一、DFT matrix(Discrete Fourier Transform matrix)

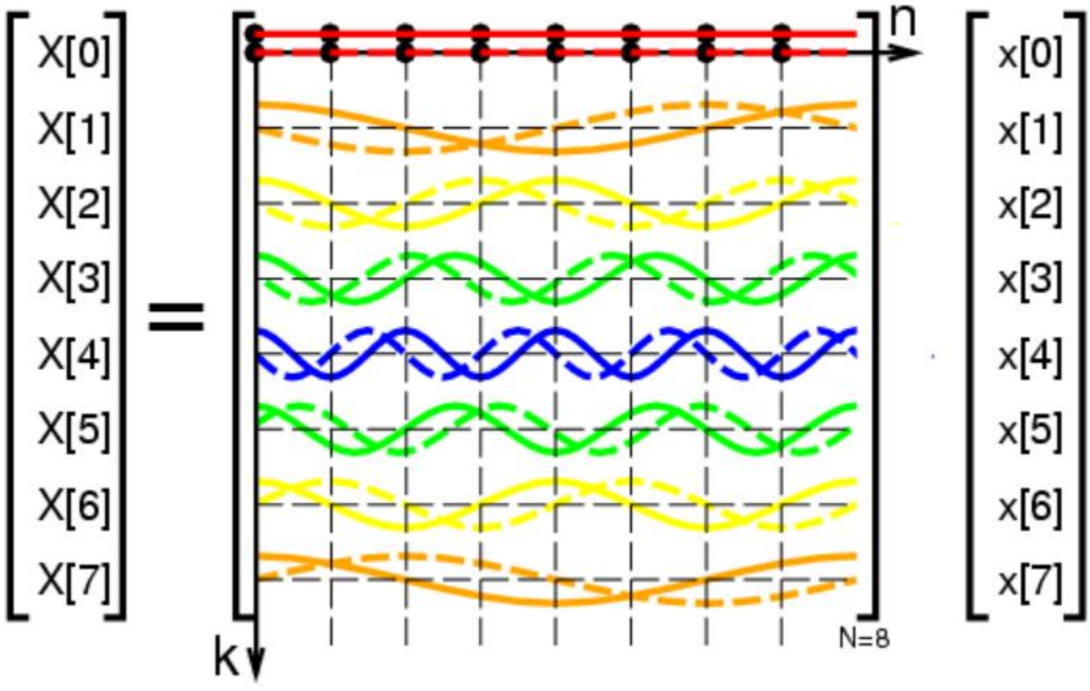
離散傅立葉變換矩陣是將離散傅立葉變換以矩陣乘法來表達的一種表示式。

N點的離散傅立葉變換可以用一個$n \times m$的矩陣乘法來表示，即$X = \ Wx$，其中x是原始的輸入信號，X是經過離散傅立葉變換得到的輸出信號。一個$n \times n$的變換矩陣W可以定義成：

$$W = \frac{1}{\sqrt{N}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 & \omega^3 & \cdots & \omega^{N-1} \\ 1 & \omega^2 & \omega^4 & \omega^6 & \cdots & \omega^{2(N-1)} \\ 1 & \omega^3 & \omega^6 & \omega^9 & \cdots & \omega^{3(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \omega^{N-1} & \omega^{2(N-1)} & \omega^{3(N-1)} & \cdots & \omega^{(N-1)(N-1)} \end{bmatrix}$$

其中ω是1的n次方根的主值（primitive nth root of unity），大小為$e^{\frac{-2\pi i}{N}}$。需要注意的是在總和前面的正規化因數$\frac{1}{\sqrt{N}}$，還有ω中指數的正負號是依據慣例，並且會因為處理的方法有所不同。唯一重要的是，正變換和逆變換有相反的指數正負號標誌，而其正規化因數乘積為$\frac{1}{N}$。

以下用圖片來解說離散傅立葉變換的矩陣乘法概念：



圖中實部（餘弦波）是由實線代表，虛部（正弦波）由虛線代表。最上面一行全為 1，（透過乘上$\frac{1}{\sqrt{8}}$來規一化），因此這個部份代表輸入信號的直流分量。下一行是 8 個負一次循環的複指數取樣（samples of negative one cycle of complex exponential），即分頻(fractional frequency)為−1/8 倍頻率的信號。因此，這一行代表在分頻+1/8 的信號強度。再下一行是 8 個負二次循環的複指數取樣，所以它代表-1/4 倍的分頻。因此，這一行代表在分頻+1/4 的信號強度。以下總結了八點離散傅立葉變換代表的意義，依行排序，以分頻表示：

- 0 代表直流信號成份
- -1/8 代表分頻為+1/8 的信號強度
- -1/4 代表分頻為+1/4 的信號強度
- -3/8 代表分頻為+3/8 的信號強度
- -1/2 代表分頻為+1/2 的信號強度
- -5/8 代表分頻為+5/8 的信號強度
- -3/4 代表分頻為+3/4 的信號強度
- -7/8 代表分頻為+7/8 的信號強度

等效上最後一行，可以當作是分頻為+1/8 即代表分頻-1/8 的信號強度。如此一來，則可以說這個矩陣的上面列是信號的正頻率部份的強度而下面列是信號負頻率部份的強度。

二、DFT

離散傅立葉變換（Discrete Fourier Transform，縮寫為 DFT），是傅立葉變換在時域和頻域上都呈離散的形式，將信號的時域採樣變換為其 DTFT 的頻域採樣。

1. 時頻域皆以 N 點為一週期(Periodic in k and in n with fundamental period of N)

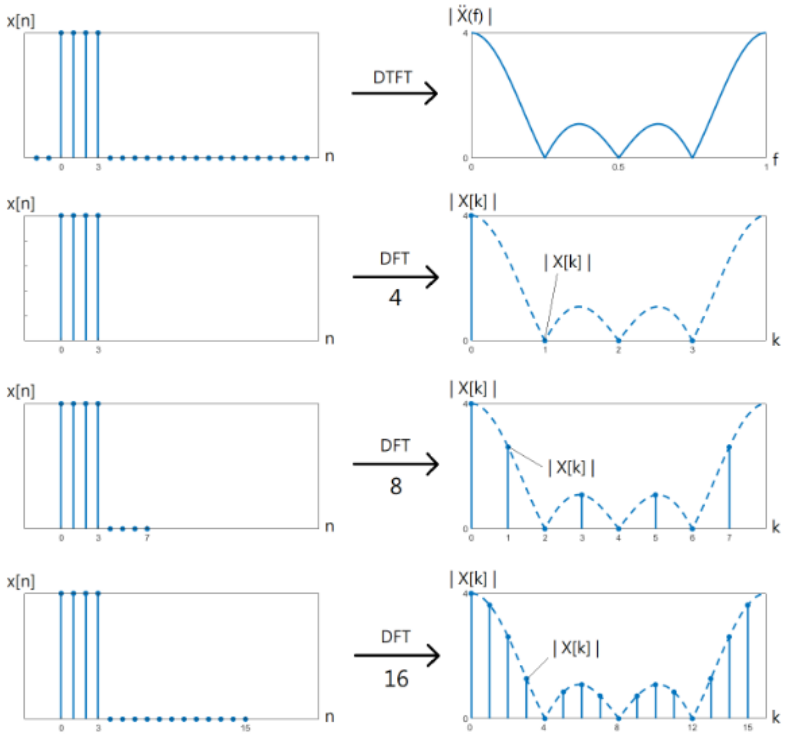
時域取樣造成頻譜週期性、頻域取樣造成時域週期性。這邊點出造成此現象的關鍵恆等式。

(*) $e^{-j2\pi\frac{k}{N}n} = e^{-j2\pi\frac{(k+iN)}{N}n}$ for all $i \in \mathbb{Z}$ implies $X[k] = X[k+iN]$.

(*) $e^{+j2\pi\frac{k}{N}n} = e^{+j2\pi\frac{(k+iN)}{N}n}$ for all $i \in \mathbb{Z}$ implies $x[k] = x[k+iN]$.

2. 訊號補零使頻譜趨近於 DTFT(Zero padding in time domain)

給定一段時限離散訊號，當它作 DFT 之前的補零點數愈多，其離散頻譜會愈接近該時限訊號的 DTFT (連續頻譜)，或者反過來說，對頻譜取樣確實會造成訊號週期性疊加。這邊先給出一張示意圖：



這張圖片裡的第一組是單純的對時限訊號作 DTFT，而後三組則是觀察在原訊號補零的個數會對 DFT 造成什麼影響，的確是可以發現到點數愈多，DFT 就愈接近 DTFT(離散頻譜解析度愈高)。

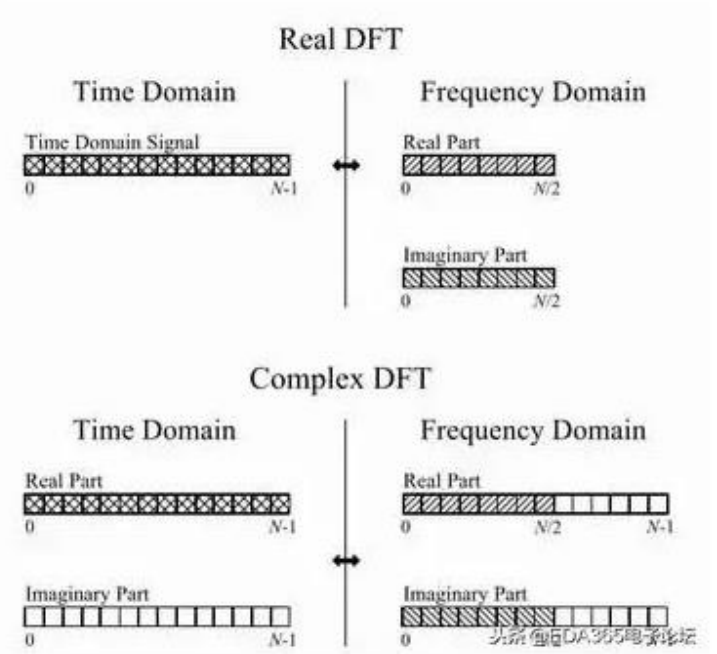
3. 循環摺積(Circular convolution)

這邊和一般「對兩個離散訊號之頻譜乘積作傅立葉反轉換會得到線性摺積」的結論有所不同，因為對 DFT 的視角來說訊號是有隱含週期性的，所以這邊是「循環」摺積的特性，證明如下。

$$
\begin{aligned}
y[n] &= \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} Y[k]\, e^{j2\pi\frac{k}{N}n} \\
&= \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} \Big(H[k]\, X[k]\Big)\, e^{j2\pi\frac{k}{N}n} \\
&= \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} \Big(\sum_{m=0}^{N-1} h[m]\, e^{-j2\pi\frac{k}{N}m}\Big)\, X[k]\, e^{j2\pi\frac{k}{N}n} \\
&= \sum_{m=0}^{N-1} h[m]\cdot\Big(\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X[k]\, e^{j2\pi\frac{k}{N}(n-m)}\Big) \\
&= \sum_{m=0}^{N-1} h[m]\cdot x\Big[(n-m) \bmod N\Big]
\end{aligned}
$$

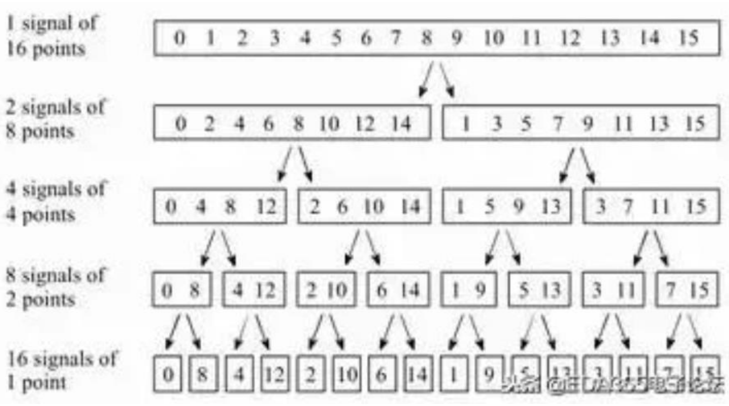
三、FFT

FFT 是計算 DFT 的快速算法，但是它是基於複數的，所以計算實數 DFT 的時候需要將其轉換為複數的格式，下圖展示了實數 DFT 和虛數 DFT 的情況，實數 DFT 將時域中 N 點信號轉換成 2 個(N/2+1)點的頻域信號，其中 1 個(N/2+1)點的信號稱之為實部，另一個(N/2+1)點的信號稱之為虛部，實部和虛部分別是正弦和餘弦信號的幅度。



FFT 的計算可以分為三步：首先將 1 個 N 點的時域信號分成 N 個 1 點的時域信號，然後計算這 N 個 1 點時域信號的頻域，得到 N 個頻域的點，然後將這個 N 個頻域的點按照一定的順序加起來，就得到了我們需要的頻譜。這裡每個點的意思是複數，都有實部和虛部。

1. 第一步的信號分解按照下面的規律執行：



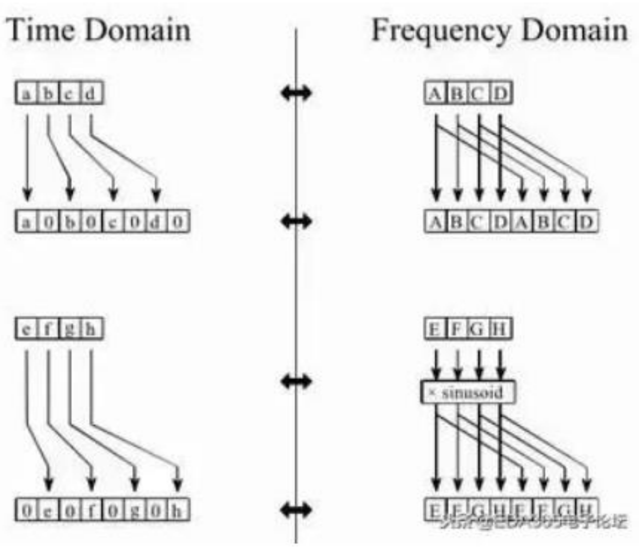
可以看出它是按照比特反轉順序來分解的。

2. 第二步是計算每個點的頻譜：

這一步很簡單，因為一個時域的點的頻譜的數值就是它自己，所以這一步什麼也不需做，但需明白這時候 N 個點不是時域信號了，而是頻域信號。

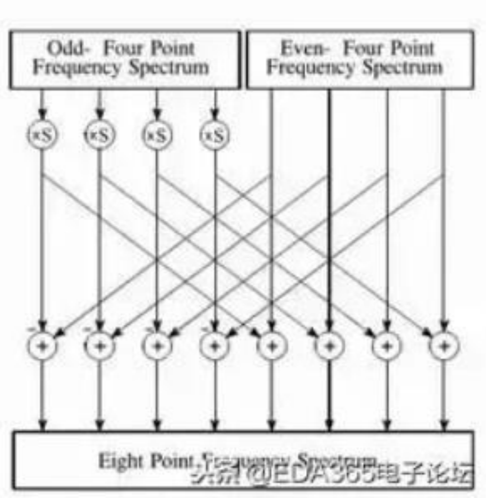
3. 第三步是將這 N 個頻域信號結合起來

這一步是最麻煩的一步。就是和前面時域分解的順序相反，將 2 個 1 點的頻域信號變成 1 個 2 點的頻域信號，再將 2 個 2 點的頻域信號變成 1 個 4 點的頻域信號，一直到結束。這裡看下如何將 2 個 4 點的頻域信號變成 1 個 8 點的頻域信號。



首先對 1 個 4 點的頻域信號進行複製，這樣能稀釋時域信號，也對另 1 個 4 點的頻域信號進行複製不過複製之前需要乘上正弦函數，這樣得到的稀釋時域信號時經過了平移的，然後將這兩個頻域信號加起來，如下圖所示。之所以這麼做的目的是在時域分解的時候就是用這種交織的分解方式的。

FIGURE 12-5
FFT synthesis flow diagram. This shows the method of combining two 4 point frequency spectra into a single 8 point frequency spectrum. The ×S operation means that the signal is multiplied by a sinusoid with an appropriately selected frequency.



以下是基本的運算，稱為蝶形運算，它將 2 個 1 點的複數變成 1 個 2 點的複數。

FIGURE 12-6
The FFT butterfly. This is the basic calculation element in the FFT, taking two complex points and converting them into two other complex points.