alpha \in \Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$. 沿用定理6.20的记号, 称集合 $\{E_\alpha, H_\alpha, F_\alpha\}$ 为关于根 α 的*$\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$**-三元组**; 称集合 $\{\mathcal{I}_\alpha, \mathcal{J}_\alpha, \mathcal{K}_\alpha\}$ 为关于根 α 的*$\mathfrak{su}(2)$**-三元组**.

推论 6.22. *设 G 为紧李群, $\mathfrak{t}$ 为 $\mathfrak{g}$ 的一个嘉当子代数, $\alpha \in \Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$. 则成立:*

1. *$\Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$ 中的与 α 线性相关的元素只有 $\pm\alpha$.*
2. *$\dim \mathfrak{g}_\alpha = 1$.*
3. *若 $\beta \in \Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$, 则 $\alpha(h_\beta) \in \pm\{0,1,2,3\}$.*
4. *若 (π, V) 是 G 的有限维表示, $\lambda \in \Delta(V)$, 则 $\lambda(h_\alpha) \in \mathbb{Z}$.*

证明. 任意取定 $\mathfrak{g}$ 的关于根 $\alpha \in \Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$ 的 $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$-三元组 $\{E_\alpha, H_\alpha, F_\alpha\}$ 与 $\mathfrak{su}(2)$-三元组 $\{\mathcal{I}_\alpha, \mathcal{J}_\alpha, \mathcal{K}_\alpha\}$, 以及相应的李群同态 φ_α: $\mathrm{SU}(2) \to G$. 注意 $e^{2\pi i H} = I$, 将 $\mathrm{Ad}\circ\varphi_\alpha$ 作用于此, 得到如下的 $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ 上的算子恒等式

$$I = \mathrm{Ad}(\varphi_\alpha e^{2\pi i H}) = \mathrm{Ad}(e^{2\pi\, d\varphi_\alpha i H}) = \mathrm{Ad}(e^{2\pi i H_\alpha}) = e^{2\pi i\, \mathrm{ad}\, H_\alpha}.$$

然后再注意 $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ 的根空间分解, 易知 $\beta(H_\alpha) = \dfrac{2B(u_\beta, u_\alpha)}{\|u_\alpha\|^2} \in \mathbb{Z}$, 其中 $\|\cdot\|$ 是关于基灵型的范数. 若 $k\alpha \in \Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$, 则 $u_{k\alpha} = k u_\alpha$, 于是 $\dfrac{2}{k} = \dfrac{2B(u_\alpha, k u_\alpha)}{\|k u_\alpha\|^2} = \alpha(H_{k\alpha}) \in \mathbb{Z}$, 并且 $2k = \dfrac{2B(k u_\alpha, u_\alpha)}{\|u_\alpha\|^2} = (k\alpha)(H_\alpha) \in \mathbb{Z}$. 因此 $k \in \pm\{\dfrac{1}{2}, 1, 2\}$.

因此为证明 (1), 只需证明若 $\alpha \in \Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$, 则 $\pm 2\alpha \notin \Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$. 为此, 考虑 $\mathfrak{l}_\alpha = \operatorname{span}_{\mathbb{R}}\{\mathcal{I}_\alpha, \mathcal{J}_\alpha, \mathcal{K}_\alpha\} \cong \mathfrak{su}(2)$, 则 $(\mathfrak{l}_\alpha)_{\mathbb{C}} = \operatorname{span}_{\mathbb{C}}\{E_\alpha, H_\alpha, F_\alpha\} \cong \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$. 记 $V := \mathfrak{g}_{-2\alpha} \oplus \mathfrak{g}_{-\alpha} \oplus \mathbb{C}H_\alpha \oplus \mathfrak{g}_\alpha \oplus \mathfrak{g}_{2\alpha}$, 注意这里的 $\mathfrak{g}_{\pm 2\alpha}$ 可以为零. 由引理6.19与定理6.11可知 V 关于 $(\mathfrak{l}_\alpha)_{\mathbb{C}}$ 的 ad-作用不变. 特别地, V 是李代数 $\mathfrak{l}_\alpha$ 的表示. 注意到 $(\mathfrak{l}_\alpha)_{\mathbb{C}} \subseteq V$ 显然是 V 的一个子表示, 从而成立 $\mathfrak{l}_\alpha$ 子模直和分解 $V = (\mathfrak{l}_\alpha)_{\mathbb{C}} \oplus V'$, 其中 V' 是 V 的某个子模. 为证明 (1)(2), 只需证明 $V' = \{0\}$.

根据我们在 §6.1.3 小节对 $\mathfrak{su}(2)$ 的不可约表示的研究, 我们知道 H 在 $(n+1)$ 维不可约表示上的作用可对角化, 且其 $(n+1)$ 个特征值为 $\{n, n-2, ..., -n+2, -n\}$. 特别地, 如果 V' 非零, 则 V' 必含有 H_α 的属于特征值 0 或 1 的非零特征子空间. 然而由 V 的定义可知, H_α 在 V 上作用的特征值只可能是 $0, \pm 2, \pm 4$, 并且属于特征值 0 的特征子空间维数只有 1, 而它已经包含于 $(\mathfrak{l}_\alpha)_{\mathbb{C}}$. 因此必有 $V' = \{0\}$.

再证 (3). 对于 $\beta \in \Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$, 定义 α, β 的夹角 θ, 使得 $B(u_\alpha, u_\beta) = \|u_\alpha\|\|u_\beta\| \cos\theta$. 则有 $4\cos^2\theta = \dfrac{2B(u_\alpha, u_\beta)}{\|u_\beta\|^2}\dfrac{2B(u_\alpha, u_\beta)}{\|u_\alpha\|^2} \in \mathbb{Z}$. 注意 $0 \leq \cos^2\theta \leq 1$, $4\cos^2\theta = \alpha(H_\beta)\beta(H_\alpha) \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$. 于是只需排除 $\{\alpha(H_\beta), \beta(H_\alpha)\} = \pm\{1, 4\}$ 的情形. 如果 $\alpha(H_\beta)\beta(H_\alpha) = 4$, 则必有 $\theta = 0$, 从而 α, β 线性相关, 于是由 (1) 得 $\beta = \pm\alpha$, 于是 $\alpha(H_\beta) = \beta(H_\alpha) = \pm 2$. 特别地, $\{\alpha(H_\beta), \beta(H_\alpha)\} \neq \pm\{1, 4\}$. 因此, $\alpha(H_\beta), \beta(H_\alpha) \in \{0, 1, 2, 3\}$.

至于 (4), 将 $e^{2\pi i H} = I$ 两边作用 $\pi \circ \varphi_\alpha$ 得到 V 上的算子恒等式 $e^{2\pi(\mathrm{d}\pi) i H_\alpha} = I$. 之后与第一段的方法类似, 考虑 V 权空间分解, 易知 $\lambda(H_\alpha) \in \mathbb{Z}$. □

6.2.4 习题

习题 6.15 验证 θ 的确是李代数 $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ 的对合, 即证明 θ 是 $\mathbb{R}$-线性映射, $\theta^2 = I$, 并且对任意 $Z_i \in \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$, $\theta[Z_1, Z_2] = [\theta Z_1, \theta Z_2]$.

习题 6.16 设 G 是连通紧李群, $g \in G$. 利用极大环定理, 引理6.14与定理6.9 证明: 在 $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ 上成立 $\det \operatorname{Ad} g = 1$, 从而此式在 $\mathfrak{g}$ 上也成立.

习题 6.17 设 G 是紧李群, 其李代数为 $\mathfrak{g}$. 证明: $\mathfrak{g}$ 是单李代数当且仅当 $\mathfrak{g}$ 在 $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ 上的 ad-表示是不可约的.

习题 6.18 设 G 是紧李群, 其李代数 $\mathfrak{g}$ 是单李代数.

(a) 若 $(\cdot, \cdot)$ 是 $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ 上的 Ad-不变对称双线性型, 证明: 存在常数 $c \in \mathbb{C}$ 使得

$(\cdot,\cdot) = cB(\cdot,\cdot)$.

(b) 若 $(\cdot,\cdot)$ 非零, 并且把定义6.18中的 $B(\cdot,\cdot)$ 换成 $(\cdot,\cdot)$, 证明这样不会影响 h_α.

习题 6.19 设 G 是紧李群, 其李代数 $\mathfrak{g}$ 是单李代数, $\mathfrak{g} \subseteq \mathfrak{u}(n)$ [见习题 6.13] . 定理6.16表明存在正实数 $c \in \mathbb{R}$ 使得 $B(X,Y) = c\operatorname{tr}(XY)$, $X, Y \in \mathfrak{g}_\mathbb{C}$. 试验证:

(a) 若 $G = \mathrm{SU}(n)$, $n \geq 2$, 则 $c = 2n$.

(b) 若 $G = \mathrm{Sp}(n)$, $n \geq 1$, 则 $c = 2(n+1)$.

(c) 若 $G = \mathrm{SO}(2n)$, $n \geq 3$, 则 $c = 2(n-1)$.

(d) 若 $G = \mathrm{SO}(2n+1)$, $n \geq 1$, 则 $c = 2n-1$.

习题 6.20 设 G 是紧李群, 其李代数 $\mathfrak{g}$ 半单, $\mathfrak{t}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的一个嘉当子代数, $\alpha \in \Delta(\mathfrak{g}_\mathbb{C})$. 若 $\beta \in \Delta(\mathfrak{g}_\mathbb{C})$ 且 $\beta \neq \pm\alpha$, $B(u_\alpha, u_\alpha) \leq B(u_\beta, u_\beta)$, 证明: $\alpha(h_\beta) \in \pm\{0,1\}$.

习题 6.21 对于典型紧李群, 验证本节所列出的 h_α.

习题 6.22 设 G 是紧李群, 其李代数 $\mathfrak{g}$ 半单, $\mathfrak{t}$ 为 $\mathfrak{g}$ 的嘉当子代数, $\alpha \in \Delta(\mathfrak{g}_\mathbb{C})$. 设 V 是 G 的有限维表示, $\lambda \in \Delta(V)$. 我们称 $\{\lambda + n\alpha \mid n \in \mathbb{Z}\}$ 为**过 λ 的 α-权链**.

(a) 利用标准 $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$-三元组 $\{E_\alpha, H_\alpha, F_\alpha\}$ 并考虑 $\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} V_{\lambda+n\alpha}$, 证明: 存在 $p, q \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, 使得 $p - q = \lambda(h_\alpha)$, 并且过 λ 的 α-权链为 $\{\lambda + n\alpha \mid -p \leq n \leq q\}$.

(b) 证明: 若 $\lambda(h_\alpha) < 0$, 则 $\lambda + \alpha \in \Delta(V)$; 若 $\lambda(h_\alpha) > 0$, 则 $\lambda - \alpha \in \Delta(V)$.

(c) 证明: $d\pi(E_\alpha)^{p+q} V_{\lambda - p\alpha} \neq 0$.

(d) 若 $\alpha, \beta, \alpha+\beta \in \Delta(\mathfrak{g}_\mathbb{C})$, 证明 $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] = \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$.

习题 6.23 证明: $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ 不存在非平凡有限维酉表示. 提示: 反证法, 加入存在这样的表示 (π, V), 则比较 $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ 的基灵型 $B(X,Y)$ 与二次型 $(X,Y)' = \operatorname{tr}(d\pi(X) \circ d\pi(Y))$.

6.3 代数整权与解析整权

6.3.1 基础概念

设 G 为紧李群, $\mathfrak{t}$ 为 $\mathfrak{g}$ 的嘉当子代数, $\alpha \in \Delta(\mathfrak{g}_\mathbb{C})$. 在 §6.1.3 小节已经知道, α 可以自然视为 $(i\mathfrak{t})^*$ 中的元素. 于是由定义6.18可以自然地把 $i\mathfrak{t}$ 上的基灵型搬运到

$(i\mathfrak{t})^*$ 上:

$$B(\lambda_1,\lambda_2) := B(u_{\lambda_1},u_{\lambda_2}), \qquad \lambda_1,\lambda_2 \in (i\mathfrak{t})^*.$$

特别地, 对于 $\lambda \in (i\mathfrak{t})^*$,

$$\lambda(h_\alpha) = \frac{2B(\lambda,\alpha)}{B(\alpha,\alpha)}.$$

方便起见, 对称地, 也记

$$\alpha(H) = \frac{2B(H,h_\alpha)}{B(h_\alpha,h_\alpha)}, \qquad H \in i\mathfrak{t}.$$

定义 6.23. 设 G 是紧李群, T 是 G 的一个极大环, 其嘉当子代数为 $\mathfrak{t}$.

1. $(i\mathfrak{t})^*$ 的格子群 $R = R(\mathfrak{t})$

   $$R := \operatorname{span}_{\mathbb{Z}}\Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$$

   称为 **根格** *(root lattice)* .
2. $(i\mathfrak{t})^*$ 的格子群 $P = P(\mathfrak{t})$

   $$P := \{\lambda \in (i\mathfrak{t})^* \mid \lambda(h_\alpha) \in \mathbb{Z}, \forall\, \alpha \in \Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})\}$$

   称为 **权格** *(weight lattice)* , 其中的元素称为 **代数整权** *(algebraically integral weight)* .
3. 定义 $(i\mathfrak{t})^*$ 的格子群 $A = A(\mathfrak{t})$

   $$A := \{\lambda \in (i\mathfrak{t})^* \mid \lambda(H) \in 2\pi i\mathbb{Z}, \text{若 } H \in \mathfrak{t} \text{ 满足 } \exp H = I\},$$

   其中的元素称为 **解析整权** *(analytically integral weight)* .

除了 R, P, A, 我们还要定义它们相应的对偶格子群.

定义 6.24. 设 G 是紧李群，T 是 G 的一个极大环，其嘉当子代数为 $\mathfrak{t}$.

1. **对偶根格** *(dual root lattice)* $R^\vee = R^\vee(\mathfrak{t})$ 是指 $i\mathfrak{t}$ 的如下格子群：

$$R^\vee := \mathrm{span}_{\mathbb{Z}} \{h_\alpha \,|\, \alpha \in \Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})\}.$$

2. **对偶权格** *(dual weight lattice)* $P^\vee = P^\vee(\mathfrak{t})$ 是指 $i\mathfrak{t}$ 的如下格子群：

$$P^\vee := \{H \in i\mathfrak{t} \,|\, \alpha(H) \in \mathbb{Z}, \forall\, \alpha \in \Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})\}.$$

3. 记 $i\mathfrak{t}$ 的格子群 $\ker \mathcal{E} = \ker \mathcal{E}(\mathfrak{t})$ 如下：

$$\ker \mathcal{E} := \{H \in i\mathfrak{t} \,|\, \exp(2\pi i H) = I\}.$$

4. 一般地，对于 $(i\mathfrak{t})^*$ 的格子群 Λ_1 与 $i\mathfrak{t}$ 的格子群 Λ_2，分别定义它们的**对偶格** *(dual lattice)* 如下：

$$\begin{aligned}
\Lambda_1^* &= \{H \in i\mathfrak{t} \,|\, \lambda(H) \in \mathbb{Z}, \forall\, \lambda \in \Lambda_1\} \subseteq i\mathfrak{t} \\
\Lambda_2^* &= \{\lambda \in (i\mathfrak{t})^* \,|\, \lambda(H) \in \mathbb{Z}, \forall\, H \in \Lambda_2\} \subseteq (i\mathfrak{t})^*.
\end{aligned}$$

容易验证 Λ_1^*, Λ_2^* 的确也是格子群，并且 $\Lambda_i^{**} = \Lambda_i$, $i = 1, 2$ [习题 6.24]．定理5.2表明 $\ker \mathcal{E}$ 也是格子群.

6.3.2 三种格子群之间的关系

引理 6.25. 设 G 是紧李群，$\mathfrak{t}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的一个嘉当子代数，$H \in \mathfrak{t}$. 则 $\exp H \in Z(G)$ 当且仅当 $\alpha(H) \in 2\pi i\mathbb{Z}, \forall \alpha \in \Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$.

证明. 记 $g = \exp H$. 回忆引理5.11，$g \in Z(G)$ 当且仅当 $\mathrm{Ad}(g)X = X, \forall\, X \in \mathfrak{g}$. 对于 $\alpha \in \Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}) \cup \{0\}$，任取 $X \in \mathfrak{g}_\alpha$，注意 $Ad(g)X = e^{\mathrm{ad}\, H} X = e^{\alpha(H)} X$. 由此利用根空间分解，引理得证. $\square$

定义 6.26. 设 G 为紧李群, T 是 G 的一个极大环. 记 $\chi(T)$ 为所有李群同态 $\xi\colon T \to \mathbb{C}\setminus\{0\}$ 构成的集合, 称为 T 的 **特征群** *(character group)* .

定理 6.27. 设 G 为紧李群, T 是 G 的一个极大环. 则有:

1. $R \subseteq A \subseteq P$.
2. 对于 $\lambda \in (i\mathfrak{t})^*$, 则 $\lambda \in A$ 当且仅当存在 $\xi_\lambda \in \chi(T)$ 使得

$$\xi_\lambda(\exp H) = e^{\lambda(H)}, \qquad \forall\, H \in \mathfrak{t}, \tag{6.28}$$

   其中 $\lambda \in (i\mathfrak{t})^*$ 通过 $\mathbb{C}$-线性性自然视为 $(\mathfrak{t}_\mathbb{C})^*$ 中的元素. 此外, 映射 $\lambda \mapsto \xi_\lambda$ 诱导一一对应

$$A \longleftrightarrow \chi(T).$$

3. 若 $\mathfrak{g}$ 半单, 则商群 P/R 是有限群.

证明. 设 $\alpha \in \Delta(\mathfrak{g}_\mathbb{C})$, $H \in \mathfrak{t}$. 如果 $\exp H = e$, 则引理6.25表明 $\alpha(H) \in 2\pi i\mathbb{Z}$, 这就证明了 $R \subseteq A$. 再考虑关于 α 的 $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$-三元组 $\{H_\alpha, h_\alpha, F_\alpha\}$. 在推论6.22的证明过程中我们已经知道 $\exp 2\pi i h_\alpha = I$. 于是, 若 $\lambda \in A$, 则 $\lambda(2\pi i h_\alpha) \in 2\pi i\mathbb{Z}$, 从而 $A \subseteq P$. 定理第 (1) 部分证毕.

再看 (2). 取定 $\lambda \in A$, 注意 $\exp \mathfrak{t} = T$ 以及引理6.25, 易知方程(**6.28**)唯一决定了 T 上的函数 χ_λ, 定理5.1保证了 ξ_λ 是李群同态. 反之, 若给定满足(**6.28**)的函数 $\xi_\lambda \in \chi(T)$, 则显然对于任何满足 $\exp H = I$ 的 $H \in \mathfrak{t}$ 都成立 $\lambda(H) \in 2\pi i\mathbb{Z}$, 从而 $\lambda \in A$. 最后验证 $A \to \chi(T)$ 为双射, 其实只需要验证它是满射. 而这只需将 $\chi(T)$ 中的元素取微分, 然后作 $\mathbb{C}$-线性延拓, 定理6.9保证了取微分之后可以视为 $(i\mathfrak{t})^*$ 中的元素.

由定理6.11可知, 当 $\mathfrak{g}$ 半单时, $(i\mathfrak{t})^*$ 可由根格 R 线性张成. 从而由格子群的基本理论 [例如, 可以参考 [3]] 立刻推出 (3). 事实上, 也可以直接证明 $|P/R|$ 恰为某个所谓 “**嘉当矩阵**” 的行列式 [详见习题 6.42] . □

定理 6.29. *设 G 为紧李群, 并且其李代数 $\mathfrak{g}$ 半单. T 是 G 的一个极大环, 相应的嘉当子代数为 $\mathfrak{t}$. 则成立:*

1. $R^* = P^\vee$, $P^* = R^\vee$, $A^* = \ker \mathcal{E}$.
2. $P^* \subseteq A^* \subseteq R^*$, 换言之, $R^\vee \subseteq \ker \mathcal{E} \subseteq P^\vee$.

证明. (1) 是简单的定义验证, 而 (2) 是定理6.27的直接推论 [习题 6.24] . □

6.3.3 中心与基本群

下述定理的第 (2) 部分的证明留到后文 §7.3.6 小节. 不过为了便于对照, 我们现在也把 (2) 陈述出来.

定理 6.30. *设 G 是连通紧李群, 且其李代数 $\mathfrak{g}$ 半单. 任取 G 的一个极大环 T. 则成立:*

1. $Z(G) \cong P^\vee / \ker \mathcal{E} \cong A/R$.
2. $\pi_1(G) \cong \ker \mathcal{E} / R^\vee \cong P/A$.

证明. (只证明第 (1) 部分). 由定理5.1, 推论5.13 以及引理6.25可知, 指数映射诱导群同构

$$\begin{aligned} Z(G) &\cong \{H \in \mathfrak{t} \,|\, \alpha(H) \in 2\pi i\mathbb{Z}, \forall \alpha \in \Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})\} \big/ \{H \in \mathfrak{t} \,|\, \exp H = I\} \\ &= (2\pi i P^\vee)/(2\pi i \ker \mathcal{E}), \end{aligned}$$

从而 $Z(G) \cong P^\vee / \ker \mathcal{E}$. 由格子群的基本理论可知 $R^*/A^* \cong A/R$ [习题 6.24] , 从而得证. □

虽然上述定理的 (2) 的证明被推迟到 §7.3.6 小节, 不过我们在本小节至少会证明紧半单李群的单连通覆盖仍是紧的.

设 G 为紧李群, $\widetilde{G}$ 是 G 的单连通覆盖. 先验地看, 我们现在并不能保证 $\widetilde{G}$ 是线性群, 因此暂时不敢对 $\widetilde{G}$ 使用我们发展出来的李代数工具, 尤其是指数映射. 事实上, 一般来说 $\widetilde{G}$ 不是线性群. 即便如此, 紧群仍比较容易处理. 我们并不企图将

我们的理论推广到任意李群, 而是借助覆盖映射的提升性质. 记 $\exp_G\colon \mathfrak{g}\to G$ 为标准的指数映射, 然后把 $\exp_G$ 唯一提升为

$$\exp_{\widetilde{G}}\colon \mathfrak{g}\to \widetilde{G},$$

使得 $\exp_{\widetilde{G}}(0)=\widetilde{e}$, 且 $\exp_G=\pi\circ\exp_{\widetilde{G}}$.

引理 6.31. *设 G 为连通紧李群, T 是 G 的一个极大环, $\pi\colon \widetilde{G}\to G$ 是 G 的单连通覆盖, $\widetilde{T}:=[\pi^{-1}(T)]^0$. 则成立:*

1. *$\exp_{\widetilde{G}}$ 在 $\mathfrak{t}$ 上的限制诱导李群同构 $\widetilde{T}\cong\mathfrak{t}/(\mathfrak{t}\cap\ker\exp_{\widetilde{G}})$.*
2. *若 G 的李代数 $\mathfrak{g}$ 半单, 则 $\widetilde{T}$ 紧致.*

证明. 由覆盖空间的基本理论易知 $\widetilde{T}$ 是 T 的覆盖, 由此可知 $\widetilde{T}$ 在 $\widetilde{e}$ 附近是阿贝尔的. 又因为 $\widetilde{T}$ 连通, 从而 $\widetilde{T}$ 是阿贝尔的. 由于 $\pi\exp_{\widetilde{G}}\mathfrak{t}=\exp_G\mathfrak{t}=T$, 且 $\exp_{\widetilde{G}}\mathfrak{t}$ 连通, 因此 $\exp_{\widetilde{G}}\mathfrak{t}\subseteq\widetilde{T}$. 特别地, $\exp_{\widetilde{G}}\colon\mathfrak{t}\to\widetilde{T}$ 是指数映射 $\exp_G\colon\mathfrak{t}\to T$ 的满足 $\exp_{\widetilde{G}}(0)=\widetilde{e}$ 的唯一提升. 于是, 由提升的唯一性容易证明 $\exp_{\widetilde{G}}(t_0+t)=\exp_{\widetilde{G}}(t_0)\exp_{\widetilde{G}}(t)$. 为证明 (1), 只需证明 $\exp_{\widetilde{G}}\mathfrak{t}$ 包含 $\widetilde{T}$ 在 $\widetilde{e}$ 处的某开邻域, 而这只需证明 $\exp_{\widetilde{G}}$ 在 0 处的微分可逆. 而这是显然的, 因为 π 是局部微分同胚, 且 $\exp_G$ 是 0 附近的局部微分同胚.

再证 (2). 只需证明当 $\mathfrak{g}$ 半单时 $\widetilde{T}$ 是 T 的有限叶覆盖. 为此首先注意 $\ker\exp_{\widetilde{G}}\subseteq\ker\exp_G=2\pi i\ker\mathcal{E}$, 这是因为 $\exp_G=\pi\circ\exp_{\widetilde{G}}$. 又因为 $T\cong\mathfrak{t}/(2\pi i\ker\mathcal{E})$, 由此易知 $\ker\pi\cap\widetilde{T}$ 同构于 $(2\pi i\ker\mathcal{E})/(\mathfrak{t}\cap\ker\exp_{\widetilde{G}})$. 由定理6.27与定理6.29, 我们只需证明 $2\pi iR^\vee\subseteq\mathfrak{t}\cap\ker\exp_{\widetilde{G}}$.

对任意 $\alpha\in\Delta(\mathfrak{g}_\mathbb{C})$, 取定关于 α 的 $\mathfrak{su}(2)$-三元组 $\{\mathcal{I}_\alpha,\mathcal{J}_\alpha,\mathcal{K}_\alpha\}$ 以及相应的李群同态 $\varphi_\alpha\colon \mathrm{SU}(2)\to G$. 由于 $\mathrm{SU}(2)$ 单连通, 我们将 φ_α 唯一提升为 $\widetilde{\varphi}_\alpha\colon\mathrm{SU}(2)\to\widetilde{G}$, 使得 $\widetilde{\varphi}_\alpha(I)=\widetilde{e}$. 再有相应的指数映射的提升 $\exp_{\mathrm{SU}(2)}\colon\mathfrak{su}(2)\to\widetilde{G}$ 的唯一性, 容易验证 $\widetilde{\varphi}_\alpha\circ\exp_{\mathrm{SU}(2)}=\exp_{\widetilde{G}}\circ\,\mathrm{d}\varphi_\alpha$. 于是由我们的构造可知

$$\widetilde{e}=\widetilde{\varphi}_\alpha(I)=\widetilde{\varphi}_\alpha(\exp_{\mathrm{SU}(2)}2\pi iH)=\exp_{\widetilde{G}}(2\pi i\,\mathrm{d}\varphi_\alpha H)=\exp_{\widetilde{G}}(2\pi ih_\alpha),$$

从而得证. □

引理 6.32. *设 G 是连通紧李群, T 是 G 的一个极大环, $\pi\colon \widetilde{G}\to G$ 是 G 的单连通覆盖, $\widetilde{T}:=[\pi^{-1}(T)]^0$. 则成立:*

1. $\widetilde{G}=\bigcup\limits_{\widetilde{g}\in\widetilde{G}}(c_{\widetilde{g}}\widetilde{T})$.
2. $\widetilde{G}=\exp_{\widetilde{G}}(\mathfrak{g})$.

证明. 此引理的证明是极大环定理 (定理5.12) 的证明的直接推广, 留作习题 6.26. □

推论 6.33. *设 G 是连通紧李群, 其李代数 $\mathfrak{g}$ 半单. T 是 G 的一个极大环, $\pi\colon \widetilde{G}\to G$ 为 G 的单连通覆盖, $\widetilde{T}:=[\pi^{-1}(T)]^0$. 则成立:*

1. $\widetilde{G}$ 紧致.
2. $\mathfrak{g}$ 可自然视为 $\widetilde{G}$ 的李代数, 并且在此意义下 $\exp_{\widetilde{G}}$ 是相应的指数映射.
3. $\widetilde{T}=\pi^{-1}(T)$, 且 $\widetilde{T}$ 是 $\widetilde{G}$ 的极大环.
4. $\ker\pi\subseteq Z(\widetilde{G})\subseteq\widetilde{T}$.

证明. (1). 注意引理6.32, $\widetilde{G}=\bigcup\limits_{\widetilde{g}\in\widetilde{G}}(c_{\widetilde{g}}\widetilde{T})$, 因此 $\widetilde{G}$ 是紧集 $\widetilde{G}/Z(\widetilde{G})\times\widetilde{T}\cong G/Z(G)\times\widetilde{T}$ 上的某连续映射的像 [习题 6.26] .

(2). 注意推论4.9, $\widetilde{G}$ 的单参数子群与 $\widetilde{G}$ 的李代数中的元素之间有自然的一一对应. 由提升的唯一性易验证 $\exp_{\widetilde{G}}(tX)\exp_{\widetilde{G}}(sX)=\exp_{\widetilde{G}}((t+s)X)$, $\forall X\in\mathfrak{g}, s,t\in\mathbb{R}$, 因此 $t\mapsto\exp_{\widetilde{G}}(tX)$ 是 $\widetilde{G}$ 的单参数子群. 另一方面, 对 $\widetilde{G}$ 的任意单参数子群 $\gamma\colon\mathbb{R}\to\widetilde{G}$, 显然 $\pi\circ\gamma$ 是 G 的单参数子群, 于是存在唯一的 $X\in\mathfrak{g}$ 使得 $\pi(\gamma(t))=\exp_G(tX)$. 依旧利用提升的唯一性, 例行验证 $\gamma(t)=\exp_{\widetilde{G}}(tX)$, 从而 (2) 得证.

至于 (3)(4), 我们在引理6.31当中已经知道 $\widetilde{T}=\exp_{\widetilde{G}}(\mathfrak{t})$. $\mathfrak{t}$ 是嘉当子代数, 于是定理5.4表明 $\widetilde{T}$ 是 $\widetilde{G}$ 的极大环. 由引理1.21与推论5.13 可知 $\ker\pi\subseteq Z(\widetilde{G})\subseteq\widetilde{T}$, 因此 $\pi^{-1}(T)=\widetilde{T}(\ker\pi)=\widetilde{T}$, 特别地, $\pi^{-1}(T)$ 连通. □

6.3.4 习题

习题 6.24 设 Λ_i 是 $(i\mathfrak{t})^*$ 的格子群, 并且线性张成 $(i\mathfrak{t})^*$.

(a) 证明 Λ_i^* 是 $i\mathfrak{t}$ 的格子群.

(b) 证明 $\Lambda_i^{**} = \Lambda_i$.

(c) 若 $\Lambda_1 \subseteq \Lambda_2$, 证明 $\Lambda_2^* \subseteq \Lambda_1^*$.

(d) 若 $\Lambda_1 \subseteq \Lambda_2$, 证明 $\Lambda_2/\Lambda_1 \cong \Lambda_1^*/\Lambda_2^*$.

习题 6.25 回忆 §6.1.5 小节所列的典型紧李群的根系. 试验证以下两张表:

(a) 在下表中, 对于 $G = SU(n)$, 记 $(\theta_i) = \mathrm{diag}(\theta_1, ..., \theta_n)$; 对于 $G = Sp(n)$ 或 $SO(E_{2n})$, 记 $(\theta_i) = \mathrm{diag}(\theta_1, ..., \theta_n\ ; -\theta_1, ..., -\theta_n)$; 对于 $G = SO(E_{2n+1})$, 记 $(\theta_i) = \mathrm{diag}(\theta_1, ..., \theta_n; -\theta_1, ..., -\theta_n; 0)$.

G	$R^\vee$	$\ker \mathcal{E}$	$P^\vee$	$P^\vee/R^\vee$
$SU(n)$	$\{(\theta_i) \vert \theta_i \in \mathbb{Z}, \sum_{i=1}^n \theta_i = 0\}$	$R^\vee$	$\{(\theta_i + \frac{\theta_0}{n}) \vert \theta_i \in \mathbb{Z}, \sum_{i=0}^n \theta_i = 0\}$	$\mathbb{Z}_n$
$Sp(n)$	$\{(\theta_i) \mid \theta_i \in \mathbb{Z}\}$	$R^\vee$	$\left\{(\theta_i + \frac{\theta_0}{2}) \middle\vert \theta_i \in \mathbb{Z}\right\}$	$\mathbb{Z}_2$
$SO(E_{2n})$	$\{(\theta_i) \vert \theta_i \in \mathbb{Z}, \sum_{i=1}^n \theta_i \in 2\mathbb{Z}\}$	$\{(\theta_i) \vert \theta_i \in \mathbb{Z}\}$	$\left\{(\theta_i + \frac{\theta_0}{2}) \middle\vert \theta_i \in \mathbb{Z}\right\}$	$\begin{cases} \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 & n \text{ 偶} \\ \mathbb{Z}_4 & n \text{ 奇} \end{cases}$
$SO(E_{2n+1})$	$\{(\theta_i) \vert \theta_i \in \mathbb{Z}, \sum_{i=1}^n \theta_i \in 2\mathbb{Z}\}$	$P^\vee$	$\{(\theta_i) \mid \theta_i \in \mathbb{Z}\}$	$\mathbb{Z}_2$

(b) 在下表中, 记 $(\lambda_i) = \sum_i \lambda_i \varepsilon_i$, 则

G	R	A	P	P/R
$SU(n)$	$\{(\lambda_i) \vert \lambda_i \in \mathbb{Z}, \sum_{i=1}^n \lambda_i = 0\}$	P	$\{(\lambda_i + \frac{\lambda_0}{n}) \vert \lambda_i \in \mathbb{Z}, \sum_{i=0}^n \lambda_i = 0\}$	$\mathbb{Z}_n$
$Sp(n)$	$\{(\lambda_i) \mid \lambda_i \in 2\mathbb{Z}\}$	P	$\{(\lambda_i) \mid \lambda_i \in \mathbb{Z}\}$	$\mathbb{Z}_2$
$SO(E_{2n})$	$\{(\lambda_i) \vert \lambda_i \in \mathbb{Z}, \sum_{i=1}^n \theta_i \in 2\mathbb{Z}\}$	$\{(\lambda_i) \vert \lambda_i \in \mathbb{Z}\}$	$\left\{(\lambda_i + \frac{\lambda_0}{2}) \middle\vert \lambda_i \in \mathbb{Z}\right\}$	$\begin{cases} \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 & n \text{ 偶} \\ \mathbb{Z}_4 & n \text{ 奇} \end{cases}$
$SO(E_{2n+1})$	$\{(\lambda_i) \vert \lambda_i \in \mathbb{Z}\}$	R	$\left\{(\lambda_i + \frac{\lambda_0}{2}) \middle\vert \lambda_i \in \mathbb{Z}\right\}$	$\mathbb{Z}_2$

习题 6.26 设 G 为连通紧李群, T 是 G 的一个极大环, $\pi\colon \widetilde{G} \to G$ 是 G 的单连通覆盖, $\widetilde{T} := [\pi^{-1}(T)]^0$. 本题将极大环定理 (定理5.12) 的证明推广, 从而证明 $\widetilde{G} = \bigcup\limits_{\widetilde{g}\in\widetilde{G}} (c_{\widetilde{g}}\widetilde{T})$ 以及 $\widetilde{G} = \exp_{\widetilde{G}} \mathfrak{g}$.

(a) 利用引理5.11, 并且注意 $\ker\pi$ 离散, 证明 $\ker(\mathrm{Ad}\circ\pi) = Z(\widetilde{G})$.

(b) 若 $\widetilde{\varphi}\colon \mathfrak{g} \to \widetilde{G}$ 是李群同态 $\varphi\colon \mathfrak{g} \to G$ 的一个提升. 注意 π 是局部微分同胚, 证明: $\widetilde{\varphi}$ 是局部微分同胚当且仅当 φ 是局部微分同胚.

(c) 利用提升的唯一性证明: 对任意 $g \in \widetilde{G}$, $\exp_{\widetilde{G}} \circ \mathrm{Ad}(\pi g) = c_g \circ \exp_{\widetilde{G}}$.

(d) 证明: $\bigcup\limits_{g\in\widetilde{G}} c_g(\widetilde{T}) = \exp_{\widetilde{G}}(\mathfrak{g})$.

(e) 若 $\dim\mathfrak{g} = 1$, 证明 $G \cong S^1$ 且 $\mathfrak{g} \cong \widetilde{G} \cong \mathbb{R}$, 且指数映射的提升 $\exp_{\widetilde{G}}$ 是恒等映射. 从而推出 $\widetilde{G} = \exp_{\widetilde{G}} \mathfrak{g}$.

(f) 于是不妨 $\dim\mathfrak{g} \geq 1$. 接下来, 我们将在之后的各小问中对 $\dim\mathfrak{g}$ 归纳证明 $\widetilde{G} = \exp_{\widetilde{G}}(\mathfrak{g})$. 首先, 如果 $\dim\mathfrak{g}' < \dim\mathfrak{g}$, 试证明 $G \cong [G' \times T^k]/F$, 其中 F 是有限阿贝尔群. 由此推出 $\widetilde{G} \cong \widetilde{G}_{\mathrm{ss}} \times \mathbb{R}^k$. 注意指数映射 $\mathbb{R}^k \to T^k$ 是满射, 利用归纳假设证明 $\widetilde{G} = \exp_{\widetilde{G}}(\mathfrak{g})$.

(g) 于是不妨假设 $\mathfrak{g}$ 半单, 从而 $\widetilde{T}$ 是紧的. 利用引理1.21证明 $\ker\pi \subseteq Z(\widetilde{G})$, 从而推出 $\widetilde{G}/Z(\widetilde{G}) \cong G/Z(G)$, 由此证明 $\exp_{\widetilde{G}} \mathfrak{g}$ 是紧集, 从而是闭集.

(h) 只需再证明 $\exp_{\widetilde{G}}(\mathfrak{g})$ 是开集. 取定 $X_0 \in \mathfrak{g}$, 记 $g_0 = \exp_{\widetilde{G}}(X_0)$, 只需证明 $\exp_{\widetilde{G}}(\mathfrak{g})$ 包含 g_0 在 $\widetilde{G}$ 中的某邻域. 利用定理4.6证明: 可以不妨 $X_0 \neq 0$.

(i) 仿照定理5.12的证明, 取 $\mathfrak{a} = \mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(\pi g_0)$, $\mathfrak{b} = \mathfrak{a}^{\perp}$. 考虑映射 $\widetilde{\varphi}\colon \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{b} \to \widetilde{G}$, $(X, Y) \mapsto g_0^{-1} \exp_{\widetilde{G}}(Y) g_0 \exp_{\widetilde{G}}(X) \exp_{\widetilde{G}}(-Y)$. 证明: $\widetilde{\varphi}$ 是 0 附近的局部微分同胚, 并由此推出 $\left\{\exp_{\widetilde{G}}(Y) g_0 \exp_{\widetilde{G}}(X) \exp_{\widetilde{G}}(-Y) \,\middle|\, X \in \mathfrak{a}, Y \in \mathfrak{b}\right\}$ 包含 $g_0 \in \widetilde{G}$ 的某开邻域.

(j) 记 $\widetilde{A} = (\pi^{-1}(A))^0$, 其中 $A = Z_G(\pi g_0)^0$ 是 G 的紧李子群. 证明: $\exp_{\widetilde{G}}(\mathfrak{a}) \subseteq \widetilde{A}$, 从而推出 $\bigcup\limits_{g\in\widetilde{G}} g^{-1}\widetilde{A}g$ 包含 $g_0 \in \widetilde{G}$ 的某开邻域.

(k) 若 $\dim\mathfrak{a} \leq \dim\mathfrak{g}$, 利用归纳假设证明 $\widetilde{A} = \exp_{\widetilde{G}}(\mathfrak{a})$, 从而推出 $\bigcup\limits_{g\in\widetilde{G}} g^{-1}\widetilde{A}g = \bigcup\limits_{g\in\widetilde{G}} \exp_{\widetilde{G}}(\mathrm{Ad}(\pi g)\mathfrak{a})$, 因此 $\exp_{\widetilde{G}} \mathfrak{g}$ 包含 $g_0 \in \widetilde{G}$ 的某开邻域.

(l) 最后, 如果 $\dim \mathfrak{a} = \dim \mathfrak{g}$, 证明 $g_0 \in Z(\widetilde{G})$. 取嘉当子代数 $\mathfrak{t}'$ 使得 $X_0 \in \mathfrak{t}'$, 于是 $\mathfrak{g} = \bigcup\limits_{g \in \widetilde{G}} \mathrm{Ad}(\pi g)\mathfrak{t}'$. 由此证明 $g_0 \exp_{\widetilde{G}}(\mathfrak{g}) \subseteq \exp_{\widetilde{G}}(\mathfrak{g})$, 于是推出 $\exp_{\widetilde{G}} \mathfrak{g}$ 包含 $g_0 \in \widetilde{G}$ 的某开邻域. 定理证毕.

6.4 外尔群

6.4.1 外尔群的定义

定义 6.34. 设 G 为连通紧李群, T 是 G 的一个极大环. 记 $N := N_G(T)$ 为 T 的正规化子, 即 $N = \{g \in G \,|\, gTg^{-1} = T\}$. 定义 $W := W(G,T) := N/T$, 并称之为紧李群 G 的 **外尔群** *(Weyl group)* .

若 T' 是 G 的另一个极大环, 注意推论5.10, 可知存在 $g \in G$ 使得 $c_g T = T'$. 从而易知 $c_g N(T) = N(T')$, 因此 $W(G,T) \cong W(G,T')$. 因此, 在群同构意义下, 外尔群 W 与 G 的极大环 T 的选取无关.

对于 $w \in N$, $H \in \mathfrak{t}$, $\lambda \in \mathfrak{t}^*$, 我们通过以下方式来定义 N 在 $\mathfrak{t}$ 和 $\mathfrak{t}^*$ 上的作用:

$$\begin{aligned} w(H) &= \mathrm{Ad}(w)H \\ [w(\lambda)](H) &= \lambda(w^{-1}H) = \lambda(\mathrm{Ad}(w^{-1})H). \end{aligned} \tag{6.35}$$

与之前一样, 通过 $\mathbb{C}$-线性性自然把 N 的作用延拓至 $\mathfrak{t}_{\mathbb{C}}$, $i\mathfrak{t}$, $\mathfrak{t}_{\mathbb{C}}^*$, $(i\mathfrak{t})^*$ 上. 注意 $\mathrm{Ad}(T)$ 在 $\mathfrak{t}$ 上的作用平凡, 因此自然有 $W = N/T$ 的相应作用.

定理 6.36. 设 G 是连通紧李群, T 是 G 的一个极大环. 则成立:

1. W 在 $i\mathfrak{t}$ 与 $(i\mathfrak{t})^*$ 上的作用是**忠实的** *(faithful)*, 也就是说, 若外尔群中的某个元素的作用为恒等算子, 则此元素必为外尔群的单位元.
2. 对于 $w \in N$ 与 $\alpha \in \Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}) \cup \{0\}$, 成立 $\operatorname{Ad}(w)\mathfrak{g}_\alpha = \mathfrak{g}_{w\alpha}$.
3. W 在 $(i\mathfrak{t})^*$ 上的作用保持基灵内积, 并且 W 在集合 $\Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$ 的作用是忠实的.
4. W 在 $i\mathfrak{t}$ 上的作用保持基灵内积, 并且 W 在集合 $\{h_\alpha \,|\, \alpha \in \Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})\}$ 上的作用是忠实的. 事实上, $wh_\alpha = h_{w\alpha}$.
5. W 是有限群.
6. 对于 $t_i \in T$, 若存在 $g \in G$ 使得 $c_g t_1 = t_2$, 则必存在 $w \in N$ 使得 $c_w t_1 = t_2$.

证明. (1). 假设 $w \in N$ 在 $\mathfrak{t}$ 上的 Ad-作用平凡, 注意 $\exp \mathfrak{t} = T$ 并且 $c_w \circ \exp = \exp \circ \operatorname{Ad}(w)$, 因此容易推出 $w \in Z_G(T)$. 再注意推论5.13, $Z_G(T) = T$, 从而必有 $w \in T$, 得证.

再看 (2)(3). 对于 $w \in N$, $H \in \mathfrak{t}_{\mathbb{C}}$, $X_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$, 直接验算如下:

$$\begin{aligned} & [H, \operatorname{Ad}(w)X_\alpha] = \operatorname{Ad}(w)\big([\operatorname{Ad}(w^{-1})H, X_\alpha]\big) \\ = \; & \alpha(\operatorname{Ad}(w^{-1})H)(\operatorname{Ad}(w)X_\alpha) = [(w\alpha)H](\operatorname{Ad}(w)X_\alpha), \end{aligned}$$

这就证明了 $\operatorname{Ad}(w)\mathfrak{g}_\alpha \subseteq \mathfrak{g}_{w\alpha}$. 因为 $\dim \mathfrak{g}_\alpha = 1$, 并且 $\operatorname{Ad}(w)$ 是可逆算子, 从而 $\operatorname{Ad}(w)\mathfrak{g}_\alpha = \mathfrak{g}_{w\alpha}$. 特别地, $w\alpha \in \Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$. 注意 W 在 $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \cap \mathfrak{t}$ 上的作用平凡, 于是不妨只考虑 $\mathfrak{g}$ 半单的情形. 此时 $\Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$ 张成 $(i\mathfrak{t})^*$, 由此易证 (2)(3).

至于 (4), 直接验证得

$$B(u_{w\alpha}, H) = (w\alpha)H = \alpha(w^{-1}H) = B(u_\alpha, w^{-1}H) = B(wu_\alpha, H),$$

从而 $u_{w\alpha} = wu_\alpha$. 注意 w 的作用显然保持基灵内积, 从而 $h_{w\alpha} = wh_\alpha$, 这就证明了 (4). 因为 $\Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$ 是有限集合, 并且 W 在其上的作用忠实, 因此 W 是有限群, (5) 得证.

最后看 (6). 若 $g \in G$ 使得 $c_g t_1 = t_2$, 则考虑连通紧李子群 $Z_G(t_2)^0 := \{h \in G \,|\, c_{t_2} h = h\}^0$, 其李代数为 $\mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(t_2) = \{X \in \mathfrak{g} \,|\, \operatorname{Ad}(t_2)X = X\}$ [习题 4.22] . 显

然 $\mathfrak{t} \subseteq \mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(t_2)$, 且 $\mathfrak{t}$ 是 $\mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(t_2)$ 的嘉当子代数, 因此 $T \subseteq Z_G(t_2)$ 并且 T 是 $Z_G(t_2)$ 的极大环. 另一方面, $\mathrm{Ad}(t_2)\,\mathrm{Ad}(g)H = \mathrm{Ad}(g)\,\mathrm{Ad}(t_1)H = \mathrm{Ad}(g)H$, $\forall H \in \mathfrak{t}$. 因此 $\mathrm{Ad}(g)\mathfrak{t}$ 也是 $\mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(t_2)$ 的嘉当子代数, 从而 $c_g T$ 也是 $Z_G(t_2)^0$ 的极大环. 因此由推论5.10可知存在 $z \in Z_G(t_2)$ 使得 $c_z(c_g T) = T$, 即 $zg \in N(T)$. 又因为 $c_{zg}t_1 = c_z t_2 = t_2$, (6) 得证. □

6.4.2 典型紧李群的外尔群

我们来计算四类典型紧李群的外尔群. 它们的具体计算过程都是简单直接的矩阵计算, 留作习题 6.27.

6.4.2.1. A_{n-1} 型根系: $\mathrm{U}(n)$ 与 $\mathrm{SU}(n)$. 对于酉群 $\mathrm{U}(n)$, 取极大环 $T_{\mathrm{U}(n)} = \left\{\mathrm{diag}(e^{i\theta_1}, ..., e^{i\theta_n}) \,\middle|\, \theta_i \in \mathbb{R}\right\}$. 记 $\mathcal{S}_n$ 为全体 n 阶 **置换矩阵** (permutation matrix) 构成的群. 我们回忆, $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ 中的矩阵称为置换矩阵, 如果该矩阵的每行, 每列都恰有一个非零元, 且所有非零元都为 1. 众所周知, 有群同构 $\mathcal{S}_n \cong S_n$, 其中 S_n 为 n 元**置换群**. 注意矩阵共轭 (相似) 不改变矩阵的特征值, 从而 N 中的元素 $w \in N$ [相差常数倍意义下] 必为 $\mathbb{R}^n$ 的标准基的重排. 特别地, 容易验证

$$
\begin{aligned}
N(T_{\mathrm{U}(n)}) &= \mathcal{S}_n T_{\mathrm{U}(n)} \\
W &\cong S_n \\
|W| &= n!.
\end{aligned}
$$

记 (θ_i) 为 $i\mathfrak{t}$ 中的元素 $\mathrm{diag}(\theta_1, ..., \theta_n)$, 记 (λ_i) 为 $(i\mathfrak{t})^*$ 中的元素 $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \varepsilon_i$. 容易验证, 外尔群 W 在 $i\mathfrak{t}_{\mathrm{U}(n)} = \{(\theta_i) \,|\, \theta_i \in \mathbb{R}\}$ 与 $(i\mathfrak{t}_{\mathrm{U}(n)})^* = \{(\lambda_i) \,|\, \lambda_i \in \mathbb{R}\}$ 上的作用均为各坐标分量的重排.

对于 $\mathrm{SU}(n)$, 取极大环 $T_{\mathrm{SU}(n)} = T_{\mathrm{U}(n)} \cap \mathrm{SU}(n) = \left\{\mathrm{diag}(e^{i\theta_1}, ..., e^{i\theta_n}) \,\middle|\, \theta_i \in \mathbb{R}, \sum_{i=1}^{n} \theta_i = 0\right\}$. 注意 $\mathrm{U}(n) \cong (\mathrm{SU}(n) \times S^1)/\mathbb{Z}_n$, 且上式中的 S^1 包含于 $\mathrm{U}(n)$ 的中心, 因此 $W(\mathrm{SU}(n)) \cong W(\mathrm{U}(n))$. 特别地, 对于 A_{n-1} 型根系,

$$
\begin{aligned}
N(T_{\mathrm{SU}(n)}) &= (\mathcal{S}_n T_{\mathrm{U}(n)}) \cap \mathrm{SU}(n) \\
W &\cong S_n
\end{aligned}
$$

$$|W| \quad = \quad n!.$$

与 $\mathrm{U}(n)$ 的情形类似, 外尔群 W 在 $i\mathfrak{t}_{\mathrm{U}(n)} = \left\{(\theta_i) \,\middle|\, \theta_i \in \mathbb{R}, \sum_{i=1}^{n} \theta_i = 0\right\}$ 与 $(i\mathfrak{t}_{\mathrm{U}(n)})^* = \left\{(\lambda_i) \,\middle|\, \lambda_i \in \mathbb{R}, \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 0\right\}$ 上的作用均为各坐标分量的重排.

6.4.2.2. C_n 型根系: $\mathrm{Sp}(n)$. 注意 $\mathrm{Sp}(n) \cong \mathrm{U}(2n) \cap \mathrm{Sp}(n, \mathbb{C})$, 取极大环

$$T = \left\{\mathrm{diag}(e^{i\theta_1}, ..., e^{i\theta_n}; e^{-i\theta_1}, ..., e^{-i\theta_n}) \,\middle|\, \theta_i \in \mathbb{R}\right\}.$$

对每个 $1 \leq i \leq n$ 记 $s_{1,i}$ 是这样的 $2n$ 阶矩阵: 它所对应的线性变换将 $\mathbb{R}^{2n}$ 的标准基 e_i 变为 $-e_{i+n}$, 把 e_{i+n} 变成 e_i. 也就是说, $s_{1,i}$ 其实是 $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ 嵌到 $\mathrm{Sp}(n)$ 中的第 $i, n+i$ 行 (列). 同样, 考虑特征值, 容易验证对于 C_n 型根系, 有

$$\begin{aligned} N(T) &= \left\{\begin{pmatrix} s & \\ & s \end{pmatrix} \,\middle|\, s \in \mathcal{S}_n\right\} \left\{\prod_{i=1}^{n} s_{1,i}^{k_i} \,\middle|\, k_i \in \{0,1\},\, 1 \leq i \leq n\right\} T \\ W &\cong S_n \ltimes (\mathbb{Z}_2)^n \\ |W| &= 2^n n!. \end{aligned}$$

记 (θ_i) 为 $i\mathfrak{t}$ 中的元素 $\mathrm{diag}(\theta_1, ..., \theta_n; -\theta_1, ..., -\theta_n)$, 记 (λ_i) 为 $(i\mathfrak{t})^*$ 中的元素 $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \varepsilon_i$. 容易验证, 外尔群 W 在 $i\mathfrak{t} = \{(\theta_i) \,|\, \theta_i \in \mathbb{R}\}$ 与 $(i\mathfrak{t})^* = \{(\lambda_i) \,|\, \lambda_i \in \mathbb{R}\}$ 上的作用均为各坐标分量的重排以及各坐标分量的变号.

6.4.2.3. D_n 型根系: $\mathrm{SO}(E_{2n})$. 对于 $G = \mathrm{SO}(E_{2n})$, 取极大环

$$T = \left\{\mathrm{diag}(e^{i\theta_1}, ..., e^{i\theta_n}; e^{-i\theta_1}, ..., e^{-i\theta_n}) \,\middle|\, \theta_i \in \mathbb{R}\right\}.$$

对每个 $1 \leq i \leq n$ 记 $s_{2,i}$ 是这样的 $2n$ 阶矩阵: 它所对应的线性变换将 $\mathbb{R}^{2n}$ 的标准基 e_i 变为 e_{i+n}, 把 e_{i+n} 变成 e_i. 也就是说, $s_{2,i}$ 其实是 $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ 嵌到 $\mathrm{O}(E_{2n})$ 中的第 $i, n+i$ 行 (列). 容易验证对于 D_n 型根系, 有

$$N(T) \quad = \quad \left\{\begin{pmatrix} s & \\ & s \end{pmatrix} \,\middle|\, s \in \mathcal{S}_n\right\} \left\{\prod_{i=1}^{n} s_{2,i}^{k_i} \,\middle|\, k_i \in \{0,1\},\, 1 \leq i \leq n,\, \sum_{i=1}^{n} k_i \in 2\mathbb{Z}\right\} T$$

$$
\begin{aligned}
W &\cong S_n \ltimes (\mathbb{Z}_2)^{n-1} \\
|W| &= 2^{n-1} n!.
\end{aligned}
$$

记 (θ_i) 为 $i\mathfrak{t}$ 中的元素 $\mathrm{diag}(\theta_1, ..., \theta_n; -\theta_1, ..., -\theta_n)$, 记 (λ_i) 为 $(i\mathfrak{t})^*$ 中的元素 $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \varepsilon_i$. 容易验证, 外尔群 W 在 $i\mathfrak{t} = \{(\theta_i) \,|\, \theta_i \in \mathbb{R}\}$ 与 $(i\mathfrak{t})^* = \{(\lambda_i) \,|\, \lambda_i \in \mathbb{R}\}$ 上的作用均为各坐标分量的重排以及各坐标分量变号偶数次.

6.4.2.4. B_n **型根系:** $\mathrm{SO}(E_{2n+1})$**.** 对于 $G = \mathrm{SO}(E_{2n+1})$, 取极大环

$$
T = \left\{ \mathrm{diag}(e^{i\theta_1}, ..., e^{i\theta_n}; e^{-i\theta_1}, ..., e^{-i\theta_n}; 1) \,\middle|\, \theta_i \in \mathbb{R} \right\}.
$$

对每个 $1 \le i \le n$ 记 $s_{3,i}$ 是这样的 $2n$ 阶矩阵: 它所对应的线性变换将 $\mathbb{R}^{2n+1}$ 的标准基 e_i 变为 e_{i+n}, 把 e_{i+n} 变成 e_i, 并且把 e_{2n+1} 映为 $-e_{2n+1}$. 也就是说, $s_{3,i}$ 其实是 $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ 嵌到 $\mathrm{O}(E_{2n+1})$ 中的第 $i, n+i, 2n+1$ 行 (列). 容易验证对于 B_n 型根系, 有

$$
\begin{aligned}
N(T) &= \left\{ \begin{pmatrix} s & & \\ & s & \\ & & 1 \end{pmatrix} \middle| \, s \in \mathcal{S}_n \right\} \left\{ \prod_{i=1}^{n} s_{3,i}^{k_i} \middle| \, k_i \in \{0,1\},\, 1 \le i \le n, \right\} T \\
W &\cong S_n \ltimes (\mathbb{Z}_2)^{n} \\
|W| &= 2^{n} n!.
\end{aligned}
$$

记 (θ_i) 为 $i\mathfrak{t}$ 中的元素 $\mathrm{diag}(\theta_1, ..., \theta_n; -\theta_1, ..., -\theta_n; 0)$, 记 (λ_i) 为 $(i\mathfrak{t})^*$ 中的元素 $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \varepsilon_i$. 容易验证, 外尔群 W 在 $i\mathfrak{t} = \{(\theta_i) \,|\, \theta_i \in \mathbb{R}\}$ 与 $(i\mathfrak{t})^* = \{(\lambda_i) \,|\, \lambda_i \in \mathbb{R}\}$ 上的作用均为各坐标分量的重排以及各坐标分量的变号.

6.4.3 单根与外尔房

定义 6.37. 设 G 为紧李群, $\mathfrak{t}$ 是 G 的一个嘉当子代数, 记 $\mathfrak{t}' = \mathfrak{g}' \cap \mathfrak{t}$.

1. 称 $\Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$ 的子集 $\Pi = \Pi(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$ 是一组 **单根系** *(system of simple roots)* , 如果: Π 是线性空间 $(i\mathfrak{t}')^*$ 的一组基, 并且任何根 $\beta \in \Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$ 都形如
$$\beta = \sum_{\alpha \in \Pi} k_\alpha \alpha,$$
其中系数 k_α 满足: $\{k_\alpha \,|\, \alpha \in \Pi\} \subseteq \mathbb{Z}_{\geq 0}$ 或者 $\{k_\alpha \,|\, \alpha \in \Pi\} \subseteq \mathbb{Z}_{\leq 0}$, 换言之, k_α 全都是非负的整数, 或者全都是非正的整数. Π 中的元素称为 **单根** *(simple root)* .
2. 给定单根系 Π, 记
$$\Delta^+(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}) = \left\{ \beta \in \Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}) \,\middle|\, \beta = \sum_{\alpha \in \Pi} k_\alpha \alpha,\, k_\alpha \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \right\},$$
其中的元素称为关于 Π 的 **正根** *(positive root)* ; 记
$$\Delta^-(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}) = \left\{ \beta \in \Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}) \,\middle|\, \beta = \sum_{\alpha \in \Pi} k_\alpha \alpha,\, k_\alpha \in \mathbb{Z}_{\leq 0} \right\},$$
其中的元素称为关于 Π 的 **负根** *(negative root)* .

于是易知 $\Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}) = \Delta^+(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}) \coprod \Delta^-(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$, 并且 $\Delta^-(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}) = -\Delta^+(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$.

单根系的存在性并非显然, 我们暂时无法保证单根系的存在性. 我们将在后文引理6.42证明其存在性, 为此需要引入如下概念:

定义 6.38. 设 G 为紧李群, $\mathfrak{t}$ 是 G 的一个嘉当子代数.

1. 集合 $(i\mathfrak{t}')^* \backslash \Big(\bigcup_{\alpha \in \Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})} \alpha^\perp \Big)$ 的连通分支称为 $(i\mathfrak{t})^*$ 的 **外尔房** *(Weyl chamber)* ; 集合 $i\mathfrak{t}' \setminus \Big(\bigcup_{\alpha \in \Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})} h_\alpha^\perp \Big)$ 的连通分支称为 $i\mathfrak{t}$ 的外尔房.

定义 6.38. *(续).*

2. 设 C 是 $(i\mathfrak{t})^*$ 的一个外尔房, $\alpha \in \Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$. 如果 $B(C,\alpha) > 0$, 则称 α 是C-**正根**; 如果 $B(C,\alpha) < 0$, 则称 α 是C-**负根**. 如果 α 是 C-正根, 并且存在 C-正根 $\beta,\gamma \in \Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$, 使得 $\alpha = \beta+\gamma$, 则称 α 关于外尔房 C **可分解** *(decomposable)*; 否则称 α 关于外尔房 C **不可分解** *(indecomposable)*.
3. 设 $C^\vee$ 是 $i\mathfrak{t}$ 的一个外尔房, $\alpha \in \Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$. 如果 $\alpha(C^\vee) > 0$, 则称 α 是$C^\vee$-**正根**; 如果 $\alpha(C^\vee) < 0$, 则称 α 是$C^\vee$-**负根**. 如果 α 是 $C^\vee$-正根, 并且存在 $C^\vee$-正根 $\beta,\gamma \in \Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$, 使得 $\alpha = \beta+\gamma$, 则称 α 关于外尔房 $C^\vee$ **可分解**; 否则称 α 关于外尔房 $C^\vee$ **不可分解**.
4. 对于 $(i\mathfrak{t})^*$ 的外尔房 C, 记

$$\Pi(C) = \left\{\alpha \in \Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}) \,\middle|\, \alpha\text{是不可分解的 } C\text{-正根}\right\}.$$

对于 $i\mathfrak{t}$ 的外尔房 $C^\vee$, 记

$$\Pi(C^\vee) = \left\{\alpha \in \Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}) \,\middle|\, \alpha\text{是不可分解的 } C^\vee\text{-正根}\right\}.$$

5. 对于单根系 Π, 记

$$C(\Pi) = \{\lambda \in (i\mathfrak{t})^* \,|\, B(\lambda,\alpha) > 0,\, \alpha \in \Pi\},$$

称为 $(i\mathfrak{t})^*$ 的关于 Π 的外尔房; 记

$$C^\vee(\Pi) = \{H \in i\mathfrak{t} \,|\, \alpha(H) > 0,\, \alpha \in \Pi\},$$

称为 $i\mathfrak{t}$ 的关于 Π 的外尔房.

外尔房都是 **凸多面锥** (polyhedral convex cone) ，其闭包叫做 **闭外尔房** (closed Weyl chamber) . 出于对称的考虑, 上述定义中的条件 $\alpha(H) > 0$ 也常写作 $B(H,h_\alpha) > 0$. 我们将在引理6.42中证明 $C \mapsto \Pi(C)$ 诱导了外尔房与单根系的一一对应. 在证明之前, 我们先来具体计算典型紧李群的单根系及其相应的 $(i\mathfrak{t})^*$ 的外尔房. 计算过程都是直接的, 留作习题 6.30 [典型紧李群的根系及其相关记号详见 §6.1.5 小节.]

除了单根系与外尔房, 还有两个重要的概念. 首先, 对于给定的单根系 $\Pi = \{\alpha_1, ..., \alpha_l\}$, 由关系式 $2\dfrac{B(\pi_i, \alpha_j)}{B(\alpha_j, \alpha_j)} = \delta_{ij}$ 可确定 $(i\mathfrak{t})^*$ 的一组基 $\{\pi_1, ..., \pi_l\}$, 这些 π_i 称为关于 Π 的 **基本权** (fundamental weight) ; 记

$$\rho := \sum_{i=1} \pi_i. \tag{6.39}$$

注意 $\rho(h_{\alpha_i}) = 2\dfrac{B(\rho, \alpha_i)}{B(\alpha_i, \alpha_i)}$, 从而 $\rho \in P$ 为代数整权 [见习题 6.34] .

另一个重要概念是关于单根系的 **邓肯图** (Dynin diagram) . 邓肯图首先是一个图 (graph): 其顶点集为单根系 Π, 顶点 α_i, α_j 之间有边相连当且仅当 $B(\alpha_i, \alpha_j) \neq 0$. 当 $B(\alpha_i, \alpha_j) \neq 0$ 时, 规定边 $\alpha_i\alpha_j$ 的重数为 $m_{ij} = \alpha_i(h_{\alpha_j})\alpha_j(h_{\alpha_i})$. 注意由推论6.22的证明过程可知, 若 $\|\alpha_i\|^2 \geq \|\alpha_j\|^2$, 则 $m_{ij} = m_{ji} = \dfrac{\|\alpha_i\|^2}{\|\alpha_j\|^2} \in \{1, 2, 3\}$. 最后, 如果顶点 α_i, α_j 所对应的根的模长不相等, 则赋边 $\alpha_i\alpha_j$ 以定向, 其定向规定为从较长的根指向较短的根. 我们以后将看到, 邓肯图与单根系的选取无关.

6.4.3.1. A_{n-1} 型根系, $\mathrm{SU}(n)$: 我们知道, $\mathrm{SU}(n)$ 的嘉当子代数可以取

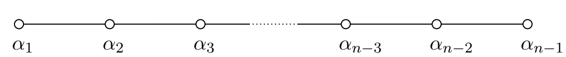
$$\mathfrak{t} = \left\{ \mathrm{diag}(i\theta_1, ..., i\theta_n) \,\middle|\, \theta_i \in \mathbb{R}, \sum_{i=1}^{n} \theta_i = 0 \right\},$$

于是容易验证 A_{n-1} 型根系的单根系, 外尔房, 基本权分别为

$$\begin{aligned} \Pi &= \{\alpha_i = \varepsilon_i - \varepsilon_{i+1} \,|\, 1 \leq i \leq n-1\} \\ C &= \{\mathrm{diag}(\theta_1, ..., \theta_n) \,|\, \theta_i > \theta_{i+1}, \, \theta_i \in \mathbb{R}\} \\ \rho &= \frac{n-1}{2}\varepsilon_1 + \frac{n-3}{2}\varepsilon_2 + \cdots + \frac{-n+1}{2}\varepsilon_n, \end{aligned}$$

相应的邓肯图为

A_{n-1}



6.4.3.2. C_n 型根系, $\mathrm{Sp}(n)$: 我们知道, $\mathrm{Sp}(n)$ 的嘉当子代数可以取

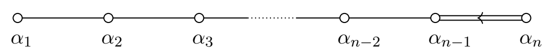
$$\mathfrak{t} = \{\mathrm{diag}(i\theta_1, ..., i\theta_n; -i\theta_1, ..., -i\theta_n) \,|\, \theta_i \in \mathbb{R}\}$$

于是容易验证 C_n 型根系的单根系, 外尔房, 基本权分别为

$$\begin{aligned}
\Pi &= \{\alpha_i = \varepsilon_i - \varepsilon_{i+1} \,|\, 1 \le i \le n-1\} \cup \{\alpha_n = 2\varepsilon_n\} \\
C &= \{\mathrm{diag}(\theta_1, ..., \theta_n; -\theta_1, ..., -\theta_n) \,|\, \theta_i > \theta_{i+1} > 0,\ \theta_i \in \mathbb{R}\} \\
\rho &= n\varepsilon_1 + (n-1)\varepsilon_2 + \cdots + \varepsilon_n,
\end{aligned}$$

相应的邓肯图为

C_n



6.4.3.3. D_n **型根系,** $\mathrm{SO}(E_{2n})$**:** 我们知道, $\mathrm{SO}(E_{2n})$ 的嘉当子代数可以取

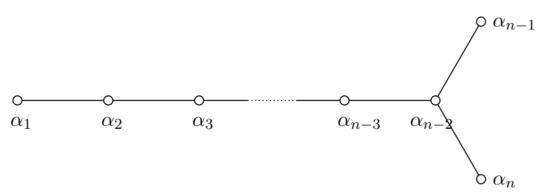
$$\mathfrak{t} = \{\mathrm{diag}(i\theta_1, ..., i\theta_n; -i\theta_1, ..., -i\theta_n) \,|\, \theta_i \in \mathbb{R}\}$$

于是容易验证 D_n 型根系的单根系, 外尔房, 基本权分别为

$$\begin{aligned}
\Pi &= \{\alpha_i = \varepsilon_i - \varepsilon_{i+1} \,|\, 1 \le i \le n-1\} \cup \{\alpha_n = \varepsilon_{n-1} + \varepsilon_n\} \\
C &= \{\mathrm{diag}(\theta_1, ..., \theta_n; -\theta_1, ..., -\theta_n) \,|\, \theta_i > \theta_{i+1},\ \theta_{n-1} > |\theta_n|,\ \theta_i \in \mathbb{R}\} \\
\rho &= n\varepsilon_1 + (n-1)\varepsilon_2 + \cdots + \varepsilon_{n-1},
\end{aligned}$$

相应的邓肯图为

D_n



6.4.3.4. B_n **型根系,** $\mathrm{SO}(E_{2n+1})$**:** 我们知道, $\mathrm{SO}(E_{2n+1})$ 的嘉当子代数可以取

$$\mathfrak{t} = \{\mathrm{diag}(i\theta_1, ..., i\theta_n; -i\theta_1, ..., -i\theta_n; 0) \,|\, \theta_i \in \mathbb{R}\}$$

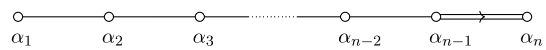
于是容易验证 B_n 型根系的单根系, 外尔房, 基本权分别为

$$\begin{aligned}
\Pi &= \{\alpha_i = \varepsilon_i - \varepsilon_{i+1} \,|\, 1 \le i \le n-1\} \cup \{\alpha_n = \varepsilon_n\} \\
C &= \{\mathrm{diag}(\theta_1, ..., \theta_n; -\theta_1, ..., -\theta_n; 0) \,|\, \theta_i > \theta_{i+1} > 0,\ \theta_i \in \mathbb{R}\}
\end{aligned}$$

$$\rho \quad = \quad \frac{2n-1}{2}\varepsilon_1 + \frac{2n-3}{2}\varepsilon_2 + \cdots + \frac{1}{2}\varepsilon_n,$$

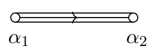
相应的邓肯图为

B_n

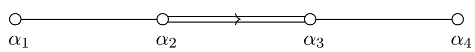


李代数理论中的一个重要结论是: 除了以上四类单李代数, 复数域 $\mathbb{C}$ 上的单李代数还只剩下 5 种, 这 5 种单李代数称为 **例外单李代数** (exceptional simple Lie algebra) ，它们都分别对应于某个单紧李群. 5 种例外单李代数的邓肯图如下 [更多细节见 [56] 或 [70]]：

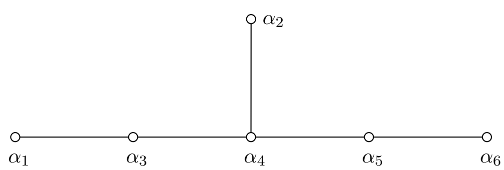
G_2



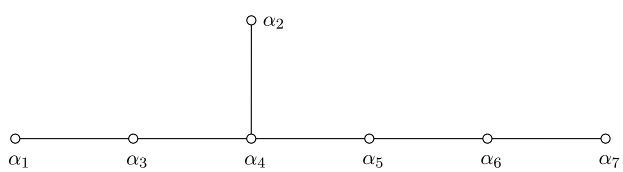
F_4



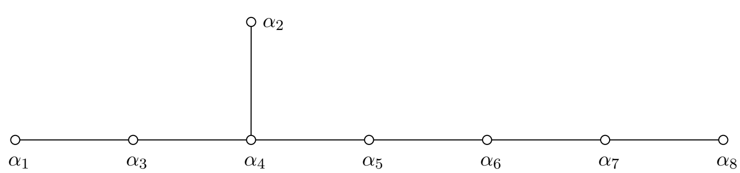
E_6



E_7



E_8



6.4.4 外尔群与反射群

定义 6.40. 设 G 为紧李群, $\mathfrak{t}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的一个嘉当子代数.

1. 对于 $\alpha \in \Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$, 定义线性映射 $r_\alpha\colon (i\mathfrak{t})^* \to (i\mathfrak{t})^*$ 如下:

$$r_\alpha(\lambda) = \lambda - 2\frac{B(\lambda,\alpha)}{B(\alpha,\alpha)} = \lambda - \lambda(h_\alpha)\alpha$$

以及 $r_{h_\alpha}\colon i\mathfrak{t} \to i\mathfrak{t}$

$$r_{h_\alpha}(H) = H - 2\frac{B(H,h_\alpha)}{B(h_\alpha,h_\alpha)} = H - \alpha(H)h_\alpha.$$

2. 由 $\{r_\alpha \,|\, \alpha \in \Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})\}$ 生成的群记作 $W(\Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}))$; 由 $\{r_{h_\alpha} \,|\, \alpha \in \Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})\}$ 生成的群记作 $W(\Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})^\vee)$.

像以前一样, 我们通过自然的 $\mathbb{C}$-线性扩张, 可将 $W(\Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}))$ 的作用延拓至 $\mathfrak{t}^*$, 同理把 $W(\Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})^\vee)$ 的作用延拓至 $\mathfrak{t}$. 注意 r_α 在 $(\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \cap \mathfrak{t})^*$ 的作用是平凡的, 而限制在 $(i\mathfrak{t}')^*$ 上的作用是关于垂直于 α 的超平面的镜面反射. 类似地, r_{h_α} 在 $\mathfrak{z}(g) \cap \mathfrak{t}$ 的作用平凡，而限制在 $i\mathfrak{t}'$ 上的作用是关于垂直于 h_α 的超平面的镜面反射 [习题 6.28] . 特别地, $r_\alpha^2 = I$, $r_{h_\alpha}^2 = I$.

引理 6.41. 设 G 为紧李群, T 是 G 的一个极大环, 则:

1. 对任意 $\alpha \in \Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$, 存在 $w_\alpha \in N(T)$, 使得 w_α 在 $(i\mathfrak{t})^*$ 的作用恰为 r_α, 且 w_α 在 $i\mathfrak{t}$ 上的作用恰为 r_{h_α}.
2. 对于 $\alpha, \beta \in \Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$, 则 $r_\alpha(\beta) \in \Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$, $r_{h_\alpha}(h_\beta) = h_{r_\alpha(\beta)}$.

证明. 由定理6.20, 取 $\mathfrak{g}$ 的标准 $\mathfrak{su}(2)$-三元组 $\{\mathcal{I}_\alpha, \mathcal{J}_\alpha, \mathcal{K}_\alpha\}$ 与标准 $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$-三元组 $\{E_\alpha, H_\alpha, F_\alpha\}$, 相应的李群同态记为 φ_α: $\mathrm{SU}(2) \to G$. 取 $w := \exp(\frac{\pi}{2}J) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{SU}(2)$, 其中 $J = -E + F \in \mathfrak{su}(2)$. 于是 $\mathrm{d}\varphi_\alpha(J) = \mathcal{J}_\alpha = -E_\alpha + F_\alpha$.

令 $w_\alpha := \varphi_\alpha(w) \in G$. 先验证 w_α 在 $i\mathfrak{t}$ 上的作用恰为 r_{h_α}. 对于 $H \in i\mathfrak{t}$, 注意

$$\mathrm{ad}(\mathrm{d}\varphi_\alpha(\frac{\pi}{2}J))H = \frac{\pi}{2}\mathrm{ad}(-E_\alpha + F_\alpha)H = \alpha(H)\frac{\pi}{2}(E_\alpha + F_\alpha).$$

特别地, 若 $B(H, h_\alpha) = 0$, 则 $\alpha(H) = 0$, 从而 $\mathrm{ad}(\mathrm{d}\varphi_\alpha(\frac{\pi}{2}J))H = 0$. 于是, 当 $B(H, h_\alpha) = 0$ 时,

$$\begin{aligned} \mathrm{Ad}(w_\alpha)H &= \mathrm{Ad}(\varphi_\alpha(\exp(\frac{\pi}{2}J)))H = \mathrm{Ad}(\exp(\mathrm{d}\varphi_\alpha(\frac{\pi}{2}J)))H \\ &= e^{\mathrm{ad}(\mathrm{d}\varphi_\alpha(\frac{\pi}{2}J))}H = H. \end{aligned}$$

再看 $H = h_\alpha$ 的情况. 因为 $c_{\varphi_\alpha(w)} \circ \varphi_\alpha = \varphi_\alpha \circ c_w$, 两边微分得 $\mathrm{Ad}(w_\alpha) \circ \mathrm{d}\varphi_\alpha = \mathrm{d}\varphi_\alpha \circ \mathrm{Ad}(w)$. 注意在 $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ 中成立 $wHw^{-1} = -H$, 而 $\mathrm{d}\varphi_\alpha(H) = h_\alpha$, 于是

$$\begin{aligned} \mathrm{Ad}(w_\alpha)h_\alpha &= \mathrm{Ad}(w_\alpha)\varphi_\alpha(H) = \mathrm{d}\varphi_\alpha(\mathrm{Ad}(w)H) \\ &= -\mathrm{d}\varphi_\alpha(H) = -h_\alpha. \end{aligned}$$

因此 $\mathrm{Ad}(w_\alpha)$ 保持 $\mathfrak{t}$ 不变, 并且在 $i\mathfrak{t}$ 的作用为关于垂直于 h_α 的超平面的镜面反射. 换言之, $\mathrm{Ad}(w_\alpha)$ 在 $i\mathfrak{t}$ 上的作用恰为 r_{h_α}. 注意 $T = \exp\mathfrak{t}$, $c_{w_\alpha}(\exp H) = \exp(\mathrm{Ad}(w_\alpha)H)$, 因此易知 $w_\alpha \in N(T)$.

最后, 为完成 (1) 的证明, 还需要考虑在 $(i\mathfrak{t})^*$ 上的作用. 对任意 $\lambda \in (i\mathfrak{t})^*$,

$$(w_\alpha\lambda)(H) = \lambda(\mathrm{Ad}(w_\alpha)^{-1}H) = B(u_\lambda, \mathrm{Ad}(w_\alpha)^{-1}H) = B(\mathrm{Ad}(w_\alpha)u_\lambda, H).$$

当 $\lambda = \alpha$ 时, $\mathrm{Ad}(w_\alpha)u_\alpha = -u_\alpha$, 从而 $w_\alpha\alpha = -\alpha$. 而当 $\lambda \in \alpha^\perp$ 时, $u_\lambda \in h_\alpha^\perp$, 从而 $\mathrm{Ad}(w_\alpha)u_\lambda = u_\lambda$, 于是 $w_\alpha\lambda = \lambda$. 特别地, w_α 在 $(i\mathfrak{t})^*$ 的作用恰为 r_α.

再利用定理6.36, 立刻得到 (2). □

引理 6.42. 设 G 为紧李群, $\mathfrak{t}$ 是 G 的一个嘉当子代数.

1. 映射 $\Pi \mapsto C(\Pi)$ 诱导如下的一一对应:
$$\{单根系\} \Longleftrightarrow \{(i\mathfrak{t})^* \text{ 的外尔房}\},$$
并且其逆映射将外尔房 C 映为单根系 $\Pi(C)$.
2. 映射 $\Pi \mapsto C^\vee(\Pi)$ 诱导如下的一一对应:
$$\{单根系\} \Longleftrightarrow \{i\mathfrak{t} \text{ 的外尔房}\},$$
并且其逆映射将外尔房 $C^\vee$ 映为单根系 $\Pi(C^\vee)$.
3. 设 Π 为单根系, $\alpha,\beta\in\Pi$, 则 $B(\alpha,\beta)\le 0$.

证明. 设 $\Pi=\{\alpha_1,...,\alpha_l\}$ 是单根系. 回忆(**6.39**)式, 基本权 $\rho\in(i\mathfrak{t})^*$ 满足 $B(\rho,\alpha_j)=\frac{\|\alpha_j\|^2}{2}>0$, 从而 $\rho\in C(\Pi)$. 对任意 $\lambda\in C(\Pi)$, 注意映射 $t\mapsto B(t\lambda+(1-t)\rho,\alpha_j)$, 由此易知连接 λ 与 ρ 的线段也落在 $C(\Pi)$ 内, 从而 $C(\Pi)$ 连通. 此外, 注意若 $\alpha\in\Delta^+(\mathfrak{g}_\mathbb{C})$, 则 $B(\lambda,\alpha)>0$; 若 $\beta\in\Delta^-(\mathfrak{g}_\mathbb{C})$, 则 $B(\lambda,\beta)<0$, 因此 $C(\Pi)\subseteq(i\mathfrak{t})^*\setminus\Big(\bigcup\limits_{\alpha\in\Delta(\mathfrak{g}_\mathbb{C})}\alpha^\perp\Big)$. 特别地, 存在 $(i\mathfrak{t})^*$ 的外尔房 C 使得 $C(\Pi)\subseteq C$. 注意当 γ 取遍外尔房 C, $B(\gamma,\alpha_j)$ 的正负号恒定; 而 $\rho\in C$ 迫使 $B(\alpha_j,C)>0$. 因此 $C\subseteq C(\Pi)$, 从而 $C(\Pi)=C$ 是外尔房, (1) 的第一半部分得证.

另一方面, 若 C 是 $(i\mathfrak{t})^*$ 的一个外尔房, 取定 $\lambda\in C$. 若 C-正根 α,β_i 满足 $\alpha=\beta_1+\beta_2$, 则 $B(\alpha,\lambda)>B(\beta_i,\lambda)$. 注意 $\big\{B(\lambda,\alpha)\,\big|\,\alpha\in\Delta(\mathfrak{g}_\mathbb{C})\text{是 }C\text{-正根}\big\}$ 是正实数集的非空有限子集, 由此易知 $\Pi(C)$ 非空. 由 $\Pi(C)$ 的定义易知, 对任意 $\beta\in\Delta(\mathfrak{g}_\mathbb{C})$, β 可以写成 $\beta=\sum\limits_{\alpha\in\Pi(C)}k_\alpha\alpha$, 其中系数 $\{k_\alpha\,|\,\alpha\in\Pi(C)\}$ 要么包含于 $\mathbb{Z}_{\ge 0}$ [若 β 是 C-正根], 要么包含于 $\mathbb{Z}_{\le 0}$ [若 β 是 C-负根]. 再注意 $\Delta(\mathfrak{g}_\mathbb{C})$ 张成 $(i\mathfrak{t})^*$, 从而只需证明 $\Pi(C)$ 线性无关.

设 α,β 是 $\Pi(C)$ 中的不同元素, 不妨 $B(\alpha,\alpha)\le B(\beta,\beta)$, 从而 $\alpha\ne-\beta$. 于是由推论6.22 [见习题 6.20] 可知 $\beta(h_\alpha)=2\frac{B(\alpha,\beta)}{B(\beta,\beta)}\in\pm\{0,1\}$. 如果 $B(\alpha,\beta)>0$, 则由引理6.41知 $r_\alpha(\beta)=\beta-\alpha\in\Delta(\mathfrak{g}_\mathbb{C})$. 若 $\beta-\alpha$ 是 C-正根, 则注意 $\beta=(\beta-\alpha)+\alpha$; 若 $\beta-\alpha$ 是 C-负根, 则注意 $\alpha=-(\beta-\alpha)+\beta$. 无论那种情形, 都与 α,β 的不可

分解性矛盾. 因此 $B(\alpha,\beta)\le 0$. 特别地, 如果我们证明了 (1), 那么 (3) 自动成立.

下证 $\Pi(C)$ 线性无关. 假设 $\sum\limits_{\alpha\in I_1} c_\alpha\alpha = \sum\limits_{\beta\in I_2} c_\beta\beta$, 其中 $c_\alpha, c_\beta\ge 0$, 并且指标集 I_1, I_2 满足 $I_1\coprod I_2=\Pi(C)$. 注意 $B(\alpha,\beta)\le 0$, 于是有

$$0\le \|\sum_{\alpha\in I_1} c_\alpha\alpha\|^2 = B(\sum_{\alpha\in I_1} c_\alpha\alpha, \sum_{\alpha\in I_1} c_\beta\beta) = \sum_{\substack{\alpha\in I_1\\ \beta\in I_2}} c_\alpha c_\beta B(\alpha,\beta)\le 0.$$

从而 $\sum\limits_{\alpha\in I_1} c_\alpha\alpha=0$. 任取 $\gamma\in C$, 则 $0=\sum\limits_{\alpha\in I_1} c_\alpha B(\gamma,\alpha)$. 而 $B(\gamma,\alpha)>0$, 从而必有 $c_\alpha=0$. 同理 $c_\beta=0$. 这就完成了 (1) 的证明. (2) 的证明完全类似, 或者可以作为 (1) 的推论, 故从略. □

定理 6.43. *设 G 是紧李群, T 是 G 的一个极大环, 那么:*

1. *$W(G)$ 在 $i\mathfrak{t}$ 上的作用诱导群同构 $W(G)\cong W(\Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})^\vee)$.*
2. *$W(G)$ 在 $(i\mathfrak{t})^*$ 上的作用诱导群同构 $W(G)\cong W(\Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}))$.*
3. *$W(G)$ 在全体外尔房构成的集合上的作用是单可迁的.*

证明. 由定理6.36可知 $W:=W(G)$ 在 $i\mathfrak{t}$ 上的 Ad-作用是忠实的, 从而可以自然将 W 等同于 $i\mathfrak{t}$ 上的相应的变换群. 在这个定理的证明过程中我们不加声明地使用这个等同. 由引理6.41可知, 对任意 $\alpha\in\Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$, $r_{h_\alpha}\in W$, 因此 $W(\Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})^\vee)\subseteq W$. 于是, 为证明 (1), 只需证明 $W\subseteq W(\Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})^\vee)$.

只需考虑 $\mathfrak{g}$ 半单的情形. 取定 $i\mathfrak{t}$ 的一个外尔房 C, 取定 $H\in C$. 对于 $w\in W$, 注意 w 的作用保持 $\{h_\alpha\,|\,\alpha\in\Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})\}$ 不变, 又因为 w 的作用也保持基灵内积, 从而也保持 $\left\{h_\alpha^\perp\,\middle|\,\alpha\in\Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})\right\}$. 因此 wC 也是外尔房.

记 Ξ 是 $i\mathfrak{t}$ 的满足以下条件的所有的子空间 X 的并: X 形如至少两个不同的 $h_\alpha^\perp$, $\alpha\in\Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$ 之交. 注意 Ξ 是子空间的有限并, 参与其中的每个子空间 X 的余维数至少是 2, 因此 $i\mathfrak{t}\setminus\Xi$ 是道路连通的 [习题 6.31] . 因此存在连接 H 与 wH 的曲线 $\gamma\colon[0,1]\to i\mathfrak{t}\setminus\Xi$, 并且存在 $[0,1]$ 的区间划分 $0=s_0<s_1<\cdots<s_N=1$, 使得 $\gamma(s_i,s_{i+1})$ 落在某个外尔房 C_i 当中, $0\le i\le N-1$, 并且 $\gamma(s_i)\in h_{\alpha_i}^\perp$, 其中 $C_0=C$, $C_N=wC$.

注意曲线 $\gamma(t)$ 与 Ξ 不相交, 从而对每个 $1 \leq i \leq N-1$, 存在 $\gamma(s_i)$ 在 $h_{\alpha_i}^{\perp}$ 中的球状开邻域 B_i, 则 B_i 包含于 C_{i-1} 的边界, 也包含于 C_i 的边界 [余维数是 1] . 于是对充分小的非零实数 ε, $B_i + \varepsilon h_{\alpha_i}$ 视 ε 的正负号而位于 C_{i-1} 或 C_i. 因为 $r_{h_{\alpha_i}}(B_i+\varepsilon h_{\alpha_i}) = B_i-\varepsilon h_{\alpha_i}$, 又因为 $r_{h_{\alpha_i}}$ 将外尔房映为外尔房, 从而 $r_{h_{\alpha_i}} C_{i-1} = C_i$. 特别地, $r_{h_{\alpha_1}} \cdots r_{h_{\alpha_N}} C = wC$.

欲证明 (1), 只需要再证明: 若 $w_0 \in N(T)$ 满足 $\mathrm{Ad}(w_0)C = C$, 则 $w_0 \in T$, 从而 w_0 在 $i\mathfrak{t}$ 上的作用是恒等算子. 记 $\Pi = \Pi(C)$, 并考虑(**6.39**)的基本权 ρ. 引理6.42表明 $w_0\Pi = \Pi$, 从而 $\mathrm{Ad}(w_0)\rho = \rho$. 因此 $c_{w_0} e^{itu_\rho} = e^{itu_\rho}$, $t \in \mathbb{R}$.

取 $Z_G(w_0)^0$ 的极大环 S' 使得 $w_0 \in S'$. 由极大环面定理, 注意 S' 也是 G 的极大环. 注意 $e^{i\mathbb{R}u_\rho}$ 包含于 $Z_G(w_0)^0$ 的某个极大环, 从而由推论5.10可知存在 $g \in Z_G(w_0)^0$ 使得 $c_g e^{i\mathbb{R}u_\rho} \subseteq S'$. 于是 $S := c_{g^{-1}} S'$ 为 G 的极大环, 并且 $w_0 \in S$, $e^{i\mathbb{R}u_\rho} \subseteq S$ [习题 5.12] . 但另一方面, 由 ρ 的定义以及 $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ 的根空间分解, 容易证明 $\mathfrak{z}_{\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}}(u_\rho) = \mathfrak{t}$, 从而 $\mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(iu_\rho) = \mathfrak{t}$. 但是 $\mathfrak{s} \subseteq \mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(iu_\rho) = \mathfrak{t}$, 从而极大性表明 $\mathfrak{s} = \mathfrak{t}$, 从而 $S = T$, 故 $w_0 \in T$, 得证.

(2) 的证明完全类似, (3) 是 (1) 的推论. □

6.4.5 习题

习题 6.27 具体计算每种典型紧李群的外尔群, 验证 §6.4.2 小节的相关结果.

习题 6.28 设 G 是紧李群, 其李代数 $\mathfrak{g}$ 半单, $\mathfrak{t}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的一个嘉当子代数. 对任意 $\alpha \in \Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$, 验证 r_α 是 $(i\mathfrak{t})^*$ 上的关于与 α 垂直的超平面的镜面反射; r_{h_α} 是 $i\mathfrak{t}$ 上的关于与 h_α 垂直的超平面的镜面反射.

习题 6.29 设 G 是连通紧李群, T 是 G 的一个极大环. 定理6.36表明 G 的共轭类与 T 的 W-轨道之间有自然的一一对应. 事实上, 还有更进一步的结果. 证明: G 上的连续类函数与 T 上的 W-不变函数之间有自然的一一对应 [见习题 7.10] .

习题 6.30 计算每种典型紧李群的单根系与外尔房, 验证 §6.4.3 小节的相关结果.

习题 6.31 设 G 是紧李群, 其李代数 $\mathfrak{g}$ 半单, $\mathfrak{t}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的一个嘉当子代数.

(a) 记 Ξ 为满足如下性质的 $i\mathfrak{t}$ 的子空间 X 之并: X 形如至少两个不同的 $h_\alpha^{\perp}$ 之交, 其中 $\alpha \in \Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$. 证明: $i\mathfrak{t} \setminus \Xi$ 道路连通.

(b) 设 $\gamma(t)\colon [0,1] \to i\mathfrak{t} \setminus \Xi$ 为连续曲线, 并且 $\gamma(0)$ 与 $\gamma(1)$ 分别位于两个不同的外

尔房. 证明: 存在区间 $[0,1]$ 的分割 $0=s_0<s_1<\cdots<s_N=1$, 使得对任意 $1\le i\le N$ 都存在外尔房 C_i, 使得 $\gamma(s_{i-1},s_i)\subseteq C_i$, 并且对任意 $1\le i\le N-1$ 都存在 $\alpha_i\in\Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$ 使得 $\gamma(s_i)\in h_{\alpha_i}^{\perp}$.

习题 6.32 设 G 是紧李群, 其李代数 $\mathfrak{g}$ 半单, $\mathfrak{t}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的一个嘉当子代数. 取定 $(i\mathfrak{t})^*$ 的一组基. 在这组基下, 定义 $(i\mathfrak{t})^*$ 的**字典序**如下: 对于 $\alpha,\beta\in(i\mathfrak{t})^*$, $\alpha>\beta$ 当且仅当 $\alpha-\beta$ 的 [关于给定基的] 第一个非零坐标分量为正.

(a) 记 $\Pi:=\big\{\alpha\in\Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})\,\big|\,\alpha>0,\ \alpha\neq\beta_1,\beta_2,\text{ 其中 }\beta_i\in\Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})\text{ 满足 }\beta_i>0\big\}$. 证明 Π 是 $\Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$ 的一组单根系, 并且相应的正根 $\Delta^+(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})=\{\alpha\in\Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})\,|\,\alpha>0\}$, 负根 $\Delta^-(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})=\{\alpha\in\Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})\,|\,\alpha<0\}$.

(b) 证明: 所有的单根系都可通过上述方式得到.

(c) 证明: 存在唯一的 $\delta\in\Delta^+(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$, 使得 $\forall\beta\in\Delta^+(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})\setminus\{\delta\}$, $\delta>\beta$. 如此 δ 称为**最高根** (highest root) . 对于四种典型紧李群, 验证下表:

G	$\mathrm{SU}(n)$	$\mathrm{Sp}(n)$	$\mathrm{SO}(E_{2n})$	$\mathrm{SO}(E_{2n+1})$
δ	$\varepsilon_1-\varepsilon_n$	$2\varepsilon_1$	$\varepsilon_1+\varepsilon_2$	$\varepsilon_1+\varepsilon_2$.

(d) 证明: 对任意 $\beta\in\Delta^+(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$, $B(\delta,\beta)\ge 0$.

(e) 若 $G=\mathrm{SO}(E_{2n+1})$, $n\ge 2$, 验证: 存在异于 δ 的其他的正根也满足上一小问中的性质.

习题 6.33 设 G 是紧李群, 其李代数 $\mathfrak{g}$ 半单, $\mathfrak{t}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的一个嘉当子代数. 取定 $\Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$ 的一个单根系 $\Pi=\{\alpha_i\}$. 对任意 $\beta\in\Delta^+(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$, 证明: β 形如 $\beta=\alpha_{i_1}+\alpha_{i_2}+\cdots+\alpha_{i_N}$, 使得对任意 $1\le k\le N$, $\alpha_{i_1}+\alpha_{i_2}+\cdots+\alpha_{i_k}\in\Delta^+(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$.

习题 6.34 设 G 是紧李群, $\mathfrak{t}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的一个嘉当子代数. 取定 $\Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$ 的一个单根系 Π.

(a) 对于 $\alpha\in\Pi$, $\beta\in\Delta^+(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})\setminus\{\alpha\}$, 记 $r_\alpha\beta=\beta-2\dfrac{B(\beta,\alpha)}{B(\alpha,\alpha)}$. 证明: $r_\alpha\beta\in\Delta^+(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$, 并且由此推出 $r_\alpha(\Delta^+(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})\setminus\{\alpha\})=\Delta^+(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})\setminus\{\alpha\}$.

(b) 记

$$\rho':=\frac{1}{2}\sum_{\beta\in\Delta^+(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})}\beta,$$

利用第一问的结果, 证明 $r_\alpha\rho'=\rho'-\alpha$. 之后用 r_α 的定义, 证明 $\rho'=\rho$.

习题 6.35 设 G 是紧李群, 其李代数 $\mathfrak{g}$ 半单, $\mathfrak{t}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的一个嘉当子代数. 取定 $\Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$ 的一个单根系 $\Pi = \{\alpha_i\}$, 记 $W(\Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}))'$ 是 $W(\Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}))$ 的由 $\{r_{\alpha_i}\}$ 生成的子群.

(a) 任意取定 $\beta \in \Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$, 取定 $x \in \beta^{\perp}$, 使得 x 不与除了 $\pm\beta$ 之外的其他根垂直. 证明: 对于充分小的 $\varepsilon > 0$, 存在外尔房 C', 使得 $x + \varepsilon\beta \in C'$, 并且 $\beta \in \Pi' := \Pi(C')$.

(b) 记 $\rho_{\Pi} \in (i\mathfrak{t})^*$ 为关于 Π 的基本权 [即, ρ_{Π} 由方程 $2\dfrac{B(\rho_{\Pi}, \alpha_i)}{B(\alpha_i, \alpha_i)}$ 所确定, 见(**6.39**)式以及习题 6.34] . 取 $w \in W(\Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}))'$, 使得 $B(w\rho_{\Pi'}, \rho_{\Pi})$ 取到最大值. 通过考虑 $B(r_{\alpha_i} w\rho_{\Pi'}, \rho_{\Pi})$, 证明: $w\rho_{\Pi'} \in C(\Pi)$, 进而推出 $w\beta \in \Pi$.

(c) 证明: $r_\beta = w^{-1} r_{w\beta} w$. 由此推出 $W(\Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}))' = W(\Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}))$.

习题 6.36 设 G 是紧李群, 其李代数 $\mathfrak{g}$ 半单, $\mathfrak{t}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的一个嘉当子代数. 取定 $\Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$ 的单根系 $\Pi = \{\alpha_i\}$, 注意习题 6.35. 对于 $w \in W(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$, 记 $n(w) := |\{\beta \in \Delta^+(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}) \,|\, w\beta \in \Delta^-(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})\}|$. 若 $w \neq I$, 记 $l(w) = \min\{N \,|\, w = r_{\alpha_1} \cdots r_{\alpha_N}\}$. 当 $N = l(w)$ 时, 称 $w = r_{\alpha_1} \cdots r_{\alpha_N}$ 为 w 的一个**既约表示** (reduced expression); $l(w) = N$ 称为 w 关于 Π 的**长度** (length). 而当 $w = I$ 时, 规定 $l(w) = 0$.

(a) 利用习题 6.34 证明:

$$n(wr_{\alpha_i}) = \begin{cases} n(w) - 1 & \text{如果 } w\alpha_i \in \Delta^-(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}) \\ n(w) + 1 & \text{如果 } w\alpha_i \in \Delta^+(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}), \end{cases}$$

并由此推出 $n(w) \leq l(w)$.

(b) 利用定理6.43, 对 $l(w)$ 归纳, 证明 $n(w) = l(w)$.

习题 6.37 (Chevalley 引理) 设 G 是紧李群, 其李代数 $\mathfrak{g}$ 半单, $\mathfrak{t}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的一个嘉当子代数, 取定 $\lambda \in (i\mathfrak{t})^*$, 记 $W_\lambda = \{w \in W(\Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})) \,|\, w\lambda = \lambda\}$. 取外尔房 C 使得 $\lambda \in \overline{C}$, 令 $\Pi = \Pi(C)$.

(a) 若 $\beta \in \Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$ 满足 $B(\lambda, \beta) > 0$, 证明 $\beta \in \Delta^+(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$.

(b) 若 $\alpha \in \Pi$ 与 $w \in W_\lambda$ 满足 $w\alpha \in \Delta^-(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$, 证明 $B(\lambda, \alpha) \leq 0$.

(c) 证明如下的 **Chevalley 引理**: $W(\lambda) := \{r_\alpha \,|\, B(\lambda, \alpha) = 0\}$ 是群 W_λ 的一组生成元. [提示: 利用习题 6.36. 考虑 $W_\lambda \setminus \langle W(\lambda) \rangle$ 当中长度最短的元素.]

(d) 证明外尔群 $W(\Delta(\mathfrak{g}_\mathbb{C}))$ 中的镜面反射只有 r_α, $\alpha \in \Delta(\mathfrak{g}_\mathbb{C})$.

(e) 若 $W_\lambda \neq \{I\}$, 证明: 存在 $\alpha \in \Delta(\mathfrak{g}_\mathbb{C})$, 使得 $\lambda \in \alpha^\perp$.

习题 6.38 设 G 是紧李群, 其李代数 $\mathfrak{g}$ 半单, $\mathfrak{t}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的一个嘉当子代数, 取定 $\Delta(\mathfrak{g}_\mathbb{C})$ 的单根系 $\Pi = \{\alpha_i\}$. 对于 $w \in W(\Delta(\mathfrak{g}_\mathbb{C}))$, 记 $\operatorname{sgn}(w) := (-1)^{l(w)}$ [见习题 6.36] . 证明: $\operatorname{sgn}(w) = \det(w)$.

习题 6.39 设 G 是紧李群, 其李代数 $\mathfrak{g}$ 半单, $\mathfrak{t}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的一个嘉当子代数. 取定外尔房 C 以及 $H \in (i\mathfrak{t})^*$.

(a) 若存在 $w \in W(\Delta(\mathfrak{g}_\mathbb{C}))$ 使得 $H \in \overline{C} \cap w\overline{C}$, 证明: $wH = H$.

(b) 证明: $\overline{C}$ 是 $W(\Delta(\mathfrak{g}_\mathbb{C}))$ 在 $(i\mathfrak{t})^*$ 上的作用的**基本区域**, 换言之, 对任意 $H \in (i\mathfrak{t})^*$, H 的 $W(\Delta(\mathfrak{g}_\mathbb{C}))$-轨道与 $\overline{C}$ 恰由一个公共点.

习题 6.40 设 G 是紧李群, 其李代数 $\mathfrak{g}$ 半单, $\mathfrak{t}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的一个嘉当子代数. 取定 $\Delta(\mathfrak{g}_\mathbb{C})$ 的单根系 Π.

(a) 证明: 存在唯一 $w_0 \in W(\Delta(\mathfrak{g}_\mathbb{C}))$, 使得 $w_0\Pi = -\Pi$.

(b) 证明: 当 $G = SU(2)$, $SO(E_{2n+1})$, $Sp(n)$ 或 $SO(E_{4n})$ 时, $w_0 = -I$.

(c) 当 $G = SU(n)\,(n \geq 3)$ 或 $SO(E_{4n+2})$ 时, $w_0 \neq -I$, 从而 $-I \neq W(\Delta(\mathfrak{g}_\mathbb{C}))$.

习题 6.41 设 G 是紧李群, 其李代数 $\mathfrak{g}$ 半单, $\mathfrak{t}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的一个嘉当子代数, 取定 $\Delta(\mathfrak{g}_\mathbb{C})$ 的单根系 $\Pi = \{\alpha_i\}$.

(a) 证明: 若在邓肯图中 α_i 与 α_j 被单重边相连, 则存在 $w \in W(\Delta(\mathfrak{g}_\mathbb{C}))$ 使得 $w\alpha_i = \alpha_j$.

(b) 设 G 是典型紧李群 [即 $SU(n)$, $Sp(n)$, $SO(E_{2n})$ 或 $SO(E_{2n+1})$] , 证明: 对任意 $l > 0$, $\Delta(\mathfrak{g}_\mathbb{C})$ 之中的长度为 l 的根 [如果存在] 构成一条外尔群轨道.

习题 6.42 设 G 是紧李群, 其李代数 $\mathfrak{g}$ 半单, $\mathfrak{t}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的一个嘉当子代数, 取定 $\Delta(\mathfrak{g}_\mathbb{C})$ 的单根系 $\Pi = \{\alpha_i\}$. 考虑由关系式 $2\dfrac{B(\pi_i, \alpha_j)}{B(\alpha_j, \alpha_j)} = \delta_{ij}$ 所确定的基本权 $\pi_i \in (i\mathfrak{t})^*$.

(a) 证明: $\{\alpha_i\}$ 是根格 R 的 $\mathbb{Z}$-基; $\{\pi_i\}$ 是代数整权格 P 的 $\mathbb{Z}$-基.

(b) 证明: $\big(B(\alpha_i, \alpha_j)\big)$ 是正定矩阵, 从而 $\det\left(2\dfrac{B(\alpha_i, \alpha_j)}{B(\alpha_j, \alpha_j)}\right) > 0$.

(c) 自由阿贝尔群的理论 [见 [3]] 表明, 存在 P 的 $\mathbb{Z}$-基 $\{\lambda_i\}$ 以及 $k_i \in \mathbb{Z}$, 使得 $\{k_i\lambda_i\}$ 是 R 的 $\mathbb{Z}$-基. 注意基 $\{\lambda_i\}$ 与 $\{\pi_i\}$ 的之间的过渡矩阵是整系数矩阵, 其行列式为 ± 1. 由此证明: $|P/R| = \det\left(2\dfrac{B(\alpha_i,\alpha_j)}{B(\alpha_j,\alpha_j)}\right)$. 矩阵 $\left(2\dfrac{B(\alpha_i,\alpha_j)}{B(\alpha_j,\alpha_j)}\right)$ 称为 $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ 的 **嘉当矩阵** (Cartan matrix) .

习题 6.43 设 G 是紧李群, 其李代数 $\mathfrak{g}$ 半单, $\mathfrak{t}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的一个嘉当子代数, 取定 $\Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$ 的单根系 $\Pi = \{\alpha_i\}$. 对每个 $\beta \in \Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$, 取相应的 $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$-三元组 $\{E_\beta, H_\beta, F_\beta\}$. 记 $h := \sum\limits_{\beta\in\Delta^+(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})} h_\beta$. 则存在正整数 k_i 使得 $h = \sum\limits_{\alpha_i\in\Pi} k_i H_{\alpha_i}$. 令 $e := \sum\limits_i \sqrt{k_i} E_{\alpha_i}$, $f := \sum\limits_i \sqrt{k_i} F_{\alpha_i}$, $\mathfrak{s} := \mathrm{span}_{\mathbb{C}}\{e,h,f\}$.

(a) 证明: $\dfrac{B(h,h_{\alpha_i})}{B(h_{\alpha_i},h_{\alpha_i})} = 1$. [提示: 利用习题 6.34] .

(b) 证明: $\mathfrak{s} \cong \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$. 子代数 $\mathfrak{s}$ 称为 $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ 的 **主三维子代数** (principal three-dimensonal subalgebra) .

习题 6.44 设 G 是紧李群, 其李代数 $\mathfrak{g}$ 半单, T 是 G 的一个极大环. 取定 $i\mathfrak{t}$ 的一个外尔房 C, 记 $N_G(C) = \{g \in G \,|\, \mathrm{Ad}(g)C = C\}$. 证明: 包含映射 $N_G(C) \hookrightarrow G$ 诱导同构 $N_G(C)/T \cong G/G^0$.

7 最高权理论

Peter-Weyl 定理表明, 紧李群 G 上的 L^2 函数空间里含有 G 的全部不可约表示. 但还有两个重要问题待解决. 其一是如何用合适的方式将 $\widehat{G}$ 参数化, 其二是如何分别, 具体地构造出 G 的每一个不可约表示. 这两个问题都与**最高权**理论密切相关.

7.1 最高权

在本小节, G 为紧李群, T 是 G 的一个极大环, $\Delta^+(\mathfrak{g}_\mathbb{C})$ 是关于给定单根系 $\Pi(\mathfrak{g}_\mathbb{C})$ 的正根系. 记

$$\mathfrak{n}^\pm := \bigoplus_{\alpha\in\Delta^\pm(\mathfrak{g}_\mathbb{C})} \mathfrak{g}_\alpha,$$

于是由根空间分解,

$$\mathfrak{g}_\mathbb{C} = \mathfrak{n}^- \oplus \mathfrak{t}_\mathbb{C} \oplus \mathfrak{n}^+, \tag{7.1}$$

这称为李代数 $\mathfrak{g}_\mathbb{C}$ 的 **三角分解** (triangular decomposition) . 之所以叫做三角分解, 是因为当 $G = \mathrm{GL}(n,\mathbb{F})$ 时, $\mathfrak{n}^\pm$ 可以分别实现为上三角阵与下三角阵. 此外再注意 $[\mathfrak{t}_\mathbb{C} \oplus \mathfrak{n}^+, \mathfrak{n}^+] \subseteq \mathfrak{n}^+$, $[\mathfrak{t}_\mathbb{C} \oplus \mathfrak{n}^-, \mathfrak{n}^-] \subseteq \mathfrak{n}^-$.

定义 7.2. 设 V 是 $\mathfrak{g}$ 的表示, 具有权空间分解 $V = \bigoplus_{\lambda\in\Delta(V)} V_\lambda$.

1. 非零向量 $v \in V_{\lambda_0}$ 称为权 λ_0 的关于 $\Delta^+(\mathfrak{g}_\mathbb{C})$ 的 **最高权向量** *(highest weight vector)* , 如果 $\mathfrak{n}^+ v = 0$, 换言之, 对任意 $X \in \mathfrak{n}^+$, $Xv = 0$. 此时, λ_0 称为 V 的 **最高权** *(highest weight)* .
2. 权 $\lambda \in \Delta(V)$ 称为 **支配权** *(dominant weight)* , 如果对任意单根 $\alpha \in \Pi(\mathfrak{g}_\mathbb{C})$ 都成立 $B(\lambda,\alpha) \geq 0$, 换言之, λ 位于 $\Delta^+(\mathfrak{g}_\mathbb{C})$ 的外尔房的闭包.

考察最入门的例子: $\mathfrak{su}(2)_\mathbb{C} = \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ 在 $V_n(\mathbb{C}^2)$, $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ 上的作用. 回

忆(**6.7**)式,

$$\begin{aligned} E.(z_1^k z_2^{n-k}) &= -kz_1^k z_2^{n-k+1} \\ H.(z_1^k z_2^{n-k}) &= (n-2k)z_1^k z_2^{n-k} \\ F.(z_1^k z_2^{n-k}) &= (k-n)z_1^{k+1} z_2^{n-k-1}, \end{aligned}$$

再注意 $\{V_n(\mathbb{C}^2) \mid n \geq 0\}$ 是 $\mathrm{SU}(2)$ 的全部不可约表示. 取 $i\mathfrak{t} = \{\mathrm{diag}(-\theta,\theta) \mid \theta \in \mathbb{R}\}$, 根系 $\Delta(\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})) = \{\pm\varepsilon_{12}\}$, 其中 $\varepsilon_{12}\colon \mathrm{diag}(\theta,-\theta) \mapsto 2\theta$. 取正根系 $\Delta^+(\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})) = \{\varepsilon_{12}\}$. 容易验证, z_2^n 是 $V_n(\mathbb{C}^2)$ 的最高权向量, 相应的最高权为 $\frac{n}{2}\varepsilon_{12}$. 注意 $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ 的全体支配解析整权恰为 $\left\{\frac{n}{2}\varepsilon_{12} \,\middle|\, n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\right\}$, 于是 $\mathrm{SU}(2)$ 的不可约表示与支配解析整权之间有自然的一一对应. 一般地, 我们将在定理7.34中证明, 上述一一对应适用于所有的连通紧李群.

定理 7.3. *设 G 是连通紧李群, V 是 G 的不可约表示, 则:*

1. *V 存在唯一的最高权 λ_0.*
2. *最高权 λ_0 是支配解析整权, 即 $\in A(T)$ 中的支配权.*
3. *最高权向量在相差常数倍意义下唯一.*
4. *任何权 $\lambda \in \Delta(V)$ 必形如*

$$\lambda = \lambda_0 - \sum_{\alpha_i \in \Pi(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})} n_i \alpha_i,$$

   其中 $n_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$.
5. *对任意 $w \in W(G) \cong W(\Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}))$, $wV_\lambda = V_{w\lambda}$, 特别地, $\dim V_\lambda = \dim V_{w\lambda}$.*
6. *在基灵型诱导的范数意义下, $\|\lambda\| \leq \|\lambda_0\|$, $\forall \lambda \in \Delta(V)$. 上述等号成立当且仅当存在 $w \in W(\Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}))$ 使得 $\lambda = w\lambda_0$.*
7. *在同构意义下, V 由最高权 λ_0 唯一确定.*

证明. 因为 V 的维数有限, 以及定理(6.11), 从而易知最高权 λ_0 存在. 设 v_0 是权 λ_0 的最高权向量, 记子空间 $V_0 := \mathbb{C}v_0$, 归纳定义 $V_n := V_{n-1} + \mathfrak{n}^- V_{n-1}$. 于是, $V_\infty := \bigcup_{n=0}^{\infty} V_n$ 是 $(\mathfrak{n}^- \oplus \mathfrak{t}_{\mathbb{C}})$-不变子空间. 对于 $\alpha \in \Pi(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$, 注意 $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{n}^-] \subseteq \mathfrak{n}^- \oplus \mathfrak{t}_{\mathbb{C}}$,

并且 $\mathfrak{g}_\alpha V_0=0$, 从而容易归纳证明 $\mathfrak{g}_\alpha V_n\subseteq V_n$. 由此可知, V_∞ 是 $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$-不变子空间. 从而 V 的不可约性表明 $V=V_\infty$, 这就证明了 (4).

若 λ_1 也是最高权, 则 $\lambda_1=\lambda_0-\sum n_i\alpha_i$, $\lambda_0=\lambda_1-\sum m_i\alpha_i$, 其中 $n_i,m_i\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$. 消去 λ_0 与 λ_1, 整理得 $-\sum n_i\alpha_i=\sum m_i\alpha_i$, 从而 $-n_i=m_i$, $n_i=m_i=0$, 因此 $\lambda_0=\lambda_1$. 此外, 权空间分解表明 $V_\infty\cap V_{\lambda_0}=V_0=\mathbb{C}v_0$, 这就证明了 (1),(3).

(5) 的证明与定理6.36类似, 这里从略. 下证 (2). 由 (5) 可知 $r_{\alpha_i}\lambda_0$ 也是 V 的权, 因此存在 $n_j\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$ 使得

$$\lambda_0-2\frac{B(\lambda_0,\alpha_i)}{B(\alpha_i,\alpha_i)}\alpha_i=\lambda_0-\sum_{\alpha_j\in\Pi(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})}n_j\alpha_j,$$

因此 $2\dfrac{B(\lambda_0,\alpha_i)}{B(\alpha_i,\alpha_i)}=n_i\geq 0$, 故 $B(\lambda_0,\alpha_i)\geq 0$, 所以 λ_0 是支配权. 与定理6.27相同的方法可以证明 λ_0 是解析整权 [其实 V 的所有的权都是解析整权] .

再来证明 (6). 对任意 $\lambda\in\Delta(V)$, 注意定理6.43, 考虑外尔群的作用, 不妨 λ 是支配权. 记 $\lambda=\lambda_0-\sum n_i\alpha_i$, 注意 λ 是支配权, 有

$$\begin{aligned}\|\lambda_0\|^2 &= \|\lambda\|^2+2\sum_{\alpha_i\in\Pi(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})}n_iB(\lambda,\alpha_i)+\|\sum_{\alpha_i\in\Pi(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})}n_i\alpha_i\|^2\\ &\geq \|\lambda\|^2+\|\sum_{\alpha_i\in\Pi(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})}n_i\alpha_i\|^2\geq\|\lambda\|^2.\end{aligned}$$

若等号成立, 则 $\displaystyle\sum_{\alpha_i\in\Pi(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})}n_i\alpha_i=0$, 从而 $n_i=0$, $\lambda=\lambda_0$.

最后证 (7). 若 G 的不可约表示 V' 的最高权也是 λ_0, 记 $v_0'\in V'$ 是相应的最高权向量, $W:=V\oplus V'$, 令 $W_0:=\mathbb{C}(v_0,v_0')$, 归纳定义 $W_n:=W_{n-1}+\mathfrak{n}^-W_{n-1}$. 与前文类似可知, $W_\infty:=\displaystyle\bigcup_{n=0}^{\infty}W_n$ 是 W 的子表示. 若 U 为 W_∞ 的非零不可约子表示, 则 U 具有最高权, 记 (u_0,u_0') 是 U 的最高权向量, 则容易验证 u_0,u_0' 分别是 V,V' 的最高权向量. 于是由 (1) 可知 $\mathbb{C}(u_0,u_0')=W_0$, 因此 $U=W_\infty$. 这就证明了 W_∞ 不可约. 因此 W_∞ 沿两个分量的投影映射诱导 G-模同构 $V\cong V'$. □

上述定理表明最高权能够完全分类 (连通) 紧李群的不可约表示. 我们还需要搞明白哪些权可以作为某个不可约表示的最高权. 事实上, 我们将在 §7.3.5 小节证明 G 的不可约表示一一对应于 G 的支配解析整权.

定义 7.4. 设 G 是连通紧李群, V 是 G 的不可约表示, λ 是 V 的最高权. 由于 V 被最高权 λ 唯一确定, 我们习惯将 V 记作 $V(\lambda)$, 并且记 χ_λ 为 $V(\lambda)$ 的特征标.

引理 7.5. 设 G 是连通紧李群, $V(\lambda)$ 是 G 的不可约表示, 则成立 G-模同构 $V(\lambda)^* \cong V(-w_0\lambda)$, 其中 $w_0 \in W(\Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}))$ 是将正根系变为负根系的唯一元素 *[见习题 6.40]* .

证明. 因为 $V(\lambda)$ 不可约, 从而有特征标理论 [定理3.5与定理3.7] 知对偶表示 $V(\lambda)^*$ 不可约. 因此只需证明 $V(\lambda)^*$ 的最高权是 $-w_0\lambda$.

取定 $V(\lambda)$ 的 G-不变内积 $(\cdot,\cdot)$, 则 $V(\lambda)^* = \{\mu_v \,|\, v \in V(\lambda)\}$, 其中 $\mu_v(v') = (v,v')$, $\forall v' \in V(\lambda)$. 由 $(\cdot,\cdot)$ 的 G-不变性, 容易验证 $g\mu_v = \mu_{gv}$, $\forall g \in G$, 求微分可得 $X\mu_v = \mu_{Xv}$, $\forall X \in \mathfrak{g}$. 注意 $(\cdot,\cdot)$ 是厄米特内积, 从而 $\forall Z \in \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$, 成立 $Z\mu_v = \mu_{\theta(Z)v}$.

记 v_λ 为 $V(\lambda)$ 的最高权向量. 通过(**6.35**)的 Ad-作用, 自然将 $W(G)$ 与 $W(\Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})^\vee)$ 与 $W(\Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}))$ 等同 [见定理6.43] . 而定理7.3表明 w_0v_λ 是属于权 $w_0\lambda$ 的权向量 [称为 最低权向量 (lowest weight vector)] . 注意对于 $Y \in i\mathfrak{t}$, $\theta Y = -Y$, 并且权是 $i\mathfrak{t}$ 上的实值函数, 因此 $\mu_{w_0v_\lambda}$ 是属于权 $-w_0\lambda$ 的权向量.

剩下只需证明 $\mathfrak{n}^-w_0v_\lambda = 0$. 引理6.14表明 $\theta\mathfrak{n}^+ = \mathfrak{n}^-$, 再注意 $w_0\Delta^+(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}) = \Delta^-(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$ 并且 $w_0^2 = I$, 因此 $\mathrm{Ad}(w_0)\mathfrak{n}^- = \mathfrak{n}^+$. 于是

$$\mathfrak{n}^-w_0v_\lambda = w_0\big(\mathrm{Ad}(w_0^{-1})\mathfrak{n}^-\big)v_\lambda = w_0\mathfrak{n}^+v_\lambda = 0,$$

引理得证. □

7.1.1 习题

习题 7.1 考察 $\mathrm{SU}(n)$ 在 $\bigwedge^p\mathbb{C}^n$ 上的作用. 取 $\mathrm{SU}(n)$ 的极大环 T 为其中对角矩阵之全体. 试验证: $\{e_{l_1}\wedge\cdots e_{l_p}\}$ 均为该表示的权向量, 相应的权分别为 $\sum_{i=1}^{p}\varepsilon_{l_i}$, 并且

这些权向量构成该表示的一组基. 进而验证: $\bigwedge^p \mathbb{C}^n$ 的最高权向量只有 $e_1 \wedge \cdots \wedge e_p$, 从而 $\bigwedge^p \mathbb{C}^n$ 是 $\mathrm{SU}(n)$ 的关于最高权 $\sum_{i=1}^{p} \varepsilon_i$ 的不可约表示.

习题 7.2 我们回忆, $V_p(\mathbb{R}^n)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的 p 次齐次复系数多项式之全体, $\mathcal{H}_p(\mathbb{R}^n)$ 是其中的调和多项式构成的子空间, 这两个空间都有自然的 $\mathrm{SO}(n)$-模结构. $\mathrm{SO}(n)$ 的极大环 T 已经在 §5.1.2.3 与 §5.1.2.4 小节给出. 记 $h_j := E_{2j-1,2j} - E_{2j,2j-1} \in \mathfrak{t}$, $1 \le j \le m := \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. [$h_j$ 无非是 $\begin{pmatrix} & 1 \\ -1 & \end{pmatrix}$ 在 $\mathfrak{t}$ 中的适当的嵌入] , 再令 $\varepsilon_j \in \mathfrak{t}^*$, 使得 $\varepsilon_j(h_{j'}) = -i\delta_{j,j'}$. [详见习题 6.14] .

(a) 证明: h_j 在 $V_p(\mathbb{R}^n)$ 上的作用相当于算子 $-x_{2j}\dfrac{\partial}{\partial x_{2j-1}} + x_{2j-1}\dfrac{\partial}{\partial x_{2j}}$.

(b) 若 $n = 2m+1$ 为奇数, 则

$$(x_1 + ix_2)^{j_1} \cdots (x_{2m-1} + ix_{2m})^{j_m} (x_1 - ix_2)^{k_1} \cdots (x_{2m-1} - ix_{2m})^{k_m} x_{2m+1}^{l_0}$$

(其中 $l_0 + \sum_i (j_i + k_i) = p$) 都是 $V_p(\mathbb{R}^n)$ 的权向量, 相应的权分别为 $\sum_i (k_i - j_i)\varepsilon_i$, 并且它们构成 $V_p(\mathbb{R}^n)$ 的一组基.

(c) 若 $n = 2m$ 为偶数, 则

$$(x_1 + ix_2)^{j_1} \cdots (x_{2m-1} + ix_{2m})^{j_m} (x_1 - ix_2)^{k_1} \cdots (x_{2m-1} - ix_{2m})^{k_m}$$

(其中 $\sum_i (j_i + k_i) = p$) 都是 $V_p(\mathbb{R}^n)$ 的权向量, 相应的权分别为 $\sum_i (k_i - j_i)\varepsilon_i$, 并且它们构成 $V_p(\mathbb{R}^n)$ 的一组基.

(d) 回忆 $\mathfrak{so}(n,\mathbb{C})$ 的根系, 并注意定理2.33, 证明当 $n \ge 3$ 时, $(x_1 - ix_2)^p$ 时 $\mathcal{H}_p(\mathbb{R}^n)$ 的最高权向量, 相应的最高权为 $p\varepsilon_1$.

(e) 利用引理2.27, 证明 $(p-2j)\varepsilon_1$, $0 \le j \le m$ 是 $V_p(\mathbb{R}^n)$ 的所有最高权, 相应的最高权向量分别为 $(x_1 - ix_2)^{p-2j}\|x\|^{2j}$.

习题 7.3 考虑 $\mathrm{SO}(n)$ 在 $\bigwedge^p \mathbb{C}^n$ 上的自然作用, 沿用上一题的记号.

(a) 若 $n = 2m+1$, 注意 $\{e_{2j-1} \pm ie_{2j} \,|\, 1 \le j \le m\} \cup \{e_{2m+1}\}$ 构成 $\mathbb{C}^n$ 的一组基. 利用这组基, 试显式写出 $\bigwedge^p \mathbb{C}^n$ 的权向量 [相应的权形如 $\pm\varepsilon_{j_1} \cdots \pm \varepsilon_{j_r}$,

$1 \le j_1 < \cdots < j_r \le m$.] 对于 $p \le m$, 证明 $\bigwedge^p \mathbb{C}^n$ 具有唯一的最高权 $\sum_{i=1}^{p} \varepsilon_i$, 因此 $\bigwedge^p \mathbb{C}^n$ 是关于最高权 $\sum_{i=1}^{p} \varepsilon_i$ 的不可约表示.

(b) 若 $n = 2m$, 注意 $\{e_{2j-1} \pm ie_{2j} \,|\, 1 \le j \le m\}$ 构成 $\mathbb{C}^n$ 的一组基. 利用这组基, 试显式写出 $\bigwedge^p \mathbb{C}^n$ 的权向量. 当 $p < m$ 时, $\bigwedge^p \mathbb{C}^n$ 具有唯一的最高权 $\sum_{i=1}^{p} \varepsilon_i$; 而当 $p = m$ 时, $\sum_{i=1}^{p} \varepsilon_i$ 有两个最高权: $\sum_{i=1}^{m-1} \varepsilon_i \pm \varepsilon_m$, 从而 $\bigwedge^m \mathbb{C}^n$ 可分解为两个不可约表示的直和.

习题 7.4 设 G 是紧李群, T 是 G 的极大环, 取定关于 $\mathfrak{t}_{\mathbb{C}}$ 的单根系 $\Pi(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$, 相应的正根系记作 $\Delta^+(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$.

(a) 若 $V(\lambda)$ 与 $V(\lambda')$ 均为 G 的不可约表示, 证明:

$$\Delta(V(\lambda) \otimes V(\lambda')) = \left\{\mu + \mu' \,\middle|\, \mu \in \Delta(V(\lambda)),\, \mu' \in \Delta(V(\lambda'))\right\}.$$

(b) 考察最高权向量, 证明 $V(\lambda + \lambda')$ 在 $V(\lambda) \otimes V(\lambda')$ 的不可约直和分解当中恰出现一次.

(c) 证明: 若 $V(\nu)$ 是 $V(\lambda) \otimes V(\lambda')$ 的一个直和项, 则存在 $\mu' \in \Delta(V(\lambda'))$ 使得 $\nu = \lambda + \mu'$.

习题 7.5 回忆习题 2.35 所介绍的 $V_{p,q}(\mathbb{C}^n)$, 即关于 $z_1, ..., z_n$ p 次齐次且关于 $\overline{z_1}, ..., \overline{z_n}$ q 次齐次的多项式之全体. $\mathrm{SU}(n)$ 在该空间上有自然的作用. $\mathcal{H}_{p,q}(\mathbb{C}^n)$ 是 $V_{p,q}(\mathbb{C}^n)$ 中的调和多项式构成的子空间, 它是 $\mathrm{SU}(n)$ 的不可约表示.

(a) 对于 $H = \mathrm{diag}(t_1, ..., t_n) \in i\mathfrak{t}$, 其中 $\sum_j t_j = 0$, 试验证: H 在 $V_{p,q}(\mathbb{C}^n)$ 上的作用相当于算子 $\sum_j t_j \left(\overline{z_j}\frac{\partial}{\partial \overline{z_j}} - z_j \frac{\partial}{\partial z_j}\right)$.

(b) 验证: $z_1^{k_1} \cdots z_n^{k_n} \overline{z_1}^{l_1} \cdots \overline{z_n}^{l_n}$, $\sum_j k_j = p$, $\sum_j l_j = q$ 是 $V_{p,q}(\mathbb{C}^n)$ 的权向量, 相应的权为 $\sum_j (l_j - k_j)\varepsilon_j$.

(c) 证明: $-p\varepsilon_n$ 是 $V_{p,0}(\mathbb{C}^n)$ 的一个最高权.

(d) 证明: $q\varepsilon_1$ 是 $V_{0,q}(\mathbb{C}^n)$ 的一个最高权.

(e) 证明: $\mathcal{H}_{p,q}(\mathbb{C}^n)$ 的最高权是 $q\varepsilon_1 - p\varepsilon_n$.

习题 7.6 我们回忆, 当 $n \geq 3$ 时, $\mathrm{Spin}_n(\mathbb{R})$ 是 $\mathrm{SO}(n)$ 的万有覆盖, $\mathrm{Spin}_n(\mathbb{R})$ 的李代数自然同构于 $\mathfrak{so}(n)$. [在习题 5.5 中我们给出了 $\mathrm{Spin}_n(\mathbb{R})$ 的极大环] .

(a) 若 $n = 2m+1$ 为奇数, 证明: 旋表示 S 的权集 $\Delta(S) = \{\frac{1}{2}(\pm\varepsilon_1 \pm \cdots \pm \varepsilon_m)\}$, 其中最高权为 $\frac{1}{2}(\varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_m)$.

(b) 若 $n = 2m$ 为偶数, 则半旋表示 S^+ 的权集

$$\Delta(S^+) = \left\{\frac{1}{2}(\pm\varepsilon_1 \pm \cdots \pm \varepsilon_m) \,\middle|\, \text{其中取负号的有偶数项}\right\},$$

其中最高权为 $\frac{1}{2}(\varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_{m-1} + \varepsilon_m)$.

(c) 若 $n = 2m$ 为偶数, 则半旋表示 S^- 的权集

$$\Delta(S^-) = \left\{\frac{1}{2}(\pm\varepsilon_1 \pm \cdots \pm \varepsilon_m) \,\middle|\, \text{其中取负号的有奇数项}\right\},$$

其中最高权为 $\frac{1}{2}(\varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_{m-1} - \varepsilon_m)$.

7.2　外尔积分公式

设 G 为连通紧李群, T 是 G 的一个极大环, $f \in C(G)$. 我们将证明如下著名的**外尔积分公式** (Weyl integration formula) [定理7.16] :

$$\int_G f(g)\,\mathrm{d}g = \frac{1}{|W(G)|}\int_T d(t)\int_{G/T} f(gtg^{-1})\,\mathrm{d}gT\,\mathrm{d}t,$$

其中对于 $t \in T$, $d(t) := \prod_{\alpha\in\Delta^+(\mathfrak{g}_\mathbb{C})} |1 - \xi_{-\alpha}(t)|^2$. 注意(**1.42**)式, 此公式的证明要用到换元 $\psi\colon G/T \times T \to G$, $(gT, t) \mapsto gtg^{-1}$. 为保证其证明过程中的某些步骤的合法性, 我们需要考虑 G 的某个特定的稠密开集, 这个稠密开集中的元素称为**正则元**.

7.2.1　正则元

设 G 为紧李群, T 是 G 的极大环, $X \in \mathfrak{g}$. 回忆定义5.8: 若 $\mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(X)$ 是 $\mathfrak{g}$ 的嘉当子代数, 则称 X 为 $\mathfrak{g}$ 的正则元. 再回忆定理6.27: 解析整权构成的集合 $A(T)$ 与特征群 $\chi(T)$ 之间有一一对应 $\lambda \in A(T) \mapsto \xi_\lambda \in \chi(T)$, 使得对任意 $H \in \mathfrak{t}$,

$$\xi_\lambda(\exp H) = e^{\lambda(H)}.$$

定义 7.6. *设 G 是连通紧李群, T 是 G 的极大环.*

1. *G 中的元素 g 称为***正则元***, 如果 $Z_G(g)^0$ 是极大环.*
2. *记 $\mathfrak{g}^{\mathrm{reg}}$ 为 $\mathfrak{g}$ 的正则元之全体; 记 G^{reg} 为 G 的正则元之全体.*
3. *对于 $t \in T$, 记*
$$d(t) := \prod_{\alpha \in \Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})} (1 - \xi_{-\alpha}(t)).$$

定理 7.7. *设 G 是连通紧李群, T 是 G 的极大环.*

1. *$\mathfrak{g}^{\mathrm{reg}}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的稠密开子集.*
2. *G^{reg} 是 G 的稠密开子集.*
3. *对于 $t \in T$, 则 $t \in T^{\mathrm{reg}}$ 当且仅当 $d(t) \neq 0$.*
4. *对于 $H \in \mathfrak{t}$, 则 $e^H \in G^{\mathrm{reg}}$ 当且仅当*
$$H \in \Xi := \{H \in \mathfrak{t} \,|\, \alpha(H) \notin 2\pi i\mathbb{Z}, \forall \alpha \in \Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})\}.$$
5. *$G^{\mathrm{reg}} = \bigcup_{g \in G} (gT^{\mathrm{reg}}g^{-1})$.*

证明. 记 $\mathfrak{g}$ 的维数为 n, $\mathfrak{g}$ 的嘉当子代数的维数为 l. 注意 $\mathfrak{g}$ 中的任何元素 X 都至少包含于某个嘉当子代数, 因此 $\dim\ker(\operatorname{ad} X) \geq l$, 于是算子 $\operatorname{ad} X$ 的特征多项式必形如

$$\det(\operatorname{ad} X - \lambda I) = \sum_{k=l}^{n} c_k(X)\lambda^k,$$

其中 $c_k(X)$ 是关于 X 的多项式. 注意算子 $\operatorname{ad} X$ 可对角化, 所以 X 是正则元当且仅当 $\dim\ker(\operatorname{ad} X) = l$. 特别地, X 是正则元当且仅当 $c_l(X) \neq 0$. 所以 $\mathfrak{g}^{\mathrm{reg}}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的开子集. 此外, 注意多项式函数若在某个开集恒为零, 则这个多项式必为零, 这表明 $\mathfrak{g}^{\mathrm{reg}}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的稠密子集.

再证 (2). 类似地, 注意 G 中任何元素 g 都至少包含于某个极大环, 从而 $\dim\ker(\operatorname{Ad}(g) - I) \geq l$. 因此

$$\det(\operatorname{Ad}(g) - \lambda I) = \sum_{k=l}^{n} \widetilde{c}_k(g)(\lambda - 1)^k,$$

其中 $\widetilde{c}_k(g)$ 是 G 上的光滑函数. 回忆习题 4.22, 李子群 $Z_G(g)$ 的李代数为 $\mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(g) := \{X \in \mathfrak{g} \,|\, \operatorname{Ad}(g)X = X\}$. 再注意到 $Z_G(g)^0$ 是极大环当且仅当 $\mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(g)$ 是嘉当子代数. 又因为 $\operatorname{Ad}(g)$ 可对角化, 从而 $g \in G^{\mathrm{reg}}$ 当且仅当 $\widetilde{c}_l(g) \neq 0$. 因此 G^{reg} 是 G 的开子集.

为证明 G^{reg} 的稠密性, 取定 G 的极大环 T. 对于 $H \in \mathfrak{t}$, 注意 $\operatorname{Ad}(e^H)$ 的特征值都形如 $e^{\alpha(H)}$, 其中 $\alpha \in \Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}) \cup \{0\}$. 因此 $e^H \in G^{\mathrm{reg}}$ 当且仅当 $H \in \Xi$. 注意 Ξ 可由 $\mathfrak{t}$ 挖去可数个超平面得到, 从而由 **Baire 纲定理**可知 Ξ 是 $\mathfrak{t}$ 的稠密子集. 又因为指数映射 $\exp$ 是连续满射, 从而 T^{reg} 在 T 中稠密. 而极大环定理表明 $G = \bigcup_{g\in G}(gTg^{-1})$, 考察 $\operatorname{Ad}(g)$ 的特征值可知 $G^{\mathrm{reg}} = \bigcup_{g\in G}(gT^{\mathrm{reg}}g^{-1})$. 于是, 由 T^{reg} 在 T 中稠密立刻推出 G^{reg} 在 G 中稠密. □

定义 7.8. *设 G 为连通紧李群, T 是 G 的极大环. 令*

$$\begin{aligned} \psi\colon G/T \times T &\to G \\ (gT, t) &\mapsto gtg^{-1}, \end{aligned}$$

易知 ψ 是光滑满射. 我们允许混用记号, 把它的限制映射 $G/T \times T^{\mathrm{reg}} \to G^{\mathrm{reg}}$ (仍为光滑满射) 也记为 ψ.

对于 $t \in T$, $g \in G$, 我们将需要验证映射 ψ 的微分 $\mathrm{d}\psi\colon T_{gT}(G/T) \times T_t(T) \to T_{gtg^{-1}}(G)$ 的可逆性. 为研究 $\mathrm{d}\psi$, 我们适当选取 G/T 的局部坐标卡, 建立 $G/T \times T$ 与 G 的局部微分同胚. 记 $\pi\colon G \to G/T$ 为典范投影映射.

引理 7.9. 设 G 为连通紧李群, T 是 G 的极大环. 则 $\mathfrak{g} = \mathfrak{t} \oplus \left(\mathfrak{g} \cap \bigoplus_{\alpha\in\Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})} \mathfrak{g}_\alpha\right)$, 并且存在 $0 \in \left(\mathfrak{g} \cap \bigoplus_{\alpha\in\Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})} \mathfrak{g}_\alpha\right)$ 的邻域 $U_{\mathfrak{g}}$, 记 $U_G := \exp U_{\mathfrak{g}}$, $U_{G/T} = \pi U_G$, 使得以下成立:

1. 复合映射 $U_{\mathfrak{g}} \xrightarrow{\exp} U_G \xrightarrow{\pi} U_{G/T}$ 是微分同胚.
2. $U_{G/T}$ 是 $eT \in G/T$ 的开邻域.
3. $U_G T := \{gt \,|\, g \in U_G, t \in T\}$ 是 $e \in G$ 的开邻域.
4. 映射 $\xi\colon U_G T \to G/T \times T$, $gt \mapsto (gT, t)$ 是良定的光滑映射, 并且诱导 $U_G T$ 与 $U_{G/T} \times T$ 的微分同胚.

证明. 由定理6.20可知 $\mathfrak{g} = \mathfrak{t} \oplus \left(\mathfrak{g} \cap \bigoplus_{\alpha\in\Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})} \mathfrak{g}_\alpha\right)$. 事实上, $\left(\mathfrak{g} \cap \bigoplus_{\alpha\in\Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})} \mathfrak{g}_\alpha\right)$ 由 $\{\mathcal{J}_\alpha, \mathcal{K}_\alpha \,|\, \alpha \in \Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})\}$ 张成. 对于 $H \in \mathfrak{t}$, $X \in \left(\mathfrak{g} \cap \bigoplus_{\alpha\in\Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})} \mathfrak{g}_\alpha\right)$, 注意映射 $(H, X) \mapsto e^H e^X$ 是 $(0,0)$ 附近的局部微分同胚, 从而存在 $0 \in \left(\mathfrak{g} \cap \bigoplus_{\alpha\in\Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})} \mathfrak{g}_\alpha\right)$ 的开邻域 $U_{\mathfrak{g}}$ 使得 $\exp\colon U_{\mathfrak{g}} \to U_G$ 是微分同胚.

再注意切空间 $T_{eT}(G/T)$ 可自然等同为 $\mathfrak{g}/\mathfrak{t}$. 因此由有关构造可知, $\mathrm{d}\pi$ 在子空间 $T_e(U_G)$ 上的限制是可逆的, 因此 π 在 U_G 上的限制映射是 $e \in U_G$ 处的局部微分同胚. 综上, 不妨适当缩小 $U_{\mathfrak{g}}$ 与 U_G, 使得 $U_{G/T}$ 是 $eT \in G/T$ 的开邻域, 从而复合映射 $U_{\mathfrak{g}} \xrightarrow{\exp} U_G \xrightarrow{\pi} U_{G/T}$ 是微分同胚. 这就证明了 (1)(2).

再证 (3). 因为 $(H, X) \mapsto e^H e^X$ 是 $(0,0)$ 处的局部微分同胚, 从而 $U_G T$ 是 e 的邻域. 事实上, 取 $V \subseteq T$ 使得 $U_G V$ 是开集, 而 T 是 V 的全体左平移之并, 从而 $U_G T$ 也是开集.

再证 (4). 如果 $gt = g't'$, $g, g' \in U_G$, $t, t' \in T$, 则 $\pi g = \pi g'$, 于是 $g = g'$, 进而 $t = t'$. 因此映射 ξ 良定. 剩下的断言都显然. □

有了引理7.9, 我们将有能力去研究微分 $\mathrm{d}\psi\colon T_{gT}(G/T) \times T_t(T) \to T_{gtg^{-1}}(G)$. 方便起见, 我们使用映射 ξ, 并且通过适当平移将一切有关事项都拉到 $e \in G$ 处.

引理 7.10. 设 G 是连通紧李群, T 是 G 的极大环. 沿用引理7.9的记号, 取定 $U_G \subseteq G$. 对于给定的 $g \in G$, $t \in T$, 记映射 $\phi\colon U_G T \to G$ 为

$$\phi := l_{gt^{-1}g^{-1}} \circ \psi \circ (l_{gT} \times l_t) \circ \xi,$$

其中 ξ 的定义见引理7.9. 则 $\mathrm{d}\phi\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ 满足:

$$\mathrm{d}\phi(X+H) = \mathrm{Ad}(g)\left[(\mathrm{Ad}(t^{-1}) - I)X + H\right],$$

$\forall H \in \mathfrak{t}$, $\forall X \in \left(\mathfrak{g} \cap \bigoplus_{\alpha \in \Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})} \mathfrak{g}_\alpha\right)$; 此外, 还满足

$$\det(\mathrm{d}\phi) = d(t).$$

证明. 直接计算, 可知

$$\mathrm{d}\phi(H) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\phi(e^{sH})\Big|_{s=0} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} g e^{sH} g^{-1}\Big|_{s=0} = \mathrm{Ad}(g)H,$$

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\phi(X) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\phi(e^{sX})\Big|_{s=0} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} g t^{-1} e^{sX} t e^{-sX} g^{-1}\Big|_{s=0} \\ &= \mathrm{Ad}(gt^{-1})X - \mathrm{Ad}(g)X,\end{aligned}$$

再注意 $\mathrm{d}\phi$ 是线性映射即可. 接下来计算 $\mathrm{d}\phi$ 的行列式. 首先注意 $\det \mathrm{Ad}(g) = 1$, 这是因为以下三点: (1). 复化之后的行列式保持不变; (2). 任何 $g \in G$ 都位于某个极大环; (3). 若 $\alpha \in \Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$, 则 $-\alpha \in \Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$. 于是只需证明如下命题: $(\mathrm{Ad}(t^{-1})-I)$ 在 $\bigoplus_{\alpha \in \Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})} \mathfrak{g}_\alpha$ 上的限制映射的行列式等于 $\prod_{\alpha \in \Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})} (1 - e^{-\alpha(H)})$. 注意 $\dim \mathfrak{g}_\alpha = 1$, 并且 $\mathrm{Ad}(t^{-1})$ 在 $\mathfrak{g}_\alpha$ 上的限制为标量算子 $e^{-\alpha(\ln t)}$, 其中 $\ln t \in \mathfrak{t}$ 满足 $e^{\ln t} = t$. 接下来的计算验证是容易的, 特别注意结果中的某个负号, 还要注意 $\Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$ 的元素个数为偶数 [因为 $\Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}) = \Delta^+(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}) \coprod \Delta^-(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$] . □

定理 7.11. 设 G 为连通紧李群, T 是 G 的极大环, 则映射

$$\begin{aligned}\psi\colon G/T\times T^{\mathrm{reg}} &\to G^{\mathrm{reg}}\\ (gT,t) &\mapsto gtg^{-1}\end{aligned}$$

是满射, 局部微分同胚, 并且 $|\psi^{-1}(g)|=|W(G)|$, $\forall g\in G^{\mathrm{reg}}$.

证明. 对于 $g\in G$, $t\in T^{\mathrm{reg}}$, 由引理7.10与定理7.7可知 ψ 是 (gT,t) 处的局部微分同胚. 此外, 注意到对任意 $w\in N(T)$,

$$\psi(gw^{-1}T,wtw^{-1})=\psi(gT,t). \tag{7.12}$$

因为 $gw^{-1}T=gT$ 当且仅当 $w\in T$, 从而 $|\psi^{-1}(gtg^{-1})|\geq|W(G)|$.

只需再证明 $|\psi^{-1}(gtg^{-1})|\leq|W(G)|$. 若还存在 $h\in G$, $s\in T^{\mathrm{reg}}$ 使得 $gtg^{-1}=hsh^{-1}$, 则由定理6.36, 存在 $w\in N(T)$ 使得 $s=wtw^{-1}$. 将其代入 $gtg^{-1}=hsh^{-1}$, 容易验证 $w':=g^{-1}hw\in Z_G(t)$. 又因为 t 是正则元, 从而必有 $w'\in N(T)$ [这是因为, 记 $T':=c_{w'}T$. 注意 $w'\in Z_G(t)$, 从而容易验证 $T'\subseteq Z_G(t)$. 又因为 T' 也是极大环, 从而 $T'\subseteq Z_G(t)^0$. 而 t 为正则元表明 $Z_G(t)^0=T$, 因此 $T'\subseteq T$, 故 $T'=T$.] 因此

$$(hT,s)=(gw'w^{-1}T,wtw^{-1})=(gw'w^{-1}T,ww'^{-1}tw'w^{-1}).$$

因此 (hT,s) 也是由 (gT,t) 通过(**7.12**)的方式得到, 所以 $|\psi^{-1}(gtg^{-1})|\leq|W(G)|$. □

7.2.2 外尔积分公式

设 G 为连通紧李群, T 是 G 的极大环. 回忆定理1.48: 对任意 $f\in C(G)$ 都成立

$$\int_G f(g)\,\mathrm{d}g=\int_{G/T}\left(\int_T f(gt)\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}(gT).$$

注意上式中的不变测度来自于 [相差正负号意义下] 唯一的左不变体积形式, 相应的体积形式记为 $\omega_G\in\bigwedge^*_{\mathrm{top}}(G)$, 以及 $\omega_{G/T}\in\bigwedge^*_{\mathrm{top}}(G/T)$. 本小节我们通过映射 ψ 作变量替换, 从而证明外尔积分公式. 我们记 $n:=\dim G$, $l:=\dim T$ [当 $\mathfrak{g}$

半单时, l 也称为李群 G 的秩 (rank)] , 再记包含映射 $\iota\colon T\hookrightarrow G$, 以及典范投影 $\pi\colon G\to G/T$.

引理 7.13. *存在 G-不变微分形式 $\widetilde{\omega_T}\in\bigwedge_l^*(G)$, 使得在 ω_T 相差正负号意义下 [这不影响最终的积分] 成立*

$$\omega_T=\iota^*\widetilde{\omega_T},$$

以及

$$\omega_G=(\pi^*\omega_{G/T})\wedge\widetilde{\omega_T}.$$

证明. 注意限制映射 $\iota^*|_e\colon\mathfrak{g}^*\to\mathfrak{t}^*$ 是满射, 从而存在 $(\widetilde{\omega_T})_e\in\bigwedge_l^*(G)_e$ 使得 $\iota^*(\widetilde{\omega_T})_e=(\omega_E)_e$. 通过左平移可将 $(\widetilde{\omega_T})_e$ 唯一延拓为 G 上的左不变 l-形式. 注意 ι 与 G 的左平移交换, 于是容易验证 $\iota^*\widetilde{\omega_T}=\omega_T$. 同样地, 注意 π 也与 G 的左平移交换, 从而 $\pi^*\omega_{G/T}$ 是 G 上的左不变 $(n-l)$-形式. 所以 $(\pi^*\omega_{G/T})\wedge\widetilde{\omega_T}$ 是 G 上的左不变 n-形式. 因此由左不变体积形式的唯一性可知, 存在常数 $c\in\mathbb{R}$ 使得 $(\pi^*\omega_{G/T})\wedge\widetilde{\omega_T}=c\omega_G$.

记坐标投影映射 $\pi_1\colon G/T\times T\to G/T$, 以及 $\pi_2\colon G/T\times T\to T$. 沿用引理7.9的记号, 注意 $\pi|_{U_GT}=\pi_1\circ\xi$, 从而在 U_GT 上成立

$$\pi^*\omega_{G/T}=\xi^*\pi_1^*\omega_{G/T}.$$

同样地, 注意 $\mathrm{id}|_T=\pi_2\circ\xi\circ\iota$, 因此 $\iota^*(\xi^*\pi_2^*\omega_T)=\omega_T$, 因此存在 $\omega\in\bigwedge_l^*(U_GT)$ 使得 $\iota^*\omega=0$, 并且

$$\xi^*\pi_2^*\omega_T=\widetilde{\omega_T}+\omega.$$

断言: 在 U_GT 上成立 $(\pi^*\omega_{G/T})\wedge\omega=0$. 注意 ξ 是 (局部) 微分同胚, 从而该断言等价于 $(\pi_1^*\omega_{G/T})\wedge\omega'=0$, 其中 $\omega'=(\xi^{-1})^*\omega\in\bigwedge_l^*(U_{G/T}\times T)$. 注意 ω' 满足 $\iota^*\xi^*\omega'=0$. 现在, 我们将 $U_{G/T}\times T$ 上的 l-形式 ω' 展开为

$$\omega'=\sum_{j=0}^{l}f_j(\pi_1^*\omega_j')\wedge(\pi_2^*\omega_{l-j}''),$$

其中 f_j 为 $U_{G/T}\times T$ 上的光滑函数, ω_j' 是 $U_{G/T}$ 上的 j-形式, ω_{l-j}'' 是 T 上的 $(l-j)$-形式. 不失一般性, 令 $\pi_1^*\omega_0'=1$. 注意到 $\mathrm{id}|_T=\pi_2\circ\xi\circ\iota$, 以及 $(\pi_1\circ\xi\circ\iota)(t)=$

eT, $\forall t \in T$, 从而容易验证 $0 = \iota^*\xi^*\omega' = f_0\omega_l''$. 因此 $\omega' = \sum_{j=1}^{l} f_j(\pi_1^*\omega_j') \wedge (\pi_2^*\omega_{l-j}'')$.
注意 $\omega_{G/T}$ 已经是 G/T 上的最高次的微分形式, 从而对于 $j \geq 1$, $\omega_{G/T} \wedge \omega_j' = 0$.
因此 $(\pi_1^*\omega_{G/T}) \wedge \omega' = 0$, 断言得证.

由此可知, 在 $U_G T$ 上成立

$$\text{(7.14)} \qquad \begin{aligned} c\omega_G &= (\pi^*\omega_{G/T}) \wedge \widetilde{\omega_T} = (\pi^*\omega_{G/T}) \wedge (\widetilde{\omega_T} + \omega) \\ &= \xi^*[(\pi_1^*\omega_{G/T}) \wedge (\pi_2^*\omega_T)]. \end{aligned}$$

考察局部坐标, 易知 $(\pi_1^*\omega_{G/T}) \wedge (\pi_2^*\omega_T) \neq 0$, 从而常数 $c \neq 0$. 如有必要可将 ω_T 换成 $-\omega_T$, 不妨 $c > 0$. 对任意的紧支于 $U_G T$ 的连续函数 f, 利用变量替换公式与富比尼定理可知

$$\begin{aligned} c\int_{G/T}\int_T f \circ \xi^{-1}(gT, t)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}gT &= c\int_{G/T}\int_T f(gt)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}gT = c\int_G f(g)\,\mathrm{d}g \\ &= \int_{U_G T} f c\omega_G = \int_{U_G T} f\xi^*[(\pi_1^*\omega_{G/T}) \wedge (\pi_2^*\omega_T)] \\ &= \int_{U_{G/T}\times T} f \circ \xi^{-1}(\pi_1^*\omega_{G/T}) \wedge (\pi_2^*\omega_T). \end{aligned}$$

而另一方面, 由有关定义易知 [习题 7.7]

$$\text{(7.15)} \qquad \int_{U_{G/T}\times T} f \circ \xi^{-1}(\pi_1^*\omega_{G/T}) \wedge (\pi_2^*\omega_T). = \int_{G/T}\int_T f \circ \xi^{-1}(gT, t)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}gT,$$

因此 $c = 1$, 得证. □

定理 7.16. *(外尔积分公式). 设 G 为连通紧李群, T 是 G 的一个极大环, $f \in C(G)$, 则成立:*

$$\int_G f(g)\,\mathrm{d}g = \frac{1}{|W(G)|}\int_T d(t)\int_{G/T} f(gtg^{-1})\,\mathrm{d}gT\,\mathrm{d}t,$$

其中对于 $t \in T$, $d(t) := \prod_{\alpha\in\Delta^+(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})} |1 - \xi_{-\alpha}(t)|^2$.

证明. 定理7.7表明 G^{reg} 是 G 的稠密开集, T^{reg} 是 T 的稠密开集, 从而只需证明

$$\int_{G^{\text{reg}}} f(g)\,\mathrm{d}g = \frac{1}{|W(G)|}\int_{T^{\text{reg}}} d(t)\int_{G/T} f(gtg^{-1})\,\mathrm{d}gT\,\mathrm{d}t.$$

而定理7.11表明 $\psi\colon G/T\times T^{\text{reg}}\to G^{\text{reg}}$ 是 $|W(G)|$-叶光滑覆盖映射. 因此只需验证

$$\psi^*\omega_G = d(t)(\pi_1^*\omega_{G/T})\wedge(\pi_2^*\omega_T), \tag{7.17}$$

其中 π_1,π_2 的含义见引理7.13. 一旦证明了这个, 再利用(**1.42**)即可证毕.

为验证(**7.17**)式, 首先注意到存在实值光滑函数 $\delta\colon G/T\times T\to\mathbb{R}$, 使得

$$\psi^*\omega_G|_{gtg^{-1}} = \delta(gT,t)\left[(\pi_1^*\omega_{G/T})\wedge(\pi_2^*\omega_T)\right]|_{(gT,t)},$$

这是因为每一点处的切空间的最高阶外向量空间的维数是 1. 考虑 (eT,e) 的邻域 $U_{G/T}\times T$, 由(**7.14**)可知 $\left[(\pi_1^*\omega_{G/T})\wedge(\pi_2^*\omega_T)\right]|_{(eT,e)}=(\xi^{-1})^*\omega_G|_e$, 于是

$$\begin{aligned}
\psi^*l^*_{gt^{-1}g^{-1}}\omega_G|_e &= \psi^*\omega_G|_{gtg^{-1}}\\
&= \delta(gT,t)(l_{g^{-1}T}\times l_{t^{-1}})^*\left[(\pi_1^*\omega_{G/T})\wedge(\pi_2^*\omega_T)\right]|_{(eT,e)}\\
&= \delta(gT,t)(l_{g^{-1}T}\times l_{t^{-1}})^*(\xi^{-1})^*\omega_G|_e
\end{aligned}$$

因此

$$\phi^*\omega_G|_e = \left(l_{gtg^{-1}}\circ\psi\circ(l_{gT}\times l_t)\circ\xi\right)^*\omega_G|_e = \delta(gT,t)\omega_G|_e.$$

与 $\phi^*\omega_G|_e=\det(\mathrm{d}\phi)|_e\omega_G|_e$ 比较, 可得 $\delta(gT,t)=\det(\mathrm{d}\phi)$. 此行列式的值已经在引理7.10当中计算过, 它等于

$$d(t)=\prod_{\alpha\in\Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})}(1-\xi_{-\alpha}(t))=\prod_{\alpha\in\Delta^+(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})}|1-\xi_{-\alpha}(t)|^2.$$

□

7.2.3 习题

习题 7.7 验证(**7.15**)式.

习题 7.8 设 G 为连通紧李群, T 是 G 的极大环, $H\in\mathfrak{t}$. 证明:

$$d(e^H)=2^{|\Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})|}\prod_{\alpha\in\Delta^+(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})}\sin^2\left(\frac{\alpha(H)}{2i}\right),$$

其中特别注意 $\alpha(H) \in i\mathbb{R}$.

习题 7.9 设 f 是 $\mathrm{SU}(2)$ 上的连续类函数. 利用外尔积分公式证明:

$$\int_{\mathrm{SU}(2)} f(g)\,\mathrm{d}g = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(\mathrm{diag}(e^{i\theta}, e^{-i\theta}))\sin^2\theta\,\mathrm{d}\theta.$$

[这重新证明了习题 3.22 的结果.]

习题 7.10 设 G 为连通紧李群, T 是 G 的极大环, 回忆习题 6.29.

(a) 设 f 是 G 上的 L^1-类函数, 证明

$$\int_G f(g)\,\mathrm{d}g = \frac{1}{|W(G)|}\int_T d(t)f(t)\,\mathrm{d}t.$$

(b) 证明: 映射 $f \mapsto |W(G)|^{-1}df|_T$ 诱导了 G 上的 L^1-类函数空间与 T 上的 $W(G)$-不变 L^1-函数空间的等距同构.

(c) 证明: 映射 $f \mapsto |W(G)|^{-\frac{1}{2}}Df|_T$ 诱导了 G 上的 L^2-类函数空间与 T 上的 $W(G)$-不变 L^2-函数空间的酉同构, 这里的 D 是 T 上的函数, 满足 $D(e^H) = \prod\limits_{\alpha\in\Delta^+(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})}(1-e^{-\alpha(H)})$, $\forall H \in \mathfrak{t}$. 注意 $D\overline{D} = d$.

习题 7.11 对四类典型紧李群, 计算 $d(t)$ 的显式表达式.

(a) $G = \mathrm{SU}(n)$, 取极大环 $T = \left\{\mathrm{diag}(e^{i\theta_k}) \,\middle|\, \sum\limits_{k=1}^{n}\theta_k = 0\right\}$. 则对于 $t = \mathrm{diag}(e^{i\theta_k}) \in T$, 成立

$$d(t) = 2^{n(n-1)}\prod_{1\le j<k\le n}\sin^2\left(\frac{\theta_j-\theta_k}{2}\right).$$

(b) $G = \mathrm{SO}(2n+1)$, 极大环 T 的取法见 §5.1.2.4,

$$t = \mathrm{diag}\left(\begin{pmatrix}\cos\theta_k & \sin\theta_k\\ -\sin\theta_k & \cos\theta_k\end{pmatrix}, 1\right);$$

或者 $G = \mathrm{SO}(E_{2n+1})$, T 的取法见引理6.12, $t = \mathrm{diag}(e^{i\theta_k}, e^{-i\theta_k}, 1)$, 则对上述两种情形均有

$$d(t) = 2^{2n^2}\prod_{1\le j<k\le n}\sin^2\left(\frac{\theta_j-\theta_k}{2}\right)\sin^2\left(\frac{\theta_j+\theta_k}{2}\right)\prod_{j=1}^{n}\sin^2\frac{\theta_j}{2}.$$

(c) $G=\mathrm{SO}(2n)$, 极大环 T 的取法见 §5.1.2.3,

$$t=\operatorname{diag}\left(\begin{pmatrix}\cos\theta_k & \sin\theta_k\\ -\sin\theta_k & \cos\theta_k\end{pmatrix}\right);$$

或者 $G=\mathrm{SO}(E_{2n})$, T 的取法见引理6.12, $t=\operatorname{diag}(e^{i\theta_k},e^{-i\theta_k})$, 则对上述两种情形均有

$$d(t)=2^{2n(n-1)}\prod_{1\le j<k\le n}\sin^2\left(\frac{\theta_j-\theta_k}{2}\right)\sin^2\left(\frac{\theta_j+\theta_k}{2}\right).$$

(d) $G=\mathrm{Sp}(n)\cong\mathrm{U}(2n)\cap\mathrm{Sp}(n,\mathbb{C})$, 取 $T=\{t=\operatorname{diag}(e^{i\theta_k},e^{-i\theta_k})\}$, 则

$$d(t)=2^{2n^2}\prod_{1\le j<k\le n}\sin^2\left(\frac{\theta_j-\theta_k}{2}\right)\sin^2\left(\frac{\theta_j+\theta_k}{2}\right)\prod_{j=1}^{n}\sin^2\theta_j.$$

7.3 外尔特征公式

设 G 为紧李群, T 是 G 的极大环. 回忆定理3.30, G 的全体不可约特征标 $\{\chi_\lambda\}$ 构成 G 上的类函数空间的一组 L^2-幺正基.

若 G 连通, 方便起见不妨再假设 G 单连通. 我们将在 §7.3.1 小节取定 T 上的 W-反变函数 Δ, 使得 $|\Delta(t)|^2=d(t)$. 于是由外尔积分公式可知 $\{\Delta\chi_\lambda|_T\}$ 是 T 上的 W-反变 L^2-函数空间的关于测度 $|W(G)|^{-1}\,\mathrm{d}t$ 的一组幺正基 [习题 7.10] .

另一方面, T 上的 W-反变 L^2-函数空间的还有另外一组幺正基, 这组基中的元素形如 T 的某个特征沿着外尔群的交错和. 考察 $\chi_\lambda|_T$ 在第二组基下的分量, 容易证明上述两组幺正基其实相等. 这便给出了不可约特征标 χ_λ 的显式表达式, 即所谓**外尔特征公式** (Weyl character formula).

7.3.1 准备工作

设 G 是紧李群, T 是 G 的一个极大环. 回忆定理6.27, 解析整权与 T 的特征之间有自然的一一对应 $\lambda\in A(T)\mapsto\xi_\lambda\in\chi(T)$. 下述定义将 $\lambda\in A(T)$ 推广到一类更一般的定义在 $\mathfrak{t}$ 上的函数.

定义 7.18. 设 G 是紧李群, T 是 G 的一个极大环.

1. 对于函数 $f\colon \mathfrak{t}\to\mathbb{C}$, 如果对任意 $H\in\mathfrak{t}$, $Z\in\ker\exp$, 都成立 $f(H+Z)=f(H)$, 则称 f **可降至** T *(descends to T)*; 此时, 我们将 T 上的函数 $e^H\mapsto f(H)$ 也记作 f.
2. 若函数 $f\colon \mathfrak{t}\to\mathbb{C}$ 满足 $f(wH)=f(H)$, $\forall\, w\in W(\Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})^\vee)$, 则称 f 是**W-不变的**.
3. 若函数 $F\colon T\to\mathbb{C}$ 满足 $F(c_w t)=F(t)$, $\forall\, w\in N(T)$, 则称 F 是**W-不变的**.
4. 若函数 $f\colon \mathfrak{t}\to\mathbb{C}$ 满足 $f(wH)=\det(w)f(H)$, $\forall\, w\in W(\Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})^\vee)$, 则称 f 是**W-反变的**.
5. 若函数 $F\colon T\to\mathbb{C}$ 满足 $F(c_w t)=\det(\mathrm{Ad}(w)|_{\mathfrak{t}})F(t)$, $\forall\, w\in N(T)$, 则称 F 是**W-反变的**.

特别地, 对于解析整权 $\lambda\in A(T)$, $\mathfrak{t}$ 上的函数 $H\mapsto e^{\lambda(H)}$ 可降至 T, 下降后的函数恰为 ξ_λ. 还要注意 $\det w\in\{\pm1\}$, 这是因为外尔群由反射变换生成.

引理 7.19. 设 G 是连通紧李群, T 是 G 的一个极大环.

1. 若 $f\colon \mathfrak{t}\to\mathbb{C}$ 可降至 T, 并且 W-不变, 则相应的 $f\colon T\to\mathbb{C}$ 也是 W-不变的.
2. 定义域的限制诱导 G 上的连续类函数与 T 上的连续 W-不变函数之间的一一对应.

证明. 先证 (1). 回忆定理6.43, 通过考察 Ad-作用 [见(**6.35**)式], 可将 $W(G)$ 与 $W(\Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})^\vee)$ 自然等同. 从而对于可降至 T 的 W-不变函数 f, 成立 $f(c_w t)=f(t)$, $\forall w\in N(T)$, $t\in T$.

再证 (2). 设 $F\colon T\to\mathbb{C}$ 是 W-不变的. 取定 $g_0\in G$. 由极大环定理, 存在 $h_0\in G$, 使得 $t_0:=c_{h_0}g_0\in T$. 于是, 通过规定 $F(g_0)=F(t_0)$, 可将 F 延拓为 G 上的类函数. 定理6.36保证了它的良定性. 剩下只需证明, 若 F 连续, 则延拓之后的 F 也连续.

为此, 考察 G 中收敛于 g_0 的点列 $g_n\to g_0$. 取 $h_n\in G$, 使得 $t_n:=c_{h_n}g_n\in T$.

注意 G 的紧性, 取上述有关点列的收敛子列, 不妨 $h_n \to h_0'$, $t_n \to t_0'$, 其中 $h_0' \in G$, $t_0' \in T$. 特别地有 $t_0' = c_{h_0'} g_0$, 于是由定理6.36, 存在 $w \in N(T)$ 使得 $wt_0 = t_0'$. 因此

$$F(g_n) = F(t_n) \to F(t_0') = F(t_0) = F(g_0).$$

注意点列 $g_n \to g_0$ 的选取的任意性, 从而连续性得证. □

设 G 为紧李群, T 为 G 的极大环, 取定单根系 $\Pi(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}) = \{\alpha_1, ..., \alpha_l\}$, 相应的正根系记作 $\Delta^+(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$. 回忆(**6.39**)式, 存在唯一 $\rho \in (i\mathfrak{t})^*$, 使得 $\rho(h_{\alpha_i}) = 2\dfrac{B(\rho, \alpha_i)}{B(\alpha_i, \alpha_i)} = 1$, $1 \le i \le l$.

引理 7.20. *设 G 为紧李群, T 为 G 的极大环, 则*

1. $\rho = \dfrac{1}{2} \displaystyle\sum_{\alpha \in \Delta^+(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})} \alpha.$
2. *对任意 $w \in W(\Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}))$, 成立 $w\rho - \rho \in R \subseteq A(T)$, 因此函数 $\xi_{w\rho-\rho}$ 可降至 T.*

证明. 先证 (1). 记 $\Pi(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}) = \{\alpha_1, ..., \alpha_l\}$, $\rho' := \dfrac{1}{2} \displaystyle\sum_{\alpha \in \Delta^+(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})} \alpha$ [详见习题 6.34] . 由有关定义可知只需要验证 $r_{\alpha_j}\rho' = \rho' - \alpha_j$, $1 \le j \le l$. 为此只需验证 r_{α_j} 是集合 $\Delta^+(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}) \setminus \{\alpha_j\}$ 的一个重排. 对于 $\Delta^+(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}) \setminus \{\alpha_j\}$ 中的一般元素 $\alpha = \sum_k n_k \alpha_k$, 则存在某个 $k_0 \neq j$, 使得 α_{k_0} 的系数 $n_{k_0} > 0$. 于是 $r_{\alpha_j}\alpha = \alpha - \alpha(h_{\alpha_j})\alpha_j$ 在基向量 α_{k_0} 下的分量仍为 $n_{k_0} > 0$, 从而 $r_{\alpha_j}\alpha \in \Delta^+(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}) \setminus \{\alpha_j\}$.

而 (2) 是显然的. 事实上, 易知

$$w\rho - \rho = \sum_{\alpha \in [w\Delta^+(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})] \cap \Delta^-(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})} \alpha.$$

□

定义 7.21. 设 G 为紧李群, T 为 G 的极大环, 则定义 $\mathfrak{t}$ 上的函数 $\Delta\colon \mathfrak{t}\to\mathbb{C}$ 如下:

$$\Delta(H) := \prod_{\alpha\in\Delta^+(\mathfrak{g}_\mathbb{C})}\left(e^{\alpha(H)/2}-e^{-\alpha(H)/2}\right).$$

引理 7.22. 设 G 为紧李群, T 为 G 的极大环,

1. Δ 是 $\mathfrak{t}$ 上的 W-反变函数.
2. Δ 可降至 T 当且仅当 $H\mapsto e^{-\rho(H)}$ 可降至 T.
3. $|\Delta|^2$ 可降至 T, 并且相应的 $|\Delta(t)|^2 = d(t)$, $t\in T$.

证明. 对于 (1), 只需证明 $\Delta\circ r_{h_\alpha} = -\Delta$, $\forall\alpha\in\Delta^+(\mathfrak{g}_\mathbb{C})$. 而这只需注意以下三点. 其一, $(e^{\alpha/2}-e^{-\alpha/2})\circ r_{h_\alpha} = -(e^{\alpha/2}-e^{-\alpha/2})$; 其二, 若 $\beta\in\Delta^+(\mathfrak{g}_\mathbb{C})$ 满足 $r_\alpha\beta=\beta$, 则 $(e^{\beta/2}-e^{-\beta/2})\circ r_{h_\alpha} = (e^{\beta/2}-e^{-\beta/2})$ 保持不变; 其三, 若 $\beta\in\Delta^+(\mathfrak{g}_\mathbb{C})\setminus\{\alpha\}$ 满足 $r_\alpha\beta\neq\beta$, 则存在 $\beta'\in\Delta^+(\mathfrak{g}_\mathbb{C})$, 使得 $r_\alpha\beta=\pm\beta'$, 无论上式右边是正还是负, r_{h_α} 都保持 $(e^{\beta/2}-e^{-\beta/2})(e^{\beta'/2}-e^{-\beta'/2})$ 不变.

再证 (2). 注意 $\rho = \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{\alpha\in\Delta^+(\mathfrak{g}_\mathbb{C})}\alpha$, 容易验证对任意 $H\in\mathfrak{t}$ 都成立

$$e^{-\rho(H)}\Delta(H) = \prod_{\alpha\in\Delta^+(\mathfrak{g}_\mathbb{C})}\left(1-e^{-\alpha(H)}\right). \tag{7.23}$$

而函数 $H\mapsto\displaystyle\prod_{\alpha\in\Delta^+(\mathfrak{g}_\mathbb{C})}\left(1-e^{-\alpha(H)}\right)$ 显然可降至 T, 从而 (2) 得证. 最后, 直接计算可知

$$|\Delta(H)|^2 = e^{-\rho(H)}\Delta(H)\overline{e^{-\rho(H)}\Delta(H)} = \prod_{\alpha\in\Delta^+(\mathfrak{g}_\mathbb{C})}|1-e^{-\alpha(H)}|^2,$$

从而得证. □

特别注意, 函数 e^ρ 未必可降至 T [详见习题 7.12]. 我们已经知道, 函数 $d(t)$ 在外尔积分公式中扮演重要角色. 现在, 对于连通紧李群 G 以及函数 $f\in C(G)$, 外尔积分公式可重新写为

$$\int_G f(g)\,\mathrm{d}g = \frac{1}{|W(G)|}\int_T|\Delta(t)|^2\int_{G/T}f(gtg^{-1})\,\mathrm{d}gT\,\mathrm{d}t. \tag{7.24}$$

我们回忆定理7.7, 集合

$$\Xi := \{H \in \mathfrak{t} \,|\, \alpha(H) \notin 2\pi i\mathbb{Z}, \forall \alpha \in \Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})\}$$

是 $\mathfrak{t}$ 的稠密开集, 并且 $\exp \Xi = T^{\mathrm{reg}}$.

定义 7.25. *设 G 为紧李群, T 为 G 的极大环, $\lambda \in A(T)$ 为解析整权. 则定义函数 $\Theta_\lambda \colon \Xi \to \mathbb{C}$ 如下:*

$$\begin{aligned}\Theta_\lambda(H) &= \frac{\sum_{w \in W(\Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}))} \det(w) e^{[w(\lambda+\rho)](H)}}{\Delta(H)} \\ &= \frac{\sum_{w \in W(\Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}))} \det(w) e^{[w(\lambda+\rho)](H)}}{\prod_{\alpha \in \Delta^+(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})} (1 - e^{-\alpha(H)}.)}\end{aligned}$$

引理 7.26. *设 G 为连通紧李群, T 是 G 的极大环, $\lambda \in A(T)$. 则函数 Θ_λ 可降至 T^{reg} 上的 W-不变光滑函数, 从而 Θ_λ 可唯一延拓为 G^{reg} 的光滑类函数.*

证明. 注意 Θ_λ 的定义式中的分子与分母都是 W-反变的, 从而 Θ_λ 是 W-不变的. 适当将 Θ_λ 的分子分母通分, 易知其分子分母都可降至 T, 从而 Θ_λ 可降至 T^{reg}. 然后利用引理7.19即可. □

7.3.2 外尔特征公式

设 G 为连通紧李群, T 是 G 的极大环. 对于 $\lambda, \lambda' \in A(T)$, 函数 $\xi_\lambda \colon T \to \mathbb{C}$ 可以视为 T 的一维不可约表示. 容易验证, 紧李群 T 的表示 ξ_λ 与 $\xi_{\lambda'}$ 等价当且仅当它们作为 T 上的函数是相等的, 而这当且仅当 $\lambda = \lambda'$. 从而对紧李群 T 使用特征标理论, 可得

$$\int_T \xi_\lambda(t)\xi_{-\lambda'}(t)\,\mathrm{d}t = \begin{cases} 1 & \text{若 } \lambda = \lambda' \\ 0 & \text{若 } \lambda \neq \lambda'. \end{cases} \tag{7.27}$$

定理 7.28. *(外尔特征公式).* 设 G 为连通紧李群, T 是 G 的极大环, $V(\lambda)$ 是 G 的关于最高权 λ 的不可约表示, 则 $V(\lambda)$ 的特征标 χ_λ 满足

$$\chi_\lambda(g) = \Theta_\lambda(g), \qquad \forall g \in G^{\text{reg}}.$$

证明. 首先注意到, 只需证明外尔特征公式对 $g = e^H$, $H \in \Xi$ 成立即可. 对于 $\gamma \in A(T)$, 我们定义函数 $D_\gamma \colon \mathfrak{t} \to \mathbb{C}$ 如下:

$$D_\gamma(H) := \sum_{w \in W(\Delta(\mathfrak{g}_\mathbb{C}))} \det(w) e^{(w\gamma)(H)},$$

显然 D_γ 是 W-反变的. 我们只需证明对任意 $H \in \mathfrak{t}$, $\chi_\lambda(e^H)\Delta(H) = D_{\lambda+\rho}(H)$.

考虑 $V(\lambda)$ 的权空间分解, 易知 χ_λ 在 T 上的限制必形如 $\sum\limits_{\gamma_j \in A(T)} n_j \xi_{\gamma_j}$, 这是有限求和, 其中系数 $n_j \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. 因此存在整数 $m_j \in \mathbb{Z}$, 使得

$$\begin{aligned} \chi_\lambda(H)\Delta(H) &= e^{\rho(H)} \prod_{\alpha \in \Delta^+(\mathfrak{g}_\mathbb{C})} \left(1 - e^{-\alpha(H)}\right) \sum_{\gamma_j \in A(T)} n_j e^{\gamma_j(H)} \\ &= \sum_{\gamma_j \in A(T)} m_j e^{(\gamma_j+\rho)(H)}. \end{aligned}$$

由于 χ_λ 是 W-不变的, Δ 是 W-反变的, 从而 $\chi_\lambda(e^H)\Delta(H)$ 是 W-反变的. 注意函数族 $\left\{e^{\gamma_j+\rho} \,\middle|\, \gamma_j \in A(T)\right\}$ 线性无关, 从而由根反射 r_α 与 W-反变性可知, 若 $\gamma_j + \rho$ 落在某个外尔房的边界, 则 $m_j = 0$. 再注意外尔群在外尔房上的作用单可迁 [定理6.43] , 于是考察 W 在 $A(T) + \rho$ 上的作用, 再注意函数 $\chi_\lambda(e^H)\Delta(H)$ 的 W-反变性, 易知

$$\chi_\lambda(e^H)\Delta(H) = \sum_{\substack{\gamma_j \in A(T) \\ \gamma_j + \rho \text{ 强支配}}} m_j D_{\gamma_j+\rho}(H),$$

其中 "$\gamma_j + \rho$ **强支配** (strictly dominant)" 是指, $B(\gamma_j + \rho, \alpha_i) > 0$, $\forall \alpha_i \in \Pi(\mathfrak{g}_\mathbb{C})$, 换言之, $\gamma_j + \rho$ 位于主外尔房内.

接下来, 特征标理论表明 $\int_G |\chi_\lambda|^2 \, \mathrm{d}g = 1$, 因此由外尔积分公式可知

$$
\begin{aligned}
1 &= \frac{1}{|W(G)|} \int_T |\Delta|^2 |\chi_\lambda|^2 \, \mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{|W(G)|} \int_T \Big| \sum_{\substack{\gamma_j \in A(T) \\ \gamma_j + \rho \text{ 强支配}}} m_j D_{\gamma_j+\rho} \Big|^2 \, \mathrm{d}t.
\end{aligned} \tag{7.29}
$$

注意 $|\Delta|^2 |\chi_\lambda|^2$ 可降至 T, 从而上式中的 $\Big| \sum_{\substack{\gamma_j \in A(T) \\ \gamma_j + \rho \text{ 强支配}}} m_j D_{\gamma_j+\rho} \Big|^2$ 可降至 T. 事实上, 注意 $e^{w(\gamma_j+\rho)-\rho}$ 可降至 T, 从而 $H \mapsto e^{-\rho(H)} D_{\gamma_j+\rho}(H)$ 可降至 T. 因此, $D_{\gamma_j+\rho} \overline{D_{\gamma_{j'}+\rho}}$ 可降至 T, 并且

$$
\begin{aligned}
& \frac{1}{|W(G)|} \int_T D_{\gamma_j+\rho} \overline{D_{\gamma_{j'}+\rho}} \, \mathrm{d}t \\
= \; & \frac{1}{|W(G)|} \sum_{w, w' \in W(\Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}))} \det(ww') \int_T \xi_{w(\gamma_j+\rho)} \xi_{-w'(\gamma_{j'}+\rho)} \, \mathrm{d}t.
\end{aligned}
$$

因为 $\gamma_j + \rho$ 与 $\gamma_{j'} + \rho$ 都位于主外尔房内, 从而 $w(\gamma_j+\rho) = w'(\gamma_{j'}+\rho)$ 当且仅当 $w = w'$, $j = j'$. 因此,

$$
\frac{1}{|W(G)|} \int_T D_{\gamma_j+\rho} \overline{D_{\gamma_{j'}+\rho}} \, \mathrm{d}t = \begin{cases} 1 & \text{若 } j = j' \\ 0 & \text{若 } j \neq j'. \end{cases}
$$

特别地, 由此化简(7.29)式, 得

$$
1 = \sum_{\substack{\gamma_j \in A(T) \\ \gamma_j + \rho \text{ 强支配}}} m_j^2.
$$

最后, 注意 $m_j \in \mathbb{Z}$, 从而这些 m_j 里面恰由一个为 ± 1, 其余都为 0. 换言之, 存在 $\gamma \in A(T)$, 使得 $\gamma + \rho$ 强支配, 并且 $\chi_\lambda(e^H)\Delta(H) = \pm D_{\gamma+\rho}(H)$. 为了确定 λ 以及 $\pm$ 的选取, 我们采用如下展开比较系数的方法. 由权空间分解可知, $\chi_\lambda(e^H)$ 必形如 $e^{\lambda(H)} + \cdots$, 省略的内容涉及比 λ 更低的权. 从而

$$
\begin{aligned}
\chi_\lambda(e^H)\Delta(H) &= e^{\rho(H)} \chi_\lambda(e^H) e^{-\rho(H)} \Delta(H) \\
&= \left(e^{(\lambda+\rho)(H)} + \cdots \right) \prod_{\alpha \in \Delta^+(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})} \left(1 - e^{-\alpha(H)} \right),
\end{aligned}
$$

从而 $\chi_\lambda(e^H)\Delta(H) = e^{(\lambda+\rho)(H)} + \cdots$. 特别地, 将函数 $H \mapsto \chi_\lambda(e^H)\Delta(H)$ 展为 $\{e^{\gamma_j+\rho} \,|\, \gamma_j \in A(T)\}$ 的线性组合, 则 $e^{\lambda+\rho}$ 的系数为 1. 另一方面, 用同样的方法展开 $D_{\gamma+\rho}$, 易知 $D_{\gamma+\rho}$ 的展开式中, 涉及支配权的非零项只有 $\pm e^{\gamma+\rho}$. 因此 $\lambda = \gamma$, 且 $\pm$ 应取 $+$. 得证. □

7.3.3 外尔分母公式

定理 7.30. *(外尔分母公式). 设 G 是连通紧李群, T 是 G 的极大环, $H \in \mathfrak{t}$, 则*

$$\Delta(H) = \sum_{w\in W(\Delta(\mathfrak{g}_\mathbb{C}))} \det(w)e^{(w\rho)(H)}.$$

证明. 对 G 的平凡表示 $V(0) = \mathbb{C}$ 使用外尔特征公式即可, 只需注意 $\chi_0(g) \equiv 1$, $\forall g = e^H$, $H \in \Xi$. □

利用外尔分母公式, 我们可以把外尔特征公式重写为

$$\chi_\lambda(e^H) = \frac{\sum_{w\in W(\Delta(\mathfrak{g}_\mathbb{C}))} \det(w)e^{[w(\lambda+\rho)](H)}}{\sum_{w\in W(\Delta(\mathfrak{g}_\mathbb{C}))} \det(w)e^{(w\rho)(H)}}, \tag{7.31}$$

其中 $H \in \mathfrak{t}$ 满足 $e^H \in T^{\text{reg}}$, 即 $H \in \Xi$.

7.3.4 外尔维数公式

定理 7.32. *(外尔维数公式). 设 G 是连通紧李群, T 是 G 的极大环, $V(\lambda)$ 是 G 的关于最高权 λ 的不可约表示, 则*

$$\dim V(\lambda) = \prod_{\alpha\in\Delta^+(\mathfrak{g}_\mathbb{C})} \frac{B(\lambda+\rho,\alpha)}{B(\rho,\alpha)}.$$

证明. 因为 $\dim V(\lambda) = \chi_\lambda(e)$, 从而只需把 $H = 0 \in \mathfrak{t}$ 代入(**7.31**)式. 然而该式右边在 $H = 0$ 处没有定义, 于是我们取极限。考虑 $u_\rho \in i\mathfrak{t}$, 则 $\rho(H) = B(H, u_\rho)$,

$H \in \mathfrak{t}$. 于是易知对于充分小的 $t > 0$, $itu_\rho \in \Xi$ [习题 7.13] , 因此

$$\begin{aligned} \dim V(\lambda) &= \lim_{t\to 0} \Theta_\lambda(itu_\rho) \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{\sum_{w\in W(\Delta(\mathfrak{g}_\mathbb{C}))} \det(w) e^{[w(\lambda+\rho)](itu_\rho)}}{\sum_{w\in W(\Delta(\mathfrak{g}_\mathbb{C}))} \det(w) e^{(w\rho)(itu_\rho)}}. \end{aligned} \tag{7.33}$$

现在, 注意到

$$\begin{aligned} (w(\lambda+\rho))(itu_\rho) &= it(\lambda+\rho)(w^{-1}u_\rho) = itB(u_{\lambda+\rho}, w^{-1}u_\rho) \\ &= itB(wu_{\lambda+\rho}, u_\rho) = it\rho(wu_{\lambda+\rho}) = (w^{-1}\rho)(itu_{\lambda+\rho}). \end{aligned}$$

再注意 $\det w = \det(w^{-1})$, 从而利用外尔分母公式, (**7.33**)式的分子可化为:

$$\begin{aligned} \sum_{w\in W(\Delta(\mathfrak{g}_\mathbb{C}))} \det(w) e^{[w(\lambda+\rho)](itu_\rho)} &= \sum_{w\in W(\Delta(\mathfrak{g}_\mathbb{C}))} \det(w) e^{(w\rho)(itu_{\lambda+\rho})} = \Delta(itu_{\lambda+\rho}) \\ &= \prod_{\alpha\in\Delta^+(\mathfrak{g}_\mathbb{C})} \left(e^{\alpha(itu_{\lambda+\rho})/2} - e^{-\alpha(itu_{\lambda+\rho})/2}\right) \\ &= \prod_{\alpha\in\Delta^+(\mathfrak{g}_\mathbb{C})} (it\alpha(u_{\lambda+\rho}) + \cdots) \\ &= (it)^{|\Delta^+(\mathfrak{g}_\mathbb{C})|} \prod_{\alpha\in\Delta^+(\mathfrak{g}_\mathbb{C})} B(\alpha, \lambda+\rho) + \cdots \end{aligned}$$

其中省略号表示关于 t 的高阶无穷小量. 同理, (**7.33**)的分母形如

$$\sum_{w\in W(\Delta(\mathfrak{g}_\mathbb{C}))} \det(w) e^{(w\rho)(itu_\rho)} = (it)^{|\Delta^+(\mathfrak{g}_\mathbb{C})|} \prod_{\alpha\in\Delta^+(\mathfrak{g}_\mathbb{C})} B(\alpha, \rho) + \cdots$$

从而证毕. □

7.3.5 最高权表示的分类

定理 7.34. *(最高权的分类). 设 G 为连通紧李群, T 为 G 的一个极大环, 则 $V(\lambda) \mapsto \lambda$, $\lambda \in A(T)$ 诱导如下一一对应:*

$$\{G\text{的不可约表示}\} \overset{1-1}{\longleftrightarrow} \{G\text{的支配解析整权}\}.$$

证明. 我们已经在定理7.3得知, 映射 $V(\lambda)\mapsto\lambda$ 是单射, 只需再证明它是满射. 对任意的解析整权 $\lambda\in A(T)$, 引理7.26表明 Θ_λ 可下降并延拓为 G^{reg} 上的光滑类函数. 从而由外尔积分公式得

$$\begin{aligned}\int_G|\Theta_\lambda|^2\,\mathrm{d}g &= \frac{1}{|W(G)|}\int_{T^{\mathrm{reg}}}|\Delta(t)\Theta_\lambda|^2\,\mathrm{d}t\\ &= \frac{1}{|W(G)|}\int_T\Big|\sum_{w\in W(\Delta(\mathfrak{g}_\mathbb{C}))}\det(w)\xi_{w(\lambda+\rho)}\Big|^2\,\mathrm{d}t\\ &= \frac{1}{|W(G)|}\sum_{w,w'\in W(\Delta(\mathfrak{g}_\mathbb{C}))}\det(ww')\int_T\xi_{w(\lambda+\rho)}\xi_{-w'(\lambda+\rho)}\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

特别地, 若上式中的 λ 是支配权, 则 $\lambda+\rho$ 是强支配的, 从而考察外尔特征公式证明过程以及(**7.27**), 可知

$$\int_T\xi_{w(\lambda+\rho)}\xi_{-w'(\lambda+\rho)}=\delta_{w,w'}.$$

于是, 对于任意支配解析整权 λ, 都成立 $\int_G|\Theta_\lambda|^2\,\mathrm{d}g=1$; 特别地, Θ_λ 是 G 上的**非零** L^2-类函数.

现在, 对于 G 的任何不可约表示 $V(\mu)$, 注意特征标 χ_μ 在 T 上的限制恰为 Θ_μ, 于是用我们早已熟悉的计算方法可得

$$\begin{aligned}\int_G\chi_\mu\overline{\Theta_\lambda}\,\mathrm{d}g &= \frac{1}{|W(G)|}\int_{T^{\mathrm{reg}}}|\Delta(t)|^2\Theta_\mu\overline{\Theta_\lambda}\,\mathrm{d}t\\ &= \frac{1}{|W(G)|}\sum_{w,w'\in W(\Delta(\mathfrak{g}_\mathbb{C}))}\det(ww')\int_{T^{\mathrm{reg}}}\xi_{w(\mu+\rho)}\xi_{-w'(\lambda+\rho)}\,\mathrm{d}t\\ &= \begin{cases}1 & \text{若 } \mu=\lambda\\ 0 & \text{若 } \mu\neq\lambda.\end{cases}\end{aligned}$$

定理7.3与定理3.30表明 $\{\chi_\mu\,|\,\mu\text{是 } G \text{ 的某个不可约表示的最高权}\}$ 构成 G 上的 L^2-类函数空间的一组完备正交基, 因此对所有的最高权 μ, $\int_G\chi_\mu\overline{\Theta_\lambda}\,\mathrm{d}g$ 不全为零. 特别地, 必存在 G 的以 λ 为最高权的不可约表示, 得证. □

7.3.6　基本群

我们来证明定理6.30的剩余部分. 从最高权表示分类的观点来看, 这个定理尤其重要. 特别地, 如果紧李群 G 是单连通的, 且其李代数 $\mathfrak{g}$ 半单, 则由定理6.30可

知 G 的不可约表示与 G 的支配代数整权 P 一一对应; 顺便也分类了李代数 $\mathfrak{g}$ 的不可约表示 [定理4.16] . 定理6.30也适用于另一种极端情况: 易知 $\mathrm{Ad}(G) \cong G/Z(G)$ [引理5.11] 的不可约表示与根格 R 的支配元一一对应. 而最一般的情形介于上述两种极端情形之间.

引理 7.35. 设 G 为连通紧李群, T 是 G 的极大环, 记 $G^{\mathrm{sing}} := G \setminus G^{\mathrm{reg}}$, 则 G^{sing} 是 G 的闭子集, 并且其在 G 中的余维数 ≥ 3.

证明. 由定理7.7可知 G^{sing} 是闭集, 并且映射 $\psi\colon G/T \times T^{\mathrm{sing}} \to G^{\mathrm{sing}}$ 是满射. 此外易知 $t \in T^{\mathrm{sing}}$ 当且仅当存在 $\alpha \in \Delta^+(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$ 使得 $\xi_\alpha(t) = 1$, 换言之 $T^{\mathrm{sing}} = \bigcup\limits_{\alpha \in \Delta^+(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})} \ker \xi_\alpha$. 注意到 $\ker \xi_\alpha$ 是 T 的李子群, 并且在 T 中的余维数是 1. 记 $U_\alpha := \left\{gtg^{-1} \,\middle|\, g \in G,\, t \in T^{\mathrm{sing}}\right\}$, 则 $G^{\mathrm{sing}} = \bigcup\limits_{\alpha \in \Delta^+(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})} U_\alpha$.

回忆 $\mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(t) = \{X \in \mathfrak{g} \,|\, \mathrm{Ad}(t)X = X\}$ [习题 4.22] . 注意 $\mathrm{Ad}(t)$ 在 $\mathfrak{g}_\alpha$ 上的作用是标量算子 $\xi_\alpha(t)$, 从而当 $t \in \ker \xi_\alpha$ 时成立 $\mathfrak{g} \cap (\mathfrak{g}_\alpha \oplus \mathfrak{g}_{-\alpha}) \subseteq \mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(t)$. 考虑关于 α 的标准嵌入 $\varphi_\alpha\colon \mathrm{SU}(2) \to G$, 并且记紧流形 $V_\alpha := G/(\varphi_\alpha(\mathrm{SU}(2))T) \times \ker \xi_\alpha$. 易知 $\dim V_\alpha = \dim G - 3$, 且 ψ 将 V_α 映满 U_α. 于是, 这个引理的更加确切的表述是, G^{sing} 形如若干的余维数 $= 3$ 的紧流形的闭像的有限并. □

将定端闭路的同伦视为二维曲面, 由引理7.35 与标准的横截性定理 ([42]) 可知, G 中的以 G^{reg} 中的某点为基点的闭路必同伦于 G^{reg} 中的某条闭路. 特别地, 自然推出

$$\pi_1(G) \cong \pi_1(G^{\mathrm{reg}}).$$

设 G 为紧李群, T 是 G 的极大环. 回忆定理7.7, $e^H \in T^{\mathrm{reg}}$ 当且仅当 $H \in \{H \in \mathfrak{t} \,|\, \alpha(H) \notin 2\pi i\mathbb{Z},\, \forall \alpha \in \Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})\}$. 集合 $\{H \in \mathfrak{t} \,|\, \alpha(H) \notin 2\pi i\mathbb{Z},\, \forall \alpha \in \Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})\}$ 的连通分支是凸集, 并且有如下专门的名称:

定义 7.36. 设 G 是连通紧李群, T 是 G 的极大环, 则称 $\{H \in \mathfrak{t} \,|\, \alpha(H) \notin 2\pi i\mathbb{Z},\, \forall \alpha \in \Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})\}$ 的连通分支为 **临室** *(alcove)* .

引理 7.37. 设 G 是连通紧李群, T 是 G 的极大环, 取定基点 $t_0 = e^{H_0} \in T^{\mathrm{reg}}$, $H_0 \in \mathfrak{t}$, 则:

1. 任何以 t_0 为基点的连续闭路 $\gamma\colon [0,1] \to G^{\mathrm{reg}}$, $\gamma(0) = t_0$ 都形如
$$\gamma(s) = c_{g_s} e^{H(s)},$$
其中 $g_0 = e$, $H(0) = H_0$, 并且映射 $s \mapsto g_s T \in G/T$, $s \mapsto H(s) \in \mathfrak{t}^{\mathrm{reg}}$ 都连续; 此外, 还满足 $g_1 \in N(T)$, 并且存在 $Z_\gamma \in 2\pi i \ker \mathcal{E}$ 使得
$$X_\gamma := H(1) = \mathrm{Ad}(g_1)^{-1} H_0 + Z_\gamma,$$
并且 X_γ 关于 γ 同伦不变 [即, 若 γ 与 γ' 同伦, 则 $X_\gamma = X_{\gamma'}$].
2. 记 A_0 为包含 H_0 的临室, 取定同样的基点 t_0, 则映射 $\gamma \mapsto X_\gamma$ 诱导如下一一对应:
$$\pi_1(G^{\mathrm{reg}}) \longleftrightarrow A_0 \cap \left\{ wH_0 + Z \,\middle|\, w \in W(\Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})^\vee),\ Z \in 2\pi i A(T)^* \right\}.$$

证明. 由极大环定理可知 $\gamma(s)$ 必形如 $\gamma(s) = c_{g_s}\tau(s)$, 其中 $\tau(s) \in T^{\mathrm{reg}}$, $\tau(0) = t_0$, $g_0 = e$. 事实上, 注意 $\psi\colon G/T \times T^{\mathrm{reg}} \to G^{\mathrm{reg}}$ 是覆盖映射, 从而 $\gamma(s)$ 可唯一地连续地提升为 $s \mapsto \tau(s) \in T^{\mathrm{reg}}$ 以及 $s \mapsto g_s T \in G/T$. 再注意 $\exp\colon \mathfrak{t}^{\mathrm{reg}} \to T^{\mathrm{reg}}$ 是局部微分同胚 [定理5.14], 从而 $s \mapsto \tau(s)$ 可唯一地连续提升为 $s \mapsto H(s) \in \mathfrak{t}^{\mathrm{reg}}$, 使得 $H(0) = H_0$, 此时 $\gamma(s) = c_{g_s} e^{H(s)}$.

由于 $\gamma(s)$ 是闭路, $\gamma(0) = \gamma(1)$, 从而 $e^{H_0} = c_{g_1} e^{H(1)}$. 因为 e^{H_0} 与 $e^{H(1)}$ 都是正则元, 从而 $T = Z_G(e^{H_0})^0 = c_{g_1} Z_G(e^{H(1)})^0 = c_{g_1} T$, 因此 $g_1 \in N(T)$ 是外尔群中的元素. 记 $w = \mathrm{Ad}(g_1)$, 于是 $H_0 \equiv wH(1) \mod 2\pi i \ker \mathcal{E}$ [注意 $2\pi i \ker \mathcal{E} = \ker \exp\colon \mathfrak{t} \to T$]. 于是存在 $Z_\gamma \in 2\pi i \ker \mathcal{E}$ 使得 $H(1) = w^{-1} H_0 + Z_\gamma$.

为验证 X_γ 关于闭路 γ 同伦不变, 我们考虑与 γ 同伦的另一条闭路 $\gamma'\colon [0,1] \to G^{\mathrm{reg}}$, $\gamma'(0) = t_0$. 记 $\gamma(s,t)$ 为 γ 与 γ' 之间的同伦, 使得 $\gamma(s,0) = \gamma(s)$, $\gamma(s,1) = \gamma'(s)$, $\gamma(0,t) = \gamma(1,t) = t_0$. 由于类似原因, 并采用类似的记号, $\gamma'(s) = c_{g'_s} e^{H'_s}$, $H'(1) = w'^{-1} H_0 + Z'_\gamma$. 类似地, $\gamma(s,t) = c_{g_{s,t}} e^{H(s,t)}$, 并且 $H(1,s) = w_s^{-1} H_0 + Z_\gamma(s)$. 注意 $w_0 = w$, $w_1 = w'$, $Z_\gamma(0) = Z_\gamma$, $Z_\gamma(1) = Z'_\gamma$. 因为 w_s 与 $Z_\gamma(s)$ 关于 s 连续变化, 而它们所取值的空间 $W(T) \subseteq G/T$ 以及 $2\pi i \ker \mathcal{E}$ 都离散, 因此 w_s 与 $Z_\gamma(s)$

关于 s 是常值, 综上 (1) 得证.

再证 (2). 首先由 $H(s)$ 的连续性知 $H(1) \in A_0$, 从而映射 $\gamma \mapsto H(1)$ 良定. 为证明它是满射, 考虑任意的 $H' \in A_0 \cap \{wH_0 + Z \,|\, w \in W(\Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})^{\vee}),\, Z \in 2\pi i A(T)^*\}$, 记 $H' = w'^{-1} H_0 + Z'$, $w' = \mathrm{Ad}(g_1') \in W(\Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})^{\vee})$, $Z' \in 2\pi i \ker \mathcal{E}$. 取 G 中连接 $e \in G$ 与 $g_1' \in G$ 的连续曲线 $s \mapsto g_s'$, 令 $H'(s) := H_0 + s(H' - H_0) \in A_0$, 然后考虑曲线 $\gamma'(s) = c_{g_s} e^{H'(s)}$. 因为 $\gamma'(0) = t_0$, $\gamma'(1) = e^{w'H'} = e^{H_0 + w'Z'} = t_0$, 从而 γ' 是以 t_0 为基点的闭路. 由 γ' 的构造可知 $X_{\gamma'} = H'$, 得证. 再证 $\gamma \mapsto X_\gamma$ 是单射. 若闭路 $\gamma(s) = c_{g_s} e^{H(s)}$ 与 $\gamma''(s) = c_{g_s} e^{H''(s)}$ 满足 $X_\gamma = X_{\gamma''}$, 则 $\gamma(s,t) := c_{g_s} e^{(1-t)H'(s) + tH''(s)}$ 是它们之间的同伦. [1] □

引理 7.38. *设 G 为连通紧李群, T 是 G 的极大环.*

1. *G 的任何以 e 为基点的闭路必同伦等价于形如*
$$\gamma(s) = e^{sX_\gamma}$$
的闭路, 其中 $X_\gamma \in 2\pi i \ker \mathcal{E} = \ker(\exp\colon \mathfrak{t} \to T)$. 此外, 由此 $X_\gamma \mapsto \gamma$ 诱导的映射 $2\pi i \ker \mathcal{E} \to \pi_1(G)$ 是群同态.
2. *取定临室 A_0, 以及正则元 $H_0 \in A_0$. 则上述映射 $X_\gamma \mapsto \gamma$ 在集合 $\{Z \in 2\pi i \ker \mathcal{E} \,|\, \exists w \in W(\Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})^{\vee}),\, wH_0 + Z \in A_0\}$ 上的限制映射给出了到 $\pi_1(G)$ 的一一对应.*

证明. 引理7.37表明 G 中以正则元 t_0 为基点的闭路都同伦等价于形如 $\gamma(s) = c_{g_s} e^{H(s)}$ 的闭路, 其中 $H(1) = \mathrm{Ad}(g_1^{-1}) H_0 + X_\gamma$, $Z_\gamma \in 2\pi i \ker \mathcal{E}$. 考虑同伦 $\gamma(s,t) = c_{g_s} e^{(1-t)H(s) + t[H_0 + s(H(1) - H(0))]}$, 于是我们不妨设
$$H(s) = H_0 + s\left(\mathrm{Ad}(g_1^{-1}) H_0 + X_\gamma - H_0\right).$$

[1] 译者注: "$\gamma \mapsto X_\gamma$ 是单射" 的证明过程有严重跳步. 为什么 $\gamma(s)$ 与 $\gamma''(s)$ 的表达式中出现了同一个 c_{g_s}? 事实上, G/T 是单连通的 [确实如此, 我们先承认], 那么 G/T 中的固定首尾端点的道路 g_s 与 g_s'' 同伦等价, 书中的证明才能走通. 此外, 笔者在翻译此引理证明的原文时对有关符号做了大量改动, 这里的 X_γ 与 Z_γ 的含义与原文不同. 鉴于这本书的原文本来就有大量 [近百处] 笔误, 笔者完全有理由怀疑原作者在这里又是瞎写.

将闭路整体平移, 使得基点为 e, 于是我们得知, G 中的以 e 为基点的闭路都同伦于如下:

$$\gamma(s)=e^{-H(0)}c_{g_s}e^{H_0+s\left(\mathrm{Ad}(g_0^{-1})H_0+X_\gamma-H_0\right)}.$$

利用同伦 $\gamma(s,t)=e^{-tH(0)}c_{g_s}e^{tH_0+s\left(t\,\mathrm{Ad}(g_0^{-1})H_0+X_\gamma-tH_0\right)}$, 我们不妨 $\gamma(s)=c_{g_s}e^{sX_\gamma}$. 然后考虑同伦 $\gamma(s,t)=c_{g_{st}}e^{sX_\gamma}$, 可知 $\gamma(s)$ 同伦于 $s\mapsto e^{sX_\gamma}$. 容易验证 $X_\gamma\mapsto\gamma$ 是群同态 [留做习题 7.24] . 而由引理7.37 容易证明 (2). □

上述引理的一个直接推论是, 包含映射 $T\hookrightarrow G$ 诱导的基本群同态 $\pi_1(T)\to\pi_1(G)$ 是满同态.

定义 7.39. *设 G 是连通紧李群, T 是 G 的极大环. 则 $\mathfrak{t}$ 上的由形如 $H\mapsto wH+Z$, $w\in W(\Delta(\mathfrak{g}_\mathbb{C})^\vee)$, $Z\in 2\pi iR^\vee$ 的变换生成的群称为* **仿射外尔群** *(affine Weyl group) .*

引理 7.40. *设 G 是连通紧李群, T 是 G 的极大环.*

1. *沿超平面 $\alpha^{-1}(2\pi in)$, $\alpha\in\Delta(\mathfrak{g}_\mathbb{C})$, $n\in\mathbb{Z}$ 的镜面反射构成反射外尔群的一组生成元.*
2. *仿射外尔群在临室上的作用单可迁.*

证明. 注意 $h_\alpha\in R^\vee$, 且沿超平面 $\alpha^{-1}(2\pi in)$ 的反射 $r_{h_\alpha,n}(H)=r_{h_\alpha}H+2\pi inh_\alpha$ [留作习题 7.25] . 注意外尔群可由反射 r_{h_α} 生成, 从而 (1) 得证. 而 (2) 的证明与定理6.43类似, 细节留作习题 7.26. □

定理 7.41. *设 G 是连通紧李群, 并且其李代数 $\mathfrak{g}$ 半单; T 是 G 的极大环. 则 $\pi_1(G)\cong\ker\mathcal{E}/R^\vee\cong P/A(T)$.*

证明. 由引理7.38, 只需证明闭路 $\gamma(s)=e^{sX_\gamma}$, $X_\gamma\in 2\pi i\ker\mathcal{E}$ 平凡当且仅当 $X_\gamma\in 2\pi iR^\vee$. 首先, 对于 $\alpha\in\Delta(\mathfrak{g}_\mathbb{C})$, 考虑关于 α 的标准 $\mathfrak{su}(2)$-三元组, 以及相应的李群同态 φ_α: $\mathrm{SU}(2)\to G$, 则闭路 $\gamma_\alpha(s)=e^{2\pi ish_\alpha}$ 是 $\mathrm{SU}(2)$ 中的闭路 $s\mapsto$

$\mathrm{diag}(e^{2\pi is}, e^{-2\pi is})$ 关于 φ_α 的同态像. 注意 SU(2) 是单连通的, 从而闭路 γ_α 平凡. 因此群同态 $2\pi i\ker\mathcal{E}/2\pi iR^\vee \to \pi_1(G)$ 良定, 并且为满同态.

再证上述同态是单的. 取定临室 A_0 以及正则元 $H_0 \in A_0$. 因为 $2\pi i\ker\mathcal{E} \subseteq 2\pi iP^\vee$, 因此 $A_0 - X_\gamma$ 是另一个临室. 于是由引理7.40可知存在 $w \in W(\Delta(\mathfrak{g}_\mathbb{C})^\vee)$ 以及 $H \in 2\pi iR^\vee$ 使得 $wH_0 + H \in A_0 - X_\gamma$, 于是 $wH_0 + (X_\gamma + H) \in A_0$. 因为闭路 $s \mapsto e^{sH}$ 平凡, 在 γ 的同伦等价意义下不妨 $H = 0$, 于是 $wH_0 + X_\gamma \in A_0$. 而另一方面 $H_0 + 0 \in A_0$, 因此由引理7.38 可知 γ 必同伦于平凡闭路 $s \mapsto e^{s0}$. □

7.3.7　习题

习题 7.12 证明当 $G = \mathrm{SU}(n)$, $\mathrm{SO}(2n)$ 或者 $\mathrm{Sp}(n)$ 时, $\mathfrak{t}$ 上的函数 e^ρ 可降至 T; 而当 $G = \mathrm{SO}_{2n+1}$ 时 e^ρ 不可降至 T.

习题 7.13 设 G 是紧李群, T 是 G 的极大环. $u_\rho \in i\mathfrak{t}$ 满足 $\rho(H) = B(H, u_\rho)$, $\forall\, H \in \mathfrak{t}$. 证明对于充分小的正实数 t, $itu_\rho \in \Xi$.

习题 7.14 证明: SU(3) 的支配解析整权都形如 $\lambda = m\pi_1 + n\pi_2$, $m, n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, 其中 $\pi_1 = \dfrac{2}{3}\varepsilon_{12} + \dfrac{1}{3}\varepsilon_{23}$, $\pi_2 = \dfrac{1}{3}\varepsilon_{12} + \dfrac{2}{3}\varepsilon_{23}$ 为基本权. 并且由此验证

$$\dim(V_\lambda) = \frac{(n+1)(m+1)(n+m+2)}{2}.$$

习题 7.15 设 G 为单连通紧李群, 其李代数 $\mathfrak{g}$ 半单, 则 G 的支配解析整权都形如 $\lambda = \sum\limits_i n_i\pi_i$, 其中 $\{p_i\}$ 为基本权, $n_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. 试验证如下:

(a) 若 $G = \mathrm{SU}(n)$, 则

$$\dim V(\lambda) = \prod_{1\leq i<j\leq n}\left(1 + \frac{n_i + \cdots + n_{j-1}}{j-i}\right).$$

(b) 若 $G = \mathrm{Sp}(n)$, 则

$$\begin{aligned}\dim V(\lambda) \quad = \quad & \prod_{1\leq i<j\leq m}\left(1 + \frac{n_i + \cdots + n_{j-1}}{j-i}\right) \\ & \times \prod_{1\leq i<j\leq m}\left(1 + \frac{n_i + \cdots + n_{j-1} + 2(n_j + \cdots + n_{m-1})}{2n+2-i-j}\right)\end{aligned}$$

$$\times \prod_{i=1}^{m}\left(1+\frac{n_i+\cdots+n_{m-1}+n_m}{n+1-i}\right).$$

(c) 若 $G=\mathrm{Spin}_{2m+1}(\mathbb{R})$, 则

$$\begin{aligned}\dim V(\lambda) \quad = \quad & \prod_{1\le i<j\le m}\left(1+\frac{n_i+\cdots+n_{j-1}}{j-i}\right)\\ & \times \prod_{1\le i<j\le m}\left(1+\frac{n_i+\cdots+n_{j-1}+2(n_j+\cdots+n_{m-1})+n_m}{2m+1-i-j}\right)\\ & \times \prod_{i=1}^{m}\left(1+\frac{2(n_i+\cdots+n_{m-1})+n_m}{2n+1-2i}\right).\end{aligned}$$

(d) 若 $G=\mathrm{Spin}_{2m}(\mathbb{R})$, 则

$$\begin{aligned}\dim V(\lambda) \quad = \quad & \prod_{1\le i<j\le m}\left(1+\frac{n_i+\cdots+n_{j-1}}{j-i}\right)\\ & \times \prod_{1\le i<j\le m}\left(1+\frac{n_i+\cdots+n_{j-1}+2(n_j+\cdots+n_{m-1})+n_m}{2m-i-j}\right).\end{aligned}$$

习题 7.16 对于以下单连通紧李群 G, 证明 G 下述表示 V 是其维数最低的非平凡不可约表示.

(a) $G=\mathrm{SU}(n)$, $V=\mathbb{C}^n$ 为标准表示.

(b) $G=\mathrm{Sp}(n)$, $V=\mathbb{C}^{2n}$ 为标准表示.

(c) $G=\mathrm{Spin}_{2m+1}(\mathbb{R})$, $m\ge 2$, $V=\mathbb{C}^{2m+1}$, G 在 V 上的作用为 $\mathrm{SO}(2m+1)$ 的标准表示与覆盖映射 $\mathrm{Spin}_{2m+1}(\mathbb{R})\to\mathrm{SO}(2m+1)$ 的复合.

(d) $G=\mathrm{Spin}_{2m}(\mathbb{R})$, $m>4$, $V=\mathbb{C}^{2m}$, G 在 V 上的作用为 $\mathrm{SO}(2m)$ 的标准表示与覆盖映射 $\mathrm{Spin}_{2m}(\mathbb{R})\to\mathrm{SO}(2m)$ 的复合.

习题 7.17 设 G 是紧李群, T 是 G 的极大环, V 是 G 的一个表示, λ 是 V 的一个最高权. 证明: 如果 $\dim V=\dim V(\lambda)$, 那么 $V\cong V(\lambda)$, 特别地, V 不可约.

习题 7.18 利用习题 7.17 以及外尔维数公式, 证明 G 的下述表示 V 不可约:

(a) $G=\mathrm{SU}(n)$, $V=\bigwedge^p\mathbb{C}^n$ [见习题 7.1] .

(b) $G=\mathrm{SO}(n)$, $V=\mathcal{H}_m(\mathbb{R}^n)$ [见习题 7.2].

(c) $G=\mathrm{SO}(2n+1)$, $V=\bigwedge^p\mathbb{C}^{2n+1}$, $1\leq p\leq n$ [见习题 7.3].

(d) $G=\mathrm{SO}(2n)$, $V=\bigwedge^p\mathbb{C}^{2n}$, $1\leq p\leq n$ [见习题 7.3].

(e) $G=\mathrm{SU}(n)$, $V=V_{p,0}(\mathbb{C}^n)$ [见习题 7.5].

(f) $G=\mathrm{SU}(n)$, $V=V_{0,q}(\mathbb{C}^n)$ [见习题 7.5].

(g) $G=\mathrm{SU}(n)$, $V=\mathcal{H}_{p,q}(\mathbb{C}^n)$ [见习题 7.5].

(h) $G=\mathrm{Spin}_{2m+1}(\mathbb{R})$, $V=S$ [见习题 7.6].

(i) $G=\mathrm{Spin}_{2m}(\mathbb{R})$, $V=S^{\pm}$ [见习题 7.6].

习题 7.19 设 λ 是 $\mathrm{U}(n)$ 的支配解析整权, 形如 $\lambda=\lambda_1\varepsilon_1+\cdots+\lambda_n\varepsilon_n$, $\lambda_j\in\mathbb{Z}$, $\lambda_1\geq\cdots\geq\lambda_n$. 记 $H=\mathrm{diag}(H_1,...,H_n)\in\mathfrak{t}$. 证明外尔特征公式此时可以写成

$$\chi_\lambda(e^H)=\frac{\det\left(e^{(\lambda_j+j-1)H_k}\right)}{\det\left(e^{(j-1)H_k}\right)}.$$

习题 7.20 设 G 是连通紧李群, T 是 G 的极大环.

(a) 若 G 非阿贝尔, 则 G 的不可约表示的维数无上界.

(b) 若 $\mathfrak{g}$ 半单, 则对于任何给定正整数, 维数等于该正整数的 G 的不可约表示的个数有限.

习题 7.21 设 G 是连通紧李群, T 是 G 的极大环. 对于 $\lambda\in(i\mathfrak{t})^*$, 定义 **Kostant 配分函数** (Kostant partition function) $\mathcal{P}(\lambda)$ 为将 λ 表示为 $\lambda=\sum_{\alpha\in\Delta^+(\mathfrak{g}_\mathbb{C})}n_\alpha\alpha$, $n_\alpha\in\mathbb{Z}_{\geq0}$ 的方法数.

(a) 证明下述恒等式:

$$\prod_{\alpha\in\Delta^+(\mathfrak{g}_\mathbb{C})}\left(1+e^{-\alpha}+e^{-2\alpha}+\cdots\right)=\sum_\lambda\mathcal{P}(\lambda)e^{-\lambda},$$

其中等号两边都视为 $\mathfrak{t}$ 上的函数的形式级数. 并且由此推出

$$1=\left(\sum_\lambda\mathcal{P}(\lambda)e^{-\lambda}\right)\prod_{\alpha\in\Delta^+(\mathfrak{g}_\mathbb{C})}\left(1-e^{-\alpha}\right).$$

上式对于哪些 $H\in\mathfrak{t}$ 有意义?

(b) 对于 G 的不可约表示 $V(\lambda)$, $V(\lambda)$ 的 μ-权空间的维数称为权 μ 在 $V(\lambda)$ 中的**重数** (multiplicity), 暂时记作 m_μ. 于是易知 $\chi_\lambda = \sum_\mu m_\mu \xi_\mu$. 利用外尔特征公式以及上一小问, 证明

$$m_\mu = \sum_{w \in W(\Delta(\mathfrak{g}_\mathbb{C}))} \det(w) \mathcal{P}(w(\lambda+\rho) - (\mu+\rho)).$$

上式称为 **Kostant 重数公式** (Kostant multiplicity formula) .

(c) 若 $G = \mathrm{SU}(3)$, 计算 $V(\varepsilon_{12} + 3\varepsilon_{23})$ 的各权空间的维数.

习题 7.22 设 G 是连通紧李群, T 是 G 的极大环. 给定 G 的不可约表示 $V(\lambda)$ 与 $V(\lambda')$, 暂时记 m_μ 为 $V(\mu)$ 在张量积 $V(\lambda) \otimes V(\lambda')$ 的不可约直和分解当中出现的次数. 于是 $\chi_\lambda \chi_{\lambda'} = \sum_\mu m_\mu \chi_\mu$. 利用上一小问, 并比较支配项系数, 证明

$$m_\mu = \sum_{w, w' \in W(\Delta(\mathfrak{g}_\mathbb{C}))} \det(ww') \mathcal{P}\left(w(\lambda+\rho) + w'(\lambda'+\rho) - (\mu+2\rho)\right).$$

上式称为 **Steinberg 公式**.

习题 7.23 设 G 是连通紧李群, T 是 G 的极大环, $\alpha \in \Delta(\mathfrak{g}_\mathbb{C})$. 证明 T 的子集 $\ker \xi_\alpha$ 可能不连通.

习题 7.24 证明引理7.38中的映射 $X_\gamma \mapsto \gamma$ 是群同态.

习题 7.25 设 G 是连通紧李群, T 是 G 的极大环. 证明沿超平面 $\alpha^{-1}(2\pi i n)$ 的反射 $r_{h_\alpha, n}$ 满足关系式 $r_{h_\alpha, n}(H) = r_{h_\alpha}(H) + 2\pi i n h_\alpha$, $H \in \mathfrak{t}$.

习题 7.26 设 G 是连通紧李群, T 是 G 的极大环. 证明仿射外尔群在临室上的作用单可迁.

7.4 博雷尔-韦伊定理

紧李群的不可约表示可以用最高权来刻画. 然而我们并没有去具体构造不可约表示. **博雷尔-韦伊定理** (Borel-Weil theorem) 将用来具体构造紧李群的不可约表示.

7.4.1 诱导表示

定义 7.42. 给定光滑流形 M 与 $\mathcal{V}$, $\pi\colon \mathcal{V} \to M$ 为光滑满射.

1. 称 $(\mathcal{V}, \pi)$ 是 M 上的秩为 n 的 **复向量丛** *(complex vector bundle)* , 如果: (1). 对任意 $x \in M$, **纤维** $\mathcal{V}_x := \pi^{-1}(x)$ 是 n 维复向量空间; (2). 对任意 $x \in M$, 存在 x 在 M 中的邻域 U, 以及微分同胚 $\varphi\colon \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{C}^n$, 使得 $\varphi(\mathcal{V}_y) = (y, \mathbb{C}^n)$, $\forall y \in U$.
2. 若 $(\mathcal{V}, \pi)$ 是 M 上的复向量丛, $s\colon M \to \mathcal{V}$ 是光滑 (或者连续) 映射. 如果 $\pi \circ s = \mathrm{id}$, 则称 s 是 $\mathcal{V}$ 的光滑 (或者连续) **截面**. $\mathcal{V}$ 的所有光滑 (或者连续) 截面构成的集合记为 $\Gamma(M, \mathcal{V})$.
3. 若 $(\mathcal{V}, \pi)$ 是 M 上的复向量丛, 李群 G 作用于 $\mathcal{V}$. 如果对任意 $g \in G, x \in M$ 都存在 $x' \in M$ 使得 $gV_x \subseteq V_{x'}$, 则称 G 在 $\mathcal{V}$ 上的作用 **保持纤维** *(preserve fibers)* . 此时, G 在 $\mathcal{V}$ 上的作用可以自然下降为 G 在 M 上的作用.
4. 若 $(\mathcal{V}, \pi)$ 是 M 上的复向量丛, 李群 G 作用于 $\mathcal{V}$. 我们称 $\mathcal{V}$ 是 G-**齐次向量丛**, 如果: (1). G 在 $\mathcal{V}$ 上的作用保持纤维; (2). G 在 M 上的相应的作用可迁; (3). 任意 $x \in M$, $g \in G$, g 的作用 $\mathcal{V}_x \to V_{gx}$ 是线性的.
5. 若 $(\mathcal{V}, \pi)$ 是 M 上的 G-齐次向量丛, 则定义复向量空间 $\Gamma(M, \mathcal{V})$ 的 G-模结构如下: 对任意 $s \in \Gamma(M, \mathcal{V})$, $g \in G$,
$$(gs)(x) = g(s(g^{-1}x)).$$
6. 设 $(\mathcal{V}, \pi), (\mathcal{V}', \pi')$ 都是 M 上的 G-齐次向量丛, 如果存在微分同胚 $\varphi\colon \mathcal{V} \to \mathcal{V}'$ 使得 $\pi' \circ \varphi = \varphi \circ \pi$, 则称 G-齐次向量丛 $\mathcal{V}$ 与 $\mathcal{V}'$ 等价.

而我们主要关心以 G/H 为底流形的 G-齐次向量丛, 其中 H 是 G 的闭子群.

定义 7.43. *设 G 为李群, H 是 G 的闭子群, V 是 H 的表示. 则定义 G/H 上的 G-齐次向量丛 $G\times_H V$ 如下:*

$$G\times_H V := (G\times H)/\sim,$$

其中等价关系 $\sim$ 由下式所确定:

$$(gh,v)\sim(g,hv),\quad \forall g\in G, h\in H, v\in V.$$

相应的投影映射 $\pi\colon G\times_H V\to G/H$ 由 $\pi(g,v)=gH$ 所确定, G 在 $G\times_H V$ 上的作用定义为 $g'(g,v):=(g'g,v)$, $\forall g'\in G$.

需要验证 $G\times_H V$ 确实是 G/H 上的 G-齐次向量丛. 为此, 注意 H 是 G 的正则子流形, 然后就是一些微分几何的直接验证, 留作习题 7.27.

定理 7.44. *设 G 是李群, H 是 G 的闭子群, 则有如下一一对应:*

$$\{G/H \text{ 上的 } G\text{-齐次向量丛的等价类}\}\xleftrightarrow{1-1}\{H \text{ 的表示的等价类}\}.$$

证明. 设 $\mathcal{V}$ 为 G/H 上的 G-齐次向量丛, 则纤维 $\mathcal{V}_{eH}$ 是 H 的表示. 反之, 若 V 是 H 的表示, 则考虑 $G\times_H V$. 容易验证上述两个映射互逆, 得证. □

定义 7.45. *设 G 为李群, H 是 G 的闭子群, (π,V) 是 H 的表示. 则定义 G 的光滑 (或者连续)* **诱导表示** *(induced representation)*

$$\mathrm{Ind}_H^G(V):=\mathrm{Ind}_H^G(\pi):=\left\{f\colon G\to V\,\middle|\, f \text{ 光滑 (或者连续), 且 } f(gh)=h^{-1}f(g)\right\},$$

其 G-模结构定义为: $(g_1f)(g_2)=f(g_1^{-1}g_2)$, $\forall g_i\in G$.

定理 7.46. *设 G 为李群, H 是 G 的闭子群, V 是 H 的表示, 则成立如下的 G-模同构:*

$$\Gamma(G/H, G\times_H V)\cong \mathrm{Ind}_H^G(V).$$

证明. 首先注意映射 $(G\times_H V)_{eH}\to V$, $(h,v)\mapsto h^{-1}v$ 为 H-模同构, 于是我们自然将纤维 $(G\times_H V)_{eH}$ 与 V 等同. 对于 $s\in\Gamma(G/H,G\times_H V)$, 则定义 $f_s\in\mathrm{Ind}_H^G(V)$ 如下: $f_s(g)=g^{-1}(s(gH))$. 反之, 对于 $f\in\mathrm{Ind}_H^G(V)$, 定义 $s_f\in\Gamma(G/H,G\times_H V)$ 如下: $s_f(gH)=(g,f(g))$. 容易验证上述两者都是良定的 G-模同态, 且互逆 [留作习题 7.28] . □

定理 7.47. *(**Frobenius 互反律**). 设 G 为李群, H 是 G 的闭子群, V 是 H 的表示, W 是 G 的表示, 则成立如下 $\mathbb{C}$-线性同构*

$$\mathrm{Hom}_G(W,\mathrm{Ind}_H^G(V))\cong\mathrm{Hom}_H(W|_H,V).$$

证明. 对于 $T\in\mathrm{Hom}_G(W,\mathrm{Ind}_H^G(V))$, 定义 $S_T\in\mathrm{Hom}_H(W|_H,V)$ 如下: $S_T(w):=(T(w))(e),\forall w\in W$. 反之, 对于 $S\in\mathrm{Hom}_H(W|_H,V)$, 定义 $T_S\in\mathrm{Hom}_G(W,\mathrm{Ind}_H^G(V))$ 如下: $(T_S(w))(g)=S(g^{-1}w)$. 容易验证上述两者良定且互逆 [留作习题 7.28] . □

特别地, 若 $H=\{e\}$, $V=\mathbb{C}$, 则连续诱导表示 $\mathrm{Ind}_H^G(V)=C(G)$. 此时的 Frobenius 互反律恰为引理3.23.

7.4.2 G/T 的复结构

定义 7.48. *设 G 为连通紧李群, T 是 G 的极大环.*

1. *取定 G 的一个忠实表示, 不妨 $G\subseteq\mathrm{U}(n)$, 其中 n 为某个正整数. 由定理4.14可知 $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ 存在唯一的连通李子群, 该李子群的李代数恰为 $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$. 记该李子群为 $G_{\mathbb{C}}$, 称为李群 G 的**复化**.*
2. *取定 G 的一组正根 $\Delta^+(\mathbb{C})$, 回忆 $\mathfrak{n}^+=\bigoplus_{\alpha\in\Delta^+(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})}\mathfrak{g}_\alpha$. 记 $\mathfrak{b}:=\mathfrak{t}_{\mathbb{C}}\oplus\mathfrak{n}^+$, 称为 $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ 的 **博雷尔子代数** (Borel subalgebra) .*
3. *将由李代数 $\mathfrak{n}^+$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{a}:=i\mathfrak{t}$ 所唯一确定的 $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ 的连通李子群分别记为 N,B,A.*

例如, 若 $G=\mathrm{U}(n)$, 并取通常的正根系, 则 $G_{\mathbb{C}}=\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$, N 是对角元全为 1 的上三角阵构成的群, B 是全体上三角阵构成的群, A 是对角元全为正实数的对角阵构成的群. 特别注意, 当 G 为紧李群时, 定义7.48当中的 $G_{\mathbb{C}}$ 在同构意义下是唯一的 [尽管这非常不显然, 看似与 G 的忠实表示的选取有关] ; 而对于某些非紧李群, 其复化未必唯一, 甚至不存在 [详见 [61], VII §1] . 无论如何, 对接下来的理论十分重要的一点是, $G_{\mathbb{C}}$ 是复流形.

引理 7.49. *设 G 为连通紧李群, T 是 G 的极大环.*

1. *映射 $\exp\colon \mathfrak{n}^+\to N$ 是双射.*
2. *映射 $\exp\colon \mathfrak{a}\to A$ 是双射.*
3. *N,B,A,AN 都是 $G_{\mathbb{C}}$ 的闭子群.*
4. *映射 $T\times\mathfrak{a}\times\mathfrak{n}^+\to B$, $(t,X,H)\mapsto te^Xe^H$ 是微分同胚.*

证明. 因为 T 中的元素是两两交换的酉矩阵, 从而不妨将它们同时对角化. 不妨再通过外尔群作用, 假设 $u_\rho=\mathrm{diag}(c_1,...,c_n)$, $c_1\geq c_{i+1}$. 于是, 对于 $X\in\mathfrak{g}_\alpha$, $\alpha\in\Delta^+(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$, 记 $X=\sum\limits_{i,j}k_{ij}E_{ij}$, 则

$$\sum_{i,j}(c_i-c_j)k_{ij}E_{ij}=[u_\rho,X]=\alpha(u_\rho)X=\sum_{i,j}B(\alpha,\rho)k_{ij}E_{ij}.$$

注意 $B(\alpha,\rho)>0$, 这迫使当 $c_i-c_j\leq 0$ 时 $k_{ij}=0$; 换言之, X 是严格上三角阵.

众所周知, 指数映射 $M\mapsto e^M$ 给出了全体幂零矩阵与全体诣零矩阵之间的一一对应: 当 M 为幂零矩阵时, 注意 e^M 是 M 的多项式; 此时 exp 的逆映射为 $M\mapsto\ln(I+(M-I))=\sum\limits_{k\geq 1}\dfrac{(-1)^{k+1}}{k}(M-I)^k$. 特别地, 若 $X,Y\in\mathfrak{n}^+$, 则存在唯一的严格上三角阵 $Z\in\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$ 使得 $e^Xe^Y=e^Z$.

邓肯公式通常仅仅适用于非常小的 X,Y. 然而, 注意 $\Delta^+(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$ 是有限集, 于是对于 $X_j\in\mathfrak{n}^+$, 当次数 i_j 充分高时, $[X_n^{(i_n)},...,X_1^{(i_1)}]=0$. 因此 Z 的邓肯公式表达式里面的无限求和其实是有限和, 特别地, Z 多项式依赖于 X,Y, 于是对任意 $X,Y\in\mathfrak{n}^+$ 都适用于邓肯公式. 特别地, $Z\in\mathfrak{n}^+$, $\exp\mathfrak{n}^+$ 构成 $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ 的子群. 又因为 N 由 $\exp\mathfrak{n}^+$ 生成, 于是 (1) 得证. 断言 N 是闭子群, 这是因为 $\exp\colon\mathfrak{n}^+\to N$ 是双射, 且其逆映射连续.

因为 $\mathfrak{a}$ 是阿贝尔群, 且 $\mathfrak{a}$ 中的元素都是实矩阵, 从而 (2) 成立, 并且 A 是 $G_{\mathbb{C}}$ 的闭子群. 再验证 AN 是子群. 只需注意对任意 $a, a' \in A$, $n, n' \in N$ 都成立 $(an)(a'n') = (aa')(c_{a'^{-1}}n)n'$, 以及 $c_{e^H} e^X = \exp\left(e^{\operatorname{ad} H} X\right)$, $H \in \mathfrak{a}$, $X \in \mathfrak{n}^+$. 因为映射 $\mathfrak{b} = \mathfrak{t} \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}^+ \to G_{\mathbb{C}}$, $(H_1, H_2, X) \mapsto e^{H_1} e^{H_2} e^X$ 是 0 附近的局部微分同胚, 并且 $\{tan \mid t \in T, a \in A, n \in N\}$ 是 B 的一组生成元; 同样可以证明 TAN 构成 $G_{\mathbb{C}}$ 的子群, 因此 $B = Te^{\mathfrak{a}} e^{\mathfrak{n}^+}$. 再由基本的线性代数可知上述分解是唯一的, 从而得证. □

注意 $G_{\mathbb{C}}/B$ 是复流形. 下一个定理的重要意义在于, 可以使得 G/T 继承 $G_{\mathbb{C}}/B$ 的复结构, 这使得我们能够谈论 G/T 上的某些全纯向量丛的全纯截面.

定理 7.50. 设 G 为连通紧李群, T 是 G 的极大环. 则包含映射 $G \hookrightarrow G_{\mathbb{C}}$ 诱导微分同胚

$$G/T \cong G_{\mathbb{C}}/B.$$

证明. 注意 $\mathfrak{g} = \{X + \theta X \mid X \in \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}\}$, 从而 $\mathfrak{g}/\mathfrak{t}$ 与 $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}/\mathfrak{b}$ 都由

$$\left\{X_\alpha + \theta X_\alpha \,\middle|\, X_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha,\ \alpha \in \Delta^+(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})\right\}$$

的投影张成. 特别地, 映射 $G \to G_{\mathbb{C}}/B$ 的微分是满射. 因此 G 关于该映射的像集包含 $eB \in G_{\mathbb{C}}/B$ 的某开邻域. 注意 $g \in G$ 的左乘作用是连续的, 从而 G 在 $G_{\mathbb{C}}/B$ 的像集是开的. 而 G 是紧集又表明该像是闭的, 再由连通性可知 $G \to G_{\mathbb{C}}/B$ 是满射.

只需再证 $G \cap B = T$. 对于 $g \in G \cap B$, 显然 $\mathfrak{g} \cap \mathfrak{b} = \mathfrak{t}$ 是 $\operatorname{Ad}(g)$-不变的, 从而 $g \in N(T)$. 记 $w \in W(\Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}))$ 是与 g 相应的外尔群元. 则 $g \in B$ 表明 w 保持正根系 $\Delta^+(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$, 进而保持相应的外尔房. 而定理6.43表明 $W(\Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}))$ 在外尔房上的作用单可迁, 从而迫使 $w = \mathrm{id}$, $g \in T$. □

7.4.3 全纯函数

定义 7.51. 设 G 是紧李群, T 是 G 的极大环, $\lambda \in A(T)$, 记 $\mathbb{C}_\lambda$ 为 T 的由 ξ_λ 所确定的一维表示, 定义 G/T 上的线丛 L_λ 如下:

$$L_\lambda := G \times_T \mathbb{C}_\lambda.$$

由 Frobenius 互反律, $\Gamma(G/T, L_\lambda)$ 是一个非常 “大” 的 G-模; 若只考虑其中的全纯截面, 则我们将会得到 “大小合适的”G-模.

定义 7.52. 设 G 是连通紧李群, T 是 G 的极大环, $\lambda \in A(T)$.

1. 将 $\xi_\lambda \colon T \to \mathbb{C}$ 延拓为从博雷尔子群 B 到 $\mathbb{C}$ 的群同态 $\xi_\lambda^{\mathbb{C}}$ 如下:

$$\xi_\lambda^{\mathbb{C}}(te^{iH}e^X) = \xi_\lambda(t)e^{i\lambda(H)},$$

其中 $t \in T$, $H \in \mathfrak{t}$, $X \in \mathfrak{n}^+$.

2. 记 $L_\lambda^{\mathbb{C}} := G_{\mathbb{C}} \times_B \mathbb{C}_\lambda$, 其中 $\mathbb{C}_\lambda$ 是 B 的由 $\xi_\lambda^{\mathbb{C}}$ 所确定的一维表示.

引理 7.53. 设 G 是连通紧李群, T 是 G 的极大环, $\lambda \in A(T)$. 则成立 G-模同构 $\Gamma(G/T, L_\lambda) \cong \Gamma(G_{\mathbb{C}}/B, L_\lambda^{\mathbb{C}})$, 以及 $\mathrm{Ind}_T^G(\xi_\lambda) \cong \mathrm{Ind}_B^{G_{\mathbb{C}}}(\xi_\lambda^{\mathbb{C}})$.

证明. 因为 $G \to G_{\mathbb{C}}/B$ 诱导同构 $G/T \cong G_{\mathbb{C}}/B$, 于是每个 $h \in G_{\mathbb{C}}$ 都形如 $h = gb$, $g \in G$, $b \in B$; 此外, 若 h 也能表示为 $h = g'b'$, $g' \in G$, $b' \in B$, 则存在 $t \in T$ 使得 $g' = gt$, $b' = t^{-1}b$.

考虑诱导表示. 对于 $f \in \mathrm{Ind}_T^G(\xi_\lambda)$, 令 $F_f \in \mathrm{Ind}_B^{G_{\mathbb{C}}}(\xi_\lambda^{\mathbb{C}})$ 如下: $F_f(gb) := f(g)\xi_{-\lambda}^{\mathbb{C}}(b)$, $g \in G$, $b \in B$. 另一方面, 对于 $F \in \mathrm{Ind}_B^{G_{\mathbb{C}}}(\xi_\lambda^{\mathbb{C}})$, 令 $f_F \in \mathrm{Ind}_T^G(\xi_\lambda)$ 如下: $f_F(g) := F(g)$. 容易验证上述两个映射都是良定的 G-模同态, 并且互逆 [留作习题 7.31] . □

定义 7.54. 设 G 是连通紧李群, T 是 G 的极大环, $\lambda \in A(T)$.

1. 对于截面 $s \in \Gamma(G/H, L_\lambda)$, 如果与之相应 [见定理7.46与引理7.53] 的 $F \in \mathrm{Ind}_B^{G_\mathbb{C}}(\xi_\lambda^\mathbb{C})$ 是 $G_\mathbb{C}$ 上的全纯函数, 则称 s 为 L_λ 的**全纯截面**. 换言之, s 为全纯截面当且仅当相应的 F 满足

$$\mathrm{d}F(iX) = i\,\mathrm{d}F(X)$$

对任意 $g \in G_\mathbb{C}$, 任意 $X \in T_g(G_\mathbb{C})$ 都成立, 其中

$$\mathrm{d}F(X) = X(\mathrm{Re}\,F) + iX(\mathrm{Im}\,F).$$

2. 将 L_λ 的所有全纯截面构成的集合记作 $\Gamma_{\mathrm{hol}}(G/T, L_\lambda)$.

函数 F 的微分 $\mathrm{d}F$ 总是 $\mathbb{R}$-线性的. 而 F 为全纯函数等价于说 $\mathrm{d}F$ 是 $\mathbb{C}$-线性的. 在局部坐标下, 容易验证此条件正是众所周知的**柯西-黎曼方程**. [习题 7.32] .

定义 7.55. 设 G 是连通 (线性) 李群, T 是 G 的极大环. 记 $C^\infty(G_\mathbb{C})$ 为 $G_\mathbb{C}$ 上的光滑函数空间, 对 G 也有类似记号.

1. 对于 $Z \in \mathfrak{g}_\mathbb{C}$, $F \in C^\infty(G_\mathbb{C})$, $h \in G_\mathbb{C}$, 令

$$[\mathrm{dr}(Z)F](h) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}F(he^{tZ})\big|_{t=0}.$$

对于 $X \in \mathfrak{g}$, $f \in C^\infty(G)$, $g \in G$, 令

$$[\mathrm{dr}(X)f](g) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(ge^{tX})\big|_{t=0}.$$

2. 对于 $Z = X + iY$, $X, Y \in \mathfrak{g}$, 令

$$\mathrm{dr}_\mathbb{C}(Z) = \mathrm{dr}(X) + i\,\mathrm{dr}(Y).$$

注意 $\mathrm{dr}_\mathbb{C}(Z)$ 是 $C^\infty(G)$ 上的良定的算子, 而 $\mathrm{dr}(Z)$ 作为 $C^\infty(G)$ 上的算子则未必良定 [除非 $Z \in \mathfrak{g}$] .

引理 7.56. 设 G 是连通紧李群, T 是 G 的极大环, $\lambda \in A(T)$, $F \in \mathrm{Ind}_B^{G_\mathbb{C}}(\xi_\lambda^\mathbb{C})$, $f := F|_G \in \mathrm{Ind}_T^G(\xi_\lambda)$.

1. F 是全纯函数当且仅当对任意 $Z \in \mathfrak{n}^+$ 都成立
$$\mathrm{d}r_\mathbb{C}(Z)F = 0.$$
2. F 是全纯函数当且仅当对任意 $Z \in \mathfrak{n}^+$ 都成立
$$\mathrm{d}r_\mathbb{C}(Z)f = 0.$$

证明. 因为对任意 $g \in G$, $\mathrm{d}l_g\colon T_e(G_\mathbb{C}) \to T_g(G_\mathbb{C})$ 为同构, 从而 F 全纯当且仅当对任意 $g \in G_\mathbb{C}$ 以及 $Z \in \mathfrak{g}_\mathbb{C}$ 都成立

$$\mathrm{d}F(\,\mathrm{d}l_g(iZ)) = i\,\mathrm{d}F(\,\mathrm{d}l_g Z). \tag{7.57}$$

而由相关定义可知

$$\mathrm{d}F(\,\mathrm{d}l_g Z) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}F(ge^{tZ})\big|_{t=0} = [\,\mathrm{d}r(Z)F](g).$$

对于 $Z \in \mathfrak{n}^+$, 则 $e^{tZ} \in N$, 从而 $F(ge^{tZ}) = F(g)$. 因此当 $Z \in \mathfrak{n}^+$ 时, (7.57)的两边都为零, 从而该式平凡地成立. 而若 $Z \in \mathfrak{t}_\mathbb{C}$, 则 $F(ge^{tZ}) = F(g)e^{-t\lambda(Z)}$. 因此当 $Z \in \mathfrak{t}_\mathbb{C}$ 时(7.57)两边都等于 $-i\lambda(Z)F(g)$, 从而该式也成立.

由于 $\mathfrak{g}_\mathbb{C} = \mathfrak{n}^- \oplus \mathfrak{t}_\mathbb{C} \oplus \mathfrak{n}^+$, 于是, 为证明 (1), 只需考虑(7.57)式对于 $Z \in \mathfrak{n}^-$ 是否成立. 另一方面, 注意到(7.57)等价于 $\mathrm{d}r(iZ)F = i\,\mathrm{d}r(Z)F$, 这又等价于 $\mathrm{d}r(Z)F = \mathrm{d}r_\mathbb{C}(Z)F$. 若 $Z \in \mathfrak{n}^-$, 则 $\theta Z \in \mathfrak{n}^+$, $Z + \theta Z \in \mathfrak{g}$, 因此

$$\begin{aligned}\mathrm{d}r(Z)F &= \mathrm{d}r(Z+\theta Z)F = \mathrm{d}r(\theta Z)F = \mathrm{d}r_\mathbb{C}(Z+\theta Z)F \\ &= \mathrm{d}r_\mathbb{C}(Z)F + \mathrm{d}r_\mathbb{C}(\theta Z)F.\end{aligned}$$

因此 $\mathrm{d}r(Z)F = \mathrm{d}r_\mathbb{C}(Z)F$ 当且仅当 $\mathrm{d}r_\mathbb{C}(\theta Z) = 0$, (1) 得证.

再证 (2). 若 F 全纯, 注意 $f = F|_G$, 因此 $\mathrm{d}r_\mathbb{C}(\mathfrak{n}^+)f = 0$. 另一方面, 若 $\mathrm{d}r_\mathbb{C}(\mathfrak{n}^+)f = 0$, 则在此条件下容易验证 $\mathrm{d}r(Z)F|_g = \mathrm{d}r_\mathbb{C}(Z)F|_g$ 对任意 $g \in G$, $Z \in \mathfrak{g}_\mathbb{C}$ 成立. 因此对于 $X \in \mathfrak{g}$, $g \in G$, $b \in B$, 成立

$$(\mathrm{d}r(X)F)(gb) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}F(gbe^{tX})\big|_{t=0} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}F(ge^{t\,\mathrm{Ad}(b)X}b)\big|_{t=0}$$

$$
\begin{aligned}
&= \xi_{-\lambda}(b)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}F(ge^{t\,\mathrm{Ad}(b)X})\big|_{t=0}\\
&= \xi_{-\lambda}(b)(\mathrm{dr}(\mathrm{Ad}(b)X)F)(g)\\
&= \xi_{-\lambda}(b)(\mathrm{dr}_{\mathbb{C}}(\mathrm{Ad}(b)X)F)(g).
\end{aligned}
$$

因此对于 $Z=X+iY\in\mathfrak{n}^+$, $X,Y\in\mathfrak{g}$, 注意 $\mathrm{Ad}(b)Z\in\mathfrak{n}^+$, 从而

$$
\begin{aligned}
(\mathrm{dr}_{\mathbb{C}}(Z)F)(gb) &= (\mathrm{dr}(X)F)(gb)+i(\mathrm{dr}(Y)F)(gb)\\
&= \xi_{-\lambda}(b)\left[(\mathrm{dr}_{\mathbb{C}}(\mathrm{Ad}(b)X)F)(g)+(\mathrm{dr}_{\mathbb{C}}(i\,\mathrm{Ad}(b)Y)F)(g)\right]\\
&= \xi_{-\lambda}(b)(\mathrm{dr}_{\mathbb{C}}(\mathrm{Ad}(b)Z)F)(g)=0,
\end{aligned}
$$

从而得证. □

7.4.4 博雷尔-韦伊定理

下述定理将给出每个不可约表示的具体构造.

定理 7.58. *(博雷尔-韦伊定理). 设 G 是连通紧李群, $\lambda\in A(T)$, 则*

$$
\Gamma_{\mathrm{hol}}(G/T,L_\lambda)\cong\begin{cases}V(w_0\lambda) & \text{若 } -\lambda \text{ 是支配权}\\ \{0\} & \text{其余情况,}\end{cases}
$$

其中 $w_0\in W(\Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}))$ 是将主外尔房 Π 变为 $-\Pi$ 的唯一元素 [习题 6.40] .

证明. 将 $\Gamma_{\mathrm{hol}}(G/T,L_\lambda)$ 中的元素视为 $\mathrm{Ind}_T^G(\xi_\lambda)$ 中的全纯函数. 于是, 对于 G 上的光滑函数 $f\in C^\infty(G)$, $f\in\Gamma_{\mathrm{hol}}(G/T,L_\lambda)$ 当且仅当 f 满足以下两个条件:

(7.59) $$f(gt)=\xi_{-\lambda}(t)f(g),\qquad \forall g\in G,\ t\in T,$$

(7.60) $$\mathrm{dr}_{\mathbb{C}}(Z)f=0,\qquad Z\in\mathfrak{n}^+.$$

考虑 $C^\infty(G)$ 上的 C^∞-拓扑, 推论3.47表明 $C^\infty(G)_{G-\mathrm{fin}}=C(G)_{G-\mathrm{fin}}$. 因此由定理3.24以及最高权定理可知, 成立如下 $G\times G$-双模同构

$$
C^\infty(G)_{G-\mathrm{fin}}\cong\bigoplus_{\substack{\gamma\in A(T)\\ \gamma\text{是支配权}}}V(\gamma)^*\otimes V(\gamma).
$$

在此同构下, 容易验证 G 在 $\Gamma_{\mathrm{hol}}(G/T, L_\lambda)$ 上的作用相当于 G 在 $V(\gamma)^*$ 上的平凡作用以及在 $V(\gamma)$ 上的标准作用 [习题 7.33]. 回忆引理7.5, 记 φ 为相应的同构映射:

$$\varphi\colon \bigoplus_{\substack{\gamma\in A(T)\\ \gamma\text{是支配权}}} V(-w_0\gamma)^*\otimes V(\gamma)\to C^\infty(G)_{G-\mathrm{fin}}.$$

对于 $f\in C^\infty(G)$, 由定理3.46, 记 $f=\sum\limits_{\substack{\gamma\in A(T)\\ \text{是支配权}}} f_\gamma$ 在 C^∞-拓扑下收敛, 其中 $f_\gamma\in\varphi(\chi_\gamma)$, $\chi_\gamma\in V(-w_0\gamma)\otimes V(\gamma)$.

f 满足(**7.60**)式当且仅当每个 f_γ 都满足(**7.60**)式. 在同构 φ 意义下, 容易验证 $dr_{\mathbb{C}}(Z)$ 在 f 上的作用相当于 Z 在 $V(-w_0\gamma)$ 上的标准作用以及在 $V(\gamma)$ 上的平凡作用. 于是由定理7.3可知, 若 f 全纯, 则每个 χ_γ 都必形如 $\chi_\gamma=v_{-w_0\gamma}\otimes y_\gamma$, 其中 $v_{-w_0\gamma}$ 是 $V(-w_0\gamma)$ 的最高权向量, $y_\gamma\in V(\gamma)$.

再次利用上述同构, 容易验证 f 满足(**7.59**)式当且仅当 $tv_{-w_0\gamma}=\xi_{-\lambda}(t)v_{-w_0\gamma}$, $\forall t\in T$ 对每个 γ 都成立. 然而 $tv_{-w_0\gamma}=\xi_{-w_0\gamma}(t)v_{-w_0\gamma}$, 因此(**7.59**)成立当且仅当 $w_0\gamma=\lambda$, 从而证毕. □

例如 $G=\mathrm{SU}(2)$, 极大环 T 照常选取, 其中的元素皆为对角阵. 我们考察 $\Gamma_{\mathrm{hol}}(G/T,\xi_{-n\frac{\varepsilon_{12}}{2}})$, 并将其中元素视为 $\mathrm{Ind}_B^{G_{\mathbb{C}}}(\xi^{\mathbb{C}}_{-n\frac{\varepsilon_{12}}{2}})$ 中的全纯函数:

$$\Gamma_{\mathrm{hol}}(G/T,\xi_{-n\frac{\varepsilon_{12}}{2}})\cong$$
$$\left\{f\colon \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})\to\mathbb{C}\text{ 全纯}\ \middle|\ f(g\begin{pmatrix}a & b\\ 0 & a^{-1}\end{pmatrix})=a^nf(g),\, g\in\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})\right\}.$$

注意 $\begin{pmatrix}z_1 & z_3\\ z_2 & z_4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & b\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}z_1 & bz_1+z_3\\ z_2 & bz_2+z_4\end{pmatrix}$, 于是 $a=1$ 时的诱导条件表明 $f\in\mathrm{Ind}_B^{G_{\mathbb{C}}}(\xi^{\mathbb{C}}_{-n\frac{\varepsilon_{12}}{2}})$ 被它在 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ 的第一列上的限制所完全确定. 又注意 $\begin{pmatrix}z_1 & z_3\\ z_2 & z_4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & 0\\ 0 & a^{-1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}az_1 & a^{-1}z_3\\ az_2 & a^{-1}z_4\end{pmatrix}$, 从而 $b=0$ 时的诱导条件表明 f 是关于 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ 的第一列的 n 次齐次函数. 最后, f 是全纯的, 表明 $\Gamma_{\mathrm{hol}}(G/T,\xi_{-n\frac{\varepsilon_{12}}{2}})$ 可以视为关于 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ 的第一列的 n 次齐次多项式函数之全体. 换言之, $\Gamma_{\mathrm{hol}}(G/T,\xi_{-n\frac{\varepsilon_{12}}{2}})\cong V_n(\mathbb{C}^2)$.

最后顺便一提, 博雷尔-韦伊定理可被 [对偶地] 推广至线丛的 Dolbeaut 上同调, 推广之后的结果称为**博特-博雷尔-韦伊定理** (Bott-Borel-Weil Theorem). 我们这里只介绍结论, 略去证明. 其证明方法是将此问题转化为李代数上同调中的结果 ([97]), 然后利用 Kostant 的某个定理来计算 ([64]), 此定理的完整证明可见 [86].

对于复流形 M, 记 $A^p(M) = \bigwedge_p^* T^{0,1}(M)$ 为 M 上的光滑 $(0,p)$-微分形式之全体 ([93]). 算子 $\overline{\partial}_M \colon A^p(M) \to A^{p+1}(M)$ 由下式所定义: 对任意反全纯向量场 X_j,

$$\begin{aligned}\left(\overline{\partial}_M \omega\right)(X_0, ..., X_p) &= \sum_{k=0}^{p} (-1)^k X_k \omega(X_0, ..., \widehat{X_k}, ..., X_p) \\ &+ \sum_{i<j} (-1)^{i+j} \omega([X_i, X_j], X_0, ..., \widehat{X_i}, ..., \widehat{X_j}, ..., X_p).\end{aligned}$$

对于 M 上的全纯向量丛 $\mathcal{V}$, 丛 $\mathcal{V} \otimes A^p(M)$ 的截面称为取值于 $\mathcal{V}$ 的 $(0,p)$-微分形式. 取值于 $\mathcal{V}$ 的 $(0,p)$-微分形式之全体记作 $A^p(M, \mathcal{V})$. 算子 $\overline{\partial} \colon A^p(M, \mathcal{V}) \to A^{p+1}(M, \mathcal{V})$ 的定义为 $\overline{\partial} = 1 \otimes \overline{\partial}_M$, 它满足 $\overline{\partial}^2 = 0$. 称

$$H^p(M, \mathcal{V}) := \ker \overline{\partial} / \mathrm{Im} \overline{\partial}$$

为 $\mathcal{V}$ 的 **Dolbeaut 上同调**.

定理 7.61. *(博特-博雷尔-韦伊定理). 设 G 为连通紧李群, $\lambda \in A(T)$. 若 $\lambda + \rho$ 位于某个外尔房的边界, 则 $H^p(G/T, L_\lambda) = \{0\}$ 对任意 p 成立; 否则,*

$$H^p(G/T, L_\lambda) \cong \begin{cases} V(w(\lambda+\rho) - \rho) & \text{若 } p = \left|\left\{\alpha \in \Delta^+(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}) \,\middle|\, B(\lambda+\rho, \alpha) < 0\right\}\right| \\ \{0\} & \text{其余情况,} \end{cases}$$

其中 $w \in W(\Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}))$ 是使得 $w(\lambda + \rho)$ 是支配权的唯一元素.

7.4.5 习题

习题 7.27 设 G 是李群, H 是 G 的闭子群, V 是 H 的表示, 验证 $G\times_H V$ 是 G/H 上的 G-齐次向量丛.

习题 7.28 补全定理7.46与定理7.47的证明细节.

习题 7.29 设 G 是连通紧李群, T 是 G 的极大环, $\lambda\in A(T)$.

(a) 证明: $\xi_\lambda^{\mathbb{C}}$ 是复李群的同态.

(b) 证明: 将李群同态 $\xi_\lambda\colon T\to\mathbb{C}$ 延拓为从 B 到 $\mathbb{C}$ 的复李群同态的方式是唯一的, 延拓之后只能是 $\xi_\lambda^{\mathbb{C}}$.

习题 7.30 设 G 是连通紧李群, T 是 G 的极大环, $\lambda\in A(T)$. 给定 G 的不可约表示 V. 证明: $V\cong V(\lambda)$ 当且仅当存在非零向量 $v\in V$ 使得对任意 $b\in B$ 都成立 $bv=\xi_\lambda^{\mathbb{C}}(b)v$. 此时, v 在相差常数倍意义下唯一, 并且是 $V\cong V(\lambda)$ 的最高权向量.

习题 7.31 补全引理7.53的证明细节.

习题 7.32 设 $G_{\mathbb{C}}$ 是连通的线性复李群, T 为其极大环. 我们回忆, $G_{\mathbb{C}}$ 上的复值函数 F 称为**全纯函数**, 如果对任意 $g\in G_{\mathbb{C}}$, $X\in\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ 都成立 $\mathrm{d}F(\mathrm{d}l_g(iX))=i\,\mathrm{d}F(\mathrm{d}l_g(X))$, 其中 $\mathrm{d}F(\mathrm{d}l_g(X))=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}F(ge^{tX})\big|_{t=0}$. 注意 $\mathrm{d}F$ 总是 $\mathbb{R}$-线性的.

(a) 首先考虑最简单的例子 $G_{\mathbb{C}}=\mathbb{C}\setminus\{0\}\cong\mathrm{GL}(1,\mathbb{C})$, $z=x+iy\in G_{\mathbb{C}}$, $X=1$. 验证 $\mathrm{d}F(\mathrm{d}l_z(iX))=\dfrac{\partial}{\partial y}F|_z$, 并且 $i\,\mathrm{d}F(\mathrm{d}l_zX)=i\dfrac{\partial}{\partial x}F|_z$. 由此推出, 一般来说 $\mathrm{d}F$ 不是 $\mathbb{C}$-线性的; F 是全纯函数当且仅当 $u_x=v_y$ 且 $u_y=-v_x$, 其中 $F=u+iv$.

(b) 设 $\{X_j\}_{j=1}^n$ 是 $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ 的一组 $\mathbb{C}$-基. 取定 $g\in G_{\mathbb{C}}$, 证明映射 $\varphi\colon\mathbb{R}^{2n}\to G_{\mathbb{C}}$

$$\varphi(x_1,...,x_n;y_1,...,y_n):=ge^{x_1X_1}\cdots e^{x_nX_n}e^{iy_1X_1}\cdots e^{iy_nX_n}$$

是 $0\in\mathbb{R}^{2n}$ 附近的局部微分同胚 [见习题 4.12] .

(c) 将 $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ 等同于 $T_e(G_{\mathbb{C}})$. 证明: $\mathrm{d}\varphi(\partial_{x_j}|_0)=\mathrm{d}l_gX_j$, $\mathrm{d}\varphi(\partial_{y_j}|_0)=\mathrm{d}l_g(iX_j)$.

(d) 设 F 是 $G_{\mathbb{C}}$ 上的复值光滑函数, 记 $f:=\varphi^*F$ 为 F 在 g 附近的局部坐标下的表达式. 证明: F 是全纯函数当且仅当对任意 $g\in G_{\mathbb{C}}$, 相应的 $f=u+iv$ 满足 $u_{x_j}=v_{y_j}$, $u_{y_j}=-v_{x_j}$. 换言之, F 是全纯函数当且仅当 F 在局部坐标下满足**柯西-黎曼方程**.

习题 7.33 补全博雷尔-韦伊定理 [定理7.58] 的证明细节.

习题 7.34 设 B 是 $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ 的由上三角阵构成的子群, $\lambda = \lambda_1\varepsilon_1 + \cdots + \lambda_n\varepsilon_n$ 是酉群 $\mathrm{U}(n)$ 的支配整权, 即, $\lambda_k \in \mathbb{Z}$, $\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_n$.

(a) 设光滑函数 $f\colon \mathrm{GL}(n,\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$. 对于 $j < k$, 证明: $\mathrm{dr}(iE_{jk})f|_g = i\,\mathrm{dr}(E_{jk})f|_g$ 当且仅当

$$0 = \sum_{l=0}^{n} \overline{z_{lj}} \frac{\partial f}{\partial \overline{z_{lj}}}\Big|_g,$$

其中 $g \in (z_{jk}) \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$, $\dfrac{\partial}{\partial \overline{z_{jk}}} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial}{\partial x_{jk}} + i\dfrac{\partial}{\partial y_{jk}}\right)$, $z_{jk} = x_{jk} + iy_{jk}$. 由此推出, $\mathrm{dr}(iE_{jk})f = i\,\mathrm{dr}(E_{jk})f$ 当且仅当 $\dfrac{\partial f}{\partial \overline{z_{lk}}} = 0$.

(b) 证明: $\mathrm{U}(n)$ 的关于最高权 λ 的不可约表示可以如下实现:

$$V(\lambda) = \left\{F\colon \mathrm{GL}(n,\mathbb{C}) \to \mathbb{C}\text{ 全纯} \,\middle|\, F(gb) = \xi^{\mathbb{C}}_{\lambda'}(b)F(g),\ \forall g \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{C}),\ b \in B\right\},$$

其中 $\lambda' := -\lambda_n\varepsilon_1 - \cdots - \lambda_1\varepsilon_n$; $\mathrm{U}(n)$ 在其上的作用为函数的左平移, 即 $(g_1F)(g_2) := F(g_1^{-1}g_2)$.

(c) 定义函数 $F_{w_0\lambda}\colon \mathrm{GL}(n,\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ 如下:

$$F_{w_0\lambda}(g) := (\det\nolimits_1 g)^{\lambda_{n-1}-\lambda_n} \cdots (\det\nolimits_{n-1} g)^{\lambda_1-\lambda_2}(\det\nolimits_n g)^{-\lambda_1},$$

其中 $\det_k(g_{ij}) := \det_{i,j\leq k}(g_{ij})$. 证明: $F_{w_0\lambda}$ 是全纯函数, 关于 N 的右平移作用不变, 且关于 N^t 的左平移作用不变.

(d) 证明 $F_{w_0\lambda} \in V(\lambda)$, 并且 $F_{w_0\lambda}$ 的权为 $\lambda_n\varepsilon_1 + \cdots + \lambda_1\varepsilon_n$. 由此推出 $F_{w_0\lambda}$ 是 $V(\lambda)$ 的**最低权向量**, 即关于 $-\Pi$ 的最高权向量.

(e) 记 $F_\lambda(g) := F_{w_0\lambda}(w_0 g)$, 其中 $w_0 = E_{1n} + E_{2,n-1} + \cdots + E_{n1}$. 将 F_λ 写成关于子矩阵的行列式的表达式, 并证明 F_λ 是 $V(\lambda)$ 的最高权向量.

习题 7.35 本习题通过以下步骤来证明紧李群都是**代数群**. 设 G 为紧李群.

(a) 设 G 作用于向量空间 V, $\mathcal{O}$ 与 $\mathcal{O}'$ 是 V 的两条不同的 G-轨道. 证明: 存在 V 上的连续函数 f, 使得 $f|_{\mathcal{O}} \equiv 1$ 且 $f|_{\mathcal{O}'} = -1$.

(b) 证明: 存在 V 上的多项式函数 p, 使得 $|p(x) - f(x)| < 1$ 对 $x \in \mathcal{O} \cup \mathcal{O}'$ 成立. 特别地, $p(x)$ 满足: 当 $x \in \mathcal{O}$ 时 $p(x) > 0$, 当 $x \in \mathcal{O}'$ 时 $p(x) < 0$.

(c) 设 $\mathcal{P}$ 是满足如下条件的 V 上的多项式函数 $p(x)$ 构成的集合: 当 $x \in \mathcal{O}$ 时 $p(x) > 0$, 当 $x \in \mathcal{O}'$ 时 $p(x) < 0$. 注意 $\mathcal{P}$ 是凸集. 考虑 G 在函数上的左平移作用 $(g.p)(x) := p(g^{-1}x)$, 利用紧李群 G 上的不变积分证明: 存在 $p \in \mathcal{P}$, 使得 p 是 G-不变的.

(d) 证明: V 上的 G-不变多项式函数在任何 G-轨道下的限制都是常函数.

(e) 设 $\mathcal{I}$ 为 V 上的在 $\mathcal{O}$ 处取值恒为零的 G-不变多项式函数生成的理想. 证明: 存在 $p \in \mathcal{I}$, 使得 p 在 $\mathcal{O}'$ 处的取值非零. 由此推出 $\mathcal{I}$ 的零点集恰为 $\mathcal{O}$.

(f) 取 G 的忠实表示, 不妨 $G \subseteq \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$, 考虑 $V := \mathrm{M}_{n,n}(\mathbb{C})$, G 在 V 上的作用为通常的矩阵左乘. 证明 G 可自然视为 V 中的一条 G-轨道, 从而 G 是仿射代数集.

参考文献

1. Adams, J., Lectures on Lie Groups, W. A. Benjamin, New York, 1969.
2. Artin, E., Geometric Algebra, Interscience, New York, 1957.
3. Artin, M., Algebra, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1991.
4. Authur, J., Characters, harmonic analysis, and an L^2-Lefschetz formula, The Mathematical Heritage of Hermann Weyl (Durham, NC, 1987), 167-179, Proc. Sympos. Pure Math., 48, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1988.
5. Baker, B., Alternants and continuous groups, Proc. London Math. Soc., 3:24-47, 1905.
6. Bekka, M. and de la Harpe, P., Irreducibility of unitary group representations and reproducing kernels Hilbert spaces; Appendix by the authors in collaboration with R. Grigorchuk, Expo. Math. 21(2):115-149, 2003.
7. Berstein, I., Gelfand, I., and Gelfand, S., Structure of representations generated by highest weight vectors, Funktsionalnyi Analiz i Ego Prilozheniya 5, 1:1-9, 1971.
8. Boothby, W., An Introduction to Differentiable Manifolds and Riemannian Geometry, second edition, Pure and Applied Mathematics, 120, Academic Press, Inc., Orlando, FL, 1986.
9. Borel, A., Hermann Weyl and Lie groups, in Hermann Weyl, 1885-1985, Centenary lectures (Zürich 1986), 53-82, ed. K. Chandrasekharan, Springer Verlag, Berlin-Heidelberg- New York, 1986.
10. Borel, A., Linear Algebraic Groups, W. A. Benjamin, New York, 1987.
11. Borel, A., Sous groupes commutatifs et torsion des groupes de Lie compacts connexes, Tohoku Math. J., 13:216-240, 1961.

12. Borel, A., and Serre, J-P., Sur certains sous-groupes des groupes de Lie compacts, Comment. Math. Helv., 27:128-139, 1953.

13. Bott, R., Homogeneous vector bundles, Annals of Math., 66:203-248, 1957.

14. Bourbaki, N., Eléments de Mathématique, Groupes et Algèbres de Lie: Chapitre 1, Actualit ťes scientifiques et industreielles 1285, Hermann, Paris, 1960.

15. Bourbaki, N., Eléments de Mathématique, Groupes et Algèbres de Lie: Chapitres 4, 5, et 6, Actualités scientifiques et industreielles 1337, Hermann, Paris, 1968.

16. Bourbaki, N., Eléments de Mathématique, Groupes et Algèbres de Lie: Chapitre II et III, Hermann, Paris, 1972.

17. Bredon, G., Introduction to Compact Transformation Groups, Academic Press, New York London, 1972.

18. Bremmer, M., Moody, R., and Patera, J., Tables of Cominant Weight Multiplicities for Representations of Simple Lie Algebras, Marcel Dekker, New York, 1985.

19. Brĺocker, T., and tom Dieck, T., Representations of Compact Lie Groups, translated from the German manuscript, corrected reprint of the 1985 translation, Graduate Texts in Mathematics, 98, Springer-Verlag, New York, 1995.

20. Burnside, W., On the representation of a group of finite order as an irreduible group of linear substitutions and the direct establishment of the relations between the group characters, Proc. London Math. Soc., 1:117-123, 1904.

21. Campbell, J., On the law of combination of operators bearin on the theory of continuous transformation groups, Proc. London Math. Soc., 28: 381-190, 1897.

22. Cartan, É., La géométries des groupes simples, Ann. Math. Pura Appl., 4:209-256, 1927.

23. Cartan, É., Les groupes projectifs qui ne laissent invariante aucune multiplicité plane, Bull. Soc. Math. France, 41:53-96, 1913.

24. Cartan, É., Les groupes reéls simples finis et continus, Annales Sci. École Norm. Sup., 31:263-255, 1914.

25. Cartan, É., Les tenseurs irréductibles et les groupes linéaires simples et semis-simples, Bull. des Sci. Math., 49:130-152, 1925.

26. Cartan, É., Sur la structure des groupes de transformations finis et continus, Thèse, Nony, Paris, 1894. Second edition: Vuibert, 1933.

27. Cartan, É., Sur certaines formes riemanniennes remarquables des géométries à groupe fondamental simple, Annales Sci. Ećole Norm. Sup., 44:345-467, 1927.

28. Chevalley, C., Sur la classification des algèbres de Lie simples et de leur reprt́esentations, C. R. Acad. Sci. Paris, 227, 1136-1138, 1948.

29. Chevalley, C., Theory of Lie Groups I, Princeton University Press, Princeton, 1946.

30. Conway, J., A Course in Functional Analysis, second edition, Graduate Texts in Mathematics, 96, Springer-Verlag, New York, 1990.

31. Coxeter, H., Discrete groups generated by reflections, Annals of Math., 35:588-621, 1934.

32. Curtis, C., and Reiner, I., Methods of Representation Theory, Volumes I and II, JohnWiley & Sons, New York Chichester Brisbane Toronto, 1981/87.

33. Dixmier, J., Algèbres Enveloppantes, Gauthier-Villars Editeur, Paris, 1974.

34. Duistermaat, J., and Kolk, J, Lie Groups, Universitext. Springer-Verlag, Berlin, 2000.

35. Dynkin, E., Calculation of the coefficients of the Campbell-Hausdorff formula, Dokl. Akad. Nauk., 57:323-326, 1947.

36. Dynkin, E., Classification of the simple Lie groups, Mat. Sbornik, 18(60):347-352, 1946.

37. Folland, G., Real Analysis. Modern Techniques and Their Applications, second edition, Pure and Applied Mathematics (New York), A Wiley-Interscience Publication, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1999.

38. Freudenthal, H., and de Vries, H., Linear Lie Groups, Academic Press, New York London, 1969.

39. Frobenius, F., Über lineare Substitutionen and bilineare Formen, J. reine angew. Math., 84:1-63, 1878.

40. Fulton, W., and Harris, J., Representation Theory. A first course, Graduate Texts in Mathematics, 129, Readings in Mathematics, Springer-Verlag, New York, 1991.

41. Goodman, R., and Wallach, N., Representations and Invariants of the Classical Groups, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, 68, Cambridge University Press, Cambridge, 1998.

42. Guillemin and Pollack, Differential Topology, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1974.

43. Haar, A., Der Massbegriff in der Theorie der kontinuierlichen Gruppen, Annals of Math., 34:147-169, 1933.

44. Hall, B., Lie Groups, Lie Algebras, and Representations: An Elementary Introduction, Graduate Texts in Mathematics, 222, Springer-Verlag, New York, 2003.

45. Harish-Chandra, Characters of semi-simple Lie groups, Symposia on Theoretical Physics, 4:137-142, 1967.

46. Harish-Chandra, Harmonic analysis on real reductive groups I, J. Func. Anal., 19:104- 204, 1975.

47. Harish-Chandra, On a lemma of F. Bruhat, J. Math Pures Appl., 35(9):203-210, 1956.

48. Harish-Chandra, On some appliations of the universal enveloping algebra of a semisimple Lie algebra, Trans. Amer. Math. Soc., 70:28-95, 1951.

49. Hausdorff, F., Die symbolische exponentialformel in der gruppentheorie, Leibzier Ber., 58:19-48, 1906.

50. Helgason, S., Differential Geometry, Lie Groups, and Symmetric Spaces, corrected reprint of the 1978 original, Graduate Studies in Mathematics, 34, American Mathematical Society, Providence, RI, 2001.

51. Hocking, J., and Young, G., Topology, second edition, Dover Publications, Inc., New York, 1988.

52. Hofmann, K., and Morris, S., The Structure of Compact Groups. A Primer for the Student—a Handbook for the Expert, de Gruyter Studies in Mathematics, 25, Walter de Gruyter & Co., Berlin, 1998.

53. Hopf, H., Über den Rang geschlossener Liescher Gruppen, Comment. Math. Helv., 13:119-143, 1940-41.

54. Hopf, H., Maximale Toroide unde singuläre Elemente in geschlossenen Lieschen Gruppen, Comment. Math. Helv., 15:59-70, 1942-43.

55. Howe, R., and Tan, E., Non-abelian Harmonic Analysis. Applications of $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$, Universitext, Springer-Verlag, New York, 1992.

56. Humphreys, J., Introduction to Lie Algebras and Representation Theory, second printing, revised, Graduate Texts in Mathematics, 9, Springer-Verlag, New York-Berlin, 1978.

57. Humphreys, J., Reflection Groups and Coxeter Groups, Cambridge University Press, Cambridge, 1990.

58. Hurwitz, A., Über die Erzeugung der Invarianten durch Intergration, Nachrichten von der KÍoniglichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, 71-90, 1897.

59. Jacobson, N., Lie Algebras, Interscience Publishers, New York London Sydney, 1962.

60. Killing, W., Die Zusammensetzung der stetigen endlichen Transformationsgruppen, I, II, III, IV, Math. Ann., 31:252-290, 1888; 33:1-48, 1889; 34:57-122, 1889; 36:161-189, 1890.

61. Knapp, A., Lie Groups Beyond an Introduction, second edition, Progress in Mathematics, 140, BirkhÍauser Boston, Inc., Boston, MA, 2002.

62. Knapp, A., Representation Theory of Semisimple Groups. An Overview Based on Examples, reprint of the 1986 original, Princeton Landmarks in Mathematics, Princeton University Press, Princeton, NJ, 2001.

63. Kostant, B., A formula for the multiplicity of a weight, Trans. Amer. Math. Soc., 93:53-73, 1959.

64. Kostant, B., Lie algebra cohomology and the generalized Borel-Weil theorem, Annal of Math., 74:329-387, 1961.

65. Loos, O., Symmetric Spaces, II: Compact Spaces and Classification, W. A. Benjamin, New York Amsterdam, 1969.

66. Macdonald, I., The volume of a compact Lie group, Invent. Math., 56:93-95, 1980.

67. McKay, W., and Patera, J., Tables of Dimensions, Indices, and Branching Rules for Representations of Simple Lie Algebras, Marcell Dekker, New York, 1981.

68. Montgomery, D., and Zippin, L., Topological Transformation Groups, Interscience, New York, 1955.

69. Munkres, J., Topology: a First Course, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1975.

70. Onishchik, A., and Vinberg, E., Lie Groups and Algebraic Groups, translated from the Russian and with a preface by D. A. Leites, Springer Series in Soviet Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, 1990.

71. Peter, F., andWeyl, H., Die Vollstĺandigkeit der primitiven Darstellungen einer geschlossenen kontinuierlichen Gruppe, Math. Ann., 97:737-755, 1927.

72. Rossmann, W., Lie Groups. An Introduction Through Linear Groups, Oxford Graduate Texts in Mathematics, 5, Oxford University Press, Oxford, 2002.

73. Rudin, W, Real and complex analysis, third edition, McGraw-Hill Book Co., New York, 1987.

74. Rudin, W, Functional Analysis, Second edition. International Series in Pure and Applied Mathematics. McGraw-Hill, Inc., New York, 1991.

75. Schur, I., Neue Anwendung der Integralrechnung and Probleme der Invariantentheorie, Sitzungsberichte der Königlich Preussichen Akademie der Wissenschaften, 406-423, 1905.

76. Serre, J.P., Représentations linéaires et espaces homogènes Kählérians des groupes de Lie compacts, Exposé 100, Séminaire Bourbaki, 6^e année 1953/54, Inst. Henri Poincaré, Paris 1954.

77. Serre, J.P., Tores maximaux des groupes de Lie compacts, Exposé 23, Séminaire "Sophus Lie," Théorie des algèbres de Lie topologie des groupes de Lie, 1954-55, École Normale Supérieure, Paris, 1955.

78. de Siebenthal, J., Sur les groupes de Lie compacts non-connexes, Comment. Math. Helv., 31:41-89, 1956.

79. Springer, T., Linear Algebraic Groups, Birkhäuser, Boston, 1981.

80. Springer, T., and Steinberg, R., Conjugacy classes, Seminar on Algebraic Groups and Related Finite Groups, Lecture Notes in Math., 131:167-266, 1970.

81. Steinberg, R., Endomorphisms of Linear Algebraic Groups, Mem. Amer. Math. Soc., 80, Amer. Math. Soc., Providence., 1968.

82. Steinberg, R., A general Clebsch-Gordan theorem, Bull. Amer. Math. Soc., 67:406-407, 1961.

83. Tits, J., Sur certaines classes d'espaces homogènes de groupes de Lie, Acad. Roy. Belg. Cl. Sci. Mém. Coll. 29, No. 3, 1955.

84. Varadarajan, V., An Introduction to Harmonic Analysis on Semisimple Lie Groups, Cambridge University Press, Cambridge, 1989.

85. Varadarajan, V., Lie Groups, Lie Algebras, and Their Representations, reprint of the 1974 edition, Graduate Texts in Mathematics, 102, Springer-Verlag, New York, 1984.

86. Vogan, D., Representations of Real Reductive Lie Groups, BirkhÍauser, Boston-Basel- Stuttgart, 1981.

87. Vogan, D., Unitary Representations of Reductive Lie Groups, Princeton University Press, Princeton, 1987.

88. Warner, F., Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups, corrected reprint of the 1971 edition, Graduate Texts in Mathematics, 94, Springer-Verlag, New York-Berlin, 1983.

89. Warner, G., Harmonic Analysis on Semi-simple Lie Groups. I, Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 188, Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1972.

90. Warner, G., Harmonic Analysis on Semi-simple Lie Groups. II, Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 189. Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1972.

91. Weil, A., Démonstration topologique d'un théorème fondamental de Cartan, C. R. Acad. Sci. Paris, 200:518-520, 1935.

92. Weil, A., L'intégration dans les groupes topologiques et ses applications, Actualités scientifiques et industrielles 869, Hermann, Paris, 1940.

93. Wells, R., Differential Analysis on Complex Manifolds, second edition, Graduate Texts in Mathematics, 65, Springer-Verlag, New York-Berlin, 1980.

94. Weyl, H., The Classical Groups, Their Invariants and Representations, 2nd ed., Princeton University Press, Princeton, 1946.

95. Weyl, H., Theorie der Darstellung kontinuierlicher halbeinfacher Gruppen durch lineare Transformationen I, II, II, and Nachtrag, Math. Zeitschrift 23 (1925), 271-309; 24 (1926), 238-376; 24 (1926), 277-395; 24 (1926), 789-791.

96. Zelobenko, D., Compact Lie Groups and Their Representations, Translations of Mathematical Monographs, Vol. 40, American Mathematical Society, Providence, R.I., 1973.

97. Zierau, R., Representations in Dolbeault Cohomology in Representation Theory of Lie Groups, Park City Math Institute, vol. 8, AMS, Providence RI, 2000.

名词英汉对照