

# 辛几何初步

(学习笔记) 1.80 版

曲豆豆 整理

2024 年 5 月 13 日



图: 曲豆豆穿上博士服, 就好像真的是博士一样.

# 目录

<b>0</b>	<b>物理学背景</b>	<b>5</b>
0.1	经典力学的基本方程	5
0.1.1	欧拉-拉格朗日方程	5
0.1.2	哈密顿正则方程	6
0.1.3	哈密顿-雅可比方程	7
0.2	哈密顿力学的几何解释	9
0.2.1	哈密顿向量场	9
0.2.2	余切丛上的典范微分	10
0.2.3	泊松括号	11
0.3	从经典物理到量子物理	12
<b>1</b>	<b>辛代数</b>	<b>14</b>
1.1	辛空间	14
1.1.1	反对称双线性型及其标准形	14
1.1.2	外代数与辛形式	16
1.1.3	正交性	18
1.1.4	辛空间的例子	19
1.2	辛映射与辛群	21
1.2.1	辛群的概念与基本性质	21
1.2.2	辛平延	23
1.2.3	基本辛矩阵	25
1.3	子空间	27
1.3.1	辛子空间与迷向子空间	28
1.3.2	子空间的辛等价不变量	30
1.3.3	拉格朗日子空间	32
1.4	拉格朗日-格拉斯曼流形	35
1.4.1	辛群在 $\mathcal{L}(V)$ 上的作用	35
1.4.2	$\mathcal{T}(L)$ 的仿射空间结构	37
1.5	实辛空间的复结构	40

1.5.1	$\mathbb{R}^{2n}$ 的标准辛结构与复结构	41
1.5.2	实辛空间的 $\omega$ -正定相容复结构, Kähler 空间	44
1.5.3	复化辛空间的正定拉格朗日子空间	48
1.5.4	Siegel 上半平面	52
<b>2</b>	<b>辛流形</b>	<b>58</b>
2.1	辛流形的基本概念与性质	58
2.1.1	辛流形, 辛映射, 简单例子	58
2.1.2	拉格朗日子流形, 生成函数	61
2.1.3	更多例子: 余法丛, 拉格朗日-格拉斯曼流形	66
2.2	Darboux-Moser-Weinstein 理论	71
2.2.1	同痕, 含时向量场, Cartan 公式	72
2.2.2	Moser 技巧, Darboux 定理	74
2.2.3	管状邻域, 同伦算子, 相对 Moser 定理 (待补)	77
2.2.4	Weinstein 邻域定理 (待补)	77
2.3	Kähler 流形	77
2.3.1	近复结构与复结构	77
2.3.2	复切丛, $(p, q)$ -形式, $J$ -全纯曲线	80
2.3.3	$\bar{\partial}$ 算子, Dolbeault 上同调	85
2.3.4	Kähler 流形, 厄米特结构	88
2.3.5	例子: 非 Kähler 的 4 维紧辛流形	94
2.4	余伴随轨道	96
2.4.1	李群李代数回顾	97
2.4.2	余伴随表示, 李群在辛流形上的作用	101
2.4.3	李子代数与李子群, 李群的辛约化	103
2.4.4	余伴随轨道 $G^\# \omega$ 与 $G$ -辛流形	106
2.4.5	Kirillov-Kostant-Souriau 定理, 简单例子与注记	108
2.5	复射影空间	112
2.5.1	Fubini-Study 度量	112
2.5.2	$\mathbb{CP}^n$ 的 Kähler 结构	117
2.5.3	$\mathbb{CP}^n$ 的余伴随轨道结构	119

<b>3</b>	<b>哈密顿系统</b>	<b>121</b>
3.1	哈密顿向量场	121
3.1.1	哈密顿向量场与哈密顿算子	121
3.1.2	局部哈密顿向量场	125
3.1.3	例子: 带电粒子在电磁场中的运动	127
3.1.4	例子: 黎曼流形, 测地线	128
3.1.5	例子: 李群的余切丛	131
3.2	泊松括号 (II)	133
3.2.1	泊松括号的基本性质	134
3.2.2	泊松 2-向量场	137
3.2.3	Schouten-Nijenhuis 括号	139
3.2.4	泊松流形及其基本例子	142
3.2.5	辛叶	148
3.3	Liouville 可积系统	150
3.3.1	定义与基本注记	150
3.3.2	例子: 球面摆, 双摆, 混沌现象	152
3.3.3	例子: Kepler 问题, 两体问题, 三体问题	157
3.3.4	例子: Toda 链, Lax 算子表示	161
3.3.5	Adler-Kostant-Symes 构造	170
3.4	作用-角坐标	177
3.4.1	Liouville 环面	178
3.4.2	Arnold-Liouville 定理	182

# 0. 物理学背景

“一切的一切都导向这样一个结果: 物理学从来就没有存在过, 将来也不会存在. 我知道自己这样做是不负责任的, 但别无选择.”

——刘慈欣《三体》

辛结构来自于理论力学, 尤其是量子化 (即从经典物理迈向量子物理的过程). 为给学习辛几何提供充足的动机, 这里有必要简要回忆一下有关的物理背景, 即使本章所介绍的物理学内容并不详细也并不全面. 读者若想学习更多物理, 可以查阅如下资料: Vaisman [43] 的第一章, Woodhouse [45], Arnold [5] 的第三章, Abraham-Marsden [1] 的第三, 五章, Siegel-Moser [36] 的第一章, Kirillov [21] 的第 15.4 节.

## 0.1 经典力学的基本方程

经典力学的主要目的是描述物理系统随时间的演化. 在经典力学中, 物理系统的状态被某个  $n$  维 (光滑, 实) 流形  $M$  上的点  $q$  所表示. 这里的流形  $M$  称为位形空间 (configuration space). 流形  $M$  上的点  $q$  在局部坐标下可表示为  $q = (q^1, q^2, \dots, q^n)^T$ ; 这里的坐标  $q^i, i = 1, \dots, n$  称为位置变量. 物理系统随时间的演化可表示为流形  $M$  上的 (光滑) 曲线  $t \mapsto q(t)$ , 局部坐标表示为  $t \mapsto q^i(t), i = 1, \dots, n$ .

### 0.1.1 欧拉-拉格朗日方程

拉格朗日力学认为, 决定物理系统随时间演化的是物理系统的拉格朗日量. 物理系统的拉格朗日量  $L = L(q, \dot{q}; t)$  是  $TM \times \mathbb{R}$  上的函数, 其中  $TM$  是位形空间  $M$  的切丛; 分量  $\dot{q}$  的物理含义是速度, 几何上看是切空间  $T_q M$  中的向量. 在具体的物理问题中, 拉格朗日量通常为

$$L = T - V,$$

其中  $T, V$  分别为该物理系统的动能与势能.

众所周知,  $M$  上的光滑曲线  $\gamma: t \mapsto \gamma(t)$  可以自然提升为  $TM$  上的曲线  $\tilde{\gamma}: t \mapsto (\gamma(t), \dot{\gamma}(t))$ . 对于  $M$  上的曲线  $\gamma: [t_0, t_1] \rightarrow M$ , 定义

$$\mathcal{S}[\gamma] := \int_{t_0}^{t_1} L(\gamma(t), \dot{\gamma}(t); t) dt,$$

这里的  $\mathcal{S}$  称为**作用量**, 它是关于演化路径  $\gamma$  的泛函.

如果某物理系统在  $t = t_0, t_1$  时刻的状态分别为  $\mathbf{q}_0, \mathbf{q}_1$ , 则拉格朗日力学认为, 该物理系统从  $\mathbf{q}_0$  到  $\mathbf{q}_1$  的演化路径  $\mathbf{q}(t)$  是满足  $\gamma(t_0) = \mathbf{q}_0, \gamma(t_1) = \mathbf{q}_1$  的所有可能的路径  $\gamma$  当中使得作用量  $\mathcal{S}[\gamma]$  取到极值的那一条, 这就是著名的**最小作用量原理**. 利用变分法容易推出 (这里从略), 上述最小作用量原理等价于演化路径  $\mathbf{q}(t)$  满足如下方程:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial L}{\partial q^i} = 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad (0.1)$$

其中  $L = L(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t); t)$ . 此方程是未知函数  $\mathbf{q}(t)$  的关于时间  $t$  的二阶常微分方程, 称为**欧拉-拉格朗日方程**, 这是拉格朗日力学的基本方程.

### 0.1.2 哈密顿正则方程

切丛  $TM$  上的点  $(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  能够表示物理系统在某时刻的状态 (位置) 以及状态的瞬时变化 (速度). 而物理学中, **动量** 往往是比速度更加基本的物理量, 我们也可以用位置与动量来描述物理系统的状态及其瞬时变化. 若  $L = L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}; t)$  是物理系统的拉格朗日量, 则物理系统的**动量**在局部坐标下的表示为

$$p_i := \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}, \quad i = 1, \dots, n.$$

几何上看, 动量  $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_n)$  是余切空间  $T^*_\mathbf{q}M$  中的向量. 拉格朗日量  $L$  诱导了

$$\begin{aligned} TM &\rightarrow T^*M \\ (\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) &\mapsto (\mathbf{q}, \mathbf{p}), \end{aligned}$$

即**勒让德变换**, 其中  $T^*M$  是位形空间  $M$  的余切丛, 它在物理学中也叫做**相空间**.

相应地, 支配系统演化的拉格朗日量  $L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}; t)$  也有余切丛的版本. 引入

$$H(\mathbf{q}, \mathbf{p}; t) := \sum_{i=1}^n p_i \dot{q}^i - L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}; t),$$

上述  $H = H(\mathbf{q}, \mathbf{p}; t)$  是  $T^*M \times \mathbb{R}$  上的函数, 称为该物理系统的**哈密顿量**. 在具体的物理问题中, 哈密顿量通常具有表达式

$$H = T + V,$$

其中  $T, V$  分别为系统的总动能与势能. 换言之, 哈密顿量往往是该物理系统的总能量.

哈密顿力学认为, 哈密顿量  $H = H(\mathbf{q}, \mathbf{p}; t)$  支配物理系统演化, 物理系统的演化路径  $t \mapsto (\mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t))$  满足如下方程:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{q}} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} \\ \dot{\mathbf{p}} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}} \end{cases}, \quad (0.2)$$

这是未知函数  $(\mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t))$  关于时间变量  $t$  的一阶常微分方程, 称为**哈密顿正则方程**, 是哈密顿力学的基本方程. 注意这里采用紧凑记号  $\frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}} = \left( \frac{\partial H}{\partial q^1}, \dots, \frac{\partial H}{\partial q^n} \right)$ , 而  $\frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}}$  也类似. 容易验证, 哈密顿正则方程(0.2)与欧拉-拉格朗日方程(0.1)等价.

### 0.1.3 哈密顿-雅可比方程

若物理系统从  $t = 0$  时刻的初始状态  $\mathbf{q}(0) = \mathbf{a} = (a^1, \dots, a^n)^T$  经过时间  $t$  之后演化至状态  $\mathbf{q} = \mathbf{q}(t)$ , 则我们知道, 演化路径  $\mathbf{q}(t)$  是所有可能的路径  $\gamma$  当中使得作用量  $S[\gamma]$  取到极值的那一条; 我们把相应的极值记作  $S$ . 则  $S$  与初状态  $\mathbf{a}$ , 末状态  $\mathbf{q}$  以及初, 末状态的时间间隔  $t$  有关, 即  $S = S(\mathbf{q}, t; \mathbf{a})$ . 用变分法可以导出 (此处从略) 最小作用量  $S = S(\mathbf{q}, t; \mathbf{a})$  所满足的偏微分方程, 如下:

$$H\left(\mathbf{q}, \frac{\partial S}{\partial \mathbf{q}}; t\right) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0, \quad (0.3)$$

其中  $H = H(\mathbf{q}, \mathbf{p}; t)$  是系统的哈密顿量. 此方程称为哈密顿-雅可比方程, 同样可以认为是经典力学的基本方程.

给定系统的初始位置  $\mathbf{a}$  以及初始动量  $\mathbf{b}$ , 如何通过求解哈密顿-雅可比方程来得到该系统随时间的演化  $\mathbf{q}(t)$  呢? 设  $S = S(\mathbf{q}, t; \mathbf{a})$  是哈密顿-雅可比方程(0.3)的一个解, 并且假设  $\det\left(\frac{\partial^2 S}{\partial q^i \partial a^j}\right) \neq 0$ , 则由隐函数定理可知方程组

$$\frac{\partial S}{\partial a^i} = b_i, \quad i = 1, \dots, n$$

(局部) 唯一地确定了函数

$$q^i(t) = \psi^i(t; \mathbf{a}, \mathbf{b}), \quad i = 1, \dots, n.$$

之后再令

$$p_i(t) := \frac{\partial S}{\partial q^i}(\mathbf{q}(t), t; \mathbf{a}) = \varphi_i(t; \mathbf{a}, \mathbf{b}), \quad i = 1, \dots, n,$$

则可以直接验证如此构造的  $(\mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t))$  满足哈密顿正则方程(0.2). 这是因为, 将哈密顿-雅可比方程(0.3)两边求偏导  $\frac{\partial}{\partial a^j}$  可得

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial^2 S}{\partial q^i \partial a^j} + \frac{\partial S}{\partial t \partial a^j} = 0;$$

另一方面, 将方程  $\frac{\partial S}{\partial a^j} = b_j$  两边对时间  $t$  求导可得

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 S}{\partial q^i \partial a^j} \dot{q}^i + \frac{\partial S}{\partial t \partial a^j} = 0,$$

联立上述两式, 整理得

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 S}{\partial q^i \partial a^j} \left( \frac{\partial H}{\partial p_i} - \dot{q}^i \right) = 0, \quad j = 1, \dots, n,$$

再由非退化性假设  $\det\left(\frac{\partial^2 S}{\partial q^i \partial a^j}\right) \neq 0$  立刻得到  $\dot{q}^i = \frac{\partial H}{\partial p_i}$ , 恰为哈密顿正则方程(0.2)的第一式. 类似地, 将哈密顿-雅可比方程(0.3)两边求偏导  $\frac{\partial}{\partial q^i}$  得到

$$\frac{\partial H}{\partial q^i} + \sum_{j=1}^n \frac{\partial H}{\partial p_j} \frac{\partial^2 S}{\partial q^i \partial q^j} + \frac{\partial^2 S}{\partial q^i \partial t} = 0;$$



又将方程  $p_i = \frac{\partial S}{\partial q^i}$  两边对时间  $t$  求导得

$$\dot{p}_i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 S}{\partial q^i \partial q^j} \dot{q}^j + \frac{\partial^2 S}{\partial q^i \partial t}.$$

比较上述两式并注意  $\frac{\partial H}{\partial p_j} = \dot{q}^j$ , 易得  $\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q^i}$ , 即哈密顿正则方程(0.2)的第二式.

## 0.2 哈密顿力学的几何解释

可以用更加几何的语言来重新描述哈密顿力学.

### 0.2.1 哈密顿向量场

哈密顿正则方程(0.2)可以改写为如下矩阵形式:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{p} \end{pmatrix} = \mathcal{P} \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}} \\ \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} \end{pmatrix}^T, \quad (0.4)$$

其中  $2n \times 2n$  反对称矩阵

$$\mathcal{P} = \begin{pmatrix} & I_n \\ -I_n & \end{pmatrix} \quad (0.5)$$

称为哈密顿算子 (也俗称“哈密顿结构”). 引入  $T^*M$  上的切向量场

$$X_H := \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial}{\partial q^i} - \frac{\partial H}{\partial q^i} \frac{\partial}{\partial p_i} \right), \quad (0.6)$$

称为哈密顿向量场, 则哈密顿正则方程(0.2)可改写为

$$\frac{d}{dt} \gamma(t) = X_H(\gamma(t)),$$

其中未知函数  $\gamma(t) = (\mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t))$  视为  $T^*M$  上的曲线. 换言之, 物理系统的演化路径  $\gamma(t) = (\mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t))$  是沿哈密顿向量场  $X_H$  的积分曲线. 更一般地, 对于  $T^*M$  上的函数  $f = f(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ , 当  $(\mathbf{q}, \mathbf{p})$  随时间演化时,  $f$  自然视为关于时间  $t$  的函数, 即  $f(t) = f(\mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t))$ . 在此意义下, 容易验证

$$\frac{df}{dt} = \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial f}{\partial q^i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q^i} \right) = X_H(f). \quad (0.7)$$

## 0.2.2 余切丛上的典范微分

我们已在局部坐标下引入辛算子(0.5)与哈密顿向量场(0.6). 这里给出它们在  $T^*M$  的内蕴定义. 对于流形  $M$ , 记  $\pi: T^*M \rightarrow M$  为典范投影, 则对任意  $(q, \rho) \in T^*M$  (其中  $\rho \in T_q^*M$ ), 典范投影  $\pi$  诱导拉回映射

$$\pi_{(q,\rho)}^*: T_q^*M \rightarrow T_{(q,\rho)}^*(T^*M).$$

注意到余切丛  $T^*M$  上的点  $(q, \rho)$  对应着余切向量  $\rho \in T_q^*M$ . 于是, 在  $T^*M$  上有自然的微分 1-形式  $\theta = \theta_M \in \Omega^1(T^*M)$ , 使得对任意  $(q, \rho) \in T^*M$ ,

$$\theta|_{(q,\rho)} := \pi_{(q,\rho)}^*(\rho). \quad (0.8)$$

上式所确定的  $\theta \in \Omega^1(T^*M)$  称为余切丛  $T^*M$  上的**典范 1-形式**.

取定  $M$  的一组局部坐标  $(q^i)$ , 将此局部坐标扩充为  $T^*M$  的局部坐标  $(q^i, p_i)$ , 使得  $p_i$  表示余切向量在基  $\{dq^i\}$  下的各分量系数. 容易验证, 在如此  $(q^i, p_i)$  下,  $\theta$  具有表达式

$$\theta = p_i dq^i := \sum_{i=1}^n p_i dq^i. \quad (0.9)$$

下面通过典范 1-形式  $\theta$  对切向量场的作用, 给出  $\theta$  的内蕴表达:

**题 0.1.** 设  $M$  为光滑流形,  $\theta \in \Omega^1(T^*M)$  为其典范 1-形式, 则对余切丛  $T^*M$  上的切向量场  $\tilde{X}$ , 函数  $\theta(\tilde{X}) \in C^\infty(T^*M)$  在点  $(q, \rho) \in T^*M$  的值满足

$$\theta(\tilde{X})|_{(q,\rho)} = \rho \left( (\pi_{(q,\rho)})_* \tilde{X} \right). \quad (0.10)$$

[提示: 这是(0.8)的直接推论, 也可用局部表达式(0.9)直接验证.]

典范 1-形式  $\theta$  也可用泛性质来刻画. 注意  $M$  上的 1-形式  $\alpha \in \Omega^1(M)$  是余切丛  $T^*M$  的光滑截面, 即光滑映射  $\alpha: M \rightarrow T^*M$ . 在此意义下, 容易验证存在唯一的  $\theta \in \Omega^1(T^*M)$  使得

$$\alpha^* \theta = \alpha, \quad \forall \alpha \in \Omega^1(M). \quad (0.11)$$

满足上述泛性质的  $\theta$  恰为  $T^*M$  上的典范 1-形式.

引入  $\omega = \omega_M \in \Omega^2(T^*M)$  如下:

$$\omega := -d\theta, \quad (0.12)$$

称为余切丛  $T^*M$  的**典范辛结构**. 在局部坐标  $(q^i, p_i)$  下,  $\omega_M$  具有表达式

$$\omega = dq^i \wedge dp_i := \sum_{i=1}^n dq^i \wedge dp_i.$$

作为微分 2-形式,  $\omega$  使得  $T^*M$  的每一点处的切空间具有反对称双线性型; 在局部坐标  $(q^i, p_i)$  下, 该反对称双线性型的矩阵表示为  $\begin{pmatrix} & I_n \\ -I_n & \end{pmatrix}$ , 恰为(0.5)中的哈密顿算子(这里是凑巧, 具体见后文3.1.1小节).

由于双线性型  $\omega$  非退化, 从而对于  $T^*M$  上的任意 (光滑) 函数  $H = H(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ , 总可以谈论函数  $H$  关于  $\omega$  的梯度.  $H$  关于  $\omega$  的**梯度**  $\text{grad } H \in \text{Vect}(T^*M)$  首先是  $T^*M$  上的切向量场, 它被方程

$$\omega(\text{grad } H, X) = dH(X), \quad \forall X \in \text{Vect}(T^*M) \quad (0.13)$$

所唯一确定. 在局部坐标  $(q^i, p_i)$  下, 容易验证

$$\text{grad } H = \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial}{\partial q^i} - \frac{\partial H}{\partial q^i} \frac{\partial}{\partial p_i} \right) = X_H.$$

也就是说, 哈密顿向量场  $X_H$  恰为  $H$  关于典范辛形式  $\omega_M$  的梯度向量场. 此外注意, 用**内乘**(缩并)的语言可以将(0.13)改写为更紧凑的形式:

$$X_H \lrcorner \omega = dH. \quad (0.14)$$

事实上, 对任何光滑函数  $f \in C^\infty(T^*M)$ , 总可谈论相应的哈密顿向量场  $X_f := \text{grad } f$ , 它由关系  $X_f \lrcorner \omega = df$  所唯一确定, 详见后文3.1.1小节.

### 0.2.3 泊松括号

对于  $T^*M$  上的光滑函数  $f, g$ , 引入

$$\{f, g\} = \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial f}{\partial q^i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q^i} \right), \quad (0.15)$$

则  $\{f, g\}$  也是  $T^*M$  上的光滑函数, 称为  $f$  与  $g$  的泊松括号. 在此记号下, 容易验证哈密顿正则方程(0.2)可改写为

$$\dot{q}^i = \{q^i, H\}, \quad \dot{p}_i = \{p_i, H\}, \quad i = 1, \dots, n.$$

一般地,  $T^*M$  上的函数  $f = f(\mathbf{q}, \mathbf{p})$  随时间演化的方程(0.7)可改写为

$$\frac{df}{dt} = \{f, H\}.$$

事实上, 泊松括号  $\{, \}$  是整体定义的, 与局部坐标  $(q^i, p_i)$  的选取无关. 直接验证可知, 下述定义与 (0.15) 式等价:

**定义 0.2.** 余切丛  $T^*M$  上的泊松括号  $\{, \}$  是指如下映射:

$$\begin{aligned} \{, \} : C^\infty(T^*M) \times C^\infty(T^*M) &\rightarrow C^\infty(T^*M) \\ (f, g) &\mapsto \{f, g\} := \omega_M(X_f, X_g). \end{aligned} \quad (0.16)$$

其中  $\omega_M$  是  $T^*M$  的典范辛结构,  $X_f, X_g$  分别为函数  $f, g$  的哈密顿向量场.

可见  $\{, \}$  是反对称, 双线性的. 再注意(0.14)式, 可知

$$\{f, g\} = -X_f(g) = X_g(f).$$

### 0.3 从经典物理到量子物理

对于给定的经典物理系统, 我们希望找到它在量子物理中的相应版本. 寻找经典物理系统的量子版本的过程就是所谓量子化 (quantization).

在量子物理中, 物理系统的状态由某个希尔伯特空间  $\mathcal{H}$  中的向量来表示<sup>1</sup>, 物理量由  $\mathcal{H}$  上的厄米特算子来表示; 量子系统随时间的演化由某个特定的物理量  $\hat{H}$  所支配, 这里的  $\hat{H}$  称为量子系统的哈密顿量; 物理量  $\hat{f}$  随时间的演化满足薛定谔方程

$$\frac{d\hat{f}}{dt} = -\frac{i}{\hbar}[\hat{f}, \hat{H}],$$

<sup>1</sup>本书中的希尔伯特空间都默认在复数域  $\mathbb{C}$  上.

其中  $i$  为虚数单位, 实数  $\hbar$  为普朗克常数,  $[\hat{f}, \hat{H}] = \hat{f}\hat{H} - \hat{H}\hat{f}$  是线性算子的交换子 (也叫李括号). 经典物理与量子物理的基本原理对照如下:

	经典物理	量子物理
态空间	相空间 $T^*M$	希尔伯特空间 $\mathcal{H}$
态	点 $(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \in T^*M$	向量 $ \psi\rangle \in \mathcal{H}$
物理量	函数 $f(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \in C^\infty(T^*M)$	$\mathcal{H}$ 上的厄米特算子 $\hat{f}$
系统随时间演化	$\frac{df}{dt} = \{f, H\}$	$\frac{d\hat{f}}{dt} = -\frac{i}{\hbar}[\hat{f}, \hat{H}]$

给定经典物理系统  $T^*M$ , 我们希望找到一个希尔伯特空间  $\mathcal{H}$ , 以及映射  $T^*M \rightarrow \mathcal{H}$ , 使得任意函数  $f \in C^\infty(T^*M)$  都对应于  $\mathcal{H}$  上的某个厄米特算子  $\hat{f}$ , 并且满足

- 常值函数  $1 \in C^\infty(T^*M)$  对应于恒等算子  $\hat{1} = \text{id}_{\mathcal{H}}$ ;
- 对任意  $f, g \in C^\infty(T^*M)$ ,  $\widehat{\{f, g\}} = -\frac{i}{\hbar}[\hat{f}, \hat{g}]$ .

这便是我们所希望的量子化. 一个自然的问题是, 满足上述性质的量子化一定存在吗? 如果不存在, 那能否退而求其次? 这些问题留待后文探讨.

# 1. 辛代数

“是的,整个人类历史也是偶然,从石器时代到今天,都没什么重大变故,真幸运.但既然是幸运,就有结束的一天;现在我告诉你,结束了,做好思想准备吧.”

——刘慈欣《三体》

任取光滑流形  $M$ , 余切丛  $T^*M$  与其典范辛结构  $\omega_M$  (见(0.12)式) 构成的二元组  $(T^*M, \omega_M)$  是辛流形的重要例子. 所谓辛流形, 也就是辛几何的研究对象, 局部上看是辛空间. 而辛空间则是  $\mathbb{R}$ -线性空间附加某种额外结构 (所谓“辛结构”). 本章介绍与辛空间有关的线性代数知识. 这方面的课外读物主要如下: Vaisman[43] 的第二章, Abraham-Marsden[1] 的第三章, 以及 E.Artin[6].

## 1.1 辛空间

我们采用如下记号约定:

- $\mathbb{F}$  是特征零域, 即  $\text{char } \mathbb{F} = 0$  (通常取  $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ );
- $V$  是有限维  $\mathbb{F}$ -线性空间, 并且  $\dim_{\mathbb{F}} V = m$ , 其中  $m$  是正整数.
- 若  $\underline{e} = (e_1, \dots, e_m)$  为线性空间  $V$  的一组  $\mathbb{F}$ -基, 则对偶空间  $V^*$  的相应的对偶基记为  $\underline{e}^* := (e_1^*, \dots, e_m^*)$ . 上述基向量满足关系  $e_i^*(e_j) = \delta_{ij}$ .

### 1.1.1 反对称双线性型及其标准形

**定义 1.1.** 辛空间是指二元组  $(V, \omega)$ , 其中:

- $V$  是有限维  $\mathbb{F}$ -线性空间,
- $\omega: V \times V \rightarrow \mathbb{F}$  是非退化, 反对称双线性型, 称为  $V$  上的辛结构.

所谓非退化, 是指对任意  $\mathbf{v} \in V$ , 如果  $\omega(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = 0$  对任意  $\mathbf{w} \in V$  都成立, 则  $\mathbf{v} = 0$ . 再注意到  $\text{char } \mathbb{F} = 0$  (通常取  $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ ), 从而由  $\omega$  的反对称性可知  $\omega(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = 0$  对任意  $\mathbf{v} \in V$  都成立.

任取辛空间  $V$  的一组基  $\underline{\mathbf{e}} = (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_m)$ , 则双线性型  $\omega$  在该基下的矩阵  $\omega_{\underline{\mathbf{e}}} = (\omega_{ij})$ , 其矩阵元

$$\omega_{ij} = \omega(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j), \quad 1 \leq i, j \leq m.$$

双线性型  $\omega$  非退化  $\Leftrightarrow$  矩阵  $\omega_{\underline{\mathbf{e}}}$  满秩; 双线性型  $\omega$  反对称  $\Leftrightarrow$  矩阵  $\omega_{\underline{\mathbf{e}}}$  反对称.

不妨将辛空间与内积空间对比, 后者具有的内积是对称双线性型, 可以特殊选取一组基 (标准正交基) 使得内积在该基下的矩阵是单位阵; 而对于辛空间, 也可以特殊选取一组基, 使得辛结构  $\omega$  在该基下的矩阵具有某种标准形. 一般结论如下:

**性质 1.2.** 设  $V$  为  $m$  维  $\mathbb{R}$ -线性空间.

1. 若  $s$  是  $V$  上的对称双线性型, 则存在  $p, q \geq 0$  ( $p + q \leq m$ ) 以及  $V$  的一组基  $\underline{\mathbf{e}}$ , 使得  $s$  在基  $\underline{\mathbf{e}}$  下的矩阵  $s_{\underline{\mathbf{e}}}$  形如

$$s_{\underline{\mathbf{e}}} = \begin{pmatrix} I_p & & \\ & -I_q & \\ & & O \end{pmatrix}.$$

2. 若  $\omega$  是  $V$  上的反对称双线性型, 则存在  $0 \leq r \leq \frac{m}{2}$ , 以及  $V$  的一组基  $\underline{\mathbf{e}}$ , 使得  $\omega$  在基  $\underline{\mathbf{e}}$  下的矩阵  $\omega_{\underline{\mathbf{e}}}$  形如

$$\omega_{\underline{\mathbf{e}}} = \begin{pmatrix} & I_r & \\ -I_r & & \\ & & O \end{pmatrix}.$$

证明. 这是线性代数中众所周知的结果. 满足 (1) 所述性质的基  $\underline{\mathbf{e}}$  可由众所周知的 **Gram-Schmidt** 正交化方法来构造; 而 (2) 的证明思路也类似 Gram-Schmidt 正交化, 大致步骤如下: 不妨  $\omega \neq 0$ , 则存在非零向量  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in V$  使得  $\omega(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) \neq 0$ . 适当将  $\mathbf{v}_2$  乘以常数倍, 使得  $\omega(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = 1$ . 易知  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$  线

性无关, 从而子空间

$$V_1 := \text{span}_{\mathbb{R}}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$$

的维数是 2, 且  $\omega|_{V_1}$  在基  $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$  下的矩阵为  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ . 再考虑子空间

$$V_1^\perp := \{\mathbf{v} \in V \mid \omega(\mathbf{v}, \mathbf{v}_1) = \omega(\mathbf{v}, \mathbf{v}_2) = 0\},$$

则容易验证  $V_1 \cap V_1^\perp = \{0\}$ . 再注意对任意  $\mathbf{v} \in V$ ,

$$\mathbf{v} - \omega(\mathbf{v}, \mathbf{v}_2)\mathbf{v}_1 + \omega(\mathbf{v}, \mathbf{v}_1)\mathbf{v}_2 \in V_1^\perp,$$

从而可知  $V = V_1 \oplus V_1^\perp$ . 之后在子空间  $(V_1^\perp, \omega|_{V_1^\perp})$  上继续上述操作即可.  $\square$

上述性质中的第 (2) 条, 也就是反对称双线性型的标准形的部分, 不仅适用于实数域  $\mathbb{R}$ , 实际上在任何满足  $\text{char } \mathbb{F} \neq 2$  的域  $\mathbb{F}$  上都成立. 特别地, 对于辛空间  $(V, \omega)$ , 注意辛结构  $\omega$  非退化, 从而由性质 1.2 立刻推出:

**推论 1.3.** 设  $(V, \omega)$  是  $m$  维辛空间, 则存在整数  $n$  使得  $m = 2n$ , 并且存在  $V$  的基  $\underline{\mathbf{e}} = (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n, \mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_n)$ , 使得

$$\omega_{\underline{\mathbf{e}}} = \mathbf{J} := \begin{pmatrix} & \mathbf{I}_n \\ -\mathbf{I}_n & \end{pmatrix}. \quad (1.1)$$

特别地, 辛空间一定是偶数维空间. 满足上述性质的基  $\underline{\mathbf{e}}$  称为辛基.

辛结构  $\omega$  在辛基下的矩阵  $\mathbf{J}$  恰为(0.5)中的辛算子.

### 1.1.2 外代数与辛形式

辛结构  $\omega$  作为反对称双线性型, 也可以用外代数的语言来表述. 回忆一些相关记号. 设  $V$  为  $m$  维  $\mathbb{F}$ -线性空间,  $0 \leq p \leq m$ , 则  $V$  上的  $p$ -外向量空间

$$\bigwedge^p V := \text{span}_{\mathbb{F}}\{\mathbf{v}_{i_1} \wedge \mathbf{v}_{i_2} \wedge \dots \wedge \mathbf{v}_{i_p} \mid 1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq m, \mathbf{v}_{i_j} \in V\},$$

并特别规定  $\bigwedge^0 V = \mathbb{F}$ . 若  $\underline{\mathbf{e}} = (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_m)$  为  $V$  的一组基, 则

$$\{\mathbf{e}_{i_1} \wedge \mathbf{e}_{i_2} \wedge \dots \wedge \mathbf{e}_{i_p} \mid 1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq m\}$$



构成  $\bigwedge^p V$  的一组基, 从而  $\dim_{\mathbb{F}} \bigwedge^p V = \binom{m}{p}$ . 记  $\mathcal{A}^p(V, \mathbb{F})$  为  $V$  上的取值于  $\mathbb{F}$  的全反称  $p$  重线性函数构成的线性空间, 对于  $\mathbf{u}_1^*, \dots, \mathbf{u}_p^* \in V^*$  以及  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p \in V$ , 通过

$$\mathbf{u}_1^* \wedge \cdots \wedge \mathbf{u}_p^*(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p) := \det(\mathbf{u}_i^*(\mathbf{v}_j))$$

自然将  $p$ -外向量  $\mathbf{u}_1^* \wedge \cdots \wedge \mathbf{u}_p^* \in \bigwedge^p V^*$  视为  $\mathcal{A}^p(V, \mathbb{F})$  中的元素, 这给出了同构

$$\mathcal{A}^p(V, \mathbb{F}) \cong \bigwedge^p V^*.$$

特别地, 辛空间  $(V, \omega)$  的辛结构  $\omega \in \mathcal{A}^2(V, \mathbb{F})$  自然视为  $\bigwedge^2 V^*$  中的元素. 容易验证, 任取  $V$  的一组基  $\mathbf{e} = (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_m)$ , 记相应的对偶基为  $\mathbf{e}^* = (\mathbf{e}_1^*, \dots, \mathbf{e}_m^*)$ , 则

$$\omega_{\mathbf{e}} = (\omega_{ij}) \quad \Leftrightarrow \quad \omega = \sum_{i < j} \omega_{ij} \mathbf{e}_i^* \wedge \mathbf{e}_j^*,$$

其中矩阵元  $\omega_{ij} := \omega(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)$ . 以上是辛结构的矩阵表示与外向量表示之间的关系. 用外向量的语言, 可将性质1.2(2)与推论1.3改写为:

**推论 1.4.** 设  $V$  是  $m$  维  $\mathbb{F}$ -线性空间,  $\omega \in \bigwedge^2 V^*$ , 则存在自然数  $r \leq \frac{m}{2}$  以及  $V$  的一组基  $\mathbf{e} = (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_m)$ , 使得

$$\omega = \sum_{i=1}^r \mathbf{e}_i^* \wedge \mathbf{e}_{r+i}^*.$$

此外, 若  $\omega$  非退化, 则  $m = 2n$  为偶数, 且存在  $V$  的一组基  $\mathbf{e} = (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n; \mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_n)$ , 使得  $\omega = \sum_{i=1}^n \mathbf{e}_i^* \wedge \mathbf{f}_i^*$ .

设  $(V, \omega)$  是  $2n$  维辛空间, 取  $V$  的一组辛基  $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n; \mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_n)$ , 则  $\omega = \sum_{i=1}^n \mathbf{e}_i^* \wedge \mathbf{f}_i^*$ , 直接计算可知

$$\omega^n = n!(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \tau$$

其中  $\tau = \mathbf{e}_1^* \wedge \cdots \wedge \mathbf{e}_n^* \wedge \mathbf{f}_1^* \wedge \cdots \wedge \mathbf{f}_n^* \in \bigwedge^{2n} V^*$  是空间  $V$  的体积形式, 它给出了  $V$  上的定向. 同样直接计算可知, 如果反对称双线性型  $\omega \in \bigwedge^2 V^*$  是退化的, 则由推论1.4可知  $\omega^n = 0$ . 综上所述, 我们有:

**性质 1.5.** 设  $V$  是  $2n$  维  $\mathbb{F}$ -线性空间,  $\omega \in \bigwedge^2 V^*$ . 则  $\omega$  非退化当且仅当  $\omega^n \neq 0$ ; 并且此时, 辛结构  $\omega$  诱导了  $V$  的体积形式

$$\tau_\omega := \frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{n!} \omega^n. \quad (1.2)$$

本小节最后, 我们注意, 对于线性空间  $V$  以及  $\omega \in \bigwedge^2 V^*$ , 则  $\omega$  诱导从  $V$  到  $V^*$  的线性映射  $\omega^\flat$  如下:

$$\begin{aligned} \omega^\flat: V &\rightarrow V^* \\ v &\mapsto [\omega^\flat(v): w \mapsto \omega(v, w)]. \end{aligned} \quad (1.3)$$

回忆外向量的内乘运算

$$\begin{aligned} i: V \times \bigwedge^q V^* &\rightarrow \bigwedge^{q-1} V^* \\ (v, \theta) &\mapsto v \lrcorner \theta, \end{aligned}$$

使得  $(v \lrcorner \theta)(v_1, \dots, v_{q-1}) = \theta(v, v_1, \dots, v_{q-1})$ . 在此意义下, 容易验证

$$\omega^\flat(v) = v \lrcorner \omega. \quad (1.4)$$

此外, 易知  $\omega$  是辛结构 (非退化) 当且仅当  $\omega^\flat$  是  $V$  与  $V^*$  的同构.

### 1.1.3 正交性

与欧氏空间类似, 在辛空间中也可以谈论向量的正交性:

**定义 1.6.** 对于辛空间  $(V, \omega)$  中的向量  $u, v$ , 如果  $\omega(u, v) = 0$ , 则称向量  $u$  与  $v$  正交, 记作  $u \perp v$ .

很显然, (辛) 正交关系  $\perp$  具有对称性, 即  $u \perp v$  当且仅当  $v \perp u$ . 一个自然的问题是, 正交性是否能够“良好地”推广到任何更一般的双线性型上?

**定理 1.7.** (Birkhoff-von Neumann) 设  $V$  为  $\mathbb{F}$ -线性空间,  $f \in V^* \otimes V^*$  是  $V$  上的双线性型. 如果对任意  $u, v \in V$  都成立

$$f(u, v) = 0 \iff f(v, u) = 0,$$

则  $f$  是对称的或者反对称的.

由此定理可见, 能“良好地”谈论正交性的空间只有欧氏空间与辛空间.

证明. 如果  $f$  反对称, 则对任意  $\mathbf{v} \in V$  都有  $f(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = 0$ . 现在, 假设  $f$  不是反对称的, 则存在  $\mathbf{v} \in V$  使得  $f(\mathbf{v}, \mathbf{v}) \neq 0$ . 只需证明  $f$  是对称的.

断言 1:  $\forall \mathbf{x} \in V, f(\mathbf{x}, \mathbf{v}) = f(\mathbf{v}, \mathbf{x})$ . 这是因为, 对任意  $\lambda \in \mathbb{F}$ ,

$$f(\mathbf{v}, \mathbf{x} + \lambda \mathbf{v}) = f(\mathbf{v}, \mathbf{x}) + \lambda f(\mathbf{v}, \mathbf{v}).$$

注意  $f(\mathbf{v}, \mathbf{v}) \neq 0$ , 从而可以适当选取  $\lambda$  使得  $f(\mathbf{v}, \mathbf{x} + \lambda \mathbf{v}) = 0$ , 从而由题设可得  $f(\mathbf{v}, \mathbf{x} + \lambda \mathbf{v}) = f(\mathbf{x} + \lambda \mathbf{v}, \mathbf{v}) = 0$ , 整理得  $f(\mathbf{x}, \mathbf{v}) = f(\mathbf{v}, \mathbf{x})$ .

断言 2: 对任意  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ , 如果  $f(\mathbf{x}, \mathbf{v}) \neq 0$ , 那么  $f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = f(\mathbf{y}, \mathbf{x})$ . 这是因为, 对任意  $\lambda \in \mathbb{F}$ ,

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{y} + \lambda \mathbf{v}) = f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \lambda f(\mathbf{x}, \mathbf{v}).$$

注意  $f(\mathbf{x}, \mathbf{v}) \neq 0$ , 从而可以适当选取  $\lambda$  使得  $f(\mathbf{x}, \mathbf{y} + \lambda \mathbf{v}) = 0$ , 从而由题设可得  $f(\mathbf{x}, \mathbf{y} + \lambda \mathbf{v}) = f(\mathbf{y} + \lambda \mathbf{v}, \mathbf{x}) = 0$ , 利用断言 1 可整理得  $f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = f(\mathbf{y}, \mathbf{x})$ .

最后, 如果  $f(\mathbf{x}, \mathbf{v}) = f(\mathbf{y}, \mathbf{v}) = 0$ , 则对任意  $\lambda \in \mathbb{F}$ ,

$$f(\mathbf{x} + \mathbf{v}, \mathbf{y} + \lambda \mathbf{v}) = f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \lambda f(\mathbf{v}, \mathbf{v}),$$

从而可适当选取参数  $\lambda$  使得  $f(\mathbf{x} + \mathbf{v}, \mathbf{y} + \lambda \mathbf{v}) = 0$ , 从而由题设得  $f(\mathbf{x} + \mathbf{v}, \mathbf{y} + \lambda \mathbf{v}) = f(\mathbf{y} + \lambda \mathbf{v}, \mathbf{x} + \mathbf{v}) = 0$ , 整理得  $f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = f(\mathbf{y}, \mathbf{x})$ .

综上所述, 定理得证. □

### 1.1.4 辛空间的例子

现在来看辛空间的具体例子.

**例 1.8.**  $2n$  维线性空间  $\mathbb{F}^{2n}$ , 配以标准辛结构  $\omega$  如下:

$$\omega(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \mathbf{v}^T \mathbf{J} \mathbf{w},$$

其中  $\mathbf{J} = \begin{pmatrix} & \mathbf{I}_n \\ -\mathbf{I}_n & \end{pmatrix}$ . 则  $(\mathbb{F}^{2n}, \omega)$  是辛空间, 且辛结构  $\omega$  在  $\mathbb{F}^{2n}$  的标准基下的矩阵为  $\mathbf{J}$ . 推论 1.3 表明任何  $2n$  维辛空间都“同构”于上述  $(\mathbb{F}^{2n}, \omega)$ .

**例 1.9.** 对有限维  $\mathbb{F}$ -线性空间  $W$ , 则  $V := W \oplus W^*$  具有如下典范辛结构

$$\begin{aligned}\omega: V \times V &\rightarrow \mathbb{F} \\ ((v_1, u_1^*), (v_2, u_2^*)) &\mapsto u_2^*(v_1) - u_1^*(v_2).\end{aligned}$$

这是余切丛  $T^*M$  的典范辛结构(0.12)的局部平凡化. 任取  $W$  的一组基  $\underline{e} = (e_1, \dots, e_n)$ , 则  $(\underline{e}, \underline{e}^*)$  构成  $V = W \oplus W^*$  的一组基. 容易验证典范辛结构在此基下的矩阵为

$$\omega_{(\underline{e}, \underline{e}^*)} = \begin{pmatrix} & I_n \\ -I_n & \end{pmatrix}.$$

**例 1.10.** 设  $V$  为有限维  $\mathbb{F}$ -线性空间,  $\omega \in \wedge^2 V^*$ . 注意到

$$\ker \omega^\flat = \{v \in V \mid \omega(v, w) = 0, \forall w \in V\}.$$

考虑商空间  $V_0 := V / \ker \omega^\flat$ , 记商映射  $\pi: V \rightarrow V_0$ , 则存在唯一  $\omega_0 \in \wedge^2 V_0^*$ , 使图表

$$\begin{array}{ccc} V \times V & \xrightarrow{\omega} & \mathbb{F} \\ \pi \times \pi \downarrow & \nearrow \omega_0 & \\ V_0 \times V_0 & & \end{array}$$

交换. 此时, 容易验证  $\omega_0$  非退化, 从而  $(V_0, \omega_0)$  是辛空间.

辛空间  $(V_0, \omega_0)$  称为  $(V, \omega)$  的辛约化.

**例 1.11.** 设  $V \cong \mathbb{C}^n$  是  $n$  维  $\mathbb{C}$ -线性空间, 则  $V$  自然看作  $2n$  维  $\mathbb{R}$ -线性空间. 设  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  是  $V$  上的一个厄米特内积, 定义

$$\begin{aligned}\omega: V \times V &\rightarrow \mathbb{R} \\ (v, w) &\mapsto -\operatorname{Im} \langle v, w \rangle,\end{aligned}$$

则易知  $\omega$  是  $V \cong \mathbb{R}^{2n}$  上的辛结构, 称为厄米特结构  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  的诱导辛结构.

我们约定厄米特内积关于第二个分量是共轭线性的, 即

$$\langle v, \lambda w \rangle = \bar{\lambda} \langle v, w \rangle, \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}. \quad (1.5)$$

任取  $V$  关于厄米特内积  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  的一组  $\mathbb{C}$ -标准正交基  $\underline{e} = (e_1, \dots, e_n)$ , 记  $f_i := \sqrt{-1}e_i$ , 则  $(e_1, \dots, e_n; f_1, \dots, f_n)$  构成  $V$  的一组  $\mathbb{R}$ -基. 在这组基下, 容易验证诱导辛结构  $\omega$  的矩阵恰为  $J = \begin{pmatrix} & I_n \\ -I_n & \end{pmatrix}$ .

## 1.2 辛映射与辛群

定义辛空间  $(V, \omega)$  后, 自然要研究辛空间之间“保持辛结构”的映射.

### 1.2.1 辛群的概念与基本性质

**定义 1.12.** 对于辛空间  $(V_1, \omega_1)$ ,  $(V_2, \omega_2)$ , 以及线性映射  $\phi: V_1 \rightarrow V_2$ , 如果

$$\omega_2(\phi \mathbf{v}, \phi \mathbf{w}) = \omega_1(\mathbf{v}, \mathbf{w}), \quad \forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V_1,$$

则称  $\phi$  为辛(线性)映射.

众所周知, 线性映射  $\phi: V_1 \rightarrow V_2$  诱导拉回映射

$$\phi^*: \Lambda^2 V_2^* \rightarrow \Lambda^2 V_1^*.$$

在此意义下, 可以给出辛映射的等价定义:  $\phi$  是辛映射当且仅当

$$\phi^* \omega_2 = \omega_1. \quad (1.6)$$

辛映射一定是单射. 这是因为对任意  $\mathbf{0} \neq \mathbf{v} \in V_1$ , 如果辛映射  $\phi: V_1 \rightarrow V_2$  使得  $\phi \mathbf{v} = \mathbf{0}$ , 则由  $\omega_1$  的非退化性可知存在  $\mathbf{w} \in V_1$  使得  $\omega_1(\mathbf{v}, \mathbf{w}) \neq 0$ , 从而

$$0 \neq \omega_1(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \omega_2(\phi \mathbf{v}, \phi \mathbf{w}) = \omega_2(\mathbf{0}, \phi \mathbf{w}) = 0,$$

产生矛盾. 特别地, 如果  $\dim V_1 = \dim V_2 < \infty$ , 则辛映射  $\phi: V_1 \rightarrow V_2$  是双射, 从而是辛空间的同构; 此时称  $\phi$  为辛同构 (symplectomorphism).

如果  $V_1 = V_2 =: V$ , 则  $V$  到自身的辛同构之全体在映射复合下构成群:

**定义 1.13.** 对于辛空间  $(V, \omega)$ , 则

$$\mathrm{Sp}(V, \omega) := \{ \phi: V \rightarrow V \mid \phi \text{ 是辛映射} \}$$

关于通常的映射复合构成群, 这个群称为辛群, 其元素称为辛变换.

取定辛空间  $(V, \omega)$  的一组辛基  $\mathbf{e} = (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n; \mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_n)$ , 考虑辛变换  $\phi \in \mathrm{Sp}(V, \omega)$  在该基下的矩阵  $\mathbf{M} = \phi_{\mathbf{e}} \in \mathrm{GL}(2n, \mathbb{F})$ , 则容易验证

$$\mathbf{M}^T \mathbf{J} \mathbf{M} = \mathbf{J}, \quad (1.7)$$

其中  $J = \begin{pmatrix} & I_n \\ -I_n & \end{pmatrix}$ . 引入辛矩阵的概念如下:

**定义 1.14.** 给定域  $\mathbb{F}$  以及正整数  $n$ , 记

$$\mathrm{Sp}(n, \mathbb{F}) := \{M \in \mathrm{GL}(2n, \mathbb{F}) \mid M^T J M = J\}, \quad (1.8)$$

$\mathrm{Sp}(n, \mathbb{F})$  中的矩阵称为辛矩阵.

$\mathrm{Sp}(n, \mathbb{F})$  关于通常的矩阵乘法构成群. 对于任意辛空间  $(V, \omega)$ , 若  $\dim V = 2n$ , 则易知有群同构  $\mathrm{Sp}(V, \omega) \cong \mathrm{Sp}(n, \mathbb{F})$ .

对于  $2n \times 2n$  矩阵  $M$ , 考虑矩阵分块  $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ , 其中子矩阵  $A$  的尺寸是  $n \times n$ , 则直接验证可知,  $M \in \mathrm{Sp}(n, \mathbb{F})$  当且仅当

$$A^T C = C^T A, \quad B^T D = D^T B, \quad A^T D - C^T B = I_n. \quad (1.9)$$

对于辛矩阵  $M$ , 将(1.7)两边取行列式可得  $(\det M)^2 = 1$ , 从而推出辛矩阵的行列式必为  $\pm 1$ . 而令人惊奇的是, 辛矩阵的行列式实际上只能是 1.

**定理 1.15.** 对于辛空间  $(V, \omega)$  以及辛变换  $\phi \in \mathrm{Sp}(V, \omega)$ , 则

$$\det \phi = 1.$$

换言之, 对任意辛矩阵  $M \in \mathrm{Sp}(n, \mathbb{F})$ ,  $\det M = 1$ .

证明. 记  $\dim V = 2n$ .  $\phi$  是辛映射表明  $\phi^* \omega = \omega$ , 从而  $\phi^*(\omega^n) = \omega^n$ . 另一方面, 注意  $\omega^n \in \bigwedge^{2n} V^*$ , 从而对任意  $v_1, \dots, v_{2n} \in V$ ,

$$(\phi^* \omega^n)(v_1, \dots, v_{2n}) = \omega^n(\phi v_1, \dots, \phi v_{2n}) = (\det \phi) \omega^n(v_1, \dots, v_{2n}),$$

从而  $\phi^* \omega^n = (\det \phi) \omega^n$ . 综上所述,  $\det \phi = 1$ , 得证.  $\square$

**注 1.16.** 上述定理也有不用外代数的“初等”证明, 见后文的注1.21与注1.23.

**性质 1.17.** 若  $\lambda$  是辛矩阵  $M \in \mathrm{Sp}(n, \mathbb{F})$  的特征值, 则  $\frac{1}{\lambda}$  也是  $M$  的特征值.

证明. 注意  $M^T J M = J$  且  $\det M \neq 0$ , 从而

$$\begin{aligned}\det(\lambda I - M) &= \det(\lambda I - M^T) = \det(J^{-1}(\lambda I - M^T)J) \\ &= \det(\lambda I - M^{-1}) = \frac{\lambda^{2n}}{\det M} \det\left(\frac{1}{\lambda}I - M\right),\end{aligned}$$

从而  $\lambda$  是  $M$  的特征值当且仅当  $\frac{1}{\lambda}$  是  $M$  的特征值.  $\square$

## 1.2.2 辛平延

下面开始研究一些特殊的辛变换. 不如将辛空间与欧氏空间类比. 众所周知, 欧氏空间  $(V, g)$  中有一类特殊的正交变换, 称为**反射**:

$$r_w: v \mapsto v - 2 \frac{g(v, w)}{g(w, w)} w,$$

其中  $g$  为欧氏内积. 上述正交变换几何意义是将向量  $v$  沿以  $w$  为法向量的超平面作镜面反射. 众所周知, 任何正交变换都可分解为有限多个反射的复合, 换言之, 全体反射变换构成正交变换群  $O(V, g)$  的一组生成元.

而在辛空间  $(V, \omega)$  中, 也可类似定义“反射”变换.

**定义 1.18.** 对于辛空间  $(V, \omega)$ , 向量  $w \in V$  以及参数  $\lambda \in \mathbb{F}$ , 记映射

$$\begin{aligned}\tau_{w, \lambda}: V &\rightarrow V \\ v &\mapsto v + \lambda \omega(v, w) w,\end{aligned}\tag{1.10}$$

则容易验证  $\tau_{w, \lambda}$  是辛变换 (细节留给读者). 形如上述  $\tau_{w, \lambda}$  的辛变换称为**辛平延** (*symplectic transvection*).

接下来将证明, 任何辛变换  $\phi \in \mathrm{Sp}(V, \omega)$  都可分解为有限多个辛平延的复合, 换言之, 全体辛平延构成辛群  $\mathrm{Sp}(V, \omega)$  的一组生成元. 为此首先证明一个引理.

**引理 1.19.** 设辛空间  $(V, \omega)$  中的向量  $u_1, v_1, u_2, v_2$  满足  $\omega(u_1, v_1) = \omega(u_2, v_2) = 1$ , 则存在辛变换  $\phi \in \mathrm{Sp}(V, \omega)$  使得

$$\phi u_1 = u_2, \quad \phi v_1 = v_2,$$

并且  $\phi$  形如有限多个辛平延的复合.

证明. 为说话方便, 将  $\mathrm{Sp}(V, \omega)$  的由辛平延生成的子群临时记作  $\mathrm{Sp}'(V, \omega)$ .

断言 1: 存在  $\phi \in \mathrm{Sp}'(V, \omega)$ , 使得  $\phi \mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_2$ . 这是因为, 如果  $\omega(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) \neq 0$ , 则

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_2 &= \mathbf{u}_1 + (\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1) \\ &= \mathbf{u}_1 + \frac{1}{\omega(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)} \omega(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1)(\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1), \end{aligned}$$

从而取  $\phi = \tau_{\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1, \omega(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)^{-1}}$  即可; 而如果  $\omega(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) = 0$ , 则由  $\omega$  的非退化性 (以及  $\mathrm{char} \mathbb{F} = 0$  的假设) 可知存在  $\mathbf{u}_0 \in V$  使得  $\omega(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_0)$  与  $\omega(\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_2)$  都不为零, 从而存在辛平延  $\tau, \tau'$  使得  $\tau \mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_0, \tau' \mathbf{u}_0 = \mathbf{u}_2$ , 因此只需要取  $\phi = \tau' \circ \tau \in \mathrm{Sp}'(V, \omega)$  即可. 综上, 断言得证, 从而接下来我们可以不妨假设  $\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_2 =: \mathbf{u}$ .

断言 2: 存在  $\tau \in \mathrm{Sp}'(V, \omega)$ , 使得  $\tau \mathbf{u} = \mathbf{u}$  且  $\tau \mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2$ . 这是因为, 如果  $\omega(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) \neq 0$ , 则取  $\mathbf{w} = \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1, \lambda = \frac{1}{\omega(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)}$ , 容易验证辛平延  $\phi := \tau_{\mathbf{w}, \lambda}$  满足要求 (细节留给读者); 而如果  $\omega(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = 0$ , 则

$$\omega(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1 + \mathbf{u}) = -1 \neq 0, \quad \omega(\mathbf{v}_1 + \mathbf{u}, \mathbf{v}_2) = 1 \neq 0,$$

从而存在辛平延  $\tau, \tau'$ , 使得  $\tau \mathbf{u} = \tau' \mathbf{u} = \mathbf{u}$  并且  $\tau \mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_1 + \mathbf{u}, \tau'(\mathbf{v}_1 + \mathbf{u}) = \mathbf{v}_2$ , 因此容易验证  $\phi := \tau' \circ \tau$  即为所求.

综合断言 1 与断言 2, 引理得证.  $\square$

**定理 1.20.** 辛空间  $(V, \omega)$  上的任何辛变换  $\phi$  都形如有限多个辛平延的复合.

沿用前文记号, 将  $\mathrm{Sp}(V, \omega)$  的由辛平延生成的子群临时记作  $\mathrm{Sp}'(V, \omega)$ , 则这个定理断言  $\mathrm{Sp}(V, \omega) = \mathrm{Sp}'(V, \omega)$ .

证明. 记  $\dim V = 2n$ , 对  $n$  归纳. 当  $n = 1$  时, 取  $V$  的一组辛基  $(\mathbf{e}, \mathbf{f})$ , 则由引理 1.19 可知, 存在  $\tau \in \mathrm{Sp}'(V, \omega)$  使得  $\tau \circ \phi(\mathbf{e}) = \mathbf{e}, \tau \circ \phi(\mathbf{f}) = \mathbf{f}$ , 从而  $\tau \circ \phi = \mathrm{id}_V$ , 所以  $\phi = \tau^{-1} \in \mathrm{Sp}'(V, \omega)$ , 得证.



如果  $n > 1$ , 取  $V$  的一组辛基  $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n; \mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_n)$ , 记  $V$  的子空间

$$V_1 := \text{span}\{\mathbf{e}_1, \mathbf{f}_1\}, \quad V_2 := \text{span}\{\mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n; \mathbf{f}_2, \dots, \mathbf{f}_n\},$$

则  $V_1, V_2$  都是辛空间,  $V = V_1 \oplus V_2$ , 并且特别注意

$$V_2 = V_1^\perp := \{\mathbf{v} \in V \mid \mathbf{v} \perp \mathbf{w}, \forall \mathbf{w} \in V_1\}. \quad (\spadesuit)$$

由引理1.19可知, 存在辛平延  $\tau \in \text{Sp}(V', \omega)$  使得  $\tau \circ \phi(\mathbf{e}_1) = \mathbf{e}_1, \tau \circ \phi(\mathbf{f}_1) = \mathbf{f}_1$ . 记  $\phi' := \tau \circ \phi$ , 则由  $(\spadesuit)$  易知  $V_1, V_2$  都是  $V$  的  $\phi'$ -不变子空间, 并且  $\phi'|_{V_1} = \text{id}_{V_1}, \phi'|_{V_2} \in \text{Sp}(V_2, \omega|_{V_2})$ . 之后对  $\phi'|_{V_2}$  使用归纳假设, 并将子空间  $V_2$  的辛平延自然看成  $V$  的辛平延, 从而定理得证.  $\square$

**注 1.21.** 对于辛平延  $\tau_{\mathbf{w}, \lambda} (\mathbf{w} \neq \mathbf{0})$ , 由  $\omega$  的非退化性可知  $\mathbf{w}^\perp := \{\mathbf{v} \in V \mid \mathbf{v} \perp \mathbf{w}\}$  是  $V$  的超平面 (余维数为 1). 注意  $\mathbf{w}^\perp$  是  $\tau_{\mathbf{w}, \lambda}$ -不变子空间, 并且  $\tau_{\mathbf{w}, \lambda}|_{\mathbf{w}^\perp} = \text{id}$ . 此外还注意到  $\mathbf{w} \in \mathbf{w}^\perp$ . 将  $\mathbf{w}$  扩充为  $\mathbf{w}^\perp$  的一组基  $(\mathbf{w}; \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_{2n-2})$ . 再将此基扩充为  $V$  的一组基  $\underline{\mathbf{w}} = (\mathbf{w}; \mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_{2n-2}; \mathbf{w}')$ , 则辛平延  $\tau_{\mathbf{w}, \lambda}$  在

基  $\underline{\mathbf{w}}$  下的矩阵为  $(\tau_{\mathbf{w}, \lambda})_{\underline{\mathbf{w}}} = \begin{pmatrix} 1 & & x \\ & \mathbf{I}_{2n-2} & \\ & & 1 \end{pmatrix}$ , 其中  $x = \lambda\omega(\mathbf{w}', \mathbf{w})$ . 因此

$\det \tau_{\mathbf{w}, \lambda} = \det ((\tau_{\mathbf{w}, \lambda})_{\underline{\mathbf{w}}}) = 1$ , 换言之, 辛平延的行列式等于 1. 结合定理1.20, 我们再次证明了定理1.15.

### 1.2.3 基本辛矩阵

接下来从矩阵的角度来研究辛群. 我们回忆,  $2n \times 2n$  矩阵  $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$  是辛矩阵当且仅当(1.9)成立. 容易验证以下三类矩阵都是辛矩阵:

$$\begin{aligned}
J &:= \begin{pmatrix} & I_n \\ -I_n & \end{pmatrix}, \\
U_V &:= \begin{pmatrix} V & \\ & V^{-T} \end{pmatrix}, \quad \text{其中 } V \in \text{GL}(n, \mathbb{F}), V^{-T} := (V^{-1})^T, \quad (1.11) \\
T_S &:= \begin{pmatrix} I_n & S \\ & I_n \end{pmatrix}, \quad \text{其中 } S^T = S.
\end{aligned}$$

上述三类辛矩阵称为**基本辛矩阵**. 本小节将证明任何辛矩阵都形如有限多个基本辛矩阵的乘积, 换言之, 全体基本辛矩阵构成  $\text{Sp}(n, \mathbb{F})$  的一组生成元.

**定理 1.22.** 任何辛矩阵  $M \in \text{Sp}(n, \mathbb{F})$  都可分解为有限多个基本辛矩阵的乘积.

证明. 考虑矩阵分块  $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ , 其中  $A$  的尺寸是  $n \times n$ .

1. 记  $r := \text{rank } A$ , 则存在  $V_1, V_2 \in \text{GL}(n, \mathbb{F})$  使得  $V_1 A V_2 = \begin{pmatrix} I_r & \\ & O_{n-r} \end{pmatrix}$ .

然后考虑变换  $M \mapsto U_{V_1} M U_{V_2}$ . 接下来不妨只考察  $A = \begin{pmatrix} I_r & \\ & O_{n-r} \end{pmatrix}$  的情形.

2. 将子矩阵  $C$  分块为  $C = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix}$ , 其中  $C_{11}$  的尺寸是  $r \times r$ . 代

入(1.9)的第一式, 整理得  $\begin{cases} C_{11}^T = C_{11} \\ C_{12} = O \end{cases}$ , 从而  $C = \begin{pmatrix} C_{11} & \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix}$ . 特

别地, (如果  $r < n$ , 则)  $C_{22}$  可逆 (否则  $M$  的第  $r+1, r+2, \dots, n$  列线性相关, 与  $M$  是可逆矩阵矛盾), 从而存在参数  $\lambda \in \mathbb{F}$  使得

$$A' := A + \lambda C = \begin{pmatrix} I_r + \lambda C_{11} & \\ \lambda C_{21} & \lambda C_{22} \end{pmatrix}$$

是可逆矩阵, 即  $\text{rank } A' = n$ . 取定此  $\lambda$ , 考虑变换  $M \mapsto T_{\lambda I} M$ . 从而不妨只考虑  $\text{rank } A = n$  的情形. 然后重复步骤 1, 不妨只考察  $A = I_n$  的情形.

3. 当  $M = \begin{pmatrix} I_n & B \\ C & D \end{pmatrix}$  时, 由(1.9)式可知  $C^T = C$ , 从而  $T_C = \begin{pmatrix} I_n & C \\ & I_n \end{pmatrix}$  是基本辛矩阵. 考虑变换

$$M \mapsto M' := (J^{-1} T_C J) M = \begin{pmatrix} I_n & \\ -C & I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_n & B \\ & D - CB \end{pmatrix}.$$

注意  $M' \in \text{Sp}(n, \mathbb{F})$ , 从而由(1.9)易知  $M' = T_B$ .

综上所述, 定理证毕. □

**注 1.23.** 容易验证上述三类基本辛矩阵  $J, U_V, T_S$  的行列式都是 1, 从而由上述定理立刻推出辛矩阵的行列式是 1, 再次证明定理 1.15.

### 1.3 子空间

本节研究辛空间的子空间. 给定域  $\mathbb{F}$  上的  $2n$  维辛空间  $(V, \omega)$  子空间  $W \subseteq V$ , 一般来说, 双线性型  $\omega$  在  $W$  上的限制  $\omega|_W$  可能退化, 这导致  $W$  不是辛空间. 而由性质 1.2 可知, 总存在  $W$  的基

$$\mathbf{e} = (e_1, \dots, e_l; f_1, \dots, f_l; h_1, \dots, h_{k-2l}) \quad (1.12)$$

使得  $\omega_{\mathbf{e}} = \begin{pmatrix} & I_l \\ -I_l & \\ & O_{k-2l} \end{pmatrix}$ , 其中  $k := \dim W$ ,  $2l := \text{rank } \omega|_W$ . 上述  $(k, 2l) = (\dim W, \text{rank } \omega|_W)$  将  $V$  的子空间分为不同种类.

### 1.3.1 辛子空间与迷向子空间

**定义 1.24.** 设  $W$  是辛空间  $(V, \omega)$  的子空间, 记

$$\begin{aligned} W^\perp &:= \{v \in V \mid \omega(v, w) = 0, \forall w \in W\}, \\ \text{rad } W &:= \{w' \in W \mid \omega(w', w) = 0, \forall w \in W\} = W \cap W^\perp, \\ W^{\text{red}} &:= W / \text{rad } W. \end{aligned}$$

注意  $\text{rad } W = \ker(\omega|_W)^\flat$ , 从而由例1.10可知  $W^{\text{red}}$  具有自然的辛结构, 这是子空间  $W$  的辛约化. 取子空间  $W$  的基(1.12), 则  $h_1, \dots, h_{k-2l}$  构成  $\text{rad } W$  的一组基.

双线性型  $\omega$  的非退化性可以得到如下维数公式:

**性质 1.25.** 设  $W$  是辛空间  $(V, \omega)$  的子空间, 则

$$\dim W + \dim W^\perp = \dim V, \quad (1.13)$$

进而有

$$(W^\perp)^\perp = W. \quad (1.14)$$

证明. 记

$$W^\circ := \{\varphi \in V^* \mid \varphi(w) = 0, \forall w \in W\} \subseteq V^*,$$

则有自然的线性同构

$$W^\circ \cong (V/W)^*.$$

另一方面,  $\omega$  的非退化性使得(1.3)式中的  $\omega^\flat: V \rightarrow V^*$  是线性同构, 又容易验证  $\omega^\flat(W^\perp) = W^\circ$ , 于是有线性同构  $W^\perp \cong W^\circ$ . 因此  $W^\perp \cong (V/W)^*$ . 故

$$\dim W^\perp = \dim(V/W)^* = \dim V - \dim W,$$

从而(1.13)式得证. 再看(1.14)式, 首先显然有  $(W^\perp)^\perp \supseteq W$ ; 再由维数公式(1.13)得

$$\dim(W^\perp)^\perp = \dim V - \dim W^\perp = \dim V - (\dim V - \dim W) = \dim W,$$

从而  $(W^\perp)^\perp = W$ . □

**题 1.26.** 设  $W, W'$  是辛空间  $(V, \omega)$  的子空间, 验证以下关系:

1.  $W' \subseteq W \Rightarrow W^\perp \subseteq (W')^\perp$ ,
2.  $(W + W')^\perp = W^\perp \cap (W')^\perp$ ,
3.  $(W \cap W')^\perp = W^\perp + (W')^\perp$ .

在辛空间的各种子空间当中, 首先注意到这两类:

**定义 1.27.** 设  $W$  是辛空间  $(V, \omega)$  的子空间,

1. 如果  $\omega|_W$  非退化, 则称  $W$  是  $V$  的辛子空间.
2. 如果  $\omega|_W = 0$ , 则称  $W$  是  $V$  的迷向子空间(isotropic subspace).

容易验证,  $W$  是  $V$  的辛子空间当且仅当  $\text{rad } W = 0$ , 当且仅当  $W \cap W^\perp = 0$ , 当且仅当  $V = W \oplus W^\perp$ , 当且仅当  $W^\perp$  也是  $V$  的辛子空间.

而  $W$  是  $V$  的迷向子空间当且仅当  $W \subseteq W^\perp$ , 当且仅当  $\text{rad } W = W$ .

**例 1.28.** 对于辛空间  $(V, \omega)$  中的向量  $e, f$ , 如果  $\omega(e, f) = 1$ , 则称有序对  $(e, f)$  为双曲对 (hyperbolic pair), 此时它们张成的子空间

$$P := \text{span}\{e, f\}$$

是 2 维的, 称为双曲平面 (hyperbolic plane). 双曲平面是  $V$  的辛子空间.

由性质 1.2 的证明过程可知,  $2n$  维辛空间  $(V, \omega)$  必形如  $n$  个双曲平面的正交直和:

$$V = P_1 \oplus P_2 \oplus \cdots \oplus P_n. \quad (1.15)$$

此外, 若双曲平面  $P_1, P_2, \dots, P_s$  ( $s < n$ ) 两两正交, 则存在双曲平面  $P_{s+1}, \dots, P_n$  使得 (1.15) 成立, 这与线性代数中的“基扩充”十分类似.

**题 1.29.** 举例说明: 若  $W_1, W_2$  是  $(V, \omega)$  的辛子空间, 则  $W_1 \cap W_2$  未必是辛子空间.

**例 1.30.** 设  $W$  是辛空间  $(V, \omega)$  的子空间, 则:

- 如果  $\dim W = 1$ , 则  $W$  是  $V$  的迷向子空间.

- $\text{rad } W$  显然也是  $V$  的迷向子空间.

**性质 1.31.** 设  $W$  是辛空间  $(V, \omega)$  的子空间, 则:

1. 存在  $V$  的辛子空间  $U$ , 使得  $W = U \oplus \text{rad } W$ , 因此辛空间的任何子空间都可分解为辛子空间与迷向子空间的直和.
2. 若  $W$  是  $V$  的迷向子空间, 则  $\dim W \leq \frac{1}{2} \dim V$ .
3. 如果  $\overline{W}$  是  $V$  的辛子空间并且  $\overline{W} \supseteq W$ , 则  $\dim \overline{W} \geq 2k - 2l$ , 其中  $k := \dim W$ ,  $2l := \text{rank } \omega|_W$ .

证明. 取  $W$  的一组形如(1.12)的基, 则显然  $\text{rad } W = \text{span}\{\mathbf{h}_1, \dots, \mathbf{h}_{k-2l}\}$ , 此时取  $U = \text{span}\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_l; \mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_l\}$  即可. 如果  $W$  是迷向子空间, 则  $W \subseteq W^\perp$ , 从而  $\dim W \leq \dim W^\perp$ , 再注意维数公式(1.13)即可. 最后看 (3), 取辛子空间  $U$  使得  $W = U \oplus \text{rad } W$ , 则  $\overline{W} \cap U^\perp$  也是辛空间 (为什么?), 并且  $\text{rad } W$  是  $\overline{W} \cap U^\perp$  的迷向子空间, 因此

$$\begin{aligned} k - 2l &= \dim \text{rad } W \leq \frac{1}{2} \dim(\overline{W} \cap U^\perp) \\ &= \frac{1}{2} (\dim \overline{W} - \dim U) = \frac{1}{2} (\dim \overline{W} - 2l), \end{aligned}$$

整理得到  $\dim \overline{W} \geq 2k - 2l$ . □

### 1.3.2 子空间的辛等价不变量

设  $W$  是辛空间  $(V, \omega)$  的子空间, 记  $k := \dim W$ ,  $2l := \text{rank } \omega|_W$ , 我们自然考虑用有序组  $(k, 2l)$  来描述  $V$  的“不同种类”的子空间. 更具体地, 对于  $V$  的子空间  $W, W'$ , 如果存在辛同构  $\phi \in \text{Sp}(V, \omega)$  使得  $W' = \phi(W)$ , 则称  $W$  与  $W'$  **辛等价**; 辛等价显然是  $V$  的子空间之间的等价关系, 我们所关心的分类问题正是在辛等价意义下.

首先, 如果子空间  $W$  与  $W'$  辛等价, 则显然有

$$\dim W = \dim W' \quad \text{且} \quad \text{rank } \omega|_W = \text{rank } \omega|_{W'}.$$

而本小节将证明, 上式也是  $W$  与  $W'$  辛等价的充分条件, 从而  $(\dim W, \text{rank } \omega|_W)$  是子空间在辛等价意义下的全系不变量. 为此我们需要如下基扩充引理.

**引理 1.32.** 设  $W = U \oplus \text{rad } W$  是辛空间  $(V, \omega)$  的子空间, 其中  $U$  是辛子空间. 任取  $\text{rad } W$  的一组基  $\{\mathbf{h}_1, \dots, \mathbf{h}_s\}$ , 则存在向量  $\mathbf{h}'_1, \dots, \mathbf{h}'_s \in U^\perp$ , 使得对任意  $1 \leq i \leq s$ ,  $(\mathbf{h}_i, \mathbf{h}'_i)$  是双曲对, 并且有正交直和  $P_1 \oplus \dots \oplus P_s$ , 其中  $P_i := \text{span}\{\mathbf{h}_i, \mathbf{h}'_i\}$ .

特别地, 存在辛子空间  $\overline{W}$ , 使得  $\overline{W} \supseteq W$ , 并且  $\dim \overline{W} = 2k - 2l$ , 其中  $k := \dim W$ ,  $2l := \text{rank } \omega|_W$ .

证明. 对  $s = \dim \text{rad } W$  归纳.  $s = 0$  的情形是平凡的. 当  $s \geq 1$  时,  $\text{rad } W = \text{span}\{\mathbf{h}_1, \dots, \mathbf{h}_s\}$ . 记  $X := \text{span}\{\mathbf{h}_2, \dots, \mathbf{h}_s\}$ , 则  $\text{rad } W = \mathbb{F}\mathbf{h}_1 \oplus X$ . 注意  $\mathbf{h}_1 \notin X = (X^\perp)^\perp$ , 从而存在  $\mathbf{h}'_1 \in X^\perp$  使得  $\omega(\mathbf{h}_1, \mathbf{h}'_1) \neq 0$ . 将  $\mathbf{h}'_1$  适当乘以常数倍, 不妨  $\omega(\mathbf{h}_1, \mathbf{h}'_1) = 1$ ; 再将  $\mathbf{h}'_1$  适当加上  $U$  中的向量, 不妨  $\mathbf{h}'_1 \in X^\perp \cap U^\perp = (X \oplus U)^\perp$ . 记双曲平面  $P_1 = \text{span}\{\mathbf{h}_1, \mathbf{h}'_1\}$ , 再记子空间  $W' := W \oplus \mathbb{F}\mathbf{h}'_1$ , 则

$$W' = X \oplus (U \oplus P_1),$$

且  $X = \text{rad } W'$ ,  $\dim \text{rad } W' = \dim X = s - 1$ . 再对  $W'$  用归纳假设即可.

特别地, 取辛子空间  $\overline{W} := P_1 \oplus \dots \oplus P_s \oplus U$ , 则  $\overline{W} \supseteq W$ , 并且容易验证  $\dim \overline{W} = 2k - 2l$ .  $\square$

满足上述性质的辛子空间  $\overline{W}$  称为子空间  $W$  的**辛包** (symplectic hull). 换言之,  $W$  的辛包是包含  $W$  的辛子空间之维数最低者. 特别注意, 子空间的辛包可能不唯一.

**定理 1.33.** 设  $W, W'$  是辛空间  $(V, \omega)$  的子空间, 则  $W$  与  $W'$  辛等价当且仅当

$$\dim W = \dim W' \quad \text{且} \quad \text{rank } \omega|_W = \text{rank } \omega|_{W'}. \quad (1.16)$$

证明. 若存在辛同构  $\phi \in \text{Sp}(V, \omega)$  使得  $W' = \phi(W)$ , 则(1.16)显然成立. 反之, 如果(1.16)成立, 记

$$2l := \text{rank } \omega|_W, \quad s := \dim W - \text{rank } \omega|_W,$$

分别取  $W, W'$  的形如(1.12)的基

$$\underline{e} = (e_1, \dots, e_l; f_1, \dots, f_l; h_1, \dots, h_s), \quad \underline{e}' = (e'_1, \dots, e'_l; f'_1, \dots, f'_l; h'_1, \dots, h'_s),$$

使得  $\omega|_W$  与  $\omega|_{W'}$  在相应基下的矩阵都为  $\begin{pmatrix} & I_l \\ -I_l & \\ & O_s \end{pmatrix}$ ; 再由引理1.32,

可知存在  $V$  中的向量  $k_1, \dots, k_s$  与  $k'_1, \dots, k'_s$ , 使得

$$\overline{W} := W \oplus \text{span}\{k_i \mid 1 \leq i \leq s\}, \quad \overline{W}' := W' \oplus \text{span}\{k'_i \mid 1 \leq i \leq s\},$$

分别是  $W, W'$  的辛闭包, 并且

$$(\omega|_{\overline{W}})_{(\underline{e}; k_1, \dots, k_s)} = (\omega|_{\overline{W}'})_{(\underline{e}'; k'_1, \dots, k'_s)} = \begin{pmatrix} & I_l \\ -I_l & \\ & I_s \\ & & -I_s \end{pmatrix}.$$

定义线性映射  $\psi: \overline{W} \rightarrow \overline{W}'$  如下:

$$\psi(e_i) = e'_i, \quad \psi(f_i) = f'_i, \quad \psi(h_i) = h'_i, \quad \psi(k_i) = k'_i,$$

则显然  $\psi$  是辛空间  $\overline{W}$  与  $\overline{W}'$  之间的辛同构. 注意  $\overline{W}$  与  $\overline{W}'$  都是  $V$  的辛子空间且维数相等, 从而  $\overline{W}^\perp$  与  $(\overline{W}')^\perp$  也都是  $V$  的辛子空间且维数相等, 从而存在辛同构  $\psi^\perp: \overline{W}^\perp \rightarrow (\overline{W}')^\perp$ . 再注意  $V = \overline{W} \oplus \overline{W}^\perp = \overline{W}' \oplus (\overline{W}')^\perp$ , 从而映射

$$\phi := \psi \oplus \psi^\perp \in \text{Sp}(V, \omega),$$

并且  $\phi(W) = W'$ , 因此  $W$  与  $W'$  辛等价. 定理得证.  $\square$

### 1.3.3 拉格朗日子空间

除了辛子空间与迷向子空间, 我们还关心如下的特殊子空间:

**定义 1.34.** 设  $W$  是辛空间  $(V, \omega)$  的子空间,

1. 如果  $W \supseteq W^\perp$ , 则称  $W$  是  $V$  的余迷向子空间(*coisotropic subspace*);



2. 如果  $W = W^\perp$ , 则称  $W$  是  $V$  的拉格朗日子空间(Lagrangian subspace).

与迷向子空间的情形类似, 若  $W$  是  $V$  的余迷向子空间, 则由维数公式(1.13)容易证明  $\dim W \geq \frac{1}{2} \dim V$ . 此外, 容易验证  $W$  是  $V$  的余迷向子空间当且仅当  $W^\perp$  是  $V$  的迷向子空间, 当且仅当  $\text{rad } W = W^\perp$ ; 并且此时  $W^{\text{red}} = W/W^\perp$ .

对于  $(V, \omega)$  的拉格朗日子空间  $L$ , 易证  $\dim L = \frac{1}{2} \dim V$ . 事实上,

$$\begin{aligned}
 & L \text{ 是 } V \text{ 的拉格朗日子空间} \\
 \Leftrightarrow & L \text{ 同时是 } V \text{ 的迷向子空间与余迷向子空间} \\
 \Leftrightarrow & L \text{ 是 } V \text{ 的迷向子空间且 } \dim L = \frac{1}{2} \dim V \\
 \Leftrightarrow & L \text{ 是 } V \text{ 的余迷向子空间且 } \dim L = \frac{1}{2} \dim V \\
 \Leftrightarrow & L \text{ 是 } V \text{ 的极大迷向子空间} \\
 \Leftrightarrow & L \text{ 是 } V \text{ 的极小余迷向子空间;}
 \end{aligned}$$

上述“极大”与“极小”是在通常的包含偏序下的.

我们有关于拉格朗日子空间的如下重要引理:

**引理 1.35.** (辛约化引理). 设  $V$  为辛空间,  $W$  是  $V$  的余迷向子空间,  $L$  是  $V$  的拉格朗日子空间, 记典范投影  $\pi: W \rightarrow W^{\text{red}} = W/W^\perp$ , 则  $\pi(L \cap W)$  是  $W^{\text{red}}$  的拉格朗日子空间. 特别地, 如果还满足  $V = L + W$ , 那么  $\pi|_{L \cap W}: L \cap W \rightarrow W^{\text{red}}$  是单射.

证明. 记  $2n := \dim V$ , 则  $\dim L = n$ . 显然  $\pi(L \cap W)$  是  $W^{\text{red}}$  的迷向子空间. 注意  $W^\perp \subseteq W$  以及维数公式(1.13), 可知

$$\begin{aligned}
 \dim \pi(L \cap W) &= \dim(L \cap W) - \dim(L \cap W^\perp) \\
 &= \dim(L \cap W) - (2n - \dim(L \cap W^\perp)^\perp) \\
 &= \dim(L \cap W) + \dim(L^\perp + (W^\perp)^\perp) - 2n \\
 &= \dim(L \cap W) + \dim(L + W) - 2n
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \dim L + \dim W - 2n \\
&= \dim W - n.
\end{aligned}$$

另一方面,

$$\begin{aligned}
\dim W^{\text{red}} &= \dim(W/W^\perp) = \dim W - \dim W^\perp \\
&= \dim W - (\dim V - \dim W) = 2(\dim W - n),
\end{aligned}$$

因此  $\dim W^{\text{red}} = 2 \dim \pi(L \cap W)$ , 从而  $\pi(L \cap W)$  是  $W^{\text{red}}$  的拉格朗日子空间.

特别地, 当  $V = L + W$  时, 注意

$$\ker \pi|_{L \cap W} = L \cap W^\perp = (L^\perp + W)^\perp = (L + W)^\perp = V^\perp = 0,$$

所以  $\pi|_{L \cap W}$  是单射. □

我们回忆微分拓扑学中的**横截性** (的线性代数版本): 对于线性空间  $V$  及其子空间  $W_1$  与  $W_2$ , 如果  $V = W_1 + W_2$ , 则称  $W_1$  与  $W_2$  (在  $V$  中) **横截相交**, 简称**横截**. 特别地, 对于辛空间  $(V, \omega)$  的拉格朗日子空间  $L_1, L_2$ , 注意维数关系  $\dim L_1 = \dim L_2 = \frac{1}{2} \dim V$ , 从而易知:

$$L_1 \text{ 与 } L_2 \text{ 横截} \quad \Leftrightarrow \quad L_1 \cap L_2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad V = L_1 \oplus L_2.$$

**引理 1.36.** 设  $L, L'$  是辛空间  $(V, \omega)$  的一组彼此横截的拉格朗日子空间,  $\underline{e} = (e_1, \dots, e_n)$  是  $L$  的一组基. 则存在  $L'$  的一组基  $\underline{e}' = (e'_1, \dots, e'_n)$ , 使得  $(\underline{e}, \underline{e}')$  构成  $V$  的一组辛基.

证明. 对  $L$  的基  $\underline{e}$  使用引理 1.32, 取向量组  $\underline{f} = (f_1, \dots, f_n)$ , 使得  $(\underline{e}, \underline{f})$  构成  $V$  的一组辛基. 注意  $L$  与  $L'$  横截,  $V = L \oplus L'$ , 从而对每个  $f_i$ , 存在唯一的  $\tilde{e}_i \in L$  以及  $e'_i \in L'$ , 使得  $f_i = \tilde{e}_i + e'_i$ , 并且显然  $e'_i \neq 0$ . 取  $\underline{e}' = (e'_1, \dots, e'_n)$ , 容易验证  $\underline{e}'$  是  $L'$  的一组基, 并且  $(\underline{e}, \underline{e}')$  构成  $V$  的一组辛基. □

**性质 1.37.** 对于辛空间  $(V, \omega)$  的任何两个拉格朗日子空间  $L, L'$ , 存在拉格朗日子空间  $L''$ , 使得  $L''$  与  $L, L'$  都横截.

证明. 如果  $L$  与  $L'$  横截, 则有引理1.36可知存在  $L$  的一组基  $\mathbf{e} = (e_1, \dots, e_n)$  以及  $L'$  的一组基  $\mathbf{e}' = (e'_1, \dots, e'_n)$  使得  $(\mathbf{e}, \mathbf{e}')$  构成  $V$  的一组辛基. 此时取  $L'' := \text{span} \{e_i + e'_i \mid 1 \leq i \leq n\}$  即可.

一般地, 首先注意到  $L + L'$  是余迷向的, 这是因为

$$(L + L')^\perp = L^\perp \cap (L')^\perp = L \cap L' \subseteq L + L'.$$

因此  $\text{rad}(L + L') = L \cap L'$ , 故  $(L + L')^{\text{red}} = (L + L') / (L \cap L')$ . 记  $\pi: L + L' \rightarrow (L + L')^{\text{red}}$  为相应的商映射. 于是, 由引理1.35可知  $\tilde{L} := \pi(L)$  与  $\tilde{L}' := \pi(L')$  都是  $(L + L')^{\text{red}}$  的拉格朗日子空间, 且在  $(L + L')^{\text{red}}$  中相互横截. 于是存在拉格朗日子空间  $\tilde{L}'' \subseteq (L + L')^{\text{red}}$ , 使得  $\tilde{L}''$  与  $\tilde{L}, \tilde{L}'$  都横截. 令  $\bar{L}'' := \pi^{-1}(\tilde{L}'')$ , 则易知  $\bar{L}''$  是  $V$  的拉格朗日子空间, 并且  $\bar{L}'' \cap L = \bar{L}'' \cap L' = L \cap L'$ .

任取  $L \cap L'$  在  $\bar{L}''$  中的一个补空间  $T$ , 使得

$$\bar{L}'' = (L \cap L') \oplus T.$$

注意  $\text{rad}(L + L') = L \cap L'$ , 对  $L + L'$  使用引理1.16知存在迷向子空间  $Q \subseteq T^\perp$ , 使得  $Q \cap (L + L') = 0$ ,  $\dim Q = \dim(L \cap L')$ , 且  $(L + L') \oplus Q$  是  $V$  的辛子空间. 取  $L'' := T \oplus Q$ , 易验证  $L''$  与  $L, L'$  都横截, 且是  $V$  的拉格朗日子空间. 得证.  $\square$

## 1.4 拉格朗日-格拉斯曼流形

众所周知,  $n$  维 (实) 线性空间  $V$  的全体  $m$  维子空间构成的集合  $\text{Gr}(V, m)$  具有自然的光滑流形结构, 即格拉斯曼流形 (Grassmannian). 对于辛空间  $(V, \omega)$ , 我们记

$$\mathcal{L}(V) := \{L \subseteq V \mid L \text{ 是 } V \text{ 的拉格朗日子空间}\}, \quad (1.17)$$

即  $V$  的全体拉格朗日子流形构成的集合. 显然  $\mathcal{L}(V)$  是  $\text{Gr}(V, n)$  的子集.

### 1.4.1 辛群在 $\mathcal{L}(V)$ 上的作用

对于辛空间  $(V, \omega)$ , 则辛群  $\text{Sp}(V, \omega)$  在  $\mathcal{L}(V)$  上有如下自然的作用:

$$\text{Sp}(V, \omega) \times \mathcal{L}(V) \rightarrow \mathcal{L}(V),$$

$$(\phi, L) \mapsto \phi(L).$$

由定理1.33可知, 对任意  $L, L' \in \mathcal{L}(V)$ , 都存在辛同构  $\phi \in \mathbf{Sp}(V, \omega)$  使得  $\phi(L) = L'$ . 换言之,  $\mathbf{Sp}(V, \omega)$  在  $\mathcal{L}(V)$  的作用是可迁的.

考虑辛群作用的稳定子群. 给定  $L \in \mathcal{L}(V)$ , 记

$$G_L := \{\phi \in \mathbf{Sp}(n, \omega) \mid \phi(L) = L\}. \quad (1.18)$$

$G_L$  显然是  $\mathbf{Sp}(V, \omega)$  的子群, 称为拉格朗日子空间  $L$  的迷向群 (isotropic group). 迷向群  $G_L$  在  $\mathbf{Sp}(V, \omega)$  中的陪集之全体与  $\mathcal{L}(V)$  有自然的一一对应:

$$\mathbf{Sp}(V, \omega)/G_L \cong \mathcal{L}(V). \quad (1.19)$$

**注 1.38.** 我们可以用矩阵的语言更具体地描述迷向群  $G_L$ . 取定  $L$  的一组基  $\mathbf{e} = (e_1, \dots, e_n)$ , 用引理1.32将其扩充为  $V$  的一组辛基  $(e_1, \dots, e_n; f_1, \dots, f_n)$ . 在这组辛基下, 辛群  $\mathbf{Sp}(V, \omega)$  同构于矩阵群  $\mathbf{Sp}(n, \mathbb{F})$ . 此时, 容易验证

$$G_L \cong \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ & D \end{pmatrix} \in \mathbf{GL}(2n, \mathbb{F}) \mid B^T D = D^T B, A^T D = I_n \right\}. \quad (1.20)$$

若读者熟悉李群相关知识, 可知当  $\mathbb{F} = \mathbb{R}$  时(1.19)式给出了  $\mathcal{L}(V)$  的齐性空间 (homogeneous space) 结构, 从而  $\mathcal{L}(V)$  是光滑流形, 这正是拉格朗日-格拉斯曼流形. 接下来, 我们将利用拉格朗日子空间的横截性来具体给出  $\mathcal{L}(V)$  的一族局部坐标卡.

对于拉格朗日子空间  $L \in \mathcal{L}(V)$ , 记

$$\mathcal{T}(L) := \{L' \in \mathcal{L}(V) \mid L \cap L' = 0\}, \quad (1.21)$$

即与  $L$  横截的所有拉格朗日子空间之全体.

迷向群  $G_L$  在  $\mathcal{T}(L)$  上有自然的作用: 对任意  $L' \in \mathcal{T}(L)$  以及  $\phi \in G_L$ , 容易验证  $\phi(L') \in \mathcal{T}(L)$ . 断言  $G_L$  在  $\mathcal{T}(L)$  上的作用是可迁的. 这是因为, 对任意  $L', L'' \in \mathcal{T}(L)$ , 取定  $L$  的一组基  $\mathbf{e} = (e_1, \dots, e_n)$ , 利用引理1.36分别取  $L', L''$  的基  $\mathbf{e}' = (e'_1, \dots, e'_n)$  以及  $\mathbf{e}'' = (e''_1, \dots, e''_n)$ , 使得  $(\mathbf{e}, \mathbf{e}')$  与  $(\mathbf{e}, \mathbf{e}'')$  都是  $V$  的辛基; 取线性变换  $\phi: V \rightarrow V$ , 使得  $\phi e_i = e_i, \phi e'_i = e''_i$ , 则显然  $\phi \in G_L$ , 并且  $\phi(L') = L''$ .

给定  $L' \in \mathcal{T}(L)$ , 记稳定子群

$$G_{L,L'} := \{\phi \in G_L \mid \phi(L') = L'\} = G_L \cap G_{L'},$$

它是  $G_L$  的子群, 并且它在  $G_L$  中的陪集之全体与  $\mathcal{T}(L)$  自然一一对应:

$$G_L/G_{L,L'} \cong \mathcal{T}(L).$$

**注 1.39.** 亦可用矩阵语言更具体地描述群  $G_{L,L'}$ . 对于  $L' \in \mathcal{T}(L)$ , 利用引理 1.36 分别取定  $L, L'$  的基  $\underline{e} = (e_1, \dots, e_n)$  与  $\underline{e}' = (e'_1, \dots, e'_n)$ , 使得  $(\underline{e}, \underline{e}')$  构成  $V$  的辛基. 在此辛基下, 迷向群  $G_L$  依然有矩阵表示 (1.20), 并且容易验证

$$G_{L,L'} \cong \left\{ \begin{pmatrix} A & \\ & A^{-T} \end{pmatrix} \middle| A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{F}) \right\} \cong \mathrm{GL}(n, \mathbb{F}). \quad (1.22)$$

进而容易验证

$$\mathcal{T}(L) \cong G_L/G_{L,L'} \cong \left\{ \begin{pmatrix} I & S \\ & I \end{pmatrix} \middle| S^T = S \right\} \cong \mathbb{F}^{\frac{n(n+1)}{2}}.$$

这启发我们:  $\mathcal{T}(L)$  具有  $\frac{n(n+1)}{2}$  维仿射空间结构.

### 1.4.2 $\mathcal{T}(L)$ 的仿射空间结构

众所周知, 仿射空间 (affine space) 是指三元组  $(A, V, \pi)$ , 其中  $A$  为集合,  $V$  为  $\mathbb{F}$ -线性空间, 并且映射  $\pi: A \times A \rightarrow V$  满足如下性质:

1. 对任意  $a \in A$ ,  $\pi|_{\{a\} \times A}: A \rightarrow V, b \mapsto \pi(a, b)$  是双射;
2. 任意  $a, b, c \in A$ , 成立  $\pi(a, b) + \pi(b, c) = \pi(a, c)$ .

在仿射空间  $(A, V, \pi)$  中, 对于  $a, b \in A$ , 习惯将  $\pi(a, b)$  俗称为“以  $a$  为始点且以  $b$  为终点的向量”; 该仿射空间的维数  $\dim A := \dim V$ .

在注 1.39 中, 我们在一组选取特殊的基下来显式表示  $\mathcal{T}(L)$ , 从而容易给出  $\mathcal{T}(L)$  的仿射空间结构, 但这种表示方法依赖坐标选取. 事实上,  $\mathcal{T}(L)$  具有不依赖坐标选取的自然的仿射空间结构.

大致来说, 对于  $L', L'' \in \mathcal{T}(L)$ , 则  $L''$  可以看成某个线性映射  $\varepsilon: L' \rightarrow L$  的图像, 该  $\varepsilon$  自然可以看成双线性函数  $L' \times L^* \rightarrow \mathbb{F}$ , 其中  $L^*$  是  $L$  的对偶空间; 再注意辛结构  $\omega$  给出自然同构  $L' \cong L^*$ , 由此将上述双线性函数看成双线性型  $Q_{L'L''}: L^* \times L^* \rightarrow \mathbb{F}$ . 可以验证  $Q_{L'L''}$  是对称双线性型, 即  $Q_{L'L''} \in \text{Sym}^2(L^*)$ . 这就给出了映射  $\pi: \mathcal{T}(L) \times \mathcal{T}(L) \rightarrow \text{Sym}^2(L^*)$ ,  $(L', L'') \mapsto Q_{L'L''}$ , 可以验证  $(\mathcal{T}(L), \text{Sym}^2(L^*), \pi)$  是仿射空间.

接下来将上述想法的具体细节逐步补全.

**引理 1.40.** 给定辛空间  $(V, \omega)$  的拉格朗日子空间  $L$ , 则对任意  $L', L'' \in \mathcal{T}(L)$ ,

1. 对任意  $\mathbf{x}' \in L'$ , 存在唯一  $\mathbf{y} \in L$  使得  $\mathbf{x}' + \mathbf{y} \in L''$ . 这给出了一个从  $L'$  到  $L$  的映射  $\varepsilon_{L'L''}: \mathbf{x}' \mapsto \mathbf{y}$ , 易知  $\varepsilon_{L'L''}: L' \rightarrow L$  是线性映射.
2. 存在唯一的线性同构  $\lambda_{L'}: L^* \rightarrow L'$ , 使得对任意  $\psi \in L^*$ ,  $\mathbf{x} \in L$  都有

$$\omega(\lambda_{L'}\psi, \mathbf{x}) = \psi(\mathbf{x}).$$

此外, 上述定义的  $\varepsilon_{L'L''}$  与  $\lambda_{L'}$  满足如下关系: 对任意  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in L'$ ,

$$\omega(\mathbf{x}, \varepsilon_{L'L''}\mathbf{y}) + \omega(\varepsilon_{L'L''}\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0.$$

证明. 注意  $V = L'' \oplus L$ , 从而每个  $\mathbf{x}' \in L'$  都可唯一分解为  $\mathbf{x}' = \mathbf{x}'' + \mathbf{x}$ , 其中  $\mathbf{x}'' \in L''$ ,  $\mathbf{x} \in L$ . 取  $\mathbf{y} := -\mathbf{x}$  即可, 之后容易验证  $\varepsilon_{L'L''}$  的良好性. 由  $\omega$  的非退化性容易给出  $\lambda_{L'}$ . 现在对任意  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in L'$ , 则  $\mathbf{x} + \varepsilon_{L'L''}\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{y} + \varepsilon_{L'L''}\mathbf{y} \in L''$ . 注意  $\omega|_{L''} = 0$ , 于是

$$\omega(\mathbf{x} + \varepsilon_{L'L''}\mathbf{x}, \mathbf{y} + \varepsilon_{L'L''}\mathbf{y}) = 0.$$

再注意  $L, L'$  也是  $V$  的迷向子空间, 从而上式整理得

$$\omega(\mathbf{x}, \varepsilon_{L'L''}\mathbf{y}) + \omega(\varepsilon_{L'L''}\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0,$$

引理得证. □

**性质 1.41.** 给定辛空间  $(V, \omega)$  的拉格朗日子空间  $L$ , 对任意  $L', L'' \in \mathcal{T}(L)$ , 定义双线性型  $Q_{L'L''}$  如下:

$$\begin{aligned} Q_{L'L''}: L^* \times L^* &\rightarrow \mathbb{F} \\ (\phi, \psi) &\mapsto \phi(\varepsilon_{L'L''}(\lambda_{L'}\psi)), \end{aligned} \quad (1.23)$$

其中  $\varepsilon_{L'L''}$  与  $\lambda_{L'}$  的定义见引理 1.40, 则  $Q_{L'L''} \in \text{Sym}^2(L^*)$ . 换言之, 对任意  $\phi, \psi \in L^*$ ,

$$Q_{L'L''}(\phi, \psi) = Q_{L'L''}(\psi, \phi).$$

证明. 注意引理 1.40 中的有关定义与性质, 直接验证得

$$\begin{aligned} Q_{L'L''}(\phi, \psi) &= \phi(\varepsilon_{L'L''}(\lambda_{L'}\psi)) = \omega(\lambda_{L'}\phi, \varepsilon_{L'L''}(\lambda_{L'}\psi)) \\ &= \omega(\lambda_{L'}\psi, \varepsilon_{L'L''}(\lambda_{L'}\phi)) = \psi(\varepsilon_{L'L''}(\lambda_{L'}\phi)) = Q_{L'L''}(\psi, \phi), \end{aligned}$$

从而得证. □

以下是本小节的主要结果:

**定理 1.42.** 给定辛空间  $(V, \omega)$  的拉格朗日子空间  $L$ , 则  $(\mathcal{T}(L), \text{Sym}^2(L^*), \pi)$  是仿射空间, 其中  $\pi: (L', L'') \mapsto Q_{L'L''}$ , 而  $Q_{L'L''}$  的含义见性质 1.41.

证明. 对任意  $L' \in \mathcal{T}(L)$ , 首先验证

$$\begin{aligned} \pi_{L'}: \mathcal{T}(L) &\rightarrow \text{Sym}^2(L^*) \\ L'' &\mapsto Q_{L'L''} \end{aligned}$$

是双射. 为此, 只需给出该映射的逆. 注意到  $Q \in \text{Sym}^2(L^*)$  自然诱导线性映射

$$\begin{aligned} Q^\flat: L^* &\rightarrow (L^*)^* \\ \phi &\mapsto Q(\phi, -), \end{aligned}$$

从而易知存在唯一的  $\varepsilon_Q: L' \rightarrow L$  使得下图交换:

$$\begin{array}{ccc} L^* & \xrightarrow{Q^\flat} & (L^*)^* \\ \lambda_{L'} \parallel \cong & & \parallel \cong \\ L' & \xrightarrow{\varepsilon_Q} & L \end{array}$$

其中线性同构  $\lambda_{L'}: L' \rightarrow L^*$  见引理1.40. 令

$$L'' := \{\mathbf{x}' + \varepsilon_Q \mathbf{x}' \mid \mathbf{x}' \in L'\},$$

即线性映射  $\varepsilon_Q$  的图像. 容易验证  $L'' \in \mathcal{T}(L)$ , 并且映射  $\varepsilon_Q \mapsto L''$  恰为  $\pi_{L'}: \mathcal{T}(L) \rightarrow \text{Sym}^2(L^*)$  的逆, 从而  $\pi_{L'}$  是双射.

对任意  $L_1, L_2, L_3 \in \mathcal{T}(L)$ , 容易验证

$$\begin{aligned} \lambda_{L_2} \psi &= \lambda_{L_1} \psi + \varepsilon_{L_1 L_2}(\lambda_{L_1} \psi) \\ \varepsilon_{L_1 L_3} \mathbf{x} &= \varepsilon_{L_1 L_2} \mathbf{x} + \varepsilon_{L_2 L_3}(\mathbf{x} + \varepsilon_{L_1 L_2} \mathbf{x}) \end{aligned}$$

对任意  $\psi \in L^*$ ,  $\mathbf{x} \in L_1$  都成立 (留给读者), 从而对任意  $\phi, \psi \in L^*$  都有

$$\begin{aligned} & (Q_{L_1 L_2} + Q_{L_2 L_3})(\phi, \psi) \\ &= \phi(\varepsilon_{L_1 L_2} \lambda_{L_1} \psi) + \phi(\varepsilon_{L_2 L_3} \lambda_{L_2} \psi) \\ &= \phi(\varepsilon_{L_1 L_2} \lambda_{L_1} \psi + \varepsilon_{L_2 L_3}(\lambda_{L_1} + \varepsilon_{L_1 L_2} \lambda_{L_1}) \psi) \\ &= \phi(\varepsilon_{L_1 L_3} \lambda_{L_1} \psi) = Q_{L_1 L_3}(\phi, \psi), \end{aligned}$$

这表明对任意  $L_1, L_2, L_3 \in \mathcal{T}(L)$  都有  $Q_{L_1 L_2} + Q_{L_2 L_3} = Q_{L_1 L_3}$ , 定理得证.  $\square$

**注 1.43.** 易知  $\{\mathcal{T}(L) \mid L \in \mathcal{L}(V)\}$  给出了  $\mathcal{L}(V)$  的一族局部坐标卡, 这使得  $\mathcal{L}(V)$  是  $\frac{n(n+1)}{2}$  维光滑流形.

**题 1.44.** 给定辛空间  $(V, \omega)$  的拉格朗日子空间  $L$ , 以及  $L', L'' \in \mathcal{T}(L)$ , 证明:  $L'$  横截于  $L''$  当且仅当二次型  $Q_{L' L''}$  非退化.

## 1.5 实辛空间的复结构

从本节开始, 我们研究实数域上的辛空间, 即取  $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ .



### 1.5.1 $\mathbb{R}^{2n}$ 的标准辛结构与复结构

众所周知, 偶数维实线性空间  $\mathbb{R}^{2n}$  有如下的标准结构:

1. 标准欧氏结构. 正定对称双线性型 (欧氏内积)  $g: \mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$g(\mathbf{v}, \mathbf{w}) := \mathbf{v}^T \mathbf{w} = \sum_{k=1}^{2n} v_k w_k.$$

2. 标准辛结构. 非退化反对称双线性型  $\omega: \mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$\omega(\mathbf{v}, \mathbf{w}) := \mathbf{v}^T \mathbf{J} \mathbf{w} = \sum_{k=1}^n (v_k w_{n+k} - v_{n+k} w_k),$$

$$\text{其中 } \mathbf{J} = \begin{pmatrix} & \mathbf{I}_n \\ -\mathbf{I}_n & \end{pmatrix}.$$

3. 标准复结构. 可将  $\mathbb{R}^{2n}$  通过如下方式等同于  $n$  维复线性空间  $\mathbb{C}^n$ :

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^{2n} &\rightarrow \mathbb{C}^n \\ \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{pmatrix} &\mapsto \mathbf{x} + \mathbf{i}\mathbf{y}, \end{aligned}$$

其中  $\mathbf{i} = \sqrt{-1}$  为虚数单位. 借助  $\mathbb{C}^n$  的复线性结构, 可以谈论  $\mathbb{R}^{2n}$  中的向量与虚数的数乘: 对于  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^{2n}$ , 令  $\mathbf{i} \cdot \mathbf{v} = -\mathbf{J}\mathbf{v}$ . 一般地, 对于复数  $z = a + \mathbf{i}b$  ( $a, b \in \mathbb{R}$ ) 以及  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^{2n}$ , 成立  $z \cdot \mathbf{v} = a\mathbf{v} - b\mathbf{J}\mathbf{v}$ .

此外, 在上述同构  $\mathbb{R}^{2n} \cong \mathbb{C}^n$  下, 自然可以将  $\mathbb{R}^{2n}$  的标准辛结构  $\omega$  搬运到  $\mathbb{C}^n$  上. 容易验证, 对于  $\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2 \in \mathbb{C}^n$ ,

$$\omega(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2) = \text{Im}(\mathbf{z}_1^\dagger \mathbf{z}_2), \quad (1.24)$$

其中  $\mathbf{z}_1^\dagger := \overline{\mathbf{z}_1}^T$  为共轭转置.

4. 标准厄米特结构. 定义  $\mathbb{R}^{2n}$  上的双线性型  $h: \mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{C}$  如下:

$$h(\mathbf{v}, \mathbf{w}) := g(\mathbf{v}, \mathbf{w}) - \mathbf{i}\omega(\mathbf{v}, \mathbf{w}). \quad (1.25)$$

容易验证, 上述  $h$  满足如下众所周知的性质: 对任意  $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^{2n}$  以及  $z \in \mathbb{C}$ ,

(a) 共轭对称性:  $h(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \overline{h(\mathbf{w}, \mathbf{v})}$ .

(b) 共轭双线性:  $h(z\mathbf{v}, \mathbf{w}) = zh(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ ,  $h(\mathbf{v}, z\mathbf{w}) = \bar{z}h(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ .

(c) 正定性:  $h(\mathbf{v}, \mathbf{v}) \geq 0$ , 等号成立当且仅当  $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ .

在  $\mathbb{R}^{2n}$  的欧氏结构下, 可以谈论**正交基**; 在  $\mathbb{R}^{2n}$  的辛结构下, 可以谈论**辛基**; 在  $\mathbb{R}^{2n}$  的复结构下, 可以谈论**复基** (复线性空间的基); 在  $\mathbb{R}^{2n}$  的厄米特结构下, 可以谈论**酉基** (厄米特正交基). 这些概念众所周知, 不再赘述.

**性质 1.45.** ( $\mathbb{R}^{2n}$  的拉格朗日子空间)

1. 对于  $2n \times n$  实矩阵  $M = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ , 则  $M$  的列向量张成的空间是  $\mathbb{R}^{2n}$  的拉格朗日子空间当且仅当矩阵  $M$  满秩, 并且

$$X^T Y = Y^T X.$$

2. 对于  $\mathbb{R}^{2n}$  的  $n$  维子空间  $L$ , 则  $L$  是拉格朗日子空间当且仅当存在  $L$  的一组基  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$ , 使得这组基是  $\mathbb{R}^{2n}$  的酉基, 换言之,

$$h(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = \delta_{ij}, \quad \forall i, j = 1, 2, \dots, n.$$

证明. (1). 只需注意  $M$  的列向量张成的空间是迷向子空间当且仅当  $M^T J M = \mathbf{0}$ , 其余细节留给读者. (2). 总可以取  $L$  的一组正交基  $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ , 使得  $g(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = \delta_{ij}$ . 如果  $L$  是拉格朗日子空间, 则  $L$  是迷向子空间, 于是  $\omega(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = 0$ . 因此  $h(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = g(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) - i\omega(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = \delta_{ij}$ , 故  $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$  是  $\mathbb{R}^{2n}$  的一组酉基. 反之类似, 留给读者.  $\square$

$\mathbb{R}^{2n}$  的线性变换群  $GL(2n, \mathbb{R})$  的保持欧氏结构, 辛结构, 复结构, 厄米特结构的子群分别称为**正交群**, **辛群**, **复线性群**, **酉群**:

$$\begin{aligned} O(2n) &:= \{M \in GL(2n, \mathbb{R}) \mid g(M\mathbf{v}, M\mathbf{w}) = g(\mathbf{v}, \mathbf{w}), \forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^{2n}\} \\ &= \{M \in GL(2n, \mathbb{R}) \mid M^T M = I_{2n}\} \\ Sp(n, \mathbb{R}) &:= \{M \in GL(2n, \mathbb{R}) \mid \omega(M\mathbf{v}, M\mathbf{w}) = \omega(\mathbf{v}, \mathbf{w}), \forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^{2n}\} \\ &= \{M \in GL(2n, \mathbb{R}) \mid M^T J M = J\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{GL}(n, \mathbb{C}) &:= \{M \in \mathrm{GL}(2n, \mathbb{R}) \mid M(\mathbf{i} \cdot \mathbf{v}) = \mathbf{i} \cdot M\mathbf{v}, \forall \mathbf{v} \in \mathbb{R}^{2n}\} \\
&= \{M \in \mathrm{GL}(2n, \mathbb{R}) \mid M\mathbf{J} = \mathbf{J}M\} \\
\mathrm{U}(n) &:= \{M \in \mathrm{GL}(2n, \mathbb{R}) \mid h(M\mathbf{v}, M\mathbf{w}) = h(\mathbf{v}, \mathbf{w}), \forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^{2n}\} \\
&= \{M \in \mathrm{GL}(2n, \mathbb{R}) \mid M^T M = \mathbf{I}_{2n}, M^T \mathbf{J} M = \mathbf{J}\}.
\end{aligned}$$

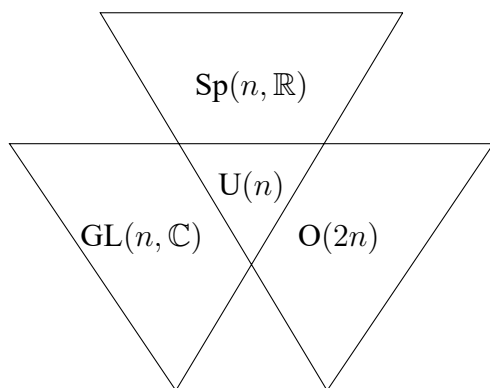
特别注意  $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$  中的元素都形如  $\begin{pmatrix} \mathbf{X} & -\mathbf{Y} \\ \mathbf{Y} & \mathbf{X} \end{pmatrix}$ . 容易验证, 通过对应

$$\begin{pmatrix} \mathbf{X} & -\mathbf{Y} \\ \mathbf{Y} & \mathbf{X} \end{pmatrix} \mapsto \mathbf{X} + \mathbf{i}\mathbf{Y},$$

可将  $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$  视为通常意义下的  $n$  阶可逆复方阵乘法群. 此外, 容易验证以下关系:

**性质 1.46.**

$$\mathrm{U}(n) = \mathrm{O}(2n) \cap \mathrm{Sp}(n, \mathbb{R}) = \mathrm{Sp}(n, \mathbb{R}) \cap \mathrm{GL}(n, \mathbb{C}) = \mathrm{GL}(n, \mathbb{C}) \cap \mathrm{O}(2n).$$



性质1.46示意图

证明. 易证, 留给读者. □

本小节最后, 我们继续研究拉格朗日-格拉斯曼流形  $\mathcal{L}(\mathbb{R}^{2n})$  的结构.

**定理 1.47.** 记  $\mathcal{L}(\mathbb{R}^{2n})$  是标准辛空间  $\mathbb{R}^{2n}$  的全体拉格朗日子空间构成的

集合, 则

$$\mathcal{L}(\mathbb{R}^{2n}) \cong \mathrm{U}(n)/\mathrm{O}(n).$$

证明. 注意  $\mathrm{U}(n)$  中的线性变换将  $\mathbb{R}^{2n}$  的西基变为另一组西基, 再结合性质 1.45 的第 (2) 部分, 易知  $\mathrm{U}(n)$  中的变换将  $\mathbb{R}^{2n}$  中的拉格朗日子空间变为拉格朗日子空间, 即西群  $\mathrm{U}(n)$  以自然的方式作用于  $\mathcal{L}(\mathbb{R}^{2n})$ . 容易验证这个群作用是可迁的. 取  $L_0 := \mathrm{span}_{\mathbb{R}}\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^{2n})$ , 容易验证稳定子群

$$\begin{aligned} \mathrm{U}(n)_{L_0} &:= \{\mathbf{M} \in \mathrm{U}(n) \mid \mathbf{M}(L_0) = L_0\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \\ & \mathbf{A} \end{pmatrix} \mid \mathbf{A}^{\mathrm{T}} \mathbf{A} = \mathbf{I}_n \right\} \cong \mathrm{O}(n), \end{aligned}$$

从而  $\mathcal{L}(\mathbb{R}^{2n}) \cong \mathrm{U}(n)/\mathrm{O}(n)$ . □

### 1.5.2 实辛空间的 $\omega$ -正定相容复结构, Kähler 空间

上一小节已介绍  $\mathbb{R}^{2n}$  上的欧氏结构, 辛结构与复结构, 而本节讲给出上述概念在一般的  $\mathbb{R}$ -线性空间上的不依赖坐标的表述. 首先看复结构.

**定义 1.48.** 设  $V$  是  $\mathbb{R}$ -线性空间,  $J \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(V)$  是  $V$  上的线性变换. 如果

$$J^2 = -\mathrm{id}_V,$$

则称  $J$  是  $V$  的一个复结构.

容易验证, 线性空间  $V$  存在复结构, 当且仅当  $\dim_{\mathbb{R}} V$  是偶数 (简单习题). 若  $J$  是  $V$  的一个复结构, 则  $(V, J)$  有众所周知的  $\mathbb{C}$ -线性空间结构:

$$\mathbf{i} \cdot \mathbf{v} := J\mathbf{v},$$

其中  $\mathbf{i} = \sqrt{-1}$ . 若  $\underline{\mathbf{e}} = (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$  是  $(V, J)$  的一组  $\mathbb{C}$ -基, 则容易验证  $(\underline{\mathbf{e}}, J\underline{\mathbf{e}}) = (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n; J\mathbf{e}_1, \dots, J\mathbf{e}_n)$  是  $V$  的一组  $\mathbb{R}$ -基, 且  $J$  在该基下的矩阵

$$J_{(\underline{\mathbf{e}}, J\underline{\mathbf{e}})} = \begin{pmatrix} & -\mathbf{I}_n \\ \mathbf{I}_n & \end{pmatrix} = -J.$$

对于  $\mathbb{R}$ -线性空间  $V$ , 无论其是否给定复结构, 总可自然得到一个  $\mathbb{C}$ -线性空间

$$V_{\mathbb{C}} := V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}, \quad (1.26)$$

称为  $\mathbb{R}$ -线性空间  $V$  的**复化 (complexification)**. 注意  $2n$  维  $\mathbb{R}$ -线性空间  $V$  的复结构  $J \in \text{End}_{\mathbb{R}}(V)$  可  $\mathbb{C}$ -线性延拓为  $J_{\mathbb{C}} \in \text{End}_{\mathbb{C}}(V_{\mathbb{C}})$ . 易知  $J_{\mathbb{C}}$  具有特征值  $\pm i$ , 并且

$$\begin{aligned} V_{1,0} &:= \{v - iJv \mid v \in V\}, \\ V_{0,1} &:= \{v + iJv \mid v \in V\} \end{aligned} \quad (1.27)$$

分别是  $J_{\mathbb{C}}$  的属于特征值  $i, -i$  的  $\mathbb{C}$ -特征子空间, 且  $V_{\mathbb{C}}$  是上述两个子空间的直和:

$$V_{\mathbb{C}} = V_{1,0} \oplus V_{0,1}.$$

容易验证, 映射

$$\begin{aligned} V &\rightarrow V_{1,0} \\ v &\mapsto \frac{1}{\sqrt{2}}(v - iJv) \end{aligned} \quad (1.28)$$

给出了  $\mathbb{C}$ -线性空间  $(V, J)$  与  $(V_{1,0}, i)$  之间的  $\mathbb{C}$ -线性同构.

**定义 1.49.** 对于实辛空间  $(V, \omega)$ ,  $J \in \text{End}_{\mathbb{R}}(V)$  是  $V$  的复结构. 如果

$$\omega(Jv, Jw) = \omega(v, w), \quad \forall v, w \in V, \quad (1.29)$$

则称复结构  $J$  与辛结构  $\omega$  **相容**, 或者称  $J$  是  $\omega$ -相容的.

对于实辛空间  $(V, \omega)$  的  $\omega$ -相容复结构  $J$ , 定义  $V$  上的双线性型  $g = g_J$  如下:

$$g(v, w) := \omega(v, Jw) \quad \forall v, w \in V, \quad (1.30)$$

则容易验证  $g$  是对称双线性型, 这是因为对任意  $v, w \in V$ ,

$$\begin{aligned} g(v, w) &= \omega(v, Jw) = -\omega(Jw, v) = -\omega(J^2w, Jv) \\ &= \omega(w, Jv) = g(w, v). \end{aligned}$$

此外也易知  $g(v, w) = g(Jv, Jw)$ . 但一般来说, 上述  $g$  并不一定满足正定性, 从而仅仅是**伪欧氏度量**; 而如果  $g$  恰好满足正定性, 我们有:

**定义 1.50.** 记号承上. 对于辛空间  $(V, \omega)$  的  $\omega$ -相容复结构  $J$ , 如果(1.30)式中的双线性型  $g$  满足正定性, 即

$$g(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = \omega(\mathbf{v}, J\mathbf{v}) \geq 0 \quad \forall \mathbf{v} \in V,$$

则称复结构  $J$  是 $\omega$ -正定相容的; 此时称三元组  $(V, \omega, J)$  为 **Kähler 空间**.

对于 Kähler 空间  $(V, \omega, J)$ , 可将相应的欧氏内积  $g$  延拓为  $V_{\mathbb{C}}$  上的共轭双线性型  $g_{\mathbb{C}}$ , 再将  $g_{\mathbb{C}}$  限制在子空间  $V_{1,0}$  上, 最后通过  $V_{1,0}$  与  $V$  的同构(1.28), 可得  $V$  上的一个复值双线性型, 称为 Kähler 空间  $(V, J, \omega)$  的厄米特结构. 具体构造如下: 通过

$$\begin{aligned} g_{\mathbb{C}}(\mathbf{i}\mathbf{v}, \mathbf{w}) &:= \mathbf{i}g(\mathbf{v}, \mathbf{w}) \\ g_{\mathbb{C}}(\mathbf{v}, \mathbf{i}\mathbf{w}) &:= -\mathbf{i}g(\mathbf{v}, \mathbf{w}), \end{aligned} \quad \forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$$

将  $g: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  延拓为  $g_{\mathbb{C}}: V_{\mathbb{C}} \times V_{\mathbb{C}} \rightarrow \mathbb{C}$ . 再令  $h: V \times V \rightarrow \mathbb{C}$  如下:

$$\begin{aligned} h(\mathbf{v}, \mathbf{w}) &:= g_{\mathbb{C}}\left(\frac{\mathbf{v} - \mathbf{i}J\mathbf{v}}{\sqrt{2}}, \frac{\mathbf{w} - \mathbf{i}J\mathbf{w}}{\sqrt{2}}\right) \\ &= g(\mathbf{v}, \mathbf{w}) - \mathbf{i}\omega(\mathbf{v}, \mathbf{w}), \end{aligned} \quad (1.31)$$

则容易验证  $h$  是复线性空间  $(V, J)$  的一个厄米特内积, 它关于第二个分量共轭线性.

既然每个  $\omega$ -正定相容复结构  $J$  都对应一个欧氏内积  $g$ , 那反过来, 能否从一个欧氏内积出发来构造一个  $\omega$ -正定相容复结构? 设  $\gamma$  是实辛空间  $(V, \omega)$  的一个欧氏内积, 易知存在算子  $A \in \text{End}_{\mathbb{R}}(V)$ , 使得

$$\omega(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \gamma(A\mathbf{v}, \mathbf{w}) \quad \forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V.$$

由  $\omega$  的反对称性容易验证

$$\gamma(A\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \gamma(\mathbf{v}, -A\mathbf{w}),$$

换言之, 算子  $A$  是  $\gamma$ -反自伴的, 从而  $A^2$  是  $\gamma$ -自伴算子. 再注意到

$$\gamma(A^2\mathbf{v}, \mathbf{v}) = -\gamma(A\mathbf{v}, A\mathbf{v}) \leq 0,$$

考虑  $A^2$  的特征值, 易知存在唯一的  $\gamma$ -自伴算子  $B$ , 使得

$$B^2 = -A^2,$$

并且  $\gamma(B\mathbf{v}, \mathbf{v}) \geq 0$  对任意  $\mathbf{v} \in V$  都成立. 引入算子

$$J_\gamma := AB^{-1}. \quad (1.32)$$

考察  $A, B$  的特征子空间, 容易证明  $AB^{-1} = B^{-1}A$ , 因此

$$J_\gamma^2 = AB^{-1} \cdot B^{-1}A = A(-A^{-2})A = -\text{id}_V,$$

这表明  $J_\gamma$  是  $V$  的一个复结构. 断言  $J_\gamma$  是  $\omega$ -相容的, 这是因为对任意  $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$  都有

$$\begin{aligned} \omega(J_\gamma \mathbf{v}, J_\gamma \mathbf{w}) &= \omega(AB^{-1}\mathbf{v}, B^{-1}A\mathbf{w}) = \gamma(A^2B^{-1}\mathbf{v}, B^{-1}A\mathbf{w}) = -\gamma(B\mathbf{v}, B^{-1}A\mathbf{w}) \\ &= -\gamma(\mathbf{v}, BB^{-1}A\mathbf{w}) = -\gamma(\mathbf{v}, A\mathbf{w}) = \omega(\mathbf{v}, \mathbf{w}). \end{aligned}$$

最后验证  $J_\gamma$  的正定性. 注意

$$g_\gamma(\mathbf{v}, \mathbf{w}) := \omega(\mathbf{v}, J_\gamma \mathbf{w}) = \gamma(A\mathbf{v}, AB^{-1}\mathbf{w}) = \gamma(\mathbf{v}, -A^2B^{-1}\mathbf{w}) = \gamma(\mathbf{v}, B\mathbf{w}),$$

以及算子  $B$  的  $\gamma$ -正定性, 可知  $g_\gamma(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = \gamma(\mathbf{v}, B\mathbf{v}) \geq 0$ . 因此  $J_\gamma$  是  $\omega$ -正定相容的.

**注 1.51.** 在上述证明中,  $A$  是  $\gamma$ -反自伴算子, 这也记作  $A^* = -A$ , 其中  $A^*$  是  $A$  的  $\gamma$ -伴随. 事实上,  $B = \sqrt{AA^*}$  在矩阵论中俗称“正定算子开根”, 且

$$A = \sqrt{AA^*}J$$

是算子  $A$  的极分解.

**注 1.52.** 对于实辛空间  $(V, \omega)$ , 我们建立了如下对应:

$$\begin{array}{ccc} & \xrightarrow{\phi} & \\ \{V \text{ 的 } \omega\text{-正定相容复结构}\} & & \{V \text{ 的欧氏内积}\} \\ & \xleftarrow{\psi} & \end{array}$$

其中  $\phi: J \mapsto \omega(-, J-)$ , 以及(1.32)式所给出的  $\psi: \gamma \mapsto J_\gamma$ . 容易验证

$$\psi \circ \phi = \text{id},$$

从而  $\psi$  是满射 (但一般来说不是单射).

**题 1.53.** 设  $J_0, J_1$  都是辛空间  $(V, \omega)$  的  $\omega$ -正定相容复结构, 则对任意  $t \in [0, 1]$ ,

$$J_t := (1-t)J_0 + tJ_1$$

也是  $\omega$ -正定相容复结构. 即  $(V, \omega)$  的所有  $\omega$ -正定相容复结构组成凸集.

对于 Kähler 空间  $(V, \omega, J)$ , 考虑由(1.30)定义的欧氏内积  $g$ , 以及(1.31)所定义的厄米特内积  $h$ . 与众所周知的  $\mathbb{R}^{2n}$  情形完全一样, 可以考虑  $\mathrm{GL}(V, \mathbb{R})$  的一些特殊子群. 保持厄米特内积的线性变换构成的群为酉群, 记作  $\mathrm{U}(V, h)$ ; 保持欧氏内积的线性变换构成的群为正交群, 记作  $\mathrm{O}(V, g)$ ; 保持复结构的线性变换群为复线性群, 记作  $\mathrm{GL}(V, J)$ ; 此外还有辛群  $\mathrm{Sp}(V, \omega)$ . 易验证

$$\mathrm{U}(V, h) = \mathrm{O}(V, g) \cap \mathrm{GL}(V, J) = \mathrm{GL}(V, J) \cap \mathrm{Sp}(V, \omega) = \mathrm{Sp}(V, \omega) \cap \mathrm{O}(V, g).$$

对于 Kähler 空间  $(V, \omega, J)$  的拉格朗日子空间  $L$ , 任取  $L$  的一组  $g$ -正交基  $\underline{e} = (e_1, \dots, e_n)$ , 则容易验证  $\underline{e}$  也是  $V$  的一组  $h$ -酉基. 反之,  $V$  的任何一组  $h$ -酉基所  $\mathbb{R}$ -线性张成的子空间都是拉格朗日子空间. 注意酉群  $\mathrm{U}(V, h)$  将酉基变成另一组酉基, 从而易得  $\mathrm{U}(V, h)$  在  $\mathcal{L}(V)$  上的作用. 与  $\mathbb{R}^{2n}$  的情形一样, 类似可得

$$\mathcal{L}(V) \cong \mathrm{U}(n)/\mathrm{O}(n).$$

### 1.5.3 复化辛空间的正定拉格朗日子空间

对于  $2n$  维  $\mathbb{R}$ -辛空间  $(V, \omega)$ , 自然要问其上有多少个  $\omega$ -正定相容复结构. 记

$$\mathcal{J} := \mathcal{J}(V, \omega) := \{J \mid J \text{ 是 } V \text{ 上的 } \omega\text{-正定相容复结构}\}, \quad (1.33)$$

即  $\omega$ -正定相容复结构的“模空间”. 本小节将研究  $\mathcal{J}(V, \omega)$  的结构.

先引入一些概念与记号. 将辛结构  $\omega$  自然  $\mathbb{C}$ -线性延拓至  $V_{\mathbb{C}} := V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ , 延拓后记作  $\omega_{\mathbb{C}}$ , 则  $(V_{\mathbb{C}}, \omega_{\mathbb{C}})$  是复数域  $\mathbb{C}$  上的辛空间. 于是可以谈论  $V_{\mathbb{C}}$  的拉格朗日子空间. 再注意到,  $V_{\mathbb{C}}$  中的向量都形如  $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + i\mathbf{v}_2$ , 其中  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in V$ , 此时记  $\bar{\mathbf{v}} := \mathbf{v}_1 - i\mathbf{v}_2$ , 称为向量  $\mathbf{v}$  的共轭. 对于  $V_{\mathbb{C}}$  的子空间  $W$ , 记  $\bar{W} := \{\bar{\mathbf{w}} \mid \mathbf{w} \in W\}$ . 对于复线性变换  $\phi \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V_{\mathbb{C}})$ , 如果  $\phi$  是某个实线性变换



$\phi' \in \text{End}_{\mathbb{R}}(V)$  复线性延拓得到的, 则称  $\phi$  是实的. 容易验证,  $\phi \in \text{End}_{\mathbb{C}}(V_{\mathbb{C}})$  是实的当且仅当  $\phi$  与取共轭运算可交换, 即对任意  $\mathbf{v} \in V_{\mathbb{C}}$  都有  $\overline{\phi \mathbf{v}} = \phi \overline{\mathbf{v}}$ .

**定义 1.54.** 给定  $\mathbb{R}$ -辛空间  $(V, \omega)$ , 以及  $(V_{\mathbb{C}}, \omega_{\mathbb{C}})$  的  $\mathbb{C}$ -拉格朗日子空间  $F$ . 如果对任意  $0 \neq \mathbf{v} \in F$  都有

$$-i\omega_{\mathbb{C}}(\mathbf{v}, \overline{\mathbf{v}}) > 0, \quad (1.34)$$

则称  $\mathbb{C}$ -拉格朗日子空间  $F$  是正定的. 记

$$\mathcal{L}_+ := \mathcal{L}_+(V, \omega) := \{F \mid F \text{ 是 } (V_{\mathbb{C}}, \omega_{\mathbb{C}}) \text{ 的正定拉格朗日子空间}\}. \quad (1.35)$$

我们回忆, 辛空间  $(V, \omega)$  的上的每一个复结构  $J$  都给出了  $V_{\mathbb{C}}$  的直和分解

$$V_{\mathbb{C}} = V_{1,0} \oplus V_{0,1},$$

其中  $V_{1,0}$  与  $V_{0,1}$  分别是  $J_{\mathbb{C}}$  的属于特征值  $i, -i$  的特征子空间.

如果  $J \in \mathcal{J}(V, \omega)$ , 则相应的  $V_{1,0} \in \mathcal{L}_+(V, \omega)$ . 这是因为, 对任意  $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V_{1,0}$ ,

$$\omega_{\mathbb{C}}(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \omega_{\mathbb{C}}(J_{\mathbb{C}}\mathbf{v}, J_{\mathbb{C}}\mathbf{w}) = \omega_{\mathbb{C}}(i\mathbf{v}, i\mathbf{w}) = -\omega_{\mathbb{C}}(\mathbf{v}, \mathbf{w}),$$

于是  $\omega_{\mathbb{C}}(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = 0$ , 再考察  $V_{1,0}$  的维数, 可知  $V_{1,0}$  是  $V_{\mathbb{C}}$  的拉格朗日子空间. 对于  $V_{\mathbb{C}}$  中的任何向量  $\mathbf{v}$ , 存在  $\mathbf{w} \in V$  使得  $\mathbf{v} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{w} - iJ\mathbf{w})$ , 从而

$$-i\omega_{\mathbb{C}}(\mathbf{v}, \overline{\mathbf{v}}) = -\frac{i}{2}\omega_{\mathbb{C}}(\mathbf{w} - iJ\mathbf{w}, \mathbf{w} + iJ\mathbf{w}) = \omega(\mathbf{w}, J\mathbf{w}) > 0,$$

因此  $\mathbb{C}$ -拉格朗日子空间  $V_{1,0}$  是正定的. 事实上, 有如下结果:

**性质 1.55.** 对于  $\mathbb{R}$ -辛空间  $(V, \omega)$ , 有如下的一一对应:

$$\mathcal{J}(V, \omega) \cong \mathcal{L}_+(V, \omega), \quad (1.36)$$

上式两端的含义见(1.33)与(1.35)式.

证明. 对于  $J \in \mathcal{J}(V, \omega)$ , 已经验证  $J_{\mathbb{C}}$  的属于特征值  $i$  的特征子空间  $V_{1,0} \in \mathcal{L}_+(V, \omega)$ , 这给出了从  $\mathcal{J}(V, \omega)$  到  $\mathcal{L}_+(V, \omega)$  的映射. 只需构造该映射的逆.

对于  $F \in \mathcal{L}_+(V, \omega)$ , 断言:  $F \cap \overline{F} = \{0\}$ . 这是因为, 如果存在  $0 \neq v \in F \cap \overline{F}$ , 则由  $F$  的正定性以及  $v \in F$  可知  $-i\omega_{\mathbb{C}}(v, \overline{v}) > 0$ ; 另一方面, 注意  $\overline{v} \in F$  以及  $F$  的迷向性, 可知  $\omega_{\mathbb{C}}(v, \overline{v}) = 0$ , 产生矛盾, 断言得证. 于是有直和分解

$$V_{\mathbb{C}} = F \oplus \overline{F}.$$

在此分解下,  $V_{\mathbb{C}}$  中的向量  $v$  可唯一表示为

$$v = v^+ + v^-,$$

其中  $v^+ \in F, v^- \in \overline{F}$ . 定义  $J \in \text{End}_{\mathbb{C}}(V_{\mathbb{C}})$  如下:

$$J|_F = i \cdot \text{id}_F, \quad J|_{\overline{F}} = -i \cdot \text{id}_{\overline{F}}.$$

则显然  $J^2 = -\text{id}_{V_{\mathbb{C}}}$ , 并且容易验证对任意  $v \in V_{\mathbb{C}}$  都有  $\overline{Jv} = J\overline{v}$ , 这表明  $J|_V \in \text{End}_{\mathbb{R}}(V)$ , 从而  $J$  是  $(V, \omega)$  的复结构. 下面验证  $J \in \mathcal{J}(V, \omega)$ .

首先验证复结构  $J$  是  $\omega$ -相容的. 注意  $\overline{F}$  也是拉格朗日子空间, 从而  $F, \overline{F}$  都是迷向子空间. 于是, 对任意  $v, w \in V_{\mathbb{C}}$ ,

$$\begin{aligned} \omega_{\mathbb{C}}(Jv, Jw) &= \omega_{\mathbb{C}}(iv^+ - iv^-, iw^+ - iw^-) \\ &= \omega_{\mathbb{C}}(v^+, w^-) + \omega_{\mathbb{C}}(v^-, w^+) = \omega_{\mathbb{C}}(v, w), \end{aligned}$$

可见复结构  $J$  是  $\omega$ -相容的. 再验证  $J$  的正定性. 对任意  $0 \neq v = v^+ + v^- \in V$ , 注意  $\overline{v^+} = v^-$  以及拉格朗日子空间  $F$  的正定性, 可得

$$\begin{aligned} \omega(v, Jv) &= \omega_{\mathbb{C}}(v^+ + v^-, iv^+ - iv^-) \\ &= -2i\omega_{\mathbb{C}}(v^+, v^-) = -2i\omega_{\mathbb{C}}(v^+, \overline{v^+}) > 0, \end{aligned}$$

因此  $J \in \mathcal{J}(V, \omega)$ . 这就给出了从  $\mathcal{L}_+(V, \omega)$  到  $\mathcal{J}(V, \omega)$  的一个映射, 并且该映射显然与前文所述  $J \mapsto V_{\mathbb{C}}^+$  互逆, 这建立了  $\mathcal{L}_+(V, \omega)$  与  $\mathcal{J}(V, \omega)$  的一一对应, 命题得证.  $\square$

回忆辛群在拉格朗日子空间上的作用. 对于  $\phi \in \text{Sp}(V, \omega)$  以及  $F \in \mathcal{L}_+(V, \omega)$ , 通过复线性延拓自然将  $\phi$  看成复辛群  $\text{Sp}(V_{\mathbb{C}}, \omega_{\mathbb{C}})$  中的元素, 从而  $\phi(F)$  也是  $V_{\mathbb{C}}$  的拉格朗日子空间. 事实上,  $\phi(F) \in \mathcal{L}_+(V, \omega)$ , 这是因为对任意  $v' \in \phi(F)$ , 存在  $v \in F$  使得  $v' = \phi v$ , 从而

$$-i\omega_{\mathbb{C}}(v', \overline{v'}) = -i\omega_{\mathbb{C}}(\phi v, \overline{\phi v}) = -i\omega_{\mathbb{C}}(\phi v, \phi \overline{v}) = -i\omega_{\mathbb{C}}(v, \overline{v}) > 0.$$

从而  $(\phi, F) \mapsto \phi(F)$  给出了实辛群  $\text{Sp}(V, \omega)$  在  $\mathcal{L}_+(V, \omega)$  上的作用. 事实上:

**性质 1.56.** 对于  $2n$  维  $\mathbb{R}$ -辛空间  $(V, \omega)$ , 有如下一一对应:

$$\mathcal{L}_+(V, \omega) \cong \mathrm{Sp}(n, \mathbb{R})/\mathrm{U}(n). \quad (1.37)$$

证明. 上文已给出实辛群  $\mathrm{Sp}(V, \omega) \cong \mathrm{Sp}(n, \mathbb{R})$  在  $\mathcal{L}_+(V, \omega)$  上的作用. 断言该作用是可迁的. 对任意  $F \in \mathcal{L}_+(V, \omega)$ , 容易验证

$$\begin{aligned} h_F: F \times F &\rightarrow \mathbb{C} \\ (\mathbf{v}, \mathbf{w}) &\mapsto -i\omega_{\mathbb{C}}(\mathbf{v}, \overline{\mathbf{w}}) \end{aligned}$$

是  $F$  上的厄米特内积. 任取  $F$  的一组  $h_F$ -酉基  $\underline{\mathbf{e}} = (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$ , 则容易验证  $(\underline{\mathbf{e}}, -i\underline{\mathbf{e}}) := (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n; -i\overline{\mathbf{e}}_1, \dots, -i\overline{\mathbf{e}}_n)$  是  $V_{\mathbb{C}}$  的一组辛基. 同理, 对于  $F' \in \mathcal{L}_+(V, \omega)$ , 取定  $F'$  的一组  $h_{F'}$ -酉基  $\underline{\mathbf{e}}'$ , 则相应地有  $V_{\mathbb{C}}$  的一组辛基  $(\underline{\mathbf{e}}', -i\underline{\mathbf{e}}')$ . 定义  $\phi \in \mathrm{Sp}(V_{\mathbb{C}}, \omega_{\mathbb{C}})$  如下:

$$\phi: \mathbf{e}_i \mapsto \mathbf{e}'_i, \quad \overline{\mathbf{e}}_i \mapsto \overline{\mathbf{e}'_i} \quad \forall 1 \leq i \leq n,$$

注意  $\phi$  与取共轭可交换, 从而  $\phi \in \mathrm{Sp}(V, \omega)$ . 又显然  $\phi(F) = F'$ , 从而  $\mathrm{Sp}(V, \omega)$  在  $\mathcal{L}_+(V, \omega)$  的作用可迁. 接下来, 给定  $F \in \mathcal{L}_+(V, \omega)$ , 若  $\phi \in \mathrm{Sp}(V, \omega)$  满足  $\phi(F) = F$ , 则容易验证  $\phi|_F \in \mathrm{U}(F, h_F)$ . 这表明实辛群  $\mathrm{Sp}(V, \omega)$  在  $\mathcal{L}_+(V, \omega)$  的稳定的子群同构于酉群  $\mathrm{U}(n)$ , 从而得证.  $\square$

**题 1.57.** 通过一一对应(1.36), 可将  $\mathrm{Sp}(V, \omega)$  在  $\mathcal{L}_+(V, \omega)$  的作用搬运到  $\mathcal{J}(V, \omega)$  上. 试直接验证, 上述方式所得的群作用的显式表达式如下:

$$\begin{aligned} \mathrm{Sp}(V, \omega) \times \mathcal{J}(V, \omega) &\rightarrow \mathcal{J}(V, \omega) \\ (\phi, J) &\mapsto \phi J \phi^{-1}, \end{aligned}$$

并直接验证上述群作用的可迁性, 并计算稳定子群, 从而再次证明性质 1.56.

[提示: 在证明可迁性时, 注意到对于每个  $J \in \mathcal{J}(V, \omega)$ , 考虑(1.31)式给出的厄米特内积, 取关于此厄米特内积的一组酉基, 并将该酉基扩充为  $V$  的一组辛基. 通过类似的基向量一一对应, 容易找到所需要的  $\phi \in \mathrm{Sp}(V, \omega)$ .]

### 1.5.4 Siegel 上半平面

给定  $2n$  维  $\mathbb{R}$ -辛空间  $(V, \omega)$ , 则  $(V, \omega)$  的 Kähler 结构的模空间, 即全体  $\omega$ -正定相容复结构之全体  $\mathcal{J}(V, \omega)$  满足

$$\mathcal{J}(V, \omega) \cong \mathcal{L}_+(V, \omega) \cong \mathrm{Sp}(n, \mathbb{R})/\mathrm{U}(n).$$

注意  $\mathrm{Sp}(n, \mathbb{R})/\mathrm{U}(n)$  赋予了  $\mathcal{J}(V, \omega)$  齐性空间的结构. 本小节将给出流形  $\mathcal{J}(V, \omega)$  的一个参数化, 其参数空间就是所谓 **Siegel 上半平面**.

如果  $V_{\mathbb{C}}$  的  $\mathbb{C}$ -子空间  $W$  满足  $W = \overline{W}$ , 则称  $W$  是实的. 断言:  $W$  是实的当且仅当  $W$  是  $V$  的某个  $\mathbb{R}$ -子空间的复化. 这是因为, 如果  $W = \overline{W}$ , 则对任意  $w \in W$ ,  $\mathrm{Re} w := \frac{w + \overline{w}}{2} \in W$ , 可以验证  $W$  是  $\mathrm{Re} W := \{\mathrm{Re} w \mid w \in W\} \subseteq V$  的复化; 反之,  $V$  的子空间的复化显然是  $V_{\mathbb{C}}$  的实子空间.

对于  $(V_{\mathbb{C}}, \omega_{\mathbb{C}})$  的两个拉格朗日子空间  $F, L_{\mathbb{C}}$ , 如果  $F$  是正定的,  $L_{\mathbb{C}}$  是实的, 则  $F$  与  $L_{\mathbb{C}}$  横截. 这是因为, 如果存在  $0 \neq v \in F \cap L_{\mathbb{C}}$ , 则由  $F$  的正定性可得  $-\mathrm{i}\omega_{\mathbb{C}}(v, \overline{v}) > 0$ ; 而另一方面, 存在  $V$  的  $\mathbb{R}$ -子空间  $L$  使得  $L_{\mathbb{C}} = L \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ , 易知  $L$  是  $(V, \omega)$  的拉格朗日子空间, 向量  $v \in L_{\mathbb{C}}$  可唯一写成  $v = x + \mathrm{i}y$ , 其中  $x, y \in L$ , 从而

$$\omega_{\mathbb{C}}(v, \overline{v}) = \omega_{\mathbb{C}}(x + \mathrm{i}y, x - \mathrm{i}y) = -2\mathrm{i}\omega(x, y) = 0,$$

产生矛盾, 断言得证. 取定  $(V, \omega)$  的拉格朗日子空间  $L$ , 则  $L_{\mathbb{C}} := L \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$  是  $(V_{\mathbb{C}}, \omega_{\mathbb{C}})$  的实拉格朗日子空间. 回忆(1.21)式中的  $\mathcal{T}(L)$ , 则易知上述断言表明

$$\mathcal{L}_+(V, \omega) \subseteq \mathcal{T}(L_{\mathbb{C}}).$$

注意  $\mathcal{T}(L_{\mathbb{C}})$  具有  $\frac{n(n+1)}{2}$  维  $\mathbb{C}$ -仿射空间结构, 从而  $(V, \omega)$  的 Kähler 结构模空间  $\mathcal{J}(V, \omega) \cong \mathcal{L}_+(V, \omega)$  可以视为  $\mathbb{C}^{\frac{n(n+1)}{2}}$  的某个子集.

现在, 任取  $(V, \omega)$  的一组辛基  $(\mathbf{e}, \mathbf{f})$ , 记  $L := \mathrm{span}_{\mathbb{R}} \mathbf{e}$ ,  $L' := \mathrm{span}_{\mathbb{R}} \mathbf{f}$ , 则  $L, L'$  均为拉格朗日子空间, 且  $V = L \oplus L'$ . 考虑  $V, L, L'$  的复化, 则  $(\mathbf{e}, \mathbf{f})$  也是  $V_{\mathbb{C}}$  的一组  $\mathbb{C}$ -辛基,  $V_{\mathbb{C}} = L_{\mathbb{C}} \oplus L'_{\mathbb{C}}$ , 并且  $L_{\mathbb{C}}$  是  $V_{\mathbb{C}}$  的实拉格朗日子空间, 从而  $\mathcal{L}_+(V, \omega) \subseteq \mathcal{T}(L_{\mathbb{C}})$ .

**题 1.58.** 记号承上, 证明: 对任意  $F \in \mathcal{T}(L_{\mathbb{C}})$ , 存在唯一  $\phi \in \mathrm{Sp}(V_{\mathbb{C}}, \omega_{\mathbb{C}})$ , 使得

$$\phi|_{L_{\mathbb{C}}} = \mathrm{id}_{L_{\mathbb{C}}}, \quad \phi(L'_{\mathbb{C}}) = F. \quad (1.38)$$

此外, 上式所确定的  $\phi$  在基  $(\underline{\mathbf{e}}, \underline{\mathbf{f}})$  下的矩阵  $\phi_{(\underline{\mathbf{e}}, \underline{\mathbf{f}})} = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_n & \mathbf{Z} \\ & \mathbf{I}_n \end{pmatrix}$ , 其中  $\mathbf{Z} \in \mathbb{C}^{n \times n}$  满足  $\mathbf{Z}^T = \mathbf{Z}$ . [提示: 与注1.39对照]

这给出了  $\mathcal{T}(L_{\mathbb{C}})$  与  $\{\mathbf{Z} \in \mathbb{C}^{n \times n} \mid \mathbf{Z}^T = \mathbf{Z}\} \cong \mathbb{C}^{\frac{n(n+1)}{2}}$  的一一对应. 易知在上述记号下,

$$F = \text{span}_{\mathbb{C}} \left\{ (\underline{\mathbf{e}}, \underline{\mathbf{f}}) \begin{pmatrix} \mathbf{Z} \\ \mathbf{I}_n \end{pmatrix} \right\} := \text{span}_{\mathbb{C}} (\underline{\mathbf{e}}\mathbf{Z} + \underline{\mathbf{f}}).$$

而若  $F \in \mathcal{T}(L_{\mathbb{C}})$  是正定的, 则其相应的  $\mathbf{Z}$  要满足额外的条件.

**定理 1.59.** 记号承上, 则题1.58给出如下——对应:

$$\mathcal{L}_+(V, \omega) \cong \mathfrak{H}^n, \quad (1.39)$$

其中

$$\mathfrak{H}^n := \{\mathbf{Z} \in \mathbb{C}^{n \times n} \mid \mathbf{Z}^T = \mathbf{Z}, \text{Im } \mathbf{Z} > 0\} \quad (1.40)$$

称为 **Siegel** 上半平面, 上式中的不等号是实对称方阵正定性的偏序.

证明. 对于  $F \in \mathcal{L}_+(V, \omega) \subseteq \mathcal{T}(L_{\mathbb{C}})$ , 记(1.38)式所确定的辛变换  $\phi$  在基  $(\underline{\mathbf{e}}, \underline{\mathbf{f}})$  下的矩阵为  $\begin{pmatrix} \mathbf{I}_n & \mathbf{Z} \\ & \mathbf{I}_n \end{pmatrix}$ , 则  $F$  中的任何向量  $\mathbf{v}$  都形如

$$\mathbf{v} = (\underline{\mathbf{e}}, \underline{\mathbf{f}}) \begin{pmatrix} \mathbf{Z} \\ \mathbf{I}_n \end{pmatrix} \mathbf{v}_*,$$

其中  $\mathbf{v}_* \in \mathbb{C}^n$  为列向量, 是  $\mathbf{v}$  在  $F$  的基  $(\underline{\mathbf{e}}\mathbf{Z} + \underline{\mathbf{f}})$  下的坐标. 于是,

$$\begin{aligned} -i\omega_{\mathbb{C}}(\mathbf{v}, \bar{\mathbf{v}}) &= -i\mathbf{v}_*^T (\mathbf{Z}^T, \mathbf{I}_n^T) \mathbf{J} \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{Z}} \\ \bar{\mathbf{I}}_n \end{pmatrix} \bar{\mathbf{v}}_* \\ &= -i\mathbf{v}_*^T (\mathbf{Z}, \mathbf{I}_n) \begin{pmatrix} \mathbf{I}_n \\ -\mathbf{I}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{Z}} \\ \bar{\mathbf{I}}_n \end{pmatrix} \bar{\mathbf{v}}_* \\ &= -i\mathbf{v}_*^T (\mathbf{Z} - \bar{\mathbf{Z}}) \bar{\mathbf{v}}_* = 2\mathbf{v}_*^T (\text{Im } \mathbf{Z}) \bar{\mathbf{v}}_*. \end{aligned}$$

可见  $F \in \mathcal{L}_+(V, \omega)$  当且仅当  $\text{Im } \mathbf{Z}$  是正定矩阵. 容易验证这给出了  $\mathcal{L}_+(V, \omega)$  与  $\mathfrak{H}^n$  的一一对应.  $\square$

通过上述同构  $\mathcal{L}_+(V, \omega) \cong \mathfrak{H}^n$ , 可将辛群  $\mathrm{Sp}(V, \omega)$  在  $\mathcal{L}_+(V, \omega)$  上的作用搬运到  $\mathfrak{H}^n$  上. 我们来给出此群作用的显式表示. 对于辛变换  $\phi \in \mathrm{Sp}(V, \omega)$ , 将它与其在辛基  $(\mathbf{e}, \mathbf{f})$  下的矩阵  $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathrm{Sp}(n, \mathbb{R})$  等同, 其中  $A$  的尺寸为  $n \times n$ . 对于  $F \in \mathcal{L}_+(V, \omega)$ , 则存在唯一  $Z \in \mathfrak{H}^n$  使得  $F = \mathrm{span}_{\mathbb{C}} \left\{ (\mathbf{e}, \mathbf{f}) \begin{pmatrix} Z \\ I_n \end{pmatrix} \right\}$ , 于是

$$\begin{aligned} \phi(F) &= \mathrm{span}_{\mathbb{C}} \left\{ (\phi \mathbf{e}, \phi \mathbf{f}) \begin{pmatrix} Z \\ I_n \end{pmatrix} \right\} = \mathrm{span}_{\mathbb{C}} \left\{ (\mathbf{e}, \mathbf{f}) \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z \\ I_n \end{pmatrix} \right\} \\ &= \mathrm{span}_{\mathbb{C}} \left\{ (\mathbf{e}, \mathbf{f}) \begin{pmatrix} AZ + B \\ CZ + D \end{pmatrix} \right\}. \end{aligned}$$

又因为  $\phi(F) \in \mathcal{L}_+(V, \omega)$ , 故存在唯一  $Z' \in \mathfrak{H}^n$  使得  $\phi(F) = \mathrm{span}_{\mathbb{C}} \left\{ (\mathbf{e}, \mathbf{f}) \begin{pmatrix} Z' \\ I_n \end{pmatrix} \right\}$ , 与上式比较, 可知  $Z' = (AZ + B)(CZ + D)^{-1}$ . 这给出了  $\mathrm{Sp}(n, \mathbb{R})$  在 Siegel 上半平面  $\mathfrak{H}^n$  上的作用, 我们总结如下:

**定义 1.60.** 对于  $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathrm{Sp}(n, \mathbb{R})$  以及  $Z \in \mathfrak{H}^n$ , 记

$$M \langle Z \rangle := (AZ + B)(CZ + D)^{-1}. \quad (1.41)$$

结合前文可知, (1.41) 确实给出了辛矩阵群  $\mathrm{Sp}(n, \mathbb{R})$  在 Siegel 上半平面  $\mathfrak{H}^n$  上的作用, 并且该作用是可迁的, 且在任意一点处的稳定子群都同构于酉群  $\mathrm{U}(n)$ . 一个有意思的问题是, 能否不依赖于辛几何意义, 用纯代数 (纯矩阵计算技巧) 来重新证明上述群作用的良好性与可迁性?

对于  $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}(2n, \mathbb{R})$ , 回忆(1.9)式:  $M \in \mathrm{Sp}(n, \mathbb{R})$  当且仅当

$$A^T C = C^T A, \quad B^T D = D^T B, \quad A^T D - C^T B = I_n.$$

另一方面, 注意  $M \in \mathrm{Sp}(n, \mathbb{R}) \iff M^T J M = J \iff (M^T J)(M J) = -I_{2n} \iff (M J)(M^T J) = -I_{2n}$ , 由此也容易验证  $M \in \mathrm{Sp}(n, \mathbb{R})$  的另一组

充分必要条件:

$$AB^T = BA^T, \quad CD^T = DC^T, \quad AD^T - BC^T = I_n.$$

**引理 1.61.** 对于  $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \text{Sp}(n, \mathbb{R})$  以及  $Z \in \mathfrak{H}^n$ , 则  $\det(CZ + D) \neq 0$ .

这保证了(1.41)式有意义. 但这个引理并不太显然.

证明. 先考虑  $Z = iI_n$  的特殊情况. 此时有

$$\begin{aligned} \overline{(CZ + D)}(CZ + D)^T &= (-iC + D)(iC^T + D^T) \\ &= (CC^T + DD^T) + i(CD^T - DC^T) \\ &= CC^T + DD^T. \end{aligned}$$

于是, 如果  $\det(CZ + D) = 0$ , 则存在列向量  $0 \neq v \in \mathbb{C}^n$  使得

$$v^T(CC^T + DD^T)\bar{v} = 0,$$

这迫使  $v^T C = v^T D = 0$ , 从而  $\text{rank}(C, D) < n$ , 与  $\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \neq 0$  矛盾.

于是我们证明了: 对任意  $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \text{Sp}(n, \mathbb{R})$ ,  $\det(iC + D) \neq 0$ .

而对于一般的  $Z \in \mathfrak{H}^n$ , 断言: 存在  $M' \in \text{Sp}(n, \mathbb{R})$  使得  $Z = M' \langle iI_n \rangle$ . 为证明此断言, 我们记  $Z = X + iY$ , 其中  $X, Y$  为  $n$  阶实对称方阵. 注意  $Y$  是严格正定方阵, 从而存在  $A_1 \in \text{GL}(n, \mathbb{R})$  使得  $Y = A_1^T A_1$ . 取  $M' := \begin{pmatrix} A_1^T & X^T A_1^{-T} \\ & A_1^{-1} \end{pmatrix}$ , 则容易验证  $M' \in \text{Sp}(n, \mathbb{R})$ , 并且  $Z = M' \langle iI_n \rangle$ . 断言得证.

下证  $\det(CZ + D) \neq 0$ . 由上述断言, 取  $M' = \begin{pmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{pmatrix}$  使得  $Z = M' \langle iI_n \rangle$ , 即  $Z = (iA' + B')(iC' + D')^{-1}$ . 于是

$$MM' = \begin{pmatrix} * & * \\ CA' + DC' & CB' + DD' \end{pmatrix} \in \text{Sp}(n, \mathbb{R}),$$

从而矩阵  $i(CA' + DC') + (CB' + DD')$  可逆. 又因为

$$\begin{aligned}
 & (CZ + D)(iC' + D') \\
 &= [C(iA' + B')(iC' + D')^{-1} + D](iC' + D') \\
 &= C(iA' + B') + D(iC' + D') \\
 &= i(CA' + DC') + (CB' + DD'),
 \end{aligned}$$

由此可知  $CZ + D$  可逆, 证毕.  $\square$

除了要验证(1.41)的右边的  $CZ + D$  可逆, 也要验证  $M\langle Z \rangle$  仍然在  $\mathfrak{H}^n$  当中.

**引理 1.62.** 对任意  $M \in \text{Sp}(n, \mathbb{R})$  以及  $Z \in \mathfrak{H}^n$ , 都有  $M\langle Z \rangle \in \mathfrak{H}^n$ .

证明. 记  $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ , 则由上一个引理可知  $CZ + D$  可逆. 于是, 为验证  $M\langle Z \rangle$  是对称矩阵, 只需验证  $(CZ + D)^T M\langle Z \rangle (CZ + D)$  是对称矩阵. 直接计算可得

$$\begin{aligned}
 (CZ + D)^T M\langle Z \rangle (CZ + D) &= (CZ + D)^T (AZ + B) \\
 &= Z^T C^T A Z + Z^T C^T B + D^T A Z + D^T B.
 \end{aligned}$$

注意  $Z^T = Z$  以及(1.9)式, 易验证上式右边对称. 因此  $(M\langle Z \rangle)^T = M\langle Z \rangle$ , 即

$$(AZ + B)(CZ + D)^{-1} = (CZ + D)^{-T}(AZ + B)^T. \quad (1.42)$$

从而由(1.9)(1.42)式, 直接计算得

$$\begin{aligned}
 & (C\bar{Z} + D)^T (M\langle Z \rangle - \overline{M\langle Z \rangle}) (CZ + D) \\
 &= (C\bar{Z} + D)^T (AZ + B) - (A\bar{Z} + B)^T (CZ + D) \\
 &= \bar{Z}^T (C^T A - A^T C) Z + (D^T A - B^T C) Z \\
 &\quad + \bar{Z}^T (C^T B - A^T D) + (D^T B - B^T D) \\
 &= Z - \bar{Z},
 \end{aligned}$$

因此  $\text{Im } M\langle Z \rangle$  正定当且仅当  $\text{Im } Z$  正定. 综上,  $M\langle Z \rangle \in \mathfrak{H}^n$ .  $\square$



**题 1.63.** 证明: (1.41)式给出了辛矩阵群  $\mathrm{Sp}(n, \mathbb{R})$  在 Siegel 上半平面  $\mathfrak{H}^n$  上的作用, 该作用是可迁的, 且在  $\mathrm{i}I_n \in \mathfrak{H}^n$  处的稳定子群恰为  $\mathrm{U}(n)$ . 从而再次证明  $\mathfrak{H}^n \cong \mathrm{Sp}(n, \mathbb{R})/\mathrm{U}(n)$ . [提示: 还需要验证对任意  $M, M' \in \mathrm{Sp}(n, \mathbb{R})$  以及  $Z \in \mathfrak{H}^n$ , 都有  $(MM')\langle Z \rangle = M \langle M' \langle Z \rangle \rangle$ , 这个直接的矩阵计算验证留给读者. 该群作用的可迁性已在引理 1.61 当中证明.]

**题 1.64.** 证明: 下述映射 (称为 Cayley 变换)

$$Z \mapsto W := (Z - \mathrm{i}I_n)(Z + \mathrm{i}I_n)^{-1}, \quad Z \in \mathfrak{H}^n$$

给出了从 Siegel 上半平面  $\mathfrak{H}^n$  到

$$\mathfrak{D}^n := \{W \in \mathbb{C}^{n \times n} \mid W^T = W, W^T \overline{W} < I_n\}$$

的全纯同构, 其中上式的不等号是厄米特矩阵正定偏序意义下的.

[提示: 注意上述 Cayley 变换的逆映射为

$$W \mapsto Z := \mathrm{i}(I_n - W)^{-1}(I_n + W),$$

并考虑与引理 1.62 证明方法类似的矩阵技巧.]

**题 1.65.** 考察  $n = 1$  的简单情况, 此时  $\mathrm{Sp}(1, \mathbb{R}) \cong \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ ,  $\mathrm{U}(1) \cong \mathrm{SO}(2)$ , 并且  $\mathfrak{H}^1 \cong \mathbb{H} := \{z = x + \mathrm{i}y \mid x, y \in \mathbb{R}, y > 0\}$  为通常的上半复平面.

1. 验证:  $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$  在  $\mathbb{H}$  上的相应的群作用具有如下表达:

$$z \mapsto \frac{az + b}{cz + d}, \quad \text{其中 } M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{R}).$$

2. 验证:  $\mathbb{H}$  上的如下度量 (称为庞加莱度量)

$$\mathrm{d}s^2 = \frac{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2}{y^2}$$

是  $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ -不变的.

Siegel 上半平面与阿贝尔簇、模形式等数学领域密切相关. 最开始是由 Siegel 开始研究整系数辛群  $\mathrm{Sp}(n, \mathbb{Z})$ (或它的子群) 在  $\mathfrak{H}^n$  上的全纯或亚纯函数上的作用的不变性质, 可见 [35]. 一段时间以来, Siegel 所引入的这一系列数学对象成为了辛几何的主题. 关于 Siegel 上半平面的更多内容也可参考 [4] 或 [33]. 而如今, 辛几何包括了更多具体的研究主题, 我们将在后续章节初步介绍之.

## 2. 辛流形

“不不, 别说在哪, 一知道在哪, 世界就变得一张地图一样小了, 不知道在哪, 世界才广阔呢.”

“那好, 咱们就努力迷路吧.”

——刘慈欣《三体 II · 黑暗森林》

众所周知, 黎曼流形是欧氏空间的“整体化”, 复流形是复线性空间的“整体化”. 类似地, 也可谈论辛空间的“整体化”, 即所谓**辛流形**, 这是辛几何的主要研究对象. 本章将通过几个重要例子来研究辛流形的基本性质. 本章内容来自 Aebischer[3] 第 2 章, 也可见 Abraham-Marsden[1] 第 3.2 节.

### 2.1 辛流形的基本概念与性质

大致上, 辛流形是光滑 (实) 流形, 并且局部同构于标准辛空间  $\mathbb{R}^{2n}$ .

#### 2.1.1 辛流形, 辛映射, 简单例子

**定义 2.1.** 对于光滑流形  $M$ , 以及 2-形式  $\omega \in \Omega^2(M)$ , 如果  $\omega$  处处非退化, 且

$$d\omega = 0, \quad (2.1)$$

则称  $(M, \omega)$  为**辛流形**,  $\omega$  为相应的**辛形式**.

$\omega$  处处非退化, 是指对于  $M$  上的任意一点  $p$ ,  $\omega|_p$  都是  $T_p M$  上的非退化反对称双线性型, 从而  $(T_p M, \omega|_p)$  是辛空间. 由于辛空间一定是偶数维空间, 从而易知辛流形一定是偶数维流形, 记  $\dim M = 2n$ . 注意性质 1.5, 可知  $\omega^n$  是  $M$  的一个体积形式, 在  $M$  上处处非零, 从而  $M$  可定向. 因此: 辛流形必为偶数维可定向流形.

辛流形的定义要求  $d\omega = 0$ , 从而  $\omega$  是  $M$  的某个 de Rham 上同调类  $[\omega] \in H_{\text{dR}}^2(M)$  的代表元. 记  $\dim M = 2n$ , 则  $[\omega^n] \in H_{\text{dR}}^{2n}(M)$ . 如果  $M$  是紧流形, 则  $[\omega^n] \neq 0$ , 这是因为: 如果存在  $\eta \in \Omega^{2n-1}(M)$  使得  $\omega^n = d\eta$ , 则由

Stokes 公式得

$$\int_M \omega^n = \int_M d\eta = 0,$$

与  $\omega^n$  是  $M$  的体积形式矛盾, 断言得证. 进而对任意  $1 \leq k \leq n$  都有  $[\omega^k] \neq 0$ . 因此: 紧辛流形的偶数阶 de Rham 上调群非平凡.

接下来考虑辛流形之间的态射.

**定义 2.2.** 设  $(M, \omega)$  与  $(M', \omega')$  为辛流形,  $f: M \rightarrow M'$  为光滑映射. 如果

$$f^* \omega' = \omega,$$

则称  $f$  为**辛映射**. 如果辛映射  $f$  是微分同胚, 则易知  $f^{-1}: M' \rightarrow M$  也是辛映射, 此时称  $f$  为**辛同胚**.

由定义得,  $f: M \rightarrow M'$  是辛映射当且仅当对任意  $p \in M$ , 切映射

$$f_*: T_p M \rightarrow T_{f(p)} M'$$

是辛线性映射.

**例 2.3.** 以下是辛流形的简单例子:

1. 辛线性空间  $(V, \omega)$  是辛流形. 平凡的例子. 我们在处理这类辛流形时, 往往将其与  $\mathbb{R}^{2n}, \mathbb{C}^n, T^*\mathbb{R}^n$  三者等同.
2. 二维紧定向曲面具有辛流形结构. 这是因为, 可定向保证其存在 (处处非零的) 体积形式  $\omega$ , 再注意曲面的维数是 2, 从而易知  $\omega$  是辛形式.
3. 若  $(M_1, \omega_1)$  与  $(M_2, \omega_2)$  都是辛流形, 则  $(M_1 \times M_2, \pi_1^* \omega_1 + \pi_2^* \omega_2)$  也是辛流形. 其中  $M_1 \times M_2$  为通常的乘积流形,  $\pi_i: M_1 \times M_2 \rightarrow M_i (i = 1, 2)$  为典范投影.
4. Kähler 流形都是辛流形. 这是复几何中众所周知的结果, 详见后文 2.3 节.
5. 光滑流形的余切丛具有典范的辛流形结构. 详见前文 0.2.2 小节.

**题 2.4.** 考虑二维球面  $S^2 := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ . 对于  $p \in S^2 \subseteq \mathbb{R}^3$ , 将切空间  $T_p S^2$  视为  $\mathbb{R}^3$  中的超平面, 对任意  $v, w \in T_p S^2$ , 令

$$\omega(v, w) := \langle p, v \times w \rangle,$$

其中  $\langle, \rangle$  与  $\times$  分别为欧氏空间  $\mathbb{R}^3$  的标准内积与外积. 上述  $\omega$  是  $S^2$  的辛形式,  $(S^2, \omega)$  是辛流形.

考虑用  $\mathbb{R}^3$  的柱坐标分量  $(\theta, z)$  将球面  $S^2$  参数化, 即 
$$\begin{cases} x = \sqrt{1-z^2} \cos \theta \\ y = \sqrt{1-z^2} \sin \theta \\ z = z \end{cases},$$

其中  $\theta \in (0, 2\pi)$ ,  $z \in (-1, 1)$ . 可以验证 (留给读者),  $S^2$  的上述辛形式  $\omega$  在柱坐标  $(\theta, z)$  下的表达式为  $\omega = d\theta \wedge dz$ .

**题 2.5.** 考虑  $\mathbb{R}^2 = \{(q, p) \mid q, p \in \mathbb{R}\}$  的标准辛结构  $\omega = dq \wedge dp$ . 则变换

$$\begin{pmatrix} \tilde{q} \\ \tilde{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ln(p + \sqrt{1+p^2}) \\ -q\sqrt{1+p^2} \end{pmatrix}$$

是  $\mathbb{R}^2$  的辛自同胚, 且该变换的逆变换为

$$\begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\tilde{p}}{\cosh \tilde{q}} \\ \sinh \tilde{q} \end{pmatrix}.$$

[提示: 直接计算验证  $d\tilde{q} \wedge d\tilde{p} = dq \wedge dp$ .]

**题 2.6.** 光滑流形之间的微分同胚  $f: M \rightarrow M'$  自然诱导余切丛的辛同胚  $f_\sharp: T^*M \rightarrow T^*M'$ ,  $(p, \xi) \mapsto (f(p), (f^*)^{-1}(\xi))$  使得下图交换:

$$\begin{array}{ccc} T^*M & \xrightarrow{f_\sharp} & T^*M' \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi' \\ M & \xrightarrow{f} & M' \end{array}$$

证明. 容易验证上述定义的  $f_\sharp$  是微分同胚, 且上图显然交换. 只需验证  $f_\sharp$  是辛映射. 记  $\theta, \theta'$  分别为余切丛  $T^*M, T^*M'$  上的典范 1-形式, 回忆典范 1-形

式  $\theta, \theta'$  由泛性质(0.11)所唯一确定. 对任意  $\alpha \in \Omega^1(M)$ , 将  $\alpha$  视为光滑截面  $\alpha: M \rightarrow T^*M$ , 则由  $f_{\sharp}$  的定义可以验证  $f_{\sharp} \circ \alpha = (f^*)^{-1}(\alpha) \circ f$ , 从而

$$\begin{aligned}\alpha^*(f_{\sharp}^*\theta') &= (f_{\sharp} \circ \alpha)^*(\theta') \\ &= ((f^*)^{-1}(\alpha) \circ f)^*(\theta') \\ &= f^*((f^*)^{-1}(\alpha))^*(\theta') \\ &= f^*((f^*)^{-1}(\alpha)) = \alpha,\end{aligned}$$

因此  $f_{\sharp}^*(\theta') = \theta$ . 再注意余切丛的辛形式与典范 1-形式的关系(0.12)式, 有

$$f_{\sharp}^*(\omega') = -f_{\sharp}^*(d\theta') = -d(f_{\sharp}^*(\theta')) = -d\theta = \omega,$$

因此  $f_{\sharp}$  是辛映射, 得证. □

### 2.1.2 拉格朗日子流形, 生成函数

正如辛线性空间有拉格朗日子空间, 也可谈论辛流形的“拉格朗日子流形”. 顾名思义, 我们有:

**定义 2.7.** 对于辛流形  $(M, \omega)$ , 称浸入子流形

$$f: L \rightarrow M$$

是拉格朗日浸入, 如果  $f^*\omega = 0$  在  $L$  处处成立, 并且  $\dim L = \frac{1}{2} \dim M$ . 此外, 若  $f$  是嵌入子流形, 则称  $L$  是  $M$  的拉格朗日子流形.

这里的“浸入”(immersion)是指切映射  $f_*$  处处是单射, 而“嵌入”还要求  $f: L \rightarrow M$  也是单射. 容易看出上述定义的等价表述: 到辛流形  $(M, \omega)$  的光滑浸入  $f: L \rightarrow M$  是拉格朗日浸入, 当且仅当对任意  $x \in L$ ,

$$f_*(T_x L) \subseteq T_{f(x)} M$$

是拉格朗日子空间.

**注 2.8.** 也可类似定义“迷向子流形”以及“余迷向子流形”, 细节留给读者.

拉格朗日子流形在辛几何中扮演十分重要的角色, 并且与很多其他的数学物理分支都有密切联系. 下面介绍拉格朗日子流形的若干重要例子.

**性质 2.9.** 设  $M$  是光滑流形,  $\alpha \in \Omega^1(M)$  为  $M$  上的 1-形式, 自然也是余切丛  $T^*M$  的截面. 则

$$\alpha: M \rightarrow T^*M$$

是拉格朗日浸入 (其实也是嵌入) 当且仅当  $d\alpha = 0$ .

特别地, 对于光滑函数  $S \in C^\infty(M)$ , 则有拉格朗日嵌入  $dS: M \rightarrow T^*M$ , 此时称  $S$  为该拉格朗日嵌入的生成函数.

证明. 记  $\theta$  为余切丛  $T^*M$  的典范 1-形式, 详见(0.11), 则  $T^*M$  的典范辛结构  $\omega = -d\theta$ , 即(0.12). 从而对于  $\alpha \in \Omega^1(M)$ ,

$$\alpha^*\omega = \alpha^*(-d\theta) = -d(\alpha^*\theta) = -d\alpha.$$

于是  $\alpha^*\omega = 0$  当且仅当  $d\alpha = 0$ . 而维数关系  $\dim M = \frac{1}{2} \dim T^*M$  平凡成立, 从而命题得证.  $\square$

- 特别地, 当  $M = \mathbb{R}^n$  时,  $\alpha \in \Omega^1(\mathbb{R}^n)$  可以自然视为光滑映射

$$\alpha: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n,$$

或者  $\mathbb{R}^n$  上的向量场  $\alpha$ . 此时,  $\alpha$  是拉格朗日浸入当且仅当向量场  $\alpha$  是梯度场, 即存在函数  $S \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$  使得  $\alpha = \nabla S$ ; 这里的  $S$  即生成函数. 此时, 子流形  $\alpha(\mathbb{R}^n) \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$  恰为映射  $\alpha$  的图像.

- 另一种特殊情形是  $\alpha = 0$ , 即零截面. 相应的拉格朗日子流形为

$$M \subseteq T^*M.$$

我们将会证明, 所有的拉格朗日子流形 “在某种意义上” 都形如此.

若较真起来, 有些拉格朗日子流形并不是某个函数的图像 (或者某个丛的截面), 例如:

**例 2.10.**(Whitney 球面) 对于  $n$  维单位球面

$$S^n := \{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \mid \|x\|^2 + y^2 = 1\}, \quad (2.2)$$

则映射

$$\begin{aligned} f: S^n &\rightarrow \mathbb{C}^n \\ (\mathbf{x}, y) &\mapsto (1 + 2iy)\mathbf{x} \end{aligned} \tag{2.3}$$

是拉格朗日浸入. 其中  $\mathbb{C}^n \cong \mathbb{R}^{2n}$  具有标准辛结构(1.24).

证明. 直接暴力验证. 对于  $(\mathbf{x}, y) \in S^n$ , 易知切空间

$$T_{(\mathbf{x}, y)}S^n = \{(\mathbf{v}, u) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \mid \mathbf{x}^T \mathbf{v} + yu = 0\}.$$

对于切向量  $(\mathbf{v}, u) \in T_{(\mathbf{x}, y)}S^n$ , 易知切映射  $f_*$  满足

$$f_*(\mathbf{v}, u) = \mathbf{v} + 2i(u\mathbf{x} + y\mathbf{v}),$$

从而易知  $f$  为浸入. 于是, 对于切向量  $(\mathbf{v}_1, u_1), (\mathbf{v}_2, u_2) \in T_{(\mathbf{x}, y)}S^n$ , 我们有

$$\begin{aligned} &\omega(f_*(\mathbf{v}_1, u_1), f_*(\mathbf{v}_2, u_2)) \\ &= \text{Im}((\mathbf{v}_1^T - 2i(u_1\mathbf{x}^T + y\mathbf{v}_1^T))(\mathbf{v}_2 + 2i(u_2\mathbf{x} + y\mathbf{v}_2))) \\ &= 2(u_2\mathbf{v}_1^T \mathbf{x} - u_1\mathbf{x}^T \mathbf{v}_2) = 2(-u_1u_2y + u_1u_2y) = 0, \end{aligned}$$

从而  $f^*\omega = 0$ . 又  $\dim S^n = n = \frac{1}{2} \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C}^n$ , 从而命题得证. □

不过注意, 上述  $f$  并不是嵌入子流形:  $f$  将  $S^n$  的南北极点  $(\mathbf{0}, \pm 1)$  映到同一个点  $\mathbf{0} \in \mathbb{C}^n$ , 这也是  $f$  唯一的二重点.  $S^n$  在映射  $f$  下的像同胚于粘合南北极点后的球面, 例如  $n = 1$  时为“8 字形”.

用生成函数来构造拉格朗日浸入的方法可以推广到更一般情形. 以光滑流形  $M = \mathbb{R}^n$  为例, 更一般的生成函数形如  $S \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k)$ , 其中  $k$  为某个非负整数. 根据性质 2.9, 我们有拉格朗日浸入

$$\mathrm{d}S: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \rightarrow T^*(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n) \cong \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^k,$$

在某点处的切映射  $(\mathrm{d}S)_*$  使得

$$L := (\mathrm{d}S)_*(\mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}^k)$$

是  $\mathbb{C}^n \oplus \mathbb{C}^k$  的拉格朗日子空间. 而注意  $\mathbb{C}^n \oplus \mathbb{C}^k$  具有余迷向子空间

$$W := \mathbb{C}^n \oplus \mathbb{R}^k,$$

并且  $W^{\text{red}} := W/W^\perp \cong \mathbb{C}^n$  (记号同引理1.35), 相应的商映射  $\pi: W \rightarrow W^{\text{red}}$  恰为到  $\mathbb{C}^n$  的典范投影. 从而利用引理1.35, 可将  $\mathbb{C}^n \oplus \mathbb{C}^k$  的拉格朗日子空间  $L$  约化为  $\mathbb{C}^n \cong W^{\text{red}}$  的拉格朗日子空间  $\pi(L \cap W)$ .

上述想法能够给出一类拉格朗日浸入子流形的构造:

**定理 2.11.** 设  $M$  是  $n$  维光滑流形,  $k$  为非负整数,

$$S: M \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$$

为光滑函数. 记

$$\tilde{M} := \left\{ (x, \mathbf{t}) \in M \times \mathbb{R}^k \mid \frac{\partial S}{\partial t^1}(x, \mathbf{t}) = \frac{\partial S}{\partial t^2}(x, \mathbf{t}) = \cdots = \frac{\partial S}{\partial t^k}(x, \mathbf{t}) = 0 \right\},$$

其中  $\mathbf{t} = (t^1, \dots, t^k)$  为  $\mathbb{R}^k$  的标准坐标. 如果余切向量组

$$\left\{ \mathbf{d} \left( \frac{\partial S}{\partial t^i} \right) \mid i = 1, 2, \dots, k \right\} \quad (2.4)$$

在  $\tilde{M}$  处处线性无关, 则映射

$$\begin{aligned} j_S: \tilde{M} &\rightarrow T^*M \\ (x, \mathbf{t}) &\mapsto (x, \mathbf{d}_x S_{\mathbf{t}}) \end{aligned} \quad (2.5)$$

是拉格朗日浸入, 其中  $S_{\mathbf{t}}: M \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto S(x, \mathbf{t})$  是  $M$  上的函数,  $\mathbf{d}_x: C^\infty(M) \rightarrow T_x^*M$  为取外微分之后在点  $x$  处的值.

证明. 虽然如前面所说, 利用引理1.35可以给出更优雅的证明, 但这里我们选择暴力验证.

1. 取定  $M$  的局部坐标  $\mathbf{x} = (x^1, \dots, x^n)$ . 则(2.4)的线性无关性表明映射  $(\mathbf{x}, \mathbf{t}) \mapsto \left( \frac{\partial S}{\partial t^1}, \dots, \frac{\partial S}{\partial t^n} \right)^T$  的 Jacobi 矩阵

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc} \frac{\partial^2 S}{\partial t^1 \partial x^1} & \cdots & \frac{\partial^2 S}{\partial t^1 \partial x^n} & \frac{\partial^2 S}{\partial t^1 \partial t^1} & \cdots & \frac{\partial^2 S}{\partial t^1 \partial t^k} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2 S}{\partial t^k \partial x^1} & \cdots & \frac{\partial^2 S}{\partial t^k \partial x^n} & \frac{\partial^2 S}{\partial t^k \partial t^1} & \cdots & \frac{\partial^2 S}{\partial t^k \partial t^k} \end{array} \right)_{k \times (n+k)} \quad (2.6)$$

在  $\tilde{M}$  处处满秩, 从而由正则原像定理可知  $\tilde{M}$  是  $M \times \mathbb{R}^k$  的子流形.



在局部坐标  $x^1, \dots, x^n$  下, 容易验证  $\tilde{M}$  在点  $(\mathbf{x}, \mathbf{t})$  处的切空间为

$$T_{(\mathbf{x}, \mathbf{t})}\tilde{M} = \left\{ (\mathbf{v}, \mathbf{s}) \in \mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}^k \left| v^\alpha \frac{\partial^2 S}{\partial x^\alpha \partial t^i} + s^j \frac{\partial^2 S}{\partial t^j \partial t^i} = 0, 1 \leq i \leq k \right. \right\}. \quad (2.7)$$

这里我们临时约定用希腊字母表示  $\{1, 2, \dots, n\}$  中的指标, 用拉丁字母表示  $\{1, 2, \dots, k\}$  中的指标. 也容易验证切映射  $(j_S)_*$  满足

$$(j_S)_*(\mathbf{v}, \mathbf{s}) = \left( \mathbf{v}; v^\alpha \frac{\partial^2 S}{\partial x^\alpha \partial x^\bullet} + s^i \frac{\partial^2 S}{\partial t^i \partial x^\bullet} \right). \quad (2.8)$$

2. 断言:  $j_S$  是浸入. 这是因为, 如果切向量  $(\mathbf{v}, \mathbf{s}) \in T_{\mathbf{x}, \mathbf{t}}\tilde{M}$  使得  $(j_S)_*(\mathbf{v}, \mathbf{s}) = \mathbf{0}$ , 则由(2.8)可知

$$\mathbf{v} = \mathbf{0}, \quad v^\alpha \frac{\partial^2 S}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} + s^i \frac{\partial^2 S}{\partial t^i \partial x^\beta} = 0, \quad 1 \leq \beta \leq n,$$

再结合切向量本身的性质(2.7), 易知

$$s^i \frac{\partial^2 S}{\partial t^i \partial x^\alpha} = s^i \frac{\partial^2 S}{\partial t^i \partial t^j} = 0, \quad \forall 1 \leq \alpha \leq n, 1 \leq j \leq k,$$

这与矩阵(2.6)满秩相矛盾. 从而断言得证.

3. 对于切向量  $(\mathbf{v}_1, \mathbf{s}_1), (\mathbf{v}_2, \mathbf{s}_2) \in T_{(\mathbf{x}, \mathbf{t})}\tilde{M}$ , 注意(2.7)并直接计算得

$$\begin{aligned} & \omega((j_S)_*(\mathbf{v}_1, \mathbf{s}_1), (j_S)_*(\mathbf{v}_2, \mathbf{s}_2)) \\ &= -v_1^\alpha \left( v_2^\beta \frac{\partial^2 S}{\partial x^\beta \partial x^\alpha} + s_2^i \frac{\partial^2 S}{\partial t^i \partial x^\alpha} \right) + v_2^\alpha \left( v_1^\beta \frac{\partial^2 S}{\partial x^\beta \partial x^\alpha} + s_1^i \frac{\partial^2 S}{\partial t^i \partial x^\alpha} \right) \\ &= -s_2^i v_1^\alpha \frac{\partial^2 S}{\partial x^\alpha \partial t^i} + s_1^i v_2^\alpha \frac{\partial^2 S}{\partial x^\alpha \partial t^i} = s_1^j s_2^i \frac{\partial^2 S}{\partial t^i \partial t^j} - s_1^j s_2^i \frac{\partial^2 S}{\partial t^j \partial t^i} = 0, \end{aligned}$$

从而余切丛  $T^*M$  的典范辛结构  $\omega$  满足  $j_S^* \omega = 0$ .

最后, 又显然有  $\dim \tilde{M} = n = \frac{1}{2} \dim T^*M$ , 从而定理得证. □

**例 2.12.** 对于光滑流形  $M = \mathbb{R}^n$  以及  $k = 1$ , 考虑生成函数

$$S: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(\mathbf{x}, y) \mapsto y\|\mathbf{x}\|^2 + \frac{y^3}{3} - y,$$

则按照定理2.11, 相应的  $\tilde{M}$  为

$$\tilde{M} := \{(\mathbf{x}, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \mid \|\mathbf{x}\|^2 + y^2 = 1\} \cong S^n,$$

相应的拉格朗日浸入  $j_S: \tilde{M} \rightarrow T^*\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^{2n}$  满足

$$j_S(\mathbf{x}, y) = (\mathbf{x}, 2y\mathbf{x}),$$

这恰为(2.3). 于是我们再次得到了 Whitney 球面 (例2.10) 的构造.

拉格朗日子流形也与奇点理论密切相关. 我们这里暂不去深入探讨此话题, 而是仅仅举一例来说明.

**例 2.13.**(多项式的 unfolding). 对每个  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$ , 记多项式

$$p_{\mathbf{x}} = \lambda^{n+1} + x_1\lambda^{n-1} + x_2\lambda^{n-2} + \dots + x_{n-1}\lambda \in \mathbb{R}[\lambda].$$

考虑如下的生成函数

$$\begin{aligned} S: \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ (\mathbf{x}, \lambda) &\mapsto p_{\mathbf{x}}(\lambda), \end{aligned}$$

按定理2.11的方式可得

$$\tilde{M} = \{(\mathbf{x}, \lambda) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R} \mid p'_{\mathbf{x}}(\lambda) = 0\}.$$

注意  $\frac{\partial^2 S}{\partial x_{n-1} \partial \lambda} \equiv 1$ , 由此利用正则原像定理容易推出  $\tilde{M}$  确实是  $\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$  的子流形.  $\tilde{M}$  在每个  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n-1}$  上的切片恰为  $p_{\mathbf{x}}$  的驻点集. 相应的拉格朗日浸入  $j_S: \tilde{M} \rightarrow T^*\mathbb{R}^{n-1}$  为

$$j_S(\mathbf{x}, \lambda) = \left( \mathbf{x}; \frac{\partial p_{\mathbf{x}}}{\partial x_1}(\lambda), \dots, \frac{\partial p_{\mathbf{x}}}{\partial x_{n-1}}(\lambda) \right).$$

### 2.1.3 更多例子: 余法丛, 拉格朗日-格拉斯曼流形

本节给出拉格朗日子流形的更多例子. 在上一小节我们用生成函数方法 (即性质2.9, 或更一般地, 定理2.11) 构造了余切丛  $T^*M$  的一类拉格朗日 (浸入) 子流形. 而  $T^*M$  还有另一类常见的拉格朗日子流形, 即余法丛 (co-normal bundle).

**定义 2.14.** 对于光滑流形的浸入  $f: L \rightarrow M$ , 称  $L$  上的向量丛

$$N^*f := \{(x, \varphi) \in f^*(T^*M) \mid \langle \varphi, f_*X \rangle = 0, \forall X \in T_xL\} \quad (2.9)$$

为浸入子流形  $L$  的余法丛.

在上述定义式中,  $x \in L$  为  $L$  上的点, 而余切向量  $\varphi \in T_{f(x)}^*M$ ,  $\langle, \rangle$  是余切向量与切向量的配对. 对于  $(x, \varphi) \in N^*f$ , 由定义可知余切向量  $\varphi$  扮演了子空间  $f_*(T_xL) \subseteq T_{f(x)}M$  上的“法向量”.

记  $k := \dim L$ ,  $n := \dim M$ , 则易知向量丛  $N^*f$  的秩为  $n - k$ , 从而

$$\dim N^*f = k + (n - k) = n = \frac{1}{2} \dim T^*M.$$

另外, 余法丛  $N^*f$  自然是余切丛  $T^*M$  的浸入子流形: 我们有映射

$$\begin{aligned} \tilde{f}: N^*f &\rightarrow T^*M \\ (x, \varphi) &\mapsto (f(x), \varphi), \end{aligned} \quad (2.10)$$

容易验证  $\tilde{f}$  是浸入, 并且下述图表

$$\begin{array}{ccc} N^*f & \xrightarrow{\tilde{f}} & T^*M \\ \pi_L \downarrow & & \downarrow \pi_M \\ L & \xrightarrow{f} & M \end{array} \quad (2.11)$$

交换, 其中  $\pi_L, \pi_M$  为丛投影. 上述映射  $\tilde{f}$  称为  $f$  的典范提升.

**性质 2.15.** 设  $f: L \rightarrow N$  为光滑流形的浸入, 则典范提升  $\tilde{f}: N^*f \rightarrow T^*M$  是拉格朗日浸入.

证明. 记  $\omega$  为余切丛  $T^*M$  的典范辛结构. 由前文可知, 只需再验证  $\tilde{f}^*\omega = 0$  即可. 为此, 考虑  $T^*M$  的典范 1-形式  $\theta$ , 断言:  $\tilde{f}^*\theta = 0$ , 从而命题得证.

这是因为, 对任意  $(x, \varphi) \in N^*f$  以及切向量  $X \in T_{(x, \varphi)}N^*f$ , 注意典范 1-形式的性质(0.8)以及交换图(2.11), 可得

$$\begin{aligned} \langle \tilde{f}^*\theta, X \rangle &= \langle \theta, \tilde{f}_*X \rangle = \langle \pi_M^*\varphi, \tilde{f}_*X \rangle = \langle \varphi, ((\pi_M)_* \circ \tilde{f}_*)X \rangle \\ &= \langle \varphi, f_*((\pi_L)_*X) \rangle = 0, \end{aligned}$$

其中最后一个等号用到余法丛的定义. 命题得证.  $\square$

生成函数与余法丛这两者可以看作某种更一般构造的两钟特殊情况.

**题 2.16.** 设  $f: L \rightarrow M$  为光滑流形的浸入, 函数  $S \in C^\infty(L)$ . 记

$$N_S^*f := \{(x, \varphi) \in f^*(T^*M) \mid \langle \varphi, f_*X \rangle = \langle dS, X \rangle, \forall X \in T_x L\} \quad (2.12)$$

则映射

$$\begin{aligned} \tilde{f}_S: N_S^*f &\rightarrow T^*M \\ (x, \varphi) &\mapsto (f(x), \varphi) \end{aligned}$$

是拉格朗日浸入.

注意对于一般的  $S$ ,  $N_S^*f$  不再是  $L$  上的向量丛, 而是更一般的纤维丛. 依然容易验证  $\tilde{f}_S$  是浸入, 以及维数关系  $\dim N_S^*f = \frac{1}{2} \dim T^*M$ .

证明. 记  $\theta$  为  $T^*M$  的典范 1-形式. 对于  $(x, \varphi) \in N_S^*f$  以及  $X \in T_{(x, \varphi)}N_S^*f$ , 仿照性质 2.15 的证明过程 (留给读者) 易知

$$\langle \tilde{f}_S^* \theta, X \rangle = \langle \varphi, f_*((\pi_L)_*X) \rangle = \langle dS, (\pi_L)_*X \rangle = \langle \pi_L^*(dS), X \rangle,$$

因此  $\tilde{f}_S^* \theta = \pi_L^*(dS) = d(S \circ \pi_L)$ , 从而立刻得到  $f_S^* \omega = -d^2(S \circ \pi_L) = 0$ , 命题得证.  $\square$

**注 2.17.** 考察上题的如下特殊情形:

1. 当  $L = M$ , 且  $f = \text{id}_M$  时,  $N_S^*f$  恰为性质 2.9 中的生成函数构造.
2. 当  $S$  为常函数时,  $dS \equiv 0$ , 此时恰为通常的余法丛.
3. 此外, 若  $L = \{x\}$  为单点集, 不妨  $x \in M$ , 则  $N_S^*f$  是余切丛  $T^*M$  在点  $x$  处的纤维.

辛空间  $V$  的拉格朗日子空间之全体  $\mathcal{L}(V)$  具有自然的光滑流形结构, 即拉格朗日-格拉斯曼流形 (回忆前文 1.4 节). 特别地, 当  $V = \mathbb{R}^{2n} \cong \mathbb{C}^n$  为标准辛空间时, 定理 1.47 表明

$$\mathcal{L}(\mathbb{C}^n) \cong \text{U}(n)/\text{O}(n),$$

从而  $\mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$  中的点可以视为某个酉矩阵  $\mathbf{A}$  的等价类

$$[\mathbf{A}] := \{\mathbf{X}\mathbf{A} \mid \mathbf{X} \in \mathrm{O}(n)\}. \quad (2.13)$$

而下述拉格朗日子流形的例子与拉格朗日-格拉斯曼流形  $\mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$  有关.

**题 2.18.** 记  $\mathrm{Sym}(n, \mathbb{C})$  为  $n$  阶复对称方阵之全体.

1.  $\mathrm{Sym}(n, \mathbb{C})$  作为  $\mathbb{C}^{n \times n} \cong \mathbb{C}^{n^2}$  的  $\mathbb{C}$ -子空间, 继承  $\mathbb{C}^{n^2}$  的标准辛结构(1.24), 这使得  $\mathrm{Sym}(n, \mathbb{C})$  为辛空间. 验证: 在上述意义下,  $\mathrm{Sym}(n, \mathbb{C})$  的辛结构  $\omega$  满足

$$\omega(\mathbf{S}_1, \mathbf{S}_2) = \mathrm{Im} \, \mathrm{tr} \left( \mathbf{S}_1^\dagger \mathbf{S}_2 \right), \quad (2.14)$$

其中  $\mathbf{S}_1, \mathbf{S}_2 \in \mathrm{Sym}(n, \mathbb{C})$ ,  $()^\dagger$  为复矩阵的共轭转置.

2. 定义映射

$$\begin{aligned} \Phi: \mathcal{L}(\mathbb{C}^n) &\rightarrow \mathrm{Sym}(n, \mathbb{C}) \\ [\mathbf{A}] &\mapsto \mathbf{A}^\mathrm{T} \mathbf{A}, \end{aligned} \quad (2.15)$$

验证:  $\Phi$  为良定 (与  $[\mathbf{A}]$  的代表元选取无关) 的单射. [提示: 良定性显然. 对于酉矩阵  $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ , 如果  $\mathbf{A}^\mathrm{T} \mathbf{A} = \mathbf{B}^\mathrm{T} \mathbf{B}$ , 则由酉矩阵的性质易知  $\mathbf{A}\mathbf{B}^{-1} = \overline{\mathbf{A}\mathbf{B}^{-1}}$ , 从而  $\mathbf{A}\mathbf{B}^{-1} \in \mathrm{O}(n)$ , 这表明  $[\mathbf{A}] = [\mathbf{B}]$ .]

我们来证明(2.15)中的映射  $\Phi: \mathcal{L}(\mathbb{C}^n) \rightarrow \mathrm{Sym}(n, \mathbb{C})$  是拉格朗日浸入. 为此, 首先考虑  $\mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$  的切空间以及  $\Phi$  的切映射. 注意  $\mathcal{L}(\mathbb{C}^n) = \mathrm{U}(n)/\mathrm{O}(n)$  是酉群  $\mathrm{U}(n)$  的齐性空间, 从而由李群李代数的基础知识可知

$$T_{[\mathbf{I}]} \mathcal{L}(\mathbb{C}^n) = T_{\mathbf{I}} (\mathrm{U}(n)/\mathrm{O}(n)) \cong \mathfrak{u}(n)/\mathfrak{o}(n) \cong \mathrm{i} \mathrm{Sym}(n, \mathbb{R}),$$

其中  $\mathbf{I}$  为  $n$  阶单位方阵,  $\mathrm{Sym}(n, \mathbb{R})$  为  $n$  阶实对称方阵之全体,  $\mathrm{i} := \sqrt{-1}$  为虚数单位,

$$\begin{aligned} \mathfrak{u}(n) &:= \{ \mathbf{X} \in \mathbb{C}^{n \times n} \mid \mathbf{X}^\dagger = -\mathbf{X} \}, \\ \mathfrak{o}(n) &= \{ \mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid \mathbf{X}^\mathrm{T} = -\mathbf{X} \} \end{aligned}$$

分别为李群  $\mathrm{U}(n), \mathrm{O}(n)$  的李代数. 而对于一般的  $[\mathbf{A}] \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$ , 切空间

$$T_{[\mathbf{A}]} \mathcal{L}(\mathbb{C}^n) \cong \mathbf{A} \cdot T_{[\mathbf{I}]} \mathcal{L}(\mathbb{C}^n) = \{ \mathbf{A}\mathbf{H} \mid \mathbf{H} \in \mathrm{i} \mathrm{Sym}(n, \mathbb{R}) \}.$$

注意切空间的上述取法与  $[A]$  的代表元选取有关. 特别地,

$$\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{L}(\mathbb{C}^n) = \dim_{\mathbb{R}} \text{Sym}(n, \mathbb{R}) = \frac{1}{2} \dim_{\mathbb{R}} \text{Sym}(n, \mathbb{C}). \quad (2.16)$$

而我们更习惯通过如下方式

$$\begin{aligned} \mathfrak{i} \text{Sym}(n, \mathbb{R}) &\rightarrow T_{[A]} \mathcal{L}(\mathbb{C}^n) \\ H &\mapsto AH \end{aligned} \quad (2.17)$$

将  $T_{[A]} \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$  等同于  $\mathfrak{i} \text{Sym}(n, \mathbb{R})$ . 此同构同样依赖  $[A]$  的代表元选取.

**题 2.19.** 记号承上. 对于  $[A] \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$ ,

1. 在切空间同构(2.17)意义下, 验证: (2.15)中的映射  $\Phi$  在点  $[A]$  处的切映射  $\Phi_*^{[A]}$  满足

$$\begin{aligned} \Phi_*^{[A]}: \mathfrak{i} \text{Sym}(n, \mathbb{R}) &\rightarrow \text{Sym}(n, \mathbb{C}) \\ H &\mapsto H^T A^T A + A^T A H, \end{aligned} \quad (2.18)$$

并注意上述  $\Phi_*^{[A]}$  与  $[A]$  的代表元选取无关. [提示: 由  $\Phi_*^{[A]}(H) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (A + tAH)^T (A + tAH)$  直接计算即可.]

2. 验证: 切映射  $\Phi_*^{[A]}$  是单射, 从而结合题2.18的第2问可知  $\Phi: \mathcal{L}(\mathbb{C}^n) \rightarrow \text{Sym}(\mathbb{C}^n)$  是嵌入子流形. [提示: 对于切向量  $H \in \mathfrak{i} \text{Sym}(n, \mathbb{R})$ , 注意  $A$  是酉矩阵, 容易验证  $\Phi_*^{[A]} H = 0$  当且仅当

$$AHA^\dagger = \overline{AHA^\dagger},$$

从而当且仅当  $AHA^\dagger$  是实对称方阵, 而实对称方阵可对角化且特征值全是实数. 再注意  $H$  酉相似于  $AHA^\dagger$ , 故它们具有相同的特征值. 但是,  $H \in \mathfrak{i} \text{Sym}(n, \mathbb{R})$  表明  $H$  的特征值为纯虚数 (包括 0). 因此  $H$  的特征值全为 0, 从而  $H = 0$ .]

3. 结合(2.14)与(2.18), 直接暴力验证映射(2.15)使得  $\mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$  是  $\text{Sym}(n, \mathbb{C})$  的拉格朗日子流形. [提示: 注意运用矩阵的迹的运算性质  $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$ .]

**题 2.20.** 记号承上. 设  $\omega$  为(2.14)所给出的  $\text{Sym}(n, \mathbb{C})$  的辛结构.

1. 验证:  $\mathrm{iSym}(n, \mathbb{R})$  是  $\mathrm{Sym}(n, \mathbb{C})$  的拉格朗日子空间.
2. 对于酉矩阵  $A$ , 验证:

$$L_A := \{A^T X A \mid X \in \mathrm{iSym}(n, \mathbb{R})\}$$

也是  $\mathrm{Sym}(n, \mathbb{C})$  的拉格朗日子空间.

3. 对于切向量  $H \in \mathrm{iSym}(n, \mathbb{R})$ , 验证: (2.18) 中的切映射  $\Phi_*^{[A]}$  满足

$$\Phi_*^{[A]} H = A^T \left( A H A^\dagger - \overline{A H A^\dagger} \right) A,$$

因此立刻看出切映射  $\Phi_*^{[A]}$  的像集落在拉格朗日子空间  $L_A$  当中, 进而再次验证  $\Phi^* \omega = 0$ .

**注 2.21.** 除了本节所介绍的生成函数, 余法丛以及拉格朗日-格拉斯曼流形, 还有一类非常重要的拉格朗日子流形, 即 Liouville 可积系统的水平集, 详见后文 3.3.1 小节.

## 2.2 Darboux-Moser-Weinstein 理论

本节讨论辛流形的局部性质. 其中的一个重要结果是: 辛流形局部辛同胚于标准辛空间. 具体地说, 对于  $2n$  维辛流形  $(M, \omega)$  上任意一点  $p$ , 存在  $p$  附近的局部坐标  $(x^1, \dots, x^{2n})$ , 使得在此局部坐标下  $\omega = \sum_{i=1}^n dx^i \wedge dx^{n+i}$ . 这正是所谓 **Darboux 定理**. 作为辛几何中的基本定理, 此定理表明辛流形的局部是平凡的, 即“没有局部信息”.

上述定理的大致证明思路如下: 先随便取一个局部坐标卡  $\varphi: U \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ , 记  $\omega_0$  为  $\mathbb{R}^{2n}$  的标准辛结构; 一般来说  $\varphi^* \omega_0 \neq \omega$ , 而我们要通过某种方式将映射  $\varphi$  光滑地“形变”到符合要求的样子. 其中涉及一个关键的技术细节, 它被叫做 **Moser 技巧**.

凭借 Moser 技巧及一些微分拓扑工具, 我们将对辛流形的局部性质有更深入的研究. 其中关于拉格朗日子流形的 **Weinstein 邻域定理** 格外重要. 上述关于辛流形局部性质的理论被统称为 *Darboux-Moser-Weinstein 理论*.

## 2.2.1 同痕, 含时向量场, Cartan 公式

本小节介绍施展 Moser 技巧所需要的微分几何知识.

**定义 2.22.** 设  $M$  为光滑流形,  $F: M \times \mathbb{R} \rightarrow M$  为光滑映射. 如果对任意  $t \in \mathbb{R}$ , 映射  $F_t: M \rightarrow M, p \mapsto F(p, t)$  都是微分同胚, 并且  $F_0 = \text{id}_M$ , 则称  $F$  是  $M$  的一个**同痕(isotopy)**.

设  $F$  是  $M$  的一个同痕, 则对任意点  $p \in M$ , 都有  $M$  上的光滑曲线  $t \mapsto F_t(p) := F(p, t)$ . 流形  $M$  上的点  $p$  随时间变量  $t$  而变化, 可以考虑相应的速度向量场. 引入 (与时间变量  $t$  有关的) 切向量场

$$X_F: M \times \mathbb{R} \rightarrow TM$$

$$(p, t) \mapsto X_F(t)|_p := \left. \frac{d}{ds} F_{t+s}(F_t^{-1}(p)) \right|_{s=0} \quad (2.19)$$

称为沿  $F$  的**(含时) 向量场**.

由定义知同痕  $F$  与其切向量场  $X_F$  满足微分方程

$$\frac{dF_t(p)}{dt} = X_F(t)|_{F_t(p)}, \quad (2.20)$$

换言之, 对任意  $\varphi \in C^\infty(M)$  以及  $t \in \mathbb{R}$ , 成立

$$\frac{d}{dt} (\varphi \circ F_t) = (X_F(t)\varphi) \circ F_t. \quad (2.21)$$

反之, 由常微分方程理论 (解的局部存在性), 对于流形  $M$  上的 (含时) 向量场  $X: M \times \mathbb{R} \rightarrow TM$ , 以及  $(p, t_0) \in M \times \mathbb{R}$ , 都存在开邻域  $p \in U \subseteq M$  以及  $\varepsilon > 0$ , 以及光滑映射  $F: U \times (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon) \rightarrow M$ , 使得对任意  $t \in (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$ ,  $F_t: p \mapsto F(p, t)$  都是从  $U$  到  $F_t(U)$  的微分同胚,  $F_{t_0} = \text{id}_U$ , 并且  $F_t$  满足(2.20)式. 上述  $F_t$  称为 (含时) 切向量场  $X(t)$  生成的**流**.

**注 2.23.** 对于通常的切向量场  $X$  (不含时间变量  $t$ ), 其生成的 (局部) 流  $F_t$  也记作  $e^{tX}$ , 称为关于  $X$  的指数映射.

众所周知, 沿切向量场  $X$  的**李导数**

$$\mathcal{L}_X: \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^k(M)$$

$$\omega \mapsto \left. \frac{d}{dt} (\exp tX)^* \omega \right|_{t=0}. \quad (2.22)$$



满足如下 **Cartan** 公式:

$$\mathcal{L}_X = i_X \circ d + d \circ i_X, \quad (2.23)$$

其中  $d: \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^{k+1}(M)$  是外微分算子, 而

$$\begin{aligned} i_X: \Omega^{k+1}(M) &\rightarrow \Omega^k(M), \\ \omega &\mapsto X \lrcorner \omega \end{aligned}$$

是切向量场  $X$  的内乘算子, 其定义为

$$(i_X \omega)(X_1, X_2, \dots, X_k) = \omega(X, X_1, X_2, \dots, X_k). \quad (2.24)$$

我们以一个简单的求导公式来结束本小节:

**引理 2.24.** 设  $M$  为光滑流形,  $U$  为  $M$  的非空开子集,  $I$  为开区间,  $F: U \times I \rightarrow M$  为光滑映射, 满足对任意  $t \in I$ ,  $F_t: U \rightarrow F_t(U)$ ,  $p \mapsto F(p, t)$  都是微分同胚. 记  $X_F(t)$  为沿  $F$  的含时向量场. 则对任何微分形式  $\omega \in \Omega^\bullet(M)$ , 成立

$$\frac{d}{dt} (F_t^* \omega) = F_t^* (\mathcal{L}_{X_F(t)} \omega). \quad (2.25)$$

证明. 给定  $t \in I$ , 取  $\varepsilon > 0$  使得  $I' := (t - \varepsilon, t + \varepsilon) \subseteq I$ , 则对任意  $s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ , 有如下交换图:

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{j_t} & U \times I' \\ F_{t+s} \downarrow & & \downarrow \psi_s \\ M & \xleftarrow{F} & U \times I \end{array}$$

即  $F_{t+s} = F \circ \psi_s \circ j_t$ , 其中  $\begin{cases} j_t: p \mapsto (p, t) \\ \psi_s: (p, t) \mapsto (p, t + s) \end{cases}$ . 此外还有  $F_t = F \circ j_t$ .

再注意到, 对于  $p \in U$  都有  $X_F(t)|_{p'} = F_* \left( \frac{\partial}{\partial s} \Big|_{(p,t)} \right)$ , 其中  $p' := F_t(p)$ , 因此

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (F_t^* \omega) &= \frac{d}{ds} (F_{t+s}^* \omega) \Big|_{s=0} = \frac{d}{ds} (j_t^* \circ \psi_s^* \circ F^* \omega) \Big|_{s=0} = j_t^* \circ \mathcal{L}_{\frac{\partial}{\partial s}} (F^* \omega) \\ &= j_t^* \circ F^* (\mathcal{L}_{F_* \frac{\partial}{\partial s}} \omega) = (F \circ j_t)^* (\mathcal{L}_{X_F(t)} \omega) = F_t^* (\mathcal{L}_{X_F(t)} \omega), \end{aligned}$$

从而命题得证. □

## 2.2.2 Moser 技巧, Darboux 定理

有了上述准备, 我们先来证明 Darboux 定理:

**定理 2.25.** (Darboux 定理) 设  $\omega, \omega'$  是光滑流形  $M$  上的两个辛形式,  $p \in M$ . 如果  $\omega|_p = \omega'|_p$ , 则存在点  $p$  的邻域  $U$ , 以及微分同胚  $f: U \rightarrow f(U)$ , 使得

$$f^*(\omega') = \omega.$$

证明. (Moser 技巧). 对于每个  $t \in [0, 1]$ , 记  $\omega_t := (1-t)\omega + t\omega' \in \Omega^2(M)$ . 我们将取点  $p$  的某个邻域  $U$ , 并构造同痕  $F: U \times [0, 1] \rightarrow M$ , 使得

$$\begin{aligned} F_0 &= \text{id}_U, \\ F_t^* \omega_t &= \omega, \quad \forall t \in [0, 1], \end{aligned} \tag{2.26}$$

其中  $F_t(p) := F(p, t)$ . 如果找到这样的  $F$ , 则取  $f = F_1$  即证明此定理.

接下来求解满足(2.26)的  $F$ . 记  $X_F(t)$  为  $F$  的含时向量场, 我们来考察  $X_F(t)$  需要满足什么性质. 由(2.25)(2.26)式, 并注意  $d\omega = d\omega' = 0$  以及 Cartan 公式(2.23), 有

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dt} (F_t^* \omega_t) = \frac{d}{ds} (F_s^* \omega_t) \Big|_{s=t} + \frac{d}{ds} (F_t^* \omega_s) \Big|_{s=t} \\ &= F_t^* (\mathcal{L}_{X_F(t)} \omega_t + \omega' - \omega) \\ &= F_t^* (d(X_F(t) \lrcorner \omega_t) + \omega' - \omega). \end{aligned}$$

又注意  $d(\omega' - \omega) = 0$ , 从而由庞加莱引理可知存在点  $p$  的邻域  $U$  以及  $\eta \in \Omega^1(U)$  使得  $\omega' - \omega = d\eta$ ; 适当调整  $\eta$ , 不妨  $\eta|_p = 0$ , 从而

$$0 = F_t^* d(X_F(t) \lrcorner \omega_t + \eta).$$

于是只需要寻找满足如下 **Moser 方程**

$$X_F(t) \lrcorner \omega_t + \eta = 0, \quad t \in [0, 1]. \tag{2.27}$$

的含时向量场  $X_F(t)$  即可.

断言: 这样的  $X_F(t)$  在点  $p$  附近存在. 事实上, 此断言的正确性由  $\omega_t$  的非退化性所保证. 具体来说, 由于辛形式  $\omega, \omega'$  处处非退化, 且  $\omega|_p = \omega'|_p$ , 从而对每个  $t \in [0, 1]$ ,  $\omega_t|_p = \omega|_p$  非退化, 于是  $\omega_t$  在点  $p$  的某个 (与  $t$  有关的) 邻域内非退化. 注意闭区间  $[0, 1]$  的紧性, 用有限覆盖定理可知证明存在  $p$  的某个邻域  $U$  使得对任意  $t \in [0, 1]$ ,  $\omega_t$  在  $U$  中处处非退化 (细节留给读者). 从而存在含时切向量场  $X_F: U \times [0, 1] \rightarrow TM$  满足(2.27).

注意  $\eta|_p = 0$ , 所以上述断言中的  $X_F(t)$  满足: 对任意  $t \in [0, 1]$  都有  $X_F(t)|_p = 0$ . 所以曲线

$$\gamma: [0, 1] \rightarrow M, \quad t \mapsto p,$$

即  $\gamma(t) \equiv p$ , 是  $X_F(t)$  的一条积分曲线. 从而由常微分方程理论, 可以证明存在  $p$  的邻域  $U$  以及  $F: U \times [0, 1] \rightarrow M$  使得  $F$  是含时切向量场  $X_F(t)$  生成的流 (可以承认它, 或详见 [24] 的第 237 页). 由之前讨论, 如此得到的  $F$  显然满足(2.26)式, 定理得证.  $\square$

**推论 2.26.** 设  $(M, \omega)$  是  $2n$  维辛流形, 则对任意  $p \in M$ , 存在  $p$  处的局部坐标卡  $\varphi: U \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ , 使得  $\omega = \varphi^* \omega_0$ , 其中  $\omega_0 = \sum_{i=1}^n dx^i \wedge dx^{n+i}$  是  $\mathbb{R}^{2n}$  的标准辛结构.

证明. 这是定理2.25的直接推论, 留给读者.  $\square$

**Darboux** 定理可以给出辛流形的另一种等价定义. 首先,  $2n$  维标准辛空间  $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$  (及其开子集) 是辛流形; 如果光滑映射  $\varphi: \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$  满足  $\varphi^* \omega_0 = \omega_0$ , 则称  $\varphi$  为辛映射. 于是由 **Darboux** 定理可以验证, 以下是辛流形的等价定义:

**定义 2.27.** 设  $M$  为第二可数 *Hausdorff* 空间, 如果存在  $M$  的一族开覆盖  $\{U_\alpha\}$  以及连续映射  $\varphi_\alpha: U_\alpha \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ , 使得  $\varphi_\alpha$  是  $U_\alpha$  与  $\varphi_\alpha(U_\alpha)$  的同胚, 并且对任意  $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ , 转移映射

$$\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}: \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$$

是辛映射, 则称  $M$  是辛流形.

如果空间  $M$  满足定义2.27, 则容易验证  $\varphi_\alpha^*(\omega_0) = \varphi_\beta^*(\omega_0)$  在  $U_\alpha \cap U_\beta$  中成立, 其中  $\omega_0$  为  $\mathbb{R}^{2n}$  的标准辛结构, 于是将这些  $\varphi_\alpha^*(\omega_0)$  粘合起来就得到在  $M$  整体定义的满足定义2.1 的辛形式; 反之, 若  $\omega \in \Omega^2(M)$  满足定义2.1, 则由 Darboux 定理易知存在形如定义2.27的坐标卡  $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ . 可见辛流形与光滑流形、复流形一样, 其定义可用转移映射的语言写成统一形式:

光滑流形	转移映射 $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ 是光滑映射
复流形	转移映射 $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ 是全纯映射
辛流形	转移映射 $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ 是辛映射

运用 Moser 技巧, 我们还可以回答另一个有趣的问题. 我们回忆, 辛结构是某个 de Rham 上同调类  $[\omega] \in H_{\text{dR}}^2(M)$  的代表元. 现在设  $\omega_0, \omega_1$  是光滑流形  $M$  上的两个辛结构, 如果  $(M, \omega_0)$  与  $(M, \omega_1)$  是辛同胚的, 则这两个辛结构所代表的上同调类显然相同, 即  $[\omega_0] = [\omega_1]$ . 此结论反过来是否也成立? Moser 给出的答案是: 在一定的假设条件下, 逆命题也是对的.

**定理 2.28. (Moser).** 设  $M$  是紧流形,  $\omega_0, \omega_1 \in \Omega^2(M)$  是  $M$  上的两个辛结构, 满足  $[\omega_0] = [\omega_1] \in H_{\text{dR}}^2(M)$ , 并且对任意  $t \in [0, 1]$ ,

$$\omega_t := (1 - t)\omega_0 + t\omega_1$$

非退化 (从而也是辛结构). 则存在同痕

$$F: M \times [0, 1] \rightarrow M$$

使得对任意  $t \in [0, 1]$  都有  $F_t^* \omega_t = \omega_0$ . 特别地,  $F_1$  给出了  $(M, \omega_0)$  与  $(M, \omega_1)$  的辛同胚.

证明. 由  $[\omega_0] = [\omega_1]$  可知, 存在  $\eta \in \Omega^1(M)$  使得  $\omega_1 - \omega_0 = d\eta$ . 而  $\omega_t$  的非退化性保证了 Moser 方程(2.27)

$$X_{F(t)} \lrcorner \omega_t + \eta = 0$$

的光滑解  $X_{F(t)}$  存在唯一. 由  $M$  的紧性可知该含时向量场  $X_{F(t)}$  生成的流可以整体定义, 即存在光滑映射

$$F: M \times [0, 1] \rightarrow M$$

使得  $X_{F(t)}$  是  $F$  的含时向量场 (先考虑  $X_{F(t)}$  再  $M$  的每一点处局部生成的流, 再对  $M$  使用有限覆盖. 细节留给读者). 与 Darboux 定理 (定理2.25) 证明过程完全类似, 易知此  $F$  满足题设. 从而本定理得证.  $\square$

### 2.2.3 管状邻域, 同伦算子, 相对 Moser 定理 (待补)

### 2.2.4 Weinstein 邻域定理 (待补)

## 2.3 Kähler 流形

**Kähler 流形**是黎曼流形、复流形与辛流形三者的完美融合, 不仅是复几何中的重要研究对象, 也与辛几何联系密切, 是辛流形的重要例子. 本节先介绍复几何的基本语言, 然后介绍 Kähler 流形的基本概念与性质.

### 2.3.1 近复结构与复结构

在1.5.2小节, 我们知道辛空间  $(V, \omega)$  总存在与辛结构正定相容的复结构  $J$ , 使得  $(V, \omega, J)$  为 Kähler 空间. 作为辛空间的“整体化”, 辛流形也有类似结论, 这将沟通辛几何与复几何. 首先从复结构说起.

**定义 2.29.** 对于光滑流形  $M$  以及  $M$  上的  $(1, 1)$ -型张量  $J$ , 如果对任意  $p \in M$ ,

$$J_p \in T_p M \otimes T_p^* M \cong \text{End}(T_p M) \text{ 满足 } J_p^2 = -\text{id}_{T_p M},$$

则称  $J$  是  $M$  的一个近复结构 (*almost complex structure*),  $(M, J)$  为近复流形.

由上述定义可知  $J$  是  $M$  的近复结构当且仅当在每一点  $p \in M$  处,  $J_p$  是切空间  $T_p M$  的复结构, 从而近复流形一定是偶数维流形.

复流形一定是近复流形. 若  $M$  是复流形, 取  $M$  的一族全纯坐标卡  $\{\varphi_\alpha: U_\alpha \rightarrow \mathbb{C}^n\}$ , 记  $J_0$  是  $\mathbb{C}^n \cong \mathbb{R}^{2n}$  的标准复结构 (见1.5.1小节), 则  $\{\varphi_\alpha^* J_0\}$  可粘合为在  $M$  整体定义的  $(1, 1)$ -张量场  $J$ , 此  $J$  为  $M$  的近复结构. 注意到, 在复流形  $M$  的全纯局部坐标  $(z^1, z^2, \dots, z^n) = (x^1, \dots, x^n; y^1, \dots, y^n)$  下, 张量场  $J$  的各分量系数均为常数.

**定义 2.30.** 对于辛流形  $(M, \omega)$  的近复结构  $J$ , 如果对任意切向量场  $X, Y \in \text{Vect}(M)$  都成立

$$\omega(JX, JY) = \omega(X, Y),$$

则称  $J$  是  $\omega$ -相容的; 此外, 如果  $J$  是  $\omega$ -相容的, 并且

$$g(X, Y) := \omega(X, JY) \quad (2.28)$$

是  $M$  上的黎曼度量, 则称近复结构  $J$  是  $\omega$ -正定相容的.

这几乎照搬定义 1.50. 可以验证, 若复结构  $J$  是  $\omega$ -相容的, 则(2.28)所定义的  $(0, 2)$ -型张量场  $g$  总是对称的; 从而  $J$  是  $\omega$ -正定相容的当且仅当  $g$  正定.

**性质 2.31.** 辛流形  $(M, \omega)$  总存在  $\omega$ -正定相容的近复结构.

特别地, 辛流形一定是近复流形.

证明. 众所周知, 任何光滑流形上都存在黎曼度量. 任取  $M$  的一个黎曼度量  $\gamma$ , 然后仿照(1.32)的方法即可给出  $\omega$ -正定相容的近复结构  $J$ . 细节从略, 留给读者练习.  $\square$

至此, 光滑流形  $M$  上已有三种结构: 辛结构  $\omega$ , 近复结构  $J$  以及黎曼度量  $g$ . 这之中的任何两者都可谈论某种“相容性”. 我们总结如下表:

资料	相容性条件	产物	可积性问题
$(\omega, J)$	$\omega(JX, TY) = \omega(X, Y)$ $\omega(X, JX) > 0, X \neq 0$	$g(X, Y) := \omega(X, JY)$ 是黎曼度量	$(g$ 是否平坦?)
$(g, J)$	$g(JX, JY) = g(X, Y)$ ( $J$ 是 $g$ -正交的)	$\omega(X, Y) := g(JX, Y)$ 是非退化 2-形式	$\omega$ 是否为闭形式?
$(\omega, g)$	(极分解)	近复结构 $J$	$J$ 是否“可积”?

然而一般来说, 近复流形未必是复流形. 近复流形  $(M, J)$  是复流形当且仅当存在  $M$  的一族局部坐标卡, 使得  $J$  在该局部坐标下的各分量系数都

是常数. 如果  $J$  满足上述性质, 则称近复结构  $J$  是可积的. 可积的近复结构也叫复结构.

为研究近复结构何时是复结构, 引入如下张量:

**定义 2.32.** 对于近复流形  $(M, J)$ , 以及切向量场  $X, Y \in \text{Vect}(M)$ , 记切向量场

$$\mathcal{N}_J(X, Y) = [JX, JY] - J[X, JY] - J[JX, Y] - [X, Y], \quad (2.29)$$

其中  $[\cdot, \cdot]$  是切向量场通常的李括号. 则可以验证  $\mathcal{N}_J$  是  $M$  上的  $(1, 2)$ -型张量场, 该张量场称为近复结构  $J$  的 **Nijenhuis** 张量.

**题 2.33.** 验证上述  $\mathcal{N}_J$  的如下基本性质:

1. 对任意切向量场  $X, Y \in \text{Vect}(M)$  都有

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_J(Y, X) &= -\mathcal{N}_J(X, Y), \\ \mathcal{N}_J(JX, JY) &= -\mathcal{N}_J(X, Y), \end{aligned}$$

特别地,  $\mathcal{N}_J(X, X) = \mathcal{N}_J(X, JX) = 0$ .

2. 对任意切向量场  $X, Y \in \text{Vect}(M)$  以及光滑函数  $f \in C^\infty(M)$  都有

$$\mathcal{N}_J(fX, Y) = f\mathcal{N}_J(X, Y) = \mathcal{N}_J(X, fY),$$

从而  $J$  确实是  $M$  上的张量场.

3. 若近复结构  $J$  可积 (即在某局部坐标下  $J$  的各分量系数都是常数), 则  $\mathcal{N}_J \equiv 0$ .

**题 2.34.** 若近复结构  $J$  在  $M$  某局部坐标  $(v^1, v^2, \dots, v^m)$  具有表达式

$$J = J_j^i \frac{\partial}{\partial v^i} \otimes \mathrm{d}v^j,$$

则 Nijenhuis 张量在该局部坐标下的表达式为  $\mathcal{N}_J = (\mathcal{N}_J)_{ij}^k \frac{\partial}{\partial v^k} \otimes \mathrm{d}v^i \otimes \mathrm{d}v^j$ , 其中

$$(\mathcal{N}_J)_{ij}^k = (\partial_i J_\ell^k - \partial_\ell J_i^k) J_j^\ell - (\partial_j J_\ell^k - \partial_\ell J_j^k) J_i^\ell.$$

[提示: 直接计算验证即可, 注意  $J^2 = \text{id}$  意味着  $J_j^\ell J_i^j = -\delta_i^\ell$ , 两边求偏导得  $\partial_k J_j^\ell \cdot J_i^j + J_j^\ell \partial_k J_i^j = 0$ .]

**定理 2.35.** (Newlander-Nirenberg). 设  $J$  是光滑流形  $M$  的近复结构, 则

$$J \text{ 可积} \iff \text{Nijenhuis 张量 } \mathcal{N}_J \equiv 0.$$

必要性显然; 充分性的证明过程复杂, 需要较深的分析工具, 这里从略, 感兴趣者移步原文献 [31], 或参考 Demailly[13] 第 8.11 节. 事实上, 近复结构  $J$  的可积性有多种不同版本的充分必要条件 (将在后文介绍), 这导致 Newlander-Nirenberg 定理有多种不同的版本. 若假定  $M$  是实解析流形, 并且复结构  $J$  是实解析张量, 则相应版本的 Newlander-Nirenberg 定理有初等证明, 只需用到分布可积性的 Frobenius 定理的解析版本, 细节可见各类复几何教材, 例如 Voison[44] 第 2.2.3 节.

**推论 2.36.** 二维可定向曲面具有复结构.

这很早以前就众所周知, 但用辛结构与近复结构的知识再证一遍也无妨.

证明. 对于 2 维可定向曲面  $M$ ,  $M$  上的任何一个体积形式  $\omega$  都使得  $(M, \omega)$  是辛流形; 任取  $\omega$ -正定相容的近复结构  $J$ , 注意  $\mathcal{N}_J(X, JX) \equiv 0$ , 且  $X$  与  $JX$  构成  $TM$  的整体标架, 因此  $\mathcal{N}_J \equiv 0$ , 从而由 Newlander-Nirenberg 定理可知  $J$  是  $M$  的复结构.  $\square$

### 2.3.2 复切丛, $(p, q)$ -形式, $J$ -全纯曲线

依然从  $2n$  维近复流形  $(M, J)$  谈起, 交代一些复几何中众所周知的记号. 对于每一点  $p \in M$ , 对切空间  $T_p M$  (注意这是  $2n$  维  $\mathbb{R}$ -线性空间) 作类似(1.26)-(1.27)的操作:

- $T_{p, \mathbb{C}} M := T_p M \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$  为切空间  $T_p M$  的复化, 这是  $2n$  维  $\mathbb{C}$ -向量空间. 记

$$T_{\mathbb{C}} M := \coprod_{p \in M} T_{p, \mathbb{C}} M,$$



这是  $M$  上的秩为  $2n$  的复向量丛, 称为**复切丛**.

$$\mathbf{Vect}_{\mathbb{C}}(M) := \Gamma(M, T_{\mathbb{C}}M) \cong \mathbf{Vect}(M) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$$

为  $T_{\mathbb{C}}M$  的光滑截面之全体, 其中的元素称为  $M$  上的**复切向量场**.

- 将近复结构  $J_p \in \mathbf{End}(T_p M)$  自然地  $\mathbb{C}$ -线性延拓为  $\mathbf{End}_{\mathbb{C}}(T_{p, \mathbb{C}}M)$  中的元素, 延拓后仍记作  $J_p$ . 则  $J_p$  具有特征值  $\pm i$ , 相应的特征子空间分别记作:

$$T_{(1,0),p}M := \{v \in T_{p, \mathbb{C}}M \mid J_p v = i v\} = \{v - i J_p v \mid v \in T_{p, \mathbb{C}}M\},$$

$$T_{(0,1),p}M := \{v \in T_{p, \mathbb{C}}M \mid J_p v = -i v\} = \{v + i J_p v \mid v \in T_{p, \mathbb{C}}M\},$$

分别称为  $M$  在点  $p$  处的  $(1,0)$ -切空间与  $(0,1)$ -切空间, 它们都是  $n$  维  $\mathbb{C}$ -线性空间. 再记相应的复向量丛

$$T_{1,0}M := \coprod_{p \in M} T_{(1,0),p}M, \quad T_{0,1}M := \coprod_{p \in M} T_{(0,1),p}M,$$

分别称为  $M$  上的  $(1,0)$ -切丛与  $(0,1)$ -切丛. 其上的光滑截面之全体分别记作

$$\mathbf{Vect}_{1,0}(M) := \Gamma(M, T_{1,0}M), \quad \mathbf{Vect}_{0,1}(M) := \Gamma(M, T_{0,1}M),$$

上述两个空间中的元素分别称为  $M$  上的  $(1,0)$ -切向量场与  $(0,1)$ -切向量场.

显然有如下复向量丛同构:

$$T_{\mathbb{C}}M \cong T_{1,0}M \oplus T_{0,1}M. \quad (2.30)$$

此外, 也容易证明以下:

**题 2.37.** 设  $(M, J)$  为  $2n$  维近复流形.

1. 近复结构  $J$  使得  $TM$  具有复向量丛结构. 在此意义下,

$$\begin{aligned} \pi_{1,0}: TM &\rightarrow T_{1,0}M \\ X &\mapsto \frac{1}{2}(X - iJX) \end{aligned}$$

诱导了复向量丛同构  $TM \cong T_{1,0}M$ .

2. 注意  $\mathbb{C}$  上的复数共轭运算  $z \mapsto \bar{z}$ , 自行定义复切空间  $T_{p,\mathbb{C}}M := T_pM \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$  上的共轭运算, 进而定义复向量丛  $T_{1,0}M$  与  $T_{0,1}M$  的共轭丛, 分别记作  $\overline{T_{1,0}M}$  与  $\overline{T_{0,1}M}$ , 并验证复向量丛同构.

$$\overline{T_{1,0}M} \cong T_{0,1}M, \quad \overline{T_{0,1}M} \cong T_{1,0}M.$$

如果  $J$  可积 (即  $(M, J)$  是复流形), 取复坐标  $z^1, z^2, \dots, z^n$ , 其中

$$z^i := x^i + iy^i, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (2.31)$$

在此坐标下, 近复结构  $J$  满足

$$J \frac{\partial}{\partial x^i} = \frac{\partial}{\partial y^i}, \quad J \frac{\partial}{\partial y^i} = -\frac{\partial}{\partial x^i}. \quad (2.32)$$

此时引入复切向量

$$\frac{\partial}{\partial z^i} := \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x^i} - i \frac{\partial}{\partial y^i} \right), \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}^i} := \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x^i} + i \frac{\partial}{\partial y^i} \right), \quad (2.33)$$

则容易验证  $\{\frac{\partial}{\partial z^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial z^n}\}$  与  $\{\frac{\partial}{\partial \bar{z}^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial \bar{z}^n}\}$  分别构成  $T_{1,0}M$  与  $T_{0,1}M$  的 (局部) 标架. 在此局部坐标下,  $M$  上的  $(1, 0)$ -切向量场都形如

$$X = \sum_{i=1}^n X^i \frac{\partial}{\partial z^i},$$

其中  $X^i$  为光滑函数. 于是容易验证: 若近复结构  $J$  可积, 则对任意  $X, Y \in \text{Vect}_{1,0}(M)$ ,  $[X, Y] \in \text{Vect}_{1,0}(M)$ , 其中  $[\cdot, \cdot]$  是切向量场的李括号, 自然  $\mathbb{C}$ -线性延拓至复切向量场上.

**题 2.38.** 对于近复流形  $(M, J)$ , 证明以下两者等价:

$$1. \quad \forall X, Y \in \text{Vect}_{1,0}(M), [X, Y] \in \text{Vect}_{1,0}(M).$$

$$2. \quad \text{Nijenhuis 张量 } \mathcal{N}_J \equiv 0.$$

[提示: 注意到  $(1, 0)$ -切向量场  $X$  必形如  $X = X' - iJX'$ , 其中  $X' \in \text{Vect}(M)$ , 同理  $Y = Y' - iJY'$ . 由  $[X, Y] \in \text{Vect}_{1,0}(M)$  可知  $J[X, Y] = i[X, Y]$ . 将此式中的  $X, Y$  用实切向量场  $X', Y'$  表示, 并比较实部与虚部, 即可发现 Nijenhuis 张量  $\mathcal{N}_J$ . 这是 Nijenhuis 张量(2.29)的引入动机.]

**注 2.39.** 上题的条件 (1) 也可简记为  $[T_{1,0}M, T_{1,0}M] \subseteq T_{1,0}M$ , 即  $T_{1,0}M$  作为  $T_{\mathbb{C}}M$  的分布, 满足 Frobenius 可积性条件. 若  $M$  是实解析流形, 则由解析版本的 Frobenius 可积性定理可以证明此时  $J$  可积, 从而证明 Newlander-Nirenberg 定理的实解析情形.

接下来引入  $2n$  维近复流形  $(M, J)$  上的复微分形式. 设  $p \in M$  为  $M$  上的一点.

- $T_{p,\mathbb{C}}^*M := T_p^*M \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$  为余切空间的复化, 记

$$T_{\mathbb{C}}^*M := \coprod_{p \in M} T_{p,\mathbb{C}}^*M,$$

这是  $M$  上的秩为  $2n$  的复向量丛, 称为**复余切丛**. 对于  $k \in \mathbb{N}^*$ , 称  $\bigwedge^k(T_{\mathbb{C}}^*M)$  为  $M$  上的复化  $k$ -形式丛, 这是秩为  $\binom{2n}{k}$  的复向量丛, 其光滑截面称为**复  $k$ -形式**; 其光滑截面之全体记作

$$\Omega^k(M, \mathbb{C}) := \Gamma\left(M, \bigwedge^k(T_{\mathbb{C}}^*M)\right) \cong \Omega^k(M) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}.$$

- 近复结构  $J$  也自然视为  $T_{p,\mathbb{C}}^*M$  上的线性变换, 此线性变换具有特征值  $\pm i$ . 此时

$$T_{p,\mathbb{C}}^*M \cong T_{(1,0),p}^*M \oplus T_{(0,1),p}^*M,$$

其中  $T_{(1,0),p}^*M$  与  $T_{(0,1),p}^*M$  分别为  $J$  的属于特征值  $i, -i$  的特征子空间. 对于  $p, q \in \mathbb{N}^*$ , 记

$$\bigwedge^{p,q}(T_{\mathbb{C}}^*M) := (\bigwedge^p T_{1,0}^*M) \wedge (\bigwedge^q T_{0,1}^*M),$$

称为  $M$  上的光滑  $(p, q)$ -形式丛, 这是  $M$  上的秩为  $\binom{n}{p}\binom{n}{q}$  的复向量丛, 其光滑截面称为  $(p, q)$ -形式, 再记

$$\Omega^{p,q}(M) := \Gamma(M, \bigwedge^{p,q}(T_{\mathbb{C}}^*M))$$

为  $M$  上的光滑  $(p, q)$ -形式之全体. 容易验证, 对任意  $k \geq 0$  都有

$$\begin{aligned} \bigwedge^k(T_{\mathbb{C}}^*M) &= \bigoplus_{\substack{p+q=k \\ p,q \geq 0}} \bigwedge^{p,q}(T_{\mathbb{C}}^*M), \\ \Omega^k(M, \mathbb{C}) &= \bigoplus_{\substack{p+q=k \\ p,q \geq 0}} \Omega^{p,q}(M). \end{aligned}$$

若  $(M, J)$  是复流形, 取复坐标  $z^i = x^i + \mathrm{i}y^i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ), 并记  $\bar{z}^i := x^i - \mathrm{i}y^i$ , 则  $(p, q)$ -形式  $\omega \in \Omega^{p,q}M$  在此局部坐标下形如

$$\begin{aligned}\omega &= \sum_{|I|=p, |J|=q} \omega_{I,J} \mathrm{d}z^I \wedge \mathrm{d}\bar{z}^J \\ &:= \sum_{\substack{1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n \\ 1 \leq j_1 < \dots < j_q \leq n}} \omega_{i_1 \dots i_p j_1 \dots j_q} \mathrm{d}z^{i_1} \wedge \dots \wedge \mathrm{d}z^{i_p} \wedge \mathrm{d}\bar{z}^{j_1} \wedge \dots \wedge \mathrm{d}\bar{z}^{j_q},\end{aligned}$$

其中  $\omega_{I,J}$  是 (局部定义的) 复值光滑函数.

最后介绍近复流形之间的全纯映射.

**定义 2.40.** 设  $f: (M, J) \rightarrow (M', J')$  是近复流形之间的光滑映射, 如果切映射  $f_*: T_p M \rightarrow T_{f(p)} M'$  是复线性映射, 即

$$f_* \circ J = J' \circ f_*,$$

则称  $f$  是全纯映射. 特别地, 从  $(M, J)$  到  $\mathbb{C}$  的全纯映射称为  $J$ -全纯函数.

例如, 如果  $(M, J)$  是复流形, 则复坐标  $z^1, z^2, \dots, z^n$  都是局部定义的  $J$ -全纯函数, 并且  $\mathrm{d}z^1, \dots, \mathrm{d}z^n$  是  $\mathbb{C}$ -线性无关的, 从而  $\mathrm{d}z^1 \wedge \dots \wedge \mathrm{d}z^n \neq 0$ . 事实上, 容易证明:

**题 2.41.** 设  $(M, J)$  是  $2n$  维近复流形, 则  $J$  可积  $\iff$  对任意  $p \in M$ , 在  $p$  的某邻域  $U$  上存在  $J$ -全纯函数  $z^1, \dots, z^n$ , 使得  $\mathrm{d}z^1 \wedge \dots \wedge \mathrm{d}z^n \neq 0$  在  $U$  上恒成立.

[提示: 只证  $\Leftarrow$ . 注意到  $z^i$  是  $J$ -全纯函数  $\iff \mathrm{d}z^i$  是  $(1, 0)$ -形式, 于是  $0 \neq \mathrm{d}z^1 \wedge \dots \wedge \mathrm{d}z^n \in \Omega^{n,0}(U)$ . 取复共轭得  $0 \neq \mathrm{d}\bar{z}^1 \wedge \dots \wedge \mathrm{d}\bar{z}^n \in \Omega^{0,n}(U)$ . 从而

$$(\mathrm{d}z^1 \wedge \dots \wedge \mathrm{d}z^n) \wedge (\mathrm{d}\bar{z}^1 \wedge \dots \wedge \mathrm{d}\bar{z}^n) \neq 0.$$

记  $z^i = x^i + \mathrm{i}y^i$ , 其中  $x^i$  与  $y^i$  分别为函数  $z^i$  的实部与虚部, 注意  $\mathrm{d}z^i \wedge \mathrm{d}\bar{z}^i = -2\mathrm{i}\mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}y^i$ , 从而推出  $\mathrm{d}x^1 \wedge \mathrm{d}y^1 \wedge \dots \wedge \mathrm{d}x^n \wedge \mathrm{d}y^n \neq 0$ , 因此  $\mathrm{d}x^1, \dots, \mathrm{d}x^n, \mathrm{d}y^1, \dots, \mathrm{d}y^n$  是  $\mathbb{R}$ -线性无关的, 从而由反函数定理可知  $x^1, \dots, x^n; y^1, \dots, y^n$  构成  $M$  的一族局部坐标, 并且在此坐标下  $J$  的各分量系数为常数, 从而  $J$  可积.]

**注 2.42.** 上题表明, 近复结构  $J$  可积当且仅当局部存在“足够多的” $J$ -全纯函数. 然而, 可以证明, 一般的近复流形并不存在  $J$ -全纯函数, 局部上也不存在.

辛流形  $(M, \omega)$  必存在  $\omega$ -正定相容的近复结构  $J$ . 近复流形上一般没有  $J$ -全纯函数, 但是有很多“ $J$ -全纯曲线”. 所谓  $J$ -全纯曲线, 也叫伪全纯曲线, 是指从  $\mathbb{C}$  到  $(M, J)$  的全纯映射; 此概念由 Gromov 引入, 此后成为研究辛几何的重要工具.

### 2.3.3 $\bar{\partial}$ 算子, Dolbeault 上同调

设  $(M, J)$  为  $2n$  维近复流形, 将外微分算子

$$d: \Omega^\bullet(M) \rightarrow \Omega^{\bullet+1}(M)$$

自然地  $\mathbb{C}$ -线性延拓为  $d: \Omega^\bullet(M, \mathbb{C}) \rightarrow \Omega^{\bullet+1}(M, \mathbb{C})$ , 并考察其在  $(p, q)$ -形式上的作用.

**引理 2.43.** 设  $(M, J)$  为  $2n$  维近复流形, 则对任意  $p, q \geq 0$ ,

$$d\Omega^{p,q}(M) \subseteq \Omega^{p+2,q-1}(M) \oplus \Omega^{p+1,q}(M) \oplus \Omega^{p,q+1}(M) \oplus \Omega^{p-1,q+2}(M).$$

证明. 记  $k := p + q$ , 则对于  $\alpha \in \Omega^{p,q}(M)$  以及切向量场  $X_0, X_1, \dots, X_p \in \text{Vect}_{\mathbb{C}}(M)$ , 由众所周知的外微分公式

$$\begin{aligned} (d\alpha)(X_0, X_1, \dots, X_k) &= \sum_{i=0}^k (-1)^i X_i(\alpha(X_0, \dots, \widehat{X}_i, \dots, X_k)) \\ &\quad + \sum_{0 \leq i < j \leq k} (-1)^{i+j} \alpha([X_i, X_j], X_0, \dots, \widehat{X}_i, \dots, \widehat{X}_j, \dots, X_k) \end{aligned} \quad (2.34)$$

可以看出, 如果  $X_0, \dots, X_k$  之中有超过  $p+2$  个  $(1, 0)$ -向量, 或者有超过  $q+2$  个  $(0, 1)$ -向量, 则  $(d\alpha)(X_0, X_1, \dots, X_k) = 0$ . 这表明  $d\alpha$  只可能有  $(p+2, q-1)$ ,  $(p+1, q)$ ,  $(p, q+1)$  以及  $(p-1, q+2)$ -分量, 引理得证.  $\square$

也可以从另一个角度来理解上述引理. 取  $\{\theta^1, \dots, \theta^n\}$  为  $(1, 0)$ -形式丛的一组局部标架, 则  $\{\bar{\theta}^1, \dots, \bar{\theta}^n\}$  是  $(0, 1)$ -形式丛的一组局部标架. 在此局部标架下,  $\alpha \in \Omega^{p,q}(M)$  可以表示为

$$\alpha = \sum_{\substack{|I|=p \\ |J|=q}} \alpha_{I,J} \theta^I \wedge \bar{\theta}^J,$$

其中  $I = (i_1, \dots, i_p), J = (j_1, \dots, j_q)$  为多重指标,  $\theta^I = \theta^{i_1} \wedge \dots \wedge \theta^{i_p}, \bar{\theta}^J$  也类似,  $\alpha_{I,J}$  为  $M$  上的 (局部) 光滑函数. 注意

$$\begin{aligned} d\theta^i, d\bar{\theta}^j &\in d\Omega^1(M, \mathbb{C}) \subseteq \Omega^2(M, \mathbb{C}) \\ &= \Omega^{2,0}(M) \oplus \Omega^{1,1}(M) \oplus \Omega^{0,2}(M), \end{aligned}$$

再注意外微分运算的 Leibniz 法则

$$d(\omega \wedge \eta) = d\omega \wedge \eta + (-1)^{\deg \omega} \omega \wedge d\eta,$$

容易验证引理2.43(细节留给读者).

**定义 2.44.** 对于  $2n$  维近复流形  $(M, J)$ , 定义算子

$$\begin{aligned} \partial: \Omega^{p,q}(M) &\rightarrow \Omega^{p+1,q}(M), \\ \bar{\partial}: \Omega^{p,q}(M) &\rightarrow \Omega^{p,q+1}(M) \end{aligned}$$

如下: 对于  $\alpha \in \Omega^{p,q}(M)$ ,  $\partial\alpha, \bar{\partial}\alpha$  分别是  $d\alpha$  的  $(p+1, q)$ -分量与  $(p, q+1)$ -分量.

当  $(M, J)$  是复流形时, 取复坐标  $z^1, \dots, z^n$ , 则对于  $(p, q)$ -形式

$$\alpha = \sum_{\substack{|I|=p \\ |J|=q}} \alpha_{I,J} dz^I \wedge d\bar{z}^J,$$

容易验证算子  $\partial, \bar{\partial}$  具有表达式

$$\partial\alpha = \sum_{\substack{|I|=p \\ |J|=q}} \sum_{i=1}^n \frac{\partial \alpha_{I,J}}{\partial z^i} dz^i \wedge dz^I \wedge d\bar{z}^J,$$

$$\bar{\partial}\alpha = \sum_{\substack{|I|=p \\ |J|=q}} \sum_{j=1}^n \frac{\partial \alpha_{I,J}}{\partial \bar{z}^j} d\bar{z}^j \wedge dz^I \wedge d\bar{z}^J,$$

其中  $\frac{\partial}{\partial z^i}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}^j}$  见(2.33)式; 并且有

$$d = \partial + \bar{\partial}.$$

而对于一般的近复流形  $(M, J)$ , 等式  $d = \partial + \bar{\partial}$  未必成立.

**定理 2.45.** (Newlander-Nirenberg). 设  $(M, J)$  为  $2n$  维近复流形, 则以下等价:

1. 近复结构  $J$  可积.
2. 局部存在  $J$ -全纯函数  $z^1, \dots, z^n$  使得  $dz^1 \wedge \dots \wedge dz^n \neq 0$  恒成立.
3.  $[T_{1,0}M, T_{1,0}M] \subseteq T_{1,0}M$ .
4.  $\mathcal{N}_J \equiv 0$ .
5.  $d = \partial + \bar{\partial}$ .

证明. (1) $\Leftrightarrow$ (2): 见题2.41. (1) $\Leftrightarrow$ (4): 见定理2.35. (3) $\Leftrightarrow$ (4): 见题2.38. (1) $\Rightarrow$ (5): 复坐标下直接验证即可. 只需再证明 (5) $\Rightarrow$ (3).

如果  $d = \partial + \bar{\partial}$ , 则对任意  $\theta \in \Omega^{0,1}(M)$ ,  $d\theta$  没有  $(2, 0)$ -分量, 从而对任意  $X, Y \in \text{Vect}_{1,0}(M)$ ,  $(d\theta)(X, Y) = 0$ . 另一方面,

$$(d\theta)(X, Y) = X(\theta(Y)) - Y(\theta(X)) - \theta([X, Y]) = -\theta([X, Y]),$$

即对任意  $(0, 1)$ -形式  $\theta$ ,  $\theta([X, Y]) = 0$ , 这表明切向量场  $[X, Y]$  没有  $(0, 1)$ -分量, 即  $[X, Y] \in \text{Vect}_{1,0}(M)$ , 从而 (3) 成立. 定理得证.  $\square$

**推论 2.46.** 若  $(M, J)$  是复流形, 则有恒等式

$$\partial^2 = 0, \quad \partial\bar{\partial} + \bar{\partial}\partial = 0, \quad \bar{\partial}^2 = 0.$$

证明. 注意  $0 = d^2 = (\partial + \bar{\partial})^2 = \partial^2 + (\partial\bar{\partial} + \bar{\partial}\partial) + \bar{\partial}^2$ , 然后比较  $(p, q)$ -阶数即可.  $\square$

在复流形  $(M, J)$  中  $\bar{\partial}^2 = 0$ , 从而对任意  $p \geq 0$  都有上链复形

$$\Omega^{p,\bullet}(M): 0 \rightarrow \Omega^{p,0}(M) \xrightarrow{\bar{\partial}} \Omega^{p,1}(M) \xrightarrow{\bar{\partial}} \cdots \xrightarrow{\bar{\partial}} \Omega^{p,n}(M) \xrightarrow{\bar{\partial}} \cdots$$

**定义 2.47.** 设  $(M, J)$  为复流形, 对任意  $p, q \geq 0$ , 称

$$H_{\bar{\partial}}^{p,q}(M) := \frac{\ker(\bar{\partial}: \Omega^{p,q}(M) \rightarrow \Omega^{p,q+1}(M))}{\operatorname{im}(\bar{\partial}: \Omega^{p,q-1}(M) \rightarrow \Omega^{p,q}(M))} \quad (2.35)$$

为  $M$  的第  $(p, q)$  阶 **Dolbeault** 上同调.

特别地,  $H^{p,0}(M) = \{\alpha \in \Omega^{p,0}(M) \mid \bar{\partial}\alpha = 0\}$ , 其中元素称为  $M$  上的**全纯  $p$ -形式**. 可以证明  $\bar{\partial}$  算子也有类似的庞加莱引理, 即  $\bar{\partial}$ -闭形式是局部  $\bar{\partial}$ -恰当的:

**引理 2.48.** (Dolbeault-Grothendieck 引理). 设  $M$  为复流形,  $\alpha \in \Omega^{p,q}(M)$ , 如果  $\bar{\partial}\alpha = 0$ , 则对任意  $p \in M$ , 存在  $p$  的邻域  $U$  以及  $\beta \in \Omega^{p,q-1}(U)$ , 使得  $\alpha = \bar{\partial}\beta$ .

证明. 见任何一本复几何教材, 例如 Voisin[44] 的第 2.3.2 节. 这里从略.  $\square$

### 2.3.4 Kähler 流形, 厄米特结构

回忆性质 2.31, 辛流形  $(M, \omega)$  必存在  $\omega$ -正定相容的近复结构  $J$ . 一般来说,  $J$  并不唯一, 而且未必可积. 如果  $(M, \omega)$  存在  $\omega$ -正定相容且可积的近复结构  $J$ , 则称  $(M, \omega, J)$  是 **Kähler 流形**. 总结如下:

**定义 2.49.** 对于光滑流形  $M$ , 如果  $M$  存在辛结构  $\omega$  以及复结构  $J$ , 使得对任意  $p \in M$ ,  $(T_p M, \omega_p, J_p)$  是 Kähler 空间 (见定义 1.50), 则称三元组  $(M, \omega, J)$  是 **Kähler 流形**.



可见 Kähler 流形既是辛流形又是复流形. 再令

$$g(X, Y) := \omega(X, JY), \quad \forall X, Y \in \text{Vect}(M), \quad (2.36)$$

则由 Kähler 流形的定义可知, 上述  $g$  是  $M$  上的黎曼度量,  $(M, g)$  是黎曼流形. 再令

$$h(X, Y) := g(X, Y) - i\omega(X, Y), \quad \forall X, Y \in \text{Vect}(M), \quad (2.37)$$

则容易验证对任意  $p \in M$ ,  $h_p$  是  $\mathbb{C}$ -线性空间  $(T_p M, J_p)$  上的厄米特内积.

**定义 2.50.** 对于  $2n$  维近复流形  $(M, J)$ , 以及  $h \in \Gamma(M, (T_{\mathbb{C}}^* M)^{\otimes 2})$ .

1. 如果对任意  $p \in M$ ,  $h_p$  是  $(T_p M, J_p)$  上的厄米特内积, 则称  $h$  是近复流形  $(M, J)$  的厄米特结构.
2. 若  $h$  是近复流形  $(M, J)$  的厄米特结构, 则容易验证

$$g = \text{Re } h, \quad \omega = -\text{Im } h$$

分别是  $M$  上的黎曼度量与非退化反对称  $(0, 2)$ -张量 (视为 2-形式). 称  $\omega$  为  $h$  的厄米特形式 (或者 **Kähler 形式**).

**题 2.51.** 证明: 近复流形  $(M, J)$  必存在厄米特结构.

[提示: 任取  $M$  的黎曼度量  $\tilde{g}$ , 再令  $g(X, Y) := \tilde{g}(X, Y) + \tilde{g}(JX, JY)$ , 则  $g$  也是黎曼度量, 并且满足  $g(JX, JY) = g(X, Y)$ . 再令  $\omega(X, Y) := g(JX, Y)$ , 则  $\omega$  是  $M$  上的非退化反对称  $(0, 2)$ -张量. 容易验证  $h := g - i\omega$  是  $(M, J)$  的厄米特结构.]

对于复流形  $(M, J)$ , 设  $h$  为  $(M, J)$  的厄米特结构,  $\omega$  为  $h$  的厄米特形式. 一般来说  $\omega$  未必是闭形式. 如果  $d\omega = 0$ , 则  $(M, \omega, J)$  为 Kähler 流形. 这是 Kähler 流形更常见的等价定义. 总之, Kähler 流形是具有“好的”复结构的辛流形, 也是具有“好的”厄米特结构的复流形.

现在设  $(M, J)$  是复流形,  $h$  是厄米特结构. 取复坐标  $z^i = x^i + iy^i$  ( $i = 1, \dots, n$ ), 注意  $J \frac{\partial}{\partial x^i} = \frac{\partial}{\partial y^i}$ . 对于  $1 \leq i, j \leq n$ , 记

$$h_{ij} := h\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right), \quad (2.38)$$

则容易验证  $h_{ji} = \overline{h_{ij}}$ ,  $H := (h_{ij}) \in \mathbb{C}^{n \times n}$  是正定厄米特矩阵, 并且

$$h\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial y^j}\right) = -ih_{ij}, \quad h\left(\frac{\partial}{\partial y^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right) = ih_{ij}, \quad h\left(\frac{\partial}{\partial y^i}, \frac{\partial}{\partial y^j}\right) = h_{ij}.$$

在此局部坐标下, 直接验算可知厄米特形式  $\omega = -\text{Im } h$  满足

$$\begin{aligned} \omega\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right) &= \omega\left(\frac{\partial}{\partial y^i}, \frac{\partial}{\partial y^j}\right) = -\text{Im } h_{ij}, \\ \omega\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial y^j}\right) &= -\omega\left(\frac{\partial}{\partial y^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right) = \text{Re } h_{ij}. \end{aligned} \quad (2.39)$$

将  $\omega$  作  $\mathbb{C}$ -双线性延拓, 视作  $\omega \in \Omega^2(M) \subseteq \Omega^2(M, \mathbb{C})$ . 则易验证:

**性质 2.52.** 设  $h$  为复流形  $(M, J)$  上的厄米特结构, 则在复坐标  $z^i = x^i + iy^i$  ( $1 \leq i \leq n$ ) 下, 厄米特形式  $\omega$  具有局部表达式

$$\omega = \frac{i}{2} \sum_{i,j=1}^n h_{ij} dz^i \wedge d\bar{z}^j, \quad (2.40)$$

其中  $h_{ij}$  见(2.38)式. 特别地,  $\omega \in \Omega^{1,1}(M) \cap \Omega^2(M)$ .

证明. 注意厄米特形式  $\omega$  是  $J$ -不变的, 即对任意  $X, Y \in \text{Vect}_{\mathbb{C}}(M)$ ,  $\omega(JX, JY) = \omega(X, Y)$ . 于是对任意  $1 \leq i, j \leq n$ ,

$$\omega\left(\frac{\partial}{\partial z^i}, \frac{\partial}{\partial z^j}\right) = \omega\left(J\frac{\partial}{\partial z^i}, J\frac{\partial}{\partial z^j}\right) = \omega\left(i\frac{\partial}{\partial z^i}, i\frac{\partial}{\partial z^j}\right) = -\omega\left(\frac{\partial}{\partial z^i}, \frac{\partial}{\partial z^j}\right),$$

从而  $\omega\left(\frac{\partial}{\partial z^i}, \frac{\partial}{\partial z^j}\right) = 0$ . 同理  $\omega\left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}^i}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}^j}\right) = 0$ . 最后, 由(2.33)(2.39)式直接计算得

$$\begin{aligned} \omega\left(\frac{\partial}{\partial z^i}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}^j}\right) &= \frac{1}{4} \omega\left(\frac{\partial}{\partial x^i} - i\frac{\partial}{\partial y^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} + i\frac{\partial}{\partial y^j}\right) \\ &= \frac{i}{2} (\text{Re } h_{ij} + i \text{Im } h_{ij}) = \frac{i}{2} h_{ij}, \end{aligned}$$

从而(2.40)式成立. □

**注 2.53.** 在复流形  $M$  的复坐标  $(z_1, \dots, z_n)$  下, 厄米特结构  $h$  可以写为

$$h = \sum_{i,j=1}^n h_{ij} dz^i \otimes d\bar{z}^j, \quad (2.41)$$

下面考察 Kähler 流形的一些基本性质.

**引理 2.54.** ( $i\partial\bar{\partial}$ -引理). 设  $h$  是复流形  $(M, J)$  上的厄米特结构,  $\omega$  为  $h$  的厄米特形式. 则  $d\omega = 0$  当且仅当局部存在  $\mathbb{R}$ -值光滑函数  $\rho$  使得

$$\omega = \frac{i}{2}\partial\bar{\partial}\rho. \quad (2.42)$$

此时, 函数  $\rho$  称为  $(M, \omega, J)$  的 (局部) **Kähler 势**.

证明. 如果  $\omega = \frac{i}{2}\partial\bar{\partial}\rho$ , 则显然  $d\omega = \frac{i}{2}(\partial + \bar{\partial})\partial\bar{\partial}\rho = 0$ , 从而  $(M, \omega, J)$  是 Kähler 流形. 另一方面, 如果  $d\omega = 0$ , 则由庞加莱引理可知局部存在  $\eta \in \Omega^1(M)$  使得

$$\omega = d\eta.$$

考察  $\eta$  的  $(1, 0)$  分量与  $(0, 1)$  分量:  $\eta = \eta^{1,0} + \eta^{0,1}$ , 注意  $\eta$  是实形式, 即  $\eta = \bar{\eta}$ , 从而  $\eta^{0,1} = \overline{\eta^{1,0}}$ . 再由

$$\omega = d\eta = (\partial + \bar{\partial})(\eta^{1,0} + \eta^{0,1}) = \partial\eta^{1,0} + (\partial\eta^{0,1} + \bar{\partial}\eta^{1,0}) + \bar{\partial}\eta^{0,1}$$

以及  $\omega \in \Omega^{1,1}(M)$ , 比较上式两边的  $(p, q)$ -阶数得

$$\partial\eta^{1,0} = \bar{\partial}\eta^{0,1} = 0, \quad \omega = \partial\eta^{0,1} + \bar{\partial}\eta^{1,0}.$$

从而  $\eta^{0,1}$  是  $\bar{\partial}$ -闭的, 由引理 2.48 可知局部存在  $\varphi \in \Omega^{0,0}(M)$  使得

$$\eta^{0,1} = \bar{\partial}\varphi,$$

于是  $\eta^{1,0} = \overline{\eta^{0,1}} = \partial\bar{\varphi}$ , 故

$$\omega = \partial\eta^{0,1} + \bar{\partial}\eta^{1,0} = \partial\bar{\partial}(\varphi - \bar{\varphi}),$$

取  $\rho = -2i(\varphi - \bar{\varphi})$  即可, 并且显然  $\rho$  是光滑  $\mathbb{R}$ -值函数. □

**定理 2.55.** (Kähler 测地坐标). 设  $h$  是复流形  $(M, J)$  的厄米特结构,  $\omega$  是  $h$  的厄米特形式. 则  $d\omega = 0$  当且仅当对任意  $p \in M$ , 存在以  $p$  为中

心的局部复坐标  $z^1, \dots, z^n$ , 使得在此坐标下

$$\begin{aligned}\omega &= \frac{i}{2} \sum_{k=1}^n dz^k \wedge d\bar{z}^k + O(|z|^2) \\ &= \sum_{i=1}^n dx^i \wedge dy^i + O(|z|^2).\end{aligned}\tag{2.43}$$

此时, 称上述复坐标为 **Kähler** 测地坐标.

证明. 若  $\omega$  形如 2.43 式, 则显然  $d\omega = 0$ . 另一方面, 当  $d\omega = 0$  时, 对任意点  $p \in M$ , 总可以取以  $p$  为中心的复坐标  $z^1, z^2, \dots, z^n$ , 使得厄米特系数矩阵  $H = (h_{ij})$  在  $p$  点处为单位阵, 从而  $\omega_p = \frac{i}{2} \sum_{i=k}^n dz^k \wedge d\bar{z}^k$ . 于是在该坐标下, 厄米特形式  $\omega$  可以写为

$$\omega = \frac{i}{2} \sum_{i,j=1}^n (\delta_{ij} + \omega_{ij}) dz^i \wedge d\bar{z}^j + O(|z|^2),$$

其中  $\omega_{ij}$  是关于  $z^k, \bar{z}^k$  的  $\mathbb{C}$ -线性函数, 于是可以考察其全纯部分  $\omega_{ij}^{\text{hol}}$  (含  $z_k$ ) 与反全纯部分  $\omega_{ij}^{\text{ant}}$  (含  $\bar{z}_k$ ):

$$\omega_{ij} = \omega_{ij}^{\text{hol}} + \omega_{ij}^{\text{ant}}.$$

由  $\omega = \bar{\omega}$  可知  $\overline{\omega_{ij}} = \omega_{ji}$ , 从而

$$\overline{\omega_{ij}^{\text{hol}}} = \omega_{ji}^{\text{ant}}.\tag{2.44}$$

直接计算  $d\omega$  得

$$\begin{aligned}d\omega &= \frac{i}{2} (\partial + \bar{\partial}) \sum_{i,j=1}^n \omega_{ij} dz^i \wedge d\bar{z}^j + O(|z|) \\ &= \frac{i}{2} \sum_{i,j,k=1}^n \frac{\partial \omega_{ij}^{\text{hol}}}{\partial z^k} dz^k \wedge dz^i \wedge d\bar{z}^j \\ &\quad + \frac{i}{2} \sum_{i,j,k=1}^n \frac{\partial \omega_{ij}^{\text{ant}}}{\partial \bar{z}^k} dz^i \wedge d\bar{z}^j \wedge d\bar{z}^k + O(|z|),\end{aligned}$$

又因为  $d\omega = 0$ , 比较系数得  $\frac{\partial \omega_{ij}^{\text{hol}}}{\partial z^k} = \frac{\partial \omega_{kj}^{\text{hol}}}{\partial z^i} + O(|z|)$ . 又因为  $\omega_{ij}^{\text{hol}}$  是关于  $z_1, \dots, z_n$  的线性函数,  $\frac{\partial \omega_{ij}^{\text{hol}}}{\partial z^k}$  是常数, 因此

$$\frac{\partial \omega_{ij}^{\text{hol}}}{\partial z^k} = \frac{\partial \omega_{kj}^{\text{hol}}}{\partial z^i}.$$

于是由庞加莱引理, 局部存在全纯函数  $\phi_j$  ( $j = 1, 2, \dots, n$ ) 使得

$$\frac{\partial \phi_j}{\partial z^i} = \omega_{ij}^{\text{hol}}, \quad 1 \leq i, j \leq n,$$

不妨  $\phi_j$  在点  $p$  处的值都为 0 (事实上  $\phi_j$  是关于  $z$  的二次函数). 引入

$$w^i := z^i + \phi^i \quad i = 1, 2, \dots, n$$

(其中  $\phi^i := \phi_i$ ), 并注意  $\omega_{ij} = O(|z|)$  与(2.44)式, 易知

$$dz^i = dw^i - \sum_{k=1}^n \omega_{ki}^{\text{hol}} dw^k + O(|z|^2), \quad d\bar{z}^i = d\bar{w}^i - \sum_{k=1}^n \omega_{ik}^{\text{ant}} d\bar{w}^k + O(|z|^2),$$

从而

$$\begin{aligned} \omega &= \frac{i}{2} \sum_{i,j=1}^n (\delta_{ij} + \omega_{ij}) dz^i \wedge d\bar{z}^j + O(|z|^2) \\ &= \frac{i}{2} \sum_{i,j=1}^n (\delta_{ij} + \omega_{ij}) \left( dw^i - \sum_{k=1}^n \omega_{ki}^{\text{hol}} dw^k \right) \wedge \left( d\bar{w}^j - \sum_{\ell=1}^n \omega_{j\ell}^{\text{ant}} d\bar{w}^\ell \right) + O(|z|^2) \\ &= \frac{i}{2} \sum_{k=1}^n dw^k \wedge d\bar{w}^k + O(|w|^2). \end{aligned}$$

从而复坐标  $w^1, w^2, \dots, w^n$  符合题设, 得证.  $\square$

**注 2.56.** 与 Darboux 定理的推论(2.26)对比, 自然要问: Kähler 流形上是否存在复坐标  $z^i = x^i + iy^i$ , 使得辛形式在此坐标下形如

$$\omega = \sum_{i=1}^n dx^i \wedge dy^i,$$

即再把(2.43)式末尾的  $O(|z|^2)$  去掉?

如果真有如此坐标, 那么相应的黎曼度量  $g(X, Y) = \omega(X, JY)$  在此坐标下为  $g = \sum_{i=1}^n (dx^i \otimes dx^i + dy^i \otimes dy^i)$ , 显然  $g$  为平坦度量. 但是一般来说, Kähler 流形的度量  $g$  未必平坦. 度量  $g$  的曲率是如此坐标系存在性的障碍.

### 2.3.5 例子: 非 Kähler 的 4 维紧辛流形

辛流形  $(M, \omega)$  必存在  $\omega$ -正定相容的近复结构  $J$ , 这样的  $J$  未必唯一. 自然要问: 在  $M$  的所有  $\omega$ -正定相容的近复结构中, 是否一定存在可积的近复结构? 换言之, 辛流形是否一定具有 Kähler 结构?

答案是否定的. 本小节将引入一个 4 维紧辛流形, 并证明它不存在 Kähler 结构. 这个例子早在 1964 年被 Kodaira 研究 (见 [22] 的 Theorem 19), 随后在 1976 年被 Thurston[40] 再次发现.

首先不加证明地陈述紧 Kähler 流形的一些重要性质.

**性质 2.57.** 设  $(M, J, \omega)$  是紧 Kähler 流形, 则对任意  $k \geq 0$ ,

1.  $H^k(M, \mathbb{C}) := H^k(M) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$  是有限维  $\mathbb{C}$ -线性空间.
2.  $H^k(M, \mathbb{C}) \cong \bigoplus_{p+q=k} H^{p,q}(M).$
3.  $\overline{H^{p,q}(M)} = H^{q,p}(M).$

其中  $H^{p,q}(M)$  是  $M$  的 Dolbeault 上同调, 见(2.35)式; 再注意  $H^{p,q}(M)$  作为  $H^{p+q}(M, \mathbb{C}) := H^{p+q}(M) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$  的子空间, 自然可以谈论其中元素的复共轭, 从而  $\overline{H^{p,q}(M)}$  良定.

证明. 这是紧 Kähler 流形 Hodge 理论中众所周知的结果, 见任何一本复几何教材, 例如 Demailly[13], Voisin[44] 等.  $\square$

**题 2.58.** 证明: 紧 Kähler 流形的奇数阶 Betti 数是偶数.

[提示: 即对任意奇数  $k$ ,  $b^k(M) := \dim H^k(M)$  是偶数. 这是性质 2.57 的简单推论. 后文将用此命题来说明某个紧流形不具有 Kähler 结构.]

下面介绍 Kodaira-Thurston 所构造的紧辛流形. 考虑  $\mathbb{Z}^2 \times \mathbb{Z}^2$  的如下群结构:

**题 2.59.** 在  $\Gamma := \mathbb{Z}^2 \times \mathbb{Z}^2 = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{Z}^2\}$  中定义二元运算  $\star$  如下:

$$(a, b) \star (a', b') := (a' + a, S_a b' + b),$$

其中  $S_a := \begin{pmatrix} 1 & a_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \text{End}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}^2)$ ,  $a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}^2$ . 证明:  $(\Gamma, \star)$  是群.

[提示: 将  $\Gamma$  中的元素  $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$  写成矩阵形式  $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$ , 则易知运算  $\star$  满足

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \star \begin{pmatrix} a'_1 & b'_1 \\ a'_2 & b'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a'_1 + a_1 & b'_1 + b_1 + a_2 b'_2 \\ a'_2 + a_2 & b'_2 + b_2 \end{pmatrix}.$$

直接验证  $\star$  满足结合律, 并且  $\star$ -单位元为  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ , 元素  $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \in \Gamma$  的  $\star$ -逆元为  $\begin{pmatrix} -a_1 & -b_1 + a_2 b_2 \\ -a_2 & -b_2 \end{pmatrix}$ . ]

**定义 2.60.** (Kodaira-Thurston流形). 设  $(\Gamma, \star)$  是题2.59所定义的群. 定义群  $\Gamma$  在  $\mathbb{R}^4 = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$  上的作用如下:

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}).(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := (\mathbf{x} + \mathbf{a}, \mathcal{S}_{\mathbf{a}}\mathbf{y} + \mathbf{b}),$$

其中  $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \in \Gamma$ ,  $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ ,  $\mathcal{S}_{\mathbf{a}} = \begin{pmatrix} 1 & a_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \text{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^2)$ . 易知这确实是群  $(\Gamma, \star)$  在  $\mathbb{R}^4$  上的离散作用, 称该作用的轨道空间

$$M := \mathbb{R}^4 / \Gamma \tag{2.45}$$

为 Kodaira-Thurston 流形.

易知群  $\Gamma$  在  $\mathbb{R}^4 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix} \mid x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R} \right\}$  上的作用给出了如下等价关系:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix} &\sim \begin{pmatrix} x_1 + 1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} x_1 & y_1 + 1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix} \\ &\sim \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 + 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} x_1 & y_1 + y_2 \\ x_2 + 1 & y_2 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

从而容易验证 (留给读者):

**题 2.61.** 记号承上, 则:

1.  $M := \mathbb{R}^4/\Gamma$  是 4 维紧流形, 并且同胚于  $S^1 \times ((I \times T^2)/\sim)$ , 其中  $S^1 := \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ ,  $T^2 := S^1 \times S^1$  分别是圆周与环面,  $I := [0, 1]$  为闭区间, 且等价关系  $\sim$  如下定义:

$$(0, (y_1, y_2)) \sim (1, (y_1 + y_2, y_2)), \quad \forall (y_1, y_2) \in T^2.$$

2. 对任意  $\mathbf{g} = (\mathbf{a}, \mathbf{b}) \in \Gamma$ , 群作用  $\varphi_{\mathbf{g}}: (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mapsto \mathbf{g} \cdot (\mathbf{x}, \mathbf{y})$  保持  $\mathbb{R}^4$  上的辛结构

$$\omega := dx_1 \wedge dx_2 + dy_1 \wedge dy_2$$

不变, 即  $\varphi_{\mathbf{g}}^* \omega = \omega$ . 因此  $\omega$  可下降至  $M = \mathbb{R}^4/\Gamma$ , 使得  $M$  为紧辛流形.

最后通过研究  $M$  的拓扑来说明其不存在 Kähler 结构. 注意商映射  $\mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4/\Gamma$  是  $M$  的万有覆叠, 由代数拓扑相关知识可知  $M$  的基本群  $\pi_1(M) \cong \Gamma$ , 从而同调群

$$H_1(M, \mathbb{Z}) = \Gamma/[\Gamma, \Gamma] \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}, \quad (2.46)$$

其中  $[\Gamma, \Gamma]$  是  $\Gamma$  的换位子群.

**题 2.62.** 证明: 换位子群  $[\Gamma, \Gamma] = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & n \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \Gamma \mid n \in \mathbb{Z} \right\} \cong \mathbb{Z}$ , 从而验证(2.46)式.

[提示: 考察  $\Gamma$  中的元素  $\mathbf{g} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  与  $\mathbf{h} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ , 计算换位子  $[\mathbf{g}, \mathbf{h}] := \mathbf{g}\mathbf{h}\mathbf{g}^{-1}\mathbf{h}^{-1}$ . 注意这里的  $(\cdot)^{-1}$  不是通常矩阵乘法的逆, 而是关于  $\star$  的逆.]

**推论 2.63.** Kodaira-Thurston 流形  $M := \mathbb{R}^4/\Gamma$  不存在 Kähler 结构.

证明. 由(2.46)可知  $M$  的 Betti 数  $b^1(M) = 3$ , 这与题2.58矛盾.  $\square$

与此相关的更多例子也可见 Fernández[16].

## 2.4 余伴随轨道

相比前文与后文, 本节将花费更多笔墨来回顾李群、李代数及其表示. 李群李代数的工具可以用来构造流形, 尤其是一类辛流形. 设  $G$  是李群,  $\mathfrak{g}$



是其李代数, 则李群  $G$  在  $\mathfrak{g}$  的对偶空间  $\mathfrak{g}^*$  上有自然的作用  $\text{Ad}^*$ , 称为余伴随表示. 该群作用的轨道, 即余伴随轨道, 在一定条件下具有辛流形结构.

余伴随轨道由 Kirillov 引入, 见 [21] 的第 15 章.

### 2.4.1 李群李代数回顾

本小节回顾李群李代数相关的基本概念与性质. 众所周知, 李群是具有群结构的光滑流形, 并且其群运算 (乘法, 取逆) 是光滑映射. 李群  $G$  的群乘法单位元记作  $e$ . 常见的李群有一般线性群  $\text{GL}(n, \mathbb{R})$ , 正交群  $\text{O}(n)$ , 酉群  $\text{U}(n)$ , 以及辛群  $\text{Sp}(2n, \mathbb{R})$  等. 李群之间的光滑的群同态称为李群同态.

对于李群  $G$  中的元素  $g$ , 左平移映射

$$\begin{aligned} l_g: G &\rightarrow G \\ h &\mapsto gh \end{aligned} \tag{2.47}$$

是  $G$  的微分自同胚.

**定义 2.64.** 对于李群  $G$ ,

1. 记  $\text{Vect}_l(G) := \{X \in \text{Vect}(G) \mid \forall g \in G, (l_g)_*X = X\}$ , 其中的元素称为李群  $G$  的左不变切向量场.
2. 对于  $q \geq 0$ , 记  $\Omega_l^q(G) := \{\omega \in \Omega^q(G) \mid \forall g \in G, l_g^*\omega = \omega\}$ , 其中元素称为李群  $G$  的左不变  $q$ -形式.

左不变切向量场  $X$  被  $X$  在群乘法单位元  $e \in G$  处的取值唯一确定: 对任意  $X \in \text{Vect}_l(G)$  以及  $g \in G$ ,  $X|_g = (l_g)_*(X|_e)$ . 这诱导线性空间同构

$$\text{Vect}_l(G) \cong T_e G. \tag{2.48}$$

容易验证李群  $G$  的左不变切向量场关于李括号  $[\cdot, \cdot]$  运算封闭, 即对任意  $X, Y \in \text{Vect}_l(G)$ ,  $[X, Y] \in \text{Vect}_l(G)$ . 通过同构 (2.48) 自然将  $\text{Vect}_l(G)$  上的李括号  $[\cdot, \cdot]$  视为  $\mathfrak{g} := T_e G$  上的二元运算, 所得  $(\mathfrak{g}, [\cdot, \cdot])$  称为  $G$  的李代数.

**注 2.65.** 在通常的李群李代数教材中,  $\mathfrak{g}$  中元素是切空间  $T_e G$  中的向量; 而我们常常不加声明地将  $\mathfrak{g}$  中元素视为  $G$  的左不变切向量场.

**定义 2.66.** 设  $\mathfrak{g}$  是域  $\mathbb{F}$  上的线性空间,  $[\cdot, \cdot]: \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$  为二元运算, 如果  $[\cdot, \cdot]$  是双线性、反对称的, 并且下述 *Jacobi* 恒等式

$$[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0$$

对任意  $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$  都成立, 则称  $(\mathfrak{g}, [\cdot, \cdot])$  为李代数.

例如, 李群  $G$  的左不变切向量场空间  $\mathfrak{g} := T_e G \cong \text{Vect}_l(G)$  配以切向量场李括号  $[\cdot, \cdot]$  构成李代数. 另一个常见例子是,  $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) = \mathbb{R}^{n \times n}$  配以交换子  $[A, B] = AB - BA$  构成李代数, 称为一般线性李代数.

设  $\mathfrak{g}$  是李群  $G$  的李代数, 则对于  $X \in \mathfrak{g}$ , 存在  $\varepsilon > 0$  以及光滑曲线

$$\begin{aligned} \gamma_X: (-\varepsilon, \varepsilon) &\rightarrow G \\ t &\mapsto e^{tX} \end{aligned} \tag{2.49}$$

使得  $\gamma_X(0) = e$ , 并且该曲线是  $X$  所对应的左不变切向量场的积分曲线. 可以证明, 存在  $\mathfrak{g}$  在原点  $\mathbf{0}$  的邻域  $U \subseteq \mathfrak{g}$ , 使得映射

$$\begin{aligned} \exp: U &\rightarrow G \\ X &\mapsto \gamma_X(1) = e^X \end{aligned}$$

良定. 如此映射  $\exp$  称为李群  $G$  的指数映射. 事实上, 指数映射  $\exp$  是  $\mathfrak{g}$  与  $G$  的在原点  $\mathbf{0} \in \mathfrak{g}$  处的局部微分同胚, 且在  $\mathbf{0}$  处的切映射是恒等映射.

接下来回忆李群、李代数的表示.

**定义 2.67.** 设  $G$  为李群,  $V$  为有限维  $\mathbb{R}$ -线性空间, 则李群同态

$$\rho: G \rightarrow \text{GL}(V)$$

称为李群  $G$  在  $V$  上的作用, 或表示. 此时也称  $\rho$  是  $V$  的  $\mathfrak{g}$ -模结构.

为说话方便, 我们往往省略  $\rho$ , 简称  $V$  是李群  $G$  的表示, 或者  $V$  是  $G$ -模. 此外, 也常将  $(\rho(g))(v)$  简记为  $g.v$ .

对于李群  $G$  的元素  $g$ , 共轭作用

$$\begin{aligned} c_g: G &\rightarrow G \\ h &\mapsto ghg^{-1} \end{aligned} \tag{2.50}$$

满足  $c_g(e) = e$ , 考察  $c_g$  在  $e \in G$  处的切映射

$$\text{Ad}_g := (c_g)_*|_e \in \text{GL}(T_e G) = \text{GL}(\mathfrak{g}),$$

其中  $\mathfrak{g}$  是  $G$  的李代数. 这给出了映射

$$\text{Ad}: G \rightarrow \text{GL}(\mathfrak{g}).$$

容易验证  $\text{Ad}$  是李群  $G$  在其李代数  $\mathfrak{g}$  上的作用, 称为李群  $G$  的伴随表示.

通过线性同构  $\mathfrak{g} = T_e G \cong \text{Vect}_l(G)$ , 将  $\text{Ad}_g$  视为  $\text{GL}(\text{Vect}_l(G))$  中的元素. 在此意义下, 我们来给出伴随表示的显式表达. 对于  $g \in G$ , 记

$$\begin{aligned} l_g: G &\rightarrow G, & h &\mapsto gh \\ r_g: G &\rightarrow G, & h &\mapsto hg \end{aligned} \quad (2.51)$$

分别为李群  $G$  的左、右平移. 显然对任意  $g_1, g_2 \in G$  都有  $l_{g_1} \circ r_{g_2} = r_{g_2} \circ l_{g_1}$ ; 并且  $c_g = l_g \circ r_{g^{-1}}$ . 事实上, 对于  $X \in \text{Vect}_l(G)$ ,

$$\text{Ad}_g X = (c_g)_* X = (l_g \circ r_{g^{-1}})_* X = (r_{g^{-1}})_* ((l_g)_* X) = (r_{g^{-1}})_* X. \quad (2.52)$$

也就是说,  $G$  在左不变切向量场的伴随作用是对切向量场的右平移.

**定义 2.68.** 设  $\mathfrak{g}$  是域  $\mathbb{F}$  上的李代数,  $V$  是有限维  $\mathbb{F}$ -线性空间,  $\rho: \mathfrak{g} \rightarrow \text{GL}(V)$  是  $\mathbb{F}$ -线性映射. 如果对任意  $X, Y \in \mathfrak{g}$  都有

$$\rho([X, Y]) = \rho(X) \circ \rho(Y) - \rho(Y) \circ \rho(X),$$

则称  $\rho$  是李代数  $\mathfrak{g}$  在  $V$  上的表示, 也称  $\rho$  是  $V$  的  $\mathfrak{g}$ -模结构.

李群的表示诱导其李代数的表示. 设  $\rho: G \rightarrow \text{GL}(V)$  是李群  $G$  的表示, 记  $\mathfrak{g}$  为李群  $G$  的李代数, 则可以验证  $\rho$  在  $e \in G$  处的切映射

$$\rho_*: \mathfrak{g} \rightarrow \text{GL}(V)$$

是李代数  $\mathfrak{g}$  的表示. 具体地, 对于  $X \in \mathfrak{g}, v \in V$ , 成立

$$\rho_*(X)v = \left. \frac{d}{dt} \rho(e^{tX})v \right|_{t=0}.$$

反之, 可以证明当  $G$  连通时,  $\rho$  被相应的李代数表示  $\rho_*$  唯一确定.

特别地, 对于李群  $G$  的伴随表示  $\text{Ad}$ , 其诱导的李代数表示

$$\text{ad} := \text{Ad}_*: \mathfrak{g} \rightarrow \text{GL}(\mathfrak{g})$$

满足  $\text{ad}(X)Y = [X, Y]$ , 这称为李代数  $\mathfrak{g}$  的伴随表示.

最后再简要介绍一下李群与李代数的上同调. 对于李群  $G$  的左不变微分形式  $\omega \in \Omega_l^q$ , 容易验证  $d\omega \in \Omega_l^{q+1}$ , 从而有上链复形

$$d: \Omega_l^\bullet(G) \rightarrow \Omega_l^\bullet(G). \quad (2.53)$$

与左不变切向量场类似, 左不变微分形式  $\omega$  也由其单位元  $e$  处的取值唯一确定, 即有线性空间同构

$$\Omega_l^q(G) \cong \bigwedge^q(T_e^*G) = \bigwedge^q \mathfrak{g}^*.$$

于是可将外微分  $d$  自然视为从  $\bigwedge^q \mathfrak{g}^*$  到  $\bigwedge^{q+1} \mathfrak{g}^*$  的线性映射. 容易验证, 对于  $\omega \in \bigwedge^q \mathfrak{g}^*$  以及  $X_0, X_1, \dots, X_q \in \mathfrak{g}$ , 成立

$$\begin{aligned} & (d\omega)(X_0, X_1, \dots, X_q) \\ &= \sum_{0 \leq i < j \leq q} (-1)^{i+j} \omega([X_i, X_j], X_1, \dots, \hat{X}_i, \dots, \hat{X}_j, \dots, X_q). \end{aligned} \quad (2.54)$$

[提示: 与外微分公式(2.34)比较, 并注意对于左不变微分形式  $\omega$  以及左不变切向量场  $X_1, \dots, X_q$ ,  $\omega(X_1, \dots, X_q)$  是  $G$  上的常值函数]. 称

$$H^q(\mathfrak{g}) := \frac{\text{im}(d: \bigwedge^q \mathfrak{g}^* \rightarrow \bigwedge^{q+1} \mathfrak{g}^*)}{\ker(d: \bigwedge^{q-1} \mathfrak{g}^* \rightarrow \bigwedge^q \mathfrak{g}^*)} \quad (2.55)$$

为李代数  $\mathfrak{g}$  的第  $q$  阶上同调. 可以证明, 若  $G$  为紧李群, 则其李代数上同调  $H^q(\mathfrak{g})$  同构于 de Rham 上同调  $H_{\text{dR}}^q(G)$ .

李代数上同调的概念可以脱离李群, 推广到更一般情形. 设  $\mathfrak{g}$  为李代数,  $\rho: \mathfrak{g} \rightarrow \text{GL}(V)$  是  $\mathfrak{g}$  的一个表示, 则对于任意  $q \geq 0$ , 记

$$C^q(\mathfrak{g}, V) := \bigwedge^q \mathfrak{g}^* \otimes V.$$

对于  $\omega \otimes v \in C^q(\mathfrak{g}, V)$ , 其中  $v \in V$ , 定义  $d_V(\omega \otimes v) \in C^{q+1}(\mathfrak{g}, V)$  如下:

$$\begin{aligned} & [d_V(\omega \otimes v)](X_0, \dots, X_q) \\ &:= \sum_{i=0}^q (-1)^i \omega(X_0, \dots, \widehat{X}_i, \dots, X_q) \otimes \rho(X_i)v \\ & \quad + \sum_{i < j} (-1)^{i+j} \omega([X_i, X_j], X_0, \dots, \widehat{X}_i, \dots, \widehat{X}_j, \dots, X_q) \otimes v, \end{aligned} \quad (2.56)$$

其中  $X_0, \dots, X_q$  是  $\mathfrak{g}$  中的任意向量. 可以验证  $d_V: C^\bullet(\mathfrak{g}, V) \rightarrow C^\bullet(\mathfrak{g}, V)$  是上链复形 (注意与外微分公式(2.34)比较), 相应的上同调

$$H^q(\mathfrak{g}, V) := \frac{\ker(d_V: C^q(\mathfrak{g}, V) \rightarrow C^{q+1}(\mathfrak{g}, V))}{\operatorname{im}(d_V: C^{q-1}(\mathfrak{g}, V) \rightarrow C^q(\mathfrak{g}, V))}$$

称为李代数  $\mathfrak{g}$  的第  $q$  阶  $V$ -系数上同调.

李代数上同调  $H^\bullet(\mathfrak{g}, V)$  能够反映出关于李代数  $\mathfrak{g}$  结构的很多信息, 限于篇幅这里不多加介绍.

### 2.4.2 余伴随表示, 李群在辛流形上的作用

先回忆李群表示的一些构造方法. 设  $V, W$  是李群  $G$  的两个有限维表示. 对于  $g \in G, v \in V, w \in W$ ,

1. 定义  $G$  在  $V^*$  上的作用为:  $(g.T)(v) := T(g^{-1}.v)$ , 其中  $T \in V^*$ ;
2. 定义  $G$  在  $V \otimes W$  上的作用为:  $g.(v \otimes w) = g.v \otimes g.w$ ;
3. 定义  $G$  在  $V \wedge W$  上的作用为:  $g.(v \wedge w) = g.v \wedge g.w$ ,

容易验证它们良定 (确实也是李群  $G$  的表示), 分别称为表示的对偶, 张量积, 外积. 特别地, 由李群  $G$  的伴随表示  $\operatorname{Ad}$  以及上述构造, 自然定义李群  $G$  在  $\wedge^\bullet \mathfrak{g}^* \cong \Omega_l^\bullet(G)$  上的作用, 这就是李群  $G$  的余伴随表示.

**题 2.69.** 补全余伴随表示  $\operatorname{Ad}^*$  的定义, 并验证: 对于  $g \in G$  以及  $\omega \in \Omega_l^\bullet(G)$ ,

$$\operatorname{Ad}_g^*(\omega) = r_g^* \omega, \quad (2.57)$$

其中右平移映射  $r_g$  见(2.51)式.

[提示: 回忆(2.52)式, 并注意  $l_g^* \omega = \omega$ .]

我们先考察  $G$  在  $\bigwedge^2 \mathfrak{g}^* \cong \Omega_l^2(G)$  上的余伴随作用, 在本节的最后一小节还将考察  $G$  在  $\mathfrak{g}^* \cong \Omega_l^1(G)$  上的余伴随作用.

**定义 2.70.** 给定李群  $G$  在辛流形  $(M, \omega)$  上的光滑作用, 即光滑映射

$$G \times M \rightarrow M, \quad (g, m) \mapsto g.m.$$

1. 对于  $g \in G$  以及  $m \in M$ , 定义光滑映射  $\lambda_g, \rho_m$  如下:

$$\begin{aligned} \lambda_g: M &\rightarrow M, & m &\mapsto g.m, \\ \rho_m: G &\rightarrow M, & g &\mapsto g.m. \end{aligned} \quad (2.58)$$

2. 如果对任意  $g \in G$  都成立

$$\lambda_g^* \omega = \omega,$$

则称  $G$  辛作用于  $M$ , 也称  $(M, \omega)$  是  $G$ -辛流形.

容易验证上述  $\lambda_g, \rho_m$  满足关系

$$\begin{aligned} \lambda_g \circ \rho_m &= \rho_m \circ l_g, \\ \rho_{g.m} &= \rho_m \circ r_g. \end{aligned} \quad (2.59)$$

映射  $\rho_m$  可以把辛流形  $M$  上的微分形式拉回到  $G$  上. 容易验证以下:

**引理 2.71.** 设  $G$  为李群,  $(M, \omega)$  为  $G$ -辛流形,  $\mathfrak{g}$  是  $G$  的李代数. 则  $G$  在  $M$  上的作用诱导映射

$$\begin{aligned} \Psi: M &\rightarrow Z^2(\mathfrak{g}) \\ m &\mapsto \rho_m^* \omega, \end{aligned} \quad (2.60)$$

其中  $Z^2(\mathfrak{g}) \cong \{\omega \in \Omega_l^2(G) \mid d\omega = 0\}$ . 此外, 对任意  $g \in G$ , 有交换图

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\Psi} & Z^2(\mathfrak{g}) \\ \lambda_g \downarrow & & \downarrow \text{Ad}_g^* \\ M & \xrightarrow{\Psi} & Z^2(\mathfrak{g}) \end{array}$$

其中  $\text{Ad}^*$  为李群  $G$  的余伴随表示, 见(2.57)式.

证明. 对任意  $g \in G$ , 有

$$\begin{aligned} l_g^* \Psi(m) &= l_g^*(\rho_m^* \omega) = (\rho_m \circ l_g)^* \omega = (\lambda_g \circ \rho_m)^* \omega \\ &= \rho_m^*(\lambda_g^* \omega) = \rho_m^* \omega = \Psi(m), \end{aligned}$$

从而  $\Psi(m) \in \Omega_l^2(G)$ . 又因为  $d\Psi(m) = d(\rho_m^* \omega) = \rho_m^*(d\omega) = 0$ , 从而  $\Psi(m) \in Z^2(\mathfrak{g})$ , 故  $\Psi$  良定. 进而, 对任意  $m \in M$ ,

$$\begin{aligned} (\Psi \circ \lambda_g)(m) &= \Psi(g.m) = \rho_{g.m}^* \omega = (\rho_m \circ r_g)^* \omega \\ &= r_g^*(\rho_m^* \omega) = \text{Ad}_g^*(\Psi(m)) = (\text{Ad}_g^* \circ \Psi)(m), \end{aligned}$$

从而  $\Psi \circ \lambda_g = \text{Ad}_g^* \circ \Psi$ , 上述图表交换. □

可见, 映射  $\Psi$  把  $G$  在  $M$  上作用的轨道映为  $G$  在  $Z^2(\mathfrak{g})$  的余伴随作用的轨道, 即**余伴随轨道**. 特别地, 若  $G$  在  $M$  上的作用可迁, 则  $\Psi(M)$  是  $Z^2(\mathfrak{g})$  的一条  $G$ -余伴随轨道.

### 2.4.3 李子代数与李子群, 李群的辛约化

对于李群  $G$  在辛流形  $(M, \omega)$  上的可迁辛作用, (2.60)中的  $\Psi$  将  $M$  映为  $Z^2(\mathfrak{g})$  上的一条  $G$ -余伴随轨道. 其中  $\mathfrak{g}$  为  $G$  的李代数. 反过来, 自然要问: 给定  $\omega \in Z^2(\mathfrak{g})$ , 即  $\omega$  为左不变闭 2-形式, 则  $\omega$  所在的余伴随轨道  $G^\# \omega$  是否来自于某个辛流形? 即是否存在辛流形  $(M, \omega)$  以及  $G$  在  $M$  上的可迁辛作用, 使得  $G^\# \omega = \Psi(M)$ ?

如果确实有这样的辛流形  $M$ , 则  $M$  形如

$$M \cong G/H,$$

其中  $H \subseteq G$  是  $G$  的某个闭子群; 此外还应当存在齐性空间  $G/H$  上的辛形式  $\bar{\omega}$ , 使得  $\omega = \pi^* \bar{\omega} \in Z^2(\mathfrak{g})$ , 其中  $\pi: G \rightarrow G/H$  为典范投影. 而如何寻找这样的李子群  $H$  呢? 由李群理论, 我们来考察相应的李子代数.

**引理 2.72.** 设  $G$  为李群,  $\mathfrak{g}$  是  $G$  的李代数,  $\omega \in Z^2(\mathfrak{g})$  是  $G$  上的左不变闭 2-形式, 则

$$\mathfrak{h}_\omega := \{X \in \mathfrak{g} \mid X \lrcorner \omega = 0\} \quad (2.61)$$

是  $\mathfrak{g}$  的李子代数. 此外,  $\mathfrak{h}_\omega = \{0\}$  当且仅当  $\omega$  非退化.

证明. 对任意切向量场  $X, Y \in \mathfrak{h}_\omega$ , 只需验证  $[X, Y] \in \mathfrak{h}_\omega$ . 注意李导数

$$\mathcal{L}_Y \omega = Y \lrcorner (d\omega) + d(Y \lrcorner \omega) = 0$$

(见 Cartan 公式(2.23)式), 从而对任意左不变切向量场  $Z \in \mathfrak{g}$ , 注意  $\omega(X, Z)$  是常数, 于是

$$\begin{aligned} 0 &= \mathcal{L}_Y \omega(X, Z) \\ &= (\mathcal{L}_Y \omega)(X, Z) + \omega([Y, X], Z) + \omega(X, [Y, Z]) \\ &= ([Y, X] \lrcorner \omega)(Z) + (X \lrcorner \omega)([Y, Z]) \\ &= ([Y, X] \lrcorner \omega)(Z), \end{aligned}$$

从而由  $Z$  的任意性得  $[Y, X] \lrcorner \omega = 0$ , 因此  $[X, Y] \in \mathfrak{h}_\omega$ . 当  $\omega$  非退化时, 显然  $\mathfrak{h}_\omega = \{0\}$ , 引理得证.  $\square$

由李群理论,  $\mathfrak{g}$  的李子代数  $\mathfrak{h}_\omega$  对应于  $G$  的某个连通李子群  $H_\omega$ .

**引理 2.73.** 记号承上, 则存在  $G$  的连通李子群  $H_\omega$ , 使得  $\mathfrak{h}_\omega$  是  $H_\omega$  的李代数, 并且满足上述性质的  $H_\omega$  唯一.

证明. 这是李群理论当中众所周知的结果, 我们在此简要回顾. 取  $\mathfrak{h}_\omega$  的一组基  $X_1, X_2, \dots, X_{n-k}$ , 其中  $k := n - \dim \mathfrak{h}_\omega$ . 将这些  $X_i$  视为  $G$  上的左不变切向量场, 则这族切向量场张成  $M$  上的一个  $(n-k)$  维分布  $\Delta$ :

$$\forall a \in G, \quad \Delta(a) := \text{span}\{X_i|_a\}_{1 \leq i \leq n-k} = (l_a)_* T_e G \subseteq T_a G, \quad (2.62)$$

注意  $\mathfrak{h}_\omega$  是  $\mathfrak{g}$  的李子代数, 关于李括号运算封闭, 易知  $\Delta$  是可积的, 从而由积分子流形的 **Frobenius 定理**, 取经过点  $e \in G$  的服从分布  $\Delta$  的极大积分子流形, 并记该子流形为  $H_\omega$ . 由  $H_\omega$  的构造可知对任意  $h \in H_\omega$ ,

$$T_h H_\omega = (l_h)_* \mathfrak{h}_\omega.$$



断言  $H_\omega$  为  $G$  的连通李子群. 由极大积分子流形的定义,  $H_\omega$  显然连通. 又对任意  $h \in H$ , 考虑连通子流形  $h^{-1}H$ , 显然  $e \in h^{-1}H$ , 又容易验证  $h^{-1}H$  也服从分布  $\Delta$ , 从而由极大积分子流形的唯一性可得  $h^{-1}H_\omega = H_\omega$ . 因此  $H$  是  $G$  的子群. 注意积分子流形  $H_\omega$  是正则子流形, 从而可以验证  $H_\omega$  上的乘法、取逆运算光滑, 因此  $H_\omega$  是  $G$  的连通李子群.

最后, 由积分子流形的局部唯一性以及拓扑群的基本性质 (单位元的邻域构成拓扑群的生成元) 容易验证  $H_\omega$  的唯一性.  $\square$

若满足上述性质  $H_\omega$  是  $G$  的闭子群, 则齐性空间

$$M_\omega := G/H_\omega$$

是光滑流形. 事实上,  $M_\omega$  还具有自然的辛结构:

**定理 2.74.** 设  $G$  为李群,  $\omega \in Z^2(\mathfrak{g})$  是  $G$  上的左不变闭 2-形式. 如果满足引理 2.73 的李子群  $H_\omega$  是闭子群, 则在齐性空间  $M_\omega := G/H_\omega$  上存在唯一的辛形式  $\tilde{\omega}$ , 使得

$$\omega = \pi^* \tilde{\omega},$$

其中  $\pi: G \rightarrow G/H_\omega$  是典范投影.

证明. 对任意  $\tilde{a} \in M_\omega$  以及  $\tilde{X}, \tilde{Y} \in T_{\tilde{a}}M_\omega$ , 任取  $a \in \pi^{-1}(\tilde{a})$ , 以及  $X, Y \in T_aG$  使得  $\pi_*X = \tilde{X}, \pi_*Y = \tilde{Y}$ . 定义

$$\tilde{\omega}(\tilde{X}, \tilde{Y}) := \omega(X, Y).$$

断言上述  $\tilde{\omega}(\tilde{X}, \tilde{Y})$  是良定的, 其值与  $a, X, Y$  的选取无关, 从而  $\tilde{\omega} \in \Omega^2(M_\omega)$ . 这是因为, 对于固定的  $a \in \pi^{-1}(\tilde{a})$ , 若另选符合定义的  $X', Y' \in T_aG$ , 则  $X - X', Y - Y' \in (l_a)_*\mathfrak{h}_\omega$ , 从而  $i_{X-X'}\omega = i_{Y-Y'}\omega = 0$ , 由此易知  $\omega(X, Y) = \omega(X', Y')$ . 接下来, 若另选  $a' \in \pi^{-1}(\tilde{a})$ , 记  $g := a'a^{-1} \in G$ , 并记  $T_{a'}G$  中的向量  $X' := (l_g)_*X, Y' := (l_g)_*Y$ . 则由  $\pi \circ l_{g^{-1}} = \pi$  可知

$$\pi_*X' = \pi_*(l_{g^{-1}})_*X = \pi_*X = \tilde{X},$$

同理  $\pi_*Y' = \tilde{Y}$ . 再由  $\omega$  的左不变性可知

$$\omega(X', Y') = (l_g^*\omega)(X, Y) = \omega(X, Y).$$

因此  $\tilde{\omega}(\tilde{X}, \tilde{Y})$  的值也与  $a$  的选取无关, 从而  $\tilde{\omega} \in \Omega^2(X, Y)$  良定, 并且显然  $\omega = \pi^*\tilde{\omega}$ . 接下来只需验证  $\tilde{\omega}$  是非退化、闭的.

记号承上, 如果  $\tilde{X} \in T_{\tilde{a}}M_{\omega}$  使得  $i_{\tilde{X}}\tilde{\omega} = 0$ , 则由  $\tilde{\omega}$  的定义可知, 对任意  $X \in T_aG$ , 如果  $\pi_*X = \tilde{X}$ , 则  $i_X\omega = 0$ , 即  $X \in (l_a)_*\mathfrak{g}_{\omega}$ , 从而  $\tilde{X} = \pi_*X = 0$ , 这表明  $\tilde{\omega}$  非退化. 再注意  $\pi^*(d\tilde{\omega}) = d(\pi^*\tilde{\omega}) = d\omega = 0$ , 又因为切映射  $\pi_*$  是满射从而拉回映射  $\pi^*$  是单射, 因此  $d\tilde{\omega} = 0$ , 故  $\tilde{\omega}$  是闭的. 综上所述,  $\tilde{\omega}$  是  $M_{\omega} := G/H_{\omega}$  的辛结构.  $\square$

**注 2.75.** 在适当的局部坐标下显式写出上述  $\tilde{\omega}$  的表达式, 如下:

记号承上, 任取  $a \in \pi^*(a)$ , 记  $N_a$  为过  $a$  点的服从分布  $\Delta$ (见(2.62)式) 的极大积分子流形 (这其实是子群  $H_{\omega}$  的陪集), 则存在  $a$  附近的局部坐标  $x^1, x^2, \dots, x^n$ , 使得

$$N_a = \{(x^1, x^2, \dots, x^n) \mid x^1 = x^2 = \dots = x^k = 0\},$$

其中  $k := \dim M_{\omega} = n - \dim \mathfrak{g}_{\omega}$ . 此时,  $\{\frac{\partial}{\partial x^{k+1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}\}$  构成切空间  $T_aN_a = (l_a)_*\mathfrak{g}_{\omega}$  的一组基, 并且  $M_{\omega}$  在点  $\tilde{a} = \pi(a)$  处有局部坐标  $x^1, x^2, \dots, x^k$ . 由  $N_a$  的定义知  $\frac{\partial}{\partial x^{k+l}} \lrcorner \omega = 0$ , ( $1 \leq l \leq n - k$ ), 因此  $\omega$  在局部坐标  $x^1, \dots, x^n$  下的表达式形如

$$\omega = \sum_{1 \leq i < j \leq k} \omega_{ij} dx^i \wedge dx^j,$$

易知在  $\tilde{a} \in M_{\omega}$  的局部坐标  $x^1, \dots, x^k$  下,  $\tilde{\omega}$  的表达式恰为

$$\omega = \sum_{1 \leq i < j \leq k} \omega_{ij} dx^i \wedge dx^j.$$

**注 2.76.** 从李群  $G$  以及  $\omega \in Z^2(\mathfrak{g})$  出发构造辛流形  $(M_{\omega}, \bar{\omega})$  的上述过程其实是一种特殊的辛约化. 辛约化的最基本例子见前文例 1.10.

大致来说, 辛约化是将流形  $M$  的某个商空间  $M/\sim$  赋予辛结构的操作. 我们在后文还将专门探讨它.

#### 2.4.4 余伴随轨道 $G^{\#}\omega$ 与 $G$ -辛流形

给定李群  $G$  以及左不变闭 2-形式  $\omega \in Z^2(\mathfrak{g})$ , 假设引理 2.73 所确定的李子群  $H_{\omega}$  是闭的, 则定理 2.74 给出了齐性空间  $M_{\omega} := G/H_{\omega}$  的典范的辛结构. 李群  $G$  在  $M_{\omega}$  上有典范的群作用.

**题 2.77.** 记号承上, 验证: 李群  $G$  在  $M_\omega$  上的群作用是可迁的辛作用.

证明. 可迁性显然. 只需再验证对任意  $g \in G$ ,  $\lambda_g^* \tilde{\omega} = \tilde{\omega}$ , 其中  $\tilde{\omega}$  是  $M_\omega$  的典范辛结构,  $\lambda_g: M_\omega \rightarrow M_\omega$  见定义 2.70. 注意下述图表交换:

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{l_g} & G \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi \\ M_\omega & \xrightarrow{\lambda_g} & M_\omega \end{array}$$

从而

$$\pi^*(\lambda_g^* \tilde{\omega}) = l_g^*(\pi^* \tilde{\omega}) = l_g^* \omega = \omega = \pi^* \tilde{\omega},$$

又注意拉回映射  $\pi^*$  是单射, 因此  $\lambda_g^* \tilde{\omega} = \tilde{\omega}$ , 得证.  $\square$

既然  $G$  在  $M_\omega$  上的作用是可迁的辛作用, 则由引理 2.71 可知, (2.60) 式所确定的映射  $\Psi: M_\omega \rightarrow Z^2(\mathfrak{g})$  将  $M_\omega$  映为  $Z^2(\mathfrak{g})$  的某条  $G$ -余伴随轨道.

**推论 2.78.** 条件与记号承上, 则  $\Psi(M_\omega) = G^\# \omega := \{\text{Ad}_g^* \omega \mid g \in G\}$ .

证明. 记  $\tilde{e} := \pi(e) = eH_\omega$  是单位元  $e \in G$  在  $M_\omega$  中的像, 注意  $\rho_{\tilde{e}} = \pi$ , 其中  $\rho_{\tilde{e}}$  见定义 2.70. 于是

$$\Psi(\tilde{e}) = \rho_{\tilde{e}}^* \tilde{\omega} = \pi^* \tilde{\omega} = \omega,$$

因此  $\Psi(M_\omega)$  是  $\omega \in Z^2(\mathfrak{g})$  所在的  $G$ -余伴随轨道, 即  $G^\# \omega$ .  $\square$

也就是说, 对  $G$  的每一条余伴随轨道  $G^\# \omega$  (其中  $\omega \in Z^2(\mathfrak{g})$ , 并且假设  $H_\omega$  是  $G$  的闭子群), 都存在  $G$ -辛流形  $(M, \omega)$  使得  $G^\# \omega = \Psi(M)$ . 接下来自然要问, 这样的  $G$ -辛流形是唯一的吗?

**定理 2.79.** 设  $G$  为李群, 其李代数为  $\mathfrak{g}$ ,  $\omega \in Z^2(\mathfrak{g})$ . 设  $(M, \Omega)$  为  $G$ -辛流形, 且  $G$  在  $M$  上的作用可迁, 如果  $G^\# \omega = \Psi(M)$ , 则:

1. 存在  $G$  的闭子群  $H$  使得  $M \cong G/H$ , 并且  $\omega = \rho_{eH}^* \Omega$  (注意  $\rho_{eH}: G \rightarrow G/H$  恰为典范投影).
2. 李子群  $H_\omega$  是  $H$  的包含单位元的连通分支, 其中  $H_\omega$  的定义见引

理2.73. 从而  $M_\omega := G/H_\omega$  是  $M = G/H$  的覆叠空间.

即, 满足  $\Psi(M) = G^\# \omega$  的  $G$ -辛流形  $M$  在相差覆叠的意义下唯一.

证明. 任取  $m \in M$ , 由  $\Psi(M) = G^\# \omega$  可知存在  $g \in G$  使得  $\Psi(m) = \text{Ad}_g^* \omega$ , 即  $\rho_m^* \Omega = \Psi(m) = \text{Ad}_g^* \omega = r_g^* \omega$ , 于是

$$\omega = r_{g^{-1}}^* (\rho_m^* \Omega) = (\rho_m \circ r_{g^{-1}})^* \Omega = \rho_{g^{-1}m}^* \Omega.$$

令  $H := \{h \in G \mid hg^{-1}m = g^{-1}m\}$ , 即  $g^{-1}m \in M$  的稳定子群, 则  $M \cong G/H$ , 且易验证  $\omega = \rho_{eH}^* \Omega$ .

为验证  $H_\omega$  是上述  $H$  的连通分支 (一般来说  $H$  未必连通), 只需验证闭子群  $H$  与  $H_\omega$  的李代数相同, 都是  $\mathfrak{h}_\omega$ , 然后再由  $H_\omega$  的极大连通性即可. 事实上, 对任意  $X \in \mathfrak{g}$ , 有

$$\begin{aligned} X \in \mathfrak{h}_\omega &\Leftrightarrow X \lrcorner \omega = 0 \Leftrightarrow X \lrcorner \rho_{eH}^* \Omega = 0 \\ &\Leftrightarrow \rho_{eH}^* ((\rho_{eH})_* X \lrcorner \Omega) = 0 \\ &\Leftrightarrow (\rho_{eH})_* X \lrcorner \Omega = 0 && (\rho_{eH}^* \text{ 是单射}) \\ &\Leftrightarrow (\rho_{eH})_* X = 0 && (\text{辛形式 } \Omega \text{ 非退化}) \\ &\Leftrightarrow X \in \mathfrak{h} := \text{Lie } H && (\text{注意 } \mathfrak{h} \cong T_e H) \end{aligned}$$

(其中  $X \lrcorner \omega := i_X \omega$ ), 从而  $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_\omega$ , 得证.  $\square$

## 2.4.5 Kirillov-Kostant-Souriau 定理, 简单例子与注记

对于  $\omega \in Z^2(\mathfrak{g})$ , 前文已引入  $G$  的子群  $H_\omega$ , 并且假定  $H_\omega$  是闭子群, 则齐性空间  $M_\omega := G/H_\omega$  具有自然的辛结构. 然而  $H_\omega$  何时是闭的? 一个充分条件是,  $\omega$  为恰当形式, 即存在  $\beta \in \mathfrak{g}^* \cong \Omega_l^1(G)$  使得  $\omega = d\beta$ .

我们还将看到, 对任意  $\beta \in \mathfrak{g}^*$ , 余伴随轨道  $G^\# \beta$  总具有辛结构.

**引理 2.80.** 设  $G$  为李群,  $\mathfrak{g}$  是  $G$  的李代数,  $\beta \in \mathfrak{g}^* \cong \Omega_l^1(G)$ ,  $\omega := d\beta \in B^2(\mathfrak{g}) \subseteq Z^2(\mathfrak{g})$ , 则稳定子群

$$G_\beta := \{g \in G \mid \text{Ad}_g^* \beta = \beta\}$$

是  $G$  的闭子群, 且  $G_\beta$  与  $H_\omega$  的李代数相同, 从而  $H_\omega$  是  $G_\beta$  的连通分

支, 特别地  $H_\omega$  是  $G$  的闭子群.

证明. 只需计算  $G_\beta$  的李代数即可. 对任意  $X \in \mathfrak{g}$ , 有

$$\begin{aligned} X \in \operatorname{Lie} G_\beta &\Leftrightarrow \left. \frac{d}{dt} \operatorname{Ad}_{e^{tX}}^* \beta \right|_{t=0} = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall Y \in \mathfrak{g}, \beta \left( \left. \frac{d}{dt} \operatorname{Ad}_{e^{-tX}} Y \right|_{t=0} \right) = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall Y \in \mathfrak{g}, -\beta([X, Y]) = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall Y \in \mathfrak{g}, (d\beta)(X, Y) = 0 \\ &\Leftrightarrow X \lrcorner \omega = 0 \Leftrightarrow X \in \mathfrak{h}_\omega, \end{aligned}$$

因此  $\operatorname{Lie} G_\beta = \mathfrak{h}_\omega$ . 由  $H_\omega$  的极大连通性知  $H_\omega$  是  $G_\beta$  的一个连通分支.  $\square$

**定理 2.81.** (Kirillov-Kostant-Souriau). 设  $G$  为李群,  $\mathfrak{g}$  是  $G$  的李代数,  $\beta \in \mathfrak{g}^* \cong \Omega_l^1(G)$ , 则余伴随轨道  $G^\# \beta \cong G/G_\beta$  存在辛结构  $\tilde{\omega}$ , 使得

$$\pi_\beta^* \tilde{\omega} = d\beta, \quad (2.63)$$

其中  $G_\beta$  的定义见引理2.80,  $\pi_\beta: G \rightarrow G/G_\beta$  为典范投影. 此外, 若记  $\omega := d\beta \in Z^2(\mathfrak{g})$ , 则定理2.74中的辛流形  $M_\omega$  是  $G^\# \beta$  的覆叠空间.

证明. 由稳定子群  $G_\beta$  的定义容易把余伴随轨道  $G^\# \beta$  与齐性空间  $G/G_\beta$  等同. 辛结构  $\tilde{\omega}$  的构造方法与定理2.74完全类似, 留给读者. 其余断言可由引理2.80直接得到.  $\square$

**题 2.82.** 记号承上, 则  $G^\# \beta$  的辛结构  $\tilde{\omega}$  满足

$$\tilde{\omega}(\tilde{X}, \tilde{Y}) = -\beta([X, Y]), \quad (2.64)$$

其中  $X, Y \in \mathfrak{g}$ ,  $\tilde{X} = (\pi_\beta)_* X$ ,  $\tilde{Y} = (\pi_\beta)_* Y$ .

**题 2.83.** 记  $\mathfrak{g}$  为李群  $G$  的李代数, 如果

$$H^1(\mathfrak{g}) = H^2(\mathfrak{g}) = \{0\},$$

则对每个  $\omega \in Z^2(\mathfrak{g})$ , 存在唯一  $\beta \in \mathfrak{g}^*$  使得  $\omega = d\beta$ , 并且

$$d: G^\# \beta \rightarrow G^\# \omega$$

是良定的双射. 此外, 下述两个集合之前也有自然的一一对应:

$$\{G^\# \beta \mid \beta \in \mathfrak{g}^*\} \cong \{G^\# \omega \mid \omega \in Z^2(\mathfrak{g})\}.$$

[提示: 李代数上同调的定义见(2.55)式, 直接用定义即可.]

本节最后, 我们考察余伴随轨道的一个基础例子.

**例 2.84.** 令  $G := \mathrm{SO}(3)$  为  $\mathbb{R}^3$  上的特殊正交变换群, 则  $G$  的李代数为

$$\mathfrak{so}(3) = \{X \in \mathbb{R}^{3 \times 3} \mid X^T = -X\}.$$

任取  $\mathfrak{so}(3)^*$  中的非零元  $\beta$ , 证明: 稳定子群

$$G_\beta \cong \mathrm{SO}(2),$$

相应的余伴随轨道  $G^\# \beta \cong \mathrm{SO}(3)/\mathrm{SO}(2) \cong S^2$ , 由此再次得到球面  $S^2$  的辛结构 (注意与题2.4对照).

解. 取李代数  $\mathfrak{so}(3)$  的一组基  $\{E_x, E_y, E_z\}$ , 其中

$$E_x := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_y := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_z := \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

容易验证交换关系

$$[E_x, E_y] = E_z, \quad [E_y, E_z] = E_x, \quad [E_z, E_x] = E_y,$$

从而有李代数同构

$$\begin{aligned} \iota: \mathfrak{so}(3) &\rightarrow (\mathbb{R}^3, \times) \\ (E_x, E_y, E_z) &\mapsto (e_x, e_y, e_z), \end{aligned}$$

其中“ $\times$ ”是通常的  $\mathbb{R}^3$  矢量叉乘,  $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$  是  $\mathbb{R}^3$  的标准基. 易知上述同构映射  $\iota$  被以下性质所唯一确定: 对任意  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ ,  $\mathbf{X} \in \mathfrak{so}(3)$  都有

$$\mathbf{X}\mathbf{v} = \iota(\mathbf{X}) \times \mathbf{v}. \quad (2.65)$$

由此易知  $G$  的伴随表示满足: 对任意  $g \in G$  以及  $\mathbf{X} \in \mathfrak{so}(3)$  都有

$$\iota(\text{Ad}_g \mathbf{X}) = g\iota(\mathbf{X}), \quad (2.66)$$

细节留给读者 (注意  $\text{Ad}_g \mathbf{X} = g\mathbf{X}g^{-1}$ ). 这表明  $\iota$  给出了  $G$  在  $\mathfrak{so}(3)$  上的伴随表示与在  $\mathbb{R}^3$  上的典范表示之间的同构. 接下来不妨省略  $\iota$ , 将  $\mathfrak{so}(3)$  与  $\mathbb{R}^3$  等同.

通过  $\mathbb{R}^3$  上的标准欧氏内积  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  将  $\mathfrak{so}(3)^* \cong (\mathbb{R}^3)^*$  与  $\mathbb{R}^3$  等同, 在此意义下, 余伴随表示具有如下显示表达: 对任意  $g \in G$ ,  $\boldsymbol{\beta}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ ,

$$\langle \text{Ad}_g^* \boldsymbol{\beta}, \mathbf{v} \rangle = \langle \boldsymbol{\beta}, g^{-1} \mathbf{v} \rangle = \langle g\boldsymbol{\beta}, \mathbf{v} \rangle,$$

因此  $\text{Ad}_g^* \boldsymbol{\beta} = g\boldsymbol{\beta}$ , 即  $\mathfrak{so}(3)^* \xrightarrow{\iota^*} (\mathbb{R}^3)^* \xrightarrow{\langle \cdot, \cdot \rangle} \mathbb{R}^3$  给出了  $G$  的余伴随表示与典范表示之间的同构. 由此立刻看出余伴随轨道

$$G^\# \boldsymbol{\beta} = \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3 \mid \|\mathbf{v}\| = \|\boldsymbol{\beta}\|\} \cong S^2, \quad (2.67)$$

即半径为  $b := \|\boldsymbol{\beta}\|$  的球面; 并且稳定子群  $G_\beta = \{g \in G \mid g\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\beta}\}$ , 即绕  $\boldsymbol{\beta}$  的旋转变换构成的群, 它显然同构于  $\text{SO}(2)$ .

下面显式写出  $G^\# \boldsymbol{\beta}$  的辛结构  $\tilde{\omega}$ , 这关键是要用到(2.64)式. 依然将  $G^\# \boldsymbol{\beta} := G/G_\beta$  视为  $\mathbb{R}^3$  的子集, 见(2.67)式. 则易知对任意  $g \in G$ , 典范投影  $\pi_\beta: G \rightarrow G/G_\beta$  满足

$$\pi_\beta(g) = g\boldsymbol{\beta}.$$

为方便计算, 不妨  $\boldsymbol{\beta} = b\mathbf{e}_z$ , 其中  $b := \|\boldsymbol{\beta}\| > 0$ , 则切空间  $T_\beta(G^\# \boldsymbol{\beta})$  自然地等同于  $\mathbb{R}^2$ ; 通过  $\iota$  将  $T_I G = \mathfrak{so}(3)$  等同于  $\mathbb{R}^3$ , 在此意义下容易验证切映射  $(\pi_\beta)_*: T_I G \rightarrow T_\beta(G^\# \boldsymbol{\beta})$  满足

$$(\pi_\beta)_* \mathbf{e}_x = -b\mathbf{e}_y, \quad (\pi_\beta)_* \mathbf{e}_y = b\mathbf{e}_x, \quad (\pi_\beta)_* \mathbf{e}_z = \mathbf{0}.$$

将上式与(2.64)式结合, 容易验证  $G^\# \boldsymbol{\beta}$  的诱导辛结构  $\tilde{\omega}$  满足

$$\tilde{\omega}(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y) = -\frac{1}{b},$$

其中  $e_x, e_y$  切空间  $T_\beta(G^\# \beta) \cong \mathbb{R}^2$  的标准基. 这只是  $\tilde{\omega}$  在点  $\beta$  处的表达式, 由  $\tilde{\omega}$  的  $G$ -不变性容易得到  $\tilde{\omega}$  在其他点处的表达. 事实上, 在  $G^\# \beta \cong \mathbb{R}^2$  的

$$\text{球坐标} \begin{cases} x = b \sin \theta \cos \varphi \\ y = b \sin \theta \sin \varphi \\ z = b \cos \theta \end{cases} \quad \text{下, 可以验证 (留给读者)}$$

$$\tilde{\omega} = -b \sin \theta \, d\theta \wedge d\varphi.$$

该  $\tilde{\omega}$  与题2.4中的辛结构相差常数倍. □

## 2.5 复射影空间

复射影空间  $\mathbb{CP}^n$  是辛流形的重要例子, 此外  $\mathbb{CP}^n$  还具有 Kähler 结构与余伴随轨道结构. 本节将详细介绍之.

众所周知, 复射影空间  $\mathbb{CP}^n$  是  $\mathbb{C}^{n+1}$  的所有 1 维复子空间之全体, 即

$$\mathbb{CP}^n := (\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}) / \sim,$$

其中等价关系  $\sim$  满足:  $\lambda \mathbf{w} \sim \mathbf{w}$ , 其中  $0 \neq \mathbf{w} \in \mathbb{C}^{n+1}, 0 \neq \lambda \in \mathbb{C}$ . 记商映射

$$\begin{aligned} \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} &\rightarrow \mathbb{CP}^n \\ \mathbf{w} = (w^0, \dots, w^n)^T &\mapsto \mathbf{w}_\sim \end{aligned} \tag{2.68}$$

众所周知,  $\mathbb{CP}^n$  是复流形. 记  $U_0 := \{\mathbf{w}_\sim \in \mathbb{CP}^n \mid w_0 \neq 0\}$ , 以及映射

$$\begin{aligned} \varphi_0: U_0 &\rightarrow \mathbb{C}^n \\ \mathbf{w} &\mapsto \mathbf{z} = (z^1, \dots, z^n)^T := \left( \frac{w^1}{w^0}, \dots, \frac{w^n}{w^0} \right)^T, \end{aligned} \tag{2.69}$$

则  $(U_0, \varphi_0)$  是  $\mathbb{CP}^n$  的一个局部坐标卡,  $\mathbf{z} = (z^1, \dots, z^n)^T$  为相应的复坐标, 这给出了  $\mathbb{CP}^n$  的复结构. 本节接下来的具体计算都发生在此局部坐标上.

### 2.5.1 Fubini-Study 度量

复射影空间  $\mathbb{CP}^n$  不仅是复流形, 其上还有某种意义下自然的厄米特结构, 称为 **Fubini-Study 度量**. 该厄米特结构使得  $\mathbb{CP}^n$  成为 Kähler 流形.



**注 2.85.** 回忆  $\mathbb{C}^{n+1}$  的标准厄米特结构  $\langle\langle, \rangle\rangle$  如下:

$$\langle\langle \xi, \eta \rangle\rangle := \eta^\dagger \xi, \quad (2.70)$$

其中  $\xi, \eta$  是  $n+1$  维列向量,  $\eta^\dagger := (\bar{\eta})^\top$ . 该记号约定保证了  $\langle\langle, \rangle\rangle$  关于第 2 个分量是共轭线性的, 与前文 1.5.1 小节保持一致.

对任意非零向量  $w \in \mathbb{C}^{n+1}$ , 回忆(2.68)式, 易知可将  $\mathbb{CP}^n$  在  $w_\sim := \pi(w)$  处的切空间自然等同于

$$(\mathbb{C}w)^\perp := \{\xi' \in \mathbb{C}^{n+1} \mid \langle\langle \xi', w \rangle\rangle = 0\} \cong \mathbb{C}^n \subseteq \mathbb{C}^{n+1}. \quad (2.71)$$

从而可将  $\mathbb{C}^{n+1}$  的标准厄米特结构搬运到  $\mathbb{CP}^n$  上.

为此, 考虑  $\mathbb{C}^{n+1}$  中的  $2n+1$  维单位球面

$$S^{2n+1} := \{w \in \mathbb{C}^{n+1} \mid w^\dagger w = 1\}, \quad (2.72)$$

复射影空间  $\mathbb{CP}^n$  也可视为  $S^{2n+1}$  的商空间, 即

$$\mathbb{CP}^n \cong S^{2n+1}/U(1),$$

其中酉群  $U(1)$  在  $S^{2n+1}$  上的作用为  $e^{i\theta} \cdot (w^0, \dots, w^n)^\top = (e^{i\theta} w^0, \dots, e^{i\theta} w^n)^\top$ . 在此意义下, 记相应的商映射为

$$\begin{aligned} \pi: S^{2n+1} &\rightarrow \mathbb{CP}^n \\ w &\mapsto w_\sim. \end{aligned} \quad (2.73)$$

则在此意义下, 对任意  $w_\sim \in \mathbb{CP}^n$ , 有切空间同构

$$T_{w_\sim} \mathbb{CP}^n \cong T_w S^{2n+1} / \ker \pi_* \cong (\mathbb{C}w)^\perp \subseteq \mathbb{C}^{n+1}, \quad (2.74)$$

其中  $w \in S^{2n+1}$  使得  $\pi(w) = w_\sim$ . 注意包含关系

$$(\mathbb{C}w)^\perp \subseteq T_w S^{2n+1} \subseteq \mathbb{C}^{n+1},$$

在此意义下, 切空间同构  $(\mathbb{C}w)^\perp \cong T_{w_\sim} \mathbb{CP}^n$  由切映射  $\pi_*: T_w S^{2n+1} \rightarrow T_{w_\sim} \mathbb{CP}^n$  在子空间  $(\mathbb{C}w)^\perp$  上的限制所诱导.

**定义 2.86.** 记号承上. 对于  $w_{\sim} \in \mathbb{CP}^n$ , 取定  $w \in S^{2n+1}$  使得  $w_{\sim} = \pi(w)$ . 则对任意  $\xi, \eta \in T_{w_{\sim}}\mathbb{CP}^n$ , 存在唯一的  $\xi', \eta' \in (\mathbb{C}w)^{\perp}$  使得

$$\pi_*(\xi') = \xi, \quad \pi_*(\eta') = \eta.$$

此时令

$$h(\xi, \eta) := \langle \xi', \eta' \rangle, \quad (2.75)$$

则易知上式与  $w \in \pi^{-1}(w_{\sim})$  的选取无关. 可以验证上述  $h$  是  $\mathbb{CP}^n$  的厄米特结构. 该  $h$  称为  $\mathbb{CP}^n$  的 **Fubini-Study** 度量.

下面计算 Fubini-Study 度量在局部坐标卡(2.69)下的表达式. 对于  $w = \begin{pmatrix} w_0 \\ \hat{w} \end{pmatrix} \in S^{2n+1} \subseteq \mathbb{C}^{n+1}$ , 易知  $z := (\varphi_0 \circ \pi)(w) = \frac{\hat{w}}{w_0}$ , 从而对任意  $\xi' = \begin{pmatrix} \xi'_0 \\ \hat{\xi}' \end{pmatrix} \in (\mathbb{C}w)^{\perp} \subseteq T_w S^{2n+1}$ , 有

$$\begin{aligned} \xi &:= (\varphi_0 \circ \pi)_*(\xi') = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (\varphi_0 \circ \pi)(w + t\xi') \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \frac{\hat{w} + t\hat{\xi}'}{w_0 + t\xi'_0} = -\frac{\xi'_0 \hat{w}}{w_0^2} + \frac{\hat{\xi}'}{w_0}. \end{aligned} \quad (2.76)$$

现在给定  $z \in \mathbb{C}^n = \varphi_0(U_0)$ , 以及  $\xi \in T_z \mathbb{C}^n \cong \mathbb{C}^n$ , 取

$$w = \begin{pmatrix} w_0 \\ \hat{w} \end{pmatrix} := \frac{1}{(1 + \|z\|)^{\frac{1}{2}}} \begin{pmatrix} 1 \\ z \end{pmatrix} \in S^{2n+1}, \quad (2.77)$$

如果  $\xi' = \begin{pmatrix} \xi'_0 \\ \hat{\xi}' \end{pmatrix} \in (\mathbb{C}w)^{\perp}$  使得  $(\varphi_0 \circ \pi)_*\xi' = \xi$ , 则由(2.76)(2.77)式以及  $z^{\dagger}\xi' = 0$ , 整理得

$$\begin{cases} -\xi'_0 z + \hat{\xi}' = \frac{\xi}{(1 + \|z\|)^{\frac{1}{2}}}, \\ \xi'_0 + z^{\dagger}\hat{\xi}' = 0, \end{cases} \quad \text{即} \quad \begin{pmatrix} 1 & z^{\dagger} \\ -z & I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi'_0 \\ \hat{\xi}' \end{pmatrix} = \frac{1}{(1 + \|z\|^2)^{\frac{1}{2}}} \begin{pmatrix} 0 \\ \xi \end{pmatrix},$$

注意逆矩阵  $\begin{pmatrix} 1 & z^{\dagger} \\ -z & I_n \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{1 + \|z\|^2} \begin{pmatrix} 1 & -z^{\dagger} \\ z & (1 + \|z\|^2)I_n - zz^{\dagger} \end{pmatrix}$ , 从而解得

$$\xi' = \begin{pmatrix} \xi'_0 \\ \hat{\xi}' \end{pmatrix} = \frac{1}{(1 + \|z\|^2)^{\frac{1}{2}}} \begin{pmatrix} 0 \\ \xi \end{pmatrix} - \frac{z^{\dagger}\xi}{(1 + \|z\|^2)^{\frac{3}{2}}} \begin{pmatrix} 1 \\ z \end{pmatrix}. \quad (2.78)$$

由此式可立即算出 Fubini-Study 度量在局部坐标(2.69)下的表达式:

**定理 2.87.** 设  $h$  为  $\mathbb{CP}^n$  的 Fubini-Study 度量, 则在局部坐标(2.69)下, 对任意  $z \in \mathbb{C}^n = \varphi_0(U_0)$ , 以及  $\xi, \eta \in \mathbb{C}^n \cong T_z \mathbb{C}^n$ , 都有

$$h(\xi, \eta) = \frac{\eta^\dagger \xi}{1 + \|z\|^2} - \frac{\eta^\dagger z z^\dagger \xi}{(1 + \|z\|^2)^2}. \quad (2.79)$$

证明. 对于  $\xi \in \mathbb{C}^n \cong T_z \mathbb{C}^n$ , 相应  $\xi' \in (\mathbb{C}w)^\perp$  的表达式见(2.78), 类似也有  $\eta'$ , 于是由

$$h(\xi, \eta) := \langle \xi', \eta' \rangle = (\eta')^\dagger \xi'$$

直接计算即可, 过程留给读者. □

**推论 2.88.** 在局部坐标(2.69)下, Fubini-Study 度量具有显式表达

$$h = \sum_{i,j=1}^n \left( \frac{\delta_{ij}}{1 + \|z\|^2} - \frac{\bar{z}_i z_j}{(1 + \|z\|^2)^2} \right) dz^i \otimes d\bar{z}^j. \quad (2.80)$$

并且相应的 Kähler 形式  $\omega = -\text{Im}h$  为

$$\omega = \frac{i}{2} \sum_{i,j=1}^n \left( \frac{\delta_{ij}}{1 + \|z\|^2} - \frac{\bar{z}_i z_j}{(1 + \|z\|^2)^2} \right) dz^i \wedge d\bar{z}^j. \quad (2.81)$$

这里的  $z_i := z^i$ ,  $\bar{z}_i := \bar{z}^i$ .

证明. 由(2.79)式直接得到

$$h \left( \frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} \right) = \frac{\delta_{ij}}{1 + \|z\|^2} - \frac{\bar{z}_i z_j}{(1 + \|z\|^2)^2},$$

再结合(2.38)(2.40)(2.41)即可. □

对于(2.81)式中的 Kähler 形式  $\omega$ , 可以直接计算验证  $d\omega = 0$ (感兴趣的读者选做), 从而 Fubini-Study 度量使得  $\mathbb{CP}^n$  成为 Kähler 流形. 除了直接计算验证, 后文还将通过其他更简洁的方法来说明  $d\omega = 0$ .

本小节最后, 我们介绍 Fubini-Study 度量的另一种自然的引入方式. 记  $\text{Herm}(\mathbb{C}^{n+1}) := \{A \in \mathbb{C}^{(n+1) \times (n+1)} \mid A^\dagger = A\}$  为  $(n+1)$  阶厄米特方阵之全体, 视为  $(n+1)^2$  维  $\mathbb{R}$ -线性空间. 注意  $\text{Herm}(\mathbb{C}^{n+1})$  的标准欧氏内积为

$$\begin{aligned} q: \text{Herm}(\mathbb{C}^{n+1}) \times \text{Herm}(\mathbb{C}^{n+1}) &\rightarrow \mathbb{R} \\ (A, B) &\mapsto \text{tr}(AB). \end{aligned} \quad (2.82)$$

**题 2.89.** 定义  $\phi: S^{2n+1} \rightarrow \text{Herm}(\mathbb{C}^{n+1})$  如下:  $\phi(w) = ww^\dagger$ , 则存在唯一的映射  $\phi_\sim: \mathbb{CP}^n \rightarrow \text{Herm}(\mathbb{C}^{n+1})$  使得图表

$$\begin{array}{ccc} S^{2n+1} & \xrightarrow{\phi} & \text{Herm}(\mathbb{C}^{n+1}) \\ \pi \downarrow & \nearrow \phi_\sim & \\ \mathbb{CP}^n & & \end{array}$$

交换. 该  $\phi_\sim$  将  $\mathbb{CP}^n$  嵌入到欧氏空间  $(\text{Herm}(\mathbb{C}^n), q)$ . 试计算黎曼度量  $\phi_\sim^* q$  在局部坐标(2.69)下的表达式, 并研究它与 Fubini-Study 度量的关系.

解. 对于  $z \in \mathbb{C}^n$ , 易知

$$(\phi_\sim \circ \varphi_0)(z) = \frac{1}{1 + \|z\|^2} \begin{pmatrix} 1 & z^\dagger \\ z & zz^\dagger \end{pmatrix},$$

于是对任意  $\xi \in \mathbb{C}^n \cong T_z \mathbb{C}^n$ , 有

$$\begin{aligned} \xi' &:= (\phi_\sim \circ \varphi_0)_*(\xi) \\ &= \frac{1}{1 + \|z\|^2} \begin{pmatrix} 0 & \xi^\dagger \\ \xi & \xi z^\dagger + z \xi^\dagger \end{pmatrix} - \frac{z^\dagger \xi + \xi^\dagger z}{(1 + \|z\|^2)^2} \begin{pmatrix} 1 & z^\dagger \\ z & zz^\dagger \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

于是对任意  $\xi, \eta \in \mathbb{C}^n \cong T_z \mathbb{C}^n$ , 直接计算可得

$$\begin{aligned} \tilde{g}(\xi, \eta) &:= (\phi_\sim \circ \varphi_0)^* q(\xi, \eta) = q(\xi', \eta') = \text{tr}(\xi' \eta') \\ &= \frac{\xi^\dagger \eta + \eta^\dagger \xi}{1 + \|z\|^2} - \frac{\xi^\dagger z z^\dagger \eta + \eta^\dagger z z^\dagger \xi}{(1 + \|z\|^2)^2}. \end{aligned}$$

与(2.79)式比较可得  $\tilde{g} = 2\text{Re } h$ . 记  $\tilde{h}$  是由黎曼度量  $\tilde{g}$  与复结构  $J$  所诱导的厄米特结构, 即

$$\tilde{h}(X, Y) := g(X, Y) - i g(JX, Y),$$

则  $\tilde{h} = 2h$ , 其中  $h$  为 Fubini-Study 度量, 见(2.80). □

## 2.5.2 $\mathbb{CP}^n$ 的 Kähler 结构

记  $\omega$  为  $\mathbb{CP}^n$  上由 Fubini-Study 度量所诱导的 Kähler 形式, 其局部表达式见(2.81). 本小节将用除直接计算外的方法说明  $d\omega = 0$ , 再次验证  $\mathbb{CP}^n$  为 Kähler 流形.

注意特殊酉群  $SU(n+1)$  在  $\mathbb{CP}^n$  上有自然的作用: 对于  $A \in SU(n+1)$  以及  $w \in S^{2n+1} \subseteq \mathbb{C}^{n+1}$ , 令  $A \cdot w_{\sim} := (Aw)_{\sim}$ . 显然该群作用保持  $\mathbb{CP}^n$  的 Fubini-Study 度量.

**题 2.90.** 验证:  $SU(n+1)$  在  $\mathbb{CP}^n$  的上述作用可迁, 并且在  $w_{\sim} \in \mathbb{CP}^n$  处的稳定子群

$$SU(n+1)_{w_{\sim}} \cong U((\mathbb{C}w)^{\perp}) \cong U(n),$$

从而在该群作用意义下有  $\mathbb{CP}^n \cong SU(n+1)/U(n)$ .

接下来我们需要一个技术性引理. 一般地, 给定光滑流形  $M$  与群  $G$ , 以及  $G$  在  $M$  上的作用

$$\begin{aligned} G \times M &\rightarrow M \\ (g, m) &\mapsto \lambda_g(m), \end{aligned}$$

使得对每个  $g \in G$ ,  $\lambda_g$  都是光滑映射. 对每个  $m \in M$ , 记稳定子群

$$G_m := \{g \in G \mid \lambda_g(m) = m\},$$

则  $G_m$  在  $T_m M$  上有  $\mathbb{R}$ -线性表示

$$\begin{aligned} \Lambda_m: G_m &\rightarrow \text{End}(T_m M) \\ g &\mapsto (\lambda_g)_*. \end{aligned} \tag{2.83}$$

**引理 2.91.** (Mumford判别法). 设  $G$  是群,  $(M, J)$  是近复流形,  $\omega \in \Omega^2(M)$ . 如果  $G$  在  $M$  上的作用  $(g, m) \mapsto \lambda_g(m)$  同时满足如下条件

1. 任意  $g \in G$ ,  $\lambda_g$  是光滑映射, 且  $\lambda_g^* \omega = \omega$ ;
2. 任意  $m \in M$ ,  $J_m \in \Lambda_m(G_m)$ , 其中  $\Lambda_m$  见(2.83)式,

则  $d\omega = 0$ .

证明. 由条件易知  $G$  也保持  $d\omega$  不变, 即对任意  $g \in G$ ,  $\lambda_g^*(d\omega) = d\omega$ . 现在对每个  $m \in M$ , 取  $g \in G_m$  使得  $J_m = \Lambda_m(g) = (\lambda_g)_*$ . 则对任意  $X, Y, Z \in T_m M$ ,

$$\begin{aligned} d\omega(X, Y, Z) &= (\lambda_g^* d\omega)(X, Y, Z) \\ &= d\omega((\lambda_g)_* X, (\lambda_g)_* Y, (\lambda_g)_* Z) = d\omega(J_m X, J_m Y, J_m Z), \end{aligned}$$

再注意  $J^2 = -\text{id}$ , 从而

$$\begin{aligned} d\omega(X, Y, Z) &= d\omega(J_m X, J_m Y, J_m Z) \\ &= d\omega(J_m^2 X, J_m^2 Y, J_m^2 Z) = -d\omega(X, Y, Z), \end{aligned}$$

由此易知  $d\omega = 0$ , 得证. □

将上述引理应用于  $\text{SU}(n+1)$  在  $\mathbb{CP}^n$  上的作用 (题(2.90)), 立刻得到:

**推论 2.92.** *Fubini-Study* 度量的 *Kähler* 形式(2.81)满足  $d\omega = 0$ .

证明. 由 *Fubini-Study* 度量的定义可知  $\text{SU}(n+1)$  保持厄米特度量  $h$ , 从而保持 *Kähler* 形式  $\omega = -\text{Im}h$ . 对任意  $w \in S^{2n+1} \subseteq \mathbb{C}^{n+1}$ , 定义线性变换  $s_w \in \text{End}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^{n+1})$  如下:

$$s_w(\xi') = \begin{cases} (-i)^n \xi' & \text{如果 } \xi' \in \mathbb{C}w, \\ i\xi' & \text{如果 } \xi' \in (\mathbb{C}w)^\perp. \end{cases}$$

则易知  $s_w \in \text{SU}(n+1)$ , 并且  $\lambda_{s_w}(w_\sim) = w_\sim$ , 其中  $w_\sim := \pi(w) \in \mathbb{CP}^n$ . 此外容易验证对任意  $\xi' \in (\mathbb{C}w)^\perp \cong T_{w_\sim} \mathbb{CP}^n$  都有

$$[\Lambda_{w_\sim}(s_w)](\xi') = i\xi' = J_{w_\sim} \xi',$$

即  $J_{w_\sim} = \Lambda_{w_\sim}(s_w)$ . 从而使用引理2.91即可. □

除了上述技巧外, 我们回忆 *Kähler* 势函数的  $i\partial\bar{\partial}$ -引理 (即引理2.54), 下面给出 *Fubini-Study* 度量的势函数.

**性质 2.93.** 定义  $\mathbb{C}^n$  上的光滑实值函数

$$\rho(z) := \log(1 + \|z\|^2), \quad (2.84)$$

则(2.81)式的 *Kähler* 形式  $\omega$  满足  $\omega = \frac{i}{2} \partial \bar{\partial} \rho$ .

证明. 直接计算即可, 留给读者. □

特别注意,  $d\omega = 0$  是上述性质的直接推论.

### 2.5.3 $\mathbb{CP}^n$ 的余伴随轨道结构

本小节将说明  $\mathbb{CP}^n$  可以实现为特殊酉群  $SU(n+1)$  的余伴随轨道, 从而具有辛流形结构. 在本小节我们记

$$G := SU(n+1) = \{A \in GL(n+1, \mathbb{C}) \mid A^\dagger A = I_{n+1}\}.$$

众所周知,  $G = SU(n+1)$  的李代数为

$$\mathfrak{g} := \mathfrak{su}(n+1) = \{X \in \mathfrak{gl}(n+1, \mathbb{C}) \mid X^\dagger = -X, \operatorname{tr} X = 0\}. \quad (2.85)$$

$\mathfrak{g}$  上具有如下标准欧氏内积  $\langle, \rangle$ :

$$\langle X, Y \rangle = \operatorname{Re} \operatorname{tr}(X^\dagger Y). \quad (2.86)$$

上述内积自然诱导  $\mathfrak{g}^*$  与  $\mathfrak{g}$  的  $\mathbb{R}$ -线性同构. 在此同构意义下我们将  $\mathfrak{g}^*$  与  $\mathfrak{g}$  等同. 众所周知,  $G$  在  $\mathfrak{g}$  上的伴随表示满足  $\operatorname{Ad}_A X = A X A^{-1}$ , 其中  $A \in G$ ,  $X \in \mathfrak{g}$ .

**题 2.94.** 对于  $A \in G$ ,  $X \in \mathfrak{g}$ , 则成立

$$\operatorname{Ad}_A^* X = A X A^{-1} = A X A^\dagger, \quad (2.87)$$

这里通过欧氏内积(2.86)将  $X$  视为  $\mathfrak{g}^*$  中的元素.

证明. 对任意  $Y \in \mathfrak{g}$ , 注意

$$\langle \operatorname{Ad}_A^* X, Y \rangle = \langle X, \operatorname{Ad}_{A^{-1}} Y \rangle = \langle X, A^{-1} Y A \rangle$$

$$\begin{aligned}
&= \operatorname{Re} \operatorname{tr} (X^\dagger A^{-1} Y A) = \operatorname{Re} \operatorname{tr} (A X^\dagger A^{-1} Y) \\
&= \operatorname{Re} \operatorname{tr} ((A X A^{-1})^\dagger Y) = \langle A X A^{-1}, Y \rangle,
\end{aligned}$$

因此  $\operatorname{Ad}_A^* X = A X A^{-1} = A X A^\dagger$ . □

**定理 2.95.** 取定  $\mathfrak{g} := \mathfrak{su}(n+1)$  中的元素

$$X_0 := i \begin{pmatrix} -1 & \\ & \frac{1}{n} I_n \end{pmatrix}, \quad (2.88)$$

则其稳定子群  $G_{X_0} := \{A \in G \mid \operatorname{Ad}_A^* X_0 = X_0\}$  满足

$$G_{X_0} = \left\{ \begin{pmatrix} t & \\ & T \end{pmatrix} \middle| T \in \operatorname{U}(n), t = (\det T)^{-1} \right\} \cong \operatorname{U}(n). \quad (2.89)$$

进而余伴随轨道  $G^\# X_0 \cong G/G_{X_0} \cong \operatorname{SU}(n+1)/\operatorname{U}(n) \cong \mathbb{CP}^n$ .

证明. 对于  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}^\dagger \\ a_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \in G_{X_0}$ , 直接计算得

$$\operatorname{Ad}_A^* X_0 = A X_0 A^\dagger = i \begin{pmatrix} -a_{11} \bar{a}_{11} + \frac{1}{n} a_{12}^\dagger a_{12} & * \\ * & * \end{pmatrix}.$$

又由  $AA^\dagger = I_{n+1}$  得  $a_{11} \bar{a}_{11} + a_{12}^\dagger a_{12} = 1$ , 从而比较  $X_0 = \operatorname{Ad}_A^* X_0$  等号两边左上角矩阵元可得  $a_{12} a_{12}^\dagger = 0$ , 于是  $a_{12} = 0$ . 进而(2.89)式易证. 再结合题2.90可知  $G^\# X_0 \cong \mathbb{CP}^n$ . □

在此意义下,  $\mathbb{CP}^n$  的辛结构由(2.64)式所给出.



### 3. 哈密顿系统

那个篝火余烬旁的孩子, 由外向乐观变得孤僻自闭了.

——刘慈欣《三体 II·黑暗森林》

我们已在前文0.2小节介绍了哈密顿力学的一些背景. 而本章将研究哈密顿向量场、泊松括号一般理论, 并初步介绍可积系统. 这部分内容可参考 Cushman[11], Giorgilli[18], Bolsinov[8] 以及 Rudolph[32] 等书, 这些书中有丰富的例子.

#### 3.1 哈密顿向量场

我们回忆, 在经典力学中, 辛流形  $(M, \omega)$  上的点代表物理系统的某种状态, 该物理系统随时间的演化由某个光滑函数  $H \in C^\infty(M)$  所支配, 这个  $H$  即为物理系统的**哈密顿量**. 一般地, 对于光滑函数  $H \in C^\infty(M)$ , 称三元组  $(M, \omega, H)$  为**哈密顿系统**. 此时, 辛流形  $M$  常被物理学家称为**相空间**; 在物理中  $M$  往往是某个光滑流形的余切丛.

##### 3.1.1 哈密顿向量场与哈密顿算子

**定义 3.1.** 在哈密顿系统  $(X, \omega, H)$  中, 存在唯一的切向量场  $X_H \in \text{Vect}(M)$  使得

$$X_H \lrcorner \omega = \text{d}H, \quad (3.1)$$

这个向量场称为  $H$  的**哈密顿向量场**.

$X_H$  的存在唯一性由  $\omega$  的非退化性可得. 再回忆前文(0.6)式. 例如, 对于标准辛空间  $\mathbb{R}^{2n}$  中, 在局部坐标  $(\mathbf{q}, \mathbf{p})$  下,  $\omega = \sum_{i=1}^n \text{d}q^i \wedge \text{d}p_i$ , 此时

$$X_H = \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial}{\partial q^i} - \frac{\partial H}{\partial q^i} \frac{\partial}{\partial p_i} \right),$$

即前文(0.6)式.

哈密顿向量场有如下基本性质:

**定理 3.2.** 设  $(M, \omega, H)$  为哈密顿系统,  $X_H$  是  $H$  的哈密顿向量场, 则

1. (能量守恒).  $\mathcal{L}_{X_H} H = 0$ .
2. (Liouville 定理).  $\mathcal{L}_{X_H} \omega = 0$ .

证明. 注意  $d\omega = 0$  以及 Cartan 公式(2.23), 有

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{X_H} H &= X_H(H) = dH(X_H) = (X_H \lrcorner \omega)(X_H) = \omega(X_H, X_H) = 0, \\ \mathcal{L}_{X_H} \omega &= X_H \lrcorner d\omega + d(X_H \lrcorner \omega) = X_H \lrcorner 0 + d(dH) = 0,\end{aligned}$$

从而得证. □

设  $\gamma: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$  是哈密顿向量场  $X_H$  的积分曲线, 即满足

$$\frac{d}{dt}\gamma(t) = X_H|_{\gamma(t)},$$

则  $\mathcal{L}_{X_H} H = 0$  表明  $H(\gamma(t))$  是关于  $t$  的常值函数, 即物理系统在随时间演化的过程中能量守恒. 再记  $X_H$  生成的流 (回忆2.2.1小节) 为

$$F: U \times (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M, \quad (p, t) \mapsto F_t(p),$$

其中  $U$  为  $M$  的某个开子集, 则对任意  $|t| < \varepsilon$ , 上述 Liouville 定理表明  $F_t^* \omega = \omega$ , 即  $F_t$  是 (局部) 辛同胚. 进而  $F_t$  也保持辛体积  $\tau_\omega$  (1.2) 不变.

下面考察哈密顿向量场在一般局部坐标下的显式表示.

**性质 3.3.** 给定辛流形  $(X, \omega)$  的局部坐标  $(x^1, \dots, x^m)$ , 在该坐标下记

$$\omega = \sum_{1 \leq i < j \leq m} \omega_{ij} dx^i \wedge dx^j,$$

并规定  $\omega_{ji} := -\omega_{ij}$ , 此时记  $\Omega := (\omega_{ij})$  为  $\omega$  的系数矩阵. 则对任意

$H \in C^\infty(M)$ , 哈密顿向量场  $X_H = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$  的系数  $X^i$  满足

$$\begin{pmatrix} X^1 \\ \vdots \\ X^m \end{pmatrix} = -\Omega^{-1} \left( \frac{\partial H}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial H}{\partial x^m} \right)^T. \quad (3.2)$$

证明. 记哈密顿向量场  $X_H = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ , 由定义直接计算如下:

$$\begin{aligned} dH &= X_H \lrcorner \omega = X^i \frac{\partial}{\partial x^i} \lrcorner \left( \sum_{1 \leq j < k \leq m} \omega_{jk} dx^j \wedge dx^k \right) \\ &= \frac{1}{2} X^i \omega_{jk} \frac{\partial}{\partial x^i} \lrcorner (dx^j \wedge dx^k) = \frac{1}{2} X^i \omega_{jk} (\delta_i^j dx^k - \delta_i^k dx^j) \\ &= \frac{1}{2} X^i (\omega_{ik} - \omega_{ki}) dx^k = X^i \omega_{ik} dx^k = -\omega_{ki} X^i dx^k, \end{aligned}$$

再结合  $dH = \frac{\partial H}{\partial x^k} dx^k$  即可得证.  $\square$

**注 3.4.** 记号承上, 在局部坐标  $(x^1, \dots, x^m)$  下, 记矩阵

$$\mathcal{P} := -\Omega^{-1}, \quad (3.3)$$

称为哈密顿算子 (或哈密顿结构). 这是(0.5)式的一般情形.

**性质 3.5.** 在辛流形  $(M, \omega)$  的局部坐标  $(x^1, \dots, x^m)$  下, 若  $\gamma: t \mapsto (x^1(t), \dots, x^m(t))$  是哈密顿向量场  $X_H$  的一条积分曲线, 其中  $H \in C^\infty(M)$ , 则

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^m \end{pmatrix} = \mathcal{P} \left( \frac{\partial H}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial H}{\partial x^m} \right)^T. \quad (3.4)$$

上式即为物理系统随时间演化的哈密顿方程. 进而对  $f \in C^\infty(M)$  有

$$\frac{df}{dt} := X_H(f) = \mathcal{P} \left( \frac{\partial f}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x^m} \right)^T = \mathcal{P}^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^j},$$

这是力学量随时间的演化方程.

证明. 记  $X_H = \sum_{i=1}^m X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ , 则积分曲线  $\gamma$  应满足  $\frac{d}{dt}x^i = X^i$ , 之后结合(3.2)(3.3)即可.  $\square$

例如在标准辛流形  $\mathbb{R}^{2n} \cong T^*\mathbb{R}^n$  的典范坐标  $(q^1, \dots, q^n; p_1, \dots, p_n)$  下, 辛结构  $\omega = \sum_{i=1}^n dq^i \wedge dp_i$  的系数矩阵  $\Omega = \begin{pmatrix} & I_n \\ -I_n & \end{pmatrix}$ , 于是相应的哈密顿算子  $\mathcal{P} = -\Omega^{-1} = \begin{pmatrix} & I_n \\ -I_n & \end{pmatrix}$ , 哈密顿方程为

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & I_n \\ -I_n & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial q} \\ \frac{\partial H}{\partial p} \end{pmatrix}^T,$$

与(0.4)式吻合.

本小节最后, 我们从哈密顿向量场的角度给出辛同胚的一个充要条件:

**性质 3.6.** 设  $(M, \omega), (M', \omega')$  是辛流形,  $f: M \rightarrow M'$  为微分同胚. 则  $f$  为辛同胚当且仅当对任意  $H \in C^\infty(M')$ , 向量场  $X_{f^*H}$  与  $X_H$  是  $f$ -相关的, 即对任意  $p \in M$ , 在切空间  $T_{f(p)}M'$  上成立  $f_*(X_{f^*H}) = X_H$ .

证明. 用定义直接验证即可, 注意到:

$$\forall H \in C^\infty(M'), \quad f_*(X_{f^*H}) = X_H \quad (3.5)$$

$$\Leftrightarrow \forall H \in C^\infty(M'), \quad \forall Y \in \text{Vect}(M), \quad \omega'(f_*(X_{f^*H}), f_*Y) = \omega'(X_H, f_*Y)$$

而  $\omega'(f_*(X_{f^*H}), f_*Y) = (f^*\omega')(X_{f^*H}, Y)$ , 以及

$$\begin{aligned} \omega'(X_H, f_*Y) &= (X_H \lrcorner \omega')(f_*Y) = (dH)(f_*Y) = (d(f^*H))(Y) \\ &= (X_{f^*H} \lrcorner \omega)(Y) = \omega(X_{f^*H}, Y), \end{aligned}$$

因此(3.5)成立当且仅当

$$\forall H \in C^\infty(M'), \quad \forall Y \in \text{Vect}(M), \quad (f^*\omega')(X_{f^*H}, Y) = \omega(X_{f^*H}, Y),$$

而这当且仅当  $f^*\omega' = \omega$ , 从而命题得证.  $\square$

### 3.1.2 局部哈密顿向量场

鉴于哈密顿向量场的重要性,有必要为其专门引入记号:

**定义 3.7.** 设  $(M, \omega)$  为辛流形,  $X$  为  $M$  上的切向量场.

1. 如果存在  $H \in C^\infty(M)$  使得  $X = X_H$ , 则称  $X$  为哈密顿向量场.
2. 如果对任意  $x \in M$ , 都存在  $x$  的邻域  $U$  以及  $U$  上的光滑函数  $H$ , 使得  $X = X_H$  在  $U$  上成立, 则称  $X$  为局部哈密顿向量场, 或者泊松向量场.

$(M, \omega)$  上的哈密顿向量场与局部哈密顿向量场之全体分别记作  $\text{Ham}(M, \omega)$  与  $\text{Ham}^\circ(M, \omega)$ .

在不产生歧义的情况下, 我们常常简记为  $\text{Ham}(M)$  与  $\text{Ham}^\circ(M)$ . 首先注意  $\text{Ham}(M)$  是  $\text{Ham}^\circ(M)$  的  $\mathbb{R}$ -子空间.

**性质 3.8.** 设  $X$  是辛流形  $(M, \omega)$  上的切向量场, 则以下等价:

1.  $X \in \text{Ham}^\circ(M)$ ;
2.  $d(X \lrcorner \omega) = 0$ ;
3.  $\mathcal{L}_X \omega = 0$ .

证明. 若  $X \in \text{Ham}^\circ(M)$ , 则局部存在光滑函数  $H$  使得  $dH = X \lrcorner \omega$ , 因此  $d(X \lrcorner \omega) = 0$ ; 反之用庞加莱引理即可. 而由 Cartan 公式(2.23)以及  $d\omega = 0$  易知 (2) $\Leftrightarrow$ (3).  $\square$

**题 3.9.** 验证:  $\text{Ham}^\circ(M)$  是  $\text{Vect}(M)$  的李子代数.

[提示: 即验证  $\forall X, Y \in \text{Ham}^\circ(M)$ ,  $[X, Y] \in \text{Ham}^\circ(M)$ . 为此, 注意恒等式  $\mathcal{L}_{[X, Y]} = \mathcal{L}_X \circ \mathcal{L}_Y - \mathcal{L}_Y \circ \mathcal{L}_X$  以及性质3.8的 (3). ]

**性质 3.10.** 对于辛流形  $(M, \omega)$ , 成立

$$\dim_{\mathbb{R}} \frac{\text{Ham}^{\circ}(M)}{\text{Ham}(M)} = b^1(M), \quad (3.6)$$

其中  $b^1(M) := \dim_{\mathbb{R}} H^1(M; \mathbb{R})$  为  $M$  的第 1 个 Betti 数.

证明. 只需注意映射  $\text{Vect}(M) \rightarrow \Omega^1(M)$ ,  $X \mapsto X \lrcorner \omega$  诱导线性同构

$$\text{Ham}^{\circ}(M) \cong Z^1(M, \mathbb{R}), \quad \text{Ham}(M) \cong B^1(M, \mathbb{R}),$$

因此  $\frac{\text{Ham}^{\circ}(M)}{\text{Ham}(M)} \cong \frac{Z^1(M, \mathbb{R})}{B^1(M, \mathbb{R})} = H^1(M, \mathbb{R})$ , 从而得证.  $\square$

**注 3.11.** 在辛流形  $(M, \omega)$  中, 有短正合列

$$0 \rightarrow \mathbb{R} \rightarrow C^{\infty}(M) \xrightarrow{j} \text{Ham}(M) \rightarrow 0, \quad (3.7)$$

其中  $\mathbb{R}$  视为  $M$  上的常值函数之全体,  $j: H \mapsto X_H$ .

该短正合列称为辛流形  $(M, \omega)$  的**基本正合列**. 事实上, 这不仅是  $\mathbb{R}$ -线性同态的整合列, 而且还是李代数同态的正合列: 我们将赋予  $C^{\infty}(M)$  李代数结构, 即泊松括号, 详见下一节.

本小节最后, 来看局部哈密顿向量场的具体例子.

**例 3.12.** 考虑环面  $T^2 := \mathbb{R}^2 / \mathbb{Z}^2$ , 在局部坐标  $(x, y)$  下, 其标准辛结构  $\omega := dx \wedge dy$ . 任取不全为零的实数  $a, b$ , 记切向量场

$$X = a \frac{\partial}{\partial x} + b \frac{\partial}{\partial y},$$

则  $X \in \text{Ham}^{\circ}(T^2)$ , 但是  $X \notin \text{Ham}(T^2)$ .

证明. 直接计算得  $X \lrcorner \omega = -b dx + a dy$ , 从而  $d(X \lrcorner \omega) = 0$ , 因此  $X \in \text{Ham}^{\circ}(T^2)$ . 如果存在  $H \in C^{\infty}(T^2)$  使得  $X = X_H$ , 注意  $H$  是紧流形上的光滑函数, 从而必有极值点, 在极值点处  $dH = 0$ , 从而  $X_H = 0$ , 但是  $X$  处处非零, 这产生矛盾. 因此  $X \notin \text{Ham}(M)$ .  $\square$

### 3.1.3 例子：带电粒子在电磁场中的运动

哈密顿系统在电磁场理论中也有重要应用, 这里举一例介绍之. 考虑质量  $m$ , 电荷量  $e$  的粒子在真空中恒定电磁场的运动. 设

$$\mathbf{E} = (E_x, E_y, E_z)^T, \quad \mathbf{B} = (B_x, B_y, B_z)^T$$

为  $\mathbb{R}^3$  上的切向量场, 分别称为**电场强度**与**磁感应强度**, 它们满足

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{E} = \mathbf{0}. \quad (3.8)$$

回忆  $\mathbb{R}^3$  的梯度, 旋度, 散度与外微分的关系并结合上式, 自然将电场强度  $\mathbf{E}$  视为 1-形式, 将磁感应强度  $\mathbf{B}$  视为 2-形式, 即引入

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &:= E_x dq_x + E_y dq_y + E_z dq_z \\ \mathcal{B} &:= B_x dq_y \wedge dq_z - B_y dq_x \wedge dq_z + B_z dq_x \wedge dq_y. \end{aligned} \quad (3.9)$$

在此记号下, (3.8)式可改写为

$$d\mathcal{B} = 0, \quad d\mathcal{E} = 0, \quad (3.10)$$

从而存在函数  $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$  使得

$$\mathcal{E} = -d\varphi, \quad (3.11)$$

函数  $\varphi$  即为通常的**电势**.

**题 3.13.** 记号承上, 验证  $M := T^*\mathbb{R}^3 \cong \mathbb{R}^6 = \{(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \mid \mathbf{q}, \mathbf{p} \in \mathbb{R}^3\}$  上的 2-形式

$$\omega := \omega_0 - e\mathcal{B} \quad (3.12)$$

是辛结构, 其中  $\omega_0$  是  $T^*\mathbb{R}^3$  的标准辛结构.

解. 由(3.10)式可知  $d\omega = 0$ . 为证明  $\omega$  非退化, 只需说明  $\omega$  的系数矩阵  $\Omega = (\omega_{ij})$  可逆. 而直接计算得  $\Omega = \begin{pmatrix} -e\tilde{\mathbf{B}} & \mathbf{I}_3 \\ -\mathbf{I}_3 & \mathbf{0} \end{pmatrix}$ , 其中

$$\tilde{\mathbf{B}} := \begin{pmatrix} 0 & B_z & -B_y \\ -B_z & 0 & B_x \\ B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.13)$$

从而显然  $\Omega$  可逆, 并且相应的哈密顿算子  $\mathcal{P} := -\Omega^{-1}$  为

$$\mathcal{P} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I}_3 \\ -\mathbf{I}_3 & e\tilde{\mathbf{B}} \end{pmatrix}. \quad (3.14)$$

□

**性质 3.14.** 记号承上, 定义  $M = T^*\mathbb{R}^3$  上的光滑函数

$$H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) := \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + e\varphi(\mathbf{q}), \quad (3.15)$$

其中  $m, e$  为常数,  $\varphi$  满足(3.11)式. 则哈密顿系统  $(M, \omega, H)$  的哈密顿方程等价于

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{q}}{dt} &= \mathbf{v} \\ \frac{d\mathbf{p}}{dt} &= e\mathbf{E} + e\mathbf{v} \times \mathbf{B}, \end{aligned} \quad (3.16)$$

其中辛结构  $\omega$  见(3.12)式,  $\mathbf{v} := \frac{\mathbf{p}}{m}$  为粒子的速度.

证明. 注意(3.13)式中的矩阵  $\tilde{\mathbf{B}}$  满足如下性质:

$$\tilde{\mathbf{B}}\mathbf{v} = \mathbf{v} \times \mathbf{B}, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3,$$

再结合(3.4)(3.14)式即可. □

(3.15)式右边的两项分别是粒子的动能与电势能, 而(3.16)第二式右边的两项分别是粒子所受的电场力与洛伦兹力.

### 3.1.4 例子: 黎曼流形, 测地线

哈密顿系统也常出现于几何学. 一个有意思的例子是, 黎曼几何中的测地线也可用哈密顿系统来描述.

**例 3.15.** 设  $(M, g)$  为黎曼流形, 则黎曼度量  $g$  自然诱导微分同胚

$$\psi_g: TM \rightarrow T^*M.$$



由此将余切丛  $T^*M$  上的典范辛结构  $\omega$  搬运至切丛  $TM$

$$\omega^* := \psi_g^* \omega, \quad (3.17)$$

得到辛流形  $(TM, \omega^*)$ .

取定  $M$  的一组局部坐标  $(q^1, \dots, q^n)$ , 并将该坐标自然地扩充为  $T^*M$  的局部坐标  $(q^i; p_j)$  以及  $TM$  的局部坐标  $(q^i; v^j)$ , 其中  $p_j$  为基  $\{dq^j\}$  下的坐标分量 (动量),  $v^j$  为基  $\{\frac{\partial}{\partial q^j}\}$  下的坐标分量 (速度).

记黎曼度量  $g$  在局部坐标  $\{q^i\}$  下的表达式为

$$g = g_{ij} dq^i \otimes dq^j,$$

并记  $(g^{ij}) = (g_{ij})^{-1}$ , 则容易验证 (留给读者)

$$\psi_g^*(p_i) = g_{ij} v^j. \quad (3.18)$$

回忆余切丛  $T^*M$  的典范 1-形式 (0.9)

$$\theta = p_i dq^i$$

使得典范辛形式  $\omega = -d\theta$ . 从而由 (3.17)(3.18) 直接计算得

$$\begin{aligned} \omega^* &= \psi_g^* \omega = -\psi_g^*(d\theta) = -d(\psi_g^* \theta) \\ &= -d(g_{ij} v^j dq^i) = -\left( \frac{\partial g_{ij}}{\partial q^k} v^j dq^k \wedge dq^i + g_{ij} dv^j \wedge dq^i \right) \\ &= g_{ij} dq^i \wedge dv^j + \sum_{1 \leq i < j \leq n} \left( \frac{\partial g_{ik}}{\partial q^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial q^i} \right) v^k dq^i \wedge dq^j \end{aligned} \quad (3.19)$$

于是辛形式  $\omega^*$  在局部坐标  $(q^i; v^j)$  下的系数矩阵为

$$\Omega = \begin{pmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{g} \\ -\mathbf{g} & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad (3.20)$$

其中  $\mathbf{g} := (g_{ij})$ ,  $\mathbf{K} := (K_{ij})$ , 并且

$$K_{ij} := \left( \frac{\partial g_{ik}}{\partial q^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial q^i} \right) v^k. \quad (3.21)$$

于是相应的哈密顿算子

$$\mathcal{P} = -\Omega^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{g}^{-1} \\ -\mathbf{g}^{-1} & -\mathbf{g}^{-1} \mathbf{K} \mathbf{g}^{-1} \end{pmatrix}. \quad (3.22)$$

**性质 3.16.** 记号承上. 对于黎曼流形  $(M, g)$ , 引入切丛上的光滑函数  $H \in C^\infty(TM)$  如下: 对于  $q \in M$  以及  $X \in T_q M$ ,

$$H(q, X) := \frac{1}{2}g(X, X)|_q, \quad (3.23)$$

则  $H$  关于辛形式  $\omega^*$  的哈密顿向量场  $X_H$  在局部坐标  $(q^i; v^j)$  下的表达式为

$$X_H = v^i \frac{\partial}{\partial q^i} - \Gamma_{k\ell}^i v^k v^\ell \frac{\partial}{\partial v^i}, \quad (3.24)$$

其中

$$\Gamma_{k\ell}^i := \frac{1}{2}g^{ij} \left( \frac{\partial g_{kj}}{\partial q^\ell} + \frac{\partial g_{\ell j}}{\partial q^k} - \frac{\partial g_{k\ell}}{\partial q^j} \right) \quad (3.25)$$

为黎曼度量  $g$  的 *Levi-Civita* 联络的 *Christoffel* 符号.

证明. 记  $X_H = X_1^i \frac{\partial}{\partial q^i} + X_2^i \frac{\partial}{\partial v^i}$ , 利用哈密顿算子的语言(3.2)(3.22)得

$$\begin{pmatrix} X_1^\bullet \\ X_2^\bullet \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{g}^{-1} \\ -\mathbf{g}^{-1} & -\mathbf{g}^{-1} \mathbf{K} \mathbf{g}^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial q^\bullet} \\ \frac{\partial H}{\partial v^\bullet} \end{pmatrix}^\top,$$

并注意  $H$  具有局部表达式  $H = \frac{1}{2}g_{ij}v^i v^j$ , 因此  $H$  的哈密顿向量场

$$\begin{aligned} X_H &= \left( \mathbf{g}^{-1} \left( \frac{\partial H}{\partial v^\bullet} \right)^\top \right)^i \frac{\partial}{\partial q^i} + \left( -\mathbf{g}^{-1} \left( \frac{\partial H}{\partial q^\bullet} \right)^\top - \mathbf{g}^{-1} \mathbf{K} \mathbf{g}^{-1} \left( \frac{\partial H}{\partial v^\bullet} \right)^\top \right)^i \frac{\partial}{\partial v^i} \\ &= g^{ij} \frac{\partial H}{\partial v^j} \frac{\partial}{\partial q^i} - g^{ij} \left( \frac{\partial H}{\partial q^j} + K_{jk} g^{k\ell} \frac{\partial H}{\partial v^\ell} \right) \frac{\partial}{\partial v^i} \\ &= v^i \frac{\partial}{\partial q^i} - \frac{1}{2} g^{ij} \left( 2 \frac{\partial g_{j\ell}}{\partial q^k} - \frac{\partial g_{k\ell}}{\partial q^j} \right) v^k v^\ell \frac{\partial}{\partial v^i} \\ &= v^i \frac{\partial}{\partial q^i} - \frac{1}{2} g^{ij} \left( \frac{\partial g_{j\ell}}{\partial q^k} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial q^\ell} - \frac{\partial g_{k\ell}}{\partial q^j} \right) v^k v^\ell \frac{\partial}{\partial v^i} \\ &= v^i \frac{\partial}{\partial q^i} - \Gamma_{k\ell}^i v^k v^\ell \frac{\partial}{\partial v^i}, \end{aligned}$$

从而得证. □

由此立即得到:

**推论 3.17.** 记号承上, 则哈密顿系统  $(TM, \omega^*, H)$  的演化方程为

$$\dot{q}^i = v^i, \quad \dot{v}^i = -\Gamma_{jk}^i v^j v^k,$$

其中  $\dot{q}^i := \frac{dq^i(t)}{dt}$ ,  $\dot{v}^i := \frac{dv^i(t)}{dt}$ .

上述演化方程可改写为关于  $q^i(t)$  的二阶常微分方程

$$\ddot{q}^i + \Gamma_{jk}^i \dot{q}^j \dot{q}^k = 0, \quad (3.26)$$

这恰为黎曼几何中众所周知的**测地线方程**. 换言之, 哈密顿向量场  $X_H$  的积分曲线在  $M$  上的投影恰为黎曼流形  $(M, g)$  的测地线.

### 3.1.5 例子: 李群的余切丛

光滑流形的余切丛具有典范的辛流形结构, 而对于李群这类特殊的光滑流形, 其余切丛的辛结构有更具体的描述. 众所周知, 李群的余切丛是平凡丛, 这是因为可以取一组左不变 1-形式作为整体标架. 更具体地, 对于  $n$  维李群  $G$ , 由如下同构:

$$\begin{aligned} \chi: G \times \mathfrak{g}^* &\rightarrow T^*G \\ (a, \mu) &\mapsto (a, \mu_a), \end{aligned} \quad (3.27)$$

注意在此我们将  $\mathfrak{g}^*$  等同于  $\Omega_l^1(G)$ , 即将  $\mathfrak{g}^*$  中的元素视为  $G$  上的左不变 1-形式. 上述同构不仅是光滑流形的同构, 而且是李群同构 (此时  $\mathfrak{g}^* \cong \mathbb{R}^n$  关于向量加法构成李群). 此外, 注意下述图表显然交换:

$$\begin{array}{ccc} G \times \mathfrak{g}^* & \xrightarrow{\chi} & T^*G \\ & \searrow \pi_1 \quad \swarrow \pi & \\ & G & \end{array} \quad (3.28)$$

于是, 自然可以将余切丛  $T^*G$  的典范辛结构  $\omega$  搬运至  $G \times \mathfrak{g}^*$ , 即

$$\tilde{\omega} := \chi^* \omega \in \Omega^2(G \times \mathfrak{g}^*)$$

是  $G \times \mathfrak{g}^*$  上的辛结构. 本小节的目标是给出  $\chi^* \omega$  的显式表达.

为此, 只需对任意给定的  $(a, \mu) \in G \times \mathfrak{g}^*$  以及  $X, Y \in T_a G$ ,  $\alpha, \beta \in T_\mu \mathfrak{g}^*$ , 写出  $\tilde{\omega}_{(a, \mu)}((X, \alpha), (Y, \beta))$  的值即可; 而由  $\tilde{\omega}$  的定义, 上述表达式等于  $\omega_{(a, \mu_a)}(\chi_*(X, \alpha), \chi_*(Y, \beta))$ . 然而, 切映射  $\chi_*$  很难被显式写清楚; 我们需要采用其它方法, 并充分利用李群结构.

**引理 3.18.** 记号承上, 并记  $\tilde{\theta} := \chi^* \theta$ , 其中  $\theta$  是  $T^*G$  的典范 1-形式. 则对任意  $(a, \mu) \in G \times \mathfrak{g}^*$  以及  $X \in T_a G$ ,  $\alpha \in T_\mu \mathfrak{g}^*$ , 成立

$$\tilde{\theta}_{(a, \mu)}(X, \alpha) = \mu_a(X). \quad (3.29)$$

证明. 注意(0.10)(3.28)式, 直接验算如下:

$$\begin{aligned} \tilde{\theta}_{(a, \mu)}(X, \alpha) &= (\chi^* \theta)_{(a, \mu)}(X, \alpha) = \theta_{(a, \mu_a)}(\chi_*(X, \alpha)) \\ &= \mu_a(\pi_* \circ \chi_*(X, \alpha)) = \mu_a(X), \end{aligned}$$

从而得证. □

注意  $\tilde{\omega} = -d\tilde{\theta}$ , 又已知  $\tilde{\theta}$  的显式表达, 从而用外微分公式(2.34)就能给出  $\tilde{\omega}$  的显式表达. 但在具体操作上, 我们需要注意: 描述李群上的微分形式, 只需写出该微分形式在左不变切向量场的作用即可; 这相比于给出在一般切向量场上的作用, 其实不会丢失信息.

现在, 为描述李群  $G \times \mathfrak{g}^*$  上的 2-形式  $\tilde{\omega}$ , 只需考虑  $\tilde{\omega}$  对  $G \times \mathfrak{g}^*$  上的左不变切向量场的作用. 而  $G \times \mathfrak{g}^*$  的左不变切向量场形如  $(X, \alpha)$ , 这里  $X \in \text{Vect}_l(G)$ , 而  $\alpha$  则是  $\mathfrak{g}^*$  上的常值切向量场, 也自然等同于  $\mathfrak{g}^*$  中的某个向量. 充分利用左不变切向量场与左不变 1-形式的性质可得:

**性质 3.19.** 记号承上, 设  $G$  为李群,  $(a, \mu) \in G \times \mathfrak{g}^*$ , 则对于  $G$  上的左不变切向量场  $X, Y \in \text{Vect}_l(G)$  以及  $\mathfrak{g}^*$  上的常值切向量场  $\alpha, \beta \in \text{Vect}_l(\mathfrak{g}^*) \cong \mathfrak{g}^*$ , 则成立

$$\tilde{\omega}_{(a, \mu)}((X, \alpha), (Y, \beta)) = \beta(X) - \alpha(Y) + \mu([X, Y]). \quad (3.30)$$

证明. 对  $\tilde{\omega} = -d\tilde{\theta}$  使用外微分公式(2.34), 并结合引理3.18即可, 注意充分利用  $\mu, X, Y, \alpha, \beta$  的左不变性, 细节留给读者. □

**注 3.20.** 注意对于左不变切向量场  $X, Y$  以及左不变 1-形式  $\mu \in \mathfrak{g}^*$ , 用外微分公式(2.34)容易验证  $\mu([X, Y]) = -d\mu(X, Y)$ . 因此(3.30)式可改写为

$$\tilde{\omega}_{(a,\mu)}((X, \alpha), (Y, \beta)) = \beta(X) - \alpha(Y) - d\mu(X, Y), \quad (3.31)$$

这个式子其实是  $\tilde{\omega}$  的逐点定义, 即对于任意  $(a, \mu) \in G \times \mathfrak{g}^*$  以及  $X, Y \in T_a G$ ,  $\alpha, \beta \in T_\mu \mathfrak{g}^* \cong \mathfrak{g}^*$ , (3.31)式都成立.

本小节最后, 对于辛流形  $(G \times \mathfrak{g}^*, \tilde{\omega})$  的光滑函数  $H \in C^\infty(G \times \mathfrak{g}^*)$ , 我们来写出相应的哈密顿向量场  $X_H$  的显式表达.

**题 3.21.** 记号承上, 设  $X_H$  是辛流形  $(G \times \mathfrak{g}^*, \tilde{\omega})$  上关于哈密顿量  $H \in C^\infty(G \times \mathfrak{g}^*)$  的哈密顿向量场, 记  $X_H$  在点  $(a, \mu) \in G \times \mathfrak{g}^*$  处的取值为  $X_H|_{(a,\mu)} = (A, \rho)$ , 其中  $A \in T_a G$ ,  $\rho \in T_\mu \mathfrak{g}^*$ , 则成立

$$\begin{aligned} A &= (dH_a)_\mu \\ \rho &= -A \lrcorner d\mu - (dH_\mu)_a, \end{aligned} \quad (3.32)$$

其中  $H_a: \mu \mapsto H(a, \mu)$  是  $\mathfrak{g}^*$  上的光滑函数,  $H_\mu: a \mapsto H(a, \mu)$  是  $G$  上的光滑函数, 并且  $(dH_a)_\mu \in T_\mu^* \mathfrak{g}^* \cong (\mathfrak{g}^*)^* \cong \mathfrak{g} \cong T_a G$ , 即将  $(dH_a)_\mu$  自然视为  $G$  在点  $a$  处的切向量.

证明. 由哈密顿向量场的定义(3.1)可知对任意  $Y \in T_a G$ ,  $\beta \in T_\mu \mathfrak{g}^*$  都有

$$\begin{aligned} \tilde{\omega}_{(a,\mu)}((A, \rho), (Y, \beta)) &= (dH)_{(a,\mu)}(Y, \beta) = (Y, \beta)H \\ &= Y(H_\mu) + \beta(H_a) = (dH_\mu)_a(Y) + (dH_a)_\mu(\beta). \end{aligned}$$

另一方面, 再结合(3.31)式, 可得

$$\beta(A) - \rho(Y) - d\mu(A, Y) = (dH_\mu)_a(Y) + (dH_a)_\mu(\beta)$$

对任意  $Y \in T_a G$ ,  $\beta \in T_\mu \mathfrak{g}^*$  都成立. 在此令  $Y = 0$ , 并注意  $\beta$  的任意性可得  $A = (dH_a)_\mu$ ; 之后令  $\beta = 0$  并注意  $Y$  的任意性容易得到  $\rho = -A \lrcorner d\mu - (dH_\mu)_a$ , 得证.  $\square$

## 3.2 泊松括号 (II)

我们早在(0.16)式就已经引入泊松括号的概念. 容易将此概念推广到一般的辛流形上.

### 3.2.1 泊松括号的基本性质

**定义 3.22.** 对于辛流形  $(M, \omega)$ , 定义映射  $\{, \}: C^\infty(M) \times C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$  如下:

$$\{f, g\} := \omega(X_f, X_g), \quad \forall f, g \in C^\infty(M), \quad (3.33)$$

其中  $X_f, X_g$  分别为  $f, g$  的哈密顿向量场.

容易看出  $\{, \}$  是  $\mathbb{R}$ -双线性的, 并且具有反对称性  $\{f, g\} = -\{g, f\}$ . 有哈密顿向量场的定义还容易得到

$$\{f, g\} = -X_f(g) = X_g(f). \quad (3.34)$$

特别地, 在哈密顿系统  $(M, \omega, H)$  中, 物理量  $f \in C^\infty(M)$  随时间 (即沿哈密顿向量场  $\frac{d}{dt} := X_H$ ) 的演化方程可改写为

$$\frac{df}{dt} = \{f, H\}. \quad (3.35)$$

若  $\{f, H\} = 0$ , 则称  $f$  是哈密顿系统  $(M, \omega, H)$  的一个守恒量, 也叫做运动积分或者首次积分.

**性质 3.23.** 设  $f, g$  为辛流形  $(M, \omega)$  上的光滑函数, 则

$$X_{\{f, g\}} = -[X_f, X_g]. \quad (3.36)$$

特别地,  $\text{Ham}(M)$  关于向量场李括号运算构成李代数, 且是  $\text{Ham}^\circ(M)$  的李子代数.

证明. 任意取定光滑切向量场  $Y \in \text{Vect}(M)$ , 则

$$(X_{\{f, g\}} \lrcorner \omega)(Y) = (d\{f, g\})(Y) = Y(\{f, g\}). \quad (3.37)$$

而由 Cartan 公式(2.23)与外微分公式(2.34), 并注意  $d\omega = 0$  以及(3.34)等关系, 直接计算得

$$Y(\{f, g\}) = \mathcal{L}_Y(\omega(X_f, X_g))$$

$$\begin{aligned}
&= (\mathcal{L}_Y \omega)(X_f, X_g) + \omega([Y, X_f], X_g) + \omega(X_f, [Y, X_g]) \\
&= (d(Y \lrcorner \omega))(X_f, X_g) - [Y, X_f](g) + [Y, X_g](f) \\
&= X_f(\omega(Y, X_g)) - X_g(\omega(Y, X_f)) - \omega(Y, [X_f, X_g]) \\
&\quad - [Y, X_f](g) + [Y, X_g](f) \\
&= -X_f(Y(g)) + X_g(Y(f)) + ([X_f, X_g] \lrcorner \omega)(Y) \\
&\quad - [Y, X_f](g) + [Y, X_g](f) \\
&= ([X_f, X_g] \lrcorner \omega)(Y) - Y(X_f(g)) + Y(X_g(f)) \\
&= ([X_f, X_g] \lrcorner \omega)(Y) + 2Y(\{f, g\}),
\end{aligned}$$

对照上式最左边与最右边得  $Y(\{f, g\}) = (-[X_g, Y_g] \lrcorner \omega)(Y)$ . 再由(3.37)得

$$(X_{\{f, g\}} \lrcorner \omega)(Y) = (-[X_f, X_g] \lrcorner \omega)(Y).$$

注意上式中  $Y$  的任意性, 立刻得到  $X_{\{f, g\}} = -[X_f, X_g]$ . □

泊松括号具有如下基本性质:

**性质 3.24.** 设  $\{, \}$  是辛流形  $(M, \omega)$  上的泊松括号, 则对任意  $f, g, h \in C^\infty(M)$ ,

1.  $\{, \}$  是反对称的双线性映射;
2. (Jacobi 恒等式).  $\{\{f, g\}, h\} + \{\{g, h\}, f\} + \{\{h, f\}, g\} = 0$ ;
3. (Leibniz 法则).  $\{f, gh\} = \{f, g\}h + g\{f, h\}$ .

证明. (1) 易证; 由于  $\{f, gh\} = -X_f(gh) = -X_f(g)h - gX_f(h) = \{f, g\}h + g\{f, h\}$ , 从而 (3) 成立. 又由(3.36)式得

$$\begin{aligned}
\{\{f, g\}, h\} &= -X_{\{f, g\}}h = [X_f, X_g](h) \\
&= X_f(X_g(h)) - X_g(X_f(h)) = \{f, \{g, h\}\} - \{g, \{f, h\}\},
\end{aligned}$$

从而易知 (2) 成立. 证毕. □

上述性质的 (3) 表明, 对任意函数  $f$ , 映射  $g \mapsto \{f, g\}$  是关于函数通常乘法运算的导子, 即满足类似乘积求导的运算性质; 而 (2) 表明  $g \mapsto \{f, g\}$  是关于函数泊松括号运算的导子, 因为 Jacobi 恒等式可改写为

$$\{f, \{g, h\}\} = \{\{f, g\}, h\} + \{g, \{f, h\}\}.$$

此外, (1)(2) 还表明  $(C^\infty(M), \{, \})$  是李代数.

**注 3.25.** 性质 3.23 与性质 3.24 表明, 基本正合列

$$0 \rightarrow \mathbb{R} \rightarrow C^\infty(M) \xrightarrow{j} \text{Ham}(M) \rightarrow 0, \quad (3.38)$$

是李代数同态的正合列. (仔细与前文注 3.11 对比).

本小节最后, 我们用哈密顿算子 (见注 3.4) 的语言给出泊松括号在局部坐标下的表达式.

**性质 3.26.** 在辛流形  $(M, \omega)$  的局部坐标  $(x^1, \dots, x^m)$  下, 记  $\omega$  的系数矩阵  $\Omega = (\omega_{ij})$ ,  $\mathcal{P} := -\Omega^{-1}$  为相应的哈密顿算子. 则对于  $f, g \in C^\infty(M)$ , 成立

$$\{f, g\} = (\text{Jac } f) \mathcal{P} (\text{Jac } g)^T, \quad (3.39)$$

其中  $\text{Jac}: f \mapsto \left( \frac{\partial f}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x^m} \right)$  为函数的 Jacobi 矩阵. 特别地,

$$\{x^i, x^j\} = \mathcal{P}^{ij} \quad 1 \leq i, j \leq n. \quad (3.40)$$

证明. 将 (3.2) 改写为  $X_f = \mathcal{P}(\text{Jac } f)^T$ , 注意这里将  $X_f$  等同于其局部坐标分量排成的列向量. 再注意  $\mathcal{P}^T = -\mathcal{P}$ , 从而

$$\begin{aligned} \{f, g\} &= \omega(X_f, X_g) = X_f^T \Omega X_g \\ &= (\text{Jac } f) \mathcal{P}^T \Omega \mathcal{P} (\text{Jac } g)^T = (\text{Jac } f) \mathcal{P} (\text{Jac } g)^T, \end{aligned}$$

命题得证. □

**例 3.27.** 设  $M$  为光滑流形, 取定局部坐标  $(q^1, \dots, q^n)$ , 则余切丛  $T^*M$  具有典范坐标  $(q^1, \dots, q^n; p_1, \dots, p_n)$  使得典范辛结构在该坐标下为

$$\omega = \sum_{i=1}^n dq^i \wedge dp_i.$$



此时, 坐标函数  $p_i, q^j$  的泊松括号为

$$\{q^i, q^j\} = \{p_i, p_j\} = 0, \quad \{q^i, p_j\} = \delta_j^i. \quad (3.41)$$

与性质3.6类似, 也可从泊松括号的角度给出辛同胚的一个充要条件:

**题 3.28.** 设  $(M, \omega), (M', \omega')$  为辛流形,  $f: M \rightarrow M'$  为微分同胚. 则  $f$  为辛同胚当且仅当对任意  $H, K \in C^\infty(M')$  都成立

$$\{f^*H, f^*K\} = f^*\{H, K\}.$$

证明. 留给读者练习. 要充分利用泊松括号的定义以及性质3.6. □

### 3.2.2 泊松 2-向量场

辛流形  $(M, \omega)$  上的泊松括号  $\{, \}$  满足性质3.24的 (1)(3), 这表明泊松括号其实应该是流形上的某种张量场. 事实确实如此, 它属于多重向量场 (poly-vector field).

**定义 3.29.** 设  $M$  是  $n$  维光滑流形,  $p \geq 0$ , 则称

$$\mathbf{PV}^p(M) := \Gamma(M, \bigwedge^p TM) \quad (3.42)$$

中的元素为  $M$  上的  $p$ -向量场.

换言之,  $p$ -向量场是指切丛的  $p$  次外积丛的光滑截面. 根据定义可知,  $\mathbf{PV}^0(M) = C^\infty(M)$ ,  $\mathbf{PV}^1(M) = \mathbf{Vect}(M)$ , 其中元素分别是光滑函数与通常的切向量场. 而在局部坐标  $(x^1, \dots, x^m)$  下,  $p$ -向量场  $P \in \mathbf{PV}^p(M)$  的一般表达式形如

$$P = P^{i_1 i_2 \dots i_p} \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \wedge \frac{\partial}{\partial x^{i_2}} \wedge \dots \wedge \frac{\partial}{\partial x^{i_p}}.$$

$p$ -向量场与  $p$ -微分形式之间有自然的配对; 而对于  $p \geq q$ ,  $p$ -向量场与  $q$ -微分形式可以缩并, 缩并后得到  $(p-q)$ -向量场. 具体地, 对于  $P \in \mathbf{PV}^p(M)$  以及  $\alpha \in \Omega^q(M)$ , 则  $\alpha \lrcorner P \in \mathbf{PV}^{p-q}(M)$  由下式所定义:

$$(\alpha \lrcorner P)(\beta) := P(\alpha \wedge \beta), \quad \forall \beta \in \Omega^{p-q}(M). \quad (3.43)$$

我们也可以向右缩并, 定义  $P \lrcorner \alpha \in \mathbf{PV}^{p-q}(M)$  如下:

$$(P \lrcorner \alpha)(\beta) := P(\beta \wedge \alpha), \quad \forall \beta \in \Omega^{p-q}(M). \quad (3.44)$$

而在辛流形中, 由泊松括号的性质3.24中的 (1)(3), 结合  $p$ -向量场的定义, 不难看出泊松括号其实就是一个 2-向量场:

**性质 3.30.** 设  $(M, \omega)$  是辛流形, 则存在唯一的  $\Pi \in \mathbf{PV}^2(M)$  使得辛结构  $\omega$  所诱导的泊松括号  $\{, \}$  满足如下性质:

$$\{f, g\} = \Pi(df, dg), \quad \forall f, g \in C^\infty(M). \quad (3.45)$$

上述 2-向量场  $\Pi$  称为辛流形  $(M, \omega)$  的**泊松结构** (也可以叫做**哈密顿结构**), 我们往往不加声明地把它与泊松括号  $\{, \}$  等同. 易知  $\Pi$  在局部坐标  $(x^1, \dots, x^m)$  下的表达式为

$$\Pi = \sum_{i < j} \mathcal{P}^{ij} \frac{\partial}{\partial x^i} \wedge \frac{\partial}{\partial x^j} = \frac{1}{2} \mathcal{P}^{ij} \frac{\partial}{\partial x^i} \wedge \frac{\partial}{\partial x^j}, \quad (3.46)$$

其中  $\mathcal{P}^{ij}$  恰为哈密顿算子(3.3)的系数.

哈密顿向量场与泊松 2-向量场的关系如下:

**性质 3.31.** 设  $\Pi \in \mathbf{PV}^2(M)$  为辛流形  $(M, \omega)$  的泊松结构, 则对任意  $f \in C^\infty(M)$ , 哈密顿向量场  $X_f$  满足

$$X_f = \Pi \lrcorner df. \quad (3.47)$$

证明. 对任意  $g \in C^\infty(M)$ , 直接验证得

$$(\Pi \lrcorner df)(g) = \Pi(dg, df) = \{g, f\} = X_f(g),$$

从而由  $g$  的任意性立刻得到  $\Pi \lrcorner df = X_f$ , 命题得证.  $\square$

**注 3.32.** 泊松括号一定是某个 2-向量场; 反之, 对任意  $\Pi \in \mathbf{PV}^2(M)$ , 用(3.45)式也能定义出一个括号  $\{, \}$ , 并且如此定义的括号自动满足性质3.24的 (1)(3), 但一般未必满足 (2), 即 Jacobi 恒等式.

这是因为, 对于 2-向量场  $\Pi = \frac{1}{2} \mathcal{P}^{ij} \frac{\partial}{\partial x^i} \wedge \frac{\partial}{\partial x^j}$ , 局部坐标直接计算可知其诱导的括号  $\{, \}$  满足 **Jacobi** 恒等式当且仅当

$$\frac{\partial \mathcal{P}^{ij}}{\partial x^s} \mathcal{P}^{sk} + \frac{\partial \mathcal{P}^{jk}}{\partial x^s} \mathcal{P}^{si} + \frac{\partial \mathcal{P}^{ki}}{\partial x^s} \mathcal{P}^{sj} = 0, \quad (3.48)$$

而这并非平凡成立.

### 3.2.3 Schouten-Nijenhuis 括号

光滑流形的向量场有众所周知的李括号运算

$$\begin{aligned} [, ]: \text{Vect}(M) \times \text{Vect}(M) &\rightarrow \text{Vect}(M) \\ (X, Y) &\mapsto [X, Y] = \mathcal{L}_X Y, \end{aligned}$$

这种李括号可以自然地延拓到多重向量场  $\text{PV}^\bullet(M) := \bigoplus_{p \geq 0} \text{PV}^p(M)$  上.

**定理 3.33.** 设  $M$  是光滑流形, 则唯一的  $\mathbb{R}$ -双线性映射

$$[, ]: \text{PV}^\bullet(M) \times \text{PV}^\bullet(M) \rightarrow \text{PV}^\bullet(M), \quad (3.49)$$

使得对任意  $P \in \text{PV}^p(M)$ ,  $Q \in \text{PV}^q(M)$ ,  $R \in \text{PV}^r(M)$  都成立:

1.  $[P, Q] \in \text{PV}^{p+q-1}(M)$ . 特别规定当  $p = q = 0$  时  $[P, Q] = 0$ ;
2. 对任意  $X \in \text{Vect}(M)$ ,  $[X, P] = \mathcal{L}_X P$ ;
3.  $[P, Q] = -(-1)^{(p-1)(q-1)}[Q, P]$ ;
4.  $[P, Q \wedge R] = [P, Q] \wedge R + (-1)^{(p-1)q} Q \wedge [P, R]$ .

满足上述性质的括号称为 **Schouten-Nijenhuis** 括号.

可见当  $P, Q \in \text{PV}^1(M) = \text{Vect}(M)$  时, Schouten-Nijenhuis 括号  $[P, Q]$  恰为通常的李括号; 而对于  $P \in \text{Vect}(M)$ ,  $f \in C^\infty(M)$ , 有  $[P, f] = P(f)$ .

证明. 先证明  $[, ]$  的唯一性. 对  $p, q$  用数学归纳法, 反复使用上述 4 条运算法则可以验证对任意  $X_1, \dots, X_p; Y_1, \dots, Y_q \in \text{Vect}(M)$  都有

$$[X_1 \wedge X_2 \wedge \dots \wedge X_p, Y_1 \wedge Y_2 \wedge \dots \wedge Y_q]$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q (-1)^{i+j} [X_i, Y_j] \wedge (X_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{X}_i \wedge \cdots \wedge X_p) \\
&\quad \wedge (Y_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{Y}_j \wedge \cdots \wedge Y_q), \tag{3.50}
\end{aligned}$$

这将  $[\cdot, \cdot]$  唯一确定. 至于存在性, 则需要验证上述 4 条运算法则无矛盾, 其证明较为枯燥, 故从略. 感兴趣者可参考 [10], [27] 等文献.  $\square$

**注 3.34.** Schouten-Nijenhuis 括号有多种不同版本的定义, 其区别在于采用不同的正负号约定, 例如在 [25], [42] 等文献中规定  $[P, Q] = (-1)^{pq}[Q, P]$ .

**题 3.35.** 由定理 3.33 中的运算法则 (3)(4) 直接验证

$$[Q \wedge R, P] = Q \wedge [R, P] + (-1)^{r(p-1)}[[Q, P], R] \tag{3.51}$$

对任意  $P \in \text{PV}^p(M)$ ,  $Q \in \text{PV}^q(M)$ ,  $R \in \text{PV}^r(M)$  都成立.

而对于 2-向量场  $\Pi \in \text{PV}^2(M)$ , 本小节的主要结论为:

**定理 3.36.** 设  $\Pi$  为光滑流形  $M$  上的 2-向量场, 则  $\Pi$  所诱导的括号  $\{\cdot, \cdot\}$  (见注 3.32) 满足 *Jacobi* 恒等式当且仅当

$$[\Pi, \Pi] = 0. \tag{3.52}$$

证明. 任取局部坐标  $(x^1, \dots, x^n)$ , 在此坐标下记  $\Pi = \frac{1}{2} \mathcal{P}^{ij} \frac{\partial}{\partial x^i} \wedge \frac{\partial}{\partial x^j}$ , 不妨系数矩阵  $\mathcal{P} = (\mathcal{P}^{ij})$  反对称. 则由显式表达式 (3.50) 直接计算可得

$$\begin{aligned}
[\Pi, \Pi] &= \frac{1}{4} \left[ \mathcal{P}^{ij} \frac{\partial}{\partial x^i} \wedge \frac{\partial}{\partial x^j}, \mathcal{P}^{kl} \frac{\partial}{\partial x^k} \wedge \frac{\partial}{\partial x^l} \right] \\
&= \frac{1}{4} \left( \left[ \mathcal{P}^{ij} \frac{\partial}{\partial x^i}, \mathcal{P}^{kl} \frac{\partial}{\partial x^k} \right] \wedge \frac{\partial}{\partial x^j} \wedge \frac{\partial}{\partial x^l} \right. \\
&\quad - \left[ \mathcal{P}^{ij} \frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^l} \right] \wedge \frac{\partial}{\partial x^j} \wedge \mathcal{P}^{kl} \frac{\partial}{\partial x^k} \\
&\quad \left. - \left[ \frac{\partial}{\partial x^j}, \mathcal{P}^{kl} \frac{\partial}{\partial x^k} \right] \wedge \mathcal{P}^{ij} \frac{\partial}{\partial x^i} \wedge \frac{\partial}{\partial x^l} \right) \\
&= -\frac{1}{2} \left( \frac{\partial \mathcal{P}^{ij}}{\partial x^s} \mathcal{P}^{sk} - \frac{\partial \mathcal{P}^{ik}}{\partial x^s} \mathcal{P}^{sj} \right) \frac{\partial}{\partial x^i} \wedge \frac{\partial}{\partial x^j} \wedge \frac{\partial}{\partial x^k}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{\partial \mathcal{P}^{ij}}{\partial x^s} \mathcal{P}^{sk} \frac{\partial}{\partial x^i} \wedge \frac{\partial}{\partial x^j} \wedge \frac{\partial}{\partial x^k} \\
&= -2 \sum_{i < j < k} \left( \frac{\partial \mathcal{P}^{ij}}{\partial x^s} \mathcal{P}^{sk} + \frac{\partial \mathcal{P}^{jk}}{\partial x^s} \mathcal{P}^{si} + \frac{\partial \mathcal{P}^{ki}}{\partial x^s} \mathcal{P}^{sj} \right) \frac{\partial}{\partial x^i} \wedge \frac{\partial}{\partial x^j} \wedge \frac{\partial}{\partial x^k}.
\end{aligned}$$

可见  $[\Pi, \Pi] = 0$  当且仅当(3.48)成立, 从而当且仅当其诱导的括号  $\{, \}$  满足 Jacobi 恒等式, 定理得证.  $\square$

此外, 也可以用也可用 Schouten-Nijenhuis 括号的语言给出哈密顿向量场 (3.1)(3.2)(3.47) 的又一等价定义:

**性质 3.37.** 设  $\Pi \in \text{PV}^2(M)$  是辛流形  $(M, \omega)$  的泊松结构, 则对任意光滑函数  $f \in C^\infty(M)$  都成立

$$X_f = [\Pi, f]. \quad (3.53)$$

证明. 在局部坐标  $(x^1, x^2, \dots, x^n)$  下记  $\Pi = \frac{1}{2} \mathcal{P}^{ij} \frac{\partial}{\partial x^i} \wedge \frac{\partial}{\partial x^j}$ , 则

$$\begin{aligned}
[\Pi, f] &= \left[ \frac{1}{2} \mathcal{P}^{ij} \frac{\partial}{\partial x^i} \wedge \frac{\partial}{\partial x^j}, f \right] = \frac{1}{2} \mathcal{P}^{ij} \left( \frac{\partial}{\partial x^i} \cdot \frac{\partial f}{\partial x^j} - \frac{\partial f}{\partial x^i} \cdot \frac{\partial}{\partial x^j} \right) \\
&= \mathcal{P}^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^j} \frac{\partial}{\partial x^i} = X_f,
\end{aligned}$$

从而得证.  $\square$

本小节最后, 我们再补充一些 Schouten-Nijenhuis 括号的基本性质. 定理(3.33)中的运算法则 (3)(4) 分别被称为 **超反对称性**, **超 Leibniz 法则**, 这里的“超”字可暂时地粗俗理解为表达式中所含  $(-1)$  的幂次. 与通常李括号类似, 一般的 Schouten-Nijenhuis 括号满足如下**超 Jacobi 恒等式**:

**题 3.38.** 对于光滑流形  $M$  以及  $p, q, r \geq 0$ , 则

$$(-1)^{(p-1)(r-1)}[P, [Q, R]] + (-1)^{(q-1)(p-1)}[Q, [R, P]] + (-1)^{(r-1)(q-1)}[R, [P, Q]] = 0 \quad (3.54)$$

对任意  $P \in \text{PV}^p(M)$ ,  $Q \in \text{PV}^q(M)$ ,  $R \in \text{PV}^r(M)$  都成立.

[提示: 这个题的验证过程不重要, 且太枯燥, 建议跳过并且承认此结论. 对于时间充足想消磨时间的读者, 可以直接用(3.50)式暴力验证(不推荐), 而对  $p+q+r$  归纳是更佳的做法.]

**注 3.39.** 容易验证超 Jacobi 恒等式(3.54)可改写为

$$[P, [Q, R]] = [[P, Q], R] + (-1)^{(p-1)(q-1)}[Q, [P, R]]. \quad (3.55)$$

若记  $\mathcal{L}_P: \text{PV}^q(M) \rightarrow \text{PV}^{q+p-1}(M)$ ,  $Q \mapsto [P, Q]$ , 则(3.55)表明  $\mathcal{L}_P$  是关于“乘法”运算  $[\cdot]$  的“超导子”; 而前文提到的超 Leibnitz 法则表明  $\mathcal{L}_P$  是关于“乘法”运算  $\wedge$  的“超导子”. 此外, (3.55)式还可写为更紧凑的形式:

$$\mathcal{L}_{[P, Q]} = \mathcal{L}_P \circ \mathcal{L}_Q - (-1)^{(p-1)(q-1)} \mathcal{L}_Q \circ \mathcal{L}_P. \quad (3.56)$$

### 3.2.4 泊松流形及其基本例子

我们可以脱离辛结构而谈论更一般的泊松结构.

**定义 3.40.** 设  $M$  是光滑流形,  $\Pi \in \text{PV}^2(M)$ , 如果  $[\Pi, \Pi] = 0$ , 则称  $\Pi$  是  $M$  的泊松结构 (或哈密顿结构); 此时称  $(M, \Pi)$  为泊松流形.

通过(3.45)式, 泊松结构  $\Pi$  可等价地表示为相应的泊松括号  $\{\cdot, \cdot\}$ . 泊松结构在局部坐标  $(x^1, \dots, x^m)$  下的表达式形如(3.46), 这里  $\mathcal{P} = (\mathcal{P}^{ij})$  为相应的哈密顿算子; 相应的泊松括号满足  $\{x^i, x^j\} = \mathcal{P}^{ij}$ .

对任意  $H \in C^\infty(M)$ , 由(3.53)可以给出相应的哈密顿向量场  $X_H$ ; 将沿哈密顿向量场的流视为系统随时间的演化, 相应的哈密顿方程同(3.35); 此时称三元组  $(M, \Pi, H)$  为哈密顿系统. 这是哈密顿系统的“真正”定义, 辛流形的情形 (见3.1节开头) 是其特殊情况.

对于泊松流形  $(M, \Pi)$ , 也可像3.1.2小节一样类似定义

$$\text{Ham}(M, \Pi) := \{X \in \text{Vect}(M) \mid \exists H \in C^\infty(M), X = [\Pi, H]\},$$

$$\text{Ham}^\circ(M, \Pi) := \{X \in \text{Vect}(M) \mid [\Pi, X] = 0\},$$

其中元素分别称为哈密顿向量场与局部哈密顿向量场 (或泊松向量场). 由 Schouten-Nijenhuis 括号的运算性质(3.54)易知  $\text{Ham}(M, \Pi) \subseteq \text{Ham}^\circ(M, \Pi)$ . 此外, 若泊松结构  $\Pi$  来自于辛结构  $\omega$ , 则可以验证上述定义等价于前文的定义3.7(留给读者练习).

自然地, 也可定义泊松流形之间的态射:

**定义 3.41.** 对于泊松流形  $M, N$  之间的光滑映射  $\Phi: M \rightarrow N$ , 如果对任意  $f, g \in C^\infty(N)$  都有

$$\Phi^*\{f, g\} = \{\Phi^*f, \Phi^*g\},$$

则称  $\Phi$  为泊松映射.

我们目前最熟悉的例子应该是辛结构诱导的泊松结构:

**例 3.42.** 设  $(M, \omega)$  为辛流形, 则辛结构  $\omega$  自然诱导泊松结构  $\Pi$ , 使得相应的泊松括号形如(3.33), 从而  $(M, \Pi)$  为泊松流形.

但反过来, 泊松结构未必来自于辛结构. 在局部坐标下, 我们回忆  $(\mathcal{P}^{ij}) = -(\omega^{ij})^{-1}$ ; 因此泊松结构由辛结构所诱导当且仅当其系数矩阵 (哈密顿算子) 可逆. 可见泊松流形是辛流形的推广. 对泊松流形的系统研究构成一个专门的数学分支, 即所谓泊松几何. 其内容超出本讲义范围, 感兴趣者可参考 [10], [42] 等教材. 限于篇幅, 本小节接下来只简要介绍泊松流形的基本例子, 而在后续章节将重新回到辛流形的主线内容.

**例 3.43.** (平凡泊松结构) 对于任意光滑流形  $M$ , 取  $\Pi = 0 \in \mathcal{P}V^2(M)$ , 则  $(M, \Pi)$  是泊松流形.

我们回忆, 辛流形都是偶数维, 可定向, 偶数阶上同调群非平凡的流形 (见 2.1.1 小节); 然而泊松流形就没有这些拓扑限制, 任何流形都可以成为泊松流形 (至少总有上述平凡泊松结构).

接下来考虑线性空间  $V = \mathbb{R}^m$  上的泊松结构 (以及相应的泊松括号). 我们将  $V$  上的线性函数之全体, 即  $V^*$ , 自然视为  $C^\infty(V)$  的子空间, 即

$$V^* \subseteq C^\infty(V).$$

此外,  $V$  上的泊松括号  $\{, \}$  被它在线性函数空间上的限制  $\{, \}|_{V^* \times V^*}$  所唯一确定. 这是因为, 任取  $V$  的一组基  $\{e_i\}$ , 记相应的坐标函数为  $\{x^i\}$ , 由泊松括号的运算性质可知在局部坐标  $(x^1, \dots, x^m)$  下成立

$$\{f, g\} = \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial g}{\partial x^j} \{x^i, x^j\}, \quad \forall f, g \in C^\infty(V). \quad (3.57)$$

因此  $\{, \}$  被线性函数之间的泊松括号  $\{x^i, x^j\}$  所唯一确定.

**例 3.44.**(常系数泊松结构) 对任意  $m$  阶反对称矩阵  $(c^{ij}) \in \mathbb{R}^{m \times m}$ , 都有  $V = \mathbb{R}^m$  上的泊松括号

$$\{x^i, x^j\} = c^{ij}.$$

相应的 2-向量  $\Pi = \frac{1}{2} c^{ij} \frac{\partial}{\partial x^i} \wedge \frac{\partial}{\partial x^j}$ . 容易验证 (但必须要验证)  $[\Pi, \Pi] = 0$ , 从而这确实是泊松结构.

**例 3.45.**(线性泊松结构) 对于线性空间  $V = \mathbb{R}^m$  上的泊松括号  $\{, \}$ , 如果对任意  $\lambda, \mu \in V^*$  都有  $\{\lambda, \mu\} \in V^*$ , 则称  $\{, \}$  为线性泊松括号, 相应的泊松结构  $\Pi$  为线性泊松结构.

在关于  $V$  的某组基的局部坐标  $(x^1, \dots, x^m)$  下, 线性泊松括号形如

$$\{x^i, x^j\} = c_k^{ij} x^k, \quad (3.58)$$

其中  $c_k^{ij}$  为常数. 由定义可知, 线性泊松括号  $\{, \}$  自然给出  $V^*$  上的  $\mathbb{R}$ -代数结构

$$\{, \}: V^* \times V^* \rightarrow V^*.$$

而泊松括号的反对称性与 Jacobi 恒等式意味着  $(V^*, \{, \})$  是李代数, 此时局部表达式(3.58)中的  $c_k^{ij}$  是该李代数相应的结构常数. 反之,  $V^*$  的李代数结构也自然给出  $V$  上的线性泊松结构. 因此有如下自然的一一对应:

$$\{V \text{ 上的线性泊松结构}\} \cong \{V^* \text{ 上的李代数结构}\}. \quad (3.59)$$

正因如此, 线性泊松结构也被称为李-泊松结构.

**题 3.46.** 设  $(\mathfrak{g}, [,])$  是有限维  $\mathbb{R}$ -李代数, 记  $\{, \}$  为  $V := \mathfrak{g}^*$  的李-泊松括号, 并且记映射

$$\text{ev}: \mathfrak{g} \xrightarrow{\sim} (\mathfrak{g}^*)^* \subseteq C^\infty(\mathfrak{g}^*).$$

1. 证明: 对任意  $X, Y \in \mathfrak{g}$ , 成立

$$\{\text{ev}(X), \text{ev}(Y)\} = \text{ev}([X, Y]);$$

2. 证明: 对任意  $f, g \in C^\infty(\mathfrak{g}^*)$  以及  $\xi \in \mathfrak{g}^*$ , 成立

$$\{f, g\}(\xi) = \langle \xi, [d_\xi f, d_\xi g] \rangle, \quad (3.60)$$



其中  $\langle, \rangle$  是  $\mathfrak{g}$  与  $\mathfrak{g}^*$  的配对, 并且  $d_\xi: C^\infty(\mathfrak{g}^*) \rightarrow \mathfrak{g}$  是如下若干映射的复合:

$$C^\infty(\mathfrak{g}^*) \xrightarrow{d} \Omega^1(\mathfrak{g}^*) \xrightarrow{\text{ev}_\xi} T_\xi^* \mathfrak{g}^* \cong (\mathfrak{g}^*)^* \cong \mathfrak{g}.$$

[提示: 可以考虑在局部坐标下直接验证, 留给读者.]

自然可以谈论  $\mathfrak{g}^*$  上的哈密顿向量场. 记号承上, 考虑复合映射

$$\mathcal{A}: \mathfrak{g} \xrightarrow{\text{ev}} C^\infty(\mathfrak{g}^*) \xrightarrow{[\Pi, \cdot]} \text{Vect}(\mathfrak{g}^*),$$

其中  $[\Pi, \cdot]: f \mapsto [\Pi, f]$  将函数  $f$  映为关于李-泊松结构  $\Pi$  的哈密顿向量场.

**题 3.47.** 记号承上, 则对任意  $X \in \mathfrak{g}$  以及  $\xi \in \mathfrak{g}^*$ , 则在  $T_\xi \mathfrak{g}^* \cong \mathfrak{g}^*$  中成立

$$\mathcal{A}(X)|_\xi = \text{ad}_X^* \xi,$$

其中  $\text{ad}^*: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}^*)$  是李代数  $\mathfrak{g}$  在  $\mathfrak{g}^*$  上的余伴随表示.

[提示: 我们曾在 2.4 节研究过余伴随表示. 至于李代数的余伴随表示, 无非是伴随表示的对偶表示, 其定义为

$$\langle \text{ad}_X^* \xi, Y \rangle := -\langle \xi, [X, Y] \rangle,$$

其中  $X, Y \in \mathfrak{g}$  以及  $\xi \in \mathfrak{g}^*$ . ]

证明. 取定  $\mathfrak{g}$  的一组基  $\{e^i\}$ , 记  $\mathfrak{g}^*$  在对偶基  $\{e_i^*\}$  下的局部坐标为  $\{x^i\}$ , 则  $\text{ev}(e^i) = x^i$ . 再记李代数  $\mathfrak{g}$  在基  $\{e^i\}$  下的结构常数为  $[e^i, e^j] = c_k^{ij} e^k$ . 则容易验证  $\mathcal{A}(e^i) = -c_k^{ij} x^k \frac{\partial}{\partial x^j}$ , 从而对于  $\xi = \xi^i e_i^* \in \mathfrak{g}^*$  有

$$\mathcal{A}(e^i)|_\xi = -c_k^{ij} \xi^k e_j^* \in \mathfrak{g}^*,$$

于是  $\langle \mathcal{A}(e^i)|_\xi, e^j \rangle = -c_k^{ij} \xi^k = -\langle [e^i, e^j], \xi \rangle$ , 这表明  $\mathcal{A}(e^i)|_\xi = \text{ad}_{e^i}^* \xi$ . 从而得证.  $\square$

**题 3.48.** 接上题, 则泊松流形  $(\mathfrak{g}^*, \{\cdot, \cdot\})$  上的关于哈密顿量  $H \in C^\infty(\mathfrak{g}^*)$  的演化方程为

$$\frac{d\xi}{dt} = \text{ad}_{d_\xi H}^* \xi, \quad (3.61)$$

这里  $t \mapsto \xi := \xi(t)$  是  $\mathfrak{g}^*$  上的曲线.

证明. 事实上, 对一般的  $f \in C^\infty(\mathfrak{g}^*)$  以及  $\xi \in \mathfrak{g}^*$  都有

$$\left. \frac{df}{dt} \right|_\xi = \{f, H\}|_\xi = \langle \xi, [d_\xi f, d_\xi H] \rangle = \left\langle \text{ad}_{d_\xi H}^* \xi, d_\xi f \right\rangle,$$

从而沿哈密顿向量场  $X_H$  的积分曲线  $t \mapsto \xi(t)$  满足(3.61)式, 得证.  $\square$

**注 3.49.** 回忆  $\mathfrak{g}^*$  上的余伴随轨道 (见前文 2.4.5 小节). 由方程(3.61)可以直接看出,  $\mathfrak{g}^*$  上的关于李-泊松结构的哈密顿演化曲线  $t \mapsto \xi(t)$  一定落在  $\mathfrak{g}^*$  的某个余伴随轨道内.

我们再来欣赏李-泊松括号的一个具体例子:

**题 3.50.**(欧拉陀螺). 考虑李代数  $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(3) := \{A \in \mathbb{R}^{3 \times 3} \mid A^T = -A\}$ , 则众所周知  $(\mathfrak{g}, [,]) \cong (\mathbb{R}^3, \times)$ , 即  $\mathbb{R}^3$  的外积运算构成的李代数. 记  $\{, \}$  为  $\mathfrak{g}^* \cong \mathbb{R}^3$  上相应的李-泊松括号.

1. 对任意  $f, g \in C^\infty(\mathfrak{g}^*) \cong C^\infty(\mathbb{R}^3)$ , 以及  $\mathbf{x} = (x, y, z) \in \mathfrak{g}^* \cong \mathbb{R}^3$ , 验证

$$\{f, g\}(\mathbf{x}) = (\nabla f(\mathbf{x}) \times \nabla g(\mathbf{x})) \cdot \mathbf{x} = \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} & \frac{\partial g}{\partial z} \\ x & y & z \end{vmatrix};$$

2. 对于如下哈密顿量  $H \in C^\infty(\mathfrak{g}^*) \cong C^\infty(\mathbb{R}^3)$

$$H(x, y, z) = \frac{x^2}{2I_x} + \frac{y^2}{2I_y} + \frac{z^2}{2I_z},$$

其中常数  $I_x, I_y, I_z > 0$ , 写出相应的哈密顿方程.

答案. 可以先直接写出李-泊松括号  $\{, \}$  的哈密顿算子  $\mathcal{P} = \begin{pmatrix} 0 & z & -y \\ -z & 0 & x \\ y & -x & 0 \end{pmatrix}$ ,

然后由(3.4)直接得到相应的哈密顿演化方程如下:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -\frac{I_y - I_z}{I_y I_z} yz, \\ \frac{dy}{dt} = -\frac{I_z - I_x}{I_z I_x} zx, \\ \frac{dz}{dt} = -\frac{I_x - I_y}{I_x I_y} xy. \end{cases}$$

此方程恰为自由刚体绕其质心定点转动的欧拉方程 (与物理学中习惯的形式相差负号), 描述了刚体角速度  $\boldsymbol{\omega} = (x, y, z)$  随时间的变化, 其中  $I_x, I_y, I_z$  是刚体的三个主转动惯量.  $\square$

此方程所描述的物理系统称为**欧拉陀螺**, 是经典力学中的重要例子. 关于它的讨论以及与之相关的结论十分丰富, 限于篇幅本讲义不更多介绍, 感兴趣者可参考 [7] 等教材.

既然有常系数泊松结构、线性泊松结构, 那么自然也会有“二次泊松结构”, 其系数  $\mathcal{P}^{ij}$  是关于线性局部坐标  $x^i$  的二次函数, 其一般形式为

$$\{x^i, x^j\} = c_{k\ell}^{ij} x^k x^\ell,$$

其中  $c_{k\ell}^{ij}$  为常数. 我们不打算讨论上述一般情形, 而只介绍如下特例:

**例 3.51.** 给定反对称矩阵  $\mathbf{A} = (a^{ij}) \in \mathbb{R}^{m \times m}$ , 则

$$\Pi_{\mathbf{A}} := \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^m a^{ij} x^i x^j \frac{\partial}{\partial x^i} \wedge \frac{\partial}{\partial x^j} \quad (3.62)$$

是  $\mathbb{R}^m$  上的泊松结构, 相应的泊松括号  $\{\cdot, \cdot\}_{\mathbf{A}}$  满足  $\{x^i, x^j\}_{\mathbf{A}} = a^{ij} x^i x^j$ .

[提示: 需要验证  $[\Pi, \Pi] = 0$ , 这依赖  $\mathbf{A}$  的反对称性. 细节留给读者.]

**题 3.52.**(Lotka-Volterra 方程) 给定反对称矩阵  $\mathbf{A} = (a^{ij}) \in \mathbb{R}^{m \times m}$ , 记  $\Pi_{\mathbf{A}}$  为  $\mathbb{R}^m$  的由(3.62)式所定义的泊松结构. 考虑流形

$$M := \{(x^1, \dots, x^m) \in \mathbb{R}^m \mid x^i > 0, i = 1, \dots, m\}.$$

给定常数  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ , 则关于  $(M, \Pi_{\mathbf{A}})$  上的哈密顿量

$$H := \sum_{i=1}^m (x^i - \lambda_i \log x^i)$$

的哈密顿方程为

$$\frac{dx^i}{dt} = \varepsilon^i x^i + \sum_{j=1}^m a^{ij} x^i x^j, \quad 1 \leq i \leq m, \quad (3.63)$$

其中  $\varepsilon^i := \lambda_j a^{ji}$ .

方程(3.63)是著名的 **Lotka-Volterra 方程**, 它描述了某生态系统中的  $m$  个物种的种群密度  $x^i$  随时间的变化. 常数  $\varepsilon^i$  描述了第  $i$  个物种的繁殖能力, 而  $a^{ij}$  描述了第  $i$  个物种与第  $j$  个物种的相互影响. 关于此生态系统模型的更多内容可见 [19].

### 3.2.5 辛叶

辛流形有自然泊松结构. 另一方面, 泊松流形虽然未必是辛流形, 但可以验证其某些的子流形有自然的辛结构, 并且这些辛子流形构成该泊松流形的叶状结构 (foliation), 这正是所谓辛叶.

**定义 3.53.** 对于泊松流形  $(M, \Pi)$  以及点  $p \in M$ , 记

$$D_p^\Pi := \Pi_\#(T_p^*M) := \{\Pi_\# \alpha \mid \alpha \in T_p^*M\} \subseteq T_pM,$$

则  $D^\Pi := \coprod_{p \in M} D_p^\Pi$  是  $M$  上的分布, 称为泊松结构  $\Pi$  的特征分布.

由(3.47)可知, 特征分布  $D^\Pi$  是由 (局部) 哈密顿向量场所张成的分布. 而 (局部) 哈密顿向量场关于李括号运算封闭, 因此由积分子流形的 Frobenius 定理可知, 特征分布  $D^\Pi$  是可积的, 相应的积分子流形总存在, 并且关于  $D^\Pi$  的极大积分子流形之全体给出了  $M$  的叶状结构.

特征分布  $D^\Pi$  的积分子流形具有自然的辛流形结构:

**定理 3.54.** 设  $N$  是泊松流形  $(M, \Pi)$  的关于特征分布  $D^\Pi$  的一个积分子流形, 则存在唯一的 2-形式  $\omega \in \Omega^2(N)$ , 使得  $(N, \omega)$  是辛流形, 并且自然嵌入映射  $(N, \omega) \hookrightarrow (M, \Pi)$  是泊松映射.

证明. 如果  $N$  上的非退化 2-形式  $\omega$  使得  $(N, \omega) \hookrightarrow (M, \Pi)$  是泊松映射, 则容易验证  $\omega$  只能如下选取: 对任意  $p \in N$  以及  $f, g \in C^\infty(M)$ ,

$$\omega_p(X_f, X_g) = \{f, g\}(p), \quad (3.64)$$

其中  $X_f, X_g$  分别是  $f, g$  的 (关于泊松结构  $\Pi$  的) 哈密顿向量场. 注意  $T_pN = D_p^\Pi$  恰由哈密顿向量场张成, 从而容易验证上式确实唯一确定了  $N$  上的一个 2-形式  $\omega$ , 并容易验证  $\omega$  非退化.

只需再验证(3.64)中的  $\omega$  是闭的. 由外微分公式(2.34)以及泊松括号的雅可比恒等式可知, 对任意  $f, g, h \in C^\infty(M)$  都有

$$\begin{aligned}
 & (d\omega)(X_f, X_g, X_h) \\
 &= X_f(\omega(X_g, X_h)) - X_g(\omega(X_f, X_h)) + X_h(\omega(X_f, X_g)) \\
 &\quad - \omega([X_f, X_g], X_h) + \omega([X_f, X_h], X_g) - \omega([X_g, X_h], X_f) \\
 &= -2(\{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\}) = 0,
 \end{aligned}$$

因此  $d\omega = 0$ , 定理得证.  $\square$

下面考察一些例子.

**例 3.55.**(平凡例子) 对于光滑流形  $M$ , 取平凡泊松结构  $\Pi = 0$ , 则  $D^\Pi$  的每个积分子流形都是独点集.

而接下来的例子非常重要, 将前文所介绍的余伴随轨道的辛结构 (定理2.81) 与李-泊松结构 (例3.45) 联系起来.

**例 3.56.**(李-泊松结构的辛叶) 设  $\mathfrak{g}$  是李群  $G$  的李代数,  $\Pi$  是  $\mathfrak{g}^*$  上的李-泊松结构,  $\xi \in \mathfrak{g}^*$ , 则由题3.48与注3.49可知, 特征分布  $D^\Pi$  满足

$$D_\xi^\Pi = \{\text{ad}_X^* \xi \mid X \in \mathfrak{g}\},$$

因此  $D^\Pi$  的过点  $\xi$  的极大积分子流形恰为余伴随轨道  $G^\# \xi$  (的连通分支).

我们记  $N := G^\# \xi$  为过点  $\xi \in \mathfrak{g}^*$  的辛叶 (余伴随轨道). 本节定理3.54给出了  $N$  上的一个辛结构, 记作  $\omega$ ; 然而, 作为余伴随轨道, 定理2.81也给出了  $N$  上的辛结构, 记作  $\tilde{\omega}$ . 自然要问: 这两个辛结构是否有联系?

为此, 我们先考察  $\omega$ . 对于  $X, Y \in T_\xi N = D_\xi^\Pi$ , 则 (局部) 存在  $\mathfrak{g}^*$  上的函数  $f, g$  使得

$$X = \text{ad}_{d_\xi f}^* \xi = X_f(\xi), \quad Y = \text{ad}_{d_\xi g}^* \xi = X_g(\xi), \quad (3.65)$$

其中  $d_\xi: C^\infty(\mathfrak{g}^*) \rightarrow \mathfrak{g}$  详见题3.46. 从而由(3.60)(3.64)可知

$$\omega_\xi(X, Y) = \{d_\xi f, d_\xi g\}(\xi) = \langle \xi, [d_\xi f, d_\xi g] \rangle. \quad (3.66)$$

而另一方面, 在余伴随轨道的角度, 我们回忆,  $\xi \in \mathfrak{g}^*$  诱导了李群作用  $G \rightarrow \mathfrak{g}^*, g \mapsto \text{Ad}_g^* \xi$ . 在此意义下, 余伴随轨道  $N = G^\# \xi \cong G/G_\xi$ , 其中  $G_\xi$  为

李群  $G$  的稳定子群. 记  $\pi_\xi: G \rightarrow G/G_\xi$  为商映射. 此外, 我们将点  $\xi \in \mathfrak{g}^*$  等同于李群  $G$  上的左不变 1-形式. 在此意义下, 余伴随轨道的辛结构  $\tilde{\omega}$  在点  $\xi \in \mathfrak{g}^*$  处的取值  $\tilde{\omega}_\xi$  由

$$\pi_\xi^*(\tilde{\omega}_\xi) = d\xi$$

唯一确定. 特别地, 在(3.65)中, 我们重新记  $\tilde{X} := d_\xi f$ ,  $\tilde{Y} := d_\xi g$ , 则  $\tilde{X}, \tilde{Y} \in \mathfrak{g} \in T_e G$ , 之后容易验证

$$(\pi_\xi)_* \tilde{X} = X \in T_\xi(G^\# \xi), \quad (\pi_\xi)_* \tilde{Y} = Y \in T_\xi(G^\# \xi),$$

因此辛结构  $\tilde{\omega}$  满足

$$\begin{aligned} \tilde{\omega}_\xi(X, Y) &= (d\xi)(\tilde{X}, \tilde{Y}) \\ &= \tilde{X}(\xi(\tilde{Y})) - \tilde{Y}(\xi(\tilde{X})) - \xi([\tilde{X}, \tilde{Y}]) \\ &= -\langle \xi, [d_\xi f, d_\xi g] \rangle, \end{aligned} \tag{3.67}$$

注意上式中将  $\tilde{X}, \tilde{Y}$  视为李群  $G$  的左不变向量场, 并把  $\xi$  视为  $G$  上的左不变 1-形式. 对照(3.66)(3.67)两式可知:

$$\omega = -\tilde{\omega},$$

即,  $\mathfrak{g}^*$  的辛叶的辛结构 (相差正负号意义下) 恰为余伴随轨道的辛结构.

至此结束对泊松流形的讨论, 后文将重回辛流形的主线内容.

## 3.3 Liouville 可积系统

对于辛流形上的哈密顿系统  $(M, \omega, H)$ , 自然想研究沿哈密顿向量场  $X_H$  的流. 如果该系统“有足够多的守恒量”, 那么沿  $X_H$  的演化行为具有良好的性质. 这类特殊的哈密顿系统性质优良, 被称为可积系统.

### 3.3.1 定义与基本注记

**定义 3.57.** 对于哈密顿系统  $(M, \omega, H)$ , 其中  $(M, \omega)$  是  $2n$  维辛流形. 如果存在  $M$  上的光滑函数  $H_1 := H, H_2, \dots, H_n$ , 使得以下成立

1.  $\{H_i, H_j\} = 0, \forall 1 \leq i, j \leq n$ ;

2.  $dH_1, \dots, dH_n$  在  $M$  的某个稠密开集上处处线性无关,

则称  $(M, \omega; \mathcal{H})$  是 **Liouville** 可积系统, 其中

$$\begin{aligned} \mathcal{H}: M &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ m &\mapsto (H_1(m), \dots, H_n(m))^T; \end{aligned} \quad (3.68)$$

或者称  $(M, \omega, H)$  是**完全可积**的.

上述 Liouville 可积系统也俗称**哈密顿可积系统**, 或简称**可积系统**. 对于 Liouville 可积系统  $(M, \omega; \mathcal{H})$ , 我们有以下简单性质:

1. 由定义的 (1) 可知, 对任意  $2 \leq i \leq n$  都有  $\{H_i, H\} = 0$ , 从而  $H_2, H_3, \dots, H_n$  都是守恒量. 记  $X_{H_i}$  为  $H_i$  的哈密顿向量场, 则定义的 (1) 等价于  $[X_{H_i}, X_{H_j}] = 0$ , 即  $\{X_{H_i}\}$  两两交换; 也等价于  $\omega(X_{H_i}, X_{H_j}) = 0$ , 从而  $\{X_{H_i} \mid 1 \leq i \leq n\}$  所张成的线性空间是相应点处切空间的迷向子空间.
2. 由  $\omega$  的非退化性,  $dH_1, \dots, dH_n$  线性无关等价于  $X_{H_1}, \dots, X_{H_n}$  线性无关. 因此, 在  $M$  的某稠密开集  $U$  上,  $X_{H_1}, \dots, X_{H_n}$  张成的空间是切空间的  $n$  维迷向子空间, 即拉格朗日子空间. 此外该线性无关性还表明, 稠密开集  $U$  中的点是映射  $\mathcal{H}$  的正则点.
3. 取定  $m \in M$  为  $\mathcal{H}$  的一个正则点,  $\mathbf{h} := \mathcal{H}(m) \in \mathbb{R}^n$ . 则由微分拓扑中的正则原像定理,

$$M_{\mathbf{h}} := \mathcal{H}^{-1}(\mathbf{h}) \quad (3.69)$$

是  $M$  的  $n$  维子流形. 对任意  $m' \in M_{\mathbf{h}}$ , 由  $\{H_i, H_j\} = 0$  可知, 从  $m'$  出发沿向量场  $X_{H_i}$  的积分曲线始终落在  $M_{\mathbf{h}}$  内, 从而  $X_{H_i}|_{m'} \in T_{m'}M_{\mathbf{h}}$ . 进而易知  $X_{H_1}, \dots, X_{H_n}$  构成切空间  $T_{m'}M_{\mathbf{h}}$  的一组基. 特别地,  $T_{m'}M_{\mathbf{h}}$  是  $T_{m'}M$  的拉格朗日子空间. 于是  $M_{\mathbf{h}}$  是  $M$  的**拉格朗日子流形**. 这是拉格朗日子流形的又一类重要例子.

4. 记号承上, 再记  $M$  上的分布

$$D^{\mathcal{H}} := \coprod_{m \in M} \text{span} \{X_{H_i}(m) \mid 1 \leq i \leq n\},$$

即哈密顿向量场  $X_{H_1}, \dots, X_{H_n}$  张成的分布. 由  $[X_{H_i}, X_{H_j}] = 0$  可知分布  $D^{\mathcal{H}}$  是可积的, 从而由分布的 Frobenius 定理知  $M_h$  在正则点  $m$  附近存在局部坐标  $\mathbf{u} = (u^1, \dots, u^n)$  使得

$$\frac{\partial}{\partial u^i} = X_{H_i}, \quad 1 \leq i \leq n. \quad (3.70)$$

**注 3.58.** 事实上, 由更强版本的 Frobenius 定理 (例如 Stefan-Sussmann, 见 [37, 38]) 可以得到,  $M$  在正则点  $m$  附近存在局部坐标  $(u^1, \dots, u^n; u^{n+1}, \dots, u^{2n})$ , 使得在  $m \in M$  的某个开邻域内成立

$$X_{H_i} = \frac{\partial}{\partial u^i}, \quad 1 \leq i \leq n.$$

我们承认此结果. 此结果将在后文 3.4.1 小节中有应用.

下面看一些简单例子. 首先是平凡情形:

**例 3.59.** 若  $\dim M = 2$ , 则其上的任何哈密顿系统显然都完全可积.

哈密顿可积系统的例子往往来自物理. 众所周知的单摆、一维谐振子都是  $\dim M = 2$  的平凡情形, 这里从略. 我们将在接下来的若干小节介绍更多有意思的例子.

### 3.3.2 例子: 球面摆, 双摆, 混沌现象

我们回忆众所周知的单摆: 竖直平面上的一根理想轻杆一端被固定, 另一端连接某个质点, 该质点在重力与杆的弹力作用下运动. 换言之, 也可认为质点被束缚在竖直平面内的某圆周上.

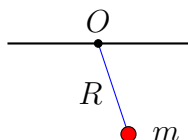


图: 单摆



我们将单摆推广到 3 维, 即质点在日常生活的 3 维空间而不是竖直平面的情形; 换言之, 质点被束缚在某个球面  $S^2$  上, 如此物理模型称为球面摆. 日常生活中, 球面摆可以是小孩子的玩具; 但在这里, 我们把它作为 Liouville 可积系统的例子.

**例 3.60.** (球面摆). 质量为  $m$  的质点被束缚在半径为  $R$  的光滑球面, 在重力作用下运动. 该系统的相空间

$$M := \{(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \in T^*\mathbb{R}^3 \mid \|\mathbf{q}\| = R, \mathbf{q} \cdot \mathbf{p} = 0\} \quad (3.71)$$

是  $T^*\mathbb{R}^3$  的辛子流形, 可以验证它辛同胚于  $T^*S^2$ . 该系统的哈密顿量

$$H = \frac{\|\mathbf{p}\|^2}{2m} + mgq_z, \quad (3.72)$$

其中  $(\mathbf{q}, \mathbf{p})$  是  $T^*\mathbb{R}^3$  的典范坐标,  $\mathbf{q} = (q_x, q_y, q_z)$ ,  $\mathbf{p} = (p_x, p_y, p_z)$  分别为质点的位置与动量, 常数  $g > 0$  为重力加速度.

由物理常识可知, 在此系统中, 质点角动量的  $z$ -分量

$$L_z := q_x p_y - q_y p_x$$

是守恒量. 这是因为, 由泊松括号的运算性质以及(3.41)易知

$$\begin{aligned} \{L_z, H\} &= \left\{ q_x p_y - q_y p_x, \frac{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}{2m} + mgq_z \right\} \\ &= \frac{1}{2m} \{q_x p_y - q_y p_x, p_x^2 + p_y^2\} \\ &= \frac{1}{2m} (\{q_x, p_x^2\} p_y - \{q_y, p_y^2\} p_x) = \frac{1}{m} (p_x p_y - p_y p_x) = 0. \end{aligned}$$

此外, 可直接验证  $dL_z$  与  $dH$  在  $M$  的某稠密开集上处处线性无关 (留给读者), 从而  $(M, \omega; H, L_z)$  是 Liouville 可积系统.

下面取辛流形  $M \subseteq T^*\mathbb{R}^3$  的一组合适的局部坐标, 并在该坐标下重新观察此系统. 取  $S^2$  的球坐标  $(\theta, \varphi)$  如下

$$\begin{cases} q_x = R \sin \theta \cos \varphi \\ q_y = R \sin \theta \sin \varphi \\ q_z = -R \cos \theta \end{cases}, \quad (3.73)$$

这里的  $\theta$  是  $\mathbf{q}$  与  $z$  轴负方向的夹角. 我们希望将此  $(\theta, \varphi)$  扩充为  $M$  的一组局部坐标  $(\theta, \varphi; p_\theta, p_\varphi)$ , 使得典范辛结构  $\omega$  (在  $M$  上的限制) 形如

$$\omega = d\theta \wedge dp_\theta + d\varphi \wedge dp_\varphi,$$

从而有形如(3.41)的典范的泊松交换关系

$$\begin{aligned} \{\theta, \varphi\} &= \{p_\theta, p_\varphi\} = \{\theta, p_\varphi\} = \{\varphi, p_\theta\} = 0, \\ \{\theta, p_\theta\} &= \{\varphi, p_\varphi\} = 1. \end{aligned} \quad (3.74)$$

由题2.6可知, 这样的  $p_\theta, p_\varphi$  应满足

$$(dq_x, dq_y, dq_z) \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix} = (d\theta, d\varphi) \begin{pmatrix} p_\theta \\ p_\varphi \end{pmatrix}$$

(即保持余切丛上的典范 1-形式(0.9)不变), 由此解得

$$\begin{aligned} p_\theta &= Rp_x \cos \theta \cos \varphi + Rp_y \cos \theta \sin \varphi + Rp_z \sin \theta, \\ p_\varphi &= -Rp_x \sin \theta \sin \varphi + Rp_y \sin \theta \cos \varphi. \end{aligned} \quad (3.75)$$

下面给出哈密顿量(3.72)在坐标  $(\theta, \varphi; p_\theta, p_\varphi)$  下的表达式, 为此需要计算  $\|\mathbf{p}\|^2$ . 注意(3.71)中的约束条件  $\mathbf{q} \cdot \mathbf{p} = 0$  可改写为

$$p_z = -\frac{q_x p_x + q_y p_y}{q_z} = p_x \tan \theta \cos \varphi + p_y \tan \theta \sin \varphi, \quad (3.76)$$

将此式代入(3.75)消去  $p_z$ , 整理得

$$\begin{pmatrix} p_\theta \\ p_\varphi \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} \frac{1}{\cos \theta} \\ \sin \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \end{pmatrix},$$

因此

$$\begin{pmatrix} p_x \\ p_y \end{pmatrix} = \frac{1}{R} \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_\theta \cos \theta \\ \frac{p_\varphi}{\sin \theta} \end{pmatrix}, \quad (3.77)$$

于是立刻得到

$$p_x^2 + p_y^2 = \frac{1}{R^2} \left( p_\theta^2 \cos^2 \theta + \frac{p_\varphi^2}{\sin^2 \theta} \right).$$

结合(3.76)(3.77)可得

$$p_z = \frac{\sin \theta}{R} p_\theta, \quad (3.78)$$

由此容易得到哈密顿量(3.72)的球坐标表示

$$H = \frac{1}{2mR^2} \left( p_\theta^2 + \frac{p_\varphi^2}{\sin^2 \theta} \right) - mgR \cos \theta. \quad (3.79)$$

注意上述表达式不显含  $\varphi$ , 从而立刻观察出  $p_\varphi$  是守恒量 (用(3.74)式直接验证  $\{p_\varphi, H\} = 0$ ). 事实上, 由(3.75)可知

$$p_\varphi = q_x p_y - q_y p_x = L_z,$$

即  $p_\varphi$  恰为角动量的  $z$ -分量! 并且在此坐标下,  $dH$  与  $dp_\varphi$  的线性无关性是显见的. 至于坐标  $p_\theta$ , 由(3.78)得  $p_\theta = \frac{R}{\sin \theta} p_z$ , 其物理意义留给读者思考.

**注 3.61.** 单摆的另一种著名的推广是双摆. 如下图所示, 竖直平面内的质量为  $m_1, m_2$  的质点被长度为  $l_1, l_2$  的两条轻杆连接, 其中一条轻杆的一端被固定在原点. 两质点在重力与轻杆弹力作用下运动.

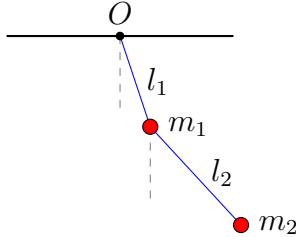


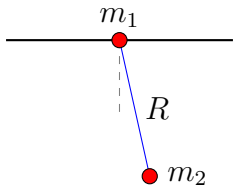
图: 双摆

可以证明双摆不是可积系统, 除了哈密顿量 (总能量) 之外没有第二个 (非平凡的) 守恒量. 该系统的演化行为对初始条件极端敏感, 缺乏可预测性, 即具有所谓的混沌现象. 这是与可积性截然相反的性质. 大致来说, 哈密顿系统的守恒量越少, 随时间演化的行为就越不规则, 越容易产生混沌. 混沌理论是动力系统中的艰深课题, 超出本笔记范围.

接下来考察双摆的一个变种, 这个系统是 Liouville 可积的.

**例 3.62.** 如下图, 长度为  $R$  的理想轻杆两端分别连接质量为  $m_1, m_2$  的质点, 其中质点  $m_1$  被束缚在光滑水平横杆上, 两质点在重力与轻杆弹力作用下在

竖直平面内运动.



记  $m_1, m_2$  的位置分别为  $(q_1, 0)$  与  $(q_x, q_y)$ , 相应的动量分别为  $(p_1, 0)$  与  $(p_x, p_y)$ . 此系统的哈密顿量为

$$H = \frac{p_1^2}{2m_1} + \frac{p_x^2 + p_y^2}{2m_2} + m_2 g q_y. \quad (3.80)$$

我们先来写出该系统的相空间  $M$ . 首先  $M$  是  $T^*(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2)$  的辛子流形. 注意两质点的距离始终为  $R$ , 并且在运动过程中两质点速度的沿轻杆分量相等. 由这两个约束条件立刻得到

$$M = \left\{ (q_1, p_1; \mathbf{q}, \mathbf{p}) \in T^*(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2) \left| \begin{array}{l} (q_x - q_1)^2 + q_y^2 = R^2, \\ \left( \frac{p_x}{m_2} - \frac{p_1}{m_1} \right) \sin \theta - \frac{p_y}{m_2} \cos \theta = 0 \end{array} \right. \right\}, \quad (3.81)$$

其中  $\theta$  是两质点连线与  $y$  轴负方向的夹角,  $\tan \theta = \frac{q_x - q_1}{q_y}$ .

由物理常识不难发现, 该系统总动量的水平分量  $p := p_1 + p_x$  是守恒量 (亦可直接验证  $\{p, H\} = 0$ ), 并且可以  $d\mathbf{p}$  与  $dH$  在  $M$  的某稠密开集上处处线性无关, 因此有 Liouville 可积系统  $(M, \omega; H, p)$ .

接下来适当选取  $M$  的一组局部坐标, 并在此坐标下重新观察该系统. 记典范投影  $\pi: T^*(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2) \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$ , 则

$$\pi(M) = \{(q_1, \mathbf{q}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \mid (q_x - q_1)^2 + q_y^2 = R^2\} \cong \mathbb{R} \times S^1.$$

考虑两质点质心的水平位置

$$q_0 := \frac{m_1 q_1 + m_2 q_x}{m_1 + m_2}$$

以及两质点连线与  $y$  轴负方向夹角  $\theta$ , 则  $(q_0, \theta)$  构成  $\pi(M) \cong \mathbb{R} \times S^1$  的一组局部坐标:

$$\begin{cases} q_1 &= q_0 - \frac{m_2}{m_1 + m_2} R \sin \theta, \\ q_x &= q_0 + \frac{m_1}{m_1 + m_2} R \sin \theta, \\ q_y &= -R \cos \theta. \end{cases} \quad (3.82)$$

希望将此  $(q_0, \theta)$  扩充为  $M$  的局部坐标  $(q_0, \theta; p_0, p_\theta)$ , 使得  $T^*(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2)$  的典范辛结构  $\omega = dq_1 \wedge dp_1 + dq_x \wedge dp_x + dq_y \wedge dp_y$  在  $M$  上的限制形如

$$\omega = dq_0 \wedge dp_0 + d\theta \wedge dp_\theta.$$

与例3.60的做法类似, 只需使得  $p_0, p_\theta$  满足

$$(dq_0, d\theta) \begin{pmatrix} p_0 \\ p_\theta \end{pmatrix} = (dq_1, dq_x, dq_y) \begin{pmatrix} p_1 \\ p_x \\ p_y \end{pmatrix},$$

由此解得

$$\begin{cases} p_0 = p_1 + p_x, \\ p_\theta = -\frac{m_2}{m_1+m_2}Rp_0 \cos \theta + \frac{m_1}{m_1+m_2}Rp_x \cos \theta + Rp_y \sin \theta. \end{cases} \quad (3.83)$$

注意上述  $p_0$  恰为两质点总动量的水平分量. 易知上述  $(q_0, \theta; p_0, p_\theta)$  是  $M$  的一组局部坐标, 并给出了  $M$  与余切丛  $T^*(\mathbb{R} \times S^1)$  的辛同胚.

**题 3.63.** 哈密顿量(3.80)在局部坐标  $(q_0, \theta; p_0, p_\theta)$  下的表达式为

$$H = \frac{p_0^2}{2(m_1 + m_2)} + \frac{m_1 + m_2}{m_2} \frac{p_\theta^2}{2(m_1 + m_2 \sin^2 \theta)R^2} - m_2 g R \cos \theta.$$

[提示: 由(3.81)中的约束条件以及(3.82)-(3.83), 可以暴力地将  $p_1, p_x, p_y, q_y$  用这组新的局部坐标来表示, 然后代入哈密顿量的表达式. 计算过程十分枯燥繁琐, 建议借助符号计算软件.]

上述表达式右边共三项, 第一项是系统质心的动能, 第三项是重力势能; 至于第二项, 可以认为是某种相对动能.

### 3.3.3 例子: Kepler 问题, 两体问题, 三体问题

我们继续考察 Liouville 可积系统的例子. 本小节的例子来自天体物理.

**例 3.64.**(中心势场中的粒子) 三维空间内的质量为  $m$  的质点在某个势场中运动, 势场关于原点旋转对称. 确切地说, 该系统的相空间

$$M = T^*(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}),$$

哈密顿量

$$H = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + V(\|\mathbf{q}\|), \quad (3.84)$$

其中  $\mathbf{q}, \mathbf{p}$  分别为粒子的位置与动量, 函数  $V: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  为粒子的势能, 它只与粒子到中心的距离有关.

由物理常识不难发现, 质点角动量

$$\mathbf{L} := \mathbf{q} \times \mathbf{p} \quad (3.85)$$

守恒 (其中 “ $\times$ ” 为  $\mathbb{R}^3$  中通常的叉乘), 从而其分量  $L_x, L_y, L_z$  都是守恒量. 我们也可直接验证此断言: 首先写出哈密顿量  $H(3.84)$  生成的流如下

$$\frac{d\mathbf{q}}{dt} = \frac{\mathbf{p}}{m}, \quad \frac{d\mathbf{p}}{dt} = -\frac{V'(\|\mathbf{q}\|)}{\|\mathbf{q}\|} \mathbf{q},$$

从而有

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{L}}{dt} &= \frac{d}{dt}(\mathbf{q} \times \mathbf{p}) = \frac{d\mathbf{q}}{dt} \times \mathbf{p} + \mathbf{q} \times \frac{d\mathbf{p}}{dt} \\ &= \frac{\mathbf{p}}{m} \times \mathbf{p} - \frac{V'(\|\mathbf{q}\|)}{\|\mathbf{q}\|} \mathbf{q} \times \mathbf{q} = \mathbf{0}, \end{aligned}$$

因此角动量  $\mathbf{L}$  的三个分量  $L_x, L_y, L_z$  都是守恒量.

注意该系统的相空间  $M = T^*(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\})$  是 6 维辛流形, 由前文关于 Liouville 可积系统的讨论,  $M$  上至多有 3 个 “相互独立” 的守恒量; 而现在至少已经有  $H, L_x, L_y, L_z$  这 4 个守恒量了. 问题出在哪里呢?

**题 3.65.** 直接验证  $T^*(\mathbb{R}^3)$  上的如下关系式:

$$\left. \begin{aligned} L_x &= q_y p_z - q_z p_y \\ L_y &= q_z p_x - q_x p_z \\ L_z &= q_x p_y - q_y p_x \end{aligned} \right| \begin{aligned} \{L_x, L_y\} &= L_z \\ \{L_y, L_z\} &= L_x \\ \{L_z, L_x\} &= L_y \end{aligned} \quad (3.86)$$

可见  $L_x, L_y, L_z$  彼此的泊松括号并不为零, 不符合 Liouville 可积系统的要求. 尽管如此, 该系统依然是 Liouville 可积的, 这是因为我们可以选取  $H, L^2, L_z$  作为三个独立的守恒量, 其中  $\mathbf{L}^2 := \mathbf{L} \cdot \mathbf{L} = L_x^2 + L_y^2 + L_z^2$ .

**题 3.66.** 记号承上, 直接验证  $(M, \omega; H, \mathbf{L}^2, L_z)$  是 Liouville 可积系统.

若在(3.84)中取

$$V(\|q\|) := -\frac{k}{\|q\|},$$

其中  $k$  为某常数, 则得到众所周知的 Kepler 问题: 行星 (即质点  $m$ ) 在恒星 (原点) 的万有引力作用下的运动. 此时, 势函数  $V$  的特殊性导致该系统具有更深层的守恒量, 可以验证向量

$$R := \frac{p \times L}{km} - \frac{q}{\|q\|} \quad (3.87)$$

(的三个分量) 是守恒量, 该向量称为 **Lenz-Runge 矢量**.

**题 3.67.** 验证 Lenz-Runge 矢量(3.87)(的三个分量) 是守恒量.

[提示: 哈密顿量  $H = \frac{p^2}{2m} - \frac{k}{\|q\|}$  生成的流为

$$\frac{dq}{dt} = \frac{p}{m}, \quad \frac{dp}{dt} = -\frac{k}{\|q\|^3}q,$$

并注意角动量守恒  $\frac{dL}{dt} = 0$ , 然后直接计算  $\frac{dR}{dt}$  即可, 留给读者.]

注意  $L \times q = 0$ , 这表明质点始终在与角动量  $L$  垂直的平面上运动, 因此在求解此哈密顿系统时我们可以不妨角动量  $L$  沿  $z$  轴方向, 质点  $m$  在  $xOy$  平面内运动, 从而简化问题. 至于 Lenz-Runge 矢量  $R$ , 注意  $R \times L = 0$ , 从而  $R$  位于质点轨迹所在平面. 众所周知, Kepler 问题中质点运动轨迹是圆锥曲线; 事实上  $R$  与该圆锥曲线的形状有关. 限于篇幅, 本笔记不再更多介绍其具体细节.

在开普勒问题中, 我们实际上假定中心天体 (原点) 位置固定; 这是一种理想的近似, 适用于中心天体的质量远远大于另一个天体的情形. 比它更真实的情况是, 两个天体 (质点) 在相互的引力下运动, 彼此互相影响.

**例 3.68.**(两体问题) 三维空间中质量分别为  $m_1, m_2$  的两个质点在相互的万有引力作用下运动. 两质点的位置分别记作  $q_1, q_2$ , 动量分别记作  $p_1, p_2$ . 该系统的相空间为

$$M = T^*((\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3) \setminus \Delta), \quad (3.88)$$

其中  $\Delta := \{(q_1, q_2) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \mid q_1 = q_2\}$ , 哈密顿量

$$H = \frac{p_1^2}{2m_1} + \frac{p_2^2}{2m_2} - \frac{k}{\|q_1 - q_2\|}, \quad (3.89)$$

其中  $k$  为给定的常数.

由物理常识不难发现, 该系统总动量与总角动量

$$\mathbf{P} := \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2, \quad \mathbf{L} := \mathbf{q}_1 \times \mathbf{p}_1 + \mathbf{q}_2 \times \mathbf{p}_2$$

的各分量都是守恒量 (留给读者验证); 再包括哈密顿量  $H$ , 我们已找到该系统的至少 7 个守恒量. 与研究 Kepler 问题时遇到的情况类似, 这些守恒量的泊松括号并非两两交换, 于是我们需要重新适当选取. 一种自然的想法是, 先给相空间  $M$ (3.88) 重新选取一个“好的”局部坐标: 引入

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_0 &:= \frac{m_1}{m_1 + m_2} \mathbf{q}_1 + \frac{m_2}{m_1 + m_2} \mathbf{q}_2, \\ \mathbf{q}_{\text{rel}} &:= \mathbf{q}_2 - \mathbf{q}_1, \end{aligned} \tag{3.90}$$

它们分别为两质点的质心位置与相对位置. 易知这给出了微分同胚

$$\begin{aligned} (\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3) \setminus \Delta &\cong \mathbb{R}^3 \times (\mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}\}) \\ (\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2) &\mapsto (\mathbf{q}_0, \mathbf{q}_{\text{rel}}). \end{aligned}$$

与之前研究球面摆 (例3.60) 与变种双摆 (例3.62) 时的方法类似, 希望将此  $(\mathbf{q}_0, \mathbf{q}_{\text{rel}})$  扩充为相空间  $M$  的一组辛坐标  $(\mathbf{q}_0, \mathbf{q}_{\text{rel}}; \mathbf{p}_0, \mathbf{p}_{\text{rel}})$ , 使得  $M$  的典范辛结构  $\omega = \sum_{i=1}^3 (q_{0,i} \wedge p_{0,i} + q_{\text{rel},i} \wedge p_{\text{rel},i})$ . 如此  $\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_{\text{rel}}$  应满足

$$(\mathrm{d}\mathbf{q}_1^T, \mathrm{d}\mathbf{q}_2^T) \begin{pmatrix} \mathbf{p}_1 \\ \mathbf{p}_2 \end{pmatrix} = (\mathrm{d}\mathbf{q}_0^T, \mathrm{d}\mathbf{q}_{\text{rel}}^T) \begin{pmatrix} \mathbf{p}_0 \\ \mathbf{p}_{\text{rel}} \end{pmatrix},$$

由此解得

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_0 &= \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2, \\ \mathbf{p}_{\text{rel}} &= -\frac{m_2}{m_1 + m_2} \mathbf{p}_1 + \frac{m_1}{m_1 + m_2} \mathbf{p}_2. \end{aligned} \tag{3.91}$$

注意  $\mathbf{p}_0$  恰为两质点的总动量  $\mathbf{P}$ , 而  $\mathbf{p}_{\text{rel}}$  可以被认为是某种相对动量. 在坐标  $(\mathbf{q}_0, \mathbf{q}_{\text{rel}}; \mathbf{p}_0, \mathbf{p}_{\text{rel}})$  下, 哈密顿量  $H$ (3.89) 可改写为

$$\begin{aligned} H &= \frac{\mathbf{p}_1^2}{2m_1} + \frac{\mathbf{p}_2^2}{2m_2} - \frac{k}{\|\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2\|} \\ &= \frac{1}{2m_1} \left( -\mathbf{p}_{\text{rel}} + \frac{m_1}{m_1 + m_2} \mathbf{p}_0 \right)^2 + \frac{1}{2m_2} \left( \mathbf{p}_{\text{rel}} + \frac{m_2}{m_1 + m_2} \mathbf{p}_0 \right)^2 - \frac{k}{\|\mathbf{q}_{\text{rel}}\|} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
&= \left( \frac{1}{2m_1} + \frac{1}{2m_2} \right) \mathbf{p}_{\text{rel}}^2 + \frac{1}{2(m_1 + m_2)} \mathbf{p}_0^2 - \frac{k}{\|\mathbf{q}_{\text{rel}}\|} \\
&=: \frac{\mathbf{p}_0^2}{2M} + \frac{\mathbf{p}_{\text{rel}}^2}{2\mu} - \frac{k}{\|\mathbf{q}_{\text{rel}}\|},
\end{aligned} \tag{3.92}$$

其中

$$M := m_1 + m_2, \quad \mu := \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \tag{3.93}$$

分别称为两体系统总质量与约化质量; 哈密顿量在新坐标下的表达式(3.92)右边共有 3 项, 第一项是质心动能, 最后一项是引力势能, 而中间那项则是某种意义下的“相对动能”. 由(3.92)式可以看出, 该哈密顿系统可以分解为两个“子系统”的“直积”: 其中一个是质量为  $M$  的质点的自由运动, 其相空间为  $(\mathbf{q}_0, \mathbf{p}_0)$ -空间, 另一个是质量为  $\mu$  的质点的 Kepler 问题, 其相空间为  $(\mathbf{q}_{\text{rel}}, \mathbf{p}_{\text{rel}})$ -空间, 这两个子系统“相互独立”.

**题 3.69.** 根据上文, 写出“两个哈密顿系统的直积”的定义, 并显式写出哈密顿系统(3.92)的 6 个两两交换的守恒量, 由此说明此哈密顿系统是 Liouville 可积的.

**注 3.70.** 如果是 3 个质点, 而不是 2 个质点, 在相互引力作用下的运动呢?

这便是著名的三体问题. 与前文提到的双摆(注3.61)类似, 可以证明三体系统不是 Liouville 可积的, 其哈密顿向量场生成的流(随时间的演化)具有混沌现象, 行为复杂, 对初值条件极端敏感. 不过, 三体系统的一种简化版本是 Liouville 可积的: 将两个质点的位置固定, 考虑第三个质点在前两个质点的引力场中的运动. 对其细节感兴趣的读者可见 Rudolph[32] 书中的 Example 11.1.4.

### 3.3.4 例子: Toda 链, Lax 算子表示

本小节以 Toda 链这个著名的 Liouville 可积系统为例, 介绍经典可积系统理论中的一些基本概念, 方法与技巧.

**例 3.71.**(Toda 链, [41]) 考虑位于一条直线上的  $n$  个质点, 其位置依次为  $q^1, \dots, q^n$ , 动量依次为  $p_1, \dots, p_n$ . 该系统的哈密顿量为

$$H = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n p_k^2 + \sum_{k=1}^{n-1} e^{2(q^k - q^{k+1})}. \tag{3.94}$$

与之前所介绍的各种力学系统类似, 该系统的相空间自然取为

$$T^*\mathbb{R}^n = \{(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \mid \mathbf{q}, \mathbf{p} \in \mathbb{R}^n\},$$

并配以余切丛的典范辛结构, 相应的泊松括号为(3.41).

该系统可以用来描述含有  $n$  个原子的直线形分子的运动: 相邻两个原子  $q^k, q^{k+1}$  的相互作用势能为  $e^{2(q^k - q^{k+1})}$ , 而不相邻的原子之间的相互作用被忽略不计. 容易验证沿哈密顿量  $H$  (3.94) 的演化方程为

$$\begin{aligned}\dot{q}^k &= p_k, \\ \dot{p}_\ell &= 2 \left( e^{2(q^{\ell-1} - q^\ell)} - e^{2(q^\ell - q^{\ell+1})} \right), \\ \dot{p}_1 &= -2e^{2(q^1 - q^2)}, \quad \dot{p}_n = 2e^{2(q^{n-1} - q^n)},\end{aligned}\tag{3.95}$$

其中  $1 \leq k \leq n$ ,  $2 \leq \ell \leq n-1$ .

由物理常识容易发现, 除了哈密顿量  $H$ , 该系统的总动量  $p := \sum_{i=1}^n p_i$  是守恒量. 接下来一系列技巧性的构造将给出此系统的更多守恒量.

**题 3.72.** 对于  $1 \leq k \leq n-1$  以及  $1 \leq \ell \leq n$ , 引入函数

$$a_k := e^{q^k - q^{k+1}}, \quad b_\ell := p_\ell.\tag{3.96}$$

1. 验证如下关系式:

$$\{a_k, a_\ell\} = \{b_k, b_\ell\} = 0, \quad \{a_k, b_\ell\} = a_k(\delta_{k\ell} - \delta_{k+1, \ell}),\tag{3.97}$$

其中  $\{, \}$  为  $T^*\mathbb{R}^n$  的典范泊松括号(3.41);

2. 验证: 函数  $a_k, b_\ell$  沿哈密顿量  $H$  的演化方程为

$$\begin{aligned}\dot{a}_k &= a_k(b_k - b_{k+1}), \\ \dot{b}_\ell &= 2(a_{\ell-1}^2 - a_\ell^2), \\ \dot{b}_1 &= -2a_1^2, \quad \dot{b}_n = 2a_{n-1}^2,\end{aligned}\tag{3.98}$$

[提示: 由(3.95)改写而来.]

上述新变量  $a_k, b_\ell$  最初由 Flaschka 引入 [17], 故称为 Toda 链的 **Flaschka** 坐标. 而更有意思的是:

**题 3.73.** 记号承上. 引入  $n \times n$  矩阵

$$L := \begin{pmatrix} b_1 & a_1 & & \\ a_1 & b_2 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & a_{n-1} \\ & & a_{n-1} & b_n \end{pmatrix}, \quad (3.99)$$

$$M := \begin{pmatrix} 0 & -a_1 & & \\ a_1 & 0 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -a_{n-1} \\ & & a_{n-1} & 0 \end{pmatrix}.$$

验证: 演化方程(3.98)等价于

$$\frac{dL}{dt} = [M, L]. \quad (3.100)$$

在可积系统理论中, 上述  $L$  称为 Toda 链(3.98)的 **Lax 算子**, 二元组  $(L, M)$  称为 **Lax 对**; 形如(3.100)的方程也常被叫做 **Lax 方程**. 根据某些经验, 若演化方程能改写成 Lax 方程的样子, 那我们就可以轻易找出更多的守恒量, 从而该系统某种意义上是可积的. 比如说:

**性质 3.74.** 记号承上, 对于  $0 \leq p \leq n-1$ , 记

$$H_p := \frac{1}{p+1} \text{tr}(L^{p+1}), \quad (3.101)$$

则  $H_p$  ( $0 \leq p \leq n-1$ ) 都是系统(3.100)的守恒量.

证明. 我们回忆, 矩阵的迹具有如下性质: 对任意方阵  $A, B, C$ , 都有

$$\begin{aligned} \text{tr}(AB) &= \text{tr}(BA), \\ \text{tr}([A, B]C) &= \text{tr}(A[B, C]). \end{aligned}$$

注意用此性质, 我们有

$$\frac{dH_p}{dt} = \frac{1}{p+1} \frac{d}{dt} \text{tr}(L^{p+1}) = \text{tr} \left( L^p \frac{dL}{dt} \right) = \text{tr}(L^p [M, L]) = \text{tr}(M [L, L^p]) = 0,$$

从而得证. □

例如, 容易验证

$$H_0 = \operatorname{tr}(L) = \sum_{k=1}^n b_k,$$
$$H_1 = \frac{1}{2} \operatorname{tr}(L^2) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n b_k^2 + \sum_{k=1}^{n-1} a_k^2,$$

分别是系统的总动量与总能量 (哈密顿量)(3.94). 至于之后的  $H_2, H_3 \dots$  有什么物理含义呢? 笔者尚不知晓.

**注 3.75.** 记号承上, 记  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  是 Lax 算子  $L$  的  $n$  个特征值, 则有

$$H_p = \frac{1}{p+1} \operatorname{tr}(L^{p+1}) = \frac{1}{p+1} \sum_{k=1}^n \lambda_k^{p+1}. \quad (3.102)$$

这表明  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  是守恒量. 换言之, Lax 算子的谱 (特征值) 在随时间演化过程中不变.

**题 3.76.** 设  $t \mapsto (L(t), M(t))$  是 Lax 方程(3.100)的一个解, 其初值为  $(L(0), M(0))$ .

证明: 存在 (定义在  $t = 0$  附近的) 矩阵值函数  $g(t)$ , 使得满足初值条件  $g(0) = I$ , 并且

$$\begin{cases} L(t) = g(t)L(0)g^{-1}(t), \\ M(t) = \frac{dg(t)}{dt}g^{-1}(t). \end{cases} \quad (3.103)$$

证明. 注意  $M(t)$  已经给定. 直接取  $g(t)$  为线性系统

$$\frac{dg}{dt}(t) = M(t)g(t)$$

的满足初值  $g(0) = I$  的解, 然后直接验证  $\tilde{L}(t) := g(t)L(0)g^{-1}(t)$  满足 Lax 方程(3.100), 并且初值  $\tilde{L}(0) = L(0)$ , 其细节留给读者. 从而由解的唯一性可知  $\tilde{L}(t) = L(t)$ , 得证. □

注意此题中的  $g(t)$  是  $L(t)$  与  $L(0)$  的相似过渡矩阵, 这表明矩阵  $L(t)$  始终其初值  $L(0)$  相似, 特别地, 我们再次证明了  $L$  的特征值是守恒量. 在可积系统理论中,  $t \mapsto L(t) = g(t)L(0)g^{-1}(t)$  称为 Lax 算子的等谱形变.

**注 3.77.** 在相空间  $T^*\mathbb{R}^n$  的一般点 (某稠密开集内的点) 处, Lax 算子  $L$  的  $n$  个特征值  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  两两互异, 此时有

$$dH_p = \text{tr}(L^p dL) = \sum_{k=1}^n \lambda_k^p d\lambda_k.$$

于是由众所周知的 Vandermonde 行列式易知  $dH_0, dH_1, \dots, dH_{n-1}$  线性无关.

现在我们已经找到了 Toda 链(3.95)的  $n$  个独立的守恒量  $H_0, \dots, H_{n-1}$ . 断言这  $n$  个守恒量使得 Toda 链是 Liouville 可积的. 为证明此, 只需要验证它们两两交换, 即  $\{H_p, H_q\} = 0$  对任意  $0 \leq k, \ell \leq n-1$  成立. 等价地, 只需要验证沿哈密顿向量场  $X_{H_p}$  的流两两交换. 下面我们用可积系统理论中处理 Lax 方程的独特技巧来显式写出哈密顿向量场生成的流  $\frac{d}{dt^p} := X_{H_p}$  ( $0 \leq p \leq n-1$ ), 进而直接验证流的交换性  $[\frac{d}{dt^p}, \frac{d}{dt^q}] = 0$ .

引入如下记号: 对于任意的  $n$  阶方阵  $\mathbf{X} = (X_{ij}) \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ , 有

$$\mathbf{X} = \sum_{i,j=1}^n X_{ij} \mathbf{E}_{ij},$$

其中  $\mathbf{E}_{ij}$  是  $n$  阶方阵, 其第  $i$  行  $j$  列的矩阵元为 1, 其余所有的矩阵元都为 0. 考虑矩阵  $\mathbf{X}$  的如下分解:

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}_u + \mathbf{X}_d + \mathbf{X}_l,$$

其中

$$\mathbf{X}_u := \sum_{i < j} X_{ij} \mathbf{E}_{ij}, \quad \mathbf{X}_d := \sum_{i=1}^n X_{ii} \mathbf{E}_{ii}, \quad \mathbf{X}_l := \sum_{i > j} X_{ij} \mathbf{E}_{ij}, \quad (3.104)$$

分别为矩阵  $\mathbf{X}$  的 (严格) 上三角部分, 对角部分与 (严格) 下三角部分.

对于  $n$  阶方阵  $\mathbf{X} \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ , 在本小节临时定义

$$\mathbf{X}_+ := \mathbf{X}_l - \mathbf{X}_l^T, \quad \mathbf{X}_- := \mathbf{X}_u + \mathbf{X}_l^T + \mathbf{X}_d, \quad (3.105)$$

分别 (临时地) 称为  $\mathbf{X}$  的正部与负部. 容易验证  $\mathbf{X}_+$  是反对称的, 而  $\mathbf{X}_-$  是上三角的.

**题 3.78.** 记号承上. 验证:  $\mathbf{X} = \mathbf{X}_+ + \mathbf{X}_-$  诱导线性空间的直和分解

$$\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) = \mathfrak{o}(n) \oplus \mathfrak{t}(n, \mathbb{R}), \quad (3.106)$$

其中  $\mathfrak{o}(n)$  为  $n$  阶反对称实方阵之全体 (正交李代数),  $\mathfrak{t}(n, \mathbb{R})$  为  $n$  阶上三角实方阵之全体 (上三角李代数), 注意它们都是  $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$  的李子代数.

例如, 对于(3.99)给出的 Lax 对  $(L, M)$ , 有  $M = L_+$ .

**定理 3.79.** 记号承上, 则对任意  $0 \leq p \leq n-1$ , 守恒量  $H_p$  生成的流  $\frac{d}{dt^p} = X_{H_p}$  满足 Lax 方程

$$\frac{dL}{dt^p} = [(L^p)_+, L]. \quad (3.107)$$

特别地, 当  $p = 1$  时上述方程即为(3.100).

在证明之前, 先来观察一下这个方程. 注意  $L$  是对称矩阵, 并且只在主对角线与两条副对角线上才可能有非零元 (即, 矩阵元  $L_{ij} \neq 0$  仅当  $|i-j| \leq 1$ ). 而(3.107)等号右边的那个矩阵显然也具有此性质吗? 这似乎不太显然.

一方面, 由正部  $(\cdot)_+$  的定义知  $(L^p)_+$  是反对称矩阵, 又因为  $L$  是对称矩阵, 从而直接验证可知  $[(L^p)_+, L]$  是对称矩阵. 另一方面, 注意  $L^p = (L^p)_+ + (L^p)_-$ , 而  $[L^p, L] = 0$ , 从而

$$[(L^p)_+, L] = -[(L^p)_-, L].$$

注意  $(L^p)_-$  是上三角阵, 并且当  $i > j+1$  时  $L_{ij} = 0$ , 从而矩阵乘法直接验证可知当  $i > j+1$  时  $[(L^p)_-, L]$  的  $(i, j)$  分量也为 0. 综上所述,  $[(L^p)_+, L]$  是对称矩阵, 并且其  $(i, j)$  分量非零  $\Rightarrow |i-j| \leq 1$ .

定理3.79的证明. 首先, 我们有

$$\begin{aligned} dH_p &= \text{tr}(L^p dL) \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} \text{tr}(L^p \mathbf{E}_{k,k+1}) da_k + \sum_{\ell=1}^n \text{tr}(L^p \mathbf{E}_{\ell\ell}) db_\ell + \sum_{k=1}^{n-1} \text{tr}(L^p \mathbf{E}_{k+1,k}) da_k, \end{aligned}$$

从而得到

$$\begin{aligned} \frac{\partial H_p}{\partial a_k} &= 2\text{tr}(L^p \mathbf{E}_{k,k+1}), \\ \frac{\partial H_p}{\partial b_\ell} &= \text{tr}(L^p \mathbf{E}_{\ell\ell}). \end{aligned} \quad (3.108)$$

为验证(3.107)式, 应该逐一验证两边的各个矩阵元相等. 而由之前讨论, 只需要验证等号两边的  $(k+1, k)$ -分量与  $(\ell, \ell)$ -分量即可.

注意到, 对于方阵  $\mathbf{X} = (X_{ij})$ , 其矩阵元  $X_{ij}$  可表示为

$$X_{ij} = \text{tr}(\mathbf{E}_{ji}\mathbf{X}),$$

于是对于  $1 \leq k \leq n-1$ , (3.107)右边的  $(k+1, k)$ -分量为

$$\begin{aligned} [(L^p)_+, L]_{k+1, k} &= \text{tr}(\mathbf{E}_{k, k+1}[(L^p)_+, L]) = \text{tr}([L, \mathbf{E}_{k, k+1}](L^p)_+) \\ &= \text{tr}([L, \mathbf{E}_{k, k+1}]_d(L^p)_+ + [L, \mathbf{E}_{k, k+1}]_u(L^p)_+) \\ &= \text{tr}([L, \mathbf{E}_{k, k+1}]_u L^p), \end{aligned} \quad (3.109)$$

其中  $()_d$  与  $()_u$  的定义见(3.104). 特别注意上式最后一个等号成立的原因:  $[L, \mathbf{E}_{k, k+1}]_d$  是对角阵, 且  $(L^p)_+$  是反对称阵, 所以  $\text{tr}([L, \mathbf{E}_{k, k+1}]_d(L^p)_+) = 0$ ;  $(L^p)_-$  是上三角阵, 而  $[L, \mathbf{E}_{k, k+1}]_u$  严格上三角, 因此  $\text{tr}([L, \mathbf{E}_{k, k+1}]_u(L^p)_-) = 0$ . 接下来, 再注意到

$$\text{tr}([L, \mathbf{E}_{k, k+1}]L^p) = \text{tr}([L^p, L]\mathbf{E}_{k, k+1}) = 0,$$

并回忆(3.97)(3.108), 继续化简整理(3.109)如下:

$$\begin{aligned} [(L^p)_+, L]_{k+1, k} &= \text{tr}([L, \mathbf{E}_{k, k+1}]_u L^p) \\ &= -\text{tr}([L, \mathbf{E}_{k, k+1}]_d L^p) \\ &= a_k \text{tr}(L^p(\mathbf{E}_{kk} - \mathbf{E}_{k+1, k+1})) \\ &= a_k \left( \frac{\partial H_p}{\partial b_k} - \frac{\partial H_p}{\partial b_{k+1}} \right) \\ &= \{a_k, H_p\} = \frac{da_k}{dt^p} = \left( \frac{dL}{dt^p} \right)_{k+1, k}, \end{aligned} \quad (3.110)$$

这就验证了(3.107)两边的  $(k+1, k)$ -分量相等.

用类似的矩阵技巧也可以验证, 对于  $1 \leq \ell \leq n$ , 下述等式成立:

$$[(L^p)_+, L]_{\ell\ell} = 2\text{tr}([L, \mathbf{E}_{\ell\ell}]_u L^p),$$

进而验证 (3.107)两边的  $(\ell, \ell)$ -分量相等, 其细节留给读者练习. 定理证毕.  $\square$

一般来说, 若一系列守恒量所生成的流能同时写成 Lax 方程(3.107)的样子, 则可按某种标准套路来验证这些流两两交换. 例如, 对于本节所介绍的 Toda 方程, 我们有:

**性质 3.80.** Toda 方程簇(3.107)的流  $\frac{\partial}{\partial t^p}$ ,  $0 \leq p \leq n-1$  两两交换. 具体地说, 对任意  $0 \leq p, q \leq n-1$  都有

$$\frac{d}{dt^p} \left( \frac{dL}{dt^q} \right) = \frac{d}{dt^q} \left( \frac{dL}{dt^p} \right). \quad (3.111)$$

证明. 首先容易验证对任意非负整数  $s \geq 0$ , 以及  $0 \leq p \leq n-1$  都有

$$\frac{d(L^s)}{dt^p} = [(L^p)_+, L^s],$$

并注意投影算子  $(\cdot)_+ : \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) \rightarrow \mathfrak{o}(n)$ ,  $\mathbf{X} \mapsto \mathbf{X}_+$  作为线性算子, 显然与导子  $\frac{d}{dt^p}$  交换, 因此有

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt^p} \left( \frac{dL}{dt^q} \right) &= \frac{d}{dt^p} [(L^q)_+, L] \\ &= \left[ \left( \frac{d(L^q)}{dt^p} \right)_+, L \right] + \left[ (L^q)_+, \frac{dL}{dt^p} \right] \\ &= [[(L^p)_+, L^q]_+, L] + [(L^q)_+, [(L^p)_+, L]] \end{aligned} \quad (3.112)$$

特别注意(3.106)中所述,  $\mathfrak{o}(n)$ ,  $\mathfrak{t}(n, \mathbb{R})$  都是李子代数, 从而容易验证 (请读者仔细检查, 并体会其巧妙之处)

$$\begin{aligned} [(L^p)_+, L^q]_+ &= [(L^p)_+, (L^q)_+]_+ + [(L^p)_+, (L^q)_-]_+ \\ &= [(L^p)_+, (L^q)_+] + [L^p, (L^q)_-]_+ \\ &= [(L^p)_+, (L^q)_+] - [L^p, (L^q)_+]_+, \end{aligned}$$

从而(3.112)可继续变形如下:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt^p} \left( \frac{dL}{dt^q} \right) &= [[(L^p)_+, L^q]_+, L] + [(L^q)_+, [(L^p)_+, L]] \\ &= [[(L^p)_+, (L^q)_+], L] - [[L^p, (L^q)_+]_+, L] \\ &\quad + [(L^q)_+, [(L^p)_+, L]] \end{aligned}$$



$$= [(L^q)_+, L^p]_+, L] + [(L^p)_+, [(L^q)_+, L]], \quad (3.113)$$

其中最后一步用到了矩阵交换子的 Jacobi 恒等式. 对比(3.112)与(3.113)两式的最右边, 可知(3.111)成立, 证毕.  $\square$

现在, 我们离最终结果只有一步之遥:

**定理 3.81.** 记号承上, 则  $H_0, H_1, \dots, H_{n-1}$  这  $n$  个守恒量使得 Toda 链(3.95)是 Liouville 可积系统.

证明. 性质3.80表明, 对任意  $0 \leq p, q \leq n-1$  都成立

$$[X_{H_p}, X_{H_q}](a_k) = [X_{H_p}, X_{H_q}](b_\ell) = 0,$$

其中  $1 \leq k \leq n-1, 1 \leq \ell \leq n$ . 但这还并不能推出  $[X_{H_p}, X_{H_q}] = 0$ .

引入相空间  $T^*\mathbb{R}^n$  上的函数

$$a_n := \frac{q^1 + q^1 + \cdots q^n}{n}$$

(物理含义: 这  $n$  个质点的质心位置), 则容易验证  $da_1, \dots, da_n; db_1, \dots, db_n$  处处线性无关, 构成  $T^*\mathbb{R}^n$  的余切丛的一族标架. 于是, 如果还能证明

$$[X_{H_p}, X_{H_q}](a_n) = 0, \quad (3.114)$$

那就能够得到  $[X_{H_p}, X_{H_q}] = 0$ , 进而完成此定理的证明.

下面通过对  $p+q$  归纳来证明(3.114). 初始情况  $p=q=0$  是平凡的. 对于  $p \geq 1$ , 利用(3.108)可得

$$\begin{aligned} \{a_n, H_p\} &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{\partial H_p}{\partial b_k} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \text{tr}(L^p \mathbf{E}_{kk}) \\ &= \frac{1}{n} \text{tr}(L^p) = \frac{p}{n} H_{p-1}, \end{aligned}$$

而  $\{a_n, H_0\} = 1$ . 因此当  $p+q \geq 1$  时, 不妨  $p, q$  都不为零 ( $p, q$  当中存在 0 的情形类似), 由泊松括号与哈密顿向量场的有关公式可得

$$[X_{H_p}, X_{H_q}](a_n) = \{\{H_p, H_q\}, a_n\}$$

$$\begin{aligned}
&= \{\{H_p, a_n\}, H_q\} + \{H_p, \{H_q, a_n\}\} \\
&= -\frac{p}{n}\{H_{p-1}, H_q\} - \frac{q}{n}\{H_p, H_{q-1}\} = 0,
\end{aligned}$$

其中最后一步用到了归纳假设. 定理得证.  $\square$

**注 3.82.** 本节所介绍的关于 Lax 算子的一系列技巧, 包括一连串守恒量的构造, 沿这些守恒量的流的显示表达, 以及验证这些流之间的交换性. 这些其实是可积系统理论中的标准套路, 最早被用于研究浅水波的 KdV 方程

$$u_t = uu_x + u_{xxx}. \quad (3.115)$$

上述方程是关于未知函数  $u = u(x, t)$  的非线性偏微分方程. Lax 最先发现上述 KdV 方程(3.115)等价于

$$\frac{dL}{dt} = [M, L],$$

其中微分算子

$$L := \partial_x^2 + u, \quad M := \partial_x^3 + \frac{3}{2}u\partial_x + \frac{3}{4}u_x.$$

KdV 方程描述了一元函数  $u(x)$  随时间  $t$  的演化. 函数  $u(x)$  所在的某个无穷维空间当中也有泊松结构 (无穷维泊松流形), 使得 KdV 方程是 (无穷维) 哈密顿系统. 更进一步, 也能通过 Lax 算子来构造 KdV 方程的一连串 (无穷多个) 两两交换的守恒量, 出这些守恒量所生成的流也能用 Lax 算子来显式表达. 上述无穷维哈密顿可积系统的内容超出本讲义的范围, 对此感兴趣的读者可以翻阅 [29] 或 [14].

### 3.3.5 Adler-Kostant-Symes 构造

在上一小节, 我们将 Toda 链的演化方程(3.95)改写为 Lax 形式(3.100), 进而技巧性地构造出一系列两两交换的守恒量. 而本小节将给出这种 Lax 形式在李-泊松流形上的一般构造.

给定 (有限维  $\mathbb{R}$ -) 李代数  $\mathfrak{g}$ , 则  $\mathfrak{g}^*$  上有典范的李-泊松结构 (例3.45, 以及(3.60)式), 并且对于函数  $H \in C^\infty(\mathfrak{g}^*)$ , 我们知道  $\mathfrak{g}^*$  上的由  $H$  生成的哈密顿演化方程为

$$\frac{d\xi}{dt} = \text{ad}_{d_\xi H}^* \xi,$$

详见前文(3.61). 而对偶空间  $\mathfrak{g}^*$  总是同构于  $\mathfrak{g}$ , 若通过“适当的”方式把  $\mathfrak{g}^*$  上的上述演化方程搬运到  $\mathfrak{g}$  上, 我们就能发现 Lax 方程.

**定义 3.83.** 李代数  $\mathfrak{g}$  上的对称双线性型  $\kappa: \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{R}$  称为 **Killing 型**, 如果对任意  $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$  都成立

$$\kappa([X, Y], Z) = \kappa(X, [Y, Z]). \quad (3.116)$$

对一般的有限维李代数  $\mathfrak{g}$ , 容易验证

$$\kappa(X, Y) := \text{tr}(\text{ad}_X \text{ad}_Y)$$

总是 Killing 型, 其中  $\text{ad}_X: Y \mapsto [X, Y]$  是  $\mathfrak{g}$  上的线性变换. 而对于矩阵李代数 (即  $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$  的子代数, 其中元素为  $n \times n$  矩阵), 其 Killing 型可以取为

$$\kappa(X, Y) := \text{tr}(XY).$$

李代数  $\mathfrak{g}$  上的任何非退化对称双线性型都能自然诱导  $\mathfrak{g}$  与  $\mathfrak{g}^*$  的线性同构; 然而, 我们目前更关心非退化 Killing 型  $\kappa$  所诱导的同构

$$\begin{aligned} \iota_\kappa: \mathfrak{g} &\rightarrow \mathfrak{g}^* \\ X &\mapsto (Y \mapsto \kappa(X, Y)). \end{aligned} \quad (3.117)$$

**题 3.84.** 设有限维  $\mathbb{R}$ -李代数  $\mathfrak{g}$  具有非退化的 Killing 型  $\kappa$ , 给定  $H \in C^\infty(\mathfrak{g}^*)$ . 如果  $\mathfrak{g}^*$  上的曲线  $t \mapsto \xi(t) \in \mathfrak{g}^*$  满足哈密顿演化方程(3.61), 则  $L(t) := \iota_\kappa^{-1}(\xi(t)) \in \mathfrak{g}$  满足 Lax 方程

$$\frac{dL}{dt} = [M, L],$$

其中  $M := d_\xi H \in \mathfrak{g}$ . 换言之, 同构  $\iota_\kappa$  将  $\mathfrak{g}^*$  上的哈密顿演化方程改写为  $\mathfrak{g}$  上的上述 Lax 方程.

证明. 对任意  $X \in \mathfrak{g}$ , 由相关定义按部就班验证如下:

$$\kappa\left(\frac{dL}{dt}, X\right) = \left\langle \frac{d\xi}{dt}, X \right\rangle = \left\langle \text{ad}_{d_\xi H}^* \xi, X \right\rangle$$

$$= -\langle \xi, [d_\xi H, X] \rangle = -\kappa(L, [d_\xi H, X]) = \kappa([d_\xi H, L], X),$$

注意最后一个等号依赖 Killing 型的性质. 于是由  $X$  的任意性与  $\kappa$  的非退化性立刻得到  $\frac{dL}{dt} = [d_\xi H, L]$ , 得证.  $\square$

上述只是一种简化情形, 还不足以推广上一小节的 Toda 链. 现在我们来考虑更一般的情况. 给定李代数  $\mathfrak{g}$  的子代数直和分解

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_+ \oplus \mathfrak{g}_-, \quad (3.118)$$

即, 上式右边是线性空间的直和, 并且  $\mathfrak{g}_+, \mathfrak{g}_-$  都是  $\mathfrak{g}$  的李子代数. 对于  $X \in \mathfrak{g}$ , 记  $X_+, X_-$  分别为  $X$  在  $\mathfrak{g}_+, \mathfrak{g}_-$  的分量, 分别称为  $X$  的正部与负部. 子空间直和分解自然给出对偶空间的同构

$$\mathfrak{g}^* \cong \mathfrak{g}_+^* \oplus \mathfrak{g}_-^*, \quad (3.119)$$

在此意义下,  $\mathfrak{g}_+^*$  与  $\mathfrak{g}_-^*$  自然被视为  $\mathfrak{g}^*$  的子空间.

对于一般的泊松流形  $(M, \Pi)$ , 函数  $H \in C^\infty(M)$  称为 **Casimir 函数**, 如果相应的哈密顿向量场  $X_H = 0$ . 特别地, 对于李-泊松流形  $\mathfrak{g}^*$  的情形,  $H \in C^\infty(\mathfrak{g}^*)$  是 Casimir 函数当且仅当  $\text{ad}_{d_\xi H}^* \xi = 0$  对任意  $\xi \in \mathfrak{g}^*$  都成立.

李-泊松流形  $\mathfrak{g}^*$  上的 Casimir 函数所生成的哈密顿流总是平凡的, 但将 Casimir 函数限制在子空间  $\mathfrak{g}_+^*$  上, 就会出现不平凡的结果.

**定理 3.85.** (*Adler-Kostant-Symes 构造*, [2, 23, 39]).

对于有限维  $\mathbb{R}$ -李代数  $\mathfrak{g}$  的子代数直和分解  $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_+ \oplus \mathfrak{g}_-$ , 并注意对偶空间的同构(3.119), 则

1. 对任意函数  $H \in C^\infty(\mathfrak{g}^*)$ , 记  $H_+ := H|_{\mathfrak{g}_+^*} \in C^\infty(\mathfrak{g}_+^*)$  为  $H$  在子空间  $\mathfrak{g}_+^*$  上的限制. 注意  $\mathfrak{g}_+$  的李代数结构使得  $\mathfrak{g}_+^*$  也具有李-泊松结构. 则在  $\mathfrak{g}_+^*$  中, 函数  $H_+$  所生成的哈密顿演化方程为

$$\frac{d\xi}{dt} = \text{ad}_{(d_\xi H)_+}^* \xi.$$

2. 若  $\mathfrak{g}$  具有非退化 Killing 型  $\kappa$ , 记  $\iota_\kappa: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}^*$  为  $\kappa$  诱导的线性同构. 若  $\mathfrak{g}_+^*$  中的曲线  $t \mapsto \xi(t)$  满足 (1) 中的哈密顿演化方程, 则

$L(t) := \iota_{\kappa}^{-1}(\xi((t))) \in \mathfrak{g}_+$  满足 *Lax* 方程

$$\frac{dL}{dt} = [(d_{\xi}H)_+, L]. \quad (3.120)$$

3. 对于  $\mathfrak{g}^*$  上的 *Casimir* 函数  $H, K$ , 总成立

$$\{H_+, K_+\} = 0, \quad (3.121)$$

其中  $H_+, K_+$  分别是  $H, K$  在子空间  $\mathfrak{g}_+^*$  上的限制, 而上式的  $\{, \}$  是  $\mathfrak{g}_+^*$  上的李-泊松括号.

证明. 对任意  $H \in C^\infty(\mathfrak{g}^*)$ ,  $H_+$  所生成的哈密顿演化方程为  $\frac{d\xi}{dt} = \mathbf{ad}_{d_{\xi}^+ H_+}^* \xi$ , 其中  $d^+$  为子流形  $\mathfrak{g}_+^*$  上的外微分算子,  $d_{\xi}^+$  的含义也类似. 容易验证对任意  $\xi \in \mathfrak{g}_+^*$  都有如下交换图

$$\begin{array}{ccc} C^\infty(\mathfrak{g}^*) & \xrightarrow{(\cdot)_+} & C^\infty(\mathfrak{g}_+^*) \\ d_{\xi} \downarrow & & \downarrow d_{\xi}^+ \\ \mathfrak{g} & \xrightarrow{(\cdot)_+} & \mathfrak{g}_+ \end{array}$$

换言之, 有  $d_{\xi}^+ H_+ = (d_{\xi}H)_+$ , 从而 (1) 得证. 而 (2) 与题3.84完全类似, 留给读者. 下证 (3). 对于  $\mathfrak{g}^*$  上的 *Casimir* 函数  $H, K$ , 由 *Casimir* 函数的定义容易验证, 对任意  $X \in \mathfrak{g}$  以及  $\xi \in \mathfrak{g}^*$  都有

$$\langle \xi, [X, d_{\xi}H] \rangle = \langle \xi, [X, d_{\xi}K] \rangle = 0,$$

细节留给读者. 利用上述等式, 并注意  $d_{\xi}H = (d_{\xi}H)_+ + (d_{\xi}H)_-$ , 从而对任意  $\xi \in \mathfrak{g}_+^*$ , 成立

$$\begin{aligned} \{H_+, K_+\}(\xi) &= \langle \xi, [d_{\xi}^+ H_+, d_{\xi}^+ K_+] \rangle = \langle \xi, [(d_{\xi}H)_+, (d_{\xi}K)_+] \rangle \\ &= \langle \xi, [d_{\xi}H, d_{\xi}K] \rangle - \langle \xi, [(d_{\xi}H)_-, d_{\xi}K] \rangle \\ &\quad - \langle \xi, [d_{\xi}H, (d_{\xi}K)_-] \rangle + \langle \xi, [(d_{\xi}H)_-, (d_{\xi}K)_-] \rangle \\ &= \langle \xi, [(d_{\xi}H)_-, (d_{\xi}K)_-] \rangle \\ &= 0, \end{aligned}$$

其中最后一个等号是因为  $\mathfrak{g}_-^*$  也是李子代数,  $[(d_\xi H)_-, (d_\xi K)_-] \in \mathfrak{g}^*$ , 而  $\xi \in \mathfrak{g}_+^*$ . 综上, 定理得证.  $\square$

下面考察该定理的具体应用, 并由此重新研究上一小节的 Toda 链.

**题 3.86.** 对于一般线性李代数  $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{n \times n}$ , 注意  $\mathfrak{g}$  与  $\mathfrak{g}^*$  中的元素都自然视为  $n$  阶实方阵. 取  $\mathfrak{g}$  的非退化 Killing 型:

$$\kappa(X, Y) = \text{tr}(XY), \quad (3.122)$$

在此意义下, 配对映射  $\langle, \rangle: \mathfrak{g}^* \times \mathfrak{g}$  为

$$\langle X, Y \rangle = \kappa(X, Y) = \text{tr}(XY).$$

1. 对任意  $X \in \mathfrak{g}$ , 验证

$$\iota_\kappa(X) = X. \quad (3.123)$$

2. 对任意  $X \in \mathfrak{g}^*$  以及  $Y \in \mathfrak{g}$ , 验证

$$\text{ad}_X^* Y = [X, Y]. \quad (3.124)$$

**题 3.87.** 对于一般线性李代数  $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ , 沿用上题的记号与约定, 考虑  $\mathfrak{g}^*$  上的函数 (即(3.101)式)

$$H_k(\xi) = \frac{1}{k+1} \text{tr}(\xi^{k+1}), \quad \xi \in \mathfrak{g}^*, k \geq 0. \quad (3.125)$$

1. 对任意  $\xi \in \mathfrak{g}^*$ , 验证

$$d_\xi H_k = \xi^k. \quad (3.126)$$

2. 验证:  $H_k$  是  $\mathfrak{g}^*$  上的 Casimir 函数.

证明. 注意到, 对任意  $\eta \in \mathfrak{g}^*$ , 有

$$\begin{aligned} \langle \eta, d_\xi H_k \rangle &= \left. \frac{d}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} H_k(\xi + \varepsilon\eta) = \frac{1}{k+1} \left. \frac{d}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \text{tr}((\xi + \varepsilon\eta)^{k+1}) \\ &= \text{tr}(\xi^k \eta) = \langle \eta, \xi^k \rangle, \end{aligned}$$

因此  $d_\xi H_k = \xi^k$ . 进而  $H_k$  的哈密顿向量场  $X_{H_k}$  满足

$$X_{H_k}(\xi) = \text{ad}_{d_\xi H_k}^* \xi = [d_\xi H_k, \xi] = [\xi^k, \xi] = 0,$$

所以  $H_k$  是  $\mathfrak{g}^*$  上的 Casimir 函数, 证毕.  $\square$

现在, 是时候重写上一小节的 Toda 链了. 回忆李代数  $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$  的子代数直和分解(3.106)

$$\begin{aligned}\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) &= \mathfrak{t}(n, \mathbb{R}) \oplus \mathfrak{o}(n) \\ &= \mathfrak{g}_+ \oplus \mathfrak{g}_-, \end{aligned} \quad (3.127)$$

但特别注意: 与上一小节相反, 现在我们把上三角子代数  $\mathfrak{t}(n, \mathbb{R})$  规定为  $\mathfrak{g}$  的正部 (事实上这才是真正的取法), 即, 对于  $X \in \mathfrak{g}$ ,  $X_+$  是  $X$  的上三角分量, 而  $X_-$  才是  $X$  的反对称分量. 在非退化 Killing 型  $\kappa$ (3.122) 的意义下,  $\mathfrak{g}_+^*$  与  $\mathfrak{g}_-^*$  自然被视为  $\mathfrak{g}$  的子空间:

$$\mathfrak{g}_+^* \cong (\mathfrak{g}_-)^{\perp}, \quad \mathfrak{g}_-^* \cong (\mathfrak{g}_+)^{\perp}, \quad (3.128)$$

这里的  $()^{\perp}$  是指 Killing 型  $\kappa$  意义下的正交补.

**题 3.88.** 记号承上,

1. 在同构(3.128)意义下, 验证:

$$\begin{aligned}\mathfrak{g}_+^* &\cong \text{Sym}(n, \mathbb{R}) := \{X \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid X^T = X\}, \\ \mathfrak{g}_-^* &\cong \mathfrak{t}^+(n, \mathbb{R}) := \{X \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid X_{ij} = 0, \forall i \geq j\}.\end{aligned}$$

换言之,  $\mathfrak{g}_+^*$  与  $\mathfrak{g}_-^*$  分别是由对称方阵, 严格上三角方阵构成的子空间. 此时, 对任意  $X \in \mathfrak{g}^* = \mathfrak{g}_+^* \oplus \mathfrak{g}_-^*$ , 验证:

$$X_+^* = X_l + X_l^T + X_d, \quad X_-^* = X_u - X_l^T, \quad (3.129)$$

其中  $X_+^*, X_-^*$  分别是  $X$  在  $\mathfrak{g}_+^*, \mathfrak{g}_-^*$  中的分量,  $()_u, ()_d, ()_l$  的含义同(3.104).

2. 考虑上三角子代数  $\mathfrak{g}_+ = \mathfrak{t}(n, \mathbb{R})$  的李群

$$G_+ := \exp(\mathfrak{g}_+) = \{g \in \text{GL}(n, \mathbb{R}) \mid \det g \neq 0, g_{ij} = 0, \forall i > j\},$$

即上三角子群. 而  $G_+$  在  $\mathfrak{g}_+^* \cong \text{Sym}(n, \mathbb{R})$  上有余伴随作用. 取定

$$\xi_0 := \begin{pmatrix} \frac{p}{n} & 1 & & \\ 1 & \frac{p}{n} & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ & & 1 & \frac{p}{n} \end{pmatrix} \in \mathfrak{g}_+^*,$$

其中  $p$  为给定的常数. 验证: 余伴随轨道

$$G_+^\# \xi_0 = \left\{ \left( \begin{pmatrix} b_1 & a_1 & & \\ a_1 & b_2 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & a_{n-1} \\ & & a_{n-1} & b_n \end{pmatrix} \right) \left| \begin{array}{l} a_1, \dots, a_{n-1}; b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R}, \\ \sum_{\ell=1}^n b_\ell = p \end{array} \right. \right\} \cong \mathbb{R}^{2n-2},$$

这正是(3.99)式的 Lax 算子  $L$  所在的空间.

3. 验证: 余伴随轨道  $G_+^\# \xi_0$  作为李-泊松流形  $\mathfrak{g}_+^*$  的辛叶 (见3.2.5小节), 其李-泊松括号  $\{, \}$  满足

$$\begin{aligned} \{a_k, a_\ell\} &= \{b_k, b_\ell\} = 0, \\ \{a_k, b_\ell\} &= a_k(\delta_{k+1, \ell} - \delta_{k\ell}), \end{aligned} \quad (3.130)$$

它刚好是 Toda 链的泊松括号(3.97)的  $(-1)$  倍. 这里的  $a_k, b_\ell$  视为  $G_+^\# \xi_0$  上的坐标函数.

解. (1) 留给读者. 至于 (2), 对一般的

$$g = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & \cdots & g_{1n} \\ & g_{22} & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & g_{n-1, n} \\ & & & g_{nn} \end{pmatrix} \in G_+,$$

我们来计算  $\text{Ad}_g^* \xi_0$ . 由相关定义, 对任意  $X \in \mathfrak{g}_+ \cong \mathfrak{t}(n, \mathbb{R})$  都有

$$\begin{aligned} \text{tr}(\text{Ad}_g^* \xi_0 \cdot X) &= \langle \text{Ad}_g^* \xi_0, X \rangle = \langle \xi_0, \text{Ad}_{g^{-1}} X \rangle \\ &= \langle \xi_0, g^{-1} X g \rangle = \text{tr}(\xi_0 g^{-1} X g) = \text{tr}(g \xi_0 g^{-1} \cdot X), \end{aligned}$$

这表明  $\text{Ad}_g^* \xi_0 - g \xi_0 g^{-1} \in (\mathfrak{g}_+)^{\perp} = \mathfrak{g}_-^*$ . 而  $\text{Ad}_g^* \xi_0 \in \mathfrak{g}_+^*$ , 从而易知

$$\text{Ad}_g^* \xi_0 = (g \xi_0 g^{-1})_+^*.$$



注意(3.129)以及上式, 直接计算得

$$\mathrm{Ad}_g^* \xi_0 = \begin{pmatrix} b_1 & a_1 & & \\ a_1 & b_2 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & a_{n-1} \\ & & a_{n-1} & b_n \end{pmatrix},$$

其中

$$a_i = \frac{g_{i+1,i+1}}{g_{ii}}, \quad 1 \leq i \leq n-1$$

$$b_i = \begin{cases} \frac{p}{n} + \frac{g_{12}}{g_{11}} & i = 1, \\ \frac{p}{n} + \frac{g_{i,i+1}}{g_{ii}} - \frac{g_{i-1,i}}{g_{i-1,i-1}} & 2 \leq i \leq n-1, \\ \frac{p}{n} - \frac{g_{n-1,n}}{g_{n-1,n-1}} & i = n, \end{cases}$$

其余留给读者. 至于 (3), 自然将  $a_k, b_\ell$  视为辛叶 (余伴随轨道)  $G_+^\# \xi_0$  上的坐标函数, 它们分别是  $\mathfrak{g}^*$  上的函数  $\mathbf{X} \mapsto X_{k,k+1}, \mathbf{X} \mapsto X_{\ell\ell}$  在  $G_+^\# \xi_0$  上的限制. 于是对任意  $\xi \in \mathfrak{g}_+^*$ ,

$$\mathrm{d}_\xi a_k = \mathbf{E}_{k,k+1}, \quad \mathrm{d}_\xi b_\ell = \mathbf{E}_{\ell\ell},$$

并注意  $\xi^T = \xi$ , 从而

$$\begin{aligned} \{a_k, b_\ell\}(\xi) &= \langle \xi, [\mathrm{d}_\xi a_k, \mathrm{d}_\xi b_\ell] \rangle = \langle \xi, [\mathbf{E}_{k,k+1}, \mathbf{E}_{\ell\ell}] \rangle \\ &= (\delta_{k+1,\ell} - \delta_{k\ell}) \mathrm{tr}(\xi \mathbf{E}_{k,k+1}) = (\delta_{k+1,\ell} - \delta_{k\ell}) \mathrm{tr}(\mathbf{E}_{k+1,k} \xi^T) \\ &= (\delta_{k+1,\ell} - \delta_{k\ell}) \xi_{k,k+1} = (\delta_{k+1,\ell} - \delta_{k\ell}) a_k(\xi), \end{aligned}$$

因此  $\{a_k, b_\ell\} = (\delta_{k+1,\ell} - \delta_{k\ell}) a_k$ . 同理可以验证  $\{a_k, a_\ell\} = \{b_k, b_\ell\} = 0$ .  $\square$

**题 3.89.** 利用题3.87与定理3.85的 (3), 再次证明(3.101)式中的 Toda 链的守恒量  $H_p$  ( $0 \leq p \leq n-1$ ) 两两交换, 并与性质3.80中的技巧性证明相对照.

## 3.4 作用-角坐标

再考察了 Liouville 可积系统的众多例子之后, 我们来研究其一般性质. 沿用3.3.1小节的记号约定, 给定可积系统  $(M, \omega, \mathcal{H})$ , 其中  $(M, \omega)$  是  $2n$  维

辛流形,  $\mathcal{H}: M \rightarrow \mathbb{R}^n, m \mapsto (H_1, \dots, H_n)^T$  为  $n$  个两两交换的守恒量. 对于  $\mathcal{H}$  的正则点  $m \in M$ , 其正则值  $\mathbf{h} := \mathcal{H}(m)$ . 本节将介绍子流形  $M_{\mathbf{h}} := \mathcal{H}^{-1}(\mathbf{h})$  在点  $m$  附近的局部性质, 并初步了解其整体性质.

### 3.4.1 Liouville 环面

先来初步考察正则点附近的局部性质.

**定理 3.90.** 设  $(M, \omega, \mathcal{H})$  为 Liouville 可积系统,  $m \in M$  为映射  $\mathcal{H}: M \rightarrow \mathbb{R}^n$  的一个正则点, 则存在  $m \in M$  的开邻域  $U$ , 以及  $U$  上的光滑函数  $G^1, \dots, G^n$ , 使得以下成立:

1.  $(G^1, \dots, G^n; H_1, \dots, H_n)$  是  $M$  在  $m$  附近的 Darboux 坐标, 即成立

$$\omega = \sum_{i=1}^n G^i \wedge H_i. \quad (3.131)$$

2. 记  $\Phi^i: (-\varepsilon, \varepsilon) \times M \rightarrow M, (t, m) \mapsto \Phi_t^i(m)$  为哈密顿向量场  $X_{H_i}$  生成的流, 则对任意  $1 \leq i, j \leq n$  都有

$$G^i(\Phi_t^j(m)) = G^i(m) + t\delta^{ij}. \quad (3.132)$$

换言之,  $\Phi^i$  在局部坐标  $(G, H) = (G^1, \dots, G^n; H_1, \dots, H_n)$  下具有表达式

$$\Phi_t^i(G, H) = (G^1, \dots, G^i + t, \dots, G^n; H).$$

证明. 按照注3.58所言, 先取  $m$  附近的一组坐标

$$\mathbf{u} = (u^1, \dots, u^n; u^{n+1}, \dots, u^{2n}),$$

使得对  $1 \leq i \leq n$ , 哈密顿向量场  $X_{H_i} = \frac{\partial}{\partial u^i}$ , 从而有

$$u^i(\Phi_t^j(m)) = u^i(m) + t\delta^{ij}, \quad 1 \leq i, j \leq n. \quad (3.133)$$

将  $\mathbf{u}$  的前  $n$  个分量作适当调整, 就得到我们想要的  $G^i$ . 具体如下:

1. 注意到对任意  $1 \leq i, j \leq n$  都有

$$\{u^i, H_j\} = X_{H_j}(u^i) = \langle \mathbf{d}u^i, X_{H_j} \rangle = \left\langle \mathbf{d}u^i, \frac{\partial}{\partial u^j} \right\rangle = \delta_j^i,$$

以及  $\{H_i, H_j\} = 0$ , 从而易知  $\mathbf{d}u^1, \dots, \mathbf{d}u^n; \mathbf{d}H_1, \dots, \mathbf{d}H_n$  在  $m$  附近线性无关, 故  $(u^1, \dots, u^n; H_1, \dots, H_n)$  构成  $m$  附近的一组局部坐标; 此外, 易知辛结构  $\omega$  在该坐标下形如

$$\omega = \sum_{i=1}^n \mathbf{d}u^i \wedge \mathbf{d}H_i + \sum_{i,j=1}^n h^{ij} \mathbf{d}H_i \wedge \mathbf{d}H_j, \quad (3.134)$$

其中  $h^{ij} = h^{ij}(u^1, \dots, u^n; H_1, \dots, H_n)$  为光滑函数, 且  $h^{ij} = -h^{ji}$ .

2. 直接计算易知, 2-形式  $\mathbf{d}u^i \wedge \mathbf{d}H_i$  与  $\mathbf{d}H_i \wedge \mathbf{d}H_j$  都是  $\Phi^i$ -不变的 ( $i = 1, 2, \dots, n$ ). 而辛形式  $\omega$  总是  $\Phi^i$ -不变的 (见定理3.2), 因此函数  $h^{ij}$  也是  $\Phi^i$ -不变的, 这表明  $h^{ij}$  不显含  $u^1, \dots, u^n$ , 只与  $H_1, \dots, H_n$  有关. 换言之, 存在  $\mathbf{h} := \mathcal{H}(m) \in \mathbb{R}^n$  附近的光滑函数  $k_{ij}$  使得成立

$$\sum_{i,j=1}^n h^{ij} \mathbf{d}H_i \wedge \mathbf{d}H_j = \mathcal{H}^* \left( \sum_{i,j=1}^n k_{ij} \mathbf{d}x^i \wedge \mathbf{d}x^j \right),$$

其中  $x^1, \dots, x^n$  为  $\mathbb{R}^n$  的标准坐标, 注意  $\mathcal{H}^*(x^i) = H_i$ .

3. 由  $\mathbf{d}\omega = 0$  可知

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^* \left( \mathbf{d} \sum_{i,j=1}^n k_{ij} \mathbf{d}x^i \wedge \mathbf{d}x^j \right) &= \mathbf{d} \left( \sum_{i,j=1}^n h^{ij} \mathbf{d}H_i \wedge \mathbf{d}H_j \right) \\ &= \mathbf{d} \left( \omega - \sum_{i=1}^n \mathbf{d}u^i \wedge \mathbf{d}H_i \right) = 0. \end{aligned}$$

$m \in M$  是  $\mathcal{H}$  的正则点表明切映射  $\mathcal{H}_*$  在  $m$  附近为满射, 从而拉回映射  $\mathcal{H}^*$  在  $m$  附近是单射, 从而由上式可得

$$\mathbf{d} \left( \sum_{i,j=1}^n k_{ij} \mathbf{d}x^i \wedge \mathbf{d}x^j \right) = 0.$$

进而由庞加莱引理, 存在  $\mathbf{h} := \mathcal{H}(m) \in \mathbb{R}^n$  附近的 1-形式

$$\alpha = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{d}x^i,$$

使得

$$\sum_{i,j=1}^n k_{ij} dx^i \wedge dx^j = d\alpha.$$

4. 对于  $1 \leq i \leq n$ , 引入  $m \in M$  附近的函数

$$G^i := u^i + \alpha_i \circ \mathcal{H},$$

断言:  $(G^1, \dots, G^n)$  满足定理条件. 首先,  $G^i$  显然满足(3.132); 而辛形式  $\omega$  可写为

$$\begin{aligned} \omega &= \sum_{i=1}^n du^i \wedge dH_i + \sum_{i,j=1}^n h^{ij} dH_i \wedge dH_j \\ &= \sum_{i=1}^n d(G^i - \alpha_i \circ \mathcal{H}) \wedge dH_i + \mathcal{H}^* \left( \sum_{i,j=1}^n k_{ij} dx^i \wedge dx^j \right) \\ &= \sum_{i=1}^n dG^i \wedge dH_i - \mathcal{H}^* \left( \sum_{i=1}^n d\alpha_i \wedge dx^i \right) + \mathcal{H}^* \left( \sum_{i,j=1}^n k_{ij} dx^i \wedge dx^j \right) \\ &= \sum_{i=1}^n dG^i \wedge dH_i + \mathcal{H}^* \left( \sum_{i,j=1}^n k_{ij} dx^i \wedge dx^j - d\alpha \right) \\ &= \sum_{i=1}^n dG^i \wedge dH_i. \end{aligned}$$

从而定理得证. □

**注 3.91.** 由上述证明过程可以看出,  $G^i$  并不是唯一的, 它至少有如下的自由度: 在证明过程第 3 步中的  $\alpha \mapsto \alpha + d\eta$ , 其中  $\eta$  为  $\mathbf{h} := \mathcal{H}(m) \in \mathbb{R}^n$  附近的光滑函数. 相应地, 若  $\{G^i\}$  满足定理条件, 则对上述  $\eta$ ,  $\{G^i + \frac{\partial \eta}{\partial x^i} \circ \mathcal{H}\}$  也满足定理条件.

对于  $\mathcal{H}$  的正则点  $m \in M$ , 记  $\Sigma_m$  为水平集  $\mathcal{H}^{-1}(\mathcal{H}(m))$  的包含  $m$  的连通分支. 我们已经知道  $\Sigma_m$  是  $M$  的  $n$  维子流形, 且哈密顿向量场  $X_{H_i}$  ( $1 \leq i \leq n$ ) 可限制为  $\Sigma_m$  的切向量场. 如果  $\phi_m^i: t \mapsto \Phi_t^i(m)$  在  $\mathbb{R}$  上整体定义, 则称  $\Sigma_m$  上的向量场  $X_{H_i}$  是完备的.

**定理 3.92.** 对于 *Liouville* 可积系统  $(M, \omega, \mathcal{H})$ , 记号同上.

1. 如果哈密顿向量场  $X_{H_i}$  ( $1 \leq i \leq n$ ) 在  $\Sigma_m$  完备, 则存在  $0 \leq k \leq n$ , 使得  $\Sigma_m$  同胚于  $T^k \times \mathbb{R}^{n-k}$ , 其中  $T^k := (S^1)^k$  为  $k$  维环面.
2. 特别地, 如果  $\Sigma_m$  是紧的, 则  $\Sigma_m$  同胚于环面  $T^n$ .

证明. (2) 是 (1) 的简单推论, 我们只证 (1).

1. 由于  $X_{H_1}, \dots, X_{H_n}$  生成的流两两交换, 并且这些哈密顿向量场  $X_{H_i}$  完备, 从而易知有良定的映射

$$\begin{aligned} \Psi: \mathbb{R}^n \times \Sigma_m &\rightarrow \Sigma_m \\ (\mathbf{t}, p) &\mapsto \Psi_{\mathbf{t}}(p) := (\Phi_{t_1}^1 \circ \dots \circ \Phi_{t_n}^n)(p), \end{aligned}$$

这是加法群  $\mathbb{R}^n$  在  $\Sigma_m$  上的群作用. 对任意  $p \in \Sigma_m$ , 记

$$\begin{aligned} \psi_p: \mathbb{R}^n &\rightarrow \Sigma_m \\ \mathbf{t} &\mapsto \Psi_{\mathbf{t}}(p). \end{aligned}$$

由于  $X_{H_1}, \dots, X_{H_n}$  处处线性无关, 从而对任意  $p \in \Sigma_m$ , 由  $\psi_p$  的定义以及隐函数定理可知  $\psi_p$  是局部微分同胚. 特别地,  $\psi_p$  是开映射.

2. 断言: 对任意  $p \in \Sigma_m$ ,  $\psi_p$  是满射. 事实上, 我们已经知道像集  $\psi_p(\mathbb{R}^n)$  是  $\Sigma_m$  的非空开子集, 从而由  $\Sigma_m$  的连通性, 只需再说明  $\psi_p(\mathbb{R}^n)$  是  $\Sigma_m$  的闭子集即可. 若  $\mathbb{R}^n$  中的点列  $\{\mathbf{t}_j\}_{j=1}^\infty$  使得  $p_j := \psi_p(\mathbf{t}_j)$  收敛于点  $p' \in \Sigma_m$ , 则取足够小的  $\varepsilon > 0$  使得当  $j$  充分大时  $p_j \in \psi_{p'}(I_\varepsilon)$ , 其中  $I_\varepsilon := (-\varepsilon, \varepsilon)^n$  是  $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$  的开邻域, 并且它同胚于  $\psi_{p'}(I_\varepsilon)$ . 因此存在正整数  $N$  以及  $\mathbf{t}_0 \in I_\varepsilon$  使得

$$\psi_p(\mathbf{t}_N) =: p_N = \psi_{p'}(\mathbf{t}_0),$$

从而易知  $p' = \psi_p(\mathbf{t}_N - \mathbf{t}_0) \in \psi_p(\mathbb{R}^n)$ , 从而像集  $\psi_p(\mathbb{R}^n)$  是  $\Sigma_m$  的闭子集. 断言得证.

3. 取定  $p \in \Sigma_m$ , 记稳定子群

$$\text{Stab}_{\mathbb{R}^n}(p) := \{\mathbf{t} \in \mathbb{R}^n \mid \psi_p(\mathbf{t}) = p\},$$

则由  $\psi_p$  是满射可知  $\Sigma_m \cong \mathbb{R}^n / \text{Stab}_{\mathbb{R}^n}(p)$ . 又由于  $\psi_p$  是开映射, 从而易知稳定子群  $\text{Stab}_{\mathbb{R}^n}(p)$  是  $\mathbb{R}^n$  的离散子群. 而众所周知,  $\mathbb{R}^n$  的离散子群都由  $k$  个线性无关的向量  $\mathbb{Z}$ -张成, 其同构于  $\mathbb{Z}^k$ , 其中  $0 \leq k \leq n$ , 从而

$$\Sigma_m \cong \mathbb{R}^n / \mathbb{Z}^k \cong T^k \times \mathbb{R}^{n-k}.$$

定理得证. □

### 3.4.2 Arnold-Liouville 定理

# 参考文献

- [1] Abraham R, Marsden J E. *Foundations of mechanics* [M]. American Mathematical Society, 2008.
- [2] Adler M. *On a trace functional for formal pseudo-differential operators and the symplectic structure of the Korteweg-deVries type equations* [J]. *Inventiones mathematicae*, 1978, 50: 219-248.
- [3] Aebischer B, Borer M, Kälin M, et al. *Symplectic Geometry: an Introduction based on the Seminar in Bern, 1992* [M]. Birkhäuser, 2013.
- [4] Andrianov A. *Introduction to Siegel modular forms and Dirichlet series* [M]. Springer Science & Business Media, 2008.
- [5] Arnol'd V I. *Mathematical methods of classical mechanics* [M]. Springer Science & Business Media, 2013.
- [6] Artin E. *Geometric Algebra* [J]. Interscience Publ Inc, NY, London, 1957.
- [7] Audin M. *Spinning tops: A course on integrable systems* [M]. Cambridge University Press, 1999.
- [8] Bolsinov A V, Fomenko A T. *Integrable Hamiltonian systems: geometry, topology, classification* [M]. CRC press, 2004.
- [9] 陈童. 经典力学新讲: 现代导引 [OL]. 链接: <https://newquanta.com/>
- [10] Crainic M, Fernandes R L, Mărcuț I. *Lectures on Poisson geometry* [M]. American Mathematical Society, 2021.
- [11] Cushman R H, Bates L M. *Global aspects of classical integrable systems* [M]. Basel: Birkhäuser, 1997.
- [12] Da Silva A C, Da Salva A C. *Lectures on symplectic geometry* [M]. Berlin: Springer, 2001.

- [13] Demailly J P. *Complex analytic and differential geometry* [M]. Grenoble: Université de Grenoble I, 1997.
- [14] Dickey L A. *Soliton equations and Hamiltonian systems* [M]. World scientific, 2003.
- [15] Eichler M. *Introduction to the Theory of Algebraic Numbers and Functions* [M]. Academic Press, 1966.
- [16] Fernández M, Gotay M J, Gray A. *Compact parallelizable four-dimensional symplectic and complex manifolds* [J]. Proceedings of the American Mathematical Society, 1988, 103(4): 1209-1212.
- [17] Flaschka H. *The Toda lattice. II. Existence of integrals* [J]. Physical Review B, 1974, 9(4): 1924.
- [18] Giorgilli A. *Notes on Hamiltonian dynamical systems* [M]. Cambridge University Press, 2022.
- [19] Hofbauer J, Sigmund K. *Evolutionary games and population dynamics* [M]. Cambridge University Press, 1998.
- [20] Jacobson N. *Basic algebra I* [M]. Courier Corporation, 2012.
- [21] Kirillov A A. *Elements of the theory of representations* [J]. Springer-Verlag Berlin-New York, 1976.
- [22] Kodaira K. *On the structure of compact complex analytic surfaces, I* [J]. American Journal of Mathematics, 1964, 86(4): 751-798.
- [23] Kostant B. *The solution to a generalized Toda lattice and representation theory* [J]. Advances in Mathematics, 1979, 34(3): 195-338.
- [24] Lee J M. *Introduction to smooth manifolds (second edition)* [M]. Springer, Graduate Texts in Mathematics 218, 2012.
- [25] Liu S Q (刘思齐). *Lecture notes on bihamiltonian structures and their central invariants* [J]. B-Model Gromov-Witten Theory, 2018: 573-625.



- [26] Liu S Q (刘思齐), Zhang Y (张友金). *Bihamiltonian cohomologies and integrable hierarchies I: a special case* [J]. Communications in Mathematical Physics, 2013, 324: 897-935.
- [27] Marle C M. *The Schouten-Nijenhuis bracket and interior products* [J]. Journal of Geometry and Physics, 1997, 23(3-4): 350-359.
- [28] McDuff D, Salamon D. *Introduction to symplectic topology* [M]. Oxford University Press, 2017.
- [29] Miwa T, Jimbo M, Date E. *Solitons: Differential equations, symmetries and infinite dimensional algebras* [M]. Cambridge university press, 2000.
- [30] Moshayedi N. *Lectures on Symplectic Geometry, Poisson Geometry, Deformation Quantization and Quantum Field Theory* [J]. arXiv preprint arXiv:2012.14662, 2020.
- [31] Newlander A, Nirenberg L. *Complex analytic coordinates in almost complex manifolds* [J]. Annals of Mathematics, 1957: 391-404.
- [32] Rudolph G, Schmidt M, Schmidt M. *Differential geometry and mathematical physics* [M]. Springer, 2012.
- [33] Satake I. *Algebraic structures of symmetric domains* [M]. Princeton University Press, 2014.
- [34] Semenov-Tian-Shansky M A. *What is a classical r-matrix?* [J]. Funktsional'nyi Analiz i ego Prilozheniya, 1983, 17(4): 17-33.
- [35] Siegel C L. *Topics in Complex Function Theory, Volume 3: Abelian Functions and Modular Functions of Several Variables* [M]. John Wiley & Sons, 1989.
- [36] Siegel C L, Moser J K. *Lectures on Celestial Mechanics* [J]. Springer-Verlag, Berlin. 1971.
- [37] Stefan P. *Accessible sets, orbits, and foliations with singularities* [J]. Proceedings of the London Mathematical Society, 1974, 3(4): 699-713.

- [38] Sussmann H J. *Orbits of families of vector fields and integrability of distributions* [J]. Transactions of the American Mathematical Society, 1973, 180: 171-188.
- [39] Symes W W. *Systems of Toda type, inverse spectral problems, and representation theory* [J]. Inventiones mathematicae, 1980, 59(1): 13-51.
- [40] Thurston W P. *Some simple examples of symplectic manifolds* [J]. Proceedings of the American Mathematical Society, 1976, 55(2): 467-468.
- [41] Toda M. *Wave propagation in anharmonic lattices* [J]. Journal of the Physical Society of Japan, 1967, 23(3): 501-506.
- [42] Vaisman I. *Lectures on the geometry of Poisson manifolds* [M]. Birkhäuser, 2012.
- [43] Vaisman I. *Symplectic geometry and secondary characteristic classes* [M]. Boston: Birkhäuser, 1987.
- [44] Voison C. *Hodge Theory and Complex Algebraic Geometry, I* [M]. Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 2002, 76.
- [45] Woodhouse N. *Geometric Quantization* [J]. Clarendon. 1980.