University
LECTURE
Series

Volume 58

实定理的复证明

Math4011 第 1.0 稿

曲豆豆 ⊗ BIUBIU ⊗ ImsaNE 翻译
原著: Peter D. Lax Lawrence Zalcman

2020 年 9 月 5 日

American Mathematical Society

来自曲豆豆的高数讨论 qq 群：1022388218
这是一个分享 LaTeX 数学原创笔记, 讲义的地方

本书为数学经典

Peter D. Lax & Lawrence Zalcman
Complex Proofs of Real Theorems

的非官方 (野生) 中译本, 仅供学习交流.

对此书感兴趣者, 欢迎加入曲豆豆的高等数学群 (主群)：1022388218, 找到曲豆豆, 然后让曲豆豆拉进某个分群, 交流讨论.

目录

前言

在二十世纪中叶, 单复变解析函数理论在核心数学中占据荣耀甚至特权的地位. 这个" 特别丰富而和谐的理论, " Hermann Weyl 断言, " 是十九世纪古典分析的典范". [1] 为防止让人误认为这门学科已经过时, 我们应该回忆 Weyl 近几年前对亚纯函数值分布的 Nevanlinna 理论的评价: " 本世纪少数伟大数学事件之一". [2] 在远离函数论研究方向的前沿研究者们似乎也在争相肯定这门学科的" 永恒价值" [3]. 于是, Clifford Truesdell 断言" 共形映射与解析函数理论只要还存在, 就会在我们的文化中保持最前沿"; [4] 而 Eugene Wigner 指出, " 在幂级数与一般的解析函数的理论中... 有很多优美的定理," 并称它们为"(数学) 天才们的最美的成果." [5] 难怪复变函数论是研究生的一门必修课, 也是所有数学家的公共知识的必要组成部分.

在过去的半个世纪中, 世界发生了很多变化, 但并非所有变化都更好. 复变函数论从课程的核心位置开始渐渐被边缘化. 现在在某些机构, 学生完全有可能在不掌握函数论的基础知识的情况下获得数学博士学位, 甚至 (虽然似乎难以置信) 某些专攻分析学方向的学生仅仅学过一个学期的复分析, 就能获得想要的学位. 尽管复变函数论为分析学家提供了幂级数, 解析延拓, Cauchy 积分等等必不可少的工具. 而且实分析当中的许多结果是用复变函数方法证明的. 事实上, Painlevé 在十九世纪末写道, " 连接实数世界中的两个事实的最短, 最易的道路, 往往会经过复数的世界," [6] Hardmard 认可并推广了这个观点. [7] 这个小册子将通过汇集各种的数学结果来说明这个观点, 其中这些数学结果

[1]Hermann Weyl, *A half-century of mathematics*, Amer. Math. Monthly **58** (1951), 523-553,p. 526.

[2]Hermann Weyl, *Meromorphic Functions and Analytic Curves*, Princeton University Press, 1943, p. 8.

[3]G. Kreisel, *On the kind of data needed for a theory of proofs*, Logic Colloquium **76**, North Holland, 1977, pp. 111-128, p. 118.

[4]C. Truesdell, *Six Lectures on Modern Natural Philosophy*, Springer-Verlag, 1966, p. 107.

[5]Eugene P. Wigner, *The unreasonable effectiveness of mathematics in the natural sciences*, Comm. Pure Appl. Math. **13** (1960), 1-14, p. 3.

[6]"Entre deux vérités du domain réel, le chemin le plus facile et le plus court passe bien souvent par le domaine complexe." Paul Painlevé, *Analyse des travaux scientifiques*, Gauthier-Villars, 1900, pp.1-2.

[7]"It has been written that the shortest and best way between two truths of the real domain often passes through the imaginary one." Jacques Hadamard, *An Essay on the Psychology of Invention in the Mathematical Field*, Princeton University Press, 1945, p. 123.

的提法与复变函数无关, 但其证明过程会用到复变函数理论. 这当中最有名的结果当属素数定理; 此外, 正如此书所收集的, 还有很多这样的例子, 其中不乏很基本的结果.

那么, 这本书适合谁呢? 首先, 适合每一个喜欢分析, 享受阅读优美证明的人. 本书的技巧程度相对适中. 我们假定读者熟悉基础泛函分析以及傅里叶变换的简单常识, 例如本书第一作者 (Peter D.Lax) 所著 *Functional Analysis* (Wiley-Interscience, 2002), 也就是这里将要标记的参考文献 [FA]. 在一些例子中我们会用到一些在标准的第一学期复分析课程中讲不到的知识, 这些知识我们会在附录里给出详细的表述, 证明. 于是此书讲到的例子能适合研究生. 其次, 本书也适合讲授复变函数课程的老师, 尤其是希望用复变函数解决课外问题的例子来丰富课程内容的老师.

下面简述本书内容. 我们首先简要说明复变函数如何简洁高效地解决十七, 十八世纪的两个有意思的经典问题, 这两个问题是: 计算无穷求和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$, 以及证明任何一元代数方程 (实系数或者复系数) 在复数域上必有根. 接下来, 我面探讨复分析在实函数的逼近理论上的两个有代表性的应用: 实轴上的加权多项式的逼近, 以及单位区间当中由形如 x^{n_k} 的函数的线性组合一致逼近, 其中 $n_k \to \infty$ (Müntz 定理). 我们接着考虑复变函数在算子理论和调和分析上的应用, 它们是本书的核心. 在算子理论当中的第一个应用是 Rosenblum 对 Fuglede-Putnam 定理的优雅证明. 然后我们讨论 Toeplitz 算子及其逆算子, Beurling 对 Hardy 空间 H^2 的平移不变子空间的的刻画以及由此得到的半平面或圆盘上的有界解析函数代数 $\mathcal{B}$ 的整除性理论, 以及预报理论 (prediction theory) 中的一个著名问题 (Szegő 定理). 我们还将证明 Riesz-Thorin 凸性定理, 并且用它来证明 $L^p(\mathbb{R}), 1 < p < \infty$ 上的 Hilbert 变换的有界性. 讲复变函数在调和分析上的应用的那一章, 以 D.J. Newman 用复变函数对 Fourier 变换的唯一性的精彩证明作为开端; 接着讨论一个有趣的函数方程以及 Radon 变换的唯一性 (与非唯一性); 然后去考虑 Paley-Wiener 定理, 再运用之前提到的 $\mathcal{B}$ 的整除性理论给出 Titchmarsh 卷积定理的一个简洁证明. 这一章以 Hardy 定理结束, 该该定理断言一个函数与它的 Fourier 变换不可能都快速趋于零. 最后几章介绍 Gleason-Kahane-Żelazko 定理 (在含幺 Banach 代数中, 余维数为 1 且不含可逆元的子空间是一个极大理想) 以及 Fatou-Julia-Baker 定理 (次数至少为 2 的有理函数或者非线性整函数的 Julia 集是排斥周期点集的闭包). 最后, 我们以素数定理的证明高调收尾. 此书还有一个后记, 简要介绍复变函数的两个不寻常的应用: 其一在流体力学 (超音速流的无冲击机翼设计), 其二是在统计力学 (随机 Loewner 演化).

某种程度上, 本书内容选取是自然的; 但也不可避免地受到我们个人研究兴趣的影

响. 一些素材选自 [FA]. 本书的标题与第二位作者的一篇文章相呼应. [8]

尽管此书目前处于计划阶段, 实际的写作是在 2010 年春天和夏天完成的, 此时第二位作者正在巴伊兰大学休假. 他感谢纽约大学数学系库仑 (Courant) 研究所在此期间的热情款待, 并感谢以色列科学基金会 Grant 395/07 的支持.

最后, 很高兴从朋友, 同事们那里得到得到很多宝贵意见. Charles Horowitz 阅读了本书初稿并给出很多有用的评论. David Armitage, Walter Bergweiler, Alex Eremenko, Aimo Hinkkanen, 以及 Tony O'Farrell 都在本书的后续版本中提出了敏锐的评论和有用的建议. 尤其感谢 Miriam Beller, 感谢她对稿件的专业准备.

Peter D. Lax
纽约州, 纽约市

Lawrence Zalcman
以色列, 耶路撒冷

[8] Lawrence Zalcman, *Real proofs of complex theorems (and vice versa)*, Amer. Math. Monthly **81** (1974), 115-137.

1. 早期进展

没有什么比优雅地秒掉那些困扰古时候伟大数学家的经典问题更能表现复变函数论的威力了. 在本章, 我们考虑两个这样的问题: 计算无穷级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 以及证明代数基本定理. 在历史上, 这两个问题的解决, 早于复变函数论的建立; 但至今为止, 复变函数论提供了上述问题的最简单易懂的解法.

1.1 Basel 问题

复变函数论的最强大的用法之一无疑是利用 Cauchy 定理和留数定理来具体求解某些定积分, 无穷级数. 例如, 我们考虑无穷级数

$$\zeta(2k)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2k}},\qquad k=1,2,...$$

函数

$$H(z):=\frac{2\pi i}{e^{2\pi iz}-1}$$

在复平面 $\mathbb{C}$ 亚纯, 并且每个整数都是它的单极点, 且留数都是 1. $H(z)$ 在 $\mathbb{C}$ 上没有其它的极点. 从而, 如果 f 在点 $z=n\,(n\in\mathbb{Z})$ 附近解析, 则 $\operatorname{Res}(H(z)f(z),n)=f(n)$. 我们取 $f(z)=\frac{1}{z^{2k}}$, 其中 k 为给定正整数, 并且考虑积分

$$I_N:=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_N}H(z)\frac{1}{z^{2k}}\,\mathrm{d}z,\tag{1.1}$$

其中 N 为正整数, Γ 为以 $(N+\frac{1}{2})(\pm1\pm i)$ 为顶点的正方形的正定向边界. 由留数定理,

$$I_N=\sum_{n=-N}^{N}\operatorname{Res}\left(H(z)\frac{1}{z^{2k}},n\right)=\operatorname{Res}\left(H(z)\frac{1}{z^{2k}},0\right)+2\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{n^{2k}}.\tag{1.2}$$

用标准套路去估计, 易知 $|H(z)|$ 在 Γ_N 一致有界, 即存在与 N 无关的上界. 因此

$$H(z)\frac{1}{z^{2k}} = O(\frac{1}{N^{2k}}), \qquad z \in \Gamma_N,\ N \to \infty;$$

又由于 Γ_N 的长度为 $8N+4$, 从而再由1.1式可知

$$I_N = O(\frac{1}{N^{2k-1}}), \qquad N \to \infty.$$

从而 $\lim\limits_{N\to\infty} I_N = 0$, 从而由1.2式, 我们得到

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}} = -\frac{1}{2}\operatorname{Res}\left(H(z)\frac{1}{z^{2k}}, 0\right). \tag{1.3}$$

为求1.3式右侧, 回顾 Bernoulli 数 B_n, 其定义为

$$\frac{x}{e^x - 1} = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{B_\ell x^\ell}{\ell!}. \tag{1.4}$$

特别地, $B_0 = 1$, $B_1 = -\frac{1}{2}$, $B_2 = \frac{1}{6}$, $B_4 = -\frac{1}{30}$, $B_6 = \frac{1}{42}$, $B_8 = -\frac{1}{30}$, $B_{10} = \frac{5}{66}$, $B_{12} = -\frac{691}{2730}$. 从而由1.4式, 我们有

$$H(z) = \frac{2\pi i}{e^{2\pi i z} - 1} = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{B_\ell (2\pi i)^\ell z^{\ell-1}}{\ell!},$$

从而 $\frac{H(z)}{z^{2k}}$ 在 $z=0$ 处的 Laurent 展开的 $\frac{1}{z}$ 的系数满足

$$\operatorname{Res}\left(H(z)\frac{1}{z^{2k}}, 0\right) = \frac{(-1)^k B_{2k}(2\pi)^{2k}}{(2k)!}.$$

代入1.3式, 有

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}} = \frac{(-1)^{k+1} 2^{2k-1}}{(2k)!} B_{2k} \pi^{2k},$$

这正是我们想要的公式. 特别地, 取 $k=1$, 就得到

$$\zeta(2)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}.$$

点评.

1. 求 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 的值, 是 17 世纪末 18 世纪初的著名数学问题. 它最早由 Pietro Mengoli 在 1644 年提出, Jacob Bernoulli 的著作 *Tractatus de Seriebus Infinitis* (1689) 使得该问题进入公众视野, 后来被称为 Basel 问题. 经过数学家们的反复尝试, 此问题终于在 1735 年被 Leonhard Euler 解决. Euler 在 1741 年又给出了此结果的严格证明过程. Euler 又继续寻找 $\zeta(2k)$ 的一般公式, 并且具体给出了 $k=1,2,...,13$ 时 $\zeta(2k)$ 的值. 当然, Euler 并没有用到复变函数论, 毕竟当时这门学科还没建立.

2. 给出 $\zeta(3)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$ 的具体表达式 (或者证明它无法具体表达), 至今仍是一个有趣的未解决的问题, 对于更大的奇数也是如此. 我们 (Apéry) 已经知道 $\zeta(3)$ 是无理数, 其证明见 [B].

3. 留数定理的更多应用, 可参考 [MK1],[MK2] 这两册书.

参考文献

B F. Beukers, *A note on the irrationality of* $\zeta(2)$ *and* $\zeta(3)$, Bull. London Math. Soc. **11**(1979), 268-272.

MK1 Dragoslav S. Mitrinović and Jovan D. Kečkić, *The Cauchy Method of Residues: Theory and Applications*, D. Reidel Publishing Co., 1984.

MK2 Dragoslav S. Mitrinović and Jovan D. Kečkić, *The Cauchy Method of Residues: Theory and Applications*, Vol. 2,Kluwer Academic Publishers, 1993.

1.2　代数学基本定理

代数学基本定理 (FTA) 断言, 非常值复系数多项式

$$p(z)=a_nz^n+a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_0 \tag{1.5}$$

在复平面 $\mathbb{C}$ 必有零点. 十八世纪的先贤们, 诸如 Euler, Lagrange, Laplace, 企图建立这个结果 (实系数多项式的版本), 都惨遭失败; Gauss 在 1799 年给出的几何证明方法也有 (拓扑上的) 瑕疵, 这个瑕疵在 1920 年才被补上 (Alexander Ostrowski [O]; 参见 [Sm, pp.4-5]). 该定理的第一个严格证明, 由 Argand 在 1814 年发表, 标志着十九世纪早期数学的最高水准线.

复变函数论给出了证明 FTA 的极其高效的方法; 用 Liouville 定理, 极大模原理, 辐角原理, Rouché 定理的证明方法, 早已出现在标准教科书中. 然而, 用圆周上的 Cauchy 积分公式的证法最简短, 但似乎并没有出现在教科书中.

代数学基本定理的证明. 设 p 为1.5当中的多项式, 其中 $n \geq 1$, $a_n \neq 0$. 首先注意到

$$\lim_{R\to\infty} |p(Re^{i\theta})| = \infty \qquad \text{关于 } \theta \text{ 一致}, \tag{1.6}$$

这是因为当 z 充分大的时候

$$|p(z)| \geq |z|^n \left(|a_n| - \frac{|a_{n-1}|}{|z|} - \cdots - \frac{|a_0|}{|z|^n}\right) > \frac{|a_n|}{2}|z|^n.$$

假设 p 在复平面 $\mathbb{C}$ 上没有零点, 则 $q := \dfrac{1}{p}$ 在 $\mathbb{C}$ 上解析, 且 $q(0) = \dfrac{1}{p(0)} \neq 0$. 由 Cauchy 积分公式,

$$q(0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=R} \frac{q(z)}{z}\,\mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} q(Re^{i\theta})\,\mathrm{d}\theta \tag{1.7}$$

对任意 $R > 0$ 都成立. 由1.6可知, 当 $R \to \infty$ 时1.7右端趋于 0, 从而我们导出了矛盾. □

上述证明节选自参考文献 [Z]; 也参见 [Sc] 与 [V].

参考文献

O Alexander Ostrowski, *Über den ersten und vierten Gaussschen Beweis des Fundamental-Satzes der Algebra*, in Carl Friedrich Gauss Werke Bd. X 2, Abh. 3, Julius Springer, 1933.

Sc Anton R. Schep, *A simple complex analysis and an advanced calculus proof of the fundamental theorem of algebra,* Amer. Math. Monthly **116** (2009), 67-68.

Sm Steve Smale, *The fundamental theorem of algebra and complexity theory*, Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) **4** (1981), 1-36.

V Daniel J. Velleman, *Editor's endnotes*, Amer. Math. Monthly **116** (2009), 857-858.

Z Lawrence Zalcman, *Picard's Theorem without tears*, Amer. Math. Monthly **85** (1978), 265-268.

2. 逼近理论

函数的解析性也常常用于研究函数逼近问题, 即使被逼近的对象是实值函数. 以下两小节将用来说明这一点. 在它们当中, 泛函分析里的一个被称作 **张成判据**的基本结论扮演了关键角色.

性质. *(张成判据)*

设 X 为赋范线性空间, $\{y_j\}$ 为 X 的子集, Y 为由 $\{y_j\}$ 张成的 X 的子空间的闭包, $z \in X$. 则 $x \in Y$ 当且仅当

$$\forall \ell \in X^*, [(\forall j, \ell(y_j) = 0) \to \ell(z) = 0].$$

特别地, $Y = X$ 当且仅当使得 $\ell(y_j) = 0$, $(\forall j)$ 的 $\ell \in X^*$ 只能为 0.

证明. 要用 Hahn-Banach 定理, 详见 [FA, pp.77-78]. □

2.1 加权多项式族的完备性

设 $w(t)$ 为定义在 $\mathbb{R}$ 上的正实值连续函数, 并且当 $|t| \to \infty$ 时指数衰减:

$$0 < w(t) < ae^{-c|t|}, \qquad c > 0. \tag{2.1}$$

记 C_0 为由定义在 $\mathbb{R}$ 上, 并且在 ∞ 处衰减 (即满足下式) 的连续函数构成的集合:

$$\lim_{|t|\to\infty} x(t) = 0.$$

则 C_0 在最大模范数下构成 Banach 空间.

定理 2.1. *函数 $t^n w(t), n = 0, 1, 2, \ldots$ 属于空间 C_0, 并且它们张成的子空间在 C_0 当中稠密. 也就是说, C_0 中的任何函数都能被加权多项式一致逼近.*

证明. 使用张成判据. 设 ℓ 为 C_0 上的有界线性泛函, 并且在 $t^n w$ 上的作用都为 0, 即:

$$\ell(t^n w) = 0, \qquad n = 0, 1, \ldots. \tag{2.2}$$

设 z 为复变量, $|\operatorname{Im} z| < c$. 则 $w(t)e^{izt} \in C_0$, 从而函数

$$f(z) := \ell(we^{izt})$$

在带状区域 $|\operatorname{Im} z| < c$ 有定义. 断言 f 在该区域解析. 注意到在 C_0 的范数下, we^{izt} 关于 z 的复导数为 $iwte^{izt}$, 从而

$$f'(z) = \lim_{\delta \to 0} \frac{f(z+\delta) - f(z)}{\delta} = \lim_{\delta \to 0} \ell \left(w \frac{e^{i(z+\delta)t} - e^{izt}}{\delta} \right) = \ell(iwte^{izt}).$$

类似地计算高阶导数, 由2.2式可得

$$\left. \frac{\mathrm{d}^n f}{\mathrm{d} z^n} \right|_{z=0} = i^n \ell(wt^n) = 0, \qquad n = 0, 1, \ldots.$$

由于 f 解析, 从而 f 在 $z = 0$ 处的各阶导数都为零表明 $f(z) \equiv 0$ 在带状区域恒成立. 特别地,

$$f(z) = \ell(we^{izt}) = 0, \qquad \forall z \in \mathbb{R}.$$

从而由张成判据可知, 对任意 $z \in \mathbb{R}$, 函数 we^{izt} 能被 $\{t^n w\}$ 的线性组合一致逼近.

根据 Weierstrass 逼近定理, 任何连续周期函数 h 都能被三角多项式一致逼近. 从而 wh 能被形如 we^{izt} 的函数的线性组合一致逼近, 其中 $z \in \mathbb{R}$; 进而也能被形如 $t^n w$ 的函数的线性组合一致逼近. 现在, 设 y 为紧支连续函数, 定义函数 x 为

$$x = \frac{y}{w}. \tag{2.3}$$

设 h 为周期 $2p$ 的函数, 且使得

$$x(t) \equiv h(t), \qquad \forall |t| < p, \tag{2.4}$$

其中 p 为充分大的正数, 使得 x 的支集包含于区间 $[-p, p]$. 于是

$$\|x - h\|_{\max} \le \|x\|_{\max};$$

从而再由2.3,2.4以及2.1式可得

$$\|y - wh\|_{\max} \le ae^{-cp}\|x\|_{\max}.$$

这表明当 $p \to \infty$ 时, $wh \to y$. 又由于 wh 能被 $\{t^n w\}$ 的线性组合一致逼近, 从而 y 也可. 最后, 注意紧支函数 y 之全体在 C_0 当中稠密, 从而得证. □

点评. 设 w 为 $\mathbb{R}$ 上的非负函数, 称关于权 w 的多项式族是完备的, 如果对满足下述条件的 $f \in C(\mathbb{R})$,

$$\lim_{|x|\to\infty} w(x)|f(x)| = 0, \tag{2.5}$$

对任意 $\varepsilon > 0$ 都存在多项式 P 使得

$$w(x)|f(x) - P(x)| < \varepsilon, \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

寻找权 w 多项式族完备的充要条件这个问题, 在 1924 年由 S.N. Bernstein 提出, 大约三十年后由 S.N. Mergelyan 解决. Mergenlyan 优美的综述文章 [M] 当中包含了关于该问题的完整的进展过程, 并配以很多富有启发性的例子.

为把它与本节考虑的问题联系起来, 注意到若关于正权 w 的多项式族是完备的, 则任意 $g \in C_0$ 可被加权多项式一致逼近. 事实上, $f := \dfrac{g}{w}$ 满足2.5式, 从而对任意 $\varepsilon > 0$, 存在多项式 P 使得

$$|g(x) - w(x)P(x)| = w(x)|f(x) - P(x)| < \varepsilon, \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

参考文献

M　S.N. Mergelyan, *Weighted approximations by polynomials*, Amer. Math. Soc. Transl. (2) **10** (1958), 59-106.

2.2 Müntz 逼近定理

根据 Weierstrass 逼近定理, 闭区间 $[0,1]$ 上的连续函数 $x(t)$ 可被关于 t 的多项式一致逼近. 设 n 为正整数, 若 $x(t)$ 在 $[0,1]$ 连续, 则

$$y(s) := x(s^{\frac{1}{n}})$$

也连续. 而 $y(s)$ 能被形如 $p(s)$ 的多项式一致逼近. 取 $s = t^n$, 我们就推出 $x(t)$ 可以被 $\left\{t^{jn}\middle|j = 0, 1, ...\right\}$ 的线性组合一致逼近. 也就是说, 在 Weierstrass 逼近定理中, 并不是 t 的每个幂次都是必须的.

Serge Bernstein 提出了这样的问题: 趋于无穷的正实数列 $\{\lambda_j\}$ 满足什么条件时, $[0,1]$ 的任何连续函数都能被

$$\{1, t^{\lambda_1}, t^{\lambda_2}, ...\} \tag{2.6}$$

的线性组合一致逼近? 在 Bernstein 的一些准备工作之后, Müntz [M] 证明了以下定理:

定理 2.2. *设 $\{\lambda_j\}$ 是严格递增趋于无穷的正实数列. 则函数族2.6张成的空间在 $C := C[0,1]$ 稠密, 当且仅当*

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_j} = \infty. \tag{2.7}$$

证明. 先证明充分性, 即当2.7成立时, 函数族2.6张成的空间在 C 中稠密. 设 ℓ 为 C 上的有界线性泛函, 且在每个 t^{λ_j} 处都为 0, 即

$$\ell(t^{\lambda_j}) = 0, \qquad j = 1, 2, ... \tag{2.8}$$

设 $z \in \mathbb{C}$, $\mathrm{Re}z > 0$. 对于此 z, 函数 $t^z \in C$, 且关于 z 解析, 也就是说

$$\lim_{\delta \to 0} \frac{t^{z+\delta} - t^z}{\delta} = (\log t)t^z$$

在 C 的范数意义下存在. 定义

$$f(z) := \ell(t^z). \tag{2.9}$$

则 f 关于 z 解析. 此外由于 ℓ 有界 (不妨 $\|\ell\| \leq 1$), $|t^z| \leq 1$, $(t \in [0,1])$ 以及 $\mathrm{Re}z > 0$, 从而由2.9可得

$$|f(z)| \leq 1, \qquad \forall z, \, \mathrm{Re}z > 0. \tag{2.10}$$

注意2.8可被改写为

$$f(\lambda_j) = 0. \tag{2.11}$$

定义 Blaschke 乘积 $B_N(z)$ 如下:

$$B_N(z) := \prod_{j=1}^{N} \frac{z - \lambda_j}{z + \lambda_j}. \tag{2.12}$$

则有

$$B_N(\lambda_j) = 0, \qquad j = 1, 2, ..., N \tag{2.13a}$$
$$B_N(z) \neq 0, \qquad z \neq \lambda_j,\ j = 1, 2, ..., N \tag{2.13b}$$
$$|B_N(z)| \to 1, \qquad 当\, \mathrm{Re}z \to 0 \tag{2.13c}$$
$$|B_N(z)| \to 1, \qquad 当\, |z| \to \infty \tag{2.13d}$$

注意 B_N 的零点都是 f 的零点, 函数

$$g_N(z) := \frac{f(z)}{B_N(z)} \tag{2.14}$$

在 $\mathrm{Re}z > 0$ 解析. 我们断言

$$|g_N(z)| \leq 1, \qquad \forall\, \mathrm{Re}z > 0. \tag{2.15}$$

事实上, 结合2.10式以及2.13c,2.13d, 可以推出对任意 $\varepsilon > 0$, 存在足够小的 $\delta > 0$, 使得当 $\mathrm{Re}z = \delta$ 或者 $|z| = \dfrac{1}{\delta}$ 时, 成立 $|g_N(z)| \leq 1 + \varepsilon$. 对函数 g_N 在半圆盘

$$D_\delta := \left\{ z \in \mathbb{C} \middle| |z| < \frac{1}{\delta}, \mathrm{Re}z > \delta \right\}$$

上使用极大模原理, 立刻得到 $|g_N(z)| \leq 1 + \varepsilon$ 对 $z \in D_\delta$ 成立. 先后令 δ, ε 趋于 0, 即可得到2.15式. 假设存在正数 k 使得 $f(k) \neq 0$, 则由2.14与2.15, 我们有

$$\left| \prod_{j=1}^{N} \frac{\lambda_j + k}{\lambda_j - k} \right| \leq \frac{1}{|f(k)|}. \tag{2.16}$$

我们将2.16左端的乘积因子改写为 $1+\dfrac{2k}{\lambda_j-k}$. 由于 $\lambda_j\to\infty$, 从而这些因子当中, 除了有限个之外, 都严格大于 1. 再注意2.16左端的乘积关于 N 是一致有界的, 从而 (见 [Ah, p. 192]) 和式

$$\sum_{j=1}^{N}\frac{1}{\lambda_j-k}$$

也关于 N 一致有界 (即关于 $N\to\infty$ 的无穷级数收敛). 但是这就与2.7产生了矛盾, 此矛盾迫使 $f(k)=0$ 对任意正整数 k 都成立. 由 f 的定义式2.9 以及 ℓ 的性质2.8可知, 任何在每个 t^{λ_j} 上都为零的有界线性泛函 ℓ 也必然在 t^k 为零, $\forall k>0$. 从而由张成判据可知, 每个 t^k 在 $[0,1]$ 当中都能被函数族 $\{t^{\lambda_j}\}$ 的线性组合一致逼近. 特别地, 取 $k=1,2,3,...$, 再利用 Weierstrass 逼近定理, 容易推出函数族2.6张成的空间在 C 中稠密. 充分性得证.

再证必要性. 假设 $\{\lambda_j\}$ 不满足2.7, 即

$$\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_j}<\infty. \tag{2.17}$$

沿用 Rudin 的方法 [R, pp. 314-315], 定义函数

$$f(z):=\frac{z}{(2+z)^3}\prod_{j=1}^{\infty}\frac{\lambda_j-z}{2+\lambda_j+z}. \tag{2.18}$$

由于

$$1-\frac{\lambda_j-z}{2+\lambda_j+z}=\frac{2+2z}{2+\lambda_j+z},$$

从而由2.17可知, 无穷乘积2.18在半平面 $\mathrm{Re}z>-2$ 内闭一致收敛, 从而 $f(z)$ 在 $\mathrm{Re}z>-2$ 解析, 并且 f 的零点只有 0 以及 λ_j, $j=1,2,3,\ldots$. 而且当 z 在 $\mathrm{Re}z>-1$ 当中趋于 ∞ 时, $f(z)$ 趋于 0: 具体地, 存在常数 $A>0$, 使得

$$|f(z)|\le\frac{A}{|z|^2},\qquad\forall\,\mathrm{Re}z\ge-1. \tag{2.19}$$

特别地, f 在直线 $\mathrm{Re}z=-1$ 绝对可积.

对于 $\text{Re}z > -1$, 考虑 $f(z)$ 的 Cauchy 积分表示

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_R} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\zeta,$$

其中 $R > 1 + |z|$, C_R 是半圆盘 $\left\{\zeta \in \mathbb{C} \middle| |\zeta + 1| \le R, \text{Re}\zeta \ge -1\right\}$ 的边界, 取逆时针定向. 令 $R \to \infty$, 我们有

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-1+i\infty}^{-1-i\infty} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\zeta. \tag{2.20}$$

注意到当 $\text{Re}w > 0$ 时, 成立

$$\frac{1}{w} = \int_0^1 t^{w-1}\,\mathrm{d}t. \tag{2.21}$$

取 $w = z - \zeta$, 并将2.21代入2.20, 可得

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-1-i\infty}^{-1+i\infty} f(\zeta)\left(\int_0^1 t^{z-\zeta-1}\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}\zeta. \tag{2.22}$$

交换积分次序 (合法性由积分绝对收敛保证) 可得

$$f(z) = \int_0^1 t^z\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{-1-i\infty}^{-1+i\infty} t^{-\zeta-1} f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta\right)\mathrm{d}t. \tag{2.23}$$

令 $\zeta = -1 + iy$, 则内层积分改写成

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} t^{-iy} f(-1+iy)\,\mathrm{d}y =: m(t). \tag{2.24}$$

由于2.19, 有 $|f(-1+iy)| \le \dfrac{A}{1+y^2}$, 从而2.24当中定义的 m 为 $[0,1]$ 上的关于 t 的连续函数.

将2.24代入2.23, 我们得到

$$f(z) = \int_0^1 t^z m(t)\,\mathrm{d}t,$$

此式可被重写为

$$f(z) = \ell(t^z), \tag{2.25}$$

其中 ℓ 满足

$$\ell(g) := \int_0^1 g(t)m(t)\,\mathrm{d}t, \qquad \forall g \in C[0,1].$$

显然 ℓ 是 $C[0,1]$ 上的有界线性泛函. 由2.18与2.25,

$$\ell(t^{\lambda_j}) = f(\lambda_j) = 0, \qquad \forall j = 1,2,3,...$$

然而另一方面, 由于 f 在右半平面上的零点只有 λ_j, 从而线性泛函 ℓ 不恒为零. 因此由张成判据, 函数族2.6 张成的 $C[0,1]$ 的子空间不稠密; 事实上对于 $\lambda > 0$, t^λ 在 $\{t^{\lambda_j}\}$ 张成的空间的闭包中, 当且仅当存在 j 使得 $\lambda = \lambda_j$. 从而必要性得证. □

点评. 更一般地, 若 $\lambda_j(> 0)$ 两两不同, 但不要求趋于无穷, 则函数

$$1, \{t^{\lambda_j}\}, \qquad j = 1,2,... \tag{2.26}$$

在 $C[0,1]$ 当中张成的子空间稠密的一个充要条件是

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\lambda_j}{1+\lambda_j^2} = \infty; \tag{2.27}$$

详见 [S], [BE]. 关于 Müntz 定理及其推广的更细致的讨论, 见 [Al].

对于互异的复指数 λ_j, 且 $\mathrm{Re}\lambda_j > 0$, Szász [Sz] 证明了

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\mathrm{Re}\lambda_j}{1+|\lambda_j|^2} = \infty \tag{2.28}$$

是2.26张成 $C[0,1]$ 的稠密子空间的充分条件, 这个条件在 λ_j 为实数时退化为2.27; 而

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\mathrm{Re}\lambda_j + 1}{1+|\lambda_j|^2} = \infty \tag{2.29}$$

是其必要条件. 而文献 [H, p.132] 表明, 若 $\{\lambda_j\}$ 恰为某个右半平面上的有界解析函数的全部零点, 则2.28不成立. 因此由以上讨论, 在复指数的情况下, 2.28不是函数族 2.26张成 $C[0,1]$ 的闭子空间的必要条件这件事相当有意思 [S, pp. 165-166].

参考文献

Ah Lars V. Ahlfors, *Complex Analysis*, third edition, McGraw-Hill, 1979.

Al J.M. Almira, *Müntz type theorems. I*, Surv. Approx. Theory **3** (2007), 152-194.

BE *Peter Borwein and Tamás Erdelyi,* The full Múntz theorem in $C[0,1]$ and $L^1[0,1]$, J. London Math. Soc. (2) **54** (1996), 102-110.

H Kenneth Hoffman, *Banach Spaces of Analytic Functions*, Prentice-Hall, 1962.

M Ch. H. Múntz, *Über den Approximationssatz von Weierstrass*, Mathem. Abhandlungen H.A. Schwarz gewidmet, Berlin, 1914, pp. 303-312.

R Walter Rudin, *Real and Complex Analysis*, third edition, McGraw-Hill, 1986.

S Alan R. Siegel, *On the Müntz-Szász theorem for* $C[0,1]$, Proc. Amer. Math. Soc. **36** (1972), 161-166.

Sz Otto Szász, *Über die Approximation stetiger Funktionen durch lineare Aggregate von Potenzen*, Math. Ann. **77** (1916), 482-496.

3. 算子理论

复分析与算子理论有着千丝万缕的联系, 数学期刊" 复分析与算子理论" (*Complex analysis and operator theory*) 的存在, 恰说明了这一点. 在本章, 我们将考察复变函数论在算子理论中的应用.

3.1 Fuglede-Putnam 定理

复分析在算子理论中的一个典型应用是 Marvin Rosenblum 对 Fuglede-Putnam 定理的优雅证明. 我们回忆, 对于复 Hilbert 空间 H 中的闭算子 N, 如果 $NN^* = N^*N$, 则称 N 为正规算子; 正规算子必然是稠定算子. 更一般地, Fuglede-Putnam 定理事实上也适用于 H 上的无界正规算子; 但在有界正规算子的特殊情形 (依然是非平凡的) 仍然很有趣, 这正是本节要介绍的.

定理. *设 H 为复 Hilbert 空间, M, N 为 H 上的有界正规算子, B 为 H 上的有界算子且满足 $BN = MB$. 则成立 $BN^* = M^*B$.*

证明. (Rosenblum) 注意 $BN = MB$, 由数学归纳法容易知道对任意 $k = 0, 1, 2, ...$, 成立 $BN^k = M^kB$; 从而对任意 $\lambda \in \mathbb{C}$, 我们有

$$Be^{i\bar{\lambda}N} = B\left[\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(i\bar{\lambda}N)^k}{k!}\right] = \left[\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(i\bar{\lambda}M)^k}{k!}\right]B = e^{i\bar{\lambda}M}B.$$

因此 $B = e^{i\bar{\lambda}M}Be^{-i\bar{\lambda}N}$, 因此

$$e^{i\lambda M^*}Be^{-i\lambda N^*} = e^{i\lambda M^*}e^{i\bar{\lambda}M}Be^{-i\bar{\lambda}N}e^{-i\lambda N^*}.$$

由于 M, N 为正规算子, 从而上式改写成

$$e^{i\lambda M^*}Be^{-i\lambda N^*} = e^{i(\lambda M^*+\bar{\lambda}M)}Be^{-i(\bar{\lambda}N+\lambda N^*)}. \tag{$*$}$$

注意到 $(*)$ 式左端显然定义了一个取值于由 H 上的有界算子构成的 Banach 代数 $B(H)$ 上的整函数 $F(\lambda)$; 而右端的算子 $\lambda M^* + \overline{\lambda} M$ 与 $\overline{\lambda} N + \lambda N^*$ 显然为自伴算子, 从而算子 $e^{i(\lambda M^* + \overline{\lambda} M)}$ 与 $e^{-i(\overline{\lambda} N + \lambda N^*)}$ 是酉算子, 从而算子范数为 1. 这表明 $F(\lambda)$ 为有界整函数, 从而由 Banach 空间中的 Liouville 定理 (附录 A), $F(\lambda)$ 为常函数, 因此 $0 = F'(0) = i(M^*B - BN^*)$, 从而 $M^*B = BN^*$. □

点评.

1. 上述方法也可以证明, 若 b, m, n 为某个给定的 C^*-代数中的元素, 且 m, n 正规, 则 $bn = mb$ 蕴含 $bn^* = m^*b$.
2. 对于可能无界的正规算子 M, N, 则 Fuglede-Putnam 定理断言: 若 $BN \subseteq MB$, 则 $BN^* \subseteq M^*B$. (这里, 对于定义在 H 的子空间上的算子 S, T, $S \subseteq T$ 是指: 对任意 $x \in \operatorname{dom} S$, 都有 $x \in \operatorname{dom} T$ 且 $Sx = Tx$.) 这个结果是中有界算子的特殊情形经过涉及算子 M, N 的谱分解的一系列计算得到的. 1950 年, Bent Fuglede 证明了这个定理的 $M = N$ 的特殊情形, 回答了 von Neumann 于 1942 年所提出的问题. 次年, C.R. Putnam 将其推广到两个算子的情况. 关于以上的更多内容参见 [R].

参考文献

R M. Rosenblum, *On a theorem of Fuglede and Putnam*, J. London Math. Soc. **33** (1958), 376-377.

3.2 Toeplitz 算子

我们先回顾算子指标理论的一些基本常识 [FA, pp. 300-304]. 设 U, V 为 Banach 空间, $\mathbf{T} : U \to V$ 为有界线性映射. 如果 $\mathbf{T}$ 满足以下:

1. 算子 $\mathbf{T}$ 的零空间 $N_{\mathbf{T}}$ 为 U 的有限维子空间;
2. 像空间 $R_{\mathbf{T}}$ 在 V 中的余维数有限,

则称 $\mathbf{T}$ 是**有限指标的**. 对于这样的算子, 其**指标**定义为

$$\operatorname{ind} \mathbf{T} := \dim N_{\mathbf{T}} - \operatorname{codim} R_{\mathbf{T}} \tag{3.1}$$

称有界线性算子 $\mathbf{T}: U \to V, \mathbf{S}: V \to U$ 互为**伪逆** (pseudoinverse), 如果存在紧算子 $\mathbf{K}: U \to U$ 以及 $\mathbf{H}: V \to V$ 使得

$$\mathbf{ST} = \mathbf{I} + \mathbf{K}, \quad \mathbf{TS} = \mathbf{I} + \mathbf{H}.$$

一个基本事实 [FA, p.301] 是, 有界线性映射 $\mathbf{T}: U \to V$ 是有限指标的, 当且仅当存在伪逆.

在后面, 我们还要用到以下有用的结果 [FA, p.304].

定理. *(指标的同伦不变性)*

设 $\mathbf{T}(t): U \to V$ 是有界线性算子的单参数族, $0 \leq t \leq 1$. 若对每个 t, $\mathbf{T}(t)$ 都是有限指标的, 且 $\mathbf{T}(t)$ 在算子范数拓扑下关于 t 连续, 那么 $\operatorname{ind} \mathbf{T}(t)$ 与 t 无关. 特别地, $\operatorname{ind} \mathbf{T}(0) = \operatorname{ind} \mathbf{T}(1)$.

我们要讨论的 Toeplitz 算子定义在单位圆周 S^1 上的平方可积复值函数空间 $L^2 := L^2(S^1)$ 上. 其中 L^2 上的范数为

$$\|u\|_2 := \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |u(\theta)|^2 \, \mathrm{d}\theta \right)^{\frac{1}{2}}. \tag{3.2}$$

函数 $e^{ik\theta}$, $k \in \mathbb{Z}$ 构成 L^2 的一族完备正交基: 每个 $u \in L^2$ 可分解为

$$u(\theta) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} u_k e^{ik\theta}, \tag{3.3}$$

其中 Fourier 系数满足

$$u_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(\theta) e^{-ik\theta} \, \mathrm{d}\theta, \tag{3.4}$$

并且成立如下的 Parseval 关系:

$$\|u\|_2^2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |u_k|^2. \tag{3.5}$$

空间 L^2 当中的负指标 Fourier 系数全为零的函数之全体, 称为 Hardy 空间 H^2, 即:

$$u \in H^2 \quad \text{当且仅当} \quad \forall k < 0, u_k = 0. \tag{3.6}$$

H^2 当中的函数一定为单位圆盘上的某个解析函数的边值. 事实上,

$$\text{若 } f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{in\theta} \in H^2, \text{ 则 } \widetilde{f}(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \text{ 为单位圆盘上的解析函数.}$$

对于 $0 < r < 1$, $\widetilde{f}$ 在以原点为圆心半径为 r 的圆周上的限制, 记作 $\widetilde{f}_r(e^{i\theta})$, 则 $\widetilde{f}_r \in L^2$, 且

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |\widetilde{f}_r(e^{i\theta})|^2 \,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |\widetilde{f}(re^{i\theta})|^2 \,\mathrm{d}\theta = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n}.$$

于是

$$\lim_{r\to 1} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |\widetilde{f}_r(e^{i\theta})|^2 \,\mathrm{d}\theta = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 = \|f\|_2^2.$$

而且,

$$\|f - \widetilde{f}_r\|_2^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(\theta) - \widetilde{f}(re^{i\theta})|^2 \,\mathrm{d}\theta = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 (1-r^n)^2,$$

从而在 L^2 范数下 $\lim\limits_{r\to 1} \widetilde{f}_r = f$. 从 L^2 到 H^2 的正交投影算子 $\mathbf{P}_+$ 定义为:

$$\mathbf{P}_+ u = \sum_{k=0}^{\infty} u_k e^{ik\theta}, \qquad \text{若 } u(\theta) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} u_k e^{ik\theta}. \tag{3.7}$$

由3.5, 易知

$$\|\mathbf{P}_+\| = 1, \tag{3.8}$$

其中 $\|\,\|$ 为算子范数.

类似方法, 可以定义 L^2 的子空间 H_-(也记作 $\overline{H_0^2}$), 它由非负指标的 Fourier 系数全为零的函数构成. 类似也有投影算子 $\mathbf{P}_- : L^2 \to H_-$. H_- 当中的函数一定是单位圆盘上的某个反解析函数的边值, 即函数的复共轭是解析函数.

定义. 设 $s(\theta)$ 为单位圆周 S^1 上的复值连续函数. 关于函数 s 的 *Toeplitz* 算子 $\mathbf{T}_s : H^2 \to H^2$ 定义为:

$$\mathbf{T}_s u := \mathbf{P}_+(su), \tag{3.9}$$

称函数 s 为算子 $\mathbf{T}_s$ 的符号.

显然, $\mathbf{T}_s$ 关于其符号是线性的, 即 $\mathbf{T}_{s+r} = \mathbf{T}_s + \mathbf{T}_r$.

当我们用 Fourier 系数来表示 H^2 当中的函数时, Toeplitz 算子则为某种离散的卷

积:

$$(\mathbf{T}_s u)_k = \sum_{j=0}^{\infty} s_{k-j} u_j, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots \tag{3.9'}$$

其中 s_n, u_n 分别为 s, u 的第 n 个 Fourier 系数. 3.2中的半无限矩阵在副对角线 $k - j =$ 常数 上的所有矩阵元都相等. 这样的矩阵叫做 Toeplitz 矩阵, 它在偏微分算子, 统计力学的离散化当中自然会出现.

我们的目标是探讨算子 $\mathbf{T}_s$ 的各种性质, 其中 s 为 S^1 上的复值连续函数. 对这样的函数, 我们有以下结果.

定理 3.1. *设 s 为 S^1 上的复值连续函数, $\mathbf{T}_s$ 为相应的 Toeplitz 算子. 则 $\mathbf{T}_s : H^2 \to H^2$ 为有界算子, 并且*

$$\|\mathbf{T}_s\| \le \max_{S^1} |s(\theta)|. \tag{3.10}$$

证明. 将函数乘以 s, 这个算子显然是有界的, 且其范数被 $|s|$ 在 S^1 上的最大值所控制; 而由3.8, $\mathbf{P}_+$ 是有界算子, 且范数为 1. 由于 $\mathbf{T}_s$ 为上述两个算子的复合, 从而3.10得证. □

若符号 s 在 S^1 处处非零, 则有更多可以讨论的. 对于 $\mathbb{C}$ 上的参数闭曲线 $s : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$, $s(0) = s(2\pi)$, 回顾曲线 s 绕原点的**环绕数** $W(s)$: 直观地讲, $W(s)$ 为当参数 θ 从 0 变化到 2π 时 $s(\theta)$ 绕原点转过的圈数 (辐角的变化, 除以 2π). 当 $s(\theta)$ 连续可微时, 注意

$$\log s(\theta)\big|_0^t = \int_0^t \frac{s'(\theta)}{s(\theta)}\,\mathrm{d}\theta,$$

从而当 s 连续可微时, 我们用下式作为环绕数 $W(\theta)$ 的定义:

$$W(s) := \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{s'(\theta)}{s(\theta)}\,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2\pi}\,\mathrm{Im}\int_0^{2\pi} \frac{s'(\theta)}{s(\theta)}\,\mathrm{d}\theta. \tag{3.11}$$

引理 3.2. *对于 S^1 上的处处非零的复值连续函数 s, 以下成立:*

(i) $W(s)$ 连续依赖于 s.

(ii) $W(s) \in \mathbb{Z}$.

(iii) 当 s(在 S^1 的处处非零连续函数类当中) 连续变化时, $W(s)$ 不变.

(iv) $W(s) = 0$ 当且仅当 $\log s$ 是单值的, 即存在 S^1 上的连续函数 ℓ 使得 $s(\theta) = e^{\ell(\theta)}$, $0 \le \theta \le 2\pi$.

证明. (i) 这由 $W(s)$ 的几何定义可知显然.

(ii) 由于连续可微函数在 S^1 的连续函数之中稠密 (一致收敛意义下), 从而, 又由于 (i), 我们不妨假定 s 是连续可微的, 即 $W(s)$ 的值由3.11所确定. 记

$$\varphi(t) := \int_0^t \frac{s'(\theta)}{s(\theta)}\,\mathrm{d}\theta, \quad 0 \le t \le 2\pi,$$

则有

$$\varphi(0) = 0, \tag{3.12}$$

$$\varphi(2\pi) = 2\pi i W(s), \tag{3.13}$$

以及

$$\varphi'(t) = \frac{s'(t)}{s(t)}. \tag{3.14}$$

记

$$\Phi(t) := s(t)e^{-\varphi(t)}. \tag{3.15}$$

则由3.14, 对任意 $t \in [0, 2\pi]$,

$$\Phi'(t) = s'(t)e^{-\varphi(t)} + s(t)\left[-\frac{s'(t)}{s(t)}\right]e^{-\varphi(t)} = 0,$$

从而 $\Phi(t)$ 为 $[0, 2\pi]$ 上的常函数. 从而由3.12与3.15可知

$$s(0) = s(0)e^{-\varphi(0)} = \Phi(0) = \Phi(2\pi) = s(2\pi)e^{-\varphi(2\pi)},$$

$$e^{\varphi(2\pi)} = \frac{s(2\pi)}{s(0)} = 1.$$

从而 $\varphi(2\pi)$ 为 $2\pi i$ 的整数倍, 因此由3.13可知 $W(s)$ 为整数.

(iii) 这是 (i) 与 (ii) 的直接推论.

(iv) 由于连续可微函数在 S^1 的连续函数之中稠密, 从而只需证明 s 为连续可微函数的情形. 若 $s = e^\ell$, 则

$$W(s) = \int_0^{2\pi} \frac{s'(\theta)}{s(\theta)}\,\mathrm{d}\theta = \int_0^{2\pi} \ell'(\theta)\,\mathrm{d}\theta = \ell(2\pi) - \ell(0) = 0,$$

从而 s 的环绕数为 0. 另一方面, 若 $W(s) = 0$, 则令

$$\ell(t) := \log s(0) + \int_0^t \frac{s'(\theta)}{s(\theta)}\,\mathrm{d}\theta.$$

显然 ℓ 在 $\mathbb{R}$ 连续; 由于 $W(s) = 0$, 从而 $\ell(2\pi) = \ell(0)$, 也就是说 ℓ 为 S^1 上的连续函数. 最后, 于之前计算 Φ 的方法类似, 可知

$$s(t)e^{-\ell(t)} = 1, \quad \forall\, 0 \le t \le 2\pi.$$

因此在 S^1 中成立 $s = e^\ell$, 得证. □

为讨论 Toeplitz 算子 $\mathbf{T}_s$ 的性质, 我们还需要下述结果:

引理 3.3. 若 $s : S^1 \to \mathbb{C}$ 连续, 则

$$\mathbf{C} := \mathbf{P}_+ s - s \tag{3.16}$$

为从 H^2 到 L^2 的紧算子.

证明. 由于 s 连续, 从而将 s 用三角多项式一致逼近, 即对任意 $\varepsilon > 0$, 取三角多项式 s_ε 使得

$$|s(\theta) - s_\varepsilon(\theta)| < \varepsilon, \quad \forall\, \theta. \tag{3.17}$$

则算子 $\mathbf{C}_\varepsilon := \mathbf{P}_+ s_\varepsilon - s_\varepsilon$ 将 H^2 当中形如

$$u(\theta) = \sum_{k=M}^{\infty} u_k e^{ik\theta}$$

的函数都映为零, 其中 $M >$ 足够大. 这些函数 $u(\theta)$ 构成了 H^2 的余维数为 M 的线性子空间, 从而 $\mathbf{C}_\varepsilon$ 的像空间维数不超过 M. 特别地, 每个 $\mathbf{C}_\varepsilon$ 都为紧算子. 又由3.10于3.17可知, 当 $\mathbf{C}_\varepsilon$ 在算子范数下趋于 $\mathbf{C}$. 因为紧算子的极限是紧算子, 从而3.16为紧算子. □

我们还需要下述结果.

引理 3.4. 在 S^1 上的复值连续可微函数类当中, 一个函数能连续形变为另一个, 当且仅当它们的环绕数相等.

证明. 环绕数的形变不变性是引理 3.2 的 (iii). 为证明相反方向, 首先考虑 s 的环绕数为 0 的情况. 此时 $\log s(\theta)$ 是单值函数. 用 $t\log s(\theta)$ 将其连续形变为 0. 再两边取指数得

$$s(\theta,t) := e^{t\log s(\theta)}, \qquad 1\ge\theta\ge 0$$

为 $s(\theta)$ 到常函数 1 的一个形变.

设 s 的环绕数为 N, 将 s 写成

$$s(\theta) = e^{iN\theta}(e^{-iN\theta}s(\theta)).$$

易知 $e^{-iN\theta}s(\theta)$ 的环绕数为 0, 从而可形变为常函数 1. 因此 $s(\theta)$ 可形变为 $e^{iN\theta}$, 其中 $N = W(s)$. $\square$

现在我们能证明以下重要结果了.

定理 3.5. 设 $s: S^1\to\mathbb{C}$ 为处处非零的连续函数, 则相应的 *Toeplitz* 算子 $\mathbf{T}_s$ 是有限指标的, 且

$$\operatorname{ind}\mathbf{T}_s = -W(s). \tag{3.18}$$

证明. 为证明 $\mathbf{T}_s$ 是有限指标的, 只需证明 $\mathbf{T}_s$ 存在伪逆; 我们断言 $\mathbf{T}_{s^{-1}}$ 为 $\mathbf{T}_s$ 的一个伪逆. 事实上, 我们有

$$\mathbf{T}_{s^{-1}}\mathbf{T}_s = \mathbf{P}_+s^{-1}\mathbf{P}_+s = \mathbf{P}_+s^{-1}(s+\mathbf{P}_+s-s) = \mathbf{I}+\mathbf{P}_+s^{-1}\mathbf{C},$$

其中 $\mathbf{C}$ 的定义见3.16. 由引理 3.3, $\mathbf{C}$ 为紧算子; 因此 $\mathbf{T}_{s^{-1}}\mathbf{T}_s$ 与恒等算子 $\mathbf{I}$ 相差一个紧算子. 又由于 s 与 s^{-1} 有相同的地位, 从而易知 $\mathbf{T}_s$ 与 $\mathbf{T}_{s^{-1}}$ 互为伪逆.

欲证3.18, 首先考虑 $s(\theta) = e^{iN\theta}$ 的情形. 当 N 为非负整数时, 以 $e^{iN\theta}$ 为符号的 Toeplitz 算子 $\mathbf{T}_N$ 刚好时乘以 $e^{iN\theta}$. 显然, 此时 Toeplitz 的零空间是平凡的; 且像空间当中的函数形如 $\displaystyle\sum_{k=N}^{\infty}u_ke^{ik\theta}$, 故余维数为 N. 因此,

$$\operatorname{ind}\mathbf{T}_N = -N. \tag{3.19}$$

当 $N<0$ 时, 算子 $\mathbf{T}_N=\mathbf{P}_+e^{iN\theta}$ 映满 H^2; 其零空间当中的函数形如 $1,e^{i\theta},...,$ 以及 $e^{i(-N-1)\theta}$ 的线性组合, 从而其零空间的维数为 $-N$. 因此当 $N<0$ 时3.19也成立.

我们在引理 3.4 当中已经证明, 任意的环绕数为 N 的处处非零的连续函数 $s(\theta)$ 可形变为 $e^{iN\theta}$; 即, 存在关于 (θ,t) 连续的参数族 $s(\theta,t)$ 使得

$$s(\theta,t)\neq 0,\quad s(\theta,0)=s(\theta),\quad \text{并且 } s(\theta,1)=e^{iN\theta}.$$

由于环绕数 $W(s)$ 在连续形变下保持不变,

$$W(s)=W(s(0))=W(s(1))=N. \tag{3.20}$$

由3.10可得

$$\|\mathbf{T}_{s(t)}-\mathbf{T}_{s(t')}\|=\|\mathbf{T}_{s(t)-s(t')}\|\leq\max_{t,t'\in S^1}|s(t)-s(t')|.$$

由于 $s(\theta,t)$ 连续依赖于 t, 从而在算子范数拓扑下, $\mathbf{T}_{s(t)}$ 也关于 t 连续. 运用指标的同伦不变性, 我们得到

$$\operatorname{ind}\mathbf{T}_s=\operatorname{ind}\mathbf{T}_N.$$

再结合3.19与3.20, 可得3.18, 完成证明.

□

在定理 3.5 的证明当中, 我们知道对于特殊函数 $s_N:=e^{iN\theta}$, $\mathbf{T}_N$ 的零空间的维数为 0 或 N, 具体取决于 N 的正负号. 这其实对所有的函数 s 都成立.

定理 3.6. *设 $s:S^1\to\mathbb{C}$ 连续且处处非零, $\mathbf{T}_s:H^2\to H^2$ 为相应的 Toeplitz 算子.*

(i) 若 $W(s)=0$, 则 $\mathbf{T}_s$ 可逆.

(ii) 若 $W(s)>0$, 则 $\mathbf{T}_s$ 为单射, 且像空间的余维数为 $W(s)$.

(iii) 若 $W(s)<0$, 则 $\mathbf{T}_s$ 为满射, 且零空间的维数为 $-W(s)$.

证明. (1) 由引理 3.4, 当 $W(s)=0$ 时, 可以取 $\log s$ 的一个单值分支, 即存在连续函数 $\ell:S^1\to\mathbb{C}$ 使得

$$s(\theta)=\exp\ell(\theta),\qquad \ell(\theta)=\log s(\theta).$$

将 ℓ 分解为解析部分与反解析部分:

$$\ell=\ell_++\ell_-,\qquad \ell_+\in H^2,\quad \ell_-\in H_-.$$

我们首先假设 s 是 C^∞ 光滑函数, 则 ℓ 也光滑, 进而 $\ell_\pm$ 也都光滑. 取指数, 得到

$$s = e^\ell = e^{\ell_+ + \ell_-} = e^{\ell_+} e^{\ell_-} =: s_+ s_-. \tag{3.21}$$

并且函数 s_+ 是圆盘上某解析函数的边值, 而 s_- 为某反解析函数的边值. 他们在 S^1 上都处处非零. 我们将说明如何用 s_+ 与 s_- 来表示算子 $\mathbf{T}_s$ 的逆. 若 $u, f \in H^2$ 使得

$$\mathbf{T}_s u = \mathbf{P}_+ s u = f,$$

则存在 $g_- \in H_-$ 使得

$$su = f + g_-.$$

将 s 写成 $s_+ s_-$, 再两边除以 s_-, 得到

$$s_+ u = s_-^{-1} f + s_-^{-1} g_-. \tag{3.22}$$

显然 $s_+ u \in H^2$; 而且由于 $s_-^{-1} = \exp(-\ell_-)$, 从而 $s_-^{-1} g_- \in H_-$. 因此, 3.22式两边再作用 $\mathbf{P}_+$, 可得

$$s_+ u = \mathbf{P}_+ s_-^{-1} f,$$

因此

$$u = s_+^{-1} \mathbf{P}_+ s_-^{-1} f. \tag{3.23}$$

这表明 $s_+^{-1} \mathbf{P}_+ s_-^{-1}$ 是算子 $\mathbf{T}_s$ 的逆.

现在, 考虑 s 在 S^1 仅连续的情况. 则对于任意足够小的 $\varepsilon > 0$, 用光滑函数 r 来一致逼近 s:

$$\max_{S^1} |s(\theta) - r(\theta)| < \varepsilon. \tag{3.24}$$

由于 r 充分小, 从而可以要求

$$\max_{S^1} |r^{-1}(\theta) s(\theta) - 1| < 1. \tag{3.25}$$

我们由此不等式可以得出如下两个结论.

首先, 由3.25与3.10可得

$$\|\mathbf{T}_{r^{-1}s} - \mathbf{I}\| < 1. \tag{3.26}$$

这表明算子 $\mathbf{T}_{r^{-1}s}$ 可逆. 事实上, 简记 $\mathbf{T} := \mathbf{T}_{r^{-1}s}$, 则 $\mathbf{T} = \mathbf{I} - (\mathbf{I} - \mathbf{T})$. 由3.26, 算子级

数 $\sum_{n=0}^{\infty}(\mathbf{I}-\mathbf{T})^n$ 在算子范数下收敛, 且其极限为 $\mathbf{T}^{-1}$; 详见 [FA,p. 194].

其次, 3.25还说明 r 与 s 的环绕数相等. 这是因为, 3.25表明曲线 $\frac{s(\theta)}{r(\theta)}$ 包含于以 1 为圆心半径为 1 的圆盘中, 从而显然不会环绕原点; 从而 $W(r^{-1}s)=0$. 而当 s 光滑时, 我们有

$$W(r^{-1}s)=\frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}\frac{(s/r)'}{s/r}\,\mathrm{d}\theta=\frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}\left(\frac{s'}{s}-\frac{r'}{r}\right)\mathrm{d}\theta=W(s)-W(r).$$

由引理 3.2, 上式在 s 仅仅连续的情况下仍然保持成立.

因此, 由于我们假定 $W(s)=0$, 从而 $W(r)=0$. 由于 r 光滑, 我们可以像3.21那样将 r 分解为 $r=r_+r_-$, 其中 r_+ 为单位圆盘上的某个处处非零的解析函数的边值, 而 r_- 为单位圆盘上的某个处处非零的反解析函数的边值. 因此由辐角原理, $W(r_+)=0=W(r_-)$.

我们断言, 算子 $\mathbf{T}_{r^{-1}s}$ 成立如下分解:

$$\mathbf{T}_{r^{-1}s}=\mathbf{T}_{r_-^{-1}sr_+^{-1}}=\mathbf{P}_+r_-^{-1}sr_+^{-1}=\mathbf{P}_+r_-^{-1}\mathbf{P}_+s\mathbf{P}_+r_+^{-1}=\mathbf{T}_{r_-^{-1}}\mathbf{T}_s\mathbf{T}_{r_+^{-1}}.$$

这是因为, r_+^{-1} 左侧的那个 $\mathbf{P}_+$ 的作用效果其实相当于恒等算子; 而 s 的反解析部分在最左边的 $\mathbf{P}_+r_-^{-1}$ 的作用下为零. 正如前面的讨论, 我们已经知道 $\mathbf{T}_{r^{-1}s}$ 可逆; 算子 $\mathbf{T}_{r_-^{-1}}$ 与 $\mathbf{T}_{r_+^{-1}}$ 也可逆, 这是因为 r_+ 与 r_- 的环绕数都为 0. 因此算子 $\mathbf{T}_s=\mathbf{T}_{r_-^{-1}}^{-1}\mathbf{T}_{r^{-1}s}\mathbf{T}_{r_+^{-1}}^{-1}$ 也可逆. 这就证明了 (i).

下证 (ii) 和 (iii). 记 s 的环绕数为 W. 则 $se^{-iW\theta}$ 的环绕数为 0; 因此由 (i) 可知, 下述映射 $u\mapsto f$

$$\mathbf{P}_+se^{-iW\theta}u=f$$

是可逆的. 也就是说, $\mathbf{T}_s:e^{-iW\theta}H^2\to H^2$ 是双射. 从而 (ii) 和 (iii) 得证. □

点评.

1. 定理 3.6 的上述证明由 Gohberg 给出. 他还指出, 对于分段连续函数 s, 假设存在连续函数 r 使得3.25式成立 (但要将该不等式右边的 1 换成某个小于 1 的常数), 则该定理仍成立.

2. 更一般地, Toeplitz 算子 $\mathbf{T}_s$ 也可通过3.9式定义在 $s\in L^\infty$ 当中. 这种算子的理论, 以及更多的推广在 [BS] 中有详细讨论.

3. Toeplitz 算子理论的一种重要的推广是把 S^1 换成 $\mathbb{R}$, 这是 Wiener 和 Hopf [WH] 的工作, 见 [PW,pp.49-58]; 关于此理论的更前沿的进展, 见 [K]. Toeplitz 算子与 Wiener-Hopf 算子的理论是平行发展的, 直到 Rosenblum [R] 注意到这两类算子是酉等价的. 事实上, Devinatz [D] 证明了从单位圆盘到上半平面的共性映射给出了 Toeplitz 算子与 Wiener-Hopf 算子的 Fourier 变换的酉等价.

4. Krein 与 Gohberg [GK] 将定理 3.5 推广到 $n\times n$ 矩阵值连续函数 $\mathbf{S}(\theta)$ 的情形, 其中 $\mathbf{S}(\theta)$ 通过矩阵乘法作用在 n 维向量值函数 $u(\theta)$ 上. 固定 n, 记 S^1 当中的向量值函数构成的 L^2 空间当中的负指标 Fourier 系数全为 0 的函数之全体为 H^2, $\mathbf{P}_+$ 为 L^2 到 H^2 的正交投影. 于是 $\mathbf{T_S} := \mathbf{P}_+\mathbf{S}$ 为 H^2 到 H^2 的有界算子. Krein 和 Gohberg 证明了若 $\mathbf{S}(\theta)$ 在 S^1 处处可逆, 则 $\mathbf{T}_{\mathbf{S}^{-1}}$ 是 $\mathbf{T_S}$ 的一个伪逆; 在 S^1 当中, 行列式 $\det\mathbf{S}(\theta)\neq 0$; 并且成立 $\operatorname{ind}\mathbf{T_S} = -W(\det\mathbf{S})$. 另一方面, 对于这种矩阵情形, 定理 3.6 不再成立. 不过, 当 $\mathbf{S}(\theta)$ 可被分解为 $\mathbf{S}=\mathbf{S}_-\mathbf{S}_+$ 使得 $\mathbf{S}_-$ 反解析, $\mathbf{S}_+$ 解析, 并且 $\mathbf{S}_-,\mathbf{S}_+$ 在 S^1 都处处可逆时, 成立 $\mathbf{T_S}^{-1}=\mathbf{S}_+^{-1}\mathbf{P}_+\mathbf{S}_-^{-1}$. 不幸的是, 即使这样的分解存在, 它也不能用取对数来表示. 对满足 $W(\det\mathbf{S})=0$ 的 C^∞ 矩阵值函数构成的空间的某稠密开集当中的函数, 有一种通过求解非线性偏微分方程组的 Dirichlet 问题来得到上述分解的方法, 该方法由 Lax 给出 [L].

参考文献

BS Albert Böttcher and Bernd Silbermann (with Alexei Karlovich), *Analysis of Toeplitz Operators*, second edition, Springer-Verlag, 2006.

D Allen Devinatz, *On Wiener-Hopf operators, Functional Analysis*, Thompson Book Co.,Washington, D.C., 1967, pp. 81-118.

GK I.C. Gohberg and M.G. Krein, *Systems of integral equations on a half-line with kernels depending on the difference of arguments*, Amer. Math. Soc. Transl. (2) **14** (1960), 217-287.

K M.G. Krein, *Integral equations on half line with kernel depending upon the difference of the arguments*, Amer. Math. Soc. Transl. (2) **22** (1962), 163-288.

L Peter D. Lax, *On the factorization of matrix-valued functions*, Comm. Pure Appl. Math. **29** (1976), 683-688.

PW Raymond E.A.C. Paley and Norbert Wiener, *Fourier Transforms in the Complex Domain*, Amer. Math. Soc., 1934.

R Marvin Rosenblum, *A concrete spectral theory for self-adjoint Toeplitz operators*, Amer. J. Math. **87** (1965), 709-718.

WH Norbert Wiener and Eberhard Hopf, *Über eine Klasse singulären Integral-gleichungen*, Sitzber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin Phys.-Math. Kl. **30/32** (1931), 696-706.

3.3 Beurling 定理

设 $\mathcal{H}$ 是以 $\{e_n\}_{n=0}^{\infty}$ 为完备正交基的可分 Hilbert 空间. 则每个 $x \in \mathcal{H}$ 可唯一表示为

$$x = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e_n, \tag{3.27}$$

其中系数 $a_n \in \mathbb{C}$ 满足

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 < \infty; \tag{3.28}$$

并且任何满足3.27与3.28的复数列 $\{a_n\}$ 都定义了 $\mathcal{H}$ 中的一个元素. 考虑 $\mathcal{H}$ 上的右平移算子, 即线性算子 $\mathbf{T}$ 将基向量 e_n 映为 e_{n+1}, $(\forall n \geq 0)$. 显然 $\mathbf{T}$ 是 $\mathcal{H}$ 的等距算子, 从而 $\|\mathcal{T}\| = 1$. 如何刻画 $\mathcal{H}$ 的 $\mathbf{T}$-不变子空间 (即 $\mathcal{H}$ 的闭子空间 $\mathcal{N}$, 使得 $\mathbf{T}(\mathcal{N}) \subseteq \mathcal{N}$) 呢?

这个问题由 Aren Beurling 在其开创性的论文 [B] 中提出并解决. Beurling 解决该问题的关键是把 $\mathcal{H}$ 中的元素表示为单位圆盘上的解析函数. 我们考虑由如下的解析函数

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \qquad |z| < 1 \tag{3.29}$$

构成的空间 H, 其中 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 < \infty$. 则对任意 $0 \leq r < 1$,

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 \,\mathrm{d}\theta = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n}.$$

定义 H 中的范数为

$$\|f\|_2^2 := \sup_{0 \leq r < 1} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 \,\mathrm{d}\theta = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2.$$

对于 $f \in H$ 以及 $0 < r < 1$, 由3.29可知 $f_r(e^{i\theta}) := f(re^{i\theta})$ 为 $L^2(S^1)$ 当中的函数. 而且

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta}) - f(se^{i\theta})|^2 \,\mathrm{d}\theta = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 (r^n - s^n)^2,$$

这说明, 当 $r \to 1$ 时, f_r 在 $L^2(S^1)$ 当中收敛, 其极限为 $f(z)$ 在单位圆周上的边值函数

$$f(e^{i\theta}) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{in\theta}. \tag{3.30}$$

由 Riesz-Fischer 定理, 上式右边的级数在 L^2 意义下收敛, 且其范数恰为 f 在 H 中的范数:

$$\|f\|_2^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(e^{i\theta})|^2 \,\mathrm{d}\theta. \tag{3.31}$$

也就是说, 空间 H 中的函数最初是定义在单位圆盘中的, 但通过在单位圆周的边值, H 能等距嵌入到 $L^2(S^1)$ 中. 而 H 具有 Hilbert 空间结构, 其内积为

$$(f,g) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{i\theta})\overline{g(e^{i\theta})}\,\mathrm{d}\theta.$$

当然, H 当中的函数的边值, 作为 $L^2(S^1)$ 当中的函数, 在 S^1 上仅仅是几乎处处有定义. 从而当我们谈论这样的两个函数在 L^2 意义下相等时, 指的是在 S^1 几乎处处相等.

要搞清的一点是, H 中的函数在 S^1 上的边值之全体, 正是我们在上一节所讨论的 H^2. 为书写简便, 在本节我们简记为 H, H 中的元素根据语境被认为是圆盘上的函数或者圆周 S^1 上的函数.

对于3.27中的每个 $x \in \mathcal{H}$, 我们将 x 与 H 中的函数 f 通过3.29式联系起来, 这给出了 $\mathcal{H}$ 与 H 的一个等距同构. 在此同构下, $\mathcal{H}$ 中的右平移算子对应于 H 中乘以函数 z.

记单位圆盘 Δ 中的有界解析函数之全体构成的代数为 $\mathcal{B}$, 并赋以如下的上确界范数

$$\|b\|_\infty := \sup_{\Delta} |b(z)|.$$

显然, 对于 $b \in \mathcal{B}$, 成立

$$\sup_{0\le r<1}\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |b(re^{i\theta})|^2\,\mathrm{d}\theta\right)^{\frac{1}{2}} \le \|b\|_\infty < \infty;$$

因此 $\mathcal{B} \subseteq H$, 从而每个 $b \in \mathcal{B}$ 在单位圆周上都存在 L^2 边值函数. 由于当 $r \to 1$ 时, 在 L^2 意义下有 $b(re^{i\theta}) \to b(e^{i\theta})$, 从而存在序列 $r_n \to 1$, 使得 $b(r_n e^{i\theta}) \to b(e^{i\theta})$ 几乎处处成立; 从而 b 的边值函数是本性有界的, 且 $\|b\|_\infty$ 是它的一个本性上界.

另一方面, 我们有以下结果:

定理 3.7. 若函数 $f \in H$ 的边值是本性有界的, 则 $f \in \mathcal{B}$.

证明. 设函数 f 形如3.29, 且其边值函数 $f(e^{i\theta})$ 形如3.30. 则对任意 $0 \le r < 1$, 成立

$$f(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{it})P_r(\theta - t)\,\mathrm{d}t, \tag{3.32}$$

其中 P_r 为众所周知的 Poisson 核, 定义为

$$P_r(\theta) := \operatorname{Re}\frac{1+re^{i\theta}}{1-re^{i\theta}} = \frac{1-r^2}{1-2r\cos\theta + r^2},$$

且满足

$$P_r(\theta) > 0, \quad \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_r(\theta)\,\mathrm{d}\theta = 1, \tag{3.33}$$

以及更一般地,

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_r(\theta)e^{in\theta}\,\mathrm{d}\theta = r^{|n|}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2\cdots \tag{3.34}$$

事实上, 3.32式可由3.30与3.34直接得到. 现在, 由3.32与3.33可知, 若 $|f(e^{it})| \le M$ 在 S^1 几乎处处成立, 则对任意 $z \in \Delta$ 都有 $|f(z)| \le M$. □

注记. 一般地, 单位圆盘 Δ 当中的径向边值本性有界的函数未必在 $\mathcal{B}$ 当中. 一个简单的反例是 $f(z) = \exp\dfrac{1+z}{1-z}$.

对于 $b \in \mathcal{B}$, 乘以函数 b 是 H 上的有界算子. 若记 $B(f) := bf$, 我们有

$$\|B\| = \sup_f \|B(f)\|_2 = \sup_f \|bf\|_2 \le \sup_f \|b\|_\infty \|f\|_2 = \|b\|_\infty,$$

其中上确界取遍所有满足 $\|f\|_2 \le 1$ 的 f. 事实上, 不难验证 $\|B\| = \|b\|_\infty$.

Beurling 对右平移算子的不变子空间问题的解答, 可以总结为以下:

定理 3.8. 设 N 为 H 的闭子空间, 且 $zH \subseteq H$(其中函数 $z \in H$). 那么 N 必形如

$$N = pH,$$

其中 $p \in \mathcal{B}$, 并且 $|p(e^{i\theta})| \equiv 1$. 且 p 在相差模长为 1 的复常数倍的意义下唯一.

证明. 首先断言 zN 是 N 的真子空间. 若不然, 则任意 $f \in N$ 都可被写成

$$f = zf_1 = z^2 f_2 = \cdots .$$

注意这些函数也可被视为定义在单位圆盘 Δ 上的解析函数, 从而上式表明 f 在原点处的零点阶数为无穷, 这是不可能的.

由3.31, 乘以 z 显然是 H 上的等距算子, 从而 zN 为 N 的真闭子空间. 考虑 zN 在 N 中的正交补, 记为 M, 即

$$N = M \oplus zN. \tag{3.35}$$

由于乘以 z 保持正交性, 从而将上式右边的 N 替换成 N 的正交分解, 易知对任意正整数 k 都成立

$$N = M \oplus zM \oplus z^2 M \oplus \cdots \oplus z^{k-1} M \oplus z^k N. \tag{3.36}$$

令 $k \to \infty$, 就得到 $N \supseteq \bigoplus_{k=0}^{\infty} z^k M$. 我们断言该包含关系实际上取等号. 事实上, 若不然, 则存在 $0 \neq g \in N$, 使得 g 与每个 $z^k M$ 都正交; 而由3.36, 这样的 g 必然属于每一个 $z^k N$ 当中, 从而 g(视为单位圆盘 Δ 上的解析函数) 在原点处的零点阶数为无穷, 不可能的. 因此, 我们得到了

$$N = \bigoplus_{k=0}^{\infty} z^k M. \tag{3.37}$$

接下来我们研究空间 M. 任取 $m \in M$, 由3.36可知, m 与 $z^k N$ 正交 $(\forall k \geq 1)$; 特别地, m 与 $z^k m$ 正交, 即

$$(z^k m, m) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i\theta k} |m(e^{i\theta})|^2 \, \mathrm{d}\theta = 0, \quad k = 1, 2, ... \tag{3.38}$$

对上式取复共轭, 可知上式对 $k = -1, -2, ...$ 也成立. 因此, 函数 $|m(e^{i\theta})|^2$ 的 Fourier 系数除了第 0 个之外都为零, 这表明 $|m(e^{i\theta})|$ 为常函数.

我们断言 M 的维数是 1. 若 p, m 为 M 中的两个 (非零) 函数使得对任意 $\alpha \in \mathbb{C}$ 都有 $m + \alpha p \in M$; 则有之前所证,

$$|m + \alpha p|^2 = (m + \alpha p)(\overline{m} + \overline{\alpha p}) = |m|^2 + |\alpha|^2 |p|^2 + 2 \operatorname{Re} \alpha p \overline{m}$$

为常函数. 又因为 α 为任意复常数, 从而易知 $p\overline{m}$ 为常函数. 再除以 $|m|^2 = m\overline{m}$, 可知 $\dfrac{p}{m}$ 为常数, 也就是说 p 与 m 线性相关.

于是, 可取 M 中的函数 p, 使得 $|p(e^{i\theta})| = 1$; 而 M 中的所有函数都是 p 的常数倍. 由3.37可知任意 $f \in N$ 都可被分解为

$$f = a_0 p + z a_1 p + \cdots = p(a_0 + z a_1 + \cdots) =: pg. \tag{3.39}$$

由于 $p(e^{i\theta}) = 1$, 从而 $|f(e^{i\theta})| = |g(e^{i\theta})|$; 因此由 $f \in H$ 可知 $g \in H$. 从而3.39表明 $N = pH$.

最后我们证明 p 的唯一性. 若函数 $p, q \in \mathcal{B}$ 使得

$$pH = qH \tag{3.40}$$

并且

$$|p(e^{i\theta})| = 1 = |q(e^{i\theta})|. \tag{3.41}$$

则由3.40可知存在 $f, g \in H$ 使得 $p = qf$, $q = pg$. 于是由3.41,

$$\begin{aligned} 1 &= |p(e^{i\theta})| = |q(e^{i\theta})f(e^{i\theta})| = |q(e^{i\theta})||f(e^{i\theta})| = |f(e^{i\theta})| \\ 1 &= |q(e^{i\theta})| = |p(e^{i\theta})g(e^{i\theta})| = |p(e^{i\theta})||g(e^{i\theta})| = |g(e^{i\theta})|. \end{aligned}$$

由定理3.7与极大模原理,

$$|f(0)| \le 1, \qquad |g(0)| \le 1. \tag{3.42}$$

而且 $p = qf = (pg)f = p(gf)$, 从而 $1 = gf$. 特别地, $1 = g(0)f(0)$. 再次使用极大模原理, 3.42迫使 $|f(0)| = 1 = |g(0)|$, 于是 f, g 都是模长为 1 的常数. □

上述优雅的证明由 Paul Halmos [Hal] 给出.

满足 $|p(e^{i\theta})| = 1$ 在单位圆周几乎处处成立的函数 $p \in \mathcal{B}$ 称为**内函数** (inner function). 以下是定理 3.8 的一个中间推论:

定理 3.9. *设 N 为 H 的非平凡闭子空间, 并且对任意 $b \in \mathcal{B}$, $bN \subseteq N$. 则存在内函数 $p \in \mathcal{B}$ 使得 $N = pH$, 并且 p 在相差模长为 1 的常数倍意义下唯一.*

当然, H 的形如 pH 的子空间都是关于乘以 $\mathcal{B}$ 中函数不变的, 这是因为 $bpH = pbH \subseteq pH$.

定理 3.8 将导出代数 $\mathcal{B}$ 的整除性理论. 我们只关心其在后文能用到的部分. 我们的第一个结果是被内函数整除的刻画.

定理 3.10. 内函数 p 在 $\mathcal{B}$ 中整除函数 $b \in \mathcal{B}$, 当且仅当 $pH \supseteq bH$.

证明. 显然, 若存在 $c \in \mathcal{B}$ 使得 $b = pc$, 则 $bH = pcH \subseteq pH$. 另一方面, 若 $bH \subseteq pH$, 则存在 $f \in H$ 使得 $b = pf$. 从而 $\frac{b}{p} \in H$. 但是由于 b 有界, 在在边界处 $|p| = 1$, 从而 $\frac{b}{p}$ 在圆周上有界. 因此由定理 3.7, $\frac{b}{p} \in \mathcal{B}$. □

定义. 设 $a, b \in \mathcal{B}$, 记

$$N := \overline{aH + bH} \tag{3.43}$$

为 $aH + bH$ 的闭包. 由定理 3.8 可知存在内函数 p 使得 $N = pH$. 称此 p 为 a, b 的最大公因子.

下述结果诠释了此定义:

定理 3.11. 设 $a, b \in \mathcal{B}$, q 为内函数, 且整除 a, b. 则 q 整除 a, b 的最大公因子 p.

证明. 由定理 3.10, 若 q 整除 a, 则 $aH \subseteq qH$; 同理 $bH \subseteq qH$, 从而 $aH + bH \subseteq qH$. 因为 qH 是闭的, 从而 $\overline{aH + bH} \subseteq qH$. 而又最大公因子 p 的定义, $\overline{aH + bH} = pH$. 由于 $pH \subseteq qH$, 故 q 整除 p. □

定义. 称函数 $a, b \in \mathcal{B}$ 互素, 若它们的最大公因子为 1. 于是又3.43可知 a, b 互素当且仅当 $aH + bH$ 在 H 当中稠密.

定理 3.12. 设 a, b, c 为 $\mathcal{B}$ 中的函数. 设 a 与 b, c 都互素, 则 a 与乘积 bc 互素.

证明. 由互素的定义, $aH + bH$ 与 $aH + cH$ 都在 H 当中稠密, 从而 $aH + b(aH + cH) = aH + bcH$ 在 H 当中稠密. 这表明 a 与 bc 互素. □

注意共形变换 $w = \varphi(z) = \frac{z - i}{z + i}$ 将上半平面 $\mathbb{H} = \{\operatorname{Im} z > 0\}$ 一一地映到单位圆盘 $\Delta = \{|w| < 1\}$. 从而单位圆盘 Δ 及其边界 S^1 上的 Beurling 定理以及 $\mathcal{B}$ 的整除性理论可以自然搬运到 $\mathbb{H}$ 上. 具体地讲, 若 f 为定义在 Δ 上的有界解析函数, 则 $g := f \circ \varphi$ 为 $\mathbb{H}$ 上的有界解析函数, 反之亦然. 此关系给出了 $\Delta, \mathbb{H}$ 上的有界解析函数代数 $\mathcal{B}(\Delta)$ 与 $\mathcal{B}(\mathbb{H})$(在相应的上确界范数下) 之间的同构. 我们可以考虑 $\mathcal{B}(\mathbb{H})$ 当中的函数在 $\mathbb{R}$ 上的几乎处处定义的边值. 函数 $p \in \mathcal{B}(\mathbb{H})$ 称为内函数, 如果 $|p(x)| = 1$ 对几乎所有 $x \in \mathbb{R}$ 都成立.

定理 3.13. 在代数 $\mathcal{B}(\mathbb{H})$ 之中，函数 e^{iz} 分解为两个内函数乘积的方式

$$e^{iz} = p(x)q(x) \tag{3.44}$$

只可能是 $p(z) = ce^{iaz}$, $q(z) = c^{-1}e^{ibz}$, 其中 $a, b \geq 0$, $a + b = 1$, $|c| = 1$.

证明. 设3.44成立, 记 $z = x + iy$. 取3.44式的模长的对数, 有

$$-y = \log|p(z)| + \log|q(z)|. \tag{3.45}$$

定义

$$h(x, y) := -\log|p(z)|. \tag{3.46}$$

由于 p, q 为内函数, 从而由3.45,3.46立刻得到

$$0 \leq h(x, y) \leq y, \tag{3.47}$$

而且 h 为 $\mathbb{H}$ 上的调和函数, 且满足

$$\lim_{y \to 0} h(x, y) = 0, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

通过下式将 h 延拓到下半平面:

$$h(x, y) = -h(x, -y), \tag{3.48}$$

延拓后的函数仍记作 h. 则 h 在上, 下半平面都调和, 且在 $\mathbb{C}$ 连续. 从而 (可见 [A, pp.172-173]) h 在复平面 $\mathbb{C}$ 调和, 且由3.47,3.48 可知 h 的增长速度至多线性. 将 h 补成 $\mathbb{C}$ 上的解析函数 f(即 h 为解析函数 f 的实部), 使用附录 B 中的一般版本的 Liouville 定理, f 一定是线性函数. 从而由3.47可知 $h(x, y) = ay$, 其中 $a \in [0, 1]$. 于是 $p(z) = e^{-ay+iax+id} = e^{id}e^{iaz}$, 其中 $d \in \mathbb{R}$. 从而得到 $q(z) = e^{-by+ibx-id} = e^{-id}e^{ibz}$, 其中 $b = 1 - a$. 得证. □

点评.

1. 可以证明, 若函数 $f \in H$ 在 S^1 上的边值由3.30给出, 则在 S^1 几乎处处成立

$$\lim_{r \to 1} f(re^{i\theta}) = f(e^{i\theta}). \tag{3.49}$$

这是 Fatou 的众所周知的结果. 它的一种证法是, 由 Fejér-Lebesgue 定理 [T,pp. 415-416], 函数 $g \in L^1(S^1)$ 的 Fourier 级数在 g 的 Lebesgue 集的每一点处是 $(C,1)$-可求和的 (即在算术平均意义下可求和), 从而也在 S^1 几乎处处 $(C,1)$-可求和. 考虑3.30式当中的 $g(\theta) = f(e^{i\theta})$, 注意 $(C,1)$-可求和表明 Abel 可求和 [Har, p.108], 从而得到3.49.

2. 之前探讨的 $\mathcal{B}$ 的整除性理论与 H^p, $1 \le p \le \infty$ 的函数的 Riesz-Herglotz 分解密切相关. 其中, 当 $1 \le p < \infty$ 时, H^p 空间由满足

$$\|f\|_p := \lim_{r\to 1}\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^p \,\mathrm{d}\theta\right)^{\frac{1}{p}} < \infty$$

的函数 f 构成; 而当 $p = \infty$ 时, 定义 $H^\infty = \mathcal{B}$, 即单位圆盘上的有界解析函数代数, 并赋以上确界范数. H^p 当中的函数在圆周 S^1 上的边值是 L^p 有界的, 且负指标的 Fourier 系数都为零; 并且圆盘内部的值可被其边值通过 Cauchy 积分或 Poisson 积分公式恢复. (我们仅仅讨论了 $p = 2, \infty$ 的情形.)

对于这样的函数 f, 我们有分解

$$f = cBSF,$$

其中

$$B(z) = z^p \prod \left[\frac{\overline{\alpha}_n}{|\alpha_n|}\frac{\alpha_n - z}{1 - \overline{\alpha}_n z}\right]^{p_n}$$

为 (有限或无限)Blaschke 乘积, 其零点仅为离散点集 $\{\alpha_n\}$ (也可能再包括 0), 其中 α_n 的零点阶数为 p_n (且满足 $\sum p_n(1 - |\alpha_n|) < \infty$);

$$S(z) = \exp\left\{-\int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z}\,\mathrm{d}\mu(\theta)\right\},$$

其中 μ 为圆周 S^1 上与 Lebesgue 测度奇异的某个正测度;

$$F(z) = \exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|f(e^{i\theta})| \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z}\,\mathrm{d}\theta\right\}$$

称为 f 的**外因子** (outer factor); c 为模长为 1 的常数. 乘积 $I := BS$ 成为 f 的**内因子** (inner factor), 从而 $f = cIF$. 细节详见 [D], [K] 以及 [RR].

3. 至于单位圆盘与半平面上的 H^p 空间的关系, 详见 [D, pp. 187-189] 或者 [RR, pp. 91-105].

参考文献

A Lars V. Ahlfors, *Complex Analysis*, third edition, McGraw-Hill, 1979.

B Arne Beurling, *On two problems concerning linear transformations in Hilbert space*, Acta Math. **81** (1949), 239-255.

D Peter L. Duren, *Theory of H^p Spaces*, Academic Press, 1970.

Hal Paul Halmos, *Shifts on Hilbert spaces*, J. Reine Angew. Math. **208** (1961), 102-112.

Har G.H. Hardy, *Divergent Series*, Oxford University Press, 1949.

Ho Kenneth Hoffman, *Banach Spaces of Analytic Functions*, Prentice-Hall, 1962.

K Paul Koosis, *Introduction to H_p Spaces*, second edition, Cambridge University Press, 1998.

L Peter D. Lax, *Translation invariant spaces*, Acta Math. **101** (1959), 163-178.

RR Marvin Rosenblum and James Rovnyak, *Topics in Hardy Classes and Univalent Functions*, Birkhäuser Verlag, 1994.

T E.C. Titchmarsh, *The Theory of Functions*, second edition, Oxford University Press, 1939.

3.4 预报理论

1 我们用 X, Y 等大写拉丁字母来表示在某度量空间上定义的实值平方可积函数, 用 (X, Y) 来表示 X 与 Y 的 L^2-内积.

引理 3.14. 设 $\{X_k\}$ 是一列平方可积函数. 定义

$$e_{jk} := (X_j, X_k). \tag{3.50}$$

那么 (无穷) 矩阵 (e_{jk}) 是对称, 半正定的.

证明. 对称性显然. 要证明 (e_{jk}) 是半正定的, 只需证对任意的有限个实数 $\{u_j\}$, 有

$$\sum e_{jk} u_j u_k \geq 0.$$

只需注意下式即可:

$$\sum e_{jk}u_j u_k = \sum (X_j X_k)u_j u_k = \sum (u_j X_j, u_k X_k) = \left\|\sum u_l X_l\right\|^2 \geq 0.$$

□

平方可积函数的双无限序列 $\{X_k\}$ 称为**平稳的**, 如果3.50仅取决于 $j-k$, 即

$$(X_j, X_k) = e_{j-k}. \tag{3.51}$$

注意到对所有的 j,k 都有 $e_{j-k} = e_{k-j}$.

定理 3.15. 设 $\{X_k\}$ 设平方可积函数的一个平稳序列, 假设定义在*3.51*中的序列 $\{e_n\}$ 以 $O(\frac{1}{n^2})$ 的速度趋于 0, 那么

$$m(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e_n e^{in\theta} \tag{3.52}$$

是非负函数.

证明. 观察到3.52中的级数一致收敛且绝对收敛, 因此它在单位圆 S^1 上定义了一个连续函数. 设 g 是 S^1 上任意一个光滑的函数; 将它写成它的 Fourier 级数的和:

$$g(\theta) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} v_k e^{ik\theta}, \qquad \sum_{k=-\infty}^{\infty} |v_k| < \infty. \tag{3.53}$$

我们说

$$\int_0^{2\pi} |g(\theta)|^2 m(\theta)\,\mathrm{d}\theta \geq 0. \tag{3.54}$$

实际上, 由 m 和 g 的 Fourier 级数表示, 我们能将3.54 写成

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sum_{k,\ell,n} v_k e^{ik\theta}\bar{v}_\ell e^{-i\ell\theta} e_n e^{in\theta}\,\mathrm{d}\theta &= \sum_{k-\ell+n=0} e_n v_k \bar{v}_\ell \\ &= \sum_{k,\ell} e_{\ell-k} v_k \bar{v}_\ell = \sum_{k,\ell} e_{k-\ell} v_k \bar{v}_\ell.\end{aligned} \tag{3.55}$$

由引理 3.14, 二次型 $\sum e_{k-\ell}u_k u_\ell$ 是半正定的, 从而3.55式右侧的相应的 Hermite 型也是半正定的. 因此, 若 $g(\theta)$ 的 Fourier 系数 v_k 只有有限个非零, 则3.54成立. 之后只需标准套路, 将3.55等号右边截断, 再注意 $\sum v_k$ 的绝对收敛性, 可知3.54对一般的光滑函数 g 也成立.

为完成本定理的证明, 只需注意 S^1 上的任何非负光滑函数 q 都形如 $|g|^2$, 其中 g 为 S^1 的某个光滑函数. 因此由3.54可知

$$\int_0^{2\pi} q(\theta)m(\theta) \geq 0$$

对任意非负光滑函数 q 都成立, 由此可知 m 是非负的. □

2 给定平稳的 (双无限)L^2 函数列 X_k, 以及相应的 e_n. 在实际应用层面上 (见后面 3.4.3), 我们自然要问 X_0 能被它前面的 X_{-j}, $j = 1, 2, 3...$ 的线性组合 L^2 逼近得多么好. 更具体地, 如何选取常数 p_j, $j = 1, 2, 3, ...$, 使得

$$\left\| X_0 - \sum_{j=1}^{\infty} p_j X_{-j} \right\|^2 \tag{3.56}$$

尽可能小? 我们提出此问题时, 可以要求 p_i 取复数值; 但由等式 $\|X_0 - (A + iB)\|^2 = \|X_0 - A\|^2 + \|B\|^2$ (其中 A, B 为任何实值 L^2 函数) 可知, 满足题设的最优的 p_j 必为实数.

补充定义 $p_0 = -1$. 从而我们将要最小化的3.56式可重写为

$$\left\| X_0 - \sum_{j=1}^{\infty} p_j X_{-j} \right\|^2 = \left\| \sum_{j=0}^{\infty} p_j X_{-j} \right\|^2 = \sum_{j,k=0}^{\infty} e_{j-k} p_j \bar{p}_k. \tag{3.57}$$

这可以转化为复变函数的问题. 事实上, 令

$$p(\theta) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k e^{ik\theta}, \tag{3.58}$$

其中

$$\sum_{k=0}^{\infty} |p_k|^2 < \infty, \qquad p_0 = -1. \tag{3.59}$$

则 $p \in L^2(S^1)$; 并且由3.54下方的计算过程, 3.57式可重写为

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |p(\theta)|^2 m(\theta)\,\mathrm{d}\theta. \tag{3.60}$$

并且在 S^1 几乎处处成立 $p(\theta) = f(e^{i\theta})$, 其中

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k z^k \tag{3.61}$$

为单位圆盘上的 H^2 解析函数. 约束条件 $p_0 = -1$ 翻译为 $f(0) = -1$. 从而在约束条件3.59下求3.60的极值问题可以被重新表述为: 取单位圆盘上满足 $f(0) = -1$ 的 H^2 函数 f, 使得

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(e^{i\theta})|^2 m(\theta)\,\mathrm{d}\theta \tag{3.62}$$

取最小值 (若最小值不存在, 则尽量接近下确界).

我们回到 m 的定义式3.52. 我们已知 m 为 S^1 上的连续函数, 且由定理 3.15 知 m 非负. 先假设 m 处处非零 (从而在 S^1 存在正的下界), 则我们断言 m 在圆周上可以表示为某个 H^2 函数 h 的模长平方:

$$m(\theta) = |h(e^{i\theta})|^2. \tag{3.63}$$

事实上, 显然 $\log m \in L^2$, 从而有 Fourier 展开

$$\log m(\theta) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} b_k e^{ik\theta}.$$

由于 $\log m$ 为实值函数, 从而 $b_{-k} = \overline{b}_k$, 从而

$$\log m(\theta) = b(e^{i\theta}) + \overline{b(e^{i\theta})}, \tag{3.64}$$

其中

$$b(z) := \frac{1}{2}b_0 + \sum_{k=1}^{\infty} b_k z^k. \tag{3.65}$$

令 $h(z) := e^{b(z)}$, 对3.65取指数, 代入3.64, 整理可得3.63. 注意

$$h(0) = e^{b(0)} = e^{\frac{1}{2}b_0} = \exp\left\{\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} \log m(\theta)\,\mathrm{d}\theta\right\}. \tag{3.66}$$

由于 m 在 S^1 有上界, 从而由3.63 易知 h 为单位圆盘上的有界解析函数, 从而为 H^2 函数. 同样 $\dfrac{1}{h(z)} = \exp\{-b(z)\}$ 也是 H^2 函数, 因为 m 在 S^1 有正的下界.

由3.63, 我们把想要最小化的3.62式重写为

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(e^{i\theta})|^2 |h(e^{i\theta})|^2\,\mathrm{d}\theta. \tag{3.67}$$

其中函数 h 由常数 e_n 所决定, f 为满足 $f(0) = -1$ 的 H^2 函数.

现在,

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(e^{i\theta})|^2 |h(e^{i\theta})|^2\,\mathrm{d}\theta = \sum_{k=0}^{\infty} |c_k|^2,$$

其中 $f(z)h(z) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$. 系数 $c_0 = f(0)h(0)$ 已经固定; 因此, 为了使3.67最小, fh 必为常函数. 因此

$$f(z)h(z) = f(0)h(0) = -h(0),$$

从而得到 $f(z) = -\dfrac{h(0)}{h(z)}$. 于是3.67的最小值为 $|f(0)h(0)|^2 = |h(0)|^2$. 由3.66可知, 3.67的最小值, 也就是3.60的最小值, 等于

$$\exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log m(\theta)\,\mathrm{d}\theta\right\},$$

为函数 m 的“几何平均值”.

我们还要去掉 m 有正的下界这个假设. 设 p 由3.58给出, 并且满足约束条件3.59. 任取 $\varepsilon > 0$, 记 $m_\varepsilon(\theta) = m(\theta) + \varepsilon$. 则

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |p(\theta)|^2 m(\theta)\,\mathrm{d}\theta &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |p(\theta)|^2 m_\varepsilon(\theta)\,\mathrm{d}\theta - \frac{\varepsilon}{2\pi}\int_0^{2\pi} |p(\theta)|^2\,\mathrm{d}\theta \\ &\geq \exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log[m(\theta)+\varepsilon]\,\mathrm{d}\theta\right\} - \frac{\varepsilon}{2\pi}\int_0^{2\pi} |p(\theta)|^2\,\mathrm{d}\theta.\end{aligned} \tag{3.68}$$

令 $\varepsilon \to 0$, 由单调收敛定理我们得到

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |p(\theta)|^2 m(\theta)\,\mathrm{d}\theta \geq \exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log m(\theta)\,\mathrm{d}\theta\right\}.$$

因此

$$\inf_p \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |p(\theta)|^2 m(\theta)\,\mathrm{d}\theta \geq \exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log m(\theta)\,\mathrm{d}\theta\right\}. \tag{3.69}$$

下面证明相反方向的不等式. 取定 $\varepsilon > 0$, 则存在处处非零的 H^2-函数 h_ε 使得

$$|h_\varepsilon(e^{i\theta})|^2 = m_\varepsilon(\theta) \tag{3.70}$$

$$|h_\varepsilon(0)|^2 = \exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log m_\varepsilon(\theta)\,\mathrm{d}\theta\right\}, \tag{3.71}$$

并且 $\dfrac{1}{h_\varepsilon}$ 也是 H^2-函数. 令

$$f_\varepsilon(z) = -\frac{h_\varepsilon(0)}{h_\varepsilon(z)}; \tag{3.72}$$

则 f_ε 属于 H^2, 且 $f_\varepsilon(0) = -1$. 于是由3.70,3.71与3.72式可得

$$\begin{aligned}
\inf_p \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |p(\theta)|^2 m(\theta)\,\mathrm{d}\theta &\leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f_\varepsilon(e^{i\theta})|^2 m(\theta)\,\mathrm{d}\theta \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left|\frac{-h_\varepsilon(0)}{h_\varepsilon(e^{i\theta})}\right|^2 m(\theta)\,\mathrm{d}\theta \\
&= |h_\varepsilon(0)|^2 \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left|\frac{1}{h_\varepsilon(e^{i\theta})}\right|^2 m(\theta)\,\mathrm{d}\theta \\
&= |h_\varepsilon(0)|^2 \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{m(\theta)}{m(\theta)+\varepsilon}\,\mathrm{d}\theta \\
&< |h_\varepsilon(0)|^2 = \exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log[m(\theta)+\varepsilon]\,\mathrm{d}\theta\right\}.
\end{aligned} \tag{3.73}$$

令3.73中的 $\varepsilon \to 0$, 则有

$$\inf_p \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |p(\theta)|^2 m(\theta)\,\mathrm{d}\theta \leq \exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log m(\theta)\,\mathrm{d}\theta\right\}. \tag{3.74}$$

因此, 结合3.69与3.74式, 可知对任何满足定理 3.15 条件的非负函数 m 都成立

$$\inf_p \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |p(\theta)|^2 m(\theta)\,\mathrm{d}\theta = \exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log m(\theta)\,\mathrm{d}\theta\right\}, \tag{3.75}$$

若3.75右边的那个积分发散到 $-\infty$, 则所求的下确界为 0(并且不可达到).

3 我们给3.56的最小化问题以概率论解释.

我们对某随机介质在等间隔时刻 $0, \pm1, \pm2, \ldots$ 取样. 记 $X(k)$ 为其在时刻 k 的随机变量. 假设 $X(k)$ 是平方可积的. 于是它们构成一个平稳序列, 并且称

$$\mathbb{E}(X(j)X(k)) = e(j-k)$$

为相关系数, 其中 $\mathbb{E}$ 为随机变量的期望. 相关系数 $e(n)$ 可通过对随机介质的长时间观测得到.

所谓预测问题, 是指通过已知的 $X(-1), X(-2), \ldots$ 来预测当前值 $X(0)$. 若我们选取线性近似

$$\sum_{j=1}^{\infty} p_j X(-j),$$

并且如果下述期望值取最小

$$\mathbb{E}\left((X(0) - \sum_{j=1}^{\infty} p_j X(-j))^2\right),$$

则称该线性近似是最优的. 这样我们就回到之前提出并解决的问题3.57了.

点评.

1. 定理 3.15 的一种一般推广是, 不再要求 e_n 为实数, 并且 $\{e_n\}$ 趋于 0 的速度可以任意 (慢). 该推广是 Herglotz [He] 的工作 (见 [T]), 相应的定理可被陈述为:

定理. *设 $\{e_n\}$ 为双无限复数序列, 且 $e_{-n} = \bar{e}_n$. 则 Hermite 矩阵 (e_{jk}) 是半正定的, 当且仅当存在 $[0, 2\pi]$ 上的 Borel 测度 μ 使得*

$$e_n = \int_0^{2\pi} e^{-in\theta}\,\mathrm{d}\mu(\theta).$$

此定理的连续版本见 Bochner [B].

2. 上述最小化问题的一种更一般的版本, 是 Szegő [Sz] 的下述著名定理:

> **定理.** 设 m 为 $[0,2\pi]$ 的非负可积函数. 那么
>
> $$\inf_p \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |p(\theta)|^2 m(\theta)\,\mathrm{d}\theta = \exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log m(\theta)\,\mathrm{d}\theta\right\},$$
>
> 其中该下确界取遍所有满足3.58,3.59的函数 p.

这可以由我们之前介绍过的逼近论的有关内容得出; 详见 [DM1, pp. 191-192].

Szegő 证明该定理的二十年后, Kolmogorov [K1], [K2] 证明了一个更一般的推广, 并且该定理与刚才引用的 Herglotz 定理有关:

> **定理.** 设 μ 为 $[0,2\pi]$ 上的 *(非负)Borel* 测度, 其 *Radon-Nikodym* 分解为 $\mathrm{d}\mu = \dfrac{1}{2\pi}m(\theta)\,\mathrm{d}\theta + \mathrm{d}\sigma$, 其中测度 σ 与 *Lebesgue* 测度奇异. 那么成立
>
> $$\inf_p \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |p(\theta)|^2\,\mathrm{d}\mu = \exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log m(\theta)\,\mathrm{d}\theta\right\},$$
>
> 其中该下确界取遍所有满足3.58,3.59的函数 p.

Kolmogorov 定理的证明可见 [Ko] 和 [Koo]. Kolmogorov, Krein 和 Wiener 等人在预报理论的应用方面有贡献; 见 [DM2] 以及 [W, p.59].

参考文献

B S. Bochner, *Monotone Funktionen Stieltjessche Integrale und harmonische Analyse*, Math. Ann. **108** (1933), 378-410.

DM1 H. Dym and H.P. McKean, *Fourier Series and Integrals*, Academic Press, 1971.

DM2 H. Dym and H.P. McKean, *Gaussian Processes, Function Theory and the Inverse Spectral Problem*, Academic Press, 1976.

He G. Herglotz, *Über Potenzreihen mit positivem, reelen Teil im Einheitskreis*, Ber. Verh. Sächs. Akad. Wiss. Leipzig Math.-Natur. Kl. **63** (1911), 501-511; in Gustav Herglotz, Gesammelte Schriften, Vandenhoeck & Ruprecht, 1979, pp. 247-257.

Ho Kenneth Hoffman, *Banach Spaces of Analytic Functions*, Prentice-Hall, 1962.

K1 A.N. Kolmogorov, *Sur l'interpolation et extrapolation des suites stationnaires* C.R. Acad. Sci. Paris **208** (1939), 2043-2045.

K2 A.N. Kolmogorov, *Stationary sequences in Hilbert space* Bull. Math. Univ. Moscow **2** (no. 6)(1941), 1-40.

K3 A.N. Kolmogorov, *Interpolation und Extrapolation von stationären zufälligen Folgen*, Bull. Acad. Sci. URSS Sér. Math. **5** (1941), 3-14.

Koo Paul Koosis, *Introduction to H_p Spaces*, second edition, Cambridge University Press, 1998.

Kr1 M. Krein, *On a generalization of some investigations of G. Szegő, V. Smirnoff and A. Kolmogoroff*, C.R. (Doklady) Acad. Sci. URSS (N.S.) **46** (1945), 91-94.

Kr2 M.Krein, *On a problem of extrapolation of A.N. Kolmogoroff*, C.R. (Doklady) Acad. Sci. URSS (N.S.) **46** (1945), 306-309.

Sz G. Szegő, *Beiträge zur Theorie der Toeplitzschen Formen (Erste Mitteilung)*, Math. Z. **6** (1920), 167-202; in Gabor Szego, Collected Papers, Volume 1, 1915-1927, Birkhäuser, 1982, pp. 237-272, commentary pp. 273-275.

T Otto Toeplitz, *Über die Fourier'sche Entwickelung positiver Funktionen*, Rend. Circ. Mat. Palermo **31** (1911), 191-192.

W Norbert Wiener, *Extrapolation, Interpolation, and Smoothing of Stationary Time Series*, MIT Press, 1949.

3.5 Riesz-Thorin 凸性定理

人们一致认为 Marcel Riesz 的凸性定理是现代分析中一个深入的, 重要的和有力的工具. [DS, p.520], [Sa,p.581], G.O. Thorin 对这一结论的证明则是“复变理论应用于线性空间理论中一个看似无关的问题的一个特别漂亮的例子”[Ds, p.520]. 本节致力于这个基本结论的陈述, 证明和讨论.

设 $(M,\mathcal{M},\mu)$ 是一个 σ-有限测度空间, 其中 M 是集合, $\mathcal{M}$ 是 M 的可测子集的 σ-代数, μ 为定义在 $\mathcal{M}$ 上的一个 (正) 测度. 我们用 $L^p(M), 1\le p<\infty$ 来表示 M 上复值可测函数的等价类空间, 它满足

$$\|f\|_p=(\int_M |f(m)|^p\,\mathrm{d}\mu)^{\frac{1}{p}}<\infty$$

用 $L^\infty(M)$ 来表示 M 上本性有界可测函数的等价类的空间, 它具有范数

$$\|f\|_\infty=\operatorname*{ess\,sup}_M|f(m)|.$$

如果两个函数仅在一组零 μ 测度上不同, 则可以认为它们是等价的.

在下面的定理中, 我们考虑两个 σ-有限测度空间 $(U,\mathcal{U},\mu)$ 与 $(V,\mathcal{V},\nu)$, 以及将向量空间 $L^{p_0}(U)+L^{p_1}(U)$ 映到 V 上的 ν-可测函数空间的线性算子 $\mathbf{T}$, 并且 $\mathbf{T}$ 将 $L^{p_j}(U)$ 映到 $L^{q_j}(V)$, $j=0,1$, 其中 $1\le p_0,p_1,q_0,q_1\le\infty$.

定理 3.16. *(Riesz-Thorin)* 假设

$$\mathbf{T}:L^{p_0}(U)\to L^{q_0}(U)$$

和

$$\mathbf{T}:L^{p_1}(U)\to L^{q_1}(U)$$

分别具有范数 $M_0=M(p_0,q_0)$ 和 $M_1=M(p_1,q_1)$. 则对于 $0<x<1$, $\mathbf{T}$ 可延拓为有界算子

$$\mathbf{T}:L^{p}(U)\to L^{q}(V) \tag{3.76}$$

其中

$$\frac{1}{p}=\frac{1-x}{p_0}+\frac{x}{p_1},\ \frac{1}{q}=\frac{1-x}{q_0}+\frac{x}{q_1} \tag{3.77}$$

范数 $M=M(p,q)$ 满足

$$M\le M_0^{1-x}M_1^x. \tag{3.78}$$

注记. 根据定理3.16的假设, 在 $L^{p_0}\cap L^{p_1}$ 上 $\mathbf{T}$ 被唯一定义, 并从这个稠密子集延拓到 L^p 的全部. 在由 Marcel Riesz[R] 在 1927 年证明的此结论的原始版本中, 需要额外假设 $p_0\le q_0$ 和 $p_1\le q_1$. 上面提到的版本以及下面给出的出色证明是 Riesz 的学生 G.O. Thorin[T1], [T2] 提出的. 完整的结论现在通常被称为 Riesz(或 Riesz-Thorin) 凸性定理, 该名称基于以下事实: 如果 $M(p,q)$ 是 $\mathbf{T}:L^p(U)\to L^q(V)$ 的范数, 那么 $\log M(p,q)$ 是 $(\frac{1}{p},\frac{1}{q})$ 的凸函数.

证明. 固定 $0<x<1$, 并且设 p 与 q 满足3.77. 用 r' 表示 $1\le r\le\infty$ 的共轭指数, 于是 $\frac{1}{r}+\frac{1}{r'}=1$, 首先假设 p 与 q' 都是有限的. 为了证明3.76与3.78, 我们证明 $\mathbf{T}$ 的范数在局限于简单函数时满足不等式3.78. 因为当 $1\le p<\infty$ 时简单函数在 $L^p(U)$ 中稠密, 然后得出 $\mathbf{T}$ 可唯一扩张为从 $L^p(U)$ 到 $L^q(V)$ 的连续线性映射; 并且这个扩张同样满足3.78.

为此, 设

$$\langle h,g\rangle=\int_V h(v)g(v)\,\mathrm{d}\nu,\quad h\in L^q(V),g\in L^{q'}(V)$$

并回想 Hölder 不等式

$$\|h\|_q = \sup_{\|g\|_{q'}=1} |\langle h, g\rangle|. \tag{3.79}$$

考虑双线性型 $\langle \mathbf{T}f, g\rangle$, 先假设的 f 和 g 是简单函数. 我们断言

$$|\langle \mathbf{T}f, g\rangle| \le M_0^{1-x} M_1^x, \qquad \text{若} \qquad \|f\|_p = 1, \quad \|g\|_{q'} = 1. \tag{3.80}$$

假设此断言已经成立. 由于简单函数在 $L^p(U)$ 和 $L^{q'}(V)$ 中稠密, 因此对于单位范数的任意 $L^p(U), g \in L^{q'}(V)$ 都成立3.80. 然后从3.79和3.80得出

$$M = \sup_{\|f\|_p \le 1} \|\mathbf{T}f\|_q = \sup_{\|f\|_p \le 1} \sup_{\|g\|_{q'} \le 1} |\langle \mathbf{T}f, g\rangle| \le M_0^{1-x} M_1^x,$$

这就是在情况 $p < \infty, q > 1$ 下的3.78.

转向3.80的证明, 我们固定简单函数

$$f = \sum_{j=1}^n a_j \chi_{E_j}, \quad a_j = |a_j| e^{i\theta_j} \ne 0, \quad 1 \le j \le n,$$

$$g = \sum_{k=1}^m b_k \chi_{F_k}, \quad b_k = |b_k| e^{i\varphi_k} \ne 0, \quad 1 \le k \le m$$

这样就有

$$\begin{aligned} \|f\|_p^p &= \sum_{j=1}^n |a_j|^p \mu(E_j) = 1, \\ \|g\|_{q'}^{q'} &= \sum_{k=1}^n |b_k|^{q'} \nu(F_k) = 1. \end{aligned} \tag{3.81}$$

对于 $0 \le \mathrm{Re} z \le 1$, 设

$$\frac{1}{p(z)} = \frac{1-z}{p_0} + \frac{z}{p_1}, \quad \frac{1}{q'(z)} = \frac{1-z}{q_0'} + \frac{z}{q_1'}$$

并设

$$
\begin{aligned}
f_z(u) &= |f(u)|^{\frac{p}{p(z)}} \frac{f(u)}{|f(u)|} = \sum_{j=1}^{n} |a_j|^{\frac{p}{p(z)}} e^{i\theta_j} \chi_{E_j}(u), \\
g_z(v) &= |g(v)|^{\frac{q'}{q'(z)}} \frac{g(v)}{|g(v)|} = \sum_{k=1}^{m} |b_k|^{\frac{q'}{q'(z)}} e^{i\varphi_k} \chi_{F_k}(v).
\end{aligned} \tag{3.82}
$$

则有

$$
\begin{aligned}
|f_{iy}(u)| &= |f(u)|^{\mathrm{Re}\frac{p}{p(iy)}} = |f(u)|^{\frac{p}{p_0}}, \\
|f_{1+iy}(u)| &= |f(u)|^{\mathrm{Re}\frac{p}{p(1+iy)}} = |f(u)|^{\frac{p}{p_1}},
\end{aligned}
$$

从而

$$
\begin{aligned}
\|f_{iy}\|_{p_0} &= \left(\int_U |f(u)|^p \,\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{p_0}} = \|f\|_p^{\frac{p}{p_0}} = 1, \\
\|f_{1+iy}\|_{p_1} &= \left(\int_U |f(u)|^p \,\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{p_1}} = \|f\|_p^{\frac{p}{p_1}} = 1.
\end{aligned} \tag{3.83}
$$

类似地有

$$
\|g_{iy}\|_{q_0'} = 1, \quad \|g_{1+iy}\|_{q_1'} = 1. \tag{3.84}
$$

现在定义

$$
F(z) = \langle \mathbf{T} f_z, g_z \rangle. \tag{3.85}
$$

根据3.82和 $\mathbf{T}$ 的线性, 我们有

$$
F(z) = \sum_{k=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} A_{jk} |a_j|^{\frac{p}{p(z)}} |b_k|^{\frac{q'}{q'(z)}}, \tag{3.86}
$$

其中

$$
A_{jk} = e^{i(\theta_j + \varphi_k)} \int_V (T\chi_{E_j})(v) \chi_{F_k}(v) \,\mathrm{d}\nu.
$$

3.86中每一个求和项都是一个整函数, 且它们在带状区域 $S = \{z \big| 0 \le \mathrm{Re} \le 1\}$ 中有界; 因此 F 亦是如此. 现在根据3.83以及 M_0 和 M_1 的定义, 有

$$
\|\mathbf{T} f_{iy}\|_{q_0} \le M_0 \|f_{iy}\|_{p_0} = M_0
$$

和

$$\|\mathbf{T}f_{1+iy}\|_{q_1} \leq M_1\|f_{1+iy}\|_{p_1} = M_1,$$

对所有的实数 y 都成立. 从而根据 Hölder 不等式与3.84, 有

$$|F(iy)| = |\langle \mathbf{T}f_{iy}, g_{iy}\rangle| \leq \|\mathbf{T}f_{iy}\|_{q_0}\|g_{iy}\|_{q_0'} \leq M_0$$

$$|F(1+iy)| = |\langle \mathbf{T}f_{1+iy}, g_{1+iy}\rangle| \leq \|\mathbf{T}f_{1+iy}\|_{q_1}\|g_{1+iy}\|_{q_1'} \leq M_1.$$

现在根据三线定理 (附录 C) 得出

$$|F(x+iy)| \leq M_0^{1-x}M_1^x. \tag{3.87}$$

由于3.82

$$f_x = f \quad 和 \quad g_x = g,$$

从而由3.85得

$$F(x) = \langle \mathbf{T}f, g\rangle,$$

这与3.87一起证明3.80. 这就完成了当 $p < \infty$ 和 $q > 1$ 时定理的证明.

其余情况很容易处理. 如果 $p = \infty, q = 1$, 那么 $p_0 = p_1 = \infty$ 以及 $q_0 = q_1 = 1$; 所以 $p(x) = \infty, q(x) = 1, \forall 0 \leq x \leq 1$, 这没有什么可以证明的. 如果 $p = \infty, q > 1$, 那么 $p(x) = \infty, \forall 0 \leq x \leq 1$ 并且 $\mathbf{T}$ 将 $L^\infty(U)$ 映到 $L^{q_0}(V) \cap L^{q_1}(V)$. 在这种情况下, 对于所有的 z 选择 $f_z = f$ 可以使我们像之前一样进行证明. 最后, 如果 $p < \infty$, 但是 $q = 1$ 的情形, 我们将上述证明中的 g_z 替换为 g 并像之前那样讨论. □

注记. 在许多应用中, $\mathbf{T}$ 最初不是作为 L^{p_0} 和 L^{p_1} 上的有界算子给出的, 而是在 $L^{p_0} \cap L^{p_1}$ 的稠密子集上定义并有界 (在 L^{p_0} 和 L^{p_1} 的范数里). 然后, 可以将它作为 L^{p_0} 和 L^{p_1} 上的有界算子以唯一的方式延拓, 并应用 Riesz-Thorin 定理, 见 3.6 节; 在 [FJL] 中, 给出了一个在 L^{p_0} 和 L^{p_1} 范数中稠密定义并有界的算子 $\mathbf{T}$, 但该算子在对于某些 $p_0 < p < p_1$ 不能在 L^p 上延拓为有界算子. 在这个例子里, $\mathbf{T}$ 并没有定义在 $L^{p_0} \cap L^{p_1}$ 的稠密子集上, 并且从 $\mathbf{T}$ 到 L^{p_0} 和 L^{p_1} 的延拓实际上不同于在 $L^{p_0} \cap L^{p_1}$ 上. 当然, 根据上面的证明, 它们在简单函数类上也有所不同. 感谢 Michael Cwikel 给我们带来了这个例子.

作为 Riesz 凸性定理的威力的一个初步说明, 我们在空间 $L^p(\mathbb{R})$ 上的卷积算子理论

中得到了以下有关 Young 不等式的轻松证明. 回顾一下, f 和 g 的卷积 $f*g$ 定义为

$$(f*g)(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x-t)g(t)\,\mathrm{d}t.$$

Young 不等式断言, 对于 $1\leq p,r\leq\infty$, 有

$$\|f*g\|_s\leq\|f\|_r\|g\|_p, \tag{3.88}$$

其中

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{r}=1+\frac{1}{s}. \tag{3.89}$$

为了证明, 首先观察到对于固定的 $f\in L^1$, 涉及 Fubini 定理的简单计算表明, 定义为

$$\mathbf{T}g=f*g$$

的算子 $\mathbf{T}$ 将 L^1 有界地映射到 L^1 中, 其范数以 $\|f\|_1$ 为上界 (实际上恰好取到). $\mathbf{T}$ 以同样的上界将 L^∞ 平凡地映射到 L^∞, 因此由 $(p_0,q_0)=(1,1)$ 和 $(p_1,q_1)=(\infty,\infty)$ 的 Riesz 凸性定理得出

$$\|f*g\|_p\leq\|f\|_1\|g\|_p, \tag{3.90}$$

这就是 $s=p,r=1$ 时的3.88. 现在固定 $g\in L^p$ 并定义 $\mathbf{S}$ 为

$$\mathbf{S}f=f*g.$$

然后3.90表明

$$\mathbf{S}:L^1\to L^p \quad 和 \quad \|\mathbf{S}\|\leq\|g\|_p, \tag{3.91}$$

同时 Hölder 不等式给出当 $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$ 时有

$$\mathbf{S}:L^q\to L^\infty \quad , \quad \|\mathbf{S}\|\leq\|g\|_q. \tag{3.92}$$

其中

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1. \tag{3.93}$$

将3.91,3.92和3.93代入 Riesz 定理, 我们得到3.88, 其中 r 和 s 的关系如3.89所示.

另一个更引人注目的应用是以下的 Hausdorff-Young 定理的证明. 设 $\mathbf{T}$ 为将单位

圆上的可积函数映射为其 Fourier 系数序列

$$\hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)e^{-in\theta}\,\mathrm{d}\theta, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

由 Parseval 定理,

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(n)|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(\theta)|^2\,\mathrm{d}\theta = \|f\|_2^2,$$

所以 $\mathbf{T}: L^2 \to \ell^2$ 的范数是 1. 另一方面, $\mathbf{T}: L^1 \to \ell^\infty$ 的范数显然是 1. 在 Riesz 定理中取 $(p_0, q_0) = (1, \infty)$ 和 $(p_1, q_1) = (2, 2)$, 我们可以看出对于 $1 < p < 2$ 和 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$,

$$\mathbf{T}: L^p \to \ell^q \quad \text{并且} \quad \|\mathbf{T}\| = 1,$$

或者

$$\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(n)|^q\right)^{\frac{1}{q}} \le \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(\theta)|^p\,\mathrm{d}\theta\right)^{\frac{1}{p}}.$$

这就是 Hausdorff-Young 定理.

Littlewood 在最后一个论点中写道: “$\mathbf{T}$ 从虚无当中产生了高调的结果; 我们经历了像将圆锥形投影成圆形的早期令人兴奋的事情” [L, p.41].

点评.

1. 关于双线性和多线性形式的定理的广泛讨论, 包括 Riesz 凸性定理的原始证明, 都在 [HLP, 第 8 章] 中.
2. 还应该提及 E.M. Stein[St, 定理 1] 对 Riesz-Thorin 定理的推广; 见 [SW, pp.205-209]. 在这里, 单个的算子 $\mathbf{T}$ 被推广为关于复参数 z 解析的算子族 $\mathbf{T}_z$, 其中 $0 \le \mathrm{Re}z \le 1$, 并且对于 $\mathrm{Re}z = j, j = 0, 1$, $\mathbf{T}_z : L^{p_j} \to L^{q_j}$ 是有界的, 并满足 $\mathrm{Im}z \to \pm\infty$ 的适当增长条件. 然后得出的结论是, 对于 $0 < x < 1$, $\mathbf{T}_x : L^p \to L^q$ 有界, 其中 p 和 q 由3.77定义.
3. Thorin 的本质洞察被 Calderón[C] 的插值理论的复变方法充分运用, 见 [BL, 第 4 章]. Riesz-Thorin 定理的这些进展, 可参见 [K, pp. 117-121].
4. Hausdorff-Young 定理有一个姊妹篇, 它也是由 Riesz-Thorin 凸性定理直接得到的. 具体地说, 设 $p \in [1, 2]$ 以及 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, 则对于 $\{a_n\}_{n=-\infty}^{\infty} \in \ell^p$, 则存在

$f \in L^q(S^1)$ 使得 $\hat{f}(n) = a_n$; 并且还有 $\|f\|_q \leq \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}$. 关于它的证明, 容易注意到若 $\{a_n\} \in \ell^1$, 则

$$f(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{in\theta} \tag{3.94}$$

在 S^1 连续, 并且 $\hat{f}(n) = a_n$. 显然 $\|f\|_\infty \leq \|\{a_n\}\|_1$; 也就是说3.94定义的算子 $\boldsymbol{T} : \ell^1 \to L^\infty$ 的范数为 1. 因此, 考虑 $(1, \infty)$ 与 $(2, 2)$ 之间的插值可知, 3.94定义了连续映射 $T : \ell^p \to L^q$, 使得 $\|f\|_q \leq \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}$.

5. Olof Thorin 的整个职业生涯都是在一家保险公司工作. 关于它的更多信息, 参见 [BoGP].

参考文献

BL Jöran Bergh and Jörgen Löfström, *Interpolation Spaces*, Springer-Verlag, 1976.

BoGP Lennart Bondesson, Jan Grandell, and Jaak Peetre, *The life and work of Olof Thorin(1912-2004)*, Proc. Est. Acad. Sci. **57** (2008), 18-25.

C A.P. Calderón, *Intermediate spaces and interpolation, the complex method*, Studia Math. **24** (1964), 113-190.

DS Nelson Dunford and Jacob T. Schwartz, *Linear Operators Part 1: General Theory*, Wiley Interscience, 1957.

FJL E.B. Fabes, Max Jodeit, Jr., and J.E. Lewis, *On the spectra of a Hardy kernel*, J. Funct. Anal. **21** (1976), 187-194.

HLP G.H. Hardy, J.E. Littlewood, and G. Pólya, *Inequalities*, Cambridge University Press, 1959.

K Yitzhak Katznelson, *An Introduction to Harmonic Analysis*, third edition, Cambridge University Press, 2004.

L J.E. Littlewood, *Littlewood's Miscellany*, edited by Béla Bollobás, Cambridge University Press, 1986.

R Marcel Riesz, *Sur les maxima des formes bilinéaires et sur les fonctionnelles linéaires*, Acta Math. **49** (1927), 465-497.

Sa R. Salem, *Convexity theorems*, Bull. Amer. Math. Soc. **55** (1949), 851-860.

St Elias M. Stein, *Interpolation of linear operators*, Trans. Amer. Math. Soc. **83** (1956), 482-492.

SW Elias M. Stein and Guido Weiss, *Introduction to Fourier Analysis on Euclidean Spaces*, Princeton University Press, 1971.

T1 G.O. Thorin, *An extension of a convexity theorem due to M. Riesz*, Kungl. Fysiogr. Sällsk. i Lund Förh. **8** (1938), 166-170.

T2 G.O. Thorin, *Convexity theorems generalizing those of M. Riesz and Hadamard with some applications*, Medd. Lunds Univ. Mat. Sem. **9** (1948), 1-58.

3.6 Hilbert 变换

设 h 是定义在 $\mathbb{R}$ 上的实值可积函数. 柯西积分

$$f(z)=\frac{1}{\pi i}\int_{\mathbb{R}}\frac{h(t)}{t-z}\,\mathrm{d}t \tag{3.95}$$

定义了一个函数 $f(z)$, 或者说两个函数, 一个在上半平面解析, 另一个在下半平面解析. 我们将 z 限制在上半平面.

写出 $z=x+iy$, 我们可以如下表示 f 的实部和虚部:

$$\begin{aligned} f(z)&=\frac{1}{\pi i}\int_{\mathbb{R}}\frac{h(t)(t-\bar{z})}{|t-z|^2}\,\mathrm{d}t\\ &=\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}}h(t)\frac{y}{(x-t)^2+y^2}\,\mathrm{d}t+\frac{i}{\pi}\int_{\mathbb{R}}h(t)\frac{x-t}{(x-t)^2+y^2}\,\mathrm{d}t. \end{aligned} \tag{3.96}$$

定理 3.17. *假设 h 是一个紧支撑的实值连续可微函数，设 f 由3.95给出. 于是*

(1) 当 $|z| \to \infty$ 时，有

$$f(z) = O(\frac{1}{|z|}); \tag{3.97}$$

(2)f 从上半平面连续地延伸至实轴，并且

$$f(x) = h(x) + ik(x), \tag{3.98}$$

其中

$$k(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\pi} \int_{|x-t|>\varepsilon} \frac{h(t)}{x-t} \, \mathrm{d}t. \tag{3.99}$$

点评.

1. 3.99中的右式经常写为
$$\mathrm{PV}\frac{1}{\pi} \int \frac{h(t)}{x-t} \, \mathrm{d}t.$$
这里 PV 代表“主值”.

2. 定理3.17在比我们所说的弱得多的假设下成立. 但是以上给出的版本足以满足我们的需求，因为 $C_c^1(\mathbb{R})$ 在 $L^p(\mathbb{R})$ 中稠密，其中 $1 \le p < \infty$.

证明. (1) 当 $|z| \to \infty$ 时，在 h 的 (紧) 支撑上 $\dfrac{z}{t-z}$ 一致收敛于 -1; 所以

$$\lim_{z\to\infty} |zf(z)| = \lim_{z\to\infty} \left| \frac{1}{\pi i} \int_{\mathbb{R}} h(t) \frac{z}{t-z} \, \mathrm{d}t \right| = \left| \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} h(t) \, \mathrm{d}t \right| < \infty.$$

(2) 到3.96, 有两个方法可以证明. 首先是

$$\lim_{y\to 0} \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} h(t) \frac{y}{(x-t)^2 + y^2} \, \mathrm{d}t = h(x) \quad x \in \mathbb{R}. \tag{3.100}$$

这是基于以下事实

$$P_y(x) = \frac{1}{\pi} \frac{y}{x^2 + y^2}$$

在某种意义上近似恒等

(a)$P_y(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}, y > 0$;

(b)$\displaystyle\int_{\mathbb{R}} P_y(x) \, \mathrm{d}x = 1, \forall y > 0$;

(c) $\lim_{y\to 0}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} P_y(x)\,\mathrm{d}x = 1, \forall \varepsilon > 0.$

3.100中左侧的积分是 h 与核 P_y 的卷积, 很容易看出, 当 $y \to 0$ 时它一致收敛于 h.

(2) 的第二个断言是

$$\lim_{y\to 0}\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}} h(t)\frac{x-t}{(x-t)^2+y^2}\,\mathrm{d}t = \mathrm{PV}\frac{1}{\pi}\int\frac{h(t)}{x-t}\,\mathrm{d}t, \tag{3.101}$$

其中右侧存在并且是一个连续函数. 为此, 我们首先注意到

$$\begin{aligned}\mathrm{PV}\frac{1}{\pi}\int\frac{h(t)}{x-t}\,\mathrm{d}t &= \lim_{\varepsilon\to\infty}\left[\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{x-\varepsilon}\frac{h(t)}{x-t}\,\mathrm{d}t + \frac{1}{\pi}\int_{x+\varepsilon}^{\infty}\frac{h(t)}{x-t}\,\mathrm{d}t\right]\\ &= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\pi}\int_{\varepsilon}^{\infty}\frac{h(x-t)-h(x+t)}{t}\,\mathrm{d}t\\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{h(x-t)-h(x+t)}{t}\,\mathrm{d}t\end{aligned} \tag{3.102}$$

由于

$$\left|\frac{h(x-t)-h(x+t)}{t}\right| \le 2\max_{\mathbb{R}+}|h'(s)| < \infty. \tag{3.103}$$

设

$$k(x+iy) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} h(t)\frac{x-t}{(x-t)^2+y^2}\,\mathrm{d}t.$$

我们将它重写为

$$k(x+iy) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}[h(x-t)-h(x+t)]\frac{t}{t^2+y^2}\,\mathrm{d}t. \tag{3.104}$$

因此, 我们用 $k(x)$ 表示3.102左右两侧的共同值, 从3.104何3.103中知道

$$\begin{aligned}|k(x+iy)-k(x)| &\le \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}|h(x-t)-h(x+t)|\left|\frac{t}{t^2+y^2}-\frac{1}{t}\right|\mathrm{d}t\\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{|h(x-t)-h(x+t)|}{t}\frac{y^2}{t^2+y^2}\,\mathrm{d}t\\ &\le 2\max_{\mathbb{R}}|h'(s)|\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{y^2}{t^2+y^2}\,\mathrm{d}t\\ &= y\max_{\mathbb{R}}|h'(s)|\end{aligned}$$

$\forall x \in \mathbb{R}$. 从而

$$\lim_{y\to 0} k(x+iy) = k(x) \qquad \text{在 } \mathbb{R} \text{ 上一致地},$$

这就证明了3.101. 由于对每个 $y>0$,$k(x+iy)$ 是关于 x 的连续函数, 因此 $k(x)$ 也是连续的. 至此证明完毕. □

对于 $h \in C_c^1(\mathbb{R})$, 我们定义 h 的 Hilbert 变换为

$$\mathbf{H}h(x) = \mathrm{PV}\frac{1}{\pi}\int \frac{h(t)}{x-t}\,\mathrm{d}t;$$

通过我们所展示的, 它将实数与在上半平面满足3.97的解析函数的边界值的虚部联系起来.

定理 3.18. *Hilbert 变换可延拓为有界映射* $\mathbf{H}$:

$$L^p(\mathbb{R}) \to L^p(\mathbb{R}), \quad \forall 1<p<\infty.$$

证明. 假设 $p=2m$,m 是一个整数, 并考虑解析函数 f^{2m}. 由于柯西定理,

$$\int_\Gamma [f(z)]^{2m}\,\mathrm{d}z = 0 \tag{3.105}$$

对上半平面中任意闭周线成立. 我们选择与3.105中相同的闭周线并令 $\varepsilon\to 0, R\to\infty$, 可以得到

$$\int_{\mathbb{R}} (h+ik)^{2m}\,\mathrm{d}x = 0. \tag{3.106}$$

这种关系的实部为

$$\int_{\mathbb{R}} \sum_{j=0}^{m} (-1)^j \begin{pmatrix} 2m \\ 2j \end{pmatrix} h^{2m-2j}k^{2j}\,\mathrm{d}x = 0,$$

显然有

$$\int_{\mathbb{R}} k^{2m}\,\mathrm{d}x \le \int_{\mathbb{R}} \sum_{j=0}^{m-1} \begin{pmatrix} 2m \\ 2j \end{pmatrix} h^{2m-2j}k^{2j}\,\mathrm{d}x. \tag{3.107}$$

对每个 $\varepsilon>0$, 都存在 $C(\varepsilon)>0$ 使得

$$h^{2m-2j}k^{2j} \le C(\varepsilon)h^{2m} + \varepsilon k^{2m} \qquad \forall 1<j<m. \tag{3.108}$$

此时

$$\sum_{j=0}^{m}\binom{2m}{2j}=2^{2m-1},$$

于是结合3.107与3.108并选择 $\varepsilon<\dfrac{1}{2^{2m-1}}$, 对于一个适当大的 $A>0$, 给出

$$\int_{\mathbb{R}} k^{2m}\,\mathrm{d}x\leq A\int_{\mathbb{R}} h^{2m}\,\mathrm{d}x.$$

从而 $\mathbf{H}$ 是一个从 L^{2m} 到 L^{2m} 的有界映射. 然后根据 Riesz 凸定理,$\mathbf{H}$ 是从 L^p 到 L^p,$2\leq p\leq 2m$ 的有界映射. 由于 m 是任意的, 所以 $\forall 2\leq p<\infty$,$\mathbf{H}:L^p\to L^p$ 是有界的.

为了完成 $1<p<2$ 时的证明, 我们使用泛函分析中的一些标准事实. 对于 Banach 空间 X 和对偶空间 X^* 中的连续线性泛函 x^*, 将 $x^*(x)$ 写作 (x,x^*), 其中 $x\in X$. 现在回想一下, 如果 $\mathbf{T}$ 是 Banach 空间 $\mathbf{T}:X\to Y$ 中的有界线性映射, 则其伴随 (或转置)$\mathbf{T}^*:X^*\to Y^*$, 被定义为

$$(\mathbf{T}x,y^*)=(x,\mathbf{T}^*y^*),\qquad y^*\in Y^*,$$

也是一个有界线性映射, 并且算子范数 $\|\mathbf{T}\|$ 和 $\|\mathbf{T}^*\|$ 类似. 现在

$$\mathbf{H}:L^p\to L^q,\quad 2\leq p<\infty,$$

所以 $\mathbf{H}^*:(L^p)^*\to(L^p)^*$ 和 $\|\mathbf{H}\|=\|\mathbf{H}^*\|$. 但众所周知 $(L^p)^*=L^{p'}$, 其中 $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{p'}=1$. 此外, 基于伴随的定义的简单计算表明 $\mathbf{H}^*=-\mathbf{H}$. 因此,$\mathbf{H}:L^{p'}\to L^{p'}$ 的范数等于 $\mathbf{H}:L^p\to L^p$. □

点评. $L^p(\mathbb{R})$ 上的 Hilbert 变换的范数, 即使得 $\|\mathbf{H}h\|_p\leq A_p\|h\|_p$, $\forall h\in L^p(\mathbb{R})$ 的最小常数 A_p, 由下式给出:

$$A_p=\begin{cases}\tan\pi/2p & 1<p\leq 2\\ \cot\pi/2p & 2\leq p<\infty.\end{cases}$$

Gohberg 与 Krupnik[GK] 提出此猜想, 并且证明了 $p=2^n\,(n=1,2,...)$ 的情形; 而 Pichorides[P] 完全证明了此猜想.

参考文献

GK I.C. Gohberg and N.Ja. Krupnik, *On the norm of the Hilbert transform in the space L^p*, Funct. Anal. Appl. **2** (1968), 180-181.

P S.K. Pichorides, *On the best values of the constants in the theorems of M. Riesz, Zygmund and Kolmogorov*, Studia Math. **44** (1972), 165-179.

4. 调和分析

有人说过, 数学当中解决问题最重要的三大工具是微积分, 复变函数与 Fourier 变换. 在本章, 我们考察后两者之间的一些关系, 即 Arne Beurling 所说的“Euclid 群中解析函数与调和分析的密切关系”.

4.1 用复变证明 Fourier 变换的唯一性 (d'après D.J. Newman)

一维 Fourier 变换的唯一性断言, 对于函数 $f \in L^1(\mathbb{R})$, 若其 Fourier 变换

$$\mathcal{F}f(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{ixt}\,\mathrm{d}t = \hat{f}(x)$$

恒为 0, $(\forall x \in \mathbb{R})$, 则 $f = 0$, 即 f 几乎处处为 0. Donald Newman [N] 的下述证明, 堪称复变函数的绝妙应用.

证明. 设对任意 $x \in \mathbb{R}$ 都有 $\hat{f}(x) = 0$. 取定 $a \in \mathbb{R}$, 于是有

$$\int_{-\infty}^{a} f(t)e^{ix(t-a)}\,\mathrm{d}t = -\int_{a}^{\infty} f(t)e^{ix(t-a)}\,\mathrm{d}t \tag{4.1}$$

并且将上式两端共同的值记为 $F_a(x)$. 将 x 取遍复数值; 于是4.1左端为关于 x 的, 定义在左半平面 $\{\mathrm{Im}\,x \le 0\}$ 上的有界, 连续函数, 并且在 $\mathbb{H}_- := \{\mathrm{Im}\,x < 0\}$ 解析; 而等号右侧在 $\{\mathrm{Im}\,x \ge 0\}$ 有界, 连续, 且在 $\mathbb{H} = \{\mathrm{Im}\,x > 0\}$ 解析. 于是 F_a 在 $\mathbb{H}_- \cup \mathbb{R} \cup \mathbb{H} = \mathbb{C}$ 连续, 并且在 $\mathbb{H}_- \cup \mathbb{H}$ 解析, 从而由 Morera 定理可知 F_a 在 $\mathbb{C}$ 解析. 而 F_a 在 $\mathbb{C}$ 有界, 从而由 Liouville 定理知 F_a 为常函数. 在4.1等号右边, 取 $x = is\,(s > 0)$, 令 $s \to +\infty$ 可知 $F_a = 0$. 因此

$$0 = F_a(0) = \int_{a}^{-\infty} f(t)\,\mathrm{d}t, \tag{4.2}$$

并且此式对任意 $a \in \mathbb{R}$ 都成立. 将4.2对 a 求导可得 $f(a)$ 几乎处处为 0. □

参考文献

N D.J. Newman, *Fourier uniqueness via complex variables*, Amer. Math. Monthly **81** (1974), 379-380.

4.2 一个奇特的泛函方程

任何线性函数 $f(x) = mx$ 都满足泛函方程

$$f(x+y) = f(x) + f(y). \tag{4.3}$$

反之, 任何满足上述方程并且在 $x = 0$ 处连续的函数都是线性函数. 这是经典的结果. 在4.3中取 $y = x$, 就有

$$f(2x) = 2f(x). \tag{4.4}$$

定理 4.1. 满足4.4, 并且在 $x = 0$ 处一阶可微的函数必为线性函数.

证明. 在4.4中令 $x = 0$, 得 $f(0) = 0$. 将4.4迭代 n 次可得

$$f(x) = 2^n f(\frac{x}{2^n}). \tag{4.5}$$

由于 f 在 $x = 0$ 可微, 从而

$$f(y) = my + \varepsilon y, \tag{4.6}$$

其中 $m = f'(0)$, $\varepsilon = \varepsilon(y)$ 为关于 y 的函数, 且当 $y \to 0$ 时 $\varepsilon(y)$ 趋于 0.

将4.6的 y 换成 $\frac{x}{2^n}$, 再利用4.5, 则有

$$f(x) = 2^n(\frac{mx}{2^n} + \frac{\varepsilon x}{2^n}) = mx + \varepsilon x.$$

令 $n \to \infty$, 则 $\varepsilon \to 0$, 于是 $f(x) = mx$. □

f 在 $x = 0$ 可微这个条件, **不能**再减弱为 Lipschitz 连续. 事实上, 函数

$$f(x) = x^p, \tag{4.7}$$

其中

$$p = 1 + \frac{2\pi i n}{\log 2}, \qquad n\text{为正整数}, \tag{4.8}$$

也满足4.4, 并且在 $x=0$ 处 Lipschitz 连续.

我们转而考虑4.4式的连续版本:

$$\frac{1}{x}\int_0^x f(y)\,\mathrm{d}y = f(\frac{x}{2}). \tag{4.9}$$

显然, 所有形如 $f(x)=cx+m$ 的函数都满足4.9; 而为了保证4.9的解一定形如这样, 还需要加什么额外条件呢?

假设指数 p 满足

$$2^p = p+1, \tag{4.10}$$

则形如4.7的函数都满足方程4.9. 超越方程4.10有无穷多个解 $p_1, p_2, ...$, 其中当 n 趋于无穷时 $|p_n| \to \infty$. 方程4.10表明 $|2^{p_n}|$ 也趋于无穷, 从而 $\operatorname{Re} p_n$ 趋于无穷. 当 $\operatorname{Re} p_n > N$ 时, 函数 $f_n(x) := x^{p_n}$ 在原点处 N 阶可微. 以上表明, 即使额外增加条件 f 在原点 N 阶可微, 方程4.9的解也不一定形如 $f(x)=c+mx$.

为更进一步研究此问题, 将4.9两边乘 x, 求导得

$$f(x) = f(x/2) + \frac{1}{2}xf'(x/2). \tag{4.11}$$

再将4.11两边关于 x 求 n 阶导可得

$$f^{(n)}(x) = a_n f^{(n)}(x/2) + b_n x f^{(n+1)}(x/2), \tag{4.12}$$

其中 a_n, b_n 为常数, 满足递推关系

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + b_n, \qquad b_{n+1} = \frac{1}{2}b_n.$$

由此可得 $b_n = \frac{1}{2^{n+1}}$, 并且 $a_0 = 1$, $a_1 = 1$, $a_2 = \frac{3}{4}, ...$ 易知当 $n>1$ 时 $a_n < 1$.

假设 f 在 $x=0$ 处为 C^∞ 可微的, 在4.12中令 $x=0$ 可得

$$f^{(n)}(0) = a_n f^{(n)}(0).$$

由于 $n>1$ 时 $a_n<1$, 从而易知

$$f^{(n)}(0) = 0, \qquad n>1. \tag{4.13}$$

综上所述, 有

定理 4.2. *若方程4.9的解 f 在 $x=0$ 处解析, 则 $f(x)=c+mx$.*

而我们的目标是下述不太显然的结果.

定理 4.3. *若方程4.9的解 f 在 $x=0$ 处无穷次可微, 则 $f(x)=c+mx$.*

证明. 由4.13, f 在 $x=0$ 处的所有的高于 1 阶的导数都为 0. 从 f 当中减去 $c+mx$, 其中 $c=f(0), m=f'(0)$, 所得的函数仍记为 f. 由此可不妨 f 在 $x=0$ 处的任意阶导数都为 0.

换元 $x=e^s$, 记

$$f(e^s)=g(s). \tag{4.14}$$

记 $a=\log 2$, 则 $\dfrac{x}{2}=e^{s-a}$, $e^a=2$. 将 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}$ 记成字母上方的点; 将 $f(x/2)=g(s-a)$ 两边对 s 求导, 得

$$\frac{1}{2}xf'(x/2)=\dot{g}(s-a).$$

代入4.11, 则有

$$g(s)=g(s-a)+\dot{g}(s-a). \tag{4.15}$$

取4.15在 $(-\infty,a)$ 的 Fourier 变换

$$\int_{-\infty}^{a} g(s)e^{isz}\,\mathrm{d}s=\int_{-\infty}^{a} g(s-a)e^{isz}\,\mathrm{d}s+\int_{-\infty}^{a}\dot{g}(s-a)e^{isz}\,\mathrm{d}s. \tag{4.16}$$

在上式右边的积分当中换元 $s-a=r$, 并且对第二项分部积分, 则上式等号右边化为

$$e^{iaz}\int_{-\infty}^{0} g(r)e^{irz}\,\mathrm{d}r-ize^{iaz}\int_{-\infty}^{0} g(r)e^{irz}\,\mathrm{d}r+e^{iaz}g(0).$$

记

$$G(z):=\int_{-\infty}^{0} g(r)e^{irz}\,\mathrm{d}r, \tag{4.17}$$

$$R(z):=\int_{0}^{a} g(s)e^{isz}\,\mathrm{d}s-e^{iaz}g(0). \tag{4.18}$$

则4.16可重写为

$$R(z)=D(z)G(z), \tag{4.19}$$

其中

$$D(z) := e^{iaz}(1 - iz) - 1. \tag{4.20}$$

由 $R(z)$ 的定义式4.18, 易知 $R(z)$ 为整函数, 且在上半平面有界:

$$|R(z)| \leq 常数, \qquad 对于 \operatorname{Im} z \geq 0. \tag{4.21}$$

由于 f 在 $x = 0$ 处的各阶导数都为 0, 从而对 $n > 0$ 都有 $f(x) = O(x^n)$. 由 f 与 g 的关系式4.14可知对任意正整数 n,

$$g(s) = O(e^{ns}), \qquad s \to -\infty.$$

因此积分4.17对任何复变量 z 都收敛; 从而 $G(z)$ 为关于 z 的整函数.

将4.19重写为

$$\frac{R(z)}{D(z)} = G(z). \tag{4.22}$$

由于 $G(z)$ 为整函数, 从而 $D(z)$ 的零点 (计重数) 都是 $R(z)$ 的零点. 而 $D(z)$ 的零点都形如 ip_n, 其中 p_n 为方程4.10的解.

引理 4.4. 函数 $G(z)$ 在上半平面 $\operatorname{Im} z > 0$ 有界.

证明. 首先估计 $|D(z)|$. 我们断言, 在射线

$$z = \frac{\pi n}{a} + iv \tag{4.23}$$

成立

$$|D(z)| \geq 1, \tag{4.24}$$

其中 n 为奇数, $v \geq 0$. 为证明该断言, 将4.23代入 $D(z)$ 的定义式4.20:

$$D(\frac{\pi a}{n} + iv) = -e^{-av}(1 + v - \frac{i\pi n}{a}) - 1.$$

从而 $\operatorname{Re} D(\frac{\pi n}{a} + iv) < -1$, 于是4.24得证.

我们再断言, 在下述矩形

$$\frac{\pi n}{a} \leq \operatorname{Re} z \leq \frac{\pi(n+2)}{a}, \qquad 0 \leq \operatorname{Im} z \leq k \tag{4.25}$$

的边界上, 成立

$$|D(z)| > \frac{1}{2}, \tag{4.26}$$

其中 n 为不等于 $-3, -1, 1$ 的奇数, 并且 k 充分大.

由4.24可知, 不等式4.26在矩形的竖直边界成立. 在矩形的顶部, 即 $\operatorname{Im} z = k$, 则4.20的指数因子 e^{iaz} (关于 k) 指数衰减, 从而4.26成立. 在矩形底部 $\operatorname{Im} z = 0$, 质数因子 e^{iaz} 的模长为 1, 且 $|iz| \geq 3$, 从而4.26也成立.

我们注意到 $|R(z)|$ 在 $\operatorname{Im} z > 0$ 有界. 因此由4.26, $\left|\frac{R(z)}{D(z)}\right|$ 在矩形4.25的边界有上界. 由于 $\frac{R(z)}{D(z)}$ 是解析的, 从而由极大模原理, $\left|\frac{R(z)}{D(z)}\right|$ 在矩形内部有相同的上界. 令 $k \to \infty$, 可知 $\left|\frac{R(z)}{D(z)}\right|$ 在上半平面除去带状区域 $|\operatorname{Re} z| < 3$ 的地方有上界. 与之前讨论类似, 我们也易证 $\left|\frac{R(z)}{D(z)}\right|$ 在带状区域 $|\operatorname{Re} z| \leq 3$, $\operatorname{Im} z > k$ 也有上界. 注意上半平面除去以上区域之后所剩下的区域是紧致的, 而 $\frac{R(z)}{D(z)}$ 解析, 从而综上所述, $\left|\frac{R(z)}{D(z)}\right|$ 在上半平面有界. 于是引理得证. □

由4.17式, $G(z)$ 为 $g(x)$ 在 $(-\infty, 0]$ 上的 Fourier 变换, 因此在下半平面 $\operatorname{Im} z < 0$ 有界. 根据引理 4.4, $G(z)$ 在上半平面也有界. 从而整函数 $G(z)$ 在复平面有界, 从而由 Liouville 定理可知 $G(z)$ 为常函数. 注意当 $y \to +\infty$ 时 $G(-iy) \to 0$, 因此 G 恒为 0. 于是由 Fourier 变换的唯一性, 当 $s \leq 0$ 时 $g(s) = 0$. 方程4.14表明

$$f(x) = g(\log x);$$

于是当 $0 < x < 1$ 时成立 $f(x) = 0$. 再反复利用泛函方程4.11, 归纳法易知 $f(x) = 0$ 对 $x < 2^n$ 成立, $n = 1, 2, \ldots$. 从而对任意 $x > 0$ 都有 $f(x) = 0$, 这就证明了定理 4.3. □

参考文献

L Peter D. Lax, *A curious functional equation*, J. Anal. Math. **105** (2008), 383-389.

4.3 Radon 变换的唯一性与非唯一性

1　设 f 为定义在 $\mathbb{R}^2$ 上的函数, 且对平面上的任何直线 ℓ 都有

$$\int_\ell f\,\mathrm{d}s=0, \tag{4.27}$$

那么 f 是否一定几乎处处为 0?

若 $f\in L^1$, 则答案是肯定的. 最简单的证法是证明 f 的 Fourier 变换 [1]

$$\hat f(\xi,\eta)=\iint f(x,y)e^{i(x\xi+y\eta)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

恒为 0. 事实上, 若直线 ℓ 过原点, 则通过正交变换, 不妨 ℓ 为 y 轴. 从而由 Fubini 定理,

$$\begin{aligned}\hat f(0,\eta)&=\iint e^{iy\eta}f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\&\int e^{iy\eta}\left(\int f(x,y)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y;\end{aligned} \tag{4.28}$$

并且对于每个 y, 内层积分都为 0. 从而 $\hat f$ 在 ℓ 恒为 0, 于是 (由 ℓ 的任意性)$\hat f=0$, 从而由 Fourier 变换的唯一性可知 $f=0$. 注意对于 $f\in L^1$, $\hat f$ 为连续函数, 从而该证明事实上表明, 只需要4.27式对某一族直线 $\{\ell_\alpha\}$ 都成立即可, 其中存在一族直线 $\{\hat\ell_\beta\}$, 使得 $\{\hat\ell_\beta\}$ 的所有方向构成的集合是稠密的, 并且对于每个 $\hat\ell_\beta$, 几乎所有的与 $\hat\ell_\beta$ 垂直的直线都属于 $\{\ell_\alpha\}$.

事实上, 上述讨论也可以倒推. 若4.28左边恒为 0, 则由一维 Fourier 变换的唯一性, $\displaystyle\int f(x,y)\,\mathrm{d}x$ 对几乎所有的 y 都为 0. 反之, 对于过原点的直线 $\tilde\ell$, 若几乎所有垂直于 $\tilde\ell$ 的直线都满足4.27, 则 f 的 Fourier 变换 $\hat f$ 在 $\tilde\ell$ 恒为 0. 这在后文中十分有用.

2　若可积函数 f 是紧支的 (在某个有界集之外恒为 0), 则有更强的结果. 此式, Fourier 变换 $\hat f$ 为关于 ξ,η 的整函数. 假设 $\hat f$ 在无穷多条过原点的直线 $\ell_1,\ell_2,\ldots$ 上恒为 0. 则对每个 j, $\hat f$ 能为 L_j 整除, 其中 L_j 为以 ℓ_j 为零空间的 $\mathbb{R}^2$ 的线性函数. 记 $\boldsymbol{\xi}:=(\xi,\eta)$, 则对任意 n 都有 $\hat f(\boldsymbol{\xi})=O(|\boldsymbol{\xi}|^n)$, 从而 $\hat f$ 的 Maclaurin 展开恒为 0, 从而 $f=0$. (另一种证法是, 不妨直线 ℓ_j 满足方程 $\eta=\alpha_j\xi$, 再不妨 $\alpha_j\to\alpha$. 任取 $\xi\in\mathbb{C}$, 函数 $g(z):=\hat f(\xi,z\xi)$ 为整函数, 且每个 α_j 都为其零点. 这迫使 $g(z)\equiv 0$, 于是 $\hat f(\xi,\eta)=0$, 从而 $f\equiv 0$.) 这说明, 若 f 是紧支的, 则只需要4.27式对对某一族直线 $\{\ell_\alpha\}$ 都成立即可, 其中存在一族直线 $\{\hat\ell_\beta\}$, 使得 $\{\hat\ell_\beta\}$ 的所有方向构成的集合是无限集, 并且对于每个 $\hat\ell_\beta$, 几乎所有的与

[1] 这里不妨去掉常数 $\dfrac{1}{2\pi}$, 影响不大.

$\hat{\ell}_\beta$ 垂直的直线都属于 $\{\ell_\alpha\}$.

上述结论当 Fourier 变换 $\hat{f}$ 为 $\mathbb{R}^2$ 上的实解析函数时也成立. 譬如, 当存在正常数 K, c 使得

$$|f(x,y)| \le Ke^{-c(|x|+|y|)}.$$

另一方面, 仅仅在具有有限个方向的一族直线上满足 4.27式的紧支函数 (几乎) 具有任意形态. 事实上, 给定过原点的直线 $\ell_1, \ell_2, ..., \ell_n$, 可以取多项式 $P = P(\boldsymbol{\xi})$, 使得 P 在 $\ell_1, ..., \ell_n$ 的并集上恒为 0; 例如 $P = L_1 L_2 \cdots L_n$, L_i 为以 ℓ_i 为零空间的线性函数. 记 $D := (-i\dfrac{\partial}{\partial x}, -i\dfrac{\partial}{\partial y})$. 任取紧支光滑函数 g, 记 $f = P(D)g$. 由 Fourier 分析的众所周知的结果, 有

$$\hat{f}(\boldsymbol{\xi}) = \widehat{P(D)g}(\boldsymbol{\xi}) = P(\boldsymbol{\xi})\hat{g}(\xi),$$

从而 $\hat{f}$ 在每个 ℓ_i 上都恒为 0. 于是4.27式对于任意一条与某个 ℓ_j 垂直的直线 ℓ 都成立. □

3 然而对一般情况, 即使对于 $\mathbb{R}^2$ 的光滑速降 Schwartz 函数空间 $\mathscr{S}$ 当中的函数, 上一节中讨论的类型也预计不会有任何改进. 事实上, 任取单位圆周的一段弧 α, 将以原点为顶点的关于弧 α 的角状区域也记为 α. 取一个包含于区域 α 的圆盘 D, 任取非零光滑函数 ϕ 使得 ϕ 的支集包含于 D, 记 $f = \hat{\phi}$. 由于 $\phi \in \mathscr{S}$, 从而 $f \in \mathscr{S}$. 而且容易验证4.27式对于任何一条垂直于某个不在 α 内的方向的直线都成立. 事实上, 由 Fourier 逆变换公式,

$$\hat{f}\boldsymbol{\xi} = \hat{\hat{\phi}}(\boldsymbol{\xi}) = (2\pi)^2\phi(-\boldsymbol{\xi}) = 0$$

对任何过原点且方向不在 α 内的直线上都成立. 这容易由第 1 段的最末所得.

因此, 对单位圆周 S^1 的任何开集 Θ(其中的元素视为直线的方向), 存在 $\mathscr{S}$ 中的非零函数 f, 使得4.27对所有方向不在 Θ 里的直线都成立. 这表明, 即使对于 $\mathscr{S}$ 中的函数, 4.27对"几乎所有 (稠密) 方向"的直线都成立这个假设条件不能放宽.

4 若去掉 f 可测这个假设, 情况就令人惊讶了: 存在满足4.27的不可测的函数. 事实上, Sierpiński [Si] 断言, 存在不可测集 E 使得平面上的任何直线与 E 至多相交于 2 个点. 则特征函数 χ_E 显然满足4.27, 并且非零. 如果再假设 f 紧支, 则只需考虑 $f = \chi_{E\cap D}$, 其中 D 为以原点为圆心的半径足够大的圆盘.

若承认连续统假设, Sierpiński 的这个断言的证明并不难 [O, pp. 54-55], 我们可以介绍. 考虑集合族 $\mathscr{F} := \left\{F \subseteq \mathbb{R}^2 \middle| F\text{为正测度的闭集}\right\}$. 则易知 $\mathscr{F}$ 具有连续统的势 (与 $\mathbb{R}$ 等势). 因此存在 $\mathscr{F}$ 的良序 $\le$, 使得 $\mathscr{F} = \{F_\alpha\}$ 的任何元素 F_α 在该良序下的前驱有

至多可数个; 也就是说 $\mathscr{F}$ 的序数为 ω_1, 第一个不可数序数. 对于每个序数 $\alpha < \omega_1$, 如果对每个 $\beta < \alpha$ 都已取定 $p_\beta \in F_\beta$, 则平面点集 $E_\alpha := \left\{p_\beta \middle| \beta < \alpha\right\}$ 为至多可数集. 于是 E_α 当中的每两点确定一条直线, 这样总共确定了至多可数条直线, 这些直线的并集是零测集; 而 F_α 的测度为正, 于是存在 $p_\alpha \in F_\alpha$, 使得 p_α 不在上述所说的任何直线上.

归纳地, 我们有集合 $E := \left\{p_\alpha \middle| \alpha < \omega_1\right\}$, 使得 E 当中的任何三点都不共线, 于是平面上的任何直线与 E 至多有 2 个交点. 假设 E 是可测集, 则由 Fubini 定理易知 $m(E) = 0$. 但另一方面, E 的补集 $\overline{E}$ 也是可测的, 并且由 Lebesgue 测度的正则性有

$$m(\overline{E}) = \sup\left\{m(F) \middle| F \subseteq \overline{E},\, F\text{为闭集}\right\}$$

由于 E 与任何正测度闭集都相交, 从而 $m(\overline{E}) = 0$. 这就导出矛盾. 从而 E 不可测.

5 上一小节的例子并不太让人满意. 它不是, 也不可能是可构造的. 事实上, 存在某个 (选择公理不成立的) 集合论模型, 使得任何集合, 从而任何函数, 都是可测的 [So]. 更重要的是, 这个例子避开了重点, 而把精力用在是否可测这种无足轻重的问题上. 真正的问题是, 是否存在性质比较好 (比如, 连续) 的函数, 使得它对任何直线都满足4.27, 但不恒为 0. 此问题的答案是肯定的.

我们将构造一个非零的整函数 $g(z)$, 使得平面上的任何直线 ℓ 都满足

$$\int_\ell |g'(z)|\,\mathrm{d}s < \infty \tag{i}$$

$$g(z) \to 0, \quad z \to \infty, z \in \ell. \tag{ii}$$

于是由 (i), 函数 $f(z) := g'(z)$ 在任何直线上都是绝对可积的; 于是再由 (ii) 与微积分基本定理可知4.27成立.

这种函数的最初的构造 [Z2] 用到了关于 Arakelian 在整函数切向逼近的艰深的理论. 而 David Armitage [A1] 用“移动极点”的经典技巧给出了一个简单漂亮的构造, 这基于以下引理:

引理. 设 $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, $|z_1 - z_2| < 1$. 函数 h 在 $\mathbb{C} \setminus \{z_1\}$ 解析. 则对任意 $\varepsilon > 0$, 存在在 $\mathbb{C} \setminus \{z_2\}$ 解析的函数 k, 使得

$$|h(z) - k(z)| < \frac{\varepsilon}{(1+|z|)^2}, \qquad \forall |z - z_2| > 1. \tag{4.29}$$

证明. 将 h 在环形区域 $\left\{z\middle||z_1-z_2|<|z-z_2|\right\}$ 作 Laurent 展开, 有

$$h(z)=h_0(z)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{(z-z_2)^n},\tag{4.30}$$

其中 h_0 为整函数, 且该级数在 $|z-z_2|\geq 1$ 一致收敛. 断言对于充分大的 m, 函数

$$k(z):=h_0(z)+\sum_{n=1}^{m}\frac{a_n}{(z-z_2)^n}\tag{4.31}$$

满足4.29. 事实上, 由函数 $\dfrac{|z-z_2|}{1+|z|}$ 的连续性以及当 $z\to\infty$ 时 $\dfrac{|z-z_2|}{1+|z|}\to 1$ 可知, 存在常数 $C=C(z_2)$ 使得

$$\frac{1}{|z-z_2|^2}<\frac{C}{(1+|z|)^2},\qquad \forall\,|z-z_2|>1.\tag{4.32}$$

注意到当 $|z-z_2|>|z_1-z_2|$ 时级数4.30绝对收敛, 以及 $|z_1-z_2|<1$, 从而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|<\infty$. 从而对于充分大的 m, 可以使得

$$\sum_{n=m+1}^{\infty}|a_n|<\frac{\varepsilon}{C}.\tag{4.33}$$

由此可知, 对于 $|z-z_2|>1$,

$$\left|\sum_{n=m+1}^{\infty}\frac{a_n}{(z-z_2)^n}\right|\leq\sum_{n=m+1}^{\infty}\frac{|a_n|}{|z-z_2|^n}\leq\sum_{n=m+1}^{\infty}\frac{|a_n|}{|z-z_2|^n}<\frac{\varepsilon}{C}\frac{1}{|z-z_2|^2},$$

再由4.32可知

$$\left|\sum_{n=m+1}^{\infty}\frac{a_n}{(z-z_2)^n}\right|<\frac{\varepsilon}{(1+|z|)^2},\qquad \forall\,|z-z_2|>1,$$

从而得证. □

为构造 g, 取半抛物线 $P:=\left\{(x,x^2)\middle|x\geq 0\right\}$ 上的点列 $\{z_n\}$, 使得对任意 $n\geq 1$ 都有 $z_0=0$, $|z_n-z_{n-1}|<1$, 并且 $z_n\to\infty$. 记 $g_0(z)=\dfrac{1}{z^2}$. 假设对于 $0\leq k\leq n-1$ 都已

经定义 g_k, 则由刚才的引理, 存在在 $\mathbb{C}\setminus\{z_n\}$ 解析的函数 g_n 使得

$$|g_n(z)-g_{n-1}(z)|<\frac{1}{2^n}\frac{1}{(1+|z|)^2},\qquad \forall\,|z-z_n|>1. \tag{4.34}$$

由此归纳构造函数列 $\{g_n\}$. 易知 $\{g_n\}$ 内闭一致收敛于某个整函数 g. 对于 $a>0$, 记 P_a 为平面 $\mathbb{C}$ 中与半抛物线 P 的距离大于 a 的点构成的集合. 则由4.34, 对 $z\in P_1$, 成立

$$|g(z)-g_0(z)|\le\sum_{n=1}^{\infty}|g_n(z)-g_{n-1}(z)|<\frac{1}{(1+|z|)^2}<\frac{1}{|z|^2}.$$

从而 $z\neq 0$, 并且对 $z\in P_1$ 成立

$$|g(z)|\le\frac{2}{|z|^2}. \tag{4.35}$$

再由导函数的 Cauchy 积分公式, 易知在 $z\in P_2$ 成立

$$|g'(z)|\le\frac{2}{|z|^2}. \tag{4.36}$$

注意对任何直线 ℓ, $\ell\setminus P_2$ 都为 ℓ 的有界子集. 从而由4.35与4.36易得 (i)(ii).

注记.

1. 上述方法构造的 f 其实有更强的性质: 不仅 $f(=g')$ 在任何直线 ℓ 绝对可积且积分为 0, f 的任意阶导数也如此! 事实上, 用得到4.36的方法可以类似证明当 $z\in P_2$ 时成立 $|g^{(n)}(z)|\le\dfrac{2n!}{|z|^2}$, 从而 (i)(ii) 当中的 g 换成 $g^{(n)}$ 依然成立, $n=1,2,\ldots$. Robert Burckel [Bu] 给出了满足沿任意 (无界) 代数曲线 ℓ 成立 (i)(ii) 的整函数的构造.
2. 具有上述行为的整函数的具体例子可见 [A2], 这里面还有可以追溯到 Lindelöf 与 Mittag-Leffler 时期的参考文献.
3. 更多的近期进展可见 [BMR] 与 [BO].

点评. 在古典情形, $\mathbb{R}^n$ 上的函数 f 的 Radon 变换为

$$\hat{f}(\xi)=\int_{\xi}f(x)\,\mathrm{d}m(x),$$

其中 $\hat{f}$ 定义在 $\mathbb{R}^n$ 的所有的 $(n-1)$ 维仿射子空间构成的集合上, ξ 为 $\mathbb{R}^n$ 的 $(n-1)$ 维仿射子空间, $m(x)$ 为 ξ 上通常的 Lebesgue 测度. 这一由 J.Radon[R] 于 1917 年提出的理论在最近几十年发展显著. 人们研究 Radon 变换的映射性质，并得到了与更常见的 Fourier 变换理论平行的结果. 与此同时, 对定义在非欧氏空间上类似版本的 Radon 变换的研究也取得了有趣, 诱人的成果. (非欧理论的困难远远超过经典理论, 这在 [LP] 中得到充分说明.) 可以在 Helgason 的 (最新的) 权威著作 [H] 当中了解此方面的进展; 也可在 [St] 中找到此方面的有趣的入门介绍. 有兴趣探索直线 (或平面) 被圆周 (或球面) 取代时所得理论的读者，请参阅 Fritz John 的可爱的小专著 [J]; 此方面的进展见 [Z1].

从“现实生活”应用的角度来看, 从射电天文学到核磁共振重构, 人们也对这一课题产生了极大的兴趣. 最引人注目的是医学放射学的应用, 即计算机断层扫描. 后者被称为自 X 射线发现以来诊断医学中最重要的发展; A.M. Cormack 和 G.N. Hounsfield 因为“计算机辅助断层摄影术的发展”而获得 1979 年诺贝尔医学和生理学奖, 部分证实了这一判断.

参考文献

A1 D.H. Armitage, *A nonconstant continuous function on the plane whose integral on every line is zero*, Amer. Math. Monthly **101** (1994), 892-894.

A2 D.H. Armitage, *Entire functions that tend to zero on every line*, Amer. Math. Monthly **114** (2007), 251-256.

BMR Claude Bélisle, Jean-Claude Massé and Thomas Ransford, *When is a probability measure determined by infinitely many projections?*, Ann. Probab. **25** (1997), 767-786.

Bo Jan Boman, *Unique continuation of microlocally analytic distributions and injectivity theorems for the ray transform*, Inverse Probl. Imaging **4** (2010), 619-630.

Bu R.B. Burckel, *Entire functions which vanish at infinity*, Amer. Math. Monthly **102** (1995), 916-918.

H Sigurdur Helgason, *Integral Geometry and Radon Transforms*, Springer, 2010.

J Fritz John, *Plane Waves and Spherical Means, Applied to Partial Differential Equations*, Interscience, 1955.

LP Peter D. Lax and Ralph S. Phillips, *A local Paley-Wiener theorem for the Radon transform of L_2 functions in a non-Euclidean setting*, Comm. Pure Appl. Math. **35** (1982), 531-554.

O John C. Oxtoby, *Measure and Category*, Springer, 1971.

R Johann Radon, *Über die Bestimmung von Fuktionen durch ihre Integralwerte längs gewisser Mannigfaltigkeiten*, Ber. Verh. Sächs Akad. Wiss. Leipzig Math.-Natur Kl. **69** (1917), 262-277.

Si Waclaw Sierpiński, *Sur un problème concernant les ensembles mesurables superficiellement*, Fund. Math. **1** (1920), 112-115.

So Robert M. Solovay, *A model of set-theory in which every set of reals is Lebesgue measurable*, Ann. of Math. (2) **92** (1970), 1-56.

St Robert S. Strichartz, *Radon inversion – Variations on a theme*, Amer. Math. Monthly **89** (1982), 161-175.

Z1 Lawrence Zalcman, *Offbeat integral geometry*, Amer. Math. Monthly **87** (1980), 161-175.

Z2 Lawrence Zalcman, *Uniqueness and nonuniqueness for the Radon transform*, Bull. London Math. Soc. **14** (1982), 241-245.

4.4 Paley-Wiener 定理

调和分析中的很多理论都能推出 Paley-Wiener 定理. 该定理通过研究某个定义在实轴的函数的 Fourier 变换在复平面某区域的解析性来刻画该函数的性质.

例如, 假设可积函数 F 的支集包含于正实轴 $\mathbb{R}_+ := [0,+\infty)$, 则

$$f(w) := \int_0^\infty F(\xi)e^{i\xi w}\,\mathrm{d}\xi \tag{4.37}$$

为上半平面 $\left\{w = u+iv \middle| v>0\right\}$ 的有界解析函数. 若 F 在区间 $[0,\ell]$ 恒为 0, 事情就有意思了. 此时, 换元 $\xi=\sigma+\ell$, 则

$$f(w) = \int_\ell^\infty F(\xi)e^{i\xi w}\,\mathrm{d}\xi = e^{i\ell w}\int_0^\infty F(\sigma+\ell)e^{i\sigma w}\,\mathrm{d}\sigma,$$

从而当 $\operatorname{Im} w \geq 0$ 时成立

$$|e^{-i\ell w}f(w)| \leq \int_0^{+\infty} |F(\sigma+\ell)|\,\mathrm{d}\sigma = \int_\ell^\infty |F(\xi)|\,\mathrm{d}\xi. \tag{4.38}$$

事实上, 4.38不等号左边的函数的有界性等价于 F 在 $[0,\ell]$(几乎处处) 恒为 0. 这正是下述 Paley-Wiener 定理:

定理. *(Paley-Wiener)*

设 $F \in L^1(\mathbb{R}_+)$, $\ell > 0$. 则 F 在 $[0,\ell]$ 几乎处处为 0 当且仅当存在常数 $A>0$ 使得

$$|f(w)| \leq Ae^{-\ell v}, \qquad \forall\, v := \operatorname{Im} w > 0. \tag{4.39}$$

证明. 之前的讨论已经说明当 F 在 $[0,\ell]$ 几乎处处为 0 时成立4.39. 于是只需证明逆命题, 即从4.39能推出 F 在 $[0,\ell]$ 几乎处处为 0. 为此, 只需证明对任意 $0<d<\ell$, 以及任

意支集包含于 $[0,\ell-d]$ 的光滑函数 G, 成立

$$(F,G) := \int_0^{\infty} F(\xi)\overline{G}(\xi)\,\mathrm{d}\xi = 0. \tag{4.40}$$

我们记 $g(u) := \displaystyle\int_0^{\ell-d} G(\xi)e^{i\xi u}\,\mathrm{d}\xi$, 于是

$$\overline{g}(u) = \int_0^{\ell-d} \overline{G}(\xi)e^{-i\xi u}\,\mathrm{d}\xi. \tag{4.41}$$

我们断言

$$(F,G) = \frac{1}{2\pi}(f,g), \tag{4.42}$$

其中

$$(f,g) := \int_{-\infty}^{\infty} f(u)\overline{g}(u)\,\mathrm{d}u. \tag{4.43}$$

事实上, 取 $L^1\cap L^2$ 中的函数列 $\{F_n\}$ 依 L^1 范数逼近 F, 由 Parseval 公式得

$$(F_n,G) = \frac{1}{2\pi}(f_n,g), \tag{4.44}$$

其中 $f_n(u) := \displaystyle\int_0^{+\infty} F_n(\xi)e^{i\xi u}\,\mathrm{d}\xi$. 由于 f_n 在 $\mathbb{R}$ 一致收敛于 f, 并且 g(作为紧支光滑函数的 Fourier 变换) 为 Schwartz 速降函数, 从而可积. 于是在4.44当中令 $n\to+\infty$ 即得4.42.

4.41表明 $\overline{g}$ 可解析延拓至整个复平面, 得到整函数

$$h(w) = \int_0^{\ell-d} \overline{G}(\xi)e^{-i\xi w}\,\mathrm{d}\xi. \tag{4.45}$$

由于 G 紧支光滑, 将4.45分部积分两次, 易知存在常数 $C>0$ 使得

$$|h(w)| \le \frac{Ce^{(\ell-d)v}}{1+|w|^2}, \qquad v := \operatorname{Im} w > 0. \tag{4.46}$$

注意 f 在上半平面有界解析, 从而由 Cauchy 积分公式以及不等式估计4.46可知, 我们

可以把4.43的积分路径 (实数轴) 平移至 $\operatorname{Im} w = v > 0$, 即:

$$(f,g) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)h(u)\,\mathrm{d}u = \int_{-\infty}^{\infty} f(u+iv)h(u+iv)\,\mathrm{d}u. \tag{4.47}$$

再由上界估计4.39与4.46可知

$$|f(w)h(w)| \le \frac{AC}{1+|w|^2}e^{-dv},$$

于是当 $v \to +\infty$ 时, 上式右侧趋于 0; 而上式左侧与 v 无关, 从而左侧必然为 0. 于是, 由4.42可知对支集包含于 $[0,\ell]$ 的某个紧真子区间的任何光滑函数 G 都成立 $(F,G)=0$, 因此 F 在 $[0,\ell]$ 几乎处处为 0, 得证. □

点评. 正如前面所说, 还有好多个叫做 Paley-Wiener 的定理. 这之中最有名的也许是以下:

> **定理.** [*PW, pp. 11-12*]
>
> 设 $A>0$, f 为定义在 $\mathbb{R}$ 上的函数. 则 $f \in L^2(\mathbb{R})$ 并且 f 可以解析延拓为“至多 A-指数型”的整函数当且仅当存在 $F \in L^2[-A,A]$ 使得
>
> $$f(u) = \int_{-A}^{A} F(\xi)e^{i\xi u}\,\mathrm{d}\xi. \tag{4.48}$$

该定理的详细, 自包含的证明见 [Ch, pp. 166-122]. 其中“至多 A-指数型”是指, 对任意 $\varepsilon > 0$, 存在常数 $C_\varepsilon > 0$ 使得

$$|f(w)| \le C_\varepsilon e^{(A+\varepsilon)|w|}, \qquad w \in \mathbb{C}.$$

事实上, 若4.48成立, 则当 $w \to \infty$ 时有 $f(w) = O(e^{A|w|})$.

参考文献

Ch K. Chandrasekharan, *Classical Fourier Transforms*, Springer-Verlag, 1989.

PW Raymond E.A.C. Paley and Norbert Wiener, *Fourier Transforms in the Complex Plane*, American Mathematical Society, 1934.

4.5 Titchmarsh 卷积定理

我们考虑正实轴 $\mathbb{R}_+ := [0, \infty)$ 上的可积函数. 对于这样的函数 F, 即其支集的下确界

$$\ell_F := \max\left\{\eta \middle| F(\xi) = 0, \text{对于几乎所有}\xi < \eta\right\}.$$

Titchmarsh[T] 的一个著名结果描述了 ℓ_F 关于卷积运算的性质.

定理. 设 $A, B \in L^1(\mathbb{R}_+)$, 记

$$(A * B)(\xi) = \int_0^\xi A(\eta)B(\xi - \eta)\,\mathrm{d}\eta \tag{4.49}$$

为它们的卷积. 则成立

$$\ell_{A*B} = \ell_A + \ell_B. \tag{4.50}$$

证明. 对于 $\xi < \ell_A + \ell_B$, 易知4.49右侧的积分为 0 (这是因为对几乎所有的 η, 被积函数中至少有一个因子为 0). 因此当 $\xi < \ell_A + \ell_B$ 时 $(A * B)(\xi) = 0$, 从而

$$\ell_A + \ell_B \leq \ell_{A*B}. \tag{4.51}$$

我们只需再证明4.51的等号成立.

为此, 回顾上一节的 Paley-Wiener 定理, 可知

$$\ell_F = \max\left\{\ell \middle| \left|f(w)e^{-i\ell w}\right| \leq C, \exists C > 0\right\},$$

其中 $f(w) := \displaystyle\int_0^\infty F(\xi)e^{i\xi w}\,\mathrm{d}\xi$. 等价地, 用上半平面有界解析函数代数 $\mathcal{B}$ 的整除性的语言, ℓ_F 为能在 $\mathcal{B}$ 中整除 F 的 Fourier 变换的 e^{iw} 的最高幂次.

我们利用 $\mathcal{B}$ 的整除性理论. 分别将 A, B 的 Fourier 变换记作 $a(w)$, $b(w)$, 则 $a, b \in \mathcal{B}$. 则卷积 $A * B$ 的 Fourier 变换为 $\sqrt{2\pi}ab$. 因此, 4.50可以被重新表述为: 若 ℓ_A 与 ℓ_B 分别为能够在 $\mathcal{B}$ 中整除 a, b 的 e^{iw} 的最高幂次, 则 ab 中含有的 e^{iw} 的最高幂次为 $\ell_A + \ell_B$.

为证明它, 将 a, b(在 $\mathcal{B}$ 中) 因式分解为 $a = e^{i\ell_A w}c$ 以及 $b = e^{i\ell_B w}d$, 其中 $c, d \in \mathcal{B}$. 则断言 c, d 都与 e^{iw} 互素. 这是因为, 根据定理 3.13, e^{iw} 的因子必形如 e^{ikw}, 其中 $k > 0$;

但另一方面显然 c, d 都不可能存在这样的因子, 否则 a 或 b 就能被 e^{iw} 的更高次幂整除. 之后再由定理 3.12 可知 cd 也与 e^{iw} 互素. 这表明 $ab = e^{i(\ell_A+\ell_B)w}cd$ 不能被 e^{iw} 的高于 $\ell_A + \ell_B$ 次幂整除, 从而完成定理的证明. □

点评. 有趣的是, 尽管 Titchmarsh 卷积定理是一个实变的结果, 但 Titchmarsh 本人的原始证明 [T] 却用了复变函数论, 接下来的四分之一个世纪的证明也是如此. 直到 1952 年, Mikusiński 与 Ryll-Nardzewski 才发现了避开复变函数论的证明方法. 相当简单的初等证明现在可以在 [M] 和 [D] 中找到. 上面给出的证明 [L] 表明, 复变的方法并非不自然的.

参考文献

D Raouf Doss, *An elementary proof of Titchmarsh's Convolution Theorem*, Proc. Amer. Math. Soc. **104** (1988), 181-184.

L Peter D. Lax, *Translation invariant spaces*, Acta Math. **101** (1959), 163-178.

M Jan Mikusiski, *The Bochner Integral*, Birkhäuser Verlag, 1978.

T E.C. Titchmarsh, *The zeros of certain integral functions*, Proc. London Math. Soc. (2) **25** (1926), 283-302.

4.6 Hardy 定理

回顾 $f \in L^1(\mathbb{R})$ 的 Fourier 变换公式

$$(\mathcal{F}f)(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{ixu}\,\mathrm{d}x = \hat{f}(u).$$

特别地, $(e^{-\alpha x^2})^\wedge = \dfrac{1}{\sqrt{2\alpha}}e^{-\frac{u^2}{4\alpha}}$, 因此有 $(e^{-x^2/2})^\wedge = e^{-u^2/2}$. 更一般地, 若 H_n 为 n 阶 Hermite 多项式, 并且

$$\varphi_n(x) = e^{-x^2/2}H_n(x) = (-1)^n e^{x^2/2}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^n e^{-x^2}, \tag{a}$$

则有 $\hat{\varphi}_n(u) = i^n\varphi_n(u)$.

根据调和分析的一个 (由 G.H. Hardy 与 Norbert Wiener 所贡献的) 一般原理, 非零函数以及它的 Fourier 变换不能都“非常小”. 著名的“不确定原理”便是此现象的一个例子. 而另一个例子便是 Hardy [Ha] 的如下优美的定理:

定理. 设 $f \in L^1(\mathbb{R})$, 并且存在正常数 $C', C'', \alpha\,\beta$ 使得

$$|f(x)| \le C' e^{-\alpha x^2}, \quad 且 \quad |\hat{f}(u)| \le C'' e^{-\beta u^2} \tag{b}$$

对任意 $x, u \in \mathbb{R}$ 都成立. 则有:

(1) 若 $\alpha\beta = \frac{1}{4}$, 则 $f(x) = Ae^{-\alpha x^2}$, $\hat{f}(u) = \frac{A}{\sqrt{2\alpha}} e^{-\frac{u^2}{4\alpha}}$ 对某常数 A 成立.

(2) 若 $\alpha\beta > \frac{1}{4}$, 则 $f = \hat{f} = 0$.

(3) 若 $\alpha\beta < \frac{1}{4}$, 则存在无穷多个这样的函数 f. [a]

[a]译者注: 这里显然要把两个相差常数倍的函数认为是同一个, 否则结论平凡.

该证明需要用到 Phragmén-Lindelöf 定理 (附录 C) 的一个推论, 以及 Liouville 定理. 为方便起见我们将它表述为如下引理.

引理. 设 g 为整函数, 并且存在常数 $a, C > 0$ 使得以下成立:

(i) $|g(w)| \le Ce^{a|w|}$, $\forall w \in \mathbb{C}$,

(ii) $|g(u)| \le Ce^{-au}$, $\forall u > 0$.

那么存在常数 A, 使得 $g(w) = Ae^{-aw}$, $(w \in \mathbb{C})$.

证明. 取足够小的 $\delta > 0$, 对函数

$$F_\delta(w) := g(w) \exp\left[\left(a + ia\tan\frac{\delta}{2}\right) w\right]$$

在角形区域 $D_\delta := \left\{w \in \mathbb{C} \middle| 0 < \arg w < \pi - \delta\right\}$ 当中运用 Phragmén-Lindelöf 定理 (自行验证 $F_\delta(w)$ 的增长阶), 我们得到

$$\sup_{D_\delta} |F_\delta(w)| \le \max\left\{\sup_{u>0} |F_\delta(u)|, \sup_{r>0} |F_\delta(re^{i(\pi-\delta)})|\right\}.$$

而由条件 (ii) 可知, 对于 $u \ge 0$ 有

$$|F_\delta(u)| = |g(u)|e^{au} \le Ce^{-au}e^{au} = C.$$

另一方面, 对于 $w = re^{i(\pi-\delta)} = -r\cos\delta + ir\sin\delta$, 有

$$\mathrm{Re}\left(a + ia\tan\frac{\delta}{2}\right)w = -ar\left(\cos\delta + \tan\frac{\delta}{2}\sin\delta\right) = -ar,$$

从而对这样的 w, 由条件 (i) 可知

$$|F_\delta(w)| \le |g(w)|\left|\exp\left(a + ia\tan\frac{\delta}{2}\right)w\right| \le Ce^{ar}e^{-ar} = C.$$

从而对任意 $0 < \delta < \pi$, $|F_\delta(w)| \le C$ 在 D_δ 成立. 因此

$$|g(w)e^{aw}| = \lim_{\delta\to 0}|F_\delta(w)| \le C$$

在上半平面 $\mathrm{Im}\, w \ge 0$ 成立. 用同样的方法可知该不等式在下半平面也成立. 因此在复平面 $\mathbb{C}$ 上都有 $|g(w)e^{aw}| \le C$, 于是由 Liouville 定理可知 $g(w)e^{aw}$ 为常数. □

现在我们回到:

Hardy 定理的证明. 通过简单的变量代换 (自变量乘常数倍), 不妨 $\alpha = \beta$. 先证明关键的 (1). 假设 $\alpha = \beta = \dfrac{1}{2}$, 则

$$\hat{f}(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} f(x)e^{ixw}\,\mathrm{d}x$$

是关于 $w = u + iv$ 的整函数, 并且有

$$\begin{aligned}
|\hat{f}(w)| &\le \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} |f(x)|e^{-xv}\,\mathrm{d}x \\
&\le \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} C'e^{-\frac{x^2}{2}}e^{-xv}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{C'}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x+v)^2}{2}}\,\mathrm{d}x \cdot e^{\frac{v^2}{2}} \\
&= C'e^{\frac{v^2}{2}}.
\end{aligned}$$

若 f 为偶函数, 则 $\hat{f}$ 也是偶函数, 从而 $g(w) := \hat{f}(\sqrt{w})$ 为整函数. 由于 $|\hat{f}(w)| \le C'e^{\frac{v^2}{2}}$, 从而

$$|g(w)| \le C'\exp\frac{(\mathrm{Im}\sqrt{w})^2}{2} \le C'e^{\frac{|w|}{2}}.$$

此外, 再注意题设条件 $|\hat{f}(u)| \le C''e^{-\frac{u^2}{2}}$ 对 $u>0$ 成立, 从而 $|g(u)| \le C''e^{-\frac{u}{2}}$, $(u>0)$. 将 C' 与 C'' 换成 $C := \max\{C', C''\}$, 再用引理, 我们得到 $g(w) = Ae^{-\frac{w}{2}}$, 从而 $\hat{f}(w) = g(w^2) = Ae^{-\frac{w^2}{2}}$, 以及 $f(x) = Ae^{-\frac{x^2}{2}}$. 这就完成了当 f 为偶函数时 (1) 的证明.

若 f 为奇函数, 则 $\hat{f}$ 也为奇函数, 从而 $\hat{f}(0)=0$, 从而 $\dfrac{\hat{f}(w)}{w}$ 为偶的整函数. 将之前的论证过程用在偶整函数 $\dfrac{\hat{f}(w)}{w}$ 上, 可得 $\dfrac{f(w)}{w} = Ae^{-\frac{w^2}{2}}$. 又因为当 $u>0$ 时 $|\hat{f}(w)| \le C''e^{-\frac{u^2}{2}}$, 从而必有 $A=0$, 于是 $\hat{f}=0=f$.

对一般的 f, 将 f 分解为奇函数与偶函数相加, $f = f_{奇} + f_{偶}$. 易知这两部分也都满足定理条件, 从而有之前论述可知 $f_{奇} = 0$, $f(x) = f_{偶}(x) = Ae^{-\frac{x^2}{2}}$.

我们还需要证明 (2),(3). 首先考虑 $\alpha\beta > \dfrac{1}{4}$ 的情形. 根据之前讨论, 不妨 $\alpha = \beta > \dfrac{1}{2}$. 从而由题设条件 $|f(x)| \le C'e^{-\alpha x^2}$ 以及 $|\hat{f}(u)| \le C''e^{-\beta u^2}$ 可知 $|f(x)| \le C'e^{-\frac{x^2}{2}}$, $|\hat{f}(u)| \le C''e^{-\frac{u^2}{2}}$, $(\forall x, u \in \mathbb{R})$. 因此由之前论证可知必有 $f(x) = Ae^{-\frac{x^2}{2}}$, 但这就与 (b) 式矛盾, 除非 $A=0$.

最后, 若 $\alpha\beta < \dfrac{1}{4}$, 我们仍不妨 $\alpha = \beta < \dfrac{1}{2}$. 记 φ_n 为 (a) 式中的 Hermite 函数, 则存在 (与 n 有关的) 常数 C 使得对任意 $x, u \in \mathbb{R}$ 都有

$$|\varphi_n(x)| \le C(1+|x|^n)e^{-\frac{x^2}{2}} \quad \text{并且} \quad |\hat{\varphi}_n(u)| \le C(1+|u|^n)e^{-\frac{u^2}{2}}.$$

从而对于 $\alpha < \dfrac{1}{2}$, 存在常数 $C' = C'(n, \alpha)$ 使得对任意 $x, u \in \mathbb{R}$ 都有

$$|\varphi_n(x)| \le C'(1+|x|^n)e^{-\alpha x^2} \quad \text{并且} \quad |\hat{\varphi}_n(u)| \le C'(1+|u|^n)e^{-\alpha u^2}.$$

从而完成证明. □

点评.

1. Hardy 也证明了, 如果当 $|x|, |u|$ 很大的时候对某个 $m>0$ 成立

$$|f(x)| = O(|x|^m e^{-\frac{x^2}{2}}) \quad \text{并且} \quad |\hat{f}(u)| = O(|u|^m e^{-\frac{u^2}{2}}),$$

则 $f(x)$ 必为 Hermite 函数的 (有限) 线性组合.

2. G.W. Morgan [M] 证明了 Hardy 定理的第 (2) 部分的一个推广. 他证明了, 若 $p>2$, $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, $A>0$, 则必存在 (与 A, p 有关的)$A'>0$, 使得对任意 $\varepsilon > 0$, 条

件

$$|f(x)| \le C' e^{-Ax^p} \quad \text{并且} \quad |\hat{f}(u)| \le C'' e^{-(A'+\varepsilon)u^q}$$

蕴含 $f = \hat{f} = 0$.

3. 这一类问题的另一个本不应该鲜为人知的结果是 Beurling [B, p. 372] 的下述定理:

定理. 设 $f \in L^1(\mathbb{R})$, 并且

$$\iint_{\mathbb{R}^2} |f(x)\hat{f}(u)| e^{|xu|} \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}u < \infty,$$

则 f 在 $\mathbb{R}$ 几乎处处为 0.

其证明依然要利用 Phragmén-Lindelöf 定理, 可见 [Hö] 或者 [L, pp. 197-199].

参考文献

B Arne Beurling, *The Collected Works of Arne Beurling*, Vol. 2, Birkhäuser Boston, 1989.

Ha G.H. Hardy, *A theorem concerning Fourier transforms*, J. London Math. Soc. **8** (1933), 227–231.

HJ Victor Havin and Burglind Jöricke, *The Uncertainty Principle in Harmonic Analysis*, Springer, 1994.

Hö Lars Hörmander, *A uniqueness theorem of Beurling for Fourier transform pairs*, Ark. Mat. **29** (1991), 237–240.

L B.Ya. Levin, *Lectures on Entire Functions*, American Mathematical Society, 1996.

M G.W. Morgan, *A note on Fourier transforms*, J. London Math. Soc. **9** (1934), 187–192.

5. Banach 代数: Gleason-Kahane-Żelazko 定理

设 A 为含幺交换 Banach 代数, $\mathfrak{m}$ 为 A 的极大理想. 则 $\mathfrak{m}$ 为闭子空间, 并且商 Banach 代数 $A/\mathfrak{m}$ 为域. 由 Gelfand-Mazur 定理, 该域同构于 $\mathbb{C}$. 因此商映射 $\varphi : A \to A/\mathfrak{m} \cong \mathbb{C}$ 可视为 A 上的复同态 (线性泛函). 从而 $\mathfrak{m}$ 为 A 的余维数为 1 的闭子空间且不含可逆元 (因为任何真理想都不可能含有可逆元). Gleason [G] 与 Kahane, Żelazko [KŻ] 分别独立发现了一个关于极大理想刻画的非凡的定理.

> **定理.** 设 A 为含幺交换 *Banach* 代数, $\mathfrak{m}$ 为 A 的线性子空间, 且余维数为 1. 则 $\mathfrak{m}$ 为 A 的极大理想当且仅当 $\mathfrak{m}$ 不含可逆元.

证明. 我们已经证明了极大理想的确有本定理所述的性质. 另一方面, 若 $\mathfrak{m}$ 在 A 中的余维数为 1, 并且不含可逆元, 那么乘法单位元 e 附近的元素都不在 $\mathfrak{m}$ 的闭包当中, 从而闭包 $\overline{\mathfrak{m}}$ 为真子空间. 又因为 $\mathfrak{m}$ 的余维数为 1, 从而迫使 $\mathfrak{m} = \overline{\mathfrak{m}}$, 因此 $\mathfrak{m}$ 为闭子空间. 取 A 上的线性泛函 φ, 使得 $\mathfrak{m} = \ker\varphi$, 并且 $\varphi(e) = 1$. 我们断言

$$\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y), \qquad \forall x, y \in A \tag{5.1}$$

若此断言成立, 则立刻推出 $\mathfrak{m}$ 为理想.

为此, 取定 $x \in A$, 考虑如下定义的解析函数

$$f(\lambda) = \varphi(e^{\lambda x}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi(x^n)}{n!}\lambda^n. \tag{5.2}$$

由于 $\|\varphi(x^n)\| \leq \|\varphi\|\|x\|^n$, 因此 f 为整函数, 并且

$$|f(\lambda)| \leq \|\varphi\| e^{\|x\|\lambda}.$$

再注意 $e^{\lambda x}$ 为 A 中的可逆元, 从而 $f(\lambda) \neq 0$, $(\forall \lambda \in \mathbb{C})$; 并且 $f(0) = \varphi(e) = 1$. 因此由

附录 B 的推论可知, 存在 $\alpha \in \mathbb{C}$ 使得

$$f(\lambda) = e^{\alpha\lambda} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n!}\lambda^n \tag{5.3}$$

比较5.2与5.3两式, 可知 $\varphi(x^n) = \alpha^n$, $(n = 0, 1, 2, ...)$. 特别地,

$$\varphi(x^2) = \varphi(x)^2. \tag{5.4}$$

注意上式对任意 $x \in A$ 都成立. 因此对任意 $x, y \in A$ 都有

$$\varphi((x+y)^2) = (\varphi(x) + \varphi(y))^2 \tag{5.5}$$

之后展开整理即得5.1. 证毕. □

注记.

1. 此定理的成立条件可以进一步减弱, 只需假定 $\mathfrak{m}$ 不含有形如 e^x $(x \in A)$ 的元素.
2. 若 Banach 代数是在 $\mathbb{R}$ 上而不是在 $\mathbb{C}$ 上, 则本定理不再正确. 一个简单的反例是, 考虑单位闭区间上的实值连续函数代数 $C_{\mathbb{R}}[0,1]$, 以及线性泛函

$$\varphi(f) = \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t.$$

显然, 若 $f \in C_{\mathbb{R}}[0,1]$ 没有零点, 则 f 在 $[0,1]$ 不变号, 因此 $\varphi(f) \neq 0$. 因此 $\mathfrak{m} := \ker\varphi$ 不含可逆元. 但是 $\varphi(f^2) > 0$ 对任意 $f \not\equiv 0$ 都成立, 从而 φ 显然不是乘性的.

点评.

1. 故事并没有结束. Żelazko [Ż] 注意到即使 A 非交换, 出于某些更进一步的原因5.1式也必须成立! 下述简明的论证来自 Rudin [R, pp. 251-252]. 注意到 A 的交换性仅仅用在从5.5推出5.1这一步; 而一般情况, 则有 (这已被 Gleason 注意到)

$$\varphi(xy + yx) = 2\varphi(x)\varphi(y), \qquad \forall x, y \in A. \tag{5.6}$$

即 φ 为 Jordan 同态. 为证明5.6能推出5.1, 我们首先考虑 $\varphi(x) = 0$ 的情形. 此时5.6变成

$$\varphi(xy + yx) = 0, \tag{5.7}$$

从而由5.4,

$$\varphi((xy + yx)^2) = 0. \tag{5.8}$$

注意到

$$(xy - yx)^2 = 2[x(yxy) + (yxy)x] - (xy + yx)^2,$$

因此由5.8与5.6可得

$$\varphi((xy - yx)^2) = 2\varphi(x(yxy) + (yxy)x) = 4\varphi(x)\varphi(yxy) = 0.$$

从而由5.4,

$$\varphi(xy - yx) = 0. \tag{5.9}$$

将5.7与5.9相加可得

$$\varphi(xy) = 0, \qquad \text{若 } \varphi(x) = 0.$$

最后, 对于一般的 $x, y \in A$, 注意总有 $\varphi(x - \varphi(x)e) = 0$, 从而

$$0 = \varphi((x - \varphi(x)e)y) = \varphi(xy - \varphi(x)y) = \varphi(xy) - \varphi(x)\varphi(y).$$

从而最终证明了5.1.

2. 可在 Roitman 和 Sternfeld [RS, pp. 112-113] 当中找到 GKŻ 定理的初等证明. 相关文献的书单 (直到 1994 年) 可见 [P, p. 242, 也可见 [R, pp. 406-407].

3. 复变函数论在 Banach 代数中的其它有趣应用可见 [L, §§6.2, 6.3, 28.3].

参考文献

G Andrew M. Gleason, *A characterization of maximal ideals*, J. Anal. Math. **19** (1967), 171- 172.

KŻ J.-P. Kahane and W. Żelazko, *A characterization of maximal ideals in commutative Banach algebras*, Studia Math. **29** (1968), 339-343.

L B.Ya. Levin, *Lectures on Entire Functions*, American Mathematical Society, 1996.

P Theodore W. Palmer, *Banach Algebras and the General Theory of *-Algebras*, Vol. 1, Algebras and Banach Algebras, Cambridge University Press, 1994.

R Walter Rudin, *Functional Analysis*, second edition, McGraw-Hill, 1991.

RS M. Roitman and Y. Sternfeld, *When is a linear functional multiplicative?*, Trans. Amer. Math. Soc. **267** (1981), 111-124.

Ż W. Żelazko, *A characterization of multiplicative linear functionals in complex Banach algebras*, Studia Math. **30** (1968), 83-85.

6. 复动力系统: Fatou-Julia-Baker 定理

复动力系统是研究解析函数迭代的理论. 对于 Riemann 球面 $\hat{\mathbb{C}}$ 上的有理函数, 该理论的主线由 Pierre Fatou 和 Gaston Julia 在二十世纪二十年代末分别独立建立. 此后不久, Fatou 也开始研究复平面上的超越整函数的迭代, 这一研究路线是由 I.N.Baker(时隔 40 年) 提出的. 最近, 得益于计算机图形学的推动, 这个主题进入了一个崭新时期, 并持续活跃至今. 本文我们将介绍如何用正规族理论 (在附录 D 详述) 给出这一理论的中心结论的简化证明.

设函数 f 为次数 $d \geq 2$ 的有理函数或者非线性整函数, 我们考虑迭代函数族 $\mathscr{F} := \left\{ f^n \middle| n \in \mathbb{N} \right\}$, 其中 $f^1 = f$, $f^n = f \circ f^{n-1}$. 点 z 称为**周期点**, 若存在 $n \in \mathbb{N}$ 使得 $f^n(z) = z$; 点 z 称为**排斥周期点**, 若 z 为周期点, 并且还有 $|(f^n)'(z)| > 1$. (若 $z = \infty$, 则第二个定义需要适当改动, 可见 [St, pp. 25-26].) Fatou 集$\mathcal{F}(f)$ 是指使得 $\mathscr{F}$ 为正规族的最大开集 (若 f 为有理函数, 则在 $\hat{\mathbb{C}}$ 中考虑开集; 若 f 为整函数, 则在 $\mathbb{C}$ 中). Fatou 集的补集 $\mathcal{J} = \mathcal{J}(f)$ 称为 Juila 集. 众所周知, 并且容易证明, $\mathcal{J}$ 与 $\mathcal{F}$ 是完全不变的, 也就是说 $z \in \mathcal{J}$ 当且仅当 $f(z) \in \mathcal{J}$, 并且 $\mathcal{J}(f) = \mathcal{J}(f^m)$, $m \in \mathbb{N}$; 对 $\mathcal{F}$ 也类似 [CG, p. 56], [St, pp. 28-29]. 此外, $\mathcal{J}(f)$ 不存在孤立点 [CG, p. 57], [Bm, pp. 554]; 参见 [Bw1, pp. 159-160].

我们的目标是证明下述基本结果, 该结果是在次数 $d \geq 2$ 的有理函数的情形由 Fatou[F1] 与 Julia[J] 分别独立得到, 超越整函数的情形由 Baker[Bk] 得到.

定理 6.1. $\mathcal{J}(f)$ 为 f 的排斥周期点集的闭包.

在证明之前, 先约定一下记号. 点 $z \in \mathbb{C}$ 的 (前) **轨道**是指集合

$$O^+(z) := \left\{ f^n(z) \middle| n \in \mathbb{N} \right\},$$

而**后轨道**是指 z 在 f 的迭代下的原像的并集, 即

$$O^-(z) := \bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-n}(\{z\}).$$

一般地, 对于 $S \subseteq \mathbb{C}$, 我们记

$$O^+(S) := \bigcup_{z\in S} O^+(z), \qquad O^-(S) := \bigcup_{z\in S} O^-(z).$$

我们有如下简单的结果:

定理 6.2. 设开集 D 满足 $D \cap \mathcal{J} \neq \varnothing$, 则 $\mathcal{J} \cap O^-(D)$ 为 $\mathcal{J}$ 的稠密开子集.

证明. 由于 f 为连续函数, 从而易知 $O^-(D)$ 为开集. 为证明 $O^-(D) \cap \mathcal{J}$ 在 $\mathcal{J}$ 中稠密, 首先注意 $\mathcal{J}$ 不含孤立点并且 $D \cap \mathcal{J} \neq \varnothing$, 于是 $D \cap \mathcal{J}$ 是无限集. 假设 $O^-(D) \cap \mathcal{J}$ 在 $\mathcal{J}$ 当中不稠密, 则存在开集 U 使得 $U \cap \mathcal{J} \neq \varnothing$, 并且 $O^-(D) \cap \mathcal{J}$ 与 $U \cap \mathcal{J}$ 不交. 注意对于 $z \in \mathcal{J}$, 都有 $f^m(z) \in \mathcal{J}$, 这表明当 $z \in U \cap \mathcal{J}$ 时对任意 $m \in \mathbb{N}$ 都有 $f^m(z) \notin D$; 也就是说 $O^+(U \cap \mathcal{J})$ 与 D 不交. 由 $\mathcal{J}$ 的完全不变性, 也有 $O^+(U \cap \mathcal{F}) \cap \mathcal{J} = \varnothing$, 因此 $\mathcal{O}^+(U) = \mathcal{O}^+(U \cap \mathcal{J}) \cup O^+(U \cap \mathcal{F})$ 与 $D \cap \mathcal{J}$ 不交. 因此有至少三个 (其实是 $D \cap \mathcal{J}$ 中的无穷个) 值使得定义在 U 上的函数族 $\left\{f^n \middle| n \in \mathbb{N}\right\}$ 当中的每一个函数都取不到. 因此由 Montel 定理 (见附录 D), 函数族 $\mathscr{F} = \left\{f^n \middle| n \in \mathbb{N}\right\}$ 在 U 上正规, 这与 $U \cap \mathcal{J}$ 非空矛盾. □

我们现在可以去证明 Fatou-Julia-Baker 定理了.

定理 6.1 的证明. 设 z_0 为 f 的排斥周期点, 其最小正周期为 $p \in \mathbb{N}$. 不失一般性, 不妨 $z_0 \in \mathbb{C}$ [1], 并且 $f^p(z_0) = z_0$, $|(f^p)'(z_0)| > 1$. 于是由链式法则易知

$$\lim_{n\to\infty} \left|(f^{np})'(z_0)\right| = \infty.$$

从而 $\{f^{np}\}$ 的任何一个子列都不可能在 z_0 的某个开邻域一致收敛, 从而 $z_0 \in \mathcal{J}(f^p) = \mathcal{J}$. 由于 $\mathcal{J}$ 为闭集, 因此 f 的排斥周期点的闭包也包含于 $\mathcal{J}$.

下证反向包含关系. 令 $\mathscr{M}$ 为由 $\mathcal{J}$ 中的**常返**但非周期的点构成的集合, 确切地说, $\mathscr{M} := \left\{z \in \mathcal{J} \middle| z \in \overline{O^+(z) \setminus \{z\}}\right\}$. 断言 $\mathscr{M}$ 在 $\mathcal{J}$ 中稠密. 由于 $\mathcal{J}$ 不含孤立点, 从而只需证明集合 $\left\{z \in \mathcal{J} \middle| O^+(z) \text{在 } \mathcal{J} \text{ 中稠密}\right\}$ 在 $\mathcal{J}$ 中稠密. 而这是 Baire 纲定理的简单应用. 事实上, 对每个 $n \in \mathbb{N}$, 将 $\mathcal{J}$ 用可数个半径为 $\dfrac{1}{n}$ 的圆盘 $D_{n,j}, j = 1, 2, \ldots$ 覆盖, 并且每个 $D_{n,j}$ 与 $\mathcal{J}$ 交集非空. 由定理 6.2, $Q_{n,j} := \mathcal{J} \cap O^-(D_{n,j})$ 是 $\mathcal{J}$ 的稠密开子集 (对任意

[1] 即 $z_0 \neq \infty$.

n, j 都如此); 从而对完备度量空间 $\mathcal{J}$ 使用 Baire 纲定理可知 $Q := \bigcap_{n,j} Q_{n,j}$ 也在 $\mathcal{J}$ 中稠密. 而注意对任意 $q \in Q$, $O^+(q) \cap D_{n,j} \neq \varnothing$ 对任意 n, j 都成立, 从而易知 $O^+(q)$ 在 $\mathcal{J}$ 中稠密.

接下来, 我们只需要再证明 $\mathscr{M}$ 包含于 f 的排斥周期点集的闭包. 为此, 设 $z_0 \in \mathscr{M}$, U 为 z_0 的一个开邻域, 我们将证明 U 中存在 f 的排斥周期点. 不失一般性, 假设 $z_0 \in \mathbb{C}$, 由于 $\mathscr{F} := \left\{ f^n \middle| n \in \mathbb{N} \right\}$ 不是 U 上的正规族, 因此由 Zalcman 引理 (见附录 D), 存在点列 $z_k \to z_0$, 正数列 $\rho_k \to 0^+$ 以及严格递增的正整数列 n_k 使得

$$f^{n_k}(z_k + \rho_k \xi) \to g(\xi), \tag{6.1}$$

其中 g 为某个非常值亚纯函数, 并且上述收敛是指在 $\mathbb{C}$ 中除去 g 的极点之外的区域当中内闭一致收敛. 由 $\mathscr{M}$ 的定义以及 Picard 定理, 存在 $m \in \mathbb{N}$ 使得 $f^m(z_0) \in U \cap g(\mathbb{C})$. 取定 $w_0 \in g^{-1}(f^m(z_0))$, 则存在 w_0 的邻域 V 使得 $g(V) \subseteq U$, 并且对任意 $\zeta \in V \setminus \{w_0\}$ 都有 $g'(\zeta) \neq 0$. 由于 $z_0 \in \mathscr{M}$, 从而也有 $f^m(z_0) \in \mathscr{M}$. 因此存在 $\ell \in \mathbb{N}$, $\zeta_0 \in V \setminus \{w_0\}$ 使得 $g(\zeta_0) = f^\ell(z_0)$. 因此 ζ_0 是函数

$$h(\zeta) := g(\zeta) - f^\ell(z_0) = \lim_{k\to\infty} [f^{n_k}(z_k + \rho_k\zeta) - f^\ell(z_k + \rho_k\zeta)]$$

的孤立零点. 由 Hurwitz 定理, 当 k 足够大时, 存在 $\zeta_k \to \zeta_0$ 使得

$$f^{n_k}(z_k + \rho_k\zeta_k) = f^\ell(z_k + \rho_k\zeta_k)$$

因此当 k 很大时, $p_k := f^\ell(z_k + \rho_k\zeta_k)$ 是函数 $f^{n_k - \ell}$ 的不动点, 从而是 f 的周期点. 对6.1式求导, 注意 $\zeta_k \to \zeta_0$, 则有

$$\begin{aligned} g'(\zeta_0) &= \lim_{k\to\infty} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\zeta}[f^{n_k}(z_k + \rho_k\zeta)]\Big|_{\zeta=\zeta_k} \\ &= \lim_{k\to\infty} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\zeta}[f^{n_k-\ell} \circ f^\ell(z_k + \rho_k\zeta)]\Big|_{\zeta=\zeta_k} \\ &= \lim_{k\to\infty} (f^{n_k-\ell})'(p_k) \cdot (f^\ell)'(z_k + \rho_k\zeta_k) \cdot \rho_k \end{aligned} \tag{6.2}$$

于是

$$\lim_{k\to\infty} (f^\ell)'(z_k + \rho_k\zeta_k) \cdot \rho_k = (f^\ell)'(z_0) \cdot 0 = 0. \tag{6.3}$$

另一方面, 由于 $\zeta_0 \in V \setminus \{w_0\}$, $g'(\zeta_0) \neq 0$. 从而6.2, 6.3迫使

$$\lim_{k\to\infty} (f^{n_k-\ell})'(p_k) = \infty.$$

因此几乎所有的 p_k, 除了至多有限个例外, 都是 f 的排斥周期点. 最后, 再注意

$$\lim_{k\to\infty} p_k = \lim_{k\to\infty} f^\ell(z_k + \rho_k\zeta_k) = f^\ell(z_0) = g(\zeta_0) \in U,$$

从而最终完成本定理的证明. □

点评. Baker 对定理 6.1 的原始证明需要用到 Ahlfors 五岛定理 (Ahlfors Five Islands Theorem), 而该定理被很多人认为是复变函数论中最艰深的结论之一. 又过了三十年, 更简单的证明才被发现. 首先是 Schwick [Sk] 的证明, 然后是本节采用的 Bargmann [Bm] 的方法; 之后是 Berteloot 与 Duval [BD]. 尽管这些不同证明在关键细节上有所不同, 但他们都在关键处用到 Zalcman 引理. 受到上述工作的启发, Bergweiler 给出了 Ahlfors 五岛定理的新 (也是更简单的) 证明 [Bw2], 此工作依然用到 Zalcman 引理.

参考文献

Bk I.N. Baker, *Repulsive fixpoints of entire functions*, Math. Z. **104** (1968), 252-256.

Bm Detlef Bargmann, *Simple proofs of some fundamental properties of the Julia set*, Ergodic Theory Dynam. Systems **19** (1999), 553-558.

Bw1 Walter Bergweiler, *Iteration of meromorphic functions*, Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) **29** (1993), 151-188.

Bw2 Walter Bergweiler, *A new proof of the Ahlfors Five Islands Theorem*, J. Anal. Math. **76** (1998), 337-347.

BD François Berteloot and Julien Duval, *Une démonstration directe de la densité des cycles repulsifs dans l'ensemble de Julia*, Complex Analysis and Geometry, Birkhäuser, 2000, pp. 221-222.

CG Lennart Carleson and Theodore W. Gamelin, *Complex Dynamics*, Springer-Verlag, 1993.

F1 P. Fatou, *Sur les équations fonctionelles*, Bull. Soc. Math. France **47** (1919), 161-271; **48** (1920), 33-94; 208-314.

F2 P. Fatou, *Sur l'iteration des fonctions transcendantes entières*, Acta Math. **47** (1926), 337-360.

J Gaston Julia, *Sur l'iteration des fonctions rationelles*, J. Math. Pures Appl. (7) **4** (1918), 47-245.

Sk Wilhelm Schwick, *Repelling periodic points in the Julia set*, Bull. London Math. Soc. **29** (1997), 314-316.

St Norbert Steinmetz, *Rational Iteration*, Walter de Gruyter, 1993.

7. 素数定理

Jacques Hadamard 与 Charles de la Vallèe Poussin 在 1896 年 (互相独立地) 证明的素数定理 (PNT) 无疑代表了十九世纪数学的高水准. Legendre 与 Gauss 在十八世纪末在 (互相独立且在些许不同的形式下的) 数值实验证据的基础之上作出这个定理 (PNT) 的猜想. PNT 断言不超过 x 的素数个数 $\pi(x)$ 在如下的意义下渐近于 $x/\log x$:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\pi(x)}{x/\log(x)}=1.$$

Riemann 时代起人们就知道了素数的分布规律与 Riemann zeta 函数 $\zeta(s)$ 的函数论性质紧密相关. Riemann zeta 函数 $\zeta(s)$ 最初对所有 $\mathrm{Re}(s)>1$ 定义为

$$\zeta(s)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^s},$$

并解析延拓为 $\mathbb{C}$ 上定义且只在 $s=1$ 有一个简单极点的亚纯函数. 这里联结了 PNT 与 zeta 函数的关键事实是

$$\text{在直线}\quad \mathrm{Re}\, s=1\quad\text{上},\quad \zeta(s)\neq 0. \tag{$\star$}$$

PNT 的原始证明包括了无穷围道上的积分, 于是不仅要用上 $\zeta(s)$ 在 $\mathrm{Re}\, s=1$ 上永不为 0 的事实, 还需要对 $\zeta(s)$ 在 ∞ 附近做估计. 后来的证明绕过了这个难点, 但是需要 Weiner 的某些版本对 Fourier 积分的 Tauber 型定理 (例如可参见 [C] 里的证明, 它用到了 Wiener-Ikehara 定理). 从而 ($\star$) 推出素数定理就相当不平凡. 1980 年, Donald Newman [N] 找到了一个从 ($\star$) 推出素数定理的惊人的简单路线. 用 Newman 自己的话来说, 他的创造在于"回归围道积分方法避开 Fourier 分析, 且使用有限围道避开无穷远处的估计". 尽管 Newman 把他的方法用于 Dirichlet 级数, 我们发现按照 Korevaar [K] 的路径而用此方法证明下面 Laplace 变换的 Tauber 型定理更方便:

定理. f 是定义在 $[0,+\infty)$ 上的有界可测函数, 且它的 *Laplace* 变换

$$g(z)=\int_0^{+\infty} f(t)e^{-zt}\,\mathrm{d}t$$

在开的上半平面 $\mathbb{H}=\{z\colon \operatorname{Re}z>0\}$ 定义并且解析, 并可解析地延拓到 (包含) $\overline{\mathbb{H}}=\{z\colon \operatorname{Re}z\geq 0\}$ (的一个开集) 上. 那么反常积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t=\lim_{T\to+\infty}\int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t$ 收敛并且值为 $g(0)$, 即 g 解析延拓后在 $z=0$ 处的取值.

这不是什么新结果. 实际上这是 Ingham [I] 的一个结果的特殊情况, 半个世纪前就经 Fourier 方法证明了出来. 有意思的是, 这证明很简洁: 恰当选取被积函数与积分围道之后, 前面提到的困难都巧妙地化解了, 且最后成型的论证用到东西不超过 Cauchy 积分公式与直接的估计.

证明. 设 $t\geq 0$ 时 $|f(t)|\leq M$. 对 $T>0$, 函数 $g_T(z)=\displaystyle\int_0^T f(t)e^{-zt}\,\mathrm{d}t$ 显然是整的. 我们断言

$$\lim_{T\to+\infty} g_T(0)=g(0). \tag{7.1}$$

为此取 $R>0$ 及足够小的 $\delta=\delta(R)>0$ 使 g 在区域 $D=\{z\colon |z|\leq R, \operatorname{Re}z\geq-\delta\}$ 解析. 令 $\Gamma=\partial D$. 则由 Cauchy 定理,

$$g(0)-g_T(0)=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma (g(z)-g_T(z))e^{zT}\left(1+\frac{z^2}{R^2}\right)\frac{1}{z}\,\mathrm{d}z. \tag{7.2}$$

令 $x=\operatorname{Re}z$, 则对 $x>0$,

$$|g(z)-g_T(z)|=\left|\int_T^{+\infty} f(t)e^{-zt}\,\mathrm{d}t\right|\leq M\int_T^{+\infty} e^{-xt}\,\mathrm{d}t=\frac{Me^{-xT}}{x}, \tag{7.3}$$

而

$$\text{对}\quad |z|=R,\quad \left|e^{zT}\left(1+\frac{z^2}{R^2}\right)\frac{1}{z}\right|=e^{xT}\frac{2\,|x|}{R^2}. \tag{7.4}$$

于是当 $z\in\Gamma_+=\Gamma\cap\{\operatorname{Re}z>0\}$ 时, 式 (7.2) 的被积函数的绝对值有上界 $2M/R^2$, 从而

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_+}(g(z)-g_T(z))e^{zT}\left(1+\frac{z^2}{R^2}\right)\frac{1}{z}\,\mathrm{d}z\right|\leq\frac{M}{R}. \tag{7.5}$$

在 $\Gamma_- = \Gamma \cap \{\operatorname{Re} z < 0\}$ 上我们分别考虑 $g(z)$ 与 $g_T(z)$ 的积分. 由于 g_T 是整的, 我们可以以半圆 $\Gamma'_- = \{z\colon |z| = R, \operatorname{Re} z < 0\}$ 代围道 Γ_-. 对 $x = \operatorname{Re} z < 0$, 我们有

$$|g_T(z)| = \left|\int_0^T f(t)e^{-zt}\,\mathrm{d}t\right| \leq M\int_{-\infty}^T e^{-xt}\,\mathrm{d}t = \frac{Me^{-xT}}{|x|}, \tag{7.6}$$

于是由 (7.4) 及 (7.6),

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma'_-} g_T(z)e^{zT}\left(1+\frac{z^2}{R^2}\right)\frac{1}{z}\,\mathrm{d}z\right| \leq \frac{M}{R}. \tag{7.7}$$

最后, 因为 g 在 Γ_- 上解析, 所以存在常值 $K = K(R, \delta)$ 使得

$$\Gamma_- \text{ 上}, \quad \left|g(z)\left(1+\frac{z^2}{R^2}\right)\frac{1}{z}\right| \leq K.$$

由于 e^{zT} 在 Γ_- 上有界, 且 $T \to +\infty$ 时它在 $\{\operatorname{Re} z > 0\}$ 紧子集上一致收敛到 0, 故易得

$$\lim_{T\to+\infty}\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma'_-} g(z)e^{zT}\left(1+\frac{z^2}{R^2}\right)\frac{1}{z}\,\mathrm{d}z\right| = 0. \tag{7.8}$$

从 (7.2), (7.5), (7.7) 及 (7.8) 我们得出

$$\varlimsup_{T\to+\infty} |g(0) - g_T(0)| \leq \frac{2M}{R},$$

而 R 可取任意大, 从而 (7.1) 得证. □

现在正式回到素数定理的证明. 我们按 Zagier [Z] 的简洁优美的方式展开; 这是高效组织语言的范本. 我们先简要地介绍 Riemann zeta 函数. 按长久以来的传统, 我们把复数 s 写成 $\sigma + it$ 而不写成 $z = x + iy$. 为 $\operatorname{Re} s > 1$ 定义

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^s}.$$

由于 $|1/n^s| = 1/n^\sigma$, 这级数在 $\sigma > 1$ 时绝对收敛, 并且对每个 $\varepsilon > 0$ 它在 $\sigma \geq 1+\varepsilon$ 上一致收敛. 所以由于函数 $1/n^s = e^{-s\log n}$ 都是整的, $\zeta(s)$ 在 $\operatorname{Re} s > 1$ 上解析.

引理 7.1. $\zeta(s) - 1/(s-1)$ 可解析地延拓到 $\operatorname{Re} s > 0$.

证明. 对 $\operatorname{Re} s > 1$,

$$\zeta(s) - \frac{1}{s-1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s} - \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^s} = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_n^{n+1} \left(\frac{1}{n^s} - \frac{1}{x^s} \right) \mathrm{d}x.$$

上式右边级数里的每一项都明显是整函数, 且级数在 $\operatorname{Re} s > 0$ 时绝对收敛, 因为

$$\left| \int_n^{n+1} \left(\frac{1}{n^s} - \frac{1}{x^s} \right) \mathrm{d}x \right| \leq \max_{n \leq x \leq n+1} \left| \frac{1}{n^s} - \frac{1}{x^s} \right| \leq \max_{n \leq u \leq n+1} \left| \frac{s}{u^{s+1}} \right| \leq \frac{|s|}{n^{\sigma+1}}.$$

这样收敛就在每个 $\operatorname{Re} s \geq \varepsilon > 0$ 上一致, 从而上式的右边在 $\operatorname{Re} s > 0$ 解析. □

不难证明 $\zeta(s) - 1/(s-1)$ 实际上可以延拓成整函数. 不过我们不需要用这事实.

此后 p 表示一个素数, 且对指标 p 作的求和与求积都跑遍全体素数. 素数与 zeta 函数之间的联系体现在下面的结果, 这 Euler 早就知道了 (实 s 的情况).

引理 7.2. 对 $\operatorname{Re} s > 1$, $\zeta(s) = \prod_p (1 - 1/p^s)^{-1}$.

证明. (参考 [A, p.213]) 记 p_k 是第 k 个素数, 则有 $k \to +\infty$ 时

$$\left(1 - \frac{1}{2^s}\right)\left(1 - \frac{1}{3^s}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{p_k^s}\right) \zeta(s) = \sum_{2,3,\ldots,p_k \nmid n} \frac{1}{n^s} \to 1.$$

□

易见 $\zeta(s)$ 的 Euler 乘积在 $\operatorname{Re} s > 1$ 上绝对收敛且对每个 $\varepsilon > 0$ 而在 $\operatorname{Re} s \geq 1 + \varepsilon$ 上一致收敛. 下面用到这事实时不再声明.

接下来的结果包含有素数定理证明中的函数论性质的核心. 定义

$$\Phi(s) = \sum_p \frac{\log p}{p^s}.$$

由于级数在 $\operatorname{Re} s > 1$ 上绝对收敛且在每个 $\operatorname{Re} s > 1 + \varepsilon$ 上一致收敛, Φ 就在 $\operatorname{Re} s > 1$ 上解析.

引理 7.3. $\Phi(s)-1/(s-1)$ 可解析延拓到 $\operatorname{Re}s>1$, 且直线 $\operatorname{Re}s=1$ 上 $\zeta(s)\neq 0$.

证明. 引理 7.2 的证明表明 $\operatorname{Re}s>1$ 时 $\zeta(s)\neq 0$. 用乘积表示式简单计算得出

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}=\sum_p\frac{\log p}{p^s-1}=\Phi(s)+\sum_p\frac{\log p}{p^s(p^s-1)}. \tag{7.9}$$

右边的最后一项在 $\operatorname{Re}s>1/2$ 上收敛并定义一个解析函数, 从而由引理 7.1 得知 $\Phi(s)$ 可延拓为 $\operatorname{Re}s>1/2$ 上的一个亚纯函数, 它有唯一极点 $s=1$, 以 ζ 的零点为零点, 且 $\Phi(s)-1/(s-1)$ 在 $s=1$ 这点解析. 于是只需再证 $\zeta(s)$ 在 $\operatorname{Re}s=1$ 上不取 0 值.

为此, 我们回忆: 如果一个亚纯函数 f 在 s_0 (恰好) 为 k 阶零点, 则

$$\lim_{s\to s_0}(s-s_0)\frac{f'(s)}{f(s)}=\operatorname{Res}\left(\frac{f'}{f},s_0\right)=k, \tag{7.10}$$

且类似地若 f 在 s_0 有 k 阶极点, 则

$$\lim_{s\to s_0}(s-s_0)\frac{f'(s)}{f(s)}=\operatorname{Res}\left(\frac{f'}{f},s_0\right)=-k, \tag{7.11}$$

现设 $\zeta(s)$ 在 $s=1+i\alpha(\alpha\neq 0,\alpha\in\mathbb{R})$ 处零点的阶为 $\mu\geq 0$. 由于 $\zeta(s)$ 在实 s 处取实值, $\zeta(s)$ 在 $1-i\alpha$ 处有相同阶数的零点. 记 $s=1\pm 2i\alpha$ 处的零点阶数 (如果有的话) 为 $\nu\geq 0$, 对函数 $\Phi(s)$ 用 (7.10) 与 (7.11) 并注意它与 $-\zeta'(s)/\zeta(s)$ 相差一个在 $\operatorname{Re}s>1/2$ 上解析的函数, 我们得到

$$\begin{gathered}\lim_{\varepsilon\to 0^+}\varepsilon\Phi(1+\varepsilon)=1\quad\text{以及}\\ \lim_{\varepsilon\to 0^+}\varepsilon\Phi(1+\varepsilon\pm i\alpha)=-\mu,\quad\lim_{\varepsilon\to 0^+}\varepsilon\Phi(1+\varepsilon\pm 2i\alpha)=-\nu.\end{gathered} \tag{7.12}$$

但对 $\varepsilon>0$,

$$\sum_{k=-2}^{2}\binom{4}{2+k}\Phi(1+\varepsilon+ik\alpha)=\sum_p\frac{\log p}{p^{1+\varepsilon}}(p^{i\alpha/2}+p^{-i\alpha/2})^4\geq 0, \tag{7.13}$$

因为上式右边的圆括号里是个实值. 将上式乘上 ε 并用 (7.12) 计算左边在 $\varepsilon\to 0^+$ 的极限, 我们得到 $-2\nu-8\mu+6\geq 0$. 从而 $\mu=0$, 即 $\zeta(1+i\alpha)\neq 0$. 证毕. □

我们已经完成了证明素数定理的准备工作. 接下来的证明我们将聚焦于

$$\theta(x)=\sum_{p\le x}\log p.$$

我们要证明 $\theta(x)\sim x$, 即 $\lim\limits_{x\to+\infty}\theta(x)/x=1$. 这可轻易推出素数定理, 因为

$$\theta(x)=\sum_{p\le x}\log p\le\sum_{p\le x}\log x=\pi(x)\log x,$$

且对每个 $\varepsilon>0$,

$$\theta(x)\ge\sum_{x^{1-\varepsilon}\le p\le x}\log p\ge\sum_{x^{1-\varepsilon}\le p\le x}(1-\varepsilon)\log x=(1-\varepsilon)\log(x)(\pi(x)+O(x^{1-\varepsilon})).$$

首先我们按 Chebyshev 的路子证明

引理 7.4. $\theta(x)=O(x)$.

证明. 对正整数 n, 我们有

$$2^{2n}=(1+1)^{2n}=\sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k}\ge\binom{2n}{n}\ge\prod_{n<p\le 2n}p=e^{\theta(2n)-\theta(n)},$$

故 $\theta(2n)-\theta(n)\le 2n\log 2$. 接下去有

$$\begin{aligned}\theta(x)-\theta(x/2)&=\theta(x)-\theta([x/2])\le\log x+\theta(2[x/2])-\theta([x/2])\\&\le\log x+2[x/2]\log 2\le(1+\log 2)x.\end{aligned}$$

依次对 $x,x/2,\ldots,x/2^r$ (其中 $2^r>x$) 求和, 我们得到 $\theta(x)\le 2(1+\log 2)x$. □

引理 7.5. 积分 $\displaystyle\int_1^{+\infty}(\theta(x)-x)\,\mathrm{d}x/x^2$ 收敛.

证明. 由引理 7.4 知函数 $f(t)=\theta(e^t)e^{-t}-1$ 有界. 直接对它用本章开头的 Tauber 型定

理即得证. 事实上, 由引理 7.4 知, 对 $\operatorname{Re} s > 1$ 有

$$\Phi(s) = \sum_p \frac{\log p}{p^s} = \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}\theta(x)}{x^s} = s\int_1^{+\infty} \frac{\theta(x)\,\mathrm{d}x}{x^{s+1}} = s\int_0^{+\infty} e^{-st}\theta(e^t)\,\mathrm{d}t,$$

从而

$$\begin{aligned} g(s) &= \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} (\theta(e^t)e^{-t} - 1)e^{-st}\,\mathrm{d}t = \frac{\Phi(s+1)}{s+1} - \frac{1}{s} \\ &= \frac{1}{s+1}\left(\Phi(s+1) - \frac{1}{s} - 1\right), \end{aligned}$$

且由引理 7.3 知它可解析地延拓到 $\operatorname{Re} s \geq 0$. 于是

$$\int_1^{+\infty} \frac{\theta(x) - x}{x^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} (\theta(e^t)e^{-t} - 1)\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$$

是收敛积分. □

为完成素数定理的证明, 我们来说明上一个引理能推出 $\theta(x) \sim x$. 如果对某 $\lambda > 1$, 存在任意大的 x 满足 $\theta(x) \geq \lambda x$, 则由于 θ 不降, 对每个这样的 x,

$$\int_x^{\lambda x} \frac{\theta(t) - t}{t^2}\,\mathrm{d}t \geq \int_x^{\lambda x} \frac{\lambda x - t}{t^2}\,\mathrm{d}t = \int_1^{\lambda} \frac{\lambda - t}{t^2}\,\mathrm{d}t > 0,$$

这表明 $\int_1^{+\infty} (\theta(t) - t)\,\mathrm{d}t/t^2$ 发散, 与上一个引理矛盾. 类似地, 如果对某 $\lambda < 1$, 存在任意大的 x 满足 $\theta(x) \leq \lambda x$, 则可得

$$\int_{\lambda x}^{x} \frac{\theta(t) - t}{t^2}\,\mathrm{d}t \leq \int_{\lambda x}^{x} \frac{\lambda x - t}{t^2}\,\mathrm{d}t = \int_{\lambda}^{1} \frac{\lambda - t}{t^2}\,\mathrm{d}t < 0,$$

与 $\int_1^{+\infty} (\theta(t) - t)\,\mathrm{d}t/t^2$ 收敛矛盾. 从而有

$$\lim_{x \to +\infty} \theta(x)/x = 1,$$

证毕.

参考文献

A Lars V. Ahlfors, *Complex Analysis*, third edition, McGraw-Hill, 1979.

C K. Chandrasekharan, *Introduction to Analytic Number Theory*, Springer-Verlag, 1968.

I A.E. Ingham, *On Wiener's method in Tauberian theorems*, Proc. London Math. Soc. (2) **38** (1935), 458-480.

K J. Korevaar, *On Newman's quick way to the prime number theorem*, Math. Intelligencer **4** (3) (1982), 108-115.

N D.J. Newman, *Simple analytic proof of the prime number theorem*, Amer.Math. Monthly **87** (1980), 693-696.

Z D. Zagier, *Newman's short proof of the prime number theorem*, Amer. Math. Monthly **104** (1997), 705-708.

后记：超音速机翼与随机 Loewner 演化

我们再简单谈谈复变函数的两个不寻常的应用, 虽然它们的技术细节超出本书范围, 但其中的思想绝对值得一提.

第一个应用领域是流体动力学. 早在十九世纪, 人们就已发现描述二维流体速度分量的不可压缩性与无旋性的方程恰好是 (复变函数中的)Cauchy-Riemann 方程. 由于低速流体可近似看作不可压缩流, 从而用解析函数 (是共形映射) 来描述飞机机翼周围的低速气流并以此计算升力, 阻力是可行的. 然而上述办法不适用于可压缩的高速气流.

高速的情况下, 机翼局部会产生超音速气流, 这会产生冲击波, 进而增加我们所不希望的空气阻力. 尽管 Cathleen Morawetz 在数学上证明了一般会在部分超音速气流当中产生冲击波 [M1],[M2], 但这并不能排除存在无冲击流的特殊翼型的可能性. 事实上, Paul Garabedian 和他的学生 David Korn 发展了一种基于复变函数的航向图方法, 能够计算出在特定速度和攻角下无冲击的超临界机翼截面 [K],[GK1]. 然而, 在选取与气流相关的参数时, 大量的试验失败使得人们意识到这种方法不切实际. 在 [BGK] 的初步结果之后, Garabedian 与 Korn 在 [GK2] 当中得到了此问题的一个完全令人满意的解. 他们通过解析延拓到两个独立的复坐标域来求解二维无粘气体动力学的偏微分方程. 在将积分区域共形映射到关于其中一个坐标的单位圆盘后, 他们在该圆盘上为流函数建立了一个边值问题, 该边值问题即使对超音速流的情形也是适定的. 这使他们能够给出一个计算翼型的程序, 其中速度是弧长的函数, 从而在亚音速气流情况下得到问题的精确解; 而对于超音速气流, 首先假设气流是无冲击, 亚音速的, 然后用亚音速值逼近给定的超音速值. 这真的是复分析的绝妙应用.

第二个应用领域是统计力学, 其所用数学源于 Charles Loewner 对单位圆盘上的单叶 (即一对一) 解析函数的研究. 基于函数

$$k(z) = \frac{z}{(1-z)^2} = z + \sum_{n=2}^{\infty} n z^n,$$

的某些已知的极值性质, Bieberbach 提出以下猜想: 单位圆盘上的满足下述归一化条件

的单叶解析函数

$$f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n,$$

的系数 a_n 满足 $|a_n| \leq n$, 并且等号成立仅当 $f(z) = k(z)$ 或者其旋转 $k(\alpha z)/\alpha, |\alpha| = 1$. 该猜想的 $n = 2$ 情形容易解决, 但 $n \geq 3$ 的情形仍充满挑战.

Loewner 通过将函数 f 嵌入如下构造的单参数映射族, 证明了 $|a_3| \leq 3$. 设 f 将单位圆盘映为某条连接一点 p 与 ∞ 的曲线的外部, 将点 p 沿该曲线移动, 则得到外部区域的单参数族; 我们把将单位圆盘映射该曲线外部的 (归一化的) 解析映射记为 $f(z;p)$. Loewner [Lo] 导出了函数 f(作为 p 的函数) 所满足的微分方程, 并用它成功地估计出了 a_3. 虽然 Loewner 的方法在有关单叶函数的许多其它问题上也有重要应用 [D, pp. 95-117], 但将其用在估计更高的系数 a_n 的努力收效甚微; 在之后 60 年, 人们更关心解决此问题的其它方法. 然而, Bieberbach 猜想由 Louis de Branges[Br] 所最终证明, 也用到了 Loewner 的成果, 见 [FP].

最近, Oded Schramm [S] 通过以布朗运动为输入解 Loewner 方程, 发现了一个共性不变的随机过程; 其中 Loewner 方程描述了统计力学中的标量极限. 随机 Loewner 演化 (也叫 Schramm-Loewner 演化, 简称 SLE) 后来被用于解决统计力学中的很多二维问题. 举个例子, Lawler, Schramm 和 Werner [LSW] 用它证明了 Mandelbrot 猜想, 该猜想断言平面布朗边界 (即平面布朗运动路径的补集的无穷连通分支的边界) 的维数是 $\frac{4}{3}$. 随机 Loewner 演化使我们对诸如临界渗流, 临界 Ising 模型的二维系统的随机分形几何的理解有了重大的飞跃 [Sm1], [Sm2]. 并且它也与二维共形场论, 二维量子引力, 随机矩阵理论有密切联系. 这项工作在两个不同领域[1] 都地位显著, 且被获奖的工作所引用; 这是一个起源于纯粹的数学, 后来在理论物理中起到重要作用的最令人瞩目的例子之一.

参考文献

BGK F. Bauer, P. Garabedian and D. Korn, *A Theory of Supercritical Wing Sections*, Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems **66**, Springer-Verlag, 1972.

Br Louis de Branges, *A proof of the Bieberbach Conjecture*, ActaMath. **154** (1985), 137-152.

D Peter L. Duren, *Univalent Functions*, Springer-Verlag, 1983.

FP Carl H. FitzGerald and Ch. Pommerenke, *The de Branges theorem on univalent functions*, Trans. Amer. Math. Soc. **290** (1985), 683-690.

[1]Wendelin Werner (2006) 说:" 他对随机 Loewner 演化, 二维布朗运动的几何以及共形场论的研究具有贡献", 并且 Stanislav Smirnov (2010) 说:" 他证明了统计物理学中的渗流, 平面 Ising 模型的共性不变性". 此外, 根据 2008 年 9 月 10 日《纽约时报》刊登的 Oded Schramm 的讣告, " 如果 Schramm 博士晚出生三星期零一天, 则它最有可能赢得 2002 年的菲尔茨奖".

GK1 Paul Garabedian and D.G. Korn, *Numerical design of transonic airfoils, Numerical Solution of Partial Differential Equations -2*, Academic Press, 1971, pp. 253-271.

GK2 Paul Garabedian and D.G. Korn, *A systematic method for computer design in supercritical airfoils in cascade*, Comm. Pure Appl. Math. **29** (1976), 369-382.

K D.G. Korn, *Computation of shock-free transonic flows for airfoil design*, AEC Research and Development Report NYO-1480-125, Courant Institute of Mathematical Sciences, NYU, 1969.

La Gregory F. Lawler, *Conformally Invariant Processes in the Plane*, Amer. Math. Soc., 2005.

LSW Gregory F. Lawler, Oded Schramm and Wendelin Werner, *The dimension of the planar Brownian frontier is* 4/3, Math. Res. Lett. **8** (2001), 401-411.

Lo Karl Löwner, *Untersuchungen über schlichte konforme Abbildungen des Einheitskreises.* I., Math. Ann. *89* (1923), 103-121.

M1 Cathleen S. Morawetz, *On the non-existence of continuous transonic flows past profiles*, Comm. Pure Appl. Math. **9** (1956), 45-68; II, ibid. **10** (1957), 107-131; III, ibid. **11** (1958), 129-144.

M2 Cathleen S. Morawetz, *Non-existence of transonic flows past a profile*, Comm. Pure Appl. Math. **17** (1964), 357-367.

S Oded Schramm, *Scaling limits of loop-erased random walks and uniform spanning trees*, Israel J. Math. **118** (2000), 221-288.

Sm1 Stanislav Smirnov, *Critical percolation in the plane: conformal invariance, Cardy's formula, scaling limits*, C.R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **323** (2001), 239-244.

Sm2 Stanislav Smirnov, *Towards conformal invariance of 2D lattice models*, International Congress of Mathematicians, Vol. II, Eur. Math. Soc., 2006, pp. 1421-1451.

W Wendelin Werner, *Random planar curves and Schramm-Loewner evolutions*, Lectures on Probability Theory and Statistics, Lecture Notes in Math. **1840**, Springer, 2004, pp. 107- 195.

A. Banach 空间中的 Liouville 定理

Liouville 的经典的定理断言, 有界整函数必为常值函数. 对于取值于复 Banach 空间 X 的解析函数, 也有相应的结果. 我们知道, 对于定义在区域 $D \subseteq \mathbb{C}$, 取值于复 Banach 空间 X 上的函数 f, 如果对任意 $z \in D$, 极限

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}$$

(在 X 的范数拓扑意义下) 存在, 则称函数 f 是 (强) 解析的. 设取值于 X 的函数 f 在 $D \subseteq \mathbb{C}$ 解析, 则易知对任意连续线性泛函 $x^* \in X^*$, $x^*(f(z))$ 为 D 上的 $\mathbb{C}$-值解析函数, 且其导函数为 $x^*(f'(z))$. 特别地, 若 X-值函数 f 为整函数 (即, 在复平面 $\mathbb{C}$ 全纯), 则 $x^*(f(z))$ 为经典意义下的整函数.

定理. *(推广的 Liouville 定理)*

设 X 为复 Banach 空间, $F : \mathbb{C} \to X$ 为整函数, 且存在 $M > 0$ 使得 $\|F(z)\|_X \leq M, \forall z \in \mathbb{C}$, 则存在 $x_0 \in X$ 使得对任意 $z \in \mathbb{C}$ 都成立 $F(z) = x_0$, 即 F 为常函数.

证明. 否则, 存在 $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ 使得 $F(z_1) \neq F(z_2)$. 再由 (泛函分析中的)Hahn-Banach 定理, 取 $x^* \in X^*$ 使得 $x^*(F(z_1)) \neq x^*(F(z_2))$. 但是另一方面, 对任意 $z \in \mathbb{C}$,

$$|x^*(F(z))| \leq \|x^*\|_{X^*} \|F(z)\|_X \leq M \|x^*\|_{X^*},$$

因此 $x^*(F(z))$ 为经典意义下的有界整函数, 从而由 Liouville 定理可知其为常函数. 这与 $x^*(F(z_1)) \neq x^*(F(z_2))$ 矛盾. □

B. Borel-Carathéodory 不等式

设 F 为闭圆盘 $D := \left\{z \middle| |z| \leq R\right\}$ 上的解析函数. 对 F 在 D 中的增长速度的一个自然的描述方式是考虑如下的最大模函数:

$$M(r) = M(r, F) := \max_{|z|\leq r} |F(z)| = \max_{|z|=r} |F(z)|,$$

其中 $0 \leq r \leq R$. 设 $U(z) := \mathrm{Re} F(z)$, 以及

$$A(r) = A(r, F) := \max_{|z|=r} U(z),$$

则我们有如下重要的不等式, 该不等式用 $A(R)$ 和 $|F(0)|$ 来控制 $M(r)$.

定理 B.1. *(Borel-Carathéodory 不等式)*
记号同上, 令 $0 \leq r < R$, 则有

$$M(r) \leq \frac{2r}{R-r} A(R) + \frac{R+r}{R-r} |F(0)|. \tag{B.1}$$

证明. 设 $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, 其中 $a_n = \alpha_n + i\beta_n$, $(\alpha, \beta \in \mathbb{R})$, 则有

$$\begin{aligned} U(Re^{i\theta}) &= \mathrm{Re} \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha_n + i\beta_n) R^n (\cos n\theta + i \sin n\theta) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha_n \cos n\theta - \beta_n \sin n\theta) R^n, \end{aligned}$$

上式关于 θ 一致收敛. 对于 $n \geq 1$, 有

$$\pi \alpha_n R^n = \int_0^{2\pi} U(Re^{i\theta}) \cos n\theta \, \mathrm{d}\theta$$

$$\pi\beta_n R^n \quad = \quad -\int_0^{2\pi} U(Re^{i\theta})\sin n\theta \, \mathrm{d}\theta,$$

从而

$$\pi a_n R^n = \int_0^{2\pi} U(Re^{i\theta})e^{-in\theta}\, \mathrm{d}\theta = \int_0^{2\pi} [U(Re^{i\theta}) - A(R)]e^{-in\theta}\, \mathrm{d}\theta.$$

因此

$$\begin{aligned}\pi|a_n|R^n &\leq \int_0^{2\pi} |U(Re^{i\theta}) - A(R)|\, \mathrm{d}\theta \\ &= \int_0^{2\pi} [A(R) - U(Re^{i\theta})]\, \mathrm{d}\theta = 2\pi[A(R) - \alpha_0],\end{aligned}$$

从而

$$|a_n|R^n \leq 2[A(R) + |F(0)|] \tag{B.2}$$

以及 $|a_n|r^n \leq 2[A(R)+|F(0)|]\left(\frac{r}{R}\right)^n$ 对 $n \geq 1$ 成立. 这表明

$$\begin{aligned}|F(re^{i\theta}) - F(0)| &\leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|r^n \leq 2[A(R) + |F(0)|]\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{R}\right)^n \\ &= \frac{2r}{R-r}A(R) + \frac{2r}{R-r}|F(0)|;\end{aligned}$$

因此有

$$|F(re^{i\theta})| \leq \frac{2r}{R-r}A(R) + \frac{R+r}{R-r}|F(0)|,$$

之后易得. □

作为此定理的直接推论, 有下述更加一般的 Liouville 定理:

定理 B.2. *(Liouville 定理)*

设 $F(z) = U(z) + iV(z)$ 为整函数 (其中 U, V 分别为 F 的实部, 虚部), 如果存在正常数 C, K, α 使得当 $|z| \geq K$ 时成立 $U(z) \leq C|z|^\alpha$, 则 $F(z)$ 是次数不超过 α 的多项式.

证明. 由题设可知, 对每个整数 $n > \alpha$,

$$\limsup_{R\to+\infty} \frac{A(R)}{R^n} \leq 0;$$

从而由B.2可知 $a_n = 0$, $(\forall n > \alpha)$. □

我们也能得到指数型的非零函数的下述性质:

推论 B.3. 设 f 为整函数, 且恒不为零. 若存在 $B, C > 0$ 使得

$$|f(z)| \leq e^{B|z|+C}, \quad \forall z \in \mathbb{C}, \tag{B.3}$$

则必存在 $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ 使得 $f(z) = e^{\alpha z + \beta}$. 此外若 $f(0) = 1$, 则可以取 $\beta = 0$.

证明. 由于 $f(z) \neq 0$, 从而存在整函数 g 使得 $f(z) = e^{g(z)}$. 由B.3可知 $A(r, g) \leq Br + C$; 因此由B.2立刻得到 g 为线性函数. 其余显然. □

关于 Borel-Carathéodory 不等式的相关结果的更深的综述, 可参考 [KM].

参考文献

KM Gershon Kresin and Vladimir G. Maz'ya, *Sharp Real-Part Theorems*, Lecture Notes in Math. **1903**, Springer, 2007.

Z Lawrence Zalcman, *Picard's Theorem without tears*, Amer. Math. Monthly **85** (1978), 265-268.

C. Phragmén-Lindelöf 定理

Phragmén-Lindelöf 定理将极大模原理推广到定义在无界区域 D 上的解析函数 f 在边界 ∂D 有界的情况. 事实证明, 如果在 D 中当 $z \to \infty$ 时 $f(z)$ 增长不太快, 则 $|f(z)|$ 在 ∂D 的上界也是其在 D 中的上界. 基本结论如下:

定理 C.1. 设 $f(x)$ 在角形区域 D_α 上解析, 在其边界 ∂D_α 连续. 其中 D_α 是从原点出发的夹角是 $\frac{\pi}{\alpha}$, $(\alpha > \frac{1}{2})$ 的两条射线所围成的区域. 假设在 ∂D_α(即, 那两条射线之并) 上 $|f(z)| \le M$, 并存在 $\beta < \alpha$, 使得当 $r \to \infty$ 时

$$f(re^{i\theta}) = O(e^{r^\beta}) \qquad \text{关于 } \theta \text{ 一致}, \tag{C.1}$$

那么 $|f(z)| \le M$, $\forall z \in D_\alpha$.

证明. 不失一般性, 我们令

$$D_\alpha := \left\{ z = re^{i\theta} \middle| |\theta| < \frac{\pi}{2\alpha}, r > 0 \right\}.$$

固定 $\beta < \gamma < \alpha$, 并设

$$F_\varepsilon(z) := \exp(-\varepsilon z^\gamma) f(z),$$

其中 $\varepsilon > 0$. 那么

$$|F_\varepsilon(re^{i\theta})| = \exp(-\varepsilon r^\gamma \cos\gamma\theta)|f(re^{i\theta})|. \tag{C.2}$$

由于 $\gamma < \alpha$, 从而当 $\theta = \pm\frac{\pi}{2\alpha}$ 时有 $\cos r\theta > 0$, 于是当 $z = re^{\pm\frac{i\pi}{2\alpha}}$ 时, $F_\varepsilon(z)| \le |f(z)| \le M$. 进而, 若 $z = Re^{i\theta}$, $(|\theta| < \frac{\pi}{2\alpha})$ 时, 由C.1与C.2可知,

$$\begin{aligned} |F_\varepsilon(Re^{i\theta})| &\le \exp(-\varepsilon R^\gamma \cos\frac{\gamma\pi}{2\alpha})|f(Re^{i\theta})| \\ &\le A\exp(R^\beta - \varepsilon R^\gamma \cos\frac{\gamma\pi}{2\alpha}). \end{aligned}$$

由于 $\gamma > \beta$, 故当 $R \to \infty$ 时上式右端趋近 0. 从而根据极大模原理易知, 对任意

$z \in D_{\alpha,R} := \left\{ re^{i\theta} \middle| |\theta| < \dfrac{\pi}{2\alpha}, 0 < r < R \right\}$, 当 R 充分大时, 有 $|F_\varepsilon(z)| \le M$. 令 $R \to \infty$, 于是对于每个 $\varepsilon > 0$, 在 D_α 上有

$$f(z) \le M\exp(\varepsilon |z|^\gamma).$$

现在令 $\varepsilon \to 0$, 那么在整个 D_α 上都有 $|F(z)| \le M$, 命题得证. □

点评.

1. 该证明并未充分运用题设条件C.1: 其实只需要C.1式对于一列 $r = r_n$ 成立即可, 其中 $r_n \to \infty$.
2. 题设C.1还可以被减弱为: 对任意 $\delta > 0$,

$$f(re^{i\theta}) = O(e^{\delta r^\alpha}), \qquad r \to \infty, \text{关于 } \theta \text{ 一致}.$$

详见 [T, pp. 178-179].

我们也有以下结论.

定理 C.2. 设 f 是带状区域 $S := \left\{ z \in \mathbb{C} \middle| -1 \le \operatorname{Re} z \le 1 \right\}$ 上的有界解析函数, 若对任意 $z \in \partial S$ 都成立 $|F(z)| \le M$, 则对任意 $z \in S$ 也成立 $|F(z)| \le M$.

证明. 假设 $S := \left\{ z \middle| -1 \le \operatorname{Re} z \le 1 \right\}$, 使得对任意 $y \in \mathbb{R}$ 都有 $|f(\pm 1 + iy)| \le M$. 固定 $\varepsilon > 0$, 考虑函数

$$F(z) := e^{\varepsilon z^2} f(z).$$

则

$$|F(x+iy)| = e^{\varepsilon(x^2-y^2)} |f(x+iy)|.$$

由于 f 在 S 上有界, 从而易知对于充分大的 $T > 0$,

$$|F(x \pm iT)| \le e^{\varepsilon(1-T^2)} |f(x+iT)| \le M, \qquad \forall x \in [-1, 1].$$

从而在以 $\pm 1 \pm iT$ 为顶点的矩形 S_T 的边界上成立 $|F(z)| \le M$. 根据极大值原理, 该不等式也在 S_T 当中成立. 令 $T \to \infty$, 可知 $|F(z)| \le M$ 在 S 上成立; 再令 $\varepsilon \to 0$, 得到 $|f(z)| \le M$. □

作为定理C.2的简单推论, 我们有 Hadamard 三线定理的类似版本, 这被认为是 C. Doetsch 的工作.

定理 C.3. *(三线定理).*
设 f 是带状区域 $S := \left\{z \middle| 0 \le \mathrm{Re} z \le 1\right\}$ 上的有界解析函数, 记

$$M(x) := \sup_{-\infty<y<\infty} |f(x+iy)|, \qquad 0 \le x \le 1. \tag{C.3}$$

那么

$$M(x) \le M(0)^{1-x} M(1)^x \tag{C.4}$$

证明. 记 $c = \log \dfrac{M(0)}{M(1)}$. 根据C.3可知, 当 $\mathrm{Re}\, z = 0$ 或 1 时成立

$$|f(z)e^{cz}| \le M(0).$$

对 S 上的函数 $f(z)e^{cz}$ 应用定理C.2, 有

$$|f(x+iy)|e^{cx} \le M(0),\ 0 \le x \le 1;$$

该式结合 c 的定义, 便证得C.4. □

参考文献

T E.C. Titchmarsh, *The Theory of Functions*, second edition,Oxford University Press,1939.

D. 正规族

现代分析中, 紧性无疑是一个“大想法”. Paul Montel 把紧性运用到他的正规族理论中来研究解析函数族, 标志了现代分析学的诞生. 这里我们来回忆主要的定义, 并证明 Zalcman 引理; 这引理在第 6 章证明 Fatou–Julia–Baker 定理时用过. 为体现这个方法的效率, 我们也会简短地证明正规族理论的核心定理 — Montel 定理.

令 D 是 $\mathbb{C}$ 里的一个区域, 我们将主要考虑从 D(配有 Euclid 度量) 到扩充复平面 $\hat{\mathbb{C}}$ 的解析映射

$$f\colon (D, |\ \ |_{\mathbb{R}^2}) \to (\hat{\mathbb{C}}, \chi)$$

(比如亚纯函数), 其中 $\hat{\mathbb{C}}$ 配有弦度量 χ:

$$\begin{aligned}\chi(z, z') &= \frac{|z - z'|}{\sqrt{(1 + |z|^2)(1 + |z'|^2)}}, \quad z, z' \in \mathbb{C};\\ \chi(z, \infty) &= \frac{1}{\sqrt{1 + |z|^2}}.\end{aligned}$$

χ 导出一个球面导数

$$\begin{aligned}f^{\#}(z) &= \lim_{h \to 0} \frac{\chi(f(z+h), f(z))}{|h|}\\ &= \frac{|f'(z)|}{1 + |f(z)|^2} \quad (f(z) \neq \infty).\end{aligned}$$

由于 $\chi(z, w) = \chi(1/z, 1/w)$, 故 $f^{\#} = (1/f)^{\#}$, 这给 $f^{\#}$ 在 f 极点处的表达式提供了个方便的公式.

D 上的一个亚纯函数族 $\mathscr{F}$ 若满足每个序列 $(f_n) \subseteq \mathscr{F}$ 都有一个子列在 D 任一个子集上都 χ-一致收敛 [1], 则称它为 D 上的正规族. 易见在全纯函数族的情形, 这就等价于要求每个序列 $(f_n) \subseteq \mathscr{F}$ 都有一个 (在 Euclid 度量下) 内闭一致收敛的子列或者有一个内闭一致发散到 ∞ 的子列.

[1] 译注: 即在 D 上内闭 χ-一致收敛

显见正规性质是一个紧致的概念: D 上的亚纯函数族 $\mathscr{F}$ 正规当且仅当在 D 上内闭 χ-一致收敛的拓扑下它是仿紧的. 由 Arzelá–Ascoli 定理, 这个仿紧性等价于 $\mathscr{F}$ 的内闭等度连续. 另外由于这些函数光滑, 故连续性与某个导数的局部有界性质等价. 这些就是下面定理的内容:

定理. *(Marty 定理) D 上亚纯函数族 $\mathscr{F}$ 正规当且仅当对每个紧子集 $K \subseteq D$, 存在常值 $M(K)$ 使得对所有 $z \in K$ 与 $f \in \mathscr{F}$ 有*

$$f^{\#}(z) \leq M(K). \tag{D.1}$$

证明参见 [A, pp. 226-227].

跟别的充要条件类似, Marty 定理提供的信息并不够, 主要因为在不清楚 $\mathscr{F}$ 是否正规的情况下 (D.1) 一般都极难验证. 于是一直有人持续研究正规性的充分条件.

下面的 Zalcman 引理 (此后记成 ZL) 在上述联系中尤其有用.

引理 D.1. *单位圆盘 Δ 上的亚纯函数族 $\mathscr{F}$ 不正规当且仅当存在*

(a) 一个数 $0 < r < 1$;

(b) 点列 z_n: $|z_n| < r$;

(c) 函数列 $f_n \in \mathscr{F}$;

(d) 数列 $\rho_n \to 0^+$

满足

$$f_n(z_n + \rho_n \zeta) \to g(\zeta) \tag{D.2}$$

且上面的收敛在球面度量下 $\mathbb{C}$ 的紧子集上一致, 其中 g 是一个 $\mathbb{C}$ 上的非常值亚纯函数. 可以选取函数 g 满足归一化条件

$$g^{\#}(z) \leq g^{\#}(0) = 1, \quad z \in \mathbb{C}.$$

证明. 设 $\mathscr{F}$ 在 Δ 上不正规. 则由 Marty 定理, 存在数 r^*: $0 < r^* < 1$, $\{z\colon |z| \leq r^*\}$ 中的点列 z_n^* 及函数列 $f_n \in \mathscr{F}$ 使得 $f_n^{\#}(z_n^*) \to \infty$. 固定数 r: $r^* < r < 1$, 并令

$$M_n = \max_{|z| \leq r} \left(1 - \frac{|z|}{r}\right) f_n^{\#}(z) = \left(1 - \frac{|z_n|}{r}\right) f_n^{\#}(z_n). \tag{D.3}$$

上述最大值存在, 因为 $f_n^\#$ 在 $|z| \le r$ 上连续; 另外很明显有 $M_n \to \infty$. 设

$$\rho_n = \frac{1}{M_n}\left(1 - \frac{|z_n|}{r}\right) = \frac{1}{f^\#(z_n)}, \tag{D.4}$$

我们得到

$$\frac{\rho_n}{r - |z_n|} = \frac{1}{rM_n} \to 0. \tag{D.5}$$

于是函数列

$$g_n(\zeta) = f_n(z_n + \rho_n\zeta)$$

在 $|\zeta| < R_n$ 上有定义, 其中当 $n \to \infty$ 时, $R_n = (r - |z_n|/\rho_n) \to \infty$. 由 (D.4) 推出

$$g_n^\#(0) = \rho_n f_n^\#(z_n) = 1.$$

对 $|\zeta| \le R < R_n$, $|z_n + \rho_n\zeta| < r$, 从而由 (D.3) 与 (D.4),

$$g_n^\#(\zeta) = \rho_n f_n^\#(z_n + \rho_n\zeta) \le \frac{\rho_n M_n}{1 - \dfrac{|z_n + \rho_n\zeta|}{r}} \le \frac{r - |z_n|}{r - |z_n| - \rho_n R},$$

并由 (D.5) 知它在 $n \to \infty$ 时趋于 1. 从而由 Marty 定理 (g_n) 是一个正规族. 通过取子列我们可就设 (g_n) (在球面度量下) 在 $\mathbb{C}$ 上内闭一致收敛到亚纯函数 g. 易有 $g^\#(\zeta) = \lim g_n^\#(\zeta) \le 1$. 最后 g 不为常值, 因为 $g^\#(0) = \lim g_n^\#(0) = 1 \ne 0$. 现在就很明了了: 如果 $\mathscr{F}$ 里都是解析函数, 那么极限函数是整的.

反过来, 假设 (a) – (d) 都成立且 $\mathscr{F}$ 在 Δ 上正规. 由 Marty 定理, 存在 $M > 0$ 使得

$$\max_{|z| \le (1+r)/2} f^\#(z) \le M$$

对所有 $f \in \mathscr{F}$ 都成立. 设 (D.2) 成立. 固定 $\zeta \in \mathbb{C}$. 对大的 n, $|z_n + \rho_n\zeta| \le (1+r)/2$, 从而 $\rho_n f_n^\#(z_n + \rho_n\zeta) \le \rho_M$. 于是对所有 $\zeta \in \mathbb{C}$,

$$g^\#(\zeta) = \lim \rho_n f_n^\#(z_n + \rho_n\zeta) = 0.$$

这推出 g 就是常值函数. □

在 $\mathscr{F}$ 于 $z_0 \in \Delta$ 不正规的情形下, 即 $\mathscr{F}$ 在 z_0 的任一个邻域都不正规时, 我们能够选取 (b) 中收敛到 z_0 的序列 $\{z_n\}$. 这个事情的证明本身就是 ZL 的一个有意思的应用.

实际上, 设 $\mathscr{F}$ 在 z_0 不正规. 我们可假设 $z_0 = 0$, 否则如有必要可以作个平移. 自然 0 不再是 $\mathscr{F}$ 中函数定义域的那些圆盘的中心; 不过它们都在某 $\{|z| < \rho\}$ 上有定义, 其中 $\rho > 0$. 取 $k_0 \in \mathbb{N}$ 使得 $1/\sqrt{k_0} < \rho$. 那么由 Marty 定理, 对每个 $k \geq k_0$ 都存在 $f_k \in \mathscr{F}$ 满足 $\sup\{f_k^{\#}(z)\colon z \in \Delta(0, 1/2\sqrt{k})\} > k$. 对这些 k 令 $g_k(z) = f_k(z/\sqrt{k})$. 每个 g_k 就定义于 $\Delta = \{|z| < 1\}$ 且在这上边都满足

$$g_k^{\#}(z) = \frac{1}{\sqrt{k}} f_k^{\#}(z/\sqrt{k}).$$

显然有 $\sup\{g_k^{\#}(z)\colon z \in \Delta(0, 1/2)\} > \sqrt{k}$, 所以再由 Marty 定理, $\{g_k\}$ 在 Δ 上不正规. 对 (g_k) 用 ZL, 我们得到 $0 < r < 1$, $|z_\ell^*| < r$, $\rho_\ell^* \to 0^+$ 及 g_{k_ℓ} 且它们满足

$$g_{k_\ell}(z_\ell^* + \rho_\ell^* \zeta) \to g(\zeta)$$

在 $\mathbb{C}$ 上 χ-内闭一致, 其中 $g^{\#}(\zeta) \leq g^{\#}(0) = 1[\zeta \in \mathbb{C}]$. 但这就推出

$$f_{k_\ell}\left(\frac{z_\ell^*}{\sqrt{k_\ell}} + \frac{\rho_\ell^*}{\sqrt{k_\ell}}\zeta\right) \to g(\zeta)$$

在 $\mathbb{C}$ 上 χ-内闭一致. 取 $z_\ell = z_\ell^*/\sqrt{k_\ell}, \rho = \rho_\ell^*/\sqrt{k_\ell}$ 就完成证明. □

正规族理论的核心是 Montel 定理, 它表明如果区域 D 上的亚纯函数族的每个函数都取不到 $\hat{\mathbb{C}}$ 上的三个固定 (且互异) 的值, 那么它在 D 上正规. 正是这个定理才让正规族这套理论可以用于证明 (一维) 复动力系统的全局结果. 这里给一个 Montel 定理的基于 ZL 的简单而初等的证明, 参见 [R, pp. 240-241].

定理. *(Montel 定理) 定义在区域 $D \subseteq \mathbb{C}$ 上, 且有公共的三个固定例外值 $a, b, c \in \hat{\mathbb{C}}$ 的亚纯函数族 $\mathscr{F}$ 在 D 上正规.*

证明. 由于正规性是局部性质, 我们可以设 $D = \Delta$. 经一个分式线性变换, 我们也可以设三个例外值分别是 $0, 1, \infty$. 用 $\mathscr{F}_n$ 记 Δ 上取不到 $0, \infty$ 以及所有 n 次单位根的函数全体, 则 $\mathscr{F} = \mathscr{F}_1$. 注意 $f \in \mathscr{F}$ 意味着 $\sqrt[n]{f} \in \mathscr{F}$, 而 $h \in \mathscr{F}$ 时有 $h^n \in \mathscr{F}$.

现设 $\mathscr{F}$ 不正规. 那么 $\mathscr{F}_n$ 没一个正规的. 所以由 ZL 我们得出, 对每个 n 都存在一个非常值整函数 g_n, 它是一列通通不取 $S_n = \{0, 1, e^{2\pi i k/n}\colon 0, 1, \ldots, n-1\}$ 里的值的函数的极限. 由 Hurwitz 定理, g_n 也不取 S_n 的值. 此外 $g_n^{\#}(z) \leq g_n^{\#}(0) = 1$.

为方便起见, 写 $T_n = S_{2^n}, G_n = g_{2^n}$, 并考察 $\mathbb{C}$ 上的函数族 $\mathscr{G} = \{G_n\}$. 现在 $G_n^{\#}(z) \leq 1$ 对所有 $z \in \mathbb{C}$ 都成立, 故由 Marty 定理, $\mathscr{G}$ 在 $\mathbb{C}$ 正规, 从而它有一个 χ-内

闭一致收敛到极限函数 G 的子列. 而对每个 n, $G_n^{\#}(0)=1$, 故 $G^{\#}(0)=1$, 且 G 不是常值. 集合 T_n 形成集套, 所以只要 $m \geq n$ 就有 G_m 不取 T_n 里的值. 由 Hurwitz 定理, G 取不到所有 n 对应的 T_n. 因为 $\bigcup T_n$ 在单位圆周里稠密, 且 $G(\mathbb{C})$ 是连通开集, 所以 $G(\mathbb{C}) \subseteq \Delta$ 或者 $G(\mathbb{C}) \subseteq \mathbb{C} \setminus \overline{\Delta}$. 不论哪种情况都与 Liouville 定理矛盾. □

Montel 定理立即 (且轻易) 推出的结论有 Picard 定理和整函数的 Julia 方向的存在定理 [SZ, p.352]. 刚刚给出的证明, 跟 Montel 定理推出 Picard 大定理的论述一起 [SZ, p.351] 就是到达复变函数论这一顶峰的最短而最简单的路径.

点评. Zalcman 引理最初陈述并证明于 [Z1]. 可在 [PZ, 引理 2] 中找到一个近代版本. 它在分析学中的广泛应用例子可见 [Z2]. 另外可见 [BBHM], [Bg] 与 [Bt]. Montel 定理的推广研究可见 [Z3].

参考文献

A Lars V. Ahlfors, *Complex Analysis*, third edition, McGraw-Hill, 1979.

BBHM D. Bargmann, M. Bonk, A. Hinkkanen, and G.J. Martin, *Families of meromorphic functions avoiding continuous functions*, J. Anal. Math. **79** (1999), 379-387.

Bg Walter Bergweiler, *A new proof of the Ahlfors Five Islands Theorem*, J. Anal. Math. **76** (1998), 337-347.

Bt François Berteloot, *Méthodes de changement d'échelles en analyse complexe*, Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. (6) **15** (2006), 427-483.

PZ Xuecheng Pang and Lawrence Zalcman, *Normal families and shared values*, Bull. London Math. Soc. **32** (2000), 325-331.

R Antonio Ros, *The Gauss map of minimal surfaces*, Differential Geometry, Valencia 2001, World Scientific, 2002, pp. 235-252.

SZ Stanislaw Saks and Antoni Zygmund, *Analytic Functions*, third edition, Elsevier, 1971.

Z1 Lawrence Zalcman, *A heuristic principle in complex function theory*, Amer. Math. Monthly **82** (1975), 813-818.

Z2 Lawrence Zalcman, *Normal families: new perspectives*, Bull. Amer. Math. Soc (N.S.) **35** (1998), 215-230.

Z3 Lawrence Zalcman, *Variations on Montel's Theorem*, Bull. Soc. Sci. Lett. Lód Sér. Rech. Déform. **59** (2009), 25-36.