

几种常见小波的应用性能分析

费佩燕 刘曙光

(西安工程科技学院 194 信箱 西安市金花南路 19 号 710048)

Email:L_shuguang@yahoo.com

摘 要 本文给出了小波分析中几种常见小波函数, 并对它们的性质进行了比较。

关键词 小波分析 小波基函数

1 几种常见小波

小波选择的灵活性很大, 许多函数都可以作为小波, 这里介绍具有代表性的几种小波。

1.1 Haar 小波^[1]

Haar 小波是一种正交函数系, 它是所有已知子波中最简单的小波, 其表达式为:

$$\psi_H(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < 1/2 \\ -1, & 1/2 \leq t < 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases} \quad (1)$$

对于 t 的平移, Haar 小波是正交的, 即

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_H(t) \psi_H(t-n) dt = 0, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (2)$$

如果引入一个简单的具有正交性的特征函数 $\chi(t)$, 其定义域为 $[0,1]$ 区间, 即 $I = [0,1]$,

$$\varphi(t) = \chi_{[0,1]}(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t < 1 \\ 0 & \text{其它} \end{cases} \quad (3)$$

那么 Haar 小波 $\psi_H(t)$ 就可以用特征函数 $\chi(t)$ 表示如下:

$$\psi_H(t) = \chi_{[\frac{n-1}{2}, \frac{n}{2}]}(t) - \chi_{[\frac{n}{2}, \frac{n+1}{2}]}(t), \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (4)$$

对于一维离散采样信号, 小波可以看成是完成差分运算, 即给出与观测结果的平均值不相等部分的差值。Haar 小波不是连续可微的, 应用有限, 一般多作为原理示意或说明之用。

1.2 Mexico 草帽小波^[2]

Mexico 小波是 Gauss 函数 $e^{-t^2/2}$ 的二阶导数, 即

$$\psi(t) = \frac{2}{\sqrt{3}} \pi^{-1/4} (1-t^2) e^{-t^2/2} \quad (5)$$

系数的选择主要是保证 $\psi(t)$ 的归一化, 即 $\|\psi\|^2 = 1$ 。这个小波作为广泛使用的 Gauss 平滑函数的二阶导数, 由于其波形与墨西哥草帽剖面轮廓线相似而得名。在视觉信息加工研究与边缘检测方面获得了较多得应用, 因而也称作 Marr 小波。Mexico 小波是

实值小波，它的普遍形式是由 Gauss 分布的 m 阶导数给出

$$\psi_m(t) = (-1)^m \frac{d^m}{dt^m} (e^{-|t|^2/2}) \quad (6)$$

其相应的谱为

$$\hat{\psi}_m(\omega) = m(i\omega)e^{-|\omega|^2/2} \quad (7)$$

显然使用最广泛的 Mexico 小波相当于式(6)中 $m=2$ 的情形，它的 n 维形式是各向同性的，因而不能检测信号的不同方向。

用 Gauss 分布的差形成的 DOG 小波是 Mexico 小波的良好近似，其表达式为：

$$\psi(t) = e^{-|t|^2/2} - \frac{1}{2}e^{-|t|^2/8} \quad (8)$$

其频谱表达式为：

$$\hat{\psi}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(e^{-|\omega|^2/2} - e^{-2|\omega|^2}) \quad (9)$$

1.3 Morlet 小波^[3]

Morlet 小波是最常用到的复值小波，由下式给出

$$\psi(t) = \pi^{-1/4}(e^{-i\omega_0 t} - e^{-\omega_0^2/2})e^{-t^2/2} \quad (10)$$

通常可近似表示为

$$\psi(t) = \pi^{-1/4}e^{-i\omega_0 t}e^{-t^2/2} \quad \omega_0 \geq 5 \quad (11)$$

因为它是复值小波，所以能提取被分析的时间过程或信号的幅值与相位信息。它的尺度函数不存在，且不具有正交性。Morlet 小波是地球物理过程和流体湍流的分析研究中经常使用的小波。

1.4 Daubechies (dbN) 小波

Daubechies 函数是由世界著名的小波分析学者 Inrid Daubechies 构造的小波函数，除了 db1（即 Haar 小波）外，其它小波没有明确的表达式，但转换函数 h 的平方模是很明确的。

- 假设 $P(y) = \sum_{k=0}^{N-1} C_k^{N-1+k} y^k$ ，其中 C_k^{N-1+k} 为二项式的系数，则有

$$|m_0(\omega)|^2 = (\cos^2 \frac{\omega}{2})^N P(\sin^2 \frac{\omega}{2}) \quad (12)$$

其中 $m_0(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k=0}^{2N-1} h_k e^{-ik\omega}$

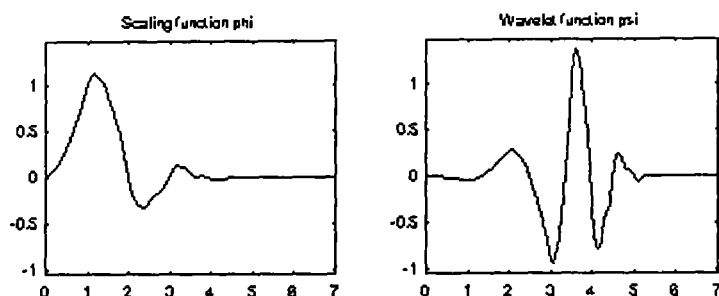
- 小波函数与尺度函数的有效支撑长度为 $2N-1$ ，小波函数的消失矩阶数为 N ；
- dbN 大多数不具有对称性；对于有些小波函数，不对称性是非常明显的；
- 正则性随序号 N 的增加而增加；
- 函数具有正交性；

Daubechies 小波函数提供了比 Haar 函数更有效的分析和综合。Daubechies 系数

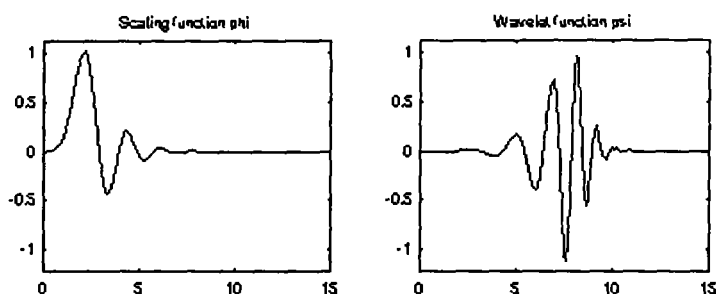
中的小波基为 dbN, N 为序号, 且 $N=1\ldots 10$ 。

Daubechies 小波函数具体计算过程见[4]。

db4 和 db8 小波的尺度函数、小波函数的图形如下:



(a) db4 小波的尺度函数、小波函数的图形



(b) db8 小波的尺度函数、小波函数的图形

图 4 Daubechies 小波

1.5 Biorthogonal (biorNr.Nd) 小波系

Biorthogonal 函数的主要特征表现在具有线性相位性, 它主要应用在信号与图像的重构中。通常的用法是采用一个小波函数进行分解, 用另外一个小波函数进行重构。

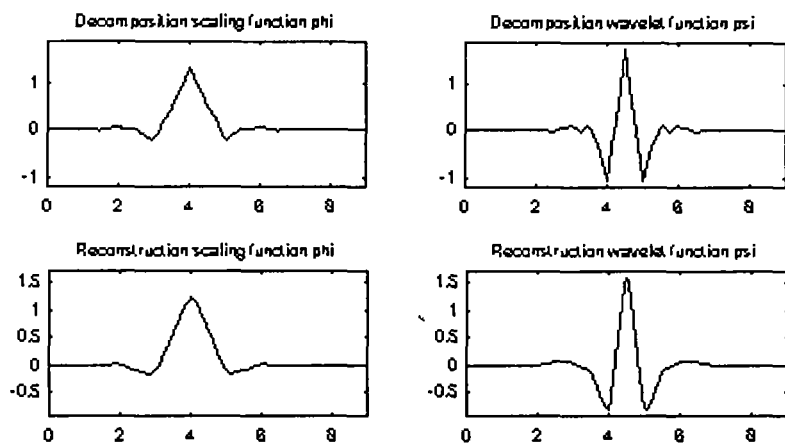
Biorthogonal 函数系通常表示为 biorNr.Nd 的形式:

Nr=1	Nd=1, 3, 5
Nr=2	Nd=2, 4, 6, 8
Nr=3	Nd=1, 3, 5, 7, 9
Nr=4	Nd=4
Nr=5	Nd=5
Nr=6	Nd=8

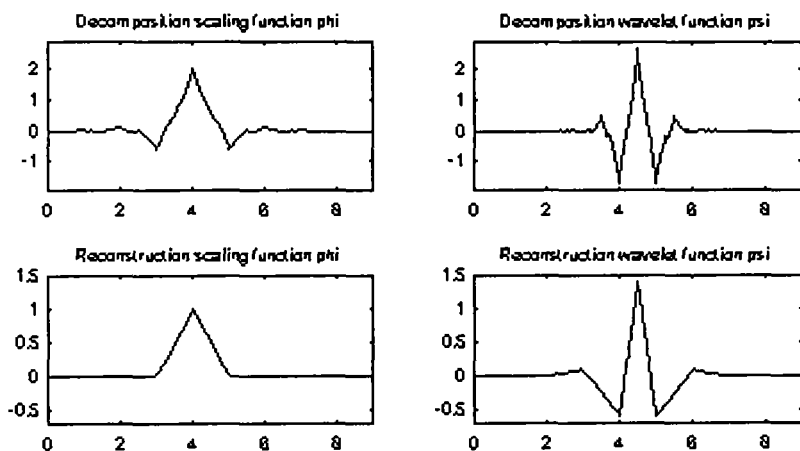
其中 r 表示重构, d 表示分解。

双正交小波系没有具体的表达式和小波基, 其具体算法参见[5,6]。

这里给出 bior2.4 和 bior4.4 小波 (分别用于分解与重构) 的尺度函数、小波函数、分解滤波器和重构滤波器的图形 (如图 5)。



(a) bior2.4 小波的尺度函数、小波函数的图形



(b) bior4.4 小波的尺度函数、小波函数的图形

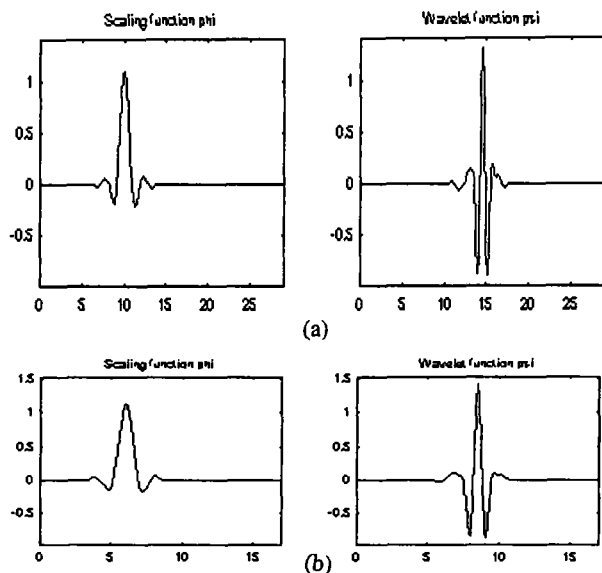
图 5 Biorthogonal 小波

1.6 Coiflet(coifN)小波系

Coiflet 函数是由 Daubechies 构造的小波函数, 它具有 CoifN ($N=1, 2, 3, 4, 5$) 一系列小波函数。Coiflet 具有比 dbN 更好的对称性。从支撑长度的角度看, coifN 具有和 db3N 和 sym3N 相同的支撑长度; 从消失矩的数目来看, coifN 具有和 sym2N 相同的消失矩数目。

Coiflet 小波系没有具体的表达式和小波基, 其具体算法参见[7]。

这里给出 coif3 和 coif5 小波的尺度函数、小波函数的图形 (如图 6)。



(a) coif3 小波的尺度函数、小波函数的图形

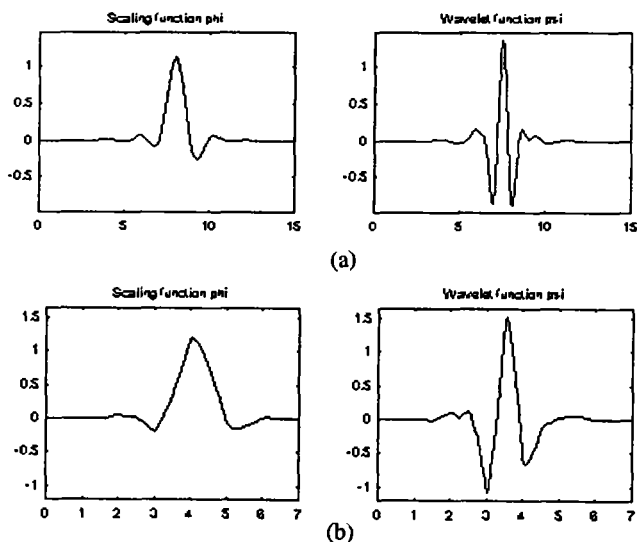
(b) coif5 小波的尺度函数、小波函数的图形

图 6 Coiflet 小波

1.7 Symlets 小波系

Symlets 函数系是由 Daubechies 提出的，它近似对称的小波函数，是对 db 函数的一种改进。Symlets 函数系通常表示为 symN ($N=2, 3, \dots, 8$) 的形式。

与 Daubechies 相同，Symlets 小波系没有具体的表达式和小波基，其具体算法参见[8]。这里给出 sym4 和 sym8 小波的尺度函数、小波函数的图形：



(a) sym4 小波的尺度函数、小波函数的图形

(b) sym8 小波的尺度函数、小波函数的图形

图 7 Symlets 小波

2 几种小波的应用性能分析

表 1 几种小波的应用性能分析

小波函数	Haar	Daubechies	Biorthogonal	Coiflets	Symlets	Morlet	Mexicanhat
小波缩写名	haar	db	bior	coif	sym	morl	mexh
表示形式	haar	dbN	biorNr.Nd	coifN	symN	morl	mexh
举例	haar	db3	bior2.4	coif2	sym2,sym4	morl	mexh
正交性	有	有	无	有	有	无	无
双正交性	有	有	有	有	有	无	无
紧支性	有	有	有	有	有	无	无
连续小波变换	可以	可以	可以	可以	可以	可以	可以
离散小波变换	可以	可以	可以	可以	可以	不可以	不可以
支撑长度	1	2N-1	重构: $2Nr+1$ 分解: $2Nd+1$	6N-1	2N-1	有限长度	有限长度
滤波器长度	2	2N	max ($2Nr+2Nd$) +2	6N	2N	[-4,4]	[-5,5]
对称性	对称	近似对称	不对称	近似对称	近似对称	对称	对称

参考文献

- 1 胡昌华, 张军波, 夏军等. 基于 MATLAB 的系统分析与设计——小波分析. 西安: 西安电子科技大学出版社, 1999
- 2 Mallat S. Wavelet for a vision. IEEE Proc.1996,84(4): 604-614
- 3 杨福生.小波变换的工程分析与应用[M].北京: 科学出版社, 1999
- 4 赵松年, 熊小芸.子波分析与子波变换[M].北京: 电子工业出版社, 1996
- 5 程正兴.小波分析算法与应用[M].西安: 西安交通大学出版社, 1998
- 6 A.Cohen,Ingrid Daubechies and J.C.Feauveau. Biorthogonal Bases of Compactly Supported Wavelets. Communications on Pure and Applied Mathematics, 1992, 10(5): 485-560
- 7 Daubechies I.Ten lectures on wavelets. CBMS. SIAM, 1994, 61:258-261
- 8 Daubechies I.Ten lectures on wavelets. CBMS. SIAM, 1994, 61:194-202

第一作者简介: 费佩燕, 女, 1974 年 12 月生, 陕西省西安市人, 2001 年 3 月毕业于西安工程科技学院测控技术与仪器专业, 获硕士学位, 现正在西安电子科技大学攻读博士学位。主要从事计算机视觉与模式识别的研究, 已发表论文 10 余篇。