# 一、基本不等式

**1. 显然不等式**

（1） ,当 时取等号.

（2） ,当 时取等号.

（3） ,其中 ,当 时取等号.

(4) ,当 时取等号.

(5) .

（6） ,当 时取等号.

【应用】

判断 的敛散性.

**2. 绝对值不等式**

(1) .

当 时, 取等号; 当 时, 取等号.

(2) .

当 时, 取等号, 取等号;

当 时, 取等号, 取等号.

【应用】 ,判断 在 是否连续.

**3. 均值不等式 (调和平均值 几何平均值 算术平均值 平方平均值)**

当所有元素均相等时取等号.

(3) .

(4) .

(5)

【应用】

1. 设 ,证明数列极限存在,并求此极限.【2002 数二】

【应用】

2. 已知 ,证明:

（1） 存在; (2) 级数 收敛.【1997 数一】

【应用】

3. ,判断 在 是否连续.

# 4. 取整函数不等式

表示不超过 的最大整数.

,对 ,当 为整数时取等号.

## 二、常用其他不等式

(1) ,当 时取等号;

（2） ,当 时取等号;

(3) ;

由上面不等式, 可以衍生出下面不等式:

① . ③…….

② .

# 【应用】

1. 证明不等式 . 【1991 数三】

2. 设数列 满足 .

（1）证明: 存在并求该极限; (2) 计算 . 【2006 数一数二】

3. 证明对于任意正整数 ,总有 . 【2011 数二】

**二、常用其他不等式**

(4) 若 ,则 .

(5) (积分绝对值不等式).

（6）设 及 分别是函数 在区间 上的最大值和最小值,则: (积分估值定理)

（7）设 在 上连续, 且 ,则 .

【应用】

1. 设函数 在区间 上连续,且 单调增加, . 证明: (1) ; (2) .

【2014 数一二三】

2. 证明积分中值定理: 若函数 在闭区间 上连续,则至少存在一

点 ,使得 . 【2008 数二】

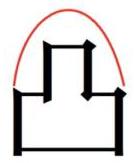
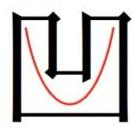
# 三、略有难度的不等式

**1. 凹凸不等式**

设 在区间 上连续,如果对于 上任意两点 恒有

(其中 且 ),那么称 在 上的图像是凹的;

如果恒有 (其中 且 ), 那么称 在 上的图像是凸的.



上面是函数凹凸性的原式定义,如果已知函数 在区域 内二阶可导,可以得到下面的充要条件: 在区间 上是凹 (凸) 的 , 总有 ( ),并且在 内任意小的区间内 都不恒为零.

# 【应用】

设函数 具有 2 阶导数, ,则在区间 上

(A) 当 时, . (B) 当 时, .

(C) 当 时, . (D) 当 时, .

【2014 数一二三】

**2. 柯西—施瓦茨不等式**

（1）二元离散的柯西不等式.

. 当且仅当 , 时取等号.

（2） 元离散的柯西不等式.

推广到 元,有 ,

即 均成立. 当且仅当 , 时,等号成立.

**2. 柯西—施瓦茨不等式**

**（3）连续的二元柯西不等式.**

在 上连续,则 , 当且仅当 时等号成立.

【应用】

将长为 的铁丝分成三段,依次围成圆、正方形与正三角形.三个图形的面积之和是否存在最小值? 若存在, 求出最小值.【2018 数一二三】