紧黎曼曲面

Math4013　　1.29 版

曲豆豆 翻译

原著: Raghavan Narasimhan

2021 年 5 月 27 日

本书为 Raghavan Narasimhan

Compact Riemann Surfaces

的非官方 (野生) 中译本. 仅供学习交流.

目录

1　代数函数

设 $F \in \mathbb{C}[x,y]$ 为不可约的二元 (复系数) 多项式, 假设其关于 y 的次数 ≥ 1.

由代数学中的高斯引理可知, 若将 $\mathbb{C}[x,y]$ 等同于 $\mathbb{C}[x][y]$, 并且 F 不可约, 则 F 在 $\mathbb{C}(x)[y]$ 中也不可约. 其中 $\mathbb{C}(x)[y]$ 为 x 的有理函数域上的多项式环. 此外, $\mathbb{C}[x,y]$ 也是唯一分解整环.

直观地讲, **代数函数**是由方程 $F(x,y)$ 所 "定义" 的隐函数, 其中 f 为 $\mathbb{C}[x,y]$ 中的不可约多项式.

为将上述定义严格讲清楚, 我们需要:

定理. *(隐函数定理)*

设 f 为定义在 $\left\{(x,y) \in \mathbb{C}^2 \middle| |x| < r_1, |y| < r_2\right\}$ 上的二元全纯函数, 其中 $r_1, r_2 > 0$. 如果

$$f(0,0) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) \neq 0,$$

则存在正数 $\varepsilon, \delta > 0$ 使得对任意 $x \in D_\varepsilon = \left\{z \in \mathbb{C} \middle| |z| < \varepsilon\right\}$, 方程 $f(x,y) = 0$ 存在唯一的解 $y(x)$, 使得 $|y(x)| < \delta$, 并且函数 $x \mapsto y(x)$ 在 D_ε 全纯.

证明. 由于 $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$, 从而可以取 $\delta > 0$ 使得当 $0 < |y| \leq \delta$ 时成立 $f(0,y) \neq 0$. 再取 $\varepsilon > 0$ 使得当 $|x| \leq \varepsilon$, $|y| = \delta$ 时 $f(x,y) \neq 0$ (这是可行的, 因为 f 在紧集 $\{0\} \times \{|y| = \delta\}$ 恒非零).

由辐角原理, 对于 $|x| < \varepsilon$, 积分

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|y|=\delta} \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \middle/ f(x,y)\right) \mathrm{d}y$$

的值 $n(x)$ 是整数, 并且等于函数 $y \mapsto f(x,y)$ 在 $|y| < \delta$ 内的零点个数; 由 δ 的选取可知 $n(0) = 1$. 另一方面, 由于当 $|x| < \varepsilon$, $|y| = \delta$ 时 $f(x,y) \neq 0$, 从而 $n(x)$ 在 $|x| < \varepsilon$ 当中连续. 这表明当 $|x| < \varepsilon$ 时, $n(x)$ 恒为 1, 从而 $f(x,y) = 0$ 的满足 $|y(x)| < \delta$ 的解存在且唯一.

由公式

$$y(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|y|=\delta} y\frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)}{f(x,y)}\,\mathrm{d}y$$

可知 $x\mapsto y(x)$ 全纯 (此公式可由留数定理的直接得到). □

记 $F(x,y)=a_0(x)y^n+a_1(x)y^{n-1}+\cdots+a_n(x)\in\mathbb{C}[x,y]$ 为不可约多项式, 其中 $n\geq 1$; F 不可约, 故 $a_0,a_1,...,a_n\in\mathbb{C}[x]$ 没有非平凡的公因子.

引理 1.1. *设 $a\in\mathbb{C}$ 使得 $a_0(a)\neq 0$, 并且不存在 $b\in\mathbb{C}$ 使得 $F(a,b)=0=\frac{\partial F}{\partial y}(a,b)$. 那么存在 $\varepsilon>0$ 以及定义在圆盘 $\left\{x\in\mathbb{C}\middle||x-a|<\varepsilon\right\}$ 上的 n 个全纯函数 $y_1(x),...,y_n(x)$ 满足如下:*

(i) 若 $i\neq j$, $|x-a|<\varepsilon$, $|x'-a|<\varepsilon$, 则 $y_i(x)\neq y_j(x')$; 并且

$$F(x,y_i(x))\equiv 0,\quad \text{任意}|x-a|<\varepsilon,\ i=1,...,n.$$

(ii) 若 $\eta\in\mathbb{C}$, $F(x,\eta)=0$, $|x-a|<\varepsilon$, 则在 $1,2,...,n$ 当中存在唯一的 i 使得 $\eta=y_i(x)$.

证明. 由于对任意满足 $F(a,b)=0$ 的 b 都有 $\frac{\partial F}{\partial y}(a,b)\neq 0$, 并且多项式 $F(a,y)$ 恰有 n 和互异的根 $b_1,...,b_n$. 取足够小的 $\varepsilon>0$ 以及定义在 $|x-a|<\varepsilon$ 上的全纯函数 $y_i(x)$ 使得 $y_i(a)=b_i$, $F(x,y_i(x))=0$ (这是能做到的, 由隐函数定理保证), 于是当 ε 取得足够小的时候性质 (i) 成立. 而性质 (ii) 也是成立的, 因为方程 $F(x,\eta)=0$ 至多有 n 个根. □

性质 1.1. *设多项式 $F\in\mathbb{C}[x,y]$ 不可约, 则至多存在有限多个 $x\in\mathbb{C}$ 使得关于 y 的方程组*

$$F(x,y)=0=\frac{\partial F}{\partial y}(x,y)$$

有解 $y\in\mathbb{C}$.

证明. [1] 由带余除法算法, 存在多项式 $b_i\in\mathbb{C}[x]\,(i\geq 0)$ 使得 $b_0=a_0$ [回顾 $F=$

[1]译者注: 译者以为这个证法较啰嗦. 事实上, 由 F 不可约可知 F 与 $\frac{\partial F}{\partial y}$ 互素, 之后在 $\mathbb{C}(x)[y]$ 当中使用 Bézout 定理即可.

$a_0(x)y^n + \cdots + a_n(x)]$ 以及多项式 $A_j, Q_j \in \mathbb{C}[x,y]\,(j \geq 1)$ 使得

$$\begin{aligned}
b_0^n F &= A_1 \frac{\partial F}{\partial y} + Q_1, && \deg_y Q_1 < \deg_y \frac{\partial F}{\partial y} = n-1 \\
b_1 \frac{\partial F}{\partial y} &= A_2 Q_1 + Q_2, && \deg_y Q_2 < \deg_y Q_1 \\
&\vdots \\
b_{k-1} Q_{k-2} &= A_k Q_{k-1} + Q_k, && \deg_y Q_k < \deg_y Q_{k-1}.
\end{aligned}$$

不妨假设 $\deg_y Q_k = 0$, 即 $Q_k \in \mathbb{C}[x]$(否则上述带余除法继续做下去). 我们断言 $Q_k(x) \neq 0$. 假如 $Q_k \equiv 0$, 则从上述方程中的最后一个可知, Q_{k-1} 的任何满足 $\deg_y P > 0$ 的素因子 P 必能整除 $b_{k-1}Q_{k-2}$, 从而整除 Q_{k-2} [因为 $b_{k-1} \in \mathbb{C}[x]$ 且 $\deg_y P > 0$] . 再由方程 $b_{k-2}Q_{k-3} = A_{k-1}Q_{k-2} + Q_{k-1}$ 可知 P 整除 $b_{k-2}Q_{k-3}$, 进而整除 Q_{k-3}. 反复如此论证, 可知 P 能整除所有的 $Q_j\,(j \geq 1)$, 从而整除 $\dfrac{\partial F}{\partial y}$ 与 F, 这与 F 的不可约性矛盾. 因此 $Q_k = Q_k(x) \in \mathbb{C}[x]$ 非零.

现在, 若 $a, b \in \mathbb{C}$ 使得 $F(a,b) = 0 = \dfrac{\partial F}{\partial y}(a,b)$, 则从上述方程可知 $Q_1(a,b) = 0$, 进而 $Q_2(a,b) = 0, \ldots, Q_k(a,b) = Q_k(a) = 0$. 由于 $Q_k \not\equiv 0$, 从而集合

$$\left\{ x \in \mathbb{C} \middle| \exists y \in \mathbb{C},\ F(x,y) = 0 = \frac{\partial F}{\partial y}(x,y) \right\} \subseteq \left\{ x \in \mathbb{C} \middle| Q_k(x) = 0 \right\}$$

是有限集. □

继续前进之前, 我们需要一些拓扑学的预备知识. 以下所有拓扑空间都默认是 Hausdorff 的.

定义. *对于局部紧 (Hausdorff) 空间 X, Y 以及连续映射 $p: X \to Y$, 如果对 Y 的任何紧子集 K, 原像 $p^{-1}(K)$ 在 X 中紧致, 则称 p 为***真映射** *(proper map).*

引理 1.2. *设 X, Y 为局部紧空间, 则真映射 $p: X \to Y$ 一定是闭映射 [即把 X 的闭集映为 Y 的闭集] .*

证明. 设 $A \subseteq X$ 为闭集, $y_0 \in Y$. 设 K 为 y_0 在 Y 中的一个紧邻域. 则 $p(A) \cap K = p(A \cap p^{-1}(K))$ 是紧致的 (这是因为 A 是闭集, $p^{-1}(K)$ 是紧集), 从而为 K 的闭集. □

注记. 局部紧空间之间的连续映射 $p: X \to Y$ 为真映射当且仅当对任何局部紧空间 Z, 乘积映射

$$p \times \mathrm{id}_Z : X \times Z \to Y \times Z, \quad (x, z) \mapsto (p(z), z)$$

为闭映射. 若 X, Y 具有可数拓扑基, 则可由以下注记来得出上述断言: 若 X 中的点列 $\{x_1, ..., x_n, ...\}$ 没有极限点, 但是 $\{p(x_n)\}_{n \geq 1}$ 在 Y 中收敛, 则 $X \times \mathbb{R}$ 中的闭集 $\left\{(x_n, \frac{1}{n})\middle| n \geq 1\right\}$ 的像集不是 $Y \times \mathbb{R}$ 的闭集.

此注记中的性质可以用来把真映射的概念推广到非局部紧空间上.

注记. 设 $p: X \to Y$ 为局部紧空间之间的真映射. 若 $Z \subseteq Y$ 在子空间拓扑下是局部紧的, 则限制映射 $p|_{p^{-1}(Z)} : p^{-1}(Z) \to Z$ 也是真映射. 事实上, Z 的紧子集也是 Y 的紧子集.

引理 1.3. 设 $c_1, c_2, ..., c_n \in \mathbb{C}$ 不全为零, $w \in \mathbb{C}$ 满足 $w^n + c_1 w^{n-1} + \cdots + c_n = 0$, 则

$$|w| < 2 \max_{\nu} |c_\nu|^{1/\nu}.$$

证明. 设 $c = \max\limits_{\nu} |c_\nu|^{1/\nu} > 0$. 记 $z = \frac{w}{c}$, 则 $z^n + \frac{c_1}{c} z^{n-1} + \cdots + \frac{c_n}{c^n} = 0$. 由于 $|c_\nu| \leq c^\nu$, 从而

$$|z|^n \leq |z|^{n-1} + \cdots + 1.$$

如果 $|z| \geq 2$, 则有 $1 \leq \frac{1}{|z|} + \cdots + \frac{1}{|z|^n} \leq \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^n} < 1$, 从而矛盾. 这表明必有 $|z| < 2$, 即 $|w| < 2c$. □

性质 1.2. 设 $F \in \mathbb{C}[x, y]$, $F(x, y) = a_0(x) y^n + \cdots + a_n(x)$, $a_0 \not\equiv 0$. 记 $V := \left\{(x, y) \in \mathbb{C}^2 \middle| F(x, y) = 0\right\}$, $S_0 := \left\{x \in \mathbb{C} \middle| a_0(x) = 0\right\}$. 记 $\pi : V \to \mathbb{C}$ 为投影映射 $(x, y) \mapsto x$. 则 $\pi|_{\pi^{-1}(\mathbb{C} - S_0)} \to \mathbb{C} - S_0$ 为真映射.

证明. 设 $K \subseteq \mathbb{C} - S_0$ 为紧集, 则存在 $\delta > 0$ 使得对任意 $x \in K$ 都有 $|a_0(x)| \geq \delta$, $|a_\nu(x)| \leq \frac{1}{\delta}$. 对于 $(x, y) \in V$, $x \in \pi^{-1}(K)$, 有

$$y^n + \frac{a_1(x)}{a_0(x)} y^{n-1} + \cdots + \frac{a_n(x)}{a_0(x)} = 0,$$

因此由之前引理可知 $|y| \le 2\max\limits_{\nu} \delta^{-2/\nu}$. 因此 $\pi^{-1}(K)$ 是有界集. 又因为 $\pi^{-1}(K) = (K\times\mathbb{C})\cap V$ 为 $\mathbb{C}^2$ 的闭集, 故 $\pi^{-1}(K)$ 紧致. □

定义. *设 $p: X \to Y$ 为 (Hausdorff) 空间之间的连续映射. 如果 p 满足以下条件: $\forall y_0 \in Y$, 存在 y_0 的开邻域 V 使得 $p^{-1}(V)$ 形如 X 中的开集的无交并 $\coprod_{j\in\mathcal{J}} U_j$, 并且对任意 $j \in \mathcal{J}$, $p|_{U_j}$ 为 U_j 与 V 的同胚, 则称三元组 (X, Y, p) 为***覆盖** *(covering). 此时也称 X 是 Y 的覆盖.*

若开子集 $V \subseteq Y$ 满足上述定义中的性质, 则称 Y 被 p 所覆盖.

由定义可知, $p^{-1}(y)$ 的基数是 Y 上的局部常值函数. [沿用定义里的记号, 对任意 $y\in Y$, $p^{-1}(y)$ 的基数恰为指标集 $\mathcal{J}$ 的基数.] 因此, 若 Y 连通, 则 $p^{-1}(y)$ 当中的 "点的个数" 与 y 无关. 若 $p^{-1}(y)$ 是有限 (无限) 集, 则称该覆盖是有限 (无限) 的. 若对任意 $y \in Y$, $p^{-1}(y)$ 恰有 n 个元素, 则称此覆盖为n **叶覆盖**.

若 $p: X \to Y$, $p': X' \to Y$ 为 Y 的两个覆盖, 如果存在同胚映射 $\varphi: X' \to X$ 使得 $p\circ\varphi = p'$, 则称 Y 的这两个覆盖**同构**.

例子.

(1) 记 $\Delta = \left\{ z \in \mathbb{C} \middle| |z| < 1 \right\}$, $\Delta^* = \Delta - \{0\}$. 则对任意 $n \ge 1$, 映射 $p_n: \Delta^* \to \Delta^*$, $z \mapsto z^n$ 为 n 叶覆盖.

覆盖空间理论当中的一个标准结果是, Δ^* 的任何 n 叶覆盖都同构于 p_n.

(2) $p: \mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$, $p(z) = e^z$ 为 $\mathbb{C}^*$ 的无限覆盖.

(3) 设 X, Y 为局部紧空间, $p: X \to Y$ 为局部同胚 [即对任意 $z \in X$, 存在 a 的开邻域 U 使得 $V := p(U)$ 为 Y 的开集, 并且 $p|_U$ 为映到 V 的同胚] . 则 p 为有限覆盖当且仅当 p 为真映射.

证明. 若 p 为有限覆盖, 则对 $y_0 \in Y$ 以及 y_0 的被 p 覆盖的开邻域 V, $p|_{p^{-1}(V)}$ 显然是真映射. 由此易知 [2] p 是真映射.

[2] 译者注: 原文的确稍微跳过了一些点集拓扑的细节, 请读者自行补充之, 作为练习.

反之, 若 p 为局部同胚且为真映射, 任取 $y_0 \in Y$, 记 $p^{-1}(y_0) = \{x_1, ..., x_n\}$. 设 U'_j 为 x_j 的开邻域, 并且使得 $p|_{U'_j}$ 为映到 $V_j := p(U'_j)$ 的同胚. 由 p 为真映射, 以及 $X - \bigcup_{j=1}^{n} U'_j$ 为 X 的闭集, 从而 $E := p\left(X - \bigcup_{j=1}^{n} U'_j\right)$ 为 Y 的闭集. 显然 $y_0 \notin E$. 记 $V := Y - E$. 则 $p^{-1}(V) \subseteq U'_1 \cup \cdots \cup U'_n$, $V \subseteq V_1 \cap \cdots \cap V_n$. 记 $U_j := U'_j \cap p^{-1}(V)$, 则 $p^{-1}(V) = \bigcup_{j=1}^{n} U_j$, $p|_{U_j}$ 为映到 V 的同胚. □

设 $F \in \mathbb{C}[x, y]$ 为不可约多项式, $F(x, y) = a_0(x)y^n + \cdots + a_n(x)$. 记 $S_0 = \left\{x \in \mathbb{C} \middle| a_0(x) = 0\right\}$, $S_1 = \left\{x \in \mathbb{C} \middle| \exists y \in \mathbb{C},\ F(x, y) = 0 = \frac{\partial F}{\partial y}(x, y)\right\}$. 那么, 若 $V = \left\{(x, y) \in \mathbb{C}^2 \middle| F(x, y) = 0\right\}$, $\pi : V \to \mathbb{C}$ 为投影 $(x, y) \to x$, 则

$$\pi|_{\pi^{-1}(\mathbb{C}-(S_0 \cup S_1))} \longrightarrow \mathbb{C} - (S_0 \cup S_1)$$

为 (n 叶) 有限覆盖.

上述断言可有由性质 1.2 与隐函数定理得到.

在介绍如何用 $S_0 \cup S_1$ 当中的点与 $\mathbb{C}$ 中的无穷远点 ∞ 对集合 V 适当调整使得 "完备化" 之前, 我们先来介绍黎曼曲面及其相关概念.

2　黎曼曲面

设 X 为二维流形 (即 Hausdorff 空间, 并且每一点都有同胚于 $\mathbb{R}^2$ 中的开集的邻域).

考虑二元组 (U, φ), 其中 U 为 X 的开集, $\varphi : U \to \varphi(U) \subseteq \mathbb{C}$ 为映到 $\mathbb{C}$ 中开集的同胚.

称两个这样的二元组 (U_1, φ_1), (U_2, φ_2) 是 (全纯) **相容**的, 如果映射 $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} : \varphi_1(U_1 \cap U_2) \to \varphi_2(U_1 \cap U_2)$ 为全纯映射. 此时由复分析的标准结果可知该映射的逆映射也是全纯的.

X 上的**复结构**是指由一些二元组 (U, φ) 构成的集合族 $\mathcal{S}$, 使得 $\mathcal{S}$ 中的二元组两两相容并且 $\bigcup U = X$; 给定复结构 $\mathcal{S}$, 存在唯一的满足上述两条性质的且包含 $\mathcal{S}$ 的极大

的二元组族; 于是我们通常假设复结构是极大的. (极大的) 复结构之中的二元组 (U,φ) 称为**坐标卡** (chart) 或者**坐标邻域** (coordinate neighbourhood). 在坐标卡中, 我们常将 U 与 $\varphi(U)$ 等同, 像通常的复变量那样把 φ 的自变量记作 z.

带有复结构的二维连通流形 X 称为**黎曼曲面**. 我们常假定 X 具有可数拓扑基, 尽管 Radó 的某定理 (详见 [4]) 断言此假定自动成立.

设 X 为黎曼曲面, $\Omega \subseteq X$ 为开集, $f:\Omega \to \mathbb{C}$ 连续. 如果对 X 的任意坐标卡 (U,φ), 函数 $f\circ\varphi^{-1}:\varphi(\Omega\cap U)\to\mathbb{C}$ 全纯, 则称 f 全纯.

设 X,Y 为黎曼曲面, $f:X\to Y$ 连续. 如果对 Y 的任何坐标卡 (V,ψ), 函数 $\psi\circ f: f^{-1}(V)\to\psi(V)\subseteq\mathbb{C}$ 是全纯的, 则称映射 f 全纯.

黎曼曲面之间的非常值全纯映射是开映射. 全纯双射 $f:X\to Y$ 的逆映射 $f^{-1}: X\to Y$ 也全纯. 全纯双射也叫做**解析同构**或者**双全纯映射**.

例子.

(1) 复射影直线 = 黎曼球面. 设 $\mathbb{P}^1=\mathbb{C}\cup\{\infty\}$ 为复平面 $\mathbb{C}$ 的单点紧化. 记 $U_1=\mathbb{P}^1-\{\infty\}=\mathbb{C}$, $\varphi_1:U_1\to\mathbb{C}$ 为恒等映射;

$$U_2=\mathbb{P}^1-\{0\},\quad \varphi_2(z)=\begin{cases}\dfrac{1}{z} & z\in\mathbb{C}-\{0\}=\mathbb{C}^*\\ 0 & z=\infty\end{cases}.$$

映射 $\varphi_2\circ\varphi_1^{-1}$ 为 $\mathbb{C}^*$ 到自身的映射 $z\mapsto\dfrac{1}{z}$. 因此上述两个坐标卡定义了 $\mathbb{P}^1$ 的复结构. 这个黎曼曲面称为**复射影直线**或者**黎曼球面**.

(2) 环面. 设 $\tau\in\mathbb{C}$, $\operatorname{Im}\tau>0$. 记 $\Lambda=\left\{m+n\tau\middle|m,n\in\mathbb{Z}\right\}$. Λ 是 $\mathbb{C}$ 的加法子群. 考虑商群 $X:=\mathbb{C}/\Lambda$ 与典范投影 $\pi:\mathbb{C}\to X$. 在商拓扑下, X 为紧 Hausdorff 空间, $\mathbb{C}\to X$ 为局部同胚. [此断言是下述两者的推论: 若 $a\in\mathbb{C}$, 则集合 $U:=\left\{a+\lambda+\mu\tau\middle|\lambda,\mu\in\mathbb{R},-\frac{1}{2}<\lambda,\mu<\frac{1}{2}\right\}$ 是开集, 并且 π 将 U 一一地映到 X 的某开子集; 此外 X 为紧集 $\overline{U}$(U 的闭包) 的像 $(\forall a\in\mathbb{C})$. π 其实是覆盖映射.]

X 的坐标卡 (U,φ) 如下选取: 设 V 为 $\mathbb{C}$ 的开子集, 且满足 $\pi|_V$ 为映到 X 的开子集 U 的同胚; 记 $\varphi:=(\pi|_V)^{-1}:U\to V\subseteq\mathbb{C}$. 任意两个如此构造的二元组 $(U_1,\varphi_1),(U_2,\varphi_2)$ 都全纯相容: 显然对任意 $z\in\varphi_1(U_1\cap U_2)$ 都有 $\pi(\varphi_2\circ\varphi_1^{-1}(z))=$

$\pi(z)$, 从而 $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}(z) - z \in \Lambda, \forall z \in \varphi_1(U_1 \cap U_2)$, 从而必然在其连通分支上为常值 [因为 $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}$ 连续, 而 Λ 离散] .

上述构造的黎曼曲面 X 称为**环面**或者**椭圆曲线**.

(3) “高亏格” 曲面. 设 g 是大于 1 的整数, $0 < r < 1$. 记 $\Delta := \left\{z \in \mathbb{C} \middle| |z| < 1\right\}$. 则存在唯一的双全纯映射 $T : \Delta \to \Delta$ 使得 $T(r) = re^{3\pi i/2g}$, $T(re^{\pi i/2g}) = re^{2\pi i/2g}$. 记 $\sigma : \Delta \to \Delta$ 为旋转映射 $z \mapsto ze^{2\pi i/4g}$.

对 $k \in \mathbb{Z}$, 记

$$A_k = \sigma^{4k} T \sigma^{-4k}, \quad B_k = \sigma^{4k+1} T \sigma^{-4k-1},$$

记 Γ 为由 $A_k, B_k\,(k \in \mathbb{Z})$ 生成的 Δ 的双全纯变换群.

Poincaré 的某定理的一个特例表明, 存在 $0 < r < 1$ 使得群 Γ 在 Δ 的作用是自由 (没有不动点) 且不连续的, 并且商空间 Δ/Γ 紧致. [此定理及其证明详见 de Rham 的优美文章 *Sur les polygônes générateurs de groupes Fuchsiens,* L'Enseignement Mathématique, 1971, pp.47-61] . 可以证明典范投影 $\pi : \Delta \to \Delta/\Gamma$ 为覆盖映射; 与环面情形类似, 可通过 π 得到 Δ/Γ 的复结构并且使得 π 为全纯映射.

(4) 设 Y 为黎曼曲面, X 为二维连通流形, $p : X \to Y$ 为局部同胚. 则 X 存在唯一的复结构使得 p 全纯. 此复结构如下构造: 设 U 为 X 的开集, 使得 $p|_U$ 为映到 Y 的开集 V 的同胚, 并且存在某个 $j \in \mathcal{J}$ 使得 $V \subseteq V_j$, 其中 $\{(V_j, \psi_j)_{j \in \mathcal{J}}\}$ 为 Y 的给定的复结构. 定义 $\varphi_U : U \to \mathbb{C}$ 为 $\varphi_U = \psi_j \circ p$. 则容易验证两个如此定义的 $(U, \varphi_U), (U', \varphi_{U'})$ 全纯相容, 于是由此得到 X 的复结构, 且 p 在此复结构下全纯.

而唯一性则是如下结论的推论: 设 $U \subseteq X$ 为 X 的开集, $p|_U$ 为映到 $V \subseteq Y$ 的同胚, 若 p 全纯, 则 $(p|_U)^{-1} : V \to U$ 也全纯.

设黎曼曲面 X 上的全纯函数 $p : X \to \mathbb{C}$ 也是局部同胚. 我们将 $\mathbb{C}$ 视为 $\infty \in \mathbb{P}^1$ 的补集, 也把 p 视为局部同胚 $p : X \to \mathbb{P}^1$.

我们来定义 X 的边界点. 设 $\{x_\nu\}_{\nu \geq 1}$ 为 X 的点列, 并且满足以下三条:

(1) $\{x_\nu\}$ 是离散的 (即在 X 中不存在极限点);

(2) $\{p(x_\nu)\}$ 收敛于某点 $a \in \mathbb{P}^1$;

(3) 当 $a \in \mathbb{C}$ 时记 $D_\varepsilon := \left\{z \in \mathbb{C} \middle| |z - a| < \varepsilon\right\}$, 而 $a = \infty$ 时记 $D_\varepsilon := \left\{z \in \mathbb{C} \middle| |z| < \frac{1}{\varepsilon}\right\} \cup \{\infty\}$. 那么对足够小的 $\varepsilon > 0$, $\{x_\nu\}$ 当中至多除去有限个例外, 所有的点都在

$p^{-1}(D_\varepsilon)$ 的同一个连通分支.

对于满足上述三条性质的点列 $\{x_\nu\}$ 与 $\{y_\nu\}$, 如果点列

$$z_\nu := \begin{cases} x_{\frac{\nu+1}{2}} & \nu\text{为奇数} \\ y_{\frac{\nu}{2}} & \nu\text{为偶数} \end{cases}$$

依然满足此三条性质 [即 $\lim p(x_\nu) = \lim p(y_\nu) = a$, 并且 $p^{-1}(D_\varepsilon)$ 的某个连通分支包括 x_ν, y_ν 中的几乎所有点, 至多有限个点例外] , 则称这两个点列等价.

X 的 (关于映射 p 的) **边界点** 是指满足那三条性质的点列在上述等价关系下的等价类. 记 $\tilde{X} := X \cup \{X\text{的边界点}\}$.

设 P 是 X 的由点列 $\{x_\nu\}_{\nu\geq 1}$ 定义的边界点. 定义 P 在 $\tilde{X}$ 中的邻域如下. 取充分小的 $\varepsilon > 0$, 以及 $D_\varepsilon = \left\{z \middle| |z-a| < \varepsilon\right\}$ $(a \in \mathbb{C})$ 或者 $D_\varepsilon = \left\{z \middle| |z| > \dfrac{1}{\varepsilon}\right\} \cup \{\infty\}$ $(a = \infty)$, 其中 $a := \lim p(x_\nu)$. 记 Ω_ε 为 $p^{-1}(D_\varepsilon)$ 的包括几乎所有点 x_ν(至多有限个点例外) 的那个连通分支, 再记 $\tilde{\Omega}_\varepsilon$ 为 Ω_ε 与满足以下性质的边界点 Q 构成的集合之并: 若边界点 Q 被点列 $\{y_\nu\}_{\nu\geq 1}$ 定义, 则 $\left\{\nu \middle| y_\nu \notin \Omega_\varepsilon\right\}$ 有限 [此性质与 Q 的代表元 $\{y_\nu\}$ 选取无关] . 我们规定 $\tilde{\Omega}_\varepsilon$ ($\varepsilon > 0$ 足够小) 构成边界点 $P \in \tilde{X} - X$ 的邻域基.

$\tilde{X}$ 的上述拓扑是 Hausdorff 的: 设 P, Q 分别为 X 的由 $\{x_\nu\}, \{y_\nu\}$ 所定义的边界点, 并且 $P \neq Q$; 则由点列等价关系的定义, 存在 $\varepsilon > 0$ 使得 $p^{-1}(D_\varepsilon)$ 分别包含点列 $\{x_\nu\}$ 与 $\{y_\nu\}$ 的几乎所有 (至多有限个例外) 点的连通分支 $\Omega_{\varepsilon,1}$ 与 $\Omega_{\varepsilon,2}$ 不相同, 并且 $\tilde{\Omega}_{\varepsilon,1} \cap \tilde{\Omega}_{\varepsilon,2} = \varnothing$. 此外, p 显然可以延拓为连续映射 $\tilde{p} : \tilde{X} \to \mathbb{P}^1$, 使得 $\tilde{p}(P) = a = \lim p(x_\nu)$.

如果 X 的边界点 P 满足: 对于 $a := \tilde{p}(P)$ 的足够小的邻域 D_ε 以及 $p^{-1}(D_\varepsilon)$ 的包含定义 P 的点列的几乎所有 (至多有限个例外) 点的连通分支 Ω, 则 $p(\Omega) \subseteq D_\varepsilon - \{a\}$ 且 $p : \Omega \to D_\varepsilon - \{a\}$ 为有限覆盖; 则称 P 为 X 的**代数边界点**.

记 $\Delta_R := \left\{z \in \mathbb{C} \middle| |z| < R\right\}$, $\Delta_R^* := \Delta_R - \{0\}$, 则存在 $n \geq 1$ 使得映射 $p : \Omega \to D_\varepsilon - \{a\}$ 同构于 $p_n : \Delta^*_{\varepsilon^{1/n}} \to D_\varepsilon - \{a\}$, 其中 $p_n(z) = a + z^n$ (若 $a \in \mathbb{C}$) 或者 $p_n(z) = z^{-n}$ (若 $a = \infty$) [见上一节例子 1] . 此时, P 在 $\tilde{X}$ 中的邻域 $\tilde{\Omega} = \Omega \cup \{P\}$ 不含 X 的其它边界点. 由于 $p|_\Omega$ 同构于上述 p_n, 从而存在同胚 $\varphi : \tilde{\Omega} \to \Delta_{\varepsilon^{\frac{1}{n}}}$ 使得 $\varphi(P) = 0$, 且在 $\Delta^*_{\varepsilon^{\frac{1}{n}}}$ 当中成立 $p \circ \varphi^{-1} = p_n$. 显然 $\varphi|_\Omega$ 全纯.

记 $\hat{X} := X \cup \{X\text{的代数边界点}\}$. 我们可以通过代数边界点 $P \in \hat{X} - X$ 的上述构

造的二元组 $(\tilde{\Omega},\varphi)$ 将 X 的复结构延拓至 $\hat{X}$. 记 $\hat{p}:=\tilde{p}|_{\hat{X}}$. 二元组 $(\hat{X},\hat{p})$ 称为 (X,p) 的 **(代数) 完备化** (algebraic completion). 映射 $\hat{p}:\hat{X}\to\mathbb{P}^1$ 是全纯的, 但不一定是局部同胚. 沿用之前记号, 若 P 为代数边界点, Ω 为 $D_\varepsilon-\{a\}$ 的 n 叶覆盖 $(n>1)$, 则 $\hat{p}$ 在点 P 处不是局部同胚.

本节所述的这些构造将用来得到全纯函数的黎曼曲面, 这正是黎曼本人当初的想法. 在此之前, 我们先引入黎曼曲面上的全纯函数芽层.

3　全纯函数芽层

设 X 为黎曼曲面, $a\in X$. 考虑二元组 (U,f), 其中 U 为 a 的开邻域, f 为 U 上的全纯函数. 对于这样的两个二元组 (U,f), (V,g), 如果存在 a 的开邻域 $W\subseteq U\cap V$ 使得 $f|_W=g|_W$, 则称这两个二元组等价, 也称它们定义了点 a 处的同一个函数芽. (U,f) 所在的等价类称为 f 在 a 处的**芽** (germ), 记作 $\underline{f}_a$. 芽 $\underline{f}_a$ 在 a 处的取值 $\underline{f}_a(a):=f(a)$, 其中任取 $\underline{f}_a$ 的代表元 (U,f).

若取坐标卡 (U,φ) 使得 $a\in U$, $\varphi(a)=0$ 并且将 U 上的函数等同于 $\varphi(U)$ 上的函数, 则我们也可以谈论芽 $\underline{f}_a$ 在 a 处的导数值:

$$\underline{f}_a^{(k)}(a)=\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\right)^k f\circ\varphi^{-1}|_{z=0},$$

其中任取 $\underline{f}_a$ 的代表元 (V,f).

记 $\mathcal{O}_a$ 为点 a 处的全体芽构成的集合. $\mathcal{O}_a$ 显然是环, 而且是 $\mathbb{C}$-代数. $\mathcal{O}_a$ 中的满足 $\underline{f}_a(a)=0$ 的芽 $\underline{f}_a$ 构成的集合 $\mathfrak{m}_a$ 是 $\mathcal{O}_a$ 的理想; 补集 $\mathcal{O}_a-\mathfrak{m}_a$ 由 $\mathcal{O}_a$ 的全体可逆元构成 $\left[\underline{f}_a \text{ 在 } \mathcal{O}_a \text{ 中可逆} \iff \underline{f}_a(a)\neq 0\right]$, 从而 $\mathfrak{m}_a$ 是 $\mathcal{O}_a$ 的唯一的极大理想.

若取上述坐标卡, 则映射 $\underline{f}_a\mapsto\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\underline{f}_a^{(n)}(a)z^n$ 为 $\mathcal{O}_a$ 与收敛半径非零的幂级数环之间的 $\mathbb{C}$-代数同构.

记 $\mathcal{O}_X:=\displaystyle\coprod_{a\in X}\mathcal{O}_a$(无交并). 我们有时把 $\mathcal{O}_X$ 简记为 $\mathcal{O}$. 再定义映射 $p:\mathcal{O}_X\to X$ 使得对任意 $f\in\mathcal{O}_a$, $p(f)=a$.

对于芽 $\underline{f}_a\in\mathcal{O}_X$, (U,f) 为 $\underline{f}_a$ 的一个代表元. 记集合 $N(U,f):=\left\{\underline{f}_x\middle|x\in U\right\}$, 即

由函数 f 与 U 中的点所定义的芽之全体. 我们再定义 $\mathcal{O}_X$ 的拓扑, 使得当 (U,f) 跑遍 $\underline{f}_x$ 的所有代表元时, $\{N(U,f)\}$ 构成 $\underline{f}_x$ 的邻域基.

引理. $\mathcal{O}_X$ 的上述拓扑是 *Hausdorff* 的, 并且映射 $p:\mathcal{O}_X\to X$ 是局部同胚.

证明. 设 $\underline{f}_a,\underline{g}_b\in\mathcal{O}_X$ 并假设 $\underline{f}_a\neq\underline{g}_b$. 我们只需证明它们可被开集分离, 考虑以下两种情况:

1). $a\neq b$. 此时分别取 $\underline{f}_a$, $\underline{g}_b$ 的代表元 (U,f) 与 (V,g), 使得 $a\in U, b\in V$. 不妨适当选取 (缩小)U,V 使得 $U\cap V=\varnothing$, 从而 $N(U,f)\cap N(V,g)=\varnothing$.

2). $a=b$. 设 U 为 a 的连通开邻域, f,g 为 U 上的全纯函数使得二元组 $(U,f),(V,g)$ 分别定义了 $\underline{f}_a,\underline{g}_a$. 断言 $N(U,f)\cap N(U,g)=\varnothing$. 这是因为, 若存在 $\underline{h}_x\,(x\in U)$ 属于二者的交集, 则 f,g 在 x 处都定义了芽 $\underline{h}_x$, 从而 f,g 在 x 的某邻域相等. 又因为 U 连通, 从而解析延拓原理表明 $f\equiv g$, 于是 $\underline{f}_a=\underline{g}_a$, 矛盾.

因此 $\mathcal{O}_X$ 是 Hausdorff 的.

此外, 若 U 为 X 的开集, f 在 U 全纯, 则 $p(N(U,f))=U$ 并且 $p|_{N(U,f)}$ 为单射, 且逆映射为 $x\mapsto\underline{f}_x(=f$ 在 x 处的芽). 由此可知 p 满足此引理所述性质. □

注记. 若 X 具有可数拓扑基, 则可直接证明 $\mathcal{O}_X$ 的任何连通分支具有可数拓扑基. 这是 Poincaré-Volterra 定理 [其叙述与证明可见 [7]] 的推论.

现在我们来构造 "解析函数的黎曼曲面".

设 $X=\mathbb{C}$, 考虑 $\mathcal{O}_{\mathbb{C}}$. 设 M 为 $\mathcal{O}_{\mathbb{C}}$ 的一个连通分支, $p:M\to\mathbb{C}\subseteq\mathbb{P}^1$ 为之前构造的映射 $\underline{f}_a\mapsto a$ 在 M 上的限制映射; 则 $p:M\to\mathbb{C}$ 为局部同胚, 从而 M 存在唯一的黎曼曲面结构使得 p 为全纯映射; 于是 p 为局部解析同构, 即对任意 $a\in M$ 都存在 a 的开邻域 U 使得 $p|_U$ 为 U 与 $p(U)$ 的解析同构.

定义 M 上的全纯函数 h, 使得 $h(\underline{f}_a)=\underline{f}_a(a)$ [若 (U,f) 为 $\underline{f}_a$ 的代表元并且 U 连通, 则 $N(U,f)\subseteq M$ 并且对任意 $x\in U$ 都成立 $h(\underline{f}_x)=f(x)$, 所以 h 是全纯的] . 直观地讲, 如此 "万有 (universal) 函数" h 描述了给定 $\underline{f}_x\in M$ 的能通过 "解析延拓" 所得到的所有的芽.

记 $\hat{M}:=M\cup\{M\text{的代数边界点}\}$, 再记 $\hat{p}:\hat{M}\to\mathbb{P}^1$ 为 $p:M\to\mathbb{C}$ 延拓而成的全纯

映射.

设 U 为 $\mathbb{C}$ 的连通开集, f 为 U 上的全纯函数. 假设 (U,f) 定义了某点 $a\in U$ 的芽 $\underline{f}_a\in M$ [因为 U 连通, 从而实际上对任何 $a\in U$ 都有 $\underline{f}_a\in M$] .

$E:=\hat{M}-M$ 为 $\hat{M}$ 的离散点集, 再记 h 为之前定义的 M 上的 "万有函数". 设 X_f 为 M 与 E 中的 h 的非本性奇点 [即 h 的可去奇点或极点] 构成的集合的并集. 因此存在定义在 X_f 上的亚纯函数 h_f 使得 $h_f|_M=h$. 再记 $p_f:X_f\to\mathbb{P}^1$ 为 $\hat{p}$ 的限制.

三元组 (X_f,p_f,h_f) 称为 U 上的**函数 f 的黎曼曲面**.

设 $P\in X_f-M$, $p_f(P)=a$. 则在 P 附近, 映射 p_f 与 $z\mapsto a+z^n\,(n\geq 1)$ 或者 $z\mapsto z^{-n}$ 等价. 因此可适当选取 X_f 的 P 附近的局部坐标 z 以及 $\mathbb{P}^1$ 的 a 附近的局部坐标 w, 使得 p_f 与 h_f 在该局部坐标下形如

$$\begin{cases} w=z^n \\ h_f=\displaystyle\sum_{\nu=-k}^{\infty}a_\nu w^{\nu/n} \quad (=\sum_{\nu=-k}^{\infty}a_\nu z^\nu). \end{cases}$$

4 代数函数的黎曼曲面

设 $F(x,y)=a_0(x)y^n+a_1(x)y^{n-1}+\cdots+a_n(x)\in\mathbb{C}[x,y]$ 为不可约多项式, 记 $V:=\left\{(x,y)\in\mathbb{C}^2\middle|F(x,y)=0\right\}$. 再记 $S_0:=\left\{x\in\mathbb{C}\middle|a_0(x)=0\right\}$, $S_1:=\left\{x\in\mathbb{C}\middle|\exists y\in\mathbb{C},\,F(x,y)=0=\dfrac{\partial F}{\partial y}(x,y)\right\}$, 以及 $S:=S_0\cup S_1\cup\{\infty\}\subseteq\mathbb{P}^1$. 令 $\pi:V\to\mathbb{C}$ 为投影映射 $(x,y)\mapsto x$, $V':=V-\pi^{-1}(S)=V-\pi^{-1}(S_0\cup S_1)$, $\pi':=\pi|_{V'}$. 我们已经知道, 若 D_ε 为以点 $a\in S$ 为中心的开圆盘 [若 $a=\infty$, 则 $D_\varepsilon=\{|z|>\dfrac{1}{\varepsilon}\}\cup\{\infty\}$] , 则 $\pi'|_{\pi^{-1}(D_\varepsilon-\{a\})}\to D_\varepsilon-\{a\}$ 为 [n 叶] 有限覆盖. 特别地, $\pi^{-1}(D_\varepsilon-\{a\})$ 只有有限多个连通分支. 此外, 若 W 为 V' 的一个连通分支, 则 $\pi'|_W$ 也是覆盖映射, 从而将 W 映满 $\mathbb{P}^1-S$. 因此 V' 只有有限多个连通分支. [我们后面将证明, V' 其实是连通集.]

设 $W_1,...,W_r$ 为 V' 的各连通分支. 于是 $\pi_j:=\pi|_{W_j}\to\mathbb{P}^1-S$ 为有限覆盖, 因此 W_j 的边界点都是代数边界点. 记 $\hat{\pi}_j:\hat{W}_j\to\mathbb{P}^1$ 为 $\pi_j:\mathbb{P}^1-S$ 的代数完备化. 若 $P\in\hat{W}_j-W_j$, $a=\hat{\pi}_j(P)$, 则存在 P 的邻域 U, $\varepsilon>0$ 以及某正整数 m 使得 $\hat{\pi}_j|_U\to D_\varepsilon$ 同构于映射 $z\mapsto a+z^m$ [或者 $z\mapsto z^{-m}$] . 于是特别地, $\hat{\pi}_j|_U\to D_\varepsilon$ 为真映射 (proper map). 这表明, 对任意 $a \in S$, 存在 $\varepsilon > 0$ 使得 $\hat{\pi}_j|_{\hat{\pi}_j^{-1}(D_\varepsilon)} \to D_\varepsilon$ 为真映射. 又因为 $\hat{\pi}_j|_{W_j} \to \mathbb{P}^1 - S$ 为真映射, 所以 $\hat{\pi}_j : \hat{W}_j \to \mathbb{P}^1$ 为真映射, 因此 $\hat{W}_j$ 紧致.

记 $p_2 : V \to \mathbb{C}$ 为向第二个分量的投影 $(x, y) \mapsto y$, 则 $\eta := p_2|_{V'}$ 是 V' 上的全纯函数, 并且 $\eta_j := \eta|_{W_j}$ 也全纯.

断言 η_j 可延拓为 $\hat{W}_j$ 上的亚纯函数. 为此, 任取 $a \in S$, 记 $P \in \hat{W}_j$ 使得 $\hat{\pi}_j(P) = a$. 取 P 附近的局部坐标 z 与 a 附近的局部坐标 w, 使得 $\hat{\pi}_j$ 在此局部坐标下形如 $z \mapsto z^m = w$. 若 U 为点 P 的小邻域, 则由 V 与 η 的定义可知当 $z \neq 0$ 时成立

$$\eta_j^n + \frac{a_1(w)}{a_0(w)}\eta_j^{n-1}(z) + \cdots + \frac{a_n(w)}{a_0(w)} = 0, \quad w = \hat{\pi}_j(z).$$

由于 a_ν/a_0 在 $w = 0$ 处亚纯, 从而存在常数 $C > 0, N > 0$ 使得在 $w = 0$ 附近有 $\left|\frac{a_\nu(w)}{a_0(w)}\right| \leq \frac{C}{|w|^N}$. 由引理 1.3, 可知存在常数 C_1, k 使得 $|\eta_j(z)| \leq 2\max_\nu \frac{C^{1/\nu}}{|w|^{N/\nu}} \leq \frac{C_1}{|z|^k}$. 因此 η_j 可亚纯延拓至 $\hat{W}_j$.

我们断言 V' 是连通的. 否则, $\pi_1 : W_1 \to \mathbb{P}^1 - S$ 为 r 叶覆盖, 其中 $1 \leq r < n$.

对于 $x \in \mathbb{P}^1 - S$, 记 $b_\nu(x)\,(\nu = 1, ..., r)$ 为关于 $y_1, ..., y_r$ 的第 ν 个初等对称多项式, 其中 y_j 为函数 η_1 在 $\pi_1^{-1}(x)$ 里的第 j 个点处的取值. 由 η_1 的定义可知, y_j 为向第二分量的投影映射 p_2 在点 (x, y) 处的取值, 于是 $F(x, y_j) = 0$, $j = 1, ..., r$.

断言 b_ν 可亚纯延拓至 $\mathbb{P}^1$. 事实上, 由于 y_j 为 $\hat{W}_1$ 上的亚纯函数 η_1 的值, 从而在 $a \in S$ 附近有如下估计:

$$\begin{aligned} |b_\nu(x)| &= \left|\sum_{i_1,\ldots,i_\nu} \eta_1(P_{i_1})\cdots\eta_1(P_{i_\nu})\right| \leq C|z|^{-\ell} \\ &\leq C_1|x-a|^{-\ell'} \quad (\text{若 } a = \infty \text{ 则这里换成} C_1|x|^{-\ell'}) \end{aligned}$$

[其中 $\{P_1, ..., P_r\} = \pi_1^{-1}(x)$.] 从而 b_ν 为 $\mathbb{P}^1$ 上的亚纯函数, 从而是关于 x 的有理函数.

记 $G(x, y) = y^r + b_1(x)y^{r-1} + \cdots + b_r(x)$. 于是对 $x \in \mathbb{P}^1 - S$, $G(x, y)$ 的根 [视 y 为未知数] 也是 $F(x, y)$ 的根. 因此在 $\mathbb{C}(x)[y]$ 当中 G 整除 F; 又因为 $\deg_y G \geq 1$, 所以 F 不是不可约的 [Gauss 引理] .

因此 V' 连通, 并且其代数完备化 $\hat{W}$ 是紧黎曼曲面. $\hat{W}$ 上具有亚纯函数 η, 若再记 $\hat{\pi} : \hat{W} \to \mathbb{P}^1$ 为 $\pi' : V' \to \mathbb{P}^1 - S$ 的延拓, 则在 $\hat{W}$ 恒成立

$$F(\hat{\pi}(P), \eta(P)) \equiv 0.$$

此构造当然是全纯函数芽的黎曼曲面的特殊情形, 毕竟我们证明了 V' 的连通性. 此命题与下述等价:

设 $a \in \mathbb{P}^1 - S$, 记 $y_1, ..., y_n$ 为满足方程 $F(x, y_j(x)) = 0$ 的函数芽. 则对任意 j, 存在 $\mathbb{P}^1 - S$ 中的以 a 为起点, 终点的闭曲线 γ, 使得 y_1 沿 γ 解析延拓得到 y_j.

5 层论初步

设 X 为拓扑空间. X 上的 Abel 群**预层** (presheaf) 是指如下资料:

(1) 对于每个开集 $U \subseteq X$, 都配以 Abel 群 $\mathcal{F}(U)$, 并且 $\mathcal{F}(\varnothing) = \{0\}$ 为只有一个元素的 Abel 群.

(2) 对于任何满足 $V \subseteq U$ 的两个开集 U, V, 都配以群同态 $\rho_V^U : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(V)$ [称为**限制映射**], 使得满足:

  (a) 对任意开集 U, ρ_U^U 为 $\mathcal{F}(U)$ 上的恒等映射.

  (b) 若 $W \subseteq V \subseteq U$ 为三个开集, 则
$$\rho_W^U = \rho_W^V \circ \rho_V^U.$$

若群 $\mathcal{F}(U)$ 具有额外的结构 [环, 向量空间, $\mathbb{C}$-代数...], 并且限制映射也保持相应的结构, 则我们也可谈论相应的 [环, 向量空间, $\mathbb{C}$-代数...] 的预层.

例子. 设 X 为黎曼曲面, 对 X 的开集 U, 即 $\mathcal{O}(U)$ 为 U 上的全纯函数构成的 $\mathbb{C}$-代数. 若开集 $V \subseteq U$, 映射 $\rho_V^U : \mathcal{O}(U) \to \mathcal{O}(V)$ 为通常的函数限制 $f \mapsto f|_V$.

X 上的预层 $(\mathcal{F}(U), \rho_V^U)$ 如果再满足以下两个条件 [3], 则称为**层** (sheaf): 对任意开集 $U \subseteq X$, 以及 U 的任何开覆盖 $U = \bigcup_{i \in \mathcal{I}} U_i$,

(1) 若 $f, g \in \mathcal{F}(U)$, 并且对任意 $i \in \mathcal{I}$ 都有 $\rho_{U_i}^U(f) = \rho_{U_i}^U(g)$, 则 $f = g$.

(2) 若 $f_i \in \mathcal{F}(U_i)$, $(i \in \mathcal{I})$ 使得对任意 $i, j \in \mathcal{I}$ 都有 $\rho_{U_i \cap U_j}^{U_i}(f_i) = \rho_{U_i \cap U_j}^{U_j}(f_j)$, 则存在 $f \in \mathcal{F}(U)$ 使得 $\rho_{U_i}^U(f) = f_i$, $(\forall i)$.

[3] 译者注: 下述两个条件分别俗称 “唯一性公理” 与 “粘合公理”.

我们常将 $\rho_V^U(f)$ 简记为 $f|_V$ [就好像我们在谈论通常函数的限制一样].

对任何预层, 我们能相应得到一个层 [用之前定义全纯函数芽的方式来构造]. 设 $\mathcal{F}=(\mathcal{F}(U),\rho_V^U)$ 为 X 上的预层, $a\in X$. 我们引入不交并 $\coprod\limits_{a\in U}\mathcal{F}(U)$ 上的如下等价关系: 对于 $f\in\mathcal{F}(U)$, $g\in\mathcal{F}(V)$, 如果存在 a 的开邻域 $a\in W\subseteq U\cap V$ 使得 $f|_W=g|_W$, 则称 f 与 g 等价. 上述等价关系的等价类构成的集合记为 $\mathcal{F}_a$, 称为预层 $\mathcal{F}$ 在 $a\in X$ 的**茎条** (stalk). [这也是直系统 $\{\mathcal{F}(U),\rho_V^U\}$ 的直极限]. 我们定义 $|\mathcal{F}|:=\coprod\limits_{a\in X}\mathcal{F}_a$(不交并) 上的拓扑, 使得对任意 $\underline{f}_a\in\mathcal{F}_a$, 以下 $N(U,f)$ 之全体构成 $\underline{f}_a$ 的邻域基: 设 $f\in\mathcal{F}(U)$, $a\in U$ 为等价类 $\underline{f}_a$ 的一个代表元, $N(U,f):=\left\{\underline{f}_x\middle|x\in U\right\}$, 其中 $\underline{f}_x$ 为 (U,f) 所在的 $\mathcal{F}_x$ 的等价类. 一般来说, 在此拓扑下, $|\mathcal{F}|$ 不一定是 Hausdorff 的, 但投影映射 $p:|\mathcal{F}|\to X$, $p(f)=a\,(\text{若}f\in\mathcal{F}_a)$ 为局部同胚. 若记 $|\mathcal{F}|(U)$ 为由 $|\mathcal{F}|$ 在 U 上的截面构成的集合, 即 $|\mathcal{F}|(U)=\left\{s:U\to|\mathcal{F}|\middle|s\text{为连续映射, 并且}p\circ s=\mathrm{id}_U\right\}$, 再令 $r_V^U(s)$ 为截面 $s:U\to|\mathcal{F}|$ 在 $V\subseteq U$ 上的限制. 那么 $(|\mathcal{F}|(U),r_V^U)$ 是层, 称为预层 $\mathcal{F}$ 的**层化** (the sheaf associated to the presheaf $\mathcal{F}$).

现在我们定义两个预层之间的态射. 设 $\mathcal{F}=(\mathcal{F}(U),\rho_V^U)$ 与 $\mathcal{G}=(\mathcal{G}(U),r_V^U)$ 为 X 上的两个预层. **态射** $\alpha:\mathcal{F}\to\mathcal{G}$ 是指, 对每个开集 U 都安排一个群同态 $\alpha_U:\mathcal{F}(U)\to\mathcal{G}(U)$, 使得对于任意 $V\subseteq U$, 图表

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F}(U) \arrow[r, "\alpha_U"] \arrow[d, "\rho_V^U"] & \mathcal{G}(U) \arrow[d, "r_V^U"] \\
\mathcal{F}(V) \arrow[r, "\alpha_V"] & \mathcal{G}(V)
\end{tikzcd}$$

交换. 若对任意开集 U, α_U 为同构, 则称 $\alpha:\mathcal{F}\to\mathcal{G}$ 为同构. 设预层态射 $\alpha:\mathcal{F}\to\mathcal{G}$, 则定义该态射的**核**$\ker\alpha$ 为如下的预层:

$$\left\{\ker(\alpha_U),\rho_V^U\middle|\ker(\alpha_U)\right\}.$$

若 $\mathcal{F},\mathcal{G}$ 都是层, 则 $\ker\alpha$ 也是层.

还可以定义预层态射的**像**$\mathrm{im}(\alpha)$ 为

$$\left\{\mathrm{im}(\alpha_U),r_V^U\middle|\mathrm{im}(\alpha_U)\right\},$$

特别注意, 即使 $\mathcal{F},\mathcal{G}$ 都是层, 预层 $\mathrm{im}(\alpha)$ 也不一定是层.

例子. 设 $X=\mathbb{C}^*=\mathbb{C}-\{0\}$, $\mathcal{O}(U)$ 为 U 上的全纯函数的加法群, $\mathcal{O}^*(U)$ 为 U 上的处处非零全纯函数的乘法群. 考虑态射 $\exp:\mathcal{O}\to\mathcal{O}^*$, 使得对任意 $f\in\mathcal{O}(U)$, $\exp_U: f\mapsto\exp(2\pi i f)$, 则 $\mathrm{im}(\exp)$ 不满足成为层的第二个要求 [即 "粘合公理"] . 这是因为, 考虑 $U_1=\mathbb{C}-\left\{x\in\mathbb{R}\middle|x\le 0\right\}$, $U_2=\mathbb{C}-\left\{x\in\mathbb{R}\middle|x\ge 0\right\}$, 再考虑 U_1 上的函数 $f_1(z)\equiv z$ 以及 U_2 上的函数 $f_2(z)\equiv z$. 则由 U_1,U_2 的单连通性可知 $f_i\in\mathrm{im}(\exp_{U_i})$, 但是不存在 $f\in\mathrm{im}(\exp_{U_1\cup U_2})$ 使得 $f|_{U_i}=f_i\,(i=1,2)$. [函数 z 在 $\mathbb{C}^*=U_1\cup U_2$ 不存在单值对数.]

注记. 设 $\mathcal{F}$ 为预层, $|\mathcal{F}|$ 为 $\mathcal{F}$ 的层化, 则有预层态射 $\alpha:\mathcal{F}\to|\mathcal{F}|$ 满足: 对于 $f\in\mathcal{F}(U)$, $\alpha_U(f)$ 为 U 上的截面, 使得 $a\mapsto\underline{f}_a=(U,f)$ 所在的 $\mathcal{F}_a$ 的等价类. 也能直接验证, 若 $\mathcal{F}$ 为层, 则 α 为同构.

考虑黎曼曲面 X 上的全纯函数层 $U\mapsto\mathcal{O}(U)=\{U\text{上的全纯函数}\}$, 则相应的 $|\mathcal{O}|$ 为第 3 节所定义的 "X 上的全纯函数芽层". 由于从 $\mathcal{O}$ 到 $|\mathcal{O}|$ 的态射是同构, 我们将不再区分这两者.

我们常将黎曼曲面 X 上的全纯函数层记作 $\mathcal{O}_X$, 称为 X 的**结构层** (structure sheaf).

定义. *设 $\alpha:\mathcal{F}\to\mathcal{G}$ 为层 $\mathcal{F},\mathcal{G}$ 之间的态射, 则将预层 $\mathrm{im}(\alpha)=\left\{\mathrm{im}(\alpha_U),r_V^U\middle|\mathrm{im}(\alpha_U)\right\}$ 的层化记作 $\mathrm{Im}(\alpha)$.*

设 $\alpha:\mathcal{E}\to\mathcal{F}$ 与 $\beta:\mathcal{F}\to\mathcal{G}$ 为 X 上的层 $\mathcal{E},\mathcal{F},\mathcal{G}$ 之间的同态. 如果 $\ker(\beta)$ 与我们刚才定义的 $\mathrm{Im}(\alpha)$ 相等, 则称序列

$$\mathcal{E}\xrightarrow{\alpha}\mathcal{F}\xrightarrow{\beta}\mathcal{G}$$

[在 $\mathcal{F}$ 处] **正合** (exact). 该正合性意味着以下:

(1) $\beta_U\circ\alpha_U=0,\forall U$, 并且

(2) 若 $f\in\mathcal{F}(U)$ 使得 $\beta_U(f)=0$, 则存在 U 的开覆盖 $\{U_i\}_{i\in\mathcal{I}}$ 使得对任意 $i\in\mathcal{I}$, $f|_{U_i}\in\mathrm{im}(\alpha_{U_i})$.

现在设 X 为拓扑空间, $\mathcal{F}$ 为 X 上的层. 设 $\mathcal{U}=\{U_i\}_{i\in\mathcal{I}}$ 为 X 的一族开覆盖. 那么对于整数 $q\ge 0$, 定义 $\mathcal{F}$ 的 [关于开覆盖 $\mathcal{U}$ 的] q-**上链群** (q-cochain group) 如下:

$$C^q(\mathcal{U},\mathcal{F}):=\prod_{(i_0,\ldots,i_q)\in\mathcal{I}^{q+1}}\mathcal{F}(U_{i_0}\cap\cdots\cap U_{i_q}).$$

定义**上边缘算子** (coboundary)$\delta : C^0(\mathcal{U},\mathcal{F}) \to C^1(\mathcal{U},\mathcal{F})$ 使得 $\delta\big((f_i)_{i\in\mathcal{I}}\big) = (c_{ij})_{i,j\in\mathcal{I}}$, 其中 $c_{ij} = f_i|_{U_i\cap U_j} - f_j|_{U_i\cap U_j}$. 再记

$$Z^1(\mathcal{U},\mathcal{F}) = \left\{(c_{ij}) \in C^1(\mathcal{U},\mathcal{F})\middle| \text{在 } U_i\cap U_j\cap U_k \text{ 当中成立} c_{ij}+c_{jk}=c_{ik}, \forall i,j,k\in\mathcal{I}\right\}$$

[严格地讲, 此条件应该是

$$c_{ij}|_{U_{ijk}} + c_{jk}|_{U_{ijk}} = c_{ik}|_{U_{ijk}}, \quad U_{ijk} = U_i\cap U_j\cap U_k.$$

] 最后, 再记 $B^1(\mathcal{U},\mathcal{F}) = \mathrm{Im}\left[\delta : C^0(\mathcal{U},f) \to C^1(\mathcal{U},\mathcal{F})\right]$; 则 $B^1(\mathcal{U},\mathcal{F}) \subseteq Z^1(\mathcal{U},\mathcal{F})$.

我们称商群

$$H^1(\mathcal{U},\mathcal{F}) := Z^1(\mathcal{U},\mathcal{F})/B^1(\mathcal{U},\mathcal{F})$$

为 $\mathcal{F}$ 关于 $\mathcal{U}$ 的**第一个上同调群** (the first cohomology group).

我们也记

$$H^0(\mathcal{U},\mathcal{F}) = \left\{(f_i)_{i\in\mathcal{I}} \in C^0(\mathcal{U},\mathcal{F})\middle|\delta(f_i)_{i\in\mathcal{I}} = 0\right\};$$

由层公理, 由 $f \mapsto (f|_{U_i})_{i\in\mathcal{I}}$ 所定义的映射 $\mathcal{F}(X) \to C^0(\mathcal{U},\mathcal{F})$ 给出了 $\mathcal{F}(X)$ 与 $H^0(\mathcal{U},\mathcal{F})$ 的同构, 这对任何开覆盖都成立. $\mathcal{F}(X) = H^0(\mathcal{U},\mathcal{F})$ 中的元素也称为层 $\mathcal{F}$ 的**整体截面** (global section).

称开覆盖 $\mathcal{V} = (V_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$ 为开覆盖 $\mathcal{U}$ 的一个**加细** (refinement), 如果存在映射 $\tau : \mathcal{A} \to \mathcal{I}$ 使得对任意 $\alpha \in \mathcal{A}$ 成立 $V_\alpha \subseteq U_{\tau(\alpha)}$. 此时, τ 通过下述方式诱导群同态

$$\tau^* : H^1(\mathcal{U},\mathcal{F}) \to H^1(\mathcal{V},\mathcal{F}),$$

它是如此得到的: 对于 $\xi = (c_{ij})_{i,j\in\mathcal{I}} \in Z^1(\mathcal{U},\mathcal{F})$, 令 $\tau^* = (\gamma_{\alpha\beta})_{\alpha\beta}$, 其中 $\gamma_{\alpha\beta} = c_{\tau(\alpha)\tau(\beta)}|_{V_\alpha\cap V_\beta}$. 显然 $\tau^*(B^1(\mathcal{U},\mathcal{F})) \subseteq B^1(\mathcal{V},\mathcal{F})$, 从而这诱导从 $H^1(\mathcal{U},\mathcal{F})$ 到 $H^1(\mathcal{V},\mathcal{F})$ 的群同态 [也记作 τ^*] .

性质 5.1. *若 $\sigma,\tau : \mathcal{A} \to \mathcal{I}$ 为两个 (不同的) 加细映射 [也就是说, 对任意 $\alpha \in \mathcal{A}$, $V_\alpha \in U_{\tau(\alpha)} \cap U_{\sigma(\alpha)}$] , 则相应的同态*

$$\tau^*, \sigma^* : H^1(\mathcal{U},\mathcal{F}) \to H^1(\mathcal{V},\mathcal{F})$$

相等.

证明. 若 $(f_{ij})_{i,j\in\mathcal{I}}\in Z^1(\mathcal{U},\mathcal{F})$, 则在 $V_\alpha\cap V_\beta$ 当中成立

$$f_{\tau(\alpha)\tau(\beta)}-f_{\sigma(\alpha)\sigma(\beta)}=\big(f_{\tau(\alpha)\sigma(\alpha)}+f_{\sigma(\alpha)\tau(\beta)}\big)-\big(f_{\sigma(\alpha)\tau(\beta)}+f_{\tau(\beta)\sigma(\beta)}\big)=g_\alpha-g_\beta,$$

其中 $g_\alpha=f_{\tau(\alpha)\sigma(\alpha)}|_{V_\alpha}$. 因此 $\{f_{\tau(\alpha)\tau(\beta)}-f_{\sigma(\alpha)\sigma(\beta)}\}\in B^1(\mathcal{V},\mathcal{F})$. □

性质 5.2. 若开覆盖 $\mathcal{V}$ 是 $\mathcal{U}$ 的加细, 则诱导同态

$$H^1(\mathcal{U},\mathcal{F})\to H^1(\mathcal{V},\mathcal{F})$$

为单射.

证明. 设 $\tau:\mathcal{A}\to\mathcal{I}$ 为加细映射, $\xi=\{(f_{ij})_{i,j\in\mathcal{I}}\}\in Z^1(\mathcal{U},\mathcal{F})$, 使得 $\tau^*(\xi)\in B^1(\mathcal{V},\mathcal{F})$. 于是存在 $g_\alpha\in\mathcal{F}(V_\alpha)$ 使得 $f_{\tau(\alpha)\tau(\beta)}|_{V_\alpha\cap V_\beta}=g_\alpha|_{V_\alpha\cap V_\beta}-g_\beta|_{V_\alpha\cap V_\beta}$. 给定 $i\in\mathcal{I}$, $x\in U_i$. 取 $\alpha\in\mathcal{A}$ 使得 $x\in V_\alpha$, 定义 $h_i(x):=g_\alpha(x)+f_{i\tau(\alpha)}(x)$. 若 $\beta\in\mathcal{A}$ 使得 $x\in V_\beta$, 则

$$g_\alpha(x)+f_{i\tau(\alpha)}(x)-g_\beta(x)-f_{i\tau(\beta)}(x)=g_\alpha(x)-g_\beta(x)-f_{\tau(\alpha)\tau(\beta)}(x)=0,$$

这是因为

$$\begin{aligned}f_{i\tau(\alpha)}(x)-f_{i\tau(\beta)}(x)&=-\big(f_{\tau(\alpha)i}(x)+f_{i\tau(\beta)}(x)\big)\\&=-f_{\tau(\alpha)\tau(\beta)}(x)\quad(\text{因为 }\xi\in Z^1(\mathcal{U},\mathcal{F})).\end{aligned}$$

因此, 上述 $h_i\in\mathcal{F}(U_i)$ 良定.

对于 $x\in U_i\cap U_j$, 取 α 使得 $x\in V_\alpha$, 则

$$\begin{aligned}h_i(x)-h_j(x)&=g_\alpha(x)+f_{i\tau(\alpha)}(x)-g_\alpha(x)-f_{j\tau(\alpha)}(x)\\&=f_{i\tau(\alpha)}(x)+f_{\tau(\alpha)j}(x)=f_{ij}(x).\end{aligned}$$

因此 $\delta\{(h_i)\}=\xi$, 从而 $\xi\in B^1(\mathcal{U},\mathcal{F})$. 从而得证. □

现在我们来定义**上同调群**$H^1(X,\mathcal{F})$. 设 $\mathcal{U},\mathcal{V}$ 为 X 的开覆盖, $\mathcal{U}=\{U_i\}_{i\in\mathcal{I}}$, $\mathcal{V}=\{V_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$, $\mathcal{V}$ 为 $\mathcal{U}$ 的加细. 则有群同态 $\tau(\mathcal{U},\mathcal{V}):H^1(\mathcal{U},\mathcal{F})\to H^1(\mathcal{V},\mathcal{F})$ [该群同态由加细映射 $\tau:\mathcal{A}\to\mathcal{I}$ 所诱导, 但与 τ 的选取无关]. 若 $\mathcal{W}$ 为 $\mathcal{V}$ 的加细, 则 $\tau(\mathcal{U},\mathcal{W})=$

$\tau(\mathcal{V},\mathcal{W})\circ\tau(\mathcal{U},\mathcal{V})$. 我们将 $H^1(X,\mathcal{F})$ 定义为系统 $\big(H^1(\mathcal{U},\mathcal{F}),\tau(\mathcal{U},\mathcal{V})\big)$ 的直极限, 即如下:

我们通过下述方式定义不交并 $\coprod_{\mathcal{U}} H^1(\mathcal{U},\mathcal{F})$ 上的等价关系 R, 使得 $\xi\in H^1(\mathcal{U},\mathcal{F})$ 与 $\eta\in H^1(\mathcal{V},\mathcal{F})$ 等价当且仅当存在 $\mathcal{U}$ 与 $\mathcal{V}$ 公共的加细覆盖 $\mathcal{W}$ 使得

$$\tau(\mathcal{U},\mathcal{W})\xi=\tau(\mathcal{V},\mathcal{W})\eta.$$

之后, 令 $H^1(X,\mathcal{F}):=\coprod H^1(\mathcal{U},\mathcal{F})/R$.

对任意开覆盖 $\mathcal{U}$, 有自然的映射 $\tau(\mathcal{U}):H^1(\mathcal{U},\mathcal{F})\to H^1(X,\mathcal{F})$, 此映射将 $\xi\in H^1(\mathcal{U},\mathcal{F})$ 映为它所在的关于等价关系 R 的等价类.

性质 5.2 等价于 $\tau(\mathcal{U})$ 是单射.

我们还需要 Leray 定理的如下特殊情形:

定理. *(Leray 定理).*

设 $\mathcal{F}$ 为 X 上的层, $\mathcal{U}=\{U_i\}_{i\in\mathcal{I}}$ 为 X 的开覆盖. 如果 $H^1(U_i,\mathcal{F})=0,\forall i$, 则自然映射

$$H^1(\mathcal{U},\mathcal{F})\to H^1(X,\mathcal{F})$$

为同构.

证明. 性质 5.2 表明该映射为单射. 于是我们只需再证明, 对 $\mathcal{U}$ 的任意加细覆盖 $\mathcal{V}=\{V_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$, 诱导同态 $\tau^*:H^1(\mathcal{U},\mathcal{F})\to H^1(\mathcal{V},\mathcal{F})$ 为满射; 其中加细映射 $\tau:\mathcal{A}\to\mathcal{I}$ 满足 $V_\alpha\subseteq U_{\tau(\alpha)},\forall\alpha$.

任意给定 $\{c_{\alpha\beta}\}_{\alpha\beta\in\mathcal{A}}\in Z^1(\mathcal{V},\mathcal{F})$, 那么 $\{c_{\alpha\beta}|_{U_i}\}\in Z^1(U_i\cap\mathcal{V},\mathcal{F})$, 其中 $U_i\cap\mathcal{V}:=\{U_i\cap\mathcal{V}_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ 为 U_i 的开覆盖. 由题设 $H^1(U_i,\mathcal{F})=0$, 性质 5.1 表明存在 $g_{i\alpha}\in\mathcal{F}(U_i\cap V_\alpha)$ 使得

$$c_{\alpha\beta}=g_{i\alpha}-g_{i\beta}\quad 于\,U_i\cap V_\alpha\cap V_\beta.$$

于是, 在 $U_i\cap U_j\cap V_\alpha\cap V_\beta$ 当中成立 $g_{i\alpha}-g_{i\beta}=c_{\alpha\beta}=g_{j\alpha}-g_{j\beta}$, 即 $g_{i\alpha}-g_{j\alpha}=g_{i\beta}-g_{j\beta}$; 因此由层的粘合公理, 存在 $\gamma_{ij}\in\mathcal{F}(U_i\cap U_j)$ 使得 $\gamma_{ij}=g_{i\alpha}-g_{j\alpha}$ 于 $U_i\cap U_j\cap V_\alpha$. 从而在 $U_i\cap U_j\cap U_k$ 当中显然有 $\gamma_{ij}\cap\gamma_{jk}=\gamma_{ik}$. 从而在 $V_\alpha\cap V_\beta\ \big(\subseteq U_{\tau(\beta)}\big)$ 当中成立

$$\gamma_{\tau(\alpha)\tau(\beta)}+c_{\alpha\beta}\quad=\quad\big(g_{\tau(\alpha)\alpha}-g_{\tau(\beta)\alpha}\big)+\big(g_{\tau(\beta)\alpha}-g_{\tau(\beta)\beta}\big)$$

$$= \quad -g_{\tau(\beta)\beta} + g_{\tau(\alpha)\alpha}.$$

由于 $g_{\tau(\beta)\beta} \in \mathcal{F}(U_{\tau(\beta)} \cap V_\beta) = \mathcal{F}(V_\beta)$, 这表明 $\{c_{\alpha\beta}\}$ 与 $\{-\gamma_{\tau(\alpha)\tau(\beta)}\}$ 其实是 $H^1(\mathcal{V}, \mathcal{F})$ 中的同一个元素, 不过后者是 $\{-\gamma_{ij}\}$ 在 τ^* 下的像. 从而定理证毕. □

Leray 定理在 Riemann 曲面理论中的相关性和有用性源于以下:

定理. *(Mittag-Leffler 定理). 设 Ω 为 $\mathbb{C}$ 的开集, 则 $H^1(\Omega, \mathcal{O}) = 0$, 其中 $\mathcal{O}$ 为 Ω 上的全纯函数芽层.*

为证此定理, 我们先来证明:

性质 5.3. *设 Ω 为 $\mathbb{C}$ 的开集, $f \in C^\infty(\Omega)$. 则存在 $u \in C^\infty(\Omega)$ 使得 $\dfrac{\partial u}{\partial \bar{z}} = f$.*

回顾: $z = x + iy$, x, y 为实数, 则

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right), \quad \frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right).$$

性质 5.3 的证明. 情形 1. 若 f 在 Ω 紧支, 则令

$$u(z) := \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{C}} \frac{f(z+w)}{w}\, \mathrm{d}w \wedge \mathrm{d}\bar{w}.$$

断言 $u \in C^\infty(\mathbb{C})$ 并且 $\dfrac{\partial u}{\partial \bar{z}} = f$. 首先, 为说明 $u \in C^\infty(\mathbb{C})$, 注意 $\dfrac{1}{|w|}$ 在 $\mathbb{C}$ 上的任何紧子集上可积; 比如我们可证明 $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ 的存在性与连续性如下:

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h\in\mathbb{R}}} \int_{\mathbb{C}} \frac{f(z+h+w) - f(z+w)}{h}\frac{1}{w}\, \mathrm{d}w \wedge \mathrm{d}\bar{w} = \int_{\mathbb{C}} \frac{\partial f}{\partial x}(z+w)\frac{1}{w}\, \mathrm{d}w \wedge \mathrm{d}\bar{w},$$

这是因为 f 紧支, $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(z+h) - f(z)}{h} = \dfrac{\partial f}{\partial x}(z)$ 在 $\mathbb{C}$ 上一致地成立且有界. 之后反复如此论证即可. 若 $\varepsilon > 0$, 则有

$$\frac{\partial u}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2\pi i}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|w|\geq\varepsilon} \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z+w)\frac{1}{w}\, \mathrm{d}w \wedge \mathrm{d}\bar{w};$$

而

$$\begin{aligned}\int_{|w|\geq\varepsilon}\frac{\partial f}{\partial\bar{z}}(z+w)\frac{1}{w}\,\mathrm{d}w\wedge\mathrm{d}\bar{w} &= \int_{|w|\geq\varepsilon}\frac{\partial}{\partial\bar{w}}\left(\frac{f(z+w)}{w}\right)\mathrm{d}w\wedge\mathrm{d}\bar{w}\\ &= -\int_{|w|\geq\varepsilon}\mathrm{d}\left(\frac{f(z+w)\,\mathrm{d}w}{w}\right),\end{aligned}$$

由 Stokes 定理, 上式

$$=\int_{|w|=\varepsilon}\frac{f(z+w)}{w}\,\mathrm{d}w=2\pi i f(z)+\int_{|w|=\varepsilon}\frac{f(z+w)-f(z)}{w}\,\mathrm{d}w.$$

由于 $\dfrac{f(z+w)-f(z)}{w}$ 是关于 w 的有界函数, 从而当 $\varepsilon\to 0$ 时上式右边第二项 $\to 0$, 于是得证.

情形 2. 现在考虑一般的 $f\in C^\infty(\Omega)$. 对任意紧子集 $K\subseteq\Omega$, 取 $\varphi\in C_0^\infty(\Omega)$ 使得在 K 中成立 $\varphi\equiv 1$. 将之前的论述用于函数 φf, 我们得到: *若 $f\in C^\infty(\Omega)$, $K\subseteq\Omega$ 紧致, 则存在 $u\in C^\infty(\Omega)$ 使得在 K 中成立 $\dfrac{\partial u}{\partial\bar{z}}=f$.*

为完成性质 5.3 的证明, 我们还需要如下的 Runge 定理; 我们不打算证明它, 其证明可见 [7]:

设 Ω 为 $\mathbb{C}$ 的开集, 紧集 $K\subseteq\Omega$. 记 L 为 K 与 $\Omega-K$ 在 Ω 中的相对紧的连通分支之并, 则 L 紧致, 并且满足: 任何在 L 附近全纯的函数都可被 Ω 上的全纯函数在 L 上一致逼近.

回到性质 5.3 的证明. 取 $\{K_n\}_{n\geq1}$ 为 Ω 的紧子集列, 使得 $K_n\subseteq\mathring{K}_{n+1}$ (即 K_{n+1} 的内部), $\bigcup K_n=\Omega$, 并且 $\Omega-K_n$ 没有在 Ω 中相对紧的连通分支.

对于 $f\in C^\infty(\Omega)$, 取 $u_n\in C^\infty(\Omega)$ 使得在 K_n 附近成立 $\dfrac{\partial u_n}{\partial\bar{z}}=f$. 那么 $u_{n+1}-u_n$ 在 K_n 附近全纯, 于是存在 Ω 上的全纯函数 h_n, 使得在 K_n 中成立 $|u_{n+1}-u_n-h_n|<2^{-n}$, $(\forall n\geq 1)$.

定义 K_n 上的函数 $u:=u_n+\sum\limits_{m\geq n}(u_{m+1}-u_m-h_m)-h_1-\cdots-h_{n-1}$; 此函数项级数在 K_n 一致收敛. 注意到

$$\begin{aligned}u &= u_n+(u_{n+1}-u_n-h_n)+\sum_{m\geq n+1}(u_{m+1}-u_m-h_m)-h_1-\cdots-h_{n-1}\\ &= u_{n+1}+\sum_{m\geq n+1}(u_{m+1}-u_m-h_m)-h_1-\cdots-h_n,\end{aligned}$$

从而函数 u 在 Ω 良定. 因为 $\sum\limits_{n\geq n+1}(u_{m+1}-u_m-h_m)$ 在 $\mathring{K}_{n+1}\supseteq K_n$ 全纯, 并且在 K_n 成立 $\dfrac{\partial u_{n+1}}{\partial\bar{z}}=f$, 从而对任意 n 都有 $\dfrac{\partial u}{\partial\bar{z}}=f$, 从而在 Ω 也如此. □

Mittag-Leffler 定理的证明. 只需证明对 Ω 的任何开覆盖 $\mathcal{U}$ 都有 $H^1(\mathcal{U},\mathcal{O})=0$ [其中 Ω 为 $\mathbb{C}$ 的开集] .

记 $\mathcal{U}=\{U_i\}_{i\in\mathcal{I}}$, 取 $\{\alpha_i\}_{i\in\mathcal{I}}$ 为从属于 $\mathcal{U}$ 的**单位分解**, 这是指: $\alpha_i\in C^\infty(\Omega)$, $\operatorname{supp}(\alpha_i)\subseteq U_i$, 集合族 $\{\operatorname{supp}(\alpha_i)\}_{i\in\mathcal{I}}$ 局部有限, 并且 $\sum\alpha_i\equiv 1$.

若 c_{ij} 在 $U_i\cap U_j$ 全纯, 并且对任意 i,j,k, 在 $U_i\cap U_j\cap U_k$ 当中成立 $c_{ij}+c_{jk}=c_{ik}$, 则取 $i=j=k$ 可知 $c_{ii}=0\,\forall i$; 再取 $k=i$ 可知 $c_{ij}=-c_{ji}$.

现在, 取定 i,j, 我们定义 U_i 上的 C^∞-函数, 使得该函数在 $U_i\cap U_j$ 当中等于 α_jc_{ij}, 在 $U_i-(U_i\cap U_j)$ 上恒为 0. 由于 $\operatorname{supp}(\alpha_j)\subseteq U_j$, 从而在 $(\partial U_j)\cap U_i$ 附近成立 $\alpha_j=0$, 所以此函数的确为 U_i 上的 C^∞-函数; 我们将此函数简记为 α_jc_{ij}. 记 $\varphi_i:=\sum\limits_{j\in\mathcal{I}}\alpha_jc_{ij}$; 因为 $\{\operatorname{supp}(\alpha_j)\}$ 局部有限, 所以 φ_i 是 U_i 上的 C^∞-函数. 对任意 $k,\ell\in\mathcal{I}$, 在 $U_k\cap U_\ell$ 当中有

$$\varphi_k-\varphi_\ell=\sum_j\alpha_j(c_{kj}-c_{\ell j})=\sum_j\alpha_j(c_{kj}+c_{j\ell})=\sum_j\alpha_jc_{k\ell}=c_{k\ell}.$$

从而在 $U_k\cap U_\ell$ 当中成立 $\dfrac{\partial\varphi_k}{\partial\bar{z}}-\dfrac{\partial\varphi_l}{\partial\bar{z}}=\dfrac{\partial c_{kl}}{\partial\bar{z}}=0$. 因此存在 Ω 上的 C^∞-函数 ψ 使得对任意 $k\in\mathcal{I}$ 都成立 $\psi|_{U_k}=\dfrac{\partial\varphi_k}{\partial\bar{z}}$.

取 $u\in C^\infty(\Omega)$ 使得在 Ω 成立 $\dfrac{\partial u}{\partial\bar{z}}=\psi$, 再令 U_k 上的函数 $h_k=\varphi_k-u$. 则在 U_k 当中成立 $\dfrac{\partial h_k}{\partial\bar{z}}=\dfrac{\partial\varphi_k}{\partial\bar{z}}-\dfrac{\partial u}{\partial\bar{z}}=0$, 故 $h_k\in\mathcal{O}(U_k)$. 在 $U_k\cap U_\ell$ 当中有 $h_k-h_\ell=\varphi_k-\varphi_\ell=c_{kl}$. 从而完成证明. □

我们还需要层论中更一般的构造与定理. 这正是所谓**上同调正合列** (exact cohomology sequence). 我们仅仅介绍该理论的对我们有用的一部分.

设 $0\to\mathcal{E}\xrightarrow{\alpha}\mathcal{F}\xrightarrow{\beta}\mathcal{G}\to 0$ 为拓扑空间 X 上的 Abel 群层短正合列. [注意在 $\mathcal{G}$ 处的正合性, β 为满态射意味着对任意 $x\in X$, $\beta_x:\mathcal{F}_x\to\mathcal{G}_x$ 为满同态, 其中 $\mathcal{F}_x,\mathcal{G}_x$ 分别为 $\mathcal{F},\mathcal{G}$ 在 x 处的茎条.] 首先有如下引理:

引理. 取整体截面所诱导的序列

$$0 \to \mathcal{E}(X) \overset{\alpha_X}{\to} \mathcal{F}(X) \overset{\beta_X}{\to} \mathcal{G}(X)$$

是正合的.

证明. 注意每个 $\alpha_x : \mathcal{E}_x \to \mathcal{F}_x$ 都为单射, 再由 $\mathcal{E}$ 满足层的公理, 易知 α_X 也为单射.

欲证此序列在 $\mathcal{F}(X)$ 处正合, 只需证明对于 $f \in \mathcal{F}(X)$, 如果存在 X 的开覆盖 $\{U_i\}$ 使得 $f|_{U_i} \in \mathrm{im}(\alpha_{U_i}), (\forall i)$, 则 $f \in \mathrm{im}(\alpha_X)$. 取 $e_i \in \mathcal{E}(U_i)$ 使得 $\alpha_{U_i}(e_i) = f|_{U_i}$. 则 $(e_i - e_j)|_{U_i \cap U_j} = 0$, [因为 α 为单态射] . 由层的粘合公理可知存在 $e \in \mathcal{E}(X)$ 使得 $e|_{U_i} = e_i, (\forall i)$. 显然 $\alpha_X(e)|_{U_i} = \alpha_{U_i}(e_i) = f|_{U_i}$, 因此 $\alpha_X(e) = f$. □

注意我们也有 $H^0(X, \mathcal{E}) = \mathcal{E}(X), \ldots$. 我们将 $\alpha^0 : H^0(X, \mathcal{E}) \to H^0(X, \mathcal{F})$ 定义为 $\alpha^0 := \alpha_X$ [类似定义 $\beta^0 := \beta_X : H^0(X, \mathcal{F}) \to H^0(X, \mathcal{G})$] . 下面我们来定义 $\delta : H^0(X, \mathcal{G}) \to H^1(X, \mathcal{E})$ 以及 $\alpha^1 : H^1(X, \mathcal{E}) \to H^1(X, \mathcal{F})$, $\beta^1 : H^1(X, \mathcal{F}) \to H^1(X, \mathcal{G})$.

δ 的定义. 设 $g \in H^0(X, \mathcal{G}) = \mathcal{G}(X)$. 由于 β 为满态射, 故存在 X 的开覆盖 $\{U_i\}_{i \in \mathcal{I}} = \mathcal{U}$ 以及 $f_i \in \mathcal{F}(U_i)$ 使得 $\beta_{U_i}(f_i) = g|_{U_i}$, $\forall i$. 因此由刚才的引理可知 $f_i - f_j|_{U_i \cap U_j} \in \ker(\beta_{U_i \cap U_j}) = \mathrm{im}(\alpha_{U_i \cap U_j})$, 也就是说存在 $e_{ij} \in \mathcal{E}(U_i \cap U_j)$ 使得 $\alpha_{U_i \cap U_j}(e_{ij}) = f_i - f_j|_{U_i \cap U_j}$. 在 $U_i \cap U_j \cap U_k$ 中, α 显然将 $e_{ij} + e_{jk} - e_{ik}$ 映为 0. 因此 $\{e_{ij}\} \in Z^1(\mathcal{U}, \mathcal{E})$, 从而它确定了 $H^1(X, \mathcal{E})$ 中的元素, 记为 $\delta(g)$. 我们还需要验证如此 $\delta(g)$ 是良定的, 即与 $\mathcal{U}, f_i$ 的选取无关. 若 $\mathcal{V}$ 为 $\mathcal{U}$ 的加细 [并记 $\tau : \mathcal{A} \to \mathcal{I}$ 为其加细映射] , 则取 $f'_\alpha := f_{\tau(\alpha)}|_{V_\alpha}$, 则显然会得到 $H^1(X, \mathcal{E})$ 中同样的元素 [简单地说, 这是上链 $\{e_{ij}\}$ 在 $\mathcal{V}$ 的限制.]

因此, 我们只需考虑在同一个开覆盖 $\mathcal{U}$ 上可能不同的 $f'_i \in \mathcal{F}(U_i)$ 的选取, 也使得 $\beta_{U_i}(f'_i) = g|_{U_i}$. 同样因为之前的引理, 可知存在 $e_i \in \mathcal{E}(U_i)$ 使得 $\alpha_{U_i}(e_i) = f'_i - f_i$. 若 $e'_{ij} \in \mathcal{E}(U_i \cap U_j)$ 被映为 $f'_i - f'_j$, 则有 $e_i - e_j = e'_{ij} - e_{ij}$ [因为 α 为单射] , 所以 $\{e_{ij}\}$ 与 $\{e'_{ij}\}$ 定义了 $H^1(X, \mathcal{E})$ 中的同一个元素.

α^1 的定义. 对 X 的任何开覆盖 $\mathcal{U}$, $\alpha : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ 诱导群同态

$$\alpha_{\mathcal{U}} : C^1(\mathcal{U}, \mathcal{E}) \to C^1(\mathcal{U}, \mathcal{F}),$$

它将 $Z^1(\mathcal{U},\mathcal{E})$ 映到 $Z^1(\mathcal{U},\mathcal{F})$, 将 $B^1(\mathcal{U},\mathcal{E})$ 映到 $B^1(\mathcal{U},\mathcal{F})$, 因此诱导群同态 $\alpha^1_{\mathcal{U}}: H^1(\mathcal{U},\mathcal{E}) \to H^1(\mathcal{U},\mathcal{F})$. 这进而诱导了 α^1.

β^1 **的定义.** 与 α^1 相同的方式, 态射 $\beta : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ 诱导了 $\beta^1 : H^1(X,\mathcal{F}) \to H^1(X,\mathcal{G})$.

定理. *(上同调正合列). 设 $0 \to \mathcal{E} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{F} \xrightarrow{\beta} \mathcal{G} \to 0$ 为拓扑空间 X 上的层短正合列. 则有如下的长正合列:*

$$\begin{aligned} 0 \quad \to \quad & H^0(X,\mathcal{E}) \xrightarrow{\alpha^0} H^0(X,\mathcal{F}) \xrightarrow{\beta^0} H^0(X,\mathcal{G}) \xrightarrow{\delta} \\ \xrightarrow{\delta} \quad & H^1(X,\mathcal{E}) \xrightarrow{\alpha^1} H^1(X,\mathcal{F}) \xrightarrow{\beta^1} H^1(X,\mathcal{G}). \end{aligned}$$

注记. 我们可以定义更高阶的 Čech 上同调群 $H^q(X,\mathcal{F})$, $q \geq 0$, 并且当 X 仿紧时可以将上述长正合列继续延长 [可以参考 Serre - *Faisceaux algébriques cohérents*, Annals of Math. **61**(1955)] .

证明.

在 $H^0(X,\mathcal{G})$ 的正合性. 首先, 对于 $g = \beta^0(f)$, $f \in H^0(X,\mathcal{G})$, 则由 $\delta(g)$ 的定义, 任取开覆盖 $\{U_i\}$, 再令 $f_i = f|_{U_i}$. 因为 $f_i - f_j|_{U_i \cap U_j} = 0$, 于是 $\delta(g) = 0$.

反之, 假设 $\delta(g) = 0$; 适当选取开覆盖 $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in \mathcal{I}}$, 使得存在 $\{e_{ij}\} \in Z^1(\mathcal{U},\mathcal{E})$ 满足 $\alpha_{U_i \cap U_j}(e_{ij}) = f_i - f_j|_{U_i \cap U_j}$, $\beta_{U_i}(f_i) = g|_{U_i}$. 因为 $\delta(g) = 0$ [以及 $H^1(\mathcal{U},\mathcal{E}) \to H^1(X,\mathcal{E})$ 为单射] , 从而存在 $e_i \in \mathcal{E}(U_i)$ 使得 $e_i - e_j|_{U_i \cap U_j} = e_{ij}$. 令 $f_i' := f_i - \alpha_{U_i}(e_i)$; 则 $f_i' - f_j' = f_i - f_j - \alpha_{U_i \cap U_j}(e_{ij}) = 0$, 于是存在 $f \in \mathcal{F}(X)$ 使得 $f|_{U_i} = f_i$. 于是 $\beta_{U_i}(f) = g|_{U_i} - (\beta \circ \alpha)_{U_i}(e_i) = g|_{U_i}$; 因此 $g = \beta_X(f)$.

在 $H^1(X,\mathcal{E})$ 的正合性. 设 $\mathcal{U} = \{U_i\}$ 为开覆盖, $\{e_{ij}\} \in Z^1(\mathcal{U},\mathcal{E})$. 则 $\alpha^1(\xi) = 0$ [其中 ξ 为 $\{e_{ij}\}$ 在 $H^1(X,\mathcal{E})$ 的等价类] $\iff \exists \{f_i\} \in C^0(\mathcal{U},\mathcal{F})$ 使得 $f_i - f_j|_{U_i \cap U_j} = \alpha_{U_i \cap U_j}(e_{ij})$; 由定义易知当 $\xi = \delta(g)$ 时此条件满足. 反之, 若它成立, 则 $f_i - f_j|_{U_i \cap U_j} \in \ker(\beta)$, 因此存在 $g \in H^0(X,\mathcal{G})$ 使得 $g|_{U_i} = \beta_{U_i}(f_i)$, 从而由定义知 $\xi = \delta(g)$.

在 $H^1(X,\mathcal{F})$ 的正合性. 与定义 α^1 的方式类似, 由 $\beta \circ \alpha = 0$ 可以去定义 $(\beta \circ \alpha)^1 : H^1(X,\mathcal{E}) \to H^1(X,\mathcal{G})$; 显然 $(\beta \circ \alpha)^1 = 0$. 而易知 $(\beta \circ \alpha)^1 = \beta^1 \circ \alpha^1$, 从而 $\mathrm{im}(\alpha^1) \subseteq \ker(\beta^1)$.

反之, 若 $\{f_{ij}\} \in Z^1(\mathcal{U},\mathcal{F})$ [其中 $\mathcal{U}$ 为 X 的合适的开覆盖] 并假设 $\beta_{U_i\cap U_j}(f_{ij}) = g_i - g_j|_{U_i\cap U_j}$, 其中 $g_i \in \mathcal{G}(U_i)$. 将 $\mathcal{U}$ 适当加细, 不妨假设 [注意 β 为满射] 存在 $f_i \in \mathcal{F}(U_i)$ 使得 $\beta_{U_i}(f_i) = g_i$. 记 $f'_{ij} := f_{ij} - (f_i - f_j)|_{U_i\cap U_j}$, 则 $\{f'_{ij}\}$ 与 $\{f_{ij}\}$ 代表了 $H^1(X,\mathcal{F})$ 的相同元素, 并且 $\{f'_{ij}\} \in \ker\beta_{U_i\cap U_j} = \mathrm{im}\alpha_{U_i\cap U_j}$. 若 $\alpha_{U_i\cap U_j}(e_{ij}) = f'_{ij}$, 则易知 $\{e_{ij}\} \in Z^1(\mathcal{U},\mathcal{E})$, 并且它关于 α^1 的像等于 $\{f'_{ij}\}$ 所在等价类, 从而等于 $\{f_{ij}\}$ 所在等价类.

□

6　向量丛, 线丛与除子

设 E, X 为拓扑空间, 并且有连续映射 $\pi : E \to X$ 使得每个纤维 $\pi^{-1}(a) = E_a$, $a \in X$ 都具有 n 维 $\mathbb{C}$-线性空间结构.

称上述 $\pi : E \to X$ 为 (连续) **向量丛** (vector bundle), 如果满足以下 “局部平凡” 条件: 对任意 $a \in X$, 存在 a 的开邻域 U 以及同胚映射 $h_U : \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{C}^n$ 使得成立

(1) 下述图表

$$\begin{tikzcd} \pi^{-1}(U) \arrow[rr, "h_U"] \arrow[dr, "\pi"'] & & U \times \mathbb{C}^n \arrow[dl, "\mathrm{pr}_U"] \\ & U & \end{tikzcd}$$

交换 [其中 $\mathrm{pr}_U : U \times \mathbb{C}^n \to U$ 为投影映射] ;

(2) 任意 $a \in U$, 由 $h_U(x) = (a, \varphi_a(x))$, $x \in E_a$ 所确定的映射 $\varphi_a : E_a \to \mathbb{C}^n$ 为 $\mathbb{C}$-线性空间的同构.

若 X, E, π 为 C^∞ [或者: 复解析] , 并且 h_U 也是 C^∞ [相应地: 双全纯] , 则我们称相应的该向量丛是 C^∞ [相应地: 全纯] 的. 整数 n 称为该向量丛的**秩** (rank). 若秩 $n = 1$, 则称向量丛 $\pi : E \to X$ 为**线丛** (line bundle). 映射 h_U 称为 E 在 U 上的**平凡化** (trivialisation) [或者称为 E 在点 a 上的**局部平凡化**] . 也可称为 E 在 U 上的**线性坐标卡** (linear chart).

若 $\pi: E \to X$ 为复流形 X 上的全纯向量丛, 则可取一族开覆盖 $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i\in\mathcal{I}}$ 以及全纯的平凡化

$$h_i : \pi^{-1}(U_i) \to U_i \times \mathbb{C}^n.$$

在 $U_i \cap U_j$ 中, 映射 $h_i \circ h_j^{-1} : (U_i \cap U_j) \times \mathbb{C}^n \to (U_i \cap U_j) \times \mathbb{C}^n$ 形如 $(x, v) \mapsto (x, \eta(x, v))$; 并且对每个给定的 $x \in U_i \cap U_j$, $v \mapsto \eta(x, v)$ 为 $\mathbb{C}^n$ 的线性同构. 因此存在全纯映射 $g_{ij} : U_i \times U_j \to GL(n, \mathbb{C})$ 使得

$$h_i \circ h_j^{-1}(x, v) = (x, g_{ij}(x)v).$$

在 $U_i \cap U_j \cap U_k$, 成立**上闭链条件** (cocycle condition)

$$g_{ij}(x) \cdot g_{jk}(x) = g_{ik}(x)$$

$[GL(n, \mathbb{C})$ 的乘法$]$. 此 $\{g_{ij}\}$ 称为该向量丛 [关于局部平凡化 h_i 的] **转移函数** (transition function).

若将 $\{h_i\}$ 换成其它的平凡化 $\{h_i'\}$, 则 $h_i' \circ h_i^{-1} : U_i \times \mathbb{C}^n \to U_i \times \mathbb{C}^n$ 形如 $(x, v) \mapsto (x, \varphi_i(v))$, 其中 $\varphi_i : U_i \to GL(n, \mathbb{C})$ 全纯; 相应的转移函数为 $\varphi_i g_{ij} \varphi_j^{-1}$.

反之, 给定一族全纯映射 $g_{ij} : U_i \cap U_j \to GL(n, \mathbb{C})$ 使得在 $U_i \cap U_j \cap U_k$ 当中成立 $g_{ij} g_{jk} = g_{ik}$, 则我们可如下构造一个向量丛:

记 $\tilde{E} = \coprod_{i\in\mathcal{I}} U_i \times \mathbb{C}^n$ [无交并] , 映射 $\tilde{\pi} : \tilde{E} \to X$ 使得 $(x, v) \mapsto x$. 称 $(x, v) \in U_i \times \mathbb{C}^n$ 与 $(y, w) \in U_j \times \mathbb{C}^n$ 等价, 如果 $x = y$ 且 $v = g_{ij}(x)w$. 由上闭链条件可知该关系的确为等价关系, 并且位于同一个 $U_i \times \mathbb{C}^n$ 中的两点等价当且仅当它们相等. 于是, $\tilde{\pi}$ 诱导了映射 $\pi : E \to X$, 其中 E 为 $\tilde{E}$ 关于上述等价关系的商空间. 商映射 $\tilde{E} \to E$ 诱导了双射 $h_i^{-1} : U_i \times \mathbb{C}^n \to \pi^{-1}(U_i)$, 我们容易验证 $\pi : E \to X$ 为全纯向量丛.

若 $\pi : E \to X$ 为向量丛, 则 E 的 [连续, C^∞, 全纯] **截面** (section) 是指满足 $\pi \circ s = \mathrm{id}_X$ 的 [连续, C^∞, 全纯] 映射 $s : X \to E$. 若考虑局部平凡化 $h_i : \pi^{-1}(U_i) \to U_i \times \mathbb{C}^n$, 则存在映射 $f_i : U_i \to \mathbb{C}^n$ 使得 $h_i \circ s(x) = (x, f_i(x))$, $x \in U_i$. 注意到若 $x \in U_i \cap U_j$ 则有 $h_i \circ s(x) = h_i \circ h_j^{-1}(x, f_j(x)) = (x, g_{ij}(x) f_j(x))$, 从而

$$f_i(x) = g_{ij}(x) f_j(x), \quad x \in U_i \cap U_j.$$

反之亦然, 这易验证. 于是向量丛 $\pi : E \to X$ 的 [连续, C^∞, 全纯] 截面可视为一族 [连续, C^∞, 全纯] 函数 $\{f_i\}_{i\in\mathcal{I}}$, 其中 $f_i : U_i \to \mathbb{C}^n$, 并且在 $U_i \cap U_j$ 满足相容性 $f_i = g_{ij} f_j$. 亦可显然地去定义向量丛 E 在 X 的开子集上的截面.

现在设 X 为黎曼曲面, $\pi: E \to X$ 为 X 上的全纯向量丛. E 的亚纯截面定义为以下: 对于 X 的离散点集 S 以及全纯截面 $s: X - S \to E$, 如果对任意 $a \in S$, 存在 a 的邻域 U 以及 U 的局部坐标 z 使得 $z(a) = 0$, $U \cap S = \{a\}$, 并且存在整数 $N \geq 0$ 使得 $z^N s$ 为 E 在 U 上的某全纯截面在 $U - \{a\}$ 的限制, 则称 s 为 E 的**亚纯截面** (meromorphic section).

若 $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in \mathcal{I}}$ 为 X 的开覆盖, $h_i: \pi^{-1}(U_i) \to U_i \times \mathbb{C}^n$ 为平凡化, 对 $x \in U_i - S$, 记 $h_i \circ s(x) = (x, f_i(x))$, 则 f_i 在 $U_i - S$ 全纯; 截面 s 是亚纯截面当且仅当对任意 i, f_i 在 U_i 亚纯 [即 $U_i \cap S$ 的点至多是 f_i 的极点].

若 $\pi: E \to X$ 与 $\pi': E' \to X$ 为 [连续, C^∞, 全纯] 向量丛, 则如果映射 $u: E \to E'$ 满足: $\pi' \circ u = \pi$, 并且 $u_a: \pi^{-1}(a) \to {\pi'}^{-1}(a)$ 为 $\mathbb{C}$-线性映射, 则称 u 为向量丛之间的态射. 如果 u 为连续, C^∞, 全纯的, 则称此态射满足相应性质. 称 X 上的向量丛 E, E' 同构, 若存在态射 $u: E \to E'$ 与 $u': E' \to E$ 使得 $u \circ u' = \mathrm{id}_{E'}$, $u' \circ u = \mathrm{id}_E$. 向量丛 $\pi: E \to X$ 称为**平凡丛** (trivial bundle), 如果它同构于 "平凡的" 向量丛 $\mathrm{pr}_X: X \times \mathbb{C}^n \to X$ [其中 $\mathrm{pr}_X(x, v) = x$] . 若 $u: E \to E'$, $u': E' \to E$ 是连续的, C^∞ 的或者全纯的, 则称该同构具有相应性质.

接下来定义黎曼曲面上的除子. 设 X 为黎曼曲面, X 上的**除子** (divisor) 是指支集局部有限的映射 $D: X \to \mathbb{Z}$ [即对于任何紧子集 $K \subseteq X$, 集合 $\left\{P \in K \middle| D(P) \neq 0\right\}$ 是有限集] . 我们通常记作

$$D = \sum_{P \in X} D(P)P;$$

若 X 紧致, 则上述求和是有限和. 定义两个除子的和 [差] $D_1 \pm D_2$ 为 $(D_1 \pm D_2)(P) = D_1(P) \pm D_2(P)$. 如果除子 D 满足 $D(P) \geq 0, \forall P \in X$, 则称 D 是**有效的** (effective). 对于除子 D_1, D_2, 如果 $D_1 - D_2$ 有效, 则记 $D_1 \geq D_2$. 集合 $\left\{P \in X \middle| D(P) \neq 0\right\}$ 称为 D 的**支集** (support), 记作 $\mathrm{supp}(D)$.

回顾如下记号: 若 f 为黎曼曲面 X 的一点 a 的邻域 U 上的亚纯函数, z 为 U 的局部坐标且 $z(a) = 0$, 则记

$$\mathrm{ord}_a(f) := \begin{cases} \infty & \text{若在 } a \text{ 附近} f \equiv 0, \\ k & \text{若} f(z) = \displaystyle\sum_{n=k}^{\infty} a_n z^n, \quad (k \in \mathbb{Z}),\ a_k \neq 0. \end{cases}$$

现在设 s 为黎曼曲面 X 的全纯向量丛 E 的一个亚纯截面, $s \not\equiv 0$.

对于 $a\in X$, 取坐标邻域 (U,z) 使得 $z(a)=0$, 以及局部平凡化 $h:E|_U\to U\times\mathbb{C}^n$. 则 $h\circ s(x)=(x,f(x))$, $x\in U$, 其中 f 为 U 上的亚纯函数 n 元组. 则存在整数 k 使得 $f=z^kg$, 其中 g 为 a 附近的全纯函数 n 元组, 并且 $g(a)\neq 0$. 我们记 $k=\mathrm{ord}_a(s)$.

容易验证上述 $\mathrm{ord}_a(s)$ 与局部坐标, 局部平凡化的选取无关.

若 s 为全纯向量丛 E 的亚纯截面, 则映射 $a\mapsto \mathrm{ord}_a(s)$ 为除子, 即

$$\sum_{a\in X}\mathrm{ord}_a(s)a$$

称为亚纯截面 s 的除子, 记作 (s) 或者 $\mathrm{div}(s)$. 事实上, 黎曼曲面上的任何除子都是某向量丛的某亚纯截面的除子, 甚至一定可以来自于线丛 [即秩为 1 的向量丛] . 下面介绍该构造.

设 X 为黎曼曲面, D 为 X 上的除子; 记 $D=\sum\limits_{P\in X}n_PP$ [其中 $n_P=D(P)\in\mathbb{Z}$ 且该求和是局部有限的] . 设 $S=\left\{P\in X\middle|n_P\neq 0\right\}$, 取 $P\in S$ 的局部坐标 $\{U_P,z_P\}$ 使得 $z_P(P)=0$; 不妨再适当选取 U_P 使得当 $P\neq Q$ 时 $U_P\cap U_Q=\varnothing$, $P,Q\in S$. 设 $U_*=X-S$, $f_*\equiv 1$, 以及定义在 $U_P(P\in S)$ 上的函数 $f_P=z_P^{n_P}, P\in S$. 记指标集 $\mathcal{I}=\{*\}\coprod S$, 再记 $U_i\cap U_j$ 上的函数 $g_{ij}:=f_i/f_j$, $i,j\in\mathcal{I}$ [若 $U_i\cap U_j=\varnothing$, 则约定 $g_{ij}=1$] . 若 $U_i\cap U_j$ 非空, 则 g_{ij} 在 $U_i\cap U_j$ 全纯且处处非零. 此外, 上闭链条件 $g_{ij}g_{jk}=g_{ik}$ 在 $U_i\cap U_j\cap U_k$ [如果非空] 显然成立. 因此, $\{g_{ij}\}$ 构成某个线丛 $L(D)$ 的一组转移函数. 此外, 由有关定义知 $f_i=g_{ij}f_j$, $i,j\in\mathcal{I}$, 从而 $\{f_i\}$ 确定了 $L(D)$ 的一个亚纯截面, 记该截面为 s_D. 因为 s_D 在 U_i 当中被 f_i 所定义, 从而当 $a\in X-S$ 时成立 $\mathrm{ord}_a(s_D)=\mathrm{ord}_a(f_*)=0$, 并且当 $a=P\in S$ 时成立 $\mathrm{ord}_a(s_D)=\mathrm{ord}_P(z_P^{n_P})=n_P$. 因此 $\mathrm{Div}(s_D)=D$.

若采用 P 的不同局部坐标 (U_P,ζ_P) [但开集 U_P 是同一个] , 则 $h_P=(\zeta_P/z_P)^{n_P}$ 在 U_P 全纯且非零; 若记 $h_*=1$, 再将 $\zeta_P^{n_P}$ 确定的转移函数记为 $\{g'_{ij}\}$, 则 $g'_{ij}=h_ig_{ij}h_j^{-1}$. 若 L' 为 $\{g'_{ij}\}$ 所确定的线丛, 则有 $L(D)$ 到 L' 的同构, 将截面 s_D 映为由 $\{f'_i\}(f'_*=1,\ f'_P=\zeta_P^{n_P})$ 所确定的 L' 的截面.

一些一般的注记.

(1) 若 s 为 X 的全纯向量丛的 $\neq 0$ 的亚纯截面, 则 s 为全纯截面当且仅当 $\mathrm{Div}(s)$ 是有效的 [s 可能有零点但没有极点] .

(2) 给定除子 D 以及开集 $U \subseteq X$, 记 $\mathcal{O}_D(U) = \left\{ f\text{为 } U \text{ 上的亚纯函数} \middle| \operatorname{Div}(f) \geq -D, \text{即}\forall a \in U, \operatorname{ord}_a(f) \geq -D(a) \right\}$. 则 $U \mapsto \mathcal{O}_D(U)$ 显然为层, 记作 $\mathcal{O}_D$. 记 $\Gamma(U, L(D))$ 为线丛 $L(D)$ 在 U 上的全纯截面构成的空间, $s_D \in \Gamma(X, L(D))$ 为满足 $\operatorname{Div}(s_D) = D$ 的标准截面, 则映射 $\mathcal{O}_D(U) \to \Gamma(U, L(D))$, $f \mapsto fs_D$ 为同构, 事实上 $\operatorname{Div}(f) \geq -D = -\operatorname{Div}(s_D) \iff \operatorname{Div}(fs_D) \geq 0$.

因此, $L(D)$ 的全纯截面芽层典范地同构于 $\mathcal{O}_D$.

还要注意到, 若 $\pi : L \to X$ 为线丛, s_0, s_1 为 L 的两个亚纯截面 ($s_0 \not\equiv 0$), 则存在 X 上的亚纯函数 f 使得 $s_1 \equiv fs_0$.

再定义除子的线性等价. 对于除子 D_1, D_2, 如果存在 X 上的亚纯函数 $f \not\equiv 0$ 使得 $\operatorname{Div}(f) = D_1 - D_2$, 则称 D_1, D_2 **线性等价** (linear equivalent), 记作 $D_1 \sim D_2$.

引理. 除子 D_1, D_2 线性等价当且仅当线丛 $L(D_1), L(D_2)$ 全纯同构.

证明. 若 D_1, D_2 线性等价, 取 X 上的亚纯函数 f 使得 $\operatorname{Div}(f) = D_1 - D_2$. 记 s_{D_1}, s_{D_2} 分别为 $L(D_1), L(D_2)$ 的标准截面. 则存在唯一的同构 $u : L(D_1) \to L(D_2)$ 将 s_{D_1} 映为 fs_{D_2}; 若 $x \in X$ 不是 f 的零点, 极点, 且不在 D_1, D_2 的支集当中, 则 u 定义为

$$\lambda s_{D_1}(x) \mapsto \lambda f(x) s_{D_2}(x), \quad \lambda \in \mathbb{C};$$

它可以全纯延拓到 X: 这是因为, 对任意开集 $U \subseteq X$, 截面 $x \mapsto \lambda s_{D_1}(x)$ 全纯当且仅当 $x \mapsto \lambda f(x) s_{D_2}$ 全纯, $\operatorname{Div}(s_{D_1}) \cap U = \operatorname{Div}(fs_{D_2}) \cap U$.

反之, 若 $u : L(D_1) \to L(D_2)$ 为全纯同构, 则 $u \circ s_{D_1}$ 为 $L(D_2)$ 的亚纯截面. 取亚纯函数 f 使得 $u \circ s_{D_1} = fs_{D_2}$, 则 $\operatorname{Div}(f) = D_1 - D_2$ [因为任意 $a \in X$, $\operatorname{ord}_a(s_{D_1}) = \operatorname{ord}_a(u \circ s_{D_1})$] . □

注记. 用层 $\mathcal{O}_{D_1}, \mathcal{O}_{D_2}$ 的语言, 上述同构可简单写为 $\varphi \in \mathcal{O}_{D_1}(U) \mapsto f\varphi \in \mathcal{O}_{D_2}(U)$.

更多的注记. 若 $\pi : E \to X$ 为全纯向量丛, 记 $E^* := \coprod_{a \in X} (E_a)^*$ [E_a^* 为线性空间 $E_a = \pi^{-1}(a)$ 的对偶空间] , 则可通过下述自然的方式赋予 E^* 向量丛结构. 设 $U \subseteq X$ 为开集, $h_U : \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{C}^n$ 为平凡化. 定义 $\check{h}_U : \coprod_{a \in U} E_a^* \to U \times \mathbb{C}^n$ 使得 $\check{h}_U(v) =$

$(a,(h_{U,a}^*)^{-1}(v))$, $v\in E_a^*$, 其中 $h_{U,a}:E_a\to\mathbb{C}^n$ 是由 $h_U|_{E_a}\to\{a\}\times\mathbb{C}^n$ 所诱导的线性同构, $h_{U,a}^*:\mathbb{C}^n\to E_a^*$ 为其对偶映射. 若 $g_{ij}:U_i\cap U_j\to GL(n,\mathbb{C})$ 为 E 的转移函数, 则 E^* 的相应的转移函数为 ${}^t g_{ij}^{-1}$, [${}^tM$ 为矩阵 M 的转置].

若 E_1,E_2 为 X 上的向量丛, 则可定义向量丛 $\pi:E_1\otimes E_2\to X$ 使得 $\pi^{-1}(a)=E_{1,a}\otimes E_{2,a}$; 若 $\{g_{ij}^{(\nu)}\}:U_i\cap U_j\to GL(n_\nu,\mathbb{C})$ 为向量丛 E_ν 的转移函数 $(\nu=1,2)$, 则 $E_1\otimes E_2$ 的转移函数为 $g_{ij}^{(1)}\otimes g_{ij}^{(2)}$ [矩阵的 Kronecker 乘积]. 特别地, 若 L_1,L_2 为线丛, 转移函数分别为 $g_{ij}^{(1)},g_{ij}^{(2)}$, 则线丛 $L_1\otimes L_2$ 的转移函数为 $g_{ij}^{(1)}\cdot g_{ij}^{(2)}$ [通常的复数乘法].

若 D_1,D_2 为除子, 由相应线丛的构造可直接看出 $L(D_1)\otimes L(D_2)$ 同构于 $L(D_1+D_2)$. 此外, 对任意除子 D, $L(-D)$ 同构于 $L(D)^*$. 若 L 为线丛, 并且存在处处非零的全纯截面 s, 则 L 是平凡丛; 这是因为, 映射 $X\times\mathbb{C}\to L$, $(x,\lambda)\to\lambda s(x)$ 为同构. 由此可推知, 若 L 为 X 上的线丛, 则 $L\otimes L^*$ 为平凡丛: 若 $v\in L_x$, $v\neq 0$, 则存在唯一的线性函数 $\ell\in L_x^*$ 使得 $\ell(v)=1$ [对于 $c\in\mathbb{C}$, 关于向量 cv 的线性函数为 $\dfrac{1}{c}\ell$]. 因此 $x\mapsto v\otimes\ell$ 是 $L\otimes L^*$ 的处处非零的截面.

若 L 为 X 上的全纯线丛, s 为 L 的亚纯截面, $s\not\equiv 0$, 则 $L\cong L(D)$, 其中 $D=\mathrm{Div}(s)$. 事实上, 若 s_{-D} 为 $L(-D)$ 的标准截面, 则 $s\otimes s_{-D}$ 为 $L\otimes L(-D)$ 的处处非零全纯截面. [定义在 D 的支集之外的同构映射 $\lambda s(x)\mapsto\lambda s_D(x)$ 可延拓为 L 到 $L(D)$ 的全纯同构.]

7 有限性定理

定理 7.1. 设 X 为紧黎曼曲面, $\pi:E\to X$ 为全纯向量丛. 则 E 在 X 上的整体全纯截面空间 $H^0(X,E)=\Big\{s:X\to E\Big|\pi\circ s=\mathrm{id}_X,\ s\text{全纯}\Big\}$ 是有限维 $\mathbb{C}$-线性空间.

证明. 取 X 的有限多个坐标邻域 $\{U_i,z_i\}_{i=1,\dots,N}$ 满足以下:

(1) $z_i:U_i\to\Delta=\Big\{z\in\mathbb{C}\Big||z|<1\Big\}$ 为解析同构;

(2) 记 $V_i:=z_i^{-1}\Big\{z\in\mathbb{C}\Big||z|<\dfrac{1}{2}\Big\}$, 则 $\bigcup V_i=X$;

(3) 存在 $\overline{U}_i$ 的邻域 W_i 使得存在平凡化 $h_i:\pi^{-1}(W_i)\to W_i\times\mathbb{C}^n$ 以及转移函数 $g_{ij}:W_i\cap W_j\to GL(n,\mathbb{C})$.

设 $s \in H^0(X,E)$; 则 s 可被表示为一族 [向量值] 全纯函数 $\{s_i\}_{i=1,\dots,N}$, 其中 $s_i : W_i \to \mathbb{C}^n$ 满足

$$s_i(x) = g_{ij}(x)s_j(x), \quad x \in W_i \cap W_j.$$

我们记

$$\|s\|^U := \max_i \sup_{x\in U_i} |s_i(x)|,$$

$$\|s\|^V := \max_i \sup_{x\in V_i} |s_i(x)|.$$

首先断言: 存在常数 $C > 0$ 使得 $\forall s \in H^0(X,E)$,

$$\|s\|^U \le C\|s\|^V.$$

事实上, 取 $x_0 \in \overline{U}_i$ 使得 $|s_i(x_0)| = \|s\|^U$, 再取 j 使得 $x_0 \in V_j$. 则有

$$|s_i(x_0)| = |g_{ij}(x_0)s_j(x_0)| \le C|s_j(x_0)| \le C\|s\|^V,$$

其中 $C := \max_{i,j} \sup_{x\in U_i\cap U_j} \|g_{ij}(x)\|$, $\|g\|$ 为 $g \in GL(n,\mathbb{C})$ 的算子范数 [视为 $\mathbb{C}^n$ 到自身的线性算子] .

设 $a_i \in U_i$ 使得 $z_i(a_i) = 0$. 我们证明如下版本的 Schwarz 圆盘引理: 设 $s \in H^0(X,E)$ 并且 $\mathrm{ord}_{a_i}(s) \ge k$, 其中 $k \ge 0$ 为给定的整数, $i = 1,\dots,N$; 则成立 $\|s\|^V \le 2^{-k}\|s\|^U$. 事实上, $\dfrac{s_i}{z_i^k}$ 在 U_i 全纯, 从而 $\sup_{V_i}\left|\dfrac{s_i}{z_i^k}\right| \le \sup_{\partial U_i}\left|\dfrac{s_i}{z_i^k}\right| = \sup_{\partial U_i}|s_i| \le \|s\|^U$. 因此, 对于 $x \in V_i$, 有 $|s_i(x)| \le \sup_{z_i\in V_i}\left(|z_i^k|\left|\dfrac{s_i}{z_i^k}\right|\right) \le 2^{-k}\|s\|^U$. 从而若 $s \in H^0(X,E)$ 且 $\mathrm{ord}_{a_i}(s) \ge k$, 则

$$\|s\|^U \le C\|s\|^V \le 2^{-k}C\|s\|^U.$$

特别地, 若 $2^k > C$, 则迫使 $s \equiv 0$.

记 $\mathcal{O}_{a_i}$ 为 a_i 处的全纯函数芽环, $\mathfrak{m}_i^k$ 是 $\mathcal{O}_{a_i}$ 的由 z_i^k 生成的理想, 则 $\mathcal{O}_{a_i}/\mathfrak{m}_i^k$ 是 k 维 $\mathbb{C}$-线性空间. 此外, 若 $2^k > C$, 则线性映射

$$\begin{aligned} H^0(X,E) &\to \bigoplus_{i=1}^n \mathbb{C}^n \otimes (\mathcal{O}_{a_i}/\mathfrak{m}_i^k) \\ s &\mapsto \bigoplus_{i=1}^n (s_i \bmod z_i^k) \end{aligned}$$

为单射, 这是因为该线性映射的核空间恰由满足 $\mathrm{ord}_{a_i}(s) \geq k, \forall i$ 的截面 s 构成. 从而证毕. $\square$

我们所需要的下一个有限性定理更加难证.

设 X 为紧黎曼曲面, $\pi : E \to X$ 为 X 上的全纯向量丛. 从 E 的截面芽层 $\mathbb{E}$ 是满足 $U \to \mathbb{E}(U) = \{E \text{ 在 } U \text{ 上的全纯截面}\}$ 的层. 我们也将层 $\mathbb{E}$ 的第一个上同调群 $H^1(X, \mathbb{E})$ 记为 $H^1(X, E)$.

定理 7.2. 设 $\pi : E \to X$ 为紧黎曼曲面 X 上的全纯向量丛, 则 $H^1(X, E)$ 是有限维 $\mathbb{C}$-线性空间.

证明. 对于开集 $U \subseteq X$, 假设存在 [全纯] 局部平凡化 $h_U : \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{C}^n$. 如果 V 为开集且 $V \subset\subset U$ [相对 U 紧] , 则将 E 在 V 上的**有界**全纯截面构之全体记为 $E_b(V)$; 这里的 "有界" 是在局部平凡化 h_U 意义下的, 具体地说, 对于截面 $s : V \to E$, 则存在函数 $f : V \to \mathbb{C}^n$ 使得 $h_U \circ s(x) = (x, f(x))$, $x \in V$; 若 $\sup\limits_{x \in V} |f(x)| < \infty$, 则称截面 s [在 h_U 意义下] 有界. 对于 $s \in E_b(V)$, 记 $\|s\|_V := \sup\limits_{x \in V} |f(x)|$. 在此范数下, $E_b(V)$ 为 Banach 空间; U 的不同的局部平凡化 $h'_U : \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{C}^n$ 给出了 $E_b(V)$ 的等价范数.

对上述 U, h_U, 如果再假定 U 解析同构于 $\mathbb{C}$ 的开集, 则 $H^1(U, E) = 0$. 这是因为第 5 节的 Mittag-Leffler 定理以及如下事实: 若 U 同构于 $\mathbb{C}$ 的开集 Ω, 且 $h_U : \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{C}^n$ 为同构, 则 $H^1(U, E) \cong \left(H^1(\Omega, \mathcal{O})\right)^{\oplus n}$.

记 $\Delta(r)$ 为复平面上的圆盘 $\left\{z \in \mathbb{C} \middle| |z| < r\right\}$, $r > 0$. 取 X 的有限坐标覆盖 $\{W_i, z_i\}_{i=1,\dots,N}$ 以及全纯平凡化 $h_i : \pi^{-1}(W_i) \to W_i \times \mathbb{C}^n$, 使得满足以下:

(1) z_i 为 W_i 到 $\Delta(2)$ 的同构.

(2) 记 $U_i(r) = z_i^{-1}(\Delta(r))$, 则 $\bigcup\limits_i U_i(\frac{1}{2}) = X$.

对于 $\frac{1}{2} \leq r \leq 2$, 记 $\mathcal{U}(r) := \{U_i(r)\}_{i=1,\dots,N}$ 为 X 的开覆盖. 对于 $x \in W_i$, $v \in \pi^{-1}(x) = E_x$, 若 $h_i(v) = (x, w)$, $w \in \mathbb{C}^n$, 则记 $|h_i(v)| := |w|$. 令

$$Z_b^1(r) \quad := \quad \left\{\xi \in Z^1(\mathcal{U}(r), E) \middle| \text{若} \xi = (f_{ij}), \text{则} f_{ij} \in E_b(U_i(r) \cap U_j(r)), \forall i, j\right\},$$

$$C_b^0(r) \quad := \quad \left\{\gamma \in C^0(\mathcal{U}(r), E) \middle| 若\gamma = (c_i),\ 则c_i \in E_b(U_i(r)),\ \forall i\right\}.$$

在上述空间中引入范数 $\|\,\|_r$ 如下:

$$\|\xi\|_r := \max_{i,j} \sup_{x \in U_i(r) \cap U_j(r)} |h_i(f_{ij}(x))|, \quad 若 \quad \xi = (f_{ij}) \in Z_b^1(r);$$
$$\|\gamma\|_r := \max_{i} \sup_{x \in U_i(r)} |h_i(c_i(x))|, \quad 若 \quad \gamma = (c_i) \in C_b^0(r).$$

在此范数下, $Z_b^1(r)$ 与 $C_b^0(r)$ 为 Banach 空间. 现在设 $\frac{1}{2} \leq \rho < r < 1$. 断言: 若 $\gamma \in C^0(\mathcal{U}(r), E)$, $\delta\gamma \in Z_b^1(r)$, 则必有 $\gamma \in C_b^0(r)$; 并且存在只与 $\{W_i, z_i, h_i\}$ 有关的常数 $C > 0$ 使得

$$\|\gamma\|_r \leq \|\delta\gamma\|_r + C\|\gamma\|_\rho.$$

这是因为, 若 $\gamma = (c_i)$, $x_0 \in U_i(r)$, 则取 j 使得 $x_0 \in U_j(\rho)$; 注意 $c_i(x_0) = (c_i - c_j)(x_0) + c_j(x_0)$ 并且 $h_i(c_j(x_0)) = h_i \circ h_j^{-1}\big(h_j(c_j(x_0))\big)$, 所以

$$|h_i(c_j(x_0))| \leq C\,|h_i(c_j(x_0))| \leq C\|\gamma\|_\rho,$$

其中 C 为当 x 跑遍所有 $U_i(1) \cap U_j(1)$ 时矩阵 $h_i \circ h_j^{-1}(x)$ 的范数的上确界. 因此

$$|h_i(c_i(x_0))| \leq \|\delta\gamma\|_r + C\|\gamma\|_\rho.$$

记 $H_b^1(r) := Z_b^1(r)/\delta C_b^1(r)$. 断言: 对于 $\frac{1}{2} \leq s \leq 1$, 自然同态

$$H_b^1(s) \to Z^1(\mathcal{U}(s), E)/\delta C^0(\mathcal{U}(s), E) = H^1(\mathcal{U}(s), E) \cong H^1(X, E)$$

为同构. 这是因为, 有上一个断言易知此同态为单射; 而其满射性是因为 Leray 定理, 只需注意同构映射 $H^1(\mathcal{U}(2), E) \to H^1(\mathcal{U}(s), E)$ 穿过 $H_b^1(s)$. 断言得证. 此外, 限制映射 $H_b^1(1) \to H_b^1(s)$ 也为同构; 特别地, 限制映射 $Z_b^1(1) \to Z_b^1(r)$ 所诱导的 $Z_b^1(1) \to H_b^1(r)$ 为满射.

给定正整数 $N \geq 1$. 同之前一样取定 $\frac{1}{2} \leq \rho \leq r < 1$, 令 $C^0(r, N) := \left\{\gamma = (c_i) \in C_b^0(r) \middle| \operatorname{ord}_{a_i}(c_i) \geq N\right\}$, 其中 $a_i \in W_i$ 使得 $z_i(a_i) = 0$. 由 Schwarz 引理 [见定理 7.1 的证明过程] , 有

$$\|\gamma\|_\rho \leq \left(\frac{\rho}{r}\right)^N \|\gamma\|_r \quad 若\,\gamma \in C^0(r, N).$$

因此, 若取充分大的 N 使得 $C(\frac{\rho}{r})^N \leq \frac{1}{2}$, 则有: 对任意 $\gamma \in C^0(r,N)$, $\|\gamma\|_r \leq \|\delta\gamma\|_r + C(\frac{\rho}{r})^N\|\gamma\|_r$, 从而 $\|\gamma\|_r \leq 2\|\delta\gamma\|_r$. 特别地, $\delta C^0(r,N) \subseteq Z_b^1(r)$ 为闭子空间, 商空间 $\mathcal{H} := Z_b^1(r)/\delta C^0(r,N)$ 为 Banach 空间. 此外, 又因为 $C_b^0(r)/C^0(r,N)$ 是有限维空间, 从而映到 $\mathcal{H}$ 的像空间 $\delta C_b^0(r) \subseteq \mathcal{H}$ 是有限维的, 从而是 $\mathcal{H}$ 的闭子空间 [见第 8 节的相关泛函分析定理证明] . 因此 $\delta C_b^0(r)$ 为 $Z_b^1(r)$ 的闭子空间, $H_b^1(r) = Z_b^1(r)/\delta C_b^0(r)$ 为 (Hausdorff) Banach 空间.

现在, 由 Montel 定理 [该定理断言: $\mathbb{C}$ 的开集 Ω 上的一致有界的全纯函数列必存在内闭一致收敛子列] 可知限制映射 $Z_b^1(1) \to Z_b^1(r)$, $(r<1)$ 是紧算子 [注意 $U_i(r) \cap U_j(r)$ 相对于 $U_i(1) \cap U_j(1)$ 紧] . 所以诱导同态 $Z_b^1(r) \to H_b^1(r)$ 既是紧算子又是满射. 从而由 [泛函分析中的] 开映射定理, $H_b^1(r)$ 当中的原点 0 具有相对紧的邻域 [例如 $Z_b^1(1)$ 当中的单位球的像集] . 因此 $H_b^1(r) \cong H^1(X,E)$ 是有限维 $\mathbb{C}$-线性空间. □

注记. 上述定理的早期证明用到了 L.Schwarz 的某个大定理, 它关于 Banach 空间之间的满射的紧算子扰动. 而本文对定理 7.2 的证明来自 Madhav Nori, 绕开了 L.Schwarz 定理.

定理 7.2 无比强大. 作为应用, 我们证明以下:

定理 7.3. 设 X 为紧黎曼曲面, $\pi : L \to X$ 为全纯线丛. 则 L 存在非全纯的亚纯截面. 特别地:

(1) X 上的任何线丛 L 都同构于某个 $L(D)$, 其中 D 为 X 的除子;

(2) 存在 X 上的非常值亚纯函数.

证明. 取 $a \in X$ 及其坐标邻域 (U,z), 使得 $z(a)=0$; 不妨存在全纯平凡化 $h_U : \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{C}$.

对于整数 $k \geq 1$, 记 s_k 为 L 在 U 上的亚纯截面, 使得 $h_U(s_k(x)) = (x, \frac{1}{(z(x))^k})$, $x \in U-\{a\}$. 考虑 X 的开覆盖 $\mathcal{U} = \{U, X-\{a\}\}$, 再令 $f_{12}^{(k)} := s_k|_{U-\{a\}}$; $f_{21}^{(k)} = -f_{12}^{(k)}$, $f_{11}^{(k)} = f_{22}^{(k)} = 0$. 则 $\{f_{ij}^{(k)}\}_{i,j\in\{1,2\}}$ 确定了 $f^{(k)} \in Z^1(\mathcal{U},L)$. 由于 $H^1(X,L)$ 有限维, $H^1(\mathcal{U},L) \to H^1(X,L)$ 为单射, 于是若记 $d = \dim_{\mathbb{C}} H^1(X,L)$, 则存在不全为零的常数 $c_1,...,c_{d+1}$ 使得

$$c_1 f^{(1)} + \cdots + c_{d+1} f^{(d+1)} \in B^1(\mathcal{U},L);$$

也就是说存在 L 在 $U, X-\{a\}$ 上的全纯截面 u_1, u_2, 使得在 $U-\{a\}$ 中成立

$$c_r s_r + \cdots + c_{d+1}s_{d+1} = u_1 - u_2, \quad c_r \neq 0.$$

则截面 $s = u_2$ 在 $X-\{a\}$ 亚纯 [但不全纯] , 因为在 $U-\{a\}$ 当中有 $s = -\sum_{\nu=r}^{d+1} c_\nu s_\nu + u_1$. □

注记. 上述论证表明, 若 $g := \dim_{\mathbb{C}} H^1(X, \mathcal{O})$, 则对任意 $a \in X$, 存在 X 上的非常值亚纯函数, 使得它在 $X-\{a\}$ 全纯, 并且在 a 处的极点阶数 $\leq g+1$.

定理 7.3(b) 可用于证明以下:

定理 7.4. 设 X 是紧黎曼曲面, $\mathcal{M}(X)$ 为 X 上的亚纯函数域. 则 $\mathcal{M}(X)$ 为一元代数函数域. 具体地说, 若 f 为 X 上的非常值亚纯函数, 则 $\mathcal{M}(X)$ 是有理函数域 $\mathbb{C}(f)$ 的代数扩张.

证明. 任取 X 上的非常值亚纯函数 f. 视 f 为全纯映射 $f: X \to \mathbb{P}^1$ [将极点映到 $\infty \in \mathbb{P}^1 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$] . 设 $C \subseteq X$ 为 f 的临界点集 [即 f 在在这些点处不是局部同胚] , $B \subseteq \mathbb{P}^1$ 为 C 的像集: $B = f(C)$. 则 B, C 都是有限集. 再令 $A = f^{-1}(C)$, 则 $f: X - A \to \mathbb{P}^1 - B$ 为有限叶覆盖, 记其叶数为 d.

对于 $g \in \mathcal{M}(X)$, 断言存在 $\mathbb{P}^1$ 上的亚纯函数 $a_1, ..., a_d$ 使得

$$(g(x))^d + a_1(f(x))(g(x))^{d-1} + \cdots + a_d(f(x)) = 0.$$

这是因为, 记 S 为 g 的极点构成的集合, 则对于 $z \in \mathbb{P}^1 - B - f(S)$, 定义 $a_\nu(z)$ 为 $g(x_1), ..., g(x_d)$ 的第 ν 个初等对称函数, 其中 $\{x_1, ..., x_d\} = f^{-1}(z)$. 于是 [由初等对称函数的定义] 易知

$$(g(x))^d + a_1(f(x))(g(x))^{d-1} + \cdots + a_d(f(x)) = 0$$

对 $x \in X - A - f^{-1}f(S)$ 成立. 于是, 只需再证明 a_ν 可亚纯延拓到整个 $\mathbb{P}^1$ 上.

设 $a \in B \cup f(S)$, 取 a 的邻域 U 使得 g 在 $f^{-1}(U)$ 中的极点必落在 $f^{-1}(a)$ 中, 并且存在 U 上的不恒为零的全纯函数 w 使得 $w(a) = 0$. 于是存在整数 $N > 0$ 使得 $(w \circ f)^N g$ 在 $f^{-1}(U)$ 全纯. 现在, 若 W 为 a 的邻域且 $a \in W \subset\subset U$, 则 $(w \circ f)^N g$ 在

$f^{-1}(W)$ 有界, 从而关于 $(w\circ f)^N g$ 在 $\{x_1,...,x_d\}=f^{-1}(z)$ $z\in W-\{a\}$ 处的取值的第 ν 个初等对称函数 $b_\nu(z)$ 有界, 从而可全纯延拓至 a 处. 而 $a_\nu(z)=\dfrac{b_\nu(z)}{(w(z))^{\nu N}}$, 从而 a_ν 在 a 处至多为极点.

因为 $\mathbb{P}^1$ 上的亚纯函数都是有理函数, 从而这就证明了任意 $g\in\mathcal{M}(X)$ 都是 $\mathbb{C}(f)$ 上的次数 $\leq d$ 的代数元.

取 g_0 使得扩张次数 $[\mathbb{C}(f,g_0):\mathbb{C}(f)]$ 最大. 断言 $\mathbb{C}(f,g_0)=\mathcal{M}(X)$. 这是因为, 如果 $h\in\mathcal{M}(X)$ 但 $h\notin\mathbb{C}(f,g_0)$, 注意到 $\mathbb{C}(f)$ 是特征零域, 从而存在 $g\in\mathcal{M}(X)$ 使得 $\mathbb{C}(f)(g_0,h)=\mathbb{C}(f)(g)$; 然而这样, g 在 $\mathbb{C}(f)$ 上的次数 $=[\mathbb{C}(f)(g_0,h):\mathbb{C}(f)]$ 严格大于 $[\mathbb{C}(f)(g_0):\mathbb{C}(f)]$, 矛盾.

定理得证. □

8 Dolbeaut 同构

在证明 Mittag-Leffler 定理 [$H^1(U,\mathcal{O})=0,\ U\subseteq\mathbb{C}$] 当中, 我们把此问题转化为求解方程 $\dfrac{\partial u}{\partial\bar z}=f$. 若将此方法形式化, 则会导出 $H^1(X,E)$ 的一个重要解释 [E 为黎曼曲面 X 上的全纯向量丛] , 称为 Dolbeaut **同构**.

假定读者熟悉外代数以及流形上的微分形式. 我们简要回顾一下其中与我们话题有关的内容.

设 X 为黎曼曲面, $T_X^{\mathbb{C}}$ 为 X 的**复切丛** [由复切向量构成的丛] . 其对偶丛 $T_X^{*,\mathbb{C}}$ 为复余切向量构成的丛, 称为**复余切丛**, 其 C^∞-截面为 X 上的光滑微分形式. 若 (U,z) 为一个局部坐标, $z=x+iy$ [x,y 取实值] , 则 U 上的微分形式 φ 可写为 $\varphi=\varphi_1\,\mathrm{d}x+\varphi_2\,\mathrm{d}y$, 其中 $\varphi_1,\varphi_2\in C^\infty(U)$. 若记 $\mathrm{d}z=\mathrm{d}x+i\,\mathrm{d}y$, $\mathrm{d}\bar z=\mathrm{d}x-i\,\mathrm{d}y$, 则 φ 也能写为 $\varphi=a\,\mathrm{d}z+b\,\mathrm{d}\bar z$, 其中 $a,b\in C^\infty(U)$.

若 (V,w) 为另一个局部坐标, $f:V\to U$ 为全纯映射, 则 $f^*(\varphi)=(a\circ f)f'\,\mathrm{d}w+(b\circ f)\overline{f}'\,\mathrm{d}\bar w$ [注意柯西-黎曼方程] ; 从而若 $\varphi=a\,\mathrm{d}z+b\,\mathrm{d}\bar z$ 且在 V 中 $b\equiv 0$, 则 $f^*(\varphi)$ 的 $\mathrm{d}\bar w$ 的系数也恒为 0; 于是这是微分形式的内蕴性质. 我们称微分形式 φ 是 $(1,0)$-型的 [相应地, $(0,1)$-型的] , 如果对于任何局部坐标 (U,z), φ 在该坐标下的局部表示形如 $\varphi=a\,\mathrm{d}z$ [相应地, $b\,\mathrm{d}\bar z$] .

对于 X 的开子集 W, 记 $\mathcal{A}^{1,0}(W)$ [相应地, $\mathcal{A}^{0,1}(W)$] 为 W 上的 $(1,0)$-形式 [相应地, $(0,1)$-形式] 构成的空间. $\mathcal{A}^{0,0}(W) = C^{\infty}(W)$.

对于 $f \in C^{\infty}(W)$, 外微分 $\mathrm{d}f$ 可唯一分解为 $\mathrm{d}f = \partial f + \bar{\partial} f$, 使得 $\partial f \in \mathcal{A}^{1,0}(W)$, $\bar{\partial} f \in \mathcal{A}^{0,1}(W)$. 在局部坐标下, $\partial f = \dfrac{f}{z}\,\mathrm{d}z$, $\bar{\partial} f = \dfrac{\partial f}{\partial \bar{z}}\,\mathrm{d}\bar{z}$.

若 $\alpha \in \mathcal{A}^{1,0}(W)$, 则令 $\partial \alpha = 0$, $\bar{\partial}\alpha = \mathrm{d}\alpha$ [外微分]; 类似地, 若 $\beta \in \mathcal{A}^{0,1}(W)$, 则 $\partial \beta = \mathrm{d}\beta$, $\bar{\partial}\beta = 0$. 局部坐标下, 若 $\alpha = a\,\mathrm{d}z$, $\beta = b\,\mathrm{d}\bar{z}$, 则定义 $\bar{\partial}\alpha = \dfrac{\partial a}{\partial \bar{z}}\,\mathrm{d}\bar{z} \wedge \mathrm{d}z = -\dfrac{\partial z}{\partial \bar{z}}\,\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}\bar{z}$, 以及 $\partial \beta = \dfrac{\partial \beta}{\partial z}\,\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}\bar{z}$.

设 $\pi : E \to X$ 为黎曼曲面 X 上的全纯向量丛, W 为 X 的开子集. 记 $C_E^{\infty}(W)$ 为 E 在 W 上的光滑截面构成的空间 [即满足 $\pi \circ s = \mathrm{id}_W$ 的光滑映射 $s : W \to E$ 构成的空间]. 若 $E|_W$ 为平凡丛 [即存在全纯平凡化 $h : \pi^{-1}(W) \to W \times \mathbb{C}^n$], 则映射

$$\begin{aligned} H^0(W,E) \otimes_{\mathcal{O}(W)} C^{\infty}(W) &\to C_E^{\infty}(W) \\ s \otimes f &\mapsto f \cdot s \end{aligned}$$

为同构 [其中 $H^0(W,E)$ 为 E 在 W 上的全纯截面空间].

令 $\mathcal{A}_E^{0,1}(W) = C_E^{\infty}(W) \otimes_{C^{\infty}(W)} \mathcal{A}^{0,1}(W)$, 其中 W 为 X 的开集. 若 $E|_W$ 为平凡丛, 则有 $\mathcal{A}_E^{0,1}(W) = H^0(W,E) \otimes_{\mathcal{O}(W)} \mathcal{A}^{0,1}(W)$.

若 $E|_W$ 为平凡丛, 在存在唯一的 $\mathcal{O}(W)$-线性映射 $\bar{\partial}_{E,W} : C_E^{\infty}(W) \to \mathcal{A}_E^{0,1}(W)$, 此线性映射由 $1 \otimes \bar{\partial} : H^0(W,E) \otimes_{\mathcal{O}(W)} C^{\infty}(W) \to H^0(W,E) \otimes_{\mathcal{O}(W)} \mathcal{A}^{0,1}(W)$ 所诱导 [注意到, 因为 $\bar{\partial}$ 是 $\mathcal{O}(W)$-线性的, 从而 $1 \otimes \bar{\partial}$ 良定]. 由此易知对于 X 的任意开集 V, 都存在唯一的 $\mathcal{O}(V)$-线性映射 $\bar{\partial}_{E,V} : C_E^{\infty}(V) \to \mathcal{A}_E^{0,1}(V)$ 使得对任意开集 $U \subseteq V$, 若 $E|_U$ 平凡, 则对任意 $s \in C_E^{\infty}(V)$, $\bar{\partial}_{E,V}(s)|_U = \bar{\partial}_{E,U}(s|_U)$. 我们将此映射简记为 $\bar{\partial}_E : E \to \mathcal{A}_E^{0,1}$, 或者直接简记为 $\bar{\partial}$.

现在陈述本节主定理:

定理. *(Dolbeaut 同构定理).*

设 $\pi : E \to X$ 为黎曼曲面 X 上的全纯向量丛, 考虑映射

$$\bar\partial : C_E^\infty(X) \to \mathcal{A}_E^{0,1}(X).$$

则有: $\ker(\bar\partial) = H^0(X, E)$, 即 E 在 X 上的全纯截面空间; 以及 $\operatorname{coker}(\bar\partial)$ 自然同构于 $H^1(X, E)$.

证明. 注意到 $\ker(\bar\partial) = H^0(X, E)$ 是局部性质. 对于 X 的开子集 U, 若有全纯平凡化 $\pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{C}^n$, 则对于 $s \in C_E^\infty(X)$, $\bar\partial s|_U = 0 \iff \bar\partial f = 0$, 其中 $(x, f(x)) = h_U(s(x)), x \in U$. 此时, 当且仅当 f 全纯.

为证明此定理的第二部分, 我们需要以下引理:

引理. 设 $\mathbb{E}^\infty$ 是 E 的光滑截面层, 即对于开集 $W \subseteq X$, $\mathbb{E}^\infty(W) = C_E^\infty(W)$, 则

$$H^1(X, \mathbb{E}^\infty) = 0.$$

证明. 设 $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i\in\mathcal{I}}$ 为 X 的一族开覆盖, $s_{ij} \in C_E^\infty(U_i \cap U_j)$ 使得 $\{s_{ij}\} \in Z^1(\mathcal{U}, \mathbb{E}^\infty)$. 则取从属于开覆盖 $\mathcal{U}$ 的单位分解 $\{\alpha_i\}_{i\in\mathcal{I}}$, 再令 $s_i \in C_E^\infty(U_i)$ 满足 $s_i = \sum\limits_{j\in\mathcal{I}} \alpha_j s_{ij}$ [其中函数 $\alpha_j s_{ij}$ 的定义为: 对于 $x \in U_i \cap U_j$, $(\alpha_j s_{ij})(x) = \alpha_j(x) s_{ij}(x)$; 而此函数在 $U_i - U_j$ 恒为零] . 则与 Mittag-Leffler 定理的证明一样, 在 $U_k \cap U_\ell$ 当中成立

$$s_k - s_\ell = \sum_j \alpha_j (s_{kj} - s_{\ell j}) = \sum_j \alpha_j s_{k\ell} = s_{k\ell}.$$

□

回到 Dolbeaut 同构定理的证明. 我们定义映射

$$D : H^1(X, E) \to \mathcal{A}_E^{0,1}(X)/\bar\partial C_E^\infty(X)$$

如下: 设 $\{s_{ij}\} \in Z^1(\mathcal{U}, E)$ [其中 $s_{ij} \in H^0(U_i \cap U_j, E)$] . 取 $\varphi_i \in C_E^\infty(U_i)$ 使得在 $U_i \cap U_j$ 当中成立 $\varphi_i - \varphi_j = s_{ij}$, 则有 $\bar\partial\varphi_i - \bar\partial\varphi_j = 0$; 因此 $\{\bar\partial\varphi_i\}$ 定义了 $\mathcal{A}^{0,1}(X)$ 中的一个元素, 它在商空间 $\mathcal{A}_E^{0,1}(X)/\bar\partial C_E^\infty(X)$ 中的像被定义为 $D(\{s_{ij}\})$.

我们来验证此 D 的良定性 [与上述选取无关]. 首先, 若 $\{V_\alpha\}_{\alpha\in V}, \tau:\mathcal{A}\to\mathcal{I}$ 为开覆盖 $\{U_i\}$ 的一个加细, $s_{\alpha\beta}:=s_{\tau(\alpha)\tau(\beta)}|_{V_\alpha\cap V_\beta}$, 则取 $\psi_\alpha=\varphi_{\tau(\alpha)}|_{V_\alpha}$ 使得 $\psi_\alpha-\psi_\beta=s_{\alpha\beta}$; 则显然 $\{\bar\partial\psi_\alpha\}$ 与 $\{\bar\partial\varphi_i\}$ 定义了同一个微分形式.

若 $\varphi_i'\in C_E^\infty(U_i)$ 是方程 $\varphi_i'-\varphi_j'=s_{ij}$ 的另一组解, 则在 $U_i\cap U_j$ 当中成立 $\varphi_i'-\varphi_i=\varphi_j'-\varphi_j$, 这确定了一个 $\varphi\in C_E^\infty(X)$; 显然, 由 $\omega|_{U_i}=\bar\partial\varphi_i$ 所确定的 $\omega\in\mathcal{A}^{0,1}(E)(X)$ 以及类似的 $\omega'\in\mathcal{A}^{0,1}(X)$, 成立 $\bar\partial\varphi=\omega'-\omega$.

断言 D 为单射: 给定 $\{s_{ij}\}\in Z^1(\mathcal{U},E)$, $\varphi_i\in C_E^\infty(U_i)$ 使得在 $U_i\cap U_j$ 成立 $\varphi_i-\varphi_j=s_{ij}$; 如果存在 $\varphi\in C_E^\infty(X)$ 使得在 U_i 成立 $\bar\partial\varphi=\bar\partial\varphi_i$, 那么在 $U_i\cap U_j$ 中有

$$(\varphi_i-\varphi)-(\varphi_j-\varphi)=s_{ij},\quad \bar\partial(\varphi_i-\varphi)=0,\text{ 也就是说, }\varphi_i-\varphi\in H^0(U_i,E).$$

最后再验证 D 为满射. 事实上, 给定 $\omega\in\mathcal{A}_E^{0,1}(X)$, 则我们可以取开覆盖 $\mathcal{U}=\{U_i\}_{i\in\mathcal{I}}$ 以及 $\varphi_i\in C_E^\infty(U_i)$ 使得 $\bar\partial\varphi_i=\omega|_{U_i}$ [因为, 若 $\Omega\subseteq\mathbb{C}$ 为开集, $f\in C^\infty(\Omega)$, 则由第 5 节的性质 5.3 可知对任何紧子集 $K\subseteq\Omega$, 存在 $u\in C^\infty(\Omega)$ 使得在 K 中成立 $\dfrac{\partial u}{\partial\bar z}=f$]. 进而, 再令 $s_{ij}=\varphi_i-\varphi_j|_{U_i\cap U_j}$, 则 $\bar\partial s_{ij}=0$, 从而 $s_{ij}\in H^0(U_i\cap U_j,E)$. 显然 $\{s_{ij}\}\in Z^1(\mathcal{U},E)$. 由 D 的定义可知 $D(\{s_{ij}\})=\omega$ 所在等价类.

□

注记. 注意层短正合列 $0\to\mathbb{E}\to\mathbb{E}^\infty\to\mathcal{A}_E^{0,1}\to0$ 以及引理 $H^1(X,\mathbb{E}^\infty)=0$, 则其同调群的长正合列可直接推出 Dolbeaut 同构定理. 不过, D 的上述具体构造也常常有用.

Dolbeaut 同构定理结合第 7 节的有限性定理可得到一个重要推论.

首先, 我们定义 $C_E^\infty(X)$ 与 $\mathcal{A}_E^{0,1}(X)$ 上的拓扑. 设 $a\in X$, U 为 a 的坐标邻域, 局部坐标 $z:U\to z(U)\subseteq\mathbb{C}$, 并且 $E|_U$ 平凡. 对于 $\varphi\in\mathcal{A}_E^{0,1}(X)$, 则 $\varphi|_U$ 具有局部表达式

$$(\varphi_1,...,\varphi_n)\,\mathrm{d}\bar z,\quad \varphi_1,...,\varphi_n\in C^\infty(U).$$

设 X 为紧黎曼曲面, 我们通过下述条件来引入 $\mathcal{A}_E^{0,1}(X)$ 上的拓扑, 使得它为完备度量空间 [甚至是 Fréchet 空间]:

序列 $\varphi^{(\nu)}\in\mathcal{A}_E^{0,1}(X)$ 收敛, 当且仅当对任意的上述开集 U, 相应的序列 $(\varphi_1^{(\nu)},...,\varphi_n^{(\nu)})$

$$(\varphi_1^{(\nu)},...,\varphi_n^{(\nu)})\,\mathrm{d}\bar z=\varphi^{(\nu)}|_U,$$

在空间 $\prod_{p=1}^{n} C^\infty(U)$ 中收敛. [即, 对于任意阶微分算子 D^k, $(D^k = \dfrac{\partial^k}{\partial x^l \partial y^m}, l+m=k)$, 序列 $\{D^k \varphi_j^{(\nu)}\}$ 在 U 中内闭一致收敛] .

同样的方式也可引入 $C_E^\infty(X)$. 这称为 $\mathcal{A}_E^{0,1}, C_E^\infty$ 上的 C^∞-拓扑, 也称为 Schwartz **拓扑**.

定理. $\bar\partial C_E^\infty(X)$ 是 $\mathcal{A}_E^{0,1}(X)$ 的闭子空间.

因为 $\bar\partial C_E^\infty(X)$ 在 $\mathcal{A}_E^{0,1}(X)$ 当中有限余维 [由 $\dim H^1(X,E)$ 的有限性以及 Dolbeaut 同构可知] , 从而此定理是以下泛函分析中的标准结果的推论:

引理. *设 V, W 为 Fréchet 空间, $u: V \to W$ 为连续线性映射. 若 $\dim_{\mathbb{C}}(W/u(V)) < \infty$, 则 $u(V)$ 是 W 的闭子空间.*

[特别注意, Fréchet 空间的有限余维子空间不一定是闭的.]

我们给出其证明概要. 首先, 因为 $\ker u$ 是闭的, $V/\ker u$ 仍为 Fréchet 空间. 因此不妨假设 u 为单射. 设 W_0 为 W 的有限维子空间使得投影 $W_0 \to W/u(V)$ 为代数同构. 那么, W_0 为 W 的闭子空间. [若 $w_1, ..., w_k$ 为 W_0 的一组基, 则映射 $\mathbb{C}^k \to W_0$, $(x_1, ..., x_k) \to \sum x_i w_i$ 为连续双射; 易知它是同胚, 这是因为 $\{\sum |x_i|^2 = 1\}$ 的像集是紧的, 从而为 W_0 的闭子集, 从而存在 0 的邻域与该像集不交. 这表明 W_0 在 W 的子空间拓扑下是完备的, 从而闭.] 映射 $W_0 \oplus V \to W$, $(w, v) \mapsto w + u(v)$ 为连续双射, 从而为同胚 [利用开映射定理] . 因为 V 为 $W_0 \oplus V$ 的闭子集, 从而其像集在 W 中闭. □

作为本节结束, 我们介绍黎曼曲面 X 的**典范丛** (canonical bundle).

设 W 为 X 的开子集. W 上的**全纯 1-形式** 是指满足 $\bar\partial\omega = 0$ 的 $(1,0)$-形式 ω. [等价地, $\mathrm{d}\omega = 0$] . 若 (U, z) 为局部坐标, ω 是全纯 1-形式, $\omega|_{U\cap W} = f\,\mathrm{d}z$, 则 f 全纯. 若 ω 是定义在 W 去掉某个离散子集所得的集合上的 $(1,0)$ 形式, 且对于任何局部坐标 (U, z), $U \subseteq W$, $\omega = f\,\mathrm{d}z$, 则 f 在 U 上亚纯, 那么称 ω 为 W 上的**亚纯 1-形式**.

定义 X 上的层 $\Omega = \Omega_X (= \Omega_X^1)$, 使得 $U \mapsto \Omega_X(U) = \{U$ 上的全纯 1-形式$\}$; 称为**全纯 1-形式层**. 存在 X 上的线丛 $K = K_X$ 使得对 X 的任何开集 $U \subseteq X$, $H^0(U, K_X) = \Omega_X(U)$.

我们可通过分析复余切丛 $T_X^{*,\mathbb{C}}$, 以及将复余切向量分解为 $(1,0)$-型与 $(0,1)$-型来内蕴地描述该线丛. 在此我们用一组转移函数来定义它.

设 $\{(U_i,z_i)\}$ 为 X 的一族坐标覆盖, 则显然存在 $U_i\cap U_j$ 上处处非零的全纯函数 $g_{ij}\in\mathcal{O}(U_i\cap U_j)$ 使得在 $U_i\cap U_j$ 成立

$$\mathrm{d}z_j = g_{ij}\,\mathrm{d}z_i.$$

设 K_X 为由转移函数 $\{g_{ij}\}$ 定义的线丛. 若 $W\subseteq X$ 开子集, $s\in H^0(W,K_X)$, 则 s 可以表示为一族函数 $\{f_i\}$, $f_i\in\mathcal{O}(U\cap U_i)$ 使得在 $W\cap U_i\cap U_j$ 成立

$$f_i = g_{ij}f_j.$$

考虑 $W\cap U_i$ 上的全纯 1-形式 $\omega_i = f_i\,\mathrm{d}z_i$; 则在 $W\cap U_i\cap U_j$ 成立 $\omega_i = f_i\,\mathrm{d}z_i = g_{ij}f_j\,\mathrm{d}z_i = f_j\,\mathrm{d}z_j = \omega_j$, 从而这定义了 $\omega\in\Omega_X(U)$. 映射 $s\mapsto\omega$ 显然是同构.

线丛 $K=K_X$ 称为 X 的**典范 (线) 丛** (canonical (line) bundle). 在上述相应地描述下, K_X 的亚纯截面对应于亚纯 1-形式. 我们可以谈论亚纯 1-形式 ω 的除子; 这种除子称为**典范除子** (canonical divisor).

还要注意, 对于 X 的开子集 W, 考虑 K_X 在 W 上的 C^∞-截面, 可得 $C^\infty_{K_X}(W)$ 与 $\mathcal{A}^{1,0}(W)$ 的同构.

9 Weyl 引理与 Serre 对偶定理

我们通常所说的 Weyl 引理是关于 Laplace 算子的一个正则性引理, 而不是关于算子 $\bar\partial$.

设 X 为紧黎曼曲面, $\pi: E\to X$ 为 X 上的全纯向量丛. 记 $\pi^*: E^*\to X$ 为其对偶丛, K_X 为 X 的典范线丛. 我们通过下述方式来定义双线性型

$$\langle,\rangle : H^0(X,E^*\otimes K_X)\times\mathcal{A}_E^{0,1}(X)\to\mathbb{C}.$$

对于 $s\in H^0(X,E^*\otimes K_X)$, $\varphi\in\mathcal{A}_E^{0,1}(X)$, 设 (U,z) 为 X 上的一个局部坐标, ω 为 U 上的一个处处非零的全纯 1-形式 [即, 若 $\omega = f\,\mathrm{d}z$, 则函数 f 在 U 处处非零]. 则 s,φ 在 U 上可唯一地写成

$$s|_U = \lambda\otimes\omega,\quad \varphi|_U = \alpha\otimes\overline{\omega},$$

其中 $\lambda\in H^0(U,E^*)$, $\alpha\in C^\infty_E(U)$; 我们定义 U 上的 C^∞ 函数 (λ,α), 使得对任意 $x\in U$ 都有 $(\lambda,\alpha)(x)=\lambda(x)(\alpha(x))$ [注意 $\lambda(x)$ 为纤维 E_x 上的线性函数, $\alpha(x)\in E_x$] , 并且 U 上的 2-形式

$$(s|_U,\varphi|_U)=(\lambda,\alpha)\omega\wedge\overline{\omega}$$

与 ω 的选取无关 [若另有 $\omega'=f\omega$, 则 f 为 U 上处处非零的全纯函数. 于是 $(\frac{1}{f}\lambda)\otimes\omega'=s|_U$, $\varphi|_U=(\frac{1}{f}\alpha)\otimes\overline{\omega}'$, 从而 $(\frac{1}{f}\lambda,\frac{1}{f}\alpha)\omega'\wedge\overline{\omega}'=\frac{1}{|f|^2}(\lambda,\alpha)f\overline{f}\omega\wedge\overline{\omega}=(\lambda,\alpha)\omega\wedge\overline{\omega}$] . 这就定义了 X 上的 2-形式 (s,φ), 我们令

$$\langle s,\varphi\rangle=\int_X(s,\varphi).$$

注意若 W 为 X 的开子集, $\operatorname{supp}(\varphi)\subseteq W$, 则对于 $s\in H^0(W,E^*\otimes K_X)$, 也可以定义 $\langle s,\varphi\rangle$.

取局部坐标 (U,z), 使得存在平凡化 $h_U:\pi^{-1}(U)\to U\times\mathbb{C}^n$, 再令 $h^*_U:\pi^{*-1}(U)\to U\times\mathbb{C}^n$ 为其对偶丛 [转置的逆] 的对偶平凡化. 也就是说, 若 $v\in E_x$, $\lambda\in E^*_x$, $x\in U$, 若 $h_U(x)=(x;v_1,...,v_n)$, $h^*_U(\lambda)=(x,\lambda_1,...,\lambda_n)$, 则成立 $\lambda(v)=\sum_{k=1}^n\lambda_kv_k$. 若 $s\in H^0(X,E^*\otimes K_X)$, $\varphi\in\mathcal{A}^{0,1}_E(X)$ 并且 $\operatorname{supp}(\varphi)\subseteq U$, 则有局部表示

$$\begin{aligned} s|_U &= \lambda\otimes\mathrm{d}z, \quad \text{其中}\, h^*_U(\lambda(x))=(x;\lambda_1(x),...,\lambda_n(x))\\ \varphi|_U &= \alpha\otimes\mathrm{d}\bar{z}, \quad \text{其中}\, h_U(\alpha(x))=(x;\alpha_1(x),...,\alpha_n(x))\end{aligned}$$

并且有

$$\langle s,\varphi\rangle=\int_U\left(\sum_{k=1}^n\lambda_k(z)\alpha_k(z)\right)\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}\bar{z}.$$

我们还要注意, 若 $f\in C^\infty_E(X)$, $s\in H^0(X,E^*\otimes K_X)$, 则 $\langle s,\bar{\partial}f\rangle=0$. 为证明此断言, 首先 [用单位分解] 将 f 写成 $\sum_{\nu=1}^p f_\nu$, 使得每个 f_ν 的支集都包含于某个坐标邻域 (U_ν,z_ν), 并且 $E|_{U_\nu}$ 为平凡丛. 因此我们不妨假设 $p=1$, 并且 $\operatorname{supp}(f)\subseteq U$, (U,z) 同之前. 则 $h_U(f(x))=(x;f_1(x),...,f_n(x))$, 于是 $\bar{\partial}f=\alpha\otimes\mathrm{d}\bar{z}$, 其中 $h_U(\alpha(z))=(z;\frac{\partial f_1}{\partial\bar{z}},...,\frac{\partial f_n}{\partial\bar{z}})$; 因此, 若在 U 上有 $h^*_U(s(z))=(z;\lambda_1(z),...,\lambda_n(z))$, 则

$$\langle s,\varphi\rangle=\int_U\sum_{k=1}^n\lambda_k(z)\frac{\partial f_k}{\partial\bar{z}}\,\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}\bar{z}=-\int_U\sum_{k=1}^n\frac{\partial\lambda_k}{\partial\bar{z}}f_k\,\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}\bar{z}=0$$

[注意 $\operatorname{supp}(f_k)\subseteq U$, 作分部积分] .

Weyl 引理: $\bar{\partial}$-算子的正则性.

定理. 设 X 为紧黎曼曲面, $\pi: E \to X$ 为 X 上的全纯向量丛. 将 $\mathcal{A}_E^{0,1}(X)$ 赋予 C^∞-拓扑 *[详见第8节]*, 即在 X 的坐标邻域中各阶导数内闭一致收敛拓扑.

设 $F: \mathcal{A}_E^{0,1}(X) \to \mathbb{C}$ 为连续线性泛函, 并且满足 $F|_{\bar{\partial} C_E^\infty(X)} = 0$, 则必存在唯一的 $s \in H^0(X, E^* \otimes K_X)$ 使得

$$F(\varphi) = \langle s, \varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{A}_E^{0,1}(X).$$

一些注记.

(1) 若 E 是秩为 1 的平凡丛, X 为 $\mathbb{C}$ 的开子集, 则我们要处理 $C_0^\infty(X)$ [紧支光滑函数] 上的线性泛函; 见关于 X 的紧性的下一个注记. [这样的线性泛函] 叫做**分布** (distribution) [4] 我们可以定义对分布求导数, 使得条件 $F|_{\bar{\partial} C_0^\infty(X)} = 0$ 意味着 [在对分布求导数的意义下] $\dfrac{\partial F}{\partial \bar{z}} = 0$. 于是 Weyl 引理断言, 若分布 F 满足 $\dfrac{\partial F}{\partial \bar{z}} = 0$, 则 F 由某个全纯函数自然诱导.

(2) X 的紧性条件不是本质的; 一般地, 我们可研究取值于 E 的紧支 $(0,1)$-形式空间. 为处理这种一般情形, 我们需要在这个截面空间上定义 C^∞ 或 Schwartz 拓扑, 这就牵扯到一系列拓扑空间的**归纳极限** (inductive limit), 而我们更倾向于避开这个归纳极限. 我们必须要注意支集, 我们必须要在证明中这样做, 尽管就我们所需要的而言这很简单.

Weyl 引理的证明. 先证明唯一性. 只需注意, 若 $W \subseteq X$ 为开集, $\sigma \in H^0(W, E^* \otimes K_X)$ 使得对任意 $\varphi \in \mathcal{A}_E^{0,1}(X)$, $\mathrm{supp}(\varphi) \subseteq W$ 都有 $\langle \sigma, \varphi \rangle = 0$, 则必有 $\sigma = 0$. 因此, 我们只需要再证明下述存在性:

设 (U, z) 为 X 上的局部坐标, 并且存在全纯平凡化 $h_U: \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{C}^n$. 则存在 $s \in H^0(U, E^* \otimes K_X)$ 使得对任意 $\varphi \in \mathcal{A}_E^{0,1}$, $\mathrm{supp}(\varphi) \subseteq U$ 都有 $F(\varphi) = \langle s, \varphi \rangle$.

而这等价于证明存在 U 上的全纯函数 $\lambda_1, ..., \lambda_n$ 使得对 U 上的任意紧支光滑函数

[4] 也叫做 “广义函数”.

$\alpha_1, ..., \alpha_n$ [即 $\forall \alpha_j \in C_0^\infty(U)$] 都成立

$$F(\varphi) = \int_U \sum_{k=1}^n \lambda_k(z)\alpha_k(z)\,\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}\bar{z}, \quad \Big(\varphi = \alpha \otimes \mathrm{d}\bar{z},\, h_U(\alpha(z)) = (z; \alpha_1(z), ..., \alpha_n(z))\Big).$$

对于 $\alpha_j \in C_0^\infty(U)$, 记 $G(\alpha_1, ..., \alpha_n) = F(\alpha \otimes \mathrm{d}\bar{z})$, $h_U(\alpha(z)) = (z; \alpha_1(z), ..., \alpha_n(z))$. 条件 $F|_{\bar{\partial} C_E^\infty(X)} = 0$ 意味着对任意 $\beta_j \in C_0^\infty(U)$ 都有 $G(\frac{\partial \beta_1}{\partial \bar{z}}, ..., \frac{\partial \beta_n}{\partial \bar{z}}) = 0$. 于是只需证明对任意 $1 \le k \le n$, 存在 $\lambda_k \in \mathcal{O}(U)$ 使得

$$G(0, ..., \alpha_k, ..., 0) = \int_U \lambda_k \alpha_k \,\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}\bar{z} \quad \forall \alpha_k \in C_0^\infty(U).$$

因此, Weyl 引理是如下定理的推论. 此定理称为 $\bar{\partial}$-算子的正则性. □

定理. 设 U 为 $\mathbb{C}$ 的开子集. $T: C_0^\infty(U) \to \mathbb{C}$ 为满足以下性质的 $\mathbb{C}$-线性映射:

(1) 若 $\alpha^{(\nu)} \in C_0^\infty(U)$ 是支于 U 的某个给定紧子集上光滑函数列, 并且再 C^∞-拓扑下收敛于 $\alpha \in C_0^\infty(U)$, 则 $T(\alpha^{(\nu)}) \to T(\alpha)$.

(2) 任意 $\beta \in C_0^\infty(U)$, 都有 $T(\frac{\partial \beta}{\partial \bar{z}}) = 0$.

那么存在 $\lambda \in \mathcal{O}(U)$ 使得 $T(\alpha) = \int_U \lambda\alpha \,\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}\bar{z}, \forall \alpha \in C_0^\infty(U)$.

证明. 不妨假设 U 为 $\mathbb{C}$ 的有界开集. 取 $\varepsilon > 0$, 记 $U_\varepsilon := \Big\{z \in U \Big| z到\mathbb{C} - U的距离 > \varepsilon\Big\}$.

取函数 $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{C})$ 使得恒有 $0 \le \varphi \le 1$, 并且当 $|z| < \frac{1}{2}\varepsilon$ 时成立 $\varphi(z) = 1$, 当 $|z| \ge \varepsilon$ 时 $\varphi(z) = 0$.

对任意的 $\alpha \in C_0^\infty(U_\varepsilon)$, 定义函数 $\tilde{\alpha} \in C_0^\infty(U)$ 如下:

$$\tilde{\alpha}(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{C}} \alpha(z+w)\frac{\varphi(w)}{w}\,\mathrm{d}w \wedge \mathrm{d}\bar{w}.$$

我们断言

$$\alpha(z) = \frac{\partial \tilde{\alpha}}{\partial \bar{z}}(z) + \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{C}} \alpha(z+w)\rho(w)\,\mathrm{d}w \wedge \mathrm{d}\bar{w}, \quad z \in U, \tag{*}$$

其中 $\rho(w) = \frac{\partial}{\partial \bar{w}}(\frac{\varphi(w)}{w})$, $w \ne 0$, $\rho(0) = 0$; ρ 为 C^∞-函数, 其支集包含于圆盘 $|w| \le \varepsilon$ [其实包含于圆环 $\frac{1}{2}\varepsilon \le |w| \le \varepsilon$] .

为证明 $(*)$, 取定 $z\in U$ 以及以 z 为中心的半径 $\delta>0$ 的小圆盘 Δ_δ, 则

$$\frac{\partial\tilde{\alpha}}{\partial\bar{z}}=\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{C}}\frac{\partial\alpha}{\partial\bar{z}}(z+w)\frac{\varphi(w)}{w}\,\mathrm{d}w\wedge\mathrm{d}\bar{w}=\lim_{\delta\to0}\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{C}-\Delta_\delta}\frac{\partial\alpha}{\partial\bar{w}}(z+w)\frac{\varphi(w)}{w}\,\mathrm{d}w\wedge\mathrm{d}\bar{w};$$

对于固定的 $\delta>0$, 上式右边的积分等于

$$-\int_{\mathbb{C}-\Delta_\delta}\mathrm{d}\left(\alpha(z+w)\frac{\varphi(w)}{w}\,\mathrm{d}w\right)-\int_{\mathbb{C}-\Delta_\delta}\alpha(z+w)\frac{\partial}{\partial\bar{w}}\left(\frac{\varphi(w)}{w}\right)\mathrm{d}w\wedge\mathrm{d}\bar{w};$$

其第一项 $=\displaystyle\int_{|w|=\delta}\frac{\alpha(z+w)\varphi(w)}{w}\,\mathrm{d}w$, 当 $\delta\to0$ 时收敛于 $2\pi i\alpha(z)\varphi(0)=2\pi i\alpha(z)$. 因此

$$\frac{\partial\tilde{\alpha}}{\partial\bar{z}}=\alpha(z)-\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{C}}\alpha(z+w)\rho(w)\,\mathrm{d}w\wedge\mathrm{d}\bar{w},$$

这就证明了 $(*)$. 它可以重写为

$$\alpha(z)=\frac{\partial\tilde{\alpha}}{\partial\bar{z}}+\frac{1}{2\pi i}\int_U\alpha(w)\rho(w-z)\,\mathrm{d}w\wedge\mathrm{d}\bar{w}.$$

现在若我们用黎曼和来逼近此积分, 则黎曼和序列在 U 的 C^∞-拓扑下收敛于此积分 [因为 $\rho\in C^\infty$] , 并且它们的支集都包含于 U 的某个固定的紧子集, 这是因为 $\alpha\in C_0^\infty(U_\varepsilon)$ 并且当 $|w-z|\geq\varepsilon$ 时 $\rho(w-z)=0$. 因此由 T 的连续性假设, 我们得到

$$T(\alpha)=T\left(\frac{\partial\tilde{\alpha}}{\partial\bar{z}}\right)+\frac{1}{2\pi i}\int_U\alpha(w)\lambda(w)\,\mathrm{d}w\wedge\mathrm{d}\bar{w},$$

其中对于 $w\in U_\varepsilon$, $\lambda(w)=T(z\mapsto\rho(w-z))$. 此外还有 $\lambda\in C^\infty(U_\varepsilon)$ [这是因为, 比如对于实数 $h\neq0$, $h\to0$, 则 $\dfrac{\lambda(w+h)-\lambda(w)}{h}=T(\dfrac{\rho(w+h-z)-\rho(w-z)}{h})$, 算子 T 里面的部分当 $h\to0$ 时在 C^∞-拓扑下收敛; 之后反复使用此论证] . 再注意到 $T(\dfrac{\partial\tilde{\alpha}}{\partial\bar{z}})=0$. 因此我们证明了存在 $\lambda\in C^\infty(U_\varepsilon)$ 使得

$$T(\alpha)=\frac{1}{2\pi i}\int_U\alpha(w)\lambda(w)\,\mathrm{d}w\wedge\mathrm{d}\bar{w},\quad\forall\,\alpha\in C_0^\infty(U_\varepsilon).$$

对于 $\beta\in C_0^\infty(U_\varepsilon)$, 则有

$$0=T(\frac{\partial\beta}{\partial\bar{z}})=\frac{1}{2\pi i}\int_U\frac{\partial\beta}{\partial\bar{w}}\lambda(w)\,\mathrm{d}w\wedge\mathrm{d}\bar{w}=-\frac{1}{2\pi i}\int_U\beta\frac{\partial\lambda}{\partial\bar{w}}\,\mathrm{d}w\wedge\mathrm{d}\bar{w},$$

由 $\beta\in C_0^\infty(U_\varepsilon)$ 的任意性可知, 在 U_ε 当中成立 $\dfrac{\partial\lambda}{\partial\bar{w}}=0$, 即 $\lambda\in\mathcal{O}(U_\varepsilon)$. 定理得证. □

设 X 为紧黎曼曲面, $\pi : E \to X$ 为 X 上的全纯向量丛. 我们用如下方式定义双线性型 $\langle , \rangle_E : H^0(X, E^* \otimes K_X) \times H^1(X, E) \to \mathbb{C}$:

考虑之前定义的双线性型 $\langle , \rangle : H^0(X, E^* \otimes K_X) \times \mathcal{A}_E^{0,1}(X) \to \mathbb{C}$. 我们已经知道对任意 $f \in C_E^\infty(X)$, $s \in H^0(X, E^* \otimes K_X)$ 都有 $\langle s, \bar\partial f \rangle = 0$, 因此该双线性型诱导了 $H^0(X, E^* \otimes K_X) \times [\mathcal{A}_E^{0,1}(X)/\bar\partial C_E^\infty(X)] \to \mathbb{C}$, 我们把它也记为 $\langle , \rangle$. 若我们记 D 为 Dolbeault 同构 $D : H^1(X, E) \to \mathcal{A}_E^{0,1}(X)/\bar\partial C_E^\infty(X)$, 则我们定义 $\langle , \rangle_E$ 为:

$$\langle s, \xi \rangle_E = \langle s, D(\xi) \rangle, \quad s \in H^0(X, E^* \otimes K_X), \xi \in H^1(X, E).$$

此双线性型诱导了映射

$$H^0(X, E^* \otimes K_X) \xrightarrow{\Delta_E} H^1(X, E)^*$$

[V^* 是线性空间 V 的对偶] ,

$$\Delta_E(s) : \xi \mapsto \langle s, \xi \rangle_E \quad \text{是从 } H^1(X,E) \text{ 到 } \mathbb{C} \text{的线性映射.}$$

定理. *(Serre 对偶定理). 对紧黎曼曲面 X 上的全纯向量丛 E, 映射 $\Delta_E : H^0(X, E^* \otimes K_X) \to H^1(X, E)^*$ 为线性同构.*

证明. 设 $\ell : \mathcal{A}_E^{0,1}/\bar\partial C_E^\infty(X)$ 为任意 $\mathbb{C}$-线性映射. 我们已经知道 $\bar\partial C_E^\infty(X)$ 是 $\mathcal{A}_E^{0,1}(X)$ 的 [在 C^∞-拓扑下的] 闭子空间, 并且余维数有限. 由于有限维 (Hausdorff) 拓扑线性空间上的任何线性函数都是连续的, 从而线性映射 $F : \mathcal{A}_E^{0,1}(X) \to \mathbb{C}$ 关于 C^∞-拓扑连续, 其中 F 的定义为 $F(\varphi) = \ell(\{\varphi\})$, $\{\varphi\}$ 为 φ 在 $\mathcal{A}_E^{0,1}(X)/\bar\partial C_E^\infty(X)$ 中的像. 此外, F 在 $\bar\partial C_E^\infty(X)$ 恒为零. 从而由 Weyl 引理, 存在 $s \in H^0(X, E^* \otimes K_X)$ 使得

$$\ell(\{\varphi\}) = F(\varphi) = \langle s, \varphi \rangle = \langle s, \{\varphi\} \rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{A}_E^{0,1}(X).$$

由于 D 为同构, 从而这证明了 Δ_E 为满射.

为证 Δ_E 为单射, 任意给定 $s \in H^0(X, E^* \otimes K_X)$, 我们必须证明如果对 $\forall \varphi \in \mathcal{A}_E^{0,1}(X)$ 都有 $\langle s, \varphi \rangle = 0$, 那么 $s \equiv 0$. 这是直接的 [见 Weyl 引理证明的开头] . $\square$

注意 $H^0(X, E)$ 与 $H^1(X, E)$ 都是有限维的, 从而 Serre 对偶定理也可如下表述:

另一种版本的 Serre 对偶定理. 双线性型

$$\langle , \rangle_E : H^0(X, E^* \otimes K_X) \times H^1(X, E) \to \mathbb{C}$$

非退化.

设 F 为全纯向量丛, 记 $E = F^* \otimes K_X$, 则 $E^* \otimes K_X = F \otimes K_X^* \otimes K_X = F$ [因为对任意线丛 L, $L^* \otimes L$ 平凡] . 因此对 X 的任意 [全纯] 向量丛 F, $H^0(X, F)$ 同构于 $H^1(X, F^* \otimes K_X)$ 的对偶空间.

我们考察 E 是秩为 1 的平凡丛的特殊情况来结束本节 [此时 $\mathcal{A}_E^{0,1}(X) = \mathcal{A}^{0,1}(X)$, $H^1(X, E) = H^1(X, \mathcal{O})$] .

性质 9.1. 设 φ 为紧黎曼曲面 X 上的 *[光滑]* $(0,1)$-形式. 则存在 $f \in C^\infty(X)$ 使得 $\bar{\partial} f = \varphi$ 当且仅当对 X 上的任意全纯 1-形式 ω 都成立

$$\int_X \omega \wedge \varphi = 0.$$

10 Riemann-Roch 定理及其应用

本节中的 X 都是指**紧**黎曼曲面.

我们先介绍几个定义.

设 $D = \sum_{i=1}^{r} n_i P_i$ 为 X 上的除子, 则称 $d := \sum_{i=1}^{r} n_i$ 为除子 D 的**次数** (degree), 记作 $\deg D$.

设 ω 为亚纯 1-形式, $\omega \not\equiv 0$. 对于 $a \in X$, 定义 ω 在 a 处的**留数** (residue) $\mathrm{Res}_a(\omega)$ 如下: 取局部坐标 (U, z) 使得 $z(a) = 0$, $\omega = f\,\mathrm{d}z$, 则 $\mathrm{Res}_a(\omega) = f$ 在 a 处的留数 $= f$ 的 Laurent 展开 $\sum_{\nu=-N}^{\infty} c_\nu z^\nu$ 的 $\frac{1}{z}$ 系数. 该定义与局部坐标选取无关. 事实上, 若 γ 为 $U \setminus \{a\}$ 上的分段可微曲线, 且关于 a 的环绕数 [= 指标] 为 $+1$, 则 $\mathrm{Res}_a(\omega) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \omega$.

引理 10.1. 设 ω 为 X 上的亚纯 1-形式, $\omega \neq 0$, 则 $\sum\limits_{a\in X} \mathrm{Res}_a(\omega) = 0$.

证明. 设 $a_1, ..., a_m$ 为 ω 的极点. 取 a_j 的坐标邻域 (U_j, z_j), 使得 $z_j(a_j) = 0$. 再令 $\Delta_j = \{x \in U_j \big| |z_j(x)| < \varepsilon\}$, [其中 $\varepsilon > 0$ 充分小]. 记 $U = X - \bigcup\limits_{j=1}^{m} \Delta_j$. 由 Stokes 定理可得

$$\int_U \mathrm{d}\omega = -\sum_{j=1}^{m} \int_{\partial \Delta_j} \omega = -2\pi i \sum_{j=1}^{m} \mathrm{Res}_{a_j}(\omega).$$

而黎曼曲面上的全纯 1-形式是闭的: 若 $\omega = f\,\mathrm{d}z$, 则 $\mathrm{d}\omega = \dfrac{\partial f}{\partial z}\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}z + \dfrac{\partial f}{\partial \bar{z}}\mathrm{d}\bar{z} \wedge \mathrm{d}z = 0$. □

推论 10.1. 设 f 为 X 上的亚纯函数, $f \neq 0$, 则除子 (f) 的次数为 0.

证明. 取 $\omega = \dfrac{1}{f}\mathrm{d}f$, 则 $\deg(f) = \sum\limits_{a\in X} \mathrm{Res}_a(\omega)$. □

推论 10.2. 若 D_1, D_2 为 X 上的除子, 且它们线性等价, 则 $\deg(D_1) = \deg(D_2)$.

证明. 事实上, 若 $D_1 - D_2 = (f)$, 则 $\deg(D_1) - \deg(D_2) = \deg(f)$. □

设 D 为 X 上的除子; 我们引入层

$$\mathcal{O}_D : U \mapsto \mathcal{O}_D(U) = \left\{ f \text{为 } U \text{ 上的亚纯函数} \middle| \text{在} U \text{上成立} (f) \geq -D \right\}.$$

则 $\mathcal{O}_D$ 同构于层 $U \mapsto H^0(U, L(D))$, 即 D 的线丛的全纯截面层. 茎条 $\mathcal{O}_{D,a}$ 中的元素 f 形如 [收敛的] Laurent 级数

$$f = \sum_{n \geq -D(a)} c_n z^n \quad ((U, z) \text{ 为 } a \text{ 的坐标邻域}, z(a) = 0).$$

设 D_1, D_2 为除子, 且 $D_1 \leq D_2$. 则对 X 的任意开集 U, 显然 $\mathcal{O}_{D_1}(U) \subseteq \mathcal{O}_{D_2}(U)$, 从而得到层的单态射 $\mathcal{O}_{D_1} \to \mathcal{O}_{D_2}$ [在线丛 $L(D_1)$, $L(D_2)$ 以及同构 $L(D_1) \otimes L(D_2 -$

$D_1) \cong L(D_2)$ 的意义下，该态射可以表示为 $f \in H^0(U, L(D_1))$, $f \mapsto f \otimes s_{D_2-D_1}$，其中 $s_{D_2-D_1}$ 为线丛 $L(D_2-D_1)$ 的标准亚纯截面，使得 $(s_{D_2-D_1}) = D_2 - D_1$.] 记 $\mathcal{S}_{D_1}^{D_2}$ 为预层 $U \mapsto \mathcal{O}_{D_2}(U)/\mathcal{O}_{D_1}(U)$ 的层化，则当 $D_1(a) = D_2(a)$ 时 [特别地，例如 $a \notin \mathrm{supp}(D_1) \cup \mathrm{supp}(D_2)$ 时] 有 $(\mathcal{S}_{D_1}^{D_2})_a = 0$. 若 $D_1(a) < D_2(a)$, 则 $(\mathcal{S}_{D_1}^{D_2})_a$ 为有限维线性空间，且同构于线性空间 $\left\{ \sum_{-D_2(a) \le n < -D_1(a)} c_n z^n \middle| c_n \in \mathbb{C},\ n\text{为未定元} \right\}$.

引理 10.2. 若 $D_1 \le D_2$ 为 X 上的除子，则成立

(1) $\dim H^0(X, \mathcal{S}_{D_1}^{D_2}) = \deg D_2 - \deg D_1$,

(2) $H^1(X, \mathcal{S}_{D_1}^{D_2}) = 0$.

证明. (1). 注意层 $\mathcal{S}_{D_1}^{D_2}$ 的支集为有限集，且包含于 $\mathrm{supp}(D_1) \cup \mathrm{supp}(D_2)$. 从而我们有

$$\begin{aligned} \dim H^0(X, \mathcal{S}_{D_1}^{D_2}) &= \dim \prod_{a \in X} (\mathcal{O}_{D_2,a}/\mathcal{O}_{D_1,a}) \\ &= \sum_{a \in X} (D_2(a) - D_1(a)) = \deg D_2 - \deg D_1. \end{aligned}$$

(2). 对 X 的任意开覆盖 $\mathcal{U}$, 总存在加细覆盖 $\mathcal{V} = \{V_\alpha\}$ 使得对任意 $\alpha \ne \beta$ 都有 $V_\alpha \cap V_\beta \cap (\mathrm{supp}(D_1) \cup \mathrm{supp}(D_2)) = \varnothing$. 则显然 $Z^1(\mathcal{V}, \mathcal{S}_{D_1}^{D_2}) = 0$, 从而 (2) 得证. □

一些记号. 设 D 为除子，则记 $h^i(D) = \dim_{\mathbb{C}} H^i(X, \mathcal{O}_D) = \dim_{\mathbb{C}} H^i(X, L(D))$, $(i = 0, 1)$, 以及 $\chi(D) = h^0(D) - h^1(D)$.

引理 10.3. 对 X 上的任意除子 D_1, D_2, 有

$$\chi(D_2) - \deg(D_2) = \chi(D_1) - \deg(D_1).$$

证明. 取除子 D_0 使得 $D_0 \le D_\nu$, $\nu = 1, 2$. 则有层短正合列

$$0 \to \mathcal{O}_{D_0} \to \mathcal{O}_{D_\nu} \to \mathcal{S}_{D_0}^{D_\nu} \to 0,$$

从而有层上同调正合列

$$0 \quad \to \quad H^0(X, \mathcal{O}_{D_0}) \to H^0(X, \mathcal{O}_{D_\nu}) \to H^0(X, \mathcal{S}_{D_0}^{D_\nu}) \to$$

$$\to \quad H^1(X, \mathcal{O}_{D_0}) \to H^1(X, \mathcal{O}_{D_\nu}) \to 0$$

[注意引理10.2, 有 $H^1(X, \mathcal{S}_{D_0}^{D_\nu}) = 0$] . 记 V 为 $H^0(X, \mathcal{O}_{D_\nu})$ 在 $H^0(X, \mathcal{S}_{D_0}^{D_\nu})$ 中的像, 则有如下两个正合列

$$0 \to H^0(X, \mathcal{O}_{D_0}) \to H^0(X, \mathcal{O}_{D_\nu}) \to V \to 0,$$

$$0 \to H^0(X, \mathcal{S}_{D_0}^{D_\nu})/V \to H^1(X, \mathcal{O}_{D_0}) \to H^1(X, \mathcal{O}_{D_\nu}) \to 0,$$

从而 $h^0(D_\nu) - h^0(D_0) = \dim V$, 以及 $\deg D_\nu - \deg D_0 - \dim V = h^1(D_0) - h^1(D_\nu)$. 这两式相加得到

$$\chi(D_\nu) - \chi(D_0) = \deg D_\nu - \deg D_0,$$

也就是说对 $\nu = 1, 2$ 都有 $\chi(D_\nu) - \deg D_\nu = \chi(D_0) - \deg D_0$. 从而引理得证. □

我们将整数 $\dim_{\mathbb{C}} H^1(X, \mathcal{O})$ 记为 g; g 称为黎曼曲面 X 的**亏格** (genus).

弱版本的 Riemann-Roch 定理.

定理. 设 D 为紧黎曼曲面 X 上的除子, 则有

$$\dim_{\mathbb{C}} H^0(X, \mathcal{O}_D) - \dim_{\mathbb{C}} H^1(X, \mathcal{O}_D) = \deg D + 1 - g,$$

其中 g 为 X 的亏格.

证明. 由引理10.3可知 $\chi(D) - \deg D = \chi(0) - \deg 0$ [这里的 “0” 是恒为 0 的除子] . 而 $\chi(\mathcal{O}) = \dim H^0(X, \mathcal{O}) - \dim H^1(X, \mathcal{O}) = 1 - g$ [这是因为, 由极大模原理可知 X 上的全纯函数必为常函数] . □

设 D 为 X 上的除子. 我们定义 X 上的层 Ω_D, 使得对 X 的开集 U, 成立 $\Omega_D(U) = \left\{\omega \middle| \omega \text{为 } U \text{ 上的亚纯 1-形式}, (\omega) \geq -D\right\}$. 则 Ω_D 同构于线丛 $K_X \otimes L(D)$ 的全纯截面层.

由 Serre 对偶定理, $\dim_{\mathbb{C}} H^1(X, L(D)) = \dim_{\mathbb{C}} H^0(X, K_X \otimes L(D)^*) = \dim_{\mathbb{C}} H^0(X, K_X \otimes L(-D)) = \dim_{\mathbb{C}} H^0(X, \Omega_{-D})$. 因此, 我们可将 Riemann-Roch 定理重写为如下:

定理. *(Riemann-Roch 定理)*. 设 D 为紧黎曼曲面 X 上的除子, 则有

$$\dim_{\mathbb{C}} H^0(X, \mathcal{O}_D) - \dim_{\mathbb{C}} H^0(X, \Omega_{-D}) = \deg D + 1 - g.$$

即: X 上的满足 $(f) \geq -D$ 的亚纯函数 f 构成空间的维数 $= \deg D + 1 - g +$ 满足 $(\omega) \geq D$ 的亚纯 1-形式 ω 构成空间的维数.

我们已知 [见定理7.3] 紧黎曼曲面 X 上的任何全纯线丛 L 都同构于 X 上某个除子 D 的线丛 $L(D)$; 并且任何两个这样的除子线性等价. 于是对于全纯线丛 L, 我们可定义 L 的**次数**$\deg(L)$ 为 $\deg(D)$, 其中除子 D 使得 $L \cong L(D)$. 此外也记 $h^i(L) = h^i(D)$.

由 Serre 对偶定理以及亏格 g 的定义, $h^0(K_X) = h^1(K_X^* \otimes K_X) = h^1(\mathcal{O}) = g$ [亏格] . 从而:

推论 10.3. 紧黎曼曲面 X 上恰好存在 g 个线性无关的全纯 1-形式.

由 Riemann-Roch 定理

$$h^0(K_X) - h^0(\mathcal{O}) = 1 - g + \deg K_X = g - 1;$$

因此有:

推论 10.4. 典范线丛 K_X 的次数为 $2g-2$. 等价地, 若 $\omega \neq 0$ 为亚纯 1-形式, 则 ω 的除子的次数为 $2g-2$.

注记 . 若 L 为 X 上的全纯线丛且 $h^0(L) > 0$, 则必有 $\deg(L) \geq 0$; 此外, 若 $h^0(L) > 0$ 且 $\deg(L) = 0$, 则 L 为平凡丛. 这是因为, 若存在整体截面 $s \in H^0(X, L)$, $s \not\equiv 0$, 则 $L \cong L(D)$, 其中 $D = \mathrm{Div}(s) \geq 0$, 因此 $\deg L = \deg D \geq 0$. 若 $\deg L = 0$, 则截面 s 的除子 $= 0$, 从而 s 无零点, L 平凡.

此注记结合 Serre 对偶定理可推出如下:

定理. 消灭定理 *(Vanishing theorem)*. 设 D 为 X 上的除子. 若 $\deg(D) > 2g-2$, 则 $H^1(X, \mathcal{O}_D) = 0$; 若 $\deg(D) > 0$, 则 $H^1(X, \Omega_D) = 0$.

证明. 注意 $h^1(D)=h^0(K-D)$, [K 为任意给定的典范除子]. 由于 $\deg(K-D)=2g-2-\deg(D)<0$, 从而 $h^0(K-D)=0$. 同样的方法, 再注意 $\deg(\Omega_D)=2g-2+\deg(D)$. □

我们记 $\mathcal{M}$ 为 X 上的亚纯函数层, 即 $U\mapsto\mathcal{M}(U):=\{U\text{上的全体亚纯函数}\}$; 再记 $\Omega_{\mathcal{M}}$ 为 X 上的亚纯 1-形式层.

推论 10.5. $H^1(X,\mathcal{M})=0$, $H^1(X,\Omega_{\mathcal{M}})=0$.

证明. 设 $\mathcal{U}=\{U_i\}_{i\in\mathcal{I}}$ 为 X 的一组有限开覆盖, 开集族 $\{V_i\}$ 满足 $\overline{V}_i\subseteq U_i$, $\bigcup V_i=X$. 对于 $\{f_{ij}\}\in Z^1(\mathcal{U},\mathcal{M})$, 我们可取除子 $D>0$ 使得 $\deg(D)>2g-2$, 并且在任意的 $V_i\cap V_j$ 成立 $(f_{ij})\geq -D$ [因为 $\overline{V}_i\cap\overline{V}_j$ 为 $U_i\cap U_j$ 的紧子集]. 由消灭定理, 存在 V_i 上的亚纯函数 f_i, 使得在 V_i 上成立 $(f_i)\geq -D$, 并且在 $V_i\cap V_j$ 成立 $f_i-f_j=f_{ij}$. 特别地, $\{f_{ij}\}$ 在 $Z^1(\{V_i\},\mathcal{M})$ 中的像属于 $B^1(\{V_i\},\mathcal{M})$.

$\Omega_{\mathcal{M}}$ 的证明完全类似. □

现在我们可以给出 Serre 对偶 $H^0(X,\Omega_{-D})\times H^1(X,\mathcal{O}_D)\to\mathbb{C}$ 的另一种解释.

设 $\{\omega_{ij}\}\in Z^1(\mathcal{U},\Omega)$, 则由上述推论可知存在 U_i 上的亚纯 1-形式 ω_i, 使得在 $U_i\cap U_j$ 当中成立 $\omega_i-\omega_j=\omega_{ij}$. 将此上链 $\{\omega_i\}\in C^0(\mathcal{U},\Omega_{\mathcal{M}})$ 记作 $\tilde{\omega}$. 现在考虑点 $a\in X$, 取指标 i 使得 $a\in U_i$, 定义 $\tilde{\omega}$ 在 a 处的留数 $\mathrm{Res}_a(\tilde{\omega}):=\mathrm{Res}_a(\omega)$ [这与 i 的选取无关, 因为 $\omega_i-\omega_j$ 在 $U_i\cap U_j$ 全纯].

由 Dolbeault 同构, 我们也可以取 U_i 上的 C^∞-$(1,0)$-形式 α_i, 使得

$$\omega_{ij}=\alpha_i-\alpha_j,$$

再取 X 上的 2-形式 φ, 使得 $\varphi|_{U_i}=\bar{\partial}\alpha_i=\mathrm{d}\alpha_i$, 则 φ 为上同调类 $D(\{\omega_{ij}\})$ 在 $\mathcal{A}^{0,1}_{K_X}(X)$ 当中的代表元 [其中 $D:H^1(X,K_X)\to\mathcal{A}^{0,1}_{K_X}(X)/\bar{\partial}C^\infty_{K_X}(X)$ 为 Dolbeault 同构]. 则有:

引理 10.4.
$$\int_X D(\{\omega_{ij}\})=2\pi i\sum_{a\in X}\mathrm{Res}_a(\tilde{\omega}).$$

证明. 在 U_i 当中令 $\beta:=\omega_i-\alpha_i$; 则 β 为 $X-\{a_1,...,a_r\}$ 上的 C^∞-形式, 其中 $S:=\{a_1,...,a_r\}$ 为 $\tilde{\omega}$ 的极点构成的集合 [$S\cap U_i$ 为 ω_i 的全体极点]. 由于在 U_i-S 上成立

$\mathrm{d}\omega_i = 0$, 从而在 $X - S$ 成立

$$\varphi := D(\{\omega_{ij}\}) = -\,\mathrm{d}\beta.$$

记 $\Delta_{k,\varepsilon}$ 为以点 a_k 为中心, 半径 ε 的小圆盘 $(k = 1, ..., r)$, 则有

$$\int_X \varphi = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{X-\bigcup_k \Delta_{k,\varepsilon}} -\,\mathrm{d}\beta = \lim_{\varepsilon\to 0}\sum_k \int_{\partial\Delta_{k,\varepsilon}} \beta.$$

现在, 若 $\varepsilon > 0$ 充分小, 指标 i 使得 $a_k \in U_i$, 则 $\displaystyle\int_{\partial\Delta_{k,\varepsilon}} \omega_i = 2\pi i\,\mathrm{Res}_{a_k}(\omega_i) = 2\pi i\,\mathrm{Res}_a(\tilde{\omega})$, 并且 $\displaystyle\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\partial\Delta_{k,\varepsilon}} \alpha_i = 0$ [因为 α_i 光滑] . 因此 $\displaystyle\int_X \varphi = 2\pi i\sum_k \mathrm{Res}_{a_k}(\tilde{\omega})$. □

因此, $\displaystyle\sum_k \mathrm{Res}_{a_k}(\tilde{\omega})$ 只与 $\{\omega_{ij}\}$ 在 $H^1(X, \Omega)$ 的上同调类 ξ 有关 [而与它的 $\Omega_{\mathcal{M}}$ 的上边缘表示无关] , 我们将其记作 $\mathrm{Res}(\xi)$.

因为 $H^0(X, \mathcal{O}) = H^0(X, K_X^* \otimes K_X) = \mathbb{C}$, 从而线丛 $E = K_X$ 的 Serre 对偶双线性型为 $(\lambda, \{\omega_{ij}\}) \mapsto \displaystyle\int \lambda \cdot D(\{\omega_{ij}\})$. 因此我们有:

性质 10.1. 映射 $\mathrm{Res} : H^1(X, \Omega) \to \mathbb{C}$ 为线性同构.

设 D 为紧黎曼曲面 X 上的除子, 则有如下自然的双线性型 $(,)_D : H^0(X, \Omega_{-D}) \times H^1(X, \mathcal{O}_D) \to H^1(X, \Omega)$, 使得 $(\omega, \{f_{ij}\}) \mapsto \{f_{ij}\omega\}$. [这里的 ω 为亚纯 1-形式, 且 $(\omega) \geq D$; 而 f_{ij} 为 $U_i \cap U_j$ 上的亚纯函数, 且 $(f_{ij}) \geq -D$. 于是 $f_{ij}\omega$ 为 $U_i \cap U_j$ 上的全纯 1-形式] .

定理. *(留数版本的 Serre 对偶定理). Serre 对偶定理中的双线性型* $\langle,\rangle_{(D)}$ *等于* $2\pi i\,\mathrm{Res}(,)_D$. *特别地, 双线性型*

$$\begin{array}{rcl} H^0(X, \Omega_{-D}) \times H^1(X, \mathcal{O}_D) & \to & \mathbb{C} \\ (\omega, \xi) & \mapsto & \mathrm{Res}((\omega, \xi)_D) \end{array}$$

非退化.

作为推论, 我们有如下紧黎曼曲面版本的 Mittag-Leffler 定理.

定理. 设 $\{\mathcal{U}_i\}_{i\in\mathcal{I}}$ 为紧黎曼曲面 X 的一族开覆盖, f_i 为 U_i 上的亚纯函数, 并且 $f_i - f_j$ 在 $U_i \cap U_j$ 全纯. 那么存在 X 上的亚纯函数 f 使得对任意 i 都成立 $f - f_i$ 在 U_i 全纯, 当且仅当对 X 上的任何全纯 1-形式 ω,

$$\mathrm{Res}(\tilde{\omega}_0) = 0,$$

其中 0-上链 $\tilde{\omega}_0 \in C^0(\mathcal{U}, \Omega_{\mathcal{M}})$ 为 $(f_i\omega)$.

[若对 $a \in X$, 取 $i = i(a)$ 使得 $a \in U_{i(a)}$, 则定理中的后者条件为 $\sum_{a\in X} \mathrm{Res}_a(f_{i(a)}\omega) = 0$] .

证明. f 的存在性等价于说 $\xi := \{f_i - f_j | U_i \cap U_j\}$ 在 $H^1(X, \mathcal{O})$ 中的上同调类为 0. 由之前定理, 这等价于此留数条件. □

关于亚纯形式 [而不是亚纯函数] 的版本如下:

紧黎曼曲面上的亚纯形式的 Mittag-Leffler 定理 . 设 $\{\mathcal{U}_i\}_{i\in\mathcal{I}}$ 为紧黎曼曲面 X 的一族开覆盖, ω_i 为 U_i 上的亚纯 1-形式, 并且 $\omega_i - \omega_j$ 在 $U_i \cap U_j$ 全纯. 记 $\tilde{\omega} = \{\omega_i\}_{i\in\mathcal{I}}$, 对任意 $a \in X$, 记 $\mathrm{Res}_a(\tilde{\omega}) = \mathrm{Res}_a(\omega_i)$, 其中指标 i 使得 $a \in U_i$ [这与 i 的选取无关, 因为 $\omega_i - \omega_j$ 在 $U_i \cap U_j$ 亚纯.]

定理. 条件如上. 则存在 X 上的亚纯 1-形式 ω 使得对任意 i, $\omega - \omega_i$ 在 U_i 全纯, 当且仅当

$$\sum_{a\in X} \mathrm{Res}_a(\tilde{\omega}) = 0.$$

证明. ω 的存在性等价于说 $\{\omega_{ij}\}$ 在 $H^1(X, \Omega)$ 的上同调类为 0. 而由性质10.1, 映射 $\mathrm{Res} : H^1(X, \Omega) \to \mathbb{C}$ 为单射, 因此这等价于说 $\sum_{a\in X} \mathrm{Res}_a(\tilde{\omega}) = 0$. □

由对偶定理 [不用对偶双线性型的具体表达] 也可导出如下结果. 设 $D \geq 0, D \neq 0$ 为 X 上的非零的有效除子, s_D 为线丛 $L(D)$ 的标准截面, 使得 $(S_D) = D$. 考虑层短正合列 $0 \to \Omega \xrightarrow{s_D} \Omega_D \to \mathbb{C}_D \to 0$. 层 $\mathbb{C}_D$ 在 $\mathrm{supp}(D)$ 以外为零; 若 $a \in \mathrm{supp}(D)$, 则茎条

$\mathbb{C}_{D,a}$ 当中的元素形如 $\sum_{\nu=1}^{D(a)} \frac{c_\nu}{z^\nu}\,\mathrm{d}z$ [其中 z 为 a 的局部坐标, 使得 $z(a)=0$] . 则有上同调正合列

$$H^0(X,\Omega_D) \to H^0(X,\mathbb{C}_D) \to H^1(X,\Omega) \to H^1(X,\Omega_D);$$

由于 $\dim H^1(X,\Omega)=1$, $H^1(X,\Omega_D)\cong H^0(X,\mathcal{O}_{-D})^*=0$, 因此 $H^0(X,\Omega_D)$ 在 $H^0(X,\mathbb{C}_D)$ $\cong \mathbb{C}^{\deg(D)}$ 的像的余维数是 1. 但是, 对于整体的 1-形式 ω, 注意 $\sum_{a\in X}\mathrm{Res}_a(\omega)=0$, 因此上述像空间包含于集合

$$\left\{\{\omega_a\}_{a\in\mathrm{supp}(D)}\,\middle|\,\mathrm{ord}_a(\omega_a)\geq -D(a),\ \sum_{a\in\mathrm{supp}(D)}\mathrm{Res}_a(\omega_a)=0\right\}.$$

又因为上述两个空间的余维数都是 1, 因此它们相等.

由消灭定理 [若 $\deg D>2g-2$ 则 $H^1(X,\mathcal{O}_D)=0=H^0(X,\Omega_{-D})$] 与 Riemann-Roch 定理可知, 当 $\deg D$ 充分大时, $h^0(D)=\deg D+1-g$ 被 $\deg D$ 所确定.

整数 $i(D):=h^1(D)=h^0(K-D)$ 称为除子 D 的**特殊性指标** (index of speciality).

我们给出这些结果的一些更深的应用.

性质 10.2. *若 D 为 X 上的除子, 且 $\deg D>2g-1$, 则对任意 $P\in X$, 存在 $s\in H^0(X,L(D))$ 使得 $s(P)\neq 0$. 等价地, 存在除子 $D'\geq 0$ 使得 D' 与 D 线性等价, 并且 P 不属于 D' 的支集.*

证明. 设 s_P 为 $L(P)$ 的标准截面, 使得 $(s_P)=P$. 则映射

$$\begin{array}{ccc} H^0(X,L(D-P)) & \to & H^0(X,L(D)) \\ f & \mapsto & f\otimes s_P \end{array}$$

不是满射 [这是因为, 由上述注记可知 $h^0(D-P)=\deg(D-P)+1-g<\deg D+1-g=h^0(D)$, 注意 $\deg(D-P)>2g-2$] . 而该映射的像集恰好为 $L(D)$ 的在 P 处为 0 的截面之全体. □

性质 10.3. *设 L 为紧黎曼曲面 X 上的全纯线丛, 并且 $\deg L>2g$. 则有:*

(1) *对任意 $P,Q\in X$, $P\neq Q$, 则存在 $s\in H^0(X,L)$ 使得 $s(P)=0$, $s(Q)\neq 0$.*

(2) *对任意 $P\in X$, 存在 $s\in H^0(X,L)$ 使得 $\mathrm{ord}_P(s)=1$.*

证明. 考虑线丛 $L \otimes L(-P)$; 由于任何线丛都同构于某个 $L(D)$, 性质10.2表明存在 $s' \in H^0(X, L \otimes L(-P))$ 使得 $s'(Q) \neq 0$. 令 $s := s' \otimes s_P$, 其中 s_P 为 $L(P)$ 的标准截面. 那么, 若 $P \neq Q$ 则有 $s(Q) \neq 0, s(P) = 0$.

而当 $P = Q$ 时, $\operatorname{ord}_P(s) = 1$. □

嵌入定理 . 设 L 为 X 上的全纯线丛, $\deg L > 2g$, 记 $N := h^0(L) - 1 = \deg D - g$. 下面我们来定义全纯映射 $\varphi_L : X \to \mathbb{P}^N$.

取 $H^0(X, L)$ 的一组基 $s_0, ..., s_N$; 对每个 $a \in X$, 取 a 的邻域 U 以及 $\sigma \in H^0(U, L)$, 使得对任意 $x \in U$ 都有 $\sigma(x) \neq 0$. 则令 $\mathbb{P}^N$ 当中的点 $\varphi_L(x)$ 的齐次坐标为 $\left[\dfrac{s_0(x)}{\sigma(x)} : \cdots : \dfrac{s_N(x)}{\sigma(x)}\right]$. 注意 $\dfrac{s_j}{\sigma}$ 为 U 上的全纯函数; 上述定义的点 $\varphi_L(x)$ 与 σ 的选取无关, 这是因为若另取截面 σ', 则 $\sigma' = h\sigma$, 其中 h 为 U 上的处处非零的全纯函数, 于是 $\dfrac{s_j}{\sigma} = h\dfrac{s_j}{\sigma'}$. 目前上述 φ_L 仅仅定义在 X 上除了 $s_0, ..., s_N$ 的公共零点之外. 然而, 由性质10.2可知这些截面没有公共零点.

注记. 对 X 的任意全纯线丛 L, 只要 $H^0(X, L) \neq 0$, 就可以在 X 上处处定义$\varphi_L : X \to \mathbb{P}^N$ [其中 $N = \dim H^0(X, L) - 1$] . 基 $s_0, ..., s_N$ 含义同上, $A := \left\{x \in X \middle| s_j(x) = 0, \forall j\right\}$, 则 φ_L 首先在 $X - A$ 有定义. 而对于 $a \in A$, 取坐标邻域 (U, z) 使得 $z(a) = 0$, 再记 $\varphi_L|_{U - \{a\}}$ 在 $\mathbb{P}^N$ 中的齐次坐标为 $[f_0 : \cdots : f_n]$, 其中 $f_0, ..., f_N$ 为 U 上的全纯函数, 并且在点 a 之外非零. 则可记 $f_j = z^k g_j$, 其中 $k = \min\limits_{0 \le j \le N} \operatorname{ord}_a(f_j)$. 于是 φ_L 在 U 上的限制可由 $\mathbb{P}^N$ 中的齐次坐标为 $[g_0 : \cdots : g_N]$ 的点所确定.

上述构造仅在 $\dim X = 1$ 时可行. 而高维情况, 线丛 L 的**基点** (base point), 也就是所有 $s \in H^0(X, L)$ 的公共零点, 一般来说无法忽视; φ_L 无法整体定义, 正与基点有关.

我们有如下:

定理. *(嵌入定理). 若 $\deg L > 2g$, 则 φ_L 为 X 到 $\mathbb{P}^N$ 的嵌入.*

证明. (1). 断言 φ_L 为单射. 设 $P, Q \in X$, $P \neq Q$. 取 $s \in H^0(X, L)$ 使得 $s(P) = 0$, $s(Q) \neq 0$. 记 $s = \sum\limits_{\nu=0}^{N} c_\nu s_\nu$, 则 $\varphi_L(P)$ 位于射影超平面 $\sum\limits_{\nu=0}^{N} c_\nu z_\nu = 0$, 而 $\varphi_L(Q)$ 不在此超

平面.

(2). φ_L 的切映射是单射. 对于 $P \in X$, 取 $s \in H^0(X, L)$ 使得 $\mathrm{ord}_P(s) = 1$, 再取 $0 \le k \le N$ 使得 $s_k(P) \neq 0$. 记 $s = \sum_{\nu=0}^{N} c_\nu s_\nu$, 其中 $c_0, ..., c_N \in \mathbb{C}$. 则

$$\frac{s}{s_k} = c_k + \sum_{\nu \neq k} c_\nu \frac{s_\nu}{s_k}.$$

函数 $f_\nu := \frac{s_\nu}{s_k}$, $\nu \neq k$, 给出了 $\varphi_L(x)$ [x 在 P 附近] 的非齐次坐标: $\varphi_L(x) = [f_0(x), ..., 1, f_{k+1}(x), ..., f_N(x)]$. 由于 $\mathrm{ord}_P \frac{s}{s_k} = 1$, 从而至少存在一个 $\nu \neq k$ 使得 $\mathrm{d}f_\nu(P) \neq 0$. □

Chow(周炜良) 的一个众所周知定理表明, φ_L 将 X 映为 $\mathbb{P}^N$ 的齐次坐标下的有限多个齐次多项式的公共零点集. 因此 X 解析同构于 $\mathbb{P}^N$ 中的某个光滑代数曲线.

此外, 对于 $\mathbb{P}^N$ 中的**代数簇** [有限多个齐次多项式的公共零点集, 且不可约] , 如果它是 1 维, 连通的, 且为 $\mathbb{P}^N$ 的子流形, 则它显然是紧黎曼曲面. 因此, 我们不再区分**紧黎曼曲面** 与 [连通的] **光滑射影曲线**.

X 上的全纯线丛 L 称为**丰沛** (ample) 的, 如果存在正整数 $m > 0$, 使得 L 的 m 次张量从 $L^{\otimes m}$ 可将 X 嵌入某个射影空间 [即 $\varphi_{L^{\otimes m}} : X \to \mathbb{P}^N$ 为嵌入, $N+1 = h^0(L^{\otimes m})$] . 称 L 为**极丰沛** (very ample) 的, 如果 φ_L 本身就是嵌入.

我们已经证明, 若 $\deg(L) > 2g$, 则 L 是极丰沛的. 于是, 若 $\deg(L) > 0$ 则 L 是丰沛的, 这是因为 $\deg(L^{\otimes m}) = m\deg(L)$. 反之, 若 L 是丰沛的, 则存在有效除子 D 以及正整数 $m > 0$ 使得 $L^{\otimes m} \cong L(D)$, 这是因为 $L^{\otimes m}$ 至少有一个非零的全纯截面. 此外, $D \neq 0$ [否则 $L^{\otimes m}$ 平凡, 不可能将 L 嵌入] . 因此 $m\deg(L) = \deg(L^{\otimes m}) = \deg D > 0$.

因此, 我们得到:

性质 10.4. X 上的全纯线丛 L 是丰沛的当且仅当 $\deg L > 0$.

11 紧黎曼曲面的更多性质

设 X,Y 为黎曼曲面, $f:X\to Y$ 为非常值全纯映射. 若 $a\in X$, $b=f(a)$, w 为 b 的局部坐标, $w(b)=0$, 则记 $\mathrm{ord}_a(f):=\mathrm{ord}_b(w\circ f)$. 整数 $\mathrm{b}(a,f):=\mathrm{ord}_a(f)-1$ 称为 f 在 a 处的**分歧指数** (ramification index). 那么, f 为 a 处的局部微分同胚当且仅当 $\mathrm{b}(a,f)=0$.

现在设 X,Y 为**紧**黎曼曲面, $f:X\to Y$ 为非常值全纯映射. 分别记 g_X,g_Y 为 X,Y 的亏格. 记 $b:=\sum\limits_{a\in X}\mathrm{b}(a,f)$, 称此 b 为映射 f 的**全分歧指数** (total ramification index). 记 C 为 f 的**临界点** (critical point) [5]之全体, 即 $C=\left\{a\in X\middle|\mathrm{b}(a,f)>0\right\}$, 再记 $B:=f(C)$. B 中的点称为 f 的**临界值** (critical value) [集合 B 有时也称为 f 的**分支割迹** (branching locus)] .

设 $\omega\not\equiv 0$ 为 Y 上的亚纯 1-形式, $\omega_0:=f^*(\omega)$, 则 $\deg(\omega_0)=2g_X-2$.

若 $a\in X$, $b=f(a)$, 分别取 a,b 的局部坐标 z,w [使得 $z(a)=0=w(b)$] , 并且使得 f 在 a 附近具有局部表达式 $z\mapsto z^n=w$, 则 $n=\mathrm{ord}_a(f)$. 若 ω 在 b 附近的局部表达式为 $\omega=h(w)\,\mathrm{d}w$, 则在 a 附近有 $\omega_0=f^*(\omega)=h(z^n)nz^{n-1}\,\mathrm{d}z$, 从而

$$\mathrm{ord}_a(\omega_0)=n\,\mathrm{ord}_b(\omega)+n-1,\quad \text{其中}\, n:=\mathrm{ord}_a(f).$$

记 d 为映射 f [作为分歧覆盖] 的叶数 [$=f$ 的次数 (degree)] , 将上式先对所有 $a\in f^{-1}(b)$ 求和, 再对所有 $b\in Y$ 求和, 可得到

$$\begin{aligned}\deg(\omega_0) &= \sum_{b\in Y}\left(\sum_{a\in f^{-1}(b)}\mathrm{ord}_a(f)\right)\mathrm{ord}_b(\omega)+\sum_{b\in Y,\,a\in f^{-1}(b)}(\mathrm{ord}_a(f)-1)\\ &= d\deg(\omega)+b.\end{aligned}$$

再注意到 $\deg(\omega)=2g_Y-2$, $\deg(\omega_0)=2g_X-2$, 从而得到:

定理. *(Riemann-Hurwitz 公式). 记号同上, 则有*

$$2g_X-2=d(2g_Y-2)+b;$$

特别地, 若存在非常值全纯映射 $X\to Y$, 则 $g_X\geq g_Y$; 此外若 $g_X=g_Y\geq 1$, 则必有 $b=0,d=1$, 除非 $g_X=g_Y=1$.

[5] 也称为**分歧点** (branch point).

记号同之前, 再记 $a_1, ..., a_r$ 为 C 中的点, $b_j := f(a_j)$. 我们分别记 X, Y 的**拓扑欧拉示性数** (topological Euler characteristic) 为 $\chi(X), \chi(Y)$, 也就是说, 比如

$$\begin{aligned}\chi(X) &= \dim_{\mathbb{C}} H^0(X, \mathbb{C}) - \dim_{\mathbb{C}} H^1(X, \mathbb{C}) + \dim_{\mathbb{C}} H^2(X, \mathbb{C}) = 2 - b_1(X), \\ b_1(X) &= \dim_{\mathbb{C}} H^1(X, \mathbb{C}) = X \text{ 的第一个 Betti 数}.\end{aligned}$$

将 Y 作**三角剖分** (triangulation), 使得 $B = f(C)$ 中的点都是三角形的顶点, 并且假定每个三角形都充分小. 此三角剖分可通过 f 提升为 X 的一个三角剖分. 若记 $e_0(X)$ 为 X 的三角剖分的顶点数, $e_1(X)$ 为边 [1 维单形] 数, $e_2(X)$ 为面 [2 维单形] 数. 也对 Y 的三角剖分引入类似记号. 则 $e_2(X) = de_2(Y), e_1(X) = de_1(Y)$, $e_0(X) = de_0(Y) - b$ [这是因为, 若 $a_i \in C$, 则每条以 $b_i = f(a_i)$ 为端点的边都被 f 提升为 $\mathrm{b}(a_i, f) + 1$ 条以 a_i 为端点的边. 因此 $|f^{-1}(B)| = d|B| - b$, (其中 $|\cdot|$ 为集合的基数)] .

综上, 我们得到

$$2 - b_1(X) = d(2 - b_1(Y)) - b.$$

若取 $Y = \mathbb{P}^1$, 则必存在非常值全纯映射 $f : X \to \mathbb{P}^1$ [其实就是 X 上的非常值亚纯函数] . 此外, 我们知道 $g_{\mathbb{P}^1} = 0$, $b_1(\mathbb{P}^1) = 0$. 记 f 的叶数为 d, 则

$$2g_X - 2 = -2d + b$$

以及

$$2 - b_1(X) = 2d - b = -(2g_X - 2).$$

因此有

$$2g_X = b_1(X);$$

特别地, 亏格 $g_X = \dim H^1(X, \mathcal{O}) = \dim H^0(X, \Omega)$ 为 X 的**拓扑不变量**.

接下来我们探讨 Weierstrass 点. 设 X 为紧黎曼曲面, 亏格为 $g = \dim H^1(X, \Omega)$. 我们已经知道 [见第7节定理7.3后的注记] , 对任意 $P \in X$, 必存在 X 上的亚纯函数, 该函数在 $X - P$ 全纯 [但在 P 不全纯] , 并且在 P 处的极点阶数 $\leq g + 1$.

自然要问的是, 此结果能不能继续改进, 极点阶数的上界 $g + 1$ 能不能减少; 我们将知道, 仅仅对 [至多有限个] 特殊的点 P, 上述想法可行.

对于 $P \in X$, 以及 P 点的局部坐标 (U, z), $z(P) = 0$. 我们称点 P 为 **Weierstrass 点**, 如果存在 X 上的亚纯函数 f 以及不全为零的常数 $c_0, ..., c_{g-1}$ 使得

(1) $f|_{X-\{P\}}$ 为全纯函数,

(2) $f-\sum\limits_{\nu=0}^{g-1}\frac{c_\nu}{z^{\nu+1}}$ 在 P 全纯.

根据第10节版本的 Mittag-Leffler 定理, 此条件成立当且仅当存在不全为零的常数 $c_0,...,c_{g-1}$ 使得

$$\mathrm{Res}_P\left(\sum_{\nu=0}^{g-1}\frac{c_\nu}{z^{\nu+1}}\omega\right)=0\quad\forall\omega\in H^0(X,\Omega).$$

设 $\omega_1,...,\omega_g$ 为 $H^0(X,\Omega)$ 的一组基, 它们局部坐标 U 的表示为

$$\omega_k=f_k\,\mathrm{d}z,\quad f_k\in\mathcal{O}(U).$$

记 $f_k=\sum\limits_{\nu=0}^{\infty}f_{k,\nu}z^\nu$, 则 $f_{k,\nu}=\frac{1}{\nu!}(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z})^\nu f_k|_{z=0}=\frac{1}{\nu!}f_k^{(\nu)}(0)$, 以及

$$\begin{aligned}\mathrm{Res}_P\left(\sum_{\nu=0}^{g-1}\frac{c_\nu}{z^{\nu+1}}\omega_k\right) &= c_0f_{k,0}+c_1f_{k,1}+\cdots+c_{g-1}f_{k,g-1}\\ &= \sum_{\nu=0}^{g-1}\frac{c_\nu}{\nu!}f_k^{(\nu)}(0).\end{aligned}$$

因此我们有: P 为 Weierstrass 点当且仅当线性方程组

$$\sum_{\nu=0}^{g-1}c_\nu f_k^{(\nu)}(0)=0,\quad k=1,...,g$$

具有非零解 $(c_0,...,c_{g-1})\neq(0,...,0)$; 而这当且仅当 $\det\left(f_k^{(\nu)}(0)\right)_{\substack{1\le k\le g\\0\le\nu<g}}=0$.

我们补充一些 Wronski 行列式的知识. 设 U 为 $\mathbb{C}$ 的连通开集, $f_1,...,f_n\in\mathcal{O}(U)$. 则记 $W(f_1,...,f_n)(z)=\det\left(f_k^{(\nu)}(z)\right)_{\substack{0\le\nu<n\\1\le k\le n}}$, $z\in U$, 称为函数 $f_1,...,f_n$ 的 **Wronski 行列式** (Wronskian). 则有:

引理. $f_1,...,f_n$ 在 $\mathbb{C}$ 线性相关当且仅当 $W(f_1,...,f_n)\equiv0$.

证明. 若 $c_1f_1+\cdots+c_nf_n\equiv0$, $c_i\in\mathbb{C}$, 并且某个 $c_k\neq0$. 则第 k 列 $f_k^{(\nu)}(0\le\nu<n)$ 为其它 $\ell\neq k$ 列 $f_\ell^{(\nu)}(0\le\nu<n)$ 的线性组合 [具体地, $f_k^{(\nu)}=-\sum\limits_{\ell\neq k}\frac{c_\ell}{c_k}f_\ell^{(\nu)}$] , 从而该行列式为 0.

为证明相反方向, 我们先考察 Wronski 行列式的如下性质. 对于 $\varphi \in \mathcal{O}(U)$, $\varphi \not\equiv 0$, 记 $g_k = \varphi f_k$, $k = 1, ..., n$. 那么 $g_k^{(\nu)} = \varphi f_k^{(\nu)} + \sum_{\mu<\nu} \lambda_\mu^\nu f_k^{(\mu)}$ [其中 $\lambda_\mu^\nu = \binom{\nu}{\mu} \varphi^{(\nu-\mu)}$] , 从而 $\det\left(g_k^{(\nu)}\right) = \det\left(\varphi f_k^{(\nu)}\right) = \varphi^n \det\left(f_k^{(\nu)}\right)$. [矩阵 $\left(g_k^{(\nu)}\right)$ 可以由 $\left(\varphi f_k^{(\nu)}\right)$ 作初等行变换得到. 具体地, 对于每个 $\mu < \nu$ 将第 μ 行倍加的第 ν 行] . 因此我们有 $W(g_1, ..., g_n) = \varphi^n W(f_1, ..., f_n)$.

现在我们通过对 n 归纳来证明, 若 $W(f_1, ..., f_n) \equiv 0$, 则 $f_1, ..., f_n$ 线性相关. $n = 1$ 时结论平凡 [注意 $W(f_1) = f_1$] .

若 $f_1 \not\equiv 0$, $V := U - \{f_1\text{的零点}\}$, 则只需证明 $1, \frac{f_2}{f_1}, ..., \frac{f_n}{f_1}$ [在 V 中] 线性相关即可. 现在, 我们有 $W(1, \frac{f_2}{f_1}, ..., \frac{f_n}{f_1}) = f_1^{-n} W(f_1, ..., f_n) = 0$. 记 $g_k = \frac{f_k}{f_1}$, $(2 \le k \le n)$, 则 $W(1, g_2, ..., g_n) = W(\frac{\mathrm{d}g_2}{\mathrm{d}z}, ..., \frac{\mathrm{d}g_n}{\mathrm{d}z}) \equiv 0$. 因此由归纳假设, 存在不全为零的常数 $c_2, ..., c_n$ 使得在 V 当中恒成立 $\sum_{k=2}^{n} c_k \frac{\mathrm{d}g_k}{\mathrm{d}z} \equiv 0$, 也就是说 $\sum_{k=2}^{n} c_k g_k \equiv$ 常数, 从而 $1, g_2, ..., g_n$ 线性相关. □

回到 Weierstrass 点. 记 $\omega_1, ..., \omega_g$ 为 $H^0(X, \Omega)$ 的一组基, (U, z) 为一个局部坐标, 在此局部坐标下记 $\omega_k = f_k \,\mathrm{d}z$, 则令 $W(\omega_1, ..., \omega_g) := W(f_1, ..., f_g)$. 那么, 因为 ω_k 线性无关, 于是 $W(\omega_1, ..., \omega_g)$ 在 U 上不恒为零, 因此我们可知: X 上的 Weierstrass 点是孤立的, 也就是说, X 上仅存在至多有限个 Weierstrass 点.

进一步的注记. 若 $w = w(z)$ 为 U 上的另一个坐标, $\omega_k = f_k \,\mathrm{d}z = g_k \,\mathrm{d}w$, 则 $f_k = g_k(w(z)) \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}$, 从而可得

$$
\begin{aligned}
f_k' &= \left(\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}\right)^2 g_k'(w(z)) + \frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}z^2} g_k(w(z)) \\
&\vdots \\
f_k^{(\nu)} &= \left(\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}\right)^{\nu+1} g_k^{(\nu)}(w(z)) + \sum_{\mu<\nu} \lambda_\mu^\nu g_k^{(\mu)}(w(z))
\end{aligned}
$$

其中 λ_μ^ν 与 k 无关. 因此 $W(f_1,...,f_n)=\left(\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}\right)^N W(g_1,...,g_n)$, 其中 $N=1+2+\cdots+g=\frac{1}{2}g(g+1)$. [6]

设 (U_i,z_i) 为 X 的一族坐标开覆盖, 则转移函数 $g_{ij}=\frac{\mathrm{d}z_j}{\mathrm{d}z_i}$ 定义了 X 的典范线丛 K_X; 再注意 $i\mapsto W_i(f_{1,i},...,f_{g,i})$ [其中在 U_i 上有 $\omega_k=f_{k,i}\,\mathrm{d}z_i$] 满足转换关系 $W_i=g_{ij}^N W_j$. 因此, W_i 确定了线丛 $K_X^{\otimes N}$ 上的一个全纯截面 W, 其中 $N=\frac{1}{2}g(g+1)$. 综上, 我们得到:

定理. *存在线丛 $K_X^{\otimes N}$, $N=\frac{1}{2}g(g+1)$ 的非零全纯截面 W, 使得 W 的零点集恰为 X 的 Weierstrass 点集.*

注意 $\deg(\mathrm{div}(W))=N\deg K_X=(g-1)g(g+1)$, 因此 X 至多有 $(g-1)g(g+1)$ 个 Weierstrass 点; 若 $g>1$, 则 W 必存在零点, 也就是说此时 X 必存在 Weierstrass 点. 此外, 我们还有如下结论:

定理. *(Weierstrass 空缺定理). 设 X 为亏格 $g>0$ 的紧黎曼曲面, $P\in X$. 则存在恰好 g 个整数 $1=n_1<n_2<\cdots<n_g\leq 2g-1$, 使得不存在 X 上的仅在 P 处为极点且极点阶数为 n_k, $k=1,...,g$ 的亚纯函数.*

于是, X 上除去有限多个例外的 P, 存在 X 上的仅在 P 点亚纯并且极点阶数为 m 的亚纯函数当且仅当 $m\geq g+1$.

证明. 记除子 $D_k=k\cdot P$, $k=0,1,2,...$, 则存在 X 上的仅在 P 处亚纯, 且极点阶数为 k 的亚纯函数当且仅当存在 $f\in\mathbb{C}(X)$ 使得 $(f)\geq -D_k$, $(f)\not\geq -D_{k-1}$. 设 s_P 为 $L(P)$ 的标准截面, $(s_P)=P$, 则上述条件等价于说

$$-\otimes s_P:\ H^0(X,L(D_{k-1}))\to H^0(X,L(D_k))$$

不是满同态.

首先, 由层正合列 $0\to\mathcal{O}_{D_{k-1}}\overset{s_P}{\to}\mathcal{O}_{D_k}\to\mathcal{O}_{D_k}/\mathcal{O}_{D_{k-1}}\to 0$ 可得长正合列

$$0\to H^0(X,L(D_{k-1}))\to H^0(X,L(D_k))\to H^0(X,\mathcal{O}_{D_k}/\mathcal{O}_{D_{k-1}}).$$

[6] 译者注: 这里出现了危险的记号混用——作为函数的 “g” 以及黎曼曲面 X 的亏格 g.

再注意 $\dim H^0(X, \mathcal{O}_{D_k}/\mathcal{O}_{D_{k-1}}) = 1$ [此商层在 P 处的茎条为 $\mathbb{C}$, 在其它点处为 0] . 因此, 存在亚纯函数 f 使得 $(f) \geq -D_k$ 但 $(f) \ngeq -D_{k-1}$ 当且仅当 $h^0(D_k) > h^0(D_{k-1})$; 并且此时, $h^0(D_k) = 1 + h^0(D_{k-1})$.

现在, 由 Riemann-Roch 定理,

$$h^0(D_k) - h^0(D_{k-1}) = 1 - h^1(D_{k-1}) + h^1(D_k).$$

因此对任何 $m > 0$,

$$h^0(D_m) - h^0(D_0) = \sum_{k=1}^{m}(h^0(D_k) - h^0(D_{k-1})) = m - h^1(D_0) + h^1(D_m),$$

而当 $m \geq 2g-1$ 时 $h^1(D_m) = 0$. 此外 $h^0(D_0) = 1$, $h^1(D_0) = g$. 因此对于 $m \geq 2g-1$, 我们有

$$h^0(D_m) = m - g + 1.$$

进一步, $h^0(D_m) - 1 = \sum_{k=1}^{m}(h^0(D_k) - h^0(D_{k-1}))$ 为满足下述条件的 $k \leq m$ 的个数: 存在仅在 P 点亚纯且极点阶数为 k 的亚纯函数 $f \in \mathbb{C}(X)$. 因此, “空缺”(gap) 的个数为 $m - (h^0(D_m) - 1) = g$. □

注记. 上述证明过程也可以应用于任意点列 $P_1, P_2, \ldots$, 除子 $D_0 = 0$, $D_k = \sum_{i=1}^{k} P_i$, $k > 0$. 我们可以证明, 除了 [位于 1 与 $2g-1$ 之间的] g 个例外的 $k = n_1, \ldots, n_g$, 存在亚纯函数 f, 使得 $(f) \geq -D_k$ 但 $f \ngeq -D_{k-1}$. 这个结论有时称为 **Max Noether 空缺定理**.

12 超椭圆曲线与典范映射

设 X 为紧黎曼曲面, 记 $\mathbb{C}(X)$ 为 X 上的亚纯函数域.

我们称 X 为**超椭圆黎曼曲面** (hyperelliptic Riemann surface), 或者**超椭圆曲线** (hyperelliptic curve), 如果存在从 X 到 $\mathbb{P}^1$ 的 2 叶全纯 [分歧] 覆盖; 换句话说, 存在亚纯函数 $f \in \mathbb{C}(X)$, 使得 f 恰有两个极点且都是单极点, 或者恰有一个极点且极点阶数为

2. [注记: 若 f 恰有一个单极点且阶数为 1, 则 $f: X \to \mathbb{P}^1$ 为同构. 这是因为 ∞ 不是临界值, 并且 $f: X \to \mathbb{P}^1$ 为单叶的.] 若 X 的亏格 $g > 0$, 则 X 是超椭圆曲线当且仅当存在有效除子 D, $\deg D = 2$ 并且 $h^0(D) \geq 2$. 事实上, 若 X 为超椭圆曲线, f 的叶数为 2, 则取 D 为 f 的极点除子 [由于 $(1) \geq -D$, $(f) \geq -D$, 从而 $h^0(D) \geq 2$] . 反之, 若 $h^0(D) \geq 2$, 则必存在非常值的亚纯函数 f 使得 $(f) \geq -D$.

若 X 的亏格为 1, 则 X 必为超椭圆曲线. 这是因为, 对任何次数为 2 的除子 D, $\deg D > 2g - 2 = 0$, 从而 $h^0(D) = 1 - g + \deg D = 2$. 若 X 的亏格为 2, 则 X 也必为超椭圆曲线. 事实上, 若 P 为 Weierstrass 点, 则存在函数 $f \in \mathbb{C}(X)$ 在 $X - P$ 全纯, 并且在 P 处的极点阶数为 2.

设 X 为超椭圆曲线, $f: X \to \mathbb{P}^1$ 的叶数为 2. 将 f 适当地复合上一个 $\mathbb{P}^1$ 的自同构, 我们可不妨假设原像集 $f^{-1}(\infty)$ 包含两个不同的点. 记 C 为 f 的临界点集, $B = f(C)$, 则 $B \subseteq \mathbb{P}^1 - \{\infty\} = \mathbb{C}$. 此外, 若 $a \in C$, 则 $\mathrm{ord}_a(f) = 2$; 从而若 $b \in B$, 则 $f^{-1}(b)$ 为独点集. 定义映射 $\tau: X - C \to X - C$, 使得 τ 将 x 映为 x', 其中 $x' \neq x$, $f(x') = f(x)$. 此映射可延拓为全纯映射 $\tau: X \to X$ [若 $a \in C$, 则规定 $\tau(a) = a$] , 使得成立 $\tau^2 = \mathrm{id}_X$. 称此映射为 X 的**超椭圆对合** (hyperelliptic involution).

由 Riemann-Hurwitz 公式, 若 X 的亏格为 g, 注意 $\mathbb{P}^1$ 的亏格为 0, 从而

$$2g - 2 = -4 + \sum_{a \in C} (\mathrm{ord}_a(f) - 1),$$

于是 [注意对于 $a \in C$, $\mathrm{ord}_a(f) = 2$] f 的分歧点的个数为 $2g + 2$ [并且这些点都是 X 的 Weierstrass 点] .

设 u 为 X 上的亚纯函数, 使得对某些 $x \in X - C$ 成立 $u(x) \neq u(\tau(x))$, 并且 u 在 $x, \tau(x)$ 处都全纯. 于是, 对 $f(x)$ 附近的点 z, 都有 $u(x_1) \neq u(x_2)$, 其中 $\{x_1, x_2\} = f^{-1}(z)$. 从而存在有理函数 $a_1, a_2 \in \mathbb{C}(z)$ [这里将 $f(x)$ 记作 z] 使得

$$u^2(x) + 2a_1(z)u(x) + a_2(z) = 0$$

[其证明见第7节定理7.4] . 于是 $(u + a_1)^2 = a_1^2 - a_2 = p/q$, 其中 $p, q \in \mathbb{C}[z]$; 若再记 $p \cdot q = P \cdot Q^2$, $P, Q \in \mathbb{C}[z]$, 并且 P 无平方因子, 则成立 $w^2 = P(z)$, 其中 $w = p(u + a_1)/Q$. 此外, 存在 $\mathbb{C}$ 的一个开集, 使得此开集当中的点 z 满足: 若 $\{x_1, x_2\} = f^{-1}(z)$, 则 $w(x_1) \neq w(x_2)$.

记 Y 为代数函数 $w^2 - P(z)$ 的 [紧] 黎曼曲面. 则我们有映射 $\pi: X \to Y$, 将 X 当中除了有限个点之外的点 x 映为 $\pi(x) = (f(x), w(x))$ [除去的那些点包括 f, w 的极点,

以及 Y 在 $\mathbb{P}^1$ 上的分歧点, 即 w 的零点] ; 此映射可延拓为全纯映射 $X \to Y$. 现在, 对于某个开集当中的 $x \in X$, 成立 $w(x) \neq w(\tau(x))$; 又因为 $w(x)^2 = w(\tau(x))^2$, 从而必有 $w(x) = -w(\tau(x))$, 从而由解析延拓原理, 对任意 $x \in X$ 都有 $w(x) = -w(\tau(x))$. 从而易知 $\pi : X \to Y$ 为解析同构, 并且与映射 $f : X \to \mathbb{P}^1$ 以及 $Y \to \mathbb{P}^1$, $(z, w) \mapsto z$ 交换.

此外, 由于 ∞ 不是 $f : X \to \mathbb{P}^1$ 的分歧值, 且 f 的分歧点的个数为 $2g + 2$, 从而多项式 P 必形如 $c(z - z_1) \cdots (z - z_{2g+2})$, 其中常数 $c \neq 0$, $z_1, ..., z_{2g+2} \in \mathbb{C}$ 两两互异. 不妨假设 $c = 1$.

考虑 Y 上的 1-形式

$$\omega_\nu = z^{\nu-1}\frac{\mathrm{d}z}{w}, \quad \nu = 1, ..., g.$$

由于在 Y 上成立 $2w\,\mathrm{d}w = P'(z)\,\mathrm{d}z$, 并且在分歧值 $z_1, ..., z_{2g+2}$ 处满足 $P'(z) \neq 0$, 因此若 $z \in \mathbb{P}^1 - \{\infty\}$, $\omega_\nu = 2z^{\nu-1}\dfrac{\mathrm{d}w}{P'(z)}$ 在 $(z, w) \in Y$ 点全纯. 而在 $z = \infty$ 附近, $w = \pm z^{g+1}\left(1 + O(\dfrac{1}{z})\right)$, 从而 $\omega_\nu = \pm z^{\nu-g-2}\left(1 + O(\dfrac{1}{z})\right)\mathrm{d}z$, 在 ∞ 处全纯. 因此 $\omega_1, ..., \omega_g$ 构成 $H^0(Y, \Omega)$ 的一组基. 并且我们也可以得到, 在 $\mathbb{C} = \mathbb{P}^1 - \{\infty\}$ 成立 $\omega_1 \neq 0$, 在 ∞ 处满足 $\omega_g \neq 0$.

考虑由 Y 的典范线丛 K_Y 诱导的全纯映射 $\varphi_{K_Y} : Y \to \mathbb{P}^{g-1}$, 则易知 $\varphi|_{Y - z^{-1}(\infty)}$ 为 $(z, w) \mapsto [1 : z : \cdots : z^{g-1}]$, 并且 Y 在此映射下的像同构于 $\mathbb{P}^1$. 此外, $\varphi(z, -w) = \varphi(z, w)$. 注意同构 $\pi : X \to Y$ 将 z 映到 f. 另一方面, X 的典范线丛 K_X 诱导的映射 φ_{K_X} 在相差 $\mathbb{P}^{g-1}$ 上的线性变换的意义下是内蕴定义的, 这个映射称为 X 的**典范映射** (canonical map).

因此, 若映射 $f : X \to \mathbb{P}^1$ 的叶数为 2, 则它同构于映射 $\varphi_{K_X} : X \to \varphi_{K_X}(X) \subseteq \mathbb{P}^1$ [并且 $\varphi_{K_X}(X) \cong \mathbb{P}^1$] . 从而我们得到, *映射 f 在相差 $\mathbb{P}^1$ 的自同构的意义下是唯一的*, 也就是说任何两个叶数为 2 的映射仅仅相差一个 Möbius 变换 $f \mapsto \dfrac{af + b}{cf + d}$, $a, b, c, d \in \mathbb{C}$, $ad - bc \neq 0$. 现在, 若 $f : X \to \mathbb{P}^1$ 的叶数为 2, 则 f 的分歧点 P 必为 Weierstrass 点. $f(P) = \infty$ 的时候显然; 若 $f(P) \neq \infty$, 则考虑 $(f - f(P))^{-1}$.

我们来证明上述结论的逆命题, 也就是说, 超椭圆曲线上的任何 Weierstrass 点必为某个 [本质唯一的] 2 叶映射 $f : X \to \mathbb{P}^1$ [也就是典范映射] 的分歧点. 我们将 X 等同为黎曼曲面 $w^2 - P(z) = 0$, 其中 $P = (z - z_1) \cdots (z - z_{2g+2})$, z_j 两两互异. 则 $\omega_\nu = \dfrac{z^{\nu-1}}{\omega}\mathrm{d}z$, $\nu = 1, ..., g$ 为 $H^0(X, \Omega)$ 的一组基. 若 $w \neq 0$ [即 $P(z) \neq 0$] , 且 $z \neq 0$, 则 $z^{\nu-1}/w$, $\nu = 1, ..., g$ 的 Wronski 行列式等于 $w^{-g}W(1, z, ..., z^{g-1}) = w^{-g}c_g$ (其中

$c_g = \prod_{\nu=1}^{g-1} \nu!)$ [见第11节的引理的证明过程, 我们已证 $W(\varphi f_1, ..., \varphi f_n) = \varphi^n W(f_1, ..., f_n)$; 再注意 $W(1, z, ..., z^{g-1})$ 为上三角行列式, 且其对角元为 $1, 1!, ..., (g-1)!$]. 若 $z = \infty$, 则 $\omega_\nu = \pm z^{\nu-g-2}\left(1 + O(\frac{1}{z})\right) \mathrm{d}z = \mp \left(\frac{1}{z}\right)^{g-\nu} \left(1 + O(\frac{1}{z})\right) \mathrm{d}\left(\frac{1}{z}\right)$, 从而在 ∞ 处的 Wronski 行列式为对角元非零的上三角行列式. 综上, $P(z) \neq 0$ 与 $z = \infty$ 处都不是 Weierstrass 点, 从而断言得证.

因此, 若 X 为超椭圆曲线, 则 X 的 Weierstrass 点恰为典范映射 $\varphi_{K_X} : X \to \varphi_{K_X}(X) \subseteq \mathbb{P}^{g-1}$ 的分歧点. 恰有 $2g+2$ 个这样的点.

当 $g > 2$ 时, $2g+2 < (g-1)g(g+1)$, 不等号右边为之前给出的 Weierstrass 点的个数的一个上界. 事实上还可以证明, 非超椭圆曲线的 Weierstrass 点的个数大于 $2g+2$.

对于非超椭圆曲线, 典范映射为嵌入.

定理. 设 X 为非超椭圆的紧黎曼曲面, 其亏格为 $g (\geq 3)$, 那么典范线丛 K_X 是极丰沛的. 也就是说, K_X 的全体整体截面没有公共零点, 且 $\varphi_{K_X} : X \to \mathbb{P}^{g-1}$ 为嵌入.

证明.

(1) 对于 $P \in X$, 断言存在 $\omega \in H^0(X, \Omega)$ 使得 $\omega(P) \neq 0$. 若不然, 线丛 $L(P)$ 的标准截面 s_P 诱导的同态 $H^0(X, \Omega_{-P}) \overset{\otimes s_P}{\to} H^0(X, \Omega)$ 为同构. 而注意到 $h^0(\Omega_{-P}) - h^1(\Omega_{-P}) = 1 - g + (2g-3) = g-2$, 并且 $h^1(\Omega_{-P}) = h^0(\mathcal{O}_P) = 1$ [这是因为, 若存在非常值亚纯函数 f 使得 $(f) \geq -P$, 则 f 仅有一个单极点, 从而 $f : X \to \mathbb{P}^1$ 为同构]. 因此 $h^0(\Omega_{-P}) = g-1 < h^0(\Omega)$, 从而 $H^0(X, \Omega_{-P})$ 不可能同构于 $H^0(X, \Omega)$.

(2) 对于 $P, Q \in X$, $P \neq Q$, 断言存在 $\omega \in H^0(X, \Omega)$ 使得 $\omega(P) = 0$, $\omega(Q) \neq 0$. 若不然, 则 $H^0(X, \Omega_{-P-Q}) \overset{\otimes s_Q}{\to} H^0(X, \Omega_{-P})$ 为同构. 而我们有 $h^0(\Omega_{-P-Q}) = 1 - g + (2g-4) + h^1(\Omega_{-P-Q}) = g - 3 + h^0(\mathcal{O}_{P+Q})$. 若 $h^0(\mathcal{O}_{P+Q}) > 1$, 则存在非常值亚纯函数 f 满足 $(f) \geq -P-Q$, 从而 f 的叶数为 2, X 为超椭圆曲线. 因此 $h^0(\mathcal{O}_{P+Q}) = 1$, $h^0(\Omega_{-P-Q}) = g-2 < h^0(\Omega_{-P})$.

(3) 若 $P \in X$, 断言存在 $\omega \in H^1(X, \Omega)$ 使得 $\mathrm{ord}_P(\omega) = 1$. 若不然, 则 $\omega(P) = 0 \Rightarrow \mathrm{ord}_P(\omega) \geq 2$, 也就是说 $h^0(\Omega_{-P}) = h^0(\Omega_{-2P})$. 与第 **2** 部分类似, 这表明存在非常值亚纯函数 f 使得 $(f) \geq -2P$, 从而 X 为超椭圆曲线.

由上述三点, 用第10节嵌入定理的证明方法即可得证. □

对任意紧黎曼曲面 X, X 在典范映射 φ_{K_X} 下的像称为 X 的**典范曲线** (canonical curve). 若 X 为超椭圆曲线, 则 X 的典范曲线同构于 $\mathbb{P}^1$; 否则, 它同构于 X.

13 射影曲线的几何

先介绍一些一般概念. 设 M 是 n 维**复流形** (complex manifold), $A \subseteq M$ 为 $n-1$ 维子流形 [余维数是 1] . 那么与黎曼曲面的情况类似, 子流形 A 通过如下方式定义 M 上的一个线丛: 若 $\{U_i\}$ 为 M 的一族开覆盖, $f_i \in \mathcal{O}(U_i)$ 满足 $U_i \cap A = \left\{x \in U_i \middle| f_i(x) = 0,\ \mathrm{d}f_i \neq 0, \forall x \in U_i\right\}$, 则 $g_{ij} := f_i/f_j$ 为 $U_i \cap U_j$ 上的处处非零的全纯函数, 构成线丛 $L(A)$ 的转移函数. 函数族 $\{f_i\}$ 定义了线丛 $L(A)$ 的标准截面 s_A [我们也称 A 为线丛 $L(A)$ 的除子] .

现在考虑 $M = \mathbb{P}^n$, 其齐次坐标为 $[z_0 : \cdots : z_n]$. $\mathbb{P}^n$ 的**超平面** (hyperplane)H [即余维数为 1 的线性子空间] 形如 $\{\ell(z) = 0\}$, 其中 ℓ 是关于 $z_0, ..., z_n$ 的非零线性函数. 我们把超平面 H 对应的线丛也记作 H [也记作 $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)$, 或者 $\mathcal{O}(1)$] ; 两个不同的超平面所对应的线丛是同构的. 若 $U_\nu = \left\{[z_0 : \cdots : z_n] \middle| z_\nu \neq 0\right\}$, $\nu = 0, ..., n$, 则函数 $\left(\dfrac{z_0}{z_\nu}, ..., \widehat{\dfrac{z_\nu}{z_\nu}}, ..., \dfrac{z_n}{z_\nu}\right)$ 为 U_ν 上的局部坐标, 这给出 U_ν 到 $\mathbb{C}^n$ 的同构. [上方的尖号代表去掉这一项] . 若超平面 $H = \{\ell(z) = 0\}$, 则函数 $f_j = \dfrac{\ell(z)}{z_j}$ 确定了 $H \cap U_j$, $j = 0, ..., n$, 并且线丛 H 在 $U_i \cap U_j$ 上的转移函数为 $g_{ij} = \dfrac{z_j}{z_i}$. 全体超平面构成的集合为 "对偶" 射影空间 $(\mathbb{P}^n)^*$, ℓ 的系数为 $(\mathbb{P}^n)^*$ 的齐次坐标.

设 $X \subseteq \mathbb{P}^n$ 是 1 维连通复子流形 [= 光滑嵌入射影代数曲线] . 我们记 $\deg(X) := \deg(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)|_X)$, 称为曲线 X 的**次数** (degree). 若记 s_H 为关于除子 [超平面] H 的线丛 $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)$ 的标准截面, 再记 X 上的线丛 $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)|_X$ 的 [亚纯] 截面 $s_H|_X$ 的除子为 $\sum n_P P$, 那么有 $\deg(X) = \sum n_P$. 若 $X \cap H$ 处处**横截** (transverse), 则 $\forall P \in X \cap H$, $n_P = 1$, 并且 $\deg(X)$ 为 X 与超平面 H 的交点个数.

Bertini 的一个众所周知的定理表明, "一般的" 超平面与 X 横截; 我们将只证明这个定理的我们所需要的特殊情形.

性质 13.1. [a] *(Bertini 定理的特殊情形). 与 X 横截的超平面 H 构成 $(\mathbb{P}^n)^*$ 的稠密开子集.*

[a]若允许 X 有奇点, 则要求超平面 H 不含这些奇点, 并且在其余地方与 X 横截, 这种情况下本性质也成立; 只需注意若 H_0 不含 X 的奇点, 则 H_0 附近的超平面 H 都与包含这些奇点的某个开集不交.

证明. 设 $a \in X$, U 为 a [在 X 中] 的邻域, 使得存在双全纯映射 $\varphi : \Delta \to U$, 其中 $\varphi = (\varphi_0, ..., 1, ..., \varphi_n)$, $\Delta = \left\{t \in \mathbb{C}\middle| |t| < 1\right\}$, $\varphi_0, ..., \varphi_n$ 为全纯函数, 且存在某个 j 使得在 Δ 成立 $\varphi_j'(t) \neq 0$, 且 $\varphi_k \equiv 1$. 设 $K \subseteq U$ 紧致. 简单起见, 不妨 $k = 0$. 对于超平面 $H : c_0z_0 + \cdots + c_nz_n = 0$, 则 $H \cap X$ 在 K 的某点处不横截当且仅当 $\sum\limits_{\nu=1}^{n} c_\nu\varphi_\nu(t) = -c_0$ 与 $\sum\limits_{\nu=1}^{n} c_\nu\varphi_\nu'(t) = 0$ 有公共解. 由于某个指标 ν 满足 $\varphi_\nu'(t) \not\equiv 0$, 从而可假设 $\sum\limits_{\nu=1}^{n} c_\nu\varphi_\nu'(t) \not\equiv 0$; 从而点集 $S = \left\{t \in U\middle| \sum\limits_{\nu=1}^{n} c_\nu\varphi_\nu'(t) = 0\right\}$ 是离散的, 并且对任意的足够接近 0 的 λ, 对任意 $t \in S$ 都成立 $\sum\limits_{\nu=1}^{n} c_\nu\varphi_\nu(t) \neq -c_0 - \lambda$; 从而超平面 $(c_0 + \lambda)z_0 + \cdots + c_nz_n = 0$ 在 K 处与 X 横截相交; 因此集合 $W_K = \left\{H\middle|X \cap H\text{在 } K \text{ 处横截}\right\}$ 是稠密的. 它显然是开集, 而再注意集合 $\left\{H \in (\mathbb{P}^n)^*\middle|H \cap X\text{横截}\right\}$ 为有限多个形如 W_K 的集合的交. □

接下来, 我们总假定射影曲线 $X \subseteq \mathbb{P}^n$ 是**非退化的** (non-degenerate), 这是指, X 不包含于任何超平面. 换句话说, 我们总考虑将 X 嵌入到 $\mathbb{P}^n$ 的包含 X 的维数最小的线性子空间 $\mathbb{P}^k$.

引理 13.1. *若 $X \subseteq \mathbb{P}^n$ 非退化, 则 $\deg(X) \geq n$.*

证明. 对于一般的超平面 H, $X \cap H = \{x_1, ..., x_d\}$, $d = \deg(X)$. 如果 $d < n$, 则任取 X 上的点 $y_1, ..., y_{n-d}$. 注意到 $\mathbb{P}^n$ 的任何 n 个点都共超平面 [即存在某个超平面包含这 n 个点]. 设 H' 为过点 $x_1, ..., x_d; y_1, ..., y_{n-d}$ 的超平面. 那么, 若 $s_{H'}$ [线丛 $\mathcal{O}(1)$ 的关于除子 H' 的标准截面] 满足 $s_{H'}|_X \not\equiv 0$, 则 $\deg(s_{H'}|_X) \geq n > d$, 从而与 $\deg(X)$ 的定义矛盾. 因此 $s_{H'}|X \equiv 0$, X 是退化的. □

Riemann-Roch 定理的几何形式. 设 X 不是超椭圆的, $X \subseteq \mathbb{P}^{g-1}$ 为典范嵌入. 设 $D \geq 0$ 为 X 的一个有效除子, 并假设 $D \neq 0$. 若 ℓ 为 $\mathbb{P}^{g-1}$ 上的线性函数, 则 $\ell|X$ 为 X 上的全纯 1-形式; 反之, X 上的全纯 1 形式都可这样得到.

对于超平面 $H \subseteq \mathbb{P}^{g-1}$, $H = \{\ell(z) = 0\}$, 如果全纯 1-形式 $\ell|_X$ 的除子 $(\ell|_X) \geq D$, 则称超平面 H **包含** (contain) 除子 D. 我们记 $[D]$ 为所有包含除子 D 的超平面之交, 称为由除子 D 生成的 $\mathbb{P}^{g-1}$ 的线性子空间. 如果除子 D 形如 $\sum P_i$, 其中 P_i 两两不同, 则包含 D 的超平面恰为包含所有点 P_i 的超平面, $[D]$ 恰为点 P_i 所张成的子空间.

Riemann-Roch 定理的几何形式是指如下公式:

$$h^0(D) = \deg(D) - \dim[D].$$

事实上 $h^0(\Omega_{-D})$ 为满足 $(\omega) \geq D$ 的线性无关的全纯 1-形式 ω 的最大个数, 也就是满足 $(\ell|_X) \geq D$ 的线性无关的 $\mathbb{P}^{g-1}$ 的线性函数 ℓ 的最大个数, 因此 $g - 1 - h^0(\Omega_{-D})$ 为包含 D 的所有超平面之交的维数, 即 $g - 1 - h^0(\Omega_{-D}) = \dim[D]$. 再由 Riemann-Roch 定理即可得证.

为更深入学习, 我们需要一个来自 Castelnuovo 的非常重要的定理. 注意任意 $k+1$ 个点 $(k+1 \leq n)$ 都位于 $\mathbb{P}^n$ 的某个 k 维线性子空间. 我们称点 $P_1, ..., P_{k+1} \in \mathbb{P}^n$ **线性无关** (linearly independent), 如果它们不位于任何维数 $< k$ 的子空间, 也就是说这些点张成的子空间达到最大可能的维数.

定理. *(Castelnuovo 一般位置定理). 设 $X \subseteq \mathbb{P}^n$ 维非退化的射影代数曲线, $\deg X = d$. 则满足以下性质的超平面 H 构成 $(\mathbb{P}^n)^*$ 的稠密子集: 若 $X \cap H = \{x_1, ..., x_d\}$, 则它们当中任何 n 个点 $x_{i_1}, ..., x_{i_n}$ 线性无关.*

为证明此结果, 我们需要假设读者熟悉基础的**代数几何** (algebraic geometry). 先证明如下引理:

引理 13.2. *设 $n \geq 3$. 设 $U \subseteq (\mathbb{P}^n)^*$ 为与 X 横截的超平面构成的开集. [注意条件 "$H \in (\mathbb{P}^n)^*$ 与 X 不横截" 是代数的, U 为 $(\mathbb{P}^n)^*$ 的某个代数真子集的补集]. 则存在 U 的代数真子集 A, 使得对任意 $H \in U - A$, $X \cap H$ 中的任何三点不共线. [我们假定 X 不可约, 而并不要求 X 光滑.]*

证明. 我们将证明, $\mathbb{P}^n$ 当中的与 X 有至少 3 个交点的直线构成的 [代数] 簇的维数是 1. 我们称这样的直线为曲线 X 的**三割线** (trisecant). 由于包含给定直线的超平面构成的空间的维数是 $n-2$, 因此由将要证明的断言可知, 包含某条三割线的的超平面构成的空间的维数是 $n-1$.

若不然, 假设三割线构成的空间 S 的维数 ≥ 2. 因为 X 的**割线** (secant) [与 X 有至少 2 的交点的直线] 构成的空间是不可约的, 且维数是 2 [此空间是某个定义在 $X \times X - \Delta_X$ 的映射的像集的闭包, 其中 Δ_X 为 $X \times X$ 的对角线, 此映射将 (P, Q) 映为连接 P, Q 两点的直线] , 从而可知 X 的任何割线都是三割线.

我们先证明, 这意味着对 X 的任意两个光滑点 P, Q, X 在 P, Q 处的切线 T_P, T_Q 必相交.

取定 $P_0 \in X$, 考虑关于点 P_0 的投影映射 $\mathbb{P}^n \to \mathbb{P}^{n-1}$ 所诱导的映射 $\pi_0 : X - P_0 \to \mathbb{P}^{n-1}$. 记 Y 为 X 在此映射下的像, $y \in Y$ 为光滑点, 使得 π_0 在 $\pi_0^{-1}(y)$ 的点处都是正则的 [满秩, 秩为 1] . 若 $P, Q \in \pi_0^{-1}(y)$, 则切线 T_P, T_Q 被映为 Y 在点 y 处的切线 L, 因此 T_P, T_Q 都位于由直线 L 与点 P_0 所张成的平面, 从而它们必相交. 这表明, 对于给定的某点 P_0, 存在 X 的某个开集, 使得对此开集里的任意点 P, 如果 $\pi_0(P) = \pi_0(Q)$, 则 T_P, T_Q 相交. 现在考虑 P_0 在某开集里变化, 则相应的 Q 也取遍某个开集, 因此使得 T_P, T_Q 相交的点对 (P, Q) 取遍某个开集; 这表明对任意 (P, Q), T_P, T_Q 相交.

现在设 X 在点 P, Q 处的切线不同, 记 B 为切线 T_P, T_Q 张成的 2 维平面. 注意 $B \cap X$ 是有限点集 [因为 X 非退化] , 取点 $a \in X$, $a \notin B$. 因此切线 T_a 与直线 T_P, T_Q 都相交; 又因为 $T_a \not\subseteq B$, 两条直线至多交于一点, 因此 T_a 必过点 $P_0 := T_P \cap T_Q$. 因此, 对 X 的 [除了有限个点之外的] 任意点 a, 切线 T_a 过点 P_0. 进而任意 $a \in X$, T_a 过点 P_0. 但这是不可能的, 因为关于点 P_0 的到 $\mathbb{P}^{n-1}$ 的投影映射在 X 的限制, 在 X 处处退化 [秩为 0] , 从而 X 的像集是独点集, X 只能是一条直线.

引理证毕. □

Castelnuovo 一般位置定理的证明. 设 $U \subseteq (\mathbb{P}^n)^*$ 的含义同上述引理, 令集合 $I \subseteq X \times U$ 由满足 $P \in X \cap H$ 的二元组 (P, H) 构成. 则 I 是 n 维不可约的. [I 不可约, 是因为点 $P \in X$ 关于投影映射 $I \to X$ 的纤维是由过点 P 的超平面构成的不可约族; I 的维数是 n, 是因为投影映射 $I \to U$ 是有限纤维的.]

考虑由 (P, H), 其中 $P \in \{P_1, ..., P_n\} = X \cap H$ 且 $P_1, ..., P_n$ 线性相关, 构成的子簇

$I_0 \subseteq I$. 如果 $\dim I_0 < n$, 则其到 U 的投影是**真映射** (proper map), 从而定理得证. 而假如 $\dim I_0 = n$, 则必有 $I_0 = I$. 对于 X 的一般的点 P, 记 $\pi_P : X - \{P\} \to \mathbb{P}^{n-1}$ 为关于点 P 的投影. 如果 X 不满足一般位置定理, 那么像曲线 $X' = \pi_P(X) \subseteq \mathbb{P}^{n-1}$ 也不满足一般位置定理, 这是因为如果 $P = P_1, ..., P_n \in H \cap X$ 都位于某个 $n-2$ 维的子空间 B, 则 $\pi_P(P_2), ..., \pi_P(P_n)$ 都位于 $n-3$ 维的子空间 $\pi_P(B) \subseteq \mathbb{P}^{n-1}$.

当 $n \geq 4$ 时, 总可反复上述论证. 因此只需要证明此定理在 $n = 3$ 时的情形, 而这正是引理13.2. □

在给出一般位置定理的应用之前我们先来介绍一些术语.

设 X 为紧黎曼曲面, L 为 X 上的全纯线丛. 若 V 为 $H^0(X, L)$ 的线性子空间, $V \neq \{0\}$, 则称集合 $\left\{D \middle| D = \operatorname{div}(s),\ s \in V\right\}$ 为由 V 所确定的**线性系统** (linear system). 若 $V = H^0(X, L)$, 则称其为 L 的**完备线性系统** (complete linear system). 若 $L = L(D)$ 为除子 D 的线丛, 则 L 的完备线性系统由所有的与 D 线性等价的有效除子 D', $D' \sim D$, $D' \geq 0$ 构成. 这也称为除子 D 的完备线性系统, 记作 $|D|$. 再记 $\dim |D| := h^0(D) - 1$, 称为该完备线性系统的维数. 注意 $|D|$ 与射影空间 $(H^0(X, L(D)) - \{0\})/\mathbb{C}^* = \mathbb{P}(H^0(X, L(D)))$ 有自然的一一对应. 若 $h^0(D) > 0$ 且 $h^1(D) = h^0(\Omega_{-D}) > 0$, 则称 D 为**特殊除子** (special divisor); 也就是说 D 与 $K_X - D$ 都线性等价于有效除子, 其中 K_X 为 X 的典范除子.

我们从下述引理开始:

引理 13.3. *设 D 为除子, $h^0(D) > 0$, $r \geq 0$ 为给定整数. 则 $\dim |D| \geq r$ 当且仅当对任意次数为 r 的除子 $\Delta \geq 0$, 存在 $D' \in |D|$ 使得 $D' \geq \Delta$; 特别地, 若 $P_1, ..., P_r \in X$, 则存在 $D' \in |D|$ 使得对任意 $i = 1, ..., r$ 都有 $P_i \in \operatorname{supp}(D')$. 若此条件对 X 的某个非空开集中的任何两两互异的 P_i 都成立, 则 $\dim |D| \geq r$.*

证明. 如果 $\dim H^0(X, L(D)) \geq r + 1$, 记 $\Delta = \displaystyle\sum_{\nu=1}^{k} n_\nu P_\nu$. 取 $L(D)$ 在 P_ν 处的局部平凡化 h_ν, 以及局部坐标 (U_ν, z_ν) 使得 $z_\nu(P_\nu) = 0$. 若 $s \in H^0(X, L(D))$, 则 $(s) \geq \Delta$ 当且仅当 $\left(\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z_\nu}\right)^\mu h_\nu(s)\bigg|_{s=P_\nu} = 0$ 对任意 $0 \leq \mu < n_\nu$, $\nu = 1, ..., k$ 成立. 因此, 该条件等价于 s 位于 $H^0(X, L(D))$ 上的 $n_1 + \cdots + n_k = r$ 个线性函数 $s \mapsto \left(\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z_\nu}\right)^\mu h_\nu(s)\bigg|_{s=P_\nu}$ 的核空间之交, 这些空间之交的维数 $\geq \dim H^0(X, L(D)) - r \geq 1$. □

反向命题可由下述更一般结论得到:

引理 13.4. *设 X 为黎曼曲面, L 为 X 上的全纯线丛, V 是 $H^0(X,L)$ 的 k 维子空间. 则存在 k 个点 $P_1,...,P_k\in X$ 使得对于 $s\in V$, 如果 $s(P_\nu)=0$, $\nu=1,...,k$, 则 $s\equiv 0$. [事实上任意的 "一般位置" 的 k 个点都可以.]*

证明. 不妨 $k>0$. 取 $s_1\in V$, $s_1\not\equiv 0$, 取 $P_1\in X$ 使得 $s_1(P_1)\neq 0$. 则 $V_1=\left\{s\in V\middle|s(P_1)=0\right\}$ 是 V 的真子空间, 维数为 $k-1$. 若 $k-1>0$, 则再取 $s_2\in V_1$, 以及点 $P_2\in X$ 使得 $s_2(P_2)\neq 0$. 从而 $V_2:=\left\{s\in V_1\middle|s(P_2)=0\right\}=\left\{s\in V\middle|s(P_1)=0,\ s(P_2)=0\right\}$ 的维数是 $k-2$. 只需不断这样做下去即可. □

有如下重要结论:

性质 13.2. *设除子 D_1,D_2 都线性等价于有效除子 [即 $h^0(D_i)>0$, $i=1,2$]. 则成立*

$$\dim|D_1|+\dim|D_2|\leq\dim|D_1+D_2|.$$

此外, 若上述等号成立, 则任意 $D\in|D_1+D_2|$ [即 $D\geq 0$, $D\sim D_1+D_2$] 都可表示为 $D=D_1'+D_2'$, 使得 $D_i'\in|D_i|$, $i=1,2$.

证明. 记 $r_i=\dim|D_i|$, $i=1,2$. 任取 X 上的点 $P_1,...,P_{r_1};Q_1,...,Q_{r_2}$, 则存在 $D_i'\sim D_i$, $D_i'\geq 0$ 使得 $P_i\in\operatorname{supp}(D_1')$, $Q_j\in\operatorname{supp}(D_2')$. 则 $D_1'+D_2'\in|D_1+D_2|$, 且其支集包含所有这 (r_1+r_2) 个点 P_i,Q_j; 因此不等式成立.

注意 $\left\{D_1'+D_2'\middle|D_i'\geq 0,\ D_i'\sim D_i\right\}$ 构成射影空间 $|D_1+D_2|=\mathbb{P}(H^0(X,L(D_1+D_2)))$ 的 (r_1+r_2) 维的子簇. 如果该不等式取到等号, 则这个子簇必为射影空间本身. □

现在介绍一个重要定理. 记 K 为 X 的一个典范除子.

定理. *(Clifford 定理).* 设 D 为 X 上的有效特殊除子 [注意 $h^0(K-D)>0$] , d 为 D 的次数, 则

$$\dim|D| \leq \frac{1}{2}d = \frac{1}{2}\deg D.$$

此外, 若等号成立, 则必为以下三种情况之一: $D=0$, 或者 $D\sim K$, 或者 X 为超椭圆曲线.

证明. 由于 $K-D$ 线性等价于有效除子, 从而

$$\dim|D| + \dim|K-D| \leq \dim|K|,$$

即

$$h^0(D) + h^0(K-D) \leq h^0(K) + 1 = g+1.$$

另一方面, 由 Riemann-Roch 定理,

$$h^0(D) - h^0(K-D) = d+1-g.$$

两式相加整理得 $2h^0(D) \leq d+2$, $h^0(D) \leq \frac{1}{2}D = 1$. 此外, 若等号成立, 则 $\dim|D| + \dim|K-D| = \dim|K|$, 从而对任意的满足 $K' \geq 0$, $K' \sim K$ 的除子 K' 都可以写成 $K' = D_1 + D_2$, 使得 $D_i \geq 0$, $D_1 \sim D$, $D_2 \sim K-D$.

设 X 不是超椭圆曲线, 则考虑典范嵌入 $X \subseteq \mathbb{P}^{g-1}$. 若 H 为与 X 横截的超平面, 则 $H\cap X$ 当中的点构成的除子 K', 满足 $K' \sim K$, $K' \geq 0$. 记 $K' = D_1 + D_2$ 使得 $D_1 \sim D$, $D_2 \sim K-D$, $D_1, D_2 \geq 0$. 不妨假设 $D_1, D_2 \neq 0$.

记 $[D_i]$ 为由除子 D_i 张成的 $\mathbb{P}^{g-1}$ 的线性子空间, 则由几何形式的 Riemann-Roch 定理可得

$$\begin{aligned}
\dim[D_1] &= \deg D_1 - h^0(D_1) = d - h^0(D)\\
\dim[D_2] &= \deg D_2 - h^0(D_2) = 2g-2-d-h^0(K-D).
\end{aligned}$$

由于等号 $\dim|D| = \frac{1}{2}d$ 成立表明 $h^0(D) + h^0(K-D) = g+1$, 从而

$$\dim[D_1] + \dim[D_2] = 2g-2-(g+1) = g-3.$$

因此 D_1, D_2 张成的线性子空间的维数都 $\leq g-3$. 若 $d \geq g-1$, 则 D_1 当中的点线性相关; 若 $d < g-1$, 则 D_2 中的点线性相关. 再注意 H 是与 X 横截的任意的超平面, 从而这与一般位置定理矛盾.

综上, 若 X 不是超椭圆曲线, 则必有 $D_1=0$ 或 $D_2=0$, 从而定理得证. □

我们再给一个 Clifford 定理的另证, 这种证法不利用 Castelnuovo 一般位置定理. 我们只需证明下述断言:

性质 13.3. *设 $D\geq 0$ 为有效除子, 次数为 d, 且 $0\leq d\leq 2g-2$. 那么成立 $\dim|D|\leq \frac{1}{2}d$. 若 $D\neq 0$, $D\not\sim K$ 并且上述不等式取到等号, 则 X 为超椭圆曲线.*

证明. 由于 $g-1\geq \frac{1}{2}d$, 从而 $h^0(D)-h^0(K-D)=1-g+d\leq -\frac{1}{2}d+d$, 于是如果 $h^0(K-D)=0$ 则有 $\dim|D|\leq \frac{1}{2}d-1$. 因此我们不妨设 D 为特殊除子. 此时, 该不等式为性质13.2的推论 [Clifford 定理的证明的前半部分], 并且有 $h^0(D)+h^0(K-D)\leq g+1$.

假设 D 为特殊除子并且 $h^0(D)+h^0(K-D)=g+1$ [即 $h^0(D)=\frac{1}{2}d+1$]. 若 $d=2$, 则 $h^0(D)=2$, 从而存在非常值亚纯函数 f 使得 $(f)\geq -D$ 并且 f 的叶数为 2, 从而 X 是超椭圆的. 我们将证明: 若 $\deg D>2$, $K\not\sim D$, 则存在除子 $D_0\geq 0$, $\deg D_0<d$, 并且满足 $h^0(D_0)+h^0(K-D_0)=g+1$. 因为 $\deg D_0<d\leq 2g-2=\deg K$, 从而 $K-D_0\not\sim 0$, 从而我们可以反复这样操作, 直到得到除子 D' 使得 $\deg D'=2$, $h^0(D')=2$, 从而 X 为超椭圆曲线.

设 $D'\geq 0$ 使得 $D'\sim K-D$, 则 $D'\neq 0$. 取点 $P\in \operatorname{supp}(D')$ 以及 $Q\notin \operatorname{supp}(D')$. 由于 $\dim|D|=\frac{1}{2}d>1$, 从而在除子的线性等价意义下, 不妨 D 的支集包含 P,Q 两点; 我们之后总假定 D 满足此性质.

设 D_0 为满足 $D_0\leq D$ 与 $D_0\leq D'$ 的 "最大" 的除子 [即, 如果 $D=\sum_a D(a)a$, $D'=\sum_a D'(a)a$, 则 $D_0=\sum_a \min\{D(a),D'(a)\}\cdot a$] . 显然 $D_0(P)>0$, $D_0(Q)=0$, 因此 $\deg D_0<\deg D$ 并且 $D_0\neq 0$.

我们有如下的层短正合列:

$$0\to \mathcal{O}_{D_0}\xrightarrow{\alpha}\mathcal{O}_D\oplus\mathcal{O}_{D'}\xrightarrow{\beta}\mathcal{O}_{D+D'-D_0}\to 0, \tag{$*$}$$

其中 $\alpha(h)=(h,-h)$, $\beta(f,g)=f+g$. 下面验证其正合性. 若 $(h)\geq -D_0$, 则 $(h)\geq -D$ 且 $(h)\geq -D'$. 如果 $(f)\geq -D$, $(g)\geq -D'$, 则 $\operatorname{ord}_a(f+g)\geq -\max\{D(a),D'(a)\}=-(D(a)+D'(a)-\min\{D(a),D'(a)\})$. 因此 α,β 的确为层同态. 若 $\operatorname{ord}_a(f)\geq -\max\{D(a),$

$D'(a)\}$ [f 为 a 处的亚纯函数芽]，则必有 $(f) \geq -D(a)$ 或者 $(f) \geq -D'(a)$; 若是前者则 $f = \beta(f, 0)$, 若是后者则 $f = \beta(0, f)$. 如果 $\beta(f, g) = 0$, 则 $f = -g$, $(f) \geq -D$, $(f) = (g) \geq -D'$, 从而 $(f) \geq -D_0$, $(f, g) = \alpha(f)$. 因此 $(*)$ 正合.

由该短正合列诱导的长正合列可知成立不等式

$$h^0(D) + h^0(D') \leq h^0(D_0) + h^0(D + D' - D_0) = h^0(D_0) + h^0(K - D_0).$$

由于 $D' \sim K - D$, 从而

$$g + 1 = h^0(D) + h^0(K - D) \leq h^0(D_0) + h^0(K - D_0) \leq g + 1,$$

从而迫使等号成立, 其中第二个不等号见证明开头部分.

这就证明了 D_0 的存在性, 从而命题得证. □

Clifford 定理的推论.

推论 13.1. 设 $X \subseteq \mathbb{P}^n$ 是次数 $d < 2n$ 的紧黎曼曲面, 并且非退化. 则 X 的亏格 $g \leq d - n$, 并且当等号成立时, 所有的超平面截面构成完备线性系统.

证明. 设 H 为 $\mathbb{P}^n$ 的超平面, $D = X \cap H$. 则 $h^0(D) \geq n + 1$ [这是因为 $\mathbb{P}^n$ 的任何线性函数都给出了 $\mathcal{O}_D$ 的一个截面; 由于 X 非退化, 从而任何线性函数在 X 上不恒为零, 除非该线性函数恒为零.] 由于 $d < 2n$, 从而

$$\dim |D| \geq n > \frac{1}{2}d,$$

因此 D 不是特殊除子, 即 $h^0(K - D) = 0$. 因此

$$n + 1 \leq h^0(D) = 1 - g + d, \quad g \leq d - n.$$

若取到等号, 则 $h^0(D) = n + 1$, 从而 $\mathbb{P}^n$ 上的线性函数在 X 上的限制给出了 $\mathcal{O}_D$ 的所有的截面. 这当然表明超平面截面构成完备线性系统. □

推论 13.2. $\mathbb{P}^n$ 中的次数为 n 的光滑非退化曲线必为有理曲线, 即亏格 $g = 0$.

事实上可以证明这样的曲线只可能是 $\mathbb{C}$ 在映射 $z \mapsto [1:z:z^2:\cdots:z^n]$ 下的像集的闭包. 我们之前在超椭圆黎曼曲面的典范曲线当中见过这种映射.

一般位置定理的另一个应用则是 Castelnuovo 本人对 $\mathbb{P}^n$ 中的次数 $d \gg n$ 的曲线的亏格的上界估计.

设 $X \subseteq \mathbb{P}^n$ 为紧黎曼曲面在 $\mathbb{P}^n$ 中的非退化嵌入, d 为 X 的次数. 则我们已经知道 $d \geq n$. 记 $N := \left[\dfrac{d-1}{n-1}\right]$ [整数部分] . 记 $D = X \cap H$ 为 X 的关于一般的超平面 H 的截面的除子.

引理 13.5. 记号同上.

(1) 若 $1 \leq k \leq N$, 则 $h^0(kD) - h^0((k-1)D) \geq 1 + k(n-1)$. 此外, 若其中某个 k 使得等号成立, 则 $H^0(X, \mathcal{O}_{kD})/H^0(X, \mathcal{O}_{(k-1)D})$ 由 $H^0(X, \mathcal{O}_D)$ 生成, 即自然同态 $\mathrm{Sym}^k H^0(X, \mathcal{O}_D) \to H^0(X, \mathcal{O}_{kD})/H^0(X, \mathcal{O}_{(k-1)D})$ 为满同态.

(2) 若 $k > N$, 则 $h^0(kD) - h^0((k-1)D) = d$, 且 $H^0(X, \mathcal{O}_{kD})/H^0(X, \mathcal{O}_{(k-1)D})$ 由 $H^0(X, \mathcal{O}_D)$ 生成.

证明. 不妨设超平面 H 与 X 横截, 并且 $D = X \cap H$ 当中的点为一般位置, 即 D 中的任何 n 个点都不共 $n-2$ 维子空间.

若 $k \leq N$, 则 $k(n-1) \leq d-1$, $1 + k(n-1) \leq d$. 任取 D 的 $1 + k(n-1)$ 元子集 E.

对于 $P \in E$, 任取划分 $E - \{P\} = E_1 \cup \cdots \cup E_k$, 使得每个 E_j 当中恰有 $n-1$ 个点. 由 Castelnuovo 一般位置定理, 点集 $E_j\,(\forall j = 1, ..., k)$ 张成一个不含点 P 的 $n-2$ 维子空间. 因此存在超平面 H_j 使得 $P \notin H_j$, 且 $E_j \subseteq H_j$. 从而存在 $\mathbb{P}^n$ 上的线性函数 λ_j 使得 $\lambda_j(P) \neq 0$, $\lambda_j(E_j) = 0$. 令 $\Lambda_P = \lambda_1 \cdots \lambda_k$ 为 k 次齐次多项式, 则 $\Lambda_P(P) \neq 0$, $\Lambda_P(E - \{P\}) = 0$. 记截面 $s^{(P)} := \Lambda_P|_X \in H^0(X, \mathcal{O}_{kD})$. 断言 $s^{(P)}$, $P \in E$ 在 $H^0(X, \mathcal{O}_{kD})/H^0(X, \mathcal{O}_{(k-1)D})$ 当中的像是线性无关的. 事实上, 记 s_D 为 $\mathcal{O}_D$ 关于除子 D 的标准截面, 如果存在常数 $c_P \in \mathbb{C}$, $P \in E$ 使得

$$\sum_{P \in E} c_P s^{(P)} \in s_D \cdot H^0(X, (k-1)D),$$

则在 D 处成立 $\sum\limits_{P \in E} c_P s^{(P)} = 0$, 因此在 E 处满足此式. 但和式 $\sum\limits_{P \in E} c_P s^{(P)}$ 在 $Q \in E$ 处的值为 $c_Q s^{(Q)}(Q)$ [因为若 $Q \neq P$ 则 $s^{(P)}(Q) = 0$] . 再注意 $s^{(Q)}(Q) \neq 0$, 从而 $c_Q = 0$,

$\forall Q \in E$. 因此 $\dim H^0(X, \mathcal{O}_{kD})/H^0(X, \mathcal{O}_{(k-1)D}) \geq E$ 的基数 $= 1 + k(n-1)$. 又因为截面 $s^{(P)}$ 显然 $\in \operatorname{Sym}^k H^0(X, \mathcal{O}_D)$ [因为 Λ_P 为线性函数的乘积], 从而 $\operatorname{Sym}^k H^0(X, \mathcal{O}_D)$ 在 $H^0(X, \mathcal{O}_{kD})/H^0(X, \mathcal{O}_{(k-1)D})$ 的像空间的维数 $\geq 1 + k(n-1)$. 这就证明了引理的第 (1) 部分.

再证 (2). 注意到此时 $k > \dfrac{d-1}{n-1}$, 且对任意 $P \in \operatorname{supp}(D)$, 存在划分 $\operatorname{supp}(D) - \{P\} = E_1 \cup \cdots \cup E_k$, 使得每个 E_j 最多包含 $n-1$ 个点. 与前面做法一样, 构造 k 次齐次多项式 $\Lambda_P = \lambda_1 \cdots \lambda_k$, 其中线性函数 λ_j 满足 $\lambda_j(P) \neq 0$, $\lambda_j(E_j) = 0$. 因此, 与之前一样, 可知截面 $s^{(P)} = \Lambda_P|_X \in H^0(X, \mathcal{O}_{kD})$ 在 $H^0(X, \mathcal{O}_{kD})/H^0(X, \mathcal{O}_{(k-1)D})$ 线性无关. 从而证明了 $h^0(kD) - h^0((k-1)D) \geq d$.

另一方面, 层短正合列

$$0 \to \mathcal{O}_{(k-1)D} \xrightarrow{s_P} \mathcal{O}_{kD} \to \mathbb{C}_D \to 0$$

[s_D 为标准截面, 茎条 $\mathbb{C}_{D,x}$ 在 $x \in \operatorname{supp} D$ 时 $= \mathbb{C}$, 否则 $= 0$] 意味着

$$h^0(kD) - h^0((k-1)D) \leq \dim H^0(X, \mathbb{C}_D) = d.$$

这就证明了 (2), 也证明了当 $k > N$ 时, $H^0(X, \mathcal{O}_D)$ 生成 $\dfrac{H^0(X, \mathcal{O}_{kD})}{H^0(X, \mathcal{O}_{(k-1)D})}$. □

由此我们得到:

定理. *(Castelnuovo 亏格上界估计)*. 设 X 为 $\mathbb{P}^n$ 中的非退化光滑曲线, $d = \deg(X)$, $N = \left[\dfrac{d-1}{n-1}\right]$, 整数 $0 \leq \varepsilon < n-1$ 满足

$$d - 1 = N(n-1) + \varepsilon,$$

则 X 的亏格 g 满足

$$g \leq \frac{1}{2}N(N-1)(n-1) + N\varepsilon.$$

此外, 若上式取到等号, 则对任意 $k \geq 2$,

$$\operatorname{Sym}^k H^0(X, \mathcal{O}_D) \to H^0(X, \mathcal{O}_{kD})$$

为满同态, 即 $H^0(X, \mathcal{O}_D)$ 生成 $H^0(X, \mathcal{O}_{kD})$, $\forall k \geq 2$.

证明. 取足够大的整数 r, 使得 $h^1((r+N)D)=0$, 从而由 Riemann-Roch 定理,

$$h^0((r+N)D)=(r+N)d+1-g.$$

另一方面,

$$\begin{aligned} h^0((r+N)D) &= \sum_{k=1}^{N}(h^0(kD)-h^0(k-1)D)+h^0(0\cdot D) \\ &\quad + \sum_{k=N+1}^{N+r}(h^0(kD)-h^0((k-1)D)) \\ &\geq \sum_{k=1}^{N}(1+k(n-1))+1+rd \quad (\text{利用引理13.5}) \\ &= 1+rd+N+\frac{1}{2}N(N+1)(n-1). \end{aligned}$$

从而有

$$\begin{aligned} g &\leq (r+N)d-rd-N-\frac{1}{2}N(N+1)(n-1) \\ &= N(d-1)-\frac{1}{2}N(N+1)(n-1) \\ &= N^2(n-1)+\varepsilon N-\frac{1}{2}N(N+1)(n-1) \\ &= \frac{1}{2}N(N-1)(n-1)+\varepsilon N. \end{aligned}$$

此外, 该不等式取到等号表明对任意 $k\leq N$ 都有 $h^0(kD)-h^0((k-1)D)=1+k(n-1)$, 从而由之前引理, 对 k 归纳可知对任意 $k\geq 2$, $H^0(X,\mathcal{O}_D)$ 生成 $H^0(X,\mathcal{O}_{kD})$. [注意 $1\in H^0(X,\mathcal{O}_D)$, 从而 $\operatorname{Sym}^{k-1}H^0(X,\mathcal{O}_D)\subseteq \operatorname{Sym}^k H^0(X,\mathcal{O}_D)$.] □

Castelnuovo 的这个定理有许多漂亮的几何应用, Arbarello, Cornalba, Griffiths, Harris 所著 *Geometry of Algebraic Curves*, I. (Springer-Verlag) 中有关于它的精彩论述. 我们仅在此介绍其中一个推论—Max Noether 的一个著名定理:

定理. *(Noether 定理). 设 X 为亏格 $g\geq 3$ 的紧黎曼曲面, 且不是超椭圆曲线. 记 K_X 为 X 的典范线丛, 则对任意 $m\geq 2$, 自然同态*

$$\operatorname{Sym}^m H^0(X,K_X)\to H^0(X,K_X^{\otimes m})$$

为满同态.

证明. 考虑典范嵌入 $X \subseteq \mathbb{P}^{g-1}$. 超平面截面的除子 D 为典范除子, 因此 $\deg D = \deg K = 2g-2$. 上述整数 $N = \left[\dfrac{2g-3}{g-2}\right] = \begin{cases} 2 & \text{如果}\, g > 3 \\ 3 & \text{如果}\, g = 3 \end{cases}$. 当 $g > 3$ 时, $\varepsilon = 2g-3-2(g-2) = 1$, 从而 $\dfrac{1}{2}N(N-1)(n-1) + N\varepsilon = g-2+2-g$. 若 $g = 3$, 则 $\varepsilon = 0$, $N = 3$, 从而 $\dfrac{1}{2}N(N-1)(n-1) + N\varepsilon = 3(g-2) = 3 = g$. 因此取到亏格上界估计当中的等号. 从而由 Castelnuovo 定理可得 Noether 定理. □

其实还要注意, 若 X 为超椭圆曲线 [此时 $g \geq 3$] , 则上述结论一定不成立. 这可以由以下事实推出: 当 m 充分大时 $K_X^{\otimes m}$ 极丰沛, 但由 K_X 诱导的映射 φ_{K_X} 不是单射.

14　双线性关系

继续前进之前, 我们回顾一下紧定向曲面的一些知识. 这里不打算证明它们, 有关证明可见 [6].

关于紧定向曲面分类的基本定理如下:

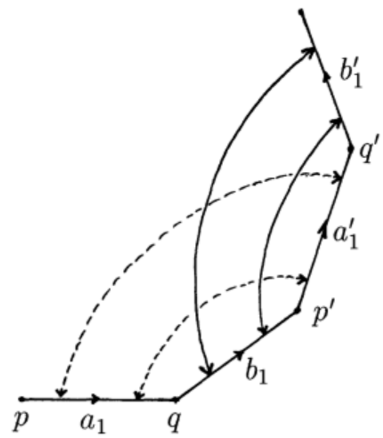
紧致 [无边] 可定向 C^∞ 曲面微分同胚于球面添加有限个**环柄** (handle).

"添加环柄" 如下图所示:

环柄的个数 g 等于 X 的第一个 Betti 数的一半; 从而, 若 X 是亏格为 g 的紧黎曼曲面, 则它同胚于球面添加 g 个环柄; 任何两个这样的曲面是微分同胚的.

球面添加 g 个环柄, 在微分同胚意义下, 可如下实现. 首先考虑平面 $\mathbb{C}$ 上的凸 $4g$-边形 Δ, 各边按逆时针依次记为 a_1, b_1, a_1', b_1', ..., a_g, b_g, a_g', b_g'. 若边 a_1, a_1' 分别为有向线段

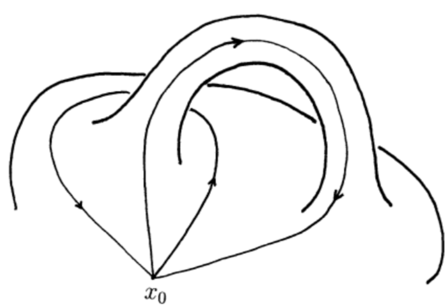
$\overline{pq}$, $\overline{p'q'}$, 则用将 $\overline{pq}$ 映到 $\overline{p'q'}$ 的线性映射 [即, 把 p 映为 q', q 映为 p'] , 将边 a_1 与 a_1' 等同. 同样的方法, 将 a_j 与 a_j' 等同, 将 b_j 与 b_j' 等同, $(j = 1, ..., g)$. 上述操作如下图所示:



在此意义下, Δ 变成了微分同胚于球面添加 g 个环柄的紧黎曼曲面. Δ 的所有顶点被映为 X 上的同一个点 x_0, 边 a_j, b_j 被映为 X 的以 x_0 为端点的闭曲线; 我们仍将这些闭曲线记作 a_j, b_j. 而边 a_j', g_j' 分别被映为 X 的闭曲线 a_j^{-1}, b_j^{-1}.

X 的这些闭曲线 a_j, b_j 构成 $H_1(X, \mathbb{Z})$ 的一组 $\mathbb{Z}$-基, 其**相交数** (intersection number) 为 $a_i \cdot a_j = 0$, $b_i \cdot b_j = 0$, $a_i \cdot b_j = \delta_{ij} = -b_j \cdot a_i$ [其中 δ_{ij} 为 Kronecker-δ 记号, 当 $i = j$ 时 $\delta_{ij} = 1$, 否则 $\delta_{ij} = 0$] .

这些曲线形如下图:



若我们将球面添加 g 个环柄沿曲线 a_j, b_j 割开 [注意 x_0 是任何一对 a_j, b_j 的唯一交点] , 则得到单连通的 $4g$-边形 Δ.

设 X 为亏格 g 的紧黎曼曲面. 则存在 $4g$-边形 Δ, 使得 X 由 Δ 通过上述方式得到. 取定 $\Delta \to X$ [保定向的微分同胚] . 于是我们得到了 X 上 [分段可微的] 闭曲线 a_i, b_j. 若 φ 为定义在这些曲线的邻域上的光滑闭1-形式, 则记

$$A_k(\varphi) = \int_{a_k} \varphi, \quad B_k(\varphi) = \int_{b_k} \varphi,$$

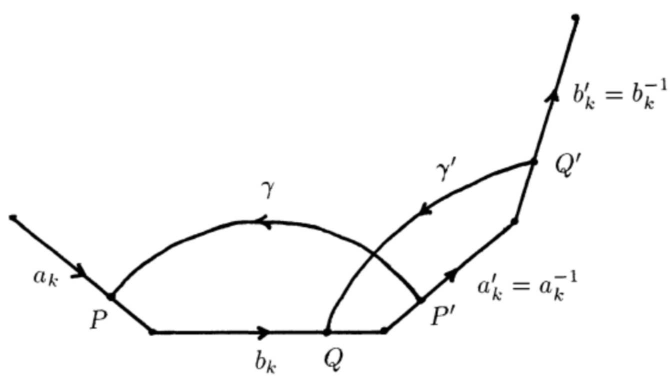
分别称为 φ 的a-**周期** 与b-**周期**.

设 α 为 X 上的光滑闭 1-形式, φ 为定义在 $\bigcup a_i \cup \bigcup b_j$ 的某邻域上的光滑闭 1-形式. 将它们分别视为 $\Delta(=\overline{\Delta})$ 与 $\partial\Delta$ 上的 1-形式. 取定 $P_0 \in \mathring{\Delta}$, 对任意 $P \in \Delta$, 令 $u(P) = \int_{P_0}^{P} \alpha$ [注意 Δ 单连通] . 则有:

引理 14.1.

$$\int_{\partial\Delta} u\varphi = \sum_{k=1}^{g} (A_k(\alpha)B_k(\varphi) - B_k(\alpha)A_k(\varphi)).$$

证明. 对于 $P \in a_k$, 记 P' 为 P 在边 a'_k 上相应的点. 记 γ 为从 P' 到 P 的曲线, 如下图所示:



则 $u(P) = u(P') = \int_{\gamma} \alpha$. 注意 γ 在 X 中的像为闭曲线, 且同调于 b_k^{-1}, 又因为 α 为闭形式, 从而

$$u(P) - u(P') = \int_{b_k^{-1}} \alpha = -B_k(\alpha).$$

同理, 对于 $Q \in b_k$, 相应的 $Q' \in b'_k$, 则

$$u(Q) - u(Q') = \int_{a_k} \alpha = A_k(\alpha).$$

从而

$$\begin{aligned}
\int_{\partial\Delta} u\varphi &= \sum_{k=1}^{g} \left(\int_{a_k} + \int_{a'_k} + \int_{b_k} + \int_{b'_k} \right) u\varphi \\
&= \sum_{k=1}^{g} \int_{a_k} (u(P) - u(P'))\varphi(P) + \sum_{k=1}^{g} \int_{b_k} (u(Q) - u(Q'))\varphi(Q) \\
&= \sum_{k=1}^{g} \left(-B_k(\alpha) \int_{a_k} \varphi + A_k(\alpha) \int_{b_k} \varphi \right),
\end{aligned}$$

[在上式中, $P \in a_k$, $Q \in b_k$, P', Q' 分别为它们在 a'_k, b'_k 上相应的点]. 从而引理得证. □

有如下基本事实:

性质 14.1. 设 X 为亏格 $g > 0$ 的紧黎曼曲面. 沿用上文记号. 设 ω 为 X 上的不恒为零的全纯 1-形式, 则

$$\operatorname{Im} \sum_{k=1}^{g} A_k(\omega)\overline{B_k(\omega)} < 0.$$

特别地, 若 $\omega \in H^0(X, \Omega)$, 且它所有的 a-周期都为零, 则 $\omega = 0$.

证明. 在上述引理中, 令 $\alpha = \omega$, $\varphi = \overline{\omega}$. 首先由 Stokes 定理可得

$$\int_{\partial\Delta} u\overline{\omega} = \int_{\Delta} \mathrm{d}u \wedge \overline{\omega} = \int_X \omega \wedge \overline{\omega}.$$

若 (U, z) 为 X 的局部坐标, $z = x + iy$, 并且在此坐标下 $\omega = f\,\mathrm{d}z$, $f \in \mathcal{O}(U)$, 则

$$\int_U \omega \wedge \overline{\omega} = \int_U |f|^2 \,\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}\bar{z} = -2i \int_U |f|^2 \,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y,$$

从而 $\dfrac{1}{2i} \displaystyle\int_X \omega \wedge \overline{\omega} < 0$, 除非 $\omega \equiv 0$. 另一方面, 由引理可知

$$\frac{1}{2i} \int_X \omega \wedge \overline{\omega} = \frac{1}{2i} \sum_{k=1}^{g} \left(A_k(\omega)\overline{B_k(\omega)} - B_k(\omega)\overline{A_k(\omega)} \right) = \operatorname{Im} \sum_{k=1}^{g} A_k(\omega)\overline{B_k(\omega)}.$$

□

推论 14.1. 设 $\omega_1,...,\omega_g$ 为 $H^0(X,\Omega)$ 的一组基. 记

$$A_{jk}=\int_{a_k}\omega_j.$$

则矩阵 $(A_{jk})_{1\leq j,k\leq g}$ 可逆.

证明. 其实, 记 $A_j=(\int_{a_1}\omega_j,...,\int_{a_g}\omega_j)$ 为 g 维向量. 如果 $\sum_{j=1}^{g}c_jA_j=0$, 则 $\sum_{j=1}^{g}c_j\omega_j$ 的 a-周期为零, 从而 $\sum_{j=1}^{g}c_j\omega_j=0$, 从而 $c_j=0,\forall j$. □

由此推论, 可以适当选取 $H^0(X,\Omega)$ 的一组基 $\omega_1,...,\omega_g$ 使得

$$\int_{a_k}\omega_j=\delta_{kj}\quad(\text{Kronecker}\,\delta\text{ 记号}),$$

称之为 $H^0(X,\Omega)$ 的一组**正规基** (normalized basis). [与 $H_1(X,\mathbb{Z})$ 的基 a_i,b_j 的选取有关] .

定理. *(黎曼双线性关系).* 设 X 为亏格 $g>0$ 的紧黎曼曲面, $\omega_1,...,\omega_g$ 为 $H^0(X,\Omega)$ 的一组正规基. 记

$$B_{jk}=\int_{b_j}\omega_k.$$

则复方阵 $B=(B_{jk})$ 是对称的, 且其虚部是正定的.

证明. 记号 a_j,b_k 与 Δ 的含义同之前, 再记 $u_j(P)=\int_{P_0}^{P}\omega_j$, 则由 Stokes 定理得

$$\int_{\partial\Delta}u_j\omega_k=\int_X\omega_j\wedge\omega_k=0;$$

另一方面, 由引理14.1 以及 $A_\nu(\omega_j)=\delta_{\nu j}$ 可得

$$\begin{aligned}\int_{\partial\Delta}u_j\omega_k&=\sum_{\nu=1}^{g}\big(A_\nu(\omega_j)B_\nu(\omega_k)-B_\nu(\omega_j)A_\nu(\omega_k)\big)\\&=B_j(\omega_k)-B_k(\omega_j),\end{aligned}$$

因此 B 是对称的. 现在设 $c_1, ..., c_g \in \mathbb{R}$ 不全为零, 记 $\omega = \sum_{k=1}^{g} c_k \omega_k$. 由性质14.1,

$$\operatorname{Im} \sum_{\nu=1}^{g} A_\nu(\omega) \overline{B_\nu(\omega)} < 0.$$

由于 $A_\nu(\omega) = c_\nu$, $c_k \in \mathbb{R}$, 从而

$$\operatorname{Im} \sum_{\nu k} c_\nu c_k \overline{B_{\nu k}} < 0,$$

即

$$\operatorname{Im} \sum_{\nu k} c_\nu c_k B_{\nu k} > 0.$$

□

对于 X 上两个不同的点 P, Q, 存在 X 上的亚纯 1-形式 φ, 使得 φ 只有 P, Q 两个极点, 且它们都是单极点, 并满足 $\operatorname{Res}_P(\varphi) = +1$, $\operatorname{Res}_Q(\varphi) = -1$ [由第10 节给出的关于 1-形式的 Mittag-Leffler 定理可得] . 由推论14.1可知, 存在全纯 1-形式 φ', 使得 $\omega_{PQ} := \varphi + \varphi'$ 的 a-周期为零 [假设 a_i, b_j 不经过点 P, Q] ; ω_{PQ} 被唯一确定, 称为**第三类正规** Abel **微分** (normalized abelian differential of the third kind).

对于 $P \in X$, 整数 $n \geq 1$, 以及 P 点的局部坐标 (U, z) 使得 $z(P) = 0$, 则存在唯一的 X 上的亚纯 1-形式 $\omega_P^{(n)}$, 使得它在 $X - \{P\}$ 全纯, 并且 $\omega_P^{(n)} - \dfrac{\mathrm{d}z}{z^{n+1}}$ 在 U 全纯, 并且 $\omega_P^{(n)}$ 的 a-周期为零. 称该亚纯 1-形式为**第二类正规** Abel **微分** (normalized abelian differential of the second kind). [而 "第一类" 正规阿贝尔微分就是通常的全纯 1-形式.] X 上的任何亚纯微分形式都是这三类正规 Abel 微分的线性组合.

定理. *(互反定理). 设 ω_j, $j = 1, ..., g$ 为 $H^0(X, \Omega)$ 的正规基, $\omega_P^{(n)}$, ω_{PQ} 为第二, 三类正规 Abel 微分. 则有:*

(1) $\displaystyle\int_{b_k} \omega_{PQ} = 2\pi i \int_Q^P \omega_k$ *[等号右边的积分路径为 $X - \bigcup a_i - \bigcup b_j$ 当中的从 P 到 Q 的连线] .*

(2) *若 (U, z) 为点 P 的用于定义 $\omega_P^{(n)}$ 的局部坐标, $\omega_k = f_k \, \mathrm{d}z$, 则*

$$\int_{b_k} \omega_P^{(n)} = 2\pi i \cdot \frac{1}{n!} f_k^{(n-1)}(P).$$

证明. 像之前那样, 视 $X-\bigcup a_i-\bigcup b_j$ 为凸多边形 Δ, 并记 $u_k(x)=\int_{P_0}^{x}\omega_k$ [其中 P_0 为 Δ 中固定的一点, 积分路径为 Δ 中连接这两点的任何一条]. 由引理14.1,

$$\begin{aligned}\int_{\partial\Delta}u_k\omega_{PQ} &= \sum_{\nu}\left(A_\nu(\omega_k)-B_\nu(\omega_{PQ})-B_\nu(\omega_k)-A_\nu(\omega_{PQ})\right)\\ &= B_k(\omega_{PQ})\quad [\text{因为 } A_\nu(\omega_k)=\delta_{\nu k},\ \text{以及 } A_\nu(\omega_{PQ})=0]\\ &= \int_{b_k}\omega_{PQ}.\end{aligned}$$

另一方面, 由于 Δ 单连通, ω_{PQ} 在点 P,Q 处的留数分别为 $+1$, -1, 从而由留数定理得

$$\int_{\partial\Delta}u_k\omega_{PQ}=2\pi i(u_k(P)-u_k(Q))=2\pi i\int_Q^P\omega_k.$$

□

这就证明了 (1). 而 (2) 的证明也类似: $\int_{b_k}\omega_P^{(n)}=\int_{\partial\Delta}u_k\omega_P^{(n)}=2\pi i\operatorname{Res}_P(u_k\omega_P^{(n)})=2\pi i\operatorname{Res}_P\left(u_k(z)\frac{\mathrm{d}z}{z^{n+1}}\right)=2\pi i\frac{1}{n!}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\right)^n u_k(z)=2\pi i\frac{1}{n!}f_k^{(n-1)}(z)$ [因为在 P 附近 $\frac{\mathrm{d}u_k}{\mathrm{d}z}=f_k$].

互反定理有时也被称为第二类和第三类微分的周期的双线性关系. 如果我们丢掉上面强加的正规化条件, 这就会变得更清楚.

15　雅可比簇与 Abel 定理

设 X 为亏格 $g\geq 1$ 的紧黎曼曲面. 在上一节我们用凸 $4g$-边形来描述 X, 取定 a_i,b_j 为 $H_1(X,\mathbb{Z})$ 相应的基.

取 $\omega_1,...,\omega_g$ 为 $H^0(X,\Omega)$ 的正规基: $\int_{a_j}\omega_k=\delta_{jk}$. 记 $\Lambda:=\left\{\lambda_\gamma\middle|\gamma\in H_1(X,\mathbb{Z})\right\}$ 为 $\mathbb{C}^g$ 的子群, 其中 $\lambda_\gamma=(\int_\gamma\omega_1,...,\int_\gamma\omega_g)\in\mathbb{C}^g$. 则 $\lambda_{a_k}=(0,...,1,...,0)=e_k$, 即 $\mathbb{C}^g$ 当中第 k 个分量为 1, 其余分量都为 0 的向量; 并且 $\lambda_{b_k}=(\int_{b_k}\omega_1,...,\int_{b_k}\omega_g)$ [以后记作 B_k] 为矩阵 $B=(B_{jk})$ 的列向量, $B_{jk}=\int_{b_j}\omega_k$. 由于 $\operatorname{Im}(B)$ 正定, 从而向量

组 $\{e_1,...,e_g;B_1,...,B_g\}$ 是 $\mathbb{R}$-线性无关的. 又因为 $\{a_i,b_j\}$ 生成 $H_1(X,\mathbb{Z})$, 从而 $\Lambda=\mathbb{Z}e_1+\cdots+\mathbb{Z}e_g+\mathbb{Z}B_1+\cdots+\mathbb{Z}B_g$. 因此 Λ 是 $\mathbb{C}^g$ 的格点子群, 紧商群

$$J(X):=\mathbb{C}^g/\Lambda$$

称为黎曼曲面 X 的**雅可比簇** (Jacobian variety).

也可如下方式来内蕴地定义 $J(X)$. 记 V 为 $H^0(X,\Omega)$ 的对偶空间 [由 Serre 对偶定理可知它典范同构于 $H^1(X,\mathcal{O})$] . 则自然有如下的从 $H_1(X,\mathbb{Z})$ 到 V 的群同态: 对 $\gamma\in H_1(X,\mathbb{Z})$, 它在 V 中的像为 $H^0(X,\Omega)$ 上的线性函数 $\omega\mapsto\displaystyle\int_\gamma\omega$. 从而上述 [关于 a_i,b_j 与 ω_k 的] 选取将 $H^0(X,\Omega)^*$ 自然等同于 $\mathbb{C}^g$, 并且将 $H_1(X,\mathbb{Z})$ 的像集等同于 Λ [上述讨论也表明, 该群同态为 $H_1(X,\mathbb{Z})$ 与 $H^0(X,\Omega)^*$ 的某个格点子群的同构] . 则

$$J(X)=H^0(X,\Omega)^*/\mathrm{im}(H_1(X,\mathbb{Z})).$$

取定基点 $P_0\in X$. 我们定义 **Abel-Jacobi 映射**$A:X\to J(X)$ 如下: 对于 $P\in X$, 任取一条从 P_0 到 P 的曲线 c, 令

$$A(P):=\Big(\int_{P_0}^P\omega_1,...,\int_{P_0}^P\omega_g\Big)\mod\Lambda$$

[这里所有的积分都是同一个沿路径 c] . 若 c' 是从 P_0 到 P 的另一条路径, 则存在 $\gamma\in H_1(X,\mathbb{Z})$ 使得 $\displaystyle\int_c\omega_k=\int_{c'}\omega_k+\int_\gamma\omega_k$, $\forall k$, 从而该映射是良定的. [内蕴地, $A(P)=H^0(X,\Omega)$ 上的线性函数 $\omega\mapsto\displaystyle\int_c\omega$ 的等价类.]

注意 $J(X)$ 为 Abel 群, 从而我们定义映射 $X^N\to J(X)$, $(P_1,...,P_N)\mapsto\displaystyle\sum_{j=1}^N A(P_j)$. 记 $\mathrm{Div}(X)$ 为 X 的所有除子构成的集合, 则我们也可定义映射 $\mathrm{Div}(X)\to J(X)$ 为

$$\sum_{i=1}^r n_iP_i\mapsto\sum_{i=1}^r n_iA(P_i).$$

我们把上述定义的两个映射也记作 A.

在研究 X 与 $J(X)$ 之间的关系中真正核心的定理通常被称为 Abel 定理. Abel 对这个定理的表述 [与现在] 是相当不同的 (而且, 在某些方面, 甚至更一般). 此定理的如今常见版本的表述由黎曼在他关于 Abel 函数的奠基文章 [2] 中首先提出.

定理. *(Abel 定理).* 设 D 为 X 上的次数为 0 的除子. 则 D 线性等价于 0 当且仅当 $A(D) = 0 \in J(X)$.

换句话说, 此定理表明如下. 若 $P_1, ..., P_r; Q_1, ..., Q_r$ 为 X 上的点 $[\forall i, j,\ Q_j \neq P_1]$. 则存在亚纯函数 f, 使得 $\sum P_i$ 为其零点除子并且 $\sum Q_j$ 为其极点除子 [即 $(f) = P_1 + \cdots + P_r - Q_1 - \cdots - Q_r$] 的充要条件为:

$$\sum_{\nu=1}^{k} \int_{P_0}^{P_\nu} \vec{\omega} \equiv \sum_{\nu=1}^{k} \int_{P_0}^{Q_\nu} \vec{\omega} \mod \Lambda, \quad \vec{\omega} = (\omega_1, ..., \omega_g),$$

上述积分的路径分别沿着 P_0 到 P_ν, 以及 P_0 到 Q_ν 的给定路径 [对于每个 ν, 积分路径对所有的 ω_k 都相同].

证明. 设除子 D 的次数为 0, 则 D 形如 $D = \sum_{k=1}^{r}(P_k - Q_k)$, 其中 P_k, Q_k 为 X 上的点 [且任意 k, l, $P_k \neq Q_l$].

假设存在亚纯函数 f 使得 $(f) = D$, 则存在常数 $c_1, ..., c_g \in \mathbb{C}$ 使得 $\frac{\mathrm{d}f}{f} = \sum_{k=1}^{r} \omega_{P_k Q_k} + \sum_{\nu=1}^{g} c_\nu \omega_\nu$. 此外, $\int_\gamma \frac{\mathrm{d}f}{f} \in 2\pi i\mathbb{Z}$, 对 X 上的任意 [不过任何点 P_k, Q_k 的] 闭曲线 γ 都成立.

反之, 若常数 $c_\nu \in \mathbb{C}$ 使得对任意闭曲线 γ 都成立 $\int_\gamma \varphi \in 2\pi i\mathbb{Z}$, 其中 $\varphi = \sum_{k=1}^{r} \omega_{P_k Q_k} + \sum_{\nu=1}^{g} c_\nu \omega_\nu$, 则 $(f) = D$, 其中 $f(P) = \exp(\int_{P_0}^{P} \varphi)$, [这里的 $\exp(\int_{P_0}^{P} \varphi)$ 是良定的, 因为 $\int_\gamma \varphi \in 2\pi i\mathbb{Z}$].

我们像之前一样, 通过将 X 沿 [不经过任何点 P_k, Q_k 的] 闭曲线 a_i, b_j 割开, 把 X 等同于多边形 Δ. 令

$$\varphi = \sum_{k=1}^{r} \omega_{P_k Q_k} + \sum_{\nu=1}^{g} c_\nu \omega_\nu.$$

那么, 对 $X - \bigcup\{P_k, Q_k\}$ 中的任何闭曲线 γ 都成立 $\int_\gamma \varphi \in 2\pi i\mathbb{Z}$ 当且仅当 $A_\nu(\varphi) = \int_{a_\nu} \varphi \in 2\pi i\mathbb{Z}$ 并且 $B_\nu(\varphi) = \int_{b_\nu} \varphi \in 2\pi i\mathbb{Z}$ 对任意 $\nu = 1, ..., g$ 成立. 事实上, 若 C_k, C_k'

分别为绕 P_k, Q_k 的小圆周［在相应点的局部坐标下］，则 γ 同调于 $a_\nu, b_\nu, C_k, C_{k'}$ 的 $\mathbb{Z}$-线性组合; 然而由于 ω_{PQ} 在 P, Q 处的留数分别为 $+1, -1$, 从而 $\displaystyle\int_{C_k} \varphi = +2\pi i$, $\displaystyle\int_{C'_k} \varphi = -2\pi i, \forall k$.

因此, 存在亚纯函数 f 使得 $(f) = D$ 当且仅当:

$$\begin{aligned}&\text{存在 } c_\nu \in \mathbb{C} \text{使得, 如果 } \varphi = \sum_{k=1}^{r} \omega_{P_k Q_k} + \sum_{\nu=1}^{g} c_\nu \omega_\nu, \text{则} \\ &A_\nu(\varphi),\ B_\nu(\varphi) \in 2\pi i \mathbb{Z}, \quad \nu = 1, ..., g. \end{aligned} \tag{$*$}$$

然而, 由于第三类 Abel 微分 $\omega_{P_k Q_k}$ 的 a-周期为 0, 并且 $A_\nu(\omega_\mu) = \delta_{\nu\mu}$, 从而 $A_\nu(\varphi) = c_\nu$. 此外, 由互反定理可知

$$B_\nu(\varphi) = \sum_{k=1}^{r} 2\pi i \int_{Q_k}^{P_k} \omega_\nu + \sum_{\mu=1}^{g} c_\mu B_{\mu\nu}.$$

因此, $A_\nu(\varphi), B_\nu(\varphi) \in 2\pi i \mathbb{Z}$ 当且仅当存在整数 $(n_1, ..., n_g)$, $(m_1, ..., m_g)$ 使得

$$2\pi i n_\nu = c_\nu$$

$$\sum_{k=1}^{r} \int_{Q_k}^{P_k} \omega_\nu + \sum_{\nu=1}^{g} n_\mu B_{\mu\nu} = m_\nu,$$

$(\nu = 1, ..., g)$. 后者可写为

$$\sum_{k=1}^{r} \int_{Q_k}^{P_k} \vec{\omega} = -\sum_{\mu=1}^{g} n_\mu B_\mu + \sum_{\mu=1}^{g} m_\mu e_\mu,$$

其中 e_μ 为第 μ 个分量为 1, 其余分量为 0 的向量, 向量 $B_\mu = (B_{\mu 1}, ..., B_{\mu g})$; 因为 e_μ, B_μ 为格点群 Λ 的 $\mathbb{Z}$-基, 从而 $(*)$ 成立当且仅当

$$\sum_{k=1}^{r} \int_{Q_k}^{P_k} \vec{\omega} \in \Lambda.$$

从而定理得证. □

接下来研究雅可比簇 $J(X)$ 与 X^g 的关系. 记 S_n 为 n 元对称群 $[= \{1, 2, ..., n\}$ 的置换群］. S_n 在笛卡尔积 $X^n = \underbrace{X \times \cdots \times X}_{n\text{个}}$ 上有自然的作用; 商集 $S^n(X) := X^n / S_n$

称为 X 的 n 次对称乘积. 事实上 $S^n(X)$ 为 n 维复流形. 我们如下引入 $S^n(X)$ 的局部坐标 [尤其是 S_n 的非平凡元素的不动点附近的局部坐标] .

考虑 S_r 在 $\mathbb{C}^r$ 上的作用, 以及原点 $0 \in \mathbb{C}^r$ 的邻域. $\mathbb{C}^r$ 的在原点 0 处的在 S_r 作用下不变的全纯函数芽 F 都是关于 $\mathbb{C}^r$ 的坐标 $z_1, ..., z_r$ 的初等对称函数的全纯函数 [牛顿定理] ; 等价地, F 是关于 $w_1 = z_1 + \cdots + z_r$, $w_2 = \dfrac{1}{2!}(z_1^2 + \cdots + z_r^2)$, ..., $w_r = \dfrac{1}{r!}(z_1^r + \cdots + z_r^r)$ 的全纯函数, 我们取 $w_1, ..., w_r$ 作为 $\mathbb{C}^r/S_r$ 的局部坐标. 若 $P_1, ..., P_n \in X$, 我们不妨重新对这些 P 编号, 使得 $P_1 = \cdots = P_{r_1} (=: Q_1)$, $P_{r_1+1} = \cdots = P_{r_1+r_2} (=: Q_2)$, ..., $P_{r_1+\cdots+r_{p-1}+1} = \cdots = P_{r_1+\cdots+r_p} (=: Q_p)$, 其中 $r_1 + \cdots + r_p = n$, 且点 $Q_1, ..., Q_p$ 两两互异, S_n 的保持 $(P_1, ..., P_n)$ 不变的元素构成的集合为 $S_{r_1} \times \cdots \times S_{r_p}$ [S_{r_k} 作用于包含 r_k 个点的第 k 个分块] , 从而 $(P_1, ..., P_n)$ 在 $S^n(X)$ 的邻域同构于 $(0, ..., 0)$ 在 $\mathbb{C}^{r_1}/S_{r_1} \times \cdots \mathbb{C}^{r_p}/S_{r_p}$ 的邻域, 我们对每一个分块都采用上述局部坐标.

考察映射 $A : X^g \to J(X)$, $(P_1, ..., P_g) \mapsto \displaystyle\sum_{k=1}^{g} A(P_k)$. 自然地, A 诱导了映射 [仍记作 A] $A : S^g(X) \to J(X)$. 我们也把 $S^g(X)$ 自然地等同于所有的次数为 g 的除子 $D \geq 0$ 之全体.

定理 15.1. *$A : S^g(X) \to J(X)$ 为双有理映射; 即, 存在维数 $< g$ 的解析集 $Y \subseteq S^g(X)$ 使得 $A : S^g(X) - Y \to J(X) - A(Y)$ 为解析同构.*

我们先从以下引理开始:

引理 15.1. *满足以下性质的点 $(P_1, ..., P_n) \in X^g$ 构成的集合是 X^g 的稠密开集: 映射 $A : S^g(X) \to J(X)$ 的微分在 $D = \sum P_i$ 处的秩取到最大, $= g$.*

证明. 取 P_j 在 X 的局部坐标 (U_j, z_j), $z_j(P_j) = 0$. 取 $J(X)$ 的来自于 $\mathbb{C}^g$ 的局部坐标 [注意 $J(X) = \mathbb{C}^g/\Lambda$] , 则映射 A 可显示表示为 $A(z_1, ..., z_g) = \displaystyle\sum_j \int^{z_j} \vec{\omega}$, $(\vec{\omega} = (\omega_1, ..., \omega_g))$. 记 $\vec{\omega}$ 在 U_j 局部表示为 $\vec{f_j}\,\mathrm{d}z_j$, $[\vec{f_j} = (f_{j_1}, ..., f_{j_g})]$, 则映射 A 在 $D = \sum P_i$ 处的雅可比矩阵为

$$\begin{pmatrix} \vec{f_1}(P_1) \\ \vdots \\ \vec{f_g}(P_g) \end{pmatrix}.$$

由第13节引理13.4 [若 $\dim H^0(X,L)=k$, 则存在 k 个点 x_j 使得对任意 $s\in H^0(X,L)$, 若 s 在 $x_1,...,x_k$ 都为零, 则 $s=0$] 以及 $h^0(\Omega)=g$ 可知, 存在 $(P_1,...,P_g)$ 使得该矩阵的秩为 g. 此外由引理13.4的证明过程还可以知道, 这样的点构成的集合是稠密的. □

引理 15.2. 若 $D=\sum_{i=1}^{g}P_i\in S^g(X)$, 则 $A^{-1}A(D)$ 为 $\mathbb{P}^r$ 到 $S^g(X)$ 的某个全纯双射的像集, 其中 $r=\dim|D|$. 特别地, $A^{-1}A(D)$ 是连通集.

证明. 若 $D_1,D_2\in S^g(X)$ 满足 $A(D_1)=A(D_2)$, 则由 Abel 定理可知 D_1 与 D_2 线性等价 [注意 $\deg(D_1-D_2)=0$]. 记 $\mathbb{P}^r=\mathbb{P}(H^0(X,\mathcal{O}_D))$, 其中 $D\in S^g(X)$, 为射影空间 $\left(H^0(X,\mathcal{O}_D)-\{0\}\right)/\mathbb{C}^*$. 由之前所讨论可知, 映射 $H^0(X,\mathcal{O}_D)-\{0\}\to S^g(X)$, $s\mapsto \operatorname{div}(s)$ 诱导了从 $\mathbb{P}^r$ 到 $A^{-1}A(D)$ 的双射. 接下来断言该映射是全纯的. 考虑 $U\subseteq\mathbb{C}^N$ 的开集以及 $\Delta_\varepsilon\times U$ 上的全纯函数 $f(x,t)$, [其中 $\Delta_\varepsilon=\{|x|<\varepsilon\}$]. 如果在 $|x|=\rho(<\varepsilon)$ 处成立 $f(x,t)\neq 0$, $\forall t\in U$, 则对于给定 $t_0\in U$, $f(x,t)$ 在 $|x|<\rho$ 内的零点 $x_i(t)$ 的个数 [计重数] 关于 t_0 附近的 t 是常数, 记作 k; 并且对于 $m\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$, 成立

$$\sum_{i=1}^{k}(x_i(t))^m=\frac{1}{2\pi i}\int_{|x|=\rho}x^m\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)}{f(x,t)}\,\mathrm{d}x,$$

从而上式左边 [在我们的具体问题中, 是 $S^g(X)$ 的局部坐标] 关于 t 全纯. 我们将此结论应用于一般截面 $t_0s_0+\cdots+t_rs_r\in H^0(X,\mathcal{O}_D)$ 上 [其中 s_j 构成基] 即可. □

注记. 上述映射 $\mathbb{P}^r\to A^{-1}A(D)$ 其实是双全纯的 [见定理15.2下方].

定理15.1的证明. 由引理15.1, 集合 $Y:=\left\{D\in S^g(X)\middle|\operatorname{rank}(\mathrm{d}A)|_D<g\right\}$ 是维数 $<g$ 的解析集. 由引理15.2, 若 $D\in S^g(X)-Y$, 则 $A^{-1}A(D)=\{D\}$. 结果如下.

注意若 $D\in S^g(X)-Y$, 则 $h^0(D)=1$. 事实上, 引理15.2表明, 若 D 为 $A^{-1}A(D)$ 的孤立点, 则 $\dim|D|=0$. 由 Riemann-Roch 定理,

$$h^0(D)-h^0(K-D)=1-g+\deg D=1$$

可知 Y 恰为次数为 g 的特殊除子之全体. □

定理 15.2. 对任意 $D \in S^g(X)$, 映射 $A : S^g(X) \to J(X)$ 在 D 处的秩等于 $g - \dim|D|$.

证明. 记 $D = r_1P_1 + r_2P_2 + \cdots + r_nP_n$, 其中 $r_j > 0$, $\sum r_j = g$, 且 $P_1, ..., P_n$ 两两不同. 取 $S^g(X)$ 在 D 处的局部坐标

$$w_1^{(1)} = \sum_{i=1}^{r_1} x_i,\ w_2^{(1)} = \frac{1}{2!}\sum_{i=1}^{r_1} x_i^2,\ ...,\ w_{r_1}^{(1)} = \frac{1}{r_1!}\sum_{i=1}^{r_1} x_i^{r_1},$$

$$w_1^{(2)} = \sum_{r_1<i\le r_1+r_2} x_i,\ w_2^{(2)} = \frac{1}{2!}\sum_{r_1<i\le r_1+r_2} x_i^2,\ ...,\ w_{r_2}^{(2)} = \frac{1}{r_2!}\sum_{r_1<i\le r_1+r_2} x_i^{r_2}$$

等等. [其中 $x_1, ..., x_g$ 分别为 X 在 $\underbrace{P_1, ..., P_1}_{r_1\text{个}}, ..., \underbrace{P_n, ..., P_n}_{r_n\text{个}}$ 的局部坐标.]

记在 P_1 附近局部成立 $\omega_k = f_k\,\mathrm{d}z$, 则对于 $1 \le i \le r_1$, 有

$$\int_{P_0}^{x_i} \omega_k = \text{常数} + x_i f_k(P_1) + \frac{x_i^2}{2!} f_k'(P_1) + \cdots + \frac{x_i^{r_1}}{r_1!} f_k^{(r_1-1)}(P_1) + \cdots.$$

因此

$$\sum_{i=1}^{r_1}\int_{P_0}^{x_i} \omega_k = \text{常数} + w_1^{(1)} f_k(P_1) + w_2^{(1)} f_k'(P_1) + \cdots + w_{r_1}^{(1)} f_k^{(r_1-1)}(P_1) + O(w^2).$$

因此,

$$\sum_{i=1}^{g}\int_{P_0}^{x_i} \omega_k = \text{常数} + \sum_{\nu=1}^{n}\sum_{1\le j\le r_\nu} w_j^{(\nu)} f_k^{(j-1)}(P_\nu) + O(w^2).$$

于是, 映射 A 在 D 处的秩等于如下列向量构成的矩阵的秩:

$$\Phi_k = \begin{pmatrix} f_k(P_1) \\ \vdots \\ f_k^{(r_1-1)}(P_1) \\ f_k(P_2) \\ \vdots \\ f_k^{(r_2-1)}(P_2) \\ \vdots \end{pmatrix} \qquad k = 1, ..., g.$$

注意这些列向量的线性组合 $\sum_{k=1}^{g} c_k\Phi_k$ 等于零，当且仅当全纯 1-形式 $\omega = \sum_{k=1}^{g} c_k\omega_k$ 满足对任意 $\nu = 1, ..., n$, $\mathrm{ord}_{P_\nu}(\omega) \geq r_\nu$; 也就是说，当且仅当 $(\omega) \geq D$. 因此向量组 Φ_k 的线性无关的关系的个数为 $h^0(\Omega_{-D})$; 因为 $h^0(D) - h^0(\Omega_{-D}) = 1 - g + g = 1$, 从而 $h^0(\Omega_{-D}) = h^0(D) - 1 = \dim|D|$, 因此矩阵 $(\Phi_1, ..., \Phi_g)$ 的秩，也就是 $\mathrm{d}A$ 在 D 处的秩，等于 $g - \dim|D|$. □

推论 15.1. *对任意 $D \in S^g(X)$, $A^{-1}A(D)$ 是维数为 $\dim|D|$ 的光滑子流形，之前定义的映射 $\mathbb{P}(H^0(X, \mathcal{O}_D)) \to A^{-1}A(D)$ 是解析同构.*

事实上，引理15.2表明 $A^{-1}A(D)$ 是维数 $\dim|D|$ 的解析集. 而定理15.2以及隐函数定理表明 $A^{-1}A(D)$ 是光滑的.

于是我们可知 $\mathbb{P}(H^0(X, \mathcal{O}_D)) \to A^{-1}A(D)$ 为复流形之间的全纯双射. 再由复分析的标准结果可知该映射是双全纯的.

再介绍两个更进一步的结果. 记 $\mathrm{Div}(X)$ 为 X 上的所有除子构成的集合, $P(X)$ 为 X 上的线性等价于 0 [特别地, 次数为 0] 的除子构成的子集. 记

$$\mathrm{Pic}(X) = \mathrm{Div}(X)/P(X).$$

若再记 $\mathrm{Div}^0(X)$ 为 X 的次数为 0 的除子之全体, 记 $\mathrm{Pic}^0(X) = \mathrm{Div}^0(X)/P(X)$, 则

定理 15.3. *Abel-Jacobi 映射 $A : \mathrm{Div}(X) \to J(X)$ 诱导 Abel 群同构*

$$A : \mathrm{Pic}^0(X) \to J(X).$$

证明. 显然 $A : \mathrm{Div}^0(X) \to J(X)$ 为 Abel 群同态. Abel 定理表明该同态的核恰为 $P(X)$, 从而自然诱导 Abel 群同态 $A : \mathrm{Pic}^0(X) \to J(X)$. 只需证明它是满同态. 这是因为定理15.1; 若 $D \in S^g(X)$ 被映到给定的 $\zeta \in J(X)$, P_0 为 Abel-Jacobi 映射 $A : X \to J(X)$ 的基点, 则 $D - gP_0$ 的次数为 0, 且被映到 ζ. □

定理 15.4. *若紧黎曼曲面 X 的亏格 $g > 0$, 则 Abel-Jacobi 映射 $A : X \to J(X)$ 为嵌入.*

证明. 若 $P, Q \in X$ 满足 $A(P) = A(Q)$, 则由 Abel 定理, 存在 X 上的亚纯函数 f 使得 $(f) = P - Q$, 从而 f 只有一个极点, 且为单极点. 这表明 X 同构于 $\mathbb{P}^1$, 亏格为 0, 矛盾. 因此 A 为单射.

映射 A 可显式表示为 $\left(\int_{P_0}^{x} \omega_1, ..., \int_{P_0}^{x} \omega_g\right)$, 其在 $P \in X$ 的切映射为 $(f_1(P), ..., f_g(P))$, 其中在局部坐标下 $\omega_k = f_k(z)$. 我们已经知道, 所有的 ω_k [从而 f_k] 在 X 上不存在公共零点, 因此 $\mathrm{d}A$ 也是单射. □

我们以对定理15.2的一个注记来结束本节. 我们已经讨论了 $S^g(X) \to J(X)$ 版本的 Abel-Jacobi 映射, 因为它最重要. 然而, 该定理及其证明可推广为如下:

定理 15.5. *设 $1 \leq k \leq g$, 考虑映射 $A : S^k(X) \to J(X)$. 若 $D = P_1 + \cdots + P_k \in S^k(X)$, 则纤维 $A^{-1}A(D)$ 为光滑子流形, 且解析同构于 $\mathbb{P}(H^0(X, \mathcal{O}_D))$. 切映射 $\mathrm{d}A$ 在 D 处的秩等于 $k - \dim |D|$. 在 $S^k(X)$ 的某个解析真子集之外, 映射 A 为单射.*

若 $k > g$, 则上述这些论断, 除了关于 A 的单射性的内容, 都仍然成立. "$k = g$ 时 $\mathrm{d}A$ 在 D 处的秩等于 $g - \dim |D|$" 的证明过程可逐字照搬到一般情况.

至于单射, 只需证明集合 $\left\{D \middle| \operatorname{rank} \mathrm{d}A|_D = k\right\}$ $(k \leq g)$ 非空, 即 $\left\{D \in S^k(X) \middle| \dim |D| = 0\right\} \neq \varnothing$. 这是因为, 若除子 $D' \geq 0$ 的次数为 g, $\dim |D'| = 0$, 则可记 $D' = D + D''$ 使得 $\deg D = k$, $D'' \geq 0$, 从而 $\dim |D| = 0$.

16　黎曼 ϑ-函数

设 Λ 为 $\mathbb{C}^g$ 的一个格点子群, 即秩为 $2g$ 的离散子群, 则商群 $M = \mathbb{C}/\Lambda$ 为紧复流形, 称为**复环面** (complex torus). 设 L 为 M 上的全纯线丛, $\pi : \mathbb{C}^g \to M$ 为投影映射. 由复分析中众所周知的结果, $\mathbb{C}^g$ 上的任何全纯线丛 [乃至全纯向量丛] 都全纯同构于平凡丛. 记 $h : \pi^*(L) \to \mathbb{C}^g \times \mathbb{C}$ 为平凡化, 断言对于任意 $\lambda \in \Lambda$, $z \in \mathbb{C}^g$, 同构映射 $\pi^*(L)_z \to \mathbb{C}$ 与 $\pi^*(L)_{z+\lambda} \to \mathbb{C}$ 相差常数倍, 这是因为 $\pi^*(L)_z = \pi^*_{z+\lambda} = L_{\pi(z)}$; 如果我们将该常数记作 $\varphi_\lambda(z)$, 则对于给定的 $\lambda \in \Lambda$, $z \mapsto \varphi_\lambda(z)$ 是无零点的全纯函数; 此外对任意 $\lambda, \mu \in \Lambda$,

成立

$$\varphi_\mu(z+\lambda)\varphi_\lambda(z)=\varphi_{\lambda+\mu}(z),\quad \forall z\in\mathbb{C}^g.$$

满足上式的函数族 $\left\{\varphi_\lambda(z)\middle|\lambda\in\Lambda\right\}$ 称为一个**自守因子** (factor of automorphy). 反之, 任何一族这样的函数, 即自守因子, 都定义了 M 上的一个全纯线丛: 只需将 $\mathbb{C}^g\times\mathbb{C}$ 中的点 (z,u) 与 (w,v) 等同, 如果存在 $\lambda\in\Lambda$ 使得 $w=z+\lambda$ 且 $v=\varphi_\lambda(z)u$. 这种线丛的截面可以表示为 $\mathbb{C}^g$ 上满足如下性质的全纯函数 f: 对任意 $\lambda\in\Lambda$, $f(z+\lambda)=\varphi_\lambda(z)f(z)$. 这样的函数称为**乘性全纯函数** (multiplicative holomorphic function).

设 X 是亏格 $g\geq 1$ 的紧黎曼曲面, $J(X)=\mathbb{C}^g/\Lambda$ 为其雅可比簇. 我们沿用15节的记号, 取 Λ 的标准基 $e_k=(0,...,1,0,...,0)$ [“1” 位于第 k 分量] 与 $B_\nu=(B_{\nu 1},...,B_{\nu g})$, 其中 $B_{\nu k}=\displaystyle\int_{b_\nu}\omega_k$. 则存在唯一的自首因子 $\{\varphi_\lambda\}$, 使得 $\varphi_{e_k}(z)\equiv 1$, 并且 $\varphi_{B_k}(z)=e^{-2\pi i z_k-\pi i B_{kk}}$, $k=1,...,g$.

定义. 设整数 $r\geq 1$, $\theta(z)$ 为 $\mathbb{C}^g$ 上的全纯函数. 如果 $\theta(z+e_k)=\theta(z)$, $\theta(z+B_k)=e^{-2\pi i r(z_k+\frac{1}{2}B_{kk})}\theta(z)$, $k=1,...,g$, 则称 $\theta(z)$ 为 r 阶**θ-函数** *(theta function)*.

于是, r 阶 θ-函数可表示为 $L^{\otimes r}$ 的全纯截面, 其中 L 为 $J(X)$ 上的由自首因子 $\varphi_{e_k}(z)=1$, $\varphi_{B_k}(z)=e^{-2\pi i z_k-\pi i B_{kk}}$ 所定义的全纯线丛.

我们构造如下函数, 称为**黎曼 ϑ-函数**:

$$\vartheta(z):=\vartheta(z,B)=\sum_{n\in\mathbb{Z}^g}\exp\left\{\pi i\langle n,Bn\rangle+2\pi i\langle n,z\rangle\right\},$$

其中矩阵 $B=(B_{\nu k})$, $B_{\nu k}=\displaystyle\int_{b_\nu}\omega_k$. 注意 B 为对称矩阵, 并且虚部正定. 此外, 对于 $z=(z_1,...,z_g)$, $w=(w_1,...,w_g)$, 则 $\langle z,w\rangle=\sum z_iw_i$ 为 $\mathbb{C}^g$ 上的标准双线性型.

引理 16.1. *上述定义 ϑ 的级数在 $\mathbb{C}^g$ 的任意紧子集一致收敛; $\vartheta(z)$ 是 1 阶 θ-函数, 并且 $\vartheta\not\equiv 0$, $\vartheta(z)=\vartheta(-z)$.*

证明. 注意 $|e^{\pi i\langle n,Bn\rangle}|=e^{-\pi\langle n,\mathrm{Im}(B)n\rangle}$. 因为 $\mathrm{Im}(B)$ 正定, 从而存在 $\delta>0$ 使得 $\langle u,\mathrm{Im}(u)\rangle\geq\delta\langle u,u\rangle=\delta|u|^2$, $\forall u\in\mathbb{R}^n$. 因此

$$\left|e^{\pi i\langle n,Bn\rangle}\right|\leq e^{-\pi\delta|n|^2},\quad n\in\mathbb{Z}^g.$$

对于 $\mathbb{C}^g$ 的紧子集 K, 则存在常数 $C>0$ 使得

$$\left|e^{2\pi i\langle n,z\rangle}\right| \leq e^{C|n|}, \quad z\in K,$$

从而收敛性易得.

显然 $\vartheta(z+e_k)=\vartheta(z)$; 从而 ϑ 关于每个分量都是周期 1 的. 作标准的傅里叶级数展开, 有

$$\begin{aligned}
\vartheta(z+B_k) &= \sum_{n\in\mathbb{Z}^g} e^{\pi i\langle n,Bn\rangle+2\pi i\langle n,z\rangle+2\pi i\langle n,B_k\rangle} \quad (Be_k=B_k)\\
&= \sum_{n\in\mathbb{Z}^g} \exp\Big(\pi i\langle n+e_k,B(n+e_k)\rangle+2\pi i\langle n+e_k,z\rangle\\
&\qquad -\pi i\langle e_k,Be_k\rangle-2\pi i\langle e_k,z\rangle\Big)\\
&= e^{-2\pi iz_k-\pi iB_{kk}}\vartheta(z)
\end{aligned}$$

[注意当 n 跑遍 $\mathbb{Z}^g$ 时, $n+e_k$ 也跑遍 $\mathbb{Z}^g$.] $\vartheta\not\equiv 0$ 是因为傅里叶系数不全为零的函数不可能恒为零. 将求和指标 n 换成 $-n$, 容易看出 $\vartheta(z)=\vartheta(-z)$. □

引理 16.2. 1 阶 θ-函数必为黎曼 ϑ-函数的常数倍.

证明. 设 $f(z)$ 为 1 阶 θ-函数, 因为 f 关于自变量的每个分量都是周期 1 的, 从而 f 具有傅里叶级数展开

$$f(z)=\sum_{n\in\mathbb{Z}^g} a_n e^{2\pi i\langle n,z\rangle}.$$

从而,

$$\begin{aligned}
&\sum_{n\in\mathbb{Z}^g} a_n e^{2\pi i\langle n,z+B_k\rangle}=f(z+B_k)\\
=\ & e^{-\pi iB_{kk}-2\pi iz_k}f(z)=e^{-\pi iB_{kk}}\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n e^{2\pi i\langle n-e_k,z\rangle}\\
=\ & \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_{n+e_k}e^{-\pi iB_{kk}}e^{2\pi i\langle n,z\rangle}.
\end{aligned}$$

因此 $a_{n+e_k}=e^{\pi iB_{kk}+2\pi i\langle n,B_k\rangle}a_n$. 因此若存在某个 n 使得 $a_n=0$, 则 $a_{n+e_k}=0, \forall k$, 进而对任意 $n\in\mathbb{Z}^g$ 都有 $a_n=0$. 特别地, $f\equiv 0$ 当且仅当 $a_0=0$.

将上述结论用于 $f-a_0\vartheta$, 即得 $f\equiv a_0\vartheta$. □

黎曼 ϑ-函数是研究 X 与 $J(X)$ 之间关系的强大工具. 我们将介绍的第一个应用是证明 Lefschetz 的一个著名的嵌入定理. 为此先介绍一些准备知识.

设 L 为 $J(X)$ 上的由自首因子 $\varphi_{e_k}\equiv 1, \varphi_{b_k}=e^{-2\pi i z_k-\pi i B_{kk}}$ 所定义的全纯线丛. 引理16.2表明 $H^0(X,L)$ 的维数是 1, 且 ϑ 定义了 L 的一个非零截面. 设 Θ 为 $J(X)$ 的由该截面定义的除子: $\Theta=\operatorname{div}(\vartheta)$. 在 $J(X)$ 的局部, Θ 由方程 $\vartheta(z)=0$ 所定义; 更具体地, 对于点 $a_0\in J(X)$, $z_0\in\mathbb{C}^g$ 被投影映射 $\pi:\mathbb{C}^g\to J(X)$ 映到 a, 则对 z_0 的小邻域 V, $\pi(V)=U$, $\Theta\cap U$ 由 $(U,\vartheta\circ(\pi|_V)^{-1})$ 所确定. 更集合论的讲法是, Θ 是 $\left\{z\in\mathbb{C}^g\middle|\vartheta(z)=0\right\}$ 在 $J(X)$ 的像集. 称此 Θ 为雅可比簇 $J(X)$ 的**Θ-除子** (theta-divisor).

我们还需要引理16.2的如下推广:

引理 16.3. 设 r 为正整数, 则阶数为 r 的 θ-函数构成的线性空间 V_r 的维数为 r^g. 特别地, V_r 是有限维空间.

[注记: 设 M 为紧复流形, E 是 M 上的全纯向量丛, 则用第7节定理7.1的方法也可证明 $H^0(M,E)$ 是有限维的.]

引理*16.3*的证明. 设 $f\in V_r$, 则 f 关于自变量的每个分量都是周期 1 的, 从而作傅里叶级数展开 $f(z)=\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}^g}a_ne^{2\pi i\langle n,z\rangle}$. 则有

$$\begin{aligned}
&\sum_{n\in\mathbb{Z}^g}a_ne^{2\pi i\langle n,B_k\rangle}e^{2\pi i\langle n,z\rangle}=f(z+B_k)=e^{-2\pi i r z_k-\pi i r B_{kk}}f(z)\\
=&\sum_{n\in\mathbb{Z}^g}a_ne^{-\pi i r B_{kk}}e^{2\pi i\langle n-re_k,z\rangle}=\sum_{n\in\mathbb{Z}^g}a_{n+re_k}e^{-\pi i r B_{kk}}e^{2\pi i\langle n,z\rangle},
\end{aligned}$$

从而可得 $a_{n+re_k}=e^{\pi i r B_{kk}+2\pi i\langle n,B_k\rangle}a_n$. 于是, 如果对任意 $n=(n_1,...,n_g)$, $0\le n_j<r$ 都成立 $a_n=0$, 则 $f\equiv 0$. 因此 $\dim_{\mathbb{C}}V_r\le r^g$.

任取 $s=(s_1,...,s_r)\in\mathbb{Z}^g$ 满足 $0\le s_j<r$, 定义函数

$$\vartheta_{r,s}(z)=\sum_{n\in\mathbb{Z}^g}\exp\left\{\pi i\langle B(n+\frac{s}{r}),rn+s\rangle+2\pi i\langle z,rn+s\rangle\right\}.$$

则与引理16.1一样, 可知 $\vartheta_{r,s}$ 在 $\mathbb{C}^g$ 内紧一致收敛, 且容易验证 $\vartheta_{r,s}\in V_r$, $\forall s$. 因为 $\vartheta_{r,s}$ 的非零傅里叶系数落在格点集 $\left\{s+rn\middle|n\in\mathbb{Z}^g\right\}$, 并且这些 $[0\le s_j<r]$ 格点集两两不交, 这表明 $\left\{\vartheta_{r,s}\middle|s=(s_1,...,s_g)\in\mathbb{Z}^g,0\le s_j<r\right\}$ 线性无关, 从而构成 V_r 的一组基.

□

考虑三阶 θ-函数空间的一组基 $\theta=(\theta_0,...,\theta_N)$, $N+1=3^g$; 我们将证明, 这些函数 θ_j 无公共零点; 此外, 对任意 $\lambda\in\Lambda$, 若记 $\theta(z+\lambda)=e^{w_\lambda(z)}\theta(z)$, 则 w_λ 是次数 ≤ 1 的多项式 [这可从 θ-函数的定义, 以及 e_k, B_k 生成 Λ 直接看出] . 因此, θ 定义了一个全纯映射, 我们将此映射仍记作 θ:

$$\theta:\mathbb{C}^g/\Lambda=J(X)\to\mathbb{P}^N.$$

定理. *(Lefschetz 嵌入定理). 由三阶 θ-函数所定义的映射 $\theta: J(X)\to\mathbb{P}^n$ 为嵌入.*

证明. 我们先证明 V_2 没有**基点** (base point) [公共零点] , 即, $\forall z_0\in\mathbb{C}^g$, 存在二阶 θ-函数 f 使得 $f(z_0)\neq 0$.

该断言由以下性质直接得到: 若 ϑ 为黎曼 ϑ-函数, $a\in\mathbb{C}^g$, 则 $f(z)=\vartheta(z+a)\vartheta(z-a)\in V_2$. 此外, 若 $a,b\in\mathbb{C}^g$, 则 $\vartheta(z+a)\vartheta(z+b)\vartheta(z-a-b)$ 是 3 阶 θ-函数. 由此也可推出 V_3 没有基点 [也就是说, 函数 $\theta_0,...,\theta_N$ 无公共零点] .

再证明 $\theta: J(X)\to\mathbb{P}^N$ 是单射. 若 $w_1,w_2\in\mathbb{C}^g$ 满足 $\theta(w_1)=t\theta(w_2)$, $t\neq 0$, 那么对任意 $a,b\in\mathbb{C}^g$ 都成立

$$\vartheta(w_1+a)\vartheta(w_1+b)\vartheta(w_1-a-b)=t\vartheta(w_2+a)\vartheta(w_2+b)\vartheta(w_2-a-b).$$

我们断言上式表明函数 $z\mapsto\dfrac{\vartheta(w_1+z)}{\vartheta(w_2+z)}$ 是 $\mathbb{C}^g$ 上的处处非零的全纯函数. 事实上, 给定 $z_0\in\mathbb{C}^g$, 可取 $b\in\mathbb{C}^g$ 使得对 z_0 的某个小邻域 U 中的点 z 都成立 $\vartheta(w_j+b)\neq 0$, $\vartheta(w_j-z-b)\neq 0$, $j=1,2$; 从而

$$\frac{\vartheta(w_1+z)}{\vartheta(w_2+z)}=t\frac{\vartheta(w_2+b)\vartheta(w_2-z-b)}{\vartheta(w_1+b)\vartheta(w_1-z-b)},\quad z\in U,$$

从而在 U 全纯且非零.

我们再使用如下引理:

引理 16.4. *若 $w\in\mathbb{C}^g$ 使得函数 $z\mapsto\dfrac{\vartheta(w+z)}{\vartheta(z)}$ 在 $\mathbb{C}^g$ 全纯且恒非零, 则 $w\in\Lambda$. 等价地, 若 $\zeta\in J(X)$ 且 Θ-除子 Θ 关于平移 $\zeta:\Theta=\Theta+\zeta$ 左不变, 则 $\zeta=0\in J(X)$.*

[显然, 此引理与之前断言可推出 $w_1 - w_2 \in \Lambda$, 从而 $\theta : J(X) \to \mathbb{P}^N$ 是单射] .

引理16.4的证明. 易知存在 $\mathbb{C}^g$ 上的全纯函数 g 使得

$$\frac{\vartheta(w+z)}{\vartheta(z)} = e^{g(z)}, \quad z \in \mathbb{C}^g.$$

由于 ϑ 关于每个分量都是周期 1 的, 从而存在整数 n_k, $k = 1, ..., g$, 使得

$$g(z+e_k) - g(z) = 2\pi i n_k, \quad k = 1, ..., g.$$

此外还有,

$$\begin{aligned} e^{g(z+B_k)} &= \frac{e^{-2\pi i(z_k+w_k)-\pi i B_{kk}}\vartheta(w+z)}{e^{-2\pi i z_k - \pi i B_{kk}}\vartheta(w)} \\ &= e^{-2\pi i w_k} e^{g(z)}. \end{aligned}$$

因此存在整数 m_k 使得

$$g(z+B_k) - g(z) = -2\pi i w_k + 2\pi i m_k.$$

从而对任意 $1 \leq \nu \leq g$, 当 $\lambda = e_k$ 或 B_k, $k = 1, , , .g$ 时都成立 $\frac{\partial g}{\partial z_\nu}(z+\lambda) = \frac{\partial g}{\partial z_\nu}(z)$, 于是得到,

$$\frac{\partial g}{\partial z_\nu}(z+\lambda) = \frac{\partial g}{\partial z_\nu}(z) \quad \forall \lambda \in \Lambda,$$

从而 $\frac{\partial g}{\partial z_\nu}$ 时定义在紧连通流形 $J(X)$ 上的全纯函数, 从而是常值函数. 因此存在常数 $c_0, c_1, ..., c_g$ 使得

$$g(z) = c_0 + c_1 z_1 + \cdots + c_g z_g.$$

因此 $g(z+e_k) - g(z) = c_k = 2\pi i n_k$, 以及

$$\begin{aligned} 2\pi i w_k &= -\left(g(z+B_k) - g(z)\right) + 2\pi i m_k \\ &= -\sum_\nu c_\nu B_{\nu k} + 2\pi i m_k = -2\pi i \sum_\nu n_\nu B_{\nu k} + 2\pi i m_k. \end{aligned}$$

因此 $w = -\sum_\nu n_\nu B_\nu + \sum_k m_k e_k \in \Lambda$. □

最后我们证明映射 θ 的切映射 $\mathrm{d}\theta$ 也是单射, 即 $\theta: J(X) \to \mathbb{P}^N$ 为浸入.

对于 $a \in \mathbb{C}^g$, $\mathrm{d}\theta$ 在 $\pi(a)$ [其中 $\pi: \mathbb{C}^g \to J(X)$ 为典范投影] 为单射等价于以下条件: 矩阵

$$\begin{pmatrix} \theta_0(a) & \cdots & \theta_N(a) \\ \dfrac{\partial\theta_0}{\partial z_1}(a) & \cdots & \dfrac{\partial\theta_N}{\partial z_1}(a) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial\theta_0}{\partial z_g}(a) & \cdots & \dfrac{\partial\theta_N}{\partial z_g}(a) \end{pmatrix}$$

的秩为 $g+1$.

假设该矩阵的秩 $\leq g+1$, 则存在不全为零的常数 $c_0, ..., c_g \in \mathbb{C}$ 使得

$$c_0\theta_k(a) = \sum_{\nu=1}^{g} c_\nu \frac{\partial\theta_k}{\partial z_\nu}(a), \quad k = 0, ..., N.$$

从而对任意 $u, v \in \mathbb{C}^g$ 都有

$$c_0\left(\vartheta(a+u)\vartheta(a+v)\vartheta(a-u-v)\right) = \sum_{\nu=1}^{g} c_\nu \frac{\partial}{\partial z_\nu}\left(\vartheta(a+u)\vartheta(a+v)\vartheta(a-u-v)\right).$$

记 $\varphi(z) = \left(\sum_{\nu=1}^{g} c_\nu \dfrac{\partial\vartheta}{\partial z_\nu}(z)\right)/\vartheta(z)$, 则上式可改写为

$$\varphi(a+u) + \varphi(a+v) + \varphi(a-u-v) = c_0.$$

先验地, φ 为亚纯函数, 其极点位于 ϑ 的零点集 $Z \subseteq \mathbb{C}^g$. 但是, 给定 $a, u_0 \in \mathbb{C}^g$, 可取 u_0 的小邻域 U, 以及 $v \in \mathbb{C}^g$ 使得 $a+v \notin Z$, $a-u-v \notin Z$, $\forall u \in U$. 从而 φ 为 $\mathbb{C}^g$ 的全纯函数. 此外还有

$$\varphi(z+e_k) = \varphi(z), \quad \varphi(z+B_k) - \varphi(z) = \sum_{\nu=1}^{g} c_\nu \frac{\partial}{\partial z_\nu}(-2\pi i z_k - \pi i B_{kk}) = -2\pi i c_k.$$

于是, 与之前一样, 可推出 φ 必形如

$$\varphi(z) = \alpha_0 + \alpha_1 z_1 + \cdots + \alpha_g z_g, \quad \alpha_0, ..., \alpha_g \in \mathbb{C}.$$

而 φ 关于每个 z_i 都是周期 1 的, 从而 $\alpha_j = 0$, $j = 1, ..., g$, 从而 φ 为常函数. 进而

$$-2\pi i c_k = \varphi(z+B_k) - \varphi(z) = 0, \quad k = 1, ..., g;$$

所以 $\varphi(z)=\sum_{\nu=1}^{g}c_\nu\frac{\partial\vartheta}{\partial z_\nu}\Big/\vartheta\equiv 0$, 以及 $c_0=\varphi(a+u)+\varphi(a+v)+\varphi(a-u-v)=0$. 这与 $c_0,...,c_g$ 不全为零的假设矛盾. 从而证明了 $\theta: J(X)\to\mathbb{P}^N$ 为浸入.

定理证毕. □

17 Θ 除子

本节我们研究 Θ-除子对黎曼曲面的影响, 所介绍的有关结论取材于黎曼关于 Abel 函数的基础文章. 这里给出的证明与黎曼的原始证明区别不大.

设 L 为 $J(X)$ 上的全纯线丛, 他由自首因子 $\varphi_{e_k}\equiv 1$, $\varphi_{B_k}=e^{-2\pi i z_k-\pi i B_{kk}}$ 所确定; 则 ϑ-函数为 L 的全纯截面, Θ-除子为截面 ϑ 的除子. 我们记 $\Theta_\zeta:=\Theta+\zeta$ 为 Θ 沿 $\zeta\in J(X)$ 的平移 [注意 $J(X)$ 的加法群结构]. 等价地, Θ_ζ 其实是 L 的关于 ζ 的平移变换的拉回丛 L_ζ 的截面 $\vartheta(z-\zeta)$ 的除子.

记 $A: X\to J(X)$ 为 Abel-Jacobi 映射; 函数 $P\mapsto\vartheta(A(P)-\zeta)$ 为沿 A 的拉回丛 $A^*(L_\zeta)$ 的一个截面. 我们像第14节那样, 取 $H_1(X,\mathbb{Z})$ 的一组基 a_j,b_j, 并把 X 沿着这些曲线割开, 得到 [单连通的] 多边形 $\Delta\subseteq\mathbb{C}$, 此时 $\vartheta(A(P)-\zeta)$ 可以视为 Δ 上的全纯函数. 注意我们可以适当选取 a_j,b_j, 使得它们与任意事先给定的 X 的有限子集不交; 我们之后将默认这种 “好的” 选取. 沿用第14节的记号, 将 $4g$-边形 Δ 的各边顺次记为 $a_\nu,b_\nu,a'_\nu,b'_\nu$ [其中 a'_ν,b'_ν 分别对应于 X 中的定向曲线 a_ν^{-1}, b_ν^{-1}].

定理 17.1. *设 $\zeta\in J(X)$ 满足 $A(X)\not\subseteq\Theta_\zeta$ [注意集合 $\left\{\zeta\in J(X)\middle|A(X)\subseteq\Theta_\zeta\right\}$ 显然是 $J(X)$ 的解析真子集]. 那么, $A(X)\cap\Theta_\zeta$ 共含有 g 个点 [计重数]; 确切地说, 线丛 $A^*(L_\zeta)$ 的截面 $\vartheta(A(P)-\zeta)$ 的除子的次数为 g: $\mathrm{div}(\vartheta(A(P)-\zeta))=\sum_{i=1}^{g}P_i(\zeta)$.*

此外, 成立

$$\sum_{i=1}^{g}A(P_i(\zeta))=\zeta-\kappa,$$

其中 $\kappa\in J(X)$ 是与 ζ 无关的常数 [只与定义 Abel-Jacobi 映射所选取的基点 $P_0\in X$ 有关].

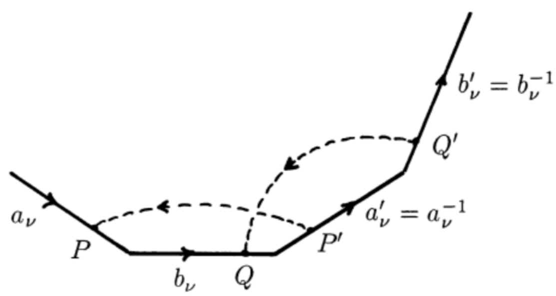
证明. 记 $\vec{\omega}=(\omega_1,...,\omega_g)$, 其中 $\omega_1,...,\omega_g$ 为 $H^0(X,\Omega)$ 的正规基, $\int_{a_\nu}\omega_k=\delta_{\nu k}$. 在 Δ 上,

Abel-Jacobi 映射有如下显示表达 [模 Λ 意义下]：

$$A(P) = (A_1(P), ..., A_g(P)) = \int_{P_0}^{P} \vec{\omega}.$$

对于定义在 $\partial\Delta$ 上的函数 Φ, 我们定义函数 $\Phi^{\pm}$, 此函数定义于 a_j, b_j, 满足: 对任意 $P \in a_j$ 或 b_j, $\Phi^+ := \Phi$, 而 $\Phi^-(P) = \Phi(P')$, 其中 $P' \in a_j'$ 或 b_j' 为 P 的对应点.

若 $P \in a_\nu$, 则类似于第14节引理14.1 [见下图]，



成立 $A_k^+(P) - A_k^-(P) = \int_{P'}^{P} \omega_k = -\int_{b_\nu} \omega_k = -B_{\nu k}$. 而对于 $Q \in b_\nu$, 则成立 $A_k^+(Q) - A_k^-(Q) = \int_{Q'}^{Q} \omega_k = \int_{a_\nu} \omega_k = \delta_{\nu k}$. 因此, $A^{\pm} := (A_1^{\pm}, ..., A_g^{\pm})$ 满足

$$A^+ - A^- = \begin{cases} e_\nu & \text{如果 } P \in b_\nu \\ -B_\nu & \text{如果 } P \in a_\nu \end{cases}.$$

不妨假设当 $P \in \partial\Delta$ 时 $\vartheta(A(P) - \zeta) \neq 0$. 则 $F(P) := \vartheta(A(P) - \zeta)$ 的零点个数为

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Delta} \mathrm{d} \log F(P) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{\nu=1}^{g} \left(\int_{a_\nu} + \int_{b_\nu} \right) \mathrm{d} \log \frac{F^+(P)}{F^-(P)}.$$

注意到, 若 $P \in b_\nu$, 则 $F^+(P) = \vartheta(A^+(P) - \zeta) = \vartheta(A^-(P) - \zeta + e_\nu) = F^-(P)$. 而若 $P \in a_\nu$, 则 $F^+(P) = \vartheta(A^-(P) - \zeta - B_\nu) = e^{2\pi i (A_\nu(P) - \zeta_\nu) + \pi i B_{\nu\nu}} \vartheta(A^-(P) - \zeta)$, 于是 $\log \dfrac{F^+(P)}{F^-(P)} = 2\pi i A_\nu(P) - 2\pi i \zeta_\nu + \pi i B_{\nu\nu}$, 从而在 a_ν 成立 $\mathrm{d} \log \dfrac{F^+}{F^-} = 2\pi i \omega_\nu$. 因此 F 在 Δ 上的零点总数等于 $\displaystyle\sum_{\nu=1}^{g} \int_{a_\nu} \omega_\nu = g$. 这就证明了定理的第一部分.

再证其余部分. 记 $\vartheta(A(P)-\zeta)$ 在 Δ 的全部零点 [计重数] 为 $P_1(\zeta),...,P_g(\zeta)$. 下面的计算过程中我们把与 ζ 无关的项简单记为“常数”. 则有:

$$\begin{aligned}\sum_{\nu=1}^{g} A_k(P_\nu(\zeta)) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Delta} A_k(P)\,\mathrm{d}\log F(P) \\ &= \frac{1}{2\pi i}\sum_{\nu=1}^{g}\left(\int_{a_\nu}+\int_{b_\nu}\right)\left(A_k^+\,\mathrm{d}\log F^+ - A_k^-\,\mathrm{d}\log F^-\right).\end{aligned}$$

先考察沿路径 a_ν 的积分. 此时, $A_k^- = A_k^+ + B_{\nu k}$, 从而 $\mathrm{d}\log F^+ = \mathrm{d}\log F^- + 2\pi i\omega_\nu$, 因此

$$\begin{aligned}\int_{a\nu}\left(A_k^+\,\mathrm{d}\log F^+ - A_k^-\,\mathrm{d}\log F^-\right) &= \int_{a_\nu}\left(A_k^+ - A_k^-\right)\,\mathrm{d}\log F^+ + 2\pi i\int_{a_\nu} A_k^-\omega_\nu \\ &= -B_{\nu k}\int_{a_\nu}\mathrm{d}\log F^+ + \text{常数}.\end{aligned}$$

将 [定向] 边 a_ν 的端点依次记为 α,β, 则 $A^+(\beta)-A^+(\alpha)=\int_{a_\nu}\vec{\omega}=e_\nu$, 因此

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi i}\int_{a_\nu}\mathrm{d}\log F^+ &\equiv \frac{1}{2\pi i}\log\frac{\vartheta(A^+(\beta)-\zeta)}{\vartheta(A^+(\alpha)-\zeta)} \mod \mathbb{Z} \\ &\equiv \frac{1}{2\pi i}\log\frac{\vartheta(A^+(\alpha)-\zeta+e_\nu)}{\vartheta(A^+(\alpha)-\zeta)} \equiv 0 \mod \mathbb{Z}.\end{aligned}$$

又因为该积分连续依赖 ζ, 从而得出

$$\int_{a_\nu}\left(A_k^+\,\mathrm{d}\log F^+ - A_k^-\,\mathrm{d}\log F^-\right) = \text{常数}, \quad \forall\,\nu=1,...,g.$$

再考虑沿路径 b_ν 的积分. 此时 $A^+ = A^- + e_\nu$, $F^+ = F^-$, 从而

$$\int_{b_\nu}\left(A_k^+\,\mathrm{d}\log F^+ - A_k^-\,\mathrm{d}\log F^-\right) = \delta_{\nu k}\int_{b_\nu}\mathrm{d}\log F^+.$$

记 [定向] 边 b_ν 的端点依次为 x,y, 则 $A(y)=A(x)+B_\nu$, 从而 $\dfrac{F^+(y)}{F^+(x)} = \dfrac{\vartheta(A(x)-\zeta+B_\nu)}{\vartheta(A(x)-\zeta)} = \exp\left(-2\pi i A_\nu(x) + 2\pi i\zeta_\nu - \pi i B_{\nu\nu}\right)$, 于是

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{b_\nu}\mathrm{d}\log F^+ \equiv \zeta_\nu - A_\nu(x) - \frac{1}{2}B_{\nu\nu} \mod \mathbb{Z},$$

从而得出 $\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{b_\nu} \mathrm{d}\log F^+ = \zeta_\nu +$ 常数. 这表明

$$\sum_{\nu=1}^{g} A_k(P_\nu(\zeta)) = \sum_{\nu=1}^{g} \delta_{\nu k}\zeta_\nu + \text{常数} = \zeta_k + \text{常数},$$

定理得证. □

在讲下一个定理之前, 我们需要一些准备知识.

若 $0 < k < g$, 记 $S^k(X)$ 为 X 的 k 次对称乘积, 我们记 W_k 为映射 $A : S^k(X) \to J(X)$, $[A(P_1, ..., P_k) = \sum A(P_i)]$ 的像集. 即, $W_k = \left\{A(D)\middle|D\text{为 } X \text{ 的有效除子, 且 } \deg D = k\right\}$. W_k 为 $J(X)$ 的解析集.

设 M 为紧复流形, $\dim_{\mathbb{C}} M = n$. M 的**除子** (divisor) D 是指如下的有限 $\mathbb{Z}$-线性组合: $D = \displaystyle\sum_{k=1}^{m} n_k Y_k$, $n_k \in \mathbb{Z}$, 且 Y_k 为 M 的 $n-1$ 维 [即, 余维数 $=1$] 不可约解析集. n 维复流形 M 上的余维数 $=1$ 的解析集 $Y \subseteq M$ 可由**局部方程** (local equation) 来表示, 即: $\forall a \in M$, 存在 a 的邻域 U 以及全纯函数 $f \in \mathcal{O}(U)$ 使得, 对任意 $x \in U$, g 为定义在 x 附近的, 在 Y 取值恒为零的全纯函数, 那么 [在 x 附近] g 为 f 的某个非零全纯函数倍.

若 $U \subseteq M$, f_k 为 Y_k 在 U 上的局部方程, 则记 $f_U = \prod f_k^{n_k}$. 若 V 是另一个这样的开集, f_V 为 V 上的相应的亚纯函数, 则存在非零全纯函数 $g_{UV} \in \mathcal{O}(U \cap V)$ 使得 $f_U = g_{UV} f_V$. 这些 $\{g_{UV}\}$ 构成 M 的某个全纯线丛的一族转移函数, 记相应线丛为 $L = L(D)$. 函数族 $\{f_U\}$ 定义了该线丛的标准 [亚纯] 截面 s_D.

若 $D = \sum n_k Y_k$ 为除子, 则称集合 $\displaystyle\bigcup_{n_k \neq 0} Y_k$ 为 D 的**支集** (support). 若对任意 k 都有 $n_k \geq 0$, 则称 D 为**有效除子** (effective divisor). 有效除子的标准截面 s_D 是全纯的.

全纯线丛 L 的亚纯截面 s 也能定义 M 上的除子. 记 Y 为 s 的零点, 极点构成的解析集, $Y = \bigcup Y_k$ 为不可约分支的分解. 记亚纯函数 F 为 s 在某局部坐标下的表示, f_k 为 Y_k 关于该局部坐标的局部方程, 则 $F = u \cdot \prod f_k^{n_k}$, 其中 u 为非零全纯函数, n_k 为关于 Y_k 的常数. 我们记 $\mathrm{div}(s) := \sum n_k Y_k$. 整数 n_k 称为 s 在 Y_k 上的**阶** (order) [视 $n_k > 0$ 或 $n_k < 0$ 来称之为零点或极点的阶数; 若 $n_k < 0$, 则称极点阶数为 $|n_k|$.]

定理 17.2. 记 κ 为定理17.1中的常数, 则成立

$$\Theta = W_{g-1} + \kappa.$$

换言之, 除子 Θ 形如 $1 \cdot Y$, 其中 Y 为 $g-1$ 维不可约解析集 [从而 Θ 的一般点为 ϑ-函数的单零点] . 此外, Θ 是由形如 $\sum_{\nu=1}^{g-1} A(p_\nu) + \kappa$, $P_1, ..., P_{g-1} \in X$ 的点构成的集合.

证明. 我们先证明 $W_{g-1} + \kappa \subseteq \operatorname{supp}(\Theta)$. 设 $D = P_1 + \cdots + P_g$ 是次数为 g 的有效除子, 并且 $P_1, ..., P_g$ 两两互异且位于一般位置, 使得 $A : S^g(X) \to J(X)$ 在 D 附近为单射. 此外我们不妨 $A(X) \not\subseteq \Theta_\zeta$, 其中 $\zeta := A(D) + \kappa$ [因为 $A : S^g(X) \to J(X)$ 是满射] .

记 $Q_1, ..., Q_g$ 为 $P \mapsto \vartheta(A(P) - \zeta)$ 的零点. 则由定理17.1可知 $\sum A(Q_i) = \zeta - \kappa = A(D)$, 从而由 D 的选取可知 $D = \sum Q_i = \sum P_\nu$. 特别地, $\vartheta(A(P_g) - \zeta) = 0$, 从而 $0 = \vartheta\left(-\sum_{\nu=1}^{g-1} A(P_\nu) - \kappa\right) = \vartheta\left(\sum_{\nu=1}^{g-1} A(P_\nu) + \kappa\right)$. 由于满足那些条件的除子 D 构成 $S^g(X)$ 的非空开集, 从而对 $S^{g-1}(X)$ 的某个非空开集当中任意的 D' 都成立 $\vartheta(A(D') + \kappa) = 0$, 这表明 $\vartheta|_{W_{g-1}+\kappa} = 0$.

再证明 $\operatorname{supp}(\Theta) \subseteq W_{g-1} + \kappa$. 取定 $\zeta \in \operatorname{supp}(\Theta)$. 首先假设存在 $P \in X$ 使得

$$\exists x \in X, \quad \vartheta(A(x) - A(P) - \zeta) \neq 0;$$

此时, 记 $D := \operatorname{div}\vartheta(A(x) - A(P) - \zeta)$, 则存在有效除子 $D' \geq 0$, $\deg D' = g - 1$ 使得 $D = P + D'$ [这是因为 $\vartheta(-\zeta) = \vartheta(\zeta) = 0$, 从而 $P \in \operatorname{supp}(D)$] ; 于是由定理17.1可得,

$$A(D) = A(P) + A(D') = (\zeta + A(P)) - \kappa,$$

所以 $\zeta = A(D') + \kappa \in W_{g-1} + \kappa$.

如果对任意 $x, P \in X$, $\vartheta(A(x) - A(P) - \zeta) \equiv 0$, 则令 k 为满足如下性质的最大整数: 对任意的次数 $\leq k$ 的有效除子 D_0, D_1, 都成立 $\vartheta(A(D_0) - A(D_1) - \zeta) = 0$. 则易知 $k < g$, 这是因为 $S^g(X) \to J(X)$ 为满射.

取次数为 $k+1$ 的有效除子 E_0, E_1 使得 $\vartheta(A(E_0) - A(E_1) - \zeta) \neq 0$. 不妨假设 $\operatorname{supp}(E_0 + E_1)$ 含有 $2k+2$ 个不同的点. 令 $E_0 = P + D_0$, 使得 D_0 是次数为 k 的有效除子.

于是, $x \mapsto \vartheta(A(x)+A(D_0)-A(E_1)-\zeta) \not\equiv 0$ [因为它在 $x=P$ 处不为零]; 记 D 为该函数的除子. 则 $D \geq 0$, 且次数为 g. 另外, 若 $x \in \mathrm{supp}(E_1)$, 则 $E_1-x \geq 0$ 是次数为 k 的有效除子, 从而由 k 的定义可知 $\vartheta(A(x)+A(D_0)-A(E_1)-\zeta) = \vartheta(A(D_0)-A(E_1-x)-\zeta) = 0$. 因此 $D \geq E_1$, 从而我们可以记 $D = E_1 + E_2$, 其中 $\deg E_2 = g-k-1$.

现在, 由定理17.1可得 $A(E_1)+A(E_2) = A(D) = \zeta + A(E_1) - A(D_0) - \kappa$, 从而 $\zeta - \kappa = A(E_2+D_0)$, 且 $\deg(E_2+D_0) = g-k-1+k = g-1$. 因此, $\mathrm{supp}(\Theta) \subseteq W_{g-1}+\kappa$.

最后, 从该证明的开头还能看出, 若 $D = \sum P_i$, 其中 P_i 两两互异且位于一般位置, 则 D 是截面 $x \mapsto \vartheta(A(x)-\zeta)$ 的除子, 其中 $\zeta = A(D)+\kappa$. 因此 $\vartheta(A(x)-\zeta)$ 的零点都是单零点. 综上所述, 以下关于除子的等式成立:

$$\Theta = W_{g-1} + \kappa.$$

$\square$

定理 17.3. 设 κ 为定理*17.1*, *17.2*中的常数, K_X 为 X 的典范除子, 则成立

$$A(K_X) = -2\kappa.$$

证明. 先介绍一个重要的中间结论, 该结论还将在后文被使用.

设有效除子 $D \geq 0$ 的次数为 $g-1$, 则 $h^0(D) \geq 1$. 由 Riemann-Roch 定理, $h^0(K_X-D) = h^0(D)-(1-g+\deg D) = h^0(D) \geq 1$, 从而 K_X-D 线性等价于某个有效除子 $D' \geq 0$, 并且 $\deg D' = g-1$. 从而 $A(K_X-D) \in W_{g-1}$. 因此 $A(K_X)-W_{g-1} \subseteq W_{g-1}$. 另一方面, $A(D) = A(K_X)-A(D') \in A(K_X)-W_{g-1}$. 因此, 我们有

$$A(K_X) - W_{g-1} = W_{g-1}.$$

回到定理证明. 注意 $\vartheta(z) = \vartheta(-z)$, 从而

$$\Theta = W_{g-1}+\kappa = -\Theta = -W_{g-1}-\kappa = W_{g-1}-A(K_X)-\kappa = \Theta - (A(K_X)+2\kappa).$$

因为 Θ 不是关于 $J(X)$ 的非零元平移不变的 [见引理16.4], 从而迫使

$$A(K_X)+2\kappa = 0.$$

$\square$

定理 17.4. 设 $\zeta \in J(X)$. 则 $A(X) \subseteq \Theta_\zeta$ 当且仅当存在有效除子 $D \geq 0$ 使得 $\deg D = g$ 且 $\dim |D| > 0$ [也就是次数为 d 的特殊除子], 并且 $\zeta - \kappa = A(D)$.

证明. $A(X) \subseteq \Theta_\zeta$ 当且仅当 $\forall P \in X$, $A(P) - \zeta \in \Theta$, 这当且仅当任意 $P \in X$, $\zeta - A(P) \in \Theta = W_{g-1} + \kappa$. 因此, 该条件等价于, 存在次数为 g 的有效除子 D, 使得 $P \in \operatorname{supp}(D)$, 且 $\zeta - \kappa = A(D)$. 这个 D 的选取可以相差线性等价; 若取定 D_0 使得 $A(D_0) = \zeta - \kappa$, 则该条件等价于: $\forall P \in X$, 存在线性等价于 D_0 的有效除子 D 使得 $P \in \operatorname{supp}(D)$. 这显然等价于 $\dim |D_0| > 0$. □

推论 17.1. 若 $\zeta \in J(X)$ 满足 $A(X) \not\subseteq \Theta_\zeta$, 则存在唯一的次数为 d 的有效除子 $D \geq 0$ 使得 $A(D) + \kappa = \zeta$. 具体地, D 为截面 $P \mapsto \vartheta(A(P) - \zeta)$ 的除子.

证明. 由本节定理17.4与第15节定理 15.1,15.2直接得到. □

这个推论彻底回答了所谓**雅可比逆问题** (Jacobi inversion problem), 即描述双有理变换 $A : S^g(X) \to J(X)$ 的逆.

我们给出上述结果的另一个应用. 考虑映射 $A : S^g(X) \to J(X)$, $(P_1, ..., P_g) \mapsto \sum A(P_i)$, 记 $Y \subseteq S^g(X)$ 为该映射的临界点集, 即 $Y = \left\{ D \in S^g(X) \middle| \operatorname{rank}_D(\mathrm{d}A) < g \right\}$. 则 Y 是维数 $\leq g - 1$ 的解析集. 此外, 若 $D \in Y$, 则 [由定理15.2以及 Abel 定理可知] $A^{-1}A(D) \subseteq Y$, 且 $A^{-1}A(D)$ 在其上任何一点的维数均为 $\dim |D| > 0$. 因此 $Y' := A(Y)$ 为 $J(X)$ 的解析集, 且维数 $\leq g - 2$. 特别地, *有限多个 Y' 的平移的并集无法覆盖 Θ.*

现在固定点 $P \in X$, 再令 $x \in X$ 为变量. 由定理17.4可知, 若 $A(P) + \zeta - \kappa \notin Y'$, 则函数 $x \mapsto \vartheta(A(x) - A(P) - \zeta)$ 恰有 g 个零点 $P_1, ..., P_g$, 并且满足 $\sum A(P_i) = \zeta + A(P) - \kappa$; 此外 $\sum P_i$ 是满足这个方程的唯一的次数为 g 的有效除子.

若我们假设 $\zeta \in \Theta$, 记 $\zeta = A(Q_1^0) + \cdots + A(Q_{g-1}^0) + \kappa$, 则

$$\sum_{i=1}^{g} A(P_i) = A(P) + \sum_{j=1}^{g-1} A(Q_j^0),$$

从而 $\sum P_i = P + \sum Q_j^0$. 因此, 若 $\zeta \in \Theta$ 并且 $\zeta \notin -A(P) + \kappa + Y'$, 则函数 $x \mapsto \vartheta(A(x) - A(P) - \zeta)$ 的零点为

$$(P, Q_1^0, ..., Q_{g-1}^0),$$

其中 $Q_1^0,...,Q_{g-1}^0$ 只与 ζ 有关, 与 P 无关.

设 f 为 X 上的非常值亚纯函数, $(f)=\sum\limits_{k=1}^{r}P_k-\sum\limits_{k=1}^{r}Q_k$. 取 $\zeta\in\Theta$ 使得 $\zeta\notin\bigcup\limits_k(Y'+\kappa-A(P_k))\cup\bigcup\limits_k(Y'+\kappa-A(Q_k))$, 并记 $\zeta=A(D_0)+\kappa$, $D_0=A(Q_1^0)+\cdots+A(Q_{g-1}^0)$. 我们像第14节那样, 将 X 割成多边形 Δ, 使得边 a_ν,b_ν 绕开事先给定的有限个点. 考虑定义在 Δ 上的函数

$$F(x)=\prod_{k=1}^{r}\frac{\vartheta(A(x)-A(P_k)-\zeta)}{\vartheta(A(x)-A(Q_k)-\zeta)}.$$

其除子 $=(\sum P_k+rD_0)-(\sum Q_k+rD_0)=\sum(P_k-Q_k)=(f)$. 但是要注意, 这个函数在 X 上不是良定的.

若 $x\in b_\nu$, 记 x 在 b'_ν 上的对应点为 x', 则 $A(x')=A(x)-e_\nu$, 从而 $F(x)=F(x')$. 而如果 $x\in a_\nu$, $x'\in a'_\nu$ 为 x 的对应点, 则 $A(x')=A(x)+B_\nu$, 于是

$$\frac{F(x')}{F(x)}=\frac{\prod\limits_{k=1}^{r}e^{-2\pi i(A_\nu(x)-A_\nu(P_k)-\zeta_\nu)}}{\prod\limits_{k=1}^{r}e^{-2\pi i(A_\nu(x)-A_\nu(Q_k)-\zeta_\nu)}}=\exp\left(2\pi i\sum_{k=1}^{r}(A_\nu(P_k)-A_\nu(Q_k))\right).$$

由 Abel 定理, 存在整数 $n_1,...,n_g;m_1,...,m_g$ 使得

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{r}(A_\nu(P_k)-A_\nu(Q(k))) &= \sum_{j=1}^{g}n_je_j+\sum_{j=1}^{g}m_jB_j\quad \text{的第 }\nu\text{ 分量}\\ &= n_\nu+\sum_{j=1}^{g}m_jB_{j\nu}.\end{aligned}$$

现在, 取 $\omega_1,...,\omega_g$ 为 $H^0(X,\Omega)$ 的正规基, 记 $\omega:=\sum\limits_{j=1}^{g}m_j\omega_j$, 令 $\varphi(x):=\int_{P_0}^{x}\omega$, [$P_0$ 为给定某点] . 则 $e^{2\pi i\varphi(x)}$ 满足以下两条性质:

(1) 若 $x\in b_\nu$, 记 $x'\in b'_\nu$ 为其对应点, 则 $e^{2\pi i\varphi(x)}=e^{2\pi i\varphi(x')}$.

(2) 若 $x\in a_\nu$, 记 $x'\in a'_\nu$ 为其对应点, 则 $\dfrac{e^{2\pi i\varphi(x')}}{e^{2\pi i\varphi(x)}}=e^{2\pi i\sum_j m_jB_{j\nu}}$.

因此, $F(x)e^{-2\pi i\varphi(x)}$ 定义了 X 上的一个亚纯函数, 且其除子为 $\sum(P_k-Q_k)=(f)$. 因此我们证明了:

定理 17.5. *(黎曼因子分解定理).* 设 f 为紧黎曼曲面 X 上的非常值亚纯函数，其除子 $(f)=\sum_{k=1}^{r}P_k-\sum_{k=1}^{r}Q_k$. 那么，存在 $\omega\in H^0(X,\Omega)$ 使得：若 ζ 为 Θ 上的一般点，则

$$f(x)=c\cdot e^{\int_{P_0}^{x}\omega}\prod_{k=1}^{r}\frac{\vartheta(A(x)-A(P_k)-\zeta)}{\vartheta(A(x)-A(Q_k)-\zeta)}.$$

这个定理是通常 "有理函数分解为线性因子" 的黎曼面版本.

同样的方法, 我们还能证明:

定理 17.6. 设 $P,Q\in X$, $P\neq Q$, $\zeta\in\Theta$ 为一般点，则

$$\mathrm{d}_x\log\frac{\vartheta(A(x)-A(P)-\zeta)}{\vartheta(A(x)-A(Q)-\zeta)}$$

为 X 上的亚纯 1-形式，并且在 $X-\{P,Q\}$ 全纯，P,Q 为其单极点，在 P,Q 处的留数分别为 $+1,-1$. 此外，由 ϑ 的周期性可知其 a-周期为 0.

我们也能用同样的方法构造出在某个点处为高阶极点且留数为 0 的亚纯 1-形式.

黎曼因子分解定理的背后想法也能用来构造 X 上的具有特定本性奇点的函数. 这样的函数对研究某些特定的非线性偏微分方程十分重要, 而这些非线性偏微分方程由与代数曲线的几何紧密联系. 这方面的介绍可以参考以下:

- B.A. Dubrovin: *Theta functions and non-linear equations.* Russian Math. Surveys (Uspekhi) **36** (1981), 11-92.
- I.M. Krichever and S.P. Novikov: *Holomorphic bundles over algebraic curves and non-linear equations.* Russian Math. Surveys (Uspekhi) **35** (1980), 53-79.
- D. Mumford: *Tata Lectures on Theta*, 2 vols., Brikhäuser, 1983, 1984.
- T. Shiota: *Characterization of Jacobian varieties in terms of soliton equations*, Inventions Math. **83** (1986), 333-382.

关于代数曲线与非线性偏微分方程之间联系的文献浩如烟海.

设 P 为紧黎曼曲面 X 上给定的点, (U, z) 为 P 附近的局部坐标, $z(P) = 0$. 再设 u 为 $\mathbb{C}$ 上的一元多项式. 设 D 为 X 上的次数为 g 的非特殊的有效除子. 假设 $P \notin \operatorname{supp}(D)$.

定理 17.7. *存在 $X - P$ 上的亚纯函数 F, 使得:*

(1). 在 $X - P$ 成立 $(F) \geq -D$.

(2). $F(z)\exp\left(-2\pi i u(\frac{1}{z})\right)$ 在点 P 全纯.

证明. 记 $u(t) = c_0 + c_1 t + \cdots + c_r t^r$, $(c_r \neq 0)$. 记 $\omega_P^{(n)}$ 为第二类正规 Abel 微分, 使得在 P 处的极点部分为 $\frac{\mathrm{d}z}{z^{n+1}}$, $(n \geq 1)$, 并且在 $X - P$ 全纯. 则 $\mathrm{d}u(\frac{1}{z}) + \sum\limits_{n=1}^{r} n c_n \omega_P^{(n)}$ 在点 P 全纯. 令 $\varphi := -\sum\limits_{n=1}^{r} n c_n \omega_P^{(n)}$. 记 $\beta = (\beta_1, ..., \beta_g)$ 为 φ 的 b-周期向量:

$$\beta_\nu = \int_{b_\nu} \varphi;$$

[注意 $\omega_P^{(n)}$ 的正规性, 有 $\int_{a_\nu} \varphi = 0$] .

令

$$F(x) := \exp\left(2\pi i \int_{P_0}^{x} \varphi\right) \frac{\vartheta(A(x) - A(D) + \beta - \kappa)}{\vartheta(A(x) - A(D) - \kappa)}.$$

首先, 这个 f 在 X 上是单值的: 首先至少 F 能定义在定理17.5中的多边形 Δ 上. 若 $x \in b_\nu$, x' 为其在 b'_ν 上的对应点, 则 $A(x') = A(x) + e_\nu$, 再由 $\int_{x'}^{x} \varphi = \int_{a_\nu} \varphi = 0$ 可得 $F(x) = F(x')$.

而若 $x \in a_\nu$, x' 为其在 a'_ν 的对应点, 则

$$\int_{x'}^{x} \varphi = -\int_{b_\nu} \varphi = -\beta_\nu,$$

于是 $A(x) - A(x') = -B_\nu$, 从而 $\vartheta(A(x) - A(D) + \beta - \kappa) = \vartheta(A(x') - A(D) + \beta - \kappa) \times \exp\left(2\pi i (A_\nu(x') - A_\nu(D) + \beta_\nu - \kappa_\nu) + \pi i B_{\nu\nu}\right)$, 以及 $\vartheta(A(x) - A(D) - \kappa) = \vartheta(A(x') - A(D) + \beta - \kappa) \times \exp\left(2\pi i (A_\nu(x') - A_\nu(D) - \kappa_\nu) + \pi i B_{\nu\nu}\right)$. 因此

$$\frac{F(x)}{F(x')} = e^{-2\pi i \beta_\nu} \cdot \frac{\exp\left(2\pi i (A_\nu(x') - A_\nu(D) + \beta_\nu - \kappa_\nu) + \pi i B_{\nu\nu}\right)}{\exp\left(2\pi i (A_\nu(x') - A_\nu(D) - \kappa_\nu) + \pi i B_{\nu\nu}\right)} = 1.$$

因为 $\varphi - \mathrm{d}u(\frac{1}{z})$ 在 P 点全纯, 从而 $Fe^{-2\pi i u(\frac{1}{z})}$ 在 P 点全纯.

最后, F 的极点位于 $\vartheta(A(x) - A(D) - \kappa)$ 的零点. 由 D 不是特殊除子可知 $\mathrm{div}(\vartheta(A(x) - A(D) - \kappa)) = D$. □

不难看出, 若 D 和 u 选取得一般, 则这个函数在相差常数倍意义下是唯一的. 事实上, 该函数的零点除子 D' 不是特殊除子; 若函数 F_0 也满足此定理的条件, 则 F_0/F 在 X 上亚纯, 且 $(F_0/F) \geq -D'$; 而由 D' 不是特殊除子可知 F_0/F 为常数.

18 Torelli 定理

Torelli 定理断言二元组 $(J(X), \Theta)$ 能唯一确定黎曼曲面 X. 该定理有多种证明方法, 本书介绍 Hernik Martens[12] 的证明. 此外还有更加 "几何" 的证明, 可见 Griffith-Harris [9] 或者 Arbarello-Cornalba-Griffiths-Harris [10]. 我们先讲复环面的一个一般性质.

设 $T_1 = \mathbb{C}^m/\Lambda_1, T_2 = \mathbb{C}^n/\Lambda_2$ 为两个复环面 [其中 Λ_1, Λ_2 分别是 $\mathbb{C}^m, \mathbb{C}^n$ 的格点子群] .

引理. 设 $f : T_1 \to T_2$ 为全纯映射, $F : \mathbb{C}^m \to \mathbb{C}^n$ 为 f 的提升. 则 F 是次数 ≤ 1 的多项式映射.

证明. 因为 F 是 f 的提升, 从而对任意 $\lambda \in \Lambda_1$, 都有 $F(z + \lambda) - F(z) \in \Lambda_2, \forall z \in \mathbb{C}^m$, 从而为关于 z 的常函数. 因此对 $1 \leq \nu \leq m$, $\dfrac{\partial F}{\partial z_\nu}$ 关于 λ 平移不变, 于是这实际上定义了一个全纯映射 $T_1 \to \mathbb{C}^n$; 而 T_1 紧致, 从而该映射为常值映射. 证毕. □

定理. *(Torelli 定理).* 设 X, Y 为紧黎曼曲面, 且亏格同为 $g \geq 1$. 记 Θ_X, Θ_Y 分别为 $J(X), J(Y)$ 上的 Θ-除子. 若存在解析同构 $\varphi : J(X) \to J(Y)$ 使得 $\varphi^*(\Theta_Y) = \Theta_X$, 则 X, Y 解析同构.

不妨通过 φ 将 $(J(X), \Theta_X)$ 与 (J_Y, Θ_Y) 等同.

记 $A_X : X \to J(X)$ 为 X 的 Abel-Jacobi 映射, $W_r \subseteq J(X)$ 为 $S^r(X)$ 的像, $1 \le r \le g$.

再记 $A_Y : Y \to J(Y)$ 为 Y 的 Abel-Jacobi 映射, $V_r \subseteq J(Y)$ 为 $S^r(Y)$ 的像, $1 \le r \le g$.

我们将证明以下定理. 下述定理显然能直接推出 Torelli 定理.

定理. 如果 W_{g-1} 是 V_{g-1} 的平移, 那么 V_1 是 W_1 或者 $-W_1$ 的平移.

我们继续交待记号.

对于 $J(X)$ 的子集 E, 记集合 $E^* := A(K_X) - E$, 其中 K_X 为 X 的典范除子. 我们称 E^* 为 E 的**对偶** (dual). 那么由定理17.3可知

$$W_{g-1}^* = W_{g-1}.$$

对于集合 $E \subseteq J(X)$ 以及 $a \in J(X)$, 记 E_a 为 E 沿 a 的平移, 即 $E_a := E + a$. 在此记号下, 成立

$$(W_{g-1,a})^* = W_{g-1,-a}.$$

我们在接下来的证明中, 将次数为 k 的有效除子记作 $D_k, D'_k, \Delta_k, \ldots$ [换言之, 在接下来的证明中, 除子的下角标常用来表示该除子的次数.]

引理 18.1. 设 $0 \le r \le g-1$, $a, b \in J(X)$, 则 $W_{r,a} \subseteq W_{g-1,b}$ 当且仅当 $a \in W_{g-1-r,b}$.

证明. 若 $a = A_X(D_{g-1-r}) + b$, 则 $A(D_r) + a = A(D_r + D_{g-1-r}) + b \in W_{g-1,b}$.

再证相反方向. 不妨假定 $b = 0$. 于是由题设知对任意 D_r [$D_r \ge 0$ 且次数为 r] , 存在 Δ_{g-1} 使得 $A_X(D_r) + a = A_X(\Delta_{g-1})$. 记 $P_0 \in X$ 为定义 Abel-Jacobi 映射的基点, 则 $A_X(rP_0) = 0$. 从而存在次数为 $g-1$ 的有效除子 δ 使得 $a = A_X(\delta)$. 现在我们有 $A_X(D_r + \delta) = A_X(\Delta_{g-1} + rP_0)$, 于是由 Abel 定理得 $D_r + \delta \sim \Delta_{g-1} + rP_0$ [线性等价] . 因此 $D_r + K_X - \Delta_{g-1} \sim (K_X - \delta) + rP_0$. 此外, $K_X - \Delta_{g-1}$ 与 $K_X - \delta$ 都线性等价于有效除子 [因为 $h^0(D'_{g-1}) = h^0(K_X - D'_{g-1})$] . 因此 $K_X - \delta + rP_0$ 线性等价于某个形如 $D_r + D'_{g-1}$ 的有效除子 ($\forall D_r$); 因此 $\dim |K_X - \delta + rP_0| \ge r$. 因此由 Riemann-Roch 定理, $h^0(\delta - rP_0) = h^0(K_X - \delta + rP_0) + 1 - g + (g-1-r) \ge 1$. 因此 $\delta - rP_0 \sim D^0_{g-1-r}$, 从而我们有 $A_X(D^0_{g-1-r}) = D_X(\delta - rP_0) = A_X(\delta) = a$, 于是 $a \in W_{g-1-r}$. □

引理 18.2. 设 $0 \le r \le g-1$. 则成立

$$W_{g-1-r} = \bigcap_{a \in W_r} W_{g-1,-a},$$

以及

$$W^*_{g-1-r} = \bigcap_{a \in W_r} W_{g-1,a} = \bigcap_{a \in W_r} (W_{g-1,-a})^*.$$

证明. 若 $a \in W_r$, 则 $a = A_X(D_r)$, 并且 $W_{g-1-r} + A_X(D_r) \subseteq W_{g-1}$, 从而 $W_{g-1-r} \subseteq \bigcap_{a \in W_r} W_{g-1,-a}$.

另一方面若 $\zeta \in \bigcap_{a \in W_r} W_{g-1,-a}$, 则 $\zeta + W_r \subseteq W_{g-1}$. 于是由引理18.1可知 $\zeta \in W_{g-1-r}$. 从而第一式得证. 此式两边取对偶即可得到第二式. □

引理 18.3. 设 $0 \le r \le n-2$, $a \in J(X)$, $x \in W_1$, $y \in W_{g-1-r}$. 记 $b := a + x - y$. 则以下两者至少有一个成立: 要么

$$W_{r+1,a} \subseteq W_{g-1,b}$$

要么

$$W_{g-1,b} \cap W_{r+1,a} = W_{r,a+x} \cup S$$

其中 $S := W_{r+1,a} \cap (W_{g-2,y-a})^*$.

证明. 由 W_k 的定义可知存在 $P \in X$ 使得 $A_X(P) = x$; 存在除子 D^0_{g-1-r} 使得 $A_X(D^0_{g-1-r}) = y$.

(1). 如果 $P \in \operatorname{supp}(D^0_{g-1-r})$, 则 $x - y = -A_X(D')$, 其中 $\deg D' = g-2-r$ [并且 $D' \ge 0$] , 于是我们有

$$a = b + A_X(D').$$

从而 $a + W_{r+1} = b + (A_X(D') + W_{r+1}) \subseteq b + W_{g-1}$, 这是第一种情形.

(2). 如果 $P \notin \mathrm{supp}(D^0_{g-1-r})$, 则对于任意的

$$u \in W_{r+1,a} \cap W_{g-1,b},$$

记

$$u = A_X(D_{r+1}) + a = A_X(\Delta_{g-1}) + b = A_X(\Delta_{g-1}) + a + A_X(P) - A_X(D^0_{g-1-r}).$$

注意 $D_{r+1} + D^0_{g-1-r}$ 与 $\Delta_{g-1} + P$ 的次数都为 g, 从而 Abel 定理表明

$$D_{r+1} + D^0_{g-1-r} \sim \Delta_{g-1} + P.$$

情形 1. $D_{r+1} + D^0_{g-1-r} = \Delta_{g-1} + P$.

此时, 因为 $P \notin \mathrm{supp}(D^0_{g-1-r})$, 从而 $P \in \mathrm{supp}(D_{r+1})$, 因此我们有

$$D'_r + D^0_{g-1-r} = \Delta_{g-1}, \quad (D'_r = D_{r+1} - P).$$

于是

$$A_X(D'_r) + y = u - b,$$

从而 $u \in W_r + b + y = W_{r,a+x}$.

情形 2. $D_{r+1} + D^0_{g-1-r} \neq \Delta_{g-1} + P$.

此时, 完备线性系统 $|\Delta_{g-1}+P|$ 包含两个不同的有效除子, 于是 $\dim|\Delta_{g-1}+P| \geq 1$. 因此对任意 $Q \in X$, 存在 $\Delta'_{g-1} \geq 0$ 使得 $\Delta_{g-1} + P \sim \Delta'_{g-1} + Q$. 这表明, 若 $w = A(Q)$, $(u-b)+x = A_X(\Delta_{g-1}) + A_X(P) = A_X(\Delta'_{g-1}) + w \in W_{g-1,w}$; 由 Q 的任意性可得 $u-b+x \in \bigcap_{w\in W_1} W_{g-1,w} = W^*_{g-2}$ [利用了引理18.2]; 因此 $u \in (W^*_{g-2})_{b-x} = (W^*_{g-2})_{a-y} = (W_{g-2,y-a})^*$; 当然, 由题设还有 $u \in W_{r+1,a}$. 因此 $W_{r+1,a} \cap W_{g-1,b} \subseteq W_{r,a+x} \cup S$.

我们还有验证相反的包含关系. 我们有 $W_r + a + x + W_r + a + A_X(P) \subseteq W_{r+1,a}$. 因为 $a+x = b+y \in b + W_{g-1-r}$, 我们有 $W_{r,a+x} \subseteq b + W_{g-1-r} + W_r \subseteq b + W_{g-1}$. 最后, $(W_{g-2,y-a})^* = W^*_{g-2} + b - x = A_X(K_X) - W_{g-2} - x + b \subseteq A_X(K_X) - W_{g-1} + b = W_{g-1} + b$.

这就证明了 $W_{r,a+x} \subseteq W_{r+1,a} \cap W_{g-1,b}$ 以及 $S \subseteq W_{r+1,a} \cap W_{g-1,b}$; 引理得证. □

Torelli 定理的证明. 注意我们将 $J(X)$ 与 $J(Y)$ 等同 [以后都记作 J] , 记 $V_r \subseteq J$ 为 $S^r(Y)$ 关于 A_Y 的像集.

记 $r \geq 0$ 为满足以下性质的最小整数: V_1 包含于 W_{r+1} 或者 W^*_{r+1} 的某个平移. 注意 $V_1 \subseteq V_{g-1}$, 且 V_{g-1} 为 W_{g-1} 的某个平移, 因此的确存在满足该性质的 r [例如 $g-2$] .

于是 Torelli 定理断言, $r = 0$. 假设 $r \geq 1$, 记 $V_1 \subseteq W_{r+1,a}$. 任取 $x \in W_1$, $y \in W_{g-1-r}$.

注意到, 对于给定的 x, 存在解析集 $Z(x) \subseteq W_{g-1-r}$, $Z(x) \neq W_{g-1-r}$, 使得当 $y \notin Z(x)$ 时成立 $V_1 \not\subseteq W_{g-1,b}$, 其中 $b = a + x - y$.

这是因为, 若 $\forall y$, $V_1 \subseteq W_{g-1,b}$, 则 $V_{1,-x-a} \subseteq \bigcap\limits_{y \in W_{g-1-r}} W_{g-1,-y} = W_r$, 这与 r 的定义矛盾.

现在, 若 $V_1 \subseteq W_{g-1,a+x-y} = V_{g-1,\alpha-y}$, $\alpha := c_0 + x$, c_0 给定, 则 $V_1 + y \subseteq V_{g-1,\alpha}$. 由引理18.1, 可知必有 $y \in V_{g-2,\alpha}$. 因此, 若 $Z(x) = V_{g-2,\alpha} \cap W_{g-1-r} \neq W_{g-1-r}$, 则对 $y \in W_{g-1-r} - Z(x)$ 都有 $V_1 \not\subseteq W_{g-1,b}$, $b := a + x - y$.

至此 (记 $b := a + x - y$, $y \notin Z(x)$)

$$V_1 \cap W_{g-1,b} = V_1 \cap (W_{g-1,b} \cap W_{r+1,a});$$

因为 $V_1 \subseteq W_{r+1,a}$, 并且 $V_1 \not\subseteq W_{g-1,b}$, 从而 $W_{r+1,a} \not\subseteq W_{g-1,b}$. 从而由引理(18.3), 我们得到

$$V_1 \cap W_{g-1,b} = (V_1 \cap W_{r,a+x}) \cup (V_1 \cap S),$$

其中 $S = W_{r+1,a} \cap (W_{g-2,y-a})^*$. 因为 $V_1 \not\subseteq W_{g-1,b}$ [并且 W_{g-1} 是 V_{g-1} 的平移] , 从而存在 Y 上的次数为 g 的除子 $D(b)$, 使得 [记 $A_Y^{(g)} : S^g(Y) \to J$ 为自然映射]

$$A_Y(D(b)) = V_1 \cdot W_{g-1,b}, \quad A_Y^{(g)}(D(b)) = b - c_1, \quad c_1\text{为某常数}.$$

我们记 $D(b) = D_0(x) + D_1(x,y)$, 其中 $D_0(x)$ 由 $D(b)$ 当中被 A_Y 映到 $V_1 \cap W_{r,a+x}$ 的点构成; 而 $D_1(x,y)$ 当中的点都不被映到 $W_{r,a+x}$. 断言 $D_0(x)$ 的次数为 1, 即 $D_0(x)$ 只含有一个点, 它在 $V_1 \cap W_{g-1,b}$ 中出现的次数为 1.

首先假设 $\deg D_0(x) \geq 2$. 于是, 固定 x, 将 y 跑遍 $W_{g-1-r} - Z(x)$, 则 $D_1(x,y)$ 在 J 中的像是 V_{g-2} 的一个给定的平移, $(V_{g-2})_{-A_Y(D_0(x))}$. 但另一方面, $D_1(x,y)$ 的像也

是 $b - A_Y(D_0(x))$ 的给定的平移, 从而也是关于 $-y$ 的给定的平移 [与 x 有关]. 因为 $Z(x) \neq W_{g-1-r}$, 从而

$$W^*_{g-1-r} \subseteq V_{g-2,\beta}, \quad \beta = \beta(x).$$

因此

$$\bigcap_{-v \in V_{g-2,\beta}} V_{g-1,v} \subseteq \bigcap_{-v \in W^*_{g-1-r}} W_{g-1,v+c} \quad \text{若 } V_{g-1} = W_{g-1} + c.$$

由引理18.2, 上式左边为 V_1 的某个平移, 右边为 W^*_r 的某个平移. 这就与 r 的定义矛盾.

因此 $\deg D_0(x) \leq 1$.

再证明 $\deg D_0(x) \geq 1$. 否则, $D(b) = D_1(x, y)$ 的支集是只与 y 有关的有限集 [即, Y 中的被 A_Y 映到 $S \cap V_1$ 的点构成的集合; $S \cap V_1$ 为有限集, 包含于 $V_1 \cap W_{g-1,b}$, $V_1 \not\subseteq W_{g-1,b}$]. 但 $A_Y^{(g)}(D_1(x, y)) = a + x - y - c_1$ 与 x 无关, 其中 x 取遍 W_1 的某非空开集.

因此 $\deg D_0(x) = 1$.

如前文所述, 若 $y \in W_{g-1-r} - Z(x)$, 则 $D_1(x, y)$ 的支集是有限集, 且只与 y 有关. 因此可以取无穷多个点 $x_\nu \in W_1$ $(\nu \geq 1)$ 使得 $D_1(x_\nu, y) = D_1(y)$ [与 ν 无关]. 因此 $A_Y(D_0(x_\nu)) = a + x_\nu - y - c_0 - A_Y(D_1(y))$, 并且

$$A_Y(D_0(x_\nu)) - A_Y(D_0(x_1)) = x_\nu - x_1, \quad \nu \geq 1.$$

显然 $A_Y(D_0(x_\nu)) - A_Y(D_0(x_1)) \in V_{1,t}$, $t := -A_Y(D_0(x_1))$; 并且 $x_\nu - x_1 \in W_{1,-x_1}$. 因此曲线 $V_{1,t}$ 与 $W_{1,-x_1}$ 有无穷多个交点, 从而必相等. 定理得证. □

19 Θ 的奇异性的黎曼定理

黎曼奇点定理 (Riemann's singularity theorem) 将 ϑ-函数在点 $\zeta \in \Theta$ 处的零点阶数用 $\dim |D|$ 来表达, 其中 $D \geq 0$ 是次数为 $g-1$ 的有效除子, 使得 $\zeta - \kappa = A(D)$. 黎曼将该零点阶数与 ϑ 在形如 $W_r - W_r - \zeta$ 的集合上是否恒为零联系起来, 以此证明黎曼奇点定理, 见 *Über das Verschwinden der Theta-Functionen*.

该定理可以 [用 Θ 的切锥] 更加几何地表述, 并且推广到一般的 W_k, $2 \leq k \leq g-1$, 这是 G. Kempf 的工作, 见: *On the geometry of a theorem of Riemann*, Annals of Math.

98 (1973), 178-185. 对该定理的探讨, 最佳的参考书是 Arbarello-Cornalba-Griffiths-Harris [10].

我们来介绍两个引理, 其实我们在黎曼因子分解定理之前就证明过它们了.

引理 19.1. 取定 $P \in X$, 则存在 $\zeta \in \Theta$ 使得函数 $x \mapsto \vartheta(A(x) - A(P) - \zeta) \not\equiv 0$.

证明. 即 $Y \subseteq S^g(X)$ 为映射 $A : S^g(X) \to J(X)$ 的临界点构成的集合, 即 $Y = \left\{D \in S^g(X) \middle| \operatorname{rank} \mathrm{d}A|_D < g\right\}$. 则 $A|_Y$ 在其任一纤维上都没有孤立点 [见定理15.2] , 从而 $Y' := A(Y)$ 的维数 $\leq g-2$.

如果 $x \mapsto \vartheta(A(X) - A(P) - \zeta) \equiv 0$, 则 $\zeta + A(P) = A(D) + \kappa$, 其中 $D \geq 0$ 的次数为 g, 并且 $\dim |D| > 0$, 从而 $D \in Y$ [再次使用定理15.2] . 因此, 只需选取 $\zeta \in \Theta$ 使得 $\zeta \notin \kappa - A(P) + Y'$ 即可. □

接下来, 取定 $\zeta \in \Theta$. 对于 $P \in X$, 我们将 [X 的相应合适的线丛的] 截面 $x \mapsto \vartheta(A(X) - A(P))$ 记作 F_P.

引理 19.2. 取定 $\zeta \in \Theta$; 若 $P \in X$ 满足 $F_P \not\equiv 0$, 则 $\operatorname{div}(F_P) = P + D_0$, 其中 $D_0 \geq 0$ 的次数为 $g-1$, 并且 D_0 与 P 无关 [只与 ζ 有关] .

证明. 记 $D := \operatorname{div}(\vartheta(A(x) - A(P) - \zeta))$, 则 $D \geq 0$, $\deg D = g$, 并且 $\dim |D| = 0$ [因为 $F_P \not\equiv 0$] ; 此外, 注意 $F_P(P) = \vartheta(-\zeta) = \vartheta(\zeta) = 0$. 因此 $D = P + D_0$, $D_0 \geq 0$, $\deg D_0 = g-1$, $\dim |D_0| = 0$.

若 $Q \in X$ 满足 $F_Q \not\equiv 0$; 则

$$D' := \operatorname{div}(F_Q) = Q + D_1, \quad D_1 \geq 0, \deg D_1 = g-1.$$

则有 $A(D) = A(P) + \zeta - \kappa$, 从而 $A(D_0) = \zeta - \kappa$; 同样地有 $A(D_1) = \zeta - \kappa$. 又因为 D_0, D_1 的次数都是 $g-1$, 从而 Abel 定理表明 $D_0 \sim D_1$. 又因为 $\dim |D_0| = 0$, 于是迫使 $D_0 = D_1$. □

引理 19.3. 给定 $\zeta \in \Theta$, 若存在 $P \in X$ 使得 $F_P \not\equiv 0$, 那么至多存在 g 个点 Q 使得 $F_Q \equiv 0$.

证明. 取定 x_0 使得 $\vartheta(A(x_0) - A(P) - \zeta) \neq 0$. 那么函数 $y \mapsto \vartheta(A(x_0) - A(y) - \zeta)$ 不恒为零, 并且其除子为 $\operatorname{div}(\vartheta(A(y) - \zeta'))$, 其中 $\zeta' = -\zeta + A(x_0)$. 由于 ϑ-函数为偶函数, 从而该除子的次数为 g. □

定理 19.1. 取定 $\zeta \in \Theta$. 则 $\forall P \in X$, $F_P \equiv 0$ [换言之, $\forall x, \forall P$, $\vartheta(A(x) - A(P) - \zeta) = 0$] 当且仅当

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial z_\nu}(\zeta) = 0, \quad \nu = 1, ..., g.$$

证明. 若对任意 x, P 都有 $\vartheta(A(x) - A(P) - \zeta) = 0$, 则两边对 x 微分, 注意 $\mathrm{d}A(x) = (\omega_1(x), ..., \omega_g(x))$, 从而

$$\sum_{\nu=1}^{g} \frac{\partial \vartheta}{\partial z_\nu}(A(x) - A(P) - \zeta)\omega_\nu(x) = 0;$$

取 $x = P$, 有

$$\sum_{\nu=1}^{g} \frac{\partial \vartheta}{\partial z_\nu}(-\zeta)\omega_\nu(P) = 0, \quad \forall P;$$

由于 $(\omega_1, ..., \omega_g)$ 线性无关, 并且 $\dfrac{\partial \vartheta}{\partial z_\nu}(z) = -\dfrac{\partial \vartheta}{\partial z_\nu}(-z)$, 从而有 $\dfrac{\partial \vartheta}{\partial z_\nu}(\zeta) = 0$, $\nu = 1, ..., g$.

反之, 如果 $x \mapsto \vartheta(A(x) - A(P) - \zeta)$ 不恒为零; 记 $\operatorname{div}(\vartheta(A(x) - A(P) - \zeta)) = P + D_0(\zeta)$, $\deg D_0(\zeta) = g - 1$. 由引理19.3, 存在 $Q \notin \operatorname{supp} D_0(\zeta)$ 使得 $\vartheta(A(x) - A(Q) - \zeta) \not\equiv 0$. 再由引理19.2, $\operatorname{div}(\vartheta(A(x) - A(Q) - \zeta)) = Q + D_0(\zeta)$, 于是 Q 为 $\vartheta(A(x) - A(Q) - \zeta)$ 的单零点, 从而

$$\sum_{\nu=1}^{g} \frac{\partial \vartheta}{\partial z_\nu}(A(x) - A(Q) - \zeta)\Big|_{x=Q} \omega_\nu(Q) \neq 0,$$

从而存在某个 ν 使得 $\dfrac{\partial \vartheta}{\partial z_\nu}(-\zeta) \neq 0$. □

此定理也可重新表述如下. 对于 $J(X)$ 的子集 E, E' 以及 $\zeta \in J(X)$, 我们将集合 $\left\{x - y - \zeta \,\middle|\, x \in E, y \in E'\right\}$ 简记为 $E - E' - \zeta$. 类似简记 $E + E'$ 等等.

定理. 对于 $\zeta \in \Theta$, 则 ζ 是 Θ 的奇点当且仅当 $\vartheta(W_1 - W_1 - \zeta) \equiv 0$.

现在, 设 X 的亏格 $g \geq 2$. 给定 $\zeta \in \Theta$, 则必存在正整数 $r < g$ 使得 $\vartheta(W_r - W_r - \zeta) \not\equiv 0$; 这是因为, 由于 $W_{g-1} = A(K_X) - W_{g-1}$ [见定理17.3的证明过程], 从而 $W_{g-1} - W_{g-1}$ 是 $W_{g-1} + W_{g-1} = J(X)$ 的平移.

取定 $\zeta \in \Theta$, 记 $r = r_\zeta$ 是满足以下性质的最大整数: $\forall k < r$, $\vartheta(W_k - W_k - \zeta) \not\equiv 0$. 则 $r < g$.

定理 19.2. 设 s 为正整数, $\zeta \in \Theta$. 则 $r_\zeta \geq s$ 当且仅当 $\zeta = \kappa + A(D)$, 其中 $D \geq 0$, $\deg D = g - 1$, $\dim |D| \geq s - 1$.

证明. 记 $r := r_\zeta$. 则存在次数为 r 的有效除子 D_0, D_1 使得 $\vartheta(A(D_0) - A(D_1) - \zeta) \neq 0$. 我们不妨假设 $\operatorname{supp}(D_0 + D_1)$ 含有 $2r$ 个不同的点. 这是因为, 固定 D_1, 则满足上述要求的 $D_0 \in S^r(X)$ 构成的集合是 $S^r(X)$ 的非空开集.

记 $D_0 = P + \Delta_0$, 其中 $\deg \Delta_0 = r - 1$. 则函数 $F : x \mapsto \vartheta(A(x) + A(\Delta_0) - A(D_1) - \zeta) \not\equiv 0$ [因为 $x = P$ 时它不为零]. 对于 $x \in \operatorname{supp}(D_1)$, 则 $A(x) + A(\Delta_0) - A(D_1) = A(\Delta_0) - A(D_1 - x) \in W_{r-1} - W_{r-1}$. 因此, 由 $\vartheta(W_{r-1} - W_{r-1} - \zeta) = 0$ 可得 $F(x) = 0, \forall x \in \operatorname{supp} D_1$. 从而 F 的除子 D 的次数为 g, 并且形如

$$D = D_1 + D_2, \quad \deg D_2 = g - r.$$

另一方面,

$$A(D) = \zeta + A(D_1) - A(\Delta_0) - \kappa,$$

从而得到

$$\zeta - \kappa = A(D_2 + \Delta_0), \quad \deg(D_2 + \Delta_0) = g - r_r - 1 = g - 1.$$

注意到 Δ_0 可在 $S^{r-1}(X)$ 的某个非空开集当中任意选取 [这是因为 $D_0 = P + \Delta_0$ 可在 $S^r(X)$ 的某个非空开集当中任意选取]. 因此 $\dim |D_2 + \Delta_0| \geq r - 1$.

反之, 若 $\zeta - \kappa = A(D)$, 其中 $D \geq 0$, $\deg D = g - 1$, 并且 $\dim |D| \geq s - 1$. 那么对于任意的次数为 $s - 1$ 的有效除子 D_1, 我们总可不妨 $D \geq D_1$ [因为 $\dim |D| \geq s - 1$].

设 E_0, E_1 是次数为 $s-1$ 的有效除子. 取 $D \geq 0$, $\deg D = g-1$, 使得 $\zeta - \kappa = A(D)$ 并且 $D \geq E_0$. 则有

$$A(E_0) - A(E_1) - \zeta = A(E_0 - D) - A(E_1) - \kappa = -(\kappa + A(E_1 + (D - E_0)));$$

由于 $D - E_0 \geq 0$, 且其次数为 $g-1-(s-1)$, 从而 $E_1 + D - E_0 \geq 0$, 其次数为 $g-1$. 因此 $\kappa + A(E_1 + D - E_0) \in W_{g-1} + \kappa = \Theta$. 从而 $A(E_0) - A(E_1) - \zeta \in -\Theta = \Theta$, 于是 $\vartheta(A(E_0) - A(E_1) - \zeta) = 0$. 从而 $\vartheta(W_{s-1} - W_{s-1} - \zeta) \equiv 0$. □

定理 19.3. *(黎曼奇点定理).*

设 $\zeta \in \Theta$, m 为 ϑ-函数在 ζ 处的零点阶数, 即: 若多重指标 $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_g)$, $|\alpha| := \alpha_1 + \cdots + \alpha_g < m$, 则

$$\frac{\partial^\alpha \vartheta}{\partial z^\alpha}(\zeta) := \frac{\partial^{|\alpha|}\vartheta}{\partial z_1^{\alpha_1} \cdots \partial z_g^{\alpha_g}}(\zeta) = 0,$$

并且存在多重指标 $|\beta| = m$ 使得 $\dfrac{\partial^\beta \vartheta}{\partial z^\beta}(\zeta) \neq 0$. 等价地, ϑ 在 ζ 处的泰勒展开的最低次项的次数为 m.

那么成立 $m = r_\zeta$, 从而 $m = 1 + \dim |D|$, 其中 $D \geq 0$ 是次数为 $g-1$ 的有效除子, 使得 $\zeta - \kappa = A(D)$.

证明. 设正整数 k 满足 $\vartheta(W_k - W_k - \zeta) \equiv 0$. 断言: 若 $|\alpha| \leq k$, 则 $\dfrac{\partial^\alpha \vartheta}{\partial z^\alpha}|_{W_{k-|\alpha|}-\zeta} \equiv 0$. 我们通过对 $n := |\alpha|$ 归纳来证明此断言. $n = 0$ 即为题设. 若 $|\alpha| = n-1 < k$ 时断言成立, 则对于任意 $u, v \in W_{k-n}$ 以及 $x, y \in X$, 有 $A(x) + u - (A(y) + v) - \zeta \in W_{k-(n-1)} - W_{k-(n-1)} - \zeta$, 从而 $\dfrac{\partial^\alpha \vartheta}{\partial z^\alpha}(A(x) + u - A(y) - v - \zeta) \equiv 0$. 两边对 x 微分, 再令 $x = y$, 可得

$$\sum_{\nu=1}^{g} \frac{\partial}{\partial z_\nu} \frac{\partial^\alpha \vartheta}{\partial z^\alpha}(u - v - \zeta)\omega_\nu(x) = 0, \quad \forall x \in X,$$

从而对任意 $|\alpha'| = |\alpha| + 1 = n$ 以及任意 $u, v \in W_{k-n}$ 都有 $\dfrac{\partial^{\alpha'} \vartheta}{\partial z^{\alpha'}}(u - v - \zeta) = 0$.

这表明对任意 $|\alpha| \leq k$ 都有 $\dfrac{\partial^\alpha \vartheta}{\partial z^\alpha}(-\zeta) = 0$, 从而 $m \geq r_\zeta$.

而反向的不等式 $m \le r_\zeta$ 较难证明. 记 $r = r_\zeta$, 于是 $\vartheta(W_{r-1} - W_{r-1} - \zeta) \equiv 0$, 且 $\vartheta(W_r - W_r - \zeta) \not\equiv 0$. 取次数均为 r 的有效除子 D, D_0, D_1, 使得 $\operatorname{supp}(D + D_0 + D_1)$ 由 $3r$ 个不同的点构成, 并且

$$\vartheta(A(D_0) - A(D_1) - \zeta) \neq 0, \quad \vartheta(A(D_0) - A(D) - \zeta) \neq 0.$$

记 $D = \sum_{\nu=1}^{r} P_\nu$, $D_1 = \sum_{\nu=1}^{r} Q_\nu$, 再记 $\omega_{P_\nu Q_\nu}$ 为第三类正规 Abel 微分 [在 P_ν, Q_ν 处的留数分别为 $+1$, -1, 在 $X - \{P_\nu, Q_\nu\}$ 全纯, 且 a-周期为零] . 设 $\varphi := \sum_{\nu=1}^{r} \omega_{P_\nu Q_\nu}$.

对于 $x_1, ..., x_r \in X$, 令

$$F(x_1, ..., x_r) := \exp\left(\sum_{\nu=1}^{r} \int_{P_0}^{x_\nu} \varphi\right) \frac{\vartheta(A(x_1) + \cdots + A(x_r) - A(D_1) - \zeta)}{\vartheta(A(x_1) + \cdots + A(x_r) - A(D) - \zeta)}.$$

[若 $\sum p_\nu = D_0$, 则 F 在点 $(p_1, ..., p_r)$ 全纯且非零] .

断言 F 是在 $\underbrace{X \times \cdots \times X}_{r\text{个}}$ 整体定义的亚纯函数. 为此, 先固定 $x_2, ..., x_r$, 将 F 视为关于 x_1 的, 定义在将 X 沿同调基 a_i, b_j 割开所得的单连通多边形 Δ 上的一元函数 $F(x_1)$. 若 $x_1 \in b_j$, x_1' 为其在 b_j' 的对应点, 则 $A(x_1) = A(x_1') + e_j$, $\int_{x_1'}^{x_1} \varphi = 0$ [因为 φ 的 a-周期为零] . 因此 $F(x_1) = F(x_1')$. 而若 $x_1 \in a_j$, 记 x_1' 为其在 a_j' 上的对应点, 则 $A(x_1) - A(x_1') = -B_j$, 且由第14节的互反定理可知

$$\int_{x_1'}^{x_1} \varphi = -\sum_{\nu=1}^{r} \int_{b_j} \omega_{P_\nu Q_\nu} = 2\pi i \sum_{\nu=1}^{r} \int_{P_\nu}^{Q_\nu} \omega_j = 2\pi i \sum_{\nu=1}^{r} (A_j(Q_\nu) - A_j(P_\nu)),$$

从而

$$\frac{F(x_1)}{F(x_1')} = e^{2\pi i(A_j(D_1) - A_j(D))} \frac{\exp\left(2\pi i\left(\sum_\nu A_j(x_\nu) - A_j(D_1) - \zeta_j\right) + \pi i B_{jj}\right)}{\exp\left(2\pi i\left(\sum_\nu A_j(x_\nu) - A_j(D) - \zeta_j\right) + \pi i B_{jj}\right)} = 1.$$

因此 $F(x_1)$ 是 X 上的单值函数.

下面断言 F 是常值函数 [从而为非零常值函数. 注意 $F(p_1, ..., p_n) \neq 0$] . 同样地, 先固定 X 上一般的点 $x_2, ..., x_n$, 考虑除子

$$E_1 \quad = \quad \operatorname{div}(x_1 \mapsto \vartheta(A(x_1) + \cdots + A(x_r) - A(D_1) - \zeta)),$$

$$E \;=\; \operatorname{div}(x_1 \mapsto \vartheta(A(x_1)+\cdots+A(x_r)-A(D)-\zeta)).$$

对于 $x_1 \in \operatorname{supp}(D_1)$, 则 $\sum_{\nu=1}^{r} A(x_\nu) - A(D_1) - \zeta = \sum_{\nu=2}^{r} A(x_\nu) - A(D_1 - x_1) - \zeta \in W_{r-1} - W_{r-1} - \zeta$, 因此 ϑ 在该点处的值为零. 从而必有 $E_1 = D_1 + D_1'$, 其中 $D_1' \geq 0$ 且次数为 $g-r$. 同样地, $E = D + D'$, 其中 $D' \geq 0$, $\deg D' = \deg D_1' = g - r$.

现在, 我们来证明 $D_1' = D'$ ［原因与引理19.2相同］. 事实上, $\dim|E| = 0$ ［这是因为关于 x_1 的函数 $\vartheta(A(x_1)+\cdots+A(x_r)-A(D)-\zeta) \neq 0$］, 从而 $\dim|D'| = 0$. 另一方面, $A(D') = A(E) - A(D) = \left(\zeta + A(D) - \sum_{\nu=2}^{r} A(x_\nu) - \kappa\right) - A(D) = \zeta - \kappa - \sum_{\nu=2}^{r} A(x_\nu)$; 同样的方法也可得 $A(D_1') = \zeta - \kappa - \sum_{\nu=2}^{r} A(x_\nu)$. 又因为 $\deg D' = \deg D_1'$, 因此由 Abel 定理可得 $D_1' \sim D'$. 再因为 $\dim|D'| = 0$, 所以有 $D' = D_1'$.

取定 $x_2, ..., x_r$, 考虑函数 $\exp\left(\sum_{k=1}^{r} \int_{P_0}^{x_k} \varphi\right)$, 分别记 z_ν, w_ν 为 P_ν, Q_ν 的局部坐标 ［使得 $z_\nu(P_\nu) = 0$, $w_\nu(Q_\nu) = 0$］. 于是, 当 x_1 位于 P_ν 附近时, 成立 $\int_{P_0}^{x_1} \varphi = \sum_{k=1}^{r} \int_{P_0}^{x_1} \omega_{P_k Q_k} = \int_{P_0}^{x_1} \frac{\mathrm{d}z_\nu}{z_\nu} + h$, 其中 h 为 P_ν 附近的全纯函数. 同样地, 当 x_1 在 Q_ν 附近时, 有 $\int_{P_0}^{x_1} \varphi = -\int_{P_0}^{x_1} \frac{\mathrm{d}w_\nu}{w_\nu} + h'$, 其中 h' 为 Q_ν 附近的全纯函数. 因此, 在 P_ν 附近成立

$$\exp\left(\sum_{k=1}^{r} \int_{P_0}^{x_k} \varphi\right) = c(x_2, ..., x_r) z_\nu e^{h}, \quad (c(x_2, ..., x_r) \in \mathbb{C} - \{0\}),$$

以及, 在 Q_ν 附近成立

$$\exp\left(\sum_{k=1}^{r} \int_{P_0}^{x_k} \varphi\right) = c'(x_2, ..., x_r) \omega_\nu^{-1} e^{h'}, \quad (c'(x_2, ..., x_r) \in \mathbb{C} - \{0\}).$$

于是, 关于 x_1 的函数 $\exp\left(\sum_{k=1}^{r} \int_{P_0}^{x_k} \varphi\right)$ 的除子为 $\sum P_\nu - \sum Q_\nu = D - D_1$. 因此函数 $x_1 \mapsto F(x_1, x_2, ..., x_n)$ 的除子为

$$D - D_1 + E_1 - E = D_1' - D' = 0.$$

因此该函数在 X 全纯且非零, 从而为非零常值函数 ［在固定一般点 $x_2, ..., x_n$ 的条件下］. 再由该函数关于自变量 $x_1, ..., x_r$ 的对称性即可, $F \equiv c_0 \in \mathbb{C} - \{0\}$.

综上, 我们已证明: 存在常数 $c_0 \neq 0$ 使得

$$\exp\left(\sum_{\nu=1}^{r}\int_{P_0}^{x_\nu}\varphi\right)\vartheta\big(A(x_1)+\cdots+A(x_r)-A(D_1)-\zeta\big)=c_0\vartheta\big(A(x_1)+\cdots+A(x_r)-A(D)-\zeta\big).$$

将上式两边对 x_1 微分, 再令 $x_1=P_1$. 注意当 $x_1=P_1$ 时成立 $\exp\left(\int_{P_0}^{x_1}\varphi\right)=0$ [见前文] , 从而得

$$\begin{aligned}&c_1\exp\left(\sum_{\nu=2}^{r}\int_{P_0}^{x_\nu}\varphi\right)\vartheta\big(A(P_1)+A(x_2)+\cdots+A(x_r)-A(D_1)-\zeta\big)\,\mathrm{d}z_1(P_1)\\ =\ &c_0\sum_{k=1}^{g}\frac{\partial\vartheta}{\partial z_k}\big(A(P_1)+A(x_2)+\cdots+A(x_r)-A(D)-\zeta\big)\omega_k(P_1);\end{aligned}$$

这里的 z_1, z_ν 分别为点 P_1, P_ν 附近的局部坐标, 常数 $c_1 \neq 0$; 事实上, 由前文知, 在点 P_1 附近成立 $\exp\left(\int_{P_0}^{x_1}\varphi\right)=z_1e^h$, 其中 h 在 P_1 附近全纯. 反复上述操作, 最后得到

$$\begin{aligned}&c_1\cdots c_r\vartheta\big(A(P_1)+\cdots+A(P_r)-A(D_1)-\zeta\big)\,\mathrm{d}z_1(P_1)\cdots\mathrm{d}z_r(P_r)\\ =\ &c_0\sum_{1\le k_1,\dots,k_r\le g}\frac{\partial^r\vartheta}{\partial z_{k_1}\cdots\partial z_{k_r}}\big(A(P_1)+\cdots+A(P_r)-A(D)-\zeta\big)\omega_{k_1}(P_1)\cdots\omega_{k_r}(P_r).\end{aligned}$$

注意上式左边不为零, 且 $A(P_1)+\cdots+A(P_r)=D$, 因此存在 [介于 1 和 g 之间的] $k_1,\dots,k_r$ 使得

$$\frac{\partial^r\vartheta}{\partial z_{k_1}\cdots\partial z_{k_r}}\neq 0.$$

这就证明了 $m\le r=r_\zeta$, 从而黎曼奇点定理得证. □

黎曼在文献 [3] 中证明该定理时, 并没有直接使用正规 Abel 微分 $\omega_{P_\nu Q_\nu}$, 而是用定理17.6的表达式. 于是, 我们其实也可以直接考虑函数

$$F(x_1,\dots,x_r)=\frac{\prod_{k,\ell=1}^{r}\vartheta\big(A(x_k)-A(P_\ell)-\zeta_0\big)}{\prod_{k,\ell=1}^{r}\vartheta\big(A(x_k)-A(Q_\ell)-\zeta_0\big)}\frac{\vartheta\big(\sum_{\nu=1}^{r}A(X_\nu)-A(D_1)-\zeta\big)}{\vartheta\big(\sum_{\nu=1}^{r}A(X_\nu)-A(D)-\zeta\big)},$$

其中 ζ_0 是 Θ 上给定的一般的点. 用这个函数来证明, 本质上是一样的.

黎曼奇点定理的应用之一是证明如下定理：若 X 不是超椭圆的，则 Θ 的奇点构成的集合 Θ_{sing} 的维数是 $g-4$ [而当 X 是超椭圆曲线的时候，该维数是 $g-3$]．这是一个重要的性质，它表明雅可比簇是一类特殊的**主极化 Abel 簇** (principally polarized abelian variety) [即由满足如下性质的格点子群定义的复环面：该格点子群的基形如 (I,B)，其中 I 为单位阵，B 为复对称阵，并且虚部正定]．而 [定义在 Abel 簇上的] Θ-除子在一般的点处光滑．我们不打算在这里证明该定理，但会解释为什么当 $g \geq 4$ 的时候 $\Theta_{\text{sing}} \neq \varnothing$．关于此定理的讨论可见 [8], [10]，而 A. Andreotti 和 A. Mayer 研究了这个定理的逆定理，见 *On period relations for abelian integrals on algebraic curves*, Annali Sc. Norm. Pisa **21** (1967), 189-238.

由定理19.1可知，Θ_{sing} 是集合 $W^1_{g-1} := \left\{A(D)\middle| D \geq 0, \deg D = g-1, \dim|D| > 0\right\}$ 的某个平移．因此，$\Theta_{\text{sing}} \neq 0$ 等价于如下命题：*存在 X 上的非常值亚纯函数，使得该函数的极点除子的次数 $\leq g-1$．* 若 X 是超椭圆的，则 $g \geq 3$ 时显然成立．而证明 X 非超椭圆 [且 $g \geq 4$] 的情形的一种方法是先证明如下引理：

> **引理.** *设 $X \subseteq \mathbb{P}^{g-1}$ 为典范嵌入，则存在二次型 $Q = \sum_{1\leq i,j\leq g} a_{ij}z_iz_j$ [其中 a_{ij} 为对称阵] 使得 $Q|_X \equiv 0$，并且 $0 < \operatorname{rank}(a_{ij}) \leq 4$.*

[只需要利用第13节的 Noether 定理以及简单的维数计算即可证之．当然，$g=4$ 的情形是平凡的．]

若承认此引理，我们接下来这样做．注意对称矩阵可对角化，我们取 $(z_1, ..., z_g)$ 的适当的线性变换，使得 (a_{ij}) 变为如下对角形式：

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix},$$

并且对角元中 “1” 的个数至多为 4，即 $Q = \sum_{\nu=1}^{r} z_\nu^2$, $r \leq 4$．若 $r \leq 2$，则 Q 为线性型的乘积，从而在 X 上的限制不可能恒为零，这是因为 X 非退化 [不包含于任何超平面]．因

此 $Q = z_1^2 + z_2^2 + z_3^2$ 或者 $Q = \sum_{\nu=1}^{4} z_\nu^2$. 注意 $a^2 + b^2 = (a+bi)(a-bi)$, 从而通过继续作线性变换, 可将 Q 化为 $Q = z_3^2 + z_1 z_2$ 或者 $Q = z_1 z_2 + z_3 z_4$. 若记 $(\omega_1, ..., \omega_g)$ 为 $H^0(X, \Omega)$ 的关于二次型 Q 的一组基, 则成立

$$\omega_3^2 + \omega_1\omega_2 = 0 \quad \text{或者} \quad \omega_1\omega_2 + \omega_3\omega_4 = 0$$

[作为 $K_X^{\otimes 2}$ 的截面] . 无论哪种情况, 若 $\mathrm{div}(\omega_3) = \sum_{\nu=1}^{2g-2} P_\nu$, ω_1 或者 ω_2 [不妨 ω_1] 必然至少在 P_ν 当中的 $g-1$ 个点处取值为零, 从而 ω_1/ω_3 的极点除子的次数 $\leq g-1$.

包含典范曲线的二次型的是非常丰富, 优美的研究课题, 可参考以下:

- B. Saint-Donat. *On Petri's analysis or quadrics through a canonical curve*, Math. Annalen **206** (1973), 157-175.
- M. Green. *Quadrics of rank for in the ideal of the canonical curve.* Inv. Math. **75** (1984), 85-104.

20 参考文献

关于黎曼曲面以及本书所涉及话题的文献浩如烟海, 这里只列出能令我们满足的一部分.

黎曼曲面的经典书籍为:

[1] H. Weyl. *Die Idee der Riemannschen Fläche*, Teubner 1913.

以下是黎曼的两篇原始文章, 它们构成本书大多内容的基础:

[2] B. Riemann. *Theorie der Abel'schen Functionen.* J. für die reine und angew. Math. **54** (1857). Collected Works: pp. 88-144.

[3] B. Riemann. *Über das Verschwinden der Theta-Functionen.* J. für die riene und angew. Math. **65** (1865). Collected Works: 212-224.

以下两份黎曼曲面讲义容易找到, 且与本书的第一部分有很多相同之处:

[4] O. Forster. *Riemannsche Flächen*, Springer 1977. 此书有英文翻译版.

[5] R.C. Gunning. *Lectures on Riemann surfaces.* Princeton Mathematical Notes, 1966.

关于定向曲面的拓扑, 特别是分类定理, 可见:

[6] W.S. Massey. *Algebraic topology: An Introduction.* Harcourt Brace, New York, 1967.

关于本书前半部分用到的复分析知识 [尤其是 $\bar{\partial}$-算子的性质], 以及有限性定理的另一种证明, 可见:

[7] R. Narasimhan. *Complex Analysis in one Variable,* Birkhaüser, 1985.

说到曲线与雅可比簇的几何的快速入门, 没有什么比下面这本优美的书更值得推荐:

[8] D. Mumford. *Curves and their Jacobians.* University of Michigan Press, 1975.

以下两本书不可或缺, 它们不仅也讲了本书内容, 而且还介绍了更多:

[9] P.A. Griffiths, J. Harris. *Principals of Algebraic Geometry.* Wiley, New York, 1978.

[10] E. Arbarello, M. Cornalba, P.A. Friffiths, J. Harris. *Geometry of Algebraic Curves*, Vol. I, Springer, 1985.

Serre 对偶定理的原始文章为:

[11] J.-P. Serre. *Un théorème de dualité.* Comm. Math. Helv. **29** (1955), 2-26.

Martens 对 Torelli 定理的证明见:

[12] H. Martens. *A new proof of Torelli's theorem.* Annals of Math. **78** (1963), 107-111.