

# 孤子：微分方程， 对称，无穷维代数

Jimbo M, Miwa T, Date E



图：这个小朋友将此书翻译成了中文.

# 原书版权页

本书由剑桥大学出版社出版委员会出版  
英国剑桥川普林顿街皮特大楼

剑桥大学出版社:

- 英国剑桥爱丁堡大楼, 邮编 CB2 2RU,  
网址: <http://www.cup.cam.ac.uk>
- 美国纽约西 20 街 40 号, 邮编 NY 10011-4211,  
网址: <http://www.cup.org>
- 澳大利亚墨尔本奥克利斯坦福路 10 号, 邮编 3166
- 西班牙马德里鲁伊斯·德·阿拉孔街 13 号, 邮编 28014

《Soliton no Suri (Mathematics of Solitons)》

作者: Tetsuji Miwa, Michio Jimbo, Etsuro Date

版权所有 © Tetsuji Miwa, Michio Jimbo, Etsuro Date

本书原著日文版 1993 年由东京岩波书店出版, 英文版译本由剑桥大学出版社于 2000 年出版。本书享有版权。除法定例外及相关集体许可协议的规定外, 未经剑桥大学出版社书面许可, 不得以任何形式复制本书任何部分。

英文版初版出版于 2000 年, 由剑桥大学出版社在英国剑桥印刷

字体排版: Computer Modern 10/11pt, 系统: LaTeX2e[UPH]

本书的目录记录可从英国图书馆查询。

ISBN 0 521 56161 2 精装本

# 目录

原书版权页	2
<b>1 KdV 方程及其对称</b>	<b>6</b>
1.1 对称与变换群	6
1.2 KdV 方程的对称	11
1.3 演化方程的 Lax 形式 (线性微分方程法)	14
<b>2 KdV 方程簇</b>	<b>16</b>
2.1 拟微分算子	16
2.2 高阶 KdV 方程	18
2.3 无穷多个交换对称	19
2.4 KP 方程簇	21
<b>3 Hirota 方程与顶点算子</b>	<b>24</b>
3.1 Hirota 导数	25
3.2 $n$ -孤子解	29
3.3 顶点算子	31
3.4 双线性恒等式	35
<b>4 费米子演算</b>	<b>39</b>
4.1 微分与乘法的玻色代数	39
4.2 费米子	41
4.3 Fock 表示	42
4.4 对偶空间, 电荷量与能量	45
4.5 Wick 定理	48

<b>5</b>	<b>玻色-费米对应</b>	<b>51</b>
5.1	生成函数 . . . . .	51
5.2	正规积 . . . . .	52
5.3	玻色子的实现 . . . . .	54
5.4	Fock 空间的同构 . . . . .	55
5.5	费米子的实现 . . . . .	59
<b>6</b>	<b>变换群与 <math>\tau</math> 函数</b>	<b>62</b>
6.1	群作用与轨道 . . . . .	62
6.2	二次费米多项式的李代数 $\mathfrak{gl}(\infty)$ . . . . .	64
6.3	KP 方程簇的变换群 . . . . .	68
<b>7</b>	<b>KdV 方程的变换群</b>	<b>71</b>
7.1	KP 方程簇 v.s. KdV 方程簇 . . . . .	71
7.2	KdV 方程的变换群 . . . . .	73
<b>8</b>	<b>有限维格拉斯曼簇与 Plücker 关系</b>	<b>75</b>
8.1	有限维格拉斯曼簇 . . . . .	75
8.2	Plücker 坐标 . . . . .	78
8.3	Plücker 关系 . . . . .	80
<b>9</b>	<b>无穷维格拉斯曼簇</b>	<b>86</b>
9.1	有限维 Fock 空间的情形 . . . . .	87
9.2	真空轨道的刻画 . . . . .	91
9.3	杨图与特征多项式 . . . . .	93
<b>10</b>	<b>双线性恒等式</b>	<b>100</b>
10.1	双线性恒等式与 Plücker 关系 . . . . .	100
10.2	Plücker 关系与 Hirota 方程 . . . . .	102



# 1. KdV 方程及其对称

我们来寻找 KdV 方程的对称, 要找的对称形如非线性演化方程的无穷小变换. KdV 方程本身就是非线性演化方程, 而我们将看到如何从线性方程的相容性条件来得到它.

对称 (symmetry) 可能是引领我们进入数学与自然科学殿堂的最好的指南针. 在它的引导下, 我们起锚航向 **孤子 (soliton)** 的广阔海洋!

## 1.1 对称与变换群

那么, 什么是对称呢? 比如考虑平面圆周的对称. 直观地看, 以下两种变换都将圆周变为它自身:

1. 绕圆心的旋转,
2. 沿直径的反射.

如何将它们用精确的数学语言表达呢? 在平面直角坐标系  $(x, y)$  中, 圆周是指满足方程

$$x^2 + y^2 = r^2 \quad (1.1)$$

的点构成的集合. 平面的 **旋转 (rotation)** 是指如下线性变换

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad (1.2)$$

而 **反射 (reflection)** 则形如

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \quad (1.3)$$

我们称线性变换

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (1.4)$$

是圆周的一个对称, 如果它保持(1.1)式不变. 换句话说, 我们称(1.4)为方程(1.1)的**对称 (symmetry)**, 如果对方程(1.1)的任何解  $(x, y)$ , 相应的  $(x', y')$  也是(1.1)的解.

我们将变换(1.2)记作  $T(\theta)$ , 将(1.3)记作  $S(\theta)$ . 所有的可逆线性变换在复合运算下构成一个**群 (group)**. 换句话说, 若我们定义两个行列式非零的矩阵  $T_1 = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}$  与  $T_2 = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}$  的乘法  $T_1 \cdot T_2 = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}$ , 则以下群公理<sup>1</sup>成立:

1. 结合律:  $(T_1 \cdot T_2) \cdot T_3 = T_1 \cdot (T_2 \cdot T_3)$ .
2. 存在单位元:  $T \cdot \text{id} = \text{id} \cdot T$ , 其中  $\text{id} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ .
3. 存在逆元:  $T \cdot T^{-1} = T^{-1} \cdot T = \text{id}$ .

我们格外注意这其中保持圆周(1.1)不变的变换, 它们也构成一个群, 称为圆周的**变换群 (transformation group)**. 易知  $T(\theta) = T(\theta')$  或者  $S(\theta) = S(\theta')$ , 当且仅当存在整数  $n$  使得  $\theta = \theta' + 2n\pi$ ; 并且有如下群运算律:

$$\left. \begin{aligned} T(\theta_1) \cdot T(\theta_2) &= T(\theta_1 + \theta_2) \\ T(\theta_1) \cdot S(\theta_2) &= S(\theta_2) \cdot T(-\theta_1) = S(\theta_1 + \theta_2) \\ S(\theta_1) \cdot S(\theta_2) &= T(\theta_1 - \theta_2) \end{aligned} \right\}. \quad (1.5)$$

---

<sup>1</sup> 见任何一本群论教材, 例如 W. Ledermann, *Introduction to group theory*, Oliver and Boyd, 1973, 或者 P.M. Cohn, *Algebra*, Vol I, Wiley, 1974, section 3.2.

通过将变换本身转化为复合运算法则(1.5), 圆周的对称性从具体的平面变换中分离出来, 被提炼为一个抽象的群运算律.

在圆周的众多对称当中, 我们先只考虑旋转对称  $T(\theta)$ . 当参数  $\theta = 0$  时,  $T(0) = \text{id}$ , 从而当参数  $\theta$  变化时, 我们视变换

$$\begin{pmatrix} x(\theta) \\ y(\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (1.6)$$

为代数方程(1.1)的给定的某个解  $(x, y)$  沿着圆周连续变化的过程. 对  $\theta$  求导, 得到

$$\frac{d}{d\theta} \begin{pmatrix} x(\theta) \\ y(\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(\theta) \\ y(\theta) \end{pmatrix}. \quad (1.7)$$

变换(1.6)被此方程以及初值条件

$$\begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (1.8)$$

完全确定. 算子  $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  是旋转变换[在某种意义下, 即将解释]的无穷小生成元. 易知成立

$$T(\theta) = e^{\theta \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}.$$

做关于  $\theta$  在 0 附近的展开, 有

$$T(\theta) = 1 + \theta \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + O(\theta^2). \quad (1.9)$$

更一般地, 若  $R(\theta)$  是关于  $\theta$  的一族变换, 满足  $R(\theta_1 + \theta_2) = R(\theta_1)R(\theta_2)$ , 并且成立  $R(\theta) = 1 + \theta X + O(\theta^2)$ , 则我们称  $X$  为单参数变换  $R(\theta)$  的无



无穷小生成元 (infinitesimal generator), 并且记  $R(\theta) = e^{\theta X}$ . [试与本节末的李代数进行比较]. 若我们把  $R(\theta)$  想象成在某个初始对象  $f$  上的作用, 并且记  $f^R(\theta) = R(\theta)f$ , 则

$$\frac{df^R}{d\theta} = \frac{d}{d\theta} R(\theta)f = Xf^R(\theta). \quad (1.10)$$

我们主要关心变换, 以及作用在函数上的无穷小变换. 例如对于二元函数  $f(x, y)$ , 考虑微分方程

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} - r^2 \right) f(x, y) = 0, \quad (1.11)$$

其中  $r$  是与  $(x, y)$  无关的常数. 代数方程(1.1)的解位于二维  $(x, y)$  平面上, 而微分方程(1.11)的解  $f(x, y)$  位于由二元函数构成的无穷维线性空间当中.  $(x, y)$  平面上的一个旋转变换诱导了关于  $(x, y)$  的二元函数  $g$  的空间上的作用  $g \mapsto T(\theta)g$ :

$$(T(\theta)g)(x, y) = g(x(-\theta), y(-\theta))$$

[与(1.6)比较]. 或者也可以考虑  $f^T(x, y; \theta) = (T(\theta)f)(x, y)$ , 我们也可把它写成如下无穷小变换的形式:

$$\frac{\partial}{\partial \theta} f^T(x, y; \theta) = \left( x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right) f^T(x, y; \theta).$$

从而算子  $x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x}$  为该变换的无穷小生成元. 方程(1.11)具有旋转对称; 因此若  $f$  为(1.11)的解, 则  $T(\theta)f$  也是. 方程(1.11)在平移变换  $(x, y) \mapsto (x + a, y + b)$  下也不变. 平移变换也能表示为无穷小变换:

$$f(x + a, y + b) = e^{a \frac{\partial}{\partial x} + b \frac{\partial}{\partial y}} f(x, y), \quad (1.12)$$

这正是  $f$  在  $(x, y)$  处的泰勒展开[此式以后将经常用到. 也顺便与习题 1.1 比较.]

为后续章节做准备, 我们现在简要介绍一下李代数. 设线性微分算子  $X, Y$  分别为算子  $e^{\theta X}, e^{\theta Y}$  的无穷小生成元; 考虑算子  $e^{\theta X}$  与  $e^{\theta Y}$  的乘积. 我们习惯将

$$[A, B] := AB - BA,$$

称为算子  $A, B$  的**交换子 (commutator)**. 通过计算可以证明

$$e^{\theta X} e^{\theta Y} = e^{\theta X + \theta Y + (1/2)\theta^2[X, Y] + \frac{1}{12}\theta^3[X - Y, [X, Y]] + \dots}$$

等号右边指数上省略的内容  $+\dots$  是关于  $\theta$  的高阶项; 可以证明, 这些高阶项可以只用交换子  $[-, -]$  来表示, 不需要用其它运算符号. 如果  $[X, Y] = 0$ , 也就是  $X$  与  $Y$  交换, 则  $e^{\theta X} e^{\theta Y} = e^{\theta(X+Y)}$ , 即两个变换的复合  $e^{\theta X} e^{\theta Y}$  恰好是关于  $X + Y$  的变换  $e^{\theta(X+Y)}$ . 而一般情况下, 上述两者并非恰好相同, 之间相差了无穷小生成元  $X, Y$  的一些交换子.

**李代数 (Lie algebra)** 是指线性空间  $\mathfrak{g}$ , 并配以满足以下性质的二元运算  $[\cdot, \cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ :

- (1)  $[X, Y] = -[Y, X]$ ,
  - (2)  $[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0$ ,
  - (3)  $[\alpha X + \beta Y, Z] = \alpha[X, Z] + \beta[Y, Z]$ .
- (1.13)

[这里的系数  $\alpha, \beta$  在线性空间  $\mathfrak{g}$  上的作用为数乘]. 若我们不考虑收敛性, 则对于李代数  $\mathfrak{g}$ , 由变换构成集合

$$G = \{e^X \mid X \in \mathfrak{g}\}$$

构成群. 我们会注意到, 在处理无限维对称性时, 正如在孤子理论中所做的那样, 李代数  $\mathfrak{g}$  往往比较容易处理, 即使在变换群  $G$  很难处理的情况下也是如此.

## 1.2 KdV 方程的对称

正如上文所述, 我们有两个版本的由无穷小线性变换生成的旋转:

在 2 维空间中, 无穷小生成元为  $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ;

在无穷维空间中, 无穷小生成元为  $x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x}$ .

我们也可以考虑非线性的无穷小变换. 对于二元函数  $u(x, t)$ , 考虑微分方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} = u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}. \quad (1.14)$$

这是 KdV 方程, 是本章的主题. 我们在这里取  $u \frac{\partial u}{\partial x}$  与  $\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}$  的系数为 1, 但将  $x, u, t$  乘以适当的非零常数倍, 可以让它们的系数是任意非零常数. 这样的方程都叫做 KdV 方程. 此方程描述了一个作用在函数  $u(x)$  上的由算子

$$K(u) = u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \quad (1.15)$$

生成的关于时间  $t$  的无穷小变换. 更一般地, 形如  $\frac{\partial u}{\partial t} = K(u)$  的微分方程称为演化方程 (evolutionary equation). 此方程是线性的还是非线性的, 取决于算子  $K(u)$ . 如果  $K(u)$  是线性算子, 那么  $u \mapsto K(u)$  正是 1.1 节的无穷小生成元.

而现在, 当  $K(u)$  不是线性算子的时候, 我们也把它称为无穷小生成元. 我们把演化方程, 包括非线性情形, 也解释成函数的无穷小变换, 并且在这类演化方程之中寻找 KdV 方程的对称. 我们将问题表述如下: KdV 方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} = K(u) \quad (1.16)$$

是否具有形如

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \hat{K}(u) \quad (1.17)$$

的对称?

那什么是“(1.17)是(1.16)的对称”? 考虑三元函数  $u(x, t, s)$ , 为书写方便, 以后我们把求导简写为

$$\frac{\partial u}{\partial t} = u_t, \quad \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = u_{xxx} = u_{3x}$$

等等. 关于  $u$  及其  $x$ -偏导  $u_x, u_{xx}, u_{3x}, \dots$  的多项式称为  $u$  关于  $x$  的 **微分多项式 (differential polynomial)**. 例如(1.15)是  $u$  的微分多项式.

设  $\hat{K}(u)$  为  $u$  的微分多项式, 将(1.17)视为关于  $s$  的演化方程, 并假设其在初始条件  $u(x, t, s = 0)$  下有解. 换句话说, 从时间  $s = 0$  时的二元函数  $u(x, t, s = 0)$  出发, 求解(1.17), 就能得到在时间  $\Delta s$  时的二元函数  $u(x, t, \Delta s)$ . 而(1.17)给出了 KdV 的一个对称, 是指如果  $s = 0$  时  $u(x, t, s = 0)$  是(1.16)的解, 那么对任何时间  $s$ ,  $u(x, t, s)$  也是(1.16)的解.

视  $t$  和  $s$  地位等同, 则这个问题重新表述如下: 设  $t, s$  为两个独立的时间变量, 当  $t = s = 0$  时给定函数  $u(x, t = 0, s = 0)$ . 则有两种方法来确定  $u(x, \Delta s, \Delta t)$  的值, 如下图:

$$\begin{array}{ccc} u(x, t = \Delta t, s = 0) & \longrightarrow & u(x, t = \Delta t, s = \Delta s) \\ \uparrow & & \uparrow \\ u(x, t = 0, s = 0) & \longrightarrow & u(x, t = 0, s = \Delta s) \end{array} \quad (1.18)$$

在此图中, 向上的箭头代表求解(1.16), 向右的箭头代表求解(1.17). 从左下角到右上角有两条路线, 先向上再向右的路径记作 A, 先向右再向上记作 B. 若沿 A, B 两条路线得到的结果相同, 则称(1.17)是(1.16)的一个对称. 取  $\Delta t, \Delta s$  趋于零的极限, 可知如果 A=B 成立, 则必须有

$$\frac{\partial}{\partial s} K(u) = \frac{\partial}{\partial t} \hat{K}(u). \quad (1.19)$$

那是否随便一个  $\hat{K}(u)$  都满足(1.19)呢? 比如, 我们来试试  $\hat{K}(u) =$

$u^2$  的情形, 此时

$$\begin{aligned}
 \text{左边} &= (uu_x + u_{3x})_s = u^2u_x + u(u^2)_x + (u^2)_{3x} \\
 &= 3u^2u_x + 6u_xu_{xx} + 2uu_{3x}, \\
 \text{右边} &= (u^2)_t = 2u^2u_x + 2uu_{3x}.
 \end{aligned}$$

我们可以看出, 如果没有附加条件  $0 = u^2u_x + 6u_xu_{xx}$ , 则(1.19)不成立. 因此如果随便选取  $\hat{K}(u)$ , 则(1.16), (1.17)往往不相容, (1.17)不是(1.16)的对称.

在(1.15)当中, 如果我们规定  $u$  的次数为 2,  $u_x$  的次数为 3,  $u_{xx}$  的次数为 4, 则等号右边是 5 次齐次多项式. 尽管我不打算解释这样做的背后原因, 但要知道, 在对称性的研究中, 我们可以不失一般性地只讨论齐次微分多项式的无穷小生成元.

例如, 7 次齐次微分多项式的一般形式为

$$C_1u^2u_x + C_2uu_{3x} + C_3u_xu_{xx} + C_4u_{5x}. \quad (1.20)$$

把(1.17)中的  $\hat{K}(u)$  的表达式换成(1.20), 并令  $C_1 = 1$ , 则经过类似但更加复杂的计算可知, 其余系数  $C_i$  可被(1.16)与(1.17)的相容性所唯一确定. 事实上, 解得

$$\frac{\partial u}{\partial s} = u^2u_x + 2uu_{3x} + 4u_xu_{xx} + \frac{6}{5}u_{5x}. \quad (1.21)$$

**注记.** 的确存在次数为 3 与 5 的齐次微分多项式[是 KdV 方程的对称], 但相应的  $u(x, t)$  的对称分别为空间平移  $x \mapsto x + s$  与时间平移  $t \mapsto t + s$ .

更进一步计算, 我们会发现对于每一个奇数次数, 这样的对称有且只有一个. 现在, 我们怎样对每个奇数进行论证? 见习题 1.2 里面的不同于 KdV 方程的例子.

### 1.3 演化方程的 Lax 形式 (线性微分方程法)

考虑线性微分方程

$$Pw = k^2 w, \quad \text{其中 } P = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + u. \quad (1.22)$$

我们将  $u$  视为一个给定的关于  $x$  的函数,  $P$  是作用在关于  $x$  的函数上的算子. 则  $k^2$  为算子  $P$  的本征值,  $k$  称为谱变量 (spectral variable). 若  $u \equiv 0$ , 则  $w = e^{kx}$  是一个解, 而我们也要考虑一般的形式幂级数解如下:

$$w = e^{kx} \left( w_0 + \frac{w_1}{k} + \frac{w_2}{k^2} + \cdots \right). \quad (1.23)$$

这里的“形式”是指我们不考虑此级数的收敛性. 将(1.23)代入(1.22), 有

$$\frac{\partial w_0}{\partial x} = 0, \quad 2 \frac{\partial w_j}{\partial x} + \frac{\partial^2 w_{j-1}}{\partial x^2} + u w_{j-1} = 0, \quad \forall j \geq 1.$$

不妨  $w_0 \equiv 1$ , 则  $w_j$  可通过不断对  $x$  积分来递归地求出 (相差积分常数).

引入时间变量  $t$ , 并令  $u = u(x, t)$  随时间  $t$  变化. 我们想要在  $w$  关于某线性算子时间演化的情况下求解(1.22). (1.22)中的算子  $P$  是二阶微分算子, 从而这回我们尝试去找三阶微分算子, 使得

$$\frac{\partial w}{\partial t} = Bw, \quad \text{其中 } B = \frac{\partial^3}{\partial x^3} + b_1 \frac{\partial}{\partial x} + b_2. \quad (1.24)$$

对任意给定的  $k$ , 求解此问题会得到关于  $x, t$  的二元函数  $w(x, t; k)$ . 我们知道[注意  $u$  与  $k$  无关]在  $t = 0$  时, 函数  $w(x, t = 0; k)$  满足(1.22). 对其它时刻  $t$  这个也成立吗? [为使此问题有意义,  $u = u(x, t)$  也必须与  $k$  无关]. 若(1.22)成立, 则两边对  $t$  求导可得

$$\left( \frac{\partial P}{\partial t} + [P, B] \right) w = 0. \quad (1.25)$$

这里的  $[P, B] = PB - BP$  为微分算子  $P, B$  的交换子, 并且  $\frac{\partial P}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial t}$ , 其中  $u$  是给定的函数. 因此(1.25)仅涉及对  $x$  的求导, 从而是[与  $k$  无关的]

常微分方程. 若(1.25)对任意本征值  $k$  都成立, 则常微分方程(1.25)有无穷多个无关解; 而这是不可能的, 除非该微分方程平凡. 因此必有

$$\frac{\partial P}{\partial t} + [P, B] = 0. \quad (1.26)$$

上式是关于  $P$  的系数  $u$ , 以及  $B$  的系数  $b_1, b_2$  的约束条件, 具体写为

$$\begin{aligned} b_1 &= \frac{3}{2}u, \\ b_2 &= \frac{3}{4}u_x, \\ \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{3}{2}uu_x + \frac{1}{4}u_{3x}. \end{aligned} \quad (1.27)$$

在上述求解当中我们假定当  $x \rightarrow \pm\infty$  时,  $u, b_1, b_2$  及其  $x$ -导数趋于 0. 因此(1.22) 与 (1.24)相容当且仅当  $u(x, t)$  是 KdV 方程的解. 相容性条件(1.26)等价于 KdV 方程, 称为 KdV 方程的 Lax 形式.

我们总结如下:

$$\begin{array}{ccc} \text{线性微分方程组: } & Pw = k^2w, \frac{\partial w}{\partial t} = Bw & \\ \Downarrow \text{相容性条件} & & \\ \text{KdV 方程的 Lax 表示: } & \frac{\partial P}{\partial t} = [B, P]. & \end{array} \quad (1.28)$$

将关于  $x$  的三阶线性微分算子  $B$  换成更高阶的, 所得到的非线性演化方程称为 **高阶 KdV 方程** (higher order KdV equation). 这样的方程里会出现更高阶导数. 为清楚地认识这一点, 我们会在下一章引入一些代数方面的预备知识. 见习题 1.3.

## 习题

1. 试求从函数  $f(x) = x$  出发, 求无穷小变换  $x^2 \frac{\partial}{\partial x}$  生成的函数.

2. 试求出方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} = u^2 u_x + u_{xxx}$$

的一个对称. [令  $\hat{K}(u) = Au^4u_x + Bu^2u_{3x} + Cuu_xu_{2x} + Du_x^3 + Eu_{5x}$ , 用(1.19)下面的方法计算  $\frac{\partial \hat{K}(u)}{\partial t}$  与  $\frac{\partial K(u)}{\partial s}$ , 从而确定系数  $A, B, C, D, E$ .]

3. 若将  $P(1.22)$  与  $B(1.24)$  互换, 则从 Lax 方程(1.26)能得到什么?

## 2. KdV 方程簇

数学的价值在于可以自由无拘束地表达, 允许引入新概念. 你可能还记得第一次遇到复数的奇妙经历. 在本节, 我们引入微分算子  $\frac{\partial}{\partial x}$  的逆, 然后我们会看到它在构造高阶 KdV 方程时的强大力量.

### 2.1 拟微分算子

谈到算子, 我们常认为算子要作用在函数上. 然而我们这里则更关注算子的复合法则. 根据情况, 我们甚至可以完全放弃在函数上的作用. 正如接下来将看到的, 我们可以定义微分算子的负幂次.

方便起见, 我们记  $\partial$  为关于变量  $x$  的偏导. 对于关于  $x$  的函数  $f$ , 算子  $\partial^n \circ f$  是乘以  $f$  的作用与  $n$  阶偏导运算  $\partial^n$  的复合. 此算子可改写为偏导运算全在右边的形式:

$$\partial^n \circ f = \sum_{j \geq 0} \binom{n}{j} (\partial^j f) \circ \partial^{n-j} \quad (2.1)$$

[与习题 2.1 比较]. 这里的函数  $\partial^j f$  就是函数  $f$  的  $j$  阶导数,  $\binom{n}{j}$  为二项式系数, 其定义为

$$\binom{n}{j} = \frac{n(n-1) \cdots (n-j+1)}{j(j-1) \cdots 1}. \quad (2.2)$$



其中  $j$  为自然数, 它对任何  $n$  都良好定义. 若  $n$  为正整数, 则当  $j \geq n+1$  时  $\binom{n}{j} = 0$ . 因此我们让(2.1)式中的  $j$  取遍所有自然数并不碍事. 做完这些, 接下来我们用(2.1)来定义算子  $\partial^j$  与算子  $f$  的复合, 注意此时  $n$  是任意值[不再局限于自然数]. 更一般地, 称如下形式的表达式

$$L = \sum_{j=0}^{\infty} f_j \partial^{\alpha-j}, \quad (2.3)$$

为阶数  $\leq \alpha$  的[形式] 拟微分算子 (pseudodifferential operator). 拟微分算子的乘积由(2.1)来定义, 详见习题 2.2-2.3.

**例子 2.1.** 我们来演示如何计算薛定谔算子  $\partial^2 + u$  的平方根. 首先, 设

$$X = \partial + \sum_{n=1}^{\infty} f_n \partial^{-n}, \quad (2.4)$$

其中  $f_n$  为未知函数. 然后计算平方:

$$X^2 = \partial^2 + 2 \sum_{n \geq 1} f_n \partial^{1-n} + \sum_{n \geq 1} (\partial f_n) \partial^{-n} + \sum_{\substack{m, n \geq 1 \\ l \geq 0}} \binom{-n}{l} f_n (\partial^l f_m) \partial^{-m-n-l}.$$

若  $X^2 = \partial^2 + u$ , 则可逐项解出  $f_n$ . 我们写出前几项:

$$(\partial^2 + u)^{\frac{1}{2}} = \partial + \frac{1}{2} u \partial^{-1} - \frac{1}{4} u_x \partial^{-2} + \left( \frac{u_{xx}}{8} - \frac{u^2}{8} \right) \partial^{-3} + \dots \quad (2.5)$$

现在解释如何定义(2.3)中的拟微分算子  $L$  在如下幂级数上的作用:

$$w = k^\beta \mathbf{e}^{kx} \left( w_0 + \frac{w_1}{k} + \frac{w_2}{k^2} + \dots \right). \quad (2.6)$$

首先, 在  $w_0 \equiv 1, w_1 \equiv w_2 \equiv \dots \equiv 0$  的情况下, 自然地令

$$L(k^\beta \mathbf{e}^{kx}) = k^{\alpha+\beta} \mathbf{e}^{kx} \sum_{n=0}^{\infty} f_n k^{-n},$$

因为对自然数  $n$  成立  $\partial^n(\mathbf{e}^{kx}) = k^n \mathbf{e}^{kx}$ . 于是(2.6)中的幂级数  $w$  可写成

$$w = M\mathbf{e}^{kx}, \quad \text{其中 } M = \sum_{j \geq 0} w_j \partial^{\beta-j}.$$

从而  $L$  在  $w$  上的作用可定义为  $Lw = L(M\mathbf{e}^{kx}) = (L \circ M)\mathbf{e}^{kx}$ . 从上面的讨论来看, 拟微分算子的作用并没有明确定义, 但其实也没有矛盾; 我们打算证明这一点.

## 2.2 高阶 KdV 方程

设  $M$  为  $n$  阶拟微分算子 ( $n \in \mathbb{Z}$ ),

$$M = \sum_{\ell=0}^{\infty} g_{\ell} \partial^{n-\ell}. \quad (2.7)$$

我们定义  $M_{\pm}$  如下:

$$M_+ = \sum_{\ell=0}^n g_{\ell} \partial^{n-\ell}, \quad M_- = M - M_+. \quad (2.8)$$

则  $M_+$  为微分算子.

**例子 2.2.** 回到例子 2.1 的薛定谔算子  $P = \partial^2 + u$ , 并利用(2.5)来计算  $(\partial^2 + u)^{\frac{3}{2}}$ . 与(1.24),(1.27)比较可知

$$B = ((\partial^2 + u)^{\frac{3}{2}})_+. \quad (2.9)$$

更一般地, 对于正奇数  $\ell$ , 记

$$B_{\ell} = ((\partial^2 + u)^{\frac{\ell}{2}})_+, \quad (2.10)$$

并考虑相应的 Lax 形式(1.26). 我们有  $P = \partial^2 + u$ ,  $[P, P^{\frac{\ell}{2}}] = 0$ , 因此

$$[P, B_{\ell}] = -[P, (P^{\frac{\ell}{2}})_-]. \quad (2.11)$$

等号左边,  $P$  与  $B_\ell$  都是微分算子, 从而  $[P, B_\ell]$  也是微分算子. 而等号右边,  $P$  为 2 阶微分算子,  $(P^{\frac{\ell}{2}})_-$  为阶数  $\leq -1$  的拟微分算子, 从而拟微分算子  $-[P, (P^{\frac{\ell}{2}})_-]$  的阶数至多为  $2 + (-1) - 1 = 0$  [详见习题 2.4]. 因此(2.11)为 0 阶微分算子, 也就是说其实是一个函数.

这是关于  $x$  的微分多项式, 我们将  $[P, (P^{\frac{\ell}{2}})_-]$  记作  $K_\ell(u)$ . 而另一方面,  $\frac{\partial P}{\partial t}$  等于  $\frac{\partial u}{\partial t}$ , 从而 Lax 形式(1.26)等价于关于  $u$  的非线性演化方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} = K_\ell(u).$$

我们从(1.26)推导出(1.27)时, 系数  $b_1, b_2$  的计算是基于  $[P, B]$  中阶数大于 1 的项都为零的条件; 但由(2.10)的论证可知, 这些条件自动满足.

## 2.3 无穷多个交换对称

引入变量  $x_\ell$ , 其指标  $\ell$  为正奇数 [与习题 2.5 比较], 考虑方程组

$$\frac{\partial u}{\partial x_\ell} = K_\ell(u), \quad \ell = 1, 3, 5, \dots, \quad (2.12)$$

其中  $K_\ell(u) = -[P, (P^{\frac{\ell}{2}})_+]$ . 特别地, 对于  $\ell = 1, 3$ , 有

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x_1} &= u_x \\ \frac{\partial u}{\partial x_3} &= \frac{3}{2}uu_x + \frac{1}{4}u_{xxx}. \end{aligned}$$

换言之  $x_1 = x, x_3 = t$  [见习题 2.6]. 断言这些方程两两相容, 即证明

$$\frac{\partial}{\partial x_\ell} K_j(u) = \frac{\partial}{\partial x_j} K_\ell(u). \quad (2.13)$$

特别地, 取  $j = 3$ , 我们可知任意  $K_\ell(u)$  都是 KdV 方程的对称. 对于一般的  $j, \ell$ , (2.13)断言 KdV 方程的对称  $K_j(u)$  与  $K_\ell(u)$  是交换的. 也就是说, 在(1.18)意义下, 沿  $x_j$ -时间与沿  $x_\ell$ -时间的演化的复合与复合的先后顺序无关.

证明. 我们有

$$\frac{\partial P}{\partial x_\ell} = -[P, (P^{\frac{\ell}{2}})_+].$$

因此对任意关于  $P$  的函数  $f(P)$ , 成立

$$\frac{\partial f(P)}{\partial x_\ell} = -[f(P), (P^{\frac{\ell}{2}})_+].$$

从而

$$\frac{\partial}{\partial x_\ell} (P^{\frac{j}{2}})_+ = \left( \frac{\partial}{\partial x_\ell} P^{\frac{j}{2}} \right)_+ = -([P^{\frac{j}{2}}, (P^{\frac{\ell}{2}})_+])_+,$$

故

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_\ell} K_j(u) &= -\frac{\partial}{\partial x_\ell} [P, (P^{\frac{j}{2}})_+] \\ &= [[P, (P^{\frac{\ell}{2}})_+], (P^{\frac{j}{2}})_+] + [P, ([P^{\frac{j}{2}}, (P^{\frac{\ell}{2}})_+])_+]. \end{aligned} \quad (2.14)$$

再注意到

$$\begin{aligned} \left( [P^{\frac{j}{2}}, (P^{\frac{\ell}{2}})_+] \right)_+ &= [(P^{\frac{j}{2}})_+, (P^{\frac{\ell}{2}})_+] + \left( [(P^{\frac{j}{2}})_-, (P^{\frac{\ell}{2}})_+] \right)_+ \\ &= [(P^{\frac{j}{2}})_+, (P^{\frac{\ell}{2}})_+] - \left( [(P^{\frac{j}{2}})_+, P^{\frac{\ell}{2}}] \right)_+, \end{aligned}$$

(2.14)等号右边的两项为

$$[P, [(P^{\frac{j}{2}})_+, (P^{\frac{\ell}{2}})_+]] - \left[ P, \left( [(P^{\frac{j}{2}})_+, P^{\frac{\ell}{2}}] \right)_+ \right]. \quad (2.15)$$

对(2.14), (2.15) 使用雅可比恒等式(1.13), 可知(2.13)左边变成

$$\left[ P, \left( [(P^{\frac{\ell}{2}})_-, (P^{\frac{j}{2}})_+] \right)_+ \right] + [[P, (P^{\frac{j}{2}})_+], (P^{\frac{\ell}{2}})_+],$$

这正是(2.14)最右边将  $j, \ell$  互换. □

这种方法得到的方程(2.12) 称为第  $\ell$  阶 **KdV** 方程. 所有这些方程构成的方程组称为 **KdV 方程簇** (KdV hiererchy). 我们把结论总结如下:

$$\begin{array}{c} \text{线性方程组} \quad \left\{ \begin{array}{l} Pw = k^2 w \\ \frac{\partial w}{\partial x_\ell} = (L^\ell)_+ w, \end{array} \right. \quad \text{其中 } L^2 = P \\ \Downarrow \text{相容性条件} \\ \text{KdV 方程簇: } \frac{\partial P}{\partial x_\ell} = [(L^\ell)_+, P]. \end{array}$$

换言之, 我们通过寻找 **KdV** 方程的形如(2.12)的无穷小对称, 得到了无穷多个两两交换的对称. 事实上 **KdV** 方程不只有这些对称, 还有更多非交换的对称. 在进入此问题前, 先总结一下我们目前的想法.

## 2.4 KP 方程簇

我们用一阶拟微分算子

$$L = \partial + \sum_{j=1}^{\infty} f_j \partial^{-j} \quad (2.16)$$

来代替薛定谔算子  $(\partial^2 + u)^{1/2}$  的平方根. 考虑相应的本征值问题:

$$Lw = kw. \quad (2.17)$$

引入无穷多个变量  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, \dots)$ , 其中  $x_1 = x$ . 考虑形式解

$$w = e^{\xi(\mathbf{x}, k)} \left( 1 + \frac{w_1}{k} + \frac{w_2}{k^2} + \dots \right), \quad \text{其中 } \xi(\mathbf{x}, k) = \sum_{j=1}^{\infty} x_j k^j \quad (2.18)$$

[见习题 2.7], 则有

$$\frac{\partial}{\partial x_j} e^{\xi(x,k)} = k^j e^{\xi(x,k)}. \quad (2.19)$$

考虑线性方程组

$$\frac{\partial w}{\partial x_j} = B_j w, \quad \text{其中} \quad B_j = (L^j)_+, \quad (2.20)$$

则(2.17)与(2.20)的相容性条件为

$$\frac{\partial L}{\partial x_j} = [B_j, L]. \quad (2.21)$$

这是关于无穷多个自变量  $(x_1, x_2, x_3, \dots)$  的无穷多个未知函数  $f_1, f_2, \dots$  的无穷多个非线性演化方程. 方程组(2.21)称为 **KP 方程簇** (KP hierarchy). 若  $L$  满足 KdV 条件

$$(L^2)_- = 0,$$

则回到 KdV 的情况. 若  $L^2 = \partial^2 + u$ , 则所有的这无穷多个函数  $f_1, f_2, \dots$  都被一个函数  $u$  唯一确定, 并且当  $j$  为偶数时,  $[B_j, L] = 0$ , 从而

$$\frac{\partial u}{\partial x_j} = 0.$$

于是这无穷多个自变量当中只有奇数指标的才有意义.

正如上所说, **KP 方程簇**是关于无穷多个未知函数的方程, 但这些未知函数其实可以只用一个未知函数  $\tau$  来表示. 这个未知函数  $\tau$  称为  **$\tau$  函数** (tau function). 我们不加证明地介绍它.

考虑方程(2.20)的形如

$$w = M e^{\xi(x,k)}, \quad \text{其中} \quad M = 1 + \sum_{j=1}^{\infty} w_j \partial^{-j} \quad (2.22)$$

的形式解. 将此式代入(2.17) 可得拟微分算子之间的关系

$$L = M \circ \partial \circ M^{-1} \quad (2.23)$$

[见习题 2.8]. 由(2.23), 我们可用  $(w_1, w_2, \dots)$  来取代  $(f_1, f_2, \dots)$  的未知函数的地位. 事实上, 由相容性条件(2.21)可以推出, 存在函数  $\tau$  使得

$$w = \frac{\tau \left( x_1 - \frac{1}{k}, x_2 - \frac{1}{2k^2}, x_3 - \frac{1}{3k^3}, \dots \right)}{\tau(x_1, x_2, x_3, \dots)} e^{\xi(x, k)} \quad (2.24)$$

[见习题 2.9]. 由此可知,  $(w_1, w_2, \dots)$  由  $\tau$  所确定, 例如

$$w_1 = -\frac{\partial \tau}{\partial x_1} / \tau, \quad (2.25)$$

$$w_2 = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 \tau}{\partial x_1^2} - \frac{\partial \tau}{\partial x_2} \right) / \tau. \quad (2.26)$$

从而 KP 方程簇可看成关于无穷多个自变量  $(x_1, x_2, x_3, \dots)$  的函数  $\tau$  的无穷多个非线性微分方程. 接下来,  $\tau$  函数将在讨论 KdV, KP 方程簇的非交换对称中扮演基本角色. KdV 方程簇里的最初的未知函数  $u$  可由  $\tau$  函数表示为

$$u = 2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \log \tau. \quad (2.27)$$

KP 方程簇包括了下述关于  $u$  的方程 [见习题 2.10]

$$\frac{3}{4} \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial x_3} - \frac{3}{2} u \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{4} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right). \quad (2.28)$$

## 习题

1. 试解释(2.1)与微积分中的 Leibniz 法则的关系.
2. 若  $L = \sum_{k=0}^{\infty} f_k \partial^{\alpha-k}$ ,  $M = \sum_{k=0}^{\infty} g_k \partial^{\beta-k}$ , 试计算复合  $L \circ M$  [也常简写为  $LM$ ].

3. 计算  $(\partial + x)^{-1}$ .
4. 设拟微分算子  $L_1, L_2$  的阶数分别为  $\alpha_1, \alpha_2$ . 那么  $L_1 L_2$  与  $[L_1, L_2]$  的阶数是多少?
5. 在(2.12)中为什么不考虑偶数的  $l$ ?
6. 计算(2.12)中的  $\frac{\partial u}{\partial x_5}$ .
7. 推导(2.16)的  $f_1, f_2$  与(2.18)的  $w_1, w_2$  之间的关系.
8. 计算  $M^{-1} = 1 + v_1 \partial^{-1} + v_2 \partial^{-2} + \dots$ .
9. 方程(2.25), (2.26)可重写为

$$\begin{aligned}\frac{\partial \log \tau}{\partial x_1} &= -w_1, \\ \frac{\partial \log \tau}{\partial x_2} &= -2w_2 + w_1^2 - \frac{\partial w_1}{\partial x_1}.\end{aligned}$$

证明这两个方程相容.

10. 推导(2.28)式.

### 3. Hirota 方程与顶点算子

双线性型方程的 Hirota 理论是数学的自由表达的典例. 在二十世纪七十年代, Hirota 引入了一种构造 KdV 方程以及其它孤子方程的解的有效方法, 尽管当时大家不清楚这种方法与其它数学领域有何联系. 然而, 数学中有用的想法不会孤立太久. 我们将会看到 Hirota 方程如何与基本粒子理论中的顶点算子产生联系.



### 3.1 Hirota 导数

给定两个关于  $x$  的一元函数  $f(x), g(x)$ , 将  $f(x+y)g(x-y)$  在  $y = 0$  处的泰勒展开表示为

$$f(x+y)g(x-y) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} (D_x^j f \cdot g) y^j. \quad (3.1)$$

算子  $(f, g) \mapsto D_x^j f \cdot g$  称为 **Hirota 导数** (Hirota derivative).

**例子 3.1.** 我们有

$$\begin{aligned} D_x f \cdot g &= \frac{\partial f}{\partial x} g - f \frac{\partial g}{\partial x} \\ D_x^2 f \cdot g &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} g - 2 \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial g}{\partial x} + f \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}. \end{aligned}$$

注意我们应该把  $D_x^j f \cdot g$  看成一个整体, 不要把  $D_x$  看成某种独立的算子. 于是, 我们显然不能把  $D_x^j f \cdot g$  当成是一个叫做  $D_x^j f$  的东西与  $g$  相乘. 对于多元函数情形, 也可类似定义 Hirota 导数. 即, 若  $f = f(x_1, x_2, \dots), g = g(x_1, x_2, \dots)$ , 则定义

$$e^{y_1 D_1 + y_2 D_2 + \dots} f \cdot g = f(x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots) g(x_1 - y_1, x_2 - y_2, \dots),$$

其中坐标平移  $x_i \mapsto x_i \pm y_i$  形如(1.12). 将等号左边展开为关于  $(y_1, y_2, \dots)$  的泰勒级数, 得

$$f \cdot g + y_1 (D_1 f \cdot g) + y_2 (D_2 f \cdot g) + \dots + \frac{1}{2} y_1^2 (D_1^2 f \cdot g) + \dots,$$

比较等号左右两边系数即可定义各阶 Hirota 导数.

**例子 3.2.** 设  $f = f(x, t)$  为二元函数, 则

$$D_t D_x f \cdot f = 2 \left( \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial x} f - \frac{\partial f}{\partial t} \frac{\partial f}{\partial x} \right).$$

从而容易验证以下成立:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial x^2} \log f &= \frac{1}{2f^2} (D_x^2 f \cdot f); \\ \frac{\partial^4}{\partial x^4} \log f &= \frac{1}{2f^2} (D_x^4 f \cdot f) - 6 \left( \frac{1}{2f^2} (D_x^2 f \cdot f) \right)^2.\end{aligned}$$

回想(2.27)式定义了一个新的未知函数  $\tau$ , 我们将 KdV 方程(1.27)改写为关于  $\tau$  的方程. 对变量  $x$  积分一次, 可得

$$8 \frac{\partial^2}{\partial t \partial x} \log \tau = 3 \left( 2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \log \tau \right)^2 + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^4} \log \tau.$$

运用上述公式, 可将它整理为 Hirota 导数的形式:

$$(4 D_t D_x - D_x^4) \tau \cdot \tau = 0. \quad (3.2)$$

将关于变元  $(x_1, x_2, \dots)$  的 Hirota 导数分别记作  $(D_1, D_2, \dots)$ . **Hirota 方程** (Hirota equation) 是指形如

$$P(D_1, D_2, \dots) \tau \cdot \tau = 0 \quad (3.3)$$

的方程, 其中  $P(D_1, D_2, \dots)$  是关于文字  $(D_1, D_2, \dots)$  的多项式. 考虑我们如何才能求解它. 若  $P$  为奇函数, 则  $P\tau \cdot \tau = 0$  [对任意  $\tau$  都] 平凡成立. 例如  $D_x \tau \cdot \tau = (\frac{\partial \tau}{\partial x})\tau - \tau(\frac{\partial \tau}{\partial x}) = 0$ . 因此不妨  $P$  是偶函数, 即

$$P(D_1, D_2, \dots) = P(-D_1, -D_2, \dots).$$

此外还假定  $P(0) = 0$ . 于是  $\tau \equiv 1$  总是一个解. 接下来, 我们寻找形如关于形式参数  $\varepsilon$  展开的解

$$\tau = 1 + \varepsilon f_1 + O(\varepsilon^2).$$

代入(3.3), 比较  $\varepsilon$  的一次项系数, 得到关于待定函数  $f_1$  的线性方程:

$$P(\partial_1, \partial_2, \dots)f_1 = 0, \quad \text{其中 } \partial_j = \frac{\partial}{\partial x_j}. \quad (3.4)$$

若取常数  $k_1, k_2, \dots \in \mathbb{C}$  使得

$$P(k_1, k_2, \dots) = 0,$$

则

$$f_1 = e^{k_1 x_1 + k_2 x_2 + \dots}$$

满足方程(3.4). 更一般地, 若一族数组  $(k_1^{(j)}, k_2^{(j)}, \dots)$  使得对每个指标  $j$  都有  $P(k_1^{(j)}, k_2^{(j)}, \dots) = 0$ , 则

$$f_1 = \sum_{j=1}^n c_j e^{k_1^{(j)} x_1 + k_2^{(j)} x_2 + \dots} \quad (3.5)$$

也是(3.4)的一个解. 一般地, 这样的  $1 + \varepsilon f_1$  并不是(3.3)的解 [形式参数  $\varepsilon$  的更高次项系数未必为 0]. 然而, 对于  $n = 1$  的情形, 我们可截断至  $\varepsilon$  的线性项, 也就是说,

$$\tau = 1 + \varepsilon e^{k_1 x_1 + k_2 x_2 + \dots}$$

一定是(3.3)的解, 这可以直接计算验证. 例如对于 KdV 方程, 将形式参数  $\varepsilon$  换成常数  $c$ , 可得(3.2)的解

$$\tau = 1 + ce^{2kx + 2k^3 t}.$$

这种方法得到的解是一个单孤子解.

更一般的, Hirota 方程的可以表示为形如

$$e^{k_1 x_1 + k_2 x_2 + \dots}$$

的关于变量  $x_1, x_2, \dots$  的指数函数的多项式的解称为**孤子解** (soliton solution). 其中的

$$k_1 x_1 + k_2 x_2 + \dots$$

称为该解的一个**指数** (exponent). 具有  $n$  个不同指数的孤子解称为  $n$ -孤子解 ( $n$ -soliton solution).

KdV 方程作为一个可积系统的特殊性, 不仅在于它可以被改写为 Hirota 方程, 更是在于对任意  $n$ , 存在一个一阶近似为  $1 + \varepsilon f_1$  的解, 其中  $f_1$  形如(3.5), 也就是说存  $n$ -孤子解. 任何 Hirota 方程在  $n = 1, 2$  时总存在孤子解. 而  $n \geq 3$  时, 我们的经验认为  $n$ -孤子解的存在性或多或少地等价于该系统的可积性.

考虑  $n = 2$  的情况. 首先给定满足方程  $P(k_1^{(j)}, k_2^{(j)}, \dots) = 0$  的一组  $(k_1^{(j)}, k_2^{(j)}, \dots), j = 1, 2$ , 考虑如下

$$\tau = 1 + \varepsilon \sum_{j=1}^2 c_j \mathbf{e}^{k_1^{(j)} x_1 + k_2^{(j)} x_2 + \dots} + \varepsilon^2 f_2 + O(\varepsilon^3).$$

代入方程  $P(D_1, D_2, \dots)$ , 比较  $\varepsilon^2$  的系数可得

$$P(\partial_1, \partial_2, \dots) f_2 + c_1 c_2 P(k_1^{(1)} - k_1^{(2)}, k_2^{(1)} - k_2^{(2)}, \dots) \mathbf{e}^{(k_1^{(1)} + k_1^{(2)})x_1 + (k_2^{(1)} + k_2^{(2)})x_2 + \dots} = 0.$$

解得

$$f_2 = - \frac{P(k_1^{(1)} - k_1^{(2)}, k_2^{(1)} - k_2^{(2)}, \dots)}{P(k_1^{(1)} + k_1^{(2)}, k_2^{(1)} + k_2^{(2)}, \dots)} c_1 c_2 \mathbf{e}^{(k_1^{(1)} + k_1^{(2)})x_1 + (k_2^{(1)} + k_2^{(2)})x_2 + \dots},$$

并且可以验证该表达式在  $\varepsilon^2$  处的截断的确是 2-孤子解. 对于  $P = 4\mathbf{D}_t \mathbf{D}_x - \mathbf{D}_x^4$  的例子, 取  $k^{(1)} = (2k_1, 2k_1^3)$  以及  $k^{(2)} = (2k_2, 2k_2^3)$ , 则得到

$$f_2(x, t) = \frac{(k_1 - k_2)^2}{(k_1 + k_2)^2} c_1 c_2 \mathbf{e}^{2(k_1 + k_2)x + 2(k_1^3 + k_2^3)t}$$

[见习题 3.1].

## 3.2 $n$ -孤子解

我们来写出 KdV 方程的  $n$ -孤子解的表达式. 在 3.4 节我们将证明它是 KdV 方程的  $\tau$  函数. 给定常数  $c_1, \dots, c_n$  与  $k_1, \dots, k_n$ , 把两个自变量  $(x, t)$  扩充为无穷多个自变量  $x_1 = x, x_3 = t, x_5, x_7, \dots$  对 (2.18) 中的无穷多个变量  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, \dots)$ , 引入记号

$$\xi(\mathbf{x}, k) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i k^i,$$

并且定义指数项  $\xi_i$  与因子  $a_{ij}$  如下:

$$\xi_i = 2 \sum_{j=0}^{\infty} x_{2j+1} k_i^{2j+1} = \xi(\mathbf{x}, k_i) - \xi(\mathbf{x}, -k_i), \quad (3.6)$$

$$a_{ij} = \left( \frac{k_i - k_j}{k_i + k_j} \right)^2. \quad (3.7)$$

记指标集  $[n] := \{1, \dots, n\}$ , 我们称

$$\tau(\mathbf{x}) = \sum_{\mathcal{J} \subseteq [n]} \left( \prod_{\substack{i, j \in \mathcal{J} \\ i < j}} a_{ij} \right) \left( \prod_{i \in \mathcal{J}} c_i e^{\xi_i} \right), \quad (3.8)$$

为一个  $n$ -孤子, 其中求和指标  $\mathcal{J}$  取遍  $\mathcal{I}$  的所有子集.

**例子 3.3.** 当  $n = 3$  时, 上述表达式形如

$$\begin{aligned} \tau = & 1 + c_1 e^{\xi_1} + c_2 e^{\xi_2} + c_3 e^{\xi_3} \\ & + c_1 c_2 a_{12} e^{\xi_1 + \xi_2} + c_2 c_3 a_{23} e^{\xi_2 + \xi_3} + c_3 c_1 a_{13} e^{\xi_3 + \xi_1} \\ & + c_1 c_2 c_3 a_{12} a_{13} a_{23} e^{\xi_1 + \xi_2 + \xi_3}. \end{aligned}$$

并且可以验证[见习题 3.2] 上述  $\tau(x_1, x_3, \dots)$  满足

$$(4D_1 D_3 - D_1^4) \tau \cdot \tau = 0.$$

注意我们给方程添加了很多变量, 这些变量对应于第一章中考虑的 KdV 方程的交换对称性, 即 KdV 方程簇. 我们来考虑更高阶的 KdV 方程是否能写成 Hirota 形式. 若将  $2j + 1$  阶 KdV 方程按通常方式写成关于未知函数  $u$  的方程, 则得到的方程关于  $x_1$  与  $x_{2j+1}$  两个变量.

然而, 企图将它直接用  $D_1, D_{2j+1}$  写成 Hirota 形式并不是靠谱的方法. 我们采取另一条路, 对于任意  $n$ -孤子(3.8), 我们把问题重写表述为, 试图取寻找多项式  $P$ , 使得

$$P(D_1, D_3, \dots)\tau \cdot \tau = 0. \tag{3.9}$$

这并不是只涉及  $D_1, D_{2j+1}$  的 Hirota 方程, 也就是说, 我们寻找的方程可以包含任意有限个不同的 Hirota 导数. 若(3.8)是方程(3.9)的解, 则多项式  $P$  可以是, 例如,

$$D_1^6 - 20 D_1^3 D_3 - 80 D_3^2 + 144 D_1 D_5.$$

进一步, 若将  $D_{2j+1}$  的阶规定为  $(2j + 1)$ , 则  $l$  阶方程[包括平凡的]的个数如下:

阶数	方程个数
1	1
2	0
3	2
4	1
5	3
6	2
7	5

更一般地,  $m$  阶 Hirota 型 KdV 方程的 [极大线性无关的] 个数为  $A - B$ , 其中  $A, B$  为  $m$  表示为正整数[在某些限制下]之和的方法的个数:

$$A = m \text{ 划分为正奇数之和的方法数,}$$

$B = m$  划分为模 4 余 2 的正数之和的方法数

例如, 另一个线性无关的 6 阶方程为  $D_1^6 + 4D_1^3 D_3 - 32D_3^2$ . 我们自然会问, 如此得到的这些方程表示为关于  $u$  的方程时, 是否就是第 1 节引入的 KdV 方程簇? 答案是肯定的, 但本书不去探讨它 [不过可以与后文(3.27)比较].

### 3.3 顶点算子

引入无穷多个变量是展示 KdV 方程对称性的关键一步. 首先, 我们知道这些变量只是展示交换对称的存在性的另一种方式; 而更为必要的是, 在描述我们现在要介绍的非交换对称性时这种方法起着基础性的作用.

回忆无穷小变换(1.10), 现在我们用  $\varepsilon$  来代替那里的  $\theta$ . 考虑  $\tau$  函数的如下的无穷小变换

$$\frac{\partial}{\partial \varepsilon} \tau(\mathbf{x}) = X \tau(\mathbf{x}),$$

并希望它将 KdV 方程簇的解  $\tau$  变成另一个解. 我们将看到, 对于(3.8)的  $n$ -孤子解  $\tau_n$ , 存在  $X$  使得

$$\tau_{n+1} = e^{\varepsilon X} \tau_n$$

为  $(n+1)$ -孤子解.

对于参数  $k$ , 引入线性算子

$$X(k) = \exp \left( 2 \sum_{j=0}^{\infty} k^{2j+1} x_{2j+1} \right) \exp \left( -2 \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(2j+1)k^{2j+1}} \frac{\partial}{\partial x_{2j+1}} \right), \quad (3.10)$$

称为**顶点算子** (vertex operator). “顶点算子” 这个名称来自于基本粒子理论, 我们不去深究. 算子  $X(k)$  在函数  $f(x_1, x_3, \dots)$  上的作用为

$$X(k)f(\mathbf{x}) = \exp\left(2\sum_{j=0}^{\infty} k^{2j+1}x_{2j+1}\right) f\left(x_1 - \frac{2}{k}, x_3 - \frac{2}{3k^3}, \dots\right),$$

其中  $x_1 \mapsto x_1 - \frac{2}{k}$  等坐标平移已经在(1.12)中介绍.

### 引理 3.1.

$$\begin{aligned} X(k_1)X(k_2) &= \left(\frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2}\right)^2 \exp\left(2\sum_{i=1}^2 \sum_{j=0}^{\infty} k_i^{2j+1}x_{2j+1}\right) \\ &\quad \times \exp\left(-2\sum_{i=1}^2 \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(2j+1)k_i^{2j+1}} \frac{\partial}{\partial x_{2j+1}}\right). \end{aligned}$$

证明. 我们记算子

$$\begin{aligned} A &= -2\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(2j+1)k_1^{2j+1}} \frac{\partial}{\partial x_{2j+1}}, \\ B &= 2\sum_{j=0}^{\infty} k_2^{2j+1}x_{2j+1}, \end{aligned}$$

断言它们的指数映射  $e^A, e^B$  满足关系

$$e^A e^B = \left(\frac{k_2 - k_1}{k_2 + k_1}\right)^2 e^B e^A.$$

我们需要用到如下结论, 这个结论留作习题 [见习题 3.3]:

$$[A, B] \text{ 为标量算子} \implies e^A e^B e^{-A} = e^{[A, B]} e^B. \quad (3.11)$$



[ 这里的“标量算子”是指不含有关于变量  $x_1, x_3, \dots$  的偏导以及乘法. ]  
直接计算得,

$$\begin{aligned}[A, B] &= -4 \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{2j+1} \left( \frac{k_2}{k_1} \right)^{2j+1} \\ &= 2 \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{1}{\ell} \left( -\frac{k_2}{k_1} \right)^{\ell} - 2 \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{1}{\ell} \left( \frac{k_2}{k_1} \right)^{\ell} \\ &= -\log \left( 1 + \frac{k_2}{k_1} \right)^2 + \log \left( 1 - \frac{k_2}{k_1} \right)^2,\end{aligned}$$

因此  $[A, B]$  为标量算子, 并且

$$\mathbf{e}^{[A, B]} = \left( \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} \right)^2,$$

从而引理得证. □

从证明中可见, 将引理中的  $\left( \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} \right)^2$  看成关于  $\frac{k_2}{k_1}$  的泰勒展开会更准确. 特别地, 由此引理可知

$$\mathbf{e}^{cX(k)} = 1 + cX(k).$$

从而  $\mathbf{e}^{cX(k)} \cdot 1$  为单孤子解. 一般地, 形如(3.8)的  $n$ -孤子解可表示为

$$\tau = \mathbf{e}^{c_1 X(k_1)} \dots \mathbf{e}^{c_n X(k_n)} \cdot 1. \quad (3.12)$$

接下来我们来写 KP 方程的顶点算子与  $n$ -孤子解. 先将 KP 方程(2.28)写成 Hirota 形式:

$$(\mathbf{D}_1^4 + 3\mathbf{D}_2^2 - 4\mathbf{D}_1 \mathbf{D}_3) \tau \cdot \tau = 0. \quad (3.13)$$

上式留给读者推导, 作为有趣的练习. 记多项式

$$P(k_1, k_2, k_3) = k_1^4 + 3k_2^2 - 4k_1 k_3,$$

则方程  $P(k_1, k_2, k_3) = 0$  的通解形如

$$(k_1, k_2, k_3) = (p - q, p^2 - q^2, p^3 - q^3), \quad \forall p, q. \quad (3.14)$$

此外, 任意给定两组解

$$\begin{aligned} (k_1, k_2, k_3) &= (p_1 - q_1, p_1^2 - q_1^2, p_1^3 - q_1^3), \\ (k'_1, k'_2, k'_3) &= (p_2 - q_2, p_2^2 - q_2^2, p_2^3 - q_2^3), \end{aligned}$$

易验证

$$-\frac{P(k_1 - k'_1, k_2 - k'_2, k_3 - k'_3)}{P(k_1 + k'_1, k_2 + k'_2, k_3 + k'_3)} = \frac{(p_1 - p_2)(q_1 - q_2)}{(p_1 - q_2)(q_1 - p_2)}.$$

在  $n$ -孤子(3.8)中, 我们令

$$\xi_i = \sum_{j=1}^{\infty} (p_i^j - q_i^j) x_j = \xi(\mathbf{x}, p_i) - \xi(\mathbf{x}, q_i), \quad (3.15)$$

$$a_{ij} = \frac{(p_i - p_j)(q_i - q_j)}{(p_i - q_j)(q_i - p_j)}. \quad (3.16)$$

产生该  $n$ -孤子的顶点算子  $X(p, q)$  定义为

$$X(p, q) = \exp \left( \sum_{j=1}^{\infty} (p^j - q^j) x_j \right) \exp \left( - \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j} (p^{-j} - q^{-j}) \frac{\partial}{\partial x_j} \right) \quad (3.17)$$

[见习题 3.4]. 则

$$\tau = \mathbf{e}^{c_1 X(p_1, q_1)} \dots \mathbf{e}^{c_n X(p_n, q_n)} \cdot 1 \quad (3.18)$$

为  $n$ -孤子解. 更具体地, 在(3.15), (3.16)意义下,

$$\tau(\mathbf{x}) = \sum_{\mathcal{J} \subseteq [n]} \left( \prod_{\substack{i, j \in \mathcal{J} \\ i < j}} a_{ij} \right) \left( \prod_{i \in \mathcal{J}} c_i \mathbf{e}^{\xi_i} \right). \quad (3.19)$$

我们将在下一节证明这个  $\tau$  函数恰好满足 KP 方程簇. 特别地取  $p_i = -q_i$ , 则(3.19)约化为(3.8), 从而我们立刻知道(3.8)满足 KdV 方程簇.

### 3.4 双线性恒等式

现在证明  $\tau$  函数(3.18) 是 KP 方程簇的解, 其关键在于如下:

**定理 3.2.** (双线性恒等式). 对任意  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots), \mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots)$ , 则  $\tau$  函数(3.19)满足

$$\frac{1}{2\pi i} \oint e^{\xi(\mathbf{x}-\mathbf{y}, k)} \tau(\mathbf{x} - \llbracket k \rrbracket) \tau(\mathbf{y} + \llbracket k \rrbracket) dk = 0, \quad (3.20)$$

其中, 对于参数  $k \in \mathbb{C}$ , 引入记号

$$\llbracket k \rrbracket := \left( \frac{1}{k}, \frac{1}{2k^2}, \frac{1}{3k^3}, \dots \right).$$

这里的路径积分  $\oint \frac{dk}{2\pi i}$  是指将被积函数在  $k = \infty$  处展开, 然后取  $\frac{1}{k}$  的系数. 若被积函数是复平面除去有限个点  $k \in \mathbb{C}$  上的全纯函数, 则该积分是在这些极点的留数的有限求和 [见习题 3.5].

证明. 我们来证明(3.20)式. 只需要证明, 若将(3.19)中的  $x_j$  换成  $x_j - \frac{1}{jx^j}$ , 则关于  $k$  的极点的留数之和为 0. 由(3.15)可知

$$e^{\xi_i(\mathbf{x} - \llbracket k \rrbracket)} = \exp \left( \sum_{\ell=1}^{\infty} (p_i^\ell - q_i^\ell) \left( x_\ell - \frac{1}{\ell k^\ell} \right) \right) = \frac{k - p_i}{k - q_i} e^{\xi_i(\mathbf{x})}.$$

同理

$$e^{\xi_i(\mathbf{y} + \llbracket k \rrbracket)} = \frac{k - q_i}{k - p_i} e^{\xi_i(\mathbf{y})}.$$

从而(3.20)的被积函数在  $k = q_i$  处的留数

$$\operatorname{Res}_{k=q_i} (e^{\xi(\mathbf{x}-\mathbf{y}, k)} \tau(\mathbf{x} - \llbracket k \rrbracket) \tau(\mathbf{y} + \llbracket k \rrbracket))$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{\mathcal{I}, \mathcal{J} \subseteq [n]} \operatorname{Res}_{k=q_i} \left[ e^{\xi(x-y, k)} \left( \prod_{\substack{\ell, \ell' \in \mathcal{I} \\ \ell < \ell'}} a_{\ell \ell'} \right) \left( \prod_{\substack{\ell, \ell' \in \mathcal{J} \\ \ell < \ell'}} a_{\ell \ell'} \right) \right. \\
&\quad \times \left. \left( \prod_{s \in \mathcal{I}} c_s \frac{k - p_s}{k - q_s} e^{\xi_s(x)} \right) \left( \prod_{s \in \mathcal{J}} c_s \frac{k - q_s}{k - p_s} e^{\xi_s(y)} \right) \right] \\
&= \sum_{\substack{\mathcal{I}, \mathcal{J} \subseteq [n] \\ \mathcal{I} \ni i, \mathcal{J} \not\ni i}} e^{\xi(x-y, q_i)} \left( \prod_{\substack{\ell, \ell' \in \mathcal{I} \\ \ell < \ell'}} a_{\ell \ell'} \right) \left( \prod_{\substack{\ell, \ell' \in \mathcal{J} \\ \ell < \ell'}} a_{\ell \ell'} \right) \\
&\quad \times \left( \prod_{s \in \mathcal{I} \setminus \{i\}} c_s \frac{q_i - p_s}{q_i - q_s} e^{\xi_s(x)} \right) \cdot c_i(q_i - p_i) e^{\xi_i(x)} \left( \prod_{s \in \mathcal{J}} c_s \frac{q_i - q_s}{q_i - p_s} e^{\xi_s(y)} \right) \\
&= c_i(q_i - p_i) e^{\xi(x, p_i) - \xi(y, q_i)} \sum_{\mathcal{I}, \mathcal{J} \subseteq [n] \setminus \{i\}} \left( \prod_{\substack{\ell, \ell' \in \mathcal{I} \\ \ell < \ell'}} a_{\ell \ell'} \right) \left( \prod_{\substack{\ell, \ell' \in \mathcal{J} \\ \ell < \ell'}} a_{\ell \ell'} \right) \\
&\quad \times \left( \prod_{s \in \mathcal{I} \setminus \{i\}} c_s \frac{p_i - p_s}{p_i - q_s} e^{\xi_s(x)} \right) \left( \prod_{s \in \mathcal{J}} c_s \frac{q_i - q_s}{q_i - p_s} e^{\xi_s(y)} \right).
\end{aligned}$$

类似计算在  $k = p_i$  处的留数, 易知  $p_i, q_i$  处的留数互相抵消.  $\square$

利用双线性恒等式, 我们断言  $\tau$  函数(3.19) 在线性方程(2.20)以及双线性方程(3.9)的意义下都是 KP 方程簇的解. 引入

$$w(\mathbf{x}, k) = \frac{\tau(\mathbf{x} - \llbracket k \rrbracket)}{\tau(\mathbf{x})} e^{\xi(\mathbf{x}, k)}, \quad (3.21)$$

$$w^*(\mathbf{x}, k) = \frac{\tau(\mathbf{x} + \llbracket k \rrbracket)}{\tau(\mathbf{x})} e^{-\xi(\mathbf{x}, k)}. \quad (3.22)$$

它们可展开为

$$w(\mathbf{x}, k) = e^{\xi(\mathbf{x}, k)} \left( 1 + \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{w_{\ell}}{k^{\ell}} \right), \quad (3.23)$$

$$w^*(\mathbf{x}, k) = \mathbf{e}^{-\xi(\mathbf{x}, k)} \left( 1 + \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{w_{\ell}^*}{k^{\ell}} \right), \quad (3.24)$$

则双线性恒等式(3.20)可以重写为

$$\oint \frac{\mathrm{d}k}{2\pi\mathrm{i}} w(\mathbf{x}, k) w^*(\mathbf{y}, k) = 0. \quad (3.25)$$

下面我们用(3.25)来导出(2.20). 首先注意关于(3.25)的两个性质:

1. 对于关于变量  $\mathbf{x}$  的任何微分算子  $Q$ , 总有

$$\oint \frac{\mathrm{d}k}{2\pi\mathrm{i}} (Qw(\mathbf{x}, k)) w^*(\mathbf{y}, k) = 0.$$

2. 如果形如

$$\tilde{w}(\mathbf{x}, k) = \mathbf{e}^{\xi(\mathbf{x}, k)} \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{\tilde{w}_{\ell}}{k^{\ell}} \quad (3.26)$$

的幂级数满足

$$\oint \frac{\mathrm{d}k}{2\pi\mathrm{i}} \tilde{w}(\mathbf{x}, k) w^*(\mathbf{y}, k) = 0,$$

则必有  $\tilde{w}_1 \equiv \tilde{w}_2 \equiv \cdots \equiv 0$ . [见习题 3.6].

下面证明(2.20). 设  $L$  是由(2.22)与(2.23)以及我们现在谈论的那个  $w$  所给出的拟微分算子, 再令

$$Q_j = \frac{\partial}{\partial x_j} - (L^j)_+,$$

则

$$Q_j w = \frac{\partial w}{\partial x_j} - L^j w + (L^j)_- w,$$

由(2.17)可知,  $\frac{\partial w}{\partial x_j} - L^j w$  形如(3.26). 同样的,

$$(L^j)_- w = (L^j)_- M \exp \left( \sum_{j=1}^{\infty} k^j x_j \right)$$

也形如(3.26). 因此,  $Q_j w$  形如(3.26). 因此由 1, 2 可得  $Q_j w = 0$ . 我们也可看出这个  $\tau$  函数满足 Hirota 型方程: 在双线性方程(3.20)中令

$$\boldsymbol{x} \mapsto \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}, \quad \boldsymbol{y} \mapsto \boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}$$

可得

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{2\pi i} \oint e^{\xi(2\boldsymbol{y}, k)} \tau(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} - \llbracket k \rrbracket) \tau(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y} + \llbracket k \rrbracket) dk \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint e^{\xi(2\boldsymbol{y}, k)} e^{D_{\boldsymbol{y} - \llbracket k \rrbracket}} \tau(\boldsymbol{x}) \cdot \tau(\boldsymbol{x}) dk, \end{aligned}$$

其中  $D_{\boldsymbol{y} - \llbracket k \rrbracket} := \sum_{\ell \geq 1} \left( y_\ell - \frac{1}{\ell k^\ell} \right) D_\ell$ . 然后将

$$e^{\xi(2\boldsymbol{y}, k)} e^{D_{\boldsymbol{y} - \llbracket k \rrbracket}} = \exp \left( 2 \sum_{\ell=1}^{\infty} k^\ell y_\ell \right) \exp \left( \sum_{\ell=1}^{\infty} \left( y_\ell - \frac{1}{\ell k^\ell} \right) D_\ell \right) \quad (3.27)$$

按  $\boldsymbol{y}$  展开再取  $k^{-1}$  的系数就能得到 Hirota 型的方程 [见习题 3.7].

## 习题

1. 求方程(3.2)的关于  $x, t$  的多项式解.
2. 验证 KdV 方程的 3-孤子解的确满足(3.2).
3. 证明(3.11)式.
4. 用引理3.1的方法计算乘积  $X(p_1, q_1)X(p_2, q_2)$  以及交换子

$$[X(p_1, q_1), X(p_2, q_2)],$$

这个交换子是零吗?

5. 求解 KP 方程的  $\tau$  函数的关于  $(x_1, x_2, x_3)$  的多项式解, 即寻找满足(3.13)的多项式.
6. 证明关于(3.26)的断言 2.
7. 由(3.27)推出(3.13).

## 4. 费米子演算

随着我们更加熟悉孤子及其结构性质, 支配着方程背后的对称性的代数规律逐渐凸显. 我们暂时把舞台转向代数的世界; 本章我们介绍费米子及其计算.

### 4.1 微分与乘法的玻色代数

我们已从演化方程的角度来处理微分方程[或函数]的无穷小变换. 为了一次性处理掉 KdV, KP 这种具有无穷多个对称的方程簇, 我们自然要考虑具有无穷多个变量  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots)$  的函数. 为方便严格定义, 我们暂时只考虑关于这些变量的多项式函数. 尽管自变量的个数是无限的, 但每个多项式都是单项式的有限和, 从而只涉及有限个变量. 当谈论多项式的分次时, 我们约定变元  $x_n$  的次数为  $n$ .

现在我们谈论对函数的变换, 首先, 我们有两个最基本的变换: 微分与乘法. 定义算子  $a_n, a_n^*$ , 使得它们在多项式  $f(\mathbf{x})$  的作用分别为

$$(a_n f)(\mathbf{x}) = \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{x}), \quad (a_n^* f)(\mathbf{x}) = x_n f(\mathbf{x}). \quad (4.1)$$

易知这些算子满足如下典范交换关系 (canonical commutation relation):

$$[a_m, a_n] = 0, \quad [a_m^*, a_n^*] = 0, \quad [a_m, a_n^*] = \delta_{mn}. \quad (4.2)$$

我们可定义微分算子的相加与相乘, 并带有多项式系数的数乘:

$$\sum c_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \beta_1 \beta_2 \dots} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots \left( \frac{\partial}{\partial x_1} \right)^{\beta_1} \left( \frac{\partial}{\partial x_2} \right)^{\beta_2} \dots, \quad (4.3)$$

所有形如这样的算子构成了一个代数.

我们将  $\{a_n, a_n^*\}_{n=1,2,\dots}$  视为满足关系(4.2)的抽象的符号; 符号  $a_n, a_n^*$  称为**玻色子 (Boson)**. 更一般地, 给定一个符号集  $S$  以及  $S$  上的关系  $R$ , 则从  $S$  出发, 通过任意有限次的算子相加, 相乘以及标量数乘, 得到由  $S$  通过生成关系  $R$  生成的代数. 符号集  $S = \{a_n, a_n^*\}_{n=1,2,\dots}$  通过关系(4.2)所生成的代数  $\mathcal{B}$  称为 **海森堡代数 (Heisenberg algebra)**. 反复利用基本交换关系, 易知海森堡代数  $\mathcal{B}$  中的任何元素都能唯一地表示成形如下述元素的线性组合:

$$a_{m_1}^{*\alpha_1} \dots a_{m_r}^{*\alpha_r} a_{n_1}^{\beta_1} \dots a_{n_s}^{\beta_s},$$

$$\text{其中 } m_1 < \dots < m_r, \quad n_1 < \dots < n_s, \quad \alpha_i, \beta_j = 1, 2, \dots$$

众所周知, 代数  $A$  在线性空间  $V$  上的**表示 (representation)**是指线性映射  $\rho: A \rightarrow \text{End}(V)$ , 使得  $\forall a, b \in A, \rho(ab) = \rho(a)\rho(b)$ . 若  $A$  是由符号集  $S$  与关系  $R$  所生成的代数, 则上述定义等价于  $\{\rho(s)\}_{s \in S}$  也满足关系  $R$ . 于是(4.1)式表明, 若令  $\rho(a_n) = \frac{\partial}{\partial x_n}$ ,  $\rho(a_n^*) = x_n$  [乘以变元  $x_n$ ], 则此  $\rho$  给出了海森堡代数  $\mathcal{B}$  在多项式空间  $\mathbb{C}[\mathbf{x}] = \mathbb{C}[x_1, x_2, \dots]$  上的一个表示. 其表示空间  $\mathbb{C}[\mathbf{x}]$  称为**玻色 Fock 空间 (Bosonic Fock space)**. 微分算子  $a_n = \frac{\partial}{\partial x_n}$  称为**湮灭子 (annihilation operator)**, 乘法算子  $a_n^* = x_n$  称为**生成子 (creation operator)**. 注意生成子两两交换, 湮灭子也两两交换. 而元素  $1 \in \mathbb{C}[\mathbf{x}]$  称为**真空态 (vacuum state)**. 易知以下性质成立:

1. 湮灭子  $\varphi$  杀掉真空态:  $\varphi \cdot 1 = 0$ .
2. 玻色 Fock 空间由真空态生成:

$$\mathbb{C}[\mathbf{x}] = \mathcal{B} \cdot 1 := \{a \cdot 1 \mid a \in \mathcal{B}\}. \quad (4.4)$$



更具体地,  $\mathbb{C}[\mathbf{x}]$  具有如下的基

$$\{a_{m_1}^* \cdots a_{m_r}^* \cdot 1 \mid 0 < m_1 \leq \cdots \leq m_r\}, \quad (4.5)$$

这组基中的每个元素都可由真空态不断被生成子所用所得到.

也许你会觉得我们在把一个很简单的东西搞复杂? 在后文中, 玻色子将真正以抽象的形式(4.2)出现, 而不是作为微分和乘法的具体操作. 请读者先忍一下.

## 4.2 费米子

我们构造了海森堡代数  $\mathcal{B}$ . 现在, 我们主要关心一个与之不同的代数  $\mathcal{A}$ , 其构造方式是将典范交换关系当中的交换子  $[X, Y] = XY - YX$  改成如下反交换子 (anticommutator)

$$[X, Y]_+ := XY + YX.$$

**定义 4.1.** 给定一些文字  $\psi_n, \psi_n^*$ , 其指标  $n$  可以取我们喜欢的任何东西, 但为我们以后的目标, 将  $n$  取遍半整数  $\mathbb{Z} + \frac{1}{2}$ . 规定这些文字满足如下 典范反交换关系 (canonical anticommutation relation):

$$[\psi_m, \psi_n]_+ = 0, \quad [\psi_m^*, \psi_n^*]_+ = 0, \quad [\psi_m^*, \psi_n]_+ = \delta_{m+n, 0}. \quad (4.6)$$

那么, 称  $\psi_n, \psi_n^*$  为 费米子 (Fermion); 由费米子与关系(4.6)生成的代数  $\mathcal{A}$  称为 克利福德代数 (Clifford algebra). 注意(4.6)表明费米子满足如下特殊性质

$$\psi_n^2 = 0, \quad \psi_n^{*2} = 0.$$

像玻色子那样,反复使用(4.6),调整乘积表达式中  $\psi_m, \psi_n^*$  的位置顺序,可知  $\mathcal{A}$  中的元素可表示为如下单项式的[有限]线性组合:

$$\psi_{m_1} \cdots \psi_{m_r} \psi_{n_1}^* \cdots \psi_{n_s}^*, \quad \text{其中 } m_1 < \cdots < m_r, n_1 < \cdots < n_s. \quad (4.7)$$

**注记.** 用这种方式所定义的代数是否良定,以及是否没有矛盾,是一个值得仔细检查的问题. 其验证不算太困难,但我们这里不去细讲,因为这会远离本书的主题;可参考 **Bourbaki, *Algèbre, Chap. 9*, §9**. 我们只陈述结论: (4.7)中的元素线性无关,且构成线性空间  $\mathcal{A}$  的一组基.

我们将玻色子和费米子的异同总结为下表. 简单起见,表中只给出两个生成元  $a, a^*$  与  $\psi, \psi^*$  的情况. 更一般地,由有限多个费米子生成的克利福德代数  $\mathcal{A}$  是有限维的,但对于海森堡代数  $\mathcal{B}$ ,两个生成元的情况就已经无限维了.

	海森堡代数 $\mathcal{B}$	克利福德代数 $\mathcal{A}$
生成元	玻色子 $a, a^*$	费米子 $\psi, \psi^*$
生成关系	$aa^* - a^*a = 1$	$\psi\psi^* + \psi^*\psi = 1, \psi^2 = \psi^{*2} = 0$
基	$a^m a^{*n}, m, n = 0, 1, 2, \dots$	$1, \psi, \psi^*, \psi\psi^*$

费米子可用矩阵来具体实现. 对于现在的简单例子,只需令

$$\psi = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \psi^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

即可[与习题 4.1 比较]. 但是,玻色子一定不能用有限阶矩阵来表示: 如果  $n \times n$  矩阵  $A, A^*$  满足  $AA^* - A^*A = 1$ , 那么两边取迹可得  $0 = \text{tr}(AA^*) - \text{tr}(A^*A) = \text{tr}(1) = n$ , 矛盾.

## 4.3 Fock 表示

我们引入玻色子在  $\mathbb{C}[x_1, x_2, x_3, \dots]$  上的表示的费米版本.

考虑这样的图: 实数轴的每个半整数点  $n \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}$  上放置黑球或白球, 且数轴右侧[即  $n \gg 0$ ] 全是黑球, 数轴左侧[即  $n \ll 0$ ] 全是白球. 这样的示意图称为 **Maya 图** (Maya diagram) [例如 图 4.1].

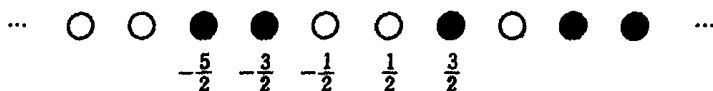


图 4.1: 一个 Maya 图.

将黑球的位置依次记作  $m_1, m_2, \dots$ , 则 Maya 图可用一个递增的半整数列来描述:

$$\mathbf{m} = \{m_j\}_{j \geq 1}, \quad \text{其中 } m_1 < m_2 < m_3 < \dots, \quad (4.8)$$

且当  $j$  充分大时  $m_{j+1} = m_j + 1$ . 记  $\mathcal{F}$  为有所有 Maya 图自由张成的向量空间, 称为 **费米 Fock 空间** (Fermions Fock space). Maya 图所对应的基向量记作  $|\mathbf{m}\rangle$ . 我们按如下规则来定义费米子在 Fock 空间上的左作用:

$$\psi_n |\mathbf{m}\rangle = \begin{cases} (-1)^{i-1} |\dots, m_{i-1}, m_{i+1}, \dots\rangle & \text{若 } \exists i, m_i = -n \\ 0 & \text{其余情况;} \end{cases} \quad (4.9)$$

$$\psi_n^* |\mathbf{m}\rangle = \begin{cases} (-1)^i |\dots, m_i, n, m_{i+1}, \dots\rangle & \text{若 } \exists i, m_i < n < m_{i+1} \\ 0 & \text{其余情况;} \end{cases} \quad (4.10)$$

例外地, 当  $i = 1$  时, (4.9)的右边为  $|m_2, m_3, \dots\rangle$ ; 当  $i = 0$  时, (4.10)的右边为  $|n, m_1, m_2, \dots\rangle$ . 你可以验证, 这个规则满足典范反交换关系(4.6). 费米子  $\psi_n$  扮演了在  $-n$  处产生白球的角色 [或者说在那里消除黑球]; 而  $\psi_n^*$  在  $n$  处产生黑球 [或者说在那里消除白球].

我们将费米子分为两类:

$\{\psi_n, \psi_n^*\}_{n<0}$ 之中的元素称为**生成子** (creation operator);

$\{\psi_n, \psi_n^*\}_{n>0}$ 之中的元素称为**湮灭子** (annihilation operator).

于是, 生成子之间两两反交换, 湮灭子之间两两反交换 [我们称  $X, Y$  反交换, 如果  $XY = -YX$ .] 考虑负半轴  $n < 0$  全是白球, 正半轴全是黑球的 Maya 图对应的向量, 则该向量满足  $m_j = j - \frac{1}{2}$ ,  $j = 1, 2, \dots$ ; 我们将此向量记作  $|\text{vac}\rangle$ , 称为**真空态** (vacuum state). 则以下性质成立:

1. 湮灭子  $\varphi$  杀掉真空态:  $\varphi |\text{vac}\rangle = 0$ .

2. Fock 空间由真空态生成:

$$\mathcal{F} = \mathcal{A} \cdot |\text{vac}\rangle := \{a |\text{vac}\rangle \mid a \in \mathcal{A}\}.$$

事实上, 众所周知 Fock 空间由这两条性质所刻画. 不断将生成子作用于真空态, [相差正负号意义下] 可以得到任何 Maya 图所对应的向量:

$$\begin{aligned} & \psi_{m_1} \cdots \psi_{m_r} \psi_{n_1}^* \cdots \psi_{n_s}^* |\text{vac}\rangle \\ & \text{其中 } m_1 < \cdots < m_r < 0, \quad n_1 < \cdots < n_s < 0. \end{aligned} \tag{4.11}$$

(4.11)中的向量线性无关, 构成  $\mathcal{F}$  的一组基.

**例子 4.1.** 下述讨论有助于让你理解 Fock 表示里的正负号约定. 设想 “**伪真空态** (fake vacuum state)”  $|\Omega\rangle$ , 它被任何  $\psi_n, n \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}$  作用都为零. 那么, “真” 真空态  $|\text{vac}\rangle$  可形式地表示为  $|\Omega\rangle$  不断被  $\psi_n^*$  作用:

$$|\text{vac}\rangle = \psi_{\frac{1}{2}}^* \psi_{\frac{3}{2}}^* \psi_{\frac{5}{2}}^* \cdots |\Omega\rangle.$$

事实上表达式右边刚好被所有湮灭子  $\psi_n, \psi_n^*, n > 0$  所零化. “真空” 在基本粒子物理学中的图景是所谓**狄拉克之海** (Dirac's sea): 真空并非空无一物, 而是处于特定状态的反粒子填满了所有 “空缺”.

若用生成子继续作用于此, 可得

$$\begin{aligned}
 \psi_{-\frac{3}{2}} |\text{vac}\rangle &= \psi_{-\frac{3}{2}} \psi_{\frac{1}{2}}^* \psi_{\frac{3}{2}}^* \psi_{\frac{5}{2}}^* \cdots |\Omega\rangle \\
 &= -\psi_{\frac{1}{2}}^* \psi_{-\frac{3}{2}} \psi_{\frac{3}{2}}^* \psi_{\frac{5}{2}}^* \cdots |\Omega\rangle \\
 &= -\psi_{\frac{1}{2}}^* \psi_{\frac{5}{2}}^* \psi_{\frac{7}{2}}^* \cdots |\Omega\rangle, \\
 \psi_{-\frac{3}{2}}^* |\text{vac}\rangle &= \psi_{-\frac{3}{2}}^* \psi_{\frac{1}{2}}^* \psi_{\frac{3}{2}}^* \psi_{\frac{5}{2}}^* \cdots |\Omega\rangle,
 \end{aligned}$$

等等. 消除黑球 [或者说产生白球] 的过程及其逆过程可见图 4.2.

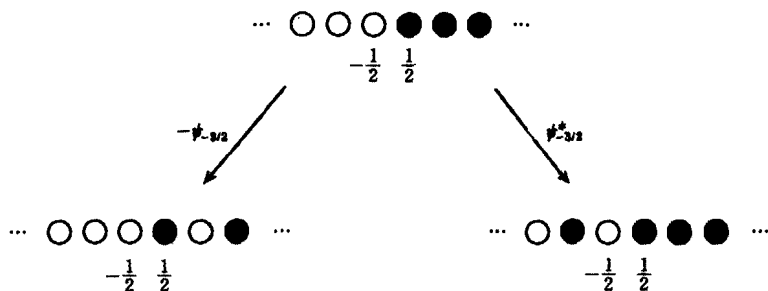


图 4.2: 生成子与湮灭子.

## 4.4 对偶空间, 电荷量与能量

与  $\mathcal{F}$  平行地, 我们定义对偶 **Fock** 空间 (dual Fock space)  $\mathcal{F}^*$ . 我们用  $\dots, n_3, n_2, n_1$  来记录 Maya 图中的白球位置, 其中  $n_i \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}$ . 作为向量空间,  $\mathcal{F}^*$  依然有全体 Maya 图自由张成, 然而它的基向量记为

$$\langle \mathbf{n} | = \langle \dots, n_3, n_2, n_1 |, \quad \text{其中 } \dots < n_3 < n_2 < n_1,$$

并且当  $j$  充分大时  $n_{j+1} = n_j - 1$ . 我们定义费米子在  $\mathcal{F}^*$  的右作用如下:

$$\langle \mathbf{n} | \psi_n = \begin{cases} (-1)^i \langle \dots, n_{i+1}, n, n_i, \dots | & \text{如果 } \exists i, n_{i+1} < n < n_i \\ 0 & \text{其余情况;} \end{cases} \quad (4.12)$$

$$\langle \mathbf{n} | \psi_n^* = \begin{cases} (-1)^{i-1} \langle \dots, n_{i+1}, n_{i-1}, \dots | & \text{如果 } \exists i, n = -n_i \\ 0 & \text{其余情况;} \end{cases} \quad (4.13)$$

如果  $\langle \mathbf{n} |$  满足  $n_j = -j + \frac{1}{2}$ ,  $j = 1, 2, \dots$ , 则称  $\langle \mathbf{n} |$  为对偶真空态, 记作  $\langle \text{vac} |$ . 与 Fock 空间类似, 成立以下:

1. 生成子  $\varphi$  杀掉对偶真空态:  $\langle \text{vac} | \varphi = 0$ ;
2. 对偶 Fock 空间由对偶真空态生成:

$$\mathcal{F}^* = \langle \text{vac} | \cdot \mathcal{A} := \{ \langle \text{vac} | a | a \in \mathcal{A} \}.$$

我们可以取

$$\langle \text{vac} | \psi_{m_1} \cdots \psi_{m_r} \psi_{n_1}^* \cdots \psi_{n_s}^*$$

$$\text{其中 } 0 < m_1 < \cdots < m_r, \quad 0 < n_1 < \cdots < n_s$$

作为  $\mathcal{F}^*$  的一组基. 我们遵循量子物理学的传统, 使用狄拉克的左矢 (bra) 右矢 (ket) 记号; 用  $\langle u |$  表示  $\mathcal{F}^*$  中的元素, 用  $|u\rangle$  表示  $\mathcal{F}$  中的元素. 费米子  $a \in \mathcal{A}$  在  $\mathcal{F}^*$  或  $\mathcal{F}$  的元素上的作用记为  $\langle u | a$  或者  $a | u\rangle$ . 我们定义这两个空间上的双线性型  $\mathcal{F}^* \times \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $(\langle u |, |v\rangle) \mapsto \langle u | v\rangle$  如下:

$$\langle \mathbf{n} | \mathbf{m} \rangle = \delta_{m_1+n_1,0} \delta_{m_2+n_2,0} \delta_{m_3+n_3,0} \cdots, \quad (4.14)$$

其中  $\langle \mathbf{n} | = \langle \cdots n_3 n_2 n_1 |$ ,  $|\mathbf{m}\rangle = |m_1 m_2 m_3 \cdots\rangle$ . 于是以下关系成立:

$$\langle \text{vac} | \text{vac} \rangle = 1, \quad (\langle u | a) | v \rangle = \langle u | (a | v \rangle), \quad \forall a \in \mathcal{A}. \quad (4.15)$$

于是我们把第二个式子的左右两边简记为  $\langle u | a | v \rangle$ .

费米子	$\psi_n$	$\psi_n^*$
电荷量	1	-1
能量	$-n$	$-n$

表: 费米子的电荷量与能量.

费米子  $\psi_n, \psi_n^*$  的**电荷量** (electric charge) 与**能量** (energy) 的定义见上表. 更一般地, 由  $\psi$  与  $\psi^*$  组成的单项式的电荷量, 能量分别为其各个因子的电荷量, 能量之和. 于是在此意义下, 单项式(4.7)的电荷量为  $r - s$ , 能量为  $-(m_1 + \cdots + m_r + n_1 + \cdots + n_s)$ .

我们也谈论 Fock 空间  $\mathcal{F}$  的基向量的电荷量与能量. 我们定义

$$|\text{vac}\rangle \text{ 的电荷量 (或能量)} = 0$$

$$a|\text{vac}\rangle \text{ 的电荷量 (或能量)} = a \text{ 的电荷量 (或能量),}$$

其中  $a \in \mathcal{A}$  为单项式, 且使得  $a|\text{vac}\rangle \neq 0$ . 类似地, 对于对偶空间  $\mathcal{F}^*$ , 我们令

$$\langle \text{vac} | \text{ 的电荷量 (或能量)} = 0$$

$$\langle \text{vac} | a \text{ 的电荷量 (或能量)} = a \text{ 的电荷量 (或能量) 的相反数,}$$

[特别注意“相反数”]. 我们记  $\mathcal{F}_l^{(d)}$  为 Fock 空间  $\mathcal{F}$  的由电荷量  $l$ , 能量  $d$  的单项式张成的子空间, 即

$\mathcal{F}_l^{(d)} =$  由以下所张成的线性子空间:

$$\left\{ \psi_{m_1} \cdots \psi_{m_r} \psi_{n_1}^* \cdots \psi_{n_s}^* \left| \begin{array}{l} m_1 < \cdots < m_r, n_1 < \cdots < n_s < 0, \\ r - s = l, \quad \sum m_i + \sum n_j = -d \end{array} \right. \right\}.$$

于是  $\mathcal{F}$  可分解为子空间直和  $\mathcal{F} = \bigoplus_l \mathcal{F}_l$ , 以及进一步地  $\mathcal{F}_l = \bigoplus_d \mathcal{F}_l^{(d)}$ . 对偶 Fock 空间也有类似操作.

对于每个整数  $l$ , 考虑将真空态的 Maya 图整体向右平移  $l$  单位 [ $l < 0$  时, 向左平移  $-l$ ]; 我们记  $\mathcal{F}$  中的元素  $|l\rangle = |l + \frac{1}{2}, l + \frac{3}{2}, l + \frac{5}{2}, \dots\rangle$ . 同样的方式, 我们记  $\langle l| = \langle \dots, -l - \frac{5}{2}, -l - \frac{3}{2}, -l - \frac{1}{2}| \in \mathcal{F}^*$ , [相应的 Maya 图整体向左平移  $l$  单位]. 换句话说,  $|l\rangle$  与  $\langle l|$  的定义如下:

$$\begin{aligned} \langle l| &= \begin{cases} \langle \text{vac}| \psi_{\frac{1}{2}} \cdots \psi_{-l-\frac{1}{2}} & l < 0 \\ \langle \text{vac}| & l = 0 \\ \langle \text{vac}| \psi_{\frac{1}{2}}^* \cdots \psi_{l-\frac{1}{2}}^* & l > 0 \end{cases} \\ |l\rangle &= \begin{cases} \psi_{l+\frac{1}{2}}^* \cdots \psi_{-\frac{1}{2}}^* |\text{vac}\rangle & l < 0 \\ |\text{vac}\rangle & l = 0 \\ \psi_{-l+\frac{1}{2}} \cdots \psi_{-\frac{1}{2}} |\text{vac}\rangle & l > 0 \end{cases} \end{aligned}$$

容易证明, 电荷量为  $l$  的基向量的最低能量为  $d = l^2/2$ . 此外, 由定义容易验证

$$\text{若 } n < -l, \text{ 则 } \langle l| \psi_n = 0; \quad \text{若 } n < l, \text{ 则 } \langle l| \psi_n^* = 0; \quad (4.16)$$

$$\text{若 } n > -l, \text{ 则 } \psi_n |l\rangle = 0; \quad \text{若 } n > l, \text{ 则 } \psi_n^* |l\rangle = 0; \quad (4.17)$$

## 4.5 Wick 定理

我们现在解释如何仅从性质(4.15)而不借助具体的定义来唯一地确定 Fock 空间与其对偶空间之间的配对(4.14). 对于  $a \in \mathcal{A}$ , 定义  $a$  的真空期望值 (vacuum expectation value)  $\langle a \rangle := \langle \text{vac}|a|\text{vac} \rangle$ . 于是, 由(4.15)以及生成子, 湮灭子的定义可以得出

$$\left. \begin{aligned} \langle 1 \rangle &= 1, & \langle \psi_n \rangle &= 0, & \langle \psi_n^* \rangle &= 0 \\ \langle \psi_m \psi_n \rangle &= 0 & \langle \psi_m^* \psi_n^* \rangle &= 0 & \langle \psi_m \psi_n^* \rangle &= \delta_{m+n,0} \theta(n < 0). \end{aligned} \right\} \quad (4.18)$$



其中, 最后一式当中的记号  $\theta(P)$  为布尔特征函数: 对于某个性质  $P$ , 如果  $P$  为真则  $\theta(P) = 1$ , 否则  $\theta(P) = 0$ .

例如, (4.18) 的最后一式的证明如下: 等号右边显然仅当  $n < 0 < m$  时非零; 而由 (4.6) 可知左边等于

$$\langle \delta_{m+n,0} - \psi_n \psi_m^* \rangle = \delta_{m+n,0} \langle 1 \rangle.$$

不断用这种方法, 还可类似得到

$$\begin{aligned} \langle \psi_k \psi_l \psi_m^* \rangle &= 0 \\ \langle \psi_k \psi_l \psi_m^* \psi_n^* \rangle &= \langle \psi_k \psi_n^* \rangle \langle \psi_l \psi_m^* \rangle - \langle \psi_k \psi_m^* \rangle \langle \psi_l \psi_n^* \rangle. \end{aligned}$$

用这种计算方法很容易找出一般规律: 不断利用交换关系 (4.6), 把湮灭子向右移动, 把生成子向左移动, 移动过程中若碰到另一端的真空态, 则得到零, 操作结束. 在此过程中, 我们每交换相邻两个费米子, 就会出现一个常数项, 交换子中的常数项就会发生一点微小变化; 把所有这些产生的常数项都加起来就得到真空期望值.

容易看出, 对于任何关于  $\psi, \psi^*$  的单项式  $a$ ,  $\langle a \rangle = 0$ , 除非出现  $\psi$  与  $\psi^*$  的次数相同. 因此当  $k \neq l$  时  $\mathcal{F}_k^*$  与  $\mathcal{F}_l$  正交. 更确切地说, 若  $k \neq l$  或  $d \neq e$ , 则  $\mathcal{F}_k^{*(d)}$  与  $\mathcal{F}_l^{(e)}$  正交.

若  $\psi$  与  $\psi^*$  出现的次数相同, 则考虑所有可能的  $\psi^*$  与  $\psi$  的位置的组合. 再稍微注意交换两个费米子所产生的负号, 我们即可把上述计算总结称一个定理. 记  $W := \left( \bigoplus_{n \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}} \mathbb{C} \psi_n \right) \oplus \left( \bigoplus_{n \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}} \mathbb{C} \psi_n^* \right)$ , 即费米子的线性组合之全体.

**定理 4.2.** (Wick 定理). 对任意  $w_1, \dots, w_r \in W$ , 成立

$$\langle w_1 \cdots w_r \rangle = \begin{cases} 0 & \text{若 } r \text{ 为奇数,} \\ \sum_{\sigma} (-1)^{|\sigma|} \langle w_{\sigma(1)} w_{\sigma(2)} \rangle \cdots \langle w_{\sigma(r-1)} w_{\sigma(r)} \rangle & \text{若 } r \text{ 为偶数.} \end{cases}$$

其中  $|\sigma|$  为排列的逆序数; 上述求和取遍满足以下性质的  $\sigma$ :  $\sigma(1) < \sigma(2), \dots, \sigma(r-1) < \sigma(r)$ , 且  $\sigma(1) < \sigma(3) < \cdots < \sigma(r-1)$ . 换句话说, 取遍所有将这些  $w_i$  两两配对的方式.

习题.

1. 考虑由两个元素  $\{\psi, \psi^*\}$  以及关系  $\psi^2 = \psi^{*2} = 0, [\psi, \psi^*]_+ = 1$  所生成的克利福德代数. 用本节的方式来定义它的 Fock 表示  $\mathcal{F}$ , 真空态  $|\text{vac}\rangle \in \mathcal{F}$  满足  $\psi |\text{vac}\rangle = 0$ . 证明:  $v_1 := |\text{vac}\rangle, v_2 := \psi^* |\text{vac}\rangle$  构成  $\mathcal{F}$  的一组基, 且  $\psi, \psi^*$  的作用在这组基下的矩阵为

$$\psi \leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \psi^* \leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. 具体写出  $n = 6$  时的 Wick 定理表达式.
3. 证明  $\langle \psi_{m_1} \cdots \psi_{m_s} \psi_{n_s}^* \cdots \psi_{n_1}^* \rangle = \det(\langle \psi_{m_i} \psi_{n_j}^* \rangle)$ . 并由此证明双线性型(4.15)非退化. [我们称双线性型  $F: V \times W \rightarrow \mathbb{C}$  非退化, 如果

$$\forall w \in W, F(v, w) = 0 \Rightarrow v = 0$$

$$\forall v \in V, F(v, w) = 0 \Rightarrow w = 0$$

成立.]

## 5. 玻色-费米对应

上一节中构造的玻色子和费米子仿佛是两条平行线, 它们的性质截然不同. 然而, 本节的主题是, 我们能让这两者能彼此实现对方! 为了实现这一点, 最基本的想法是利用玻色子和费米子的无穷和. 我们所介绍的生成函数也能令人感受到一些量子场论.

### 5.1 生成函数

我们来介绍生成函数 (generating function) 的想法, 这是进行系统地计算的重要工具. 引入形式变量  $k$ , 称如下形式和

$$\psi(k) = \sum_{n \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}} \psi_n k^{-n - \frac{1}{2}}, \quad \psi^*(k) = \sum_{n \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}} \psi_n^* k^{-n - \frac{1}{2}} \quad (5.1)$$

为费米生成函数 (Fermionic generating function). 接下来我们要经常性地处理关于无穷和的等式; 例如等式  $\sum a_n z^n = \sum b_n z^n$  是指  $k$  的各次幂的系数都相等, 即  $a_n = b_n, \forall n$ .

**例子 5.1.** 我们来计算生成函数(5.1)的真空期望. 利用(4.18)可得

$$\begin{aligned} \langle \psi(p) \psi^*(q) \rangle &= \sum_{m, n \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}} \langle \psi_m \psi_n^* \rangle p^{-m - \frac{1}{2}} q^{-n - \frac{1}{2}} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} p^{-n-1} q^n. \end{aligned} \quad (5.2)$$

右边可以写成

$$\langle \psi(p) \psi^*(q) \rangle = \frac{1}{p - q}. \quad (5.3)$$

尽管这个表达式看起来如此诱人, 但它相比(5.2)丢失了一些信息; 事实上(5.3)的右边要理解为在  $|p| > |q|$  时关于  $p, q$  的幂级数展开.

例子 5.2. 更一般地, 由 *Wick* 定理可得

$$\begin{aligned}\langle \psi(p_1) \cdots \psi(p_n) \psi^*(q_n) \cdots \psi^*(q_1) \rangle &= \det(\langle \psi(p_i) \psi^*(q_j) \rangle) \\ &= \det\left(\frac{1}{p_i - q_j}\right).\end{aligned}$$

将等号右边写成有理函数形式, 可得

$$\langle \psi(p_1) \cdots \psi(p_n) \psi^*(q_n) \cdots \psi^*(q_1) \rangle = \frac{\prod_{1 \leq i < j \leq n} (p_i - p_j)(q_j - q_i)}{\prod_{1 \leq i, j \leq n} (p_i - q_j)}. \quad (5.4)$$

同样地, (5.4)的右边要理解为在  $|p_1| > \cdots > |p_n| > |q_n| > \cdots > |q_1|$  的幂级数展开.

注记. 行列式  $\det\left(\frac{1}{p_i - q_j}\right)$  等于(5.4)右端, 这个恒等式称为柯西恒等式. 其证明如下: 将  $\prod_{1 \leq i, j \leq n} (p_i - q_j)$  乘以那个行列式, 所得的多项式在  $p_i = p_j, q_i = q_j, (i \neq j)$  处恒为零, 因此该多项式能被  $\prod_{1 \leq i, j \leq n} (p_i - p_j)(q_j - q_i)$  整除. 之后比较次数即可.

## 5.2 正规积

我们在处理微分算子时, 经常会 (甚至是无意识地) 把算子表达式调整成“正规的”次序, 微分算子写在右边, 乘法算子写在左边. 这样做的一个原因是, 如果不适当调整次序, 算子表达式可能就不再良定; 例如  $\frac{\partial}{\partial x_n} x_n = x_n \frac{\partial}{\partial x_n} + 1$ . 当表达式里出现无穷求和时, 甚至只有特定的次序才能使得算子有意义.

例子 5.3. 考虑欧拉算子  $\sum_{n=1}^{\infty} n x_n \frac{\partial}{\partial x_n}$ , 该算子将加权齐次多项式  $f(\mathbf{x})$  映为  $d \times f(\mathbf{x})$ , 其中  $d := \deg_{\mathbf{x}} f$ . [注意我们规定  $x_n$  的权  $\deg_{\mathbf{x}} x_n = n$ ]; 也就是说这个算子能够反映出多项式的权. 尽管这个算子里面出现的无

穷求和, 但这个算子作用在任何多项式上都有意义. 假如我们企图交换次序, 去考虑  $\sum_{n=1}^{\infty} n \frac{\partial}{\partial x_n} x_n$ , 就会发现这个是无意义的, 它作用在常函数 1 上会得到

$$\sum_{n=1}^{\infty} n(1 + x_n \frac{\partial}{\partial x_n}) \cdot 1 = \infty.$$

我们引入如下简单记号. 对于由微分与乘法算子构成的多项式  $\mathbf{p}$ , 我们归纳地定义“冒号”符号  $:\mathbf{p}:$  如下:

1.  $:\mathbf{p}:$  是关于  $\mathbf{p}$  的线性映射, 且冒号内的任何两个微分或乘法算子均可交换.
2.  $:1:=1$ ,  $:\mathbf{p} \cdot \frac{\partial}{\partial x_n} := :\mathbf{p} : \frac{\partial}{\partial x_n}$ , 并且  $:x_n \cdot \mathbf{p} := x_n : \mathbf{p} :$ .

这个冒号记号  $:\mathbf{p}:$  称为  $\mathbf{p}$  的正规次序乘积, 或简称正规积 (normal product).

**例子 5.4.** 例如,  $:x_n \frac{\partial}{\partial x_n} := \frac{\partial}{\partial x_n} x_n := x_n \frac{\partial}{\partial x_n}$ , 以及

$$:e^{x_n + \frac{\partial}{\partial x_n}} := e^{x_n} e^{\frac{\partial}{\partial x_n}}.$$

严格地讲,  $e^{x_n}$  作用于多项式, 所得的不再是多项式; 但  $e^{\frac{\partial}{\partial x_n}}$  在多项式上的作用确实有意义, 易知它其实是平移算子  $f(\mathbf{x}) \mapsto f(\dots, x_n + 1, \dots)$ .

类似地, 我们也对克利福德代数中的元素  $a \in \mathcal{A}$  定义费米正规积, 并且用与玻色正规积一样的冒号  $::$  来表示它; 有时我们用下标来区分两者, 将玻色正规积记作  $::_B$ , 将费米正规积记作  $::_F$ . 费米正规积的公理如下:

1.  $:a:$  关于  $a \in \mathcal{A}$  是线性的, 且冒号中的费米子两两反交换.

2.  $:1:=1$ , 并且

$$\begin{cases} :a \cdot \varphi := :a: \varphi & \text{如果 } \varphi \text{ 为湮灭子} \\ :\varphi^* \cdot a := \varphi^* :a: & \text{如果 } \varphi^* \text{ 为生成子.} \end{cases}$$

例如, 对于费米子的二次单项式, 成立

$$\begin{aligned} :\psi_m \psi_n^* : &= \begin{cases} \psi_m \psi_n^* & m < 0 \text{ 或 } n > 0 \\ -\psi_n^* \psi_m & m > 0 \text{ 或 } n < 0, \end{cases} \\ &= \psi_m \psi_n^* - \langle \psi_m \psi_n^* \rangle. \end{aligned} \quad (5.5)$$

对我们来说重要的是, 用正规积表示的含有无穷求和的算子 Fock 上的作用有意义. 我们将在下一小节看到例子.

## 5.3 玻色子的实现

对每个整数  $n \in \mathbb{Z}$ , 我们用生成函数

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} H_n k^{-n-1} =: \psi(k) \psi^*(k) : \quad (5.6)$$

来定义算子  $H_n$ . 比较  $k^n$  的系数可得

$$H_n = \sum_{j \in \mathbb{Z} + 1/2} : \psi_{-j} \psi_{n+j}^* :. \quad (5.7)$$

注意 Fock 空间的任何元素  $|u\rangle$  都可由费米子不断作用在真空态  $|\text{vac}\rangle$  所得到, 从而容易知道对几乎所有[除了至多有限个例外]的  $j$ , 都成立  $: \psi_{-j} \psi_{n+j}^* : |u\rangle = 0$ . 因此对任意  $|u\rangle$ , 表达式  $H_n |u\rangle$  其实是有限求和.

我们来确定算子(5.7)之间的交换关系. 首先注意到关于交换子与反交换子的如下恒等式:

$$[AB, C] = A[B, C]_+ - [A, C]_+ B \quad (5.8)$$

$$= A[B, C] + [A, C]B. \quad (5.9)$$

由(5.8)直接计算可得

$$[H_n, \psi_m] = \psi_{m+n}, \quad [H_n, \psi_m^*] = -\psi_{m+n}^*. \quad (5.10)$$

之后再由(5.9)与(5.10)可得

$$[H_m, H_n] = m\delta_{m+n,0} \quad (5.11)$$

[留作习题 5.1]. 注意它们之间的交换子都是标量, 这与玻色子的交换关系很像. 其实, 对于  $n = 1, 2, \dots$ , 我们令  $a_n = H_n$ ,  $na_n^* = H_{-n}$ , 则(5.11)恰为玻色子的典范交换关系(4.2). 从而, 通过引入无限求和, 我们用费米子实现了玻色子!

算子  $H_0$  在(5.7)的各算子之中有些不同; 它与所有的  $H_n$  都交换. 若令  $n = 0$ , 反复使用(5.10), 会发现  $H_0$  能够衡量电荷量. 也就是说, 对于单项式  $a \in \mathcal{A}$ ,

$$a \text{ 的电荷量为 } l \iff [H_0, a] = la.$$

## 5.4 Fock 空间的同构

由定义知算子  $H_n$  的电荷量为 0, 能量为  $-n$ . 特别地, 注意  $H_n$  把子空间  $\mathcal{F}_l \subseteq \mathcal{F}$  映到它自身. 我们将介绍如何将每个  $\mathcal{F}_l$  都自然等同于玻色 Fock 空间  $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ . 为了一次性处理掉所有电荷量  $l$  的情况, 我们引入新变量  $z$ , 并考虑空间

$$\mathbb{C}[z, z^{-1}; x_1, x_2, x_3, \dots] = \bigoplus_{l \in \mathbb{Z}} z^l \mathbb{C}[x_1, x_2, x_3, \dots]. \quad (5.12)$$

定义算子

$$H(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n H_n. \quad (5.13)$$

由法则(4.17)可知对任意  $l$  都有

$$H(\mathbf{x})|l\rangle = 0, \quad (5.14)$$

其中  $|l\rangle$  见 4.4 节.

现在, 对于每个  $|u\rangle \in \mathcal{F}$ , 我们定义如下关于  $z^{\pm 1}$  与  $\mathbf{x}$  的多项式

$$\Phi(|u\rangle) = \sum_{l \in \mathbb{Z}} z^l \langle l | e^{H(\mathbf{x})} | u \rangle. \quad (5.15)$$

若  $|u\rangle$  为单项式且电荷量为  $m$ , 则上式右边只有  $l = m$  的求和项可以非零. 因此, 上是右边实际上定义了一个多项式, 我们会介绍如何去具体计算它. 但现在我们先介绍如下定理:

**定理 5.1.** (Fock 空间的同构). 映射

$$\Phi : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{C}[z, z^{-1}; x_1, x_2, x_3, \dots], \quad |u\rangle \mapsto \Phi(|u\rangle) \quad (5.16)$$

是线性空间的同构, 并且满足

$$\Phi(H_n |u\rangle) = \begin{cases} \frac{\partial}{\partial x_n} \Phi |u\rangle & \text{如果 } n > 0, \\ -n x_{-n} |u\rangle & \text{如果 } n < 0. \end{cases} \quad (5.17)$$

证明. 注意到所有的  $H_n (n > 0)$  两两交换, 于是

$$\frac{\partial}{\partial x_n} \langle l | e^{H(\mathbf{x})} | u \rangle = \left\langle l \left| \frac{\partial}{\partial x_n} e^{H(\mathbf{x})} \right| u \right\rangle = \langle l | e^{H(\mathbf{x})} H_n | u \rangle,$$

从而(5.17)第一行得证. 再注意

$$\langle l | e^{H(\mathbf{x})} H_{-n} | u \rangle = \langle l | e^{H(\mathbf{x})} H_{-n} e^{-H(\mathbf{x})} e^{H(\mathbf{x})} | u \rangle, \quad (5.18)$$



从而由  $[H(\mathbf{x}), H_{-n}] = nx_n$  可得

$$\begin{aligned} \mathbf{e}^{H(\mathbf{x})} H_{-n} \mathbf{e}^{-H(\mathbf{x})} &= H_{-n} + [H(\mathbf{x}), H_{-n}] + \frac{1}{2!} [H(\mathbf{x}), [H(\mathbf{x}), H_{-n}]] + \cdots \\ &= H_{-n} + nx_n. \end{aligned}$$

而(4.16)表明  $\langle l | H_{-n} = 0$ , 从而(5.18)的右边等于

$$\langle l | (H_{-n} + nx_n) \mathbf{e}^{H(\mathbf{x})} | u \rangle = nx_n \langle l | \mathbf{e}^{H(\mathbf{x})} | u \rangle,$$

这就证明了(5.17)的第二行.

特别地, 对于  $|u\rangle = |l\rangle$ , 由(5.14)可知  $\Phi(|l\rangle) = z^l$ . 不断用  $H_{-n}$  作用, 可得到  $z^l$  乘以任何关于  $\mathbf{x}$  的单项式, 从而(5.17)为满射. 我们可通过计算空间维数来证明  $\Phi$  是单射, 这里从略, 细节见习题 5.5.  $\square$

我们来计算一些例子, 看  $\Phi$  把 Fock 空间中的单项式映为什么, 从而理解映射(5.17). 由定义(5.13)与交换关系(5.10)可得

$$[H(\mathbf{x}), \psi(k)] = \xi(\mathbf{x}, k)\psi(k), \quad [H(\mathbf{x}), \psi^*(k)] = -\xi(\mathbf{x}, k)\psi^*(k),$$

其中  $\xi(\mathbf{x}, k) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n k^n$  [与(2.18)对照]. 用与(5.18)后边的式子类似的计算方法可得

$$\begin{aligned} \mathbf{e}^{H(\mathbf{x})} \psi(k) \mathbf{e}^{-H(\mathbf{x})} &= \mathbf{e}^{\xi(\mathbf{x}, k)} \psi(k), \\ \mathbf{e}^{H(\mathbf{x})} \psi^*(k) \mathbf{e}^{-H(\mathbf{x})} &= \mathbf{e}^{-\xi(\mathbf{x}, k)} \psi^*(k). \end{aligned} \tag{5.19}$$

若我们令

$$\begin{aligned} \mathbf{e}^{\xi(\mathbf{x}, k)} &= \sum_{n=0}^{\infty} p_n(\mathbf{x}) k^n \\ &= 1 + x_1 k + \left( x_2 + \frac{x_1^2}{2} \right) k^2 + \left( x_3 + x_2 x_1 + \frac{x_1^3}{6} \right) k^3 + \cdots, \end{aligned} \tag{5.20}$$

则由(5.19), (5.20)以及替换  $\mathbf{x} \mapsto -\mathbf{x}$  可得

$$\begin{aligned} \mathbf{e}^{H(\mathbf{x})}\psi_n\mathbf{e}^{-H(\mathbf{x})} &= \sum_{j=0}^{\infty} \psi_{n+j}p_j(\mathbf{x}) \\ &= \psi_n + x_1\psi_{n+1} + \left(x_2 + \frac{x_1^2}{2}\right)\psi_{n+2} + \cdots, \end{aligned} \quad (5.21)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{e}^{H(\mathbf{x})}\psi_n^*\mathbf{e}^{-H(\mathbf{x})} &= \sum_{j=0}^{\infty} \psi_{n+j}^*p_j(-\mathbf{x}) \\ &= \psi_n^* - x_1\psi_{n+1}^* + \left(-x_2 + \frac{x_1^2}{2}\right)\psi_{n+2}^* + \cdots, \end{aligned} \quad (5.22)$$

我们可以利用这两式来具体计算  $\Phi(|u\rangle)$ .

**例子 5.5.** 对于  $\psi_{-\frac{5}{2}}|\text{vac}\rangle \in \mathcal{F}$ , 我们有

$$\begin{aligned} \Phi(\psi_{-\frac{5}{2}}|\text{vac}\rangle) &= z \left\langle 1 \left| \mathbf{e}^{H(\mathbf{x})}\psi_{-\frac{5}{2}} \right| \text{vac} \right\rangle \\ &= z \left\langle \text{vac} \left| \psi_{\frac{1}{2}}^* \mathbf{e}^{H(\mathbf{x})}\psi_{-\frac{5}{2}} \mathbf{e}^{-H(\mathbf{x})} \right| \text{vac} \right\rangle = z \left( x_2 + \frac{x_1^2}{2} \right), \end{aligned}$$

上式最后一步用到(5.21).

同样地, 对于向量  $\psi_{-\frac{3}{2}}\psi_{-\frac{3}{2}}^*|\text{vac}\rangle$ , 有

$$\begin{aligned} \Phi(\psi_{-\frac{3}{2}}\psi_{-\frac{3}{2}}^*|\text{vac}\rangle) &= \left\langle \text{vac} \left| \mathbf{e}^{H(\mathbf{x})}\psi_{-\frac{3}{2}}\mathbf{e}^{-H(\mathbf{x})}\mathbf{e}^{H(\mathbf{x})}\psi_{-\frac{3}{2}}^*\mathbf{e}^{-H(\mathbf{x})} \right| \text{vac} \right\rangle \\ &= \langle \text{vac} | \left( \psi_{-\frac{3}{2}} + x_1\psi_{-\frac{1}{2}} + \left(x_2 + \frac{x_1^2}{2}\right)\psi_{\frac{1}{2}} + \cdots \right) \\ &\quad \times (\psi_{-\frac{3}{2}}^* - x_1\psi_{-\frac{1}{2}}^* + \cdots) | \text{vac} \rangle \\ &= \left( x_3 + x_2x_1 + \frac{x_1^3}{6} \right) \cdot 1 + \left( x_2 + \frac{x_1^2}{2} \right) \cdot (-x_1) = x_3 - \frac{x_1^3}{3}. \end{aligned}$$

计算过程清楚地表明, 其结果必然是多项式.

## 5.5 费米子的实现

定理5.1 表明我们可将费米 Fock 空间与玻色 Fock 空间等同. 于是或许也应该能用玻色子来实现费米子的作用效果. 我们这就来实现它. 有点意料之外的是, 我们要在空间(5.12)上引入如下的算子  $k^{H_0}$ ,  $e^K$ :

$$(k^{H_0} f)(z, \mathbf{x}) := f(kz, \mathbf{x}), \quad (e^K f)(z, \mathbf{x}) := z f(z, \mathbf{x}),$$

然后我们定义

$$\begin{cases} \Psi(k) &= e^{\xi(\mathbf{x}, k)} e^{-\xi(\tilde{\partial}, k^{-1})} e^K k^{H_0}, \\ \Psi^*(k) &= e^{-\xi(\mathbf{x}, k)} e^{\xi(\tilde{\partial}, k^{-1})} e^{-K} k^{-H_0}, \end{cases} \quad (5.23)$$

其中

$$\tilde{\partial} := \left( \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial x_3}, \dots \right), \quad \xi(\tilde{\partial}, k^{-1}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \frac{\partial}{\partial x_n} k^{-n}.$$

之前说过, 算子  $H_0$  能够反映电荷量, 从而自然地规定  $k^{H_0} z^l = k^l z^l$ , 记号  $k^{H_0}$  很自然. 而规定  $e^K$  的原因则有些出乎意料, 下面来说一下其背后的动机. 我们形式地定义如下级数  $\varphi(k)$ :

$$\varphi(k) = \sum_{n \neq 0} \frac{H_n}{-n} k^{-n} + H_0 \log k + K, \quad (5.24)$$

则  $\frac{d\varphi(k)}{dk} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} H_n k^{-n-1}$ , 从而  $\varphi(k)$  是玻色生成函数的不定积分. “积分常数”  $K$  并不是良好定义的算子, 但我们假设它满足交换关系

$$[H_0, K] = 1, \quad [K, H_n] = 0, \quad \forall n \neq 0, \quad (5.25)$$

那么我们可以形式地得出“算子”  $e^K$  与  $H_n$  的交换关系. 如果我们把  $K$  视为生成子, 把  $H_0$  视为湮灭子, 则(5.23)可以紧凑地写成

$$\Psi(k) = : e^{\varphi(k)} :_B, \quad \Psi^*(k) = : e^{-\varphi(k)} :_B.$$

有了以上准备, 我们来公布问题的答案:

**定理 5.2.** (玻色-费米对应). 费米母函数  $\psi(k)$ ,  $\psi^*(k)$  在玻色 Fock 空间中能被(5.23)实现. 换言之, 对任意  $|u\rangle \in \mathcal{F}$ , 成立

$$\Phi(\psi(k)|u\rangle) = \Psi(k)\Phi(|u\rangle), \quad \Phi(\psi^*(k)|u\rangle) = \Psi^*(k)\Phi(|u\rangle).$$

证明. 我们只证明  $\psi(k)$  的结果,  $\psi^*(k)$  完全类似. 由定义,

$$\Phi(\psi(k)|u\rangle) = \sum_l z^l \langle l | e^{H(x)} \psi(k) | u \rangle = e^{\xi(x,k)} \sum_l z^l \langle l | \psi(k) e^{H(x)} | u \rangle.$$

另一方面, 若记

$$[k] = \left( \frac{1}{k}, \frac{1}{2k^2}, \frac{1}{3k^3}, \dots \right),$$

则  $e^{-\xi(\partial, k^{-1})}$  恰为平移算子  $f(\mathbf{x}) \mapsto f(\mathbf{x} - [k])$ . 于是, 我们只需要证明如下引理:

**引理 5.3.**

$$\langle l | \psi(k) = k^{l-1} \langle l-1 | e^{-H([k])} \quad (5.26)$$

$$\langle l | \psi^*(k) = k^{-l-1} \langle l+1 | e^{H([k])} \quad (5.27)$$

我们只证明  $l = 0$  的情况, 而一般情形也类似. 为证明(5.26), 只需证明对任意  $n$  都有

$$\begin{aligned} & \left\langle \psi_{\frac{1}{2}} k^{-1} e^{-H([k])} \psi(p_1) \cdots \psi(p_{n-1}) \psi^*(q_n) \cdots \psi^*(q_1) \right\rangle \\ &= \langle \psi(k) \psi(p_1) \cdots \psi(p_{n-1}) \psi^*(q_n) \cdots \psi^*(q_1) \rangle. \end{aligned} \quad (5.28)$$

注意到

$$e^{\pm \xi([k], p)} = \left( 1 - \frac{p}{k} \right)^{\mp 1},$$

由此将  $e^{-H(\mathbb{I}k)}$  向右移动到底, (5.28)等号左边变成

$$\frac{\prod_{i=1}^{n-1} (k - p_i)}{\prod_{j=1}^n (k - q_j)} \times \oint \frac{dk'}{2\pi i} \langle \psi(k') \psi(p_1) \cdots \psi(p_{n-1}) \psi^*(q_n) \cdots \psi^*(q_1) \rangle.$$

用下述柯西恒等式[见(5.4)] 将上式中的被积函数展开:

$$\begin{aligned} & \langle \psi(k') \psi(p_1) \cdots \psi(p_{n-1}) \psi^*(q_n) \cdots \psi^*(q_1) \rangle \\ &= \frac{\prod_{i=1}^{n-1} (k' - p_i)}{\prod_{j=1}^n (k' - q_j)} \times \frac{\prod_{1 \leq i < j \leq n-1} (p_i - p_j) \prod_{1 \leq i < j \leq n} (q_j - q_i)}{\prod_{\substack{1 \leq i \leq n-1 \\ 1 \leq j \leq n}} (p_i - q_j)}, \end{aligned}$$

然后令  $k' \rightarrow \infty$  即可从中抽出  $\frac{1}{k'}$  的系数. 这样就从(5.28)的右边使用上式, 之后易证明(5.28). 证毕.  $\square$

## 习题.

1. 证明关系式(5.11).
2. 计算  $\Phi(\psi_{-\frac{5}{2}} \psi_{-\frac{3}{2}}^* |\text{vac}\rangle)$ .
3. 若我们规定  $x_n$  的权[次数] 为  $n$ , 并且对于能量为  $d$  的算子, 把  $d$  也计入该算子的权. 试验证(5.13)中的算子  $H(\mathbf{x})$  是权为 0 的齐次算子. 基于此, 再注意  $\langle l |$  的权为  $\frac{l^2}{2}$ , 试证明: 若  $|u\rangle \in \mathcal{F}_l^{(d)}$ , 则多项式  $\Phi(|u\rangle)$  的权为  $d - \frac{l^2}{2}$ .
4. 向量空间  $\mathcal{F}_l^{(d)}$  的维数的生成函数

$$\text{ch } \mathcal{F} := \sum_{\substack{l \in \mathbb{Z} \\ d \geq l^2/2}} \dim(\mathcal{F}_l^{(d)}) z^l q^d$$

称为 Fock 空间  $\mathcal{F}$  的特征函数 (character). 若承认(4.11)构成  $\mathcal{F}$  的一组基, 试证明:

$$\text{ch } \mathcal{F} = \prod_{\substack{j>0 \\ j \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}}} (1 + zq^j)(1 + z^{-1}q^j).$$

5. 试证明玻色 Fock 空间  $\mathcal{B} = \mathbb{C}[z^{\pm 1}; x]$  的特征函数为:

$$\text{ch } \mathcal{B} = \sum_{l \in \mathbb{Z}} z^l q^{\frac{l^2}{2}} \prod_{j=1}^{\infty} (1 - q^j)^{-1}.$$

由此结论以及上一题, 试证明如下雅可比三重积公式 (Jacobi triple identity)

$$\prod_{j=1}^{\infty} (1 - zq^{j-1})(1 - z^{-1}q^j)(1 - q^j) = \sum_{l \in \mathbb{Z}} (-z)^l q^{\frac{l(l-1)}{2}}.$$

反之, 如果我们将雅可比三重积公式视为已知, 则能推出映射(5.16)为单射.

## 6. 变换群与 $\tau$ 函数

我们先来展示费米子的二次多项式空间上自然的无穷维李代数结构, 然后处理这个李代数相应的群. 这个群将 KP 方程的解变成其它的解. 用几何语言来说, 真空态向量沿该群作用的轨道上的每一点都是第 2 节所介绍的  $\tau$  函数. 在由函数构成的巨大的空间里, 该群作用的轨道是一个子流形, 确定该流形的方程不是别的, 就是 Hirota 方程.

### 6.1 群作用与轨道

给定一个群在某空间上的作用, 则空间中的点在群作用下的轨迹构成了特定的形状. 如你所愿, 群作用使得这个形状具有高度对称性.

一般地, 群  $G$  在集合  $S$  上的作用是指, 对任意  $x \in S$  与  $g \in G$ , 都确定了  $S$  中的元素  $gx \in S$  使得  $(g_1g_2)x = g_1(g_2x)$ ,  $ex = x$  [其中  $e \in G$  为群单位元]. 在此设定下, 称子集  $Gx := \{gx \mid g \in G\} \subseteq S$  称为点  $x$  沿  $G$  的轨道 (orbit). 本节的主题是某个无穷维群在某个无穷维空间上作用的轨道.

**例子 6.1.** 取定对角阵

$$J = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & -1 \end{pmatrix},$$

考虑群

$$G = \{g \in M_{3 \times 3}(\mathbb{R}) \mid g^T J g = J\}, \quad (6.1)$$

即所有保持  $J$  不变的  $3 \times 3$  实矩阵构成的集合. 对于  $\mathbb{R}^3$  中的点

$$\mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix};$$

则  $\mathbf{x}_0$  沿群  $G$  的轨道是什么? 首先注意  $\mathbf{x}_0$  是双叶双曲面

$$\mathbf{x}^T J \mathbf{x} = x^2 - y^2 - z^2 = 1, \quad \text{其中 } \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad (6.2)$$

上的点. 另一方面, 由  $G$  的定义可知对任意  $g \in G$  成立

$$(g\mathbf{x}_0)^T J (g\mathbf{x}_0) = \mathbf{x}_0^T g^T J g \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_0^T J \mathbf{x}_0 = 1.$$

其实不难证明点  $\mathbf{x}_0$  的轨道  $G\mathbf{x}_0$  恰为双曲面(6.2) [见习题 6.1].

## 6.2 二次费米多项式的李代数 $\mathfrak{gl}(\infty)$

记  $W$  为费米子的有限线性组合之全体构成的空间. 费米子的基本性质表明, 任意  $w, w' \in W$ , 反交换子  $[w, w']_+$  为标量, 即  $\mathbb{C}$  中的元素. 直接计算两个二次费米多项式的交换子[注意这里不是反交换子],

$$\begin{aligned} [w_1 w_2, w_3 w_4] &= w_1 [w_2, w_3 w_4] + [w_1, w_3 w_4] w_2 \\ &= w_1 [w_2, w_3]_+ w_4 - w_1 w_3 [w_2, w_4]_+ \\ &\quad + [w_1, w_3]_+ w_4 w_2 - w_3 [w_1, w_4]_+ w_2. \end{aligned}$$

等号右边仍然是二次费米多项式. 从而我们得到, 二次费米多项式构成的子空间

$$W^{(2)} := \left\{ \sum_{i,j} w_i w_j \left| w_i \in W \right. \right\} \subseteq \mathcal{A}$$

关于交换子运算封闭, 从而构成李代数. 特别注意到,  $W^{(2)}$  包含  $\mathbb{C}$ , 这是因为包含反交换子  $[w, w']_+$ .

现在我们考虑  $W^{(2)}$  的由电荷量为 0 的元素构成的子代数. 这种元素可唯一地表示为

$$\sum_{m,n \in \mathbb{Z} + 1/2} a_{mn} \psi_{-m} \psi_n^* + a_0, \quad a_{mn}, a_0 \in \mathbb{C}. \quad (6.3)$$

重复刚才的计算, 对任意  $m, n \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}$ , 有

$$[\psi_{-m} \psi_n^*, \psi_{-m'} \psi_{n'}^*] = \delta_{nm'} \psi_{-m} \psi_{n'}^* - \delta_{n'm} \psi_{-m'} \psi_n^*. \quad (6.4)$$

我们把它与基本矩阵元

$$E_{mn} = (\delta_{im} \delta_{jn})_{i,j \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}}$$



来比较, 这里的  $E_{nm}$  为第  $(m, n)$  分量为 1 其余分量都为 0 的[无穷阶]矩阵. 矩阵乘法法则为  $E_{mn}E_{m'n'} = \delta_{nm'}E_{mn'}$ , 于是(6.4)表明  $\psi_{-m}\psi_n^*$  与基本矩阵元  $E_{mn}$  满足同样的交换关系.

我们想把(6.3)推广为无限求和, 就像(5.7)引入的算子  $H_n$  那样. 在第 5 节, 为处理这种无限求和, 必须引入正规积. 因此对于无限矩阵  $A = (a_{mn})_{m,n \in \mathbb{Z}+1/2}$ , 考虑带有正规积的费米子(6.3)

$$X_A = \sum_{m,n} a_{mn} : \psi_{-m}\psi_n^* : . \quad (6.5)$$

现在我们研究引入正规积(6.5)对交换关系的影响. 首先假设(6.5)是有限求和, 注意正规积  $: \psi_{-m}\psi_n^* :$  与  $\psi_{-m}\psi_n^*$  仅仅相差一个标量, 从而

$$\begin{aligned} [X_A, X_B] &= \sum a_{ij}b_{kl}[\psi_{-i}\psi_j^*, \psi_{-k}\psi_l^*] \\ &= \sum a_{ij}b_{kl}(\delta_{jk}\psi_{-i}\psi_l^* - \delta_{li}\psi_{-k}\psi_j^*) \\ &= \sum a_{ij}b_{jl}(: \psi_{-i}\psi_l^* : + \delta_{il}\theta(i < 0)) \\ &\quad - \sum b_{ki}a_{ij}(: \psi_{-k}\psi_j^* : + \delta_{kj}\theta(j < 0)) \\ &= X_{[A,B]} + \omega(A, B), \end{aligned} \quad (6.6)$$

其中

$$\omega(A, B) = \sum a_{ij}b_{ji}(\theta(i < 0) - \theta(j < 0)) = -\omega(B, A), \quad (6.7)$$

这里的  $\theta$  为(4.18)中的布尔特征函数. 换言之, 与矩阵交换子  $[A, B]$  相比, 多出了一个常数项  $\omega(A, B)$ . 现在我们要求无穷矩阵  $A = (a_{ij})$  满足如下有限性条件:

$$\exists N > 0, \forall |i - j| > N, \quad a_{ij} = 0. \quad (6.8)$$

如下图, 非零元素仅在带状区域.

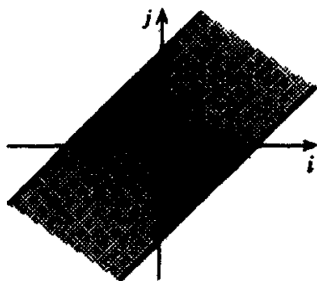


图: 有限性条件(6.8).

例如, (5.7)的算子  $H_n$  的相应矩阵为  $a_{ij} = \delta_{i+n,j}$ , 满足有限性条件(6.8). 若我们谈论的矩阵都默认满足该有限性条件, 则矩阵交换子以及(6.7)都只涉及有限求和. 与第 5 节的  $H_n$  一样, 对 Fock 空间中的任何向量  $|u\rangle$ , 若  $A$  满足(6.8), 则  $X_A |u\rangle$  也只涉及有限求和.

**定义 6.1.** 李代数  $\mathfrak{gl}(\infty)$  是指如下线性空间

$$\mathfrak{gl}(\infty) = \{X_A \mid A \text{ 满足(6.8)}\} \oplus \mathbb{C}, \quad (6.9)$$

配以交换子(6.6).

上述交换子  $[\cdot, \cdot]$  满足雅可比恒等式, 等价于(6.7)中的常值修正项  $\omega(A, B)$  满足如下的上闭链条件 (cocycle condition):

$$\omega(A, [B, C]) + \omega(B, [C, A]) + \omega(C, [A, B]) = 0. \quad (6.10)$$

[见习题 6.2].

同时, 我们有  $X_A \in \mathfrak{gl}(\infty)$  与费米子的交换关系:

$$[X_A, \psi_{-n}] = \sum_m a_{mn} \psi_{-m}, \quad [X_A, \psi_n^*] = \sum_m (-a_{nm}) \psi_m^* \quad (6.11)$$

[等号右边都是有限求和]. 从而线性变换  $[X_A, -]$  在  $\psi, \psi^*$  上的矩阵分别为  $A, -A^T$ , 于是容易证明对任意  $\langle u|, \langle u'|$  以及  $|v\rangle, |v'\rangle$  都成立

$$\begin{aligned} & \sum_{n \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}} (\langle u|X_A\psi_{-n}|v\rangle \langle u'|\psi_n^*|v'\rangle + \langle u|\psi_{-n}|v\rangle \langle u'|X_A\psi_n^*|v'\rangle) \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}} (\langle u|\psi_{-n}X_A|v\rangle \langle u'|\psi_n^*|v'\rangle + \langle u|\psi_{-n}|v\rangle \langle u'|\psi_n^*X_A|v'\rangle), \end{aligned} \quad (6.12)$$

我们在下一小节将会用到它.

注意  $\mathfrak{gl}(\infty)$  中的元素的电荷量为 0, 从而  $\mathfrak{gl}(\infty)$  在  $\mathcal{F}$  上的作用保持每个  $\mathcal{F}_l$  不变. 换言之, 每个  $\mathcal{F}_l$  都是李代数  $\mathfrak{gl}(\infty)$  的一个表示. 接下来我们用玻色-费米对应, 来得到  $\mathfrak{gl}(\infty)$  在多项式函数空间  $\mathbb{C}[\mathbf{x}]$  上的作用. 为此, 只需像定理 5.2 那样用母函数来表示, 考虑乘积  $\psi(p)\psi^*(q)$ . 注意等式

$$\Psi(p)\Psi^*(q) = E(p)E^*(q)e^K p^{H_0} e^{-K} q^{-H_0},$$

以及

$$e^{-\xi(\tilde{\partial}, p^{-1})} e^{-\xi(x, q)} = \frac{1}{1 - \frac{q}{p}} e^{-\xi(x, q)} e^{-\xi(\tilde{\partial}, p^{-1})},$$

再注意  $p^{H_0} e^{-K} = p^{-1} e^{-K} p^{H_0}$ , 从而我们得到如下表达式:

$$\Psi(p)\Psi^*(q) = \frac{1}{p - q} e^{\xi(x, p) - \xi(x, q)} e^{-\xi(\tilde{\partial}, p^{-1}) + \xi(\tilde{\partial}, q^{-1})} p^{H_0} q^{-H_0}.$$

特别地, 将它们限制在电荷量  $l = 0$  的子空间上, 则  $p^{H_0} q^{-H_0}$  在其上的作用为恒等, 从而可无视掉. 现在, 我们要牢记(5.3)与(5.2)式, 从而可将  $:\psi(p)\psi^*(q):$  用 KP 方程的顶点算子(3.17)表示出来:

$$Z(p, q) = \frac{1}{p - q} (X(p, q) - 1). \quad (6.13)$$

将结论总结如下:

**定理 6.2.** ( $\mathfrak{gl}(\infty)$  的顶点算子表示).

记玻色 *Fock* 空间  $\mathbb{C}[x_1, x_2, x_3, \dots]$  上的算子  $Z_{ij}$  的生成函数

$$Z(p, q) = \sum_{i, j \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}} Z_{ij} p^{-i - \frac{1}{2}} q^{-j - \frac{1}{2}}. \quad (6.14)$$

则

$$\sum_{m, n} a_{mn} : \psi_{-m} \psi_n^* : \mapsto \sum_{m, n} a_{mn} Z_{-m, n}$$

给出了李代数  $\mathfrak{gl}(\infty)$  在  $\mathbb{C}[x_1, x_2, x_3, \dots]$  上的一个表示.

## 6.3 KP 方程簇的变换群

现在我们慢慢来解释如何通过玻色-费米对应来统一地构造 KP 方程簇的双线性方程以及  $\tau$  函数.

我们定义与李代数  $\mathfrak{gl}(\infty)$  相应的群  $\mathbf{G}$  如下:

$$\mathbf{G} := \{e^{X_1} e^{X_2} \dots e^{X_k} \mid X_i \in \mathfrak{gl}(\infty)\}. \quad (6.15)$$

这里的  $e^{X_i}$  是否有意义, 其实需要仔细考察, 而我们暂时不去深究. 我们关心的对象是真空态沿群  $\mathbf{G}$  作用的轨道:

$$\mathbf{G}|\text{vac}\rangle = \{g|\text{vac}\rangle \mid g \in \mathbf{G}\}. \quad (6.16)$$

由玻色-费米对应, 可将轨道(6.16)上的点视为函数

$$\tau(\mathbf{x}) = \tau(\mathbf{x}; g) = \langle \text{vac} | e^{H(\mathbf{x})} g | \text{vac} \rangle. \quad (6.17)$$

这样的函数称为  $\tau$  函数. 此外, 对于  $g \in \mathbf{G}$ , 定义波函数 (wave function)  $w(\mathbf{x}, k)$  与对偶波函数 (dual wave function)  $w^*(\mathbf{x}, k)$  如下:

$$w(\mathbf{x}, k) = \frac{\langle 1 | e^{H(\mathbf{x})} \psi(k) g | \text{vac} \rangle}{\langle \text{vac} | e^{H(\mathbf{x})} g | \text{vac} \rangle}; \quad (6.18)$$

$$w^*(\mathbf{x}, k) = \frac{\langle -1 | \mathbf{e}^{H(\mathbf{x})} \psi^*(k) g | \text{vac} \rangle}{\langle \text{vac} | \mathbf{e}^{H(\mathbf{x})} g | \text{vac} \rangle}. \quad (6.19)$$

注意公式(5.19)以及(5.26)-(5.27), 可知这里定义的波函数和  $\tau$  函数之间的关系与第 3 节的(3.21)-(3.22)相同. 我们将从(6.17)-(6.19)出发, 再次推导出双线性恒等式.

**定理 6.3.** (双线性恒等式) 对任意  $\mathbf{x}, \mathbf{x}'$  都成立

$$\text{Res}_{k=\infty} \left( w^*(\mathbf{x}, k) w(\mathbf{x}', k) \right) = 0. \quad (6.20)$$

证明. 首先注意到对任意  $g \in \mathbf{G}$  都有

$$\sum_{n \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}} \langle u | g \psi_{-n} | v \rangle \langle u' | g \psi_n^* | v' \rangle = \sum_{n \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}} \langle u | \psi_{-n} g | v \rangle \langle u' | \psi_n^* g | v' \rangle.$$

这是因为, 首先当  $g = \mathbf{e}^{X_A}$  时, 考虑其无穷小生成元, 正是(6.11); 而对一般的  $g$ , 只需反复上述操作即可. 现在对任意  $n$ , 注意到  $\psi_{-n}$  与  $\psi_n^*$  当中必有湮灭子, 从而

$$\begin{aligned} & -\text{Res}_{k=\infty} \left( \langle u | \psi^*(k) g | \text{vac} \rangle \langle u' | \psi(k) g | \text{vac} \rangle \right) \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}} \langle u | \psi_n^* g | \text{vac} \rangle \langle u' | \psi_{-n} g | \text{vac} \rangle \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}} \langle u | g \psi_n^* | \text{vac} \rangle \langle u' | g \psi_{-n} | \text{vac} \rangle \\ &= 0. \end{aligned}$$

在上式中令  $\langle u | = \langle 1 | \mathbf{e}^{H(\mathbf{x})}$ ,  $\langle u' | = \langle -1 | \mathbf{e}^{H(\mathbf{x}')}$ , 即得证. □

**例子 6.2.** 我们来算一个  $KP$  方程的多项式解的例子. 设  $a, b$  为给定常数, 令  $X = a\psi_{-\frac{1}{2}}\psi_{-\frac{3}{2}}^* + b\psi_{-\frac{3}{2}}\psi_{-\frac{1}{2}}^*$ . 则群  $\mathbf{G}$  中相应的元素

$$g := \mathbf{e}^X = 1 + a\psi_{-\frac{1}{2}}\psi_{-\frac{3}{2}}^* + b\psi_{-\frac{3}{2}}\psi_{-\frac{1}{2}}^* + ab\psi_{-\frac{1}{2}}\psi_{-\frac{3}{2}}^*\psi_{-\frac{3}{2}}\psi_{-\frac{1}{2}}^*.$$

从而有

$$\begin{aligned}\langle \psi_{-\frac{1}{2}}(\mathbf{x})\psi_{-\frac{3}{2}}^*(\mathbf{x}) \rangle &= x_2 - \frac{1}{2}x_1^2, & \langle \psi_{-\frac{3}{2}}(\mathbf{x})\psi_{-\frac{1}{2}}^*(\mathbf{x}) \rangle &= x_2 + \frac{1}{2}x_1^2, \\ \langle \psi_{-\frac{1}{2}}(\mathbf{x})\psi_{-\frac{3}{2}}^*(\mathbf{x})\psi_{-\frac{3}{2}}(\mathbf{x})\psi_{-\frac{1}{2}}^*(\mathbf{x}) \rangle &= -x_1x_3 + x_2^2 + \frac{x_1^4}{12}\end{aligned}\tag{6.21}$$

[最后一个式子用 *Wick* 定理来计算]. 从而相应的  $\tau$  函数为

$$\tau(\mathbf{x}, g) = 1 + a \left( x_2 - \frac{1}{2}x_1^2 \right) + b \left( x_2 + \frac{1}{2}x_1^2 \right) + ab \left( -x_1x_3 + x_2^2 + \frac{x_1^4}{12} \right).$$

注意这里的  $a, b$  是任意选取的, 从而特别地, 当  $a, b \rightarrow \infty$  时, (6.21) 本身也是 *KP* 方程的解.

就像我们在第 3 节末尾的证明那样, 由(6.20)可知波函数  $w(\mathbf{x}, k)$  必满足一系列关于变量  $x_1, x_2, x_3, \dots$  的 *Lax* 方程. 此外我们已经知道, 由(3.20)的等价形式可以直接导出  $\tau$  函数所满足的一系列 *Hirota* 方程. 相反地, 其实我们也能证明 [见后文第 9 节], 满足双线性恒等式的函数  $\tau(\mathbf{x})$  一定形如(6.17) [即存在相应的  $g \in \mathbf{G}$ ]. 因此, 综上所述,  $\tau$  函数确实是  $|\text{vac}\rangle$  沿群  $\mathbf{G}$  的轨道, 并且无论将它写成 *Hirota* 双线性方程还是写成关于波函数的线性方程, *KP* 方程簇其实就是确定该轨道的方程. 总之, 我们有如下图景:

费米图景:  $\text{Fock 空间} \supseteq \mathbf{G}|\text{vac}\rangle$ ,

玻色图景:  $\mathbb{C}[x_1, x_2, x_3, \dots] \supseteq \{\tau \text{ 函数}\}.$

群  $\mathbf{G}$  在该轨道上有自然的作用. 在构造孤子解时, 突然引入的顶点算子(6.14)在费米子意义下其实是二次多项式, 该多项式作为李代数的生成元, 是群在轨道上作用的无穷小变换. 换言之, 顶点算子给出了 *KP* 方程簇的解[ $\tau$  函数]的无穷小变换.

习题.

1. 验证(6.1)定义了一个群. 在证明  $x_0$  沿该群的轨道恰为(6.2).
2. 对任意满足(6.8)的无穷矩阵  $A, B, C$ , 验证上闭链条件(6.10).
3. 证明(6.21)式, 并直接验证它满足 KP 方程(3.13).

## 7. KdV 方程的变换群

离开 KP 方程簇的抽象理论, 我们重新回到 KdV 方程簇的特殊情形. 后者的解空间更小, 相应的变换群也更小. 我们引入仿射李代数  $\widehat{\mathfrak{sl}_2}$ , 它扮演了 KdV 方程簇的无穷小变换.

### 7.1 KP 方程簇 v.s. KdV 方程簇

我们在第 2,3 节研究了 KP 与 KdV 方程簇. 在此, 我们从不同方面对比, 总结它们的性质. 它们都是非线性微分方程组, 并且作为如下线性微分方程组

$$\begin{cases} \frac{\partial w}{\partial x_n} = (L^n)_+ w \\ Lw = kw \end{cases}, \quad \text{其中 } L = \partial + f_1 \partial^{-1} + f_2 \partial^{-2} + \dots \quad (7.1)$$

的相容性条件而引入. 它们都能写成 Hirota 方程, 并且对任意  $n$  都有  $n$ -孤子解. 例如, 2-孤子解形如

$$\tau = 1 + c_1 e^{\xi_1} + c_2 e^{\xi_2} + c_1 c_2 a_{12} e^{\xi_1 + \xi_2}.$$

更多细节见下表.

	KP 方程簇	KdV 方程簇
时间变量	$x_1, x_2, x_3, \dots$	$x_1, x_3, x_5, \dots$
拟微分算子	$L = \partial + f_1 \partial^{-1} + f_2 \partial^{-2} + \dots$	$L = (\partial^2 + u)^{\frac{1}{2}}$
非线性方程	$\frac{3}{4} \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial x_3} - \frac{3}{2} u \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{4} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right),$	$\frac{\partial u}{\partial x_3} = \frac{3}{2} u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{4} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3},$
Hirota 方程	$(D_1^4 + 3D_2^2 - 4D_1 D_3) \tau \cdot \tau = 0,$	$(D_1^4 - 4D_1 D_3) \tau \cdot \tau = 0$
孤子解	$\xi_j = \sum_{n=1}^{\infty} (p_j^n - q_j^n) x_n$ $a_{ij} = \frac{(p_i - p_j)(q_i - q_j)}{(p_i - q_j)(q_i - p_j)}$	$\xi_j = 2 \sum_{n=1,3,5,\dots} p_j^n x_n$ $a_{ij} = \left( \frac{p_i - p_j}{p_i + p_j} \right)^2$

表 1: KP 方程簇 v.s. KdV 方程簇

KdV 方程簇是 KP 方程簇的特殊情形. 用拟微分算子的语言, KdV 相比 KP 的特殊之处在于  $L^2$  是微分算子. 此时, 由线性方程组(7.1)容易看出,  $w$  的幂级数展开式(3.23) 中的系数  $w_l$  不依赖于偶数指标的时间变量  $x_2, x_4, x_6, \dots$ . 再注意  $\tau$  函数由  $w_l$  通过关系式(3.21)所确定. 因此, KdV 方程簇的  $\tau$  函数恰为满足

$$\frac{\partial \tau}{\partial x_n} = 0, \quad n = 2, 4, 6, \dots \quad (7.2)$$

的 KP 方程簇的  $\tau$  函数. 例如, 若在 KP 方程簇的孤子解当中附加条件

$$q_j = -p_j, \quad (7.3)$$

则其中的  $x_2, x_4, x_6, \dots$  自动消失. 于是, 我们希望将 KdV 方程簇的解变成 KdV 方程簇的解的变换群是 KP 方程簇的相应变换群的子群. 现在我们研究它.



## 7.2 KdV 方程的变换群

对于孤子解满足的条件(7.3), 我们考虑顶点算子(6.14)中的参数  $p, q$ , 并要求它们满足  $p^2 = q^2$ , 于是  $q = \pm p$ , 相应地我们有

$$\begin{cases} Z(p, p) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} H_n p^{n-1} \\ Z(p, -p) = \frac{1}{2p} \left( \exp \left( \sum_{\substack{n>0 \\ n \text{ 为奇数}}} 2x_n p^n \right) \exp \left( - \sum_{\substack{n>0 \\ n \text{ 为奇数}}} \frac{2}{n} \frac{\partial}{\partial x_n} p^{-n} \right) - 1 \right) \end{cases} \quad (7.4)$$

前者恰为玻色子, 后者为第 3 节引入的 KdV 方程的顶点算子. 除了算子  $x_n$  ( $n$  为偶数), (7.4) 里的第一族算子都保持(7.2), 从而为 KdV 方程簇的无穷小变换. 看, 它们像什么李代数呢?

为将(7.4)用费米子重新表述, 我们从一般的二次费米多项式表达式的框架当中, 考虑如下的特殊类型:

$$: \psi(p) \psi^*(p) : \quad \text{以及} \quad : \psi(p) \psi^*(-p) : . \quad (7.5)$$

易知这等价于, 从一般的  $X_A = \sum a_{mn} : \psi_{-m} \psi_n^* :$  当中考虑关于变换

$$\psi_n \rightarrow \psi_{n-2}, \quad \psi_n^* \rightarrow \psi_{n+2}^*$$

不变的元素. 换言之, 这当且仅当  $A$  的矩阵元满足条件

$$a_{mn} = a_{m+2, n+2}, \quad \forall m, n. \quad (7.6)$$

显然, 满足条件(7.6)的无限矩阵  $A = (a_{mn})$  被其矩阵元  $a_{m, n}$ ,  $m = \pm \frac{1}{2}$ ,  $n \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}$  所唯一决定. 于是为方便起见, 可将  $A$  表示为关于变元  $t$  的 Laurent 多项式 [即关于  $t, t^{-1}$  的多项式]:

$$A(t) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \begin{pmatrix} a_{-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}+j} & a_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}+j} \\ a_{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}+j} & a_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}+j} \end{pmatrix} t^j.$$

于是, (6.7)可重写为以下表达式:

$$\omega(A, B) = \operatorname{Res}_{t=0} \left( \operatorname{tr} \left( \frac{dA}{dt}(t) B(t) \right) \right). \quad (7.7)$$

[见习题 7.1]. 这样得到的李代数有如下名称:

**定义 7.1.** (仿射李代数  $\widehat{\mathfrak{sl}}_2$ ). 考虑矩阵元为关于  $t$  的 *Laurent* 多项式的  $2 \times 2$  矩阵与未定元  $c$  张成的空间

$$\widehat{\mathfrak{sl}}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha(t) & \beta(t) \\ \gamma(t) & -\alpha(t) \end{pmatrix} \mid \alpha(t), \beta(t), \gamma(t) \in \mathbb{C}[t, t^{-1}] \right\} \oplus \mathbb{C}c.$$

它具有李代数结构, 其交换子为

$$\begin{aligned} [A(t), B(t)] &= [A(t), B(t)]_{\text{mat}} + \operatorname{Res}_{t=0} \left( \operatorname{tr} \left( \frac{dA}{dt}(t) B(t) \right) \right), \\ [c, X \otimes A(t)] &= 0, \quad \forall X. \end{aligned}$$

换言之,  $c$  与其中所有元素都交换. 这里的  $[-, -]_{\text{mat}}$  为通常的矩阵交换子. 称该李代数为 **仿射李代数** (*affine Lie algebra*)  $\widehat{\mathfrak{sl}}_2$ .

我们总结以下到目前为止的故事. 记  $\mathcal{B}^{(2)}$  为海森堡代数的由  $x_n, \frac{\partial}{\partial x_n}$ ,  $n = 1, 3, 5, \dots$  生成的子代数. 则  $\mathcal{B}^{(2)}$  在真空态  $1 \in \mathbb{C}[\mathbf{x}]$  作用的轨道为玻色 Fock 空间的子空间

$$\mathbb{C}[x_1, x_3, x_5, \dots].$$

顶点算子(7.4)作用在这个空间上. 于是  $\mathcal{B}^{(2)}$  与算子(7.4)给出了仿射李代数  $\widehat{\mathfrak{sl}}_2$  的一个表示. 这里我们令中心元  $c$  的作用为 1. 一般地, 若  $c$  的作用为标量  $k$ , 则称相应的表示的**层级 (level)** 为  $k$ . 保持 KdV 方程的解

的无穷小变换对应于仿射李代数  $\widehat{\mathfrak{sl}}_2$  的 (层级为 1 的) 表示. 真空态沿着  $\widehat{\mathfrak{sl}}_2$  的轨道, 即  $\tau$ -函数, 为[Hirota 型的] KdV 方程的解空间.

**注记 7.2.** 除了本节的约化方式, 一般地, 取定任意自然数  $l$ , 令  $p^l = q^l$ . 这个条件给出了一族不一样的孤子方程. 相应的无穷小变换称为  $\widehat{\mathfrak{sl}}_l$ , 也具有李代数结构. 仿射李代数是一类容易处理的无穷维李代数, 并且具有广泛应用.

习题.

1. 验证(7.7)式.

## 8. 有限维格拉斯曼簇与 Plücker 关系

我们将目光转向格拉斯曼簇 (Grassmann variety) 这个射影几何学中经典概念; 而所谓 Plücker 关系 将其与本书内容联系起来. 作为下一章的铺垫, 本章将介绍有限维向量空间中的 Plücker 关系.

### 8.1 有限维格拉斯曼簇

我们现在所介绍的内容来自射影几何学, 也可以看作性代数的补充材料. 以这种方式开始我们的叙述在现代读者看来并不是不合适的, 尽管它可能在 19 世纪激起了相当大的观念阻力. 其中一个与我们要解释的内容密切相关的领域可以用线几何 (line geometry) 这样的词来描述. 这曾是 19 世纪数学研究领域的一部分, 并且与我们当前的兴趣方向有诸多联系.

取定一个  $N$  维向量空间  $V$ , 以及整数  $m$  使得  $0 \leq m \leq N$ . 我们把  $V$  的所有  $m$  维子空间构成的集合记作  $\text{Grass}(m, V)$  或者  $\text{Grass}(m, N)$ .

这样的集合有很多种, 它们与  $V, N$  以及  $m$  的选取有关, 我们把它们统称为 **格拉斯曼簇** (Grassmann variety).

当  $m = 0$  时, 向量空间  $V$  的 0 维子空间只有  $\{0\}$ , 从而  $\text{Grass}(0, V)$  只含有一个点  $\{0\}$ . 接下来的例子是  $m = 1$  的情况,  $\text{Grass}(1, V)$  为  $V$  的所有 1 维子空间构成的集合. 换言之,  $\text{Grass}(1, V)$  中的元素由非零向量  $v \in V$  所确定, 并且向量  $v, v'$  确定了  $\text{Grass}(1, V)$  中的同一个元素当且仅当它们线性相关, 即其中一个是另一个的常数倍.  $\text{Grass}(1, V)$  通常被称为**复射影空间** (complex projective space), 记作  $\mathbb{P}(V)$  或  $\mathbb{P}_{N-1}(\mathbb{C})$  [注意我们这里的向量空间都默认是复数域  $\mathbb{C}$  上的].

特别地, 我们看  $N = 2$  的情况. 此时  $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$  是一维的, 称为**复射影直线** (complex projective line).  $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$  中的点可由向量  $v = (v_1, v_2)$  来描述, 其中  $v_1, v_2 \in \mathbb{C}$ . 满足  $v_2 = 0$  的向量对应了  $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$  中的点: 满足  $v_2 = 0$  的向量有很多, 这些向量构成一条直线, 但由射影空间的定义, 所有这些向量所确定的都是  $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$  中的同一个点, 这个点称为  $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$  的**无穷远点**. 而对于满足  $v_2 \neq 0$  的向量  $v$ , 考虑复数  $v_1/v_2$ . 这给出了挖掉无穷远点的  $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$  与复平面之间的一一对应. 而注意到二维球面挖去一个点之后会得到平面 [把球面想象成由橡胶制成的, 见习题 8.1].

尽管上述讨论相当粗略, 我们还是从中看到,  $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$  可被视为二维球面. 而更精细的论证可以说明  $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$  同胚于二维球面, 甚至是作为复流形的全纯同构. 同样的方法可以看到,  $\mathbb{P}_{N-1}(\mathbb{C})$  当中包含着一个  $\mathbb{C}^{N-1}$ , 但是  $\mathbb{P}_{N-1}(\mathbb{C}) \setminus \mathbb{C}^{N-1}$  当中不止有一个点.

射影空间  $\mathbb{P}(V)$ , 以及更一般的格拉斯曼簇  $\text{Grass}(m, V)$ , 具有**代数簇** (algebraic variety) 的结构. 我们在这里引用一些别的资料来解释什么是代数簇 [例如, I.R. Shafarevich, *Basic algebraic geometry*, Springer. 的第一章], 但是为了掌握一些观点, 我们在这里计算格拉斯曼簇的维数. 代数簇的维数大致是指确定簇上的一个点所需要的连续参数的个数; 你可以类比向量空间的情形得到大致的认识, 或者记住几个基本例

子, 例如球面, 来说服自己相信 [尽管这里的维数都是关于  $\mathbb{C}$  的维数]. 对于射影空间, 我们用非零向量来确定  $\mathbb{P}(V)$  中的点, 其中相差常数的两个非零向量被认为是相同的; 因此  $\mathbb{P}(V)$  的维数是  $N - 1$ .

而对于取一般值的  $m$ , 我们如下考虑: 取  $V$  的一组基, 即  $N$  个线性无关的向量  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_N$ . 在这组基下, 我们把  $V$  中的元素等同于  $N$  维行向量. 而  $m$  维子空间  $W \subseteq V$  由  $m$  个线性无关的向量  $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_m$  所张成. 记

$$\mathbf{w}_i = \sum_{j=1}^N v_{ij} \mathbf{v}_j. \quad (8.1)$$

换言之, 我们可用秩为  $m$  的  $m \times N$  矩阵  $M = (v_{ij})$  来表示  $m$  维子空间  $W \subseteq V$ . 矩阵  $M = M_W$  称为子空间  $W$  的**标架 (frame)**. 然而用标架来表示子空间的方式有些冗余. 两个标架  $M_1, M_2$  所表示的子空间是同一个, 当且仅当其中一个由另一个经过初等行变换得到, 即存在  $g \in \mathrm{GL}(m, \mathbb{C})$  使得  $M_2 = gM_1$ . 我们现在仅仅是想计算  $\mathrm{Grass}(m, V)$  的维数, 从而我们不妨适当调整这组基的顺序, 并假设标架  $M$  形如

$$\begin{pmatrix} 1 & & * & \cdots & * \\ & 1 & * & \cdots & * \\ & & \ddots & & \vdots \\ & & & 1 & * & \cdots & * \end{pmatrix},$$

右半部分的  $m(N - m)$  个星号可以自由选取. 这表明  $\mathrm{Grass}(m, V)$  的维数是  $m(N - m)$ .

还可以从另一个角度来看它. 给定子空间  $W$  的一组基, 并将这组基扩充为  $V$  的一组基.  $V$  的基的选取的自由度被  $\mathrm{GL}(N, \mathbb{C})$  所描述. 然而, 考虑保持子空间  $W$  不变[作为集合不变]的矩阵构成的集合, 该集合

由形如下述的分块上三角阵构成:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D} \end{pmatrix},$$

其中  $\mathbf{A}$  的尺寸是  $m \times m$ ,  $\mathbf{D}$  的尺寸是  $(N - m) \times (N - m)$ . [这样的矩阵之全体构成了  $\mathrm{GL}(N, \mathbb{C})$  的一个子群, 称为抛物子群 (parabolic subgroup)]. 这表明  $\mathrm{Grass}(m, V)$  具有

$$N^2 - m^2 - (N - m)^2 - m(N - m) = m(N - m)$$

个自由度, 换言之, 维数为  $m(N - m)$ .

除了射影空间本身, 最简单的格拉斯曼簇是  $N = 4, m = 2$  的情况. 格拉斯曼簇  $\mathrm{Grass}(2, 4)$  可以嵌入到射影空间  $\mathbb{P}_5(\mathbb{C})$  中, 这个现象被 Plücker 发现, 之后被 Klein 等人深入研究 [见例子 8.1].

## 8.2 Plücker 坐标

上一小节说过, 格拉斯曼簇  $\mathrm{Grass}(m, V)$  具有代数簇结构. 这个论断大致是指,  $\mathrm{Grass}(m, V)$  上的点的“坐标”是某个代数方程组的解, 并且那个代数方程组的所有解都是  $\mathrm{Grass}(m, V)$  上的点. 例如, 在此意义下, 通常的圆周是代数簇: 记  $(x, y)$  为通常平面上的点的坐标, 则圆周是指坐标满足方程

$$x^2 + y^2 - r^2 = 0, \quad \text{其中 } r > 0 \text{ 为某给定常数}$$

的点的全体.

这里要强调一点: 若我们要谈论上述意义下的代数簇, 那首先要说明这个代数簇所在的“外部空间”是什么, 以及这个代数簇是如何存在于外部空间当中; 而这可以有很多种可能性. 例如当我们考虑圆时, 可

能有许多情况下我们并不真正关心它到底包含在什么空间中. 我们不去深入讨论这个, 但我们需要去考虑格拉斯曼簇所在的空间.

先从  $m = 1$  说起. 前面说过,  $\text{Grass}(1, V) = \mathbb{P}(V)$  当中的点其实是  $V$  的一维子空间, 该子空间有非零向量  $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_N) \in V$  所张成. 取向量  $\mathbf{v} \in V$  的分量作为  $\mathbb{P}(V)$  的点的坐标; 这样的坐标称为  $\mathbb{P}(V)$  的 **齐次坐标** (homogeneous coordinate). 这样的坐标必须满足所有分量不全为零的条件:

$$(v_1, \dots, v_N) \neq (0, \dots, 0).$$

齐次坐标并非与  $\mathbb{P}(V)$  中的点一一对应: 事实上, 两个齐次坐标  $(v_1, \dots, v_N)$  与  $(v'_1, \dots, v'_N)$  所描述的是  $\mathbb{P}(V)$  中的同一个点, 当且仅当存在非零常数  $c$ , 使得  $v'_i = cv_i, i = 1, \dots, N$ . 于是我们打算  $\mathbb{P}(V)$  本身视为由这种齐次坐标所描述的点构成的空间.

对于一般的  $m$ , 我们通常把格拉斯曼簇  $\text{Grass}(m, V)$  所在的空间选取为某个维数充分高的射影空间. 现在我们来说明如何去实现它. 格拉斯曼簇  $\text{Grass}(m, V)$  上的每一个点  $W \in \text{Grass}(m, V)$  都是  $V$  的一个  $m$  维子空间  $W \subseteq V$ , 它也对应于  $m \times N$  的标架矩阵  $M = (v_{ij})$ . 考虑  $M$  的所有的  $m$  阶子式

$$v_\alpha = \det(v_{i, \alpha_j})_{1 \leq i, j \leq m},$$

其中  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$  满足  $1 \leq \alpha_1 < \dots < \alpha_m \leq N$ ; 我们将这  $\binom{N}{m}$  个子式依次写出. 若对  $M$  作基变换, 即左乘某个  $m \times m$  可逆矩阵  $h \in \text{GL}(m, \mathbb{C})$ , 则这个操作对相应  $v_\alpha$  的影响是将所有的  $v_\alpha$  同时乘以  $\det h$  [见习题 8.2].

而  $M$  的  $m \times m$  子式一共有  $\binom{N}{m}$  种, 从而我们自然将  $v_\alpha$  视为  $\binom{N}{m} - 1$  维射影空间的齐次坐标. 也容易看出, 两个不同的  $W, W' \in \text{Grass}(m, V)$  对应于不同的齐次坐标  $(v_\alpha), (v'_\alpha)$ . 齐次坐标  $(v_\alpha)$  称为点  $W \in \text{Grass}(m, V)$  的 **Plücker 坐标** (Plücker coordinate).

我们还可以从另一种角度来理解 **Plücker** 坐标: 假定读者熟悉向量空间的张量积; 如有必要, 可参考合适的教材 [例如 S. Lang, *Algebra*, second edition, Addison-Wesley, 1984, 第十六章]. 考虑  $V$  的  $m$  次外积空间  $\bigwedge^m V$ . 则向量  $w_1, \dots, w_m \in V$  线性无关的一个充要条件是  $w_1 \wedge \dots \wedge w_m \neq 0 \in \bigwedge^m V$ . 对于  $m$  维子空间  $W \subseteq V$ , 取  $W$  的一组基  $w_1, \dots, w_m$ . 则由刚才所述, 可知  $w_1 \wedge \dots \wedge w_m \neq 0$ , 这样,  $W$  就对应了  $\bigwedge^m V$  中的一个非零向量. 但这个非零向量与  $W$  的基的选取有关. 设  $w'_1, \dots, w'_m$  为  $W$  的另一组基, 记  $h$  为基变换的矩阵:

$$w'_i = \sum_{j=1}^m h_{ji} w_j;$$

则有

$$w'_1 \wedge \dots \wedge w'_m = \det(h) w_1 \wedge \dots \wedge w_m,$$

[见习题 8.2]. 因此对  $W$  的基的不同选取, 仅会导致相应的向量相差常数倍. 从而可见, 这给出了一个良定的映射  $\text{Grass}(m, V) \rightarrow \mathbb{P}(\bigwedge^m V)$ , 该映射称为 **Plücker 嵌入** (Plücker embedding). **Plücker** 坐标与(8.1)之间的关系为

$$w_1 \wedge \dots \wedge w_m = \sum_{\alpha_1 < \dots < \alpha_m} v_{\alpha_1, \dots, \alpha_m} v_{\alpha_1} \wedge \dots \wedge v_{\alpha_m}.$$

这里坚持要求 **Plücker** 坐标  $v_{\alpha_1, \dots, \alpha_m}$  的指标  $\alpha_1, \dots, \alpha_m$  按从小到大的顺序  $\alpha_1 < \dots < \alpha_m$  来排列在以后看来是不方便的. 更加自然的约定是把 **Plücker** 坐标视为关于指标反对称的. 在下文我们采取这个约定.

## 8.3 Plücker 关系

格拉斯曼簇  $\text{Grass}(m, V)$  上的点的 **Plücker** 坐标是关于下指标反对称的. 但是, 并不是随便取  $\binom{N}{m}$  个数, 加上关于指标的反对称条件, 都能对应于  $\text{Grass}(m, V)$  上的一点.



容易验证  $\text{Grass}(m, V)$  的点的 Plücker 坐标的各分量不满足任何线性关系 [见习题 8.4]. 然而, 这些分量满足如下的二次关系:

**定理 8.1. (Plücker 关系).** 设  $1 \leq \alpha_1, \dots, \alpha_{m-1} \leq N$  以及  $1 \leq \beta_1, \dots, \beta_{m+1} \leq N$  为两组指标, 并且每组指标里的任何两个数都不相同. 则成立如下关系:

$$\sum_{i=1}^{m+1} (-1)^{i-1} v_{\alpha_1, \dots, \alpha_{m-1}, \beta_i} v_{\beta_1, \dots, \beta_{i-1}, \beta_{i+1}, \dots, \beta_{m+1}} = 0. \quad (8.2)$$

上述关系也常写成如下等价形式: 对任意  $s$ ,

$$v_{\alpha_1, \dots, \alpha_m} v_{\beta_1, \dots, \beta_m} = \sum_{i=1}^m v_{\alpha_1, \dots, \alpha_{s-1}, \beta_i, \alpha_{s+1}, \dots, \alpha_m} v_{\beta_1, \dots, \beta_{i-1}, \alpha_s, \beta_{i+1}, \dots, \beta_m}. \quad (8.3)$$

对(8.2)式的下标重新命名, 容易整理得到上式.

证明. 将(8.2)的左边显式地写为

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^{m+1} (-1)^{i-1} \begin{vmatrix} v_{1\alpha_1} & \cdots & v_{1\alpha_{m-1}} & v_{1\beta_i} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ v_{m\alpha_1} & \cdots & v_{m\alpha_{m-1}} & v_{m\beta_i} \end{vmatrix} \\ & \times \begin{vmatrix} v_{1\beta_1} & \cdots & v_{1\beta_{i-1}} & v_{1\beta_{i+1}} & \cdots & v_{1\beta_{m+1}} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{m\beta_1} & \cdots & v_{m\beta_{i-1}} & v_{m\beta_{i+1}} & \cdots & v_{m\beta_{m+1}} \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

将上述每个求和项中的第一个行列式按最后一列展开, 则原式变为

$$\sum_{i=1}^{m+1} (-1)^{i-1} \sum_{j=1}^m (-1)^{m+j} v_{j\beta_j} \tilde{v}_j$$

$$\times \begin{vmatrix} v_{1\beta_1} & \cdots & v_{1\beta_{i-1}} & v_{1\beta_{i+1}} & \cdots & v_{1\beta_{m+1}} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{m\beta_1} & \cdots & v_{m\beta_{i-1}} & v_{m\beta_{i+1}} & \cdots & v_{m\beta_{m+1}} \end{vmatrix}.$$

其中我们令

$$\tilde{v}_j := \begin{vmatrix} v_{1\alpha_1} & \cdots & v_{1\alpha_{m-1}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{j-1,\alpha_1} & \cdots & v_{j-1,\alpha_{m-1}} \\ v_{j+1,\alpha_1} & \cdots & v_{j+1,\alpha_{m-1}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{m\alpha_1} & \cdots & v_{m\alpha_{m-1}} \end{vmatrix}.$$

之后合并整理得

$$\sum_{j=1}^m (-1)^j \tilde{v}_j \begin{vmatrix} v_{1\beta_1} & \cdots & v_{1\beta_{i-1}} & v_{1\beta_i} & v_{1\beta_{i+1}} & \cdots & v_{1\beta_{m+1}} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{m\beta_1} & \cdots & v_{m\beta_{i-1}} & v_{m\beta_i} & v_{m\beta_{i+1}} & \cdots & v_{m\beta_{m+1}} \\ v_{j\beta_1} & \cdots & v_{j\beta_{i-1}} & v_{j\beta_i} & v_{j\beta_{i+1}} & \cdots & v_{j\beta_{m+1}} \end{vmatrix}.$$

而上述每个行列式的最后一行都与之前某行相同, 因此为零. 证毕.  $\square$

上述关系也可用某个  $2m \times 2m$  行列式的拉普拉斯展开来证明 [见习题 8.5].

**例子 8.1.** 我们来具体写出  $N = 4, m = 2$  情形的 *Plücker* 关系. 正如之前所说, 这是除了射影空间之外最简单的格拉斯曼簇. 此时, 取线性无关的坐标

$$v_{12}, v_{13}, v_{14}, v_{23}, v_{24}, v_{34},$$

再令(8.2)中的指标集为  $\{1\}, \{2, 3, 4\}$ , 可得 *Plücker* 关系

$$v_{12}v_{34} - v_{13}v_{24} + v_{14}v_{23} = 0.$$

事实上, 定理8.1的如下逆定理也成立:

**定理 8.2.** 对于一组不全为零的常数  $(v_{\alpha_1, \dots, \alpha_m})$ , 若它们关于下指标反对称, 并且满足 *Plücker* 关系(8.2), 则它是格拉斯曼簇  $\text{Grass}(m, V)$  的某点 [即  $V$  的  $m$  维子空间] 的 *Plücker* 坐标.

证明. 注意  $(v_{\alpha_1, \dots, \alpha_m})$  为非零向量, 从而不妨  $v_{1\dots m} \neq 0$  [否则重新命名下标]. 可以相差常数倍, 进而不妨

$$v_{1\dots m} = 1,$$

在后面我们一直这么假定. 令

$$w_{ij} := v_{1\dots i-1, j, i+1\dots m}, \quad i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, N.$$

则易知

$$w_{ij} = \delta_{ij}, \quad \forall j \leq m. \quad (8.4)$$

于是这定义了  $m$  个行向量  $\mathbf{w}_i = (w_{i1}, \dots, w_{iN}), i = 1, \dots, m$ , 这  $m$  个向量张成的  $V$  的子空间  $W$  的维数是  $m$ . 此外, 再令

$$w_{\alpha_1, \dots, \alpha_m} = \begin{vmatrix} w_{1\alpha_1} & \cdots & w_{1\alpha_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ w_{m\alpha_1} & \cdots & w_{m\alpha_m} \end{vmatrix}.$$

则我们只需证明如下:

$$w_{\alpha_1, \dots, \alpha_m} = v_{\alpha_1, \dots, \alpha_m}, \quad \forall \alpha_1, \dots, \alpha_m. \quad (8.5)$$

取定一组两两互异的指标  $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ . 记  $\gamma_1, \dots, \gamma_s$  为  $\alpha_1, \dots, \alpha_m$  之中  $> m$  的那些指标, 再记  $\beta_1, \dots, \beta_s$  为  $\{1, \dots, m\} \setminus \{\alpha_1, \dots, \alpha_m\}$  中的全部指标. 我们把  $\alpha_1, \dots, \alpha_m$  按如下顺序排列:

$$1, \dots, \beta_1 - 1, \gamma_1, \beta_1 + 1, \dots, \beta_s - 1, \gamma_s, \beta_s + 1, \dots, m.$$

注意(8.4), 从而若我们把  $m \times m$  的行列式  $w_{\alpha_1, \dots, \alpha_m}$  按不包含  $\gamma_i$  的前  $m - s$  列展开, 则得到

$$w_{\alpha_1, \dots, \alpha_m} = \begin{vmatrix} w_{\beta_1 \gamma_1} & \cdots & w_{\beta_1 \gamma_s} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ w_{\beta_s \gamma_1} & \cdots & w_{\beta_s \gamma_s} \end{vmatrix}.$$

我们对  $s$  归纳, 来证明(8.5)式. 当  $s = 0, 1$  时显然成立. 给定  $t > 1$ , 现在假定(8.5)对所有  $s < t$  都成立. 由 Plücker 关系(8.3)可得

$$v_{\alpha_1, \dots, \alpha_m} v_{1, \dots, m} = \sum_{i=1}^m v_{\alpha_1, \dots, \alpha_{r-1}, i, \alpha_{r+1}, \dots, \alpha_m} v_{1, \dots, i-1, \alpha_r, i+1, \dots, m}.$$

上式的  $r$  可以任意选取. 这里我们取  $r$ , 使得  $\alpha_r = \gamma_t$ . 于是, 对于  $i \neq \beta_1, \dots, \beta_t$ , 成立

$$v_{\alpha_1, \dots, \alpha_{r-1}, i, \alpha_{r+1}, \dots, \alpha_m} = 0.$$

于是, 上述从 1 到  $m$  的求和实际上是对  $\beta_1, \dots, \beta_t$  求和. 当  $i = \beta_j$  时, 在  $v_{\alpha_1, \dots, \alpha_{r-1}, \beta_j, \alpha_{r+1}, \dots, \alpha_m}$  的下标当中, 大于  $m$  的有  $t - 1$  个, 因此由归纳假设可知

$$\begin{aligned} & v_{\alpha_1, \dots, \alpha_{r-1}, \beta_j, \alpha_{r+1}, \dots, \alpha_m} \\ = & \begin{vmatrix} w_{1\alpha_1} & \cdots & w_{1\alpha_{r-1}} & w_{1\beta_j} & w_{1\alpha_{r+1}} & \cdots & w_{1\alpha_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ w_{m\alpha_1} & \cdots & w_{m\alpha_{r-1}} & w_{m\beta_j} & w_{m\alpha_{r+1}} & \cdots & w_{m\alpha_m} \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

反复上述过程, 可将该行列式改写为

$$v_{\alpha_1, \dots, \alpha_{r-1}, \beta_j, \alpha_{r+1}, \dots, \alpha_m} = \begin{vmatrix} v_{\beta_1 \gamma_1} & \cdots & v_{\beta_1 \gamma_{t-1}} & v_{\beta_1 \beta_j} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ v_{\beta_{j-1} \gamma_1} & \cdots & v_{\beta_{j-1} \gamma_{t-1}} & v_{\beta_{j-1} \beta_j} \\ v_{\beta_j \gamma_1} & \cdots & v_{\beta_j \gamma_{t-1}} & v_{\beta_j \beta_j} \\ v_{\beta_{j+1} \gamma_1} & \cdots & v_{\beta_{j+1} \gamma_{t-1}} & v_{\beta_{j+1} \beta_j} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ v_{\beta_t \gamma_1} & \cdots & v_{\beta_t \gamma_{t-1}} & v_{\beta_t \beta_j} \end{vmatrix}.$$

将上式按最后一列展开, 注意  $w_{\beta_k \beta_l} = \delta_{kl}$ , 从而得到

$$v_{\alpha_1, \dots, \alpha_{r-1}, \beta_j, \alpha_{r+1}, \dots, \alpha_m} = (-1)^{t+j} \begin{vmatrix} w_{\beta_1 \gamma_1} & \cdots & w_{\beta_1 \gamma_{t-1}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ w_{\beta_{j-1} \gamma_1} & \cdots & w_{\beta_{j-1} \gamma_{t-1}} \\ w_{\beta_{j+1} \gamma_1} & \cdots & w_{\beta_{j+1} \gamma_{t-1}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ w_{\beta_t \gamma_1} & \cdots & w_{\beta_t \gamma_{t-1}} \end{vmatrix}.$$

之后注意  $v_{1, \dots, m} = 1$ , 以及  $i = \beta_j, \alpha_r = \gamma_t$ , 从而利用等式  $v_{1, \dots, i-1, \gamma_t, i+1, \dots, m} = w_{\beta_j \gamma_t}$  可将 Plücker 关系(8.3)化为

$$v_{\alpha_1, \dots, \alpha_m} = \sum_{j=1}^t (-1)^{t+j} w_{\beta_j \gamma_t} \begin{vmatrix} w_{\beta_1 \gamma_1} & \cdots & w_{\beta_1 \gamma_{t-1}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ w_{\beta_{j-1} \gamma_1} & \cdots & w_{\beta_{j-1} \gamma_{t-1}} \\ w_{\beta_{j+1} \gamma_1} & \cdots & w_{\beta_{j+1} \gamma_{t-1}} \\ w_{\beta_t \gamma_1} & \cdots & w_{\beta_t \gamma_{t-1}} \end{vmatrix}.$$

合并整理得

$$v_{\alpha_1, \dots, \alpha_m} = \begin{vmatrix} w_{\beta_1 \gamma_1} & \cdots & w_{\beta_1 \gamma_{t-1}} & w_{\beta_1 \gamma_t} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ w_{\beta_t \gamma_1} & \cdots & w_{\beta_t \gamma_{t-1}} & w_{\beta_t \gamma_t} \end{vmatrix},$$

从而定理得证. □

还可以证明这些二次关系是定义格拉斯曼簇的所有关系, 换言之, 任何高次的关系都可用这些二次的 **Plücker** 关系来表示.

习题.

1. 构造挖掉一个点的二维球面与平面的一一对应.
2. 设  $W$  是  $V$  的  $m$  维子空间,  $M$  为  $W$  的一个标架. 证明: 对于  $h \in \mathrm{GL}(m, \mathbb{C})$ , 由  $hM$  所定义的 **Plücker** 坐标是由  $M$  所定义的 **Plücker** 坐标的  $\det h$  倍.
3. 证明:  $\mathrm{Grass}(m, V)$  的不同的点具有不同的 **Plücker** 坐标.
4. 证明: **Plücker** 坐标不满足任何线性关系.
5. 用行列式的拉普拉斯展开公式给出 **Plücker** 关系的另一个证明.

## 9. 无穷维格拉斯曼簇

我们在第6节说明了如何将 **Fock** 空间当中 **KP** 方程的所有  $\tau$ -函数之全体视为真空态沿某个群作用的轨道. 本节我们说明该轨道其实是格拉斯曼簇, 并进一步考虑描述它的方程—双线性恒等式. 为此, 我们来了解克利福德群与特征多项式.

## 9.1 有限维 Fock 空间的情形

上一节我们定义了有限维格拉斯曼簇, 并介绍了它的 Plücker 坐标和 Plücker 关系. 本节介绍 Fock 空间框架下的相应理论, 即考虑如何描述一个无穷维向量空间的所有给定维数的有限维向量空间构成的簇. 为了与上一节的内容相联系, 同时避免因处理无限维而带来的技术性困难, 我们先从有限维克利福德代数及其相应的有限维费米 Fock 空间开始.

取定正整数  $N$ . 在本节, 从现在起, 我们只考虑下标绝对值  $|i| < N$  的费米子. 设  $\psi_i, \psi_i^*$  为费米子, 满足典范交换关系(4.6), 记  $\mathcal{A}_N$  为它们生成的有限维克利福德代数. 分别记  $\psi_i, \psi_i^*$  张成的向量空间为  $V_N, V_N^*$ , 即

$$V_N := \bigoplus_{|i| < N} \mathbb{C}\psi_i, \quad V_N^* := \bigoplus_{|i| < N} \mathbb{C}\psi_i^*.$$

再记

$$W_N := V_N \oplus V_N^*.$$

设  $\mathcal{F}_N$  为用第4章类似方式定义的有限维费米 Fock 空间. 真空态, 电荷量和能量也类似定义.

对于  $\mathcal{A}_N$  中的可逆元  $g$ , 定义线性变换  $T_g$  为

$$T_g(a) = gag^{-1}, \quad \forall a \in \mathcal{A}_N.$$

[注意  $\mathcal{A}_N$  当中确实含有不可逆元, 比如  $\psi_{1/2}$ ]. 显然  $T_g$  为  $\mathcal{A}_N$  的自同构, 并满足

$$T_{gg'} = T_g T_{g'}, \quad T_{g^{-1}} = T_g^{-1}, \quad \text{以及 } T_c = 1, \forall c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}. \quad (9.1)$$

正是因此, 集合

$$G(W_N) := \{g \in \mathcal{A}_N \mid g^{-1} \text{ 存在, 并且 } \forall w \in W_N, T_g(w) \in W_N\}$$

构成一个群, 称为克利福德群 (Clifford group).

对于  $w, w' \in W_N$ , 反交换子给出的映射  $\langle w, w' \rangle := [w, w']_+ \in \mathbb{C}$  是  $W_N$  上的非退化对称双线性型. 记

$$\mathbf{O}(W_N) := \{T \in \mathbf{GL}(W_N) \mid \langle Tw, Tw' \rangle = \langle w, w' \rangle, \forall w, w' \in W_N\}$$

为关于  $\langle -, - \rangle$  的正交群. 由克利福德群的定义可知, 若  $g \in G(W_N)$  则  $T_g \in \mathbf{O}(W_N)$ . 事实上有如下结论:

### 定理 9.1.

1. 对任意  $T \in \mathbf{O}(W_N)$ , 都存在  $g \in G(W_N)$  使得  $T = T_g$ .
2.  $T_g = T_{g'}$  当且仅当存在  $c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  使得  $g = cg'$ .

断言 (1) 可由  $\mathbf{O}(W_N)$  有反射生成这个事实来说明, 这里细节从略. 由(9.1), 为证明 (2), 只需考虑  $g' = 1$  的情形. 而  $T_g = 1$  表明  $g$  与  $\mathcal{A}_N$  中的所有元素交换, 即  $g$  是  $\mathcal{A}_N$  的中心. 而众所周知  $\mathcal{A}_N$  的中心是  $\mathbb{C}$  [见习题 9.1].

我们不加证明地给出一个公式, 这个公式表明如何从已知的  $T_g \in \mathbf{O}(W_N)$  还原出  $g$  [证明细节见 Sato *et al.* (1978, 1979, 1980).] 方便起见我们记

$$w_i := \begin{cases} \psi_{i-1/2} & i = 1, \dots, N, \\ \psi_{i-N-1/2}^* & i = N+1, \dots, 2N \\ \psi_{2N+1/2-i}^* & i = 2N+1, \dots, 3N \\ \psi_{3N+1/2-i} & i = 3N+1, \dots, 4N. \end{cases}$$

还需要更多记号:

$$E_- := \begin{pmatrix} I_{2N} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_+ := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_{2N} \end{pmatrix}, \quad J := \begin{pmatrix} 0 & I_{2N} \\ I_{2N} & 0 \end{pmatrix},$$



其中  $I_{2N}$  为  $2N \times 2N$  的单位阵.

现在给定  $T \in \mathbf{O}(W_N)$ , 并假设  $E_+ + E_-T$  非退化. 则令

$$R := (R_{ij}) = (T - 1)(E_+ + E_-T)^{-1}J.$$

在此记号下, 可以证明

$$g := \langle g \rangle : \mathfrak{e}^\rho : , \quad \text{其中 } \rho := \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{4N} R_{ij} w_i w_j$$

是我们所求的元素; 即满足  $T = T_g$ . 这里的  $\langle g \rangle^2 := g^* g \det(E_+ + E_-T)$ , 其中  $*$  是克利福德共轭, 即  $\mathcal{A}_N$  上的满足  $w^* = -w$ ,  $w \in W$  的反对合 (anti-involution). [ $*$  是反对合, 是指对任意  $a, b \in \mathcal{A}_N$ ,  $(ab)^* = b^* a^*$ , 也就是说共轭运算  $*$  交换乘积的位置.] 对于  $g \in G(W)$ , 成立  $g^* g = gg^* \in \mathbb{C}$ . 而当矩阵  $E_+ + E_-T$  退化时也有类似公式, 这里从略.

我们定义克利福德群的子群  $\mathbf{G}_N$  如下:

$$\mathbf{G}_N := \{a \in \mathcal{A}_N \mid a \text{ 可逆, 且 } aV_N a^{-1} = V_N, aV_N^* a^{-1} = V_N^*\}. \quad (9.2)$$

现在我们给定如下两个可逆线性变换  $V_N \rightarrow V_N$  与  $V_N^* \rightarrow V_N^*$

$$\psi_i \mapsto \sum_j a_{ji} \psi_j, \quad \psi_{-i}^* \mapsto \sum_j b_{ij} \psi_{-j}^*, \quad \text{使得 } (b_{ij}) = (a_{ij})^{-1}. \quad (9.3)$$

回忆  $W_N$  上的双线性型  $\langle -, - \rangle$  的定义, 可知上述两个线性变换一起定义了  $W_N$  上的一个正交变换.

对于  $|u\rangle \in \mathcal{F}_N$ , 我们记

$$V_N(|u\rangle) := \{v \in V_N \mid v|u\rangle = 0\}.$$

这是  $V_N$  的子空间. 例如,

$$V_N(|\text{vac}\rangle) = \bigoplus_{0 < i < N} \mathbb{C} \psi_i;$$

更一般地若  $|u\rangle = \psi_{m_1} \cdots \psi_{m_r} \psi_{n_1}^* \cdots \psi_{n_r}^* |\text{vac}\rangle$ , 其中  $m_1 < \cdots < m_r < 0$ ,  $n_1 < \cdots < n_r < 0$ , 则

$$V_N(|u\rangle) = \left( \bigoplus_{\substack{0 < i < N \\ i \neq -n_1, \dots, -n_r}} \mathbb{C} \psi_i \right) \oplus \mathbb{C} \psi_{m_1} \oplus \cdots \oplus \mathbb{C} \psi_{m_r}.$$

这个空间的维数是  $N$ , 是  $V_N$  的维数的一半.

然而, 比如说, 若  $|u\rangle = (\psi_{-1/2} \psi_{-1/2}^* + \psi_{-3/2} \psi_{-3/2}^*) |\text{vac}\rangle$ , 则

$$V_N(|u\rangle) = \bigoplus_{5/2 \leq i \leq N} \mathbb{C} \psi_i.$$

它的维数是  $N - 2$ , 相比之前那个例子当中的维数少了些. 更一般地, 若  $|u\rangle$  的电荷量为 0, 则  $\dim V_N(|u\rangle) \leq N$  [见习题 9.2].

接下来我们考虑  $|u\rangle = g |\text{vac}\rangle$ ,  $g \in \mathbf{G}_N$  的情形.

**引理 9.2.** 对任意  $g, g' \in \mathbf{G}_N$ , 成立

$$V_N(g |\text{vac}\rangle) = V_N(g' |\text{vac}\rangle) \Leftrightarrow \exists c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, g = cg'. \quad (9.4)$$

证明. 设  $g \in \mathbf{G}_N$ . 对于  $u \in V_N(g |\text{vac}\rangle)$ , 则  $ug |\text{vac}\rangle = 0$ . 再注意到  $ug = gT_{g^{-1}}(u)$ , 从而可知

$$V_N(g |\text{vac}\rangle) = T_g(V_N(|\text{vac}\rangle)). \quad (9.5)$$

[其实可以把上式的  $|\text{vac}\rangle$  换成任何  $|v\rangle \in \mathcal{F}_N$ ]. 因此, 只需证明(9.4)中  $g' = 1$  的情形. 设  $g \in \mathbf{G}_N$  满足

$$V_N(g |\text{vac}\rangle) = V_N(|\text{vac}\rangle).$$

则  $\psi_i g |\text{vac}\rangle = 0, \forall i > 0$ . 正如之前提到, 用(9.2)和(9.3)可知  $\mathbf{G}_N \cong \text{GL}(V_N)$ , 从而可知  $\psi_i^* g |\text{vac}\rangle = 0, \forall i > 0$  也成立. 由真空态的性质可知  $g |\text{vac}\rangle$  必须是  $|\text{vac}\rangle$  的常数倍.  $\square$

于是,  $V_N$  的可逆线性变换群  $\text{GL}(V_N)$  的作用将  $V_N(|\text{vac}\rangle)$  变成另一个  $N$  维子空间; 反之,  $V_N$  的每个  $N$  维子空间都是  $V_N(|\text{vac}\rangle)$  在  $\text{GL}(V_N)$  的某个元素下的像. 从而可见真空态的轨道  $\mathbf{G}_N |\text{vac}\rangle$  可被自然等同于  $V_N$  的所有  $N$  维向量空间构成的格拉斯曼簇. 确定格拉斯曼簇的方程是 Plücker 关系. 于是对于上述格拉斯曼簇, 其 Plücker 关系同时也是真空态轨道满足的方程. 下一小节我们将给出无穷维空间中的真空态轨道所满足的方程, 它也就包括了有限维 Fock 空间的情况.

## 9.2 真空轨道的刻画

冒着重复的风险, 我们再次讨论第6节的双线性恒等式, 并进一步解释一些之前遗留的内容.

**定理 9.3.** (双线性恒等式). 设 Fock 空间中的向量  $|u\rangle$  的电荷量为 0, 则  $|u\rangle$  位于真空态的轨道当且仅当

$$\sum_{i \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}} \psi_i^* |u\rangle \otimes \psi_{-i} |u\rangle = 0. \quad (9.6)$$

前半部分的证明与第6节完全类似, 为方便起见这里再重复一遍.

证明. 若  $|u\rangle = |\text{vac}\rangle$ , 则  $\psi_i^*$  与  $\psi_{-i}$  之中至少有一个湮灭子, 从而(9.6)显然成立.

一般地, 若  $X_A$  为李代数  $\mathfrak{gl}(\infty)$  中的元素, 满足与费米子的下述交换关系 [见(6.11)]:

$$[X_A, \psi_i^*] = \sum_j (-a_{ij}) \psi_j^*, \quad [X_A, \psi_{-i}] = \sum_j (a_{ji}) \psi_{-j}.$$

由此可得

$$\sum_{i \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}} [X_A, \psi_i^*] |\text{vac}\rangle \otimes \psi_{-i} |\text{vac}\rangle + \psi_i^* |\text{vac}\rangle \otimes [X_A, \psi_{-i}] |\text{vac}\rangle = 0.$$

因此关系(9.6)在  $e^{X_A}$  的作用下不变. 从而当  $|u\rangle$  在真空态的轨道上时(9.6)成立.

再证明另一边. 先注意如下等式: 若令  $\phi^* = \psi_{-i}^* + \psi_j^*$ ,  $\phi = \psi_i + \psi_{-j}$  [其中  $i, j < 0$ ], 则

$$[\phi, \phi^*] = 2, \quad e^{\pi i \phi^* \phi / 2} = 1 - \phi^* \phi \in \mathbf{G}.$$

利用这个等式, 容易验证对任意  $m_1 < \dots < m_r < 0$ ,  $n_1 < \dots < n_r < 0$  都成立

$$\begin{aligned} & (1 - (\psi_{-m_1}^* + \psi_{n_1}^*)(\psi_{m_1} + \psi_{-n_1})) \psi_{m_1} \cdots \psi_{m_r} \psi_{n_1}^* \cdots \psi_{n_r}^* |\text{vac}\rangle \\ &= (-1)^{r-1} \psi_{m_2} \cdots \psi_{m_r} \psi_{n_2}^* \cdots \psi_{n_r}^* |\text{vac}\rangle. \end{aligned} \quad (9.7)$$

现在, 设  $|u\rangle \in \mathcal{F}$  的电荷量为 0. 则  $|u\rangle$  形如这样的项的线性组合: 每一项都由  $|\text{vac}\rangle$  被相同数量的费米子  $\psi_i, \psi_j^*$  作用所得. 在这些项中, 取  $\psi_i$  的个数最小的一项; 若这样的项有多个, 则任取其中一个 [当然, 也可以按  $\psi$  的下指标升序排成字典序, 取关于该序最小的]. 这一项所含的  $\psi_i$  与  $\psi_j^*$  数量相同. 反复使用(9.7)将它们都去掉. 因此任何  $|u\rangle \in \mathcal{F}_0$  都可被群  $\mathbf{G}$  中的适当的元素变为形如

$$|\text{vac}\rangle + \sum_{i,j < 0} c_{ij} \psi_i \psi_j^* |\text{vac}\rangle + \dots$$

的样子. 其中  $\dots$  表示一些至少含有四个费米子的项相加. 然后, 将群  $\mathbf{G}$  中的元素  $\exp\left(-\sum_{i,j < 0} c_{ij} \psi_i \psi_j^*\right)$  的元素作用于此, 可将  $|u\rangle$  化为如下形式:

$$|u'\rangle = |\text{vac}\rangle + \sum_{i,j,k,l < 0} c_{ijkl} \psi_i \psi_j \psi_k^* \psi_l^* |\text{vac}\rangle + \dots$$

如前文所述, 关系(9.6) 关于群  $\mathbf{G}$  作用不变, 即

$$\sum_{i \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}} \psi_i^* |u'\rangle \otimes \psi_{-i} |u'\rangle = 0.$$

对于这个  $|u'\rangle$ , 易知显然有  $\psi_i^* |u'\rangle \neq 0, i < 0$ , 从而

$$\psi_{-i} |u'\rangle = 0, \quad \forall -i > 0;$$

同样地也可得

$$\psi_i^* |u'\rangle = 0, \quad \forall i > 0.$$

这表明  $|u'\rangle$  是  $|\text{vac}\rangle$  的常数倍. □

这个定理结合上一小节内容, 可见双线性恒等式(9.6) 与 Plücker 关系基本上是同一个东西. 在下一节, 也就是第10节, 我们将通过玻色-费米对应改写这个关系, 从而得到第8节 Plücker 关系的另一种推导. 而它的一个副产品也给出了与数学其它领域的联系. 为此, 我们需要一些微小的准备工作, 这将在下一小节里讨论.

## 9.3 杨图与特征多项式

我们来介绍一些别的東西, 这些東西将会用在第10节, 来帮助我们理解 Plücker 关系与前几节内容之间的联系. 我们要引入多项式环的一组特别的基, 它的基向量称为**特征多项式**, 在此方向进一步探讨, 就会走入数学的另一个领域—组合学. 本小节断言, 在玻色-费米对应下, Fock 空间的电荷量为 0 的子空间  $\mathcal{F}_0$  的基(4.11)对应于这些特征多项式.

我们先引入特征多项式. 将要描述的这东西在本质上与 Maya 图是同一个东西; 然而为达目的, 我们引入**杨图**的概念, 这个概念在更早之前的文献中就已出现. **杨图 (Young diagram)** 有多种不同的描述方法, 其中一种是说, 杨图是指单调不增的正整数有限序列  $(f_1, \dots, f_r)$ . 直观

画图说明, 杨图可视为这样的图: 在坐标平面的第四象限里, 由若干行形状相同的正方形方块组成, 这些行沿着左边缘对齐, 第 1 行有  $f_1$  个方块, 第 2 行有  $f_2$  个方块, 以此类推. 唯一的要求是当我们从一行到下一行时, 下一行的方块数量不超过上一行 [例如下图].

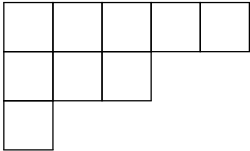


图: 杨图  $Y = (5, 3, 1)$

众所周知, 若我们限制杨图的行数, 要求杨图不超过  $n$  行, 则这样的杨图参数化了一般线性群  $GL(n, \mathbb{C})$  的不可约表示 [详见 W. Fulton, J. Harris, *Representation theory* 第 15 章.] 杨图也与组合数学的很多有趣的问题有关系.

杨图还有另一种表示方法 [见下图].

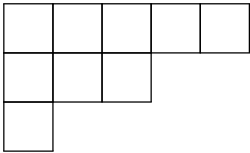


图: 杨图  $Y = (4, 1|2, 0)$

设  $Y = (f_1, \dots, f_r)$  为杨图, 记  $s$  为最左上角沿着右下角方向的对角线的长度. 记  $m_1 > \dots > m_s$  分别为每一行的位于该对角线上方[不含对角线]的方块个数,  $n_1 > \dots > n_s$  分别为每一列的位于该对角线下方[不含对角线]的方块个数. 则我们将杨图  $Y$  也记作

$$Y = (m_1, \dots, m_s | n_1, \dots, n_s).$$

在此记号下, 我们定义  $Y$  的特征多项式 (character polynomial) 为

$$\chi_Y(\mathbf{x}) := \det(h_{m_i n_j}(\mathbf{x})).$$

其中

$$h_{mn}(\mathbf{x}) = (-1)^n \sum_{l \geq 0} p_{l+m+1}(\mathbf{x}) p_{n-l}(-\mathbf{x}) \quad (9.8)$$

$$= (-1)^{n+1} \sum_{l < 0} p_{l+m+1}(\mathbf{x}) p_{n-l}(-\mathbf{x}), \quad (9.9)$$

这里的  $p_i(\mathbf{x})$  见(5.20). [ $i < 0$  时, 规定  $p_i(\mathbf{x}) = 0$ ]. 方便起见我们再记

$$q_n(\mathbf{x}) = (-1)^n p_n(-\mathbf{x}).$$

于是  $h_{mn}(\mathbf{x}) = \chi_{(m+1, 1^n)}(\mathbf{x})$  是钩形杨图  $(m+1, 1^n)$  的特征多项式, 其中  $1^n$  代表连续  $n$  个 1, 即  $(1, 1, \dots, 1)$ . 还注意到,  $p_n(\mathbf{x}) = \chi_{(n)}(\mathbf{x})$  是只有 1 行  $n$  列的杨图  $(n)$  的特征多项式, 而  $q_n(\mathbf{x}) = \chi_{(1^n)}(\mathbf{x})$  是只有  $n$  行 1 列的杨图  $(1^n)$  的特征多项式.

**例子 9.1.** 简单例子如下, 相应的杨图写到  $\chi$  的下指标的位置:

$$\begin{aligned} \chi_{\emptyset}(\mathbf{x}) &= 1, \\ \chi_{(1)}(\mathbf{x}) &= x_1, \\ \chi_{(2)}(\mathbf{x}) &= \frac{x_1^2}{2} + x_2, \\ \chi_{(1,1)}(\mathbf{x}) &= \frac{x_1^2}{2} - x_2, \\ \chi_{(2,1)}(\mathbf{x}) &= \frac{x_1^3}{3} - x_3, \\ \chi_{(2,2)}(\mathbf{x}) &= \frac{x_1^4}{12} - x_1 x_3 + x_2^2. \end{aligned}$$

为行文简洁, 这里不打算仔细解释, 相关性质的证明留给专业书籍 [例如, I.G. Macdonald, *Symmetric functions and Hall polynomials*, Oxford, 1979, second edition 1995]; 不过还是要提一下, 杨图  $Y$  的特征多项式是通过将  $Y$  所对应的一般线性群  $GL(n, \mathbb{C})$  的不可约特征表示矩阵的特征值的幂和写成初等对称函数的函数形式所得到的 [这与矩阵的阶数  $n$  无关, 不妨它比杨图的行数要大]. 从而我们把  $\chi_Y(\mathbf{x})$  叫做特征多项式. 众所周知, 特征多项式构成多项式环的一组基.

接下来的定理在下一节地位重要.

**定理 9.4.** 在玻色-费米对应下, Fock 空间中的电荷量为 0 的基向量

$$\psi_{m_1} \cdots \psi_{m_r} \psi_{n_1}^* \cdots \psi_{n_r}^* |\text{vac}\rangle, \quad \text{其中} \quad \begin{cases} m_1 < \cdots < m_r < 0, \\ n_1 < \cdots < n_r < 0 \end{cases}$$

对应于杨图

$$Y = \left( -m_1 - \frac{1}{2}, \dots, -m_r - \frac{1}{2} \mid -n_1 - \frac{1}{2}, \dots, -n_r - \frac{1}{2} \right)$$

的特征多项式的  $(-1)^{\sum_{i=1}^r (n_i + \frac{1}{2}) + \frac{r(r-1)}{2}}$  倍.

为证明它, 我们需要如下引理: 定义时间演化的费米子

$$\psi_n(\mathbf{x}) := e^{H(\mathbf{x})} \psi_n e^{-H(\mathbf{x})}, \quad \psi_n^*(\mathbf{x}) := e^{H(\mathbf{x})} \psi_n^* e^{-H(\mathbf{x})}.$$

则由(5.21), (5.22)式可知,

$$\psi_n(\mathbf{x}) = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_{n+j} p_j(\mathbf{x}), \quad \psi_n^*(\mathbf{x}) = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_{n+j}^* p_j(-\mathbf{x}).$$



引理 9.5. 对于  $m, n > 0$ , 成立

$$h_{mn}(\mathbf{x}) = (-1)^n \left\langle \text{vac} \left| \psi_{-m-\frac{1}{2}}(\mathbf{x}) \psi_{-n-\frac{1}{2}}^*(\mathbf{x}) \right| \text{vac} \right\rangle.$$

证明. 代入之前所得, 可得

$$\begin{aligned} \langle \text{vac} | \psi_i(\mathbf{x}) \psi_j^*(\mathbf{x}) | \text{vac} \rangle &= \sum_{s,t=0}^{\infty} \langle \text{vac} | \psi_{i+s} \psi_{j+t}^* | \text{vac} \rangle p_s(\mathbf{x}) p_t(-\mathbf{x}) \\ &= \sum_{\substack{-s < i \\ 0 \leq t < -j}} p_s(\mathbf{x}) p_t(-\mathbf{x}) \delta_{i+j+s+t,0} = \sum_{t=0}^{-j-\frac{1}{2}} p_{-i-j-t}(\mathbf{x}) p_t(-\mathbf{x}) \\ &= \sum_{l=0}^{-j-\frac{1}{2}} p_{-i+\frac{1}{2}+l}(\mathbf{x}) p_{-j-\frac{1}{2}-l}(-\mathbf{x}) = (-1)^{j+\frac{1}{2}} h_{-i-\frac{1}{2}, -j-\frac{1}{2}}(\mathbf{x}). \end{aligned}$$

□

之后使用特征多项式的定义以及 Wick 定理, 即可证明定理 9.4.

这里的杨图也可以用 Maya 图来更简单地表示. 现在来说明杨图与 Maya 图的关系 [见图 9.3]. 我们希望能从下面这个例子当中领会一般情形. 考察 Maya 图  $\mathbf{m} = \{-\frac{7}{2}, -\frac{5}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{7}{2}, \dots\}$ , 其中 ... 是指从这以后图 9.3 的每个半整数点都放置黑球.

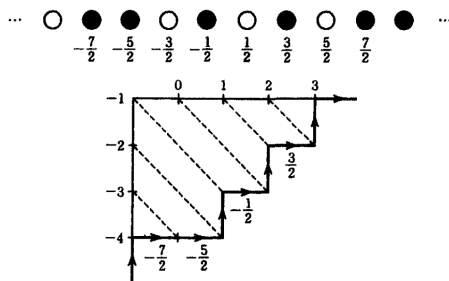


图 9.3: Maya 图  $\mathbf{m} = \{-\frac{7}{2}, -\frac{5}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{7}{2}, \dots\}$  及其杨图.

现在我们想象一条像尺子一样带刻度的直线, 每个整数点上带的刻度将该直线分割成一个个单位线段. 每个小线段的中点, 也就是半整数点上面放置白球或黑球. 我们按如下规则将这条直线“掰弯”, 具体掰弯的方式与每条小线段上的球的颜色有关: 从 Maya 图的  $i \ll 0$  部分开始. 例如, 在我们的例子中,  $i < -\frac{7}{2}$  的所有位置的球都是白色的. 对于这种白色线段[带有白球的线段], 我们画一条从  $-\infty$  出发竖直向上的直线, 每遇到一个白球就向上一单位. 对于黑色线段, 我们画从左到右的横线, 每遇到一个黑球就向右一个单位长度, 直到  $+\infty$ . 在我们的例子中, 我们先一直向上走, 直到  $-4$  的位置. 然后由于连续遇到两个黑球  $-\frac{7}{2}, -\frac{5}{2}$ , 从  $-4$  到  $-2$  我们向右两个单位长度. 接下来向上一步[因为白球  $-\frac{3}{2}$ ], 向右一步[因为黑球  $-\frac{1}{2}$ ], 向上一步[因为  $\frac{1}{2}$ ], 向右一步[因为  $\frac{3}{2}$ ], 向上一步[因为  $\frac{5}{2}$ ]. 从  $\frac{7}{2}$  之后全都是黑球, 从而向上三步之后我们一直向右.

这样, 一条折线和两条线段所围成的平面区域确定了一个杨图. Maya 图的电荷量可被表示为  $i + \frac{1}{2}$ , 使得那两条半直线的交点位于从  $i$  到  $i+1$  的区间的中点. 在我们的例子中, 电荷量为  $-1$  [见图 9.3]. 通常意义下的杨图经过如下处理可得到所谓 **带电杨图** (charged Young diagram): 把杨图放到坐标平面第四象限, 并且使得杨图的左上角位于坐标原点, 然后把它向上或者向下[而不是别的方向] 平移相应的电荷数即可. 我们也可从带电杨图得到相应的 Maya 图, 这只需要将有关步骤反过来即可. 这样我们就得到带电杨图与 Maya 图的一一对应.

一般地, 若某个 Maya 图的位于  $i > 0$  的白球为  $-m_r < \cdots < -m_1$ , 位于  $i < 0$  的黑球为  $n_1 < \cdots < n_s$ , 则相应的杨图如下. 杨图的对角线宽  $\max(r, s)$ . 若  $r > s$ , 则每一行的位于对角线右侧的方块数依次为

$$-m_1 - \frac{1}{2} - (r - s) > \cdots > -m_r - \frac{1}{2} - (r - s),$$

每一列的位于对角线下方的方块数依次为

$$-n_1 - \frac{1}{2} + (r-s) > \cdots -n_s - \frac{1}{2} + (r-s) > r-s-1 > \cdots > 0.$$

类似地, 若  $s \geq r$ , 则每一行的位于对角线右侧的方块数依次为

$$-m_1 + \frac{1}{2} + (s-r) > \cdots > -m_r + \frac{1}{2} + (s-r) > \cdots > 1,$$

每一列的位于对角线下方的方块数依次为

$$-n_1 - \frac{1}{2} - (s-r) > \cdots -n_s - \frac{1}{2} - (s-r).$$

习题.

1. 证明: 9.1 小节引入的有限维克利福德代数  $\mathcal{A}(W_N)$  同构于由所有  $2^{2N} \times 2^{2N}$  矩阵构成的代数 [与第4节习题 4.1 比较]. 并且由此断言  $\mathcal{A}(W_N)$  的中心是  $\mathbb{C}$ .
2. 在有限维 Fock 空间中, 证明对任意电荷量为 0 的向量  $|u\rangle$ , 成立

$$\dim V_N(|u\rangle) \leq N.$$

3. 试对下述情形验证 9.3 小节所述的杨图与 Maya 图的关系:

$$\mathbf{m} = \left\{ -\frac{11}{2}, -\frac{7}{2}, -\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{5}{2}, \frac{7}{2}, \frac{13}{2}, \dots \right\}.$$

4. 求下列杨图的特征多项式:

(a)  $Y_1 = (3, 1);$

(b)  $Y_1 = (3, 2, 1);$

(c)  $Y_1 = (4, 2, 1).$

## 10. 双线性恒等式

本节我们证明上一节讨论的双线性恒等式可以改写为无穷维格拉斯曼簇的 Plücker 关系. 这一节也可以看成 Wick 定理的练习. 然后, 我们从 Plücker 关系推导出 Hirota 方程.

### 10.1 双线性恒等式与 Plücker 关系

设  $|u\rangle \in \mathcal{F}_0$  为 Fock 空间中的向量, 且电荷量为 0. 记玻色 Fock 空间中的向量

$$f(\mathbf{x}; |u\rangle) = \langle \text{vac} | e^{H(\mathbf{x})} | u \rangle$$

为  $|u\rangle$  在玻色-费米对应下的像. 由于杨图的特征多项式  $\chi_Y(\mathbf{x})$  构成多项式环的一组基, 从而  $f(\mathbf{x}; |u\rangle)$  可改写为如下线性组合:

$$f(\mathbf{x}; |u\rangle) = \sum_Y c_Y(|u\rangle) \chi_Y(\mathbf{x}).$$

这里的  $\chi_Y(\mathbf{x})$  是杨图  $Y$  的特征多项式, 该求和取遍所有的杨图. 本小节我们将证明上式左边是 KP 方程簇的一个  $\tau$  函数当且仅当系数  $c_Y(|u\rangle)$  满足 Plücker 关系.

在第4节我们知道, Fock 空间的电荷量为 0 的部分  $\mathcal{F}_0$  可由

$$f(\mathbf{m}, \mathbf{n}) = \psi_{m_1} \cdots \psi_{m_r} \psi_{n_1}^* \cdots \psi_{n_r}^* |\text{vac}\rangle$$

张成. 这里我们记  $\mathbf{m} = (m_1, \dots, m_r)$ ,  $\mathbf{n} = (n_1, \dots, n_r)$ . 然而这组基向量选取得并不太好, 因为这会导致很多不必要的正负号. 接下来, 我们用 Maya 图  $\alpha = (\alpha_j)_{j \geq 1}$  来表示 Fock 空间  $\mathcal{F}_1$  的基向量. 我们要稍微推广以下 Maya 图的定义. 我们回忆, 在第4节里, 称半整数序列  $\alpha$  为 **Maya 图**, 如果

1.  $\alpha_j < \alpha_{j+1}, \forall j \geq 1$ ,
2. 当  $j$  充分大时,  $\alpha_j + 1 = \alpha_{j+1}$ .

如果我们将条件1, 只要求  $\alpha$  满足条件2, 这样的  $\alpha$  称为带符号的 **Maya 图** (signed Maya diagram).

设  $\alpha$  为带符号的 Maya 图. 记

$$l := \lim_{j \rightarrow \infty} \left( j - \alpha_j - \frac{1}{2} \right).$$

整数  $j$  称为  $\alpha$  的**电荷量** (charge). 对每个  $\alpha$ , 我们接下来为其指定一个  $|\alpha\rangle \in \mathcal{F}_l$ . 特别地,  $|\alpha\rangle$  为 Fock 空间中的电荷量为  $l$  的向量.

若  $\alpha$  满足条件1, 则令

$$|\alpha\rangle = \psi_{\alpha_1}^* \psi_{\alpha_2}^* \psi_{\alpha_3}^* \cdots |\Omega\rangle. \quad (10.1)$$

而若  $\alpha$  形如

$$\alpha = \left( n_1, \dots, n_r, \frac{1}{2}, \dots, -m_r - 1, -m_r + 1, \dots, -m_1 - 1, -m_1 + 1, \dots \right),$$

则相差正负号意义下,  $|\alpha\rangle$  等于  $\psi_{m_1} \cdots \psi_{m_r} \psi_{n_1}^* \cdots \psi_{n_r}^* |\text{vac}\rangle$ .

如果某个  $\alpha_j = \alpha_k, j \neq k$ , 则规定  $|\alpha\rangle = 0$ . 否则, 存在某个满足条件1的 Maya 图  $\beta$ , 使得  $\beta_j = \alpha_{\sigma(j)}$ , 其中  $\sigma: \{1, 2, \dots\} \rightarrow \{1, 2, \dots\}$ , 使得  $\sigma(j) = j$  对几乎所有  $j$  成立. 此时我们令  $|\alpha\rangle = \text{sgn}(\sigma) |\beta\rangle$ .

接下来, 方便起见, 我们把带符号的 Maya 图  $\alpha$  也称为 Maya 图[即使它不满足条件1]. 对于半整数  $b$  以及 Maya 图  $\alpha$ , 我们记 Maya 图  $\alpha \oplus b = (b, \alpha_1, \alpha_2, \dots)$ . 对于 Maya 图  $\alpha$ , 我们记  $\alpha \ominus \alpha_j = (\alpha_1, \dots, \alpha_{j-1}, \alpha_{j+1}, \dots)$ . 从而, 若  $|\alpha\rangle \in \mathcal{F}_l$ , 则  $|\alpha \oplus b\rangle \in \mathcal{F}_{l+1}, |\alpha \ominus \alpha_j\rangle \in \mathcal{F}_{l-1}$ .

回忆9.2节的定理9.3, 向量

$$f = \sum_{\alpha} c(\alpha) |\alpha\rangle$$

位于真空态  $|\text{vac}\rangle$  的轨道上的充要条件是

$$\sum_{i=\mathbb{Z}+\frac{1}{2}} \psi_i^* f \otimes \psi_{-i} f = 0. \quad (10.2)$$

这里的求和仅仅是对电荷量为 0 的通常意义下的 Maya 图进行. 其实我们也不妨把上述求和系数  $c(\alpha)$  的概念推广到任意的带电荷的 Maya 图上. 如果  $|\alpha\rangle = 0$ , 则规定  $c(\alpha) = 0$ . 对于之前所述  $\alpha$  和  $\beta$ , 令

$$c(\alpha) = \text{sgn}(\sigma)c(\beta).$$

现在陈述本节主要结论. 我们用系数  $c(\alpha)$  来重新表述(10.2)式. 任意给定电荷量为 1 的 Maya 图  $\gamma$ , 以及电荷量为  $-1$  的 Maya 图  $\delta$ . 则(10.2)等价于:

$$\sum_{j=1}^{\infty} (-1)^j c(\gamma \ominus \gamma_j) c(\delta \oplus \gamma_j) = 0. \quad (10.3)$$

证明是直接显然的, 留给读者. 我们来看一个例子: 对于

$$\gamma = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \dots\right), \quad \delta = \left(-\frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{7}{2}, \dots\right),$$

则有:

$$\begin{aligned} 0 = & c\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \dots\right) c\left(-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{5}{2}, \frac{7}{2}, \dots\right) \\ & - c\left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \dots\right) c\left(-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, \frac{5}{2}, \frac{7}{2}, \dots\right) \\ & + c\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{5}{2}, \frac{7}{2}, \dots\right) c\left(-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{7}{2}, \dots\right). \end{aligned} \quad (10.4)$$

## 10.2 Plücker 关系与 Hirota 方程

总结之前各节的结论, 我们接下来说明由这里得到的 Plücker 关系也能推出 Hirota 型的双线性方程.

对于  $g \in \mathbf{G}$ , 记玻色 Fock 空间中的元素

$$\tau(\mathbf{x}; g) = \langle \text{vac} | e^{H(\mathbf{x})} g | \text{vac} \rangle$$

为  $g | \text{vac} \rangle$  在玻色-费米对应下的像. 这是 KP 方程簇的一个  $\tau$  函数. 因为杨图的特征多项式构成多项式环的一组基, 从而  $\tau(\mathbf{x}; g)$  可表示为如下线性组合:

$$\tau(\mathbf{x}; g) = \sum_Y c_Y(g) \chi_Y(\mathbf{x}).$$

这里的  $\chi_Y(g)$  是杨图  $Y$  的特征多项式, 上述求和取遍所有杨图. 我们在上一小节证明了系数  $c_Y(g)$  满足 Plücker 关系. 于是接下来我们把系数  $c_Y(g)$  称为  $\tau$  函数  $\tau(\mathbf{x}; g)$  的 **Plücker 坐标**.

注意  $\tau(\mathbf{x}; g)$  是多项式环  $\mathbb{C}[x_1, x_2, \dots]$  中的元素. 我们记  $\partial_i$  为关于  $x_i$  的偏微分算子, 记  $\mathbb{C}[\partial_1, \partial_2, \dots]$  是由所有  $\partial_i$  生成的多项式环; 这是由偏微分算子的常系数线性组合构成的交换环, 其系数不含有  $x_1, x_2, \dots$ , 对于多项式  $p(\mathbf{x})$ , 我们记  $p(\tilde{\partial}_x) \in \mathbb{C}[\partial_1, \partial_2, \dots]$  为把每个  $x_i$  替换成  $\frac{1}{i} \partial_i$  之后所得的多项式. 我们令

$$\langle p(\tilde{\partial}_x), f(\mathbf{x}) \rangle := p(\tilde{\partial}_x) f(\mathbf{x}) \Big|_{\mathbf{x} \rightarrow 0}, \quad (10.5)$$

这定义了多项式环  $\mathbb{C}[\partial_1, \partial_2, \dots]$  与  $\mathbb{C}[x_1, x_2, \dots]$  上的一个非退化双线性型. 容易看出, 下述元素

$$\left\{ \frac{x_1^{m_1} x_2^{m_2}}{m_1! m_2!} \cdots \right\}_{m_1, m_2, \dots \geq 0}, \quad \{ \partial_1^{m_1} \partial_2^{m_2} \cdots \}_{m_1, m_2, \dots \geq 0}$$

构成了关于该双线性型的一组对偶基. 特别地, 若像第4节那样规定  $x_i$  的次数是  $i$ , 并且规定  $\partial_i$  的次数是  $-i$ , 则有如下分次结构:

$$\mathbb{C}[x_1, x_2, \dots] = \bigoplus_{n \geq 0} \mathbb{C}[\mathbf{x}]_n, \quad \mathbb{C}[\partial_1, \partial_2, \dots] = \bigoplus_{n \geq 0} \mathbb{C}[\partial_x]_{-n},$$

且  $\langle \partial(\tilde{\partial}_x), f(\mathbf{x}) \rangle$  也是每个  $\mathbb{C}[\mathbf{x}]_n$  与  $\mathbb{C}[\partial_x]_n$  上的非退化双线性型; 而当  $m \neq n$  时  $\langle \mathbb{C}[\partial_x]_m, \mathbb{C}[\mathbf{x}]_n \rangle = 0$ .

众所周知, 若选取杨图特征多项式为  $\mathbb{C}[x_1, x_2, \dots]$  的基, 在此基下重写该双线性型, 则成立以下正交关系[见习题 10.3]:

**引理 10.1.** 对于杨图  $Y, Y'$ , 成立

$$\langle \chi_Y(\tilde{\partial}_x), \chi_{Y'}(\mathbf{x}) \rangle = \delta_{YY'}.$$

换言之, 任意  $f(\mathbf{x}) \in \mathbb{C}[x_1, x_2, \dots]$  都能写成特征多项式的线性组合

$$f(\mathbf{x}) = \sum_Y c_Y \chi_Y(\mathbf{x}),$$

并且其系数  $c_Y$  可由下式计算:

$$c_Y = \langle \chi_Y(\tilde{\partial}_x), f(\mathbf{x}) \rangle.$$

由这个正交关系, 我们可以得到一系列有趣的推论. 对于  $g \in \mathbf{G}$ , 设  $g(\mathbf{x}) = \mathbf{e}^{H(\mathbf{x})} g \mathbf{e}^{-H(\mathbf{x})}$ , 并考虑如下变换:

$$\begin{aligned} \tau(\mathbf{x} + \mathbf{y}; g) &= \langle \text{vac} | \mathbf{e}^{H(\mathbf{x}+\mathbf{y})} g | \text{vac} \rangle \\ &= \langle \text{vac} | \mathbf{e}^{H(\mathbf{x})} e^{H(\mathbf{y})} g | \text{vac} \rangle \\ &= \tau(\mathbf{x}; g(\mathbf{y})) \\ &= \sum_Y c_Y(g(\mathbf{y})) \chi_Y(\mathbf{x}). \end{aligned}$$

然后由引理10.1, 我们有

$$\begin{aligned} c_Y(g(\mathbf{y})) &= \langle \chi_Y(\tilde{\partial}_x), \tau(\mathbf{x} + \mathbf{y}; g) \rangle \\ &= \chi_Y(\tilde{\partial}_x) \tau(\mathbf{x} + \mathbf{y}; g) \Big|_{\mathbf{x} \rightarrow 0}. \end{aligned}$$



注意到  $\frac{\partial \tau(\mathbf{x}+\mathbf{y};g)}{\partial x_i} = \frac{\partial \tau(\mathbf{x}+\mathbf{y};g)}{\partial y_i}$ , 再结合

$$\tau(\mathbf{x} + \mathbf{y}; g) = \sum_Y c_Y(g) \chi_Y(\mathbf{x} + \mathbf{y}),$$

可得

$$\begin{aligned} c_Y(g(\mathbf{y})) &= \chi_Y(\tilde{\partial}_{\mathbf{y}}) \tau(\mathbf{x} + \mathbf{y}; g) \Big|_{\mathbf{x} \rightarrow 0} \\ &= \chi_Y(\tilde{\partial}_{\mathbf{y}}) \tau(\mathbf{y}; g). \end{aligned}$$

从而得到如下引理:

**引理 10.2.** 对于  $g \in \mathbf{G}$ , 记  $c_Y(g)$  为  $\tau(\mathbf{x}; g)$  的 *Plücker* 坐标, 以及  $g$  的时间演化  $g(\mathbf{x}) = \mathbf{e}^{H(\mathbf{x})} g \mathbf{e}^{-H(\mathbf{x})}$ . 设  $\tau(\mathbf{x}; g)$  为相应的 *KP* 方程簇的  $\tau$  函数. 则以下成立:

1.  $c_Y(g) = \chi_Y(\tilde{\partial}_{\mathbf{x}}) \tau(\mathbf{x}; g) \Big|_{\mathbf{x} \rightarrow 0}$ ,
2.  $c_Y(g(\mathbf{x})) = \chi_Y(\tilde{\partial}_{\mathbf{x}}) \tau(\mathbf{x}; g)$ .

特别地,  $\{c_Y(g(\mathbf{x}))\}$  也是 *KP* 方程簇的  $\tau$  函数的一组 *Plücker* 坐标.

这个引理, 结合 *Plücker* 坐标满足 *Plücker* 关系这件事, 正如该引理的结论 2 所述, 相应的 *Plücker* 关系可用  $\tau$  函数来表示, 这就得到了 Hirota 型的双线性微分方程.

**例子 10.1.** 让我们尝试用  $\tau$  函数写出 10.1 小节末的例子中的 *Plücker* 关系. 查阅上一节给出的特征函数表, 并由上述引理, 可知在此例子中的  $\tau$  函数满足的微分方程为

$$0 = \frac{1}{12} \tau(\mathbf{x}) \cdot (\partial_1^4 - 4\partial_1 \partial_3 + 3\partial_2^2) \tau(\mathbf{x})$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{3}\partial_1\tau(\boldsymbol{x}) \cdot (\partial_1^3 - \partial_3)\tau(\boldsymbol{x}) \\
& +\frac{1}{4}(\partial_1^2 + \partial_2)\tau(\boldsymbol{x}) \cdot (\partial_1^2 - \partial_2)\tau(\boldsymbol{x}).
\end{aligned}$$

将上式改写成 *Hirota* 型, 可得

$$(D_1^4 + 3D_2^2 - 4D_1D_3)\tau \cdot \tau = 0.$$

这正是第3节给出的关系.

习题.

1. 证明正文(10.3)式.
2. 证明10.1节末的 Plücker 关系(10.4) 与8.3节的 Plücker 关系是同一个东西, 请思考为什么一定是这样.
3. 计算三次多项式空间的以下两组基之间的转移矩阵:

$$\{x_3, x_2x_1, \frac{x_1^3}{6}\}, \quad \{\chi_{(3)}(\boldsymbol{x}), \chi_{(2,1)}(\boldsymbol{x}), \chi_{(1,2)}(\boldsymbol{x})\}.$$

并且对这个例子来验证(10.2).

4. 计算下述 Hirota 方程所对应的 Plücker 关系:

$$(D_1^3D_2 + 2D_2D_3 - 3D_1D_4)\tau \cdot \tau = 0.$$

# 习题解答

## 第 1 节

1. 我们要寻找满足以下条件的  $F(x, t)$ :

$$F(x, 0) = x, \quad \frac{\partial F}{\partial t} = x^2 \frac{\partial F}{\partial x}.$$

作关于  $t$  的幂级数展开,  $F(x, 0) = x + ta_1 + t^2a_2 + \cdots$ , 代入上述方程可得  $a_1 = x^2, \dots$  进而猜测其表达式. 答案为  $\frac{x}{1-tx}$ .

2. 令  $\hat{K}(u) = Au^4u_x + Bu^2u_{3x} + Cuu_xu_{2x} + Du_x^3 + Eu_{5x}$ , 并且用与(1.19)下方类似的方法计算  $\frac{\partial \hat{K}(u)}{\partial t}$  与  $\frac{\partial K(u)}{\partial s}$ , 从而确定系数  $A, B, C, D, E$ . 答案为

$$\frac{1}{2}u^4u_x + u^2u_{3x} + 4uu_xu_{2x} + u_x^3 + \frac{3}{5}u_{5x}.$$

3. 从  $\frac{\partial B}{\partial y} + [B, P] = 0$  可得  $3u_{yy} + u_{4x} + 6(uu_x)_x = 0$ . 此方程称为 Boussinesq 方程.

## 第 2 节

1. 将  $\partial \circ f$  视为作用在函数上的算子, 有  $(\partial \circ f)(g) = \partial(fg) = (f\partial)g + (\partial f)g$ . 类似地,  $(\partial^n \circ f)(g)$  为函数乘积  $fg$  的  $n$  阶导数, 可用 Leibniz 法则计算:

$$\begin{aligned} (\partial^n \circ f)(g) &= \partial^n(fg) \\ &= \sum_{k \geq 0} \binom{n}{k} (\partial^k f)(\partial^{n-k} g). \end{aligned}$$

2. 答案为

$$\sum_{l=0}^{\infty} h_l \partial^{\alpha+\beta-l}, \quad \text{其中} \quad h_l = \sum_{i+j+k=l} \binom{\alpha-i-j}{i} f_j \partial^i g_k,$$

或者换句话说,

$$\sum_{j,k,k'=0}^{\infty} \binom{\alpha-k}{j} (f_k \partial^j g_{k'}) \partial^{\alpha+\beta-j-k-k'}.$$

3. 令  $(\partial + x)^{-1} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_{n-1} \partial^{-n}$ , 两边乘以  $(\partial + u)$  得  $(\partial + u)(a_0 \partial^{-1} - a_1 \partial^{-2} + a_2 \partial^{-3} - \dots) = 1$ . 比较各  $\partial^{-n}$  的系数可知  $a_0 = 1$ , 且  $n \geq 1$  时  $a_n - x a_{n-1} + \partial a_{n-1} = 0$ . 因此  $a_0 = 1, a_1 = x, a_2 = x^2 + 1, a_3 = x^3 + 3x, a_4 = x^4 + 6x^2 + 3$  等等. 更一般地,

$$a_n = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{n(n-1)(n-2) \cdots (n-2k+1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2k} x^{n-2k}.$$

4.  $\text{ord } L_1 L_2 = \alpha_1 + \alpha_2, \text{ord}[L_1, L_2] = \alpha_1 + \alpha_2 - 1$ .

5. 若  $\ell$  为偶数, 则  $(P^{\frac{\ell}{2}})_+ = P^{\frac{\ell}{2}}$ , 从而  $[P, (P^{\frac{\ell}{2}})_+] = 0$ .

6.

$$\begin{aligned} (P^{\frac{5}{2}})_+ &= \partial^5 + \frac{5u}{2} \partial^3 + \frac{15}{4} u_x \partial^2 + \left( \frac{25}{8} u_{xx} + \frac{15u^2}{8} \right) \partial \\ &\quad + \frac{15}{16} u_{xxx} + \frac{15}{8} u u_x; \\ [P, (P^{\frac{5}{2}})_+] &= -\frac{1}{16} (u_{5x} + 10u u_{xxx} + 30u^2 u_x + 20u_x u_{xx}). \end{aligned}$$

7.

$$L e^{\xi(x,k)} = (\partial + f_1 \partial^{-1} + f_2 \partial^{-2} + \dots)$$

$$\begin{aligned}
& \times (1 + w_1 \partial^{-1} + w_2 \partial^{-2} + \dots) \mathbf{e}^{\xi(x,k)} \\
= & (\partial + w_1 + (\partial w_1 + w_2 + f_1) \partial^{-1} \\
& + (\partial w_2 + w_3 + f_1 w_1 + f_2) \partial^{-2} + \dots) \mathbf{e}^{\xi(x,k)}
\end{aligned}$$

从而

$$\partial w_1 + f_1 = 0, \quad \partial w_2 + f_1 w_1 + f_2 = 0.$$

8. 略.

9. 略.

10. 略.

### 第3节

1. 经计算得到

$$\begin{aligned}
D_t D_x f \cdot f &= 2f f_{xt} - 2f_t f_x, \\
D_x^4 f \cdot f &= 2f f_{xxxx} - 8f_x f_{xxx} + 6f_{xx}^2,
\end{aligned}$$

从而(3.2)化为

$$8f f_{xt} - 8f_t f_x - 2f f_{4x} + 8f_x f_{xxx} - 6f_{xx}^2 = 0.$$

我们规定  $x$  的次数为 1,  $t$  的次数为 3, 然后在此意义下寻找次数  $\leq 6$  的齐次解. 每个次数  $\leq 3$  的多项式都是解. 4 次多项式当中,  $xt$  是解; 不存在 5 次多项式解; 6 次多项式解有以下三个:

$$-\frac{1}{45}x^6 + \frac{1}{3}tx^3 + t^2, \quad -\frac{1}{3}tx^3 + t^2, \quad t^2.$$

2. 略.

3. 考虑作用  $B \mapsto [A, B]$ , 记  $\text{ad}_A B = [A, B]$ . 则

$$e^A B e^{-A} = e^{\text{ad}_A} B.$$

从而

$$e^A e^B e^{-A} = \exp(\text{ad}_A B).$$

而由于  $\text{ad}_A B$  为标量算子, 且  $n \geq 2$  时  $\text{ad}_A^n B = 0$ , 从而

$$e^A e^B e^{-A} = \exp(B + [A, B]) = e^{[A, B]} e^B.$$

4. 我们有

$$X(p_1, q_1) X(p_2, q_2) = C(p_1, q_1, p_2, q_2) : X(p_1, q_1), X(p_2, q_2) :,$$

其中  $C(p_1, q_1, p_2, q_2) = \frac{(p_1 - p_2)(q_1 - q_2)}{(p_1 - q_2)(q_1 - p_2)}$ . 这里的正规积 (normal product): : 是指将冒号里面的算子重新排序, 将微分放到右边, 将乘积放到左边 [将会在第 5 节详细解释]. 例如,

$$: x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} := \frac{\partial}{\partial x_1} x_1 := x_1 \frac{\partial}{\partial x_1}.$$

注意  $C(p_1, q_1, p_2, q_2)$  关于  $1 \leftrightarrow 2$  对称. 从而第一眼看上去, 它们的交换子似乎应该是 0. 然而, 将算子  $X(p, q)$  关于  $p, q$  展开为

$$X(p, q) = \sum X_{mn} p^m q^n,$$

则交换子  $[X_{m_1 n_1}, X_{m_2 n_2}]$  不为零. 这个矛盾用如下方式来解决:

$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x^n$  作为关于  $x$  的形式幂级数是非零的. 但是我们有

$$\sum_{n=-\infty}^{-1} x^n = \frac{x^{-1}}{1 - x^{-1}}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1 - x},$$

作为有理函数,

$$\frac{x^{-1}}{1-x^{-1}} + \frac{1}{1-x} = 0.$$

因此正确的方法应该是把

$$C(p_1, q_1, p_2, q_2) = \frac{\left(1 - \frac{p_2}{p_1}\right) \left(1 - \frac{q_2}{q_1}\right)}{\left(1 - \frac{q_2}{p_1}\right) \left(1 - \frac{p_2}{q_1}\right)}$$

作关于  $\frac{q_2}{p_1}, \frac{p_2}{q_1}$  的展开, 在这种意义下交换子非零. 若记

$$\delta(x) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} x^n,$$

则对任意形式幂级数  $f(x)$  都有  $f(x)\delta(x) = f(1)\delta(x)$  [如果  $f(1)$  有意义]. 由此可知

$$\begin{aligned} [X(p_1, q_1), X(p_2, q_2)] &= \frac{\left(1 - \frac{q_1}{p_1}\right) \left(1 - \frac{q_2}{p_2}\right)}{\left(1 - \frac{q_2}{p_1}\right)} \delta\left(\frac{p_2}{q_1}\right) X(p_1, q_2) \\ &\quad - \frac{\left(1 - \frac{q_1}{p_1}\right) \left(1 - \frac{q_2}{p_2}\right)}{\left(1 - \frac{q_1}{p_2}\right)} \delta\left(\frac{p_1}{q_2}\right) X(p_2, q_1). \end{aligned}$$

于是顶点算子生成一个李代数.

5.  $x_1, x_2 + \frac{x_1^2}{2}, x_3 + x_1x_2 + \frac{x_1^3}{6}, x_3 - \frac{x_3^3}{3}$  以及  $x_3 - x_1x_2 + \frac{x_1^3}{6}$ . 在此情形, 关于  $k \in \mathbb{C}$  的极点只有  $k = 0$ .
6. 令  $\mathbf{x} = \mathbf{y}$ , 计算留数可知  $\tilde{w}_1 = 0$ . 之后关于  $x_1$  求导, 再计算留数可得  $\tilde{w}_2 = 0$ , 以此类推.
7. 略.

## 第 4 节

1. 由定义可知  $\psi v_1 = \psi |\text{vac}\rangle = 0$ ,  $\psi v_2 = \psi \psi^* |\text{vac}\rangle = v_1$ .  $\psi^*$  的计算也类似.
2. 略.
3. 利用 Wick 定理展开, 再注意  $\langle \psi_{m_i} \psi_{m_j} \rangle = 0$  以及  $\langle \psi_{n_i}^* \psi_{n_j}^* \rangle = 0$ , 从而易知展开式中的非零项必形如

$$\langle \psi_{m_1} \psi_{n_{\sigma(1)}}^* \rangle \cdots \langle \psi_{m_s} \psi_{n_{\sigma(s)}}^* \rangle,$$

其中  $\sigma$  取遍每个排列. 注意恒等置换  $\sigma = \text{id}$  的符号为  $+1$ , 从而直接由行列式的定义即可.

对于向量

$$\begin{aligned} \langle u | &= \langle \text{vac} | \psi_{m_1} \cdots \psi_{m_r} \psi_{n_1}^* \cdots \psi_{n_s}^*, \\ |u\rangle &= \psi_{-m'_1} \cdots \psi_{-m'_s} \psi_{-n'_1}^* \cdots \psi_{-n'_r}^* |\text{vac}\rangle, \end{aligned}$$

其中  $0 < m_1 < \cdots < m_r$ ,  $0 < n_1 < \cdots < n_s$  以及  $0 < m'_1 < \cdots < m'_s$ ,  $0 < n'_1 < \cdots < n'_r$ , 仿照上面的方法, 暂时不管正负号, 可得

$$\det \left( \langle \psi_{m_i} \psi_{-n'_j}^* \rangle \right) \det \left( \langle \psi_{n_k}^* \psi_{-m'_l} \rangle \right) = \pm \prod_{i=1}^r \delta_{m_i n'_i} \prod_{k=1}^s \delta_{n_k m'_k}.$$

这表明该双线性型非退化.

## 第 5 节

1. 关系(5.10)表明

$$[H_m, H_n] = \sum_j [H_m, \psi_{-j} \psi_{j+n}^*] = \sum_j (\psi_{-j+m} \psi_{j+n}^* - \psi_{-j} \psi_{j+m+n}^*).$$



下面的计算过程是错误的: 若我们去掉右边每一个被求和项的括号, 然后对每个求和项的第一项作  $j \mapsto j + m$ , 就变成某个求和项当中的第二项, 从而所有的第一项与所有的第二项抵消, 最终计算结果为 0. 而正确做法是, 应该把每一个被求和项都写成

$$: \psi_{-j+m} \psi_{j+n}^* - \psi_{-j} \psi_{j+m+n}^* : + \delta_{m+n,0} (\theta(j < m) - \theta(j < 0)).$$

之后, 这些正规积的无穷求和在任意向量上的作用其实是有限和 [这才是良定的算子], 从而可放心地作代换  $j \mapsto j + m$ , 这些正规积的无穷求和等于 0. 剩余的部分则贡献了  $m\delta_{m+n,0}$ .

2.  $x_4 + \frac{1}{2}x_2^2 - \frac{1}{2}x_2x_1^2 - \frac{1}{8}x_1^4$ .
3. 在展开式  $e^{H(x)} = \sum f_j(x)a_j$  当中, 满足  $\langle l|a_j|u \rangle \neq 0$  的  $j$  只可能是  $-d + \frac{l^2}{2}$ . 于是相应的系数  $f_j(x)$  的权必为  $d - \frac{l^2}{2}$ .
4. 对每个  $n$ , (4.11) 中出现的每个  $\psi_n, \psi_n^*$  分别为特征函数贡献了  $zq^{-n}$ ,  $z^{-1}q^{-n}$ .
5.  $\mathbb{C}[x]$  的特征函数为

$$\sum_{m_1, m_2, \dots \geq 0} q^{m_1 + 2m_2 + \dots} = \prod_{n=1}^{\infty} \sum_{m_n=0}^{\infty} q^{nm_n} = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^{-n})^{-1}.$$

注意  $\langle l|$  的电荷量为  $l$ , 能量为  $\frac{l^2}{2}$ . 注意我们将  $\mathcal{F}_l$  等同于  $z^l \mathbb{C}[x]$ , 从而容易计算玻色 Fock 空间  $\mathcal{B}$  的特征. 至于本题后半部分, 只需利用之前两题的结论, 并将  $z$  换成  $-zq^{-\frac{1}{2}}$ .

## 第 6 节

1. 前半部分从略. 而对后半部分, 首先注意平面  $z = 0$  与双曲面(6.2)的公共部分位于该轨道中, 这只需利用

$$g_1 = \begin{pmatrix} a & b & \\ b & a & \\ & & 1 \end{pmatrix}.$$

在注意  $G$  中还包括绕  $x$  轴的旋转:

$$g_2 = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \cos \theta & -\sin \theta \\ & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

从而得到(6.2).

2. 略.
3. 略.

## 第 7 节

1. 只需证明对任意  $X, Y \in \mathfrak{sl}_2$ , 元素  $A(t) = Xt^m$ ,  $B(t) = Yt^n \in \widehat{\mathfrak{sl}_2}$  满足  $\omega(A, B) = m\delta_{m+n,0}\mathrm{tr}(XY)$ .

## 第 8 节

1. 例如, 考虑与球面南极点相切的平面, 再考虑从北极点到该平面的球极投影.
2. 略.

3. 设  $W$  为  $V$  的  $m$  维子空间,  $M_W = (v_{ij})$  [其中  $1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq N$ ] 为  $W$  的一个标架.  $V$  中的 [行] 向量  $(x_1, \dots, x_N)$  属于  $W$  的充要条件是由矩阵  $M$  添加该行向量之后所得的  $(m+1) \times N$  矩阵的秩为  $m$ . 因此对任何  $(\beta_1, \dots, \beta_{m+1})$  必成立

$$\sum_{j=0}^{m+1} (-1)^j x_{\beta_j} v_{\beta_1, \dots, \beta_{j-1}, \beta_{j+1}, \dots, \beta_{m+1}} = 0.$$

上述这  $\binom{N}{m+1}$  个  $V$  中的超平面由  $W$  的 **Plücker** 坐标所唯一确定, 而  $W$  包含于这些超平面的交. 如果我们能证明这个关于  $x_i$  的线性方程组的解空间的维数  $\leq m$ , 则  $W$  恰为这些超平面的交, 从而被 **Plücker** 坐标所唯一确定.

现在, 取定一个非零的 **Plücker** 坐标分量  $v_{\alpha_1, \dots, \alpha_m}$ . 对于  $i \neq \alpha_j$ , 记  $(\beta_1, \dots, \beta_{m+1}) = (\alpha_1, \dots, \alpha_m, i)$ , 然后写出上述线性方程, 得

$$\sum_{j=1}^m (-1)^j x_{\alpha_j} v_{\alpha_1, \dots, \alpha_{j-1}, \alpha_{j+1}, \dots, \alpha_m, i} + (-1)^{m+1} x_i v_{\alpha_1, \dots, \alpha_m} = 0.$$

适当调整下标, 得

$$x_i v_{\alpha_1, \dots, \alpha_m} - \sum_{j=1}^m x_{\alpha_j} v_{\alpha_1, \dots, \alpha_{j-1}, i, \alpha_{j+1}, \dots, \alpha_m} = 0.$$

将指标集  $\{1, \dots, N\}$  划分为  $\{\alpha_1, \dots, \alpha_m\} \cup \{\alpha_{m+1}, \dots, \alpha_N\}$ , 对每个  $i = \alpha_{m+1}, \dots, \alpha_N$  考虑上述方程, 则所得方程组的  $(N-m) \times N$  的系数矩阵的秩为  $N-m$ . 事实上, 它关于第  $\alpha_{m+1}, \dots, \alpha_N$  列的  $N-m$  阶子式为  $(v_{\alpha_1, \dots, \alpha_m})^{N-m} \neq 0$ .

4. 假设 **Plücker** 坐标满足线性关系  $\sum c_{\alpha_1, \dots, \alpha_m} v_{\alpha_1, \dots, \alpha_m} = 0$ , 则只需证明系数  $c_{\alpha_1, \dots, \alpha_m}$  全为零. 考虑由前  $m$  个基向量  $\mathbf{v}_i = (v_{ij}), i =$

$1, \dots, m, v_{ij} = \delta_{ij}$  张成的  $m$  维子空间. 则该子空间的 Plücker 坐标满足  $v_{1, \dots, m} = 1$ , 且其余分量都是零; 因此  $c_{1, \dots, m} = 0$ .

5. 将下述行列式按前  $m$  行展开即可:

$$\begin{vmatrix} v_{1\beta_1} & \cdots & v_{1\beta_{m+1}} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{m\beta_1} & \cdots & v_{m\beta_{m+1}} & 0 & \cdots & 0 \\ v_{1\beta_1} & \cdots & v_{1\beta_{m+1}} & v_{1\alpha_1} & \cdots & v_{1\alpha_{m-1}} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{m\beta_1} & \cdots & v_{m\beta_{m+1}} & v_{m\alpha_1} & \cdots & v_{m\alpha_{m-1}} \end{vmatrix}.$$

## 第 9 节

1. 记  $\bigwedge V_N$  为  $V_N$  生成的外代数, 它的维数是  $2^{2N}$ . 我们可以把它视为  $\mathcal{A}_N$  的由  $\psi_i$  生成的子代数. 那么,  $\psi_i$  与  $\psi_i^*$  分别通过以下方式视为  $\bigwedge V_N$  上的线性算子:

$$\begin{aligned} \psi_i: \psi_{i_1} \wedge \psi_{i_2} \wedge \psi_{i_3} \wedge \cdots &\mapsto \psi_i \wedge \psi_{i_1} \wedge \psi_{i_2} \wedge \psi_{i_3} \wedge \cdots; \\ \psi_i^*: \psi_{i_1} \wedge \psi_{i_2} \wedge \psi_{i_3} \wedge \cdots &\mapsto [\psi_i, \psi_{i_1}]_+ \psi_{i_2} \wedge \psi_{i_3} \wedge \cdots \\ &\quad - [\psi_i, \psi_{i_2}]_+ \psi_{i_1} \wedge \psi_{i_3} \wedge \cdots + \cdots. \end{aligned}$$

这个对应给出了  $\mathcal{A}_N$  与  $2^{2N} \times 2^{2N}$  矩阵代数的同构.

该代数的中心只有标量算子这件事还可以如下另证. 设  $a$  为  $\mathcal{A}_N$  的一个中心元. 因为  $a$  与

$$H_0 = \sum_{i>0} \psi_{-i} \psi_i^* - \sum_{i<0} \psi_i^* \psi_{-i}$$

交换, 从而  $a$  的电荷量为 0. 记

$$a = \sum c(m_1, \dots, m_r, n_1, \dots, n_r) \psi_{m_1} \cdots \psi_{m_r} \psi_{n_1}^* \cdots \psi_{n_r}^*$$

[规定  $r = 0$  的那一项是常数项]; 这里我们承认等号右边的那些  $\psi_{m_1} \cdots \psi_{m_r} \psi_{n_1}^* \cdots \psi_{n_r}^*$  是线性无关的. 注意到,

$$[\psi_{m_1} \cdots \psi_{m_r} \psi_{n_1}^* \cdots \psi_{n_r}^*, \psi_i]$$

非零当且仅当  $i$  等于某个  $-n_l$ , 并且此时它等于

$$(-1)^{r-l} \psi_{m_1} \cdots \psi_{m_r} \psi_{n_{l-1}}^* \psi_{n_{l+1}}^* \cdots \psi_{n_r}^*.$$

这些项线性无关, 从而每一项的系数都必须是 0. 同理考虑与  $\psi_i^*$  的交换子, 也能得到类似结果.

2. 假设  $\dim V(|u\rangle) = N + r$ . 对于适当的  $g \in \mathbf{G}$ , 有

$$\begin{aligned} T_g V(|u\rangle) &= \bigoplus_{i > -r} \mathbb{C} \psi_i \\ &= V(\psi_{-r+\frac{1}{2}} \cdots \psi_{-\frac{1}{2}} |\text{vac}\rangle). \end{aligned}$$

由(9.5)及其下方的注记, 可得

$$V(|u\rangle) = V(g \psi_{-r+\frac{1}{2}} \cdots \psi_{-\frac{1}{2}} |\text{vac}\rangle),$$

但由于  $g$  保持电荷量, 这就与  $|u\rangle$  电荷量为 0 的假设矛盾.

3. 略.

4. (a)  $\frac{x_1^4}{8} + \frac{x_1^2 x_2}{2} - \frac{x_2^2}{2} - x_4,$   
 (b)  $\frac{x_1^6}{45} - \frac{x_1^3 x_3}{3} + x_1 x_5 - x_3^2,$   
 (c)  $\frac{x_1^7}{144} + \frac{x_1^5 x_2}{24} - \frac{x_1^3 x_2^2}{12} + \frac{x_1 x_2^3}{6} - \frac{x_1^4 x_3}{24} - \frac{x_1^2 x_2 x_3}{2} - \frac{x_2^2 x_3}{2} - \frac{x_1 x_3^2}{2} - \frac{x_1^3 x_4}{6} +$   
 $x_1 x_2 x_4 - x_3 x_4 + x_1 x_6.$

## 第 10 节

1. 利用  $\psi_{\frac{1}{2}}^* \psi_m(\mathbf{x}) = p_{-m-\frac{1}{2}}(\mathbf{x}) - \psi_m(\mathbf{x}) \psi_{\frac{1}{2}}^*$ , 以及

$$h_{-m-\frac{1}{2}, -n-\frac{1}{2}}(\mathbf{x}) = -h_{-m+\frac{1}{2}, -n-\frac{3}{2}}(\mathbf{x}) + p_{-m-\frac{1}{2}}(\mathbf{x}) q_{-n+1/2}(\mathbf{x}).$$

2. 略.

- 3.

$$(\chi_{(3)}, \chi_{(2,1)}, \chi_{(1^3)}) = \left( x_3, x_2 x_1, \frac{x_1^3}{6} \right) \mathbf{A},$$

$$\text{其中 } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

而  ${}^t\mathbf{A}^{-1}$  将  $(\partial_3, \partial_2 \partial_1, \partial_1^3)$  变为

$$(\chi_{(3)}(\partial_{\mathbf{x}}), \chi_{(2,1)}(\partial_{\mathbf{x}}), \chi_{(1^3)}(\partial_{\mathbf{x}})).$$

4. 略.