矩阵积分与可积系统

(学习笔记) 0.97 版

曲豆豆 整理

2024 年 10 月 2 日

图: 曲豆豆穿上博士服, 就好像真的是博士一样.

目录

1. 矩阵积分

矩阵模型在弦论、拓扑学 (纽结理论)、数论、可积系统, 乃至无线通信、晶体生长等众多数学物理领域中都有重要应用. 笔者希望尽快熟悉矩阵模型与可积系统之间的关系, 故整理此学习笔记.

1.1 Virasoro 约束

给定正整数 N, 记 **1-矩阵模型**的**配分函数**

$$\mathcal{Z}_N(\mathbf{t}) := \int_{\mathbb{R}^{N\times N}} \mathrm{e}^{\sum\limits_{k=0}^{\infty} t_k \mathrm{tr}(H^k)} \mathrm{d}H, \tag{1.1}$$

在这里, 积分变量 H 取遍所有 $N\times N$ 实方阵, 体积元 $\mathrm{d}H := \prod\limits_{i,j=1}^{n} \mathrm{d}H_{ij}$, 而 $\mathbf{t} = (t_0, t_1, ...)$ 为无穷多个形式变元, 视为 $\mathcal{Z}_N$ 的自变量.

(1.1)右边的积分为形式上的 N^2-重积分, 我们暂不考虑其收敛性. 一般来说, 在常见的矩阵模型里, 积分变量 H 的积分区域往往是全体厄米特矩阵、全体酉矩阵或者全体正交矩阵之类的, 不过在这里为了省事, 姑且假装积分区域为全体 $N\times N$ 实矩阵; 而被积函数也可以更复杂, 我们这里所考虑的是某种意义下最简单的情形.

我们来研究配分函数(1.1)的基本性质.

习题 **1.1.**(关联函数, n-点函数) 记号承上, 给定 $n\geq 0$, 以及 $a_1, a_2, ..., a_n \geq 0$, 记关联函数

$$\begin{aligned}&\langle \mathrm{tr}(H^{a_1})\mathrm{tr}(H^{a_2})\cdots\mathrm{tr}(H^{a_n})\rangle \\ := &\int_{\mathbb{R}^{N\times N}} \mathrm{tr}(H^{a_1})\mathrm{tr}(H^{a_2})\cdots\mathrm{tr}(H^{a_n})\mathrm{e}^{\sum\limits_{k=0}^{\infty} t_k \mathrm{tr}(H^k)} \mathrm{d}H,\end{aligned} \tag{1.2}$$

则如下等式成立:

$$\langle \mathrm{tr}(H^{a_1})\mathrm{tr}(H^{a_2})\cdots\mathrm{tr}(H^{a_n})\rangle = \frac{\partial^n \mathcal{Z}_N(\mathbf{t})}{\partial t_{a_1}\cdots\partial t_{a_n}}. \tag{1.3}$$

证明. 直接求导验证即可. □

关联函数(1.2)也俗称 n-**点函数**. 当然众所周知, 配分函数、关联函数这些名词都来自于各种理论物理.

(1.1)的右边即使再怪异, 也不过是一个 N^2-重积分. 既然是重积分, 就可以**换元积分**, 并且有连工科生都知道的 "换元要乘雅可比". 然而一般工科生不知道的是, 换元可以看作一种**对称**, 而对称性蕴含**守恒律**, 而守恒律就比较深刻了.

一般的变量代换形如

$$H \mapsto \tilde{H} := f(H),$$

其中 f 是关于矩阵 H 的矩阵值函数. 我们考虑一类连续变换, 即假装 $H \mapsto f(H)$ 是由恒等变换 $H \mapsto H$"连续地" 形变而来. 于是自然会考虑这族变换的**无穷小生成元**, 其通常形如

$$H \mapsto H + \varepsilon \sum_{k=0}^{\infty} a_k H^k,$$

这里的形式变元 ε 视为无穷小量, a_k 为常数. 上述无穷小变换构成的线性空间具有如下的一组 "基":

$$H \mapsto \tilde{H} := H + \varepsilon H^{n+1}, \qquad n = -1, 0, 1, 2, ..., \tag{1.4}$$

或者用更物理一些的写法: $\delta H = \varepsilon H^{n+1}$.

给定整数 $n \geq -1$, 我们对配分函数(1.1)的右边作换元积分(1.4), 看看会发生什么事情. 首先我们有

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z}_N(\mathbf{t}) &= \int_{\mathbb{R}^{N\times N}} \mathrm{e}^{\sum\limits_{k=0}^{\infty} t_k \mathrm{tr}(\tilde{H}^k)} \mathrm{d}\tilde{H} = \int_{\mathbb{R}^{N\times N}} \mathrm{e}^{\sum\limits_{k=0}^{\infty} t_k \mathrm{tr}\left[(H+\varepsilon H^{n+1})^k\right]} \mathrm{d}\tilde{H} \\
&= \int_{\mathbb{R}^{N\times N}} \mathrm{e}^{\sum\limits_{k=0}^{\infty} t_k \mathrm{tr}(H^k)} \prod_{k=0}^{\infty} \left(1 + \varepsilon k t_k \mathrm{tr}(H^{n+k}) + o(\varepsilon)\right) \mathrm{d}\tilde{H} \\
&= \int_{\mathbb{R}^{N\times N}} \mathrm{e}^{\sum\limits_{k=0}^{\infty} t_k \mathrm{tr}(H^k)} \left(1 + \varepsilon \sum_{k=0}^{\infty} k t_k \mathrm{tr}(H^{n+k}) + o(\varepsilon)\right) \mathrm{d}\tilde{H} \qquad (1.5)
\end{aligned}$$

原则上我们只需要把上式右边展开至关于 ε 的 1 阶小量. 接下来的一个关键的技术性问题是, 如何处理体积元 $\mathrm{d}\tilde{H}$.

引理 1.2. 记号承上, 对于变量代换 $\tilde{H} = H + \varepsilon H^{n+1}$, 成立

$$\mathrm{d}\tilde{H} = \left(1 + \varepsilon \sum_{s=0}^{n} \mathrm{tr}(H^s)\mathrm{tr}(H^{n-s}) + o(\varepsilon)\right) \mathrm{d}H. \qquad (1.6)$$

证明. 无非就是去计算相应雅可比矩阵 $\boldsymbol{J}$ 的行列式, 只不过这个雅可比矩阵 $\boldsymbol{J}$ 的尺寸是 $N^2 \times N^2$. 对于 $1 \leq i, j, k, \ell \leq N$, 雅可比矩阵 $\boldsymbol{J}$ 的 $(ij, k\ell)$-矩阵元为

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \tilde{H}_{ij}}{\partial H_{k\ell}} &= \left(\frac{\partial \tilde{H}}{\partial H_{k\ell}}\right)_{ij} = \left(\frac{\partial H}{\partial H_{k\ell}} + \varepsilon \frac{\partial H^{n+1}}{\partial H_{k\ell}}\right)_{ij} \\
&= \left(\frac{\partial H}{\partial H_{k\ell}} + \varepsilon \sum_{s=0}^{n} H^s \frac{\partial H}{\partial H_{k\ell}} H^{n-s}\right)_{ij} \\
&= \delta_{k\ell,ij} + \varepsilon \sum_{s=0}^{n} (H^s)_{ik} (H^{n-s})_{\ell j}.
\end{aligned}$$

注意对任意 N^2 阶方阵 $\boldsymbol{X}$, 有众所周知的等式

$$\det(\boldsymbol{I}+\varepsilon\boldsymbol{X})=1+\varepsilon\mathrm{tr}(\boldsymbol{X})+o(\varepsilon),$$

其中 $\boldsymbol{I}$ 为单位矩阵. 利用此式立刻得到

$$\begin{aligned}\det\boldsymbol{J} &= 1+\varepsilon\sum_{s=0}^{n}\sum_{i,j=1}^{N}(H^s)_{ii}(H^{n-s})_{jj}+o(\varepsilon)\\ &= 1+\varepsilon\sum_{s=0}^{n}\mathrm{tr}(H^s)\mathrm{tr}(H^{n-s})+o(\varepsilon),\end{aligned}$$

从而命题得证. □

妥善处理体积元 $\mathrm{d}\tilde{H}$ 之后继续前进, 就能得到本节主要结果:

定理 1.3. *(Virasoro 约束). 记号承上, 则对任意整数 $n\geq -1$, 配分函数(1.1)满足如下* ***Virasoro* 约束**:

$$L_n\mathcal{Z}_N(\mathbf{t})=0, \tag{1.7}$$

其中二阶线性微分算子

$$L_n:=\sum_{s=0}^{n}\frac{\partial^2}{\partial t_s\partial t_{n-s}}+\sum_{k=0}^{\infty}kt_k\frac{\partial}{\partial t_{n+k}}. \tag{1.8}$$

证明. 将(1.6)代入(1.5), 整理得

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}_N(\mathbf{t})=\mathcal{Z}_N(\mathbf{t})+\varepsilon\int_{\mathbb{R}^{N\times N}}&\mathrm{e}^{\sum\limits_{k=0}^{\infty}t_k\mathrm{tr}(H^k)}\\ &\times\left(\sum_{k=0}^{\infty}kt_k\mathrm{tr}(H^{n+k})+\sum_{s=0}^{n}\mathrm{tr}(H^s)\,\mathrm{tr}(H^{n-s})\right)\mathrm{d}H+o(\varepsilon).\end{aligned}$$

比较上式两边 ε^1-项系数, 并注意性质1.1, 即可得证. □

注记 1.4. 线性算子 $\{L_n\}_{n\geq -1}$ 满足如下 **Virasoro** 交换关系

$$[L_n, L_m] = (n-m)L_{n+m}, \tag{1.9}$$

这可以由具体表达式(1.8)暴力验证, 也可以从无穷小变换(1.4)的角度直接看出来.

1.2 特征值表示, 正规矩阵模型

相比上一小节的(1.1), 我们更习惯考虑如下**厄米特矩阵模型**:

$$\mathcal{Z}_N := \int_{\mathrm{Herm}(N)} \mathrm{e}^{-\mathrm{tr}\, V(H)} \mathrm{d}H, \tag{1.10}$$

其中 $\mathrm{Herm}(N) := \left\{H \in \mathbb{C}^{N\times N} \,\middle|\, H^\dagger = H\right\}$ 为 N 阶厄米特矩阵之全体, $V(H)$ 关于 H 的形式幂级数, 例如可以取 $V(H) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} t_k H^k$; 而 $\mathrm{Herm}(N)$ 上的勒贝格测度 $\mathrm{d}H$ 为

$$\mathrm{d}H := \prod_{i=1}^{N} \mathrm{d}H_{ii} \cdot \prod_{j<k} \mathrm{d}H_{jk}^{(1)} \mathrm{d}H_{jk}^{(2)}, \tag{1.11}$$

其中 $H_{jk}^{(1)}$ 与 $H_{jk}^{(2)}$ 分别为矩阵元 H_{jk} 的实部与虚部.

众所周知, 厄米特矩阵酉相似于实对角阵: 对任意 $H \in \mathrm{Herm}(N)$, 存在酉矩阵 $U \in \mathrm{U}(N)$ 以及实对角阵 $\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_0, ..., \lambda_{N-1})$ 使得

$$H = U^\dagger \Lambda U. \tag{1.12}$$

此时, 注意到矩阵积分(1.10)的被积函数

$$\mathrm{e}^{-\mathrm{tr}\, V(H)} = \mathrm{e}^{-\mathrm{tr}\left(U^\dagger V(\Lambda) U\right)} = \mathrm{e}^{-\mathrm{tr}\, V(\Lambda)} = \prod_{i=0}^{N-1} \mathrm{e}^{-V(\lambda_i)}$$

只与积分变元 H 的 N 个特征值有关, 故某种意义上说, 为计算 H 取遍全体厄米特矩阵的积分(1.10), 只需要计算让 H 的 N 个特征值取遍 $\mathbb{R}^N$ 的某个 N-重积分. 本小节就来实现这个想法.

我们注意, (1.12)其实给出了如下映射:

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^N \times \frac{\mathrm{U}(N)}{\mathrm{U}(1)^N} &\to \mathrm{Herm}(N) \\ (\Lambda, [U]) &\mapsto U^\dagger \Lambda U, \end{aligned} \tag{1.13}$$

其中

$$\mathbb{R}^N \cong \left\{ \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_0 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_{N-1} \end{pmatrix} \middle| \lambda_i \in \mathbb{R},\, 0 \le i \le N-1 \right\},$$

$$\mathrm{U}(1)^N \cong \left\{ \Theta = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_0} & & \\ & \ddots & \\ & & \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_{N-1}} \end{pmatrix} \middle| \theta_i \in \mathbb{R},\, 0 \le i \le N-1 \right\},$$

并且对于 $U \in \mathrm{U}(N)$, $[U] := \left\{ \Theta U \,\middle|\, \Theta \in \mathrm{U}(1)^N \right\} \in \frac{\mathrm{U}(N)}{\mathrm{U}(1)^N}$. 容易验证(1.13)是良定的光滑映射, 并且

$$\dim_{\mathbb{R}} \left(\mathbb{R}^N \times \frac{\mathrm{U}(N)}{\mathrm{U}(1)^N} \right) = N^2 = \dim_{\mathbb{R}} \mathrm{Herm}(N).$$

我们将通过此映射来对重积分(1.10)作换元积分.

在(1.10)的右边, 不妨只考虑 H 的特征值两两互异的情况, 这样的 H 构成 $\mathrm{Herm}(N)$ 的一个稠密开集. 再注意 H 的 N 个特征值的顺序, 从而易知

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_N &:= \int_{\mathrm{Herm}(N)} \mathrm{e}^{-\mathrm{tr}\, V(H)} \mathrm{d}H \\ &= \frac{1}{N!} \iint_{\mathbb{R}^N \times \frac{\mathrm{U}(N)}{\mathrm{U}(1)^N}} \prod_{k=0}^{N-1} \mathrm{e}^{-\mathrm{tr}\, V(\lambda_k)} \cdot \det\left(\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}\Lambda \mathrm{d}[U]} \right) \mathrm{d}\Lambda \mathrm{d}[U], \end{aligned} \tag{1.14}$$

其中 $\mathrm{d}\Lambda = \mathrm{d}\lambda_0 \cdots \mathrm{d}\lambda_{N-1}$ 为 $\mathbb{R}^N$ 上的标准勒贝格测度, 而 $\mathrm{d}[U]$ 为 $\frac{\mathrm{U}(N)}{\mathrm{U}(1)^N}$ 上的平移不变测度, 其在单位元 $[I]$ 处的切空间

$$T_{[I]}\frac{\mathrm{U}(N)}{\mathrm{U}(1)^N} \cong \frac{\mathfrak{u}(N)}{\mathfrak{u}(1)^{\oplus N}} = \left\{ X \in \mathbb{C}^{N\times N} \,\middle|\, \begin{array}{c} X^\dagger = -X; \\ X_{ii} = 0,\ 1 \le i \le N \end{array} \right\}$$

处的表达式为

$$\mathrm{d}[U] = \prod_{i<j} \mathrm{d}X_{ij}^{(1)} \mathrm{d}X_{ij}^{(2)}. \tag{1.15}$$

与(1.11)类似, 我们用 $X_{ij}^{(1)}, X_{ij}^{(2)}$ 分别表示 X_{ij} 的实部与虚部.

关键的技术问题依然是计算重积分换元的雅可比行列式:

引理 1.5. 记号承上, 则

$$\det\left(\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}\Lambda \mathrm{d}[U]}\right) = \Delta(\Lambda)^2, \tag{1.16}$$

其中

$$\Delta(\Lambda) = \Delta(\lambda_0, \ldots, \lambda_{N-1}) := \prod_{i<j} (\lambda_j - \lambda_i). \tag{1.17}$$

证明之前, 我们回忆如下众所周知的 **Vandermonde 行列式**:

$$\Delta(\Lambda) := \prod_{i<j}(\lambda_j - \lambda_i) = \det\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_0 & \lambda_1 & \cdots & \lambda_{N-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_0^{N-1} & \lambda_1^{N-1} & \cdots & \lambda_{N-1}^{N-1} \end{pmatrix}. \tag{1.18}$$

证明. 由于测度 $[\mathrm{d}U]$ 的 $\mathrm{U}(N)$-平移不变性, 不妨只考虑在单位元 $U = I$ 处的情形. 注意 $U^\dagger = U^{-1}$, 从而对(1.12)两边微分得

$$\delta H = -U^\dagger \delta U \cdot U^\dagger \Lambda U + U^\dagger \delta\Lambda \cdot U + U^\dagger \Lambda \delta U$$

$$
\begin{aligned}
&= -\delta U \cdot \Lambda + \delta\Lambda + \Lambda\delta U \\
&= \delta\Lambda + [\Lambda, \delta U],
\end{aligned}
$$

其中切向量 $\delta\Lambda \in T_\Lambda \mathbb{R}^N \cong \mathbb{R}^N$, $\delta U \in T_{[I]} \frac{\mathrm{U}(N)}{\mathrm{U}(1)^N}$. 从而得到

$$
(\delta H)_{ij} = \delta_{ij}(\delta\Lambda)_{ii} + (\lambda_{i-1} - \lambda_{j-1})(\delta U)_{ij},
$$

换言之, 对任意 $1 \le i < j \le N$ 以及 $1 \le k \le N$ 都有

$$
\begin{aligned}
(\delta H)_{kk} &= (\delta\Lambda)_{kk}, \\
(\delta H)_{ij}^{(1)} &= (\lambda_{i-1} - \lambda_{j-1})(\delta U)_{ij}^{(1)}, \\
(\delta H)_{ij}^{(2)} &= (\lambda_{i-1} - \lambda_{j-1})(\delta U)_{ij}^{(2)},
\end{aligned}
$$

于是

$$
\begin{aligned}
\det\left(\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}\Lambda\mathrm{d}[U]}\right) &= \prod_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^{N} (\lambda_{j-1} - \lambda_{i-1})^2 \\
&= \prod_{\substack{i,j=0\\ i<j}}^{N-1} (\lambda_j - \lambda_i)^2 = \Delta(\Lambda)^2.
\end{aligned}
$$

引理得证. □

由此我们立刻得到矩阵积分(1.10)的**特征值表示**:

定理 1.6. *厄米特矩阵积分(1.10)满足如下表达式:*

$$
\mathcal{Z}_N = \frac{c_N}{N!} \int_{\mathbb{R}^N} \Delta(\lambda_0, \dots, \lambda_{N-1})^2 \prod_{k=0}^{N-1} \mathrm{e}^{-V(\lambda_k)} \mathrm{d}\lambda_k, \tag{1.19}
$$

其中 c_N 为齐性空间 $\frac{\mathrm{U}(N)}{\mathrm{U}(1)^N}$ 的关于不变测度(1.15)的体积.

证明. 将(1.16)代入(1.14)即可. □

下面考虑稍微一般的情形, 并从特征值表示的角度来重新定义矩阵积分. 众所周知, 复方阵 A 称为**正规矩阵**, 如果 $[A^\dagger, A] = 0$; 正规矩阵酉相似于复对角矩阵; 厄米特矩阵、酉矩阵都是正规矩阵的常见例子.

定义 1.7. 设 $\gamma \subseteq \mathbb{C}$ 是复平面内的一条可求长曲线, 则记

$$\mathcal{Z}_N(\gamma) := \frac{1}{N!}\int_{\gamma^N} \Delta(\lambda_0, \ldots, \lambda_{N-1})^2 \prod_{k=0}^{N-1} \mathrm{e}^{-V(\lambda_k)}\mathrm{d}\lambda_k, \tag{1.20}$$

并称其为**正规矩阵积分**. 其中 $V(x)$ 为某个一元函数. 此外, 若曲线 γ 具有参数表示 $f\colon [0,1] \to \mathbb{C}$, 则 $\mathrm{d}\lambda = f'(t)\mathrm{d}t$.

特别注意, 此时曲线 γ 上的测度 $\mathrm{d}\lambda$ 未必正定, 而是一般的**复测度**. 由前文的讨论可以看出, 如果 $\gamma = \mathbb{R}$, 则相应的 $\mathcal{Z}_N(\gamma)$ 在相差常数倍意义下恰为厄米特矩阵积分(1.10); 而对于一般的曲线 γ, 记

$$\mathrm{H}_N(\gamma) := \left\{ U^\dagger \Lambda U \,\middle|\, \begin{array}{c} U \in \mathrm{U}(N), \\ \Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_0, \ldots, \lambda_{N-1}),\ \lambda_i \in \gamma \end{array} \right\} \tag{1.21}$$

为特征值全部位于 γ 上的**正规矩阵**之全体, 则类似方法可以验证

$$\mathcal{Z}_N(\gamma) \propto \int_{\mathrm{H}_N(\gamma)} \mathrm{e}^{-\mathrm{tr}\, V(H)}\mathrm{d}H. \tag{1.22}$$

注记 **1.8.** 若 $V(x)$ 为全纯函数, 则(1.20)右边的被积函数也全纯, 从而 $\mathcal{Z}_N(\gamma)$ 在曲线 γ 的同伦形变下保持不变, 即只与 γ 的同伦类 $[\gamma]$ 有关.

1.3 随机矩阵, 行列式表示

从本小节开始, 我们将深入研究正规矩阵积分(1.20)

$$\mathcal{Z}_N(\gamma) := \frac{1}{N!}\int_{\gamma^N} \Delta(\lambda_0, \ldots, \lambda_{N-1})^2 \prod_{k=0}^{N-1} \mathrm{e}^{-V(\lambda_k)} \mathrm{d}\lambda_k$$

的性质. 不妨借用概率论的语言, 将(1.22)中的积分变量 H 想象为**概率空间** $\mathrm{H}_N(\gamma)$ 中的元素 (所谓随机矩阵), 此时 H 的特征值 $\lambda_0, \ldots, \lambda_{N-1}$ 为**随机变量**, 其**联合分布**的**概率密度**为

$$R_N(\lambda_0, \ldots, \lambda_{N-1}) := \frac{1}{\mathcal{Z}_N(\gamma)} \frac{1}{N!} \Delta(\lambda_0, \ldots, \lambda_{N-1})^2 \prod_{i=0}^{N-1} \mathrm{e}^{-V(\lambda_i)}, \qquad (1.23)$$

其中 $\Delta(\Lambda) := \Delta(\lambda_0, \ldots, \lambda_{N-1})$ 为 Vandermonde 行列式, 见(1.18). 需要注意, 这里仅仅是借助概率论语言: 上述 R_N 的函数值可以是一般的复数, 并非严格意义下的概率密度.

也可以谈论随机变量的**期望**. 对于函数

$$f : \mathrm{H}_N(\gamma) \to \mathbb{C},$$

如果 $f(H)$ 是酉相似不变的, 即 $f(H) = f(U^\dagger H U)$ 对任意 $U \in \mathrm{U}(N)$ 都成立, 则 $f(H)$ 可以表示为关于 H 的特征值的对称函数, 即存在 N 元对称函数 $\tilde{f}$ 使得 $f(H) = \tilde{f}(\lambda_0, \ldots, \lambda_{N-1})$. 此时称

$$\begin{aligned}\langle f(H) \rangle_N := &\frac{1}{\mathcal{Z}_N(\gamma)} \frac{1}{N!} \int_{\gamma^N} \tilde{f}(\lambda_0, \ldots, \lambda_{N-1}) \Delta(\lambda_0, \ldots, \lambda_{N-1})^2 \\ &\times \prod_{k=0}^{N-1} \mathrm{e}^{-V(\lambda_k)} \mathrm{d}\lambda_k\end{aligned} \qquad (1.24)$$

为随机变量 $f(H)$ 的**期望**.

而本小节的主要结果是:

性质 1.9. *(正规矩阵积分的行列式表示).* *记* $m_k(\lambda) := \lambda^k$ *为* k *次首一单项式, 引入* $\mathbb{C}$*-双线性型* $\langle\cdot|\cdot\rangle$ *如下:*

$$\langle f|g\rangle := \int_\gamma f(\lambda)g(\lambda)\mathrm{e}^{-V(\lambda)}\mathrm{d}\lambda. \tag{1.25}$$

*则正规矩阵积分(1.20)满足下述***行列式公式***:*

$$\mathcal{Z}_N(\gamma) = \det_{0\le i,j\le N-1}\left(\langle m_i|m_j\rangle\right). \tag{1.26}$$

证明. 将 Vandermonde 行列式(1.18)直接展开, 有

$$\Delta(\lambda_0, \dots, \lambda_{N-1}) = \det_{0\le i,j\le N-1}\left(\lambda_i^j\right) = \sum_{\sigma\in S_N}(-1)^{|\sigma|}\prod_{i=0}^{N-1}\lambda_i^{\sigma(i)},$$

这里的 S_N 是指标集 $\{0, 1, \dots, N-1\}$ 的置换群. 于是

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z}_N(\gamma) &= \frac{1}{N!}\int_{\gamma^N}\sum_{\sigma,\tau\in S_N}(-1)^{|\sigma\tau|}\prod_{i=0}^{N-1}\lambda_i^{\sigma(i)+\tau(i)}\cdot\prod_{k=0}^{N-1}\mathrm{e}^{-V(\lambda_k)}\mathrm{d}\lambda_k \\
&= \int_{\gamma^N}\sum_{\sigma\in S_N}(-1)^{|\sigma|}\prod_{i=0}^{N-1}\lambda_i^{i+\sigma(i)}\cdot\prod_{k=0}^{N-1}\mathrm{e}^{-V(\lambda_k)}\mathrm{d}\lambda_k \\
&= \sum_{\sigma\in S_N}(-1)^{|\sigma|}\prod_{i=0}^{N-1}\left(\int_\gamma\lambda_i^i\cdot\lambda_i^{\sigma(i)}\mathrm{e}^{-V(\lambda_i)}\mathrm{d}\lambda_i\right) \\
&= \sum_{\sigma\in S_N}(-1)^{|\sigma|}\prod_{i=0}^{N-1}\left\langle m_i\middle|m_{\sigma(i)}\right\rangle = \det_{0\le i,j\le N-1}\left(\langle m_i|m_j\rangle\right),
\end{aligned}$$

从而命题得证. □

注记 1.10. 对于 $k \geq 0$, 引入 k 阶矩

$$M_k := \int_\gamma \lambda^k \mathrm{e}^{-V(\lambda)} \mathrm{d}\lambda, \tag{1.27}$$

则容易看出, 行列式公式(1.26)可改写为

$$\mathcal{Z}_N(\gamma) = \det_{0 \leq i,j \leq N-1} (M_{i+j}), \tag{1.28}$$

这是一个 Hankel 行列式. 一般地, 如果 N 阶方阵 A 的矩阵元 A_{ij} 只与 $i+j$ 有关, 则称该方阵为 Hankel 矩阵, 其行列式为 Hankel 行列式.

由行列式的基本性质, 不难给出(1.26)的更一般表达式:

定理 1.11. 对每个非负整数 k, 任取首一多项式 $p_k, \tilde{p}_k \in \mathbb{C}[\lambda]$, 即

$$p_k(\lambda) = \lambda^k + \sum_{i=0}^{k-1} a_{ki} \lambda^i, \qquad \tilde{p}_k(\lambda) = \lambda^k + \sum_{i=0}^{k-1} b_{ki} \lambda^i,$$

则行列式公式(1.26)等价于

$$\mathcal{Z}_N(\gamma) = \det_{0 \leq i,j \leq N-1} \left(\langle \tilde{p}_i | p_j \rangle \right). \tag{1.29}$$

证明. 对矩阵 $(\langle m_i | m_j \rangle)$ 作初等行、列变换即可, 留给读者. □

1.4 积分核, 特征值联合密度, Dyson 公式

我们将正规矩阵模型(1.20)中的积分变量 H 视为随机矩阵, 其特征值 $\lambda_0, \ldots, \lambda_{N-1}$ 视为随机变量. 我们不仅可以谈论这 N 个随机变量的联

合密度(1.23), 还可以谈论**前** k **个**特征值的联合密度:

$$
\begin{aligned}
&R_{N,k}(\lambda_0, ..., \lambda_{k-1}) \\
&:= \frac{1}{\mathcal{Z}_N(\gamma)} \frac{1}{N!} \int_{\gamma^{N-k}} \Delta(\lambda_0, ..., \lambda_{N-1})^2 \prod_{i=0}^{N-1} \mathrm{e}^{-V(\lambda_i)} \mathrm{d}\lambda_k \cdots \mathrm{d}\lambda_{N-1}.
\end{aligned} \tag{1.30}
$$

本小节将给出联合密度(1.30)的行列式表示.

首先考察 $k = N$ 的情形, 由定义可知 $R_{N,N}$ 恰为(1.23)中的 R_N. 在给出其行列式公式之前, 我们先引入一些记号. 对任意非负整数 k, 取定 k 次**首一**多项式 $p_k(\lambda), \tilde{p}_k(\lambda) \in \mathbb{C}[\lambda]$, 记

$$
H_{ij} := \langle \tilde{p}_i | p_j \rangle, \qquad i, j \geq 0, \tag{1.31}
$$

其中双线性型 $\langle \cdot | \cdot \rangle$ 见(1.25). 记相应的**无穷矩阵**

$$
\boldsymbol{H} := (H_{ij})_{i,j\geq 0} = \begin{pmatrix} H_{00} & H_{01} & H_{02} & \cdots \\ H_{10} & H_{11} & H_{12} & \cdots \\ H_{20} & H_{21} & H_{22} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}. \tag{1.32}
$$

注意 $\boldsymbol{H}$ 依赖于多项式 $p_k, \tilde{p}_k$ 的选取.

对一般的无穷矩阵 $\boldsymbol{A} = (A_{ij})_{i,j\geq 0}$ 以及正整数 k, 记

$$
\boldsymbol{A}_{[k]} := (A_{ij})_{0\leq i,j\leq k-1} \tag{1.33}
$$

为 $\boldsymbol{A}$ 的左上角 $k \times k$ 子矩阵. 在此记号下, 行列式公式(1.29)可改写为

$$
\mathcal{Z}_N(\gamma) = \det \boldsymbol{H}_{[N]}. \tag{1.34}
$$

性质 1.12. 对于正规矩阵模型(1.20), 联合密度(1.23)满足等式

$$R_N(\lambda_0, ..., \lambda_{N-1}) = \frac{1}{N!} \det_{0\le i,j\le N-1} \left(K_N(\lambda_i, \lambda_j)\right), \tag{1.35}$$

其中**核函数**$K_N(\lambda, \mu)$ 的定义如下:

$$K_N(\lambda, \mu) := \sum_{k,\ell=0}^{N-1} \left(p_k(\lambda) \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}V(\lambda)}\right) \left(\boldsymbol{H}_{[N]}^{-1}\right)_{k\ell} \left(\tilde{p}_\ell(\mu) \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}V(\mu)}\right). \tag{1.36}$$

证明. 对 Vandermonde 行列式(1.18)作初等行变换, 容易验证

$$\Delta(\lambda_0, ..., \lambda_{N-1}) = \det_{0\le i,j\le N-1} \left(p_i(\lambda_j)\right) = \det_{0\le i,j\le N-1} \left(\tilde{p}_i(\lambda_j)\right),$$

再结合(1.34)直接计算得

$$\begin{aligned}
R_N(\lambda_0, ..., \lambda_{N-1}) &= \frac{1}{N!} \frac{1}{\mathcal{Z}_N(\gamma)} \Delta(\lambda_0, ..., \lambda_{N-1})^2 \prod_{i=0}^{N-1} \mathrm{e}^{-V(\lambda_i)} \\
&= \frac{1}{N!} \det_{0\le i,j\le N-1} \left(p_i(\lambda_j) \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}V(\lambda_j)}\right) \det\left(\boldsymbol{H}_{[N]}^{-1}\right) \det_{0\le i,j\le N-1} \left(\tilde{p}_i(\lambda_j) \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}V(\lambda_j)}\right) \\
&= \frac{1}{N!} \det_{0\le i,j\le N-1} \left(K_N(\lambda_i, \lambda_j)\right),
\end{aligned}$$

命题得证. □

由(1.36)不难看出, 核函数 $K_N(\lambda, \mu)$ 实际上与首一多项式 $p_k, \tilde{p}_k$ 的选取无关 (虽然矩阵 $\boldsymbol{H}$ 依赖于 $p_k, \tilde{p}_k$ 的选取), 进而容易验证对称性

$$K_N(\lambda, \mu) = K_N(\mu, \lambda).$$

此外, 以下公式也容易直接验证:

性质 1.13. 设 $K_N(\lambda,\mu)$ 为(1.36)式所定义的核函数, 则

$$\int_\gamma K_N(\lambda,\lambda)\mathrm{d}\lambda = N, \tag{1.37}$$

$$\int_\gamma K_N(\lambda,z)K_N(z,\mu)\mathrm{d}z = K_N(\lambda,\mu). \tag{1.38}$$

证明. 由相关定义(1.25)(1.31)(1.36)直接验证即可. 细节留给读者. □

下面我们给出(1.30)在 $k=N-1$ 情形下的行列式表示:

性质 1.14. 记号承上, 则有

$$R_{N,N-1}(\lambda_0,...,\lambda_{N-2}) = \frac{1}{N!}\det_{0\le i,j\le N-2}\left(K_N(\lambda_i,\lambda_j)\right). \tag{1.39}$$

证明. 由行列式公式(1.35)以及核函数的性质(1.37)(1.38), 直接计算得

$$\begin{aligned}
&R_{N,N-1}(\lambda_0,...,\lambda_{N-2}) = \int_\gamma R_{N,N}(\lambda_0,...,\lambda_{N-2};\lambda_{N-1})\mathrm{d}\lambda_{N-1}\\
&= \frac{1}{N!}\int_\gamma \det_{0\le i,j\le N-1}\left(K_N(\lambda_i,\lambda_j)\right)\mathrm{d}\lambda_{N-1}\\
&= \frac{1}{N!}\sum_{\sigma\in S_N}(-1)^{|\sigma|}\int_\gamma \prod_{i=0}^{N-1}K_N(\lambda_i,\lambda_{\sigma(i)})\mathrm{d}\lambda_{N-1}\\
&= \frac{1}{N!}\sum_{\substack{\sigma\in S_N\\ \sigma(N-1)=N-1}}(-1)^{|\sigma|}\prod_{i=0}^{N-2}K_N(\lambda_i,\lambda_{\sigma(i)})\int_\gamma K_N(\lambda_{N-1},\lambda_{N-1})\mathrm{d}\lambda_{N-1}\\
&\quad + \frac{1}{N!}\sum_{\ell=0}^{N-2}\sum_{\substack{\sigma\in S_N\\ \sigma^{-1}(N-1)=\ell}}(-1)^{|\sigma|}\prod_{\substack{0\le i\le N-2\\ i\ne\ell}}K_N(\lambda_i,\lambda_{\sigma(i)})
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\qquad \times \int_\gamma K_N(\lambda_\ell,\lambda_{N-1})K_N(\lambda_{N-1},\lambda_{\sigma(N-1)})\mathrm{d}\lambda_{N-1} \\
&= \frac{1}{N!}\cdot N \sum_{\substack{\sigma\in S_N\\ \sigma(N-1)=N-1}} (-1)^{|\sigma|}\prod_{i=0}^{N-2} K_N(\lambda_i,\lambda_{\sigma(i)}) \\
&\qquad + \frac{1}{N!}\sum_{\ell=0}^{N-2}\sum_{\substack{\sigma\in S_N\\ \sigma^{-1}(N-1)=\ell}} (-1)^{|\sigma|}\prod_{\substack{0\le i\le N-2\\ i\neq \ell}} K_N(\lambda_i,\lambda_{\sigma(i)})\cdot K_N(\lambda_\ell,\lambda_{\sigma(N-1)}),
\end{aligned}
$$

上式中的 S_N 是指标集 $\{0,1,...,N-1\}$ 的置换群. 为处理上式最右边的第二项, 我们略用一点组合数学技巧. 对于 $\sigma\in S_N$, 如果 $\sigma^{-1}(N-1)=\ell\neq N-1$, 则定义 $\tau\in S_{N-1}$ 如下:

$$
\tau(i) := \begin{cases} \sigma(N-1), & i=\ell, \\ \sigma(i), & i\neq \ell. \end{cases}
$$

则当 σ 取遍集合 $\{\sigma\in S_N \,|\, \sigma^{-1}(N-1)\neq N-1\}$ 时, 相应的 τ 取遍 S_{N-1}, 并且每个 $\tau\in S_{N-1}$ 被重复计数 $(N-1)$ 次. 再注意 $(-1)^{|\tau|}=(-1)^{|\sigma|+1}$, 从而继续化简整理得

$$
\begin{aligned}
&R_{N,N-1}(\lambda_0,...,\lambda_{N-2}) \\
&= \frac{1}{N!}\cdot N \sum_{\sigma\in S_{N-1}} (-1)^{|\sigma|}\prod_{i=0}^{N-2} K_N(\lambda_i,\lambda_{\sigma(i)}) \\
&\qquad + \frac{1}{N!}\cdot (N-1)\sum_{\tau\in S_{N-1}} (-1)^{|\tau|+1}\prod_{0\le i\le N-1} K_N(\lambda_\ell,\lambda_{\tau(N-1)}) \\
&= \frac{N-(N-1)}{N!}\det_{0\le i,j\le N-2}(K_N(\lambda_i,\lambda_j)) = \frac{1}{N!}\det_{0\le i,j\le N-2}(K_N(\lambda_i,\lambda_j)),
\end{aligned}
$$

命题得证. $\square$

对于一般的 $1\le k\le N$, 我们有如下 **Dyson 公式**:

定理 1.15. *(Dyson).* 对于 $1 \le k \le N$, 联合密度(1.30)满足

$$R_{N,k}(\lambda_0, \ldots, \lambda_{k-1}) = \frac{(N-k)!}{N!} \det_{0 \le i,j \le k-1} \left(K_N(\lambda_i, \lambda_j)\right). \tag{1.40}$$

证明. 对 k 归纳. 起始步 $k = N$ 已证明. 归纳步 $k \to k-1$ 的验证方法与性质1.14的证明过程完全类似, 细节留给读者. 证毕. □

特别地, $R_{N,1}(\lambda) = \frac{1}{N} K_N(\lambda, \lambda)$.

2. 正交多项式

我们注意, 正规矩阵积分(1.20)的行列式公式(1.29)

$$\mathcal{Z}_N(\gamma) = \det_{0 \le i,j \le N-1} \left(\langle \tilde{p}_i | p_j \rangle\right)$$

与**首一**多项式 $p_k, \tilde{p}_k$ 的选取无关, 从而我们不妨 $p_k = \tilde{p}_k$, 并取特殊的 p_k 使得相关表达式更简洁. 一种自然的想法是选取**正交多项式**: 容易验证对每个 $k \ge 0$, 存在 k 次**首一**多项式 $p_k(x) \in \mathbb{C}[x]$ 使得

$$\langle p_k | p_\ell \rangle := \int_\gamma p_k(x) p_\ell(x) \mathrm{e}^{-V(x)} \mathrm{d}x = h_k \delta_{k\ell} \tag{2.1}$$

对任意 $k, \ell \ge 0$ 都成立, 其中 h_k 为非零常数.

上述多项式的存在唯一性是显然的: 从 $p_0(x) = 1$ 开始, 用众所周知的 **Gram-Schmidt 正交化**算法即可依次得到 $p_1, p_2, \ldots$. 需要注意:

- 我们要求 p_k 是**首一**多项式, 于是并不能保证 p_k 关于 $\langle \cdot | \cdot \rangle$ 的模长 $\sqrt{h_k}$ 是 1. 换言之, $\{p_k\}_{k \ge 0}$ 两两正交, 但一般不是单位正交的.

- 正交多项式族 $\{p_k\}_{k \ge 0}$ 只与势函数 $V(x)$ 有关, 被 $V(x)$ 唯一确定.

- 对于 $k \geq 0$, 单项式 $m_k(x) := x^k$ 可以表示为 $p_0(x), p_1(x), ..., p_k(x)$ 的 $\mathbb{C}$-线性组合, 因此对于 $0 \leq j < k$ 成立

$$\langle m_j | p_k \rangle := \int_\gamma x^j p_k(x) \mathrm{e}^{-V(x)} \mathrm{d}x = 0.$$

在本章我们总取定正交多项式 $\{p_k\}_{k\geq 0}$. 此时 Gram 矩阵(1.32)

$$\boldsymbol{H} = \begin{pmatrix} h_0 & & & \\ & h_1 & & \\ & & h_2 & \\ & & & \ddots \end{pmatrix} \tag{2.2}$$

是 (无穷维) 对角矩阵, 行列式公式(1.29)(1.34)可改写为

$$\mathcal{Z}_N(\gamma) = \det \boldsymbol{H}_{[N]} = \prod_{k=0}^{N-1} h_k. \tag{2.3}$$

引入正交多项式 p_k 的**归一化函数**

$$\psi_k(x) := \frac{p_k(x)}{\sqrt{h_k}} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}V(x)}, \tag{2.4}$$

则正交性(2.1)等价于

$$\int_\gamma \psi_k(x) \psi_\ell(x) \mathrm{d}x = \delta_{k\ell}, \tag{2.5}$$

并且核函数(1.36)的表达式可改写为

$$K_N(x, y) = \sum_{k=0}^{N-1} \psi_k(x) \psi_k(y). \tag{2.6}$$

2.1 Heine 公式与 Hankel 行列式公式

给定势函数 $V(x)$, 我们来计算相应的正交多项式 p_k. 一个有意思的结果是, p_k 可以表示为 $k\times k$ 正规矩阵模型的某个**期望**(1.24), 此乃正交多项式的 **Heine 公式**:

定理 2.1. *(Heine).* 给定势函数 $V(x)$, 则相应的正交多项式 p_k 满足

$$\begin{aligned} p_k(x) &= \langle \det(x-H)\rangle_k \\ &:= \frac{1}{k!}\frac{1}{\mathcal{Z}_k(\gamma)}\int_{\gamma^k}\Delta(\lambda_0,\dots,\lambda_{k-1})^2\prod_{i=0}^{k-1}(x-\lambda_i)\mathrm{e}^{-V(\lambda_i)}\mathrm{d}\lambda_i. \end{aligned} \tag{2.7}$$

我们回忆, 上式中的 H 是取值于 $\mathrm{H}_k(\gamma)$, 见(1.21), 的 $k\times k$ 随机矩阵; 而 $\det(x-H)\in\mathbb{C}[x]$ 恰为矩阵 H 的**特征多项式**, 它显然是关于 x 的 k 次首一多项式. 此外, 当 $k=0$ 时, 特别规定 0×0 矩阵的行列式为 1.

证明. 由(2.7)所定义的 $p_k(x)$ 显然是关于 x 的 p 次首一多项式, 于是只需要验证正交性条件 $\langle p_j|p_k\rangle=0$ 即可. 直接计算得

$$\begin{aligned} \langle p_j|p_k\rangle &= \frac{1}{k!}\frac{1}{\mathcal{Z}_k(\gamma)}\int_{\gamma}p_j(\lambda_k)\mathrm{e}^{-V(\lambda_k)}\mathrm{d}\lambda_k \\ &\qquad\times\int_{\gamma^k}\Delta(\lambda_0,\dots,\lambda_{k-1})^2\prod_{i=0}^{k-1}(\lambda_k-\lambda_i)\mathrm{e}^{-V(\lambda_i)}\mathrm{d}\lambda_i \\ &= \frac{1}{k!}\frac{1}{\mathcal{Z}_k(\gamma)}\int_{\gamma^{k+1}}\Delta(\lambda_0,\dots,\lambda_{k-1})p_j(\lambda_k) \\ &\qquad\times\Delta(\lambda_0,\dots,\lambda_{k-1})\prod_{i=0}^{k-1}(\lambda_k-\lambda_i)\cdot\prod_{i=0}^{k}\mathrm{e}^{-V(\lambda_i)}\mathrm{d}\lambda_i. \end{aligned} \tag{2.8}$$

由 Vandermonde 行列式的性质(1.18)易知

$$\Delta(\lambda_0, ..., \lambda_{k-1}) \prod_{i=0}^{k-1} (\lambda_k - \lambda_i) = \Delta(\lambda_0, ..., \lambda_{k-1}; \lambda_k),$$

$$\Delta(\lambda_0, ..., \lambda_{k-1}) p_j(\lambda_k) = \det \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ \lambda_0 & \lambda_1 & \cdots & \lambda_{k-1} & \lambda_k \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \lambda_0^{k-1} & \lambda_1^{k-1} & \cdots & \lambda_{k-1}^{k-1} & \lambda_k^{k-1} \\ \hline 0 & 0 & \cdots & 0 & p_j(\lambda_k) \end{array} \right).$$

将(2.8)最右边的 $(k+1)$-重积分的积分变元 $\lambda_0, ..., \lambda_k$ 作轮换 $\lambda_i \mapsto \lambda_{i+s}$, 其中 s 取遍 $\mathbb{Z}/(k+1)\mathbb{Z}$, 容易验证

$$\begin{aligned} \langle p_j | p_k \rangle = & \frac{1}{(k+1)!} \frac{1}{\mathcal{Z}_k(\gamma)} \\ & \times \int_{\gamma^{k+1}} \det \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ \lambda_0 & \lambda_1 & \cdots & \lambda_{k-1} & \lambda_k \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \lambda_0^{k-1} & \lambda_1^{k-1} & \cdots & \lambda_{k-1}^{k-1} & \lambda_k^{k-1} \\ \hline p_j(\lambda_0) & p_j(\lambda_1) & \cdots & p_j(\lambda_{k-1}) & p_j(\lambda_k) \end{array} \right) \\ & \times \Delta(\lambda_0, ..., \lambda_{k-1}; \lambda_k) \prod_{i=0}^{k} \mathrm{e}^{-V(\lambda_i)} \mathrm{d}\lambda_i. \end{aligned}$$

注意 $j < k$, 从而上式右边的矩阵的最后一行 $(p_j(\lambda_0), ..., p_j(\lambda_k))$ 能够表示为前 k 行的线性组合, 从而该矩阵的行列式为零, 从而得到 $\langle p_j | p_k \rangle = 0$. 定理证毕. □

除了上述 Heine 公式, 正交多项式 $p_k(x)$ 也有类似(1.28)的 Hankel 行列式表达式:

性质 2.2. 记号承上, 则正交多项式 $p_k(x)$ 满足

$$p_k(x) = \frac{1}{\mathcal{Z}_k(\gamma)} \det \left(\begin{array}{cccc|c} M_0 & M_1 & \cdots & M_{k-1} & 1 \\ M_1 & M_2 & \cdots & M_k & x \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ M_{k-1} & M_k & \cdots & M_{2k-2} & x^{k-1} \\ \hline M_k & M_{k+1} & \cdots & M_{2k-1} & x^k \end{array}\right), \tag{2.9}$$

其中 $M_k := \int_\gamma \lambda^k \mathrm{e}^{-V(\lambda)} \mathrm{d}\lambda$ 为 k 阶矩, 见(1.27).

证明. 将(2.9)右边的行列式按第 $(k+1)$ 列展开, 并注意(1.28), 易知(2.9)中的 $p_k(x)$ 确实是关于 x 的 k 次首一多项式.

只需再验证正交性. 这只需要验证 $\langle m_j | p_k \rangle = 0$ 对任意 $j < k$ 都成立即可, 其中 $m_j(x) := x^j$ 为单项式. 注意到

$$\begin{aligned} &\langle m_j | p_k \rangle \\ &= \frac{1}{\mathcal{Z}_k(\gamma)} \int_\gamma \det \left(\begin{array}{cccc|c} M_0 & M_1 & \cdots & M_{k-1} & 1 \\ M_1 & M_2 & \cdots & M_k & x \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ M_{k-1} & M_k & \cdots & M_{2k-2} & x^{k-1} \\ \hline M_k & M_{k+1} & \cdots & M_{2k-1} & x^k \end{array}\right) x^j \mathrm{e}^{-V(x)} \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{\mathcal{Z}_k(\gamma)} \det \left(\begin{array}{cccc|c} M_0 & M_1 & \cdots & M_{k-1} & M_j \\ M_1 & M_2 & \cdots & M_k & M_{j+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ M_{k-1} & M_k & \cdots & M_{2k-2} & M_{j+k-1} \\ \hline M_k & M_{k+1} & \cdots & M_{2k-1} & M_{j+k} \end{array}\right). \end{aligned}$$

由于 $j<k$, 从而上式等号最右边的矩阵的最后一列与之前某列相同, 故相应的行列式为 0. 综上, 命题得证. $\square$

2.2 三项递推关系

关于势函数 $V(x)$ 的正交多项式 $p_k(x)$ 是 k 次首一的, 从而 $xp_k(x)$ 是 $(k+1)$ 次首一的, 因此它可以唯一表示为 $\{p_0(x),...,p_{k+1}(x)\}$ 的 $\mathbb{C}$-线性组合, 即存在一族常数 $\left\{\tilde{Q}_{kj}\,\middle|\,0\le j\le k\right\}$ 使得

$$xp_k(x)=p_{k+1}(x)+\sum_{j=0}^{k}\tilde{Q}_{kj}p_j(x).$$

而我们更习惯用(2.4)中的归一化函数 $\psi_k(x)$ 将上式重新写为

$$x\psi_k(x)=\sum_{j=0}^{k+1}Q_{kj}\psi_j(x), \tag{2.10}$$

其中 $\{Q_{kj}\,|\,k\ge 0,\,0\le j\le k+1\}$ 为常数, 此时易知

$$Q_{k,k+1}=\sqrt{\frac{h_{k+1}}{h_k}}. \tag{2.11}$$

引入无穷列向量与无穷矩阵

$$\boldsymbol{\psi}(x)=\begin{pmatrix}\psi_0(x)\\ \psi_1(x)\\ \psi_2(x)\\ \vdots\end{pmatrix},\qquad \boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}Q_{00}&Q_{01}&Q_{02}&\cdots\\ Q_{10}&Q_{11}&Q_{12}&\cdots\\ Q_{20}&Q_{21}&Q_{22}&\cdots\\ \vdots&\vdots&\vdots&\ddots\end{pmatrix} \tag{2.12}$$

(当 $j>k+1$ 时规定 $Q_{kj}=0$), 则(2.10)也可以改写为

$$x\boldsymbol{\psi}(x)=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{\psi}(x). \tag{2.13}$$

而一个重要的观察是:

定理 2.3. (2.12)中的矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 是对称的, 即

$$\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{Q}, \tag{2.14}$$

从而 $Q_{ij}\neq 0$ 仅当 $|i-j|\leq 1$. 换言之, $\boldsymbol{Q}$ 形如

$$\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix} S_0 & \gamma_1 & & \\ \gamma_1 & S_1 & \gamma_2 & \\ & \gamma_2 & S_2 & \ddots \\ & & \ddots & \ddots \end{pmatrix}, \qquad \gamma_k:=\sqrt{\frac{h_k}{h_{k-1}}} \tag{2.15}$$

其中 $S_0,S_1,\ldots$ 为常数.

证明. 由以下显然的事实

$$\int_\gamma (x\psi_k(x))\,\psi_\ell(x)\mathrm{d}x=\int_\gamma \psi_k(x)\,(x\psi_\ell(x))\,\mathrm{d}x$$

以及正交性(2.5)可得 $Q_{k\ell}=Q_{\ell k}$, 因此 $\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{Q}$. 定理得证. □

换言之, $\boldsymbol{Q}$ 的非零元只位于主对角线以及上下两条副对角线上, 形如这样的矩阵称为 **3-对角矩阵**. 特别地, 对任意正整数 k, $\boldsymbol{Q}^k$ 良定义. 此外, 对任意多项式 $f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$, 相应的 $f(\boldsymbol{Q}):=a_0\boldsymbol{I}+a_1\boldsymbol{Q}+\cdots+a_n\boldsymbol{Q}^n$. 由(2.13)易得

$$f(x)\boldsymbol{\psi}(x)=f(\boldsymbol{Q})\boldsymbol{\psi}(x). \tag{2.16}$$

在记号(2.15)下, $p_k(x)$ 的递推关系为

$$p_0(x)=1, \qquad p_1(x)=x-S_0, \tag{2.17}$$

$$p_{k+1}(x) = (x - S_k)p_k(x) - \gamma_k^2 p_{k-1}(x), \qquad k \geq 1, \tag{2.18}$$

称为**三项递推关系**. 而另一方面, 考察 $\boldsymbol{Q}$ 的左上角 $k \times k$ 子矩阵

$$\boldsymbol{Q}_{[k]} = \begin{pmatrix} S_0 & \gamma_1 & & \\ \gamma_1 & S_1 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & \gamma_{k-1} \\ & & \gamma_{k-1} & S_{k-1} \end{pmatrix}.$$

作为一道简单的本科低年级工科线性代数习题, 容易验证行列式 $D_k(x) := \det\left(x\boldsymbol{I}_{[k]} - \boldsymbol{Q}_{[k]}\right)$, 即 $\boldsymbol{Q}_{[k]}$ 的特征多项式, 满足如下递推关系:

$$D_{k+1}(x) = (x - S_k)D_k(x) - \gamma_k^2 D_{k-1}(x).$$

该递推关系恰好与正交多项式 $p_k(x)$ 的三项递推关系(2.18)相同. 再比较初值, 立刻得到:

性质 2.4. 正交多项式 $p_k(x)$ 满足

$$p_k(x) = \det(x - \boldsymbol{Q})_{[k]} \tag{2.19}$$

与上一小节的 Heine 公式(2.7)比较, 我们有

$$\langle \det(x - H) \rangle_k = \det(x - \boldsymbol{Q})_{[k]}. \tag{2.20}$$

一般来说, 对于随机矩阵 H 的某个函数的期望, 往往等于将 H 换成 $\boldsymbol{Q}$ 并去掉 $\langle\rangle$ 之后的表达式的值. 例如上式, 以及如下定理:

定理 2.5. 对于单变量多项式函数 $f(x)$ 以及任意正整数 N, 下述关系成立:

$$\langle \mathrm{tr} f(H) \rangle_N = \mathrm{tr} f(\boldsymbol{Q})_{[N]}, \tag{2.21}$$

其中随机变量的期望 $\langle\rangle$ 的定义见(1.24).

证明. 回顾 Vandermonde 行列式的定义, 并结合行列式的基本性质 (初等变换) 可知

$$
\begin{aligned}
\Delta(\lambda_0,\ldots,\lambda_{N-1}) &= \det_{0\le i,j\le N-1}(\lambda_i^j) = \det_{0\le i,j\le N-1}(p_j(\lambda_i)) \\
&= \sum_{\sigma\in S_N}(-1)^{|\sigma|}\prod_{i=0}^{N-1}p_{\sigma(i)}(\lambda_i),
\end{aligned}
$$

再结合(2.3)–(2.5)以及(2.16), 可得

$$
\begin{aligned}
&\langle \mathrm{tr} f(H)\rangle_N \\
&= \frac{1}{N!}\frac{1}{\mathcal{Z}_N(\gamma)}\int_{\gamma^N}\Delta(\lambda_0,\ldots,\lambda_{N-1})^2\left(\sum_{k=0}^{N-1}f(\lambda_k)\right)\prod_{\ell=0}^{N-1}\mathrm{e}^{-V(\lambda_\ell)}\mathrm{d}\lambda_\ell \\
&= \frac{1}{N!}\frac{1}{\prod_{i=0}^{N-1}h_i}\sum_{k=0}^{N-1}\sum_{\sigma,\tau\in S_N}(-1)^{|\sigma\tau|} \\
&\qquad \times\int_{\gamma^N}\prod_{i,j=0}^{N-1}f(\lambda_k)p_{\sigma(i)}(\lambda_i)p_{\tau(j)}(\lambda_j)\prod_{\ell=0}^{N-1}\mathrm{e}^{-V(\lambda_\ell)}\mathrm{d}\lambda_\ell \\
&= \frac{1}{N!}\frac{1}{\prod_{i=0}^{N-1}h_i}\sum_{k=0}^{N-1}\sum_{\sigma,\tau\in S_N}(-1)^{|\sigma\tau|}\left\langle fp_{\sigma(k)}\middle|p_{\tau(k)}\right\rangle\prod_{\substack{0\le i\le N-1\\ i\ne k}}\left\langle p_{\sigma(i)}\middle|p_{\tau(i)}\right\rangle \\
&= \frac{1}{N!}\frac{1}{\prod_{i=0}^{N-1}h_i}\sum_{k=0}^{N-1}\sum_{\sigma\in S_N}\left\langle fp_{\sigma(k)}\middle|p_{\sigma(k)}\right\rangle\frac{\prod_{i=0}^{N-1}h_i}{h_k} \\
&= \sum_{k=0}^{N-1}\frac{1}{h_k}\langle fp_k|p_k\rangle = \sum_{k=0}^{N-1}\int_\gamma f(x)\psi_k(x)\cdot\psi_k(x)\mathrm{d}x \\
&= \sum_{k=0}^{N-1}f(\boldsymbol{Q})_{kk} = \mathrm{tr} f(\boldsymbol{Q})_{[N]},
\end{aligned}
$$

定理得证. □

2.3 Christoffel-Darboux 公式

利用算子 $\boldsymbol{Q}$, 我们也可以化简积分核 $K_N(x,y)$ 的表达式(2.6). 对于 $N\geq 1$, 引入无穷矩阵

$$\boldsymbol{\Pi}_N := \begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_{N\times N} & \boldsymbol{0}_{N\times\infty} \\ \boldsymbol{0}_{\infty\times N} & \boldsymbol{0}_{\infty\times\infty} \end{pmatrix}, \tag{2.22}$$

则(2.6)等价于如下矩阵形式:

$$K_N(x,y) = \boldsymbol{\psi}^{\mathrm{T}}(x)\boldsymbol{\Pi}_N\boldsymbol{\psi}(y). \tag{2.23}$$

由(2.13), 并注意 $\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{Q}$, 我们立刻得到

$$(y-x)K_N(x,y) = \boldsymbol{\psi}^{\mathrm{T}}(x)[\boldsymbol{\Pi}_N, \boldsymbol{Q}]\boldsymbol{\psi}(y). \tag{2.24}$$

我们称上式右边的

$$\boldsymbol{A}^{[N]} := [\boldsymbol{\Pi}_N, \boldsymbol{Q}] \tag{2.25}$$

为 **Christoffel-Darboux 矩阵**. 直接计算可知

$$\boldsymbol{A}^{[N]} = \gamma_N(\boldsymbol{E}_{N-1,N} - \boldsymbol{E}_{N,N-1}), \tag{2.26}$$

从而将(2.24)改写为

性质 2.6. *(Christoffel-Darboux 公式).* 记号承上, 则

$$K_N(x,y) = \gamma_N \frac{\psi_{N-1}(x)\psi_N(y) - \psi_N(x)\psi_{N-1}(y)}{y-x}. \tag{2.27}$$

注意上式右边只出现了 ψ_{N-1} 与 ψ_N, 这比(2.6)式更简洁. 取极限 $y\to x$, 我们还能得到

$$K_N(x,x) = \gamma_N \lim_{y\to x} \frac{\psi_{N-1}(x)\psi_N(y) - \psi_N(x)\psi_{N-1}(y)}{y-x}$$

$$= \gamma_N \left(\psi_{N-1}(x)\psi_N'(x) - \psi_N(x)\psi_{N-1}'(x)\right).$$

正交多项式 $p_N(x)$ 有 Heine 型公式(2.7)与行列式型公式(2.19); 类似地, 积分核 $K_N(x,y)$ 也有这两种类型的公式.

性质 2.7. 记号承上, 则对任意正整数 N 都有

$$K_N(x,y) = \frac{\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}V(x)}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}V(y)}}{h_{N-1}} \langle \det(x-H)(y-H)\rangle_{N-1}. \tag{2.28}$$

证明. 将 $(y-x)\langle\det(x-H)(y-H)\rangle_{N-1}$ 自然视为 $\mathbb{C}[y][x]$ 中的元素, 即关于 x 的 $\mathbb{C}[y]$-系数的一元多项式. 在此意义下, 显然它是关于 x 的 N 次多项式, 并且最高次项 x^N 的系数为

$$-\langle\det(y-H)\rangle_{N-1} = -p_{N-1}(y),$$

因此存在 $\{c_j(y)\}_{j=0}^{N-1} \subseteq \mathbb{C}[y]$ 使得

$$\begin{aligned}&(y-x)\frac{\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}V(x)}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}V(y)}}{h_{N-1}}\langle\det(x-H)(y-H)\rangle_{N-1}\\ =&-\gamma_N\psi_N(x)\psi_{N-1}(y) + \sum_{j=0}^{N-1} c_j(y)\psi_j(x).\end{aligned}$$

对照 Christoffel-Darboux 公式(2.27), 只需验证

$$c_j(y) = \begin{cases} 0 & 0 \le j \le N-2, \\ \gamma_N\psi_N(y) & j = N-1. \end{cases} \tag{2.29}$$

而由正交关系(2.5), 我们直接得到

$$c_j(y) = \int_\gamma (y-x)\frac{\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}V(x)}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}V(y)}}{h_{N-1}}\langle\det(x-H)(y-H)\rangle_{N-1}\psi_j(x)\mathrm{d}x$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}V(y)}}{\sqrt{h_j}h_{N-1}} \frac{1}{(N-1)!\mathcal{Z}_{N-1}(\gamma)} \int_{\gamma^N} (y-x)p_j(x)\mathrm{e}^{-V(x)} \\
&\qquad \times \Delta(\lambda_0, \ldots, \lambda_{N-2})^2 \left(\prod_{i=0}^{N-2}(x-\lambda_i)(y-\lambda_i)\right)\left(\prod_{i=0}^{N-2}\mathrm{e}^{-V(\lambda_i)}\mathrm{d}\lambda_i\right)\mathrm{d}x \\
&= \frac{\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}V(y)}}{\sqrt{h_j}h_{N-1}} \frac{1}{(N-1)!\mathcal{Z}_{N-1}(\gamma)} \int_{\gamma^N} p_j(\lambda_{N-1})\Delta(\lambda_0, \ldots, \lambda_{N-2}) \\
&\qquad \times \Delta(\lambda_0, \ldots, \lambda_{N-1}) \prod_{i=0}^{N-1}(y-\lambda_i)\mathrm{e}^{-V(\lambda_i)}\mathrm{d}\lambda_i,
\end{aligned} \tag{2.30}
$$

其中积分变元 x 被重命名为 λ_{N-1}. 之后采用与定理2.1证明过程完全相同的变元轮换技巧, 即注意

$$
p_j(\lambda_{N-1})\Delta(\lambda_0, \ldots, \lambda_{N-2}) = \det\left(\begin{array}{cccc|c}
1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\
\lambda_0 & \lambda_1 & \cdots & \lambda_{N-2} & \lambda_{N-1} \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
\lambda_0^{N-2} & \lambda_1^{N-2} & \cdots & \lambda_{N-2}^{N-2} & \lambda_{N-1}^{N-2} \\
\hline
0 & 0 & \cdots & 0 & p_j(\lambda_{N-1})
\end{array}\right),
$$

可知当 $j < N-1$ 时(2.30)右边的重积分为 0, 即 $c_j(y) = 0$.

而当 $j = N-1$ 时, 直接计算得

$$
\begin{aligned}
c_{N-1}(y) &= \frac{\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}V(y)}}{\sqrt{h_{N-1}}h_{N-1}} \frac{1}{(N-1)!\mathcal{Z}_{N-1}(\gamma)} \frac{1}{N} \\
&\qquad \times \int_{\gamma^N} \Delta(\lambda_0, \ldots, \lambda_{N-1})^2 \prod_{i=0}^{N-1}(y-\lambda_i)\mathrm{e}^{-V(\lambda_i)}\mathrm{d}\lambda_i \\
&= \frac{\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}V(y)}}{h_{N-1}^{\frac{3}{2}}} \frac{\mathcal{Z}_N(\gamma)}{\mathcal{Z}_{N-1}(\gamma)} \langle \det(y-H) \rangle_N = \frac{\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}V(y)}}{\sqrt{h_{N-1}}} p_N(y) = \gamma_N \psi_N(y).
\end{aligned}
$$

综上, 命题得证. □

将(2.28)中的随机矩阵 H 替换为 $\boldsymbol{Q}$, 并去掉期望 $\langle\rangle$, 如此得到的行列式型公式也是对的:

性质 2.8. 记号承上, 则对任意正整数 N 都有

$$K_N(x,y)=\frac{\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}V(x)}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}V(y)}}{h_{N-1}}\det\Big((x-\boldsymbol{Q})(y-\boldsymbol{Q})\Big)_{[N-1]}. \tag{2.31}$$

证明. 对 N 归纳. 注意我们特别规定 0×0 矩阵的行列式为 1, 从而容易验证起始步 $N=1$ 成立. 由(2.15)直接计算验证可知

$$\Big((x-\boldsymbol{Q})(y-\boldsymbol{Q})\Big)_{[N]}=(x-\boldsymbol{Q})_{[N]}(y-\boldsymbol{Q})_{[N]}+\gamma_N^2\begin{pmatrix}\mathbf{0}_{(N-1)\times(N-1)} & \\ & 1\end{pmatrix}$$

从而有

$$\begin{aligned}
&\det\Big((x-\boldsymbol{Q})(y-\boldsymbol{Q})\Big)_{[N]}\\
=&\det\Big((x-\boldsymbol{Q})_{[N]}(y-\boldsymbol{Q})_{[N]}\Big)+\gamma_N^2\det\Big((x-\boldsymbol{Q})_{[N]}(y-\boldsymbol{Q})_{[N]}\Big)_{[N-1]}\\
=&\det(x-\boldsymbol{Q})_{[N]}\det(y-\boldsymbol{Q})_{[N]}+\gamma_N^2\det\Big((x-\boldsymbol{Q})(y-\boldsymbol{Q})\Big)_{[N-1]}\\
=&p_N(x)p_N(y)+\gamma_N^2\det\Big((x-\boldsymbol{Q})(y-\boldsymbol{Q})\Big)_{[N-1]}.
\end{aligned}$$

因此由归纳假设以及(2.6)可得

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}V(x)}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}V(y)}}{h_N}\det\Big((x-\boldsymbol{Q})(y-\boldsymbol{Q})\Big)_{[N]}\\
=&\frac{\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}V(x)}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}V(y)}}{h_N}\Big(p_N(x)p_N(y)+\gamma_N^2\det\Big((x-\boldsymbol{Q})(y-\boldsymbol{Q})\Big)_{[N-1]}\Big)\\
=&\psi_N(x)\psi_N(y)+K_N(x,y)=K_{N+1}(x,y),
\end{aligned}$$

从而得证. □

2.4 微分递推关系, 弦方程

除了三项递推关系(2.13)(2.18), 我们也关心正交多项式所满足的微分方程, 即怎样将 $p_k(x)$ 的导函数 $p_k'(x)$ 表示为更低次多项式 $\{p_0(x)$,..., $p_{k-1}(x)\}$ 的线性组合. 根据以往经验, 我们不妨考虑相应的归一化函数, 即(2.4)中的 $\psi_k(x)$. 从现在起, 我们不妨假定势函数 $V(x)$ 是关于 x 的多项式 (或者形式幂级数), 其形如

$$V(x)=\sum_{k=1}^{d+1}\frac{t_k}{k}x^k, \tag{2.32}$$

其中 $d\geq 1$ 为 $V'(x)=\sum\limits_{k=0}^{d}t_{k+1}x^k$ 的次数, $t_1,...,t_{d+1}$ 为形式参数.

对(2.4)两边求导, 得到

$$\psi_k'(x)=\frac{1}{\sqrt{h_k}}\left(p_k'(x)-\frac{1}{2}V'(x)p_k(x)\right)\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}V(x)}. \tag{2.33}$$

注意上式右边大括号内是 $(k+d)$ 次多项式, 从而易知上式右边可以表示为 $\psi_0(x),...,\psi_{k+d}(x)$ 的 $\mathbb{C}$-线性组合. 换言之, 存在 (常系数) 无穷矩阵 $\boldsymbol{P}=(P_{kj})_{k,j=0}^{\infty}$ 使得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\boldsymbol{\psi}(x)=\boldsymbol{P}\boldsymbol{\psi}(x), \tag{2.34}$$

并且当 $j>k+d$ 时 $P_{kj}=0$.

性质 2.9. 矩阵 $\boldsymbol{P}$ 与 $\boldsymbol{Q}$ 满足如下等式:

$$\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}=-\boldsymbol{P},\qquad \boldsymbol{P}=-\frac{1}{2}\left(V'(\boldsymbol{Q})_u-V'(\boldsymbol{Q})_l\right), \tag{2.35}$$

其中 $\boldsymbol{X}_u$ 与 $\boldsymbol{X}_l$ 分别为无穷矩阵 $\boldsymbol{X}$ 的严格上三角部分与严格下三角部分.

证明. 由分部积分

$$\int_\gamma \psi_k'(x)\psi_j(x)\mathrm{d}x = -\int_\gamma \psi_k(x)\psi_j'(x)\mathrm{d}x,$$

立刻得到 $P_{kj} = -P_{jk}$, 即 $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}} = -\boldsymbol{P}$.

利用(2.16)式, 继续整理(2.33)如下:

$$\sum_{j=0}^{k+d} P_{kj}\psi_j(x) = -\frac{1}{2}\sum_{j=0}^{k+d} \left(V'(\boldsymbol{Q})\right)_{kj}\psi_j(x) + \frac{1}{\sqrt{h_k}}p_k'(x)\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}V(x)}. \tag{2.36}$$

注意上式右边第二项形如 $\psi_0(x), ..., \psi_{k-1}(x)$ 的 $\mathbb{C}$-线性组合, 对 $\{\psi_j(x)\}_{j\geq k}$ 的系数无贡献. 因此, 当 $j \geq k$ 时, 比较上式两边 $\psi_j(x)$ 的系数得

$$P_{kj} = -\frac{1}{2}\left(V'(\boldsymbol{Q})\right)_{kj}, \qquad j \geq k,$$

从而 $\boldsymbol{P}_u = -\frac{1}{2}V'(\boldsymbol{Q})_u$. 再注意 $\boldsymbol{P}$ 的反对称性与 $\boldsymbol{Q}$ 的对称性, 有

$$\boldsymbol{P}_l = -\left(\boldsymbol{P}_u\right)^{\mathrm{T}} = \frac{1}{2}\left(V'(\boldsymbol{Q})_u\right)^{\mathrm{T}} = \frac{1}{2}V'(\boldsymbol{Q})_l.$$

之后由 $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}_u + \boldsymbol{P}_l$ 即可完成证明. □

上述命题的证明过程还可以被抠得更细一些:

性质 2.10. *记号承上, 则以下等式成立:*

$$V'(\boldsymbol{Q})_{k,k-1} = \frac{k}{\gamma_k}, \qquad V'(\boldsymbol{Q})_{kk} = 0, \tag{2.37}$$

$$[\boldsymbol{Q}, \boldsymbol{P}] = \boldsymbol{I}, \tag{2.38}$$

其中 $\boldsymbol{I}$ 为无穷维单位矩阵, γ_k 的定义见(2.15).

证明. 在(2.36)式的右边, 注意 $p_k'(x) = kx^{k-1} + \cdots$, 于是比较(2.36)两边 $\psi_{k-1}(x)$ 的系数得

$$P_{k,k-1} = -\frac{1}{2}V'(\boldsymbol{Q})_{k,k-1} + \frac{k}{\gamma_k}.$$

另一方面, 由(2.35)得 $P_{k,k-1} = \frac{1}{2}V'(\boldsymbol{Q})_{k,k-1}$, 故 $V'(\boldsymbol{Q})_{k,k-1} = \frac{k}{\gamma_k}$. 类似地, 比较(2.36)两边 $\psi_k(x)$ 的系数立刻得到 $V'(\boldsymbol{Q})_{kk} = 0$. 最后, 注意

$$\begin{aligned}[\boldsymbol{Q}, \boldsymbol{P}]\boldsymbol{\psi} &= \boldsymbol{Q}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\boldsymbol{\psi} - \boldsymbol{P}x\boldsymbol{\psi} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\boldsymbol{Q}\boldsymbol{\psi}) - x(\boldsymbol{P}\boldsymbol{\psi}) \\ &= \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \circ x - x \circ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)\boldsymbol{\psi} = \boldsymbol{\psi},\end{aligned}$$

展开并比较系数可得 $[\boldsymbol{Q}, \boldsymbol{P}] = \boldsymbol{I}$. 命题得证. □

由(2.37)可以得到配分函数 $\mathcal{Z}_N(\gamma)$ 的**弦方程**:

性质 2.11. *(弦方程). 对于 $V(x) = \sum_{k=1}^{d+1} \frac{t_k}{k}x^k$, 则(1.20)所定义的配分函数 $\mathcal{Z}_N$ 满足如下等式:*

$$\sum_{j=1}^{d} jt_{j+1}\frac{\partial \log \mathcal{Z}_N}{\partial t_j} = Nt_1, \tag{2.39}$$

$$\sum_{j=1}^{d+1} jt_j\frac{\partial \log \mathcal{Z}_N}{\partial t_j} = -N^2. \tag{2.40}$$

证明. 由(1.22)式可知, 存在常数 c_N 使得

$$\mathcal{Z}_N = c_N \int_{\mathrm{H}_N(\gamma)} \mathrm{e}^{-\operatorname{tr} V(H)}\mathrm{d}H,$$

再结合(2.21)可得

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathcal{Z}_N}{\partial t_k} &= -\frac{c_N}{k}\int_{\mathrm{H}_N(\gamma)} \mathrm{tr}(H^k)\mathrm{e}^{-\mathrm{tr}\,V(H)}\mathrm{d}H \\ &= -\frac{\mathcal{Z}_N}{k}\left\langle \mathrm{tr}(H^k)\right\rangle_N = -\frac{\mathcal{Z}_N}{k}\mathrm{tr}(\boldsymbol{Q}^k)_{[N]},\end{aligned}$$

从而有

$$\mathrm{tr}(\boldsymbol{Q}^k)_{[N]} = -k\frac{\partial \log \mathcal{Z}_N}{\partial t_k}. \tag{2.41}$$

因此, 由(2.37)可知

$$0 = \mathrm{tr}(V'(\boldsymbol{Q}))_{[N]} = \sum_{j=0}^{d} t_{j+1}\mathrm{tr}(\boldsymbol{Q}^j)_N = Nt_1 - \sum_{j=1}^{d} jt_{j+1}\frac{\partial \log \mathcal{Z}_N}{\partial t_j}.$$

再注意 $(\boldsymbol{Q}V'(\boldsymbol{Q}))_{kk} = \gamma_k \cdot \frac{k}{\gamma_k} + \gamma_{k+1}\cdot\frac{k+1}{\gamma_{k+1}} = 2k+1$, 从而

$$N^2 = \mathrm{tr}\left(\boldsymbol{Q}V'(\boldsymbol{Q})\right)_{[N]} = \sum_{j=1}^{d+1} t_j\mathrm{tr}(\boldsymbol{Q}^j)_{[N]} = -\sum_{j=1}^{d+1} jt_j\frac{\partial \log \mathcal{Z}_N}{\partial t_j},$$

从而命题得证. □

2.5 例子: Hermite 多项式

我们考察一个重要的例子: 若势函数

$$V(x) = \frac{1}{2}x^2,$$

并且积分路径 $\gamma = \mathbb{R}$, 则相应的正交多项式 $p_k(x)$ 是著名的 **Hermite 多项式**, 我们把它重新记为 $\mathfrak{h}_k(x)$. 注意此时 $V'(x) = x$, 从而相应的算子 $\boldsymbol{Q}$ 满足 $V'(\boldsymbol{Q}) = \boldsymbol{Q}$, 于是由(2.37)立即解得

$$\gamma_k = \sqrt{k}, \qquad S_k = 0, \tag{2.42}$$

于是

$$\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{1} & & & \\ \sqrt{1} & 0 & \sqrt{2} & & \\ & \sqrt{2} & 0 & \sqrt{3} & \\ & & \sqrt{3} & 0 & \ddots \\ & & & \ddots & \ddots \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{P}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{1} & & & \\ \sqrt{1} & 0 & -\sqrt{2} & & \\ & \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{3} & \\ & & \sqrt{3} & 0 & \ddots \\ & & & \ddots & \ddots \end{pmatrix}.$$

第 0 个正交多项式总是恒为 1 的常值多项式, 即 $\mathfrak{h}_0(x)=1$. 因此

$$h_0=\langle\mathfrak{h}_0|\mathfrak{h}_0\rangle=\int_{\mathbb{R}}\mathfrak{h}_0(x)\mathfrak{h}_0(x)\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\mathrm{d}x=\int_{\mathbb{R}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\mathrm{d}x=\sqrt{2\pi}.$$

再结合(2.15)(2.42)可得

$$h_k=\sqrt{2\pi}\,k!,$$

从而有

$$\int_{\mathbb{R}}\mathfrak{h}_k(x)\mathfrak{h}_j(x)\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\mathrm{d}x=\delta_{kj}\sqrt{2\pi}\,k!,$$

并且相应的归一化函数 $\psi_k(x)$ 为

$$\psi_k(x)=\frac{1}{\sqrt{\sqrt{2\pi}\,k!}}\mathfrak{h}_k(x)\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4}}. \tag{2.43}$$

此时, 递推关系(2.13)(2.34)等价于

$$x\psi_k(x)=\sqrt{k}\psi_{k-1}(x)+\sqrt{k+1}\psi_{k+1}(x) \tag{2.44}$$

$$\psi_k'(x)=-\frac{x}{2}\psi_k(x)+\sqrt{k}\psi_{k-1}(x). \tag{2.45}$$

反复使用以上两式, 可以得到 $\psi_k(x)$ 所满足的微分方程

$$\psi_k''(x)+\left(k+\frac{1}{2}-\frac{x^2}{4}\right)\psi_k(x)=0. \tag{2.46}$$

利用(2.43)可将以上关于 ψ_k 的方程都改写为关于 $\mathfrak{h}_k$ 的方程:

$$\mathfrak{h}_{k+1}(x) = x\mathfrak{h}_k(x) - k\mathfrak{h}_{k-1}(x), \qquad \mathfrak{h}_k'(x) = k\mathfrak{h}_{k-1}(x), \tag{2.47}$$

$$\mathfrak{h}_k''(x) - x\mathfrak{h}_k'(x) + k\mathfrak{h}_k(x) = 0. \tag{2.48}$$

此外, 相应的 Christoffel-Darboux 公式(2.27)为

$$\sum_{k=0}^{N-1} \psi_k(x)\psi_k(y) = \sqrt{N}\frac{\psi_{N-1}(x)\psi_N(y) - \psi_N(x)\psi_{N-1}(y)}{y-x}, \tag{2.49}$$

$$\sum_{k=0}^{N-1} \frac{\mathfrak{h}_k(x)\mathfrak{h}_k(y)}{k!} = \frac{1}{(N-1)!}\frac{\mathfrak{h}_{N-1}(x)\mathfrak{h}_N(y) - \mathfrak{h}_N(x)\mathfrak{h}_{N-1}(y)}{y-x}. \tag{2.50}$$

对上式取极限 $y \to x$, 并注意(2.47), 整理得到

$$\mathfrak{h}_N^2(x) - \mathfrak{h}_{N+1}(x)\mathfrak{h}_{N-1}(x) = (N-1)!\sum_{k=0}^{N-1} \frac{\mathfrak{h}_k^2(x)}{k!}. \tag{2.51}$$

特别地, 当 $x \in \mathbb{R}$ 时, $\mathfrak{h}_N^2(x) - \mathfrak{h}_{N+1}(x)\mathfrak{h}_{N-1}(x) > 0$, 此乃 **Turán 不等式**.

由 $\mathfrak{h}_0(x) = 1$ 以及递推关系(2.47)可得前几个 Hermite 多项式:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{h}_1(x) &= x,\\
\mathfrak{h}_2(x) &= x^2 - 1,\\
\mathfrak{h}_3(x) &= x^3 - 3x,\\
\mathfrak{h}_4(x) &= x^4 - 6x^2 + 3,\\
\mathfrak{h}_5(x) &= x^5 - 10x^3 + 15x,\\
\mathfrak{h}_6(x) &= x^6 - 15x^4 + 45x^2 - 15,\\
\mathfrak{h}_7(x) &= x^7 - 21x^5 + 105x^3 - 105x,\\
\mathfrak{h}_8(x) &= x^8 - 28x^6 + 210x^4 - 420x^2 + 105,
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{h}_9(x) &= x^9 - 36x^7 + 378x^5 - 1260x^3 + 945x,\\
\mathfrak{h}_{10}(x) &= x^{10} - 45x^8 + 630x^6 - 3150x^4 + 4725x^2 - 945.
\end{aligned}
$$

我们还可以用多种方式写出 Hermite 多项式的通项:

习题 2.12. 记 $\partial_x := \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ 为微分算子, 则 $\mathfrak{h}_k(x)$ 满足如下等式:

$$
\mathfrak{h}_k(x) = (x-\partial_x)^k \cdot 1 = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2}(-\partial_x)^k \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2} = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\partial_x^2} x^k, \tag{2.52}
$$

$$
\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathfrak{h}_k(x)}{k!} t^k = \mathrm{e}^{xt-\frac{1}{2}t^2}. \tag{2.53}
$$

证明. 由(2.47)可知 $\mathfrak{h}_{k+1}(x) = (x-\partial_x)\mathfrak{h}_k(x)$, 从而易知

$$
\mathfrak{h}_k(x) = (x-\partial_x)^k \cdot 1.
$$

注意 $[x,\partial_x] = 1$ 以及 $[x,[x,\partial_x]] = [\partial_x,[x,\partial_x]] = 0$, 从而由李理论中的 Zassenhaus 公式 (Baker–Campbell–Hausdorff 公式的变种) 得

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathfrak{h}_k(x)}{k!} t^k &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k (x-\partial_x)^k}{k!} \cdot 1 = \mathrm{e}^{t(x-\partial_x)} \cdot 1\\
&= \left(\mathrm{e}^{tx}\mathrm{e}^{-t\partial_x}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t^2[x,-\partial_x]}\right) \cdot 1 = \mathrm{e}^{xt-\frac{1}{2}t^2}.
\end{aligned}
$$

再由 $\partial_x \mathrm{e}^{xt} = t\mathrm{e}^{xt}$ 易知对任意 (在 0 处解析的) 函数 $f(x)$ 都有 $f(\partial_x)\mathrm{e}^{xt} = f(t)\mathrm{e}^{xt}$, 从而

$$
\mathrm{e}^{xt-\frac{1}{2}t^2} = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t^2}\mathrm{e}^{xt} = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\partial_x^2} \cdot \mathrm{e}^{xt},
$$

在 $t=0$ 处展开即得 $\mathfrak{h}_k(x) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\partial_x^2} \cdot x^k$.

最后, 由泰勒公式 $f(x+t) = \mathrm{e}^{t\partial_x} f(x)$ 得

$$
\mathrm{e}^{xt-\frac{1}{2}t^2} = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(x-t)^2} = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2}\mathrm{e}^{-t\partial_x}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2},
$$

将上式在 $t=0$ 处展开可知 $\mathfrak{h}_k(x) = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2}(-\partial_x)^k\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}$. 证毕. □

Hermite 多项式广泛出现于各种数学物理分支, 例如量子力学 (量子谐振子)、组合数学、概率论 (布朗运动) 等.

习题 2.13. (组合计数). $\mathfrak{h}_n(x)$ 的 x^k 项系数的绝对值恰为将 n 元集合划分为 k 个 1 元子集与 $\frac{n-k}{2}$ 个 2 元子集之无交并的方法数.

证明. 考虑指数生成函数(2.53)

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^{xt-\frac{1}{2}t^2} &= \mathrm{e}^{xt}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t^2} = \left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}t^k\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2^k k!}t^{2k}\right)\\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{\ell=0}^{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}\frac{(-1)^\ell}{2^\ell \ell!}\frac{x^{n-2\ell}}{(n-2\ell)!}\right)t^n,
\end{aligned}$$

比较 t^n 的系数得

$$\mathfrak{h}_n(x) = \sum_{\ell=0}^{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}(-1)^\ell\binom{n}{2\ell}(2\ell-1)!!x^{n-2\ell}.$$

注意 $\binom{n}{2\ell}(2\ell-1)!!$ 恰为将 n 元集合划分为 ℓ 个 2 元子集与 $(n-2\ell)$ 个 1 元子集之无交并的方法数, 从而得证. □

习题 2.14. 若随机变量 X 服从正态分布 $N(\mu, 1)$, 则

$$\mathbb{E}[\mathfrak{h}_k(X)] = \mu^k.$$

证明. 随机变量 X 的概率密度 $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(x-\mu)^2}$, 从而

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\mathbb{E}[\mathfrak{h}_k(X)]}{k!}t^k &= \int_{\mathbb{R}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\mathfrak{h}_k(x)}{k!}t^k f(x)\mathrm{d}x\\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}}\mathrm{e}^{xt-\frac{1}{2}t^2}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(x-\mu)^2}\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^{t\mu}}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(x-t-\mu)^2}\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{t\mu},
\end{aligned}$$

之后比较上式两边 t^k 的系数即得证. □

注记 2.15. Hermite 多项式还有另一个常见的版本:

$$H_k(x) := 2^{\frac{k}{2}}\mathfrak{h}_k(\sqrt{2}x),$$

它所满足的通项公式为

$$H_k(x) = (2x - \partial_x)^k \cdot 1 = \mathrm{e}^{x^2}(-\partial_x)^k \mathrm{e}^{-x^2} = 2^n \mathrm{e}^{-\frac{1}{4}\partial_x^2} x^k.$$

为区分这两者, 人们称 $\mathfrak{h}_k(x)$ 为**概率学家 Hermite 多项式**, 称 $H_k(x)$ 为**物理学家 Hermite 多项式**.

3. Toda 方程簇及其约化

下面浅谈矩阵积分与**可积系统**的联系. 我们将依次了解矩阵积分 $\mathcal{Z}_N$ 与 **Toda 方程簇**、**等单值全纯 ODE** 以及 **KP 方程簇**的联系. 大致来说, $\mathcal{Z}_N$ 往往是可积方程簇 (在各种意义下) 的 τ **函数**.

3.1 经典 Toda 链

本小节我们通过 **Toda 链**的例子来介绍可积系统的一些基础知识. 作为必要准备, 这里需要假定读者了解**哈密顿力学**与**辛几何**的基本概念与原理, 这些内容可参考任何一本标准教材, 例如 [19] 等.

所谓 **Toda 链** [21] 是指如下的动力学系统: 考虑位于一条直线上的 n 个质点, 其位置与动量分别依次记为 $q^1, \ldots, q^n$ 与 $p_1, \ldots, p_n$. 该系统的哈密顿量为

$$H = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} p_k^2 + \sum_{k=1}^{n-1} \mathrm{e}^{2(q^k - q^{k+1})}. \tag{3.1}$$

该系统的相空间自然取为余切丛 $T^*\mathbb{R}^n = \{(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}) \mid \boldsymbol{q}, \boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^n\}$ 配以典范泊松结构 $\{q^i, q^j\} = \{p_i, p_j\} = 0, \{q^i, p_j\} = \delta^i_j$.

该系统可以用来描述含有 n 个原子的直线形分子的运动: 相邻两个原子 q^k, q^{k+1} 的相互作用势能为 $\mathrm{e}^{2(q^k-q^{k+1})}$, 而不相邻的原子之间的相互作用被忽略不计. 容易验证该系统的演化方程 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} = \{\cdot, H\}$ 为

$$
\begin{aligned}
\dot{q}^k &= p_k, \\
\dot{p}_\ell &= 2\left(\mathrm{e}^{2(q^{\ell-1}-q^\ell)} - \mathrm{e}^{2(q^\ell-q^{\ell+1})}\right), \\
\dot{p}_1 &= -2\mathrm{e}^{2(q^1-q^2)}, \qquad \dot{p}_n = 2\mathrm{e}^{2(q^{n-1}-q^n)},
\end{aligned}
\tag{3.2}
$$

其中 $1 \le k \le n$, $2 \le \ell \le n-1$.

Flaschka[11] 引入如下新变量

$$
a_k := \mathrm{e}^{q^k-q^{k+1}}, \qquad B_\ell := p_{\ell+1}, \tag{3.3}
$$

其中 $1 \le k \le n-1, 0 \le \ell \le n-1$, 则演化方程(3.2)可改写为

$$
\begin{aligned}
\dot{a}_k &= a_k(B_{k-1} - B_k), \\
\dot{B}_\ell &= 2(a_\ell^2 - a_{\ell+1}^2), \\
\dot{B}_0 &= -2a_1^2, \qquad \dot{B}_{n-1} = 2a_{n-1}^2.
\end{aligned}
\tag{3.4}
$$

而更有意思的是, 若引入 $n \times n$ 矩阵

$$
L := \begin{pmatrix} B_0 & a_1 & & \\ a_1 & B_1 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & a_{n-1} \\ & & a_{n-1} & B_{n-1} \end{pmatrix}, \quad M := \begin{pmatrix} 0 & -a_1 & & \\ a_1 & 0 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -a_{n-1} \\ & & a_{n-1} & 0 \end{pmatrix}, \tag{3.5}
$$

则演化方程(3.4)可进一步改写为如下 **Lax 方程**

$$
\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t} = [M, L]. \tag{3.6}
$$

.

在可积系统理论中, 上述 L 称为 Toda 链(3.4)的 **Lax 算子**. 根据某些经验, 若演化方程能改写成 Lax 方程的样子, 那我们就有办法构造出该时间演化的一系列对称, 从而该系统某种意义下是可积的.

下面我们来构造 **Toda 方程簇**. 对于任意的 n 阶方阵 $X = (X_{ij}) \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$, 将 X 的 (严格) 上三角部分、对角部分与 (严格) 下三角部分分别记作 X_u, X_d 与 X_l, 并且在本小节临时定义

$$X_\oplus := X_l - X_l^{\mathrm{T}}, \qquad X_\ominus := X_u + X_l^{\mathrm{T}} + X_d, \tag{3.7}$$

它们分别 (临时地) 称为 X 的**正部与负部**. 易知 $X_\oplus$ 是反对称的, 而 $X_\ominus$ 是上三角的. 容易验证 $X = X_\oplus + X_\ominus$ 诱导线性空间的直和分解

$$\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) = \mathfrak{o}(n) \oplus \mathfrak{t}(n, \mathbb{R}), \tag{3.8}$$

其中 $\mathfrak{o}(n)$ 为 n 阶反对称实方阵之全体 (正交李代数), 而 $\mathfrak{t}(n, \mathbb{R})$ 为 n 阶上三角实方阵之全体 (上三角李代数), 它们都是 $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ 的李子代数.

例如 Lax 方程(3.6)中的矩阵 M 满足 $M = L_\oplus$.

定义 3.1. ***Toda* 方程簇**是指如下偏微分方程组

$$\frac{\partial L}{\partial t_k} = \left[(L^k)_\oplus, L \right], \qquad 1 \leq p \leq n-1. \tag{3.9}$$

特别地, 当 $p = 1$ 时上述方程恰为(3.6).

注意 L 是对称矩阵, 并且只在主对角线与两条副对角线上才可能有非零元 (即, 矩阵元 $L_{ij} \neq 0$ 仅当 $|i-j| \leq 1$). 而(3.9)等号右边的那个矩阵显然也具有此性质吗? 乍看似乎不太显然.

一方面, 由正部 $(\cdot)_\oplus$ 的定义知 $(L^p)_\oplus$ 是反对称矩阵; 又因为 L 是对称矩阵, 从而直接验证可知 $[(L^p)_\oplus, L]$ 是对称矩阵. 另一方面, 注意

$L^p = (L^p)_\oplus + (L^p)_\ominus$, 而 $[L^p, L] = 0$, 从而

$$[(L^p)_\oplus, L] = -[(L^p)_\ominus, L].$$

注意 $(L^p)_\ominus$ 是上三角阵, 并且当 $i > j+1$ 时 $L_{ij} = 0$, 从而矩阵乘法直接验证可知当 $i > j+1$ 时 $[(L^p)_\ominus, L]$ 的 (i,j) 分量也为 0. 综上所述, $[(L^p)_\oplus, L]$ 是对称矩阵, 并且其 (i,j) 分量非零仅当 $|i-j| \leq 1$.

除了上述讨论外, 方程组(3.9)的良定性还需要另一个必要条件:

$$\frac{\partial}{\partial t_p}\frac{\partial L}{\partial t_q} = \frac{\partial}{\partial t_q}\frac{\partial L}{\partial t_p}, \tag{3.10}$$

换言之, 流 $\{\frac{\partial}{\partial t_p}\}_{1\leq p\leq n-1}$ 两两交换, $[\frac{\partial}{\partial t_p}, \frac{\partial}{\partial t_q}] = 0$. 易验证(3.10)等价于

$$\left[\frac{\partial (L^p)_\oplus}{\partial t_q} - \frac{\partial (L^q)_\oplus}{\partial t_p} + [(L^p)_\oplus, (L^q)_\oplus], L\right] = 0.$$

而我们其实能够证明:

引理 3.2. *(零曲率方程). 记号承上, 则成立*

$$\frac{\partial (L^p)_\oplus}{\partial t_q} - \frac{\partial (L^q)_\oplus}{\partial t_p} + [(L^p)_\oplus, (L^q)_\oplus] = 0. \tag{3.11}$$

证明. 注意投影算子 $(\cdot)_\oplus$ 显然与微分算子 $\frac{\partial}{\partial t^p}$ 可交换, 从而

$$\frac{\partial (L^p)_\oplus}{\partial t_q} = \left(\frac{\partial L^p}{\partial t_q}\right)_\oplus = \left(\sum_{k=0}^{p-1} L^k[(L^q)_\oplus, L]L^{p-1-k}\right)_\oplus = [(L^q)_\oplus, L^p]_\oplus,$$

并注意 $\mathfrak{o}(n), \mathfrak{t}(n, \mathbb{R})$ 都是李子代数, 于是有

$$\frac{\partial (L^p)_\oplus}{\partial t_q} - \frac{\partial (L^q)_\oplus}{\partial t_p} + [(L^p)_\oplus, (L^q)_\oplus]$$

$$
\begin{aligned}
&= [(L^q)_\oplus, L^p]_\oplus - [(L^p)_\oplus, L^q]_\oplus + [(L^p)_\oplus, (L^q)_\oplus] \\
&= -[L^p, (L^q)_\oplus]_\oplus + [(L^p)_\ominus, L^q]_\oplus + [(L^p)_\oplus, (L^q)_\oplus]_\oplus \\
&= [(L^p)_\ominus, L^q]_\oplus - [(L^p)_\ominus, (L^q)_\oplus]_\oplus \\
&= [(L^p)_\ominus, (L^q)_\ominus]_\oplus = 0,
\end{aligned}
$$

从而得证. 这表明相容性条件(3.10)确实成立. □

注记 **3.3.** Toda 方程簇(3.9)的构造方法可以推广到一般的李代数, 尤其是某些无穷维李代数 (比如形式差分算子代数, 形式拟微分算子代数等). 大致来说, 给定李代数 $\mathfrak{g}$ 的李子代数直和分解 $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_\oplus \oplus \mathfrak{g}_\ominus$, 则可以构造出 $\mathfrak{g}$ 上的偏微分方程组

$$
\frac{\partial L}{\partial t_k} = [(f_k(L))_\oplus, L],
$$

其中未知函数 $L \in \mathfrak{g}$, 时间变量 $t_1, ..., t_N$, 并且 f_k 为某些特定的函数使得 $[f_k(L), L] = 0$. 则用同样方法可以验证这些流两两交换, 即 $[\frac{\partial}{\partial t_p}, \frac{\partial}{\partial t_q}] = 0$. 如此构造可积系统的技巧称为 Adler-Kostant-Symes 构造 [1, 16, 20].

注记 **3.4.** 我们所谈论的 Toda 链(3.1)涉及有限个质点, 相应的 Toda 方程簇(3.9)涉及有限个时间变量 $t_1, ..., t_{n-1}$. 然而, 我们往往更习惯无穷多个时间变量 $\{t_p\}_{p\geq 1}$ 的情形: 只需要把哈密顿量(3.1)改成无穷多个质点的版本, 此时相应的 Lax 算子可表示为无穷矩阵

$$
\boldsymbol{L} = \begin{pmatrix} B_0 & a_1 & & \\ a_1 & B_1 & a_2 & \\ & a_2 & B_2 & \ddots \\ & & \ddots & \ddots \end{pmatrix}, \tag{3.12}
$$

并且相应的 Toda 方程簇为

$$
\frac{\partial \boldsymbol{L}}{\partial t_k} = [(\boldsymbol{L}^k)_\oplus, \boldsymbol{L}], \tag{3.13}
$$

其中 $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{L}(\mathbf{t})$ 是关于无穷多个时间变量 $\mathbf{t} = (t_1, t_2, \ldots)$ 的函数.

注记 **3.5.** 或许读者已经注意到, Toda 方程簇的 Lax 算子(3.12)的形状与正交多项式的三项递推算子 $\boldsymbol{Q}$(2.15)完全一样; 此外, 微分递推算子 $\boldsymbol{P}$(2.35)可用本小节的记号改写为 $\boldsymbol{P} = \frac{1}{2}V'(\boldsymbol{Q})_{\oplus}$. 这些现象启发我们将 Toda 方程簇与矩阵积分联系起来.

3.2 Toda 方程簇与正交多项式

我们回到对正交多项式的讨论, 并沿用前文第2节的记号. 为方便讨论, 这里不妨将势函数(2.32) 取为形式幂级数

$$V(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t_k}{k} x^k, \tag{3.14}$$

其中 $\mathbf{t} = (t_1, t_2, \ldots)$ 为无穷多个**形变参数**. 这其实与 $V(x)$ 是多项式的情形区别不大, 例如可以验证此时(2.35)依然成立.

我们回忆, 正交多项式 $p_k(x)$、归一化函数 $\psi_k(x)$ 以及递推算子 $\boldsymbol{Q}$ 等诸多数据都与势函数 $V(x)$ 有关, 势函数的变化会导致 $p_k, \psi_k, \boldsymbol{Q}$ 等数据的变化, 而 $V(x)$ 的的形变自然被参数 $\mathbf{t}$ 所刻画. 于是自然要谈论 $p_k, \psi_k, \boldsymbol{Q}$ 与形变参数 $\mathbf{t}$ 的关系.

性质 3.6. *记号承上, 则 $\boldsymbol{\psi} = \boldsymbol{\psi}(\mathbf{t}; x)$ 满足如下形变方程:*

$$\frac{\partial \boldsymbol{\psi}}{\partial t_k} = \mathcal{U}_k \boldsymbol{\psi}, \qquad k \geq 1, \tag{3.15}$$

其中 $\mathcal{U}_k$ 是反对称无穷矩阵, 满足

$$\mathcal{U}_k = -\frac{1}{2k}\left((\boldsymbol{Q}^k)_u - (\boldsymbol{Q}^k)_l\right) = \frac{1}{2k}(\boldsymbol{Q}^k)_{\oplus}. \tag{3.16}$$

证明. 与性质2.9的证明过程完全类似. 同样的原因可知 $\mathcal{U}_k$ 是反对称的. 另一方面, 由 $\psi_n(x)=\frac{p_n(x)}{\sqrt{h_n}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}V(x)}$ 直接计算得

$$\frac{\partial\psi_n}{\partial t_k}(x)=-\frac{x^k}{2k}\psi_n(x)+q_{n,k}(x)\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}V(x)}, \tag{3.17}$$

其中 $q_{n,k}(x)$ 是某个关于 x 的次数不超过 n 的多项式. 于是立刻得到 $(\mathcal{U}_k)_u=-\frac{(\boldsymbol{Q}^k)_u}{2k}$. 再结合 $\mathcal{U}_k$ 的反对称性即可得(3.16). □

于是, 归一化函数 $\boldsymbol{\psi}=\boldsymbol{\psi}(\mathbf{t};x)$ 满足如下方程组:

$$\boldsymbol{Q}\boldsymbol{\psi} = x\boldsymbol{\psi}, \tag{3.18}$$

$$\frac{\partial\boldsymbol{\psi}}{\partial t_k} = \mathcal{U}_k\boldsymbol{\psi}, \quad k\geq 1. \tag{3.19}$$

$$\frac{\partial\boldsymbol{\psi}}{\partial x} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{\psi}, \tag{3.20}$$

其中前两个方程分别是**谱问题**与**时间演化**. 既然该方程组的解 $\boldsymbol{\psi}(\mathbf{t};x)$ 确实存在, 那么该方程组中的各个方程就应该满足相应的**相容性条件**, 例如由(3.18)与(3.19)可知

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t_k}(\boldsymbol{Q}\boldsymbol{\psi}) &= \frac{\partial\boldsymbol{Q}}{\partial t_k}\boldsymbol{\psi}+\boldsymbol{Q}\frac{\partial\boldsymbol{\psi}}{\partial t_k}=\left(\frac{\partial\boldsymbol{Q}}{\partial t_k}+\boldsymbol{Q}\mathcal{U}_k\right)\boldsymbol{\psi},\\ \frac{\partial}{\partial t_k}(\boldsymbol{Q}\boldsymbol{\psi}) &= \frac{\partial}{\partial t_k}(x\boldsymbol{\psi})=x\mathcal{U}_k\boldsymbol{\psi}=(\mathcal{U}_k\boldsymbol{Q})\boldsymbol{\psi},\end{aligned}$$

从而得到相容性条件

$$\left(\frac{\partial\boldsymbol{Q}}{\partial t_k}-[\mathcal{U}_k,\boldsymbol{Q}]\right)\boldsymbol{\psi}=0.$$

注意矩阵 $\mathcal{U}_k,\boldsymbol{Q}$ 的系数都不显含 x, 而 $\boldsymbol{\psi}$ 的各分量作为 x 的函数是线性无关的. 从而由线性无关性立刻得到

$$\frac{\partial\boldsymbol{Q}}{\partial t_k}=[\mathcal{U}_k,\boldsymbol{Q}]=\frac{1}{2k}[(\boldsymbol{Q}^k)_\oplus,\boldsymbol{Q}], \tag{3.21}$$

这在相差常数倍意义下 (或者时间伸缩 $t_k \mapsto 2kt_k$) 恰好是 Toda 方程簇(3.13). 此外, (3.19)的相容性给出类似于(3.11)的零曲率方程, 而(3.18)与(3.20) 的相容性条件恰为(2.38).

习题 3.7. 对于 $k \geq 1$, 引入记号

$$S_n^{(k)} := (\boldsymbol{Q}^k)_{nn}, \qquad \gamma_n^{(k)} := (\boldsymbol{Q}^k)_{n-1,n}, \tag{3.22}$$

特别地有 $S_n^{(1)} = S_n, \gamma_n^{(1)} = \gamma_n$. 验证: 方程(3.21)等价于

$$\frac{\partial \gamma_n}{\partial t_k} = \frac{\gamma_n}{2k}\left(S_{n-1}^{(k)} - S_n^{(k)}\right), \tag{3.23}$$

$$\frac{\partial S_n}{\partial t_k} = \frac{1}{k}\left(\gamma_n^{(k)}\gamma_n - \gamma_{n+1}^{(k)}\gamma_{n+1}\right). \tag{3.24}$$

若细抠(3.17)式, 我们还能得到:

习题 3.8. 记 $\phi_n := \log h_n$, 其中 h_n 见(2.2). 证明如下等式:

$$\frac{\partial \phi_n}{\partial t_k} = -\frac{1}{k}S_n^{(k)}, \tag{3.25}$$

从而再次得到(2.41). 特别地, 验证 ϕ_n 满足 Toda 方程

$$\frac{\partial^2 \phi_n}{\partial t_1^2} = \mathrm{e}^{\phi_{n+1}-\phi_n} - \mathrm{e}^{\phi_n - \phi_{n-1}}, \tag{3.26}$$

并将此式与(3.2)比较.

证明. 注意正交多项式 $p_n(x)$ 的最高此项系数恒为 1, 从而 $\frac{\partial p_n}{\partial t_k}$ 是次数不超过 $n-1$ 的多项式. 于是对(2.4)两边求导得

$$\frac{\partial \psi_n}{\partial t_k} = -\frac{x^k}{2k}\psi_n + \frac{\partial h_n^{-\frac{1}{2}}}{\partial t_k}\sqrt{h_n}\psi_n + \cdots$$

$$
= \left(-\frac{1}{2k} (\boldsymbol{Q}^k)_{nn} - \frac{1}{2} \frac{\partial \log h_n}{\partial t_k} \right) \psi_n + \sum_{m \neq n} c_{m,k} \psi_m,
$$

其中 $c_{m,k} = c_{m,k}(\mathbf{t})$ 不显含 x. 结合 $\mathcal{U}_k$ 的定义(3.15)可知

$$
(\mathcal{U}_k)_{nn} = -\frac{1}{2k} (\boldsymbol{Q}^k)_{nn} - \frac{1}{2} \frac{\partial \log h_n}{\partial t_k}
$$

又因为 $\mathcal{U}_k$ 反对称, 其对角元 $(\mathcal{U}_k)_{nn} = 0$, 从而(3.25)得证. 最后再由 γ_n 与 h_n 的关系(2.15)容易得到(3.26). □

习题 3.9. 证明如下等式:

$$
k \frac{\partial S_n^{(j)}}{\partial t_k} = j \frac{\partial S_n^{(k)}}{\partial t_j}, \tag{3.27}
$$

$$
k \frac{\partial}{\partial t_k} \left(\gamma_n \gamma_n^{(j)} \right) = j \frac{\partial}{\partial t_j} \left(\gamma_n \gamma_n^{(k)} \right). \tag{3.28}
$$

证明. 由相容性 $\frac{\partial}{\partial t_k} \left(\frac{\partial \log h_n}{\partial t_j} \right) = \frac{\partial}{\partial t_j} \left(\frac{\partial \log h_n}{\partial t_k} \right)$ 以及(3.25)可得第一个等式; 而由 $\frac{\partial}{\partial t_k} \left(\frac{\partial \operatorname{tr} \boldsymbol{Q}_{[n]}}{\partial t_j} \right) = \frac{\partial}{\partial t_j} \left(\frac{\partial \operatorname{tr} \boldsymbol{Q}_{[n]}}{\partial t_k} \right)$ 以及(3.24)可得第二个等式. □

习题 3.10. 证明如下等式:

$$
\mathbb{V}_{-1} \boldsymbol{Q} = -\boldsymbol{I} \tag{3.29}
$$

$$
\mathbb{V}_{-1} S_n^{(k)} = -k S_n^{(k-1)}, \tag{3.30}
$$

$$
\mathbb{V}_{-1} \gamma_n^{(k)} = -k \gamma_n^{(k-1)}. \tag{3.31}
$$

其中 Virasoro 算子 $\mathbb{V}_{-1} = \mathbb{V}_{-1} \left(\mathbf{t}, \frac{\partial}{\partial \mathbf{t}} \right)$ 的定义如下

$$
\mathbb{V}_{-1} := \sum_{k=1}^{\infty} k t_{k+1} \frac{\partial}{\partial t_k}. \tag{3.32}
$$

证明. 由(2.35)(3.14)以及(3.15)可知

$$\boldsymbol{P}=\sum_{k=1}^{\infty}kt_{k+1}\mathcal{U}_k, \tag{3.33}$$

再结合(2.38)(3.21)即可得到

$$\mathbb{V}_{-1}\boldsymbol{Q}=\sum_{k=1}^{\infty}kt_{k+1}\frac{\partial\boldsymbol{Q}}{\partial t_k}=\sum_{k=1}^{\infty}kt_{k+1}[\mathcal{U}_k,\boldsymbol{Q}]=[\boldsymbol{P},\boldsymbol{Q}]=-\boldsymbol{I}.$$

之后注意 $\mathbb{V}_{-1}\left(\boldsymbol{Q}^k\right)=k\boldsymbol{Q}^{k-1}\left(\mathbb{V}_{-1}\boldsymbol{Q}\right)=-k\boldsymbol{Q}^{k-1}$, 两边取相应矩阵元即可得到(3.30)(3.31). □

3.3 平移算子表示, tau 函数

本小节以及下一小节将给出关于可积系统的若干注记.

注记 **3.11.** 把归一化函数 $\boldsymbol{\psi}=\boldsymbol{\psi}(\mathbf{t};x)$ 满足的方程(3.18)–(3.20) 改写成关于正交多项式 $\boldsymbol{p}(\mathbf{t};x)$ 的方程, 就能得到 Toda 方程簇的另一种版本.

具体地说, 将(2.4)改写为矩阵形式

$$\boldsymbol{p}=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}V}\boldsymbol{H}^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{\psi},$$

其中

$$\boldsymbol{p}:=\begin{pmatrix}p_0\\p_1\\p_2\\\vdots\end{pmatrix},\qquad \boldsymbol{H}^{\frac{1}{2}}:=\begin{pmatrix}\sqrt{h_0}&&&\\&\sqrt{h_1}&&\\&&\sqrt{h_2}&\\&&&\ddots\end{pmatrix},$$

则易知(3.18)可被改写为

$$\widetilde{\boldsymbol{Q}}\boldsymbol{p}=x\boldsymbol{p}, \tag{3.34}$$

其中 **Lax** 矩阵 $\widetilde{\boldsymbol{Q}}$ 为

$$\widetilde{\boldsymbol{Q}} = \boldsymbol{H}^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{H}^{-\frac{1}{2}} = \begin{pmatrix} S_0 & 1 & & \\ \gamma_1^2 & S_1 & 1 & \\ & \gamma_2^2 & S_2 & \ddots \\ & & \ddots & \ddots \end{pmatrix}. \tag{3.35}$$

接下来我们把 $\boldsymbol{Q}$ 满足的 Toda 方程簇(3.21)用 $\widetilde{\boldsymbol{Q}}$ 来表示. 为此, 先将(3.25)改写为如下的矩阵形式

$$\frac{\partial \boldsymbol{H}^{\frac{1}{2}}}{\partial t_k} = -\frac{1}{2k}\boldsymbol{H}^{\frac{1}{2}}(\boldsymbol{Q}^k)_d, \tag{3.36}$$

其中 $(\cdot)_d$ 表示矩阵的对角部分. 于是

$$\begin{aligned} \frac{\partial \widetilde{\boldsymbol{Q}}}{\partial t_k} &= \frac{\partial}{\partial t_k}\left(\boldsymbol{H}^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{H}^{-\frac{1}{2}}\right) \\ &= \frac{1}{2k}\boldsymbol{H}^{\frac{1}{2}}\left[(\boldsymbol{Q}^k)_l - (\boldsymbol{Q}^k)_u - (\boldsymbol{Q}^k)_d\,,\,\boldsymbol{Q}\right]\boldsymbol{H}^{-\frac{1}{2}} \\ &= -\frac{1}{k}\left[(\widetilde{\boldsymbol{Q}}^k)_+\,,\,\widetilde{\boldsymbol{Q}}\right], \end{aligned} \tag{3.37}$$

其中 $(\cdot)_u, (\cdot)_l$ 分别是矩阵的严格上三角部分与严格下三角部分, 而

$$(\cdot)_+ := (\cdot)_u + (\cdot)_d$$

为矩阵的上三角部分 (含对角线). 方程(3.37)是 Toda 方程簇的另一种等价版本, 也是笔者更熟悉的常用版本.

注记 **3.12.** Toda 方程簇(3.21)(3.37)是关于 Lax 算子 $\boldsymbol{Q}$(或者 $\widetilde{\boldsymbol{Q}}$) 的矩阵元 $S_n = S_n(\mathbf{t}), \gamma_n = \gamma_n(\mathbf{t})$ 的方程. 我们把其中的下标 n 也看作变量, 即

$$\gamma = \gamma(\mathbf{t}; n), \qquad S = S(\mathbf{t}; n),$$

则 n 被视为离散的空间变量, 其取值范围是 $\mathbb{Z}_+$ 或 $\mathbb{Z}_{\geq 0}$.

一个自然的想法是将空间变量 n 的取值范围延拓到 $\mathbb{Z}$, 并给出相应版本的 Toda 方程簇. 此时 Lax 算子 $\widetilde{\boldsymbol{Q}}$ 的类似版本是如下 “双边无穷” 矩阵

$$\mathscr{L} = \begin{pmatrix} \ddots & \ddots & & & \\ \ddots & S_{-1} & 1 & & \\ & \gamma_0^2 & S_0 & 1 & \\ & & \gamma_1^2 & S_1 & \ddots \\ & & & \ddots & \ddots \end{pmatrix}, \tag{3.38}$$

相应的 Toda 方程簇为

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial t_k} = c_k \left[(\mathscr{L}^k)_+, \mathscr{L} \right], \quad k \geq 1, \tag{3.39}$$

其中 c_k 为给定的常数. 注意上述 $\mathscr{L}$ 中的矩阵元 $S_{-1}, S_{-2}, \ldots$ 以及 γ_0^2, $\gamma_{-1}^2, \ldots$ 并非来自于正交多项式 (或者矩阵积分). 或许它们可以被视为某种广义的矩阵积分.

“双边无穷矩阵” 的语言毕竟不是特别 “文明”, 我们最好用线性空间、线性算子的语言来重新表述. 考虑函数空间

$$\mathcal{V} := \{f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{C}\},$$

即定义在 $\mathbb{Z}$ 上的 $\mathbb{C}$-值函数之全体, 它有自然的 $\mathbb{C}$-线性空间结构. 引入该函数空间上的**平移算子** $\Lambda \in \mathrm{End}(\mathcal{V})$ 如下:

$$(\Lambda f)(n) := f(n+1), \tag{3.40}$$

其中 $f \in \mathcal{V}$, $n \in \mathbb{Z}$. 此外, 函数 $f \in \mathcal{V}$ 自然也视为 $\mathrm{End}(\mathcal{V})$ 中的元素:

$$(fg)(n) := f(n)g(n), \quad \forall\, g \in \mathcal{V},$$

这是通常的函数乘法. 我们认为 Lax 算子 $\mathscr{L} \in \mathrm{End}(\mathcal{V})$, 至于(3.38)则是它在 $\mathcal{V}$ 的某 “标准基” 下的矩阵表示. 而用差分算子的语言, $\mathscr{L}$ 可被改写为如下算子形式 [7]:

$$\mathscr{L} = \Lambda + v + \mathrm{e}^{u}\Lambda^{-1}, \tag{3.41}$$

在此我们记

$$v(n) := S_n, \qquad u(n) := 2\log\gamma_n = \phi_n - \phi_{n-1}, \tag{3.42}$$

其中 $\phi_n := \log h_n$, 见习题3.8.

Lax 算子 $\mathscr{L}$ 也同样生活在如下的李代数中:

$$\mathfrak{g} := \left\{ \sum_{s=0}^{\infty} a_s \Lambda^{k-s} \,\middle|\, k \in \mathbb{Z},\ a_s \text{ 是关于 } \{\Lambda^p u,\ \Lambda^p v\}_{p\in\mathbb{Z}} \text{ 的函数} \right\},$$

即关于 Λ^{-1} 的形式 Laurent 级数. $\mathfrak{g}$ 的李括号由线性算子的交换子以及形式幂级数的运算法则自然给出. 该李代数称为**形式拟差分算子代数**. 对于算子 $X = \sum_{s=0}^{\infty} a_s \Lambda^{k-s} \in \mathfrak{g}$, 定义

$$X_+ := \sum_{s=0}^{k} a_s \Lambda^{k-s}, \qquad X_- := \sum_{s=k+1}^{\infty} a_s X^{k-s},$$

在 “双边无穷矩阵” 的语言中它们分别对应矩阵的上三角部分 (含对角线) 以及严格下三角部分. 这自然给出 $\mathfrak{g}$ 的李子代数直和分解 $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_+ \oplus \mathfrak{g}_-$. 在此意义下依然有 Toda 方程簇(3.39).

由于空间变量 $n \in \mathbb{Z}$ 是离散的, 我们习惯称相应的可积系统 (比如 Toda 方程簇) 为**离散可积系统**. 而在形式拟差分算子代数 $\mathfrak{g}$ 中的 Adler-Kostant-Symes 构造 (注记3.3) 是构造离散可积系统的重要方法, 除了 Toda 方程簇, 还有众多其它的离散可积系统都可由这种方法得到, 不过这超出了本讲义的范围.

注记 3.13. 由(2.3)可得

$$h_n = \frac{\mathcal{Z}_{n+1}}{\mathcal{Z}_n}.$$

依然把 n 视为变量, 则上式可用差分算子的语言改写为

$$\phi = (\Lambda - 1)\log \mathcal{Z},$$

其中 $\phi\colon n \mapsto \phi_n := \log h_n$. 再结合(3.42)的第二式, 我们有

$$u(n) = \log \frac{\mathcal{Z}_{n+1}\mathcal{Z}_{n-1}}{\mathcal{Z}_n^2},$$

或者用差分算子语言写成如下更紧凑的形式 [7]

$$u = (\Lambda - 1)(1 - \Lambda^{-1})\log \mathcal{Z}. \tag{3.43}$$

在可积系统理论中, $\mathcal{Z}$ 扮演了 Toda 方程簇 **tau 函数**的角色. 粗略地说, Toda 方程簇是关于多个 (2 个) 未知函数 u, v(3.42)的方程组; 而实际上这多个未知函数可以只用一个函数 $\mathcal{Z}$ 来表示, 例如(3.43)给出了未知函数 u 与 tau 函数 $\mathcal{Z}$ 的关系. 而若要用 $\mathcal{Z}$ 来表示 v, 则需要将 Toda 方程簇进行某种拓展, 得到所谓**拓展 Toda 方程簇** [7], 这超出本讲义的范围.

3.4 Volterra 方程簇与无色散 KdV 方程簇

我们继续补充一些可积系统的内容.

注记 3.14. 若将势函数 $V = V(\mathbf{t}; x)$ 限制在 “大相空间”$\{(\mathbf{t}; x)\}$ 的某些特定的 “子流形” 上, 就能得到 Toda 方程簇的各种约化.

例如将 V 限制在 $\{t_{d+2} = t_{d+3} = \cdots = 0\}$ 上即为(2.32). 而一个更经典的例子是

$$\mathcal{Z}_n^{\text{even}} := \mathcal{Z}_n|_{t_1=t_3=t_5=\cdots=0}, \tag{3.44}$$

其相应的势函数 $V^{\text{even}}(\mathbf{t};x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{t_{2k}}{2k}x^{2k}$. 此时可以验证:

习题 3.15. 记号承上, 并且假定积分路径 $\gamma=\mathbb{R}$, 则相应的正交多项式 $p_n(x)$ 满足

$$p_n(-x)=(-1)^n p_n(x).$$

证明. 在(2.7)中考虑换元积分 $\lambda_i\mapsto-\lambda_i$, 并注意 $V^{\text{even}}(x)$ 是偶函数. 细节留给读者. □

由此, 我们立刻得到

$$\langle xp_n|p_n\rangle=\int_{\mathbb{R}}xp_n^2(x)\mathrm{e}^{-V^{\text{even}}(x)}\mathrm{d}x=0,$$

其中我们假定积分路径 $\gamma\subseteq\mathbb{C}$ 为实数轴 $\mathbb{R}$, 而最后一个等号是因为被积函数是关于 x 的奇函数. 上式表明三项递推算子 $\boldsymbol{Q}$ 的对角元 S_n 都为 0, 从而 $\widetilde{\boldsymbol{Q}}$ 形如

$$\widetilde{\boldsymbol{Q}}=\begin{pmatrix}0&1&&\\ \mathrm{e}^{u_1}&0&1&\\ &\mathrm{e}^{u_2}&0&\ddots\\ &&\ddots&\ddots\end{pmatrix},$$

相应的 Lax 算子为

$$\mathcal{L}=\Lambda+\mathrm{e}^{u}\Lambda^{-1}.$$

由此给出的可积方程簇

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial t_{2k}}=c_{2k}\left[\left(\mathcal{L}^{2k}\right)_+,\mathcal{L}\right],\quad k\geq1 \tag{3.45}$$

称为 **Volterra 方程簇** (或者**离散 KdV 方程簇**), 它是 Toda 方程簇的约化, 同样也是一个重要的离散可积系统, 并且与 Hodge 积分等众多数学

物理概念联系密切 [9]. 例如, 直接计算可得

$$\mathcal{L}^2 = \Lambda^2 + \left(e^{u^+} + e^u\right) + e^u e^{u^-} \Lambda^{-2},$$

其中 $u^+ := \Lambda u$, $u^{++} := \Lambda^2 u$, $u^- := \Lambda^{-1} u \cdots$ 以此类推. 此外还可以直接写出 $\mathcal{L}^4$ 的表达式 (从略), 从而暴力计算得 Volterra 方程簇(3.45)的前两个方程如下

$$\frac{1}{c_2}\frac{\partial u}{\partial t_2} = e^{u^+} - e^{u^-}, \tag{3.46}$$

$$\frac{1}{c_4}\frac{\partial u}{\partial t_4} = e^{u^+}\left(e^{u^{++}} + e^{u^+} + e^u\right) - e^{u^-}\left(e^u + e^{u^-} + e^{u^{--}}\right). \tag{3.47}$$

其实我们不必如此暴力计算, 只需注意:

习题 3.16. 对于 Volterra 方程簇(3.45)的 Lax 算子 $\mathcal{L}$, 记

$$\mathcal{L}^k = \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} f_\ell^{[k]} \Lambda^\ell,$$

其中系数 $f_\ell^{[k]}$ 是关于 $..., u^-, u, u^+, ...$ 的函数. 证明:

$$\frac{1}{c_{2k}}\frac{\partial u}{\partial t_{2k}} = (1 - \Lambda^{-1}) f_0^{[2k]} = (\Lambda - \Lambda^{-1}) f_{-1}^{[2k-1]} \tag{3.48}$$

证明. 直接比较 $\left[(\mathcal{L}^{2k})_+, \mathcal{L}\right]$ 的 Λ^{-1} 系数立刻得到 $\frac{1}{c_{2k}}\frac{\partial u}{\partial t_{2k}} = (1-\Lambda^{-1}) f_0^{[2k]}$. 另一方面, 比较等式 $\mathcal{L}^{2k} = \mathcal{L} \cdot \mathcal{L}^{2k-1} = \mathcal{L}^{2k-1} \cdot \mathcal{L}$ 的 Λ^0 系数可得

$$f_0^{[2k]} = \left(f_{-1}^{[2k-1]}\right)^+ + e^u \left(f_1^{[2k-1]}\right)^-,$$

$$f_0^{[2k]} = e^{u^+} f_1^{[2k-1]} + f_{-1}^{[2k-1]},$$

由以上两式容易得到

$$(1 - \Lambda^{-1}) f_0^{[2k]} = \left(f_{-1}^{[2k-1]}\right)^+ - \left(f_{-1}^{[2k-1]}\right)^- = (\Lambda - \Lambda^{-1}) f_{-1}^{[2k-1]},$$

从而得证. □

上述方法当然也可以用来研究 Toda 方程簇(3.39)(3.41), 细节留给感兴趣的读者, 这里从略.

注记 3.17. 对于解析函数 $f(z)$, 我们有

$$(\Lambda f)(z) = f(z+1) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(z)}{k!} = \mathrm{e}^{\partial_z} f(z),$$

从而 $\Lambda = \mathrm{e}^{\partial_z}$. 对于定义在 $\mathbb{Z}$ 上的函数 f, 我们总假装 f 是某个解析函数在 $\mathbb{Z}$ 上的限制, 这也是处理离散空间变量的一种常用观点.

在 Volterra 方程簇(3.45)中, 引入新的时间变量与空间变量

$$\tilde{t}_{2k} := \varepsilon t_{2k}, \tag{3.49}$$

$$x := \varepsilon n, \tag{3.50}$$

其中 ε 为小参数. 则 $\frac{\partial}{\partial t_{2k}} = \varepsilon \frac{\partial}{\partial \tilde{t}_{2k}}$, 并且平移算子 Λ 满足

$$\Lambda = \mathrm{e}^{\varepsilon \partial_x}. \tag{3.51}$$

此时方程(3.46)被改写为

$$\begin{aligned}\frac{\varepsilon}{c_2}\frac{\partial u}{\partial \tilde{t}_2} &= (\Lambda - \Lambda^{-1})\mathrm{e}^u = 2\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^{2k+1}}{(2k+1)!}\partial_x^{2k+1}\right)\mathrm{e}^u \\ &= 2\varepsilon \mathrm{e}^u u_x + \frac{\varepsilon^3}{3}\mathrm{e}^u\left(u_{xxx} + 3u_x u_{xx} + u_x^3\right) + O(\varepsilon^5).\end{aligned}$$

上式两边取极限 $\varepsilon \to 0$, 则得到微分方程

$$\frac{1}{c_2}\frac{\partial u}{\partial \tilde{t}_2} = 2\mathrm{e}^u u_x, \tag{3.52}$$

这称为方程(3.46)的**连续极限** (或者**无色散极限**).

习题 3.18. 利用(3.48)式, 验证: Volterra 方程簇(3.45)的连续极限为

$$\frac{1}{c_{2k}} \frac{\partial u}{\partial \tilde{t}_{2k}} = \binom{2k}{k} \left(\mathrm{e}^{ku}\right)_x, \quad k \geq 1. \tag{3.53}$$

证明. 对(3.48)取极限 $\varepsilon \to 0$, 注意 $1 - \Lambda^{-1} = \varepsilon \partial_x + O(\varepsilon^2)$, 从而

$$\begin{aligned} \frac{1}{c_{2k}} \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\partial u}{\partial \tilde{t}_{2k}} &= \partial_x \left(\lim_{\varepsilon \to 0} f_0^{[2k]} \right) \\ &= \partial_x \operatorname*{Res}_{p=0} \left(p + \frac{\mathrm{e}^u}{p} \right)^{2k} \frac{\mathrm{d}p}{p} = \binom{2k}{k} \left(\mathrm{e}^{ku}\right)_x, \end{aligned}$$

从而得证. □

注记 3.19. 若引入新变量

$$v := \mathrm{e}^u,$$

则方程(3.53)可改写为

$$\frac{\partial v}{\partial \tilde{t}_{2k}} = c_{2k} \binom{2k}{k} k v^k v_x. \tag{3.54}$$

注意 (适当选择常数 c_{2k}) 这恰为**无色散 KdV 方程簇**.

4. Riemann-Hilbert 问题

在本章, 我们给定正整数 d, 并且考虑形如(2.32)的势函数

$$V(x) = \sum_{k=1}^{d+1} \frac{t_k}{k} x^k, \tag{4.1}$$

即 $t_{d+2} = t_{d+3} = \cdots = 0$ 的特殊情况, 并且记 $\mathbf{t} := (t_1, t_2, ..., t_{d+1})$. 我们将从 **Riemann-Hilbert 问题**的角度来重新认识矩阵积分, 并将矩阵积分 $\mathcal{Z}_N$ 与所谓**等单值 tau 函数** (isomonodromic tau function) 联系起来.

4.1 折叠矩阵, 微分-差分-形变系统

对于正整数 n, 记 2 维列向量

$$\vec{\psi}_n := \begin{pmatrix} \psi_{n-1} \\ \psi_n \end{pmatrix}, \tag{4.2}$$

其中 $\psi_n = \psi_n(\mathbf{t}; x)$ 是归一化函数(2.4). 给定正整数 N, 由三项递推关系(2.13)(2.18)可知对于任意给定的正整数 N, 以及 $n \geq 0$, 存在关于 x 的多项式 $F^{[N]}_{n,N-1}(x)$, $F^{[N]}_{n,N}(x)$ 使得

$$\psi_n = \left(F^{[N]}_{n,N-1}\,,\ F^{[N]}_{n,N}\right)\begin{pmatrix} \psi_{N-1} \\ \psi_N \end{pmatrix}. \tag{4.3}$$

满足上述条件的多项式 $F^{[N]}_{n,N-1}(x)$, $F^{[N]}_{n,N}(x)$ 显然并不唯一: 例如

$$\tilde{F}^{[N]}_{n,N-1}(x) := F^{[N]}_{n,N-1}(x) + \frac{p_N(x)}{\sqrt{h_N}}, \quad \tilde{F}^{[N]}_{n,N}(x) := F^{[N]}_{n,N}(x) - \frac{p_{N-1}(x)}{\sqrt{h_{N-1}}}$$

也满足上述条件. 我们将(4.3)用无穷矩阵的语言改写为

$$\boldsymbol{\psi}(x) = \boldsymbol{F}^{[N]}(x)\vec{\psi}_N(x), \tag{4.4}$$

其中 $\boldsymbol{\psi}$ 为无穷列向量(2.12), 而 $\infty \times 2$ 矩阵

$$\boldsymbol{F}^{[N]} = \begin{pmatrix} F^{[N]}_{0,N-1} & F^{[N]}_{0,N} \\ F^{[N]}_{1,N-1} & F^{[N]}_{1,N} \\ F^{[N]}_{2,N-1} & F^{[N]}_{2,N} \\ \vdots & \vdots \end{pmatrix} \tag{4.5}$$

称为**折叠矩阵** (folding)[6, 10]. 为方便起见, 我们不妨用指标 $N-1, N$ 来标记矩阵 $\boldsymbol{F}^{[N]}$ 的两列. 满足(4.4)且多项式依赖于 x 的矩阵 $\boldsymbol{F}^{[N]}$ 不唯一, 而我们将在本小节末给出 $\boldsymbol{F}^{[N]}$ 的一种自然选取.

借助折叠矩阵 $\boldsymbol{F}^{[N]}$, 我们立刻得到

引理 4.1. *给定正整数 N, 则:*

1. *存在 2×2 矩阵 $\mathcal{D}_N$ 使得其矩阵元是 x 的多项式, 并且*
$$\frac{\mathrm{d}\vec{\psi}_N}{\mathrm{d}x} = \mathcal{D}_N\vec{\psi}_N. \tag{4.6}$$

2. *对于 $1\le k\le d+1$, 存在 2×2 矩阵 $\mathcal{C}_{k;N}$ 使得其矩阵元是 x 的多项式, 并且*
$$\frac{\partial\vec{\psi}_N}{\partial t_k} = \mathcal{C}_{k;N}\vec{\psi}_N. \tag{4.7}$$

证明. 对于正整数 N, 引入如下 $2\times\infty$ **窗矩阵** (window):
$$\mathbf{\Gamma}_N := \begin{pmatrix} \cdots & 1 & 0 & \cdots \\ \cdots & 0 & 1 & \cdots \end{pmatrix}, \tag{4.8}$$
其非零元仅在第 $N-1$ 列与第 N 列. 由定义知
$$\vec{\psi}_N = \mathbf{\Gamma}_N\boldsymbol{\psi}. \tag{4.9}$$
从而由(2.34)(3.15)以及折叠矩阵(4.4)可得
$$\frac{\mathrm{d}\vec{\psi}_N}{\mathrm{d}x} = \mathbf{\Gamma}_N\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\psi}}{\mathrm{d}x} = \mathbf{\Gamma}_N\boldsymbol{P}\boldsymbol{\psi} = \mathbf{\Gamma}_N\boldsymbol{P}\boldsymbol{F}^{[N]}\vec{\psi}_N,$$
从而矩阵 $\mathcal{D}_N$ 可以取为 $\mathbf{\Gamma}_N\boldsymbol{P}\boldsymbol{F}^{[N]}$. 同理 $\mathcal{C}_{k;N}$ 可以取为 $\mathbf{\Gamma}_N\mathcal{U}_k\boldsymbol{F}^{[N]}$. □

类似的道理, 满足引理条件的矩阵 $\mathcal{D}_N, \mathcal{C}_{k;N}$ 也并不唯一, 我们将在后文给出它们的典范选取. 此外, 三项递推关系(2.18)也可改写为
$$\vec{\psi}_{N+1} = \mathcal{R}_N\vec{\psi}_N, \quad \text{其中 } \mathcal{R}_N := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{\gamma_N}{\gamma_{N+1}} & \frac{x-S_N}{\gamma_{N+1}} \end{pmatrix}. \tag{4.10}$$

类似于3.3小节, 我们将 $N \geq 1$ 视为离散的空间变量, 那么 $\vec{\psi} = \vec{\psi}(N; \mathbf{t}; x)$ 满足如下**微分-差分-形变** (differential-difference-deformation) 系统 [5]

$$
\begin{cases}
\vec{\psi}'_N = \mathcal{D}_N \vec{\psi}_N, \\
\vec{\psi}_{N+1} = \mathcal{R}_N \vec{\psi}_N, \\
\dfrac{\partial \vec{\psi}_N}{\partial t_k} = \mathcal{C}_{k;N} \vec{\psi}_N, \quad 1 \leq k \leq d+1,
\end{cases}
\tag{4.11}
$$

即(4.6)(4.10)以及(4.7), 其中 $(\cdot)' := \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$, 系数矩阵 $\mathcal{R}_N$ 见(4.10). 而系数矩阵 $\mathcal{D}_N, \mathcal{C}_{k;N}$ 待定 (将在后文给出). 我们将第一个方程视为关于自变量 x 的常微分方程, 而 $\mathbf{t} = (t_1, ..., t_{d+1})$ 被视为形变参数.

考察(4.11)各方程之间的相容性, 容易验证:

$$
\left.
\begin{array}{r}
\left(\mathcal{D}_{N+1} - \mathcal{R}'_N \mathcal{R}_N^{-1} - \mathcal{R}_N \mathcal{D}_N \mathcal{R}_N^{-1}\right) \vec{\psi}_{N+1} = 0 \\
\left(\mathcal{C}_{k;N+1} - \dfrac{\partial \mathcal{R}_N}{\partial t_k} \mathcal{R}_N^{-1} - \mathcal{R}_N \mathcal{C}_{k;N} \mathcal{R}_N^{-1}\right) \vec{\psi}_{N+1} = 0 \\
\left(\dfrac{\partial \mathcal{D}_N}{\partial t_k} - \dfrac{\partial \mathcal{C}_{k;N}}{\partial x} + [\mathcal{D}_N, \mathcal{C}_{k;N}]\right) \vec{\psi}_N = 0 \\
\left(\dfrac{\partial \mathcal{C}_{j;N}}{\partial t_k} - \dfrac{\partial \mathcal{C}_{k,N}}{\partial t_j} + [\mathcal{C}_{j;N}, \mathcal{C}_{k;N}]\right) \vec{\psi}_N = 0
\end{array}
\right\},
\tag{4.12}
$$

于是有两个自然的问题:

1. 能否选取合适的系数矩阵 $\mathcal{D}_N, \mathcal{C}_{k;N}$ 使得在(4.11) 成立的基础上还要满足如下**零曲率方程**

$$
\mathcal{D}_{N+1} = \mathcal{R}'_N \mathcal{R}_N^{-1} + \mathcal{R}_N \mathcal{D}_N \mathcal{R}_N^{-1}, \tag{4.13}
$$

$$
\mathcal{C}_{k;N+1} = \frac{\partial \mathcal{R}_N}{\partial t_k} \mathcal{R}_N^{-1} + \mathcal{R}_N \mathcal{C}_{k;N} \mathcal{R}_N^{-1}, \tag{4.14}
$$

$$
\frac{\partial \mathcal{D}_N}{\partial t_k} - \frac{\partial \mathcal{C}_{k;N}}{\partial x} + [\mathcal{D}_N, \mathcal{C}_{k;N}] = 0, \tag{4.15}
$$

$$\frac{\partial \mathcal{C}_{j;N}}{\partial t_k} - \frac{\partial \mathcal{C}_{k,N}}{\partial t_j} + [\mathcal{C}_{j;N}, \mathcal{C}_{k;N}] = 0, \tag{4.16}$$

其中 $\mathcal{R}_N$ 已由(4.10)给出.

2. 能否构造出线性微分方程(4.6)的与 $\vec{\psi}_N$ 线性无关的另一个解

$$\vec{\varphi}_N(x) = \begin{pmatrix} \varphi_{N-1}(x) \\ \varphi_N(x) \end{pmatrix} \quad \text{使得 } \Psi_N := \begin{pmatrix} \psi_{N-1} & \varphi_{N-1} \\ \psi_N & \varphi_N \end{pmatrix} \tag{4.17}$$

构成(4.11)的一个基础解系.

如果第 2 个问题被解决, 即确实能构造出基础解系 Ψ_N, 则 Ψ_N 也满足(4.12), 从而由矩阵 Ψ_N 的可逆性, 两边消去 Ψ_N 即证明零曲率方程(4.13)–(4.16). 我们将在后文研究上述两个问题.

习题 **4.2.** 对于(4.10)中的 $\mathcal{R}_N$, 证明如下等式:

$$\mathbb{V}_{-1}\mathcal{R}_N = \mathcal{R}'_N, \tag{4.18}$$

其中 Virasoro 算子 $\mathbb{V}_{-1} = \sum_{k=1}^{d} k t_{k+1} \frac{\partial}{\partial t_k}$ 见(3.32), 且 $\mathcal{R}'_N := \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\mathcal{R}_N$.

证明. 由(3.29)直接计算得

$$\begin{aligned} \mathbb{V}_{-1}\mathcal{R}_N &= \frac{\partial \mathcal{R}_N}{\partial \gamma_N}(\mathbb{V}_{-1}\gamma_N) + \frac{\partial \mathcal{R}_N}{\partial \gamma_{N+1}}(\mathbb{V}_{-1}\gamma_{N+1}) + \frac{\partial \mathcal{R}_N}{\partial S_N}(\mathbb{V}_{-1}S_N) \\ &= -\frac{\partial \mathcal{R}_N}{\partial S_N} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\gamma_{N+1}} \end{pmatrix} = \mathcal{R}'_N, \end{aligned}$$

从而得证. □

习题 **4.3.** (折叠矩阵 $\boldsymbol{F}^{[N]}$ 的构造). 验证: 由递推关系

$$F^{[N]}_{n+1,i} = \frac{x - S_n}{\gamma_{n+1}} F^{[N]}_{n,i} - \frac{\gamma_n}{\gamma_{n+1}} F^{[N]}_{n-1,i}, \quad n \geq 1, i \in \{N-1, N\} \tag{4.19}$$

以及初值条件

$$\begin{pmatrix} F^{[N]}_{N-1,N-1} & F^{[N]}_{N-1,N} \\ F^{[N]}_{N,N-1} & F^{[N]}_{N,N} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{4.20}$$

所唯一确定的 $\infty \times 2$ 矩阵 $\boldsymbol{F}^{[N]} = \left(F^{[N]}_{n,i}\right)_{n\geq 0,\, i\in\{N-1,N\}}$ 满足(4.4), 并且各矩阵元都是关于 x 的多项式, 从而是折叠矩阵.

证明. 只需利用(4.10)中的 $\mathcal{R}_n$ 即可. 递推关系(4.19)其实就是

$$\begin{pmatrix} F^{[N]}_{n,N-1} & F^{[N]}_{n,N} \\ F^{[N]}_{n+1,N-1} & F^{[N]}_{n+1,N} \end{pmatrix} = \mathcal{R}_n \begin{pmatrix} F^{[N]}_{n-1,N-1} & F^{[N]}_{n-1,N} \\ F^{[N]}_{n,N-1} & F^{[N]}_{n,N} \end{pmatrix},$$

细节留给读者. □

如此构造的折叠矩阵 $\boldsymbol{F}^{[N]}$ 的各行 $\{(F^{[N]}_{n,N-1}, F^{[N]}_{n,N})\}_{n\geq 0}$ 与归一化函数 $\{\psi_n\}_{n\geq 0}$ 满足相同的三项递推关系.

4.2 三项递推矩阵的逆

由(2.13)可将 $\boldsymbol{\psi}(x)$ 的三项递推关系改写为 $(x-\boldsymbol{Q})\boldsymbol{\psi} = \boldsymbol{0}$. 同样地, 由(4.19)可知习题4.3所确定的折叠矩阵 $\boldsymbol{F}^{[N]}$ 满足

$$(x-\boldsymbol{Q})\boldsymbol{F}^{[N]} = \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \end{pmatrix},$$

其非零元仅在第 0 行. 这启发我们, 或许可以用 $(x-\boldsymbol{Q})$ 的“逆矩阵”来给出折叠矩阵 $\boldsymbol{F}^{[N]}$ 的显式表达.

引理 4.4. 存在唯一的严格下三角 $\infty \times \infty$ 矩阵

$$\boldsymbol{R} = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ R_{10} & 0 & & \\ R_{20} & R_{21} & 0 & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \tag{4.21}$$

使得其矩阵元是关于 x 的多项式, 并且

$$(x - \boldsymbol{Q})\boldsymbol{R} = \boldsymbol{I}. \tag{4.22}$$

证明. 由(4.22)直接计算可知, $\boldsymbol{R}$ 的矩阵元 R_{nN} 由初始条件

$$R_{N+1,N} = -\frac{1}{\gamma_{N+1}}, \quad N \geq 0 \tag{4.23}$$

与三项递推关系

$$R_{n+1,N} = \frac{x - S_n}{\gamma_{n+1}} R_{nN} - \frac{\gamma_n}{\gamma_{n+1}} R_{n-1,N}, \quad n \geq N+1 \tag{4.24}$$

所唯一确定. 证毕. □

同理, 存在唯一的严格上三角矩阵 $\boldsymbol{L}$, 使得其矩阵元是关于 x 的多项式, 并且

$$\boldsymbol{L}(x - \boldsymbol{Q}) = \boldsymbol{I}. \tag{4.25}$$

事实上, 只需要取 $\boldsymbol{R}$ 的转置

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{R}^{\mathrm{T}} \tag{4.26}$$

即可. 矩阵 $\boldsymbol{L}$ 与 $\boldsymbol{R}$ 分别称为 $(x - \boldsymbol{Q})$ 的**典范左逆**与**典范右逆**.

注记 4.5. 无穷矩阵的左逆和右逆一般都不唯一, 并且左逆与右逆一般也不相等. 此外, 无穷矩阵的乘法结合律也未必成立, 例如

$$\begin{aligned}\Big(\boldsymbol{L}(x-\boldsymbol{Q})\Big)\boldsymbol{\psi} &= \boldsymbol{I}\boldsymbol{\psi}=\boldsymbol{\psi},\\ \boldsymbol{L}\Big((x-\boldsymbol{Q})\boldsymbol{\psi}\Big) &= \boldsymbol{L}\boldsymbol{0}=\boldsymbol{0}.\end{aligned}$$

在涉及无穷矩阵乘法运算时应仔细检查.

习题 4.6. 验证如下关系:

1. 对于 $n,N\geq 0$, 典范右逆 $\boldsymbol{R}$ 的矩阵元 R_{nN} 满足

$$R_{nN}=\begin{cases}-\frac{1}{\gamma_{N+1}\gamma_{N+2}\cdots\gamma_n}\det\limits_{N+1\leq i,j\leq n-1}(x-\boldsymbol{Q})_{ij} & n>N+1,\\ -\frac{1}{\gamma_n} & n=N+1,\\ 0 & n<N+1.\end{cases} \tag{4.27}$$

2. 固定 $n\geq 0$, 则 $\boldsymbol{R}$ 的第 n 行各矩阵元满足递推关系

$$R_{n,N-1}=\frac{x-S_N}{\gamma_N}R_{nN}-\frac{\gamma_{N+1}}{\gamma_N}R_{n,N+1},\quad 1\leq N\leq n-1. \tag{4.28}$$

证明. 与性质2.19的证明类似, 只需比较 $(x-\boldsymbol{Q})$ 的各主子式之间的递推关系与 $\boldsymbol{R}$ 的矩阵元之间的递推关系(4.24)即可. □

性质 4.7. 习题(4.3)所定义的折叠矩阵 $\boldsymbol{F}^{[N]}$ 满足

$$\boldsymbol{F}^{[N]}=(\boldsymbol{L}-\boldsymbol{R})\boldsymbol{A}^{[N]}\boldsymbol{\Gamma}_N^{\mathrm{T}}, \tag{4.29}$$

其中 $\boldsymbol{A}^{[N]}$ 为 *Christoeffel-Darboux* 矩阵(2.26), $\boldsymbol{\Gamma}_N$ 为窗矩阵(4.8).

证明. 将(4.28)改写为 $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}$ 的矩阵元递推关系

$$L_{n+1,N} = \frac{x - S_n}{\gamma_{n+1}} L_{nN} - \frac{\gamma_n}{\gamma_{n+1}} L_{n-1,N}, \tag{4.30}$$

换言之 $\boldsymbol{L}$ 的每一列的各元素所满足的递推关系都与 (4.19)(4.24)相同. 直接计算验证可知(4.29)等号右边满足(4.19)(4.20), 从而得证. □

除了典范左逆 $\boldsymbol{L}$ 与典范右逆 $\boldsymbol{R}$, 我们还有:

性质 4.8. 引入无穷矩阵

$$\frac{1}{x - \boldsymbol{Q}} := \int_\gamma \frac{\boldsymbol{\psi}(y)\boldsymbol{\psi}^{\mathrm{T}}(y)}{x - y} \mathrm{d}y, \tag{4.31}$$

其各矩阵元为 $\mathbb{C} \setminus \gamma$ 上的关于 x 的解析函数, 则成立

$$(x - \boldsymbol{Q}) \frac{1}{x - \boldsymbol{Q}} = \frac{1}{x - \boldsymbol{Q}} (x - \boldsymbol{Q}) = \boldsymbol{I}. \tag{4.32}$$

换言之, 矩阵 $\frac{1}{x-\boldsymbol{Q}}$ 是 $(x - \boldsymbol{Q})$ 的**双边逆**.

证明. 由 $y\boldsymbol{\psi}(y) = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{\psi}(y)$ 以及正交关系 $\int_\gamma \boldsymbol{\psi}(y)\boldsymbol{\psi}^{\mathrm{T}}(y) = \boldsymbol{I}$ 得

$$\begin{aligned}(x - \boldsymbol{Q}) \frac{1}{x - \boldsymbol{Q}} &= (x - \boldsymbol{Q}) \int_\gamma \frac{\boldsymbol{\psi}(y)\boldsymbol{\psi}^{\mathrm{T}}(y)}{x - y} \mathrm{d}y \\ &= \int_\gamma \frac{(x - y)\boldsymbol{\psi}(y)\boldsymbol{\psi}^{\mathrm{T}}(y)}{x - y} \mathrm{d}y = \boldsymbol{I},\end{aligned}$$

同理也有 $\frac{1}{x-\boldsymbol{Q}}(x - \boldsymbol{Q}) = \boldsymbol{I}$, 证毕. □

4.3 正交多项式的 Hilbert 变换

现在我们来初步回答4.1节的第 2 个问题, 即构造(4.17)中的 $\varphi_N(x)$.

定义 4.9. 对于 $N \geq 0$, 记归一化函数 $\psi_N(x)$ 的 ***Hilbert* 变换**

$$\varphi_N(x) := \mathrm{e}^{\frac{1}{2}V(x)} \int_\gamma \frac{\psi_N(y)}{x-y} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}V(y)} \mathrm{d}y, \tag{4.33}$$

则 $\varphi_N(x)$ 关于 x 在 $\mathbb{C} \setminus \gamma$ 解析.

此外, 仿照 $\{\psi_N(x)\}$ 的记号(2.12)(4.2), 我们也记

$$\boldsymbol{\varphi}(x) := \begin{pmatrix} \varphi_0(x) \\ \varphi_1(x) \\ \varphi_2(x) \\ \vdots \end{pmatrix}, \qquad \vec{\varphi}_N(x) := \begin{pmatrix} \varphi_{N-1}(x) \\ \varphi_N(x) \end{pmatrix}. \tag{4.34}$$

$$\Psi_N(x) := (\vec{\psi}_N(x), \vec{\varphi}_N(x)) = \begin{pmatrix} \psi_{N-1}(x) & \varphi_{N-1}(x) \\ \psi_N(x) & \varphi_N(x) \end{pmatrix}. \tag{4.35}$$

习题 **4.10.**(三项递推关系与微分递推关系). 证明 $\varphi_k(x)$ 满足如下等式:

$$x\varphi_k(x) = \sum_{j=k-1}^{k+1} Q_{kj}\varphi_j(x) + \frac{\delta_{k,0}}{\psi_0(x)},$$

$$\varphi_k'(x) = \sum_{j=k-d}^{k+d} P_{kj}\varphi_j(x) + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{\frac{1}{2}V(x)} \int_\gamma \frac{V'(x)-V'(y)}{x-y}\psi_k(y)\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}V(y)}\mathrm{d}y,$$

其中 Q_{jk}, P_{jk} 分别为 $\boldsymbol{Q}$ (2.15), $\boldsymbol{P}$ (2.35)的矩阵元. 特别地,

$$(x-\boldsymbol{Q})\boldsymbol{\varphi}(x) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\psi_0(x)} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}, \qquad \vec{\varphi}_{N+1} = \mathcal{R}_N\vec{\varphi}_N \quad (N \geq 1), \tag{4.36}$$

其中 $\mathcal{R}_N$ 见(4.10); 并且当 k 充分大时成立

$$\varphi_k'(x)=\sum_{j=k-d}^{k+d}P_{kj}\varphi_j(x),\qquad \forall\, k\geq d. \tag{4.37}$$

证明. 由定义直接计算即可 (在某处适当地分部积分), 留给读者. 注意 $\frac{V'(x)-V'(y)}{x-y}$ 是关于 y 的 $(d-1)$ 次多项式, 从而由 ψ_k 的正交性可知

$$\int_\gamma \frac{V'(x)-V'(y)}{x-y}\psi_k(y)\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}V(y)}\mathrm{d}y=0,\qquad \forall\, k\geq d,$$

从而得到(4.37). □

习题 4.11. 证明 $\det\Psi_N=-\frac{1}{\gamma_N}$, 从而 Ψ_N 非退化.

证明. 对 N 归纳. 由递推关系(2.13)(4.36)可知 $\begin{cases}\psi_1=\frac{x-S_0}{\gamma_1}\psi_0,\\ \varphi_1=\frac{x-S_0}{\gamma_1}\varphi_0-\frac{1}{\gamma_1\psi_0}\end{cases}$, 因此 $\det\Psi_1=\begin{vmatrix}\psi_0 & \varphi_0\\ \psi_1 & \varphi_1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\psi_0 & \varphi_0\\ 0 & -\frac{1}{\gamma_1\psi_0}\end{vmatrix}=-\frac{1}{\gamma_1}$. 进而由归纳假设知

$$\det\Psi_{N+1}=\det\left(\mathcal{R}_N\Psi_N\right)=\begin{vmatrix}0 & 1\\ -\frac{\gamma_N}{\gamma_{N+1}} & \frac{x-S_N}{\gamma_{N+1}}\end{vmatrix}\cdot\frac{-1}{\gamma_N}=-\frac{1}{\gamma_{N+1}},$$

从而得证. □

注记 4.12. 同样直接计算可得

$$\frac{\partial\boldsymbol{\varphi}(x)}{\partial t_k}=\mathcal{U}_k\boldsymbol{\varphi}(x)+\frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{2}V(x)}}{2k}\int_\gamma\frac{x^k-y^k}{x-y}\boldsymbol{\psi}(y)\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}V(y)}\mathrm{d}y, \tag{4.38}$$

其中 $\mathcal{U}_k$ 见(3.15)(3.16). 由 $\{\psi_N\}$ 的正交性可知, 当 N 充分大 $(N \geq k)$ 时上式右边第二项的第 N 行为 0. 可见 $\boldsymbol{\varphi}(x)$ 也 "基本上" 满足方程组(3.18)–(3.20). 我们将在后文给出系数矩阵 $\mathcal{D}_N$ (4.6)与 $\mathcal{C}_{k;N}$ (4.7)的典范构造, 并断言当 N 充分大时 $\Psi_N(x)$ (4.35) 是微分-差分-形变系统(4.11)的一组基础解系.

习题 4.13.(与逆矩阵的关系). 证明 $(x-\boldsymbol{Q})$ 的逆(4.21)(4.25)(4.31)满足

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{x-\boldsymbol{Q}} &= \boldsymbol{\psi}(x)\boldsymbol{\varphi}^{\mathrm{T}}(x) + \boldsymbol{R}(x) \\
&= \boldsymbol{\varphi}(x)\boldsymbol{\psi}^{\mathrm{T}}(x) + \boldsymbol{L}(x),
\end{aligned} \tag{4.39}
$$

$$
\boldsymbol{R}(x) = -\boldsymbol{H}^{-\frac{1}{2}}\left(\int_\gamma \frac{\boldsymbol{p}(x)-\boldsymbol{p}(y)}{x-y}\boldsymbol{p}^{\mathrm{T}}(y)\mathrm{e}^{-V(y)}\mathrm{d}y\right)\boldsymbol{H}^{-\frac{1}{2}}, \tag{4.40}
$$

其中 $\boldsymbol{H}$ 见(2.2), 而 $\boldsymbol{p} := (p_0, p_1, \ldots)^{\mathrm{T}} = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}V}\boldsymbol{H}^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{\psi}$.

证明. 直接计算得

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{x-\boldsymbol{Q}} = \int_\gamma \frac{\boldsymbol{\psi}(y)\boldsymbol{\psi}^{\mathrm{T}}(y)}{x-y}\mathrm{d}y &= \boldsymbol{\psi}(x)\mathrm{e}^{\frac{1}{2}V(x)}\int_\gamma \frac{\boldsymbol{\psi}^{\mathrm{T}}(y)}{x-y}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}V(y)}\mathrm{d}y \\
&+ \int_\gamma \frac{\left(\boldsymbol{\psi}(y)-\boldsymbol{\psi}(x)\mathrm{e}^{\frac{1}{2}V(x)-\frac{1}{2}V(y)}\right)}{x-y}\boldsymbol{\psi}^{\mathrm{T}}(y)\mathrm{d}y \\
= \boldsymbol{\psi}(x)\boldsymbol{\varphi}^{\mathrm{T}}(x) - \boldsymbol{H}^{-\frac{1}{2}}&\left(\int_\gamma \frac{\boldsymbol{p}(x)-\boldsymbol{p}(y)}{x-y}\boldsymbol{p}^{\mathrm{T}}(y)\mathrm{e}^{-V(y)}\mathrm{d}y\right)\boldsymbol{H}^{-\frac{1}{2}}.
\end{aligned}
$$

显然上式最右边第二项, 即(4.40)的右边, 的各矩阵元都是关于 x 的多项式; 又注意 $\frac{p_k(x)-p_k(y)}{x-y}$ 是关于 y 的 $(k-1)$ 次多项式, 从而由 $\{p_k\}$ 的正交性易知(4.40)的右边是严格下三角矩阵. 此外, 由 $(x-\boldsymbol{Q})\boldsymbol{\psi}(x) = \boldsymbol{0}$ 可知

$$
(x-\boldsymbol{Q})\left(\frac{1}{x-\boldsymbol{Q}} - \boldsymbol{\psi}(x)\boldsymbol{\varphi}^{\mathrm{T}}(x)\right) = \boldsymbol{I} - (x-\boldsymbol{Q})\boldsymbol{\psi}(x)\boldsymbol{\varphi}^{\mathrm{T}}(x) = \boldsymbol{I},
$$

从而由典范右逆 $\boldsymbol{R}(x)$ 的唯一性 (引理4.4) 即得(4.40), 进而(4.39)的第一个等号成立. 同理 (取矩阵转置) 可知(4.39)的第二个等号也成立. $\square$

习题 **4.14.**(与折叠矩阵的关系). 利用本小节的结论再次证明(4.29) 所给出的 $\boldsymbol{F}^{[N]}$ 满足

$$\boldsymbol{\psi}(x)=\boldsymbol{F}^{[N]}(x)\vec{\psi}_N(x).$$

证明. 由(2.26)直接验证得 $\boldsymbol{A}^{[N]}\left(\boldsymbol{\Gamma}_N^{\mathrm{T}}\vec{\psi}_N\right)=\boldsymbol{A}^{[N]}\boldsymbol{\psi}$, 因此由(4.36)(4.39)(2.25) 并注意 $(x-\boldsymbol{Q})\boldsymbol{\psi}=\boldsymbol{0}$ 可知

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{F}^{[N]}\vec{\psi}_N &= (\boldsymbol{L}-\boldsymbol{R})\boldsymbol{A}^{[N]}\boldsymbol{\psi}=(\boldsymbol{\psi}\boldsymbol{\varphi}^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{\varphi}\boldsymbol{\psi}^{\mathrm{T}})[\boldsymbol{\Pi}_N,\boldsymbol{Q}]\boldsymbol{\psi}\\
&=\left(\boldsymbol{\varphi}\boldsymbol{\psi}^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{\psi}\boldsymbol{\varphi}^{\mathrm{T}}\right)\left(\boldsymbol{\Pi}_N(x-\boldsymbol{Q})-(x-\boldsymbol{Q})\boldsymbol{\Pi}_N\right)\boldsymbol{\psi}\\
&=\boldsymbol{\psi}\boldsymbol{\varphi}^{\mathrm{T}}(x-\boldsymbol{Q})\boldsymbol{\Pi}_N\boldsymbol{\psi}=\boldsymbol{\psi}\left(\frac{1}{\psi_0},0,0,\dots\right)\boldsymbol{\psi}=\boldsymbol{\psi},
\end{aligned}$$

从而得证. $\square$

习题 **4.15.**(渐近行为). 证明: 当 $x\to\infty$ 时成立

$$\varphi_k(x)=\frac{\sqrt{h_k}}{x^{k+1}}\mathrm{e}^{\frac{1}{2}V(x)}\left(1+O(\frac{1}{x})\right). \tag{4.41}$$

证明. 当 $x\to\infty$ 时, 注意

$$\frac{1}{x-y}=\frac{1}{x}\frac{1}{1-\frac{y}{x}}=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{y^j}{x^{j+1}},$$

以及 $\{\psi_k(x)\}$ 的正交性, 从而有

$$\varphi_k(x)=\mathrm{e}^{\frac{1}{2}V(x)}\int_\gamma\frac{\psi_k(y)}{x-y}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}V(y)}\mathrm{d}y$$

$$
\begin{aligned}
&= e^{\frac{1}{2}V(x)} \int_\gamma \sum_{j=0}^{\infty} \psi_k(y) \frac{y^j}{x^{j+1}} e^{-\frac{1}{2}V(y)} dy \\
&= e^{\frac{1}{2}V(x)} \int_\gamma \psi_k(y) \frac{y^k}{x^{k+1}} \left(1 + O(\frac{1}{x})\right) e^{-\frac{1}{2}V(y)} dy \\
&= \frac{\sqrt{h_k}}{x^{k+1}} e^{\frac{1}{2}V(x)} \left(1 + O(\frac{1}{x})\right),
\end{aligned}
$$

从而得证. □

与 $p_k(x)$ 类似, $\varphi_k(x)$ 也有相应的 Heine 公式与行列式公式:

性质 4.16. *(Heine 公式).* 对于 $k \geq 1$, 成立

$$
\varphi_{k-1}(x) = \sqrt{h_{k-1}} e^{\frac{1}{2}V(x)} \left\langle \frac{1}{\det(x-H)} \right\rangle_k . \tag{4.42}
$$

证明. 由(4.33)以及 $p_k(x)$ 的 Henie 公式(2.7)直接计算得

$$
\begin{aligned}
\varphi_{k-1}(x) &= \frac{e^{\frac{1}{2}V(x)}}{\sqrt{h_{k-1}}} \int_\gamma \frac{p_{k-1}(y)}{x-y} e^{-V(y)} dy \\
&= \frac{e^{\frac{1}{2}V(x)}}{\sqrt{h_{k-1}}} \frac{1}{(k-1)! \mathcal{Z}_{k-1}} \int_{\gamma^k} \frac{1}{x-y} \Delta(\lambda_0, \dots, \lambda_{k-2})^2 \\
&\qquad \times \left(\prod_{i-0}^{k-2} (y-\lambda_i) e^{-V(\lambda_i)} d\lambda_i \right) e^{-V(y)} dy \\
&= \frac{e^{\frac{1}{2}V(x)}}{\sqrt{h_{k-1}}} \frac{1}{(k-1)! \mathcal{Z}_{k-1}} \int_{\gamma^k} \frac{1}{x-\lambda_{k-1}} \Delta(\lambda_0, \dots, \lambda_{k-2})^2 \\
&\qquad \times \prod_{i=0}^{k-2} (\lambda_{k-1}-\lambda_i) \cdot \prod_{i=0}^{k-1} e^{-V(\lambda_i)} d\lambda_i
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{2}V(x)}}{\sqrt{h_{k-1}}} \frac{1}{(k-1)!\mathcal{Z}_{k-1}} \int_{\gamma^k} \frac{1}{x-\lambda_{k-1}} \prod_{i=0}^{k-2} \frac{1}{\lambda_{k-1}-\lambda_i} \\
&\qquad \times \Delta(\lambda_0, \dots, \lambda_{k-1})^2 \prod_{i=0}^{k-1} \mathrm{e}^{-V(\lambda_i)} \mathrm{d}\lambda_i \\
&= \frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{2}V(x)}}{\sqrt{h_{k-1}}} \frac{1}{(k-1)!\mathcal{Z}_{k-1}} \int_{\gamma^k} \frac{1}{k} \sum_{j=0}^{k-1} \left(\frac{1}{x-\lambda_j} \prod_{i\neq j} \frac{1}{\lambda_j-\lambda_i} \right) \\
&\qquad \times \Delta(\lambda_0, \dots, \lambda_{k-1})^2 \prod_{i=0}^{k-1} \mathrm{e}^{-V(\lambda_i)} \mathrm{d}\lambda_i \\
&= \frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{2}V(x)}}{\sqrt{h_{k-1}}} \frac{1}{k!\mathcal{Z}_{k-1}} \int_{\gamma^k} \left(\prod_{j=0}^{k-1} \frac{1}{x-\lambda_j} \right) \Delta(\lambda_0, \dots, \lambda_{k-1})^2 \prod_{i=0}^{k-1} \mathrm{e}^{-V(\lambda_i)} \mathrm{d}\lambda_i \\
&= \sqrt{h_{k-1}} \mathrm{e}^{\frac{1}{2}V(x)} \left\langle \frac{1}{\det(x-H)} \right\rangle_k ,
\end{aligned}
$$

从而得证. □

性质 4.17. *(行列式公式).* 对于 $k \geq 1$, 成立

$$
\varphi_{k-1}(x) = \sqrt{h_{k-1}} \mathrm{e}^{\frac{1}{2}V(x)} \det \left(\frac{1}{x-\boldsymbol{Q}} \right)_{[k]} . \tag{4.43}
$$

这里的 $\left(\frac{1}{x-\boldsymbol{Q}}\right)_{[k]}$ 为(4.31)的左上角 k 阶主子方阵.

证明. 由(4.39)可知

$$
\left(\frac{1}{x-\boldsymbol{Q}} \right)_{[k]} = \left(\boldsymbol{\psi}^{\mathrm{T}}(x) \boldsymbol{\varphi}(x) \right)_{[k]} + \boldsymbol{R}(x)_{[k]} .
$$

分别 (临时地) 记 $a_0, \dots, a_{k-1}$ 与 $b_0, \dots, b_{k-1}$ 为矩阵 $\left(\boldsymbol{\psi}^{\mathrm{T}}(x) \boldsymbol{\varphi}(x) \right)_{[k]}$ 与 $\boldsymbol{R}(x)_{[k]}$ 的各列, 这里 a_i, b_j 是 k 维列向量. 注意 $\left(\boldsymbol{\psi}^{\mathrm{T}}(x) \boldsymbol{\varphi}(x) \right)_{[k]}$ 的任何两列都线

性相关, 而 $\boldsymbol{R}(x)_{[k]}$ 严格下三角, $b_{k-1}=0$, 从而由行列式的运算性质得

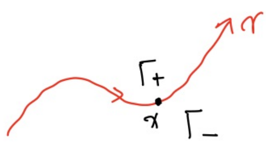
$$\begin{aligned}
&\det\left(\frac{1}{x-\boldsymbol{Q}}\right)_{[k]} = \det(a_0+b_0, a_1+b_1, ..., a_{k-1}+b_{k-1}) \\
&= \det(b_0, ..., b_{k-2}; a_{k-1}) \\
&= \det\left(\begin{array}{ccccc|c}
0 & & & & & \psi_0\varphi_{k-1} \\
\hline
-\frac{1}{\gamma_1} & 0 & & & & * \\
* & -\frac{1}{\gamma_2} & 0 & & & * \\
\vdots & \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\
* & * & \cdots & -\frac{1}{\gamma_{k-1}} & & *
\end{array}\right) \\
&= (-1)^{k+1}\psi_0(x)\varphi_{k-1}(x)\prod_{i=1}^{k-1}\left(-\frac{1}{\gamma_i}\right) = \frac{\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}V(x)}}{\sqrt{h_{k-1}}}\varphi_{k-1}(x),
\end{aligned}$$

从而得证. □

4.4 等单值性与 Riemann-Hilbert 问题

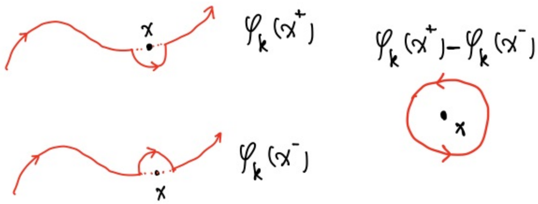
微分-差分-形变系统(4.11)的基础解系 $\Psi_N(x)$ (4.35) 也可以被某个 **Riemann-Hilbert 问题**所唯一确定. 本小节为说明这一点, 首先考虑函数 $\varphi_k(x)$ 在积分路径 γ 附近的性质.

我们回忆, $\varphi_k(x)$ 在 $\mathbb{C}\setminus\gamma$ 全纯, 而在 γ 上暂无定义. 对于 $x\in\gamma$, 定向曲线 γ 将 x 的邻域分为正、负两侧 $\Gamma_\pm$(如图).



考虑 $x' \in \mathbb{C} \setminus \gamma$ 分别从正, 负侧趋于 x 时 $\varphi_k(x')$ 的极限

$$\varphi_k(x^+) := \lim_{\Gamma_+ \ni x' \to x} \varphi_k(x'), \qquad \varphi_k(x^-) := \lim_{\Gamma_- \ni x' \to x} \varphi_k(x'),$$



从而由注记1.8易知

$$\begin{aligned}\varphi_k(x^+) - \varphi_k(x^-) &= \mathrm{e}^{\frac{1}{2}V(x)} \oint_{\partial B(x,\varepsilon)} \frac{\psi_k(y)}{x-y} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}V(y)} \mathrm{d}y \\ &= -2\pi \mathrm{i}\, \psi_k(x). \end{aligned} \tag{4.44}$$

从而 $\Psi_N(x)$ 在 $x \in \gamma$ 处满足

$$\Psi_N(x^+) = \Psi_N(x^-) \mathcal{S}_\gamma, \tag{4.45}$$

这里的系数矩阵

$$\mathcal{S}_\gamma := \begin{pmatrix} 1 & -2\pi\mathrm{i} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{4.46}$$

被称为**单值矩阵** (monodromy matrix). 由于 $\mathcal{S}_\gamma$ 不依赖 x, 从而我们称微分方程

$$\Psi_N'(x) = \mathcal{D}_N(x) \Psi_N(x)$$

(即(4.11)的第一个方程) 是**等单值**的 (isomonodromic); 其中系数矩阵 $\mathcal{D}_N(x)$ 将在下一小节给出. 此外, $\mathcal{S}_\gamma$ 也不依赖于形变参数 $\mathbf{t} = (t_1, ..., t_{d+1})$

(换言之, 与势函数 $V(x)$ 的选取无关), 从而 $t_1, t_2, ..., t_{d+1}$ 也被称为 **等单值的** (isomonodromic).

定理 4.18. *对于 $N \geq 1$, 基本解系 $\Psi_N(x)$ (4.35) 被如下 **Riemann-Hilbert** 问题唯一确定:*

1. *$\Psi_N(x)$ 在 $\mathbb{C} \setminus \gamma$ 全纯、非退化, 并且在 γ 附近满足(4.45);*
2. *存在 2×2 矩阵值函数 $Y_N(x)$ 使得*

$$\Psi_N(x) = Y_N(x) \mathrm{e}^{T_N(x)}, \tag{4.47}$$

$$\text{其中} \quad T_N(x) := \left(N \log x - \frac{1}{2} V(x)\right) \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix}, \tag{4.48}$$

而 $Y_N(x)$ 在 $x = \infty$ 附近解析, 且当 $x \to \infty$ 时

$$Y_N(x) = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{h_{N-1}} \\ \frac{1}{\sqrt{h_N}} & 0 \end{pmatrix} + O(\frac{1}{x}). \tag{4.49}$$

证明. 由习题4.11, 习题4.15 等前文结果易知 $\Psi_N(x)$ 满足此定理中的条件. 若另有 $\hat{\Psi}_N(x)$ 也满足定理条件, 则易知 $\Psi_N(x)\hat{\Psi}_N^{-1}(x)$ 在 $\mathbb{C}$ 全纯, 并且当 $x \to \infty$ 时趋于单位阵 I, 因此由复变函数中的 Liouville 定理知 $\Psi_N(x)\hat{\Psi}_N^{-1}(x) \equiv I$, 从而 $\Psi_N = \hat{\Psi}_N$. 唯一性得证. □

注记 **4.19.** 更一般地, 积分路径 γ 可以取为

$$\gamma = \sum_{i=1}^{n} c_i \gamma_i,$$

其中 $c_i\in\mathbb{Z}$. 换言之, γ 形如多条定向曲线的 $\mathbb{Z}$-线性组合. 此时在 $x\in\gamma_i$ 处的单值矩阵 $\mathcal{S}_{\gamma_i}=\begin{pmatrix}1 & -2\pi\mathrm{i}\,c_i\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

4.5 零曲率方程, 谱曲线

下面给出系数矩阵 $\mathcal{D}_N$ (4.6)与 $\mathcal{C}_{k;N}$ (4.7)的典范选取. 需要注意, 最终给出的取法并非如引理(4.1)的证明过程所述.

由引理4.1的证明过程, 结合(3.16)(4.29)可知

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial\vec{\psi}_N}{\partial t_k}&=\boldsymbol{\Gamma}_N\mathcal{U}_k\boldsymbol{F}^{[N]}\vec{\psi}_N\\
&=\frac{1}{2k}\boldsymbol{\Gamma}_N\left((\boldsymbol{Q}^k)_l-(\boldsymbol{Q}^k)_u\right)(\boldsymbol{L}-\boldsymbol{R})\,\boldsymbol{A}^{[N]}\boldsymbol{\Gamma}_N^{\mathrm{T}}\vec{\psi}_N.
\end{aligned}
$$

注意 $(\boldsymbol{Q}^k)_l$ 与 $\boldsymbol{R}$ 都是严格下三角矩阵, 而 $(\boldsymbol{Q}^k)_u$ 与 L 都是严格上三角矩阵, 从而由(2.26)式, 逐矩阵元直接验证易知

$$
\boldsymbol{\Gamma}_N(\boldsymbol{Q}^k)_l\boldsymbol{R}\boldsymbol{A}^{[N]}\boldsymbol{\Gamma}_N^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{\Gamma}_N(\boldsymbol{Q}^k)_u\boldsymbol{L}\boldsymbol{A}^{[N]}\boldsymbol{\Gamma}_N^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{0},
$$

因此

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial\vec{\psi}_N}{\partial t_k}&=\frac{1}{2k}\boldsymbol{\Gamma}_N\left((\boldsymbol{Q}^k)_l+(\boldsymbol{Q}^k)_u\right)(\boldsymbol{L}+\boldsymbol{R})\,\boldsymbol{A}^{[N]}\boldsymbol{\Gamma}_N^{\mathrm{T}}\vec{\psi}_N\\
&=\frac{1}{2k}\boldsymbol{\Gamma}_N\left(\left(\boldsymbol{Q}^k-x^k\right)+\left(x^k-(\boldsymbol{Q}^k)_d\right)\right)(\boldsymbol{L}+\boldsymbol{R})\,\boldsymbol{A}^{[N]}\boldsymbol{\Gamma}_N^{\mathrm{T}}\vec{\psi}_N.
\end{aligned}
$$

由于 $x^k-(\boldsymbol{Q}^k)_d$ 是对角矩阵, 而由(4.27)(4.26)直接计算得

$$
\boldsymbol{\Gamma}_N(\boldsymbol{L}+\boldsymbol{R})\boldsymbol{A}^{[N]}\boldsymbol{\Gamma}_N^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}1 & \\ & -1\end{pmatrix},
$$

从而有

$$\frac{\partial\vec{\psi}_N}{\partial t_k}=\frac{1}{2k}\begin{pmatrix}x^k-S_{N-1}^{(k)} & \\ & -(x^k-S_N^{(k)})\end{pmatrix}\vec{\psi}_N \\ -\frac{1}{2k}\boldsymbol{\Gamma}_N\boldsymbol{W}^{(k)}(x-\boldsymbol{Q})(\boldsymbol{L}+\boldsymbol{R})\boldsymbol{A}^{[N]}\boldsymbol{\Gamma}_N^{\mathsf{T}}\vec{\psi}_N, \tag{4.50}$$

其中 $S_N^{(k)}$ 见(3.22), 以及

$$\boldsymbol{W}^{(k)}(x):=\frac{x^k-\boldsymbol{Q}^k}{x-\boldsymbol{Q}}=\sum_{\ell=0}^{k-1}\boldsymbol{Q}^{k-1-\ell}x^{\ell}, \tag{4.51}$$

$$\boldsymbol{W}(x):=\frac{V'(x)-V'(\boldsymbol{Q})}{x-\boldsymbol{Q}}=\sum_{k=0}^{d}t_{k+1}\boldsymbol{W}^{(k)}(x). \tag{4.52}$$

最后, 注意 $(x-\boldsymbol{Q})\boldsymbol{R}=\boldsymbol{I}$, 从而

$$\mathbf{0}=(x-\boldsymbol{Q})\boldsymbol{\psi}=(x-\boldsymbol{Q})\boldsymbol{F}^{[N]}\vec{\psi}_N=(x-\boldsymbol{Q})(\boldsymbol{L}-\boldsymbol{R})\boldsymbol{A}^{[N]}\boldsymbol{\Gamma}_N^{\mathsf{T}}\vec{\psi}_N$$
$$\Rightarrow\quad (x-\boldsymbol{Q})\boldsymbol{L}\boldsymbol{A}^{[N]}\boldsymbol{\Gamma}_N^{\mathsf{T}}\vec{\psi}_N=(x-\boldsymbol{Q})\boldsymbol{R}\boldsymbol{A}^{[N]}\boldsymbol{\Gamma}_N^{\mathsf{T}}\vec{\psi}_N=\boldsymbol{A}^{[N]}\boldsymbol{\Gamma}_N^{\mathsf{T}}\vec{\psi}_N,$$

由此将(4.50)进一步化简为

$$\begin{aligned}\frac{\partial\vec{\psi}_N}{\partial t_k}&=\frac{1}{2k}\begin{pmatrix}x^k-S_{N-1}^{(k)} & \\ & -(x^k-S_N^{(k)})\end{pmatrix}\vec{\psi}_N\\ &\quad-\frac{1}{k}\boldsymbol{\Gamma}_N\boldsymbol{W}^{(k)}\boldsymbol{A}^{[N]}\boldsymbol{\Gamma}_N^{\mathsf{T}}\vec{\psi}_N\\ &=\frac{1}{2k}\begin{pmatrix}x^k-S_{N-1}^{(k)} & \\ & -(x^k-S_N^{(k)})\end{pmatrix}\vec{\psi}_N\\ &\quad+\frac{\gamma_N}{k}\begin{pmatrix}-W_{N-1,N}^{(k)} & W_{N-1,N-1}^{(k)}\\ -W_{N,N}^{(k)} & W_{N,N-1}^{(k)}\end{pmatrix}\vec{\psi}_N.\end{aligned}$$

这表明矩阵 $\mathcal{C}_{k;N}=\mathcal{C}_{k;N}(x)$ (4.7)可以取为

$$\begin{aligned}\mathcal{C}_{k;N}=\frac{1}{2k}&\begin{pmatrix}x^k-S_{N-1}^{(k)} & \\ & -(x^k-S_N^{(k)})\end{pmatrix}\\&+\frac{\gamma_N}{k}\begin{pmatrix}W_{N-1,N}^{(k)} & -W_{N-1,N-1}^{(k)}\\ W_{N,N}^{(k)} & -W_{N,N-1}^{(k)}\end{pmatrix}.\end{aligned}\tag{4.53}$$

类似地, 由(2.37)(3.33)容易验证, 矩阵 $\mathcal{D}_N=\mathcal{D}_N(x)$ (4.6)可以取为

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_N&=\sum_{k=1}^{d}kt_{k+1}\mathcal{C}_{k;N}=\frac{1}{2}V'(x)\boldsymbol{\sigma}_3-\boldsymbol{\Gamma}_N\boldsymbol{W}\boldsymbol{A}^{[N]}\boldsymbol{\Gamma}_N^{\mathrm{T}}\\&=\frac{1}{2}V'(x)\begin{pmatrix}1 & \\ & -1\end{pmatrix}+\gamma_N\begin{pmatrix}W_{N-1,N} & -W_{N-1,N-1}\\ W_{N,N} & -W_{N,N-1}\end{pmatrix},\end{aligned}\tag{4.54}$$

其中 $\boldsymbol{\sigma}_3:=\begin{pmatrix}1 & \\ & -1\end{pmatrix}$ 为 Pauli 矩阵, 而 W_{ij} 是 $\boldsymbol{W}$ (4.52)的矩阵元.

从此, 我们将微分-差分-形变系统(4.11)的系数矩阵 $\mathcal{R}_N$, $\mathcal{D}_N$, $\mathcal{C}_{k;N}$ 分别取定为 (4.10), (4.54)与(4.53). 则在此意义下容易验证:

性质 4.20. *对于足够大的正整数 N, $\Psi_N(x)$ (4.35)是微分-差分-形变系统(4.11)的一个基本解系, 从而当 N 足够大时, 由(4.10), (4.54)与(4.53)所定义的系数矩阵 $\mathcal{R}_N$, $\mathcal{D}_N$, $\mathcal{C}_{k;N}$ 满足零曲率方程(4.13)–(4.16).*

证明. 对任意正整数 N, $\vec{\psi}_N(x)$ 总是满足(4.11); 只需再证明当 N 足够大时 $\vec{\varphi}_N(x)$ 也满足(4.11)即可. 而这由(4.37)(4.38)以及 $\mathcal{C}_{k;N}$, $\mathcal{D}_N$ 的表达式的推导过程容易验证, 其细节留给读者. 从而得证. □

事实上, 我们其实能证明

定理 4.21. 对任意正整数 N, 由(4.10), (4.54)与(4.53)所定义的系数矩阵 $\mathcal{R}_N$, $\mathcal{D}_N$, $\mathcal{C}_{k;N}$ 满足零曲率方程 (4.13)–(4.16).

换言之, 当 N"不充分大" 时零曲率方程(4.13)–(4.16) 也成立, 即使此时 Ψ_N 未必是(4.11)的基础解系. 证明此定理需要复杂且枯燥的暴力验证, 具体细节见后文第4.7小节, 仅留给感兴趣的读者.

性质 4.22. 对任意 $N \geq 1$, 系数矩阵 $\mathcal{D}_N(x)$ (4.54)满足如下等式:

$$\operatorname{tr} \mathcal{D}_N(x) = 0, \tag{4.55}$$

$$\det \mathcal{D}_N(x) = -\frac{1}{4}(V'(x))^2 + \operatorname{tr} \boldsymbol{W}_{[N]}, \tag{4.56}$$

其中 $\boldsymbol{W}_{[N]}$ 是矩阵 $\boldsymbol{W}$ (4.52) 的左上角 $N \times N$ 主子方阵.

由定理2.5可知(4.56)还可以改写为

$$\det \mathcal{D}_N(x) = -\frac{1}{4}(V'(x))^2 + \left\langle \operatorname{tr} \frac{V'(x) - V'(H)}{x - H} \right\rangle_N .$$

证明. 由显式表达式(4.54)可知 $\operatorname{tr} \mathcal{D}_N(x) = 0$ 显然成立. 又因为 $\mathcal{D}_N(x)$ 是 2×2 矩阵, 从而

$$\det \mathcal{D}_N = -\frac{1}{2} \operatorname{tr} (\mathcal{D}_N^2).$$

再由(4.13)可得

$$\begin{aligned}
\operatorname{tr} (\mathcal{D}_N^2) &= \operatorname{tr} \left((\mathcal{D}_N' \mathcal{R}_N^{-1} + \mathcal{R}_N \mathcal{D}_{N-1} \mathcal{R}_N^{-1})^2 \right) \\
&= \operatorname{tr} \left((\mathcal{R}_N' \mathcal{R}_N^{-1})^2 \right) + 2\operatorname{tr} (\mathcal{R}_N^{-1} \mathcal{R}_N' \mathcal{D}_{N-1}) + \operatorname{tr} (\mathcal{D}_{N-1}^2) \\
&= \operatorname{tr} (\mathcal{D}_{N-1}^2) - 2W_{N-1,N-1},
\end{aligned}$$

反复使用上式得

$$\operatorname{tr}(\mathcal{D}_N^2) = \operatorname{tr}(\mathcal{D}_1^2) - 2\sum_{j=1}^{N-1} W_{jj}.$$

接下来只需计算 $\operatorname{tr}(\mathcal{D}_1^2)$. 首先由(4.54)可知

$$\mathcal{D}_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}V'(x) + \gamma_1 W_{01} & -\gamma_1 W_{00} \\ \gamma_1 W_{11} & -\gamma_1 W_{01} - \frac{1}{2}V'(x) \end{pmatrix}$$

而由(2.37)可知

$$\begin{aligned} -V'(x) &= (V'(\boldsymbol{Q}) - V'(x))_{00} = (\boldsymbol{W}(\boldsymbol{Q} - x))_{00} \\ &= W_{00}(S_0 - x) + W_{01}\gamma_1, \\ \frac{1}{\gamma_1} &= (V'(\boldsymbol{Q}) - V'(x))_{10} = (\boldsymbol{W}(\boldsymbol{Q} - x))_{10} \\ &= W_{10}(S_0 - x) + W_{11}\gamma_1, \end{aligned}$$

由此解得

$$\begin{aligned} \gamma_1 W_{01} &= -V'(x) - W_{00}(S_0 - x), \\ \gamma_1^2 W_{11} &= 1 + (S_0 - x)\left(V'(x) + W_{00}(\beta_0 - x)\right), \end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned} \operatorname{tr}(\mathcal{D}_1^2) &= 2\left(\frac{1}{2}V'(x) + \gamma_1 W_{01}\right)^2 - 2\gamma_1^2 W_{00} W_{11} \\ &= 2\left(\frac{1}{2}V'(x) - V'(x) - W_{00}(S_0 - x)\right)^2 \\ &\qquad - 2W_{00}\Big(1 + (S_0 - x)\left(V'(x) + W_{00}(S_0 - x)\right)\Big) \\ &= \frac{1}{2}(V'(x))^2 - 2W_{00}. \end{aligned}$$

综上所述, 我们得到

$$
\begin{aligned}
\det(\mathcal{D}_N) &= -\frac{1}{2}\mathrm{tr}\left(\mathcal{D}_N^2\right) = -\frac{1}{2}\left(\mathrm{tr}\left(\mathcal{D}_1^2\right) - 2\sum_{j=1}^{N-1} W_{jj}\right) \\
&= -\frac{1}{4}(V'(x))^2 + \sum_{j=0}^{N-1} W_{jj} = -\frac{1}{4}(V'(x))^2 + \mathrm{tr}\,\boldsymbol{W}_{[N]},
\end{aligned}
$$

命题得证. $\square$

本小节最后, 我们称平面代数曲线

$$
\det(y - \mathcal{D}_N(x)) = 0 \tag{4.57}
$$

为方程(4.6)的**谱曲线** (spectral curve), 它记录了算子 $\mathcal{D}_N(x)$ 的谱与 x 的关系. 由性质4.22可知该谱曲线方程可改写为

$$
y^2 = \frac{1}{4}(V'(x))^2 - \mathrm{tr}\,\boldsymbol{W}_N(x). \tag{4.58}
$$

4.6 等单值 tau 函数

对于矩阵微分方程(4.6)(4.7)的满足渐近行为(4.47) 的基础解系 $\Psi_N(x)$, 由 Jimbo-Miwa [15] 的相关理论可知存在关于等单值变量 $\mathbf{t} = (t_1, ..., t_{d+1})$ 的函数 $\tau_N^{\mathrm{IM}}(\mathbf{t})$ 满足

$$
\frac{\partial}{\partial t_k}\log\tau_N^{\mathrm{IM}} = -\mathop{\mathrm{Res}}_{x=\infty}\mathrm{tr}\left(Y_N^{-1}(x)Y_N'(x)\frac{\partial T_N(x)}{\partial t_k}\mathrm{d}x\right), \tag{4.59}
$$

其中 $T_N(x), Y_N(x)$ 见(4.48)–(4.49). 如此 $\tau_N^{\mathrm{IM}}(x)$ 称为基础解系 $\Psi_N(x)$ 的**等单值 tau 函数** (isomonodromic tau function).

证明 $\tau_N^{\mathrm{IM}}(\mathbf{t})$ 的存在性只需要验证相容性 $\frac{\partial}{\partial t_k}\frac{\partial}{\partial t_\ell}\tau_N^{\mathrm{IM}} = \frac{\partial}{\partial t_\ell}\frac{\partial}{\partial t_k}\tau_N^{\mathrm{IM}}$, 这里从略, 我们承认之. 本小节将给出 $\tau_N^{\mathrm{IM}}(\mathbf{t})$ 与 $\mathcal{Z}_N(\mathbf{t})$ 之间的联系.

定理 4.23. *记号承上, 则等单值 tau 函数* $\tau_N^{\mathrm{IM}}(\mathbf{t})$ *满足*

$$\tau_N^{\mathrm{IM}}(\mathbf{t}) = C\mathcal{Z}_N(\mathbf{t}), \tag{4.60}$$

其中 C *为与* $\mathbf{t}$ *无关的常数.*

证明. 直接计算易知(4.59)等价于

$$2k\frac{\partial \log \tau_N^{\mathrm{IM}}}{\partial t_k} = \operatorname*{Res}_{x=\infty} \operatorname{tr}\left(Y_N^{-1}Y_N' x^k \boldsymbol{\sigma}_3 \mathrm{d}x\right), \tag{4.61}$$

其中 $\boldsymbol{\sigma}_3 = \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix}$. 由(4.56)与(2.41)可知

$$\begin{aligned}
&\operatorname{tr}(\mathcal{D}_N^2) = \frac{1}{2}(V'(x))^2 - 2\operatorname{tr}\boldsymbol{W}_{[N]} \\
&= \frac{1}{2}(V'(x))^2 - 2\operatorname{tr}\left(\sum_{\ell=1}^{d} t_{\ell+1}\frac{x^\ell - \boldsymbol{Q}^\ell}{x-\boldsymbol{Q}}\right)_{[N]} \\
&= \frac{1}{2}(V'(x))^2 - 2\sum_{k=0}^{d-1}\left(Nt_{k+2} + \sum_{\ell=k+2}^{d} t_{\ell+1}\operatorname{tr}(\boldsymbol{Q}^{\ell-k-1})_{[N]}\right)x^k \\
&= \frac{1}{2}(V'(x))^2 + 2\sum_{k=0}^{d-1}\left(\sum_{\ell=1}^{d-1-k} \ell t_{\ell+k+2}\frac{\partial \log \mathcal{Z}_N}{\partial t_\ell} - Nt_{k+2}\right)x^k \\
&= \frac{1}{2}(V'(x))^2 - \frac{2N}{x}V'(x) + \frac{2Nt_1}{x} \\
&\qquad + 2\sum_{k=0}^{d-1}\left(\sum_{\ell=1}^{d-1-k} \ell t_{\ell+k+2}\frac{\partial \log \mathcal{Z}_N}{\partial t_\ell}\right)x^k.
\end{aligned}$$

而另一方面, 注意

$$T_N' = \left(\frac{N}{x} - \frac{1}{2}V'(x)\right)\boldsymbol{\sigma}_3, \tag{4.62}$$

再由(4.6)与(4.47)可知

$$\mathcal{D}_N = \Psi_N'\Psi_N^{-1} = \left(Y_N \mathrm{e}^{T_N}\right)' \mathrm{e}^{-T_N} Y_N^{-1} = Y_N' Y_N^{-1} + Y_N T_N' Y_N^{-1},$$

于是有

$$\begin{aligned}
&\mathrm{tr}(\mathcal{D}_N^2) = \mathrm{tr}\left(Y_N'Y_N^{-1} + Y_N T_N' Y_N^{-1}\right)^2 \\
&= \mathrm{tr}\left((Y_N'Y_N^{-1})^2\right) + 2\,\mathrm{tr}\left(Y_N^{-1}Y_N'T_N'\right) + \mathrm{tr}\left((T_N')^2\right) \\
&= \mathrm{tr}\left((Y_N'Y_N^{-1})^2\right) + 2\left(\frac{N}{x} - \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{d} t_{k+1}x^k\right)\mathrm{tr}\left(Y_N^{-1}Y_N'\boldsymbol{\sigma}_3\right) \\
&\qquad + 2\left(\frac{N}{x} - \frac{1}{2}V'(x)\right)^2 \\
&= \frac{1}{2}(V'(x))^2 - \frac{2N}{x}V'(x) + \left(\frac{2N}{x} - \sum_{k=0}^{d} t_{k+1}x^k\right)\mathrm{tr}\left(Y_N^{-1}Y_N'\boldsymbol{\sigma}_3\right) \\
&\qquad + \frac{2N^2}{x^2} + \mathrm{tr}\left((Y_N'Y_N^{-1})^2\right).
\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{d-1}\left(\sum_{\ell=1}^{d-1-k} \ell t_{\ell+k+2}\frac{\partial \log \mathcal{Z}_N}{\partial t_\ell}\right)x^k + \frac{N t_1}{x} \\
&= \left(\frac{N}{x} - \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{d} t_{k+1}x^k\right)\mathrm{tr}\left(Y_N^{-1}Y_N'\boldsymbol{\sigma}_3\right) + \frac{N^2}{x^2} + \frac{1}{2}\,\mathrm{tr}\left((Y_N'Y_N^{-1})^2\right).
\end{aligned} \tag{4.63}$$

由(4.49)可知当 $x \to \infty$ 时 $Y_N'Y_N^{-1} = O(\frac{1}{x^2})$, 于是比较(4.63)两边在 $x = \infty$ 处 Laurent 展开式的 x^k $(0 \le k \le d-1)$ 系数并注意(4.61)可知

$$\sum_{\ell=1}^{d-1-k} \ell t_{\ell+k+2}\frac{\partial \log \mathcal{Z}_N}{\partial t_\ell}$$

$$
= -\operatorname*{Res}_{x=\infty}\left(\left(\frac{N}{x}-\frac{1}{2}\sum_{\ell=0}^{d}t_{\ell+1}x^{\ell}\right)\operatorname{tr}\left(Y_N^{-1}Y_N'\boldsymbol{\sigma}_3\right)\frac{\mathrm{d}x}{x^{k+1}}\right)
$$

$$
=\frac{1}{2}\sum_{\ell=1}^{d-1-k}t_{\ell+k+2}\operatorname*{Res}_{x=\infty}\operatorname{tr}\left(Y_N^{-1}Y_N'x^{\ell}\boldsymbol{\sigma}_3\mathrm{d}x\right)=\sum_{\ell=1}^{d-1-k}\ell t_{\ell+k+2}\frac{\partial\log\tau_N^{\mathrm{IM}}}{\partial t_\ell},
$$

换言之,

$$
\sum_{\ell=1}^{d-1-k}\ell t_{\ell+k+2}\frac{\partial}{\partial t_\ell}\left(\log\frac{\tau_N^{\mathrm{IM}}}{\mathcal{Z}_N}\right)=0,\qquad\forall\,0\le k\le d-1. \tag{4.64}
$$

此外, 比较(4.63) 两边在 $x=\infty$ 处的 x^{-1},x^{-2} 系数, 我们还能得到

$$
\sum_{k=1}^{d}kt_{k+1}\frac{\partial\log\tau_N^{\mathrm{IM}}}{\partial t_k}=Nt_1,\qquad\sum_{k=1}^{d+1}kt_k\frac{\partial\log\tau_N^{\mathrm{IM}}}{\partial t_k}=-N^2,
$$

再结合(2.39)–(2.40)可得

$$
\sum_{k=1}^{d}kt_{k+1}\frac{\partial}{\partial t_k}\left(\log\frac{\tau_N^{\mathrm{IM}}}{\mathcal{Z}_N}\right)=0, \tag{4.65}
$$

$$
\sum_{k=1}^{d+1}kt_k\frac{\partial}{\partial t_k}\left(\log\frac{\tau_N^{\mathrm{IM}}}{\mathcal{Z}_N}\right)=0. \tag{4.66}
$$

再由(4.64)可解得

$$
\frac{\partial}{\partial t_1}\left(\log\frac{\tau_N^{\mathrm{IM}}}{\mathcal{Z}_N}\right)=\frac{\partial}{\partial t_2}\left(\log\frac{\tau_N^{\mathrm{IM}}}{\mathcal{Z}_N}\right)=\cdots=\frac{\partial}{\partial t_{d+1}}\left(\log\frac{\tau_N^{\mathrm{IM}}}{\mathcal{Z}_N}\right)=0,
$$

因此存在常数 C 使得(4.60)成立. 定理得证. □

4.7 附录: 定理4.21的证明

本小节将通过暴力计算来证明定理4.21, 仅留给感兴趣的读者. 首先由性质4.20可知当 N 足够大时零曲率方程(4.13)–(4.16)成立. 而对于

一般的 $N \geq 1$, 我们先暴力验证递推关系(4.13)(4.14), 然后由此对 N 反向归纳以证明(4.15)(4.16), 从而完成最终证明. 我们分若干步进行:

1. 断言: 对任意 $N \geq 1$, 都成立

$$\mathcal{C}_{1;N+1} = \frac{\partial \mathcal{R}_N}{\partial t_1}\mathcal{R}_N^{-1} + \mathcal{R}_N \mathcal{C}_{1;N}\mathcal{R}_N^{-1}, \tag{4.67}$$

即(4.14)的 $k=1$ 的情形成立. 这是因为, 由(4.53)可知

$$\mathcal{C}_{1;N} = \begin{pmatrix} \frac{x-S_{N-1}}{2} & -\gamma_N \\ \gamma_N & -\frac{x-S_N}{2} \end{pmatrix},$$

从而由(4.10)与(3.23)–(3.24)直接计算得

$$\mathcal{R}_N\mathcal{C}_{1;N}\mathcal{R}_N^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} x-S_N & -2\gamma_{N+1} \\ \frac{(x-S_N)(S_{N-1}-S_N)+2\gamma_N^2}{\gamma_{N+1}} & 2S_N - S_{N-1} - x \end{pmatrix},$$

$$\frac{\partial \mathcal{R}_N}{\partial t_1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ U & V \end{pmatrix},$$

其中 $$\begin{cases} U := -\frac{1}{2}\frac{\gamma_N}{\gamma_{N+1}}\left(S_{N-1} - 2S_N + S_{N+1}\right), \\ V := \frac{1}{\gamma_{N+1}}\left(\gamma_{N+1}^2 - \gamma_N^2 - \frac{1}{2}(S_N - S_{N+1})(x-S_N)\right), \end{cases}$$

因此直接计算得

$$\mathcal{R}_N\mathcal{C}_{1;N}\mathcal{R}_N^{-1} + \frac{\partial \mathcal{R}_N}{\partial t_1}\mathcal{R}_N^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{x-S_N}{2} & -\gamma_{N+1} \\ \gamma_{N+1} & -\frac{x-S_{N+1}}{2} \end{pmatrix} = \mathcal{C}_{1;N+1}.$$

2. 断言: 给定正整数 N, 则对任意 $1 \leq k \leq d$ 都有

$$\mathcal{C}_{k+1;N} = \frac{k}{k+1}x\mathcal{C}_{k;N} + \mathcal{W}_{k;N}, \tag{4.68}$$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{W}_{k;N} := & \frac{1}{2(k+1)}\begin{pmatrix} xS_{N-1}^{(k)} - S_{N-1}^{(k+1)} & 0 \\ 0 & S_N^{(k+1)} - xS_N^{(k)} \end{pmatrix} \\
& + \frac{\gamma_N}{k+1}\begin{pmatrix} \gamma_N^{(k)} & -S_{N-1}^{(k)} \\ S_N^{(k)} & -\gamma_N^{(k)} \end{pmatrix},
\end{aligned} \tag{4.69}
$$

其中 $S_N^{(k)}$, $\gamma_N^{(k)}$ 见(3.22). 这由 $\mathcal{C}_{k;N}$ 的定义(4.53)直接验证即可.

3. 断言: 对任意 $N \geq 1$ 以及 $1 \leq k \leq d+1$, 成立

$$
\mathcal{C}_{k;N+1} = \frac{\partial \mathcal{R}_N}{\partial t_k}\mathcal{R}_N^{-1} + \mathcal{R}_N \mathcal{C}_{k;N}\mathcal{R}_N^{-1},
$$

即零曲率方程(4.14)成立. 为证此断言, 我们对 k 归纳. 起始步 $k=1$ 已证明; 对任意 $k \geq 1$, 若此断言对 k 成立, 则由该归纳假设以及(4.68)可得

$$
\begin{aligned}
\mathcal{C}_{k+1;N+1} &= \frac{kx}{k+1}\mathcal{C}_{k;N+1} + \mathcal{W}_{k;N+1} \\
&= \frac{kx}{k+1}\left(\frac{\partial \mathcal{R}_N}{\partial t_k}\mathcal{R}_N^{-1} + \mathcal{R}_N\mathcal{C}_{k;N}\mathcal{R}_N^{-1}\right) + \mathcal{W}_{k;N+1} \\
&= \frac{kx}{k+1}\frac{\partial \mathcal{R}_N}{\partial t_k}\mathcal{R}_N^{-1} + \mathcal{R}_N(\mathcal{C}_{k+1;N} - \mathcal{W}_{k;N})\mathcal{R}_N^{-1} + \mathcal{W}_{k;N+1},
\end{aligned}
$$

因此我们只需验证等式

$$
\frac{\partial \mathcal{R}_N}{\partial t_{k+1}} = \frac{kx}{k+1}\frac{\partial \mathcal{R}_N}{\partial t_k} + \mathcal{W}_{k;N+1}\mathcal{R}_N - \mathcal{R}_N\mathcal{W}_{k;N}. \tag{4.70}
$$

上式可通过(3.23)–(3.24)以及相关定义直接暴力验证, 在其计算验证过程中需要注意

$$
\begin{aligned}
S_N^{(k+1)} &= (\boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{Q}^k)_{NN} \\
&= \gamma_N\gamma_N^{(k)} + \gamma_{N+1}\gamma_{N+1}^{(k)} + S_N S_N^{(k)}
\end{aligned}
$$

以及

$$
\begin{aligned}
&\gamma_{N+1}\gamma_{N+1}^{(k+1)}-\gamma_N\gamma_N^{(k+1)}\\
=&\gamma_{N+1}(\boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{Q}^k)_{N,N+1}-\gamma_N(\boldsymbol{Q}^k\cdot\boldsymbol{Q})_{N-1,N}\\
=&\gamma_{N+1}\left(\gamma_N(\boldsymbol{Q}^k)_{N-1,N+1}+S_N\gamma_{N+1}^{(k)}+\gamma_{N+1}S_{N+1}^{(k)}\right)\\
&\qquad-\gamma_N\left(S_{N-1}^{(k)}\gamma_N+\gamma_N^{(k)}S_N+(\boldsymbol{Q}^k)_{N-1,N+1}\gamma_{N+1}\right)\\
=&S_N\left(\gamma_{N+1}\gamma_{N+1}^{(k)}-\gamma_N\gamma_N^{(k)}\right)+\left(S_{N+1}^{(k)}\gamma_{N+1}^2-S_{N-1}^{(k)}\gamma_N^2\right).
\end{aligned}
$$

具体计算细节留给感兴趣者, 这里从略.

4. 对任意 $N\geq 1$, 由(4.18)与(4.54)可知

$$
\begin{aligned}
\mathcal{D}_{N+1}&=\sum_{k=1}^d kt_{k+1}\mathcal{C}_{k;N+1}\\
&=\sum_{k=1}^d kt_{k+1}\left(\frac{\partial\mathcal{R}_N}{\partial t_k}\mathcal{R}_N^{-1}+\mathcal{R}_N\mathcal{C}_{k;N}\mathcal{R}_N^{-1}\right)\\
&=\mathcal{R}_N'\mathcal{R}_N^{-1}+\mathcal{R}_N\mathcal{D}_N\mathcal{R}_N^{-1}.
\end{aligned}
$$

至此, 我们已完成(4.13)–(4.14)的证明.

5. 最后我们来验证零曲率方程(4.15)–(4.16), 从而最终完成定理证明. 对 N 反向归纳: 当 N 足够大时, 性质4.20表明(4.16)成立; 若(4.16)对 $N+1$ 成立, 则由

$$
\mathcal{C}_{k;N}=\mathcal{R}_N^{-1}\mathcal{C}_{k;N+1}\mathcal{R}_N-\mathcal{R}_N^{-1}\frac{\partial\mathcal{R}_N}{\partial t_k}
$$

可知

$$
\frac{\partial\mathcal{C}_{j;N}}{\partial t_k}=\frac{\partial}{\partial t_k}\left(\mathcal{R}_N^{-1}\mathcal{C}_{j;N+1}\mathcal{R}_N-\mathcal{R}_N^{-1}\frac{\partial\mathcal{R}_N}{\partial t_j}\right)
$$

$$
\begin{aligned}
&= \left[\mathcal{R}_N^{-1}\mathcal{C}_{j;N+1}\mathcal{R}_N, \mathcal{R}_N^{-1}\frac{\partial \mathcal{R}_N}{\partial t_k}\right] - \mathcal{R}_N^{-1}\frac{\partial^2 \mathcal{R}_N}{\partial t_j \partial t_k} \\
&\quad + \mathcal{R}_N^{-1}\frac{\partial \mathcal{C}_{j;N+1}}{\partial t_k}\mathcal{R}_N + \mathcal{R}_N^{-1}\frac{\partial \mathcal{R}_N}{\partial t_k}\mathcal{R}_N^{-1}\frac{\partial \mathcal{R}_N}{\partial t_j},
\end{aligned}
$$

结合归纳假设可得

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial \mathcal{C}_{j;N}}{\partial t_k} - \frac{\partial \mathcal{C}_{k;N}}{\partial t_j} \\
&= \left[\mathcal{R}_N^{-1}\mathcal{C}_{j;N+1}\mathcal{R}_N, \mathcal{R}_N^{-1}\frac{\partial \mathcal{R}_N}{\partial t_k}\right] + \left[\mathcal{R}_N^{-1}\frac{\partial \mathcal{R}_N}{\partial t_j}, \mathcal{R}_N^{-1}\mathcal{C}_{k;N+1}\mathcal{R}_N\right] \\
&\quad + \mathcal{R}_N^{-1}\left(\frac{\partial \mathcal{C}_{j;N+1}}{\partial t_k} - \frac{\partial \mathcal{C}_{k;N+1}}{\partial t_j}\right)\mathcal{R}_N \\
&\quad - \left[\mathcal{R}_N^{-1}\frac{\partial \mathcal{R}_N}{\partial t_j}, \mathcal{R}_N^{-1}\frac{\partial \mathcal{R}_N}{\partial t_k}\right] \\
&= \left[\mathcal{R}_N^{-1}\mathcal{C}_{j;N+1}\mathcal{R}_N, \mathcal{R}_N^{-1}\frac{\partial \mathcal{R}_N}{\partial t_k}\right] + \left[\mathcal{R}_N^{-1}\frac{\partial \mathcal{R}_N}{\partial t_j}, \mathcal{R}_N^{-1}\mathcal{C}_{k;N+1}\mathcal{R}_N\right] \\
&\quad - \mathcal{R}_N^{-1}\left[\mathcal{C}_{j;N+1}, \mathcal{C}_{k;N+1}\right]\mathcal{R}_N - \left[\mathcal{R}_N^{-1}\frac{\partial \mathcal{R}_N}{\partial t_j}, \mathcal{R}_N^{-1}\frac{\partial \mathcal{R}_N}{\partial t_k}\right] \\
&= -\left[\mathcal{R}_N^{-1}\mathcal{C}_{j;N+1}\mathcal{R}_N - \mathcal{R}_N^{-1}\frac{\partial \mathcal{R}_N}{\partial t_j}, \mathcal{R}_N^{-1}\mathcal{C}_{k;N+1}\mathcal{R}_N - \mathcal{R}_N^{-1}\frac{\partial \mathcal{R}_N}{\partial t_k}\right] \\
&= -\left[\mathcal{C}_{j;N}, \mathcal{C}_{k;N}\right].
\end{aligned}
$$

同理也能证明(4.15). 综上所述, 定理4.21得证.

5. KP 方程簇与 Hirota 双线性方程

本章我们考虑无穷多个时间变量

$$
V(\mathbf{t}; x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t_k}{k} x^k
$$

的情形, 即回到(3.14). 此时记 $\mathbf{t} = (t_1, t_2, t_3, ...)$.

5.1 正交多项式的 Sato 公式

正交多项式 $p_N = p_N(\mathbf{t}; x)$ 与配分函数 $\mathcal{Z}_N(\mathbf{t})$ 满足如下关系:

定理 5.1. *(正交多项式的 Sato 公式)* 记号承上, 则对 $N \geq 1$ 成立

$$p_N(\mathbf{t}; x) = x^N \frac{\mathcal{Z}_N\left(\mathbf{t} + [\![x]\!]\right)}{\mathcal{Z}_N(\mathbf{t})}, \tag{5.1}$$

其中对于参数 x, 引入记号

$$[\![x]\!] := \left(\frac{1}{x}, \frac{1}{x^2}, \frac{1}{x^3}, \dots\right). \tag{5.2}$$

证明. 由正交多项式的 Heine 公式(2.7)直接计算得

$$\begin{aligned} p_N(x) &= \frac{1}{N!\mathcal{Z}_N(\mathbf{t})} \int_{\gamma^N} \Delta(\lambda_0, \dots, \lambda_{N-1})^2 \prod_{i=0}^{N-1} (x - \lambda_i) \mathrm{e}^{-V(\lambda_i)} \mathrm{d}\lambda_i \\ &= \frac{x^N}{N!\mathcal{Z}_N(\mathbf{t})} \int_{\gamma^N} \Delta(\lambda_0, \dots, \lambda_{N-1})^2 \prod_{i=0}^{N-1} \mathrm{e}^{\log\left(1 - \frac{\lambda_i}{x}\right) - V(\lambda_i)} \mathrm{d}\lambda_i \\ &= \frac{x^N}{N!\mathcal{Z}_N(\mathbf{t})} \int_{\gamma^N} \Delta(\lambda_0, \dots, \lambda_{N-1})^2 \prod_{i=0}^{N-1} \mathrm{e}^{-\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_i^k}{k}\left(t_k + \frac{1}{x^k}\right)} \mathrm{d}\lambda_i \\ &= x^N \frac{\mathcal{Z}_N\left(\mathbf{t} + [\![x]\!]\right)}{\mathcal{Z}_N(\mathbf{t})}, \end{aligned}$$

从而得证. □

若熟悉 **KP 方程簇**的相关理论 (例如 [14]), 则从(5.1)容易看出 $\mathcal{Z}_N(\mathbf{t})$ 似乎扮演了 KP 方程簇的 **tau 函数**的角色. 我们将在后文继续讨论之.

习题 5.2. 对于 $N \geq 1$, 用完全类似的方法验证如下 Sato 型公式:

$$\frac{e^{-\frac{1}{2}V(\mathbf{t};x)}}{\sqrt{h_{N-1}(\mathbf{t})}}\varphi_{N-1}(\mathbf{t};x) = x^{-N}\frac{\mathcal{Z}_N\left(\mathbf{t} - [\![x]\!]\right)}{\mathcal{Z}_N(\mathbf{t})}, \tag{5.3}$$

$$K_N(\mathbf{t};x,y) = \frac{e^{-\frac{1}{2}V(\mathbf{t};x)}e^{-\frac{1}{2}V(\mathbf{t};y)}}{h_{N-1}(\mathbf{t})}x^{N-1}y^{N-1}\frac{\mathcal{Z}_{N-1}\left(\mathbf{t} + [\![x]\!] + [\![y]\!]\right)}{\mathcal{Z}_{N-1}(\mathbf{t})}, \tag{5.4}$$

其中 φ_N 与 K_N 的定义分别见(4.33)与(1.36).

提示. 用相应的 Heine 公式(4.42)(2.28)即可. □

5.2 双线性方程

将 $p_N(\mathbf{t};x)$ 的正交性与 Sato 公式(5.1)相结合, 能够导出配分函数 $\mathcal{Z}_N(\mathbf{t})$ 自身所满足的某些约束条件, 即所谓 **Hirota 双线性方程**.

给定参数 $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3, \ldots)$, 我们记

$$V^+(\mathbf{t};x) := \sum_{k\geq 1}\frac{t_k + u_k}{k}x^k = V(\mathbf{t}+\mathbf{u};x), \tag{5.5}$$

$$V^-(\mathbf{t};x) := \sum_{k\geq 1}\frac{t_k - u_k}{k}x^k = V(\mathbf{t}-\mathbf{u};x), \tag{5.6}$$

相应的正交多项式及其相关数据类似记作 $p_N^{\pm}, \varphi_N^{\pm}, h_N^{\pm}$ 等等. 则由多项式 $p_n^{\pm}(x)$ 的正交性可以得到:

定理 5.3. 记号承上, 则对任意 $\mathbf{t}, \mathbf{u}$ 以及任意 $0 \leq m \leq n$, 配分函数 $\mathcal{Z}_N$ 满足如下**双线性方程**:

$$\begin{aligned}&\delta_{mn}\mathcal{Z}_n(\mathbf{t}+\mathbf{u})\mathcal{Z}_{m+1}(\mathbf{t}-\mathbf{u}) \qquad (5.7)\\ = &-\operatorname*{Res}_{x=\infty}\left(\frac{\mathrm{d}x}{x^{m+1-n}}e^{2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{u_k}{k}x^k}\mathcal{Z}_n\left(\mathbf{t}-\mathbf{u}+[\![x]\!]\right)\mathcal{Z}_{m+1}\left(\mathbf{t}+\mathbf{u}-[\![x]\!]\right)\right)\end{aligned}$$

证明. 对于 $m\le n$, 由 $\{p_N^-\}$ 的正交性以及(5.1)–(5.3)可得

$$\begin{aligned}
h_m^-\delta_{mn} &= \int_\gamma p_n^-(y)p_m^+(y)\mathrm{e}^{-V^-(y)}\mathrm{d}y\\
&= \int_\gamma \operatorname*{Res}_{x=y}\left(\frac{\mathrm{d}x}{x-y}\mathrm{e}^{V^+(x)-V^-(x)}p_n^-(x)\right)p_m^+(y)\mathrm{e}^{-V^+(y)}\mathrm{d}y\\
&= -\int_\gamma \operatorname*{Res}_{x=\infty}\left(\frac{\mathrm{d}x}{x-y}\mathrm{e}^{V^+(x)-V^-(x)}p_n^-(x)\right)p_m^+(y)\mathrm{e}^{-V^+(y)}\mathrm{d}y\\
&= -\operatorname*{Res}_{x=\infty}\left(\mathrm{e}^{V^+(x)-V^-(x)}p_n^-(x)\mathrm{d}x\int_\gamma \frac{p_m^+(y)}{x-y}\mathrm{e}^{-V^+(y)}\mathrm{d}y\right)\\
&= -\sqrt{h_m^+}\operatorname*{Res}_{x=\infty}\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{2}V^+(x)-V^-(x)}p_n^-(x)\varphi_m^+(x)\mathrm{d}x\right)\\
&= -\sqrt{h_m^+}\operatorname*{Res}_{x=\infty}\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{2}V^+(x)-V^-(x)}x^n\frac{\mathcal{Z}_n\left(\mathbf{t}-\mathbf{u}+[\![x]\!]\right)}{\mathcal{Z}_n(\mathbf{t}-\mathbf{u})}\right.\\
&\qquad\left.\times\sqrt{h_m^+}\mathrm{e}^{\frac{1}{2}V^+(x)}\frac{\mathcal{Z}_{m+1}\left(\mathbf{t}+\mathbf{u}-[\![x]\!]\right)}{\mathcal{Z}_{m+1}\left(\mathbf{t}+\mathbf{u}\right)}\frac{\mathrm{d}x}{x^{m+1}}\right),
\end{aligned}$$

由此得到

$$\begin{aligned}
&\delta_{mn}\mathcal{Z}_n(\mathbf{t}-\mathbf{u})\mathcal{Z}_{m+1}(\mathbf{t}+\mathbf{u})\\
=&-\frac{h_m^+}{h_m^-}\operatorname*{Res}_{x=\infty}\left(\frac{\mathrm{d}x}{x^{m+1-n}}\mathrm{e}^{2\sum_{k=1}^\infty\frac{u_k}{k}x^k}\mathcal{Z}_n\left(\mathbf{t}-\mathbf{u}+[\![x]\!]\right)\mathcal{Z}_{m+1}\left(\mathbf{t}+\mathbf{u}-[\![x]\!]\right)\right).
\end{aligned}$$

再注意

$$\begin{aligned}
\delta_{mn}\mathcal{Z}_n(\mathbf{t}-\mathbf{u})\mathcal{Z}_{m+1}(\mathbf{t}+\mathbf{u}) &= \delta_{mn}\left(h_0^-\cdots h_{m-1}^-\right)\left(h_0^+\cdots h_m^+\right)\\
=\delta_{mn}\mathcal{Z}_n(\mathbf{t}+\mathbf{u})\mathcal{Z}_{m+1}(\mathbf{t}-\mathbf{u})\frac{h_m^+}{h_m^-},
\end{aligned}$$

从而定理得证. $\square$

5.3 Hirota 导数与 KP 方程

引入一元光滑函数空间 $C^\infty(\mathbb{R})$ 上的 **Hirota 双线性导数**

$$\begin{aligned}\mathrm{D}_x\colon C^\infty(\mathbb{R})\times C^\infty(\mathbb{R}) &\to C^\infty(\mathbb{R}),\\ (f,g)&\mapsto \mathrm{D}_x f\cdot g\end{aligned}\tag{5.8}$$

如下:

$$\begin{aligned}(\mathrm{D}_x f\cdot g)(x) &:= \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\right|_{y=0} f(x+y)g(x-y)\\ &= f'(x)g(x)-f(x)g'(x).\end{aligned}\tag{5.9}$$

上式可以改写为如下更紧凑的形式

$$\mathrm{D}_x f\cdot g = f(\overleftarrow{\partial_x}-\overrightarrow{\partial_x})g,\tag{5.10}$$

由此可见

$$\mathrm{D}_x = \overleftarrow{\partial_x}-\overrightarrow{\partial_x}.\tag{5.11}$$

对于正整数 n, 自然令 $\mathrm{D}_x^n := \left(\overleftarrow{\partial_x}-\overrightarrow{\partial_x}\right)^n$, 例如

$$\mathrm{D}_x^2 f\cdot g = f''g-2f'g'+fg''.$$

与前文所述平移算子 Λ 完全类似 (见注记3.17), 泰勒展开易知

$$f(x+y)g(x-y)=\left(\mathrm{e}^{y\mathrm{D}_x}f\cdot g\right)(x),\tag{5.12}$$

这可以看作 Hirota 双线性导数 D_x 的等价定义. 此外容易验证, 对任意多项式 $P\in\mathbb{C}[x]$ 都有

$$P(\mathrm{D}_x)f\cdot g = P(-\mathrm{D}_x)g\cdot f,\tag{5.13}$$

特别地, 当 n 为奇数时 $\mathrm{D}_x^n f\cdot f=0$.

多元函数 (乃至关于无穷多个变量的函数) 的 Hirota 导数可以完全类似定义, 即某一类 "平移算子" 的无穷小生成元. 容易验证, 双线性方程(5.7)可改写为如下紧凑形式:

$$\delta_{mn}\mathrm{e}^{\mathrm{D}_{\mathbf{u}}}(\mathcal{Z}_n\cdot\mathcal{Z}_{m+1})=-\operatorname*{Res}_{x=\infty}\left(\frac{\mathrm{d}x}{x^{m+1-n}}\mathrm{e}^{2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{u_k}{k}x^k}\mathrm{e}^{-\mathrm{D}_{\mathbf{u}}+\mathrm{D}_{[\![x]\!]}}\mathcal{Z}_n\cdot\mathcal{Z}_{m+1}\right),$$

其中等号两边视为关于 $\mathbf{t}$ 的函数, 且

$$\mathrm{D}_{\mathbf{u}}:=\sum_{k=1}^{\infty}u_k\mathrm{D}_{t_k},\qquad \mathrm{D}_{[\![x]\!]}:=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\mathrm{D}_{t_k}}{x^k}. \tag{5.14}$$

特别地, 当 $m+1=n$ 时我们有

$$\begin{aligned}0&=-\operatorname*{Res}_{x=\infty}\left(\mathrm{e}^{2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{u_k}{k}x^k}\mathrm{e}^{\mathrm{D}_{[\![x]\!]}-\mathrm{D}_{\mathbf{u}}}\mathcal{Z}_n\cdot\mathcal{Z}_n\mathrm{d}x\right)\\&=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint\mathrm{e}^{2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{u_k}{k}x^k}\mathcal{Z}_n(\mathbf{t}-\mathbf{u}+[\![x]\!])\mathcal{Z}_n(\mathbf{t}+\mathbf{u}-[\![x]\!])\mathrm{d}x.\end{aligned} \tag{5.15}$$

习题 5.4. 任意给定非负整数序列 (多重指标)$\mu=(\mu_1,\mu_2,\ldots)$, 证明

$$\operatorname*{Res}_{x=\infty}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{D}_{[\![x]\!]}}\prod_{k=1}^{\infty}\left(\frac{2x^k}{k}-\mathrm{D}_{t_k}\right)^{\mu_k}\mathcal{Z}_n\cdot\mathcal{Z}_n\mathrm{d}x\right)=0. \tag{5.16}$$

证明. 比较(5.15)两边 $\prod_{k=1}^{\infty}\frac{u_k^{\mu_k}}{\mu_k!}$ 项的系数即可. □

例如, 比较 u_1^3 的系数, 即 $\mu=(3,0,0,\ldots)$ 的情形, 我们有

$$\operatorname*{Res}_{x=\infty}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{D}_{[\![x]\!]}}\left(2x-\mathrm{D}_{t_1}\right)^3\mathcal{Z}_n\cdot\mathcal{Z}_n\mathrm{d}x\right)=0,$$

直接计算此留数 (建议用计算机) 并注意(5.13), 可将上式化为

$$\left(\frac{1}{3}\mathrm{D}_{t_1}^4-4\mathrm{D}_{t_1}\mathrm{D}_{t_3}+4\mathrm{D}_{t_2}^2\right)\mathcal{Z}_n\cdot\mathcal{Z}_n=0, \tag{5.17}$$

若记

$$v := 2\frac{\partial^2 \log \mathcal{Z}_n}{\partial t_1^2},$$

则(5.17)可改写为

$$\partial_{t_2}^2 v + \partial_{t_1}\left(\frac{1}{2}\partial_{t_1}^3 v - \frac{1}{2}v\partial_{t_1} v - \partial_{t_3} v\right) = 0,$$

这正是可积系统中著名的 **KP 方程**.

参考文献

[1] Adler M. *On a trace functional for formal pseudo-differential operators and the symplectic structure of the Korteweg-deVries type equations* [J]. Inventiones mathematicae, 1978, 50: 219-248.

[2] Akemann G, Baik J, Di Francesco P. *The Oxford handbook of random matrix theory* [M]. Oxford University Press, 2011.

[3] Babelon O, Bernard D, Talon M. *Introduction to classical integrable systems* [M]. Cambridge University Press, 2003.

[4] Bergere M, Eynard B. *Mixed correlation function and spectral curve for the 2-matrix model* [J]. Journal of Physics A: Mathematical and General, 2006, 39(49): 15091.

[5] Bertola M, Eynard B, Harnad J. *Partition functions for matrix models and isomonodromic tau functions* [J]. Journal of Physics A: Mathematical and General, 2003, 36(12): 3067.

[6] Bertola M, Eynard B, Harnad J. *Semiclassical orthogonal polynomials, matrix models and isomonodromic tau functions* [J]. Communications in mathematical physics, 2006, 263(2): 401-437.

[7] Carlet G, Dubrovin B, Zhang Y. *The extended Toda hierarchy* [J]. arXiv preprint nlin/0306060, 2003.

[8] Deift P. *Orthogonal polynomials and random matrices: A Riemann-Hilbert approach* [M]. American Mathematical Society, 2000.

[9] Dubrovin B, Liu S Q, Yang D, Zhang Y. *Hodge–GUE correspondence and the discrete KdV equation* [J]. Communications in Mathematical Physics, 2020, 379: 461-490.

[10] Eynard B, Kimura T, Ribault S. *Random matrices* [J]. arXiv preprint arXiv:1510.04430, 2015.

[11] Flaschka H. *The Toda lattice. II. Existence of integrals* [J]. Physical Review B, 1974, 9(4): 1924.

[12] Gerasimov A, Marshakov A, Mironov A, Morozov A, Orlov A. *Matrix models of two-dimensional gravity and Toda theory* [J]. Nuclear Physics B, 1991, 357(2-3): 565-618.

[13] Hirota R. *The direct method in soliton theory* [M]. Cambridge University Press, 2004.

[14] Jimbo M, Miwa T, Date E. *Solitons: Differential equations, symmetries and infinite dimensional algebras* [M]. Cambridge university press, 2000.

[15] Jimbo M, Miwa T, Ueno K. *Monodromy preserving deformation of linear ordinary differential equations with rational coefficients: I. General theory and τ-function* [J]. Physica D: Nonlinear Phenomena, 1981, 2(2): 306-352.

[16] Kostant B. *The solution to a generalized Toda lattice and representation theory* [J]. Advances in Mathematics, 1979, 34(3): 195-338.

[17] Menon G, Trogdon T. *Lectures on random matrix theory* [J]. unpublished notes (March 2018), 2015.

[18] Morozov A Y. *Integrability and matrix models* [J]. Physics-Uspekhi, 1994, 37(1): 1.

[19] Rudolph G, Schmidt M, Schmidt M. *Differential geometry and mathematical physics* [M]. Springer, 2012.

[20] Symes W W. *Systems of Toda type, inverse spectral problems, and representation theory* [J]. Inventiones mathematicae, 1980, 59(1): 13-51.

[21] Toda M. *Wave propagation in anharmonic lattices* [J]. Journal of the Physical Society of Japan, 1967, 23(3): 501-506.

[22] Witten E. *Two-dimensional gravity and intersection theory on moduli space* [J]. Surveys in differential geometry, 1990, 1(1): 243-310.