蚁群算法的几乎处处强收敛性分析

苏兆品[1,2], 蒋建国[1,3], 梁昌勇[2], 张国富[1,3,4], 夏 娜[1,3]
(1. 合肥工业大学计算机与信息学院, 安徽合肥 230009; 2. 合肥工业大学管理科学与工程博士后科研流动站, 安徽合肥 230009;
3. 安全关键工业测控技术教育部工程研究中心, 安徽合肥 230009; 4. 特种显示技术教育部重点实验室, 安徽合肥 230009)

摘 要: 蚁群算法是一种新型的模拟进化算法, 已在很多组合优化问题中得到成功应用, 但其收敛性分析还比较缺乏. 以 TSP 问题来描述一类蚁群算法的数学模型, 并通过对状态空间的分解和反射壁的构筑, 从鞅理论角度论证了该类蚁群算法的几乎处处强收敛性以及能在有限步内收敛到全局最优解集, 试图为蚁群算法的研究探索一条新的思路.

关键词: 蚁群算法; Markov 过程; 鞅; 几乎处处强收敛
中图分类号: TP301 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112 (2009) 08-1646-05

An Almost Everywhere Strong Convergence Proof for a Class of Ant Colony Algorithms

SU Zhao-pin[1,2], JIANG Jian-guo[1,3], LIANG Chang-yong[2], ZHANG Guo-fu[1,3,4], XIA Na[1,3]
(1. *School of Computer and Information, Hefei University of Technology, Hefei, Anhui 230009, China*;
2. *Postdoctoral Programs at Management Science and Engineering, Hefei University of Technology, Hefei, Anhui 230009, China*;
3. *Engineering Research Center of Safety Critical Industrial Measurement and Control Technology, Ministry of Education, Hefei, Anhui 230009, China*
4. *National Engineering Research Center of Special Display Technology, Hefei, Anhui 230009, China*)

Abstract: Ant Colony Optimization is a novel simulated evolutionary algorithm which has been used successfully to solve many complicated combinatorial optimization problems, but its convergence analysis is seldom researched. The mathematical model of a class of ant colony algorithms is described by TSP problem. On the basis of the decomposition of state space and the construction of reflecting barrier, an almost everywhere strong convergence of the algorithms and the quality that the algorithms can guaranteedly converge to a global optimum set in a finite number of steps are demonstrated by using the martingale theory, and the obtained results may provide a new methodology for convergence analysis of the algorithms.

Key words: ant colony optimization; Markov process; martingale; almost everywhere strong convergence

1 引言

蚁群算法(Ant Colony Optimization)[1]是模拟自然界中真实蚁群的觅食行为而形成的一种新型的启发式模拟进化算法, 它采用具有记忆的人工蚂蚁通过个体之间的交互和协同工作来搜索从蚁穴到食物源的最短路径.

目前蚁群算法已在旅行商(Traveling Salesman Problem, TSP)、指派(Assignment Problem, AP)及联盟生成(Coalition Generation Problem, CGP)等一系列组合优化问题中得到成功应用[2~4], 但这些研究大都从实验的角度说明了蚁群算法的有效性[5], 而有关蚁群算法的一般收敛性, 如概率收敛、几乎处处收敛等的分析相比其他智能算法[6~8]还比较缺乏, 在一定程度上制约了蚁群算法的进一步改进和发展. 虽然已有部分学者给出一些收敛性结论[8~13], 但都是在概率收敛意义下考虑的, 主要还是基于 Markov 过程和算法的遍历性展开的研究, 在分析手段和方法上尚比较单调. Gütjahr[9]首先利用图论对蚁群算法的收敛性进行了研究, 并提出了基于图的蚂蚁系统(Graph-based Ant System, GBAS), 适用于各种静态组合优化问题, 但是在 GBAS 算法中, 对于某个事先给定的概率, 无法确定蚂蚁数和蒸发系数, 从这个意义上讲, GBAS 是不可控的. 为了克服上述问题, Gütjahr[10,11]将 GBAS 发展成 GBAS/tdev 和 GBAS/tdlb(一般统称为 GBAS 算法), 并利用 Markov 过程理论证明其能以概率 1 收敛

收稿日期: 2008-12-29; 修回日期: 2009-02-12
基金项目: 国家教育部博士点基金(No.20060359004); 安徽省自然科学基金(No.090412058, 070412035); 特种显示技术教育部重点实验室开放课题基金(No.2008HGXJ0350); 合肥工业大学博士专项科研资助基金(No.GDBJ2009-003)

到问题的最优解，具有较强的说服力．Stützle[12]，Badr[13]和朱庆保[14]等主要利用代数理论研究蚁群算法的收敛性，但相比 Gütjahr，他们的证明过程显得比较弱化，说服力不够．段海滨[15]尝试用鞅理论研究了基本蚁群算法（Basic Ant Colony Algorithm）的几乎处处收敛问题，但其忽视了一个很重要的方面，即信息素浓度 $\tau(k)$ 本身并不是 Markov 过程，在没有路径 $W(k)$ 的情况下，$\tau(k)$ 不是自包容的（self-contained）[10,11]，因此其证明过程和结论均值得商榷．

定义 1[16]　设序列 $\{X_k, k\geqslant 0\}$ 的全局最优解集为 $f^*=\{x^* \mid \forall x\in S, f(x^*)\leqslant f(x)\}$，如果 $\lim\limits_{k\to\infty}P\{X_k\subset f^*\}=1$，则称 $\{X_k,k\geqslant 0\}$ 依概率收敛到全局最优解集 f^*，记为 $X_k\xrightarrow{P}f^*$；如果 $P\{\lim\limits_{k\to\infty}(X_k\subset f^*)\}=1$，则称 $\{X_k,k\geqslant 0\}$ 几乎处处强收敛到全局最优解集 f^*，记为 $X_k\xrightarrow{a.s.}f^*$．

由上述定义可知，依概率收敛属弱大数律范畴，而几乎处处收敛性明显强于依概率收敛性．因此，本文在 Gütjahr 等人的工作基础上进一步研究蚁群算法的几乎处处强收敛性，我们避开使用传统的遍历性分析，而是在 Markov 过程分析中运用鞅理论[17]对算法进行具体分析，试图为这方面的研究探索一条新的思路．

2　算法模型

蚁群算法最早是用于求解 TSP 问题[2]，不失一般性，为了更好的描述和分析蚁群算法，本文以求解 n 个城市的 TSP 问题为例描述 GBAS 算法的模型．

定义 2　TSP 可以用 n 个城市的一个有向图 $G=(N,A)$ 表示，其中 $N=\{1,2,\cdots,n\}$，$A=\{(i,j)\mid i,j\in N\}$；城市间的距离 $D=(d_{ij})_{n\times n}$；目标函数为

$$f(W)=\sum_{l=1}^{n}d_{i_{l-1}i_l}\tag{1}$$

其中 $W=\{i_1,i_2,\cdots,i_n\}$ 为城市 $1,2,\cdots,n$ 的一个排列，且 $i_{n+1}=i_1$，W 中的节点构成的弧集为 $W_\otimes=\{(i_q,i_{q+1})\mid i_q\in W, q=1,2,\cdots,n\}$．

根据上述定义，GBAS 算法可以描述如下：

①初始化：为上述 TSP 图中的每一条弧 (i,j) 赋信息素浓度初值 $\tau_{ij}(0)=\frac{1}{|A|}$，$\forall(i,j)\in A$，$m$ 只蚂蚁从同一城市 i_0 出发．$k=1$，当前最好解为 $W=\{1,2,\cdots,n\}$．

②外循环：如果满足算法的停止规则，停止计算并输出计算得到的最好解；否则，让蚂蚁 $s(1\leqslant s\leqslant m)$ 从起点 i_0 出发，用 $L(s)$ 表示蚂蚁 s 行走的城市集合，$L(s)=\varnothing$．

③内循环：按蚂蚁 $1\leqslant s\leqslant m$ 的顺序分别计算．当蚂蚁 s 在城市 i，若 $L(s)=N$ 或 $\{l\mid(i,l)\in A, l\notin L(s)\}=\varnothing$，完成第 s 只蚂蚁的计算；否则，若 $L(s)\neq N$ 且 $T=\{l\mid(i,l)\in A, l\notin L(s)\}-\{i_0\}\neq\varnothing$，则 s 以概率

$$q_{ij}=\begin{cases}\dfrac{\tau_{ij}(k-1)}{\sum\limits_{l\in T}\tau_{il}(k-1)}, & j\in T\\ 0, & \text{otherwise}\end{cases}\tag{2}$$

到达 j，$L(s)=L(s)\cup\{j\}$，$i=j$；若 $L(s)\neq N$ 且 $T=\{l\mid(i,l)\in A, l\notin L(s)\}-\{i_0\}=\varnothing$，则 s 到达 i_0，$L(s)=L(s)\cup\{i_0\}$，$i=i_0$；重复③．

④信息素更新：对 $1\leqslant s\leqslant m$，若 $L(s)=N$，按照 $L(s)$ 中城市的顺序计算路径长度；若 $L(s)\neq N$，路径长度是一个充分大的数．比较 m 只蚂蚁中的路径长度，具有最短路径的蚂蚁为 t．若 $f(L(t))\leqslant f(W)$，则 $W=L(t)$．用下式

$$\tau_{ij}(k)=\begin{cases}(1-\rho_{k-1})\tau_{ij}(k-1)+\dfrac{\rho_{k-1}}{|W_\otimes|}, & (i,j)\in W_\otimes\\ (1-\rho_{k-1})\tau_{ij}(k-1), & \text{otherwise}\end{cases}\tag{3}$$

更新图中每一条弧的信息素浓度，得到新的 $\tau_{ij}(k)$，$k=k+1$，重复②．

注释 1[10,11]　式(3)中 ρ_k 为挥发因子，并且对于固定的 $K\geqslant 1$ 满足 $\rho_k\leqslant 1-\frac{\ln k}{\ln(k+1)}(k\geqslant K)$ 与 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\rho_k=\infty$．

注释 2[10,11]　用数学归纳法很容易验证式(3)满足对 $\forall k\geqslant 0$，有

$$\sum_{(i,j)\in A}\tau_{ij}(k)=1\tag{4}$$

3　收敛性分析

GBAS 算法的每步迭代对应随机变量 $X_k=(\tau(k),W(k))(k\geqslant 0)$，$\tau(k)\in R^{|A|}$ 为所有弧的信息素浓度；$W(k)$ 为 n 个城市的一个排列，最多有 $n!$ 个状态，所以 X_k 是全状态空间 $S=R^{|A|}\times N$ 中的一个元素，显然 $|S|$ 是有限的．

3.1　依概率收敛

引理 1[11]　由状态 $X_k=(\tau(k),W(k))(k\geqslant 0)$ 所构成的随机过程是离散时空上的有限非齐次 Markov 过程．

证明　由 Markov 过程的性质可知，只要证明状态 X_{k+1} 的分布仅仅依赖于状态 X_k．注意到在第 k 次迭代中，第 s 只蚂蚁的转移只由 $\tau(k-1)$ 决定，且其行走的路径和 $W(k-1)$ 共同决定了 $W(k)$，再通过式(3)的更新原则可以进一步得到 $\tau(k)$．因此，状态 X_{k+1} 的变化仅由 X_k 决定，而与之前的状态无关，这是一个典型的 Markov 过程，而且由上面的分析我们也可以得到单独

的 $\tau(k)$ 或 $W(k)$ 本身并不是 Markov 过程,因为 $\tau(k)$ 或 $W(k)$ 本身不是自包容的.

设 $\{X_k, k \geq 0\}$ 的一步状态转移概率为 $P(k)$, $B = \{(i_q, i_{q+1}) \mid i_q \in W(k+1), q = 1,2,\cdots,n\}$, $T^* = \{l \mid (i, l) \in A\}$,对 $\forall x, y \in S$,我们有

$$P(k) = P_k(X_{k+1} = y \mid X_k = x)$$
$$= \prod_{(i,j)\in B} \frac{\tau_{ij}(k)}{\sum_{l \in T^*} \tau_{il}(k)} = \begin{cases} > 0, f(W(k+1)) \leq f(W(k)) \\ = 0, \text{otherwise} \end{cases} \tag{5}$$

因为 $\tau(k)$ 的变化要依赖于 k,所以随机状态转移概率 $P(k)$ 与 k 有关,该 Markov 过程是非齐次的.

引理 2[11] Markov 过程 $\{X_k, k \geq 0\}$ 能够以概率 1 收敛到一个全局最优解 $X^* = (\tau^*, W^*)$,其中 W^* 是 G 中的一条最优路径, $W_\otimes^* = \{(i_q, i_{q+1}) \mid i_q \in W^*, q = 1,2,\cdots,n\}$, τ^* 定义如下:

$$\tau_{ij}^* = \begin{cases} \dfrac{1}{|W_\otimes^*|}, (i,j) \in W_\otimes^* \\ 0, \text{otherwise} \end{cases}$$

证明 Gütjahr 已在文献[11]中给出了详细的证明,鉴于篇幅有限,这里不再列出.

命题 1 $\{X_k, k \geq 0\}$ 能够以概率 1 收敛到全局最优解集 $f^* = \{W^* \mid \forall W \in N, f(W^*) \leq f(W)\}$.

证明 由引理 2 可知, $\{X_k, k \geq 0\}$ 能够以概率 1 收敛到一个全局最优状态 $X^* = (\tau^*, W^*) \in f^*$,根据式(2)的状态转移概率和式(3)的信息素更新规则,系统一旦达到 X^*,其后续状态只可能在全局最有解集 f^* 中迁移,而不可能迁移到 f^* 之外,当 $k \to \infty$ 时,系统必然收敛到 f^*.

3.2 相关基本概念

定义 3[16] 称状态空间 C 为闭集,若对 $\forall i \in C$,有 $\sum_{j \in C} P_{ij} = 1$,即自 C 内任意一点出发,始终不能达到 C 外的任意状态.

定义 4[16] 闭集 C 若无真闭子集,则称 C 为不可约的,否则 C 是可约的.

定义 5[16] 设 $\{Y_k, k \geq 0\}$ 与 $\{Z_k, k \geq 0\}$ 是随机过程,称 $\{Y_k, k \geq 0\}$ 关于 $\{Z_k, k \geq 0\}$ 是一个上(或下)鞅,如果:

① $E|Y_k| < \infty$;

② $E(Y_{k+1} \mid Z_0, Z_1, \cdots, Z_k) \leq Y_k$ (或 $E(Y_{k+1} \mid Z_0, Z_1, \cdots, Z_k) \geq Y_k$);

③ $\{Y_k, k \geq 0\}$ 是 $Z_0, Z_1, \cdots, Z_k$ 的函数.

Doob 证明了著名的下鞅收敛定理论[16,17],为了分析方便,给出其结论.

引理 3[16] 设 $\{Y_k, k \geq 0\}$ 是一个下鞅, $\sup_k E|Y_k| < \infty$,则存在一个随机变量 $Y^* \in \{Y_k, k \geq 0\}$,使 $E|Y^*| < \infty$,且 $Y_k \xrightarrow{a.s.} Y^*$,即 $P\{\lim_{k\to\infty} Y_k = Y^*\} = 1$.

引理 4[16] 引理 3 的结论对上鞅也成立.

证明 设 $\{Y_k, k \geq 0\}$ 为上鞅,且 $\sup_k E|Y_k| < \infty$,则由定义 5 可知 $\{-Y_k, k \geq 0\}$ 为下鞅,且 $\sup_k E|-Y_k| = \sup_k E|Y_k| < \infty$,由引理 3 可得,存在随机变量 $-Y^*$,使得 $E|-Y^*| = E|Y^*| < \infty$,且 $P\{\lim_{k\to\infty}(-Y_k) = -Y^*\} = 1$,即 $P\{\lim_{k\to\infty} Y_k = Y^*\} = 1$.

3.3 几乎处处强收敛

从直观上说,蚁群算法的目的在于找到一个最优状态 $X_k = (\tau(k), W(k))$,它带有概率分布 $\tau(k)$ 偏向于一个最优排列 $W(k)$,而 $W(k)$ 又对应最短路径长度 $f(W(k))$.因此,我们把式(1)中的目标函数改写为:

$$F(X_k = (\tau(k), W(k))) = \frac{f(W(k))}{\sum_{(i,j)\in A} \tau_{ij}(k)}$$

这样设计的好处是兼顾了 $\tau(k)$ 和 $W(k)$,从而可以利用 X_k 的 Markov 过程的相关结论,同时又巧妙的利用 $\tau(k)$ 在式(4)中的性质简化了计算.我们以每个状态的路径长度作为指导原则,则由于路径长度达到全局最小当且仅当找到全局最优状态,我们可以利用路径长度函数过程的收敛性来研究蚁群算法的收敛性.另外,我们可以观察到,路径长度的变化是一个单调不增的过程,因此,我们可以设法把随机过程 $\{F(X_k), k \geq 0\}$ 转变为一个上鞅来考察 $\{X_k, k \geq 0\}$ 的收敛性.

命题 2 全状态空间 $S = R^{|A|} \times N$ 是一个闭集.

证明 由引理 1 可知, $\{X_k, k \geq 0\}$ 为一离散时空上的有限非齐次 Markov 过程,则由 Markov 过程的性质[16]有 $\forall i \in S, \sum_{j \in S} P_{ij} = 1$,再由定义 3 可知 S 是一个闭集.

命题 3 全状态空间 $S = R^{|A|} \times N$ 是可约的.

证明 由命题 1 和定义 3 可知, f^* 是有限的闭集,又 $f^* \subset S$,由定义 4 可知 S 是可约的.

因为 S 是可约的,由 Markov 过程的状态空间分解定理[16]我们可以很容易把 S 分解成两部分,一部分为 $\{X_k, k \geq 0\}$ 的收敛空间 Q,另一部分为 $S - Q$,其中 $Q = \{X_{k+1}: F(X_{k+1}) \leq F(X_k)\}$.

命题 4 收敛空间 Q 是一个闭集.

证明 由 Q 的定义可知,所有满足 $F(X_{k+1}) \leq F(X_k)$ 的状态都被限制在 Q 中,而所有 $F(X_{k+1}) > F(X_k)$ 的状态都被限制在 $S - Q$ 中,在 Q 中不可能找到一个状态满足 $F(X_{k+1}) > F(X_k)$,即 Q 中任意一个状态的后继状态只可能在 Q 中找到,而不可能到达 Q 外,即 $\forall i \in Q, \sum_{j \in S-Q} P_{ij} = 0$,所以有 $\forall i \in Q, \sum_{j \in Q} P_{ij} = 1$,即 Q 为一个闭集,且 $Q \subset S$.

上述操作的目的是将$\{X_k,k\geqslant 0\}$构成的有限非时齐 Markov 过程限制在其全状态空间 S 的闭子集 Q 中,也就是说在 Q 之外的每一个状态都是反射壁,将其他所有满足 $F(X_{k+1})\leqslant F(X_k)$的状态约束于此内,由随机过程理论我们知道,这相当于状态的限制运动边界,就像桶的边缘一样(如图 1 所示).

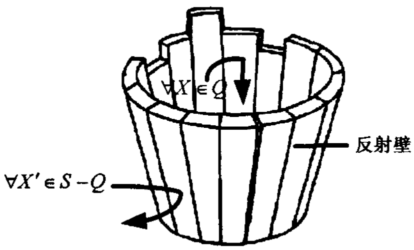

图1　反射壁的构筑

命题 5　随机过程$\{F(X_k),k\geqslant 0\}$关于$\{X_k,k\geqslant 0\}$是一个非负有界上鞅,即对$\forall k\geqslant 0$,有 $E(F(X_{k+1})\mid X_0,X_1,\cdots,X_k)\leqslant F(X_k)$.

证明　显然$\{F(X_k),k\geqslant 0\}$是非负有界的,根据引理 1 的 Markov 性,可以得到 $E(F(X_{k+1})\mid X_0,X_1,\cdots,X_k)=E(F(X_{k+1})\mid X_k)$,故我们只需证对$\forall x\in S$有

$$E(F(X_{k+1})\mid X_k=x)\leqslant F(x),k\geqslant 0 \qquad (6)$$

又根据随机过程理论,有 $E(F(X_{k+1})\mid X_k=x)=\sum_{y\in S}F(y)P_k(X_{k+1}=y\mid X_k=x)$,再由 $F(X_k)$的定义以及 $\tau(k)$的性质,我们可以观察到,$F(X_{k+1})\leqslant F(X_k)$与 $f(W(k+1))\leqslant f(W(k))$是等价的,而这个正好是式(5)中的条件,所以式(5)中的"otherwise"所限定的状态即为反射壁,将其他状态约束于条件 $f(W(k+1))\leqslant f(W(k))$限定的状态内,故有

$$\begin{aligned}&\sum_{y\in S}F(y)P_k(X_{k+1}=y\mid X_k=x)\\&=\sum_{y\in Q}F(y)P_k(X_{k+1}=y\mid X_k=x)\\&\quad+\sum_{y\in S-Q}F(y)P_k(X_{k+1}=y\mid X_k=x)\\&=\sum_{y\in Q}F(y)P_k(X_{k+1}=y\mid X_k=x)+\sum_{y\in S-Q}F(y)\cdot 0\\&=\sum_{y\in Q}F(y)P_k(X_{k+1}=y\mid X_k=x)\end{aligned}$$

因为状态 x 的任意后继状态 y,满足对$\forall y\in Q$,有 $F(X_{k+1}=y)\leqslant F(X_k=x)$,所以

$$\begin{aligned}&\sum_{y\in Q}F(y)P_k(X_{k+1}=y\mid X_k=x)\\&\leqslant\sum_{y\in Q}F(x)P_k(X_{k+1}=y\mid X_k=x)\\&=F(x)\sum_{y\in Q}P_k(X_{k+1}=y\mid X_k=x)\end{aligned}$$

又 Q 是闭集,所以有 $\sum_{y\in Q}P_k(X_{k+1}=y\mid X_k=x)=1$.从而可以得到$\sum_{y\in Q}F(y)P_k(X_{k+1}=y\mid X_k=x)\leqslant F(x)$,即$\sum_{y\in S}F(y)P_k(X_{k+1}=y\mid X_k=x)\leqslant F(x)$.所以有 $E(F(X_{k+1})\mid X_k=x)\leqslant F(x)$,式(6)得证,即$\{F(X_k),k\geqslant 0\}$关于$\{X_k,k\geqslant 0\}$是一个非负有界上鞅.

命题 6　$\{F(X_k),k\geqslant 0\}$几乎处处强收敛到全局最优解集 $F^*=\{X^*\mid\forall X\in S,F(X^*)\leqslant F(X)\}$.

证明　由命题 1 可知,$\{X_k,k\geqslant 0\}$能够以概率 1 收敛到全局最优解集 f^*,又 $f(W^*)\leqslant f(W)$与 $F(X^*)\leqslant F(X)$是等价的,因此$\{F(X_k),k\geqslant 0\}$能够以概率 1 收敛到全局最优解集 F^*,又由命题 5 可得,$\{F(X_k),k\geqslant 0\}$是一个非负有界上鞅,根据引理 4,$\{F(X_k),k\geqslant 0\}$几乎处处强收敛到全局最优解集 F^*.

4　讨论

Gütjahr 证明了 GBAS 的概率收敛性[9~11],Stützle 和 Dorigo[12]分析了诸如 ACS[2]和 MMAS[18]等一类 $ACO_{\tau_{\min}}$的弱收敛性,但他们的工作大都要求算法迭代次数趋于无穷大.而由本文的命题 6 可知,$X_k\xrightarrow{a.s.}F^*$,而且$|S|$有限,仅包含有限个不同的点,所以根据 Egoroff 定理[17]可以得到$\{F(X_k),k\geqslant 0\}$具有潜在的一致收敛性,即$\forall\varepsilon>0,\exists N(\varepsilon)$,如果 $k\geqslant N(\varepsilon)$,则$\forall X\in F^*,|X_k-X|<\varepsilon$,即 $X_k(\varepsilon)\subset F^*$,这说明算法能够以概率 1 确保在有限步内($N(\varepsilon)$)收敛到问题的全局最优解,即 $P\{\bigcup_{N=1}^{\infty}\bigcap_{k=N}^{\infty}(X_k\subset F^*)\}=1$.

另外,我们的结论是建立在式(4)的基础上,但是在 MMAS 中式(4)不一定成立.在 MMAS 中信息素更新规则为

$$\tau_{ij}(k)=\begin{cases}\max\left\{(1-\rho)\tau_{ij}(k-1)+\dfrac{\rho}{|W_{\otimes}|},\tau_{\min}(k-1)\right\},\\ \qquad\qquad\qquad (i,j)\in W_{\otimes}\\ \max\{(1-\rho)\tau_{ij}(k-1),\tau_{\min}(k-1)\},\text{otherwise}\end{cases} \qquad (7)$$

其中 $0<\rho<1,\tau_{\min}(k-1)$为实数,Stützle[12]已经证明令 $\tau_{\min}(k)=\dfrac{c_k}{\ln(k+1)}(k\geqslant 1),\lim_{k\to\infty}c_k>0$,MMAS 也具有引理 2 的性质.再比较式(7)和式(3),只要对$\forall k>0$,有 $\tau_{\min}(k-1)\leqslant(1-\rho)^k\cdot\dfrac{1}{|A|}$,我们很容易用数学归纳法证明 MMAS 也满足式(4),因而我们也可以证明 MMAS 也具有命题 6 的性质.

5　结束语

本文根据 Gütjahr 等人的工作,在对 GBAS 收敛性的分析中引入鞅理论进行研究.通过对 GBAS 所形成序列的上鞅性分析,得出了 GBAS 几乎处处强收敛以及能在有限步内收敛到全局最优解集的结论,并推广到 MMAS 算法.但是,对于蚁群算法的深入研究还远远不够,本

文下一步将重点研究 ACS 算法的强收敛性条件.

参考文献:

[1] Colorni A, Dorigo M, Maniezzo V. Distributed optimization by ant colonies[A]. Proc. of the First European Conf. on Artificial Life[C]. Paris, France: Elsevier Publishing, 1991. 134 - 142.

[2] Dorigo M, Gambardella L M. Ant colony system: A cooperative learning approach to the traveling salesman problem[J]. IEEE Transactions on Evolutionary Computation, 1997, 1(1): 53 - 66.

[3] Montemanni R, Smith D H, Allen S M. An ANTS algorithm for the minimum-span frequency-assignment problem with multiple interference[J]. IEEE Transactions on Vehicular Technology, 2002, 51(5): 949 - 953.

[4] 蒋建国,夏娜,齐美彬,木春梅. 一种基于蚁群算法的串行多任务联盟生成算法[J]. 电子学报, 2005, 33(12): 2178 - 2182.

JIANG Jian-guo, XIA Na, QI Mei-bin, MU Chun-mei. An ant colony algorithm based multi-task coalition serial generation algorithm[J]. Acta Electronica Sinica, 2005, 33(12): 2178 - 2182. (in Chinese)

[5] 吴春明,陈治,姜明. 蚁群算法中系统初始化及系统参数的研究[J]. 电子学报, 2006, 34(8): 1530 - 1533.

WU Chun-ming, CHEN Zhi, JIANG Ming. The research on initialization of ants system and configuration of parameters for different TSP problems in ant algorithm[J]. Acta Electronica Sinica, 2006, 34(8): 1530 - 1533. (in Chinese)

[6] 徐宗本,聂赞坎,张文修. 遗传算法的几乎必然强收敛性——鞅方法[J]. 计算机学报, 2002, 25(8): 785 - 793.

XU Zong-ben, NIE Zan-kan, ZHANG Wen-xiu. Almost sure convergence of genetic algorithms: a martingale approach[J]. Chinese Journal of Computers, 2002, 25(8): 785 - 793. (in Chinese)

[7] 王霞,周国标. 整体退火遗传算法的几乎处处强收敛性[J]. 应用数学, 2003, 16(3): 1 - 7.

WANG Xia, Zhou Guo-biao. Strong convergence (a. s.) of global annealing genetic algorithm[J]. Mathenatica Applicata, 2003, 16(3): 1 - 7. (in Chinese)

[8] 罗小平,韦巍. 生物免疫遗传算法的几乎处处强收敛性分析及收敛速度估计[J]. 电子学报, 2005, 33(10): 1803 - 1807.

LUO Xiao-ping, WEI Wei. The analysis on strong convergence (a.s.) and convergence rate estimate of immune genetic algorithm[J]. Acta Electronica Sinica, 2005, 33(10): 1803 - 1807. (in Chinese)

[9] Gütjahr W J. A generalized convergence result for the graph based ant system metaheuristic[R]. Technical Report 99-09, Austria, Dept. of Statistics and Decision Support Systems, University of Vienna: 1999.

[10] Gütjahr W J. A graph-based ant system and its convergence [J]. Future Generation Computing Systems, 2000, 16(9): 873 - 888.

[11] Gütjahr W J. ACO algorithms with guaranteed convergence to the optimal solution[J]. Information Processing Letters, 2002, 82(3): 145 - 153.

[12] Stützle T, Dorigo M. A short convergence proof for a class of ant colony optimization algorithms[J]. IEEE Transactions on Evolutionary Computation, 2002, 6(4): 358 - 365.

[13] Badr A, Fahmy A. A proof of convergence for ant algorithms [J]. Information Sciences, 2004, 160(1-4): 267 - 279.

[14] 朱庆保. 蚁群优化算法的收敛性分析. 控制与决策[J]. 2006, 21(7): 763 - 766.

ZHU Qing-bao. Analysis of convergence of ant colony optimization algorithms[J]. Control and Decision, 2006, 21(7): 267 - 279. (in Chinese)

[15] 段海滨,王道波,于秀芬. 基本蚁群算法的 A.S. 收敛性研究[J]. 应用基础与工程科学学报, 2006, 14(2): 297 - 301.

DUAN Hai-bin, WANG Dao-bo, YU Xiu-fen. Research on the a.s. convergence properties of basic ant colony algorithm [J]. Journal of Basic Science and Engineering, 2006, 14(2): 297 - 301. (in Chinese)

[16] 张波,张景肖. 应用随机过程[M]. 北京: 清华大学出版社, 2004.

ZHANG Bo, ZHANG Jing-xiao. Applied Stochastic Processes [M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2004. (in Chinese)

[17] Edward P C K. An Introduction to Stochastic Processes[M]. Belmont, Calif., London: Duxbury Press, 1997.

[18] Stützle T, Hoos H H. Max-Min ant system[J]. Future Generation Computer System, 2000, 16(8): 889 - 914.

作者简介:

苏兆品 女, 1983 年 8 月出生于山东菏泽, 在站博士后. 主要研究方向: 智能控制、进化计算、agent 理论等.

E-mail: szp@hfut.edu.cn

蒋建国 男, 1955 年 10 月出生于安徽黄山, 教授, 博士生导师. 主要研究方向: 分布式智能控制系统, 数字图像分析与处理, DSP 技术与应用等.

E-mail: jjg@ah165.net