形式变分与可积系统

(学习笔记) 0.52 版

曲豆豆整理

2025 年 6 月 30 日

图: 曲豆豆穿上博士服, 就好像真的是博士一样.

目录

1. 无穷 jet 空间上的函数与算子

1.1 微分多项式环, 局部泛函空间

对于 n 维光滑流形 M, 记无穷 jet 空间 $J^\infty(M) := \varprojlim_{k\to\infty} J^k(M)$. 取定 M 的局部坐标 $\boldsymbol{v} = (v^1, ..., v^n)$, 则

$$\mathbf{v} = \{v^{\alpha,s} \,|\, 1 \le \alpha \le n,\ s \ge 0\}$$

构成 $J^\infty(M)$ 的一组局部坐标, 其中 jet 变量 $v^{\alpha,s} = \partial_x^s v^\alpha$. 注意微分算子 ∂_x 自然视为 $J^\infty(M)$ 上的切向量场:

$$\partial_x = \sum_{k\ge 0} v^{\alpha,k+1} \frac{\partial}{\partial v^{\alpha,k}}, \tag{1.1}$$

于是容易验证如下交换关系

$$\left[\frac{\partial}{\partial v^{\alpha,k}}, \partial_x\right] = \frac{\partial}{\partial v^{\alpha,k-1}}. \tag{1.2}$$

对于 $d \ge 0$, 我们记 d 次齐次微分多项式空间

$$\mathcal{A}_d := \mathrm{span}_{\mathbb{C}} \left\{ f(\boldsymbol{v}) v^{\alpha_1,s_1} \dots v^{\alpha_k,s_k} \,\middle|\, \begin{array}{c} f \in C^\infty(M),\ \sum_{i=1}^k s_i = d \\ 1 \le \alpha_1, ..., \alpha_n \le n \end{array} \right\}. \tag{1.3}$$

事实上, 我们规定 jet 变量 $v^{\alpha,s}$ 的**微分分次**

$$\deg_\partial v^{\alpha,s} = s, \tag{1.4}$$

而对于不恒为零的函数 $f \in C^\infty(M)$, 规定 $\deg_\partial f = 0$.

记 (完备化的) 微分多项式代数

$$\mathcal{A} := \varprojlim_{N\to\infty} \left(\bigoplus_{d=0}^{N} \mathcal{A}_d \right), \tag{1.5}$$

则 $\mathcal{A}$ 有自然的 $\mathbb{C}$-代数结构. 注意 $\partial_x\colon \mathcal{A}_d \to \mathcal{A}_{d+1}$, 且 $\partial_x \in \mathrm{Der}(\mathcal{A})$, 即 ∂_x 是 $\mathcal{A}$ 上微分分次为 1 的导子.

注记 1.1. 我们习惯将 $\mathcal{A}$ 中的元素 $f \in \mathcal{A}$ 表示为形式幂级数

$$f = \sum_{d\geq 0} \varepsilon^d f_{[d]}, \tag{1.6}$$

其中 $f_{[d]} \in \mathcal{A}_d$. 这里的形式参数 ε 用于记录微分分次.

引入**局部泛函空间**

$$\mathcal{F} := \mathcal{A}/\partial_x\mathcal{A}, \tag{1.7}$$

并且我们特别喜欢把相应的典范投影映射 $\mathcal{A} \to \mathcal{F}$ 记作 $\int \mathrm{d}x$, 换言之, 若 $h \in \mathcal{A}$ 是 $H \in \mathcal{F}$ 的一个代表元, 则我们记

$$H = \int h \, \mathrm{d}x,$$

并称 h 是**局部泛函** H 的**泛函密度**. 在上述意义下, 对任意 $f, g \in \mathcal{A}$, 容易验证 $\mathcal{F}$ 中的如下恒等式

$$\int f\partial_x g \, \mathrm{d}x = -\int (\partial_x f) g \, \mathrm{d}x, \tag{1.8}$$

这俗称 “分部积分公式”.

关于局部泛函, 有如下基本引理:

引理 1.2. 对于 $f \in \mathcal{A}$, 如果对任意 $\varphi \in \mathcal{A}$ 都有

$$\int f\varphi \, \mathrm{d}x = 0,$$

则 $f = 0$.

证明. 注意 $f\in\mathcal{A}$ 的微分分次结构 $f=\sum_{d\geq 0}\varepsilon^d f_{[d]}$. 取 $\varphi\equiv 1$ 可知存在 $\tilde{f}\in\mathcal{A}$ 使得 $f=\partial_x\tilde{f}$, 从而易知 $f_{[0]}=0$.

对任意 $d\geq 1$, 只需证明 $f_{[d]}=0$. 令

$$s:=\max\left\{s'\,\middle|\,\exists 1\leq\alpha\leq n,\ \frac{\partial f_{[d]}}{\partial v^{\alpha,s'}}\neq 0\right\},$$

即 $f_{[d]}$ 所含 jet 变量的最高阶数. 如果 $f_{[d]}\neq 0$, 则由 $d\geq 1$ 易知 $s>0$. 取定指标 α, 使得 $\frac{\partial f_{[d]}}{\partial v^{\alpha,s}}\neq 0$. 取 $\varphi=\varepsilon^s v^{\alpha,s}\in\mathcal{A}$, 则易知存在 $g\in\mathcal{A}_{d+s-1}$ 使得

$$f_{[d]}v^{\alpha,s}=\partial_x g. \tag{1.9}$$

由 s 的定义可知上式左边不依赖于比 s 更高阶的 jet 变量, 从而易知

$$\frac{\partial g}{\partial v^{\beta,k}}=0,\qquad \forall 1\leq\beta\leq n,\ \forall k\geq s.$$

利用(1.2)以及上式, 对等式(1.9)求导 $\frac{\partial}{\partial v^{\alpha,s}}$ 两次, 得到

$$v^{\alpha,s}\frac{\partial^2 f_{[d]}}{(\partial v^{\alpha,s})^2}+2\frac{\partial f_{[d]}}{\partial v^{\alpha,s}}=0.$$

而 $f_{[d]}$ 作为变元 $v^{\alpha,s}$ 的多项式, 记其次数为 m, 则显然 $m\geq 1$. 而另一方面, 上式表明 m 满足

$$m(m-1)+2m=0,$$

从而 $m=0$ 或 -1, 产生矛盾. 因此 $f_{[d]}=0$. 引理得证. □

注记 **1.3.** 在上述引理中, 把条件 $\forall\varphi\in\mathcal{A}$ 弱化为 $\forall\varphi\in\mathcal{A}_0$, 则结论不再成立. 例如维数 $n=1$, $f=v_x$.

1.2 Jet 变量转换公式

现在, 另取一组函数

$$u^{\alpha}=u^{\alpha}(\mathbf{v})=\sum_{d=0}^{\infty}\varepsilon^{d}u_{[d]}^{\alpha}(\mathbf{v}),\quad 1\le\alpha\le n,\tag{1.10}$$

其中 $u_{[d]}^{\alpha}\in\mathcal{A}_d$. 若雅可比矩阵 $\left(\frac{\partial u_{[0]}^{\alpha}}{\partial v^{\beta}}\right)$ 非退化, 则

$$\mathbf{u}=\left\{u^{\alpha,s}\,|\,1\le\alpha\le n,\,s\ge 0\right\},\quad u^{\alpha,s}:=\partial_x^s u^{\alpha}\tag{1.11}$$

也构成 $J^{\infty}(M)$ 的一组局部坐标. 我们希望得到 $\mathbf{u}$ 与 $\mathbf{v}$ 的转换关系.

定理 1.4. 记号承上, 则有

$$\frac{\partial u^{\alpha,k}}{\partial v^{\beta,\ell}}=\sum_{s=0}^{k}\binom{k}{s}\partial_x^{k-s}\frac{\partial u^{\alpha}}{\partial v^{\beta,\ell-s}},\tag{1.12}$$

这里我们约定当 $s<0$ 时 $\frac{\partial}{\partial v^{\alpha,s}}=0$.

证明. 对 k 归纳. $k=0$ 时显然. 若该命题对 k 成立, 则由(1.2)可知

$$\frac{\partial u^{\alpha,k+1}}{\partial v^{\beta,\ell}}=\left(\frac{\partial}{\partial v^{\beta,\ell}}\circ\partial_x\right)u^{\alpha,k}=\left(\partial_x\circ\frac{\partial}{\partial v^{\beta,\ell}}+\frac{\partial}{\partial v^{\beta,\ell-1}}\right)u^{\alpha,k}$$

$$=\partial_x\left(\sum_{s=0}^{k}\binom{k}{s}\partial_x^{k-s}\frac{\partial u^{\alpha}}{\partial v^{\beta,\ell-s}}\right)+\sum_{s=0}^{k}\binom{k}{s}\partial_x^{k-s}\frac{\partial u^{\alpha}}{\partial v^{\beta,\ell-1-s}}$$

$$=\sum_{s=0}^{k+1}\left[\binom{k}{s}+\binom{k}{s-1}\right]\partial_x^{k+1-s}\frac{\partial u^{\alpha}}{\partial v^{\beta,\ell-s}}$$

$$=\sum_{s=0}^{k+1}\binom{k+1}{s}\partial_x^{k+1-s}\frac{\partial u^{\alpha}}{\partial v^{\beta,\ell-s}},$$

从而得证. □

1.3 环 $\mathcal{A}$ 上的微分算子环

我们来适当地定义 $\mathcal{A}$ 上的微分算子环 $\mathcal{D}$, 使得 $\mathcal{D}$ 中包含关于各 jet 变量的偏导 $\frac{\partial}{\partial v^{\alpha,s}}$, 并且在一定程度上允许这些偏微分算子进行无穷求和, 即适当地完备化. 首先, 引入临时记号

$$\mathcal{D}_0 := C^\infty(M) \otimes \mathbb{C}\left[\frac{\partial}{\partial v^{\alpha,0}} \,\middle|\, 1 \le \alpha \le n\right], \tag{1.13}$$

$$\mathcal{D}_0' := \mathcal{A} \otimes \mathcal{D}_0, \tag{1.14}$$

$$\mathcal{D}' := \mathcal{D}_0'\left[\varepsilon^{-s}\frac{\partial}{\partial v^{\alpha,s}} \,\middle|\, 1 \le \alpha \le n,\ s \ge 1\right], \tag{1.15}$$

它们在通常的算子复合意义下构成 $\mathbb{C}$-子代数, 其中的元素都自然地作用于 $\mathcal{A}$. 一般地, $\mathcal{D}'$ 中的元素 D 形如下述有限求和

$$D = \sum_{I,S} \varepsilon^{-|S|} f^{I,S} \partial_{I,S}, \qquad f^{I,S} \in \mathcal{D}_0',$$

其中多重指标

$$(I,S) := (i_1, s_1; i_2, s_2; \cdots; i_m, s_m), \tag{1.16}$$

$$|S| := s_1 + \cdots s_m, \qquad |I| := m, \tag{1.17}$$

$$\partial_{I,S} := \frac{\partial}{\partial v^{i_1,s_1}} \cdots \frac{\partial}{\partial v^{i_m,s_m}} \tag{1.18}$$

满足 $s_1, \ldots s_m \ge 1$. 接下来我们适当地对 $\mathcal{D}'$ 作完备化.

在 $\mathcal{A}$ 的微分分次基础上, 规定算子(1.18)的微分分次

$$\deg \partial_{I,S} = -|S|,$$

以及 $\deg \frac{\partial}{\partial v^{\alpha,0}} = 0$, 这便自然给出了 $\mathcal{D}'$ 的微分分次. 对于每个 $d \in \mathbb{Z}$, 我们记 $\mathcal{D}_d$ 为形如下述的算子形式和 D 所构成的 $\mathbb{C}$-线性空间:

$$D = \sum_{m \ge 0} \sum_{\substack{I,S \\ |I|=m}} \varepsilon^{-|S|} D_m^{I,S} \partial_{I,S},$$

其中对于每个 $m \geq 0$, 多重指标 (I,S) 取遍

$$\{(i_1,s_1;\ldots;i_m,s_m)\,|\,1\leq i_k\leq n,\ s_k\geq 1,\ 1\leq k\leq m\},$$

并且 $D_m^{I,S}\in\mathcal{D}_0'$ 满足 $\deg D_m^{I,S}+\deg\partial_{I,S}=d$.

与 (完备化的) 微分多项式环 $\mathcal{A}$ 类似, 形式变元 ε 用于记录微分分次, 我们经常偷懒地令 $\varepsilon=1$. 此外, 易知 $\mathcal{D}_d$ 自然地作用于 $\mathcal{A}$, 并且 $\mathcal{D}_d(\mathcal{A}_{d'})\subseteq\mathcal{A}_{d+d'}$.

例 **1.5.** (无穷小) 平移算子 $\varepsilon\partial_x=\sum_{s\geq 0}\varepsilon v^{\alpha,s+1}\frac{\partial}{\partial v^{\alpha,s}}\in\mathcal{D}_1$.

此外, 我们还将在后文介绍若干重要的算子, 例如变分导数、演化向量场、高阶欧拉算子等, 它们都是 $\mathcal{D}_d$ 中的元素.

定义 1.6. *($\mathcal{A}$ 上的微分算子).* 记号承上, 我们记

$$\mathcal{D}:=\varprojlim_{N\to+\infty}\left(\bigoplus_{d\leq N}\mathcal{D}_d\right). \tag{1.19}$$

由此定义可知, $\mathcal{D}$ 中的一般元素 D 形如

$$D=\sum_{d\geq m}D_d,$$

其中 $m\in\mathbb{Z}$, $D_d\in\mathcal{D}_d$.

例 **1.7.** 差分算子 $\Lambda:=\mathrm{e}^{\varepsilon\partial_x}=\sum_{k\geq 0}\frac{\varepsilon^k}{k!}\partial_x^k\in\mathcal{D}$.

此外, 可以验证 $\mathcal{D}$ 具有 $\mathbb{C}$-代数结构, 且其中的元素按通常方式自然地作用于 $\mathcal{A}$, 即有自然的 $\mathbb{C}$-代数同态 $\mathcal{D}\to\mathrm{End}(\mathcal{A})$.

例 1.8. 我们记

$$\mathcal{A}[\![\varepsilon\partial_x]\!] := \left\{\sum_{k\geq 0}\varepsilon^k f_k\partial_x^k \,\middle|\, f_k\in\mathcal{A},\, k\geq 0\right\},$$

易知它是 $\mathcal{D}$ 的 $\mathbb{C}$-子代数.

本小节最后, 我们证明 $\mathcal{D}\to \mathrm{End}(\mathcal{A})$ 是单同态, 从而将 $\mathcal{D}$ 自然视为 $\mathrm{End}(\mathcal{A})$ 的 $\mathbb{C}$-子代数.

定理 1.9. 对于微分算子 $D\in\mathcal{D}$, 如果对任意 $f\in\mathcal{A}$, $D(f)\in\mathbb{C}$ 为常数, 则 $D=0$.

证明. 我们分若干步来证明. 需要一些引理.

- 引理: 对于 $D\in\mathcal{D}_0$ (1.13), 如果对任意 $f\in C^\infty(M)$, $D(f)\in\mathbb{C}$ 为常数, 则 $D=0$.

  引理证明: 注意 $\mathcal{D}_0$ 中的元素 D 都形如下述有限和:

  $$D=\sum_{\mathbf{s}} D^{\mathbf{s}}\partial_{\mathbf{s}}, \qquad D^{\mathbf{s}}\in C^\infty(M),$$

  其中 $\mathbf{s}=(s_1,\ldots,s_n)$ 为 n 重指标, $\partial_{\mathbf{s}} := \left(\frac{\partial}{\partial v^1}\right)^{s_1}\cdots\left(\frac{\partial}{\partial v^n}\right)^{s_n}$. 对每个这样的多重指标 $\mathbf{s}$, 考虑多项式函数

  $$f_{\mathbf{s}}=\frac{(v^1)^{s_1}}{s_1!}\cdots\frac{(v^n)^{s_n}}{s_n!}\in C^\infty(M),$$

  并且记常数 $c_{\mathbf{s}}:=D(f_{\mathbf{s}})\in\mathbb{C}$. 取充分多的 $f_{\mathbf{s}}$, 解关于系数 $D^{\mathbf{s}}$ 的方程组 $D(f_{\mathbf{s}})=c_{\mathbf{s}}$ 即可. 引理得证.

- 引理: 对于 $D\in\mathcal{D}_0'$ (1.14), 如果对任意 $f\in C^\infty(M)$, $D(f)\in\mathbb{C}$ 为常数, 则 $D=0$.

引理证明: 只需注意 $\mathcal{D}_0'$ 中的元素 D 都形如有限求和

$$D = \sum_{I,S} v^{I,S} D_{I,S},$$

其中 (I, S) 为多重指标(1.16), $s_1, \ldots, s_m \geq 1$,

$$v^{I,S} := v^{i_1,s_1} \cdots v^{i_m,s_m},$$

且 $D_{I,S} \in \mathcal{D}_0$. 注意 $\{v^{I,S}\}_{(I,S)}$ 是 $C^\infty(M)$-线性无关的, 从而对每一个 (I, S), $D_{I,S}(f) = 0$ 对任意 $f \in C^\infty(M)$ 都成立, 再利用前一个引理即可.

现在, 对于 $D \in \mathcal{D}$, 由定义可知 D 形如

$$D = \sum_{m\geq 0} D_m, \quad D_m = \sum_{|I|=m} \sum_S D_m^{I,S} \partial_{I,S}, \quad D_m^{I,S} \in \mathcal{D}_0'.$$

即 D_m 是关于 jet 变量 $\{v^{\alpha,s}\}_{s\geq 1}$ 的 m 阶偏微分算子. 下面对 m 归纳, 来证明 $D_m = 0$. 首先, 对于任意的 $f \in C^\infty(M)$, 注意 $D(f) = D_0(f)$. 从而由前文引理可知 $D_0 = 0$. 假设 $D_0 = D_1 = \cdots = D_{m-1} = 0$, 则对每个 $\tilde{f} \in C^\infty(M)$, 考虑 $f = \tilde{f} v^{I,S}$, 其中 $|I| = m$. 则由题设可知

$$D(f) = D_m(\tilde{f} v^{I,S}) = \left(\partial_{I,S} v^{I,S}\right) D_m^{I,S}(\tilde{f})$$

是常数. 从而由 $\tilde{f}$ 的任意性, 以及前文引理, 立刻得到 $D_m^{I,S} = 0$. 从而定理得证. $\square$

1.4 变分导数及其链式法则

记号同上一小节. 取定流形 M 上的局部坐标 $\boldsymbol{v} = (v^1, ..., v^n)$, 则其自然诱导 $J^\infty(M)$ 的局部坐标 $\mathbf{v} = (v^{\alpha,s})$. 引入微分多项式环 $\mathcal{A}$ 上的线

性算子 $\frac{\delta}{\delta v^\alpha} \in \mathcal{D}_0$ 如下

$$\frac{\delta}{\delta v^\alpha} = \sum_{s\geq 0} (-\partial_x)^s \circ \frac{\partial}{\partial v^{\alpha,s}}, \tag{1.20}$$

则由(1.2)容易验证

$$\frac{\delta}{\delta v^\alpha} \circ \partial_x = 0,$$

从而 $\frac{\delta}{\delta v^\alpha}$ 可以下降至 $\mathcal{F} := \mathcal{A}/\partial_x\mathcal{A}$, 即

$$\frac{\delta}{\delta v^\alpha} : \mathcal{F} \to \mathcal{A}.$$

对于局部泛函 $H \in \mathcal{F}$, $\frac{\delta H}{\delta v^\alpha}$ 称为 H 关于 v^α 的**变分导数**.

注记 1.10. 考虑流形 M 的圈空间 $\mathscr{L}(M) := C^\infty(S^1, M)$. 在 M 的局部坐标 $\boldsymbol{v}$ 下, $\mathscr{L}(M)$ 中的元素具有局部表达

$$x \mapsto \boldsymbol{v}(x) = (v^1(x), v^2(x), \ldots, v^n(x))^{\mathrm{T}}.$$

注意 $\mathscr{L}(M)$ 中的元素自然诱导 $\mathscr{L}(J^\infty(M))$ 中的元素:

$$\boldsymbol{v}(x) \mapsto \mathbf{v}(x) = \left(\boldsymbol{v}(x), \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}x}(x), \frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}x^2}(x), \ldots\right).$$

在此意义下, 局部泛函 $H = \int h(\mathbf{v})\,\mathrm{d}x \in \mathcal{F}$ 自然视为 $\mathscr{L}(M)$ 上的函数:

$$\begin{aligned} H\colon \mathscr{L}(M) &\to \mathbb{C} \\ \boldsymbol{v}(x) &\mapsto H[\boldsymbol{v}(x)] := \int_{S^1} h(\mathbf{v}(x))\,\mathrm{d}x, \end{aligned} \tag{1.21}$$

其中 $\int_{S^1}\mathrm{d}x$ 是圆周 S^1 上通常的积分. 于是对任意 $\boldsymbol{w} \in \mathscr{L}(M)$,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} H[\boldsymbol{v}(x) + t\boldsymbol{w}(x)]\Big|_{t=0}$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_{S^1} \sum_{s\geq 0} \frac{\partial h}{\partial v^{\alpha,s}}(\boldsymbol{v}(x))\partial_x^s w^\alpha(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{S^1} \left(\sum_{s\geq 0}(-\partial_x)^s \frac{\partial h}{\partial v^{\alpha,s}}(\boldsymbol{v}(x))\right) w^\alpha(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{S^1} w^\alpha(x)\frac{\delta H}{\delta v^\alpha}(\boldsymbol{v}(x))\,\mathrm{d}x,
\end{aligned}
$$

这便是变分导数最初的样子. 我们更习惯把上式中的 $\boldsymbol{w}$ 重新记为 $\delta\boldsymbol{v}$. 事实上, 变分导数 $\frac{\delta H}{\delta v^\alpha} \in \mathcal{A}$ 被

$$
H[\boldsymbol{v}+\delta\boldsymbol{v}] - H[\boldsymbol{v}] = \int_{S^1} \delta v^\alpha \cdot \frac{\delta H}{\delta v^\alpha}\,\mathrm{d}x + o(\delta\boldsymbol{v}), \quad \forall \delta\boldsymbol{v} \in \mathscr{L}(M) \tag{1.22}
$$

所唯一确定. 一般来说, 具体计算变分导数时往往采用此式, 而非直接用(1.20).

现在另取 M 的一组局部坐标 $\boldsymbol{u} = (u^1, ..., u^n)$, 见(1.10), (1.11), 我们希望给出算子 $\frac{\delta}{\delta u^\alpha}$ 与 $\frac{\delta}{\delta v^\beta}$ 之间的转换关系.

定理 1.11. 记号承上, 则成立

$$
\frac{\delta}{\delta v^\alpha} = \sum_{k\geq 0}(-\partial_x)^k \circ \frac{\partial u^\beta}{\partial v^{\alpha,k}} \circ \frac{\delta}{\delta u^\beta}. \tag{1.23}
$$

其中 $\frac{\partial u^\beta}{\partial v^{\alpha,k}} \in \mathcal{A}$ 在函数乘法意义下自然视为 $\mathrm{End}(\mathcal{A})$ 中元素.

证明. 首先注意到, 对任意 $f \in \mathcal{A}$, 则在 $\mathrm{End}(\mathcal{A})$ 中成立

$$
\partial_x^k f = \sum_{s=0}^{k} \binom{k}{s} \partial_x^{k-s} \circ f \circ (-\partial_x)^s. \tag{1.24}
$$

其证明方法与定理1.4类似, 对 k 归纳即可, 留给读者. 于是有

$$
\begin{aligned}
\frac{\delta}{\delta v^\alpha} &= \sum_{k\geq 0}(-\partial_x)^k\circ\frac{\partial}{\partial v^{\alpha,k}} = \sum_{k,\ell\geq 0}(-\partial_x)^k\circ\frac{\partial u^{\beta,\ell}}{\partial v^{\alpha,k}}\circ\frac{\partial}{\partial u^{\beta,\ell}}\\
&= \sum_{k,\ell\geq 0}\sum_{s=0}^{\ell}(-\partial_x)^k\circ\binom{\ell}{s}\left(\partial_x^{\ell-s}\frac{\partial u^\beta}{\partial v^{\alpha,k-s}}\right)\circ\frac{\partial}{\partial u^{\beta,\ell}}\\
&= \sum_{k,\ell\geq 0}\sum_{s=0}^{\ell}\sum_{m=0}^{\ell-s}\binom{\ell}{s}\binom{\ell-s}{m}\\
&\qquad\times(-\partial_x)^k\circ\partial_x^{\ell-s-m}\circ\frac{\partial u^\beta}{\partial v^{\alpha,k-s}}\circ(-\partial_x)^m\circ\frac{\partial}{\partial u^{\beta,\ell}}\\
&= \sum_{\ell\geq 0}\sum_{\substack{s,m\geq 0\\ s+m\leq\ell}}\binom{\ell}{s}\binom{\ell-s}{m}(-1)^s\partial_x^{\ell-m}\\
&\qquad\circ\left(\sum_{k\geq 0}(-\partial_x)^k\circ\frac{\partial u^\beta}{\partial v^{\alpha,k}}\right)\circ(-\partial_x)^m\circ\frac{\partial}{\partial u^{\beta,\ell}}\\
&= \sum_{\ell\geq 0}\sum_{m=0}^{\ell}\binom{\ell}{m}\left(\sum_{s=0}^{\ell-m}(-1)^s\binom{\ell-m}{s}\right)\partial_x^{\ell-m}\\
&\qquad\circ\left(\sum_{k\geq 0}(-\partial_x)^k\circ\frac{\partial u^\beta}{\partial v^{\alpha,k}}\right)\circ(-\partial_x)^m\circ\frac{\partial}{\partial u^{\beta,\ell}}\\
&= \sum_{\ell\geq 0}\left(\sum_{k\geq 0}(-\partial_x)^k\circ\frac{\partial u^\beta}{\partial v^{\alpha,k}}\right)\circ(-\partial_x)^\ell\circ\frac{\partial}{\partial u^{\beta,\ell}}\\
&= \left(\sum_{k\geq 0}(-\partial_x)^k\circ\frac{\partial u^\beta}{\partial v^{\alpha,k}}\right)\circ\frac{\delta}{\delta u^\beta},
\end{aligned}
$$

从而得证. □

注记 1.12. 上述证明过程有些暴力, 看似并不自然. 而如果采用注记1.10的

观点, 并利用(1.22), 则上述定理是显然的: 对任意局部泛函 H, 我们有

$$\begin{aligned}\delta H &= \int \delta u^{\beta} \cdot \frac{\delta H}{\delta u^{\beta}}\,\mathrm{d}x = \int \sum_{k\geq 0} \delta v^{\alpha,k} \cdot \frac{\partial u^{\beta}}{\partial v^{\alpha,k}} \frac{\delta H}{\delta u^{\beta}}\,\mathrm{d}x \\ &= \int \sum_{k\geq 0} \left(\partial_x^k \delta v^{\alpha}\right) \frac{\partial u^{\beta}}{\partial v^{\alpha,k}} \frac{\delta H}{\delta u^{\beta}}\,\mathrm{d}x \\ &= \int \delta v^{\alpha} \sum_{k\geq 0} (-\partial_x)^k \left(\frac{\partial u^{\beta}}{\partial v^{\alpha,k}} \frac{\delta H}{\delta u^{\beta}}\right)\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

从而再次得到(1.23).

<u>注记 **1.13.**</u> 对于微分算子 $P = \sum_{k\geq 0} \varepsilon^k P_k \partial_x^k \in \mathcal{A}[\![\varepsilon\partial_x]\!]$, 记其伴随算子

$$P^{\dagger} := \sum_{k\geq 0} (-\varepsilon\partial_x)^k \circ P_k. \tag{1.25}$$

则易知对任意 $f, g \in \mathcal{A}$ 都有

$$\int f P g\,\mathrm{d}x = \int (P^{\dagger} f) g\,\mathrm{d}x. \tag{1.26}$$

而对于算子值矩阵 (俗称 “矩阵微分算子”)

$$\mathcal{P} = (\mathcal{P}^{\alpha}_{\beta}) \in \mathcal{A}[\![\varepsilon\partial_x]\!] \otimes \mathbb{C}^{n\times n},$$

我们记其伴随矩阵

$$\mathcal{P}^{\dagger} = \left((\mathcal{P}^{\dagger})^{\alpha}_{\beta}\right) := \left((\mathcal{P}^{\beta}_{\alpha})^{\dagger}\right). \tag{1.27}$$

在此意义下, 若引入坐标 $\boldsymbol{u}$ 与 $\boldsymbol{v}$ 之间的 Jacobi 算子矩阵

$$\mathcal{J} = (\mathcal{J}^{\alpha}_{\beta}) := \left(\sum_{s\geq 0} \frac{\partial u^{\alpha}}{\partial v^{\beta,s}} \partial_x^s\right), \tag{1.28}$$

则变分导数转换公式(1.23)可改写为

$$\frac{\delta}{\delta v^{\alpha}} = (\mathcal{J}^{\beta}_{\alpha})^{\dagger} \circ \frac{\delta}{\delta u^{\beta}}. \tag{1.29}$$

1.5 演化向量场

$\mathcal{A}$ 上的**导子** $\xi \in \mathrm{Der}(\mathcal{A})$ 形如

$$\xi = \sum_{s\geq 0} \xi^{\alpha,s} \frac{\partial}{\partial v^{\alpha,s}}, \qquad \xi^{\alpha,s} \in \mathcal{A},$$

它也自然被视为 jet 空间 $J^\infty(M)$ 上的切向量场. $\mathrm{Der}(\mathcal{A})$ 关于通常的交换子构成李代数, 并且 $\partial_x \in \mathrm{Der}(\mathcal{A})$. 容易验证

$$\mathcal{E} := \{\xi \in \mathrm{Der}(\mathcal{A}) \mid [\xi, \partial_x] = 0\} \tag{1.30}$$

是 $\mathrm{Der}(\mathcal{A})$ 的李子代数, 并且其中的元素都形如

$$\xi = \sum_{s\geq 0} (\partial_x^s \xi^\alpha) \frac{\partial}{\partial v^{\alpha,s}}, \qquad \xi^\alpha \in \mathcal{A}. \tag{1.31}$$

我们称 $\mathcal{E}$ 中的元素为**演化向量场**. 对于(1.31)中的演化向量场 ξ, 我们称 $\xi^\alpha \in \mathcal{A}$ 为 ξ 在局部坐标 $\boldsymbol{v}$ 下的分量. 特别注意

$$\xi^\alpha = \xi(v^\alpha). \tag{1.32}$$

注记 **1.14.** 对于演化向量场 $\xi \in \mathcal{E}$, 我们习惯记

$$\mathrm{D}_\xi := \xi. \tag{1.33}$$

例如, 对于 $f \in \mathcal{A}$, $\xi(f)$ 也可以写成 $\mathrm{D}_\xi f$. 符号 D 的含义, 以及如此混用记号的原因见后文注记2.30. 我们现在暂时可以不去深究.

下面给出两个演化向量场的李括号的显式表达式.

性质 1.15. 对于演化向量场 $\xi,\eta\in\mathcal{E}$, 则在局部坐标 $\boldsymbol{v}$ 下, 有

$$[\xi,\eta]^\alpha=\mathrm{D}_\xi\eta^\alpha-\mathrm{D}_\eta\xi^\alpha. \tag{1.34}$$

证明. 这是因为

$$[\xi,\eta]^\alpha=\mathrm{D}_{[\xi,\eta]}v^\alpha=\mathrm{D}_\xi(\mathrm{D}_\eta v^\alpha)-\mathrm{D}_\eta(\mathrm{D}_\xi v^\alpha)=\mathrm{D}_\xi\eta^\alpha-\mathrm{D}_\eta\xi^\alpha.$$

□

注记 **1.16.** 演化向量场 $\xi=(\xi^\alpha)\in\mathcal{E}$ 自然诱导关于空间变量 x 与时间变量 t 的演化型偏微分方程

$$\frac{\partial v^\alpha}{\partial t}=\xi^\alpha,\qquad 1\le\alpha\le n.$$

在此意义下, 对任意 $f=f(\mathbf{v})\in\mathcal{A}$, 它随时间变量 t 的演化如下

$$\frac{\partial f}{\partial t}=\xi(f)=\sum_{s\ge 0}(\partial_x^s\xi^\alpha)\frac{\partial f}{\partial v^{\alpha,s}}.$$

反之, 演化型偏微分方程也都来自于演化型向量场.

对于演化型向量场 $\xi\in\mathcal{E}$, 由性质 $[\xi,\partial_x]=0$ 易知 ξ 自然地作用在局部泛函空间 $\mathcal{F}=\mathcal{A}/\partial_x\mathcal{A}$ 上, 这给出了 $\mathcal{F}$ 的李代数 $\mathcal{E}$-模结构.

性质 1.17. 对于 $\xi=(\xi^\alpha)\in\mathcal{E}$ 以及 $F=\int f\,\mathrm{d}x\in\mathcal{F}$, 成立

$$\xi(F)=\int\xi^\alpha\frac{\delta f}{\delta v^\alpha}\,\mathrm{d}x. \tag{1.35}$$

证明. 由相关定义, 并反复使用分部积分(1.8), 有

$$\xi(F)=\int\xi(f)\,\mathrm{d}x=\int\sum_{s\ge 0}(\partial_x^s\xi^\alpha)\frac{\partial f}{\partial v^{\alpha,s}}\,\mathrm{d}x=\int\xi^\alpha\frac{\delta f}{\delta v^\alpha}\,\mathrm{d}x,$$

从而得证. $\square$

利用演化向量场的性质, 可以给出变分导数转换公式(1.29)的一个优雅的证明, 它将避开组合恒等式的暴力验证. 另外取定 M 上的一组新的局部坐标 $\boldsymbol{u}=(u^\alpha)$, 并引入(1.28)中的 Jacobi 算子矩阵 $\mathcal{J}$. 对任意的演化向量场 $\xi\in\mathcal{E}$, 记其在 $\boldsymbol{v},\boldsymbol{u}$ 坐标下的分量分别为 ξ^α 与 $\tilde{\xi}^\alpha$, 则

$$\tilde{\xi}^\alpha=\mathrm{D}_\xi u^\alpha=\sum_{s\geq 0}\left(\partial_x^s\xi^\beta\right)\frac{\partial u^\alpha}{\partial v^{\beta,s}}=\mathcal{J}_\beta^\alpha\xi^\beta. \tag{1.36}$$

从而对于局部泛函 $F=\int f\,\mathrm{d}x$, 我们有

$$\begin{aligned}\int\xi^\alpha\frac{\delta f}{\delta v^\alpha}\,\mathrm{d}x=\mathrm{D}_\xi F&=\int\tilde{\xi}^\alpha\frac{\delta f}{\delta u^\alpha}\,\mathrm{d}x\\&=\int\left(\mathcal{J}_\beta^\alpha\xi^\beta\right)\frac{\delta f}{\delta u^\alpha}\,\mathrm{d}x=\int\xi^\alpha\left(\left(\mathcal{J}_\alpha^\beta\right)^\dagger\frac{\delta f}{\delta u^\beta}\right)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

注意上式对任意 $\xi\in\mathcal{E}$ 都成立, 从而由引理1.2可知

$$\frac{\delta f}{\delta v^\alpha}=\left(\mathcal{J}_\alpha^\beta\right)^\dagger\frac{\delta f}{\delta u^\beta},$$

从而再次证明(1.29).

1.6 高阶欧拉算子

我们继续研究变分导数的相关问题. 对于微分多项式 $f,g\in\mathcal{A}$, 我们自然想给出对乘积求变分导数 $\frac{\delta}{\delta v^\alpha}(fg)$ 的莱布尼茨公式. 为此, 我们需要引入如下:

定义 1.18. 对于自然数 $k \geq 0$, 定义算子 $\frac{\delta_k}{\delta v^\alpha}: \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ 如下:

$$\frac{\delta_k}{\delta v^\alpha} = \sum_{s\geq 0} (-1)^s \binom{s+k}{k} \partial_x^s \circ \frac{\partial}{\partial v^{\alpha,s+k}}, \tag{1.37}$$

并称其为 **k 阶欧拉算子**.

易知 $\frac{\delta_k}{\delta v^\alpha} \in \mathcal{D}_{-k}$. 若局部坐标 v^α 约定俗成, 则我们可以简记

$$\delta_{\alpha,k} := \frac{\delta_k}{\delta v^\alpha}.$$

特别地, $\delta_{\alpha,0} = \frac{\delta_0}{\delta v^\alpha}$ 恰为通常的变分导数 $\frac{\delta}{\delta v^\alpha}$ (1.20).

性质 1.19. 对于微分多项式 $f, g \in \mathcal{A}$, 成立

$$\frac{\delta}{\delta v^\alpha}(fg) = \sum_{s\geq 0} (-1)^s \left(\frac{\delta_s f}{\delta v^\alpha} (\partial_x^s g) + (\partial_x^s f) \frac{\delta_s g}{\delta v^\alpha} \right). \tag{1.38}$$

证明. 直接计算验证如下:

$$\begin{aligned}
\frac{\delta}{\delta v^\alpha}(fg) &= \sum_{s\geq 0} (-\partial_x)^s \left(\frac{\partial f}{\partial v^{\alpha,s}} g + f \frac{\partial g}{\partial v^{\alpha,s}} \right) \\
&= \sum_{s\geq 0} (-1)^s \sum_{k=0}^{s} \binom{s}{k} \left[\left(\partial_x^k \frac{\partial f}{\partial v^{\alpha,s}} \right) (\partial_x^{s-k} g) + (\partial_x^k f) \left(\partial_x^{s-k} \frac{\partial g}{\partial v^{\alpha,s}} \right) \right] \\
&= \sum_{s,k\geq 0} (-1)^{s+k} \binom{s+k}{s} \left[\left(\partial_x^k \frac{\partial f}{\partial v^{\alpha,s+k}} \right) (\partial_x^s g) + (\partial_x^k f) \left(\partial_x^s \frac{\partial g}{\partial v^{\alpha,s+k}} \right) \right] \\
&= \sum_{s\geq 0} (-1)^s \left(\frac{\delta_s f}{\delta v^\alpha} (\partial_x^s g) + (\partial_x^s f) \frac{\delta_s g}{\delta v^\alpha} \right),
\end{aligned}$$

从而得证. □

除了用来表示两个微分多项式乘积的变分导数, 高阶欧拉算子还有如下基本性质:

性质 1.20. 欧拉算子 $\frac{\delta_k}{\delta v^\alpha}$ 满足如下等式:

$$\frac{\delta_k}{\delta v^\alpha} \circ \partial_x = \frac{\delta_{k-1}}{\delta v^\alpha}, \tag{1.39}$$

$$\frac{\delta_k}{\delta v^\alpha} \circ \frac{\delta_0}{\delta v^\beta} = (-1)^k \frac{\partial}{\partial v^{\beta,k}} \circ \frac{\delta_0}{\delta v^\alpha}, \tag{1.40}$$

其中特别规定 $\frac{\delta_{-1}}{\delta v^\alpha} = 0$.

证明. 利用(1.2), 直接计算容易验证(1.39), 细节留给读者. 从而(1.40)的左边可表示为

$$\begin{aligned}\frac{\delta_k}{\delta v^\alpha} \circ \frac{\delta_0}{\delta v^\beta} &= \sum_{m\geq 0} (-1)^m \left(\frac{\delta_k}{\delta v^\alpha} \circ \partial_x^m \right) \circ \frac{\partial}{\partial v^{\beta,m}} \\ &= \sum_{m=0}^{k} (-1)^{k+m} \frac{\delta_m}{\delta v^\alpha} \circ \frac{\partial}{\partial v^{\beta,k-m}}.\end{aligned}$$

另一方面, 由定理1.4的证明过程可知如下等式成立:

$$\frac{\partial}{\partial v^{\beta,k}} \circ \partial_x^s = \sum_{m=0}^{s} \binom{s}{m} \partial_x^{s-m} \circ \frac{\partial}{\partial v^{\beta,k-m}}, \tag{1.41}$$

从而(1.40)的右边可表示为

$$\begin{aligned}&(-1)^k \frac{\partial}{\partial v^{\beta,k}} \circ \frac{\delta_0}{\delta v^\alpha} = \sum_{s\geq 0} (-1)^{k+s} \left(\frac{\partial}{\partial v^{\beta,k}} \circ \partial_x^s \right) \circ \frac{\partial}{\partial v^{\alpha,s}} \\ &= \sum_{s\geq 0} (-1)^{k+s} \sum_{m=0}^{s} \binom{s}{m} \partial_x^{s-m} \circ \frac{\partial}{\partial v^{\alpha,s}} \circ \frac{\partial}{\partial v^{\beta,k-m}}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&=\sum_{m=0}^{k}\left(\sum_{s\geq m}(-1)^{k+s}\binom{s}{m}\partial_x^{s-m}\circ\frac{\partial}{\partial v^{\alpha,s}}\right)\circ\frac{\partial}{\partial v^{\beta,k-m}}\\
&=\sum_{m=0}^{k}(-1)^{k+m}\frac{\delta_m}{\delta v^{\alpha}}\circ\frac{\partial}{\partial v^{\beta,k-m}},
\end{aligned}
$$

因此(1.40)得证. □

我们还可以用高阶欧拉算子来改写演化向量场.

性质 1.21. 对于演化向量场 $\xi=(\xi^\alpha)\in\mathcal{E}$, 成立

$$
\mathrm{D}_\xi=\sum_{s\geq 0}\partial_x^s\circ\xi^\alpha\circ\frac{\delta_s}{\delta v^\alpha}. \tag{1.42}
$$

证明. 由(1.24), 我们有

$$
\begin{aligned}
\mathrm{D}_\xi&=\sum_{s\geq 0}\left(\partial_x^s\xi^\alpha\right)\frac{\partial}{\partial v^{\alpha,s}}\\
&=\sum_{s\geq 0}\sum_{m=0}^{s}\binom{s}{m}\partial_x^{s-m}\circ\xi^\alpha\circ(-\partial_x)^m\circ\frac{\partial}{\partial v^{\alpha,s}}\\
&=\sum_{s,m\geq 0}\binom{s+m}{m}\partial_x^{s}\circ\xi^\alpha\circ(-\partial_x)^m\circ\frac{\partial}{\partial v^{\alpha,s+m}}\\
&=\sum_{s\geq 0}\partial_x^s\circ\xi^\alpha\circ\frac{\delta_s}{\delta v^\alpha},
\end{aligned}
$$

从而得证. □

我们还能得到演化向量场与变分导数之间的交换关系:

性质 1.22. 对于演化向量场 $(\xi^\alpha) \in \mathcal{E}$, 成立

$$\left[\mathrm{D}_\xi, \frac{\delta}{\delta v^\alpha}\right] = -\left(\mathcal{J}_\alpha^\beta\right)^\dagger \circ \frac{\delta}{\delta v^\beta}, \tag{1.43}$$

其中 $\mathcal{J}_\alpha^\beta := \sum_{s\geq 0} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial v^{\alpha,s}} \partial_x^s$.

证明. 由(1.39)–(1.42), 直接验证如下:

$$\begin{aligned}
\mathrm{D}_\xi \circ \frac{\delta}{\delta v^\alpha} &= \sum_{s\geq 0} \partial_x^s \circ \xi^\beta \circ \left(\frac{\delta_s}{\delta v^\beta} \circ \frac{\delta}{\delta v^\alpha}\right) \\
&= \sum_{s\geq 0} (-\partial_x)^s \circ \left(\xi^\beta \circ \frac{\partial}{\partial v^{\alpha,s}}\right) \circ \frac{\delta}{\delta v^\beta} \\
&= \sum_{s\geq 0} (-\partial_x)^s \circ \left(\frac{\partial}{\partial v^{\alpha,s}} \circ \xi^\beta - \frac{\partial \xi^\beta}{\partial v^{\alpha,s}}\right) \circ \frac{\delta}{\delta v^\beta} \\
&= \frac{\delta}{\delta v^\alpha} \circ \left(\xi^\beta \circ \frac{\delta}{\delta v^\beta}\right) - \left(\mathcal{J}_\alpha^\beta\right)^\dagger \circ \frac{\delta}{\delta v^\beta} \\
&= \frac{\delta}{\delta v^\alpha} \circ \left(\mathrm{D}_\xi - \sum_{s\geq 1} \partial_x^s \circ \xi^\beta \circ \frac{\delta_s}{\delta v^\beta}\right) - \left(\mathcal{J}_\alpha^\beta\right)^\dagger \circ \frac{\delta}{\delta v^\beta} \\
&= \frac{\delta}{\delta v^\alpha} \circ \mathrm{D}_\xi - \left(\mathcal{J}_\alpha^\beta\right)^\dagger \circ \frac{\delta}{\delta v^\beta},
\end{aligned}$$

从而得证. □

1.7 全微分与变分导数

微分 ∂_x 与变分导数 $\frac{\delta}{\delta v^\alpha}$ 是 $\mathcal{A}$ 上的两个重要的算子. 于是, 自然有如下两个基本问题:

- 对于 $f \in \mathcal{A}$, 何时存在 $g \in \mathcal{A}$ 使得 $f = \partial_x g$?

- 对于 $f_\alpha \in \mathcal{A}\,(1 \le \alpha \le n)$, 何时存在 $g \in \mathcal{A}$ 使得 $f_\alpha = \frac{\delta g}{\delta v^\alpha}$?

本小节我们考虑第一个问题. 注意到当 $f = \partial_x g$, 即 $\int f\,\mathrm{d}x = 0$ 时, $\frac{\delta f}{\delta v^\alpha} = 0$ 对任意 $1 \le \alpha \le n$ 都成立. 事实上, 在相差常数意义下, 此命题的逆命题也成立. 我们介绍 [7] 中给出的证明.

引理 1.23. 对任意 $f(\mathbf{v}) \in \mathcal{A}$, 成立

$$f(\mathbf{v}) - f(\mathbf{0}) = \sum_{s\ge 0} \partial_x^s \int_0^1 v^\alpha \frac{\delta_s f}{\delta v^\alpha}(t\mathbf{v})\,\mathrm{d}t. \tag{1.44}$$

注意这里的 $f(\mathbf{0}) := f|_{v^{\alpha,s}\mapsto 0}$ 是常数.

证明. 对于 $t \in [0,1]$, 引入 $\varphi_t\colon v^{\alpha,s} \mapsto t v^{\alpha,s}$, 则对任意 $f \in \mathcal{A}$, 在通常的函数复合意义下, 我们有 $f \circ \varphi_t \in \mathcal{A}$ 使得

$$\left(f \circ \varphi_t\right)(\mathbf{v}) = f(t\mathbf{v}).$$

容易验证, 对任意的 $f \in \mathcal{A}$, 算子 ∂_x 满足

$$\partial_x\left(f \circ \varphi_t\right) = \left(\partial_x f\right) \circ \varphi_t. \tag{1.45}$$

而在(1.42)中取 $\xi^\alpha = v^\alpha$, 我们有

$$\begin{aligned}
&f(\mathbf{v}) - f(\mathbf{0}) = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(f \circ \varphi_t\right)\,\mathrm{d}t\\
=&\sum_{s\ge 0}\int_0^1 v^{\alpha,s}\left(\frac{\partial f}{\partial v^{\alpha,s}} \circ \varphi_t\right)\,\mathrm{d}t = \sum_{s\ge 0}\int_0^1 \frac{1}{t}\left(v^{\alpha,s}\frac{\partial f}{\partial v^{\alpha,s}}\right) \circ \varphi_t\,\mathrm{d}t\\
=&\sum_{s\ge 0}\int_0^1 \frac{1}{t}\left(\partial_x^s\left(v^\alpha \frac{\delta_s f}{\delta v^\alpha}\right)\right) \circ \varphi_t\,\mathrm{d}t = \sum_{s\ge 0}\int_0^1 \frac{1}{t}\partial_x^s\left(\left(v^\alpha \frac{\delta_s f}{\delta v^\alpha}\right) \circ \varphi_t\right)\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

$$= \sum_{s\geq 0} \partial_x^s \int_0^1 v^\alpha \left(\frac{\delta_s f}{\delta v^\alpha} \circ \varphi_t \right) \mathrm{d}t = \sum_{s\geq 0} \partial_x^s \int_0^1 v^\alpha \frac{\delta_s f}{\delta v^\alpha}(t\mathbf{v})\,\mathrm{d}t,$$

从而得证. □

由此引理, 我们立刻有:

定理 1.24. *对于 $f \in \mathcal{A}$, 以下两者等价:*

1. $\frac{\delta f}{\delta v^\alpha} = 0$ *对任意* $1 \leq \alpha \leq n$ *都成立.*
2. *存在* $g \in \mathcal{A}$ *以及常数* $c \in \mathbb{C}$, *使得* $f = \partial_x g + c$.

证明. (2)⇒(1) 显然成立. 而当 (1) 成立时, 取 $c = f(\mathbf{0})$ 以及

$$g = \sum_{s\geq 0} \partial_x^s \int_0^1 v^\alpha \frac{\delta_{s+1} f}{\delta v^\alpha}(t\mathbf{v})\,\mathrm{d}t$$

即可. □

上述定理还有不借助高阶欧拉算子以及线积分的技巧性证法 [17].

定理1.24的另证. 只证 (1)⇒(2). 注意欧拉算子 $\frac{\delta}{\delta v^\alpha} : \mathcal{A}_d \to \mathcal{A}_d$ 是次数为 0 的齐次算子, 从而我们不妨 $f \in \mathcal{A}_d$ 是齐次微分多项式. 此时记 $f = f(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}^{(1)}, \ldots, \boldsymbol{v}^{(N)})$, 以及

$$f = f_\alpha v^{\alpha,N} + \tilde{f},$$

其中 $f_\alpha = f_\alpha(\boldsymbol{v}, \ldots, \boldsymbol{v}^{(N)}) \in \mathcal{A}_{d-N}$, $\tilde{f} = \tilde{f}(\boldsymbol{v}, \ldots, \boldsymbol{v}^{(N-1)}) \in \mathcal{A}_d$. 我们对 N 归纳. $N = 0$ 时易证. 对于 $N \geq 1$, 由

$$0 = \frac{\partial}{\partial v^{\beta,2N}} \frac{\delta f}{\delta v^\gamma} = \frac{\partial}{\partial v^{\beta,2N}} \sum_{s=0}^N (-\partial_x)^s \frac{\partial f}{\partial v^{\gamma,s}}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{s=0}^{N}(-1)^s\sum_{m=0}^{s}\binom{s}{m}\partial_x^{s-m}\left(\frac{\partial}{\partial v^{\beta,2N-m}}\frac{\partial f}{\partial v^{\gamma,s}}\right)\\
&= (-1)^N\frac{\partial^2 f}{\partial v^{\beta,N}\partial v^{\gamma,N}}
\end{aligned}
$$

可知, f 是关于变量 $v^{\alpha,N}$ 的至多 1 次的多项式, 换言之

$$
f_\alpha = f_\alpha(\boldsymbol{v},\ldots,\boldsymbol{v}^{(N-1)}).
$$

之后再注意到

$$
\begin{aligned}
0 &= \frac{\partial}{\partial v^{\beta,2N-1}}\frac{\delta f}{\delta v^\gamma} = \sum_{s=0}^{N}\frac{\partial}{\partial v^{\beta,2N-1}}(-\partial_x)^s\frac{\partial f}{\partial v^{\gamma,s}}\\
&= \sum_{s=0}^{N}(-1)^s\sum_{m=0}^{s}\binom{s}{m}\partial_x^{s-m}\frac{\partial}{\partial v^{\beta,2N-1-m}}\frac{\partial f}{\partial v^{\gamma,s}}\\
&= (-1)^{N-1}\frac{\partial^2 f}{\partial v^{\beta,N}\partial v^{\gamma,N-1}} + (-1)^N\left(N\partial_x\frac{\partial^2 f}{\partial v^{\beta,N}\partial v^{\gamma,N}} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^{\beta,N-1}\partial v^{\gamma,N}}\right)\\
&= (-1)^N\left(\frac{\partial^2 f}{\partial v^{\beta,N-1}\partial v^{\gamma,N}} - \frac{\partial^2 f}{\partial v^{\gamma,N-1}\partial v^{\beta,N}}\right)\\
&= (-1)^N\left(\frac{\partial f_\gamma}{\partial v^{\beta,N-1}} - \frac{\partial f_\beta}{\partial v^{\gamma,N-1}}\right),
\end{aligned}
$$

这表明存在齐次微分多项式 $\varphi\in\mathcal{A}_{d-1}$, 使得

$$
f_\alpha = \frac{\partial\varphi}{\partial v^{\alpha,N-1}}.
$$

之后对 $f-\partial_x\varphi$ 使用归纳假设即可. □

作为上述性质 (及其证明过程) 的应用, 我们能回答如下基本问题: 既然局部泛函空间 $\mathcal{F}$ 有自然的 $\mathcal{E}$-模结构, 那么在此意义下, 其**零化子**

$$
\mathrm{Ann}_{\mathcal{E}}(\mathcal{F}) := \{\xi\in\mathcal{E}\mid \mathrm{D}_\xi F = 0,\ \forall F\in\mathcal{F}\}
$$

是什么? 首先, 微分算子 $\partial_x = (v^{\alpha,1}) \in \mathcal{E}$ 显然在 $\mathrm{Ann}_{\mathcal{E}}(\mathcal{F})$ 之中. 事实上, 可以证明 $\mathrm{Ann}_{\mathcal{E}}(\mathcal{F})$ 中的元素只能是 ∂_x 的常数倍.

定理 1.25. *对于演化向量场 $\xi = (\xi^\alpha) \in \mathcal{E}$, 若对任意局部泛函 $F \in \mathcal{F}$ 都有 $\mathrm{D}_\xi F = 0$, 则存在常数 $c \in \mathbb{C}$ 使得*

$$\xi^\alpha = c v^{\alpha,1},$$

换言之 $\xi = c\partial_x$.

证明. 由(1.35)可知, 对任意 $f \in \mathcal{A}$ 都有

$$Z_\alpha := \frac{\delta}{\delta v^\alpha}\left(\xi^\beta \frac{\delta f}{\delta v^\beta}\right) = 0, \qquad 1 \le \alpha \le n. \tag{1.46}$$

不妨设 $\xi^\alpha \in \mathcal{A}_d$ 都是齐次微分多项式, 其形如

$$\xi^\alpha = \xi^\alpha_\beta(\boldsymbol{v}, \dots, \boldsymbol{v}^{(N)}) v^{\beta,N} + \tilde{\xi}^\alpha(\boldsymbol{v}, \cdots, \boldsymbol{v}^{(N-1)}),$$

并且对每个 α, $\{\xi^\alpha_\beta\}_{1\le\beta\le n}$ 不全为零.

取 $f = v^\gamma$ 可知 $\frac{\delta \xi^\gamma}{\delta v^\alpha} = 0$ 对任意 α, γ 都成立, 从而由定理1.24的证明过程可知 ξ^α 是关于变元 $\{v^{\beta,N}\}_{1\le\beta\le N}$ 的 1 次多项式, 即

$$\xi^\alpha_\beta = \xi^\alpha_\beta(\boldsymbol{v}, \dots, \boldsymbol{v}^{(N-1)}).$$

- 断言: N 是奇数. 这是因为, 当 $N = 2p$ 是偶数时, 固定指标 α, 在(1.46)中令 $f = \frac{(-1)^p}{2}(v^{\alpha,p})^2$, 则 $Z_\alpha = \frac{\delta}{\delta v^\alpha}\left(\xi^\alpha v^{\alpha,N}\right)$, 于是

$$\begin{aligned}0 = \frac{\partial Z_\alpha}{\partial v^{\beta,2N}} &= \sum_{s=0}^{N} \frac{\partial}{\partial v^{\beta,2N}}(-\partial_x)^s \frac{\partial}{\partial v^{\alpha,s}}\left(\xi^\alpha v^{\alpha,N}\right) \\ &= (-1)^N \frac{\partial^2}{\partial v^{\alpha,N}\partial v^{\beta,N}}\left(\xi^\alpha v^{\alpha,N}\right) = (-1)^N\left(\xi^\alpha_\beta + \xi^\alpha_\alpha \delta_{\alpha\beta}\right),\end{aligned}$$

  这表明 $\xi^\alpha_\beta = 0$ 对任意 $1 \le \beta \le n$ 都成立, 产生矛盾.

- 断言: 若 $\alpha \neq \beta$, 则 $\xi^\alpha_\beta = 0$. 取定指标 α, 记 $N = 2p+1 \geq 1$, 在(1.46)中令 $f = \frac{(-1)^{p+1}}{2}\left(v^{\alpha,p+1}\right)^2$, 则 $Z_\alpha = \frac{\delta}{\delta v^\alpha}\left(\xi^\alpha v^{\alpha,N+1}\right)$, 从而

$$
\begin{aligned}
0 = \frac{\partial Z_\alpha}{\partial v^{\beta,2N+1}} &= \sum_{s=0}^{N+1} \frac{\partial}{\partial v^{\beta,2N+1}}(-\partial_x)^s \frac{\partial}{\partial v^{\alpha,s}}\left(\xi^\alpha v^{\alpha,N+1}\right) \\
&= (-1)^N \left(\frac{\partial^2}{\partial v^{\beta,N+1}\partial v^{\alpha,N}} - (N+1)\partial_x \circ \frac{\partial^2}{\partial v^{\beta,N+1}\partial v^{\alpha,N+1}}\right. \\
&\qquad \left. - \frac{\partial^2}{\partial v^{\beta,N}\partial v^{\alpha,N+1}}\right)\left(\xi^\alpha v^{\alpha,N+1}\right) \\
&= (-1)^N \left(\xi^\alpha_\alpha \delta_{\alpha\beta} - \xi^\alpha_\beta\right),
\end{aligned}
$$

  从而当 $\alpha \neq \beta$ 时, $\xi^\alpha_\beta = 0$, 断言得证.

- 至此, 我们已知 ξ^α 形如

$$
\xi^\alpha = \psi^\alpha(\boldsymbol{v}, \ldots, \boldsymbol{v}^{(N-1)}) v^{\alpha,N} + \tilde{\xi}^\alpha(\boldsymbol{v}, \ldots, \boldsymbol{v}^{(N-1)}), \tag{1.47}
$$

  其中 $\psi^\alpha := \xi^\alpha_\alpha$, 且 $N = 2p+1$ 为奇数.

  断言: $\frac{\partial \psi^\alpha}{\partial v^{\beta,N-1}} = 0$, 即 $\psi^\alpha = \psi^\alpha(\boldsymbol{v}, \ldots, \boldsymbol{v}^{(N-2)})$. 这是因为, 在(1.46)中仍然令 $f = \frac{(-1)^{p+1}}{2}\left(v^{\alpha,p+1}\right)^2$, 则类似得到

$$
\begin{aligned}
0 = \frac{\partial Z_\alpha}{\partial v^{\beta,2N}} &= \frac{\partial}{\partial v^{\beta,2N}} \frac{\delta}{\delta v^\alpha}\left(\xi^\alpha v^{\alpha,N+1}\right) \\
&= \sum_{s=N-1}^{N+1} \sum_{m=N-1}^{s} (-1)^s \binom{s}{m} \partial_x^{s-m} \frac{\partial^2}{\partial v^{\beta,2N-m}\partial v^{\alpha,s}}\left(\xi^\alpha v^{\alpha,N+1}\right) \\
&= (-1)^{N+1}\left[(1+\delta_{\alpha\beta})\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial v^{\beta,N-1}} + \delta_{\alpha\beta}\partial_x \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial v^{\beta,N}}\right],
\end{aligned} \tag{1.48}
$$

  再对上式两边求导 $\frac{\partial}{\partial v^{\alpha,N}}$, 整理得

$$
0 = (-1)^{N+1}(1+2\delta_{\alpha\beta})\frac{\partial \psi^\alpha}{\partial v^{\beta,N-1}},
$$

  于是 $\frac{\partial \psi^\alpha}{\partial v^{\beta,N-1}} = 0$, 断言得证.

- 断言: $N = 1$. 首先在(1.48)中取指标 $\beta = \alpha$, 我们又得到

$$0 = 2\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial v^{\alpha,N-1}} + \partial_x \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial v^{\alpha,N}} = 2\frac{\partial \tilde{\xi}^\alpha}{\partial v^{\alpha,N-1}} + \partial_x \psi^\alpha. \tag{1.49}$$

固定指标 α, 在(1.46)中取 $f = \frac{(-1)^{p+1}}{6}\left(v^{\alpha,p+1}\right)^3$, 则相应的

$$Z_\alpha = \frac{1}{2}\frac{\delta}{\delta v^\alpha}\left(\xi^\alpha W^\alpha\right), \quad \text{其中 } W^\alpha := \partial_x^{p+1}\left(\left(v^{\alpha,p+1}\right)^2\right).$$

容易看出 $W^\alpha = W^\alpha(\boldsymbol{v}, \ldots, \boldsymbol{v}^{(N+1)})$, 并且直接计算得

$$\frac{\partial W^\alpha}{\partial v^{\alpha,N}} = (N+1)v^{\alpha,p+2}, \qquad \frac{\partial W^\alpha}{\partial v^{\alpha,N+1}} = 2v^{\alpha,p+1}. \tag{1.50}$$

现在, 假如 $N = 2p+1 \geq 3$, 即 $p \geq 1$, 则由(1.49)–(1.50)可得

$$\begin{aligned}
0 = \frac{\partial Z_\alpha}{\partial v^{\alpha,2N}} &= \frac{1}{2}\sum_{s=N-1}^{N+1}\sum_{m=N-1}^{s}(-1)^s\binom{s}{m} \\
&\quad \times \partial_x^{s-m}\frac{\partial^2}{\partial v^{\alpha,2N-m}\partial v^{\alpha,s}}\left(\xi^\alpha W^\alpha\right) \\
&= \frac{(-1)^{N+1}}{2}\left(2\frac{\partial^2}{\partial v^{\alpha,N-1}\partial v^{\alpha,N+1}} - \frac{\partial^2}{\left(\partial v^{\alpha,N}\right)^2}\right. \\
&\quad \left. + \partial_x \circ \frac{\partial^2}{\partial v^{\alpha,N}\partial v^{\alpha,N+1}}\right)\left(\xi^\alpha W^\alpha\right) \\
&= (-1)^{N+1}\left[v^{\alpha,p+1}\left(\partial_x\psi^\alpha + 2\frac{\partial\tilde{\xi}^\alpha}{\partial v^{\alpha,N-1}}\right) - Nv^{\alpha,p+2}\psi^\alpha\right] \\
&= (-1)^N N v^{\alpha,p+2}\psi^\alpha
\end{aligned}$$

[计算过程中用到了 $N \geq 3$, 请仔细检查], 这表明所有的 ψ^α 都为零, 矛盾. 从而断言得证.

- 至此, 由前文结果, 并注意 ξ^α 的齐次性, 易知 ξ^α 形如

$$\xi^\alpha = c^\alpha v^{\alpha,1}, \quad c^\alpha \in \mathbb{C}.$$

于是, 在(1.46)中任取 $f=f(\boldsymbol{v})\in\mathcal{A}_0$, 直接计算得

$$0=Z_\alpha=\frac{\delta}{\delta v^\alpha}\left(c^\beta v^{\beta,1}\frac{\partial f}{\partial v^\beta}\right)=\left(c^\beta-c^\alpha\right)\frac{\partial^2 f}{\partial v^\alpha\partial v^\beta}v^{\beta,1},$$

从而 $c^\beta=c^\alpha$.

定理得证. $\square$

1.8 全变分与变分双复形

现在考虑上一小节的第二个问题: 给定 $f_1,\ldots,f_n\in\mathcal{A}$, 何时存在 $g\in\mathcal{A}$ 使得 $f_\alpha=\frac{\delta g}{\delta v^\alpha}$? 类比多元微积分, 这好像是在问微分 1-形式何时是闭形式. 而对这个变分导数版本, 我们希望给出相应的庞加莱引理.

首先, 如果存在 $g\in\mathcal{A}$ 使得 $f_\alpha=\frac{\delta g}{\delta v^\alpha}$, 则由(1.40)可知

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial v^{\beta,k}}=\frac{\partial}{\partial v^{\beta,k}}\frac{\delta g}{\delta v^\alpha}=(-1)^k\frac{\delta_k}{\delta v^\alpha}\frac{\delta g}{\delta v^\beta}=(-1)^k\frac{\delta_k f_\beta}{\delta v^\alpha},$$

从而我们得到 g 的存在性的一个必要条件

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial v^{\beta,k}}=(-1)^k\frac{\delta_k f_\beta}{\delta v^\alpha}. \tag{1.51}$$

引入矩阵微分算子

$$L=(L_{\alpha\beta}):=\left(\sum_{k\geq 0}\frac{\partial f_\alpha}{\partial v^{\beta,k}}\partial_x^k\right)\in\mathcal{A}[\![\varepsilon\partial_x]\!]\otimes\mathbb{C}^{n\times n}, \tag{1.52}$$

并注意到

$$\begin{aligned}\left(L^\dagger\right)_{\alpha\beta}&=\sum_{k\geq 0}(-\partial_x)^k\circ\frac{\partial f_\beta}{\partial v^{\alpha,k}}\\&=\sum_{k\geq 0}(-1)^k\sum_{\ell=0}^{k}\binom{k}{\ell}\left(\partial_x^{k-\ell}\frac{\partial f_\beta}{\partial v^{\alpha,k}}\right)\circ\partial_x^\ell\end{aligned}$$

$$= \sum_{\ell \geq 0} \left(\sum_{k \geq \ell} (-1)^k \binom{k}{\ell} \left(\partial_x^{k-\ell} \frac{\partial f_\beta}{\partial v^{\alpha,k}} \right) \right) \partial_x^\ell = \sum_{\ell \geq 0} (-1)^\ell \frac{\delta_\ell f_\beta}{\delta v^\alpha} \partial_x^\ell,$$

由此可见相容性条件(1.51)等价于

$$L^\dagger = L. \tag{1.53}$$

事实上, 至少在 [7] 中就已经有:

定理 1.26. *给定 $f_1, f_2, \ldots, f_n \in \mathcal{A}$, 则以下等价:*

1. *存在 $g \in \mathcal{A}$ 使得 $f_\alpha = \frac{\delta g}{\delta v^\alpha}$.*
2. *对任意 $1 \leq \alpha, \beta \leq n$ 以及 $k \geq 0$, 成立(1.51).*
3. *矩阵微分算子 L (1.52)满足 $L^\dagger = L$.*

证明. 借助高阶欧拉算子的性质, 我们已在前文证明了 (1)⇒(2)⇔(3). 只需再证明 (2)⇒(1) 即可. 沿用引理1.23的证明方法及其中的记号, 并注意(1.42), (1.51), 我们得到

$$\begin{aligned}
f_\alpha &= \int_0^1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(t f_\alpha(t\mathbf{v}) \right) \mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(t f_\alpha \circ \varphi_t \right) \mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 f_\alpha \circ \varphi_t \, \mathrm{d}t + \sum_{s \geq 0} \int_0^1 \left(v^{\beta,s} \frac{\partial f_\alpha}{\partial v^{\beta,s}} \right) \circ \varphi_t \, \mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 f_\alpha \circ \varphi_t \, \mathrm{d}t + \sum_{s \geq 0} \int_0^1 \left[\partial_x^s \left(v^\beta \frac{\delta_s f_\alpha}{\delta v^\beta} \right) \right] \circ \varphi_t \, \mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 f_\alpha \circ \varphi_t \, \mathrm{d}t + \sum_{s \geq 0} \partial_x^s \int_0^1 \left(v^\beta \frac{\delta_s f_\alpha}{\delta v^\beta} \right) \circ \varphi_t \, \mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 f_\alpha \circ \varphi_t \, \mathrm{d}t + \sum_{s \geq 0} (-\partial_x)^s \int_0^1 \left(v^\beta \frac{\partial f_\beta}{\partial v^{\alpha,s}} \right) \circ \varphi_t \, \mathrm{d}t
\end{aligned}$$

$$= \sum_{s\geq 0}(-\partial_x)^s \frac{\partial}{\partial v^{\alpha,s}} \int_0^1 v^\beta \left(f_\beta \circ \varphi_t\right) \mathrm{d}x = \frac{\delta}{\delta v^\alpha} \int_0^1 v^\beta f_\beta(t\mathbf{v})\,\mathrm{d}t.$$

由此可见, 只需要取

$$g := \int_0^1 v^\beta f_\beta(t\mathbf{v})\,\mathrm{d}t$$

即可. 定理得证. □

注记 **1.27.** 不借助高阶欧拉算子, 我们还可以由演化向量场与局部泛函的基本性质再次证明 (1)⇒(3). 若存在 $g \in \mathcal{A}$ 使得 $f_\alpha = \frac{\delta g}{\delta v^\alpha}$, 则对于任意演化向量场 $(\xi^\alpha), (\eta^\alpha) \in \mathcal{E}$, 我们有

$$\begin{aligned} \mathrm{D}_\xi\left(\mathrm{D}_\eta \int g\,\mathrm{d}x\right) &= \mathrm{D}_\xi \int \eta^\alpha \frac{\delta g}{\delta v^\alpha}\,\mathrm{d}x \\ &= \int \Big((\mathrm{D}_\xi \eta^\alpha) f_\alpha + \eta^\alpha (\mathrm{D}_\xi f_\alpha)\Big)\,\mathrm{d}x, \end{aligned} \tag{1.54}$$

同理还有

$$\mathrm{D}_\eta\left(\mathrm{D}_\xi \int g\,\mathrm{d}x\right) = \int \Big((\mathrm{D}_\eta \xi^\alpha) f_\alpha + \xi^\alpha (\mathrm{D}_\eta f_\alpha)\Big)\,\mathrm{d}x. \tag{1.55}$$

而另一方面, 考虑交换子 $[\xi,\eta] \in \mathcal{E}$ 的性质(1.34), 有

$$\mathrm{D}_{[\xi,\eta]} \int g\,\mathrm{d}x = \int \left(\mathrm{D}_\xi \eta^\alpha - \mathrm{D}_\eta \xi^\alpha\right) f_\alpha\,\mathrm{d}x.$$

将(1.54)–(1.55)两式相减, 并与上式比较, 可知

$$\int \xi^\alpha \mathrm{D}_\eta f_\alpha\,\mathrm{d}x = \int \eta^\alpha \mathrm{D}_\xi f_\alpha\,\mathrm{d}x \tag{1.56}$$

对任意的 $\xi, \eta \in \mathcal{E}$ 都成立. 而

$$\int \xi^\alpha \mathrm{D}_\eta f_\alpha\,\mathrm{d}x = \int \xi^\alpha \sum_{s\geq 0} \frac{\partial f_\alpha}{\partial v^{\beta,s}} \left(\partial_x^s \eta^\beta\right)\,\mathrm{d}x = \int \xi^\alpha L_{\alpha\beta}\eta^\beta\,\mathrm{d}x,$$

其中矩阵微分算子 L 见(1.52). 类似处理(1.56)的右边, 然后得到

$$\int \xi^{\alpha}\left(L-L^{\dagger}\right)_{\alpha\beta}\eta^{\beta}\,\mathrm{d}x=0.$$

由 ξ,η 的任意性, 以及引理1.2, 定理1.9, 立刻得到 $L-L^{\dagger}=0$, 从而完成证明.

定理1.24与定理1.26应该是某种上同调问题, 它是通常的 de Rham 上同调的一种变分版本. 下面我们来建立这种所谓 “变分上同调”.

定义 1.28. 对于微分多项式环 $\mathcal{A}$, 引入如下:

1. $\mathbb{C}$-线性空间 $\mathcal{A}^{0,0}:=\mathcal{A}/\mathbb{C}$.
2. $\mathbb{C}$-线性空间 $\mathcal{A}^{0,1}:=\{f\,\mathrm{d}x\,|\,f\in\mathcal{A}^{0,0}\}$.
3. 线性算子 $\mathrm{d}\colon \mathcal{A}^{0,0}\to\mathcal{A}^{0,1}$ 如下:

$$\mathrm{d}f:=(\varepsilon\partial_x f)\,\mathrm{d}x,\qquad \forall f\in\mathcal{A}^{0,0}.$$

4. $\mathbb{C}$-线性空间 $\mathcal{B}^{0}:=\mathcal{A}^{0,1}/\mathrm{d}\mathcal{A}^{0,0}$, 相应的商映射记作

$$\begin{aligned}\int:\mathcal{A}^{0,1}&\to\mathcal{B}^{0}\\ f\,\mathrm{d}x&\mapsto\int f\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

注意 $\mathcal{B}^0$ 是局部泛函空间 $\mathcal{F}$ (1.7)的商空间. 此外, 由定义可知

$$0\longrightarrow\mathcal{A}^{0,0}\xrightarrow{\mathrm{d}}\mathcal{A}^{0,1}\xrightarrow{\int}\mathcal{B}^{0}\longrightarrow 0\tag{1.57}$$

是短正合列.

定义 1.29. 对于 $k \geq 0$, 记 $\mathcal{A}^{k,0}$ 为由

$$\left\{ f\delta v^{\alpha_1,s_1}\cdots\delta v^{\alpha_k,s_k} \,\middle|\, \begin{array}{c} f\in\mathcal{A}^{0,0},\ 1\leq\alpha_i\leq n \\ s_i\geq 0 \end{array} \right\} \tag{1.58}$$

所张成的 $\mathbb{C}$-线性空间. 其中 $\{\delta v^{\alpha,s}\}$ 为形式变元, 满足符号律

$$\delta v^{\alpha,s}\delta v^{\beta,m} = -\delta v^{\beta,m}\delta v^{\alpha,s}.$$

按往常习惯, 我们简记 $\delta v^{\alpha} := \delta v^{\alpha,0}$. 按照运算律

$$\partial_x\left(\delta v^{\alpha,s}\right) = \delta v^{\alpha,s+1} \tag{1.59}$$

以及熟悉的莱布尼茨法则, 可以将 ∂_x 延拓为 $\mathcal{A}^{k,0}$ 上的线性算子. 然后我们令

$$\mathcal{A}^{k,1} := \left\{\omega\wedge \mathrm{d}x \,\middle|\, \omega\in\mathcal{A}^{k,0}\right\}, \tag{1.60}$$

以及全微分

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\colon \mathcal{A}^{k,0} &\to \mathcal{A}^{k,1} \\ \omega &\mapsto \mathrm{d}x\wedge\left(\varepsilon\partial_x\omega\right). \end{aligned} \tag{1.61}$$

这里的形式变元 $\mathrm{d}x$ 也视为奇变量, 它满足符号律

$$\mathrm{d}x\wedge\delta v^{\alpha,s} = -\delta v^{\alpha,s}\wedge\mathrm{d}x,$$

我们常常偷懒地将外积符号 $\wedge$ 省略. 接下来, 类似地引入

$$\mathcal{B}^k := \mathcal{A}^{k,1}/\,\mathrm{d}\mathcal{A}^{k,0}, \tag{1.62}$$

相应的商映射记为 $\int\colon \mathcal{A}^{k,1}\to\mathcal{B}^k$, 则有短正合列

$$0 \longrightarrow \mathcal{A}^{k,0} \xrightarrow{\mathrm{d}} \mathcal{A}^{k,1} \xrightarrow{\int} \mathcal{B}^k \longrightarrow 0. \tag{1.63}$$

我们将 $\mathcal{B}^k$ 中的元素称为**变分 k-形式**.

例 1.30. 容易验证, 变分 1-形式 $\omega \in \mathcal{B}^1$ 可唯一地表示为

$$\omega = \int \omega_\alpha \delta v^\alpha \, \mathrm{d}x, \qquad \omega_\alpha \in \mathcal{A}^{0,0}. \tag{1.64}$$

于是我们常用 $\mathcal{A}^{0,0} := \mathcal{A}/\mathbb{C}$ 中的 n 元组 (ω_α) 来表示变分 1-形式.

例 1.31. 容易验证, 变分 2-形式 $\omega \in \mathcal{B}^2$ 可以唯一地表示为

$$\omega = \frac{1}{2} \int \delta v^\alpha \left(\sum_{s \geq 0} \varepsilon^s M_{s;\alpha\beta} \delta v^{\beta,s} \right) \mathrm{d}x, \quad M_{s;\alpha\beta} \in \mathcal{A}^{0,0}.$$

其中矩阵微分算子

$$M = (M_{\alpha\beta}) = \left(\sum_{s \geq 0} \varepsilon^s M_{s;\alpha\beta} \partial_x^s \right) \in \mathcal{A}^{0,0}[\![\varepsilon \partial_x]\!] \otimes \mathbb{C}^{n \times n} \tag{1.65}$$

满足 $M = -M^\dagger$. 即, 变分 2-形式可以用反自伴的矩阵微分算子 M 来表示, 即 $\omega = \frac{1}{2} \int \delta v^\alpha \left(M_{\alpha\beta} \delta v^\beta \right) \mathrm{d}x$.

定义 1.32. *(全变分).* 对于 $f \in \mathcal{A}^{0,0}$, 引入

$$\delta f := \sum_{s \geq 0} \frac{\partial f}{\partial v^{\alpha,s}} \delta v^{\alpha,s} \in \mathcal{A}^{1,0}, \tag{1.66}$$

这定义了算子 $\delta \colon \mathcal{A}^{0,0} \to \mathcal{A}^{1,0}$.

而对于 $\omega = f \delta v^{\alpha_1,s_1} \cdots \delta v^{\alpha_k,s_k} \in \mathcal{A}^{k,0}$, 令

$$\delta \omega = (\delta f) \delta v^{\alpha_1,s_1} \cdots \delta v^{\alpha_k,s_k} \in \mathcal{A}^{k+1,0},$$

这定义了算子 $\delta\colon \mathcal{A}^{k,0}\to\mathcal{A}^{k+1,0}$. 再按照

$$\delta(\mathrm{d}x)=0$$

也可类似定义算子 $\delta\colon \mathcal{A}^{k,1}\to\mathcal{A}^{k+1,1}$.

性质 1.33. *记号承上, 则*

1. *我们有上链复形 $(\mathcal{A}^{\bullet,0},\delta)$:*

$$0\longrightarrow\mathcal{A}^{0,0}\xrightarrow{\delta}\mathcal{A}^{1,0}\xrightarrow{\delta}\mathcal{A}^{2,0}\longrightarrow\cdots,$$

同样地, $(\mathcal{A}^{\bullet,1},\delta)$ 也是上链复形. 换言之, $\delta\circ\delta=0$.

2. *以下图表*

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{A}^{k,0} \arrow[r, "\mathrm{d}"] \arrow[d, "\delta"'] & \mathcal{A}^{k,1} \arrow[d, "\delta"'] \\
\mathcal{A}^{k+1,0} \arrow[r, "\mathrm{d}"] & \mathcal{A}^{k+1,1}
\end{tikzcd}$$

反交换. 也就是说, 在此图表中

$$\delta\circ\mathrm{d}=-\,\mathrm{d}\circ\delta. \tag{1.67}$$

证明. 直接计算验证即可, 细节从略. □

(1.67)表明, 算子 δ 可以自然地作用在商空间 $\mathcal{B}^k=\mathcal{A}^{k,1}/\mathrm{d}\mathcal{A}^{k,0}$ 上, 使得图表

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{A}^{k,1} \arrow[r, "\int"] \arrow[d, "\delta"'] & \mathcal{B}^{k} \arrow[d, "\delta"'] \\
\mathcal{A}^{k+1,1} \arrow[r, "\int"] & \mathcal{B}^{k+1}
\end{tikzcd}$$

交换, 即 $\delta\circ\int=\int\circ\delta$.

例 1.34. 对于变分 0-形式 $F=\int f\,\mathrm{d}x\in\mathcal{B}^0$, 我们有

$$\begin{aligned}\delta F&=\int\delta f\,\mathrm{d}x=-\int\mathrm{d}x\sum_{s\geq0}\frac{\partial f}{\partial v^{\alpha,x}}\delta v^{\alpha,s}\\&=-\int\mathrm{d}x\sum_{s\geq0}\frac{\partial f}{\partial v^{\alpha,s}}\partial_x^s(\delta v^\alpha)=-\int\mathrm{d}x\sum_{s\geq0}(-\partial_x)^s\frac{\partial f}{\partial v^{\alpha,s}}\delta v^\alpha\\&=\int\delta v^\alpha\frac{\delta f}{\delta v^\alpha}\,\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

这再次得到(1.22). 结合例1.30, 我们可将 δF 简记为

$$(\delta F)_\alpha=\frac{\delta F}{\delta v^\alpha}.$$

例 1.35. 对于变分 1-形式 $\omega=(f_\alpha)=\int f_\alpha\delta v^\alpha\,\mathrm{d}x$, 容易验证

$$\begin{aligned}\delta\omega&=\int\sum_{s\geq0}\frac{\partial f_\alpha}{\partial v^{\beta,s}}\delta v^{\beta,s}\delta v^\alpha\,\mathrm{d}x=\int\left(L_{\alpha\beta}\delta v^\beta\right)\delta v^\alpha\,\mathrm{d}x\\&=-\int\delta v^\alpha L_{\alpha\beta}\delta v^\beta\,\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

其中矩阵微分算子 $L=(L_{\alpha\beta})$ 见(1.52). 此外, 在上式最右边调换指标 α,β, 进一步整理得到

$$\delta\omega=-\frac{1}{2}\int\delta v^\alpha\left(L-L^\dagger\right)_{\alpha\beta}\delta v^\beta\,\mathrm{d}x.\tag{1.68}$$

与例1.31中的算子 M 对照, 有 $M=L^\dagger-L$.

定义了全变分算子 δ 之后, 我们立刻有如下图表:

$$
\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & \mathcal{A}^{0,0} \arrow[r, "\mathrm{d}"] \arrow[d, "\delta"'] & \mathcal{A}^{0,1} \arrow[r, "\int"] \arrow[d, "\delta"'] & \mathcal{B}^{0} \arrow[r] \arrow[d, "\delta"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathcal{A}^{1,0} \arrow[r, "\mathrm{d}"] \arrow[d, "\delta"'] & \mathcal{A}^{1,1} \arrow[r, "\int"] \arrow[d, "\delta"'] & \mathcal{B}^{1} \arrow[r] \arrow[d, "\delta"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathcal{A}^{2,0} \arrow[r, "\mathrm{d}"] \arrow[d, "\delta"'] & \mathcal{A}^{2,1} \arrow[r, "\int"] \arrow[d, "\delta"'] & \mathcal{B}^{2} \arrow[r] \arrow[d, "\delta"'] & 0 \\
 & \vdots & \vdots & \vdots &
\end{tikzcd}
$$

此乃**变分双复形**. 容易看出, 定理1.24与定理1.26分别等价于

$$\mathrm{H}^0(\mathcal{B}^\bullet;\delta)=0,\qquad \mathrm{H}^1(\mathcal{B}^\bullet;\delta)=0,$$

还真是上同调. 其实, 人们早已有了一般的结果:

定理 1.36. 当底流形 $M=\mathbb{R}^n$ 时, 上述变分双复形的各行各列均正合. 特别地, $\mathrm{H}^k(\mathcal{B}^\bullet;\delta)=0$, $k\geq 0$.

证明. 这里从略, 详见 [6]. □

2. 哈密顿结构与超变量演算

2.1 变分 2-矢量与哈密顿结构

按传统的理解 (见前文注记1.10), 局部泛函 $F = \int f \,\mathrm{d}x \in \mathcal{F}$ 被想象成圈空间 $\mathscr{L}(M) = C^\infty(S^1, M)$ 上的函数. 类比有限维泊松几何中**泊松括号**的概念, 我们企图谈论无穷维流形 $\mathscr{L}(M)$ 上的函数之间的泊松括号. 为此, 首先注意到

$$\{v^\alpha(x)\}_{1\le\alpha\le n,\, x\in S^1}$$

是 $\mathscr{L}(M)$ 上的一组 "局部坐标", 从而我们所希望的无穷维版本的 "泊松括号"$\{,\}$ 应该满足: 对任意 $F, G \in \mathcal{F}$,

$$\begin{aligned}
\{F,G\} &= \left\{\int_{S^1} f(x)\,\mathrm{d}x, \int_{S^1} g(y)\,\mathrm{d}y\right\} = \iint_{S^1\times S^1} \{f(x), g(y)\}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= \iint_{S^1\times S^1} \sum_{s,s'\ge 0} \frac{\partial f}{\partial v^{\alpha,s}(x)} \frac{\partial g}{\partial v^{\beta,s'}(y)} \{v^{\alpha,s}(x), v^{\beta,s'}(y)\}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= \iint_{S^1\times S^1} \sum_{s,s'\ge 0} \frac{\partial f}{\partial v^{\alpha,s}(x)} \frac{\partial g}{\partial v^{\beta,s'}(y)} \partial_x^s \partial_y^{s'} \{v^\alpha(x), v^\beta(y)\}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= \iint_{S^1\times S^1} \frac{\delta f}{\delta v^\alpha}(x) \frac{\delta g}{\delta v^\beta}(y) \{v^\alpha(x), v^\beta(y)\}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y. \qquad (2.1)
\end{aligned}$$

我们再引入**局部性假设**: $\{v^\alpha(x), v^\beta(y)\}$ 仅在 $x = y$ 处非平凡, 即

$$\{v^\alpha(x), v^\beta(y)\} = \sum_{\ell\ge 0} P_\ell^{\alpha\beta}(x)\delta^{(\ell)}(x-y), \qquad (2.2)$$

其中 $P_\ell^{\alpha\beta} \in \mathcal{A}$, $P_\ell^{\alpha\beta}(x) = P_\ell^{\alpha\beta}(\mathbf{v}(x))$, 而 $\delta(\cdot)$ 是 **Dirac delta 函数**. 于是

$$\{F,G\} = \iint_{S^1\times S^1} \frac{\delta f}{\delta v^\alpha}(x) \sum_{\ell\ge 0} P_\ell^{\alpha\beta}(x) \frac{\delta g}{\delta v^\beta}(y) (-\partial_y)^\ell \delta(x-y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$
\begin{aligned}
&= \iint_{S^1\times S^1} \frac{\delta f}{\delta v^\alpha}(x) \sum_{\ell\geq 0} P_\ell^{\alpha\beta}(x) \left(\partial_y^\ell \frac{\delta g}{\delta v^\beta}\right)(y)\cdot \delta(x-y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= \int_{S^1} \frac{\delta f}{\delta v^\alpha}\left(\mathcal{P}^{\alpha\beta}\frac{\delta g}{\delta v^\beta}\right)\mathrm{d}x,
\end{aligned}
$$

其中矩阵微分算子

$$
\mathcal{P} = (\mathcal{P}^{\alpha\beta}) = \left(\sum_{\ell\geq 0} \mathcal{P}_\ell^{\alpha\beta}\partial_x^\ell\right) \in \mathcal{A}[\![\varepsilon\partial_x]\!]\otimes\mathbb{C}^{n\times n}. \tag{2.3}
$$

而反对称性 $\{F,G\} = -\{G,F\}$ 表明 $\mathcal{P}$ 是反自伴的: $\mathcal{P} = -\mathcal{P}^\dagger$.

基于以上传统的理解, 我们引入:

定义 2.1. 对于 $P\in \mathrm{Hom}(\wedge^2\mathcal{F},\mathcal{F})$, 如果存在矩阵微分算子

$$
\mathcal{P} = (\mathcal{P}^{\alpha\beta}) \in \mathcal{A}[\![\varepsilon\partial_x]\!]\otimes\mathbb{C}^{n\times n}
$$

使得 $\mathcal{P} = -\mathcal{P}^\dagger$, 且对任意 $F, G\in\mathcal{F}$ 都有

$$
P(F,G) = \int \frac{\delta F}{\delta v^\alpha}\left(\mathcal{P}^{\alpha\beta}\frac{\delta G}{\delta v^\beta}\right)\mathrm{d}x, \tag{2.4}
$$

则称 P 为**局部 2-矢量**.

所有的局部 2-矢量构成的线性空间记为 $\mathcal{V}^2_{\mathrm{loc}}$. 由于表达式(2.4)当中出现了变分导数, 从而局部 2-矢量也被叫做**变分 2-矢量**. 此外, 按照有限维泊松几何的习惯, 我们更喜欢用括号 $\{,\}$ 来表示局部 2-矢量:

$$
\{F,G\} := P(F,G). \tag{2.5}
$$

定义 2.2. 对于 $\{,\} \in \mathcal{V}^2_{\mathrm{loc}}$, 如果 ***Jacobi*** **恒等式**

$$\{F, \{G, H\}\} + \{G, \{H, F\}\} + \{H, \{F, G\}\} = 0, \tag{2.6}$$

对任意 $F, G, H \in \mathcal{F}$ 都成立, 则称 $\{,\}$ 是**哈密顿结构**.

哈密顿结构, 也就是"无穷维版本的泊松括号", 是可积系统中的重要研究对象. 我们将在后文给出哈密顿结构的若干具体例子.

注记 **2.3.** 有 3 种常见的方式来表示变分 2-矢量(2.4):

1. 传统的 delta 函数表示: (2.2);
2. 矩阵微分算子表示: (2.3);
3. 超变量表示: 将在后文介绍, 详见后文(2.54).

然而危险的是, 上述定义是良定的吗? 定义式(2.4)依赖于局部坐标 $\boldsymbol{v}$ 的选取; 而在另一组局部坐标 $\boldsymbol{u}$ 下, 它也能表示为反自伴的矩阵微分算子吗? 为打消此疑虑, 只需注意:

定理 2.4. 对于(2.4)中的 $P = \{,\} \in \mathcal{V}^2_{\mathrm{loc}}$, 则在新的局部坐标 $\boldsymbol{u}$ 下成立

$$\{F, G\} = \int \frac{\delta F}{\delta u^\alpha} \left(\tilde{\mathcal{P}}^{\alpha\beta} \frac{\delta G}{\delta u^\beta} \right),$$

其中矩阵微分算子 $\tilde{\mathcal{P}}$ 满足

$$\tilde{\mathcal{P}} = \mathcal{J} \mathcal{P} \mathcal{J}^\dagger, \tag{2.7}$$

这里的 $\mathcal{J}$ 是 $\boldsymbol{u}$ 与 $\boldsymbol{v}$ 之间的 *Jacobi* 算子矩阵(1.28).

证明. 对任意 $F, G \in \mathcal{F}$, 由(1.29)可知

$$
\begin{aligned}
\{F, G\} &= \int \frac{\delta F}{\delta v^\alpha}\left(\mathcal{P}^{\alpha\beta}\frac{\delta G}{\delta v^\beta}\right) \mathrm{d}x \\
&= \int \left((\mathcal{J}_\alpha^{\alpha'})^\dagger \frac{\delta F}{\delta u^{\alpha'}}\right)\left((\mathcal{P}^{\alpha\beta}\circ(\mathcal{J}_\beta^{\beta'})^\dagger)\frac{\delta G}{\delta u^{\beta'}}\right) \mathrm{d}x \\
&= \int \frac{\delta F}{\delta u^{\alpha'}}\left((\mathcal{J}_\alpha^{\alpha'}\circ\mathcal{P}^{\alpha\beta}\circ(\mathcal{J}_\beta^{\beta'})^\dagger)\frac{\delta G}{\delta u^{\beta'}}\right) \mathrm{d}x \\
&= \int \frac{\delta F}{\delta u^{\alpha'}}\left((\mathcal{J}\mathcal{P}\mathcal{J}^\dagger)^{\alpha'\beta'}\frac{\delta G}{\delta u^{\beta'}}\right) \mathrm{d}x,
\end{aligned}
$$

从而得证. □

本小节最后, 我们再回答另一个危险的问题: 既然 $P \in \mathcal{V}^2_{\mathrm{loc}}$ 能够用矩阵微分算子 $\mathcal{P} = (\mathcal{P}^{\alpha\beta})$ 来表示(2.4), 那这种表示方法是否唯一? 答案是肯定的, 因为我们有如下命题:

性质 2.5. 对于矩阵微分算子 $\mathcal{P} = (\mathcal{P}^{\alpha\beta}) \in \mathcal{A}[\![\varepsilon\partial_x]\!] \otimes \mathbb{C}^{n\times n}$, 如果 $\mathcal{P}^\dagger = -\mathcal{P}$, 并且对任意 $F, G \in \mathcal{F}$ 都有

$$
\int \frac{\delta F}{\delta v^\alpha}\left(\mathcal{P}^{\alpha\beta}\frac{\delta G}{\delta v^\beta}\right) \mathrm{d}x = 0,
$$

则 $\mathcal{P} = 0$. 进而有线性空间的同构

$$
\mathcal{V}^2_{\mathrm{loc}} \cong \left\{\mathcal{P} \in \mathcal{A}[\![\varepsilon\partial_x]\!] \otimes \mathbb{C}^{n\times n} \,\middle|\, \mathcal{P}^\dagger = -\mathcal{P}\right\}. \tag{2.8}
$$

证明. 给定 $G \in \mathcal{F}$, 注意 $X^\alpha := \mathcal{P}^{\alpha\beta}\frac{\delta G}{\delta v^\beta}$ 给出了演化向量场 $(X^\alpha) \in \mathcal{E}$. 从而由定理1.25可知, 对任意 $G \in \mathcal{F}$, 存在常数 $c \in \mathbb{C}$ 使得

$$
\mathcal{P}^{\alpha\beta}\frac{\delta G}{\delta v^\beta} = c v^{\alpha,1}, \quad 1 \le \alpha \le n. \tag{2.9}
$$

不妨设算子 $\mathcal{P}^{\alpha\beta}$ 是齐次的, 即 $\mathcal{P}$ 形如

$$\mathcal{P}^{\alpha\beta}=\sum_{\ell=0}^{d}\mathcal{P}_{\ell}^{\alpha\beta}\partial_x^{\ell}, \tag{2.10}$$

其中 $d\geq 0$ 为 $\mathcal{P}$ 的次数, $\mathcal{P}_{\ell}^{\alpha\beta}\in\mathcal{A}_{d-\ell}$. 取定正整数 $N>d+1$, 取定指标 β, 在(2.9)中取 $G=\frac{1}{2}\int v^{\beta}v^{\beta,2N}\,\mathrm{d}x$ 可得

$$\sum_{\ell=0}^{d}\mathcal{P}_{\ell}^{\alpha\beta}v^{\beta,2N+\ell}=c^{\beta}v^{\alpha,1},$$

其中 $c^{\beta}\in\mathbb{C}$ 为常数. 比较 jet 变量 $v^{2N+\ell}$ 的系数立刻得到 $\mathcal{P}_{\ell}^{\alpha\beta}=0$ 对所有 $0\leq\ell\leq d$ 都成立, 从而 $\mathcal{P}=0$. □

此外, 注意上述证明过程并没有用到条件 $\mathcal{P}^{\dagger}=-\mathcal{P}$.

2.2 变分多矢量与 Nijenhuis-Richardson 括号

给定一个具体的矩阵微分算子(2.3), 验证它所对应的变分 2-矢量是哈密顿结构, 即验证 Jacobi 恒等式(2.6)成立, 一般来说十分困难. 为解决此问题, 我们考虑引入更高效的计算工具.

首先将局部 2-矢量的概念推广到一般情形:

定义 2.6. 对于 $p\geq 0$, 称 $\mathcal{V}^p:=\mathrm{Hom}(\wedge^p\mathcal{F},\mathcal{F})$ 中的元素为**广义 p-矢量**. 对于广义 p-矢量 $P\in\mathcal{V}^p$, 如果其在 $\wedge^p\mathcal{F}$ 上的作用形如

$$\begin{aligned}&P(F_1,\dots,F_p)\\ &=\int\sum_{s_1,\dots,s_p\geq 0}P_{s_1,\dots,s_p}^{\alpha_1,\dots,\alpha_p}\left(\partial_x^{s_1}\frac{\delta F_1}{\delta v^{\alpha_1}}\right)\cdots\left(\partial_x^{s_p}\frac{\delta F_p}{\delta v^{\alpha_p}}\right)\mathrm{d}x,\end{aligned} \tag{2.11}$$

其中 $P_{s_1,\dots,s_p}^{\alpha_1,\dots,\alpha_p}\in\mathcal{A}$, 则称 P 为**局部 p-矢量**或者**变分 p-矢量**. 局部

p-矢量之全体构成的线性空间记作 $\mathcal{V}^p_{\text{loc}}$.

$P \in \mathcal{V}^p_{\text{loc}}$ 的 p 重反对称性表明

$$P(F_1, \dots, F_p) = \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in S_p} (-1)^{|\sigma|} P(F_{\sigma(1)}, \dots, F_{\sigma(p)}),$$

从而可以额外要求(2.11)中的系数 $P^{\alpha_1,\dots,\alpha_p}_{s_1,\dots,s_p} \in \mathcal{A}$ 满足反对称条件

$$P^{\alpha_{\sigma(1)},\dots,\alpha_{\sigma(p)}}_{s_{\sigma(1)},\dots,s_{\sigma(p)}} = (-1)^{|\sigma|} P^{\alpha_1,\dots,\alpha_p}_{s_1,\dots,s_p}, \quad \forall\, \sigma \in S_p. \tag{2.12}$$

按习惯, 我们再记

$$\mathcal{V}^\bullet := \bigoplus_{p \geq 0} \mathcal{V}^p, \quad \mathcal{V}^\bullet_{\text{loc}} := \bigoplus_{p \geq 0} \mathcal{V}^p_{\text{loc}},$$

分别称为**广义多矢量**空间以及**变分多矢量**空间.

<u>例 **2.7.**</u> 显然 $\mathcal{V}^0 = \mathcal{V}^0_{\text{loc}} = \mathcal{F}$. 此外, 我们还有:

1. 对于 $P \in \mathcal{V}^1_{\text{loc}}$, 分部积分可将(2.11)改写为

$$P(F) = \int \sum_{s \geq 0} P^\alpha_s \left(\partial^s_x \frac{\delta F}{\delta v^\alpha} \right) \mathrm{d}x = \int \left(\sum_{s \geq 0} (-\partial_x)^s P^\alpha_s \right) \frac{\delta F}{\delta v^\alpha} \,\mathrm{d}x,$$

   从而变分 1-矢量总是来自某个演化向量场(1.35). 这给出了线性满射 $\mathcal{E} \to \mathcal{V}^1_{\text{loc}}$. 而定理1.25表明 $\ker(\mathcal{E} \to \mathcal{V}^1_{\text{loc}}) = \mathbb{C}\partial_x$, 因此有

$$\mathcal{V}^1_{\text{loc}} \cong \mathcal{E}/\varepsilon\partial_x. \tag{2.13}$$

2. 同样使用分部积分, 易知定义2.1 是定义2.6在 $p = 2$ 时的特殊情况. 从而依然有(2.8)的矩阵微分算子表示.

广义多矢量空间 $\mathcal{V}^\bullet$ 具有自然的**分次李代数**结构, 并且使得 $\mathcal{V}^\bullet_{\mathrm{loc}}$ 是它的子代数. 下面来介绍这个代数结构. 一般地, 对于任意给定的 $\mathbb{C}$-线性空间 V, 以及整数 $p \geq 0$, 记

$$\mathrm{Alt}^p_V := \mathrm{Hom}(\wedge^p V, V), \tag{2.14}$$

即 V 上的 V-值反对称 p 重线性映射之全体. 再记

$$\mathrm{Alt}^\bullet_V := \bigoplus_{p\geq 0} \mathrm{Alt}^p_V\,.$$

特别地, $\mathrm{Alt}^0_V = V$, $\mathrm{Alt}^1_V = \mathrm{End}(V)$. 则我们有如下代数学结论:

定理 2.8. *([18]). 记号承上, 则存在唯一的双线性映射*

$$\{\,,\,\}\colon\ \mathrm{Alt}^\bullet_V \times \mathrm{Alt}^\bullet_V \to \mathrm{Alt}^\bullet_V, \tag{2.15}$$

使得对任意 $p,q,r \geq 0$, $P \in \mathrm{Alt}^p_V$, $Q \in \mathrm{Alt}^q_V$, $R \in \mathrm{Alt}^r_V$ 都成立

1. *齐次性: $\{P,Q\} \in \mathrm{Alt}^{p+q-1}_V$, 其中特别规定 $\mathrm{Alt}^{-1}_V = 0$.*
2. *分次反交换律: $\{P,Q\} = -(-1)^{(p-1)(q-1)}\{Q,P\}$.*
3. *缩并律: 对任意 $f_1,\ldots,f_p \in V$, 成立*

$$\{P,f_1\}(f_2,\ldots,f_p) = P(f_1,f_2,\cdots,f_p). \tag{2.16}$$

4. *分次 Jacobi 恒等式:*

$$\{\{P,Q\},R\} = \{P,\{Q,R\}\} - (-1)^{(p-1)(q-1)}\{Q,\{P,R\}\}. \tag{2.17}$$

满足上述 4 条公理的括号(2.15)称为 **Nijenhuis–Richardson 括号**, 它是 $\mathrm{Alt}_V^\bullet$ 的一个**分次李代数**结构.

证明. 先考察唯一性. 首先, 当 $P,Q\in \mathrm{Alt}_V^0 = V$ 时, $\{P,Q\}=0$. 一般地, 对于整数 $N\geq 0$, 假设

$$\{,\}\colon\ \mathrm{Alt}_V^p\times \mathrm{Alt}_V^q\to \mathrm{Alt}_V^{p+q-1}$$

在 $p+q\leq N-1$ 时已经被唯一确定, 则当 $p+q=N$ 时, 对任意 $f_1,\ldots,f_{p+q-1}\in V$, 由(2.16)–(2.17)可知

$$\begin{aligned}&\{P,Q\}(f_1,f_2,\ldots,f_{p+q-1})=\{\{P,Q\},f_1\}(f_2,\ldots,f_{p+q-1})\\ =&\Big(\{P,\{Q,f_1\}\}+(-1)^{q-1}\{\{P,f_1\},Q\}\Big)(f_2,\ldots,f_{p+q-1}),\end{aligned}$$

由归纳假设, $\{P,\{Q,f_1\}\}$ 与 $\{\{P,f_1\},Q\}$ 已被唯一确定. 唯一性得证.

再看存在性. 对于 $P\in \mathrm{Alt}_V^p$, $Q\in \mathrm{Alt}_V^q$, 定义 V 上的 $(p+q-1)$ 重线性映射 $P\barwedge Q\in \mathrm{Hom}(V^{\otimes(p+q-1)},V)$ 如下: 对任意 $f_1,f_1,\ldots,f_{p+q-1}\in V$,

$$\begin{aligned}&(P\barwedge Q)\,(f_1,f_2,\ldots,f_{p+q-1})\\ :=&\sum_{\sigma\in \mathrm{Sh}_{q,p-1}}(-1)^{|\sigma|}P\Big(Q(f_{\sigma(1)},\ldots,f_{\sigma(q)}),f_{\sigma(q+1)},\ldots f_{\sigma(q+p-1)}\Big),\end{aligned}$$

其中

$$\mathrm{Sh}_{q,p-1}:=\left\{\sigma\in S_{q+p-1}\ \middle|\ \begin{array}{c}\sigma(1)<\cdots<\sigma(q),\\ \sigma(q+1)<\cdots<\sigma(q+p-1)\end{array}\right\}. \tag{2.18}$$

然后我们令

$$\{P,Q\}:=P\barwedge Q-(-1)^{(p-1)(q-1)}Q\barwedge P, \tag{2.19}$$

则可以计算容易验证上述定义的 $\{P,Q\}\in \mathrm{Alt}_V^{p+q-1}$, 并且满足定理2.8中的 4 条公理 [分次 Jacobi 恒等式并不容易验证! 提示: 先直接验证(2.17)在 $r=0$ 时的特殊情形, 然后利用这个特殊情形以及其余 3 条公理, 对 $p+q+r$ 归纳从而完成(2.17)的验证] . 细节从略. 从而定理得证. □

回到我们所关心的广义多矢量以及变分多矢量. 如果我们把线性空间 V 取为局部泛函空间 $\mathcal{F}$, 则对任意 $p \geq 0$ 都有

$$\mathcal{V}^p = \mathrm{Alt}^p_{\mathcal{F}}, \tag{2.20}$$

从而可以谈论广义多矢量的 Nijenhuis–Richardson 括号 $\{,\}$. 为了以后更方便研究哈密顿结构与可积系统, 我们引入:

定义 2.9. 对于广义多矢量 $P \in \mathcal{V}^p$, $Q \in \mathcal{V}^q$, 记

$$\begin{aligned}[P, Q] &:= (-1)^p \{Q, P\} \\ &= (-1)^{(p-1)q} \{P, Q\},\end{aligned} \tag{2.21}$$

由此给出的双线性映射 $[\,,\,]\colon \mathcal{V}^\bullet \times \mathcal{V}^\bullet \to \mathcal{V}^\bullet$ 称为 ***Schouten* 括号**.

这与 Nijenhuis-Richardson 括号 $\{,\}$ 并没有本质区别, 只是调整了一些正负号. 于是由定理2.8立刻得到, $\mathcal{V}$ 上的 Schouten 括号 $[\,,\,]$ 被以下 4 条公理所**唯一**确定: 对任意 $P \in \mathcal{V}^p$, $Q \in \mathcal{V}^q$, $R \in \mathcal{V}^r$,

1. 齐次性: $[P, Q] \in \mathcal{V}^{p+q-1}$, 其中特别规定 $\mathcal{V}^{-1} = 0$.

2. 分次交换律: $[P, Q] = (-1)^{pq}[Q, P]$.

3. 缩并律: 对任意 $F_1, \ldots, F_p \in \mathcal{F}$,

$$[P, F_1](F_1, \ldots, F_p) = P(F_1, F_2, \ldots, F_p). \tag{2.22}$$

4. 变异的分次 *Jacobi* 恒等式:

$$(-1)^{p-1}[[P, Q], R] = [P, [Q, R]] - (-1)^{(p-1)(q-1)}[Q, [P, R]]. \tag{2.23}$$

注记 2.10. 公式(2.23)可以改写为轮换形式:

$$(-1)^{pr}[[P,Q],R] + (-1)^{qp}[[Q,R],P] + (-1)^{rq}[[R,P],Q] = 0. \tag{2.24}$$

反复使用 Schouten 括号的 4 条公理, 尤其是缩并律和变异的分次 Jacobi 恒等式 [当然也可以直接用公式(2.19)并调整正负号], 我们可以对任何给定的 $P, Q \in \mathcal{V}^\bullet$ 来具体计算它们的 Schouten 括号 $[P, Q]$.

例 2.11. 设 $P \in \mathcal{V}^p$, $Q \in \mathcal{V}^q$. 考察 p, q 较小的特殊情况如下:

1. 若 $p = 1, q = 0$, 则 $[P, Q] = P(Q)$.

2. 若 $p = q = 1$, 则 $[P, Q] = P \circ Q - Q \circ P$ 恰为线性算子的交换子.

3. 若 $p = 1$, 则对任意 $q \geq 0$, 容易验证

$$\begin{aligned} &[P, Q](F_1, \ldots, F_q) \\ &= P(Q(F_1, \ldots, F_q)) - \sum_{i=1}^{q} Q(F_1, \ldots, P(F_i), \ldots, F_q) \end{aligned} \tag{2.25}$$

对任意 $F_1, \ldots, F_q \in \mathcal{F}$ 都成立. 注意此时 $[P, Q]$ 恰为 “张量场”Q 沿着 “向量场”P 的 “李导数”.

4. 若 $p = 2$, 则对任意局部泛函 $F, G, H \in \mathcal{F}$, 容易验证

$$\begin{aligned} &[P, P](F, G, H) \\ &= 2\Big(P(P(F, G), H) + P(P(G, H), F) + P(P(H, F), G)\Big), \end{aligned} \tag{2.26}$$

从而 $P \in \mathcal{V}^1 = \mathrm{Hom}(\wedge^2 \mathcal{F}, \mathcal{F})$ 是 $\mathcal{F}$ 上的李代数结构, 当且仅当

$$[P, P] = 0.$$

特别地, 考虑 $[\,,\,]$ 在子空间 $\mathcal{V}^\bullet_{\mathrm{loc}} \subseteq \mathcal{V}^\bullet$ 上的限制, 立刻得到

推论 2.12. 对于变分 2-矢量 $P \in \mathcal{V}^2_{\mathrm{loc}}$, 则 P 是哈密顿结构当且仅当

$$[P, P] = 0.$$

于是, 对于变分 2-矢量 P, 判断它是否为哈密顿结构只需要看 $[P, P]$ 是否为 0. 虽然从(2.26)来看, 计算 $[P, P]$ 与直接验证 Jacobi 恒等式并没有本质区别; 然而, 对于变分多矢量 $P, Q \in \mathcal{V}^\bullet_{\mathrm{loc}} \subseteq \mathcal{V}^\bullet$, 我们将会有更高效的方法来计算 $[P, Q]$, 这将极大地简化计算.

定理 2.13. 设 $[,]$ 是 $\mathcal{V}^\bullet$ 上的 *Schouten* 括号, 则

$$[\mathcal{V}^\bullet_{\mathrm{loc}}, \mathcal{V}^\bullet_{\mathrm{loc}}] \subseteq \mathcal{V}^\bullet_{\mathrm{loc}}.$$

证明. 用变分多矢量的定义式(2.6)来直接验证是非常困难的. 为证明此定理, 我们需要引入新工具, 详见后文推论2.25. 这里从略. □

虽然我们暂时没有证明此定理, 但可以先考察简单的特殊情况. 首先 $[\mathcal{V}^0_{\mathrm{loc}}, \mathcal{V}^p_{\mathrm{loc}}] \subseteq \mathcal{V}^{p-1}_{\mathrm{loc}}$ 显然成立, 而 $[\mathcal{V}^1_{\mathrm{loc}}, \mathcal{V}^p_{\mathrm{loc}}] \subseteq \mathcal{V}^p_{\mathrm{loc}}$ 也并不是太难验证. 设 $P \in \mathcal{V}^p_{\mathrm{loc}}$ 形如(2.11), 以及 $\xi \in \mathcal{V}^1_{\mathrm{loc}} \cong \mathcal{E}/\varepsilon\partial_x$, 取定 $(\xi^\alpha) \in \mathcal{E}$ 为 ξ 的一个代表元, 仍记作 ξ. 从而由(2.25)以及(1.43), 并注意演化向量场 D_ξ 与微分算子 ∂_x 可交换, 从而可知对任意 $F_1, \ldots, F_p \in \mathcal{F}$ 都有

$$\begin{aligned}
&[\xi, P](F_1, \ldots, F_p) \\
=&\mathrm{D}_\xi\Big(P(F_1, \ldots, F_p)\Big) - \sum_{i=1}^{p} P(F_1, \ldots, \mathrm{D}_\xi F_i, \ldots, F_p) \\
=&\int \mathrm{D}_\xi\left(\sum_{s_1,\ldots,s_p\geq 0} P^{\alpha_1,\ldots,\alpha_p}_{s_1,\ldots,s_p}\left(\partial_x^{s_1}\frac{\delta F_1}{\delta v^{\alpha_1}}\right)\cdots\left(\partial_x^{s_p}\frac{\delta F_p}{\delta v^{\alpha_p}}\right)\right)\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&-\sum_{i=1}^{p}\int\sum_{s_1,\dots,s_p\geq 0}P^{\alpha_1,\dots,\alpha_p}_{s_1,\dots,s_p}\\
&\qquad\times\left(\partial_x^{s_1}\frac{\delta F_1}{\delta v^{\alpha_1}}\right)\cdots\left(\partial_x^{s_i}\frac{\delta(\mathrm{D}_\xi F_i)}{\delta v^{\alpha_i}}\right)\cdots\left(\partial_x^{s_p}\frac{\delta F_p}{\delta v^{\alpha_p}}\right)\,\mathrm{d}x\\
=&\int\sum_{s_1,\dots,s_p\geq 0}\left(\mathrm{D}_\xi P^{\alpha_1,\dots,\alpha_p}_{s_1,\dots,s_p}\right)\left(\partial_x^{s_1}\frac{\delta F_1}{\delta v^{\alpha_1}}\right)\cdots\left(\partial_x^{s_p}\frac{\delta F_p}{\delta v^{\alpha_p}}\right)\,\mathrm{d}x\\
&+\sum_{i=1}^{p}\int\sum_{s_1,\dots,s_p\geq 0}P^{\alpha_1,\dots,\alpha_p}_{s_1,\dots,s_p}\\
&\qquad\times\left(\partial_x^{s_1}\frac{\delta F_1}{\delta v^{\alpha_1}}\right)\cdots\left(\left(\partial_x^{s_i}\circ\left[\mathrm{D}_\xi,\frac{\delta}{\delta v^{\alpha_i}}\right]\right)(F_i)\right)\cdots\left(\partial_x^{s_p}\frac{\delta F_p}{\delta v^{\alpha_p}}\right)\,\mathrm{d}x\\
=&\int\sum_{s_1,\dots,s_p\geq 0}\left(\mathrm{D}_\xi P^{\alpha_1,\dots,\alpha_p}_{s_1,\dots,s_p}\right)\left(\partial_x^{s_1}\frac{\delta F_1}{\delta v^{\alpha_1}}\right)\cdots\left(\partial_x^{s_p}\frac{\delta F_p}{\delta v^{\alpha_p}}\right)\,\mathrm{d}x\\
&-\sum_{i=1}^{p}\int\sum_{s_1,\dots,s_p\geq 0}P^{\alpha_1,\dots,\alpha_p}_{s_1,\dots,s_p}\\
&\qquad\times\left(\partial_x^{s_1}\frac{\delta F_1}{\delta v^{\alpha_1}}\right)\cdots\left(\left(\partial_x^{s_i}\circ(\mathcal{J}^\beta_{\alpha_i})^\dagger\right)\frac{\delta F_i}{\delta v^\beta}\right)\cdots\left(\partial_x^{s_p}\frac{\delta F_p}{\delta v^{\alpha_p}}\right)\,\mathrm{d}x,
\end{aligned}
$$

其中 $\mathcal{J}^\beta_\alpha:=\sum\limits_{s\geq 0}\frac{\partial\xi^\beta}{\partial v^{\alpha,s}}\partial_x^s$. 由此可见 $[\xi,P]\in\mathcal{V}^p_{\mathrm{loc}}$.

特别地, 当 $P\in\mathcal{V}^2_{\mathrm{loc}}$ 时, 我们甚至能显式写出 P 与 $[\xi,P]$ 所对应的矩阵微分算子之间的关系.

推论 2.14. 记号承上, 对于 $\xi=(\xi^\alpha)\in\mathcal{E}$ 以及 $P\in\mathcal{V}^2_{\mathrm{loc}}$, 将 P 与 $[\xi,P]$ 所对应的矩阵微分算子分别记作 $\mathcal{P}$ 与 $\mathcal{L}_\xi\mathcal{P}$, 则

$$
\mathcal{L}_\xi\mathcal{P}=\mathrm{D}_\xi\mathcal{P}-\mathcal{J}\mathcal{P}-\mathcal{P}\mathcal{J}^\dagger, \tag{2.27}
$$

其中 $(\mathrm{D}_\xi\mathcal{P})^{\alpha\beta}:=\mathrm{D}_\xi(\mathcal{P}^{\alpha\beta})$, 以及 $\mathcal{J}=(\mathcal{J}^\beta_\alpha):=\left(\sum\limits_{s\geq 0}\frac{\partial\xi^\beta}{\partial v^{\alpha,s}}\partial_x^s\right)$.

证明. 完全类似的方法即可, 细节从略. $\square$

2.3 Grassmann 超变量, 拓展微分多项式环

我们用(2.11)式来表达一个变分 p-矢量 $P \in \mathcal{V}^p_{\mathrm{loc}}$, 这种表达方式总是需要借助局部泛函 $F_1, \ldots, F_p \in \mathcal{F}$, 从而有些麻烦; 我们希望不借助局部泛函而直接表达它本身. 我们或许可以偷懒一点, 把(2.11)式中的 $\left(\partial_x^{s_i} \frac{\delta F_i}{\delta v^{\alpha_i}}\right)$ 用符号 $\theta^{s_i}_{\alpha_i}$ 来简记; 由于 P 是全反对称的映射, 我们似乎还可以要求这些新引入的符号 $\{\theta^s_\alpha\}_{1\leq\alpha\leq n,\, s\geq 0}$ 之间的乘法是反交换的:

$$\theta^s_\alpha \theta^t_\beta = -\theta^t_\beta \theta^s_\alpha. \tag{2.28}$$

这些符号 θ^s_α 正是所谓的 **Grassmann 变量**, 俗称**超变量**.

通过在微分多项式环 $\mathcal{A}$ (1.5)中添加这些超变量, 引入线性空间

$$\hat{\mathcal{A}}^p_d := \left\{ \sum_{s_1,\ldots,s_p\geq 0} f^{\alpha_1,\ldots,\alpha_p}_{s_1,\ldots,s_p} \theta^{s_1}_{\alpha_1} \cdots \theta^{s_p}_{\alpha_p} \,\middle|\, f^{\alpha_1,\ldots,\alpha_p}_{s_1,\ldots,s_p} \in \mathcal{A}_{d-(s_1+\cdots+s_p)} \right\}, \tag{2.29}$$

$$\hat{\mathcal{A}}^p := \varprojlim_{N\to\infty} \bigoplus_{d=0}^{N} \hat{\mathcal{A}}^p_d, \quad \hat{\mathcal{A}} := \bigoplus_{p\geq 0} \hat{\mathcal{A}}^p. \tag{2.30}$$

我们规定超变量 θ^p_α 与微分多项式 $f \in \mathcal{A}$ 之间的乘法是交换的, 即

$$f \cdot \theta^p_\alpha = \theta^p_\alpha \cdot f,$$

则在此规则以及(2.28)下, 易知 $\hat{\mathcal{A}}$ 自然具有 $\mathbb{C}$-结合代数结构.

注意(2.29)给出了环 $\hat{\mathcal{A}}$ 的一个分次结构 $\deg_\theta$, 即规定

$$\deg_\theta f = 0, \quad \deg_\theta \theta^p_\alpha = 1, \qquad \forall\, f \in \mathcal{A},$$

这个分次结构俗称**超分次**. 而 $\mathcal{A}$ 中原有的**微分分次** $\deg_\partial$ (1.4) 的概念亦被延拓至 $\hat{\mathcal{A}}$:

$$\deg_\partial \theta_\alpha^s = s, \quad \forall\, s \geq 0,$$

这使得 $(\hat{\mathcal{A}}, \deg_\theta, \deg_\partial)$ 构成双分次 $\mathbb{C}$-代数. 我们还记

$$\hat{\mathcal{A}}_d := \left\{ \omega \in \hat{\mathcal{A}} \,\middle|\, \deg_\partial \omega = d \right\}, \tag{2.31}$$

则显然有 $\hat{\mathcal{A}}_d^p = \hat{\mathcal{A}}^p \cap \hat{\mathcal{A}}_d$.

下面谈论环 $\hat{\mathcal{A}}$ 上的微分算子. 给定 $1 \leq \alpha \leq n$ 以及 $s \geq 0$, 则由

$$\frac{\partial f}{\partial \theta_\alpha^s} = 0, \quad \frac{\partial \theta_\beta^t}{\partial \theta_\alpha^s} = \delta_{\alpha\beta}\delta^{st}, \quad \forall\, f \in \mathcal{A}$$

以及**超 Leibniz 法则**

$$\frac{\partial}{\partial \theta_\alpha^s}(\omega \cdot \eta) = \frac{\partial \omega}{\partial \theta_\alpha^s} \cdot \eta + (-1)^p \omega \cdot \frac{\partial \eta}{\partial \theta_\alpha^s}, \quad \forall\, \omega \in \hat{\mathcal{A}}^p,\, \eta \in \hat{\mathcal{A}}^q \tag{2.32}$$

可唯一确定算子 $\frac{\partial}{\partial \theta_\alpha^s} \in \mathrm{End}(\hat{\mathcal{A}})$, 并且容易验证**分次交换关系**

$$\left[\frac{\partial}{\partial v^{\alpha,s}}, \frac{\partial}{\partial \theta_\beta^t} \right] = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \theta_\alpha^s} \circ \frac{\partial}{\partial \theta_\beta^t} = -\frac{\partial}{\partial \theta_\beta^t} \circ \frac{\partial}{\partial \theta_\alpha^s}. \tag{2.33}$$

[这里不建议将上述第二个式子叫做“反交换关系”, 它应该被视为“广义的交换关系”.]

定义 2.15. 记号承上, 将 $\mathcal{A}$ 上的算子 ∂_x (1.1)延拓至 $\hat{\mathcal{A}}$, 如下

$$\partial_x := \sum_{s \geq 0} \left(v^{\alpha,s+1} \frac{\partial}{\partial v^{\alpha,s}} + \theta_\alpha^{s+1} \frac{\partial}{\partial \theta_\alpha^s} \right), \tag{2.34}$$

并且记 $\hat{\mathcal{F}} := \hat{\mathcal{A}}/\partial_x \hat{\mathcal{A}}$, 相应的商映射仍记作 $\int \cdot \, \mathrm{d}x$.

容易验证刚才定义的 ∂_x 在子空间 $\mathcal{A}\subseteq\hat{\mathcal{A}}$ 上的限制确实是以前熟悉的那个 ∂_x. 我们还记商映射 $\int\cdot\,\mathrm{d}x$ 的像空间

$$\hat{\mathcal{F}}^p:=\int\hat{\mathcal{A}}^p\,\mathrm{d}x,\quad \hat{\mathcal{F}}_d:=\int\hat{\mathcal{A}}_d\,\mathrm{d}x,\quad \hat{\mathcal{F}}_d^p:=\int\hat{\mathcal{A}}_d^p\,\mathrm{d}x,\tag{2.35}$$

它们都是 $\hat{\mathcal{F}}$ 的子空间. 此外还要注意, 尽管算子 $\{\frac{\partial}{\partial\theta_\alpha^s}\}$ 满足有点奇怪的交换关系(2.33) 以及带符号的超 Leibniz 法则(2.32), 但(2.34)定义的 ∂_x 依然是我们熟悉的微分算子, 其满足通常的 Leibnitz 法则

$$\partial_x(\omega\cdot\eta)=(\partial_x\omega)\cdot\eta+\omega\cdot(\partial_x\eta),\quad\forall\,\omega,\eta\in\hat{\mathcal{A}},$$

从而 “分部积分公式”(1.8)在 $\hat{\mathcal{F}}$ 中的相应版本依然成立.

我们还容易验证 $\hat{\mathcal{A}}$ 上算子的交换关系

$$\left[\frac{\partial}{\partial v^{\alpha,s}},\partial_x\right]=\frac{\partial}{\partial v^{\alpha,s-1}},\qquad\left[\frac{\partial}{\partial\theta_\alpha^s},\partial_x\right]=\frac{\partial}{\partial\theta_\alpha^{s-1}}.\tag{2.36}$$

类似地, 我们也能把**变分导数**的概念拓展到 $\hat{\mathcal{A}}$ 上. 引入 $\hat{\mathcal{A}}$ 上的算子

$$\frac{\delta}{\delta v^\alpha}:=\sum_{s\geq0}(-\partial_x)^s\circ\frac{\partial}{\partial v^{\alpha,s}},\quad\frac{\delta}{\delta\theta_\alpha}:=\sum_{s\geq0}(-\partial_x)^s\circ\frac{\partial}{\partial\theta_\alpha^s},\tag{2.37}$$

则容易验证 $\frac{\delta}{\delta v^\alpha}\circ\partial_x=\frac{\delta}{\delta\theta_\alpha}\circ\partial_x=0$, 从而自然有线性映射

$$\frac{\delta}{\delta v^\alpha},\ \frac{\delta}{\delta\theta_\alpha}\in\mathrm{Hom}(\hat{\mathcal{F}},\hat{\mathcal{A}}).\tag{2.38}$$

对于 $\hat{f}\in\hat{\mathcal{A}}$, 如何用变分导数来判断 $\int\hat{f}\,\mathrm{d}x$ 是否为 0? 定理1.24的超变量推广版本似乎更简单!

性质 2.16. 对于 $p \geq 1$, 以及 $\hat{f} \in \hat{\mathcal{A}}^p$, 则 $\int \hat{f}\,\mathrm{d}x = 0$ 当且仅当

$$\frac{\delta \hat{f}}{\delta \theta_\alpha} = 0 \tag{2.39}$$

对任意 $1 \leq \alpha \leq n$ 都成立.

也就是说, 只看超变量的变分导数就可以, 无需再要求 $\frac{\delta \hat{f}}{\delta v^\alpha} = 0$.

证明. 注意 $\hat{f}$ 是关于超变量 $\{\theta_\alpha^s\}_{\substack{1\leq\alpha\leq n,\\ s\geq 0}}$ 的 p 次齐次多项式, 从而

$$\hat{f} = \frac{1}{p}\sum_{s\geq 0}\theta_\alpha^s \frac{\partial \hat{f}}{\partial \theta_\alpha^s},$$

于是分部积分立刻得到

$$\begin{aligned}\int \hat{f}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{p}\int \sum_{s\geq 0}\theta_\alpha^s \frac{\partial \hat{f}}{\partial \theta_\alpha^s}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{p}\int \sum_{s\geq 0}\left(\partial_x^s \theta_\alpha^0\right)\frac{\partial \hat{f}}{\partial \theta_\alpha^s}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{p}\int \theta_\alpha^0 \frac{\delta \hat{f}}{\delta \theta_\alpha}\,\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

从而得证. □

注记 **2.17.** 当然也可以引入符号 $\delta\theta_\alpha^s$ 以及全变分算子 δ, 然后仿照1.8小节, 将变分双复形等相关概念推广. 这将在后文讨论.

下面我们来看例子. $\hat{\mathcal{A}}^0 \cong \mathcal{A}$ 没什么意思, 而对于一般的

$$\hat{X} = \sum_{s\geq 0} X_s^\alpha \theta_\alpha^s \in \hat{\mathcal{A}}^1, \quad \text{其中 } X_s^\alpha \in \mathcal{A}, \tag{2.40}$$

我们可以把它看成线性算子:

$$\begin{aligned}\iota(\hat{X})\colon \mathcal{F} &\to \mathcal{A}\\ F &\mapsto \sum_{s\geq 0} X_s^{\alpha}\left(\partial_x^s \frac{\delta F}{\delta v^{\alpha}}\right),\end{aligned} \tag{2.41}$$

这便给出了线性映射

$$\iota\colon \hat{\mathcal{A}}^1 \to \mathrm{Hom}(\mathcal{F},\mathcal{A}). \tag{2.42}$$

性质 2.18. *记号承上, 则有:*

1. *对任意 $\hat{X}\in\hat{\mathcal{A}}^1$ 以及 $F\in\mathcal{F}$, 成立*

$$\iota(\partial_x \hat{X})(F) = \partial_x\big(\iota(\hat{X})(F)\big), \tag{2.43}$$

因此 ι (2.42)可下降至商空间 $\hat{\mathcal{F}}^1$, 自然诱导线性映射

$$\bar{\iota}\colon \hat{\mathcal{F}}^1 \to \mathcal{V}^1_{\mathrm{loc}} \subseteq \mathrm{Hom}(\mathcal{F},\mathcal{F}). \tag{2.44}$$

2. *上述 $\bar{\iota}$ 诱导线性同构*

$$\hat{\mathcal{F}}^1 \cong \mathcal{E}, \qquad \hat{\mathcal{F}}^1/\mathbb{C}\hat{\omega} \cong \mathcal{V}^1_{\mathrm{loc}}, \tag{2.45}$$

其中 $\mathcal{E}$ 为演化向量场空间(1.30),

$$\hat{\omega} := \int v^{\alpha,1}\theta^0_{\alpha}\,\mathrm{d}x \in \hat{\mathcal{F}}^1. \tag{2.46}$$

证明. 设 $\hat{X}\in\hat{\mathcal{F}}^1$ 形如(2.40), 则易知

$$\partial_x\hat{X} = \sum_{s\geq 0}\left((\partial_x X_s^{\alpha})\,\theta_{\alpha}^s + X_s^{\alpha}\theta_{\alpha}^{s+1}\right),$$

因此直接计算验证可知

$$\iota(\partial_x\hat{X})(F)=\sum_{s\geq 0}\left((\partial_x X_s^\alpha)\left(\partial_x^s\frac{\delta F}{\delta v^\alpha}\right)+X_s^\alpha\left(\partial_x^{s+1}\frac{\delta F}{\delta v^\alpha}\right)\right)$$
$$=\partial_x\left(\sum_{s\geq 0}X_s^\alpha\left(\partial_x^s\frac{\delta F}{\delta v^\alpha}\right)\right)=\partial_x\big(\iota(\hat{X})(F)\big),$$

从而得到(2.43)–(2.44). 由分部积分以及性质2.16容易证明 $\hat{\mathcal{F}}^1$ 中的元素总可以唯一地表示为

$$\hat{X}=\int X^\alpha\theta_\alpha^0\,\mathrm{d}x,$$

此时 $\hat{X}\mapsto(X^\alpha)$ 显然给出了 $\hat{\mathcal{F}}^1$ 与 $\mathcal{E}$ 之间的一一对应. 而定理1.25表明 $\ker\bar{\iota}=\mathbb{C}\hat{\omega}$, 从而易知 $\hat{\mathcal{F}}^1/\mathbb{C}\hat{\omega}\cong\mathcal{V}_{\mathrm{loc}}^1$. □

而对一般的 $p\geq 0$, 我们也可以把 $\hat{\mathcal{F}}^p$ 中的元素 “自然地” 看成变分 p 矢量. 一般地, 我们引入

$$\iota\colon\hat{\mathcal{F}}^p\to\mathrm{Hom}(\wedge^p\mathcal{F},\mathcal{A})\tag{2.47}$$

如下: 对于 $\hat{P}\in\hat{\mathcal{F}}^p$ 以及 $F_1,\ldots,F_p\in\mathcal{F}$,

$$\begin{aligned}&\iota(\hat{P})(F_1,\ldots,F_p)\\:=&\sum_{s_1,\ldots,s_p\geq 0}\frac{\partial^p\hat{P}}{\partial\theta_{\alpha_p}^{s_p}\cdots\partial\theta_{\alpha_1}^{s_1}}\left(\partial_x^{s_1}\frac{\delta F_1}{\delta v^{\alpha_1}}\right)\cdots\left(\partial_x^{s_p}\frac{\delta F_p}{\delta v^{\alpha_p}}\right),\end{aligned}\tag{2.48}$$

其中 $\frac{\partial^p}{\partial\theta_{\alpha_p}^{s_p}\cdots\partial\theta_{\alpha_1}^{s_1}}$ 是 $\frac{\partial}{\partial\theta_{\alpha_p}^{s_p}}\circ\cdots\circ\frac{\partial}{\partial\theta_{\alpha_1}^{s_1}}$ 的简写. 反复使用(2.37)容易验证

$$\iota(\partial_x\hat{P})(F_1,\ldots,F_p)=\partial_x\big(\iota(\partial_x\hat{P})(F_1,\ldots,F_p)\big),\tag{2.49}$$

从而自然有线性映射

$$\bar{\iota}\colon\hat{\mathcal{F}}^p\to\mathcal{V}_{\mathrm{loc}}^p\subseteq\mathrm{Hom}(\wedge^p\mathcal{F},\mathcal{F}).\tag{2.50}$$

注意(2.41)是(2.50)在 $p=1$ 时的特殊情况.

定理 2.19. 记号承上, 则对于 $p \geq 0$,

1. 当 $p=1$ 时, (2.50)诱导线性同构 $\hat{\mathcal{F}}^1/\mathbb{C}\hat{\omega} \cong \mathcal{V}^1_{\mathrm{loc}}$, 即(2.45).

2. 当 $p=0$ 或 $p \geq 2$ 时, (2.50)诱导线性同构

$$\hat{\mathcal{F}}^p \cong \mathcal{V}^p_{\mathrm{loc}}. \tag{2.51}$$

此定理中的两条情形可以统一地写为

$$\hat{\mathcal{F}}/\mathbb{C}\hat{\omega} \cong \mathcal{V}^\bullet_{\mathrm{loc}}, \tag{2.52}$$

其中 $\hat{\omega} := \int v^{\alpha,1}\theta^0_\alpha \,\mathrm{d}x \in \hat{\mathcal{F}}^1$.

证明. $p=0$ 的情形平凡, $p=1$ 的情形已证. 当 $p \geq 2$ 时, 对任意形如(2.11)的 $P \in \mathcal{V}^p_{\mathrm{loc}}$, 不妨令其系数满足反对称条件(2.12), 则容易验证

$$\hat{P} := \frac{1}{p!}\int \sum_{s_1,\ldots,s_p \geq 0} P^{\alpha_1,\ldots,\alpha_p}_{s_1,\ldots,s_p}\theta^{s_1}_{\alpha_1}\cdots\theta^{s_p}_{\alpha_p}\,\mathrm{d}x$$

满足 $\bar{\iota}(\hat{P}) = P$, 因此 $\bar{\iota}\colon \hat{\mathcal{F}}^p \to \mathcal{V}^p_{\mathrm{loc}}$ 是满射.

另一方面, 对任意 $\hat{P} \in \hat{\mathcal{F}}^p$, 反复使用(2.49)以及变分导数的定义, 容易验证

$$\int \iota(\hat{P})(F_1,\ldots,F_p)\,\mathrm{d}x = \int \iota\Big(\frac{\delta\hat{P}}{\delta\theta_\alpha}\Big)(F_2,\ldots,F_p)\frac{\delta F_1}{\delta v^\alpha}\,\mathrm{d}x \tag{2.53}$$

对任意 $F_1,\ldots,F_p \in \mathcal{F}$ 都成立. 因此, 如果 $\iota(\hat{P}) = 0$, 则由定理1.25立刻得到

$$\iota\Big(\frac{\delta\hat{P}}{\delta\theta_\alpha}\Big)(F_2,\ldots,F_p) = c(F_2,\ldots,F_p)v^{\alpha,1}$$

对任意 $F_2,\ldots,F_p\in\mathcal{F}$ 都成立, 其中 $c(F_2,\ldots,F_p)\in\mathbb{C}$ 是关于 $F_2,\ldots,F_p$ 的常数. 考察上式两边的微分分次, 并注意 $F_2,\ldots,F_p$ 的任意性, 易知

$$\frac{\delta\hat{P}}{\delta\theta_\alpha}=0,\quad \forall\, 1\le\alpha\le n,$$

再由性质2.16可知 $\hat{P}=0\in\hat{\mathcal{F}}^p$, 因此 $\bar{\iota}\colon\hat{\mathcal{F}}^p\to\mathcal{V}^p_{\mathrm{loc}}$ 在 $p\ge 2$ 时是单射. 定理得证. □

注记 **2.20.** 可见 $\hat{\mathcal{F}}$ 与 $\mathcal{V}^\bullet_{\mathrm{loc}}$ 并非 "完美的" 一一对应, 它们在 $p=1$ 时稍微有一点点 "瑕疵"(2.45), 这或许让一部分人心里痒痒. 事实上, 如果我们在环 $\hat{\mathcal{A}}$ 中额外引入一个新的超变量 ζ, 并且要求 $\partial_x\zeta=-v^{\alpha,1}\theta^0_\alpha$, 从而得到某个比 $\hat{\mathcal{A}}$ 更 "大" 的环, 以及比 $\hat{\mathcal{F}}^p$ 更 "大" 的空间 $\tilde{\mathcal{F}}^p$; 另一方面, 也可适当地定义 $\mathcal{V}^\bullet$ 的一个比 $\mathcal{V}^\bullet_{\mathrm{loc}}$ 更 "大" 的子空间 $\mathcal{V}^\bullet_{\text{q-loc}}$. 经过如此扩张后, 将会有线性同构 $\tilde{\mathcal{F}}^p\cong\mathcal{V}^p_{\text{q-loc}}$, 这对任意 $p\ge 0$ 都成立. 这个构造对研究可积系统的雅可比结构, 即某一类特殊的非局部哈密顿结构, 具有重要意义, 详见 [17]. 我们将在后文详细探讨它.

例 **2.21.** 对于反自伴矩阵微分算子(2.3)所对应的变分 2-矢量 $P\in\mathcal{V}^2_{\mathrm{loc}}$, 容易验证

$$\bar{\iota}^{-1}(P)=\frac{1}{2}\int\theta_\alpha(\mathcal{P}^{\alpha\beta}\theta_\beta)\,\mathrm{d}x:=\frac{1}{2}\int\sum_{s\ge 0}\mathcal{P}^{\alpha\beta}_s\theta_\alpha\theta^s_\beta\,\mathrm{d}x,\tag{2.54}$$

其中 θ_α 是 θ^0_α 的简写. 此式常出现于哈密顿结构的研究.

2.4 奇辛括号, 高阶欧拉算子

我们已经知道, (2.50)诱导线性同构 $\mathcal{V}^\bullet_{\mathrm{loc}}\cong\hat{\mathcal{F}}/\mathbb{C}\hat{\omega}$. 接下来我们将引入 $\hat{\mathcal{F}}/\mathbb{C}\hat{\omega}$ 上的双线性映射 $[,]$(不妨也叫做 **Schouten 括号**), 使得它在同

构 $\hat{\mathcal{F}}/\mathbb{C}\hat{\omega} \cong \mathcal{V}^\bullet_{\mathrm{loc}}$ 意义下恰为 $\mathcal{V}^\bullet$ 上的 Schouten 括号(2.21) 在 $\mathcal{V}^\bullet_{\mathrm{loc}}$ 上的限制, 从而给出 $\mathcal{V}^\bullet_{\mathrm{loc}}$ 上 Schouten 括号的高效计算方法, 并证明定理2.13.

定义 2.22. *(奇辛括号).* 对于 $\hat{P} \in \mathcal{F}^p$, $\hat{Q} \in \mathcal{F}^q$, 记

$$\{\hat{P}, \hat{Q}\} := \int \left(\frac{\delta \hat{P}}{\delta v^\alpha} \frac{\delta \hat{Q}}{\delta \theta_\alpha} + (-1)^p \frac{\delta \hat{P}}{\delta \theta_\alpha} \frac{\delta \hat{Q}}{\delta v^\alpha} \right) \mathrm{d}x, \tag{2.55}$$

由此确定的双线性映射 $\{,\}\colon \hat{\mathcal{F}} \times \hat{\mathcal{F}} \to \hat{\mathcal{F}}$ 称为 $\hat{\mathcal{F}}$ 上的奇辛括号.

而对于 $\hat{\omega} = \int v^{\alpha,1} \theta_\alpha \, \mathrm{d}x$, 直接计算可知

$$\frac{\delta \hat{\omega}}{\delta v^\alpha} = -\theta^1_\alpha, \qquad \frac{\delta \hat{\omega}}{\delta \theta_\alpha} = v^{\alpha,1},$$

从而对任意 $\hat{Q} \in \hat{\mathcal{F}}^q$,

$$\begin{aligned}\{\hat{\omega}, \hat{Q}\} &= \int \left(-\theta^1_\alpha \frac{\delta \hat{Q}}{\delta \theta_\alpha} - v^{\alpha,1} \frac{\delta \hat{Q}}{\delta v^\alpha} \right) \mathrm{d}x \\ &= -\int (\partial_x \hat{Q}) \, \mathrm{d}x = 0,\end{aligned}$$

类似也可验证 $\{\hat{Q}, \hat{\omega}\} = 0$. 因此奇辛括号 $\{,\}$ 可以下降到商空间 $\hat{\mathcal{F}}/\mathbb{C}\hat{\omega}$, 得到 $\hat{\mathcal{F}}/\mathbb{C}\hat{\omega}$ 上的双线性映射, 依然记作 $\{,\}$.

注记 2.23. 如果考虑右微分算子 $\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial v^\alpha}$, $\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial \theta_\alpha}$ 以及 $\frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta v^\alpha}$, $\frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta \theta_\alpha}$ 等, 它们分别右作用于 $\hat{\mathcal{A}}$ 与 $\hat{\mathcal{F}}$. 则(2.55)可以改写为

$$\{\hat{P}, \hat{Q}\} := \int \hat{P} \left(\frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta v^\alpha} \frac{\overrightarrow{\delta}}{\delta \theta_\alpha} - \frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta \theta_\alpha} \frac{\overrightarrow{\delta}}{\delta v^\alpha} \right) \hat{Q} \, \mathrm{d}x, \tag{2.56}$$

其中 $\frac{\overrightarrow{\delta}}{\delta \theta_\alpha}$, $\frac{\overrightarrow{\delta}}{\delta v^\alpha}$ 是通常的左算子 $\frac{\delta}{\delta \theta_\alpha}$, $\frac{\delta}{\delta v^\alpha}$. 这个表达式与有限维泊松几何之中众所周知的余切丛上的典范泊松括号的表达式长得非常像, 它来自于量子场论中的 Batalin–Vilkovisky 方法 [2, 3, 4].

可以验证奇辛括号 $\{,\}$ 是 $\hat{\mathcal{F}}$ 上的**分次李代数**结构:

性质 2.24. *记号承上, 则 $\hat{\mathcal{F}}$ 上的奇辛括号 $\{,\}$(2.55)满足: 对任意 $\hat{P} \in \hat{\mathcal{F}}^p$, $\hat{Q} \in \hat{\mathcal{F}}^q$, $\hat{R} \in \hat{\mathcal{F}}^r$,*

1. *齐次性: $\{\hat{P}, \hat{Q}\} \in \hat{\mathcal{F}}^{p+q-1}$.*
2. *分次反交换律: $\{\hat{P}, \hat{Q}\} = -(-1)^{(p-1)(q-1)}\{\hat{Q}, \hat{P}\}$.*
3. *分次 Jacobi 恒等式:*

$$\{\{\hat{P}, \hat{Q}\}, \hat{R}\} = \{\hat{P}, \{\hat{Q}, \hat{R}\}\} - (-1)^{(p-1)(q-1)}\{\hat{Q}, \{\hat{P}, \hat{R}\}\}, \tag{2.57}$$

并且有如下的缩并律: 对任意局部泛函 $F_1, \ldots, F_p \in \mathcal{F} = \hat{\mathcal{F}}^0$,

$$\bar{\iota}(\{F_1, \hat{P}\})(F_2, \ldots, F_p) = \bar{\iota}(\hat{P})(F_1, F_2, \ldots, F_p), \tag{2.58}$$

其中 $\bar{\iota}$ 见(2.50).

与定理2.8类似, 奇辛括号 $\{,\}$ 被以上 4 条公理所**唯一**确定.

证明. 齐次性 $\{\hat{P}, \hat{Q}\} \in \hat{\mathcal{F}}^{p+q-1}$ 是显然的. 直接计算可知

$$\begin{aligned}
\{\hat{P}, \hat{Q}\} &= \int \left(\frac{\delta \hat{P}}{\delta \alpha} \frac{\delta \hat{Q}}{\delta \theta_\alpha} + (-1)^p \frac{\delta \hat{P}}{\delta \theta_\alpha} \frac{\delta \hat{Q}}{\delta v^\alpha} \right) \mathrm{d}x \\
&= \int \left((-1)^{p(q-1)} \frac{\delta \hat{Q}}{\delta \theta_\alpha} \frac{\delta \hat{P}}{\delta \alpha} + (-1)^{p+(p-1)q} \frac{\delta \hat{Q}}{\delta v^\alpha} \frac{\delta \hat{P}}{\delta \theta_\alpha} \right) \mathrm{d}x \\
&= -(-1)^{(p-1)(q-1)} \int \left(\frac{\delta \hat{Q}}{\delta \alpha} \frac{\delta \hat{P}}{\delta \theta_\alpha} + (-1)^q \frac{\delta \hat{Q}}{\delta \theta_\alpha} \frac{\delta \hat{P}}{\delta v^\alpha} \right) \mathrm{d}x \\
&= -(-1)^{(p-1)(q-1)} \{\hat{Q}, \hat{P}\},
\end{aligned}$$

从而分次反交换律得证. 而由(2.53)可知, 对于局部泛函 $F_1,\dots,F_p\in\mathcal{F}$,

$$
\begin{aligned}
\bar{\iota}(\{F_1,\hat{P}\})(F_2,\dots,F_p) &= \int \iota\left(\frac{\delta F_1}{\delta v^\alpha}\frac{\delta \hat{P}}{\delta\theta_\alpha}\right)(F_2,\dots,F_p)\,\mathrm{d}x \\
= \int \iota\left(\frac{\delta \hat{P}}{\delta\theta_\alpha}\right)(F_2,\dots,F_p)\frac{\delta F_1}{\delta v^\alpha}\,\mathrm{d}x &= \int \iota(\hat{P})(F_1,\dots,F_p)\,\mathrm{d}x \\
&= \bar{\iota}(\hat{P})(F_1,\dots,F_p),
\end{aligned}
$$

这便验证了缩并律(2.58). 而分次 Jacobi 恒等式(2.57)的证明较为复杂, 需要引入 $\hat{\mathcal{A}}$ 上的超变量版本的高阶欧拉算子以及相应的若干算子恒等式, 我们把它留到本小节最后 (见性质2.32). 命题得证. □

由此我们立刻得到:

推论 2.25. *记号承上, 则对任意 $\hat{P},\hat{Q}\in\hat{\mathcal{F}}/\mathbb{C}\hat{\omega}$, 成立*

$$\bar{\iota}(\{\hat{P},\hat{Q}\}) = \{\bar{\iota}(\hat{Q}),\bar{\iota}(\hat{P})\},$$

其中 $\bar{\iota}$(2.49)诱导线性同构 $\hat{\mathcal{F}}/\mathbb{C}\hat{\omega}\cong\mathcal{V}^\bullet_{\mathrm{loc}}$, 并且上式两边的 $\{,\}$ 分别是 $\hat{\mathcal{F}}/\mathbb{C}\hat{\omega}$ 上的奇辛括号以及 $\mathcal{V}^\bullet$ 上的 Nijenhuis–Richardson 括号. 特别地, $[\mathcal{V}^\bullet_{\mathrm{loc}},\mathcal{V}^\bullet_{\mathrm{loc}}]\subseteq\mathcal{V}^\bullet_{\mathrm{loc}}$, 即定理2.13成立.

证明. 考虑 $\mathcal{V}^\bullet_{\mathrm{loc}}$ 上的双线性映射

$$
\begin{aligned}
B\colon \mathcal{V}^\bullet_{\mathrm{loc}}\times\mathcal{V}^\bullet_{\mathrm{loc}} &\to \mathcal{V}^\bullet_{\mathrm{loc}} \\
(P,Q) &\mapsto \bar{\iota}\left(\{\bar{\iota}^{-1}(Q),\bar{\iota}^{-1}(P)\}\right),
\end{aligned}
$$

则由奇辛括号的性质2.24容易验证上述定义的双线性映射 B 满足定理2.8中的 4 条公理, 从而由 Nijenhuis-Richardson 括号的唯一性, 易知 B

恰为 Nijenhuis-Richardson 括号 $\{,\}$ 在子空间 $\mathcal{V}^\bullet_{\mathrm{loc}} \subseteq \mathcal{V}^\bullet$ 上的限制. 从而完成证明. $\square$

为方便研究可积系统, 我们也对奇辛括号作适当调整:

定义 2.26. 记号承上, 对任意 $\hat{P} \in \hat{\mathcal{F}}^p$, $\hat{Q} \in \hat{\mathcal{F}}^q$, 记

$$\begin{aligned}[\hat{P}, \hat{Q}] &:= (-1)^p \{\hat{P}, \hat{Q}\} \\ &= \int \left(\frac{\delta \hat{P}}{\delta \theta_\alpha} \frac{\delta \hat{Q}}{\delta v^\alpha} + (-1)^p \frac{\delta \hat{P}}{\delta v^\alpha} \frac{\delta \hat{Q}}{\delta \theta_\alpha} \right) \mathrm{d}x.\end{aligned} \tag{2.59}$$

由此确定的 $\hat{\mathcal{F}}$(或 $\hat{\mathcal{F}}/\mathbb{C}\hat{\omega}$) 上的双线性映射 $[\,,\,]$ 称为 ***Schouten* 括号**.

则容易验证如此定义的 $[,]$ 满足与 $\mathcal{V}^\bullet$ 上 Schouten 括号 (见定义2.9及其下方) 相同的运算法则, 从而立刻得到:

推论 2.27. 记号承上, 则对任意 $\hat{P}, \hat{Q} \in \hat{\mathcal{F}}/\mathbb{C}\hat{\omega}$,

$$\bar{\iota}\left([\hat{P}, \hat{Q}]\right) = \left[\bar{\iota}(\hat{P}), \bar{\iota}(\hat{Q})\right], \tag{2.60}$$

其中 $\bar{\iota}\colon \hat{\mathcal{F}}/\mathbb{C}\hat{\omega} \to \mathcal{V}^\bullet_{\mathrm{loc}}$ 为(2.50)所诱导的线性同构, 等号两边的 $[\,,\,]$ 分别是 $\hat{\mathcal{F}}/\mathbb{C}\hat{\omega}$ 与 $\mathcal{V}^\bullet_{\mathrm{loc}}$ 上的 *Schouten* 括号(2.21), (2.59).

本小节最后, 我们来验证奇辛括号满足分次 Jacobi 恒等式(2.57), 从而完成性质2.24的证明. 这等价于验证 Schouten 括号(2.59)满足如下变异的分次 Jacobi 恒等式:

$$(-1)^{p-1}[[\hat{P}, \hat{Q}], \hat{R}] = [\hat{P}, [\hat{Q}, \hat{R}]] - (-1)^{(p-1)(q-1)}[\hat{Q}, [\hat{P}, \hat{R}]], \tag{2.61}$$

其中 $\hat{P}, \hat{Q}, \hat{R}$ 分别是 $\hat{\mathcal{F}}^p, \hat{\mathcal{F}}^q, \hat{\mathcal{F}}^r$ 中的元素.

对于 $1 \le \alpha \le n$ 以及 $k \ge 0$, 引入 $\hat{\mathcal{A}}$ 上的线性算子

$$\frac{\delta_k}{\delta v^\alpha} := \sum_{s\ge 0}(-1)^s \binom{s+k}{k} \partial_x^s \circ \frac{\partial}{\partial v^{\alpha,s+k}}, \tag{2.62}$$

$$\frac{\delta_k}{\delta \theta_\alpha} := \sum_{s\ge 0}(-1)^s \binom{s+k}{k} \partial_x^s \circ \frac{\partial}{\partial \theta_\alpha^{s+k}}, \tag{2.63}$$

称为**高阶欧拉算子**, 这是定义1.18在 $\hat{\mathcal{A}}$ 上的自然推广. 用与1.6小节完全类似的方法, 容易验证对任意 $\hat{f} \in \hat{\mathcal{A}}^p$, $\hat{g} \in \hat{\mathcal{A}}^q$,

$$\frac{\delta}{\delta v^\alpha}(\hat{f}\hat{g}) = \sum_{s\ge 0}(-1)^s \left(\frac{\delta_s \hat{f}}{\delta v^\alpha}(\partial_x^s \hat{g}) + (\partial_x^s \hat{f})\frac{\delta_s \hat{g}}{\delta v^\alpha} \right), \tag{2.64}$$

$$\frac{\delta}{\delta \theta_\alpha}(\hat{f}\hat{g}) = \sum_{s\ge 0}(-1)^s \left(\frac{\delta_s \hat{f}}{\delta \theta_\alpha}(\partial_x^s \hat{g}) + (-1)^p(\partial_x^s \hat{f})\frac{\delta_s \hat{g}}{\delta \theta_\alpha} \right), \tag{2.65}$$

[注意第二个式子等号右边的符号 $(-1)^p$] 以及算子恒等式

$$\frac{\delta_k}{\delta v^\alpha} \circ \partial_x = \frac{\delta_{k-1}}{\delta v^\alpha}, \qquad \frac{\delta_k}{\delta \theta_\alpha} \circ \partial_x = \frac{\delta_{k-1}}{\delta \theta_\alpha}. \tag{2.66}$$

此外, (1.40)亦有超变量推广版本:

引理 2.28. 给定 $k \ge 0$, 则有 $\hat{\mathcal{A}}$ 上的算子恒等式

$$\frac{\delta_k}{\delta v^\alpha} \circ \frac{\delta}{\delta v^\beta} = (-1)^k \frac{\partial}{\partial v^{\beta,k}} \circ \frac{\delta}{\delta v^\alpha}, \tag{2.67}$$

$$\frac{\delta_k}{\delta v^\alpha} \circ \frac{\delta}{\delta \theta_\beta} = (-1)^k \frac{\partial}{\partial \theta_\beta^k} \circ \frac{\delta}{\delta v^\alpha}, \tag{2.68}$$

$$\frac{\delta_k}{\delta \theta_\alpha} \circ \frac{\delta}{\delta v^\beta} = (-1)^k \frac{\partial}{\partial v^{\beta,k}} \circ \frac{\delta}{\delta \theta_\alpha}, \tag{2.69}$$

$$\frac{\delta_k}{\delta \theta_\alpha} \circ \frac{\delta}{\delta \theta_\beta} = -(-1)^k \frac{\partial}{\partial \theta_\beta^k} \circ \frac{\delta}{\delta \theta_\alpha}. \tag{2.70}$$

注意(2.70)等号右边的符号 $-(-1)^k$ 与其余三式不同.

证明. 不妨只验证(2.68), 其余完全类似. 直接计算得

$$\frac{\delta_k}{\delta v^\alpha}\circ\frac{\delta}{\delta\theta_\beta}=\sum_{s\geq 0}(-1)^s\left(\frac{\delta_k}{\delta v^\alpha}\circ\partial_x^s\right)\circ\frac{\partial}{\partial\theta_\beta^s}$$

$$=\sum_{m=0}^{k}(-1)^{k+m}\frac{\delta_m}{\delta v^\alpha}\circ\frac{\partial}{\partial\theta_\beta^{k-m}}$$

$$=\sum_{m=0}^{k}(-1)^k\left(\sum_{s\geq m}(-1)^s\binom{s}{m}\partial_x^{s-m}\circ\frac{\partial}{\partial\theta_\beta^{k-m}}\right)\circ\frac{\partial}{\partial v^{\alpha,s}}$$

$$=(-1)^k\sum_{s\geq 0}(-1)^s\left(\sum_{m=0}^{\min\{k,s\}}\binom{s}{m}\partial_x^{s-m}\circ\frac{\partial}{\partial\theta_\beta^{k-m}}\right)\circ\frac{\partial}{\partial v^{\alpha,s}}$$

$$=(-1)^k\sum_{s\geq 0}(-1)^s\frac{\partial}{\partial\theta_\beta^k}\circ\left(\partial_x^s\circ\frac{\partial}{\partial v^{\alpha,s}}\right)=(-1)^k\frac{\partial}{\partial\theta_\beta^k}\circ\frac{\delta}{\delta v^\alpha},$$

从而得证. □

接下来我们引入一个重要的算子:

定义 2.29. 对任意 $\hat{P}\in\hat{\mathcal{F}}^p$, 记 $\hat{\mathcal{A}}$ 上的微分算子

$$\mathrm{D}_{\hat{P}}:=\sum_{s\geq 0}\left(\left(\partial_x^s\frac{\delta\hat{P}}{\delta\theta_\alpha}\right)\frac{\partial}{\partial v^{\alpha,s}}+(-1)^p\left(\partial_x^s\frac{\delta\hat{P}}{\delta v^\alpha}\right)\frac{\partial}{\partial\theta_\alpha^s}\right). \tag{2.71}$$

于是由 Schouten 括号(2.59)的定义易知

$$[\hat{P},\hat{Q}]=\int \mathrm{D}_{\hat{P}}\hat{Q}\,\mathrm{d}x. \tag{2.72}$$

此外, 容易验证 $\mathrm{D}_{\hat{P}}$ 与 ∂_x 可交换:

$$\mathrm{D}_{\hat{P}}\circ\partial_x=\partial_x\circ\mathrm{D}_{\hat{P}}, \tag{2.73}$$

可见 $\mathrm{D}_{\hat{P}}$ 可以看作某种超变量推广版本的演化向量场(1.30).

注记 2.30. 对于通常的演化向量场

$$\xi=(\xi^\alpha)=\sum_{s\geq 0}(\partial_x^s\xi^\alpha)\frac{\partial}{\partial v^{\alpha,s}},\tag{2.74}$$

相应的变分 1-矢量在同构(2.51)下对应于

$$\hat{\xi}=\int \xi^\alpha\theta_\alpha\,\mathrm{d}x.$$

此时由(2.71)容易验证

$$\mathrm{D}_{\hat{\xi}}=\sum_{s\geq 0}\left((\partial_x^s\xi^\alpha)\frac{\partial}{\partial v^{\alpha,s}}-\left(\partial_x^s\left(\frac{\delta}{\delta v^\alpha}(\xi^\beta\theta_\beta)\right)\right)\frac{\partial}{\partial\theta_\alpha^s}\right).\tag{2.75}$$

上述算子 $\mathrm{D}_{\hat{\xi}}$ 在子空间 $\mathcal{A}\subseteq\hat{\mathcal{A}}$ 上的限制恰为 ξ 本身(2.74). 于是在一定程度上我们不妨偷懒地混用记号, 例如(1.33).

引理 2.31. 记号承上, 则对任意 $\hat{P}\in\hat{\mathcal{F}}^p$, $\hat{Q}\in\hat{\mathcal{F}}^q$, 有如下恒等式:

$$\frac{\delta}{\delta v^\alpha}[\hat{P},\hat{Q}]=\mathrm{D}_{\hat{P}}\left(\frac{\delta\hat{Q}}{\delta v^\alpha}\right)+(-1)^{pq}\,\mathrm{D}_{\hat{Q}}\left(\frac{\delta\hat{P}}{\delta v^\alpha}\right),\tag{2.76}$$

$$\frac{\delta}{\delta\theta_\alpha}[\hat{P},\hat{Q}]=(-1)^{p-1}\,\mathrm{D}_{\hat{P}}\left(\frac{\delta\hat{Q}}{\delta\theta_\alpha}\right)-(-1)^{(p-1)q}\,\mathrm{D}_{\hat{Q}}\left(\frac{\delta\hat{P}}{\delta\theta_\alpha}\right).\tag{2.77}$$

证明. 由(2.64)以及(2.67)–(2.68)直接计算得

$$\frac{\delta}{\delta v^\alpha}[\hat{P},\hat{Q}]=\frac{\delta}{\delta v^\alpha}\left(\frac{\delta\hat{P}}{\delta\theta_\beta}\frac{\delta\hat{Q}}{\delta v^\beta}+(-1)^p\frac{\delta\hat{P}}{\delta v^\beta}\frac{\delta\hat{Q}}{\delta\theta_\beta}\right)$$

$$=\sum_{s\geq 0}(-1)^s\left(\left(\frac{\delta_s}{\delta v^\alpha}\frac{\delta\hat{P}}{\delta\theta_\beta}\right)\left(\partial_x^s\frac{\delta\hat{Q}}{\delta v^\beta}\right)+\left(\partial_x^s\frac{\delta\hat{P}}{\delta\theta_\beta}\right)\left(\frac{\delta_s}{\delta v^\alpha}\frac{\delta\hat{Q}}{\delta v^\beta}\right)\right)$$

$$
\begin{aligned}
&+(-1)^p\sum_{s\geq 0}(-1)^s\left(\left(\frac{\delta_s}{\delta v^\alpha}\frac{\delta\hat P}{\delta v^\beta}\right)\left(\partial_x^s\frac{\delta\hat Q}{\delta\theta_\beta}\right)+\left(\partial_x^s\frac{\delta\hat P}{\delta v^\beta}\right)\left(\frac{\delta_s}{\delta v^\alpha}\frac{\delta\hat Q}{\delta\theta_\beta}\right)\right)\\
=&\sum_{s\geq 0}\left(\left(\frac{\partial}{\partial\theta_\beta^s}\frac{\delta\hat P}{\delta v^\alpha}\right)\left(\partial_x^s\frac{\delta\hat Q}{\delta v^\beta}\right)+\left(\partial_x^s\frac{\delta\hat P}{\delta\theta_\beta}\right)\left(\frac{\partial}{\partial v^{\beta,s}}\frac{\delta\hat Q}{\delta v^\alpha}\right)\right)\\
&+(-1)^p\sum_{s\geq 0}\left(\left(\frac{\partial}{\partial v^{\beta,s}}\frac{\delta\hat P}{\delta v^\alpha}\right)\left(\partial_x^s\frac{\delta\hat Q}{\delta\theta_\beta}\right)+\left(\partial_x^s\frac{\delta\hat P}{\delta v^\beta}\right)\left(\frac{\partial}{\partial\theta_\beta^s}\frac{\delta\hat Q}{\delta v^\alpha}\right)\right)\\
=&\,\mathrm{D}_{\hat P}\left(\frac{\delta\hat Q}{\delta v^\alpha}\right)+(-1)^{pq}\,\mathrm{D}_{\hat Q}\left(\frac{\delta\hat P}{\delta v^\alpha}\right),
\end{aligned}
$$

从而验证(2.76). 可类似验证(2.77), 细节留给读者. 引理得证. □

性质 2.32. 记号承上, 则对任意 $\hat P\in\hat{\mathcal F}^p$, $\hat Q\in\hat{\mathcal F}^q$, 成立算子恒等式

$$
(-1)^{p-1}\mathrm{D}_{[\hat P,\hat Q]}=\mathrm{D}_{\hat P}\circ\mathrm{D}_{\hat Q}-(-1)^{(p-1)(q-1)}\mathrm{D}_{\hat Q}\circ\mathrm{D}_{\hat P}. \tag{2.78}
$$

特别地, 等式(2.61)成立, 从而最终完成定理*2.24*的证明.

证明. 由(2.77)–(2.76)以及(2.73), 直接计算得

$$
\begin{aligned}
&(-1)^{p-1}\mathrm{D}_{[\hat P,\hat Q]}\\
=&(-1)^{p-1}\sum_{s\geq 0}\left(\left(\partial_x^s\frac{\delta}{\delta\theta_\alpha}[\hat P,\hat Q]\right)\frac{\partial}{\partial v^{\alpha,s}}+(-1)^{p+q-1}\left(\partial_x^s\frac{\delta}{\delta v^\alpha}[\hat P,\hat Q]\right)\frac{\partial}{\partial\theta_\alpha^s}\right)\\
=&\sum_{s\geq 0}\partial_x^s\left(\mathrm{D}_{\hat P}\frac{\delta\hat Q}{\delta\theta_\alpha}-(-1)^{(p-1)(q-1)}\mathrm{D}_{\hat Q}\frac{\delta\hat P}{\delta\theta_\alpha}\right)\frac{\partial}{\partial v^{\alpha,s}}\\
&+(-1)^q\sum_{s\geq 0}\partial_x^s\left(\mathrm{D}_{\hat P}\frac{\delta\hat Q}{\delta v^\alpha}+(-1)^{pq}\mathrm{D}_{\hat Q}\frac{\delta\hat P}{\delta v^\alpha}\right)\frac{\partial}{\partial\theta_\alpha^s}\\
=&\sum_{s\geq 0}\left(\mathrm{D}_{\hat P}\left(\partial_x^s\frac{\delta\hat Q}{\delta\theta_\alpha}\right)-(-1)^{(p-1)(q-1)}\mathrm{D}_{\hat Q}\left(\partial_x^s\frac{\delta\hat P}{\delta\theta_\alpha}\right)\right)\frac{\partial}{\partial v^{\alpha,s}}
\end{aligned}
$$

$$+\sum_{s\geq 0}\left(\mathrm{D}_{\hat{P}}\left((-1)^q\partial_x^s\frac{\delta\hat{Q}}{\delta v^\alpha}\right)-(-1)^{(p-1)(q-1)}\mathrm{D}_{\hat{Q}}\left((-1)^p\partial_x^s\frac{\delta\hat{P}}{\delta v^\alpha}\right)\right)\frac{\partial}{\partial\theta_\alpha^s}$$
$$=\mathrm{D}_{\hat{P}}\circ\mathrm{D}_{\hat{Q}}-(-1)^{(p-1)(q-1)}\mathrm{D}_{\hat{Q}}\circ\mathrm{D}_{\hat{P}}.$$

再由(2.72)立刻得到(2.61), 从而得证. □

2.5 流体力学型哈密顿结构, 反变黎曼几何

我们重新考虑哈密顿结构. 对于变分 2-矢量 $P\in\mathcal{V}^2_{\mathrm{loc}}$, 其对应的矩阵微分算子(2.3)总可以按微分分次展开, 表示成

$$\begin{aligned}\mathcal{P}^{\alpha\beta}= \ & A^{\alpha\beta}+\varepsilon\left(g^{\alpha\beta}\partial_x+\Gamma^{\alpha\beta}_\gamma v^{\gamma,1}\right)\\ &+\varepsilon^2\left(B^{\alpha\beta}\partial_x^2+C^{\alpha\beta}_\gamma v^{\gamma,1}\partial_x+D^{\alpha\beta}_{\gamma\delta}v^{\gamma,1}v^{\delta,1}\right)+O(\varepsilon^3),\end{aligned}\tag{2.79}$$

其中系数 $A^{\alpha\beta},B^{\alpha\beta},C^{\alpha\beta}_\gamma,D^{\alpha\beta}_{\gamma\delta}$ 以及 $g^{\alpha\beta},\Gamma^{\alpha\beta}_\gamma$ 都是底流形 M 上的光滑函数, 即 $\mathcal{A}_0=C^\infty(M)$ 中的元素. 反自伴性 $\mathcal{P}=-\mathcal{P}^\dagger$ 表明

$$g^{\alpha\beta}=g^{\beta\alpha},\qquad \Gamma^{\alpha\beta}_\gamma+\Gamma^{\beta\alpha}_\gamma=\frac{\partial g^{\alpha\beta}}{\partial v^\gamma}.\tag{2.80}$$

而在本小节, 我们关心一类特殊的变分 2-矢量, 它的矩阵微分算子表示(2.79)中只含有 ε^1 的项. 换言之, 在同构(2.51)下, 它对应于

$$\hat{P}=\frac{1}{2}\int\left(g^{\alpha\beta}\theta_\alpha\theta_\beta^1+\Gamma^{\alpha\beta}_\gamma v^{\gamma,1}\theta_\alpha\theta_\beta\right)\mathrm{d}x\in\hat{\mathcal{F}}^2_1,\tag{2.81}$$

[不妨省略 ε] , 其中系数 $g^{\alpha\beta},\Gamma^{\alpha\beta}_\gamma$ 满足(2.80), $\theta_\alpha:=\theta_\alpha^0$.

定义 2.33. 对于(2.81)中的 $\hat{P}\in\hat{\mathcal{F}}^2_1$, 如果

$$\det(g^{\alpha\beta})\neq 0,$$

并且 *Schouten* 括号 $[\hat{P},\hat{P}]=0$, 则称 $\hat{P}$(或者它所对应的变分 2-矢量) 为**流体力学型哈密顿结构**.

这类特殊的哈密顿结构将在可积系统理论中扮演重要角色.

我们来考察其系数 $g^{\alpha\beta},\Gamma^{\alpha\beta}_{\gamma}$ 在不同坐标下的转换关系. 设另有一组新的局部坐标 $\boldsymbol{u}=(u^1,...,u^n)$, 其中 $u^\alpha=u^\alpha(\boldsymbol{v})$ 只依赖 v^α, 不依赖高阶 jet 变量 $v^{\alpha,\geq 1}$ [换言之, 这里的 $\boldsymbol{v}$ 与 $\boldsymbol{u}$ 就是底流形 M 上的两组局部坐标] . 若 $\hat{P}\in\hat{\mathcal{F}}^2_1$ 在局部坐标 $\boldsymbol{v},\boldsymbol{u}$ 下的矩阵微分算子分别为

$$\begin{aligned}\mathcal{P}^{\alpha\beta} &= g^{\alpha\beta}\partial_x+\Gamma^{\alpha\beta}_{\gamma}v^{\gamma,1},\\ \tilde{\mathcal{P}}^{\alpha\beta} &= \tilde{g}^{\alpha\beta}\partial_x+\tilde{\Gamma}^{\alpha\beta}_{\gamma}u^{\gamma,1},\end{aligned}$$

则由变换公式(2.7)直接计算可知

$$\tilde{g}^{\alpha\beta}=\frac{\partial u^\alpha}{\partial v^{\alpha'}}\frac{\partial u^\beta}{\partial v^{\beta'}}g^{\alpha'\beta'}, \tag{2.82}$$

$$\tilde{\Gamma}^{\alpha\beta}_{\gamma}=\frac{\partial u^\alpha}{\partial v^{\alpha'}}\frac{\partial u^\beta}{\partial v^{\beta'}}\frac{\partial v^{\gamma'}}{\partial u^\gamma}\Gamma^{\alpha'\beta'}_{\gamma'}+g^{\alpha'\beta'}\frac{\partial u^\alpha}{\partial v^{\alpha'}}\frac{\partial^2 u^\beta}{\partial v^{\beta'}\partial v^{\gamma'}}\frac{\partial v^{\gamma'}}{\partial u^\gamma}. \tag{2.83}$$

变换关系(2.82)以及(2.80)的第一式表明系数矩阵 $(g^{\alpha\beta})$ 定义了底流形 M 上的一个 $(2,0)$-型对称张量. 如果还有 $\det(g^{\alpha\beta})\neq 0$, 则该张量也叫做**反变度量**, 其逆矩阵 $(g_{\alpha\beta})=(g^{\alpha\beta})^{-1}$ 定义了 M 上的一个**黎曼度量** [特别注意, 本讲义中所有的"黎曼度量"都不要求正定性] .

从变换关系(2.83)来看, 显然 $\Gamma^{\alpha\beta}_{\gamma}$ 并不能作为某个三阶张量的系数; 而熟悉黎曼几何的读者会感觉, 这变换关系与**仿射联络**的 **Christoffel 符号**的变换关系似乎有点像 [这也是我们把该系数用字母 Γ 表示的原因] , 这就使得我们要稍微注意一下黎曼几何了. 一般地, 设 ∇ 是流形 M 上的一个仿射联络, 则 ∇ 具有局部表达式

$$\nabla_\alpha\partial_\beta=\Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta}\partial_\gamma,\qquad \nabla_\alpha\,\mathrm{d}v^\beta=-\Gamma^{\beta}_{\alpha\gamma}\,\mathrm{d}v^\gamma, \tag{2.84}$$

其中 $\partial_\alpha := \frac{\partial}{\partial v^\alpha}$, $\nabla_\alpha := \nabla_{\partial_\alpha}$, 系数 $\Gamma^\gamma_{\alpha\beta}$ 是仿射联络 ∇ 的 Christoffel 符号.

再设 $g = g_{\alpha\beta}\,\mathrm{d}v^\alpha \otimes \mathrm{d}v^\beta$ 是 M 上的一个黎曼度量, 则众所周知:

1. 如果对任意 $X, Y \in \mathrm{Vect}(M)$, 都有 $\nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y] = 0$, 换言之, 局部坐标下有
$$\Gamma^\gamma_{\alpha\beta} = \Gamma^\gamma_{\beta\alpha}, \tag{2.85}$$
则称联络 ∇ 是**无挠**的.

2. 如果对任意 $X, Y, Z \in \mathrm{Vect}(M)$ 都有
$$\nabla_Z g(X, Y) = g(\nabla_Z X, Y) + g(X, \nabla_Z Y),$$
换言之, 在局部坐标下成立
$$\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial v^\gamma} = \Gamma^\xi_{\gamma\alpha} g_{\xi\beta} + \Gamma^\xi_{\gamma\beta} g_{\xi\alpha}, \tag{2.86}$$
则称联络 ∇ 是与度量 g 相容的.

3. 对任意黎曼度量 g, 存在唯一的无挠且与 g 相容的仿射联络 ∇, 即著名的 **Levi-Civita 联络**. 局部坐标下, 其 Christoffel 符号满足
$$\Gamma^\gamma_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} g^{\gamma\xi} \left(\frac{\partial g_{\alpha\xi}}{\partial v^\beta} + \frac{\partial g_{\beta\xi}}{\partial v^\alpha} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial v^\xi} \right).$$

以上是众所周知的黎曼几何基础知识. 然而在哈密顿结构的研究中, 我们更习惯在**反变度量**的世界里谈论黎曼几何中的概念.

定义 2.34. 设 ∇ 是黎曼流形 (M, g) 上的一个仿射联络, 定义 ∇ 在局部坐标 $\boldsymbol{v} = (v^\alpha)$ 下的**反变 *Christoffel* 符号**$\Gamma^{\alpha\beta}_\gamma$ 如下:
$$\Gamma^{\alpha\beta}_\gamma := \langle \mathrm{d}v^\alpha, \nabla_\gamma\, \mathrm{d}v^\beta \rangle = -g^{\alpha\xi}\Gamma^\beta_{\gamma\xi}, \tag{2.87}$$

其中 $\langle , \rangle = g^{\alpha\beta}\partial_\alpha \otimes \partial_\beta$ 是相应的反变度量.

由此定义, 容易直接验证:

1. 联络 ∇ 是无挠的, 当且仅当其反变 Christoffel 符号满足

$$\Gamma^{\alpha\beta}_{\xi} g^{\xi\gamma} = \Gamma^{\gamma\beta}_{\xi} g^{\xi\alpha}. \tag{2.88}$$

2. 联络 ∇ 与度量 g 相容, 当且仅当其反变 Christoffel 符号满足

$$\Gamma^{\alpha\beta}_{\gamma} + \Gamma^{\beta\alpha}_{\gamma} = \frac{\partial g^{\alpha\beta}}{\partial v^\gamma}, \tag{2.89}$$

这正是(2.80)的第二式.

3. $\Gamma^{\alpha\beta}_{\gamma}$ 在不同局部坐标下的转换关系恰为(2.83).

综上所述, 不难看出有一一对应:

$$\left\{ \hat{P} \in \hat{\mathcal{F}}^2_1 \,\middle|\, \hat{P}\text{非退化} \right\} \cong \left\{ (g, \nabla) \,\middle|\, \begin{matrix} g \text{ 为 } M \text{ 上的反变度量,} \\ \nabla \text{ 为 } g\text{-相容的仿射联络} \end{matrix} \right\},$$

其中 “非退化” 是指(2.81)中的系数矩阵 $(g^{\alpha\beta})$ 可逆.

而 $\hat{P} \in \hat{\mathcal{F}}^2_1$ 是 (流体力学型) 哈密顿结构, 即 $[\hat{P}, \hat{P}] = 0$, 可以用相应的度量与联络所满足的几何性质来刻画:

定理 2.35. *([9, 10]). 设(2.81)中的 $\hat{P} \in \hat{\mathcal{F}}^2_1$ 非退化, 且满足(2.80), 则 $\hat{P}$ 是 (流体力学型) 哈密顿结构当且仅当以下两者同时成立:*

1. 系数 $g^{\alpha\beta}$ 所定义的反变度量 g 是平坦的.

2. 系数 $\Gamma^{\alpha\beta}_{\gamma}$ 是度量 g 的 Levi-Civita 联络的反变 Christoffel 符号.

证明. 若上述两条都成立, 则取度量 g 的一组平坦坐标 $\boldsymbol{u}=(u^\alpha)$. 如前文所述, 变分 2-矢量的系数 $g^{\alpha\beta},\Gamma^{\alpha\beta}_\gamma$ 与反变度量、反变 Christoffel 符号具有相同的变换关系, 从而 $\hat{P}$ 在平坦坐标 $\boldsymbol{u}$ 下形如

$$\hat{P}=\frac{1}{2}\int \eta^{\alpha\beta}\tilde{\theta}_\alpha\tilde{\theta}^1_\beta\,\mathrm{d}x,$$

其中 $(\eta^{\alpha\beta})$ 是常系数对称矩阵, $\tilde{\theta}_\alpha$ 是 u^α 所对应的超变量, 由此容易验证 $[\hat{P},\hat{P}]=0$. 另一方面, 对于形如(2.81)的 $\hat{P}\in\hat{\mathcal{F}}^2_1$, 直接计算得

$$\begin{aligned}\frac{\delta\hat{P}}{\delta v^\gamma}&=\Gamma^{\beta\alpha}_\gamma\theta_\alpha\theta^1_\beta+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\Gamma^{\alpha\beta}_\sigma}{\partial v^\gamma}-\frac{\partial\Gamma^{\alpha\beta}_\gamma}{\partial v^\sigma}\right)v^{\sigma,1}\theta_\alpha\theta_\beta,\\ \frac{\delta\hat{P}}{\delta\theta_\gamma}&=g^{\alpha\gamma}\theta^1_\alpha+\Gamma^{\gamma\alpha}_\beta v^{\beta,1}\theta_\alpha,\end{aligned}$$

然后继续暴力计算得

$$\begin{aligned}\hat{W}&:=\frac{1}{2}[\hat{P},\hat{P}]=\int\frac{\delta\hat{P}}{\delta\theta_\alpha}\frac{\delta\hat{P}}{\delta v^\alpha}\,\mathrm{d}x\\ &=\int\left(A^{\alpha\beta\gamma}\theta_\alpha\theta^1_\beta\theta^1_\gamma+B^{\alpha\beta\gamma}_\sigma v^{\sigma,1}\theta_\alpha\theta_\beta\theta^1_\gamma+C^{\alpha\beta\gamma}_{\sigma_1,\sigma_2}v^{\sigma_1,1}v^{\sigma_2,1}\theta_\alpha\theta_\beta\theta_\gamma\right)\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}A^{\alpha\beta\gamma}&:=g^{\gamma\sigma}\Gamma^{\alpha\beta}_\sigma,\\ B^{\alpha\beta\gamma}_\sigma&:=\frac{1}{2}g^{\gamma\delta}\left(\frac{\partial\Gamma^{\alpha\beta}_\sigma}{\partial v^\delta}-\frac{\partial\Gamma^{\alpha\beta}_\delta}{\partial v^\sigma}\right)+\Gamma^{\delta\alpha}_\sigma\Gamma^{\gamma\beta}_\delta,\\ C^{\alpha\beta\gamma}_{\sigma_1\sigma_2}&:=\frac{1}{2}\Gamma^{\gamma\delta}_{\sigma_2}\left(\frac{\partial\Gamma^{\alpha\beta}_{\sigma_1}}{\partial v^\delta}-\frac{\partial\Gamma^{\alpha\beta}_\delta}{\partial v^{\sigma_1}}\right).\end{aligned}$$

由性质2.16可知, $[\hat{P},\hat{P}]=0$ 当且仅当 $\frac{\delta\hat{W}}{\delta\theta_\rho}=0\in\hat{\mathcal{A}}^2_2$. 而暴力计算得

$$\frac{\delta\hat{W}}{\delta\theta_\rho}=\left(A^{\rho\alpha\beta}+A^{\alpha\rho\beta}-A^{\alpha\beta\rho}\right)\theta^1_\alpha\theta^1_\beta+\left(A^{\alpha\rho\beta}-A^{\alpha\beta\rho}\right)\theta_\alpha\theta^2_\beta$$

$$
\begin{aligned}
&+\Big(\partial_\sigma(A^{\alpha\rho\beta}-A^{\alpha\beta\rho})+B_\sigma^{\rho\alpha\beta}-B_\sigma^{\alpha\rho\beta}+B_\sigma^{\beta\alpha\rho}-B_\sigma^{\alpha\beta\rho}\Big)v^{\sigma,1}\theta_\alpha\theta_\beta^1\\
&-B_\sigma^{\alpha\beta\rho}v^{\sigma,2}\theta_\alpha\theta_\beta+\left(-\partial_{\sigma_2}B_{\sigma_1}^{\alpha\beta\rho}+C_{\sigma_1\sigma_2}^{\rho\alpha\beta}-C_{\sigma_1\sigma_2}^{\alpha\rho\beta}+C_{\sigma_1\sigma_2}^{\alpha\beta\rho}\right)v^{\sigma_1,1}v^{\sigma_2,1}\theta_\alpha\theta_\beta.
\end{aligned}
$$

于是, 如果 $[\hat{P},\hat{P}]=0$, 则比较上式的 $\theta_\alpha\theta_\beta^2$ 与 $v^{\sigma,2}\theta_\alpha\theta_\beta$ 项系数可得

$$
\begin{aligned}
A^{\alpha\rho\beta} &= A^{\alpha\beta\rho},\\
B_\sigma^{\alpha\beta\rho} &= B_\sigma^{\beta\alpha\rho}.
\end{aligned}
$$

前者恰为联络 ∇ 的无挠性条件(2.88), 从而 ∇ 是度量 g 的 Levi-Civita 联络, 且 $\Gamma_\gamma^{\alpha\beta}$ 为其 Christoffel 符号. 再由度量相容性(2.86), 容易验证

$$
\begin{aligned}
0 &= (B_\sigma^{\alpha\beta\rho}-B_\sigma^{\beta\alpha\rho})g_{\rho\xi}\\
&= \partial_\xi\Gamma_\sigma^{\alpha\beta}-\partial_\sigma\Gamma_\xi^{\alpha\beta}+g_{\rho\xi}\left(\Gamma_\sigma^{\lambda\alpha}\Gamma_\lambda^{\rho\beta}-\Gamma_\sigma^{\lambda\beta}\Gamma_\lambda^{\rho\alpha}\right)\\
&= \Big\langle(\nabla_\xi\nabla_\sigma-\nabla_\sigma\nabla_\xi)\,\mathrm{d}v^\beta,\,\mathrm{d}v^\alpha\Big\rangle,
\end{aligned}
$$

即度量 $g=\langle,\rangle$ 的黎曼曲率张量恒为零, 从而平坦. □

2.6 哈密顿结构的例子 (待修改)

在离散可积系统的具体例子中, 相应哈密顿结构 $\{,\}$ 的哈密顿算子 $\mathcal{P}=(\mathcal{P}^{\alpha\beta})$ 往往长成这样:

$$
\mathcal{P}^{\alpha\beta}=\sum_{k\in\mathbb{Z}}P_k^{\alpha\beta}\Lambda^k \qquad (\text{有限求和}), \tag{2.90}
$$

其中 $\Lambda:=\mathrm{e}^{\varepsilon\partial_x}=\sum_{k\geq 0}\frac{\varepsilon^k}{k!}\partial_x^k$ 为例1.7中的差分算子, 系数 $P_k^{\alpha\beta}\in\mathcal{A}$ 是关于离散 jet 变量

$$
v_{[\ell]}^\alpha:=\Lambda^\ell v^\alpha,\quad \ell\in\mathbb{Z}
$$

的函数. 对于 $f\in\mathcal{A}$, 我们习惯记

$$
f^+:=\Lambda f,\quad f^-:=\Lambda^{-1}f.
$$

容易验证平移算子 Λ 是 $\mathcal{A}$ 上的环自同构: 对任意 $f, g \in \mathcal{A}$,

$$(fg)^+ = f^+ g^+. \tag{2.91}$$

对于局部泛函 $F \in \mathcal{F}$, 如果其泛函密度 f 可以表示为离散 jet 变量 $\{v^\alpha_{[s]}\}$ 的函数, 则由变分导数的定义(1.20)容易验证

$$\frac{\delta F}{\delta v^\alpha} := \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \Lambda^{-\ell} \circ \frac{\partial f}{\partial v^\alpha_{[\ell]}}. \tag{2.92}$$

现在, 另取一组局部坐标 $\boldsymbol{u} = (u^1, ..., u^n)$, 并假设 u^α 可以表示为关于离散 jet 变量 $v^\beta_{[s]}$ 的函数, 我们考虑算子(2.90)所表示的哈密顿结构在 $\boldsymbol{u}$-坐标下的局部表达. 现在已经有了定理2.4, 于是只需要再写出 Jacobi 算子矩阵 $\mathcal{J}$ 的表达式. 而直接计算可知

$$\begin{aligned}
\mathcal{J}^\alpha_\beta &= \sum_{k \geq 0} \frac{\partial u^\alpha}{\partial v^{\beta,k}} \circ \partial_x^k = \sum_{k \geq 0} \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \frac{\partial u^\alpha}{\partial v^\gamma_{[\ell]}} \circ \frac{\partial v^\gamma_{[\ell]}}{\partial v^{\beta,k}} \circ \partial_x^k \\
&= \sum_{k \geq 0} \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \frac{\partial u^\alpha}{\partial v^\beta_{[\ell]}} \circ \frac{(\varepsilon \ell)^k}{k!} \partial_x^k = \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \frac{\partial u^\alpha}{\partial v^\beta_{[\ell]}} \circ \Lambda^\ell,
\end{aligned}$$

从而解决这一类离散情形.

例 2.36. 考虑 Ablowitz-Ladik 方程簇在 (P, Q)-坐标下的双哈密顿结构

$$\mathcal{P}_1 = \begin{pmatrix} Q\Lambda^{-1} - \Lambda Q & (1-\Lambda)Q \\ Q(\Lambda^{-1} - 1) & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{P}_2 = \begin{pmatrix} 0 & P(\Lambda - 1)Q \\ Q(1 - \Lambda^{-1})P & Q(\Lambda - \Lambda^{-1})Q \end{pmatrix},$$

另取新坐标 (V, U) 如下:

$$V := Q - P, \qquad U = \log Q,$$

试计算该双哈密顿结构在 (V, U)-坐标下的矩阵 $\tilde{\mathcal{P}}_1, \tilde{\mathcal{P}}_2$.

解. 易知相应的 Jacobi 转移矩阵

$$\mathcal{J} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & \frac{1}{Q} \end{pmatrix}, \qquad \mathcal{J}^{\dagger} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & \frac{1}{Q} \end{pmatrix},$$

从而由(2.7)直接计算得

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{P}}_1 &= \begin{pmatrix} 0 & \Lambda - 1 \\ 1 - \Lambda^{-1} & 0 \end{pmatrix}, \\ \tilde{\mathcal{P}}_2 &= \begin{pmatrix} V\Lambda \mathrm{e}^U - \mathrm{e}^U \Lambda^{-1} V & V(\Lambda - 1) + \mathrm{e}^U (1 - \Lambda^{-1}) \\ (1 - \Lambda^{-1})V + (\Lambda - 1)\mathrm{e}^U & \Lambda - \Lambda^{-1} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

□

据说 Ablowitz-Ladik 方程簇还有第三个哈密顿结构 $\mathcal{P}_3$, 这东西在 (V, U) 坐标下长什么样呢? 不知谁有兴趣算一下. 某个棒槌曾经在 (P, Q) 坐标下暴力验证 $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \mathcal{P}_3$ 确实是三哈密顿结构, 这个计算过程过于恶心, 那个棒槌不想再算第二遍, 也不希望别人也跟着算一遍. 而笔者觉得, 在 (V, U) 坐标下验证三哈密顿结构应该相对容易一些, 或许后来者可以尝试.

参考文献

[1] Barakat A. *On the moduli space of deformations of bihamiltonian hierarchies of hydrodynamic type* [J]. Advances in Mathematics, 2008, 219(2): 604-632.

[2] Batalin I A, Vilkovisky G A. *Gauge algebra and quantization* [J]. Physics Letters B, 1981, 102(1): 27-31.

[3] Batalin I A, Vilkovisky G A. *Quantization of gauge theories with linearly dependent generators* [J]. Physical Review D, 1983, 28(10): 2567.

[4] Batalin I A, Vilkovisky G A. *Closure of the gauge algebra, generalized Lie equations and Feynman rules* [J]. Nuclear Physics B, 1984, 234(1): 106-124.

[5] Bolsinov A V, Konyaev A Y, Matveev V S. *Nijenhuis geometry* [J]. Advances in Mathematics, 2022, 394: 108001.

[6] Dedecker P, Tulczyjew W M. *Spectral sequences and the inverse problem of the calculus of variations* [C]. Differential Geometrical Methods in Mathematical Physics: Proceedings of the Conferences Held at Aix-en-Provence, September 3–7, 1979 and Salamanca, September 10–14, 1979. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2006: 498-503.

[7] Dorfman I Y. *Formal variational calculus in the algebra of smooth cylindrical functions* [J]. Functional Analysis and Its Applications, 1978, 12(2): 101-107.

[8] Dubrovin B, Liu S Q, Zhang Y. *On Hamiltonian perturbations of hyperbolic systems of conservation laws I: Quasi-Triviality of bi-Hamiltonian perturbations* [J]. Communications on Pure and Applied Mathematics: A Journal Issued by the Courant Institute of Mathematical Sciences, 2006, 59(4): 559-615.

[9] Dubrovin B, Novikov S. *The Hamiltonian formalism of one-dimensional systems of hydrodynamic type and the Bogolyubov-Whitham averaging method* [J]. Doklady Akademii Nauk SSSR, 1983, 270(4): 781-785.

[10] Dubrovin B, Novikov S. *Hydrodynamics of weakly deformed soliton lattices. Differential geometry and Hamiltonian theory* [J]. Russian Mathematical Surveys, 1989, 44(6): 35.

[11] Dubrovin B, Zhang Y. *Normal forms of hierarchies of integrable PDEs, Frobenius manifolds and Gromov–Witten invariants* [J]. arXiv preprint math/0108160, 2001.

[12] Ferapontov E V. *Compatible Poisson brackets of hydrodynamic type* [J]. Journal of Physics A: Mathematical and General, 2001, 34(11): 2377.

[13] Liu S Q. *Lecture notes on bihamiltonian structures and their central invariants* [J]. B-Model Gromov–Witten Theory, 2018: 573-625.

[14] Liu S Q, Wang Z, Zhang Y. *Super tau-covers of bihamiltonian integrable hierarchies* [J]. Journal of Geometry and Physics, 2021, 170: 104351.

[15] Liu S Q, Zhang Y. *Bihamiltonian cohomologies and integrable hierarchies I: a special case* [J]. Communications in Mathematical Physics, 2013, 324: 897-935.

[16] Liu S Q, Zhang Y. *Deformations of semisimple bihamiltonian structures of hydrodynamic type* [J]. Journal of Geometry and Physics, 2005, 54(4): 427-453.

[17] Liu S Q, Zhang Y. *Jacobi structures of evolutionary partial differential equations*[J]. Advances in Mathematics, 2011, 227(1): 73-130.

[18] Nijenhuis A, Richardson R W. *Deformations of Lie algebra structures* [J]. Journal of Mathematics and Mechanics, 1967, 17(1): 89-105.