

与标准的傅里叶变换相比，小波分析中使用到的小波函数具有不唯一性，即小波函数具有多样性。小波分析在工程应用中，一个十分重要的问题就是最优小波基的选择问题，因为用不同的小波基分析同一个问题会产生不同的结果。目前我们主要是通过用小波分析方法处理信号的结果与理论结果的误差来判定小波基的好坏，由此决定小波基。常用小波基有 Haar 小波、Daubechies (dbN) 小波、Mexican Hat (mexh) 小波、Morlet 小波、Meyer 小波等。

- Haar 小波

Haar 函数是小波分析中最早用到的一个具有紧支撑的正交小波函数，也是最简单的小波函数，它是支撑域在 $t \in [0,1]$ 范围内的单个矩形波。Haar 函数的定义如下：

$$\Psi(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

Haar 小波在时域上是不连续的，所以作为基本小波性能不是特别好。但它也有自己的优点：

1. 计算简单。
2. $\Psi(t)$ 不但与 $\Psi(2^{-j}t)$ $[j \in \mathbb{Z}]$ 正交，而且与自己的整数位移正交，因此，

在 $a = 2^j$ 的多分辨率系统中，Haar 小波构成一组最简单的正交归一的小波族。

$\psi(t)$ 的傅里叶变换是：

$$\psi(\Omega) = j \frac{4}{\Omega} \sin^2\left(\frac{\Omega}{a}\right) e^{-j\Omega/2}$$

Haar 小波的时域和频域波形

```
[phi,g1,xval] = wavefun('haar',20);

subplot(2,1,1);

plot(xval,g1,'Linewidth',2);

xlabel('t')

title('haar 时域');

g2=fft(g1);

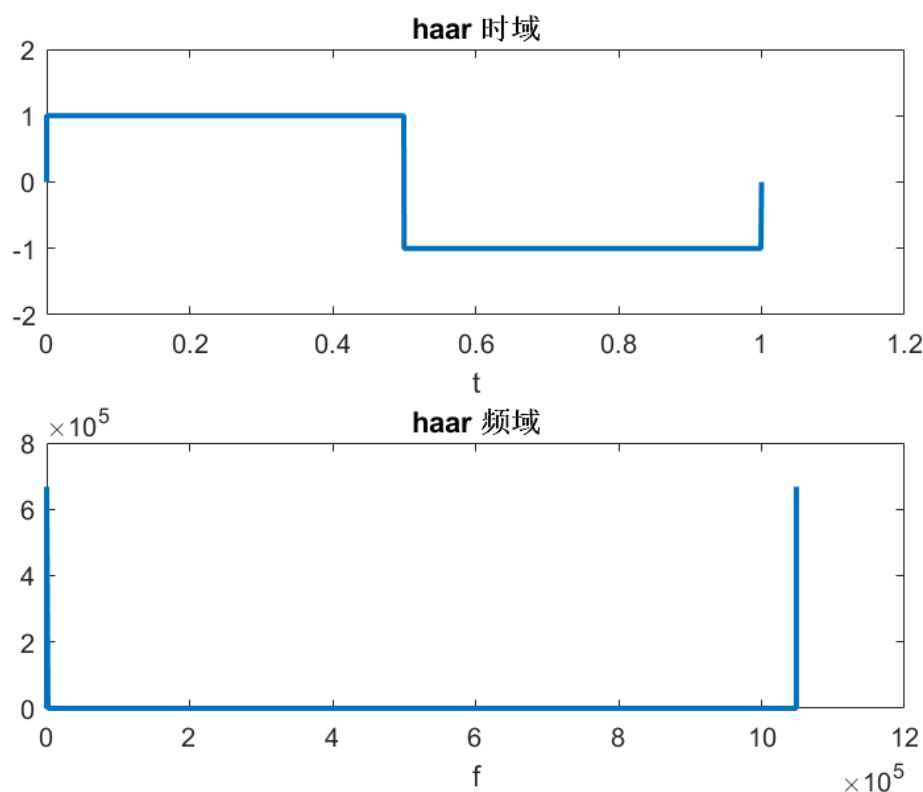
g3=abs(g2);

subplot(2,1,2);

plot(g3,'Linewidth',2);

xlabel('f')

title('haar 频域')
```



- Daubechies (dbN) 小波

Daubechies 小波是世界著名的小波分析学者 Inrid • Daubechies 构造的小波函数，简称为 dbN，N 是小波的阶数。小波 $\Psi(t)$ 和尺度函数 $\phi(t)$ 中的支撑区为 $2N - 1$ ， $\Psi(t)$ 的消失矩为 N 。除 $N = 1$ (Harr 小波) 外，dbN 不具有对称性 (即非线性相位)。除 $N = 1$ (Harr 小波) 外，dbN 没有明确的表达式，但转换函数 h 的平方模是明确的：

令 $p(y) = \sum_{k=0}^{N-1} C_k^{N-1+k} y^k$ ，其中 C_k^{N-1+k} 为二项式的系数，则有

$$|m_0(\omega)|^2 = (\cos^2 \frac{\omega}{2}) p(\sin^2 \frac{\omega}{2})$$

其中：

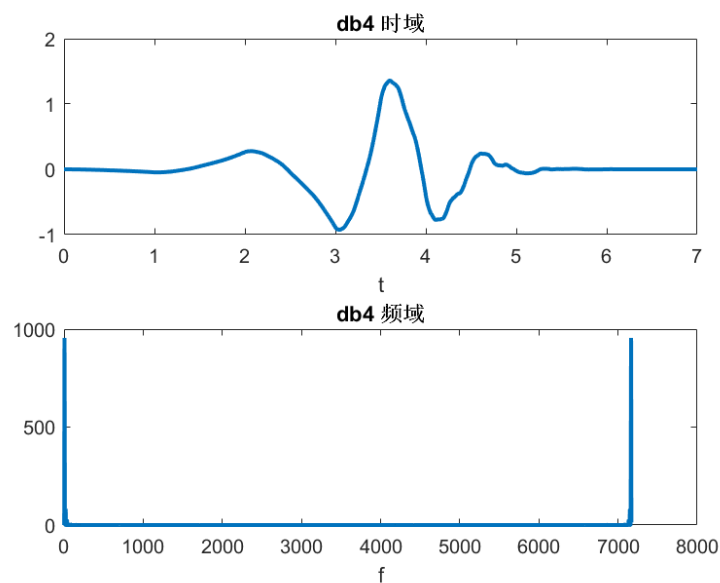
$$m_0(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k=0}^{2N-1} h_k e^{-jk\omega}$$

Daubechies 小波具有以下特点：

1. 在时域是有限支撑的，即 $\Psi(t)$ 长度有限。
2. 在频域 $\Psi(\omega)$ 在 $\omega=0$ 处有 N 阶零点。
3. $\Psi(t)$ 和它的整数位移正交归一，即 $\int \psi(t)\psi(t-k)dt = \delta_k$ 。
4. 小波函数 $\Psi(t)$ 可以由所谓“尺度函数” $\phi(t)$ 求出来。尺度函数 $\phi(t)$ 为低通函数，长度有限，支撑域在 $t=0\sim 2N-1$ 的范围内。

db4 的时域和频域波形：

```
[phi,g1,xval] = wavefun('db4',10);
subplot(2,1,1);
plot(xval,g1,'Linewidth',2);
xlabel('t')
title('db4 时域');
g2=fft(g1);
g3=abs(g2);
subplot(2,1,2);
plot(g3,'Linewidth',2);
xlabel('f')
title('db4 频域')
```



Daubechies 小波常用来分解和重构信号，作为滤波器使用：

```
[Lo_D,Hi_D,Lo_R,Hi_R] = wfilters('db4'); %计算该小波的 4 个滤波器

subplot(2,2,1); stem(Lo_D,'LineWidth',2);

title('分解低通滤波器');

subplot(2,2,2); stem(Hi_D,'LineWidth',2);

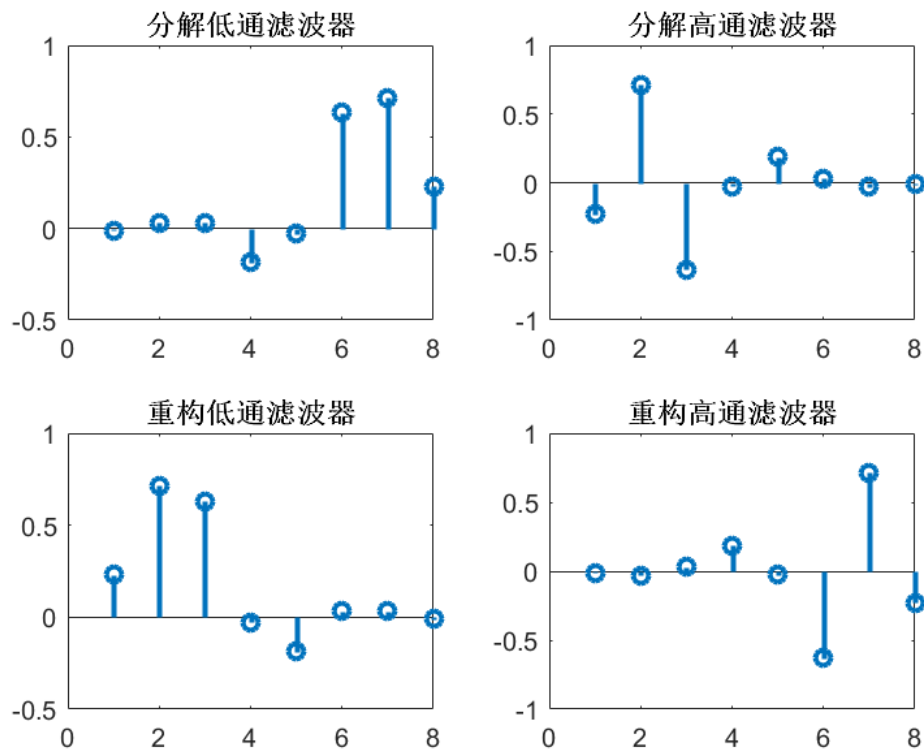
title('分解高通滤波器');

subplot(2,2,3); stem(Lo_R,'LineWidth',2);

title('重构低通滤波器');

subplot(2,2,4); stem(Hi_R,'LineWidth',2);

title('重构高通滤波器');
```



- Mexican Hat (mexh) 小波

Mexican Hat 函数为 Gauss 函数的二阶导数：

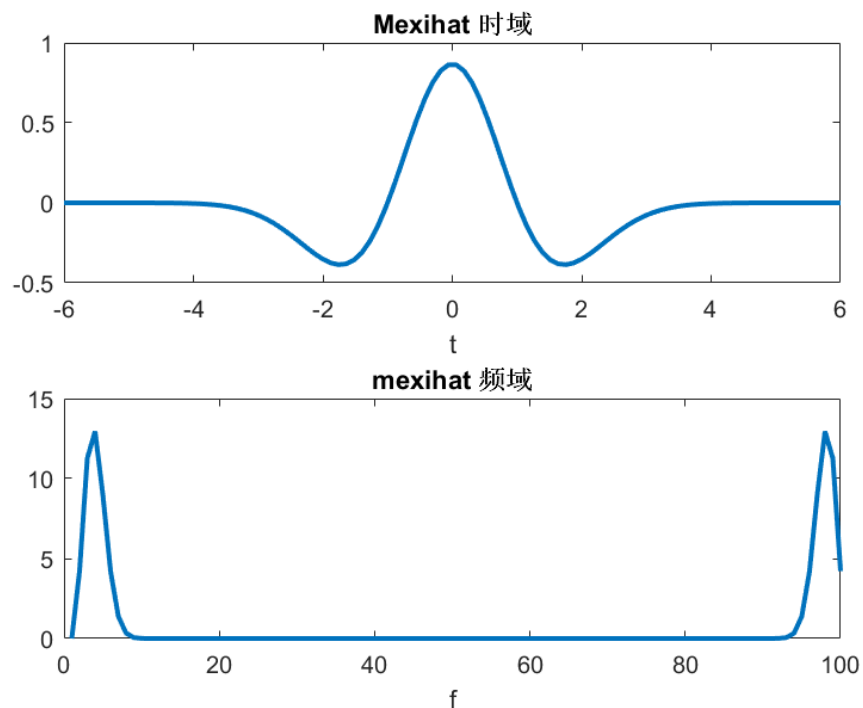
$$\psi(t) = (1-t^2)e^{-\frac{t^2}{2}}$$

$$\psi(\omega) = \sqrt{2\pi}\omega^2 e^{-\frac{\omega^2}{2}}$$

因为它的形状像墨西哥帽的截面，所以也称为墨西哥帽函数。

Mexihat 小波的时域和频域波形:

```
d=-6; h=6; n=100;  
[g1,x]=mexihat(d,h,n);  
subplot(2,1,1);  
plot(x,g1,'Linewidth',2);  
xlabel('t');  
title('Mexihat 时域');  
g2=fft(g1);  
g3=(abs(g2));  
subplot(2,1,2);  
plot(g3,'Linewidth',2);  
xlabel('f');  
title('mexihat 频域');
```



Mexihat 小波的特点:

1. 在时间域与频率域都有很好的局部化, 并且满足 $\int_R \psi(t) dt = 0$ 。
2. 不存在尺度函数, 所以 Mexihat 小波函数不具有正交性。

- Morlet 小波

它是高斯包络下的单频率副正弦函数：

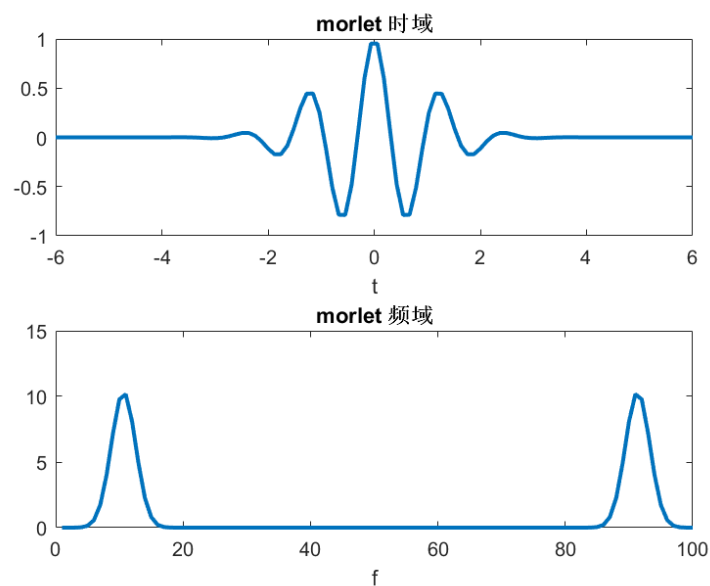
$$\psi(t) = C e^{\frac{t^2}{2}} \cos(5t)$$

其中 C 是重构时的归一化常数。

Morlet 小波没有尺度函数，而且是非正交分解。

Morlet 小波的时域和频域波形图：

```
d=-6; h=6; n=100;  
[g1,x]=morlet(d,h,n);  
subplot(2,1,1);  
plot(x,g1,'Linewidth',2);  
xlabel('t');  
title('morlet 时域');  
g2=fft(g1);  
g3=(abs(g2));  
subplot(2,1,2);  
plot(g3,'Linewidth',2);  
xlabel('f');  
title('morlet 频域');
```



- Meyer 小波

1. Meyer 小波不是紧支撑的，但它收敛的速度很快
2. $\Psi(t)$ 无限可微

Meyer 小波的时域和频域波形图：

```
d=-6; h=6; n=128;  
  
[psi,x]=meyer(d,h,n,'psi');  
  
subplot(2,1,1);  
  
plot(x,psi,'Linewidth',2);  
  
xlabel('t');  
  
title('meyer 时域');  
  
g2=fft(psi);  
  
g3=(abs(g2));  
  
subplot(2,1,2);  
  
plot(g3,'Linewidth',2);  
  
xlabel('f');  
  
title('meyer 频域');
```

