矩阵积分与可积系统

(学习笔记) 0.40 版

曲豆豆 整理

2024 年 7 月 2 日

图: 曲豆豆穿上博士服, 就好像真的是博士一样.

目录

1. 矩阵积分

矩阵模型在弦论、拓扑学 (纽结理论)、数论、可积系统, 乃至无线通信、晶体生长等众多数学物理领域中都有重要应用. 笔者希望尽快熟悉矩阵模型与可积系统之间的关系, 故整理此学习笔记.

1.1 Virasoro 约束

给定正整数 N, 记 **1-矩阵模型**的**配分函数**

$$\mathcal{Z}_N(\mathbf{t}) := \int_{\mathbb{R}^{N\times N}} \mathrm{e}^{\sum\limits_{k=0}^{\infty} t_k \mathrm{tr}(H^k)} \mathrm{d}H, \tag{1.1}$$

在这里, 积分变量 H 取遍所有 $N \times N$ 实方阵, 体积元 $\mathrm{d}H := \prod\limits_{i,j=1}^{n} \mathrm{d}H_{ij}$, 而 $\mathbf{t} = (t_0, t_1, ...)$ 为无穷多个形式变元, 视为 $\mathcal{Z}_N$ 的自变量.

(1.1)右边的积分为形式上的 N^2-重积分, 我们暂不考虑其收敛性. 一般来说, 在常见的矩阵模型里, 积分变量 H 的积分区域往往是全体厄米特矩阵、全体酉矩阵或者全体正交矩阵之类的, 不过在这里为了省事, 姑且假装积分区域为全体 $N \times N$ 实矩阵; 而被积函数也可以更复杂, 我们这里所考虑的是某种意义下最简单的情形.

我们来研究配分函数(1.1)的基本性质.

性质 1.1. *(关联函数, n-点函数)* 记号承上, 给定 $n \geq 0$, 以及 $a_1, a_2, ..., a_n \geq 0$, 记**关联函数**

$$\begin{aligned}&\langle \mathrm{tr}(H^{a_1})\mathrm{tr}(H^{a_2})\cdots\mathrm{tr}(H^{a_n})\rangle \\ :=&\int_{\mathbb{R}^{N\times N}} \mathrm{tr}(H^{a_1})\mathrm{tr}(H^{a_2})\cdots\mathrm{tr}(H^{a_n})\mathrm{e}^{\sum\limits_{k=0}^{\infty} t_k \mathrm{tr}(H^k)}\mathrm{d}H,\end{aligned} \tag{1.2}$$

则如下等式成立:

$$\langle \mathrm{tr}(H^{a_1})\mathrm{tr}(H^{a_2})\cdots\mathrm{tr}(H^{a_n})\rangle = \frac{\partial^n \mathcal{Z}_N(\mathbf{t})}{\partial t_{a_1}\cdots\partial t_{a_n}}. \tag{1.3}$$

证明. 直接求导验证即可. □

关联函数(1.2)也俗称 n-**点函数**. 当然众所周知, 配分函数、关联函数这些名词都来自于各种理论物理.

(1.1)的右边即使再怪异, 也不过是一个 N^2-重积分. 既然是重积分, 就可以**换元积分**, 并且有连工科生都知道的 "*换元要乘雅可比*". 然而一般工科生不知道的是, 换元可以看作一种**对称**, 而对称性蕴含**守恒律**, 而守恒律就比较深刻了.

一般的变量代换形如

$$H \mapsto \tilde{H} := f(H),$$

其中 f 是关于矩阵 H 的矩阵值函数. 我们考虑一类连续变换, 即假装 $H \mapsto f(H)$ 是由恒等变换 $H \mapsto H$ "连续地" 形变而来. 于是自然会考虑这族变换的**无穷小生成元**, 其通常形如

$$H \mapsto H + \varepsilon \sum_{k=0}^{\infty} a_k H^k,$$

这里的形式变元 ε 视为无穷小量, a_k 为常数. 上述无穷小变换构成的线性空间具有如下的一组 “基”:

$$H \mapsto \tilde{H} := H + \varepsilon H^{n+1}, \qquad n = -1, 0, 1, 2, ..., \tag{1.4}$$

或者用更物理一些的写法: $\delta H = \varepsilon H^{n+1}$.

给定整数 $n \geq -1$, 我们对配分函数(1.1)的右边作换元积分(1.4), 看看会发生什么事情. 首先我们有

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z}_N(\mathbf{t}) &= \int_{\mathbb{R}^{N\times N}} \mathrm{e}^{\sum\limits_{k=0}^{\infty} t_k \mathrm{tr}(\tilde{H}^k)} \mathrm{d}\tilde{H} = \int_{\mathbb{R}^{N\times N}} \mathrm{e}^{\sum\limits_{k=0}^{\infty} t_k \mathrm{tr}\left[(H+\varepsilon H^{n+1})^k\right]} \mathrm{d}\tilde{H} \\
&= \int_{\mathbb{R}^{N\times N}} \mathrm{e}^{\sum\limits_{k=0}^{\infty} t_k \mathrm{tr}(H^k)} \prod_{k=0}^{\infty} \left(1 + \varepsilon k t_k \mathrm{tr}(H^{n+k}) + o(\varepsilon)\right) \mathrm{d}\tilde{H} \\
&= \int_{\mathbb{R}^{N\times N}} \mathrm{e}^{\sum\limits_{k=0}^{\infty} t_k \mathrm{tr}(H^k)} \left(1 + \varepsilon \sum_{k=0}^{\infty} k t_k \mathrm{tr}(H^{n+k}) + o(\varepsilon)\right) \mathrm{d}\tilde{H} \qquad (1.5)
\end{aligned}$$

原则上我们只需要把上式右边展开至关于 ε 的 1 阶小量. 接下来的一个关键的技术性问题是, 如何处理体积元 $\mathrm{d}\tilde{H}$.

引理 1.2. 记号承上, 对于变量代换 $\tilde{H} = H + \varepsilon H^{n+1}$, 成立

$$\mathrm{d}\tilde{H} = \left(1 + \varepsilon \sum_{s=0}^{n} \mathrm{tr}(H^s)\mathrm{tr}(H^{n-s}) + o(\varepsilon)\right) \mathrm{d}H. \tag{1.6}$$

证明. 无非就是去计算相应雅可比矩阵 $\boldsymbol{J}$ 的行列式, 只不过这个雅可比矩阵 $\boldsymbol{J}$ 的尺寸是 $N^2 \times N^2$. 对于 $1 \leq i, j, k, \ell \leq N$, 雅可比矩阵 $\boldsymbol{J}$ 的 $(ij, k\ell)$-矩阵元为

$$\frac{\partial \tilde{H}_{ij}}{\partial H_{kl}} = \left(\frac{\partial \tilde{H}}{\partial H_{k\ell}}\right)_{ij} = \left(\frac{\partial H}{\partial H_{k\ell}} + \varepsilon \frac{\partial H^{n+1}}{\partial H_{k\ell}}\right)_{ij}$$

$$
\begin{aligned}
&= \left(\frac{\partial H}{\partial H_{k\ell}} + \varepsilon \sum_{s=0}^{n} H^s \frac{\partial H}{\partial H_{k\ell}} H^{n-s}\right)_{ij} \\
&= \delta_{k\ell,ij} + \varepsilon \sum_{s=0}^{n} (H^s)_{ik} (H^{n-s})_{\ell j}.
\end{aligned}
$$

注意对任意 N^2 阶方阵 $\boldsymbol{X}$, 有众所周知的等式

$$
\det(\boldsymbol{I} + \varepsilon \boldsymbol{X}) = 1 + \varepsilon \mathrm{tr}(\boldsymbol{X}) + o(\varepsilon),
$$

其中 $\boldsymbol{I}$ 为单位矩阵. 利用此式立刻得到

$$
\begin{aligned}
\det \boldsymbol{J} &= 1 + \varepsilon \sum_{s=0}^{n} \sum_{i,j=1}^{N} (H^s)_{ii} (H^{n-s})_{jj} + o(\varepsilon) \\
&= 1 + \varepsilon \sum_{s=0}^{n} \mathrm{tr}(H^s) \mathrm{tr}(H^{n-s}) + o(\varepsilon),
\end{aligned}
$$

从而命题得证. □

妥善处理体积元 $\mathrm{d}\tilde{H}$ 之后继续前进, 就能得到本节主要结果:

定理 1.3. *(Virasoro 约束). 记号承上, 则对任意整数 $n \geq -1$, 配分函数(1.1)满足如下* ***Virasoro* 约束***:*

$$
L_n \mathcal{Z}_N(\mathbf{t}) = 0, \tag{1.7}
$$

其中二阶线性微分算子

$$
L_n := \sum_{s=0}^{n} \frac{\partial^2}{\partial t_s \partial t_{n-s}} + \sum_{k=0}^{\infty} k t_k \frac{\partial}{\partial t_{n+k}}. \tag{1.8}
$$

证明. 将(1.6)代入(1.5), 整理得

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}_N(\mathbf{t}) = \mathcal{Z}_N(\mathbf{t}) + \varepsilon \int_{\mathbb{R}^{N\times N}} & \mathrm{e}^{\sum\limits_{k=0}^{\infty} t_k \mathrm{tr}(H^k)} \\ & \times \left(\sum_{k=0}^{\infty} k t_k \mathrm{tr}(H^{n+k}) + \sum_{s=0}^{n} \mathrm{tr}(H^s)\, \mathrm{tr}(H^{n-s}) \right) \mathrm{d}H + o(\varepsilon).\end{aligned}$$

比较上式两边 ε^1-项系数, 并注意性质1.1, 即可得证. □

注记 **1.4.** 线性算子 $\{L_n\}_{n\geq -1}$ 满足如下 **Virasoro** 交换关系

$$[L_n, L_m] = (n-m)L_{n+m}, \tag{1.9}$$

这可以由具体表达式(1.8)暴力验证, 也可以从无穷小变换(1.4)的角度直接看出来.

1.2 特征值表示, 正规矩阵模型

相比上一小节的(1.1), 我们更习惯考虑如下**厄米特矩阵模型**:

$$\mathcal{Z}_N := \int_{\mathrm{Herm}(N)} \mathrm{e}^{-\mathrm{tr}\, V(H)} \mathrm{d}H, \tag{1.10}$$

其中 $\mathrm{Herm}(N) := \left\{ H \in \mathbb{C}^{N\times N} \,\middle|\, H^\dagger = H \right\}$ 为 N 阶厄米特矩阵之全体, $V(H)$ 关于 H 的形式幂级数, 例如可以取 $V(H) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} t_k H^k$; 而 $\mathrm{Herm}(N)$ 上的勒贝格测度 $\mathrm{d}H$ 为

$$\mathrm{d}H := \prod_{i=1}^{N} \mathrm{d}H_{ii} \cdot \prod_{j<k} \mathrm{d}H_{jk}^{(1)} \mathrm{d}H_{jk}^{(2)}, \tag{1.11}$$

其中 $H_{jk}^{(1)}$ 与 $H_{jk}^{(2)}$ 分别为矩阵元 H_{jk} 的实部与虚部.

众所周知, 厄米特矩阵酉相似于实对角阵: 对任意 $H \in \mathrm{Herm}(N)$, 存在酉矩阵 $U \in \mathrm{U}(N)$ 以及实对角阵 $\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_0, ..., \lambda_{N-1})$ 使得

$$H = U^\dagger \Lambda U. \tag{1.12}$$

此时, 注意到矩阵积分(1.10)的被积函数

$$\mathrm{e}^{-\mathrm{tr}\, V(H)} = \mathrm{e}^{-\mathrm{tr}\left(U^\dagger V(\Lambda) U\right)} = \mathrm{e}^{-\mathrm{tr}\, V(\Lambda)} = \prod_{i=0}^{N-1} \mathrm{e}^{-V(\lambda_i)}$$

只与积分变元 H 的 N 个特征值有关, 故某种意义上说, 为计算 H 取遍全体厄米特矩阵的积分(1.10), 只需要计算让 H 的 N 个特征值取遍 $\mathbb{R}^N$ 的某个 N-重积分. 本小节就来实现这个想法.

我们注意, (1.12)其实给出了如下映射:

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^N \times \frac{\mathrm{U}(N)}{\mathrm{U}(1)^N} &\to \mathrm{Herm}(N) \\ (\Lambda, [U]) &\mapsto U^\dagger \Lambda U, \end{aligned} \tag{1.13}$$

其中

$$\mathbb{R}^N \cong \left\{ \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_0 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_{N-1} \end{pmatrix} \middle| \lambda_i \in \mathbb{R},\, 0 \le i \le N-1 \right\},$$

$$\mathrm{U}(1)^N \cong \left\{ \Theta = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_0} & & \\ & \ddots & \\ & & \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_{N-1}} \end{pmatrix} \middle| \theta_i \in \mathbb{R},\, 0 \le i \le N-1 \right\},$$

并且对于 $U \in \mathrm{U}(N)$, $[U] := \left\{ \Theta U \,\middle|\, \Theta \in \mathrm{U}(1)^N \right\} \in \frac{\mathrm{U}(N)}{\mathrm{U}(1)^N}$. 容易验证(1.13)是良定的光滑映射, 并且

$$\dim_{\mathbb{R}} \left(\mathbb{R}^N \times \frac{\mathrm{U}(N)}{\mathrm{U}(1)^N} \right) = N^2 = \dim_{\mathbb{R}} \mathrm{Herm}(N).$$

我们将通过此映射来对重积分(1.10)作换元积分.

在(1.10)的右边, 不妨只考虑 H 的特征值两两互异的情况, 这样的 H 构成 $\mathrm{Herm}(N)$ 的一个稠密开集. 再注意 H 的 N 个特征值的顺序, 从而易知

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}_N &:= \int_{\mathrm{Herm}(N)} \mathrm{e}^{-\mathrm{tr}\, V(H)}\mathrm{d}H \\ &= \frac{1}{N!}\iint_{\mathbb{R}^N\times\frac{\mathrm{U}(N)}{\mathrm{U}(1)^N}} \prod_{k=0}^{N-1}\mathrm{e}^{-\mathrm{tr}\, V(\lambda_k)}\cdot \det\left(\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}\Lambda\mathrm{d}[U]}\right)\mathrm{d}\Lambda\mathrm{d}[U],\end{aligned} \tag{1.14}$$

其中 $\mathrm{d}\Lambda=\mathrm{d}\lambda_0\cdots\mathrm{d}\lambda_{N-1}$ 为 $\mathbb{R}^N$ 上的标准勒贝格测度, 而 $\mathrm{d}[U]$ 为 $\frac{\mathrm{U}(N)}{\mathrm{U}(1)^N}$ 上的平移不变测度, 其在单位元 $[I]$ 处的切空间

$$T_{[I]}\frac{\mathrm{U}(N)}{\mathrm{U}(1)^N}\cong\frac{\mathfrak{u}(N)}{\mathfrak{u}(1)^{\oplus N}}=\left\{X\in\mathbb{C}^{N\times N}\,\middle|\,\begin{matrix}X^\dagger=-X;\\ X_{ii}=0,\ 1\le i\le N\end{matrix}\right\}$$

处的表达式为

$$\mathrm{d}[U]=\prod_{i<j}\mathrm{d}X_{ij}^{(1)}\mathrm{d}X_{ij}^{(2)}. \tag{1.15}$$

与(1.11)类似, 我们用 $X_{ij}^{(1)},X_{ij}^{(2)}$ 分别表示 X_{ij} 的实部与虚部.

关键的技术问题依然是计算重积分换元的雅可比行列式:

引理 1.5. 记号承上, 则

$$\det\left(\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}\Lambda\mathrm{d}[U]}\right)=\Delta(\Lambda)^2, \tag{1.16}$$

其中

$$\Delta(\Lambda)=\Delta(\lambda_0,\dots,\lambda_{N-1}):=\prod_{i<j}(\lambda_j-\lambda_i). \tag{1.17}$$

证明之前, 我们回忆如下众所周知的 **Vandermonde 行列式**:

$$\Delta(\Lambda) := \prod_{i<j}(\lambda_j - \lambda_i) = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_0 & \lambda_1 & \cdots & \lambda_{N-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_0^{N-1} & \lambda_1^{N-1} & \cdots & \lambda_{N-1}^{N-1} \end{pmatrix}. \tag{1.18}$$

证明. 由于测度 $[\mathrm{d}U]$ 的 $\mathrm{U}(N)$-平移不变性, 不妨只考虑在单位元 $U = I$ 处的情形. 注意 $U^\dagger = U^{-1}$, 从而对(1.12)两边微分得

$$\begin{aligned} \delta H &= -U^\dagger \delta U \cdot U^\dagger \Lambda U + U^\dagger \delta\Lambda \cdot U + U^\dagger \Lambda \delta U \\ &= -\delta U \cdot \Lambda + \delta\Lambda + \Lambda \delta U \\ &= \delta\Lambda + [\Lambda, \delta U], \end{aligned}$$

其中切向量 $\delta\Lambda \in T_\Lambda \mathbb{R}^N \cong \mathbb{R}^N$, $\delta U \in T_{[I]} \frac{\mathrm{U}(N)}{\mathrm{U}(1)^N}$. 从而得到

$$(\delta H)_{ij} = \delta_{ij}(\delta\Lambda)_{ii} + (\lambda_{j-1} - \lambda_{i-1})(\delta U)_{ij},$$

换言之, 对任意 $1 \leq i < j \leq N$ 以及 $1 \leq k \leq N$ 都有

$$\begin{aligned} (\delta H)_{kk} &= (\delta\Lambda)_{kk}, \\ (\delta H)_{ij}^{(1)} &= (\lambda_{j-1} - \lambda_{i-1})(\delta U)_{ij}^{(1)}, \\ (\delta H)_{ij}^{(2)} &= (\lambda_{j-1} - \lambda_{i-1})(\delta U)_{ij}^{(2)}, \end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned} \det\left(\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}\Lambda \mathrm{d}[U]}\right) &= \prod_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{N} (\lambda_{j-1} - \lambda_{i-1})^2 \\ &= \prod_{\substack{i,j=0 \\ i<j}}^{N-1} (\lambda_j - \lambda_i)^2 = \Delta(\Lambda)^2. \end{aligned}$$

引理得证. □

由此我们立刻得到矩阵积分(1.10)的**特征值表示**:

定理 1.6. *厄米特矩阵积分(1.10)满足如下表达式:*

$$\mathcal{Z}_N = \frac{c_N}{N!} \int_{\mathbb{R}^N} \Delta(\lambda_0, \dots, \lambda_{N-1})^2 \prod_{k=0}^{N-1} \mathrm{e}^{-V(\lambda_k)} \mathrm{d}\lambda_0 \cdots \mathrm{d}\lambda_{N-1}, \quad (1.19)$$

其中 c_N 为齐性空间 $\frac{\mathrm{U}(N)}{\mathrm{U}(1)^N}$ 的关于不变测度(1.15)的体积.

证明. 将(1.16)代入(1.14)即可. □

下面考虑稍微一般的情形, 并从特征值表示的角度来重新定义矩阵积分. 众所周知, 复方阵 A 称为**正规矩阵**, 如果 $[A^\dagger, A] = 0$; 正规矩阵酉相似于复对角矩阵; 厄米特矩阵、酉矩阵都是正规矩阵的常见例子.

定义 1.7. *设 $\gamma \subseteq \mathbb{C}$ 是复平面内的一条可求长曲线, 则记*

$$\mathcal{Z}_N(\gamma) := \frac{1}{N!} \int_{\gamma^N} \Delta(\lambda_0, \dots, \lambda_{N-1})^2 \prod_{k=0}^{N-1} \mathrm{e}^{-V(\lambda_k)} \mathrm{d}\lambda_0 \cdots \mathrm{d}\lambda_{N-1}, \quad (1.20)$$

*并称其为**正规矩阵积分**. 其中 $V(x)$ 为某个一元函数. 此外, 若曲线 γ 具有参数表示 $f\colon [0,1] \to \mathbb{C}$, 则 $\mathrm{d}\lambda = f'(t)\mathrm{d}t$.*

特别注意, 此时曲线 γ 上的测度 $\mathrm{d}\lambda$ 未必正定, 而是一般的**复测度**. 由前文的讨论可以看出, 如果 $\gamma = \mathbb{R}$, 则相应的 $\mathcal{Z}_N(\gamma)$ 在相差常数倍意义下恰为厄米特矩阵积分(1.10); 而对于一般的曲线 γ, 记

$$\mathrm{H}_N(\gamma) := \left\{ U^\dagger \Lambda U \,\middle|\, \begin{array}{c} U \in \mathrm{U}(N), \\ \Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_0, \dots, \lambda_{N-1}),\ \lambda_i \in \gamma \end{array} \right\} \quad (1.21)$$

为特征值全部位于 γ 上的**正规矩阵**之全体, 则类似方法可以验证

$$\mathcal{Z}_N(\gamma) \propto \int_{\mathrm{H}_N(\gamma)} \mathrm{e}^{-\operatorname{tr} V(H)} \mathrm{d}H. \tag{1.22}$$

注记 **1.8.** 若 $V(x)$ 为全纯函数, 则(1.20)右边的被积函数也全纯, 从而 $\mathcal{Z}_N(\gamma)$ 在曲线 γ 的同伦形变下保持不变, 即只与 γ 的同伦类 $[\gamma]$ 有关.

1.3 随机矩阵, 行列式表示

从本小节开始, 我们将深入研究正规矩阵积分(1.20)

$$\mathcal{Z}_N(\gamma) := \frac{1}{N!} \int_{\gamma^N} \Delta(\lambda_0, ..., \lambda_{N-1})^2 \prod_{k=0}^{N-1} \mathrm{e}^{-V(\lambda_k)} \mathrm{d}\lambda_0 \cdots \mathrm{d}\lambda_{N-1}$$

的性质. 不妨借用概率论的语言, 将(1.22)中的积分变量 H 想象为**概率空间** $\mathrm{H}_N(\gamma)$ 中的元素 (所谓随机矩阵), 此时 H 的特征值 $\lambda_0, ..., \lambda_{N-1}$ 为**随机变量**, 其**联合分布**的**概率密度**为

$$R_N(\lambda_0, ..., \lambda_{N-1}) := \frac{1}{\mathcal{Z}_N(\gamma)} \frac{1}{N!} \Delta(\lambda_0, ..., \lambda_{N-1})^2 \prod_{i=0}^{N-1} \mathrm{e}^{-V(\lambda_i)}, \tag{1.23}$$

其中 $\Delta(\Lambda) := \Delta(\lambda_0, ..., \lambda_{N-1})$ 为 Vandermonde 行列式, 见(1.18). 需要注意, 这里仅仅是借助概率论语言: 上述 R_N 的函数值可以是一般的复数, 并非严格意义下的概率密度.

也可以谈论随机变量的**期望**. 对于函数

$$f\colon \mathrm{H}_N(\gamma) \to \mathbb{C},$$

如果 $f(H)$ 是酉相似不变的, 即 $f(H) = f(U^\dagger H U)$ 对任意 $U \in \mathrm{U}(N)$ 都成立, 则 $f(H)$ 可以表示为关于 H 的特征值的对称函数, 即存在 N 元对

称函数 $\tilde{f}$ 使得 $f(H) = \tilde{f}(\lambda_0, ..., \lambda_{N-1})$. 此时称

$$\begin{aligned}\langle f(H)\rangle_N := \frac{1}{\mathcal{Z}_N(\gamma)}\frac{1}{N!}\int_{\gamma^N} &\tilde{f}(\lambda_0, ..., \lambda_{N-1})\Delta(\lambda_0, ..., \lambda_{N-1})^2 \\ &\times \prod_{i=0}^{N-1} \mathrm{e}^{-V(\lambda_i)}\mathrm{d}\lambda_0 \cdots \mathrm{d}\lambda_{N-1}\end{aligned} \tag{1.24}$$

为随机变量 $f(H)$ 的**期望**.

而本小节的主要结果是:

性质 1.9. *(正规矩阵积分的行列式表示). 记 $m_k(\lambda) := \lambda^k$ 为 k 次首一单项式, 引入 $\mathbb{C}$-双线性型 $\langle\cdot|\cdot\rangle$ 如下:*

$$\langle f|g\rangle := \int_\gamma f(\lambda)g(\lambda)\mathrm{e}^{-V(\lambda)}\mathrm{d}\lambda. \tag{1.25}$$

*则正规矩阵积分(1.20)满足下述**行列式公式**:*

$$\mathcal{Z}_N(\gamma) = \det_{0\le i,j\le N-1}\left(\langle m_i|m_j\rangle\right). \tag{1.26}$$

证明. 将 Vandermonde 行列式(1.18)直接展开, 有

$$\Delta(\lambda_0, ..., \lambda_{N-1}) = \det_{0\le i,j\le N-1}\left(\lambda_i^j\right) = \sum_{\sigma\in S_N}(-1)^{|\sigma|}\prod_{i=0}^{N-1}\lambda_i^{\sigma(i)},$$

这里的 S_N 是指标集 $\{0, 1, ..., N-1\}$ 的置换群. 于是

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}_N(\gamma) &= \frac{1}{N!}\int_{\gamma^N}\sum_{\sigma,\tau\in S_N}(-1)^{|\sigma\tau|}\prod_{i=0}^{N-1}\lambda_i^{\sigma(i)+\tau(i)}\cdot\prod_{i=0}^{N-1}\mathrm{e}^{-V(\lambda_i)}\mathrm{d}\lambda_0\cdots\mathrm{d}\lambda_{N-1} \\ &= \int_{\gamma^N}\sum_{\sigma\in S_N}(-1)^{|\sigma|}\prod_{i=0}^{N-1}\lambda_i^{i+\sigma(i)}\cdot\prod_{i=0}^{N-1}\mathrm{e}^{-V(\lambda_i)}\mathrm{d}\lambda_0\cdots\mathrm{d}\lambda_{N-1}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{\sigma \in S_N} (-1)^{|\sigma|} \prod_{i=0}^{N-1} \left(\int_\gamma \lambda_i^i \cdot \lambda_i^{\sigma(i)} \mathrm{e}^{-V(\lambda_i)} \mathrm{d}\lambda_i \right) \\
&= \sum_{\sigma \in S_N} (-1)^{|\sigma|} \prod_{i=0}^{N-1} \langle m_i | m_{\sigma(i)} \rangle = \det_{0 \le i,j \le N-1} \left(\langle m_i | m_j \rangle \right),
\end{aligned}
$$

从而命题得证. □

注记 1.10. 对于 $k \ge 0$, 引入 k 阶矩

$$
M_k := \int_\gamma \lambda^k \mathrm{e}^{-V(\lambda)} \mathrm{d}\lambda, \tag{1.27}
$$

则容易看出, 行列式公式(1.26)可改写为

$$
\mathcal{Z}_N(\gamma) = \det_{0 \le i,j \le N-1} (M_{i+j}), \tag{1.28}
$$

这是一个 Hankel 行列式. 一般地, 如果 N 阶方阵 A 的矩阵元 A_{ij} 只与 $i+j$ 有关, 则称该方阵为 Hankel 矩阵, 其行列式为 Hankel 行列式.

由行列式的基本性质, 不难给出(1.26)的更一般表达式:

定理 1.11. 对每个非负整数 k, 任取首一多项式 $p_k, \tilde{p}_k \in \mathbb{C}[\lambda]$, 即

$$
p_k(\lambda) = \lambda^k + \sum_{i=0}^{k-1} a_{ki} \lambda^i, \qquad \tilde{p}_k(\lambda) = \lambda^k + \sum_{i=0}^{k-1} b_{ki} \lambda^i,
$$

则行列式公式(1.26)等价于

$$
\mathcal{Z}_N(\gamma) = \det_{0 \le i,j \le N-1} \left(\langle \tilde{p}_i | p_j \rangle \right). \tag{1.29}
$$

证明. 对矩阵 $(\langle m_i | m_j \rangle)$ 作初等行、列变换即可, 留给读者. □

1.4 积分核, 特征值联合密度, Dyson 公式

我们将正规矩阵模型(1.20)中的积分变量 H 视为随机矩阵, 其特征值 $\lambda_0, ..., \lambda_{N-1}$ 视为随机变量. 我们不仅可以谈论这 N 个随机变量的联合密度(1.23), 还可以谈论**前** k **个**特征值的联合密度:

$$\begin{aligned} &R_{N,k}(\lambda_0, ..., \lambda_{k-1}) \\ &:= \frac{1}{\mathcal{Z}_N(\gamma)} \frac{1}{N!} \int_{\gamma^{N-k}} \Delta(\lambda_0, ..., \lambda_{N-1})^2 \prod_{i=0}^{N-1} \mathrm{e}^{-V(\lambda_i)} \mathrm{d}\lambda_k \cdots \mathrm{d}\lambda_{N-1}. \end{aligned} \tag{1.30}$$

本小节将给出联合密度(1.30)的行列式表示.

首先考察 $k = N$ 的情形, 由定义可知 $R_{N,N}$ 恰为(1.23)中的 R_N. 在给出其行列式公式之前, 我们先引入一些记号. 对任意非负整数 k, 取定 k 次**首一**多项式 $p_k(\lambda), \tilde{p}_k(\lambda) \in \mathbb{C}[\lambda]$, 记

$$H_{ij} := \langle \tilde{p}_i | p_j \rangle, \qquad i, j \geq 0, \tag{1.31}$$

其中双线性型 $\langle \cdot | \cdot \rangle$ 见(1.25). 记相应的**无穷矩阵**

$$\boldsymbol{H} := (H_{ij})_{i,j\geq 0} = \begin{pmatrix} H_{00} & H_{01} & H_{02} & \cdots \\ H_{10} & H_{11} & H_{12} & \cdots \\ H_{20} & H_{21} & H_{22} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}. \tag{1.32}$$

注意 $\boldsymbol{H}$ 依赖于多项式 $p_k, \tilde{p}_k$ 的选取.

对一般的无穷矩阵 $\boldsymbol{A} = (A_{ij})_{i,j\geq 0}$ 以及正整数 k, 记

$$\boldsymbol{A}_{[k]} := (A_{ij})_{0\leq i,j\leq k-1} \tag{1.33}$$

为 $\boldsymbol{A}$ 的左上角 $k \times k$ 子矩阵. 在此记号下, 行列式公式(1.29)可改写为

$$\mathcal{Z}_N(\gamma) = \det \boldsymbol{H}_{[N]}. \tag{1.34}$$

性质 1.12. 对于正规矩阵模型(1.20), 联合密度(1.23)满足等式

$$R_N(\lambda_0, \ldots, \lambda_{N-1}) = \frac{1}{N!} \det_{0\le i,j\le N-1} \left(K_N(\lambda_i, \lambda_j)\right), \tag{1.35}$$

其中**核函数**$K_N(\lambda, \mu)$ 的定义如下:

$$K_N(\lambda, \mu) := \sum_{k,\ell=0}^{N-1} \left(p_k(\lambda)\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}V(\lambda)}\right) \left(\boldsymbol{H}_{[N]}^{-1}\right)_{k\ell} \left(\tilde{p}_\ell(\mu)\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}V(\mu)}\right). \tag{1.36}$$

证明. 对 Vandermonde 行列式(1.18)作初等行变换, 容易验证

$$\Delta(\lambda_0, \ldots, \lambda_{N-1}) = \det_{0\le i,j\le N-1} \left(p_i(\lambda_j)\right) = \det_{0\le i,j\le N-1} \left(\tilde{p}_i(\lambda_j)\right),$$

再结合(1.34)直接计算得

$$\begin{aligned} R_N(\lambda_0, \ldots, \lambda_{N-1}) &= \frac{1}{N!} \frac{1}{\mathcal{Z}_N(\gamma)} \Delta(\lambda_0, \ldots, \lambda_{N-1})^2 \prod_{i=0}^{N-1} \mathrm{e}^{-V(\lambda_i)} \\ &= \frac{1}{N!} \det_{0\le i,j\le N-1} \left(p_i(\lambda_j)\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}V(\lambda_j)}\right) \det\left(\boldsymbol{H}_{[N]}^{-1}\right) \det_{0\le i,j\le N-1} \left(\tilde{p}_i(\lambda_j)\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}V(\lambda_j)}\right) \\ &= \frac{1}{N!} \det_{0\le i,j\le N-1} \left(K_N(\lambda_i, \lambda_j)\right), \end{aligned}$$

命题得证. □

由(1.36)不难看出, 核函数 $K_N(\lambda, \mu)$ 实际上与首一多项式 $p_k, \tilde{p}_k$ 的选取无关 (虽然矩阵 $\boldsymbol{H}$ 依赖于 $p_k, \tilde{p}_k$ 的选取), 进而容易验证对称性

$$K_N(\lambda, \mu) = K_N(\mu, \lambda).$$

此外, 以下公式也容易直接验证:

性质 1.13. 设 $K_N(\lambda,\mu)$ 为(1.36)式所定义的核函数, 则

$$\int_\gamma K_N(\lambda,\lambda)\mathrm{d}\lambda = N, \tag{1.37}$$

$$\int_\gamma K_N(\lambda,z)K_N(z,\mu)\mathrm{d}z = K_N(\lambda,\mu). \tag{1.38}$$

证明. 由相关定义(1.25)(1.31)(1.36)直接验证即可. 细节留给读者. □

下面我们给出(1.30)在 $k=N-1$ 情形下的行列式表示:

性质 1.14. 记号承上, 则有

$$R_{N,N-1}(\lambda_0,\dots,\lambda_{N-2}) = \frac{1}{N!}\det_{0\le i,j\le N-2}\left(K_N(\lambda_i,\lambda_j)\right). \tag{1.39}$$

证明. 由行列式公式(1.35)以及核函数的性质(1.37)(1.38), 直接计算得

$$\begin{aligned}
R_{N,N-1}(\lambda_0,\dots,\lambda_{N-2}) &= \int_\gamma R_{N,N}(\lambda_0,\dots,\lambda_{N-2};\lambda_{N-1})\mathrm{d}\lambda_{N-1}\\
&= \frac{1}{N!}\int_\gamma \det_{0\le i,j\le N-1}\left(K_N(\lambda_i,\lambda_j)\right)\mathrm{d}\lambda_{N-1}\\
&= \frac{1}{N!}\sum_{\sigma\in S_N}(-1)^{|\sigma|}\int_\gamma\prod_{i=0}^{N-1}K_N(\lambda_i,\lambda_{\sigma(i)})\mathrm{d}\lambda_{N-1}\\
&= \frac{1}{N!}\sum_{\substack{\sigma\in S_N\\ \sigma(N-1)=N-1}}(-1)^{|\sigma|}\prod_{i=0}^{N-2}K_N(\lambda_i,\lambda_{\sigma(i)})\int_\gamma K_N(\lambda_{N-1},\lambda_{N-1})\mathrm{d}\lambda_{N-1}\\
&\quad+\frac{1}{N!}\sum_{\ell=0}^{N-2}\sum_{\substack{\sigma\in S_N\\ \sigma^{-1}(N-1)=\ell}}(-1)^{|\sigma|}\prod_{\substack{0\le i\le N-2\\ i\ne\ell}}K_N(\lambda_i,\lambda_{\sigma(i)})
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\qquad \times \int_\gamma K_N(\lambda_\ell, \lambda_{N-1}) K_N(\lambda_{N-1}, \lambda_{\sigma(N-1)}) \mathrm{d}\lambda_{N-1} \\
&= \frac{1}{N!} \cdot N \sum_{\substack{\sigma\in S_N \\ \sigma(N-1)=N-1}} (-1)^{|\sigma|} \prod_{i=0}^{N-2} K_N(\lambda_i, \lambda_{\sigma(i)}) \\
&\qquad + \frac{1}{N!} \sum_{\ell=0}^{N-2} \sum_{\substack{\sigma\in S_N \\ \sigma^{-1}(N-1)=\ell}} (-1)^{|\sigma|} \prod_{\substack{0\le i\le N-2 \\ i\neq \ell}} K_N(\lambda_i, \lambda_{\sigma(i)}) \cdot K_N(\lambda_\ell, \lambda_{\sigma(N-1)}),
\end{aligned}
$$

上式中的 S_N 是指标集 $\{0, 1, ..., N-1\}$ 的置换群. 为处理上式最右边的第二项, 我们略用一点组合数学技巧. 对于 $\sigma \in S_N$, 如果 $\sigma^{-1}(N-1) = \ell \neq N-1$, 则定义 $\tau \in S_{N-1}$ 如下:

$$
\tau(i) := \begin{cases} \sigma(N-1), & i = \ell, \\ \sigma(i), & i \neq \ell. \end{cases}
$$

则当 σ 取遍集合 $\{\sigma \in S_N \,|\, \sigma^{-1}(N-1) \neq N-1\}$ 时, 相应的 τ 取遍 S_{N-1}, 并且每个 $\tau \in S_{N-1}$ 被重复计数 $(N-1)$ 次. 再注意 $(-1)^{|\tau|} = (-1)^{|\sigma|+1}$, 从而继续化简整理得

$$
\begin{aligned}
&R_{N,N-1}(\lambda_0, ..., \lambda_{N-2}) \\
&= \frac{1}{N!} \cdot N \sum_{\sigma\in S_{N-1}} (-1)^{|\sigma|} \prod_{i=0}^{N-2} K_N(\lambda_i, \lambda_{\sigma(i)}) \\
&\qquad + \frac{1}{N!} \cdot (N-1) \sum_{\tau\in S_{N-1}} (-1)^{|\tau|+1} \prod_{0\le i\le N-1} K_N(\lambda_\ell, \lambda_{\tau(N-1)}) \\
&= \frac{N-(N-1)}{N!} \det_{0\le i,j\le N-2} (K_N(\lambda_i, \lambda_j)) = \frac{1}{N!} \det_{0\le i,j\le N-2} (K_N(\lambda_i, \lambda_j)),
\end{aligned}
$$

命题得证. □

对于一般的 $1 \le k \le N$, 我们有如下 **Dyson 公式**:

定理 1.15. *(Dyson).* 对于 $1 \le k \le N$, 联合密度(1.30)满足

$$R_{N,k}(\lambda_0, \dots, \lambda_{k-1}) = \frac{(N-k)!}{N!} \det_{0\le i,j\le k-1} \left(K_N(\lambda_i, \lambda_j)\right). \tag{1.40}$$

证明. 对 k 归纳. 起始步 $k = N$ 已证明. 归纳步 $k \to k-1$ 的验证方法与性质1.14的证明过程完全类似, 细节留给读者. 证毕. □

特别地, $R_{N,1}(\lambda) = \frac{1}{N} K_N(\lambda, \lambda)$.

2. 正交多项式

我们注意, 正规矩阵积分(1.20)的行列式公式(1.29)

$$\mathcal{Z}_N(\gamma) = \det_{0\le i,j\le N-1} \left(\langle \tilde{p}_i | p_j \rangle\right)$$

与**首一**多项式 $p_k, \tilde{p}_k$ 的选取无关, 从而我们不妨 $p_k = \tilde{p}_k$, 并取特殊的 p_k 使得相关表达式更简洁. 一种自然的想法是选取**正交多项式**: 容易验证对每个 $k \ge 0$, 存在 k 次**首一**多项式 $p_k(x) \in \mathbb{C}[x]$ 使得

$$\langle p_k | p_\ell \rangle := \int_\gamma p_k(x) p_\ell(x) \mathrm{e}^{-V(x)} \mathrm{d}x = h_k \delta_{k\ell} \tag{2.1}$$

对任意 $k, \ell \ge 0$ 都成立, 其中 h_k 为非零常数.

上述多项式的存在唯一性是显然的: 从 $p_0(x) = 1$ 开始, 用众所周知的 **Gram-Schmidt 正交化**算法即可依次得到 $p_1, p_2, \dots$. 需要注意:

- 我们要求 p_k 是**首一**多项式, 于是并不能保证 p_k 关于 $\langle \cdot | \cdot \rangle$ 的模长 $\sqrt{h_k}$ 是 1. 换言之, $\{p_k\}_{k\ge 0}$ 两两正交, 但一般不是单位正交的.

- 正交多项式族 $\{p_k\}_{k\ge 0}$ 只与势函数 $V(x)$ 有关, 被 $V(x)$ 唯一确定.

- 对于 $k\geq 0$, 单项式 $m_k(x):=x^k$ 可以表示为 $p_0(x),p_1(x),...,p_k(x)$ 的 $\mathbb{C}$-线性组合, 因此对于 $0\leq j<k$ 成立

$$\langle m_j|p_k\rangle:=\int_\gamma x^j p_k(x)\mathrm{e}^{-V(x)}\mathrm{d}x=0.$$

在本章我们总取定正交多项式 $\{p_k\}_{k\geq 0}$. 此时 Gram 矩阵(1.32)

$$\boldsymbol{H}=\begin{pmatrix} h_0 & & & \\ & h_1 & & \\ & & h_2 & \\ & & & \ddots \end{pmatrix} \tag{2.2}$$

是 (无穷维) 对角矩阵, 行列式公式(1.29)(1.34)可改写为

$$\mathcal{Z}_N(\gamma)=\det \boldsymbol{H}_{[N]}=\prod_{k=0}^{N-1}h_k. \tag{2.3}$$

引入正交多项式 p_k 的**归一化函数**

$$\psi_k(x):=\frac{p_k(x)}{\sqrt{h_k}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}V(x)}, \tag{2.4}$$

则正交性(2.1)等价于

$$\int_\gamma \psi_k(x)\psi_\ell(x)\mathrm{d}x=\delta_{k\ell}, \tag{2.5}$$

并且核函数(1.36)的表达式可改写为

$$K_N(x,y)=\sum_{k=0}^{N-1}\psi_k(x)\psi_k(y). \tag{2.6}$$

2.1 Heine 公式与 Hankel 行列式公式

给定势函数 $V(x)$, 我们来计算相应的正交多项式 p_k. 一个有意思的结果是, p_k 可以表示为 $k\times k$ 正规矩阵模型的某个**期望**(1.24), 此乃正交多项式的 **Heine 公式**:

定理 2.1. *(Heine).* 给定势函数 $V(x)$, 则相应的正交多项式 p_k 满足

$$\begin{aligned} p_k(x) &= \langle \det(x-H)\rangle_k \\ &:= \frac{1}{k!}\frac{1}{\mathcal{Z}_k(\gamma)}\int_{\gamma^k}\Delta(\lambda_0,\ldots,\lambda_{k-1})^2\prod_{i=0}^{k-1}(x-\lambda_i)\mathrm{e}^{-V(\lambda_i)}\mathrm{d}\lambda_i. \end{aligned} \tag{2.7}$$

我们回忆, 上式中的 H 是取值于 $\mathrm{H}_k(\gamma)$, 见(1.21), 的 $k\times k$ 随机矩阵; 而 $\det(x-H)\in\mathbb{C}[x]$ 恰为矩阵 H 的**特征多项式**, 它显然是关于 x 的 k 次首一多项式. 此外, 当 $k=0$ 时, 特别规定 0×0 矩阵的行列式为 1.

证明. 由(2.7)所定义的 $p_k(x)$ 显然是关于 x 的 p 次首一多项式, 于是只需要验证正交性条件 $\langle p_j|p_k\rangle=0$ 即可. 直接计算得

$$\begin{aligned} \langle p_j|p_k\rangle &= \frac{1}{k!}\frac{1}{\mathcal{Z}_k(\gamma)}\int_\gamma p_j(\lambda_k)\mathrm{e}^{-V(\lambda_k)}\mathrm{d}\lambda_k \\ &\quad\times\int_{\gamma^k}\Delta(\lambda_0,\ldots,\lambda_{k-1})^2\prod_{i=0}^{k-1}(\lambda_k-\lambda_i)\mathrm{e}^{-V(\lambda_i)}\mathrm{d}\lambda_i \\ &= \frac{1}{k!}\frac{1}{\mathcal{Z}_k(\gamma)}\int_{\gamma^{k+1}}\Delta(\lambda_0,\ldots,\lambda_{k-1})p_j(\lambda_k) \\ &\quad\times\Delta(\lambda_0,\ldots,\lambda_{k-1})\prod_{i=0}^{k-1}(\lambda_k-\lambda_i)\cdot\prod_{i=0}^{k}\mathrm{e}^{-V(\lambda_i)}\mathrm{d}\lambda_i. \end{aligned} \tag{2.8}$$

由 Vandermonde 行列式的性质(1.18)易知

$$\Delta(\lambda_0, \ldots, \lambda_{k-1}) \prod_{i=0}^{k-1}(\lambda_k - \lambda_i) = \Delta(\lambda_0, \ldots, \lambda_{k-1}; \lambda_k),$$

$$\Delta(\lambda_0, \ldots, \lambda_{k-1}) p_j(\lambda_k) = \det \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ \lambda_0 & \lambda_1 & \cdots & \lambda_{k-1} & \lambda_k \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \lambda_0^{k-1} & \lambda_1^{k-1} & \cdots & \lambda_{k-1}^{k-1} & \lambda_k^{k-1} \\ \hline 0 & 0 & \cdots & 0 & p_j(\lambda_k) \end{array} \right).$$

将(2.8)最右边的 $(k+1)$-重积分的积分变元 $\lambda_0, \ldots, \lambda_k$ 作轮换 $\lambda_i \mapsto \lambda_{i+s}$, 其中 s 取遍 $\mathbb{Z}/(k+1)\mathbb{Z}$, 容易验证

$$\begin{aligned} \langle p_j | p_k \rangle = & \frac{1}{(k+1)!} \frac{1}{\mathcal{Z}_k(\gamma)} \\ & \times \int_{\gamma^{k+1}} \det \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ \lambda_0 & \lambda_1 & \cdots & \lambda_{k-1} & \lambda_k \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \lambda_0^{k-1} & \lambda_1^{k-1} & \cdots & \lambda_{k-1}^{k-1} & \lambda_k^{k-1} \\ \hline p_j(\lambda_0) & p_j(\lambda_1) & \cdots & p_j(\lambda_{k-1}) & p_j(\lambda_k) \end{array} \right) \\ & \times \Delta(\lambda_0, \ldots, \lambda_{k-1}; \lambda_k) \prod_{i=0}^{k} \mathrm{e}^{-V(\lambda_i)} \mathrm{d}\lambda_i. \end{aligned}$$

注意 $j < k$, 从而上式右边的矩阵的最后一行 $(p_j(\lambda_0), \ldots, p_j(\lambda_k))$ 能够表示为前 k 行的线性组合, 从而该矩阵的行列式为零, 从而得到 $\langle p_j | p_k \rangle = 0$. 定理证毕. □

除了上述 Heine 公式, 正交多项式 $p_k(x)$ 也有类似(1.28)的 Hankel 行列式表达式:

性质 2.2. 记号承上, 则正交多项式 $p_k(x)$ 满足

$$p_k(x) = \frac{1}{\mathcal{Z}_k(\gamma)} \det \left(\begin{array}{cccc|c} M_0 & M_1 & \cdots & M_{k-1} & 1 \\ M_1 & M_2 & \cdots & M_k & x \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ M_{k-1} & M_k & \cdots & M_{2k-2} & x^{k-1} \\ \hline M_k & M_{k+1} & \cdots & M_{2k-1} & x^k \end{array} \right), \quad (2.9)$$

其中 $M_k := \int_\gamma \lambda^k \mathrm{e}^{-V(\lambda)} \mathrm{d}\lambda$ 为 k 阶矩, 见(1.27).

证明. 将(2.9)右边的行列式按第 $(k+1)$ 列展开, 并注意(1.28), 易知(2.9)中的 $p_k(x)$ 确实是关于 x 的 k 次首一多项式.

只需再验证正交性. 这只需要验证 $\langle m_j | p_k \rangle = 0$ 对任意 $j < k$ 都成立即可, 其中 $m_j(x) := x^j$ 为单项式. 注意到

$$\begin{aligned} &\langle m_j | p_k \rangle \\ &= \frac{1}{\mathcal{Z}_k(\gamma)} \int_\gamma \det \left(\begin{array}{cccc|c} M_0 & M_1 & \cdots & M_{k-1} & 1 \\ M_1 & M_2 & \cdots & M_k & x \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ M_{k-1} & M_k & \cdots & M_{2k-2} & x^{k-1} \\ \hline M_k & M_{k+1} & \cdots & M_{2k-1} & x^k \end{array} \right) x^j \mathrm{e}^{-V(x)} \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{\mathcal{Z}_k(\gamma)} \det \left(\begin{array}{cccc|c} M_0 & M_1 & \cdots & M_{k-1} & M_j \\ M_1 & M_2 & \cdots & M_k & M_{j+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ M_{k-1} & M_k & \cdots & M_{2k-2} & M_{j+k-1} \\ \hline M_k & M_{k+1} & \cdots & M_{2k-1} & M_{j+k} \end{array} \right). \end{aligned}$$

由于 $j<k$, 从而上式等号最右边的矩阵的最后一列与之前某列相同, 故相应的行列式为 0. 综上, 命题得证. $\square$

2.2 三项递推关系

关于势函数 $V(x)$ 的正交多项式 $p_k(x)$ 是 k 次首一的, 从而 $xp_k(x)$ 是 $(k+1)$ 次首一的, 因此它可以唯一表示为 $\{p_0(x),...,p_{k+1}(x)\}$ 的 $\mathbb{C}$-线性组合, 即存在一族常数 $\left\{\tilde{Q}_{kj}\,\middle|\,0\le j\le k\right\}$ 使得

$$xp_k(x)=p_{k+1}(x)+\sum_{j=0}^{k}\tilde{Q}_{kj}p_j(x).$$

而我们更习惯用(2.4)中的归一化函数 $\psi_k(x)$ 将上式重新写为

$$x\psi_k(x)=\sum_{j=0}^{k+1}Q_{kj}\psi_j(x), \tag{2.10}$$

其中 $\{Q_{kj}\,|\,k\ge 0,\ 0\le j\le k+1\}$ 为常数, 此时易知

$$Q_{k,k+1}=\sqrt{\frac{h_{k+1}}{h_k}}. \tag{2.11}$$

引入无穷列向量与无穷矩阵

$$\boldsymbol{\psi}(x)=\begin{pmatrix}\psi_0(x)\\ \psi_1(x)\\ \psi_2(x)\\ \vdots\end{pmatrix},\qquad \boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}Q_{00}&Q_{01}&Q_{02}&\cdots\\ Q_{10}&Q_{11}&Q_{12}&\cdots\\ Q_{20}&Q_{21}&Q_{22}&\cdots\\ \vdots&\vdots&\vdots&\ddots\end{pmatrix} \tag{2.12}$$

(当 $j>k+1$ 时规定 $Q_{kj}=0$), 则(2.10)也可以改写为

$$x\boldsymbol{\psi}(x)=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{\psi}(x). \tag{2.13}$$

而一个重要的观察是:

定理 2.3. (2.12)中的矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 是对称的, 即

$$\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{Q}, \tag{2.14}$$

从而 $Q_{ij}\neq 0$ 仅当 $|i-j|\leq 1$. 换言之, $\boldsymbol{Q}$ 形如

$$\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix} S_0 & \gamma_1 & & \\ \gamma_1 & S_1 & \gamma_2 & \\ & \gamma_2 & S_2 & \ddots \\ & & \ddots & \ddots \end{pmatrix}, \qquad \gamma_k:=\sqrt{\frac{h_k}{h_{k-1}}} \tag{2.15}$$

其中 $S_0, S_1, \ldots$ 为常数.

证明. 由以下显然的事实

$$\int_\gamma (x\psi_k(x))\,\psi_\ell(x)\mathrm{d}x=\int_\gamma \psi_k(x)\,(x\psi_\ell(x))\,\mathrm{d}x$$

以及正交性(2.5)可得 $Q_{k\ell}=Q_{\ell k}$, 因此 $\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{Q}$. 定理得证. □

换言之, $\boldsymbol{Q}$ 的非零元只位于主对角线以及上下两条副对角线上, 形如这样的矩阵称为 **3-对角矩阵**. 特别地, 对任意正整数 k, $\boldsymbol{Q}^k$ 良定义. 此外, 对任意多项式 $f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$, 相应的 $f(\boldsymbol{Q}):=a_0\boldsymbol{I}+a_1\boldsymbol{Q}+\cdots+a_n\boldsymbol{Q}^n$. 由(2.13)易得

$$f(x)\boldsymbol{\psi}(x)=f(\boldsymbol{Q})\boldsymbol{\psi}(x). \tag{2.16}$$

在记号(2.15)下, $p_k(x)$ 的递推关系为

$$p_0(x)=1, \qquad p_1(x)=x-S_0, \tag{2.17}$$

$$p_{k+1}(x) = (x - S_k)p_k(x) - \gamma_k^2 p_{k-1}(x), \qquad k \geq 1, \tag{2.18}$$

称为**三项递推关系**. 而另一方面, 考察 $\boldsymbol{Q}$ 的左上角 $k \times k$ 子矩阵

$$\boldsymbol{Q}_{[k]} = \begin{pmatrix} S_0 & \gamma_1 & & \\ \gamma_1 & S_1 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & \gamma_{k-1} \\ & & \gamma_{k-1} & S_{k-1} \end{pmatrix}.$$

作为一道简单的本科低年级工科线性代数习题, 容易验证行列式 $D_k(x) := \det\left(x\boldsymbol{I}_{[k]} - \boldsymbol{Q}_{[k]}\right)$, 即 $\boldsymbol{Q}_{[k]}$ 的特征多项式, 满足如下递推关系:

$$D_{k+1}(x) = (x - S_k)D_k(x) - \gamma_k^2 D_{k-1}(x).$$

该递推关系恰好与正交多项式 $p_k(x)$ 的三项递推关系(2.18)相同. 再比较初值, 立刻得到:

性质 2.4. 正交多项式 $p_k(x)$ 满足

$$p_k(x) = \det(x - \boldsymbol{Q})_{[k]} \tag{2.19}$$

与上一小节的 Heine 公式(2.7)比较, 我们有

$$\langle \det(x - H) \rangle_k = \det(x - \boldsymbol{Q})_{[k]}. \tag{2.20}$$

一般来说, 对于随机矩阵 H 的某个函数的期望, 往往等于将 H 换成 $\boldsymbol{Q}$ 并去掉 $\langle\rangle$ 之后的表达式的值. 例如上式, 以及如下定理:

定理 2.5. 对于单变量多项式函数 $f(x)$ 以及任意正整数 N, 下述关系成立:

$$\langle \operatorname{tr} f(H) \rangle_N = \operatorname{tr} f(\boldsymbol{Q})_{[N]}, \tag{2.21}$$

其中随机变量的期望 $\langle\rangle$ 的定义见(1.24).

证明. 回顾 Vandermonde 行列式的定义, 并结合行列式的基本性质 (初等变换) 可知

$$\begin{aligned}\Delta(\lambda_0, \dots, \lambda_{N-1}) &= \det_{0\le i,j\le N-1}(\lambda_i^j) = \det_{0\le i,j\le N-1}(p_j(\lambda_i)) \\ &= \sum_{\sigma\in S_N}(-1)^{|\sigma|}\prod_{i=0}^{N-1}p_{\sigma(i)}(\lambda_i),\end{aligned}$$

再结合(2.3)–(2.5)以及(2.16), 可得

$$\begin{aligned}&\langle \mathrm{tr} f(H)\rangle_N \\ &= \frac{1}{N!}\frac{1}{\mathcal{Z}_N(\gamma)}\int_{\gamma^N}\Delta(\lambda_0,\dots,\lambda_{N-1})^2\left(\sum_{k=0}^{N-1}f(\lambda_k)\right)\prod_{\ell=0}^{N-1}\mathrm{e}^{-V(\lambda_\ell)}\mathrm{d}\lambda_\ell \\ &= \frac{1}{N!}\frac{1}{\prod_{i=0}^{N-1}h_i}\sum_{k=0}^{N-1}\sum_{\sigma,\tau\in S_N}(-1)^{|\sigma\tau|} \\ &\qquad \times\int_{\gamma^N}\prod_{i,j=0}^{N-1}f(\lambda_k)p_{\sigma(i)}(\lambda_i)p_{\tau(j)}(\lambda_j)\prod_{\ell=0}^{N-1}\mathrm{e}^{-V(\lambda_\ell)}\mathrm{d}\lambda_\ell \\ &= \frac{1}{N!}\frac{1}{\prod_{i=0}^{N-1}h_i}\sum_{k=0}^{N-1}\sum_{\sigma,\tau\in S_N}(-1)^{|\sigma\tau|}\left\langle fp_{\sigma(k)}\middle|p_{\tau(k)}\right\rangle\prod_{\substack{0\le i\le N-1\\ i\ne k}}\left\langle p_{\sigma(i)}\middle|p_{\tau(i)}\right\rangle \\ &= \frac{1}{N!}\frac{1}{\prod_{i=0}^{N-1}h_i}\sum_{k=0}^{N-1}\sum_{\sigma\in S_N}\left\langle fp_{\sigma(k)}\middle|p_{\tau(k)}\right\rangle\frac{\prod_{i=0}^{N-1}h_i}{h_k} \\ &= \sum_{k=0}^{N-1}\frac{1}{h_k}\langle fp_k|p_k\rangle = \sum_{k=0}^{N-1}\int_\gamma f(x)\psi_k(x)\cdot\psi_k(x)\mathrm{d}x \\ &= \sum_{k=0}^{N-1}f(\boldsymbol{Q})_{kk} = \mathrm{tr} f(\boldsymbol{Q})_{[N]},\end{aligned}$$

定理得证. □

2.3 Christoffel-Darboux 公式

利用算子 $\boldsymbol{Q}$, 我们也可以化简积分核 $K_N(x,y)$ 的表达式(2.6). 对于 $N \geq 1$, 引入无穷矩阵

$$\boldsymbol{\Pi}_N := \begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_{N\times N} & \boldsymbol{0}_{N\times\infty} \\ \boldsymbol{0}_{\infty\times N} & \boldsymbol{0}_{\infty\times\infty} \end{pmatrix}, \tag{2.22}$$

则(2.6)等价于如下矩阵形式:

$$K_N(x,y) = \boldsymbol{\psi}^{\mathrm{T}}(x)\boldsymbol{\Pi}_N\boldsymbol{\psi}(y). \tag{2.23}$$

由(2.13), 并注意 $\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{Q}$, 我们立刻得到

$$(y-x)K_N(x,y) = \boldsymbol{\psi}^{\mathrm{T}}(x)[\boldsymbol{\Pi}_N, \boldsymbol{Q}]\boldsymbol{\psi}(y). \tag{2.24}$$

我们称上式右边的

$$\boldsymbol{A}^N := [\boldsymbol{\Pi}_N, \boldsymbol{Q}] \tag{2.25}$$

为 **Christoffel-Darboux 矩阵**. 直接计算可知

$$\boldsymbol{A}^N = \gamma_N(\boldsymbol{E}_{N-1,N} - \boldsymbol{E}_{N,N-1}), \tag{2.26}$$

从而将(2.24)改写为

性质 2.6. *(Christoffel-Darboux 公式).* 记号承上, 则

$$K_N(x,y) = \gamma_N \frac{\psi_{N-1}(x)\psi_N(y) - \psi_N(x)\psi_{N-1}(y)}{y-x}. \tag{2.27}$$

注意上式右边只出现了 ψ_{N-1} 与 ψ_N, 这比(2.6)式更简洁. 取极限 $y \to x$, 我们还能得到

$$K_N(x,x) = \gamma_N \lim_{y\to x} \frac{\psi_{N-1}(x)\psi_N(y) - \psi_N(x)\psi_{N-1}(y)}{y-x}$$

$$= \gamma_N \left(\psi_{N-1}(x)\psi_N'(x) - \psi_N(x)\psi_{N-1}'(x)\right).$$

正交多项式 $p_N(x)$ 有 Heine 型公式(2.7)与行列式型公式(2.19); 类似地, 积分核 $K_N(x,y)$ 也有这两种类型的公式.

性质 2.7. 记号承上, 则对任意正整数 N 都有

$$K_N(x,y) = \frac{\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}V(x)}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}V(y)}}{h_{N-1}} \langle \det(x-H)(y-H)\rangle_{N-1}. \tag{2.28}$$

证明. 将 $(y-x)\langle\det(x-H)(y-H)\rangle_{N-1}$ 自然视为 $\mathbb{C}[y][x]$ 中的元素, 即关于 x 的 $\mathbb{C}[y]$-系数的一元多项式. 在此意义下, 显然它是关于 x 的 N 次多项式, 并且最高次项 x^N 的系数为

$$-\langle\det(y-H)\rangle_{N-1} = -p_{N-1}(y),$$

因此存在 $\{c_j(y)\}_{j=0}^{N-1} \subseteq \mathbb{C}[y]$ 使得

$$\begin{aligned}&(y-x)\frac{\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}V(x)}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}V(y)}}{h_{N-1}}\langle\det(x-H)(y-H)\rangle_{N-1}\\ =& -\gamma_N\psi_N(x)\psi_{N-1}(y) + \sum_{j=0}^{N-1} c_j(y)\psi_j(x).\end{aligned}$$

对照 Christoffel-Darboux 公式(2.27), 只需验证

$$c_j(y) = \begin{cases} 0 & 0 \le j \le N-2, \\ \gamma_N\psi_N(y) & j = N-1. \end{cases} \tag{2.29}$$

而由正交关系(2.5), 我们直接得到

$$c_j(y) = \int_\gamma (y-x)\frac{\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}V(x)}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}V(y)}}{h_{N-1}}\langle\det(x-H)(y-H)\rangle_{N-1}\psi_j(x)\mathrm{d}x$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}V(y)}}{\sqrt{h_j}h_{N-1}} \frac{1}{(N-1)!\mathcal{Z}_{N-1}(\gamma)} \int_{\gamma^N} (y-x)p_j(x)\mathrm{e}^{-V(x)} \\
&\quad \times \Delta(\lambda_0, ..., \lambda_{N-2})^2 \left(\prod_{i=0}^{N-2}(x-\lambda_i)(y-\lambda_i)\right)\left(\prod_{i=0}^{N-2}\mathrm{e}^{-V(\lambda_i)}\mathrm{d}\lambda_i\right)\mathrm{d}x \\
&= \frac{\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}V(y)}}{\sqrt{h_j}h_{N-1}} \frac{1}{(N-1)!\mathcal{Z}_{N-1}(\gamma)} \int_{\gamma^N} p_j(\lambda_{N-1})\Delta(\lambda_0, ..., \lambda_{N-2}) \\
&\quad \times \Delta(\lambda_0, ..., \lambda_{N-1})\prod_{i=0}^{N-1}(y-\lambda_i)\mathrm{e}^{-V(\lambda_i)}\mathrm{d}\lambda_i,
\end{aligned} \tag{2.30}
$$

其中积分变元 x 被重命名为 λ_{N-1}. 之后采用与定理2.1证明过程完全相同的变元轮换技巧, 即注意

$$
p_j(\lambda_{N-1})\Delta(\lambda_0, ..., \lambda_{N-2}) = \det\left(\begin{array}{cccc|c}
1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\
\lambda_0 & \lambda_1 & \cdots & \lambda_{N-2} & \lambda_{N-1} \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
\lambda_0^{N-2} & \lambda_1^{N-2} & \cdots & \lambda_{N-2}^{N-2} & \lambda_{N-1}^{N-2} \\
\hline
0 & 0 & \cdots & 0 & p_j(\lambda_{N-1})
\end{array}\right),
$$

可知当 $j < N-1$ 时(2.30)右边的重积分为 0, 即 $c_j(y) = 0$.

而当 $j = N-1$ 时, 直接计算得

$$
\begin{aligned}
c_{N-1}(y) &= \frac{\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}V(y)}}{\sqrt{h_{N-1}}h_{N-1}} \frac{1}{(N-1)!\mathcal{Z}_{N-1}(\gamma)} \frac{1}{N} \\
&\quad \times \int_{\gamma^N} \Delta(\lambda_0, ..., \lambda_{N-1})^2 \prod_{i=0}^{N-1}(y-\lambda_i)\mathrm{e}^{-V(\lambda_i)}\mathrm{d}\lambda_i \\
&= \frac{\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}V(y)}}{h_{N-1}^{\frac{3}{2}}} \frac{\mathcal{Z}_N(\gamma)}{\mathcal{Z}_{N-1}(\gamma)} \langle \det(y-H) \rangle_N = \frac{\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}V(y)}}{\sqrt{h_{N-1}}} p_N(y) = \gamma_N \psi_N(y).
\end{aligned}
$$

综上, 命题得证. □

将(2.28)中的随机矩阵 H 替换为 $\boldsymbol{Q}$, 并去掉期望 $\langle\rangle$, 如此得到的行列式型公式也是对的:

性质 2.8. 记号承上, 则对任意正整数 N 都有

$$K_N(x,y)=\frac{\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}V(x)}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}V(y)}}{h_{N-1}}\det\Big((x-\boldsymbol{Q})(y-\boldsymbol{Q})\Big)_{[N-1]}. \tag{2.31}$$

证明. 对 N 归纳. 注意我们特别规定 0×0 矩阵的行列式为 1, 从而容易验证起始步 $N=1$ 成立. 由(2.15)直接计算验证可知

$$\Big((x-\boldsymbol{Q})(y-\boldsymbol{Q})\Big)_{[N]}=(x-\boldsymbol{Q})_{[N]}(y-\boldsymbol{Q})_{[N]}+\gamma_N^2\begin{pmatrix}\boldsymbol{0}_{(N-1)\times(N-1)} & \\ & 1\end{pmatrix}$$

从而有

$$\begin{aligned}
&\det\Big((x-\boldsymbol{Q})(y-\boldsymbol{Q})\Big)_{[N]}\\
=&\det\Big((x-\boldsymbol{Q})_{[N]}(y-\boldsymbol{Q})_{[N]}\Big)+\gamma_N^2\det\Big((x-\boldsymbol{Q})_{[N]}(y-\boldsymbol{Q})_{[N]}\Big)_{[N-1]}\\
=&\det(x-\boldsymbol{Q})_{[N]}\det(y-\boldsymbol{Q})_{[N]}+\gamma_N^2\det\Big((x-\boldsymbol{Q})(y-\boldsymbol{Q})\Big)_{[N-1]}\\
=&p_N(x)p_N(y)+\gamma_N^2\det\Big((x-\boldsymbol{Q})(y-\boldsymbol{Q})\Big)_{[N-1]}.
\end{aligned}$$

因此由归纳假设以及(2.6)可得

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}V(x)}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}V(y)}}{h_N}\det\Big((x-\boldsymbol{Q})(y-\boldsymbol{Q})\Big)_{[N]}\\
=&\frac{\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}V(x)}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}V(y)}}{h_N}\Big(p_N(x)p_N(y)+\gamma_N^2\det\Big((x-\boldsymbol{Q})(y-\boldsymbol{Q})\Big)_{[N-1]}\Big)\\
=&\psi_N(x)\psi_N(y)+K_N(x,y)=K_{N+1}(x,y),
\end{aligned}$$

从而得证. □

2.4 微分递推关系，弦方程

除了三项递推关系(2.13)(2.18), 我们也关心正交多项式所满足的微分方程, 即怎样将 $p_k(x)$ 的导函数 $p_k'(x)$ 表示为更低次多项式 $\{p_0(x)$,..., $p_{k-1}(x)\}$ 的线性组合. 根据以往经验, 我们不妨考虑相应的归一化函数, 即(2.4)中的 $\psi_k(x)$. 从现在起, 我们不妨假定势函数 $V(x)$ 是关于 x 的多项式 (或者形式幂级数), 其形如

$$V(x) = \sum_{k=1}^{d+1} \frac{t_k}{k} x^k, \tag{2.32}$$

其中 $d \geq 1$ 为 $V'(x) = \sum\limits_{k=0}^{d} t_{k+1} x^k$ 的次数, $t_1, \ldots, t_{d+1}$ 为形式参数.

对(2.4)两边求导, 得到

$$\psi_k'(x) = \frac{1}{\sqrt{h_k}} \left(p_k'(x) - \frac{1}{2} V'(x) p_k(x) \right) \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}V(x)}. \tag{2.33}$$

注意上式右边大括号内是 $(k+d)$ 次多项式, 从而易知上式右边可以表示为 $\psi_0(x), \ldots, \psi_{k+d}(x)$ 的 $\mathbb{C}$-线性组合. 换言之, 存在 (常系数) 无穷矩阵 $\boldsymbol{P} = (P_{kj})_{k,j=0}^{\infty}$ 使得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \boldsymbol{\psi}(x) = \boldsymbol{P} \boldsymbol{\psi}(x), \tag{2.34}$$

并且当 $j > k + d$ 时 $P_{kj} = 0$.

性质 2.9. 矩阵 $\boldsymbol{P}$ 与 $\boldsymbol{Q}$ 满足如下等式:

$$\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}} = -\boldsymbol{P}, \qquad \boldsymbol{P} = -\frac{1}{2} \left(V'(\boldsymbol{Q})_+ - V'(\boldsymbol{Q})_- \right), \tag{2.35}$$

其中 $\boldsymbol{X}_+$ 与 $\boldsymbol{X}_-$ 分别为无穷矩阵 $\boldsymbol{X}$ 的严格上三角部分与严格下三角部分.

证明. 由分部积分

$$\int_\gamma \psi_k'(x)\psi_j(x)\mathrm{d}x = -\int_\gamma \psi_k(x)\psi_j'(x)\mathrm{d}x,$$

立刻得到 $P_{kj} = -P_{jk}$, 即 $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}} = -\boldsymbol{P}$.

利用(2.16)式, 继续整理(2.33)如下:

$$\sum_{j=0}^{k+d} P_{kj}\psi_j(x) = -\frac{1}{2}\sum_{j=0}^{k+d} \left(V'(\boldsymbol{Q})\right)_{kj}\psi_j(x) + \frac{1}{\sqrt{h_k}}p_k'(x)\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}V(x)}. \tag{2.36}$$

注意上式右边第二项形如 $\psi_0(x), ..., \psi_{k-1}(x)$ 的 $\mathbb{C}$-线性组合, 对 $\{\psi_j(x)\}_{j\geq k}$ 的系数无贡献. 因此, 当 $j \geq k$ 时, 比较上式两边 $\psi_j(x)$ 的系数得

$$P_{kj} = -\frac{1}{2}\left(V'(\boldsymbol{Q})\right)_{kj}, \qquad j \geq k,$$

从而 $\boldsymbol{P}_+ = -\frac{1}{2}V'(\boldsymbol{Q})_+$. 再注意 $\boldsymbol{P}$ 的反对称性与 $\boldsymbol{Q}$ 的对称性, 有

$$\boldsymbol{P}_- = -\left(\boldsymbol{P}_+\right)^{\mathrm{T}} = \frac{1}{2}\left(V'(\boldsymbol{Q})_+\right)^{\mathrm{T}} = \frac{1}{2}V'(\boldsymbol{Q})_-.$$

之后由 $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}_+ + \boldsymbol{P}_-$ 即可完成证明. □

上述命题的证明过程还可以被抠得更细一些:

性质 2.10. *记号承上, 则以下等式成立:*

$$V'(\boldsymbol{Q})_{k,k-1} = \frac{k}{\gamma_k}, \qquad V'(\boldsymbol{Q})_{kk} = 0, \tag{2.37}$$

$$[\boldsymbol{Q}, \boldsymbol{P}] = \boldsymbol{I}, \tag{2.38}$$

其中 $\boldsymbol{I}$ 为无穷维单位矩阵, γ_k 的定义见(2.15).

证明. 在(2.36)式的右边, 注意 $p_k'(x)=kx^{k-1}+\cdots$, 于是比较(2.36)两边 $\psi_{k-1}(x)$ 的系数得

$$P_{k,k-1}=-\frac{1}{2}V'(\boldsymbol{Q})_{k,k-1}+\frac{k}{\gamma_k}.$$

另一方面, 由(2.35)得 $P_{k,k-1}=\frac{1}{2}V'(\boldsymbol{Q})_{k,k-1}$, 故 $V'(\boldsymbol{Q})_{k,k-1}=\frac{k}{\gamma_k}$. 类似地, 比较(2.36)两边 $\psi_k(x)$ 的系数立刻得到 $V'(\boldsymbol{Q})_{kk}=0$. 最后, 注意

$$\begin{aligned}[\boldsymbol{Q},\boldsymbol{P}]\boldsymbol{\psi}&=\boldsymbol{Q}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\boldsymbol{\psi}-\boldsymbol{P}x\boldsymbol{\psi}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\boldsymbol{Q}\boldsymbol{\psi})-x(\boldsymbol{P}\boldsymbol{\psi})\\&=\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\circ x-x\circ\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)\boldsymbol{\psi}=\boldsymbol{\psi},\end{aligned}$$

展开并比较系数可得 $[\boldsymbol{Q},\boldsymbol{P}]=\boldsymbol{I}$. 命题得证. □

由(2.37)可以得到配分函数 $\mathcal{Z}_N(\gamma)$ 的**弦方程**:

性质 2.11. *(弦方程). 对于 $V(x)=\sum_{k=1}^{d+1}\frac{t_k}{k}x^k$, 则(1.20)所定义的配分函数 $\mathcal{Z}_N$ 满足如下等式:*

$$\sum_{j=1}^{d}jt_{j+1}\frac{\partial\log\mathcal{Z}_N}{\partial t_j}=Nt_1,\tag{2.39}$$

$$\sum_{j=1}^{d+1}jt_j\frac{\partial\log\mathcal{Z}_N}{\partial t_j}=-N^2.\tag{2.40}$$

证明. 由(1.22)式可知, 存在常数 c_N 使得

$$\mathcal{Z}_N=c_N\int_{\mathrm{H}_N(\gamma)}\mathrm{e}^{-\mathrm{tr}\,V(H)}\mathrm{d}H,$$

再结合(2.21)可得

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{Z}_N}{\partial t_k} &= -\frac{c_N}{k}\int_{\mathrm{H}_N(\gamma)} \mathrm{tr}(H^k)\mathrm{e}^{-\mathrm{tr}\,V(H)}\mathrm{d}H \\
&= -\frac{\mathcal{Z}_N}{k}\left\langle \mathrm{tr}(H^k)\right\rangle_N = -\frac{\mathcal{Z}_N}{k}\mathrm{tr}(\boldsymbol{Q}^k)_{[N]},
\end{aligned}
$$

从而有

$$
\mathrm{tr}(\boldsymbol{Q}^k)_{[N]} = -k\frac{\partial \log \mathcal{Z}_N}{\partial t_k}. \tag{2.41}
$$

因此, 由(2.37)可知

$$
0 = \mathrm{tr}(V'(\boldsymbol{Q}))_{[N]} = \sum_{j=0}^{d} t_{j+1}\mathrm{tr}(\boldsymbol{Q}^j)_N = Nt_1 - \sum_{j=1}^{d} jt_{j+1}\frac{\partial \log \mathcal{Z}_N}{\partial t_j}.
$$

再注意 $(\boldsymbol{Q}V'(\boldsymbol{Q}))_{kk} = \gamma_k \cdot \frac{k}{\gamma_k} + \gamma_{k+1}\cdot\frac{k+1}{\gamma_{k+1}} = 2k+1$, 从而

$$
N^2 = \mathrm{tr}\left(\boldsymbol{Q}V'(\boldsymbol{Q})\right)_{[N]} = \sum_{j=1}^{d+1} t_j\mathrm{tr}(\boldsymbol{Q}^j)_{[N]} = -\sum_{j=1}^{d+1} jt_j\frac{\partial \log \mathcal{Z}_N}{\partial t_j},
$$

从而命题得证. □

2.5 例子: Hermite 多项式

我们考察一个重要的例子: 若势函数

$$
V(x) = \frac{1}{2}x^2,
$$

并且积分路径 $\gamma = \mathbb{R}$, 则相应的正交多项式 $p_k(x)$ 是著名的 **Hermite 多项式**, 我们把它重新记为 $\mathfrak{h}_k(x)$. 注意此时 $V'(x) = x$, 从而相应的算子 $\boldsymbol{Q}$ 满足 $V'(\boldsymbol{Q}) = \boldsymbol{Q}$, 于是由(2.37)立即解得

$$
\gamma_k = \sqrt{k}, \qquad S_k = 0, \tag{2.42}
$$

于是

$$\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{1} & & & \\ \sqrt{1} & 0 & \sqrt{2} & & \\ & \sqrt{2} & 0 & \sqrt{3} & \\ & & \sqrt{3} & 0 & \ddots \\ & & & \ddots & \ddots \end{pmatrix},\ \boldsymbol{P}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{1} & & & \\ \sqrt{1} & 0 & -\sqrt{2} & & \\ & \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{3} & \\ & & \sqrt{3} & 0 & \ddots \\ & & & \ddots & \ddots \end{pmatrix}.$$

第 0 个正交多项式总是恒为 1 的常值多项式, 即 $\mathfrak{h}_0(x)=1$. 因此

$$h_0=\langle\mathfrak{h}_0|\mathfrak{h}_0\rangle=\int_{\mathbb{R}}\mathfrak{h}_0(x)\mathfrak{h}_0(x)\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x=\int_{\mathbb{R}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x=\sqrt{2\pi}.$$

再结合(2.15)(2.42)可得

$$h_k=\sqrt{2\pi}\,k!,$$

从而有

$$\int_{\mathbb{R}}\mathfrak{h}_k(x)\mathfrak{h}_j(x)\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x=\delta_{kj}\sqrt{2\pi}\,k!,$$

并且相应的归一化函数 $\psi_k(x)$ 为

$$\psi_k(x)=\frac{1}{\sqrt{\sqrt{2\pi}\,k!}}\mathfrak{h}_k(x)\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4}}. \tag{2.43}$$

此时, 递推关系(2.13)(2.34)等价于

$$x\psi_k(x)=\sqrt{k}\psi_{k-1}(x)+\sqrt{k+1}\psi_{k+1}(x) \tag{2.44}$$

$$\psi_k'(x)=-\frac{x}{2}\psi_k(x)+\sqrt{k}\psi_{k-1}(x). \tag{2.45}$$

反复使用以上两式, 可以得到 $\psi_k(x)$ 所满足的微分方程

$$\psi_k''(x)+\left(k+\frac{1}{2}-\frac{x^2}{4}\right)\psi_k(x)=0. \tag{2.46}$$

利用(2.43)可将以上关于 ψ_k 的方程都改写为关于 $\mathfrak{h}_k$ 的方程:

$$\mathfrak{h}_{k+1}(x) = x\mathfrak{h}_k(x) - k\mathfrak{h}_{k-1}(x), \qquad \mathfrak{h}_k'(x) = k\mathfrak{h}_{k-1}(x), \tag{2.47}$$

$$\mathfrak{h}_k''(x) - x\mathfrak{h}_k'(x) + k\mathfrak{h}_k(x) = 0. \tag{2.48}$$

此外, 相应的 Christoffel-Darboux 公式(2.27)为

$$\sum_{k=0}^{N-1} \psi_k(x)\psi_k(y) = \sqrt{N}\frac{\psi_{N-1}(x)\psi_N(y) - \psi_N(x)\psi_{N-1}(y)}{y-x}, \tag{2.49}$$

$$\sum_{k=0}^{N-1} \frac{\mathfrak{h}_k(x)\mathfrak{h}_k(y)}{k!} = \frac{1}{(N-1)!}\frac{\mathfrak{h}_{N-1}(x)\mathfrak{h}_N(y) - \mathfrak{h}_N(x)\mathfrak{h}_{N-1}(y)}{y-x}. \tag{2.50}$$

对上式取极限 $y \to x$, 并注意(2.47), 整理得到

$$\mathfrak{h}_N^2(x) - \mathfrak{h}_{N+1}(x)\mathfrak{h}_{N-1}(x) = (N-1)!\sum_{k=0}^{N-1} \frac{\mathfrak{h}_k^2(x)}{k!}. \tag{2.51}$$

特别地, 当 $x \in \mathbb{R}$ 时, $\mathfrak{h}_N^2(x) - \mathfrak{h}_{N+1}(x)\mathfrak{h}_{N-1}(x) > 0$, 此乃 **Turán 不等式**.

由 $\mathfrak{h}_0(x) = 1$ 以及递推关系(2.47)可得前几个 Hermite 多项式:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{h}_1(x) &= x, \\
\mathfrak{h}_2(x) &= x^2 - 1, \\
\mathfrak{h}_3(x) &= x^3 - 3x, \\
\mathfrak{h}_4(x) &= x^4 - 6x^2 + 3, \\
\mathfrak{h}_5(x) &= x^5 - 10x^3 + 15x, \\
\mathfrak{h}_6(x) &= x^6 - 15x^4 + 45x^2 - 15, \\
\mathfrak{h}_7(x) &= x^7 - 21x^5 + 105x^3 - 105x, \\
\mathfrak{h}_8(x) &= x^8 - 28x^6 + 210x^4 - 420x^2 + 105,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathfrak{h}_9(x) &= x^9 - 36x^7 + 378x^5 - 1260x^3 + 945x,\\ \mathfrak{h}_{10}(x) &= x^{10} - 45x^8 + 630x^6 - 3150x^4 + 4725x^2 - 945.\end{aligned}$$

我们还可以用多种方式写出 Hermite 多项式的通项:

习题 2.12. 记 $\partial_x := \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ 为微分算子, 则 $\mathfrak{h}_k(x)$ 满足如下等式:

$$\mathfrak{h}_k(x) = (x - \partial_x)^k \cdot 1 = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2}(-\partial_x)^k \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2} = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\partial_x^2} x^k, \tag{2.52}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathfrak{h}_k(x)}{k!} t^k = \mathrm{e}^{xt - \frac{1}{2}t^2}. \tag{2.53}$$

证明. 由(2.47)可知 $\mathfrak{h}_{k+1}(x) = (x - \partial_x)\mathfrak{h}_k(x)$, 从而易知

$$\mathfrak{h}_k(x) = (x - \partial_x)^k \cdot 1.$$

注意 $[x, \partial_x] = 1$ 以及 $[x, [x, \partial_x]] = [\partial_x, [x, \partial_x]] = 0$, 从而由李理论中的 Zassenhaus 公式 (Baker-Campbell-Hausdorff 公式的变种) 得

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathfrak{h}_k(x)}{k!} t^k &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k (x - \partial_x)^k}{k!} \cdot 1 = \mathrm{e}^{t(x - \partial_x)} \cdot 1\\ &= \left(\mathrm{e}^{tx} \mathrm{e}^{-t\partial_x} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t^2[x, -\partial_x]}\right) \cdot 1 = \mathrm{e}^{xt - \frac{1}{2}t^2}.\end{aligned}$$

再由 $\partial_x \mathrm{e}^{xt} = t\mathrm{e}^{xt}$ 易知对任意 (在 0 处解析的) 函数 $f(x)$ 都有 $f(\partial_x)\mathrm{e}^{xt} = f(t)\mathrm{e}^{xt}$, 从而

$$\mathrm{e}^{xt - \frac{1}{2}t^2} = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t^2} \mathrm{e}^{xt} = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\partial_x^2} \cdot \mathrm{e}^{xt},$$

在 $t = 0$ 处展开即得 $\mathfrak{h}_k(x) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\partial_x^2} \cdot x^k$.

最后, 由泰勒公式 $f(x + t) = \mathrm{e}^{t\partial_x} f(x)$ 得

$$\mathrm{e}^{xt - \frac{1}{2}t^2} = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(x-t)^2} = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2} \mathrm{e}^{-t\partial_x} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2},$$

将上式在 $t = 0$ 处展开可知 $\mathfrak{h}_k(x) = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2}(-\partial_x)^k \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}$. 证毕. □

Hermite 多项式广泛出现于各种数学物理分支, 例如量子力学 (量子谐振子)、组合数学、概率论 (布朗运动) 等.

习题 2.13. (组合计数). $\mathfrak{h}_n(x)$ 的 x^k 项系数的绝对值恰为将 n 元集合划分为 k 个 1 元子集与 $\frac{n-k}{2}$ 个 2 元子集之无交并的方法数.

证明. 考虑指数生成函数(2.53)

$$\mathrm{e}^{xt-\frac{1}{2}t^2}=\mathrm{e}^{xt}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t^2}=\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}t^k\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2^k k!}t^{2k}\right)$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{\ell=0}^{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}\frac{(-1)^\ell}{2^\ell \ell!}\frac{x^{n-2\ell}}{(n-2\ell)!}\right)t^n,$$

比较 t^n 的系数得

$$\mathfrak{h}_n(x)=\sum_{\ell=0}^{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}(-1)^\ell\binom{n}{2\ell}(2\ell-1)!!x^{n-2\ell}.$$

注意 $\binom{n}{2\ell}(2\ell-1)!!$ 恰为将 n 元集合划分为 ℓ 个 2 元子集与 $(n-2\ell)$ 个 1 元子集之无交并的方法数, 从而得证. □

习题 2.14. 若随机变量 X 服从正态分布 $N(\mu,1)$, 则

$$\mathbb{E}[\mathfrak{h}_k(X)]=\mu^k.$$

证明. 随机变量 X 的概率密度 $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(x-\mu)^2}$, 从而

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\mathbb{E}[\mathfrak{h}_k(X)]}{k!}t^k=\int_{\mathbb{R}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\mathfrak{h}_k(x)}{k!}t^k f(x)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}}\mathrm{e}^{xt-\frac{1}{2}t^2}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(x-\mu)^2}\mathrm{d}x=\frac{\mathrm{e}^{t\mu}}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(x-t-\mu)^2}\mathrm{d}x=\mathrm{e}^{t\mu},$$

之后比较上式两边 t^k 的系数即得证. □

注记 **2.15.** Hermite 多项式还有另一个常见的版本:

$$H_k(x) := 2^{\frac{k}{2}} \mathfrak{h}_k(\sqrt{2}x),$$

它所满足的通项公式为

$$H_k(x) = (2x - \partial_x)^k \cdot 1 = \mathrm{e}^{x^2}(-\partial_x)^k \mathrm{e}^{-x^2} = 2^n \mathrm{e}^{-\frac{1}{4}\partial_x^2} x^k.$$

为区分这两者, 人们称 $\mathfrak{h}_k(x)$ 为**概率学家 Hermite 多项式**, 称 $H_k(x)$ 为**物理学家 Hermite 多项式**.

3. Toda 方程簇及其约化

3.1 经典 Toda 方程 (待补)

3.2 Toda 方程簇与矩阵模型 (待补)

3.3 Volterra 方程 (待补)

3.4 Toda 方程簇的 Virasoro 约束 (待补)

4. Riemann-Hilbert 问题

4.1 Hilbert 变换 (待补)

4.2 折叠矩阵与 Lax 矩阵 (待补)

4.3 等单值性与 Riemann-Hilbert 问题 (待补)

4.4 Lax 方程与平坦截面 (待补)

4.5 等单值 Tau 函数 (待补)

5. KP 方程簇与 Hirota 双线性方程

5.1 Baker-Akhiezer 函数 (待补)

5.2 Hirota 方程 (待补)

参考文献

[1] Akemann G, Baik J, Di Francesco P. *The Oxford handbook of random matrix theory* [M]. Oxford University Press, 2011.

[2] Babelon O, Bernard D, Talon M. *Introduction to classical integrable systems* [M]. Cambridge University Press, 2003.

[3] Bergere M, Eynard B. *Mixed correlation function and spectral curve for the 2-matrix model* [J]. Journal of Physics A: Mathematical and General, 2006, 39(49): 15091.

[4] Bertola M, Eynard B, Harnad J. *Partition functions for matrix models and isomonodromic tau functions* [J]. Journal of Physics A: Mathematical and General, 2003, 36(12): 3067.

[5] Bertola M, Eynard B, Harnad J. *Semiclassical orthogonal polynomials, matrix models and isomonodromic tau functions* [J]. Communications in mathematical physics, 2006, 263(2): 401-437.

[6] Carlet G, Dubrovin B, Zhang Y (张友金). *The extended Toda hierarchy* [J]. arXiv preprint nlin/0306060, 2003.

[7] Deift P. *Orthogonal polynomials and random matrices: A Riemann-Hilbert approach* [M]. American Mathematical Society, 2000.

[8] Eynard B, Kimura T, Ribault S. *Random matrices* [J]. arXiv preprint arXiv:1510.04430, 2015.

[9] Gerasimov A, Marshakov A, Mironov A, Morozov A, Orlov A. *Matrix models of two-dimensional gravity and Toda theory* [J]. Nuclear Physics B, 1991, 357(2-3): 565-618.

[10] Jimbo M, Miwa T, Date E. *Solitons: Differential equations, symmetries and infinite dimensional algebras* [M]. Cambridge university press, 2000.

[11] Jimbo M, Miwa T, Ueno K. *Monodromy preserving deformation of linear ordinary differential equations with rational coefficients: I. General theory and τ-function* [J]. Physica D: Nonlinear Phenomena, 1981, 2(2): 306-352.

[12] Menon G, Trogdon T. *Lectures on random matrix theory* [J]. unpublished notes (March 2018), 2015.

[13] Morozov A Y. *Integrability and matrix models* [J]. Physics-Uspekhi, 1994, 37(1): 1.

[14] Witten E. *Two-dimensional gravity and intersection theory on moduli space* [J]. Surveys in differential geometry, 1990, 1(1): 243-310.