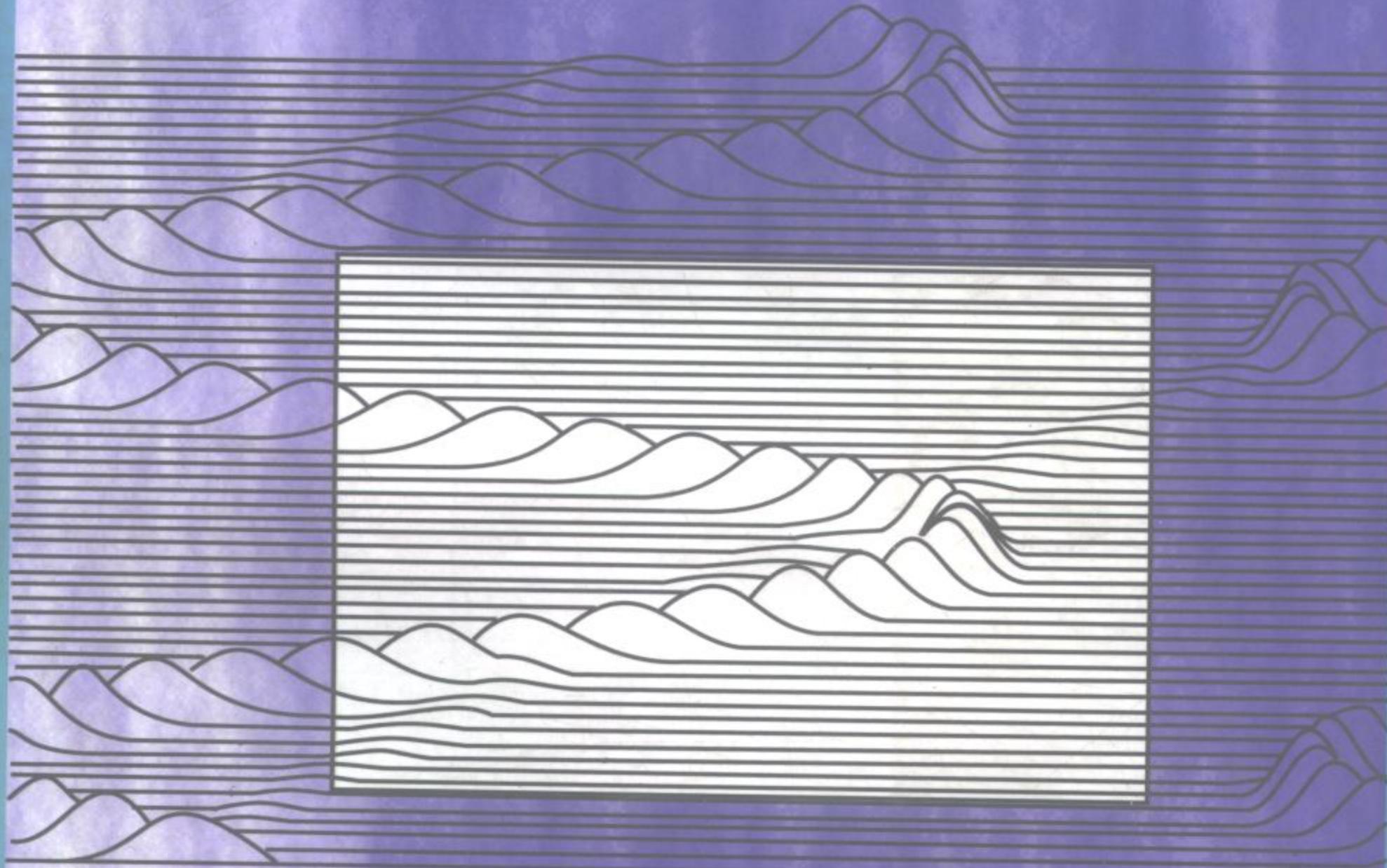


离散时间信号处理

[美] A. V. 奥本海姆
R. W. 谢 弗 著



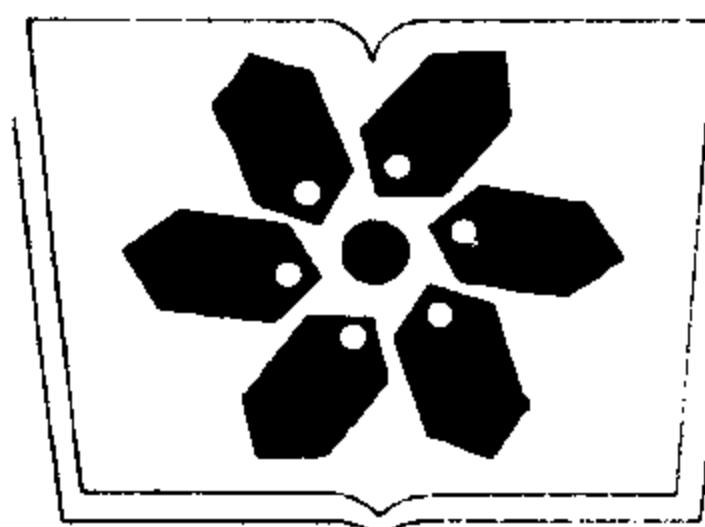
科学出版社

73.412

694

: 2

D.G67 /B

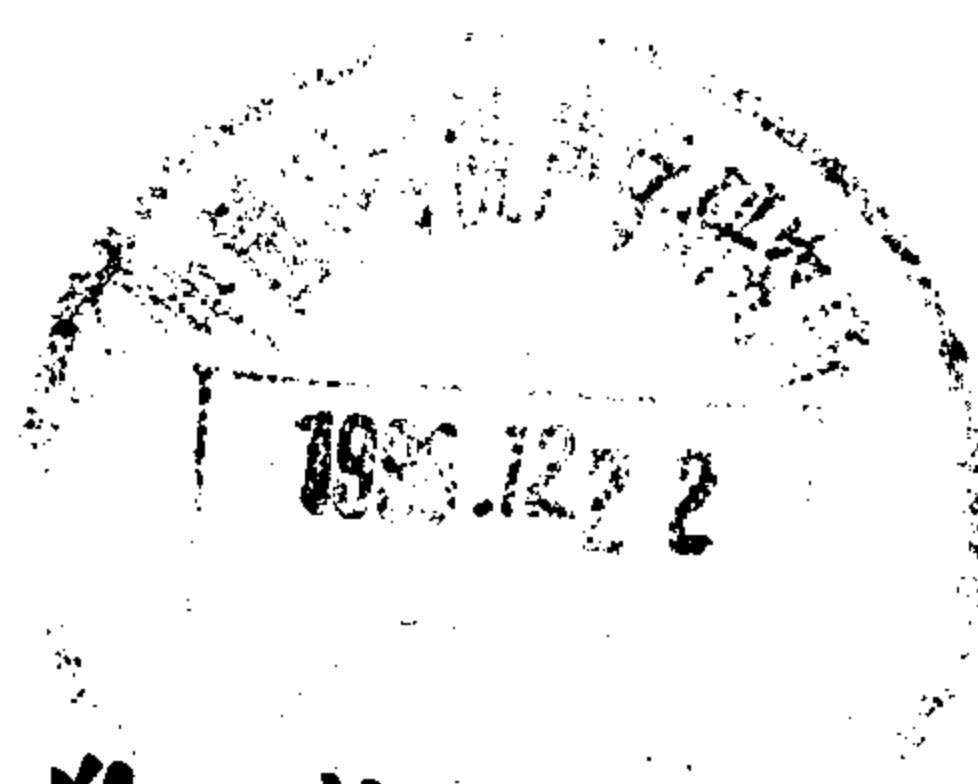


中国科学院科学出版基金资助出版

离散时间信号处理

[美] A. V. 奥本海姆
R. W. 谢 弗 著

黄建国 刘树棠 译



科学出版社

1998

4016434

内 容 简 介

本书是作者继《数字信号处理》(该书中译本于1980年由科学出版社出版)一书后又一本集中论述离散时间信号处理的新专著。作者在该书的基础上,大幅度增加了对信号处理许多专题的论述,同时删除和压缩了不少内容。本书基本概念清楚,层次安排合理,条理清晰,系统性强,即使是对本书内容基本熟悉的读者,读后也会在建立信号处理整体概念和分析的基本方法及技巧方面有所收获。书中给出不少精选的例题和图表,并包括400多道内容丰富、形式多样的习题,是国际上颇受欢迎的大学本科高年级学生及研究生的教科书。

本书可供从事数字信号处理工作的科技人员,高等学校有关专业高年级学生及研究生、教师阅读。

图书在版编目(CIP)数据

离散时间信号处理/[美]奥本海姆(Oppenheim,A. V.), [美]谢弗(Schafer,R. W.)著;黄建国,刘树棠译。-北京:科学出版社,1998.7

书名原文:Discrete-Time Signal Processing

ISBN 7-03-005877-1

I. 离… II. ①奥…②谢…③黄…④刘… III. 离散信号:时间信号-信号处理 IV. TN911.7

中国版本图书馆 CIP 数据核字(98)第 02359 号

科学出版社出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码: 100717

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

1998年7月第一版 开本: 787×1092 1/16

1998年7月第一次印刷 印张: 45 3/4

印数: 1—1 700 字数: 1 063 000

定价: 82.00 元

科学出版社

目 录

译者的话

前言

第一章 绪 论 1

第二章 离散时间信号与系统 6

 2.0 引言 6

 2.1 离散时间信号:序列 7

 2.2 离散时间系统 13

 2.3 线性时不变系统 16

 2.4 线性时不变系统的性质 22

 2.5 线性常系数差分方程 25

 2.6 离散时间信号与系统的频域表示 30

 2.7 用傅里叶变换表示序列 35

 2.8 傅里叶变换的对称性质 40

 2.9 傅里叶变换定理 42

 2.10 离散时间随机信号 49

 2.11 小结 53

 习题 53

第三章 连续时间信号的采样 64

 3.0 引言 64

 3.1 周期采样 64

 3.2 采样的频域表示 66

 3.3 由样本重构带限信号 70

 3.4 连续时间信号的离散时间处理 73

 3.5 离散时间信号的连续时间处理 80

 3.6 利用离散时间处理改变采样率 82

 3.7 实际应用考虑的问题 91

 3.8 小结 106

 习题 107

第四章 z 变换 123

 4.0 引言 123

 4.1 z 变换 123

 4.2 z 变换收敛域的性质 132

 4.3 z 反变换 137

 4.4 z 变换的性质 143

 4.5 利用围线积分求 z 反变换 149

4.6 复卷积定理	151
4.7 帕斯瓦尔定理	154
4.8 单边 z 变换	155
4.9 小结	158
习题	158
第五章 线性时不变系统的变换分析.....	167
5.0 引言	167
5.1 LTI 系统的频率响应	167
5.2 用线性常系数差分方程所表征系统的系统函数	169
5.3 有理系统函数的频率响应	175
5.4 幅度和相位特性之间的关系	190
5.5 全通系统	193
5.6 最小相位系统	198
5.7 广义线性相位的线性系统	207
5.8 小结	224
习题	224
第六章 离散时间系统结构.....	242
6.0 引言	242
6.1 线性常系数差分方程的方框图表示	243
6.2 线性常系数差分方程的信号流图表示	247
6.3 IIR 系统的基本结构.....	249
6.4 转置形式	256
6.5 FIR 系统的基本网络结构	259
6.6 格型结构	263
6.7 有限精度数值效应概述	271
6.8 系数量化的影响	277
6.9 数字滤波器中舍入噪声的影响	291
6.10 IIR 数字滤波器定点实现中的零输入极限环	308
6.11 小结	313
习题	314
第七章 滤波器设计方法.....	333
7.0 引言	333
7.1 由连续时间滤波器设计离散时间 IIR 滤波器	335
7.2 低通 IIR 滤波器的频率变换法	356
7.3 离散时间 IIR 滤波器的计算机辅助设计	362
7.4 用窗函数法设计 FIR 滤波器	367
7.5 凯泽窗法设计 FIR 滤波器举例	379
7.6 FIR 滤波器的最佳逼近	385
7.7 FIR 等波纹逼近举例	399
7.8 IIR 和 FIR 数字滤波器的评价	405
7.9 小结	407
习题	407

第八章 离散傅里叶变换	426
8.0 引言	426
8.1 周期序列的表示:离散傅里叶级数	426
8.2 离散傅里叶级数的性质	430
8.3 周期序列 DFS 表示的性质汇总	434
8.4 周期信号的傅里叶变换	435
8.5 对傅里叶变换采样	436
8.6 有限长序列的傅里叶表示:离散傅里叶变换	438
8.7 离散傅里叶变换的性质	442
8.8 离散傅里叶变换的性质汇总	453
8.9 用离散傅里叶变换实现线性卷积	453
8.10 小结	464
习题	464
第九章 离散傅里叶变换的计算	480
9.0 引言	480
9.1 离散傅里叶变换的高效计算	481
9.2 戈泽尔算法	483
9.3 按时间抽取的 FFT 算法	485
9.4 按频率抽取的 FFT 算法	494
9.5 FFT 算法的实现	499
9.6 复合数 N 的 FFT 算法	504
9.7 用卷积实现 DFT	514
9.8 离散傅里叶变换计算中有限寄存器长度的影响	519
9.9 小结	529
习题	530
第十章 离散希尔伯特变换	546
10.0 引言	546
10.1 因果序列傅里叶变换实部和虚部的充分性	547
10.2 有限长序列的充分性定理	552
10.3 幅度与相位间的关系	556
10.4 复序列的希尔伯特变换关系	557
10.5 小结	568
习题	568
第十一章 利用离散傅里叶变换的信号傅里叶分析	573
11.0 引言	573
11.1 利用 DFT 的信号傅里叶分析	573
11.2 正弦信号的 DFT 分析	576
11.3 依时傅里叶变换	589
11.4 利用依时傅里叶变换的块卷积	595
11.5 非平稳信号的傅里叶分析	596
11.6 平稳随机信号的傅里叶分析:周期图	602
11.7 利用自相关序列估计的随机信号谱分析	612

11.8 小结	622
习题	622
第十二章 倒谱分析和同态解卷积	632
12.0 引言	632
12.1 复倒谱的定义	632
12.2 同态解卷积	634
12.3 复对数的性质	637
12.4 复倒谱的另一种表示	639
12.5 指数序列的复倒谱	640
12.6 最小相位和最大相位序列	642
12.7 特征系统 $D_{\omega}[\cdot]$ 的实现	647
12.8 同态滤波举例	655
12.9 在语音处理中的应用	671
12.10 小结	677
习题	677
附录 A 随机信号	687
A.1 离散时间随机过程	687
A.2 平均	688
A.3 相关序列和协方差序列的性质	691
A.4 随机信号的变换表示	692
附录 B 连续时间滤波器	695
B.1 巴特沃兹低通滤波器	695
B.2 切比雪夫滤波器	696
B.3 椭圆滤波器	698
参考文献	700
姓名译名对照表	714
汉英名词对照索引	715

第一章 绪 论

信号可以用于沟通人类之间,或人与机器之间的联系;用以探测我们周围的环境,并揭示出那些不易观察到的状态和构造细节,以及用来控制和利用能源与信息。信号处理关心的是信号的表示、变换和运算,以及它们所包含的信息。例如,我们可能希望分开两个或多个多少有些混在一起的信号,或者想增强信号模型中的某些成分或参数。几十年来,信号处理在诸如语音与数据通信、生物医学工程、声学、声纳、雷达、地震、石油勘探、仪器仪表、机器人、日用电子产品以及其它很多的这样一些广泛的领域内起着关键的作用。

高级信号处理算法和硬件广泛应用于各种系统,从高性能的军用系统到工业应用,直至廉价大宗的日用电子产品等都是如此。虽然我们把家庭娱乐系统、如电视和高保真度音响等的性能都认为是理所当然的,其实这些系统的好坏都强烈地依赖于信号处理目前发展的水平。再举一个例子——语音合成,它很快地就在自动声音响应系统以及像助学器和玩具等日用产品中得到了应用,并且以惊人的速度从研究文献步入到军事、工业和商用系统中。

信号处理这一领域总是得益于它的理论、应用与实现信号处理系统的工艺之间的紧密联系。早在 60 年代之前,信号处理手段几乎无一例外地都是连续时间的模拟技术^{*}。数字计算机和微处理器的发展,连同某些重要的成果一起产生了向数字技术方面的倾斜,导致了数字信号处理领域的出现。数字信号处理的一个基本点是基于样本序列的处理。数字信号处理技术的离散时间特性也是其它一些信号处理技术的特性,如声表面波(SAW)器体、电荷耦合器件(CCD)、电荷转移器件(CTD)和开关电容技术等。在数字信号处理中,信号是用有限精度的数的序列来表示的,并且用数字运算来实现处理。更为一般的术语离散时间信号处理既包含了作为一种特殊情况的数字信号处理,也包含了用其它一些离散时间技术处理样本序列(采样数据)的可能。离散时间信号处理和数字信号处理这两个术语之间的区别往往不是很重要的,因为两者关心的都是离散时间信号。

虽然有很多例子其中要处理的信号本身就是序列,但是大多数的应用还是涉及到要用离散时间技术来处理连续时间信号。在这种情况下,一个连续时间信号先要把它转换成一个样本序列,即一个离散时间信号。经过离散时间处理后,再把输出序列转换成连续时间信号。对于这样一些系统来说,往往都希望它们能实时工作。这就意味着离散时间系统要以对连续时间信号采样的同一速率来完成输出样本的计算。连续时间信号的离散时间处理在通信系统、雷达、声纳、语音和视频编码及增晰、生物医学工程等方面都是司空见惯的。

大多数传统信号处理都涉及到处理一个信号而得到另一个信号。因此,另一类重要的信号处理问题就是信号解释。在这类问题中,处理的目的不是为了得到一个输出信号,而

* 一般说来,我们把“时间”当作独立变量,即使在某些特定场合,独立变量可能取其它任何可能的量纲。这样,连续时间和离散时间都应分别看作是连续独立变量和离散独立变量的通用术语。

是要得到该输入信号的某一特征.例如,在语言识别和理解系统中,其目的是为了解释输入信号,或者从输入信号中提取信息.一般说来,这种系统起着一种预处理(滤波、参数估计等)的作用,在其之后紧跟着一个模式识别系统,以产生某种符号表示,例如该语音的某一音素再现等.这种符号的输出可以依次作为一个能提供最终信号解释的符号处理系统(例如基于规则的专家系统)的输入.

还有另一类比较新的信号处理方法,它涉及到信号处理表达式的符号运算.这种处理形式在信号处理工作站和信号处理系统的计算机辅助设计中是特别有用的.在这类处理中,信号与系统是用抽象数据来表示和运算的.像 LISP 这样一些面向对象的程序语言为运算信号与系统以及信号处理表达式提供了方便的环境,而不用明确求出数据序列,并为这一类处理打下了基础.设计用来对信号表达式进行处理的系统的复杂程度直接受基本信号处理概念、定理和性质(如像形成本书的那些基础内容)的影响.例如,一种信号处理环境具有在时域卷积相当于频域相乘这样的性质,则用它可以探索各种不同滤波结构的组合,其中包括如何直接利用离散傅里叶变换和快速傅里叶变换算法.同理,具有采样率和混叠之间关系的环境,就能够在滤波器实现中有效地利用抽取和内插的方法.当然,有关计算机辅助设计系统的面向对象环境的建立,现在仍处于初级阶段,有关它的详细讨论已超出了本书的范畴.然而,重要的是要认识到,不应将作为本书主题的一些基本概念只看作是理论上的东西,它们很可能要成为计算机辅助信号处理环境和工作站中的一个完整部分.

信号处理问题自然不仅限于一维信号.虽然在理论上一维与多维信号处理之间存在着一些基本的差别,但是本书所讨论的大部分内容在多维系统中都有其直接的对应关系.多维数字信号处理理论在 Dudgeon and Mersereau (1984) 以及 Lim (1989)^{*} 所著的书中均有详细的论述.许多图像处理的应用问题需要用到二维信号处理技术.如视频编码、医学图像、航空摄影的增强与分析、卫星气象照片的分析,以及从月球和深层空间探测来的视频转输信号的增强等等就属于这一类情况.多维数字信号处理在图像处理方面的应用在 Andrews and Hunt (1977)、Castleman (1979)、Pratt (1978) 以及 Macovski (1983) 等人的著作中都有专门的论述.在石油勘探、地震检测和核试验监测等方面都需要分析地震数据,这些也都要用到多维信号处理技术.有关在地震学方面的应用在 Robinson and Treitel (1980)、Robinson and Durrani (1985) 的著作中均有论述.

多维信号处理仅仅是众多前沿和专门论题中的一个,这些论题所依赖的基础均在本书的覆盖范围之内.基于利用离散傅里叶变换和信号建模的谱分析又是信号处理另一个丰富而重要的方面.我们介绍了这方面的很多内容,大都集中在与离散傅里叶变换应用有关的一些基本概念和技术上.除了这些技术以外,各种谱分析方法都以某种方式依赖于特定的信号模型.例如称之为最大熵法(MEM 谱分析)的高分辨率谱分析方法,就是根据要把分析的信号先表示成一个离散时间线性时不变滤波器对单位脉冲或白噪声的响应,然后估计出该系统的参数(例如差分方程的系数),再求出该滤波器模型频率响应的幅度平方来完成谱分析.对这种方法用于信号建模和谱分析方面的有关论题和技术的全面而详细的论述都是以本书的基本原理为基础的.这些方面的详细讨论可以在 Kay (1988) 和

* 全书中作者的名字和年代均用来指明本书末尾所列参考文献中的著作或论文.

Marple(1987)的著作中找到.

信号建模在数据压缩和编码中也起着重要的作用,同时差分方程的基本原理也对理解这些技术的很多方面奠定了基础.例如,一种称为线性预测编码(LPC)的信号编码技术就是利用这样一个概念:如果一个信号是某个离散时间滤波器的响应,那么在任意时刻的信号值就是先前那些值的线性函数(因此可以由先前信号值而线性预测出当前信号值).这样,通过估计出这些预测参数,并与预测误差一起来表示信号,就可以得到有效的信号表示.若需要时,该信号也可以利用模型参数重新产生.这类信号编码技术在语音编码中一直是十分有效的.在 Jayant and Noll (1984), Markle and Gray (1976)以及 Rabiner and Schafer(1978)的著作中均有非常详细的论述.

另一个非常重要的前沿论题是自适应信号处理.本书的重点几乎全放在线性时不变系统上.自适应系统代表着一种特殊的时变且在某种意义上是非线性的系统.该类系统具有广泛的应用,而且对它们的分析与设计已形成了一套很有效的技术.同样,这些技术的很多方面也都是以本书所讨论的离散时间信号处理的基本原理为基础的.有关自适应信号处理的详细论述可见 Haykin(1986)及 Widrow and Stearns(1985)的著作.

这些仅仅代表了由本书包括的那些内容中延伸出来的众多前沿论题中的几个方面.其余的还包括一些先进的和专门的滤波器设计方法、计算傅里叶变换的各种专门算法、特定的一些滤波器结构,以及各种近代的多采样率信号处理技术等等.有关这些方面的介绍包括在 Lim and Oppenheim(1988)的著作中.

人们常常都认为,一本基础教科书的目的应该是揭示而不是包罗某一学科.我们一直遵循着这一宗旨来精选本书的内容及其深度.前述有关前沿论题的简单讨论和书末所附的参考文献就是想尽力展现出这些基本原理所要揭示的丰富多彩的各个方面.

历史的回顾

离散时间信号处理有着漫长而丰富的历史,它以不均匀的步伐走过了很长的历史时期.自 17 世纪发明微积分以来,科学家和工程师们就已经利用连续变量函数和微分方程来表示物理现象所建立的各种模型.为了求解这些方程,当解析解不可能时就已经使用了数值解法.确实,牛顿使用过的有限差分法就是本书介绍的某些离散时间系统的特例.18 世纪的数学家,像欧拉,伯努利和拉格朗日等建立了数值积分和连续变量函数的内插方法.由 Heideman, Johnson and Burrus(1984)等人所进行的令人关注的研究表明:早在 1805 年,高斯就发现了快速傅里叶变换(在第九章中讨论)的基本原理,而这时傅里叶关于函数的谐波级数表示法的论文尚未发表!

直到 50 年代初,信号处理还是用模拟系统来完成的,实现这些模拟系统多是用电子线路,甚至还有用机械装置的.虽然数字计算机逐渐在商业和科学实验室获得应用,其价格却异常昂贵,能力也相当有限.在那个时期,某些应用领域对更为高级的信号处理的需求激发了人们对离散时间信号处理的极大兴趣.数字计算机在数字信号处理方面最初获得应用的一个领域就是石油勘探,当时可以将地震数据用磁带记录下来,以便事后处理.这类信号处理一般来说是不能实时完成的,几秒钟的数据往往要耗去几分钟,甚至几个小时的计算机时间.即便如此,由于数字计算机的灵活性使得这种方法也颇受欢迎.

在 50 年代,数字计算机在信号处理方面的应用以另外一些不同的方式出现.由于数

字计算机的灵活性,在用模拟硬件实现某一信号处理系统之前,在数字计算机上先对该系统进行仿真往往是很有用的。在这种情况下,一种新的信号处理算法或系统在经济和工程资源上投入实施之前,均可在一种很灵活的实验环境中加以研究。这类仿真的典型例子就是由林肯实验室和贝尔实验室所完成的声码器的仿真。例如,在实现一个模拟信道的声码器中,滤波器的特性会影响已编码语音信号可理解的质量,而对这种质量又很难客观地进行定量研究。通过计算机仿真可以调整这些滤波器特性,从而对语音编码系统可理解的质量能在模拟装置构成之前就确定下来。

在所有这些利用数字计算机进行信号处理的例子中,计算机在灵活性方面表现出了极大的优越性。但是,这些处理未必总是能实时完成。因此,盛行一时的仅是将数字计算机用作逼近或仿真某一模拟信号处理系统。与此相仿,早期的数字滤波就非常关注这样一些问题:把一个滤波器在数字计算机上编成程序,这样就可以将信号先作模数转换,然后进行数字滤波,再接着作数模转换,以使整个系统近似成为一个好的模拟滤波器。在语音通信、雷达信号处理或任何一种其它应用中,数字系统可能真正实现实时信号处理的想法在当时似乎认为是最值得尝试和最为乐观的。当然,处理速度、成本和体积大小都曾是使人们偏向于应用模拟元件的三个重要因素。

在数字计算机上实现信号处理的同时,研究人员自然有一种愿望要试试日益增长的一些优越的信号处理算法。某些算法就是由于数字计算机的灵活性而产生的,但用模拟设备是无法实现的。因此,很多这些算法都曾被看作是一些有趣的,但多少有些不切实际的想法。这类算法的一个例子就是所谓的倒谱分析和同态滤波技术。在数字计算机上都曾明确地表现出,这些技术应用在语音带宽压缩系统、解卷积和回声检测与抵消上性能优越。然而,实现这些技术要求具体求出信号傅里叶变换之对数的傅里叶反变换,而所要求的傅里叶变换的准确度和分辨率都使得模拟频谱分析仪无法实现。这样一些信号处理算法的发展使得用全数字化来实现信号处理系统的看法更富有吸引力。最初在数字声码器、数字频谱分析仪以及其它全数字化系统的研究上开始了积极有效的工作,希望这样一些系统最终会变成可以实际应用的系统。

Cooley and Tukey(1965)发现的一种计算傅里叶变换的高效算法进一步加速了迈向离散时间信号处理的进程。这种算法就是现在称为快速傅里叶变换或 FFT 的算法。以下几个理由充分说明 FFT 是很有意义的。当时用数字计算机实现的许多信号处理算法所要求的处理时间要比实时处理大几个数量级。谱分析常常是信号处理中的一个重要环节,但当时却没有一种有效的方法来实现它。而快速傅里叶变换算法将傅里叶变换的计算时间减少了几个数量级,使得一些高级信号处理算法的实现在其处理时间内允许与系统之间可以在线交互试验。再者,快速傅里叶变换算法事实上可以用专用数字硬件来实现,这样从前出现的很多曾认为是不切实际的信号处理算法开始显露出具体实现的可能。

快速傅里叶变换算法的另一个重要的含意就是它本身属于离散时间范畴。它可以直接计算离散时间信号或序列的傅里叶变换,并且它所涉及到的许多性质和数学方法的确都属于离散时间范畴,而不是对连续时间傅里叶变换的简单近似。由此激发了人们用离散时间数学方法来重新阐明很多信号处理的概念和算法,之后这些技术建立了真正的离散时间域内的各种联系。这样就改变了只是把在数字计算机上进行信号处理单纯地看作是

对模拟信号处理技术的某种近似的看法,而产生了把离散时间信号处理作为一门单独的重要研究领域的浓厚兴趣.

离散时间信号处理发展史上的另一个主要进展出现在微电子学领域.微处理器的发明及其在数量上的激增为离散时间信号处理的廉价实现铺平了道路.尽管第一台微处理器因速度太慢而不能实时地实现大部分离散时间系统,但是到了80年代中期,集成电路工艺已经发展到了一个新的水平,能够制造出在结构上专门为实现离散时间信号处理算法而设计的高速定点和浮点微型计算机.由此展现出离散时间处理技术获得广泛应用的灿烂前景.

微电子学工程师们仍在继续为提高电路的集成度和数量而奋斗着,因此微电子学系统的复杂性和先进程度也在不断地稳步提高.随着整片(wafer-scale)集成技术的迅速发展,廉价、超微型及低功耗的复杂离散时间处理系统也将会实现.因此,离散时间信号处理的重要性无疑仍会与日俱增.确实,未来这一领域的发展很可能比我们刚刚描述的发展进程更富有戏剧性.当前,离散时间信号处理技术在某些应用领域已经引起了革命性的变化.电信领域就是一个显著的例子,在该领域中离散时间信号处理技术、微电子技术和光纤传输技术的结合,正以一种真正的革命方式改变着通信系统的面貌.可以预见,类似的冲击也将会波及到许多其它的技术领域.

虽然离散时间信号处理是一个不断更新和飞速发展的领域,但是它的基础已经日臻完善.本书的目的就是为了在离散时间线性系统、滤波、采样及离散傅里叶变换分析等理论方面能给出一种条理清晰的论述.所论述的这些内容应该为读者理解离散时间信号处理的广泛应用提供必要的知识,并为他们对这一令人振奋的技术领域的继续发展作出贡献奠定基础.

第二章 离散时间信号与系统

2.0 引言

一个信号可以定义为一个函数,这个函数一般携带着有关某一物理系统的状态或特性的信息。虽然信号可以用很多方法来表示,但是在所有的情况下,信息总是包含在某种变化的模式中。在数学上信号可以表示为一个或多个独立变量的函数。例如,一个语音信号可以表示为时间的函数,而一幅摄影图像就可以表示为二个空间变量的亮度函数。按照惯例我们把一个信号的数学表达式中的独立变量看作时间,本书也将遵循这一约定,尽管在某些具体的例子中,独立变量事实上可能不代表时间。

在信号的数学表示式中,独立变量可以是连续的,也可以是离散的。连续时间信号在一个连续的时间域上有定义,因此可以用一个连续独立变量来表示。连续时间信号常常又称为模拟信号。离散时间信号是定义在一些离散时刻点上,这样独立变量便具有离散值;也就是说,离散时间信号表示成数值的序列。语音和图像信号既可以用连续变量表示,也可以用离散变量表示,如果某些条件成立的话,这两种表示是完全等效的。除了独立变量可以是连续的或离散的之外,信号幅度也可以是连续的或者是离散的。数字信号在时间和幅度上都是离散的。

信号处理系统也能像信号一样来分类,也就是说连续时间系统是指其输入输出都是连续时间信号的系统;离散时间系统就是其输入输出都是离散时间信号的系统。与此类似,一个数字系统其输入输出都是数字信号。因此数字信号处理就是处理在幅度和时间上都是离散的那些信号的变换。本书的着眼点放在离散时间(而不是数字)信号与系统上。有关信号幅度的量化影响将在 3.7、6.7~6.10 和 9.8 节考虑。

离散时间信号可以由一个连续时间信号的采样来表示,也可以直接由某一个离散时间过程产生。不论离散时间信号是怎么来的,离散时间信号处理系统具有很多诱人的特点,它们可以很灵活地用诸如电荷转移器件、声表面波器件、通用数字计算机或高速微处理器等各种各样的技术手段来实现。整个的信号处理系统也能用 VLSI 技术来实现。离散时间系统可以用来仿真模拟系统,或者更重要的是实现那些用连续时间硬件无法实现的信号变换。因此,当需要用到一些高级的和灵活的信号处理时,往往就要求信号的离散时间表示。

本章讨论一维离散时间信号和信号处理系统的基本概念。重点是线性时不变离散时间系统。本章及后续几章中所推导的大部分性质都与许多教科书中(例如 Papoulis, 1980; Oppenheim and Willsky, 1983)所讨论线性时不变连续时间系统时所得到的性质和结果类似。事实上,有可能这样来讨论离散时间系统,即把序列当作为冲激串的模拟信号来处理。如果细心地处理,这条途径也能得出正确的结果,并且已经形成为大部分采样数据系统用经典方法进行讨论的基础(例如见 Raggazzini and Franklin, 1958; Freeman, 1965;

Phillips and Nagle, 1984). 然而, 不是所有的序列都是从连续时间信号的采样得到的, 很多离散时间系统也不只是对相应的模拟系统的近似。再者, 离散时间与连续时间系统之间存在着某些重要的和基本的差别。因此, 不是企图硬将从连续时间系统理论得出的结果强拉入离散时间的框架, 而是用适合于离散时间系统的符号, 在某一框架内着手导出平行的结果。只有当这样做是必要且有益时, 我们才把离散时间信号与连续时间信号联系起来。

2.1 离散时间信号: 序列

离散时间信号在数学上表示成数的序列。一个数的序列 x , 其中序列的第 n 个数记作 $x[n]^*$, 正规地可写作

$$x = \{x[n]\}, \quad -\infty < n < \infty, \quad (2.1)$$

式中 n 为整数。实际上这样的序列往往可以通过周期采样一个模拟信号来得到, 这样一来, 序列中第 n 数的数值就等于模拟信号 $x_a(t)$ 在时刻 nT 处的值, 即

$$x[n] = x_a(nT), \quad -\infty < n < \infty. \quad (2.2)$$

T 称为采样周期, 其倒数就是采样频率。尽管序列不总是由采样模拟波形来获得的, 但是把 $x[n]$ 称为序列的“第 n 个样本”还是方便的。同时, 虽然严格说来 $x[n]$ 指的是序列中的第 n 个数, 但是式(2.1)的记号往往不必那么麻烦, 当我们意指整个序列时, 称“序列 $x[n]$ ”既方便, 又明确, 就像刚才称呼“模拟信号 $x_a(t)$ ”一样。离散时间信号(也就是序列)常常又可用如图 2.1 那样的图形来表示。图中横坐标虽然画的是一条连续线, 但重要的是要知道 $x[n]$ 仅仅在 n 为整数值时才有定义。认为 $x[n]$ 在 n 不为整数时就是零是不正确的; $x[n]$ 在 n 为非整数时只是无定义。

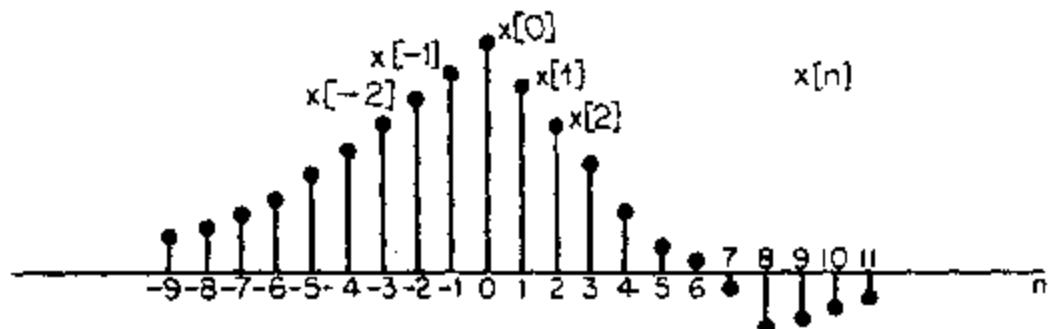


图 2.1 离散时间信号的图解表示。

作为一个例子, 图 2.2(a)表示的是一段语音信号, 它相当于声压随时间变化的函数。图 2.2(b)则是该语音信号的样本序列。原始语音信号是在全部时间 t 上定义的, 而这个序列所包含的只是原始信号在离散时刻的信息。由第三章讨论的采样定理可知, 只要样本取得足够密, 原始信号就能从一个相应的样本序列中准确无误地恢复出来。

* 一个序列就是定义在整数域上的一个函数。用 $[]$ 来括出这种函数的独立变量, 而用 $()$ 来括出连续变量函数的独立变量。

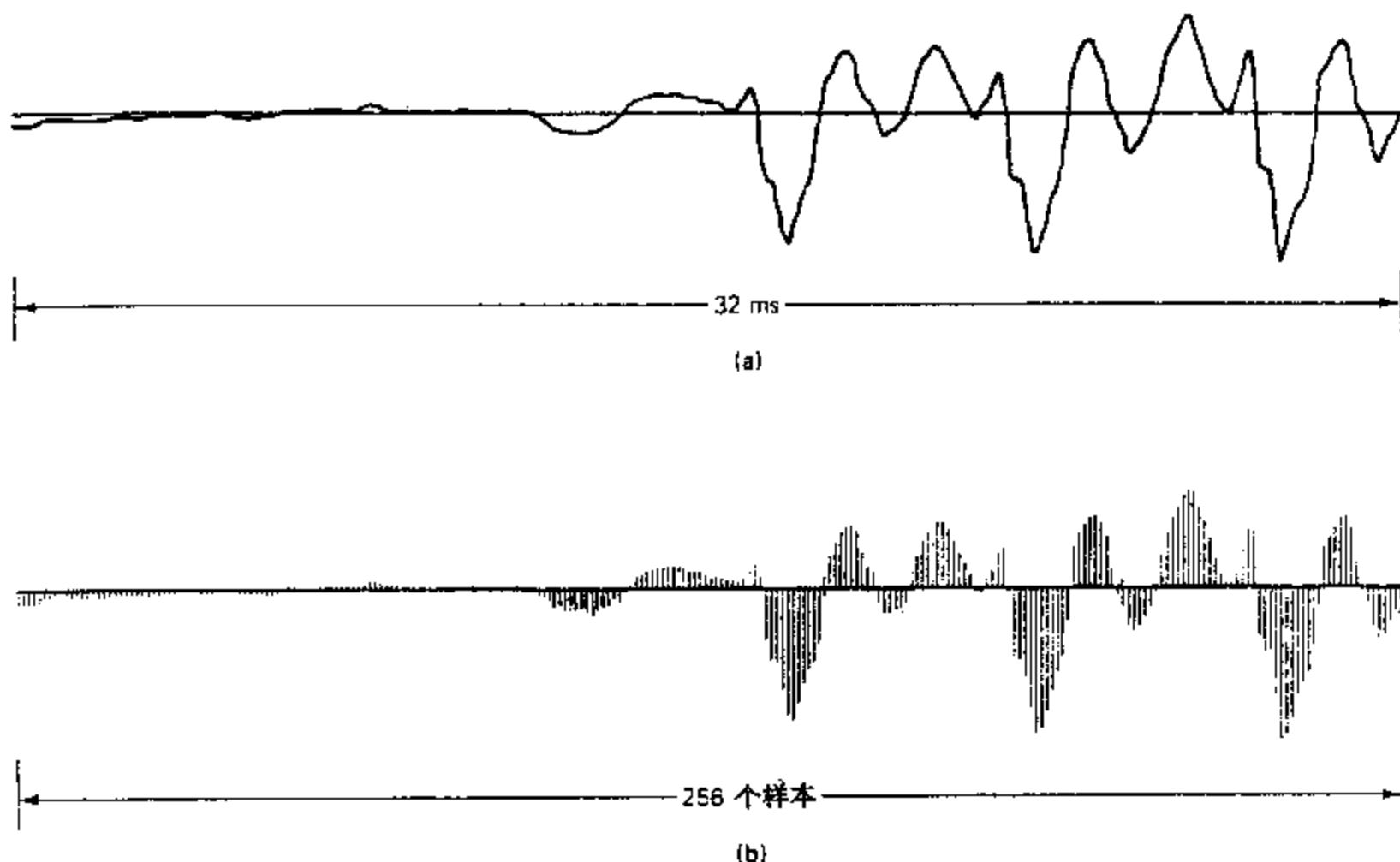


图 2.2 (a) 一段连续时间语音信号, (b) 由图(a)用 $T=125\mu s$ 获得的样本序列.

2.1.1 基本序列和序列运算

在离散时间信号处理系统的分析中,对序列进行运算有几种基本的方式.两个序列 $x[n]$ 和 $y[n]$ 的积与和分别定义为对应样本间的积与和.一个序列 $x[n]$ 乘以数 α 定义为序列中每一个样本值都乘以 α .称序列 $y[n]$ 为序列 $x[n]$ 的延迟或移位,则应有:

$$y[n] = x[n - n_0], \quad (2.3)$$

这里 n_0 为整数.

在讨论离散时间信号与系统理论时,有几个基本序列是特别重要的.这些序列如图 2.3 所示,并在下面给以讨论.

单位样本序列 $\delta[n]$ (图 2.3(a))定义为

$$\delta[n] = \begin{cases} 0, & n \neq 0, \\ 1, & n = 0. \end{cases} \quad (2.4)$$

我们将会看到,在离散时间信号与系统中单位样本序列所起的作用就如同单位冲激函数在连续时间信号与系统中所起的作用.为了方便起见,单位样本序列也常称为离散时间冲激,或简称冲激.要注意,一个离散时间冲激并没有遇到那么多像连续时间冲激所带来的数学上的麻烦,它的定义既简单又明确.

在线性系统讨论中将会看到,冲激序列的一个重要作用就是任何序列都可以用一组幅度加权和延迟的冲激序列的和来表示.例如,在图 2.4 中的序列 $p[n]$ 可表示为

$$p[n] = a_3\delta[n+3] + a_1\delta[n-1] + a_2\delta[n-2] + a_7\delta[n-7]. \quad (2.5)$$

更一般地说,任何序列均可以表示成

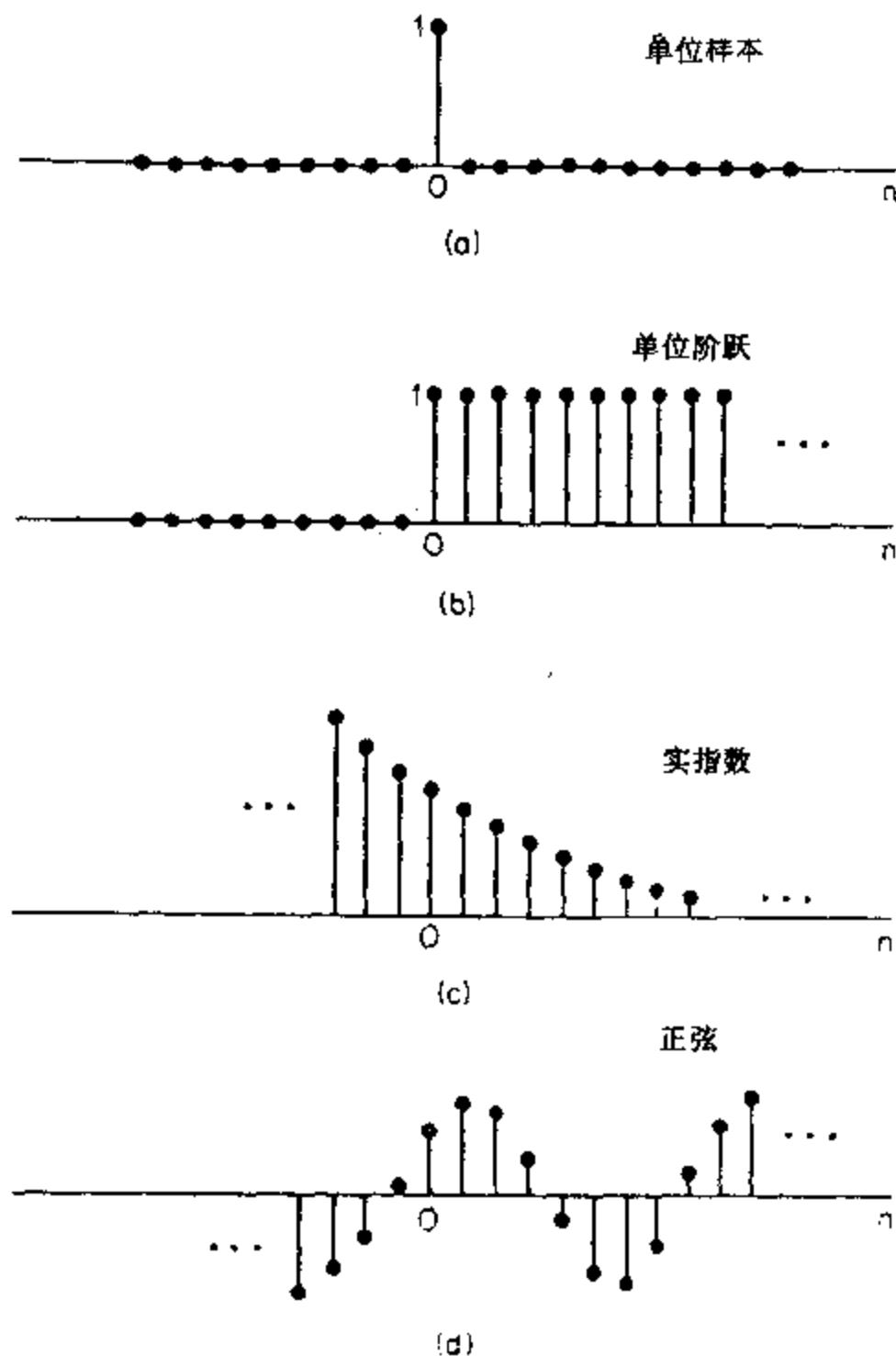


图 2.3 一些基本序列, 这些序列在离散时间信号与系统的表示与分析中起着重要的作用.

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \delta[n-k]. \quad (2.6)$$

在离散时间线性系统表示的讨论中将专门使用式(2.6).

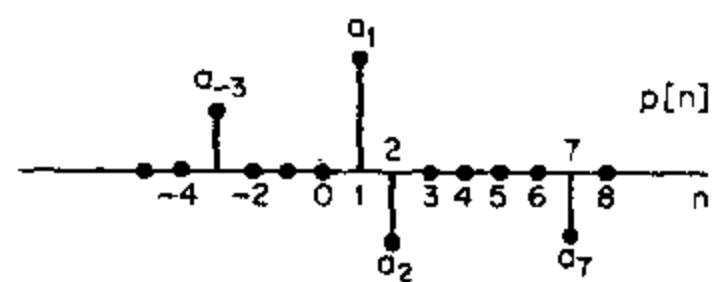


图 2.4 序列表示为一组幅度加权和延迟冲激序列之和的例子.

单位阶跃序列 $u[n]$ (图 2.3(b))定义为

$$u[n] = \begin{cases} 1, & n \geq 0, \\ 0, & n < 0. \end{cases} \quad (2.7)$$

单位阶跃与冲激的关系是

$$u[n] = \sum_{k=-\infty}^n \delta[k], \quad (2.8)$$

即单位阶跃序列在 n 点的值就等于在 n 点及该点以前全部的冲激序列值的累加和。利用冲激表示单位阶跃的另一种形式是把图 2.3(b) 的单位阶跃看作是一组延迟的冲激之和，数学上可表示为

$$u[n] = \delta[n] + \delta[n-1] + \delta[n-2] + \dots \quad (2.9a)$$

或者

$$u[n] = \sum_{k=0}^{\infty} \delta[n-k]. \quad (2.9b)$$

反之，冲激序列也能表示成单位阶跃序列的一阶后向差分，即

$$\delta[n] = u[n] - u[n-1]. \quad (2.10)$$

指数序列与正弦序列在表示和分析线性时不变离散时间系统中是极为重要的。一个指数序列的一般形式是

$$x[n] = A\alpha^n. \quad (2.11)$$

如果 A 和 α 都为实数，则序列为实序列。如果 $0 < \alpha < 1$, A 为正，那么序列值为正，且随 n 增加而减小，如图 2.3(c) 所示。对于 $-1 < \alpha < 0$ ，则序列值正负交替改变，但仍随 n 增加而减小。如果 $|\alpha| > 1$ ，那么序列在幅度上就会随 n 增加而增长。一个正弦序列的一般形式为

$$x[n] = A \cos(\omega_0 n + \phi) \quad \text{对全部 } n, \quad (2.12)$$

其中 A 为实数，如图 2.3(d) 所示。

α 为复数的指数序列 $A\alpha^n$ 其实部和虚部都是指数加权的正弦序列。具体地说，如果 $\alpha = |\alpha|e^{j\omega_0}$, $A = |A|e^{j\phi}$ ，则序列 $A\alpha^n$ 就可以表示为

$$\begin{aligned} x[n] &= A\alpha^n = |A|e^{j\phi}|\alpha|^n e^{j\omega_0 n} \\ &= |A||\alpha|^n e^{j(\omega_0 n + \phi)} \\ &= |A||\alpha|^n \cos(\omega_0 n + \phi) + j|A||\alpha|^n \sin(\omega_0 n + \phi). \end{aligned} \quad (2.13)$$

若 $|\alpha| > 1$ ，则该序列振荡的包络按指数增长，若 $|\alpha| < 1$ ，则包络按指数衰减。（作为一个简单的例子可考虑 $\omega_0 = \pi$ 的情况。）

当 $|\alpha| = 1$ 时，该序列称为复指数序列，且有

$$x[n] = |A|e^{j(\omega_0 n + \phi)} = |A| \cos(\omega_0 n + \phi) + j|A| \sin(\omega_0 n + \phi), \quad (2.14)$$

也就是说， $e^{j\omega_0 n}$ 的实部和虚部都随 n 作正弦变化。由于在式(2.14)中 n 总是整数，这就使得离散时间与连续时间的复指数序列和正弦序列间在性质上有重大差异。对照连续时间的情况， ω_0 应称作该复正弦或复指数序列的频率，而 ϕ 称为相位。然而我们注意到 n 是一个无量纲的整数，因此 ω_0 的量纲必须是弧度。倘若我们愿意与连续时间的情况保持一种更相近的对照，可以把 ω_0 的单位标成弧度/样本，而 n 的单位就是样本。

当频率为 $(\omega_0 + 2\pi)$ 时，可以看到连续时间和离散时间复正弦之间有一个更有趣的差别。这时，

$$\begin{aligned}x[n] &= Ae^{j(\omega_0 + 2\pi r)n} \\&= Ae^{j\omega_0 n}e^{j2\pi rn} = Ae^{j\omega_0 n}.\end{aligned}\quad (2.15)$$

的确可以很容易地看出,频率为($\omega_0 + 2\pi r$)的复指数序列(其中 r 为任意整数)相互间是无法区别的.这一点对正弦序列也成立,由下式可以很容易证明

$$\begin{aligned}x[n] &= A\cos[(\omega_0 + 2\pi r)n + \phi] \\&= A\cos(\omega_0 n + \phi).\end{aligned}\quad (2.16)$$

这一性质对于由采样正弦信号和其它信号得到的序列来说,其含意将于第三章讨论.到目前为止,我们只是得出:当讨论具有 $x[n] = Ae^{j\omega_0 n}$ 的复指数信号或具有 $x[n] = A\cos(\omega_0 n + \phi)$ 的实正弦信号时,只需要考虑长度为 2π 的一段频率区间就够了,比如 $-\pi < \omega_0 \leq \pi$ 或 $0 \leq \omega_0 < 2\pi$.

连续时间和离散时间的复指数与正弦信号之间的另一重要差别是关于周期性问题.在连续时间的情况下,一个正弦信号和复指数信号都是周期的,且周期等于 2π 除以频率.在离散时间的情况下一个周期序列应满足

$$x[n] = x[n+N], \quad \text{对全部 } n, \quad (2.17)$$

其中周期 N 必须是整数.如果用这个条件来检验离散时间正弦序列的周期性,则有

$$A\cos(\omega_0 n + \phi) = A\cos(\omega_0 n + \omega_0 N + \phi), \quad (2.18)$$

这要求

$$\omega_0 N = 2\pi k, \quad (2.19)$$

式中 k 为整数.对于复指数序列 $Ce^{j\omega_0 n}$ 也同样,即周期为 N 的周期性要求

$$e^{j\omega_0(n+N)} = e^{j\omega_0 n}, \quad (2.20)$$

与式(2.19)一样,仅当 $\omega_0 N = 2\pi k$ 时,上式才成立.这样,复指数和正弦序列并不一定都是周期为 $2\pi/\omega_0$ 的周期序列,而要取决于 ω_0 的值,有可能它们就不是周期的.例如,对于 $\omega_0 = 3\pi/4$,满足式(2.19)最小的 N 就是 $N = 8$ (相当于 $k = 3$).对于 $\omega_0 = 1$,就没有一个 N 或 k 值满足式(2.19).

当把式(2.19)的条件与先前得到的有关 ω_0 和 $(\omega_0 + 2\pi r)$ 是不可区分的频率的结果结合在一起时,就很清楚,这里存在着 N 个可区分开的频率,对应这些频率的序列都是周期的,且周期为 N .这些频率中的一组就是 $\omega_k = 2\pi k/N, k = 0, 1, \dots, N-1$.复指数和正弦序列的这些性质在离散时间傅里叶分析计算算法的理论和设计中都是最基本的,这些将在第八章和第九章中详细讨论.

有关以上的讨论都说明这样一点,就是对于连续时间和离散时间正弦和复指数信号的高、低频率的解释稍许有些不同.对于连续时间正弦信号 $x(t) = A\cos(\Omega_0 t + \phi)$,随着 Ω_0 的增加, $x(t)$ 振荡得愈来愈快.与此对照,对离散时间正弦信号 $x[n] = A\cos(\omega_0 n + \phi)$,当 ω_0 从0增加到 π 时, $x[n]$ 振荡愈来愈快,而当 ω_0 从 π 增加到 2π 时,振荡反而变慢,如图2.5所示.事实上,由于正弦和复指数序列中 ω_0 的周期性, $\omega_0 = 2\pi$ 与 $\omega_0 = 0$ 就无法区分开.更一般地说,在 $\omega_0 = 2\pi$ 周围的频率与 $\omega_0 = 0$ 周围的频率就不能区分开.结果,对于正弦和复指数序列,位于 $\omega_0 = 2\pi k$ (k 为任意整数)邻近的 ω_0 值就属于低频范围(相对慢的振荡),而 ω_0 在 $\omega_0 = (2\pi k + \pi)$ 附近就是高频区域(相对快的振荡).

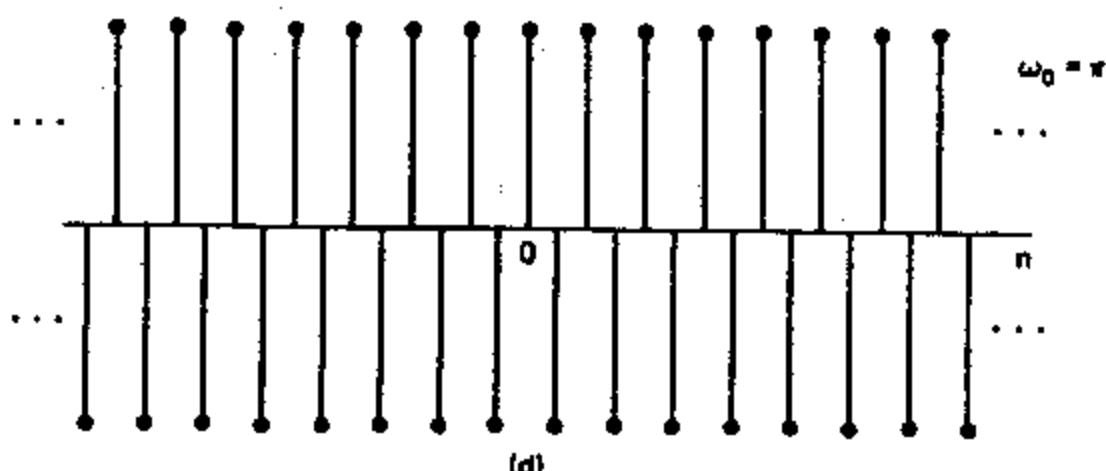
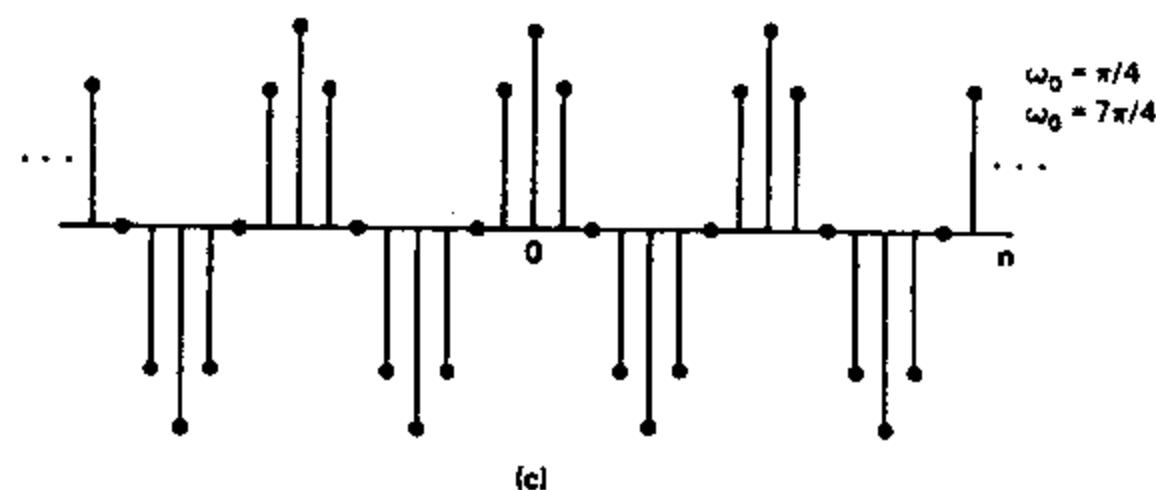
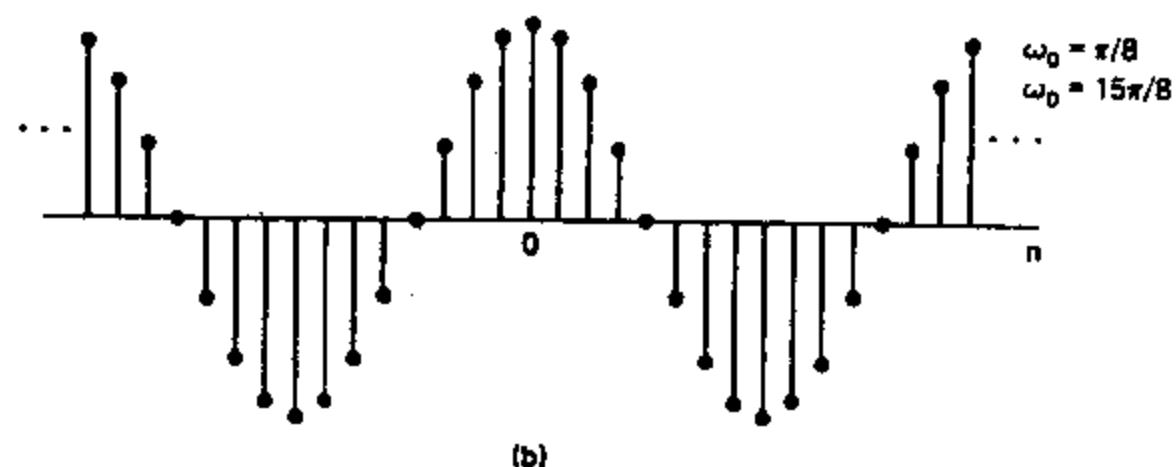
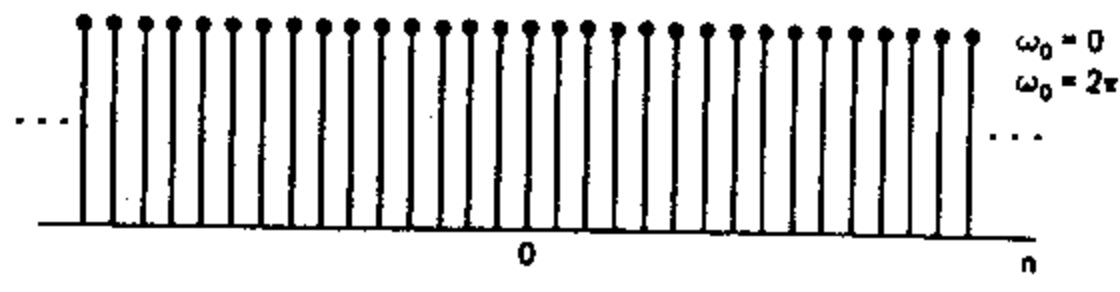


图 2.5 对于几个不同的 ω_0 值时的 $\cos \omega_0 n$. 随着 ω_0 从零增加到 π [(a) — (d)], 序列振荡加快；
随着 ω_0 从 π 增加到 2π [(d) — (a)], 振荡变慢.

2.2 离散时间系统

在数学上,一个离散时间系统可以定义为一种变换或算子,它把值为 $x[n]$ 的输入序列映射为值为 $y[n]$ 的输出序列,可以记作

$$y[n] = T\{x[n]\} \quad (2.21)$$

并用图可表示为图 2.6. 式(2.21)代表了由输入序列值计算输出序列值的某种规则或公式. 应该强调的是,输出序列在每一个 n 点的值都可以是在全部 n 点 $x[n]$ 值的函数. 下面用一些例子来说明某些简单而有用的系统.

例 2.1 理想延迟系统

理想延迟系统由下列方程定义

$$y[n] = x[n - n_d], \quad -\infty < n < \infty, \quad (2.22)$$

式中 n_d 是一个固定的正整数,称为系统的延迟.一句话,理想延迟系统就是把输入序列右移 n_d 个样本以形成输出序列. 在式(2.22)中,若 n_d 是一个固定的负整数,那么系统就将输入左移 n_d 个样本,这相等于时间超前.

例 2.1 中在确定某一个输出样本时只涉及到输入序列中的一个样本,下面的例子就不属于这种情况.

例 2.2 滑动平均

一般的滑动平均系统由下列方程定义:

$$\begin{aligned} y[n] &= \frac{1}{M_1 + M_2 + 1} \sum_{k=-M_1}^{M_2} x[n-k] \\ &= \frac{1}{M_1 + M_2 + 1} \{x[n+M_1] + x[n+M_1-1] + \dots + x[n] \\ &\quad + x[n-1] + \dots + x[n-M_2]\}. \end{aligned} \quad (2.23)$$

该系统计算输出序列的第 n 个样本时是将其作为输入序列第 n 个样本前后的 $(M_1 + M_2 + 1)$ 个样本的平均. 图 2.7 表示出,输入序列可画成哑元变量 k 的函数,以及当 $n=7$, $M_1=0$ 和 $M_2=5$,对计算输出样本 $y[7]$ 所用到的输入样本. 输出样本 $y[7]$ 就等于两垂直虚线间全部样本的 $1/6$. 若求 $y[8]$,则把两垂直虚线右移一个样本即可.

系统的分类可以通过加在变换 $T\{\cdot\}$ 的性质上的限制来定义. 我们将会看到,这样做往往可以得出很通用的数学表达式. 在下面 2.2.1~2.2.5 节所讨论的是其中特别重要的些性质和限制.

2.2.1 无记忆系统

如果在每一个 n 值上的输出 $y[n]$ 只决定于同一 n 值的输入 $x[n]$,那么就说该系统是无记忆的.

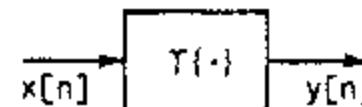


图 2.6 离散时间系统的表示,即将输入序列 $x[n]$ 映射为唯一的输出序列 $y[n]$ 的变换.

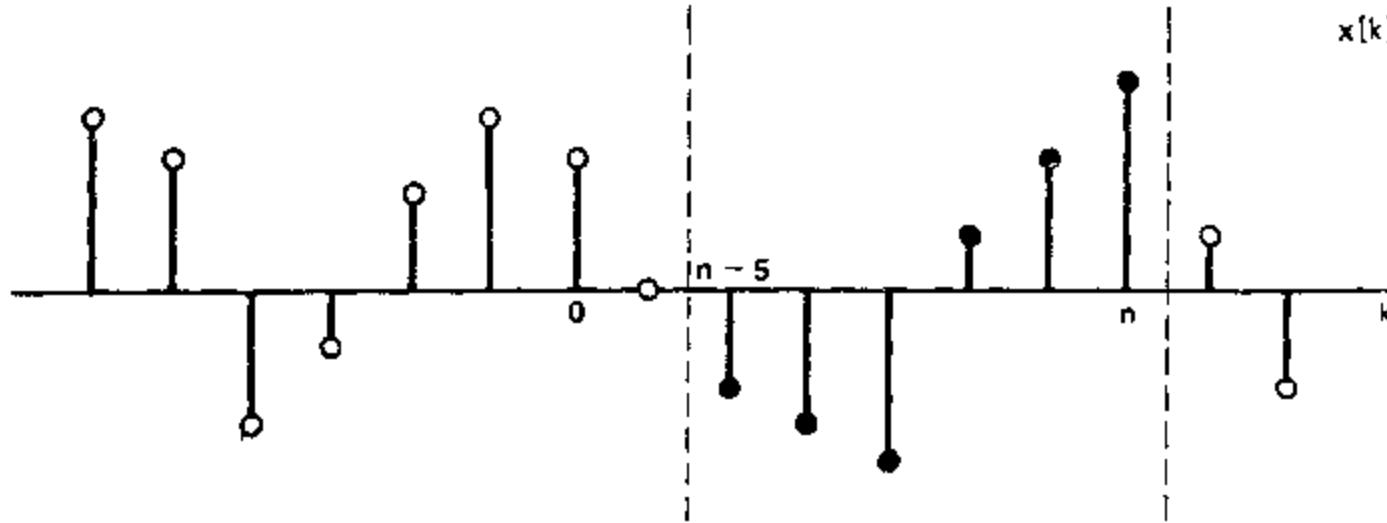


图 2.7 计算一个因果滑动平均所用到的序列值.

例 2.3

$x[n]$ 与 $y[n]$ 若由如下方程所关联, 就属于无记忆系统的一个例子:

$$y[n] = (x[n])^2, \quad \text{对每个 } n \text{ 值.} \quad (2.24)$$

除非 $n_d=0$, 否则例 2.1 的系统就不是无记忆的. 尤其是, 无论 n_d 是正(时间延迟)或负(时间超前), 系统都称为是有“记忆”的. 例 2.2 的系统不是无记忆系统, 除非 $M_1=M_2=0$.

2.2.2 线性系统

线性系统由叠加原理来定义. 如果 $y_1[n]$ 和 $y_2[n]$ 分别是输入 $x_1[n]$ 和 $x_2[n]$ 时某一系统的响应, 那么当且仅当下式成立时, 该系统就是线性的:

$$T\{x_1[n]+x_2[n]\}=T\{x_1[n]\}+T\{x_2[n]\}=y_1[n]+y_2[n] \quad (2.25a)$$

和

$$T\{ax[n]\}=aT\{x[n]\}=ay[n]. \quad (2.25b)$$

式中 a 为任意常数. 上述第一个性质称为可加性, 第二个称为齐次性或比例性. 这两个性质合在一起就成为叠加原理, 写成

$$T\{ax_1[n]+bx_2[n]\}=aT\{x_1[n]\}+bT\{x_2[n]\} \quad (2.26)$$

式(2.26)对任意常数 a 和 b 都成立. 该式还可推广到多个输入的叠加, 具体讲, 如果

$$x[n]=\sum_k a_k x_k[n], \quad (2.27a)$$

那么

$$y[n]=\sum_k a_k y_k[n], \quad (2.27b)$$

式中 $y_k[n]$ 就是系统对输入 $x_k[n]$ 的响应.

利用叠加原理的定义, 可很容易证明例 2.1 和例 2.2 的系统都是线性系统(见习题 2.2). 例 2.3 是非线性系统的一个例子.

例 2.4

一个称之为累加器的系统由下式定义:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^n x[k] \quad (2.28)$$

这是一个线性系统，在每一个样本时刻 n 的输出就等于该时刻及其之前全部输入的累加和。将式(2.28)与式(2.8)比较一下就会发现，如果输入 $x[n]$ 是一个单位冲激的话，输出 $y[n]$ 就是一个单位阶跃 $u[n]$ 。

2.2.3 时不变系统

时不变(又称移不变)系统是这样一种系统，输入序列的移位或延迟将引起输出序列相应的移位或延迟。具体地说，假设一个系统将值为 $x[n]$ 的输入序列变换成值为 $y[n]$ 的输出序列。这个系统如果说时不变的，则对所有 n_0 ，值为 $x_1[n] = x[n - n_0]$ 的输入序列将产生值为 $y_1[n] = y[n - n_0]$ 的输出序列。

例 2.1~2.4 的系统都是时不变的。下面举一个非时不变系统的例子。

例 2.5

由下述关系定义的系统称之为压缩器：

$$y[n] = x[Mn], \quad -\infty < n < \infty, \quad (2.29)$$

式中 M 是一个正整数。具体地说，就是从 M 个样本中抛弃 $(M-1)$ 个，也即输出序列是由输入序列中每隔 M 个样本选出一个来构成的。从该系统工作过程的描述上就应该明白，这个系统不是时不变的。这可以从数学上来证明，考虑到当输入 $x_1[n] = x[n - n_0]$ 时的响应为 $y_1[n]$ ，则有

$$y_1[n] = x_1[Mn] = x[Mn - n_0]. \quad (2.30)$$

但是

$$y[n - n_0] = x[M(n - n_0)] \neq y_1[n]. \quad (2.31)$$

由于 $x_1[n]$ 是 $x[n]$ 移位 n_0 ，而 $y_1[n]$ 并不是 $y[n]$ 移位 n_0 。所以，减采样器是非时不变的，除非 $M=1$ 。

2.2.4 因果性

如果对每一个选取的 n_0 ，输出序列在 $n=n_0$ 的值仅仅取决于输入序列在 $n \leq n_0$ 的值，则该系统就是因果的。这意味着，如果 $x_1[n] = x_2[n]$ ， $n \leq n_0$ ，则有 $y_1[n] = y_2[n]$ ， $n \leq n_0$ 。也就是说，该系统是不能预知的。例 2.1 的系统对于 $n_d \geq 0$ 是因果的；而对 $n_d < 0$ ，则是非因果的。例 2.2 的系统，如果 $-M_1 \geq 0$ 和 $M_2 \geq 0$ ，则是因果的；否则就是非因果的。例 2.3 的系统是因果的，例 2.4 的累加器也同样是因果的。然而，例 2.5 的系统若 $M > 1$ 就不是因果的，因为 $y[1] = x[M]$ 。下面给出另一个非因果系统的例子。

例 2.6

前向差分系统由如下关系式定义：

$$y[n] = x[n+1] - x[n] \quad (2.32)$$

很明显， $y[n]$ 与 $x[n+1]$ 有关，因此该系统是非因果的。然而，后向差分系统

$$y[n] = x[n] - x[n-1] \quad (2.33)$$

却是因果的。

2.2.5 稳定性

当且仅当每一个有界的输入序列都产生一个有界的输出序列时，则称该系统在有界输入有界输出(BIBO)意义下是稳定的。如果存在某一个固定的有限正数 B_x ，使下式成立

$$|x[n]| \leq B_x < \infty, \quad \text{对全部 } n. \quad (2.34)$$

则输入 $x[n]$ 就是有界的。稳定性要求对每一个有界的输入，都存在一个固定的有限正数 B_y ，使下式成立

$$|y[n]| \leq B_y < \infty, \quad \text{对全部 } n. \quad (2.35)$$

例 2.1, 2.2, 2.3 及 2.5 都是稳定系统。例 2.4 的累加器是不稳定的。为了说明这一点，只需判定在一个有界输入时，输出是无界的就够了。设 $x[n] = u[n]$ ，很明显输入是有界的，将其输入至累加器，输出就是

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^n u[k] = \begin{cases} 0, & n < 0, \\ (n+1), & n \geq 0. \end{cases} \quad (2.36)$$

如果 n 是有限的，虽然这个响应是有限的，然而却是无界的。因为不存在一个固定的有限正数 B_y ，使 $(n+1) \leq B_y < \infty$ 对全部 n 都成立。

值得特别强调的是，本节所定义的这些性质是系统的性质，而不是输入对系统的性质。这就是说，我们有可能找到一些输入，对这些输入这些性质是成立的，但是对某些输入又存在着某个性质，并不意味着该系统就具有这一性质。具有某一性质的系统必须对所有输入都成立。例如，一个不稳定的系统有可能对某些有界的输入，其输出是有界的；但是具有稳定性质的系统必须是对所有有界的输入，其输出都是有界的。如果我们恰恰能够找到一种输入使该系统性质不成立，则就可认为系统不具有那个性质，就如同我们在例 2.4 的累加器系统所做的那样。

2.3 线性时不变系统

一种特别重要的系统是由线性和时不变组成的系统。这两个性质结合在一起就可得出对这类系统特别方便的表示方法。最重要的是，这类系统在信号处理应用中是十分有效的。在式(2.26)中线性系统是用叠加原理来定义的。如果线性性质与将一个序列表示成如式(2.6)所示的一组延迟冲激的线性组合结合起来，那么一个线性系统就可以完全用它的冲激响应来表征。令 $h_k[n]$ 是系统对 $\delta[n-k]$ 的响应，那么由式(2.6)，

$$y[n] = T \left\{ \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \delta[n-k] \right\}. \quad (2.37)$$

根据用式(2.26)表示的叠加原理式，有

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] T\{\delta[n-k]\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] h_k[n]. \quad (2.38)$$

按照式(2.38)，系统对任何输入的响应就可以用系统对 $\delta[n-k]$ 的响应来表示。但是，如果系统仅仅具有线性， $h_k[n]$ 还将与 n 和 k 都有关。在这种情况下，式(2.38)计算的有效

性就会受到限制。如果再把时不变这个条件加在系统上，就能得到一个更为有用的结果。

时不变性意味着如果 $h[n]$ 是对 $\delta[n]$ 的响应，那么对 $\delta[n-k]$ 的响应就是 $h[n-k]$ 。利用这一附加限制，式(2.38)就变成

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k]. \quad (2.39)$$

式(2.39)的结果表明一个线性时不变系统(有时简写为 LTI)可以完全由它的冲激响应 $h[n]$ 来表征。在这个意义上，如果给定 $h[n]$ ，就能够利用式(2.39)求出对任何输入 $x[n]$ 的输出 $y[n]$ 。

式(2.39)一般就称为卷积和。如果 $y[n]$ 是一个序列，其值是按式(2.39)的关系与序列 $h[n]$ 和 $x[n]$ 的值联系在一起的，就称 $y[n]$ 是 $x[n]$ 与 $h[n]$ 的卷积，并用下述符号表示：

$$y[n] = x[n] * h[n]. \quad (2.40)$$

离散时间卷积的运算是取两个序列 $x[n]$ 和 $h[n]$ ，并产生第三个序列 $y[n]$ 。式(2.39)把输出序列的每一个样本用输入和冲激响应序列的全部样本来表示。

式(2.39)的推导给出了这样一种解释：在 $n=k$ 的输入样本 $x[n]\delta[n-k]$ ，由系统变换为输出序列 $x[k]h[n-k]$ ， $-\infty < n < \infty$ ，并且对每一个 k ，这些序列相叠加以产生整个输出序列。这种解释可用图 2.8 来说明，图中分别示出了一个冲激响应、一个只有三个非零样本的简单输入序列、对每一个样本的单个输出以及由于在输入序列中全部样本产生的总输出。更具体一点就是 $x[n]$ 可以分解成三个序列 $x[-2]\delta[n+2]$ ， $x[0]\delta[0]$ 与 $x[3]\delta[n-3]$ 的和，它们分别代表输入序列 $x[n]$ 中的三个非零值。序列 $x[-2]h[n+2]$ ， $x[0]h[n]$ 以及 $x[3]h[n-3]$ 就分别是系统对 $x[-2]\delta[n+2]$ ， $x[0]\delta[n]$ 和 $x[3]\delta[n-3]$ 的响应。最后对 $x[n]$ 的响应就是这三个单个响应的和。

虽然卷积和的表示式与连续时间线性系统理论中卷积积分的表示式是很类似的，但是不应该把卷积和看成是卷积积分的一种近似。在连续时间线性系统理论中卷积积分主要起着一种理论上的作用；而我们将会看到，卷积和除了它在理论上的重要作用之外，还往往用作一个离散时间线性系统一种明确的实现。因此，在实际计算时重要的是要对卷积和的性质有一个深透的理解。

以上关于式(2.39)的说明强调了卷积和就是线性和时不变性的一个直接结果。然而，对式(2.39)的一种稍许不同的看法会得出一种计算上特别有用的理解。当作为公式来计算输出序列的某单个值时，式(2.39)指出： $y[n]$ (也就是输出中的第 n 个值)是由输入序列(表示成 k 的函数)乘以其值为 $h[n-k]$ ， $-\infty < k < \infty$ 的序列，然后对任意一个固定的 n 值，将全部乘积 $x[k]h[n-k]$ 加起来而得到的。这里 k 是一个在求和过程中计数的标号。这样，两个序列的卷积运算就涉及到对全部 n 值做这种计算，从而得到整个输出序列 $y[n]$ ， $-\infty < n < \infty$ 。为了求得 $y[n]$ ，完成计算式(2.39)的关键是如何对全部所关心的 n 值构成序列 $h[n-k]$ ， $-\infty < k < \infty$ 。为此，我们注意到

$$h[n-k] = h[-(k-n)]. \quad (2.41)$$

式(2.41)的解释最好用一个例子来进行。

例 2.7

假设 $h[k]$ 为如图 2.9(a)所示的序列。首先考虑对 k 画出 $h[-k]$ ； $h[-k]$ 就是 $h[k]$

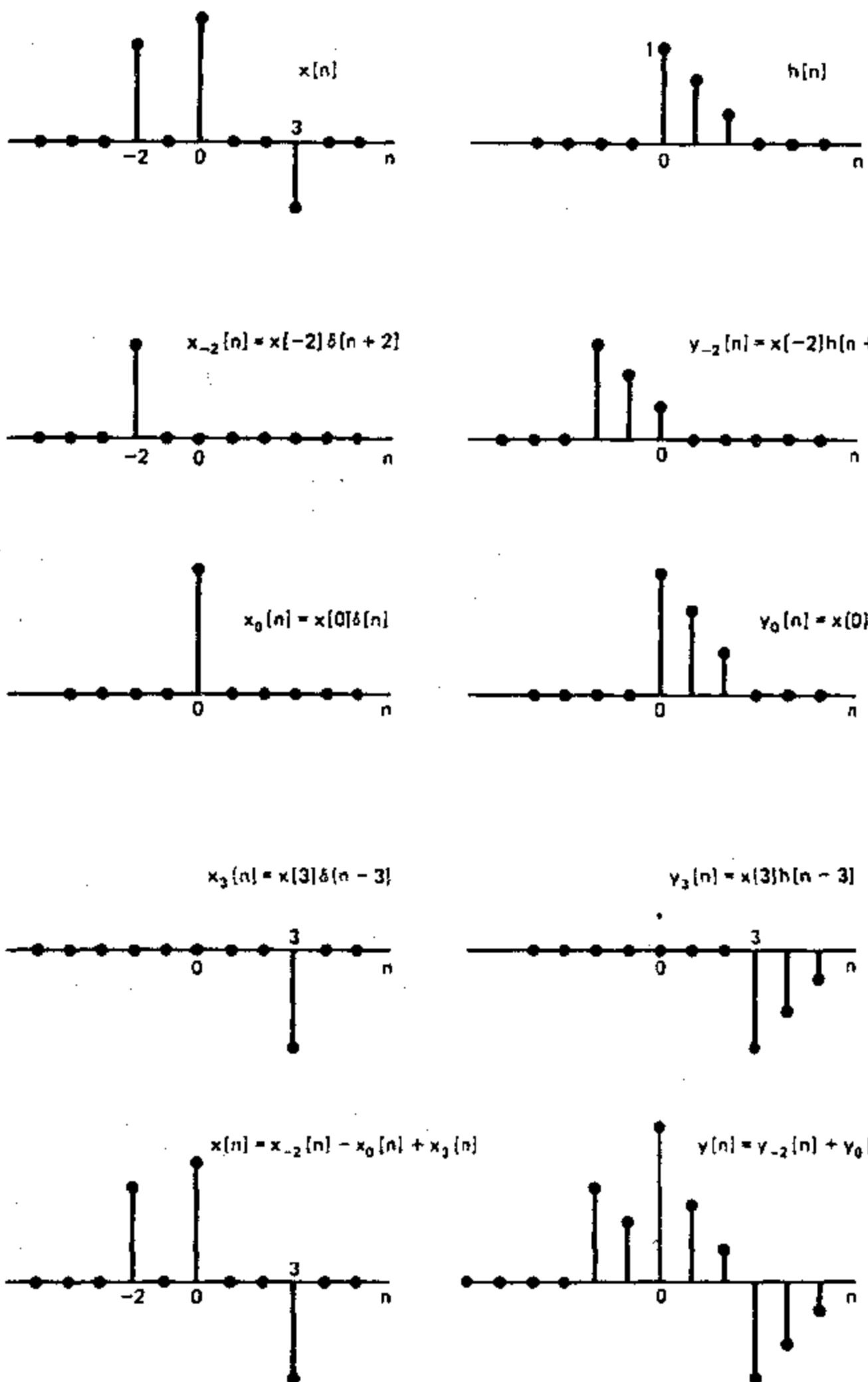


图 2.8 一个线性时不变系统的输出可以表示为对单个输入样本响应的叠加.

关于 $k=0$ 的反转, 如图 2.9(b) 所示. 以 $k-n$ 代替 k (n 为某一固定整数) 就会使序列 $h[-k]$ 的原点移到 $k=n$, 如图 2.9(c) 所示 ($n=4$).

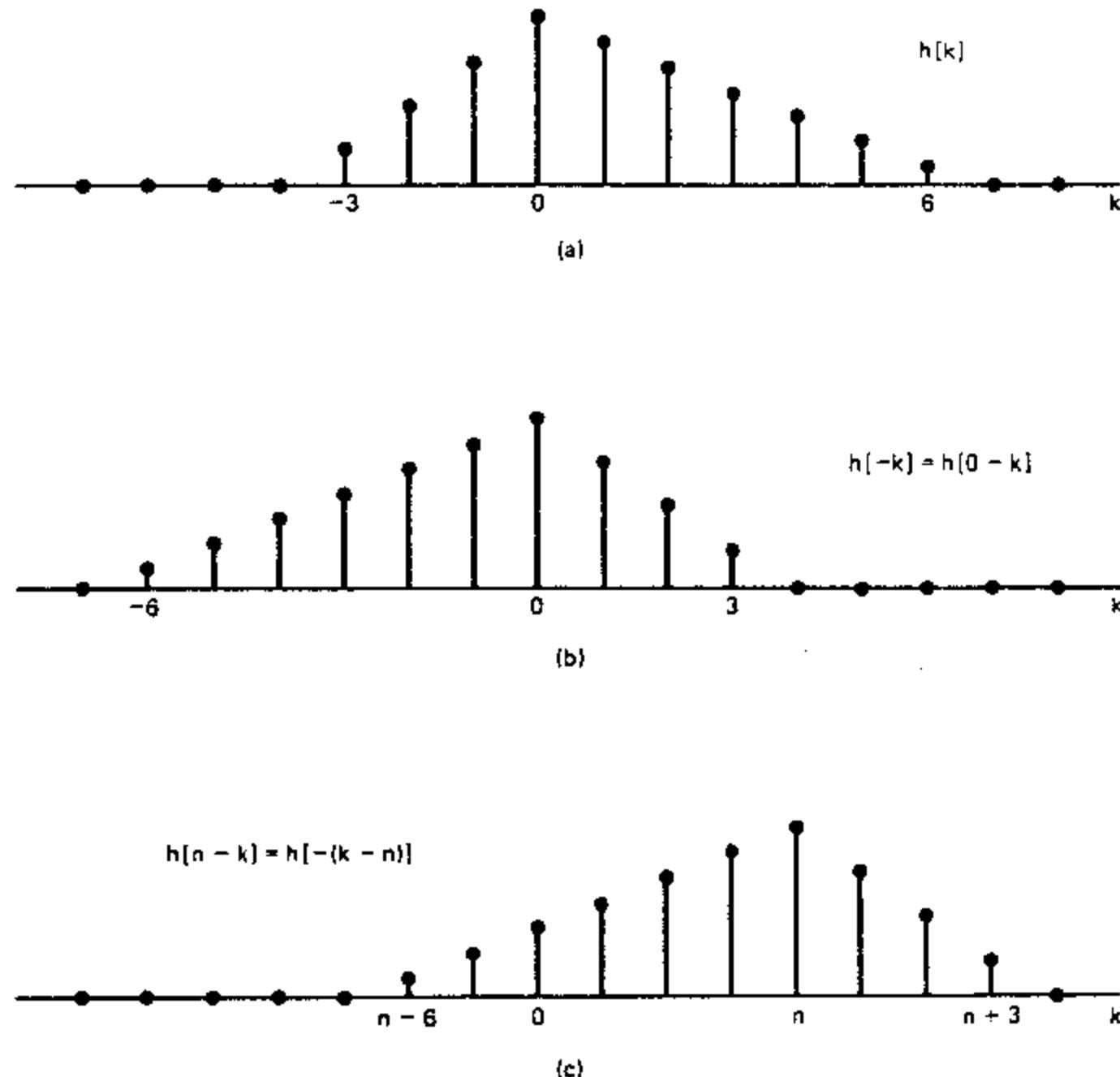


图 2.9 $h[n-k]$ 序列的形成. (a) 序列 $h[k]$ 作为 k 的函数. (b) 序列 $h[-k]$ 作为 k 的函数.
 (c) 当 $n=4$ 时, 序列 $h[n-k]$ 作为 k 的函数.

将例 2.7 更一般化, 显然序列 $h[n-k], -\infty < k < \infty$. 通常可以这样得到:

1. 将 $h[k]$ 关于原点反转求得 $h[-k]$;
2. 将反转序列的原点移至 $k=n$.

为了实现离散时间卷积, 把两个序列 $x[k]$ 和 $h[n-k] (-\infty < k < \infty)$ 相乘, 再将其乘积相加, 就能计算出输出样本 $y[n]$. 为了求出另一个输出样本, 序列 $h[-k]$ 的原点就要移到这个新的样本位置上, 并重复上述过程. 这一计算步骤既能用于采样数据的数值计算, 也能用于其样本值是用一个简单公式表示的序列的解析计算. 下面的例子说明在后一种情况下离散时间卷积的计算.

例 2.8

有一系统, 其冲激响应为

$$h[n] = u[n] - u[n-N] = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq N-1, \\ 0, & \text{其它.} \end{cases}$$

输入是

$$x[n] = a^n u[n].$$

为了求在某一个特定点 n 的输出, 必须形成在全部 k 上乘积 $x[k]h[n-k]$ 的和. 在这种情况下, 对于几组不同的 n 值, 可以求出计算 $y[n]$ 的公式. 例如, 图 2.10(a) 表示当 n 为某一负整数时, 所画出的序列 $x[k]$ 和 $h[n-k]$. 很清楚, 对于全部负的 n 值都得出一个类似的图形; 即序列 $x[k]$ 和 $h[n-k]$ 的非零部分不重叠, 所以

$$y[n] = 0, \quad n < 0.$$

图 2.10(b) 画出了当 $0 \leq n$ 和 $n-N+1 \leq 0$ 时这两个序列的图形. 这两个条件可以合并为一个条件 $0 \leq n \leq N-1$. 从图 2.10(b) 可以看出, 因为

$$x[k]h[n-k] = a^k,$$

则

$$y[n] = \sum_{k=0}^n a^k, \quad \text{对于 } 0 \leq n \leq N-1. \quad (2.42)$$

这个和式的极限可直接由图 2.10(b) 确定. 式(2.42)表明 $y[n]$ 是一个几何级数 $n+1$ 项的和, 级数的公比是 a . 利用一般公式这个和以闭式表示为

$$\sum_{k=N_1}^{N_2} a^k = \frac{a^{N_1} - a^{N_2+1}}{1-a}, \quad N_2 \geq N_1 \quad (2.43)$$

将这个结果用到式(2.42)中, 可得

$$y[n] = \frac{1-a^{n+1}}{1-a}, \quad 0 \leq n \leq N-1. \quad (2.44)$$

最后, 图 2.10(c) 表示出当 $0 < n-N+1$ 或者 $N-1 < n$ 时, 这两个序列的情况. 如前所述

$$x[k]h[n-k] = a^k, \quad n-N+1 < k \leq n,$$

但是现在求和的下限是 $n-N+1$, 如图 2.10(c) 所示. 由此

$$y[n] = \sum_{k=n-N+1}^n a^k, \quad \text{对于 } N-1 < n. \quad (2.45)$$

利用式(2.43)可得

$$y[n] = \frac{a^{n-N+1} - a^{n+1}}{1-a}$$

或者

$$y[n] = a^{n-N+1} \left(\frac{1-a^N}{1-a} \right). \quad (2.46)$$

由于输入和单位样本响应均具有分段指数性质, 我们就能够得到下面将 $y[n]$ 作为 n 的函数的闭式表达式.

$$y[n] = \begin{cases} 0, & n < 0 \\ \frac{1-a^{n+1}}{1-a}, & 0 \leq n \leq N-1 \\ a^{n-N+1} \frac{1-a^N}{1-a}, & N-1 < n, \end{cases} \quad (2.47)$$

这个序列如图 2.10(d) 所示.

例 2.8 说明, 当输入和冲激响应都是由简单式子给出时, 如何解析地计算出这个卷积和. 在这样的情况下, 利用几何级数的求和公式或其它的闭式公式*, 可以将和式求得一个很紧凑的形式. 当不存在简单式子时, 只要和是有限的, 卷积和也能利用例 2.8 的办法用数值方法求出. 如果输入序列或冲激响应其中之一是有限长的, 也就是有限个非零样本值, 和就是有限的, 就属于这种情况. 但我们不能过份强调利用像图 2.10 那种整洁的标注和作图方法来保证准确地定出求和极限的重要性.

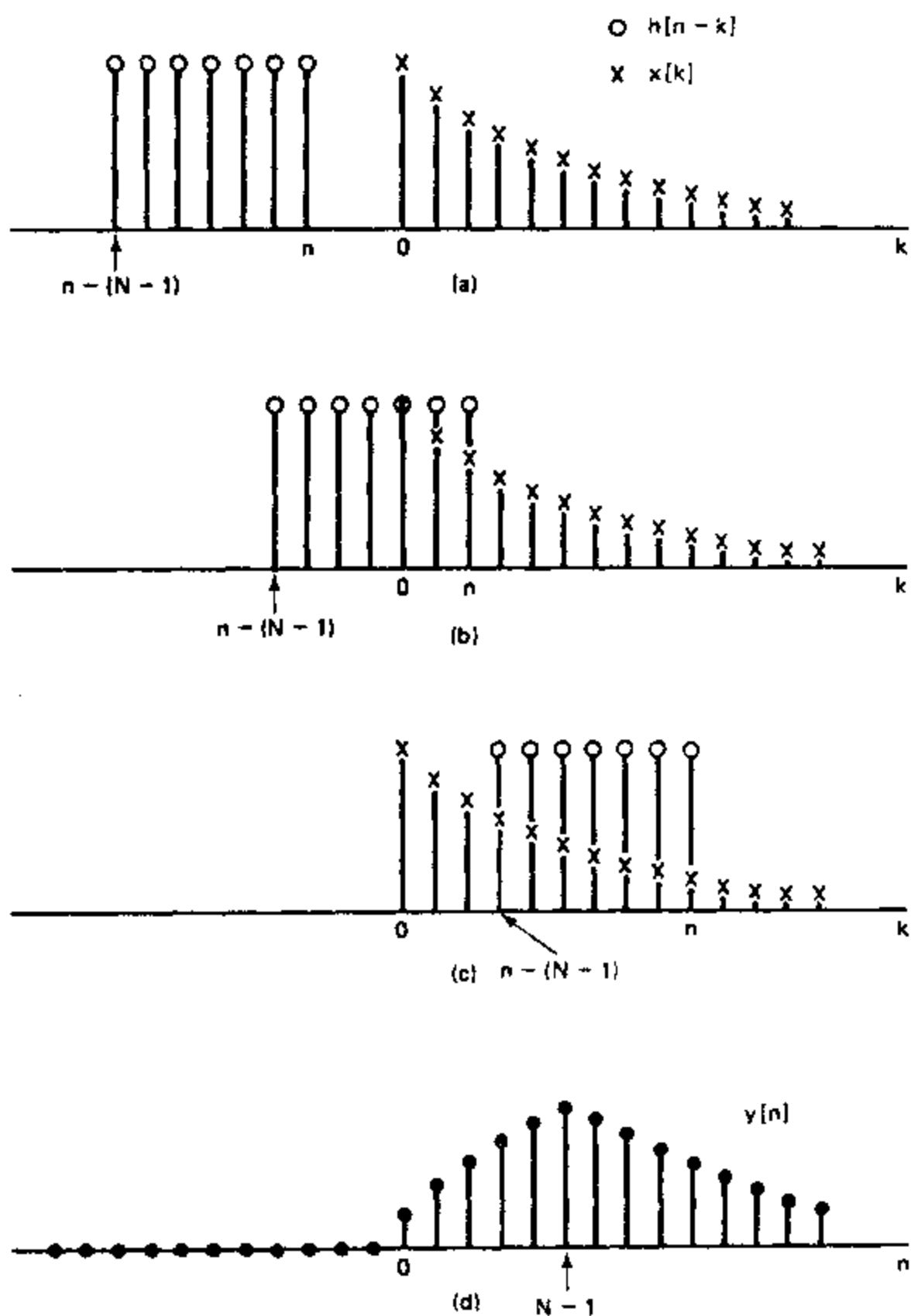


图 2.10 与计算一个离散卷积有关的序列. (a)—(c) 对不同的 n 值, 序列 $x[k]$ 和 $h[n-k]$ 作为 k 的函数. (仅表示出非零的样本值.) (d) 作为 n 的函数的输出序列.

* 例如在 Grossman (1982) 的书中讨论了这样一些结果. 一本很有用的关于求和方面的书见 Jolley (1961).

2.4 线性时不变系统的性质

因为所有的线性时不变系统都是由式(2.39)的卷积和来描述的,所以这类系统的性质就能用离散时间卷积的性质来定义.因此,冲激响应就是某一特定线性时不变系统性质的完全表征.

这类线性时不变系统的某些一般性质可以从卷积运算的性质得出.例如,卷积运算是可以交换的,即

$$x[n] * h[n] = h[n] * x[n]. \quad (2.48)$$

这可将变量置换法用于式(2.39)来证明.具体讲,以 $m = n - k$ 替换,可得

$$y[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[n-m]h[m], \quad (2.49)$$

所以在和式中, $x[n]$ 和 $h[n]$ 的作用是可以互换的.也就是说在卷积中两个序列的先后次序是无关紧要的,因此如果输入和冲激响应的作用颠倒的话,系统的输出是一样的.一个线性时不变系统在输入为 $x[n]$ 和冲激响应为 $h[n]$ 时与输入为 $h[n]$ 和冲激响应为 $x[n]$ 时将有同样的输出.卷积运算也满足分配律,即

$$x[n] * (h_1[n] + h_2[n]) = x[n] * h_1[n] + x[n] * h_2[n].$$

该式可直接由式(2.39)导出.

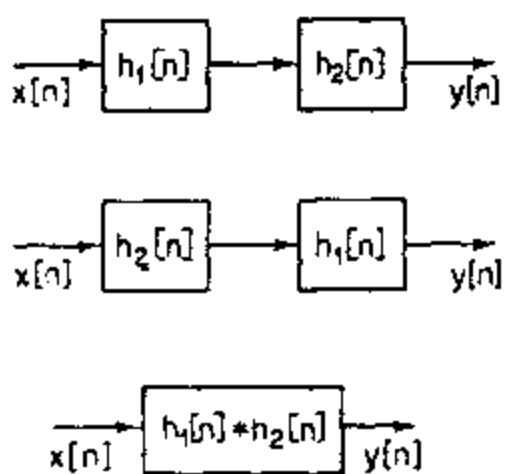


图 2.11 具有同一冲激响应的三种线性时不变系统.

输出(也就是总的系统冲激响应)为

$$h[n] = h_1[n] * h_2[n]. \quad (2.50)$$

由于卷积的可交换性,因此线性时不变系统级联后的冲激响应与级联的次序无关.这一结果归纳在图 2.11 中,图中的三种系统具有同一个冲激响应.

在并联接中,系统有相同的输入,且将它们的输出相加就得到总的输出.由卷积的分配律特性,两个线性时不变系统并联接等效于一个单一的系统,该系统的冲激响应是单个的冲激响应之和,即

$$h[n] = h_1[n] + h_2[n]. \quad (2.51)$$

如图 2.12 所示.

由线性和时不变性的限制条件定义了一类性质很特殊的系统.稳定性和因果性则代表了另外一些性质,而且知道一个线性时不变系统是否是稳定的和因果的往往很重要.回忆一下 2.2.5 节的讨论,认为一个稳定系统就是每一个有界输入均产生一个有界输出

的系统. 当且仅当冲激响应是绝对可加时, 则线性时不变系统才是稳定的, 即

$$S = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| < \infty. \quad (2.52)$$

这一点可以证明如下. 由式(2.49),

$$|y[n]| = \left| \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k] \right| \leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| |x[n-k]|. \quad (2.53)$$

如果 $x[n]$ 是有界的

$$|x[n]| \leq B_x,$$

那么

$$|y[n]| \leq B_x \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]|. \quad (2.54)$$

据此, 如果式(2.52)成立, 则 $y[n]$ 就是有界的; 也就是说式(2.52)是稳定性的充分条件. 为了证明它也是一个必要条件, 就必须证明如果 $S = \infty$, 那么能找到一个有界的输入使之产生一个无界的输出. 这样的输入就是其值为下式的序列:

$$x[n] = \begin{cases} \frac{h^*[n]}{|h[n]|}, & h[n] \neq 0, \\ 0, & h[n] = 0, \end{cases} \quad (2.55)$$

式中 $h^*[n]$ 是 $h[n]$ 的复共轭. 显然序列 $x[n]$ 的界为 1. 然而在 $n=0$ 时输出值是

$$y[0] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[-k]h[k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{|h[k]|^2}{|h[k]|} = S. \quad (2.56)$$

因此, 如果 $S = \infty$, 就可能由一个有界的输入序列产生一个无界的输出序列.

在 2.2.4 节中所定义的因果系统就是其输出 $y[n_0]$ 仅仅与 $n \leq n_0$ 时的输入样本有关的系统. 由式(2.39)或式(2.49)可以得出, 这个定义就意味着对线性时不变系统的因果性, 下述条件成立(见习题 2.12):

$$h[n] = 0, \quad n < 0, \quad (2.57)$$

正由于这个原因, 有时也将 $n < 0$ 时其值为零的序列称为因果序列, 它也说明因果序列可以作为因果系统的冲激响应.

为了说明线性时不变系统的性质是如何在它的冲激响应中得到反映, 让我们重新考虑一下在例 2.1—2.6 中所定义过的某些系统. 首先注意到仅仅例 2.1, 2.2, 2.4 和 2.6 的这些系统是线性的和时不变的. 虽然非线性或时变系统的冲激响应也能求出, 但是由于卷积的公式以及表示稳定性和因果性的式(2.52)与式(2.57)都不能用于这样一类系统, 所以一般来说人们对它并不十分感兴趣.

首先我们求出例 2.1, 2.2, 2.4 和 2.6 等系统的冲激响应, 也就是利用系统的确定关系式计算出每个系统对 $\delta[n]$ 的响应. 所求出的各种冲激响应如下:

理想延迟(例 2.1)

$$h[n] = \delta[n - n_d], \quad n_d \text{ 为某一固定整数} \quad (2.58)$$

滑动平均(例 2.2)

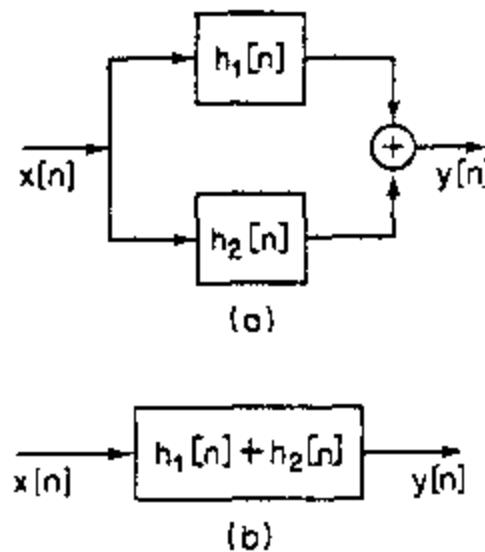


图 2.12 (a)线性时不变系统的并联连接.
(b)等效系统.

$$h[n] = \frac{1}{M_1 + M_2 + 1} \sum_{k=-M_1}^{M_2} \delta[n-k]$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{M_1 + M_2 + 1}, & -M_1 \leq n \leq M_2 \\ 0, & \text{其它} \end{cases} \quad (2.59)$$

累加器(例 2.4)

$$h[n] = \sum_{k=-\infty}^n \delta[k]$$

$$= \begin{cases} 1, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases}$$

$$= u[n] \quad (2.60)$$

前向差分(例 2.6)

$$h[n] = \delta[n+1] - \delta[n] \quad (2.61)$$

后向差分(例 2.6)

$$h[n] = \delta[n] - \delta[n-1] \quad (2.62)$$

其次用计算冲激响应的绝对和

$$S = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]|$$

来检查每个系统的稳定性. 对于理想延迟、滑动平均、前向差分和后向差分等例子, 显然 $S < \infty$, 因为这些冲激响应都只有有限个非零样本. 这样的系统称为有限长冲激响应(FIR) 系统. 很明显, 只要冲激响应的每一个值在幅度上是有限的, FIR 系统总是稳定的. 然而, 累加器是不稳定的, 因为

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} u[n] = \infty.$$

在 2.2.5 节中通过一个有界的输入(单位阶跃), 得到一个无界的输出例子也说明过累加器的不稳定性.

累加器的冲激响应是无限长的. 这就是一类称之为无限长冲激响应(IIR) 系统的一个例子. 冲激响应 $h[n] = a^n u[n]$, $|a| < 1$ 就是 IIR 系统为稳定系统的一个例子. 这时,

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} |a|^n. \quad (2.63)$$

如果 $|a| < 1$, 由无限项几何级数求和公式给出

$$S = \frac{1}{1 - |a|} < \infty. \quad (2.64)$$

另一方面, 如果 $|a| \geq 1$, 求和就是无限的, 则系统不稳定.

为了检验例 2.1, 2.2, 2.4 和 2.6 等线性时不变系统的因果性, 可以校验一下, 当 $n < 0$ 时, 是否有 $h[n] = 0$. 正如在 2.2.4 节讨论过的, 理想延迟(式(2.22)中 $n_d \geq 0$)是因果的. 如果 $n_d < 0$, 则系统是非因果的. 对于滑动平均来说, 因果性要求 $-M_1 \geq 0$ 和 $M_2 \geq 0$. 累加器和后向差分系统是因果的, 而前向差分系统是非因果的.

卷积性质可以用于描述和分析线性时不变系统之间的互联. 考虑一下图 2.13(a) 的系统, 它由一个前向差分系统与一个理想延迟(延迟一个样本)级联而成. 根据卷积的可交

换性,只要系统是线性的和时不变的,则系统在级联中的次序是无关紧要的。因此,当我们计算一个序列的前向差分并延迟这个结果(图 2.13(a)),和先延迟这个序列再计算前向差分(图 2.13(b)),两者应得到同样结果。同时,由式(2.50)可得每一个级联系统总的冲激响应是单个冲激响应的卷积。因此

$$\begin{aligned} h[n] &= (\delta[n+1] - \delta[n]) * \delta[n-1] \\ &= \delta[n-1] * (\delta[n+1] - \delta[n]) \\ &= \delta[n] - \delta[n-1]. \end{aligned} \quad (2.65)$$

这样, $h[n]$ 与后向差分系统的冲激响应是一致的,也就是说图 2.13(a)和图 2.13(b)的级联系统都能被一个等效的后向差分系统所代替,如图 2.13(c)所示。

应该注意到,在图 2.13(a)和(b)中的非因果前向差分系统通过级联一个延迟系统就能把它转换成因果系统。一般来说,任何非因果的 FIR 系统都能够成为因果的,只要与它级联一个足够长的延迟就行了。

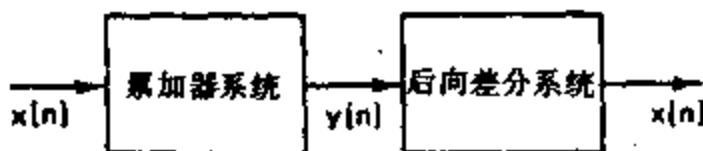


图 2.14 累加器与一个后向差分级联。因为后向差分是该累加器的逆系统,所以级联后就等效为一个恒等系统。

也就是说,一个累加器紧跟着一个后向差分(反之亦然)的级联联接就产生一个系统,该系统的冲激响应是一个冲激。因为 $x[n] * \delta[n] = x[n]$, 所以该级联系统的输出总是等于它的输入。在这种情况下,后向差分系统完全补偿(或反演)了累加器的效果,即后向差分系统是累加器的逆系统。根据卷积的可交换性,累加器也同样是后向差分系统的逆系统。应注意到,这个例子给出了式(2.8)和式(2.10)的一个系统解释。一般来说,如果一个线性时不变系统的冲激响应为 $h[n]$,那么它的逆系统(如果存在)的冲激响应 $h_i[n]$ 就应满足如下关系:

$$h[n] * h_i[n] = h_i[n] * h[n] = \delta[n]. \quad (2.67)$$

在需要补偿一个线性系统某些影响的场合,逆系统是很有用的。通常给定 $h[n]$ 时直接由式(2.67)解出 $h_i[n]$ 是困难的。然而,在第五章将会看到,傅里叶变换和更为一般的 z 变换将给出求逆系统的一种直接的方法。

2.5 线性常系数差分方程

线性时不变系统中的一种重要的子系统是由这样一些系统组成,这些系统的输入 $x[n]$ 和输出 $y[n]$ 满足 N 阶线性常系数差分方程,形式为

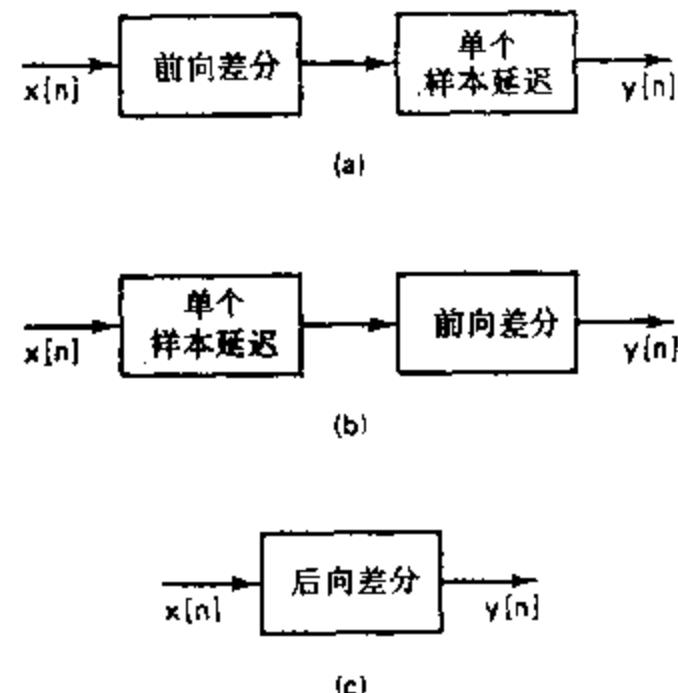


图 2.13 利用卷积的可交换性求等效系统。

级联系统的另一个例子引入了逆系统的概念。考虑一下图 2.14 中系统的级联。该级联系统的冲激响应是

$$\begin{aligned} h[n] &= u[n] * (\delta[n] - \delta[n-1]) \\ &= u[n] - u[n-1] \\ &= \delta[n]. \end{aligned} \quad (2.66)$$

$$\sum_{k=0}^N a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^M b_k x[n-k]. \quad (2.68)$$

在 2.4 节所讨论过的性质,以及所引入的某些分析方法都可以用来求出已经定义过的某些线性时不变系统的差分方程表达式.

例 2.9

作为该类线性常系数差分方程的一个例子是累加器(例 2.4).为了说明它的输入和输出满足这样一种差分方程,再次考虑一下图 2.14.如果 $y[n]$ 代表累加器的输出,那么已经看到 $y[n]$ 的后向差分就等于 $x[n]$,因为后向差分系统就是该累加器的逆系统,即

$$y[n] - y[n-1] = x[n]. \quad (2.69)$$

由此可见,除了式(2.28)所确定的关系外(这是一种卷积的形式),输入和输出也满足形式如式(2.68)的线性常系数差分方程,其中 $N=1, a_0=1, a_1=-1, M=0$ 和 $b_0=1$.

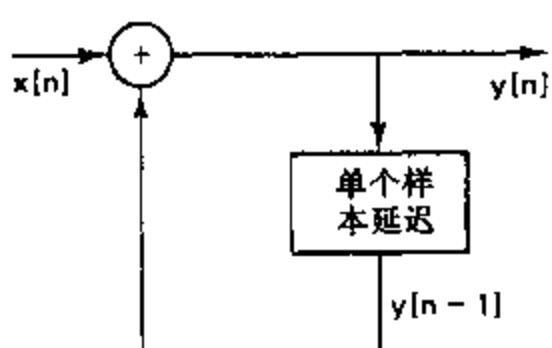


图 2.15 用递推差分方程表示一个累加器的方框图.

式(2.69)的差分方程作为累加器的一种表示,最好的理解是把它重新写作

$$y[n] = y[n-1] + x[n]. \quad (2.70)$$

按照式(2.70),对每一个 n 值,把当前的输入 $x[n]$ 加到以前的累加器和 $y[n-1]$ 上去. 累加器的这种解释可用图 2.15 的方框图来表示. 式(2.70)和图 2.15 的方框图称为系统的递推表示,因为每一个值的计算都要用到前面已计算出的值. 本节稍后部分将更详细地阐明这一概念.

例 2.10

考虑一下例 2.2 的滑动平均系统,取 $M_1=0$,则系统是因果的.在这种情况下由式(2.59),系统冲激响应是

$$h[n] = \frac{1}{(M_2+1)}(u[n] - u[n-M_2-1]), \quad (2.71)$$

由此可得

$$y[n] = \frac{1}{(M_2+1)} \sum_{k=0}^{M_2} x[n-k], \quad (2.72)$$

这是式(2.68)的一种特殊情况,其中 $N=0, a_0=1$ 和 $b_k=1/(M_2+1), 0 \leq k \leq M_2$. 冲激响应也能够表示为

$$h[n] = \frac{1}{(M_2+1)}(\delta[n] - \delta[n-M_2-1]) * u[n], \quad (2.73)$$

它提示我们,这个因果滑动平均系统可以表示成图 2.16 那样的级联系统.为了求出该方框图的差分方程,可以首先求 $x_1[n]$,

$$x_1[n] = \frac{1}{(M_2+1)}(x[n] - x[n-M_2-1]). \quad (2.74)$$

由例 2.9 的式(2.69),累加器的输出满足差分方程

$$y[n] - y[n-1] = x_1[n]$$

因此可得

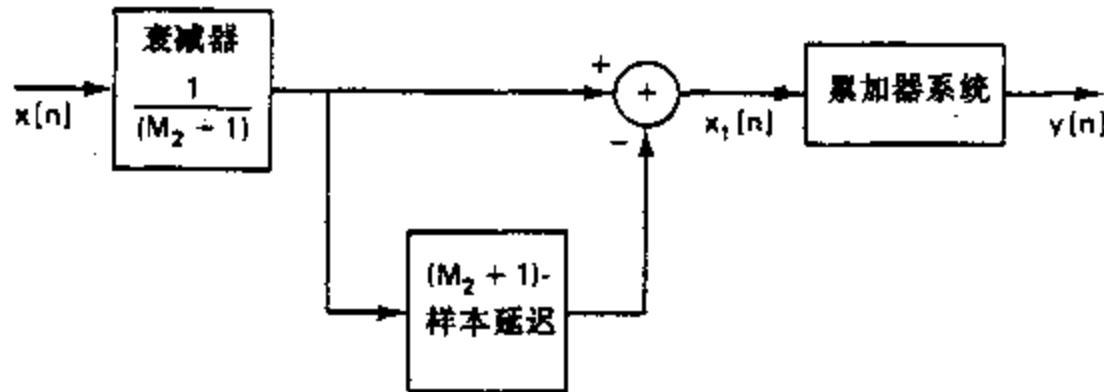


图 2.16 滑动平均系统的递推形式方框图.

$$y[n] - y[n-1] = \frac{1}{(M_2+1)}(x[n] - x[n-M_2-1]). \quad (2.75)$$

我们又一次得到了一个形式如式(2.68)的差分方程,但此时 $N=1$, $a_0=1$, $a_1=-1$ 和 $b_0=-b_{M_2+1}=1/(M_2+1)$,而其余的 $b_k=0$.

很有趣,滑动平均系统用差分方程来表示有着几种不同的形式.在第六章将会看到,可用无数不同的差分方程来表示一个给定的线性时不变的输入/输出关系.

如同连续时间系统的线性常系数微分方程那样,离散时间系统的线性常系数差分方程若不给出附加的限制或信息,是不能给出对给定输入情况下输出的唯一表述的.具体讲,假设对某一给定的输入 $x_p[n]$,我们已经依据某种方法确定了输出序列 $y_p[n]$,以满足式(2.68)的方程,那么在同一输入下,同一方程也能被任何一种具有如下形式的输出所满足:

$$y[n] = y_p[n] + y_h[n], \quad (2.76)$$

式中 $y_h[n]$ 是式(2.68)当 $x[n]=0$ 时的任意解,即下列方程的解:

$$\sum_{k=0}^N a_k y_h[n-k] = 0. \quad (2.77)$$

式(2.77)称为齐次方程,而 $y_h[n]$ 称为齐次解.序列 $y_h[n]$ 事实上是如下方程的一簇解

$$y_h[n] = \sum_{m=1}^N A_m z_m^n. \quad (2.78)$$

将式(2.78)代入式(2.77),可以证明复数 z_m 一定是下面多项式的根:

$$\sum_{k=0}^N a_k z^{-k} = 0. \quad (2.79)$$

式(2.78)假设在式(2.79)中的多项式的全部 N 个根都是互不相同的.有关重根项的形式稍许有些不同,但总是有 N 个待定的系数.含有重根的齐次解的例子在习题 2.13 中给出.

因为 $y_h[n]$ 有 N 个待定的系数,因此对于某一给定的输入来说,为了能唯一描述 $y[n]$ 就需要一组 N 个辅助条件.这些辅助条件可以由一些特定的 n 点上的特定 $y[n]$ 值组成,诸如 $y[-1], y[-2], \dots, y[-N]$,然后解一组 N 个线性方程来求得 N 个待定系数.

另外如果辅助条件由 $y[n]$ 的一组辅助值构成,则其余的 $y[n]$ 值可将式(2.68)重新写成一种递推公式来一一求出,也就是

$$y[n] = - \sum_{k=1}^N \frac{a_k}{a_0} y[n-k] + \sum_{k=0}^M \frac{b_k}{a_0} x[n-k], \quad (2.80)$$

如果输入 $x[n]$ 与一组辅助值, 比如 $y[-1], y[-2], \dots, y[-N]$ 都给定的话, 那么 $y[0]$ 就可由式(2.80)求出. 有了 $y[0], y[-1], \dots, y[-N+1]$, 则 $y[1]$ 又可以求出, 依次类推下去. 在这一过程中, $y[n]$ 是递推地计算出来的; 也就是说, 输出的计算不仅涉及到输入序列, 而且也与输出序列以前的值有关.

为了产生当 $n < -N$ 时 $y[n]$ 的值(仍假设给出的辅助条件为 $y[-1], y[-2], \dots, y[-N]$ 值), 将式(2.68)重新整理写成

$$y[n-N] = - \sum_{k=0}^{N-1} \frac{a_k}{a_N} y[n-k] + \sum_{k=0}^M \frac{b_k}{a_N} x[n-k], \quad (2.81)$$

由上式, $y[-N-1], y[-N-2], \dots$, 就能依次递推地计算出来. 下面的例子就说明这一递推过程.

例 2.11

一个系统的输入和输出满足下述差分方程:

$$y[n] = ay[n-1] + x[n]. \quad (2.82)$$

设输入 $x[n] = K\delta[n]$, 这里 K 为任意数, 辅助条件 $y[-1] = c$. 由这个值开始, 对 $n > -1$ 的输出可按如下步骤递推地计算:

$$\begin{aligned} y[0] &= ac + K, \\ y[1] &= ay[0] + 0 \\ &= a(ac + K) = a^2c + aK, \\ y[2] &= a(a^2c + aK) = a^3c + a^2K, \\ y[3] &= a(a^3c + a^2K) = a^4c + a^3K, \\ &\vdots \quad \vdots \end{aligned}$$

对于这一简单情况, 可见对 $n \geq 0, y[n]$ 为

$$y[n] = a^{n+1}c + a^nK \quad \text{对 } n \geq 0. \quad (2.83)$$

为了确定 $n < 0$ 时的输出, 把差分方程表示成

$$y[n-1] = a^{-1}(y[n] - x[n]), \quad (2.84a)$$

或

$$y[n] = a^{-1}(y[n+1] - x[n+1]). \quad (2.84b)$$

利用辅助条件 $y[-1] = c$, 对 $n < -1$ 的 $y[n]$ 值计算如下:

$$\begin{aligned} y[-2] &= a^{-1}((y[-1] - x[-1])) \\ &= a^{-1}c, \\ y[-3] &= a^{-1}a^{-1}c = a^{-2}c, \\ y[-4] &= a^{-1}a^{-2}c = a^{-3}c. \end{aligned}$$

很明显

$$y[n] = a^{n+1}c \quad \text{对 } n \leq -1. \quad (2.85)$$

将式(2.83)与式(2.85)结合起来, 就得出递推计算的结果为

$$y[n] = a^{n+1}c + Ka^n u[n] \quad \text{对全部 } n \quad (2.86)$$

在解例 2.11 中, 要说明几点重要之处. 首先注意到从 $n = -1$ 开始, 在正、负两个方向

用递推计算输出的方法实现了这个系统。显然，这个过程是非因果的。同时也注意到，当 $K=0$ 时，输入为零，而 $y[n] = a^{n+1}c$ 。一个线性系统要求当全部时间内输入为零时，全部时间内的输出也均为零（见习题 2.1）。因此，这个系统不是线性的。再者，如果输入有 n_0 个样本的移位，即 $x_1[n] = K\delta[n-n_0]$ ，输出应为

$$y_1[n] = a^{n+1}c + Ka^{n-n_0}u[n-n_0]. \quad (2.87)$$

因此，该系统也不是时不变的。

本书在总体上主要关心的是线性时不变系统，在这种情况下这些辅助条件必须要与这些附加要求相一致。在第四章当我们利用 z 变换讨论差分方程的解时，无疑地要结合线性和时不变的条件。正如我们在那里讨论中将会看到的，即使具有线性和时不变的附加限制，差分方程的解，为此该系统也不是唯一确定的。特别是，一般既存在因果的又存在非因果的线性时不变系统与一个给定的差分方程是一致的。

如果一个系统是由一个线性常系数差分方程所表征的，并且进一步而限定是线性、时不变和因果的，那么它的解就是唯一的。在这种情况下，辅助条件就往往说成是初始松弛条件。换言之，辅助信息就是：如果输入 $x[n]$ 在 n 小于某个 n_0 时为零，那么在 n 小于 n_0 时输出 $y[n]$ 就一定要限制到零。这样就为 $n \geq n_0$ 时利用式(2.80)递推地求出 $y[n]$ 提供了足够的初始条件。

总之，对于一个系统，其输入和输出若满足一个线性常系数差分方程的话，则

- 对于一个给定的输入，其输出不是唯一的，需要一些辅助信息或条件。
- 如果辅助信息是以 N 个顺序输出值的形式给出，则后面的值可以将差分方程重新安排成以 n 的前向运算的递推关系来求出；前面的值可以将差分方程安排成以 n 的后向运算的递推关系来求出。
- 系统的线性、时不变性和因果性将依赖于辅助条件。如果一个附加条件是使系统初始松弛的，则该系统就是线性、时不变和因果的。

按照以上的讨论，现在重新研究一下例 2.11 在初始松弛条件下的结果。取 $x[n] = K\delta[n]$ ，因为 $n < 0, x[n] = 0$ ，则 $y[-1] = 0$ 。因此由式(2.86)

$$y[n] = Ka^n u[n]. \quad (2.88)$$

如果输入替换为 $K\delta[n-n_0]$ ，仍具有初始松弛条件，那么递推解就要利用初始条件 $y[n] = 0, n < n_0$ 来完成。应当注意到，对 $n_0 < 0$ ，初始松弛意味着 $y[-1] \neq 0$ 。这就是说，初始松弛不总是指 $y[-1] = \dots = y[-N] = 0$ ；如果对于 $n < n_0, x[n] = 0$ ，它就意味着 $y[n_0-1] = \dots = y[n_0-N] = 0$ 。同时还应注意这个例子的冲激响应是 $h[n] = a^n u[n]$ ，即对 $n < 0$ ， $y[n]$ 是零。这一点与初始松弛假设所施加的因果性是一致的。

以上讨论都假设式(2.68)中 $N \geq 1$ 。如果 $N = 0$ ，就不需要递推而用差分方程来计算出，因此也不要求任何辅助条件。这就是

$$y[n] = \sum_{k=0}^M \left(\frac{b_k}{a_0} \right) x[n-k]. \quad (2.89)$$

式(2.89)是一种卷积形式，将 $x[n] = \delta[n]$ ，其冲激响应为

$$h[n] = \sum_{k=0}^M \left(\frac{b_k}{a_0} \right) \delta[n-k],$$

或

$$h[n] = \begin{cases} \left\{ \frac{b_n}{a_0} \right\}, & 0 \leq n \leq M, \\ 0, & \text{其它.} \end{cases} \quad (2.90)$$

显然,这个冲激响应是有限长的.的确,任何 FIR 系统的输出都能用式(2.89)的差分方程非递推地计算出来,且式中的系数就是冲激响应序列的值.例 2.10 的滑动平均系统,当 $M_1=0$ 时就是因果 FIR 系统的一个例子.这种系统的一个有趣的特点是,我们也能为其输出找到一种递推方程.在第六章将证明利用差分方程来实现一种所要求的信号变换时存在着许多可能的方式.但是,一种方法优于另一种方法取决于一些实际的考虑,如像数值准确度,数据存贮,以及计算每一个输出样本时所要求的乘法和加法的次数等等.

2.6 离散时间信号与系统的频域表示

在前面的几节中已经介绍了离散时间信号与系统理论中的某些基本概念.对于线性时不变系统我们看到:将输入序列表示成一组幅度加权的延迟冲激和,就得出输出也能表示成一组幅度加权的延迟响应的和.与连续时间信号一样,离散时间信号也可以用几种不同的方式来表示.例如,正弦和复指数序列在离散时间信号表示中就起着特别重要的作用.这是因为复指数序列是线性时不变系统的特征函数,以及该系统对正弦输入的响应还是正弦的,且具有与输入相同的频率,其幅度和相位则由系统决定.线性时不变系统的这一基本性质使得利用正弦或复指数来表示信号(即傅里叶表示)在线性系统理论中是非常有用的.

为了说明复指数是离散时间系统的特征函数性质,现考虑一输入序列 $x[n]=e^{j\omega n}$, $-\infty < n < \infty$,也即一个角频率为 ω 的复指数序列.由式(2.49),冲激响应为 $h[n]$ 的线性时不变系统的相应输出就是

$$\begin{aligned} y[n] &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] e^{j\omega(n-k)} \\ &= e^{j\omega n} \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] e^{-j\omega k} \right). \end{aligned} \quad (2.91)$$

若定义

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] e^{-j\omega k}, \quad (2.92)$$

式(2.91)就变成

$$y[n] = H(e^{j\omega}) e^{j\omega n}. \quad (2.93)$$

因此, $e^{j\omega}$ 是该系统的特征函数,相应的特征值为 $H(e^{j\omega})$.从式(2.93)可见, $H(e^{j\omega})$ 给出了复指数在复振幅上的变化是频率 ω 的函数.特征值 $H(e^{j\omega})$ 称为系统的频率响应.一般 $H(e^{j\omega})$ 是复数,可用它的实部和虚部表示为

$$H(e^{j\omega}) = H_R(e^{j\omega}) + jH_I(e^{j\omega}) \quad (2.94)$$

或者用幅度和相位表示为

$$H(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})| e^{j\angle H(e^{j\omega})}. \quad (2.95)$$

例 2.12

作为一个如何求出一个线性时不变系统的频率响应的简单例子,现考虑由下式定

义的理想延迟系统

$$y[n] = x[n - n_d], \quad (2.96)$$

式中 n_d 是固定整数. 若考虑 $x[n] = e^{j\omega n}$ 作为该系统的输入, 则由式(2.96)就有

$$y[n] = e^{j\omega(n-n_d)} = e^{-jn_d\omega}e^{j\omega n}.$$

因此, 对任意给定的 ω 值, 所得到的输出就是输入乘以复常数, 该复常数的值决定于 ω . 因此这个理想延迟系统的频率响应就是

$$H(e^{j\omega}) = e^{-jn_d\omega}. \quad (2.97)$$

作为求频率响应的另一种方法, 回想一下该理想延迟系统的 $h[n] = \delta[n - n_d]$, 利用式(2.92)可得

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta[n - n_d] e^{-jn\omega} = e^{-jn_d\omega}.$$

利用欧拉关系, 频率响应的实部和虚部就是

$$H_R(e^{j\omega}) = \cos \omega n_d, \quad (2.98a)$$

$$H_I(e^{j\omega}) = -\sin \omega n_d. \quad (2.98b)$$

其幅度和相位是

$$|H(e^{j\omega})| = 1, \quad (2.99a)$$

$$\angle H(e^{j\omega}) = -\omega n_d. \quad (2.99b)$$

在 2.7 节将证明, 相当广泛的一类信号都能表示成如下形式的复指数的线性组合

$$x[n] = \sum_k a_k e^{j\omega_k n}. \quad (2.100)$$

根据叠加原理, 一个线性时不变系统的相应输出就是

$$y[n] = \sum_k a_k H(e^{j\omega_k}) e^{j\omega_k n}. \quad (2.101)$$

据此, 倘若能找到将 $x[n]$ 表示为式(2.100)的复指数序列叠加的形式, 那么已知系统频率响应就能利用式(2.101)求得系统输出. 下面这个简单的例子用来说说明线性时不变系统的这一基本性质.

例 2.13

因为将一个正弦序列表示为复指数的线性组合是很简单的, 所以让我们考虑一个正弦输入

$$x[n] = A \cos(\omega_0 n + \phi) = \frac{A}{2} e^{j\phi} e^{j\omega_0 n} + \frac{A}{2} e^{-j\phi} e^{-j\omega_0 n}. \quad (2.102)$$

由式(2.93), 对 $x_1[n] = (A/2)e^{j\phi}e^{j\omega_0 n}$ 的响应是

$$y_1[n] = H(e^{j\omega_0}) \frac{A}{2} e^{j\phi} e^{j\omega_0 n}. \quad (2.103a)$$

对 $x_2[n] = (A/2)e^{-j\phi}e^{-j\omega_0 n}$ 的响应是

$$y_2[n] = H(e^{-j\omega_0}) \frac{A}{2} e^{-j\phi} e^{-j\omega_0 n}. \quad (2.103b)$$

因此总的响应就是

$$y[n] = \frac{A}{2} [H(e^{j\omega_0}) e^{j\phi} e^{j\omega_0 n} + H(e^{-j\omega_0}) e^{-j\phi} e^{-j\omega_0 n}]. \quad (2.104)$$

如果 $h[n]$ 为实, 就有 $H(e^{j\omega_0}) = H^*(e^{j\omega_0})$ (见习题 2.26), 结果

$$y[n] = A |H(e^{j\omega_0})| \cos(\omega_0 n + \phi + \theta), \quad (2.105)$$

式中 $\theta = \angle H(e^{j\omega_0})$ 是在频率 ω_0 处系统的相位.

对于理想延迟这种简单的例子, 就如同在例 2.12 中所求得的, $|H(e^{j\omega_0})| = 1$, 因此,

$$\begin{aligned} y[n] &= A \cos(\omega_0 n + \phi - \omega_0 n_d) \\ &= A \cos[\omega_0(n - n_d) + \phi], \end{aligned} \quad (2.106)$$

这与直接利用理想延迟系统的定义所得到的结果是一致的.

线性时不变系统频率响应的概念对连续时间系统和离散时间系统基本上是相同的. 然而, 一个重要的不同点是离散时间线性时不变系统的频率响应总是频率 ω 的周期函数, 且周期为 2π . 为了证明这一点, 将 $\omega + 2\pi$ 代入式(2.92)可得

$$H[e^{j(\omega+2\pi)}] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n] e^{-j(\omega+2\pi)n}. \quad (2.107)$$

由于 n 为整数, $e^{\pm j2\pi n} = 1$, 则

$$e^{-j(\omega+2\pi)n} = e^{-j\omega n} e^{-j2\pi n} = e^{-j\omega n}.$$

由此可见

$$H(e^{j(\omega+2\pi)}) = H(e^{j\omega}) \quad (2.108)$$

更为一般的情况是

$$H(e^{j(\omega+2\pi)r}) = H(e^{j\omega}) \quad r \text{ 为某一整数}, \quad (2.109)$$

即, $H(e^{j\omega})$ 是周期的, 周期为 2π . 这一点对理想延迟系统来说显然是符合的, 因为当 n_d 为整数时, $e^{-j(\omega+2\pi)n_d} = e^{-j\omega n_d}$.

这一周期性的原因直接与我们早先所注意到的事实有关, 即序列

$$\{e^{j\omega n}\}, \quad -\infty < n < \infty,$$

与序列

$$\{e^{j(\omega+2\pi)n}\}, \quad -\infty < n < \infty$$

是不可区分的. 因为这两个序列对所有的 n 值都是一样的, 所以系统对这两个输入序列的响应也必须是一样的, 这就要求式(2.108)成立.

因为 $H(e^{j\omega})$ 是周期的, 周期为 2π , 并且频率 ω 和 $\omega + 2\pi$ 又不能区分开, 那我们只需要在长为 2π 的区间内, 即 $0 \leq \omega < 2\pi$ 或 $-\pi < \omega \leq \pi$ 内标出 $H(e^{j\omega})$ 就够了. 固有的周期性就确定了在这个区间以外各处的频率响应. 为了简单起见并为了与连续时间情况一致, 一般在区间 $-\pi < \omega \leq \pi$ 内给出 $H(e^{j\omega})$ 特性. 相对于这一区间, “低频”就在靠近于零处的频率, 而“高频”就是在靠近于 $\pm\pi$ 的频率. 由于相差 2π 整数倍的那些是无法辨别开的, 所以可将以上一般陈述为: “低频”就是靠近于 π 偶数倍的那些频率; “高频”就是靠近于 π 奇数倍的那些频率, 这与早先在 2.1 节中的讨论是一致的.

例 2.14

一类重要的线性时不变系统是其频率响应在某一频率范围内是 1, 而在其余的频率上都是零的系统. 这些就相当于理想频率选择性滤波器. 为了与前面的讨论一致, 一个理想低通滤波器的频率响应就如图 2.17(a)所示. 由于离散时间频率响应固有的周

期性,在围绕 $\omega=2\pi$ 与围绕 $\omega=0$ 的这些频率是不能区分开的,频率响应就表示为一个
多频带滤波器.然而事实上,频率响应仅仅通过低频部分而阻隔掉高频部分.因为频率
响应是完全由在区间 $-\pi < \omega < \pi$ 内的特性所确定的,那么理想低通滤波器频率响应更
典型地就仅在区间 $-\pi < \omega < \pi$ 内给出,如图 2.17(b) 所示.理想高通、带阻和带通滤波
器分别如图 2.18(a),(b) 和(c) 所示.

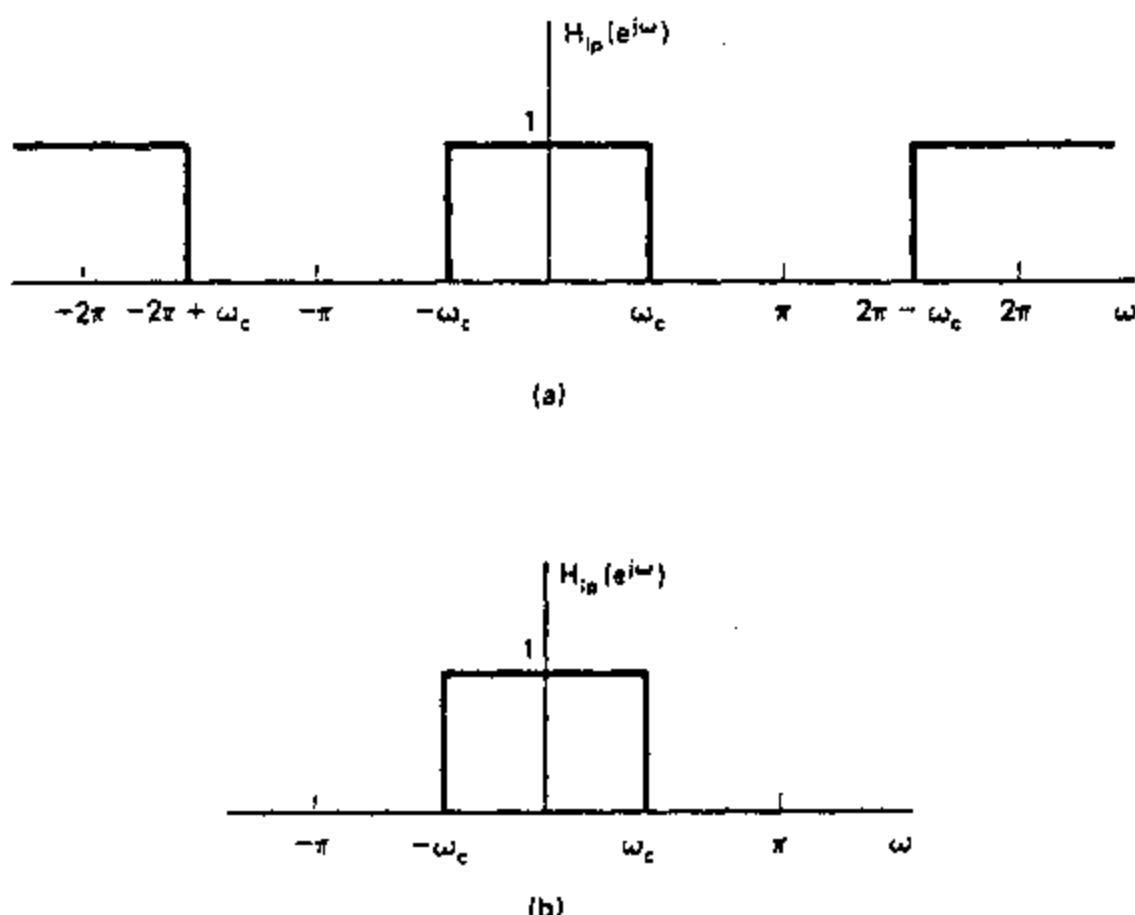


图 2.17 理想低通滤波器,(a) 频率响应周期性,(b) 一个周期内的频率响应.

例 2.15

例 2.2 滑动平均系统的冲激响应为

$$h[n] = \begin{cases} \frac{1}{M_1+M_2+1}, & -M_1 \leq n \leq M_2, \\ 0, & \text{其它.} \end{cases}$$

因此频率响应就是

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{M_1+M_2+1} \sum_{n=-M_1}^{M_2} e^{-jn\omega}. \quad (2.110)$$

利用式(2.43),能将式(2.110)以闭式表示为

$$\begin{aligned} H(e^{j\omega}) &= \frac{1}{M_1+M_2+1} \frac{e^{j\omega M_1} - e^{-j\omega(M_2+1)}}{1 - e^{-j\omega}} \\ &= \frac{1}{M_1+M_2+1} e^{-j\omega(M_2-M_1+1)/2} \frac{e^{j\omega(M_1+M_2+1)/2} - e^{-j\omega(M_1+M_2+1)/2}}{1 - e^{-j\omega}} \\ &= \frac{1}{M_1+M_2+1} e^{-j\omega(M_2-M_1)/2} \frac{e^{j\omega(M_1+M_2+1)/2} - e^{-j\omega(M_1+M_2+1)/2}}{e^{j\omega/2} - e^{-j\omega/2}} \\ &= \frac{1}{M_1+M_2+1} e^{-j\omega(M_2-M_1)/2} \frac{\sin[\omega(M_1+M_2+1)/2]}{\sin(\omega/2)} \end{aligned} \quad (2.111)$$

对于 $M_1=0, M_2=4, H(e^{j\omega})$ 的模和相位画在图 2.19 上.可以看到,正如对一个离散时
间系统的频率响应所要求的那样, $H(e^{j\omega})$ 是周期的.同时 $|H(e^{j\omega})|$ 在“高频”跌落,而

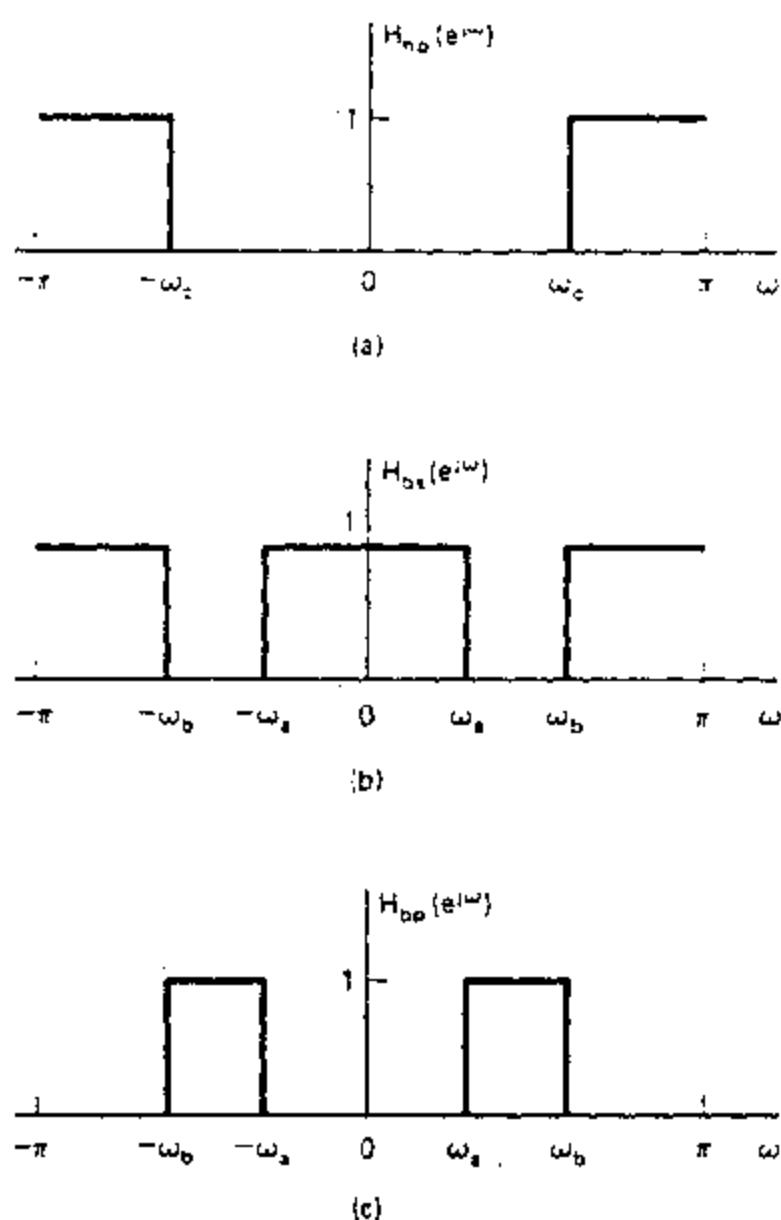


图 2.18 理想频率选择性滤波器. (a) 高通滤波器, (b) 带阻滤波器, (c) 带通滤波器. 在每种情况下, 频率响应都是周期的, 周期为 2π , 图中仅示出一个周期.

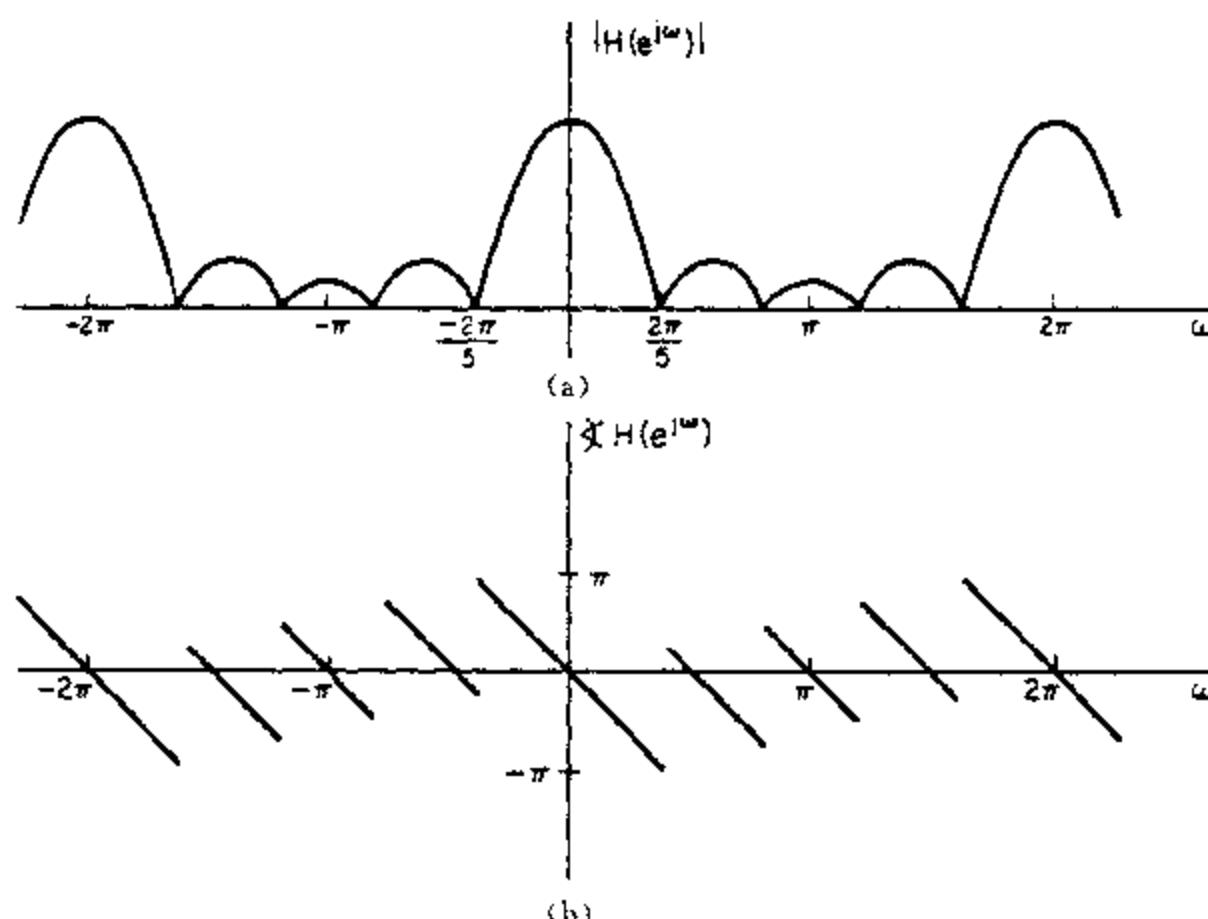


图 2.19 $M_1=0, M=4$ 时滑动平均系统频率响应的(a)模特性和(b)相位特性.

$\angle H(e^{j\omega})$, 即 $H(e^{j\omega})$ 的相位随 ω 线性变化. 高频衰减就表示系统对输入序列中的快速变化起到平滑作用; 也即它是一个低通滤波器很粗糙的近似. 这一点与我们在直观上

所期望的滑动平均系统的特性是一致的.

线性时不变系统频率响应表示的优点之一就是系统特性的阐明往往很容易获得,这就如在例 2.15 中所看到的那样. 在第五章将非常详细地阐述这一点. 目前, 还是把问题回到对于任意一个输入序列如何求得式(2.100)的表示上来.

2.7 用傅里叶变换表示序列

很多序列都能表示为如下傅里叶积分的形式

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega, \quad (2.112)$$

式中 $X(e^{j\omega})$ 由下式给出

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-jn\omega}. \quad (2.113)$$

式(2.112)和(2.113)一起构成序列的傅里叶表示. 式(2.112)是一个综合公式, 称傅里叶反变换. 也就是说它把序列 $x[n]$ 表示成频率在 2π 的区间范围内, 由 $X(e^{j\omega})$ 确定每一个复正弦分量相对大小的、如下式所示的无限小复正弦的叠加

$$\frac{1}{2\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega.$$

虽然在写式(2.112)时, 已经把 ω 的变化范围选定在一 π 和 $+\pi$ 之间, 但是任何 2π 间隔都是可以用的. 式(2.113)是由 $x[n]$ 计算 $X(e^{j\omega})$ 的表示式, 称为傅里叶变换*. 它用来分析该序列 $x[n]$, 以确定利用式(2.112)来综合 $x[n]$ 时, 每一频率分量需要占多少份量.

一般来说, 傅里叶变换是 ω 的一个复值函数. 和频率响应一样, 有时将 $X(e^{j\omega})$ 用直角坐标表示为

$$X(e^{j\omega}) = X_R(e^{j\omega}) + jX_I(e^{j\omega}) \quad (2.114a)$$

或以极坐标表示为

$$X(e^{j\omega}) = |X(e^{j\omega})| e^{j\angle X(e^{j\omega})} \quad (2.114b)$$

$|X(e^{j\omega})|$ 和 $\angle X(e^{j\omega})$ 分别称为傅里叶变换的幅度和相位. 傅里叶变换有时也称傅里叶频谱, 或简单地称为频谱. 同时, 术语幅度谱有时就用来指 $|X(e^{j\omega})|$, 而 $\angle X(e^{j\omega})$ 有时又称为相位谱.

相位 $\angle X(e^{j\omega})$ 不是由式(2.114b)唯一给定的, 因为在任意 ω 值上都可以加任何 2π 的整数倍到 $\angle X(e^{j\omega})$ 上, 而不会影响这个复指数的结果. 当我们特别想要指的是主值, 也即 $\angle X(e^{j\omega})$ 仅限在一 π 和 $+\pi$ 之间的值时, 将这个主值记作 $\text{ARG}[X(e^{j\omega})]$. 在第五章将会发现, 在 $0 < \omega < \pi$ 内给出这样一个相位函数(它是 ω 的连续函数)也是有用的, 这时特记作 $\arg[X(e^{j\omega})]$.

比较一下式(2.92)和式(2.113)可以看到, 一个线性时不变系统的频率响应就是冲激响应的傅里叶变换, 从而冲激响应能够由频率响应应用傅里叶反变换积分来求得, 也即

* 有时更明确一些称式(2.113)为离散时间傅里叶变换, 特别是当需要与连续时间傅里叶变换区别开时.

$$h[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega. \quad (2.115)$$

正如前面所讨论过的,频率响应是一个周期函数.同样,傅里叶变换也是周期的,周期为 2π .的确,式(2.113)就是连续变量周期函数 $X(e^{j\omega})$ 的傅里叶级数表示形式;而利用周期函数 $X(e^{j\omega})$ 来表示序列 $x[n]$ 的式(2.112)就是用来求得该傅里叶级数系数的积分形式.我们现在集中研究利用式(2.112)和式(2.113)来表示序列 $x[n]$.然而,了解连续变量周期函数的傅里叶级数表示与离散时间序列的傅里叶变换表示之间的等效性是十分有用的,因为已熟悉的傅里叶级数的全部性质都能应用到一个序列的傅里叶变换的表示上来,只要适当地对变量作些说明即可.

迄今为止,我们还没有明确地证明式(2.112)和式(2.113)是互逆的,也没有考虑有多大范围的信号可以用式(2.112)来表示.为了说明式(2.112)就是式(2.113)的逆,可以用式(2.113)求出 $X(e^{j\omega})$,然后将所得结果代入式(2.112)来证明.具体一些就是考虑

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m] e^{-j\omega m} \right) e^{j\omega n} d\omega = \hat{x}[n], \quad (2.116)$$

式中暂时用 $\hat{x}[n]$ 来记作傅里叶综合的结果.如果 $X(e^{j\omega})$ 能用式(2.113)求得的话,我们希望要证明 $\hat{x}[n] = x[n]$.应该注意求和中的“哑元变量”已经变为 m ,以区别于式(2.112)中的变量 n .如果无限求和对全部 ω 一致收敛,那么就能变换积分与求和次序以得到

$$\hat{x}[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m] \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{j\omega(n-m)} d\omega \right). \quad (2.117)$$

对括号内的积分可求得

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{j\omega(n-m)} d\omega &= \frac{\sin \pi(n-m)}{\pi(n-m)} \\ &= \begin{cases} 1, & m=n \\ 0, & m \neq n \end{cases} \\ &= \delta[n-m]. \end{aligned}$$

因此

$$\hat{x}[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m] \delta[n-m] = x[m],$$

这就是我们企图要证明的结果.

确定哪一类信号可以用式(2.112)来表示的问题就等效于考虑式(2.113)中无限项和的收敛问题.这就是说,要关心的是在式(2.113)求和中各项必须满足什么条件,才使

$$|X(e^{j\omega})| < \infty, \quad \text{对全部 } \omega.$$

这里 $X(e^{j\omega})$ 是下面有限项和随 $M \rightarrow \infty$ 的极限

$$X_M(e^{j\omega}) = \sum_{n=-M}^{M} x[n] e^{-j\omega n}. \quad (2.118)$$

收敛的充分条件可由下式得到:

$$|X(e^{j\omega})| = \left| \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\omega n} \right|$$

$$\begin{aligned} &\leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]| |e^{-j\omega n}| \\ &\leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]| < \infty. \end{aligned}$$

因此,如果 $x[n]$ 是绝对可加的,那么 $X(e^{j\omega})$ 存在. 再者,在这种情况下可以证明该级数一致收敛于一个 ω 的连续函数.

按照定义,一个稳定的序列是绝对可加的,因此全部稳定序列都有傅里叶变换,从而任何稳定系统都有一个有限且连续的频率响应.

绝对可加性是傅里叶变换表示存在的一个充分条件. 在例 2.12 和例 2.15 中曾计算出序列 $\delta[n-n_d]$ 和 $[1/(M_1+M_2+1)](u[n+M_1]-u[n-M_2-1])$ 的傅里叶变换. 因为这些序列在长度上是有限的,所以是绝对可加的. 很显然,任何有限长序列都是绝对可加的,从而都有一个傅里叶变换表示. 在线性时不变系统范畴内,任何 FIR 系统都一定是稳定的,因此都有一个有限且连续的频率响应. 当一个序列属无限长时,必须关心无限求和的收敛问题. 下面用例子来说明这种情况.

例 2.16

令 $x[n]=a^n u[n]$. 这个序列的傅里叶变换为

$$\begin{aligned} X(e^{j\omega}) &= \sum_{n=0}^{\infty} a^n e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{\infty} (ae^{-j\omega})^n \\ &= \frac{1}{1-ae^{-j\omega}}, \quad |ae^{-j\omega}| < 1 \text{ 或 } |a| < 1. \end{aligned}$$

很明显, $|a| < 1$ 就是 $x[n]$ 绝对可加的条件,即

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a|^n = \frac{1}{1-|a|} < \infty, \quad |a| < 1. \quad (2.119)$$

绝对可加性是傅里叶变换表示存在的一个充分条件,并且也保证一致收敛. 某些序列不是绝对可加的而是平方可加的,即

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 < \infty. \quad (2.120)$$

如果我们愿意将定义 $X(e^{j\omega})$ 的无限求和的一致收敛条件放宽的话,那么这样一些序列也能用傅里叶变换来表示. 在这种情况下是均方收敛的,即

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\omega n} \quad (2.121a)$$

和

$$X_M(e^{j\omega}) = \sum_{n=-M}^{M} x[n] e^{-j\omega n} \quad (2.121b)$$

那么

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} |X(e^{j\omega}) - X_M(e^{j\omega})|^2 d\omega = 0. \quad (2.122)$$

换句话说,误差 $|X(e^{j\omega}) - X_M(e^{j\omega})|$ 随 $M \rightarrow \infty$ 在每一个 ω 值上可能不趋近于零,但是在误差中的总“能量”趋于零. 例 2.17 说明了这一情况.

例 2.17

让我们来确定在例 2.14 中讨论过的理想低通滤波器的冲激响应。它的频率响应是

$$H_{lp}(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & |\omega| < \omega_c, \\ 0, & \omega_c < |\omega| \leq \pi, \end{cases} \quad (2.123)$$

周期为 2π 也是不言自明的。利用傅里叶变换综合式(2.112)可以求得冲激响应 $h_{lp}[n]$ 为

$$\begin{aligned} h_{lp}[n] &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} e^{j\omega n} d\omega \\ &= \frac{\sin \omega_c n}{\pi n}, \quad -\infty < n < \infty. \end{aligned} \quad (2.124)$$

值得注意，因为对 $n < 0$, $h_{lp}[n]$ 不为零，所以该理想低通滤波器是非因果的。同时， $h_{lp}[n]$ 也不是绝对可加的。这个序列值仅以 $1/n \rightarrow \infty$ 而趋于零，这是由于 $H_{lp}(e^{j\omega})$ 在 $\omega = \omega_c$ 是不连续的。因为 $h_{lp}[n]$ 不是绝对可加的，那么

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\sin \omega_c n}{\pi n} e^{-jn\omega}$$

对所有 ω 值就不是一致收敛的。对此为了获得一个直观上的理解，先来考虑一下作为有限项和的 $H_M(e^{j\omega})$

$$H_M(e^{j\omega}) = \sum_{n=-M}^M \frac{\sin \omega_c n}{\pi n} e^{-jn\omega}. \quad (2.125)$$

可以证明 $H_M(e^{j\omega})$ 能表示为

$$H_M(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} \frac{\sin[(2M+1)(\omega-\theta)/2]}{\sin[(\omega-\theta)/2]} d\theta.$$

对于几个不同的 M 值，这一函数的求值如图 2.20 所示。可以看到，随着 M 的增加，在 $\omega = \omega_c$ 处振荡更为加剧（常称为吉布斯现象），而起伏的大小并不下降。事实上，可以证明随 $M \rightarrow \infty$ 振荡的最大幅度不趋于零，而振荡位置朝着 $\omega = \omega_c$ 点收拢。因此该无限和对式(2.123)的不连续函数 $H_{lp}(e^{j\omega})$ 不是一致收敛的。然而，由式(2.124)所给出的 $H_{lp}[n]$ 是平方可加的，相应的 $H_M(e^{j\omega})$ 以均方意义收敛于 $H_{lp}(e^{j\omega})$ ，也即

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} |H_{lp}(e^{j\omega}) - H_M(e^{j\omega})|^2 d\omega = 0.$$

虽然 $\lim_{M \rightarrow \infty} H_M(e^{j\omega})$ 和 $H_{lp}(e^{j\omega})$ 之间的差似乎是不重要的，因为这两个函数仅仅在 $\omega = \omega_c$ 有差别，但是在第七章将会看到，在离散时间系统滤波问题的设计中，有限和的特性有着重要的含意。

对于某些既不是绝对可加的，又不是平方可加的序列，有一个傅里叶变换的表示是很常用的。用下面的例子来例举一二。

例 2.18

考虑一个对全部 n 来说， $x[n] = 1$ 的序列。这个序列既不是绝对可加的，也不是平方可加的。在这一情况下，式(2.113)既不一致收敛，也不均方收敛。然而，把这个序列的傅里叶变换定义成周期冲激串是可能的，并且是有用的，如下式所示：

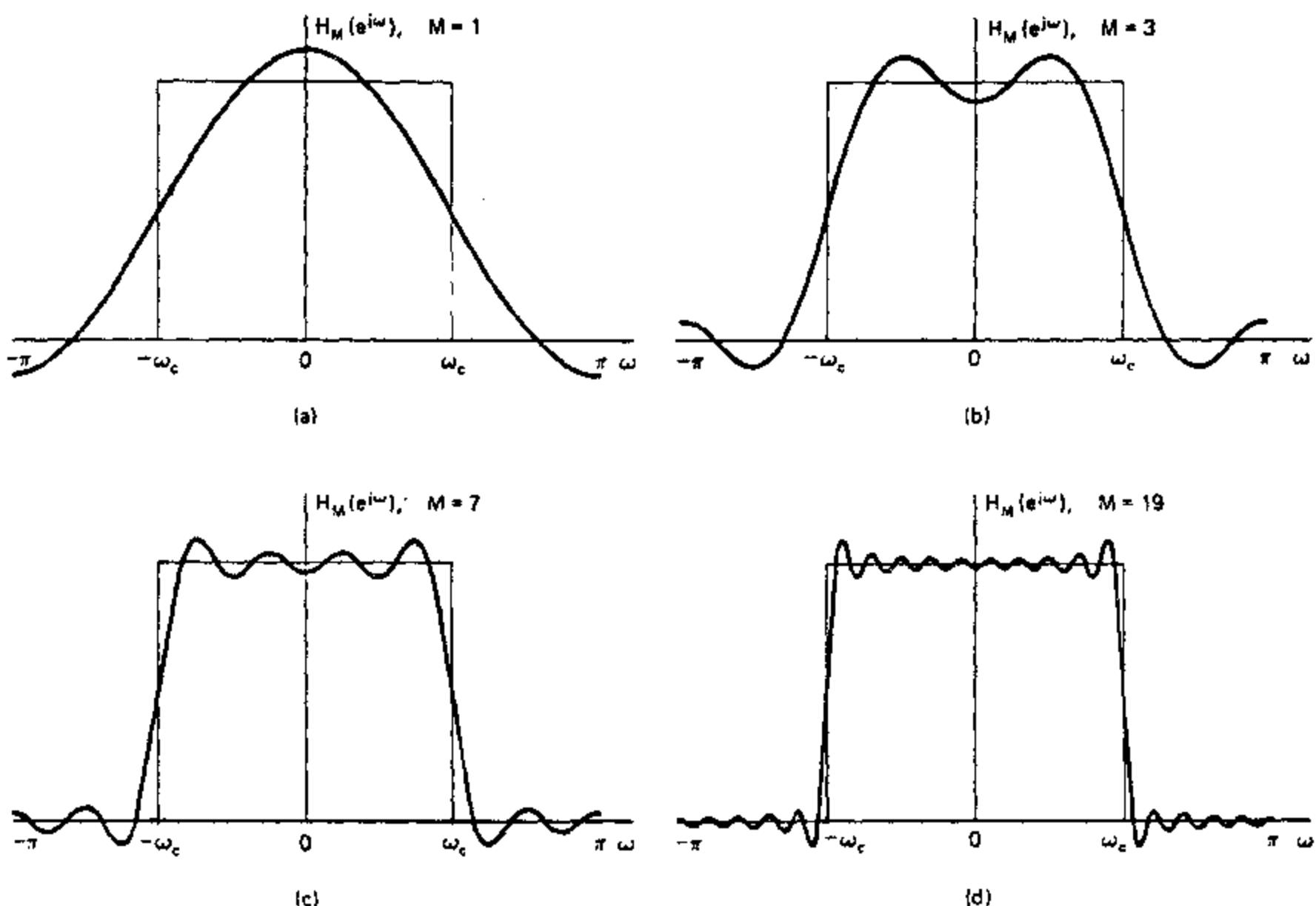


图 2.20 傅里叶变换的收敛. 在 $\omega = \omega_c$ 处的振荡特性常称为吉布斯现象.

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\omega + 2\pi r). \quad (2.126)$$

这时, 这些冲激就是一个连续变量的函数, 因此具有“无限高、零宽度和单位面积”, 这与式(2.113)不收敛是一致的. 用式(2.126)作为序列 $x[n]=1$ 的傅里叶表示主要地正是由于将式(2.126)代入式(2.112)可以得到一个正确结果的缘故. 例 2.19 代表了该例的一般情况.

例 2.19

某一序列其傅里叶变换是下列周期冲激串

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\omega - \omega_0 + 2\pi r). \quad (2.127)$$

将 $X(e^{j\omega})$ 代入式(2.112)的傅里叶反变换积分式中去, 并注意到该积分仅仅涉及到 $X(e^{j\omega})$ 的一个周期, 从而有

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} 2\pi\delta(\omega - \omega_0)e^{jn\omega} d\omega. \quad (2.128)$$

利用冲激函数的定义, 于是可得

$$x[n] = e^{jn\omega_0}, \quad \text{对任意 } n.$$

当 $\omega_0=0$, 就变成例 2.18 中讨论的序列.

很显然,例 2.19 中的 $x[n]$ 既不是绝对可加的,又不是平方可加的,而 $|X(e^{j\omega})|$ 对所有 ω 也不是有限的.因此这样的数学表达式

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{j\omega_0 n} e^{-j\omega n} = \sum_{r=-\infty}^{\infty} 2\pi \delta(\omega - \omega_0 + 2\pi r) \quad (2.129)$$

必须要用一种特殊的方式来给予说明.这种解释可由广义函数理论给出(Lighthill, 1958).利用这一理论,傅里叶变换表示的概念可以很严格地推广到这样一类序列,这类序列可以表示成离散频率分量的和,如

$$x[n] = \sum_k a_k e^{j\omega_k n}, \quad -\infty < n < \infty. \quad (2.130)$$

从例 2.19 的结果,就有

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} \sum_k 2\pi a_k \delta(\omega - \omega_k + 2\pi r) \quad (2.131)$$

这就是式(2.130)中 $x[n]$ 的傅里叶变换表示.

另一个既不绝对可加,又不平方可加的序列是单位阶跃序列 $u[n]$.虽然证明起来不那么直接,这个序列能用下述傅里叶变换来表示.

$$U(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - e^{-j\omega}} + \sum_{r=-\infty}^{\infty} \pi \delta(\omega + 2\pi r). \quad (2.132)$$

2.8 傅里叶变换的对称性质

在应用傅里叶变换时,序列的性质是如何体现在傅里叶变换之中,或者相反,对于这一点有一个详细的了解是有用的.在本节和 2.9 节将讨论和综述几个这样的性质.

傅里叶变换的对称性质往往是很有用的.下面的讨论介绍这些性质,而其证明将留在习题 2.29 和习题 2.30 中讨论.在介绍这些性质之前,先从一些定义开始.

一个共轭对称序列 $x_e[n]$ 定义为具有 $x_e[n] = x_e^*[-n]$ 的序列;一个共轭反对称序列 $x_o[n]$ 定义为具有 $x_o[n] = -x_o^*[-n]$ 的序列,这里 * 记作复数共轭.任何序列 $x[n]$ 都能表示成一个共轭对称序列和一个共轭反对称序列之和,即

$$x[n] = x_e[n] + x_o[n], \quad (2.133a)$$

式中

$$x_e[n] = \frac{1}{2}(x[n] + x^*[-n]) \quad (2.133b)$$

和

$$x_o[n] = \frac{1}{2}(x[n] - x^*[-n]). \quad (2.133c)$$

一个具有共轭对称的实序列 $x_e[n] = x_e[-n]$ 称为偶序列;一个具有共轭反对称的实序列 $x_o[n] = -x_o[-n]$ 称为奇序列.

一个傅里叶变换 $X(e^{j\omega})$ 能分解为共轭对称和共轭反对称之和

$$X(e^{j\omega}) = X_e(e^{j\omega}) + X_o(e^{j\omega}), \quad (2.134a)$$

式中

$$X_e(e^{j\omega}) = \frac{1}{2}[X(e^{j\omega}) + X^*(e^{-j\omega})] \quad (2.134b)$$

和

$$X_o(e^{j\omega}) = \frac{1}{2}[X(e^{j\omega}) - X^*(e^{-j\omega})]. \quad (2.134c)$$

显然, $X_o(e^{j\omega})$ 是共轭对称的, 而 $X_e(e^{j\omega})$ 是共轭反对称的; 也即

$$X_e(e^{j\omega}) = X_e^*(e^{-j\omega}) \quad (2.135a)$$

和

$$X_o(e^{j\omega}) = -X_o^*(e^{-j\omega}). \quad (2.135b)$$

和序列一样, 如果一个连续变量的实函数是共轭对称的, 就称为偶函数; 而一个连续变量的实共轭反对称函数就称为奇函数.

表 2.1 傅里叶变换的对称性质

序列	傅里叶变换
$x[n]$	$X(e^{j\omega})$
1. $x^*[n]$	$X^*(e^{-j\omega})$
2. $x^*[-n]$	$X^*(e^{j\omega})$
3. $\Re\{x[n]\}$	$X_e(e^{j\omega})$ ($X(e^{j\omega})$ 的共轭对称部分)
4. $j\Im\{x[n]\}$	$X_o(e^{j\omega})$ ($X(e^{j\omega})$ 的共轭反对称部分)
5. $x_e[n]$ ($x[n]$ 的共轭对称部分)	$X_R(e^{j\omega})$
6. $x_o[n]$ ($x[n]$ 的共轭反对称部分)	$jX_I(e^{j\omega})$
以下性质仅适用于 $x[n]$ 为实序列	
7. 任意实 $x[n]$	$X(e^{j\omega}) = X^*(e^{-j\omega})$ (共轭对称)
8. 任意实 $x[n]$	$X_R(e^{j\omega}) = X_R(e^{-j\omega})$ (实部为偶函数)
9. 任意实 $x[n]$	$X_I(e^{j\omega}) = -X_I(e^{-j\omega})$ (虚部为奇函数)
10. 任意实 $x[n]$	$ X(e^{j\omega}) = X(e^{-j\omega}) $ (幅度为偶函数)
11. 任意实 $x[n]$	$\angle X(e^{j\omega}) = -\angle X(e^{-j\omega})$ (相位为奇函数)
12. $x_e[n]$ ($x[n]$ 的偶部)	$X_R(e^{j\omega})$
13. $x_o[n]$ ($x[n]$ 的奇部)	$jX_I(e^{j\omega})$

傅里叶变换的对称性质综合在表 2.1 中. 前六个性质是针对一般的复指数组列 $x[n]$, 其傅里叶变换为 $X(e^{j\omega})$. 性质 1 和 2 放在习题 2.29 中讨论. 利用两个序列和的傅里叶变换就是它们的傅里叶变换之和这一事实, 性质 3 就直接可从性质 1 和 2 得出. 具体地说, $\Re\{x[n]\} = \frac{1}{2}(x[n] + x^*[n])$ 的傅里叶变换就是 $X(e^{j\omega})$ 的共轭对称部分 $X_e(e^{j\omega})$. 类似地, $j\Im\{x[n]\} = \frac{1}{2}(x[n] - x^*[n])$ 的傅里叶变换是 $X(e^{j\omega})$ 的共轭反对称分量 $X_o(e^{j\omega})$, 这就是性质 4. 当考虑 $x[n]$ 的共轭对称和共轭反对称分量 $x_e[n]$ 和 $x_o[n]$ 的傅里叶变换时, 就可得到性质 5 和 6.

如果 $x[n]$ 是一个实序列, 这些对称性质就变得特别直接和有用. 对一个实序列, 其傅里叶变换是共轭对称的, 即 $X(e^{j\omega}) = X^*(e^{-j\omega})$ (性质 7). 将 $X(e^{j\omega})$ 用它的实部和虚部表示为

$$X(e^{j\omega}) = X_R(e^{j\omega}) + jX_I(e^{j\omega}), \quad (2.136)$$

然后,性质 8 和 9 就可得,即

$$X_R(e^{j\omega}) = X_R(e^{-j\omega}) \quad (2.137a)$$

和

$$X_I(e^{j\omega}) = -X_I(e^{-j\omega}). \quad (2.137b)$$

换句话说,对一个实序列,其傅里叶变换的实部是一个偶函数,虚部是一个奇函数.类似地,将 $X(e^{j\omega})$ 以极坐标形式表示为

$$X(e^{j\omega}) = |X(e^{j\omega})| e^{j\angle X(e^{j\omega})}, \quad (2.138)$$

那么,对一个实序列,其傅里叶变换的幅度 $|X(e^{j\omega})|$ 是 ω 的偶函数,而相位 $\angle X(e^{j\omega})$ 则是 ω 的奇函数(性质 10 和 11). 同样,对一个实序列, $x[n]$ 的偶部变换为 $X_R(e^{j\omega})$, 而奇部变换为 $jX_I(e^{j\omega})$ (性质 12 和 13).

例 2.20

为了说明其中几个性质,再回到例 2.16 的序列,那里已证明该实序列 $x[n] = a^n u[n]$ 的傅里叶变换是

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}}, \quad |a| < 1. \quad (2.139)$$

那么

$$X^*(e^{-j\omega}) = \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}} = X(e^{j\omega}), \quad (\text{性质 7})$$

$$X_R(e^{j\omega}) = \frac{1 - a\cos\omega}{1 + a^2 - 2a\cos\omega} = X_R(e^{-j\omega}), \quad (\text{性质 8})$$

$$X_I(e^{j\omega}) = \frac{-a\sin\omega}{1 + a^2 - 2a\cos\omega} = -X_I(e^{-j\omega}), \quad (\text{性质 9})$$

$$|X(e^{j\omega})| = \frac{1}{(1 + a^2 - 2a\cos\omega)^{1/2}} = |X(e^{-j\omega})|, \quad (\text{性质 10})$$

$$\angle X(e^{j\omega}) = \tan^{-1} \left(\frac{-a\sin\omega}{1 - a\cos\omega} \right) = -\angle X(e^{-j\omega}). \quad (\text{性质 11})$$

图 2.21 画出了对 $a > 0$ 时的这些函数,并以 $a = 0.9$ (实线)和 $a = 0.5$ (虚线)为例. 在习题 2.27 中讨论了相应于 $a < 0$ 时的这些曲线.

2.9 傅里叶变换定理

除了对称性质外,还有各种定理(在本节 2.9.1—2.9.7 中介绍)把序列的运算与傅里叶变换的运算联系起来. 将会看到,这些定理与连续时间信号及其傅里叶变换的相应定理在许多情况下都是很相似的. 为了方便于这些定理的陈述,将引入下面算子符号:

$$X(e^{j\omega}) = \mathcal{F}\{x[n]\},$$

$$x[n] = \mathcal{F}^{-1}\{X(e^{j\omega})\},$$

$$x[n] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(e^{j\omega}).$$

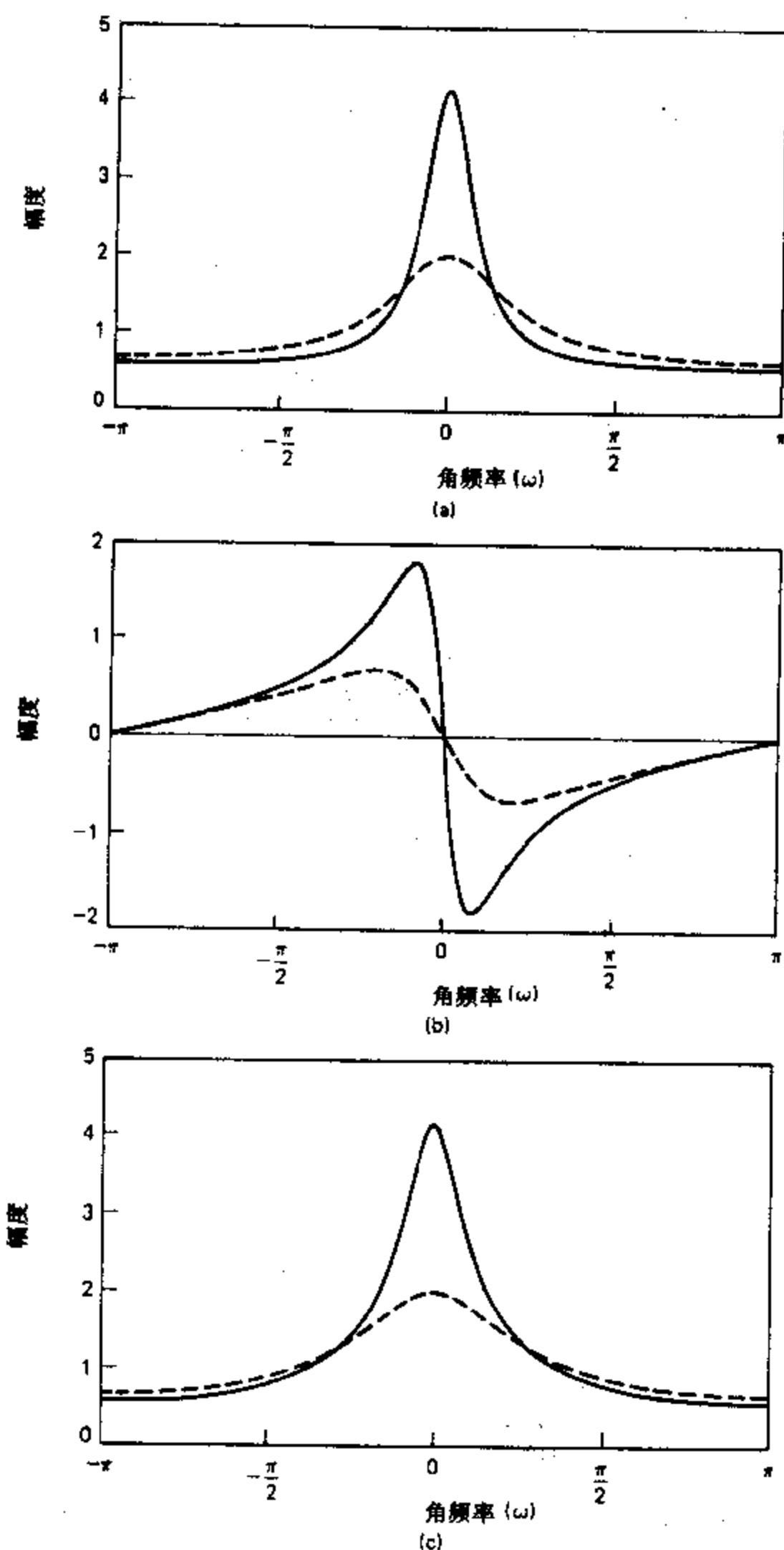
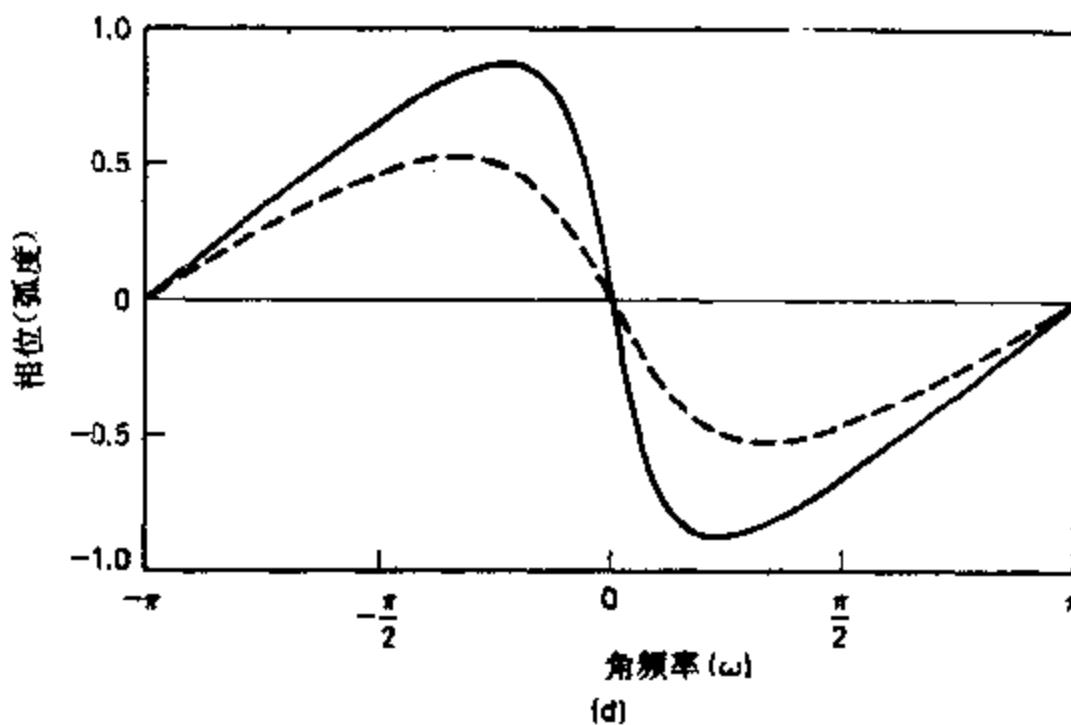


图 2.21 冲激响应 $h[n] = a^n u[n]$ 的系统频率响应. (a) 实部. (b) 虚部. (c) 幅度, $a > 0$; 图中实线对应 $a = 0.9$, 虚线对应 $a = 0.5$.



(d)

图 2.21 (续)(d)相位.

这就是说, \mathcal{F} 记作“取 $x[n]$ 傅里叶变换”的运算, 而 \mathcal{F}^{-1} 是上述运算的逆运算. 定理的大部分只作陈述, 不给予证明. 这些证明一般仅涉及求和或积分的简单变量换算, 故留作为练习(习题 2.31). 本节中的这些定理综合在表 2.2 中.

表 2.2 傅里叶变换定理

序列	傅里叶变换
$x[n]$	$X(e^{j\omega})$
$y[n]$	$Y(e^{j\omega})$
1. $ax[n] + by[n]$	$aX(e^{j\omega}) + bY(e^{j\omega})$
2. $x[n - n_d]$ (n_d 为整数)	$e^{-jn_d\omega} X(e^{j\omega})$
3. $e^{jn_0\omega} x[n]$	$X(e^{j(\omega - \omega_0)})$
4. $x[-n]$	$X(e^{-j\omega})$
5. $nx[n]$	$X^*(e^{j\omega}), \quad x[n] \text{ 为实数}$ $j \frac{dX(e^{j\omega})}{d\omega}$
6. $x[n] * y[n]$	$X(e^{j\omega})Y(e^{j\omega})$
7. $x[n]y[n]$	$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\theta})Y(e^{j(\omega - \theta)}) d\theta$
帕斯瓦尔定理	
8. $\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] ^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) ^2 d\omega$	
9. $\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]y^*[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})Y^*(e^{j\omega}) d\omega$	

2.9.1 傅里叶变换的线性

若

$$x_1[n] \xrightarrow{\mathcal{F}} X_1(e^{j\omega})$$

和

$$x_2[n] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X_2(e^{j\omega}),$$

则

$$ax_1[n] + bx_2[n] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} aX_1(e^{j\omega}) + bX_2(e^{j\omega}). \quad (2.140)$$

2.9.2 时移和频移

若

$$x[n] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(e^{j\omega}),$$

那么对时移序列就有

$$x[n - n_d] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} e^{-j\omega n_d} X(e^{j\omega}) \quad (2.141)$$

对频移傅里叶变换有

$$e^{j\omega_0 n} X[n] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(e^{j(\omega - \omega_0)}). \quad (2.142)$$

2.9.3 时间倒置

若

$$x[n] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(e^{j\omega}),$$

那么,如果该序列被时间倒置,则有

$$x[-n] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(e^{-j\omega}). \quad (2.143)$$

若 $x[n]$ 是实序列,该定理就简化为

$$x[-n] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X^*(e^{j\omega}). \quad (2.144)$$

2.9.4 频域微分

若

$$x[n] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(e^{j\omega}),$$

则

$$nx[n] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} j \frac{dX(e^{j\omega})}{d\omega}. \quad (2.145)$$

2.9.5 帕斯瓦尔定理

若

$$x[n] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(e^{j\omega}),$$

则

$$E = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |X(e^{j\omega})|^2 d\omega. \quad (2.146)$$

函数 $|X(e^{j\omega})|^2$ 称为能量密度谱,因为它决定了能量在频域中是如何分布的. 能量密度谱

必然是仅对能量有限信号定义的. 帕斯瓦尔定理的更一般形式在习题 2.34 中给出.

2.9.6 卷积定理

若

$$x[n] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(e^{j\omega})$$

和

$$h[n] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} H(e^{j\omega})$$

而且如果

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] = x[n] * h[n], \quad (2.147)$$

则

$$Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega})H(e^{j\omega}). \quad (2.148)$$

因此, 序列的卷积就意味着相应的傅里叶变换的乘积. 前述的时移性质是卷积性质的一种特殊情况, 这是因为

$$\delta[n-n_d] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} e^{-jn_d\omega} \quad (2.149)$$

并且, 如果 $h[n] = \delta[n-n_d]$, 那么 $y[n] = x[n] * \delta[n-n_d]$. 因此就有

$$H(e^{j\omega}) = e^{-jn_d\omega} \text{ 和 } Y(e^{j\omega}) = e^{-jn_d\omega}X(e^{j\omega}).$$

卷积定理的正规推导很容易按式(2.147)表示的 $y[n]$, 对其进行傅里叶变换来完成. 这个定理也能解释为在线性时不变系统中复指数的特征函数性质的一个直接结果. 回想一下, $H(e^{j\omega})$ 是冲激响应为 $h[n]$ 的线性时不变系统的频率响应, 同时若

$$x[n] = e^{j\omega n},$$

那么

$$y[n] = H(e^{j\omega})e^{jn\omega}.$$

这就是说, 复指数是线性时不变系统的特征函数, 这里 $h[n]$ 的傅里叶变换 $H(e^{j\omega})$ 就是特征值. 按积分的定义, 傅里叶综合公式就相应于将一个序列 $x[n]$ 表示成无限小的复指数的叠加, 也即

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})e^{jn\omega} d\omega = \lim_{\Delta\omega \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \sum_k X(e^{jk\Delta\omega})e^{jk\Delta\omega} \Delta\omega.$$

根据线性系统特征函数的性质和叠加原理, 相应的输出就是

$$y[n] = \lim_{\Delta\omega \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \sum_k H(e^{jk\Delta\omega})X(e^{jk\Delta\omega})e^{jk\Delta\omega} \Delta\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H(e^{j\omega})X(e^{j\omega})e^{jn\omega} d\omega.$$

由此可得

$$Y(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega})X(e^{j\omega}),$$

这就是式(2.148).

2.9.7 调制或加窗定理

若

$$x[n] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(e^{j\omega})$$

和

$$w[n] \xrightarrow{\mathcal{F}} W(e^{j\omega})$$

且若

$$y[n] = x[n]w[n], \quad (2.150)$$

则

$$Y(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\theta})W(e^{j(\omega-\theta)})d\theta. \quad (2.151)$$

式(2.151)是一个周期卷积,也就是说它是两个周期函数的卷积,其积分上下限仅取一个周期.当把卷积和调制定理作一比较,就很明显地看出在大部分傅里叶变换定理中存在着这种固有的对偶性.然而,与连续时间情况相比(这时这种对偶关系是完全的),在离散时间情况下存在某些基本的差别.这是由于傅里叶变换只是一个和式,而反变换则是被积函数为周期函数的积分.对连续时间情况可以说:时域中的卷积可以由频域中的相乘来表示,反之亦然;而在离散时间情况下,就必须作一点修改.具体来说就是,序列的离散卷积(卷积和)等效于相应的周期傅里叶变换的相乘;序列的相乘等效于相应傅里叶变换的周期卷积.

本节的有关定理和几个基本的傅里叶变换对都分别综合在表 2.2 和表 2.3 中.熟悉傅里叶变换定理和性质是很有用的,其中之一就是用在求傅里叶变换或反变换中.往往利用这些定理和已知的变换对,就可以借助于对那些已知变换的序列进行适当运算而表示另一个序列,以此来简化某一个困难或麻烦的问题.例 2.21—2.24 就说明这一点.

表 2.3 傅里叶变换对

序列	傅里叶变换
1. $\delta[n]$	1
2. $\delta[n-n_0]$	e^{-jn_0}
3. 1 ($-\infty < n < \infty$)	$\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\omega + 2\pi k)$
4. $a^n u[n] \quad (a < 1)$	$\frac{1}{1 - ae^{-j\omega}}$
5. $u[n]$	$\frac{1}{1 - e^{-j\omega}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \pi\delta(\omega + 2\pi k)$
6. $(n+1)a^n u[n] \quad (a < 1)$	$\frac{1}{(1 - ae^{-j\omega})^2}$
7. $\frac{r^n \sin \omega_p (n+1)}{\sin \omega_p} u[n] \quad (r < 1)$	$\frac{1}{1 - 2r \cos \omega_p e^{-j\omega} + r^2 e^{-j2\omega}}$
8. $\frac{\sin \omega_c n}{\pi n}$	$X(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & \omega < \omega_c, \\ 0, & \omega_c < \omega \leq \pi \end{cases}$
9. $x[n] = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq M \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$	$\frac{\sin[\omega(M+1)/2]}{\sin(\omega/2)} e^{-j\omega M/2}$
10. $e^{jn_0 \omega}$	$\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\omega - \omega_0 + 2\pi k)$
11. $\cos(\omega_0 n + \phi)$	$\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} [e^{jk\omega} \delta(\omega - \omega_0 + 2\pi k) + e^{-jk\omega} \delta(\omega + \omega_0 + 2\pi k)]$

例 2.21

令 $x[n] = a^n u[n-5]$, 这个序列可表示为

$$x[n] = a^5 a^{n-5} u[n-5]. \quad (2.152)$$

因此,利用表 2.2 中的定理 1 和 2,以及表 2.3 中的变换对 4,可得

$$X(e^{j\omega}) = \frac{a^5 e^{-j\omega 5}}{1 - ae^{-j\omega}}. \quad (2.153)$$

例 2.22

假设

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{(1 - ae^{-j\omega})(1 - be^{-j\omega})}. \quad (2.154)$$

将 $X(e^{j\omega})$ 直接代入式(2.112)就会得到一个用常规的实函数积分方法难以求解的积分.

然而,利用部分分式展开(将在第 4 章中详细讨论), $X(e^{j\omega})$ 就能展开成如下形式:

$$X(e^{j\omega}) = \frac{a/(a-b)}{1 - ae^{-j\omega}} - \frac{b/(a-b)}{1 - be^{-j\omega}}. \quad (2.155)$$

再利用表 2.2 中的定理 1 和表 2.3 中的变换对 4,立即可得

$$x[n] = \left(\frac{a}{a-b} \right) a^n u[n] - \left(\frac{b}{a-b} \right) b^n u[n]. \quad (2.156)$$

例 2.23

考虑如下的傅里叶变换式:

$$X(e^{j\omega}) = \begin{cases} e^{-j\omega n_c}, & \omega_c < |\omega| < \pi, \\ 0, & |\omega| < \omega_c, \end{cases} \quad (2.157)$$

周期当然为 2π . 该傅里叶变换可以表示为

$$X(e^{j\omega}) = e^{-jn_c} u(1 - R(e^{j\omega})),$$

式中 $R(e^{j\omega})$ 是周期的,周期为 2π ,且为

$$R(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & |\omega| < \omega_c, \\ 0, & \omega_c < |\omega| < \pi. \end{cases}$$

利用例 2.17 的结果,可以得到 $R(e^{j\omega})$ 的反变换,再结合表 2.2 中的性质 1 和 2,可以求得 $x[n]$ 为

$$\begin{aligned} x[n] &= \delta[n - n_d] - r[n - n_d] \\ &= \delta[n - n_d] - \frac{\sin \omega_c [n - n_d]}{\pi [n - n_d]}. \end{aligned}$$

例 2.24

求一个稳定的线性时不变系统的冲激响应,其输入 $x[n]$ 和输出 $y[n]$ 满足如下线性常系统差分方程

$$y[n] - \frac{1}{2}y[n-1] = x[n] - \frac{1}{4}x[n-1]. \quad (2.158)$$

在第 5 章将会看到用 z 变换来处理差分方程比用傅里叶变换更为有效. 然而,本例将提供利用变换方法分析线性系统的一种提示. 为了求冲激响应,可以令 $x[n] = \delta[n]$, 用 $h[n]$ 记作冲激响应,式(2.158)变为

$$h[n] - \frac{1}{2}h[n-1] = \delta[n] - \frac{1}{4}\delta[n-1]. \quad (2.159)$$

然后在式(2.159)两边进行傅里叶变换，并利用表 2.2 中的性质 1 和 2，可得

$$H(e^{j\omega}) - \frac{1}{2}e^{-j\omega}H(e^{j\omega}) = 1 - \frac{1}{4}e^{-j\omega} \quad (2.160)$$

或

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1 - \frac{1}{4}e^{-j\omega}}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega}}. \quad (2.161)$$

为了求得 $h[n]$ ，就要求求出 $H(e^{j\omega})$ 的反傅里叶变换。为此目的，将式(2.161)重新写成

$$H(e^{j\omega}) = \frac{\frac{1}{4}e^{-j\omega}}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega} - \frac{1}{4}e^{-j\omega}}. \quad (2.162)$$

由表 2.3 中的变换对 4

$$\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] \leftrightarrow \frac{1}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega}}.$$

将这个变换对与表 2.2 中性质 3 结合在一起，就有

$$-\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} u[n-1] \leftrightarrow -\frac{\frac{1}{4}e^{-j\omega}}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega}}. \quad (2.163)$$

再根据表 2.2 中性质 1，则得

$$h[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] - \left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} u[n-1]. \quad (2.164)$$

2.10 离散时间随机信号

前述各节都集中在离散时间信号与系统的数学表示上，以及由此而导出的一些细节。已经看到，离散时间信号与系统既有时域表示也有频域表示，每一种表示在离散时间信号处理系统的理论和设计中都有其重要的地位。直到目前为止，都假定信号是确定性的，也就是说序列的每一个值都唯一地由某一数学表达式、一组数据表列或按某种规则确定的。

在很多情况下，产生信号的过程是如此地复杂，以至于要把一个信号做精确描述，如果不是不可能的话，也是极为困难或是不合需要的。在这些情况下，把信号模仿成一个随机过程在分析上是有用的。作为一个例子，在第 6 章将会看到，在实现数字信号处理算法中，由于有限寄存器长度而引起的很多影响就能够用加性噪声来表示，也就是一个随机序列。很多力学系统产生的声学或振动信号（处理这些信号可以诊断出潜在的缺陷）往往能用随机信号来很好地模仿。自动识别或带宽压缩中待处理的语音信号和为提高质量而处

理的音乐信号只是众多例子中的两个。

一个随机信号就是一组离散时间信号的集合,它是由一组概率密度函数来表征的。换句话说,在某一特定时刻对于某一个特殊的信号来说,该信号样本在那个时刻的大小是假定按照某种基本的概率方式确定的。

这类信号数学表示的关键在于用各种平均来给予描述。因为随机信号不是绝对可加或平方可加的,其结果就是没有直接的傅里叶变换。但是这些信号的很多(不是全部)性质能用自相关或自协方差序列来概述,而对自相关或自协方差序列的傅里叶变换往往存在。正如本节将讨论的,自协方差序列的傅里叶变换在信号中能量的频率分布方面有一个很有用的解释。利用自协方差序列及其变换还具有另一个重要的优点:用一个离散时间线性系统处理随机信号的效果可以方便地用该系统对自协方差序列的效果来描述。

下面的讨论假定读者熟悉随机过程的一些基本概念,如平均、相关与协方差函数及功率谱等。附录 A 为此给出了一个简单的复习和综述。随机信号理论的更加详细的讨论可以在很多著名的教科书中找到,如达文波特(Davenport, 1970)和帕普利斯(Papoulis, 1984)等。本节的主要目的是提供在后续章节中要用到的有关随机信号表示的一组具体结果。因此,在用线性时不变系统来处理信号的范畴内,主要集中在广义平稳随机信号及其表示上。为了讨论简单起见,虽然讨论中都假定 $x(n)$ 和 $h(n)$ 是实值的,但是这些结果能很容易地推广到复数的情况。

现在考虑一个稳定的冲激响应为 $h[n]$ 的线性时不变系统。令 $x[n]$ 是一个实值序列,且是一个广义平稳离散时间随机过程的一个样本序列。那么,该线性系统的输出就是输出随机过程的一个样本函数,输出与输入过程用如下线性变换式联系起来:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[n-k]x[k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k].$$

正如已经证明过的,因为系统是稳定的,如果 $x[n]$ 是有界的话, $y[n]$ 一定也是有界的。下面将会看到,如果输入是平稳的*,那么输出也是平稳的。输入信号可以由它的均值 m_x 和它的相关函数 $\phi_{xx}[m]$ 来表征,或者也可以有一些关于一阶甚至二阶概率分布的附加信息。

在表征输出随机过程 $y[n]$ 中,也希望有类似的信息,对于许多应用,用简单平均,像均值、方差和自相关等来表征输入和输出就足够了。因此,将对这些量导出输入、输出的关系。

输入和输出过程的均值是

$$m_{x_n} = \mathcal{E}\{x_n\}, \quad m_{y_n} = \mathcal{E}\{y_n\}, \quad (2.165)$$

式中 $\mathcal{E}\{\cdot\}$ 记作期望值。为了符号上的方便,今后对于随机变量 x_n 和 y_n 与它们的值 $x[n]$ 和 $y[n]$ 之间的差别将较少给予关注。所以,式(2.165)也可以写成

$$m_x[n] = \mathcal{E}\{x[n]\}, \quad m_y[n] = \mathcal{E}\{y[n]\}. \quad (2.166)$$

如果 $x[n]$ 是平稳的,那么 $m_x[n]$ 就与 n 无关,也就可以写做 m_x ;如果 $y[n]$ 是平稳的,以上符号对 $m_y[n]$ 也类似。

输出过程的均值是

* 本节的其余部分,都用术语“平稳”指的是“广义平稳”。

$$m_y[n] = \mathcal{E}\{y[n]\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] \mathcal{E}\{x[n-k]\},$$

式中已经用到和的期望值就是期望值的和这一事实. 因为输入是平稳的, 所以 $m_x[n-k] = m_x$, 结果

$$m_y[n] = m_x \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]. \quad (2.167)$$

由式(2.167)可见, 输出的均值也是常数. 利用频率响应, 式(2.167)的等效表示式为

$$m_y = H(e^{j\omega})m_x. \quad (2.168)$$

暂且假定输出是非平稳的, 对于一个实数输入, 输出过程的自相关函数就是

$$\begin{aligned} \phi_{yy}[n, n+m] &= \mathcal{E}\{y[n]y[n+m]\} \\ &= \mathcal{E}\left\{\sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{r=-\infty}^{\infty} h[k]h[r]x[n-k]x[n+m-r]\right\} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] \sum_{r=-\infty}^{\infty} h[r] \mathcal{E}\{x[n-k]x[n+m-r]\}. \end{aligned}$$

因为 $x[n]$ 已假定是平稳的, $\mathcal{E}\{x[n-k]x[n+m-r]\}$ 仅与时间差 $m+k-r$ 有关, 因此有

$$\phi_{yy}[n, n+m] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] \sum_{r=-\infty}^{\infty} h[r] \phi_{xx}[m+k-r] = \phi_{yy}[m]. \quad (2.169)$$

这就是说, 输出自相关序列也是仅与时间差 m 有关. 由此可得, 一个线性时不变系统被一个广义平稳输入所激励, 其输出也是广义平稳的.

作变量置换 $\ell = r - k$, 式(2.169)可表示为

$$\begin{aligned} \phi_{yy}[m] &= \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} \phi_{xx}[m-\ell] \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]h[\ell+k] \\ &= \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} \phi_{xx}[m-\ell]c[\ell], \end{aligned} \quad (2.170)$$

式中已定义

$$c[\ell] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]h[\ell+k]. \quad (2.171)$$

序列 $c[\ell]$ 往往称为 $h[n]$ 的非周期自相关序列, 或者简单地称为 $h[n]$ 的自相关序列. 应该强调的是: $c[\ell]$ 是一个非周期的自相关, 也就是说是一个能量有限的序列, 并且不应该与一个无限能量序列的自相关相混淆. 的确可以看出, $c[\ell]$ 就是 $h[n]$ 与 $h[-n]$ 的离散卷积. 那么, 式(2.170)就可以说成是一个线性系统输出的自相关就是输入自相关与该系统冲激响应的非周期自相关的卷积.

式(2.170)告诉我们, 傅里叶变换在表征一个线性时不变系统对一个随机输入的响应上是有用的. 为方便起见, 假定 $m_x = 0$, 也即有相关和自协方差序列是相同的. 然后, 分别用 $\Phi_{xx}(e^{j\omega})$, $\Phi_{yy}(e^{j\omega})$ 和 $C(e^{j\omega})$ 表示 $\phi_{xx}[m]$, $\phi_{yy}[m]$ 和 $c[\ell]$ 的傅里叶变换, 由式(2.170)可得

$$\Phi_{yy}(e^{j\omega}) = C(e^{j\omega})\Phi_{xx}(e^{j\omega}). \quad (2.172)$$

另外, 由式(2.171)

$$C(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega})H^*(e^{j\omega})$$

$$= |H(e^{j\omega})|^2,$$

所以

$$\Phi_{yy}(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})|^2 \Phi_{xx}(e^{j\omega}). \quad (2.173)$$

式(2.173)给出了一个有关功率密度谱的概念. 具体地说.

$$\begin{aligned} \mathcal{E}\{y^2[n]\} &= \phi_{yy}[0] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Phi_{yy}(e^{j\omega}) d\omega \\ &= \text{输出总平均功率} \end{aligned} \quad (2.174)$$

将式(2.173)代入式(2.174), 可得

$$\mathcal{E}\{y^2[n]\} = \phi_{yy}[0] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |H(e^{j\omega})|^2 \Phi_{xx}(e^{j\omega}) d\omega. \quad (2.175)$$

假设 $H(e^{j\omega})$ 是一个理想带通滤波器, 如图 2.18(c) 所示. $\Phi_{xx}[n]$ 是一个偶序列, 所以

$$\Phi_{xx}(e^{j\omega}) = \Phi_{xx}(e^{-j\omega}).$$

同样, $|H(e^{j\omega})|^2$ 也是 ω 的偶函数, 因此可以写成

$$\begin{aligned} \phi_{yy}[0] &= \text{输出总平均功率} \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\omega_b}^{\omega_b} \Phi_{xx}(e^{j\omega}) d\omega + \frac{1}{\pi} \int_{-\omega_b}^{-\omega_b} \Phi_{xx}(e^{j\omega}) d\omega. \end{aligned} \quad (2.176)$$

这样, 在 $\omega_b \leq |\omega| \leq \omega_a$ 内, $\Phi_{xx}(e^{j\omega})$ 所包含的面积就能用来表示在那个频带内输出的均方值. 输出功率必须保持非负, 因此

$$\lim_{(\omega_b \rightarrow -\omega_a) \rightarrow 0} \phi_{yy}[0] \geq 0.$$

这个结果与式(2.176)结合在一起, 就意味着

$$\Phi_{xx}(\omega) \geq 0. \quad (2.177)$$

于是可知一个实信号的功率密度谱函数是实的、偶的而且非负的.

另一个重要的结果是涉及一个线性时不变系统输入和输出之间的互相关:

$$\begin{aligned} \phi_{xy}[m] &= \mathcal{E}\{x[n]y[n+m]\} \\ &= \mathcal{E}\{x[n] \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n+m-k]\} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]\phi_{xx}[m-k]. \end{aligned} \quad (2.178)$$

这时可看到, 输入和输出间的互相关是冲激响应与输入自相关序列的卷积.

式(2.178)的傅里叶变换是

$$\Phi_{xy}(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega})\Phi_{xx}(e^{j\omega}). \quad (2.179)$$

当输入为白噪声时, 这一结果有一种有用的应用; 即 $\phi_{xx}[m] = \sigma_x^2 \delta[m]$, 将其代入式(2.178), 可得

$$\phi_{xy}[m] = \sigma_x^2 h[m], \quad (2.180)$$

这就是说, 对于一个零均值的白噪声输入, 一个线性系统输入和输出之间的互相关是正比于该系统的冲激响应. 类似地, 白噪声输入的功率谱为

$$\Phi_{xx}(e^{j\omega}) = \sigma_x^2, \quad -\pi \leq \omega \leq \pi. \quad (2.181)$$

由式(2.179)可得

$$\Phi_{xy}(e^{j\omega}) = \sigma_x^2 H(e^{j\omega}), \quad (2.182)$$

也就是说在这种情况下,互功率谱正比于该系统的频率响应.如果有可能观察到对一个白噪声输入时系统输出的话,那么式(2.180)和式(2.182)就可以用来作为估计一个线性时不变系统的冲激响应或频率响应的基础.

2.11 小 结

这一章我们讨论了有关离散时间与系统的几个基本定义.其中定义了几个基本序列,利用卷积和来定义和表示线性时不变系统,及其有关稳定性和因果性的含义等等.具有初始松弛条件的、其输入输出满足线性常系数差分方程的一类系统表明是线性时不变系统中一种重要的子系统.讨论了这类差分方程的递推解,并定义了 FIR 和 IIR 两类系统.

对线性时不变系统分析和表示的一种重要方法是它们的频域表示法.考虑一个系统对一个复指数输入的响应而给出了频率响应的定义.然后,把冲激响应和频率响应之间的关系表示成一对傅里叶变换对.

我们把注意力放在傅里叶变换表示的很多性质上,并讨论了各种有用的傅里叶变换对.表 2.1 和表 2.2 综合了这些性质和定理,表 2.3 包括了几个有用的傅里叶变换对.

本章以对离散时间随机信号作简单介绍而结束.在后续章节中还将对这些基本概念和结果作进一步阐述和应用.

虽然本章的内容是不经直接对照连续时间信号而给出的,但是离散时间信号处理问题中一个重要的类别还是经由采样这一类信号引起的.因此,在第三章将考虑连续时间信号和经由周期采样而得到的序列之间的关系.

习 题

- 2.1 有一任意线性系统,其输入为 $x[n]$,输出为 $y[n]$.证明:若对所有 n , $x[n]=0$,则 $y[n]$ 对所有 n 也必须为零.
- 2.2 利用线性的定义[式(2.25)],证明:理想延时系统(例 2.1)和滑动平均系统(例 2.2)都是线性系统.
- 2.3 对于下列系统,试判断系统是否是(1)稳定的,(2)因果的,(3)线性的,(4)时不变的,和(5)无记忆的.
 - (a) $T(x[n])=g[n]x[n]$, $g[n]$ 已知
 - (b) $T(x[n])=\sum_{k=-n_0}^n x[k]$
 - (c) $T(x[n])=\sum_{k=-n_0}^{n+n_0} x[k]$
 - (d) $T(x[n])=x[n-n_0]$
 - (e) $T(x[n])=e^{x[n]}$
 - (f) $T(x[n])=ax[n]+b$
 - (g) $T(x[n])=x[-n]$
 - (h) $T(x[n])=x[n]+3u[n+1]$
- 2.4 图 P2.4 中系统 T 已知是时不变的,当对系统输入是 $x_1[n]$, $x_2[n]$ 和 $x_3[n]$ 时,系统响应分别是 $y_1[n]$, $y_2[n]$ 和 $y_3[n]$,如图所示.
 - (a) 确定系统 T 能否是线性的.

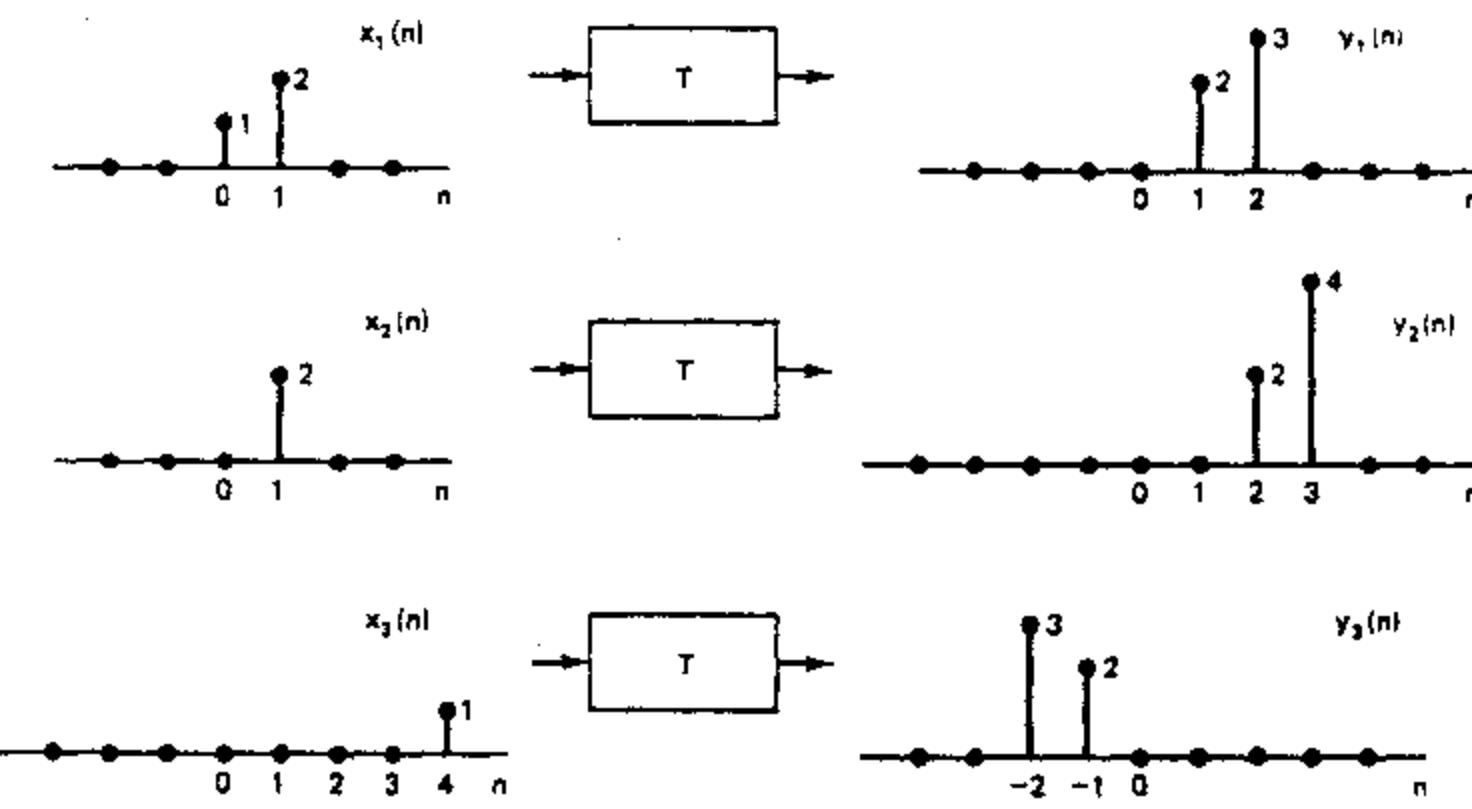


图 P2.4

(b) 如果系统 T 的输入 $x[n]$ 是 $\delta[n]$, 系统响应 $y[n]$ 是什么?

(c) 确定全部可能的输入 $x[n]$, 对于这些输入系统 T 的响应能唯一由已给出的信息来确定.

2.5 图 P2.5 中系统 L 已知是线性的, 图中示出三种输出信号 $y_1[n]$, $y_2[n]$ 和 $y_3[n]$ 分别是对输入信号 $x_1[n]$, $x_2[n]$ 和 $x_3[n]$ 的响应.

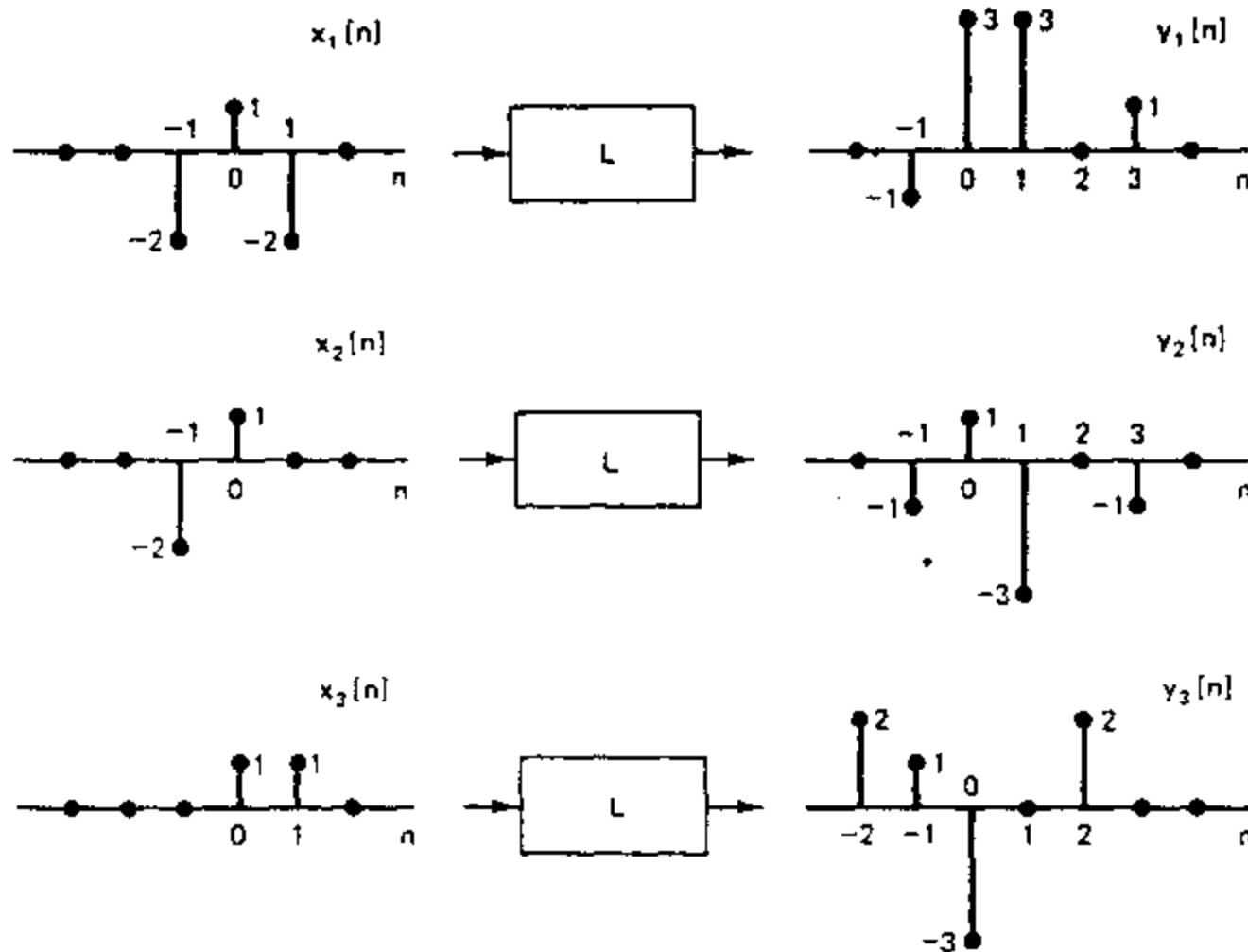


图 P2.5

(a) 确定系统 L 能否是时不变的.

(b) 如果系统 L 的输入 $x[n]$ 是 $\delta[n]$, 系统响应 $y[n]$ 是什么?

2.6 对图 P2.6 中每一对序列, 利用离散卷积求冲激响应为 $h[n]$ 的线性时不变系统对输入 $x[n]$ 的响

应.

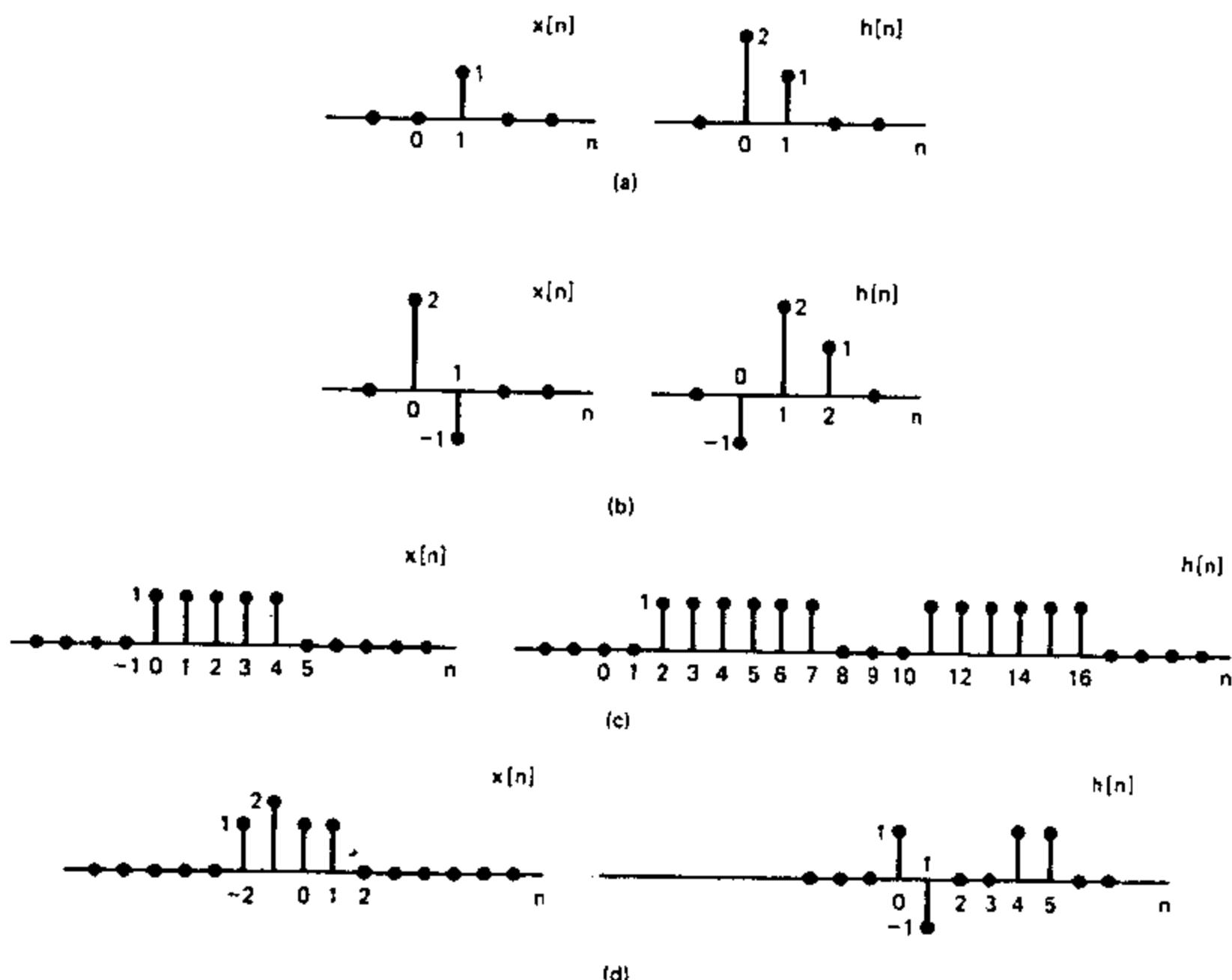


图 P2.6

- 2.7 一个线性时不变系统的冲激响应如图 P2.7 所示,求出并仔细画出该系统对输入 $x[n]=u[n-4]$ 的响应.

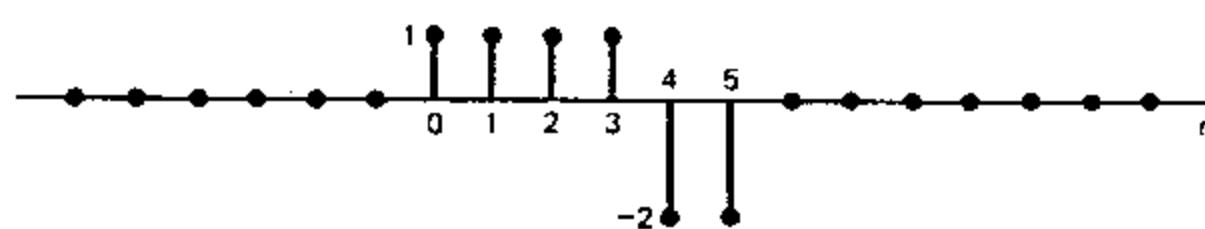


图 P2.7

- 2.8 考虑一个离散时间线性时不变系统,其冲激响应为 $h[n]$. 若输入 $x[n]$ 是一个周期序列,周期为 N , 即 $x[n]=x[n+N]$. 证明:输出 $y[n]$ 也是一个周期序列,周期为 N .

- 2.9 一个线性时不变系统冲激响应为

$$h[n] = \begin{cases} 1, & n \geq 0, \\ 0, & n < 0, \end{cases}$$

$$= u[n].$$

求该系统对输入 $x[n]$ 的响应. $x[n]$ 如图 P2.9 所示,并描述如下:

$$x[n] = \begin{cases} 0, & n < 0, \\ a^n, & 0 \leq n \leq N_1, \\ 0, & N_1 < n < N_2, \quad 0 < a < 1 \\ a^{n-N_2}, & N_2 \leq n \leq N_2 + N_1, \\ 0, & N_2 + N_1 < n. \end{cases}$$

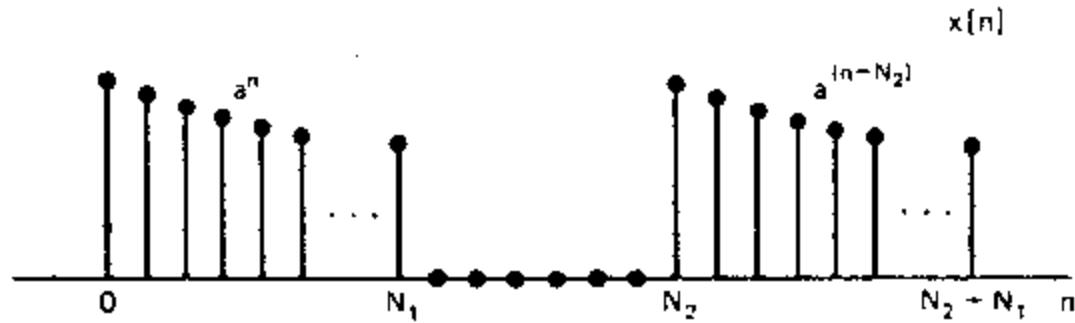


图 P2.9

- 2.10 (a) 已知一个线性时不变系统的冲激响应除去在区间 $N_0 \leq n \leq N_1$ 内均为零. 已知输入 $x[n]$ 除去在区间 $N_2 \leq n \leq N_3$ 内均为零. 其结果就是输出除去某一区间 $N_4 \leq n \leq N_5$ 内都为零. 试用 N_0, N_1, N_2 和 N_3 来确定 N_4 和 N_5 .
 (b) 若 $x[n]$ 除 N 个连续点外都为零, $h[n]$ 除 M 个连续点外也都是零, 试问对 $y[n]$ 不为零的最大连续点数是多少?

- 2.11 按卷积和直接计算, 求冲激响应为 $h[n]$ 的线性时不变系统的阶跃响应, $h[n]$ 给出如下:

$$h[n] = a^{-n} u[-n], \quad 0 < a < 1.$$

- 2.12 一个系统的因果性由 2.2.4 节定义. 从该定义证明: 对一个线性时不变系统, 因果性就意味着 $n < 0, h[n] = 0$. 一种方法就是要证明, 如果 $n < 0, h[n] \neq 0$, 那么该系统就不可能是因果的. 同时也要证明: 如果对 $n < 0$, 冲激响应是零的话, 那么该系统就必定是因果的.

- 2.13 在 2.5 节中曾提到, 齐次差分方程

$$\sum_{k=0}^N a_k y_h[n-k] = 0 \quad (\text{P2.13-1})$$

的解具有如下形式

$$y_h[n] = \sum_{m=1}^N A_m z_m^n, \quad (\text{P2.13-2})$$

式中 A_m 是任意的, z_m 是下列多项式的根

$$\sum_{k=0}^N a_k z^{-k} = 0, \quad (\text{P2.13-3})$$

也即

$$\sum_{k=0}^N a_k z^{-k} = \prod_{m=1}^N (1 - z_m z^{-1}). \quad (\text{P2.13-4})$$

(a) 求下列差分方程齐次解的一般形式

$$y[n] - \frac{3}{4}y[n-1] + \frac{1}{8}y[n-2] = 2x[n-1] \quad (\text{P2.13-5})$$

(b) 若 $y[-1] = 1, y[0] = 0$, 求齐次解中的系数 A_m .

(c) 现在考虑如下差分方程

$$y[n] - y[n-1] + \frac{1}{4}y[n-2] = 2x[n-1]. \quad (\text{P2.13-6})$$

如果齐次解仅包含式(P2.13-2)中的那些项, 证明: 初始条件 $y[-1] = 1$ 和 $y[0] = 0$ 不能被满足.

(d) 如果式(P2.13-3)中有两个根是相同的,那么代替式(P.2.13-2)的 $y_h[n]$ 将是

$$y_h[n] = \sum_{m=1}^{N-1} A_m z_m^n + n B_1 z_1^n, \quad (\text{P2.13-7})$$

式中已假定 z_1 是重根. 利用式(P.2.13-7)对式(P2.13-6)求 $y_h[n]$ 的一般形式. 明确地证明, 你的答案在满足 $x[n]=0$ 时满足式(P2.13-6).

(e) 若 $y[-1]=1$ 和 $y[0]=0$, 求在(d)中所求得的齐次解中的系数 A_1 和 B_1 .

2.14 有线性常系数差分方程如下:

$$y[n] - \frac{3}{4}y[n-1] + \frac{1}{8}y[n-2] = 2x[n-1].$$

当 $x[n]=\delta[n]$ 和 $y[n]=0, n < 0$, 求 $y[n]$.

2.15 有一系统输入为 $x[n]$, 输出为 $y[n]$, 且满足下列差分方程

$$y[n] = ny[n-1] + x[n].$$

该系统是因果的且满足初始松弛条件, 即若 $n < n_0, x[n]=0$, 则有 $y[n]=0, n < n_0$.

(a) 若 $x[n]=\delta[n]$, 求 $y[n]$ (对全部 n).

(b) 系统是线性的吗? 试证明之.

(c) 系统是时不变的吗? 试证明之.

2.16 有一系统输入为 $x[n]$, 输出为 $y[n]$, 输入/输出关系由下列两个性质决定:

$$1. y[n] - ay[n-1] = x[n]$$

$$2. y[0] = 1$$

(a) 确定系统是否是时不变的.

(b) 确定系统是否是线性的.

(c) 假定差分方程(性质 1)仍然不变, 而 $y[0]=0$, 这会改变(a)还是改变(b)的答案?

2.17 一个因果线性时不变系统由下列差分方程描述:

$$y[n] - 5y[n-1] + 6y[n-2] = 2x[n-1].$$

(a) 求系统的齐次响应, 也即在 $x[n]=0$ 时, 对全部 n 可能的输出.

(b) 求系统的冲激响应.

(c) 求系统的阶跃响应.

2.18 (a) 一线性时不变系统, 其输入输出满足如下差分方程

$$y[n] - \frac{1}{2}y[n-1] = x[n] + 2x[n-1] + x[n-2].$$

求其频率响应 $H(e^{j\omega})$.

(b) 有一系统, 其频率响应为

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega} + e^{-j3\omega}}{1 + \frac{1}{2}e^{-j\omega} + \frac{3}{4}e^{-j2\omega}}.$$

写出表征该系统的差分方程.

2.19 下列离散时间信号中的哪些能够是任何稳定的 LTI 系统的特征函数?

(a) $5^n u[n]$

(b) $e^{j2\omega}$

(c) $e^{j\omega} + e^{j2\omega}$

(d) 5^n

(e) $5^n \cdot e^{j2\omega}$

2.20 一线性时不变系统的冲激响应为

$$h[n] = \left(\frac{j}{2} \right)^n u[n], \quad j = \sqrt{-1}$$

求稳态响应,即对激励为 $x[n] = \cos(\pi n)u[n]$ 时,在大 n 值时的响应.

- 2.21 有三个系统 A, B 和 C , 其输入输出如图 P2.21 所示. 试确定是否每一个系统都能是 LTI 的. 若你的答案是是的, 那么请指出是否还有另外的 LTI 系统也具有给出的输入/输出对关系. 清楚地说明你的答案.

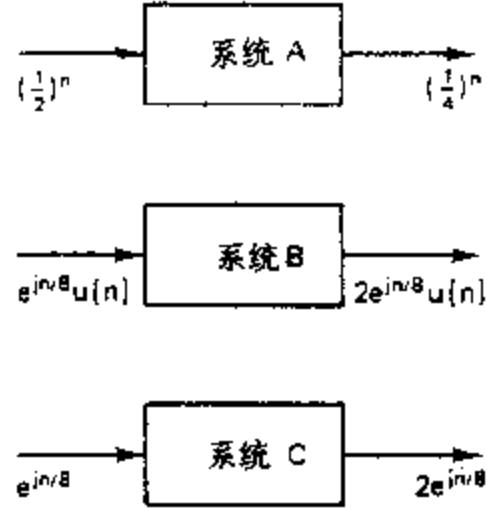


图 P2.21

- 2.22 在图 P2.22 的非线性系统中, 输出 M 是

$$M = \max_n \left| \sum_{k=0}^{10} \left(\frac{1}{2} \right)^k x^2[n-k] \right|,$$

这里 $|\cdot|$ 记作幅度. 因为 M 是在全部时间上(也即全部 n)的最大值, 所以是一个常数.

假设 $x[n]$ 是一个复指数为 $x[n] = e^{j\omega_0 n}$, 对于 ω_0 的不同选取, M 是不同的; 也就是说, 对于这一类输入, M 是 ω_0 的函数, 记作 $M(\omega_0)$.

确定 $M(\omega_0)$ 对 ω_0 来说是否是周期的, 若是, 求出该周期.

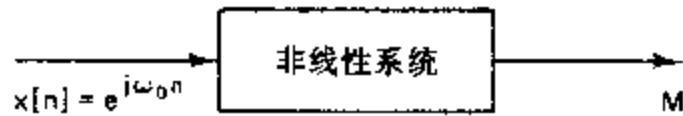


图 P2.22

- 2.23 一个线性时不变系统的频率响应为

$$H(e^{j\omega}) = \begin{cases} e^{-j\omega_0}, & |\omega| < \frac{2\pi}{16} \left(\frac{3}{2} \right), \\ 0, & \frac{2\pi}{16} \left(\frac{3}{2} \right) \leq |\omega| \leq \pi. \end{cases}$$

该系统的输入是一个周期 $N=16$ 的周期单位冲激串, 即

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[n+16k].$$

求系统的输出.

- 2.24 常用的一种数值运算称之为一阶差分, 定义为

$$y[n] = \nabla(x[n]) = x[n] - x[n-1],$$

这里 $x[n]$ 是输入, $y[n]$ 是一阶差分系统的输出.

- (a) 证明该系统是线性和时不变的.
- (b) 求该系统的冲激响应.
- (c) 求出并画出频率响应(幅度和相位).

(d) 证明若

$$x[n] = f[n] * g[n],$$

则

$$\nabla(x[n]) = \nabla(f[n]) * g[n] = f[n] * \nabla(g[n]),$$

式中 * 记作离散卷积.

(e) 当用一个系统与该一阶差分系统级联时, 能恢复出 $x[n]$, 求该系统的冲激响应, 即求 $h_i[n]$, 以使

$$h_i[n] * \nabla(x[n]) = x[n].$$

2.25 考虑图 P2.25 的系统.

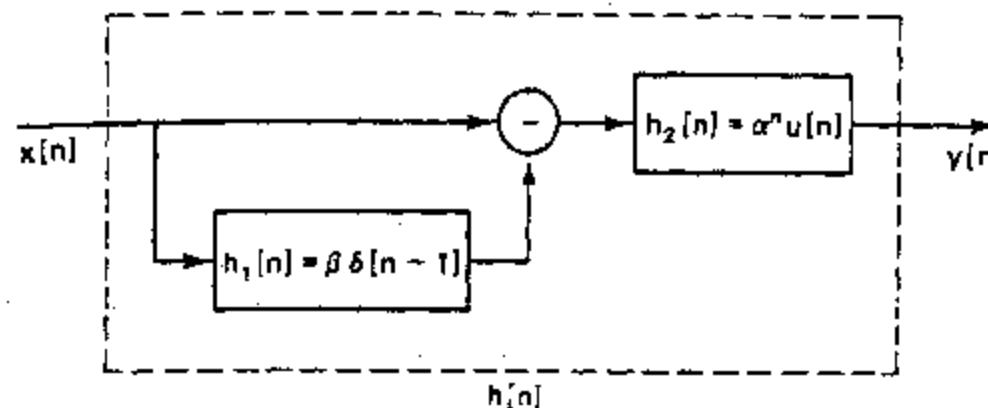


图 P2.25

- (a) 求整个系统的冲激响应 $h[n]$.
- (b) 求整个系统的频率响应.
- (c) 给出联系输出 $y[n]$ 和输入 $x[n]$ 的差分方程.
- (d) 该系统是因果的吗? 在什么条件下该系统是稳定的?

2.26 令 $H(e^{j\omega})$ 记作一个冲激响应为 $h[n]$ 的 LTI 系统的频率响应, 这里 $h[n]$ 一般是复数,

- (a) 利用式(2.92), 证明 $H^*(e^{-j\omega})$ 是冲激响应为 $h^*[n]$ 的系统的频率响应, 这里 * 记作复共轭.
- (b) 证明若 $h[n]$ 为实, 频率响应就是共轭对称的, 即 $H(e^{-j\omega}) = H^*(e^{j\omega})$.

2.27 若 $X(e^{j\omega}) = 1/(1 - ae^{-j\omega})$, $-1 < a < 0$, 求出并画出下列以 ω 为变量的函数.

- (a) $\Re(X(e^{j\omega}))$
- (b) $\Im(X(e^{j\omega}))$
- (c) $|X(e^{j\omega})|$
- (d) $\angle X(e^{j\omega})$

2.28 (a) 求该序列的傅里叶变换

$$r[n] = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq M, \\ 0, & \text{其它.} \end{cases}$$

(b) 考虑序列 $w[n]$

$$w[n] = \begin{cases} \frac{1}{2} \left(1 + \cos \frac{2\pi n}{M} \right), & 0 \leq n \leq M, \\ 0, & \text{其它.} \end{cases}$$

画出 $w[n]$ 并利用 $r[n]$ 的傅里叶变换来表示 $w[n]$ 的傅里叶变换. 提示: 先用 $r[n]$ 和复指数 $e^{j(2\pi n/M)}$ 和 $e^{-j(2\pi n/M)}$ 来表示 $w[n]$.

(c) 画出 $R(e^{j\omega})$ 和 $W(e^{j\omega})$ 的幅度特性.

2.29 令 $X(e^{j\omega})$ 是 $x[n]$ 的傅里叶变换, 利用傅里叶变换综合式或分析式[式(2.112)和式(2.113)]证明:

(a) $x^*[n]$ 的傅里叶变换是 $X^*(e^{-j\omega})$;

(b) $x^*[n]$ 的傅里叶变换是 $X^*(e^{j\omega})$.

2.30 对 $x[n]$ 为实序列, 证明: 表 2.1 性质 7 直接可由性质 1 得到, 而性质 8—11 可直接由性质 7 得到.

2.31 在 2.9 节中陈述的几个傅里叶变换定理都未作证明, 请利用傅里叶分析或综合式[式(2.112)和式(2.113)], 证明表 2.2 中定理 1—5 的真实性.

2.32 在 2.9.6 小节中直观地证明了

$$Y(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega})X(e^{j\omega}), \quad (\text{P2.32-1})$$

$Y(e^{j\omega})$, $H(e^{j\omega})$ 和 $X(e^{j\omega})$ 是一个线性时不变系统的输出 $y[n]$ 、冲激响应 $h[n]$ 和输入 $x[n]$ 的傅里叶变换; 也即

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k]. \quad (\text{P2.32-2})$$

利用式(P2.32-2)给出的卷积和的傅里叶变换证明式(P2.32-1).

2.33 将傅里叶综合式式(2.112)应用到式(2.151)中, 并利用表 2.2 中的定理 3, 说明调制定理(表 2.2 中定理 7)的真实性.

2.34 令 $x[n]$ 和 $y[n]$ 为复序列, $X(e^{j\omega})$ 和 $Y(e^{j\omega})$ 为它们的傅里叶变换.

(a) 利用卷积定理(表 2.2 中定理 6)以及表 2.1 中适当的性质, 求一个序列, 其傅里叶变换是 $X(e^{j\omega})Y^*(e^{j\omega})$, 并用 $x[n]$ 和 $y[n]$ 来表示该序列.

(b) 利用(a)的结果, 证明

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]y^*[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})Y^*(e^{j\omega})d\omega. \quad (\text{P2.34})$$

式(P2.34)是 2.9.5 节中给出的帕斯瓦尔定理更一般的形式.

(c) 利用式(P2.34), 求下列和式的数值解.

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\pi n/4)}{2\pi n} \frac{\sin(\pi n/6)}{5\pi n}.$$

2.35 令 $X(e^{j\omega})$ 是信号 $x[n]$ 的傅里叶变换, 如图 P2.35 所示. 不需明确求出 $X(e^{j\omega})$ 而完成下列计算.

(a) 求 $X(e^{j\omega})|_{\omega=0}$.

(b) 求 $\Im X(e^{j\omega})$.

(c) 求 $\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})d\omega$.

(d) 求出并画出傅里叶变换是 $\Re\{X(e^{j\omega})\}$ 的信号.

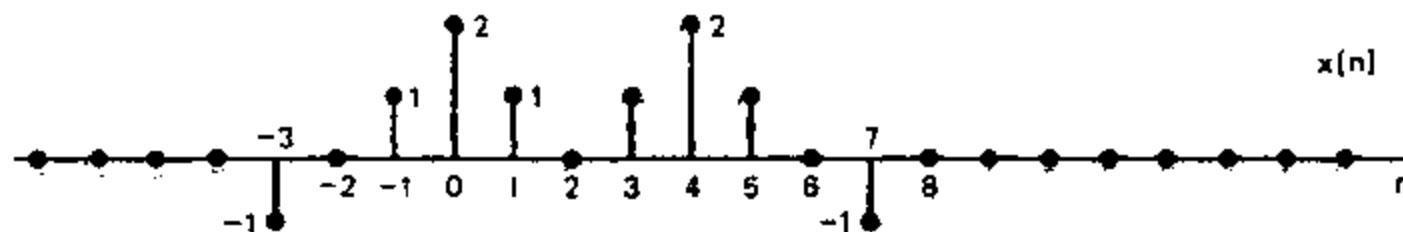


图 P2.35

2.36 令 $x[n]$ 和 $X(e^{j\omega})$ 分别代表一个序列及其傅里叶变换, 利用 $X(e^{j\omega})$ 求 $y_r[n]$, $y_d[n]$ 和 $y_s[n]$ 的变换. 在每一种情况下, 相应于图 P2.36 所示的 $X(e^{j\omega})$ 画出 $Y(e^{j\omega})$.

(a) 采样器:

$$y_r[n] = \begin{cases} x[n], & n \text{ 为偶数} \\ 0, & n \text{ 为奇数} \end{cases}$$

(b) 压缩器:

$$y_d[n] = x[2n]$$

(c) 扩展器:

$$y_e[n] = \begin{cases} x[n/2], & n \text{ 为偶数} \\ 0, & n \text{ 为奇数} \end{cases}$$

注意: $y_e[n] = \frac{1}{2} (x[n] + (-1)^n x[n])$, 而 $-1 = e^{j\pi}$.

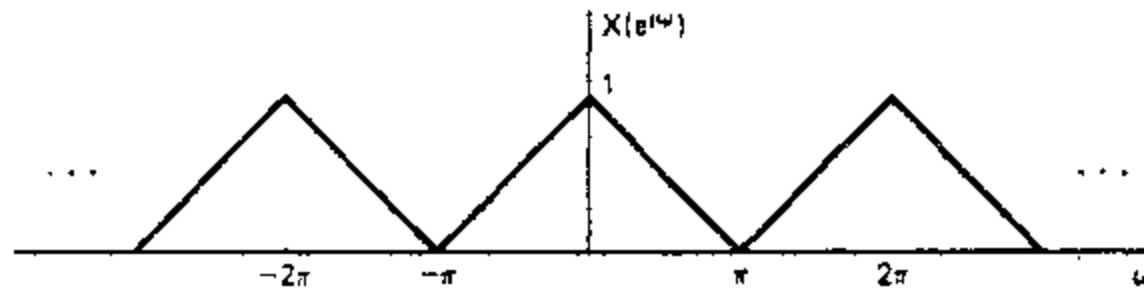


图 P2.36

2.37 对图 P2.37 系统, 当输入 $x[n] = \delta[n]$ 时, 求输出 $y[n]$, $H(e^{j\omega})$ 是一个理想低通滤波器, 即

$$H(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & |\omega| < \pi/2, \\ 0, & \pi/2 < |\omega| \leq \pi. \end{cases}$$

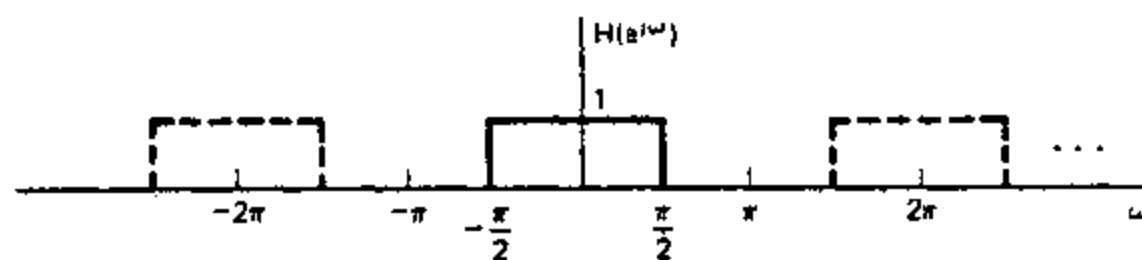
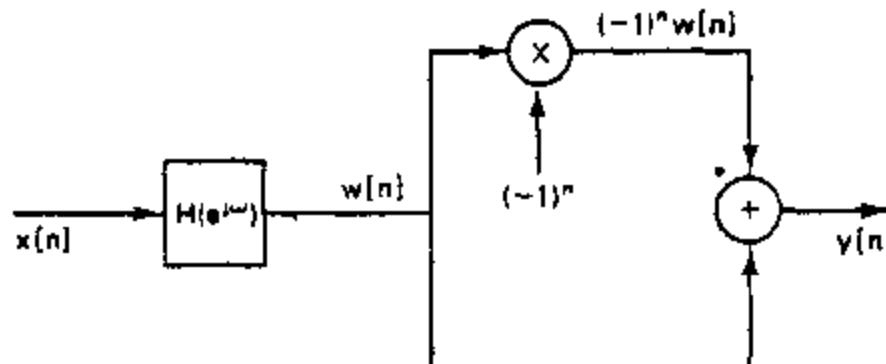


图 P2.37

2.38 令 $x[n]$ 和 $y[n]$ 都是平稳、不相关随机信号, 证明: 如果

$$w[n] = x[n] + y[n],$$

那么

$$m_w = m_x + m_y \text{ 和 } \sigma_w^2 = \sigma_x^2 + \sigma_y^2.$$

2.39 令 $e[n]$ 是一个白噪声序列, $s[n]$ 是一个与 $e[n]$ 不相关的序列, 证明序列

$$y[n] = s[n]e[n],$$

也是白噪声序列, 即

$$E\{y[n]y[n+m]\} = A\delta[m],$$

式中 A 为一常数.

2.40 令 $x[n]$ 是一个实平稳白噪声过程, 其均值为零, 方差为 σ_x^2 . 令 $y[n]$ 是一个冲激响应为 $h[n]$ 的线性时不变系统当输入为 $x[n]$ 时相应的输出, 证明:

$$(a) E\{x[n]y[n]\} = h[0]\sigma_x^2$$

$$(b) \sigma_y^2 = \sigma_x^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} h^2[n]$$

2.41 令 $x[n]$ 是一个实平稳白噪声序列, 均值为零, 方差为 σ_x^2 . 将 $x[n]$ 输入到两个因果的线性离散时间时不变系统的级联上去, 如图 P2.41 所示.

$$(a) \sigma_y^2 = \sigma_x^2 \sum_{k=0}^{\infty} h_1^2[k] \text{ 成立吗?}$$

$$(b) \sigma_w^2 = \sigma_y^2 \sum_{k=0}^{\infty} h_2^2[k] \text{ 成立吗?}$$

(c) 令 $h_1[n] = a^n u[n]$, $h_2[n] = b^n u[n]$. 求图 P2.41 整个系统的冲激响应, 并由此求出 σ_w^2 . 如果你在 (b) 中的答案是成立, 那么是否与 (c) 的结果一致?

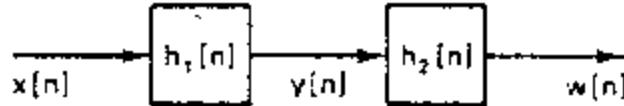


图 P2.41

2.42 有时关心的是一个线性时不变系统在其输入突然加一个随机信号时, 系统的统计行为. 这样一种情况如图 P2.42 所示.

令 $x[n]$ 是一个平稳白噪声过程, 那么系统的输入 $w[n]$ 就由下式给出

$$w[n] = \begin{cases} x[n], & n \geq 0, \\ 0, & n < 0, \end{cases}$$

$w[n]$ 是一个非平稳过程, 输出 $y[n]$ 也是非平稳的.

- (a) 利用输入的均值导出输出均值的表达式.
- (b) 导出输出自相关序列 $\phi_{yy}[n_1, n_2]$ 的表达式.
- (c) 证明: 对于大的 n 值, 在 (a) 和 (b) 中导出的公式趋近于平稳输入的结果.
- (d) 假定 $h[n] = a^n u[n]$. 利用输入的均值和均方值求输出的均值和均方值. 画出这些参数作为 n 的函数的依赖关系.

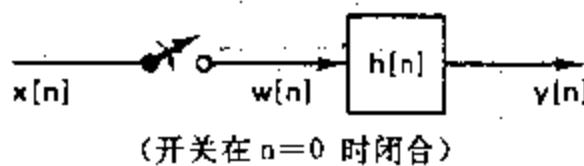


图 P2.42

2.43 考虑一个随机过程 $x[n]$, 它是图 P2.43 所示线性时不变系统的响应. 图中 $w[n]$ 代表一个实的零均值平稳白噪声过程, 且 $E\{w^2[n]\} = \sigma_w^2$.

- (a) 用 $\phi_{xx}[n]$ 或 $\Phi_{xx}(e^{j\omega})$ 表示 $\mathcal{E}\{x^2[n]\}$.
- (b) 求 $x[n]$ 的功率密度谱 $I_{xx}(e^{j\omega})$.
- (c) 求 $x[n]$ 的自相关函数 $\phi_{xx}[n]$.

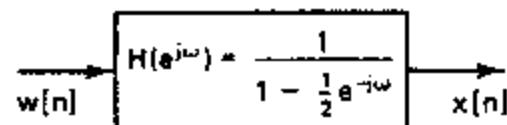


图 P2.43

2.44 考虑一个线性时不变系统, 其冲激响应 $h[n]$ 是实的. 假设系统对两个输入 $x[n]$ 和 $v[n]$ 的响应是

$y[n]$ 和 $z[n]$, 如图 P2.44 所示.

在图中输入 $x[n]$ 和 $v[n]$ 均为实的零均值平稳随机过程, 其自相关函数为 $\phi_{xx}[n]$ 和 $\phi_{vv}[n]$, 互相关函数为 $\phi_{xv}[n]$, 功率谱为 $\Phi_{xx}(e^{j\omega})$ 和 $\Phi_{vv}(e^{j\omega})$, 以及互功率谱为 $\Phi_{xv}(e^{j\omega})$.

(a) 已知 $\phi_{xx}[n]$, $\phi_{vv}[n]$, $\phi_{xv}[n]$, $\Phi_{xx}(e^{j\omega})$, $\Phi_{vv}(e^{j\omega})$ 和 $\Phi_{xv}(e^{j\omega})$, 求 $y[n]$ 和 $z[n]$ 的互功率谱 $\Phi_{yz}(e^{j\omega})$, 这里 $\Phi_{yz}(e^{j\omega})$ 定义为

$$\phi_{yz}[n] \leftrightarrow \Phi_{yz}(e^{j\omega}),$$

且 $\phi_{yz}[n] = E(y[n]z[k-n])$.

(b) 互功率谱 $\Phi_{xz}(e^{j\omega})$ 总是非负的吗? 即对所有 ω , $\Phi_{xz}(e^{j\omega}) \geq 0$? 试证明你的答案.

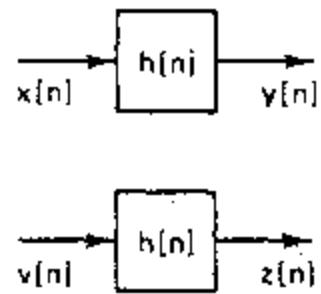


图 P2.44

第三章 连续时间信号的采样

3.0 引言

虽然离散时间信号出现在很多情况之中,但是最常见的还是作为连续时间信号的表示而出现的。这部分地是由于连续时间信号的处理往往是经由采样得到的离散时间序列的处理来完成的缘故。而在某些合理条件限制下,一个连续时间信号也确实能用其样本来完全给予表示。本章将详细讨论周期采样的过程,包括当信号不是带限或采样率不够高时所导致的混叠问题。其中最重要的就是连续时间信号的处理可以通过采样、离散时间处理以及后续的连续时间信号的重构等过程来实现。

3.1 周期采样

虽然有其它的一些可能性(见 Steiglitz, 1965; Oppenheim and Johnson, 1972),但是获得一个连续时间信号的离散时间表示的典型方法还是通过周期采样,这里由连续时间信号 $x_c(t)$ 得到的样本序列是按照如下关系构成的:

$$x[n] = x_c(nT), \quad -\infty < n < \infty. \quad (3.1)$$

在式(3.1)中, T 是采样周期,而它的倒数 $f_s = 1/T$ 是采样频率,即每秒内的样本数。

我们把实现式(3.1)的系统称为理想连续时间到离散时间(C/D)转换器,其方框图如图 3.1 所示。作为一个例子,我们曾在图 2.2 中示出了一个连续时间语音波形 $x_c(t)$ 和其相应的样本序列 $x[n]$ 之间的关系。

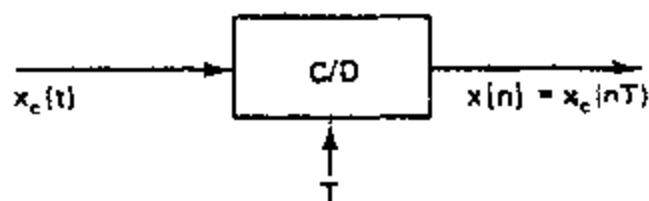


图 3.1 一个理想连续到离散(C/D)转换器方框图。

在实际装置中,采样往往是用模拟到数字(A/D)转换器来实现的。这样的系统可以看作是对理想 C/D 转换器的近似。在实现或者选择一个 A/D 转换器时有一些重要的考虑。其中包括输出样本的量化、线性度、是否需要采样保持电路以及采样率的极限等等。量化效应将在 3.7.2 节及 3.7.3 节作简要的讨论。A/D 转换器的其它一些实际问题已超出本书范围。

采样一般是不可逆的;也就是说,已知输出 $x[n]$,一般不可能恢复 $x_c(t)$,即采样器的输入。这是因为有很多连续时间信号都有可能产生相同的输出样本序列。采样中固有的模糊度就是信号处理中主要关心的问题。所幸的是限制采样器的输入信号类别有可能除掉

这一模糊度.

在数学上以两步来表示采样过程是方便的,如图 3.2(a)所示. 它由一个冲激串调制器紧跟着一个由冲激串到序列的转换来构成. 图 3.2(b)示出了两个连续时间信号及其冲激串采样的结果. 图 3.2(c)是相应的输出序列. $x_c(t)$ 和 $x[n]$ 之间的本质差别在于: 在某种意义上 $x_c(t)$ 还是一个连续时间信号(即一个冲激串), 它除了在整倍数 T 的时刻以外都为零; 另一方面, 序列 $x[n]$ 是以整数变量 n 给出的, 事实上这就引入了时间归一化的过程, 也即 $x[n]$ 已没有任何明显的有关采样率的信息. 再者, $x_c(t)$ 的样本在 $x[n]$ 中是用有限数值来表示的, 而不是在 $x_c(t)$ 中以冲激面积来表示的.

应该强调, 图 3.2(a)仅是采样的一种数学上的表示, 而并不代表为实现采样而设计的任何具体电路或系统. 一片硬件能否构成对方框图 3.2(a)的近似那是第二位的问题.之所以要引入采样过程的这种表示, 是因为它能给出某一关键结果的简单推导, 以及经由这一途径而得到许多重要的细节和内涵, 而这些若从基于傅里叶变换公式运算的正规推导而获得则是困难的.

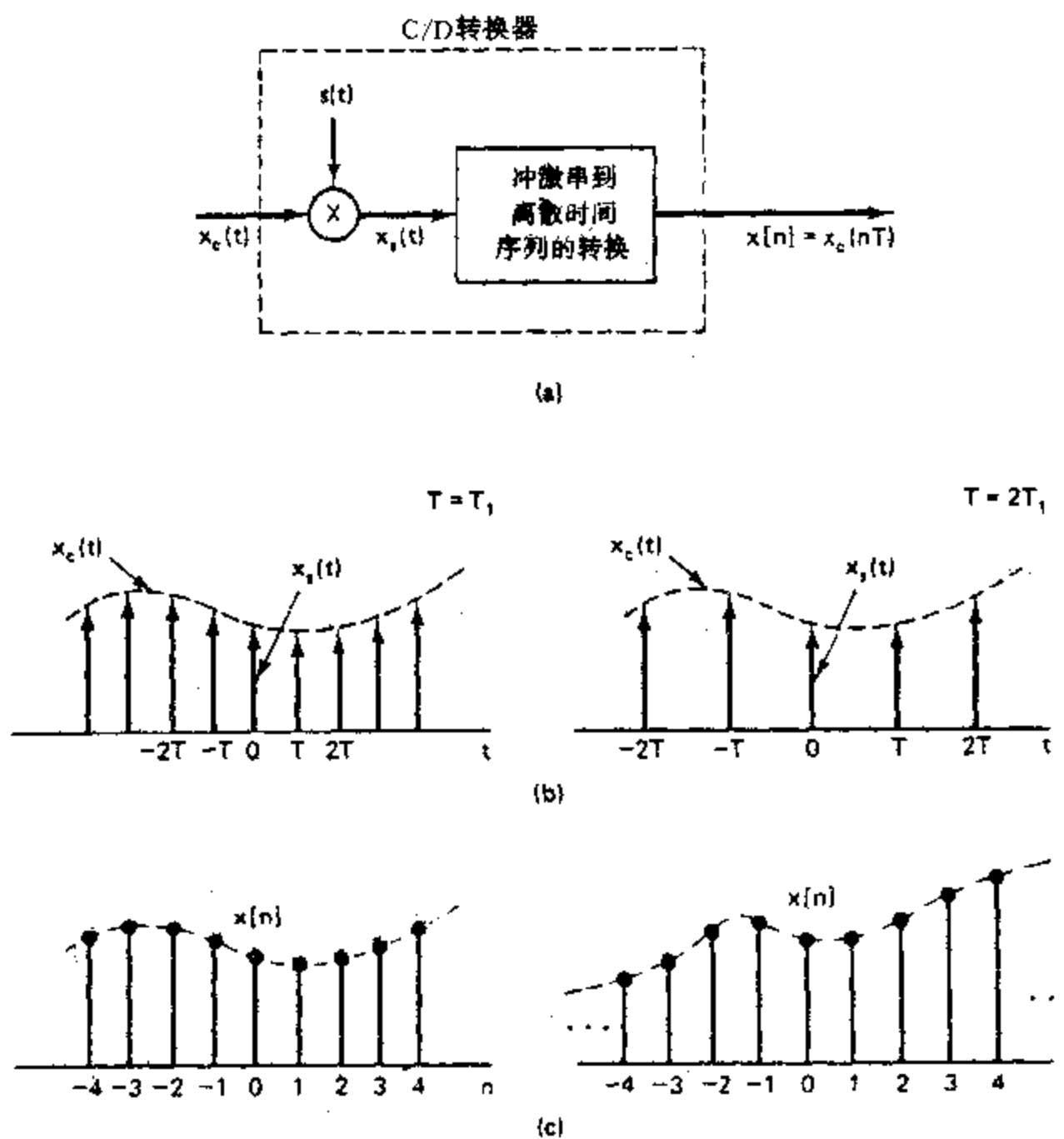


图 3.2 用周期冲激串采样紧跟着一个到离散时间序列的转换. (a) 总的系统. (b) 对于两个采样率的 $x_c(t)$, 虚线代表包络 $x_i(t)$. (c) 两个不同采样率的输出序列.

3.2 采样的频域表示

为了导出理想 C/D 转换器输入和输出之间的频域关系,首先考虑通过冲激串调制由 $x_c(t)$ 到 $x_s(t)$ 的转换. 调制信号 $s(t)$ 是一个周期冲激串

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-nT), \quad (3.2)$$

式中 $\delta(t)$ 是单位冲激函数或称狄拉克函数. 于是,

$$\begin{aligned} x_s(t) &= x_c(t)s(t) \\ &= x_c(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-nT). \end{aligned} \quad (3.3)$$

通过冲激函数的“筛选性质”, $x_s(t)$ 可表示为

$$x_s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_c(nT) \delta(t-nT). \quad (3.4)$$

现在来考虑 $x_s(t)$ 的傅里叶变换. 因为从式(3.3), $x_s(t)$ 是 $x_c(t)$ 和 $s(t)$ 的乘积, 那么 $x_s(t)$ 的傅里叶变换就是傅里叶变换 $X_c(j\Omega)$ 和 $S(j\Omega)$ 的卷积. 一个周期冲激串的傅里叶变换还是一个周期冲激串(Oppenheim and Willsky, 1983). 这样, $S(j\Omega)$ 为

$$S(j\Omega) = \frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - k\Omega_s), \quad (3.5)$$

式中 $\Omega_s = 2\pi/T$ 是采样频率, 以弧度/秒计. 因为

$$X_s(j\Omega) = \frac{1}{2\pi} X_c(j\Omega) * S(j\Omega),$$

式中 * 记作卷积运算, 可得:

$$X_s(j\Omega) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_c(j\Omega - k\Omega_s). \quad (3.6)$$

式(3.6)给出了在图 3.2(a)中冲激串调制器输入和输出傅里叶变换之间的关系. 由式(3.6)可见, $x_s(t)$ 的傅里叶变换是由 $x_c(t)$ 的傅里叶变换周期重复所构成的. $X_c(j\Omega)$ 被整数倍的采样频率所移位, 然后叠加起来就得到了该样本冲激串的周期傅里叶变换. 图 3.3 画出了冲激串采样的频域表示. 图 3.3(a)表示一个带限的傅里叶变换, 这里 $X_c(j\Omega)$ 中非零的最高频率分量是 Ω_N . 图 3.3(b)示出周期冲激串的 $S(j\Omega)$, 而图 3.3(c)则是 $X_s(j\Omega)$, 它就是 $X_c(j\Omega)$ 与 $S(j\Omega)$ 卷积的结果. 由图 3.3(c)很明显看出, 当

$$\Omega_s - \Omega_N > \Omega_N, \text{ 或 } \Omega_s > 2\Omega_N, \quad (3.7)$$

$X_c(j\Omega)$ 的重复部分不会重叠, 因此当它们按式(3.6)加在一起时, 在每一个整数倍的 Ω_s 上, 仍保持一个与 $X_c(j\Omega)$ 完全一样的复本(附加一个幅度尺度因子 $1/T$). 这样, $x_s(t)$ 就可以用一个理想低通滤波器从 $x_s(t)$ 中恢复出来. 这就如图 3.4(a)所示, 图中示出一个冲激串调制器紧跟着一个频率响应为 $H_s(j\Omega)$ 的线性时不变系统. 对于如图 3.4(b)的 $X_s(j\Omega)$, $X_s(j\Omega)$ 就如图 3.4(c)所示, 这里已假设 $\Omega_s > 2\Omega_N$. 因为

$$X_s(j\Omega) = H_s(j\Omega) X_c(j\Omega), \quad (3.8)$$

那么, 若 $H_s(j\Omega)$ 是一个增益为 T , 截止频率为 Ω_c 的理想低通滤波器的话, 且有

$$\Omega_N < \Omega_c < (\Omega_s - \Omega_N), \quad (3.9)$$

那么

$$X_r(j\Omega) = X_c(j\Omega), \quad (3.10)$$

这就如图 3.4(e)所示.

如果式(3.7)的不等式不满足,即若 $\Omega_0 \leq 2\Omega_N$, $X_c(j\Omega)$ 的重复部分互相重叠,以至于当它们相加在一起时, $X_r(j\Omega)$ 不再能用低通滤波恢复出来.这就如图 3.3(d)所示.在这种情况下,在图 3.4(a)中恢复出来的 $x_r(t)$ 就与一个称之为混叠失真了的原始连续时间输入有关.图 3.5 说明了在简单余弦信号情况下频域混叠的情况.图 3.5(a)示出该余弦信号的傅里叶变换

$$x_c(t) = \cos \Omega_0 t. \quad (3.11)$$

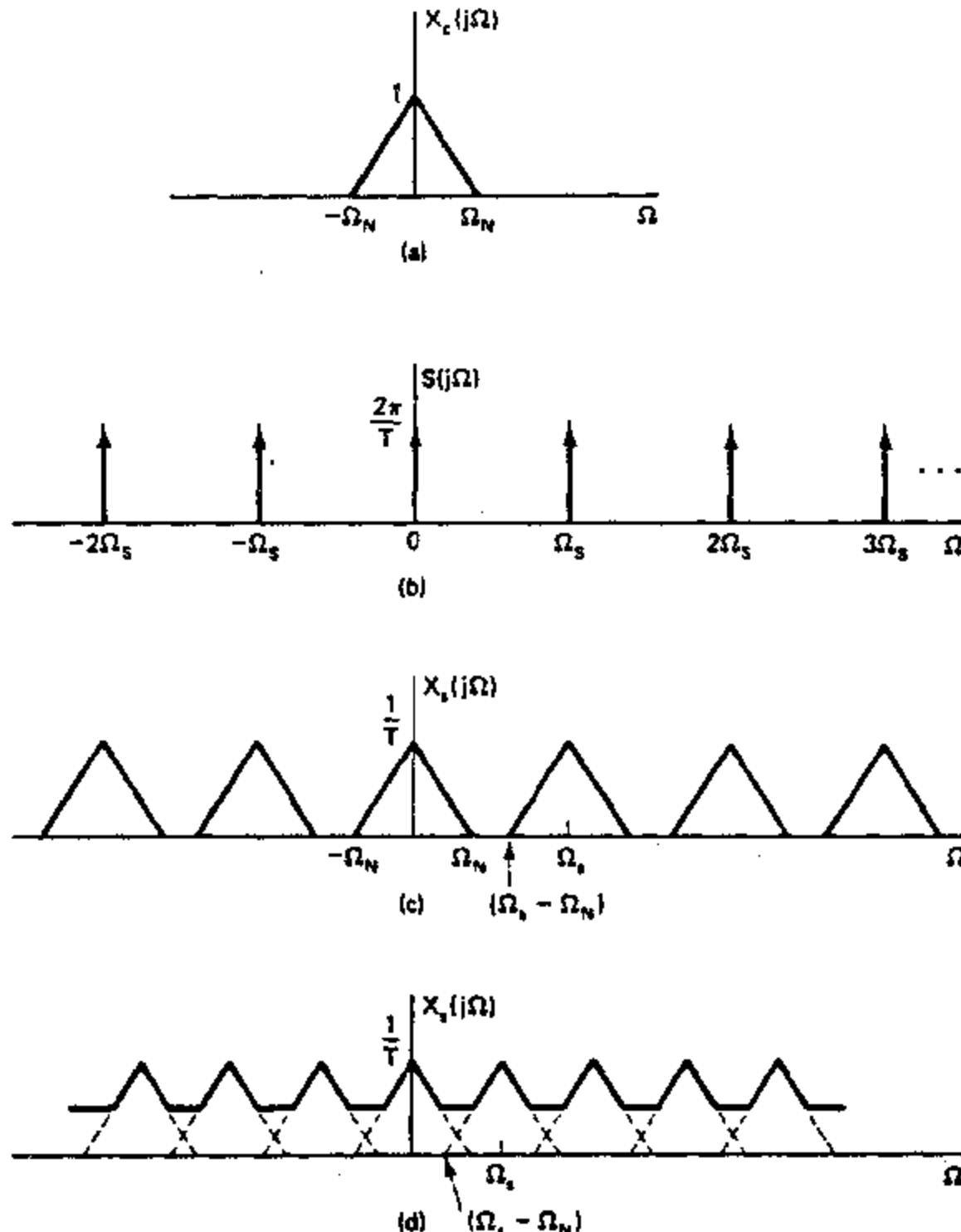


图 3.3 时域中采样在频域中的效果. (a) 原始信号频谱. (b) 采样函数频谱. (c) 已采样信号频谱 ($\Omega_0 > 2\Omega_N$). (d) 已采样信号频谱 ($\Omega_0 < 2\Omega_N$).

图中(b)是在 $\Omega_0 < \Omega_s/2$ 时, $x_c(t)$ 的傅里叶变换,而(c)是在 $\Omega_0 > \Omega_s/2$ 时, $x_c(t)$ 的傅里叶变换. (d)和(e)则分别相应于 $\Omega_0 < \Omega_s/2 = \pi/T$ 和 $\Omega_0 > \pi/T$ 时低通滤波器输出的傅里叶变换,在没有混叠时(b 和 d),恢复出的输出 $x_r(t)$ 为

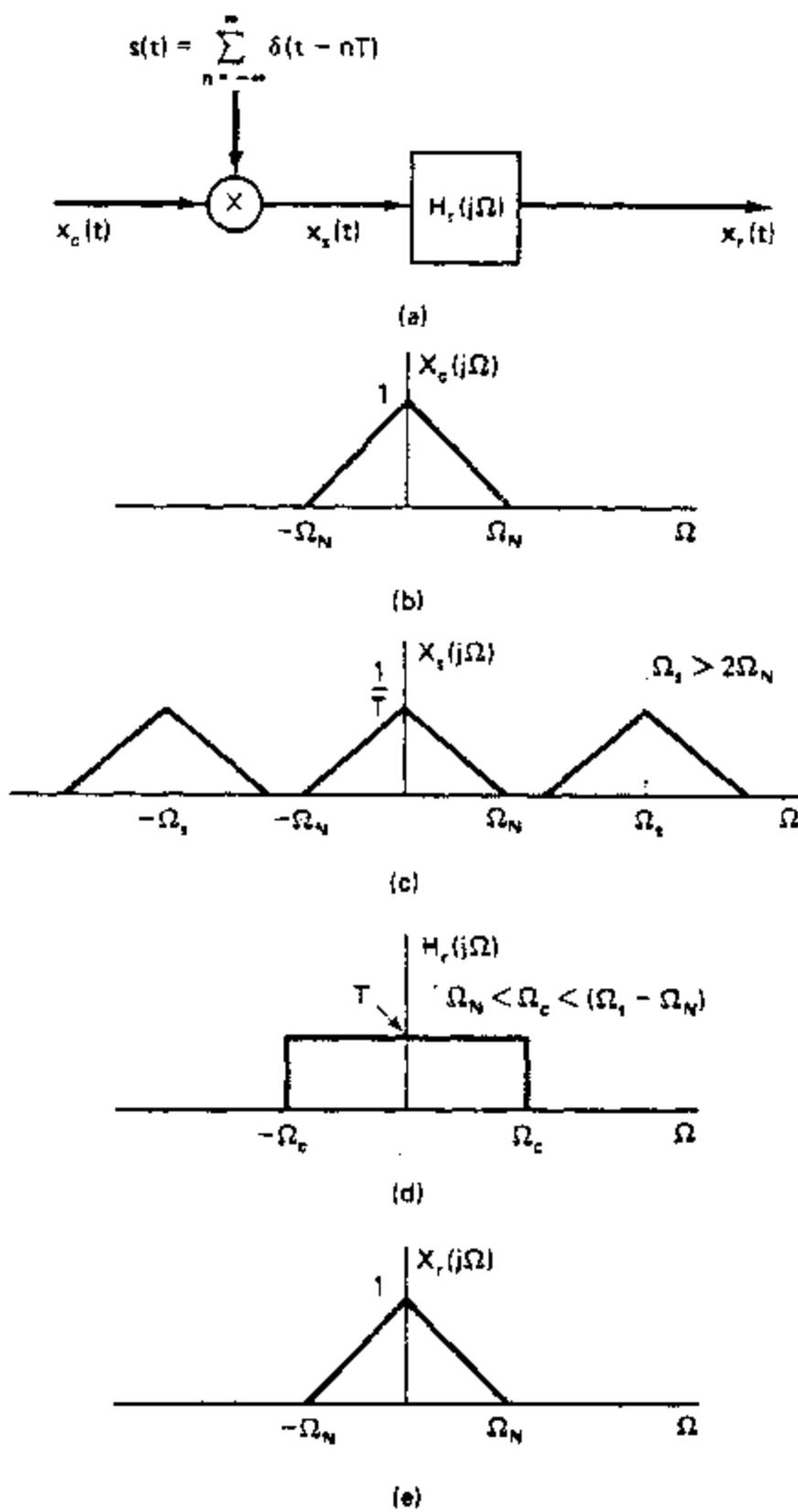


图 3.4 利用理想低通滤波器从样本中完全恢复原连续时间信号.

$$x_r(t) = \cos \Omega_0 t. \quad (3.12)$$

在有混叠时,则是

$$x_r(t) = \cos(\Omega_c - \Omega_0)t, \quad (3.13)$$

这就是说,作为采样和恢复的结果,高频信号 $\cos \Omega_0 t$ 已经被当作和低频信号 $\cos(\Omega_c - \Omega_0)t$ 是一样的东西(冒名顶替的). 这个讨论就是奈奎斯特采样定理(Nyquist, 1928; Shannon, 1949)的基础,现陈述如下:

奈奎斯特采样定理 令 $x_c(t)$ 是一个带限信号,

$$X_c(j\Omega) = 0, \quad \text{对于 } |\Omega| > \Omega_N. \quad (3.14a)$$

那么 $x_c(t)$ 能唯一由它的样本 $x[n] = x_c(nT)$, $n = 0, \pm 1, \pm 2 \dots$ 所决定,唯有

$$\Omega_c = \frac{2\pi}{T} > 2\Omega_N. \quad (3.14b)$$

频率 Ω_N 一般称为奈奎斯特频率,而频率 $2\Omega_N$ 称为奈奎斯特率. 采样频率必须大于奈奎斯

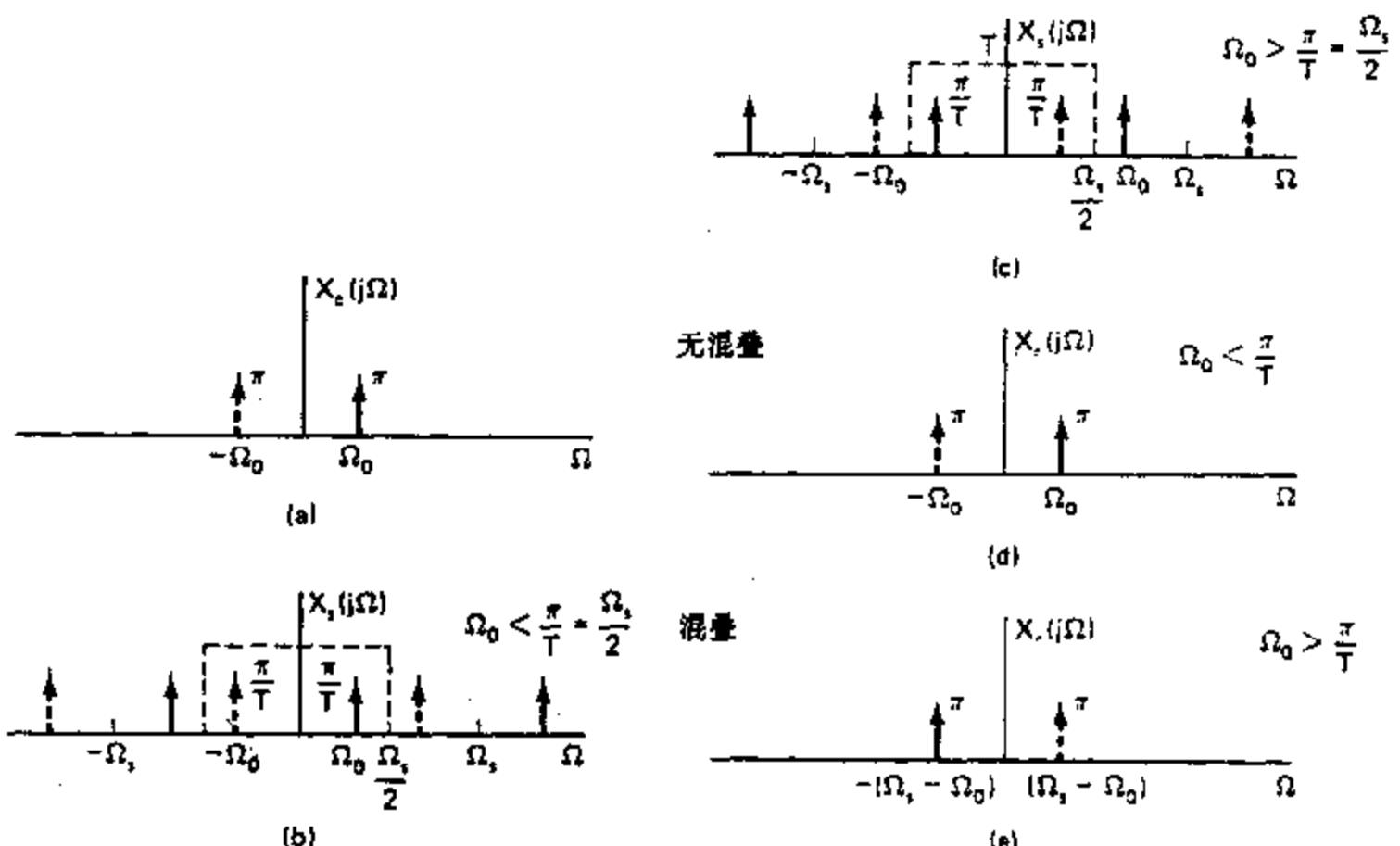


图 3.5 一个余弦信号采样中的混叠效果.

特率.

到目前为止, 我们仅仅考虑了图 3.2(a)中的冲激串调制器, 我们最终的目的是要用 $X_c(j\Omega)$ 和 $X_e(j\Omega)$ 来表示序列 $x[n]$ 的离散时间傅里叶变换 $X(e^{j\omega})$. 为此, 我们来考虑 $X_e(j\Omega)$ 的另一种表示式. 对式(3.4)进行傅里叶变换, 可得

$$X_e(j\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_e(nT) e^{-jn\Omega T}. \quad (3.15)$$

因为

$$x[n] = x_e(nT) \quad (3.16)$$

和

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-jn\omega}, \quad (3.17)$$

就可以得出

$$X_e(j\Omega) = X(e^{j\omega}) |_{\omega=\Omega T} = X(e^{j\Omega T}). \quad (3.18)$$

由式(3.6)和式(3.18), 结果为

$$X(e^{j\Omega T}) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_e(j\Omega - jk\Omega_s), \quad (3.19)$$

或等效为

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_e\left(j\frac{\omega}{T} - j\frac{2\pi k}{T}\right). \quad (3.20)$$

从式(3.18)到式(3.20)可以看出, $X(e^{j\omega})$ 只是将 $X_e(j\Omega)$ 作一个频率尺度变换的结果. 频率尺度因子由 $\omega = \Omega T$ 给出. 这种尺度变换也可以被认为是一种频率轴的归一化, 以使得

$X_c(j\Omega)$ 中的 $\Omega = \Omega_s$ 归一化到 $X(e^{j\omega})$ 中的 $\omega = 2\pi$. 由 $X_c(j\Omega)$ 变换到 $X(e^{j\omega})$ 存在一个频率归一化这一事实是与从 $x_c(t)$ 变换到 $x[n]$ 过程中存在着一个时间归一化的这一事实直接有关的. 明确地说, 如在图 3.2 中所见, $x_c(t)$ 在样本之间仍保留着一个与采样周期 T 相等的样本间隔. 与此对照, $x[n]$ 序列值之间的“间隔”总是等于 1, 这就是说, 时间轴已被因子 T 所归一化. 这样, 相应地在频域就应有一个因子为 $f_s = 1/T$ 的频率轴归一化.

3.3 由样本重构带限信号

根据采样定理, 若将一个连续时间带限信号的样本取得足够密, 就足以用样本来完全表示该信号, 这指的是该信号可以由样本及采样周期恢复出来. 冲激串调制对于了解由样本重构该连续时间带限信号的过程提供了一种简便的方法.

在 3.2 节中已经看到, 如果满足采样定理中的条件, 并且已调冲激串是用一个适当的低通滤波器来过滤的话, 那么该低通滤波器输出的傅里叶变换就一定与原连续时间信号 $x_c(t)$ 的傅里叶变换是一样的, 因此该滤波器的输出就是 $x_c(t)$. 如果已给出一个样本序列 $x[n]$, 就能形成一个冲激串 $x_r(t)$, 在 $x_r(t)$ 中令相继的冲激面积等于相继的各序列值, 即有

$$x_r(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \delta[t - nT]. \quad (3.21)$$

第 n 个样本值与在 $t = nT$ 的冲激有关, 其中 T 是与序列 $x[n]$ 有关的采样周期. 如果这个冲激串输入到频率响应为 $H_r(j\Omega)$ 和冲激响应为 $h_r(t)$ 的理想低通连续时间滤波器的话, 那么滤波器的输出就是

$$x_r(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] h_r(t - nT). \quad (3.22)$$

这样一个信号重构过程的方框图如图 3.6(a) 所示. 该理想重构滤波器的增益为 T (用以补偿式(3.19)和式(3.20)中的因子 $1/T$) 和截止频率为 Ω_c (Ω_c 位于 Ω_N 和 $\Omega_c - \Omega_N$ 之间). 截止频率一种方便和常用的选择是取 $\Omega_c = \Omega_s/2 = \pi/T$. 这种选取对任何 Ω_s 和 Ω_N 之间的关系都是适合的 (只要 $\Omega_s > 2\Omega_N$, 即避免混叠发生). 图 3.6(b) 示出该理想重构滤波器的频率响应. 对于截止频率为 π/T 时相应的冲激响应 $h_r(t)$ 就是 $H_r(j\Omega)$ 的傅里叶反变换, 由下式给出

$$h_r(t) = \frac{\sin \pi t/T}{\pi t/T}. \quad (3.23)$$

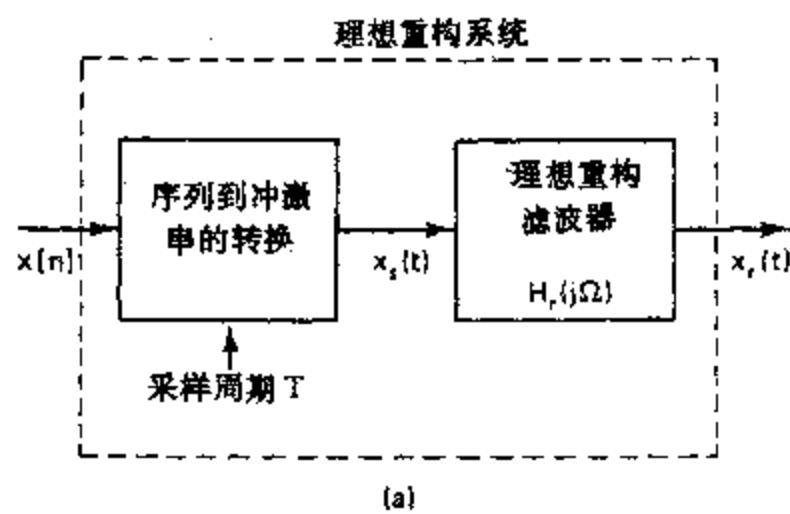
如图 3.6(c) 所示, 将式(3.23)代入式(3.22)立即可得

$$x_r(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \frac{\sin[\pi(t-nT)/T]}{\pi(t-nT)/T}. \quad (3.24)$$

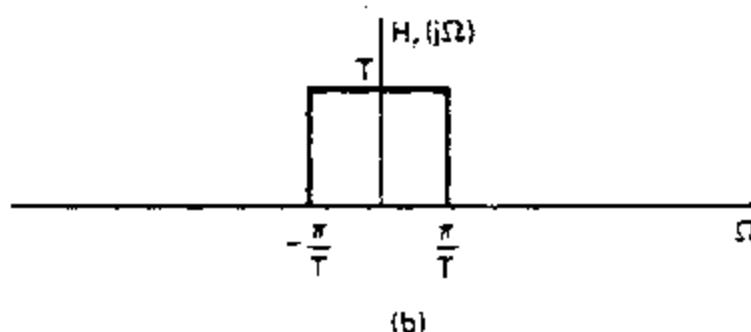
从 3.2 节频域中的证明已经看到, 若 $x[n] = x_c(nT)$, 这里 $X_c(j\Omega) = 0, |\Omega| \geq \pi/T$, 那么 $x_r(t)$ 就等于 $x_c(t)$. 但是, 仅根据式(3.24), 这个结果不是立即就一目了然的. 然而, 稍仔细地看看式(3.24)就会茅塞顿开. 首先考虑一下由式(3.23)给出的函数 $h_r(t)$, 注意到

$$h_r(0) = 1. \quad (3.25a)$$

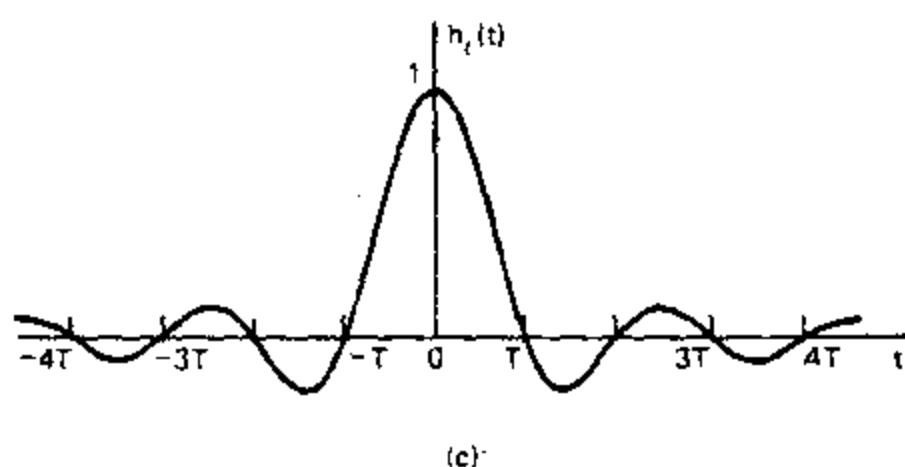
这是由洛皮塔尔 (L'Hopital) 法则得出的. 另外



(a)



(b)



(c)

图 3.6 (a) 理想带限信号重构系统的方框图. (b) 理想重构滤波器的频率响应.
(c) 理想重构滤波器的冲激响应.

$$h_r(nT) = 0, \quad n = \pm 1, \pm 2, \dots \quad (3.25b)$$

由式(3.25)和式(3.22)可得,若 $x[n] = x_r(nT)$, 则

$$x_r(mT) = x_r(mT) \quad (3.26)$$

m 为任意整数. 这就是说,由式(3.24)重构的信号在各采样时刻点上与原连续时间信号有相同的值,且与采样周期 T 无关.

图 3.7 中示出了一个连续时间信号 $x_r(t)$, 及其相应的已调冲激串. 图 3.7(c)则示出由下式中若干项

$$x[n] \frac{\sin[\pi(t-nT)/T]}{\pi(t-nT)/T}$$

及其所合成的重构信号 $x_r(t)$. 由该图可以想到,该理想低通滤波器在 $x_r(t)$ 的冲激之间进行内插以形成一个连续时间信号 $x_r(t)$. 由式(3.26),该合成信号在采样时刻点上是真正

的 $x_c(t)$ 的重构。如果不存在混叠，低通滤波器就内插出样本之间准确的值，这样就与采样和恢复过程的频域分析所得一致。

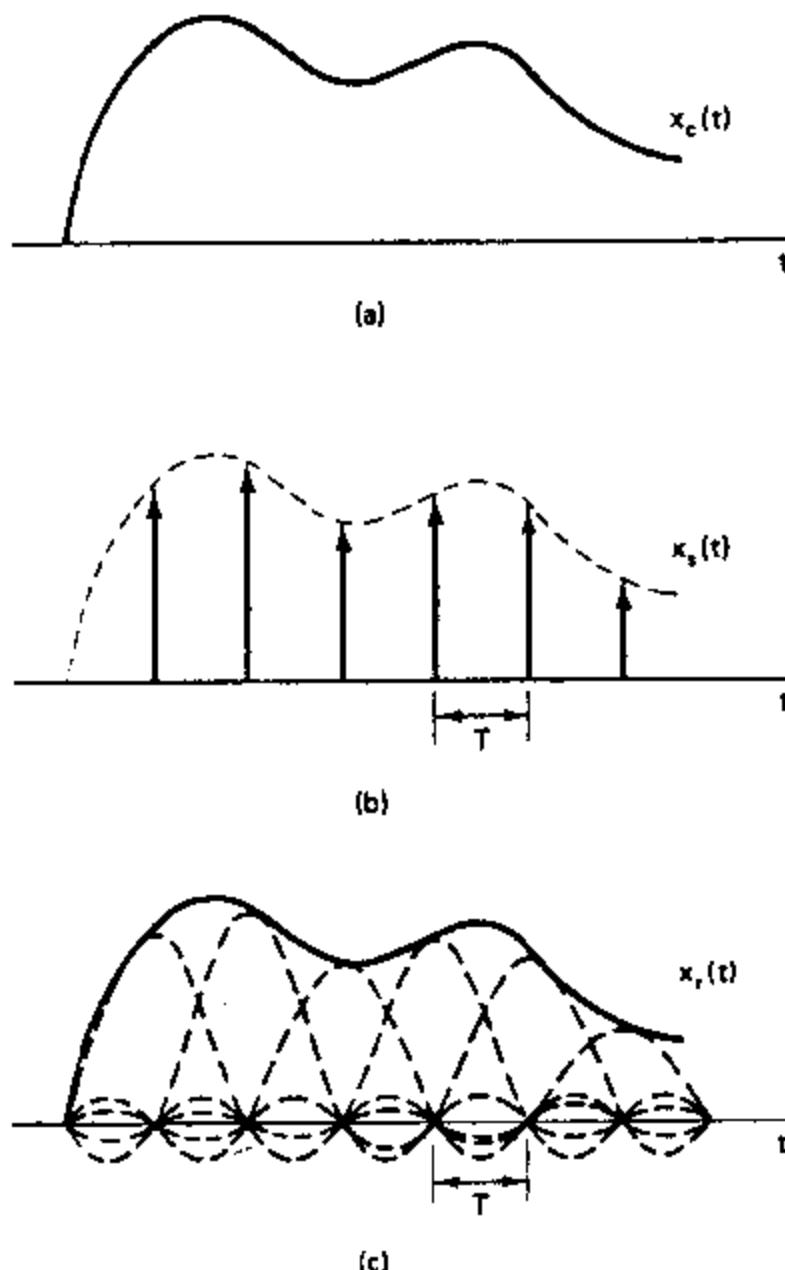


图 3.7 理想带限内插。

定义一个从样本序列重构一个带限信号的理想系统，并将该系统称为理想离散到连续时间(D/C)转换器，如图 3.8 所示，以此来归纳一下前面的讨论是很有用处的。如同已经看到的，该理想重构过程可以表示成序列到冲激串的转换[式(3.21)]，然后再紧跟着一个理想低通滤波器的过滤，所得输出就如式(3.24)所给出。序列到冲激串转换的中间步骤只是在导出式(3.24)和理解信号重构过程中一种数学上的便利。然而，一旦熟悉了这一过程，定义一个如图 3.8(b)所示的更为紧凑的表示是有用的，这里输入是序列，而输出就是由式(3.24)给出的连续时间信号 $x_r(t)$ 。

该理想 D/C 转换器的性质最容易在频域中看出。为了导出在频域的输入/输出关系，考虑一下式(3.22)或式(3.24)的傅里叶变换，这就是

$$X_r(j\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] H_r(j\Omega) e^{-j\Omega T n}.$$

将 $H_r(j\Omega)$ 从求和符号中提出，就能写成

$$X_r(j\Omega) = H_r(j\Omega) X(e^{j\Omega T}). \quad (3.27)$$

式(3.27)给出了该理想 D/C 转换器的频域描述。按照式(3.27)， $X(e^{j\omega})$ 是在频率上被重

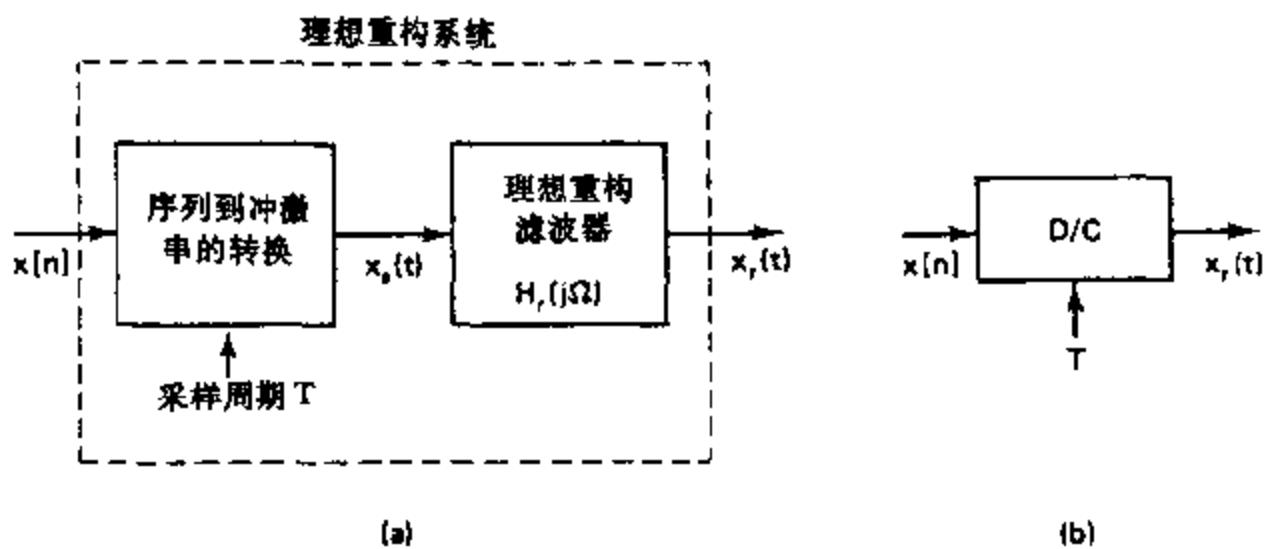


图 3.8 (a) 理想带限信号重构. (b) 理想 D/C 转换器的等效表示.

新标定了的(即用 ΩT 代替 ω). 理想低通滤波器 $H_r(j\Omega)$ 选取所得到的同期傅里叶变换 $X(e^{j\Omega T})$ 中的基带周期, 并补偿在采样中固有的 $1/T$ 幅度因子. 因此, 如果序列 $x[n]$ 已经由采样一个带限信号(以奈奎斯特采样率或更高的采样率)而得到, 那么重构信号 $x_r(t)$ 就一定等于原带限信号. 由式(3.27)也很清楚, 在任何情况下理想 D/C 转换器的输出总是将输入带限到低通滤波器的最高截止频率, 该截止频率一般都取为采样频率的一半.

3.4 连续时间信号的离散时间处理

离散时间系统的主要应用场合是在连续时间信号的处理方面. 这可以用图 3.9 所示的一般形式的系统来完成. 这个系统是由一个 C/D 转换器紧跟着一个离散时间系统, 再跟着一个 D/C 转换器的级联所构成. 图 3.9 的方框图代表着一大类系统, 因为采样率和离散时间系统都能按需要来选择. 应该注意到, 整个系统等效为一个连续时间系统, 因为系统将连续时间输入信号 $x_c(t)$ 变换为连续时间输出信号 $y_c(t)$. 然而, 这个系统的特性是与离散时间系统的选型和采样率有关的. 在图 3.9 中假设 C/D 和 D/C 转换器都有相同的采样率. 这一点不是本质上的, 本章稍后部分以及章末的某些习题中都将考虑输入和输出采样率不相同的一些系统.



图 3.9 连续时间信号的离散时间处理.

本章的前述各节都放在对图 3.9 中 C/D 和 D/C 转换过程的理解上. 为了方便, 同时也作为理解图 3.9 整个系统的第一步, 先把这些过程的数学表示综合一下.

C/D 转换器产生一个离散时间信号如下:

$$x[n] = x_c(nT), \quad (3.28)$$

这就是连续时间输入信号 $x_c(t)$ 的样本序列. 这个序列的傅里叶变换与连续时间输入信号

的傅里叶变换的关系是

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_c(j \frac{\omega}{T} - j \frac{2\pi k}{T}). \quad (3.29)$$

D/C 转换器产生一个如下式的连续时间输出信号

$$y_r(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y[n] \frac{\sin[\pi(t-nT)/T]}{\pi(t-nT)/T}, \quad (3.30)$$

这里序列 $y[n]$ 是离散时间系统在输入为 $x[n]$ 时的输出。由式(3.27), $y_r(t)$ 的连续时间傅里叶变换 $Y_r(j\Omega)$ 和 $y[n]$ 的离散时间傅里叶变换 $Y(e^{j\omega})$, 由下式联系在一起

$$\begin{aligned} Y_r(j\Omega) &= H_r(j\Omega)Y(e^{j\omega}) \\ &= \begin{cases} TY(e^{j\omega}), & |\Omega| < \pi/T, \\ 0, & \text{其它.} \end{cases} \end{aligned} \quad (3.31)$$

下一步, 把输出序列 $y[n]$ 和输入序列 $x[n]$, 或者等效为把 $Y(e^{j\omega})$ 和 $X(e^{j\omega})$ 联系起来。一个简单的例子就是恒等系统, 即 $y[n] = x[n]$. 这个例子已经详细研究过。我们知道, 如果 $x_c(t)$ 有一个带限的傅里叶变换, 以使 $X_c(j\Omega) = 0, |\Omega| \geq \pi/T$, 并且图 3.9 中的离散时间系统是一个恒等系统, 以使得 $y[n] = x[n] = x_c[nT]$, 那么输出就是 $y_r(t) = x_c(t)$. 回想一下在证明这一结果时, 利用了连续时间和离散时间信号的频域表示, 因为混叠这一关键概念最容易在频域中被理解。同样, 当处理比恒等系统更为复杂的系统时, 一般也在频域中完成分析。如果离散时间系统是非线性的或时变的, 那么要得到该系统输入和输出傅里叶变换之间的一般关系通常是很困难的。(在习题 3.16 中将考虑一个例子对应于图 3.9 系统中离散时间系统是非线性的情况)。然而, 在线性时不变情况下, 会得出一个相当简单和十分有用的结果。

3.4.1 线性时不变离散时间系统

如果图 3.9 中的离散时间系统是线性和时不变的, 那么就有

$$Y(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega})X(e^{j\omega}), \quad (3.32)$$

这里 $H(e^{j\omega})$ 是该系统的频率响应, 或者说是单位样本响应的傅里叶变换, 而 $X(e^{j\omega})$ 和 $Y(e^{j\omega})$ 则分别是输入和输出的傅里叶变换。将式(3.31)和式(3.32)结合在一起, 就可以得到

$$Y_r(j\Omega) = H_r(j\Omega)H(e^{j\omega})X(e^{j\omega}). \quad (3.33)$$

接下来, 利用式(3.29), 并用 $\omega = \Omega T$, 有

$$Y_r(j\Omega) = H_r(j\Omega)H(e^{j\omega}) \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_c(j\Omega - j \frac{2\pi k}{T}). \quad (3.34)$$

如果 $X_c(j\Omega) = 0, |\Omega| \geq \pi/T$, 那么理想低通重构滤波器 $H_r(j\Omega)$ 抵消了 $1/T$ 因子, 并且仅仅选择式(3.34)中 $k=0$ 这一项, 即

$$Y_r(j\Omega) = \begin{cases} H(e^{j\omega})X_c(j\Omega), & |\Omega| < \pi/T, \\ 0, & |\Omega| \geq \pi/T. \end{cases} \quad (3.35)$$

因此, 如果 $X_c(j\Omega)$ 是带限的, 并且采样率是高于奈奎斯特率的话, 那么输出与输入就通过下述关系联系起来

$$Y_r(j\Omega) = H_{eff}(j\Omega)X_c(j\Omega), \quad (3.36)$$

式中

$$H_{eff}(j\Omega) = \begin{cases} H(e^{j\Omega T}), & |\Omega| < \pi/T, \\ 0, & |\Omega| \geq \pi/T. \end{cases} \quad (3.37)$$

这就是说，整个连续时间系统是等效于一个线性时不变系统，其有效频率响应由式(3.37)给出。

图3.9系统的线性和时不变性特性依赖于两个因素，强调这一点是很重要的。第一，离散时间系统必须是线性的和时不变的；第二，输入信号必须是带限的，并且采样率要足够高，以使得任何混叠的分量都被该离散时间系统所消除。作为违反第二个条件的一个简单说明是考虑当 $x_c(t)$ 是一个单一的单位幅度脉冲的情况，该脉冲的持续期小于采样周期。如果该脉冲在 $t=0$ 时为 1，那么 $x[n]=\delta[n]$ 。然而，完全有可能将该脉冲移位，以至于移到脉冲不与任何采样时刻重合，这时 $x[n]=0$ （对所有 n 而言）。即便是该离散时间系统是一个恒等系统，即 $y[n]=x[n]$ ，整个系统也不是时不变的。一般来说，如果图3.9中的离散时间系统是线性和时不变的，并且采样率是高于与输入 $x_c(t)$ 带宽有关的奈奎斯特率，那么整个系统就保证是等效为一个线性时不变连续时间系统。其有效频率响应由式(3.37)给出。再者，甚至在C/D转换器中有某些混叠发生，只要 $H(e^{j\omega})$ 不通过这些混叠的分量，式(3.37)仍是正确的。例3.1就是这种情况的一个简单说明。

例3.1 理想低通滤波器

考虑图3.9中线性时不变离散时间系统具有频率响应为

$$H(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & |\omega| < \omega_c, \\ 0, & \omega_c < |\omega| \leq \pi. \end{cases} \quad (3.38)$$

自然这个频率响应是周期的，周期为 2π ，如图3.10(a)所示。对于带限输入，并在高于奈奎斯特率采样，由式(3.37)，图3.9的整个系统将表现为一个线性时不变连续时间系统，其频率响应为

$$H_{eff}(j\Omega) = \begin{cases} 1, & |\Omega T| < \omega_c \text{ 或 } |\Omega| < \omega_c/T, \\ 0, & |\Omega T| > \omega_c \text{ 或 } |\Omega| > \omega_c/T. \end{cases} \quad (3.39)$$

如图3.10(b)所示，这个有效频率响应就是一个截止频率为 $\Omega_c = \omega_c/T$ 的理想低通滤波器。

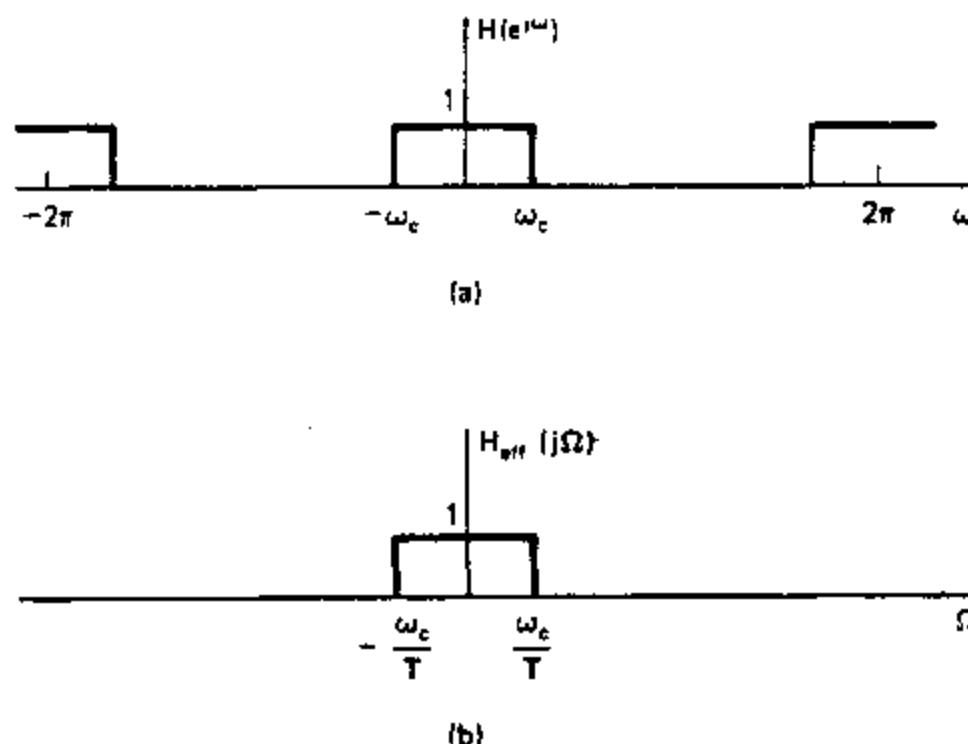


图3.10 (a)图3.9中离散时间系统的频率响应。(b)带限输入时相应的频率响应。

作为这一结果的一个说明,考虑一下由图 3.11 给出的图解说明. 图 3.11(a)指出一个带限信号的傅里叶变换. 图 3.11(b)是中间已调冲激串的傅里叶变换,它是与 $X(e^{j\omega T})$ 一致的; $X(e^{j\omega T})$ 就是以 $\omega = \Omega T$ 求值的样本序列的离散时间傅里叶变换. 在图 3.11(c)中,把样本序列的离散时间傅里叶变换和离散时间系统的频率响应都作为归一化的离散时间频率变量 ω 的函数画在一起. 图 3.11(d)示出了 $Y(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega})X(e^{j\omega})$, 即离散时间系统输出的傅里叶变换. 图 3.11(e)示出作为连续时间频率 Ω 的函数的离散时间系统输出的傅里叶变换,以及 D/C 转换器的理想重构滤波器的频率响应 $H_r(j\Omega)$. 最后,图 3.11(f)是得到的 D/C 转换器输出的傅里叶变换. 将图 3.11(a)与图 3.11(f)作一比较就可看出,该系统就表现为一个线性时不变系统,该系统具有由式 (3.39) 所给出的,并在图 3.10(b) 中画出的频率响应.

在本例中要说明几个重要之处. 首先注意到具有离散时间截止频率为 ω_c 的理想低通离散时间滤波器当用于图 3.9 这样的结构中时就具有一个截止频率为 $\Omega_c = \omega_c/T$ 的理想低通滤波器的效果. 这个截止频率既依赖于 ω_c , 又与 T 有关. 尤其是当利用一个固定的离散时间低通滤波器而变化采样周期 T 时,就能实现一个等效的、具有可变截止频率的连续时间低通滤波器. 例如,如果 T 选择成 $\Omega_c T < \omega_c$,那么图 3.9 系统的输出一定是 $y_c(t) = x_c(t)$. 另外,正如在习题 3.11 中所说明的,甚至在图 3.11(b) 和 (c) 中存在一些混叠,式 (3.39) 还是正确的,只要这些失真(混叠)的分量被滤波器 $H(e^{j\omega})$ 滤除掉. 特别是从图 3.11(c) 中可看到,在输出中不存在混叠,就要求

$$(2\pi - \Omega_c T) > \omega_c \quad (3.40)$$

对此奈奎斯特定理的要求是

$$(2\pi - \Omega_c T) > \Omega_c T. \quad (3.41)$$

作为利用离散时间系统的连续时间处理的另一个例子,考虑一个对带限信号的理想微分器的实现.

例 3.2 理想带限微分器

由下式定义理想连续时间微分器系统

$$y_c(t) = \frac{d}{dt}[x_c(t)], \quad (3.42)$$

相应的频率响应为

$$H_c(j\Omega) = j\Omega. \quad (3.43)$$

因为考虑的是图 3.9 形式的一个实现,所以输入总是被限制为带限的. 对于处理带限信号,满足下式就足够了

$$H_{eff}(j\Omega) = \begin{cases} j\Omega, & |\Omega| < \pi/T, \\ 0, & |\Omega| \geq \pi/T, \end{cases} \quad (3.44)$$

如图 3.12(a)所示, 相应的离散时间系统应有如下频率响应

$$H(e^{j\omega}) = j\omega/T, \quad |\omega| < \pi, \quad (3.45)$$

并且是周期的, 周期为 2π , 如图 3.12(b) 所示. 相应的冲激响应能证明为

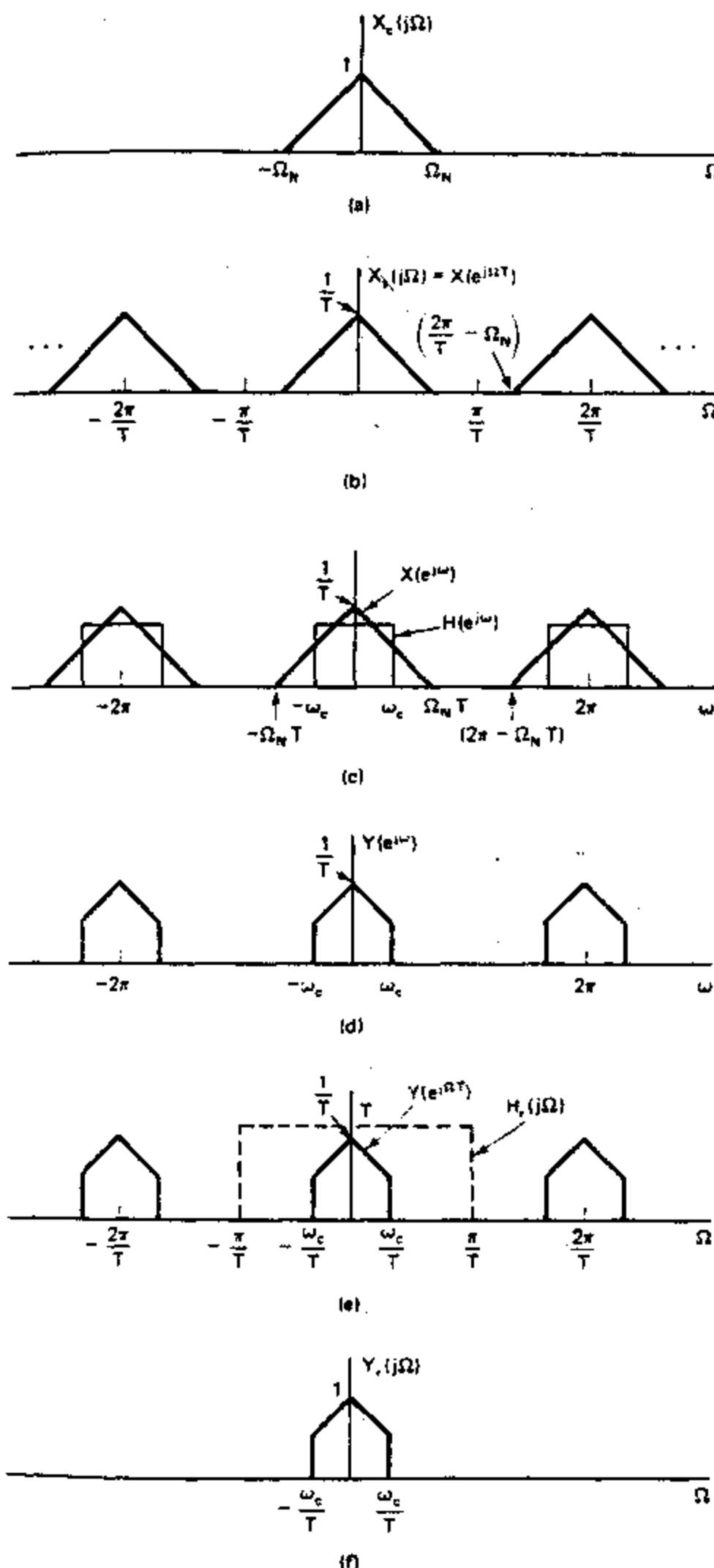


图 3.11 (a)一个带限输入信号的傅里叶变换,(b)画作连续时间频率 Ω 函数的已采样输入的傅里叶变换,(c)对 ω 画出的样本序列的傅里叶变换 $X(e^{j\omega})$ 和离散时间系统的频率响应 $H(e^{j\omega})$, (d)离散时间系统输出的傅里叶变换,(e)对 Ω 画出的离散时间系统输出的傅里叶变换和理想重构滤波器的频率响应,(f)输出的傅里叶变换.

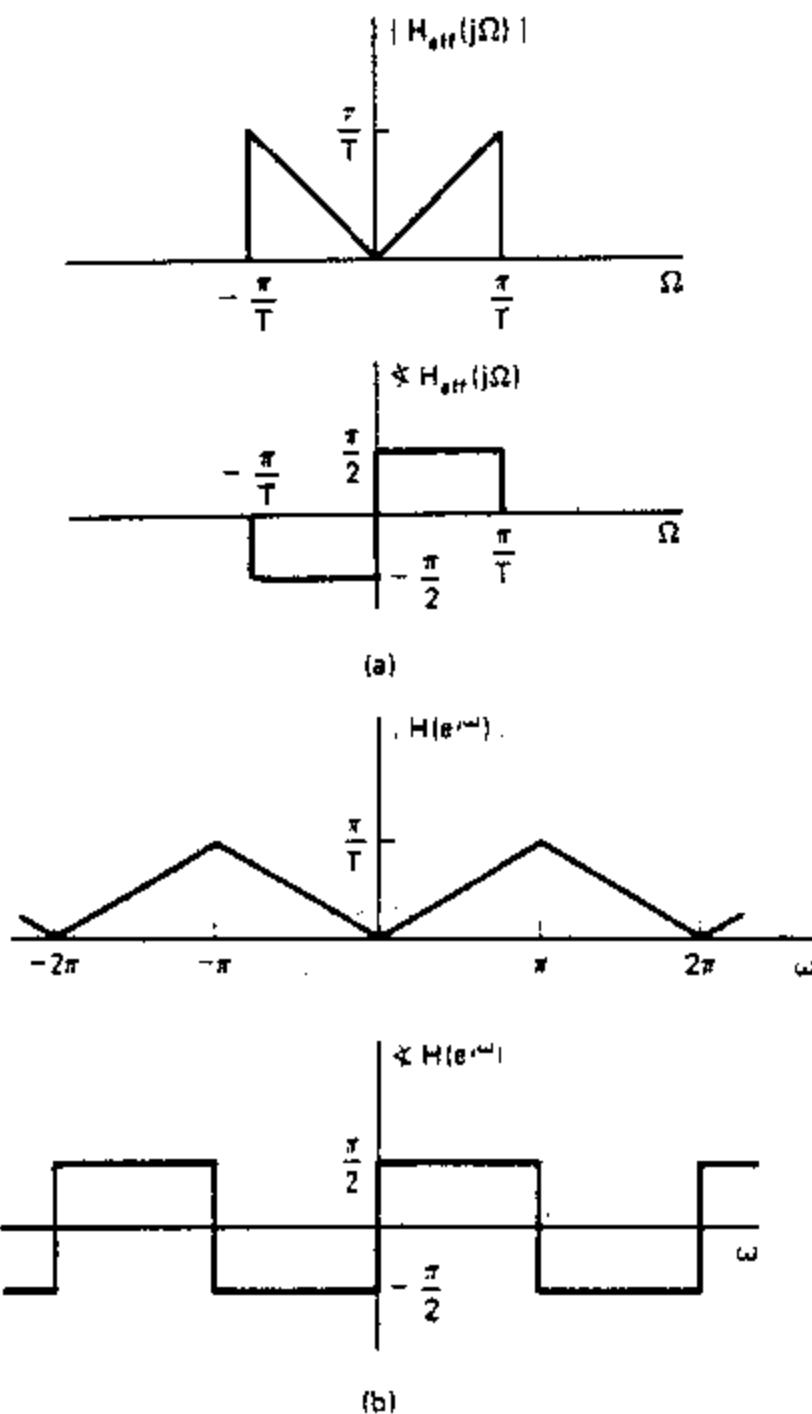


图 3.12 (a) 连续时间理想带限微分器的频率响应 $H_c(j\Omega) = j\Omega, |\Omega| < \Omega_c$. (b) 实现一个连续时间带限微分器的离散时间微分器的频率响应.

$$h[n] = \frac{\pi n \cos \pi n - \sin \pi n}{\pi n^2 T}, \quad -\infty < n < \infty,$$

$$h[n] = \begin{cases} 0, & n=0, \\ \frac{\cos \pi n}{nT}, & n \neq 0. \end{cases} \quad (3.46)$$

因此,如果一个具有这样冲激响应的离散时间系统用在图 3.9 结构中的话,那么,对每一个带限输入,其输出都是输入的导数.

3.4.2 冲激响应不变

已经证明,图 3.9 的级联系统对带限输入信号而言能够等效成一个线性时不变系统.现在假定已给出的是一个所要求的连续时间系统,而希望用图 3.9 的形式来实现它,如图 3.13 所示.由于 $H_c(j\Omega)$ 是带限的,式(3.37)给出了如何选择 $H(e^{j\omega})$,以满足 $H_{eff}(j\Omega) =$

$H_c(j\Omega)$. 明确一些就是

$$H(e^{j\omega}) = H_c(j\omega/T), \quad |\omega| < \pi, \quad (3.47)$$

进一步的要求是应选择 T , 使

$$H_c(j\Omega) = 0, \quad |\Omega| \geq \pi/T. \quad (3.48)$$

在式(3.47)和式(3.48)的约束下, 连续时间冲激响应 $h_c(t)$ 和离散时间冲激响应 $h[n]$ 之间也存在着一个直接而有用的关系. 特别是如下面将要证明的, 存在有

$$h[n] = Th_c(nT), \quad (3.49)$$

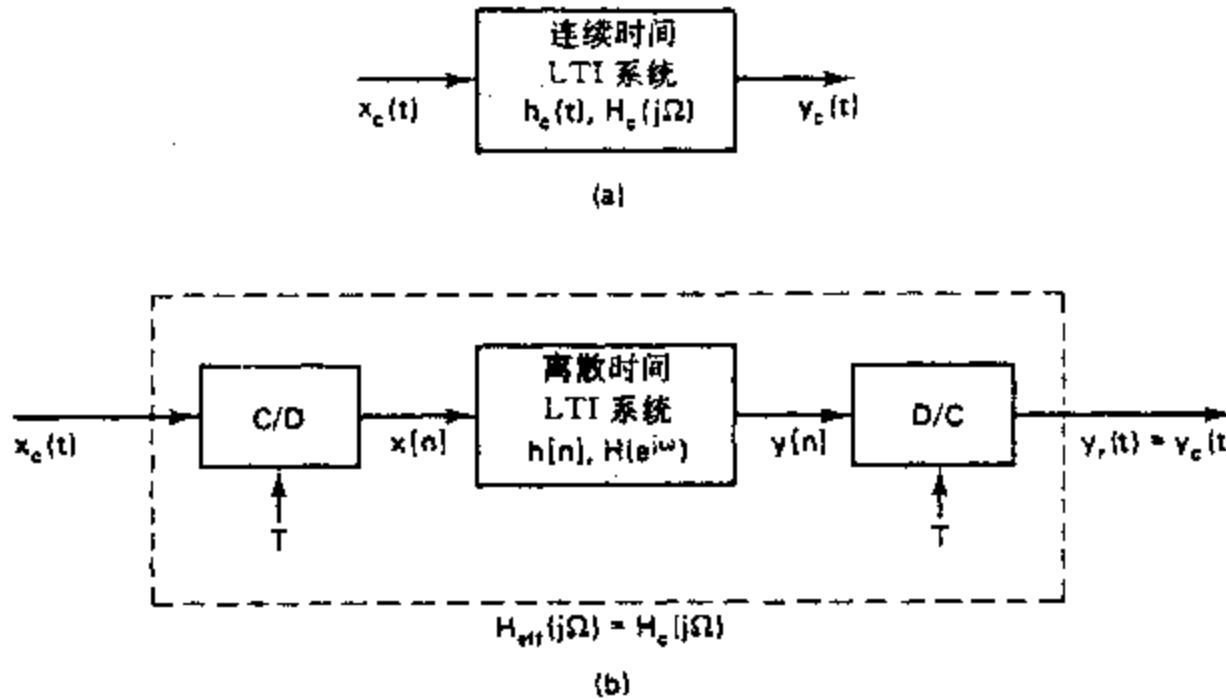


图 3.13 (a) 连续时间 LTI 系统, (b) 对带限输入的等效系统.

即, 离散时间系统的冲激响应就是一个在幅度上受到加权的 $h_c(t)$ 的采样序列. 当 $h[n]$ 和 $h_c(t)$ 是通过式(3.49)联系在一起时, 该离散时间系统就可以说成是连续时间系统的一个冲激响应不变型式.

式(3.49)是 3.2 节讨论的一个直接结果. 在式(3.16)中, 将 $x[n]$ 和 $x_c(t)$ 用 $h[n]$ 和 $h_c(t)$ 代替, 即

$$h[n] = h_c(nT), \quad (3.50)$$

式(3.20)就变成

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} H_c\left(j \frac{\omega}{T} - j \frac{2\pi k}{T}\right) \quad (3.51)$$

或者等效为

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{T} H_c\left(j \frac{\omega}{T}\right), \quad |\omega| < \pi. \quad (3.52)$$

考虑到式(3.49)中的幅度因子 T , 将式(3.50)和式(3.52)作点变化, 就得

$$h[n] = Th_c(nT), \quad (3.53)$$

$$H(e^{j\omega}) = H_c\left(j \frac{\omega}{T}\right), \quad |\omega| < \pi. \quad (3.54)$$

3.5 离散时间信号的连续时间处理

为了以图 3.9 的形式来处理连续时间信号,我们在 3.4 节讨论和分析了利用离散时间系统。这一节将研究如图 3.14 所示的一种互补的情况,这种情况可以把它称作离散时间信号的连续时间处理。虽然图 3.14 这种系统一般是不会用来实现离散时间系统的,但是它却提供了对某些离散时间系统的一种有用的解释。

根据理想 D/C 转换器的定义,对于 $|\Omega| \geq \pi/T$, $X_c(j\Omega)$ 从而 $Y_c(j\Omega)$ 都必定是零。因此,C/D 转换器对 $y_c(t)$ 采样而不会引起混叠, $x_c(t)$ 和 $y_c(t)$ 就能表示成如下:

$$x_c(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \frac{\sin[\pi(t-nT)/T]}{\pi(t-nT)/T} \quad (3.55)$$

和

$$y_c(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y[n] \frac{\sin[\pi(t-nT)/T]}{\pi(t-nT)/T}, \quad (3.56)$$

式中 $x[n] = x_c(nT)$, $y[n] = y_c(nT)$ 。图 3.14 的频域关系是

$$X_c(j\Omega) = T X(e^{j\Omega T}), \quad |\Omega| < \pi/T, \quad (3.57a)$$

$$Y_c(j\Omega) = H_c(j\Omega) X_c(j\Omega), \quad |\Omega| < \pi/T, \quad (3.57b)$$

$$Y(e^{j\omega}) = \frac{1}{T} Y_c(j\omega/T), \quad |\omega| < \pi. \quad (3.57c)$$

因此,将式(3.57a)和式(3.57b)代入式(3.57c),立即可得:整个系统表现为一个离散时间系统,其频率响应是

$$H(e^{j\omega}) = H_c(j\omega/T), \quad |\omega| < \pi. \quad (3.58)$$

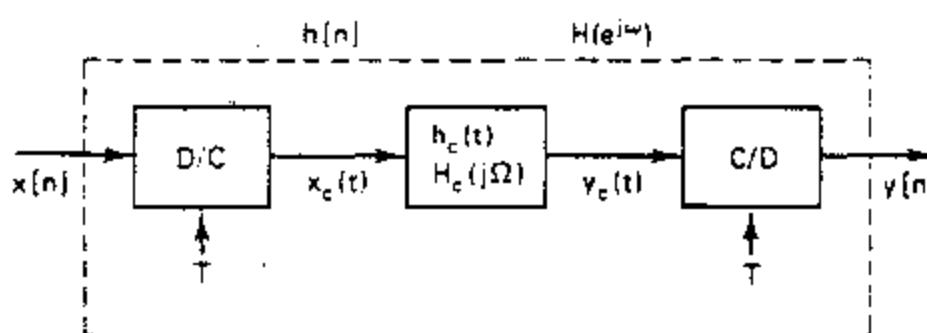


图 3.14 离散时间信号的连续时间处理。

或者说,如果该连续时间系统的频率响应是

$$H_c(j\Omega) = H(e^{j\Omega T}), \quad |\Omega| < \pi/T. \quad (3.59)$$

那么图 3.14 系统的总频率响应就等于一个给定的 $H(e^{j\omega})$ 。因为 $X_c(j\Omega) = 0$, $|\Omega| \geq \pi/T$, $H_c(j\Omega)$ 在 π/T 以上可以任意选定。一种方便(但是任意)的选择是 $H_c(j\Omega) = 0$, $|\Omega| \geq \pi/T$ 。

利用离散时间系统的这种表示,就能把注意力放在对带限连续时间信号 $x_c(t)$ 的连续时间系统的等效效果上。现在用例 3.3 和例 3.4 来说明这一点。

例 3.3 非整数延时

考虑一个离散时间系统,其频率响应为

$$H(e^{j\omega})e^{-j\omega\Delta}, \quad |\omega| < \pi. \quad (3.60)$$

当 Δ 是一个整数时, 该系统就有一个直接的解释——延迟 Δ , 即

$$y[n] = x[n - \Delta]. \quad (3.61)$$

当 Δ 不是整数时, 式(3.61)没有任何意义. 然而, 利用图 3.14, 一种有用的时域解释就可以应用到由式(3.60)所表征的系统上. 考虑将图 3.14 中 $H_c(j\Omega)$ 选成

$$H_c(j\Omega) = H(e^{j\Omega T}) = e^{-j\Omega\Delta T}. \quad (3.62)$$

那么, 根据式(3.59), 图 3.14 中的整个离散时间系统将有由式(3.60)所给出的频率响应, 不论 Δ 是不是一个整数. 为了说明式(3.60)的系统, 由式(3.62)看到

$$y_c(t) = x_c(t - \Delta T). \quad (3.63)$$

再者 $x_c(t)$ 是 $x[n]$ 的带限内插, 而 $y_c(t)$ 是 $y[n]$ 的采样. 例如, 若 $\Delta = 1/2$, 那么, $y[n]$ 就是输入序列值之间带限内插后一半处的那些值. 这如图 3.15 所表明的那样. 由式(3.56), (3.63) 和 (3.55), 正规的表示应为

$$y[n] = x_c(nT - \Delta T) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \frac{\sin[\pi(t - \Delta T - kT)/T]}{\pi(t - \Delta T - kT)/T} \Big|_{t=nT}. \quad (3.64)$$

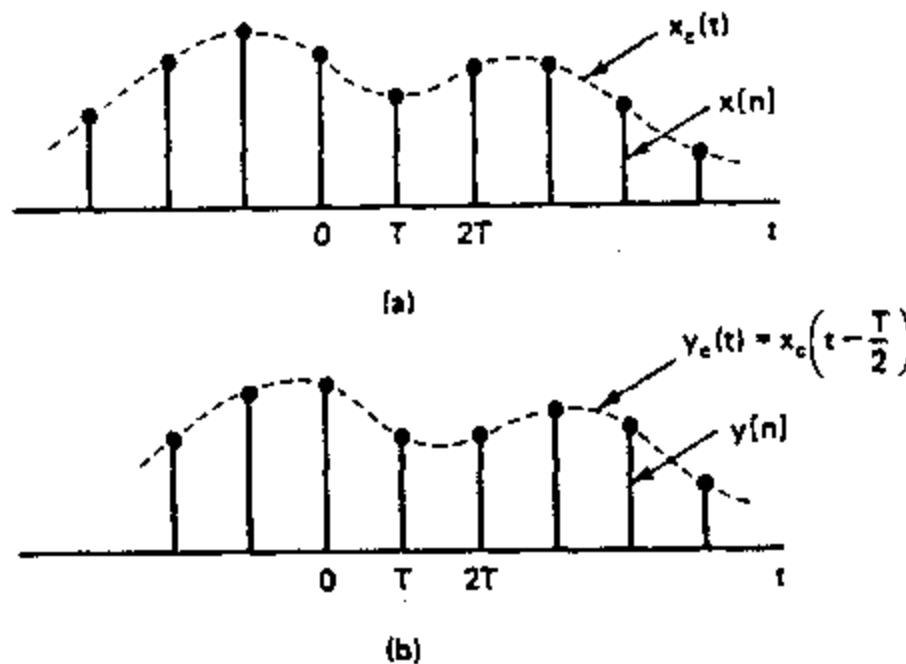


图 3.15 (a) 中的离散时间序列的连续时间处理可以产生一个“半样本”延迟的新序列, 如图(b)所示.

由式(3.64)所表示的非整数延迟有很大的实际意义, 因为这样的因式在系统的频域表示中常常发生. 当这一项在一个因果离散时间系统的频域响应中遇到时, 就可以用这个例子来给予说明. 例 3.4 就说明这一点.

例 3.4 滑动平均

在例 2.15 中曾研究过滑动平均系统, 并得出它的频率响应. 在 $M_1 = 0, M_2 = M$ 的情况下, 其频率响应为

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{(M+1)} \frac{\sin[\omega(M+1)/2]}{\sin(\omega/2)} e^{-j\omega M/2}, \quad |\omega| < \pi. \quad (3.65)$$

让我们把这个系统看作两个系统的级联, 如图 3.16 所示. 第一个系统施加一个频域幅度加权, 而第二个系统则代表式(3.65)中的线性相移项. 如果 M 是一个偶数(意味着有

一个奇数样本的滑动平均),那么线性相移项就相当于一个整数延迟,即

$$y[n] = w[n - M/2]. \quad (3.66)$$

然而,若 M 为奇数,该线性相移项就相当于一个非整数延迟,也就是一个整数样本再加上半个样本间隔.这个非整数延迟就可以用例 3.3 的讨论来解释;即, $y[n]$ 是等效于 $w[n]$ 的带限内插,紧跟着一个连续时间 $MT/2$ 的延迟(这里 T 是假定的,但是与 D/C 内插 $w[n]$ 有关的任意采样周期),再跟着一个仍用采样周期 T 的 C/D 转换.

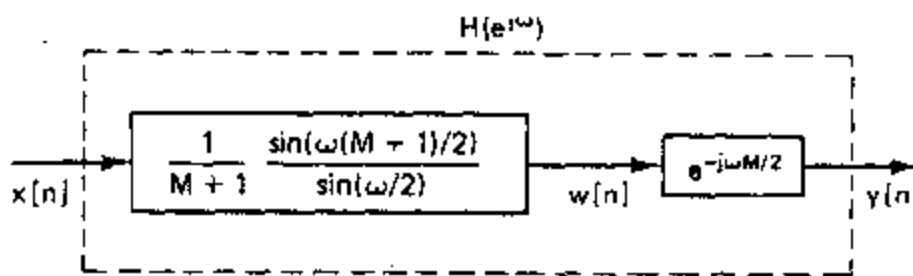


图 3.16 滑动平均系统表示成两个系统的级联.

3.6 利用离散时间处理改变采样率

已经看到,一个连续时间信号 $x_c(t)$ 能用如下样本序列

$$x[n] = x_c(nT). \quad (3.67)$$

组成的离散时间信号来表示.另一方面,前面的讨论已经证明,即使 $x[n]$ 不是最初由采样得到的,也总能利用式(3.24)找到一个连续时间带限信号 $x_c(t)$,它的样本是 $x[n] = x_c(nT)$.

往往有必要改变一个离散时间信号的采样率,也就是说,为了得到以同一个连续时间信号为基础的一个新的离散时间序列

$$x'[n] = x_c(nT'), \quad (3.68)$$

式中 $T' \neq T$.从 $x[n]$ 得到序列 $x'[n]$ 的一种办法是利用式(3.24)从 $x[n]$ 重构 $x_c(t)$,然后以周期 T' 对 $x_c(t)$ 重新采样以得到 $x'[n]$.由于在实际中所用的都是非理想的模拟重构滤波器、D/A 转换器和 A/D 转换器,所以往往这不是一个可取的办法.因此,考虑一些只涉及离散时间运算的方法来变化采样率是值得讨论的.

3.6.1 采样率按整数因子减小

利用“采样”一个序列可以降低一个序列的采样率,即定义一个新序列为

$$x_d[n] = x[nM] = x_c(nMT). \quad (3.69)$$

由式(3.69)定义的系统如图 3.17 所示,称之为采样率压缩器(Crochiere and Rabiner, 1983),或者简称为压缩器.从式(3.69)很清楚, $x_d[n]$ 可以用采样周期 $T' = MT$ 直接采样 $x_c(t)$ 来得到.再者,如果 $X_c(j\Omega) = 0, |\Omega| > \Omega_N$, 并且 $\pi/T' = \pi/(MT) > \Omega_N$, 那么 $x_d[n]$ 也是 $x_c(t)$ 的真正表示.也就是说,如果原采样率至少是 M 倍的奈奎斯特率,或者该序列的带宽首先用离散时间滤波减小 M 倍的话,那么采样率就能减小 M 倍而不会引起混叠.一般,减小采样率的过程(包括任何预滤波)称为减采样(downsampling).

和采样一个连续时间信号的情况一样,求出压缩器输入输出间的频域关系是有用的.然而这时将是离散时间傅里叶变换之间的一种关系.虽然可用几种方法来导出所要求的结果,但是我们将把推导建立在对采样连续时间信号已经得到的结果的基础上.首先, $x[n]=x_c(nT)$ 的离散时间傅里叶变换是

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_c\left(j \frac{\omega}{T} - j \frac{2\pi k}{T}\right). \quad (3.70)$$

类似地,以 $T' = MT$ 的 $x_d[n] = x[nM] = x_c(nT')$ 的离散时间傅里叶变换是

$$X_d(e^{j\omega}) = \frac{1}{T'} \sum_{r=-\infty}^{\infty} X_c\left(j \frac{\omega}{T'} - j \frac{2\pi r}{T'}\right). \quad (3.71)$$

现在,由于 $T' = MT$,式(3.71)就能够写成

$$X_d(e^{j\omega}) = \frac{1}{MT} \sum_{r=-\infty}^{\infty} X_c\left(j \frac{\omega}{MT} - j \frac{2\pi r}{MT}\right). \quad (3.72)$$

为了看出式(3.72)与式(3.70)之间的关系,注意到式(3.72)中的求和指数 r 可以表示成

$$r = i + kM, \quad (3.73)$$

式中 k 和 i 都是整数,且 $-\infty < k < \infty$ 和 $0 \leq i \leq M-1$.很明显,这样 r 仍是一个整数且在 $-\infty$ 到 ∞ 的范围内变化.但是现在式(3.72)就能够等成

$$X_d(e^{j\omega}) = \frac{1}{M} \sum_{i=0}^{M-1} \left[\frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_c\left(j \frac{\omega}{MT} - j \frac{2\pi k}{T} - j \frac{2\pi i}{MT}\right) \right]. \quad (3.74)$$

式(3.74)中方括号内的这一项从式(3.70)就可以看作

$$X(e^{j(\omega-2\pi i)/M}) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_c\left(j \frac{\omega-2\pi i}{MT} - j \frac{2\pi k}{T}\right). \quad (3.75)$$

这样就能将式(3.74)表示成

$$X_d(e^{j\omega}) = \frac{1}{M} \sum_{i=0}^{M-1} X(e^{j(\omega/M-2\pi i/M)}). \quad (3.76)$$

式(3.70)和式(3.76)之间的类似性是很清楚的.式(3.70)是利用连续时间信号 $x_c(t)$ 的傅里叶变换来表示样本序列 $x[n]$ (周期为 T)的傅里叶变换的;式(3.76)则是利用序列 $x[n]$ 的傅里叶变换来表示离散时间采样序列 $x_d[n]$ (采样周期为 M)的傅里叶变换的.如果将式(3.71)与式(3.76)作一比较,就能看出: $X_d(e^{j\omega})$ 既能认为是由频率按 $\omega = \Omega T'$ 作尺度变化,并按 $2\pi/T'$ 整数倍移位的无数个 $X_c(j\Omega)$ 的复本所组成[式(3.71)];也可看作是由频率受到 M 倍扩展的、并按 $2\pi/M$ 整倍数移位的 M 个周期傅里叶变换 $X(e^{j\omega})$ 的复本所组成[式(3.76)].任何一种解释都明显地说明: $X_d(e^{j\omega})$ 是周期的,周期为 2π (如同所有的离散时间傅里叶变换一样),并且只要保证 $X(e^{j\omega})$ 是带限的,即

$$X(e^{j\omega}) = 0, \quad \omega_N \leq |\omega| \leq \pi, \quad (3.77)$$

以及 $2\pi/M \geq 2\omega_N$,就可以避免混叠.

减采样的过程如图 3.18 所示.图 3.18(a)示出一个带限连续时间信号的傅里叶变

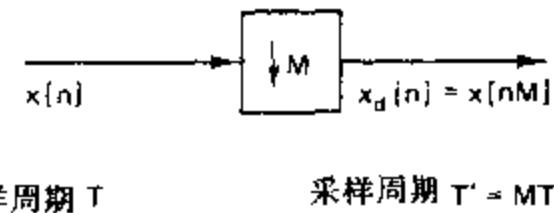


图 3.17 离散时间采样器或减采样器的表示.

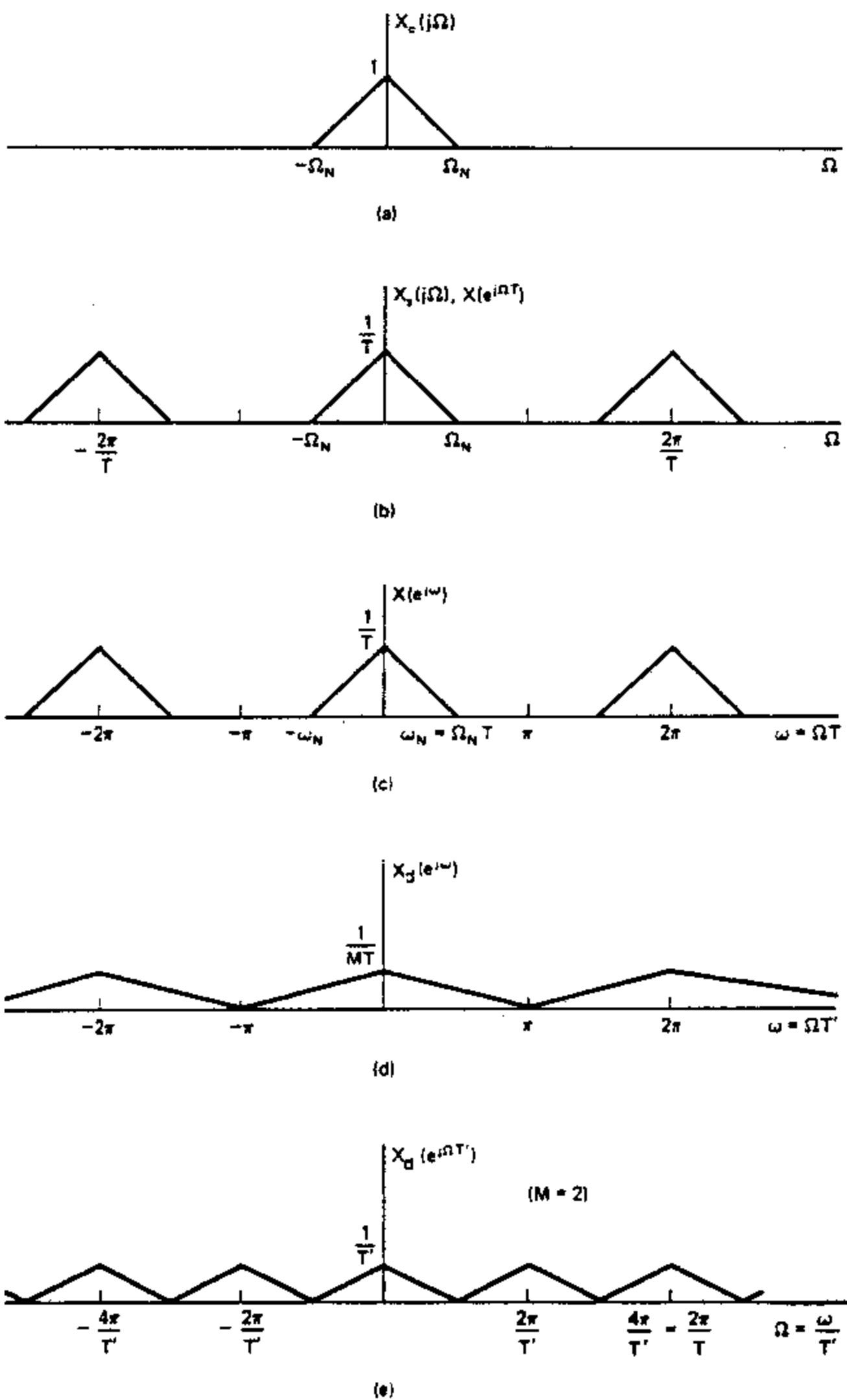


图 3.18 减采样的频域说明.

换,而图 3.18(b)则是用采样周期 T 得到的样本冲激串的傅里叶变换. 图 3.18(c)是 $X(e^{j\omega})$,并通过式(3.18)与图 3.18(b)联系起来. 如同我们已经看到的,图 3.18(b)和(c)

的差别仅仅在将频率轴重新给以标定. 图 3.18(d)是当 $M=2$ 时减采样序列的离散时间傅里叶变换, 图中已将这个傅里叶变换画成归一化频率 $\omega=\Omega T'$ 的函数. 最后图 3.18(e)就是减采样序列的离散时间傅里叶变换画作连续时间频率变量 Ω 的函数. 图 3.18(e)与图 3.18(d)除了频率轴按 $\Omega=\omega/T'$ 的关系重新标定外, 两者是完全一样的.

在本例中 $2\pi/T=4\Omega_N$, 就是说原采样率是为避免混叠所需最低采样率的两倍. 因此, 当原采样序列以 $M=2$ 减采样时, 没有任何混叠发生. 在这个情况下, 如果减采样因子是大于 2, 混叠就会产生, 如图 3.19 所示.

图 3.19(a)示出 $x_c(t)$ 的连续时间傅里叶变换, 图 3.19(b)是当 $2\pi/T=4\Omega_N$ 时序列 $x[n]=x_c(nT)$ 的离散时间傅里叶变换. 因此有 $\omega_N=\Omega_N T=\pi/2$. 现在如果以 $M=3$ 减采样, 就得到一个序列为 $x_d[n]=x[3n]=x_c[n3T]$, 它的离散时间傅里叶变换如图 3.19(c) 所画(用归一化频率 $\omega=\Omega T'$). 注意到由于 $M\omega_N=3\pi/2>\pi$, 所以发生混叠. 一般为了在以 M 因子减采样时避免混叠, 就要求

$$\omega_N M < \pi \quad \text{或} \quad \omega_N < \pi/M. \quad (3.78)$$

如果这个条件不满足, 就会发生混叠, 但是对某些应用来说可能是允许的. 在另一些情况下, 如果在减采样之前希望减小信号 $x[n]$ 带宽的话, 减采样也能在没有混叠的情况下完成. 因此, 如果 $x[n]$ 用一个截止频率为 π/M 的理想低通滤波器过滤的话, 那么输出 $\tilde{x}[n]$ 也能减采样而没有混叠, 如图 3.19(d), (e) 和 (f) 所示. 应该注意, 序列 $\tilde{x}_d[n]=\tilde{x}[nM]$ 已不再代表原来的连续时间信号 $x_c(t)$ 了, 而是 $\tilde{x}_d[n]=\tilde{x}_c[nT']$, 这里 $T'=MT$, 而 $\tilde{x}_c(t)$ 则是从 $x_c(t)$ 用截止频率为 $\Omega_c=\pi/T'=\pi/(MT)$ 的低通过滤后而得到的.

从上述的讨论中可见, 对于以 M 因子减采样的一般系统就是由图 3.20 所示的系统. 这样的系统称为抽取器, 而用低通过滤再紧跟着压缩的减采样过去一直称作抽取 (Cochiere and Rabiner, 1983).

3.6.2 采样率按整数因子增加

已经知道离散时间信号以某一整数因子减小采样率就如同采样一个连续时间信号那样涉及序列的采样. 不容置疑, 增加采样率应涉及到类似于 D/C 转换器那样的过程. 为了看出这点, 考虑一个信号 $x[n]$, 希望将它的采样率增加 L 倍. 若考虑的是下面的连续时间信号 $x_c(t)$, 那么目的就是要得到样本为

$$x_i[n]=x_c(nT'), \quad (3.79)$$

的序列, 式中 $T'=T/L$, 而 $x_i[n]$ 要从样本序列

$$x[n]=x_c(nT). \quad (3.80)$$

中得到. 我们把增加采样率的过程称为增采样(Upsampling).

很清楚, 由式(3.79)和式(3.80)

$$x_i[n]=x[n/L]=x_c(nT/L), \quad n=0, \pm L, \pm 2L, \dots \quad (3.81)$$

图 3.21 示出了一个仅用离散时间处理从 $x[n]$ 得到 $x_i[n]$ 的系统. 该系统的左边称为采样率扩展器(Cochiere and Rabiner, 1983), 或简称为扩展器. 它的输出是

$$x_e[n]=\begin{cases} x[n/L], & n=0, \pm L, \pm 2L, \dots, \\ 0, & \text{其它.} \end{cases} \quad (3.82)$$

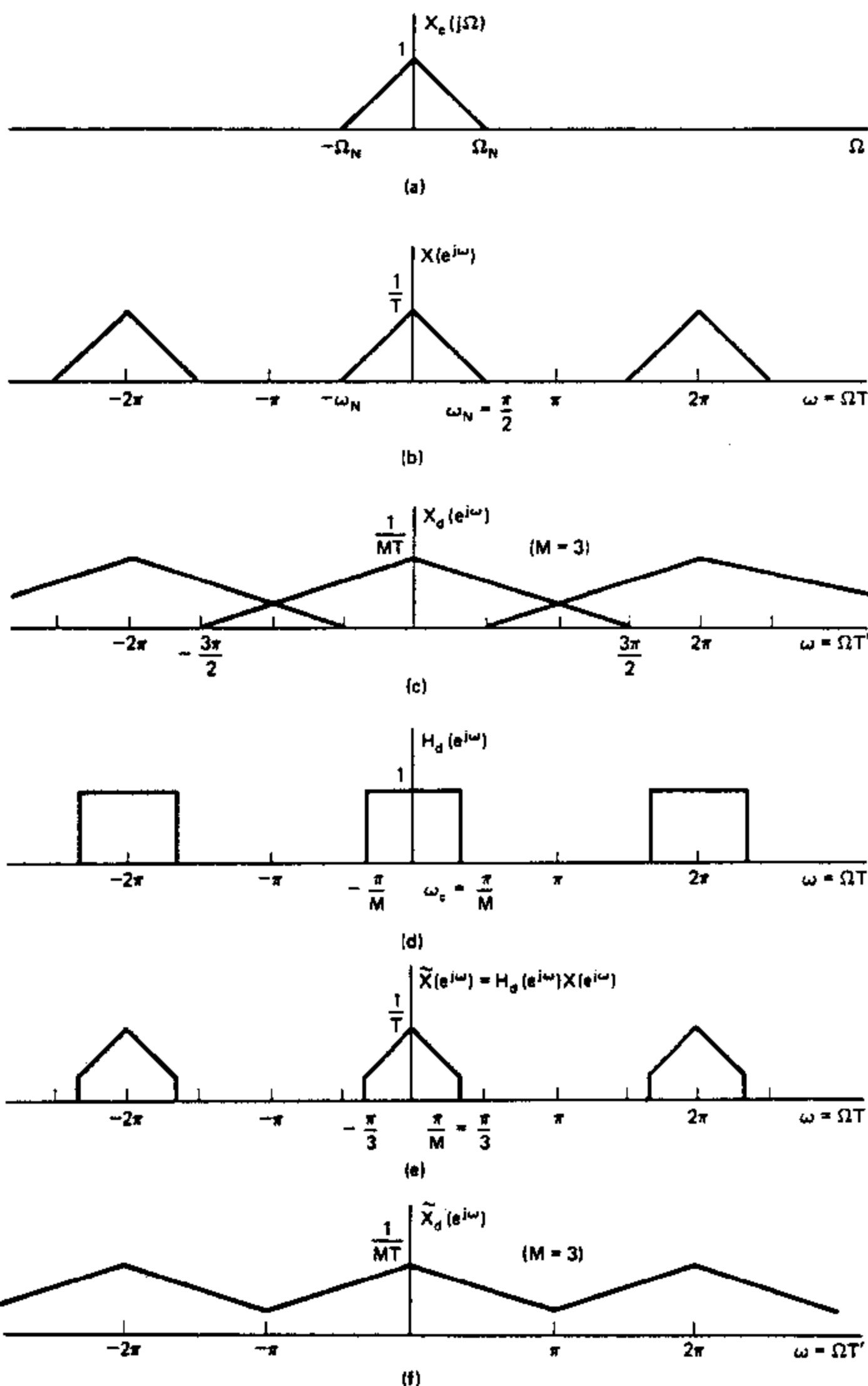


图 3.19 (a)~(c) 有混叠的减采样、(d)~(f) 具有为避免混叠的预滤波的减采样.

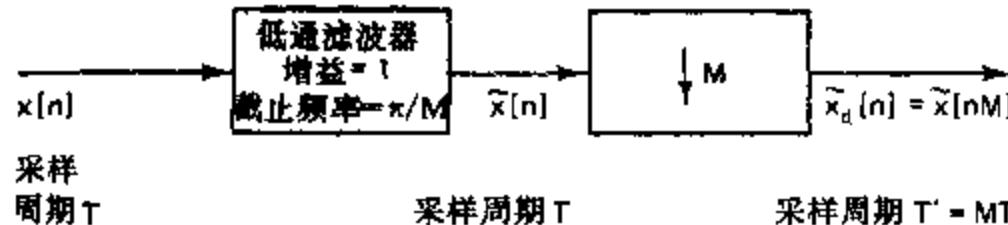


图 3.20 采样率减小 M 倍的一般系统。

或者等效为

$$x_e[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \delta[n - kL]. \quad (3.83)$$

该系统的右边是一个截止频率为 π/L , 增益为 L 的低通离散时间滤波器。该系统起的作用

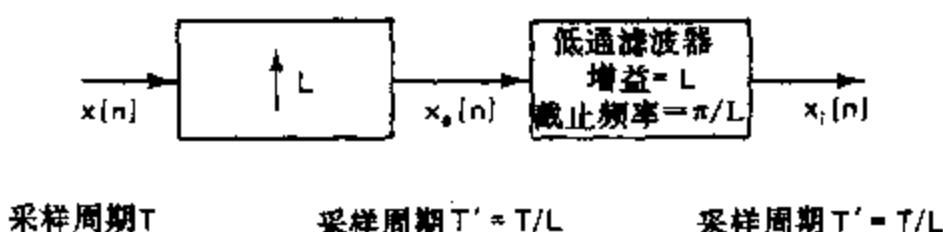


图 3.21 采样率增加 L 倍的一般系统。

类似于图 3.8(b)中理想 D/C 转换器的作用。首先产生一个离散时间冲激串 $x_e[n]$, 然后用低通滤波器来重构该序列。

图 3.21 系统的工作最容易在频域中解释。 $x_e[n]$ 的傅里叶变换可以表示成

$$\begin{aligned} X_e(e^{j\omega}) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \delta[n - kL] \right) e^{-j\omega n} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] e^{-j\omega L k} = X(e^{j\omega L}). \end{aligned} \quad (3.84)$$

因此, 扩展器输出的傅里叶变换就是频率尺度受到变换的输入的傅里叶变换, 这就是说, 用 ωL 代替 ω 以使得现在的 ω 是归一化的

$$\omega = \Omega T'. \quad (3.85)$$

其效果如图 3.22 所示。图 3.22(a)是某一带限的连续时间信号的傅里叶变换, 而图 3.22(b)则是序列 $x[n] = x_e(nT)$ (这里 $\pi/T = \Omega_N$) 的离散时间傅里叶变换。图 3.22(c)是根据式(3.84), 当 $L=2$ 时的 $X_e(e^{j\omega})$, 而图 3.22(e)就是所求序列 $x_i[n]$ 的傅里叶变换。可以看到, $X_i(e^{j\omega})$ 可以从 $X_e(e^{j\omega})$ 得到, 这只要把幅度因子由 $1/T$ 改为 $1/T'$, 并除掉 $X_e(e^{j\omega})$ 中除了在 2π 整倍数点上的全部经频率尺度变换后的 $X_e(j\Omega)$ 的图形。对于如图 3.22 所示情况, 这就要求有一个增益为 2、截止频率为 $\pi/2$ 的低通滤波器, 如图 3.22(d)所示。一般来讲, 所要求的增益为 L , 因为 $L(1/T) = [1/(T/L)] = 1/T'$, 而截止频率为 π/L 。

这个例子说明, 如果序列 $x[n] = x_e(nT)$ 是经采样而得到的话(没有混叠), 图 3.21 的系统确实给出了一个满足式(3.79)的输出。因此, 那个系统称为内插器, 因为系统填补了丢掉的样本, 并因此把增采样的过程与内插同义。

和 D/C 转换器情况一样, 有可能利用 $x[n]$ 求得一个 $x_i[n]$ 的内插公式。首先注意到

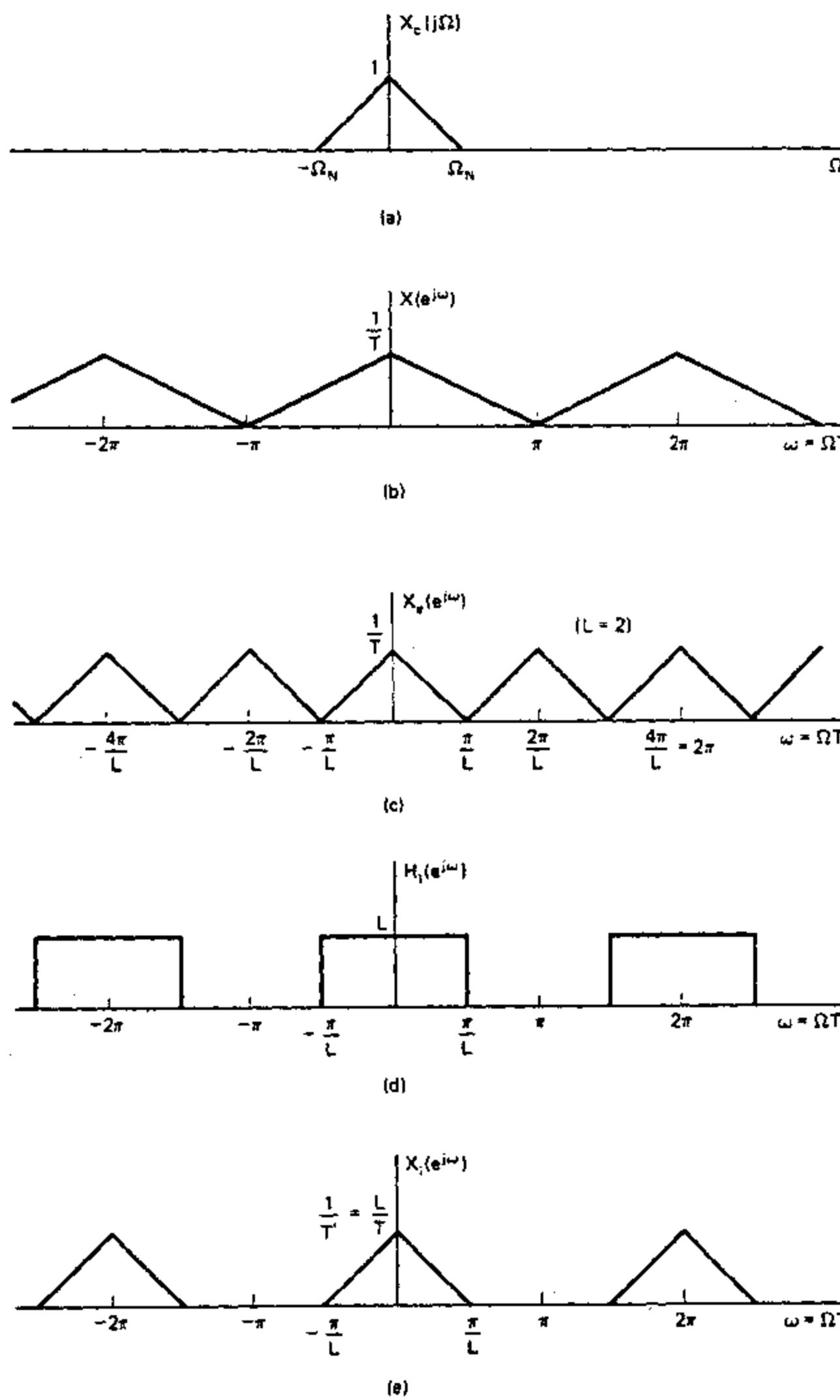


图 3.22 内插的频域说明.

图 3.21 中低通滤波器的冲激响应是

$$h_i[n] = \frac{\sin(\pi n/L)}{\pi n/L}. \quad (3.86)$$

利用式(3.83)可得

$$x_i[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \frac{\sin[\pi(n-kL)/L]}{\pi(n-kL)/L}. \quad (3.87)$$

冲激响应 $h_i[n]$ 有下列性质:

$$\begin{aligned} h_i[0] &= 1, \\ h_i[n] &= 0, \quad n = \pm L, \pm 2L, \dots \end{aligned} \quad (3.88)$$

由此对理想低通内插滤波器就有

$$x_i[n] = x[n/L] = x_e(nT/L) = x_e(nT'), \quad n = 0, \pm L, \pm 2L, \dots \quad (3.89)$$

这就是所要求的. 对全部 n , $x_i[n] = x_e(nT')$ 这一事实从频域证明直接可得.

实际上, 理想低通滤波器是不能真正实现的, 但是在第 7 章将看到相当好的近似却是能设计出来的(也可见 Schafer and Rabiner, 1973 及 Oetken et al., 1975). 在某些情况下, 很简单的内插过程就很可以了. 因为线性内插常被应用(虽然一般不是很准确), 所以值得在这里来考查一下线性内插.

按图 3.21 的系统, 线性内插可用具有下述冲激响应的滤波器来完成

$$h_{lin}[n] = \begin{cases} 1 - |n|/L, & |n| \leq L, \\ 0, & \text{其它,} \end{cases} \quad (3.90)$$

对 $L=5$, 就如图 3.23 所示. 利用这个滤波器, 内插输出就是

$$x_{lin}[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_e[k] h_{lin}[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] h_{lin}[n-kL]. \quad (3.91)$$

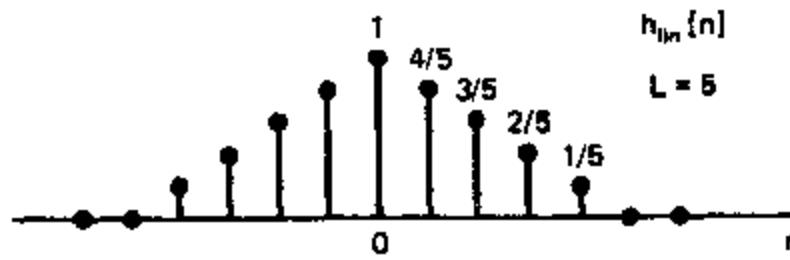


图 3.23 线性内插的冲激响应.

图 3.24(a)画出的是 $L=5$ 时的 $x_e[n]$ 和 $x_{lin}[n]$. 从该图可见, $x_{lin}[n]$ 与样本间接线性内插所得到的序列是一致的. 应该注意到

$$\begin{aligned} h_{lin}[0] &= 1, \\ h_{lin}[n] &= 0, \quad n = \pm L, \pm 2L, \dots \end{aligned} \quad (3.92)$$

所以有

$$x_{lin}[n] = x[n/L], \quad n = 0, \pm L, \pm 2L, \dots \quad (3.93)$$

内插样本的失真大小可以用比较线性内插器和理想低通内插器对同一个内插因子 L 的频率响应来估计. 可以证明(见习题 3.22)

$$H_{lin}(e^{j\omega}) = \frac{1}{L} \left[\frac{\sin(\omega L/2)}{\sin(\omega/2)} \right]^2. \quad (3.94)$$

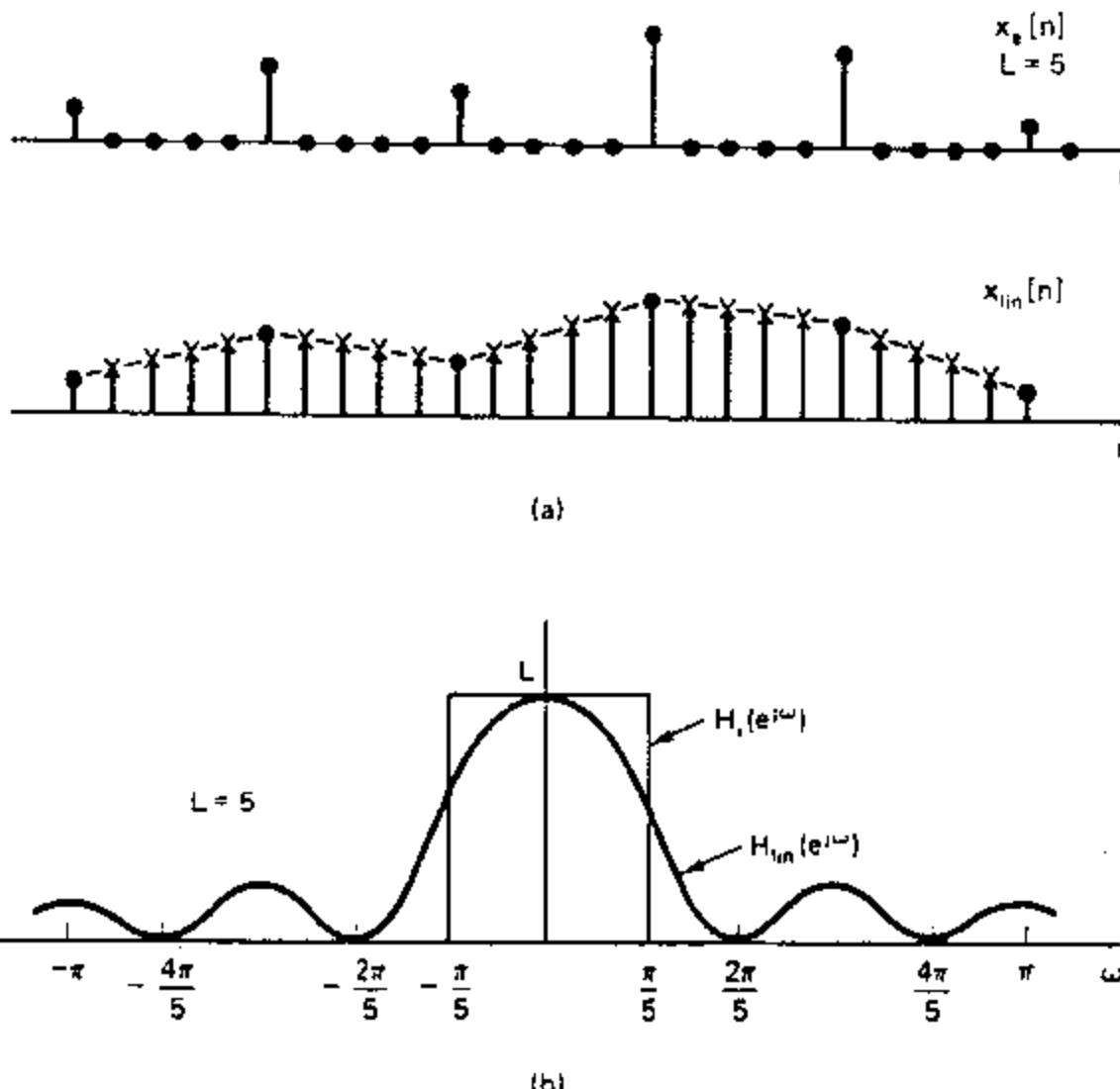


图 3.24 (a) 线性内插的说明. (b) 线性内插滤波器与理想低通内插滤波器频率响应的比较.

$L=5$ 时, 该函数与理想低通内插滤波器的频率响应一起示于图 3.24(b). 由该图可以明显看到, 如果原始信号是以奈奎斯特率采样得到的话, 线性内插将不会很好, 因为滤波器的输出包含有位于 $\pi/L < |\omega| \leq \pi$ 带内相当大的能量. 然而, 如果原采样率大大高于奈奎斯特率, 那么线性内插器在滤除 $2\pi/L$ 整倍数点上经频率尺度变换后的 $X_s(j\Omega)$ 的图形还是相当成功的. 这一点在直观上也是合情理的, 因为若原采样率大大超过奈奎斯特率, 那么信号在样本间将不会有明显变化, 因此线性内插就差不多是准确的了.

3.6.3 采样率按非整数因子变化

我们已经指出如何将一个序列的采样率按某一整数因子增加或减小. 将抽取和内插结合起来, 就有可能用某一非整数因子来变更采样率. 更具体些, 可以考虑图 3.25(a). 图中示出一个内插器, 把采样周期从 T 降到 T/L , 然后紧跟着一个抽取器, 该抽取器又将采样周期提高 M 倍, 所产生的输出序列 $\tilde{x}_d[n]$ 真正有效的采样周期为 $T' = TM/L$. 通过适当地选择 L 和 M , 就能够任意地接近任何所要求的采样周期的比. 例如, 若 $L=100, M=101$, 则 $T'=1.01T$.

如果 $M > L$, 那么在采样周期上就有一个净的增加(采样率下降); 若 $M < L$, 则相反. 由图 3.25(a)可见, 内插和抽取滤波器是级联的, 可以把两者合并在一起组成一个低通滤波器, 其增益为 L , 而截止频率为 π/L 和 π/M 两者中的最小值, 如图 3.25(b)所示. 如果 $M > L$, 那么 π/M 就是主截止频率, 从而在采样率上有一个净的减小. 正如在 3.6.1 节所

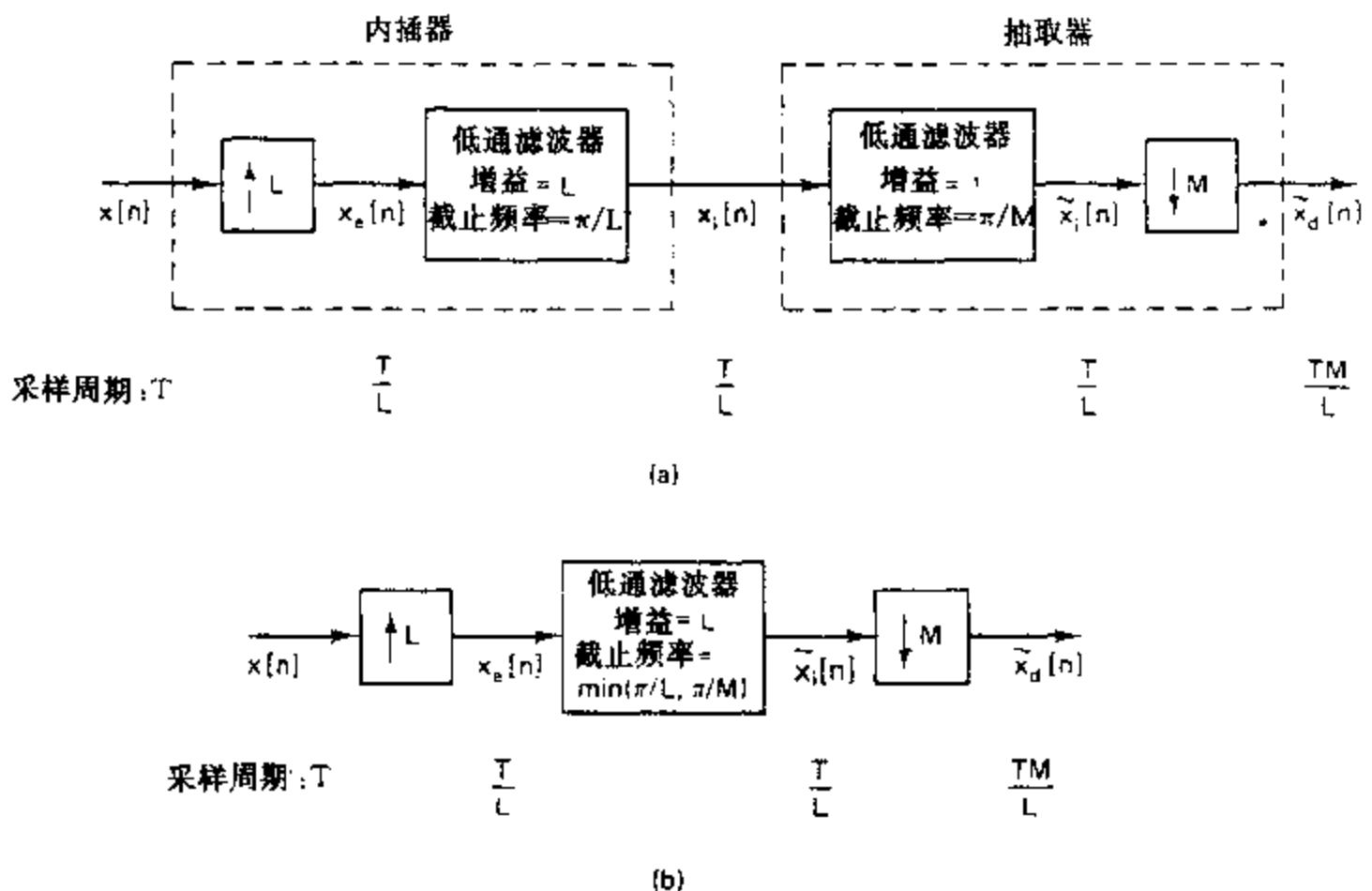


图 3.25 (a) 按非整数因子改变采样率的系统. (b) 抽取和内插滤波器合而为一的简化系统.

指出的,若 $x[n]$ 是以奈奎斯特率采样得到的话,如果想要避免混叠,那么序列 $\tilde{x}_d[n]$ 将代表一个原带限信号经低通过滤后的信号.另一方面,若 $M < L$,那么 π/L 就是主截止频率,这时将不需对低于原奈奎斯特频率的信号的带宽提出进一步的限制.

3.7 实际应用考虑的问题

本章到现在为止,有关用离散时间序列来表示连续时间信号的讨论都是集中在周期采样和带限内插的理想化模型上.我们把讨论的问题归纳为利用一个称之为理想的连续到离散(C/D)转换器的理想化采样系统,和一个称之为理想的离散到连续(D/C)转换器的理想化带限内插器系统.这些理想化的转换系统使得我们能够把精力集中在带限信号及其样本之间关系的主要数学细节上.例如,在3.4节用了理想的C/D和D/C转换系统证明了:如果输入是带限的,而采样率又超过奈奎斯特率的话,那么线性时不变离散时间系统就能在图3.26(a)的结构中得以实现线性时不变连续时间系统.在实际装置中,连续时间信号不是真正带限的,理想滤波器也不能实现,以及理想的C/D和D/C转换器也仅仅是能够近似的.图3.26(b)的方框图示出对连续时间(模拟)信号数字处理的一个较为现实的模型.这一节将考查一下由图3.26(b)系统中每一部分所引入的某些不完善方面.虽然,完成精确的分析是困难的,但是近似的分析将会指出每种不完善性的效果,并且能指出图3.26(b)的系统可以非常近似于图3.26(a)的系统.

3.7.1 消除混叠的预滤波

在很多情况下,处理模拟系统总是希望使得一个离散时间系统的采样率最小.这是由

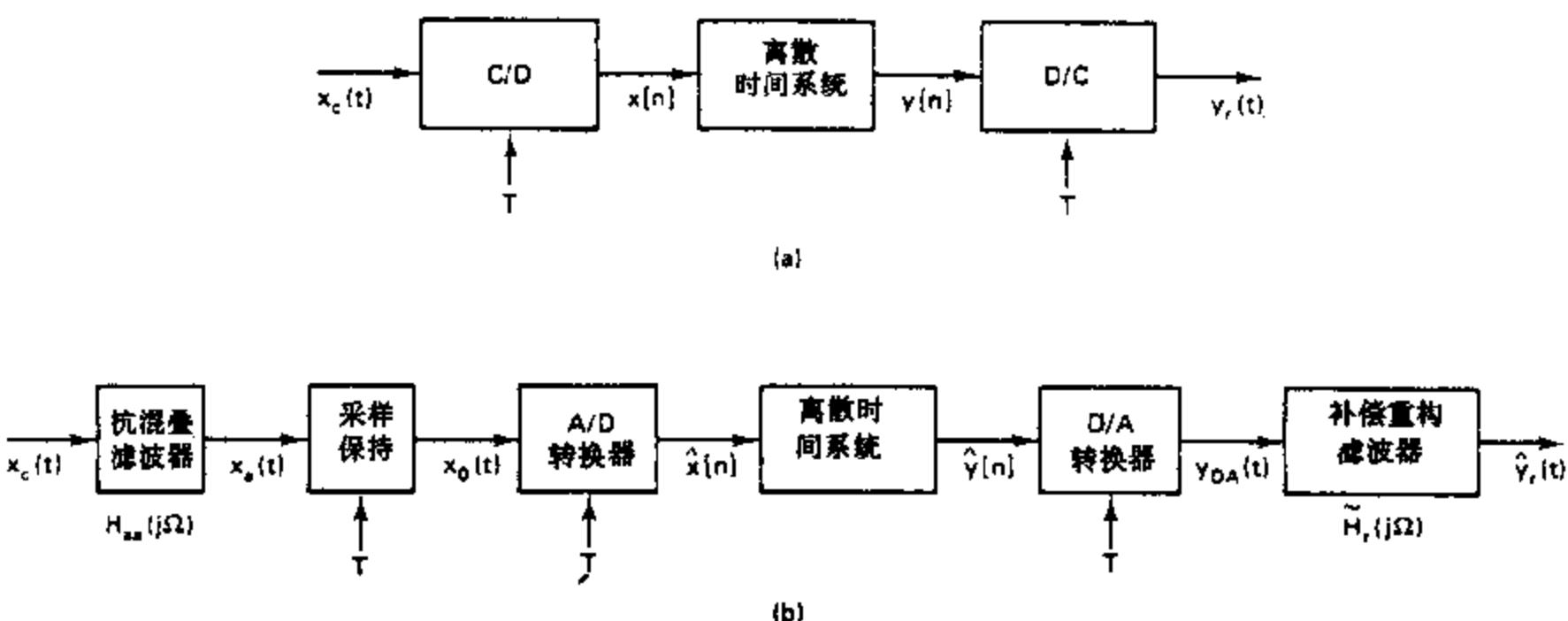


图 3.26 (a) 连续时间信号的离散时间过滤.(b) 一个更为实际的模型.

于为实现该系统要求处理运算的量是正比于要处理的样本数的. 如果输入不带限或者输入的奈奎斯特频率太高,往往就要用到预滤波. 一个例子是发生在处理语音信号中,即使语音信号在 4~20kHz 带内含有明显的分量,但对可懂度来说仅要求到 3~4kHz 就够了. 另外,即便信号本身是带限的,宽带的加性噪声也可能占据高频区域,作为采样的结果,这些噪声分量也会混叠到低频中去. 如果希望避免混叠,就必须将输入信号强制限带到低于所要求的采样率一半的频率上. 这可在 C/D 转换器之前用低通滤波连续时间信号来完成,如图 3.27 所示. 这种位于 C/D 转换器之前的低通滤波器称为抗混叠滤波器. 理想情况,抗混叠滤波器的频率响应为

$$H_{aa}(j\Omega) = \begin{cases} 1, & |\Omega| < \Omega_c < \pi/T, \\ 0, & |\Omega| > \Omega_c. \end{cases} \quad (3.95)$$

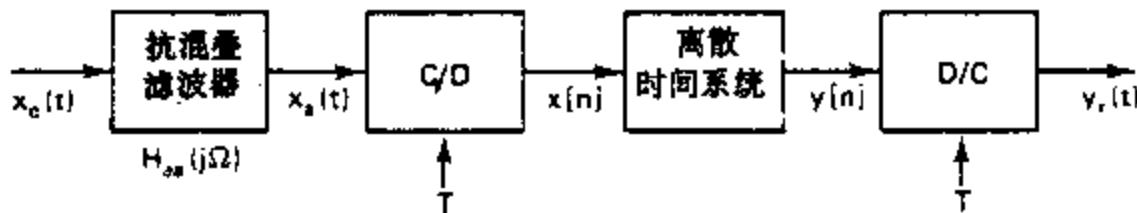


图 3.27 为消除混叠的预滤波的应用.

根据 3.4.1 节的讨论,从抗混叠滤波器的输出 $x_a(t)$ 到系统输出 $y_r(t)$ 这一部分系统总是表现为一个线性时不变系统,这是因为输入到 C/D 转换器的 $x_a(t)$ 是被抗混叠滤波器强制限带到低于 π/T 弧度/秒的频率内. 因此,整个图 3.27 系统的有效频率响应将是 $H_{aa}(j\Omega)$ 和由 $x_a(t)$ 到 $y_r(t)$ 的有效频率响应的乘积. 将式(3.95)和式(3.37)结合在一起就有

$$H_{eff}(j\Omega) = \begin{cases} H(e^{j\Omega T}), & |\Omega| < \pi/T, \\ 0, & |\Omega| > \pi/T. \end{cases} \quad (3.96)$$

因此,对于一个理想的抗混叠滤波器来说,即使当 $X_c(j\Omega)$ 不是带限的,图 3.27 的系统

仍表现为一个其频率响应如式(3.96)所给出的线性时不变系统. 实际上, 频率响应 $H_{aa}(j\Omega)$ 也不可能理想带限的, 但是能够将 $H_{aa}(j\Omega)$ 在 $|\Omega| > \pi/T$ 做得足够小, 以使混叠最小. 在这种情况下, 图 3.27 系统的总频率响应将近似为

$$H_{eff}(j\Omega) \approx H_{aa}(j\Omega)H(e^{j\Omega T}). \quad (3.97)$$

为了实现在 π/T 以上的频率响应部分小到可以忽略不计, 就需要对 $H_{aa}(j\Omega)$ 特性一开始就“滚降”, 也即在低于 π/T 的频率上就引入衰减. 式(3.97)指出抗混叠滤波器的滚降(以及其它稍后要讨论的线性时不变失真)至少能够部分地在离散时间系统设计中计及它们而得到补偿. 这点将在习题 3.32 中说明.

3.7.2 模拟到数字(A/D)转换

一个理想的 C/D 转换器将一个连续时间信号转换为一个离散时间信号, 其中每个样本都认为是无限精度的. 对数字信号处理而言, 作为一种近似, 图 3.28 的系统把一个连续时间(模拟)信号转换为一个数字信号, 也即一个有限精度的序列或量化样本. 图 3.28 中的两个系统相于作为具体的器件是可以获得的系统. A/D 转换器是一个真正的器件, 它将输入端电压或电流大小转换为二进制码, 该二进制码代表了最接近于输入大小的一个量化幅度值. 在外部时钟的控制下, A/D 转换器在每 T 秒内起动和完成一次 A/D 转换. 然而, 转换不是瞬时的, 为此一个高性能的 A/D 系统一般都包括一个采样与保持环节, 如图 3.28 所示. 理想的采样-保持系统是其输出为

$$x_0(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]h_0(t-nT), \quad (3.98)$$

式中 $x[n] = x_a(nT)$ 是 $x_a(t)$ 的理想样本, 而 $h_0(t)$ 是零阶保持系统的冲激响应, 即

$$h_0(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t < T, \\ 0, & \text{其它.} \end{cases} \quad (3.99)$$

如果注意到式(3.98)可以等效为

$$x_0(t) = h_0(t) * \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(nT)\delta(t-nT), \quad (3.100)$$

那么该理想采样保持就等效为冲激串调制紧跟着零阶保持系统的线性滤波, 如图 3.29(a) 所示. $x_0(t)$ 的傅里叶变换与 $x_a(t)$ 的傅里叶变换之间的关系可以仿照 3.2 节的分析步骤算出来, 并且在讨论 D/A 转换器时将作类似的分析. 然而在目前这种分析不是很必要的, 因为有关该系统的特性要了解的都能从其时域表达中看到. 明确点说, 零阶保持的输出是一个阶梯波, 它在采样周期 T 秒内样本值都保持不变, 这就是如图 3.29(b) 所指出的. 实际的采样保持电路都设计成尽可能瞬时地对 $x_a(t)$ 采样, 并且直到下一次采样前尽量保持样本值不变. 其目的是为了给 A/D 转换器提供一个所要求的不变的输入电压(或电流). 有关各种各样的 A/D 转换过程, 以及采样保持电路和 A/D 电路实现的详细论述都不属于本书的讨论范围. 有很多实际问题都会在为获得一个既采样得快、又保持样本值不变的采样保持系统中出现. 同样, 还有很多实际考虑是受制于 A/D 转换器电路的转换速度和

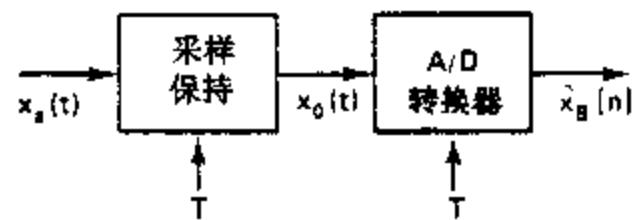


图 3.28 模数转换的实际结构.

精度的。诸如此类的问题都在赫纳特克(Hnatek, 1976)和施密德(Schmid, 1976)的著作中讨论到。关于某一具体产品的性能指标可以在厂家的产品目录中找到。本节关心的是在 A/D 转换过程中量化效应的分析。

因为在图 3.28 中采样保持系统的目的是要实现理想采样并保持该样本值以供 A/D 转换器量化，所以可以将图 3.28 的系统用图 3.30 的系统来表示，图中理想的 C/D 转换器表示由采样保持完成的采样，而量化器和编码器一起则代表 A/D 转换器的工作，关于这点稍后将作说明。

量化器是一种非线性系统，它的作用是变换输入样本 $x[n]$ 为某一预先规定的有限集合值中的一个。把这种运算表示为

$$\hat{x}[n] = Q(x[n]) \quad (3.101)$$

称 $\hat{x}[n]$ 为量化样本。量化器可以有均匀间隔的量化电平，也可以是非均匀间隔的；然而，

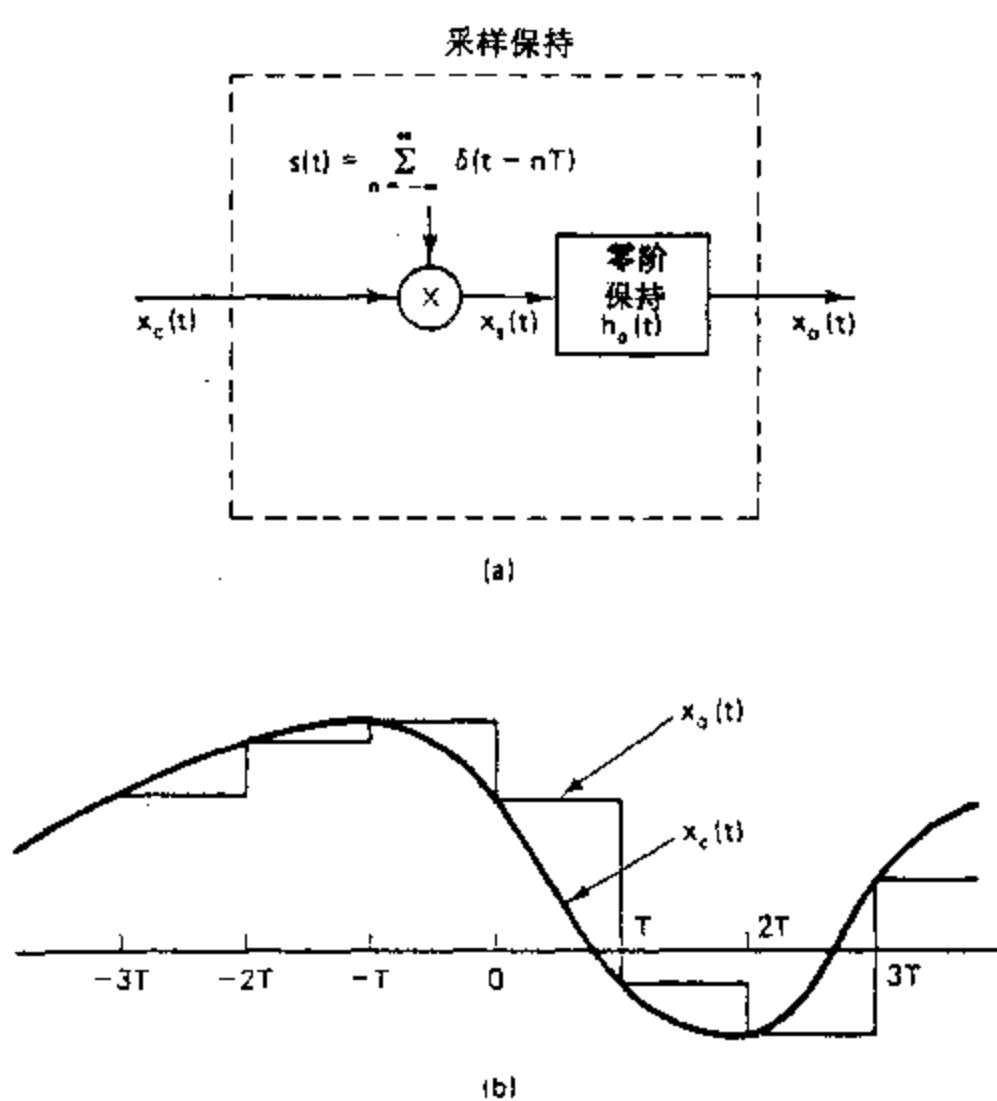


图 3.29 (a) 理想采样保持的表示, (b) 采样保持典型的输入输出信号。

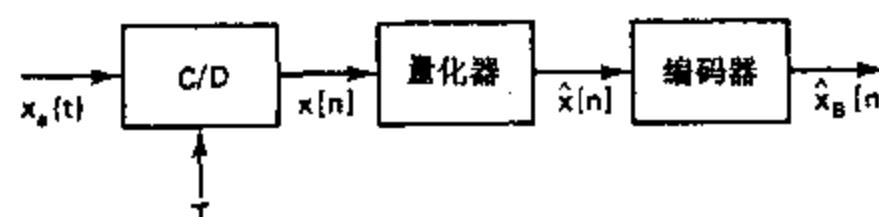


图 3.30 图 3.28 系统的数学表示。

在信号处理场合,量化阶通常是均匀的.图 3.31 示出了一种典型的均匀量化特性*,其中样本值是被舍入到最接近的量化电平上.

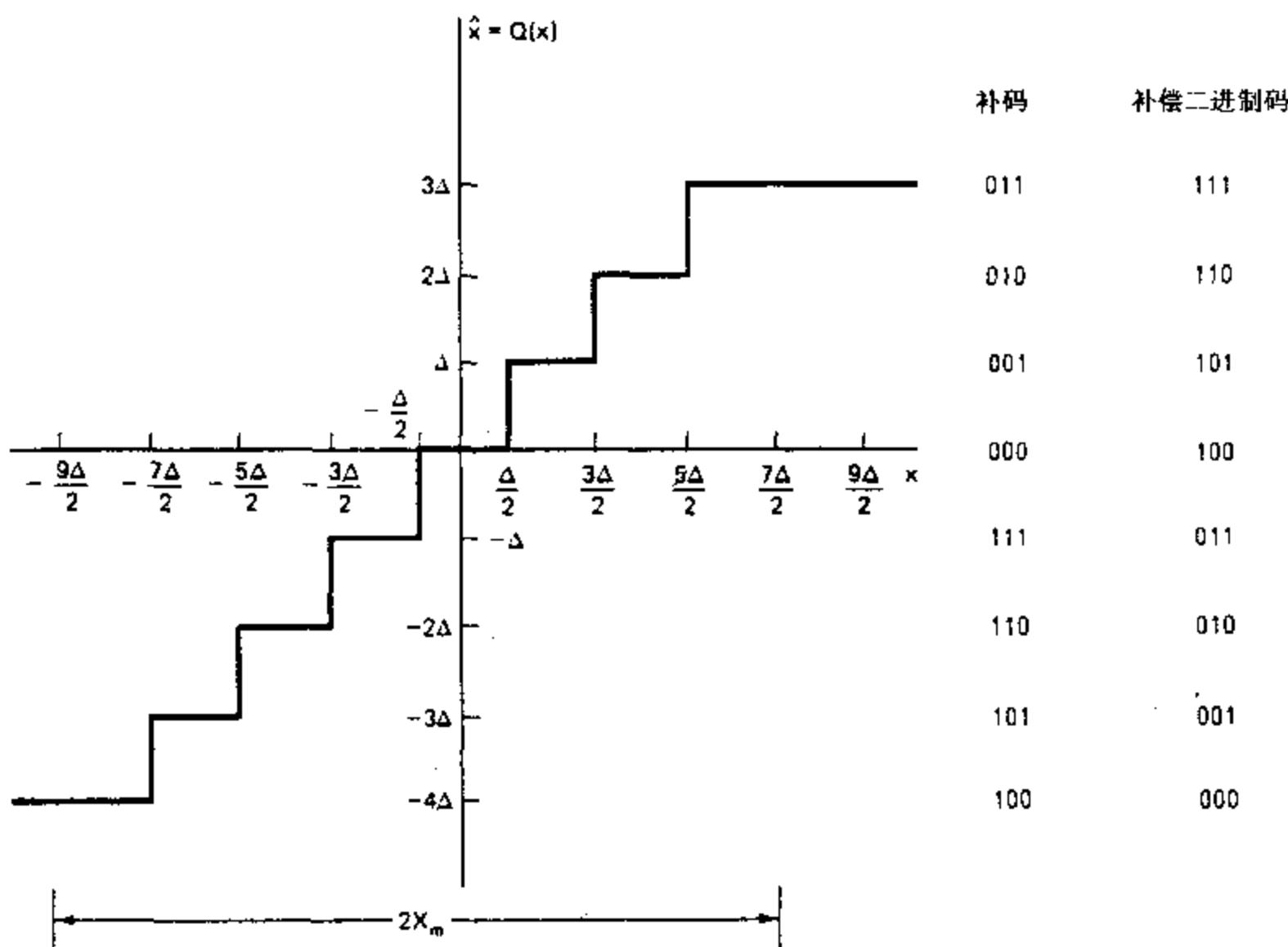


图 3.31 用于 A/D 转换的典型量化器.

图 3.31 有几个特点应该强调一下.首先,这种量化器适合于具有正负值样本的信号(双极性).如果已知输入样本总是正(或负)的,那么一种不同的量化电平分布或许更为适合.其次是图 3.31 量化器的量化电平数为偶数电平.利用偶数电平,就不可能在零幅度点上有一个量化电平,同时有相同的正负量化电平数.一般来说,量化电平数是 2 的幂,但是数目比 8 要大得多,所以相邻两电平之差通常是很小的.

图 3.31 还给出了量化电平的编码.因为有八个量化电平,所以可用三位二进制码来表示(一般, 2^{B+1} 个电平可用 $(B+1)$ 位二进制码编码).原则上,任何一种符号的安排都可以使用,并且有很多现成的二进制编码方案,根据应用场合不同各有其利弊.例如在图 3.31 中右边一列的二进制数就是补偿二进制编码方案,在这里二进制符号从最负量化电平开始是以一种数值的次序安排的.然而,在数字信号处理中一般都希望应用一种二进制编码,使得作为量化样本加权表示的码字能直接作算术运算.

图 3.31 中左面一列示出按 2 的补码安排的一种二进制数.对于表示带符号的数来说,这是一种最为方便的数制,因而广泛用在大多数计算机和微处理器中.或许这也是最

* 由于量化台阶是线性上升的,所以这种量化器又称为线性量化器.

方便的一种量化电平表示方法。顺便提及，只要在最高有效位求补，就能把补偿二进制码转换成 2 的补码。

在 2 的补码表示中，最左或最高有效位是符号位，而剩下的位既可用来表示二进制整数，也可以是分数，我们假定都是用来表示二进制的分数，也即假定二进制的小数点是在两个最高有效位之间。那么，在 2 的补码表示中，二进制符号具有如下意义（设 $B=2$ ）：

二进制符号	数值, \hat{x}_B
0·11	3/4
0·10	1/2
0·01	1/4
0·00	0
1·11	-1/4
1·10	-1/2
1·01	-3/4
1·00	-1

一般，如果有一个 $(B+1)$ 位的 2 的补码分数，它表示为

$$a_0 a_1 a_2 \cdots a_B,$$

那么其值就是

$$-a_0 2^0 + a_1 2^{-1} + a_2 2^{-2} + \cdots + a_B 2^{-B}.$$

码字与量化电平之间的关系与图 3.31 中的参数 X_m 有关。这个参数一般称为 A/D 转换器的满幅度值。典型值是 10,5 或 1V。由图 3.31 可见，量化器量化阶 Δ 的大小一般是

$$\Delta = \frac{2X_m}{2^{B+1}} = \frac{X_m}{2^B}. \quad (3.102)$$

最小的量化电平 ($\pm \Delta$) 就相当于二进制码字中的最低有效位。再者，码字与量化样本间的数值关系是

$$\hat{x}[n] = X_m \hat{x}_B[n] \quad (3.103)$$

因为已经假定 $\hat{x}_B[n]$ 是一个二进制数，且 $-1 \leq \hat{x}_B[n] < 1$ （对 2 的补码而言）。在这种方案中二进制编码样本 $\hat{x}_B[n]$ 就正比于量化样本（用 2 的补码），因此可以用来作为样本大小的一种数值表示。一般都假定输入信号是归一化到 X_m ，这样 $\hat{x}[n]$ 和 $\hat{x}_B[n]$ 在数值上就是一样的，从而不再区分什么量化样本和二进制编码样本。

图 3.32 示出一个简单的例子，该例用一个三位的量化器，给出一个正弦波的样本量化和编码。图中未量化的样本 $x[n]$ 用实圆点表示，已量化样本 $\hat{x}[n]$ 用空圆点表示。同时也示出理想采样和保持的输出。虚线标出的“D/A 转换器的输出”稍后再作讨论。另外，图 3.32 还指出了代表每个样本的三位码字。由于模拟信号 $x_a(t)$ 超出了该量化器的满幅度值，所以某些正样本就被“箝位”。

虽然前述大部分讨论都是有关量化电平的补码表示，但在 A/D 转换中，有关量化和编码的基本原理都是相同的，而与用来表示样本的二进制码无关。有关在数字计算中用到的二进制运算的详细讨论可在关于计算机算术运算的教科书中找到（例如，Knuth, 1981；Cavanagh, 1984）。现在我们转到量化效应的分析上来。因为分析不依赖于二进制码字的

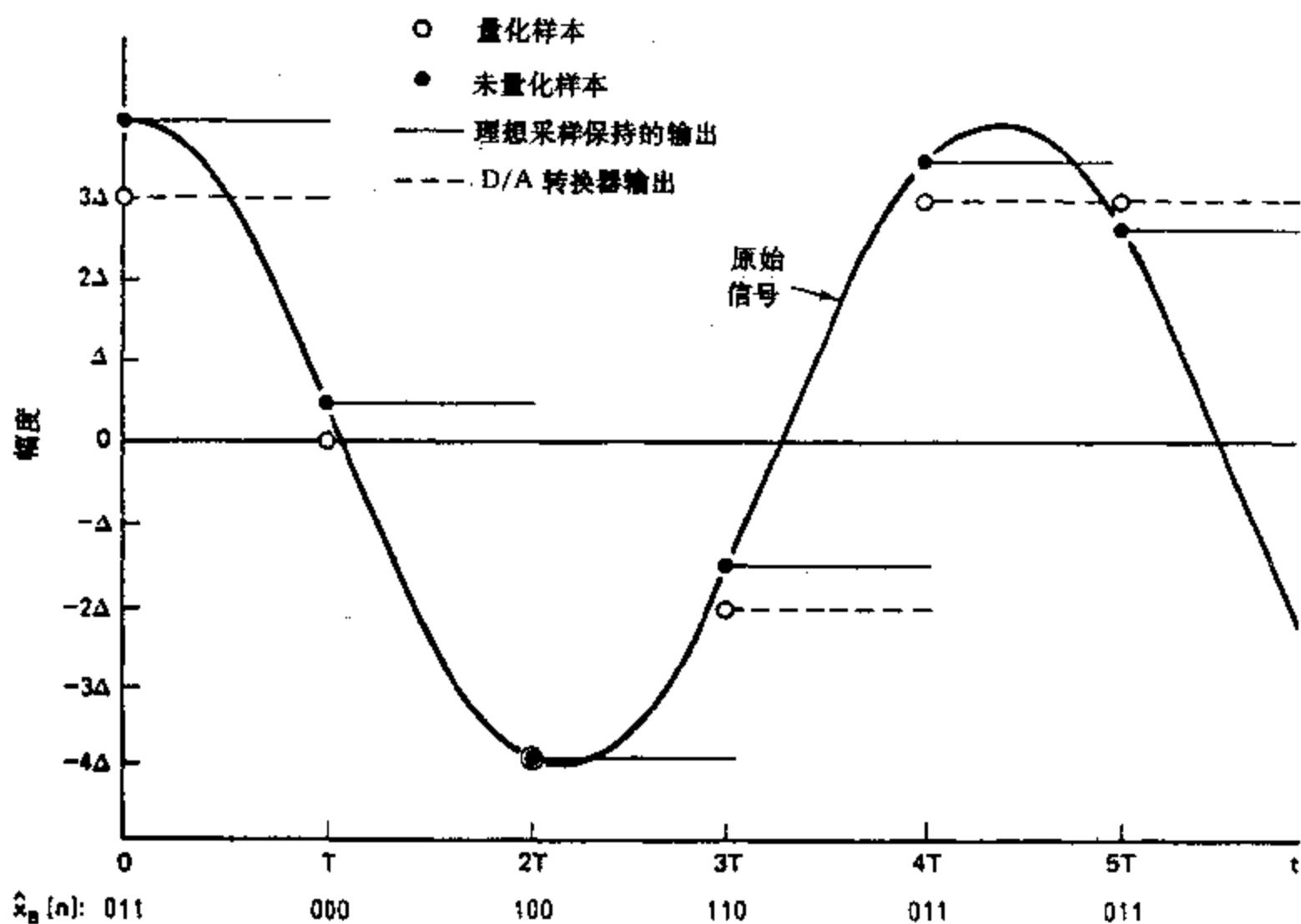


图 3.32 用三位量化器的采样、量化、编码和 D/A 转换.

安排, 所以可以得到更为一般的结论.

3.7.3 量化误差分析

由图 3.31 和图 3.32 可见, 一般量化样本 $\hat{x}[n]$ 不同于样本的真值 $x[n]$. 其差值就是量化误差, 定义为

$$e[n] = \hat{x}[n] - x[n]. \quad (3.104)$$

例如, 对于图 3.31 三位的量化器, 如果 $\Delta/2 < x[n] \leq 3\Delta/2$, 那么 $\hat{x}[n] = \Delta$, 于是有

$$-\Delta/2 < e[n] \leq \Delta/2. \quad (3.105)$$

在图 3.31 情况下, 只要

$$-9\Delta/2 < x[n] \leq 7\Delta/2. \quad (3.106)$$

式(3.105)总成立. 一般在 $(B+1)$ 位量化器中, 其 Δ 由式(3.102)给定, 只要有

$$(-X_m - \Delta/2) < x[n] \leq (X_m - \Delta/2). \quad (3.107)$$

量化误差总满足式(3.105). 如果 $x[n]$ 超出该范围(像图 3.32 中 $t=0$ 时的样本), 那么量化误差在幅度上就大于 $\Delta/2$, 这些样本就说是箇位了.

一种简化而有用的量化器模型如图 3.33 所示. 在该模型中, 量化误差样本被认为是一种加性噪声信号. 如若已知 $e[n]$ 的话, 该模型就完全等效于该量化器. 在大多数情况下, $e[n]$ 是未知的, 这时基于图 3.33 的一种统计模型就可以用来表示量化效应. 在第 6 章和第 9 章将使用这样的模型来描述信号处理算法中的量化效应. 量化误差的统计表示是基于如下假设:

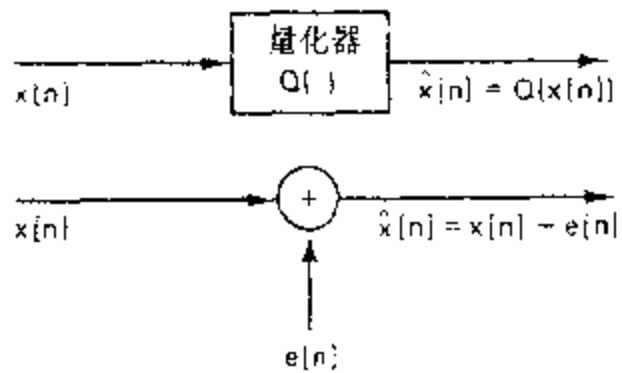


图 3.33 量化器的加性噪声模型。

1. 误差序列 $e[n]$ 是平稳随机过程的一个样本序列。

2. 误差序列与序列 $x[n]$ 不相关。

3. 误差过程的随机变量是不相关的；也就是说误差是一个白噪声过程。

4. 误差过程的概率分布在量化误差范围内是均匀分布的。

将会看到，这些假设会导致一个量化噪声相当

简单的分析。极易发现这些假设是明显地不成立的

一些情况。例如，若 $x_a(t)$ 是一个阶跃函数，这些假设就不能认为是合理的。然而，当信号是一个复杂的信号时，像语音或音乐这样一类多少是以一种不可预见的方式剧烈起伏波动的信号，这些假设就更为真实些。实验已经证明，随着信号变得愈益复杂，信号与量化噪声之间所测得的相关愈趋减弱，并且误差也变得不相关（见 Bennett, 1948; Widrow, 1956, 1961）。依此可推理，如果信号足够复杂，而量化阶又足够小，以致于从一个样本到另一个样本，信号的幅度很可能横穿过许多量化台阶，那么这个统计模型的假设似乎就愈真实。

作为一种说明，图 3.34(a)示出某一语音波形未被量化的样本序列。图 3.34(b)和 3.34(c)则是图 3.34(a)的样本分别用 8 位和 3 位量化器量化以后的量化噪声样本。在 8 位情况下，量化噪声已被放大了 32 倍。将这些噪声序列与信号作一比较，就会对前述关于在精细量化（8 位）情况下量化噪声性质的论断给予佐证。在第 11 章当计算量化噪声序列的功率密度谱和自相关函数时，这一点还将进一步被说明。

对属于是舍入样本值到最接近的量化电平的量化器来说（如图 3.31 所示），量化噪声的幅度是在下列范围内

$$-\Delta/2 < e[n] \leq \Delta/2. \quad (3.108)$$

对于小的 Δ ， $e[n]$ 是一个在 $-\Delta/2$ 到 $\Delta/2$ 作均匀分布的随机变量的假设是合理的。因此，对于这种量化噪声的一阶概率密度如图 3.35 所示（如果在实现量化中是截尾而不是舍入，那么误差总是负的，并假设从 $-\Delta$ 到 0 为均匀概率密度分布）。为了完善量化噪声统计模型，假定噪声样本间是不相关的，以及 $e[n]$ 与 $x[n]$ 也不相关。这样 $e[n]$ 就假设为一个均匀分布的白噪声序列。 $e[n]$ 的均值是零，而其方差为

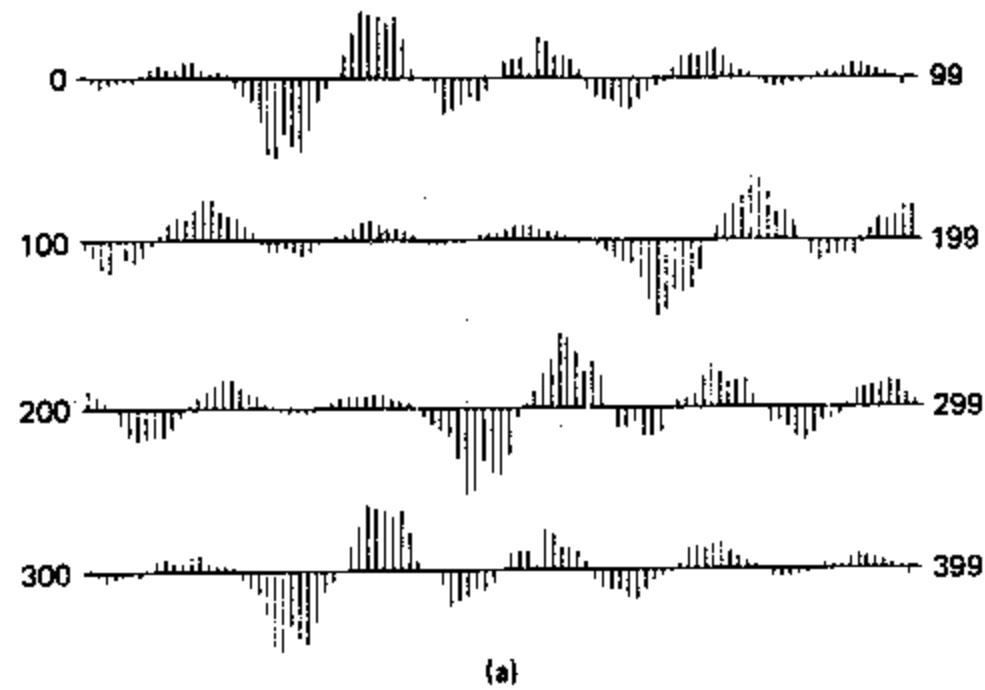
$$\sigma_e^2 = \frac{\Delta^2}{12}. \quad (3.109)$$

对于一个 $(B+1)$ 位量化器，其满幅度值为 X_m ，噪声方差或功率就是

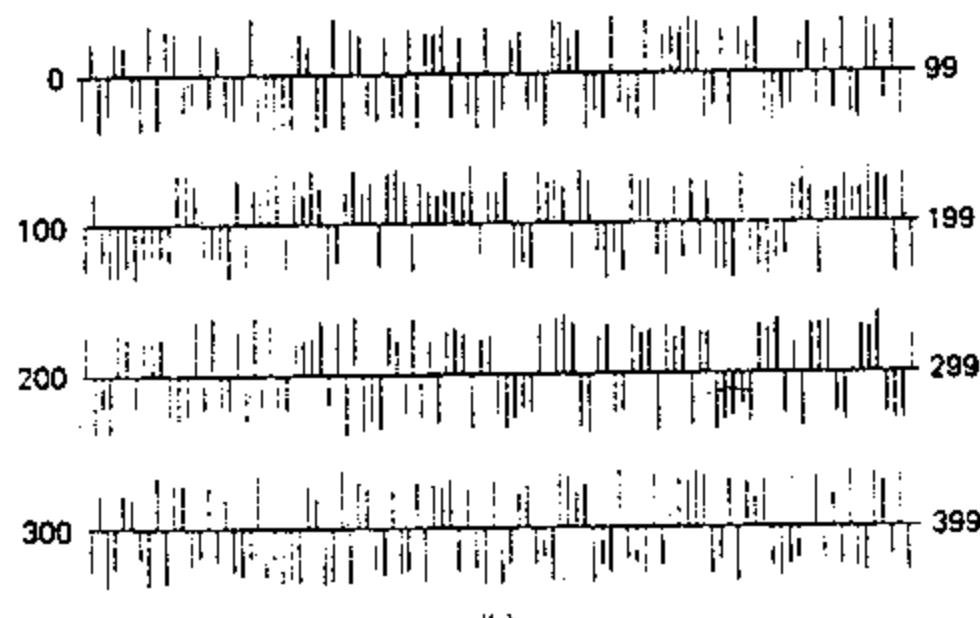
$$\sigma_e^2 = \frac{2^{-2B} X_m^2}{12}. \quad (3.110)$$

一个信号被加性噪声所污损的一种常用度量是信号噪声比，定义为信号方差（功率）对噪声方差的比。以 dB（分贝）表示，一个 $(B+1)$ 位量化器的信噪比就是

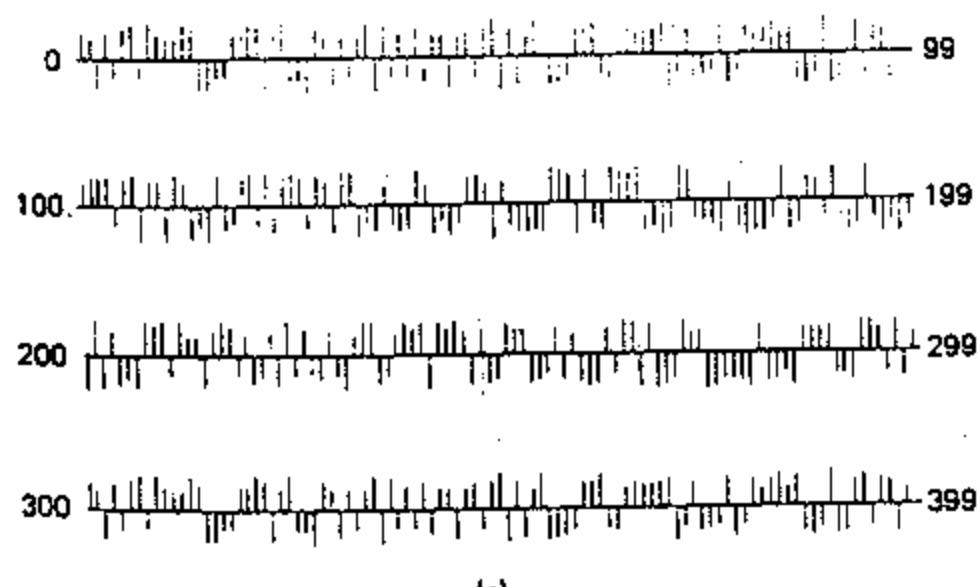
$$\begin{aligned} \text{SNR} &= 10 \log_{10} \left(\frac{\sigma_x^2}{\sigma_e^2} \right) = 10 \log_{10} \left(\frac{12 \cdot 2^{2B} \sigma_e^2}{X_m^2} \right) \\ &= 6.02B + 10.8 - 20 \log_{10} \left(\frac{X_m}{\sigma_e} \right). \end{aligned} \quad (3.111)$$



(a)



(b)



(c)

图 3.34 量化噪声的例子, (b)和(c)分别是 8 位和 3 位量化器对(a)的语音样本量化所得的量化噪声波形, 图(b)的量化噪声相对于(a)放大了 5 倍, 图(c)的量化噪声相对于(a)放大了 100 倍.

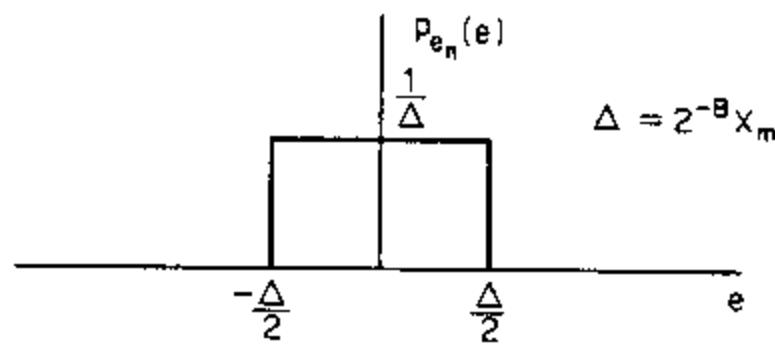


图 3.35 舍入量化器(图 3.31)量化误差的概率密度函数.

由式(3.111)可见,量化样本的字长每增加一位(也即量化电平数加倍),信噪比近似提高 6dB,特别有启发性的是考虑式(3.111)中的这一项

$$-20\log_{10}\left(\frac{X_m}{\sigma_x}\right) \quad (3.112)$$

首先, X_m 是量化器的一个参数,通常在一个实际系统中是固定的. 量 σ_x 是信号幅度的均方根值,它一定小于信号的峰值幅度. 例如,若 $x_s(t)$ 是一个峰值幅度为 X_p 的正弦波,则 $\sigma_x = X_p / \sqrt{2}$. 如果 σ_x 太大,峰值信号幅度将超过 A/D 转换器的满幅度值 X_m . 这时,式(3.111)不再成立,并且会产生严重失真. 另一方面,若 σ_x 太小,那么式(3.111)的信噪比下降. 事实上,容易看出,当 σ_x 减半时,SNR 下降 6dB. 因此,仔细地将信号幅度与 A/D 转换器的满幅度值匹配是很重要的.

对于像语音和音乐这样的模拟信号,幅度分布趋向于集中在零附近,并随着幅度的增加很快地跌落. 在这些情况下,样本幅度超过均方根值三倍或四倍的概率非常小. 例如,如果信号幅度是一个高斯型分布,那么仅有 0.064% 的样本其幅度才大于 $4\sigma_x$. 因此,为了避免峰值箝位(如在统计模型中所假设的),可以在 A/D 转换器之前设置滤波器和放大器的增益,以使得 $\sigma_x = X_m / 4$. 在式(3.111)中利用该 σ_x 值,则有

$$\text{SNR} \approx 6B - 1.25\text{dB}. \quad (3.113)$$

例如,用在高质量的音乐录制和重放系统中,要获得大约 90—96dB 的信噪比,就要求有 16 位的量化,但是要记住,要得到这样一个性能仅在输入信号是精心地与 A/D 转换器的满幅度值匹配之后方有可能.

峰值信号幅度与量化噪声的绝对大小之间的这种折衷对任何量化过程来讲都是基本的. 在第 6 章当讨论在实现离散时间线性系统中的舍入噪声时将会再一次看到它的重要性.

3.7.4 D/A 转换

在 3.3 节讨论了如何利用理想低通滤波从一个样本序列来重构一个带限信号. 利用傅里叶变换,这个重构过程表示成

$$X_r(j\Omega) = X(e^{j\omega})H_r(j\Omega), \quad (3.114)$$

式中 $X(e^{j\omega})$ 是样本序列的离散时间傅里叶变换, $X_r(j\Omega)$ 是已重构的连续时间信号的傅里叶变换. 理想重构滤波器是

$$H_r(j\Omega) = \begin{cases} T, & |\Omega| < \pi/T, \\ 0, & |\Omega| > \pi/T. \end{cases} \quad (3.115)$$

在时域, $x_r(t)$ 和 $x[n]$ 之间的相应关系是

$$x_r(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \frac{\sin[\pi(t-nT)/T]}{\pi(t-nT)/T}. \quad (3.116)$$

该系统以序列 $x[n]$ 作输入, 产生输出为 $x_r(t)$, 把它称作理想 D/C 转换器. 对理想 D/C 转换器一个具体的可实现的对应系统是一个数字-模拟转换器(D/A 转换器)紧跟着一个近似低通滤波器, 如图 3.36(a) 所示. 一个 D/A 转换器将一个二进制码字序列作它的输入, 产生一个如下式所示的连续时间输出

$$\begin{aligned} x_{DA}(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_m \hat{x}_B[n] h_0(t-nT) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{x}[n] h_0(t-nT), \end{aligned} \quad (3.117)$$

式中 $h_0(t)$ 是由式(3.99)给出的零阶保持系统的冲激响应. 在图 3.32 中的虚线示出了对

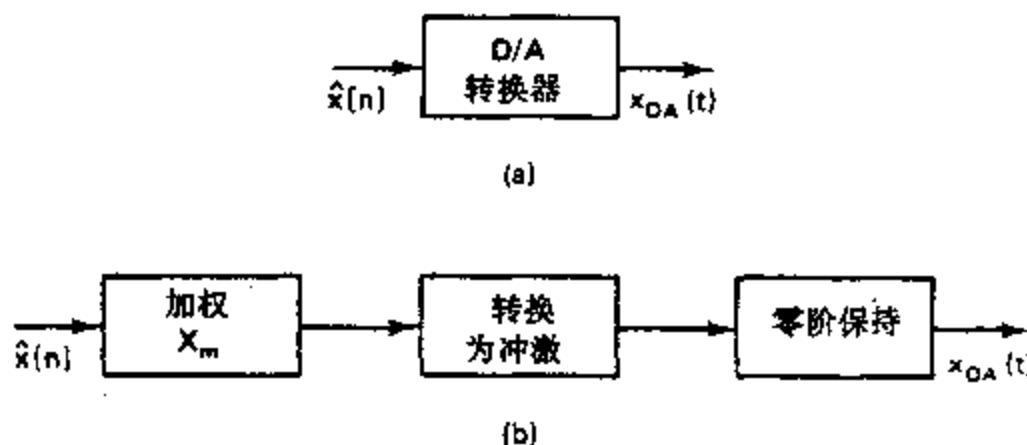


图 3.36 (a)D/A 转换器方框图. (b)利用零阶保持的表示.

正弦波量化例子的 D/A 转换器的输出. 应该注意到, D/A 转换器以和采样保持中保持未被量化的输入样本同样的方式在一个样本周期内保持该量化样本. 如果用加性噪声模型来表示量化效应, 那么式(3.117)就变成

$$x_{DA}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] h_0(t-nT) + \sum_{n=-\infty}^{\infty} e[n] h_0(t-nT). \quad (3.118)$$

为了简化讨论, 定义

$$x_0(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] h_0(t-nT), \quad (3.119a)$$

$$e_0(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e[n] h_0(t-nT), \quad (3.119b)$$

这样, 式(3.118)就能写成

$$x_{DA}(t) = x_0(t) + e_0(t). \quad (3.120)$$

因为 $x[n] = x_a(nT)$, 所以信号分量 $x_0(t)$ 就与输入信号 $x_a(t)$ 有关. 噪声信号 $e_0(t)$ 决定于量化噪声样本 $e[n]$, 这与 $x_0[t]$ 决定于未被量化的信号样本的方式是一样的. 式(3.119a)的傅里叶变换为

$$\begin{aligned} X_0(j\Omega) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] H_0(j\Omega) e^{-j\Omega nT} \\ &= \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\Omega nT} \right) H_0(j\Omega) \\ &= X(e^{j\Omega T}) H_0(j\Omega), \end{aligned} \quad (3.121)$$

现在因为

$$X(e^{j\Omega T}) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a(j\Omega + j2\pi k/T), \quad (3.122)$$

因此就有

$$X_o(j\Omega) = \left[\frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a(j\Omega + j2\pi k/T) \right] H_o(j\Omega). \quad (3.123)$$

如果 $X_a(j\Omega)$ 是带限到 π/T 频率以下, 那么在式(3.123)中 $X_a(j\Omega)$ 频移的那些部分就不会重叠. 如果定义一个补偿的重构滤波器为

$$\tilde{H}_r(j\Omega) = \frac{H_r(j\Omega)}{H_o(j\Omega)}, \quad (3.124)$$

如果输入是 $x_o(t)$ 的话, 那么该滤波器的输出就是 $x_r(t)$. 零阶保持滤波器的频率响应很容易证明是

$$H_o(j\Omega) = \frac{2\sin(\Omega T/2)}{\Omega} e^{-j\Omega T/2}. \quad (3.125)$$

因此这个补偿的重构滤波器就是

$$\tilde{H}_r(j\Omega) = \begin{cases} \frac{\Omega T/2}{\sin(\Omega T/2)} e^{j\Omega T/2}, & |\Omega| < \pi/T, \\ 0, & |\Omega| > \pi/T. \end{cases} \quad (3.126)$$

图 3.37(a)示出按式(3.125)给出的 $|H_o(j\Omega)|$ 与按式(3.115)给出的理想内插滤波器 $H_r(j\Omega)$ 的比较. 这两个滤波器在 $\Omega=0$ 都有增益为 T , 但是零阶保持虽在性质上也是低通型, 可在 $\Omega=\pi/T$ 上并不是锐截止的. 图 3.37(b)是理想补偿重构滤波器频率响应的幅度, 它用于紧跟在一个零阶保持重构系统如 D/A 转换器之后. 相位响应理想地应相当于一个 $T/2$ 的超前时移以补偿零阶保持所引入的那个延时量. 因为时间超前在实际的实时近似该理想补偿重构滤波器时是不可能实现的, 所以仅仅是幅度响应上的补偿, 并且往往甚至连这点补偿也可省去, 因为零阶保持的增益在 $\Omega=\pi/T$ 处仅仅下降 $2/\pi$ (或 -4 dB).

图 3.38 示出一个 D/A 转换器紧跟着一个理想补偿重构滤波器. 正如前面讨论所见, 用理想补偿重构滤波器接在 D/A 转换器后面, 重构的输出信号就是

$$\begin{aligned} \hat{x}_r(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{x}[n] \frac{\sin[\pi(t-nT)/T]}{\pi(t-nT)/T} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \frac{\sin[\pi(t-nT)/T]}{\pi(t-nT)/T} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} e[n] \frac{\sin[\pi(t-nT)/T]}{\pi(t-nT)/T}. \end{aligned} \quad (3.127)$$

换句话说, 输出为

$$\hat{x}_r(t) = x_o(t) + e_o(t), \quad (3.128)$$

式中 $e_o(t)$ 是一个带限白噪声信号.

重新回过头来考虑一下图 3.26(b), 现在我们能够明白模拟信号数字处理系统的特性了. 如果假设抗混叠滤波器的输出是带限到低于 π/T 频率以下, $\tilde{H}_r(j\Omega)$ 也是类似地带限的, 并且离散时间系统是线性时不变的, 那么总的系统输出就有如下形式:

$$\hat{y}_r(t) = y_o(t) + e_o(t), \quad (3.129)$$

这里

$$Y_o(j\Omega) = \tilde{H}_r(j\Omega) H_o(j\Omega) H(e^{j\Omega T}) H_{oo}(j\Omega) X_o(j\Omega), \quad (3.130)$$

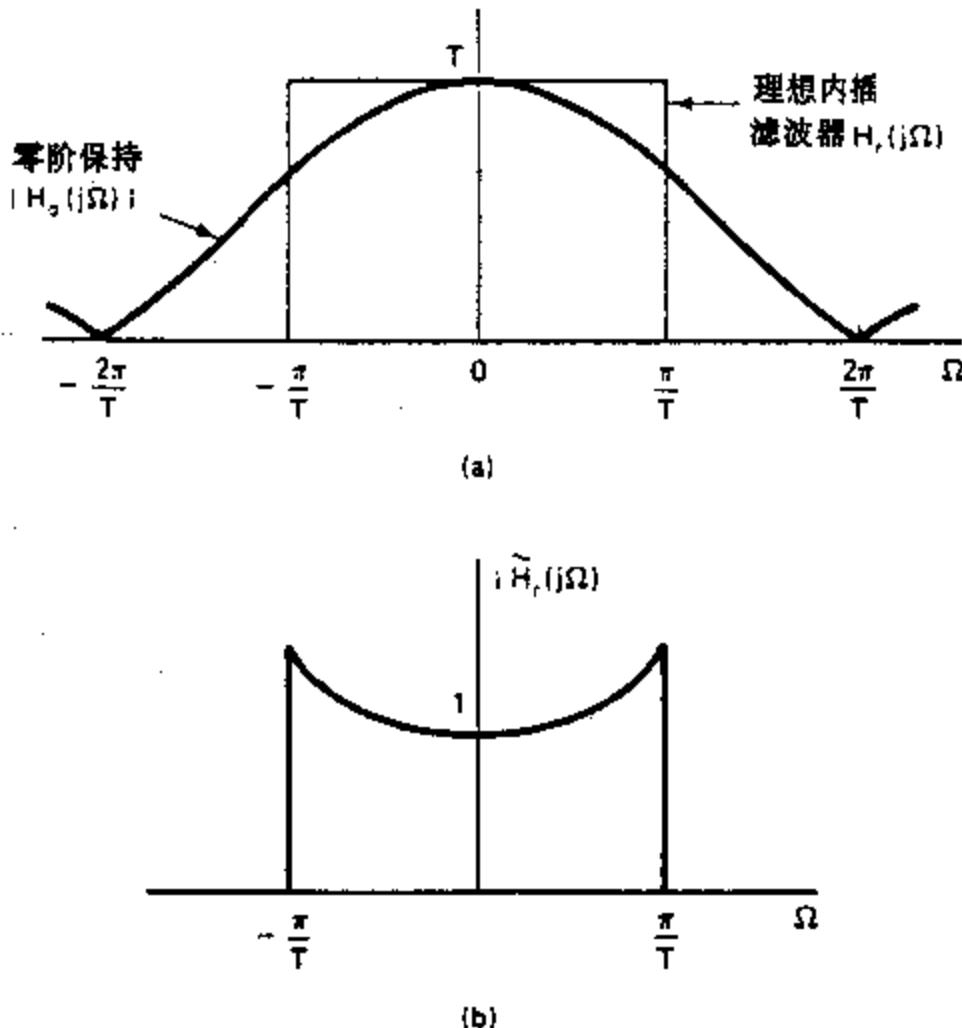


图 3.37 (a)零阶保持与理想内插滤波器频率响应的比较.(b)用于与零阶保持输出相接的理想补偿重构滤波器.

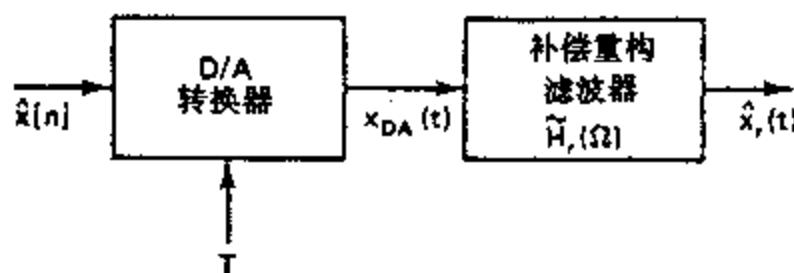


图 3.38 数模转换的实际组成.

式中 $H_{\text{aa}}(j\Omega)$, $H_0(j\Omega)$ 和 $\tilde{H}_r(j\Omega)$ 分别是抗混叠滤波器、零阶保持以及重构低通滤波器的频率响应. $H(e^{j\Omega T})$ 是离散时间系统的频率响应. 类似地, 假设由 A/D 转换器引入的量化噪声是方差 $\sigma_e^2 = \Delta^2/12$ 的白噪声, 那么可以证明输出噪声的功率谱是

$$P_{e_r}(j\Omega) = |\tilde{H}_r(j\Omega)H_0(j\Omega)H(e^{j\Omega T})|^2\sigma_e^2, \quad (3.131)$$

这就是说, 输入量化噪声受到离散时间和连续时间连续几级过滤而变化. 由式(3.130)可以得出在忽略混叠的假定下, 从 $x_e(t)$ 到 $\hat{x}_r(t)$ 总的有效频率响应是

$$H_{eff}(j\Omega) = \tilde{H}_r(j\Omega)H_0(j\Omega)H(e^{j\Omega T})H_{\text{aa}}(j\Omega). \quad (3.132)$$

如果抗混叠滤波器是理想的, 如式(3.95)所给出, 而重构滤波器的补偿也是理想的, 如式(3.126)所给出, 那么有效频率响应就如式(3.96)所给出. 否则, 式(3.132)就对有效频率响应提供了一个合理的模型. 应该注意到, 式(3.132)还指出对于在式(3.130)四项当中任何一项不完善特性的补偿原则上都能包括在其它项当中的任何一项之内来进行; 譬如, 离散时间系统可以对抗混叠滤波器, 或零阶保持, 或重构滤波器, 或所有这些不完善特性作适当的补偿.

除了由式(3.132)提供的过滤外, 式(3.129)也使我们想到, 输出也会被经过滤波后的

量化噪声所污损. 在第 6 章将看到, 噪声还会由离散时间线性系统的实现中引入.

3.7.5 A/D 和 D/A 转换中抽取和内插的应用

整个这一节都是讨论为防止混叠和从 D/A 转换器的输出重构一个平滑的内插模拟信号所用的理想化滤波器. 我们一直都假定这些滤波器是可以足够被近似实现的. 的确是这样, 比如锐截止的模拟滤波器可以用有源网络和集成电路来实现. 然而, 在涉及功能强而廉价的数字处理器应用中, 连续时间滤波器可能占了模拟信号的离散时间处理系统总耗资的主要部分. 实现锐截止是困难且昂贵的, 并且如果系统要求工作在可变采样率下, 那么就需要可调滤波器. 于是总想不用连续时间滤波器, 或者简化对其要求.

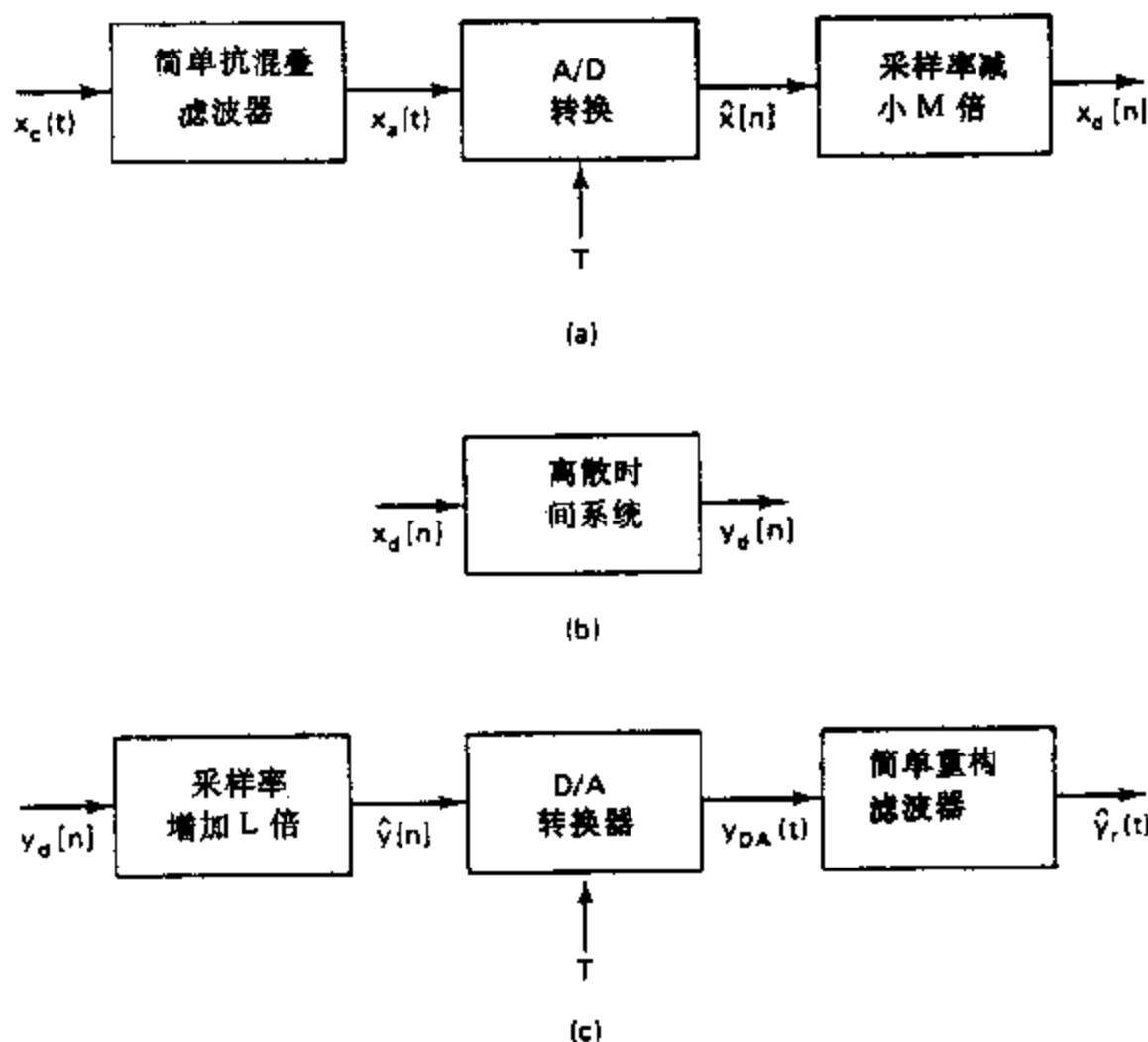


图 3.39 在采样和重构中模拟低通滤波器都能用一个远高于奈奎斯特率的采样率来放宽要求. 图(a)的采样率减小可以用图 3.20 来完成. 图(c)采样率增加可以用图 3.21 来实现.

一种办法是如图 3.39 所示. 首先, 输入连续时间信号在很高采样率下采样——远远高于信号的奈奎斯特率. 往往这样高的采样率对低带宽的信号采样允许用很便宜的 A/D 转换器, 并且用一个很简单的低通滤波器就足以避免混叠. 然后, 如图 3.39(a)所指出的, 就能用 3.6 节讨论的抽取技术把采样率降到和奈奎斯特率一样. 如同在图 3.20 所说明的, 采样率的降低必须包括一个锐截止的数字滤波器. 然后, 任何要求的数字处理都能在低采样率下完成以使计算量最小, 如图 3.39(b)所示. 若需要 D/A 转换器, 该离散时间处理器的输出可内插到一个高得多的采样率上, 然后利用一个 D/A 转换器紧跟着一个很简单的重构滤波器转换为一个连续时间的输出, 因为离散时间内插滤波器保证其输出带限到远远低于输出的采样频率. 这就是如图 3.39(c)所示. 同时, 对于零阶保持和简单重构滤波器滚降的补偿都能在增加采样率所要求的滤波器中来完成.

在 A/D 转换中利用抽取用图 3.40 说明。图 3.40(a)是某个信号的傅里叶变换，其占有的带宽 $|\Omega| < \Omega_N$ 再加上可能是相应于高频“噪声”的傅里叶变换。图中同时也给出(用虚线)一个简单的抗混叠滤波器的频率响应，它不是锐截止的，但是在频率 Ω_c 以上最终降到零。图 3.40(b)是该滤波器输出的傅里叶变换。如果信号 $x_s(t)$ 以 T 而满足 $(2\pi/T - \Omega_c) > \Omega_N$ 进行采样，那么序列 $\hat{x}[n]$ 的离散时间傅里叶变换就如图 3.40(c)所示。可以注意到，这时“噪声”将被混叠，而混叠并不影响信号的频带 $|\omega| < \omega_N = \Omega_N T$ 。现在，如果将 T 和 T' 选成 $T' = MT$ 和 $\pi/T' = \Omega_N$ ，然后 $\hat{x}[n]$ 再用一个锐截止、增益为 1、截止频率为 π/M 的离散时间滤波器过滤[理想化的如图 3.40(c)所示]。离散时间滤波器的输出就被减采样 M 倍得到该采样序列 $x_d[n]$ ，它的傅里叶变换如图 3.40(d)所示。于是全部锐截止滤波都由一个离散时间系统来完成，这样，所要求的连续时间滤波就仅仅是名义上的了。

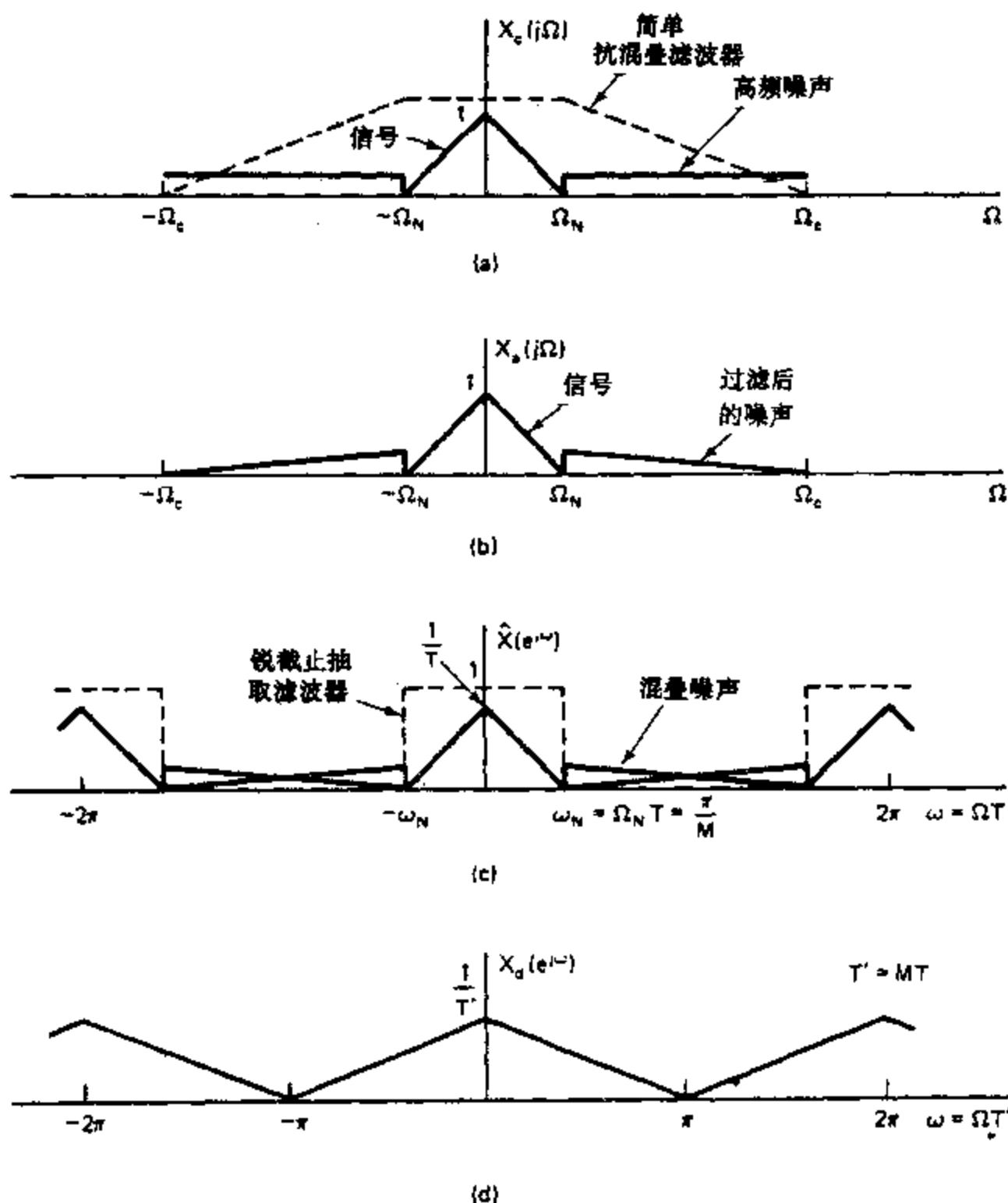


图 3.40 A/D 转换中抽取的利用。

为了简化 D/A 转换中连续时间滤波，可以用图 3.39(c)的系统。假设输入 $y_d[n]$ 有如图 3.41(a)所示的离散时间傅里叶变换，这里假定是奈奎斯特率采样(周期 $T' = MT$)。

图 3.41(b)是内插序列(采样周期 $T'' = T'/L$)的傅里叶变换和离散时间内插滤波器的频率响应合在一起,或许该内插滤波器还包含了对零阶保持或重构滤波器的补偿在内. 图 3.41(c)是一个简单的重构滤波器,它足以选择所需要的中心部分,产生一个其傅里叶变换如图 3.41(d)所示的输出. 应该注意到,我们仅仅要求有 $\Omega_c < (2\pi/T'' - \Omega_N)$. 于是用了一个锐截止的离散时间系统提供了连续时间输出信号准确重构所需要的带限.

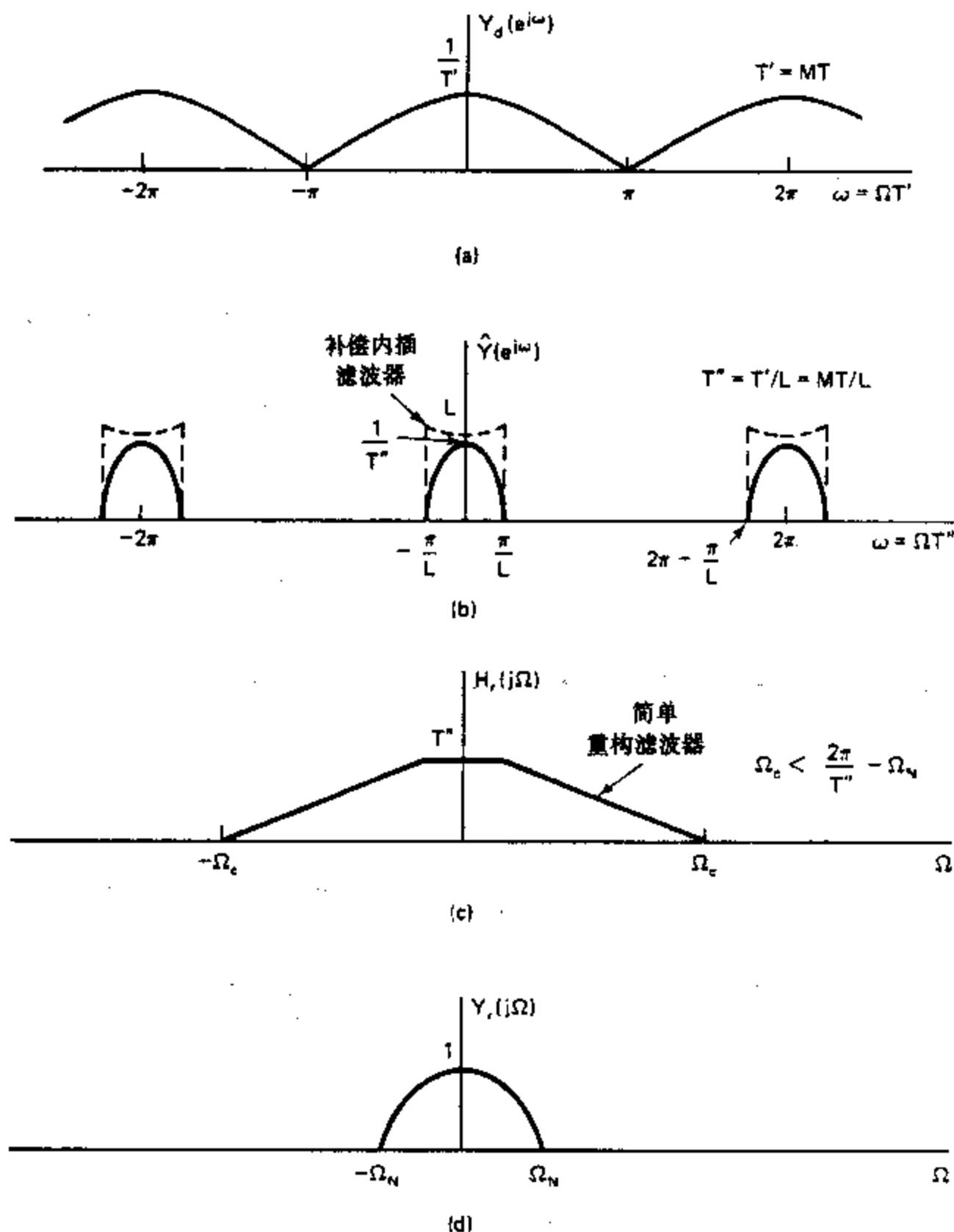


图 3.41 D/A 转换中内插的利用.

3.8 小结

这一章我们建立并研究了连续时间信号与经周期采样而得到的离散时间序列之间的关系. 能够用样本序列来表示连续时间信号的基本定理是奈奎斯特定理, 该定理表明对一个带限信号而言, 只要采样率相对于连续时间信号中的最高频率来说是足够高的话, 那么

周期样本就是一个充分的表示. 在这个条件下, 连续时间信号用低通滤波的方法可以从它的样本中恢复出来, 这就相当于带限内插. 如果相对于信号带宽而言采样率太低的话, 那么就会产生混叠.

用采样样本来表示信号的能力就有可能对连续时间信号进行离散时间处理. 这就由首先采样、然后应用离散时间处理, 并从处理的结果中重构一个连续时间信号来完成. 所给出的是有关低通滤波和微分方面的例子.

特别重要的一类处理是相当于采样率的改变. 将一个离散时间序列减采样, 在频域就相当于离散时间谱重复并给频率轴重新归一化, 但为了避免混叠, 可能要求附加的带限. 增采样就相当于等效地提高了采样率, 因而在频域也代表着频率轴的重新归一化. 将增采样和减采样按整数倍组合起来, 就可能实现非整数采样率的转换.

本章最后部分仔细研究了与连续时间信号的离散时间处理有关的几个实际方面的问题, 其中包括为消除混叠的预滤波的应用, 在模数转换中的量化误差, 以及在连续时间信号的采样和重构中所使用的有关滤波的一些问题.

习题

3.1 序列

$$x[n] = \cos\left(\frac{\pi}{4}n\right), \quad -\infty < n < \infty.$$

用采样模拟信号

$$x_c(t) = \cos(\Omega_0 t), \quad -\infty < t < \infty.$$

而得到, 采样率为 1000 样本/秒. 问有哪两种可能的 Ω_0 值以同样的采样率能得到该序列 $x[n]$?

3.2 令 $h_c(t)$ 记作某一线性时不变连续时间滤波器的冲激响应, $h_d[n]$ 为某一线性时不变离散时间滤波器的冲激响应.

(a) 若

$$h_c(t) = \begin{cases} e^{-at}, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0, \end{cases}$$

求该连续时间滤波器的频率响应, 并画出它的幅度特性.

(b) 若 $h_d[n] = Th_c(nT)$, $h_c(t)$ 如 (a) 所给, 求该离散时间滤波器的频率响应, 并画出它的幅度特性.

(c) 若给定 a 值, 作为 T 的函数, 求离散时间滤波器频率响应的最小幅度值.

3.3 图 P3.3-1 示出一种多径通信信道的简单模型. 假设 $s_c(t)$ 是带限的, $S_c(j\Omega) = 0, |\Omega| \geq \pi/T$, 对 $x_c(t)$ 用采样周期 T 采样得到序列

$$x[n] = x_c(nT).$$

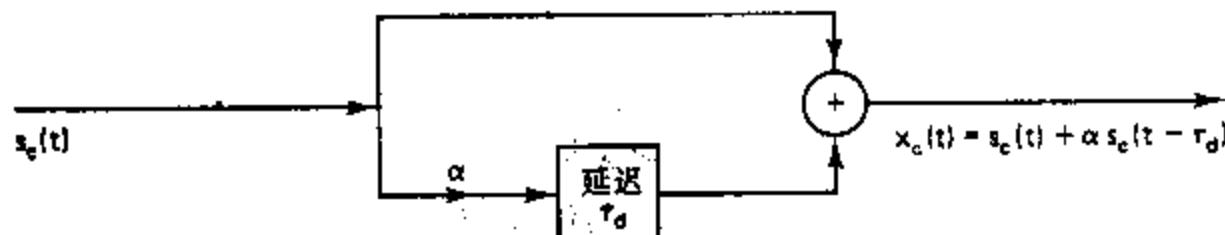


图 P3.3-1

(a) 求 $x_c(t)$ 的傅里叶变换和 $x[n]$ 的傅里叶变换(利用 $S_c(j\Omega)$ 表示).

(b) 现在要用一个离散时间系统来仿真该多径系统, 选择该离散时间系统的 $H(e^{j\omega})$, 使得当输入为

$s[n] = s_c(nT)$ 时, 输出为 $r[n] = x_c(nT)$, 如图 P3.3-2 所示. 求利用 T 和 τ_d 表示的 $H(e^{j\omega})$.

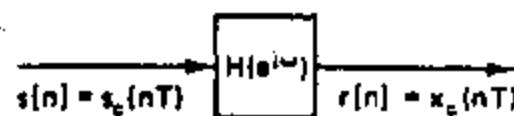


图 P3.3-2

(c) 当(i) $\tau_d = T$ 和(ii) $\tau_d = T/2$ 时, 求图 P3.3-2 的冲激响应 $h[n]$.

3.4 图 P3.4 系统有下列关系:

$$X_c(j\Omega) = 0, \quad |\Omega| \geq 2\pi \times 10^4, \quad (\text{P3.4-1})$$

$$x[n] = x_c(nT), \quad (\text{P3.4-2})$$

$$y[n] = T \sum_{k=-\infty}^n x[k]. \quad (\text{P3.4-3})$$

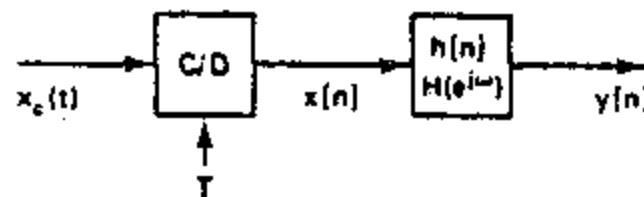


图 P3.4

(a) 如果要避免混叠, 即 $x_c(t)$ 能从 $x[n]$ 恢复, 求该系统最大可允许的 T 值.

(b) 求 $h[n]$.

(c) 利用 $X(e^{j\omega})$, 当 $n = \infty$ 时, $y[n]$ 为多少?

(d) 试决定是否存在任何 T 值, 对该值有

$$y[n]|_{n=\infty} = \int_{-\infty}^{\infty} x_c(t) dt. \quad (\text{P3.4-4})$$

如果有这样一个 T 值, 求其最大值. 如果不存在, 请说明并给出 T 该如何选, 才能使等式(P3.4-4)有最好的近似.

3.5 一个复杂的带通模拟信号 $x_c(t)$ 有如图 P3.5 所示的傅里叶变换, 这里 $(\Omega_2 - \Omega_1) = \Delta\Omega$. 对该信号进行采样, 得到序列 $x[n] = x_c(nT)$.

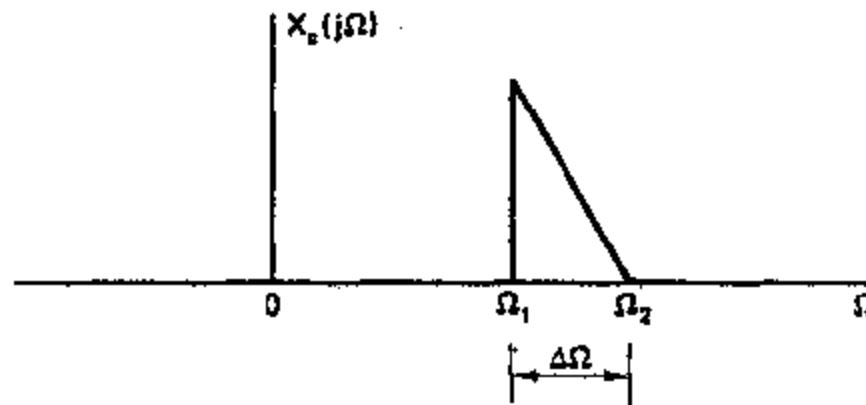


图 P3.5

(a) 当 $T = \pi/\Omega_2$, 画出序列 $x[n]$ 的傅里叶变换 $X(e^{j\omega})$.

(b) 不会引起混叠的能用的最低采样频率是什么(也即是 $x_c(t)$ 可以由 $x[n]$ 恢复)?

(c) 如果采样率大于或等于由(b)确定的采样率, 试画出由 $x[n]$ 恢复 $x_c(t)$ 的系统方框图. 假设有(复数的)理想低通滤波器可资利用.

3.6 一个具有如图 P3.6 所示的傅里叶变换 $X_c(j\Omega)$ 的模拟信号 $x_c(t)$ 用采样周期 $T = 2\pi/\Omega_0$ 采样形成序列 $x[n] = x_c(nT)$.

(a) 对 $|\omega| < \pi$, 画出傅里叶变换 $X(e^{j\omega})$.

- (b) 信号 $x[n]$ 经过一个数字信道传输, 在接收端原信号 $x_c(t)$ 必须恢复出来, 试画出该恢复系统的方框图, 并给出它的特性. 假设可以采用理想滤波器.

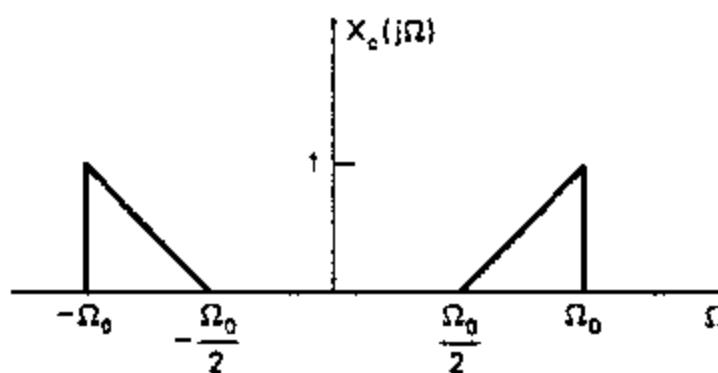


图 P3.6

- (c) 问 T 在什么范围内(用 Ω_0 表示), $x_c(t)$ 可从 $x[n]$ 恢复?

- 3.7 在许多应用中, 离散时间随机信号是经对连续时间随机信号周期采样而出现的. 本题关注的是随机信号采样定理的推导. 今考虑一个由随机变量 $\{x_a(t)\}$ 所定义的连续时间平稳随机过程, 这里 t 是一个连续变量. 自相关函数定义为

$$\phi_{x_a x_a}(\tau) = \mathcal{E}\{x_a(t)x_a^*(t+\tau)\}$$

功率密度谱是

$$P_{x_a x_a}(\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi_{x_a x_a}(\tau) e^{-j\Omega\tau} d\tau.$$

用周期采样所得到的离散时间随机过程由随机变量 $\{x[n]\}$ 的集合所定义, 这里 $x[n] = x_a(nT)$, T 为采样周期.

- (a) $\phi_{x_a x_a}[n]$ 和 $\phi_{x_a x_a}(\tau)$ 之间是什么关系?
 (b) 利用连续时间过程的功率密度谱表示离散时间过程的功率密度谱.
 (c) 在什么条件下, 离散时间功率密度谱才是连续时间功率密度谱的一个正确表示?

- 3.8 考虑一个具有如图 P3.8-1 所示的带限功率密度谱 $P_{x_a x_a}(\Omega)$ 的连续时间随机过程 $x_a(t)$. 假定采样 $x_a(t)$ 以得到离散时间随机过程 $x[n] = x_a(nT)$.

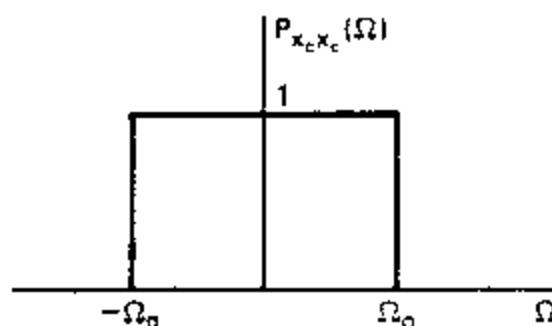


图 P3.8-1

- (a) 该离散时间随机过程的自相关序列是什么?
 (b) 对于如图 P3.8-1 所示的连续时间功率密度谱, T 应该如何选取才能使离散时间过程是白的, 即其功率密度谱对所有 ω 都是常数?
 (c) 若连续时间功率密度谱如图 P3.8-2 所示, T 该如何选取才能使离散时间过程是白的?

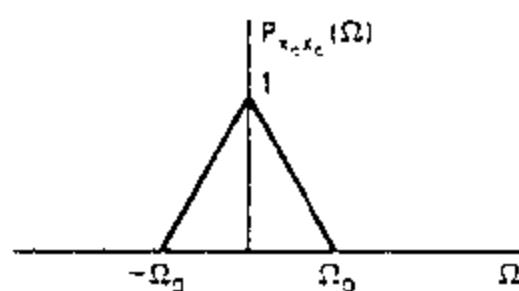


图 P3.8-2

(d) 对连续时间过程和采样周期有哪些一般要求才能使离散时间过程是白的?

- 3.9 在图 P3.9 中, 设 $X_c(j\Omega) = 0, |\Omega| \geq \pi/T$. 对于一般情况 $T_1 \neq T_2$, 试用 $x_c(t)$ 来表示 $y_c(t)$. 对于 $T_1 > T_2$ 和 $T_1 < T_2$, 基本关系是不同的吗?

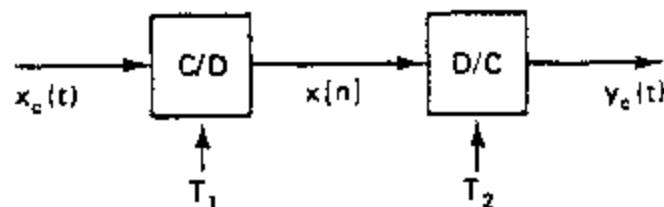


图 P3.9

- 3.10 在图 P3.10 的系统中, $X_c(j\Omega)$ 和 $H(e^{j\omega})$ 如图所示. 对下列各种情况画出并标注 $y_c(t)$ 的傅里叶变换:

- (a) $1/T_1 = 1/T_2 = 10^4$
- (b) $1/T_1 = 1/T_2 = 2 \times 10^4$
- (c) $1/T_1 = 2 \times 10^4, 1/T_2 = 10^4$
- (d) $1/T_1 = 10^4, 1/T_2 = 2 \times 10^4$

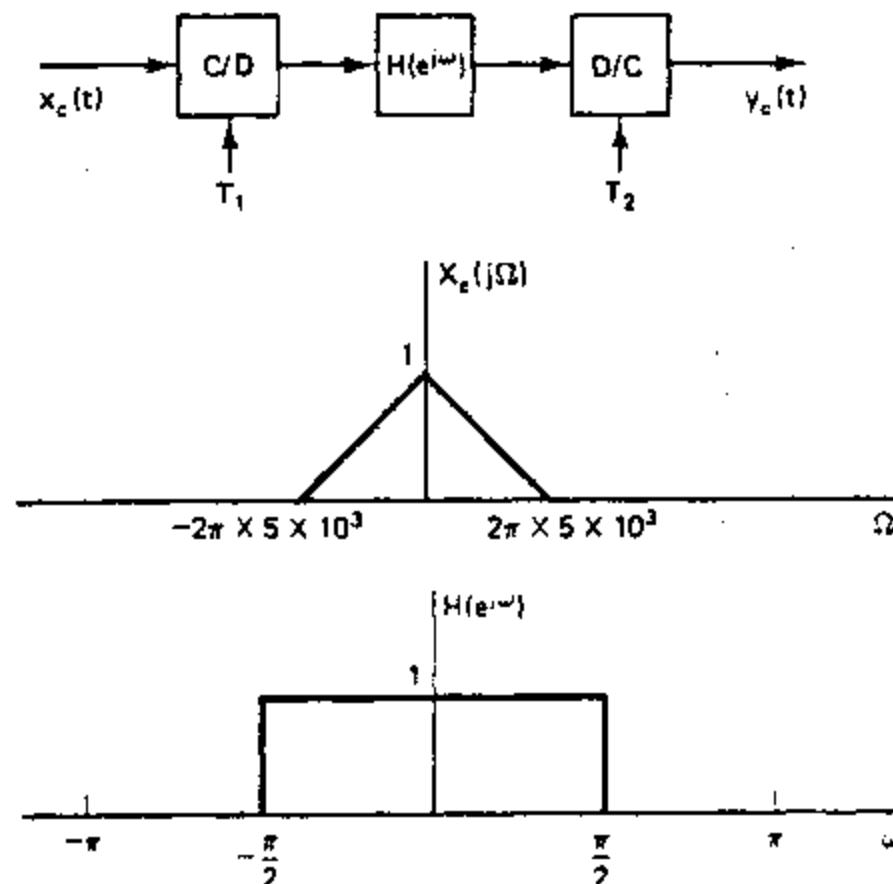


图 P3.10

- 3.11 图 P3.11-1 示出利用离散时间滤波器过滤连续时间信号的整个系统. 重构滤波器 $H_r(j\Omega)$ 和离散时间滤波器 $H(e^{j\omega})$ 的频率响应如图 P3.11-2 所示.

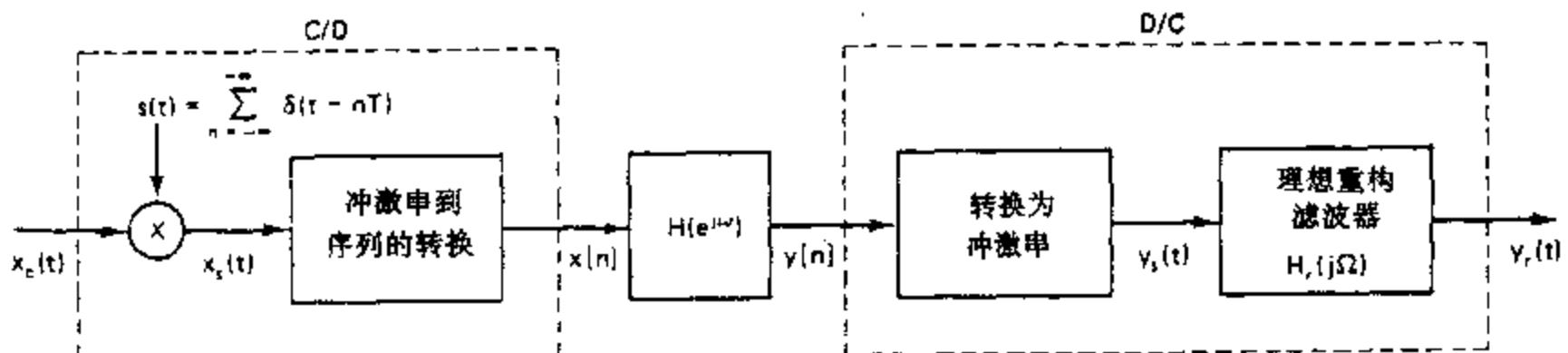


图 P3.11-1

(a) 对如图 P3.11-3 所示的 $X_c(j\Omega)$ 和 $1/T = 20\text{kHz}$, 画出 $X_c(j\Omega)$ 和 $X(e^{j\omega})$. 对于某个 T 值范围, 具有输入为 $x_c(t)$, 输出为 $y_c(t)$ 的整个系统被等效为一个如图 P3.11-4 所示的频率响应为 $H_{eff}(j\Omega)$ 的连续时间低通滤波器.

(b) 求该 T 值范围.

(c) 对于由(b)所确定的范围, 画出 Ω 作为 $1/T$ 的函数.

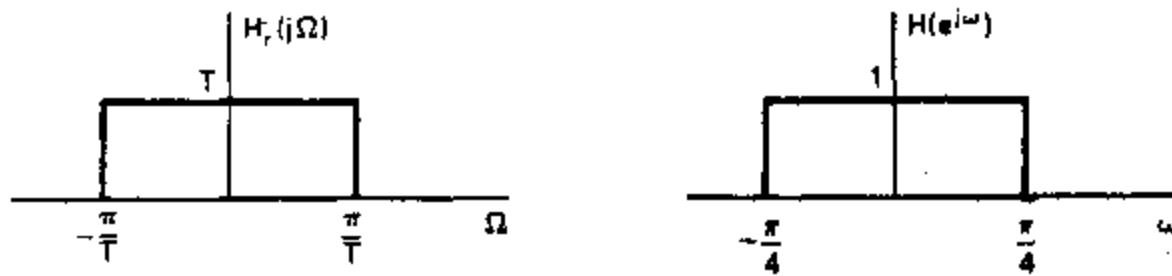


图 P3.11-2

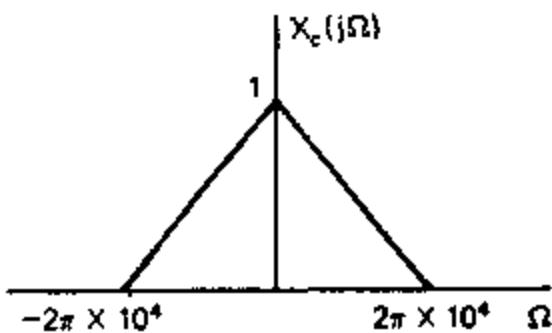


图 P3.11-3

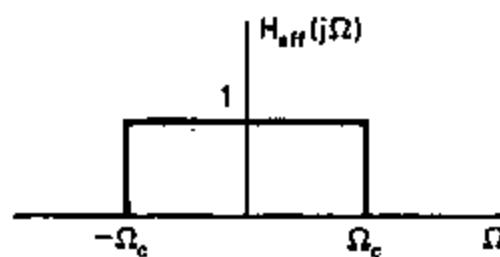


图 P3.11-4

注意: 这就是利用固定的连续时间和离散时间滤波器和可变采样率来实现可变截止频率的连续时间滤波器的一种方法.

3.12 在图 3.9 的系统中, 设离散时间系统是线性和时不变的, 且

$$X_c(j\Omega) = 0, \quad |\Omega| \geq 4000\pi.$$

求满足

$$Y_c(j\Omega) = \begin{cases} |\Omega| X_c(j\Omega), & 1000\pi < |\Omega| < 2000\pi, \\ 0, & \text{其它.} \end{cases}$$

的最大可能的 T 值及相应的离散时间系统频率响应 $H(e^{j\omega})$.

3.13 在图 3.9 系统中, 设 $X_c(j\Omega) = 0, |\Omega| \geq \pi/T$. 求出并画出离散时间 LTI 系统的幅度和相位特性, 使得输出 $y_r(t)$ 是输入的连续积分, 即

$$y_r(t) = \int_{-\infty}^t x_c(\tau) d\tau.$$

3.14 考虑图 3.9 的系统, 其中离散时间系统是一个理想低通滤波器, 截止频率为 $\pi/8$ 弧度/秒.

(a) 若 $x_c(t)$ 带限到 5kHz , 为了避免在 C/D 转换器中发生混叠, 最大的 T 值是多少?

(b) 若 $1/T = 10\text{kHz}$, 有效连续时间滤波器的截止频率是多少?

(c) 若 $1/T = 20\text{kHz}$, 重复(b).

3.15 已知一个带限的连续时间信号含有 60Hz 分量, 这个分量想用图 3.9 系统的处理把它除掉, 这里 $T = 10^{-4}$.

(a) 如果要避免混叠, 那么模拟信号中能包含的最高频率是多少?

(b) 利用具有如下频率响应的离散时间系统

$$H(e^{j\omega}) = \frac{[1 - e^{-j(\omega - \omega_0)}][1 - e^{-j(\omega + \omega_0)}]}{[1 - 0.9e^{-j(\omega - \omega_0)}][1 - 0.9e^{-j(\omega + \omega_0)}]}.$$

画出 $H(e^{j\omega})$ 的幅度和相位.

(c) 为消除 60Hz 的分量, ω_0 应选什么值?

3.16 考虑图 3.9 系统, 其

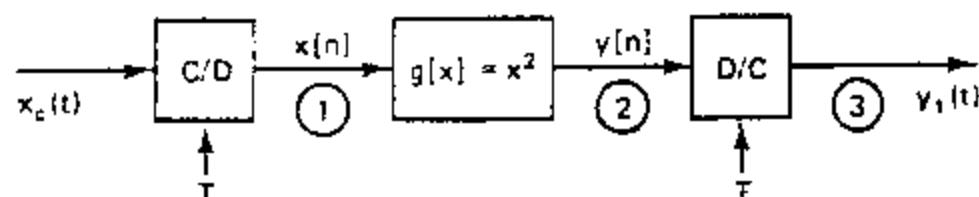
$$X_c(j\Omega) = 0, \quad |\Omega| \geq 2\pi(1000)$$

而离散时间系统是一个平方器, 即 $y[n] = x^2[n]$, 使得 $y_c(t) = x_c^2(t)$ 的最大的 T 值是什么?

3.17 本题研究交换两种运算的次序在信号上所产生的影响, 这两种运算是采样和执行一个无记忆 (Zero-Memory) 的非线性运算.

(a) 考虑图 P3.17-1 中两个信号处理系统, 这里 C/D 和 D/C 转换器都是理想的, 映射 $g[x] = x^2$ 代表一个无记忆非线性器件. 当采样率选为 $1/T = 2f_m$ 样本/秒和 $x_c(t)$ 的频谱特性 (带限到 f_m Hz) 如图 P3.17-2 所示时, 画出在点 1, 2 和 3 处的信号频谱. $y_1(t) = y_2(t)$ 吗? 若不等, 为什么? $y_1(t) = x_c^2(t)$ 吗? 请解释你的答案.

系统 1:



系统 2:

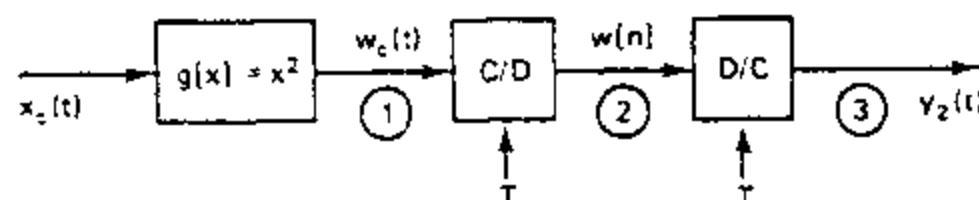


图 P3.17-1

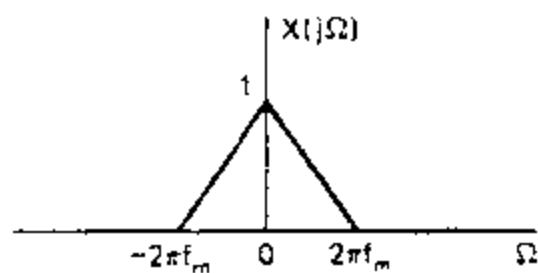


图 P3.17-2

(b) 考虑系统 1, 令 $x_c(t) = A \cos 30\pi t$ 和采样率 $1/T = 40$ 样本/秒, $y_1(t) = x_c^2(t)$ 吗? 请说明为什么是或不是.

(c) 考虑图 P3.17-3 的信号处理系统, 这里 $g[x] = x^3$, 而 $g^{-1}[v]$ 是它的(唯一的)逆, 即 $g^{-1}[g(x)] = x$. 令 $x_c(t) = A \cos 30\pi t$ 和 $1/T = 40$ 样本/秒. 用 $x[n]$ 来表示 $v[n]$. 存在有频谱混叠吗? 用 $x[n]$ 表示 $y[n]$. 从这个例子你能得到什么结论呢? (你可能要用到恒等式 $\cos^3 \Omega_0 t = \frac{3}{4} \cos \Omega_0 t + \frac{1}{4} \cos 3\Omega_0 t$.)

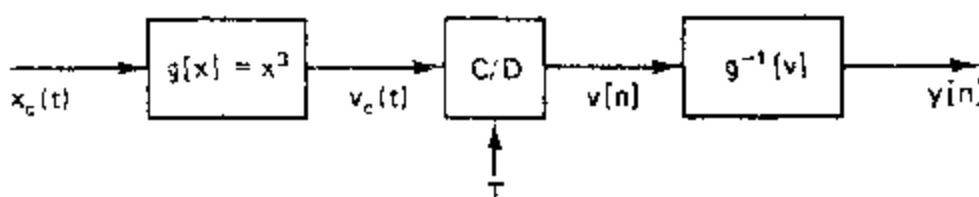


图 P3.17-3

(d) 一个实际问题是数字化一个大动态范围信号所引起的问题. 假设我们用下面方法来压缩这个动态范围: 在 A/D 转换之前将信号通过一个无记忆非线性器件, 在 A/D 转换之后再将信号扩展回来, 那么位于 A/D 转换之前的这个非线性运算在选择采样率上有什么影响?

3.18 图 P3.18-1 的 LTI 系统, 其 $H(e^{j\omega})$ 是

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j\omega^2}, \quad |\omega| \leq \pi \text{ (半个样本间隔的延迟)}$$



图 P3.18-1

(a) 求图 3.14 系统中的 T 和 $h_c(t)$, 使得该系统等效为图 P3.18-1 的系统, 后者的 $H(e^{j\omega})$ 如上所给.

(b) 当输入序列为

$$x[n] = \cos\left(\frac{5\pi}{2}n - \frac{\pi}{4}\right)$$

并如图 P3.18-2 所示时, 求出并画出 $y[n]$.

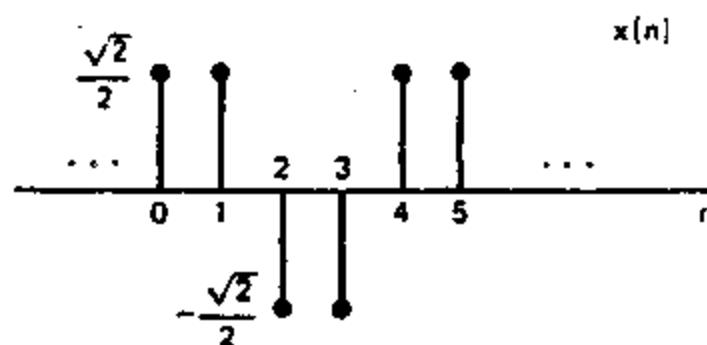


图 P3.18-2

3.19 考虑图 3.14 系统, 其中连续时间 LTI 系统是因果的, 且由下列线性常系数微分方程所表征

$$\frac{d^2y_c(t)}{dt^2} + 4 \frac{dy_c(t)}{dt} + 3y_c(t) = x_c(t).$$

整个系统等效为一个因果的离散时间线性时不变系统. 求该等效离散时间系统的冲激响应 $h[n]$.

3.20 考虑序列 $x[n]$, 它的傅里叶变换 $X(e^{j\omega})$ 如图 P3.20 所示. 试对 $M=3$, $\omega_H=\pi/2$ 和 $\omega_B=\pi/4$ 画出 $X_c(e^{j\omega})$ 和 $X_d(e^{j\omega})$, 这里

$$x_c[n] = \begin{cases} x[n], & n=Mk, \quad k=0, \pm 1, \pm 2, \dots, \\ 0, & \text{其它.} \end{cases}$$

和

$$x_d[n] = x_c[Mn] = x[Mn].$$

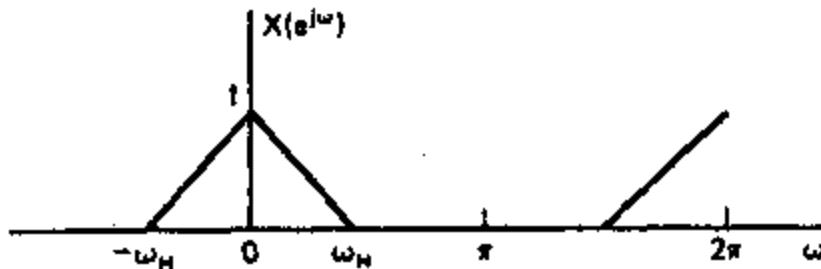


图 P3.20

当 $M=3$ 时,不存在混叠的最大 ω_H 值是什么?

3.21 图 P3.21 中, $x[n] = x_c[nT]$ 和 $y[n] = x[2n]$.

(a) 在如图 P3.21 所示系统中,若 $x_c(t)$ 的傅里叶变换是 $X_c(j\Omega) = 0, |\Omega| \geq 2\pi \times 100$, 为了使

$$X(e^{j\omega}) = 0, \quad \frac{\pi}{2} < |\omega| \leq \pi,$$

要求的 T 值是什么?

(b) 如何选择 T' , 可使 $y_c(t) = x_c(t)$?

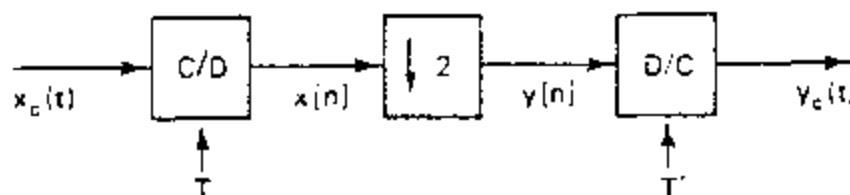


图 P3.21

3.22 图 3.21 画出一个用因子 L 内插信号的系统,其中

$$x_i[n] = \begin{cases} x[n/L], & n = 0, \pm L, \pm 2L, \dots, \\ 0, & \text{其它}, \end{cases}$$

低通滤波器在 $x_i[n]$ 的非零值间内插产生一个未经采样或内插的信号 $x_i[n]$. 当该低通滤波器是理想时,就称为带限内插. 如同在 3.6.2 节所指出的,简单的内插过程往往就够了. 零阶保持和线性内插就是常用的两种简单的内插过程. 对于零阶保持内插, $x[n]$ 的每一个值只是重复 L 次,即

$$x_i[n] = \begin{cases} x_i[0], & n = 0, 1, \dots, L-1 \\ x_i[L], & n = L, L+1, \dots, 2L-1 \\ x_i[2L], & n = 2L, 2L+1, \dots, \\ \vdots & \end{cases}$$

线性内插已在 3.6.2 节中讨论过.

(a) 为实现零阶保持内插,求图 3.21 中低通滤波器的冲激响应,同时求出相应的频率响应.

(b) 式(3.90)给出了线性内插的冲激响应,求相应的频率响应. ($h_{lin}[n]$ 是一个三角波,它就相当于两个矩形序列的卷积,这一点对求解是有帮助的).

(c) 对零阶保持和线性内插画出该滤波器频率响应的幅度特性. 相对于理想带限内插来说哪一个是更好一些的近似?

3.23 假设一个序列 $s[n]$ 是用截止频率为 5kHz 的连续时间低通滤波器过滤的一个语音信号 $s_c(t)$,然后用 10kHz 采样率采样而得到的,如图 P3.23-1 所示. 不幸的是,一旦序列 $s[n]$ 被存贮在磁带上之后,该语音信号 $s_c(t)$ 受到破坏. 稍后发现本应该按照如图 P3.23-2 所示的系统来处理. 利用离散时间处理,建立一种从 $s[n]$ 得到 $s_1[n]$ 的方法. 方法可以要求有大量的计算量,但不应要求有 C/D 或 D/C 转换器. 如果方法用了一个离散时间滤波器,请给出该滤波器的频率响应.

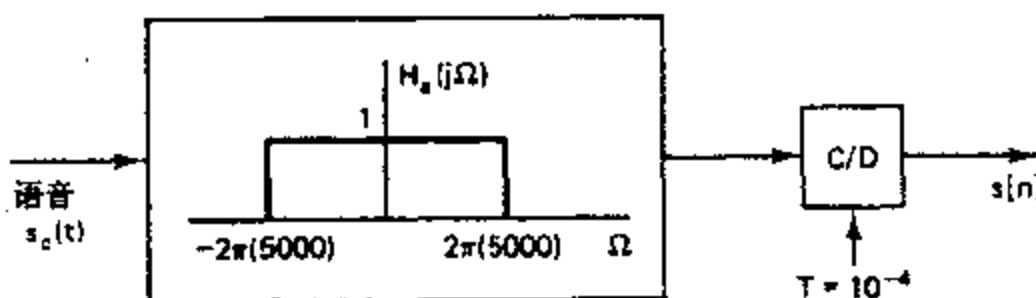
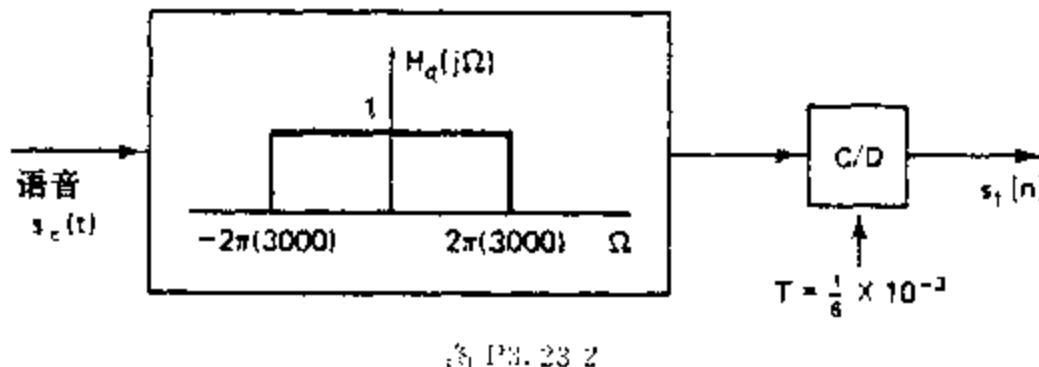


图 P3.23-1



3.24 考虑图 P3.24-1 所示系统，这里

$$H(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & |\omega| < \pi/L, \\ 0, & \pi/L < |\omega| \leq \pi. \end{cases}$$

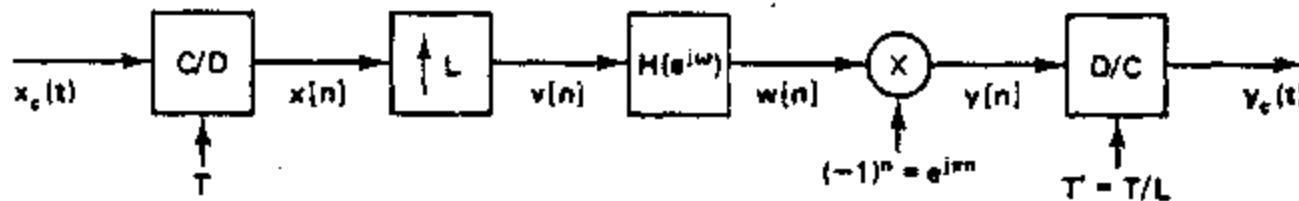


图 P3.24-1

若 $X_e(j\Omega)$ 如图 P3.24-2 所示，画出 $Y_e(j\Omega)$ 。

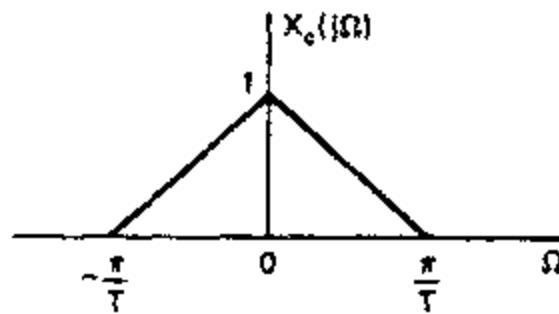


图 P3.24-2

3.25 希望要计算某个未被采样序列的自相关函数，如图 P3.25-1 所示。有人提议，这可以等效地用图 P3.25-2 的系统来完成。可以选取 $H_2(e^{j\omega})$ 以使得 $\phi_3[n] = \phi_1[n]$ 吗？如果不能，为什么不能？如果可以，请给出 $H_2(e^{j\omega})$ 。

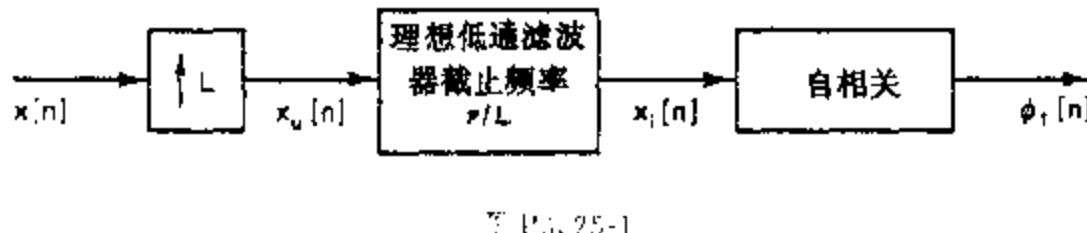


图 P3.25-1

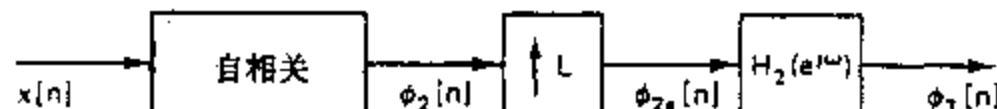


图 P3.25-2

3.26 图 P3.26 的系统近似为将序列 $x[n]$ 以因子 L 内插。假设该线性滤波器的冲激响应 $h[n]$ 有 $h[n] = h[-n]$ 和 $h[n]=0, |n|>(RL-1)$ ，这里 R 和 L 都是整数，即该冲激响应是对称的，且长度为 $(2RL-1)$ 个样本。

(a) 在回答下面问题中，不要关心有关该系统的因果性，因为可以用包括某些延迟来达到因果。明

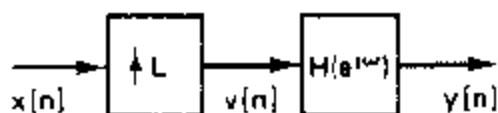


图 P3. 26

确点说,必须插入多少延迟该系统才能成为因果的?

- (b) 为了有 $y[n] = x[n/L]$, $n=0, \pm L, \pm 2L, \dots, h[n]$ 必须满足什么条件?
- (c) 利用冲激响应的对称性,证明 $y[n]$ 的每个样本用不多于 RL 次乘法都能计算出来.
- (d) 利用不需要做被零乘的相乘这一事实,证明每个输出样本只要 $2R$ 次乘法.

3.27 欲利用图 3.21 形式的系统将一序列以因子 2 增采样. 然而, 图 3.21 中的低通滤波器是用如图 P3.27-1 所示的 5 点冲激响应 $h[n]$ 的滤波器来近似的. 在该系统中输出 $y_1[n]$ 是用 $h[n]$ 与 $\omega[n]$ 的直接卷积求得的.

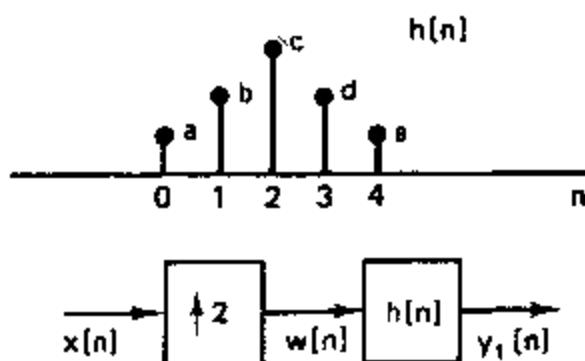


图 P3. 27-1

- (a) 利用这个 $h[n]$, 该系统一种推荐的实现如图 P3.27-2 所示. $h_1[n]$, $h_2[n]$ 和 $h_3[n]$ 这三个冲激响应在 $0 \leq n \leq 2$ 以外都为零. 求出并明确证明 $h_1[n]$, $h_2[n]$ 和 $h_3[n]$ 的一种选择, 以使对任意 $x[n]$, 都有 $y_1[n] = y_2[n]$, 即该两个系统是恒等的.

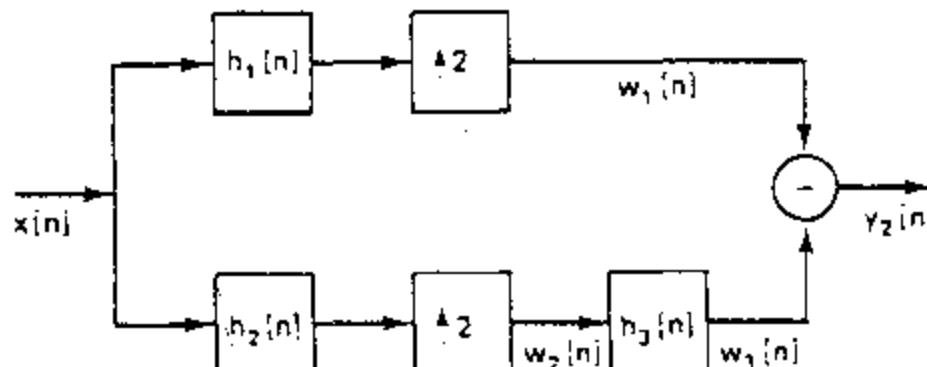


图 P3. 27-2

- (b) 分别求图 P3.27-1 和图 P3.27-2 系统中每个输出点所要求的乘法次数. 应该发现图 P3.27-2 系统是更为高效些.

3.28 图 P3.28 系统中,

$$X_c(j\Omega) = 0, \quad |\Omega| \geq \pi/T,$$

和

$$H(e^{j\omega}) = \begin{cases} e^{-j\omega}, & |\omega| < \pi/L, \\ 0, & \pi/L < |\omega| \leq \pi. \end{cases}$$

$y[n]$ 与输入信号 $x_c(t)$ 是什么关系?

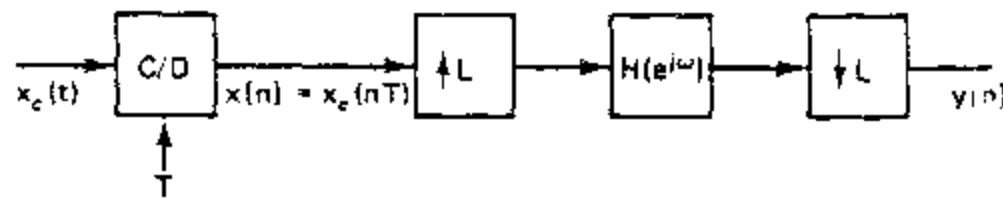


图 P3.28

3.29 考虑图 P3.29-1 的分析/综合系统。低通滤波器 $h_0[n]$ 在分析器和综合器中是相同的，高通滤波器 $h_1[n]$ 在分析器和综合器中也是一样的。 $h_0[n]$ 和 $h_1[n]$ 的傅里叶变换有如下关系：

$$H_1(e^{j\omega}) = H_0(e^{j(\omega+\pi)}).$$

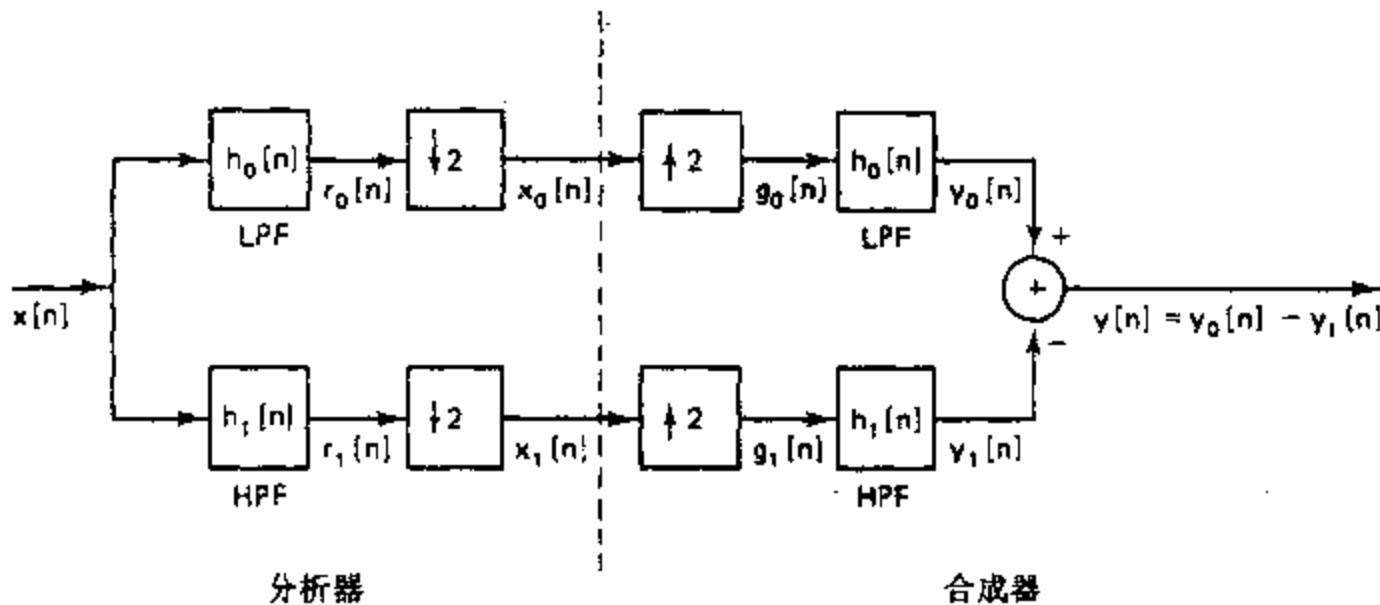


图 P3.29-1

(a) 若 $X(e^{j\omega})$ 和 $H_0(e^{j\omega})$ 如图 P3.29-2 所示，画出 $X_0(e^{j\omega})$, $G_0(e^{j\omega})$ 和 $Y_0(e^{j\omega})$ (在某幅度加权因子之内)。

(b) 利用 $X(e^{j\omega})$ 和 $H_0(e^{j\omega})$ 对 $G_0(e^{j\omega})$ 写出一个一般的表示式，不用假定 $X(e^{j\omega})$ 和 $H_0(e^{j\omega})$ 是如图 P3.29-2 所示。

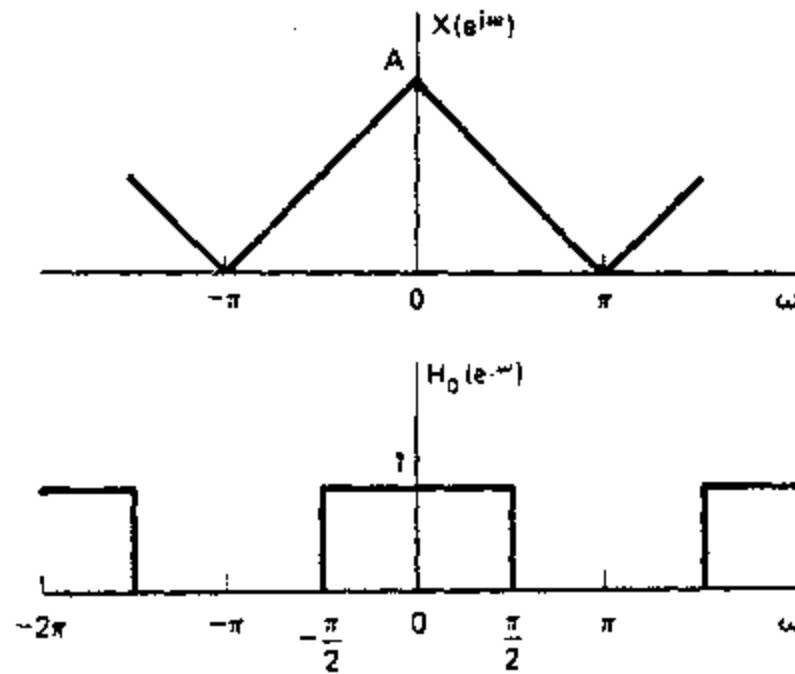


图 P3.29-2

(c) 对 $H_0(e^{j\omega})$ 求一组条件，这组条件尽可能一般化，以保证对任何稳定的输入 $x[n]$, $y[n]$ 是正比于 $x[n-n_d]$ 。

注意：本题中所讨论的这种形式分析/综合滤波器框称为正交镜像滤波器框(Quadrature mirror fil-

ter banks). 进一步的内容可见 Crochiere and Rabiner(1983), pp. 378—392.

3.30 考虑一个实值序列, 有

$$X(e^{j\omega})=0, \quad \frac{\pi}{3} \leq |\omega| \leq \pi.$$

$x[n]$ 中有一个序列值可能有误, 而想近似地或准确地恢复它. 用 $\hat{x}[n]$ 表示受到污损的信号

$$\hat{x}[n]=x[n], \quad n \neq n_0$$

而 $\hat{x}[n_0]$ 是实的, 但与 $x[n_0]$ 无关. 在下列三种情况中的每一种, 规定一个实际的算法用于从 $\hat{x}[n]$ 中真正地或近似地恢复出 $x[n]$.

- (a) n_0 的值是已知的.
- (b) n_0 的真正值不知道, 但知道 n_0 是一个偶数.
- (c) 有关 n_0 什么也不知道.

3.31 通信系统往往要求从时分多路复用(TDM)转换到频分多路复用(FDM). 本题考察属于这种系统的一个简单例子. 要研究的系统的方框图如图 P3.31-1 所示. TDM 的输入假设是如下的相间样本序列:

$$w[n] = \begin{cases} x_1[n/2], & n \text{ 为偶整数}, \\ x_2[(n-1)/2], & n \text{ 为奇整数}. \end{cases}$$

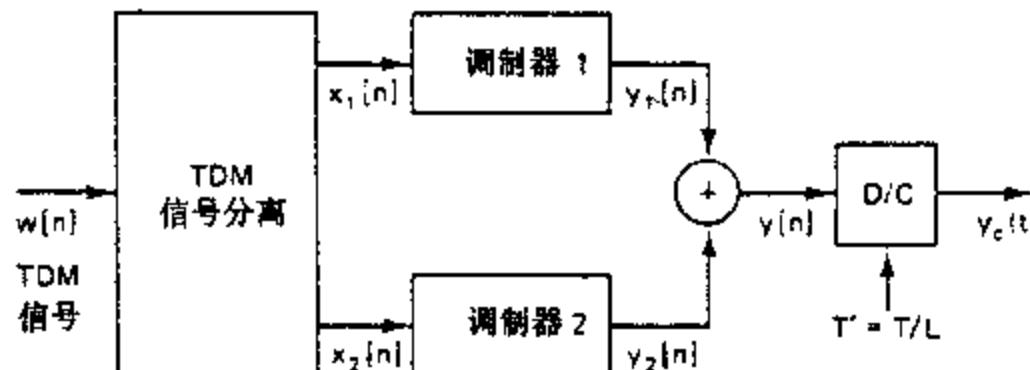


图 P3.31-1

假定序列 $x_1[n]=x_{c1}(nT)$ 和 $x_2[n]=x_{c2}(nT)$ 分别由无混叠采样连续时间信号 $x_{c1}(t)$ 和 $x_{c2}(t)$ 而得到, 也就是说假定这两个信号有相同的最高频率 Ω_N , 而采样周期是 $T=\pi/\Omega_N$.

- (a) 画一个产生 $x_1[n]$ 和 $x_2[n]$ 作为输出的系统方框图, 也就是用简单的运算得到一个用于 TDM 信号分离的系统, 说明一下你的系统是否是线性、时不变、因果和稳定的.

第 k 个调制器 ($k=1$ 或 2) 由图 P3.31-2 方框图所定义. 低通滤波器 $H_k(e^{j\omega})$ (对两个信道是相同的) 增益为 L , 截止频率为 π/L , 而高通滤波器 $H_k(e^{j\omega})$ 增益为 1, 截止频率为 ω_k , 调制器频率满足

$$\omega_2=\omega_1+\pi/L \text{ 和 } \omega_2+\pi/L \leq \pi \quad (\text{假设 } \omega_1 > \pi/2).$$

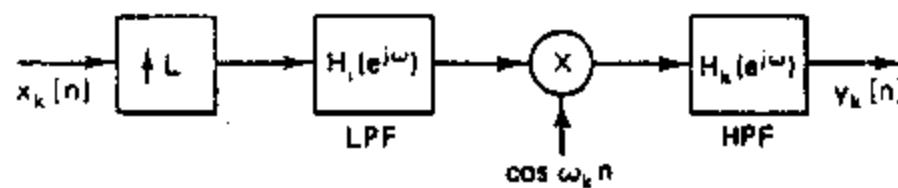


图 P3.31-2

- (b) 求 ω_1 和 L , 使得在理想 D/C 转换之后 (采样周期为 T/L), $y_c(t)$ 的傅里叶变换除了在频率范围

$$2\pi \times 10^5 \leq |\Omega| \leq 2\pi \times 10^5 + 2\Omega_N$$

外都是零. 设 $\Omega_N=2\pi \times 5 \times 10^5$.

(c) 假设两个原输入信号的连续时间傅里叶变换如图 P3.31-3 所示, 画出在该系统中每一点的傅里叶变换, 此处可能有助于确定(b)中所欲求的参数.

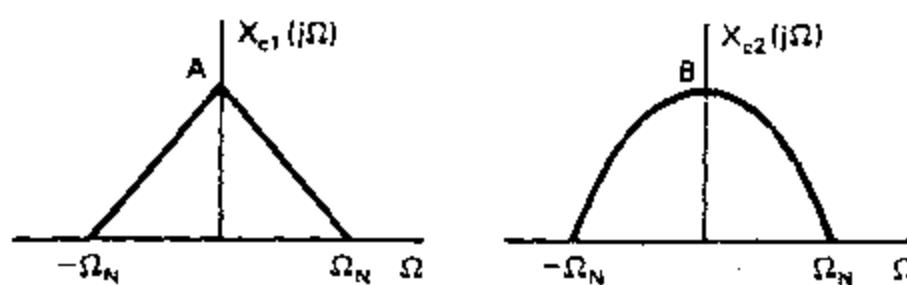


图 P3.31-3

(d) 基于(a)~(c)的解答, 讨论一下该系统如何能推广到处理 M 个等带宽的信道.

- 3.32 在 3.7.1 节曾讨论过为避免混叠而采用预滤波的方法. 实际上, 抗混叠滤波器不可能是理想的. 然而, 这个非理想的特性至少可以部分地用接在 C/D 转换器输出 $x[n]$ 之后的离散时间系统来补偿.

考虑一下图 P3.32-1 中的两个系统. 抗混叠滤波器 $H_{\text{ideal}}(j\Omega)$ 和 $H_{\text{as}}(j\Omega)$ 如图 P3.32-2 所示. 图 P3.32-1 中的 $H(e^{j\omega})$ 是用来补偿非理想 $H_{\text{as}}(j\Omega)$ 特性的.

画出 $H(e^{j\omega})$, 使得两序列 $x[n]$ 和 $w[n]$ 是一样的.

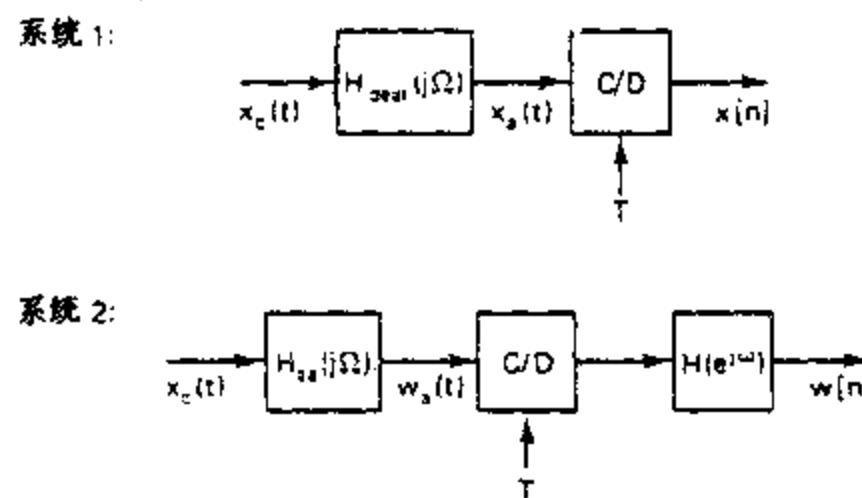


图 P3.32-1

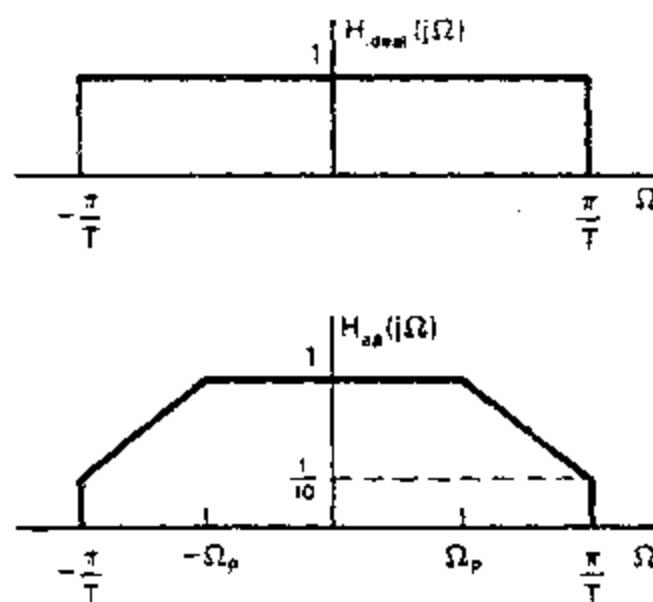


图 P3.32-2

- 3.33 本题研究在正文中讨论过的各种数的表示的某些性质. 考虑一个数 x , $|x| < 1$, 并进而假设 $|x|$ 能表示成二进制小数点右边 b 位的二进制小数. 引入符号 \cong 意指“被表示为”.

原码(符号-幅度码)

$$x \cong \begin{cases} |x|, & x \geq 0 \\ 1 + |x|, & x \leq 0 \end{cases}$$

反码(1 的补码)

$$x \cong \begin{cases} |x|, & x \geq 0 \\ 2 - 2^b - |x|, & x \leq 0 \end{cases}$$

补码(2 的补码)

$$x \cong \begin{cases} |x|, & x \geq 0 \\ 2 - |x|, & x < 0 \end{cases}$$

(a) 证明在所有三种表示中, 若 x 是由 $(B+1)$ 位二进制数表示, 那么立刻可得二进制小数点左边的一位(符号位)是 0, 若 $x > 0$; 是 1, 若 $x < 0$.

(b) 证明下面的算法足以从它的幅度 $|x|$ 求得一个负数 x 的反码表示: 将 $|x|$ 中每个 1 变成 0, 每个 0 变成 1, 包括符号位在内, 就得到 $|x|$ 的负数.

(c) 证明下面算法可以用来对一个负数 x 从它的幅度 $|x|$ 求得一个补码表示:

i) 求该数的反码表示, 并加 2^{-B} .

ii) 从右边开始, 依次检查 $|x|$ 的各位. 对于在 $|x|$ 中的每一个 0 在 x 中放一个 0. 当在 $|x|$ 中遇到第一个 1 时, 在 x 中放一个 1. 以后就对所有的位, 包括符号在内每逢 0 变成 1, 每逢 1 变成 0.

- 3.34 二进制数的补码表示会得出很具吸引力的算术运算的简化. 为了说明这一点, 详细考虑一下补码相加. 用符号 \cong 意指“被表示为”. 一个数 x 其补码表示为:

$$x \cong \begin{cases} |x|, & x \geq 0 \\ 2 - |x|, & x < 0, \end{cases}$$

这里 $|x| < 1$, 且在 x 表示中用了 $(B+1)$ 位二进制数. 补码相加按如下步骤执行:

1. 全部数按 $(B+1)$ 位无符号的二进制数对待.

2. 相加是简单的二进制相加.

3. 经由符号位的进位不予理睬, 即若和大于 2, 则不管进位. 这样相加就是按模 2 完成.

(a) 利用以上符号和定义, 写出两个数 x_1 和 x_2 补码相加的完整表示式, 这里 $|x_1|$ 和 $|x_2| < 1$. 要考虑所有的可能性, 即 x_1, x_2 都可能是正或负; $|x_1|$ 既可大于 $|x_2|$, 也可小于 $|x_2|$.

(b) 注意: 当两个相同符号数相加时, 结果幅度可能大于 1, 这种情况称为溢出. 证明只要相加两个同号数的结果具有相反的符号, 就表示溢出.

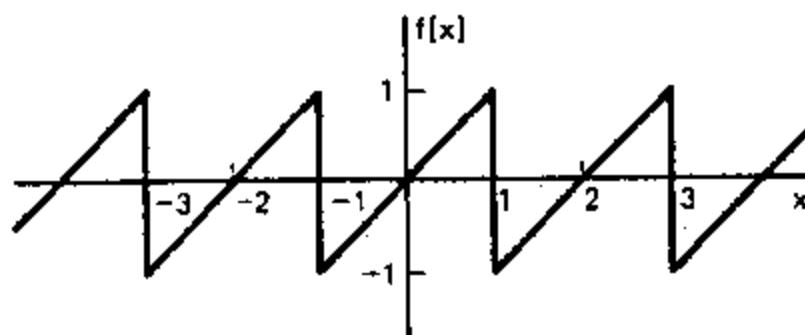


图 P3.34

(c) 证明 x_1 和 x_2 的补码相加等效于 $f[x_1 + x_2]$, 这里 $f(x)$ 如图 P3.34 所示.

(d) 假设 $x_1 = 5/8, x_2 = 3/4, x_3 = -(1/2)$, 求每个数的补码表示, 并以顺序 $(x_1 + x_2) + x_3$ 将这些补码表示加在一起. 在相加 $(x_1 + x_2)$ 时会注意到发生了溢出, 但是最后结果是正确的. 证明一般

在三个或更多的补码数累加过程中都可能发生溢出,但是如果其和在幅度上是小于 1 的话,结果一定是正确的.

3.35 在数的浮点表示中,数被表示成

$$F = 2^c M, \quad \frac{1}{2} \leq |M| < 1,$$

式中 c 一般称为阶, M 称为尾数. 因为 $\frac{1}{2} \leq |M| < 1$, M 就是一个定点的小数, 负的浮点数可以将作为浮点小数的尾数用原码、反码或补码来表示.

考虑一个浮点数 F , 该数是要把尾数量化到 B 位, 不包括符号位, 这样在尾数中最低有效位的值就是 2^{-B} .

令 $Q[F]$ 代表量化值, 把 $Q[F]$ 表示成 $Q[F] = F(1 + \epsilon)$, 误差 $E = Q[F] - F$ 就是

$$E = \epsilon F.$$

(a) 假定 F 是一个正数, 证明对尾数舍入误差为 $-2^{-B} \leq \epsilon \leq 2^{-B}$, 对尾数截尾误差为 $-2 \cdot 2^{-B} \leq \epsilon \leq 0$.

(b) 假定 F 是一个负数, 分别对(i)舍入,(ii)原码截尾,(iii)反码截尾,(iv)补码截尾, 求 ϵ 的上下界.

3.36 在 3.7.2 节讨论过, 为了在一台数字计算机上处理序列, 必须要将该序列的幅度量化到一组离散电平上. 这种量化可以用输入序列 $x[n]$ 通过一个量化器 $Q(x)$ 来表示, 该量化器的输入输出关系如图 3.31 所示.

正如在 3.7.3 节中讨论到的, 若量化阶 Δ 与输入序列电平的变化相比是小的话, 那么就能假设置量化器的输出 $y[n]$ 具有如下形式:

$$y[n] = x[n] + e[n],$$

这里 $e[n] = Q(x[n]) - x[n]$, 而 $e[n]$ 是一个平稳随机过程, 其一阶概率密度在 $-\Delta/2$ 和 $\Delta/2$ 之间均匀分布, 样本之间不相关, 与 $x[n]$ 也不相关, 以至对于全部 m 和 n , $\mathcal{E}\{e[n]x[m]\} = 0$.

令 $x[n]$ 是一个均值为零, 方差为 σ_x^2 的平稳白噪声过程.

(a) 求 $e[n]$ 的均值、方差和自相关序列.

(b) 信号量化噪声比 σ_x^2/σ_e^2 是什么?

(c) 量化信号 $y[n]$ 现要用冲激响应为 $h[n] = \frac{1}{2}[a^n + (-a)^n]u[n]$ 的数字滤波器过滤, 求由于输入量化噪声在输出端产生的噪声方差和在输出端的信噪比.

在某些情况下可能要用非线性的量化阶, 例如对数间隔的量化阶. 这可以把均匀量化加到输入的对数上来完成, 如图 P3.36 所示, 这里 $Q[\cdot]$ 是一个如图 3.31 所给出的均匀量化器. 这时, 若假定 Δ 与该序列 $\ln(x[n])$ 的变化相比是小的话, 那么就能假设该量化器的输出是

$$\ln(y[n]) = \ln(x[n]) + e[n].$$

于是

$$y[n] = x[n] \cdot \exp(e[n]).$$

对于小的 e , 就能用 $(1 + e[n])$ 来近似 $\exp(e[n])$, 这样

$$y[n] \approx x[n](1 + e[n]) = x[n] + f[n]. \quad (\text{P3.36})$$

式 (P3.36) 特地用来描述对数量化的效果. 现假设 $e[n]$ 是一个平稳随机过程, 样本到样本之间不相关, 与信号 $x[n]$ 独立, 并且在 $\pm \Delta/2$ 之间具有一阶概率密度均匀分布.

(d) 求由式 (P3.36) 所定义的加性噪声 $f[n]$ 的均值、方差和自相关序列.

(e) 信号量化噪声比 σ_x^2/σ_f^2 是什么? 注意, 在这种情况下, σ_x^2/σ_f^2 与 σ_x^2 无关. 因此, 在我们假定的限制内, 信号量化噪声比是与输入信号电平无关的, 而对于线性量化, σ_x^2/σ_f^2 直接决定于 σ_x^2 .

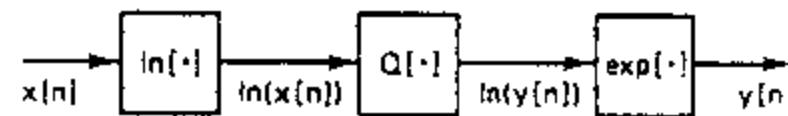


图 P3.36

- (f) 现在要用冲激响应为 $h[n] = \frac{1}{2} [a^n + (-a)^n] u[n]$ 的数字滤波器对量化的信号 $y[n]$ 进行滤波, 求由于输入量化噪声在输出端产生的噪声方差和在输出端的信噪比.

第四章 z 变换

4.0 引言

已经看到,傅里叶变换在表示和分析离散时间信号与系统中起着关键的作用.这一章将研究傅里叶变换的一种推广称之为 z 变换.离散时间信号的 z 变换和连续时间信号的拉氏变换是互相对应的,并且它们每一个与相应的傅里叶变换之间都有一种类似的关系.引入这种推广的主要原因是傅里叶变换不是对所有的序列都收敛,能有一个包括更为广泛信号的傅里叶变换的推广形式是有用的.第二个好处是在分析问题中, z 变换概念往往比傅里叶变换更方便.另一个优点是 z 变换能把强有力的复变函数理论用到离散时间信号与系统的问题中去.

这一章定义序列的 z 变换表示,并研究一个序列的性质是如何与它的 z 变换性质联系起来的.在讨论 z 变换中用到了许多复变函数理论中的结果.在应用这些结果时是一丝不苟的,但不想保持那么高的数学严密性.

4.1 z 变换

一个序列 $x[n]$ 的傅里叶变换 $X(e^{j\omega})$ 在第二章是定义为

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-jn\omega}. \quad (4.1)$$

一个序列 $x[n]$ 的 z 变换 $X(z)$ 定义成

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n}. \quad (4.2)$$

式(4.2)一般是一个无穷项的和或者无穷项幂级数,其中 z 是一个复变量.有时将式(4.2)看作一个算子是有益的,它把一个序列变换成为一个函数,称 z 变换算子 $\mathcal{Z}[\cdot]$,定义为

$$\mathcal{Z}\{x[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n} = X(z). \quad (4.3)$$

利用这一解释, z 变换算子就看作是将序列 $x[n]$ 变换为函数 $X(z)$, z 是一个连续复变量.一个序列和它的 z 变换之间的相应关系用符号记为

$$x[n] \xleftrightarrow{z} X(z). \quad (4.4)$$

按式(4.2)所定义的 z 变换往往称之为双边 z 变换,而与此相对应的单边 z 变换则定义为

$$\mathcal{R}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x[n]z^{-n}. \quad (4.5)$$

显然,仅当 $x[n]=0, n<0$,双边和单边变换才是相等的.在本书中几乎无一例外地都用双边变换.然而,在本章最后将对单边 z 变换作一简单介绍,并说明在解非零辅助条件下的线性常系数差分方程时,单边变换是特别有用的.

比较一下式(4.1)和式(4.2),很显然,傅里叶变换和 z 变换之间存在着一个紧密的关系.特别是若将式(4.2)中的复变量 z 代以复变量 $e^{j\omega}$,那么 z 变换就蜕化为傅里叶变换.这就是将傅里叶变换用 $X(e^{j\omega})$ 表示的一个初衷,因为当傅里叶变换存在时,它就是以 $z=e^{j\omega}$ 的 $X(z)$.这就相当于将 z 限制在单位幅度上,也就是说,对于 $|z|=1$, z 变换就相应于傅里叶变换.更一般地说,将复变量 z 表示成极坐标形式

$$z=re^{j\omega}.$$

式(4.2)就可以写成

$$X(re^{j\omega})=\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n](re^{j\omega})^{-n},$$

或

$$X(re^{j\omega})=\sum_{n=-\infty}^{\infty} (x[n]r^{-n})e^{-j\omega n}. \quad (4.6)$$

式(4.6)可以看作是原序列 $x[n]$ 和指数序列 r^{-n} 相乘后的傅里叶变换.很明显,对于 $r=1$,式(4.6)就是 $x[n]$ 的傅里叶变换.

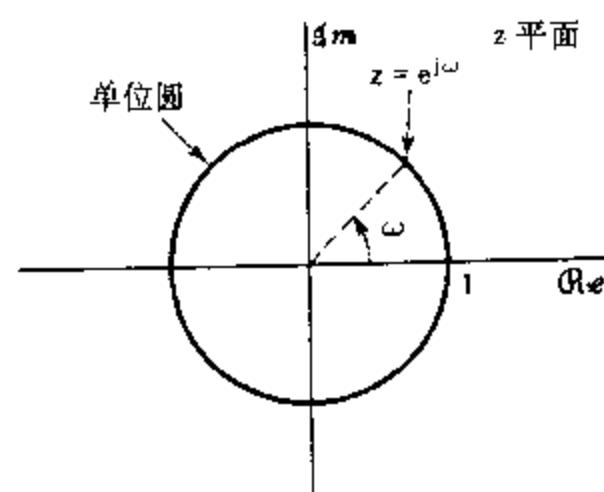


图 4.1 复数 z 平面的单位圆.

因为 z 变换是一个复变量的函数,因此利用复数 z 平面来描述和阐明 z 变换是方便的.在 z 平面,相应于 $|z|=1$ 的围线就是半径为 1 的圆,如图 4.1 所示.这个圆特称为单位圆. z 变换在单位圆上的求值就相应于傅里叶变换.注意 ω 是单位圆上某点 z 的矢量与复平面实轴之间的角度.若沿着 z 平面单位圆上从 $z=1$ (即 $\omega=0$)开始,经过 $z=j(\omega=\pi/2)$ 到 $z=-1(\omega=\pi)$ 对 $X(z)$ 求值,就得到了 $0 \leq \omega \leq \pi$ 的傅里叶变换.继续沿着单位圆从 $\omega=\pi$ 到 $\omega=2\pi$ 考察傅里叶变换,就等效于从 $\omega=-\pi$ 到 $\omega=0$ 一样.在第二章,傅里叶变换

是在一个线性频率轴上展开的,现在把傅里叶变换解释成在 z 平面单位圆上的 z 变换,也就相当于在概念上把线性频率轴缠绕在单位圆上,其中 $\omega=0$ 在 $z=1$,和 $\omega=\pi$ 在 $z=-1$.有了这种解释,傅里叶变换在频率上的固有周期性就自然得到了,因为在 z 平面上 2π 弧度的改变相当于绕单位圆一次,然后又重新回到原来同一点上来.

正如在第二章讨论过的,表示傅里叶变换的幂级数不是对所有序列都是收敛的,也就是说,该无穷项之和可能不总是有限的.相类似, z 变换也不是对所有序列或者对全部 z 值都收敛.对已给定的序列,使 z 变换收敛的那一组 z 值就称为收敛域,缩写为 ROC.在 2.7 节已提到,傅里叶变换的一致收敛要求序列是绝对可加的.将这个条件用于式(4.6)就得到 z 变换绝对收敛的条件为

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]r^{-n}| < \infty \quad (4.7)$$

从式(4.7)很清楚,由于序列被实指数 r^{-n} 相乘,就有可能甚至在傅里叶变换不存在时而对 z 变换收敛。例如,序列 $x[n]=u[n]$ 不是绝对可加的,因此它的傅里叶变换不收敛。然而, $r^{-n}u[n]$ 在 $r>1$ 时是绝对可加的。这就表明,阶跃序列的 z 变换在收敛域 $|z|>1$ 内存在。

式(4.2)幂级数的收敛仅仅决定于 $|z|$;也就是说,因为 $|X(z)|<\infty$,如果

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]| |z|^{-n} < \infty, \quad (4.8)$$

式(4.2)幂级数的收敛域就由满足不等式(4.8)的全部 z 值所组成。因此,若某个 z 值,比如说 $z=z_1$ 是在 ROC 内,那么全部由 $|z|=|z_1|$ 确定的圆上的 z 值也一定在 ROC 内。结果,收敛域一定由在 z 平面上以原点为中心的圆环所组成。收敛域的外边界是一个圆(或者可能向外延伸至无穷大),而内边界也是一个圆(或者 ROC 向内可包括原点)。这就如图 4.2 所示。如果 ROC 包括单位圆,自然就意味着 z 变换对 $|z|=1$ 收敛,或者说序列的傅里叶变换收敛。相反,若 ROC 不包括单位圆,傅里叶变换就绝不收敛。

式(4.2)的幂级数是一个劳伦级数。因此,在研究 z 变换中,来自复变函数理论的许多有用的定理都是可以利用的(例如可见 Churchill and Brown, 1984)。一个劳伦级数,或者说 z 变换,就代表了在收敛域内每点上的一个解析函数,因此 z 变换及其全部导数在收敛域内也一定是 z 的连续函数。这就意味着,如果一致收敛的区域包括单位圆,那么傅里叶变换及其全部对 ω 的导数一定是 ω 的连续函数。由 2.7 节讨论可得该序列必须是绝对可加的,也就是一个稳定序列。

z 变换的一致收敛要求如式(4.7)所示的指数加权序列绝对可加。序列

$$x_1[n] = \frac{\sin \omega_0 n}{\pi n}, \quad -\infty < n < \infty,$$

和

$$x_2[n] = \cos \omega_0 n, \quad -\infty < n < \infty,$$

都不是绝对可加的。再者,这两个序列对任何 r 值来说也没有一个乘以 r^{-n} 会是绝对可加的。因此,这些序列没有能满足绝对收敛的 z 变换。然而,在 2.7 节已指出即使像 $x_1[n]$ 这样的序列不是绝对可加的,但是却有着有限的能量,其傅里叶变换在均方意义上收敛到一个不连续的周期函数。类似地,序列 $x_2[n]$ 既不是绝对可加的,又不是平方可加的,但是利用冲激可以对 $x_2[n]$ 定义出一个有用的傅里叶变换。在以上两种情况下,傅里叶变换都不是连续的、无限可微的函数,所以它们不能在单位圆上求出 z 变换的结果。因此,在此情况下还认为傅里叶变换是作为 z 变换在单位圆上的求值严格说来就不正确了,虽然仍延用了含有这个意思的符号。

当这个无限项和能表示成闭式时,也即可以被“求和”并且表示成一个简单的数学表达式时, z 变换是最有用的。 $X(z)$ 在收敛域内是一个有理函数,为

$$X(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}, \quad (4.9)$$

它是其中最重要和最有用的 z 变换,式中 $P(z)$ 和 $Q(z)$ 都是 z 的多项式。对于使 $X(z)=0$ 的 z 称为 $X(z)$ 的零点,而使 $X(z)$ 成为无穷大的 z 称为 $X(z)$ 的极点。对于有限 z 值的 $X(z)$ 的极点就是分母多项式的根。另外,极点也可能出现在 $z=0$ 或 $z=\infty$ 。对于有理 z

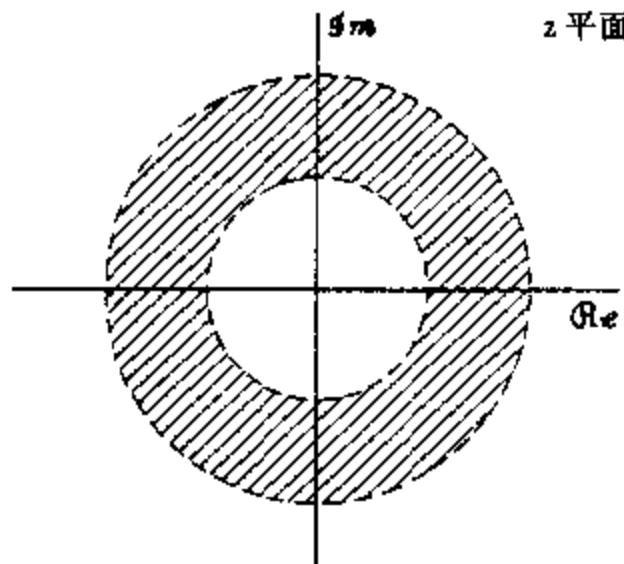


图 4.2 作为 z 平面上一个圆环的收敛域(ROC). 对于一些具体情况, 内边界可能向内延伸到原点, ROC 就变成一个圆盘, 对于另一些情况, 外边界则可能向外延伸至无穷大.

变换, $X(z)$ 的极点位置与 z 变换的收敛域之间存在着几个重要关系, 我们将在 4.2 节具体讨论这些关系. 现在首先用几个例子来说明一下 z 变换.

例 4.1

考虑信号 $x[n] = a^n u[n]$. 由式(4.2)

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^n u[n] z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (az^{-1})^n.$$

为了使 $X(z)$ 收敛就要求

$$\sum_{n=0}^{\infty} |az^{-1}|^n < \infty.$$

因此, 收敛域就是在 $|az^{-1}| < 1$ 范围内的全部 z 值, 或者 $|z| > a$. 在收敛域内, 该无穷级数收敛到

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (az^{-1})^n = \frac{1}{1 - az^{-1}} = \frac{z}{z - a}, \quad |z| > |a|. \quad (4.10)$$

这里已经用了已熟悉的几何级数的求和公式. 该 z 变换对任何有限的 $|a|$ 值都收敛. 另一方面, $x[n]$ 的傅里叶变换仅当 $|a| < 1$ 时才收敛. 对 $a = 1$, $x[n]$ 就是阶跃序列, 其 z 变换为

$$X(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}}, \quad |z| > 1. \quad (4.11)$$

在例 4.1 中, 该无限和就等于在收敛域内一个 z 的有理函数. 对大多数情况来说, 有理函数比无限和表示要方便得多. 将会看到, 任何能表示成指数和的序列都能用一个有理 z 变换来表示. 这样的 z 变换, 除了一个常数幅度因子外, 都由它的零点和极点来决定. 对这个例子, 有一个零点在 $z = 0$, 和一个极点在 $z = a$. 例 4.1 的零极点图和收敛域均如图 4.3 所示. 对于 $|a| > 1$, ROC 不包括单位圆, 这与 a 的这些值所带来的结果是一致的, 即指数增长序列 $a^n u[n]$ 的傅里叶变换不收敛.

例 4.2

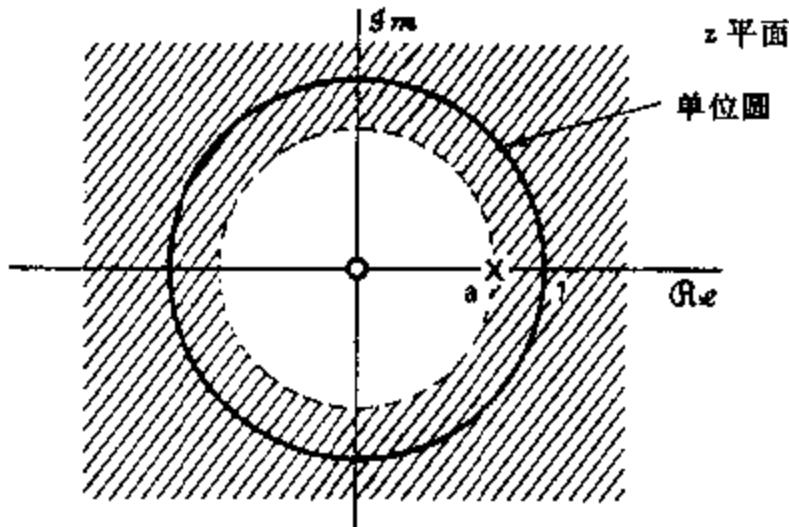


图 4.3 例 4.1 的零极点图和收敛域.

令 $x[n] = -a^n u[-n-1]$, 那么

$$\begin{aligned} X(z) &= -\sum_{n=-\infty}^{\infty} a^n u[-n-1] z^{-n} = -\sum_{n=-\infty}^{-1} a^n z^{-n} \\ &= -\sum_{n=1}^{\infty} a^{-n} z^n = 1 - \sum_{n=0}^{\infty} (a^{-1}z)^n. \end{aligned} \quad (4.12)$$

如果 $|a^{-1}z| < 1$, 或者 $|z| < a$, 式(4.12)的和式收敛, 并等于

$$X(z) = 1 - \frac{1}{1-a^{-1}z} = \frac{1}{1-az^{-1}} = \frac{z}{z-a}, \quad |z| < |a|. \quad (4.13)$$

这个例子的零极点图和收敛域如图 4.4 所示. 注意到当 $|a| < 1$ 时, 序列 $-a^n u[-n-1]$ 将随 $n \rightarrow -\infty$ 而指数增长, 因此它的傅里叶变换不存在.

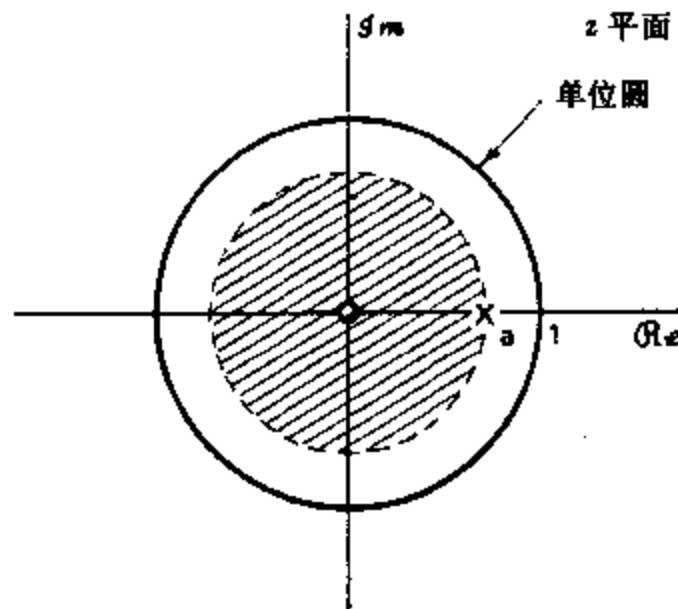


图 4.4 例 4.2 的零极点图和收敛域.

将式(4.10)和式(4.13)、图 4.3 和图 4.4 作一比较就可看到, 这两个序列以及它们的无限和都是不同的; 然而 $X(z)$ 的代数表达式和相应的零极点图对例 4.1 和例 4.2 却是一样的. z 变换的差异仅在收敛域不同. 这就强调了对于一个给定序列的 z 变换既要给出它的代数表达式, 又要标出它的收敛域. 同时, 在这两个例子中序列都是指数的, 所得到的 z 变换也都是有理的. 事实上, 由下一个例子可以进一步想到, 只要 $x[n]$ 是一个实指数或复

指数的线性组合, $X(z)$ 就一定是有理的.

例 4.3

考虑一个是两个实指数和的信号:

$$x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] + \left(-\frac{1}{3}\right)^n u[n]. \quad (4.14)$$

那么 z 变换就是

$$\begin{aligned} X(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] + \left(-\frac{1}{3}\right)^n u[n] \right\} z^{-n} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] z^{-n} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(-\frac{1}{3}\right)^n u[n] z^{-n} \quad (4.15) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}z^{-1}\right)^n + \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{3}z^{-1}\right)^n \\ &= \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{1}{1 + \frac{1}{3}z^{-1}} = \frac{2\left(1 - \frac{1}{12}z^{-1}\right)}{\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1 + \frac{1}{3}z^{-1}\right)} \\ &= \frac{2z\left(z - \frac{1}{12}\right)}{\left(z - \frac{1}{2}\right)\left(z + \frac{1}{3}\right)}. \end{aligned} \quad (4.16)$$

为了使 $X(z)$ 收敛, 式(4.15)中的两个和都必须收敛, 这就既要求 $\left|\frac{1}{2}z^{-1}\right| < 1$, 又要求 $\left|-\frac{1}{3}z^{-1}\right| < 1$, 或等效为 $|z| > \frac{1}{2}$ 和 $|z| > \frac{1}{3}$. 由此收敛域就是 $|z| > \frac{1}{2}$. 对于单独每一项及组合后信号的 z 变换的零极点图和 ROC 都如图 4.5 所示.

在前面的每个例子中, 都是从给定序列开始, 然后把这些无限项和式中的每一项处理成一种其和能够辨别出的形式. 当序列能够看作如例 4.1 和例 4.2 那种形式的指数组合时, z 变换就能利用 z 变换算子是线性的这一事实以一种更为简便的方式求得. 明确些就是根据 z 变换的定义式(4.2), 若 $x[n]$ 是两项之和, 那么 $X(z)$ 也一定是相应于单独每一项的 z 变换之和, 而 ROC 则是单个收敛域的重叠部分, 即对两个单独的和都收敛的 z 值区域. 在例 4.3 求得式(4.15)时已经用了这一点. 例 4.4 用来说明例 4.3 的 z 变换如何能用一种更为直接的方式得到.

例 4.4

还是令 $x[n]$ 由式(4.14)给定, 那么两个单独项的 z 变换是

$$\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] \xleftrightarrow{z} \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}, \quad |z| > \frac{1}{2}, \quad (4.17)$$

$$\left(-\frac{1}{3}\right)^n u[n] \xleftrightarrow{z} \frac{1}{1 + \frac{1}{3}z^{-1}}, \quad |z| > \frac{1}{3}, \quad (4.18)$$

结果

$$\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] + \left(-\frac{1}{3}\right)^n u[n] \xleftrightarrow{z} \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{1}{1 + \frac{1}{3}z^{-1}}, \quad |z| > \frac{1}{2}, \quad (4.19)$$

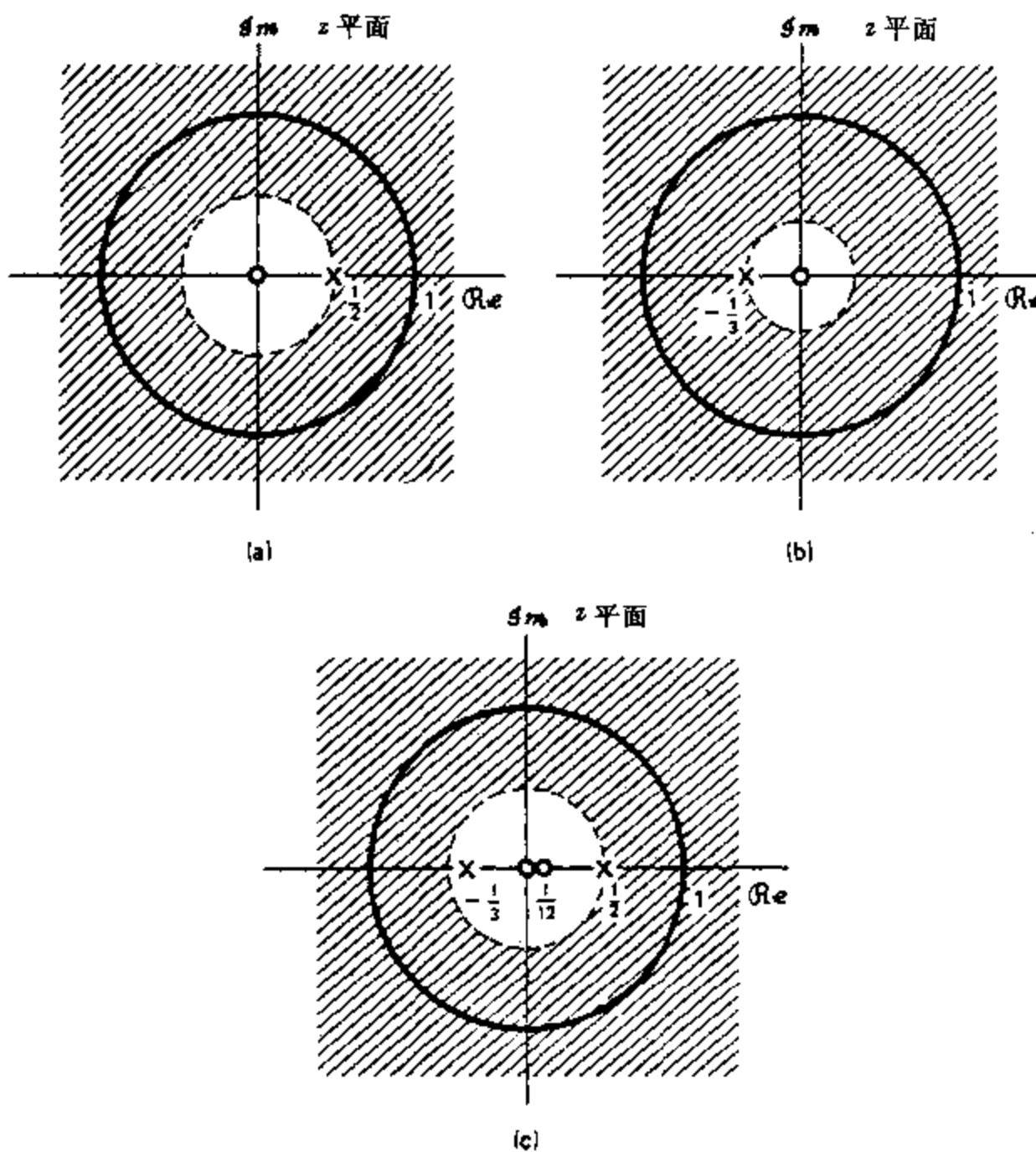


图 4.5 例 4.3 和例 4.4 中单独项与这些项之和的零极点图及收敛域, (a) $1/\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)$,
 $|z|>1/2$. (b) $1/\left(1+\frac{1}{3}z^{-1}\right)$, $|z|>1/3$. (c) $1/\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)+1/\left(1+\frac{1}{3}z^{-1}\right)$,
 $|z|>1/2$.

与在例 4.3 中所得一样, 每个单独项及组合后信号的 z 变换的零极点图和 ROC 如图 4.5 所示.

例 4.1~例 4.4 的全部要点都反映在例 4.5 中.

例 4.5

考虑序列 $x[n]$ 为

$$x[n] = \left(-\frac{1}{3}\right)^n u[n] - \left(\frac{1}{2}\right)^n u[-n-1]. \quad (4.20)$$

注意到该序列随 $n \rightarrow -\infty$ 而指数增长, 利用例 4.1 的结果有

$$\left(-\frac{1}{3}\right)^n u[n] \xleftrightarrow{z} \frac{1}{1 + \frac{1}{3}z^{-1}}, \quad |z| > \frac{1}{3},$$

和例 4.2 的结果有

$$-\left(\frac{1}{2}\right)^n u[-n-1] \xleftrightarrow{z} \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}, \quad |z| < \frac{1}{2}.$$

因此,根据 z 变换的线性,可得

$$\begin{aligned} X(z) &= \frac{1}{1+\frac{1}{3}z^{-1}} + \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}, \quad \frac{1}{3} < |z|, |z| < \frac{1}{2}, \\ &= \frac{2\left(1-\frac{1}{12}z^{-1}\right)}{\left(1+\frac{1}{3}z^{-1}\right)\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)} = \frac{2z\left(z-\frac{1}{12}\right)}{\left(z+\frac{1}{3}\right)\left(z-\frac{1}{2}\right)}. \end{aligned} \quad (4.21)$$

在这个情况下,ROC 是个环形域 $1/3 < |z| < 1/2$. 注意到本例中的有理函数与例 4.3 和例 4.4 中的有理函数是一样的,但 ROC 在两种情况下是不同的. 本例的零极点图和 ROC 如图 4.6 所示. 由于这时 ROC 不包括单位圆,所以式(4.20)所表示的序列没有傅里叶变换.

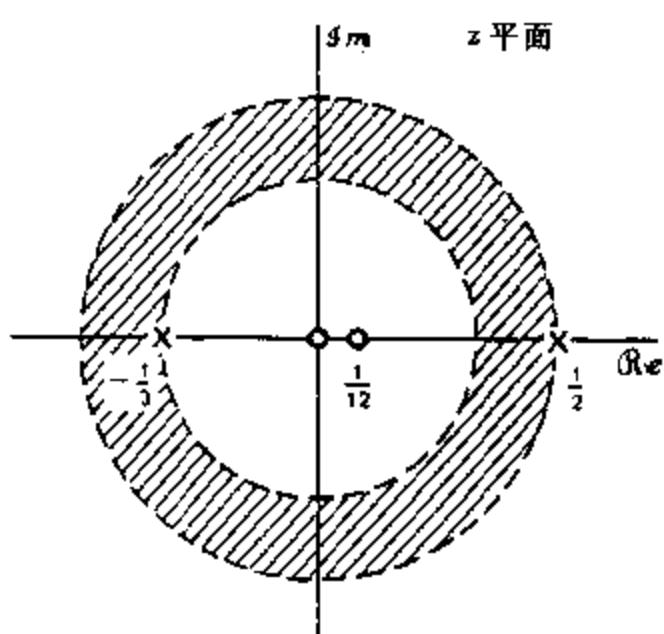


图 4.6 例 4.5 的零极点图和收敛域.

前面每个例子中都把 z 变换既表示为 z 的多项式之比,又同时表示成 z^{-1} 的多项式之比. 从式(4.2)给出的 z 变换定义的形式来看,对于 $n < 0$, 序列值为零的那些序列仅涉及 z 的负幂,于是对于这类信号,将 $X(z)$ 表示成 z^{-1} 而不是 z 的多项式是特别方便的;然而,即使当 $x[n]$ 在 $n < 0$ 不是零, $X(z)$ 仍然能利用 $(1-az^{-1})$ 形式的因式来表示. 应该记住的是:这样一个因式既引入了一个极点,又引入了一个零点,这就如同在前面例子中的代数表达式所说的一样.

从这些例子容易看到,无限长指数序列的 z 变换能表示成 z 或 z^{-1} 的有理函数. 在序列为有限长的情况下也有一个相当简单形式. 如果序列仅在区间 $N_1 \leq n \leq N_2$ 内为非零,则 z 变换为

$$X(z) = \sum_{n=N_1}^{N_2} x[n]z^{-n} \quad (4.22)$$

只要每一项 $|x[n]z^{-n}|$ 是有限的, $X(z)$ 就不存在收敛的问题. 一般来说不太可能把一个有限项的和表示成一个闭式;不过,在这样的情况下可能也不必要. 例如,若 $x[n] = \delta[n] + \delta[n-5]$, 那么容易看出 $X(z) = 1 + z^{-5}$, 它对 $|z| > 0$ 是有限的. 例 4.6 给出的就是能把有限项的和相加而得出一个更为紧凑的 z 变换表示式的例子.

例 4.6

考虑信号

$$x[n] = \begin{cases} a^n, & 0 \leq n \leq N-1, \\ 0, & \text{其它.} \end{cases}$$

那么

$$\begin{aligned} X(z) &= \sum_{n=0}^{N-1} a^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{N-1} (az^{-1})^n \\ &= \frac{1 - (az^{-1})^N}{1 - az^{-1}} = \frac{1}{z^{N-1}} \frac{z^N - a^N}{z - a}. \end{aligned} \quad (4.23)$$

ROC 由满足

$$\sum_{n=0}^{N-1} |az^{-1}|^n < \infty$$

的 z 值所决定。因为只有有限个非零项，所以只要 $|az^{-1}|$ 是有限的，其和就一定有限。这就仅要求 $|a| < \infty$ 和 $z \neq 0$ 。因此，假定 $|a|$ 是有限的，ROC 除原点 ($z=0$) 外包括整个 z 平面。设 $N=16$, a 为实数且位于 0 和 1 之间，这时的零极点图如图 4.7 所示。具体些就是分子多项式的 N 个根在

$$z_k = ae^{j(2\pi k/N)}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1. \quad (4.24)$$

(当 $a=1$ 时，这些复数值就是 1 的 N 个根)。 $k=0$ 时的零点，抵消了 $z=a$ 的极点。结果，除了原点外没有任何极点。剩下来的零点在

$$z_k = ae^{j(2\pi k/N)}, \quad k = 1, \dots, N-1. \quad (4.25)$$

表 4.1 综合了前面一些例子的变换对，以及其它一些常遇到的 z 变换对。将会看到，这些基本变换对在已知序列求变换，或者相反在给定 z 变换求序列中都是非常有用的。

表 4.1 基本 z 变换对

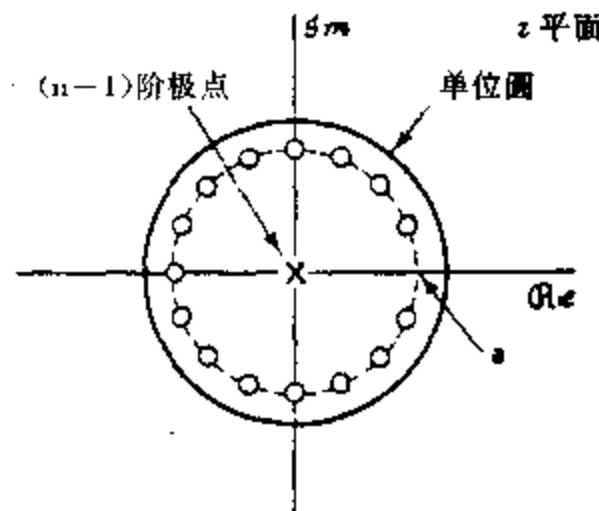


图 4.7 $N=16, 0 < a < 1$ 时例 4.6 的零极点图。本例的收敛域除 $z=0$ 外由全部 z 组成。

序列	变换	ROC
1. $\delta[n]$	1	所有 z
2. $u[n]$	$\frac{1}{1-z^{-1}}$	$ z > 1$
3. $-u[-n-1]$	$\frac{1}{1-z^{-1}}$	$ z < 1$
4. $\delta[n-m]$	z^{-m}	全部 z 除去 0 (若 $m > 0$) 或 ∞ (若 $m < 0$)
5. $a^n u[n]$	$\frac{1}{1-az^{-1}}$	$ z > a $
6. $-a^n u[-n-1]$	$\frac{1}{1-az^{-1}}$	$ z < a $
7. $na^n u[n]$	$\frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$	$ z > a $
8. $-na^n u[-n-1]$	$\frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$	$ z < a $

续表 4.1

· 序列	变换	ROC
9. $[\cos\omega_0 n]u[n]$	$\frac{1 - [\cos\omega_0]z^{-1}}{1 - [2\cos\omega_0]z^{-1} + z^{-2}}$	$ z > 1$
10. $[\sin\omega_0 n]u[n]$	$\frac{[\sin\omega_0]z^{-1}}{1 - [2\cos\omega_0]z^{-1} + z^{-2}}$	$ z > 1$
11. $[r^n \cos\omega_0 n]u[n]$	$\frac{1 - [r\cos\omega_0]z^{-1}}{1 - [2r\cos\omega_0]z^{-1} + r^2 z^{-2}}$	$ z > r$
12. $[r^n \sin\omega_0 n]u[n]$	$\frac{[r\sin\omega_0]z^{-1}}{1 - [2r\cos\omega_0]z^{-1} + r^2 z^{-2}}$	$ z > r$
13. $\begin{cases} a^n, & 0 \leq n \leq N-1, \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$	$\frac{1 - a^N z^{-N}}{1 - az^{-1}}$	$ z > a $

4.2 z 变换收敛域的性质

上一节的各个例子告诉我们收敛域的性质与信号的属性有关。现将这些性质归纳如下，并接着作一些讨论和直观确认。假定 z 变换的代数表示式是一个有理函数，而序列 $x[n]$ 除了可能在 $n = \infty$ 或 $n = -\infty$ 外，都有有限的幅度。

性质 1: ROC 在 z 平面上是中心在原点的一个圆环或圆盘，即 $0 \leq r_L < |z| < r_U \leq \infty$ 。

性质 2: 当且仅当 $x[n]$ 的 z 变换的 ROC 包括单位圆时， $x[n]$ 的傅里叶变换才绝对收敛。

性质 3: ROC 内不能包含任何极点。

性质 4: 若 $x[n]$ 是一个有限长序列，即一个序列除在有限区间 $-\infty < N_1 \leq n \leq N_2 < +\infty$ 内，其余均为零，那么其 ROC 就是整个 z 平面，可能 $z=0$ 或 $z=\infty$ 除外。

性质 5: 若 $x[n]$ 是一个右边序列，即一个序列在 $n < N_1 < \infty$ 是零，那么其 ROC 是从 $X(z)$ 中最外面（即最大幅度）的有限极点向外延伸至（可能包括） $z=\infty$ 。

性质 6: 若 $x[n]$ 是一个左边序列，即一个序列在 $n > N_2 > -\infty$ 是零，那么其 ROC 是从 $X(z)$ 中最里面（即最小幅度）的非零极点向内延伸至（可能包括） $z=0$ 。

性质 7: 一个双边序列是一个无限长序列，它既不是右边的，也不是左边的。若 $x[n]$ 是双边序列，那么其 ROC 一定由 z 平面上的一个圆环所组成，其内外边界均由某一极点所界定，而且依据性质 3，其内也不能包含任何极点。

性质 8: ROC 必须是一个连通的区域。

如同在 4.1 节中所讨论的，性质 1 来自这一点：对一个给定的 $x[n]$ ，式(4.2)的收敛仅依赖于 $|z|$ ，而性质 2 就是当 $|z|=1$ 时，式(4.2)就蜕化为傅里叶变换的结果。性质 3 是由于 $X(z)$ 在极点处是无穷大，因此按定义它不收敛。

性质 4 到性质 7 或多或少都能直接由把 z 变换看作是原序列经指数加权后的傅里叶变换来导得。首先考虑性质 4。图 4.8 示出一个有限长序列、 $r > 1$ 的指数序列 r^{-n} （指数衰减）和 $0 < r < 1$ 的指数序列（指数增长）。 z 变换的收敛要求序列 $x[n]|z|^{-n}$ ，或者等效为 $x[n]r^{-n}$ 绝对可加。由图 4.8 很明显，因为 $x[n]$ 仅有有限个非零值，只要这些值当中的每一个都是有限的， $x[n]$ 就一定是绝对可加的。再者，如果加权序列在 $x[n]$ 为非零值的区

间内,即 $N_1 \leq n \leq N_2$,为有限幅度,那么这种绝对可加性也不会受到指数加权的影响.因此,对一个有限长序列, $x[n]r^{-n}$, $0 < r < \infty$,一定是绝对可加的.唯一可能出现的麻烦是在 $r=0$ 或 $r=\infty$.如果 $x[n]$ 对任意正的 n 值是非零(即若 $N_2 > 0$),而 r 或等效为 $|z|$ 是零,那么 $x[n]r^{-n}$ 对于 $0 < n \leq N_2$ 将为无穷大.相应地,如果 $x[n]$ 对任意负的 n 值是非零(即若 $N_1 < 0$),而 r 或等效为 $|z|$ 是无穷大,那么 $x[n]r^{-n}$ 对 $N_1 \leq n < 0$ 将为无穷大.

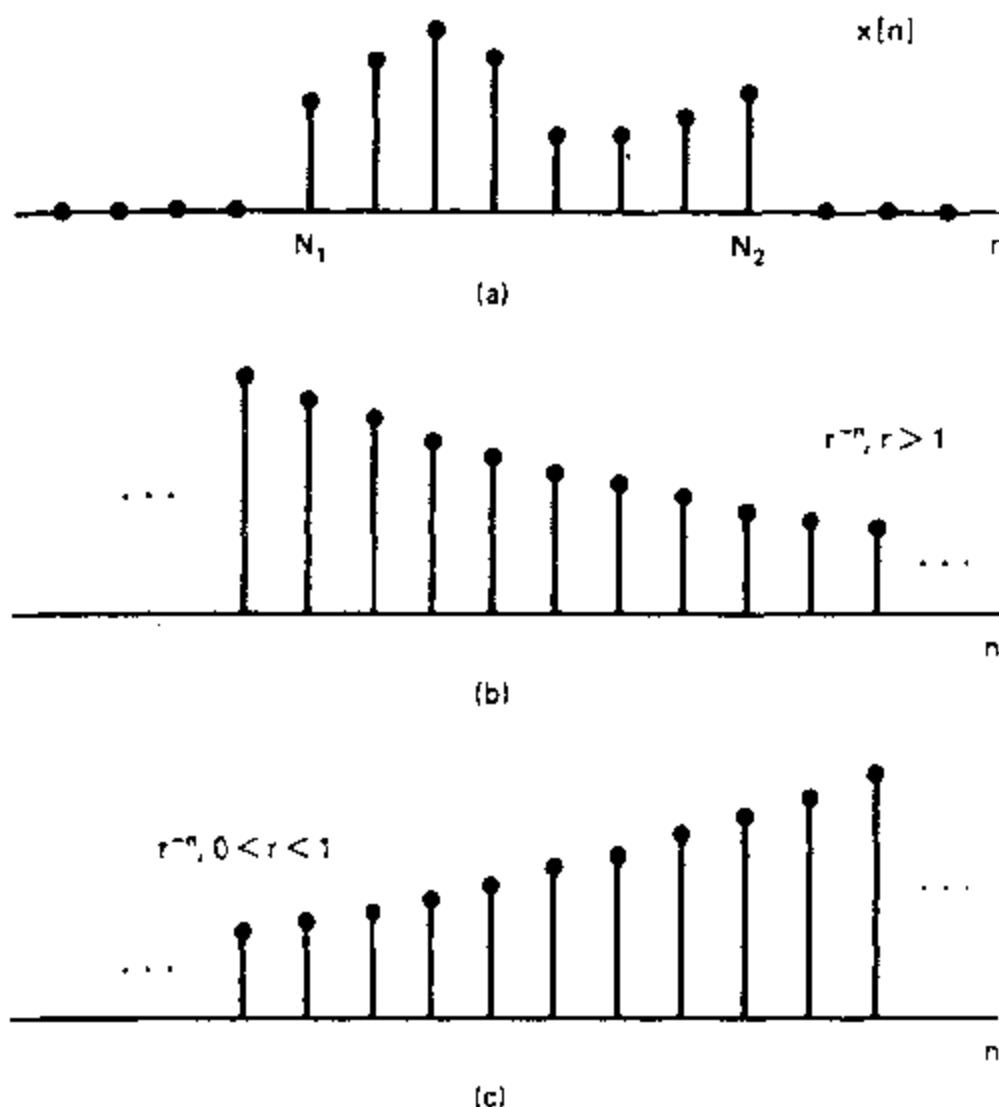


图 4.8 有限长序列和加权序列所内含的 z 变换收敛. (a) 有限长序列 $x[n]$. (b) 加权序列 $r^{-n}, r > 1$. (c) 加权序列 $r^{-n}, 0 < r < 1$.

性质 5 可以用一种大致类似的方式给予解释.图 4.9 示出一个右边序列和两个不同 r 值的指数组合 r^{-n} .一个右边序列就是在某一 n 值,譬如说 N_1 之前是零.如果 $|z| = r_0$ 是在 ROC 内,那么 $x[n]r_0^{-n}$ 就是绝对可加的,或者说 $x[n]r_0^{-n}$ 的傅里叶变换收敛.因为 $x[n]$ 是右边的, $x[n]$ 乘以一个实指数组合,其随 n 增加衰减得比 r_0^{-n} 更快,也一定是绝对可加的.具体地说,如图 4.9 所示,这个更快的指数组合会加快衰减正 n 值时的序列值,而不会引起负 n 值时的序列值变成无界,因为 $x[n]z^{-n}=0, n < N_1$.基于这一点就能够得出:对一个右边序列,ROC 在 z 平面上从某一个圆向外延伸.这个圆事实上就是在 $X(z)$ 中的最外面的极点处.为了看出这点,假定这些极点出现在 $z=d_1, \dots, d_N, d_1$ 为最小幅度,即相应于最里面的极点,而 d_N 为最大幅度,即相应于最外面的极点.为了简化论证,假定全部为单阶极点(可以很容易推广到多重极点).正如将在 4.3 节中看到的,对于 $N_1 \leq n, x[n]$ 将由如下的指数组合之和所组成

$$x[n] = \sum_{k=1}^N A_k(d_k)^n, \quad n \geq N_1. \quad (4.26)$$

这些指数项中,随 n 的增加,增长最慢的是相应于最里面的极点,即 d_1 这一项;而衰减最慢(或增长最快)的是相应于最外面的极点,即 d_N 这一项.现在考虑序列 $x[n]$ 用 r^{-n} 指数加权,即

$$x[n]r^{-n} = r^{-n} \sum_{k=1}^N A_k (d_k)^n, \quad n \geq N_1, \quad (4.27)$$

$$= \sum_{k=1}^N A_k (d_k r^{-1})^n, \quad n \geq N_1. \quad (4.28)$$

$x[n]r^{-n}$ 的绝对可加性要求式(4.28)中的每一指数项都是绝对可加的,即

$$\sum_{n=N_1}^{\infty} |d_k r^{-1}|^n < \infty, \quad k=1, \dots, N, \quad (4.29)$$

或者等效为

$$|r| > |d_k|, \quad k=1, \dots, N. \quad (4.30)$$

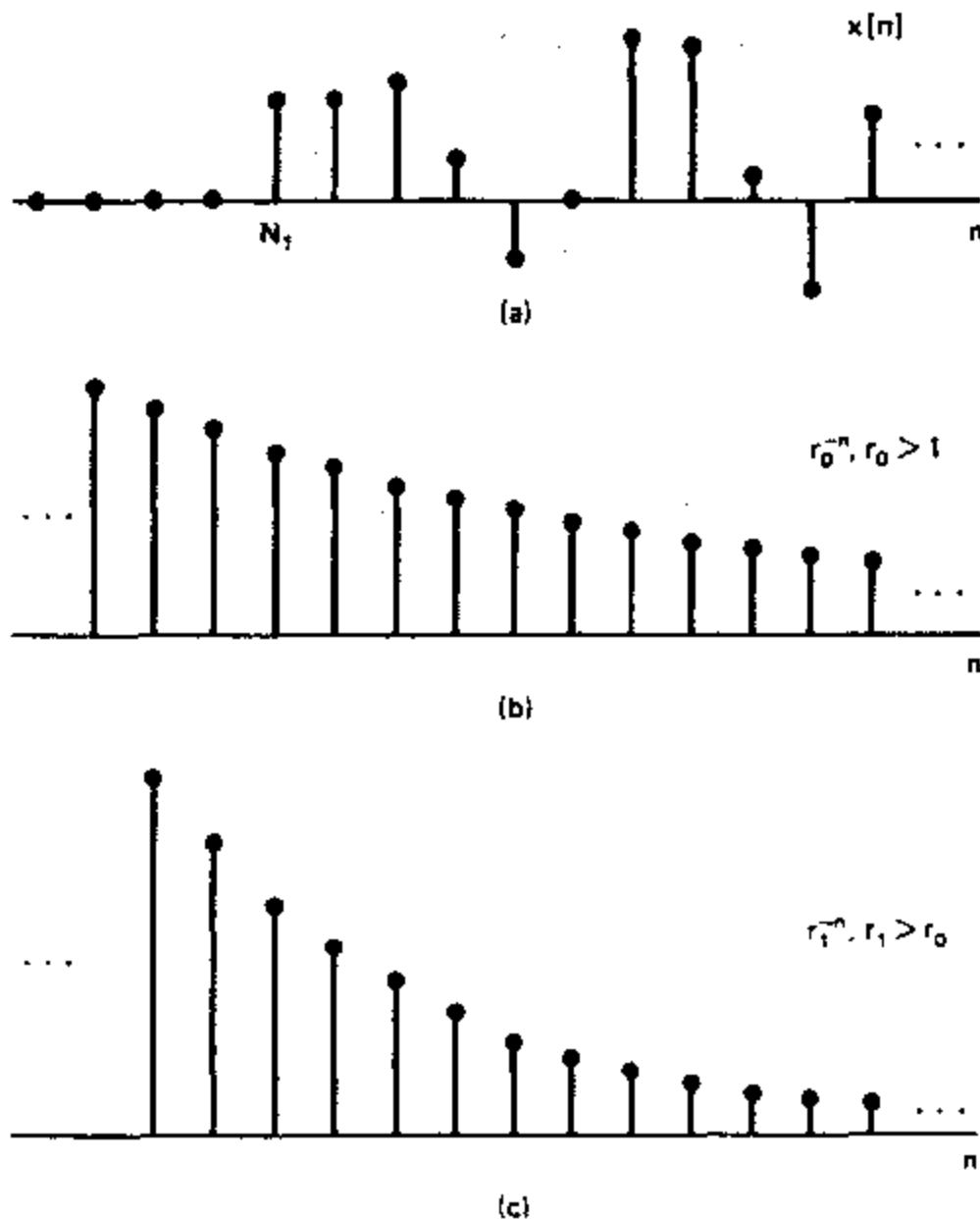


图 4.9 右边序列和加权序列所内含的 z 变换收敛. (a) 右边序列 $x[n]$. (b) 加权序列 $r_0^{-n}, 1 < r_0$. (c) 加权序列 $r_1^{-n}, r_1 > r_0$.

因为最外面的极点 d_N 具有最大的幅度值,所以有

$$|r| > |d_N|, \quad (4.31)$$

这就是说,ROC 是位于最外面极点的外边,一直延伸到无穷.若 $N_1 < 0$, ROC 不包括 $|z| = \infty$, 因为 r^{-n} 对 r 为无穷大和 n 为负时为无穷大.

由上述讨论可以想到,要仔细地论证性质 5 是可能的(以及相关的性质 6 和性质 7).然而,论证的实质就是对于一个受到指数加权的右边指数序列之和,其指数加权必须加以限制,使所有被指数加权后的项都随 n 增加而衰减.

性质 6 是关于左边序列,完全可以用与右边序列并行的证法来完成.然而,这里 $x[n]$ 是由与式(4.28)相同形式的指数和组成,但 $n \leq N_2$,即

$$x[n] = \sum_{k=1}^N A_k(d_k)^n, \quad n \leq N_2, \quad (4.32)$$

或者用指数加权为

$$x[n]r^{-n} = \sum_{k=1}^N A_k(d_k r^{-1})^n, \quad n \leq N_2. \quad (4.33)$$

因为 $x[n]$ 现在沿负 n 轴延伸到 $-\infty$,所以 r 必须加以限制,使对每一个 d_k , 指数序列 $(d_k r^{-1})^n$ 随着 n 朝向 $-\infty$ 减小都衰减到零.这就等效为

$$|r| < |d_k|, \quad k = 1, \dots, N,$$

或者,因为 d_1 有最小的幅度,故

$$|r| < |d_1|, \quad (4.34)$$

即 ROC 位于最里面极点的里面.若左边序列对正 n 值有非零值,那么 ROC 就不能包括原点, $z = 0$.

对右边序列,ROC 受制于用指数加权要求全部指数项随 n 增加而衰减到零;而对左边序列,则是指数加权必须要使全部指数项随 n 减小而衰减到零.对双边序列,指数加权就要求得平衡,因为如果随 n 增加而衰减得太快,就可能导致随 n 减小而增长得太快,反之亦然.更明确点说,对双边序列来说,某些极点仅仅对 $n > 0$ 起作用,而剩下的仅对 $n < 0$ 起作用.收敛域在里边被最大幅度的极点所界定,这个极点是对 $n > 0$ 起作用的;而在外面则被最小幅度的极点所界定,这个极点是对 $n < 0$ 起作用的.

性质 8 正规地证明似乎要更困难些,但是由性质 4 到性质 7 的讨论,至少在直观上还是可以得出的.任何无限长的双边序列可以看作是一个右边部分(比如说对 $n \geq 0$)和一个左边部分(包括除了右边部分以外的全部)之和.右边部分将有如式(4.31)所给出的 ROC,而左边部分的 ROC 如式(4.34)所给出.整个双边序列的 ROC 必须是这两个区域的相交部分.于是,如果这样一个相交部分存在,它总是一个简单的连通环域,其形式为

$$r_R < |z| < r_L$$

也有一种可能就是右边和左边部分的收敛域之间没有重合的部分,即 $r_L < r_R$.序列 $x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] - \left(-\frac{1}{3}\right)^n u[-n-1]$ 就是属于这种情况的一个例子.在这种情况下,序列的 z 变换就不存在.然而,如果这种情况出现,仍然有可能利用 z 变换.这就是把该序列当作两个序列的和,其中每一个都有一个 z 变换,但是两个 z 变换不能以代数表达式组合起来,因为它们没有公共的 ROC.

为了说明 ROC 的某些性质,考虑一下图 4.10(a)的零极点图.根据性质 1,3 和 8,ROC 仅存在四种可能的选取.这些都分别图示在图 4.10(b),(c),(d)和(e)中,每一个都与一个不同的序列相联系.图 4.10(b)相应于一个右边序列.图 4.10(c)对应一个左边序列,而图 4.10(d)和图 4.10(e)则对应于两个不同的双边序列.如果假定单位圆落在极点

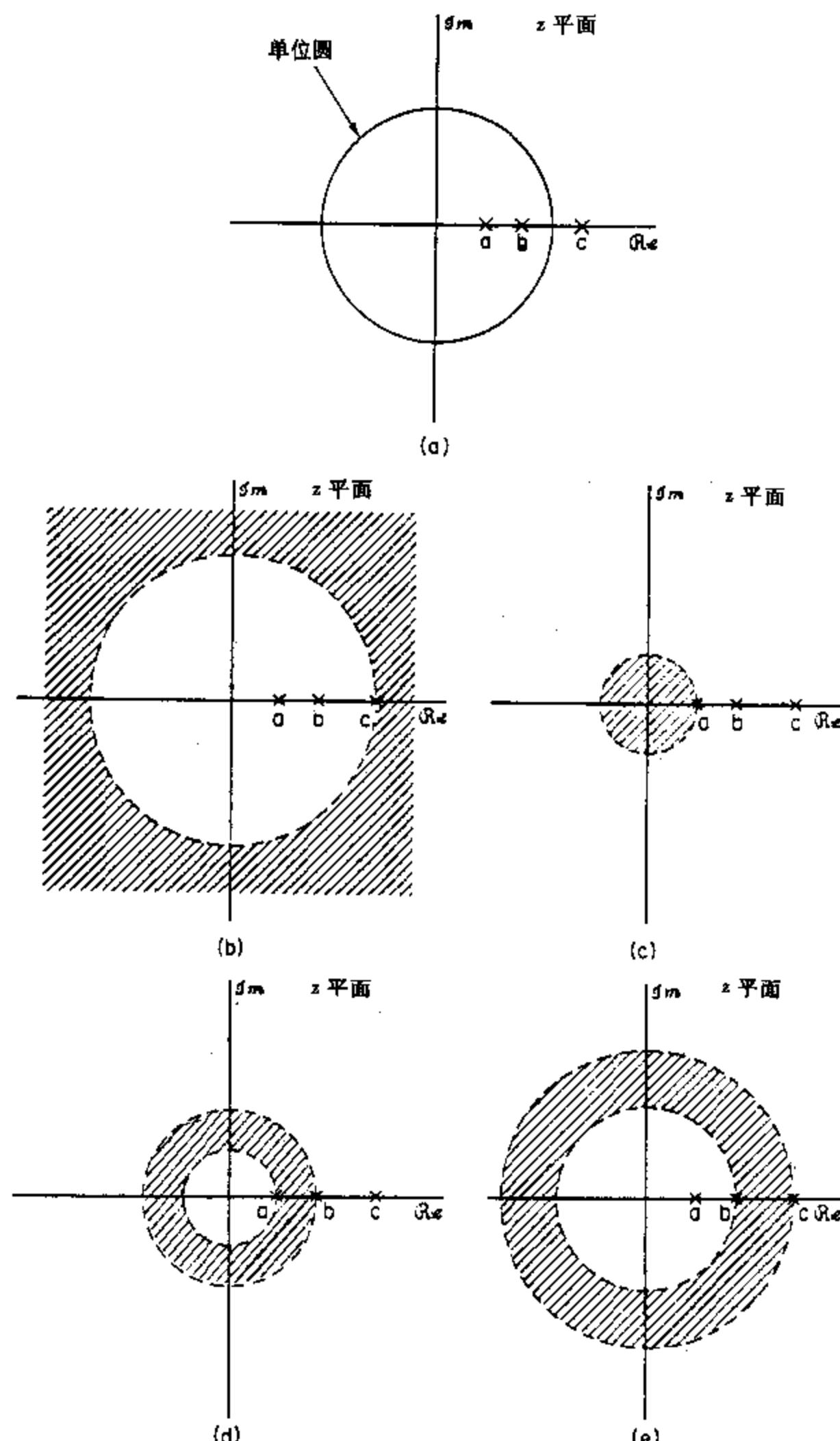


图 4.10 说明具有同一个零极点图, 而有四种可能不同的收敛域的 z 变换例子. 每一个都相当于一个不同的序列: (b) 对应于一个右边序列, (c) 对应于一个左边序列, (d) 对应于一个双边序列, (e) 对应于一个双边序列.

$z=b$ 和 $z=c$ 之间, 如图 4.10(a) 所示, 那么四种情况中仅有一个, 即图 4.10(e) 的傅里叶变换收敛.

4.3 z 反变换

z 变换的重要作用之一是在离散时间线性系统的分析中. 这种分析往往涉及到求序列的 z 变换, 再将该代数表达式经过某些运算处理后, 求 z 反变换. 从一个给定的代数表达式及其收敛域来求 z 反变换有几种正规的和简便的方法. 在 4.5 节将建立一种基于柯西积分定理的正规 z 反变换表达式, 并说明如何利用围线积分和留数定理将它计算出来. 在离散时间线性时不变系统分析中所遇到的典型序列和 z 变换, 使用一些稍欠正统的方法也就足够了, 而且它们更为可取. 4.3.1 节—4.3.3 节将考虑其中的几种, 这就是观察法、部分分式展开法和幂级数展开法.

4.3.1 观察法

这一方法就是由某些熟悉的, 或凭观察就能辨认出的变换对所构成的. 例如, 在 4.1 节曾求过这种形式序列 $x[n] = a^n u[n]$ 的 z 变换, 这里 a 可以是实数或复数. 这种形式的序列经常遇到, 因此直接应用如下这一变换对就特别有用:

$$a^n u[n] \xleftrightarrow{z} \frac{1}{1 - az^{-1}}, \quad |z| > |a|. \quad (4.35)$$

如果需要求如下的 z 反变换

$$X(z) = \left[\frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} \right], \quad |z| > \frac{1}{2}, \quad (4.36)$$

就可以想到式(4.35)的变换对, 根据观察就能判断与该变换相联系的序列是 $x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$. 如果与式(4.36)中 $X(z)$ 有关的 ROC 是在 $|z| < \frac{1}{2}$, 那么就可以想到表 4.1 中的变换对 6, 根据观察就能求得序列为 $x[n] = -\left(\frac{1}{2}\right)^n u[-n-1]$.

表 4.1 所列 z 变换对在应用观察法时是很有价值的. 如果这张表很丰富, 就可能把一个给定的 z 变换表示成几项之和, 其中每一项的反变换在表中都能找到. 如果是这样, 那么反变换(也即相应序列)就能直接从该表中写出. 更丰富的 z 变换表在 Jury(1964)书中可以找到.

4.3.2 部分分式展开法

已经提到, 如果 z 变换表示式能辨认出来, 或已列成表格的, 那么 z 反变换就可以凭观察求得. 有时 $X(z)$ 可能不是直接按照表格所列形式给出的, 但有可能将 $X(z)$ 表示成一些简单项之和的另一种表示式, 而其中的每一项都能由表格查出. 对于任意一个有理函数就属于这种情况, 因为可以对有理函数求得一个部分分式展开, 而相应于单个项的序列又极易确认.

为了看出如何求得部分分式展开, 假设 $X(z)$ 是表示成 z^{-1} 的多项式之比, 即

$$X(z) = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}}. \quad (4.37)$$

这样的 z 变换在线性时不变系统的研究中常常出现。一种等效表示是

$$X(z) = \frac{z^N \sum_{k=0}^M b_k z^{M-k}}{z^M \sum_{k=0}^N a_k z^{N-k}}. \quad (4.38)$$

式(4.38)指出, 对这样的函数在 z 平面上的非零区域将有 M 个零点和 N 个极点。另外, 若 $M > N$, 还有 $M - N$ 个极点在 $z = 0$; 或者, 若 $N > M$, 有 $N - M$ 个零点在 $z = 0$ 。换句话说, 式(4.37)的 z 变换在有限 z 平面内总是具有相同数目的零点和极点, 并且没有任何零、极点在 $z = \infty$ 。为了求得式(4.37)中的 $X(z)$ 的部分分式展开, 注意到 $X(z)$ 可以表示成如下形式是最方便的

$$X(z) = \frac{b_0 \prod_{k=1}^M (1 - c_k z^{-1})}{a_0 \prod_{k=1}^N (1 - d_k z^{-1})}, \quad (4.39)$$

式中 c_k 是 $X(z)$ 的非零值零点, d_k 是 $X(z)$ 的非零值极点。若 $M < N$ 并且极点都是一阶的, 那么 $X(z)$ 就能表示成

$$X(z) = \sum_{k=1}^N \frac{A_k}{1 - d_k z^{-1}}. \quad (4.40)$$

很明显, 式(4.40)中这些分式的公共分母与式(4.39)中的分母是相同的。将式(4.40)两边都乘以 $(1 - d_k z^{-1})$ 并对 $z = d_k$ 求值, 系数 A_k 就能由下式求得

$$A_k = (1 - d_k z^{-1}) X(z) \Big|_{z=d_k} \quad (4.41)$$

(在替代 $z = d_k$ 时, 往往更方便的是替代 $z^{-1} = d_k^{-1}$ 。) 将式(4.40)中的各项相加就能得到分子, 它最多就是 z^{-1} 的 $(N-1)$ 次阶。若 $M \geq N$, 那么在式(4.40)的右边必须要附加一个多项式, 该多项式的阶数就是 $(M-N)$ 。于是, 对 $M \geq N$, 完整的部分分式展开就有如下形式

$$X(z) = \sum_{r=0}^{M-N} B_r z^{-r} + \sum_{k=1}^N \frac{A_k}{1 - d_k z^{-1}}. \quad (4.42)$$

如果给出的是形如式(4.37)的有理函数, 且 $M \geq N$, 那么 B_r 就可以用长除法以分母除以分子来得到, 一直除到余因式的阶数低于分母的阶数为止。 A_k 仍然可以用式(4.41)求得。

如果 $X(z)$ 有多重极点且 $M \geq N$, 式(4.42)应进一步修改, 特别是若 $X(z)$ 有一个阶数为 s 的极点在 $z = d_i$, 那么式(4.42)就变成

$$X(z) = \sum_{r=0}^{M-N} B_r z^{-r} + \sum_{k=1, k \neq i}^N \frac{A_k}{1 - d_k z^{-1}} + \sum_{m=1}^s \frac{C_m}{(1 - d_i z^{-1})^m}. \quad (4.43)$$

系数 A_k 和 B_r 仍如上述求得, 系数 C_m 从下式求得

$$C_m = \frac{1}{(s-m)!} \frac{(-d_i)^{s-m}}{(d w^{s-m})} \left\{ \frac{d^{s-m}}{d w^{s-m}} [(1 - d_i w)^s X(w^{-1})] \right\}_{w=d_i^{-1}}. \quad (4.44)$$

式(4.43)是对 $M \geq N$ 和 d_i 是一个阶极点情况下,一个有理 z 变换表示成 z^{-1} 函数的部分分式展开的最一般形式. 如果有几个多重极点,那么对每一个多重极点将会有像式(4.43)的第三个和式那样的一项. 如果没有多重极点,式(4.43)就简化到式(4.42). 如果分子的阶小于分母的阶($M < N$),那么多项式的这一项就从式(4.42)和式(4.43)中消失.

应该强调的是,我们本来可以假设把有理 z 变换表示成 z 而不是 z^{-1} 的函数来得到同样的结果. 这就是说,我们可以考虑用 $(z-a)$ 形式的因式来代替 $(1-az^{-1})$ 形式的因式. 这也会导出类似于式(4.39)到式(4.44)这样一组式子. 该组式子对于利用由 z 表示的 z 变换表是很方便的. 因为表 4.1 是利用 z^{-1} 表示的,所以我们这样得到的结果会更为有用.

为了看看如何求得相应于一个给定有理 z 变换的序列,假定 $X(z)$ 仅有一阶极点,这样式(4.42)就是部分分式展开的最一般形式了. 为了求得 $x[n]$,我们首先注意到 z 变换运算是线性的,这样单个项的反变换就能找到,然后加在一起就构成 $x[n]$.

$B_r z^{-r}$ 这些项相应于受到移位和幅度加权的冲激序列,即 $B_r \delta[n-r]$ 这些项. 各分式项相应于指数序列. 为了决定这样一项

$$\frac{A_k}{1-d_k z^{-1}}$$

是对应于 $(d_k)^n u[n]$,还是 $-(d_k)^n u[-n-1]$,就必须利用在 4.2 节讨论过的收敛域的性质. 根据那里的讨论就应该有:如果 $X(z)$ 仅有单阶极点,而 ROC 是 $r_R < |z| < r_L$ 这种形式,那么一个给定的极点 d_k ,若 $|d_k| < r_R$,就对应于一个右边指数序列 $(d_k)^n u[n]$;若 $|d_k| > r_L$ 就对应于一个左边指数序列. 因此,收敛域能用来分类极点. 多重极点也以相同方法划分为引起左边序列的和右边序列的极点. 从部分分式展开利用收敛域来求 z 反变换可用下例给予说明.

例 4.7

假设某序列 $x[n]$ 有如下 z 变换

$$X(z) = \frac{1+2z^{-1}+z^{-2}}{1-\frac{3}{2}z^{-1}+\frac{1}{2}z^{-2}} = \frac{1+2z^{-1}+z^{-2}}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)(1-z^{-1})}. \quad (4.45)$$

收敛域为 $|z| > 1$. $X(z)$ 的零极点如图 4.11 所示. 由收敛域很清楚 $x[n]$ 是一个右边序列. 因为 $M=N=2$ 和极点全部是一阶的,因此 $X(z)$ 能表示为

$$X(z) = B_0 + \frac{A_1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{A_2}{1-z^{-1}},$$

常数 B_0 能用长除法求得如下:

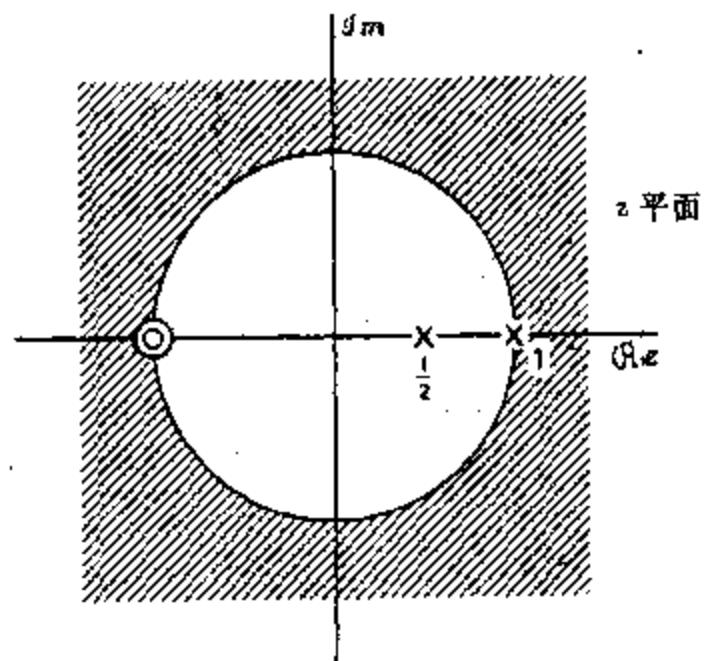


图 4.11 例 4.7 z 变换的零极点图.

$$\begin{array}{c} \frac{1}{2}z^{-2} - \frac{3}{2}z^{-1} + 1 \\ \hline z^{-2} + 2z^{-1} + 1 \\ \hline z^{-2} - 3z^{-1} + 2 \\ \hline 5z^{-1} - 1 \end{array}$$

因为经过一步长除后余因式中变量 z^{-1} 的阶次为 1, 所以就不必要再继续除下去. 因此, $X(z)$ 可写成

$$X(z) = 2 + \frac{-1+5z^{-1}}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})(1-z^{-1})}.$$

现在系数 A_1 和 A_2 可以用式(4.41)求出

$$\begin{aligned} A_1 &= \left. \frac{1+2z^{-1}+z^{-2}}{1-z^{-1}} \right|_{z^{-1}=2} = \frac{1+4+4}{1-2} = -9, \\ A_2 &= \left. \frac{1+2z^{-1}+z^{-2}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} \right|_{z^{-1}=1} = \frac{1+2+1}{\frac{1}{2}} = 8. \end{aligned}$$

因此 $X(z)$ 为

$$X(z) = 2 - \frac{9}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{8}{1-z^{-1}}. \quad (4.46)$$

根据表 4.1 可得

$$\begin{aligned} 2 &\xleftrightarrow{z} 2\delta[n], \\ \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} &\xleftrightarrow{z} \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n], \\ \frac{1}{1-z^{-1}} &\xleftrightarrow{z} u[n]. \end{aligned}$$

再根据 z 变换的线性特性, 就有

$$x[n] = 2\delta[n] - 9\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] + 8u[n].$$

例 4.8

在这个例子中要考虑由式(4.45)给出的 $X(z)$ 所对应的全部可能序列. 根据图 4.11 的零极点图和收敛域性质, $X(z)$ 有三种不同的收敛域: (1) $|z|>1$, 如例 4.7; (2) $|z|<1/2$; (3) $\frac{1}{2}<|z|<1$. 情况 1 已经证明是一个右边序列; 情况 2 对应于一个左边序列; 情况 3 则对应于一个双边序列. 因为 $X(z)$ 的部分分式展开仅决定于 $X(z)$ 的代数式, 所以对所有三种情况都是一样的. 凭观察就可以得出, 下面三个序列都有如式(4.45)和式(4.46)给出的 z 变换, 但具有不同的收敛域:

$$\text{情况 1: } x[n] = 2\delta[n] - 9\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] + 8u[n]$$

$$\text{情况 2: } x[n] = 2\delta[n] + 9\left(\frac{1}{2}\right)^n u[-n-1] - 8u[-n-1]$$

$$\text{情况 3: } x[n] = 2\delta[n] - 9\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] - 8u[-n-1]$$

4.4 节将讨论并说明 z 变换的几个性质, 将这些性质再与部分分式展开结合起来就为从一个给定的有理代数表达式及其 ROC 求 z 反变换提供了一种方法. 这种方法甚至当 $X(z)$ 不完全是式(4.39)那样也能应用.

4.3.3 幂级数展开法

z 变换的定义式是一个幂级数, 序列 $x[n]$ 值是 z^{-n} 的系数. 因此, 如果 z 变换是由如下的幂级数形式给出时

$$\begin{aligned} X(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n} \\ &= \cdots + x[-2]z^2 + x[-1]z + x[0] + x[1]z^{-1} + x[2]z^{-2} + \cdots, \end{aligned} \quad (4.47)$$

就能用求适当 z^{-1} 的幂的系数的办法确定该序列的任何特定值. 已经用这一办法求过当 $M \geq N$ 时部分分式展开中多项式部分的反变换. 这种办法对有限长序列也是很有用的, 这时 $X(z)$ 可能一点也不比 z^{-1} 多项式形式来得简单.

例 4.9

假定 $X(z)$ 变换如下

$$X(z) = z^2 \left(1 - \frac{1}{2}z^{-1} \right) (1+z^{-1})(1-z^{-1}). \quad (4.48)$$

虽然 $X(z)$ 明显地是一个有理函数, 但是它唯一的极点是在 $z=0$, 所以按照 4.3.2 节的部分分式展开就不合适了. 然而, 将式(4.48)的各因式乘开, $X(z)$ 就能表示为

$$X(z) = z^2 - \frac{1}{2}z^{-1} - 1 + \frac{1}{2}z^{-2}.$$

凭观察, $x[n]$ 就是

$$x[n] = \begin{cases} 1, & n = -2, \\ -\frac{1}{2}, & n = -1, \\ -1, & n = 0, \\ \frac{1}{2}, & n = 1, \\ 0, & \text{其它.} \end{cases}$$

这就等效为

$$x[n] = \delta[n+2] - \frac{1}{2}\delta[n+1] - \delta[n] + \frac{1}{2}\delta[n-1].$$

在求一个序列的 z 变换时, 一般总要寻求式(4.47)幂级数的和以得到一个较简单的数学表达式, 譬如一个有理函数. 如果希望利用幂级数来求相应的以闭式表示给出的 $X(z)$ 的序列, 就必须把 $X(z)$ 展开回到幂级数表示上来. 对于超越函数, 如对数、正弦、双曲正弦等等, 很多幂级数展开已经列成表格可查(例如, 见 Jolley, 1961). 在某些情况下, 这样的幂级数能有一个有用的作为 z 变换的解释, 这就是如下例 4.10 所说明的. 对于有理 z 变换, 幂级数展开可以用长除法得到, 如下面例 4.11 和例 4.12 所说明的.

例 4.10

考虑 z 变换

$$X(z) = \log(1+az^{-1}), \quad |z| > |a|. \quad (4.49)$$

对 $\log(1+x)$ 用幂级数展开, 在 $|x| < 1$ 时可得

$$X(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} a^n z^{-n}}{n}.$$

因此, $x[n]$ 就是

$$x[n] = \begin{cases} (-1)^{n+1} \frac{a^n}{n}, & n \geq 1, \\ 0, & n \leq 0. \end{cases} \quad (4.50)$$

例 4.11

考虑 z 变换

$$X(z) = \frac{1}{1-az^{-1}}, \quad |z| > |a|. \quad (4.51)$$

因为收敛域是在一个圆的外面, 序列就是一个右边序列. 另外, 因为 $X(z)$ 随 $z \rightarrow \infty$ 而趋于一个有限的常数, 所以是一个因果序列. 因此, 相除以后应得到一个以 z^{-1} 为幂的级数. 长除后可得

$$\begin{array}{r} 1+az^{-1}+a^2z^{-2}+\cdots \\ \hline 1-az^{-1} \left[\begin{array}{l} 1 \\ -az^{-1} \\ \hline az^{-1} \\ az^{-1}-a^2z^{-2} \\ \hline a^2z^{-2}\cdots \end{array} \right] \end{array}$$

或者

$$\frac{1}{1-az^{-1}} = 1 + az^{-1} + a^2z^{-2} + \cdots,$$

所以 $x[n] = a^n u[n]$.

例 4.12

作为另一个例子, 还考虑式(4.51), 但具有不同的收敛域:

$$X(z) = \frac{1}{1-az^{-1}}, \quad |z| < |a|. \quad (4.52)$$

由于收敛域的关系, 序列应是一个左边序列. 因为 $X(z)$ 在 $z=0$ 是有限的, 所以序列在 $n > 0$ 应为零. 由此, 相除应得到以 z 为幂的级数.

$$\begin{array}{r} -a^{-1}z-a^{-2}z^{-2}-\cdots \\ \hline -a+z \left[\begin{array}{l} z \\ z-a^{-1}z^2 \\ \hline a^{-1}z^2 \end{array} \right] \end{array}$$

因此, $x[n] = -a^n u[-n-1]$.

4.4 z 变换的性质

在研究离散时间信号与系统中, z 变换的许多性质是特别有用的. 例如, 这些性质往往与 4.3 节讨论的 z 反变换技术联系在一起, 可以用来求得更为复杂表示式的 z 反变换. 在第五章中将看到, 这些性质也是利用变换变量 z 把线性常系数差分方程变换为代数方程的基础, 其解然后又能利用 z 反变换来得到. 这一节讨论几个最常用的性质. 其余的定理和性质能在各种参考书中找到(例如, 见 Ragazzini and Franklin, 1958 及 Jury, 1964). 以下讨论中, 将 $X(z)$ 记为 $x[n]$ 的 z 变换, $X(z)$ 的 ROC 用 R_x 指示, 即

$$x[n] \xrightarrow{z} X(z), \quad \text{ROC} = R_x.$$

正如我们已经看到的, R_x 代表一个满足 $r_R < |z| < r_L$ 的 z 值的集合. 对于涉及两个序列和有关 z 变换的性质, 这些变换对将记作

$$\begin{aligned} x_1[n] &\xrightarrow{z} X_1(z), \quad \text{ROC} = R_{x_1}, \\ x_2[n] &\xrightarrow{z} X_2(z), \quad \text{ROC} = R_{x_2}. \end{aligned}$$

4.4.1 线性

线性性质是说

$$ax_1[n] + bx_2[n] \xrightarrow{z} aX_1(z) + bX_2(z), \quad \text{ROC} \text{ 包含 } R_{x_1} \cap R_{x_2},$$

这由 z 变换的定义式(4.2)直接可得. 正如所指出的, 收敛域至少是两个单收敛域的交. 对于有理 z 变换的序列, 若 $aX_1(z) + bX_2(z)$ 的极点由全部 $X_1(z)$ 和 $X_2(z)$ 的极点所组成, 也就是说, 若没有任何零极点相消的情况, 那么收敛域一定完全等于两个单收敛域的重叠部分. 如果线性组合使得引入的某些零点抵消了极点, 那么收敛域就可能增大. 发生这一情况的简单例子就是当 $x_1[n]$ 和 $x_2[n]$ 都是无限长, 而线性组合是有限长的情况下. 在这种情况下, 线性组合后的收敛域就是整个 z 平面, 可能的例外是 $z=0$ 或 $z=\infty$. 例 4.6 就属于这种情况, 其中 $x[n]$ 可以表示成

$$x[n] = a^n u[n] - a^n u[n-N].$$

$a^n u[n]$ 和 $a^n u[n-N]$ 都是无限长的右边序列, 它们的 z 变换都有一个极点在 $z=a$. 因此, 它们各自的收敛域都是 $|z| > |a|$. 然而, 如例 4.6 所示, 在 $z=a$ 的极点与在 $z=a$ 的零点相消, 因此 ROC 除 $z=0$ 外, 就引伸至整个 z 平面.

在前面讨论利用部分分式展开求 z 反变换中已经用过这一性质. 当时, 将 $X(z)$ 展开成一些简单项之和, 利用线性 z 反变换就等于这些项中每一项 z 反变换的和.

4.4.2 时移

$$x[n-n_0] \xrightarrow{z} z^{-n_0} X(z), \quad \text{ROC} = R_x \text{ (除了可能加上或除掉 } z=0 \text{ 或 } z=\infty \text{ 之外)}$$

n_0 是一个整数. 如果是正的, 原序列 $x[n]$ 就被右移; 若 n_0 为负, $x[n]$ 就向左移. 和在线性性质的情况一样, ROC 可能由于 z^{-n_0} 因子改变在 $z=0$ 或 $z=\infty$ 处极点的数目而变化.

这个性质可以直接从 z 变换表示式(4.2)导出. 若 $y[n] = x[n-n_0]$, 相应 z 变换就是

$$Y(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n-n_0]z^{-n}.$$

以变量 $m=n-n_0$ 置换,

$$\begin{aligned} Y(z) &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]z^{-(m+n_0)} \\ &= z^{-n_0} \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]z^{-m} \end{aligned}$$

或者

$$Y(z) = z^{-n_0}X(z).$$

时移性质常常与其它性质和方法结合在一起, 在求 z 反变换中是很有用的. 现用一个例子来说明.

例 4.13

考虑 z 变换

$$X(z) = \frac{1}{z - \frac{1}{4}}, \quad |z| > \frac{1}{4}.$$

从 ROC 就能判定该变换相应于一个右边序列. 首先将 $X(z)$ 重新写成

$$X(z) = \frac{z^{-1}}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}}, \quad |z| > \frac{1}{4}. \quad (4.53)$$

这个 z 变换具有式(4.39)的形式, 其中 $M=N=1$, 将它展开成式(4.42)的形式

$$X(z) = -4 + \frac{4}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}}. \quad (4.54)$$

由式(4.54), $x[n]$ 就为

$$x[n] = -4\delta[n] + 4(\frac{1}{4})^n u[n]. \quad (4.55)$$

应用时移性质可以更为直接地得到 $x[n]$. 首先, $X(z)$ 能写成

$$X(z) = z^{-1} \left[\frac{1}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}} \right], \quad |z| > \frac{1}{4}. \quad (4.56)$$

根据时移性质, 式(4.56)中因子 z^{-1} 就是序列 $\left(\frac{1}{4}\right)^n u[n]$ 向右移一个样本, 即

$$x[n] = \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} u[n-1] \quad (4.57)$$

虽然式(4.55)和式(4.57)在表面上是不相同的序列, 很容易证明, 对全部 n 值它们都是一样的.

4.4.3 用指教序列相乘

$$z_0^n x[n] \xrightarrow{z} X(z/z_0), \quad \text{ROC} = |z_0| R_z$$

符号 $\text{ROC} = |z_0| R_z$ 表示 ROC 是 R_z , 但用 $|z_0|$ 改变了尺度; 也就是说, 如果 R_z 是 $r_R < |z| < r_L$ 的 z 值集合, 那么 $|z_0|R_z$ 就是 $|z_0|r_R < |z| < |z_0|r_L$ 的 z 值集合.

这个性质是很容易证明的, 只要直接将 $z_0 x[n]$ 代入式(4.2)即可. 按照这一性质, 全部零极点的位置的尺度均改变了 z_0 , 这是因为如果 $X(z)$ 有一个极点在 $z=z_1$ 处, 那么 $X(z_0^{-1}z)$ 一定有一个极点在 $z=z_0 z_1$ 处. 若 z_0 是一个正实数, 这就可以解释为 z 平面的一个压缩或扩展; 也即零极点位置在 z 平面内沿径向变化. 若 z_0 是幅度为 1 的复数, 即 $z_0 = e^{j\omega_0}$, 那么就相当于在 z 平面内旋转一个 ω_0 的角度; 即零极点位置沿着以原点为中心的圆变化. 这就能解释为与在时域中用复指数序列 $e^{j\omega_0 n}$ 调制有关的频率移位或频率转移. 这就是说, 如果傅里叶变换存在, 这个性质就有如下形式

$$e^{j\omega_0 n} x[n] \xleftrightarrow{\mathcal{Z}} X(e^{j(\omega - \omega_0)})$$

例 4.14

假设已知

$$u[n] \xleftrightarrow{\mathcal{Z}} \frac{1}{1-z^{-1}}, \quad |z| > 1, \quad (4.58)$$

利用式(4.58)和指数相乘性质, 欲求下面序列的 z 变换

$$x[n] = r^n \cos(\omega_0 n) u[n] \quad (4.59)$$

首先将 $x[n]$ 表示成

$$x[n] = \frac{1}{2} (re^{j\omega_0})^n u[n] + \frac{1}{2} (re^{-j\omega_0})^n u[n].$$

然后利用式(4.58)和指数相乘性质, 可以看出

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} (re^{j\omega_0})^n u[n] &\xleftrightarrow{\mathcal{Z}} \frac{\frac{1}{2}}{1-re^{j\omega_0}z^{-1}}, \quad |z| > r, \\ \frac{1}{2} (re^{-j\omega_0})^n u[n] &\xleftrightarrow{\mathcal{Z}} \frac{\frac{1}{2}}{1-re^{-j\omega_0}z^{-1}}, \quad |z| > r. \end{aligned}$$

由线性性质就有

$$\begin{aligned} X(z) &= \frac{\frac{1}{2}}{1-re^{j\omega_0}z^{-1}} + \frac{\frac{1}{2}}{1-re^{-j\omega_0}z^{-1}}, \quad |z| > r, \\ &= \frac{(1-r\cos\omega_0 z^{-1})}{1-2r\cos\omega_0 z^{-1}+r^2 z^{-2}}, \quad |z| > r. \end{aligned} \quad (4.60)$$

4.4.4 $X(z)$ 的微分

$$nx[n] \xleftrightarrow{\mathcal{Z}} -z \frac{dX(z)}{dz}, \quad \text{ROC} = R_z \text{ (除了可能加上或除掉 } z=0 \text{ 或 } z=\infty \text{ 之外)}$$

这个性质用微分式(4.2)的 z 变换表示式就可以证明; 即, 因为

$$\begin{aligned} X(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] z^{-n}, \\ -z \frac{dX(z)}{dz} &= -z \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-n)x[n] z^{-n-1} \end{aligned}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} nx[n]z^{-n} = \mathcal{Z}\{nx[n]\}$$

现用两个例子来说明微分性质的应用.

例 4.15

在这个例子中, 用微分性质和时移性质一起求例 4.10 的 z 反变换. 由于

$$X(z) = \log(1+az^{-1}), \quad |z| > |a|,$$

首先对 z 微分得到一个有理表示式:

$$\frac{dX(z)}{dz} = \frac{-az^{-2}}{1+az^{-1}}.$$

根据微分性质

$$nx[n] \xleftrightarrow{z} -z \frac{dX(z)}{dz} = \frac{az^{-1}}{1+az^{-1}}, \quad |z| > |a|. \quad (4.61)$$

式(4.61)的反变换可以联合利用例 4.1 的变换对、微分性质、线性性质和时移性质来得到. 具体就是将 $nx[n]$ 表示成

$$nx[n] = a(-a)^{n-1}u[n-1].$$

因此

$$x[n] = (-1)^{n+1} \frac{a^n}{n} u[n-1] \xleftrightarrow{z} \log(1+az^{-1}), \quad |z| > |a|.$$

例 4.16

作为微分性质应用的另一个例子, 我们来求下面序列的 z 变换

$$x[n] = na^n u[n] = n(a^n u[n]).$$

由例 4.1 的 z 变换对和微分性质, 就可得:

$$\begin{aligned} X(z) &= -z \frac{d}{dz} \left(\frac{1}{1-az^{-1}} \right), \quad |z| > |a| \\ &= \frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}, \quad |z| > |a|. \end{aligned}$$

因此

$$na^n u[n] \xleftrightarrow{z} \frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}, \quad |z| > |a|.$$

4.4.5 复数序列的共轭

$$x^*[n] \xleftrightarrow{z} X^*(z^*), \quad \text{ROC} = R_x$$

这个性质由 z 变换的定义直接可得. 详细证明留作练习(习题 4.29).

4.4.6 时间倒置

$$x[-n] \xleftrightarrow{z} X(1/z), \quad \text{ROC} = \frac{1}{R_x}$$

符号 $\text{ROC} = 1/R_z$ 意指 R_z 的颠倒; 即如果 R_z 是在 $r_R < |z| < r_L$ 内 z 值的集合, 那么 ROC 就是在 $1/r_L < |z| < 1/r_R$ 内 z 值的集合. 因此, 如果 z_0 是在 $x[n]$ 的 z 变换的 ROC 内、那么 $1/z_0$ 就是在 $x[-n]$ 的 z 变换的 ROC 内.

与性质 4.4.5 一样, 这个性质也容易由 z 变换的定义得到, 详细证明也留作练习(习题 4.29).

例 4.17

作为应用时间倒置性质的一个简单例子是考虑序列

$$x[n] = a^{-n} u[-n],$$

它就是 $a^n u[n]$ 的时间倒置. 由时间倒置性质直接可得

$$X(z) = \frac{1}{1 - az} = \frac{-a^{-1}z^{-1}}{1 - a^{-1}z^{-1}}, \quad |z| < |a^{-1}|.$$

4.4.7 序列卷积

$$x_1[n] * x_2[n] \xrightarrow{z} X_1(z)X_2(z), \quad \text{ROC 包含 } R_{z_1} \cap R_{z_2}$$

为了正规地推导出这个性质, 现在考虑

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1[k]x_2[n-k]$$

并做 z 变换

$$\begin{aligned} Y(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} y[n]z^{-n} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1[k]x_2[n-k] \right) z^{-n}. \end{aligned}$$

如果交换求和次序

$$Y(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1[k] \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_2[n-k]z^{-n}.$$

在第二个和式中, 将变量从 n 变为 $m = n - k$, 可得

$$Y(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1[k] \left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} x_2[m]z^{-m} \right) z^{-k}.$$

因此, 对于均在 $X_1(z)$ 和 $X_2(z)$ 收敛域内的 z , 就能写成

$$Y(z) = X_1(z)X_2(z),$$

这里收敛域包括了 $X_1(z)$ 和 $X_2(z)$ 收敛域的交. 如果 z 变换之一的收敛域有一个界定的极点是被另一个 z 变换的零点所抵消, 那么 $Y(z)$ 的收敛域就可能增大. 正如在第五章将研究和表明的, 卷积性质在分析 LTI 系统中将起到特别重要的作用. 作为这个性质的结果, 这就是 LTI 系统输出的 z 变换是输入的 z 变换和系统冲激响应 z 变换的乘积.

例 4.18

令 $x_1[n] = a^n u[n]$ 和 $x_2[n] = u[n]$. 相应的 z 变换就是

$$X_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n} = \frac{1}{1 - az^{-1}}, \quad |z| > |a|$$

和

$$X_2(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} = \frac{1}{1-z^{-1}}, \quad |z| > 1.$$

如果 $|a| < 1$, $x_1[n]$ 与 $x_2[n]$ 卷积的 z 变换就是

$$Y(z) = \frac{1}{(1-az^{-1})(1-z^{-1})} = \frac{z^2}{(z-a)(z-1)}, \quad |z| > 1. \quad (4.62)$$

$Y(z)$ 的零极点图如图 4.12 所画, 收敛域就是两者的重叠部分. 序列 $y[n]$ 可以由求 z 反变换得到. 将式(4.62)展开成部分分式

$$Y(z) = \frac{1}{1-a} \left(\frac{1}{1-z^{-1}} - \frac{a}{1-az^{-1}} \right), \quad |z| > 1.$$

因此

$$y[n] = \frac{1}{1-a} (u[n] - a^{n+1} u[n]).$$

4.4.8 初值定理

如果 $n < 0$, $x[n]$ 是零, 即 $x[n]$ 是右边序列, 那么就有

$$x[0] = \lim_{z \rightarrow \infty} X(z).$$

考虑式(4.2)每一项的极限, 就可以证明该定理 (见习题 4.32).

图 4.12 序列 $u[n]$ 和 $a^n u[n]$ 卷积的 z 变换的零极点图.

4.4.9 若干 z 变换性质列表

我们已经提到并讨论了 z 变换的几个定理和性质, 其中许多在运算 z 变换中都是很有用的. 为便于参考, 表 4.2 归纳了这些性质以及另外几个性质. 表 4.2 中也包括了复卷积性质和帕斯瓦尔定理, 它们将在 4.6 节和 4.7 节中讨论. 这些性质都是第二章讨论过的相应傅里叶变换性质的推广.

表 4.2 z 变换的一些性质

性质	对应节号	序列	变换	ROC
		$x[n]$	$X(z)$	R_x
		$x_1[n]$	$X_1(z)$	R_{x_1}
		$x_2[n]$	$X_2(z)$	R_{x_2}
1	4.4.1	$ax_1[n] + bx_2[n]$	$aX_1(z) + bX_2(z)$	包含 $R_{x_1} \cap R_{x_2}$
2	4.4.2	$x[n-n_0]$	$z^{-n_0} X(z)$	R_x 除了可能加上或除掉原点或 ∞ 点之外
3	4.4.3	$z_0 x[n]$	$X(z/z_0)$	$ z_0 R_x$
4	4.4.4	$nx[n]$	$-z \frac{dX(z)}{dz}$	R_x 除了可能加上或除掉原点或 ∞ 点之外
5	4.4.5	$x^*[n]$	$X^*(z^*)$	R_x

续表 4.2

性质	对应节号	序列	变换	ROC
6		$\Re\{x[n]\}$	$\frac{1}{2}[X(z) + X^*(z^*)]$	包含 R_x
7		$\Im\{x[n]\}$	$\frac{1}{2j}[X(z) - X^*(z^*)]$	包含 R_x
8	4.4.6	$x[n-n_0]$	$X(1/z)$	$1/R_x$
9	4.4.7	$x_1[n] * x_2[n]$	$X_1(z)X_2(z)$	包含 $R_{x_1} \cap R_{x_2}$
10	4.4.8	$x[n]=0, n < 0, \lim_{n \rightarrow \infty} x[n] = x[0]$	初值定理:	
11	4.6	$x_1[n]x_2[n]$	$\frac{1}{2\pi j} \oint_C X_1(v)X_2(z/v)v^{-1}dv$	包含 $R_{x_1}R_{x_2}$
12	4.7	$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1[n]x_2^*[n] = \frac{1}{2\pi j} \oint_C X_1(v)X_2^*(1/v^*)v^{-1}dv$	帕斯瓦尔定理:	

4.5 利用围线积分求 z 反变换

在 4.3 节讨论了与给定 z 变换表示式有关的几个求序列的方法. 这一节对 z 反变换要建立一个正规的表示式. 在 4.6 节和 4.7 节将用这一表示式得到另外两个 z 变换性质, 即 z 变换的复卷积定理和帕斯瓦尔定理.

利用柯西积分定理(见 Churchill and Brown, 1984)可以导出一个正规的 z 反变换关系. 这个定理就是

$$\frac{1}{2\pi j} \oint_C z^{-k} dz = \begin{cases} 1, & k=1, \\ 0, & k \neq 1, \end{cases} \quad (4.63)$$

其中 C 是围绕原点的一条逆时针方向闭合围线.

z 变换关系是

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n}. \quad (4.64)$$

在式(4.64)两边各乘以 z^{k-1} , 然后用围线积分求积分, 这条积分路径环绕原点并完全位于 $X(z)$ 的收敛域内, 可得

$$\frac{1}{2\pi j} \oint_C X(z)z^{k-1} dz = \frac{1}{2\pi j} \oint_C \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n+k-1} dz. \quad (4.65)$$

将式(4.65)右边交换积分与求和次序(只要级数收敛), 得到

$$\frac{1}{2\pi j} \oint_C X(z)z^{k-1} dz = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \frac{1}{2\pi j} \oint_C z^{-n+k-1} dz, \quad (4.66)$$

由式(4.63)就变成

$$\frac{1}{2\pi j} \oint_C X(z)z^{k-1} dz = x[k].$$

因此, 用围线积分给出的 z 反变换关系就是

$$x[n] = \frac{1}{2\pi j} \oint_C X(z) z^{n-1} dz, \quad (4.67)$$

这里 C 是在 $X(z)$ 收敛域内且环绕 z 平面原点的一条逆时针方向的闭合围线。应该强调的是，在导出式(4.67)时并未做任何有关式(4.65)的 k 或式(4.67)中的 n 是正还是负的假设，因此式(4.67)对 n 为正和负都是成立的。

式(4.67)就是正规的 z 反变换表示式。如果收敛域包括单位圆，并且积分路径就取在单位圆上，那么在这条路径上 $X(z)$ 就变成傅里叶变换，式(4.67)就变成反傅里叶变换表示式(2.112)。具体一点就是以 $z = e^{j\omega}$ 代入式(4.67)，可得

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{jn\omega} d\omega, \quad (4.68)$$

这里已经用了沿单位圆逆时针方向以 z 求积分就等效于以 ω 从 $-\pi$ 到 $+\pi$ 求积分，而 $dz = je^{j\omega} d\omega$ 。

式(4.67)这样的围线积分往往可以很方便地利用柯西留数定理来求值，当将该定理用于式(4.67)时，就给出

$$\begin{aligned} x[n] &= \frac{1}{2\pi j} \oint_C X(z) z^{n-1} dz \\ &= \sum [X(z) z^{n-1} \text{ 在围线 } C \text{ 内极点处的留数}], \end{aligned} \quad (4.69)$$

式(4.69)对任何 z 变换 $X(z)$ 都是适用的，但是对非有理函数求留数往往是困难的。然而，如果 $X(z) z^{n-1}$ 是 z 的一个有理函数，它可以表示成

$$X(z) z^{n-1} = \frac{\psi(z)}{(z - d_0)^s}, \quad (4.70)$$

这里 $X(z) z^{n-1}$ 在 $z = d_0$ 有 s 阶极点， $\psi(z)$ 在 $z = d_0$ 没有极点。 $X(z) z^{n-1}$ 在 $z = d_0$ 的留数由下式给出

$$\text{Res}[X(z) z^{n-1} \text{ 在 } z = d_0] = \frac{1}{(s-1)!} \left[\frac{d^{s-1} \psi(z)}{dz^{s-1}} \right]_{z=d_0}. \quad (4.71)$$

尤其是若在 $z = d_0$ 仅有一阶极点，即 $s = 1$ ，那么

$$\text{Res}[X(z) z^{n-1} \text{ 在 } z = d_0] = \psi(d_0). \quad (4.72)$$

将式(4.47)与式(4.44)作一比较就很清楚，求 $X(z) z^{n-1}$ 的留数非常类似于求 $X(z)$ 部分分式展开中的系数。一般来说，对于有理函数用 4.3.2 节所建立的方法将会更容易些，然而我们将用例 4.19 这样简单的有理函数来说明(4.69)式的应用。我们也会发现式(4.67)的一般表示式在后续章中是有用的。

例 4.19

作为利用围线积分求反变换关系的一个例子，考虑下面的反变换

$$X(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}}, \quad |z| > |a|.$$

利用式(4.67)可得

$$x[n] = \frac{1}{2\pi j} \oint_C \frac{z^{n-1}}{1 - az^{-1}} dz = \frac{1}{2\pi j} \oint_C \frac{z^n dz}{z - a},$$

这里积分路径 C 就是半径大于 $|a|$ 的一个圆。对于 $n \geq 0$ ，积分路径仅包含一个极点在 $z = a$ 。结果，对 $n \geq 0$ ， $x[n]$ 就为

$$x[n] = a^n, \quad n \geq 0.$$

对于 $n < 0$, 有一个多重极点在 $z=0$, 其阶决定于 n . 对于 $n=-1$, 该极点就是一阶, 留数为 $-a^{-1}$. 在 $z=a$ 极点的留数为 a^{-1} . 结果, 留数的和是零, 所以 $x[-1]=0$. 对 $n=-2$,

$$\text{Res} \left[\frac{1}{z^2(z-a)} \text{在 } z=a \right] = a^{-2}$$

和

$$\text{Res} \left[\frac{1}{z^2(z-a)} \text{在 } z=0 \right] = -a^{-2},$$

于是 $x[-2]=0$. 继续这一过程, 对这个例子就可以证明 $x[n]=0, n < 0$. 随 n 变得愈负, 在这个 $z=0$ 的多重极点求留数就变得愈来愈繁琐.

虽然式(4.67)对全部 n 都成立, 但是在 $n < 0$ 时应用它往往由于在 $z=0$ 的多重极点的关系而变得很麻烦.

利用变量置换, 将式(4.67)做些变换, 使得留数定理用于 $n < 0$ 时更容易一些, 就可以避免这一点. 考虑变量置换 $z=p^{-1}$, 这样式(4.67)变成

$$x[n] = \frac{-1}{2\pi j} \oint_C X(1/p) p^{-n+1} p^{-2} dp. \quad (4.73)$$

可以看出, 因为在式(4.67)的这条路径是逆时针方向的, 所以式(4.73)中的路径就是顺时针方向的. 由于乘以 -1 就颠倒了路径的方向, 所以上述变量置换就导致了下面的表示式

$$\begin{aligned} x[n] &= \frac{1}{2\pi j} \oint_{C'} X(1/p) p^{-n-1} dp \\ &= \sum [X(1/p) p^{-n-1} \text{在围线 } C' \text{ 内极点处的留数}]. \end{aligned} \quad (4.74)$$

如果在式(4.67)中路径 C 是在 z 平面上半径为 r 的圆, 那么式(4.74)中的 C' 就是 z 平面上半径为 $1/r$ 的圆. 原先位于路径 C 外面的 $X(z)$ 的极点, 现在就相应于位于路径 C' 内的 $X(1/p)$ 的极点, 或者反之亦然. 附加的一些极点或零点可能出现或不出现在原点或无穷远点, 但这对证明来说是无关紧要的. 对于现在这个特例, $x[n]$ 就可表示为

$$x[n] = \frac{1}{2\pi j} \oint_{C'} \frac{p^{-n-1}}{1-ap} dp. \quad (4.75)$$

积分路径 C' 现在是半径小于 $1/a$ 的圆. 对于 $n < 0$, 没有奇异点在积分路径里面, 所以 $x[n]=0, n < 0$. 如同式(4.69)那样求 $n < 0$ 时的 $x[n]$ 值是麻烦的(虽然肯定是正确的), 式(4.74)求 $n \geq 0$ 时的 $x[n]$ 值由于出现在原点的多重极点也同样是麻烦的(但仍然是正确的).

4.6 复卷积定理

在 2.9.7 节曾经讨论过傅里叶变换的周期卷积性质. 这就是序列乘积的傅里叶变换是它们傅里叶变换的周期卷积. 这个性质的推广就是复卷积定理, 它将序列乘积的 z 变换

与每个序列的 z 变换联系起来.

为了导出复卷积定理, 令

$$w[n] = x_1[n]x_2[n]$$

并做 z 交换

$$W(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1[n]x_2[n]z^{-n}.$$

用 $X_2(z)$ 记作 $x_2[n]$ 的 z 变换,

$$x_2[n] = \frac{1}{2\pi j} \oint_{C_2} X_2(v)v^{n-1}dv,$$

这里 C_2 是 $X_2(v)$ 收敛域内一条逆时针方向的围线. 那么

$$\begin{aligned} W(z) &= \frac{1}{2\pi j} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1[n] \oint_{C_2} X_2(v)(z/v)^{-n}v^{-1}dv \\ &= \frac{1}{2\pi j} \oint_{C_2} \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1[n](z/v)^{-n} \right] X_2(v)v^{-1}dv \end{aligned}$$

或者

$$W(z) = \frac{1}{2\pi j} \oint_{C_2} X_1(z/v)X_2(v)v^{-1}dv, \quad (4.76)$$

这里 C_2 是在 $X_1(z/v)$ 和 $X_2(v)$ 收敛域重合部分内的一条闭合围线. 另外, $W(z)$ 也能表示为

$$W(z) = \frac{1}{2\pi j} \oint_{C_1} X_1(v)X_2(z/v)v^{-1}dv, \quad (4.77)$$

这里 C_1 是在 $X_1(v)$ 和 $X_2(z/v)$ 收敛域重合部分内的一条闭合围线. 为了确定与 $W(z)$ 有关的收敛域, 假定 $X_1(z)$ 和 $X_2(z)$ 的收敛域分别是

$$R_{x1} : r_{R1} < |z| < r_{L1},$$

$$R_{x2} : r_{R2} < |z| < r_{L2}.$$

那么在式(4.76)中 C_2 就是这样一条围线, 使得

$$r_{R2} < |v| < r_{L2}$$

和

$$r_{R1} < \left| \frac{z}{v} \right| < r_{L1}.$$

将这两个表示式结合在一起, 就要求 $W(z)$ 的 ROC 是

$$r_{R1}r_{R2} < |z| < r_{L1}r_{L2}.$$

这个 ROC 就记为 $R_{x1}R_{x2}$. 有时收敛域可以比它大, 但总是包含由上面所定义的区域, 然后向内或向外延伸到最邻近的极点, 即 $W(z)$ 的 ROC 包含 $R_{x1}R_{x2}$.

如同所期望的, 当 C_2 或 C_1 是取在单位圆上时, 式(4.76)和式(4.77)就变为傅里叶变换的周期卷积, $W(z)$ 就在单位圆上求值. 为了看出这一点, 令

$$v = e^{j\theta} \text{ 和 } z = e^{j\omega}.$$

式(4.77)就变成

$$W(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X_1(e^{j\theta}) X_2(e^{j(\omega-\theta)}) d\theta, \quad (4.78)$$

这就与 2.9.7 节的周期卷积一致了.

在应用式(4.76)或式(4.77)的复卷积定理时, 主要的难点之一是要确定被积函数哪些极点位于积分路径的里面, 哪些位于外面. 现用一个简单的例子来说明这一过程.

例 4.20

令 $x_1[n] = a^n u[n]$ 和 $x_2[n] = b^n u[n]$. 那么 $X_1(z)$ 和 $X_2(z)$ 就分别是

$$X_1(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}}, \quad |z| > |a|,$$

$$X_2(z) = \frac{1}{1 - bz^{-1}}, \quad |z| > |b|.$$

代入式(4.76)可得

$$W(z) = \frac{1}{2\pi j} \oint_{C_2} \frac{-(z/a)}{(v-z/a)} \frac{1}{v-b} dv.$$

被积函数有两个极点, 其一在 $v=b$, 另一个在 $v=z/a$. 因为这个表示式的积分路径必须在 $X_2(v)$ 的收敛域内, 所以它就必须包含极点 $v=b$. 为了确定它是否包含极点 $v=z/a$, 我们注意到 $X_1(z)$ 的 ROC 是 $|z| > |a|$. 因此 $X_1(z/v)$ 的 ROC 就是 $|z/v| > |a|$. 由此, 如果

$$\left| \frac{z}{v} \right| > |a|,$$

那么

$$\left| \frac{z}{a} \right| > |v|.$$

结果, 这个极点必须总是在积分路径 C_2 的外面. 极点位置与积分路径如图 4.13 所示, 这里假设 a 和 b 都是实数. 利用柯西留数定理求 $W(z)$, 可得

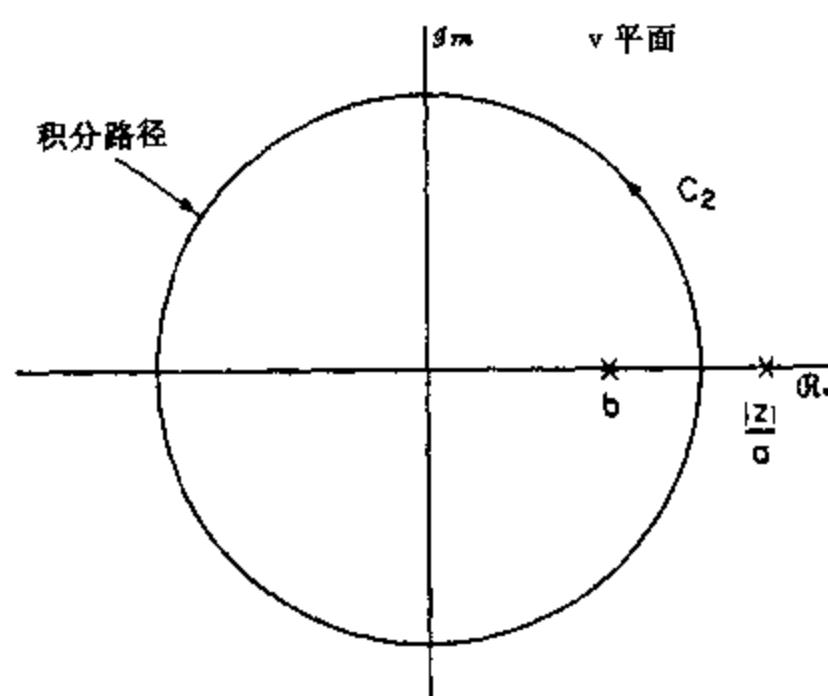


图 4.13 例 4.20 中被积函数的极点和应用复卷积定理中的积分路径.

$$W(z) = \frac{-z/a}{b-z/a} = \frac{1}{1-abz^{-1}}, \quad |z| \geq |ab|.$$

可以看出,这个结果仅仅由位于积分路径里面的极点的留数而得出的.很容易证明,如果我们误认为在 z/a 的极点也位于积分路径的里面,那么求该积分的结果将会全部是零.

4.7 帕斯瓦尔定理

2.9.5节曾经考虑过傅里叶变换的帕斯瓦尔定理.这个定理推广到 z 变换就直接来自复卷积定理.为此考虑两个复序列 $x_1[n]$ 和 $x_2[n]$,帕斯瓦尔定理就是

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1[n]x_2^*[n] = \frac{1}{2\pi j} \oint_C X_1(v)X_2^*(1/v^*)v^{-1}dv, \quad (4.79)$$

这里积分路径必须位于 $X_1(v)$ 和 $X_2^*(1/v^*)$ 收敛域的重合部分内.式(4.79)的关系可以用定义一个序列 $y[n]$ 来导出.

$$y[n] = x_1[n]x_2^*[n] \quad (4.80a)$$

并且注意到

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} y[n] = Y(z)|_{z=1} \quad (4.80b)$$

根据表 4.2 的性质 5 和复卷积定理

$$Y(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1[n]x_2^*[n]z^{-n} = \frac{1}{2\pi j} \oint_C X_1(v)X_2^*(z^*/v^*)v^{-1}dv. \quad (4.81)$$

当对式(4.81)在 $z=1$ 求值时就得到式(4.79).应该注意,式(4.80b)已假设 $Y(z)$ 的 ROC 包括单位圆.

如果 $X_1(z)$ 和 $X_2(z)$ 都收敛于单位圆上,那么就能选 $v=e^{j\omega}$, 式(4.79)则变成

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1[n]x_2^*[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X_1(e^{j\omega})X_2^*(e^{j\omega})d\omega, \quad (4.82)$$

这就是曾在 2.9.5 节讨论过的利用傅里叶变换的帕斯瓦尔定理.

以式(4.82)形式给出的帕斯瓦尔定理往往对求值是困难的.例如,当 $X_1(z)$ 和 $X_2(z)$ 都是有理函数时,式(4.82)的被积函数即使在最简单的情况下也是 $e^{j\omega}$ 的一个复杂函数.然而,式(4.79)能直接利用柯西留数定理求值.

式(4.79)的一种特例是当 $x_1[n]=x_2[n]=x[n]$ 时,这里 $x[n]$ 是一个实序列.这时,式(4.79)变成

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x^2[n] = \frac{1}{2\pi j} \oint_C X(v)X(v^{-1})v^{-1}dv. \quad (4.83)$$

这里 C 是 $X(z)$ 的 ROC 内一条闭合围线.如同上面所提到的,如果左边的和要是有限的话, $X(z)$ 的 ROC 就必须包括单位圆.

式(4.83)是利用 z 变换给出的有关序列 $x[n]$ 能量的表示式.这个式子在第六章将用来求数字滤波器由于舍入噪声而产生的输出噪声功率.下面的例子用计算式(4.83)来说明柯西留数定理的使用.

例 4.21

考虑一个右边实序列 $x[n]$,其 z 变换为

$$X(z) = \frac{1}{(1-az^{-1})(1-bz^{-1})},$$

这里 $|a|$ 和 $|b|$ 都小于1,那么

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x^2[n] &= \frac{1}{2\pi j} \oint_C \frac{dv}{(1-av^{-1})(1-bv^{-1})(1-av)(1-bv)} \\ &= \frac{1}{2\pi j} \oint_C \frac{vdv}{(v-a)(v-b)(1-av)(1-bv)}, \end{aligned} \quad (4.84)$$

这里 C 是取的单位圆.被积函数的极点是在 $v=a, b, a^{-1}$ 和 b^{-1} .其中仅有 $v=a$ 和 $v=b$ 是在积分路径里面,因此由柯西留数定理给出

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x^2[n] &= \frac{a}{(a-b)(1-a^2)(1-ba)} + \frac{b}{(b-a)(1-ab)(1-b^2)} \\ &= \frac{a(1-b^2)-b(1-a^2)}{(a-b)(1-a^2)(1-b^2)(1-ab)}. \end{aligned}$$

值得提及的是能量本来可以利用 $X(z)$ 的部分分式展开求得 $x[n]$,平方该指数的和,然后把所得指数级数相加计算出来.然而,即使对二阶的例子这都是很麻烦的.另一方面,如果 $X(z)$ 有零点,或者有更多极点的话,利用式(4.83)计算能量也只不过比这个两个极点的例子稍稍困难一些.

4.8 单边 z 变换

到目前为止,本章所考虑的都是按式(4.2)所定义的 z 变换,将这种变换称为双边 z 变换.与此对照,单边 z 变换是定义成

$$\mathcal{H}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x[n]z^{-n}. \quad (4.85)$$

单边 z 变换不同于双边 z 变换仅在于它只考虑 $x[n]$ 在 $n \geq 0$ 时的值.这就是说式(4.85)中和的下限是零而不管 $x[n]$ 在 $n < 0$ 的值.

若 $x[n]$ 在 $n < 0$ 就是零,那么单边和双边 z 变换就是一样的了;而如果 $x[n]$ 在 $n < 0$ 不是零,那两者就不同了.无论在哪一种情况下,单边 z 变换收敛域的性质与右边序列双边 z 变换收敛域的性质总是相同的.也即,所有单边 z 变换的ROC总是具有 $|z| > r_k$ 的形式,并且对有理单边 z 变换其ROC的边界一定是由离 z 平面原点最近的极点所界定.

例 4.22

考虑单位冲激序列

$$x[n] = \delta[n].$$

其双边 z 变换是

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta[n]z^{-n} \\ = 1.$$

而单边 z 变换也是

$$\mathcal{H}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x[n]z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \delta[n]z^{-n} \\ = 1.$$

因为在这个情况下, $n < 0, x[n] = 0$, 所以单边与双边 z 变换是相同的.

例 4.23

考虑如下移位单位冲激序列

$$x[n] = \delta[n+1].$$

这时单位样本发生在 $n = -1$, 这样 $x[n] = 0, n \geq 0$, 双边 z 变换是

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta[n+1]z^{-n} = z.$$

当然, 这与例 4.22 和 4.4.2 节的时移性质是一致的. 对比一下单边 z 变换则是

$$\mathcal{H}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \delta[n+1]z^{-n} \\ = 0.$$

单边 z 变换的主要用途是在分析非零初始条件下由线性常系数差分方程描述的系统中. 这样的系统一般是在因果性的假定下递推地予以实现的. 因此, 输出是在某个初始条件下对 $n \geq 0$ 计算出来的. 在将单边 z 变换应用于这种类型的问题时, 线性性质和时移性质都是非常重要的. 单边 z 变换的线性性质与双边 z 变换的线性性质(表 4.2 性质 1)是一样的, 而时移性质则是不同的. 为了建立这个性质, 考虑一个具有单边 z 变换 $\mathcal{H}(z)$ 的序列 $x[n]$, 令

$$y[n] = x[n-1]. \quad (4.86)$$

那么

$$\begin{aligned} \mathcal{Y}(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} x[n-1]z^{-n} \\ &= x[-1] + \sum_{n=1}^{\infty} x[n-1]z^{-n}. \end{aligned}$$

作 $m = n-1$ 的变量置换可以将 $\mathcal{Y}(z)$ 重新写为

$$\mathcal{Y}(z) = x[-1] + \sum_{m=0}^{\infty} x[m]z^{-(m+1)}$$

这样

$$\mathcal{Y}(z) = x[-1] + z^{-1}\mathcal{H}(z). \quad (4.87)$$

类似地, 如同在习题 4.45 中考虑的, 信号

$$y[n] = x[n-2]$$

有单边 z 变换

$$\mathcal{Y}(z) = x[-2] + x[-1]z^{-1} + z^{-2}\mathcal{K}(z), \quad (4.88)$$

更一般地,若

$$y[n] = x[n-m]$$

对 $m > 0$,那么

$$\begin{aligned} \mathcal{Y}(z) &= x[-m] + x[-m+1]z^{-1} + \cdots + x[-1]z^{-m+1} + z^{-m}\mathcal{K}(z) \\ &= \sum_{k=1}^m x[k-1-m]z^{-k+1} + z^{-m}\mathcal{K}(z). \end{aligned} \quad (4.89)$$

利用单边 z 变换在给定初始条件和给定 $n \geq 0$ 输入时求解差分方程的过程最好用一个例子来说明.

例 4.24

考虑一个系统,其输入和输出满足如下线性常系数差分方程

$$y[n] - \frac{1}{2}y[n-1] = x[n]. \quad (4.90)$$

对 $n \geq 0$,输入是

$$x[n] = 1, \quad n \geq 0,$$

初始条件在 $n = -1$ 是

$$y[-1] = 1.$$

对式(4.90)应用单边 z 变换,并利用线性性质和如式(4.89)的时移性质,就有

$$\mathcal{Y}(z) - \frac{1}{2}\{y[-1] + z^{-1}\mathcal{Y}(z)\} = \mathcal{K}(z) = \frac{1}{1-z^{-1}},$$

由此可得

$$\begin{aligned} \mathcal{Y}(z) &= \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} \left\{ \frac{1}{2}y[-1] + \frac{1}{1-z^{-1}} \right\}, \\ \mathcal{Y}(z) &= \frac{1/2}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)(1-z^{-1})}. \end{aligned}$$

将上式第二项进行部分分式展开后就给出

$$\begin{aligned} \mathcal{Y}(z) &= \frac{1/2}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} - \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{2}{1-z^{-1}} \\ &= \frac{2}{1-z^{-1}} - \frac{1/2}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}. \end{aligned} \quad (4.91)$$

因为序列

$$x[n] = a^n, \quad n \geq 0,$$

的单边 z 变换是

$$\mathcal{K}(z) = \frac{1}{1-az^{-1}},$$

所以 $y[n]$ 就是

$$y[n] = 2 - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \right)^n, \quad n \geq 0.$$

4.9 小结

本章定义了序列的 z 变换，并证明了它就是傅里叶变换的推广。本章的讨论是集中在 z 变换的性质，以及求得一个序列 z 变换的各种方法上，或者相反。特别是，当傅里叶变换不存在时， z 变换所定义的幂级数可能收敛。详细阐明了收敛域的形状与序列性质的依赖关系。对收敛域性质的详细了解是成功地运用 z 变换的关键。这一点在确定由给定 z 变换求相对应的序列，即求 z 反变换的各种方法中是特别应验的。大部分有关收敛域的讨论都放在有理函数 z 变换上。对于这一类函数，我们给出了基于 $X(z)$ 部分分式展开的求反变换的方法。也讨论了诸如利用查表的幂级数展开法和长除法等其它方法。

本章一个重要部分是讨论 z 变换的许多性质，这些性质在分析离散时间信号与系统时是很有用的。各种各样的例子都用来说明如何利用这些性质来求 z 变换和 z 反变换。

本章稍后部分说明如何将复变函数理论应用于 z 变换，特别是用柯西留数定理求 z 反变换和由复卷积与帕斯瓦尔定理产生的围线积分等方面。本章以简要地讨论单边 z 变换结束。

习题

4.1 求下列序列的 z 变换，包括收敛域：

- (a) $(\frac{1}{2})^n u[n]$
- (b) $-(\frac{1}{2})^n u[-n-1]$
- (c) $(\frac{1}{2})^n u[-n]$
- (d) $\delta[n]$
- (e) $\delta[n-1]$
- (f) $\delta[n+1]$
- (g) $(\frac{1}{2})^n (u[n] - u[n-10])$

4.2 求序列 z 变换

$$x[n] = \begin{cases} n, & 0 \leq n \leq N-1, \\ N, & N \leq n. \end{cases}$$

4.3 求下列每个序列的 z 变换，包括收敛域，并画出零极点图。全部以闭式表示， α 可以为复数。

- (a) $x_a[n] = \alpha^{|n|}, \quad 0 < |\alpha| < 1$
- (b) $x_b[n] = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq N-1, \\ 0, & N \leq n, \\ 0, & n < 0 \end{cases}$
- (c) $x_c[n] = \begin{cases} n, & 0 \leq n \leq N, \\ 2N-n, & N+1 \leq n \leq 2N, \\ 0, & 2N \leq n, \\ 0, & n < 0 \end{cases}$

[提示：注意 $x_b[n]$ 是一个矩形序列，而 $x_c[n]$ 是一个三角序列。首先用 $x_b[n]$ 表示 $x_c[n]$]。

4.4 (a) 勿需显式解出 $X(z)$, 求下列每个 z 变换的收敛域:

$$(i) x[n] = \left[\left(\frac{1}{2} \right)^n + \left(\frac{3}{4} \right)^n \right] u[n-10]$$

$$(ii) x[n] = \begin{cases} 1, & -10 \leq n \leq 10 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

$$(iii) x[n] = 2^n u[-n]$$

(b) 上述序列中哪些傅里叶变换收敛?

4.5 令 $x[n]$ 是一个因果序列, 即 $x[n] = 0, n < 0$. 另假定 $x[0] \neq 0$

(a) 证明 $X(z)$ 没有极点或零点在 $z = \infty$ 处, 即 $\lim_{z \rightarrow \infty} X(z)$ 非零且有限.

(b) 证明在有限 z 平面极点数等于零点数. (有限 z 平面不包括 $z = \infty$.)

4.6 考虑 z 变换, 其零极点图如图 P4.6 所示.

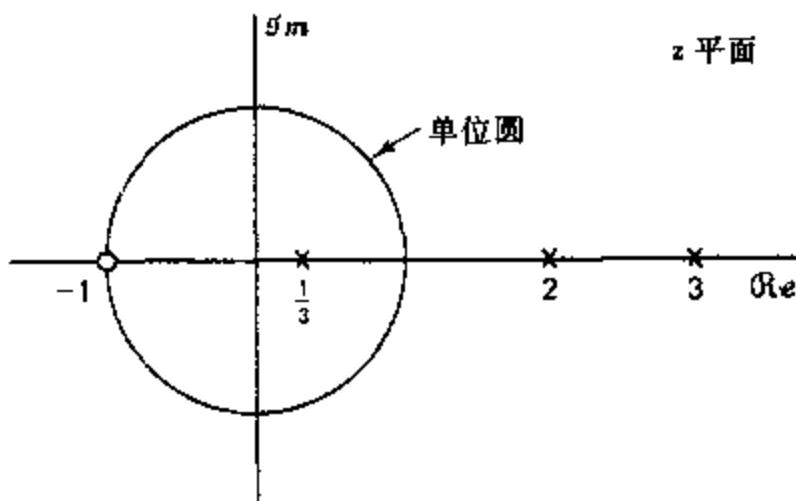


图 P4.6

(a) 若已知傅里叶变换存在, 确定 $X(z)$ 的收敛域, 并确定这时相应的序列是右边、左边或双边序列.

(b) 有多少可能的双边序列都有如图 P4.6 所示的零极点图?

(c) 对于图 P4.6 所示的零极点图有无可能有一个既稳定又因果的序列与其对应? 若有, 请给出相应的收敛域.

4.7 求具有如下 z 变换的序列:

$$X(z) = (1+2z)(1+3z^{-1})(1-z^{-1})$$

4.8 对以下几个所列 z 变换, 用在 4.3 节讨论的两种方法——部分分式展开法和幂级数展开法, 求每个的 z 反变换.

$$(a) X(z) = \frac{1}{1 + \frac{1}{2}z^{-1}}, \quad |z| > \frac{1}{2}$$

$$(b) X(z) = \frac{1}{1 + \frac{1}{2}z^{-1}}, \quad |z| < \frac{1}{2}$$

$$(c) X(z) = \frac{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}{1 + \frac{3}{4}z^{-1} + \frac{1}{8}z^{-2}}, \quad |z| > \frac{1}{2}$$

$$(d) X(z) = \frac{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}{1 - \frac{1}{4}z^{-2}}, \quad |z| > \frac{1}{2}$$

$$(e) X(z) = \frac{1 - az^{-1}}{z^{-1} - a}, \quad |z| > |1/a|$$

4.9 以下给出的是四个 z 变换，确定哪一些可能是一个因果序列的 z 变换。不用求出 z 反变换，凭观察就应该能够给出答案，对每种情况清楚地陈述你的道理。

$$(a) \frac{(1-z^{-1})^2}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)}$$

$$(b) \frac{(z-1)^2}{\left(z-\frac{1}{2}\right)}$$

$$(c) \frac{\left(z-\frac{1}{4}\right)^5}{\left(z-\frac{1}{2}\right)^6}$$

$$(d) \frac{\left(z-\frac{1}{4}\right)^6}{\left(z-\frac{1}{2}\right)^5}$$

4.10 考虑具有 z 变换为 $X(z)=P(z)/Q(z)$ 的序列；其中 $P(z)$ 和 $Q(z)$ 都是 z 的多项式。如果该序列是绝对可加的，且 $Q(z)$ 的全部根都在单位圆内，该序列一定因果的吗？若回答：是，请明确给予解释。如果回答：否，请给出一个相反的例子。

4.11 考虑一个右边序列有如下 z 变换：

$$X(z) = \frac{1}{(1-az^{-1})(1-bz^{-1})} = \frac{z^2}{(z-a)(z-b)}.$$

在4.3节曾经考虑过将 $X(z)$ 作为 z^{-1} 的多项式之比，然后完成部分分式展开来确定 $x[n]$ 。现在请把 $X(z)$ 当作 z 的多项式之比，再作部分分式展开，从该展开式中求 $x[n]$ 。

4.12 求下列各 z 反变换。(a)~(c)按要求方法求，而(d)随意。

(a) 长除法：

$$X(z) = \frac{1 - \frac{1}{3}z^{-1}}{1 + \frac{1}{3}z^{-1}}, \quad x[n] \text{ 为右边序列}$$

(b) 部分分式法：

$$X(z) = \frac{3}{z - \frac{1}{4} - \frac{1}{8}z^{-1}}, \quad x[n] \text{ 为稳定序列}$$

(c) 幂级数法：

$$X(z) = \ln(1-4z), \quad |z| < \frac{1}{4}$$

$$(d) X(z) = \frac{z}{1 - \frac{1}{3}z^{-3}}, \quad |z| > (3)^{-1/3}$$

4.13 用任何方法求下列每个 z 反变换：

$$(a) X(z) = \frac{1}{(1 + \frac{1}{2}z^{-1})^2(1 - 2z^{-1})(1 - 3z^{-1})}, \quad \text{稳定序列}$$

$$(b) X(z) = e^{z^{-1}}$$

$$(c) X(z) = \frac{z^3 - 2z}{z - 2}, \quad \text{左边序列}$$

4.14 求下列各 z 反变换。你应该发现4.4节 z 变换的诸性质是有助于解题的。

$$(a) X(z) = \frac{3z^{-3}}{(1 - \frac{1}{4}z^{-1})^2}, \quad x[n] \text{ 为左边序列}$$

(b) $X(z) = \sin(z)$, ROC 包括 $|z| = 1$

(c) $X(z) = \frac{z^2 - 2}{1 - z^{-2}}$, $|z| > 1$

4.15 z 变换 $X(z) = e^z + e^{1/z}$, $z \neq 0$, 求该序列 $x[n]$. (用幂级数展开法.)

4.16 求

$$X(z) = \log_2 \left(\frac{1}{2} - z \right), \quad |z| < \frac{1}{2}$$

的 z 反变换, 按

(a) 用幂级数

$$\log(1-x) = -\sum_{i=1}^{\infty} \frac{x^i}{i}, \quad |x| < 1;$$

(b) 首先将 $X(z)$ 微分, 然后用它来恢复 $x[n]$.

4.17 令 $x[n]$ 是一个因果稳定序列, 其 z 变换为 $X(z)$. 在第十二章将定义复倒谱 $\hat{x}[n]$ 作为 $X(z)$ 对数的反变换, 即,

$$\hat{X}(z) = \log X(z) \xrightarrow{z} \hat{x}[n],$$

其中 $\hat{X}(z)$ 的 ROC 包括单位圆. (严格讲, 取某个复数的对数要仔细考虑. 再者, 一个有效 z 变换的对数可能不是一个有效的 z 变换. 这些证明都延至第十二章去讨论, 目前暂假定都成立.)

求下列序列的复倒谱:

$$x[n] = \delta[n] + a\delta[n-N], \quad |a| < 1.$$

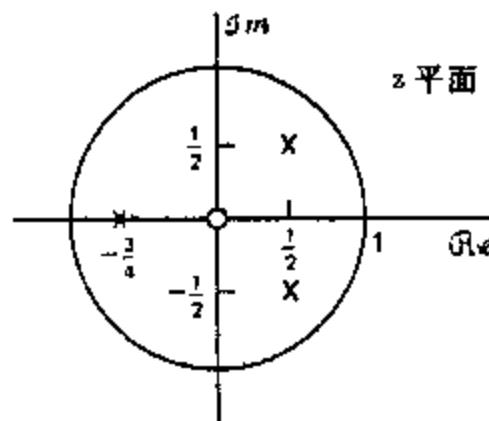
4.18 对下列序列求 z 变换和收敛域, 并画出零极点图.

(a) $x[n] = a^n u[n] + b^n u[n] + c^n u[-n-1]$, $|a| < |b| < |c|$

(b) $x[n] = n^2 a^n u[n]$

(c) $x[n] = e^{n^2} \left(\cos \frac{\pi}{12} n \right) u[n] - e^{n^2} \left(\cos \frac{\pi}{12} n \right) u[n-1]$

4.19 图 P4.19 相应于一个因果序列 $x[n]$ 的 z 变换的零极点图. 画出 $Y(z)$ 的零极点图, 这里 $y[n] = x[-n+3]$, 同时标出 $Y(z)$ 的收敛域.



极点: $z = \frac{1}{2} + j\frac{1}{2}$, $z = \frac{1}{2} - j\frac{1}{2}$, $z = -\frac{3}{4}$

零点: $z = 0$

图 P4.19

4.20 设 $x[n]$ 是具有如图 P4.20 所示的零极点图的序列, 对下面序列画出其对应的零极点图:

(a) $y[n] = \left(\frac{1}{2} \right)^n x[n]$

(b) $w[n] = \cos\left(\frac{\pi n}{2}\right) x[n]$

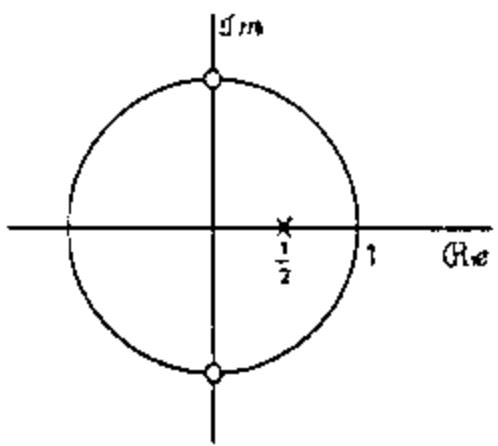


图 P4.20

4.21 考虑一个线性时不变系统, 其冲激响应 $h[n]$, 输入 $x[n]$ 如下:

$$h[n] = \begin{cases} a^n, & n \geq 0, \\ 0, & n < 0, \end{cases}$$

$$x[n] = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq (N-1), \\ 0, & \text{其它.} \end{cases}$$

- (a) 用 $x[n]$ 和 $h[n]$ 的离散卷积求输出 $y[n]$.
- (b) 用输入和冲激响应 z 变换乘积的 z 反变换求输出 $y[n]$.

4.22 考虑一个稳定的 LTI 系统, 其冲激响应的 z 变换 $H(z)$ 为

$$H(z) = \frac{3 - 7z^{-1} + 5z^{-2}}{1 - \frac{5}{2}z^{-1} + z^{-2}}.$$

假设输入 $x[n]$ 是单位阶跃序列.

- (a) 用计算 $x[n]$ 与 $h[n]$ 的离散卷积求输出 $y[n]$.
- (b) 用计算 $Y(z)$ 的 z 反变换求输出 $y[n]$.

4.23 求因果系统的单位阶跃响应, 其冲激响应的 z 变换是

$$H(z) = \frac{1 - z^3}{1 - z^4}$$

4.24 若对一个 LTI 系统的输入 $x[n]$ 是 $x[n] = u[n]$, 输出 $y[n]$ 是

$$y[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} u[n+1]$$

- (a) 求该系统冲激响应的 z 变换 $H(z)$, 并画出它的零极点图.
- (b) 求冲激响应 $h[n]$.
- (c) 该系统是稳定的吗?
- (d) 该系统是因果的吗?

4.25 一个因果的 LTI 系统的输入是

$$x[n] = u[-n-1] + \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n].$$

这个系统输出的 z 变换是

$$Y(z) = \frac{-\frac{1}{2}z^{-1}}{\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)(1 + z^{-1})}.$$

- (a) 求系统冲激响应的 z 变换 $H(z)$, 标明收敛域.
- (b) $Y(z)$ 的收敛域是什么?
- (c) 求 $y[n]$.

4.26 一个因果 LTI 系统的系统函数是

$$H(z) = \frac{1-z^{-1}}{1+\frac{3}{4}z^{-1}}$$

系统的输入是

$$x[n] = \left(\frac{1}{2} \right)^n u[n] + u[-n-1].$$

- (a) 求对全部 n 的系统的冲激响应;
 - (b) 求对全部 n 的输出 $y[n]$;
 - (c) 该系统是稳定的吗? 即 $h[n]$ 是绝对可加的吗?
- 4.27 一个因果的 LTI 系统有冲激响应 $h[n]$, 其 z 变换是

$$H(z) = \frac{1+z^{-1}}{\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1} \right) \left(1 + \frac{1}{4}z^{-1} \right)}.$$

- (a) $H(z)$ 的收敛域是什么?
 - (b) 系统是稳定的吗? 请解释.
 - (c) 某一输入 $x[n]$, 产生的输出为
- $$y[n] = -\frac{1}{3} \left(-\frac{1}{4} \right)^n u[n] - \frac{4}{3} (2)^n u[-n-1],$$
- 求 $x[n]$ 的 z 变换 $X(z)$.
- (d) 求系统冲激响应 $h[n]$.
- 4.28 假设 $x[n]$ 为实的且为偶, 即 $x[n] = x[-n]$. 再假设 z_0 是 $X(z)$ 的一个零点, 即 $X(z_0) = 0$.
- (a) 证明 $1/z_0$ 也是 $X(z)$ 的一个零点.
 - (b) 还有其它 $X(z)$ 的零点隐含在所给出的信息中吗?
- 4.29 利用 z 变换定义式(4.2)证明: 如果 $X(z)$ 是 $x[n]$ 的 z 变换, 那么

- (a) $x^*[n] \xleftrightarrow{z} X^*(z^*)$
 - (b) $x[-n] \xleftrightarrow{z} X(1/z)$
 - (c) $\Re\{x[n]\} \xleftrightarrow{z} \frac{1}{2}[X(z) + X^*(z^*)]$
 - (d) $\Im\{x[n]\} \xleftrightarrow{z} \frac{1}{2j}[X(z) - X^*(z^*)]$
- 4.30 考虑一个实序列 $x[n]$, 其 z 变换的全部零极点都在单位圆内. 利用 $x[n]$ 求另一个实序列 $x_1[n]$, $x_1[n]$ 不等于 $x[n]$, 但是有 $x_1[0] = x[0]$, $|x_1[n]| = |x[n]|$, 并且 $x_1[n]$ 的 z 变换其全部零极点也在单位圆内.
- 4.31 一个实的有限长序列, 若它的 z 变换没有零点位于共轭倒数对的位置上, 且也没有零点在单位圆上, 则唯一地可以由其傅里叶变换的相位来确定, 除去一个正的幅度加权系数外(Hayes et al., 1980).

在共轭倒数对上的零点的一个例子是 $z=a$ 和 $(a^*)^{-1}$. 即使我们能产生某些序列, 它们不满足以上条件, 但几乎任何有实际意义的序列都满足这些条件, 因此这些序列是唯一地由它的傅里叶相位来确定的, 除了一个正的幅度加权系数外.

今考虑一个序列 $x[n]$, 它是实的, 且在 $0 \leq n \leq N-1$ 以外为零. 它的 z 变换没有零点在共轭倒数对的位置上, 也没有零点在单位圆上. 我们希望建立一个算法, 要从 $\text{Re}\{X(e^{j\omega})\}$ 恢复 $c x[n]$, $\text{Re}\{X(e^{j\omega})\}$ 是 $x[n]$ 傅里叶变换的相位, c 是一个正的幅度加权系数.

(a) 给出一组 $(N-1)$ 个线性方程组, 它的解将提供从 $\tan(\text{Im}\{X(e^{j\omega})\})$ 恢复出 $x[n]$, 但有一个正的或负的幅度加权系数. 你不必证明这组 $(N-1)$ 个线性方程组有唯一解. 同时证明如果已知 $\text{Im}\{X(e^{j\omega})\}$ 而不是刚才的 $\tan(\text{Im}\{X(e^{j\omega})\})$, 那么幅度加权系数的符号就能确定.

(b) 假设 $x[n]$ 为

$$x[n] = \begin{cases} 0, & n < 0 \\ 1, & n = 0 \\ 2, & n = 1 \\ 3, & n = 2 \\ 0, & n \geq 3 \end{cases}$$

利用(a)建立的方法,说明 $cx[n]$ 可以由 $\text{c}X(e^{jn\omega})$ 确定,这里 c 是一个正的幅度加权系数.

4.32 对一个序列 $x[n]$ 在 $n < 0$ 是零,证明 $\lim_{n \rightarrow -\infty} X(z) = x[0]$ (考虑 z 变换定义式(4.2)中每一项的极限).

如果 $n > 0$,该序列是零,相应的定理是什么?

4.33 考虑一个序列 $x[n]$,其 z 变换是

$$X(z) = \frac{\frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{\frac{1}{4}}{1 - 2z^{-1}}$$

收敛域包括单位圆.利用习题 4.32 导得的定理求 $x[0]$.

4.34 一个实值稳定序列 $x[n]$ 的非周期自相关函数定义为

$$c_{xx}[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]x[n+k].$$

(a) 证明 $c_{xx}[n]$ 的 z 变换是

$$C_{xx}(z) = X(z)X(z^{-1}).$$

确定 $C_{xx}(z)$ 的收敛域.

(b) 假设 $x[n] = a^n u[n]$. 图示出 $C_{xx}(z)$ 的零极点及其收敛域. 同时用求 $C_{xx}(z)$ 的 z 反变换求 $c_{xx}[n]$.

(c) 给出另一个序列 $x_1[n]$, 它不等于(b)中的 $x[n]$, 但有与(b)中 $x[n]$ 相同的自相关函数 $c_{xx}[n]$.

(d) 给出第三个序列 $x_2[n]$, 它不等于 $x[n]$ 或 $x_1[n]$, 但有与(b)中 $x[n]$ 相同的自相关函数.

4.35 决定 $X(z) = z^*$ 是否能对应于某个序列的 z 变换. 说明你的理由.

4.36 对以下每个 z 变换,用围线积分求 z 反变换:

$$(a) X(z) = \frac{1}{1 + \frac{1}{4}z^{-1}}, \quad |z| > \frac{1}{4}$$

$$(b) X(z) = \frac{1}{1 + \frac{1}{4}z^{-1}}, \quad |z| < \frac{1}{4}$$

$$(c) X(z) = \frac{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}{1 + \frac{3}{4}z^{-1} + \frac{1}{8}z^{-2}}, \quad |z| > \frac{1}{2}$$

$$(d) X(z) = \frac{1 - \frac{1}{4}z^{-1}}{1 - \frac{1}{9}z^{-2}}, \quad |z| > \frac{1}{3}$$

$$(e) X(z) = \frac{1 - az^{-1}}{z^{-1} - a}, \quad |z| > |1/a|$$

4.37 考虑一个稳定的 LTI 系统,其冲激响应的 z 变换是

$$H(z) = \frac{z^{-1} + z^{-2}}{\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1 + \frac{1}{3}z^{-1}\right)}.$$

假设系统输入 $x[n] = 2u[n]$, 求 $n=1$ 时的 $y[n]$.

4.38 假设 $x[n]$ 的 z 变换为

$$X(z) = \frac{z^{10}}{\left(z - \frac{1}{2}\right)\left(z - \frac{3}{2}\right)^{10}\left(z + \frac{3}{2}\right)^2\left(z + \frac{5}{2}\right)\left(z + \frac{7}{2}\right)}.$$

同时已知 $x[n]$ 是一个稳定序列.

(a) 求 $X(z)$ 的收敛域.

(b) 求 $n = -8$ 时的 $x[n]$. (考虑利用 4.5 节讨论的围线积分.)

4.39 假设 $x[n]$ 的 z 变换为

$$X(z) = \frac{z^{20}}{\left(z - \frac{1}{2}\right)\left(z + \frac{5}{2}\right)^2\left(z + \frac{7}{2}\right)\left(z - \frac{9}{2}\right)}.$$

(a) 设 $x[n]$ 是一个稳定序列, 求 $n = -18$ 的 $x[n]$.

(b) 设 $x[n]$ 是一个左边序列, 求 $n = -18$ 的 $x[n]$. (考虑用 4.5 节讨论的围线积分.)

4.40 在 4.5 节讨论过, 对于 $n < 0$, 计算式(4.67)的反变换关系用变量置换 $z = p^{-1}$ 以得到式(4.74)往往更为方便. 例如, 如果积分路径取单位圆, 那就有将单位圆外映射到单位圆内的效果, 反之亦然. 然而不用这种置换, 值得使自己确信也能用计算在 $z = 0$ 的多重极点的留数来求得 $n < 0$ 时的 $x[n]$. 令

$$X(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z}$$

收敛域包括单位圆.

(a) 用计算式(4.67)得到在 $z = 0$ 极点的留数求 $x[0], x[-1]$ 和 $x[-2]$.

(b) 用计算式(4.67)求 $n > 0$ 时的 $x[n]$, 用计算式(4.74)求 $n \leq 0$ 时的 $x[n]$.

4.41 令 $X(z)$ 是 z 的多项式之比, 即

$$X(z) = \frac{B(z)}{A(z)},$$

证明, 如果 $X(z)$ 在 $z = z_0$ 有一个单阶极点, 那么 $X(z)$ 在 $z = z_0$ 的留数就等于

$$\frac{B(z_0)}{A'(z_0)},$$

式中 $A'(z_0)$ 为 $A(z)$ 的导数在 $z = z_0$ 的值.

4.42 假设 $F(z)$ 是一个有理函数, 即

$$F(z) = \frac{B(z)}{A(z)},$$

这里 $B(z)$ 和 $A(z)$ 都是多项式. 再假设 $F(z)$ 没有阶数大于 1 的多重零点或极点. 令 C 是一个简单的逆时针方向的闭合围线, Z 和 P 分别是 $F(z)$ 包围在围线内的零点和极点数. (假设在 C 上没有零点和极点.)

(a) 证明

$$\frac{1}{2\pi j} \oint_C \frac{F'(z)}{F(z)} dz = Z - P,$$

式中 $F'(z)$ 是 $F(z)$ 的导数.

(b) 用极坐标 $F(z) = |F(z)|e^{j\angle F(z)}$ 来表示 $F(z)$, 证明沿着围线 C 绕过一周, $\angle F(z)$ 的改变是 $2\pi(Z - P)$. (这个结果也能推广到多重极点和零点的情况, 只要根据它们的重阶数来计算极点和零点, 即一个二阶极点就按二倍计算.)

4.43 令 $X(z)$ 是一个因果稳定序列的 z 变换

$$X(z) = \frac{1}{1 - \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}}$$

求下列表示式的数值解。(该表示式可认为是幅度平方对数的均值。)

$$\frac{1}{2\pi} \int \log[|X(e^{j\omega})|^2] d\omega$$

[提示:把这个表示式作为 $\log |X(z)|^2$ 在一条特殊围线上的围线积分并应用柯西积分定理来求。]

4.44 求下列各序列的单边 z 变换 $\mathcal{R}(z)$:

(a) $\delta[n]$

(b) $\delta[n-1]$

(c) $\delta[n+1]$

(d) $\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$

(e) $-\left(\frac{1}{2}\right)^n u[-n-1]$

(f) $\left(\frac{1}{2}\right)^n u[-n]$

(g) $\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{4}\right)^n\right\}u[n]$

(h) $\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} u[n-1]$

4.45 如果 $\mathcal{R}(z)$ 是 $x[n]$ 的单边 z 变换, 利用 $\mathcal{R}(z)$ 求下列序列的单边 z 变换:

(a) $x[n+1]$

(b) $x[n-2]$

(c) $\sum_{k=-\infty}^n x[k]$

4.46 对下列每个差分方程及其有关的输入和初始条件, 用单边 z 变换求响应 $y[n]$:

(a) $y[n] + 3y[n-1] = x[n]$

$$x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$$

$$y[-1] = 1$$

(b) $y[n] - \frac{1}{2}y[n-1] = x[n] - \frac{1}{2}x[n-1]$

$$x[n] = u[n]$$

$$y[-1] = 0$$

(c) $y[n] - \frac{1}{2}y[n-1] = x[n] - \frac{1}{2}x[n-1]$

$$x[n] = u[n]$$

$$y[-1] = 1$$

第五章 线性时不变系统的变换分析

5.0 引言

在第二章我们建立了离散时间信号与系统的傅里叶变换表示，第四章又把这种表示推广到 z 变换。这两章都是把重点放在变换本身及其性质上，而对它们在线性时不变系统(LTI)分析中的应用仅作了简要的介绍。这一章要更为详细地建立利用傅里叶变换和 z 变换来表示和分析LTI系统。本章内容是第六章要讨论的LTI系统实现和第七章LTI系统设计的基础。

正如在第二章中所得到的，一个LTI系统在时域完全由系统的冲激响应 $h[n]$ 所表征。对于一个给定的输入 $x[n]$ ，其输出 $y[n]$ 是通过如下卷积和给出的

$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k]. \quad (5.1)$$

另一方面，如在2.7节所讨论的，因为频率响应和冲激响应是直接通过傅里叶变换联系起来的，所以，若频率响应存在(即收敛)，那么频率响应也完全等同地给出了LTI系统的特性。在第四章，还建立了作为傅里叶变换的一种推广—— z 变换，并给出了一个LTI系统输出的 z 变换 $Y(z)$ 与输入的 z 变换 $X(z)$ 是通过系统冲激响应的 z 变换 $H(z)$ 在某个适当的收敛域内用下式关联的

$$Y(z) = H(z)X(z) \quad (5.2)$$

$H(z)$ 称为系统函数，因为 z 变换和序列构成唯一的一对，因此任何LTI系统也就完全由它的系统函数(假定收敛)所表征。

在这一章中将会看到，由于从频率响应和系统函数能够容易推出系统响应的很多性质，所以它们在LTI系统的分析和表示中是极为有用的。

5.1 LTI系统的频率响应

一个LTI系统的频率响应 $H(e^{j\omega})$ 在2.6节是定义为系统对于复指数输入(特征函数) $e^{j\omega n}$ 的复增益(特征值)。再者，在2.9.6节又得出：一个序列的傅里叶变换代表着作为复指数线性组合的一种分解，所以系统输入和输出的傅里叶变换由下式所联系

$$Y(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega})X(e^{j\omega}), \quad (5.3)$$

式中 $X(e^{j\omega})$ 和 $Y(e^{j\omega})$ 分别是系统输入和输出的傅里叶变换。若利用极坐标形式来表示频率响应，则系统的输入和输出的傅里叶变换的幅度和相位由下式联系

$$|Y(e^{j\omega})| = |H(e^{j\omega})| \cdot |X(e^{j\omega})|, \quad (5.4a)$$

$$\angle Y(e^{j\omega}) = \angle H(e^{j\omega}) + \angle X(e^{j\omega}). \quad (5.4b)$$

$|H(e^{j\omega})|$ 称为系统的幅度响应或增益，而 $\angle H(e^{j\omega})$ 则称为系统的相位响应或相移。

由式(5.4)所表示的在幅度和相位上的影响，如果将输入信号以一种有用的方式变

化,这就是所需要的;如果以一种有害的方式变化,这就是不需要的.在后一种情况下,我们就往往把 LTI 系统对信号的影响分别称为幅度和相位失真.

5.1.1 理想频率选择性滤波器

式(5.4a)一个重要的含意是:如果 $|H(e^{j\omega})|$ 在某些频率上是很小的话,那么在输出中输入的这些频率分量就受到抑制.傅里叶分量的这种抑制是好还是不好,取决于具体的问题.例 2.14 通过某些理想频率响应的定义已对频率选择性滤波器形成了一般概念.例如,理想低通滤波器就定义为离散时间线性时不变系统具有如下频率响应特性:

$$H_{lp}(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & |\omega| < \omega_c, \\ 0, & \omega_c < |\omega| \leq \pi, \end{cases} \quad (5.5)$$

当然,它是周期的,周期为 2π .理想低通滤波器选取信号的低频分量,而阻止高频分量通过.相应的冲激响应如例 2.17 所给出为

$$h_{lp}[n] = \frac{\sin \omega_c n}{\pi n}, \quad -\infty < n < \infty. \quad (5.6)$$

相应地,理想高通滤波器定义为

$$H_{hp}(e^{j\omega}) = \begin{cases} 0, & |\omega| < \omega_c, \\ 1, & \omega_c < |\omega| \leq \pi, \end{cases} \quad (5.7)$$

其冲激响应为

$$h_{hp}[n] = \delta[n] - h_{lp}[n] = \delta[n] - \frac{\sin \omega_c n}{\pi n}. \quad (5.8)$$

理想高通滤波器在频率 $\omega_c < \omega \leq \pi$ 内无失真通过,而对 ω_c 以下频率不予通过.其它的理想频率选择性滤波器已在例 2.14 中定义过.

理想低通滤波器是非因果的,它的冲激响应从 $-\infty$ 延伸到 $+\infty$.因此,用递推或非递推的方法计算理想低通滤波器的输出都是不可能的,也就是说,这个系统不是在计算上可实现的.

由式(5.5)定义的理想低通滤波器的一个重要性质是其相位响应都是零.倘若不是零的话,由滤波器选出的低频带内也将有相位失真.本章稍后将会明白,对理想频率选择性滤波器的因果近似必须有非零的相位响应.

5.1.2 相位失真和延迟

为了明了一个线性系统相位的影响,首先考虑理想延迟系统.其冲激响应是

$$h_{id}[n] = \delta[n - n_d] \quad (5.9)$$

而频率响应是

$$H_{id}(e^{j\omega}) = e^{-j\omega n_d} \quad (5.10)$$

或

$$|H_{id}(e^{j\omega})| = 1 \quad (5.11a)$$

$$\angle H_{id}(e^{j\omega}) = -\omega n_d, \quad |\omega| < \pi, \quad (5.11b)$$

频率响应是周期的,周期为 2π .目前假定 n_d 是整数.

在很多应用中,延迟失真被认为是相位失真的一种很轻微的形式,因为它的影响只是

在序列时间上的移位.往往这种时间上的移位是无关紧要的,或者在一个较大系统中利用引入其它部分的延迟很容易地给予补偿掉.因此,在设计近似理想滤波器或其它线性时不变系统时,往往愿意接受线性相位响应而不是零相位响应作为一种理想模型.例如,一个具有线性相位的理想低通滤波器定义为

$$H_{lp}(e^{j\omega}) = \begin{cases} e^{-jn_d}, & |\omega| < \omega_c, \\ 0, & \omega_c < |\omega| \leq \pi. \end{cases} \quad (5.12)$$

它的冲激响应是

$$h_{lp}[n] = \frac{\sin \omega_c(n - n_d)}{\pi(n - n_d)}, \quad -\infty < n < \infty. \quad (5.13)$$

类似地,可以定义出具有线性相位的其它理想频率选择性滤波器.这些滤波器都有所要求的分隔输入信号中频带的效果,以及使输出延迟 n_d 的附加效果.然而,应该注意无论 n_d 有多大,理想低通滤波器总是非因果的.

相位特性线性程度的一种方便的度量是群延迟.群延迟的基本概念是与相位在一个窄带信号上的效果有关.具体地说,考虑一个系统其频率响应为 $H(e^{j\omega})$,对窄带输入 $x[n] = s[n]\cos(\omega_0 n)$ 的系统输出.因为已假定 $X(e^{j\omega})$ 仅在 $\omega = \omega_0$ 附近为非零,系统的相位效果在 $\omega = \omega_0$ 附近可以近似为如下的线性近似式

$$\Im H(e^{j\omega}) \approx -\phi_0 - \omega n_d. \quad (5.14)$$

利用这一近似就能证明(见习题 5.3):对 $x[n] = s[n]\cos(\omega_0 n)$ 的响应 $y[n]$ 就近似为 $y[n] = s[n - n_d]\cos(\omega_0 n - \phi_0 - \omega_0 n_d)$.结果,一个傅里叶变换集中在 ω_0 附近的窄带信号 $x[n]$ 的包络 $s[n]$ 的延迟就由在 ω_0 处相位特性斜率的负值给出.在考虑 ω_0 附近的 $\Im H(e^{j\omega})$ 用式 (5.14) 来线性近似时,必须认为相位响应是 ω 的连续函数.以这种方式给定的相位响应将记作 $\arg[H(e^{j\omega})]$,并称之为 $H(e^{j\omega})$ 的连续相位.这种把傅里叶变换相位表示成 $\omega(0 < |\omega| < \pi)$ 的连续函数形式在第十二章将起着特别重要的作用.

利用相位表示成 ω 的连续函数,一个系统的群延迟就可以定义为

$$\tau(\omega) = \text{grd}[H(e^{j\omega})] = -\frac{d}{d\omega}\{\arg[H(e^{j\omega})]\}. \quad (5.15)$$

群延迟偏离某一个常数就表明相位特性的非线性程度.

5.2 用线性常系数差分方程所表征系统的系统函数

虽然在概念上理想频率选择性滤波器是有用的,但是它们不能用有限的计算来实现.因此,考虑一类能用来近似实现理想频率选择性滤波器的系统是有益的.

在 2.5 节曾考虑过其输入输出满足如下线性常系数差分方程的一类系统

$$\sum_{k=0}^N a_k y[n - k] = \sum_{k=0}^M b_k x[n - k]. \quad (5.16)$$

已经证明,若进一步假定系统是因果的,就可用该差分方程递推地计算出输出.如果辅助条件相应于初始松弛的话,该系统就是因果、线性和时不变的.

输入和输出满足线性常系数差分方程的 LTI 系统的性质和特征最好是经由 z 变换来确立.将式 (5.16) 两边进行 z 变换,并利用线性性质(4.4.1 节)和时不变性质(4.4.2

节)可得

$$\sum_{k=0}^N a_k z^{-k} Y(z) = \sum_{k=0}^M b_k z^{-k} X(z)$$

或等效为

$$\left(\sum_{k=0}^N a_k z^{-k} \right) Y(z) = \left(\sum_{k=0}^M b_k z^{-k} \right) X(z). \quad (5.17)$$

根据式(5.2)和式(5.17),对于一个其输入和输出满足式(5.16)差分方程的系统,可得其系统函数有如下代数形式

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}} \quad (5.18)$$

由于式(5.16)是由一组延迟项的线性组合构成的,所以式(5.18)是 z^{-1} 的多项式之比.当然,式(5.18)也可以重新写成以 z 而不是 z^{-1} 为幂的多项式,但一般都不这样做.同时,将式(5.18)表示成如下的因式形式往往也很方便

$$H(z) = \left(\frac{b_0}{a_0} \right) \frac{\prod_{k=1}^M (1 - c_k z^{-1})}{\sum_{k=1}^N (1 - d_k z^{-1})}. \quad (5.19)$$

分子因式 $(1 - c_k z^{-1})$ 中的每一项都在 $z = c_k$ 提供一个零点和在 $z = 0$ 提供一个极点.相类似,分母因式 $(1 - d_k z^{-1})$ 中的每一项在 $z = 0$ 贡献一个零点和 $z = d_k$ 贡献一个极点.

差分方程与系统函数相应的代数表达式之间有一个直接的关系.具体地说,式(5.18)分子多项式与式(5.16)右边($x[n-k]$ 的这些项)有相同的系数,而式(5.18)分母多项式与式(5.16)左边($y[n-k]$ 的这些项)有相同的系数.因此,给定式(5.18)形式的系统函数或者式(5.16)那样的差分方程中的任一个,都能直接求得另一个.

例 5.1

假设一线性时不变系统的系统函数是

$$H(z) = \frac{(1+z^{-1})^2}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1+\frac{3}{4}z^{-1}\right)}. \quad (5.20)$$

为了满足该系统输入输出的差分方程,可以将 $H(z)$ 的分子和分母各因式乘开,而得到表示成式(5.18)的形式

$$H(z) = \frac{1+2z^{-1}+z^{-2}}{1+\frac{1}{4}z^{-1}-\frac{3}{8}z^{-2}} = \frac{Y(z)}{X(z)}. \quad (5.21)$$

于是

$$\left(1 + \frac{1}{4}z^{-1} - \frac{3}{8}z^{-2}\right) Y(z) = (1+2z^{-1}+z^{-2}) X(z).$$

其差分方程就是

$$y[n] + \frac{1}{4}y[n-1] - \frac{3}{8}y[n-2] = x[n] + 2x[n-1] + x[n-2]. \quad (5.22)$$

5.2.1 稳定性和因果性

为了从式(5.16)得到式(5.18), 我们曾假设系统是线性和时不变的, 这样就可能应用式(5.2). 但是, 有关稳定性或因果性并未作进一步假设. 与此相应, 从差分方程固然可以得出系统函数的代数表达式, 但没有给出收敛域. 这就是说, $H(z)$ 的收敛域不是由式(5.18)的导出来确定的. 因为要求使式(5.17)成立就是要求 $X(z)$ 和 $Y(z)$ 有重合的收敛域. 正如在第二章已经看到的, 这与差分方程不能唯一地表征一个线性时不变系统的冲激响应这一点是一致的. 对于式(5.18)或式(5.19)的系统函数, 有几个收敛域的选择都能满足收敛域是被极点所界定(但不包括)的一个圆环的要求. 对一个给定的多项式之比, 收敛域的每一种可能选择都将导致不同的冲激响应, 但它们全都对应于同一个差分方程. 然而, 若假定系统是因果的, 那么 $h[n]$ 就必须是一个右边序列, 因此 $H(z)$ 的收敛域位于最外面极点的外面. 另外, 若假定系统是稳定的, 那么由 2.4 节讨论, 冲激响应必须绝对可加, 即

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]| < \infty. \quad (5.23)$$

因为式(5.23)在 $|z|=1$ 时与下述条件一致

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]z^{-n}| < \infty \quad (5.24)$$

所以稳定性条件就等效于 $H(z)$ 的 ROC 包括单位圆的条件.

例 5.2

考虑一输入输出通过下述差分方程联系的 LTI 系统

$$y[n] - \frac{5}{2}y[n-1] + y[n-2] = x[n]. \quad (5.25)$$

依据以上讨论, $H(z)$ 就为

$$H(z) = \frac{1}{1 - \frac{5}{2}z^{-1} + z^{-2}} = \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)(1 - 2z^{-1})} \quad (5.26)$$

$H(z)$ 的零极点图如图 5.1 所示. 有三种可能的 ROC 可供选择. 若系统是因果的, 那么 ROC 就在最外面极点的外面, 即 $|z| > 2$. 这时系统是不稳定的, 因为 ROC 不包括单位圆. 若假定系统是稳定的, 那么 ROC 必定是 $\frac{1}{2} < |z| < 2$. 第三种情况就是 ROC 选为 $|z| < \frac{1}{2}$, 这时系统既不稳定, 也不是因果的.

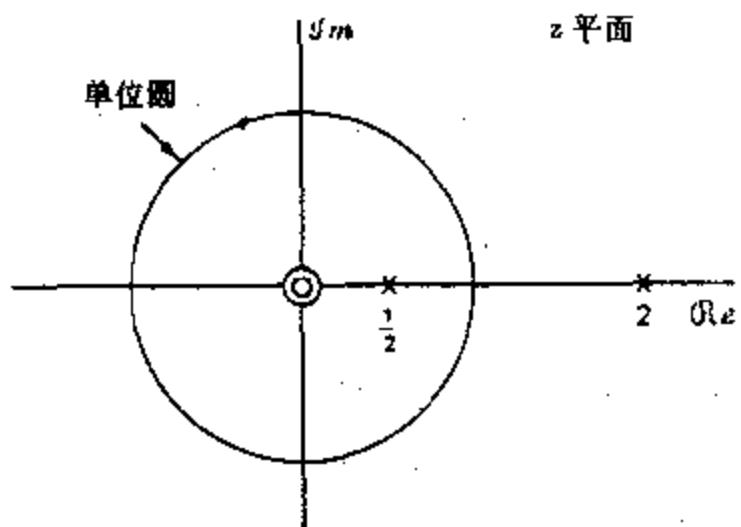


图 5.1 例 5.2 的零极点图

正如在例 5.2 中所看出的, 因果性和稳定性不一定是互为兼容的要求. 要使输入输出满足式(5.16)差分方程的线性时不变系统既因果又稳定, 相应系统函数的 ROC 必须是位于最外面极点的外面, 又包括单位圆. 很显

然,这就等于要求该系统函数的全部极点都在单位圆内.

5.2.2 逆系统

对于一个系统函数为 $H(z)$ 的线性时不变系统,其对应的逆系统定义为:系统函数为 $H_i(z)$ 的逆系统与 $H(z)$ 级联后,总的系统函数是 1,即

$$G(z) = H(z)H_i(z) = 1. \quad (5.27)$$

这意味着

$$H_i(z) = \frac{1}{H(z)}. \quad (5.28)$$

式(5.27)的等效时域条件就是

$$g[n] = h[n] * h_i[n] = \delta[n]. \quad (5.29)$$

由式(5.28),该逆系统的频率响应若存在,就是

$$H_i(e^{j\omega}) = \frac{1}{H(e^{j\omega})}, \quad (5.30)$$

也即 $H_i(e^{j\omega})$ 是 $H(e^{j\omega})$ 的倒数.该逆系统的对数幅度、相位和群延迟都是原系统相应函数的负值.不是所有的系统都有其逆系统.例如,理想低通滤波器就没有一个逆系统.这等于说,没有任何办法去恢复被理想低通滤波器置到零的那些位于截止频率以上的频率分量.

很多系统就有它们的逆系统,并且具有有理系统函数的一类系统给出了一种非常有用而有趣的例子.考虑

$$H(z) = \left(\frac{b_0}{a_0}\right) \frac{\prod_{k=1}^M (1 - c_k z^{-1})}{\prod_{k=1}^N (1 - d_k z^{-1})}, \quad (5.31)$$

其零点在 $z=c_k$,极点在 $z=d_k$,以及另外可能的在 $z=0$ 和 $z=\infty$ 的零点和/或极点.那么

$$H_i(z) = \left(\frac{a_0}{b_0}\right) \frac{\prod_{k=1}^N (1 - d_k z^{-1})}{\prod_{k=1}^M (1 - c_k z^{-1})}, \quad (5.32)$$

这就是说, $H_i(z)$ 的极点就是 $H(z)$ 的零点;反之亦然.产生的问题是: $H_i(z)$ 的收敛域是什么?答案应由式(5.29)表示的卷积定理给出.要使式(5.29)成立, $H(z)$ 和 $H_i(z)$ 的收敛域必须重合.如果 $H(z)$ 是因果的,它的收敛域就是

$$|z| > \max_k |d_k|. \quad (5.33)$$

因此,任何适当的与式(5.33)给出的区域重合的收敛域就是 $H_i(z)$ 的有效收敛域.现用几个简单的例子来说明若干可能性.

例 5.3

令 $H(z)$ 是

$$H(z) = \frac{1 - 0.5z^{-1}}{1 - 0.9z^{-1}},$$

ROC 是 $|z| > 0.9$, $H_i(z)$ 就应是

$$H_i(z) = \frac{1-0.9z^{-1}}{1-0.5z^{-1}}$$

因为 $H_i(z)$ 只有一个极点, 它的 ROC 只有两种可能, 即 $|z| > 0.5$ 和 $|z| < 0.5$. 很明显, 唯有选 $|z| > 0.5$ 才能与 $|z| > 0.9$ 重合. 因此, 该逆系统的冲激响应就是

$$h_i[n] = (0.5)^n u[n] - 0.9(0.5)^{n-1} u[n-1].$$

这时, 该逆系统既是因果的, 又是稳定的.

例 5.4

假设 $H(z)$ 是

$$H(z) = \frac{z^{-1} - 0.5}{1 - 0.9z^{-1}}, \quad |z| > 0.9.$$

逆系统函数就是

$$H_i(z) = \frac{1 - 0.9z^{-1}}{z^{-1} - 0.5} = \frac{-2 + 1.8z^{-1}}{1 - z^{-1}}.$$

同前, 有两种可能的收敛域: $|z| < 2$ 和 $|z| > 2$. 然而, 在这一情况下, 两种区域都与 $|z| > 0.9$ 重合, 所以两者都是有效的逆系统. 对 ROC $|z| < 2$ 的冲激响应是

$$h_{i1}[n] = 2(2)^n u[-n-1] - 1.8(2)^{n-1} u[-n]$$

而对 ROC $|z| > 2$ 的冲激响应是

$$h_{i2}[n] = -2(2)^n u[n] + 1.8(2)^{n-1} u[n-1].$$

可以看出, $h_{i1}[n]$ 是稳定而非因果的, $h_{i2}[n]$ 是因果的但不稳定.

例 5.3 和例 5.4 的明显推广是, 若 $H(z)$ 是零点在 $c_k, k = 1, \dots, M$, 的一个因果系统, 那么当且仅当 $H_i(z)$ 的收敛域为

$$|z| > \max_k |c_k|$$

时, 其逆系统一定是有因果的. 如果也要求逆系统是稳定的, 那么 $H_i(z)$ 的收敛域必须包括单位圆. 因此, 就必须是

$$\max_k |c_k| < 1,$$

这就是说全部 $H(z)$ 的零点必须在单位圆内. 因此, 当且仅当 $H(z)$ 的零点和极点都在单位圆内时, 一个稳定因果的线性时不变系统也有一个稳定因果的逆系统. 这样的系统称为最小相位系统, 我们将在 5.6 节对它作更为详细的讨论.

5.2.3 有理系统函数的冲激响应

求 z 反变换的部分分式展开技术(4.3.2 节)能应用到系统函数 $H(z)$ 上, 以得到具有如式(5.19)所表示的有理系统函数的系统冲激响应的一般表示式. 任何具有一阶极点的、以 z^{-1} 为幕给出的有理函数可以表示成如下形式

$$H(z) = \sum_{r=0}^{M-N} B_r z^{-r} + \sum_{k=1}^N \frac{A_k}{1-d_k z^{-1}}, \quad (5.34)$$

式中第一个求和的这些项是用分母除以分子的长除法求得, 并且仅当 $M \geq N$ 时才有这些项. 第二个和式中的系数 A_k 可以用式(4.41)得到. 如果 $H(z)$ 有多重极点, 它的部分分式

展开就有式(4.43)的形式.如果系统假定是因果的,那么 ROC 就位于式(5.34)全部极点的外边,这样就可得

$$h[n] = \sum_{r=0}^{M-N} B_r \delta[n-r] + \sum_{k=1}^N A_k d_k^n u[n], \quad (5.35)$$

式中第一个求和仅当 $M \geq N$ 才存在.

在讨论 LTI 系统时,区分两类系统是有用的.在第一种情况下,至少有一个 $H(z)$ 的非零极点未被某个零点抵消.这时,至少有一项是具有 $A_k(d_k)^n u[n]$ 这种形式, $h[n]$ 就不会是有限长,即在某一有限区间外不是零.因此这类系统就称为无限冲激响应 IIR 系统.下面例子讨论一个简单的 IIR 系统.

例 5.5

考虑一个因果系统,其输入输出满足下列差分方程

$$y[n] - ay[n-1] = x[n]. \quad (5.36)$$

凭观察该系统函数就是

$$H(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}}. \quad (5.37)$$

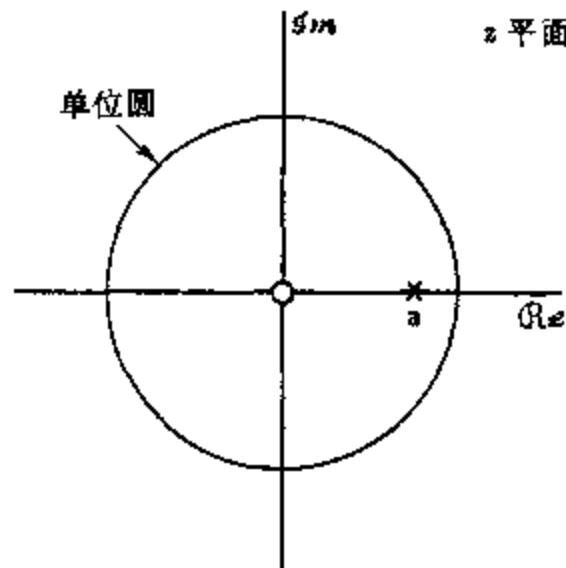


图 5.2 例 5.5 的零极点图

图 5.2 示出 $H(z)$ 的零极点图.收敛域是 $|z| > |a|$, 那么对于稳定的条件就是 $|a| < 1$. $H(z)$ 的反变换是

$$h[n] = a^n u[n]. \quad (5.38)$$

第二类系统是 $H(z)$ 除 $z=0$ 外, 没有任何极点, 即式(5.16)和式(5.18)中 $N=0$. 因此, 不可能进行部分分式展开. $H(z)$ 就只是一个如下 z^{-1} 的多项式

$$H(z) = \sum_{k=0}^M b_k z^{-k}. \quad (5.39)$$

(假设 $a_0=1$, 并未失去一般性.) 在这种情况下, $H(z)$ 除了一个常数因子外就完全由它的零点所确定. 由式(5.39), $h[n]$ 凭直观就能看出是

$$h[n] = \sum_{k=0}^M b_k \delta[n-k] = \begin{cases} b_n, & 0 \leq n \leq M, \\ 0, & \text{其它.} \end{cases} \quad (5.40)$$

这时, 冲激响应在长度上是有限的, 也即在某一有限区间之外为零. 因此这类系统就称为有限冲激响应(FIR)系统. 应当注意到, 对 FIR 系统而言, 式(5.16)的差分方程与卷积和是一致的. 即

$$y[n] = \sum_{k=0}^M b_k x[n-k]. \quad (5.41)$$

例 5.6 给出一个 FIR 系统的简单例子.

例 5.6

考虑一个冲激响应, 它是例 5.5 冲激响应的截断, 为

$$h[n] = \begin{cases} a^n, & 0 \leq n \leq M, \\ 0, & \text{其它.} \end{cases}$$

那么,系统函数就是

$$H(z) = \sum_{n=0}^M a^n z^{-n} = \frac{1 - a^{M+1} z^{-M-1}}{1 - az^{-1}}. \quad (5.42)$$

因为分子的零点是在

$$z_k = ae^{j2\pi k/(M+1)}, \quad k = 0, 1, \dots, M, \quad (5.43)$$

式中 a 假设为正实数,在 $z=a$ 的极点就被一个零点所抵消. 当 $M=7$ 时,零极点图如图 5.3 所示.

该线性时不变系统的输入和输出所满足的差分方程就是离散卷积

$$y[n] = \sum_{k=0}^M a^k x[n-k]. \quad (5.44)$$

然而,由式(5.42)可推得输入和输出也满足下列差分方程

$$y[n] - ay[n-1] = x[n] - a^{M+1} x[n-M-1]. \quad (5.45)$$

这两个等效的差分方程由式(5.42)中 $H(z)$ 的两种等效形式产生.

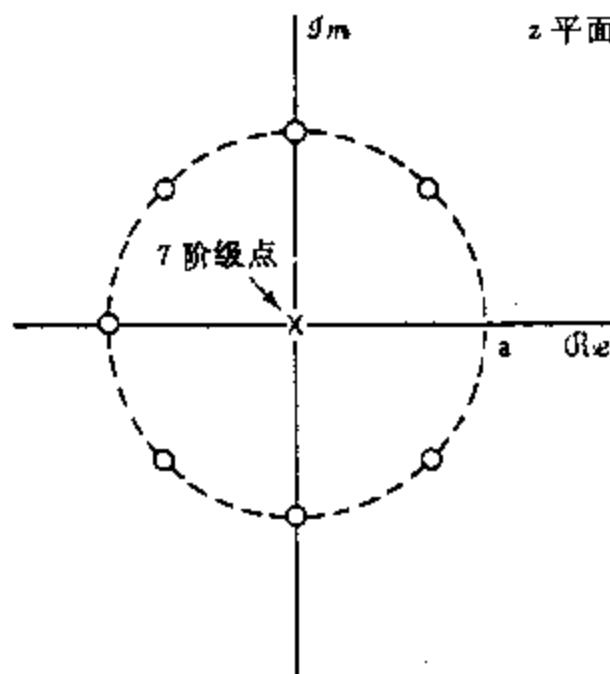


图 5.3 例 5.6 的零极点图.

5.3 有理系统函数的频率响应

如果一个稳定的线性时不变系统有一个有理的系统函数(即若其输入和输出满足式(5.18)的差分方程),那么,它的频率响应(系统函数在单位圆上的求值)就具有如下形式

$$H(e^{j\omega}) = \frac{\sum_{k=0}^M b_k e^{-jk\omega}}{\sum_{k=0}^N a_k e^{-jk\omega}}. \quad (5.46)$$

这就是说, $H(e^{j\omega})$ 是变量 $e^{-j\omega}$ 的多项式之比.

为了确定与这样的系统频率响应有关的幅度、相位和群延迟,将 $H(e^{j\omega})$ 用 $H(z)$ 的零极点来表示是很有用的. 将 $z=e^{j\omega}$ 代入式(5.19)就得到如下表达式

$$H(e^{j\omega}) = \left(\frac{b_0}{a_0} \right) \frac{\prod_{k=1}^M (1 - c_k e^{-j\omega})}{\prod_{k=1}^N (1 - d_k e^{-j\omega})}. \quad (5.47)$$

由式(5.47)可得 $|H(e^{j\omega})|$ 为

$$|H(e^{j\omega})| = \left| \frac{b_0}{a_0} \right| \frac{\prod_{k=1}^M |1 - c_k e^{-j\omega}|}{\prod_{k=1}^N |1 - d_k e^{-j\omega}|}. \quad (5.48)$$

有时考虑系统函数的幅度平方而不是幅度会更方便些. 幅度平方函数是

$$|H(e^{j\omega})|^2 = H(e^{j\omega})H^*(e^{j\omega}),$$

式中 * 记作复数共轭. 对于以式(5.47)表示的 $H(e^{j\omega})$ 就有

$$|H(e^{j\omega})|^2 = \left(\frac{b_0}{a_0}\right)^2 \frac{\prod_{k=1}^M (1 - c_k e^{-j\omega})(1 - c_k^* e^{j\omega})}{\prod_{k=1}^N (1 - d_k e^{-j\omega})(1 - d_k^* e^{j\omega})}. \quad (5.49)$$

从式(5.48)可见, $|H(e^{j\omega})|$ 就是 $H(z)$ 中全部零点因式在单位圆上求值的幅度乘积被全部极点因式在单位圆上求值的幅度乘积所除. 在实际应用中常常把这些乘积变换为相应项的和, 这可以用 $20\log_{10}|H(e^{j\omega})|$ 代替 $|H(e^{j\omega})|$ 来完成. 式(5.48)的对数式是

$$20\log_{10}|H(e^{j\omega})| = 20\log_{10}\left|\frac{b_0}{a_0}\right| + \sum_{k=1}^M 20\log_{10}|1 - c_k e^{-j\omega}| - \sum_{k=1}^N 20\log_{10}|1 - d_k e^{-j\omega}|. \quad (5.50)$$

函数 $20\log_{10}|H(e^{j\omega})|$ 称为 $H(e^{j\omega})$ 的对数幅度, 以分贝(dB)表示; 有时这个量又称作以 dB 计的增益, 即

$$\text{增益}(dB) = 20\log_{10}|H(e^{j\omega})|. \quad (5.51)$$

注意: 0dB 相应于 $|H(e^{j\omega})|=1$, 而 $|H(e^{j\omega})|=10^n$ 就是 $20n$ dB. 另外, $|H(e^{j\omega})|=2^n$ 近似为 $6n$ dB. 当 $|H(e^{j\omega})|<1$ 时, $20\log_{10}|H(e^{j\omega})|$ 是负的. 例如, 在频率选择性滤波器的阻带内就是这种情况. 实际上常用情况是定义

$$\begin{aligned} \text{衰减}(dB) &= -20\log_{10}|H(e^{j\omega})| \\ &= -\text{增益}(dB) \end{aligned} \quad (5.52)$$

因此, 当幅度响应小于 1 时, 衰减就是一个正数. 例如, 在某一频率衰减为 60dB 指的是在该频率 $|H(e^{j\omega})|=0.001$.

将式(5.4a)的幅度以分贝表示的另一个优点是在该式两边取对数后就完成

$$20\log_{10}|Y(e^{j\omega})| = 20\log_{10}|H(e^{j\omega})| + 20\log_{10}|X(e^{j\omega})|, \quad (5.53)$$

所以, 以 dB 计的频率响应与输入傅里叶变换幅度的对数相加就得到输出傅里叶变换幅度的对数. 如果用式(5.53)代替式(5.4a), 那么幅度和相位两者的效果都是相加的.

有理系统函数的相位响应有

$$\angle H(e^{j\omega}) = \angle\left[\frac{b_0}{a_0}\right] + \sum_{k=1}^M \angle[1 - c_k e^{-j\omega}] - \sum_{k=1}^N \angle[1 - d_k e^{-j\omega}]. \quad (5.54)$$

与式(5.50)一样, 零点因式提供的是加号, 而极点因式提供的则是减号.

有理系统函数的群延迟是

$$\text{grd}[H(e^{j\omega})] = \sum_{k=1}^N \frac{d}{d\omega}(\arg[1 - d_k e^{-j\omega}]) - \sum_{k=1}^M \frac{d}{d\omega}(\arg[1 - c_k e^{-j\omega}]), \quad (5.55)$$

或者

$$\text{grd}[H(e^{j\omega})] = \sum_{k=1}^N \frac{|d_k|^2 - \Re\{d_k e^{-j\omega}\}}{1 + |d_k|^2 - 2\Re\{d_k e^{-j\omega}\}} - \sum_{k=1}^M \frac{|c_k|^2 - \Re\{c_k e^{-j\omega}\}}{1 + |c_k|^2 - 2\Re\{c_k e^{-j\omega}\}}. \quad (5.56)$$

按照式(5.54)所写出的这些项中的每一相位都是不确定的. 因为对每个 ω 值来说, 每一项加上 2π 的任何整倍数都不会改变复数的值. 但是, 群延迟的表示式则只涉及连续

相位的微分.

当计算复数的相角时,可在计算器上用反正切键,或者用计算机的库函数,就可以得到相角的主值. $H(e^{j\omega})$ 相位的主值记为 $\text{ARG}[H(e^{j\omega})]$, 这里

$$-\pi < \text{ARG}[H(e^{j\omega})] \leq \pi. \quad (5.57)$$

其它任何可给出函数 $H(e^{j\omega})$ 的正确复数值的相角都能用主值表示为

$$\angle H(e^{j\omega}) = \text{ARG}[H(e^{j\omega})] + 2\pi r(\omega), \quad (5.58)$$

式中 $r(\omega)$ 是某个正的或负的整数, 对每个 ω 值 $r(\omega)$ 可以是不相同的. 类似地, 在计算式 (5.54) 中任何一项时, 一般都是求主值的.

如果用主值来计算作为 ω 函数的相位响应, 那么 $\text{ARG}[H(e^{j\omega})]$ 就可能是一个不连续函数. 由于取主值的关系所带来的不连续性将有 2π 弧度的跳变. 图 5.4(a) 说明的就是连续相位函数 $\arg[H(e^{j\omega})]$ 及其在 $0 \leq \omega \leq \pi$ 范围内所画出的主值 $\text{ARG}[H(e^{j\omega})]$. 图 5.4(a) 所画的相位函数超出 $-\pi$ 到 $+\pi$ 的范围, 而图 5.4(b) 所示的主值则有 2π 的跳变. 这是由于为了将相位曲线移到主值范围, 就必须在某个区域减去 2π 的整倍数所造成的. 图 5.4(c) 示出对应式(5.58)中的 $r(\omega)$ 值.

现在考虑当用主值来计算式(5.54)中对相位的单个贡献时, 不难看出

$$\begin{aligned} \text{ARG}[H(e^{j\omega})] = & \text{ARG}\left[\frac{b_0}{a_0}\right] + \sum_{k=1}^M \text{ARG}[1 - c_k e^{-j\omega}] - \sum_{k=1}^N \text{ARG}[1 - d_k e^{-j\omega}] \\ & + 2\pi r(\omega), \end{aligned} \quad (5.59)$$

式中 r 是某一整数, 在每个 ω 值可能都不相同. 一般来说, 由于相角和的主值并不等于单个相角主值的和, 所以就要求有最后一项 $2\pi r$. 这一点在第十二章讨论倒谱分析和同态系统理论中具有很大的重要性. 然而, 在画相位函数时这不会引起什么问题, 因为可以用主值来计算每个零点和极点的相位函数, 然后加减适当的 2π 整数倍就可以求得总相位函数的主值, 这就如同式(5.59)所指出的那样.

相位函数的主值可以用式(5.59)计算. 另外, 可以用关系

$$\text{ARG}[H(e^{j\omega})] = \arctan\left[\frac{H_I(e^{j\omega})}{H_R(e^{j\omega})}\right], \quad (5.60)$$

式中 $H_R(e^{j\omega})$ 和 $H_I(e^{j\omega})$ 分别是 $H(e^{j\omega})$ 的实部和虚部. 然而, 当计算式(5.15)群延迟函数时, 却是连续相位函数的导数, 即 $\arg[H(e^{j\omega})]$ 的导数, 这时关心的是

$$\text{grd}[H(e^{j\omega})] = -\frac{d}{d\omega}\{\arg[H(e^{j\omega})]\}. \quad (5.61)$$

除去相应于 $+\pi$ 和 $-\pi$ 之间跳变的 $\text{ARG}[H(e^{j\omega})]$ 不连续点之外, 有

$$\frac{d}{d\omega}\{\arg[H(e^{j\omega})]\} = \frac{d}{d\omega}\{\text{ARG}[H(e^{j\omega})]\}. \quad (5.62)$$

因此, 除去不连续点, 群延迟可以从主值的微分求得. 同样, 群延迟也能用不确定的相位 $\angle H(e^{j\omega})$ 表示为

$$\text{grd}[H(e^{j\omega})] = -\frac{d}{d\omega}[\angle H(e^{j\omega})]. \quad (5.63)$$

不过, 式(5.63)应理解为不考虑 $\angle H(e^{j\omega})$ 中 2π 不连续点处所引起的冲激.

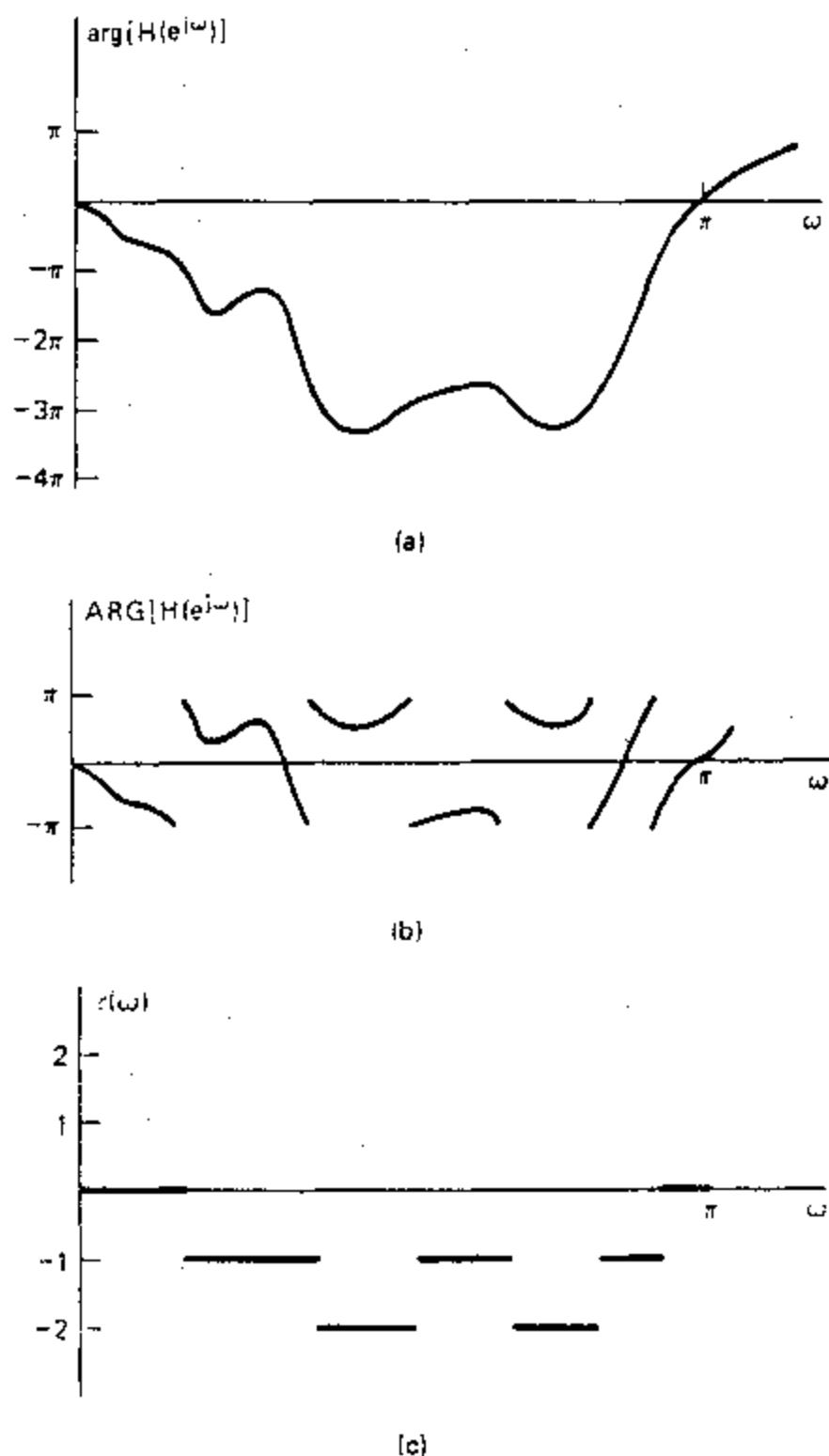


图 5.4 (a) 某一系统函数在单位圆上求值的连续相位曲线. (b) 相位曲线的主值.
(c) 为得到 $\arg [H(e^{j\omega})]$, 需要在 $\text{ARG}[H(e^{j\omega})]$ 上加的 2π 倍数.

5.3.1 单个零点或极点的频率响应

式(5.50)、式(5.34)以及式(5.56)分别代表系统函数用 dB 表示的幅度、相位和群延迟, 这些都以系统函数每个零极点对它们做出的贡献之和来表示的. 为了获得对具有有理系统函数的、稳定的线性时不变系统频率响应的性质有更透彻的认识, 首先值得考虑一下单一因式 $(1-r^{j\theta}e^{-j\phi})$ 的性质, 这里 r 和 θ 分别为极点或零点矢量在 z 平面的矢径和相角. 该因式可以是在 z 平面上半径为 r 、相角为 θ 的一个极点, 或者是一个零点所构成的典型项.

该因式的幅度平方是

$$|1 - re^{j\theta}e^{-j\omega}|^2 = (1 - re^{j\theta}e^{-j\omega})(1 - re^{-j\theta}e^{j\omega}) = 1 + r^2 - 2r \cos(\omega - \theta). \quad (5.64)$$

因为对任意复数 C , 有

$$10\log_{10}|C|^2 = 20\log_{10}|C|,$$

以 dB 计的对数幅度就是

$$20\log_{10}|1 - re^{j\theta}e^{-j\omega}| = 10\log_{10}[1 + r^2 - 2r \cos(\omega - \theta)]. \quad (5.65)$$

该因式的相位是

$$\text{ARG}[1 - re^{j\theta}e^{-j\omega}] = \arctan\left[\frac{r \sin(\omega - \theta)}{1 - r \cos(\omega - \theta)}\right]. \quad (5.66)$$

将式(5.66)右边微分(除不连续点外)就得到该因式的群延迟为

$$\text{grd}[1 - re^{j\theta}e^{-j\omega}] = \frac{r^2 - r \cos(\omega - \theta)}{1 + r^2 - 2r \cos(\omega - \theta)} = \frac{r^2 - r \cos(\omega - \theta)}{|1 - re^{j\theta}e^{-j\omega}|^2}. \quad (5.67)$$

式(5.64)到式(5.67)所表示的函数当然都是 ω 的周期函数, 周期为 2π . 图 5.5(a)示出在 $r = 0.9$, 对几个不同的 θ 值, 在一个周期($0 \leq \omega < 2\pi$)内式(5.65)作为 ω 的函数的变化. 可以注意到, 该函数在 $\omega = \theta$ 附近急剧下陷; 同时也可以从式(5.65)注意到, 当 r 固定不变时, 对数幅度就是 $(\omega - \theta)$ 的函数, 所以随 θ 改变, 特性只是在频率轴上的平移. 一般来说, 式(5.65)的最大值出现在 $(\omega - \theta) = \pi$ 处, 且为

$$10\log_{10}(1 + r^2 + 2r) = 20\log_{10}(1 + r),$$

对于 $r = 0.9$, 该值等于 5.57dB. 相类似, 式(5.65)的最小值出现在 $\omega = \theta$ 上, 且是

$$10\log_{10}(1 + r^2 - 2r) = 20\log_{10}|1 - r|,$$

对于 $r = 0.9$, 其值为 -20dB. 式(5.64)幅度平方函数除了它有一个宽得多的相对值范围外, 也会有类似于图 5.5(a)那样的形状. 所以它的图在同一 r 值下要更为尖锐些.

图 5.5(b)示出式(5.66)作为 ω 的函数在 $r = 0.9$ 和几个 θ 值下的相位函数特性. 应该注意到: 在 $\omega = \theta$ 处, 相位是零, 且对于一定的 r , 该相位函数只是简单地随 θ 不同而平移. 图 5.5(c)是在同样的 r 和 θ 情况下, 式(5.67)的群延迟函数. 可以注意到, 相位特性在 $\omega = \theta$ 附近大的正斜率就对应于 $\omega = \theta$ 处群延迟函数大的负峰值.

一种简单的几何图形对直接从零极点近似画出频率响应函数往往是很有用的. 该方法是根据如下事实: 频率响应相当于系统函数在 z 平面单位圆上的求值; 以及每个极点和零点因式的复数值都能用在 z 平面上从极点或零点到单位圆上某一点的矢量来表示. 首先用下面一阶系统函数来说明这一过程.

$$H(z) = (1 - re^{j\theta}z^{-1}) = \frac{(z - re^{j\theta})}{z}, \quad r < 1. \quad (5.68)$$

在 5.3.2 节再考虑高阶的例子. 该因式有一个极点在 $z = 0$ 和一个零点在 $z = re^{j\theta}$, 如图 5.6 所示. 在该图上指出的分别是代表复数 $e^{j\omega}$, $re^{j\theta}$ 和 $(e^{j\omega} - re^{j\theta})$ 的三个矢量 v_1 , v_2 和 $v_3 = v_1 - v_2$. 利用这些矢量, 复数

$$\frac{e^{j\omega} - re^{j\theta}}{e^{j\omega}}$$

的幅度就是矢量 v_3 和 v_1 的幅度之比, 即

$$|1 - re^{j\theta}e^{-j\omega}| = \left| \frac{e^{j\omega} - re^{j\theta}}{e^{j\omega}} \right| = \frac{|v_3|}{|v_1|}, \quad (5.69)$$

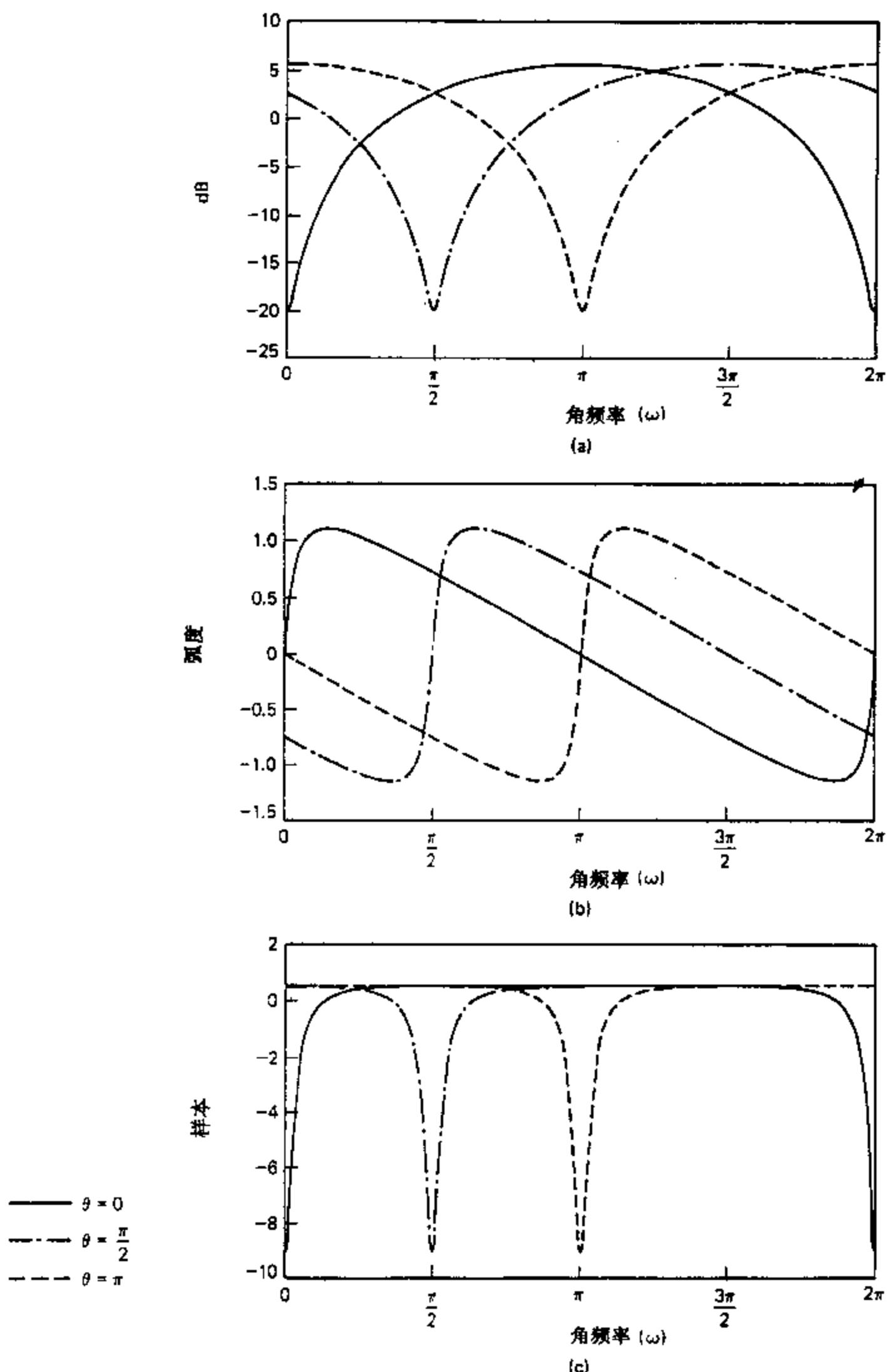


图 5.5 $r=0.9$ 和三种 θ 值时, 单一零点的频率响应. (a) 对数幅度. (b) 相位. (c) 群延迟.

或者, 因为 $|v_1| = 1$, 式(5.69)就正好等于 $|v_3|$. 对应的相位是

$$\begin{aligned}\text{arctan}(1 - re^{j\theta}e^{-j\omega}) &= \text{arctan}(e^{j\omega} - re^{j\theta}) - \text{arctan}(e^{j\omega}) = \text{arctan}(v_3) - \text{arctan}(v_1) \\ &= \phi_3 - \phi_1 = \phi_3 - \omega.\end{aligned}\quad (5.70)$$

一般就将从一个零点到单位圆这样一个矢量 v_3 称为零点矢量, 而从极点到单位圆的矢量称为极点矢量. 因此, 某单个零点因式 $(1 - re^{j\theta}z^{-1})$ 对于在频率 ω 处幅度函数的贡献就是从该零点到单位圆上 $z = e^{j\omega}$ 点的零点矢量 v_3 的长度, 当 $\omega = \theta$ 时, 该矢量有最小长度. 这就是图 5.5(a) 在 $\omega = \theta$ 处幅度函数造成尖锐下降的原因. 注意到从 $z = 0$ 的极点到 $z = e^{j\omega}$ 的极点矢量 v_1 总是长度为 1, 因此它对幅度响应没有任何影响. 式(5.70)说明相位函数等于从零点 $re^{j\theta}$ 到 $z = e^{j\omega}$ 点的零点矢量的相角与从极点 $z = 0$ 到 $z = e^{j\omega}$ 点的极点矢量的相角之差.

图 5.7 示出在 $\theta = \pi$ 情况下的零极点图, 图 5.6 一阶系统函数在单位圆上求值的 z 平面矢量, 并且对于两个不同的 ω 值画出了极点矢量 v_1 和零点矢量 v_3 . 很清楚, 矢量 v_3 的幅度随 ω 从零开始增加而减小, 直到 $\omega = \pi$ 达到最小值, 这就形成了图 5.3(a) 对应于 $\theta = \pi$ 时曲线的形状. 图 5.7 中矢量 v_3 的相角在最初比 ω 增加得慢一些, 所以相位曲线由负的开始, 然后当 ω 向 π 接近时, v_3 矢量的相角比 ω 增加要快得多, 这就形成了相位函数在 $\omega = \pi$ 附近有陡峭的正斜率. 当 $\omega = \pi$ 时, 矢量 v_3 和 v_1 相等, 所以净相位为零.

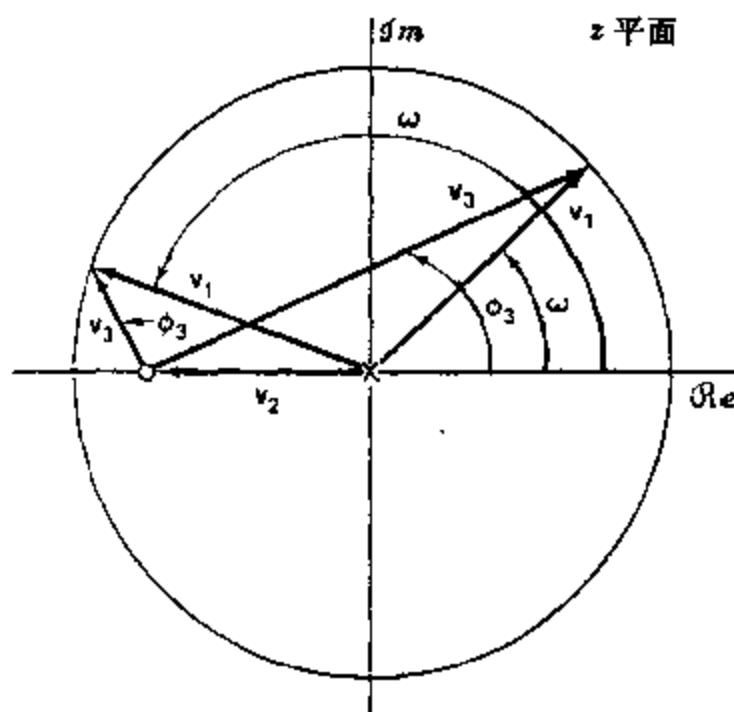
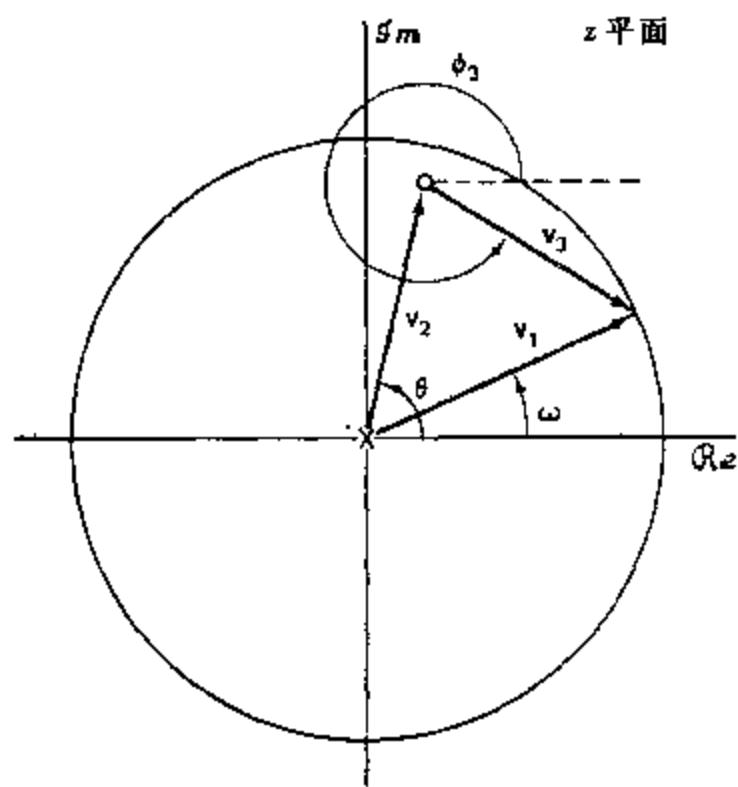


图 5.7 当 $\theta = \pi, r < 1$ 时, 一阶系统函数在单位圆上求值的 z 平面矢量.
对两个不同的 ω 值示出极点矢量 v_1 和零点矢量 v_3 .

一个单个因式 $(1-re^{j\theta}e^{-j\omega})$ 对频率响应的贡献依赖于 r 的关系示于图 5.8. 该图是针对 $\theta=\pi$ 和几个不同的 r 值作出的. 图 5.8(a)的对数幅度函数随着 r 接近于 1 而下降得更为陡峭; 的确, 随着 $r \rightarrow 1$, 在 $\omega=\theta$ 处以 dB 计的幅度趋向于 $-\infty$. 图 5.8(b)画出的相位函数在 $\omega=\theta$ 附近有正的斜率, 且随着 $r \rightarrow 1$ 而变为无穷大. 因此, 对于 $r=1$ 相位函数在 $\omega=\theta$ 有一个 π 弧度的跳变, 是不连续的. 远离 $\omega=\theta$ 处, 相位函数的斜率是负的. 因为群延迟是相位曲线斜率的负值, 所以群延迟在 $\omega=\theta$ 附近是负的, 并且随 $r \rightarrow 1$ 而急剧下降. 图 5.8(c)表明, 随着频率远离 $\omega=\theta$, 群延迟就变成正的, 而且相对平坦. 当 $r=1$ 时, 除 $\omega=\theta$ 这一点外, 群延迟处处都是 $1/2$, 而在 $\omega=\theta$ 这一点群延迟无定义.

位于单位圆上 $z=-1$ 的零点的几何图形如图 5.9 所示. 图中画出了在 $\omega=(\pi-\epsilon)$ 和 $\omega=(\pi+\epsilon)$ 两个不同频率的矢量图, 这里 ϵ 很小. 从该图可以看出两点: 首先当 ω 接近于零点矢量的相角($\epsilon \rightarrow 0$)时, 矢量 v_3 的长度趋近于零, 因此对频率响应的贡献就是 $(-\infty \text{dB})$; 第二, 当 ω 从 $(\pi-\epsilon)$ 到 $(\pi+\epsilon)$ 穿过时, 矢量 v_3 的相角突变 π 弧度.

图 5.5 和图 5.8 都局限于 $r \leq 1$. 如果 $r > 1$, 对数幅度函数的特性与 $r < 1$ 时相类似, 也就是说, 随着 $r \rightarrow 1$, 特性下降更为陡峭, 如图 5.10(a)所示. 图 5.10(b)的相位函数表明对全部 $r > 1$ 的值, 在 $\omega=\theta$ 处都有 2π 弧度的跳变. 产生这一跳变的原因可以从图 5.11 看出, 图中示出对 $\omega=(\pi-\epsilon)$ 和 $\omega=(\pi+\epsilon)$ 时的各个矢量关系. 可以看到, 极点矢量 v_1 的相角就为 ω , 且连续从 $\omega=0$ 变化到 $\omega=2\pi$. 图 5.11 中零点矢量 v_3 的相角用 ϕ_3 标出. 如果 ϕ_3 以逆时针为正测定的话, 那么由图 5.11 可见, 当 ω 从 $(\pi-\epsilon)$ 到 $(\pi+\epsilon)$ 穿过时, ϕ_3 从零跳变到 2π 弧度. 2π 弧度的跳变在图 5.10(b)中是显而易见的. 这个 2π 弧度的跳变也能解释为是由于计算主值相位函数的缘故. 也可以把 ϕ_3 在 $\omega=(\pi-\epsilon)$ 时看成是正的, 而在 $\omega=(\pi+\epsilon)$ 时看成是负的. 这样理解的话, 相角在 $\omega=\theta$ 处就连续的了. 然而, 因为因式 $(1-re^{j\theta}e^{-j\omega})$ 总的相角在 $\omega=(\pi+\epsilon)$ 处小于 $-\pi$ 弧度, 所以主值也就应如图 5.10(b)所示了.

图 5.10(b)的相位曲线全部为负斜率. 因此群延迟函数在 $r > 1$ 时, 对全部 ω 都为正. 这一点从式(5.67)当 $r > 1$ 时也很容易看出.

上述讨论和图 5.5、图 5.8 及图 5.10 全部是关于单个因式 $(1-re^{j\theta}e^{-j\omega})$ 的讨论. 若该因式代表的是 $H(z)$ 的一个零点, 那么图 5.5、图 5.8 和图 5.10 对频率响应的贡献均以正的代数符号给出; 若该因式代表的是 $H(z)$ 的一个极点, 那么全部将以相反的符号给出. 因此, 极点 $z=e^{j\omega}$ 的贡献就是图 5.5 和图 5.8 中曲线的负值. 这样, 在 $\omega=\theta$ 附近就不是朝零下降($-\infty \text{dB}$), 而是幅度函数出现峰值. 曲线依赖于 r 的关系和零点时是一样的, 也即 r 愈靠近于 1, 对幅度函数的贡献峰值就愈突出. 当然, 对于稳定和因果的系统而言, 不会有极点在单位圆以外, 也即 r 总是小于 1 的.

5.3.2 多重零极点的例子

这一节将用 5.3.1 节的结果来说明如何确定有理系统函数的系统频率响应.

例 5.7

考虑二阶系统

$$H(z) = \frac{1}{(1-re^{j\theta}z^{-1})(1-re^{-j\theta}z^{-1})} = \frac{1}{1-2r\cos\theta z^{-1}+r^2z^{-2}}. \quad (5.71)$$

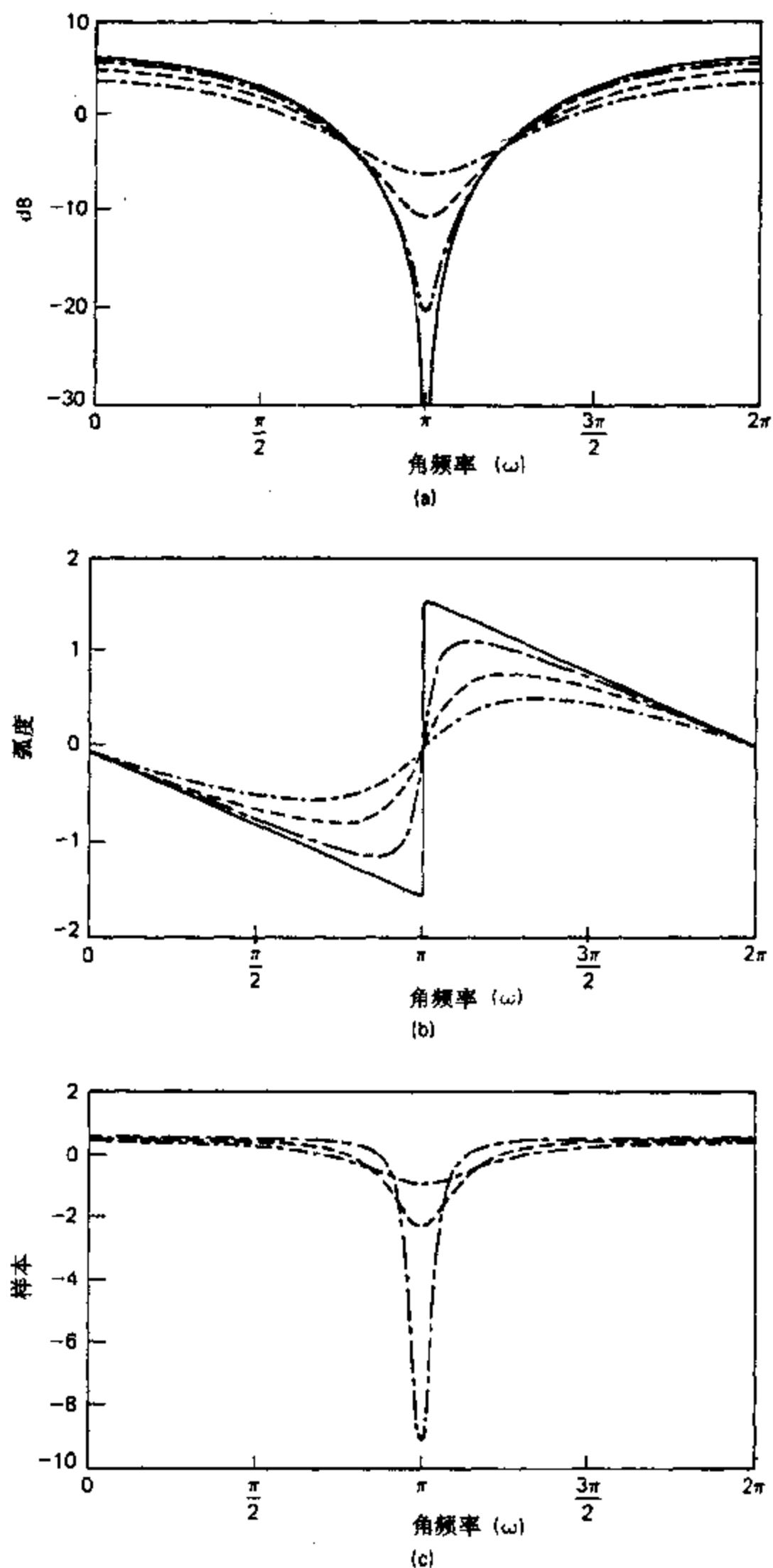


图 5.8 单个零点的频率响应, 其中 $\theta=\pi, r=1, 0.9, 0.7$ 和 0.5 . (a)对数幅度. (b)相位.
(c)群延迟($r=0.9, 0.7$ 和 0.5).

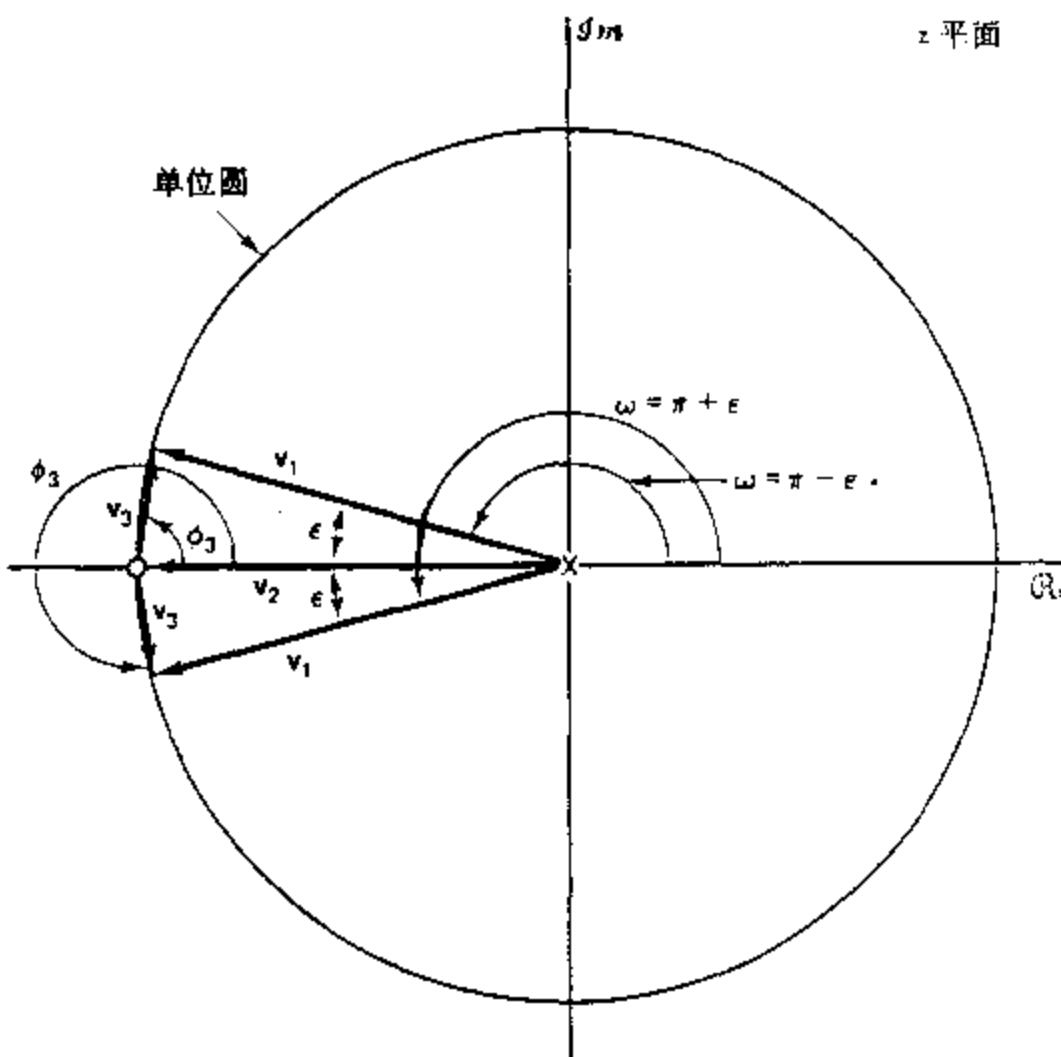


图 5.9 $z=-1$ 零点在靠近 π 的两个不同频率处 ($\omega=\pi-\epsilon$ 和 $\omega=\pi+\epsilon$) 的 z 平面矢量.

该系统的输入输出满足差分方程

$$y[n] - 2r\cos\theta y[n-1] + r^2 y[n-2] = x[n].$$

利用部分分式展开, 具有这个系统函数的因果系统的冲激响应可以证明是

$$h[n] = \frac{r^n \sin[\theta(n+1)]}{\sin\theta} u[n]. \quad (5.72)$$

式(5.71)的系统函数有一对极点在 $z=re^{j\theta}$ 和其共轭的 $z=re^{-j\theta}$, 在 $z=0$ 有二阶零点.

图 5.12 示出其零极点图. 由 5.3.1 节的讨论有

$$\begin{aligned} 20\log_{10}|H(e^{j\omega})| &= -10\log_{10}[1+r^2 - 2r\cos(\omega-\theta)] \\ &\quad - 10\log_{10}[1+r^2 - 2r\cos(\omega+\theta)] \end{aligned} \quad (5.73a)$$

和

$$\angle H(e^{j\omega}) = -\arctan\left[\frac{r\sin(\omega-\theta)}{1-r\cos(\omega-\theta)}\right] - \arctan\left[\frac{r\sin(\omega+\theta)}{1-r\cos(\omega+\theta)}\right] \quad (5.73b)$$

及

$$\text{grd}[H(e^{j\omega})] = -\frac{r^2 - r\cos(\omega-\theta)}{1+r^2 - 2r\cos(\omega-\theta)} - \frac{r^2 - r\cos(\omega+\theta)}{1+r^2 - 2r\cos(\omega+\theta)}. \quad (5.73c)$$

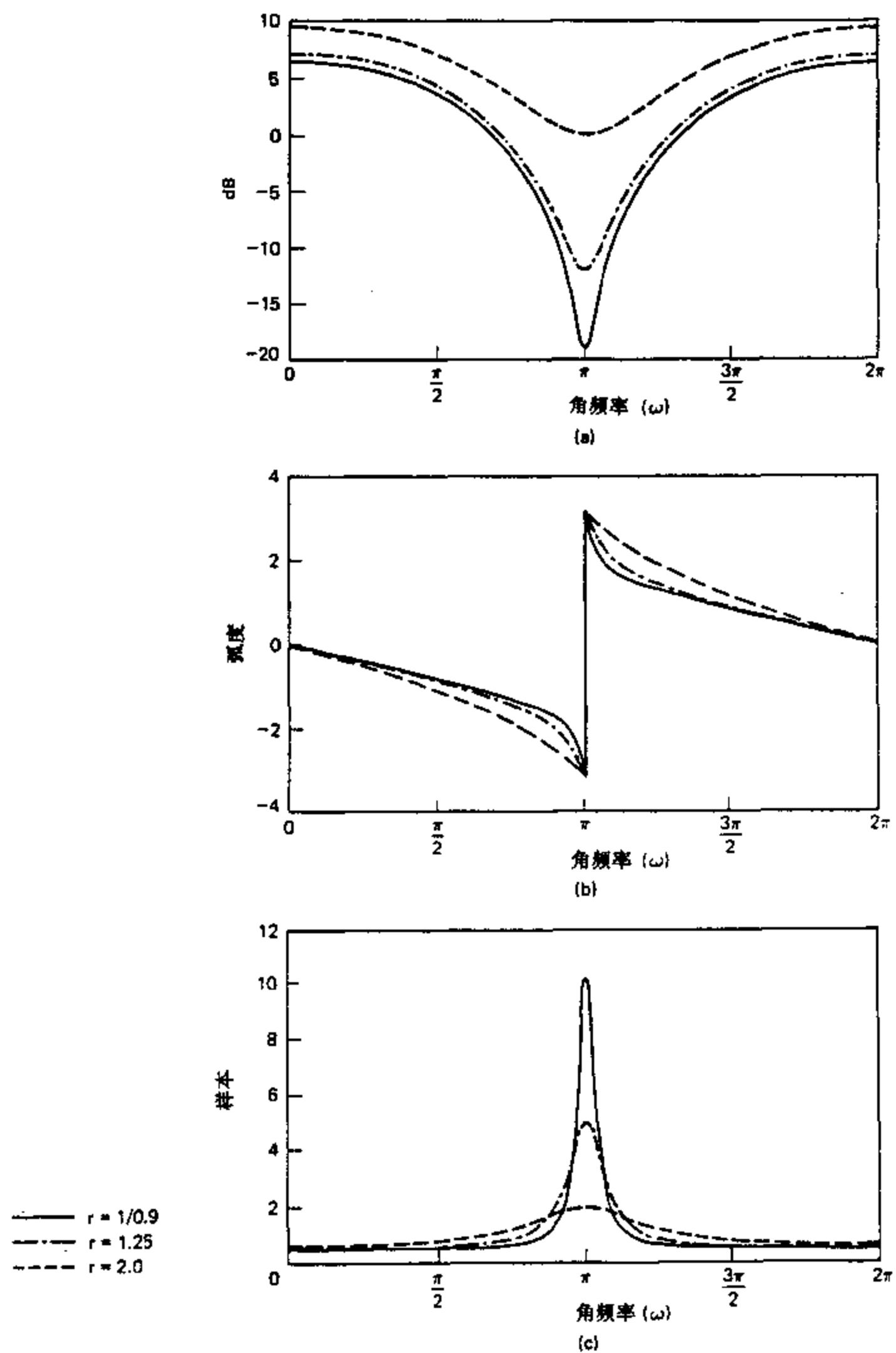


图 5.10 位于单位圆外的单个实零点的频率响应, 其中 $\theta=\pi, r=1/0.9, 1.25$ 和 2.
(a)对数幅度, (b)相位(主值), (c)群延迟.

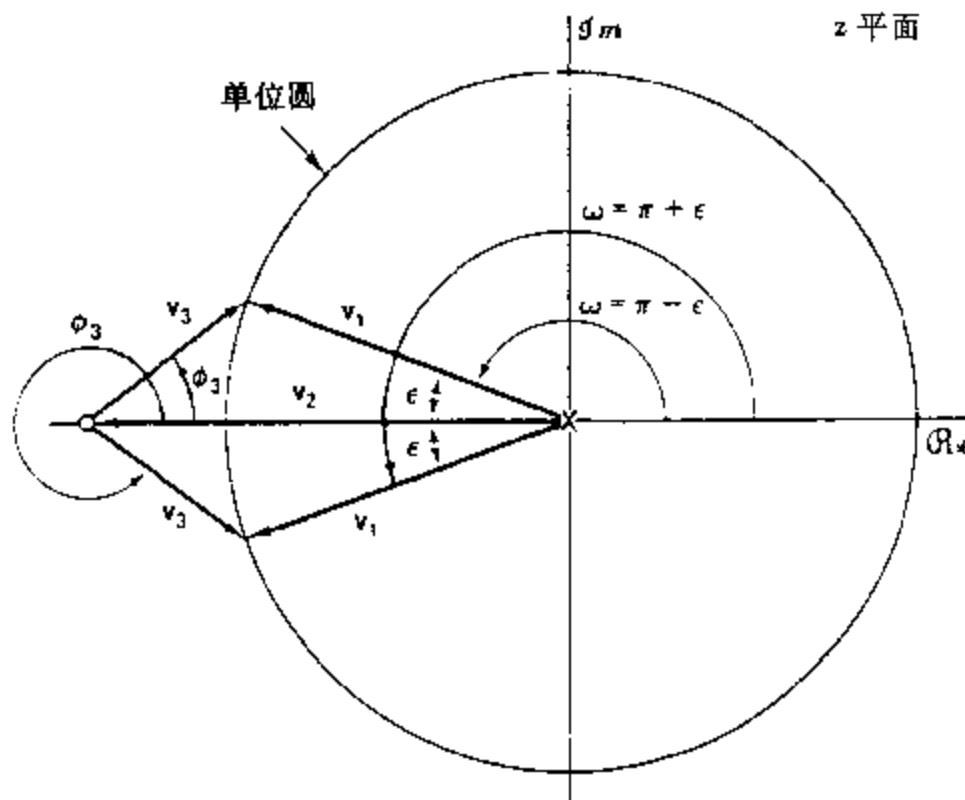


图 5.11 单个极点在单位圆上求值的 z 平面矢量, 其中 $\theta=\pi, r>1$.

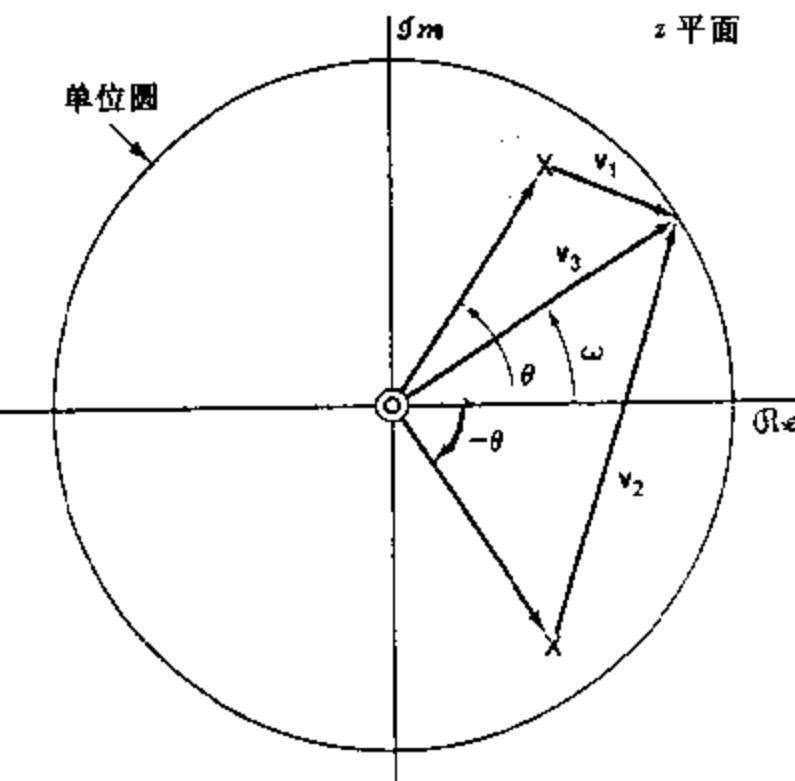
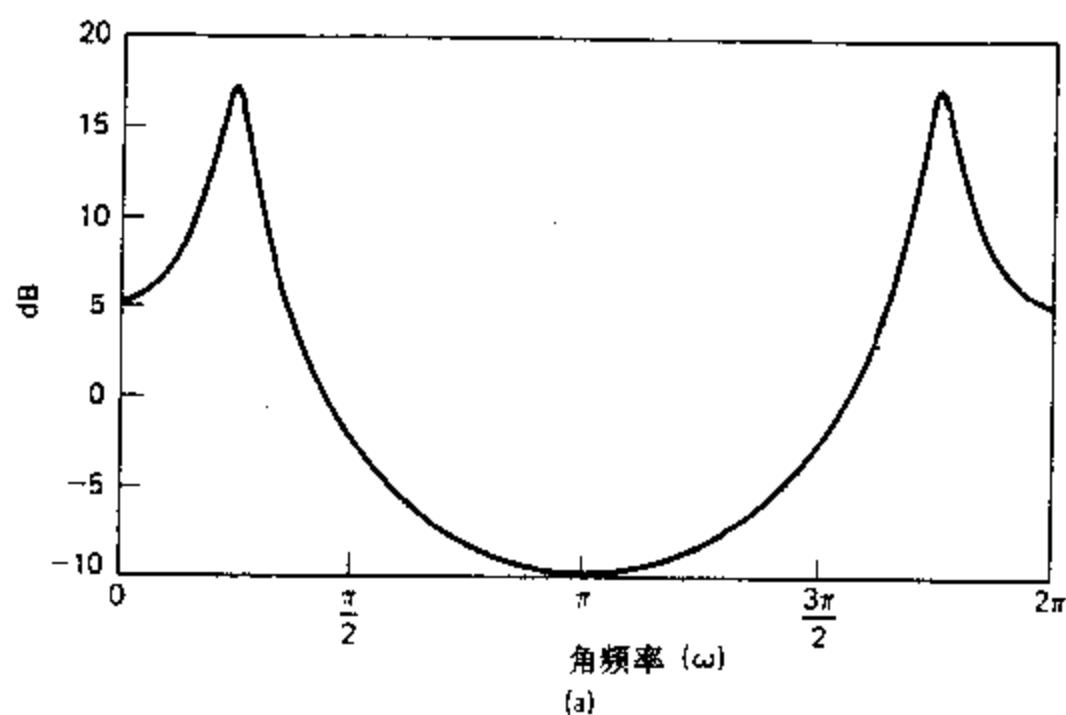


图 5.12 例 5.7 的零极点图.

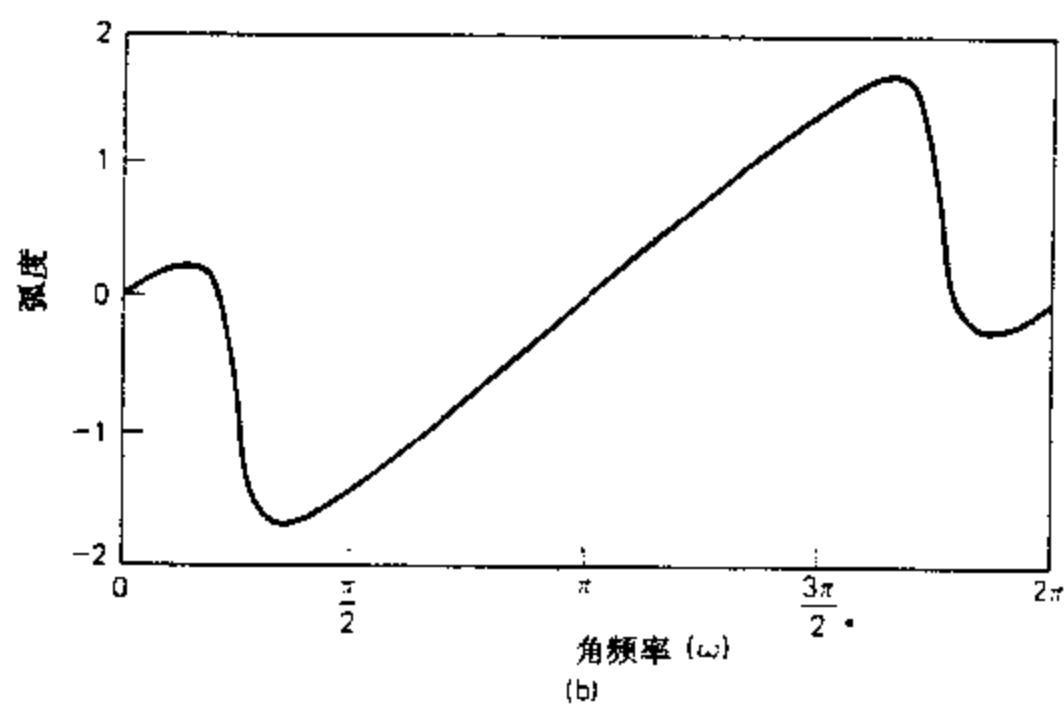
这些函数以 $r=0.9, \theta=\pi/4$ 为例都画在图 5.13 上. 图 5.12 表示出极点和零点矢量 \mathbf{v}_1 , \mathbf{v}_2 和 \mathbf{v}_3 . 幅度响应就是零点矢量长度(在本例中总是 1)的乘积被极点矢量长度乘积相除, 这就是

$$|H(e^{j\omega})| = \frac{|\mathbf{v}_3|^2}{|\mathbf{v}_1| \cdot |\mathbf{v}_2|} = \frac{1}{|\mathbf{v}_1| \cdot |\mathbf{v}_2|}. \quad (5.74)$$

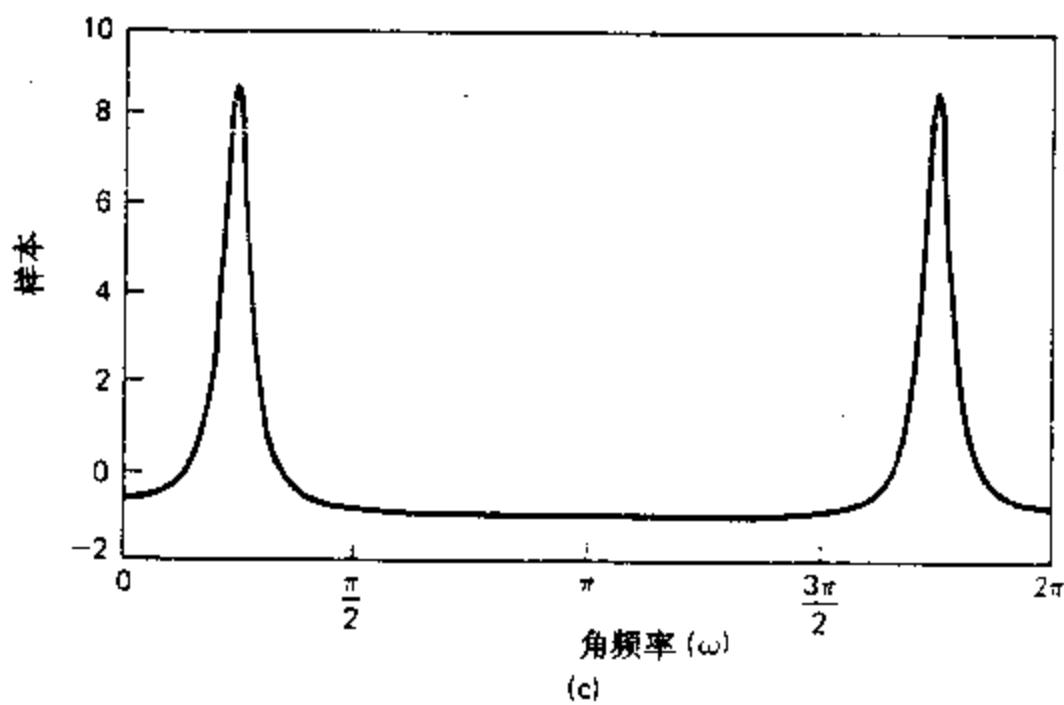
当 $\omega \approx \theta$ 时, 矢量 $\mathbf{v}_1 = e^{j\omega} - re^{j\theta}$ 的长度变得很小, 并且当 ω 在 θ 周围变化时, 变化很显著; 而矢量 $\mathbf{v}_2 = e^{j\omega} - re^{j\theta}$ 的长度当 ω 在 $\omega=\theta$ 周围变化时, 仅有微小的变化. 因此, 在相角 θ



(a)



(b)



(c)

图 5.13 例 5.7 中一对复数共轭极点的频率响应, 其中 $r=0.9$, $\theta=\pi/4$. (a) 对数幅度. (b) 相位. (c) 群延迟.

处的极点对 $\omega = \theta$ 附近的频率响应起主要作用, 如图 5.13 所明显看到的. 按照对称关系, 在 $-\theta$ 处的极点也就对 $\omega = -\theta$ 附近的频率响应起主要作用.

例 5.8

考虑一个 FIR 系统, 其冲激响应是

$$h[n] = \delta[n] - 2r\cos\theta\delta[n-1] + r^2\delta[n-2]. \quad (5.75)$$

系统函数为

$$H(z) = 1 - 2r\cos\theta z^{-1} + r^2 z^{-2}, \quad (5.76)$$

这就是例 5.7 系统函数的倒数. 因此对于这个 FIR 系统频率响应的各种曲线就是图 5.13 各图的负值. 应该注意, 在颠倒时, 极点和零点位置也互相交换.

例 5.9

举一个既有极点又有零点的系统函数的例子. 若考虑

$$H(z) = \frac{0.05634(1+z^{-1})(1-1.0166z^{-1}+z^{-2})}{(1-0.683z^{-1})(1-1.4461z^{-1}+0.7957z^{-2})}. \quad (5.77)$$

系统函数的零点是在

矢径	相角
1	π 弧度
1	± 1.0376 弧度 (59.45°)

极点在

矢径	相角
0.683	0
0.892	± 0.6257 弧度 (35.85°)

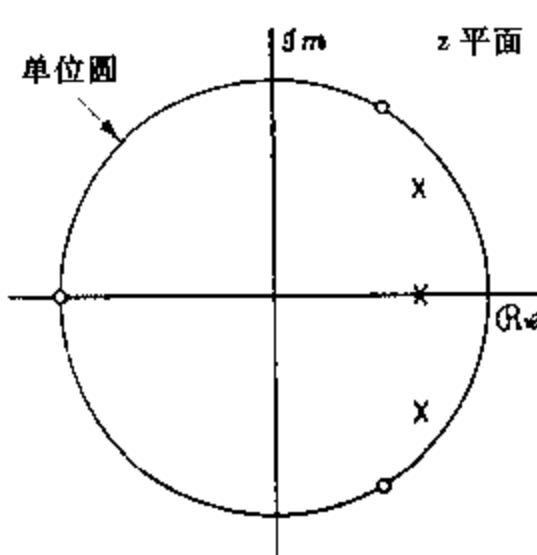
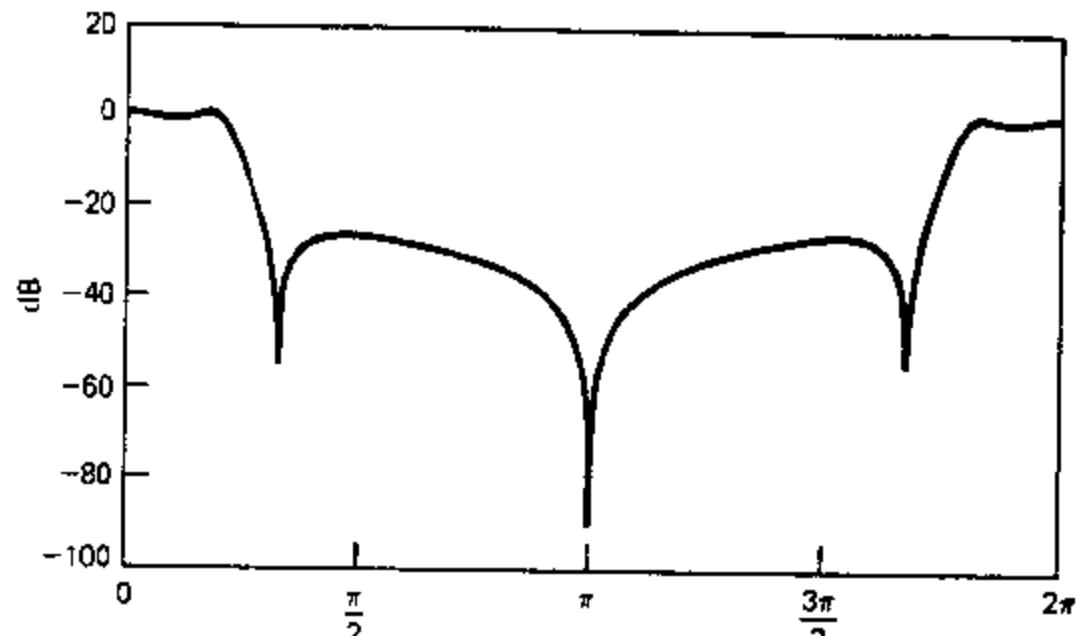


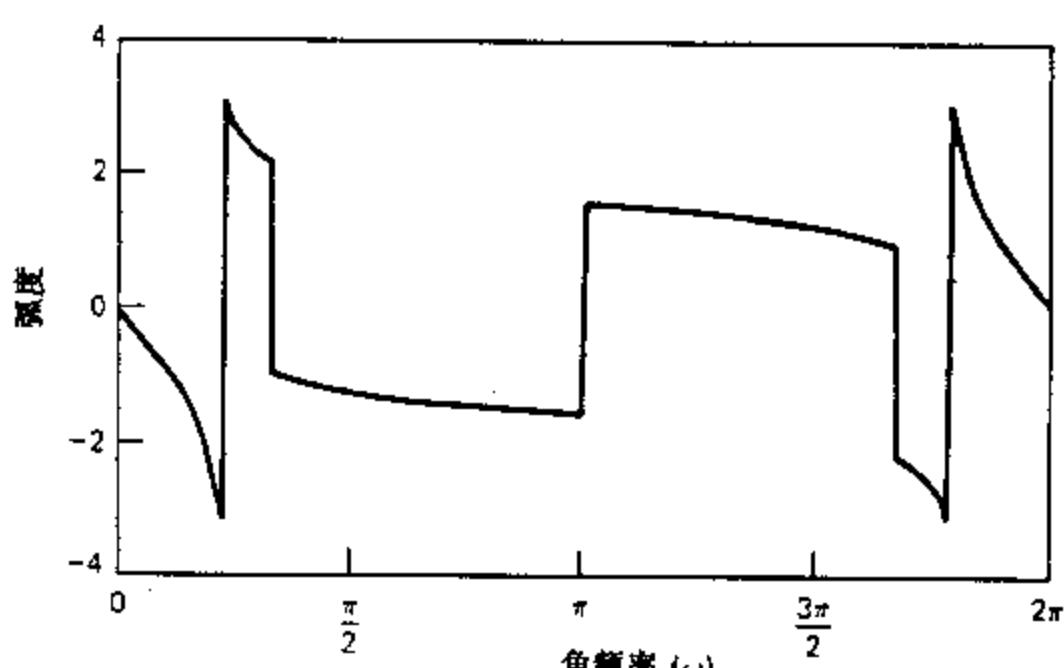
图 5.14 例 5.9 低通滤波器的零极点图.

该系统的零极点图示于图 5.14. 图 5.15 示出该系统的对数幅度、相位和群延迟特性. 位于单位圆上 $\omega = \pm 1.0376$ 和 π 的这些零点其作用是显而易见的. 然而, 极点的配置不是要在频率接近极点的相角时得到峰值响应, 而是要使得总的对数幅度特性在 $\omega = 0$ 到 $\omega = 0.2\pi$ (根据对称性, 也是从 $\omega = 1.8\pi$ 到 $\omega = 2\pi$) 的频带内保持接近 0dB, 然后很快下降, 并大约从 $\omega = 0.3\pi$ 到 1.7π 保持在 -25dB 以下. 该系统是一个由第七章讨论的逼近方法设计的低通滤波器. 这个例子也启示我们: 用极点构成幅度响应, 用零点来抑制幅度响应也能实现对频率选择性滤波器响应的有效近似.

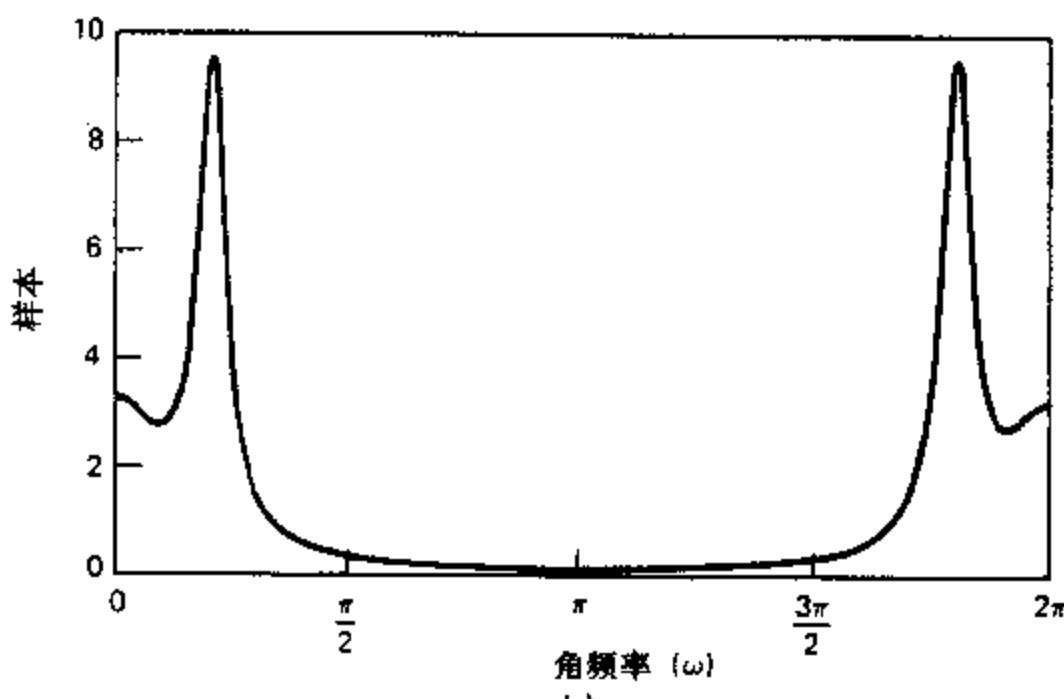
在本例中在画相位曲线时看到两种类型的不连续情况. 在 $\omega \approx 0.22\pi$ 处有一个 2π 的跳变, 这是由于作图时采用主值的关系. 在 $\omega = \pm 1.0376$ 和 $\omega = \pi$ 处, 有 π 的跳变, 这是由于单位圆上的零点造成的.



(a)



(b)



(c)

图 5.15 例 5.9 低通滤波器的频率响应。(a) 对数幅度。(b) 相位。(c) 群延迟。

5.4 幅度和相位特性之间的关系

一个线性时不变系统的频率响应就是冲激响应的傅里叶变换。一般来说，关于幅度特性的了解并没有给出任何有关相位的信息；反过来也是一样。然而，对于由线性常系数差分方程描述的系统，也即具有有理系统函数的系统，其幅度和相位特性之间有某种制约关系存在。特别是，正如在本节要讨论的，如果频率响应的幅度特性和零极点个数是已知的话，那么与其有关的相位特性仅有有限种选择。相仿，如果零极点个数和相位特性已知的话，那么除了一个幅度加权因子外，也仅有有限个幅度特性可供选取。再者，在称之为最小相位的限制下，频率响应的幅度特性唯一地决定了相位特性；而频率响应的相位特性除去一个幅度加权因子外也决定了幅度特性。

为了阐明在给定系统频率响应的幅度平方特性下，系统函数的可能选择，考虑将 $|H(e^{j\omega})|^2$ 表示成

$$\begin{aligned} |H(e^{j\omega})|^2 &= H(e^{j\omega})H^*(e^{j\omega}) \\ &= H(z)H^*(1/z^*)|_{z=e^{j\omega}}. \end{aligned} \quad (5.78)$$

由于将系统函数 $H(z)$ 限制为式(5.19)的有理形式，即

$$H(z) = \frac{b_0}{a_0} \frac{\prod_{k=1}^M (1 - c_k z^{-1})}{\prod_{k=1}^N (1 - d_k z^{-1})}, \quad (5.79)$$

那么，式(5.78)中 $H^*(1/z^*)$ 就是

$$H^*\left(\frac{1}{z^*}\right) = \frac{b_0}{a_0} \frac{\prod_{k=1}^M (1 - c_k^* z)}{\prod_{k=1}^N (1 - d_k^* z)}. \quad (5.80)$$

这里已假定 a_0, b_0 都是实数。因此式(5.78)就意味着该频率响应的幅度平方就是由下式给定的 z 变换 $C(z)$ 在单位圆上的求值

$$C(z) = H(z)H^*(1/z^*) \quad (5.81)$$

$$= \left(\frac{b_0}{a_0}\right)^2 \frac{\prod_{k=1}^M (1 - c_k z^{-1})(1 - c_k^* z)}{\prod_{k=1}^N (1 - d_k z^{-1})(1 - d_k^* z)}. \quad (5.82)$$

如果已知 $|H(e^{j\omega})|^2$ ，那么以 z 代替 $e^{j\omega}$ 就能构造出 $C(z)$ 。由 $C(z)$ 能推出全部可能的 $H(z)$ 。首先注意到，对于 $H(z)$ 的每个极点 d_k ，在 $C(z)$ 中就会有 d_k 和 $(d_k^*)^{-1}$ 的极点存在。类似地，对于 $H(z)$ 中每个零点 c_k ，在 $C(z)$ 中就有零点 c_k 和 $(c_k^*)^{-1}$ 存在。因此， $C(z)$ 的零极点是以共轭倒数对的形式出现的，每对中的一个与 $H(z)$ 相联系的，另一个则与 $H^*(1/z^*)$ 有关。再者，如果每对中的一个是在单位圆内的话，那么另一个（即共轭倒数）就一定在单位圆外。仅有的例外是这两个都在单位圆上，那么它们就在同一位置上。

如果 $H(z)$ 假设是对应于一个因果稳定的系统，那么它的全部极点都必须位于单位圆内。有了这个限制， $H(z)$ 的极点可以从 $C(z)$ 的极点中分离出来。然而，仅凭这一点， $H(z)$ 的零点还是不能从 $C(z)$ 的零点中唯一地被确定。从下面的例子就能看到这一点。

例 5.10

考虑两个稳定的系统,其系统函数为

$$H_1(z) = \frac{2(1-z^{-1})(1+0.5z^{-1})}{(1-0.8e^{j\pi/4}z^{-1})(1-0.8e^{-j\pi/4}z^{-1})} \quad (5.83)$$

和

$$H_2(z) = \frac{(1-z^{-1})(1+2z^{-1})}{(1-0.8e^{j\pi/4}z^{-1})(1-0.8e^{-j\pi/4}z^{-1})}. \quad (5.84)$$

它们的零极点图分别示于图 5.16(a) 和图 5.16(b), 现在

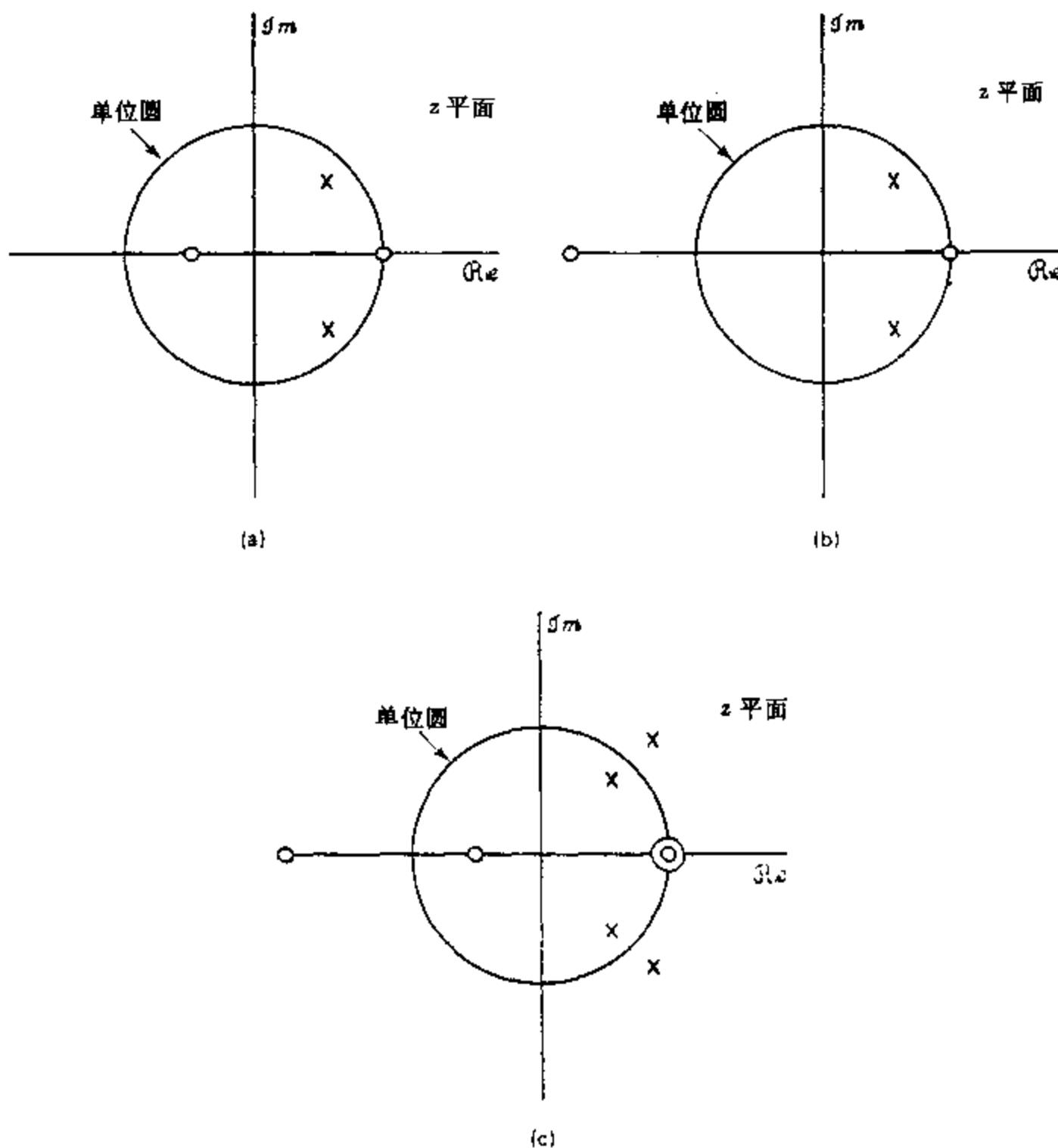


图 5.16 两个系统函数和它们共同的幅度平方函数的零极点图. (a) $H_1(z)$. (b) $H_2(z)$. (c) $C_1(z), C_2(z)$.

$$\begin{aligned} C_1(z) &= H_1(z)H_1^*(1/z^*) \\ &= \frac{2(1-z^{-1})(1+0.5z^{-1})2(1-z)(1+0.5z)}{(1-0.8e^{j\pi/4}z^{-1})(1-0.8e^{-j\pi/4}z^{-1})(1-0.8e^{-j\pi/4}z)(1-0.8e^{j\pi/4}z)} \quad (5.85) \end{aligned}$$

和

$$C_2(z) = H_2(z)H_2^*(1/z^*)$$

$$= \frac{(1-z^{-1})(1+2z^{-1})(1-z)(1+2z)}{(1-0.8e^{j\pi/4}z^{-1})(1-0.8e^{-j\pi/4}z^{-1})(1-0.8e^{-j\pi/4}z)(1-0.8e^{j\pi/4}z)}. \quad (5.86)$$

由于

$$4\left(1+\frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1+\frac{1}{2}z\right) = (1+2z^{-1})(1+2z), \quad (5.87)$$

所以 $C_1(z)=C_2(z)$. $C_1(z)$ 和 $C_2(z)$ 的零极点图示于图 5.16(c).

例 5.10 的系统函数 $H_1(z)$ 和 $H_2(z)$ 仅差在零点的位置不同. 在本例中, 因式 $2(1+0.5z^{-1})=(z^{-1}+2)$ 对频率响应幅度平方的贡献与因式 $(1+2z^{-1})$ 的贡献是相同的, 所以 $|H_1(e^{j\omega})|$ 和 $|H_2(e^{j\omega})|$ 就相等. 然而两个频率响应的相位函数是不同的.

例 5.11

假定已给出 $C(z)$ 的零极点图如图 5.17 所示, 现在想要确定与 $H(z)$ 有关的零极点. 每个零极点的共轭倒数对中有一个是与 $H(z)$ 相联系的, 另一个则与 $H^*(1/z^*)$ 相联系. 这些共轭倒数对的零极点是:

$$\begin{aligned} \text{极点对 1: } & (P_1, P_4) \\ \text{极点对 2: } & (P_2, P_5) \\ \text{极点对 3: } & (P_3, P_6) \\ \text{零点对 1: } & (Z_1, Z_4) \\ \text{零点对 2: } & (Z_2, Z_5) \\ \text{零点对 3: } & (Z_3, Z_6) \end{aligned}$$

已知 $H(z)$ 对应于一个稳定、因果系统, 就必须从每一对中选取位于单位圆内的极点, 即 P_1, P_2 和 P_3 . 在零点上没有这样的约束. 然而, 若假定在式(5.16)和式(5.18)中复系数 a_k, b_k 都是实数的话, 那么这些零点(和极点)要么是实数, 否则就以复数共轭成对出现. 这样与 $H(z)$ 有关的零点就是

$$Z_3 \text{ 或 } Z_6$$

和

$$(Z_1, Z_2) \text{ 或 } (Z_4, Z_5).$$

因此, 对于图 5.17 所示的 $C(z)$ 零极点图, 总共有四种不同的具有三个极点和三个零点的稳定且因果的系统都具有相同的频率响应幅度特性. 如果不假定这些复数 a_k 和 b_k 是实数的话, 那么选择的可能就更多. 再者, 如果 $H(z)$ 的极点和零点数是不加限定的话, $H(z)$ 的选择就会是无限制的. 为了看出这点, 假定 $H(z)$ 有一个如下的因式

$$\frac{z^{-1}-a^*}{1-az^{-1}},$$

即

$$H(z) = H_1(z) \frac{z^{-1}-a^*}{1-az^{-1}}. \quad (5.88)$$

这种形式的因式称为全通因子, 因为它在单位圆上的幅度响应为 1, 有关全通系统将在 5.5 节作详细的讨论. 很容易证明

$$C(z) = H(z)H^*(1/z^*) = H_1(z)H_1^*(1/z^*), \quad (5.89)$$

这就是说, 在 $C(z)$ 中这些全通因子相抵消, 因此不能从 $C(z)$ 的零极点图中将它们辨别

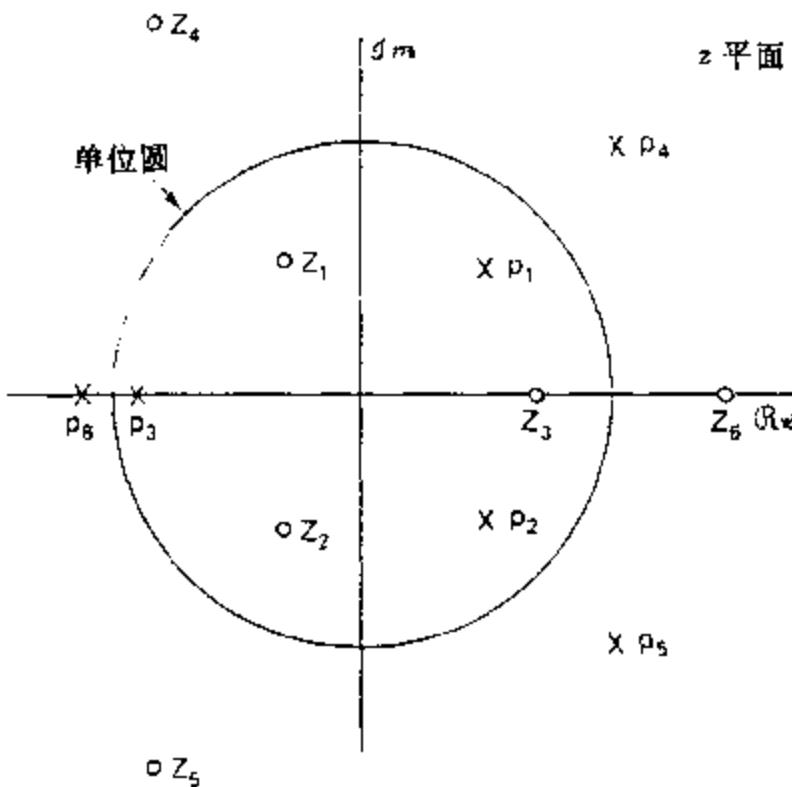


图 5.17 例 5.11 的幅度平方函数的零极点图.

出来. 所以, 如果 $H(z)$ 的零极点个数不给定的话, 那么给定 $C(z)$, $H(z)$ 的任何选择都能与极点在单位圆内(即 $|a|<1$)的任意个数的全通因子级联.

5.5 全通系统

如在例 5.11 讨论中所指出的, 具有形式为

$$H_{ap}(z) = \frac{z^{-1}-a^*}{1-az^{-1}} \quad (5.90)$$

的稳定系统函数其频率响应的幅度与 ω 无关. 将它写成 $H_{ap}(e^{j\omega})$ 的形式就能看出这点

$$\begin{aligned} H_{ap}(e^{j\omega}) &= \frac{e^{-j\omega}-a^*}{1-ae^{-j\omega}} \\ &= e^{-j\omega} \frac{1-a^*e^{j\omega}}{1-ae^{-j\omega}}. \end{aligned} \quad (5.91)$$

在式(5.91)中, $e^{-j\omega}$ 项的幅度为 1, 剩下的分子和分母因式是互为复共轭的, 因此有相同的幅度, 结果就是 $|H_{ap}(e^{j\omega})|=1$. 这类系统称为全通系统, 因为系统以幅度增益为 1 通过输入中的全部频率分量. 具有实值冲激响应全通系统的系统函数的最一般形式就是像式(5.90)那样的因式的乘积, 其复数极点是以共轭成对出现的, 即

$$H_{ap}(z) = \prod_{k=1}^{M_r} \frac{z^{-1}-d_k}{1-d_k z^{-1}} \prod_{k=1}^{M_c} \frac{(z^{-1}-e_k^*)(z^{-1}-e_k)}{(1-e_k z^{-1})(1-e_k^* z^{-1})}, \quad (5.92)$$

式中 d_k 均为 $H_{ap}(z)$ 的实数极点, 而 e_k 代表 $H_{ap}(z)$ 的复数极点. 对于因果而稳定的全通系统, $|d_k|<1$ 和 $|e_k|<1$. 利用系统函数的一般概念, 全通系统有 $M=N=2M_c+M_r$ 个极点和零点. 图 5.18 示出一个典型的全通系统零极点图. 该图情况下, $M_r=2$, $M_c=1$. 值得注意, $H_{ap}(z)$ 的每一个极点都有一个与之配对的共轭倒数零点.

一个一般的全通系统的频率响应都能利用由(5.90)式所给出的一阶全通系统的频率

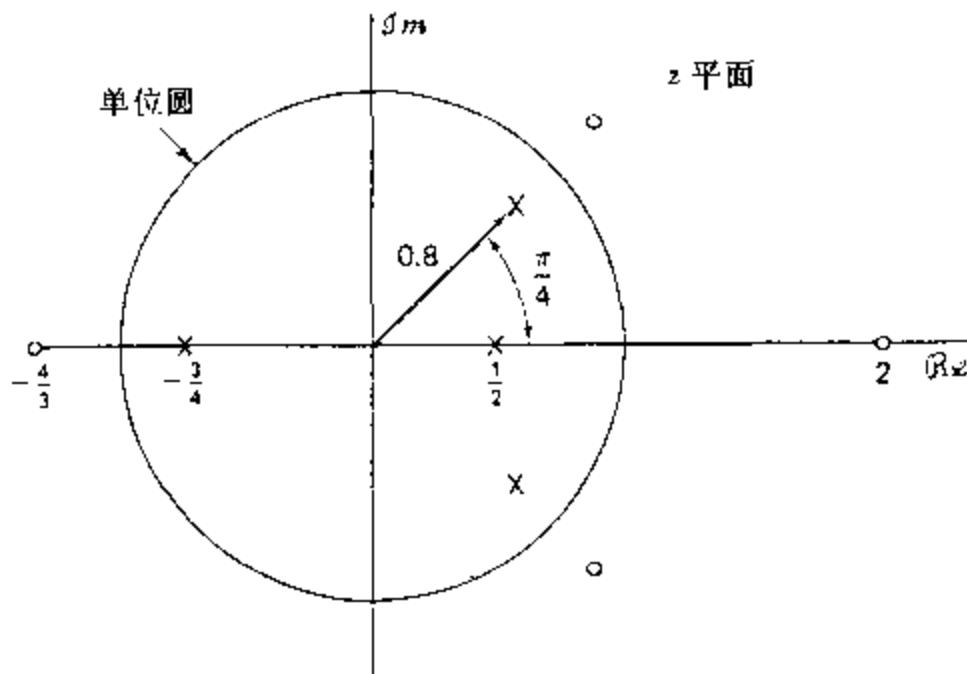


图 5.18 全通系统典型零极点图.

响应来表示,其中每一个都由单位圆内的单一极点和与该极点成共轭倒数的零点所组成.正如已经证明了的,这样一项的幅度响应是 1,因此以 dB 计的对数幅度就是零.相类似,对于 $a=re^{j\theta}$ 的一般全通系统的对数幅度也是零.式(5.90)相位函数是

$$\varphi\left[\frac{e^{-j\omega}-re^{-j\theta}}{1-re^{j\theta}e^{-j\omega}}\right]=-\omega-2\arctan\left[\frac{r\sin(\omega-\theta)}{1-r\cos(\omega-\theta)}\right]. \quad (5.93)$$

同样,具有极点在 $z=re^{j\theta}$ 和 $z=re^{-j\theta}$ 的二阶全通系统的相位是

$$\begin{aligned} \varphi\left[\frac{(e^{-j\omega}-re^{-j\theta})(e^{-j\omega}-re^{j\theta})}{(1-re^{j\theta}e^{-j\omega})(1-re^{-j\theta}e^{-j\omega})}\right] &= -2\omega-2\arctan\left[\frac{r\sin(\omega-\theta)}{1-r\cos(\omega-\theta)}\right] \\ &\quad -2\arctan\left[\frac{r\sin(\omega+\theta)}{1-r\cos(\omega+\theta)}\right]. \end{aligned} \quad (5.94)$$

图 5.19 示出一个其极点在 $z=0.9(\theta=0, r=0.9)$ 和另一个极点在 $z=-0.9(\theta=\pi, r=0.9)$ 的两个一阶全通系统的对数幅度、相位和群延迟特性曲线.对于这两个系统,极点的矢径都是 $r=0.9$.同样,图 5.20 示出极点在 $z=0.9e^{j\pi/4}$ 和 $z=0.9e^{-j\pi/4}$ 的二阶全通系统频率响应的各个特性.由图 5.19(b)可见,相位在 $0<\omega<\pi$ 内是非正的.类似地,如果在图 5.20(b)中将计算主值而产生的 2π 跳变移去的话,那么所得到的连续相位曲线在 $0<\omega<\pi$ 内也是非正的.因为由式(5.92)给出的更为一般的全通系统只是这样一些一阶和二阶因子的相乘,因此可以得出:全通系统的(连续)相位 $\arg[H_{ap}(e^{j\omega})]$ 在 $0<\omega<\pi$ 内总是非正的.如果画出的是主值的话,就可能不是这样,如图 5.21 所示.这里画出了具有图 5.18 零极点的全通系统的对数幅度、相位和群延迟特性.然而,通过首先考虑群延迟就能证实这一结果.

式(5.90)的简单单极点全通系统的群延迟是由式(5.93)给出的相位特性导数的负值.稍作一点代数运算就能证明

$$\text{grd}\left[\frac{e^{-j\omega}-re^{-j\theta}}{1-re^{j\theta}e^{-j\omega}}\right]=\frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos(\omega-\theta)}=\frac{1-r^2}{|1-re^{j\theta}e^{-j\omega}|^2}. \quad (5.95)$$

因为对一个稳定而因果的全通系统, $r<1$, 由式(5.95)可见, 由一个单极点的全通因子对群延迟的贡献总是正的.因为高阶全通系统的群延迟就是式(5.95)这些正的项之和,所

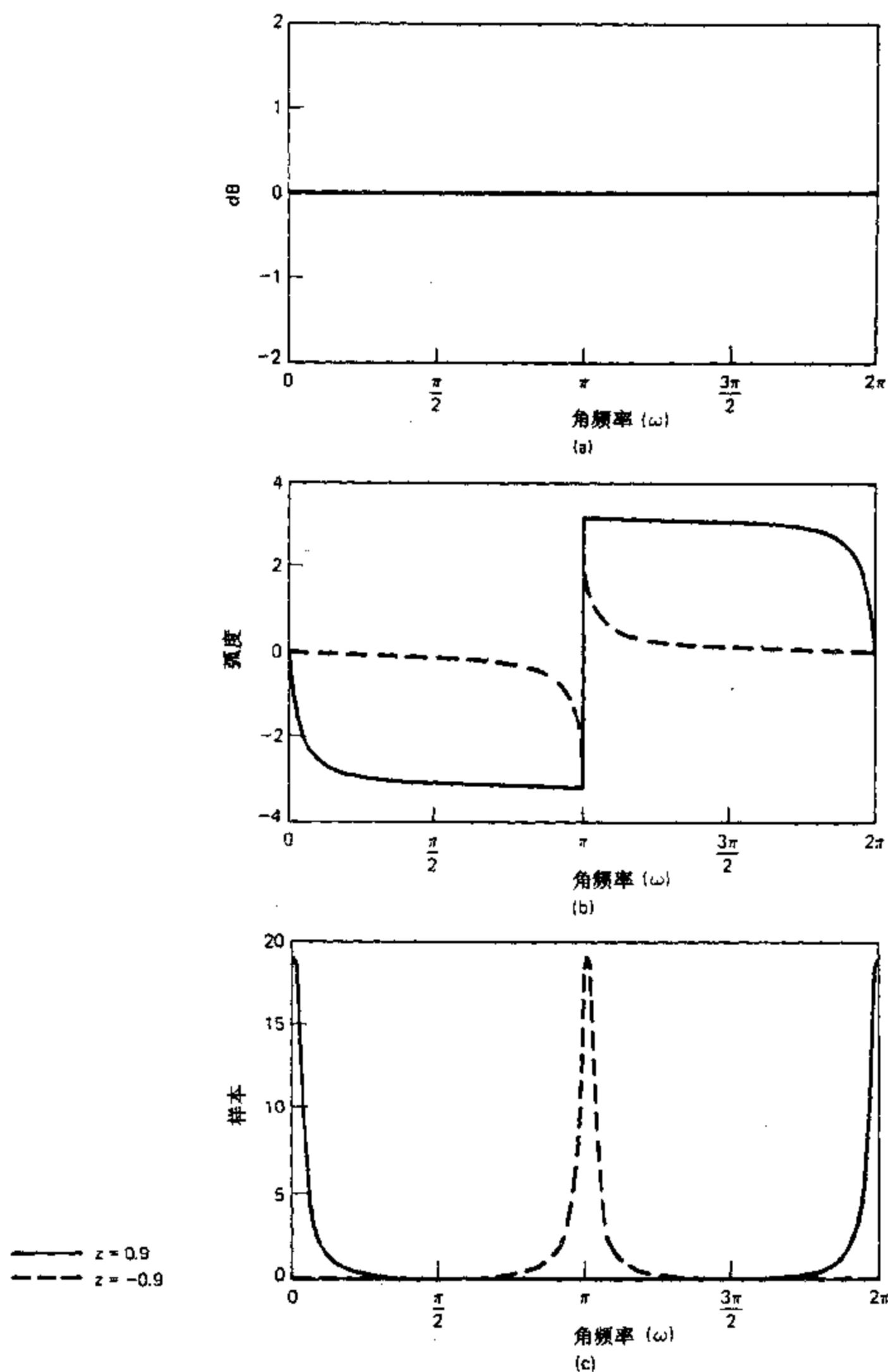


图 5.19 具有实数极点 $z = 0.9$ (实线) 和 $z = -0.9$ (虚线) 的全通滤波器的频率响应。
 (a) 对数幅度, (b) 相位(主值), (c) 群延迟.

以一般有理全通系统的群延迟总是正的这一点就应该是确信无疑的了. 图 5.19(c)、图 5.20(c)和图 5.21(c)分别是一阶、二阶和三阶全通系统的群延迟, 它们都确认了这一点.

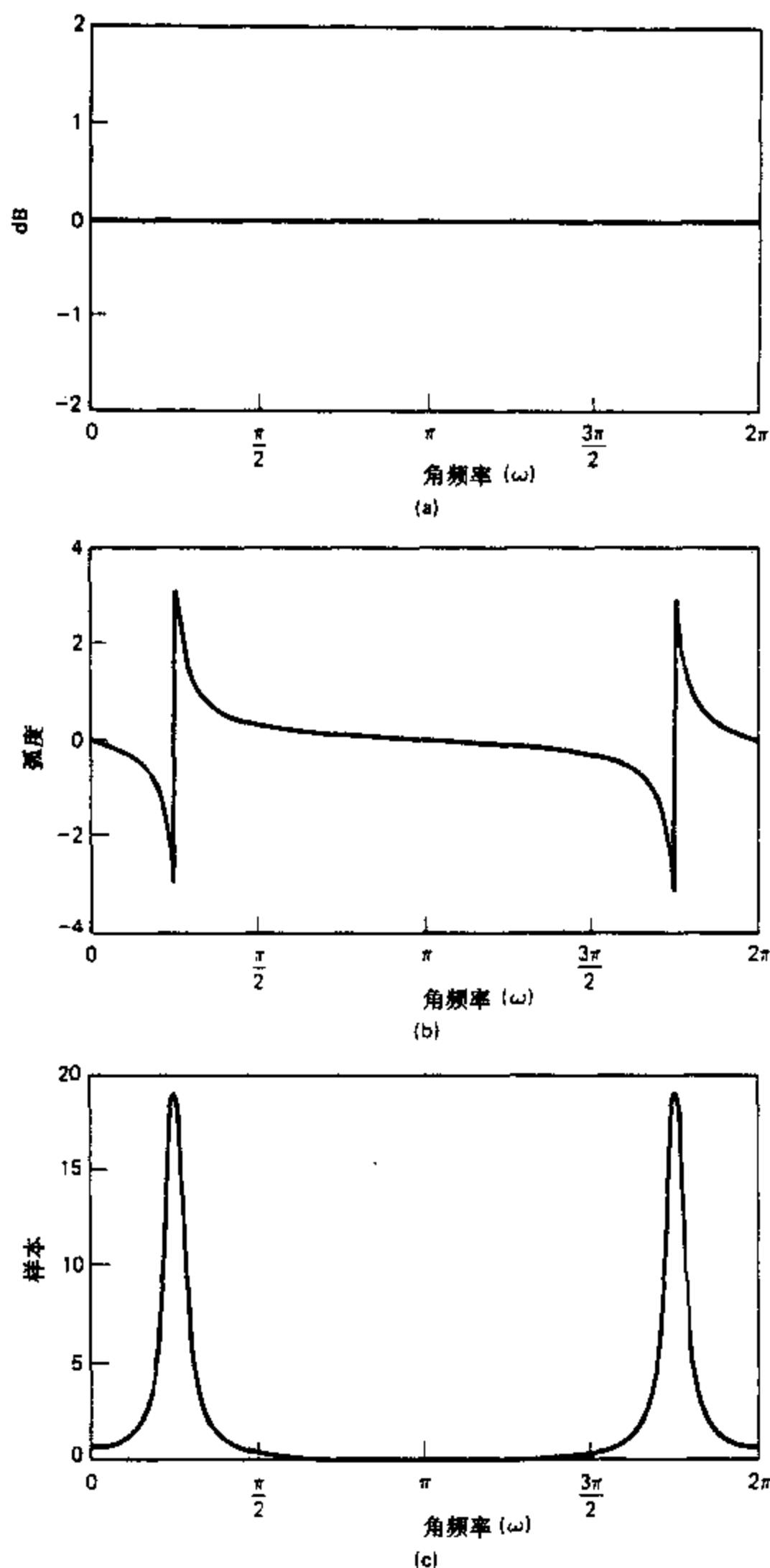


图 5.20 具有极点在 $z=0.9e^{\pm j\pi/4}$ 的二阶全通系统的频率响应. (a)对数幅度. (b)相位(主值). (c)群延迟.

全通系统群延迟的正值性就为全通系统相位特性负值性提供了一个简单证明的基础. 首先注意到

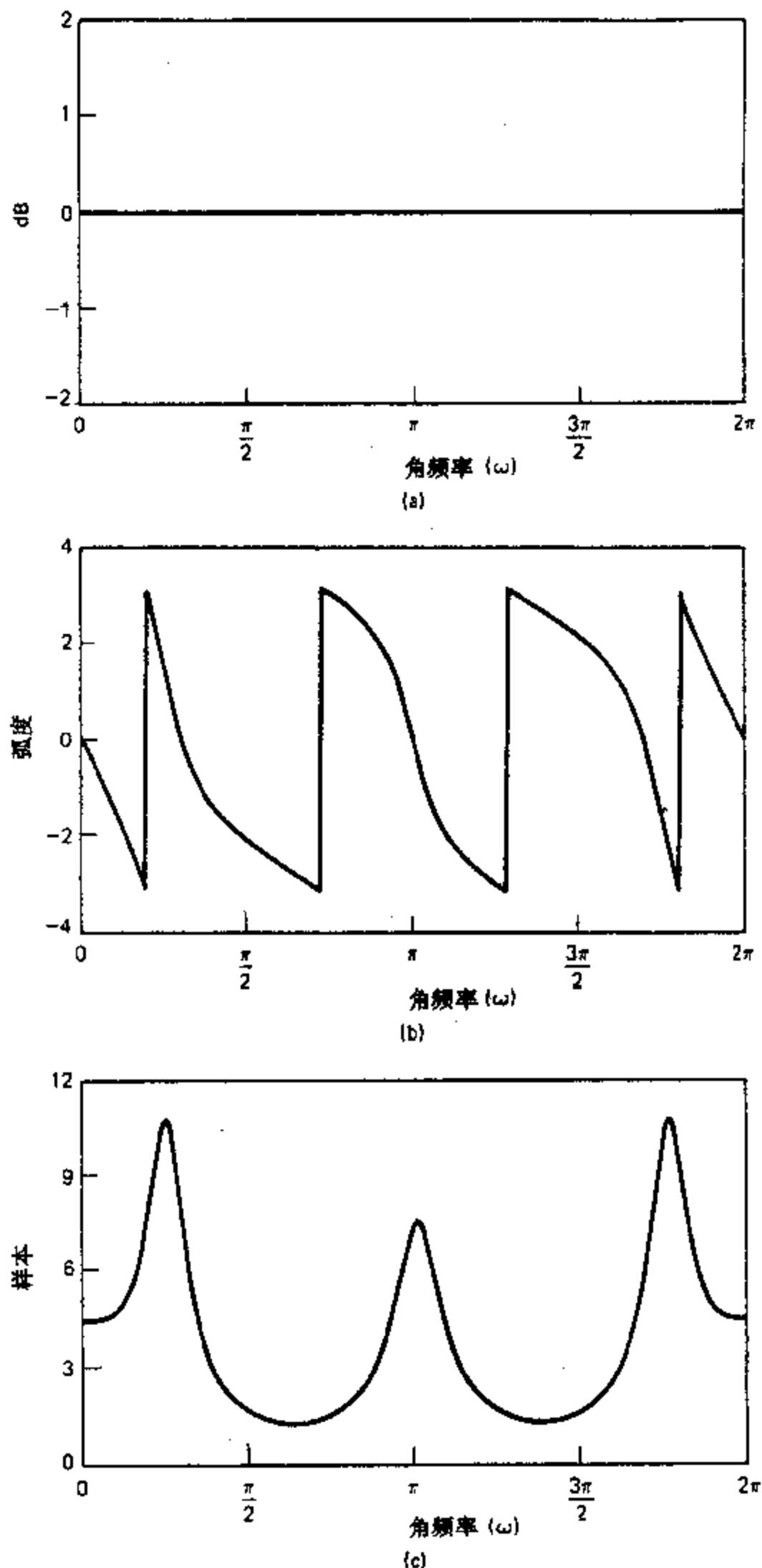


图 5.21 具有图 5.18 零极点图的全通系统频率响应. (a)对数幅度, (b)相位(主值), (c)群延迟.

$$\arg[H_{ap}(e^{j\omega})] = - \int_0^\omega \text{grd}[H_{ap}(e^{j\phi})] d\phi + \arg[H_{ap}(e^{j0})] \quad (5.96)$$

式中 $0 \leq \omega \leq \pi$. 从式(5.92)就有

$$H_{ap}(e^{j\omega}) = \prod_{k=1}^{M_p} \frac{1-d_k}{1-d_k} \prod_{k=1}^{M_c} \frac{|1-e_k|^2}{|1-e_k|^2} = 1. \quad (5.97)$$

因此 $\arg[H_{ap}(e^{j\omega})] = 0$, 并且因为

$$\text{grd}[H_{ap}(e^{j\omega})] \geq 0, \quad (5.98)$$

由式(5.96)就直接得出

$$\arg[H_{ap}(e^{j\omega})] \leq 0, \quad 0 \leq \omega < \pi. \quad (5.99)$$

群延迟的正值性和连续相位的非正值性都是全通系统的重要性质.

全通系统有很多应用. 如在第七章将看到的, 它们可以用作相位(或群延迟)失真的补偿, 以及在 5.6 节将看到, 它们在最小相位系统理论中是有用的. 另外, 在把频率选择性低通滤波器变换到其它类型频率选择性滤波器中, 以及在获得可变截止频率的频率选择性滤波器中全通系统都是很有用的. 这些应用都将在第七章和习题中给予讨论.

5.6 最小相位系统

在 5.4 节已证明对于一个具有有理系统函数的 LTI 系统, 其频率响应的幅度不能唯一表征该系统. 如果系统是稳定和因果的, 那么其系统函数的极点必须位于单位圆内; 但是稳定性和因果性并没有在零点上给出任何限制. 对于某些问题, 强加其逆系统(系统函数为 $1/H(z)$ 的系统)也是稳定和因果的这样一些附加限制是有益的. 如同在 5.2.2 节所讨论的, 这样就把零点和极点一样都限制在单位圆内, 因为 $1/H(z)$ 的极点就是 $H(z)$ 的零点. 这样的系统通常就称为最小相位系统. 最小相位这个名称来自于该系统相位特性的性质, 这一点仅由上述定义还不是很明显的. 这一点以及另一些将要讨论的基本性质对这类系统来说都是独一无二的, 因此它们当中任何一个都可用作这类系统的定义. 这些性质将在 5.6.2 节讨论.

如果给出了一个如式(5.82)的幅度平方函数, 并且已知该系统是最小相位系统, 那么 $H(z)$ 就被唯一确定. 它将由位于单位圆内 $C(z) = H(z)H^*(1/z^*)$ 的全部零极点所组成*. 当使用的设计方法仅需确定幅度响应时, 这种办法在滤波器设计中常被采纳(见第七章).

在 5.4 节已表明, 仅由频率响应的幅度平方不能唯一地确定系统函数 $H(z)$, 因为具有给定频率响应幅度的任何选择都能够与任意全通因子级联而不影响它的幅度. 因此, 一种与此有关的看法就是: 任何有理系统函数**都能表示成

$$H(z) = H_{\min}(z)H_{ap}(z), \quad (5.100)$$

式中 $H_{\min}(z)$ 是最小相位系统, $H_{ap}(z)$ 是全通系统.

为了证明这一点, 假设 $H(z)$ 有一个零点 $z = 1/c^*$ 在单位圆外, 这里 $|c| < 1$, 而其余的

* 已知假定 $C(z)$ 没有任何极点或零点在单位圆上. 严格说来, 有极点在单位圆上的系统是不稳定的, 从而在实际应用中一般都予以避免. 然而, 在单位圆上的零点在实际滤波器设计中时有应用. 按我们的定义, 这样的系统是非最小相移的, 但是, 甚至在这种情况下仍具有最小相位系统的很多性质.

** 多少是为了方便起见, 暂且将讨论局限于因果稳定的系统上, 虽然这一结论可适用于更一般的情况.

零极点都在单位圆内,那么 $H(z)$ 就能表示成

$$H(z) = H_1(z)(z^{-1} - c^*), \quad (5.101)$$

这里按定义 $H_1(z)$ 是最小相位系统, $H(z)$ 的一种等效表示式就为

$$H(z) = H_1(z)(1 - cz^{-1}) \frac{z^{-1} - c^*}{1 - cz^{-1}}. \quad (5.102)$$

因为 $|c| < 1$, 所以因式 $H_1(z)(1 - cz^{-1})$ 也是最小相位的, 它与 $H(z)$ 的差别仅在于 $H(z)$ 在单位圆外的零点 $z = 1/c^*$ 现被反射到单位圆内与其成共轭倒数的位置 $z = c$ 上. $(z^{-1} - c^*)/(1 - cz^{-1})$ 这一项就属于全通型. 这个例子可以直接推广到包含更多单位圆外零点的情况, 因此证明了任何系统函数一般都能表示成

$$H(z) = H_{\min}(z)H_{ap}(z), \quad (5.103)$$

这里 $H_{\min}(z)$ 包含 $H(z)$ 中位于单位圆内的零极点, 再加上与 $H(z)$ 中单位圆外的零点成共轭倒数的那些零点. $H_{ap}(z)$ 由全部 $H(z)$ 中位于单位圆外的零点和与 $H_{\min}(z)$ 中反射过来的共轭倒数零点相抵消的极点所组成.

利用式(5.103)就可以从一个最小相位系统把其一个或多个位于单位圆内的零点反射到单位圆外与它们成共轭倒数的位置上而形成一个非最小相位系统; 或者相反, 从一个非最小相位系统把全部位于单位圆外的零点反射到单位圆内与其成共轭倒数的位置上而形成一个最小相位系统. 在任一情况下, 这个最小相位和非最小相位系统都具有相同的频率响应幅度.

5.6.1 频率响应的补偿

在很多信号处理范畴内, 我们希望要补偿一个已被某个不合要求的频率响应的 LTI 系统处理过的信号, 如图 5.22 所示. 例如, 在通信信道上传输信号就会发生这种情况. 如果能实现完全的补偿, 那么 $s_c[n] = s[n]$, 也就是说, $H_c(z)$ 就是 $H_d(z)$ 的逆系统. 然而, 如果假定该失真系统是稳定和因果的, 并且要求补偿系统也是稳定和因果的, 那么只有当 $H_d(z)$ 是最小相位系统而有一个稳定和因果的逆系统时, 这种完全的补偿才有可能.

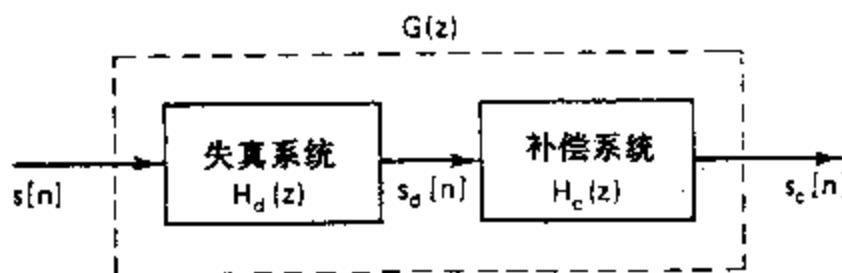


图 5.22 用线性滤波作失真补偿的说明.

根据上面的讨论, 假定 $H_d(z)$ 是已知的, 或者近似为一个有理系统函数, 我们就能把 $H_d(z)$ 中全部位于单位圆外的零点反射到单位圆内与它们成共轭倒数的位置上而构成一个最小相位系统 $H_{d\min}(z)$. $H_d(z)$ 和 $H_{d\min}(z)$ 有相同的频率响应幅度, 并且通过一个全通系统 $H_{ap}(z)$ 而联系在一起, 即

$$H_d(z) = H_{d\min}(z)H_{ap}(z). \quad (5.104)$$

选取补偿滤波器为

$$H_c(z) = \frac{1}{H_{\min}(z)}, \quad (5.105)$$

联系 $s[n]$ 和 $s_c[n]$ 的总系统函数就是

$$G(z) = H_d(z)H_c(z) = H_{ap}(z), \quad (5.106)$$

即相当于一个全通系统. 结果, 就完全补偿了频率响应幅度, 而相位响应则有 $\propto H_{ap}(e^{j\omega})$ 的变化.

下面的例子针对 FIR 系统的情况作些讨论.

例 5.12

考虑系统函数为

$$\begin{aligned} H(z) = & (1 - 0.9e^{j0.6\pi}z^{-1})(1 - 0.9e^{-j0.6\pi}z^{-1}) \\ & \times (1 - 1.25e^{j0.8\pi}z^{-1})(1 - 1.25e^{-j0.8\pi}z^{-1}). \end{aligned} \quad (5.107)$$

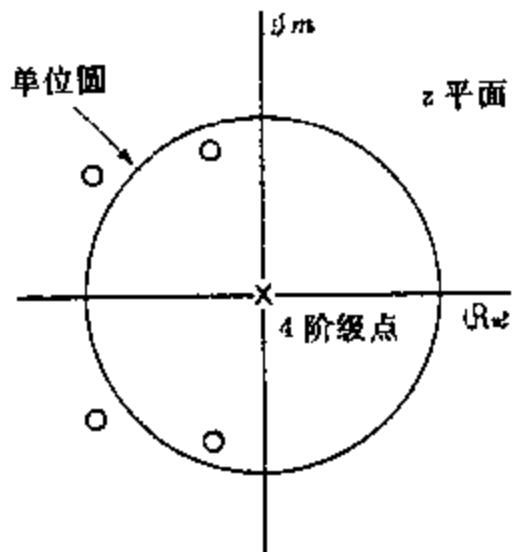


图 5.23 例 5.12 FIR 系统的零极点图.

那么

$$\begin{aligned} H_{\min}(z) = & (1.25)^2(1 - 0.9e^{j0.6\pi}z^{-1})(1 - 0.9e^{-j0.6\pi}z^{-1}) \\ & \times (1 - 0.8e^{-j0.8\pi}z^{-1})(1 - 0.8e^{j0.8\pi}z^{-1}), \end{aligned} \quad (5.109)$$

与 $H_{\min}(z)$ 和 $H(z)$ 有关的全通系统就是

$$H_{ap}(z) = \frac{(z^{-1} - 0.8e^{-j0.8\pi})(z^{-1} - 0.8e^{j0.8\pi})}{(1 - 0.8e^{j0.8\pi}z^{-1})(1 - 0.8e^{-j0.8\pi}z^{-1})}. \quad (5.110)$$

图 5.25 示出 $H_{\min}(e^{j\omega})$ 的对数幅度、相位和群延迟特性. 当然, 图 5.24(a) 和图 5.25(a) 是一样的. 图 5.26 示出了 $H_{ap}(z)$ 的对数幅度、相位和群延迟特性.

应该注意, $H(z)$ 的逆系统在 $z = 1.25e^{\pm j0.8\pi}$ 和 $z = 0.9e^{\pm j0.6\pi}$ 有极点, 因此该因果的逆将是不稳定的. 最小相位的逆系统就是由式(5.109)给出的 $H_{\min}(z)$ 的倒数, 并且如果这个逆系统要是用在图 5.22 的级联系统中的话, 那么总的有效系统函数就是由式(5.110)所给出的 $H_{ap}(z)$.

5.6.2 最小相位系统的性质

我们一直采用“最小相位”这一术语专指这样一些系统, 它本身是因果和稳定的, 并且也有一个因果和稳定的逆系统. 选择这个名称是由于根据上述定义所直接得出的相位函

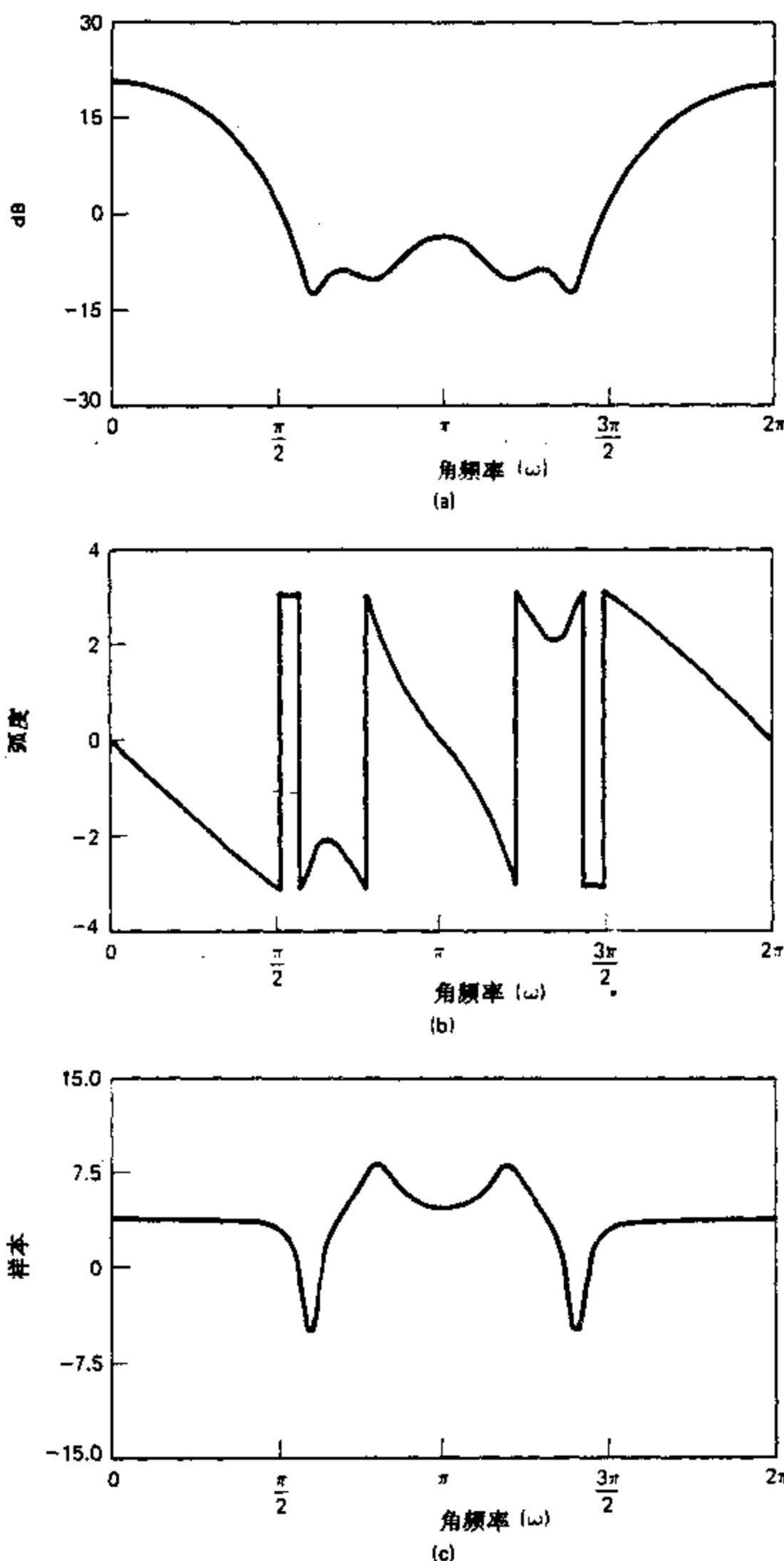


图 5.24 具有图 5.23 零极点图的 FIR 系统的频率响应。(a)对数幅度,(b)相位(主值),(c)群延迟.

数的性质的缘故,但是不是很明显.这一节将建立相对于所有其它具有相同频率响应幅度的系统而言,最小相位系统所具有的几个令人感兴趣而重要的性质.

最小相位滞后性质. 在例 5.12 中已经提到,术语“最小相位”是用作对全部零极点

都在单位圆内的系统的一种描述性名称. 根据式(5.100), 任何非最小相位系统的连续相位, 即 $\arg[H(e^{j\omega})]$ 都能表示为

$$\arg[H(e^{j\omega})] = \arg[H_{\min}(e^{j\omega})] + \arg[H_{ap}(e^{j\omega})]. \quad (5.111)$$

因此, 对应于图 5.24(b) 的主值相位的连续相位就是图 5.25(b) 的连续相位和图 5.26(b) 的连续相位之和; 其中图 5.25(b) 是与最小相位有关的, 而图 5.26(b) 则是与全通系统的主值相位有关的. 正如在 5.5 节所表明的, 以及如图 5.19(b)、图 5.20(b)、图 5.21(b) 和图 5.26(b) 所指出的, 一个全通系统的连续相位曲线在 $0 \leq \omega \leq \pi$ 内总是负的. 因此, 将 $H_{\min}(z)$ 的零点从单位圆内反射到单位圆外其共轭倒数的位置上总是使(连续)相位减小, 或者说使相位的负值增加, 这就称之为相位滞后函数. 这样, 具有幅度响应为 $|H_{\min}(e^{j\omega})|$ 、全部零点(当然还有极点)都位于单位圆内的因果稳定的系统对于具有相同幅度响应的所有其它系统而言就具有最小相位滞后函数(对于 $0 \leq \omega \leq \pi$). 因此, 更为确切的术语应是最小相位滞后系统, 但是最小相位已是历史上早已采用的术语.

为了对最小相位滞后系统理解得更确切些, 有必要对 $H(e^{j\omega})$ 加上在 $\omega=0$ 时为正这样一个附加的约束, 即

$$H(e^{j0}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n] > 0. \quad (5.112)$$

注意到, 若将 $h[n]$ 局限为实数序列, 那么 $H(e^{j0})$ 就一定是实数. 因为具有冲激响应为 $-h[n]$ 的系统和冲激响应为 $h[n]$ 的系统有相同的极点和零点, 因此式(5.112)的条件就是必要的. 然而乘以 -1 就是将相位改变 π 弧度. 因此, 为了除掉这种含混不清, 以确保全部零极点都在单位圆内的系统也具有最小相位滞后性质, 就必须加上式(5.112)的条件. 不过, 这一约束往往没有什么实际意义, 因此在 5.6 节开始时所给出的定义虽然没有包括它, 还是一般认为对最小相位系统可以接受的定义.

最小群延迟性质. 例 5.12 说明了零极点全部位于单位圆内的系统的另一个性质. 首先注意到, 具有相同幅度响应系统的群延迟是

$$\text{grd}[H(e^{j\omega})] = \text{grd}[H_{\min}(e^{j\omega})] + \text{grd}[H_{ap}(e^{j\omega})]. \quad (5.113)$$

如图 5.25(c) 所示的最小相位系统的群延迟总是小于如图 5.24(c) 所示的非最小相位系统的群延迟. 正如图 5.26(c) 所表明的, 这是由于把最小相位系统转化为非最小相位系统的全通系统具有正的群延迟的缘故. 在 5.5 节已经证明这是全通系统的一个一般性质; 它们对全部 ω 总是有正的群延迟. 因此, 如果还是考虑全部都有给定幅度响应 $|H_{\min}(e^{j\omega})|$ 的系统, 那么全部零极点都在单位圆内的系统就有最小的群延迟. 因此, 对这类系统一种等同的称法可称为最小群延迟系统, 但一般不用这个术语.

最小能量延迟性质. 例 5.12 中, 总共有四种具有实冲激响应的因果 FIR 系统都与式(5.107)的系统有相同的频率响应幅度. 有关的零极点图如图 5.27 所示, 其中图 5.27(d) 对应于式(5.107), 而图 5.27(a) 对应于式(5.109)的最小相位系统. 图 5.28 画出了这四种情况的冲激响应. 如将图 5.28 的四种序列作一比较, 就能看到, 在序列的最左端最小相位序列比所有其他序列有较大的样本值. 对这个例子的确如此, 而

$$|h[0]| < |h_{\min}[0]|. \quad (5.114)$$

对于具有

$$|H(e^{j\omega})| = |H_{\min}(e^{j\omega})|. \quad (5.115)$$

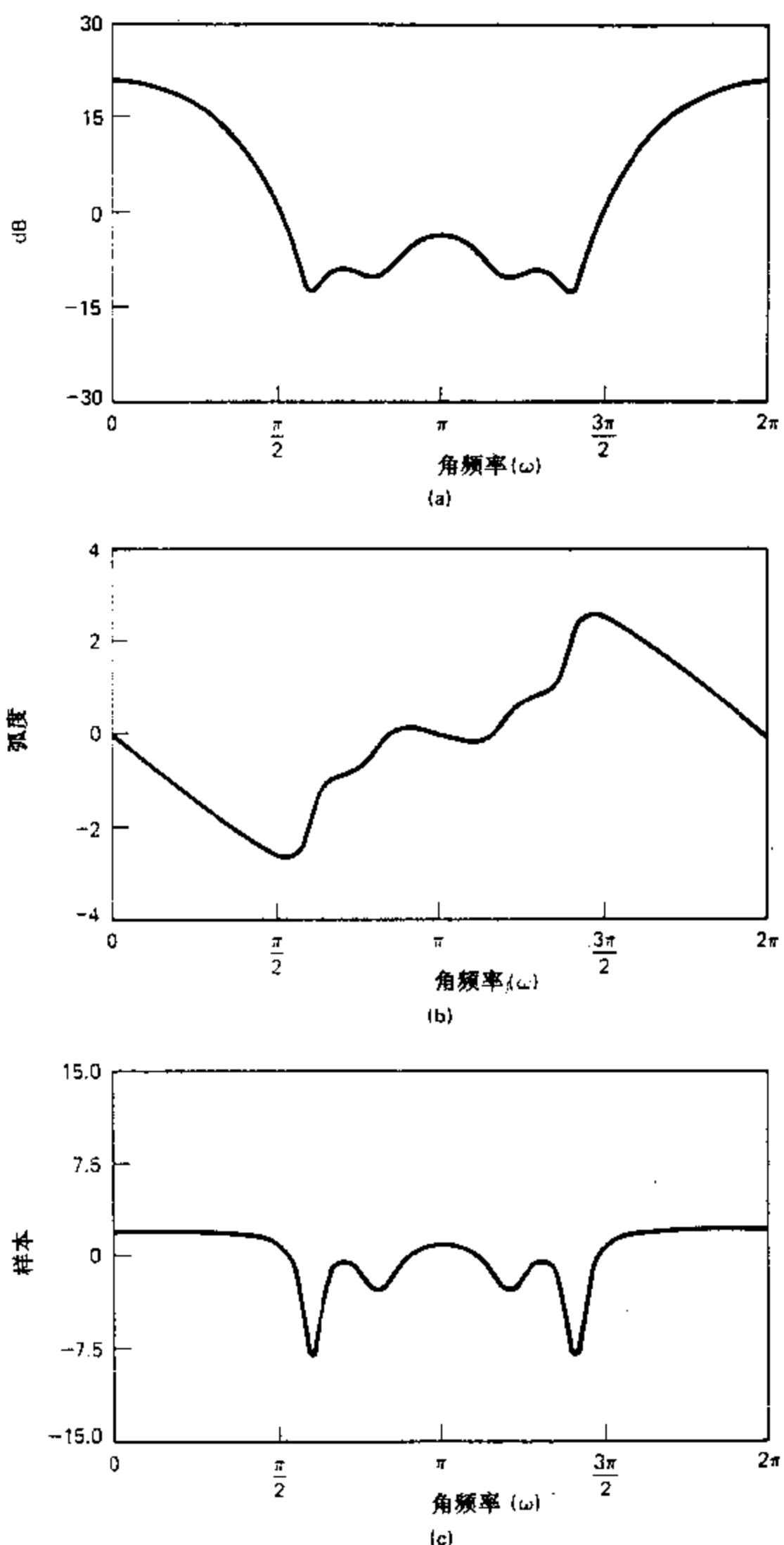


图 5.25 例 5.12 中最小相位系统的频率响应. (a)对数幅度. (b)相位(主值). (c)群延迟.

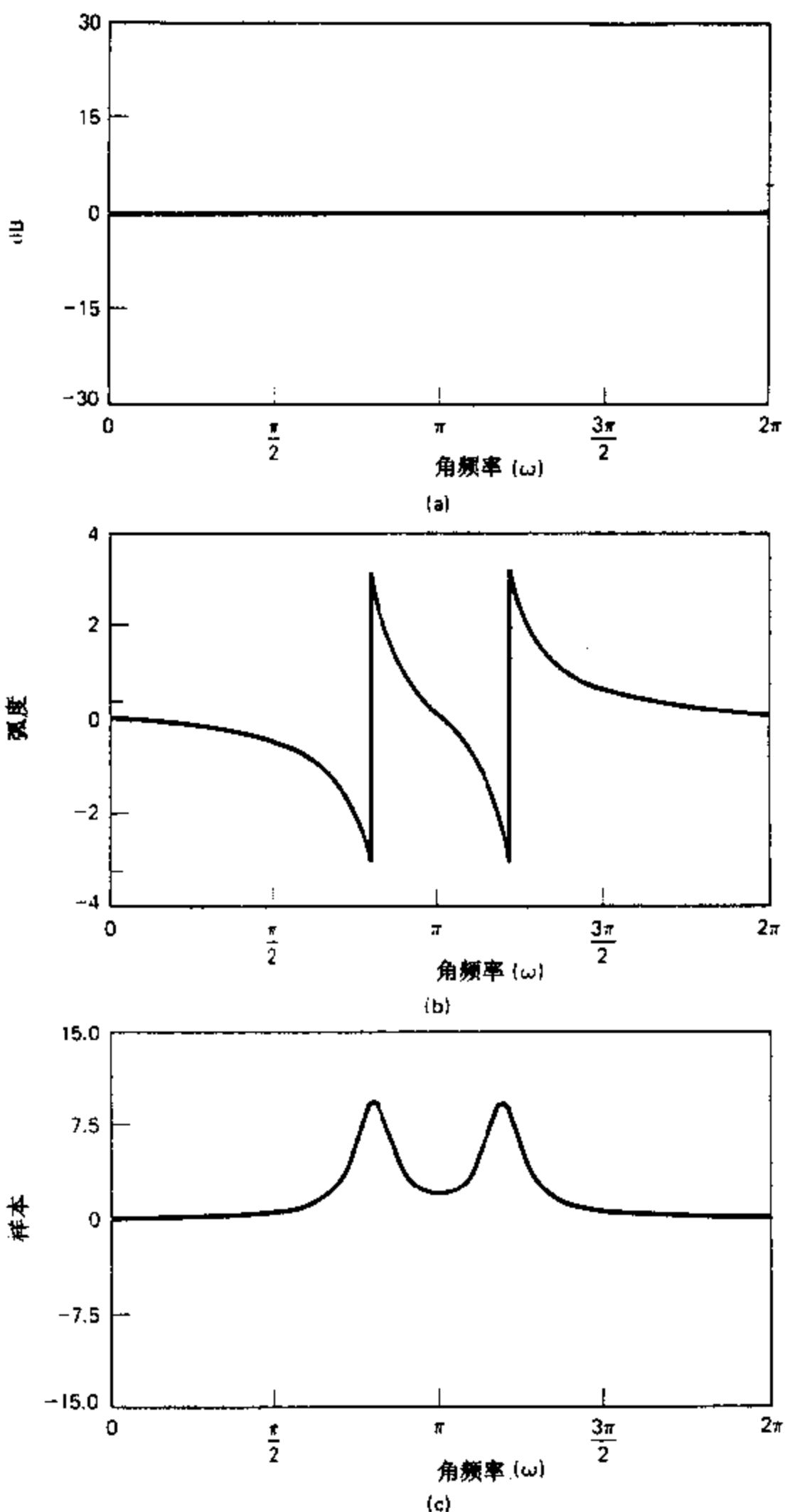


图 5.26 例 5.12 全通系统的频率响应。(图 5.25 和图 5.26 中相应曲线的和就等于图 5.24 中对应的曲线,相位曲线的和要按模 2π 取。)(a) 对数幅度,(b) 相位,(c) 群延迟。

的任何因果稳定序列 $h[n]$ 都是成立的。习题 5.35 要求对该性质给出证明。

所有幅度响应等于 $|H_{\min}(e^{j\omega})|$ 的冲激响应都和 $h_{\min}[n]$ 具有相同的总能量,因为根据帕斯瓦尔定理

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} |h[n]|^2 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |H(e^{j\omega})|^2 d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |H_{\min}(e^{j\omega})|^2 d\omega \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} |h_{\min}[n]|^2.\end{aligned}\quad (5.116)$$

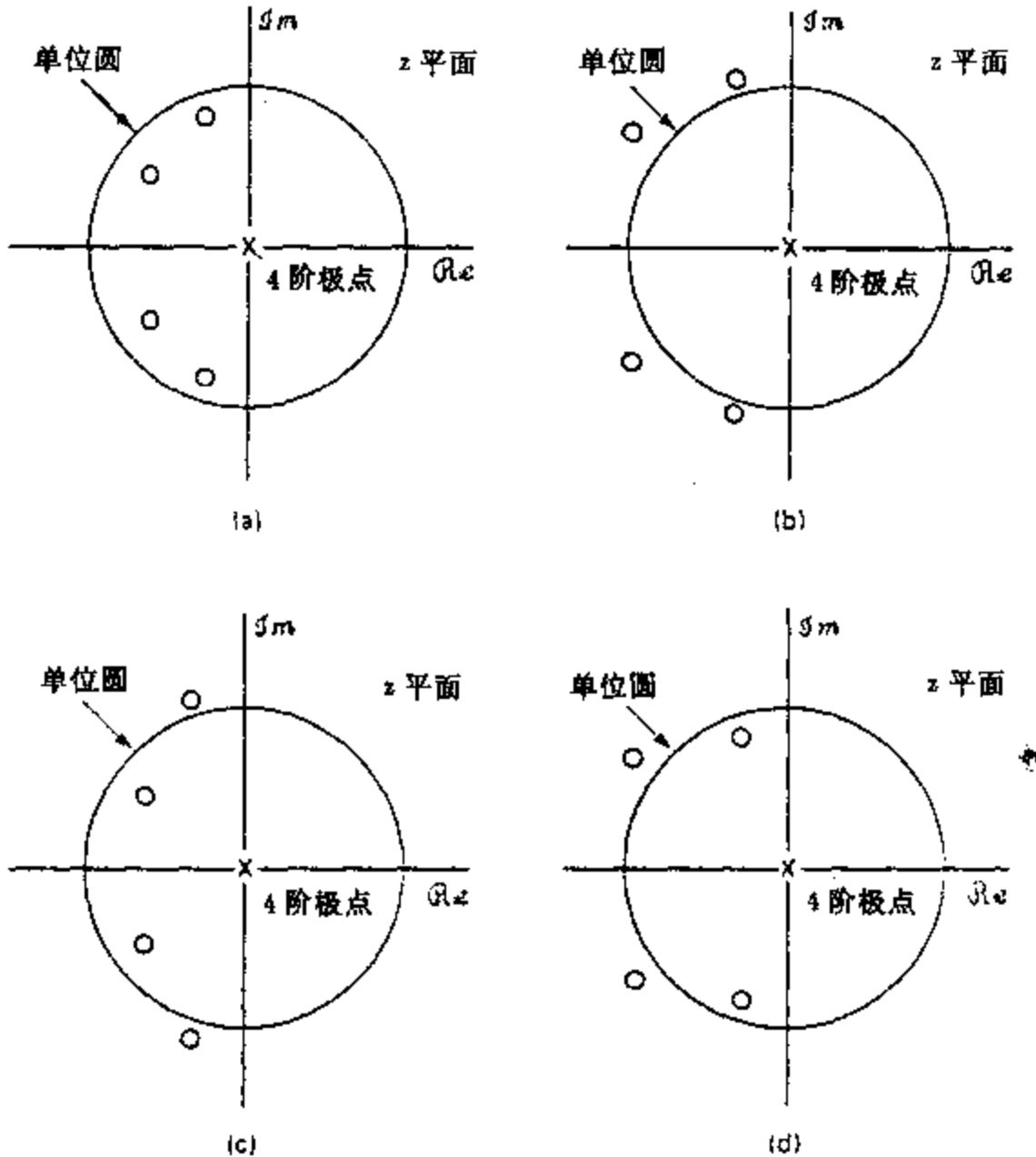


图 5.27 全部具有相同频率响应幅度的四种系统,零点都是 $0.9e^{\pm j0.6\pi}$ 和 $0.8e^{\pm j0.8\pi}$ 及其倒数的全部组合.

如果定义冲激响应的部分能量为

$$E[n] = \sum_{m=0}^n |h[m]|^2, \quad (5.117)$$

那么可以证明(见习题 5.36)

$$\sum_{m=0}^n |h[m]|^2 \leq \sum_{m=0}^n |h_{\min}[m]|^2 \quad (5.118)$$

对所有属于具有式(5.115)给出的幅度响应的系统的冲激响应 $h[n]$ 都成立. 根据式(5.118), 最小相位系统的部分能量最集中在 $n=0$ 周围, 也就是说, 最小相位系统的能量在所有相同幅度响应函数的系统中延迟最小. 为此, 最小相位(滞后)系统也称为最小能

量延迟系统,简称最小延迟系统,延迟性质如图 5.29 所示,图中示出图 5.28 中四种序列

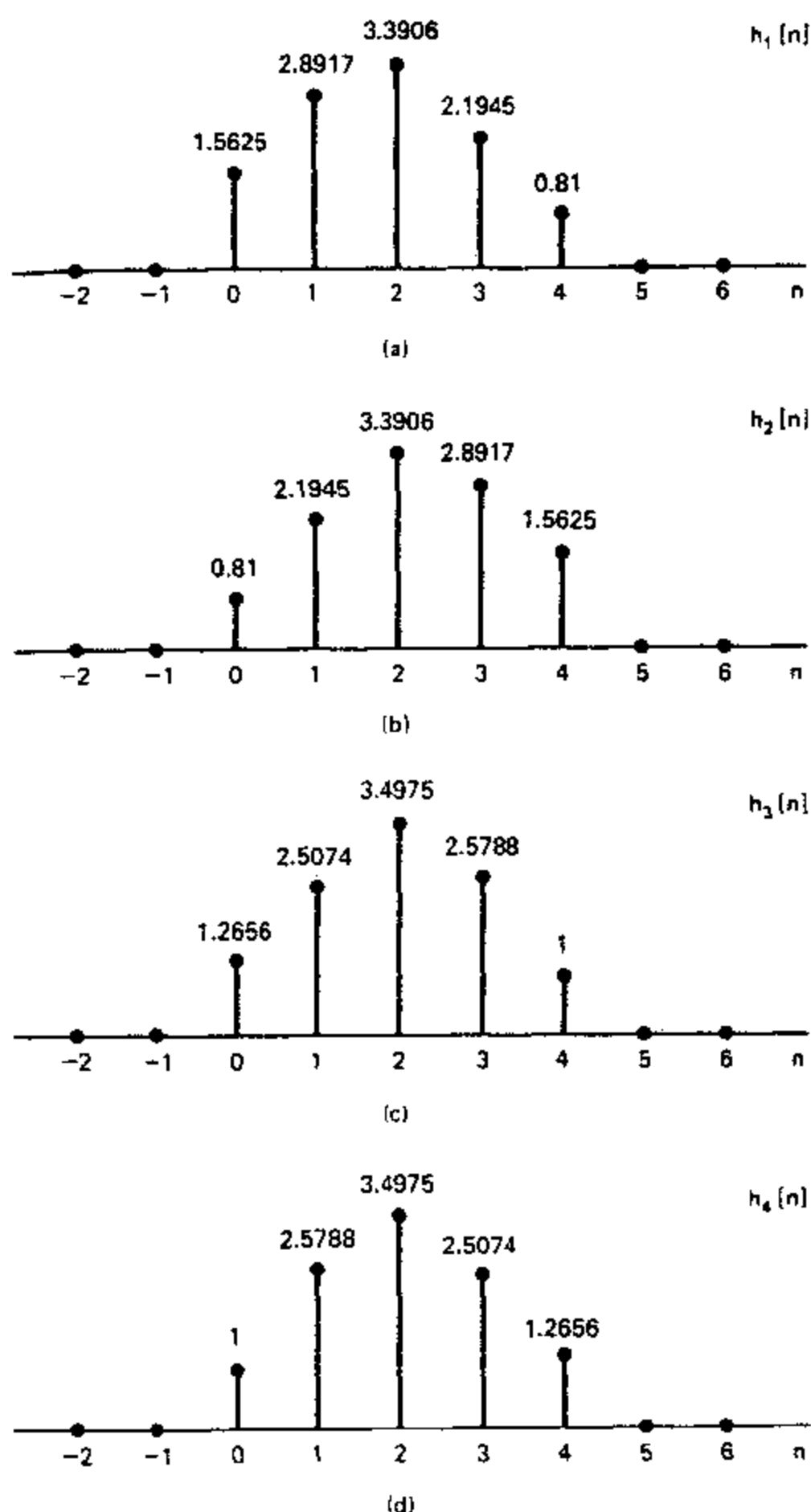


图 5.28 对应于图 5.27 零极点图的各序列.

部分能量的图.对这个例子也可注意到,一般来说这是正确的,即:最小能量延迟发生在全部零点位于单位圆内的系统(也即最小相位系统),而最大能量延迟则发生在全部零点位于单位圆外的系统.因此最大能量延迟系统往往也称为最大相位系统.

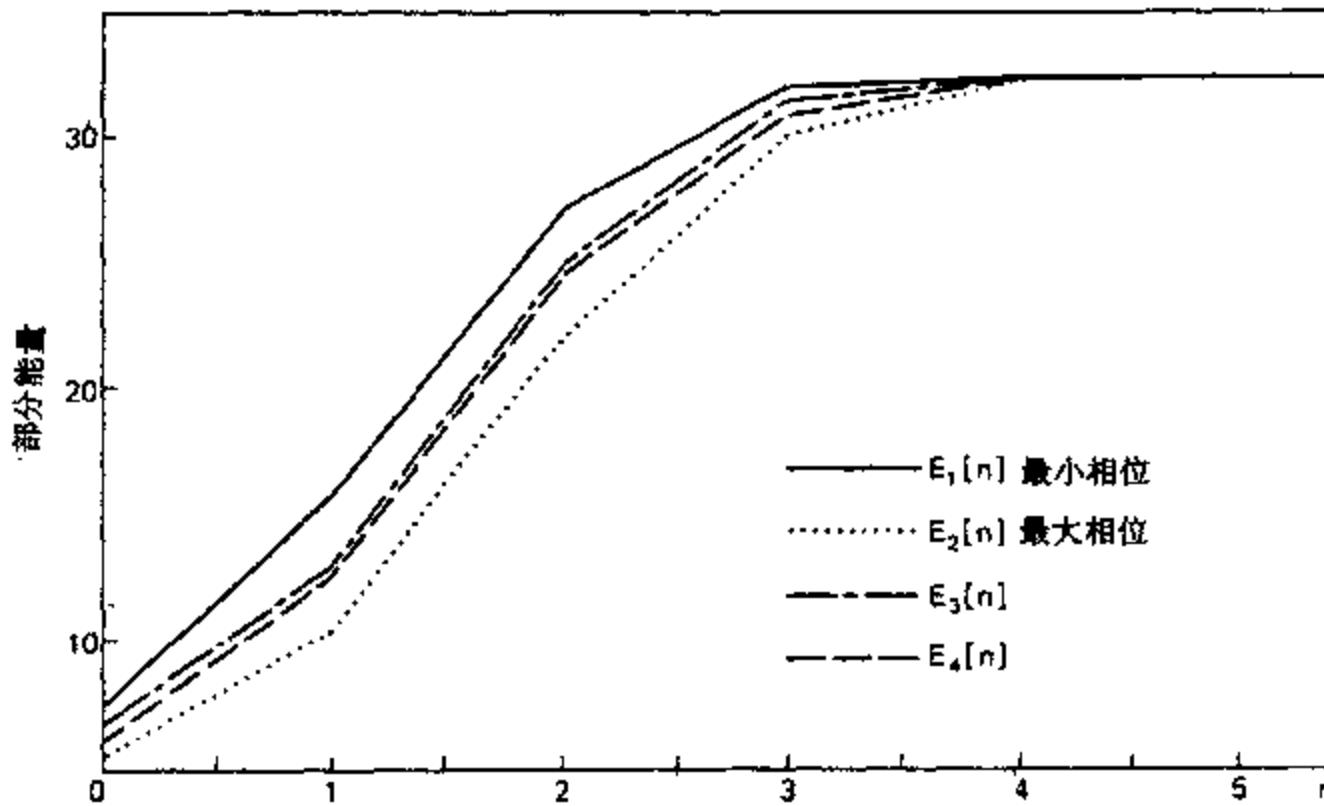


图 5.29 图 5.27 四种序列的部分能量。(注意: $E_1[n]$ 是对应于最小相位序列 $h_1[n]$, 而 $E_2[n]$ 是对应于最大相位序列 $h_2[n]$.)

5.7 广义线性相位的线性系统

在设计滤波器和其他信号处理系统中,很希望在某一频带范围内具有近似的恒定频率响应幅度和零相位特性,以使信号通过这部分频带时不失真。对因果系统而言,零相位是不可能得到的,因此必须容许有某种相位失真。如同在 5.1.2 节看到的,具有整(负)斜率线性相位的影响就是一种单纯的延迟。另一方面,非线性相位在信号的形状上有很大的影响,即使当频率响应的幅度是常数时也是这样。因此,在很多情况下,特别希望设计具有真正的或近似线性相位的系统。这一节将通过考虑具有恒定群延迟的一类系统对线性相位和理想时间延迟的概念考虑一个正规的和一般的形式。我们还是从重新考虑离散时间系统中延迟的概念着手。

5.7.1 线性相位系统

考虑一个 LTI 系统,其频率响应在一个周期内是

$$H_{id}(e^{j\omega}) = e^{-j\alpha\omega}, \quad |\omega| < \pi, \quad (5.119)$$

式中 α 是实数,但不一定是整数。可看出该系统有恒定的幅度响应、线性相位和恒定群延迟,即

$$|H_{id}(e^{j\omega})| = 1, \quad (5.120a)$$

$$\angle H_{id}(e^{j\omega}) = -\omega\alpha, \quad (5.120b)$$

$$\text{grd}[H_{id}(e^{j\omega})] = \alpha. \quad (5.120c)$$

$H_{id}(e^{j\omega})$ 的傅里叶反变换就是冲激响应,为

$$h_{id}[n] = \frac{\sin \pi(n-\alpha)}{\pi(n-\alpha)}, \quad -\infty < n < \infty. \quad (5.121)$$

对输入 $x[n]$, 该系统的输出是

$$y[n] = x[n] * \frac{\sin\pi(n-\alpha)}{\pi(n-\alpha)} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \frac{\sin\pi(n-k-\alpha)}{\pi(n-k-\alpha)}. \quad (5.122)$$

若 $\alpha=n_d$, n_d 为整数, 那么根据 5.1.2 节, 就有

$$h_{id}[n] = \delta[n-n_d] \quad (5.123)$$

和

$$y[n] = x[n] * \delta[n-n_d] = x[n-n_d], \quad (5.124)$$

这就是说, 如果 $\alpha=n_d$ 是一个整数, 那么具有线性相位和单位增益的式(5.119)系统只是输入序列移位 n_d 个样本. 如果 α 不是整数, 那么最直接的解释就是在第三章例 3.3 所建立的结果. 具体来说就是: 式(5.119)系统的一种表示如图 5.30 所示, 其中 $h_c(t)=\delta(t-\alpha T)$ 和 $H_c(j\Omega)=e^{-j\alpha\omega T}$, 使得

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j\alpha\omega}, \quad |\omega| < \pi. \quad (5.125)$$

在这种表示中, T 的选择是没有关系的, 可以将它归一化到 1. 对 $x[n]$ 原来是否是经由采样一个连续时间信号得到的, 这种表示都是正确的. 再次强调这一点是很重要的. 按照图 5.30 的表示, $y[n]$ 就是输入序列带限内插后位移的样本序列, 即: $y[n]=x_c(nT-\alpha T)$. 式(5.119)的系统称为理想延迟系统, 并且就说成是具有 α 样本的延迟, 即使 α 不是整数.

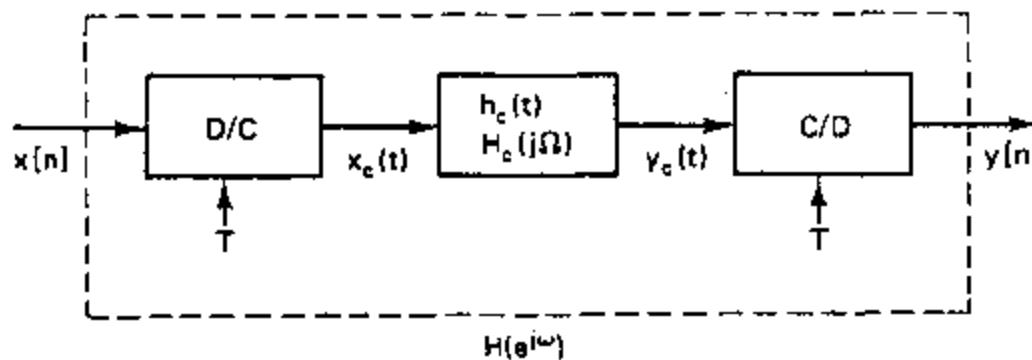


图 5.30 离散时间系统非整数延迟的解释.

理想延迟系统的讨论, 也给出了对具有非恒定幅度响应的线性相位一种有用的解释. 例如, 考虑一个具有线性相位更为一般的频率响应, 即 $H(e^{j\omega})$ 为

$$H(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})| e^{-j\alpha\omega}, \quad |\omega| < \pi. \quad (5.126)$$

式(5.126)可用图 5.31 来解释. 序列 $x[n]$ 经零相位频率响应 $|H(e^{j\omega})|$ 所滤波, 然后将滤波后的输出“延迟”(整数或非整数)量 α . 例如, 假定 $H(e^{j\omega})$ 是线性相位理想低通滤波器 $H_{lp}(e^{j\omega})$

$$H_{lp}(e^{j\omega}) = \begin{cases} e^{-j\omega\alpha}, & |\omega| < \omega_c, \\ 0, & \omega_c < |\omega| \leq \pi. \end{cases} \quad (5.127)$$

相应的冲激响应就是

$$h_{lp}[n] = \frac{\sin\omega_c(n-\alpha)}{\pi(n-\alpha)} \quad (5.128)$$

注意到, 若 $\omega_c=\pi$ 就得到式(5.121).

理想低通滤波器的冲激响应阐明了线性相位系统几个很有用的性质. 图 5.32(a)示

出 $\omega_c=0.4\pi$ 和 $\alpha=n_d=5$ 时的 $h_{lp}[n]$. 可看到当 α 是整数时, 冲激响应对 $n=n_d$ 是对称的, 即

$$\begin{aligned} h_{lp}[2n_d-n] &= \frac{\sin\omega_c(2n_d-n-n_d)}{\pi(2n_d-n-n_d)} \\ &= \frac{\sin\omega_c(n_d-n)}{\pi(n_d-n)} \\ &= h_{lp}[n]. \end{aligned} \quad (5.129)$$

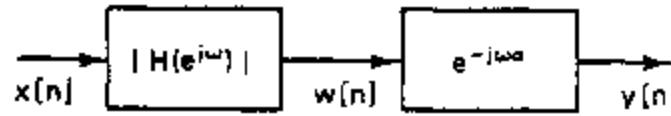


图 5.31 线性相应 LTI 系统作为幅度滤波器和延迟级联的表示.

在这一情况下, 可以定义一个零相位系统为

$$H_{lp}(e^{j\omega}) = H_{lp}(e^{j\omega})e^{j\omega n_d} = |H_{lp}(e^{j\omega})|, \quad (5.130)$$

其冲激响应则向左移 n_d 个样本, 得到一个偶序列

$$h_{lp}[n] = \frac{\sin\omega_c n}{\pi n} = h_{lp}[-n]. \quad (5.131)$$

图 5.32(b)示出 $\omega_c=0.4\pi$ 和 $\alpha=4.5$ 时的 $h_{lp}[n]$. 这就属于当线性相位相当于一个整数再加半个样本延迟时的典型情况. 和整数延迟情况一样, 很容易证明若 α 是一个整数再加 $1/2$ (或者 2α 是整数), 那么

$$h_{lp}[2\alpha-n] = h_{lp}[n]. \quad (5.132)$$

这时对称点是 α , 它不是整数. 因此, 由于对称不是对于序列中的一点, 所以要将序列移位还能得到一个具有零相位的偶序列就不可能. 这就类似于例 3.4 中 M 为奇数的情况.

图 5.32(c)表示第三种情况. 这里没有任何对称性可言. 这时 $\omega_c=0.4\pi$ 和 $\alpha=4.3$.

一般而言, 一个线性相位系统具有频率响应为

$$H(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})|e^{-j\omega\alpha}. \quad (5.133)$$

根据上面的讨论, 如果 2α 是整数, 即 α 为整数或整数再加 $1/2$, 那么相应的冲激响应关于 α 就是偶对称的, 即

$$h[2\alpha-n] = h[n]. \quad (5.134)$$

式(5.134)是系统具有线性相位的一个充分条件. 然而, 对称性条件本身显然不是必要的, 因为图 5.32(c)就示出一个线性相位系统, 其冲激响应是不对称的.

5.7.2 广义线性相位

在 5.7.1 节讨论中, 曾考虑过其频率响应具有式(5.126)的一类系统, 即一个实值非负的 ω 函数和一个线性相位项 $e^{-j\omega\alpha}$ 相乘. 对于这种形式的频率响应, $H(e^{j\omega})$ 的相位完全与线性相位因子 $e^{-j\omega\alpha}$ 相联系, 即 $\text{arg } H(e^{j\omega}) = -\omega\alpha$, 因此这类系统就称为线性相位系统. 在例 3.4 的滑动平均中式(3.65)的频率响应是 ω 的实值函数乘以线性相位项, 但是这个系统严格来说不是线性相位系统, 因为在一些频率处, 因式

$$\frac{1}{M+1} \frac{\sin[\omega(M+1)/2]}{\sin(\omega/2)}$$

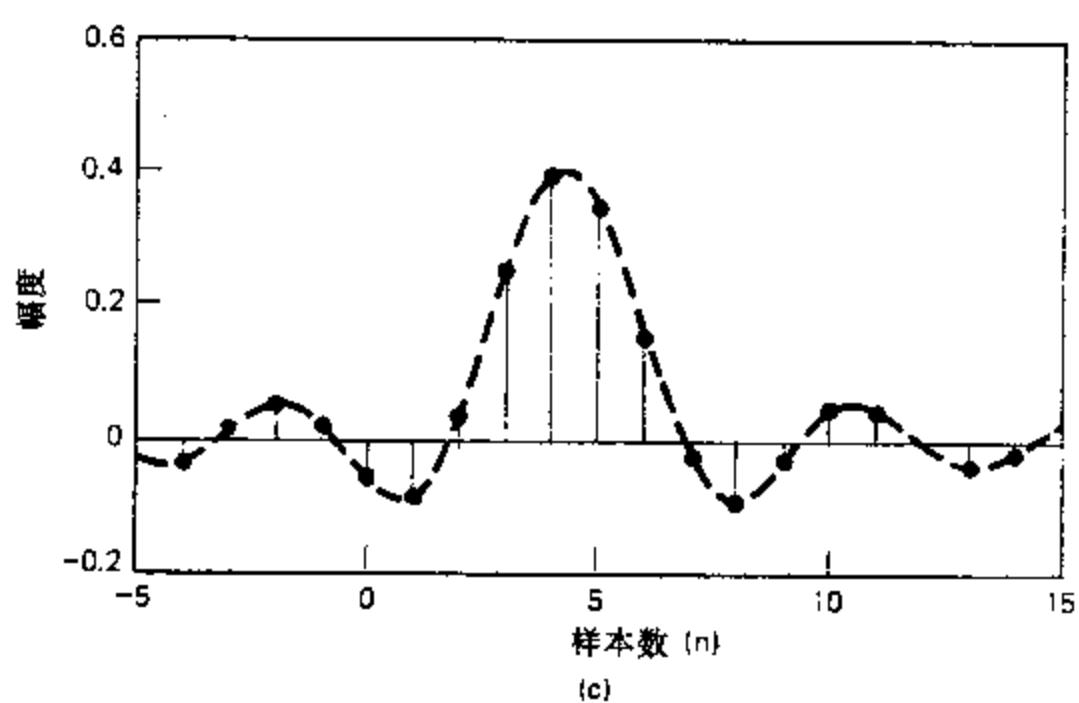
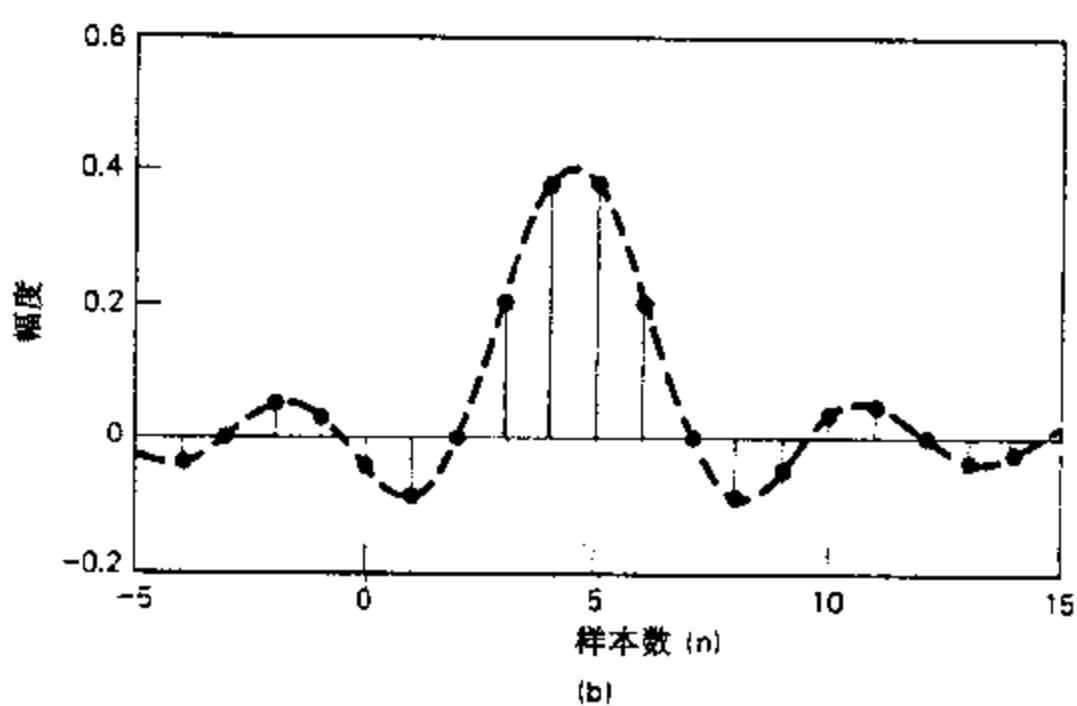
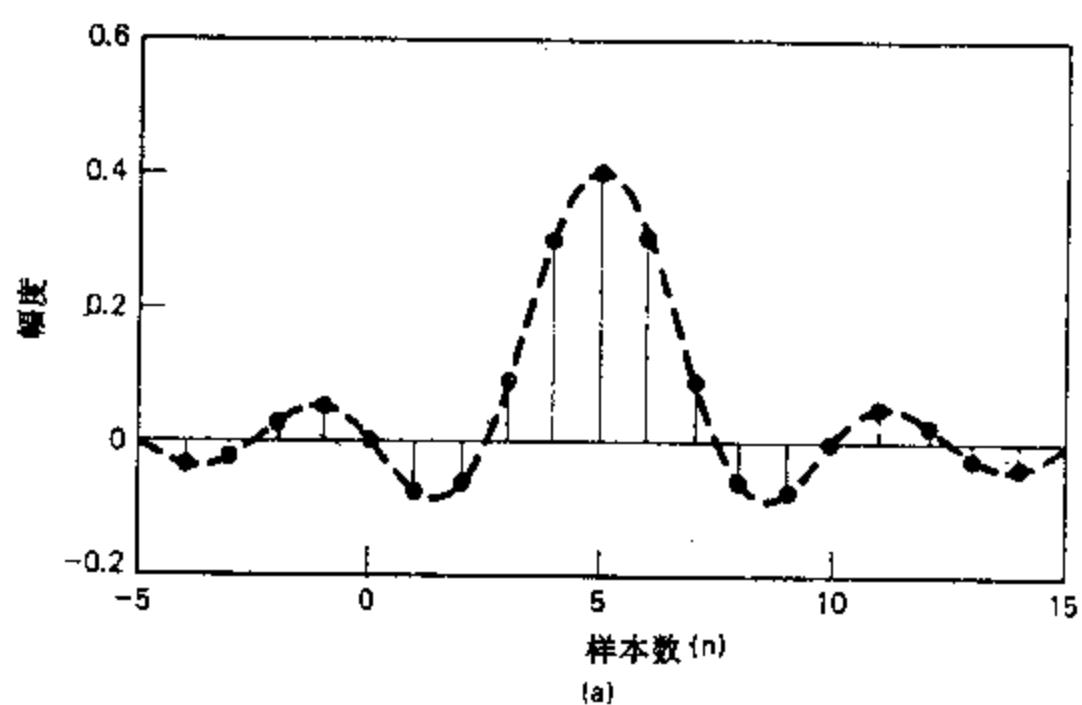


图 5.32 理想低通滤波器冲激响应, $\omega_c = 0.4\pi$. (a) 延迟 $= \alpha = 5$. (b) 延迟 $= \alpha = 4.5$. (c) 延迟 $= \alpha = 4$.

是负的,这一项就对总的相位增添了 π 弧度的附加相位.

线性相位系统的很多优点也适用于具有式(3.65)频率响应的系统,因此把线性相位的定义和概念稍许加以推广是有意义的.具体来说,如果系统的频率响应能表示成

$$H(e^{j\omega}) = A(e^{j\omega})e^{-j\alpha\omega + j\beta}, \quad (5.135)$$

就说该系统是一个广义线性相位系统.这里 α 和 β 都是常数,而 $A(e^{j\omega})$ 是 ω 的实(可能有正负)函数.对式(5.127)的线性相位系统和例 3.4 的滑动平均滤波器来说, $\beta=0$.然而,对例 3.2 的带限微分器来说,有 $\alpha=0$, $\beta=\pi/2$ 和 $A(e^{j\omega})=\omega/T$.

具有式(3.135)频率响应的系统称为广义线性相位系统,因为这类系统的相位由常数项加上线性函数 $-\omega\alpha$ 所组成.然而,如果不顾及在整个频带或者 $|\omega|<\pi$ 的部分频带内由于附加了固定相位项而带来的不连续性的话,那么这类系统也能用恒定群延迟来表征.这就是具有

$$\tau(\omega) = \text{grd}[H(e^{j\omega})] = -\frac{d}{d\omega}\{\arg[H(e^{j\omega})]\} = \alpha \quad (5.136)$$

的这类系统具有更一般的线性相位形式为

$$\arg[H(e^{j\omega})] = \beta - \omega\alpha, \quad 0 < \omega < \pi, \quad (5.137)$$

式中 β 和 α 都是实常数.

回想一下在 5.7.1 节曾指出,线性相位系统的冲激响应在 2α 为整数时,对 α 可以具有对称性.为了理解这一点在广义线性相位系统中的含意,导出一个对恒定群延迟系统 $h[n]$ 、 α 和 β 都必须满足的方程是有用的.这一方程的导出是注意到对恒定群延迟系统其频率响应能表示为

$$\begin{aligned} H(e^{j\omega}) &= A(e^{j\omega})e^{j(\beta-\omega\alpha)} \\ &= A(e^{j\omega})\cos(\beta-\omega\alpha) + jA(e^{j\omega})\sin(\beta-\omega\alpha) \end{aligned} \quad (5.138)$$

或者等效地有

$$\begin{aligned} H(e^{j\omega}) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]e^{-j\omega n} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]\cos\omega n - j \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]\sin\omega n, \end{aligned} \quad (5.139)$$

这里已假定 $h[n]$ 是实的. $H(e^{j\omega})$ 相位的正切可以表示为

$$\tan(\beta-\omega\alpha) = \frac{\sin(\beta-\omega\alpha)}{\cos(\beta-\omega\alpha)} = \frac{-\sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]\sin\omega n}{\sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]\cos\omega n}$$

交叉相乘并用三角恒等式合并有关项可以得到下面的方程

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]\sin(\omega(n-\alpha)+\beta) = 0. \quad (5.140)$$

这个方程对于具有恒定群延迟系统是关于 $h[n]$, α 和 β 的一个必要条件.它必须对所有 ω 都成立.它不是一个充分条件,并且由于它的隐含性,也没有告诉我们如何去找一个线性相位系统.例如,可以证明满足式(5.140)的一组条件是

$$\beta=0 \text{ 或 } \pi, \quad (5.141a)$$

$$2\alpha=M=\text{整数}, \quad (5.141b)$$

$$h[2\alpha-n]=h[n]. \quad (5.141c)$$

用 $\beta=0$ 或 π , 式(5.140)就变成

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n] \sin[\omega(n-\alpha)] = 0, \quad (5.142)$$

从此式可以证明, 如果 2α 是整数的话, 式(5.142)中各项就能配对, 以使得组成的每一对对全部 ω 都恒为零. 这组条件本就隐含着相应的频率响应具有式(5.135)的形式, 只是这里 $\beta=0$ 或 π , 以及 $A(e^{j\omega})$ 是 ω 的偶(当然是实)函数.

另外, 如果 $\beta=\pi/2$ 或 $3\pi/2$, 那么式(5.140)变成

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n] \cos[\omega(n-\alpha)] = 0, \quad (5.143)$$

并且能够证明

$$\beta=\pi/2 \text{ 或 } 3\pi/2, \quad (5.144a)$$

$$2\alpha=M=\text{整数}, \quad (5.144b)$$

$$h[2\alpha-n]=-h[n] \quad (5.144c)$$

对于全部 ω 都满足式(5.143), 式(5.144)就意味着频率响应具有式(5.135)的形式, 这时 $\beta=\pi/2$ 和 $A(e^{j\omega})$ 是 ω 的奇函数.

应该注意, 式(5.141)和式(5.144)给出了两组条件, 它们都保证了广义线性相位或恒定群延迟特性. 但是, 正如在图 5.32(c)已经看到的, 也存在其它的满足式(5.135)的系统而不具有这些对称条件.

5.7.3 因果广义线性相位系统

如果系统是因果的, 那么式(5.140)就变成

$$\sum_{n=0}^{\infty} h[n] \sin[\omega(n-\alpha)+\beta] = 0, \quad \text{对任意 } \omega. \quad (5.145)$$

因果性和式(5.141)、式(5.144)的条件意味着

$$h[n]=0, \quad n < 0 \text{ 和 } n > M$$

这就是说, 如果系统冲激响应的长度为 $(M+1)$, 并满足式(5.141c)或式(5.144c), 那么因果的 FIR 系统就具有广义线性相位. 具体来说, 若

$$h[n]=\begin{cases} h[M-n], & 0 \leq n \leq M, \\ 0, & \text{其它.} \end{cases} \quad (5.146a)$$

那么就能证明

$$H(e^{j\omega})=A_c(e^{j\omega})e^{-j\omega M/2}, \quad (5.146b)$$

式中 $A_c(e^{j\omega})$ 是 ω 的实、偶和周期函数. 同样, 若

$$h[n]=\begin{cases} -h[M-n], & 0 \leq n \leq M, \\ 0, & \text{其它.} \end{cases} \quad (5.147a)$$

那么就有

$$H(e^{j\omega})=jA_0(e^{j\omega})e^{-j\omega M/2}=A_0(e^{j\omega})e^{-j\omega M/2+j\pi/2}, \quad (5.147b)$$

式中 $A_0(e^{j\omega})$ 是 ω 的实、奇和周期函数. 应该注意在两种情况下, 冲激响应的长度都是 $(M+1)$ 个样本.

式(5.146a)和式(5.147a)对保证具有广义线性相位的因果系统都是充分条件. 然而

它们都不是必要条件. 克莱门茨和皮斯(Clements and Pease, 1989)已经证明因果的无限长冲激响应也能够具有广义线性相位的傅里叶变换. 但是, 相应的系统函数不是有理的, 因此系统不能用差分方程来实现.

FIR 线性相位系统频率响应表达式在滤波器设计和理解这类系统的某些性质上是有用的. 在导出这些表达式时, 会发现能得出明显不同的一些表达式, 这取决于对称的形式和 M 是偶数还是奇数而定. 为此, 定义四种类型的 FIR 广义线性相位系统一般是有用的.

I类 FIR 线性相位系统. I 类系统是定义为具有下面对称冲激响应特性的系统

$$h[n] = h[M-n], \quad 0 \leq n \leq M, \quad (5.148)$$

其中 M 为偶整数. 延迟 $M/2$ 也是整数, 频率响应是

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^M h[n] e^{-jn\omega}. \quad (5.149)$$

按式(5.148)对称条件, 可以将式(5.149)中的和式变换为

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j\omega M/2} \left(\sum_{k=0}^{M/2} a[k] \cos \omega k \right), \quad (5.150a)$$

这里

$$a[0] = h[M/2], \quad (5.150b)$$

$$a[k] = 2h[(M/2)-k], \quad k = 1, 2, \dots, M/2. \quad (5.150c)$$

于是, 由式(5.150a)可见 $H(e^{j\omega})$ 具有式(5.146b)的形式, 特别是相应于式(5.135)中的 β 不是 0 就是 π .

II类 FIR 线性相位系统. II 类系统有式(5.148)的对称冲激响应特性, 这里 M 为奇整数. 这时 $H(e^{j\omega})$ 可表示为

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j\omega M/2} \left\{ \sum_{k=1}^{(M+1)/2} b[k] \cos \left[\omega \left(k - \frac{1}{2} \right) \right] \right\}, \quad (5.151a)$$

式中

$$b[k] = 2h[(M+1)/2-k], \quad k = 1, 2, \dots, (M+1)/2. \quad (5.151b)$$

$H(e^{j\omega})$ 还具有式(5.146b)的形式, 其延迟为 $M/2$. 这时就是一个整数加上半个样本间隔的延迟, 而相应于式(5.135)中的 β 是 0 或是 π .

III类 FIR 线性相位系统. 如果系统有如下反对称冲激响应特性

$$h[n] = -h[M-n], \quad 0 \leq n \leq M, \quad (5.152)$$

其中 M 为偶整数, 那么 $H(e^{j\omega})$ 就具有

$$H(e^{j\omega}) = j e^{-j\omega M/2} \left[\sum_{k=1}^{M/2} c[k] \sin \omega k \right], \quad (5.153a)$$

这里

$$c[k] = 2h[(M/2)-k], \quad k = 1, 2, \dots, M/2. \quad (5.153b)$$

这时 $H(e^{j\omega})$ 具有式(5.147b)的形式, 其延迟为 $M/2$, 是一个整数, 而相应于式(5.135)中的 β 是 $\pi/2$ 或是 $3\pi/2$.

IV类 FIR 线性相位系统. 如果冲激响应特性仍是式(5.152)的反对称, 而 M 为奇整数, 那么

$$H(e^{j\omega}) = j e^{-j\omega M/2} \left\{ \sum_{k=1}^{(M+1)/2} d[k] \sin \left[\omega \left(k - \frac{1}{2} \right) \right] \right\}, \quad (5.154a)$$

这里

$$d[k] = 2h[(M+1)/2 - k], \quad k=1, 2, \dots, (M+1)/2 \quad (5.154b)$$

与Ⅱ类系统的情况相同, $H(e^{j\omega})$ 具有式(5.147b)的形式, 其延迟为 $M/2$, 是一个整数再加上半个样本间隔的延迟, 而相应于式(5.135)中的 β 就是 π 或者 $3\pi/2$.

FIR 线性相位系统举例. 图 5.33 对四种类型的 FIR 线性相位系统都给出了一个例子. 有关的频率响应在例 5.13—例 5.16 中给出.

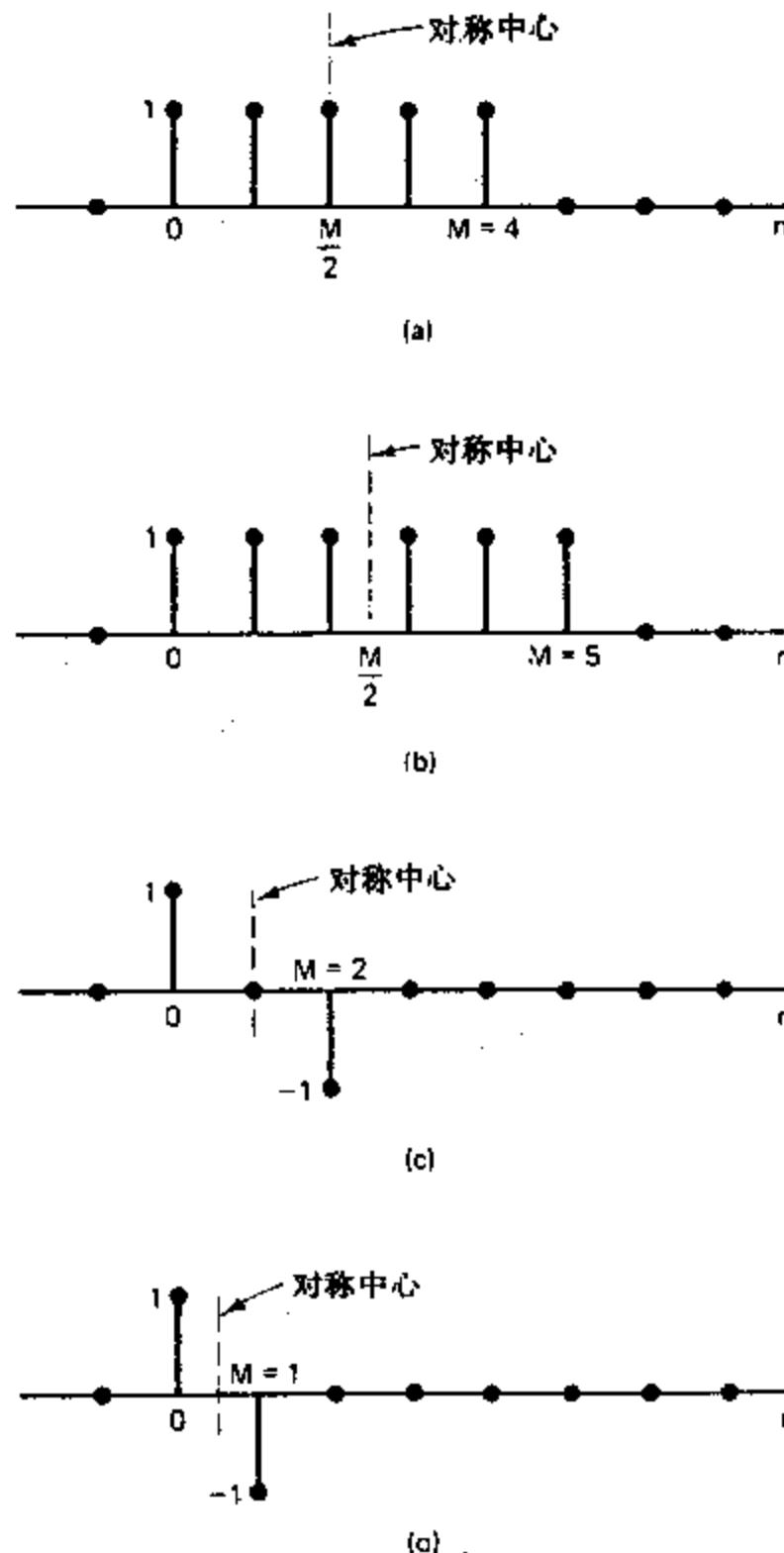


图 5.33 FIR 线性相位系统的例子. (a) I 类, M 为偶, $h[n] = h[M-n]$. (b) I 类, M 为奇, $h[n] = h[M-n]$. (c) II 类, M 为偶, $h[n] = -h[M-n]$. (d) II 类, M 为奇, $h[n] = -h[M-n]$.

例 5.13 I 类

如果冲激响应是

$$h[n] = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq 4, \\ 0, & \text{其它.} \end{cases} \quad (5.155)$$

如图 5.33(a)所示,该系统满足式(5.148)条件.频率响应是

$$\begin{aligned} H(e^{j\omega}) &= \sum_{n=0}^4 e^{-jn\omega} = \frac{1 - e^{-j\omega 5}}{1 - e^{-j\omega}} \\ &= e^{-j\omega 2} \frac{\sin(5\omega/2)}{\sin(\omega/2)}. \end{aligned} \quad (5.156)$$

该系统的幅度、相位和群延迟特性如图 5.34 所示.因为 $M=4$ 是偶数,所以群延迟是整数,即 $\alpha=2$.

例 5.14 I类

若前例冲激响应的长度延长一个样本,就能得到图 5.33(b)的冲激响应,其频率响应为

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j\omega 5/2} \frac{\sin(3\omega)}{\sin(\omega/2)}. \quad (5.157)$$

系统频率响应如图 5.35 所示.注意,这时群延迟是一个常数为 $\alpha=5/2$.

例 5.15 III类

若系统的冲激响应是

$$h[n] = \delta[n] - \delta[n-2] \quad (5.158)$$

如图 5.33(c)所示,那么

$$\begin{aligned} H(e^{j\omega}) &= 1 - e^{-j2\omega} \\ &= j[2\sin(\omega)]e^{-j\omega}. \end{aligned} \quad (5.159)$$

该例的频率响应特性由图 5.36 给出.注意这时群延迟是常数且 $\alpha=1$.

例 5.16 IV类

现在(图 5.33d)冲激响应是

$$h[n] = \delta[n] - \delta[n-1], \quad (5.160)$$

其频率响应为

$$\begin{aligned} H(e^{j\omega}) &= 1 - e^{-j\omega} \\ &= j[2\sin(\omega/2)]e^{-j\omega/2}. \end{aligned} \quad (5.161)$$

图 5.37 示出该系统的频率响应曲线.注意,群延迟对全部 ω 都是 $1/2$.

FIR 线性相位系统的零点位置. 上述各例说明了所有四种类型的 FIR 线性相位系统的冲激响应和频率响应的特性.考虑一下 FIR 线性相位系统的系统函数零点的位置也是很有启发性的.它们的系统函数是

$$H(z) = \sum_{n=0}^M h[n]z^{-n}. \quad (5.162)$$

在对称情况下(I类和II类),能用式(5.148)来表示 $H(z)$ 为

$$\begin{aligned} H(z) &= \sum_{n=0}^M h[M-n]z^{-n} = \sum_{k=M}^0 h[k]z^k z^{-M} \\ &= z^{-M} H(z^{-1}). \end{aligned} \quad (5.163)$$

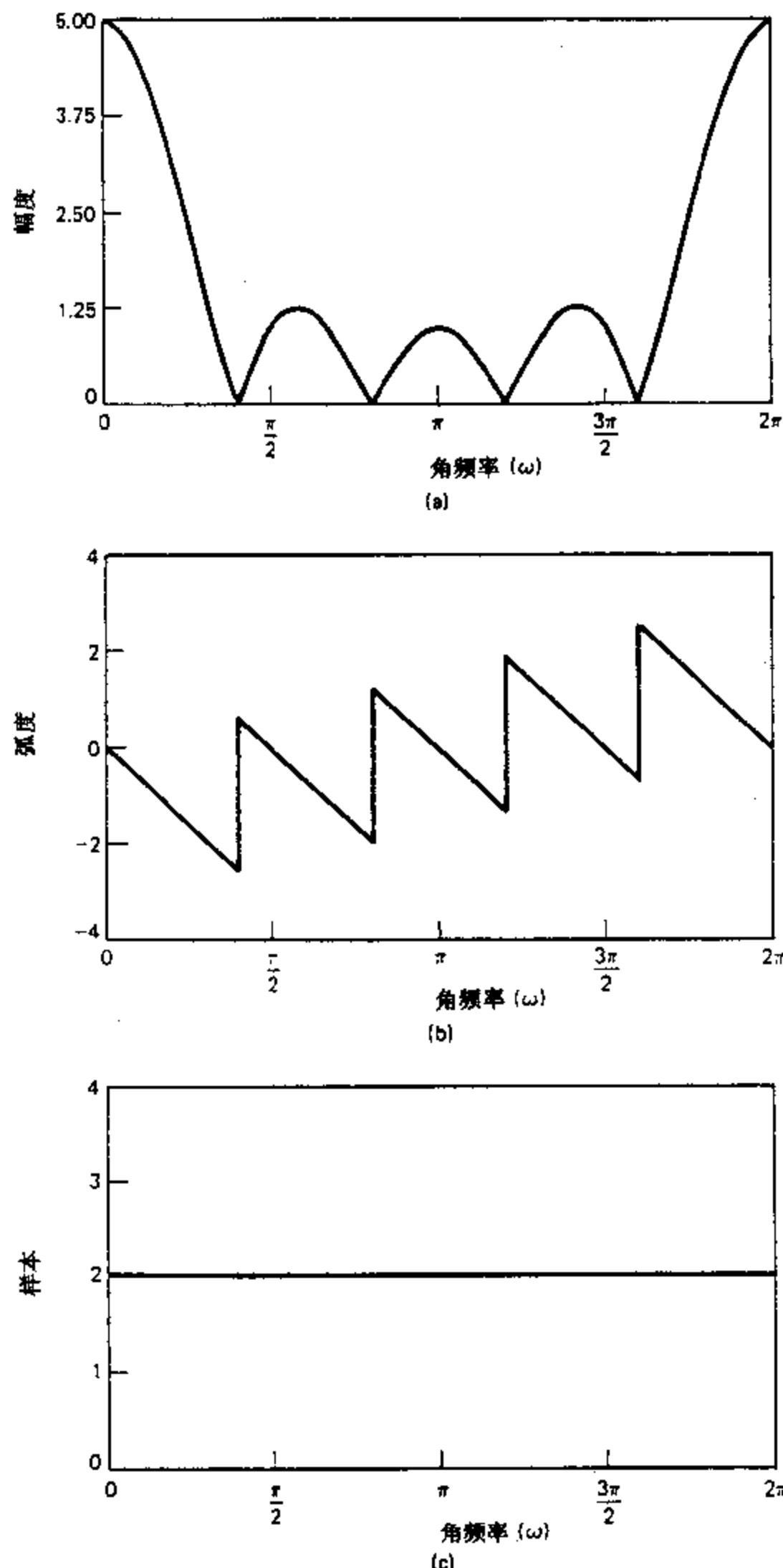


图 5.34 例 5.13 的 I 类系统的频率响应。
(a)幅度, (b)相位, (c)群延迟.

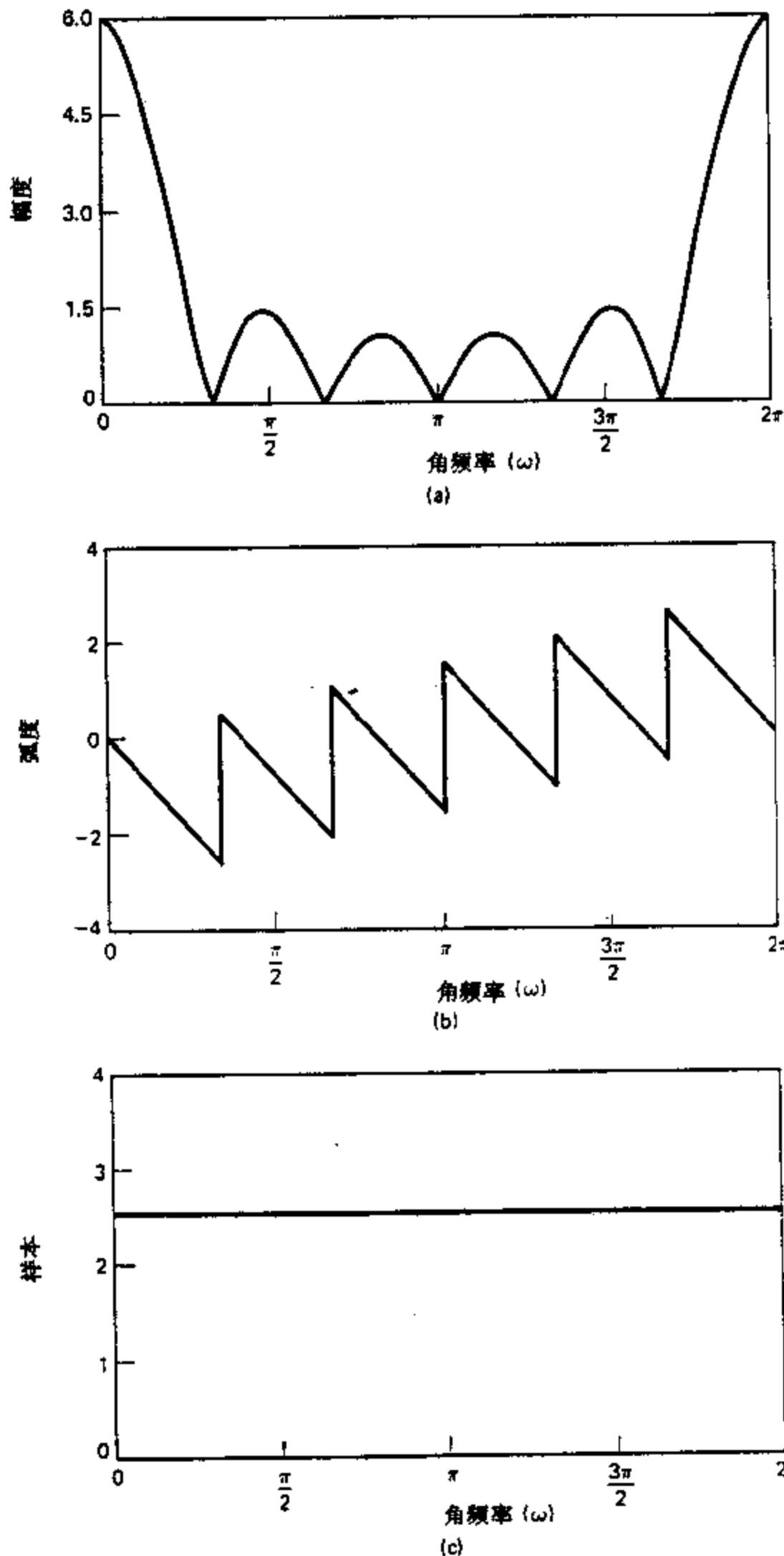


图 5.35 例 5.14 的 I 类系统的频率响应。
(a)幅度, (b)相位, (c)群延迟.

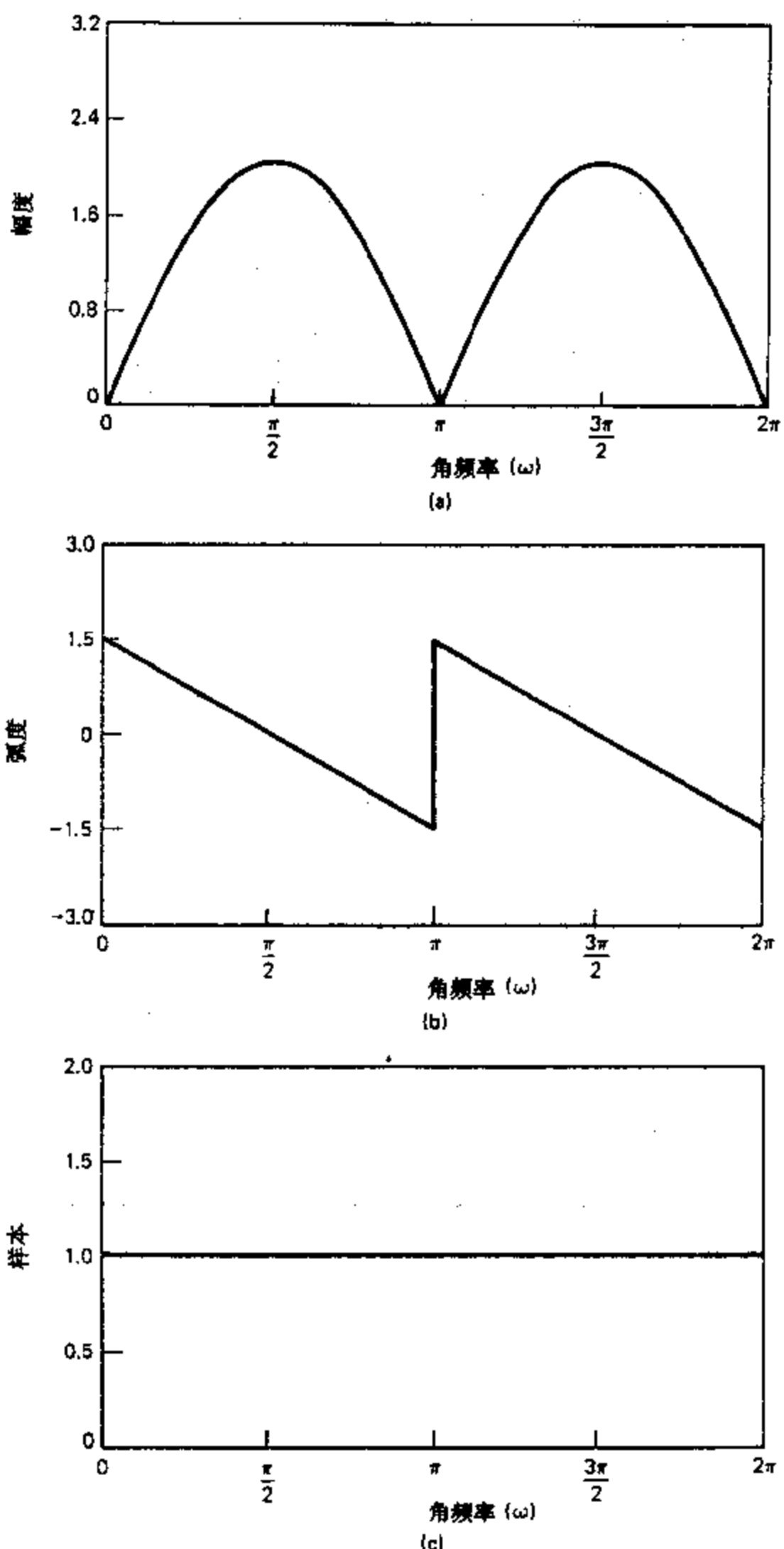


图 5.36 例 5.15 的 II 类系统的频率响应。
(a)幅度, (b)相位, (c)群延迟.

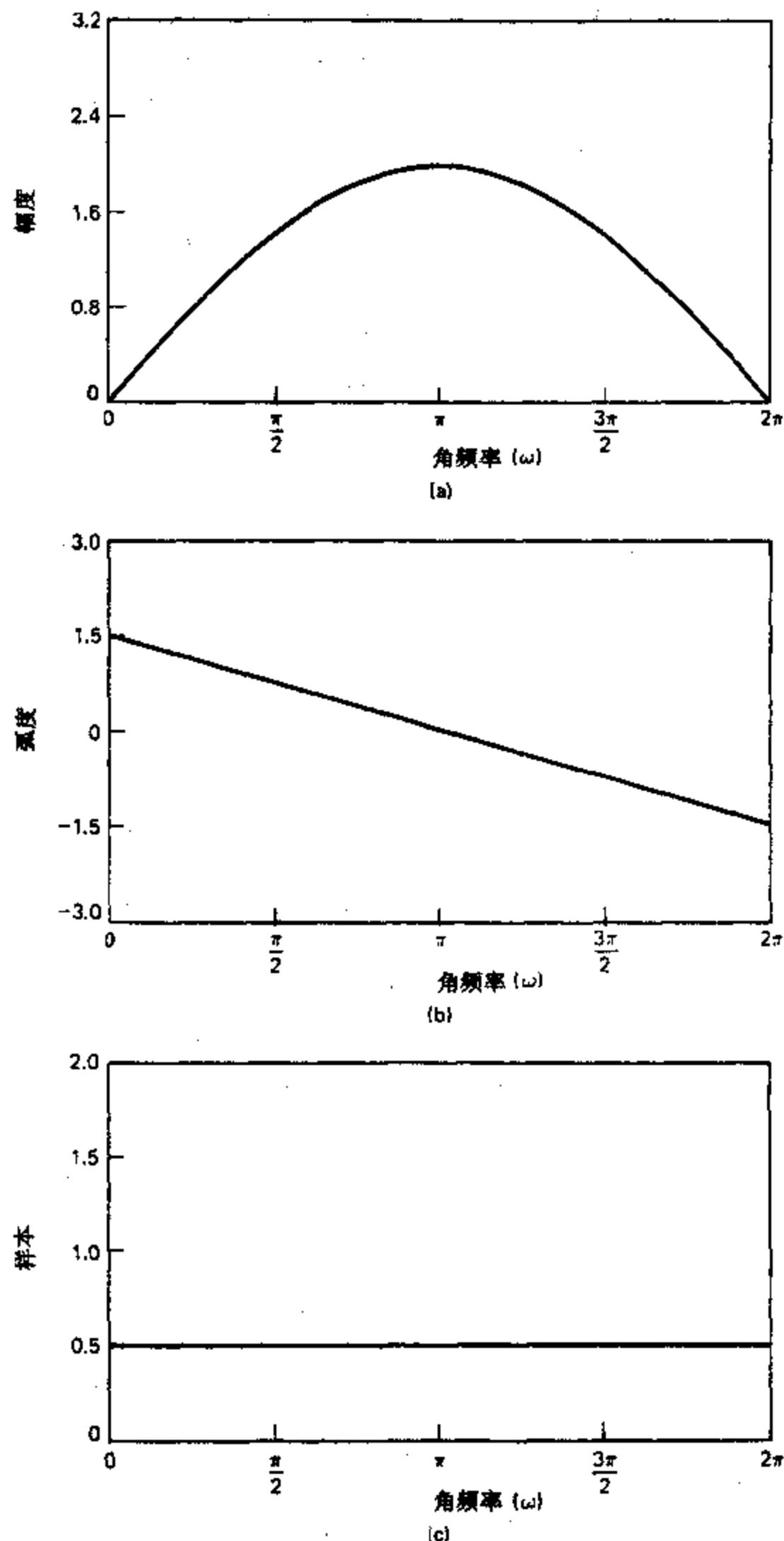


图 5.37 例 5.16 的 IV 类系统的频率响应。
(a)幅度. (b)相位. (c)群延迟.

由式(5.163)得出,如果 z_0 是 $H(z)$ 的零点,那么

$$H(z_0) = z_0^{-M} H(z_0^{-1}) = 0. \quad (5.164)$$

这意味着:若 $z_0=re^{j\theta}$ 是 $H(z)$ 的零点,那么 $z_0^{-1}=r^{-1}e^{-j\theta}$ 也是 $H(z)$ 的零点.当 $h[n]$ 为实数且 z_0 是 $H(z)$ 的零点时,那么 $z_0^*=re^{-j\theta}$ 也一定是 $H(z)$ 的零点,并且按照前述能够推得 $(z_0)^{-1}=r^{-1}e^{j\theta}$ 也是 $H(z)$ 的零点.因此,当 $h[n]$ 是实数时,不在单位圆上的每个复数零点一定是一组四个如下形式的共轭倒数零点中的一个

$$(1-re^{j\theta}z^{-1})(1-re^{-j\theta}z^{-1})(1-r^{-1}e^{j\theta}z^{-1})(1-r^{-1}e^{-j\theta}z^{-1}).$$

如果 $H(z)$ 的零点在单位圆上,即 $z_0=e^{j\theta}$,那么 $z_0^{-1}=e^{-j\theta}=z_0^*$,所以单位圆上的零点以如下形式成对出现

$$(1-e^{j\theta}z^{-1})(1-e^{-j\theta}z^{-1}).$$

如果 $H(z)$ 的零点是实数且不在单位圆上,其倒数也一定是 $H(z)$ 的零点, $H(z)$ 将有如下因子

$$(1\pm rz^{-1})(1\pm r^{-1}z^{-1}).$$

最后, $H(z)$ 在 $z=\pm 1$ 的零点,因为 ± 1 的倒数和共轭还是 ± 1 ,所以只能以 $z=\pm 1$ 出现.因此, $H(z)$ 也可有如下因子

$$(1\pm z^{-1}).$$

零点在 $z=-1$ 的情况特别重要.根据式(5.163)

$$H(-1)=(-1)^M H(-1).$$

如果 M 为偶数,这就是一个简单的恒等式;但若 M 为奇, $H(-1)=-H(-1)$,所以 $H(-1)$ 必须是零.据此,对于 M 为奇数的对称冲激响应,其系统函数必须有一个零点在 $z=-1$.图 5.38(a)和图 5.38(b)分别表明 I 类(M 为偶)和 I 类(M 为奇)系统典型的零点位置.

如果冲激响应是反对称的(II类和IV类),那么遵循上面得出式(5.163)的办法,可以证明有

$$H(z)=-z^{-M}H(z^{-1}). \quad (5.165)$$

这个式子可以用来说明对于反对称情况, $H(z)$ 的零点也和对称情况下的零点一样受到约束.然而,在反对称情况下, $z=1$ 和 $z=-1$ 都具有特殊的意义.若 $z=1$,式(5.165)就变成

$$H(1)=-H(1). \quad (5.166)$$

于是 $H(z)$ 必须有 $z=1$ 的零点,不论 M 为偶还是为奇.若 $z=-1$,式(5.165)给出

$$H(-1)=(-1)^{-M+1}H(-1). \quad (5.167)$$

这时,若 $(M-1)$ 为奇(M 为偶), $H(-1)=-H(-1)$,所以 $z=-1$ 在 M 为偶数时必须是 $H(z)$ 的零点.图 5.38(c)和图 5.38(d)分别示出 II类和 IV类系统典型的零点位置.

有关在零点上的这些约束在设计 FIR 线性相位系统中是很重要的,因为它们在能够实现的频率响应类型上强加了一些限制.例如,当用一个对称冲激响应来逼近一个高通滤波器时, M 就不应该选为奇数.因为 M 为奇,频率响应就必须在 $\omega=\pi(z=-1)$ 强制为零.

5.7.4 FIR 线性相位系统与最小相位系统的关系

以上讨论表明,所有冲激响应为实的 FIR 线性相位系统,其零点不是在单位圆上就是在共轭倒数的位置上.因此,很容易证明,任何 FIR 线性相位系统的系统函数都能因式分解为最小相位项 $H_{\min}(z)$ 、最大相位项 $H_{\max}(z)$ 以及仅包含单位圆上零点的项 $H_{ac}(z)$,即

$$H(z)=H_{\min}(z)H_{ac}(z)H_{\max}(z), \quad (5.168a)$$

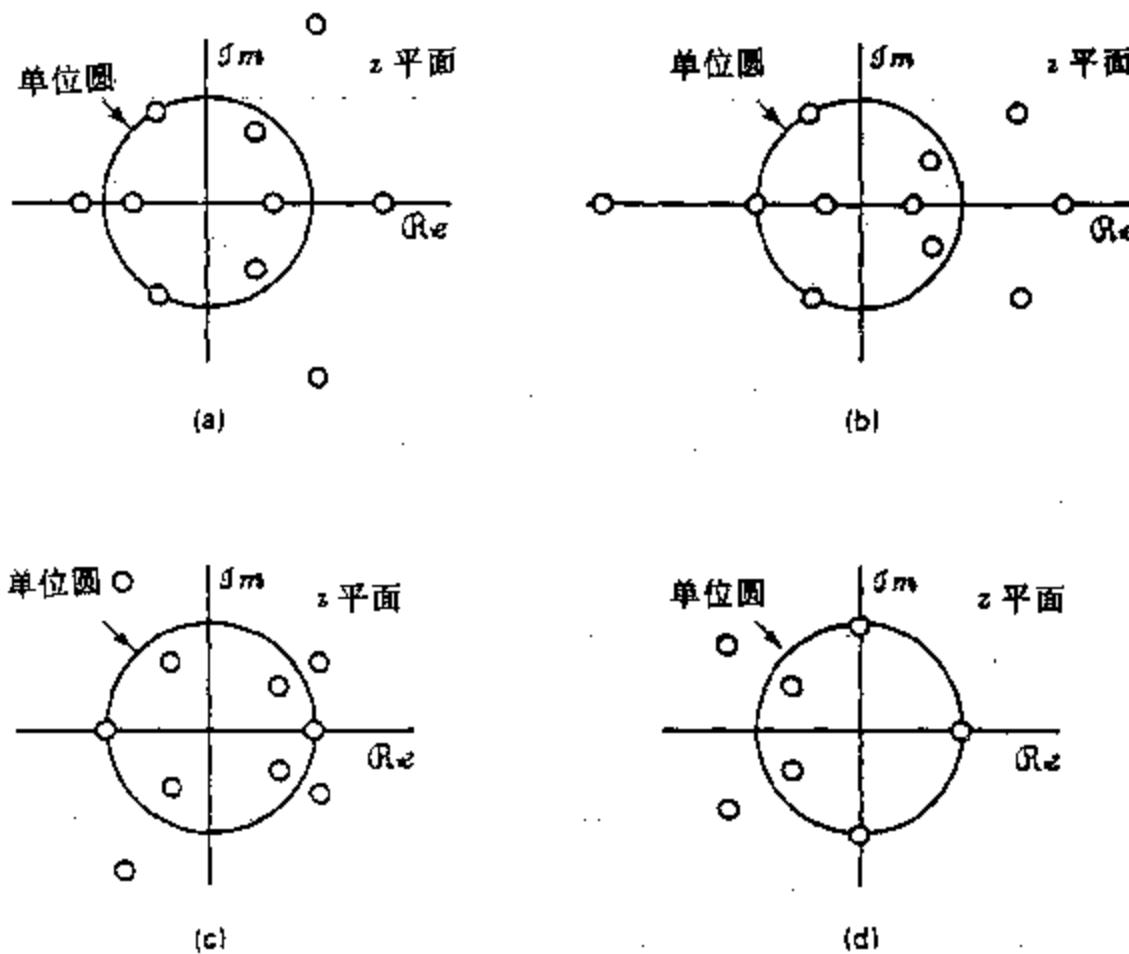


图 5.38 线性相位系统典型零极点图。(a) I 类。(b) II 类。(c) III 类。(d) IV 类。

这里

$$H_{\max}(z) = H_{\min}(z^{-1})z^{-M_i} \quad (5.168b)$$

M_i 是 $H_{\min}(z)$ 零点的个数。在式(5.168a)中, $H_{\min}(z)$ 的全部 M_i 个零点都在单位圆内, 而 $H_{\max}(z)$ 的全部 M_o 个零点都在单位圆上。 $H_{\max}(z)$ 的全部 M_i 个零点都在单位圆外, 并且从式(5.168b), 它的零点就是 $H_{\min}(z)$ 零点的倒数。因此, 系统函数 $H(z)$ 的阶就是 $M = 2M_i + M_o$ 。

例 5.17

作为应用式(5.168)的一个简单例子, 考虑式(5.109)的最小相位系统函数。该系统函数的频率响应画在图 5.25 上。将式(5.168b)应用于式(5.109)的 $H_{\min}(z)$, 求得 $H_{\max}(z)$ 系统是

$$\begin{aligned} H_{\max}(z) &= (0.9)^2 (1 - 1.111e^{j0.6\pi}z^{-1})(1 - 1.111e^{-j0.6\pi}z^{-1}) \\ &\quad \times (1 - 1.25e^{-j0.8\pi}z^{-1})(1 - 1.25e^{j0.8\pi}z^{-1}). \end{aligned}$$

$H_{\max}(z)$ 的频率响应示于图 5.39。现在如果这两个系统级联, 那么根据式(5.168)可得总系统是

$$H(z) = H_{\min}(z)H_{\max}(z)$$

它具有线性相位。分别将两个系统的对数幅度、相位和群延迟函数相加, 就得到该复合系统的频率响应。因此

$$\begin{aligned} 20\log_{10}|H(e^{j\omega})| &= 20\log_{10}|H_{\min}(e^{j\omega})| + 20\log_{10}|H_{\max}(e^{j\omega})| \\ &= 40\log_{10}|H_{\min}(e^{j\omega})|. \end{aligned} \quad (5.169)$$

类似地

$$\angle H(e^{j\omega}) = \angle H_{\min}(e^{j\omega}) + \angle H_{\max}(e^{j\omega}). \quad (5.170)$$

由式(5.168b)就有

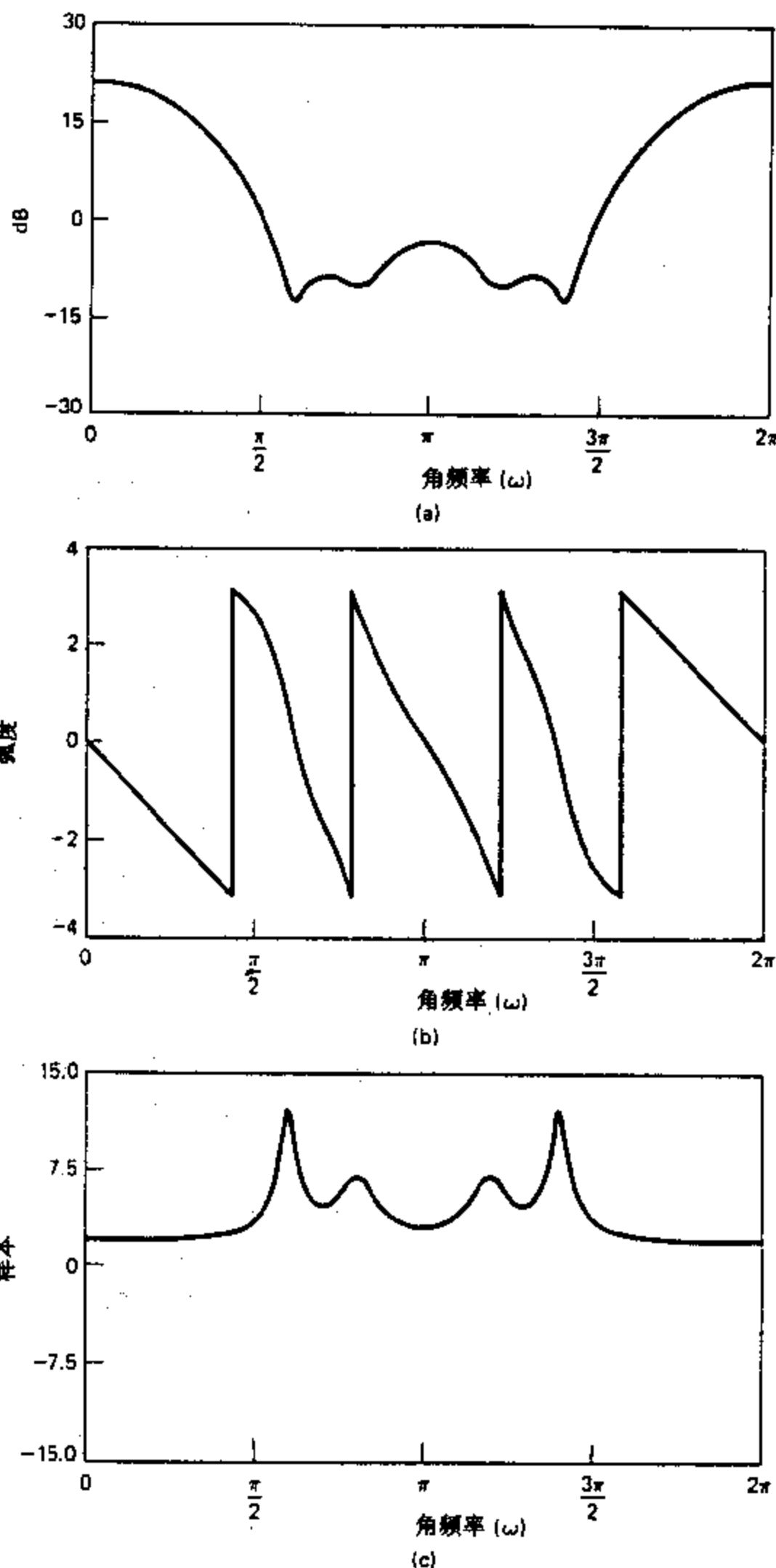


图 5.39 具有与图 5.25 相同幅度的最大相位系统的频率响应. (a)对数幅度. (b)相位(主值). (c)群延迟.

$$\angle H_{\max}(e^{j\omega}) = -\omega M_i - \angle H_{\min}(e^{j\omega}). \quad (5.171)$$

和

$$\angle H(e^{j\omega}) = -\omega M_i,$$

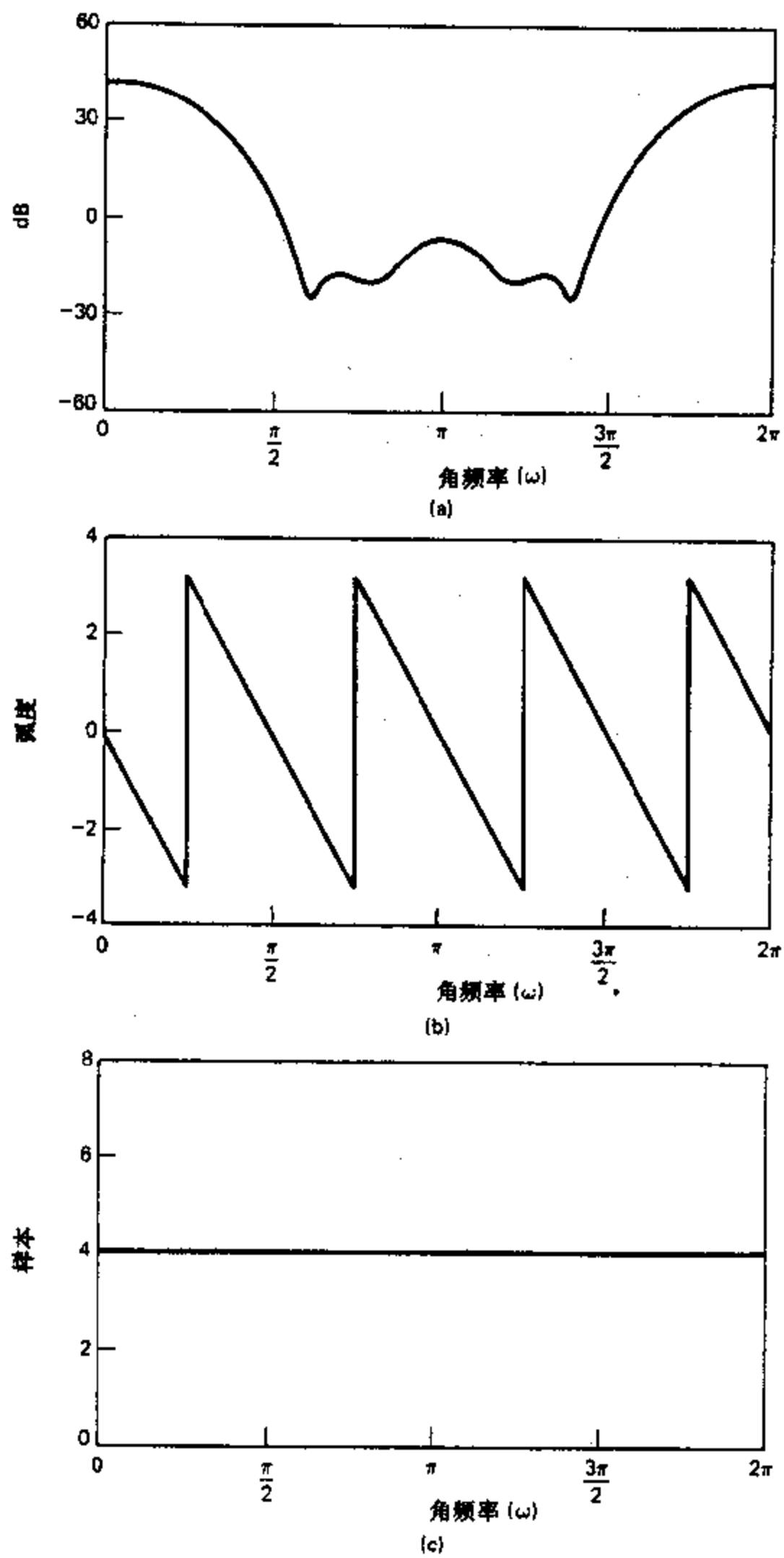


图 5.40 最大相位系统与最小相位系统级联的频率响应, 得到一个线性相位系统. (a)对数幅度, (b)相位(主值), (c)群延迟.

这里 $M_i=4$ 是 $H_{\min}(z)$ 的零点个数. 以同样的方法, 将 $H_{\min}(e^{j\omega})$ 和 $H_{\max}(e^{j\omega})$ 的群延迟函数组合后给出

$$\text{grd}[H(e^{j\omega})] = M_i = 4.$$

图 5.40 给出了复合系统频率响应的图。应该注意，这些曲线就是图 5.25 和图 5.39 对应特性的和。

5.8 小结

这一章我们建立并研究了利用傅里叶变换和 z 变换方法来表示和分析 LTI 系统。对 LTI 系统变换分析的重要性直接来自这一结果：复指数是这类系统的特征函数，并且有关的特征值就对应于系统函数或系统频率响应。

LTI 系统中特别重要的一类是由线性常系数差分方程表征的系统。变换分析对分析这类系统是特别有效的，因为傅里叶变换或 z 变换都把一个差分方程转变为代数方程。尤其是，系统函数是多项式之比，多项式的系数就直接对应于差分方程的系数。这些多项式的根提供了一种有用的利用零极点图的系统表示方法。由差分方程表征的系统其冲激响应可以是无限长的(IIR)，或者是有限长的(FIR)。

LTI 系统的频率响应常用幅度和相位或群延迟来表征，其中群延迟是相位特性导数的负值。线性相位往往是欲追求的频率响应特性，因为线性相位是一种相当轻微的相位失真形式，它只相当于一个位移量。FIR 系统的重要性部分在于：对于给定一组频率响应幅度指标时，它能很容易地设计成具有真正线性相位(或广义线性相位)特性，不过 IIR 系统更为经济有效。有关两者诸如此类的折衷在第七章将给予详细的讨论。

虽然对于 LTI 系统其频率响应幅度和相位之间一般是独立的，但对最小相位系统而言，幅度唯一地确定了相位，而相位除了一个幅度加权因子外，也唯一地确定了幅度特性。非最小相位系统可以用最小相位系统与全通系统的级联组合来表示。傅里叶变换幅度和相位之间的关系将在第十章作更详细的讨论。

习题

- 5.1 图 P5.1-1 中， $H(e^{j\omega})$ 为理想低通滤波器。问对输入 $x[n]$ 和截止频率 ω_c 是否有某种选择，使得输出 $y[n]$ 是如图 P5.1-2 所示的序列，即

$$y[n] = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq 10, \\ 0, & \text{其它.} \end{cases}$$

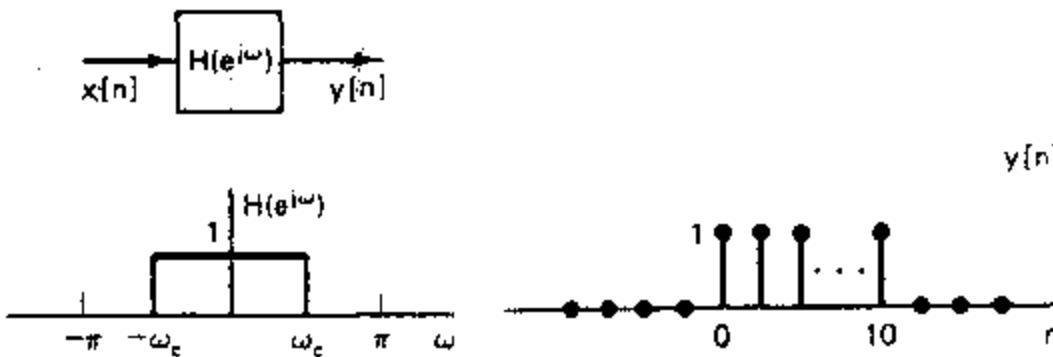


图 P5.1-1

图 P5.1-2

- 5.2 设 $h_{lp}[n]$ 为某理想低通滤波器的冲激响应，该滤波器带内增益为 1，截止频率为 $\omega_c = \pi/4$ 。图 P5.2

示出五个系统,其中每一个都等效为一种理想 LTI 频率选择性滤波器。对图 P5.2 中每一个系统画出其等效频率响应,并用 ω_c 标注出通带边缘频率,并指出它们是否属于低通、高通、带通、带阻或多频带滤波器。

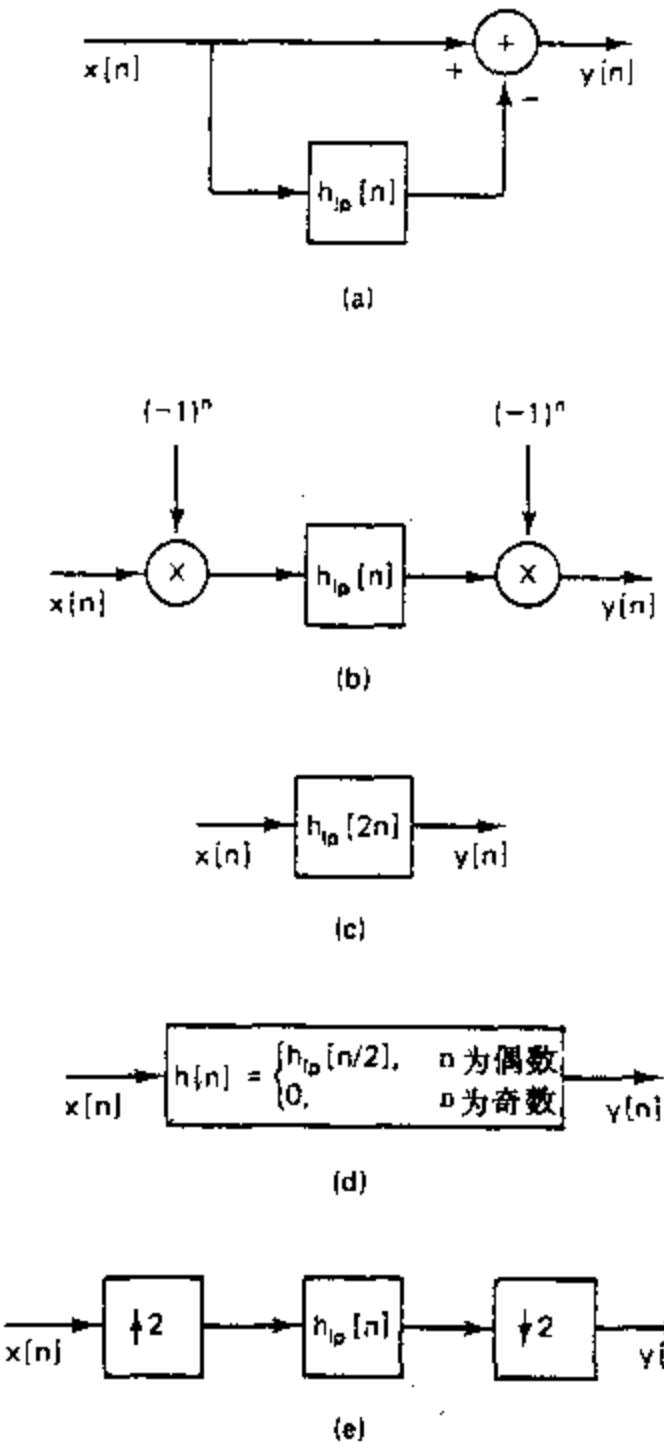


图 P5.2

5.3 在图 P5.3-1 所示系统中,假定输入 $x[n]$ 可以表示为

$$x[n] = s[n] \cos(\omega_0 n). \quad (\text{P5.3})$$

同时假设 $s[n]$ 是低通且带宽为相当窄的信号,即 $S(e^{j\omega}) = 0$, $|\omega| > \Delta$, Δ 非常小以使得 $X(e^{j\omega})$ 就是在 $\omega = \pm \omega_0$ 附近的窄带信号。



图 P5.3-1

(a) 若 $|H(e^{j\omega})| = 1$, 如图 P5.3-2 所示, 证明 $y[n] = s[n] \cos(\omega_0 n - \phi_0)$.

(b) 若 $|H(e^{j\omega})| = 1$, 如图 P5.3-3 所示, 证明 $y[n]$ 可以表示为

$$y[n] = s[n - n_d] \cos(\omega_0 n - \phi_0 - \omega_0 n_d).$$

同时证明 $y[n]$ 也能等效表示成

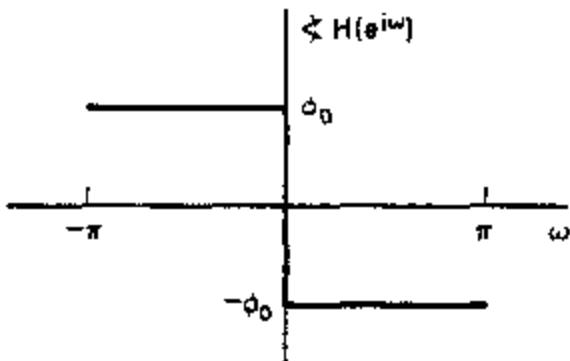


图 P5.3-2

$$y[n] = s[n - n_d] \cos(\omega_0 n - \phi_1),$$

式中 $-\phi_1$ 是 $H(e^{j\omega})$ 在 $\omega = \omega_0$ 时的相位。

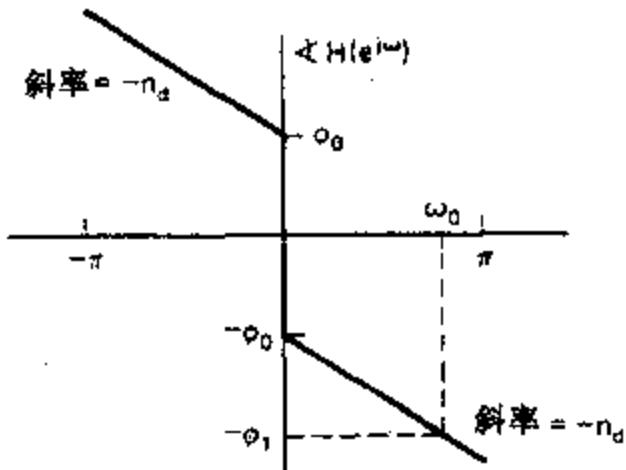


图 P5.3-3

(c) $H(e^{j\omega})$ 的群延迟定义为

$$\tau_{gr}(\omega) = -\frac{d}{d\omega} \arg[H(e^{j\omega})]$$

而相位延迟定义为 $\tau_{ph}(\omega) = -\left(\frac{1}{\omega}\right) \angle H(e^{j\omega})$ 。假设 $|H(e^{j\omega})|$ 在 $x[n]$ 的带内为 1。根据本题(a)和(b)的结果，并在 $x[n]$ 是窄带的假设下，证明：如果 $\tau_{gr}(\omega_0)$ 和 $\tau_{ph}(\omega_0)$ 两者都是整数，那么

$$y[n] = s[n - \tau_{gr}(\omega_0)] \cos\{\omega_0[n - \tau_{ph}(\omega_0)]\}.$$

这就表明，对窄带信号 $x[n]$ 而言， $\angle H(e^{j\omega})$ 对 $x[n]$ 的包络 $s[n]$ 给予的延迟是 $\tau_{gr}(\omega_0)$ ，对载波 $\cos\omega_0 n$ 的延迟是 $\tau_{ph}(\omega_0)$ 。

(d) 参照第三章有关序列非整数延迟的讨论，如何解释如果 $\tau_{gr}(\omega_0)$ 和 / 或 $\tau_{ph}(\omega_0)$ 不是整数时群延迟和相位延迟的效果？

5.4 考虑一个输入为 $x[n]$ ，输出为 $y[n]$ 的稳定线性时不变系统，其输入输出满足下面差分方程

$$y[n-1] - \frac{10}{3}y[n] + y[n+1] = x[n].$$

(a) 画出在 z 平面的零极点图。

(b) 求冲激响应 $h[n]$ 。

5.5 考虑一个线性时不变离散时间系统，其输入 $x[n]$ 和输出 $y[n]$ 满足下面的二阶差分方程：

$$y[n-1] + \frac{1}{3}y[n-2] = x[n].$$

从以下所列中选出两种该系统可能的冲激响应函数：

(a) $\left(-\frac{1}{3}\right)^{n+1} u[n+1]$

(b) $3^{n+1} u[n+1]$

- (c) $3(-3)^{n+2}u[-n-2]$
 (d) $\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{3}\right)^n u[-n-2]$
 (e) $\left(-\frac{1}{3}\right)^{n+1} u[-n-2]$
 (f) $\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} u[n+1]$
 (g) $(-3)^{n+1} u[n]$
 (h) $n^{1/3} u[n]$

5.6 当线性时不变系统的输入是

$$x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] + (2)^n u[-n-1],$$

其输出是

$$y[n] = 6\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] - 6\left(\frac{3}{4}\right)^n u[n].$$

- (a) 求该系统的系统函数, 画出 $H(z)$ 的零极点图并指出收敛域.
 (b) 求对所有 n 的系统冲激响应 $h[n]$.
 (c) 写出表征该系统的差分方程.
 (d) 该系统稳定吗? 因果吗?

5.7 考虑一个初始松弛的由线性常系数差分方程描述的系统, 该系统的阶跃响应是

$$y[n] = \left(\frac{1}{3}\right)^n u[n] + \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n] + u[n].$$

- (a) 求差分方程.
 (b) 求系统的冲激响应.
 (c) 确定系统是否稳定.

5.8 关于某一线性时不变系统, 下面的信息是已知的:

- (i) 系统是因果的.
 (ii) 当输入

$$x[n] = -\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] - \frac{4}{3}(2)^n u[-n-1],$$

时, 输出的 z 变换为

$$Y(z) = \frac{1-z^{-2}}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)(1-2z^{-1})}.$$

- (a) 求 $x[n]$ 的 z 变换.
 (b) $Y(z)$ 可能的收敛域是什么?
 (c) 系统冲激响应有几种可能的选择?

5.9 一个线性时不变系统的冲激响应为

$$h[n] = 2\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$$

其输入为 $x[n]$. 利用 z 变换求在下列输入时系统的响应 $y[n]$.

- (a) $x[n] = 5\left(\frac{3}{4}\right)^n u[n]$
 (b) $x[n] = nu[n]$

对每一种情况都标出 $Y(z)$ 的收敛域.

5.10 当线性时不变系统的输入是

$$x[n] = 5u[n],$$

时,输出为

$$y[n] = \left[2\left(\frac{1}{2}\right)^n + 3\left(-\frac{3}{4}\right)^n \right] u[n].$$

(a) 求系统函数 $H(z)$,画出 $H(z)$ 的零极点图,并标出收敛域.

(b) 求对全部 n 值的系统冲激响应.

(c) 写出表征该系统的差分方程.

5.11 一个因果线性时不变系统的系统函数有如图 P5.11 所示的零极点图. 同时已知当 $z=1$ 时, $H(z)=6$.

(a) 求 $H(z)$.

(b) 求系统冲激响应 $h[n]$.

(c) 求在下列输入时的系统响应:

$$(i) x[n] = u[n] - \frac{1}{2}u[n-1]$$

(ii) 经采样下面连续时间信号得到的序列 $x[n]$

$$x(t) = 50 + 10\cos 20\pi t + 30\cos 40\pi t$$

采样频率为 $\Omega_s = 2\pi(40)$ 弧度/秒.

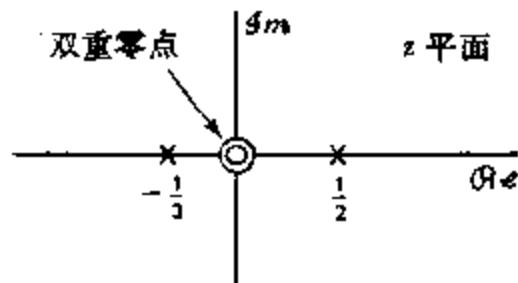


图 P5.11

5.12 由下面差分方程描述的因果线性时不变系统

$$y[n] = y[n-1] + y[n-2] + x[n-1].$$

(a) 求系统函数 $H(z) = Y(z)/X(z)$, 画出 $H(z)$ 的零极点图, 并标出收敛域.

(b) 求系统冲激响应.

(c) 你本该发现这是一个不稳定的系统. 找一个稳定(非因果)的冲激响应, 它也满足该差分方程.

5.13 考虑一个输入 $x[n]$ 和输出 $y[n]$ 满足

$$y[n-1] - \frac{5}{2}y[n] + y[n+1] = x[n].$$

的线性时不变系统. 该系统可以是或不是稳定的和/或因果的.

根据与该差分方程相联系的零极点分布, 确定三种可能的系统冲激响应. 证明每种可能都满足该差分方程. 具体指出哪一种相应于一个稳定的系统, 哪一种相应于因果系统.

5.14 已知一个线性时不变系统的系统函数为

$$H(z) = \frac{21}{\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)(1 - 2z^{-1})(1 - 4z^{-1})}.$$

已经知道系统是不稳定的, 且冲激响应是双边的.

(a) 求系统的冲激响应 $h[n]$.

(b) 由上(a)求得的冲激响应可以分别表示成因果和非因果的冲激响应 $h_1[n]$ 和 $h_2[n]$ 之和, 求相应的系统函数 $H_1(z)$ 和 $H_2(z)$.

- 5.15 一个序列 $x[n]$ 先经过某一线性时不变系统 $H(z)$ 处理后, 再以 2 减采样得到 $y[n]$ 如图 P5.15-1 所示, $H(z)$ 的零极点如图 P5.15-2 所示.

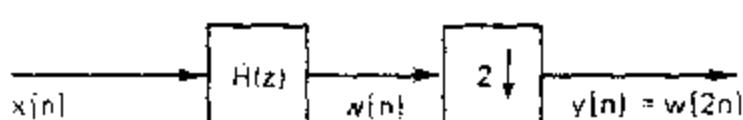


图 P5.15-1

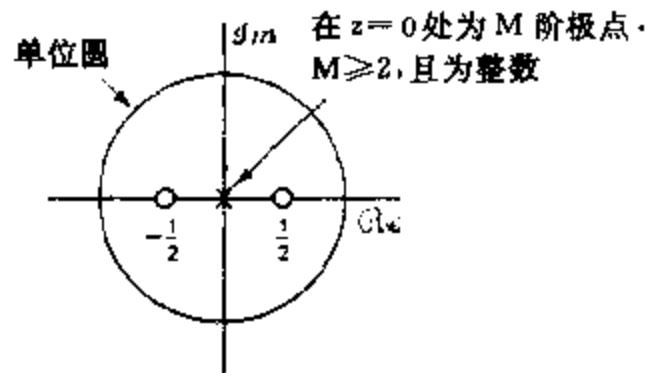


图 P5.15-2

- (a) 求出并画出系统 $H(z)$ 的冲激响应 $h[n]$.
(b) 第二个系统如图 P5.15-3 所示, 这里序列 $x[n]$ 先按 2 经时间压缩, 然后再通过 LTI 系统 $G(z)$ 得到 $r[n]$.



图 P5.15-3

问对任意输入而言, 是否能选择一个 $G(z)$ 而有 $y[n] = r[n]$. 若没有, 请明确说明为什么; 若有, 请给出 $G(z)$. 如果答案与 M 有关, 请说明是怎样的关系 (M 限为大于或等于 2 的整数).

- 5.16 若一个线性时不变系统的系统函数有如图 P5.16 所示的零极点, 并且系统是因果的, 问其逆系统 $H_i(z)$, 这里 $H(z)H_i(z)=1$, 也能既是因果的又是稳定的吗? 明确说明你的回答是正确的.

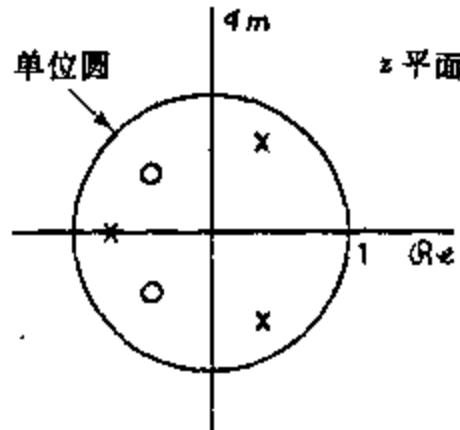


图 P5.16

- 5.17 考虑一个线性时不变系统, 其系统函数 $H(z)$ 是

$$H(z) = \frac{z^{-2}}{\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1 - 3z^{-1}\right)}.$$

- (a) 假设系统已知是稳定的, 求当输入 $x[n]$ 为阶跃序列时的输出 $y[n]$.
(b) 假设 $H(z)$ 的收敛域包括 $z=\infty$, 当 $x[n]$ 为如图 P5.17 所示时, 求 $n=2$ 时的 $y[2]$.



图 P5.17

- (c) 假定想用一个冲激响应为 $h_i[n]$ 的 LTI 系统来处理 $y[n]$, 以便从 $y[n]$ 中恢复出 $x[n]$, 问 $h_i[n]$ 与 $H(z)$ 的收敛域有关吗?

- 5.18 某一稳定的 LTI 系统的傅里叶变换是纯实数且如图 P5.18 所示. 问该系统是否有一个稳定的逆系统?

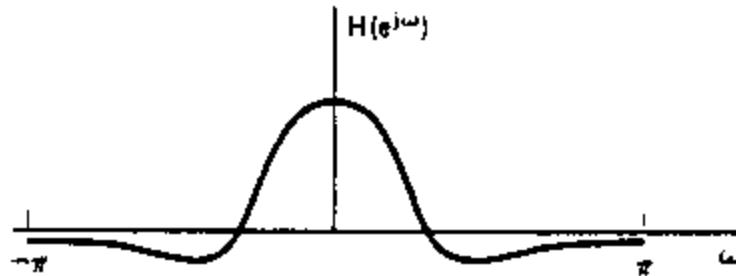


图 P5.18

- 5.19 序列 $y[n]$ 是一个 LTI 系统在输入 $x[n]$ 时的输出, $x[n]$ 为零均值的白噪声. 系统由下面差分方程描述

$$y[n] = \sum_{k=1}^N a_k y[n-k] + \sum_{k=0}^M b_k x[n-k], \quad b_0 = 1.$$

- (a) 自相关函数 $\phi_{yy}[n]$ 的 z 变换 $\Phi_{yy}(z)$ 是什么?

有时要用一个线性滤波器来处理 $y[n]$ 以使 $y[n]$ 的频谱“白化”, 也就是说要找一个系统, 在输入为 $y[n]$ 时, 其输出的功率谱是平坦的. 假设已知自相关函数 $\phi_{yy}[n]$ 和它的 z 变换 $\Phi_{yy}(z)$, 但不知道系数 a_k 和 b_k .

- (b) 讨论求该白化滤波器系统函数 $H_w(z)$ 的步骤.

- (c) 该白化滤波器是唯一的吗?

- 5.20 序列 $x[n]$ 是某一 LTI 系统在输入为 $s[n]$ 时的输出. 该系统由下面差分方程描述

$$x[n] = s[n] - e^{an} s[n-8], \quad (\text{P5.20-1})$$

这里 $0 < a$.

- (a) 求系统函数

$$H_1(z) = \frac{X(z)}{S(z)}$$

并画出它的零极点图, 指出它的收敛域.

- (b) 希望用一个线性时不变系统从 $x[n]$ 中恢复出 $s[n]$, 求系统函数

$$H_2(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$$

以使得 $y[n] = s[n]$. 找出 $H_2(z)$ 全部可能的收敛域, 并对每一种收敛域, 说明该系统是否是因果的和稳定的.

- (c) 求所有可能的冲激响应 $h_2[n]$, 而有

$$y[n] = h_2[n] * x[n] = s[n]. \quad (\text{P5.20-2})$$

- (d) 对上面(c)中所确定的全部 $h_2[n]$, 当 $s[n] = \delta[n]$, $y[n] = \delta[n]$ 时, 通过直接计算式 (P5.20-2) 中的卷积给予讨论.

注意: 如同在习题 3.3 中讨论过的, 式 (P5.20-1) 代表多径信道的一个简单模型. 由(b)和(c)所确定的系统就相当于补偿系统以校正多径失真.

- 5.21 在很多实际情况下, 面对着要恢复被某一卷积过程“污损”了的信号的问题, 可以用如图 P5.21-1 所示的线性滤波运算来模仿这个污损过程, 这里污损冲激响应如图 P5.21-2 所示. 本题的目的是要考虑从 $y[n]$ 中恢复出 $x[n]$ 的办法.

- (a) 从 $y[n]$ 恢复 $x[n]$ 的一种办法是用逆滤波器, 即 $y[n]$ 用频率响应为

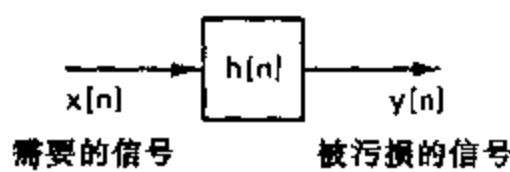


图 P5.21-1

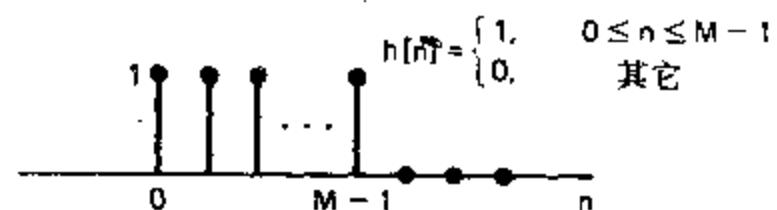


图 P5.21-2

$$H_1(e^{j\omega}) = \frac{1}{H(e^{j\omega})}$$

的系统来滤波, 这里 $H(e^{j\omega})$ 是 $h[n]$ 的傅里叶变换. 针对图 P5.21-2 所示冲激响应 $h[n]$, 讨论一下涉及实现该逆滤波方法的一些实际问题. 讨论务必周全, 但也要简明扼要.

- (b) 由于涉及逆滤波中的困难, 可以建议用下面的办法从 $y[n]$ 中恢复 $x[n]$: 用图 P5.21-3 的系统处理被污染的序列 $y[n]$, 该系统产生一个输出 $w[n]$, 从 $w[n]$ 中可以提取已改善了的 $x[n]$ 的复本. 冲激响应 $h_1[n]$ 和 $h_2[n]$ 如图 P5.21-4 所示. 请详细说明该系统的工作原理, 特别应仔细说明在什么条件下可以从 $w[n]$ 中完全恢复出 $x[n]$.

[提示: 考虑从 $x[n]$ 到 $w[n]$ 整个系统的冲激响应.]

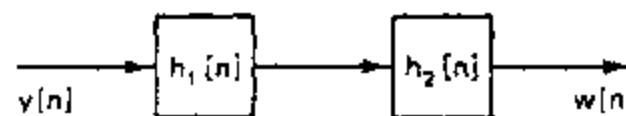


图 P5.21-3

- (c) 现在想把这一方法推广到任何有限长污染了的冲激响应 $h[n]$ 上去, 也即假设仅为

$$h[n] = 0, \quad n < 0 \text{ 及 } n \geq M.$$

再进一步假设 $h_1[n]$ 和图 P5.21-4 相同. $H_2(z)$ 和 $H(z)$ 必须有怎样的关系才能工作得和(b)相同? 为了使 $H_2(z)$ 能实现为一个因果系统, $H(z)$ 必须满足什么条件?

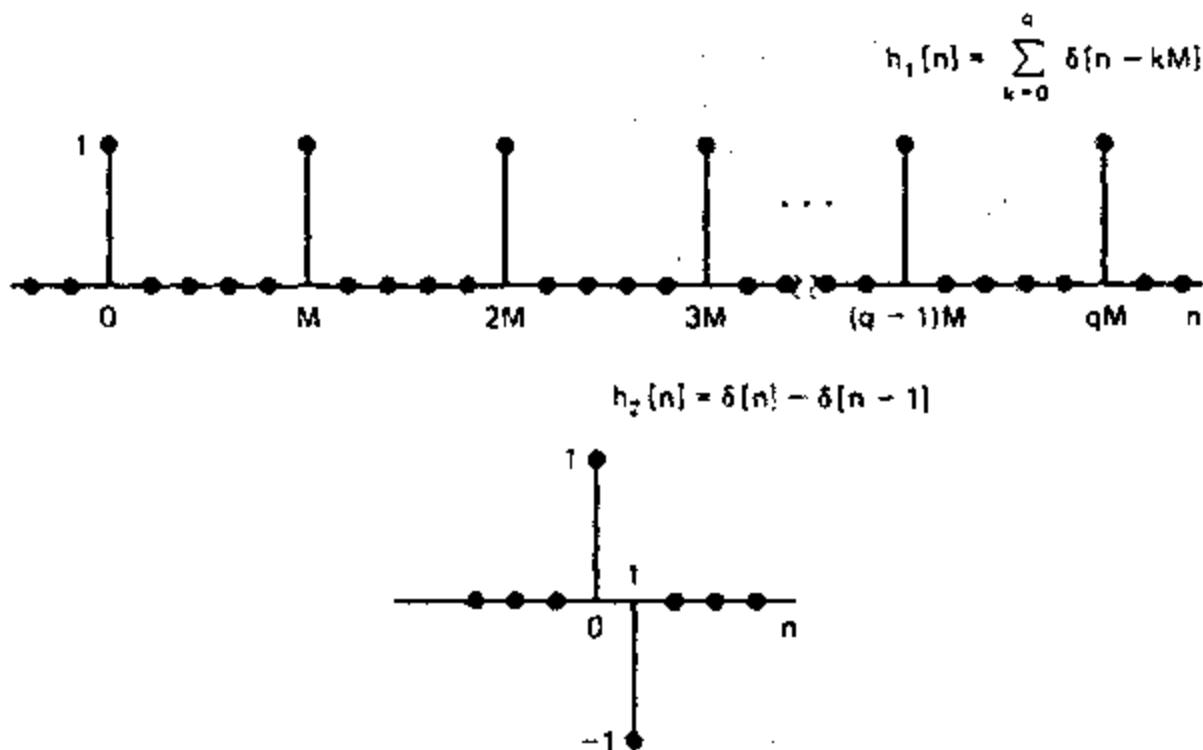


图 P5.21-4

5.22 考虑一个 LTI 系统, 其冲激响应 $h[n]$ 是

$$h[n] = \left(\frac{1}{2} \right)^n u[n] + \left(\frac{1}{3} \right)^n u[n].$$

输入 $x[n]$ 在 $n < 0$ 是零, 但一般对 $0 \leq n \leq \infty$ 可以不是零. 要想计算 $0 \leq n \leq 10^6$ 的输出 $y[n]$, 特别想要比较一下在这个区间内为了求得 $y[n]$, 采用 FIR 滤波器和采用 IIR 滤波器的效果.

- (a) 求将输入 $x[n]$ 和 $y[n]$ 联系起来的 IIR 系统的线性常系数差分方程.

- (b) 求最短长度 LTI 和 FIR 滤波器的冲激响应, 其输出 $y_1[n]$ 在 $0 \leq n \leq 10^9$ 内与 $y[n]$ 相同.
(c) 给出与上面(b)的 FIR 滤波器有关的线性常系数差分方程.
(d) 比较利用(a)和(b)的线性常系数差分方程得到 $0 \leq n \leq 10^9$ 内 $y[n]$ 所要求的算术运算(乘法和加法)的次数.

5.23 考虑一个因果的、其系统函数为 $H(z)$ 和实冲激响应的 LTI 系统, $H(z)$ 在 $z = e^{j\omega}$ 上的求值如图 P5.23 所示.

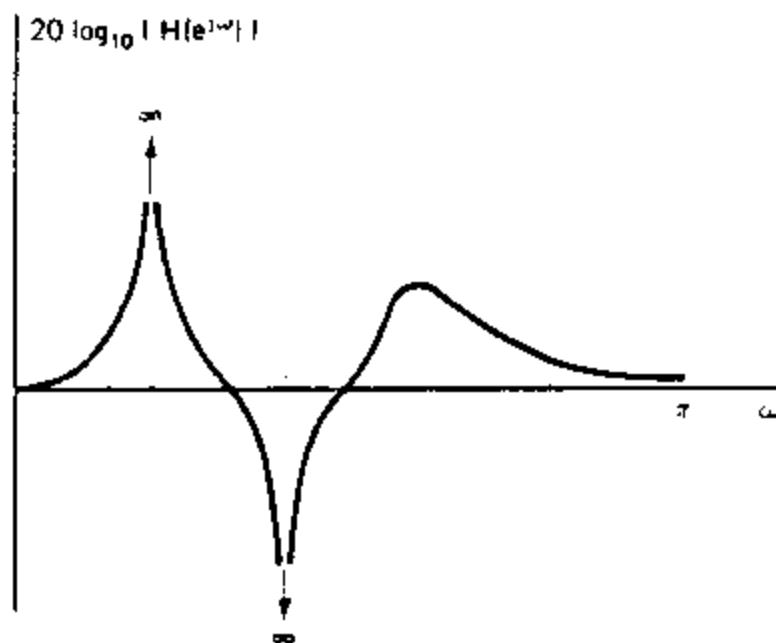


图 P5.23

- (a) 说明从图 P5.23 所能推断出的有关零极点位置的全部信息, 并细心地画出 $H(z)$ 的零极点图.
(b) 有关冲激响应的长度能说些什么?
(c) 说明 $|H(e^{j\omega})|$ 是否线性.
(d) 说明系统是否稳定.

5.24 一个因果的线性时不变系统, 其系统函数为

$$H(z) = \frac{(1-1.5z^{-1}-z^{-2})(1+0.9z^{-1})}{(1-z^{-1})(1+0.7z^{-1})(1-0.7z^{-1})}.$$

- (a) 写出满足系统输入输出关系的差分方程.
(b) 作零极点图, 并指出该系统函数的收敛域.
(c) 画出 $|H(e^{j\omega})|$.
(d) 关于系统, 下列说法是对还是错:
(i) 系统是稳定的.
(ii) 对于大的 n , 冲激响应趋于某一常数.
(iii) 频率响应幅度在近似 $\omega = \pm\pi/4$ 处有一峰值.
(iv) 系统有稳定和因果的逆系统.

5.25 考虑一因果线性时不变系统, 其系统函数为

$$H(z) = \frac{1-a^{-1}z^{-1}}{1-az^{-1}},$$

这里 a 是实数.

- (a) 写出该系统关于输入输出的差分方程.
(b) a 值在什么范围系统是稳定的?
(c) 对于 $a = 1/2$, 画出零极点图, 并将收敛域涂上阴影线.
(d) 求系统冲激响应 $h[n]$.
(e) 证明该系统是全通系统, 也即频率响应幅度为一常数, 同时给出该常数值.

5.26 一线性时不变系统的系统函数有如图 P5.26 的零极点图. 说明下列说法是对还是错, 或者由已给出的信息无法确定.

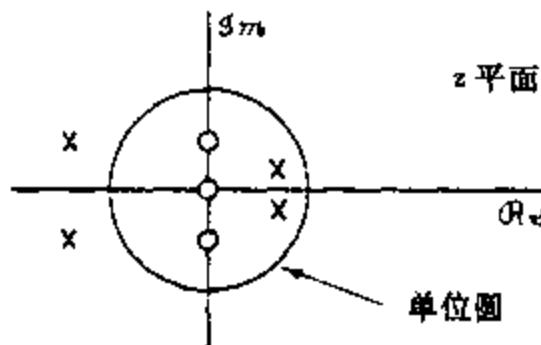


图 P5.26

- (a) 系统是稳定的.
- (b) 系统是因果的.
- (c) 如果系统是因果的, 那么一定是稳定的.
- (d) 如果系统是稳定的, 那么就一定有一个双边的冲激响应.

5.27 本题要说明对一个有理 z 变换, 因子 $(z-z_0)$ 和因子 $z/(z-z_0^*)$ 都对相位有相同的贡献.

- (a) 令 $H(z)=z-1/a$, a 为实数且 $0 < a < 1$. 画出系统的零极点图, 包括指出在 $z=\infty$ 的零极点. 求系统的相位 $\angle H(e^{j\omega})$.
- (b) 令 $G(z)$ 有在 $H(z)$ 零点的共轭倒数位置上的极点, 有 $H(z)$ 极点的共轭倒数位置上的零点, 其中包括在零和 ∞ 的那些零极点. 画出 $G(z)$ 的零极点图. 求系统的相位 $\angle G(e^{j\omega})$, 并证明它与 $\angle H(e^{j\omega})$ 是相同的.

5.28 令 $h_1[n], h_2[n], \dots, h_M[n]$ 记作 M 个有限长序列, 全部长度都是 N , 即 $h_k[n]=0, n < 0$ 和 $n \geq N$. 这些序列的傅里叶变换幅度都相同. 这些序列中没有一个对任何另外一个有成比例(实数或复常数)的关系.

- (a) 如果这些序列不局限于实序列, M 的最大值是什么?
- (b) 如果这些序列都限于实序列, M 的最大值是什么?

5.29 考虑一个具有如下 z 变换的因果序列 $x[n]$,

$$X(z) = \frac{\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1 - \frac{1}{4}z^{-1}\right)\left(1 - \frac{1}{5}z^{-1}\right)}{\left(1 - \frac{1}{6}z\right)}.$$

a 为何值时, $a^*x[n]$ 才是一个实的最小相位序列?

5.30 证明下面两种说法的正确性:

- (a) 两个最小相位序列的卷积也是最小相位的.
- (b) 两个最小相位序列的和不一定是最小相位的. 具体地给出一个最小相位序列和一个非最小相位序列的例子, 它们都能作为两个最小相位序列之和而构成.

5.31 一序列 $r[n]$ 由如下关系所定义

$$r[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h[m]h[n+m] = h[n] * h[-n],$$

其中 $h[n]$ 是最小相位序列, 而 $r[n]$ 给出如下:

$$r[n] = \frac{4}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] + \frac{4}{3} 2^n u[-n-1].$$

- (a) 求 $R(z)$ 并画出它的零极点图.
- (b) 求该最小相位序列 $h[n]$ (可包括 ± 1 的幅度加权因子), 并求其 z 变换 $H(z)$.

5.32 考虑一线性时不变系统, 其系统函数是

$$H(z) = (1 - 0.9e^{j0.6\pi}z^{-1})(1 - 0.9e^{-j0.6\pi}z^{-1})(1 - 1.25e^{j0.8\pi}z^{-1})(1 - 1.25e^{-j0.8\pi}z^{-1}).$$

- (a) 求出全部因果系统函数, 它们都具有与 $H(z)$ 相同的频率响应幅度, 并且它们的冲激响应都是实值的, 与 $H(z)$ 的冲激响应具有相同的长度(总共有四种不同的这样的系统函数). 直接确认哪一个是最小相位的, 哪一个是最小相位的(可包括某个延迟).
- (b) 求出(a)中这些系统函数的冲激响应.
- (c) 对(b)中的每一序列, 计算并画出 $0 \leq n \leq 5$ 的

$$E[n] = \sum_{m=0}^n (h[m])^2$$

指出哪个图对应于最小相位系统.

5.33 某一最大相位序列是一个稳定序列, 其 z 变换的零点和极点都在单位圆外.

- (a) 证明最大相位序列是反因果的, 即 $n > 0$, 序列值为零.

FIR 最大相位序列可用包括某一有限量的延迟实现为因果的. 具有给定傅里叶变换幅度的有限长因果最大相位序列可以用把一个最小相位序列 z 变换的全部零点反射到单位圆外的共轭倒数的位置上来得到. 这就是说, 可以将最大相位因果有限长序列的 z 变换表示为

$$H_{\max}(z) = H_{\min}(z)H_{ap}(z).$$

很明显, 这个办法保证了 $|H_{\max}(e^{j\omega})| = |H_{\min}(e^{j\omega})|$. 现在, 一个有限长最小相位序列的 z 变换可以表示为

$$H_{\min}(z) = h_{\min}[0] \prod_{k=1}^M (1 - c_k z^{-1}), \quad |c_k| < 1.$$

- (b) 求该全通系统的表示式, 使得将 $H_{\min}(z)$ 的全部零点反射到单位圆外的位置上.

- (c) 证明 $H_{\max}(z)$ 可表示为

$$H_{\max}(z) = z^{-M} H_{\min}(z^{-1}).$$

- (d) 利用(c)的结果, 用 $h_{\min}[n]$ 表示最大相位序列 $h_{\max}[n]$.

5.34 对于非最小相位系统而言, 不可能求得一个因果而稳定的逆系统(完全补偿器). 本题要研究一种仅用来补偿非最小相位系统频率响应幅度的办法.

假设一个稳定的具有有理系统函数 $H(z)$ 的非最小相位线性时不变离散时间系统与一个补偿系统 $H_c(z)$ 级联, 如图 P5.34 所示.

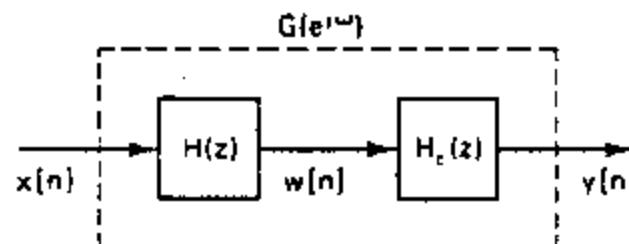


图 P5.34

- (a) 应该如何选择 $H_c(z)$, 使得 $H_c(z)$ 本身是稳定和因果的, 而且要使整个有效频率响应的幅度是 1? (想一想 $H(z)$ 总是可以表示成 $H(z) = H_{ap}(z)H_{\min}(z)$.)
- (b) 相应的系统函数 $H_c(z)$ 和 $G(z)$ 是什么?
- (c) 假设

$$H(z) = (1 - 0.8e^{j0.3\pi}z^{-1})(1 - 0.8e^{-j0.3\pi}z^{-1})(1 - 1.2e^{j0.7\pi}z^{-1})(1 - 1.2e^{-j0.7\pi}z^{-1}).$$

求 $H_{\min}(z)$, $H_{ap}(z)$, $H_c(z)$ 和 $G(z)$, 并对每个系统函数画出零极点图.

5.35 令 $H_{\min}(z)$ 为最小相位序列 $h_{\min}[n]$ 的 z 变换. 若 $h[n]$ 为某一因果非最小相位序列, 其傅里叶变换幅度等于 $|H_{\min}(e^{j\omega})|$, 证明

$$|h[0]| < |h_{\min}[0]|.$$

(与式(5.13)一起利用初值定理.)

5.36 最小相位序列的重要性质之一就是最小能量延迟性质, 即在全部具有相同傅里叶变换幅度函数 $|H(e^{j\omega})|$ 的因果序列中, 量

$$E[n] = \sum_{m=0}^n |h[m]|^2$$

当 $h[n]$ 为最小相位序列时, 对全部 $n \geq 0$ 为最大. 这一结果可以证明如下: 令 $h_{\min}[n]$ 是 z 变换为 $H_{\min}(z)$ 的最小相位序列. 另外, 令 z_k 是 $|H_{\min}(z)|$ 的一个零点, 这样 $H_{\min}(z)$ 可表示成

$$H_{\min}(z) = Q(z)(1 - z_k z^{-1}), \quad |z_k| < 1,$$

这里 $Q(z)$ 还是最小相位. 现在考虑另一个序列 $h[n]$, 其 z 变换 $H(z)$ 有

$$|H(e^{j\omega})| = |H_{\min}(e^{j\omega})|$$

并且 $H(z)$ 有一个零点在 $z = 1/z_k$, 而不是在 z_k .

(a) 用 $Q(z)$ 来表示 $H(z)$.

(b) 用具有 z 变换为 $Q(z)$ 的最小相位序列 $q[n]$ 来表示 $h[n]$ 和 $h_{\min}[n]$.

(c) 为了比较这两个序列的能量分布, 证明

$$\epsilon = \sum_{m=0}^n |h_{\min}[m]|^2 - \sum_{m=0}^n |h[m]|^2 = (1 - |z_k|^2) |q[m]|^2.$$

(d) 利用(c)的结果, 证明

$$\sum_{m=0}^n |h[m]|^2 \leq \sum_{m=0}^n |h_{\min}[m]|^2, \quad \text{对全部 } n.$$

5.37 一个因果全通系统 $H_{ap}(z)$ 有输入 $x[n]$ 和输出 $y[n]$.

(a) 若 $x[n]$ 为实最小相位序列(这也意味着 $n < 0, x[n] = 0$), 利用式(5.118)证明

$$\sum_{k=0}^n |x[k]|^2 \geq \sum_{k=0}^n |y[k]|^2. \quad (\text{P5.37})$$

(b) 即使 $x[n]$ 不是最小相位序列, 但对 $n < 0$ 为零, 证明式(P5.37)仍成立.

5.38 图 P5.38 示出八种不同的有限长序列, 每种长度都为 4 点. 对全部八种序列其傅里叶变换的幅度都是一样的. 这些序列中的哪一个其 z 变换的全部零点是在单位圆内?

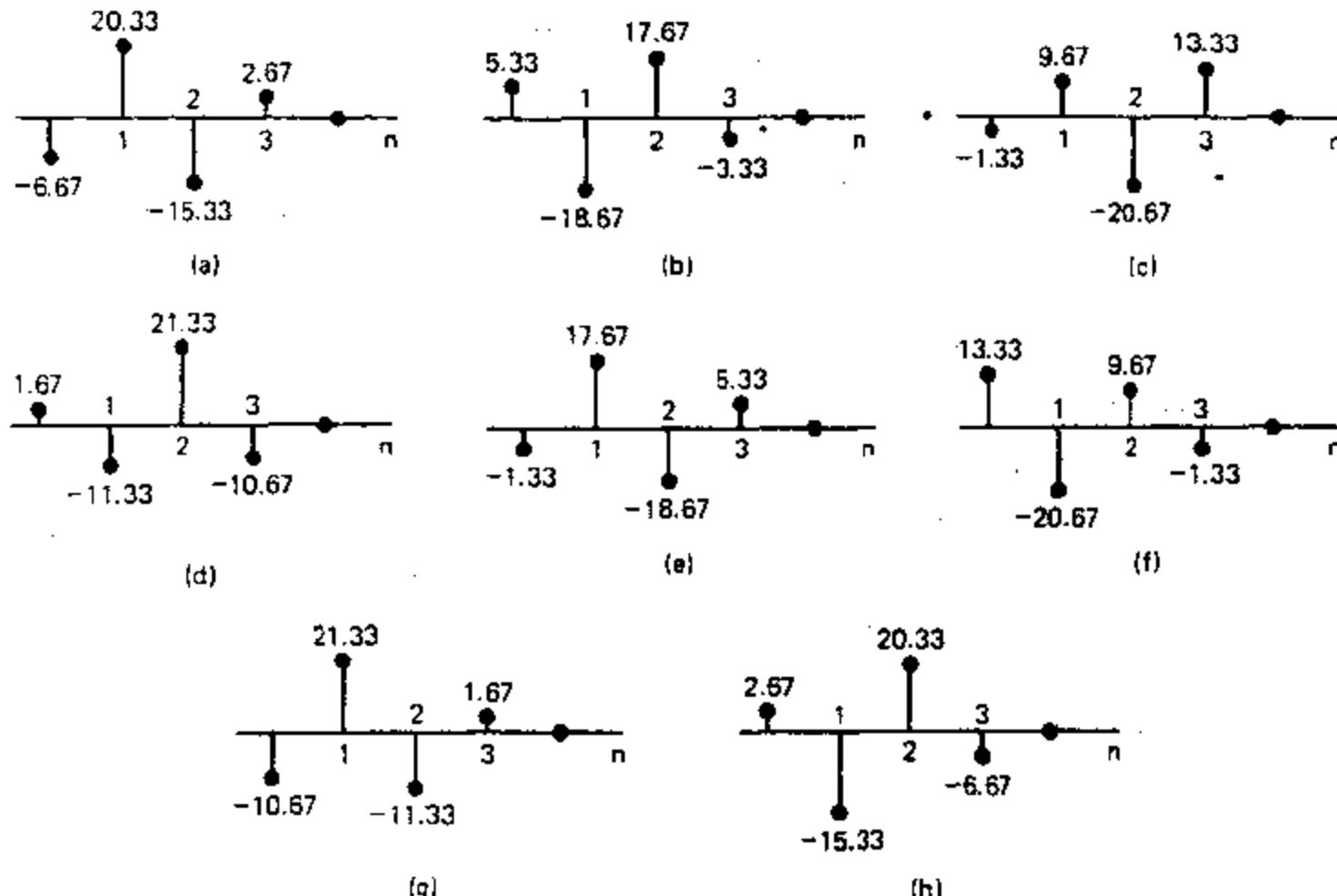


图 P5.38

- 5.39 无论是在连续时间或离散时间滤波器的设计中,往往是逼近一个给定的幅度特性,而不特别顾及相位。例如,标准的低通和带通滤波器的设计方法就是从仅考虑幅度特性而导得的。

在很多滤波问题中,总愿意偏向相位特性是零或线性的。对因果滤波器来说,零相位是不可能的。然而,在许多滤波应用中,滤波器的冲激响应对 $n < 0$ 也不必要一定为零,只要处理不要求实时实现就行。

当要求过滤的数据是有限长,且存储在譬如说计算机的存储器中时,在离散时间滤波中一种常用的技术是将数据向前处理,然后通过同一滤波器再将数据向后处理。

令 $h[n]$ 是具有任意相位特性的某一因果滤波器的冲激响应。假设 $h[n]$ 为实,其傅里叶变换为 $H(e^{j\omega})$,令 $x[n]$ 为要过滤的数据。

(a) 方法 A: 滤波过程按图 P5.39-1 所示进行。

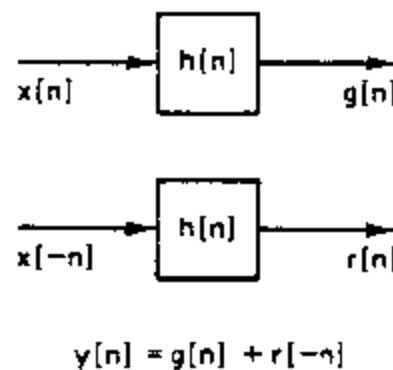


图 P5.39-1

1. 求关于 $x[n]$ 和 $s[n]$ 的总冲激响应 $h[n]$,并证明它有一个零相位特性。

2. 求 $|H_1(e^{j\omega})|$,并用 $|H(e^{j\omega})|$ 和 $\angle H(e^{j\omega})$ 来表示 $H_1(e^{j\omega})$ 。

(b) 方法 B: 如图 P5.39-2 所示,通过滤波器 $h[n]$ 处理 $x[n]$ 得到 $g[n]$ 。另外,通过 $h[n]$ 后处理 $x[n]$ 得到 $r[n]$ 。输出 $y[n]$ 取为 $g[n]$ 和 $r[-n]$ 之和,这一混合运算可以用一个滤波器来表示,该滤波器的输入为 $x[n]$,输出为 $y[n]$,冲激响应为 $h_2[n]$ 。

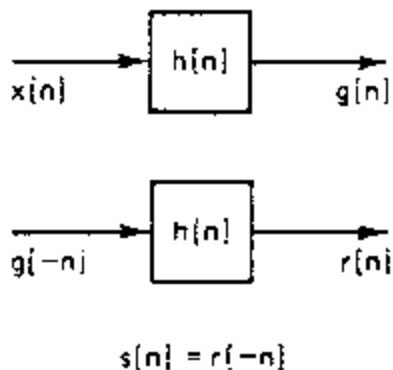


图 P5.39-2

1. 证明该混合滤波器 $h_2[n]$ 有零相位特性。

2. 求 $|H_2(e^{j\omega})|$ 并用 $|H(e^{j\omega})|$ 和 $\angle H(e^{j\omega})$ 来表示 $H_2(e^{j\omega})$ 。

(c) 假设给定一有限长序列,要将该序列完成一个带通零相位的滤波运算。另外,假定给定该带通滤波器的 $h[n]$,其频率响应如图 P5.39-3 所给出。它具有所要求的幅度特性,但是线性相位的。为了达到零相位,可以用方法 A 或 B 的任一种。求出并画出 $|H_1(e^{j\omega})|$ 和 $|H_2(e^{j\omega})|$ 。从这些结果中,你愿意用哪一种方法来实现所要求的带通滤波?说明为什么。更一般地说,若 $h[n]$ 有所要求的幅度,但是一个非线性相位特性,哪一种方法用来实现零相位特性更为可取?

- 5.40 考虑这样一类离散时间滤波器,其频率响应具有形式为

$$H(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})|e^{-j\phi(\omega)},$$

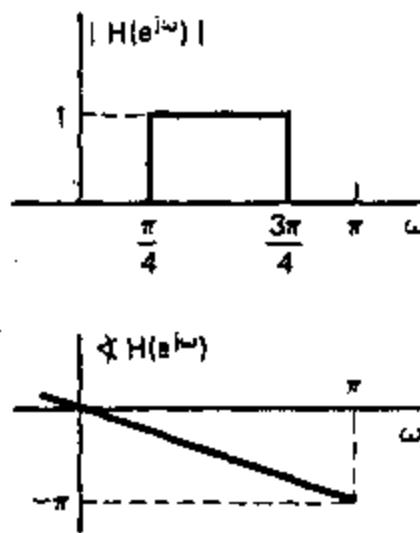


图 P5.39-3

其中 $|H(e^{j\omega})|$ 是 ω 的实且非负函数, 而 α 是一个实常数. 如在 5.7.1 节讨论过的, 这类滤波器称为线性相位滤波器.

同时考虑频率响应具有如下形式的离散时间滤波器

$$H(e^{j\omega}) = A(e^{j\omega})e^{-j\alpha\omega + j\beta},$$

其中 $A(e^{j\omega})$ 是 ω 的实函数, α 是一个实常数, 而 β 也是一个实常数. 如在 5.7.2 节讨论过的, 这类滤波器称为广义线性相位滤波器.

对图 P5.40 中的每个滤波器, 判定是否是广义线性相位滤波器. 若是, 那么求 $A(e^{j\omega})$, α 和 β , 并指出它是否也是线性相位滤波器.

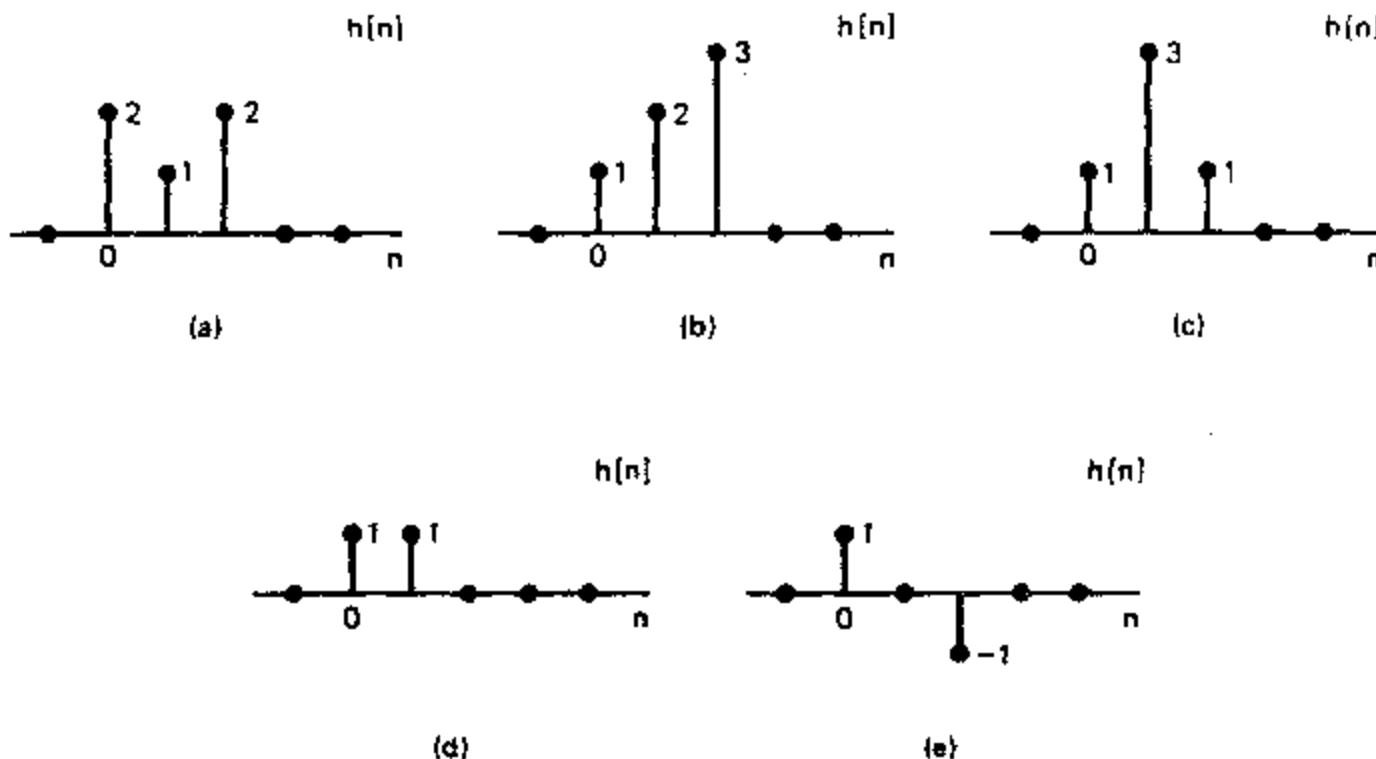


图 P5.40

- 5.41 图 P5.41 中每一零极点图, 连同给出的收敛域一起, 描述了系统函数为 $H(z)$ 的一个线性时不变系统. 在每种情况下, 试问下述说法中哪一个是对的. 用一种简单明了的陈述或一个相反的例子说明你的回答是正确的.
- 系统有零相位或广义线性相位.
 - 系统有稳定的逆系统 $H_1(z)$.
- 5.42 图 P5.42-1 示出两种不同的三个系统的互联. 冲激响应 $h_1[n]$, $h_2[n]$ 和 $h_3[n]$ 如图 P5.42-2 所示. 试问是否系统 A 和/或系统 B 有广义线性相位.

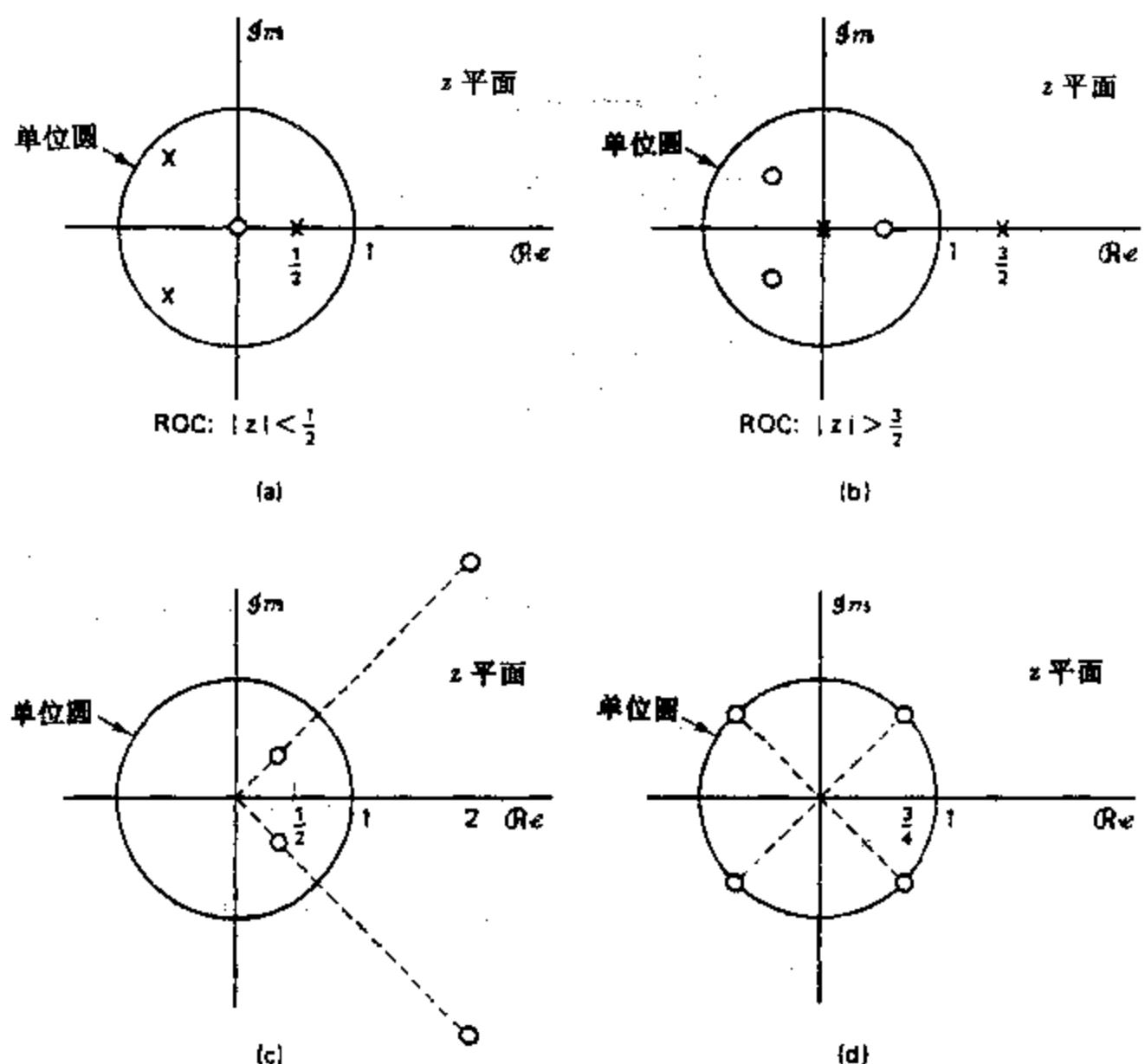


图 P5.41

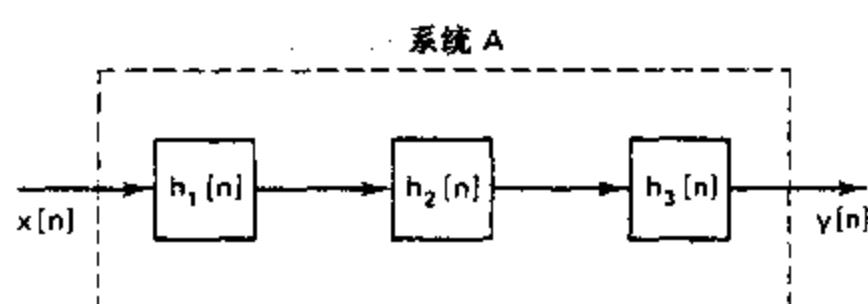


图 P5.42-1(a)

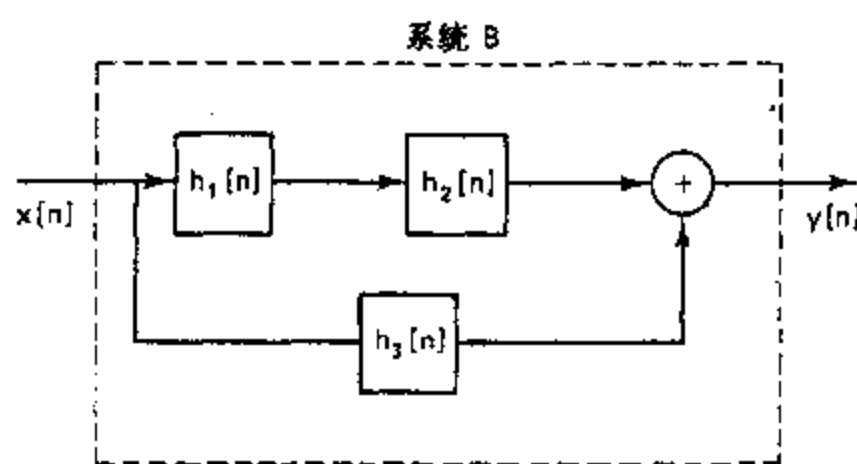


图 P5.42-1(b)

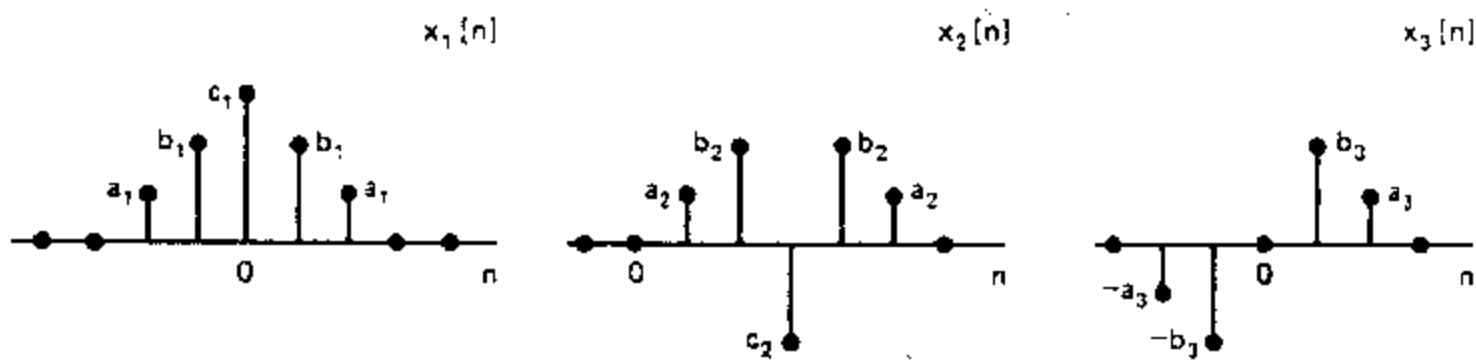


图 P5.42-2

5.43 试问下面说法是对还是错. 如果对, 简要陈述理由; 如果不对, 给出一个反例.

如果系统函数 $H(z)$ 除原点或无穷远点外, 到处都可能有极点, 那么该系统不可能有零相位或广义线性相位.

5.44 图 P5.44 的总系统是一个具有频率响应为 $H(e^{j\omega})$ 、冲激响应为 $h[n]$ 的离散时间线性时不变系统.

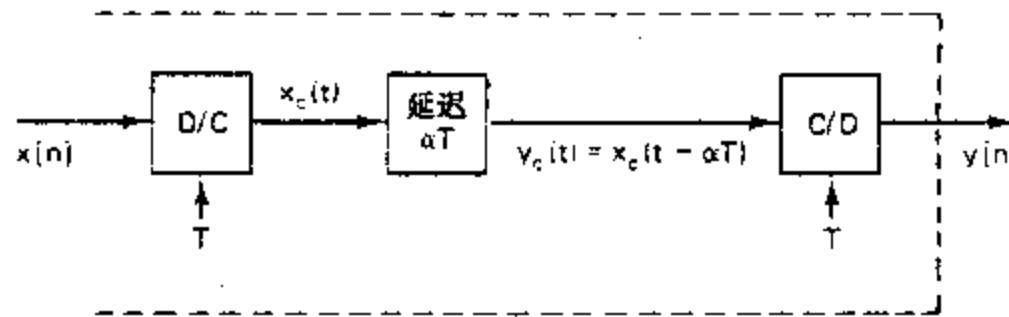


图 P5.44

(a) $H(e^{j\omega})$ 可以表示为

$$H(e^{j\omega}) = A(e^{j\omega}) e^{j\phi(\omega)},$$

其中 $A(e^{j\omega})$ 为实, 求出并画出 $A(e^{j\omega})$ 和 $\phi(\omega)$, $|\omega| < \pi$.

(b) 对下列 α , 画出 $h[n]$:

(i) $\alpha = 3$

(ii) $\alpha = 3 \frac{1}{2}$

(iii) $\alpha = 3 \frac{1}{4}$

(c) 考虑一离散时间线性时不变系统, 其

$$H(e^{j\omega}) = A(e^{j\omega}) e^{j\omega}, \quad |\omega| < \pi,$$

其中 $A(e^{j\omega})$ 为实. 在下列 α 情况下, 关于 $h[n]$ 的对称性能说些什么?

(i) $\alpha =$ 整数.

(ii) $\alpha = M/2, M$ 为奇整数.

(iii) 一般 α .

5.45 考虑一类 FIR 滤波器, 它具有: $h[n]$ 为实; 在 $n < 0$ 和 $n > M$, $h[n] = 0$, 且有下列对称性质之一:

$$\text{对称: } h[n] = h[M-n]$$

$$\text{反对称: } h[n] = -h[M-n]$$

该类滤波器全部都具有广义线性相位, 也即有如下形式的频率响应:

$$H(e^{j\omega}) = A(e^{j\omega}) e^{-j\alpha\omega + j\beta},$$

其中 $A(e^{j\omega})$ 是 ω 的实函数, α 是实常数, β 也是实常数.

对于下列表格, 证明 $A(e^{j\omega})$ 具有所指出的形式, 并求出 α 和 β 的值.

类型	对称性	滤波器长度($M+1$)	$A(e^{j\omega})$	α	β
I 对称	奇		$\sum_{n=0}^{M/2} a[n] \cos \omega n$		
II 对称反	偶		$\sum_{n=1}^{(M+1)/2} b[n] \cos \omega(n-1/2)$		
III 反对称反	奇		$\sum_{n=1}^{M/2} c[n] \sin \omega n$		
IV 对称	偶		$\sum_{n=1}^{(M+1)/2} d[n] \sin \omega(n-1/2)$		

下面是几个有用的建议.

- 对 I 类滤波器,首先证明 $H(e^{j\omega})$ 可写成

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{(M-2)/2} h[n] e^{-jn\omega} + \sum_{n=0}^{(M-1)/2} h[M-n] e^{-jn[M-n]} + h[M/2] e^{-j\omega(M/2)}.$$

- 对 II 类滤波器的分析非常类似于 I 类的情况,除一个符号变化和除掉上述项中的一项外.

- 对 III 类滤波器首先写出 $H(e^{j\omega})$ 为

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{(M-1)/2} h[n] e^{-jn\omega} + \sum_{n=0}^{(M-1)/2} h[M-n] e^{-jn[M-n]}$$

然后从两和式中提出公共因子 $e^{-jn(M/2)}$.

- 对 IV 类滤波器的分析很类似于对 I 类滤波器所作的处理过程那样进行.

- 5.46 (a) 对于在 5.7.3 节曾经讨论过的四种类型因果线性相位 FIR 滤波器中的每一种,试问是否频率响应在 $\omega=0$ 和/或 $\omega=\pi$ 点上也施加了有关对称性的任何约束.
 (b) 对于以下列出的每种滤波器,指出四种 FIR 滤波器类型中的哪些可以用来逼近所要求的滤波器:

低通
带通
高通
带阻
微分器

- 5.47 令 $h_{lp}[n]$ 为 FIR 广义线性相位低通滤波器的冲激响应, FIR 广义线性相位高通滤波器的冲激响应 $h_{hp}[n]$ 可以用下面变换得到

$$h_{hp}[n] = (-1)^n h_{lp}[n].$$

如果决定用这种变换来设计高通滤波器,并希望所求得的高通滤波器是对称的,那么四种类型广义线性相位 FIR 滤波器中的哪一些可以用于该高通滤波器的设计? 答案应当考虑全部可能的类型.

- 5.48 一因果、线性、时不变离散时间系统有系统函数为

$$H(z) = \frac{(1-0.5z^{-1})(1+4z^{-2})}{(1-0.64z^{-2})}.$$

- (a) 求一个最小相位系统 $H_1(z)$ 和一个全通系统 $H_{ap}(z)$ 的表示式,以使

$$H(z) = H_1(z) H_{ap}(z).$$

- (b) 求另一个不同的最小相位系统 $H_2(z)$ 和一个广义线性相位 FIR 系统 $H_{lin}(z)$ 的表示式,以使

$$H(z) = H_2(z) H_{lin}(z).$$

5.49 (a) 一最小相位系统其系统函数 $H_{\min}(z)$ 有

$$H_{\min}(z)H_{ap}(z)=H_{lin}(z),$$

这里 $H_{ap}(z)$ 是全通系统函数, $H_{lin}(z)$ 是因果广义线性相位系统. 关于 $H_{\min}(z)$ 的极点和零点这个式子告诉你什么?

(b) 一个广义线性相位 FIR 系统有冲激响应为实值, 且对 $n < 0$ 和 $n \geq 8$, $h[n] = 0$. 该系统的系统函数在 $z = 0.8e^{j\pi/4}$ 有一零点, 另一零点在 $z = -2$. 问 $H(z)$ 是什么?

第六章 离散时间系统结构

6.0 引言

正如我们在第五章中已经看到的,具有有理系统函数的线性时不变系统有这样的性质,即其输入和输出序列满足线性常系数差分方程.由于系统函数是冲激响应的 z 变换,而输入和输出满足的差分方程又可以凭直观从系统函数来确定,因此差分方程、冲激响应和系统函数都是线性时不变离散时间系统输入/输出关系的等效表征.当这样的系统用离散时间模拟或数字硬件给予实现时,就必须将差分方程或系统函数表示转换为一种以所需要的技术能给予实现的算法或结构.在本章中将会看到,由线性常系数差分方程描述的系统能够用由加法、乘以系数和延迟等基本运算的互联所组成的结构来表示,至于它的真正实现则决定于所用的技术.

作为与差分方程有关的运算的说明,现在考虑由下列系统函数描述的系统.

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1}}{1 - az^{-1}}, \quad |z| > |a| \quad (6.1)$$

该系统的冲激响应是

$$h[n] = b_0 a^n u[n] + b_1 a^{n-1} u[n-1] \quad (6.2)$$

被输入和输出序列满足的一阶差分方程是

$$y[n] - ay[n-1] = b_0 x[n] + b_1 x[n-1]. \quad (6.3)$$

因为该系统冲激响应为无限长,因此用离散卷积来实现该系统是不可能的.然而,式(6.3)可以重新写成

$$y[n] = ay[n-1] + b_0 x[n] + b_1 x[n-1] \quad (6.4)$$

这就为利用前一个输出 $y[n-1]$,当前的输入样本 $x[n]$ 和前一个输入样本 $x[n-1]$ 递推计算出在任意时间 n 的输出给出了一种算法基础.在2.5节曾经讨论过,若进一步假设初始松弛条件(若已知 $x[n]=0, n<0$,则 $y[n]=0, n<0$),并利用式(6.4)作为递推公式,从过去的输出值和当前及过去的输入值计算输出,那么系统就一定是线性和时不变的.类似的过程也能适用于更为一般的 N 阶差分方程的情况.然而,由式(6.4)给出的算法以及对高阶差分方程的推广对于实现一个特定的系统而言就不是唯一的运算算法,并且往往它是最不可取的算法.将会看到,在输入序列 $x[n]$ 和输出序列 $y[n]$ 之间有无限多种运算结构可以实现相同的关系.

本章以下部分将要考虑线性时不变离散时间系统实现中的一些重要论题.首先给出代表线性、时不变和因果系统的线性常系数差分方程的运算结构或网络的方框图和信号流图描述.利用结合代数运算和方框图表示的处理,可以导出实现一个因果、线性和时不变系统的许多基本等效结构.对于系数和变量的无限精度表示,尽管两种结构可能是等效的,与它们的输入/输出特性无关,但是当数值精度是有限时,它们在性能上可能有很大的差异.这就是对研究不同实现结构感兴趣的主要原因.系统系数有限精度表示的影响,以

及在中间计算过程中截断和舍入效应均在本章的稍后部分给予考虑.

6.1 线性常系数差分方程的方框图表示

利用重复计算由差分方程得出的递推公式来实现线性时不变离散时间系统就要求有输出、输入和中间序列的延迟值. 这些序列值的延迟意味着需要存储过去的序列值. 同时, 也必须给出将延迟的序列值乘以常数的方法以及相加所得结果的方法. 因此, 对实现线性时不变离散时间系统所需的基本单元就是加法器、乘法器和存储延迟序列值的存储器. 这些基本单元的互联可以很方便地用图 6.1 所示的基本符号所组成的方框图来表示. 图 6.1(a)代表相加两个序列的方法. 一般方框图表示中, 一个加法器可以有任意多个输入个数. 然而几乎在所有的实际实现中, 加法器仅有两个输入. 本章全部方框图都明确指出是按图 6.1(a)所示的限制输入个数的加法器. 图 6.1(b)描述的是序列乘一常数, 而图 6.1(c)则是序列延迟一个样本. 在数字实现中可以用提供每一单位延迟要求的存储寄存器来实现延迟运算. 在模拟离散时间实现中, 例如开关电容滤波器, 延迟是用电荷存储器件来实现的. 图 6.1(c)中单位延迟系统是用其系统函数 z^{-1} 表示的. 大于一个样本的延迟可以在图 6.1(c)中用系统函数 z^{-M} 表示, 这里 M 为样本延迟的个数. 然而, 延迟 M 个样本的真正实现一般是用级联 M 个单位延迟来完成. 在实时实现时, 这些单位延迟可以构成一个移位寄存器, 它由输入信号的采样率来定时.

例 6.1

作为用图 6.1 的基本单元表示的差分方程的例子, 考虑下面二阶差分方程

$$y[n] = a_1 y[n-1] + a_2 y[n-2] + b x[n]. \quad (6.5)$$

相应的系统函数是

$$H(z) = \frac{b}{1 - a_1 z^{-1} - a_2 z^{-2}}. \quad (6.6)$$

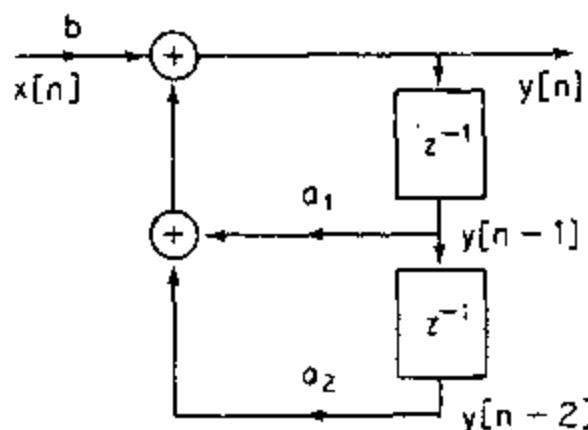


图 6.2 差分方程方框图表示的例子.

差分方程的系数(本例为 a_1, a_2 和 b)提供存储. 再者, 由图 6.2 可见, 计算一个输出序列值 $y[n]$ 是先形成乘积 $a_1 y[n-1]$ 和 $a_2 y[n-2]$, 把它们相加, 然后把结果再和 $b x[n]$ 相加.

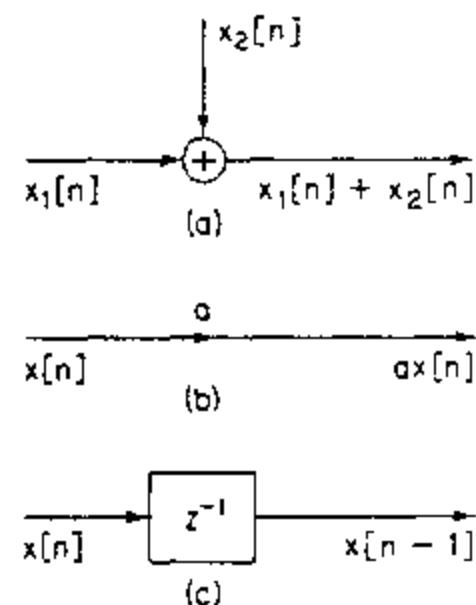


图 6.1 方框图符号. (a)两序列相加. (b)序列乘以常数. (c)单位延迟.

因此,图 6.2 方便地描绘出有关运算算法的复杂性、算法的步骤以及为实现该系统所要求的硬件数量.

可以将例 6.1 推广到高阶差分方程为*

$$y[n] - \sum_{k=1}^N a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^M b_k x[n-k], \quad (6.7)$$

相应的系统函数为

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{1 - \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}}. \quad (6.8)$$

利用输出序列的过去值和输入序列的当前值与过去值的线性组合重新将式(6.7)对 $y[n]$ 写成递推公式就得出关系

$$y[n] = \sum_{k=1}^N a_k y[n-k] + \sum_{k=0}^M b_k x[n-k]. \quad (6.9)$$

图 6.3 的方框图是式(6.9)的一种直接的形象化表示. 更仔细些, 它表示如下一对差分方程

$$v[n] = \sum_{k=0}^M b_k x[n-k], \quad (6.10a)$$

$$y[n] = \sum_{k=1}^N a_k y[n-k] + v[n]. \quad (6.10b)$$

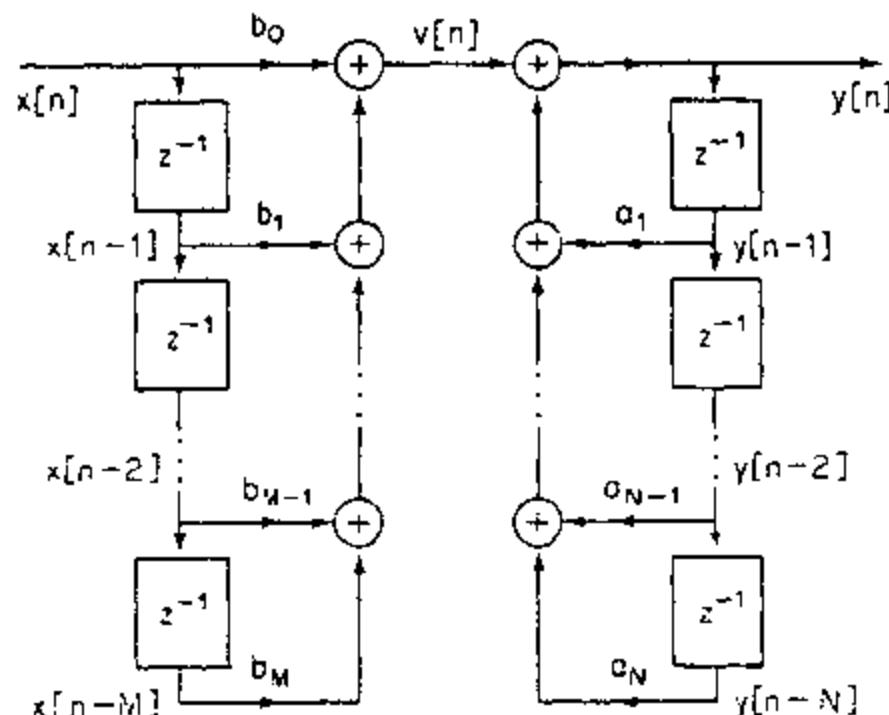


图 6.3 N 阶差分方程的方框图表示.

假定加法器为两个输入, 就意味着以一种给定的次序来完成相加. 这就是说, 图 6.3 表明

* 前面各章对一般 N 阶差分方程都用的是

$$\sum_{k=0}^N a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^M b_k x[n-k].$$

本书剩下部分都采用更为方便的(6.7)式, 这里 $y[n]$ 的系数归一化到一, 而有关延迟输出的系数在移到右边以后, 如(6.9)式所示, 都以正号出现.

乘积 $a_N y[n-N]$ 和 $a_{N-1} y[n-N+1]$ 必须先计算出, 然后相加, 再将所得的和加到 $a_{N-2} y[n-N+2]$ 上去, 依此类推. 在 $y[n]$ 已经算出来之后, 延迟变量必须更新, 这就是将 $y[n-N+1]$ 移到原保存 $y[n-N]$ 的寄存器中, $y[n-N+2]$ 移到原保存 $y[n-N+1]$ 的寄存器中, 依此类推.

图 6.3 的方框图可以不同方式重新组织或变化而不改变总的系统函数. 对该方框图每一种适当的重排就代表了实现同一系统的不同运算算法. 例如, 图 6.3 的方框图可以看成两个系统的级联, 其中第一个表示由 $x[n]$ 计算出 $v[n]$, 而第二个则表示由 $v[n]$ 计算出 $y[n]$. 因为这两个系统都是线性时不变系统(假定延迟寄存器初始松弛), 那么两个系统在级联中的次序就可以交换成如图 6.4 所示, 而不会影响总的系统函数. 图 6.4 中, 为了

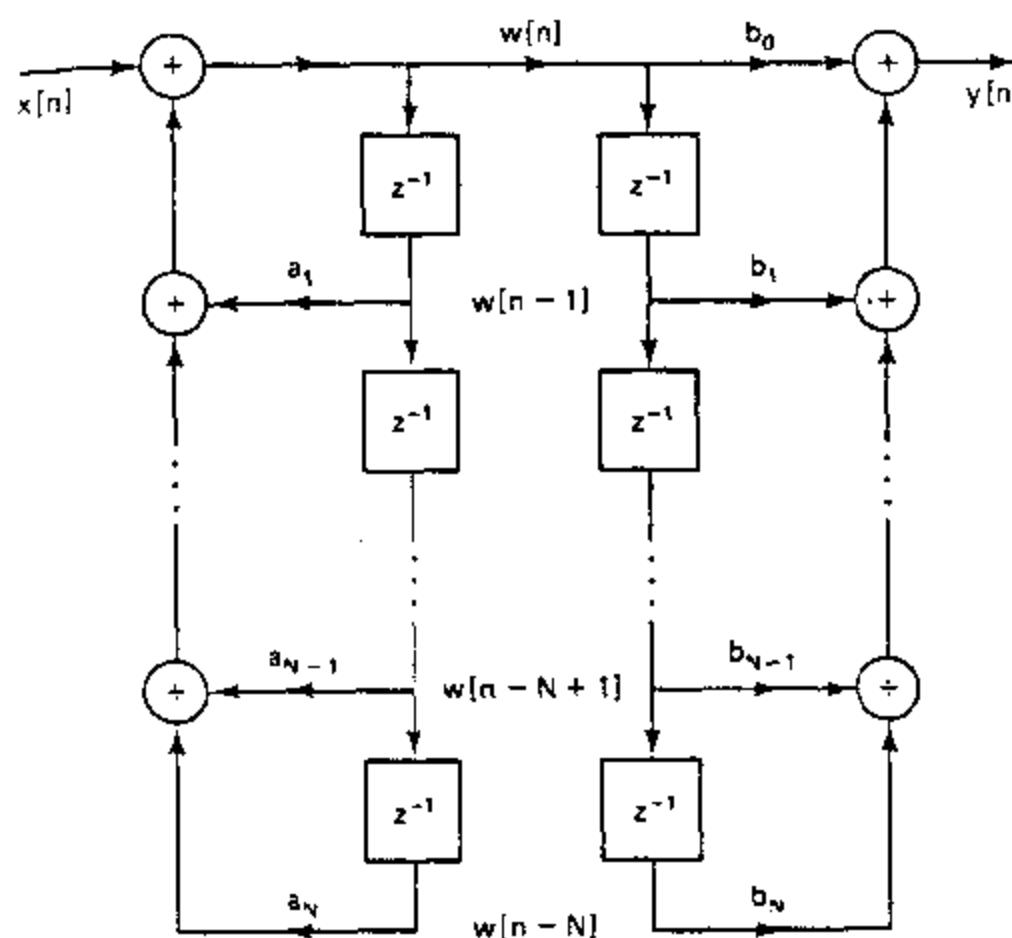


图 6.4 图 6.3 方框图的重新安排. 为方便设 $M=N$. 若 $M \neq N$ 时, 某些系数为零.

方便起见已假定 $M=N$. 很清楚, 这并不丧失一般性, 因为如果 $M \neq N$, 只是图 6.4 中某些系数 a_k 或 b_k 为零而已, 其方框图也就相应简化.

利用式(6.8)的系统函数 $H(z)$, 图 6.3 可以看作是 $H(z)$ 通过如下分解的一种实现

$$H(z) = H_2(z)H_1(z) = \left(\frac{1}{1 - \sum_{k=1}^M a_k z^{-k}} \right) \left(\sum_{k=0}^M b_k z^{-k} \right) \quad (6.11)$$

或等效为下面一对方程

$$V(z) = H_1(z)X(z) = \left(\sum_{k=0}^M b_k z^{-k} \right) X(z), \quad (6.12a)$$

$$Y(z) = H_2(z)V(z) = \left(\frac{1}{1 - \sum_{k=1}^M a_k z^{-k}} \right) V(z). \quad (6.12b)$$

另一方面, 图 6.4 则将 $H(z)$ 表示成

$$H(z) = H_1(z)H_2(z) = \left(\sum_{k=0}^M b_k z^{-k} \right) \left(\frac{1}{1 - \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}} \right) \quad (6.13)$$

或等效为如下方程

$$W(z) = H_2(z)X(z) = \left(\frac{1}{1 - \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}} \right) X(z), \quad (6.14a)$$

$$Y(z) = H_1(z)W(z) = \left(\sum_{k=0}^M b_k z^{-k} \right) W(z). \quad (6.14b)$$

在时域,图 6.4 以及等效的式(6.14a)和式(6.14b)可以用下面这对差分方程来表示

$$w[n] = \sum_{k=1}^N a_k w[n-k] + x[n], \quad (6.15a)$$

$$y[n] = \sum_{k=0}^M b_k w[n-k]. \quad (6.15b)$$

图 6.3 和图 6.4 的方框图有几个重要的差别。在图 6.3 中,先实现由 $H_1(z)$ 表示的 $H(z)$ 的零点,接着实现由 $H_2(z)$ 表示的 $H(z)$ 的极点。在图 6.4 中,是先实现极点,再接着实现零点。理论上讲,实现的次序并不影响总的系统函数。但是将会看到,当差分方程是用有限精度运算时,在理论上两个等效的系统之间可能存在显著的差异。另一重要之处是关于在两个系统中延迟单元的个数。正如所画出来的,图 6.3 和图 6.4 都有总数为 $(M+N)$ 个延迟单元。然而,注意到在图 6.4 的方框图中,将完全相同的信号 $w[n]$ 存储在两个延迟单元链中而能予以重画,这样这两个延迟单元链就能合并成一个链如图 6.5 所示。

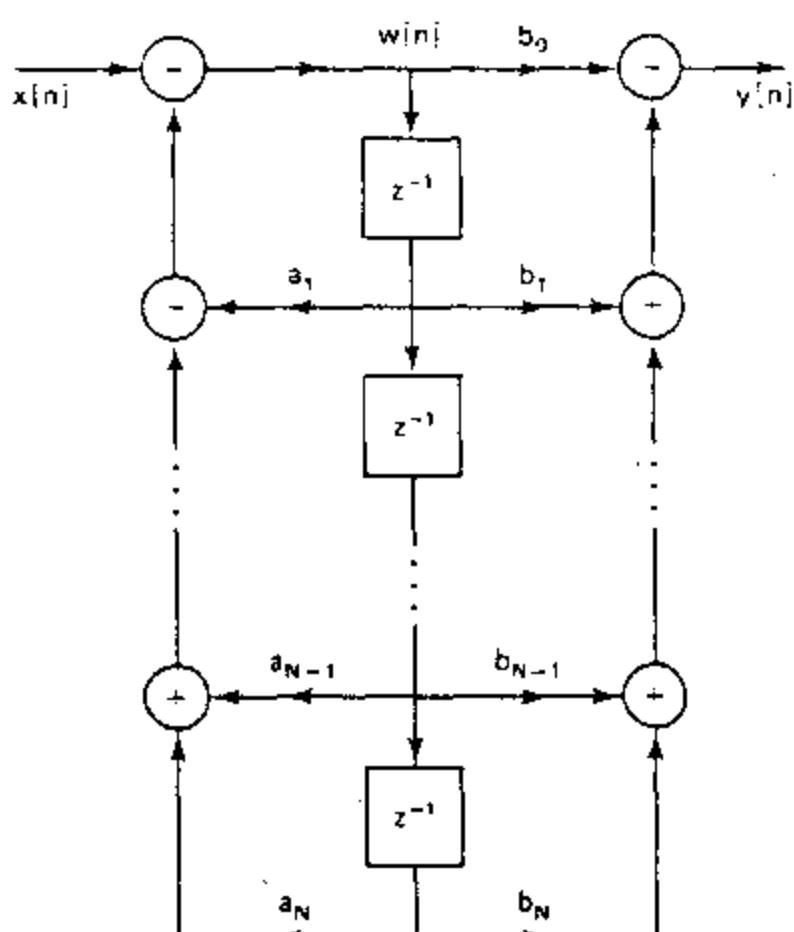


图 6.5 图 6.4 延迟单元的合并。

图 6.5 中延迟单元的总数少于图 6.3 或图 6.4 中延迟单元的个数,并且事实上这是实现具有式(6.8)所给的系统函数的系统所要求的最少个数。一般要求延迟的最小个数就是 (M, N) 中的最大值。具有最少延迟单元数目的实现通常就称为规范型实现。图 6.3 的非规范型方框图称为 N 阶差分方程的直接 I 型实现,因为它就是满足输入 $x[n]$ 和输出 $y[n]$ 的差分方程的一种直接实现,该差分方程能凭观察可以直接从系统函数写出来。图 6.5 常称直接 II 型或规范型实现。了解了图 6.5 是由式(6.8)所给出 $H(z)$ 的一种合适的实现结构之后,我们就可以直接在系统函数和方框图(或等效的差分方程)之间以一种直截了当的方式实现相互转换。

在上述讨论中,对于实现由式(6.8)系统函数表示的线性时不变系统建立了两种

等效的方框图。这些代表实现同一系统不同运算算法的方框图是根据系统线性和系统函数的代数性质的处置而得到的。的确，因为表示线性时不变系统的基本差分方程是线性的，所以只要将差分方程的变量做线性变换就可以得到差分方程的等效集。因此，任何给定系统都存在无数个等效实现。在 6.3 节将用类似于本节的方法对于实现由式(6.8)给出的系统函数的系统建立另外几个重要而有用的等效结构。在讨论这些结构类型以前，引入信号流图作为另一种表示差分方程的方框图是方便的。

6.2 线性常系数差分方程的信号流图表示

差分方程的信号流图表示除去几个符号上的差别以外，基本上与方框图表示是相同的。形式上，一个信号流图就是连接节点的有向支路的一个网络。与每个节点有关的是一个变量或节点值。与节点 k 有关的值可以记作 w_k ，或者，对数字滤波器来说，因为节点变量一般就是序列，常常就明确用符号 $w_k[n]$ 指出。支路 (j, k) 记作由节点 j 出发，到节点 k 终止的一条支路，在支路上用箭头指出从 j 到 k 的方向。这就如图 6.6 所示。每条支路都有一个输入信号和一个输出信号。从节点 j 到支路 (j, k) 的输入信号是节点值 $w_j[n]$ 。在线性信号流图中（我们仅考虑这类信号流图），某一支路的输出就是该支路输入的线性变换。最简单的例子就是常数增益，即该支路的输出只是支路输入乘以常数。由支路所代表的线性运算一般是在靠近指明支路方向的箭头处指出。对于常数相乘的情况，该常数就简单地在紧靠箭头处表明。如果支路运算没有明确指出，就说明是一条传输为 1 的支路，或恒等变换。按定义，在图中每个节点的节点值就是进入该节点的全部支路的输出之和。

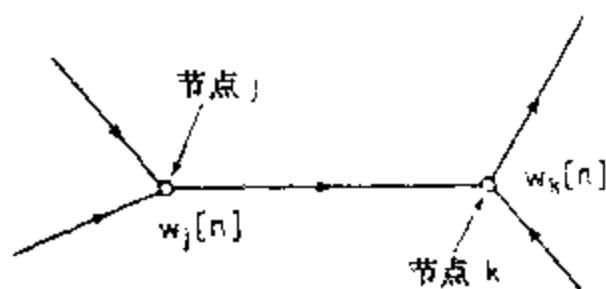


图 6.6 信号流图中节点和支路的例子。

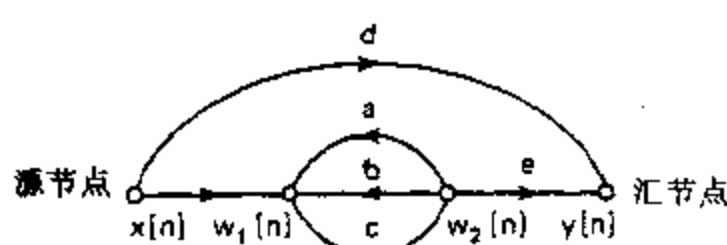


图 6.7 表示源节点和汇节点的信号流图举例。

为了完善信号流图符号的定义，现定义两类特殊的节点。源节点就是那些没有流进支路的节点。源节点用来表示外部输入或信号源注入到流图内。汇节点是那些仅有流进支路的节点。汇节点用来从一个流图中提取输出。源节点、汇节点和简单的支路增益都图示在图 6.7

的信号流图中。由图 6.7 所表示的线性方程如下：

$$\begin{aligned} w_1[n] &= x[n] + aw_2[n] + bw_2[n], \\ w_2[n] &= cw_1[n], \\ y[n] &= dx[n] + ew_2[n]. \end{aligned} \quad (6.16)$$

相加、乘以常数和延迟是实现线性常系数差分方程要求的基本运算。因为这些都是线性运算，因此就有可能采用信号流图符号为实现线性时不变离散时间系统描述算法。如何将刚才讨论的信号流图概念应用到差分方程的表示上去，现作为一个例子考虑一下图 6.8(a) 的方框图，这是系统函数为式(6.1)的系统的直接 I 型实现。相应该系统的信号

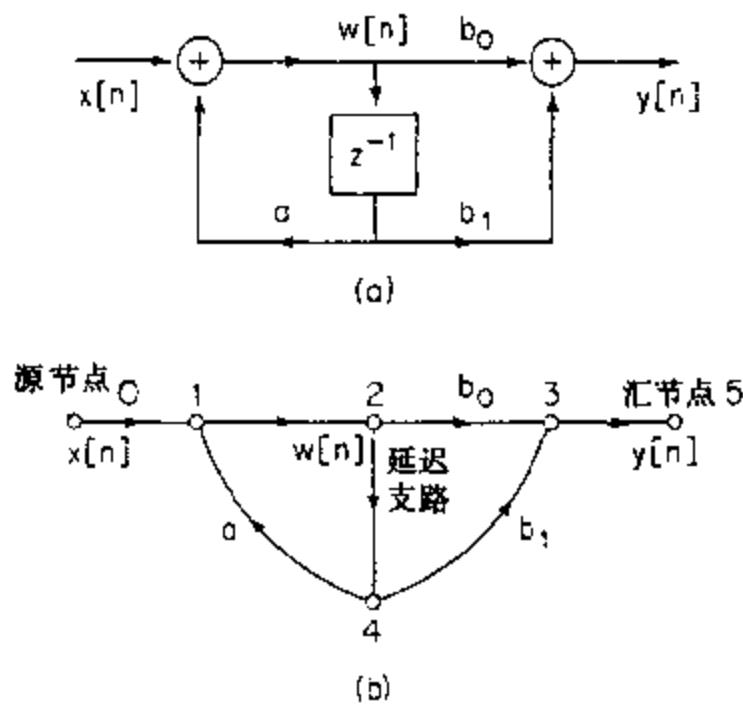


图 6.8 (a)一阶数字滤波器的方框图表示.
(b)相应于方框图(a)的信号流图结构.

流图如图 6.8(b)所示. 在差分方程的表示中, 节点变量都是序列. 图 6.8(b)中, 节点 0 是源节点, 其值由输入序列 $x[n]$ 确定; 而节点 5 是汇节点, 它的值记作 $y[n]$. 注意到源节点和汇节点都是用单位增益支路连接到该图的其余部分中去以明确表示该系统的输入和输出. 很明显, 节点 3 和节点 5 有同样的值. 图 6.8(b)中, 除一条支路(延迟支路 (2,4))外全部支路都可以用简单的支路增益来表示, 也就是说支路输出信号是支路输入乘以常数. 延迟在时域中不能用支路增益来表示. 然而, 单位延迟的 z 变换表示就是乘以因子 z^{-1} . 如果用相应的 z 变换方程来表示差分方程, 那么全部支路都可以用它们的

系统函数来表征. 这种情况下, 每一支路增益就是 z 的函数; 例如, 单位延迟支路就有增益 z^{-1} . 按惯例, 在信号流图中以序列而不是序列的 z 变换正规地表示变量, 然而为了简化符号, 就用支路增益 z^{-1} 表示一条延迟支路, 不过应理解成这样一条支路的输出是其输入延迟一个序列值. 按这一约定图 6.8(b)的图就如图 6.9 所示. 图 6.9 代表的方程如下:

$$w_1[n] = aw_4[n] + x[n], \quad (6.17a)$$

$$w_2[n] = w_1[n], \quad (6.17b)$$

$$w_3[n] = b_0w_2[n] + b_1w_4[n], \quad (6.17c)$$

$$w_4[n] = w_2[n-1], \quad (6.17d)$$

$$y[n] = w_3[n]. \quad (6.17e)$$

将图 6.8(a)和图 6.9 作一比较就可以看出, 在方框图中的支路和信号流图中的支路之间有着直接的对应关系. 事实上, 这两者之间的重大差别在于: 信号流图中的节点既代表分支点, 又是加法器; 而在方框图中, 对加法器则用了一种专用符号. 方框图中的一个分支点在信号流图中是用这样的节点表示的, 该节点仅有一条流入支路和一条或更多条流出支路. 在方框图中的一个加法器在信号流图中是用这样一个节点来表示的, 该节点有两条(或更多条)流入支路. 因此, 信号流图作为差分方程的图形表示是完全与方框图等效的, 但是画起来要简单些. 和方框图一样, 信号流图也能对它们进行图形上的处理以对某一给定系统性质得到更为透彻的了解. 当用信号流图表示离散时间系统时, 有大量的信号流图理论可直接应用(Mason and Zimmermann, 1960; Chow and Cassignol, 1962). 虽然我们主要地是利用信号流图的图形价值, 但是也将使用信号流图的某些理论来考查实现线性系统的一些替代结构.

式(6.17)定义了一种从输入序列 $x[n]$ 计算线性时不变系统输出的多步算法, 这个例

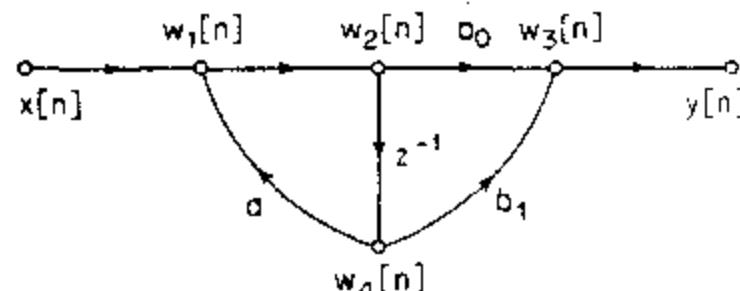


图 6.9 延迟支路用 z^{-1} 表示的图 6.8(b)的信号流图

子说明了在 IIR 系统实现中一般遇到的数据先后次序关系这样一类问题. 式(6.17)不能用任意次序计算. 在式(6.17a)和式(6.17c)中要求相乘和相加, 而式(6.17b)和式(6.17e)只是给变量以重新命名. 式(6.17d)代表系统存储器的“更新”. 它就是把代表 $w_1[n]$ 的存储寄存器中的内容用 $w_2[n]$ 的值代替而给予实现, 但是这必须始终如一地在所有其它式子计算以前或以后来完成. 在这种情况下, 初始松弛条件也要加上, 即定义 $w_2[-1]=0$ 或 $w_2[0]=0$. 很明显, 除了最后两个方程可以互换, 或者式(6.17d)能够始终首先被求出来以外, 式(6.17)必须要用给出的次序计算.

信号流图代表一组差分方程, 其每一个方程都是针对网络每个节点列出的. 在图 6.9 的情况下, 可以很容易地消去一些变量而得到如下一对方程:

$$w_2[n] = aw_2[n-1] + x[n], \quad (6.18a)$$

$$y[n] = b_0w_2[n] + b_1w_2[n-1], \quad (6.18b)$$

这就是式(6.15a)和式(6.15b)的形式. 由于延迟变量的反馈, 当用时域变量处理时要对一个流图的差分方程进行处置往往是困难的. 在这种情况下, 用 z 变换表示来处理总是可能的, 这时全部支路都是简单的增益. 习题 6.1 到 6.12 说明利用流图 z 变换分析, 以得到差分方程的等效集合.

6.3 IIR 系统的基本结构

在 6.1 节为实现具有式(6.8)系统函数的线性时不变系统, 我们介绍了两种不同的结构. 这一节将介绍这些系统的信号流图表示, 并且还将建立其余几个常用的等效信号流图网络结构. 在讨论中将会更加清楚: 对任何给定的有理系统函数, 有各种各样等效差分方程或网络结构存在. 在这些众多的不同结构中进行选择的一种考虑是计算的复杂性. 例如, 在一些数字实现中, 最少个数的常数乘法器和最少个数的延迟支路往往是最受欢迎的. 这是因为乘法一般在数字硬件中是耗时和耗费的运算, 而每个延迟单元都相应于一个存储寄存器. 结果, 常数乘法器的减少就意味着速度的提高, 而延迟单元数量的减少就意味着要求的存储器减少.

其它的更为巧妙的一些权衡在 VLSI 实现中会遇到, 在那里芯片尺寸往往是重要的一项指标. 在这种实现中, 芯片中数据传送模式化和简单性也常常是所追求的. 在多处理器实现中, 最重要的考虑往往是关于算法的可分割性和处理器之间的通信要求. 另一个主要的考虑是有限寄存器长度和有限精度运算的影响. 这些影响决定于运算是以何种方式组织的, 也即决定于信号流图的结构. 有的时候又愿意利用某种结构, 这种结构虽不具有最少个数的乘法器和延迟单元, 但这种结构对有限寄存器长度的影响有较低的灵敏度.

这一节将建立最常用的实现一个线性时不变 IIR 系统的几种形式以及得出它们的流图表示.

6.3.1 直接型

在 6.1 节中曾经得到一个线性时不变系统的直接 I 型(图 6.3)和直接 II 型或规范型(图 6.5)结构的方框图表示, 系统的输入和输出满足如下差分方程

$$y[n] - \sum_{k=1}^N a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^M b_k x[n-k], \quad (6.19)$$

并具有如下有理系统函数

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{1 - \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}}. \quad (6.20)$$

在图 6.10 中图 6.3 的直接 I 型结构用信号流图的约定来给出的。而图 6.11 则是图 6.5 直接 II 型结构的信号流图表示。为了方便起见，再次设 $N=M$ 。应该注意，已经画出的信号流图都是每个节点不多于两个输入。在信号流图中一个节点本可以有任意多的输入，但是正如早先已指出的，两个输入的约定对用流图实现差分方程的计算是更加与编程和硬件结构密切联系的。

例 6.2

为了说明直接 I 型和直接 II 型结构，考虑一系统函数为

$$H(z) = \frac{1 + 2z^{-1} + z^{-2}}{1 - 0.75z^{-1} + 0.125z^{-2}}. \quad (6.21)$$

又因为在直接型结构中的系数直接对应于分子和分母多项式中的系数（考虑式(6.20)分母中的负号），所以就能直接参照图 6.10 和图 6.11 画出这些结构，对本例两种直接型结构分别如图 6.12 和 6.13 所示。

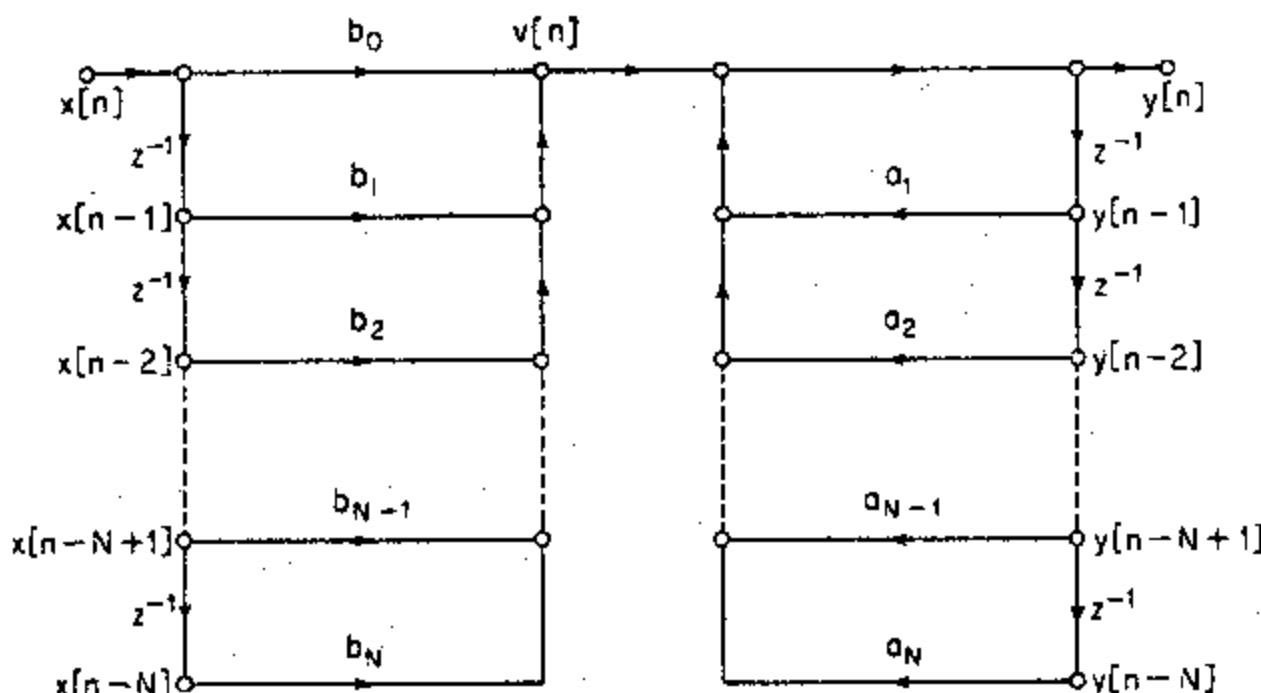


图 6.10 N 阶系统直接 I 型结构的信号流图。

6.3.2 级联型

直接型结构可以将系统函数 $H(z)$ 写成如式(6.20)那样以变量 z^{-1} 的多项式之比直接求得。如果将分子和分母多项式因式分解，就可以将 $H(z)$ 表示成：

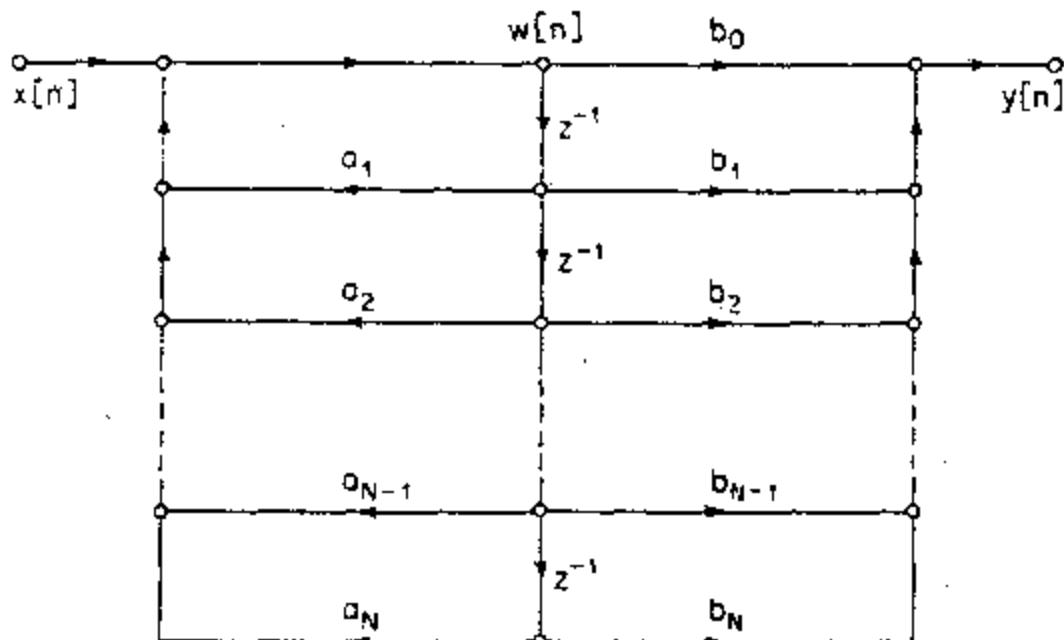


图 6.11 N 阶系统直接 I 型结构的信号流图.

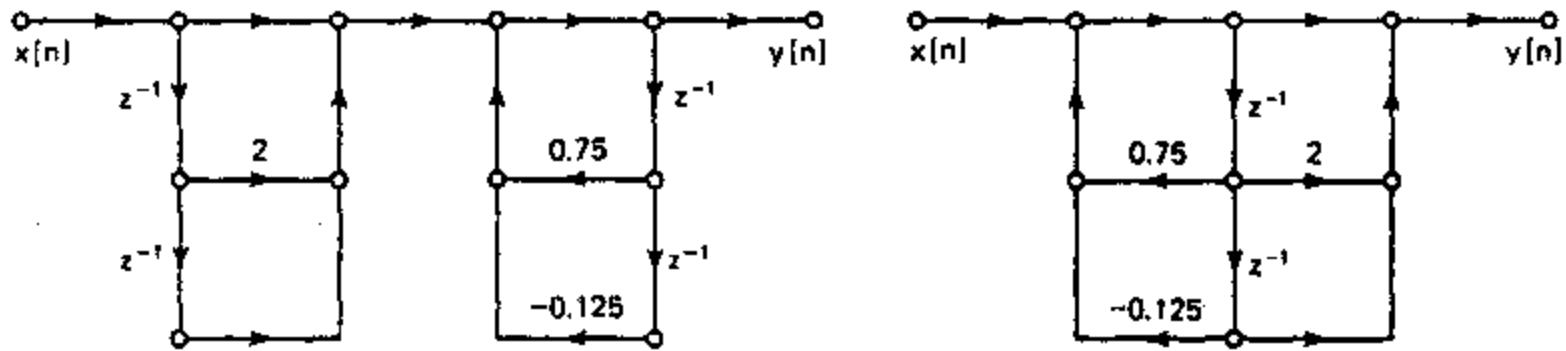


图 6.12 例 6.2 直接 I 型结构.

图 6.13 例 6.2 直接 I 型结构.

$$H(z) = A \frac{\prod_{k=1}^{M_1} (1-g_k z^{-1}) \prod_{k=1}^{M_2} (1-h_k z^{-1})(1-h_k^* z^{-1})}{\prod_{k=1}^{N_1} (1-c_k z^{-1}) \prod_{k=1}^{N_2} (1-d_k z^{-1})(1-d_k^* z^{-1})}, \quad (6.22)$$

式中 $M=M_1+2M_2$, $N=N_1+2N_2$. 在这种表示式中, 一阶因子表示实零点在 g_k 和实极点在 c_k , 而二阶因子表示复数共轭零点在 h_k 和 h_k^* , 复数共轭极点在 d_k 和 d_k^* . 当式(6.20)全部系数都是实数时, 这代表了最一般的零极点分布情况. 式(6.22)提出了由一阶和二阶系统级联组成的一种结构. 这种结构在子系统组成的选择上和子系统级联的先后次序上有很大的自由度. 然而, 实际上往往追求的是利用最小存贮和计算的级联实现. 对许多实现形式都有利的一种标准结构是将一对实因子和一对复数共轭对都配成二阶因子, 这样式(6.22)就能表示成

$$H(z) = \prod_{k=1}^{N_1} \frac{b_{0k} + b_{1k}z^{-1} + b_{2k}z^{-2}}{1 - a_{1k}z^{-1} - a_{2k}z^{-2}}, \quad (6.23)$$

式中 $N_1=\lfloor (N+1)/2 \rfloor$ 是不大于 $(N+1)/2$ 的最大整数. 在将 $H(z)$ 写成这种形式时, 已经假定 $M \leq N$, 并且实极点和实零点均已组合成对. 同样, 如果有奇数的实极点, 系数 a_{2k} 中之一将为零. 这些单个的二阶节可以用任意一种直接型结构来实现; 然而, 先前的讨论指出, 要用最少乘法次数和最少延迟单元个数来实现一个级联结构, 就应在每个二阶节采用直接 I 型结构. 图 6.14 示出一个六阶系统应用三个直接 I 型二阶节的级联结构. 按直接

II型二阶节级联表示的差分方程具有如下形式:

$$y_0[n] = x[n], \quad (6.24a)$$

$$w_k[n] = a_{1k}w_k[n-1] + a_{2k}w_k[n-2] + y_{k-1}[n], \quad k=1, 2, \dots, N_s, \quad (6.24b)$$

$$y_k[n] = b_{0k}w_k[n] + b_{1k}w_k[n-1] + b_{2k}w_k[n-2], \quad k=1, 2, \dots, N_s, \quad (6.24c)$$

$$y[n] = y_{N_s}[n]. \quad (6.24d)$$

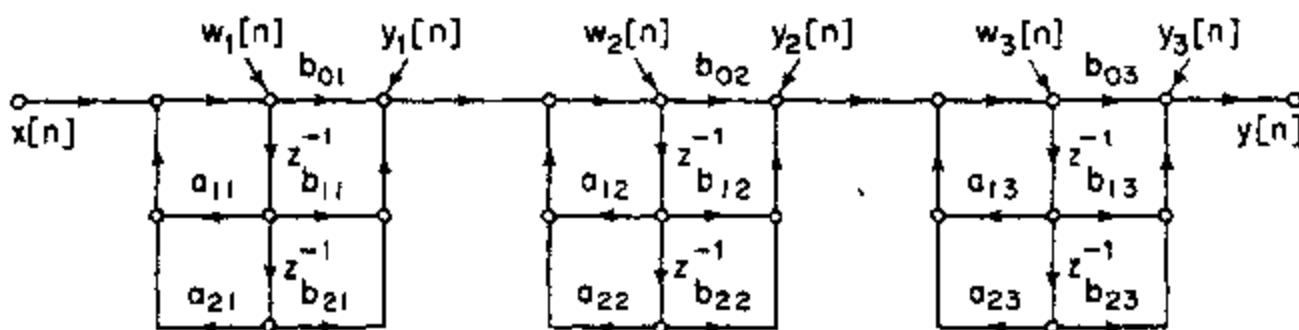


图 6.14 每个二阶子系统用直接 II 型实现的一个六阶系统的级联结构。

很容易看到,仅就以不同方式将零点和极点配对,以及以不同方式将这些二阶节排序,理论上就能得出许多种等效的系统.确实如此,如果有 N_s 个二阶节,那么就有 $N_s!$ 种极点与零点的配对可能和 $N_s!$ 种所得二阶节因子的级联次序,或者总共有 $(N_s!)^2$ 个不同配对和排序可能.当用无限精度运算时,这些虽都具有相同的总的系统函数和相应的输入/输出关系,但是在用有限精度运算时,它们的特性可能是很不一样的,这点将在 6.9 节看到.

例 6.3

再次考虑式(6.21)的系统函数.因为这是一个二阶系统,所以一个具有直接 II 型二阶节的级联结构就简化到图 6.13 的结构.另外,为了说明级联结构,也能把 $H(z)$ 表示成一阶因子的乘积而采用一阶系统,如下式

$$H(z) = \frac{1+2z^{-1}+z^{-2}}{1-0.75z^{-1}+0.125z^{-2}} = \frac{(1+z^{-1})(1+z^{-1})}{(1-0.5z^{-1})(1-0.25z^{-1})}. \quad (6.25)$$

因为全部零极点都是实的,所以用一阶节的级联结构具有实系数.如果极点和/或零点是复数的话,那么仅二阶节才有实系数.图 6.15 示出两种等效的级联结构,两者都有式(6.25)的系统函数.图 6.15 信号流图代表的差分方程能很容易地写出来.习题 6.5 是关于求其它等效系统结构的例子.

关于级联型中系统函数的定义应该做一点最后的注释.按式(6.23)的定义,每一个二阶节都有五个系数乘法器.为比较起见,设式(6.20)的 $H(z)$ 中 $M=N$,再假设 N 为偶数,这样 $N_s=N/2$.那么,直接 I 型和 II 型结构都有 $2N+1$ 个系数乘法器,而由式(6.23)所建议的级联型结构有 $5N/2$ 个系数乘法器.对于图 6.14 的六阶系统而言,要求总共有 15 个乘法器,而等效的直接型则要求总数为 13 个乘法器.级联型的另一种定义是

$$H(z) = b_0 \prod_{k=1}^{N_s} \frac{1+\bar{b}_{1k}z^{-1}+\bar{b}_{2k}z^{-2}}{1-a_{1k}z^{-1}-a_{2k}z^{-2}}, \quad (6.26)$$

式中 b_0 是式(6.20)分子多项式的首项系数,而 $\bar{b}_i = b_{ik}/b_{0k}$, $i=1, 2$ 和 $k=1, 2, \dots, N_s$. $H(z)$ 的这种形式提出了一种四乘法器二阶节的级联结构,外加一个总增益常数 b_0 .这种

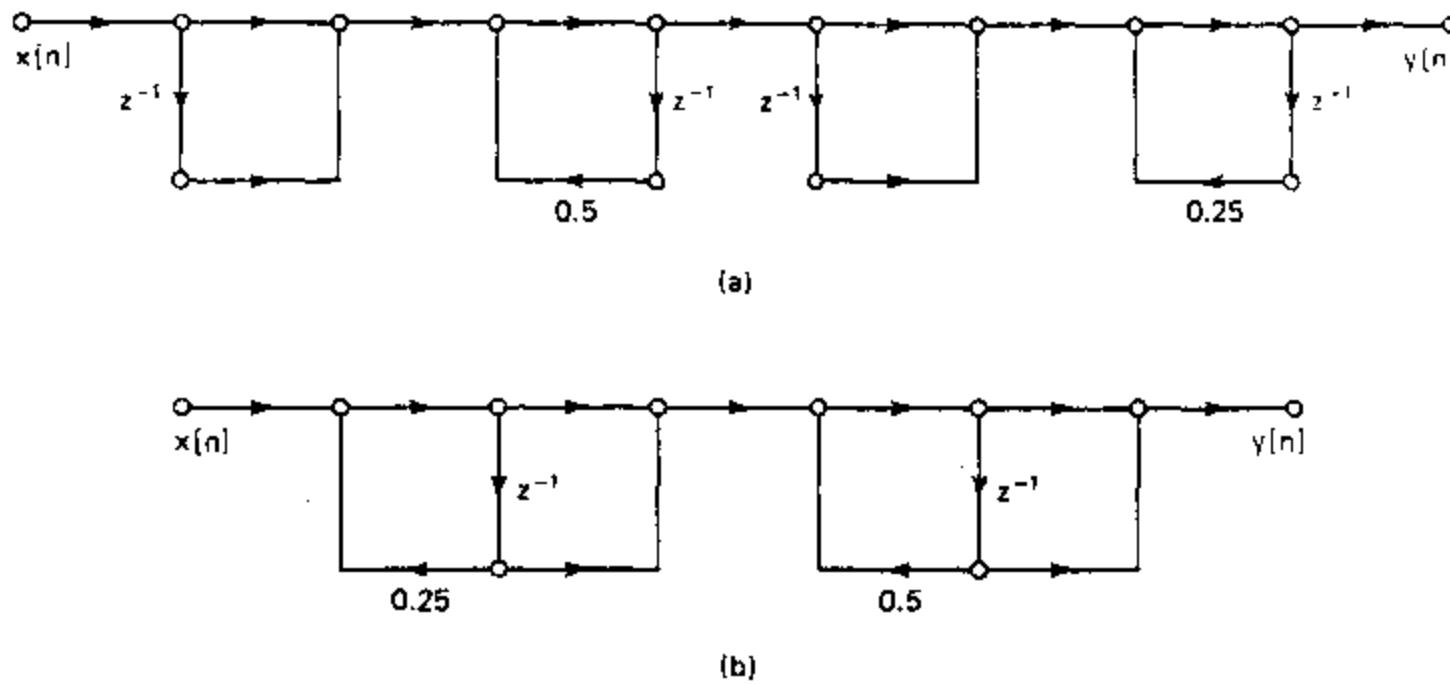


图 6.15 例 6.3 的级联结构. (a) 直接 I 型子系统. (b) 直接 II 型子系统.

级联形式与直接型结构有相同的系数乘法器个数. 在 6.9 节中将要指出, 当用定点运算实现时, 常用五乘法器的二阶节, 这是因为这样有可能分配系统增益, 藉此可以控制在系统中各关键点上信号的大小. 当用浮点运算, 并且动态范围不会成为一个问题时, 用四乘法器的二阶节可用来减少计算量. 对单位圆上的零点可以获得进一步简化. 在这种情况下, $b_{2k}=1$, 每个二阶节仅要求三个乘法器.

6.3.3 并联型

将 $H(z)$ 分子和分母多项式作另一种因式分解, 可将有理系统函数表示成如下部分分式展开式:

$$H(z) = \sum_{k=0}^{N_p} C_k z^{-k} + \sum_{k=1}^{N_1} \frac{A_k}{1 - c_k z^{-1}} + \sum_{k=1}^{N_2} \frac{B_k (1 - e_k z^{-1})}{(1 - d_k z^{-1})(1 - d_k^* z^{-1})}, \quad (6.27)$$

式中 $N = N_1 + 2N_2$. 如果 $M \geq N$, 那么 $N_p = M - N$; 否则式(6.27)中第一个和式就不包括. 若式(6.20)中的系数 a_k 和 b_k 都是实数, 那么 A_k, B_k, C_k, c_k 和 e_k 这些量都是实数. 在这种形式中, 系统函数可以看成是由一阶和二阶 IIR 系统并联的组合, 可能还有 N_p 个简单幅度加权的延迟通道. 另外, 可以把实极点成对组合起来, $H(z)$ 又能表示成

$$H(z) = \sum_{k=0}^{N_p} C_k z^{-k} + \sum_{k=1}^{N_1} \frac{e_{0k} + e_{1k} z^{-1}}{1 - a_{1k} z^{-1} - a_{2k} z^{-2}}, \quad (6.28)$$

式中, 和级联型一样, $N_p = \lfloor (N+1)/2 \rfloor$ 是不大于数 $(N+1)/2$ 的最大整数, 并且如果 $N_p = M - N$ 是负的, 式(6.28)中第一个和式就不存在. 图 6.16 示出 $N = M = 6$ 的一个典型例子. 用直接 I 型二阶节并联型的一般差分方程是:

$$w_k[n] = a_{1k} w_k[n-1] + a_{2k} w_k[n-2] + x[n] \quad \text{对于 } k=1, 2, \dots, N_p, \quad (6.29a)$$

$$y_k[n] = e_{0k} w_k[n] + e_{1k} w_k[n-1] \quad \text{对于 } k=1, 2, \dots, N_p, \quad (6.29b)$$

$$y[n] = \sum_{k=0}^{N_p} C_k x[n-k] + \sum_{k=1}^{N_1} y_k[n]. \quad (6.29c)$$

如果 $M < N$, 那么式(6.29c)中第一个和式就没有.

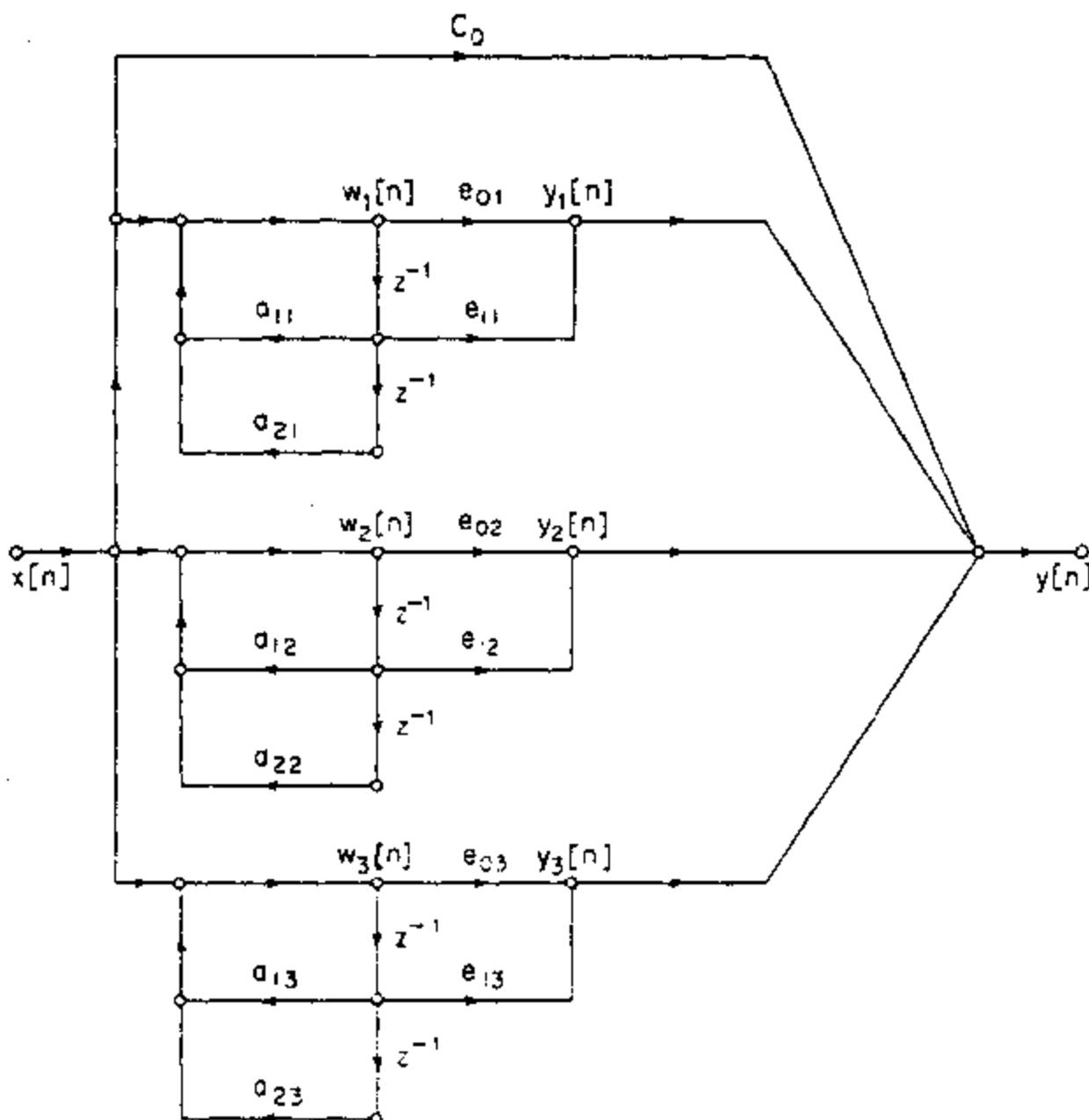


图 6.15 将实极点和复数极点成对组合的六阶系统的并联型结构.

例 6.4

还是考虑例 6.2 和例 6.3 的系统函数. 对于并联型, 必须将 $H(z)$ 表示成式(6.27)或式(6.28)的形式. 如果用二阶节, $H(z)$ 就是

$$H(z) = \frac{1+2z^{-1}+z^{-2}}{1-0.75z^{-1}+0.125z^{-2}} = 8 + \frac{-7+8z^{-1}}{1-0.75z^{-1}+0.125z^{-2}}. \quad (6.30)$$

该例用二阶节的并联型实现示于图 6.17.

由于全部极点都是实数, 将 $H(z)$ 展开成如下形式

$$H(z) = 8 + \frac{18}{1-0.5z^{-1}} - \frac{25}{1-0.25z^{-1}}. \quad (6.31)$$

就能得到另外一种并联型实现. 这种用一阶节的并联型实现如图 6.18 所示. 和一般情况相同, 由图 6.17 和图 6.18 所表示的差分方程都能直接写出.

6.3.4 IIR 系统中的反馈

本节中全部流图都有反馈回路; 也就是说, 它们都有一个闭合的路径, 该路径从某一节点出发, 以箭头方向穿过某些支路又回到那个节点. 在流图中这样的结构意味着在回路

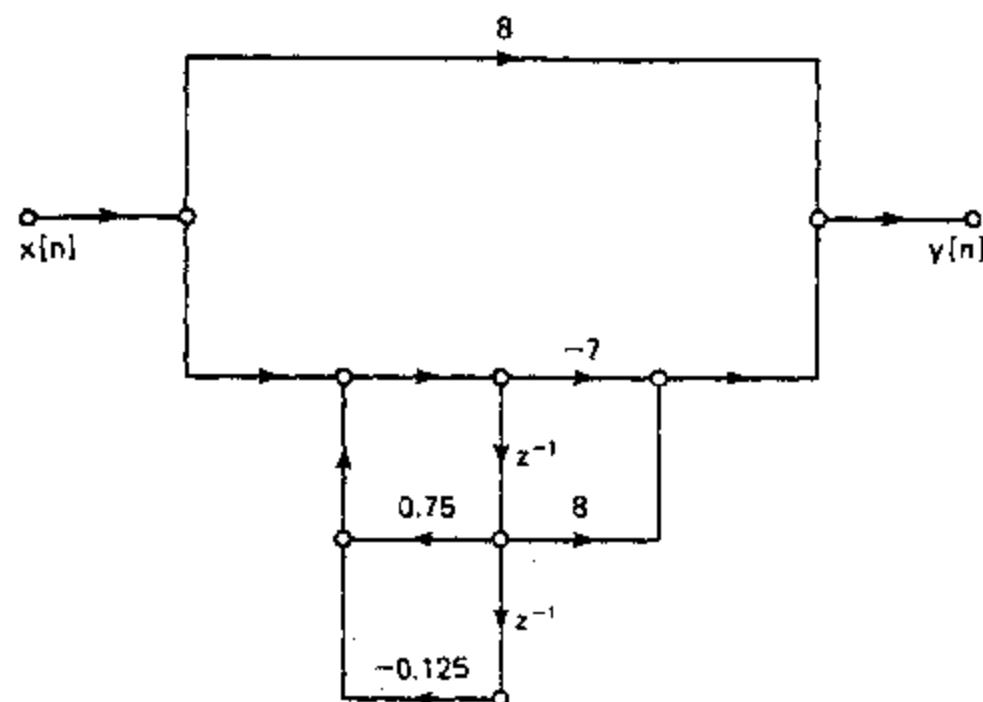


图 6.17 利用一个二阶系统的例 6.4 的并联型结构。

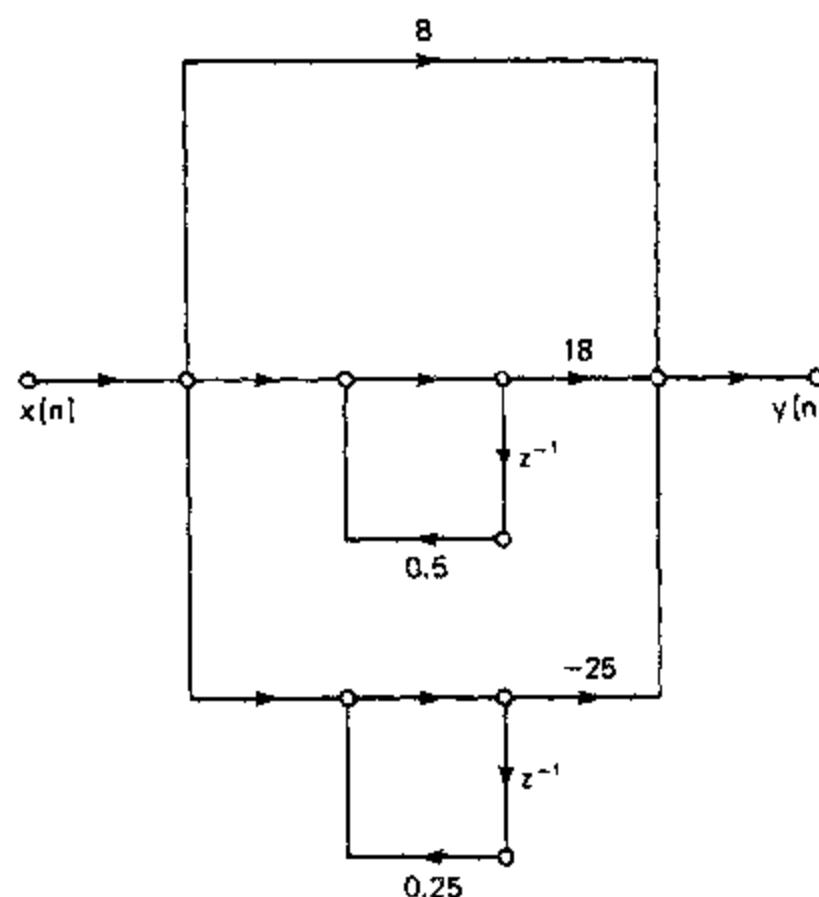


图 6.18 用一阶系统的例 6.4 的并联型结构。

内的节点变量直接或间接地决定于它自己。图 6.19(a)示出一个简单的例子, 它表示如下差分方程:

$$y[n] = ay[n-1] + x[n]. \quad (6.32)$$

为了产生无限长冲激响应, 这类回路是必需的(但不充分)。如果考虑一个没有回路的网络就能看出这一点, 这时从输入到输出的任何路径能通过每个延迟单元仅一次。因此, 输入和输出间最长延迟就一定发生在网络中通过全部延迟单元的那条路径上。这样, 对于一个没有回路的网络, 冲激响应不会比网络中延迟单元的总数还要长。由此可以得出: 如果网络没有回路, 那么系统函数仅有零点($z=0$ 的极点除外), 并且零点的个数不会多于

网络中延迟单元的个数.

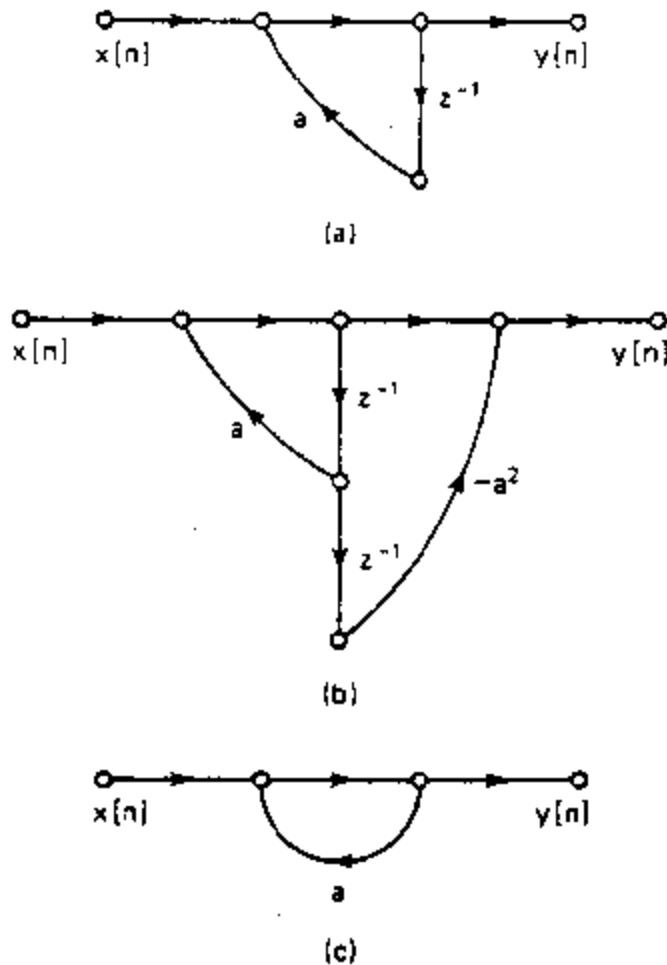


图 6.19 (a)具有反馈回路的系统. (b)具有反馈回路的 FIR 系统. (c)不可计算系统.

再回到图 6.19(a)这个简单例子上来,可以看到,当输入是冲激序列时,这个单一输入样本在反馈回路中由于乘了一个常数 a ,要么以增长幅度 ($|a| > 1$) 或以衰减幅度 ($|a| < 1$) 持续不断地循环,所以冲激响应就是 $h[n] = a^n u[n]$. 这就是反馈能产生无限长冲激响应的方式.

如果一个系统有极点,那么对应的方框图或信号流图就一定有反馈回路. 另一方面,系统函数既无极点,网络内又无回路对冲激响应为有限长而言就是充分的了. 图 6.19(b)示出的网络具有一个回路,但冲激响应却是有限长的. 这是由于系统函数的极点与一个零点相抵消的缘故;对图 6.19(b)即

$$H(z) = \frac{1 - a^2 z^{-2}}{1 - az^{-1}} = \frac{(1 - az^{-1})(1 + az^{-1})}{1 - az^{-1}} = 1 + az^{-1}. \quad (6.33)$$

该系统的冲激响应是 $h[n] = \delta[n] + a\delta[n-1]$. 这个系统就是属于一般称为频率采样系统的 FIR 系统的一个简单例子. 在习题 6.16 和习题 6.17 中要更详细地考虑这类系统.

网络中的回路在实现由网络所表示的计算中提出了某些特殊问题. 正如已经讨论过的,必须有可能依次计算出网络中的节点变量,以便需要时全部必要的值都可资利用. 在某些情况下,没有办法去安排这些计算,以使得信号流图中的节点变量都能依次计算出来. 这样的网络是不可计算的(Crochive and Oppenheim, 1975). 图 6.19(c)示出一个简单的不可计算网络. 该网络的差分方程是

$$y[n] = ay[n] + x[n]. \quad (6.34)$$

在这种形式中,无法计算 $y[n]$,因为式子右边涉及到要想计算的量. 信号流图是不可计算的这一点并不意味着由流图代表的方程是不能解的;事实上,式(6.34)的解就是 $y[n] = x[n]/(1-a)$. 它只是指该流图不代表一组差分方程,而这组差分方程是可以逐次求出节点变量的. 一个流图可计算性的关键是全部回路都必须至少包含一个单位延迟单元. 因此,在处置用流图表示线性时不变系统实现时,必须特别小心不要造成无延迟的回路. 习题 6.6 讨论含有一个无延迟回路的系统. 习题 7.21 表明如何引入一个无延迟回路.

6.4 转置形式

线性信号流图理论为将信号流图变换成不同的形式,而保持输入和输出间总的系统函数不变给出了各种方法. 其中之一称为流图倒置或转置,用它可以导得一组转置系统结构,这些结构为上一节讨论过的结构提供了某些有用的补充.

将网络中所有支路的方向颠倒,但保持支路增益不变,并将输入和输出也颠倒过来,以使得源节点变成汇节点,汇节点变成源节点,这样就完成了一个流图的转置.对单输入/单输出系统,若输入和输出节点也互换的话,那么所得流图与原流图具有相同的系统函数.虽然我们将不正式证明这一结果*,但用两个例子来说明确实如此.

例 6.5

对应于图 6.20 中的流图的一阶系统有系统函数

$$H(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}}. \quad (6.35)$$

为了得到该系统的转置形式,将全部支路箭头方向颠倒,将原输入现取为输出,原来的输出现为输入,就得到图 6.21.通常习惯总是将输入放在图的左边,输出放在右边,这样转置网络就成了图 6.22.将图 6.20 和图 6.22 比较一下就可以注意到唯一的差别在于:图 6.20 中是将延迟输出序列 $y[n-1]$ 乘以系数 a ,而在图 6.22 中则是将 $y[n]$ 乘以系数 a ,然后再延迟.因为这两种运算是可以交换的,所以凭直观就能看出:图 6.20 原系统与其相应的转置系统图 6.22 有相同的系统函数.

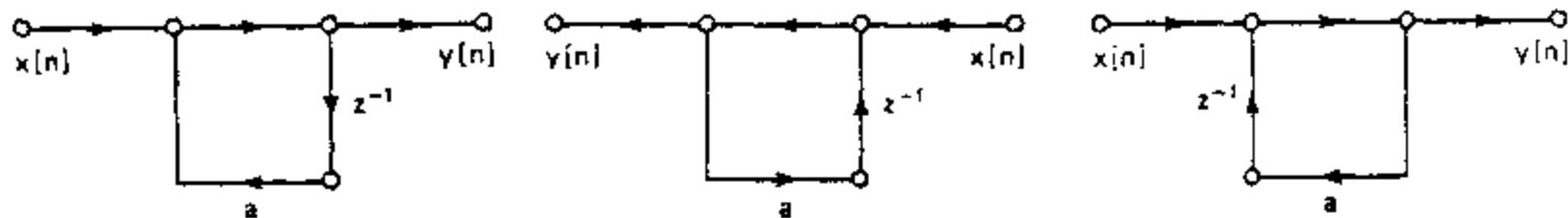


图 6.20 简单一阶系统流图.

图 6.21 图 6.20 的转置形式.

图 6.22 将输入放在左边重画

图 6.21 的结构.

例 6.5 直接就能看出原系统与它的转置有相同的系统函数.然而,对于更为复杂的图,这一结论往往不是这样显而易见的.现用下例给予说明.

例 6.6

考虑图 6.23 的基本二阶节,该系统的差分方程是:

$$w[n] = a_1 w[n-1] + a_2 w[n-2] + x[n], \quad (6.36a)$$

$$y[n] = b_0 w[n] + b_1 w[n-1] - b_2 w[n-2]. \quad (6.36b)$$

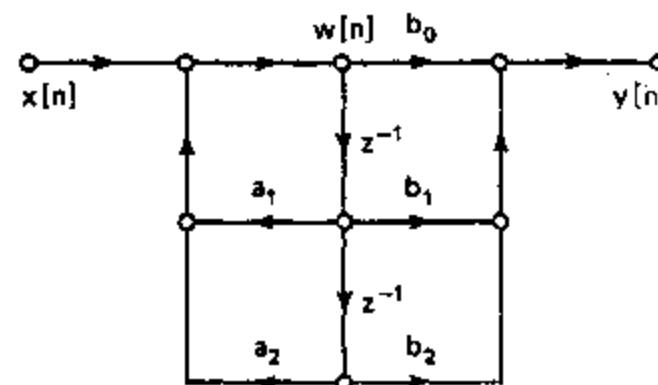


图 6.23 例 6.6 的直接 I 型结构.

* 这个定理的详细讨论和证明,见 Crochiere and Oppenheim (1975). 该定理也可以直接由信号流图理论中的梅森增益公式得出(Mason and Zimmermann, 1960; Chow and Cassignol, 1962).

其转置流图如图 6.24 所示,它的差分方程是:

$$v_0[n] = b_0x[n] + v_1[n-1], \quad (6.37a)$$

$$y[n] = v_0[n], \quad (6.37b)$$

$$v_1[n] = a_1y[n] + b_1x[n] + v_2[n-1], \quad (6.37c)$$

$$v_2[n] = a_2y[n] + b_2x[n]. \quad (6.37d)$$

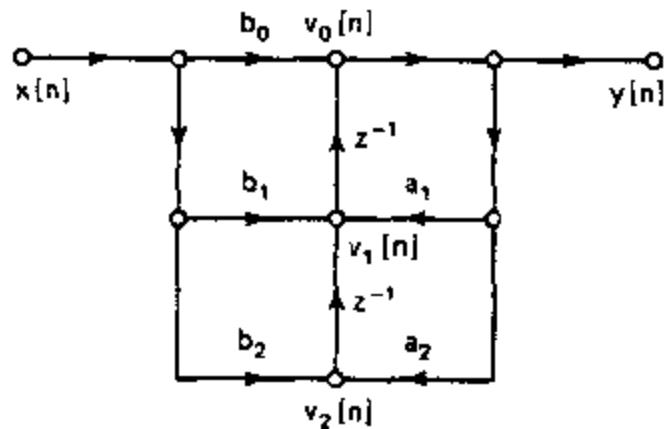


图 6.24 例 6.6 转置的直接 I 型结构.

式(6.36)和式(6.37)是从输入样本 $x[n]$ 构成输出样本 $y[n]$ 的不同方法.这两组差分方程是等效的,这一点不是立刻很清楚的.证明这种等效的一种方法是在两组方程的两边用 z 变换表示,在两种情况下求出比值为 $Y(z)/X(z) = H(z)$,再比较结果.另一种办法是将式(6.37d)代入式(6.37c),再将所得结果代入式(6.37a),最后将结果代入式(6.37b)这个结果就是

$$y[n] = a_1y[n-1] + a_2y[n-2] + b_0x[n] + b_1x[n-1] + b_2x[n-2]. \quad (6.38)$$

因为图 6.23 的网络是直接 I 型结构,容易看出,图 6.23 系统的输入和输出也满足式(6.38)的差分方程.因此,在初始松弛条件下,图 6.23 和图 6.24 的系统是等效的.

转置定理能用于目前已经讨论过的任何结构上去.例如,将它用于图 6.10 的直接 I 型结构就是图 6.25;类似地,图 6.11 直接 I 型结构的转置结构就是图 6.26.很清楚,如果一个信号流图被转置的话,延迟支路数和系数的个数都保持原样,因此转置后的直接 I 型结构也是一种规范型结构.

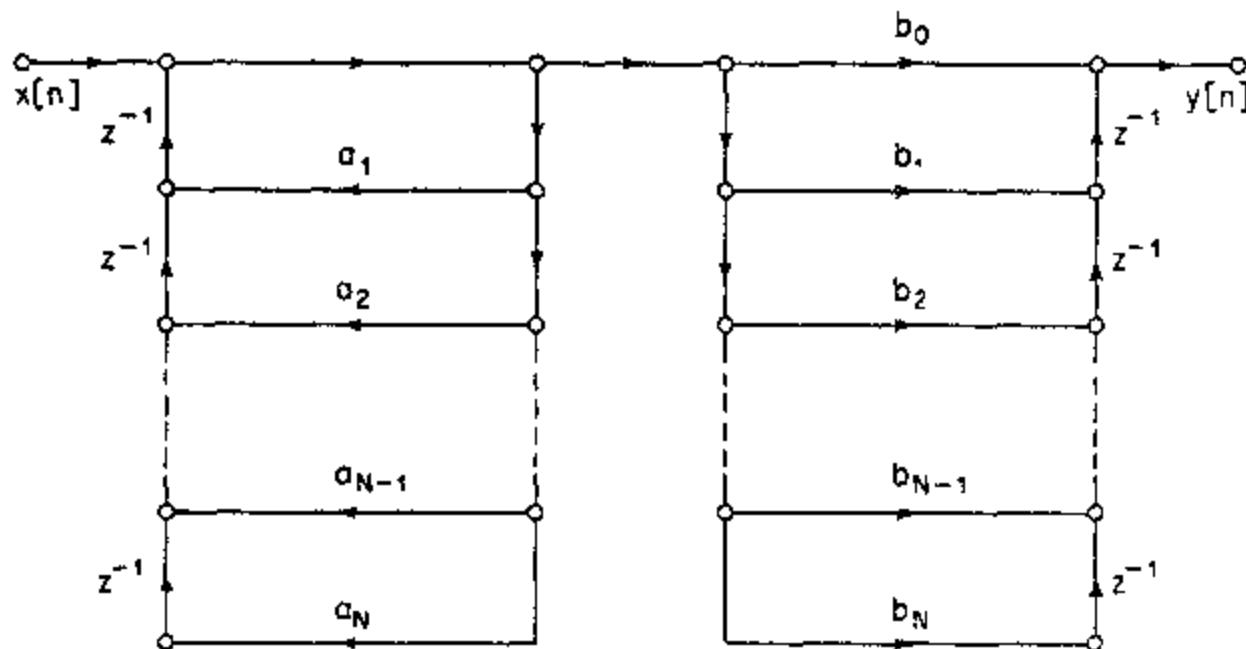


图 6.25 将转置定理应用于图 6.10 的直接 I 型结构得到的一般流图.

将图 6.11 与图 6.26 作一比较,一个重要的差别是显然的.直接 I 型结构是首先实现极点,然后实现零点,而转置的直接 I 型结构是先实现零点,再实现极点.在用有限精度数字实现量化存在时,或用离散时间模拟实现噪声存在时,这些差别就显得重要了.

当将转置定理应用于级联或并联型结构时,单个的二阶系统可以用其转置结构代替.

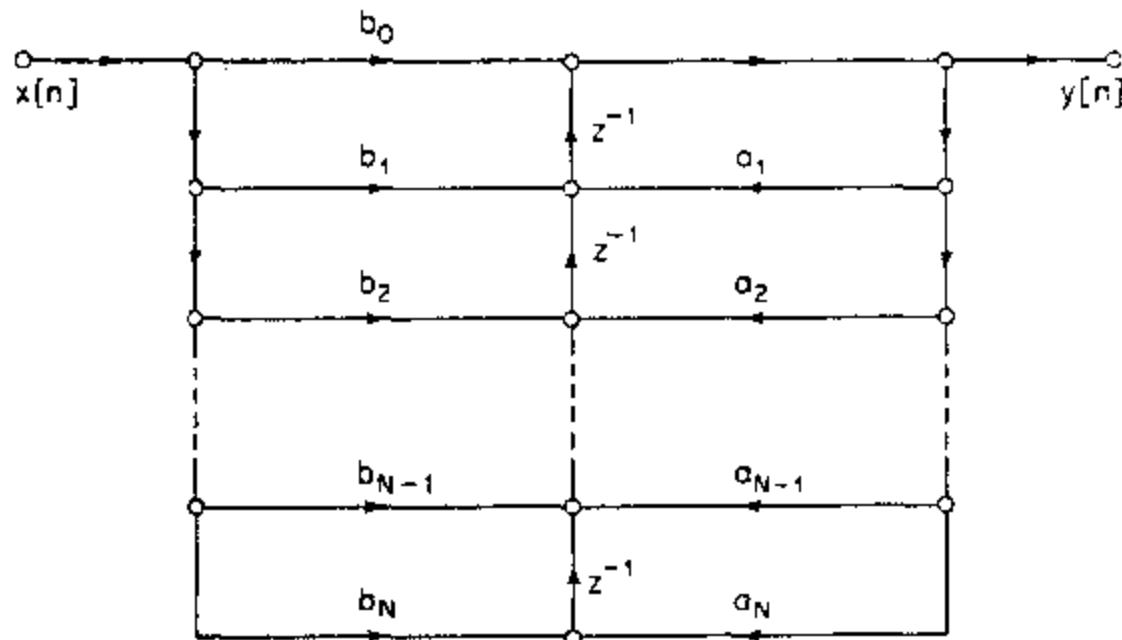


图 6.26 将转置定理应用于图 6.11 的直接 II 型结构得到的一般流图。

例如,将转置定理应用于图 6.14 就得出三个转置直接 I 型节(如例 6.6 一样)的级联,其系数与图 6.14 是相同的,但颠倒了级联的次序.类似的结论对于图 6.16 的转置也是一样.

转置定理进一步强调了对于任何给定的有理系统函数而言,存在着无数种实现结构.转置定理为产生新的结构给出了一种简便的方法.在 6.6 节我们将讨论另外几种 IIR 结构,但是,用有限精度运算实现系统的问题已经使得比我们这里讨论的多得多的各种等效结构出现了,因此,我们仅集中在最常用的一些结构上.

6.5 FIR 系统的基本网络结构

6.3 节和 6.4 节讨论的直接型、级联型和并联型结构是 IIR 系统最一般的基本结构.这些结构是建立在系统函数既有极点又有零点的假定前提之上的.虽然对于 IIR 系统的直接型和级联型作为一种特例也包括了 FIR 系统,但是对于 FIR 系统还有另外一些特殊形式.

6.5.1 直接型

对因果的 FIR 系统,其系统函数仅有零点(除 $z=0$ 的极点外),并且因为系数 a_k 全为零,所以式(6.9)的差分方程就简化为:

$$y[n] = \sum_{k=0}^M b_k x[n-k], \quad (6.39)$$

该式可以认为是 $x[n]$ 与冲激响应的直接卷积,其冲激响应为

$$h[n] = \begin{cases} b_n, & n=0, 1, \dots, M, \\ 0, & \text{其它.} \end{cases} \quad (6.40)$$

这样图 6.10 和图 6.11 的直接 I 型和直接 II 型结构就都变成图 6.27 的直接型 FIR 结构.由于延迟单元链跨接图的顶部,这种结构也称为抽头延迟线结构,或称横向滤波器结构.从图 6.27 可见,沿着这条链每一抽头的信号被适当的系数(冲激响应值)加权,然后将所

得乘积相加就得到输出 $y[n]$.

将转置定理应用于图 6.27, 或等效地将图 6.25 或图 6.26 的系数 a_k 都置成零, 就可以得出 FIR 的转置直接型, 其结果如图 6.28 所示.

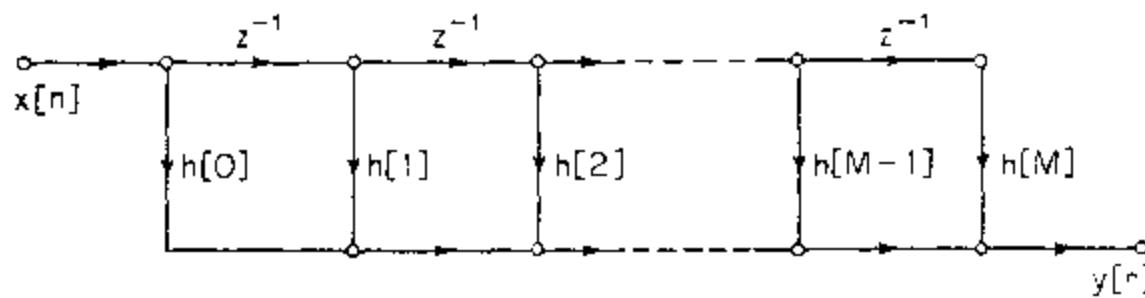


图 6.27 FIR 系统的直接型实现.

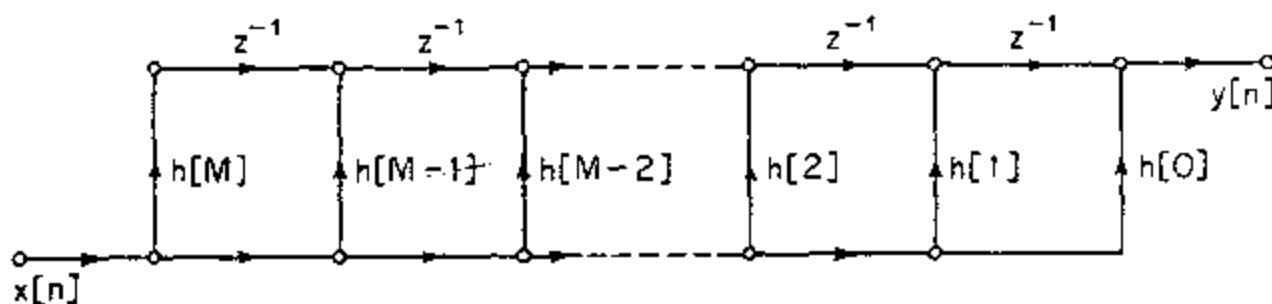


图 6.28 图 6.27 网络的转置.

6.5.2 级联型

将多项式系统函数因式化就可得到 FIR 系统的级联型. 这就是将 $H(z)$ 表示为

$$H(z) = \sum_{n=0}^M h[n]z^{-n} = \prod_{k=1}^{M_s} (b_{0k} + b_{1k}z^{-1} + b_{2k}z^{-2}), \quad (6.41)$$

这里 $M_s = \lfloor (M+1)/2 \rfloor$ 是不大于 $(M+1)/2$ 的最大整数. 如果 M 是奇数, 这些系数 b_{2k} 中的一个为零, 因为 $H(z)$ 在那种情况下会有奇数实零点. 表达式(6.41)的流图如图 6.29 所示. 在形式上它与图 6.14 是一致的, 只是系数 a_{1k} 和 a_{2k} 全是零. 图 6.29 中每个二阶节用的

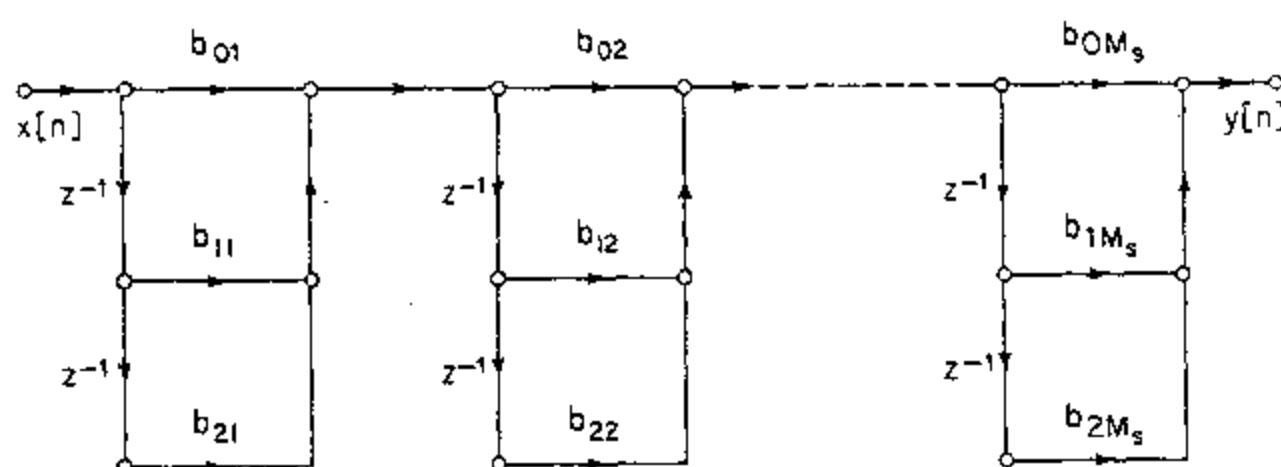


图 6.29 FIR 系统的级联型实现.

都是图 6.27 的直接型. 另一种选择是用转置直接型的二阶节, 或者等效为对图 6.29 应用转置定理.

6.5.3 线性相位 FIR 系统的结构

在第五章已经证明如果冲激响应满足如下对称条件

$$h[M-n] = h[n], \quad n=0,1,\dots,M \quad (6.42a)$$

或

$$h[M-n] = -h[n], \quad n=0,1,\dots,M. \quad (6.42b)$$

因果 FIR 系统就有广义线性相位特性.

有了这两个条件中的任何一个, 系数乘法器的数目都能基本上减半. 为了看出这点, 考虑离散卷积方程的下面运算, 假定 M 是偶整数, 即对应于 I 类和 II 类系统:

$$\begin{aligned} y[n] &= \sum_{k=0}^M h[k]x[n-k] \\ &= \sum_{k=0}^{M/2-1} h[k]x[n-k] + h[M/2]x[n-M/2] + \sum_{k=M/2+1}^M h[k]x[n-k] \\ &= \sum_{k=0}^{M/2-1} h[k]x[n-k] + h[M/2]x[n-M/2] + \sum_{k=0}^{M/2-1} h[M-k]x[n-M+k]. \end{aligned}$$

对 I 类系统, 用式(6.42a)可得

$$y[n] = \sum_{k=0}^{M/2-1} h[k](x[n-k] + x[n-M+k]) + h[M/2]x[n-M/2]. \quad (6.43)$$

对 II 类系统, 用式(6.42b)可得

$$y[n] = \sum_{k=0}^{M/2-1} h[k](x[n-k] - x[n-M+k]). \quad (6.44)$$

对于 M 是奇整数的情况, 对 II 类系统对应的方程是

$$y[n] = \sum_{k=0}^{(M-1)/2} h[k](x[n-k] + x[n-M+k]) \quad (6.45)$$

而对 IV 类系统则为

$$y[n] = \sum_{k=0}^{(M-1)/2} h[k](x[n-k] - x[n-M+k]). \quad (6.46)$$

式(6.43)–(6.46)意味着这些结构只有 $M/2+1, M/2$ 或 $(M+1)/2$ 个系数乘法器, 而不是像图 6.27 的一般直接型结构那样要 M 个系数乘法器. 图 6.30 指出的结构就是式(6.43), 而图 6.31 的结构就是式(6.45).

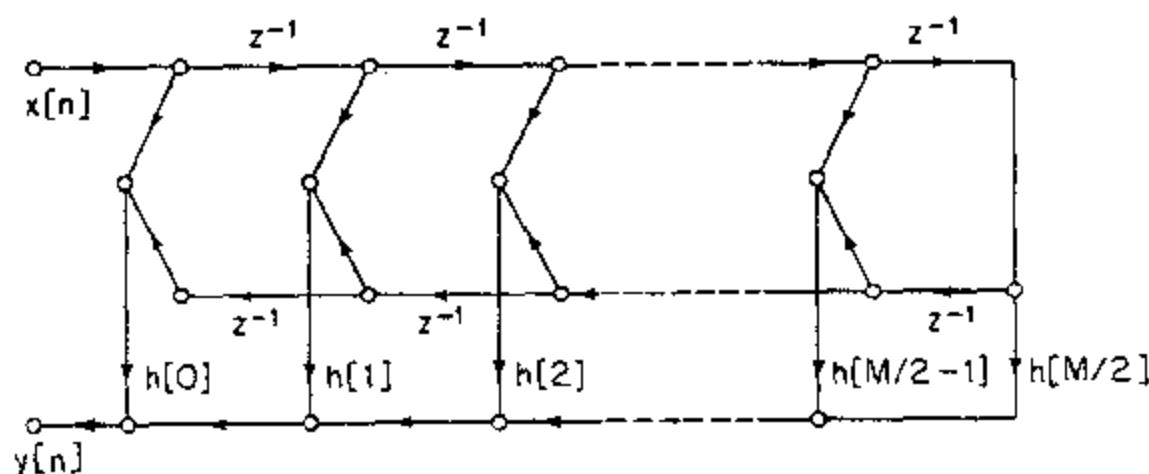


图 6.30 当 M 为偶数时 FIR 线性相位系统的直接型结构.

5.7.3 节有关线性相位系统的讨论已指出,式(6.42)的对称条件导致 $H(z)$ 的零点以镜像成对方式出现,就是说,若 z_0 是 $H(z)$ 的一个零点,那么 $1/z_0$ 也是 $H(z)$ 的一个零点.再者,如果 $h[n]$ 是实数,那么 $H(z)$ 的零点应以复数共轭成对形式出现.结果,不在单位圆上的实零点就以倒数对形式出现.不在单位圆上的复数零点就以四个为一组地出现,它们对应于复数共轭及其倒数.如果有一零点在单位圆上,它的倒数也就是它的共轭.这样,在单位圆上的复数零点就可很方便地成对分组.在 $z = \pm 1$ 的零点,其倒数和复数共轭都是它自己.图 6.32 综合出了这四种情况,其中在 $z_1, z_1^*, 1/z_1$ 和 $1/z_1^*$ 的零点就是作为四个一组.在 z_2 和 $1/z_2$ 的零点就是两个一组,同样在 z_3 和 z_3^* 零点也是成对的一组.在 z_4 的零点就是单个的.如果 $H(z)$ 有如图 6.32 所示的零点,那么它就能分解成一阶、二阶和四阶因子的乘积.这些因子中每一个都是一个多项式,其系数都具有和 $H(z)$ 的系数相同的对称性;也就是说,每个因子都是一个以 z^{-1} 为变量的线性相位多项式.因此,该系统就能够实现为一阶、二阶和四阶系统的级联.例如,对应于图 6.32 零点的系统函数可以表示成

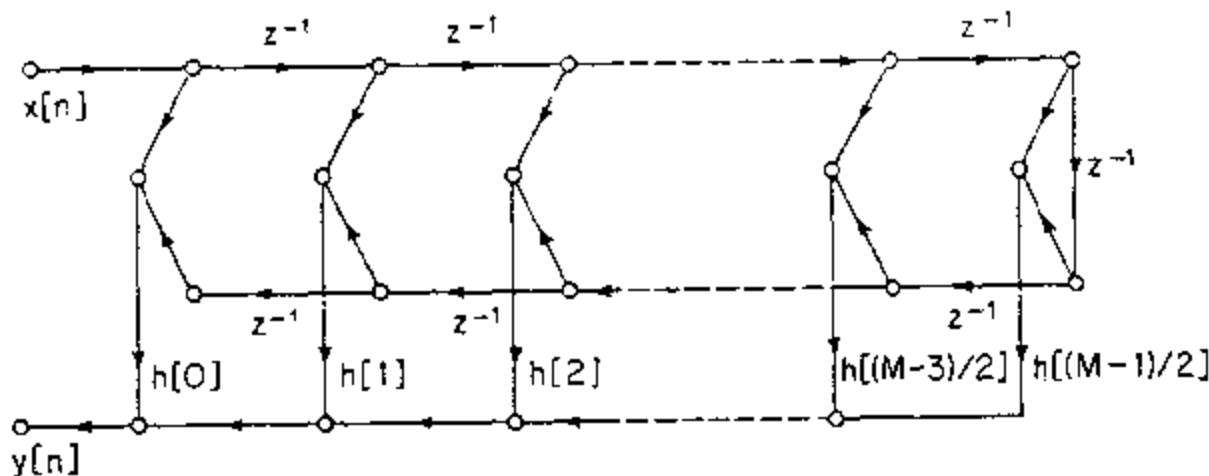


图 6.31 当 M 为奇整数时 FIR 线性相位系统的直接型结构.

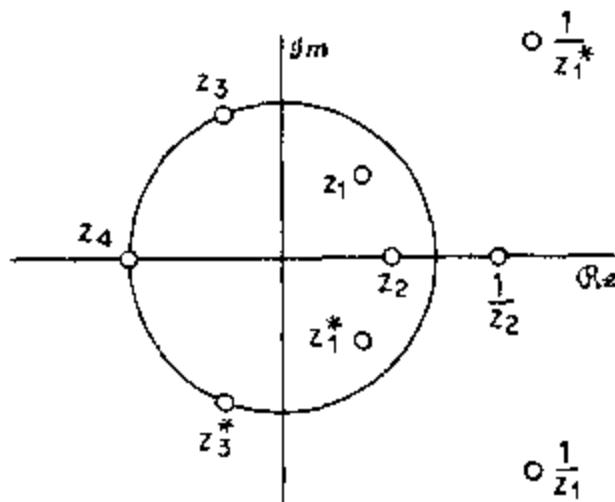


图 6.32 线性相位 FIR 滤波器的零点对称性.

$$H(z) = h[0](1+z^{-1})(1+az^{-1}+z^{-2})(1+bz^{-1}+z^{-2}) \\ \times (1+cz^{-1}+dz^{-2}+cz^{-3}+z^{-4}), \quad (6.47)$$

式中

$$a = (z_2 + 1/z_2), \quad b = 2 \operatorname{Re}\{z_3\}, \quad c = -2 \operatorname{Re}\{z_1 + 1/z_1\}, \quad d = 2 + |z_1 + 1/z_1|^2.$$

这种表示给出了一种由线性相位基本单元组成的级联结构.能够看出,该系统函数多项式的阶是 $M=9$,而不同系数乘法器的数目是 5.这就与图 6.30 实现的线性相位直接型系统

所要求的系数乘法器数目 $((M+1)/2=5)$ 相同.因此,不用增加乘法器就得到了一个利用短的线性相位 FIR 系统级联的标准结构.

6.6 格型结构

到目前为止,已经讨论过的 IIR 和 FIR 的全部基本结构不是直接从系统函数,就是直接从输入/输出差分方程关系建立起来的.具有一些特殊性质的许多其它类型的结构也已经得到.一种途径是根据状态变量表示和线性变换(Crochiere and Oppenheim, 1975; Roberts and Mullis, 1987).另一种有用的途径是模仿具有某些所需性质的模拟滤波器结构来建立数字滤波器的结构.由 Fettweis(1986)广泛研究的波数字滤波器就是这种途径的一个例子.另一类令人感兴趣的结构称之为格型结构,是受到自回归信号建模(Markel and Gray, 1976)理论的启发而建立的.

要讨论大部分这些其他结构是困难的,因为这要求有一些广泛的背景知识才能明了它们的来龙去脉及其性质.然而,由于格型结构在信号建模、谱估计和自适应滤波中有很多应用,所以我们将对这类结构作一简要介绍.讨论的方式是作为一种流图简单给出这种结构的定义,然后利用流图运算和 z 变换分析来阐明这种结构的性质.

6.6.1 FIR 格型

图 6.33 示出一个 N 阶 FIR 格型系统的信号流图.由该网络所表示的差分方程是

$$e_0[n] = \tilde{e}_0[n] = x[n], \quad (6.48a)$$

$$e_i[n] = e_{i-1}[n] - k_i \tilde{e}_{i-1}[n-1], \quad i=1, 2, \dots, N, \quad (6.48b)$$

$$\tilde{e}_i[n] = -k_i e_{i-1}[n] + \tilde{e}_{i-1}[n-1], \quad i=1, 2, \dots, N, \quad (6.48c)$$

$$y[n] = e_N[n]. \quad (6.48d)$$

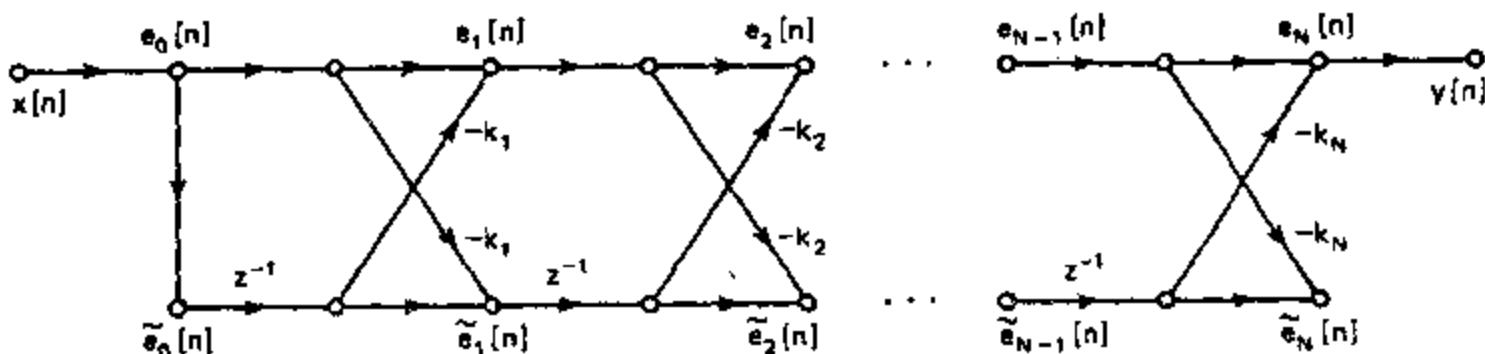


图 6.33 FIR 格型系统的信号流图.

为了看出这是一个有用而令人感兴趣的结构,我们必须了解它的特性.首先,要承认这是一个 FIR 系统.具体说来,在图 6.33 中全部信号流向都是从左到右.因为不存在任何回路,所以冲激响应是有限长的.若输入是 $x[n]=\delta[n]$, 该冲激立即沿水平支路的顶端一行传到输出端,并且增益为 1. 从输入到输出的所有其它通路至少要经过一个延迟单元,因此, $h[0]=1$. 输入端的冲激也经由水平支路的底部一行传到输出端,这里要遇到 N 个延迟单元和最后一个增益 $-k_N$,因此, $h[N]=-k_N$. 从输入到输出的全部其余通路都在水平支路的顶部一行和底部一行之间作 Z 字形传播.因此,这些通路中的每一个至少要通过一个延迟单元,至多要通过 $(N-1)$ 个延迟单元.因此,在 $0 < n < N$ 内的冲激响

应值由 k_i 个乘积的和所决定。由此可以得出：关于 $Y(z)$ 对 $X(z)$ 的系统函数具有如下形式^{*}

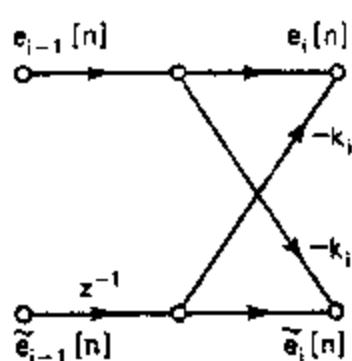


图 6.34 图 6.33FIR 格型系统中的基本格型节。

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = A(z) = \left[1 - \sum_{m=1}^N a_m z^{-m} \right]. \quad (6.49)$$

这就是说， $H(z)$ 是一个 N 阶多项式。首项系数为 1，这是因为从输入到输出唯一没有任何延迟的通路是沿着图的顶端的一条支路，并且沿途的支路增益全部为 1。由于图 6.33 是由图 6.34 一般形式的基本节级联而成的，而且具有很规则的结构，所以称它为格型网络。图 6.33 中的系数 $\{k_i\}$ 称为 k 参数。

描述一个 FIR 系统的正规方法是根据它的冲激响应系数来给出，这在式(6.49)的表示中就是：

$$h[n] = \begin{cases} 1, & n=0, \\ -a_n, & n=1, 2, \dots, N, \\ 0, & \text{其它.} \end{cases} \quad (6.50)$$

如果要其成为一个有用的结构，就必须有可能找到 k 参数和冲激响应系数之间的关系。或者若能求得图 6.33 系统的系统函数，也将一定能求得它的冲激响应。这可以这样来完成：借助于中间系统函数

$$A_i(z) = \frac{E_i(z)}{E_0(z)} = \left[1 - \sum_{m=1}^i a_m^{(i)} z^{-m} \right] \quad (6.51a)$$

和

$$\tilde{A}_i(z) = \frac{\tilde{E}_i(z)}{\tilde{E}_0(z)}. \quad (6.51b)$$

利用式(6.48)差分方程的重复性质求得计算 $A(z)$ 的递推公式。按定义， $A_0(z) = \tilde{A}_0(z) = 1$ 。同时又注意到，因为 $X(z) = E_0(z) = \tilde{E}_0(z)$ ，那么 $A(z) = A_N(z)$ 。

为了导出所要求的递推公式，可以从求式(6.48)的 z 变换着手，即

$$E_0(z) = \tilde{E}_0(z) = X(z), \quad (6.52a)$$

$$E_i(z) = E_{i-1}(z) - k_i z^{-1} \tilde{E}_{i-1}(z), \quad i=1, 2, \dots, N, \quad (6.52b)$$

$$\tilde{E}_i(z) = -k_i E_{i-1}(z) + z^{-1} \tilde{E}_{i-1}(z), \quad i=1, 2, \dots, N, \quad (6.52c)$$

$$Y(z) = E_N(z). \quad (6.52d)$$

现在若将式(6.51)代入式(6.52)，用归纳法可以证明 $A_i(z)$ 满足如下递推公式

$$A_i(z) = A_{i-1}(z) - k_i z^{-i} A_{i-1}(z^{-1}) \quad (6.53a)$$

和

$$\tilde{A}_i(z) = z^{-i} A_i(z^{-1}). \quad (6.53b)$$

将式(6.51a)代入式(6.53a)，并对 z^{-m} 的系数项合并就可求得隐含在式(6.53)中的多项

* 这种符号表示法易想到在 IIR 系统的系统函数分母中所采用过的符号表示法。这是为了方便以后应用本节所得出的一些结果。

式系数的递推公式. 这一结果是

$$a_i^{(i)} = k_i, \quad (6.54a)$$

$$a_m^{(i)} = a_m^{(i-1)} - k_i a_{i-m}^{(i-1)}, \quad m=1, 2, \dots, (i-1). \quad (6.54b)$$

该递推过程对 $i=1, 2, \dots, N$ 重复进行, 对 $A(z) = A_N(z)$ 的最后一组系数就是

$$a_m = a_m^{(N)}, \quad m=1, 2, \dots, N. \quad (6.54c)$$

式(6.54)在自回归信号建模理论(Markel and Gray, 1976; Makhoul, 1975; Rabiner and Schafer, 1978)中会见到. 在那里, k 参数称为反射系数或 PARCOR 系数. 当在信号建模中应用时, 由数据信号估计出 k 参数, 再用式(6.54)求得多项式 $A(z)$ 的系数.

给定一组 k 参数, 就能求得系统函数, 因此也就求得了冲激响应. 另一方面, 假定有了多项式形式的系统函数, 再想求得图 6.33 结构中的 k 参数. 这就是已给出

$$a_m^{(N)} = a_m, \quad m=1, 2, \dots, N. \quad (6.55)$$

为了求出给定该多项式系数的 k 参数, 我们把递推过程倒过来, 依次得到利用 $A_i(z)$ 表示的多项式 $A_{i-1}(z)$. 这样 k 参数就作为该递推过程的附属物而得到, 根据式(6.54a)这一过程应从下式开始

$$k_N = a_N^{(N)}. \quad (6.56a)$$

那么式(6.54)就能按相反的递推过程进行为

$$k_i = a_i^{(i)}, \quad (6.56b)$$

$$a_m^{(i-1)} = \frac{a_m^{(i)} + k_i a_{i-m}^{(i)}}{1 - k_i^2}, \quad m=1, 2, \dots, (i-1). \quad (6.56c)$$

这一递推过程对 $i=N, N-1, \dots, 1$ 重复, 直到全部 k 都计算出为止. 下面的简单例子用来说明式(6.56)的应用.

例 6.7

考虑图 6.35(a)所示的 FIR 系统, 它的系统函数是

$$\begin{aligned} A(z) &= (1-0.8z^{-1})(1+0.8z^{-1})(1-0.9z^{-1}) \\ &= 1-0.9z^{-1}+0.64z^{-2}-0.576z^{-3}. \end{aligned} \quad (6.57)$$

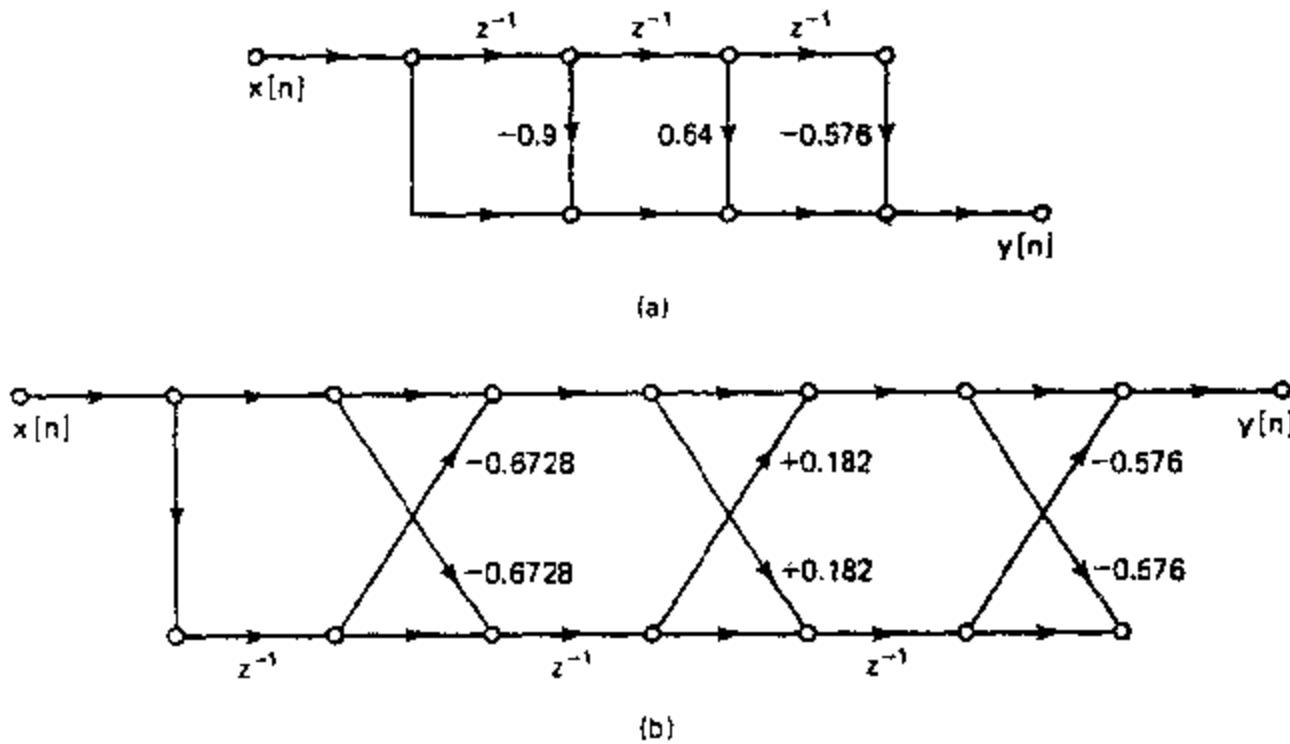


图 6.35 例 6.7 流图. (a)直接型. (b)格型(系数已舍入).

从式(6.57)可以看出,多项式的系数是 $a_1^{(3)}=0.9$, $a_2^{(3)}=-0.64$ 和 $a_3^{(3)}=0.576$. 利用式(6.56), k 参数计算如下:

$$\begin{aligned}k_3 &= a_3^{(3)} = 0.576, \\a_1^{(2)} &= \frac{a_1^{(3)} + k_3 a_2^{(3)}}{1 - k_3^2} = 0.79518245, \\a_2^{(2)} &= \frac{a_2^{(3)} + k_3 a_1^{(3)}}{1 - k_3^2} = -0.18197491, \\k_2 &= a_2^{(2)} = -0.18197491, \\a_1^{(1)} &= \frac{a_1^{(2)} + k_2 a_1^{(2)}}{1 - k_2^2} = 0.67275747, \\k_1 &= a_1^{(1)} = 0.67275747.\end{aligned}$$

因此对应的 FIR 格型系统如图 6.35(b)所示. 在习题 6.19 中,多项式 $A(z)$ 的系数就是利用式(6.54)用上面得到的 k 参数值和通过跟踪一个冲激输入计算的,该冲激输入通过图 5.35 网络中的全部路径.

已经证明图 6.33 的格型结构是一个 FIR 系统,也指出了如何计算它的系统函数以及如何从系统函数求得流图的参数. 值得注意的是,在图 6.33 的流图中有 $2N$ 个系数乘法器,尽管它的冲激响应只有 N 个非一系数. 因此这种结构不如直接型 FIR 结构效率高. 结果,图 6.33 结构在实现具有常系数的 FIR 系统中一般是不用的. 然而,这种结构在实现自适应滤波器(Haykin, 1986)中具有某些很合需要的特性,并且在自回归信号建模(Markel and Gray, 1976; Makhoul, 1975; Rabiner and Schager, 1978)理论中起着核心的作用. 最重要的是,从 FIR 格型系统也启迪出一种 IIR 系统的格型结构,关于这个下面将给予研究.

6.6.2 全极点格型

一种全极点系统函数 $H(z)=1/A(z)$ 的格型系统可以从上节的 FIR 格型结构中得到. 假设给出的是图 6.33 中的输出 $e_N[n]$,而要想计算输入 $e_0[n]$. 这可以用倒过来解式(6.48)来完成,也即从 $e_i[n]$ 计算出 $e_{i-1}[n]$,并依此类推下去. 具体地说,如果利用 $e_i[n]$ 和 $\tilde{e}_{i-1}[n-1]$ 从式(6.48b)解出 $e_{i-1}[n]$,就可得出下面一组差分方程*:

$$e_N[n] = x[n], \quad (6.58a)$$

$$e_{i-1}[n] = e_i[n] + k_i \tilde{e}_{i-1}[n-1], \quad i=N, (N-1), \dots, 1, \quad (6.58b)$$

$$\tilde{e}_i[n] = -k_i e_{i-1}[n] + \tilde{e}_{i-1}[n-1], \quad i=N, (N-1), \dots, 1, \quad (6.58c)$$

$$y[n] = e_0[n] = \tilde{e}_0[n]. \quad (6.58d)$$

式(6.58b)和式(6.58c)由图 6.36 所示的格型节流图表示,而这些节以输入 $x[n] = e_N[n]$ 首尾相接就给出了输出 $y[n] = e_0[n] = \tilde{e}_0[n]$,如图 6.37 所示;也就是说,图 6.37 的系统是图 6.33 的 FIR 格型系统的逆系统. 于是就得出图 6.37 系统的系统函数 $H(z) = 1/A(z)$,这里 $A(z)$ 是图 6.33 FIR 格型的系统函数. 由此,因为 $A(z)$ 是 N 阶的多项式,图 6.37 系统的系统函数就仅有极点($z=0$ 的零点除外).

现在,6.6.1 节的全部分析都能用于该系统函数的分母. 给定图 6.37 的 k 参数,就能

* 注意,按约定将系统的输入标成 $x[n]$,输出标成 $y[n]$.

用式(6.54)的递推公式求得分母多项式的系数;给定一个全极点的系统函数 $1/A(z)$,就能用式(6.56)求出图 6.37 相应的 k 参数.

例 6.8

作为 IIR 格型系统的一个例子,考虑系统函数为:

$$H(z) = \frac{1}{1 - 0.9z^{-1} + 0.64z^{-2} - 0.576z^{-3}}, \quad (6.59)$$

这就是例 6.7 中的 FIR 系统的系统函数的倒数.图 6.38(a)示出该系统的直接型实现,而图 6.38(b)则示出按例 6.7 分析出的 k 参数表示的等效 IIR 格型系统.

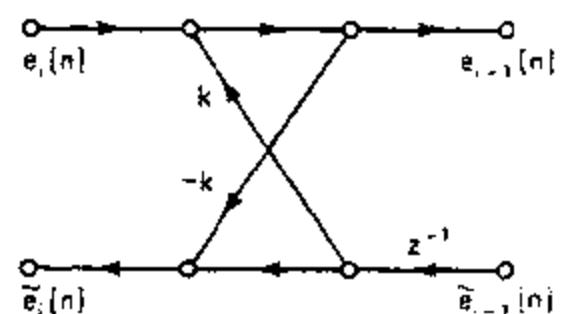


图 6.36 IIR 格型系统的基本格型节.

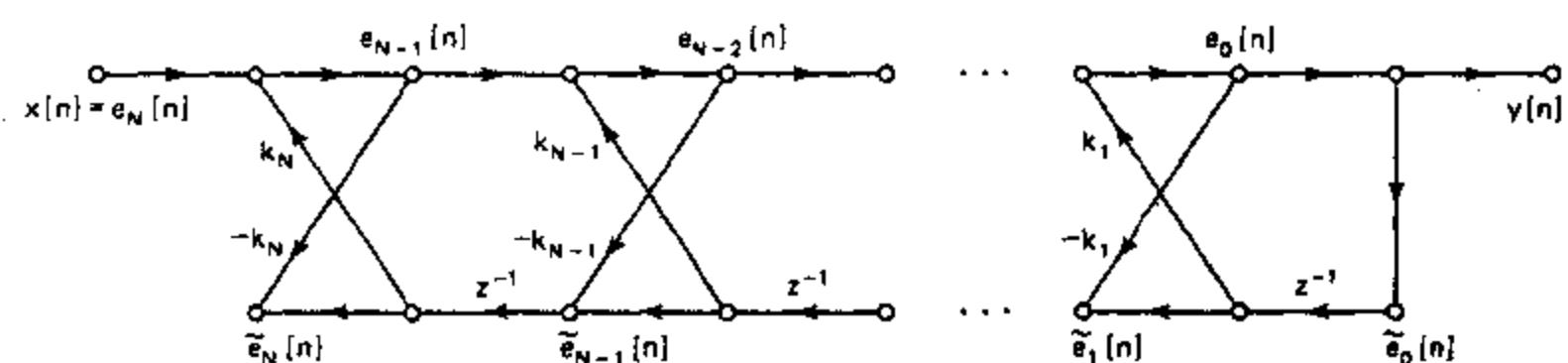


图 6.37 一般全极点 IIR 格型系统(图 6.33 的逆系统)的流图.

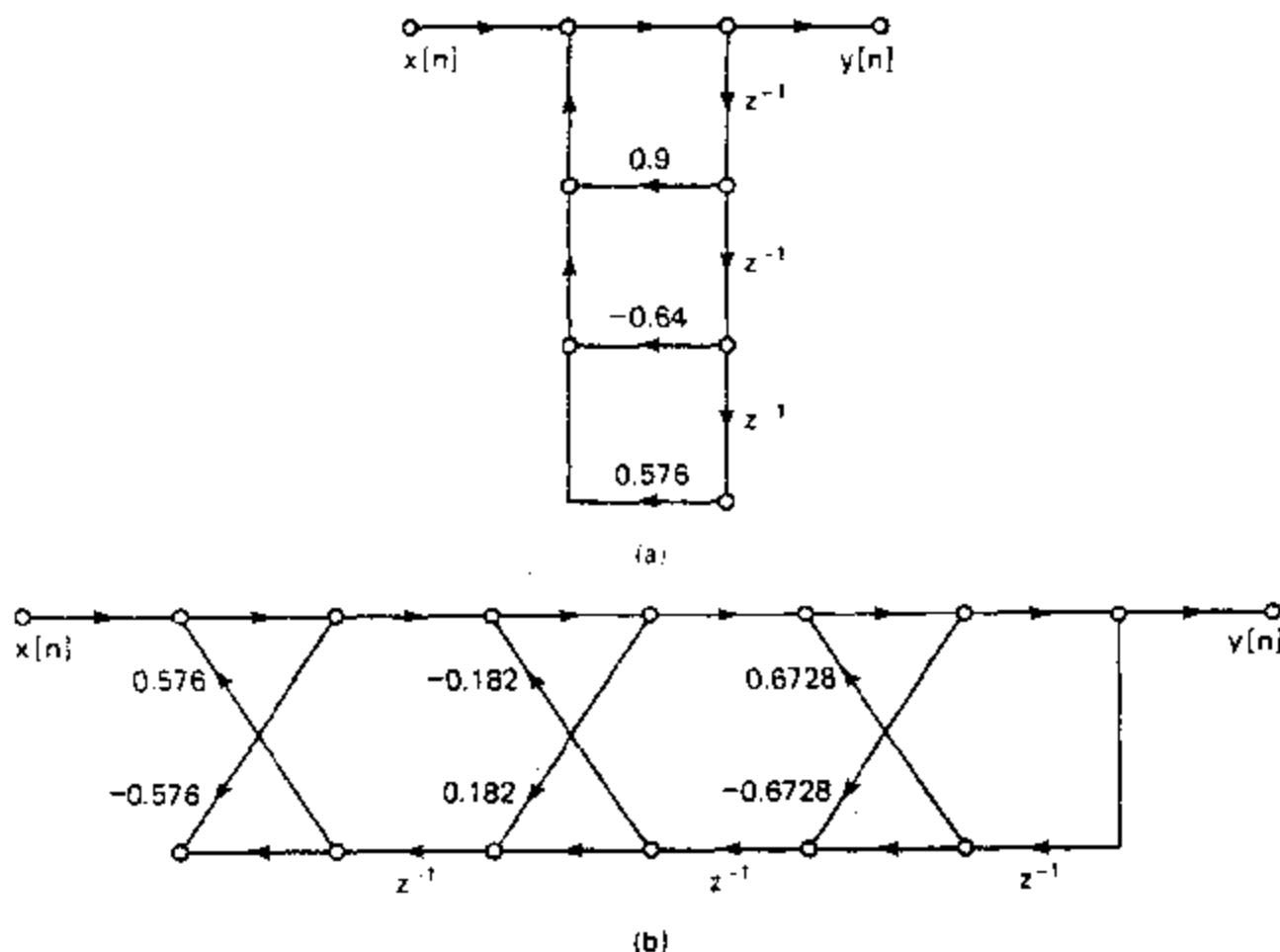


图 6.38 例 6.8 的流图.(a)直接型.(b)格型(系数已舍入).

因为图 6.37 是一个 IIR 系统,所以必须考虑多项式 $A(z)$ 的根的位置. 可以证明:保证 $A(z)$ 的根全部位于单位圆内的必要和充分条件是 $|k_i| < 1, i = 1, \dots, N$ (Markel and Gray, 1976). 因此,如果给出一个其分母多项式为 $A(z)$ 的任意系统函数,就能用式(6.56)求出相应的 k 参数来测试该系统的稳定性,若有任一 k_i 是大于或等于 1,那么该系统就是不稳定的. 事实上,即使不寻求系统的格型结构实现,式(6.56)的递归公式也能用

作稳定性测试.

6.6.3 归一化格型

另外一些有用的全极点格型系统也能从图 6.37 的系统导出. 图 6.37 是由图 6.36 那样的标准结构链接组成的, 其中每一个向右作为 $e_i[n]$ 和 $\tilde{e}_{i-1}[n]$ 的函数计算出输出 $\tilde{e}_{i-1}[n]$ [式(6.58b)], 向左作为 $e_{i-1}[n]$ 和 $\tilde{e}_i[n]$ 的函数计算出输出 $\tilde{e}_i[n]$ [式(6.58c)]. 将所要求的输出 $e_{i-1}[n]$ 和 $\tilde{e}_i[n]$ 都作为 $e_i[n]$ 和 $\tilde{e}_{i-1}[n-1]$ 的函数来解, 就可以求出一种新的标准结构. 这只要把式(6.58b)代入式(6.58c), 保留式(6.58b)并对所得出的格型系统中第 i 个标准节以差分方程列出新的方程就可以完成. 所得差分方程为:

$$e_N[n] = x[n], \quad (6.60a)$$

$$e_{i-1}[n] = e_i[n] + k_i \tilde{e}_{i-1}[n-1], \quad i=N, (N-1), \dots, 1, \quad (6.60b)$$

$$\tilde{e}_i[n] = -k_i e_i[n] + (1 - k_i^2) \tilde{e}_{i-1}[n-1], \quad i=N, (N-1), \dots, 1, \quad (6.60c)$$

$$y[n] = e_0[n] = \tilde{e}_0[n]. \quad (6.60d)$$

这些方程可以用图 6.39 的方框图来表示, 对于式(6.60)的系统, 其中第 i 个节可由图 6.40(a)的信号流图表示.

当将图 6.40(a)的格型节用在图 6.39 中, 并注意到在图中从某节点出发又回到那个节点的所有反馈回路都是由指向左边底部路径的某部分和指向右边顶部路径一个相等的部分所组成时, 就可以得出另一种格型系统. 如果将底部的乘法器 $(1 - k_i^2)$ 分成两部分, 而把其一部分搬到沿图顶部的相反支路上去, 那么总的回路增益仍然是相同的. 对于稳定系统, 由于 $|k_i| < 1$, 可提出一种分解方法. 应用毕达哥拉斯(Pythagorean)定理可以定义

$$\sin \theta_i = k_i, \quad (6.61a)$$

$$\cos \theta_i = \sqrt{1 - k_i^2}. \quad (6.61b)$$

这就导出图 6.40(b)的格型节. 当把这些节用在图 6.39 中时所得系统就称为归一化格型系统(Gray and Markel, 1975). 因为 $\cos \theta_i$ 已经搬到顶部支路上去了, 所以系统总增益就受到全部这些项的乘积的影响, 但极点仍然是相同的. 因此, 归一化格型的系统函数就是

$$H(z) = \frac{\prod_{i=1}^N \cos \theta_i}{A(z)}, \quad (6.62)$$

式中 $A(z)$ 如前所述是与 k 参数有关的.

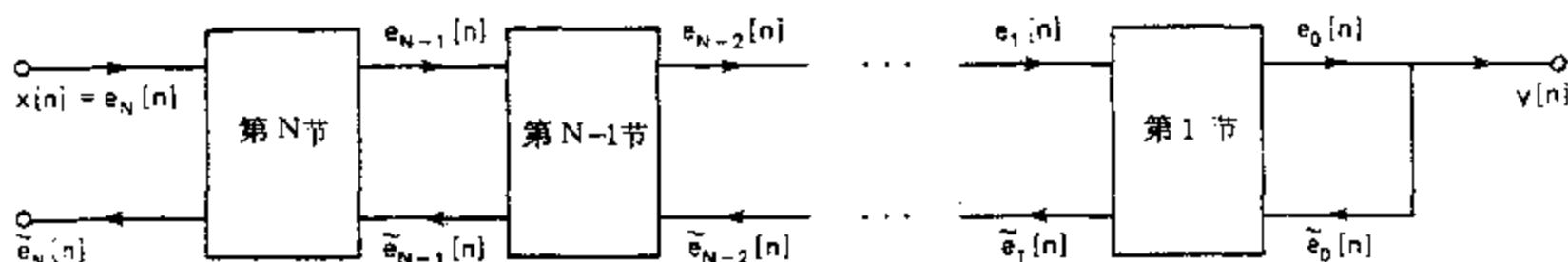


图 6.39 全极点 IIR 格型系统的一般表示.

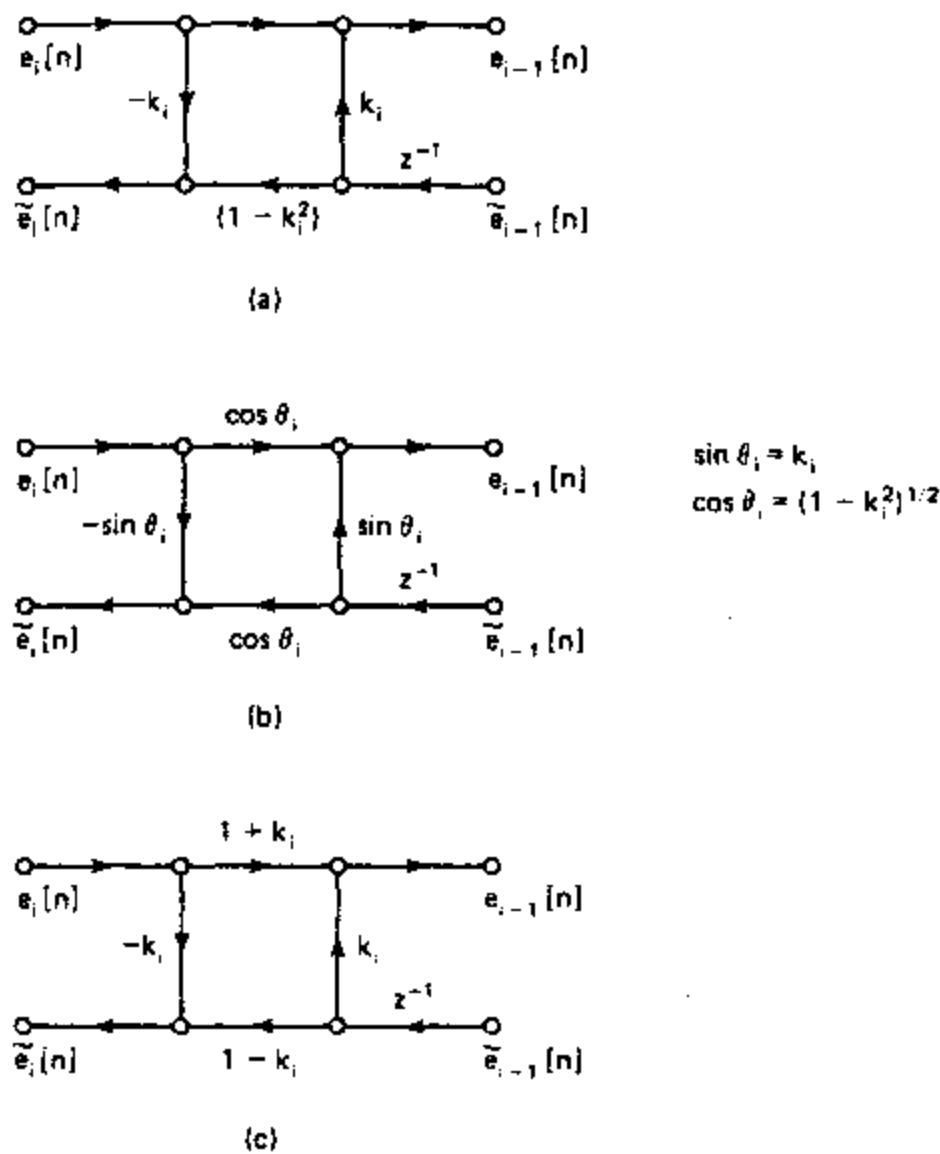


图 6.40 用于图 6.39 的基本格型节. (a)三乘法器型. (b)四乘法器的归一化型.
(c)四乘法器的凯利-洛赫鲍姆型.

归一化格型节的一个有趣特点是:两个输出 $e_{i-1}[n]$ 和 $\tilde{e}_i[n]$ 与两个输入 $e_i[n]$ 和 $\tilde{e}_{i-1}[n]$ 的关系是用如下一种复数相乘的形式联系起来的

$$e_{i-1}[n] + j\tilde{e}_i[n] = e^{-j\theta_i} (e_i[n] + j\tilde{e}_{i-1}[n-1]). \quad (6.63)$$

这一特性反映出图 6.40(b)格型节的增益归一化了,因为由式(6.63)可得:对该系统的所有节都有

$$|e_{i-1}[n] + j\tilde{e}_i[n]| = |e_i[n] + j\tilde{e}_{i-1}[n-1]|.$$

图 6.40(a)基本节的另一种处置是根据因式分解 $(1 - k_i^2) = (1 + k_i)(1 - k_i)$. 这就可导出图 6.40(c)的基本节. 当将这些节用在图 6.39 中时,所得格型系统称为凯利-洛赫鲍姆 (Kelly-Lochbaum) 结构. 这种结构是首先从作为语音合成的声管模型中导出的 (Kelly and Lochbaum, 1962). 和归一化格型情况相同,由于将 $(1 + k_i)$ 移至顶部支路,系统函数改变为:

$$H(z) = \frac{\prod_{i=1}^N (1 + k_i)}{A(z)}. \quad (6.64)$$

6.6.4 具有极点和零点的格型系统

图 6.39 的一般 IIR 格型仅局限于全极点系统函数。然而,用图 6.41 的系统(Gray and Martel, 1973, 1975)既能实现极点,也能实现零点。为了看出这一点,可以回想一下在 6.6.2 节 IIR 格型是为了成为 FIR 格型的逆系统而构成的,并且因为对 IIR 格型所用符号与 FIR 格型中的符号是一致的,所以由 6.6.1 节导得的全部关系对 IIR 格型也都成立。因此,从式(6.51b)和式(6.53b)直接可得:

$$\tilde{E}_i(z) = z^{-i} A_i(z^{-1}) \tilde{E}_0(z) = z^{-i} A_i(z^{-1}) Y(z), \quad (6.65)$$

这样,系统函数 $\tilde{H}_i(z) = \tilde{E}_i(z)/X(z)$ 就是 $z^{-i} A_i(z^{-1})$ 与 $1/A(z)$ 的级联,也即

$$\tilde{H}_i(z) = \frac{\tilde{E}_i(z)}{X(z)} = \frac{z^{-i} A_i(z^{-1})}{A(z)}. \quad (6.66)$$

(值得一提的是,联系输出 $\tilde{E}_N(z)$ 和输入 $X(z)$ 的系统函数 $\tilde{H}_N(z)$ 是一个全通系统函数。因此,作为一种额外结果,我们就已经证明了 IIR 格型结构可以用来实现全通系统。)

因此,图 6.41 系统的系统函数是

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \sum_{i=0}^N \frac{c_i z^{-i} A_i(z^{-1})}{A(z)} = \frac{B(z)}{A(z)}. \quad (6.67)$$

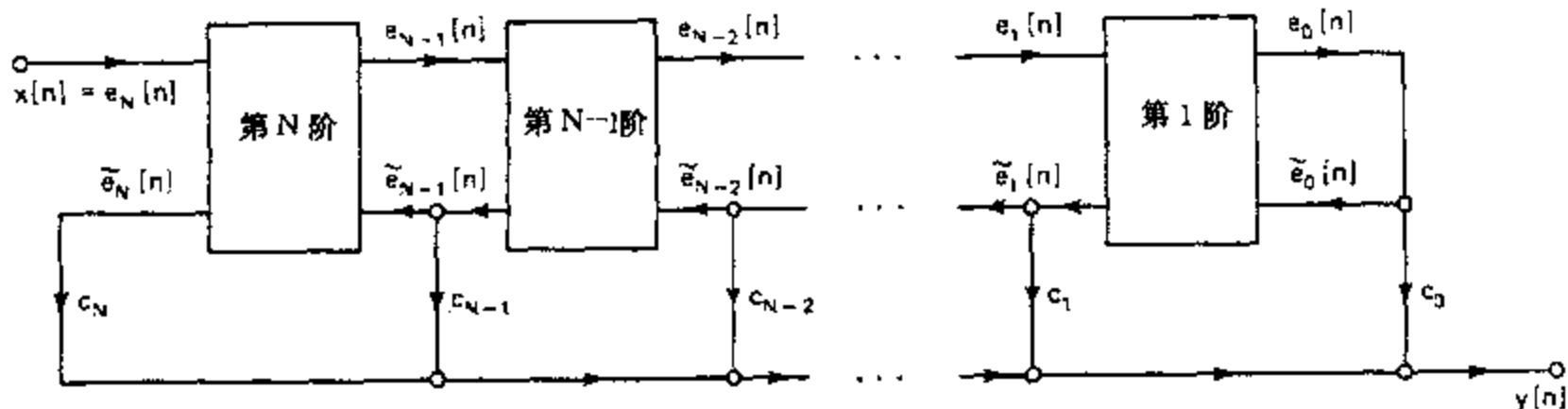


图 6.41 可以实现极点和零点的一般格型结构。

由 i 阶多项式 $A_i(z^{-1})$ 的性质,可以直接得到 $B(z)$ 是一个具有如下形式的 N 阶多项式

$$B(z) = \sum_{m=0}^N b_m z^{-m}, \quad (6.68)$$

其中系数 $\{b_m\}$ 满足下面方程

$$b_m = c_m - \sum_{i=m+1}^N c_i a_i^{(i)}. \quad (6.69)$$

因此,为了得到一般有理系统函数的格型实现,必须要利用式(6.56)的递推关系从 $A(z)$ 中求得 k 参数,并且为实现分子 $B(z)$,要从式(6.69)中解出所要求的参数 c 。上述讨论都假定将图 6.36 或者图 6.40(a)的格型节用在图 6.41 中。如果是用图 6.40(b)或图 6.40(c)这些变化过的节,那么 c 参数也必须作相应变化。

例 6.9

假设要得到如下系统的一个格型结构

$$H(z) = \frac{1 + 3z^{-1} + 3z^{-2} + z^{-3}}{1 - 0.9z^{-1} + 0.64z^{-2} - 0.576z^{-3}}. \quad (6.70)$$

k 参数如同例 6.7 和例 6.8 一样求得, 利用式(6.69)求得 c 参数如下:

$$c_3 = b_3 = 1,$$

$$c_2 = b_2 + c_3 a_1^{(3)} = 3.9,$$

$$c_1 = b_1 + c_2 a_1^{(2)} + c_3 a_2^{(3)} = 5.46121156,$$

$$c_0 = b_0 + c_1 a_1^{(1)} + c_2 a_2^{(2)} + c_3 a_3^{(3)} = 4.54036872.$$

图 6.42(a)示出该系统的直接 I 型结构, 而图 6.42(b)则是其等效的格型结构.

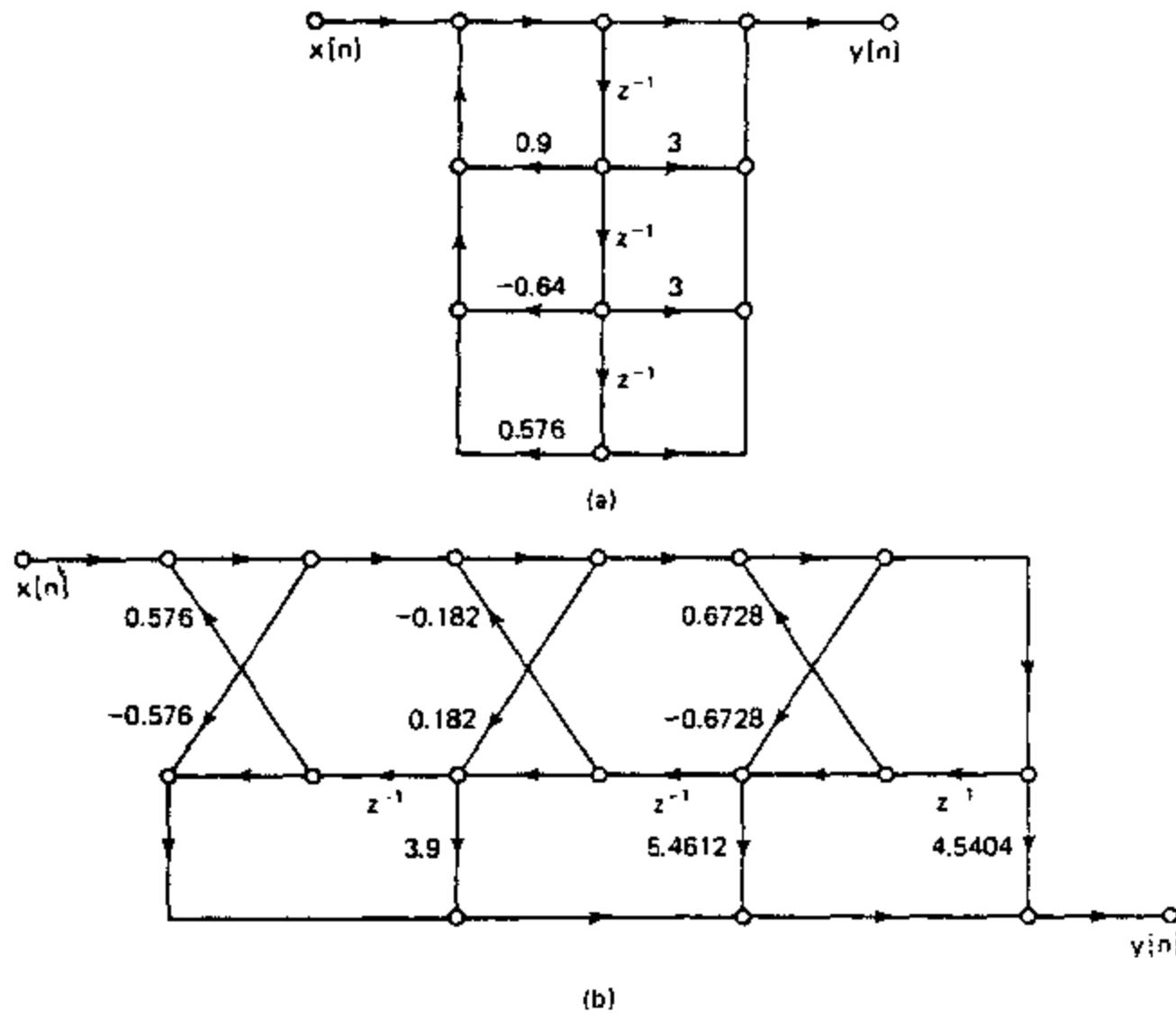


图 6.42 例 6.9 的流图. (a) 直接 I 型. (b) 格型(系数已舍入).

本节所讨论的全部格型结构比等效的直接型或级联型实现都要求有更多的运算. 图 6.36 的格型节每节要求有两个乘法器, 图 6.40(a)的格型节每节要求有三个乘法器, 而图 6.40(b)和图 6.40(c)这些节则每节都要求有四个乘法器, 其总数分别为 $2N$, $3N$ 和 $4N$ 次乘法, 以实现系统函数的 N 个极点. 直接型和级联型实现 N 个极点仅要求 N 次乘法. 这些格型结构所获益的是在系统实现中降低了量化效应的灵敏度. 本章余下各节将讨论这些问题.

6.7 有限精度数值效应概述

已经看到, 一个特定的线性时不变离散时间系统可以用各种不同的运算结构来实现. 对简单的直接型结构可供考虑的选择方法之一就是理论上等效的这些不同结构, 当

用有限数值精度实现时,其特性可以是不相同的。这一节将对在实现离散时间系统中主要的数值问题作一简要介绍。这些有限字长效应的更为详细的分析将在 6.8 节到 6.10 节给出。

6.7.1 数的表示法

在离散时间系统的理论分析中,一般都假定信号值和系统的系数都是用实数系统表示的。用模拟离散时间系统,电路元件的有限精度使得准确地实现系数很困难。当实现数

字信号处理系统时,必须把信号和系数用某种数字式的数制来表示,而这些数字式的数制总是有限精度的。大多数数字计算机或专用硬件都采用二进制数制。

有限数值精度问题已经在 3.7.2 节关于 A/D 转换时讨论过。在那里已经指出,从 A/D 转换器来的输出样本是被量化的,因此可以用定点二进制数来表示。为了在运算中紧凑和简单起见,二进制数位中的一位设为该数的代数符号位。诸如像原码、反码和补码这些形式都是可以用的,但补码最常用^{*}。一个实数用无限精度的补码可以表示为如下形式

$$x = X_m \left(-b_0 + \sum_{i=1}^{\infty} b_i 2^{-i} \right), \quad (6.71)$$

这里 X_m 是任意幅度加权因子,而 b_i 是 0 或 1。 b_0 称为符号位。若 $b_0 = 0$, 则 $0 \leq x \leq X_m$; 若 $b_0 = 1$, 则 $-X_m \leq x < 0$ 。因此,任何其绝对值小于或等于 X_m 的实数都能用式 (6.71) 表示。一个任意实数 x 要能准确地用二进制数表示都要求有无限位数。正如在 A/D 转换中看到的,若仅用 $(B+1)$ 位的有限位数,那么式 (6.71) 的表示式必须修改成

$$\begin{aligned} \hat{x} &= Q_B[x] = X_m \left(-b_0 + \sum_{i=1}^B b_i 2^{-i} \right) \\ &= X_m \hat{x}_B. \end{aligned} \quad (6.72)$$

所得到的这个二进制表示的数已被量化了,使得数之间的最小差是

$$\Delta = X_m 2^{-B}. \quad (6.73)$$

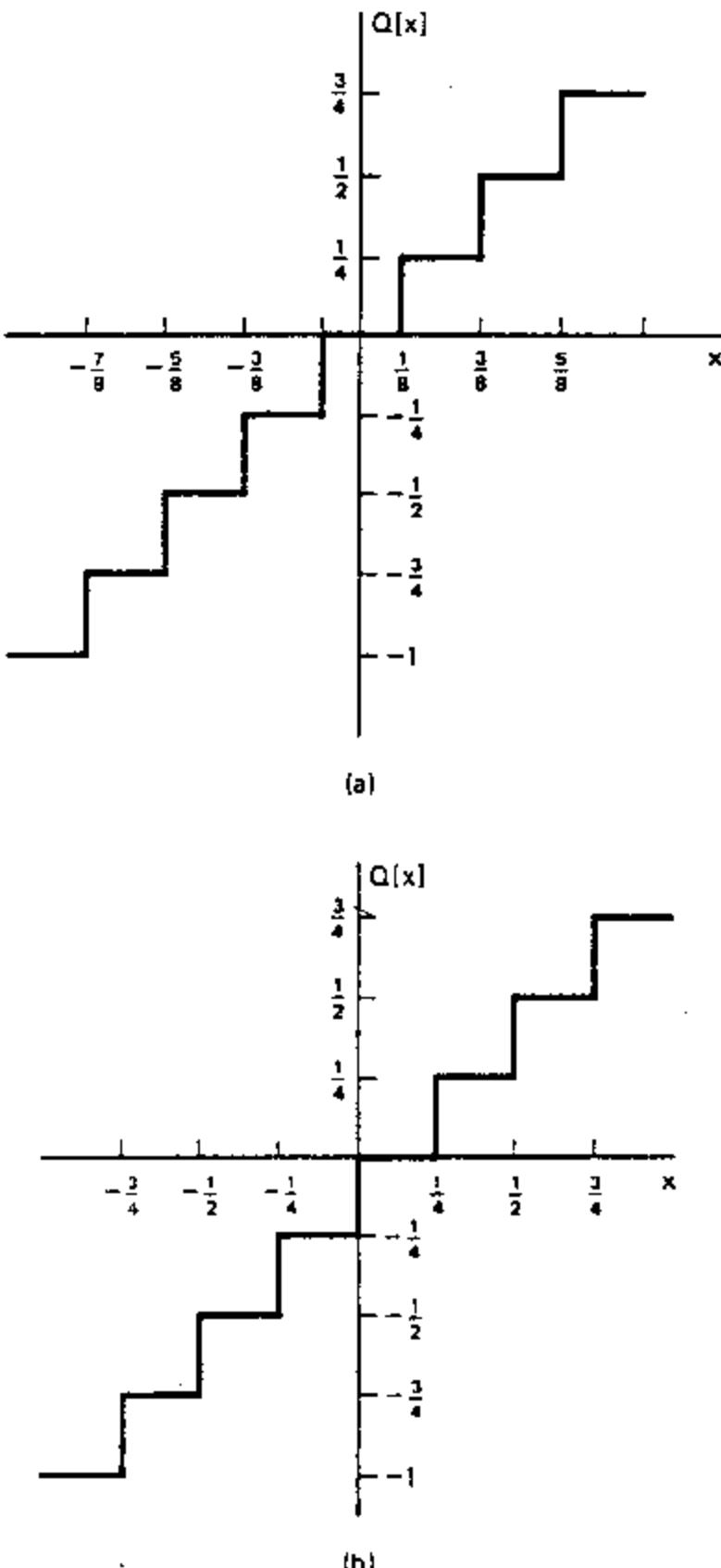


图 6.43 补码表示的非线性关系, $B=2$.
(a) 舍入, (b) 截尾。

* 有关二进制数制及其相应运算的详细叙述可见克努特(Knuth, 1981)的著作。

在这种情况下,已量化了的数就在 $-X_m \leq \hat{x} < X_m$ 范围内。 \hat{x} 的小数部分可以用定位符号表示为

$$\hat{x}_B = b_0.b_1b_2b_3\cdots b_B, \quad (6.74)$$

这里 \diamond 代表二进制小数点。

将一个数量化到 $(B+1)$ 位的运算可以按舍入或截尾来完成,但是在任一情况下,量化都是一种非线性无记忆运算。图 6.43(a)和图 6.43(b)分别示出补码运算的舍入和截尾的输入/输出关系,图中对应 $B=2$ 。在考虑量化效应时,常定义量化误差为

$$e = Q_B[x] - x. \quad (6.75)$$

对于补码舍入的情况, $-\Delta/2 < e \leq \Delta/2$;对补码截尾的情况, $-\Delta < e \leq 0^*$ 。

如果一个数大于 X_m (溢出),就必须要以某种方法确定量化结果。在补码运算系统,当两个数相加,其和大于 X_m 时,就会出现这种需要。例如,考虑 4 位的补码数 0111,它的十进制数是 7。若将该数加上数 0001,那么进位就一直传到符号位,结果是 1000,以十进制表示就为 -8。因此,当发生溢出时,所得误差就可能非常大。图 6.44(a)示出的是包括正常的补码运算溢出效果的补码量化器。另一种办法如图 6.44(b)所示,称之为饱和溢出或籍位。这种处理溢出的方法一般在 A/D 转换时就是这样实现的,而且有时也用在两个补码数相加的情况下。用这种方法,在发生溢出时,误差的大小不会突然增加;然而,这种处理溢出的方法的缺点是没有利用补码运算中下述这样一个有趣而有用的特性:如果几个其和不会溢出的补码数相加,那么即使中间计算中某些和可能有溢出,但这些数的补码累加的结果仍是正确的。这种补码运算的特性在习题 3.34 中已检查过。

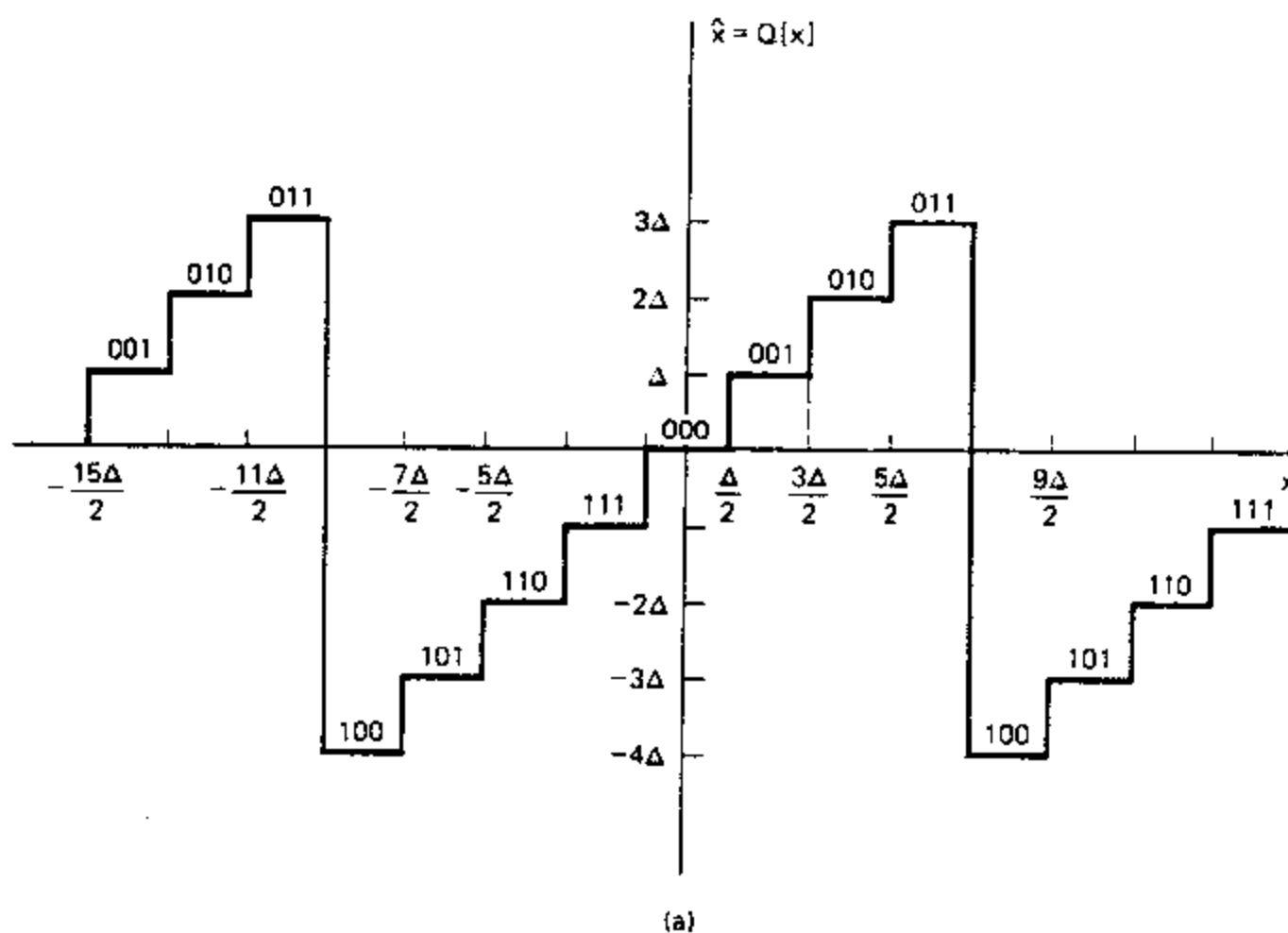
正如我们在 3.7.2 节曾讨论过的,量化和溢出都在数的数字表示中引入了误差。不幸的是要减小溢出而保持位数不变,只有增大 X_m ,这样就正比地增大了量化误差。因此,要同时达到较宽的动态范围和较低的量化误差,在二进制数的表示中就必须增加位数。

到目前为止,我们只是简单地提到了量 X_m 是一个任意的幅度加权因子;然而,这个因子有几个有用的解释。在 A/D 转换中, X_m 是作为 A/D 转换器的满量程幅度。在这种情况下,把它看作是代表系统中某一电压的一个实数。因此 X_m 用作把 $-1 \leq \hat{x}_B < 1$ 范围的二进制数与模拟信号幅度联系起来的一个定标常数。

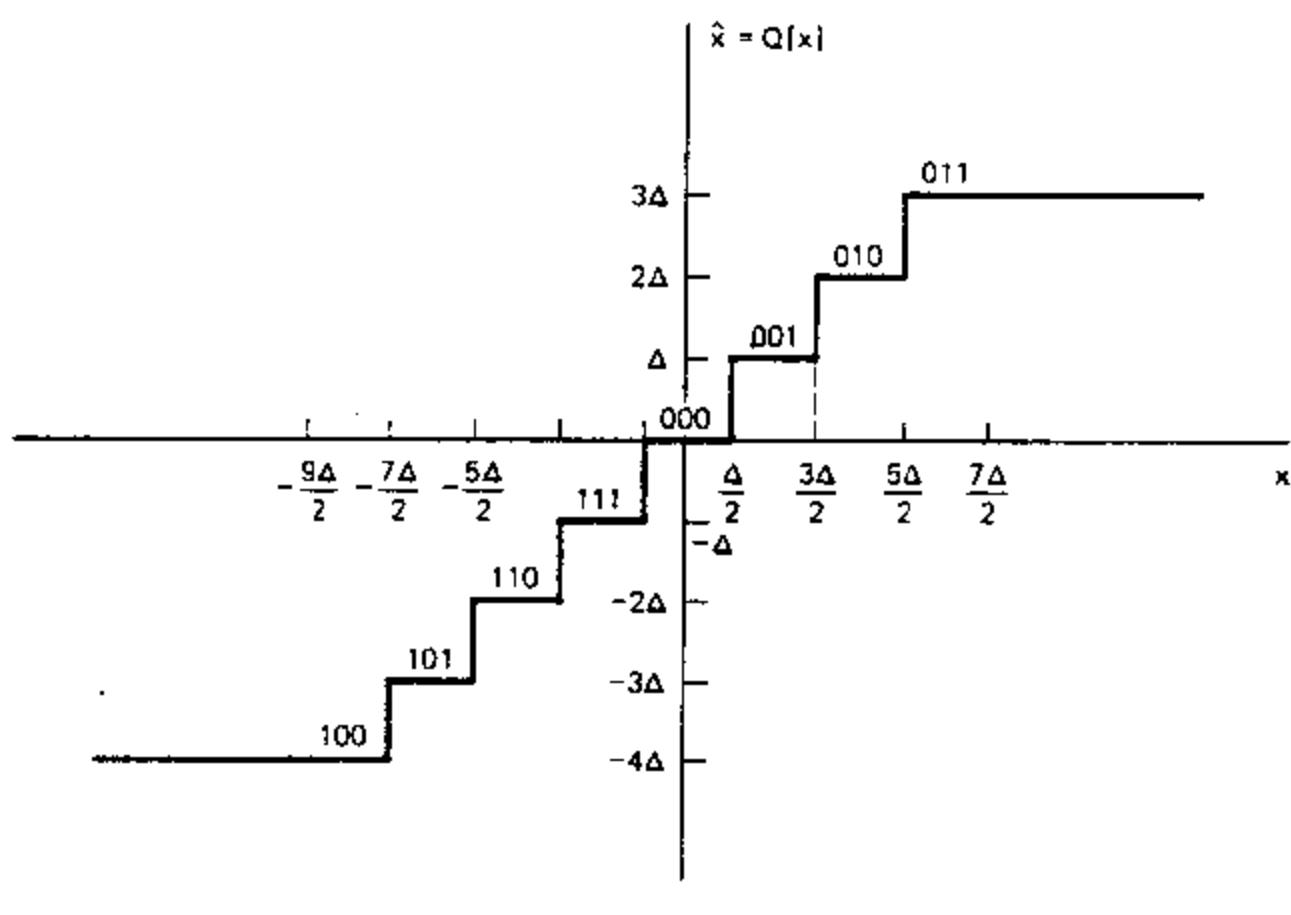
在信号处理实现中,通常假定全部信号变量和系数都是二进制小数。因此,如果将一个 $(B+1)$ 位的信号变量乘以 $(B+1)$ 位的系数,那么其结果就是 $(2B+1)$ 位的小数,而这个 $(2B+1)$ 位的小数又能很方便地用舍入或截尾最低有效位的方法减少到 $(B+1)$ 位。利用这一约定,量 X_m 就能认为是一个幅度加权因子,它允许在数值上表示大于 1 的数。例如,在定点计算中,通常假设每个二进制数都有一个 $X_m = 2^c$ 的幅度加权因子。因此,一个 $c=2$ 的值就意味着,该二进制数的小数点是真正位于式(6.74)的二进制字的 b_2 和 b_3 之间。通常这个幅度加权因子不是明显地表现出来的,而是隐含在实现的程序或硬件结构中。

关于幅度加权因子 X_m 的另一种考虑方法就引出了浮点表示法,这时幅度加权因子

* 注意式(6.72)也能表示舍入或截尾任何 (B_1+1) 位二进制数表示的结果,这里 $B_1 > B$ 。这时 Δ 将由 $(\Delta X_m z^{-B_1})$ 代替作为量化误差大小的界限。



(a)



(b)

图 6.44 补码舍入。(a)自然溢出,(b)饱和溢出。

的指数 c 称为阶, 小数部分 \hat{x}_B 称为尾数。在浮点运算系统中, 阶和尾数都表示成二进制数。浮点表示为保持既有宽的动态范围, 又有小的量化误差提供了一种方便的方法; 然而, 量化误差却以稍许不同的方式出现。在 6.9.5 节将简要讨论浮点量化误差的含意。

6.7.2 在系统实现中的量化

数值量化在线性时不变离散时间系统的实现中以几种方式产生影响。作为一个简单的说明，考虑一下图 6.45(a)的方框图，该图示出序列 $x[n]$ 是采样一个带限连续时间信号 $x_c(t)$ 得到的，并作为一个线性时不变系统的输入。该系统函数是

$$H(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}}. \quad (6.76)$$

该系统的输出 $y[n]$ 又经带限内插转换到带限信号 $y_c(t)$ 。

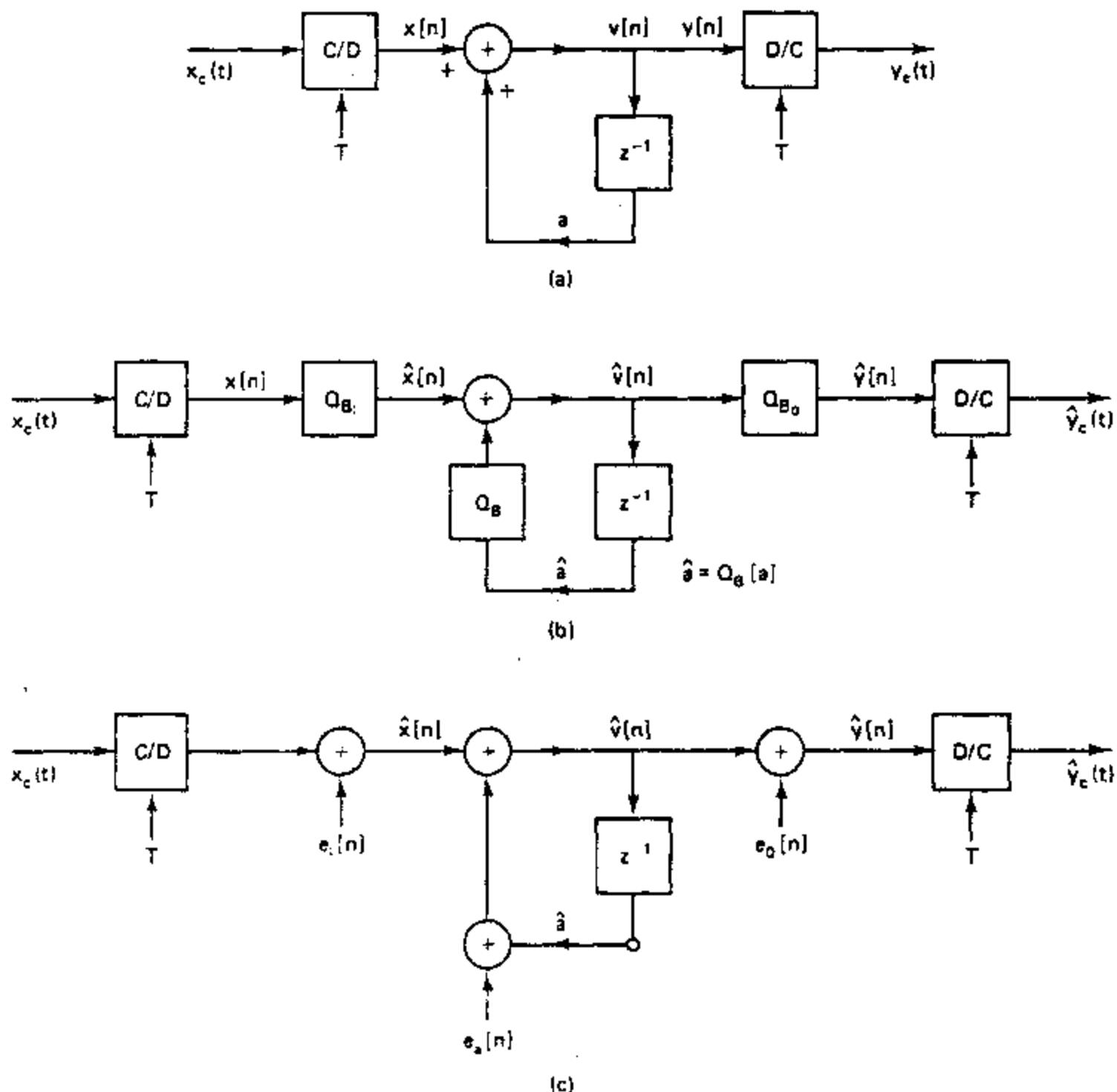


图 6.45 一个模拟信号离散时间滤波的实现。(a)理想系统,(b)非线性模型,(c)线性化模型。

图 6.45(b)是一个更加实际的模型。在实际装置中，采样是用 (B_i+1) 位有限精度的 A/D 转换器完成的。系统用 $(B+1)$ 位二进制运算来实现。在图 6.45(a)中的系数 a 用 $(B+1)$ 位精度来表示。延迟变量 $\hat{v}[n-1]$ 也是用 $(B+1)$ 位寄存器贮存的，并且当该 $(B+1)$ 位数 $\hat{v}[n-1]$ 乘以 $(B+1)$ 位数 \hat{a} 时，其乘积将有 $(2B+1)$ 位长。若假设用的是 $(B+1)$ 位的加法器，则 $\hat{a}\hat{v}[n-1]$ 乘积在它与 (B_i+1) 位输入样本 $\hat{x}[n]$ 相加之前必须被量化（也即舍入或截尾）到 $(B+1)$ 位。（因为一般 $B_i < B$ ，所以 (B_i+1) 位的输入样本能够放在 $(B+1)$ 位二进制数中。）

进制字的任何地方，并带有合适的符号位。)系数 a 已经被量化了，因此暂且撇开其它的量化误差，这个系统响应一般不可能是与图 6.45(a) 相同的。最后，由该方框图表示的差分方程迭代计算出的 $(B+1)$ 位样本 $\hat{y}[n]$ 是按 (B_0+1) 位 D/A 转换器转换为模拟信号的，当 $B_0 < B$ 时，在 D/A 转换之前该输出样本又必须被量化。

虽然图 6.45(b) 的模型是准确的，但分析困难。由于量化器以及在加法器中可能的溢出，图 6.45(b) 的系统是非线性的。同时，在系统中许多点上都引入了量化误差。这些误差的影响是不可能精确分析的，因为它们与输入信号有关，而一般考虑输入信号是未知的。因此，不得不采用几种不同的近似方法来简化这类系统的分析。

对像图 6.45(a) 中的系数 a 这样的系统参数量化的影响一般是由在数据转换或在实现差分方程时的量化效应单独来确定的。这就是说，一个系统函数的理想系数先用它们的量化值来代替，然后测试所得到的响应函数，看看量化是否已经将特性破坏到了不能接受的程度。对于图 6.45 的例子，若将实数 a 量化到 $(B+1)$ 位，就必须考虑所得到的系统，其系统函数

$$\hat{H}(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}} \quad (6.77)$$

是否足够接近所要求的由式(6.76)所给出的系统函数 $H(z)$ 。因为只有 $2^{(B+1)}$ 个不同的 $(B+1)$ 位二进制数，所以 $H(z)$ 的极点只能出现在 z 平面实轴上 $2^{(B+1)}$ 个不同的位置上。在 6.8 节将以更一般的项来讨论这种分析方法。

图 6.45(b) 系统的非线性引起了在线性系统中不可能发生的现象。明确地说，譬如这样的系统可能呈现零输入极限环现象，借此在输入为零时，输出周期性振荡。极限环既可由量化也可以由溢出引起。虽然这类现象的分析是困难的，但是某些有用的近似结果已经得到。极限环问题将在 6.10 节讨论。

如果在数字实现的设计中谨慎从事的话，能保证溢出很少出现，而量化误差也是小的。在这个条件下，图 6.45(b) 的系统表现得很像一个线性系统（带有量化系数）。在该系统中，在发生舍入或截尾的输入点、输出点以及网络内部一些点上都将引入量化误差。因此，就能以图 6.45(c) 的线性化模型来代替图 6.45(b) 的模型，其中这些量化器由加性噪声源代替（Gold and Rader, 1969；Jackson, 1970a, 1970b）。如果真正知道每个噪声源的话，那么图 6.45(c) 就完全等效于图 6.45(b)。然而，如同在 3.7.3 节讨论过的，如果假定在 A/D 转换中的量化噪声是一个随机噪声模型，那么就可得出一些有用结果。这种办法也能用来分析线性系统数字实现中的运算量化效应。如同在图 6.45(c) 中所见，每个噪声源引入一个信号，该信号被系统的不同部分处理，但是因为已假定系统的所有部分都是线性的，所以可以用叠加原理来计算总的影响。在 6.9 节将对几种重要系统说明这种分析方法。

对图 6.45 这个简单的例子，在结构的选择上几乎没有什么灵活性。然而，对高阶系统，已经知道有很大的结构选择余地。某些结构对系数量化的灵敏度比另一些要欠缺些。类似地，由于不同的结构有不同的量化噪声源，并且由于这些噪声源在系统中又以不同的方式被滤波，所以我们将会发现在理论上等效的一些结构，当用有限精度运算实现它们时，有时会有很大的特性品质差异。

6.8 系数量化的影响

线性时不变离散时间系统一般是用来完成某种滤波作用。有关 FIR 和 IIR 滤波器的各种设计方法将在第七章讨论。这些设计方法一般都假设某一特定形式的系统函数，并且以高精度（一般至少 32 位浮点）计算系统的这些系数。滤波器设计过程的结果是某一个系统函数。对该系统函数必须要从无穷多的、理论上等效的实现中选择一种实现结构（一组差分方程）。虽然，在实现中几乎总是关心要求最少的硬件或软件复杂性，但是单独根据这一标准来选择实现结构又总是不可能的。在 6.9 节将会看到，实现结构决定了系统内部产生的量化噪声。同时，某些结构对于系数的扰动比另一些要更为灵敏些。正如在 6.7 节所指出的，研究这些问题的标准途径是单独来对待它们。这一节就考虑系统参数量化所产生的影响。

6.8.1 IIR 系统中系数量化的影响

当对一个有理系统函数或相应的差分方程的系数量化时，系统函数的零极点在 z 平面就会移动到新的位置上去。这就等效于频率响应受到扰动而偏离原来的频率响应。如果系统实现结构对系数的扰动具有高的灵敏度，那么所得到的系统可能就不再满足原设计指标，甚至一个 IIR 系统都可能变成是不稳定的。

对于一般情况，详细的灵敏度分析是复杂的，并且在具体情况下通常其价值也是有限的。然而，即使在具体情况下一般需要系统仿真，我们也能够从直接型结构的零极点是如何受差分方程系数量化影响这样一个简单分析中获益匪浅。与两种直接型结构对应的系统函数表示式是两个多项式之比

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{1 - \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}}. \quad (6.78)$$

系数 $\{a_k\}$ 和 $\{b_k\}$ 在两种直接型实现结构中都是理想的无限精度系数。如果将这些系数量化，就得到系统函数为

$$\hat{H}(z) = \frac{\sum_{k=0}^M \hat{b}_k z^{-k}}{1 - \sum_{k=1}^N \hat{a}_k z^{-k}}. \quad (6.79)$$

式中 $\hat{a}_k = a_k + \Delta a_k$ 和 $\hat{b}_k = b_k + \Delta b_k$ 都是量化系数，它们用量化误差 Δa_k 和 Δb_k 代表与原系数的偏差。

现在考虑分母系数量化对系数极点位置的影响。首先，某个给定系数的量化误差影响着系统函数的全部极点。为了给这种影响定量，假定极点全部是一阶极点，且位于 $z = z_i, i = 1, 2, \dots, N$ ，这样式 (6.78) 的分母可以表示成：

$$A(z) = 1 - \sum_{k=1}^N a_k z^{-k} = \prod_{j=1}^N (1 - z_j z^{-1}). \quad (6.80)$$

再者,定义 $H(z)$ 的极点为 $z_i + \Delta z_i, i=1, 2, \dots, N$. 第 i 个极点位置的误差可以用系数误差表示为:

$$\Delta z_i = \sum_{k=1}^N \frac{\partial z_i}{\partial a_k} \Delta a_k, \quad i=1, 2, \dots, N. \quad (6.81)$$

利用式(6.80)中 $A(z)$ 的两种表示形式,并依据

$$\left(\frac{\partial A(z)}{\partial z_i} \right)_{z=z_i} \frac{\partial z_i}{\partial a_k} = \left(\frac{\partial A(z)}{\partial a_k} \right)_{z=z_i}, \quad (6.82)$$

就直接可得:

$$\frac{\partial z_i}{\partial a_k} = \frac{z_i^{N-k}}{\prod_{j=1, j \neq i}^N (z_i - z_j)} \quad (6.83)$$

式中 $i=1, 2, \dots, N$ 和 $k=1, 2, \dots, N$. 将式(6.83)代入式(6.81)就能确定由于分母系数的全部变化而对某一特殊极点 z_i 的总变化. 式(6.83)也是第 i 个极点对 $H(z)$ 分母中第 k 个系数的量化误差的灵敏度的一种度量. 因为 $H(z)$ 的零点仅仅与分子的系数有关,因此对于零点对 b_k 系数量化误差的灵敏度,也能得出类似的结果.

这种形式的一个结果是首先被凯泽(Kaiser, 1966)用来证明:如果极点(零点)是紧紧地集束在一起,那么在分母(分子)系数上小的误差对直接型结构就可能会引起极点(零点)大的偏移. 这一点可由考虑式(6.83)的分母看出. 每一个因子 $(z_i - z_j)$ 都可以用 z 平面上一个矢量来表示,如图 6.46 所示. 式(6.83)分母的大小就等于从所有剩下的极点到该极点位置 z_i 的这些矢量长度的乘积. 因此,如果这些极点(零点)是如图 6.46(a)所示的那样紧密集束在一起的话,这就对应于一个窄带带通滤波器;或者如图 6.46(b)那样相应于一个窄带低通滤波器,那么就能想到直接型结构的极点对系数量化误差是非常灵敏的. 再者,很明显,密集的极点(零点)数愈多,灵敏度就愈高.

分别由式(6.23)和式(6.28)给出的级联型和并联型系统函数是由二阶直接型系统的组合组成的. 然而,在两种情况中每对复数共轭极点都是独立于其它极点而实现的. 因此,在一对特定极点上的误差与系统函数其它极点到该极点对的距离无关. 对于级联型结构,对于零点也可以得到相同的结论,因为零点也是作为独立的二阶因子实现的. 因此,级联型对系数量化灵敏度一般比等效的直接型实现要小得多.

由式(6.28)可见,并联型系统函数的零点是隐含实现的. 它们可以把这些已量化的二阶节合并起来以得到一个公共分母而隐含地得到. 因此,一个特定的零点受全部二阶节的分子和分母系数中的量化误差影响. 然而,对大多数实际滤波器设计来说,也发现并联型对系数量化的灵敏度比等效的直接型小得多,这是因为二阶节子系统对量化不是非常灵敏的缘故. 在很多实际滤波器中,零点往往较宽地分布在单位圆周围,或者在某些情况下它们可能全都位于 $z=\pm 1$ 处. 对后者的情况,零点在频率 $\omega=0$ 和 $\omega=\pi$ 附近主要给出比要求更大的衰减,因此即使零点偏离 $z=\pm 1$,也不至于明显恶化系统特征.

例 6.10

作为阐明系数量化效应,考虑一个带通 IIR 椭圆滤波器,该滤波器设计成满足如下特性:

$$0.99 \leq |H(e^{j\omega})| \leq 1.01, \quad 0.3\pi \leq \omega \leq 0.4\pi,$$

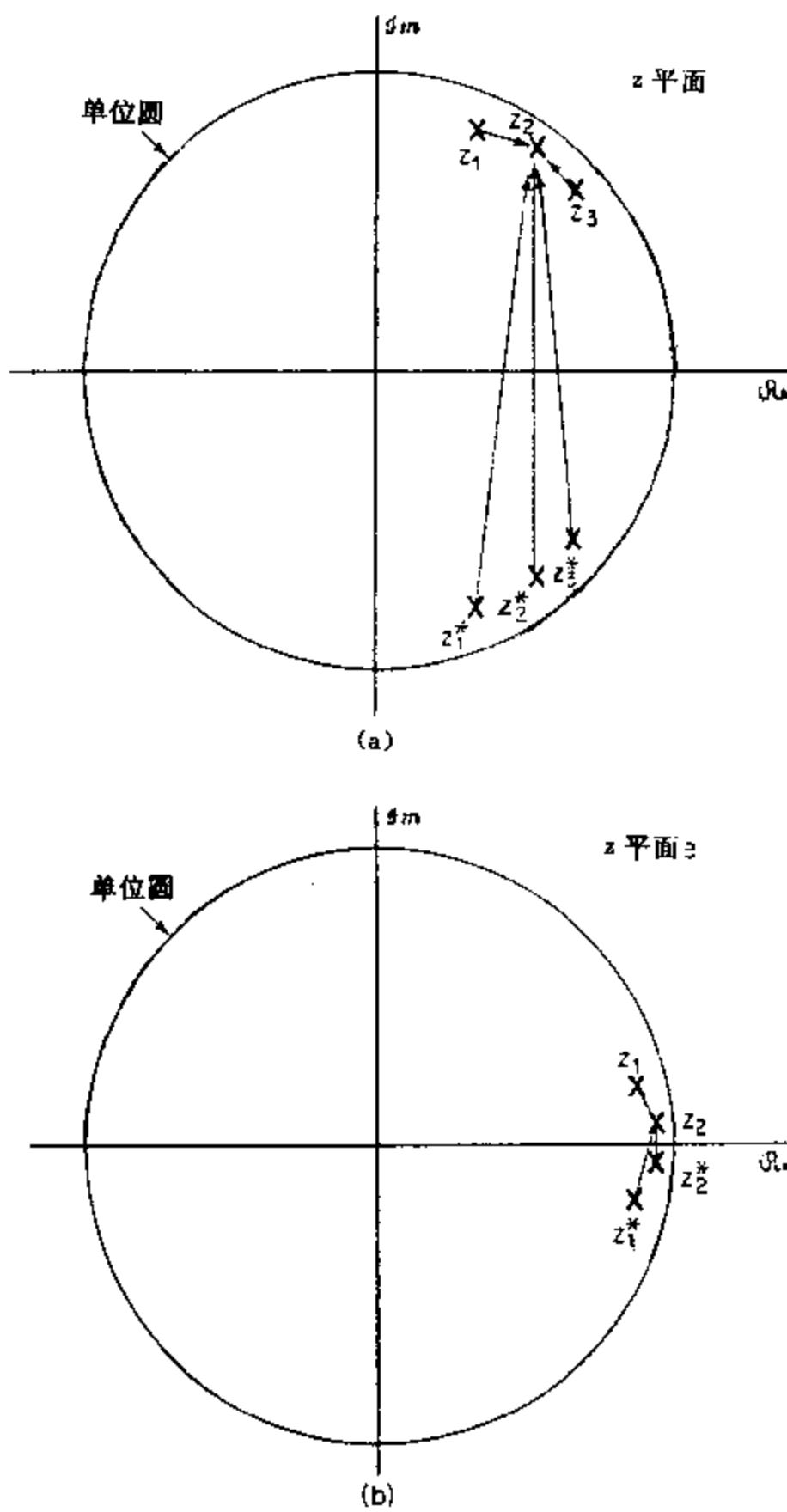


图 6.46 将式(6.83)各因子表示成 z 平面的矢量以确定极点 z_2 的灵敏度.
 (a)窄带带通滤波器. (b)窄带低通滤波器.

$$|H(e^{j\omega})| \leq 0.01 \text{ (即 } -40 \text{ dB}), \quad \omega \leq 0.29\pi,$$

$$|H(e^{j\omega})| \leq 0.01 \text{ (即 } -40 \text{ dB}), \quad 0.41\pi \leq \omega \leq \pi.$$

要求一个 12 阶的滤波器, 以满足这些非常锐截止的窄带指标.

在滤波器设计过程中, 级联型的系数是用 32 位浮点精度算出的. 这些就被当作“未量化”的系数. 表 6.1 给出了这样的六个二阶节[按式(6.23)定义]系数. 图 6.47(a)示出未量化系统的以 dB 计的对数幅度响应, 而图 6.47(b)则示出未量化系统通带内(即 $0.3\pi \leq \omega \leq 0.4\pi$)的幅度响应.

表 6.1 12 阶椭圆滤波器未量化的级联型系数

k	a_{1k}	a_{2k}	b_{0k}	b_{1k}	b_{2k}
1	0.738409	-0.850835	0.135843	0.026265	0.135843
2	0.960374	-0.860000	0.278901	-0.444500	0.278901
3	0.629449	-0.931460	0.535773	-0.249249	0.535773
4	1.116458	-0.940429	0.697447	-0.891543	0.697447
5	0.605182	-0.983693	0.773093	-0.425920	0.773093
6	1.173078	-0.986166	0.917937	-1.122226	0.917937

表 6.2 12 阶椭圆滤波器 16 位量化的级联型系数

k	a_{1k}	a_{2k}	b_{0k}	b_{1k}	b_{2k}
1	24196×2^{-15}	-27880×2^{-15}	17805×2^{-17}	3443×2^{-17}	17805×2^{-17}
2	31470×2^{-15}	-28180×2^{-15}	18278×2^{-16}	-29131×2^{-16}	18278×2^{-16}
3	20626×2^{-15}	-30522×2^{-15}	17556×2^{-15}	-8167×2^{-15}	17556×2^{-15}
4	18292×2^{-14}	-30816×2^{-15}	22854×2^{-15}	-29214×2^{-15}	22854×2^{-15}
5	19831×2^{-15}	-32234×2^{-15}	25333×2^{-15}	-13957×2^{-15}	25333×2^{-15}
6	19220×2^{-14}	-32315×2^{-15}	15039×2^{-14}	-18387×2^{-14}	15039×2^{-14}

为了说明系数量化的影响, 现将表 6.1 中的系数量化到 16 位精度. 所得系数如表 6.2 所示. 表中定点系数用十进制整数乘以 2 的幂的加权因子给出. 将该十进制整数转换为二进制数就可以得出它的二进制表示. 在定点实现中, 加权因子是以数据移位方式仅隐含地表示的, 这种数据移位对于在与其它结果相加以前把结果的二进制小数点对齐是必需的. 要注意, 这些系数二进制表示的小数点不总是在同一个位置上. 例如, 凡加权因子为 2^{-15} 的所有系数其二进制小数点都在符号位 b_0 和最高的小数位 b_1 之间, 如式(6.74)所示. 然而, 其值不超过 0.5 的数, 譬如系数 b_{02} , 就可以向左移一位或更多的位*. 因此, b_{02} 的二进制小数点真正是在符号位的左边. 另一方面, 其值超过 1, 但小于 2 的数, 譬如 a_{16} , 必须将其二进制小数点右移一位, 也即在式(6.74)中 b_1 和 b_2 之间.

图 6.47(c)示出量化后的直接型实现在通带内的幅度响应. 这个频率响应在通带内仅仅稍微有些变化.

为了得到其它等效结构, 级联型系统函数必须重新安排成某种不同的形式. 例如, 确定用并联型结构(未量化系统函数按部分分式展开)的话, 所得系数仍按前述量化到 16 位精度, 其在通带内的频率响应如图 6.47(d)所示.

如果将未量化级联型分子和分母中的二阶因子都乘在一起得到 12 阶的分子和分母多项式, 并且将所得到的系数都量化到 16 位, 并用直接型结构实现, 其频率响应的对数幅度如图 6.47(e)所示. 在这种情况下, 通带内响应实际上已被量化破坏了. 将图 6.47(e)与图 6.47(a)比较一下可看出, 在通带两边分开较宽的零点并未从单位圆上移开. 然而, 未量化的系统在单位圆上刚好在阻带边缘有一对零点, 这些密集零点由于量化而从单位圆上移走, 并由此给频率响应总的变坏增添了份量.

利用式(6.56), 式(6.61)和式(6.69)可以得到最后一个例子, 用来对系统计算出一个归一化的格型实现. 这个网络在通带内的幅度响应如图 6.47(f)所示, 由图可见与级联型和并联型同阶的情况一样, 特性变化很小.

* 应用不同的二进制小数点位置在系数上可保持较高的精度, 但使得编程或系统结构复杂化.

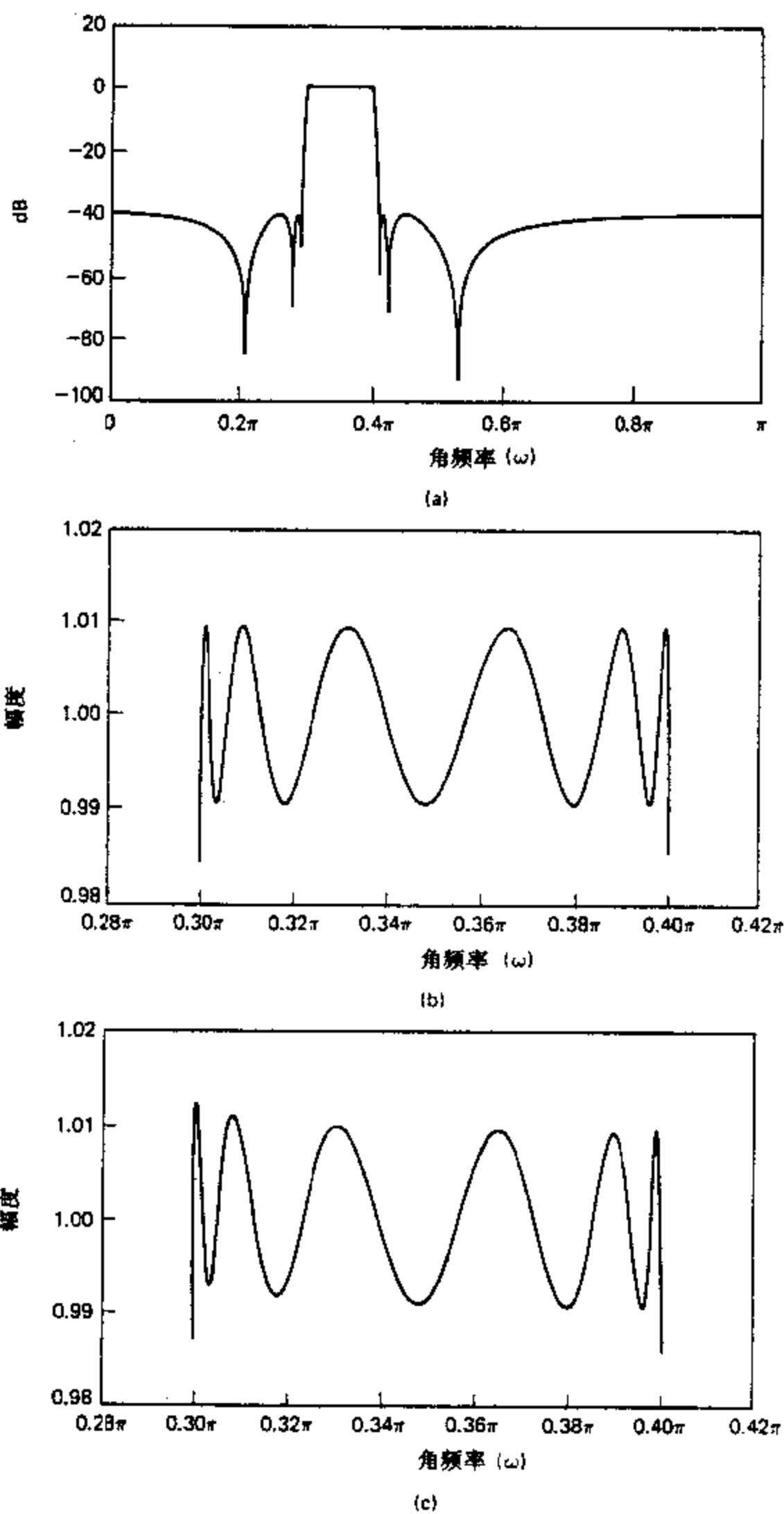


图 6.47 IIR 系数量化举例. (a)未量化椭圆带通滤波器的对数幅度. (b)未量化级联型通带内幅度. (c)用 16 位系数量化的级联型结构通带内幅度.

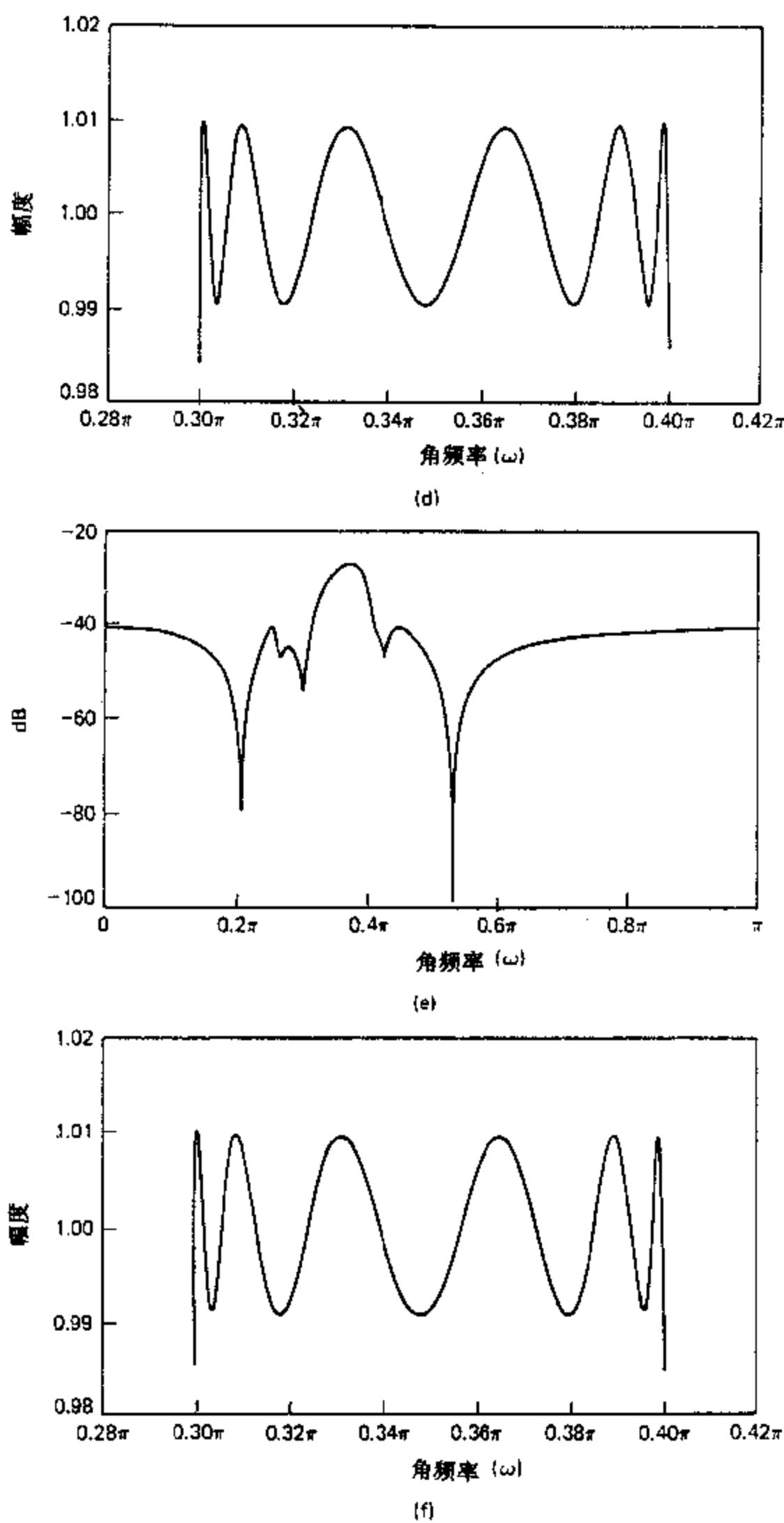


图 6.47 (续) (d)用 16 位系数量化的并联结构通带内幅度. (e)用 16 位系数量化的直接型对数幅度. (f)用 16 位系数量化的归一化格型通带内幅度.

例 6.10 说明了级联型、并联型和归一化格型对系数量化效应的稳健性，并且也说明直接型高阶滤波器对系数量化效应是极为灵敏的。由于灵敏度的关系，除了二阶系统以外，直接型是很少采用的^{*}。因为级联型和并联型都能组成与规范直接型要求相同的存贮量和相同的，或稍许多一点的计算量，因此这些标准结构使用最为广泛。像归一化格型这种更复杂的结构对很短字长可能更加稳健，但是与同阶系统相比它们要求显著增加计算量。

甚至对用于实现级联和并联型的二阶系统而言，在改进对系数量化的稳健性上仍有一些灵活性。考虑用直接型实现的一对共轭复数极点，如图 6.48 所示。用无限精度系数，该网络的极点在 $z=re^{j\theta}$ 和 $z=re^{-j\theta}$ 处。然而，如果系数 $2r\cos\theta$ 和 $-r^2$ 是被量化的话，那么只可能有有限个不同的极点位置。这些极点必须位于 z 平面内的一个网格点上，该网格由同心圆（相应于 r^2 的量化）与垂直线（相应于 $2r\cos\theta$ 的量化）的交点所确定。图 6.49(a) 示出一个 4 位量化（3 位加符号位）的这样一个网格；也就是说， r^2 是限在 7 个正值和零上，而 $2r\cos\theta$ 则限在 7 个正值、8 个负值和零上。图

6.47(b) 示出由 7 位量化（6 位加符号位）得到的一个较为密集的网格图。图 6.49 的图自然对 z 平面的其它每个象限都是镜像对称的。要注意的是，对直接型来说，网格点在实轴附近要更稀疏一些。因此，位于 $\theta=0$ 或 $\theta=\pi$ 附近的极点可能比在 $\theta=\pi/2$ 附近的极点偏移要多一些。当然，无限精度极点的位置非常接近这些可能有的量化极点之一总是可能的。这时，不管怎样，量化不会引起什么问题，但是一般来说量化总会使系统特性变坏的。

图 6.50 示出实现 $z=re^{j\theta}$ 和 $z=re^{-j\theta}$ 极点的另一种二阶结构。这种结构已称为二阶系统的耦合型实现（Rader and Gold, 1967）。容易证明，图 6.48 和图 6.50 对无限精度系数而言具有相同的极点。为了实现图 6.50，必须对 $r\cos\theta$ 和 $r\sin\theta$ 量化。因为这两个量分别是极点位置的实部和虚部，因此量化后的极点位置就是在 z 平面上均匀相间的水平和垂直线的交点。图 6.51(a) 和图 6.51(b) 分别示出对 4 位和 7 位量化可能的极点位置。在这种情况下，极点位置的密度在整个单位圆内都是均匀分布的。为要获得这个更加均匀的密度所付出的代价是要用两倍的系数乘法器。在某些情况下，对于以减少字长来获取更准确的极点位置，这个外加的计算量可以认为是合理的。

6.8.2 FIR 系数量化的影响

对于 FIR 系统，必须考虑的仅仅是系统函数零点的位置，因为对因果的 FIR 系统全部极点都在 $z=0$ 。虽然刚才已经看到直接型结构对高阶 IIR 系统应是避免采用的，但直接型结构对 FIR 系统则是最常用的。为了明白为什么是这样，现将直接型 FIR 系统的系统函数表示成如下形式

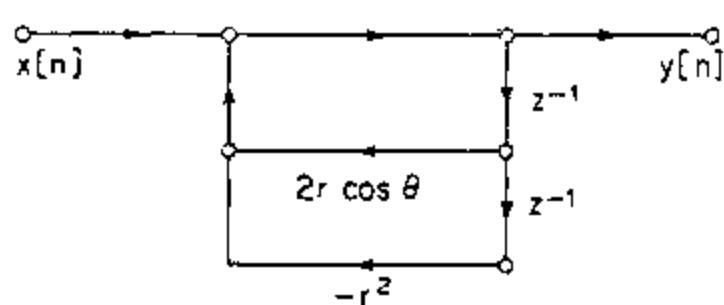
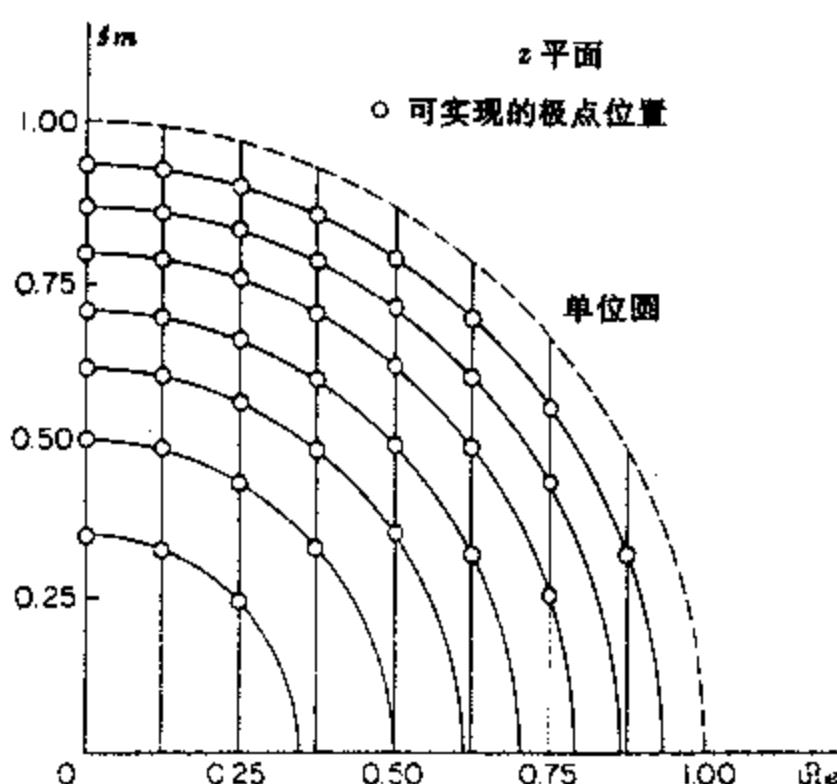
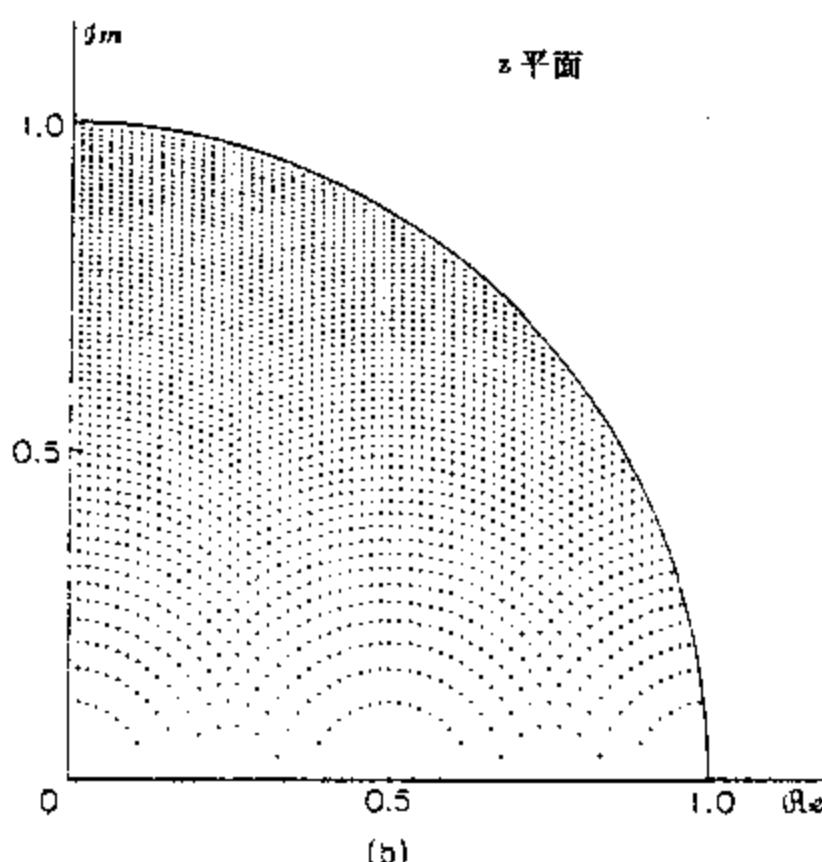


图 6.48 一对复数共轭极点的直接型实现。

^{*} 在语音合成中是个例外，在那里 10 阶和更高阶的系统照例都用直接型实现。因为在语音合成中，系统函数的极点分隔得比较开，所以这是可能的（Rabiner and Schafer, 1978）。



(a)



(b)

图 6.49 图 6.48 二阶 IIR 直接型系统的极点位置. (a)4 位系数量化, (b)7 位量化.

$$H(z) = \sum_{n=0}^M h[n]z^{-n}. \quad (6.84)$$

现在假定系数 $\{h[n]\}$ 被量化, 得到一组新的系数 $\{\hat{h}[n] = h[n] + \Delta h[n]\}$. 对已量化系统的系统函数就是

$$\hat{H}(z) = \sum_{n=0}^M \hat{h}[n]z^{-n} = H(z) + \Delta H(z), \quad (6.85)$$

式中

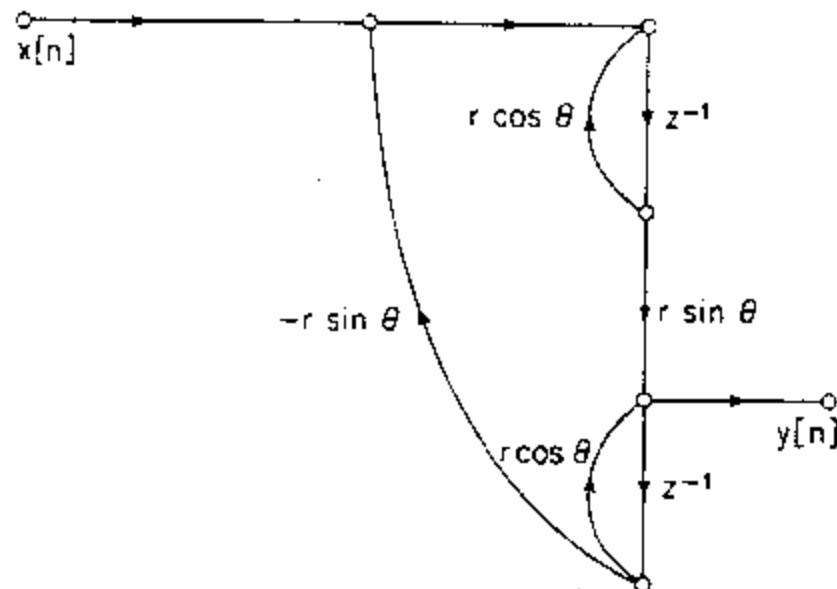


图 6.50 一对复数共轭极点的耦合型实现。

$$\Delta H(z) = \sum_{n=0}^M \Delta h[n] z^{-n}. \quad (6.86)$$

据此,该量化系统的系统函数(因此也就是频率响应)与冲激响应系数的量化误差是线性相关的.为此,该量化系统可以用图 6.52 来表示.该图指出未量化系统与一个误差系统并联,该误差系统的冲激响应就是量化误差样本 $\{\Delta h[n]\}$ 序列,而其系统函数就是相应的 z 变换 $\Delta H(z)$.

研究直接型 FIR 结构灵敏度的一种办法是检查零点对冲激响应系数量化误差的灵敏度.若用冲激响应系数 $\{h[k]\}$ 代替式(6.81)到式(6.83)中的系数 $\{a_k\}$,那么在这些式子中对于极点所得到的这些结果在这里就可用于零点.对 FIR 情况也能得出同样的结论,这就是:若 $H(z)$ 的零点是密集在一起的话,那么它们的位置对冲激响应系数的量化误差就有高的灵敏度.广泛应用直接型 FIR 系统的理由是:对大多数线性相位 FIR 滤波器来说,零点在 z 平面内或多或少是均匀铺开的,现用例子来说明这一点.

例 6.11

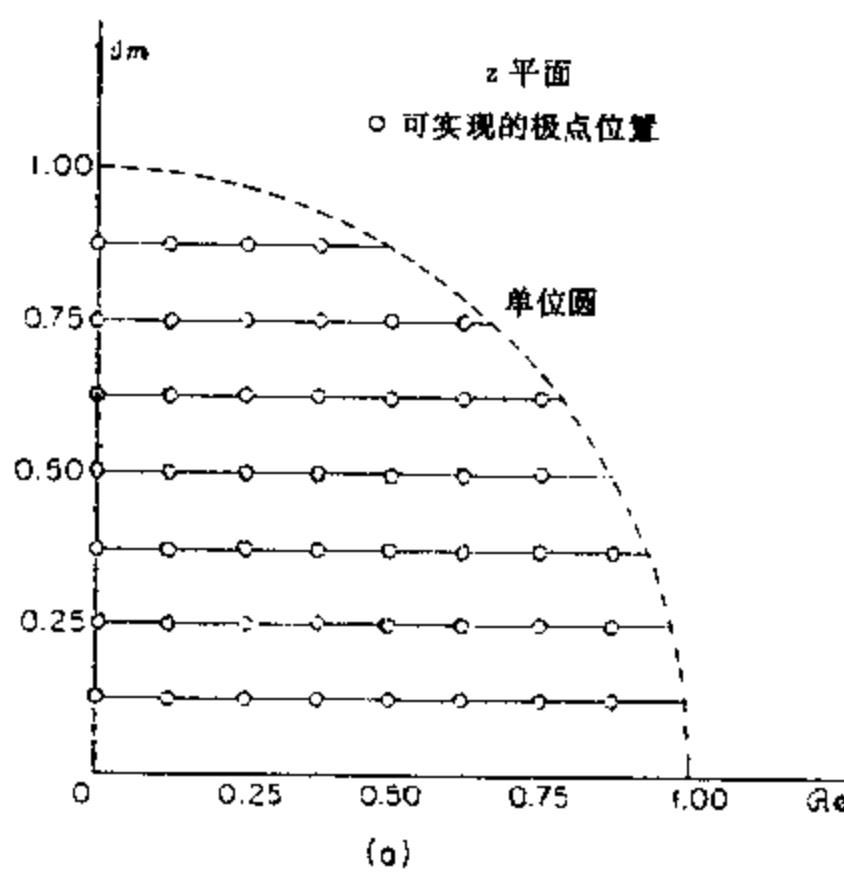
作为 FIR 情况系数量化效应的一个例子,现考虑一个满足下列指标的线性相位低通滤波器:

$$0.99 \leq |H(e^{j\omega})| \leq 1.01, \quad 0 \leq \omega \leq 0.4\pi, \\ |H(e^{j\omega})| \leq 0.001 \text{ (即 } -60 \text{ dB}), \quad 0.6\pi \leq \omega \leq \pi.$$

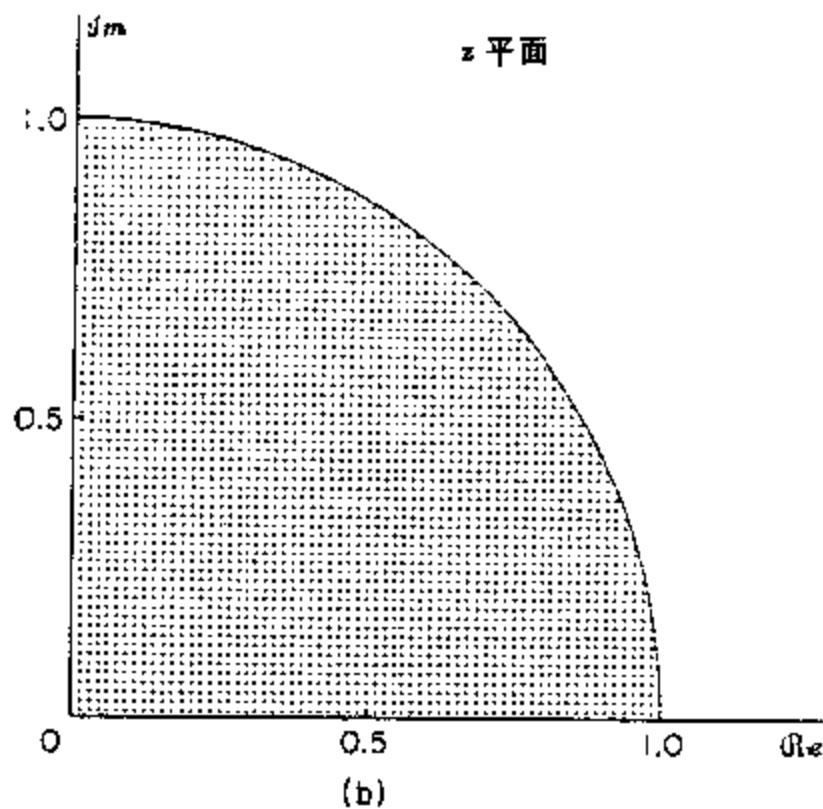
这个滤波器是用帕克斯-麦克莱伦(Parks-McClellan)设计方法设计的,有关这个设计方法将在 7.6.3 节中讨论.这个特定系统的设计细节在 7.7.1 节中考虑.

表 6.3 给出该系统未量化的冲激响应系数,以及 16 位、14 位、13 位和 8 位量化的量化系数.

图 6.53 给出了各种情况下系统频率响应的比较.图 6.53(a)是未量化系数频率响应以 dB 计的对数幅度特性.图 6.53(b),(c),(d),(e),(f)分别指的是对于未量化以及按 16 位、14 位、13 位和 8 位量化情况下通带和阻带的逼近误差.(通带为逼近于 1 的误差,阻带为逼近于 0 的误差.)由图 6.53 可见,对于未量化情况和用 16 位、14 位量化的情况,系统都能满足指标要求.然而,用 13 位量化,阻带逼近误差就大于 0.001 了;而用 8 位量化,阻带逼近误差超过指标要求 10 倍大.因此,该系统的直接型实现至少要求有



(a)



(b)

图 6.51 图 6.50 的耦合型二阶 IIR 系统的极点位置.(a)系数的 4 位量化.(b)7 位量化.

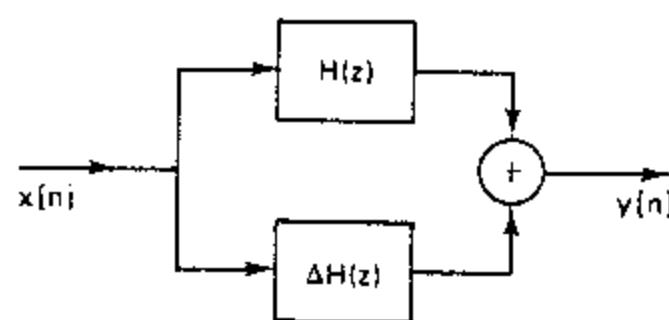


图 6.52 FIR 系统中系数量化的表示.

14 位的系数. 不过, 这并不是一个苛刻的限制, 因为 16 位或 14 位系数与很多可用来实现这样一个滤波器的技术工艺是恰好匹配的.

对于这个例子值得注意的是, 所有未量化的系数其幅度值都小于 0.5. 因此, 如果全部系数(因此冲激响应)在量化之前都加倍, 那么就能更有效地利用这些可资利用的位数, 在效果上相当于 B 增加了一位. 表 6.3 和图 6.53 没有考虑提高精度的这种潜在可能.

表 6.3 一个最佳 FIR 低通滤波器($M=27$)的未量化和量化系数

系数	未量化	16 位	14 位	13 位	8 位
$h[0]=h[27]$	1.359657×10^{-3}	45×2^{-15}	11×2^{-13}	6×2^{-12}	0×2^{-1}
$h[1]=h[26]$	-1.616993×10^{-3}	-53×2^{-15}	-13×2^{-13}	-7×2^{-12}	0×2^{-1}
$h[2]=h[25]$	-7.738032×10^{-3}	-254×2^{-15}	-63×2^{-13}	-32×2^{-12}	-1×2^{-1}
$h[3]=h[24]$	-2.686841×10^{-3}	-88×2^{-15}	-22×2^{-13}	-11×2^{-12}	0×2^{-1}
$h[4]=h[23]$	1.255246×10^{-2}	411×2^{-15}	103×2^{-13}	51×2^{-12}	2×2^{-1}
$h[5]=h[22]$	6.591530×10^{-3}	216×2^{-15}	54×2^{-13}	27×2^{-12}	1×2^{-1}
$h[6]=h[21]$	-2.217952×10^{-2}	-727×2^{-15}	-182×2^{-13}	-91×2^{-12}	-3×2^{-1}
$h[7]=h[20]$	-1.524663×10^{-2}	-500×2^{-15}	-125×2^{-13}	-62×2^{-12}	-2×2^{-1}
$h[8]=h[19]$	3.720668×10^{-2}	1219×2^{-15}	305×2^{-13}	152×2^{-12}	5×2^{-1}
$h[9]=h[18]$	3.233332×10^{-2}	1059×2^{-15}	265×2^{-13}	132×2^{-12}	4×2^{-1}
$h[10]=h[17]$	-6.537057×10^{-2}	-2142×2^{-15}	-536×2^{-13}	-268×2^{-12}	-8×2^{-1}
$h[11]=h[16]$	-7.528754×10^{-2}	-2467×2^{-15}	-617×2^{-13}	-308×2^{-12}	-10×2^{-1}
$h[12]=h[15]$	1.560970×10^{-3}	5115×2^{-15}	1279×2^{-13}	639×2^{-12}	20×2^{-1}
$h[13]=h[14]$	4.394094×10^{-1}	14399×2^{-15}	3600×2^{-13}	1800×2^{-12}	56×2^{-1}

为了对例 6.11 的结果有很好的理解, 我们可回想一下, 根据式(6.85)和式(6.86), 一个带有量化系数的 FIR 系统的频率响应是

$$\hat{H}(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega}) + \Delta H(e^{j\omega}), \quad (6.87)$$

其中

$$\Delta H(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^M \Delta h[n] e^{-jn\omega}. \quad (6.88)$$

为了简化分析, 假定全部系数都小于 1, 而且都被加权到二进制小数点在符号位与最高有效小数位之间. 那么根据 6.7.1 节的讨论就直接可得: 若冲激响应系数被舍入到 $(B+1)$ 位(包括符号位), 那么

$$-2^{-(B+1)} < \Delta h[n] \leq 2^{-(B+1)}. \quad (6.89)$$

这样关于频率响应误差大小的一个界限可按下列简单处理求得为

$$|\Delta H(e^{j\omega})| = \left| \sum_{n=0}^M \Delta h[n] e^{-jn\omega} \right| \leq \sum_{n=0}^M |\Delta h[n]| |e^{-jn\omega}| \leq (M+1) 2^{-(B+1)}, \quad (6.90)$$

式中已经用它们最大的幅值代替系数误差 $\Delta h[n]$ 和复指数 $e^{-jn\omega}$, 以得出式(6.90)右边的最后界限.

现把这个界限用于例 6.11 的系统. 对于 $M+1=28$, 16 位、14 位、13 位和 8 位量化系统的误差界限分别是 0.000427, 0.001709, 0.003418 和 0.109375. 将图 6.53(c)~(f) 与图 6.53(b) 仔细比较之后表明由量化误差引入的偏差在全部情况下都小于相应的界限.

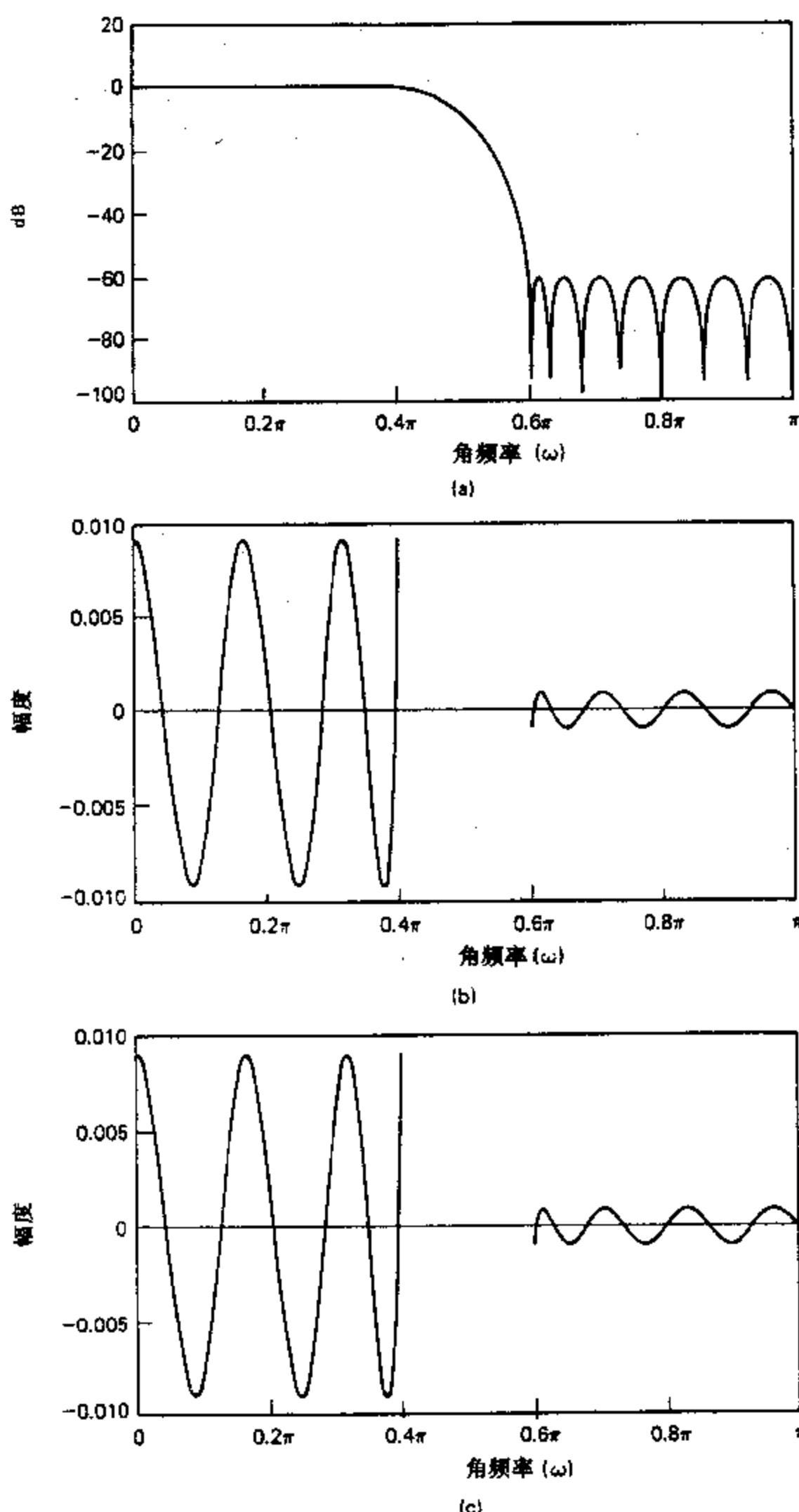


图 6.53 FIR 量化的例子, (a)未量化情况的对数幅度特性, (b)未量化情况的逼近误差(在过渡带中不定义误差), (c)16 位量化的逼近误差.

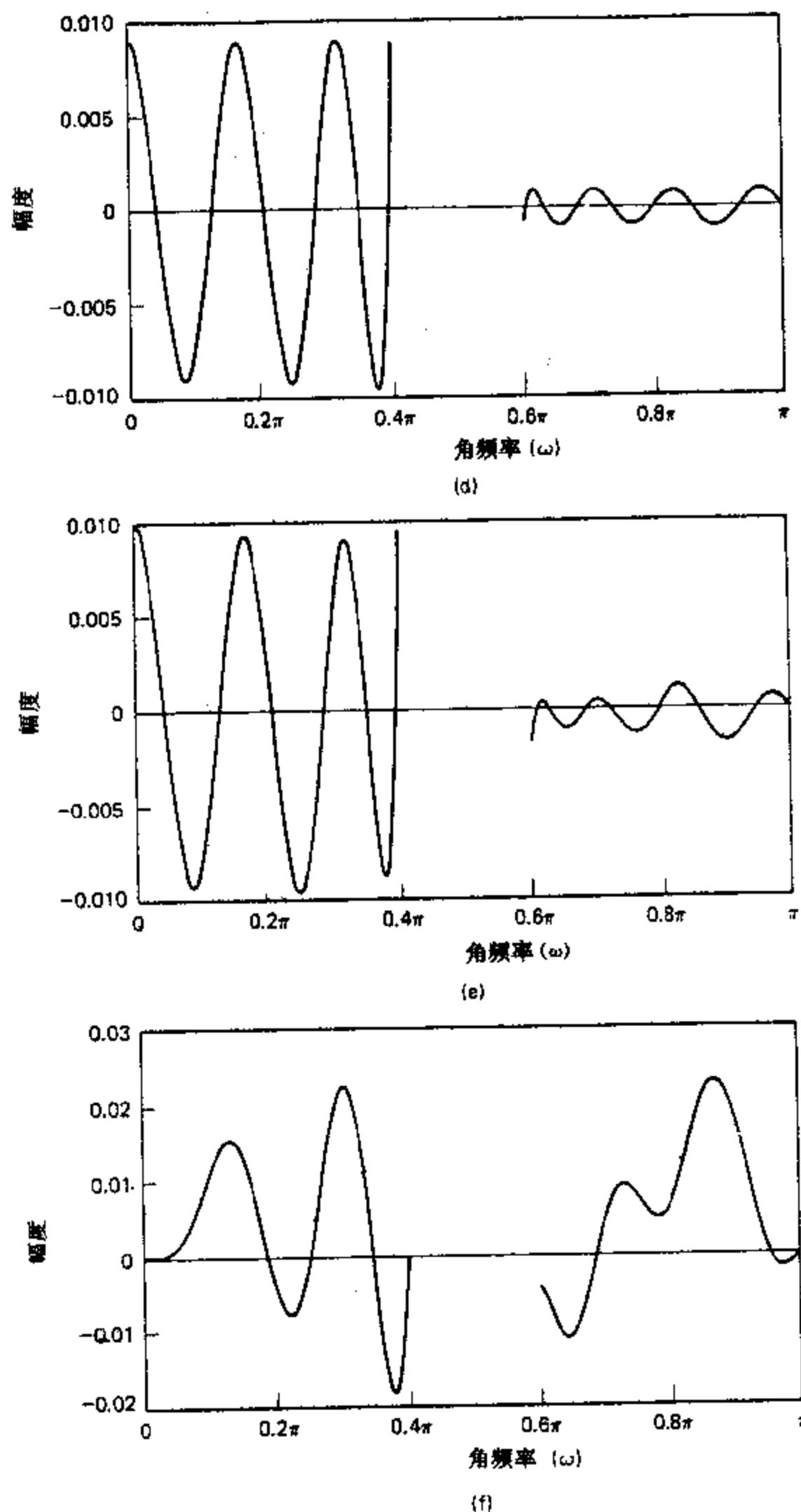


图 6.53(续) (d)14 位量化的逼近误差, (e)13 位量化的逼近误差, (f)8 位量化的逼近误差.

式(6.90)的界限是一个最坏的界限,因为对于误差和这个界限一样大的情况,全部量化误差都认为是同号,并且都等于最大值.式(6.90)的界限也指出误差随冲激响应的长度线性增加.钱和拉宾(Chan and Rabiner, 1973c)假设系数误差为一个随机变量模型,并导出了关于频率响应误差方差的一个更加明确的界限.在这个界限中,误差方差随冲激响应长度的平方根增加.

到目前为止,未对 FIR 系统相位响应作任何假设.然而,有可能具有广义线性相位的特性是 FIR 系统的主要优点之一.回想一下,一个线性相位 FIR 系统其冲激响应不是对称的($h[M-n]=h[n]$)就是反对称的($h[M-n]=-h[n]$).这些线性相位条件对直接型量化系统是很容易保持住的.因此,例 6.11 的全部系统都有准确的线性相位,而不管量化的粗糙程度如何.在某些量化很粗的情况下,或者对零点紧靠在一起的高阶系统,用级联型 FIR 系统独立实现较少的零点组或许是值得提倡的.为了保持线性相位,级联中每一节也必须有线性相位.回想一下,一个线性相位系统的零点必须按图 6.32 所示的方式出现.例如,若用 $(1+az^{-1}+z^{-2})$ 的二阶节来实现单位圆上的每对复数共轭零点的话,那么当系数 a 量化时,该零点仅能在单位圆上移动.这就避免了零点从单位圆上移开,从而减小在衰减上的影响.类似地,在单位圆内的实零点以及在单位圆外倒数位置上的零点也会保持为实的.在 $z=\pm 1$ 的零点也能准确地由一阶系统给予实现.若单位圆内的一对共轭复数零点是用二阶系统,而不用四阶系统来实现,那么必须确保对每个单位圆内的复数零点也有一个单位圆外的共轭倒数零点存在.这可以用对应于在 $z=re^{j\theta}$ 和 $z=r^{-1}e^{-j\theta}$ 零点的四阶因子表示成

$$1+cz^{-1}+dz^{-2}+cz^{-3}+z^{-4} \\ = (1-2r \cos \theta z^{-1} + r^2 z^{-2}) \frac{1}{r^2} (r^2 - 2r \cos \theta z^{-1} + z^{-2}). \quad (6.91)$$

这就相应于图 6.54 的子系统.这个系统用同样两个系数 $-2r \cos \theta$ 和 r^2 既实现单位圆内的零点,又实现单位圆外的共轭倒数零点.这样,线性相位条件在量化情况下得以保持.注意到因子 $(1-2r \cos \theta z^{-1} + r^2 z^{-2})$ 与图 6.48 的二阶直接型 IIR 系统的分母是一致的,因此,量化零点的集合就如图 6.49 所描绘.有关 FIR 系统级联实现的更为详细的内容,可以参阅赫尔曼和许斯勒(Herrmann and Schüssler, 1970b).

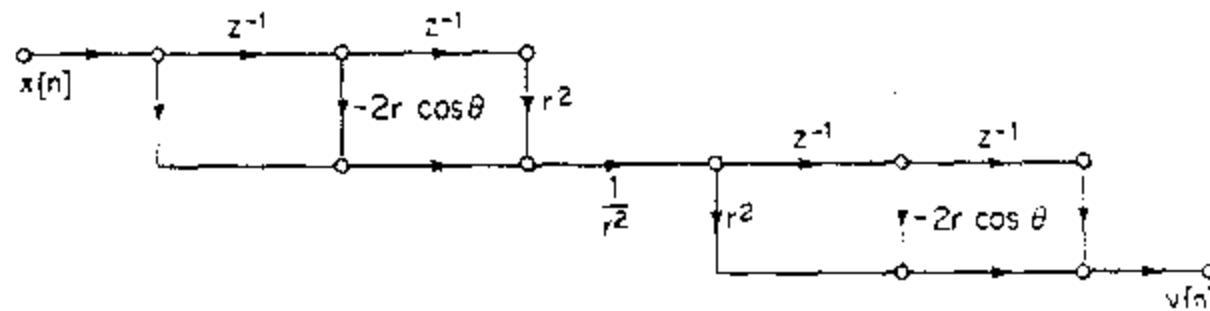


图 6.54 在线性相位 FIR 系统中实现四阶因子的子网络,达到保持线性相位而与系数量化无关.

6.8.3 其它灵敏度分析方法

我们讨论这一节的目的就是要指出由于差分方程系数量化所引起的一些重要问题.在范围上仅限于理论分析,但是所给出的结果对于导致系统响应对系数量化的高灵敏度

的一些条件是富有启发意义的. 所做的讨论主要是为了说明设计一个系统常常采用的途径, 这就是: 取一种实现形式, 将系数量化, 对照原始设计要求审核所得量化系统的响应. 应用矩阵方法分析系数量化误差的更一般方法也已经有了(Crochiere, 1972; Roberts and Mullis, 1987). 德纳的 IIR 系统量化分析程序也可以得到(DSP Committee, 1979).

6.9 数字滤波器中舍入噪声的影响

用有限精度运算实现的差分方程是非线性系统. 虽然一般来说了解这个非线性是如何影响离散时间系统的特性是重要的, 但是在关心某一具体系统特性的实际应用中, 一般不要求对运算量化效应作精确分析. 的确就像系数量化一样, 最有效的途径往往是对系统进行仿真, 并测量它的特性. 例如, 在量化误差分析中通常一个目的就是选择数字字长, 以使得数字系统是所要求线性系统的一个足够准确的实现; 与此同时又要求最少的硬件或软件复杂性. 当然, 数字字长只能一步一步地改变, 并且正如在 3.7.2 节中已经看到的, 字长增加一位, 量化误差大小降低一半. 因此, 数字字长的选择对量化误差分析的不准确性是不灵敏的, 分析准确到 30%~40% 往往就够了. 为此, 很多重要的量化效应都能用线性模型来研究. 这一节将建立这样一些模型, 并用几个例子来说明它们的应用. 唯一的例外是零输入极限环现象, 这完全是非线性现象. 我们对数字滤波器的非线性研究只限于在 6.10 节对零输入极限环作简要介绍.

6.9.1 直接型 IIR 结构分析

为了介绍基本概念, 现考虑一个线性时不变离散时间系统的直接型结构. 一种直接 I 型二阶系统的流图如图 6.55(a)所示. 对直接 I 型结构的一般 N 阶差分方程是

$$y[n] = \sum_{k=1}^N a_k y[n-k] + \sum_{k=0}^M b_k x[n-k] \quad (6.92)$$

其系统函数为

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{1 - \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}} = \frac{B(z)}{A(z)}. \quad (6.93)$$

现假设全部信号值和系数都用 $(B+1)$ 位定点二进制数表示. 那么, 用 $(B+1)$ 位加法器在实现式(6.92)中, 就有必要将 $(2B+1)$ 位长的乘积缩减到 $(B+1)$ 位. 因为全部数都是以小数看待的, 所以可以用舍入或截尾的方法除掉最低有效 B 位. 这就可以用一个常数乘法器跟着一个量化器来代替图 6.55(a)中的每一条常数乘法器支路, 如图 6.55(b)的非线性模型所示. 对应于图 6.55(b)的差分方程是非线性方程, 为

$$\hat{y}[n] = \sum_{k=1}^N Q[a_k \hat{y}[n-k]] + \sum_{k=0}^M Q[b_k x[n-k]]. \quad (6.94)$$

图 6.55(c)给出另一种表示, 这里量化器用噪声源代替, 该噪声源等于每个量化器输出端的量化误差. 例如, 乘积 $b_k x[n]$ 的舍入或截尾可以用如下的噪声源表示

$$e[n] = Q[b_k x[n]] - b_k x[n]. \quad (6.95)$$

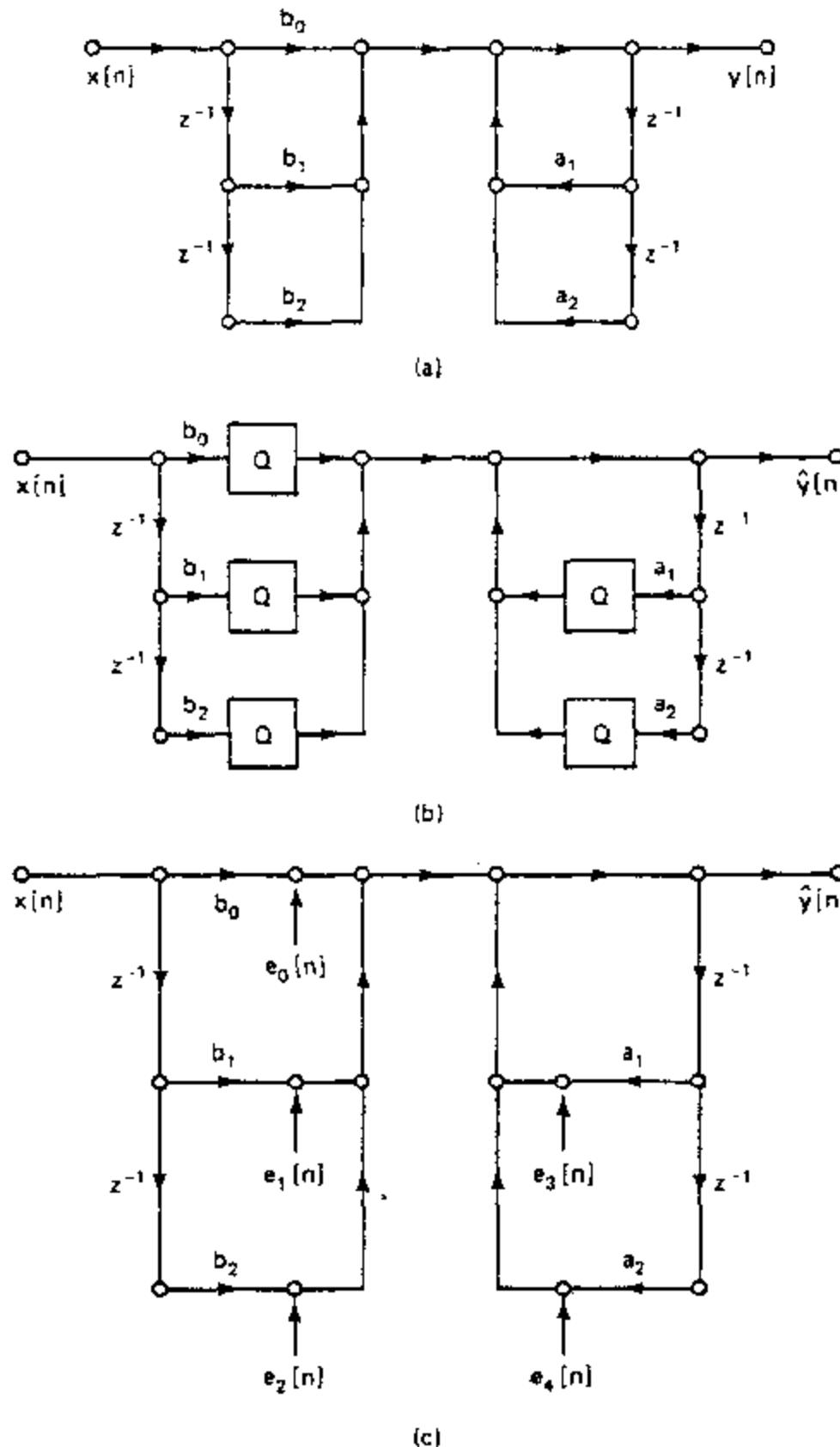


图 6.55 直接 I 型系统模型.(a)无限精度模型.(b)非线性量化模型.(c)线性噪声模型.

如果这些噪声源真正是已知的话,那么图 6.55(c)就完全等效于图 6.55(b). 然而,当假设每个量化噪声源具有下列性质时,图 6.55(c)才是最有用处的:

1. 每个量化噪声源 $e[n]$ 都是广义平稳白噪声过程.
2. 每个噪声源幅度在一个量化间隔上都是均匀分布的.
3. 每个量化噪声源都与相应量化器的输入、所有其它量化噪声源以及系统的输入不相关.

这些假设与 3.7 节 A/D 转换分析中所做的假设是一致的. 严格来说,这些假设不可能是真实的,因为量化误差直接与量化器的输入有关. 对常数或正弦信号来说,这点是显而易见的. 然而,实验与理论分析都证明(Bennett, 1948; Widrow, 1956, 1961): 在很多情况下,刚才所描述的模型都给出了像均值、方差和相关函数等统计平均量的准确结论. 当

输入信号是一个复杂的宽带信号时确实如此,像语音这类信号在全部量化电平之间急剧地变化,并从一个样本变到另一个样本时越过很多量化电平(Gold and Rader, 1969). 这里所提出的简单线性噪声模型允许我们用均值和方差等这些平均量来表征系统所产生的噪声,并确定这些平均量是如何受到系统改变的.

对于($B+1$)位量化, 6.7 节已证明, 对舍入有

$$-\frac{1}{2}2^{-B} < e[n] \leq \frac{1}{2}2^{-B} \quad (6.96a)$$

而对补码的截尾有

$$-2^{-B} < e[n] \leq 0. \quad (6.96b)$$

因此,根据上面的第二个假设,对于表示量化误差的随机变量,概率密度函数对舍入是如图 6.56(a)所示的均匀概率密度,而对截尾是如图 6.56(b)所示的均匀概率密度. 对舍入的均值和方差是

$$m_e = 0, \quad (6.97a)$$

$$\sigma_e^2 = \frac{2^{-2B}}{12}. \quad (6.97b)$$

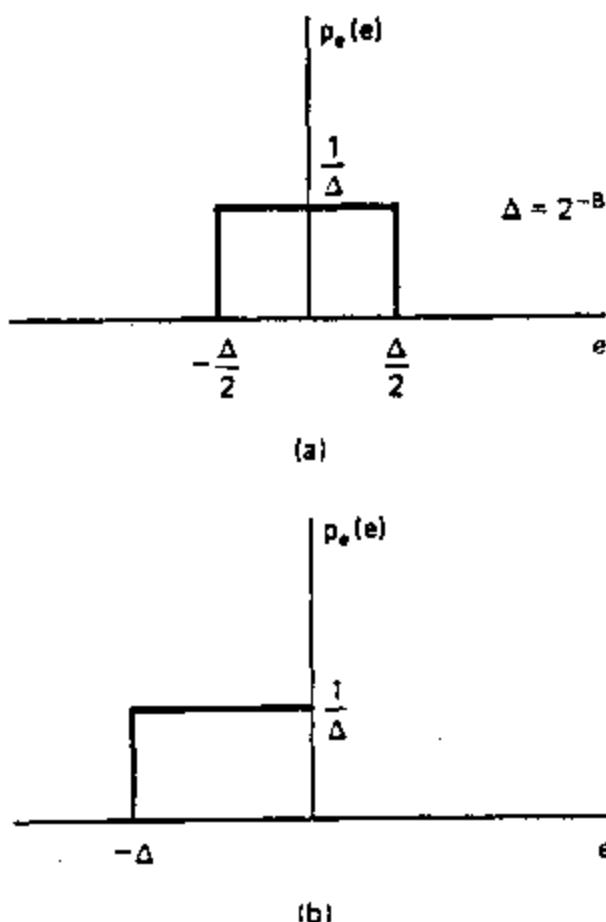


图 6.56 量化误差的概率密度函数. (a) 舍入. (b) 截尾.

对补码截尾, 均值和方差是

$$m_e = -\frac{2^{-B}}{2}, \quad (6.98a)$$

$$\sigma_e^2 = \frac{2^{-2B}}{12}. \quad (6.98b)$$

根据第一个假设, 舍入时量化噪声源的自相关序列是

$$\phi_{ee}[n] = \sigma_e^2 \delta[n] + m_e^2. \quad (6.99)$$

在图 6.55(c)中每个量化噪声源采用这个模型之后, 现在就能着手确定量化噪声对

系统输出的影响.为了有助于问题的解决,注意到这一点是有益的,即,图 6.55(c)中全部噪声源都是在实现零点的系统部分和实现极点的系统部分之间有效地引入的.因此,如果在图 6.57 中的 $e[n]$ 是

$$e[n] = e_0[n] + e_1[n] + e_2[n] + e_3[n] + e_4[n]. \quad (6.100)$$

那么图 6.57 就等效于图 6.55(c).因为已经假设全部噪声源都是与输入独立的,并且也是互相独立的,所以对二阶直接 I 型联合噪声源的方差就是

$$\sigma_e^2 = \sigma_{e0}^2 + \sigma_{e1}^2 + \sigma_{e2}^2 + \sigma_{e3}^2 + \sigma_{e4}^2 = 5 \cdot \frac{2^{-2B}}{12}, \quad (6.101)$$

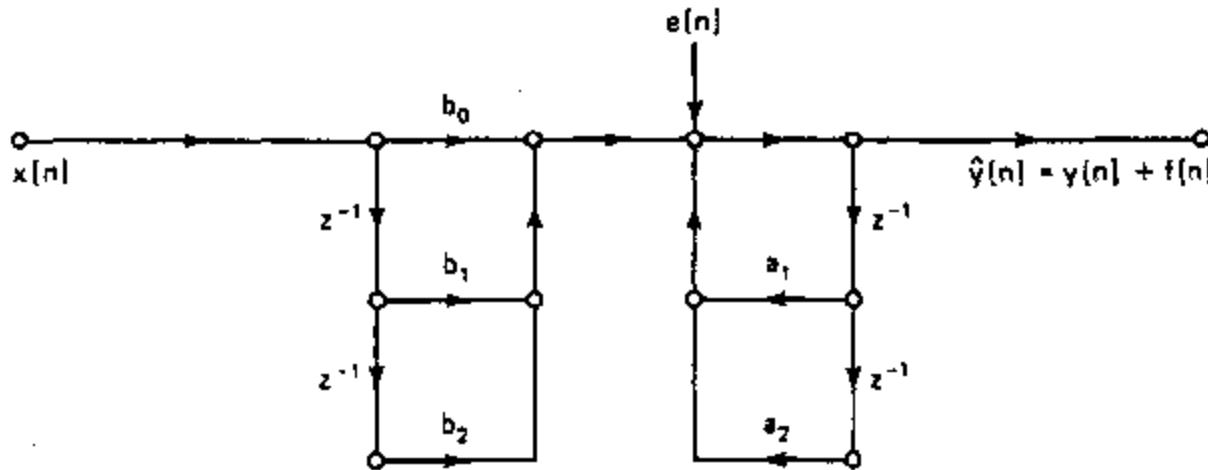


图 6.57 具有联合噪声源的直接 I 型线性噪声模型.

而对一般的直接 I 型是

$$\sigma_e^2 = (M+1+N) \frac{2^{-2B}}{12}. \quad (6.102)$$

现在,为了得到输出噪声的表示式,从图 6.57 注意到该系统有两个输入 $x[n]$ 和 $e[n]$,因为现在假设系统是线性的,输入 $\hat{y}[n]$ 就能表示成 $\hat{y}[n] = y[n] + f[n]$,其中 $y[n]$ 是理想未量化系统对输入序列 $x[n]$ 的响应,而 $f[n]$ 是系统对输入 $e[n]$ 的响应.输出 $y[n]$ 由式(6.92)的差分方程给出,但因为 $e[n]$ 是在零点以后、极点以前引入的,所以输出噪声满足下面差分方程

$$f[n] = \sum_{k=1}^N a_k f[n-k] + e[n]. \quad (6.103)$$

为了确定输出噪声序列的均值和方差,可以利用 2.10 节某些结果.考虑一个系统函数为 $H_{ef}(z)$ 的线性系统,其输入为白噪声 $e[n]$,相应输出为 $f[n]$.那么,由式(2.167)和式(2.168),输出的均值是

$$m_f = m_e \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_{ef}[n] = m_e H_{ef}(e^{j0}) \quad (6.104)$$

以及由式(6.99)和式(2.173),就可以得出:因为 $e[n]$ 是白噪声序列,输出噪声的功率密度谱就是

$$P_{ff}(\omega) = \Phi_{ff}(e^{j\omega}) = \sigma_e^2 |H_{ef}(e^{j\omega})|^2 + 2\pi m_f^2 \delta(\omega). \quad (6.105)$$

利用式(A.47b),输出噪声的方差能证明是

$$\sigma_f^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_{ff}(\omega) d\omega - m_f^2 = \sigma_e^2 \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |H_{ef}(e^{j\omega})|^2 d\omega. \quad (6.106)$$

对式(2.146)应用帕斯瓦尔定理, σ_f^2 也能表示为

$$\sigma_f^2 = \sigma_e^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h_{ef}[n]|^2, \quad (6.107)$$

或者应用帕斯瓦尔定理[式(4.83)]的 z 变换形式,

$$\sigma_f^2 = \sigma_e^2 \frac{1}{2\pi j} \oint_c H_{ef}(z) H_{ef}(z^{-1}) z^{-1} dz, \quad (6.108)$$

这就能够方便地利用4.7节讨论的柯西留数定理求值。应该注意,总噪声功率是 $\sigma_f^2 + m_e^2$ 。

我们将常利用由式(6.104)到式(6.108)所得到的结果来分析线性系统的量化噪声。例如,对图6.57的直接I型系统, $H_{ef}(z) = 1/A(z)$;这就是说,从引入全部噪声源的这一点到输出的系统函数仅由式(6.93)中的系统函数 $H(z)$ 的极点组成。因此,可以得出:由于内部舍入或截尾造成的总输出方差一般就是

$$\begin{aligned} \sigma_f^2 &= (M+1+N) \frac{2^{-2B}}{12} \frac{1}{2\pi j} \oint_c \frac{z^{-1} dz}{A(z) A(z^{-1})} \\ &= (M+1+N) \frac{2^{-2B}}{12} \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h_{ef}[n]|^2, \end{aligned} \quad (6.109)$$

式中 $h_{ef}[n]$ 是相应于 $H_{ef}(z) = 1/A(z)$ 的冲激响应。现用下面例子来说明上面结果的应用。

例 6.12

假设要实现具有下面系统函数的稳定系统

$$H(z) = \frac{b}{1 - az^{-1}}. \quad (6.110)$$

图6.58示出实现时的线性噪声模型流图,其中乘积在相加前就被量化。每个噪声源都被冲激响应为 $h_{ef}[n] = a^n u[n]$ 的系统滤波。由式(6.105),输出噪声的功率谱是

$$P_{ff}(\omega) = 2 \frac{2^{-2B}}{12} \cdot \frac{1}{1 + a^2 - 2a \cos \omega} + \frac{2\pi m_e^2 b^2}{(1-a)^2} \delta(\omega), \quad (6.111)$$

式中对舍入情况 m_e 是零,对补码截尾情况 m_e 是 $-2^{-B}/2$ 。输出端总噪声方差是

$$\sigma_f^2 = 2 \frac{2^{-2B}}{12} \sum_{n=0}^{\infty} a^{2n} = 2 \frac{2^{-2B}}{12} \frac{1}{1-a^2}. \quad (6.112)$$

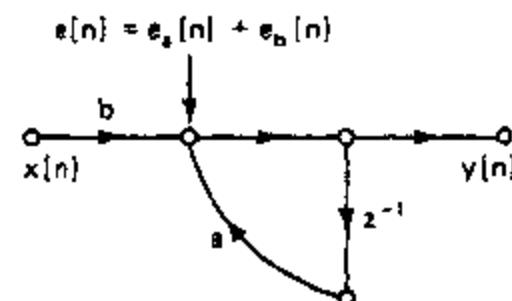


图 6.58 一阶线性噪声模型。

由式(6.112)看出,输出噪声方差随 $z=a$ 的极点向单位圆趋近而增加。因此,当 $|a|$ 接近1时,为了保持噪声方差低于某一给定值,必须用更长的字长。下面的例子也说明了这一点。

例 6.13

考虑一个稳定二阶直接I型系统,其系统函数为

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{(1 - re^{j\theta} z^{-1})(1 - re^{-j\theta} z^{-1})}. \quad (6.113)$$

该系统的线性噪声模型如图6.55(c)所示,或者等效地为图6.57所示,其中 $a_1 = 2r \cos \theta$ 和 $a_2 = -r^2$ 。在这种情况下,总输出噪声功率可以表示为:

$$\sigma_f^2 = 5 \frac{2^{-2B}}{12} \frac{1}{2\pi j} \oint_c \frac{z dz}{(z-re^{j\theta})(z-re^{-j\theta})(1-re^{j\theta}z)(1-re^{-j\theta}z)}. \quad (6.114)$$

根据柯西留数定理,可得

$$\begin{aligned} \sigma_f^2 &= 5 \frac{2^{-2B}}{12} \left[\frac{re^{j\theta}}{(re^{j\theta}-re^{-j\theta})(1-r^2e^{j2\theta})(1-r^2)} + \frac{re^{-j\theta}}{(re^{-j\theta}-re^{j\theta})(1-r^2)(1-r^2e^{-j2\theta})} \right] \\ &= 5 \frac{2^{-2B}}{12} \left(\frac{1+r^2}{1-r^2} \right) \frac{1}{r^4+1-2r^2\cos 2\theta}. \end{aligned} \quad (6.115)$$

与例 6.12 一样,随着复数共轭极点接近于单位圆($r \rightarrow 1$),总输出噪声方差增加,因此需要更长的字长才能保持方差低于某一给定值.

到目前为止对直接 I 型结构所建立的分析技术也能用到直接 II 型结构上去.对于直接 II 型结构的非线性差分方程是

$$\hat{w}[n] = \sum_{k=1}^N Q[a_k \hat{w}[n-k]] + x[n], \quad (6.116a)$$

$$\hat{y}[n] = \sum_{k=0}^M Q[b_k \hat{w}[n-k]]. \quad (6.116b)$$

图 6.59(a)示出二阶直接 II 型系统的线性噪声模型.在每次相乘之后都引入了一个噪声源,以指出乘积在相加之前已被量化到($B+1$)位.图 6.59(b)示出了一个等效的线性模型,在这里已经把由极点的实现形成的噪声源移去,并把它们合并为在输入端单一的噪声源 $e_a[n] = e_3[n] + e_4[n]$.同样,由于零点的实现形成的噪声源也把它们合并为单一的噪声源 $e_b[n] = e_0[n] + e_1[n] + e_2[n]$,这就是在输出端直接相加.对舍入($m_e=0$),由该等效模型直接可得,输出噪声的功率谱是

$$P_{ff}(\omega) = N \frac{2^{-2B}}{12} |H(e^{j\omega})|^2 + (M+1) \frac{2^{-2B}}{12} \quad (6.117)$$

输出噪声方差是

$$\begin{aligned} \sigma_f^2 &= N \frac{2^{-2B}}{12} \frac{1}{2\pi j} \oint_c H(z) H(z^{-1}) z^{-1} dz + (M+1) \frac{2^{-2B}}{12} \\ &= N \frac{2^{-2B}}{12} \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]|^2 + (M+1) \frac{2^{-2B}}{12}. \end{aligned} \quad (6.118)$$

这就是说,在实现极点中所产生的白噪声被整个系统过滤,而在实现零点中所产生的白噪声被直接加在系统的输出端.在写出式(6.118)时,已经假设在输入端的 N 个噪声源都是独立的,所以它们的和是单个量化噪声源方差的 N 倍.对 $(M+1)$ 个输出端的噪声源也作同样的假设.

将式(6.109)与式(6.118)作一比较表明,直接 I 型和直接 II 型结构在实现相应的差分方程中乘积量化的影响是不同的.一般来说,其它等效结构,如级联型、并联型、格型和转置型等与直接型结构任一种相比都有不同的总输出噪声方差.我们关心的是具有最小输出噪声方差的系统(对于动态范围限制的问题在下面讨论).然而,即使式(6.109)和式(6.118)是不同的,也不能说哪个系统一定有最小的输出噪声方差,除非已知系统系数的具体值.换句话说,要说某一种特定的结构形式一定总是产生最小的输出噪声,这是不可能的.

用($2B+1$)位加法器去累加在两个直接型系统中所要求的乘积的和来改善直接型系

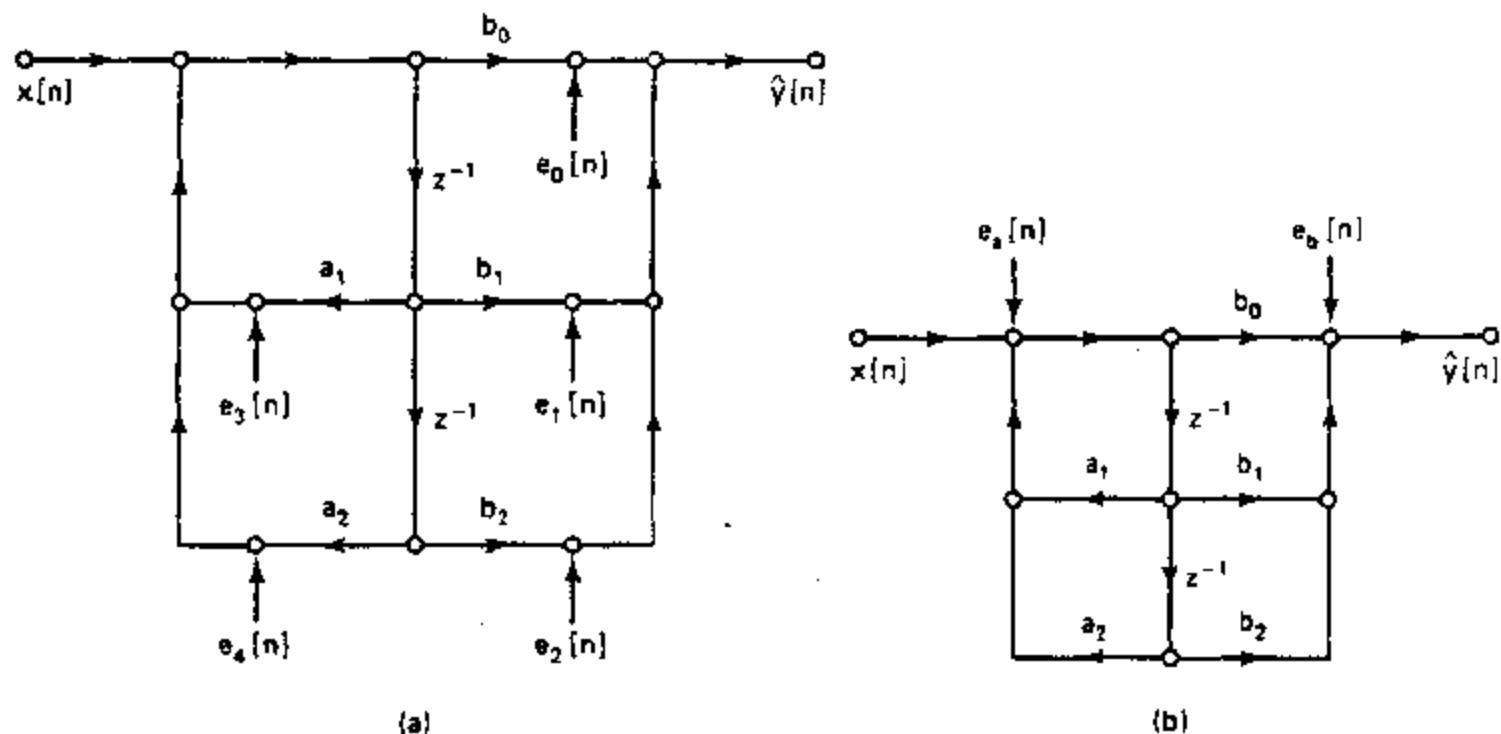


图 6.59 直接 I型线性噪声模型. (a) 表示单个乘积的量化, (b) 用联合噪声源.

统(因此也包括级联型和并联型)的噪声性能是可能的. 例如, 对直接 I型实现, 可以用如下形式的差分方程

$$\hat{y}[n] = Q \left[\sum_{k=1}^N a_k \hat{y}[n-k] + \sum_{k=0}^M b_k x[n-k] \right], \quad (6.119)$$

这就是说, 乘积的和是用 \$(2B+1)\$ 位或 \$(2B+2)\$ 位精度累加, 并对输出和延迟存储器的存贮把这个结果量化到 \$(B+1)\$ 位. 在直接 I型情况下, 这就意味着量化噪声仍然被极点过滤, 但在式(6.109)中的因子 \$(M+1+N)\$ 被 1 代替. 类似地, 对直接 II型实现, 式(6.116)的差分方程能用下式代替

$$\hat{w}[n] = Q \left[\sum_{k=1}^N a_k \hat{w}[n-k] + x[n] \right], \quad (6.120a)$$

$$\hat{y}[n] = Q \left[\sum_{k=0}^M b_k \hat{w}[n-k] \right]. \quad (6.120b)$$

这就隐含着在输入和输出端是一个单一的噪声源, 所以式(6.118)中的因子 \$N\$ 和 \$(M+1)\$ 都被 1 代替. 因此, 使用双倍长度的累加器字能明显减小直接型系统中的量化噪声.

这些结果是很容易修改成针对补码截尾的情况的. 由式(6.97)和式(6.98)可以想到, 截尾噪声源的方差是与舍入噪声源的方差相同的, 但是截尾噪声源的均值不是零. 因此, 式(6.109)和式(6.118)的总输出噪声方差公式对于截尾情况也成立. 然而, 输出噪声将有非零的平均值, 这个值可由式(6.104)算出.

6.9.2 IIR 系统浮点实现中的幅度加权

在 IIR 系统实现中利用定点运算的另一个重要考虑是可能有溢出. 如果遵循每个定点数都表示一个小数的约定(假定可能有加权因子), 那么在网络中每个节点必须限制其值小于 1 以避免溢出. 若 \$w_k[n]\$ 记作第 \$k\$ 个节点变量的值, \$h_k[n]\$ 记作从输入 \$x[n]\$ 到节点变量 \$w_k[n]\$ 的冲激响应, 那么

$$|w_k[n]| = \left| \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[n-m]h_k[m] \right|. \quad (6.121)$$

该界限

$$|w_k[n]| \leq x_{\max} \sum_{m=-\infty}^{\infty} |h_k[m]| \quad (6.122)$$

可用最大值 x_{\max} 代替 $x[n-m]$, 并根据和的绝对值小于或等于绝对值的和来得出, 因此, 使得 $|w_k[n]| < 1$ 的充分条件是

$$x_{\max} < \frac{1}{\sum_{m=-\infty}^{\infty} |h_k[m]|} \quad (6.123)$$

该条件对网络中全部节点都成立. 若 x_{\max} 不满足式(6.123), 那么可在系统的输入端将 $x[n]$ 乘以标量因子 s , 以使得 sx_{\max} 在网络全部节点上都满足式(6.123), 即

$$sx_{\max} < \frac{1}{\max_k \left[\sum_{m=-\infty}^{\infty} |h_k[m]| \right]} \quad (6.124)$$

以这种方式给输入幅度加权可保证网络中任何节点绝不会出现溢出. 式(6.123)既是必要条件也是充分条件, 因为总是存在一个输入使得式(6.122)以等号满足[见 2.4 节讨论稳定性的式(2.55)]. 然而, 式(6.123)对大多数信号来说给出的是一个非常有富裕的输入加权因子.

另一种加权方法是假设输入是一个窄带信号, 如模型为 $x[n] = x_{\max} \cos \omega_0 n$. 这时, 节点变量即是

$$w_k[n] = |H_k(e^{j\omega_0})| x_{\max} \cos(\omega_0 n + \angle H_k(e^{j\omega_0})). \quad (6.125)$$

因此, 如果

$$\max_{k, |\omega| \leq \pi} |H_k(e^{j\omega})| x_{\max} < 1 \quad (6.126)$$

或者如果输入受如下幅度加权因子加权的话

$$sx_{\max} < \frac{1}{\max_{k, |\omega| \leq \pi} |H_k(e^{j\omega})|}. \quad (6.127)$$

那么对全部正弦信号溢出都可避免.

还有另外的办法是加权输入, 以使得每个节点变量序列的总能量小于或等于输入序列的总能量. 利用施瓦茨不等式和帕斯瓦尔定理可导出合适的加权因子. 序列 $w_k[n]$ 的总能量由下式界定

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |w_k[n]|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |H_k(e^{j\omega}) X(e^{j\omega})|^2 d\omega \leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |H_k(e^{j\omega})|^2 d\omega. \quad (6.128)$$

因此, 为了保证 $\sum |w_k[n]|^2 \leq \sum |x[n]|^2$, 可以将序列 $x[n]$ 乘以幅度加权因子 s 使得

$$s^2 \leq \frac{1}{\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |H_k(e^{j\omega})|^2 d\omega} = \frac{1}{\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h_k[n]|^2}. \quad (6.129)$$

能够证明

$$\left\{ \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h_k[n]|^2 \right\}^{1/2} \leq \max_{k,\omega} |H_k(e^{j\omega})| \leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h_k[n]|. \quad (6.130)$$

因此,式(6.124)、式(6.127)和式(6.129)对于一个数字滤波器的输入端给出了得到标量因子的三种递减守恒的方法。在这三种方法中,式(6.129)一般是最容易用解析求值的,因为复数形式积分能用柯西留数定理求值。另一方面,式(6.124)用解析求值是困难的,除非系统很简单。当然,对于已知系数的具体系统,幅度加权因子可以用数值计算冲激响应或频率响应估计出。

如果输入必须向下加权($s < 1$),系统输出端的信噪比将会降低。图6.60示出标量因子在输入端的二阶直接I型和直接II型系统。对直接型系统在确定标量因子时,不必要检查网络中的每个节点。某些节点不代表相加,因此不可能溢出。另一些节点代表部分和。如果用不饱和的补码运算,这样一些节点就能允许溢出,只要某些关键节点不溢出。例如,在图6.60(a)中,可把注意力集中在用虚线圈住的这个节点上。图6.60(a)示出的标量因子是与系数 b_k 结合在一起的,以使得该噪声源与图6.57中是相同的,也就是说它具有单个量化噪声源五倍的功率^{*}。因为该噪声源还是仅由极点过滤,所以输出噪声功率在图6.57和图6.60(a)中是相同的。然而,图6.60(a)中系统的总的系统函数是 $sH(z)$ 而不是 $H(z)$,所以输出的未量化分量是 $y'[n] = sy[n]$ 而不是 $y[n]$ 。因为噪声是在幅度加权之后引入,所以在已加权的系统中信号功率对噪声功率的比是图6.57信噪比的 s^2 倍。如果幅度加权是为了避免溢出,因为 $s < 1$,信噪比就因加权而下降。

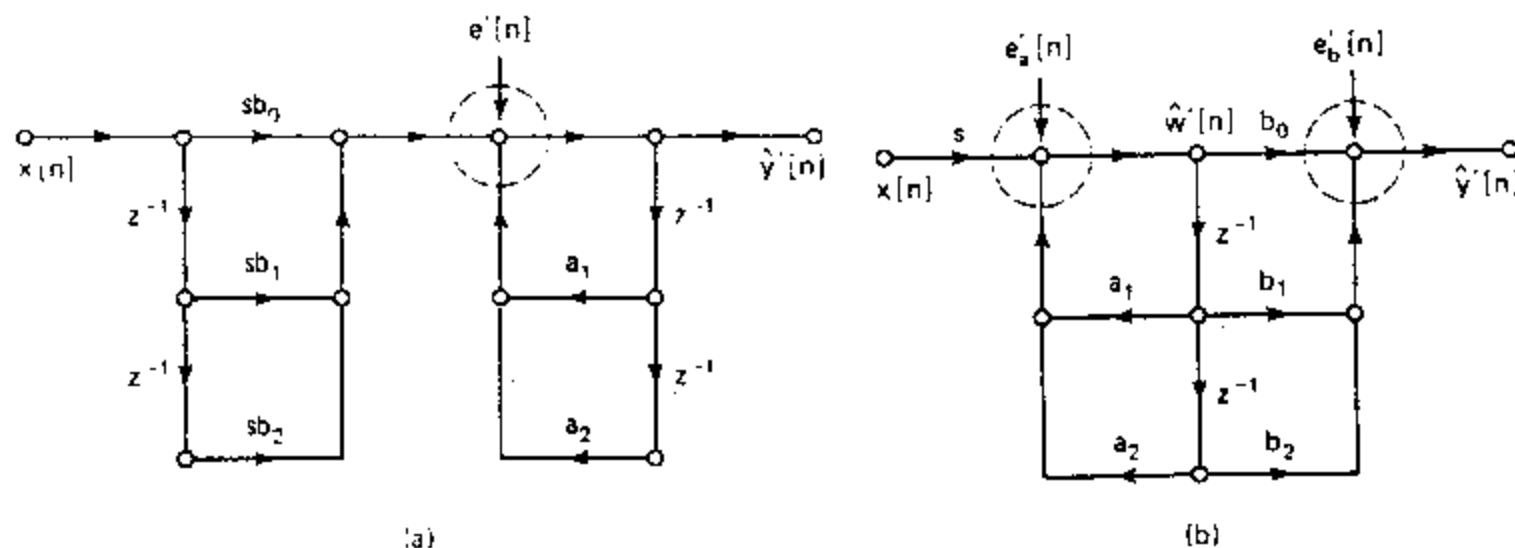


图6.60 直接型系统加权。(a)直接I型。(b)直接II型。

对图6.60(b)的直接II型系统而言,同样是正确的。在这个情况下,必须确定出标量因子以避免图6.60(b)中两个圆圈内的节点产生溢出。该系统总增益还是图6.59(b)系统增益的 s 倍,但是在这个情况下,可能有必要直接实现标量因子以避免左边节点的溢出。这个标量因子将一个附加噪声分量加到 $e_a'[n]$ 上,所以在输入端的噪声功率一般就是 $(N+1)2^{-2B}/12$ 。否则,该噪声源完全和图6.59(b)及图6.60(b)中相同的方法被系统过滤。因此,信号功率乘以 s^2 ,而输出端噪声还是由式(6.118)给出,不过 N 由 $(N+1)$ 代替。如果加权是为了避免溢出的话,信噪比还是下降。

* 这排除单独的加权相乘和量化噪声源。然而,加权(和量化) b_k 能改变该系统的频率响应。如果一个单独的输入标量因子是放在图6.60(a)零点实现的前面,那么单个量化噪声源将会通过系统 $H(z)$ 加到输出端。

例 6.14

为了说明幅度加权与舍入噪声的相互影响, 考虑例 6.12 系统, 其系统函数由式(6.110)给出. 如果标量因子与系数 b 合并在一起, 可得加权系统的流图如图 6.61 所示. 假设输入是在 -1 和 $+1$ 之间均匀分布的白色随机信号. 那么总的信号方差就是 $\sigma_x^2 = 1/3$. 为了保证在计算 $\hat{y}'[n]$ 时没有溢出, 可用式(6.124)计算幅度标量因子为

$$s = \frac{1}{\sum_{n=0}^{\infty} |b|^n |a|^n} = \frac{1 - |a|}{|b|}. \quad (6.131)$$

输出噪声方差在例 6.12 中已求出为

$$\sigma_f^2 = 2 \frac{2^{-2B}}{12} \frac{1}{1-a^2} = \sigma_f^2 \quad (6.132)$$

输出 $y'[n]$ 的方差就是

$$\sigma_y^2 = \left(\frac{1}{3} \right) \frac{s^2 b^2}{1-a^2} = s^2 \sigma_f^2. \quad (6.133)$$

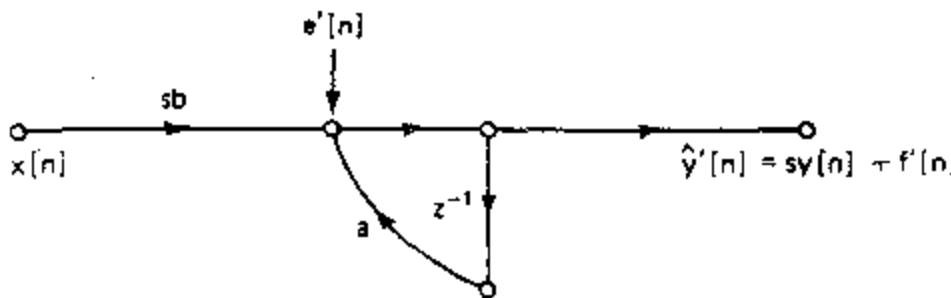


图 6.61 幅度加权的一阶系统.

因此, 信噪比是

$$\frac{\sigma_y^2}{\sigma_f^2} = s^2 \frac{\sigma_f^2}{\sigma_f^2} = \left(\frac{1 - |a|}{|b|} \right)^2 \frac{\sigma_f^2}{\sigma_f^2}. \quad (6.134)$$

随着系统的极点趋近于单位圆, 信噪比下降. 这是因为量化噪声被系统放大, 而又因为系统的高增益迫使输入向下加权以避免溢出. 再次看到, 溢出和量化噪声以相反的方式恶化系统性能.

6.9.3 级联和并联 IIR 结构分析

本节前面的结果能直接用到由二阶直接型子系统组成的并联和级联结构的分析. 在级联型中, 加权和量化的相互影响是特别令人感兴趣的. 关于级联系统的一般讨论将紧密结合具体例子来进行.

某一椭圆低通滤波器设计成满足以下指标:

$$\begin{aligned} 0.99 &\leq |H(e^{j\omega})| \leq 1.01, & |\omega| &\leq 0.5\pi, \\ |H(e^{j\omega})| &\leq 0.01, & 0.56\pi &\leq |\omega| \leq \pi. \end{aligned}$$

所得系统的系统函数是

$$H(z) = 0.079459 \prod_{k=1}^3 \left(\frac{1+b_{1k}z^{-1}+z^{-2}}{1-a_{1k}z^{-1}-a_{2k}z^{-2}} \right) = 0.079459 \prod_{k=1}^3 H_k(z), \quad (6.135)$$

其中式(6.135)的系数由表 6.4 给出. 注意到在这个例子中 $H(z)$ 的全部零点都在单位圆

上,然而一般不必要是这样.

表 6.4 级联型椭圆低通滤波器的系数

k	a_{1k}	a_{2k}	b_{1k}
1	0.478882	-0.172150	1.719454
2	0.137787	-0.610077	0.781109
3	-0.054779	-0.902374	0.411452

图 6.62(a)示出用二阶转置直接 I 型子系统级联的该系统一种可能实现的流图. 增益常数 0.079459 用于使系统的总增益在通带内近似为 1, 并且假定这就保证了系统的输出不会溢出. 图 6.62(a)示出的增益常数是放在系统的输入端. 这种方法立即减小了信号幅度, 其后果就是后续的滤波器节必须有高的增益以产生总增益为 1. 虽然量化噪声源是

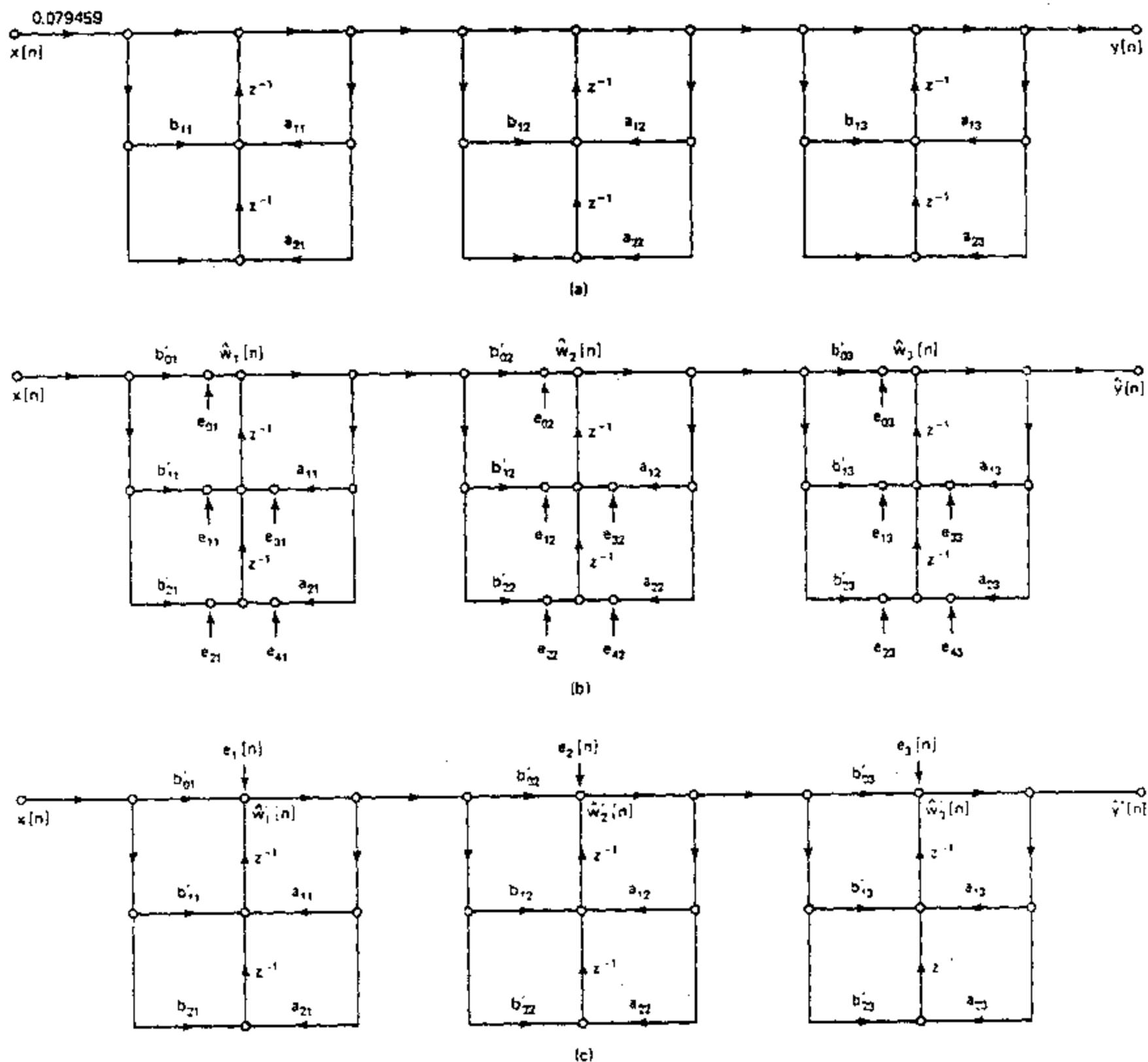


图 6.62 子系统为转置直接 I 型的六阶级联系统的模型. (a)无限精度模型. (b)表示单个乘法量化的加权系统的线性噪声模型. (c)联合噪声源的线性噪声模型.

在 0.079459 增益后引入的,但是还是被系统的其余部分同样放大,所以这不是一个好的方案.理想地,小于 1 的总增益常数应该放在级联中很后的地方,以使得信号和噪声都同时受到衰减.然而,这就有可能沿级联产生溢出.因此,一种比较好的方法是将增益在系统的三个部分之间分配,使得级联中每一级都正好避免溢出.这种分配可以表示成

$$H(z) = s_1 H_1(z) s_2 H_2(z) s_3 H_3(z), \quad (6.136)$$

式中 $s_1 s_2 s_3 = 0.079459$. 标量因子可以吸收到单个系统函数 $H_k(z) = s_k H_k(z)$ 分子的系数中去,如下式

$$H(z) = \prod_{k=1}^3 \left(\frac{b'_{0k} + b'_{1k} z^{-1} + b'_{2k} z^{-2}}{1 - a'_{1k} z^{-1} - a'_{2k} z^{-2}} \right) = \prod_{k=1}^3 H'_k(z), \quad (6.137)$$

式中 $b'_{0k} = b'_{2k} = s_k$ 和 $b'_{1k} = s_k b_{1k}$. 所得加权系统如图 6.62(b) 所示.

图 6.62(b) 示出代表乘积量化的量化噪声源也是在相加之前. 图 6.62(c) 示出一个等效的噪声模型,其中认为在某一特定节中的噪声源仅被那个节(以及后面的子系统)的极点过滤.图 6.62(c)也利用了这个事实:延迟的白噪声源仍是白噪声,并且与所有其它的噪声源无关,这样在一个子节中全部五个噪声源才能合并为一个噪声源,该噪声源具有单个量化噪声源五倍的方差量*. 因为噪声源假定都是独立的,所以输出噪声方差就是图 6.62(c) 中三个噪声源的方差之和.因此,对舍入来说,输出噪声功率谱为

$$P_{rr}(\omega) = 5 \frac{2^{-2B}}{12} \left[\frac{s_2^2 |H_2(e^{j\omega})|^2 s_3^2 |H_3(e^{j\omega})|^2}{|A_1(e^{j\omega})|^2} + \frac{s_3^2 |H_3(e^{j\omega})|^2}{|A_2(e^{j\omega})|^2} + \frac{1}{|A_3(e^{j\omega})|^2} \right] \quad (6.138)$$

总输出噪声方差为

$$\sigma_r^2 = 5 \frac{2^{-2B}}{12} \left[\frac{1}{2\pi j} \oint_C \frac{s_2^2 H_2(z) H_2(z^{-1}) s_3^2 H_3(z) H_3(z^{-1}) z^{-1} dz}{A_1(z) A_1(z^{-1})} \right. \\ \left. + \frac{1}{2\pi j} \oint_C \frac{s_3^2 H_3(z) H_3(z^{-1}) z^{-1} dz}{A_2(z) A_2(z^{-1})} + \frac{1}{2\pi j} \oint_C \frac{z^{-1} dz}{A_3(z) A_3(z^{-1})} \right]. \quad (6.139)$$

如果可以利用双倍字长累加器,那么可能只需要量化作为图 6.62(b) 中延迟单元输入的和.在这种情况下,式(6.138)和式(6.139)的因子 5 就变成 3. 再者,如果再用双倍字长的寄存器来实现图 6.62(b) 中的延迟单元,那么仅有变量 $\hat{w}_k[n]$ 需要量化,这样每个子系统就仅有一个量化噪声源.这时,式(6.138)和式(6.139)的因子 5 就变成 1.

这些标量因子 s_k 被选择在沿级联系统各点以避免溢出.在这种情况下,将用式(6.127)的加权约定.因此,选择加权常数满足于

$$s_1 \max_{|\omega| \leq \pi} |H_1(e^{j\omega})| < 1, \quad (6.140a)$$

$$s_1 s_2 \max_{|\omega| \leq \pi} |H_1(e^{j\omega}) H_2(e^{j\omega})| < 1, \quad (6.140b)$$

$$s_1 s_2 s_3 = 0.079459. \quad (6.140c)$$

最后一个条件是假设保证系统输出没有溢出.对于表 6.4 的系数,所得加权因子是 $s_1 = 0.186447$, $s_2 = 0.529236$ 和 $s_3 = 0.805267$.

式(6.138)和式(6.139)指出,输出噪声功率谱的形状和总输出噪声方差取决于构成二阶节零点与极点的配对方式,以及在级联实现中各二阶节的先后次序.的确,很容易看出,对于 N 个节,有 $N!$ 种零极点配对方式和 $N!$ 种二阶节的级联次序,总共有 $(N!)^2$ 种

* 这个讨论可以推广到证明转置直接 I 型具有与直接 I 型系统相同的噪声特性.

不同的系统. 另外, 我们既能选择直接 I 型也能选择直接 II 型(或它们的转置)来实现这些二阶节. 在这个例子中, 如果想确定具有最低输出噪声方差系统的话, 这就意味着有 144 种不同的级联系统可供考虑. 对于五个级联节, 就有 57 600 种不同的系统! 很明显, 即使对一个低阶系统的完全分析都是一件令人头痛的事, 因为像式(6.139)这样的表示式必须对每种配对和级联次序一一求值. 黄(Hwang, 1974)用了动态规划法和刘与皮莱德(Liu and Peled, 1975)用了一种直接推断的方法来降低计算量. 用于设计和分析级联型 IIR 滤波器的德纳尔(Dehner)程序包括了配对和级联先后次序的最优化结果(DSP Committee, 1979).

尽管求最佳配对和级联次序很困难, 杰克逊(Jackson, 1970a, 1970b, 1986)还是发现, 应用下面的简单规则几乎总是能得到好的结果:

1. 在 z 平面内, 最靠近单位圆的极点应该与紧靠它的零点配对.
2. 重复应用规则 1 直到全部零点和极点都配对完.
3. 所求得的二阶节应该按极点靠近单位圆的程度级联, 要么以靠近单位圆递增程度为次序, 或者以靠近单位圆递减程度为次序.

这种配对规则是根据如下考虑: 具有高的峰值增益的子系统是不希望的, 因为它们可能会引起溢出, 并且它们还将量化噪声放大. 把一个靠近单位圆的极点与其邻近的零点配对就可降低这个节的峰值增益.

规则 3 的一种考虑是由式(6.138)想到的. 可以看到某些子系统的频率响应在输出噪声功率谱的式子中出现多于一次. 如果不想要输出噪声方差谱在靠近单位圆的极点附近有高的峰值, 那么让那个极点的频率响应分量在式(6.138)中不多次出现就是有利的. 这就建议将这样一些“高 Q ”极点移到级联中开始的地方. 另一方面, 从输入到网络中某一特殊节点的频率响应将涉及到在这个节点之前的子系统频率响应的乘积. 因此, 为避免在级联的早期阶段过分降低信号电平, 应该把靠近单位圆的极点依次放在最后. 因此, 级联次序问题是依各种考虑而改变的, 其中包括总输出噪声方差和输出噪声谱的形状. 杰克逊(Jackson, 1970a, 1970b)用 L_2 范数对配对和级联次序问题作了定量分析, 并给出了一套非常详细的“经验法则”, 不用详尽地计算全部可能而得到了好的结果.

本例系统的零极点图如图 6.63 所示. 配对的零极点也已圈出来. 在这个情况下, 我们已经选择各节的级联次序是从最小峰值频率响应到最大峰值频率响应, 这样多少是接受了以较高峰值的输出噪声谱去交换在级联的早期阶段有较大的幅度加权因子. 图 6.64 说明了单个节的频率响应是如何组合成总频率响应的. 图 6.64(a)~(c)示出单个未加权子系统的频率响应. 图 6.64(d)~(f)示出总频率响应是如何构成的. 注意到, 式(6.140)的幅度加权保证了从输入到任何子系统输出的最大增益都小于 1.

这一小节的例子表明在级联 IIR 系统定点实现中所引起的问题的复杂性. 并联型多少要简单些, 因为不发生配对和排序的问题. 然而, 幅度加权仍然还是需要的, 以避免单个二阶子系统以及当各子系统的输出相加产生总输出时出现溢出. 因此, 已经获得的方法也一定适用于并联型结构. 杰克逊(Jackson, 1986)详细地讨论了并联型的分析, 并得出并联型总输出噪声功率一般可与级联型最好的配对和级联次序结果相媲美. 即便如此, 级联型还是更为常用, 因为常用的 IIR 滤波器其系统函数的零点是在单位圆上, 级联型可用较少的乘法器实现, 并对零点位置有更好的控制.

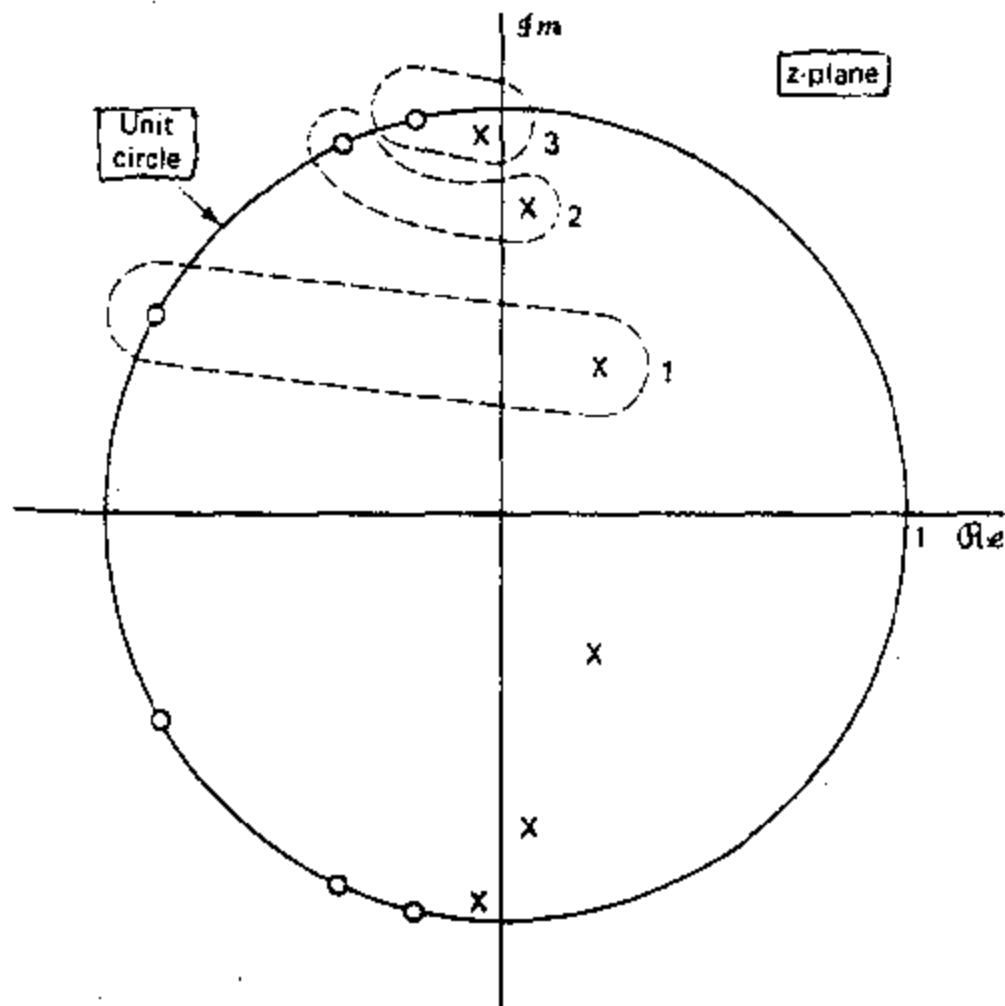


图 6.63 指出零极点配对的图 6.62 的 6 阶举例系统的零极点图.

6.9.4 直接型 FIR 系统分析

因为作为直接 I 型和直接 II 型 IIR 系统的一种特殊情况, 它包括了直接型 FIR 系统(即图 6.10 和图 6.11 中全部 a_k 为零). 因此如果将系统函数的全部极点除掉, 并将全部信号流图中的反馈路径都除掉的话, 那么 6.9.1 节和 6.9.2 节的结果和分析方法都适用于 FIR 系统. 因此, 仅仅需要在 FIR 系统范畴内检查一下这些结果就行了.

直接型 FIR 系统就是如下离散卷积

$$y[n] = \sum_{k=0}^M h[k]x[n-k]. \quad (6.141)$$

图 6.65(a)示出该理想未量化的直接型 FIR 系统. 图 6.65(b)是该系统的线性噪声模型, 假定全部乘积都在相加前量化. 这个效果就是要直接在系统的输出端引入 $(M+1)$ 个白噪声源, 这样总输出噪声方差就是

$$\sigma_f^2 = (M+1) \frac{2^{-2B}}{12}. \quad (6.142)$$

这就是在式(6.109)和式(6.118)中设定 $N=0$ 和 $h_{sf}[n]=\delta[n]$ 所得到的结果. 当用双倍长度累加器时, 就仅需要量化输出. 因此, 式(6.142)的因子 $(M+1)$ 被 1 代替. 这就使得双倍长度累加器对实现 FIR 系统来说具有一个很有吸引力的硬件特色.

在定点 FIR 系统直接型实现中溢出也是一个问题. 对于补码运算, 只需要关心输出的大小, 因为图 6.65(b)中所有其它和都是部分和. 因此, 可将冲激响应系数加权以减小溢出的可能. 6.9.2 节讨论的任何一种方法都可用来确定各标量因子. 当然, 冲激响应加权减小了系统增益, 因此输出信噪比如在 6.9.2 节讨论的那样也随着下降.

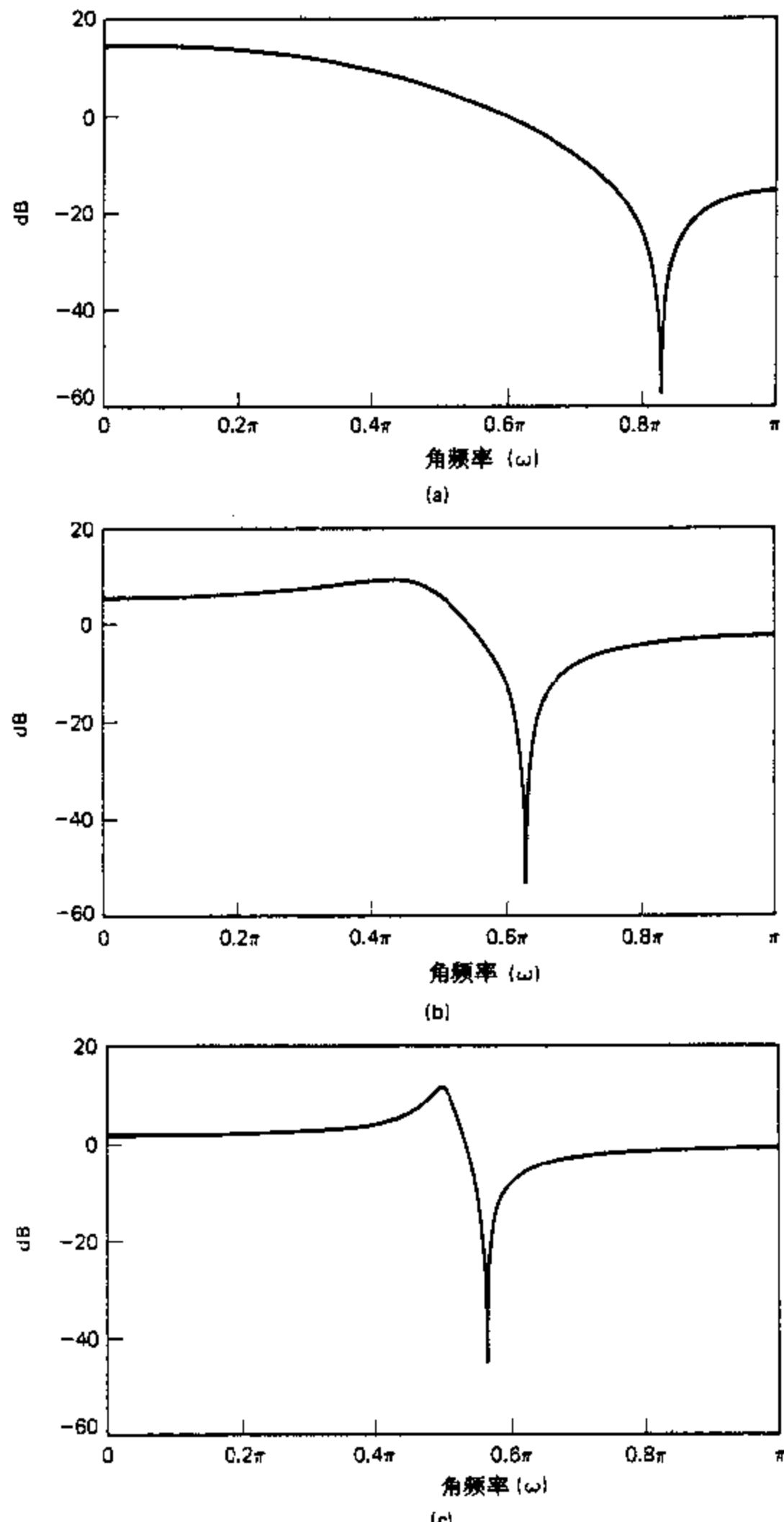


图 6.64 举例系统的频率响应. (a) $20\log_{10}|H_1(e^{j\omega})|$, (b) $20\log_{10}|H_2(e^{j\omega})|$,
(c) $20\log_{10}|H_3(e^{j\omega})|$.

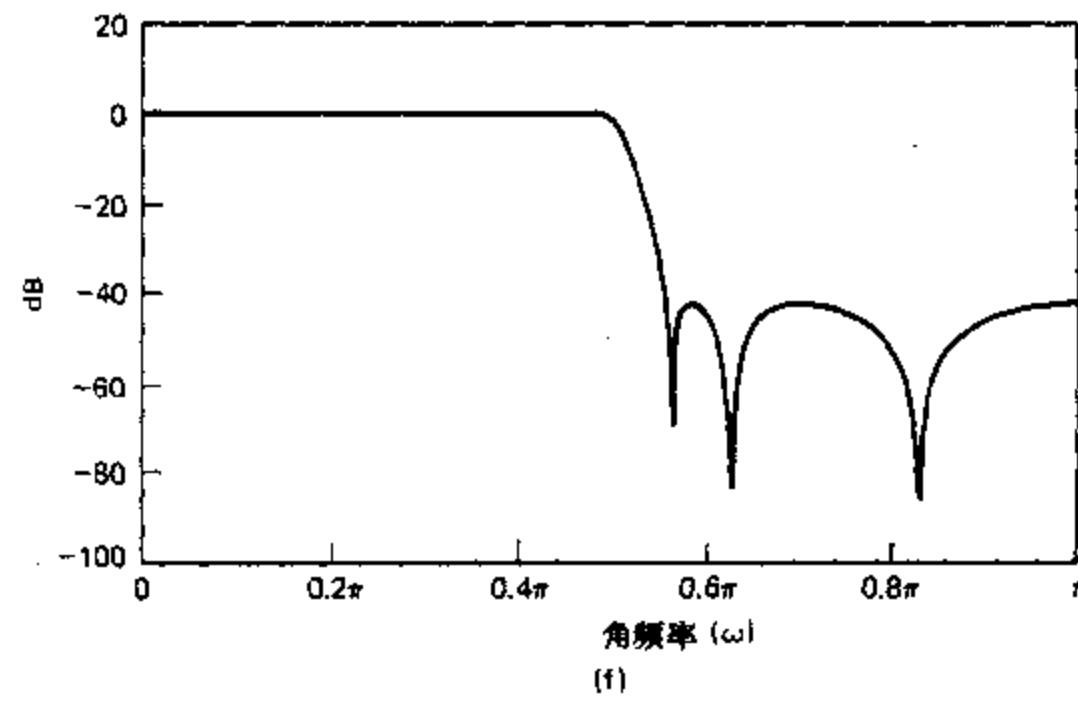
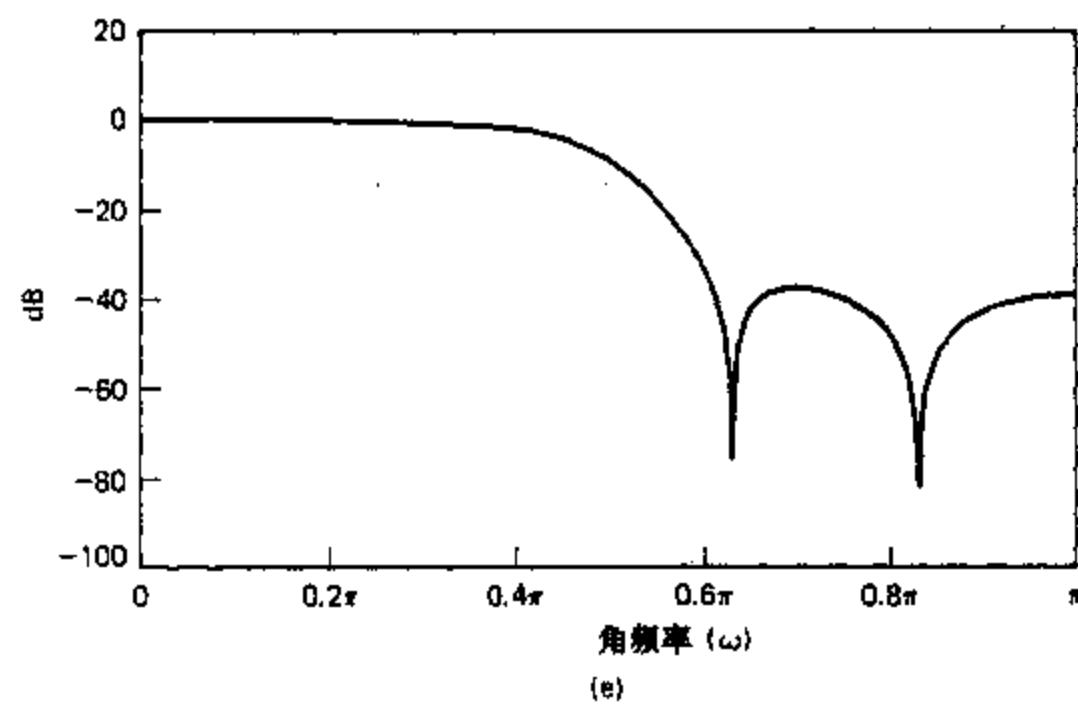
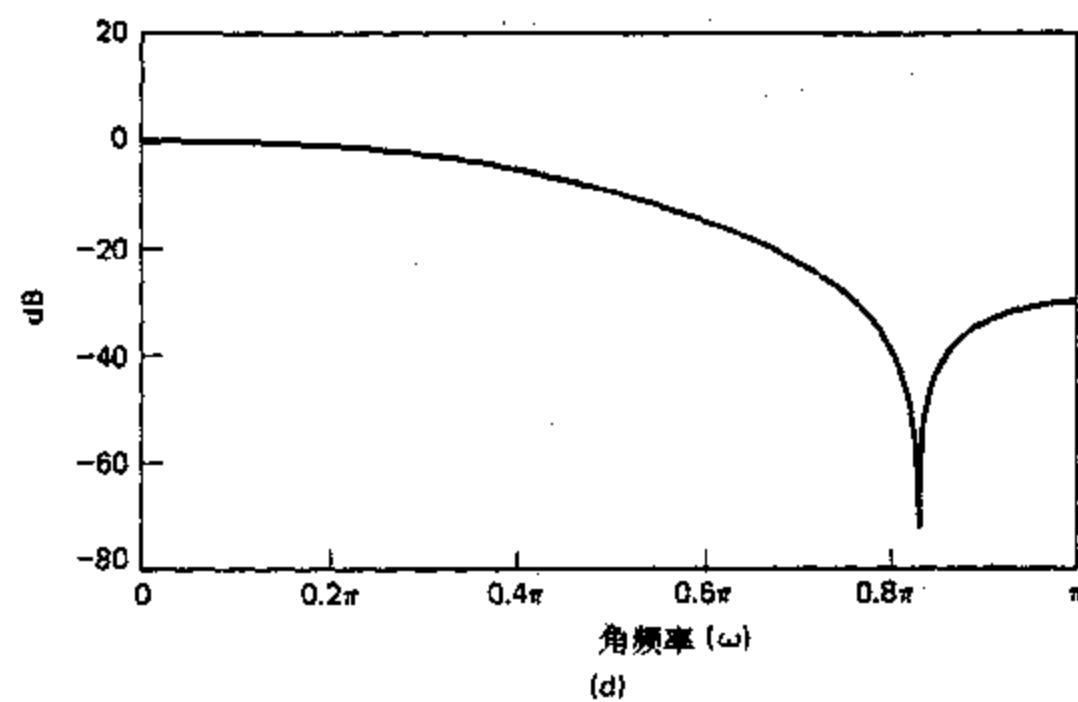


图 5.64(续) (d) $20\log_{10}|H'_1(e^{j\omega})|$, (e) $20\log_{10}|H'_1(e^{j\omega})H'_2(e^{j\omega})|$,
(f) $20\log_{10}|H'_1(e^{j\omega})H'_2(e^{j\omega})H'_3(e^{j\omega})| = 20\log_{10}|H'(e^{j\omega})|$.

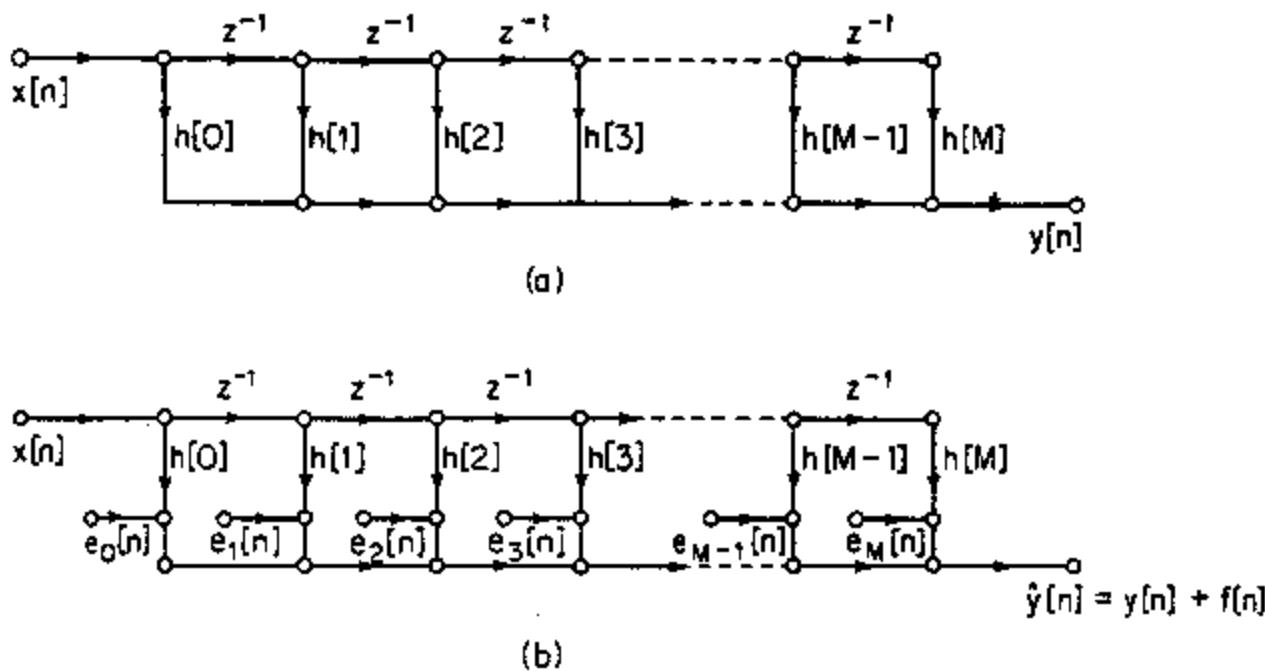


图 6.65 FIR 系统的直接型实现. (a)无限精度模型. (b)线性噪声模型.

例 6.15

考虑例 6.11 的系统. 该系统的冲激响应系数由表 6.3 给出, 经简单运算可证明

$$\sum_{n=0}^{27} |h[n]| = 1.751352,$$

$$\left(\sum_{n=0}^{27} |h[n]|^2 \right)^{1/2} = 0.679442,$$

以及由图 6.53(b)可见

$$\max_{|\omega| \leq \pi} |H(e^{j\omega})| \approx 1.009.$$

这些数都满足式(6.130)的关系. 我们看到, 所给出的这个系统是被加权以使得理论上对幅度大于 $1/1.009 = 0.9911$ 的正弦信号是有可能溢出的; 但即使这样, 对大多数信号溢出都不大可能. 确实如此, 因为该滤波器有线性相位, 我们可以证明对宽带信号, 因为在通带内增益近似为 1, 而在其余地方增益都小于 1, 那么输出信号应该小于输入信号.

在 6.5.3 节已指出像例 6.15 这种线性相位系统能用一般 FIR 系统大约一半的乘法实现. 由图 6.30 和图 6.31 的信号流图, 这点是显而易见的. 在这些情况下应该明白, 如果乘积是在相加之前量化的话, 那么输出噪声方差也减少一半.

6.5.3 节讨论了 FIR 系统的级联实现. 6.9.3 节的结果和分析方法也适用于 FIR 系统的级联实现, 但是 FIR 系统没有极点, 配对和级联次序问题简化到只有级联次序问题. 和 IIR 级联系统的情况相同, 如果系统是由很多子系统组成的话, 全部可能的级联次序分析是非常困难的. 钱和拉宾(Chan and Rabiner, 1973b, 1973c)研究过这个问题, 并发现噪声性能对级联次序相对来说是不灵敏的. 他们的结果建议: 一个好的级联次序就是从每个噪声源到输出的频率响应是相对的平坦, 并且峰值增益是小的这样一种级联次序.

6.9.5 离散时间系统的浮点实现

由上面讨论很清楚,定点运算的有限动态范围使得在离散时间系统定点数字实现中有必要仔细地给输入和中间信号电平进行幅度加权.利用浮点数值表示和浮点运算可以基本上不用这种加权.

在浮点表示中一个实数 x 是用二进制数 $2^c \hat{x}_M$ 表示的,其中加权因子的指数部分 c 称为阶,而 \hat{x}_M 是称为尾数的小数部分.在浮点运算系统中阶和尾数都是明确表示成定点二进制数的.浮点表示法为保持既有一个宽的动态范围,又有小的量化噪声给出了一种方便的方法;然而,量化误差表现出多少有些不同.浮点运算用调整阶和归一化尾数的方法使得 $0.5 \leq \hat{x}_M < 1$ 一般能保持高的精度和宽的动态范围.当浮点数相乘时,其阶相加,而尾数相乘.因此,尾数必须量化.当两个浮点数相加,它们的阶必须调整到相同,这用移动较小的数的尾数二进制小数点的方法来达到.因此相加结果也要量化.如果假设阶的范围是足够的,以致于没有比 2^c 更大的数,那么量化仅影响尾数,但是尾数误差也受到 2^c 的加权.因此,一个量化的浮点数很方便地表示成

$$\hat{x} = x(1 + \epsilon) = x + \epsilon x. \quad (6.143)$$

按照将量化误差表示成 ϵx ,这就自动地表示了这个事实,即量化误差随信号电平大小起伏而加权.

上面提到的浮点运算性质使离散时间系统浮点实现的量化误差分析复杂化了.首先,噪声源必须既要在每次相乘之后,又要在每次相加之后插入.对比于定点运算,一个重要的结果是执行相乘和相加的次序有时会造成很大的差异.对分析来说更为重要的是不再能认为量化噪声源是白噪声、且与信号无关这些假定是合理的了.事实上,在式(6.143)中,噪声是明确地用信号表示出来的.因此,如果没有对输入信号的性质做出假设,就不能对噪声进行较充分的分析.若假设输入是已知的(例如,白噪声),一种合理的假设是,相对误差 ϵ 是与 x 无关且是均匀分布的白噪声.

利用这些假设,桑德伯格(Sandberg, 1967),刘和凯内克(Liu and Kaneko, 1969),温斯坦和奥本海姆(Weinstein and Oppenheim, 1969)以及卡恩和阿加沃(Kan and Aggarwal, 1971)等都得出了一些有用的结果.特别是,温斯坦和奥本海姆比较了一阶和二阶IIR系统的浮点和定点实现.他们指出,如果代表浮点尾数的位数等于定点的字长,那么浮点运算在输出端会得到较高的信噪比.对于接近单位圆的极点发现差别要大些.不过,要用额外的位数来表示阶,并且动态范围愈大,对阶所要求的位数就愈多.实现浮点运算的硬件比定点运算也要复杂得多.因此,利用浮点运算必须增加运算单元的字长和复杂性.它的主要优点是基本上消除了溢出问题,并且如果尾数也足够长的话,量化也不成为一个问题.这就在系统设计和实现中大为简化了.

6.10 IIR 数字滤波器定点实现中的零输入极限环

对于用无限精度运算实现的稳定的IIR离散时间系统,若对 n 大于某个 n_0 值,激励变成零且一直保持为零,那么在 $n > n_0$ 的输出一定渐近地衰减到零.对同一个系统,用有限精度运现实现则输出可能将持续无限地振荡,而输入仍保持为零.这种效应常称为零输

入极限环现象,它就是系统反馈回路中非线性量化或相加溢出所造成的结果.

6.10.1 由于舍入和截尾引起的极限环

要分析数字滤波器的极限环现象是很复杂和困难的,我们将不打算在一般意义上处理这个专题.然而对于简单的一阶和二阶滤波器,明白这种效应,并用有效滤波器极点朝向单位圆移动来解释这种振荡是可能的.这种效应最好用一个例子来说明.

例 6.16

考虑由如下差分方程表征的一阶系统

$$y[n] = ay[n-1] + x[n], \quad |a| < 1. \quad (6.144)$$

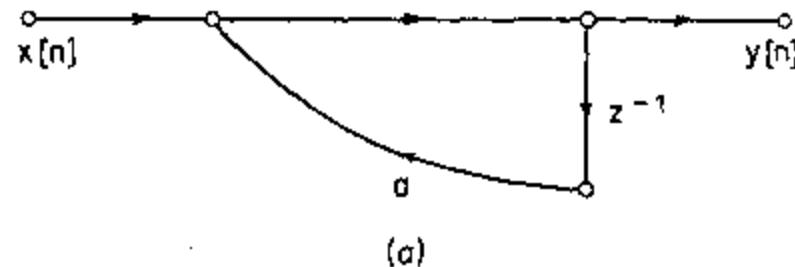
该系统的信号流图如图 6.66(a)所示,假定对于贮存系数 a 、输入 $x[n]$ 和滤波器节点变量 $y[n-1]$ 的寄存器长度是 4 位(即二进制小数点左边一个符号位和右边的 3 位).由于有限长度寄存器的关系,乘积 $ay[n-1]$ 在与 $x[n]$ 相加之前必须舍入或截断到 4 位.根据式(6.144),代表真正实现的流图如图 6.66(b)所示.假设乘积为舍入,真正的输出 $\hat{y}[n]$ 满足如下非线性差分方程

$$\hat{y}[n] = Q[ay[n-1]] + x[n], \quad (6.145)$$

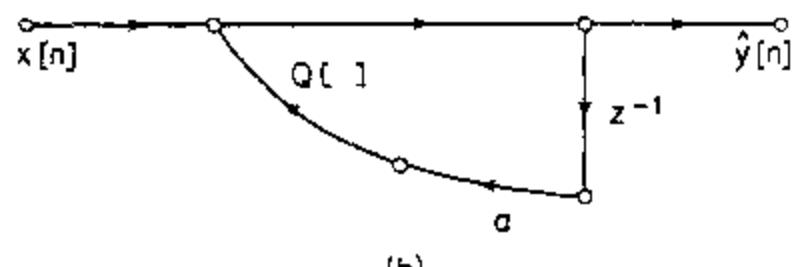
式中 $Q[\cdot]$ 代表舍入运算.假定 $a = 1/2 = 0_0100$, 并且输入是 $x[n] = (7/8)\delta[n] = (0_0111)_\delta[n]$. 利用式(6.145), 可以看出, 对 $n=0$, $\hat{y}[0] = 7/8 = 0_0111$. 为了求 $\hat{y}[1]$, 将 $\hat{y}[0]$ 乘以 a , 得到结果为 $a\hat{y}[0] = 0_0011100$, 是一个 7 位数, 它必须要舍入到 4 位. 这个数是 $7/16$, 正好在两个 4 位数量化电平 $4/8$ 和 $3/8$ 之间一半的地方. 如果在这样的情况下总是选择向上舍入, 那么 $0_0011100$ 舍入到 4 位即 $0_0100 = 1/2$. 因为 $x[1] = 0$, 那么 $\hat{y}[1] = 0_0100 = 1/2$. 继续迭代这个差分方程, 就给出 $\hat{y}[2] = Q[a\hat{y}[1]] = 0_0010 - 1/4$ 和 $\hat{y}[3] = 0_0001 = 1/8$. 在这两种情况下都不必舍入. 然而, 为了得到 $\hat{y}[4]$, 必须将 7 位数 $a\hat{y}[3] = 0_000100$ 舍入到 0_0001 . 然后, 对 $n \geq 3$ 的全部值都得出相同的结果. 这个例子的输出序列如图 6.67(a)所示. 若 $a = -1/2$, 也能完成前面的计算, 并再次表明输出如图 6.67(b)所示. 因此, 由于乘积 $a\hat{y}[n-1]$ 的舍入, 输出在 $a = 1/2$ 时达到一个恒定值 $1/8$, 以及在 $a = -1/2$ 时, 输出是在 $+1/8$ 和 $-1/8$ 之间一个周期稳态振荡. 这些是一个类似于极点在 $z = \pm 1$ 而不是在 $z = \pm 1/2$ 的一阶系统所得出的周期输出. 当 $a = +1/2$ 时, 振荡周期是 1, 而当 $a = -1/2$ 时, 振荡周期是 2. 这样的稳态周期输出称为极限环, 并且首先被布莱克曼(Blackman, 1965)发现, 他指这个幅度间隔为被称为死带的极限环. 在本例中, 这个死带就是 $-2^{-B} \leq \hat{y}[n] \leq +2^{-B}$, $B = 3$.

当一个数字滤波器是处于连续运行的应用情况下, 零输入极限环的可能存在是重要的, 因为当输入为零时, 一般总希望输出到零. 例如, 假设采样一个语音信号, 用某一数字滤波器滤波, 然后利用 D/A 转换器又转换回到声音信号. 在这样的情形下, 只要输入为零, 该滤波器就进入周期的极限环状态是很不希望有的, 因为极限环将会产生一个可以听得见的单音.

杰克逊(Jackson, 1969)根据极限环现象的观察曾经考虑过一阶和二阶系统中极限环现象的分析, 这个系统的表现就好像系统的极点是在单位圆上一样. 具体地说, 考虑例 6.16 的一阶滤波器. 按舍入定义



(a)



(b)

图 6.66 一阶 IIR 系统. (a)无限精度线性系统. (b)由于量化的非线性系统.

$$|Q[a\hat{y}[n-1]] - a\hat{y}[n-1]| \leq \frac{1}{2}(2^{-B}). \quad (6.146)$$

再者, 对极限环中的 n 值有

$$|Q[a\hat{y}[n-1]]| = |\hat{y}[n-1]|, \quad (6.147)$$

也就是说, a 的有效值是 1, 这就相应于滤波器的极点是在单位圆上. 满足这个条件的这些值的范围是:

$$|\hat{y}[n-1]| - |a\hat{y}[n-1]| \leq \frac{1}{2}(2^{-B}) \quad (6.148)$$

或者, 对 $|\hat{y}[n-1]|$ 解出

$$|\hat{y}[n-1]| \leq \frac{\frac{1}{2}(2^{-B})}{1-|a|}. \quad (6.149)$$

式(6.149)就确定了一阶滤波器的死带. 舍入的结果, 位于死带内的值都以 2^{-B} 量化[注意: 式(6.149)当 $|a|=1/2$ 时, 给出了死带的正确值]. 当输入为零时只要节点变量 $\hat{y}[n-1]$ 落入这个死带内, 滤波器就进入极限环, 并以这种模式一直保持到某一输入被加上将输出带出这个死带为止.

二阶滤波器呈现出大量的极限环现象. 考虑二阶差分方程

$$y[n] = x[n] + a_1 y[n-1] + a_2 y[n-2]. \quad (6.150)$$

式中若 $a_1^2 < -4a_2$, 该滤波器的极点就是复数共轭对; 若 $a_2 = -1$, 极点就在单位圆上. 如果乘积在实现式(6.150)中累加之前就被量化, 则

$$\hat{y}[n] = x[n] + Q[a_1\hat{y}[n-1]] + Q[a_2\hat{y}[n-2]], \quad (6.151)$$

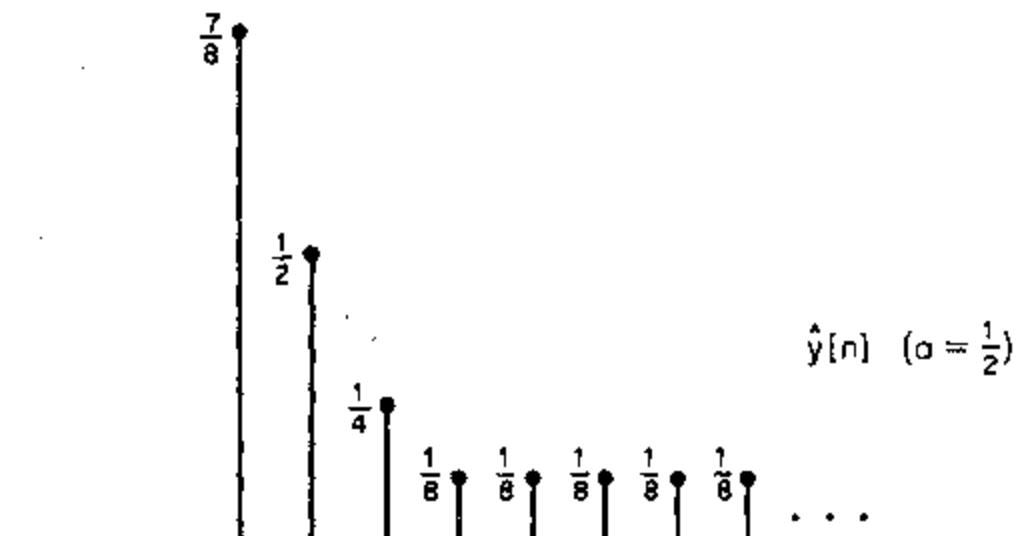
式中 $Q[\cdot]$ 再次表示所指出乘积的舍入. 如前所述, 按舍入定义

$$|Q[a_2\hat{y}[n-2]] - a_2\hat{y}[n-2]| \leq \frac{1}{2}(2^{-B}). \quad (6.152)$$

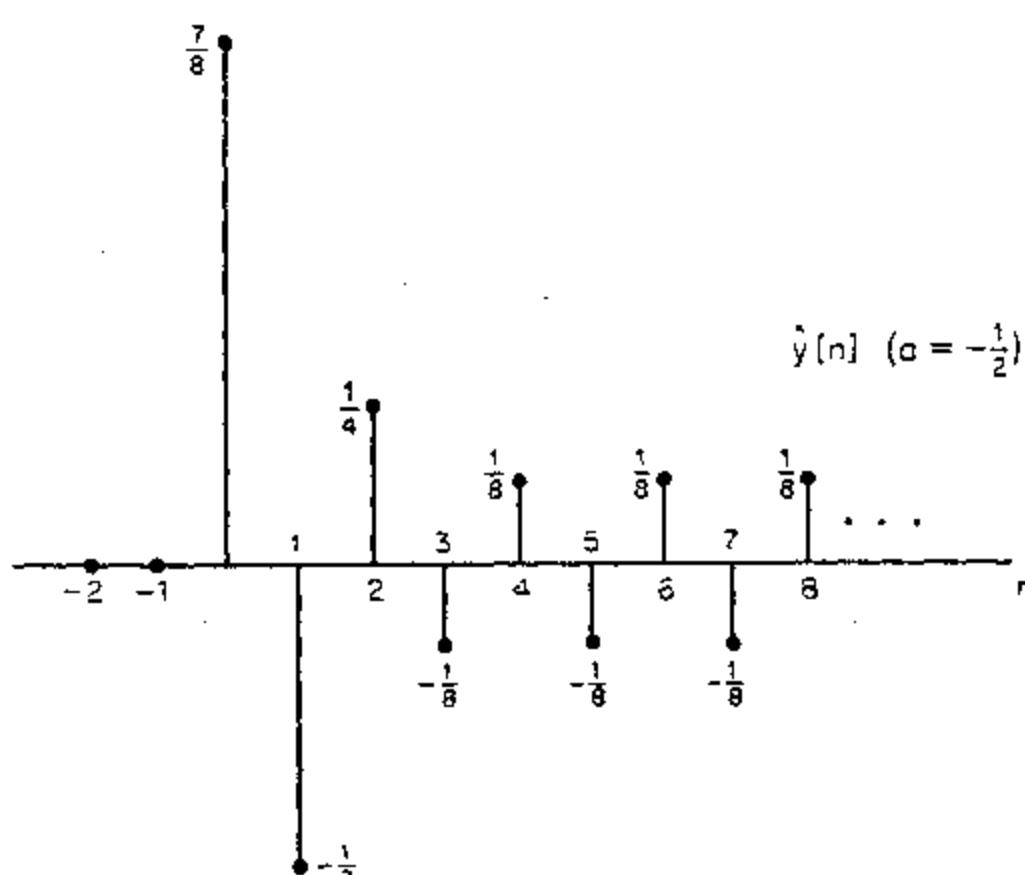
以 $x[n]=0$, 如果

$$Q[a_2\hat{y}[n-2]] = -\hat{y}[n-2], \quad (6.153)$$

该系统的极点就好像出现在单位圆上. 将式(6.153)代入式(6.152), 可得



(a)



(b)

图 6.67 图 6.66 一阶系统的冲激响应. (a) $\alpha = 1/2$. (b) $\alpha = -1/2$.

$$|\hat{y}[n-2]| = |1+a_2| \leq \frac{1}{2}(2^{-B}) \quad (6.154)$$

或者, 对 $|\hat{y}[n-2]|$ 解出

$$|\hat{y}[n-2]| \leq \frac{\frac{1}{2}(2^{-B})}{|1+a_2|}. \quad (6.155)$$

于是, 当输入为零时如果 $\hat{y}[n-2]$ 落入这个范围, 那么 a_2 的有效值就是使得该系统的极点明显地是在单位圆上. 在这些条件下, a_1 的值控制着振荡频率.

在二阶滤波器中能出现极限环现象的第二种模式中, 舍入的效果是把有效极点放在 $z=+1$ 和 $z=-1$ 上. 相应于这种模式的死带被 $1/(1-|a_1|-a_2)$ 界定. 在这个带内极限环的幅度自然就按 2^{-B} 量化 (Jackson, 1969).

这里讨论仅涉及到一阶和二阶 IIR 系统中由舍入而产生的零输入极限环。虽然这一分析是稍许简单化了一些，但是已经找到的一些简单公式与实验结果也是一致的，并且在 IIR 数字滤波器中判断极限环现象是有用的。类似的分析方法也能用于截尾的情况（例如，见习题 6.33）。在高阶系统并联实现的情况下，当输入为零时，单个二阶系统的输出是独立的。因此，可以直接应用上述分析。在级联实现的情况下，仅在第一节有零输入，后续各节可以呈现它们自己特性的极限环现象，或者只表现为对前节极限环输出的过滤。对用其它滤波器结构实现的高阶系统，极限环现象变得更为复杂，它的分析也非常复杂。当输入不为零时，量化效应与输入有关，除了对于像冲激、阶跃或正弦这些简单的输入外，本节的分析方法是完全不适合的。在其它情况下，量化现象的复杂性迫使我们求助于统计模型。

除了给出在数字滤波器中极限环效应的一种解释外，当一个系统的零输入极限环响应是所要求的输出时，前述结果也是有用的。例如，与用于信号的产生和离散傅里叶变换系数的产生的数字正弦波振荡有关时就属于这种情况。

6.10.2 由于溢出而出现的极限环

除了上面讨论的这类极限环外，由于溢出能发生一种更加严重的极限环形式。溢出的效果是在输出端插进了很大的误差，并且在某些情况下，滤波器输出就在大幅度的极限值间振荡。这样的极限环称为溢出振荡。埃伯特(Ebert, 1969)等人曾详细讨论过由溢出引起的振荡问题。现用下面例子来说明溢出振荡。

例 6.17

考虑由下面差分方程实现的二阶系统

$$\hat{y}[n] = x[n] + Q[a_1 \hat{y}[n-1]] + Q[a_2 \hat{y}[n-2]], \quad (6.156)$$

式中 $Q[\cdot]$ 代表字长 3 位加符号位的补码舍入。溢出可以因乘积舍入的补码相加而发生。假定 $a_1 = 3/4 = 0_0110$, $a_2 = -3/4 = 1_0010$ ，并假定 $x[n]$ 在 $n \geq 0$ 一直保持为零。再者，假设 $\hat{y}[-1] = 3/4 = 0_0110$ 和 $\hat{y}[-2] = -3/4 = 1_0010$ 。现在，在 $n=0$ 的输出是

$$\hat{y}[0] = 0_0110 \times 0_0110 + 1_0010 \times 1_0010.$$

如果用补码运算求该乘积，可得

$$\hat{y}[0] = 0_0100100 + 0_0100100$$

并且，如果当一个数是在两个量化电平之间一半的地方时选用向上量化的办法，该补码相加的结果就是：

$$\hat{y}[0] = 0_0101 + 0_0101 = 1_0010 = -\frac{3}{4}.$$

这时，二进制进位溢出到符号位，因此，把这个正数的和改变成一个负数。重复这一过程就给出

$$\hat{y}[1] = 1_0011 + 1_0011 = 0_0110 = \frac{3}{4}.$$

这时，由符号位之和所产生的二进制进位就丢失了。负数的和又映射为一个正数。很明显， $\hat{y}[n]$ 将一直在 $+3/4$ 和 $-3/4$ 之间振荡直到输入被加上为止。这样， $\hat{y}[n]$ 就进入到一个周期的极限环，其周期为 2，而幅度几乎是实现的满量程幅度。

这个例子说明溢出振荡是怎样发生的. 高阶系统能呈现出非常复杂的特性, 以及出现其它一些频率. 类似于 6.10.1 节的一些结果, 对于估计在什么样的差分方程情况下能产生溢出振荡也是有的(Ebert et al., 1969). , 利用图 6.44(b) 的饱和溢出特性可以避免溢出振荡(Ebert et al., 1969).

研究极限环一般问题的一条途径是寻求不支持极限环振荡的各种结构. 利用状态空间表示法(Barnes and Fam, 1977; Mills et al., 1978) 和模拟系统中与无源性类似的概念(Rao and Kailath, 1984; Fettweis, 1986), 这样的结构已经得到. 然而, 这些结构一般都比等效的级联或并联型实现要求更多的计算. 用增加运算字长, 一般能避免溢出. 相类似, 因为舍入极限环通常是限制在二进制字的最低有效位上, 所以增加位数可以用来减小极限环的有效幅度. 克拉森等人(Claasen et al., 1973)也指出, 如果用双倍长度累加器, 使得量化发生在乘积的累加之后, 那么在二阶系统中由于舍入而发生极限环的可能很小. 因此, 对于极限环问题就要在字长和计算算法复杂性之间求折衷, 这就好比在系数量化和舍入噪声之间所做的事情一样.

最后, 要指出溢出和舍入所产生的零输入极限环是仅存在于 IIR 系统中的一种现象. FIR 系统不可能支持零输入极限环, 因为它们没有反馈路径. FIR 系统的输出在输入变成零且一直保持为零后不会迟于 $(M+1)$ 个样本也一定为零. 在不能容许极限环振荡的应用场合, 这是 FIR 系统的一个主要优点.

6.11 小 结

在这一章, 我们已经讨论了实现线性时不变离散时间系统的很多方面的问题. 本章的前半部分主要放在基本实现结构上. 在介绍方框图和信号流图作为差分方程的图形表示法以后, 我们讨论了 IIR 和 FIR 离散时间系统的几种基本结构. 这些包括直接 I 型、直接 II 型、级联型、并联型、格型和转置型. 正如所表明的, 这些类型当用无限精度运算实现时全都是等效的. 然而, 不同的结构在有限精度实现范围内则有很大的差别. 因此, 本章剩余部分就放在这些基本结构的数字实现中与有限精度或量化有关的一些问题上.

我们从简单地论述数字数的表示着手, 并纵观一下量化效应在采样(第三章已讨论)、离散时间系统系数的表示以及用有限精度运算实现系统中是重要的. 通过简单的灵敏度分析和系数量化效应的几个例子说明了差分方程系数量化的影响. 该问题的论述是独立于有限精度运算效应的, 已表明有限精度运算效应在系统中引入了非线性. 我们说明了在某些情况中, 这个非线性就是使得系统的输入变成零以后, 系统仍可能有持续的极限环振荡的原因. 也说明了量化效应可以用独立的随机白噪声源构成的模型来表示, 这些噪声源都是从网络内部引入的. 对直接型和级联型结构建立了这样的线性噪声模型. 在量化效应的全部讨论中最根本的问题就是高的量化精度要求和保持尽可能大的信号幅度范围之间的矛盾. 我们看到, 在定点实现中, 可以牺牲一个而改善另一个, 但是为了改善一个而不影响另一个就要求增加用来表示系数和信号幅度的位数. 这可以用增加定点字长或者采用浮点表示的方法来实现.

讨论量化效应有两个目的. 首先, 已经得到的几个结果可用于指导实际系统的设计.

我们发现,量化效应在很大程度上取决于所采用的结构和要实现系统的具体参数;并且即使一般需要由系统仿真来求出系统的特性,但在设计过程中,很多已讨论出的结果在作出明智的决策上仍是有用的.第二,本章这部分内容的同样重要的作用是要说明一种分析的路子,这种分析方法在研究量化效应中可用于各种数字信号处理算法.本章的各个例子指出在研究量化效应时一般都是可以这样做的假设和近似的形式.我们将把在本章所建立的分析方法用于第九章研究离散傅里叶变换中的量化效应分析.

习 题

6.1 求图 P6.1 两个网络的系统函数,并证明它们有相同的极点.

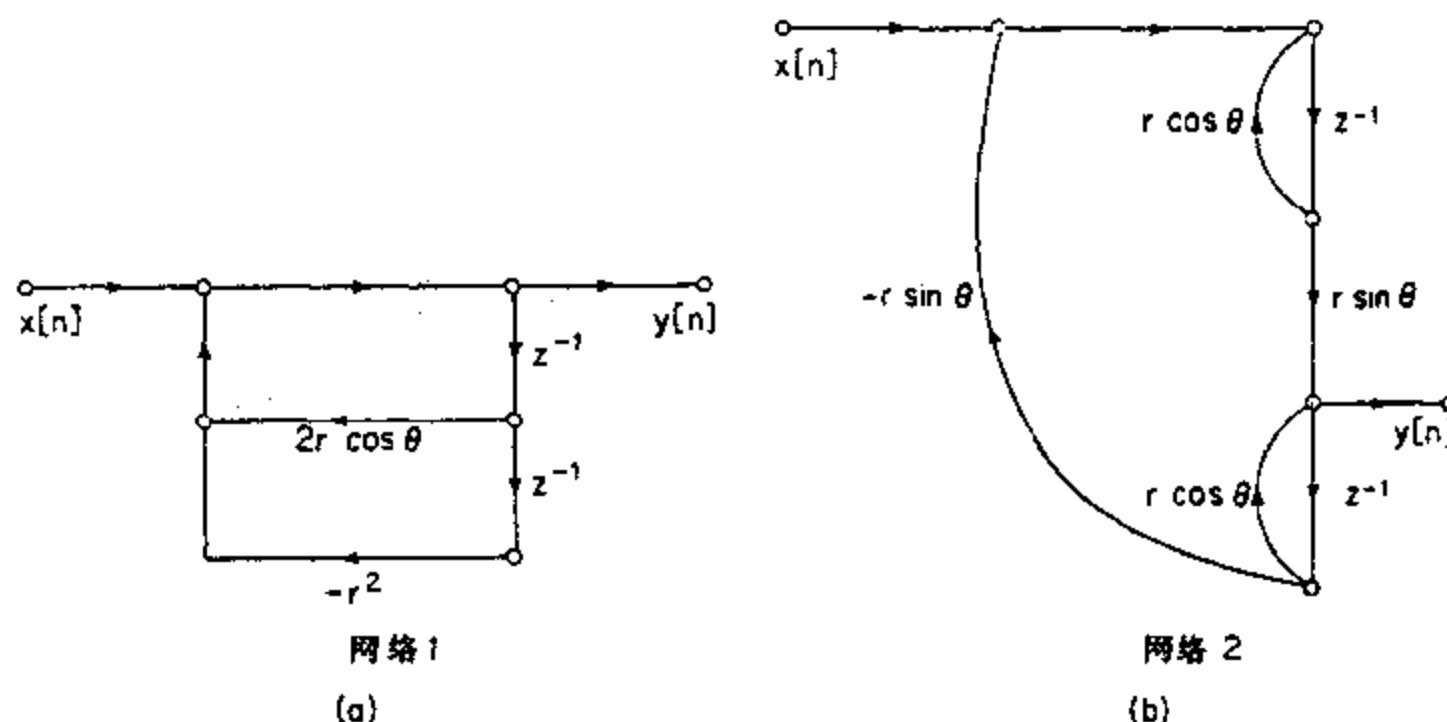


图 P6.1

6.2 图 P6.2 代表一个线性常系数差分方程的信号流图,求输出 $y[n]$ 关于输入 $x[n]$ 的差分方程.

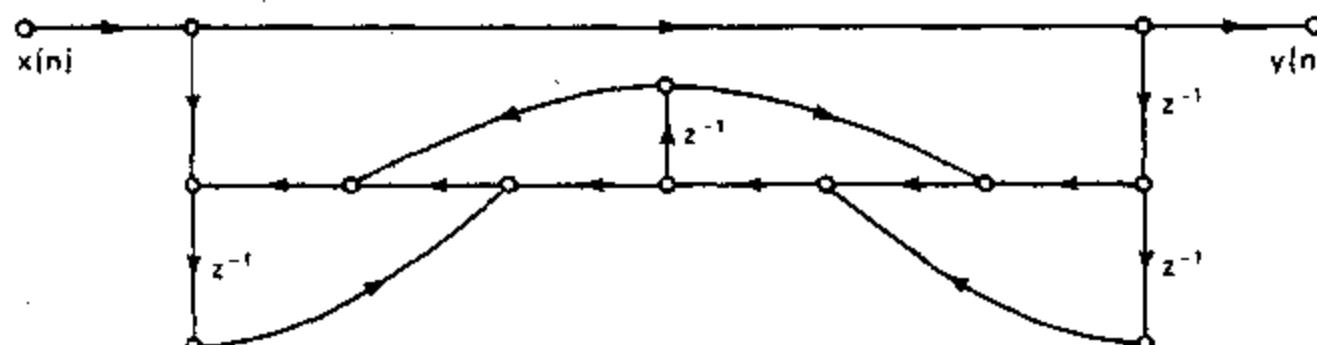


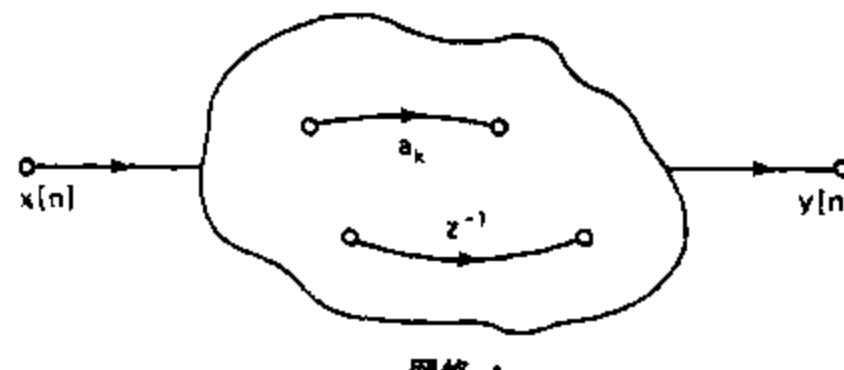
图 P6.2

6.3 考虑某一由系数乘法器和延迟单元组成的一般信号流图(记作网络 A),如图 P6.3-1 所示.如果系统是初始松弛的,其特性完全由它的冲激响应 $h[n]$ 表征.现在要将该系统作一些变化以得到一个新的流图(记作网络 A_1),其冲激响应为 $h_1[n] = (-1)^n h[n]$.

(a)若 $H(e^{j\omega})$ 如图 P6.3-2 所示,试画出 $H_1(e^{j\omega})$.

(b)说明如何用网络 A 的系数乘法器和/或延迟支路的简单变化由网络 A 而形成一个新的网络 A_1 ,
 A_1 的冲激响应就是 $h_1[n]$.

(c)若网络 A 如图 P6.3-3 所示,说明如何仅用系数乘法器的简单变化把该网络 A 变化为冲激响应
为 $h_1[n]$ 的网络 A_1 .



网络 A

图 P6.3-1

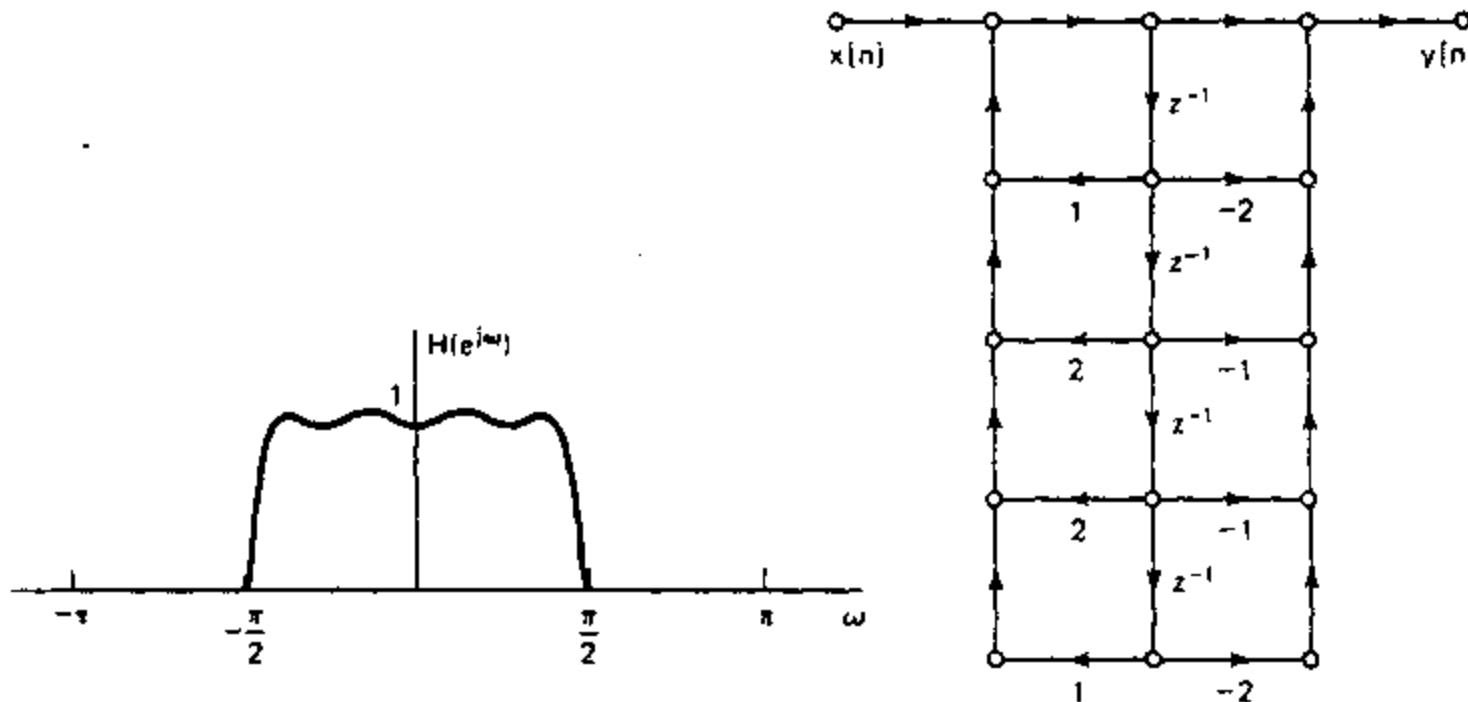


图 P6.3-2

图 P6.3-3

6.4 在很多应用中,能产生正弦序列的系统是有用的.一种办法是用冲激响应为 $h[n] = e^{j\omega_0 n} u[n]$ 的系统来实现.因此, $h[n]$ 的实部和虚部就是 $h_r[n] = (\cos \omega_0 n) u[n]$ 和 $h_i[n] = (\sin \omega_0 n) u[n]$.

在实现具有复冲激响应的系统时,实部和虚部是作为单独的输出分开的.首先写出产生所要求冲激响应的复数差分方程,然后把它分成实部和虚部,画出实现该系统的流图.所画的流图中仅能有实系数.这种实现有时就称为耦合型振荡器,因为当输入由冲激激励时输出就是正弦序列.

6.5 对于系统函数

$$H(z) = \frac{1 + 2z^{-1} + z^{-2}}{1 - \frac{3}{4}z^{-1} + \frac{1}{8}z^{-2}},$$

作为一阶系统的级联对该系统画出所有可能实现的流图.

6.6 图 P6.6 的流图是不可计算的;也就是说,用该流图所表示的差分方程不能计算出输出,因为流图中包含了一个没有延迟单元的闭合回路.

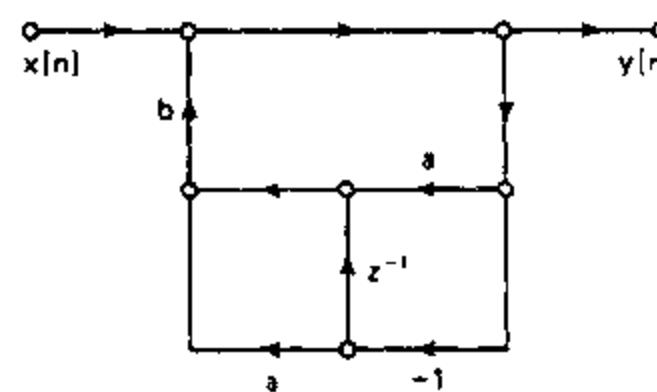


图 P6.6

(a) 写出图 P6.6 系统的差分方程，并由差分方程求网络的系统函数；

(b) 由系统函数求一个可计算的流图。

6.7 考虑一因果线性时不变系统，其系统函数为

$$H(z) = \frac{1 + \frac{1}{5}z^{-1}}{\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1} + \frac{1}{3}z^{-2}\right)\left(1 + \frac{1}{4}z^{-1}\right)}$$

(a) 对下列每种形式画出系统实现的信号流图：

- (i) 直接 I 型
- (ii) 直接 II 型
- (iii) 用一阶和二阶直接 I 型节的级联型
- (iv) 用一阶和二阶直接 I 型节的并联型
- (v) 转置直接 II 型

(b) 对于上面(a)中(v)的流图，写出差分方程，并证明该系统有正确的系统函数。

6.8 图 P6.8 示出几个流图。求每个流图的转置，并证明在每种情况下，原流图与其转置型流图都有相同的系统函数。

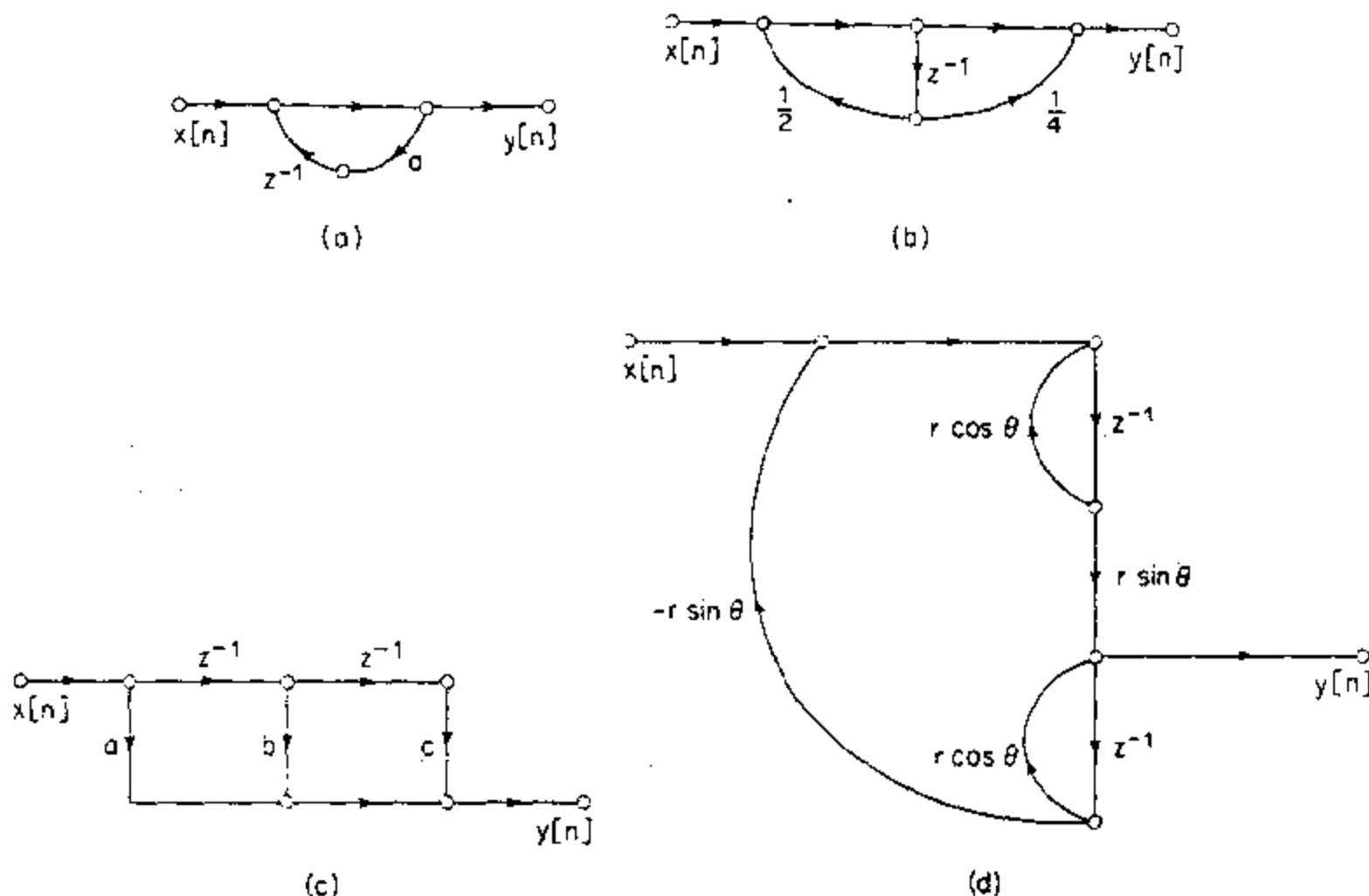


图 P6.8

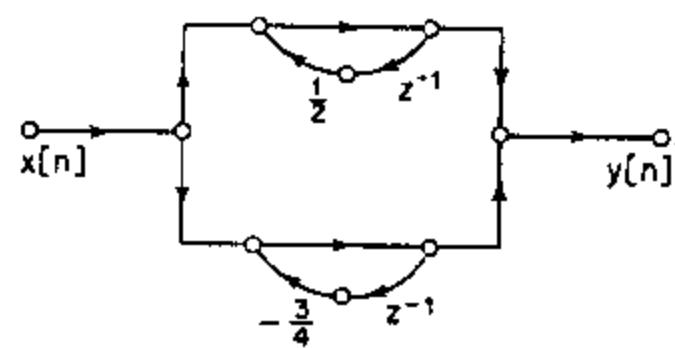
6.9 图 P6.9(a)~(f)示出六个系统，试确定最后五个(b)~(f)中的哪一个与(a)有相同的系统函数。你应该凭观察就能排除某些可能。

6.10 考虑图 P6.10 的系统。

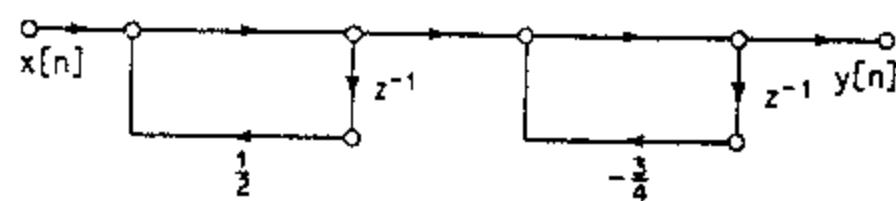
(a) 求系统函数 $Y(z)/X(z)$ 。

(b) 写出输入输出序列满足的差分方程。

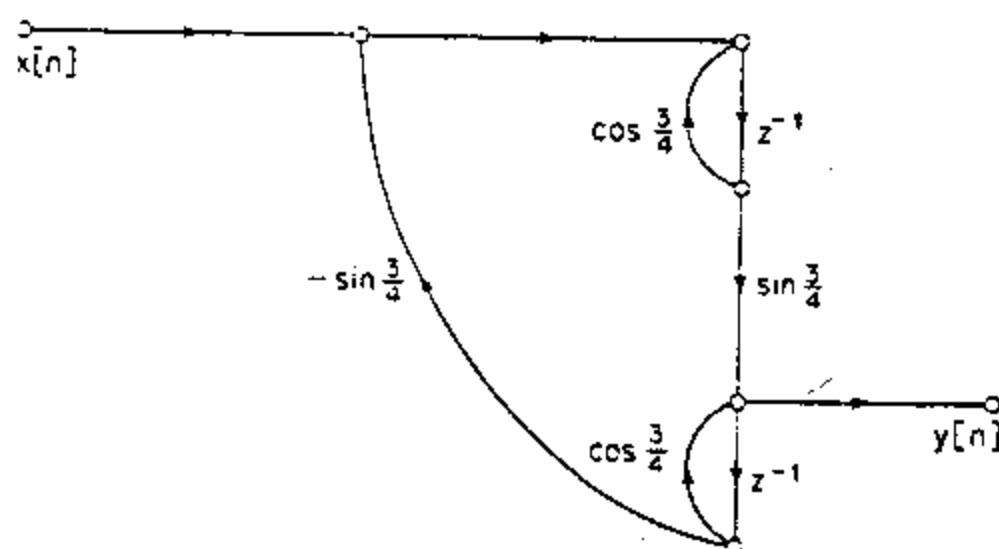
(c) 画出一种与图 P6.10 系统具有相同输入输出关系，但具有最少可能延迟单元个数的信号流图。



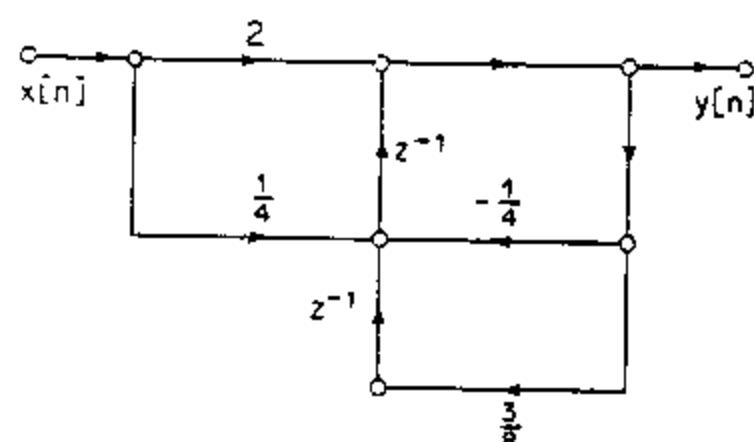
(a)



(b)



(c)



(d)

图 P6.9

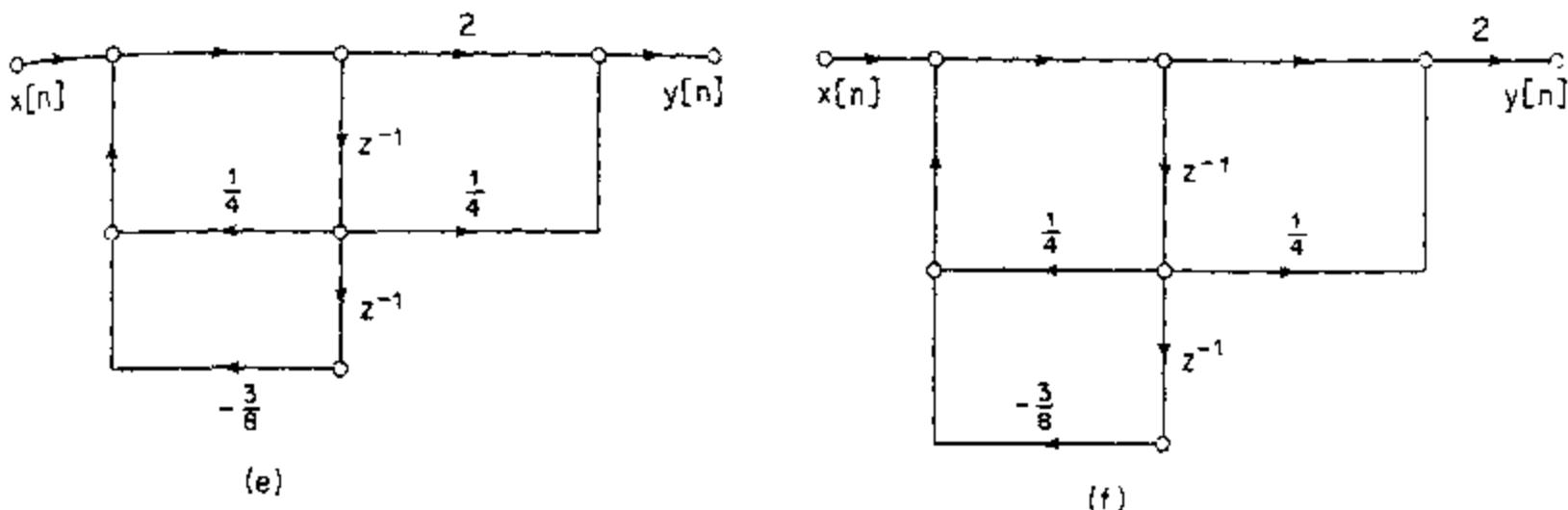


图 P6.9(续)

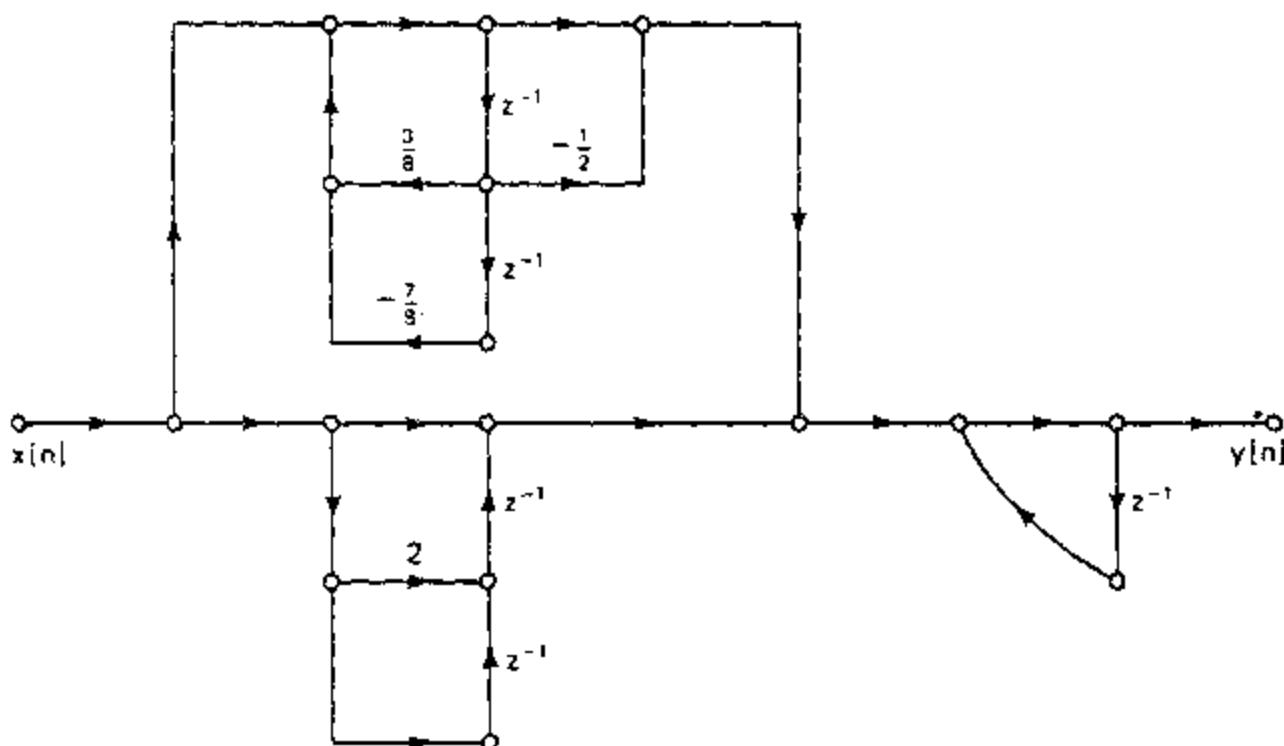


图 P6.10

6.11 一线性时不变系统用图 P6.11 的流图实现.

- 写出由该流图所代表的差分方程.
- 该系统的系统函数是什么?
- 在图 P6.11 的实现中,计算每个输出样本需要多少次实数乘法和实数加法? (假设 $x[n]$ 是实数,且假设乘 1 不计在乘法总次数中.)

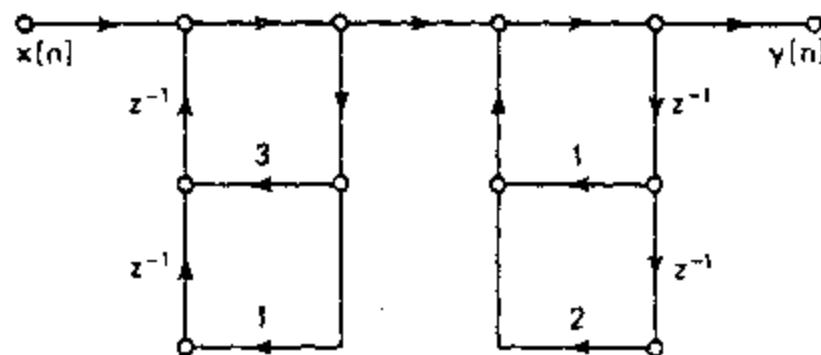


图 P6.11

- 图 P6.11 的实现要求四个存储寄存器(延迟单元),用另一种不同的结构,有可能减少存储寄存器个数吗? 若可以,画出其流图,若不行,请解释为什么不能再减少.

6.12 一线性时不变系统,其系统函数为

$$H(z) = \frac{0.2(1+z^{-1})^6}{\left(1-2z^{-1}+\frac{7}{8}z^{-2}\right)\left(1+z^{-1}+\frac{1}{2}z^{-2}\right)\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}+z^{-2}\right)}$$

现在要用图 P6.12 所示形式的流图实现.

- (a) 将图 P6.12 中的全部系数填入, 你的答案是唯一的吗?
- (b) 在图 P6.12 中选定合适的节点变量, 并写出由该流图所代表的一组差分方程.

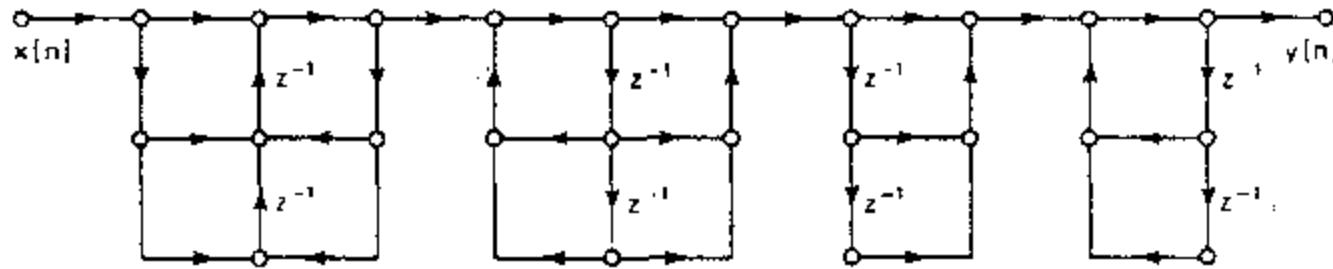


图 P6.12

- 6.13 下列简单的 FORTRAN 程序实现了一个二阶离散时间滤波器. 输入序列存放在长度为 L 的数组 X 内, 输出序列放在数组 Y 内.

```

DIMENSION X(L),Y(L)
F=0.
G=0.
DO 1 N=1,L
    Y(N)=X(N)+F
    F=-X(N)+0.75*Y(N)+G
    G=-0.125*Y(N)
1 CONTINUE
STOP
END

```

试画出该系统的流图表示.

- 6.14 求图 P6.14 各系统的冲激响应.

- 6.15 一线性时不变系统的冲激响应是

$$h[n] = \begin{cases} a^n, & 0 \leq n \leq 7, \\ 0, & \text{其它.} \end{cases}$$

- (a) 画出该系统的一种直接型 FIR 实现流图.

- (b) 证明对应的系统函数为

$$H(z) = \frac{1-a^8z^{-8}}{1-az^{-1}}, \quad |z| > |a|.$$

- (c) 画出另一种系统流图, 该流图具有相同的系统函数, 且由 FIR 系统与 IIR 系统级联所组成 (设 $|a| < 1$).

- (d) 系统的哪一种实现要求

- (i) 最多存储器(延迟单元)?
- (ii) 最多的运算次数(每输出样本的乘法和加法次数)?

- 6.16 考虑一 FIR 系统, 其冲激响应是

$$h[n] = \begin{cases} \frac{1}{15}(1+\cos[(2\pi/15)(n-n_0)]), & 0 \leq n \leq 14, \\ 0, & \text{其它.} \end{cases}$$

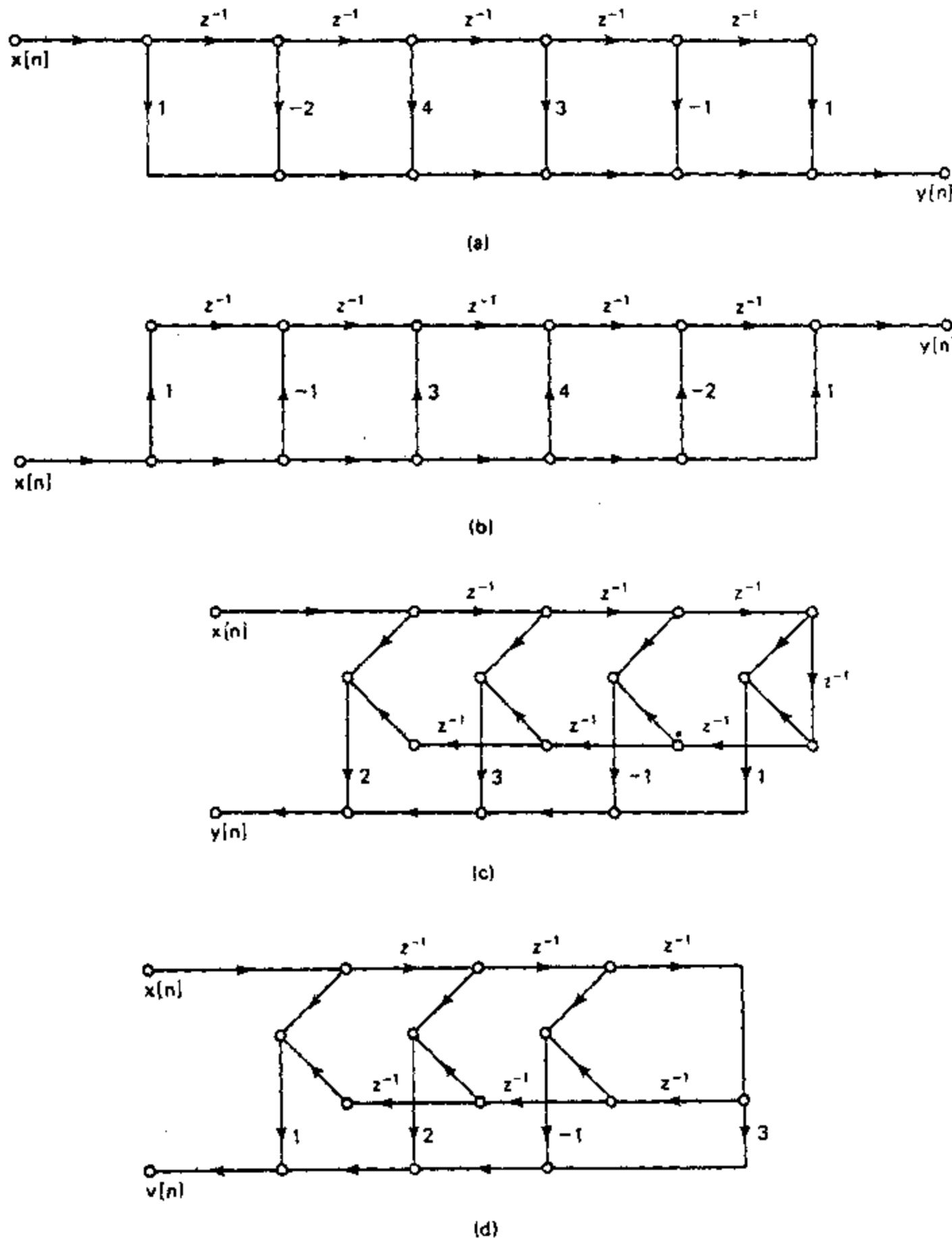


图 P6.14

该系统是频率采样滤波器的一个例子。

(a) 对 $n_0=0$ 和 $n_0=7$, 画出该系统的冲激响应。

(b) 证明该系统的系统函数为

$$H(z) = (1-z^{-15}) \cdot \frac{1}{15} \left[\frac{1}{1-z^{-1}} + \frac{\frac{1}{2}e^{-j2\pi n_0/15}}{1-e^{j2\pi/15}z^{-1}} + \frac{\frac{1}{2}e^{j2\pi n_0/15}}{1-e^{-j2\pi/15}z^{-1}} \right].$$

(c) 证明, 若 $n_0=7$, 系统的频率响应可以表示为

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{15}e^{-j\omega} \left\{ \frac{\sin(\omega/15/2)}{\sin(\omega/2)} + \frac{1}{2} \frac{\sin[(\omega-2\pi/15)15/2]}{\sin[(\omega-2\pi/15)/2]} + \frac{1}{2} \frac{\sin[(\omega+2\pi/15)15/2]}{\sin[(\omega+2\pi/15)/2]} \right\}.$$

利用该表示式画出 $n_0=7$ 时系统频率响应的幅度. 对 $n_0=0$ 求得一个类似的表示式. 这个系统具有广义线性相位吗? 画出 $n_0=0$ 时的幅度响应.

- (d) 画出该系统作为系统函数为 $(1-z^{-1})$ 的 FIR 系统的级联和一阶及二阶 IIR 系统的并联组合实现的信号流图.

- 6.17 在本题中, 我们将建立一种称为频率采样滤波器的一类离散时间系统的某些性质. 这类滤波器具有如下形式的系统函数

$$H(z) = (1-z^{-N}) \cdot \sum_{k=0}^{N-1} \frac{\tilde{H}[k]/N}{1-z_k z^{-1}},$$

式中 $z_k = e^{j(2\pi/N)k}$, $k=0, 1, \dots, N-1$.

- (a) 该系统函数 $H(z)$ 可用系统函数为 $(1-z^{-N})$ 的 FIR 系统的级联与一阶 IIR 系统的并联组合来实现. 画出这种实现的信号流图.

- (b) 证明如上所定义的 $H(z)$ 是一个 $(N-1)$ 阶的 z^{-1} 多项式. 为此就需要证明 $H(z)$ 除 $z=0$ 外没有任何极点, 也没有高于 $(N-1)$ 次的 z^{-1} 项. 关于该系统冲激响应的长度这意味着什么?

- (c) 证明冲激响应由下列表达式给出:

$$h[n] = \left(\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{H}[k] e^{j(2\pi/N)kn} \right) (u[n] - u[n-N]).$$

[提示: 求出该系统 FIR 和 IIR 部分的冲激响应, 然后将它们卷积以得到总冲激响应.]

- (d) 利用洛皮塔尔 (L'Hôpital) 法则证明

$$H(z_m) = H(e^{j(2\pi/N)m}) = \tilde{H}[m], \quad m=0, 1, \dots, N-1,$$

这就是说, 证明常数 $\tilde{H}[m]$ 就是系统频率响应在等间隔频率 $\omega_m = (2\pi/N)m$, $m=0, 1, \dots, N-1$ 上的样本. 这类 FIR 系统的名称就来自这一性质.

- (e) 一般 IIR 部分的极点 z_k 和频率响应的样本 $\tilde{H}[k]$ 都是复数. 然而, 若 $h[n]$ 是实数, 就能找到一种仅涉及实数量的实现. 证明: 若 $h[n]$ 是实数且 N 是偶数, 那么 $H(z)$ 可以表示为:

$$H(z) = (1-z^{-N}) \left\{ \frac{H(1)/N + H(-1)/N}{1-z^{-1}} + \sum_{k=1}^{(N/2)-1} \frac{2|\tilde{H}(e^{j(2\pi/N)k})|}{N} \cdot \frac{\cos[\theta(2\pi k/N)] - z^{-1}\cos[\theta(2\pi k/N) - 2\pi k/N]}{1 - 2\cos(2\pi k/N)z^{-1} + z^{-2}} \right\},$$

式中 $H(e^{j\omega}) = |\tilde{H}(e^{j\omega})| e^{j\theta(\omega)}$. 当 $N=16$ 和 $H(e^{j\omega})=0$, $k=3, 4, \dots, 14$ 时, 画出该系统的信号流图表示.

- 6.18 在第三章已证明离散时间信号的采样率一般能用线性滤波和时间压缩的组合来降低. 图 P6.18 示出一个 M 到 1 的抽取器的方框图, 它能将采样率降低 M 倍. 按照这个模型, 线性滤波器工作在高的采样率下. 然而, 若 M 大的话, 滤波器的大部分输出样本将被该压缩器丢弃掉. 在某些情况下, 有可能采用更为有效的实现.

- (a) 假设该滤波器是一个 FIR 系统, 其冲激响应 $h[n]=0, n<0$ 和 $n>10$. 画出对应该滤波器的图 P6.18 的整个系统的流图.

- (b) 注意到某些支路运算可与压缩运算交换, 利用这一点, 画出 (a) 的该系统的更为有效的实现流图. 求在取得输出 $y[n]$ 时所要求的总计算量降低了几分之几?

- (c) 现假设图 P6.18 滤波器有如下系统函数

$$H(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}, \quad |z| > \frac{1}{2}.$$

画出图 P6.18 中整个系统的直接型实现的流图. 用该系统做线性滤波器, 每输出样本的总计算量能减少吗? 若能, 减少几分之几?

- (d) 最后, 假设图 P6.18 的滤波器有系统函数为

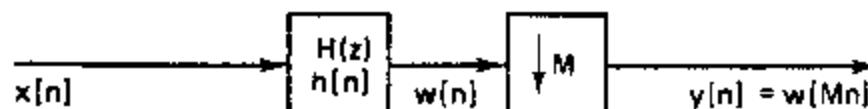


图 P6.18

$$H(z) = \frac{1 + \frac{7}{8}z^{-1}}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}, \quad |z| > \frac{1}{2}.$$

对该线性滤波器利用下列每一种实现,画出图 P6.18 的整个系统的流图:

- (i) 直接 I 型
- (ii) 直接 II 型
- (iii) 转置直接 I 型
- (iv) 转置直接 II 型

用与压缩器交换运算的方法,四种形式中哪一种能更有效地实现图 P6.18 的系统?

6.19 图 P6.19 给出例 6.7 中讨论过的 FIR 系统的直接型和格型实现流图. 希望证明这两种流图具有相同的系统函数.

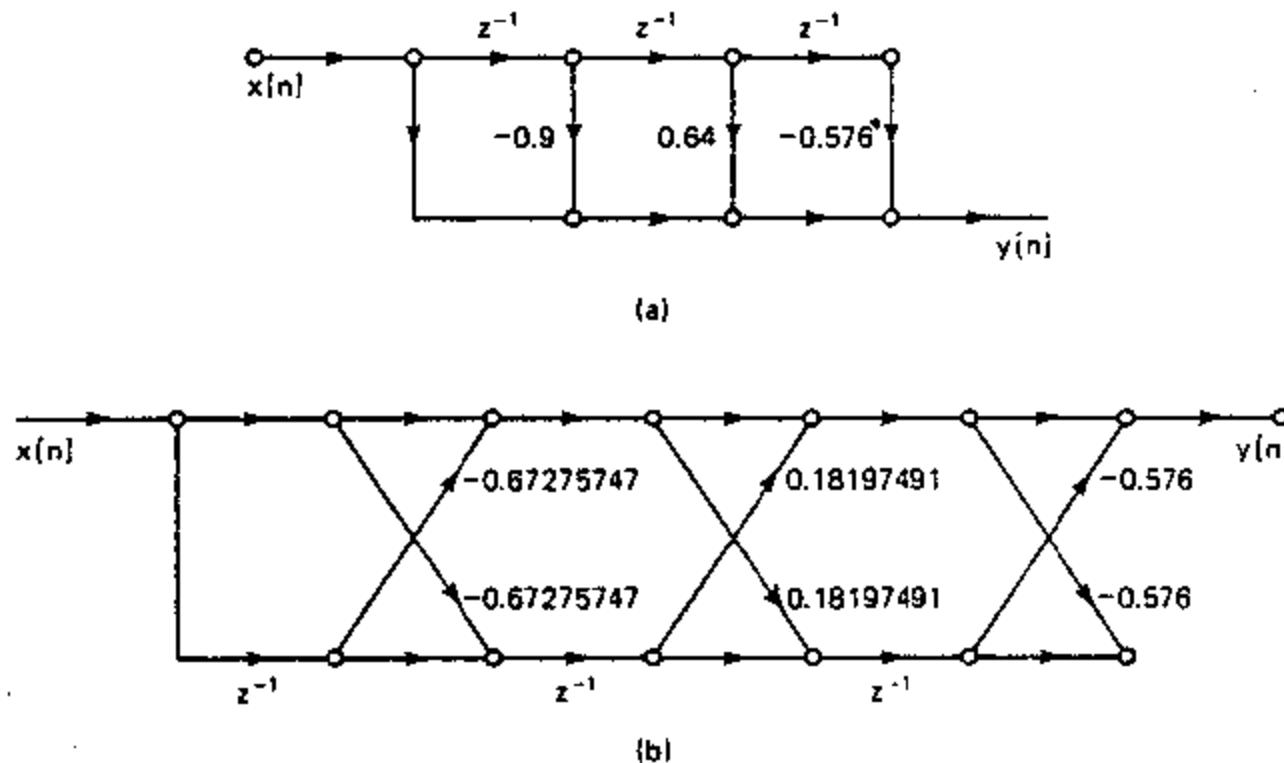


图 P6.19

(a) 利用式(6.54)从 k 参数求图 P6.19(b)系统的系统函数多项式 $A(z)$ 的系数,并将 $A(z)$ 与图 P6.19(a)的系统函数比较.

(b) 通过简单地跟踪一个沿着流图中全部路径的冲激响应,并将具有相同延迟的到达输出端的冲激加起来,比较图 P6.19 中两种系统的冲激响应.

6.20 图 P6.20-1 的格型网络有两个输入 $x_1[n]$ 和 $x_2[n]$,两个输出 $y_1[n]$ 和 $y_2[n]$.

(a) 分别写出使两个输出与两个输入有关的两个差分方程.

如果在图 P6.20-1 中将输出 $y_1[n]$ 与 $x_2[n]$ 连起来就得到图 P6.20-2 的网络.

(b) 求图 P6.20-2 网络的系统函数 $H_{11}(z) = Y_1(z)/X_1(z)$. 系统在 K 为何值时是稳定的?

(c) 求图 P6.20-2 网络的系统函数 $H_{21}(z) = Y_2(z)/X_1(z)$. 画出 $|H_{21}(e^{j\omega})|$, $-\pi < \omega < \pi$.

6.21 考虑图 P6.21-1 的离散时间系统.

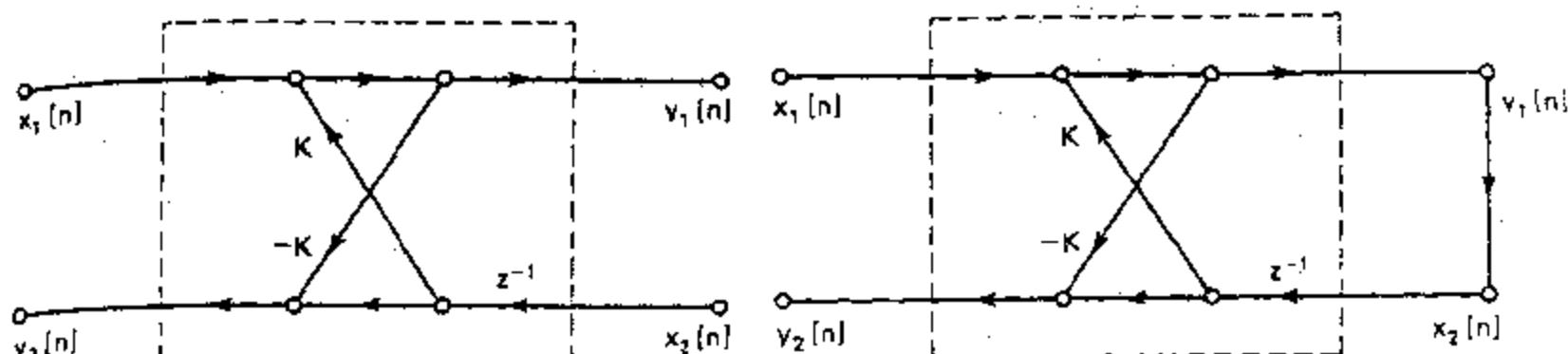


图 P6.20-1

图 P6.20-2

- (a) 写出由图 P6.21-1 流图所代表的一组差分方程.
 (b) 求图 P6.21-1 系统的系统函数 $H_1(z) = Y_1(z)/X(z)$, 作为 r 的函数, $-1 < r < 1$, 并求 $H_1(z)$ 的极点的模和相角.
 (c) 将图 P6.21-1 流图中的延迟单元移到顶部支路并改变流向而得到图 P6.21-2 的流图. 该系统函数 $H_2(z) = Y_2(z)/X(z)$, 与 $H_1(z)$ 是什么关系?

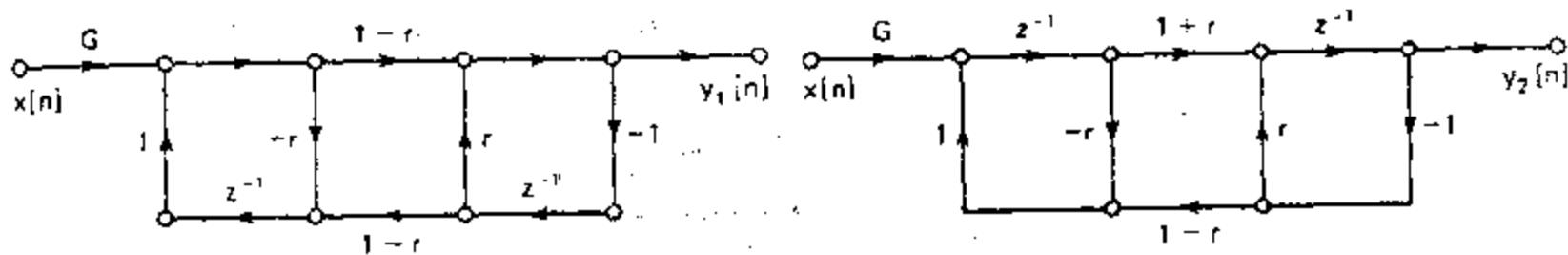


图 P6.21-1

图 P6.21-2

- 6.22 语音产生可以用代表声腔的线性系统模型来表示, 该声腔用通过振动声带释放的一股气流激励. 语音合成的一种方法涉及到把声腔表示为等长度而有不同横截面的圆柱体声道的连接, 如图 P6.22 所示. 假设想要用代表气流的体积速度仿真该系统. 输入经一小阻碍物——声带耦合到声道. 假设输入由左端音量速度变化表示, 但在左端行波的边界条件必须是净体积速度为零(这就类似于由电流源驱动的电气传输线). 输出是右端的音量速度. 假设每一节都是无耗声波传输线.

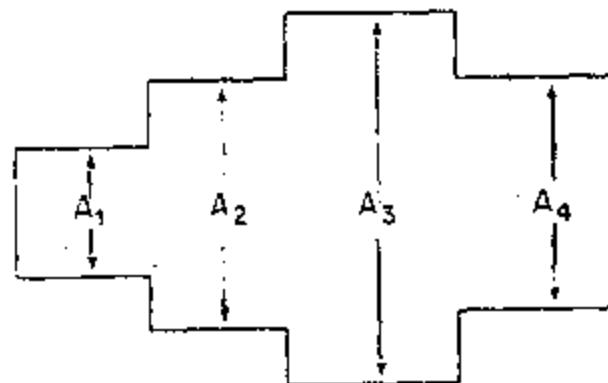


图 P6.22

在节与节之间每个界面上, 入射波 f^+ 以一种系数传到下一节, 而反射波 f^- 以不同的系数被反射回来. 同理, 反射波 f^- 在到达某一界面时也是以一种系数继续向前传, 而以另一不同系数被反射回来. 具体点说, 如果考虑在横截面为 A_1 的声道内某一入射波 f^+ 到达横截面为 A_2 的声道界面, 那么入射波以 $(1+r)f^+$ 传播, 而以 rf^+ 反射回去, 其中

$$r = \frac{A_2 - A_1}{A_2 + A_1}.$$

今考虑每节长为 3.4cm, 在空气中声音速度等于 34 000cm/s. 试画出实现图 P6.22 四节模型的流

图,输出以 20 000 样本/秒采样.

尽管以上冗长的介绍,这仍是一个比较直接的问题.如果你觉得用声道来思考比较困难,你就可以把它当成具有不同特性阻抗的几节传输线.和传输线一样,将这个系统的冲激响应表示成闭式是困难的.因此,可以根据实际考虑,在每节利用入射和反射波脉冲,直接画出该网络.

6.23 图 P6.23 的三种网络全是同一个两输入/两输出线性时不变系统的等效实现.

- 写出网络 A 的差分方程.
- 利用网络 A 中的 r 求网络 B 的 a, b, c 和 d 值,以使两者等效.
- 利用网络 A 中的 r 求网络 C 的 e 和 f 值,以使两者等效.
- 网络 B 或 C 为什么可能比网络 A 更为可取? 网络 A 比网络 B 或 C 有什么可能的长处?

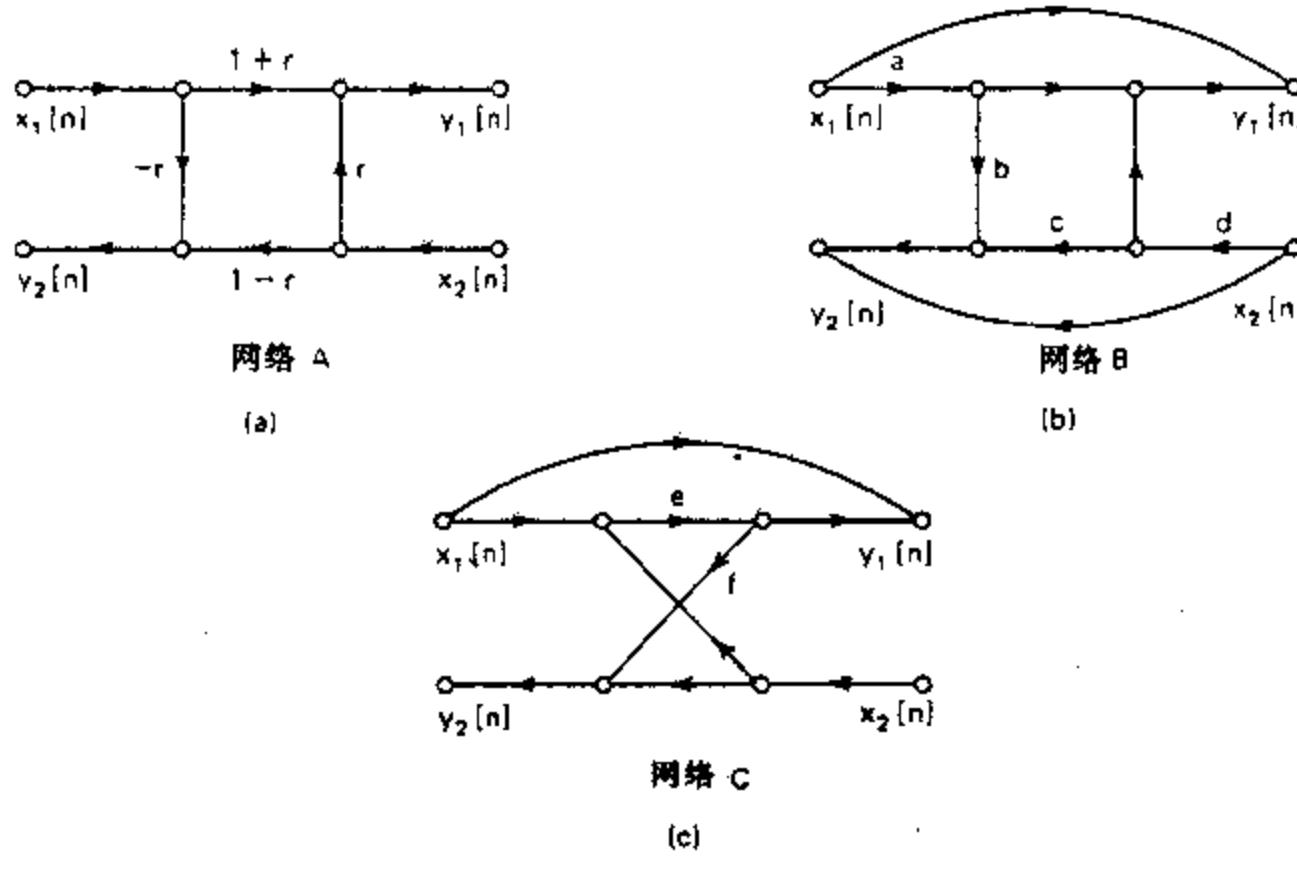


图 P6.23

6.24 在数字滤波器实现中仿真舍入和截尾效应是将量化变量表示成

$$\hat{x}[n] = Q[x[n]] = x[n] + e[n],$$

式中 $Q[\cdot]$ 记作舍入或截尾到 $(B+1)$ 位,而 $e[n]$ 是量化误差.假设量化噪声序列是一个平稳白噪声序列,使有

$$\mathcal{E}\{(e[n] - m_e)(e[n+m] - m_e)\} = \sigma_e^2 \delta[m]$$

并假设噪声序列值的幅度在量化阶 $\Delta = 2^{-B}$ 内均匀分布.对舍入和截尾的一阶概率密度分别如图 P6.24(a) 和 P6.24(b) 所示.

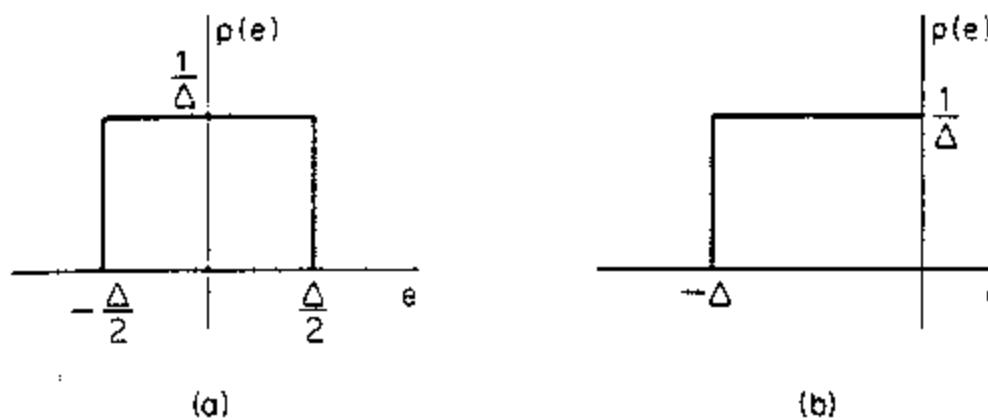


图 P6.24

(a) 求舍入噪声的均值 m_e 和方差 σ_e^2 .

(b) 求截尾噪声的均值 m_e 和方差 σ_e^2 .

- 6.25 考虑一个具有两个输入的线性时不变系统,如图 P6.25 所示.令 $h_1[n]$ 和 $h_2[n]$ 分别是从节点 1 和节点 2 到输出节点 3 的冲激响应.证明:若 $x_1[n]$ 和 $x_2[n]$ 不相关,那么相应的输出 $y_1[n]$ 和 $y_2[n]$ 也不相关.

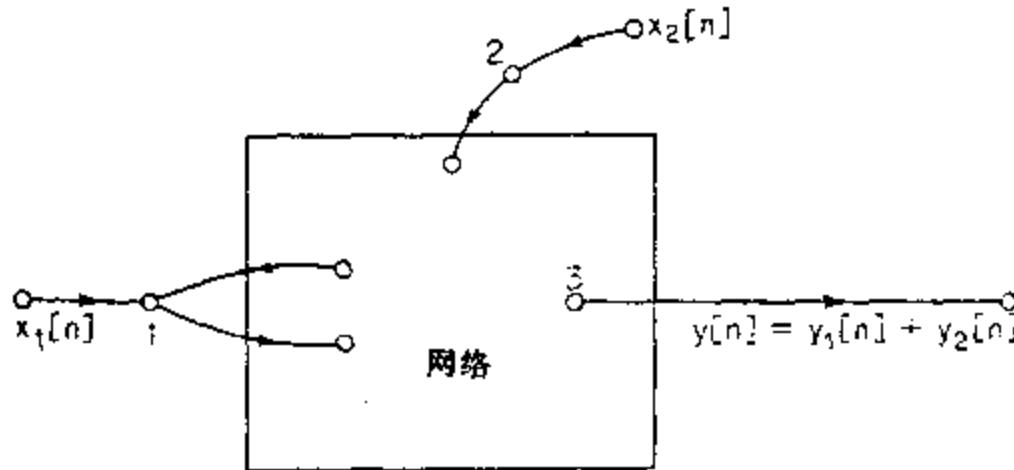


图 P6.25

- 6.26 考虑一全通系统,其系统函数为

$$H(z) = \frac{z^{-1} - 0.54}{1 - 0.54z^{-1}}.$$

该系统的一种实现流图如图 P6.26 所示.

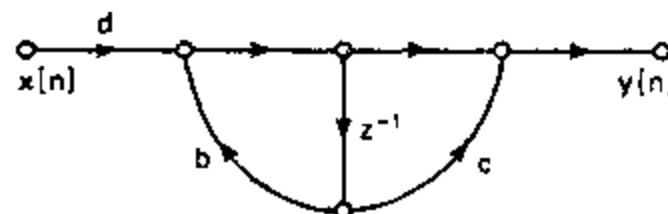


图 P6.26

(a) 求系数 b, c 和 d ,以使得图 P6.26 的流图是 $H(z)$ 的一种实现.

(b) 在图 P6.26 网络的实际实现时,系数 b, c 和 d 可能用舍入将真正的值量化到最靠近的十分之一的值(例如,0.54 舍入到 0.5 和 1.8518 舍入到 1.9).所得系统仍为一个全通系统吗?

具有系统函数为 $H(z)$ 的全通系统,联系输入和输出的差分方程可以表示为

$$y[n] = 0.54(y[n-1] - x[n]) + x[n-1].$$

(c) 画出一种网络的流图,该流图要求两个延迟单元,但仅要求一次乘以常数(而不是±1)的乘法.

(d) 用已量化的系数,(c)的网络是一个全通系统吗?

(e) 的实现与(a)的实现比较,其主要缺点是要求两个延迟单元.然而,对于高阶系统有必要实现全通系统的级联.对于 N 个全通节的级联,有可能利用由(c)确定的全通节,而只要求 $(N+1)$ 个延迟单元.这可在两节之间共用一个延迟单元来完成.

(f) 考虑系统函数为下式的全通系统:

$$H(z) = \left(\frac{z^{-1} - a}{1 - az^{-1}} \right) \left(\frac{z^{-1} - b}{1 - bz^{-1}} \right).$$

画出“级联”实现的流图,该流图中由两节(c)全通节组成.在两节之间共用一个延迟单元.所得网络应该仅有三个延迟单元.

(g) 用量化系数 a 和 b , (e) 中的网络还是一个全通系统吗?

- 6.27 图 P6.27 中的网络全都有相同的系统函数. 假设在全部计算中都采用定点(B+1)位运算实现图 P6.27 中的系统, 全部乘积在执行相加以前都假设已舍入到(B+1)位.

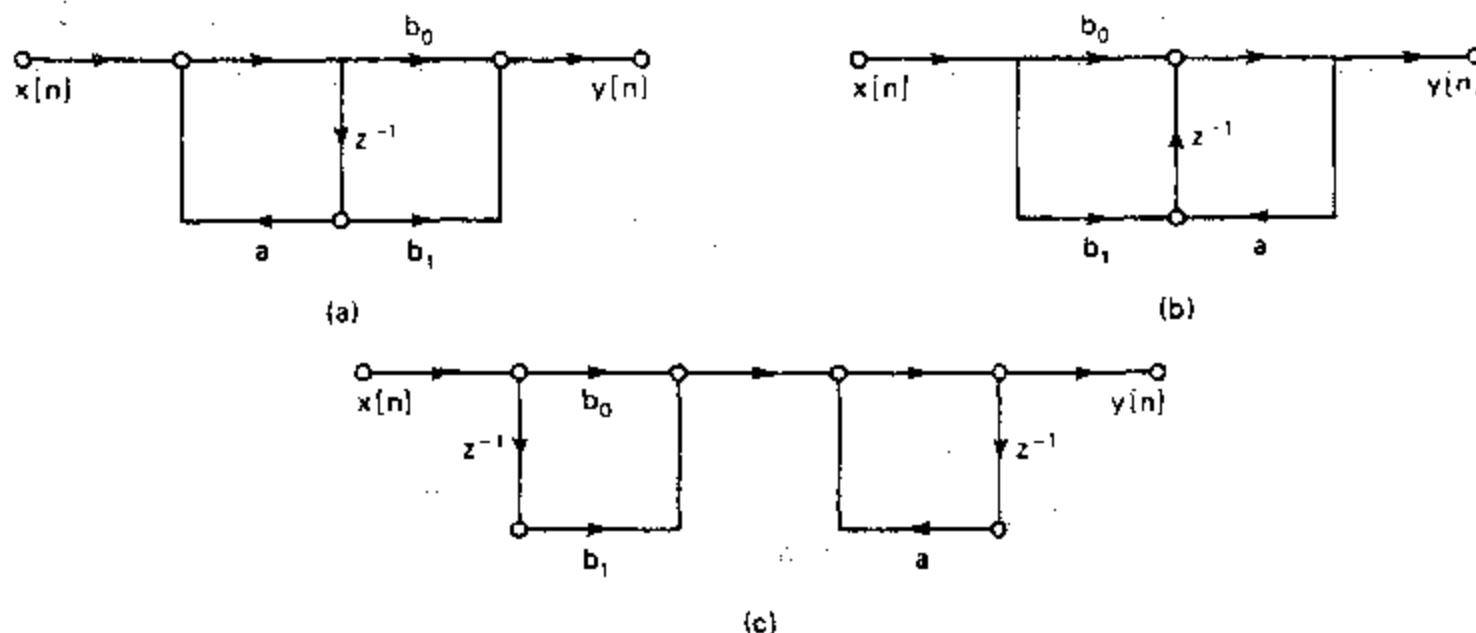


图 P6.27

- (a) 对图 P6.27 每一系统画出线性噪声模型.
- (b) 图 P6.27 中有两个网络具有相同的由于运算舍入而产生的总输出噪声功率, 不用明确地计算输出噪声功率, 确定哪两个有相同的输出噪声功率.
- (c) 求图 P6.27 每个网络的输出噪声功率, 并将结果用单一舍入噪声源功率 σ_n^2 表示.

- 6.28 图 P6.28 的流图表示一阶系统的一种实现.

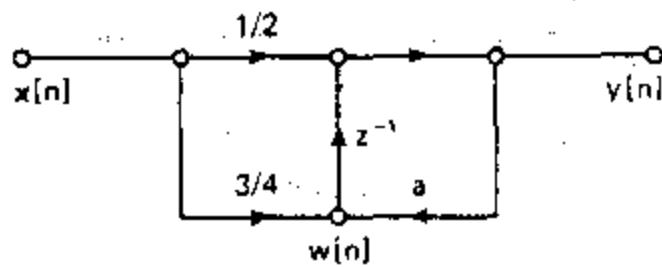


图 P6.28

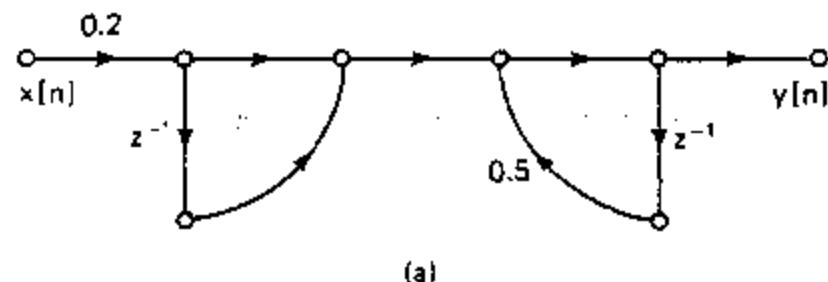
- (a) 求系统函数 $H(z) = Y(z)/X(z)$ 和冲激响应 $h[n]$.
- (b) 求系统函数 $H_{sw}(z) = W(z)/X(z)$ 及冲激响应 $h_{sw}[n]$.
- (c) 保证对所有 n , 有 $|y[n]| < 1$ 和 $|w[n]| < 1$ 的 $x[n]$ 最大值是什么? 该 $x[n]$ 的最大值如何随 $|a| < 1$ 变化?
- (d) 图 P6.28 的乘积在任何相加执行前都已量化到(B+1)位. 画出该量化系统的线性噪声模型. 将尽可能多的源合并以简化流图, 在所得流图中指出全部噪声源的功率.
- (e) 求系统输出端总噪声功率的表示式, 得出对全部和或积分的闭式表示式. 当 $|a|$ 趋近于 1 时, 噪声功率会发生什么变化?
- (f) 考虑 (i) $a = 0.9$, (ii) $a = 0.98$, $x[n]$ 为均匀分布白噪声输入, 使得有 $|x[n]| < x_{max}$. 求每种情况下不出现溢出的 x_{max} , 并计算每种情况输出端的信噪比.

- 6.29 图 P6.29 示出的三个系统对无限精度运算全有相同的系统函数

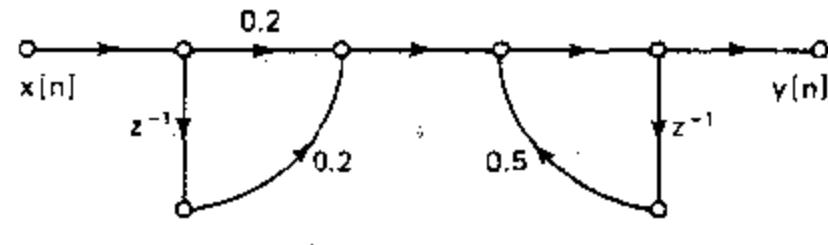
$$H(z) = \frac{0.2(1+z^{-1})}{1-0.5z^{-1}}.$$

假设将图 P6.29 的系统用有限精度运算实现, 并在相加之前乘积已舍入到(B+1)位.

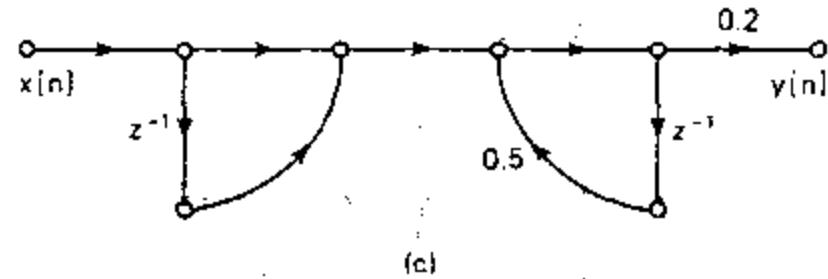
- (a) 对图 P6.29 中的每个系统, 求输入最大值 x_{max} , 使得系统中任何地方都不出现溢出.
- (b) 对图 P6.29 中的每个系统, 将可能有的独立噪声源合并, 画出用(B+1)位运算实现的线性噪



(a)



(b)



(c)

图 P6.29

声模型,求每个系统输出端总噪声功率.

(c) 假设图 P6.29 中的每个系统其输入都是幅度均匀分布的白噪声信号,其最大值 x_{\max} 由 (a) 确定. 对每一情况求输出信噪比.

6.30 考虑图 P6.30 系统,假设 $X_c(j\Omega)=0$, $|\Omega| \geq \pi/T$, 并假设 A/D 转换是 16 位的转换器, 组装成使得最大信号电平为 1. 由图 P6.30 的信号流图部分表示的系统是用 16 位补码运算 ($B+1=16$) 实现的. 每个 16 位数表示成小于 1 的小数,而每个乘积都在相加之前舍入.

(a) 画出图 P6.30 中整个系统的线性噪声模型,即包括 A/D 转换器量化效应和流图中的运算量化效应. 用单个 16 位舍入运算总噪声功率 σ_{tot}^2 表示每个噪声源的功率.

(b) 如果要绝对确保 $y[n] < 1$, 输入信号能够有多大? 你的答案是否意味着 A/D 全部 16 位字都用上了?

(c) 计算由 (a) 所获得的整个系统的全部噪声源产生在系统输出端的总噪声功率.

现在假设图 P6.30 的 A/D 转换器有 12 位输出样本,并且 A/D 转换器还是组装成使得最大信号幅度值是 1. 和前面一样,假设用 16 位补码舍入运算来实现由流图表示的计算.

(d) 线性噪声模型 (a) 将怎样变化? 再求由整个系统全部噪声源所产生的系统输出总噪声功率.

再将结果用单个 16 位舍入运算的总噪声功率 σ_{tot}^2 表示.

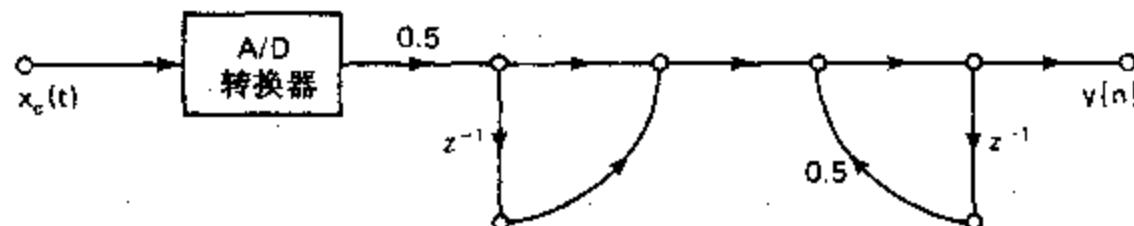


图 P6.31

6.31 考虑系统函数

$$H(z) = \frac{1 - 0.25z^{-1}}{1 - 0.25z^{-2}}$$

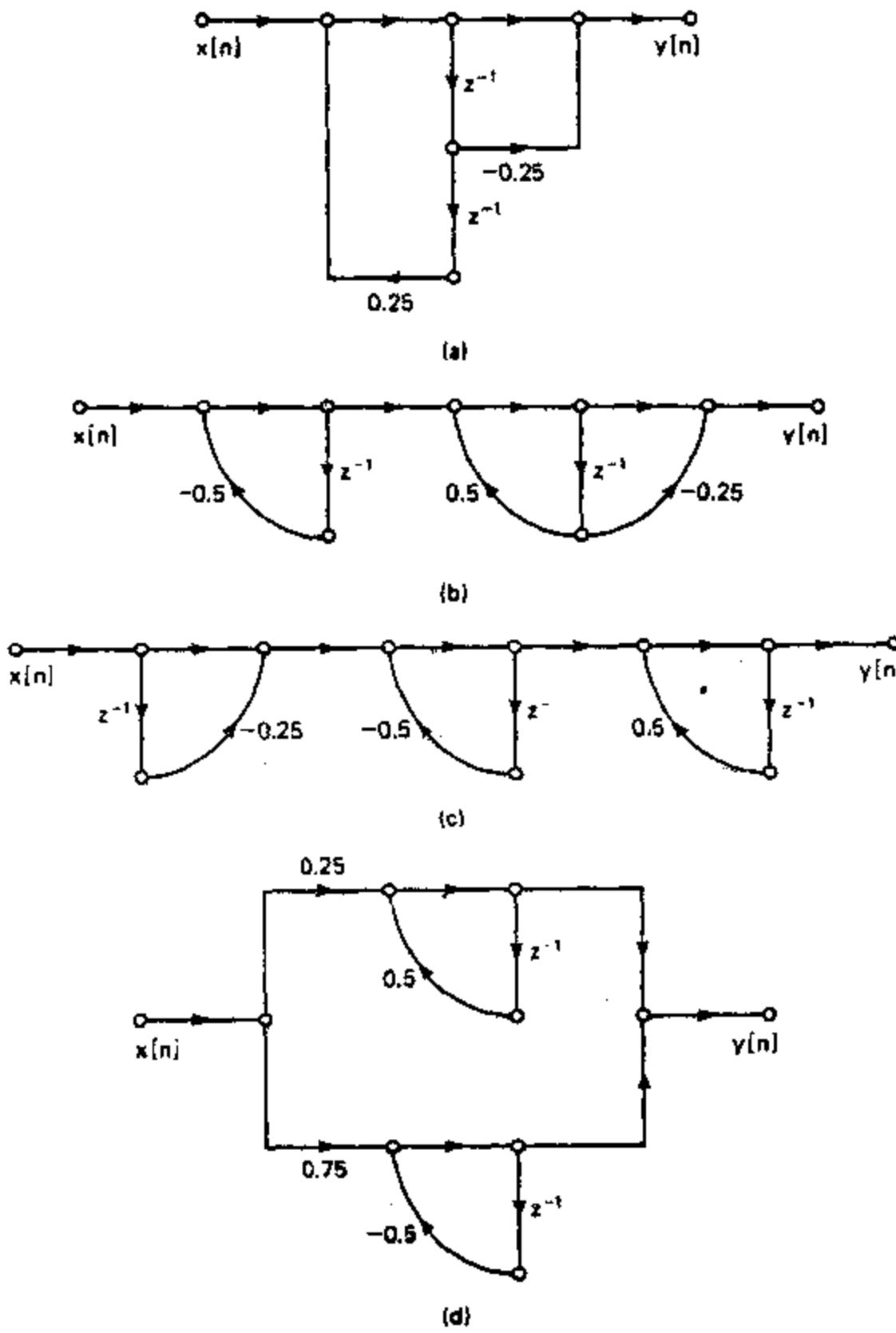
图 P6.31 中的流图代表该系统函数的四种可能实现.

(a) 对图 P6.31 中每一个网络,画出用 $(B+1)$ 位实现运算,乘积在相加以前舍入的线性噪声模型的流图.

(b) 对每一网络求系统输出噪声功率.

(c) 对图 P6.31 中每个网络, 圈出溢出必须避免的关键节点. 假设用补码运算, 对每个网络求 x_{\max} 值, 使得若 $|x[n]| < x_{\max}$, 则有 $|y[n]| < 1$.

(d) 假设输入为均匀幅度分布的白噪声信号, 对每种情况都假定输入最大值是由(c)所确定的值. 计算图 P6.31 每种情况信号噪声功率比. 那种网络有最大的信噪比? 为什么?



[图 P6.31]

6.32 本题考虑另一种称为块浮点(block-floating-point)运算的定点运算. 这种方法在奥本海姆(Op-penheim, 1970)著作中详细讨论过. 为了说明这个方法, 考虑由下面差分方程定义的一阶系统:

$$y[n] = \alpha y[n-1] + x[n],$$

相应的流图如图 P6.32-1 所示. 若在系统中相乘和相加都用定点实现, 那么在每次迭代上, 全寄存器长度未被利用, 因为输入必须加权以使得最大输出值是 1. 块浮点运算相应于把 $x[n]$ 和 $y[n-1]$ 都乘以增益 $A[n]$ 以达到联合归一化, 然后再将 $y[n]$ 除以这个增益, 即

$$y[n] = \frac{1}{A[n]} (\alpha y[n-1] A[n] + x[n] A[n]).$$

归一化系数 $A[n]$ 随每次迭代而变. 因此, 舍入噪声在差分方程每次迭代中减小 $1/A[n]$.

整个这个题目都假设 $x[n]$ 是具有零均值和在 $-x_0$ 和 $+x_0$ 之间均匀幅度分布的白噪声过程,且有 $|y[n]| < 1$.

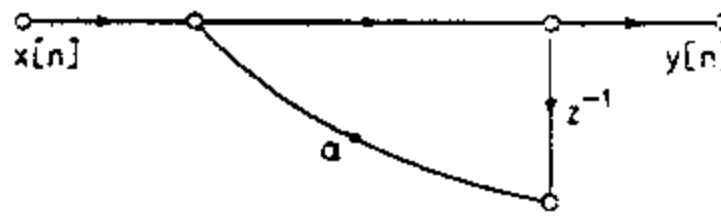


图 P6.32-1

(a) 证明:若忽略量化噪声影响,则图 P6.32-2 网络与图 P6.32-1 网络等效.

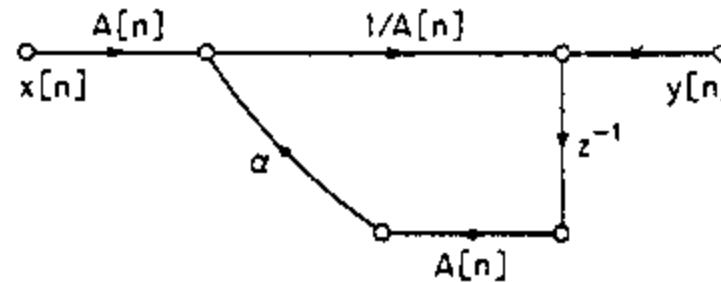


图 P6.32-2

(b) 用定点运算完成相乘和相加. 增益 $A[n]$ 选为

$$A[n] = 2^{c[n]}, \quad c[n] \geq 0,$$

以使得相应于存放 $x[n]$ 和 $y[n-1]$ 的寄存器的一个左移. 因为 $A[n]$ 是用来联合归一化 $x[n]$ 和 $y[n-1]$ 的,就有

$$\frac{1}{2} \leq A[n] \max\{|x[n]|, |y[n-1]|\} < 1,$$

这里 $\max\{|x[n]|, |y[n-1]|\}$ 是对每个 n 的 $|x[n]|$ 和 $|y[n-1]|$ 的最大值. 因此必须要求

$$\frac{\frac{1}{2}}{\max\{|x[n]|, |y[n-1]|\}} \leq A[n] < \frac{1}{\max\{|x[n]|, |y[n-1]|\}}. \quad (\text{P6.32})$$

因为乘以 2 的正幂次不会引入舍入噪声,因此由乘积舍入而引入的噪声源如图 P6.32-3 所示.

假定 $e_1[n]$ 和 $e_2[n]$ 是在 $-\frac{1}{2}(2^{-B})$ 和 $+\frac{1}{2}(2^{-B})$ 之间均匀分布,并且它们互相之间不相关,与 $x[n]$ (因此与 $A[n]$) 也不相关,求图 P6.32-3 网络输出噪声 $f[n]$ 的方差. 将结果用 $k^2 = \mathcal{E}[(1/A[n])^2]$ 表示. 证明图 P6.32-3 网络的运算舍入输出噪声方差总是大于该一阶系统利用定点运算由图 P6.32-1 直接实现而得到的输出噪声方差.

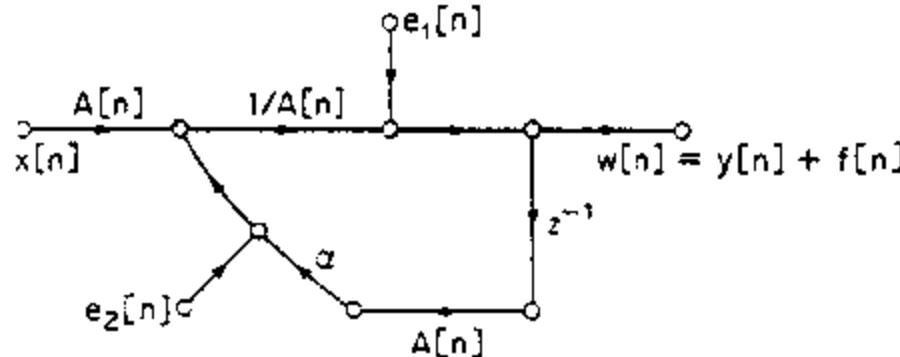


图 P6.32-3

(c) 图 P6.32-2 网络可以变化成图 P6.32-4 的等效形式. 令 $e_1[n], e_2[n]$ 和 $e_3[n]$ 分别代表由于乘以 $1/A[n]$, $\Delta[n]$ 和 α 产生舍入而引入的噪声. 再假设 $e_1[n], e_2[n]$ 和 $e_3[n]$ 是在 $-\frac{1}{2}(2^{-B})$ 和 $+\frac{1}{2}(2^{-B})$ 之间均匀分布,并且互相之间独立,也与 $x[n]$ 和 $y[n]$ 独立. 求由于这三个噪声源产生的总输出噪声方差. 将结果用 $k^2 = \mathcal{E}[(1/A[n])^2]$ 表示.

(d) 假设 $\alpha = 1 - \delta, \delta \ll 1$ (高增益情况). 对这个 α 值,输出的绝对值 $|y[n-1]|$ 可以假设大于输入的

绝对值 $|x[n]|$; 也就是说, 归一化系数 $A[n]$ 唯一由输出决定。利用这个假设并利用式 (P6.32-1), 证明: $k^2 = \mathcal{E}[(1/A[n])^2]$ 的上界是 $k^2 \leq 4\sigma_y^2$.

- (e) 为了确定输出噪声与信号比, 必须要求 $x[n]$ 的最大值足够小以保证 $|y[n]| < 1$ 。令 $x[n]$ 是均匀分布的白噪声过程, 且 $\alpha = 1 - \delta, \delta \ll 1$, 利用这些假设和(d)的结果, 求图 P6.32-4 网络的噪声与信号的功率比。将该信噪比与相应的定点运算结果作一比较。

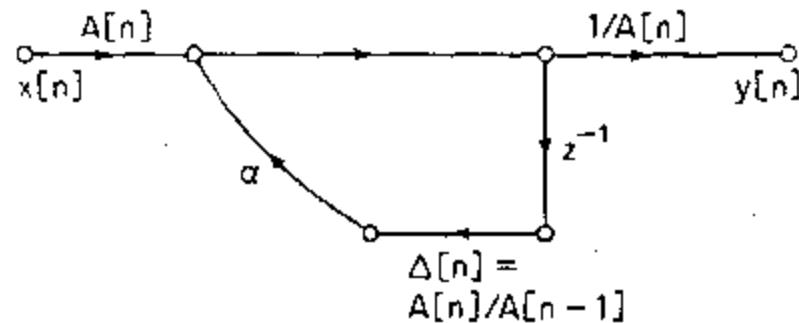


图 P6.32-4

6.33 考虑如下一阶系统

$$y[n] = ay[n-1] + x[n],$$

假设全部变量和系数都用原码表示, 相乘结果是在相加之前就截尾。因此, 实现的非线性差分方程是

$$\hat{y}[n] = Q[a\hat{y}[n-1]] + x[n],$$

式中 $Q[\cdot]$ 代表原码截尾。(关于原码数表示见习题 3.33.)

对全部 n , 考虑 $|\hat{y}[n]| = |\hat{y}[n-1]|$ 这种类型零输入极限环的可能性。证明, 如果该理想系统是稳定的, 那么不可能存在零输入极限环。对补码截尾, 相同的结果是正确的吗?

- 6.34 考虑图 P6.34 所示的一阶系统。量化器代表乘积 $ay[n-1]$ 舍入到 $(B+1)$ 位。全部数都是字长 B 位加符号位的定点小数。输入为零, 但系统是由初始条件 $y[-1] = A$ 起始。由于该量化器的关系, 存在一个称为死带的 A 值范围, 在该死带内, 系数 a 的有效值是 ± 1 ; 即 $|Q[aA]| = A$ 。一旦输出落入这个死带, 输出或是振荡, 或保持为常数, 这取决于有效系数是正还是负。

- (a) 利用 a 和 B 求对应于该死带的 A 值范围。
 (b) 对于 $B=6$ 位和 $A=1/16$, 对应于 $a=+15/16$ 和 $a=-15/16$ 两种情况, 画出 $y[n]$ 。
 (c) 对于 $B=6$ 位和 $A=1/2$, 对应于 $a=-15/16$ 画出 $y[n]$ 。

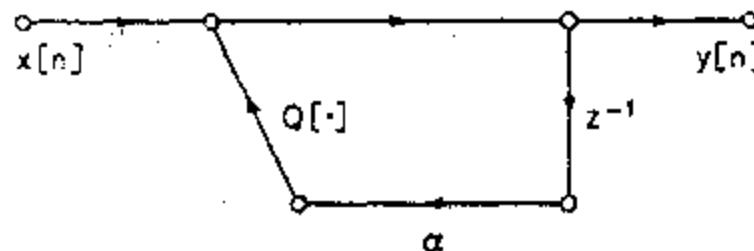


图 P6.34

6.35 图 P6.35-1 示出某一阶系统的流图。

- (a) 假设为无限精度运算, 求系统对下面输入的响应

$$x[n] = \begin{cases} \frac{1}{2}, & n \geq 0, \\ 0, & n < 0. \end{cases}$$

对于大 n 值, 系统的响应是什么?

现在假设系统用定点运算实现。网络中系统和全部变量都用 5 位寄存器的原码表示。这就是说, 全部数都是带符号的小数, 表示成

$$b_0 b_1 b_2 b_3 b_4,$$

其中 b_0, b_1, b_2, b_3 和 b_4 不是 0 就是 1，并且

$$|\text{寄存器值}| = b_1 2^{-1} + b_2 2^{-2} + b_3 2^{-3} + b_4 2^{-4}.$$

若 $b_0=0$, 小数是正的; 若 $b_0=1$, 小数是负的. 序列值用某一系数相乘的结果在相加前截断, 也即仅保留符号位和 4 位最高有效位.

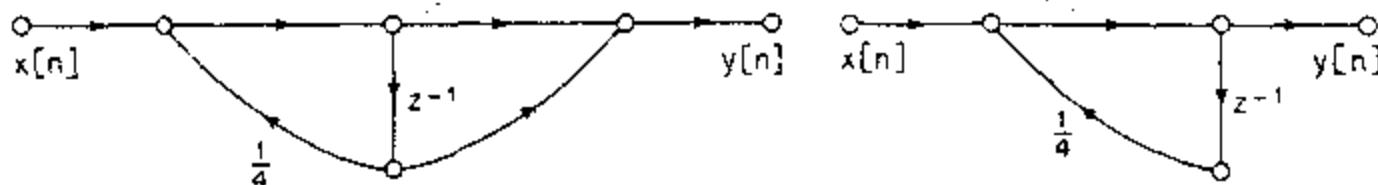


图 P6.35-1

(b) 计算该量化系统对(a)所给输入的响应，并画出对应于 $0 \leq n \leq 5$, 量化和未量化系统的响应.

对于大的 n 值, 比较这两个响应如何?

(c) 现在考虑图 P6.35-2 的系统, 其中

$$x[n] = \begin{cases} \frac{1}{2}(-1)^n, & n \geq 0, \\ 0, & n < 0. \end{cases}$$

对该系统和输入重做(a)和(b).

- 6.36 考虑如图 P6.36 所示的二阶系统. 该系统用定点运算实现, 并且全部相乘结果被舍入. 全部数是用 $(B+1)$ 位字长(含符号位)的定点小数. 对 $y[n]$ 有一个死带区域, 这时系数 $-r^2$ 的“有效”值是 -1 . 当 $y[n]$ 进入这区域时, 有效极点位置可以认为是在单位圆上, 而极点的幅角要改变. 假设对全部 n , $x[n]=0$, $y[-1]=A \neq 0$ 和 $y[-2]=0$.

(a) 求 $y[n]$ 的死带, 也即求满足 $Q[-r^2 A] = -A$ 的 A 值.

(b) 根据求得的 A 的下界, 求可能有某一死带的 r 值范围.

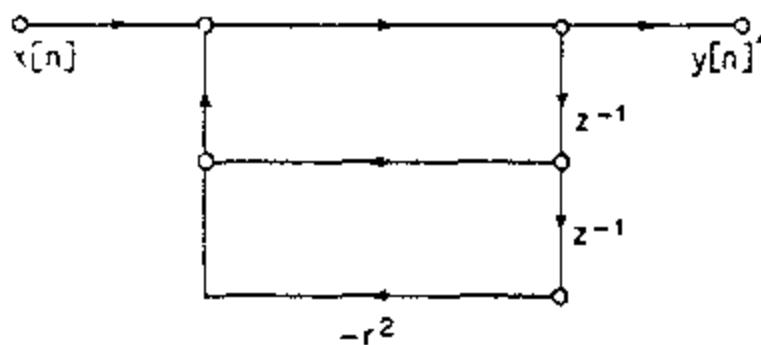


图 P6.36

- 6.37 考虑图 P6.37-1 的二阶非线性差分方程. 支路运算 $f[\cdot]$ 由图 P6.37-2 的函数定义, 该函数在习题 3.34 中已证明它表示补码溢出(图 P6.37-2 略去量化). 换句话说, 函数 $f[\cdot]$ 在形成下面求和中引起可能的溢出

$$ay[n-1] + by[n-2] + x[n].$$

用一个简单例子来说明存在零输入极限环的可能性.

(a) 首先, 当不发生溢出时, 求使系统稳定的 a 和 b 值的范围; 也就是说, 假设和的幅度是小于 1,

使得系统表现为线性. 在线性条件下在 $(a-b)$ 平面上画出对应于稳定的区域.

(b) 假设 $x[n]=0$, a 和 b 在什么条件下保证不产生溢出, 也即 $|y[n]| < 1$? 在 $(a-b)$ 平面上涂上相应的区域.

(c) 对全部 n , 在 $x[n]=0, y[n]=y_0 > 0$ 条件下考虑可能性. 当 a 和 b 满足线性稳定要求时, y_0 值是多少?

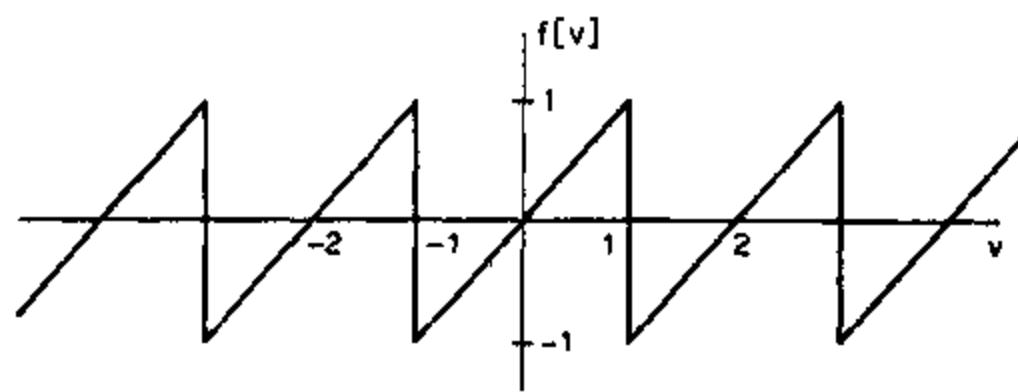


图 P6.37-1

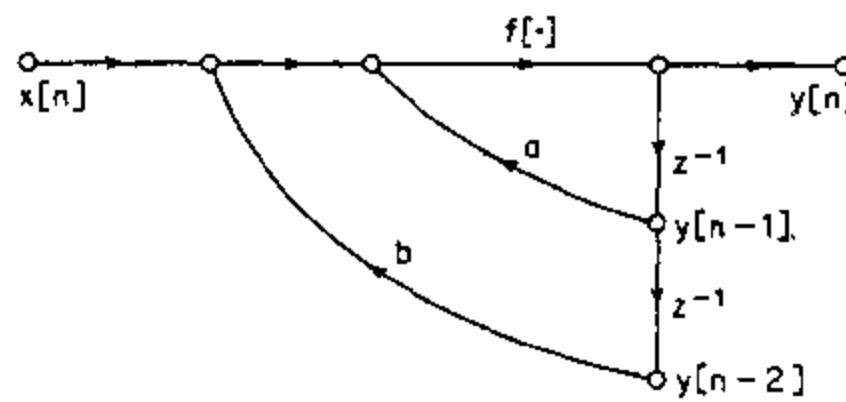


图 P6.37-2

- (d) 在稳定限制和 $0 < y_0 < 1$ 之下, a 和 b 的值是什么?
- (e) 现在考虑周期为 2 的零输入极限环的可能性,也即对所有 n , $y[n] = (-1)^n y_0$. 对满足线性稳定的约束条件的 a 和 b , $0 < y_0 < 1$ 的什么值是可能的?

第七章 滤波器设计方法

7.0 引言

滤波器是一类特别重要的线性时不变系统。严格地讲，选频滤波器这一术语表示一个能让某些频率成分通过而完全拒绝其它频率成分的系统。但是广义讲，任何能对某些频率（相对于其它频率来说）进行修正的系统也称为滤波器。虽然在本章的开头着重讨论选频滤波器的设计，但是其中的一些方法是有广泛应用价值的。尽管在许多场合并不限制设计的滤波器一定为因果的，但是在本章中我们还是着重讨论因果滤波器的设计。一般说来，对因果滤波器设计作一些修正就可以设计和实现非因果滤波器。

滤波器的设计涉及到以下步骤：(1)给出系统所要求特性的技术指标；(2)用因果离散时间系统逼近这些技术指标；(3)实现该系统。虽然这三个步骤不是完全独立的，但是在这—章中我们仍将注意力放在步骤(2)上，步骤(1)主要取决于应用场合，而步骤(3)则取决于实现滤波器时所用的技术。在实际应用中，所需要的滤波器往往通过数字计算法来实现，并用于对由连续时间信号经周期采样并接着作模-数转换而得到的信号进行滤波。正是由于这个原因，尽管基本的设计方法往往都只与信号和系统的离散时间特性有关，但是人们仍常常把离散时间滤波器称为数字滤波器。

当某一离散时间滤波器要使用图 7.1 所示系统对连续时间信号进行离散时间处理时，往往（但不总是）给出离散时间滤波器和有效的连续时间滤波器在频域的技术指标，对于低通、带通和高通滤波器之类的选频滤波器，尤其是这样。正如 3.4 节所指出的，如果某离散时间系统是如同图 7.1 中所使用的，而输入又是带限的，且采样频率足够高可以避免混叠，则全部的系统特性可以看作是一个线性时不变连续时间系统，其频率响应为

$$H_{eff}(j\Omega) = \begin{cases} H(e^{j\Omega T}), & |\Omega| < \pi/T, \\ 0, & |\Omega| > \pi/T. \end{cases} \quad (7.1a)$$

在这种情况下，可以通过关系式 $\omega = \Omega T$ 直接将有效连续时间滤波器的指标转换为离散时间滤波器的指标。这就是说， $H(e^{j\omega})$ 在一个周期上的特性可由下式规定：

$$H(e^{j\omega}) = H_{eff}\left(j\frac{\omega}{T}\right), \quad |\omega| < \pi. \quad (7.1b)$$

这一点用例 7.1 具体说明。

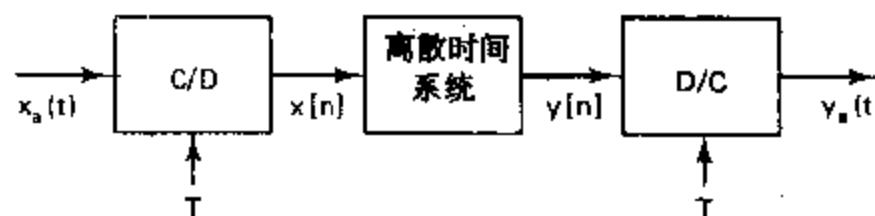


图 7.1 对连续时间信号进行离散时间滤波的基本系统。

例 7.1

考虑一个根据图 7.1 的基本框图用于对连续时间信号进行低通滤波的离散时间滤波器。具体讲，我们要求当采样率为 10^4 样本/秒 ($T = 10^{-4}$ s) 时图 7.1 所示的整个系统有如下特性：

1. 在频带 $0 \leq \Omega \leq 2\pi(2000)$ 上增益 $|H_{eff}(j\Omega)|$ 应当在单位幅度 (0dB) ± 0.01 (0.086dB) 之内；
2. 在频带 $2\pi(3000) \leq \Omega$ 上增益应当不大于 0.01 (-60dB)。

这样一组 $|H_{eff}(j\Omega)|$ 的低通指标绘于图 7.2(a) 中，图中的阴影水平线指出允许逼近误差的极限。对于这个特定的例子，图 7.2(a) 的参数应当是

$$\begin{aligned}\delta_1 &= 0.01 (20 \log_{10}(1 + \delta_1) = 0.086 \text{ dB}), \\ \delta_2 &= 0.001 (20 \log_{10} \delta_2 = -60 \text{ dB}), \\ \Omega_p &= 2\pi(2000), \\ \Omega_s &= 2\pi(3000).\end{aligned}$$

因为采样率是 10^4 样本/秒，则由于理想离散—连续(D/C)转换器的缘故，在 $\Omega = 2\pi(5000)$ 以上理想系统的增益恒为零。

数字滤波器的容限图如图 7.2(b) 所示。这与图 7.2(a) 基本相同，只是在图 7.2(b) 中作为归一化频率 ($\omega = \Omega T$) 的函数来绘图，并且只需绘出在 $0 \leq \omega \leq \pi$ 范围内的图形，因为其余部分可由 $H(e^{j\omega})$ 的对称性（假设 $h[n]$ 为实数）和周期性推导出来。从式(7.1b) 可得，通带内频率响应的幅度必须逼近于 1，误差为 $\pm \delta_1$ ，该通带为

$$(1 - \delta_1) \leq |H(e^{j\omega})| \leq (1 + \delta_1), \quad |\omega| \leq \omega_p. \quad (7.2)$$

在这个例子中，上式的参数取 $\delta_1 = 0.01$, $\omega_p = 2\pi(2000) \times 10^{-4} = 0.4\pi$ 弧度。另一个逼近带是阻带，在阻带中幅度响应必须逼近于零，误差小于 δ_2 ，即

$$|H(e^{j\omega})| \leq \delta_2, \quad \omega_s \leq |\omega| \leq \pi. \quad (7.3)$$

在本例中， $\delta_2 = 0.001$, $\omega_s = 2\pi(3000) \times 10^{-4} = 0.6\pi$ 弧度。通带截止频率 ω_p 和阻带截止频率 ω_s 可用 z 平面的角度来表示。为了按照这种方法用一个可实现的系统逼近理想低通滤波器，我们必须给出非零宽度为 $(\omega_s - \omega_p)$ 的过渡带。图 7.2(b) 中的虚线是满足预定技术指标的系统的幅度响应。

在许多应用中被过滤的离散时间信号并不是由连续时间信号得出的，而且若用序列来表示连续时间信号时除了周期采样之外还有许多其它方法。（例如，可参见 Steiglitz, 1965 以及 Oppenheim and Johnson, 1972 的论文。）此外，在我们所讨论的大部分设计方法中，采样周期对于通道方法没有什么影响。由于这些原因，我们认为滤波器设计问题应当从一组用离散时间频率变量 ω 表示的所需技术指标开始，因为这些技术指标取决于具体的应用或相互间的关系，所以可从，也可不从图 7.1 所示框图中的滤波观点来得出这些指标。

实际中所使用的大部分滤波器的特性都用类似于例 7.1 的容限图来说明，而且对于相位响应除了隐含地通过稳定性和因果性的要求加以限制外，没有其它限制。例如，因果和稳定的无限冲激响应(IIR)滤波器之系统函数的极点必须在单位圆内。同样，在设计有限冲激响应(FIR)滤波器时，往往要加上线性相位的限制。在设计过程中我们仍然不考虑

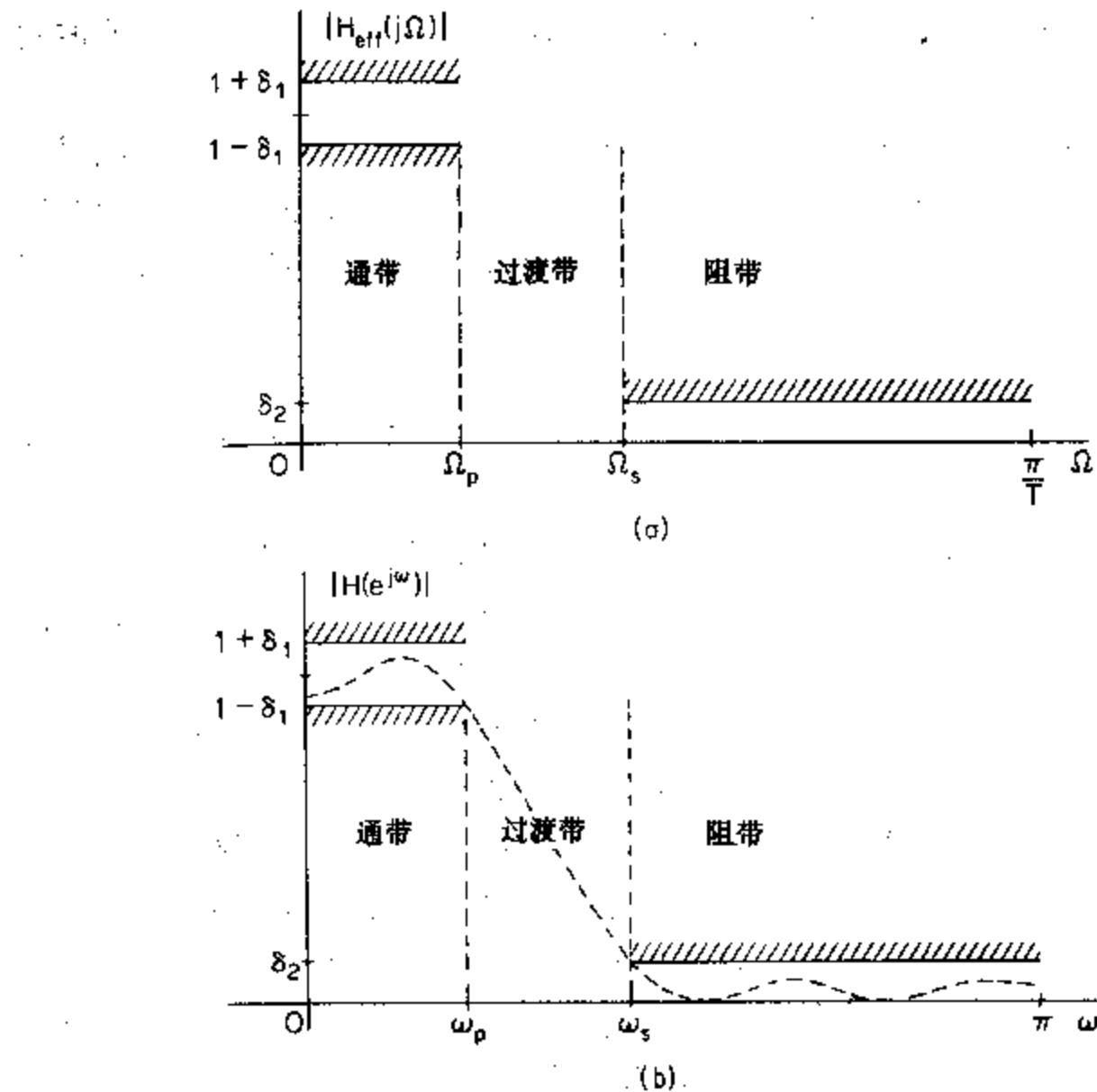


图 7.2 (a)对于低通滤波器,图 7.1 所示整个系统有效频率响应的技术指标。
(b)所对应的图 7.1 中离散时间系统的技术指标.

相位问题.

若给出一组在图 7.2 中所示的技术指标,则我们必须确定离散时间线性系统的系统函数,该系统的频率响应落在预先给定的容限之内.这是一个函数逼近问题. IIR 滤波器设计指的是利用 z 的有理函数逼近,而 FIR 滤波器设计指的是多项式逼近. 我们将分别讨论适用于 IIR 滤波器的设计方法和适用于 FIR 滤波器的设计方法. 还将讨论多种同时适用于这两类滤波器的设计方法,范围包括从公式设计方法到算法设计方法,前者是指把设计指标代入设计公式,后者是指用迭代方法得出所需要的解.

7.1 由连续时间滤波器设计离散时间 IIR 滤波器

设计离散时间 IIR 滤波器的传统方法是将连续时间滤波器转换成满足预定指标的离散时间滤波器.这是一种合理的方法,其理由如下:

- 连续时间 IIR 滤波器的设计技巧十分成熟,并已取得许多有用成果,因此可以方便地利用这些为连续时间滤波器推导出的设计方法.
- 许多有用的连续时间 IIR 滤波器设计方法有比较简单完整的设计公式.因此,以这种标准的连续时间 IIR 滤波器设计公式为基础的离散时间 IIR 滤波器的设计方法

实现起来十分简单.

- 当完全适用于连续时间 IIR 滤波器的标准逼近方法直接用于离散时间 IIR 滤波器时,并不能得出简单的完整设计公式.

连续时间滤波器设计可以映射成离散时间滤波器的设计,这种方法完全与离散时间滤波器是否用于处理图 7.1 所示连续时间信号的系统无关. 我们再次强调指出,离散时间系统的设计方法应首先给出一组离散时间技术指标. 因此,我们假设这些技术指标已经通过类似例 7.1 的分析或通过一些其它的方法确定了. 为了使确定满足给定技术指标的离散时间滤波器时更方便一些,我们将利用连续时间滤波器的逼近方法. 的确,当离散时间滤波器用于图 7.1 的框图中时,作为逼近法基础的连续时间滤波器的频率响应与有效频率响应之间有很大差别.

利用对原型连续时间滤波器进行变换来设计离散时间滤波器时,连续时间滤波器的技术指标是通过对给定的离散时间滤波器的技术指标加以变换而得到的. 连续时间滤波器的系统函数 $H_c(s)$ 或冲激响应 $h_c(t)$ 可以用某一种已有的用于连续时间滤波器设计的逼近方法而得出. 在附录 B 中讨论了一些例子. 另外,把本节所讨论的变换方法用于 $H_c(s)$ 或 $h_c(t)$ 可以得出离散时间滤波器的系统函数 $H(z)$ 或冲激响应 $h[n]$.

在这些变换中我们通常要求所得到的离散时间滤波器的频率响应中应保留连续时间频率响应的基本特性. 具体讲,这意味着应将 s 平面的虚轴映射成 z 平面的单位圆. 第二个条件是,应当将一个稳定的连续时间滤波器转换成一个稳定的离散时间滤波器. 这表明,若连续时间系统只有在 z 平面左半平面的极点,则离散时间滤波器应当只有在单位圆内的极点. 这些限制对本节所讨论的所有方法都是需要的.

7.1.1 滤波器设计的冲激响应不变法

在 3.4.2 节中我们曾讨论过冲激响应不变的概念,当时离散时间系统是用连续时间系统冲激响应的采样来定义的. 我们曾指出,冲激响应不变法提供了一种当输入为带限信号时计算带限连续时间系统之输出样本的直接方法. 另外,在滤波器设计技术中我们可以把冲激响应不变法看作是得到离散时间系统的一种方法,该离散时间系统的频率响应由连续时间系统的频率响应来确定.

把连续时间滤波器转换成离散时间滤波器的冲激响应不变设计法中,选取连续时间滤波器冲激响应的等间隔样本作为离散时间滤波器的冲激响应,即

$$h[n] = T_d h_c(nT_d), \quad (7.4)$$

式中 T_d 表示采样间隔. 我们将会看到,因为滤波器的设计首先用到离散时间滤波器的技术指标,所以无论在设计过程中或是在所得出的离散时间滤波器中,式(7.4)中的参数 T_d 事实上都不起作用. 但是,因为在规定的步骤中习惯上都包括有这个参数,所以在以下的讨论中仍用到该参数. 正如我们将要指出的,即便将滤波器用在图 7.1 所示的基本框图中,采样周期 T_d 也不必设计得与采样周期 T 相同,后者与 C/D 和 D/C 转换有关.

当使用冲激响应不变法作为设计具有给定频率响应的离散时间滤波器的方法时,我们应特别注意离散时间滤波器的频率响应和连续时间滤波器的频率响应之间的联系. 从第二章中有关采样的讨论可知,通过式(7.4)得出的离散时间滤波器的频率响应与连续时间滤波器的频率响应有如下关系:

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} H_c\left(j\frac{\omega}{T_d} + j\frac{2\pi k}{T_d}\right). \quad (7.5)$$

如果连续时间滤波器是带限的，则

$$H_c(j\Omega) = 0, \quad |\Omega| \geq \pi/T_d, \quad (7.6)$$

而且

$$H(e^{j\omega}) = H_c\left(j\frac{\omega}{T_d}\right), \quad |\omega| \leq \pi, \quad (7.7)$$

也就是说，离散时间频率响应和连续时间频率响应之间由一个频率轴的线性比例因子联系在一起，即 $\omega = \Omega T_d$. 可惜任何实际的连续时间滤波器都不能是完全带限的，因此就会发生式(7.5)中相邻项之间的干扰，引起混叠，如图 7.3 所示。但是，如果连续时间滤波器在高频部分趋近于零，则混叠就很小，可以忽略，并且可以通过对连续时间滤波器冲击响应的采样得到有用的离散时间滤波器。

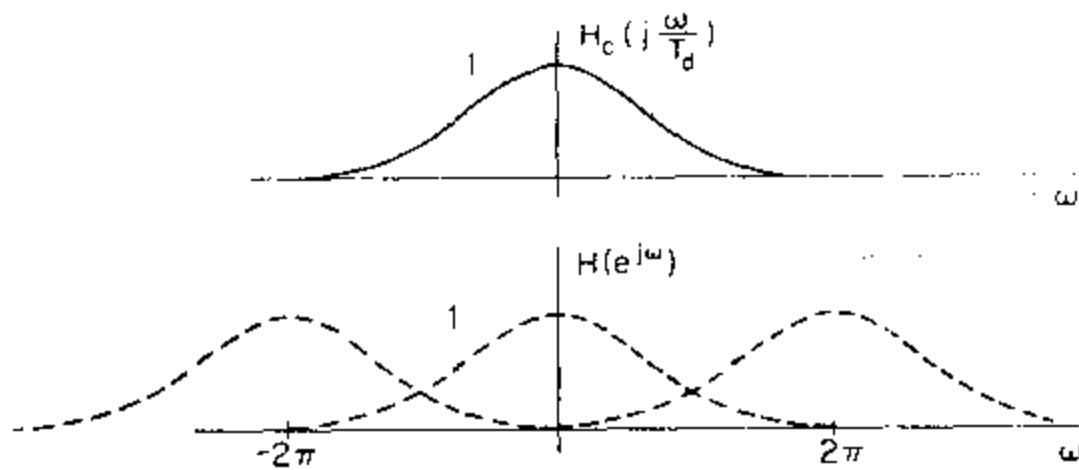


图 7.3 冲激响应不变设计法中混叠现象的说明。

在冲激响应不变设计法中，可以首先利用式(7.7)将离散时间滤波器的技术指标变换为连续时间滤波器的技术指标。我们用例 7.2 来说明这个问题。

例 7.2

为了说明冲激响应不变设计法以及由式(7.4)和式(7.5)表示的变换法，我们假设所需离散时间滤波器的技术指标示于图 7.4(a)中，且 $\delta_1 = 0.10875, \delta_2 = 0.17783, \omega_p = 0.2\pi$ 和 $\omega_s = 0.3\pi$. 这相当于阻带最大增益为 $-15\text{dB}(20\log_{10}0.17783)$ ，在 0dB 增益之下的通带最大偏差为 1dB（即 $20\log_{10}(1) - 20\log_{10}(1 - 0.10875) = -1\text{dB}$ ）。请注意，此时通带容限是在 $1 - \delta_1$ 和 1 之间，而不是如图 7.2(b)中那样，在 $1 - \delta_1$ 和 $1 + \delta_1$ 之间。以前，大多数连续时间滤波器的逼近方法都是为了设计无源系统（增益小于 1）而提出的。所以，离散时间滤波器的设计指标已经可以典型地利用公式来表示，因此在本例中令通带响应小于或等于 1. 给系统函数乘以适当的常数就可以很容易地实现图 7.4(a)所示的技术指标和图 7.2(b)所示的技术指标之间的转换。有关转换过程的考虑请见习题 7.5.

若假设由 $H_c(j\Omega)$ 到 $H(e^{j\omega})$ 的变换中所产生的混叠可以忽略，则我们利用关系式

$$\Omega = \omega/T_d \quad (7.8)$$

可以求出 $H_c(j\Omega)$ 的技术指标，从而得到图 7.4(b)所示的连续时间滤波器的技术指标。

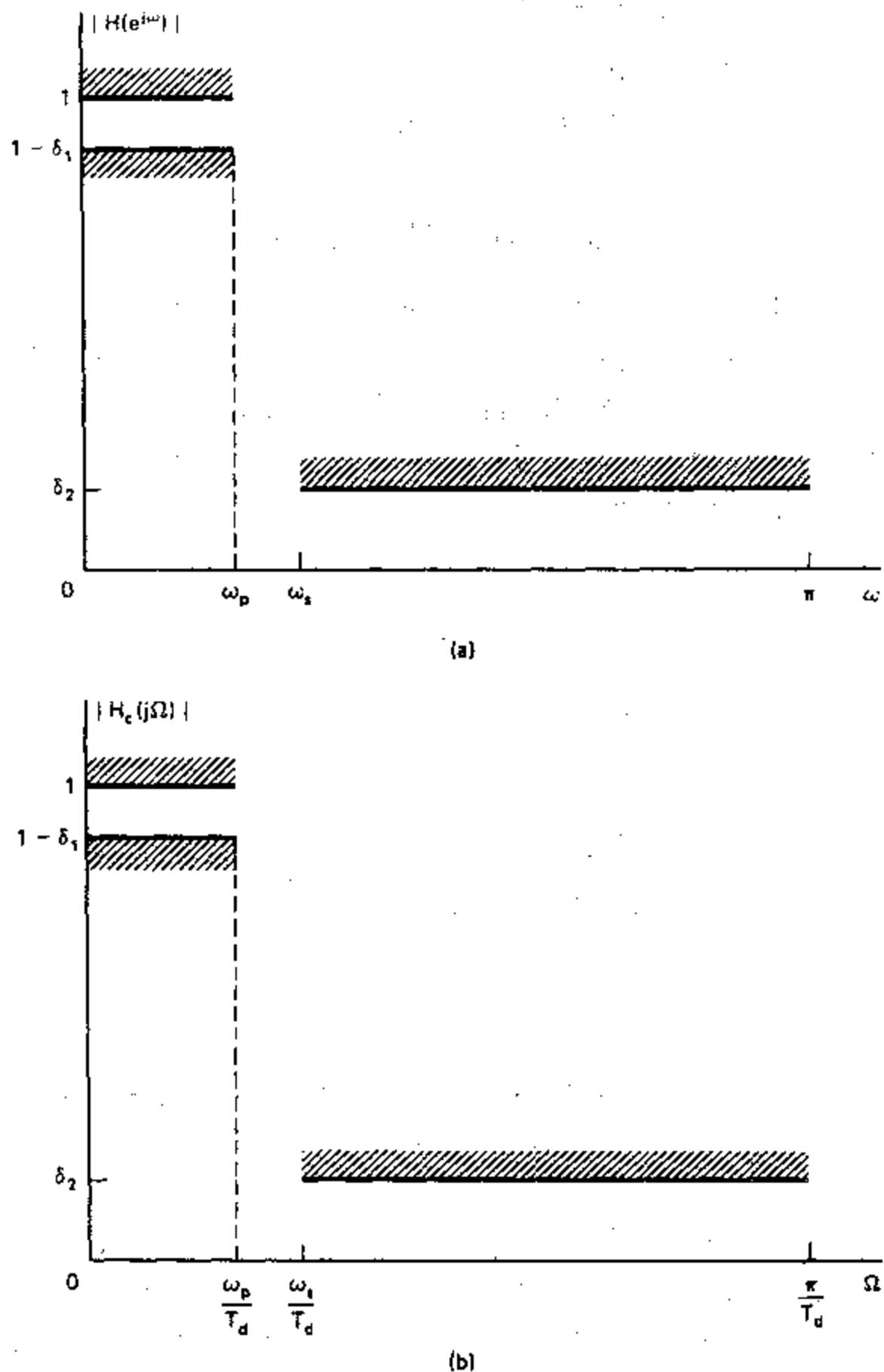


图 7.4 例 7.2 的技术指标. (a) 所需要数字滤波器的技术指标. (b) 用冲激响应不变法转换得出的模拟滤波器的技术指标.

得出适合于这些技术指标的连续时间滤波器之后, 就把系统函数为 $H_c(s)$ 的连续时间滤波器变换为所需的系统函数为 $H(z)$ 的离散时间滤波器. 下面给出从 $H_c(s)$ 到 $H(z)$ 变换的代数运算细节. 但是应当注意, 当变换回到离散时间频率时, $H(e^{j\omega})$ 将通过式(7.7)与 $H_c(j\Omega)$ 联系在一起, 式(7.8)的变换还是频率轴之间的变换. 因此, “采样”的参数 T_d 不能用来控制混叠. 因为基本的技术指标均使用离散时间频率, 若采样率增加 (T_d 减小), 则连续时间滤波器的截止频率必须成比例地增高. 在实际中, 为了补偿掉从 $H_c(s)$ 变换到 $H(z)$ 时可能产生的混叠, 有可能会超标设计连续时间滤波器, 即所设计

的滤波器超过技术指标,尤其在阻带中更为突出.

虽然在冲激响应不变法中从连续时间到离散时间的变换是用时域采样来定义的,但是对系统函数的变换也很容易实现.为了推导出这种变换,我们来研究用部分分式展开表示的连续时间滤波器的系统函数,有*

$$H_c(s) = \sum_{k=1}^N \frac{A_k}{s-s_k}. \quad (7.9)$$

所对应的冲激响应是

$$h_c(t) = \begin{cases} \sum_{k=1}^N A_k e^{s_k t}, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases} \quad (7.10)$$

对 $T_d h_c(t)$ 采样得到的离散时间滤波器的冲激响应是

$$\begin{aligned} h[n] &= T_d h_c(nT_d) = \sum_{k=1}^N T_d A_k e^{s_k n T_d} u[n] \\ &= \sum_{k=1}^N T_d A_k (e^{s_k T_d})^n u[n]. \end{aligned} \quad (7.11)$$

因此离散时间滤波器的系统函数为

$$H(z) = \sum_{k=1}^N \frac{T_d A_k}{1 - e^{s_k T_d} z^{-1}}. \quad (7.12)$$

比较式(7.9)和式(7.12)可以看出, s 平面上在 $s=s_k$ 处的极点变成 z 平面上在 $e^{s_k T_d}$ 处的极点, 并且, 在 $H_c(s)$ 和 $H(z)$ 的部分分式展开式中的系数除了相差一个比例系数 T_d 外完全相同. 如果连续时间滤波器是稳定的, 相当于 s_k 的实部小于零, 则 $e^{s_k T_d}$ 的幅度将小于 1, 因此在离散时间滤波器中对应的极点位于单位圆内. 这样, 因果离散时间滤波器也是稳定的. 虽然按照关系式 $z_k = e^{s_k T_d}$ 将 s 平面的极点映射成 z 平面的极点, 但是应该清楚地认识到, 冲激响应不变设计法并不相当于按照该关系式进行 s 平面到 z 平面的简单映射. 特别是离散时间系统函数中的零点是部分分式展开式中的极点和系数 $T_d A_k$ 的函数, 通常它们并不按照与极点映射相同的方式进行映射. 我们用下面的例子说明冲激响应不变设计法.

例 7.3

让我们来研究低通离散时间滤波器的设计, 将冲激响应不变法用于一个合适的连续时间巴特沃兹(Butterworth)滤波器**. 离散时间滤波器的技术指标与在例 7.2 中所用的相同, 如图 7.4 所示. 具体讲

$$0.89125 \leq |H(e^{j\omega})| \leq 1, \quad 0 \leq |\omega| \leq 0.2\pi, \quad (7.13a)$$

$$|H(e^{j\omega})| \leq 0.17783, \quad 0.3\pi \leq |\omega| \leq \pi. \quad (7.13b)$$

因为在冲激响应不变法的设计过程中可将参数 T_d 抵消掉, 所以我们可以选取 $T_d=1$. 因此 $\omega=\Omega$. 在习题 7.4 中研究包含有参数 T_d 的相同例子, 以说明 T_d 是如何且在何处

* 为了简化起见, 我们在讨论中假设 $H(s)$ 的所有极点都是一阶的. 习题 7.2 中讨论了对于高阶极点所要求的修正.

** 关于连续时间巴特沃兹和切比雪夫滤波器的讨论见附录 B.

被抵消的.

设计滤波器时若将冲激响应不变法用于连续时间巴特沃兹滤波器, 则首先必须将离散时间滤波器的技术指标转换成连续时间滤波器的技术指标. 我们记得, 冲激响应不变法相当于在没有混叠情况下 Ω 和 ω 之间的线性映射. 对于本例, 假设混叠的影响可以忽略. 当设计完成之后, 则可以对所得滤波器的性能进行评估.

由于以上的考虑, 我们希望设计一个连续时间巴特沃兹滤波器, 其幅度函数 $|H_c(j\Omega)|$ 满足

$$0.89125 \leq |H_c(j\Omega)| \leq 1, \quad 0 \leq |\Omega| \leq 0.2\pi, \quad (7.14a)$$

$$|H_c(j\Omega)| \leq 0.17783, \quad 0.3\pi \leq |\Omega| \leq \pi. \quad (7.14b)$$

因为模拟巴特沃兹滤波器的幅度响应是频率的单调函数, 则要满足式(7.14a)和(7.14b), 需

$$|H_c(j0.2\pi)| \geq 0.89125 \quad (7.15a)$$

和

$$|H_c(j0.3\pi)| \leq 0.17783. \quad (7.15b)$$

具体讲, 巴特沃兹滤波器的幅度平方函数为

$$|H_c(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + (\Omega/\Omega_c)^{2N}}, \quad (7.16)$$

因此滤波器的设计过程包括确定满足所需技术指标的参数 N 和 Ω_c . 将式(7.16)代入式(7.5)并取等号, 可得方程式

$$1 + \left(\frac{0.2\pi}{\Omega_c} \right)^{2N} = \left(\frac{1}{0.89125} \right)^2 \quad (7.17a)$$

和

$$1 + \left(\frac{0.3\pi}{\Omega_c} \right)^{2N} = \left(\frac{1}{0.17783} \right)^2. \quad (7.17b)$$

这两个方程的解是 $N=5.8858$ 和 $\Omega_c=0.70474$.

但是参数 N 必须为整数, 因此, 为了满足和超过该技术指标我们将 N 近似取为整数, 取 $N=6$. 现在通带和阻带的指标均不能完全满足. 若改变 Ω_c 值, 应在超过阻带指标和通带指标的数量之间折衷选取. 如果将 $N=6$ 代入式(7.17a), 得 $\Omega_c=0.7032$. 若取此值, 则完全可满足(连续时间滤波器的)通带指标并超过(连续时间滤波器的)阻带指标. 这就给离散时间滤波器的混叠留有一些余地. 取 $\Omega_c=0.7032$ 和 $N=6$, 则幅度平方函数 $H_c(s)H_c(-s)=1/[1+(s/j\Omega_c)^{2N}]$ 的 12 个极点均匀分布在半径 $\Omega=0.7032$ 的圆周上, 如图 7.5 所示.

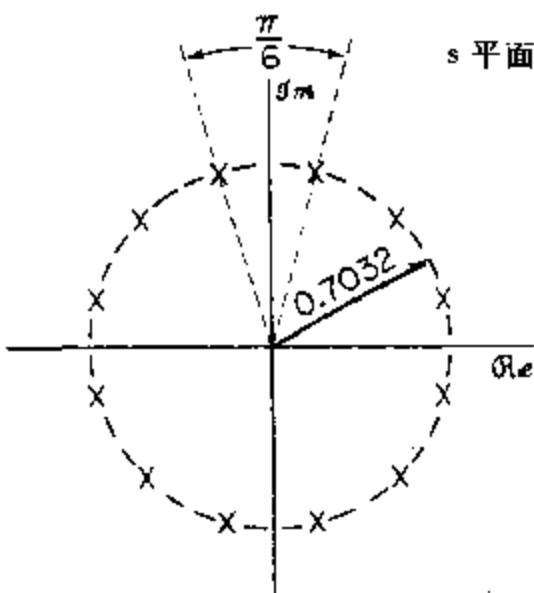


图 7.5 对于例 7.3 中的 6 阶巴特沃兹滤波器, $H_c(s)H_c(-s)$ 的极点在 s 平面上的位置. 因此 $H_c(s)$ 的极点是 s 平面上左半部分上的三对极点, 其坐标为

第一对极点: $-0.182 \pm j(0.679)$

第二对极点: $-0.497 \pm j(0.497)$

第三对极点: $-0.679 \pm j(0.182)$

所以

$$H_c(s) = \frac{0.12093}{(s^2 + 0.3640s + 0.4945)(s^2 + 0.9945s + 0.4945)(s^2 + 1.3585s + 0.4945)} \quad (7.18)$$

如果我们把 $H_c(s)$ 表示成一个部分分式展开式并进行式(7.12)的变换, 然后将诸共轭对结合在一起, 则得出离散时间滤波器的系统函数:

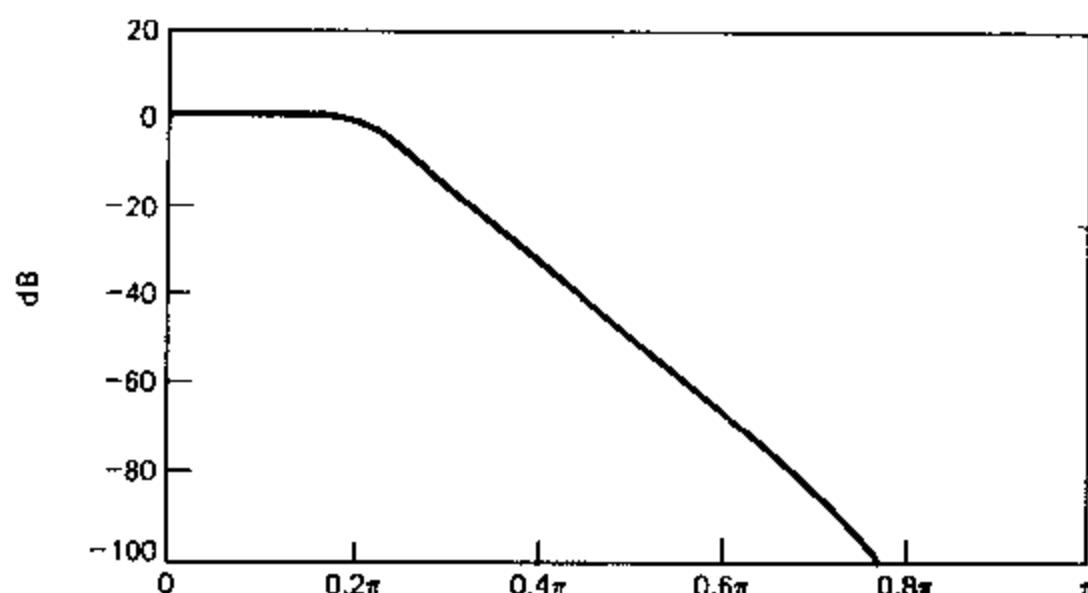
$$H(z) = \frac{0.2871 - 0.4466z^{-1}}{1 - 1.2971z^{-1} + 0.6949z^{-2}} + \frac{-2.1428 + 1.1455z^{-1}}{1 - 1.0691z^{-1} + 0.3699z^{-2}} \\ + \frac{1.8557 - 0.6303z^{-1}}{1 - 0.9972z^{-1} + 0.2570z^{-2}} \quad (7.19)$$

由式(7.19)显而易见, 用冲激响应不变设计法得到的系统函数可直接用并联形式实现。如果需要用串联形式或直接形式, 则应当用适当的方法将分散的各个二阶项组合起来。习题 7.11 中讨论了本例的并联型、串联型和直接型的结构。

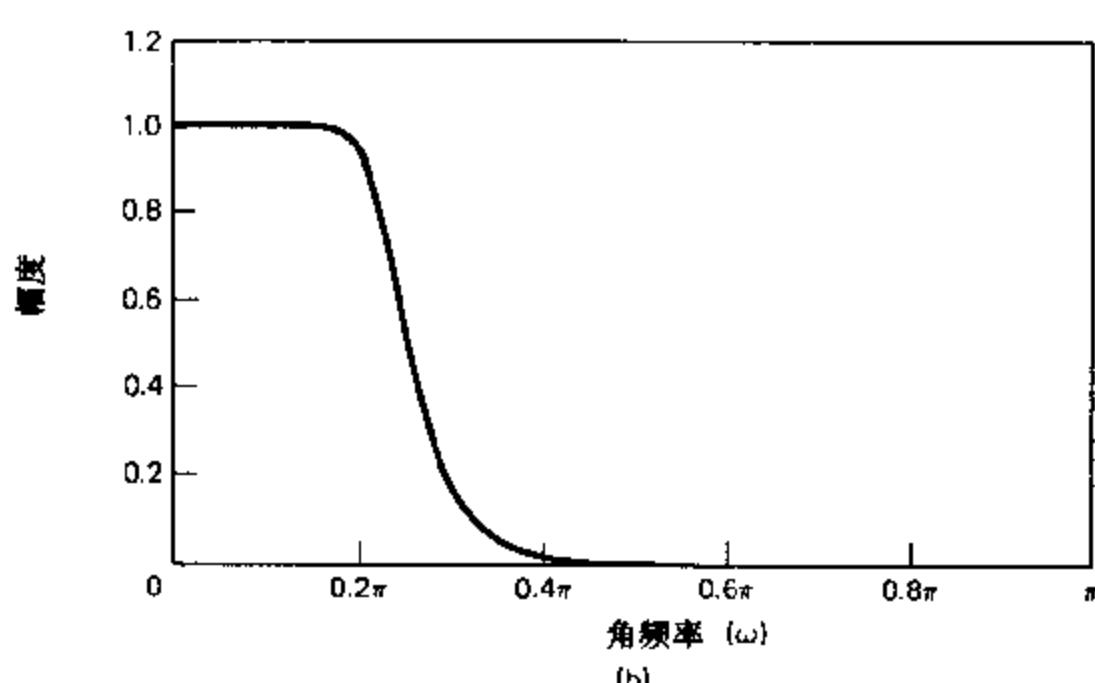
离散时间系统的频率响应函数示于图 7.6 中。我们记得, 设计得到的原型连续时间滤波器在通带的边缘处完全满足指标, 并且在阻带的边缘处超过指标, 对于所得到的离散时间滤波器也是如此。这表明, 连续时间滤波器是充分带限的, 因此已有的混叠不成问题。的确, $20\log_{10}|H(e^{j\omega})|$ 和 $20\log_{10}|H_c(j\omega)|$ 之间除了在 $\omega = \pi$ 附近有轻微的差别外, 在画图所用的比例尺下看不出它们之间的差别。(请记住, $T_d = 1$, 因此 $\Omega = \omega$ 。) 有时混叠是一个突出的问题。如果由于混叠使所得出的离散时间滤波器不能满足技术指标, 则对于冲激响应不变法可再次试用较高阶的滤波器, 或者保持阶次不变而调整滤波器的一些参数。

冲激响应不变法的基本点是选取在某种意义上与连续时间滤波器的冲激响应相似的离散时间滤波器的冲激响应。为了保持冲激响应的形状, 人们一般不太愿意使用这种方法。我们知道, 若连续时间滤波器是带限的, 则离散时间滤波器的频率响应将非常接近于连续时间频率响应, 但是人们使用这种方法的出发点往往并不是希望保持冲激响应的形状不变。然而在一些滤波器设计问题中, 主要的目的可能是控制如像冲激响应或阶跃响应之类的时间响应的某些方面。在这种情况下, 一种很自然的方法是用冲激响应不变法或阶跃响应不变法来设计离散时间滤波器。后一种方法定义离散时间滤波器对采样了的单位阶跃函数的响应是由连续时间阶跃响应采样得到的序列。如果连续时间滤波器具有良好的阶跃响应特性, 如上升时间小和过冲峰值低等, 则这些特性将会在离散时间滤波器中保留下来。显然, 这种波形不变的概念可以推广到对于各种输入信号保持输出波形形状不变, 正像在习题 7.1 中所表明的那样。这个习题说明, 用冲激响应不变法、同时也用阶跃响应不变法(或其它波形不变准则)对同一个连续时间滤波器进行变换并不能得到相同的离散时间滤波器。

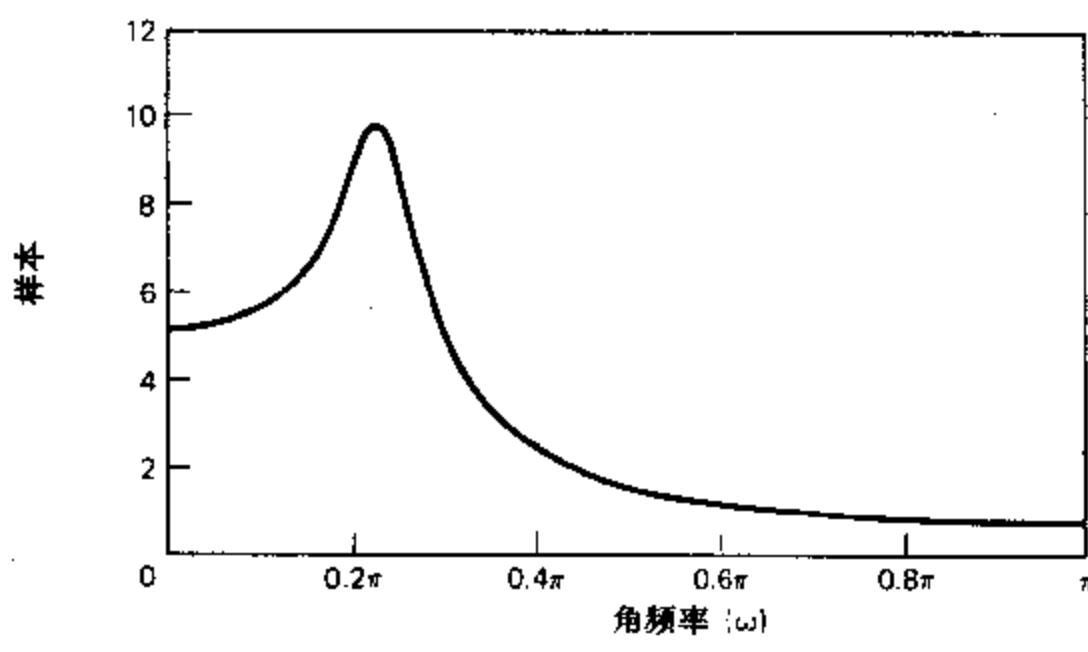
在冲激响应不变设计法中, 连续时间频率和离散时间频率之间的变换是线性的, 因此, 除了混叠之外, 频率响应的形状应保持不变。这一点与下面讨论的以代数变换为基础的方法不同。最后我们应当指出, 冲激响应不变法只适用于带限滤波器。如果要使用冲激响应不变设计方法, 则需要对如像高通和带阻之类的连续时间滤波器提出附加的带限要求, 以避免严重的混叠失真。



(a)



(b)



(c)

图 7.6 用冲激响应不变法变换得出的 6 阶巴特沃兹滤波器的频率响应。
 (a) 对数幅度(dB), (b) 幅度, (c) 群延迟.

7.1.2 双线性变换法

本节所讨论的方法避免了当使用双线性变换法时引起的混叠问题,这种变换是变量

s 和 z 之间的代数变换, 它将 s 平面的整个 $j\Omega$ 轴映射成 z 平面的整个单位圆周. 因为 $-\infty \leq \Omega \leq \infty$ 映射成 $-\pi \leq \omega \leq \pi$, 所以连续时间频率变量和离散时间频率变量的变换必定是非线性的. 因此, 这种方法只能用于相应的频率轴的畸变在允许范围之内的情况.

若 $H_c(s)$ 表示连续时间系统函数, $H(z)$ 表示离散时间系统函数, 则双线性变换法相当于用如下表示式来代替 s :

$$s = \frac{2}{T_d} \left(\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \right). \quad (7.20)$$

因此

$$H(z) = H_c \left[\frac{2}{T_d} \left(\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \right) \right]. \quad (7.21)$$

如同冲激响应不变法一样, “采样”参数 T_d 也包括在双线性变换法的定义中. 从历史过程看, 该方法也已包括了这一参数, 因为可以将梯形积分法则用于对应于 $H_c(s)$ 的微分方程, 并用 T_d 代表数值积分的步长, 从而得到对应于 $H(z)$ 的差分方程. (见 Kaiser, 1966 和习题 7.14.) 但是在滤波器设计中, 使用双线性变换法是以式(7.20)代数变换的特性为基础的.

令式(7.27)等号两边的实部和虚部分别相等,得出关系式 $\sigma=0$ 和

$$\Omega = \frac{2}{T_d} \tan(\omega/2), \quad (7.28a)$$

或

$$\omega = 2 \arctan(\Omega T_d/2). \quad (7.28b)$$

双线性变换法从 s 平面映射到 z 平面的这些性质汇总在图 7.7 和图 7.8 中。从式(7.28b)和图 7.8 中可以看出, $0 \leq \Omega \leq \infty$ 的频率范围映射成 $0 \leq \omega \leq \pi$, 而 $-\infty \leq \Omega \leq 0$ 的频率范围映射成 $-\pi \leq \omega \leq 0$ 。双线性变换法避免了使用冲激响应不变法所遇到的混叠问题, 因为它将 s 平面的整个虚轴映射成 z 平面的单位圆周。但是, 为此所付出的代价是, 引入

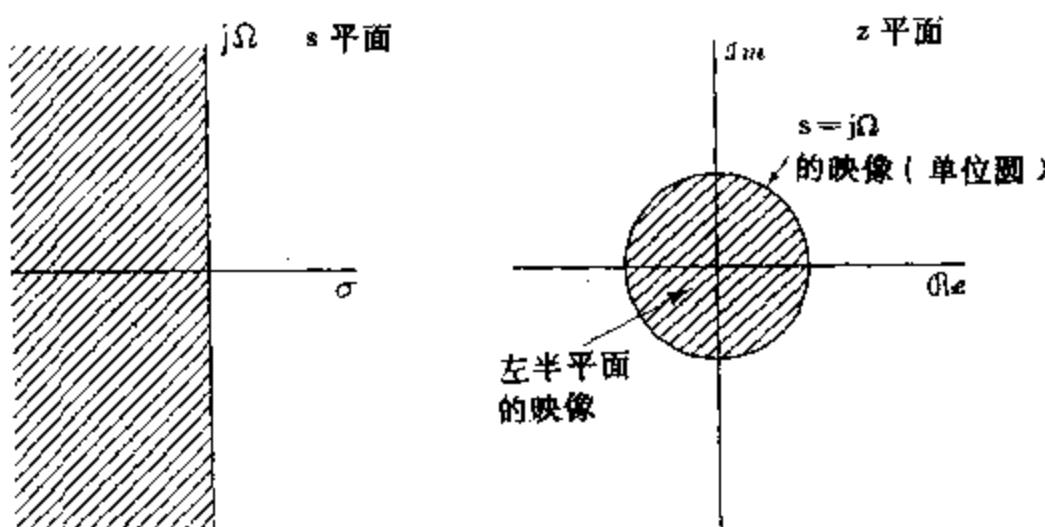


图 7.7 用双线性变换法由 s 平面到 z 平面的映射。

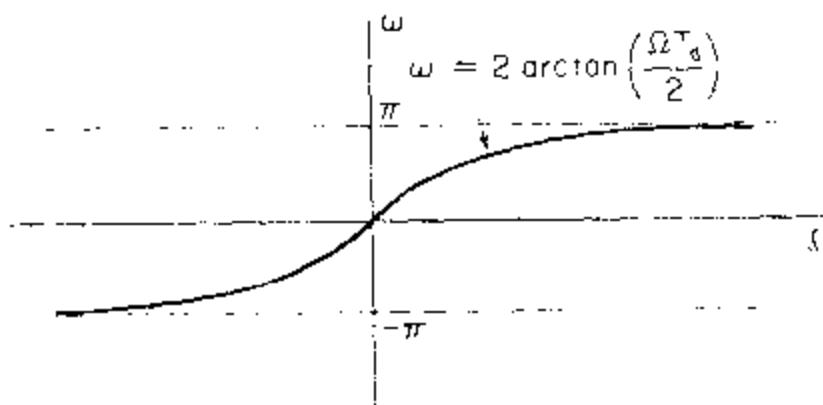


图 7.8 用双线性变换法由连续时间频率轴到单位圆上的映射。

了图 7.8 所示的频率轴非线性压缩。所以, 只有当这种压缩在允许范围之内能加以补偿时, 如在滤波器具有近似理想的分段恒定幅度响应特性的情况下, 使用双线性变换法设计离散时间滤波器才是有效的。例如, 若要设计一个低通滤波器, 要求逼近如图 7.9 所示的理想低通滤波器特性。如果能够设计一个截止频率为 $\Omega_c = (2/T_d)\tan(\omega_c/2)$ 的低通连续时间滤波器, 并且用双线性变换法将它映射到 z 平面, 则会得到图 7.9 所示的理想频率响应。当然, 无论在连续时间情况还是在离散时间情况下, 我们都无法实现这种形式的理想滤波器。通常, 我们允许在通带稍偏离 1, 在阻带稍偏离零, 并且有一定宽度的过渡带逼近这一频率响应。图 7.10 绘出了将连续时间频率响应和它的容限图映射成相当的离散时间频率响应及其容限图的过程。如果按照式

$$\Omega = \frac{2}{T_d} \tan(\omega/2), \quad (7.29)$$

对连续时间滤波器的临界频率(如通带和阻带的边缘频率)进行预畸变, 则用式(7.21)把

连续时间滤波器变成离散时间滤波器时,该离散时间滤波器将会满足所给定的技术指标.

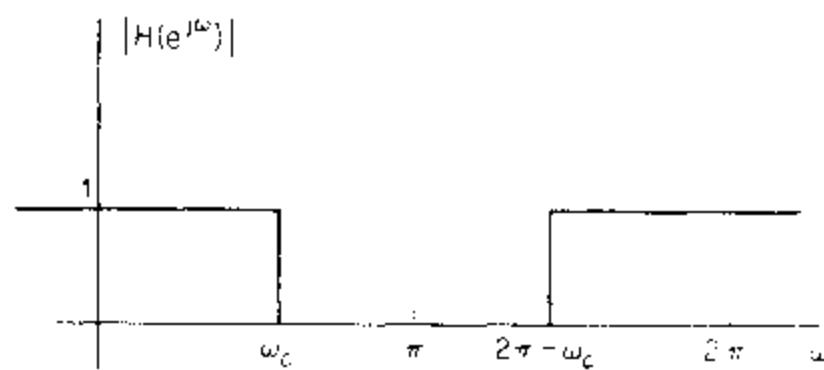


图 7.9 理想低通滤波器的频率响应.

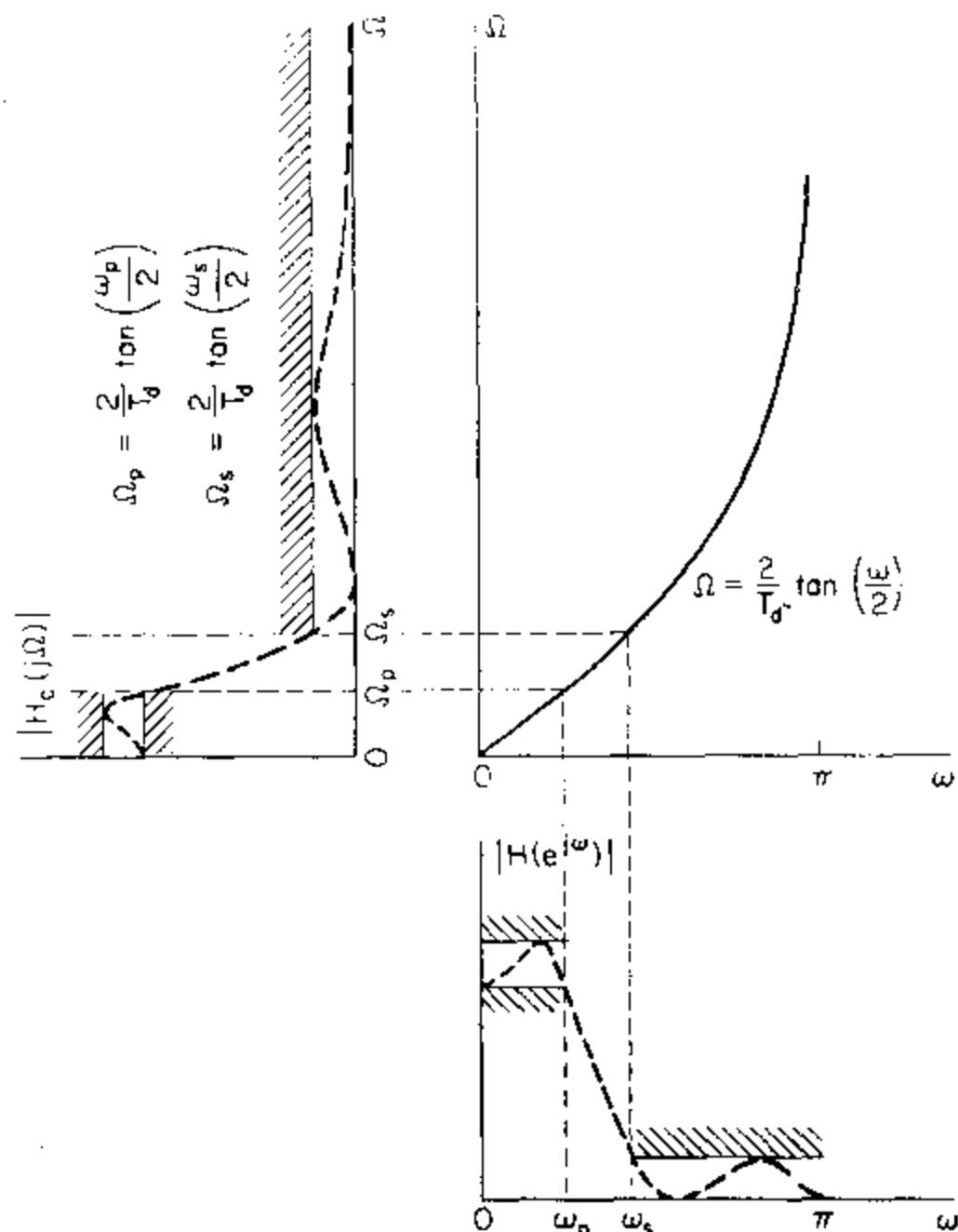


图 7.10 连续时间滤波器经双线性变换成为离散时间滤波器时固有的频率畸变,为了得到要求的离散时间截止频率,连续时间截止频率必须作如图所示的预畸变.

典型的选频连续时间滤波器的逼近有巴特沃兹、切比雪夫和椭圆滤波器逼近.这些连续时间逼近方法的完整设计公式使得设计步骤十分简单.巴特沃兹连续时间滤波器在通带和阻带内都是单调特性. I 型切比雪夫滤波器在通带中呈等波纹特性,而在阻带内单调变化. II 型切比雪夫滤波器在通带内呈单调特性而在阻带内是等波纹的.椭圆滤波器在通带和阻带内都具有等波纹特性.很清楚,用双线性变换法把连续时间滤波器映射成数字滤波器时,这些特性将保留下.图 7.10 中虚线画出的椭圆型逼近就证明了这一点.

虽然双线性变换可有效地用于将分段恒定的幅度响应特性从 s 平面映射到 z 平面，但是频率轴的失真表现为滤波器相位响应的畸变。例如，图 7.11 表示将双线性变换法用于一个理想线性相位因子 $e^{-\alpha\omega}$ 的结果。如果我们用式(7.20)代替 s 并且计算在单位圆上的结果，则可以得出相位角为 $-(2\alpha/T_d)\tan(\omega/2)$ 。图 7.11 中的虚线表示周期线性相位函数 $-(\omega\alpha/T_d)$ ，而实线表示相位函数 $-(2\alpha/T_d)\tan(\omega/2)$ 。由此显然可见，如果我们希望具有线性相位特性的离散时间低通滤波器，那么，若将双线性变换法用于具有线性相位特性的连续时间低通滤波器，就不会得到这种特性的滤波器。

下面的例子说明如何将双线性变换用于滤波器的设计。

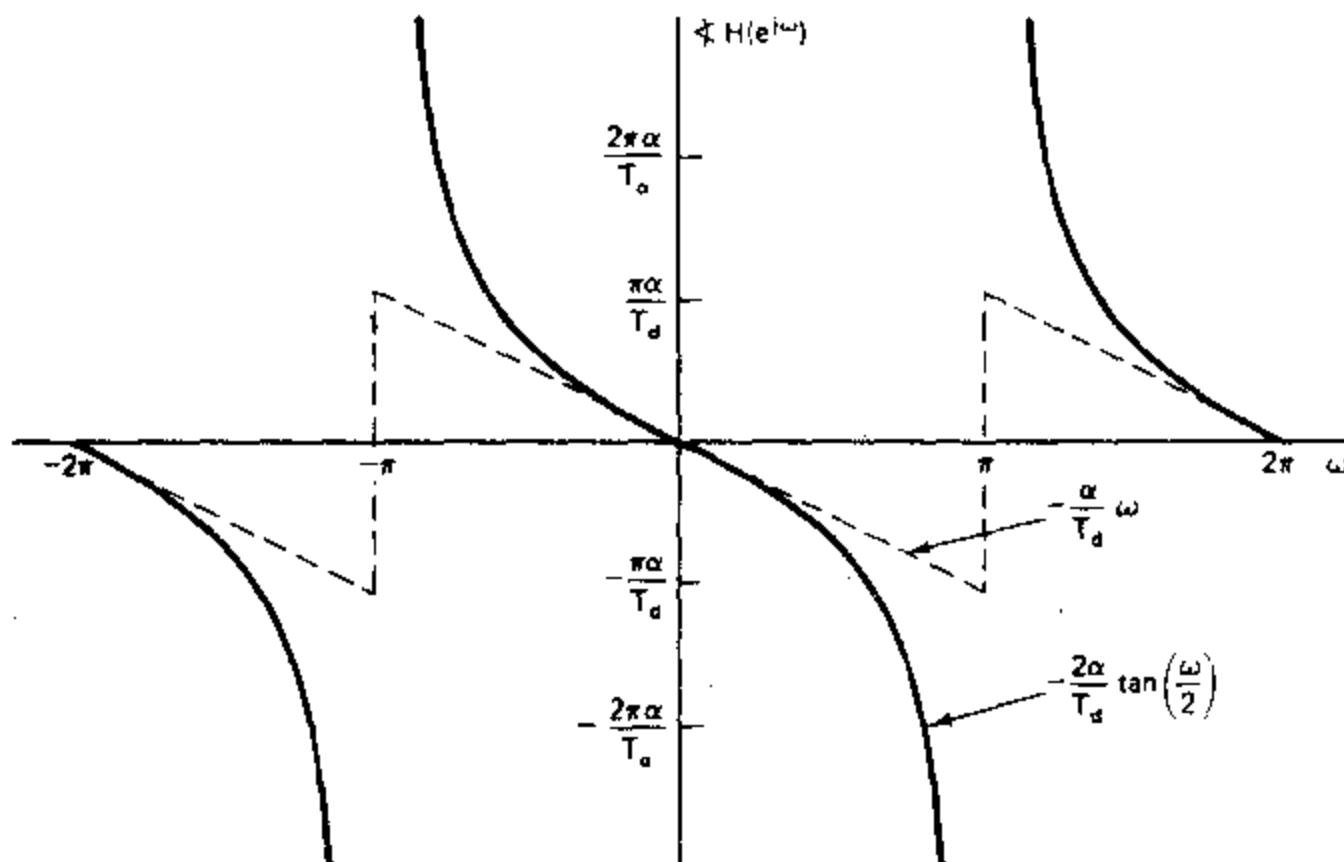


图 7.11 双线性变换对线性相位特性的影响。(虚线表示线性相位, 实线表示由双线性变换得到的相位。)

例 7.4

例 7.3 说明了设计离散时间滤波器所用的冲激响应不变法, 现在继续采用例 7.3 中离散时间滤波器的技术指标。该技术指标是

$$0.89125 \leq |H(e^{j\omega})| \leq 1, \quad 0 \leq |\omega| \leq 0.2\pi, \quad (7.30a)$$

$$|H(e^{j\omega})| \leq 0.17783, \quad 0.3\pi \leq |\omega| \leq \pi. \quad (7.30b)$$

用双线性变换法进行设计时, 必须根据式(7.29)对离散时间滤波器的临界频率作预畸变处理, 使其对应于连续时间滤波器的临界频率, 这样双线性变换中固有的频率失真就可将预畸变后的连续时间临界频率映射回到正确的离散时间临界频率位置上。对于本例中的滤波器, 若用 $|H_c(j\Omega)|$ 表示连续时间滤波器的幅度响应函数, 则要求

$$0.89125 \leq |H_c(j\Omega)| \leq 1, \quad 0 \leq \Omega \leq \frac{2}{T_d} \tan\left(\frac{0.2\pi}{2}\right), \quad (7.31a)$$

$$|H_c(j\Omega)| \leq 0.17783, \quad \frac{2}{T_d} \tan\left(\frac{0.3\pi}{2}\right) \leq \Omega \leq \infty. \quad (7.31b)$$

为了方便起见, 选取 $T_d=1$ 。和例 7.3 一样, 因为连续时间巴特沃兹滤波器具有单调的幅度响应, 我们可同样地要求

$$|H_c(j2\tan(0.1\pi))| \geq 0.89125 \quad (7.32a)$$

和

$$|H_c(j2\tan(0.15\pi))| \leq 0.17783. \quad (7.32b)$$

巴特沃兹滤波器的幅度平方函数为

$$|H_c(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + (\Omega/\Omega_c)^{2N}}. \quad (7.33)$$

在式(7.32a)和(7.32b)中取等号解出 N 和 Ω_c , 得

$$1 + \left(\frac{2\tan(0.1\pi)}{\Omega_c} \right)^{2N} = \left(\frac{1}{0.89} \right)^2 \quad (7.34a)$$

和

$$1 + \left(\frac{2\tan(0.15\pi)}{\Omega_c} \right)^{2N} = \left(\frac{1}{0.178} \right)^2, \quad (7.34b)$$

利用式(7.34a)和(7.34b)解出 N 为

$$N = \frac{\log \left[\left(\left(\frac{1}{0.178} \right)^2 - 1 \right) / \left(\left(\frac{1}{0.89} \right)^2 - 1 \right) \right]}{2\log[\tan(0.15\pi)/\tan(0.1\pi)]}$$

$$= 5.30466. \quad (7.35)$$

因为 N 必须是整数, 所以我们选取 $N=6$. 将 $N=6$ 代入式(7.34b), 得 $\Omega_c=0.76622$. 若用 Ω_c 的这个值, 则可超过通带指标并完全满足阻带指标. 对于双线性变换法这是合理的, 因为我们不必担心混叠问题. 这样, 经过适当的预畸变处理后我们可以肯定, 所得出的离散时间滤波器在要求的阻带边缘处将完全满足技术指标.

在 s 平面上, 幅度平方函数的 12 个极点, 均匀分布在半径为 0.7662 的一个圆周上, 如图 7.12 所示. 选取左半平面的极点得到的连续时间滤波器的系统函数是

$$H_c(s) = \frac{0.20238}{(s^2 + 0.3996s + 0.5871)(s^2 + 1.0836s + 0.5871)(s^2 + 1.4802s + 0.5871)}. \quad (7.36)$$

离散时间滤波器的系统函数 $H(z)$ 是将双线性变换法用于 $H_c(s)$ 并取 $T_d=1$ 而得到的:

$$H(z) = \frac{0.0007378(1+z^{-1})^6}{(1-1.2686z^{-1}+0.7051z^{-2})(1-1.0106z^{-1}+0.3583z^{-2})} \times \frac{1}{(1-0.9044z^{-1}+0.2155z^{-2})}. \quad (7.37)$$

离散时间频率响应的幅度、对数幅度以及群延迟分别示于图 7.13 中. 在 $\omega=0.2\pi$ 处的幅度为 0dB 以下 0.56dB, 在 $\omega=0.3\pi$ 处的对数幅度恰好为 -15dB.

因为双线性变换将 s 平面的整个 $j\Omega$ 轴映射成单位圆, 所以离散时间滤波器的幅度响应要比原始连续时间滤波器的幅度响应下降得快. 特别是 $H(e^{j\omega})$ 在 $\omega=\pi$ 处的特性对应于 $H_c(j\Omega)$ 在 $\Omega=-\infty$ 处的特性. 因此, 由于连续时间巴特沃兹滤波器在 $s=\infty$ 处有

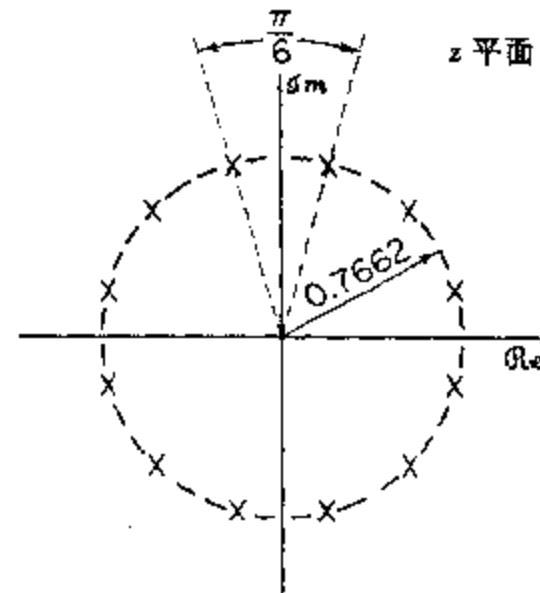


图 7.12 对于例 7.4 中 6 阶巴特沃兹滤波器, $H_c(s)H_c(-s)$ 的极点在 s 平面上的位置.

一个 6 阶零点, 所以得出的离散时间滤波器在 $z = -1$ 处也有一个 6 阶零点. 在习题 7.12 中讨论了用级联、并联和直接形式实现滤波器.

有趣的是, N 阶巴特沃兹连续时间滤波器的一般形式由式(7.33)给出, 并且因为 ω

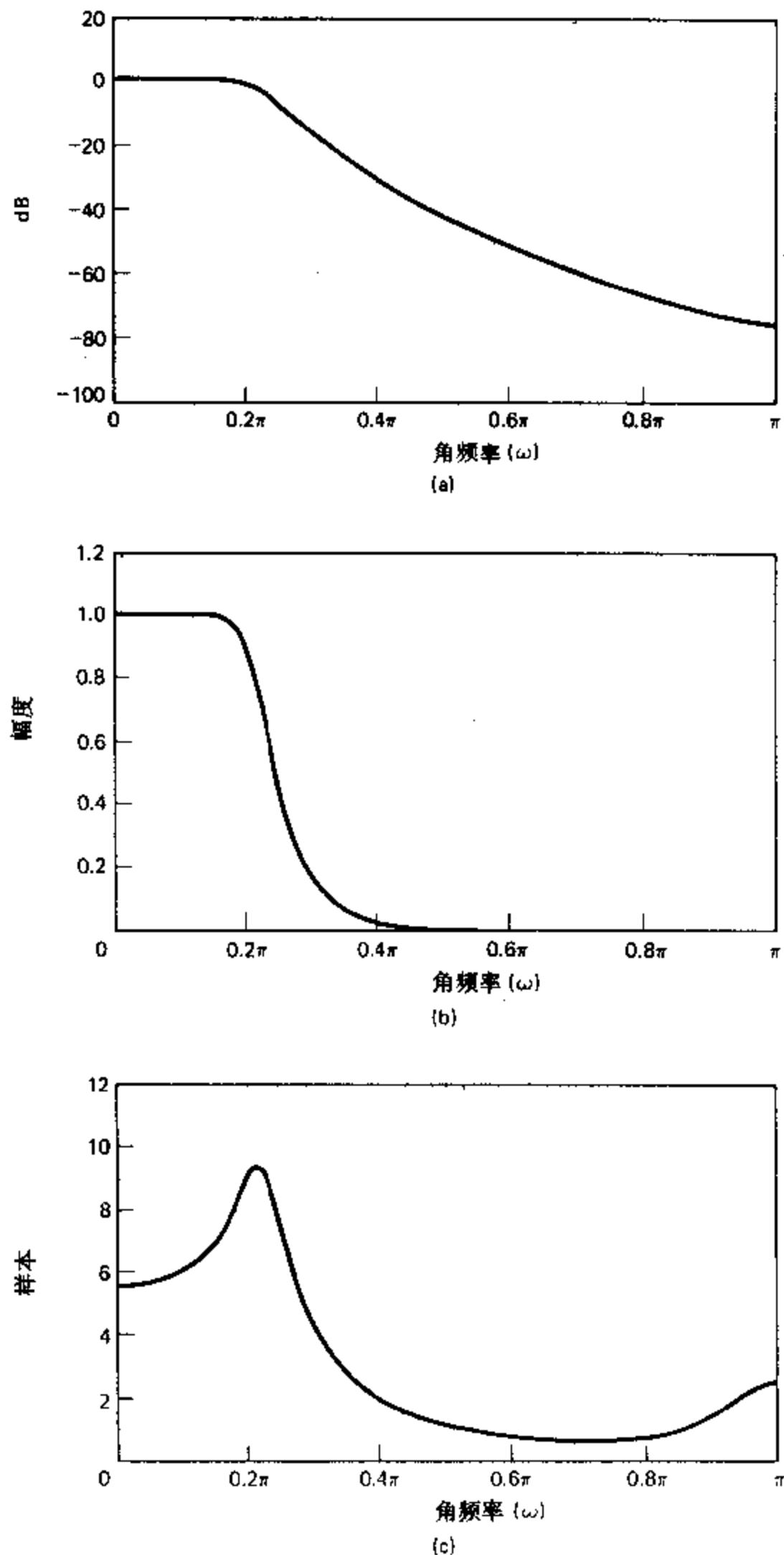


图 7.13 用双线性变换法得出的 6 阶巴特沃兹滤波器的频率响应. (a)对数幅度, (b)幅度, (c)群延迟.

与 Ω 由式(7.29)联系在一起, 所以可以得出一般的巴特沃兹离散时间滤波器有如下形式的幅度平方函数:

$$|H(e^{j\omega})|^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{\tan(\omega/2)}{\tan(\omega_c/2)}\right)^{2N}}, \quad (7.38)$$

式中 $\tan(\omega_c/2) = \Omega_c T_d / 2$.

式(7.38)给出的频率响应函数具有与巴特沃兹连续时间滤波器的频率响应相同的特性; 即具有最平特性*且 $|H(e^{j\omega_c})|^2 = 0.5$. 但是, 式(7.38)的函数是周期为 2π 的周期函数, 并且它要比巴特沃兹连续时间滤波器的频率响应下降快得多.

我们并不首先用式(7.38)直接设计离散时间巴特沃兹滤波器, 因为它不能直接确定式(7.38)幅度平方函数的极点在 z 平面上的位置(所有的零点均在 $z=-1$ 处). 为了求出极点, 有必要将幅度平方函数因式分解成 $H(z)H(z^{-1})$, 从而求出 $H(z)$. 比较容易的做法是, 先求出 s 平面上的极点位置(所有零点均在无限大处), 并对连续时间系统函数进行因式分解, 然后用双线性变换法对 s 左半平面上的极点进行变换, 正如我们在习题 7.4 中所做的那样.

对离散时间切比雪夫滤波器也可以得到形式如式(7.38)的方程, 但是在使用这些方程时会遇到同样的困难. 因此, 上述分两步进行的方法已经成为设计 IIR 选频滤波器所使用的方法.

7.1.3 双线性变换法设计举例

选频 IIR 模拟滤波器的主要逼近方法有巴特沃兹逼近、切比雪夫逼近和椭圆函数逼近. 这些方法的细节可在圭莱明(Guillemain, 1957)、丹尼尔斯(Daniels, 1974)、温伯格(Weinberg, 1975)和拉姆(Lam, 1979)的论文中找到. 通常人们都利用低通滤波器逼近来说明和推导出这些方法. 在附录 B 中概述了这类方法, 并且总结了部分逼近方法的基本特性.

为了说明基本的 IIR 逼近方法的性质, 我们在本节中给出了用每一种基本方法来实现一组滤波器技术指标的几个例子. 设计计算的细节没有给出, 这是因为它们太冗长, 并且最好用计算机程序来完成, 这些程序可实现许多合适的完整设计方程.

假设我们要设计一个满足例 7.1 的技术指标的低通滤波器, 即

$$0.99 \leq |H(e^{j\omega})| \leq 1.01, \quad |\omega| = 0.4\pi \quad (7.39a)$$

和

$$|H(e^{j\omega})| \leq 0.001, \quad 0.6\pi \leq |\omega| \leq \pi. \quad (7.39b)$$

根据图 7.2(b)的容限图, 有 $\delta_1 = 0.01$, $\delta_2 = 0.001$, $\omega_p = 0.4\pi$ 和 $\omega_s = 0.6\pi$.

这些技术指标足以用来确定巴特沃兹、切比雪夫和椭圆函数设计公式中的输入参数. 应当注意, 这些技术指标只对频率响应的幅度而言, 而相位由逼近函数的特性隐含确定.

例 7.5 巴特沃兹逼近

对于式(7.39)所示的技术指标, 巴特沃兹逼近法要求一个 14 阶系统. 离散时间滤波器的频率响应示于图 7.14 中. 该滤波器是由合适的预畸变巴特沃兹滤波器经双线

* $|H(e^{j\omega})|^2$ 在 $\omega=0$ 处的前 $(2N-1)$ 次等数均为零.

性变换后得到的. 图 7.14(a)表示对数幅度(dB), 图 7.14(b)表示 $|H(e^{j\omega})|$ 只在通带内的幅度, 图 7.14(c)表示滤波器的群延迟. 从这些图中可以看出, 巴特沃兹滤波器的频率响应随频率单调地减小, 而滤波器的增益在 $\omega=0.7\pi$ 附近已非常小. 应当指出, 在图 7.14(b)中, 本例中的巴特沃兹滤波器的频率响应已经归一化, 因此它在通带中的增益可大于 1.

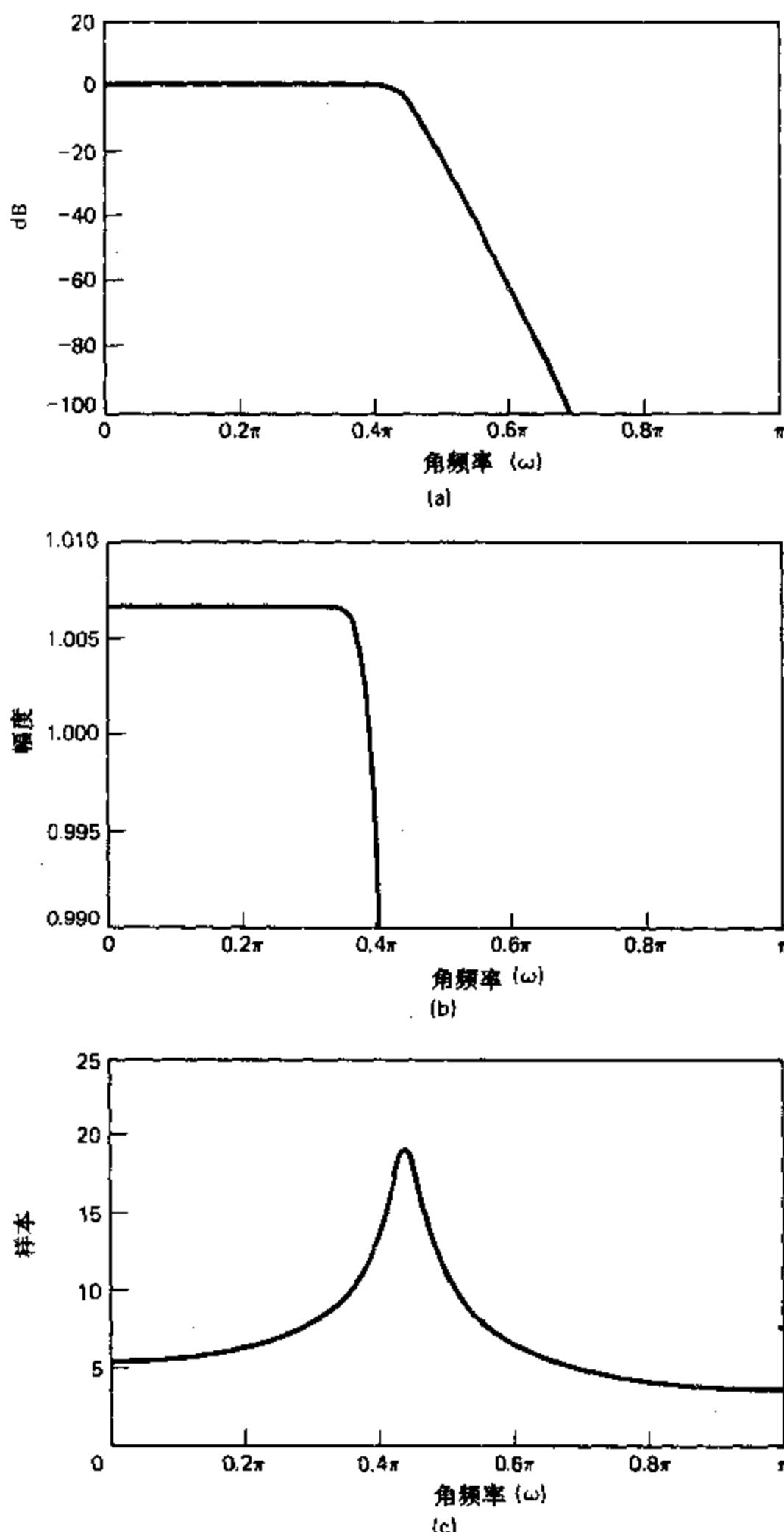


图 7.14 例 7.5 中 14 阶巴特沃兹滤波器的频率响应. (a) 对数幅度(dB). (b) 通带中幅度的详图. (c) 群延迟.

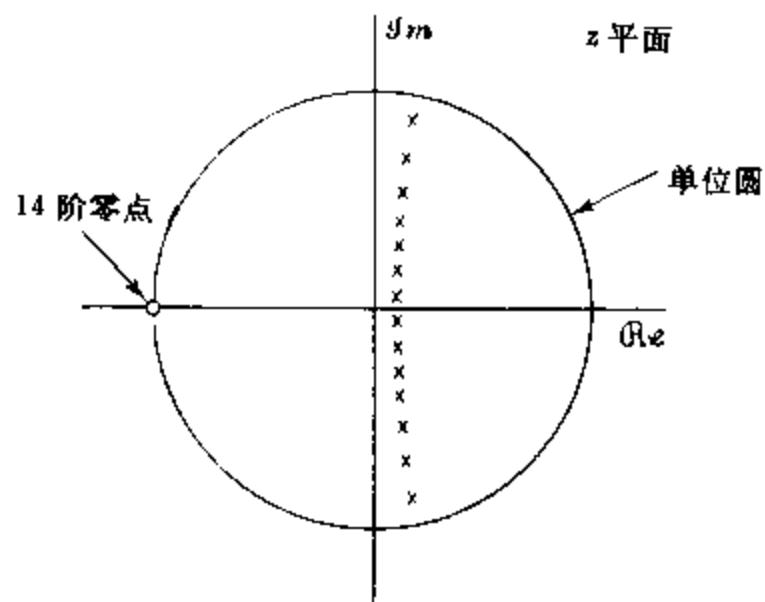


图 7.15 例 7.5 中 14 阶巴特沃兹滤波器的零极点图.

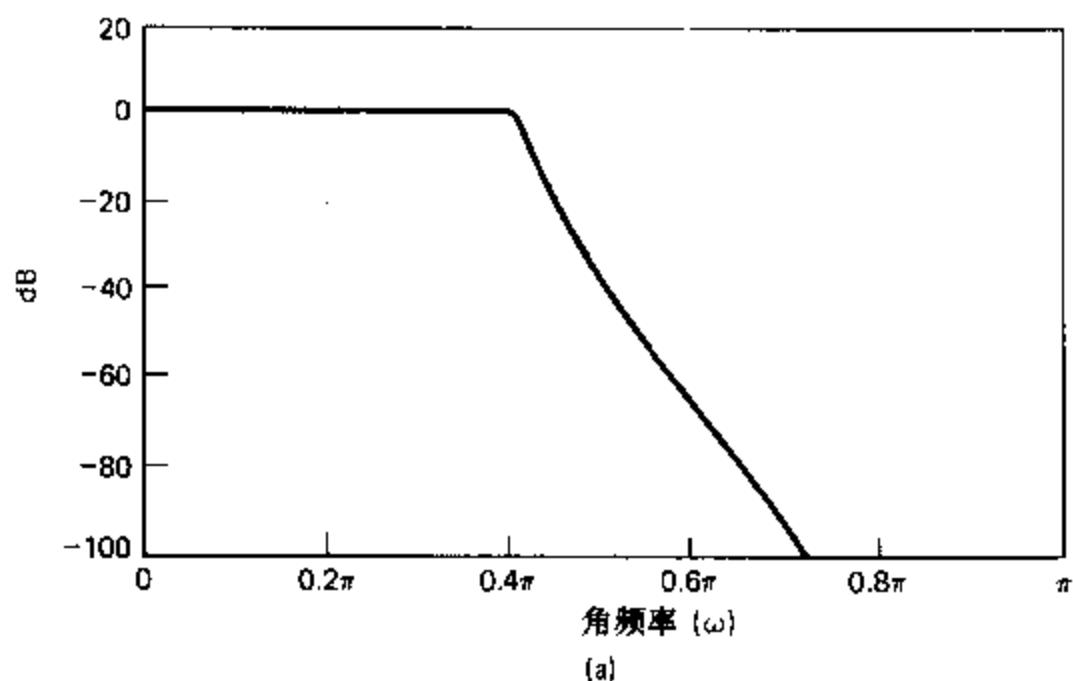
在巴特沃兹逼近的例题中,因为将阶数舍入为整数,所以在通带和阻带的边缘处的性能均超过了技术指标.但是应当指出,在阻带中已明显超过了技术指标,其原因由图 7.15 清楚可见,该图为 14 阶巴特沃兹滤波器的零极点图.因为连续时间巴特沃兹滤波器在 $s = \infty$ 处有 14 个零点,所以数字滤波器经双线性变换在 $z = -1$ 处得出 14 个零点.因此有理由预计,虽然低阶滤波器在阻带的性能不会超过技术指标很多,但也能够满足该指标.这种预见也促进了切比雪夫逼近或等波纹逼近的使用.

例 7.6 切比雪夫逼近

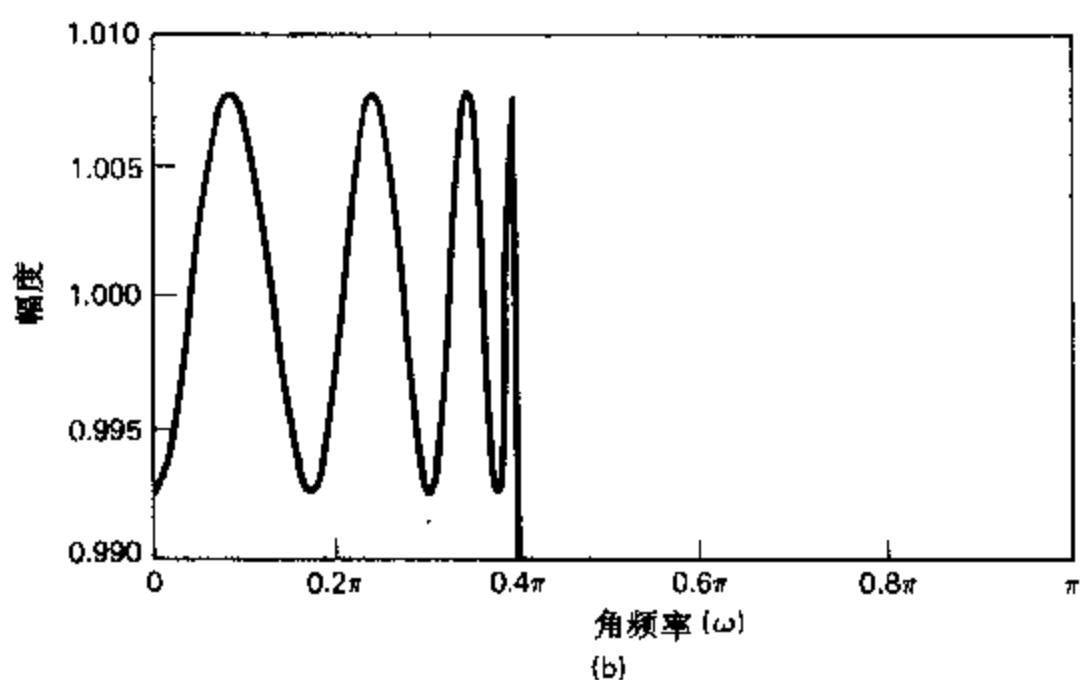
这种方法有两种形式. I 型切比雪夫逼近在通带有等波纹特性,而 II 型切比雪夫逼近在阻带有等波纹特性.对于给定的一组技术指标,这两种方法都得出相同的阶次.对于式(7.39)所示的技术指标,切比雪夫逼近要求 8 阶,而不像巴特沃兹逼近那样要求 14 阶.图 7.16 表示满足式(7.39)的指标时 I 型切比雪夫逼近的对数幅度、通带幅度和群延迟.请注意,通带中的频率响应在要求的单位增益两边以相等的最大误差振荡.

图 7.17 表示满足式(7.39)指标时 II 型切比雪夫逼近的频率响应函数.对于这种情况在阻带呈等波纹特性.切比雪夫滤波器的零极点图示于图 7.18 中.应当注意, I 型切比雪夫滤波器与巴特沃兹滤波器相似,各自全部的 8 个零点均在 $z = -1$ 处.另一方面, II 型切比雪夫滤波器的零点排列在单位圆上.这些零点的位置由设计方程确定,以便得到阻带的等波纹特性.

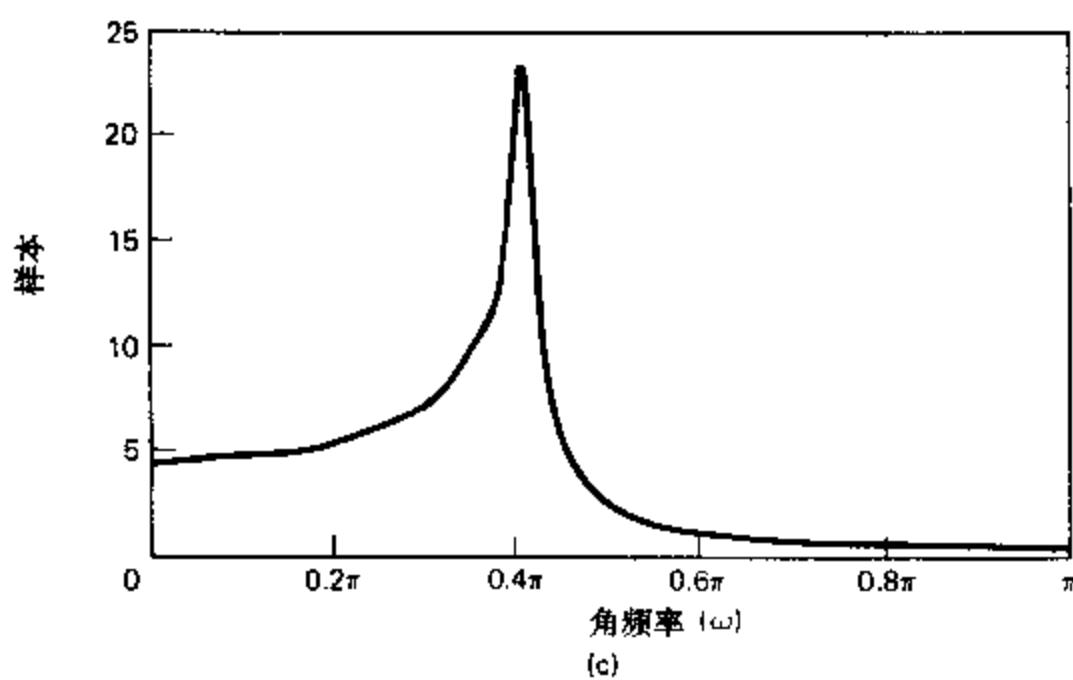
在切比雪夫逼近的两种情况中,阻带或通带的单调特性表明,如果在通带和阻带都使用等波纹逼近则有可能得到较低阶的系统.的确可以证明(见 Papoulis, 1957),对于图 7.2(b)给出的容限图中 $\delta_1, \delta_2, \omega_p$ 和 ω_s 的固定值,若逼近误差分别在两个逼近频带中的极限值之间呈等波纹变化,则可以得到较低阶的滤波器.因为这种等波纹特性是用一个涉及到椭圆函数的有理函数得到的,所以通常将这种系统称为椭圆滤波器.



(a)



(b)



(c)

图 7.16 例 7.6 中 8 阶 I 型切比雪夫滤波器的频率响应。(a)对数幅度(dB)。(b)通带中幅度的详图。(c)群延迟。

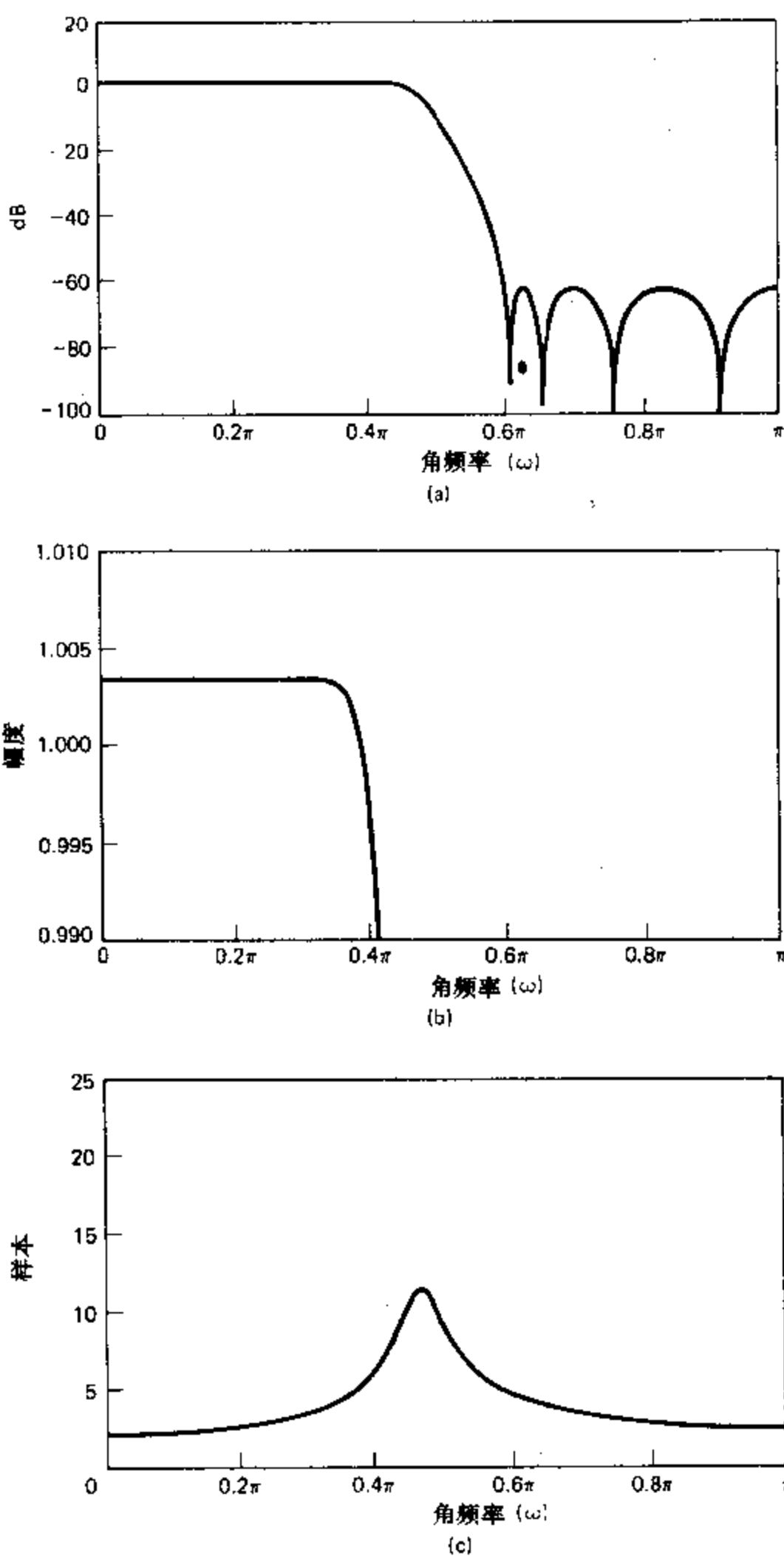


图 7.17 例 7.6 中 8 阶 I 型切比雪夫滤波器的频率响应。(a)对数幅度(dB). (b)通带中幅度的详图. (c)群延迟.

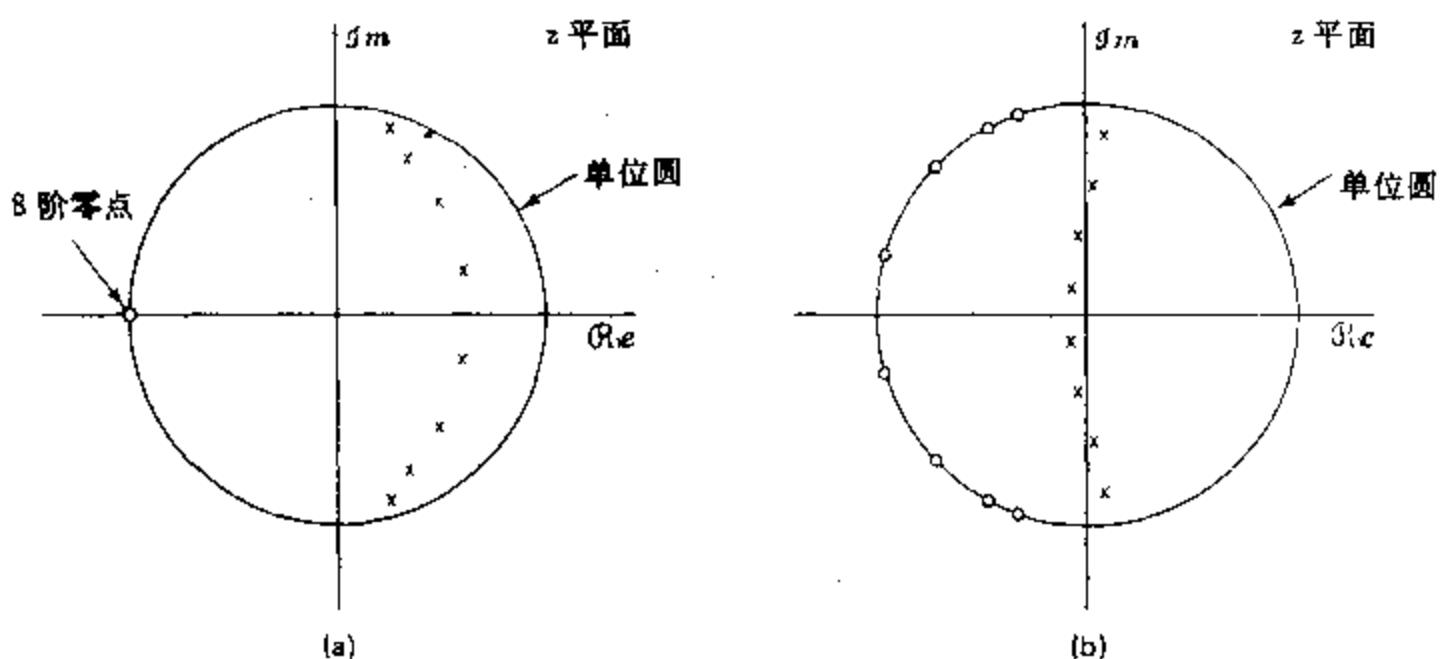


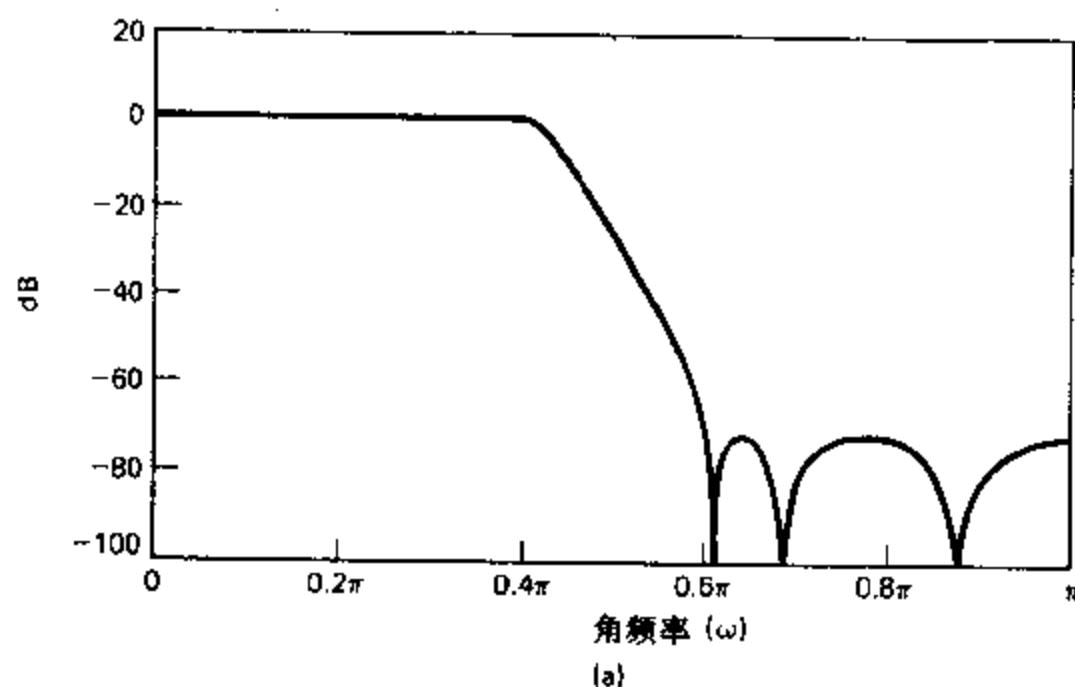
图 7.18 例 7.6 中 8 阶切比雪夫滤波器的零极点图. (a) I 型, (b) II 型.

例 7.7 椭圆逼近*

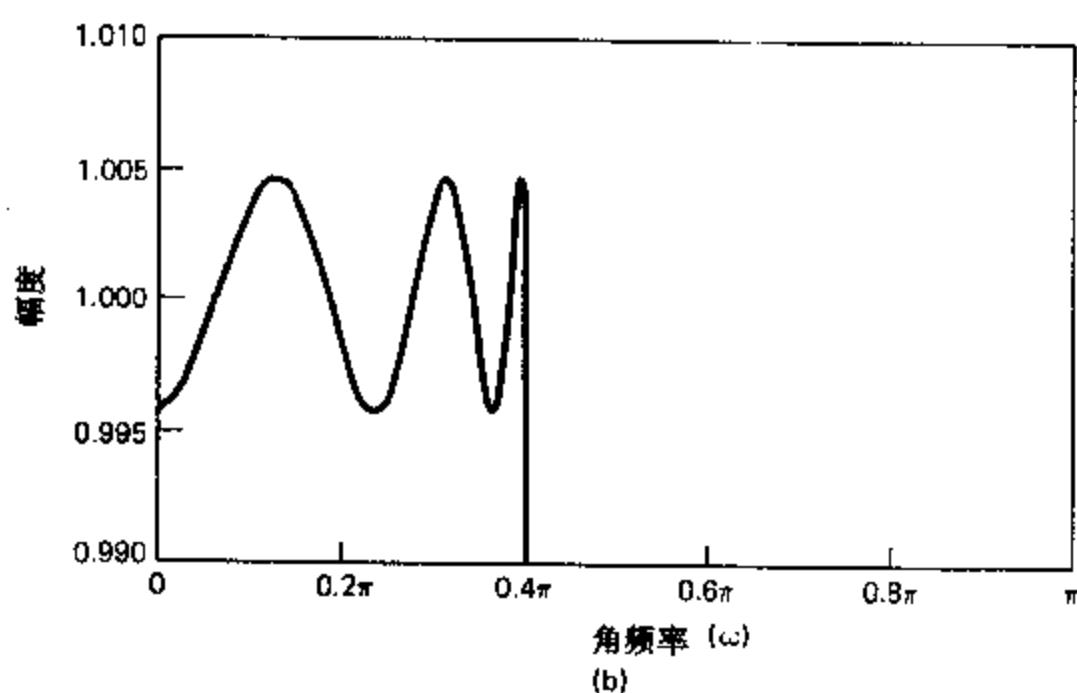
用一个 6 阶椭圆滤波器就能满足式(7.39)给出的技术指标. 这是能满足该指标的最低阶有理函数逼近. 图 7.19 清楚地表示出在两个逼近频带中的等波纹特性. 图 7.20 表明与 I 型切比雪夫逼近类似, 椭圆滤波器的零点排列在单位圆的阻带区域内.

用巴特沃兹、切比雪夫或椭圆逼近设计模拟滤波器的双线性变换法是设计 IIR 数字滤波器的标准方法. 上面的例子说明了这些滤波器的一些重要的普遍特性. 以上各种情况所得到的系统函数 $H(z)$ 的全部零点均在单位圆上, 并且(由于稳定性的缘故)所有的极点均在单位圆内. 因此, 各种近似方法均得到具有非恒定群延迟或非线性相位的数字滤波器. 各种情况下在通带的边缘处或过渡带中会出现恒定群延迟的最大偏差. 通常, I 型切比雪夫逼近法在通带得到最小的延迟和群延迟近似为常数的最宽通带区域. 但是, 如果相位的线性度不是一个问题, 则椭圆逼近可以得到最低阶次的系统函数. 因此, 实现给定的滤波器技术指标, 椭圆滤波器需要的计算量最少.

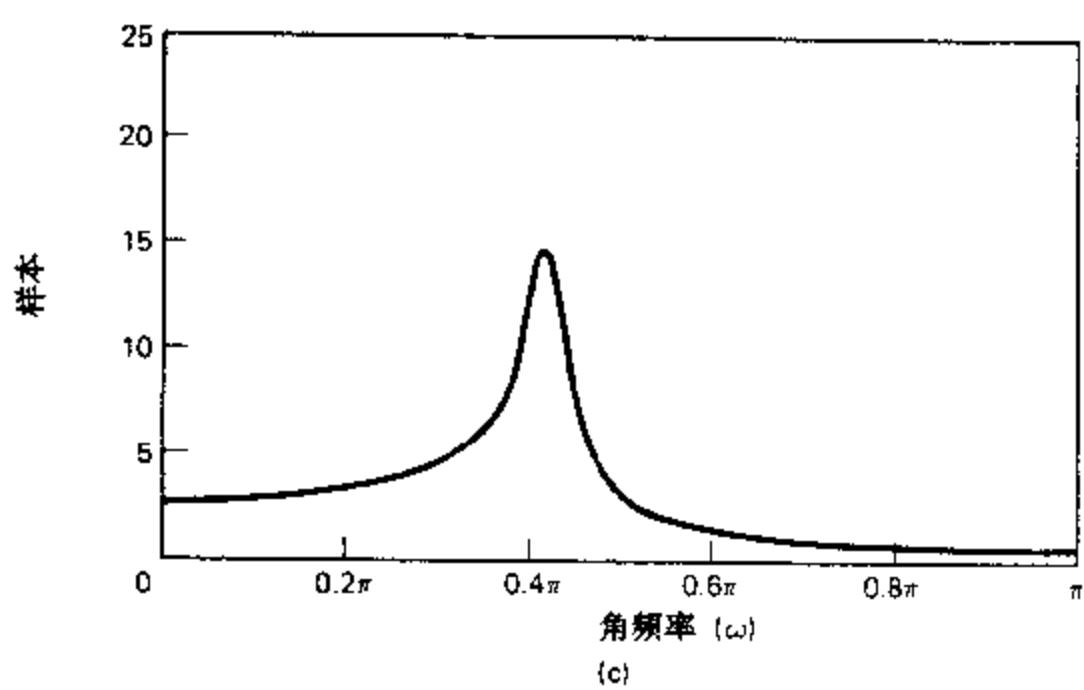
* 椭圆滤波器的设计方程涉及到很多内容, 我们在附录 B 中作了适当的总结. 有关的设计方程可在斯托勒(Storer, 1957)、温伯格(Weinberg, 1957)、帕克和伯鲁斯(Parks and Burrus, 1987)的论文中找到. 椭圆滤波器设计的程序由格雷和马克勒(Gray and Markel, 1976)给出, 在斯非列夫(Zverev, 1957)的论文中列出了扩充的椭圆滤波器设计数表.



(a)



(b)



(c)

图 7.19 例 7.7 中 6 阶椭圆滤波器的频率响应。(a)对数幅度, (b)通带中幅度的详图, (c)群延迟。

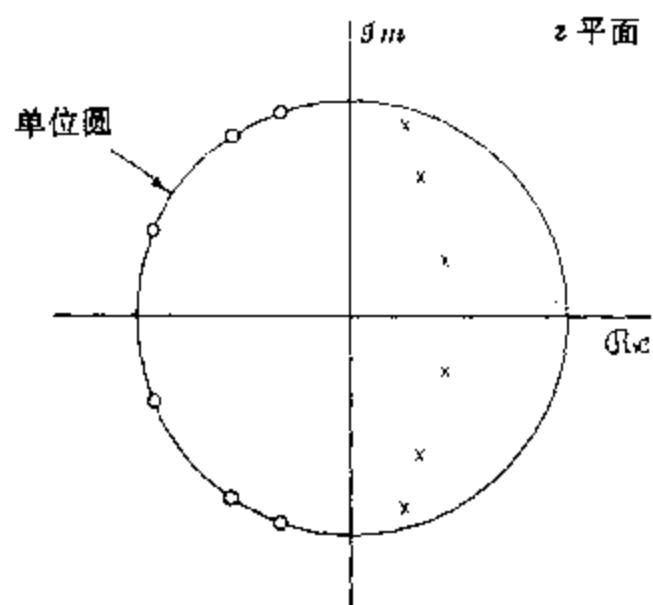


图 7.20 例 7.7 中 6 阶椭圆滤波器的零极点图.

7.2 低通 IIR 滤波器的频率变换法

上面的例子已经说明,如何从有低通选频特性的连续时间系统函数,利用冲激响应不变法和双线性变换法来设计 IIR 数字滤波器. 我们对高通、带通和带阻这些类型的选频滤波器十分感兴趣. 最常用的这四种类型的选频离散时间滤波器的典型容限图示于图 7.21 中. 图中(a)、(b)、(c)和(d)图分别画出了低通、高通、带通和带阻滤波器的逼近容限图. 设计这类选频连续时间滤波器的传统方法是,首先设计一个归一化频率的原型低通滤波器,然后利用一种代数变换,由原型低通滤波器推导出所要求的低通、高通、带通和带阻滤波器(见 Daniels, 1974). 在离散时间选频滤波器的情况下,我们可以先设计一个所需类型的连续时间选频滤波器,然后将它转换成一个离散时间滤波器. 这一转换过程可以用双线性变换法,但是由于采样引起的混叠所致,显然不能使用冲激响应不变法将高通和带阻连续时间滤波器转换成对应的离散时间滤波器. 但是另一种同时可以用双线性变换法或冲激响应不变法的方法是,首先设计一个离散时间原型低通滤波器,然后对其进行某一代数变换从而得到所需的选频离散时间滤波器.

利用一种与把连续时间系统函数转换成离散时间系统函数的双线性变换法十分相似的变换方法,可使低通、高通、带通和带阻型的选频滤波器由低通离散时间滤波器转换得到. 为了说明这一点,假设给定一个低通系统函数 $H_{lp}(Z)$, 我们希望将它转换成一个新的系统函数 $H(z)$, 此函数在单位圆上计算时可具有低通、高通、带通或带阻任一种特性. 请注意,我们将复变量 Z 与原型低通滤波器联系在一起,而用复变量 z 与变换后的滤波器联系在一起. 其次我们定义一种从 Z 到 z 平面的映射,形式为

$$Z^{-1} = G(z^{-1}) \quad (7.40)$$

因此有

$$H(z) = H_{lp}(Z) |_{Z^{-1}=G(z^{-1})} \quad (7.41)$$

我们不用将 Z 表示作 z 的函数,因为在式(7.40)中已经将 Z^{-1} 表示作 z^{-1} 的函数. 因此,按照式(7.41),为了由 $H_{lp}(Z)$ 得到 $H(z)$, 我们简单地用函数 $G(z^{-1})$ 代替在 $H_{lp}(Z)$ 式中的

每一处 Z^{-1} . 这是一种简便的表示方法, 因为 $H_{lp}(Z)$ 通常均表示作 Z^{-1} 的有理函数.

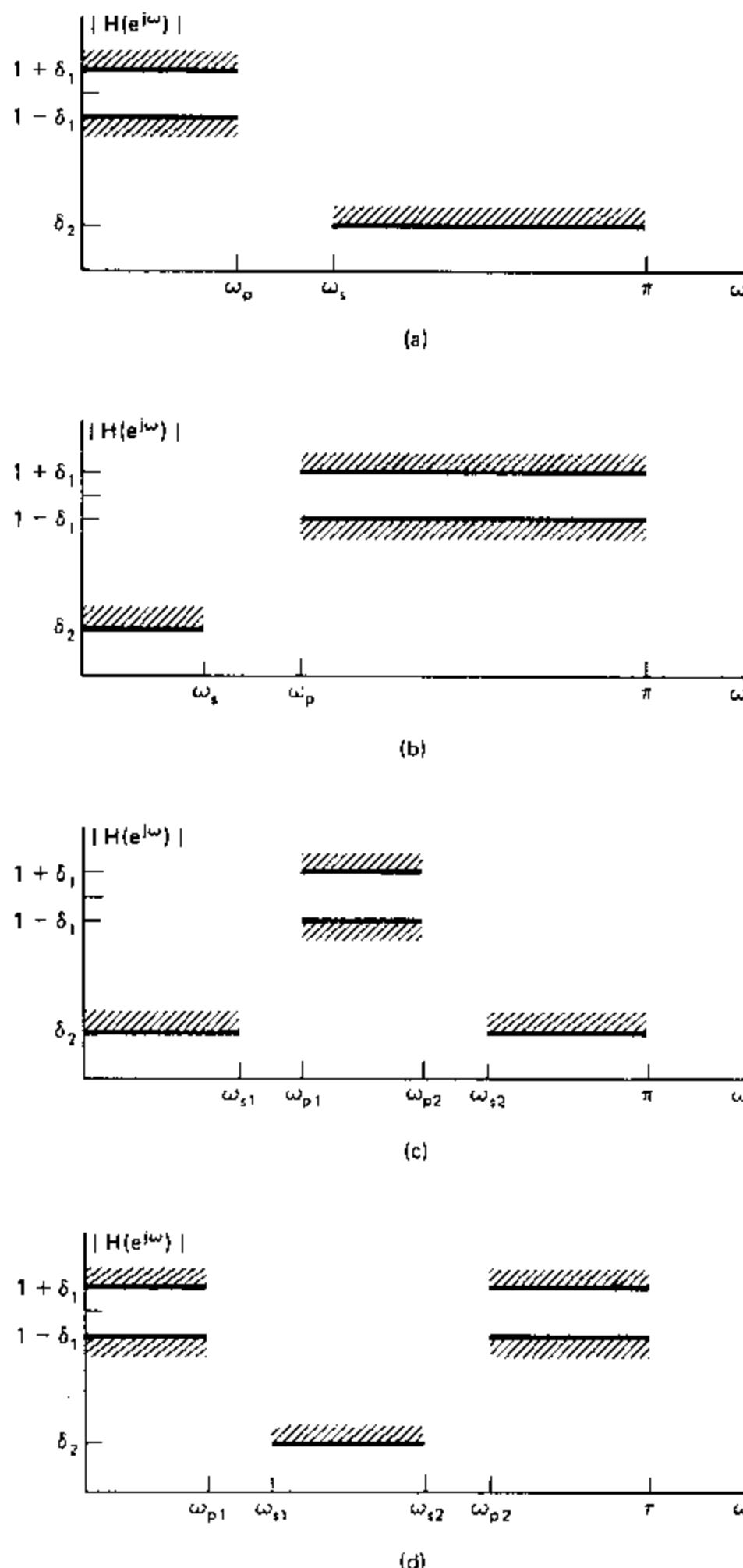


图 7.21 各种选频数字滤波器的容限图. (a)低通, (b)高通, (c)带通, (d)带阻.

如果 $H_{lp}(Z)$ 是某一因果稳定系统的有理系统函数, 则我们自然要求变换后的系统函数 $H(z)$ 应是 z^{-1} 的有理函数, 并且该系统也是因果的和稳定的. 这样, 对于变换 $Z^{-1}=G(z^{-1})$ 就有如下限制:

1. $G(z^{-1})$ 必须是 z^{-1} 的有理函数;
2. Z 平面单位圆的内部必须映射成 z 平面单位圆的内部;
3. Z 平面的单位圆周必须映射成 z 平面的单位圆周.

令 θ 和 ω 分别是 Z 平面和 z 平面上, 也即单位圆 $Z = e^{-j\theta}$ 和 $z = e^{-j\omega}$ 上的频率变量(角度). 因为条件 3 成立, 所以必有

$$e^{-j\theta} = |G(e^{-j\omega})| e^{j\arg G(e^{-j\omega})} \quad (7.42)$$

和

$$|G(e^{-j\omega})| = 1. \quad (7.43)$$

因此这两个频率变量之间的关系是

$$-\theta = \arg G(e^{-j\omega}). \quad (7.44)$$

康斯坦丁尼兹(Constantinides, 1970)已经证明, 满足以上所有要求的函数 $G(z^{-1})$ 的最一般形式是

$$Z^{-1} = G(z^{-1}) = \pm \prod_{k=1}^N \frac{z^{-1} - \alpha_k}{1 - \alpha_k z^{-1}}. \quad (7.45)$$

从第五章有关全通系统的讨论中清楚可知, 式(7.45)所给出的 $G(z^{-1})$ 满足式(7.43), 并且很容易证明, 当且仅当 $|\alpha_k| < 1$ 时, 式(7.45)才能将 Z 平面单位圆的内部映射成 z 平面单位圆的内部. 若选择适当的 N 和常数 α_k 值, 则可以得到各种映射. 最简单的映射是将一个低通滤波器映射成另一个低通滤波器. 对于这种情况,

$$Z^{-1} = G(z^{-1}) = \frac{z^{-1} - \alpha}{1 - \alpha z^{-1}}. \quad (7.46)$$

如果我们将 $Z = e^{-j\theta}$ 和 $z = e^{j\omega}$ 代入, 则得到

$$e^{-j\theta} = \frac{e^{-j\omega} - \alpha}{1 - \alpha e^{-j\omega}}, \quad (7.47)$$

由此可得

$$\omega = \arctan \left[\frac{(1 - \alpha^2) \sin \theta}{2\alpha + (1 + \alpha^2) \cos \theta} \right]. \quad (7.48)$$

α 取不同值时的上述关系绘于图 7.22 中. 虽然在图 7.22 中频率轴的畸变是很明显的(除了 $\alpha = 0$, 即对应于 $Z^{-1} = z^{-1}$ 的情况外), 但是若原始系统具有截止频率为 θ_p 的分段恒定低通频率响应, 则变换后的系统将同样有类似的截止频率为 ω_p 的低通频率响应, 而 ω_p 由 α 的选择来决定. 可以利用 θ_p 和 ω_p 解出 α , 得

$$\alpha = \frac{\sin[(\theta_p - \omega_p)/2]}{\sin[(\theta_p + \omega_p)/2]}. \quad (7.49)$$

这样, 为了利用这些结果从一个已有的截止频率为 θ_p 的低通滤波器 $H_{lp}(Z)$ 得到一个截止频率为 ω_p 的低通滤波器 $H(z)$, 我们应当用式(7.49)来确定下式中的 α :

$$H(z) = H_{lp}(Z) |_{z^{-1} = (\alpha^{-1} - \alpha)/(1 - \alpha z^{-1})}. \quad (7.50)$$

(习题 7.21 说明如何利用低通到低通的变换得出可变截止频率滤波器的网络结构, 该截止频率由单个参数 α 确定.)

由一个低通滤波器到高通、带通和带阻滤波器的变换法可以用类似的方式导出, 这些

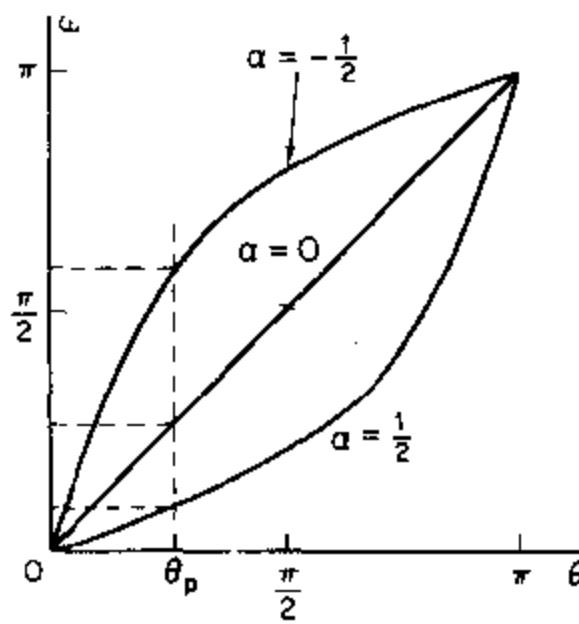


图 7.22 低通到低通变换中频率刻度的畸变.

变换汇总于表 7.1 中. 假定这些设计公式中的所有截止频率都在 0 到 π 弧度之间. 下面的例子说明这些变换的用法.

表 7.1 截止频率为 θ_p 的低通数字滤波器原型的变换

滤波器类型	变换式	相关的设计公式
低通	$Z^{-1} = \frac{z^{-1} - \alpha}{1 - \alpha z^{-1}}$	$\alpha = \frac{\sin\left(\frac{\theta_p - \omega_p}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta_p + \omega_p}{2}\right)}$ $\omega_p = \text{所需的截止频率}$
高通	$Z^{-1} = \frac{z^{-1} + \alpha}{1 + \alpha z^{-1}}$	$\alpha = \frac{\cos\left(\frac{\theta_p + \omega_p}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\theta_p - \omega_p}{2}\right)}$ $\omega_p = \text{所需的截止频率}$
带通	$Z^{-1} = \frac{z^{-2} - \frac{2ak}{k+1}z^{-1} + \frac{k-1}{k+1}}{\frac{k-1}{k+1}z^{-2} - \frac{2ak}{k+1}z^{-1} + 1}$	$\alpha = \frac{\cos\left(\frac{\omega_{p2} + \omega_{p1}}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\omega_{p2} - \omega_{p1}}{2}\right)}$ $k = \cot\left(\frac{\omega_{p2} - \omega_{p1}}{2}\right) \tan\left(\frac{\theta_p}{2}\right)$ $\omega_{p1} = \text{所需的下限截止频率}$ $\omega_{p2} = \text{所需的上限截止频率}$
带阻	$Z^{-1} = \frac{z^{-2} - \frac{2a}{1+k}z^{-1} + \frac{1-k}{1+k}}{\frac{1-k}{1+k}z^{-2} - \frac{2a}{1+k}z^{-1} + 1}$	$\alpha = \frac{\cos\left(\frac{\omega_{p2} + \omega_{p1}}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\omega_{p2} - \omega_{p1}}{2}\right)}$ $k = \tan\left(\frac{\omega_{p2} - \omega_{p1}}{2}\right) \tan\left(\frac{\theta_p}{2}\right)$ $\omega_{p1} = \text{所需的下限截止频率}$ $\omega_{p2} = \text{所需的上限截止频率}$

例 7.8

考虑一个 I 型切比雪夫低通滤波器, 其系统函数为

$$H_{lp}(Z) = \frac{0.001836(1+Z^{-1})^4}{(1-1.5548Z^{-1}+0.6493Z^{-2})(1-1.4996Z^{-1}+0.8482Z^{-2})}. \quad (7.51)$$

用双线性变换法设计这个 4 阶系统以满足例 7.3 和例 7.4 的技术指标, 即

$$0.89125 \leq |H_{lp}(e^{j\theta})| \leq 1, \quad 0 \leq \theta \leq 0.2\pi, \quad (7.52a)$$

$$|H_{lp}(e^{j\theta})| \leq 0.17783, \quad 0.3\pi \leq \theta \leq \pi. \quad (7.52b)$$

因此, 通带截止频率为 $\theta_p = 0.2\pi$. 这个滤波器的频率响应如图 7.23 所示.

假设我们需要一个通带截止频率 $\omega_p = 0.6\pi$ 的低通滤波器, 由表 7.1 可得

$$\alpha = -\frac{\cos[(0.2\pi+0.6\pi)/2]}{\cos[(0.2\pi-0.6\pi)/2]} = -0.38197. \quad (7.53)$$

因此, 若利用表 7.1 中所示的低通到高通的变换, 得

$$\begin{aligned} H(z) &= H_{lp}(Z) \Big|_{z^{-1} = -[\zeta z^{-1} - 0.38197]/(1 - 0.38197z^{-1})} \\ &= \frac{0.02426(1-z^{-1})^4}{(1+1.0416z^{-1}+0.4019z^{-2})(1+0.5661z^{-1}+0.7657z^{-2})}. \end{aligned} \quad (7.54)$$

这个系统的频率响应示于图 7.24 中. 应当注意, 除了频率刻度有一些失真外, 高通频率响应看上去非常像频率平移了 π 的低通频率响应. 还应注意, 低通滤波器在 $Z=-1$ 处的 4 阶零点现在变换为高通滤波器在 $z=-1$ 处的 4 阶零点. 这个例子清楚地表明, 这种类型的频率变换保留了等波纹通带(和阻带)特性. 最后请注意, 图 7.24(c) 中的群延迟不是图 7.23(c) 形式之群延迟的简单展宽和平移, 这是因为展宽和平移的是相位的变化, 所以对高通滤波器来说相位的导数就要小一些.

设计离散时间滤波器时使用频率变换法往往要比例 7.8 所建议的复杂. 通常没有给出原型低通滤波器, 而是必须求出某一低通滤波器, 由此经变换后所得到的高通、带通或带阻滤波器可以满足给定的一组技术指标. 因此, 对于高通滤波器必须说明通带和阻带频率 ω_p 和 ω_s . 显然, 如果我们说明了高通滤波器的 ω_p 和 ω_s , 但不能任意选取 θ_p 和 θ_s , 因为只能有一对频率(θ_p, ω_p 或 θ_s, ω_s)代入公式而求出变换参数 α . 使用设计公式的一种方法是, 先固定 α , 然后得出一个联系 θ 和 ω 的方程. 可以用这个方程来确定预畸变后的 θ_p 和 θ_s 值. 由这两个值应该能够变换得出所要求的通带和阻带截止频率 ω_p 和 ω_s . 然后用规定的通带和阻带逼近误差 δ_1 和 δ_2 以及计算出的截止频率 θ_p 和 θ_s 来设计低通滤波器.

一般说来, θ, α 和 ω 之间的关系是非线性的, 类似于式(7.48)的形式. 但是, 对于低通到高通的变换, 若选取 $\alpha=0$ 就特别简单, 因为

$$Z^{-1} = -z^{-1}, \quad (7.55)$$

此时频率变量之间的关系为

$$\theta = \pi + \omega. \quad (7.56)$$

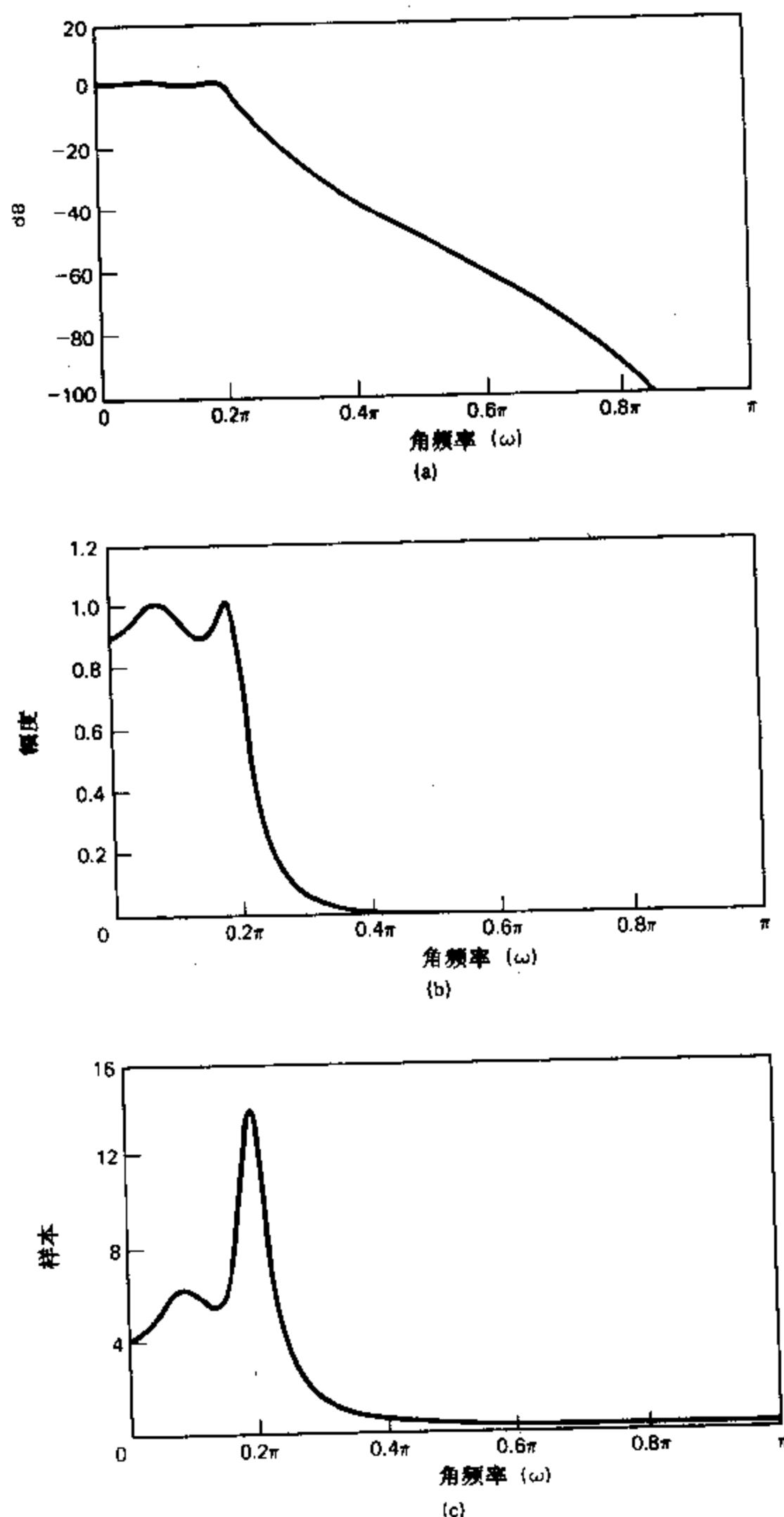


图 7.23 4 阶切比雪夫低通滤波器的频率响应. (a)对数幅度(dB), (b)幅度, (c)群延迟.

在带通和带阻的情况下,因为有较多的自由参数,问题就要复杂一些.

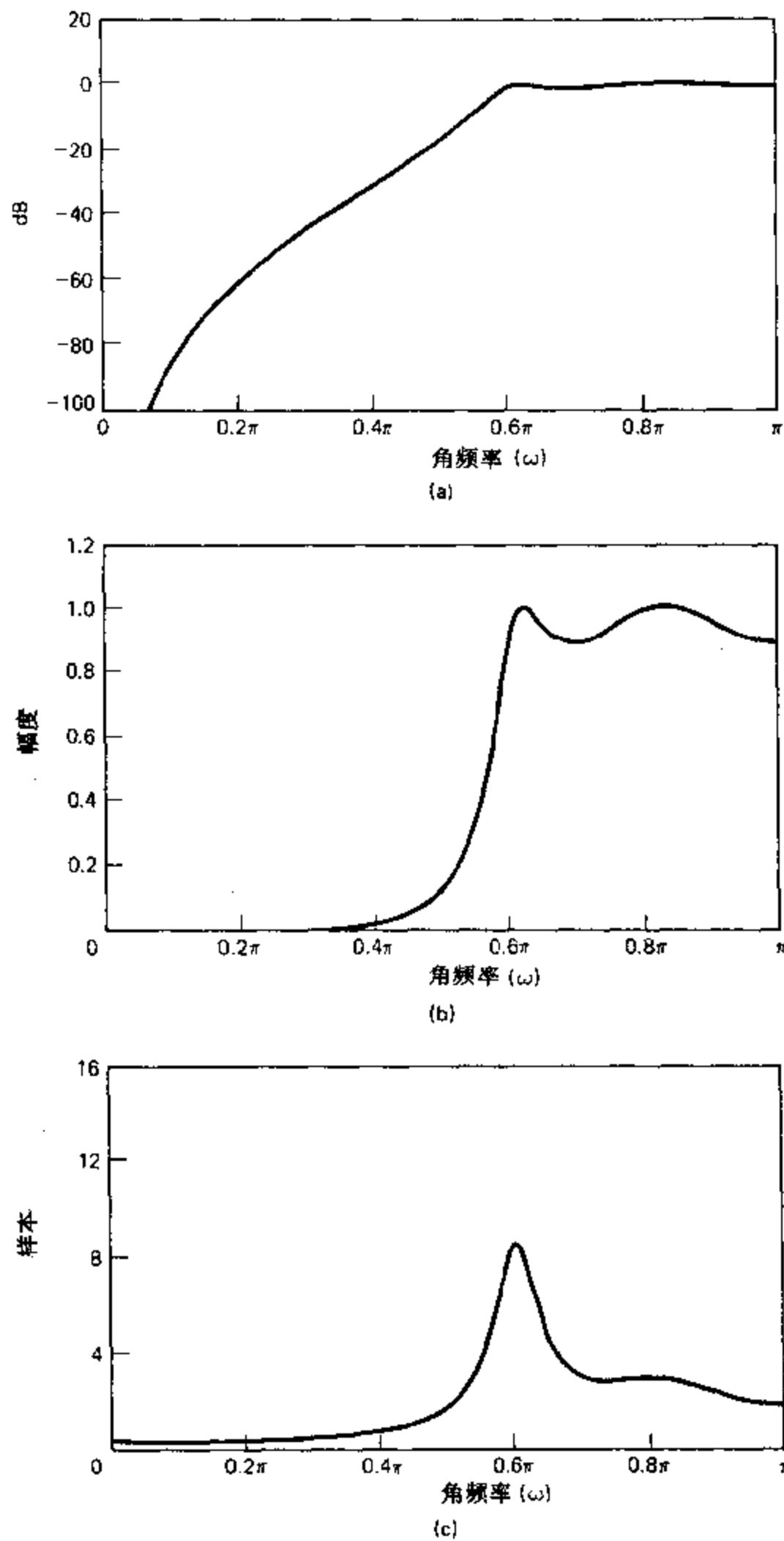


图 7.24 用频率变换法得到的 4 阶切比雪夫高通滤波器的频率响应. (a)对数幅度 (dB). (b)幅度. (c)群延迟.

7.3 离散时间 IIR 滤波器的计算机辅助设计

7.1 节中曾指出, 设计离散时间滤波器时, 可以首先设计一个合适的连续时间滤波

器,然后将它转换成离散时间滤波器.当我们利用成熟的连续时间滤波器设计技术、且该技术已有完整的设计公式或有可供查阅的内容广泛的现成设计图表时,这样一种设计方法才是合理的.多种选频滤波器,如巴特沃兹、切比雪夫或椭圆滤波器等均可以使用这种方法.然而在一般情况下,无论是设计与任意频率响应的技术指标相匹配,或与其它类型的技术指标相匹配的连续时间滤波器,或是设计这种离散时间滤波器都没有解析的公式.但是对这些较一般的情况,已经推导出一些设计方法,它们通常是依靠计算机来解线性或非线性方程的算法.计算机辅助设计技术均可以很好地用于连续时间滤波器的设计或离散时间滤波器的设计,两者之间只有很小的差别.因此可以不需要首先设计出一个连续时间滤波器,然后再转换成离散时间滤波器.

大多数 IIR 滤波器的算法设计法都有以下步骤:

1. 假设 $H(z)$ 是一个有理函数,它可以表示成 z (或 z^{-1}) 的多项式之比,或分子因式和分母因式(零点和极点)的乘积,或 2 阶因式的乘积;
2. 确定 $H(z)$ 分子和分母的阶次;
3. 选择所需的理想频率响应和相应的逼近误差准则;
4. 用一种合适的优化算法,按照所采用的误差准则系统地改变自由变量(分子和分母的系数,零点和极点等),使逼近误差最小;
5. 用可以使逼近误差最小的一组参数来确定所需系统的系统函数.

在这种方法中,设计者或是满足于使逼近误差达到最小的滤波器,或是改变问题的有关参数并重新计算求解.通常这意味着要改变系统函数分子和分母的阶次.因此,算法设计法虽然不像以完整的设计公式为基础的方法那样严格,但是后一种方法原则上只限用于选频滤波器的设计,而对算法设计法一般就没有这样的限制.如果频率响应特性是非标准的,则算法设计法可能是唯一行之有效的方法.

7.3.1 德克茨基法

由上面一般方法的描述可以清楚地看出,存在着许多可能的方式来定义算法设计法.已有很多误差准则可用并有许多最优算法.为了说明算法设计法,我们将讨论由德克茨基(Deczky, 1972)提出的一种方法.之所以集中讨论这种方法是因为它灵活有效而且容易修改,最重要的是已经有了实现该方法的 FORTRAN 程序.(见 DSP Committee, 1979.)

德克茨基法中滤波器的系统函数是利用其零点和极点来表示的.为了方便起见,假设所有的零点和极点都以复共轭对的形式出现,因此

$$H(z) = K_0 \prod_{k=1}^{N_r} \frac{(1-z_k z^{-1})(1-z_k^* z^{-1})}{(1-p_k z^{-1})(1-p_k^* z^{-1})}. \quad (7.57)$$

很容易作一些修改使一定的实零点和/或极点包括在上式内,或限制一些零点位于单位圆上.也可以给出有更多规定的其它形式的系统函数.例如,为了设计一个对已知系统的相位和群延迟进行补偿的全通系统, $H(z)$ 的形式应当是

$$H(z) = \prod_{k=1}^{N_r} \frac{(p_k - z^{-1})(p_k^* - z^{-1})}{(1-p_k z^{-1})(1-p_k^* z^{-1})}. \quad (7.58)$$

有关这种方法灵活性的另一个有趣的例子见理查兹(Richards, 1982)的论文,作者指出如何修改德克茨基的程序来设计递推抽取滤波器,其中 $H(z)$ 的分母是 Z^{-R} (R 是抽取因子)的多项式,而不像式(7.57)那样是 Z^{-1} 的多项式.

为了进一步简化最优算法所要求的某些表达式,可以将零点和极点表示成如下的极坐标形式,这样算法就会特别简便:

$$z_k = r_{zk} e^{j\theta_{zk}}, \quad (7.59a)$$

$$p_k = r_{pk} e^{j\theta_{pk}}, \quad (7.59b)$$

多项式中分子和分母的阶次均为 $2N_s$,但是它们的阶次也可以不相同.

德克茨基最初在推导公式时允许使频率响应幅度的逼近误差和群延迟的逼近误差都达到最小.如果我们定义

$$A(\omega) = |H(e^{j\omega})| \quad (7.60a)$$

和

$$\tau(\omega) = -\frac{d}{d\omega} \arg[H(e^{j\omega})], \quad (7.60b)$$

则幅度的逼近误差定义为

$$E_A = \sum_{i=1}^L W_A(\omega_i) |A(\omega_i) - A_d(\omega_i)|^{2m} \quad (7.61)$$

群延迟的逼近误差为

$$E_\tau = \sum_{i=1}^L W_\tau(\omega_i) |\tau(\omega_i) - \tau_d(\omega_i) - \tau_o|^{2q} \quad (7.62)$$

式中 m 和 q 是由设计者规定的整数参数, $A_d(\omega)$ 和 $\tau_d(\omega)$ 分别是所要求的理想幅度函数和群延迟函数. τ_o 是在优化过程中调整的可变参数,它表示由所用 $H(z)$ 的形式无法得到的恒定延迟.如在式(7.57)或(7.58)中令 $z = e^{j\omega}$,则很容易推导出式(7.61)和(7.62)中所要求的 $A(\omega)$ 和 $\tau(\omega)$ 的计算公式.这些公式由德克茨基(Deczky, 1972)给出.

函数 $W_A(\omega)$ 和 $W_\tau(\omega)$ 是误差加权函数,可以用来控制使逼近误差成为所需要的分布.请注意,式(7.61)和(7.62)定义的逼近误差是在一组离散频率 $\omega_i (i=1, 2, \dots, L)$ 上加权误差之和.这些频率的选择是算法初始化的一部分.一种可能的选择是,使这些频率均匀分布在区间 $0 \leq \omega \leq \pi$ 上,或集中在频率响应的某特定区域上.总的逼近误差定义为

$$E = \alpha E_A + (1-\alpha) E_\tau. \quad (7.63)$$

这是由德克茨基程序算出的最小误差,该程序收入由美国 DSP 委员会(1979)编辑的程序集中.请注意, $\alpha=1$ 和 $\alpha=0$ 只分别对应于幅度逼近和群延迟逼近. α 的值在 0 和 1 之间对应于幅度和群延迟的联合逼近.

为了具体确定式(7.61)和(7.62)中的 m 和 q 值,在这个公式中有 $(4N_s+2)$ 个可变参数,它们由如下参数矢量给出:

$$\phi = \{r_{z1}, \dots, r_{zN_z}, \theta_{z1}, \dots, \theta_{zN_z}, r_{p1}, \dots, r_{pN_p}, \theta_{p1}, \dots, \theta_{pN_p}, K_o, \tau_o\}. \quad (7.64)$$

必须系统地改变这些参数以使逼近误差 E 达到最小.

误差 E 是 $(4N_s+2)$ 个变量的非线性函数.从概念上来说,求这样一个方程的最小值涉及到解一个有 $(4N_s+2)$ 个非线性方程的方程组

$$\frac{\partial E}{\partial \phi_i} = \alpha \frac{\partial E_A}{\partial \phi_i} + (1-\alpha) \frac{\partial E_\tau}{\partial \phi_i} = 0, \quad i=1, 2, \dots, 4N_s+2, \quad (7.65)$$

其中 ϕ_i 表示参数矢量的第 i 个分量.这个解很不容易求出,因为误差方程有许多局部极小值,所以通常并不能保证所得解是全局最小的.德克茨基曾使用弗莱彻和鲍威尔(Fletcher and Powell, 1963)的迭代算法来求逼近误差的局部极小值.原始的弗莱彻-鲍威尔算法完成一种无约束的极小化计算.但是,在 IIR 滤波器设计问题中我们总希望把对极小值的

搜索限制在对应于稳定系统的参数空间区域内,即 $0 \leq r_{pk} \leq 1$ (对所有 k 值). 为了使用这一约束条件,德克茨基曾建议修改弗莱彻-鲍威尔算法. 如果在迭代求解过程中的某一级,当改变其中的一个 r_{pk} 值会使得新的 r_{pk} 值大于等于 1 时,则改变量应逐次减半,直到新的 r_{pk} 值小于 1 为止. 德克茨基指出,若用这个约束条件并在开始计算时使用初始稳定的逼近、有界的 $A_d(\omega)$ 和 $\tau_d(\omega)$ 以及正的加权函数 $W_A(\omega)$ 和 $W_r(\omega)$, 则当 $2m \geq 2$ 和 $2q \geq 2$ 时 E 的局部极小值存在, 并使得最佳参数对应于一个稳定系统.

这种优化方法所得到的解的类型强烈地依赖于整数参数 m 和 q . 若将幅度误差和群延迟误差分别提高 $2m$ 和 $2q$ 次方, 则可以保证各个误差都是全部误差中的正分量, 并同时得出一个简单可微的误差方程. 这一点是很重要的, 因为弗莱彻-鲍威尔算法要求 E 的斜率方程是一个自由参数方程. 德克茨基(1972)给出了对于如式(7.57)的 $H(z)$ 计算 $\partial E_A / \partial \theta_i$ 和 $\partial E_r / \partial \theta_i$ 的计算公式. 如果 $m=q=1$, 则均方误差最小. 当 m 和 q 很大时, 小的误差就没有大的误差那么重要, 所以在多数情况下人们都尽力使最大的误差极小化. 事实上可以证明, 当 $m, q \rightarrow \infty$ 时其解近似为极大极小值.

7.3.2 群延迟均衡

举一个利用德克茨基法的例子. 我们来设计一个能补偿线性系统的相位非线性的全通滤波器. 该设计问题如图 7.25 所示, 它是在通信系统中常见的问题, 在该系统中常常需要“均衡”通信通道的群延迟.

图 7.25 中系统的总有效频率响应是

$$G(e^{j\omega}) = H_f(e^{j\omega})H_{ap}(e^{j\omega}). \quad (7.66)$$

式中 $H_f(e^{j\omega})$ 表示被补偿系统固定的频率响应, $H_{ap}(e^{j\omega})$ 表示所要设计的补偿全通道系统的频率响应. 显然, 若 $H_{ap}(e^{j\omega})$ 是一个全通系统, 则应 $|G(e^{j\omega})| = |H_f(e^{j\omega})|$. 整个系统的群延迟为

$$\text{grd}[G(e^{j\omega})] = \text{grd}[H_f(e^{j\omega})] + \text{grd}[H_{ap}(e^{j\omega})]. \quad (7.67)$$

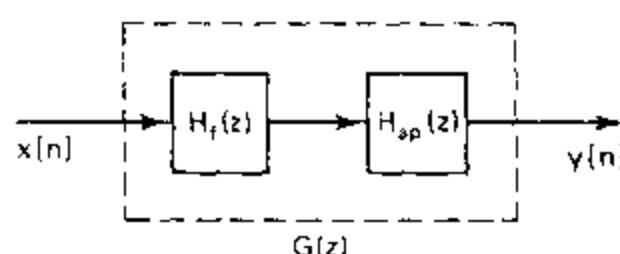


图 7.25 线性系统的全通群延迟补偿的方框图.

如果全通系统的群延迟为

$$\tau_d(\omega) = \text{grd}[H_{ap}(e^{j\omega})] = -\text{grd}[H_f(e^{j\omega})]. \quad (7.68)$$

则群延迟就能很好地得到均衡. 但是, 由第五章对全通系统的讨论可知

$$\text{grd}[H_{ap}(e^{j\omega})] \geq 0, \quad 0 \leq \omega \leq \pi. \quad (7.69)$$

所以只有负的群延迟才能被全通系统抵消. 这就是在式(7.62)群延迟逼近误差的定义中要包括自由参数 τ_d 的原因.

因此我们寻找一种全通系统, 它的群延迟的偏差是固定系统群延迟偏差的负数. 应当清楚地认识到, 全通系统也会引入一定量的正附加延迟. 下面由德克茨基(1972)给出的例子说明如何设计一个全通补偿器.

例 7.9

图 7.26(a)表示一个 4 阶椭圆低通滤波器的衰减函数或损失函数($-20\log_{10}|H(e^{j\omega})|$)。图 7.26(b)和 7.26(c)中的实线表示该滤波器的群延迟函数。为了说明如何用这种方法补偿群延迟失真，令所要求的群延迟等于椭圆滤波器的群延迟之负值，

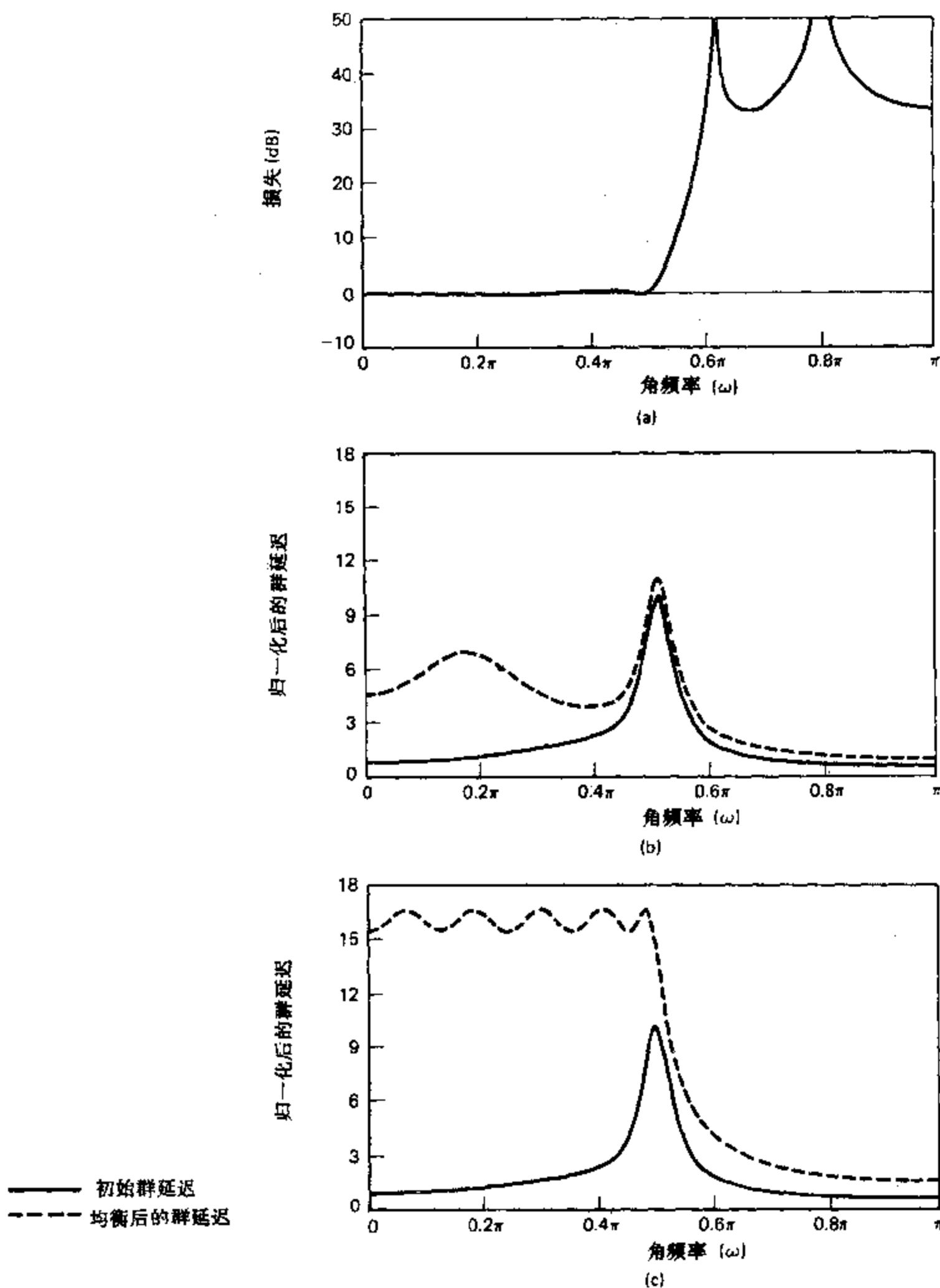


图 7.26 椭圆滤波器的全通群延迟补偿。(a) 4 阶椭圆低通滤波器的损失特性。(b) 使用 2 级全通滤波器并取 $2q=2$ 的群延迟均衡。(c) 使用 4 级全通滤波器并取 $2q=10$ 的群延迟均衡。(摘自 Deczky, 1972.)

并假设要设计的滤波器之系统函数是全通的,如式(7.58)所示.图 7.26(b)表示当 $\alpha=0, N_s=1$ 和 $2q=2$ 时的结果.选择加权函数 $W_s(\omega)$ 着重补偿与椭圆滤波器的通带相对应的频带中(约为 $0 \leq \omega \leq 0.5\pi$)的群延迟误差.图 7.26(b)中的虚线表示椭圆滤波器与全通均衡系统级联的总群延迟.(请记住,群延迟函数是奇函数.)可以看出,在滤波器通带中总群延迟的变化量要比只有椭圆滤波器时稍小.如果这样不能满足性能要求,可增加几级全通滤波器.若用 4 级全通滤波器,并取 $q=10$,则所得出的总群延迟为图 7.26(c)中的虚线所示.这时,群延迟是一个常量,并有约为 1.3 个样本的波纹.可以看出,值 $2q=10$ 可以使滤波器在通带有非常近似的等波纹或极大极小特性.应当注意,全通均衡器显著增加了补偿后系统的总延迟.

以上的讨论和用德克茨基法设计 IIR 滤波器的举例指出了以下几点有关算法设计法的普遍问题.第一,滤波器阶次和结构的选择必须有设计给定型式的滤波器的经验作指导.第二,设计能满足预先给定指标的滤波器通常需要逐次逼近.第三,参数初始值的选择可以影响迭代收敛的速度和最终解,因为往往收敛到某个局部极小值.

尽管有这些限制,但是有经验的滤波器设计人员可以利用算法设计法的灵活性来解决大量的滤波问题.由这一方法已经发展出一些其它的优化方法,如利用线性规划的方法(Rabiner, Graham and Helms, 1974)以及其它方法(Kaiser and Dolan in DSP Committee 1979; Martinez and Parks, 1978).

7.4 用窗函数法设计 FIR 滤波器

正如在 7.1 节所讨论的,通常设计 IIR 滤波器最常用的技术都是以连续时间 IIR 系统到离散时间 IIR 系统的变换为基础的.这在一定程度上是由于当离散时间滤波器出现之前连续时间滤波器的设计方法已经非常成熟,而且在一定程度上也是由于实现 IIR 滤波器的非迭代直接设计法的困难性所致.

与此相反,FIR 滤波器几乎完全限于离散时间滤波器的实现问题.因此,FIR 滤波器的设计方法以直接逼近所需离散时间系统的频率响应为基础.另外,因为逼近 FIR 系统幅度响应的大多数方法均假设有线性相位的限制条件,所以避免了使 IIR 滤波器的直接设计法复杂化的谱因式分解问题.

设计 FIR 滤波器最简单的方法称为窗函数法.这种方法一般均由一个理想的所需频率响应开始,该频率响应可表示为

$$H_d(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_d[n] e^{-jn\omega}, \quad (7.70)$$

式中 $h_d[n]$ 是对应的冲激响应序列,它可以借助 $H_d(e^{j\omega})$ 表示为

$$h_d[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_d(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega. \quad (7.71)$$

由于在两个频带间交界处的不连续性,所以许多理想化的系统均用分段恒定的或分段函数表示的频率响应来定义.因此这种系统具有非因果的和无限长的冲激响应.得到逼近这种系统的因果 FIR 滤波器最直接的方法是截短该理想冲激响应.式(7.70)可以看作是周期频率响应 $H_d(e^{j\omega})$ 的傅里叶级数表示,其中序列 $h_d[n]$ 起着傅里叶系数的作用.因此,用

截短理想冲激响应的办法来逼近理想滤波器的问题等同于傅里叶级数的收敛问题,这是一个人们已经进行了大量研究的课题.在这一理论中,一个非常重要的概念是吉布斯现象,我们曾在例 2.17 中讨论过,从下面的讨论中将会看到,FIR 滤波器设计中的这种非一致收敛现象是如何得到的.

由 $h_d[n]$ 得到因果 FIR 滤波器最简单的方法是定义一个其冲激响应 $h[n]$ 为如下形式*的新系统:

$$h[n] = \begin{cases} h_d[n], & 0 \leq n \leq M, \\ 0, & \text{其它.} \end{cases} \quad (7.72)$$

通常,我们可以把 $h[n]$ 表示为所需冲激响应与一个有限长“窗函数” $w[n]$ 的乘积,即

$$h[n] = h_d[n]w[n], \quad (7.73)$$

式中由于采用如式(7.72)的简单截取,所以窗函数为矩形窗.

$$w[n] = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq M, \\ 0, & \text{其它.} \end{cases} \quad (7.74)$$

由调制定理或加窗定理(见 2.9.7 节)可得

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_d(e^{j\theta})W(e^{j(\omega-\theta)})d\theta. \quad (7.75)$$

因此, $H(e^{j\omega})$ 是所需理想频率响应与窗函数傅里叶变换的周期卷积. 所以, 频率响应 $H(e^{j\omega})$ 将是所需频率响应 $H_d(e^{j\omega})$ “模糊了”的形式. 图 7.27(a) 绘出了如式(7.75)所要求的典型函数 $H_d(e^{j\omega})$ 和 $W(e^{j(\omega-\theta)})$.

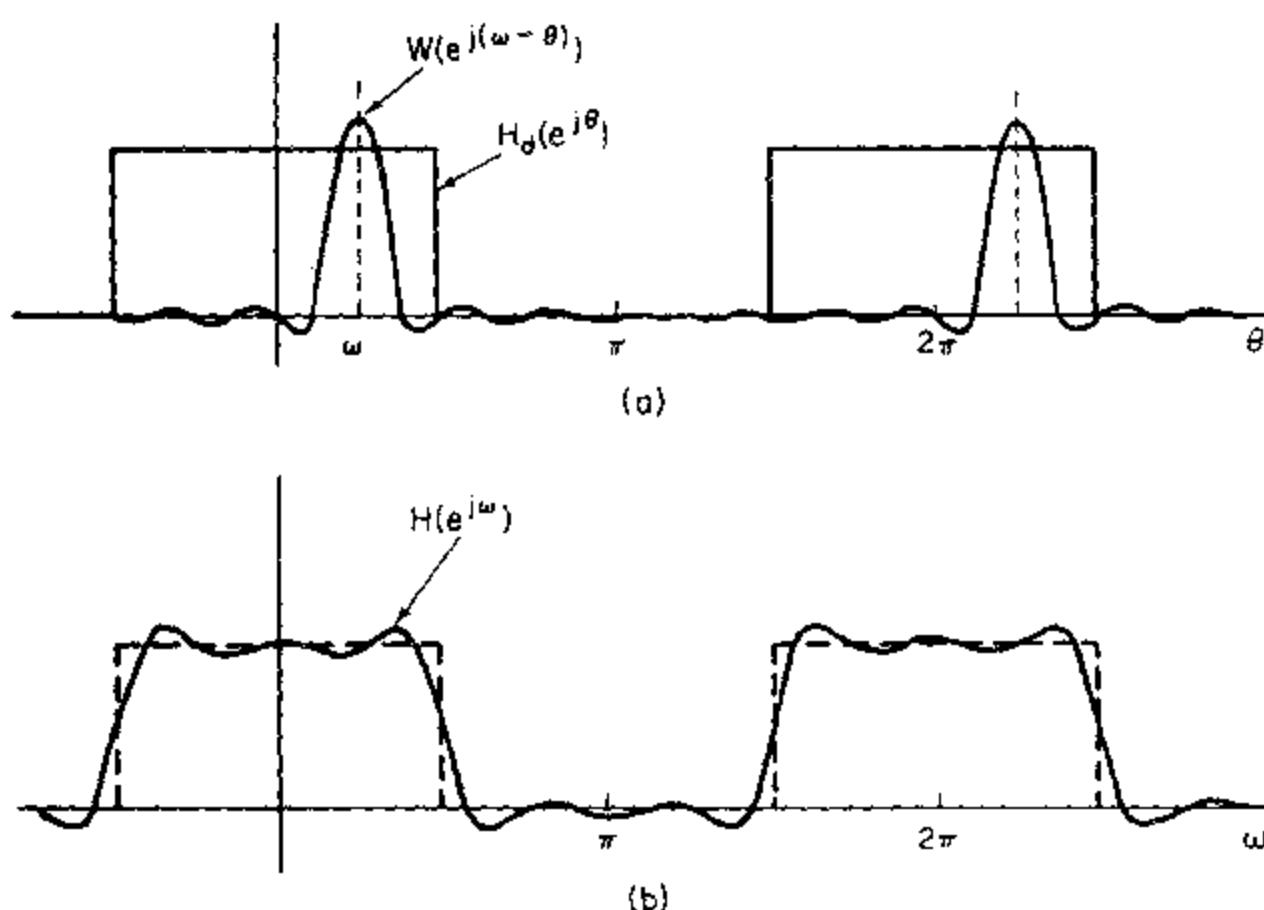


图 7.27 (a) 截短理想冲激响应所包含的卷积过程,(b) 对理想冲激响应加窗后得到的典型逼近.

* 在第五章中已经给出 FIR 系统的记号,也就是, M 为系统函数多项式的阶次. 因此 $(M+1)$ 是冲激响应的长度或时宽. 在文献中常用 N 表示 FIR 滤波器的冲激响应的长度,但是我们已经用 N 来表示 IIR 滤波器系统函数中分母多项式的阶次,所以为了避免混淆并保证全书的一致性,我们始终用 $(M+1)$ 表示 FIR 滤波器冲激响应的长度.

如果对全部的 n 有 $w[n]=1$ (即完全不截短), 则 $W(e^{j\omega})$ 是周期为 2π 的周期冲激串, 因此 $H(e^{j\omega})=H_d(e^{j\omega})$. 这种解释表明, 若选择 $w[n]$ 使得 $W(e^{j\omega})$ 集中在 $\omega=0$ 附近的一个狭窄频带范围内, 则除去 $H_d(e^{j\omega})$ 变化很突然的地方外, $H(e^{j\omega})$ 将与 $H_d(e^{j\omega})$ 很“相像”. 所以, 窗函数选择的原则是, 所用窗函数在长度上越短越好, 以使在滤波器的实现中有最小的计算量, 同时使 $W(e^{j\omega})$ 接近于一个冲激函数; 也就是说, 我们希望 $W(e^{j\omega})$ 在频率上是高度集中的, 以使式(7.75)的卷积正确地重现所要求的频率响应. 如在式(7.74)矩形窗函数的情况下所能看到的, 在要求上也有矛盾之处, 此时

$$W(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^M e^{-jn\omega} = \frac{1-e^{-j\omega(M+1)}}{1-e^{-j\omega}} = e^{-j\omega M/2} \frac{\sin[\omega(M+1)/2]}{\sin(\omega/2)}. \quad (7.76)$$

图 7.28 中绘出 $M=7$ 时函数 $\sin[\omega(M+1)/2]/\sin(\omega/2)$ 的幅度. 应当注意, 矩形窗的频率响应 $W(e^{j\omega})$ 有广义的线性相位, 当 M 增加时, “主瓣(main lobe)”的宽度减小. 通常主瓣定义为原点两边第一个过零点之间的区域. 对矩形窗, 主瓣宽度是 $\Delta\omega_m = 4\pi/(M+1)$. 但是, 矩形窗的旁瓣是很高的. 事实上, 当 M 增大时, 主瓣峰的幅度也增大, 虽然每个瓣的宽度随 M 增大而减小, 但是每个瓣的面积却是常量. 因此, 由于随着 ω 的增大, $W(e^{j(\omega-\theta)})$ 滑过 $H_d(e^{j\theta})$ 的不连续点, 所以, 当 $W(e^{j(\omega-\theta)})$ 的每个旁瓣通过不连续点时, $W(e^{j(\omega-\theta)})H_d(e^{j\omega})$ 的积分将振荡. 这一结果绘于图 7.27(b) 中. 因为随着 M 的增大在每个瓣下的面积维持不变, 所以出现的振荡将加快, 但是其幅度并不随 M 的增大而减小.

在傅里叶级数理论中, 这种非一致收敛就是著名的吉布斯现象, 使用不要这样突然截断的傅里叶级数可减轻这种现象. 把窗函数的两端平滑地减小至零, 可减小旁瓣的高度, 但是所付出的代价是, 主瓣要加宽, 并且在不连续处过渡带的宽度也增大.

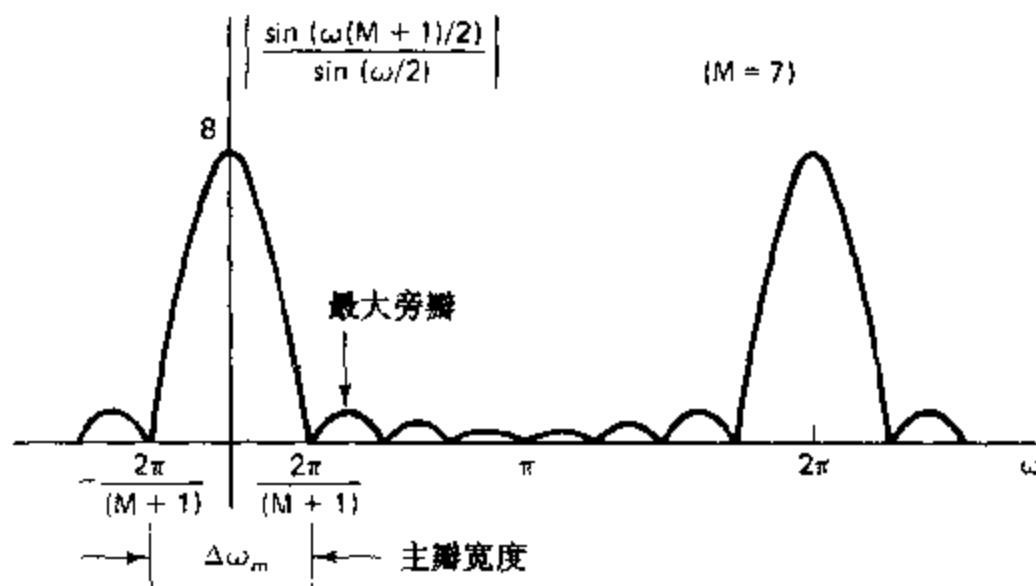


图 7.28 矩形窗傅里叶变换的幅度 ($M=7$).

7.4.1 常用窗函数的性质

一些常用的窗函数示于图 7.29*. 这些窗函数用下列方程定义:

* 巴特利特窗、汉宁窗、哈明窗和布莱克曼窗均用发明者的名字来命名. 汉宁窗与奥地利气象学家 J. V. 汉 (Julius von Hann) 有关, 有时也称为汉窗. “hanning”这一术语曾被布莱克曼和杜基 (1958) 用来描述将这种窗加到某一信号上的操作, 后来随着人们逐渐喜欢选用“Hanning”或“hanning”一词, 它才普遍地被用作窗函数的名字.

矩形窗

$$w[n] = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq M, \\ 0, & \text{其它.} \end{cases} \quad (7.77a)$$

巴特利特(Bartlett)窗(三角形窗)

$$w[n] = \begin{cases} 2n/M, & 0 \leq n \leq M/2, \\ 2 - 2n/M, & M/2 < n \leq M, \\ 0, & \text{其它.} \end{cases} \quad (7.77b)$$

汉宁(Hanning)窗

$$w[n] = \begin{cases} 0.5 - 0.5\cos(2\pi n/M), & 0 \leq n \leq M, \\ 0, & \text{其它.} \end{cases} \quad (7.77c)$$

哈明(Hamming)窗

$$w[n] = \begin{cases} 0.54 - 0.46\cos(2\pi n/M), & 0 \leq n \leq M, \\ 0, & \text{其它.} \end{cases} \quad (7.77d)$$

布莱克曼(Blackman)窗

$$w[n] = \begin{cases} 0.42 - 0.5\cos(2\pi n/M) + 0.08\cos(4\pi n/M), & 0 \leq n \leq M, \\ 0, & \text{其它.} \end{cases} \quad (7.77e)$$

(为了简便起见,图 7.29 把这些窗绘成连续变量函数的图形,但是如式(7.77)所示,这些窗序列只限定为 n 的整数值的函数.)

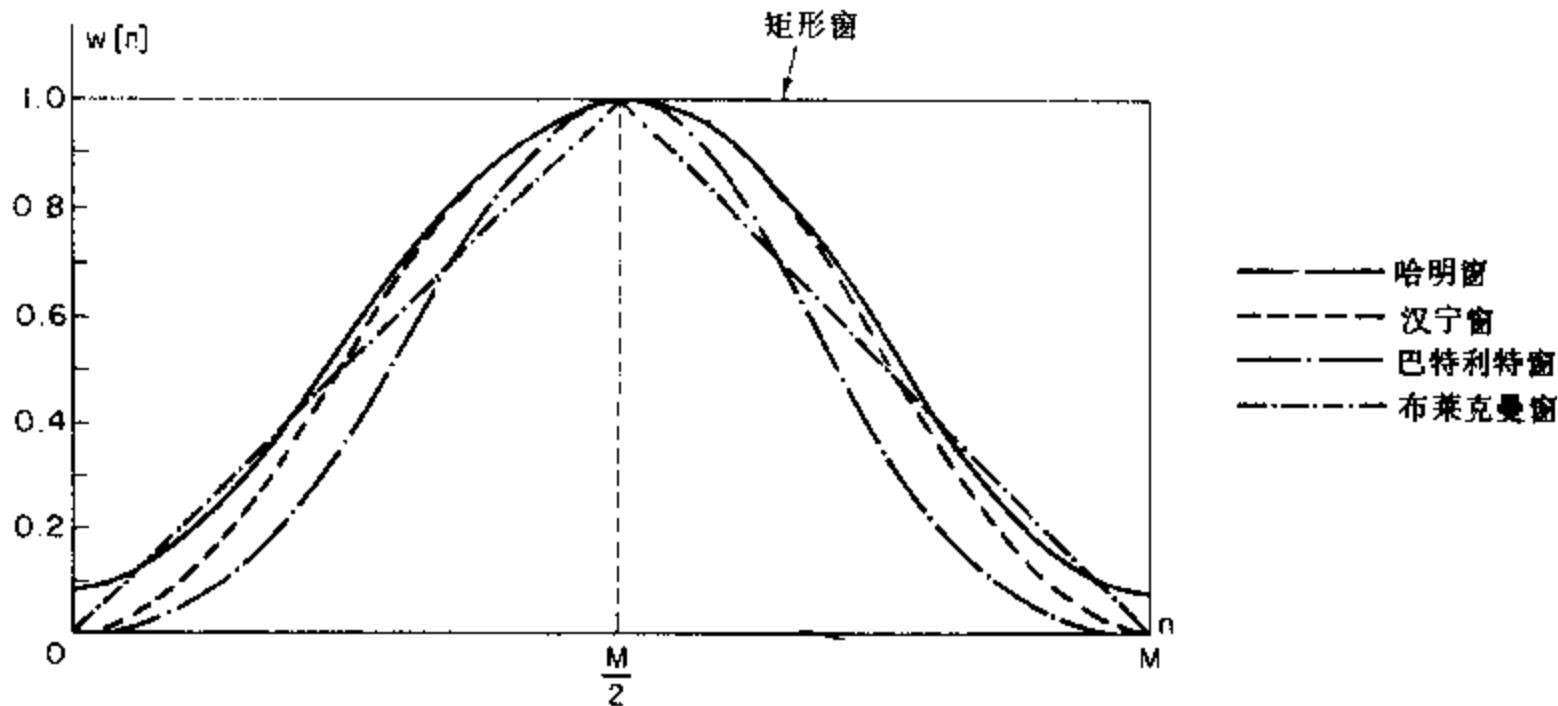


图 7.29 常用的窗函数.

正如在第十一章中所讨论的,式(7.77)定义的窗函数通常用于谱分析和 FIR 滤波器的设计. 它们具有人们所希望的特性,其傅里叶变换集中在 $\omega=0$ 附近,并且具有简单的函数形式,容易计算. 巴特利特窗的傅里叶变换可表示成两个矩形窗之傅里叶变换的乘积,而且其它窗的傅里叶变换也可以表示成式(7.76)给出的矩形窗傅里叶变换经不同频移后的和.(见习题 7.25.)

图 7.30 绘出每个窗均取 $M=50$ 时函数 $20\log_{10}|W(e^{j\omega})|$ 的图形. 显然,矩形窗的主瓣最窄,因为当长度一定时,它能使 $H(e^{j\omega})$ 在 $H_d(e^{j\omega})$ 的间断点处有最陡的过渡特性. 但是,它的第一个旁瓣只比主瓣低约 13dB,并且使得 $H(e^{j\omega})$ 在 $H_d(e^{j\omega})$ 的间断点处有大幅度振荡. 表 7.2 比较式(7.77)的各种窗函数. 从表中可以清楚地看出,使用如像哈明、汉宁和

布莱克曼窗之类的使窗的两端平滑减小至零的窗函数可以使旁瓣(表中第二列)大幅度下降。但是所付出的代价是,主瓣宽度(第三列)增加很多,因此在 $H_d(e^{j\omega})$ 的间断点处的过渡

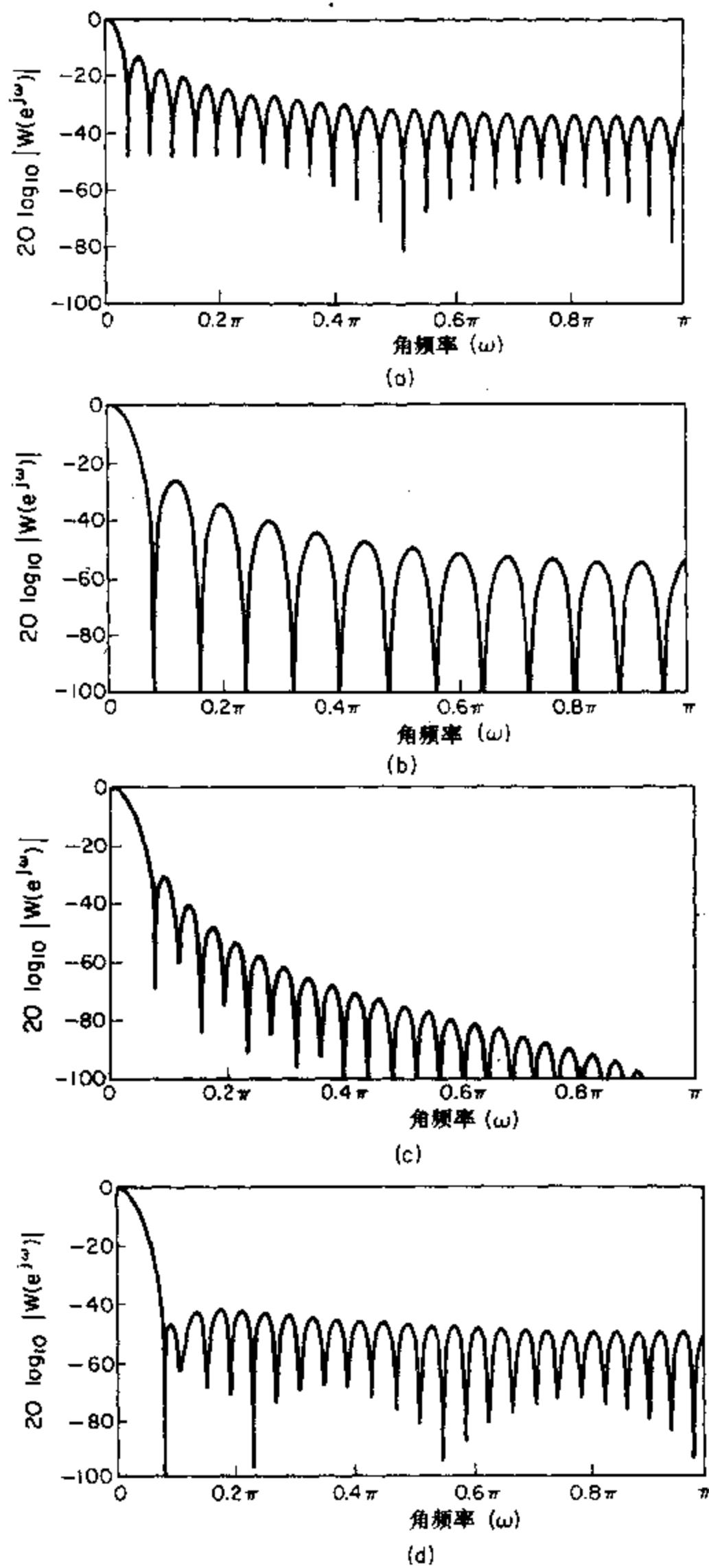


图 7.30 图 7.29 中各种窗函数的傅里叶变换(对数幅度). (a)矩形窗. (b)巴特利特窗.
(c)汉宁窗. (d)哈明窗.

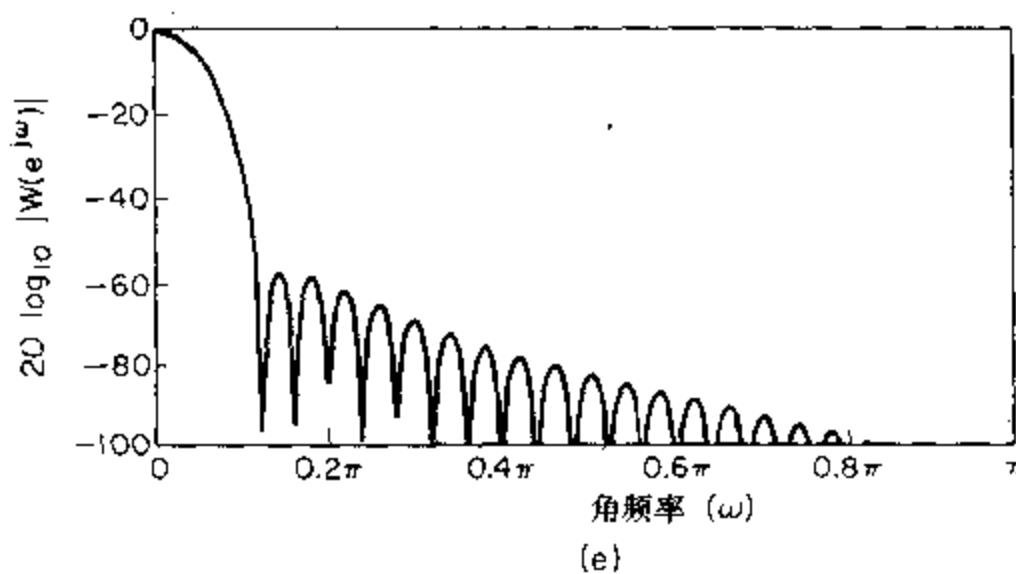


图 7.30(续) (e)布莱克曼窗.

区也加宽了,表 7.2 中其它各列的特点将在以后讨论.

表 7.2 常用窗函数的比较

窗的类型	最大旁瓣幅度 (相对值)	主瓣近似宽度	最大逼近误差	等效凯泽窗	等效凯泽窗的过 渡带宽度
矩形	-13	$4\pi/(M+1)$	-21	0	$1.81\pi/M$
巴特利特	-25	$8\pi/M$	-25	1.33	$2.37\pi/M$
汉宁	-31	$8\pi/M$	-44	3.86	$5.01\pi/M$
哈明	-41	$8\pi/M$	-53	4.86	$6.27\pi/M$
布莱克曼	-57	$12\pi/M$	-74	7.04	$9.19\pi/M$

7.4.2 广义线性相位的合并

在设计各型 FIR 滤波器时,总是希望能得到具有广义线性相位特性的因果系统. 式(7.77)的所有窗函数就是为满足这一要求而定义的. 特别应注意,全部窗函数均有性质

$$w[n] = \begin{cases} w[M-n], & 0 \leq n \leq M, \\ 0, & \text{其它}, \end{cases} \quad (7.78)$$

即,它们对于点 $M/2$ 为对称的. 所以,它们的傅里叶变换是

$$W(e^{j\omega}) = W_o(e^{j\omega}) e^{-j\omega M/2}, \quad (7.79)$$

式中 $W_o(e^{j\omega})$ 是 ω 的实偶函数. 这由式(7.76)就可以证明. 式(7.78)的约定一般导致因果滤波器,并且若所需的冲激响应也是对点 $M/2$ 为对称的,即 $h_d[M-n] = h_d[n]$, 则加窗后的冲激响应也将有同样的对称性,并且所得出的频率响应将有广义线性相位,也就是

$$H(e^{j\omega}) = A_o(e^{j\omega}) e^{-j\omega M/2}, \quad (7.80)$$

其中 $A_o(e^{j\omega})$ 是实数的,并且是 ω 的偶函数. 同样,若所需的冲激响应是对点 $M/2$ 呈反对称的,即 $h_d[M-n] = -h_d[n]$, 则加窗后的冲激响应将也是对点 $M/2$ 呈反对称的,而且所得出的频率响应将有附带 90° 常数相移的广义线性相位,即

$$H(e^{j\omega}) = jA_o(e^{j\omega}) e^{-j\omega M/2}, \quad (7.81)$$

式中 $A_o(e^{j\omega})$ 为实数,并且是 ω 的奇函数.

虽然当我们研究对称窗函数与对称的(或反对称的)所需冲激响应的乘积时,以上结论显而易见,但是,若我们研究它们的频域表示也十分有益. 假设 $h_d[M-n] = h_d[n]$, 并

有

$$H_d(e^{j\omega}) = H_e(e^{j\omega})e^{-j\omega M/2}, \quad (7.82)$$

式中 $H_e(e^{j\omega})$ 是实的偶函数.

如果窗函数是对称的, 则我们可将式(7.79)和式(7.82)代入式(7.75), 得

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_e(e^{j\theta}) e^{-j\theta M/2} W_e(e^{j(\omega-\theta)}) e^{-j(\omega-\theta)M/2} d\theta. \quad (7.83)$$

化简相位因子得到

$$H(e^{j\omega}) = A_e(e^{j\omega}) e^{-j\omega M/2}, \quad (7.84)$$

其中

$$A_e(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_e(e^{j\theta}) W_e(e^{j(\omega-\theta)}) d\theta. \quad (7.85)$$

由此可以看出, 所得到的系统具有广义线性相位, 而且实函数 $A_e(e^{j\omega})$ 是实函数 $H_e(e^{j\omega})$ 和 $W_e(e^{j\omega})$ 的周期卷积.

式(7.85)卷积的具体特性决定着由窗函数所得滤波器的幅度响应. 下面的例子说明线性相位滤波器的这一特点.

例 7.10

我们将所要求的频率响应定义为

$$H_{lp}(e^{j\omega}) = \begin{cases} e^{-j\omega M/2}, & |\omega| < \omega_c, \\ 0, & \omega_c < |\omega| \leq \pi, \end{cases} \quad (7.86)$$

式中广义相位因子已经合并到理想低通滤波器的定义中. 相应的理想冲激响应是 ($-\infty < n < \infty$)

$$h_{lp}[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} e^{-j\omega M/2} e^{j\omega n} d\omega = \frac{\sin[\omega_c(n-M/2)]}{\pi(n-M/2)}, \quad (7.87)$$

很容易证明 $H_{lp}[M-n] = H_{lp}[n]$, 因此若我们在方程

$$h[n] = \frac{\sin[\omega_c(n-M/2)]}{\pi(n-M/2)} w[n] \quad (7.88)$$

中使用对称窗, 则可以得到一个线性相位系统.

图 7.31 的上半部分绘出适用于式(7.77)所有窗函数的幅度响应, 但巴特利特窗除外, 因为在滤波器设计中很少用到它(巴特利特窗应产生一个单调函数 $A_e(e^{j\omega})$, 因为 $W_e(e^{j\omega})$ 是正函数.)图 7.31 表现出窗函数法逼近具有阶跃间断点的所需频率响应时的重要特性. 当 ω_c 不靠近零或 π 且主瓣宽度小于 $2\omega_c$ 时, 这种方法可以得到精确的结果. 图 7.31 的下半部分是对称窗的典型傅里叶变换. 从图中可以清楚地看出窗函数在不同位置时的作用, 以帮助我们理解在 ω_c 附近逼近函数 $A_e(e^{j\omega})$ 为什么会有这种形状.

当 $\omega = \omega_c$ 时对称函数 $W_e(e^{j(\omega-\theta)})$ 的中心位于间断点处, 并且约有一半的面积在 $A_e(e^{j\omega})$ 中起作用. 还可看出, 当 $W_e(e^{j(\omega-\theta)})$ 平移到其右边的第一个负旁瓣正好位于 ω_c 的右边时会出现峰的上冲. 同样, 当左边的第一个负旁瓣正好位于 ω_c 的左边时会出现峰的下冲(为负值). 这表明间断点两边最大波纹峰之间的距离约等于主瓣宽度 $\Delta\omega_n$, 如图所示. 因此, 图 7.31 所定义的过渡带宽度 $\Delta\omega$ 略小于主瓣宽度. 最后, 由于 $W_e(e^{j(\omega-\theta)})$ 的对称性, 逼近的结果在 ω_c 附近也趋向于对称的. 这就是说在通带中有 δ 的上冲, 而

在阻带中也有同样大小的下冲.

表 7.2 的第四列表示对于式(7.77)窗函数的峰值逼近误差(dB). 很清楚, 窗函数的旁瓣越低, 则在理想响应的间断点处所得到的逼近越好. 第三列表示主瓣宽度, 它说明若增大 M , 则可以使过渡区域变窄. 所以, 通过选择窗的形状和长度就能控制所得 FIR 滤波器的特性. 但是, 反复试用不同的窗函数并调整窗的长度和逼近误差并不是一种很简单的滤波器设计方法. 幸运的是, 凯泽(Kaiser, 1974)已推导出一种窗函数法的简单公式.

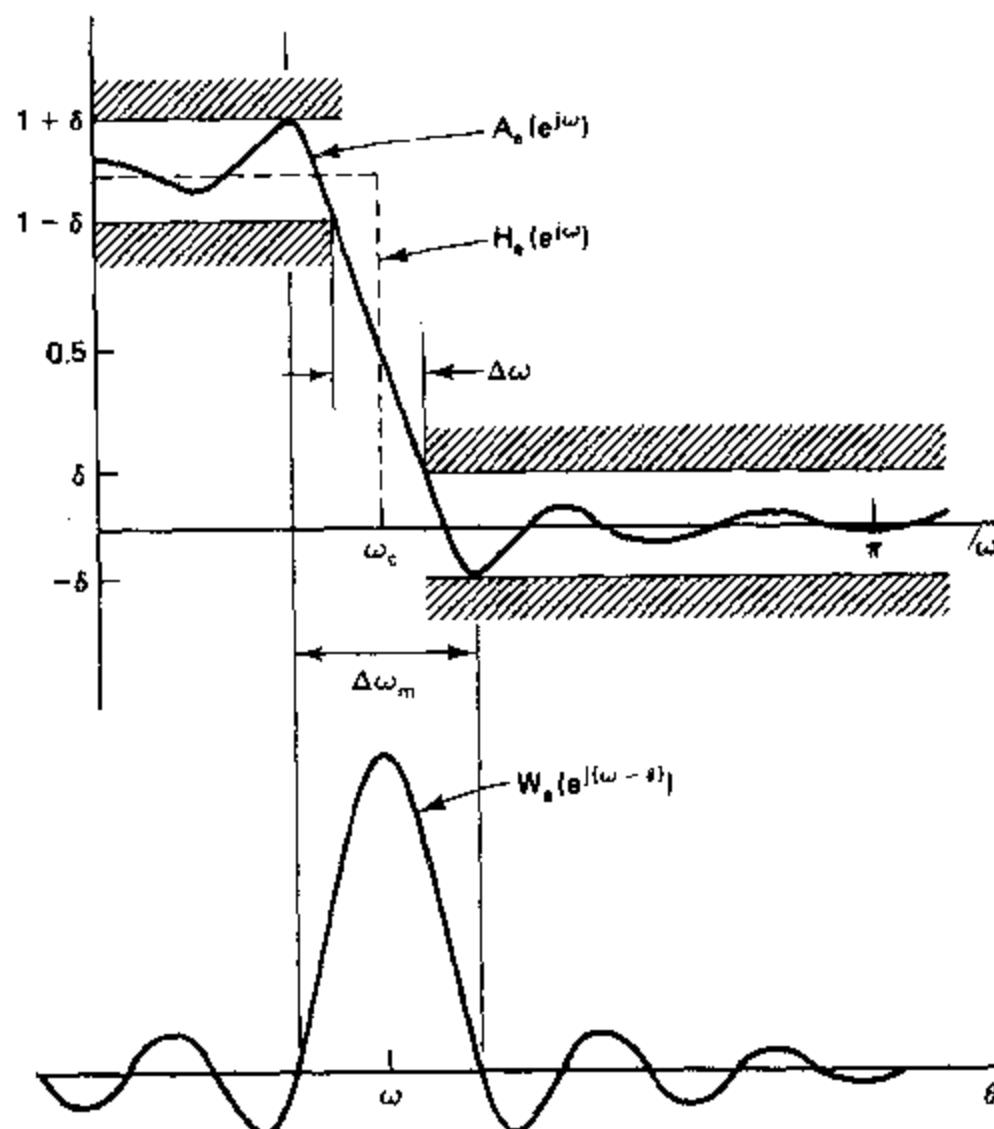


图 7.31 理想频率响应间断点处得到的逼近形式的说明.

7.4.3 凯泽窗滤波器设计法

在频域寻找最大限度地集中在 $\omega=0$ 附近的窗函数可以定量地在主瓣宽度和旁瓣面积之间进行权衡选择. 在斯莱皮安等人(Slepian et al., 1961)一系列的经典论文中深入地研究了这个问题, 论文中所求出的解涉及到扁球体波函数, 它很难计算, 因此也很难用于滤波器的设计中. 但是, 凯泽(Kaiser, 1966, 1974)发现, 利用十分容易的第一类零阶修正贝塞尔函数可构成一种近似最佳的窗函数. 凯泽窗定义为

$$w[n] = \begin{cases} \frac{I_0[\beta(1 - [(n - \alpha)/\alpha]^2)^{1/2}]}{I_0(\beta)}, & 0 \leq n \leq M, \\ 0, & \text{其它}, \end{cases} \quad (7.89)$$

式中 $\alpha = M/2$, $I_0(\cdot)$ 表示第一类零阶修正贝塞尔函数. 与式(7.77)中其它窗函数相反, 凯

泽窗有两个参数:长度参数($M+1$)和形状参数 β .若改变($M+1$)和 β 就可以调整窗的长度和形状,以便达到窗的旁瓣幅度和主瓣宽度之间的某种折衷.图7.32(a)表示,当 $\beta=0,3$ 和 6 时,长度 $M+1=21$ 的凯泽窗之连续包络.应当注意,式(7.89)在 $\beta=0$ 的情况下就变为矩形窗.图7.32(b)表示图7.32(a)中凯泽窗所对应的傅里叶变换.图7.32(c)表示取 $\beta=6$ 以及 $M=10,20$ 和 40 时凯泽窗的傅里叶变换.这些图清楚地表明可以达到所需要的折衷.如果窗的两端越尖,则其傅里叶变换的旁瓣就越低,但是主瓣也就越宽.图7.32(c)表明,若增大 M 而同时保持 β 不变,可使主瓣宽度减小,且不影响旁瓣的幅度.事实上通过大量的数值实验,凯泽得到一对公式,它可使滤波器设计人员事先预算出满足给定选频滤波器技术指标所需的 M 和 β 值.图7.31为用凯泽窗得到的典型逼近,并且凯泽(1974)发现,在很宽范围的条件下,峰值逼近误差(图7.31中的 δ)由 β 的选择来确定.若已知 δ 是固定的,则低通滤波器的通带截止频率 ω_p ,定义为 $|H(e^{j\omega})| \geq 1 - \delta$ 时的最高频率,阻带截止频率 ω_s ,定义为 $|H(e^{j\omega})| \leq \delta$ 的最低频率.因此,对于低通滤波器逼近,其过渡区的宽度是

$$\Delta\omega = \omega_s - \omega_p. \quad (7.90)$$

定义

$$A = -20\log_{10}\delta, \quad (7.91)$$

凯泽用实验的方法求出,得到规定的 A 值所需要的 β 值由下式计算:

$$\beta = \begin{cases} 0.1102(A-8.7), & A > 50, \\ 0.5842(A-21)^{0.4} + 0.07886, & 21 \leq A \leq 50, \\ 0.0, & A < 21. \end{cases} \quad (7.92)$$

(应当记得, $\beta=0$ 时是矩形窗,此时 $A=21$.)另外,要得到预定的 A 和 $\Delta\omega$ 值, M 必须满足

$$M = \frac{A-8}{2.285\Delta\omega}. \quad (7.93)$$

式(7.93)预计,在 $\Delta\omega$ 和 A 值的很大范围内 M 的值在 ± 2 之间.所以若使用这些公式,则凯泽窗设计法几乎不需要迭代或反复试验,并且几乎没有误差.

例 7.11

利用凯泽窗设计公式直接设计一个满足预定技术指标的FIR低通滤波器.步骤如下:

1. 首先应给出技术指标.这表明需选择所要求的 ω_p 、 ω_s 和最大允许逼近误差.对于窗函数设计法,所得滤波器将在通带和阻带有相同的峰值误差 δ .本例中我们使用与例7.5、例7.6和例7.7相同的技术指标,即, $\omega_p = 0.4\pi$, $\omega_s = 0.6\pi$, $\delta_1 = 0.01$ 和 $\delta_2 = 0.001$.因为用窗函数设计法的滤波器本来就有 $\delta_1 = \delta_2$,所以我们应当设 $\delta = 0.001$.

2. 必须求出基本理想低通滤波器的截止频率.由于在 $H_i(e^{j\omega})$ 的间断点处逼近的对称性,所以应当设

$$\omega_c = \frac{\omega_p + \omega_s}{2} = 0.5\pi.$$

3. 为了确定凯泽窗的参数,首先应计算

$$\Delta\omega = \omega_s - \omega_p = 0.2\pi, \quad A = -20\log_{10}\delta = 60.$$

可将这两个量代入式(7.92)和式(7.93)求出所需的 β 和 A 值.对于本例,公式计算的

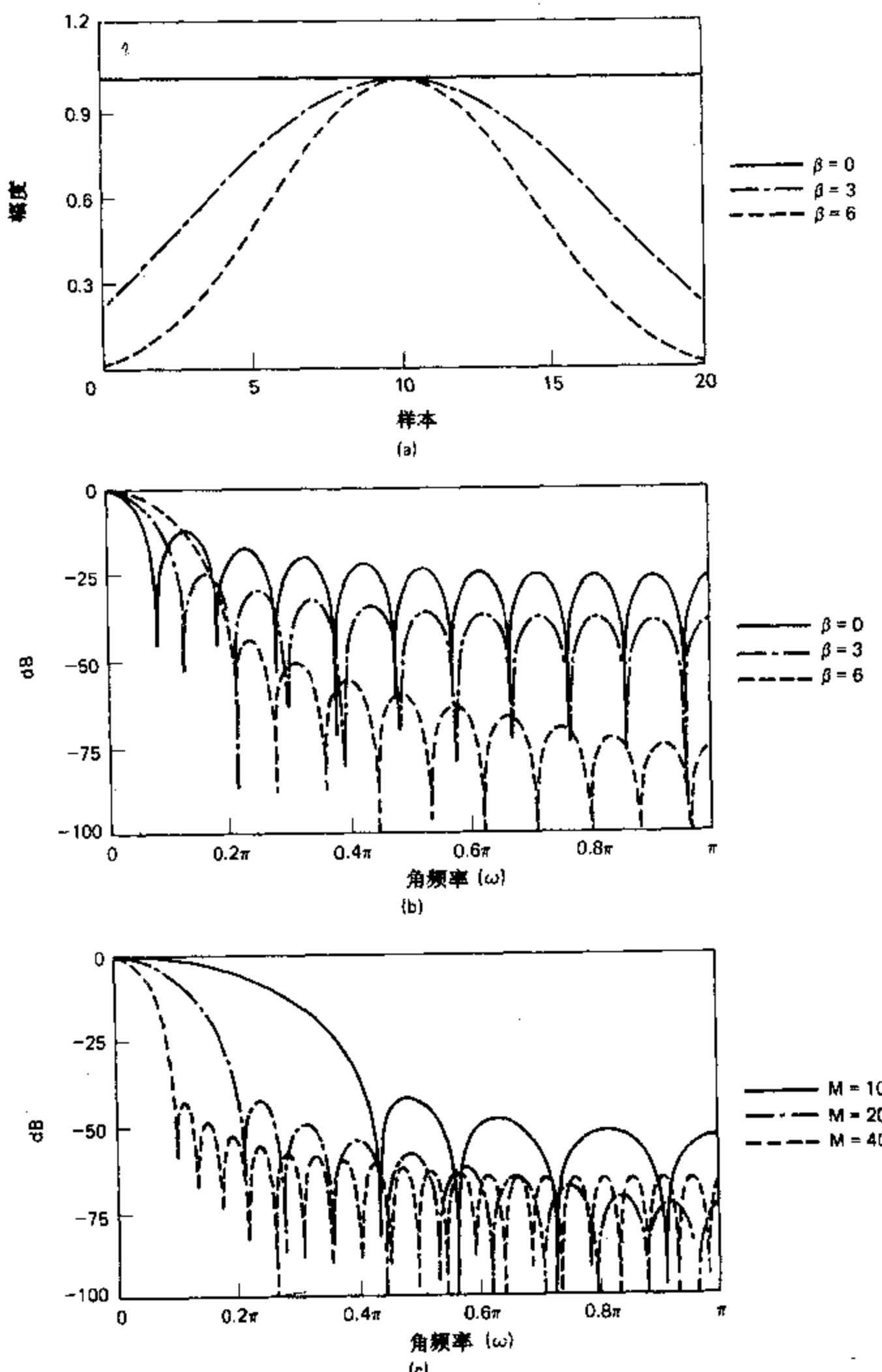


图 7.32 (a) $\beta=0, 3$ 和 6 以及 $M=20$ 时的凯泽窗. (b) 在(a)中各窗函数所对应的傅里叶变换. (c) 取 $\beta=6$ 以及 $M=10, 20$ 和 40 时凯泽窗的傅里叶变换.

结果是

$$\beta=5.653, \quad M=37.$$

4. 用式(7.88)和式(7.89)计算滤波器的冲激响应:

$$h[n] = \begin{cases} \frac{\sin \omega_c(n-\alpha)}{\pi(n-\alpha)} \cdot \frac{I_0[\beta(1 - [(n-\alpha)/\alpha]^2)^{1/2}]}{I_0(\beta)}, & 0 \leq n \leq M, \\ 0, & \text{其它}, \end{cases}$$

式中 $\alpha = M/2 = 37/2 = 18.5$. 因为 $M = 37$ 是一个奇整数, 所以所得线性相位系统应当是 I 型系统. (具有广义线性相位 FIR 系统的四种型式的定义可见 5.7.3 节.) 该滤波器的响应特性示于图 7.33 中. 图 7.33(a) 表示冲激响应, 它表现出 I 型系统的对称特性. 图 7.33(b) 表示对数幅度响应(dB), 该图表明 $H(e^{j\omega})$ 在 $\omega = \pi$ 处为零, 或等效地, $H(z)$ 在 $z = -1$ 处有一个零点, 正如 I 型 FIR 系统所要求的那样. 图 7.33(c) 表示在通带和阻带中的逼近误差, 这个误差函数定义为

$$E_A(\omega) = \begin{cases} 1 - A_e(e^{j\omega}), & 0 \leq \omega \leq \omega_p, \\ 0 - A_e(e^{j\omega}), & \omega_p \leq \omega \leq \pi. \end{cases} \quad (7.94)$$

(没有限定在过渡区 $0.4\pi < \omega < 0.6\pi$ 中的误差.) 请注意逼近误差的对称性, 并还应注意峰值逼近误差略大于 $\delta = 0.001$. 若将 M 增大到 38 就得到 I 型滤波器, 其 $\delta = 0.0008$.

最后还应注意, 因为我们知道相位是精确线性的, 并且延迟为 $M/2 = 18.5$ 个样本, 所以就没有必要再画出相位或群延迟的图形.

至今人们仍广泛使用着汉宁或哈明窗之类的窗函数, 其原因之一是它们可以用人们所熟悉的且容易计算的一类函数来表示. 虽然凯泽窗中的修正贝塞尔函数不是人们通常所熟悉的函数, 但是由于凯泽(1974)的研究, 它们可以很容易地用如下 FORTRAN 程序计算出来:

```

REAL FUNCTION I0(X)
DS=1.0
D=0.0
1 D=D+2.0
DS=DS*X*X/(D*D)
S=S+DS
IF(DS-.2E-8*S)2,1,1
2 IO=S
RETURN
END

```

7.4.4 凯泽窗与其它窗之间的关系

窗函数设计法的基本原理是用 7.4 节中所讨论的一个有限长窗函数去截取理想冲激响应. 在频域中相应产生的影响是, 理想频率响应与窗函数的傅里叶变换进行了卷积. 如果理想滤波器是一个低通滤波器, 则当窗函数之傅里叶变换的主瓣在卷积过程中移动通过间断点时, 就模糊了理想滤波器频率响应的间断特性. 对于一个初步的逼近, 所得过渡带的带宽由窗函数傅里叶变换的旁瓣来确定. 因为通带和阻带的波纹是由对称窗函数旁瓣的积分产生的, 所以通带和阻带中的波纹近似相等. 另外, 对一个好的逼近来说, 最大通带和阻带的偏差不取决于 M , 而只能通过改变所用窗函数的形状来改变这些偏差. 这可

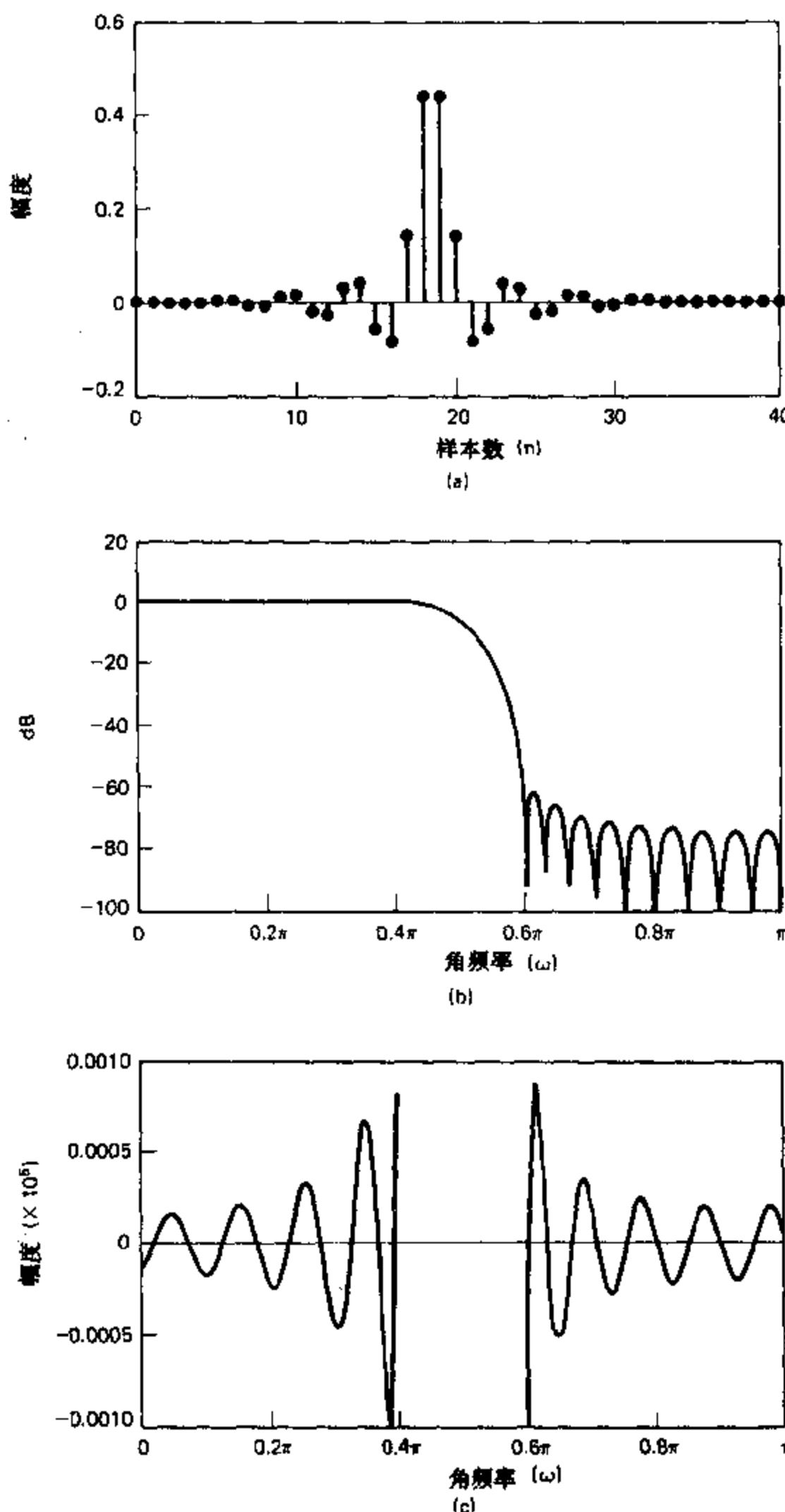


图 7.33 例 7.11 的响应函数. (a) 冲激响应($M=37$). (b) 对数幅度. (c) 逼近误差.

用凯泽公式中计算窗函数形状参数的式(7.92)来说明,该式与 M 无关. 在窗函数选择中所固有的折衷原则是,若要通带和阻带的波纹小,则一般需要选用主瓣较宽和 M 较大的窗函数. 表 7.2 的最后两列将凯泽窗与式(7.77)的窗进行了比较. 表中第五列给出了凯泽

窗的形状参数,用该参数可以得到与第一列所给窗函数相同的峰值逼近误差(δ).第六列表示所对应的用凯泽窗设计的滤波器之过渡带宽度(由式(7.93)得出).由这个公式可以得出对其他窗函数的过渡带宽度较好的预计结果,这要比第三列中所给出的主瓣宽度更准确.

7.5 凯泽窗法设计 FIR 滤波器举例

当然,使用窗函数法不只限于设计低通滤波器.可用窗函数来截取任何理想冲激响应以得到因果 FIR 滤波器的逼近.在这一节中我们将给出几个说明凯泽窗使用方法的例子.这些例子作为一种简便的方式,表明了 FIR 系统的一些重要特性.

7.5.1 高通滤波器

具有广义线性相位的理想高通滤波器有频率响应

$$H_{hp}(e^{j\omega}) = \begin{cases} 0, & 0 \leq |\omega| < \omega_c \\ e^{-j\omega M/2}, & \omega_c < |\omega| \leq \pi. \end{cases} \quad (7.95)$$

计算 $H_{hp}(e^{j\omega})$ 的反变换就可以求出相应的冲激响应,我们可以看出:

$$H_{hp}(e^{j\omega}) = e^{-j\omega M/2} - H_{lp}(e^{j\omega}), \quad (7.96)$$

其中 $H_{lp}(e^{j\omega})$ 由式(7.86)给出,因此 $H_{hp}[n]$ 为

$$H_{hp}[n] = \frac{\sin \pi(n-M/2)}{\pi(n-M/2)} - \frac{\sin \omega_c(n-M/2)}{\pi(n-M/2)}, \quad -\infty < n < \infty. \quad (7.97)$$

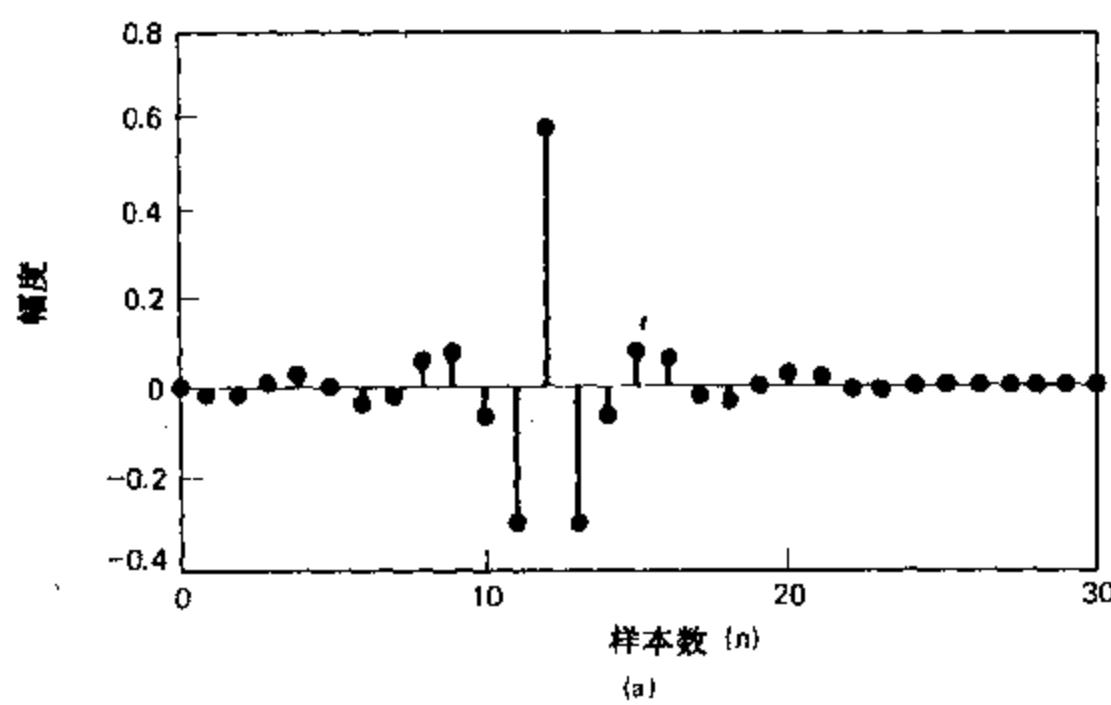
为了设计一个逼近高通滤波器的 FIR 系统,我们可以用与例 7.11 同样的方式来进行.

假设我们要设计一个高通滤波器,它应满足的技术指标为 $\omega_l = 0.35\pi$, $\omega_p = 0.5\pi$ 和 $\delta_1 = \delta_2 = \delta = 0.021$. 因为理想响应也有一个间断点,所以我们可以用凯泽公式(7.92)和(7.93)估计出所要求的值 $\beta = 2.6$ 和 $M = 24$. 图 7.34 表示将具有这些参数的凯泽窗函数用于 $h_{hp}[n]$ 并取 $\omega_c = (0.35\pi + 0.5\pi)/2$ 时而得出的响应函数的特性. 请注意,因为 M 是偶整数,所以滤波器是线性相位的 I 型 FIR 系统,并且延迟正好为 $M/2 = 12$ 个样本. 此时,实际的峰值逼近误差 $\delta = 0.0213$,而不是如所预定的 0.021. 因为,除阻带的边缘处外,各处的误差均小于 0.021,所以可以简单地将 M 增大至 25 而保持 β 不变,从而使过渡带变窄. 图 7.35 中示出了这种 I 型滤波器,由于线性相位的限制迫使 $H(z)$ 的零点位于 $z = -1$ ($\omega = \pi$) 处,所以其性能很不令人满意. 虽然将阶次增加一阶所得结果并不好,但是若将 M 增大至 26 就会得到一个性能超过指标的 I 型系统. 显然,一般说来 I 型 FIR 线性相位系统不适用于逼近高通或带阻滤波器.

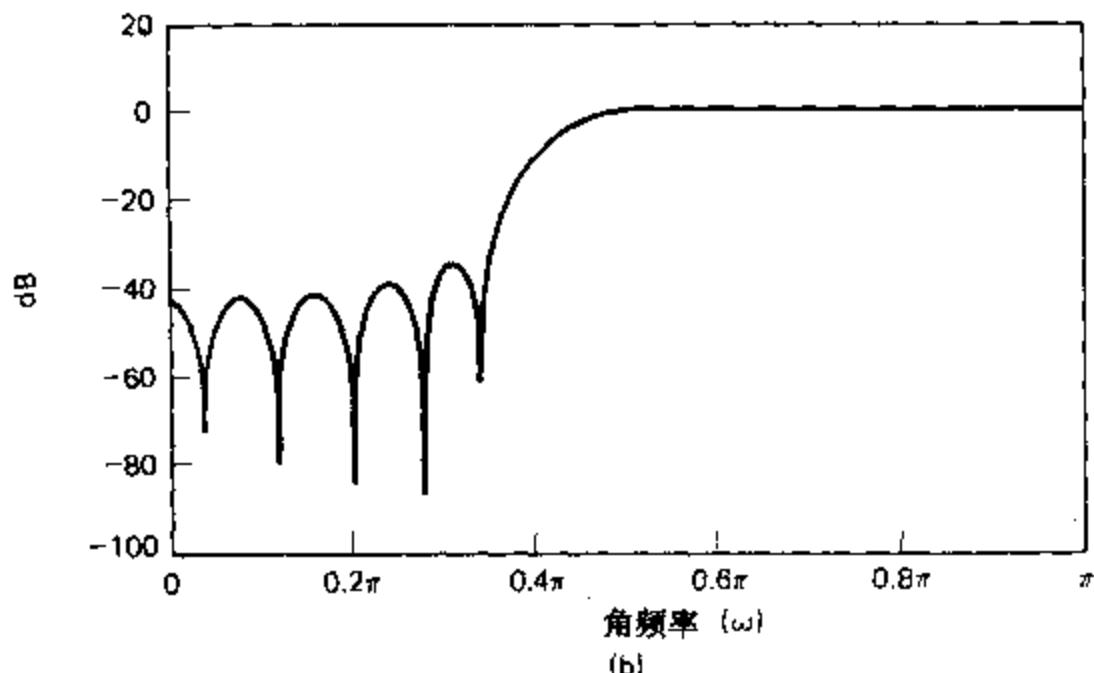
上面关于高通滤波器设计的讨论可以推广到多通带和多阻带的情况. 图 7.36 表示一个理想的多频带选频滤波器的频率响应. 这种广义的多频带滤波器包括其低通、高通、带通和带阻滤波器,这些滤波器是广义多频带滤波器的特殊情况. 如果给这种滤波器的幅度函数乘上一个线性相位因子 $e^{-j\omega M/2}$,则相应的冲激响应是

$$h_{mb}[n] = \sum_{k=1}^{N_{mb}} (G_k - G_{k+1}) \frac{\sin \omega_k(n-M/2)}{\pi(n-M/2)}, \quad (7.98)$$

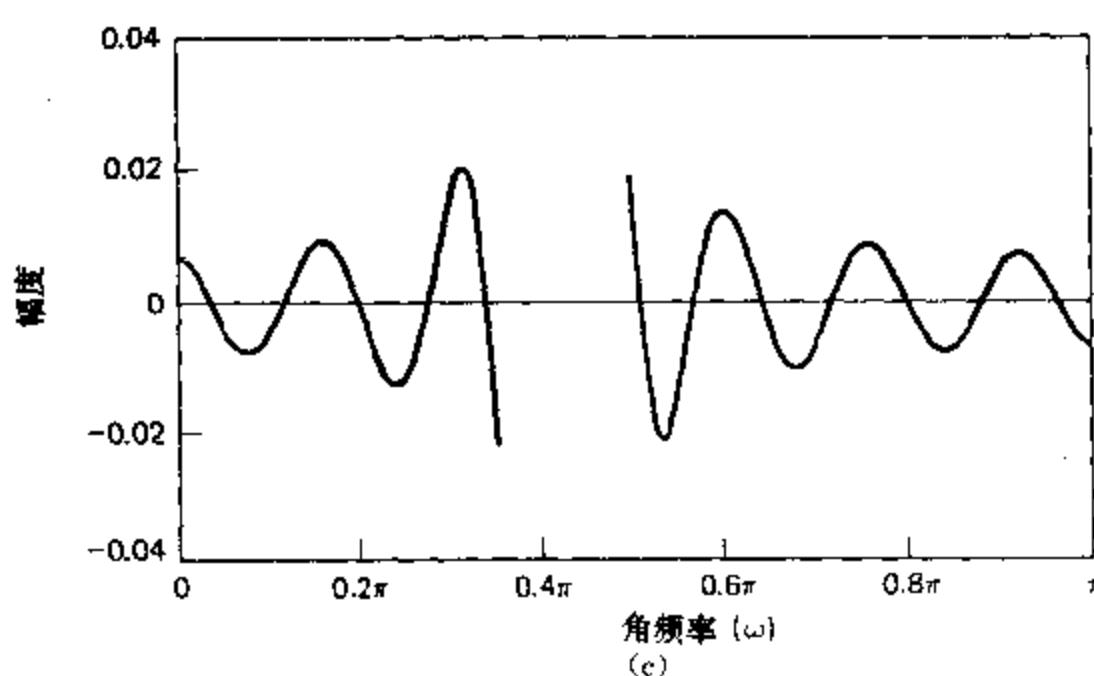
式中 $G_{N_{mb}+1} = 0$. 若 $h_{mb}[n]$ 乘以凯泽窗函数,则我们在低通和高通系统的单间断点处已经



(a)



(b)



(c)

图 7.34 I 型 FIR 高通滤波器的响应函数. (a)冲激响应($M=24$). (b)对数幅度. (c)逼近误差.

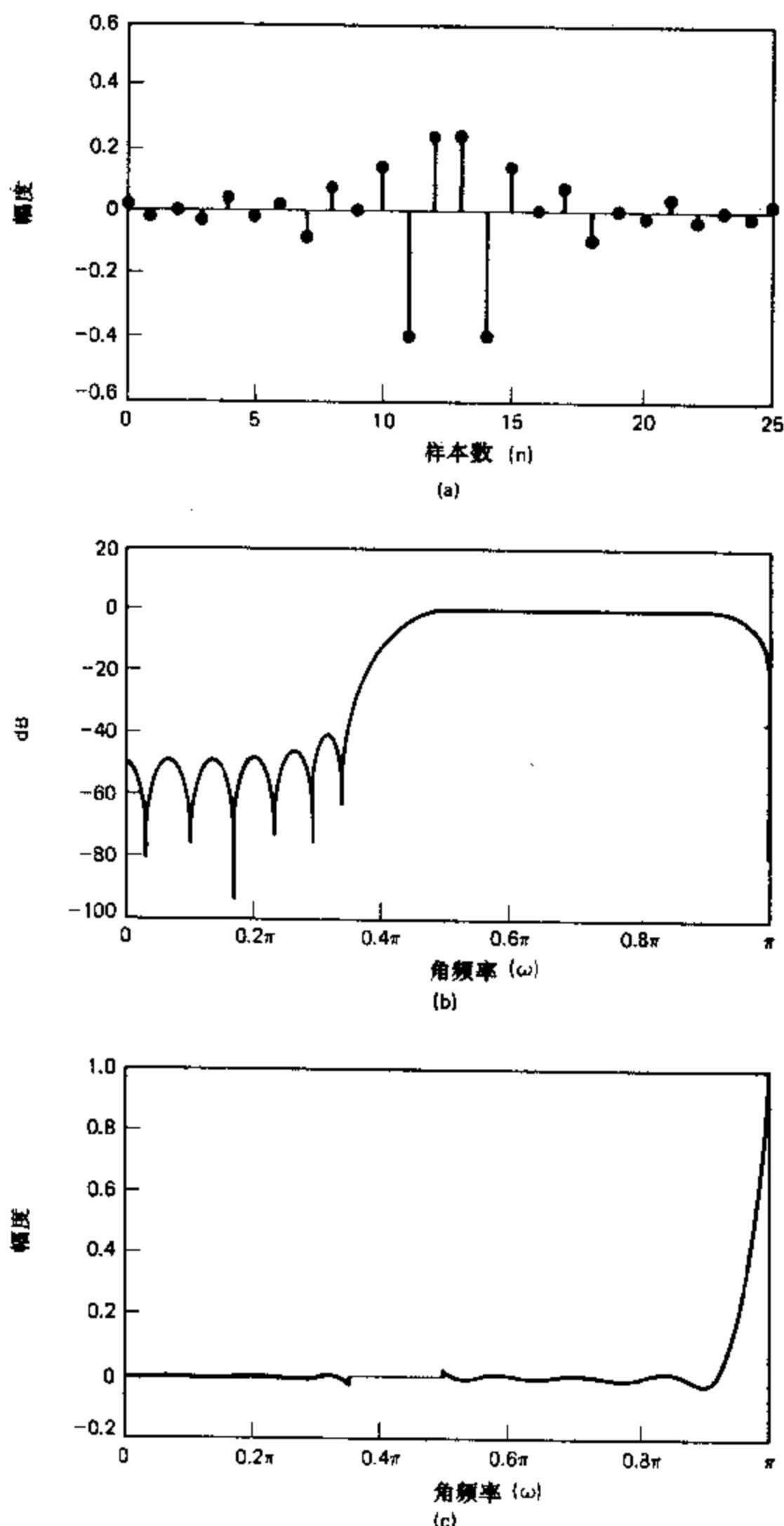


图 7.35 I型 FIR 高通滤波器的响应函数. (a)冲激响应($M=25$), (b)对数幅度, (c)逼近误差.

看到的逼近型式将会出现在每个间断点处. 只要各间断点之间相距足够远则在每个间断点处的特性将是相同的. 因此, 计算窗参数的凯泽公式可以用于这种情况来预估计逼近误差和过渡带宽度. 应当注意, 逼近误差的大小将与产生这些误差的跳变幅度成比例. 这就是说, 如果幅度为 1 的间断点能产生 δ 的峰值逼近误差, 则幅度为 $1/2$ 的间断点将产生 $\delta/2$ 的峰值逼近误差.

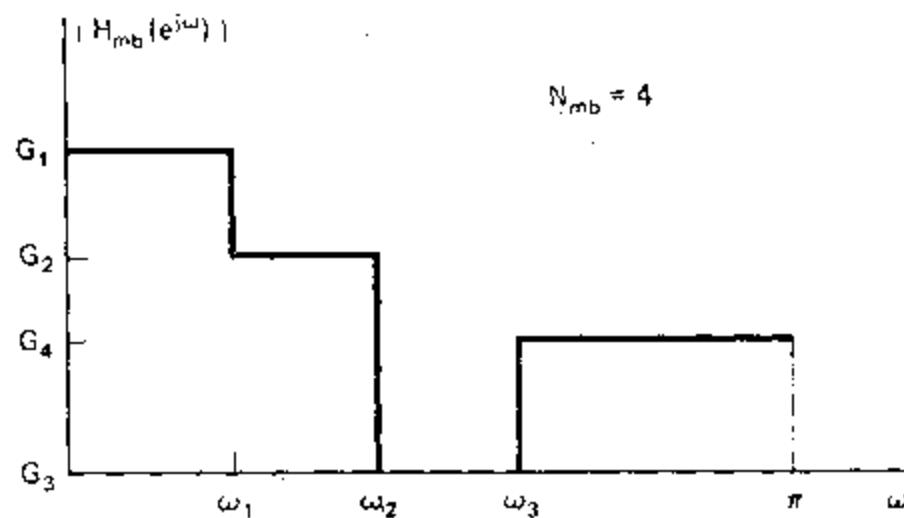


图 7.36 多频带滤波器的理想频率响应.

7.5.2 离散时间微分器

有时我们需要由一个带限信号的样本得到该信号导数的样本. 因为一个连续时间信号导数的傅里叶变换是该信号之傅里叶变换的 $j\Omega$ 倍, 由此可知, 对于带限信号来说频率响应为 $j\omega/T$ ($-\pi < \omega < \pi$, 并且该响应是周期为 2π 的周期函数) 的离散时间系统在其输出端将会得到与连续时间信号的导数相同的样本. 在例 3.2 中曾经研究过这种理想系统.

对于一个线性相位的理想“离散时间微分器”, 恰当的频率响应是

$$H_{diff}(e^{j\omega}) = (j\omega)e^{-j\omega M/2}, \quad -\pi < \omega < \pi. \quad (7.99)$$

(我们已经省略了因子 $1/T$.) 所对应的理想冲激响应是

$$h_{diff}[n] = \frac{\cos\pi(n-M/2)}{(n-M/2)} - \frac{\sin\pi(n-M/2)}{\pi(n-M/2)}, \quad -\infty < n < \infty. \quad (7.100)$$

如果用一个长度为 $(M+1)$ 的对称窗与 $h_{diff}[n]$ 相乘, 则很容易证明, $h[n] = -h[M-n]$. 因此, 所得到的系统是一个 II 型或 IV 型广义线性相位系统.

由于导出的凯泽公式是针对单幅度间断点的频率响应而言, 所以它不能直接用于微分器, 因为在微分器中理想频率响应的间断点是相位引入的. 尽管如此, 窗函数法在设计这种系统时还是十分有效的. 为了证明如何使用窗函数法来设计微分器, 假设 $M=10$ 和 $\beta=2.4$. 所得出的响应如图 7.37 所示. 图 7.37(a) 表示反对称冲激响应. 因为 M 是偶数, 所以系统是 II 型线性相位系统, 这意味着 $H(z)$ 在 $z=+1$ ($\omega=\sigma$) 和 $z=-1$ ($\omega=\pi$) 处均有零点. 图 7.37(b) 所示的幅度响应中清楚地表现出了这一点. 因为 II 型系统具有 $\pi/2$ 弧度的恒定相移, 再加上在这种情况下对应于 $M/2=5$ 个样本延迟的线性相位, 所以相位关系是准确的. 图 7.37(c) 表示幅度逼近误差

$$E_{diff}(\omega) = \omega - A_0(e^{j\omega}), \quad 0 \leq \omega \leq 0.8\pi, \quad (7.101)$$

其中 $A_0(e^{j\omega})$ 是逼近幅度. (请注意, 该误差在 $\omega=\pi$ 附近很大, 并且图中没有画出频率大于

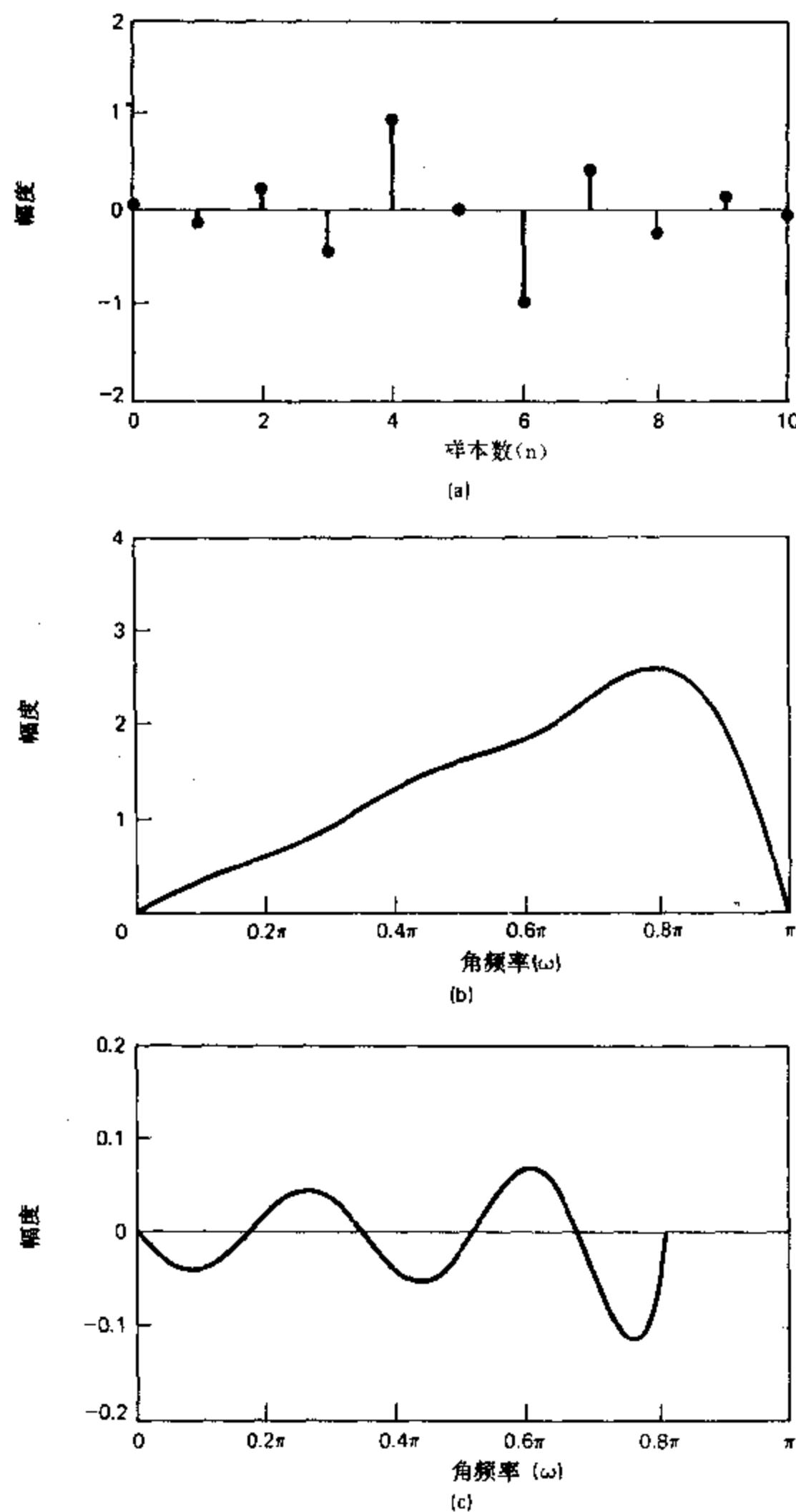


图 7.37 II型 FIR 离散时间微分器的响应函数。(a)冲激响应($M=10$),(b)幅度,(c)逼近误差.

$\omega=0.8\pi$ 处的误差.)显然,在整个频率上没有得到线性增长的幅度,并且对于低频或高频($\omega=\pi$ 附近)处的相对误差(即 $E_{diff}(\omega)/(\omega)$)是很大的.

N 型线性相位系统没有限制 $H(z)$ 必须在 $z = -1$ 处有一个零点。这种类型的系统可以很好地逼近幅度响应，如图 7.38 所示，其中取 $M=5$ 和 $\beta=2.4$ 。此时，在接近 $\omega=0.8\pi$

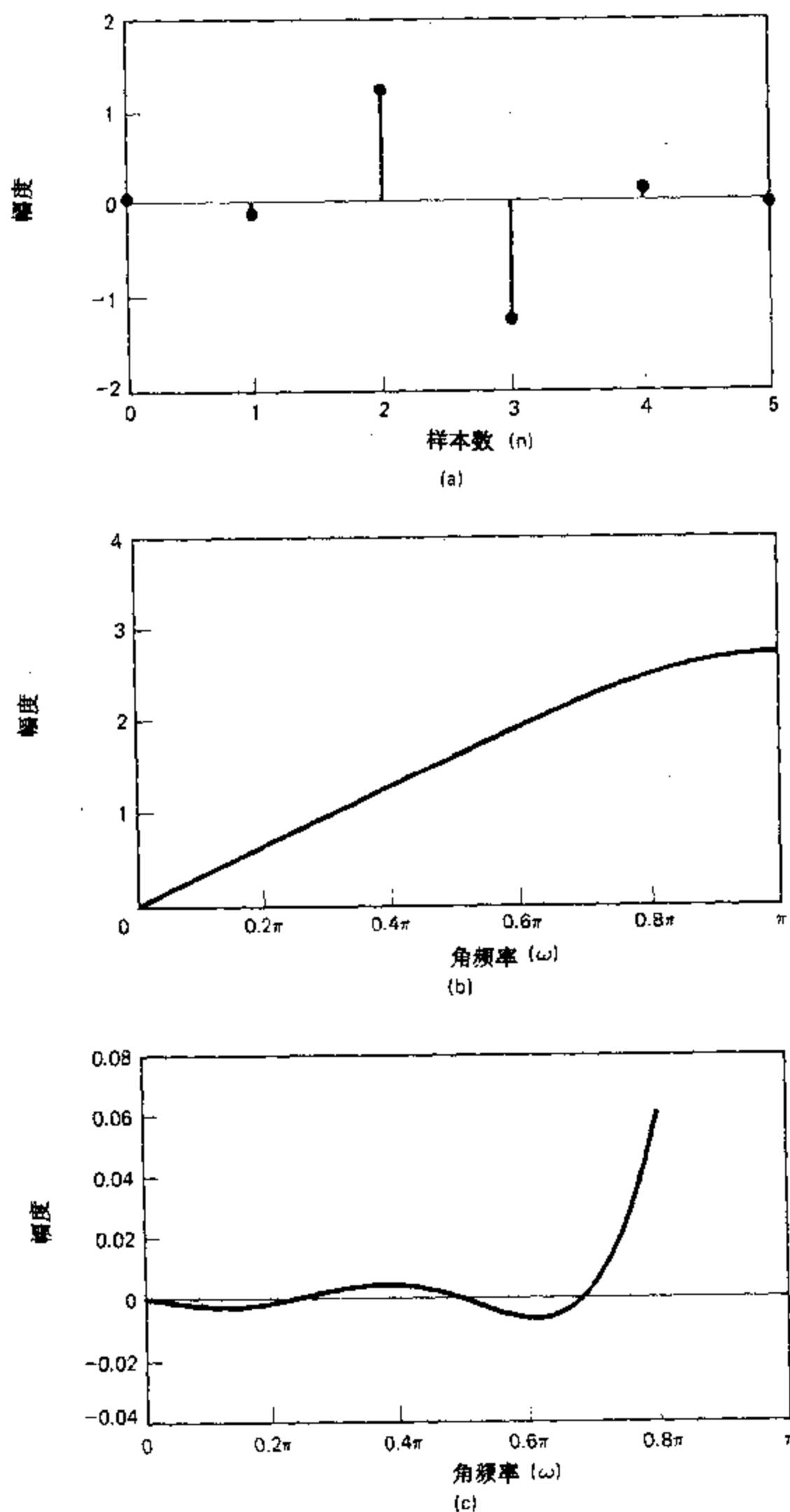


图 7.38 N 型 FIR 离散时间微分器的响应函数。(a) 冲激响应($M=5$)，(b) 幅度，(c) 逼近误差。

及其以上频率范围中的幅度逼近误差都很小. 该系统的相位还是 $\pi/2$ 弧度的恒定相移再加上对应于 $M/2=2.5$ 个样本延迟的线性相位. 这一非整数延迟是由于幅度逼近非常好而付出的代价. 我们没有求出在原采样时间 $t=nT$ 处连续时间信号之导数的样本. 但是在许多应用中这种非整数延迟并不是个问题, 或可用涉及到其它线性相位滤波器的较复杂系统中的其它非整数延迟来抵消掉.

7.6 FIR 滤波器的最佳逼近

尽管受到许多限制, 但一般都直接用窗函数法设计 FIR 滤波器. 然而, 我们往往希望设计一个滤波器是 M 值给定时所能得到的滤波器中“最好的”. 在没有定义逼近准则的情况下讨论这个问题毫无意义, 例如, 在窗函数设计法的情况下由傅里叶级数理论可以得出, 对给定 M 值的所需频率响应, 矩形窗能得出最好的均方逼近. 这就是说,

$$h[n] = \begin{cases} h_d[n], & 0 \leq n \leq M, \\ 0, & \text{其它,} \end{cases} \quad (7.102)$$

可使如下表达式的值达到最小:

$$\epsilon^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |H_d(e^{j\omega}) - H(e^{j\omega})|^2 d\omega \quad (7.103)$$

(见习题 7.23). 但是, 正如我们已经指出的, 这种逼近准则在 $H_d(e^{j\omega})$ 的间断点处特性不好. 另外, 窗函数法不能单独控制在不同频带上的逼近误差. 对于许多应用来说, 利用使最大误差极小化或频率加权误差准则可得到较好的滤波器. 这种设计可以用算法设计技术来实现.

以上的举例说明, 用窗函数法设计的选频滤波器常常具有一种特性, 即在理想频率响应间断点的两边误差最大, 而在离开间断点的频率处误差逐渐减小. 此外, 由图 7.31 可以看出, 这种滤波器是在通带和阻带的误差近似相同的情况下得出的典型结果. (作为例子, 可见图 7.33 和图 7.34.) 我们已经看到, 对于 IIR 滤波器来说, 如果一种情况是逼近误差在频率上是均匀分布的而且可以分别调整通带和阻带的波纹, 而另一种情况是该逼近误差在一个频率处正好满足指标而在其它频率处远超过指标, 则前一种情况可以用一个阶次较低后一种情况要低的滤波器来满足给定的设计指标. 本节下面将讨论的定理可证实我们对 FIR 系统的这种直观看法.

在下面的讨论中, 我们将研究对于设计具有广义线性相位的 FIR 滤波器特别有效并广泛使用的算法设计法. 虽然我们只详细研究 I 型滤波器, 但同时也指出如何将这些结果用于 II、III 和 IV 型广义线性相位滤波器.

设计因果 I 型线性相位 FIR 滤波器时, 很自然地, 首先考虑设计一个零相位滤波器, 即该滤波器有

$$h_e[n] = h_e[-n], \quad (7.104)$$

然后插入足够的延迟以使其成为因果的. 因此, 我们认为 $h_e[n]$ 满足式(7.104)的条件. 对应的频率响应是

$$A_e(e^{j\omega}) = \sum_{n=-L}^L h_e[n] e^{-jn\omega}, \quad (7.105)$$

同时 $L=M/2$ 为一整数;或者由于式(7.104),

$$A_e(e^{j\omega}) = h_e[0] + \sum_{n=1}^L 2h_e[n]\cos(\omega n). \quad (7.106)$$

应当注意, $A_e(e^{j\omega})$ 是一个实偶数,且为 ω 的周期函数. 将 $h_e[n]$ 延迟 $L=M/2$ 个样本,就可由 $h_e[n]$ 得到一个因果系统. 所得系统有冲激响应

$$h[n] = h_e[n-M/2] = h[M-n] \quad (7.107)$$

和频率响应

$$H(e^{j\omega}) = A_e(e^{j\omega})e^{-j\omega M/2}. \quad (7.108)$$

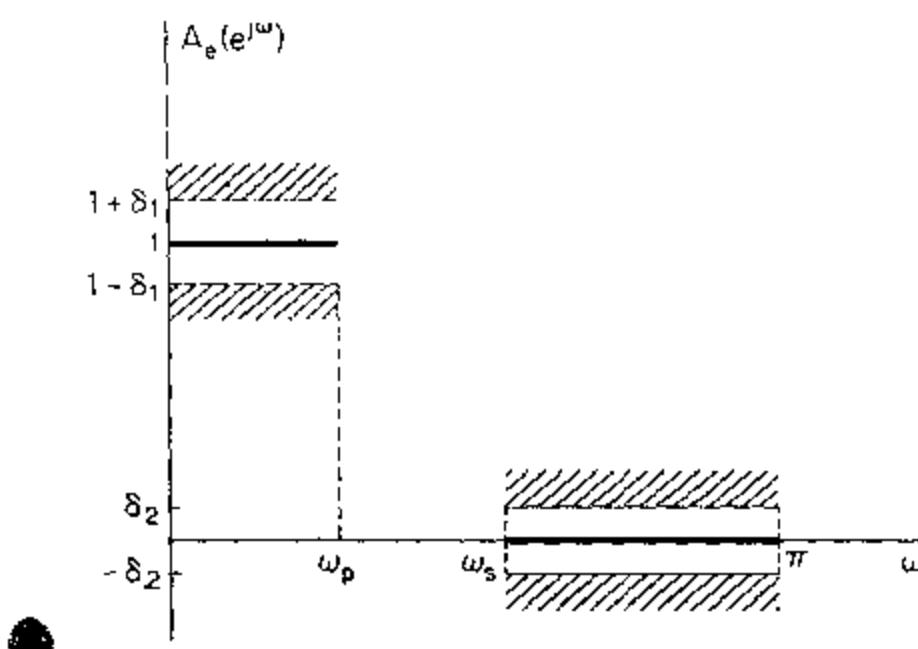


图 7.39 低通滤波器的容限图和理想响应.

图 7.39 表示逼近具有实频率响应 $A_e(e^{j\omega})$ 的低通滤波器的容限图. 在频带 $0 \leq |\omega| \leq \omega_p$ 中应逼近 1 且最大绝对误差为 δ_1 , 而在频带 $\omega_s \leq |\omega| \leq \pi$ 中应逼近 0 且最大绝对误差为 δ_2 . 设计能满足这些技术指标的滤波器的算法设计法必须能有效而系统地改变 $(L+1)$ 个非限制的冲激响应值 $h_e[n]$, 这里 $0 \leq n \leq L$. 现已推导出设计算法, 在这些算法中参数 $L, \delta_1, \delta_2, \omega_p$ 和 ω_s 中的一部分是固定的, 用迭代方法就可得到其余参数的最佳调整方式. 有两种已经推导出的不同方法. 赫尔曼(Herrmann, 1969)、赫尔曼和舒斯勒(Herrmann and Schüssler, 1970a)以及霍夫斯泰特等人(Hofstetter et al. 1971)推导出一种方法, 该方法将 L, δ_1 和 δ_2 固定, 而令 ω_p 和 ω_s 为变量. 帕克斯和麦克莱伦(Parks and McClellan, 1972a, 1972b)、麦克莱伦和帕克斯(McClellan and Parks, 1973)以及拉宾(Rabiner, 1972a, 1972b)推导出一种方法, 该方法将 L, ω_p, ω_s 和比值 δ_1/δ_2 固定, 而令 δ_1 (或 δ_2) 为变量. 自研究出这些不同方法以来, 帕克斯-麦克莱伦算法逐渐成为 FIR 滤波器最佳设计的主要方法. 这是因为该方法最灵活而且在计算上最有效. 此外, 在 DSP 委员会(DSP Committee, 1979)的程序集中以及麦克莱伦等人(McClellan et al., 1973)的论文中都有经过认真检验了的 FORTRAN 程序. 因此我们在这里只讨论帕克斯-麦克莱伦算法.

帕克斯-麦克莱伦算法的基础是将滤波器设计问题用公式表示成多项式逼近问题. 具体讲, 式(7.106)中的 $\cos(\omega n)$ 项可表示成 $\cos \omega$ 不同幂次之和, 形式为

$$\cos(\omega n) = T_n(\cos \omega), \quad (7.109)$$

式中 $T_n(x)$ 是一个 n 次多项式*. 因此, 式(7.106)可以重新写成 $\cos\omega$ 的 n 次多项式. 具体来说

$$A_e(e^{j\omega}) = \sum_{k=0}^L a_k (\cos\omega)^k, \quad (7.110)$$

其中 a_k 是与冲激响应值 $h_e[n]$ 有关的常数. 若用 $x=\cos\omega$ 代入式(7.110), 则该式可以表示成

$$A_e(e^{j\omega}) = P(x) |_{x=\cos\omega}, \quad (7.111)$$

式中 $P(x)$ 是 L 次多项式:

$$P(x) = \sum_{k=0}^L a_k x^k. \quad (7.112)$$

我们将会看到, 没有必要知道 a_k 和 $h_e[n]$ 之间的关系(虽然可以得出一个公式); 只要知道 $A_e(e^{j\omega})$ 可以表示成式(7.110)的 L 次三角多项式就足够了.

能够控制 ω_p 和 ω_r 的关键是, 将它们固定在所要求的值上, 而让 δ_1 和 δ_2 改变. 帕克斯和麦克莱伦(Parks and McClellan, 1972a, 1972b)证明, 若 L 、 ω_p 和 ω_r 固定, 则选频滤波器的设计问题就变成一个在不相交集上的切比雪夫逼近问题, 这也是逼近理论中的一个重要问题, 对此已经推导出一些有用的定理和方法(见 Cheney, 1966). 为了得出在这种情况下逼近问题的公式, 我们定义逼近误差函数为

$$E(\omega) = W(\omega)[H_d(e^{j\omega}) - A_e(e^{j\omega})], \quad (7.113)$$

其中加权函数 $W(\omega)$ 将逼近误差参数并入设计过程. 这种设计方法规定误差函数 $E(\omega)$ 、加权函数 $W(\omega)$ 和要求的频率响应 $H_d(e^{j\omega})$ 只在 $0 \leq \omega \leq \pi$ 的闭合子区间上有定义. 例如, 若逼近低通滤波器时, 这些函数在区间 $0 \leq \omega \leq \omega_p$ 和 $\omega_r \leq \omega \leq \pi$ 上有定义. 逼近函数 $A_e(e^{j\omega})$ 在过渡区(即 $\omega_p \leq \omega \leq \omega_r$)上未加限制, 为了在其它区间上得到所要求的响应, 它可以取任何所要求的形状.

例如, 假设我们想要得到一个如图 7.39 所示的逼近, 其中 L 、 ω_p 和 ω_r 是固定的设计参数. 对于这个例子,

$$H_d(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & 0 \leq \omega \leq \omega_p, \\ 0, & \omega_r \leq \omega \leq \pi. \end{cases} \quad (7.114)$$

加权函数 $W(\omega)$ 可给出在不同的逼近区间上不同的加权逼近误差. 对于低通滤波器逼近问题, 加权函数是

$$W(\omega) = \begin{cases} \frac{1}{K}, & 0 \leq \omega \leq \omega_p, \\ 1, & \omega_r \leq \omega \leq \pi, \end{cases} \quad (7.115)$$

式中 $K = \delta_1/\delta_2$. 若 $A_e(e^{j\omega})$ 如图 7.40 所示, 则加权逼近误差, 式(7.113)中的 $E(\omega)$, 应当如图 7.41 中所示的那样. 请注意, 若用这种加权方式, 最大加权绝对逼近误差在通带和阻带上均为 $\delta_1 = \delta_2$.

在这种设计方法中所使用的具体准则是人们所称的最大最小准则或切比雪夫准则, 该准则在所需频率区间(如低通滤波器的通带和阻带)上找出能使式(7.113)的最大加权

* 更具体地说, $T_n(x)$ 是 n 次切比雪夫多项式, 定义作 $T_n(x) = \cos(n\cos^{-1}x)$.

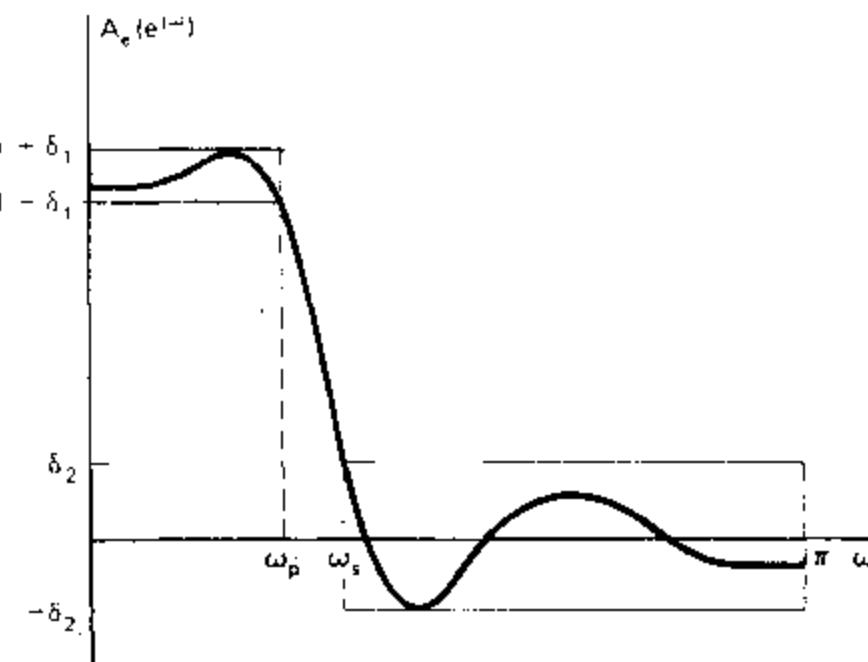


图 7.40 满足图 7.39 所示技术指标的典型频率响应.

逼近误差达到最小的频率响应 $A_e(e^{j\omega})$. 简言之, 最好的逼近就是在

$$\min_{\{h_n[n], 0 \leq n \leq L\}} (\max_{\omega \in F} |E(\omega)|)$$

意义上所求出的逼近, 其中 F 是 $0 \leq \omega \leq \pi$ 的闭子集, 如 $0 \leq \omega \leq \omega_p$ 或 $\omega_s \leq \omega \leq \pi$. 从而, 我们寻求一组使图 7.41 中的 δ 达到最小的冲激响应值.

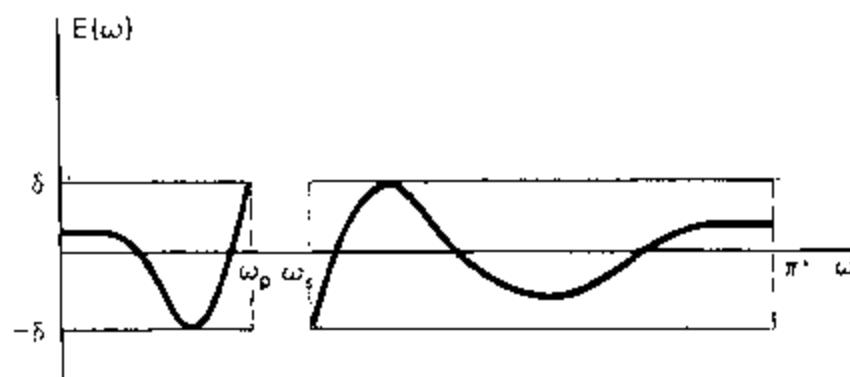


图 7.41 图 7.40 所示逼近的加权后误差.

帕克斯和麦克莱伦(Parks and McClellan, 1972a, 1972b)将如下逼近论的定理用于这种滤波器的设计问题中.

交错点定理 令 F_P 为由实轴 x 上不相交闭子集的并集构成的闭子集, $P(x)$ 是 r 次多项式

$$P(x) = \sum_{k=0}^r a_k x^k$$

$D_P(x)$ 是给定的所要求的 x 之函数, 它在 F_P 上是连续的, $W_P(x)$ 是在 F_P 上连续的正函数, 并且 $E_P(x)$ 是加权误差

$$E_P(x) = W_P(x)[D_P(x) - P(x)]$$

最大误差 $\|E\|$ 定义为

$$\|E\| = \max_{x \in F_P} |E_P(x)|$$

$P(x)$ 成为使 $\|E\|$ 最小的唯一 r 次多项式的必要和充分条件是, $E_P(x)$ 至少有 $(r+2)$ 个交错点, 即在 F_P 上必须至少存在 $(r+2)$ 个 x_i 值, 使得当 $i=1, 2, \dots, (r+1)$ 时, $x_1 <$

$x_1 < \dots < x_{r+1}$ 和 $E_P(x_i) = -E_P(x_{i+1}) = \pm \|E\|$.

初看起来,似乎很难将这个正式的定理与滤波器设计问题联系在一起,但是在下面的讨论中将会证明,该定理的全部内容在推导滤波器设计算法中是非常重要的.为了帮助理解交错点定理,我们将通过 I 型低通滤波器的设计来对这一定理作出具体的解释.

7.6.1 最佳 I 型低通滤波器

对于 I 型滤波器,多项式 $P(x)$ 是式(7.110)中的余弦多项式 $A_c(e^{j\omega})$,若用变量 $x = \cos\omega$ 和 $r=L$ 进行替换,有

$$P(\cos\omega) = \sum_{k=0}^L a_k (\cos\omega)^k. \quad (7.116)$$

$D_P(x)$ 是式(7.114)中所要求的低通滤波器频率响应,取 $x=\cos\omega$,则

$$D_P(\cos\omega) = \begin{cases} 1, & \cos\omega_p \leq \cos\omega \leq 1, \\ 0, & -1 \leq \cos\omega \leq \cos\omega_s. \end{cases} \quad (7.117)$$

$W_P(\cos\omega)$ 由式(7.115)给出,利用 $\cos\omega$ 可以重新写为

$$W_P(\cos\omega) = \begin{cases} \frac{1}{K}, & \cos\omega_p \leq \cos\omega \leq 1, \\ 1, & -1 \leq \cos\omega \leq \cos\omega_s, \end{cases} \quad (7.118)$$

而且加权后的逼近误差是

$$E_P(\cos\omega) = W_P(\cos\omega)[D_P(\cos\omega) - P(\cos\omega)]. \quad (7.119)$$

闭子集 F_P 包括区间 $0 \leq \omega \leq \omega_p$ 和 $\omega_s \leq \omega \leq \pi$,若用 $\cos\omega$ 表示,则包括区间 $\cos\omega_p \leq \cos\omega \leq 1$ 和 $-1 \leq \cos\omega \leq \cos\omega_s$. 交错点定理指出,当且仅当 $E_P(\cos\omega)$ 在 F_P 上呈现至少 $(L+2)$ 个交错点,即它正负交替地等于其最大值时,式(7.116)中的系数集 a_k 才对应于唯一能最好逼近于理想低通滤波器的滤波器,该理想低通滤波器的通带和阻带边缘频率分别为 ω_p 和 ω_s ,且比值 δ_1/δ_2 固定为 K . 这种逼近称为等波纹逼近.

图 7.42 表示当 $L=7$ 时根据交错点定理,最佳的滤波器频率响应.在该图中以 ω 为自变量给出了 $A_c(e^{j\omega})$ 的图形.为了正式检验交错点定理,我们首先将它作为 $x=\cos\omega$ 的函数重新画图.此外我们希望仔细地检查 $E_P(x)$ 的交错点.因此图 7.43(a), (b) 和 (c) 分别表示 $P(x)$, $W_P(x)$ 和 $E_P(x)$ 作为 $x=\cos\omega$ 之函数的图形.对于本例($L=7$)我们可以看出,共有 9 个误差交错点,所以满足交错点定理.重要的一点是,在计数交错点时包括了点 $\cos\omega_p$ 和 $\cos\omega_s$,因为按交错点定理在 F_P 中所包括的子集(或子区间)是闭集,也就是说,应当考虑区间的两个端点.虽然这似乎是一个小问题,但我们会看到,事实上它是很重要的.

通过比较图 7.42 和图 7.43 可知,当所要求的滤波器是一个低通滤波器(或任意分段恒定的滤波器)时,实际上可以通过直接检查频率响应来计数交错点.应当记住,在通带和阻带的最大误差是不同的(用比值 $K=\delta_1/\delta_2$ 表示).

交错点定理表明,最佳滤波器必须最少有 $(L+2)$ 个交错点,但是并不排除多于 $(L+2)$ 个交错点的可能性.事实上我们将会看到,对于一个低通滤波器最多可能的交错点数是 $(L+3)$.首先我们用图 7.44($L=7$)来说明这一点.图 7.44(a)有 $L+3=10$ 个交错

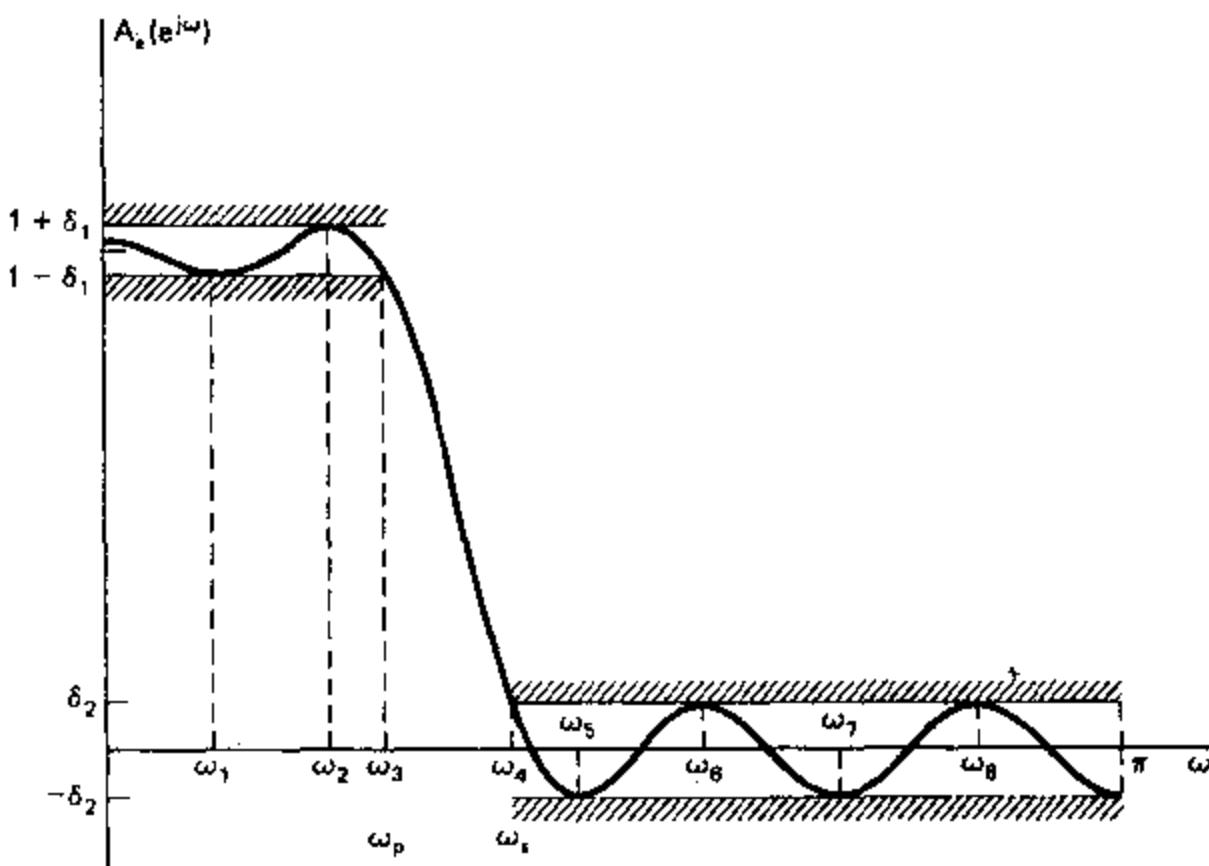


图 7.42 根据交错点定理, $L=7$ 时最佳低通滤波器逼近的典型举例.

点, 而图 7.44(b)、(c)和(d)分别有 $L+2=9$ 个交错点, $(L+3)$ 个交错点的情况(图 7.44(a))通常称为“超波纹情况”. 需要注意的是, 超波纹滤波器在 $\omega=0$ 和 $\omega=\pi$ 以及 $\omega=\omega_p$ 和 $\omega=\omega_s$ 处, 即各频带的边缘处均有交错点. 图 7.44(b)和(c)在 ω_p 和 ω_s 处也有交错点, 但分别在 $\omega=0$ 和 $\omega=\pi$ 处却没有交错点. 图 7.44(d)在 $0, \pi, \omega_p$ 和 ω_s 处均有交错点, 但是在阻带内极值点(零斜率的点)少一个. 我们还看出所有这些情况在通带和阻带内都是等波纹的, 即在 $0 < \omega < \pi$ 的区间内全部零斜率点都是加权逼近误差幅度为最大的频率点. 应当强调, 因为图 7.44 中的所有滤波器均满足当 $L=7$ 并且取同样的 $K=\delta_1/\delta_2$ 值时的交错点定理, 所有每个滤波器的 ω_p 和/或 ω_s 必定是不同的, 因为交错点定理表明, 在该定理的条件下最佳滤波器是唯一的.

对于图 7.44 中的滤波器, 由交错点定理得出上述特性. 具体讲, 我们以 I 型低通滤波器为例, 将这些特性归纳如下:

- 误差交错点最多的可能个数是 $(L+3)$.
- 交错点始终出现在 ω_p 和 ω_s 处.
- 在通带和阻带($0 < \omega < \omega_p$ 和 $\omega_s < \omega < \pi$)内部, 全部零斜率点均对应于交错点, 即除了可能在 $\omega=0$ 和 $\omega=\pi$ 处之外滤波器将是等波纹的.

交错点最多的可能个数为 $(L+3)$. 参考图 7.42 或 7.44 可以看出, 极值点或交错点的位置最多可能出现在 4 个频带边缘点 ($\omega=0, \pi, \omega_p, \omega_s$) 和局部极值点处, 即 $A_e(e^{j\omega})$ 有零斜率的那些频率点处. 因为 L 次多项式在一个开区间上最多能有 $(L-1)$ 个零斜率点, 所以交错点位置的最多可能个数是 $(L-1)$ 个多项式的极值点加上 4 个频率边缘点, 总共为 $(L+3)$ 个. 如果考虑三角多项式的极值点和零斜率点则应当看到, 虽然 $P(x)$ 作为 x 的函数来考虑时在对应点 $x=1$ 和 $x=-1$ 处可能没有零斜率, 但是三角多项式

$$P(\cos\omega) = \sum_{k=0}^L a_k (\cos\omega)^k, \quad (7.120)$$

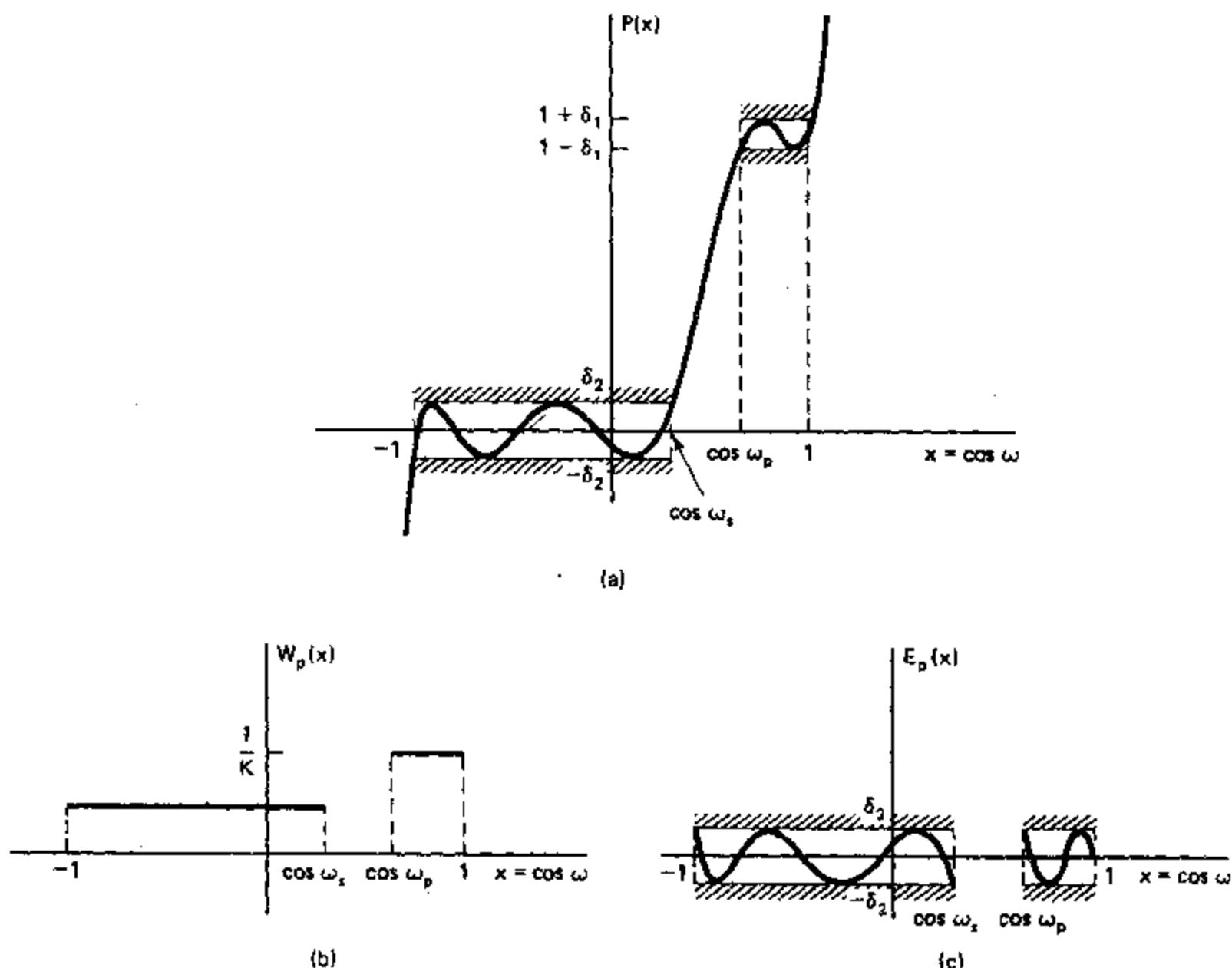


图 7.43 作为 $x=\cos\omega$ 之函数的等效多项式逼近函数. (a) 近似多项式. (b) 加权函数. (c) 逼近误差.

作为 ω 的函数来考虑时, 始终在 $\omega=0$ 和 $\omega=\pi$ 处有零斜率. 这是因为

$$\begin{aligned} \frac{dP(\cos\omega)}{d\omega} &= -\sin\omega \left(\sum_{k=0}^L k a_k (\cos\omega)^{k-1} \right) \\ &= -\sin\omega \left(\sum_{k=0}^{L-1} (k+1) a_{k+1} (\cos\omega)^k \right), \end{aligned} \quad (7.121)$$

上式在 $\omega=0$ 和 $\omega=\pi$ 以及由求和式表示的 $(L-1)$ 阶多项式的 $(L-1)$ 个根处始终为零. 在 $\omega=0$ 和 $\omega=\pi$ 处的这种特性在图 7.44 中显然可见. 图 7.44(d) 中碰巧式 (7.121) 中的 $\sin\omega$ 和

$$\sum_{k=0}^L k a_k (\cos\omega)^{k-1}$$

均为零, 即多项式 $P(x)$ 在 $x=-1=\cos\pi$ 处也有零斜率.

交错点总出现在 ω_s 和 ω_p 处. 对于图 7.44 中所有的频率响应, $A_r(e^{j\omega})$ 在通带边缘 ω_p 处正好等于 $1-\delta_1$, 并且在阻带边缘处正好等于 $+\delta_2$. 为了说明为什么总是这样, 我们来研究一下当减小如图 7.45 所示的 ω_p 时怎样才能使图 7.44(a) 中的滤波器也成为最佳的. 最大加权误差幅度相等的那些频率是 $\omega=0, \omega_1, \omega_2, \omega_s, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6$ 和 $\omega=\pi$, 总共有 $(L+2)=9$ 个频率. 但是这些频率并不都是交错点, 因为按照交错点定理的要求, 在这些频率处的误差必须正负交错地为 $\delta=\pm \|E\|$. 这样, 由于误差在 ω_2 和 ω_s 处都是负值, 所以

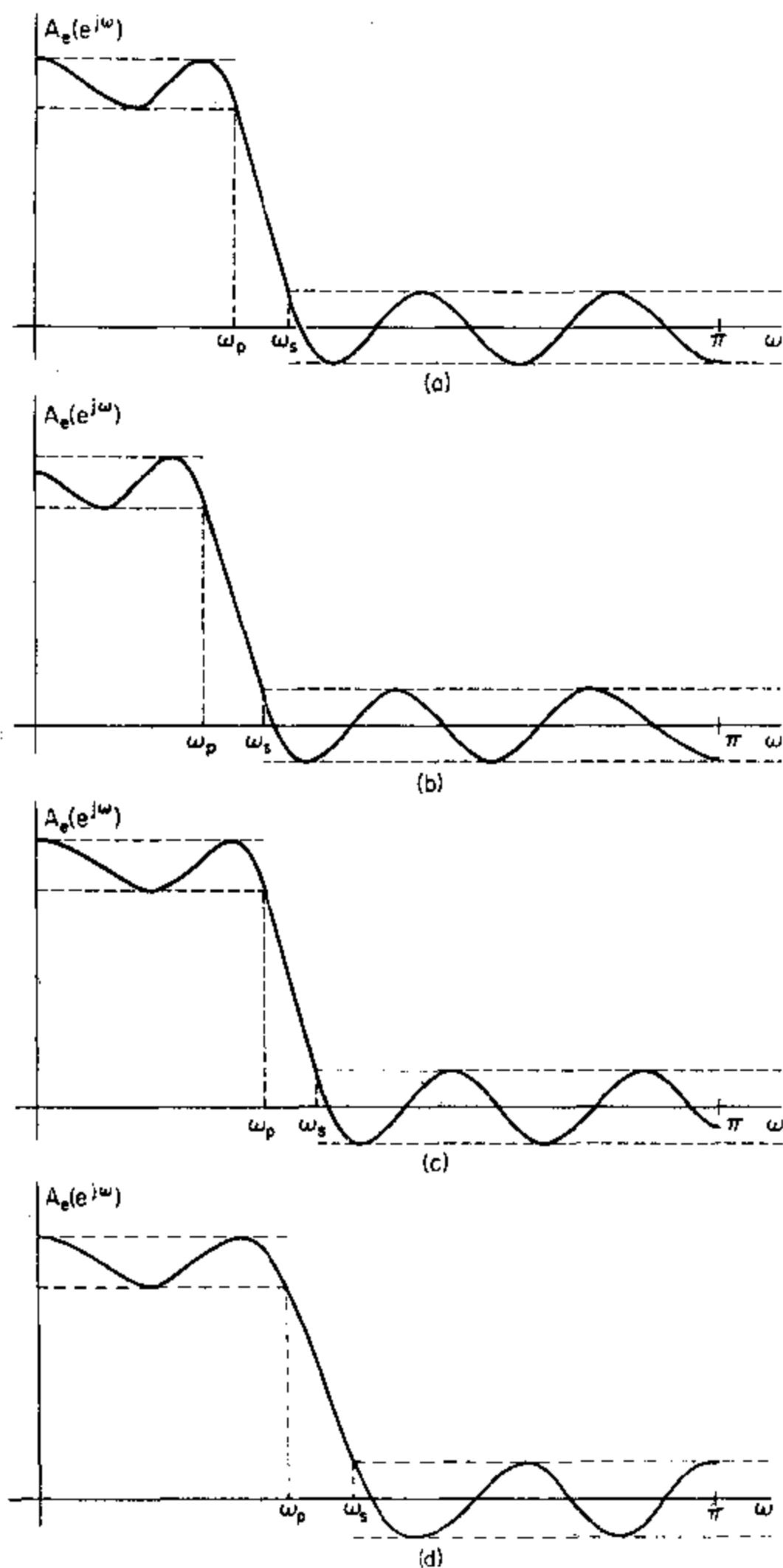


图 7.44 $L=7$ 时可能的最佳低通滤波器逼近。(a) $(L+3)$ 个交错点(超波纹情况). (b) $(L+2)$ 个交错点(在 $\omega=\pi$ 处有极值点). (c) $(L+2)$ 个交错点(在 $\omega=0$ 处有极值点). (d) $L=2$ 个交错点(在 $\omega=0$ 和 $\omega=\pi$ 处均有极值点.)

按照交错点定理可以计数的频率是 $\omega=0, \omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6$ 和 $\omega=\pi$, 总共有 8 个频率.

因为未能达到 $(L+2)=9$, 所以不满足交错点定理的条件, 并且当具有所示的 ω_p 和 ω_s 时, 图 7.45 的频率响应不是最佳的. 换句话说, 若将 ω_p 作为一个交错点频率而除去, 则这时除去了两个交错点. 因为图中交错点最多可能的个数是 $(L+3)$, 所以就剩下最多 $(L+1)$ 个, 该数目不能充分满足交错点定理. 如果将 ω_s 也作为一个交错点频率而除去, 则也会得出同样的结论. 对于高通滤波器也会有类似的结果, 但是如像在习题 7.31 中所考虑的, 带通或多频带滤波器并不一定会出现这种情况.

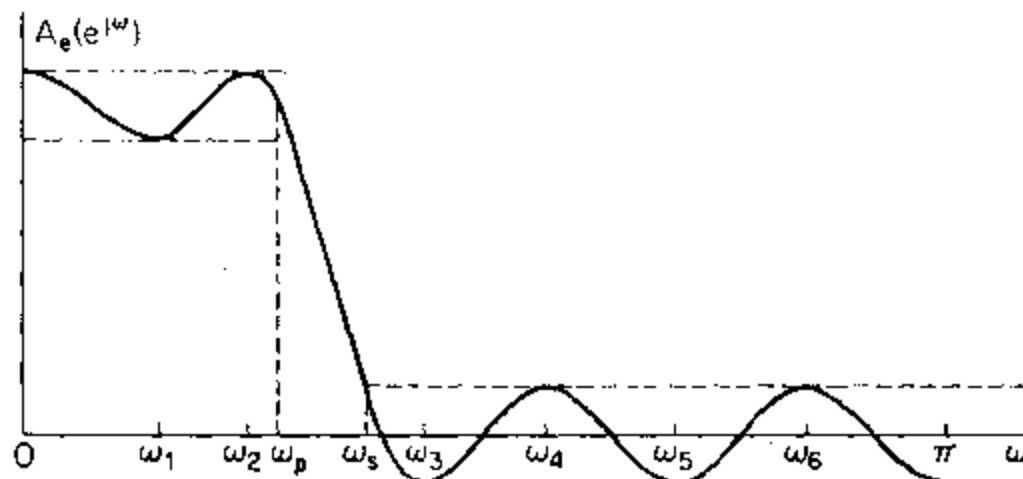


图 7.45 通常边缘 ω_p 必须是交错点频率的说明.

除了可能在 $\omega=0$ 或 $\omega=\pi$ 处外, 滤波器将是等波纹的. 我们曾经证明 ω_p 和 ω_s 必须是交错点, 这里的论点与此非常相似. 例如, 若将图 7.44(a) 中的滤波器修改为如图 7.46 那样, 使得一个零斜率点没有达到最大误差. 虽然极大误差出现在 9 个频率处, 但其中只有 8 个可以作为交错点来考虑. 因此, 若少了一个误差极大值点, 也就是除去了一个波纹, 则使交错点数目减少了二个, 只剩下 $(L+1)$ 个最多可能的交错点.

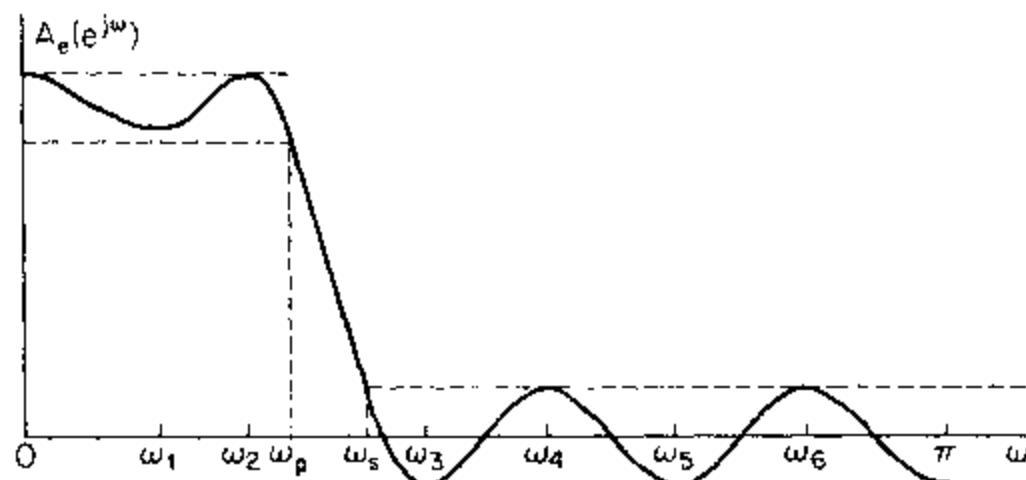


图 7.46 在要逼近的频带中频率响应必须是等波纹的说明.

这些特性只是从交错点定理所得出的众多特性中的一小部分. 在拉宾和戈尔德 (1975) 的论文中讨论了其它许多特性. 另外, 我们在这里只研究了 I 型低通滤波器, 而对 I、II 和 IV 型或更一般的所需频率响应滤波器广泛详细的讨论超出了本书的范围. 为了进一步强调交错点定理的一些特性, 下面我们主要来研究 II 型低通滤波器.

7.6.2 最佳 II 型低通滤波器

I 型因果滤波器是在 $0 \leq n \leq M$ 范围之外 $h[n] = 0$ 的滤波器, 且滤波器的长度 $(M +$

1) 为偶数, 即 M 为奇数, 而且由于对称性有

$$h[n] = h[M-n]. \quad (7.122)$$

因此, 频率响应 $H(e^{j\omega})$ 可表示成

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j\omega M/2} \sum_{n=0}^{(M-1)/2} 2h[n] \cos\left[\omega\left(\frac{M}{2}-n\right)\right]. \quad (7.123)$$

若令 $b[n] = 2h[(M+1)/2-n]$, $n=1, 2, \dots, (M+1)/2$, 则式(7.123)可重写为

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j\omega M/2} \left\{ \sum_{n=1}^{(M+1)/2} b[n] \cos\left[\omega\left(n-\frac{1}{2}\right)\right] \right\}. \quad (7.124)$$

为了将交错点定理用于 I 型滤波器的设计, 我们必须将该问题等效为多项式逼近的问题. 要完成这一点, 我们将式(7.124)中的求和式表示成

$$\sum_{n=1}^{(M+1)/2} b[n] \cos\left[\omega\left(n-\frac{1}{2}\right)\right] = \cos(\omega/2) \left[\sum_{n=0}^{(M-1)/2} \bar{b}[n] \cos(\omega n) \right]. \quad (7.125)$$

(见习题 7.35.) 现在可以把式(7.125)中右边的求和式表示成一个三角多项式 $P(\cos\omega)$, 因此

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j\omega M/2} \cos(\omega/2) P(\cos\omega), \quad (7.126a)$$

式中

$$P(\cos\omega) = \sum_{k=0}^L a_k (\cos\omega)^k \quad (7.126b)$$

且 $L=(M-1)/2$. 式(7.126b)中的系数 a_k 与式(7.125)中的系数 $\bar{b}[n]$ 有联系, 而后者又与式(7.124)中的系数 $b[n] = 2h[(M+1)/2-n]$ 有联系. 如对于 I 型低通滤波器的情况, 没有必要得出冲激响应和 a_k 之间的解析关系式. 现在我们可以把交错点定理用于 $P(\cos\omega)$ 和所要求的频率响应之间的加权误差. 对于给定通带与阻带波纹比值 K 的 I 型低通滤波器, 所要求的频率响应函数由式(7.114)给出, 并且误差的加权函数由式(7.115)给出. 对于 II 型低通滤波器, 由于在式(7.126a)中有因子 $\cos(\omega/2)$, 所以, 用多项式 $P(\cos\omega)$ 来逼近的所要求频率响应函数定义为

$$H_d(e^{j\omega}) = D_P(\cos\omega) = \begin{cases} \frac{1}{\cos(\omega/2)}, & 0 \leq \omega \leq \omega_p, \\ 0, & \omega_p \leq \omega \leq \pi, \end{cases} \quad (7.127)$$

并且加到误差上的权函数是

$$W(\omega) = W_P(\cos\omega) = \begin{cases} \frac{\cos(\omega/2)}{K}, & 0 \leq \omega \leq \omega_p, \\ \cos(\omega/2), & \omega_p \leq \omega \leq \pi. \end{cases} \quad (7.128)$$

所以, II 型滤波器设计是一个与 I 型滤波器设计所不同的多项式逼近问题.

在这一节中我们只概括了 II 型滤波器的设计问题, 主要强调, 必须首先将设计问题用公式表示成多项式逼近问题. 在 III 型和 IV 型线性相位 FIR 滤波器的设计中也有类似的要求. 具体讲, 这些类型滤波器的设计也可以用公式表示成多项式逼近问题, 但是在每一类中加到误差上的加权函数的形式恰与 II 型滤波器所用的三角多项式(见习题 7.35)相同. 有关这类滤波器特性和设计方法的详细讨论可见拉宾和戈尔德(Rabiner and Gold, 1975)的论文.

已经以低通滤波器为例说明了用公式设计 II 型和 III 型线性相位系统的细节. 但是从

I型情况的讨论中特别应当指出,选择所要求的响应函数 $H_d(e^{j\omega})$ 和加权函数 $W(\omega)$ 时有很大的灵活性,例如可以利用能够得到一定百分比的等波纹误差逼近的所要求函数来定义加权函数.这种方法在设计 I型和 II型微分系统时十分有用.

7.6.3 帕克斯-麦克莱伦算法

交错点定理说明使误差在切比雪夫意义上最佳化的必要和充分条件.虽然该定理没有清楚地表明如何找出最佳滤波器,但是所给出的条件可以作为找出最佳滤波器有效算法的基础.虽然我们只用 I型低通滤波器来进行讨论,但是该算法很容易加以推广.

由交错点定理可知,最佳滤波器 $A_e(e^{j\omega})$ 应满足如下方程组

$$W(\omega_i)[H_d(e^{j\omega_i}) - A_e(e^{j\omega_i})] = (-1)^{i+1}\delta, \quad i=1, 2, \dots, (L+2), \quad (7.129)$$

式中 δ 是最佳误差, $A_e(e^{j\omega})$ 由式(7.106)或式(7.110)给出.若用式(7.110)表示 $A_e(e^{j\omega})$, 则这些方程可以写成

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^L & \frac{1}{W(\omega_1)} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^L & \frac{-1}{W(\omega_2)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_{L+2} & x_{L+2}^2 & \cdots & x_{L+2}^L & \frac{(-1)^{L+2}}{W(\omega_{L+2})} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ \delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_d(e^{j\omega_1}) \\ H_d(e^{j\omega_2}) \\ \vdots \\ H_d(e^{j\omega_{L+2}}) \end{bmatrix}, \quad (7.130)$$

其中 $x_i = \cos\omega_i$, 这组方程是寻找最佳 $A_e(e^{j\omega})$ 的迭代算法的基础.该方程首先猜测一组交错点频率 $\omega_i, i=1, 2, \dots, (L+2)$.请注意 ω_p 和 ω_s 是固定的,并且根据我们在 7.6.1 节中的讨论可知,它们必定为交错点频率.具体讲,若 $\omega_i = \omega_p$, 则 $\omega_{i+1} = \omega_s$.由方程组(7.130)可以解出系数组 a_k 和 δ .此外另一种更加有效的方法是利用多项式内插.具体来说,帕克斯-麦克莱伦(Parks and McClellan, 1972a, 1972b)发现,对于给定的一组极值频率, δ 可由如下公式给出:

$$\delta = \frac{\sum_{k=1}^{L+2} b_k H_d(e^{j\omega_k})}{\sum_{k=1}^{L+2} \frac{b_k (-1)^{k+1}}{W(\omega_k)}}, \quad (7.131)$$

其中

$$b_k = \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{L+2} \frac{1}{(x_k - x_i)}, \quad (7.132)$$

且和以前一样, $x_i = \cos\omega_i$.这就是说,如果 $A_e(e^{j\omega})$ 由满足式(7.103)的系数组 a_k 来确定,并且 δ 由式(7.131)给出,则误差函数就会通过在 $(L+2)$ 个频率 ω_i 上的 $\pm\delta$ 值处,或等效地,若 $0 \leq \omega_i \leq \omega_p$, 则 $A_e(e^{j\omega})$ 的值中包括 $1 \pm K\delta$ 值,而若 $\omega_s \leq \omega_i \leq \pi$, 则 $A_e(e^{j\omega})$ 的值中包括 $\pm\delta$ 值.因为,已知 $A_e(e^{j\omega})$ 是一个 L 次三角多项式,所以我们可以用 $(L+2)$ 个已知值 $E(\omega_i)$ (或等效地 $A_e(e^{j\omega_i})$) 中的 $(L+1)$ 个值插入一个三角多项式.帕克斯和麦克莱伦曾用拉格朗日内插公式得出

$$A_e(e^{j\omega}) = P(\cos\omega) = \frac{\sum_{k=1}^{L+1} [d_k/(x - x_k)] C_k}{\sum_{k=1}^{L+1} [d_k/(x - x_k)]}, \quad (7.133a)$$

式中 $x = \cos\omega$, $x_i = \cos\omega_i$,

$$C_k = H_d(e^{j\omega_k}) - \frac{(-1)^{k+1}\delta}{W(\omega_k)}, \quad (7.133b)$$

和

$$d_k = \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{L+1} \frac{1}{(x_k - x_i)} = \frac{b_k}{(x_k - x_{L+2})}. \quad (7.133c)$$

虽然只用到频率 $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{L+1}$ 来拟合 L 次多项式, 但是因为所得出的 $A_e(e^{j\omega})$ 满足式(7.130)所以可以确认多项式在 ω_{L+2} 处也取正确值.

现在, 已得出满足任何所要求频率的 $A_e(e^{j\omega})$, 而不用去解方程组(7.130)来求系数 a_k . 式(7.133a)所表示的多项式可用以计算通带和阻带中许多频率处的 $A_e(e^{j\omega})$ 和 $E(\omega)$ 值. 如果对通带和阻带中的所有 ω , 都有 $|E(\omega)| \leq \delta$, 则说明已经得到最佳逼近, 否则我们必须求出一组新的极值频率.

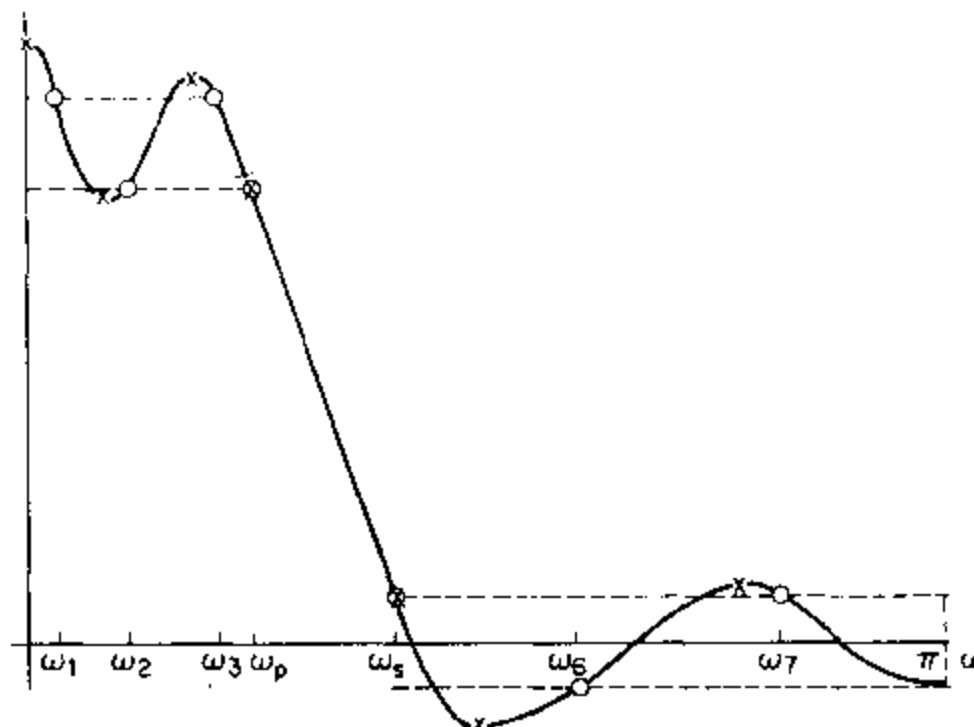


图 7.47 等波纹逼近的帕克斯-麦克莱伦算法的说明.

图 7.47 表示在求出其最佳逼近之前 I 型低通滤波器的一个典型例子. 很清楚, 求 δ 所用到的频率组 ω_i (如图 7.47 中用圆圈所表示的) 是那些能使 δ 最小的频率. 根据雷梅兹 (Remez) 法的原理将该组极值频率转换成由误差曲线上 $(L+2)$ 个最大峰所确定的一组新的频率. 如前所述, 必须将 ω_p 和 ω_r 选作极值频率. 我们记得, 在开区间 $0 < \omega < \omega_p$ 和 $\omega_r < \omega < \pi$ 中最多有 $(L-1)$ 个局部极大值点和极小值点. 剩下的极值点可在 $\omega=0$ 处, 也可在 $\omega=\pi$ 处. 如果在 $\omega=0$ 和 $\omega=\pi$ 处误差函数均有一个极大值, 则把产生最大误差的频率作为极值频率的最新估计. 我们重复下列步骤: 首先进行 δ 的循环计算, 其次用假设的误差峰值拟合一个多项式, 然后找出实际误差峰点的位置. 该步骤重复进行, 用稍大于原定的较小数值开始, 直到 δ 值不再改变为止. 这个 δ 值就是所要求的极大极小加权逼近误差. 该

算法的流程图(Rabiner and Gold, 1975)如图 7.48 所示.

在该算法中, 每一步迭代均隐含地改变冲激响应值 $h_r[n]$ 以得到所要求的最佳逼近, 但是 $h_r[n]$ 的值也从未用显式计算过. 当算法收敛后, 可以利用将在第八章中讨论的离散傅里叶变换由多项式的样本来计算冲激响应.

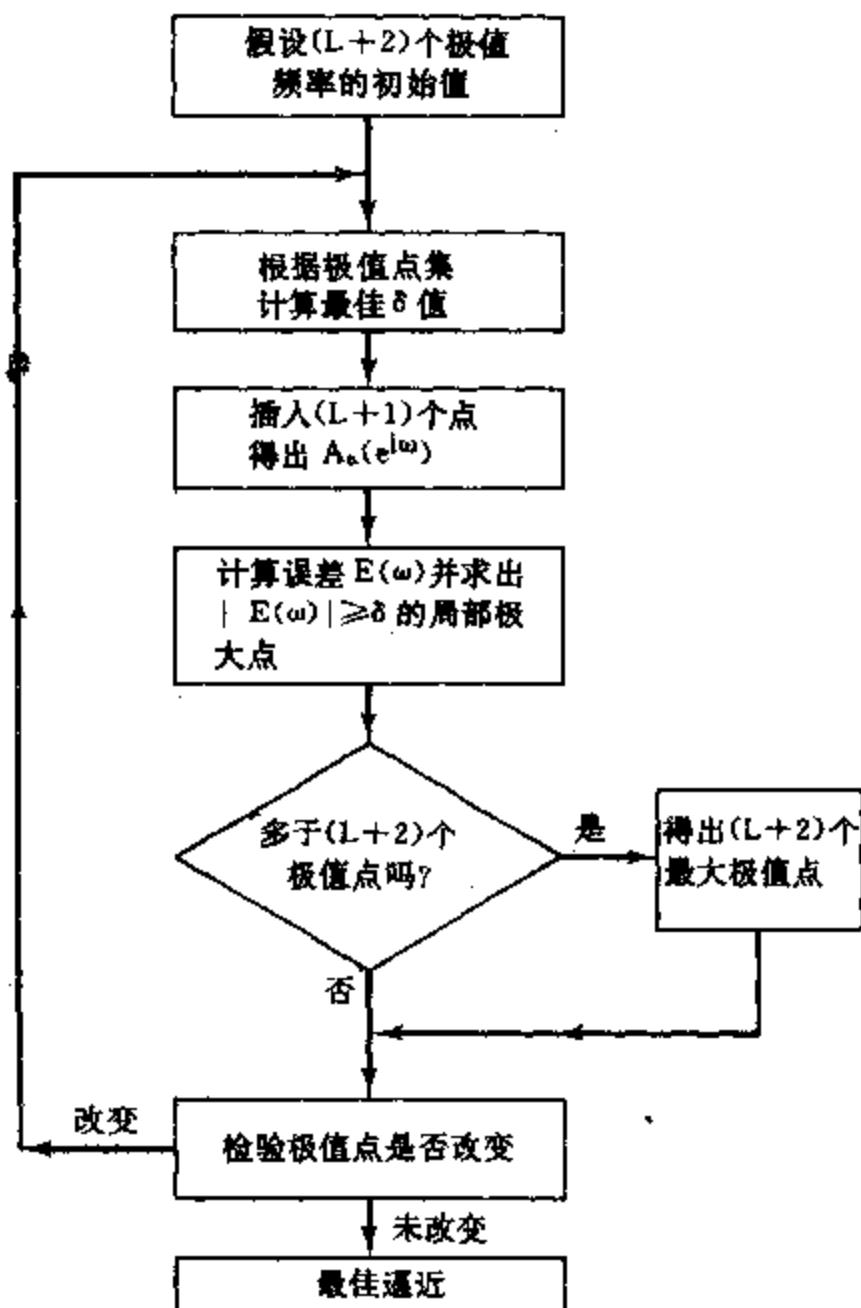


图 7.48 帕克斯-麦克莱伦算法的流程图.

7.6.4 最佳 FIR 滤波器的特性

对于预先给定的过渡带 $(\omega_s - \omega_p)$, 最佳 FIR 滤波器有最小的极大加权逼近误差 δ . 对式(7.115)的加权函数而言, 得出的最大阻带逼近误差是 $\delta_2 = \delta$, 最大通带逼近误差是 $\delta_1 = K\delta$. 若已知 δ_1 和 δ_2 值是所要求的, 则上节所提出的算法可以迭代地用于确定具有预定 δ_1 和 δ_2 值的滤波器, 该迭代可将 ω_p 和 M 固定而改变 ω_s , 直到得出所要求的 δ_1 和 δ_2 为止. 图 7.49 给出了这种方法所得结果的总结(见 Rabiner and Gold, 1975), 图中画出了取 $\delta_1 = \delta_2 = 0.1$ 和不同 M 值时 $\Delta\omega/2\pi = (\omega_s - \omega_p)/2\pi$ 对 $\omega_p/2\pi$ 的图形. 曲线表明随着 ω_p 的增大, 过渡带宽度 $\Delta\omega$ 可以达到局部极小点. 曲线上的这些点对应于超波纹(($L+3$)个极值点)滤波器. 按照交错点定理在极小点之间的所有点都对应于最佳滤波器. $M=8$ 和 $M=10$ 的滤波器是 I 型滤波器, 而 $M=9$ 的滤波器对应于 II 型滤波器. 我们注意到, 选择某些参数会使较短的滤波器($M=9$)可能优于较长的滤波器(有较窄的过渡带). 这一点可

能会令人感到吃惊，并且看上去似乎是矛盾的。但是 $M=9$ 和 $M=10$ 的情况分别代表两种基本上不同类型的滤波器。若用另一种方式来解释， $M=9$ 时的滤波器不能视为将一个样本点设为零的 $M=10$ 的特殊情况，因为这将不满足线性相位对称性的要求。另一方面， $M=8$ 的滤波器可以看作是 $M=10$ 时将第一个和最后一个样本设为零的一种特殊情况。由于这个原因， $M=8$ 时的最佳滤波器就不能优于 $M=10$ 时的最佳滤波器。这种限制可从图 7.49 中看出，图中 $M=8$ 的曲线始终高于或等于 $M=10$ 的曲线。这两条曲线相遇的那些点对应于 $M=10$ 的滤波器将第一个和最后一个样本点设为零时的理想冲激响应。

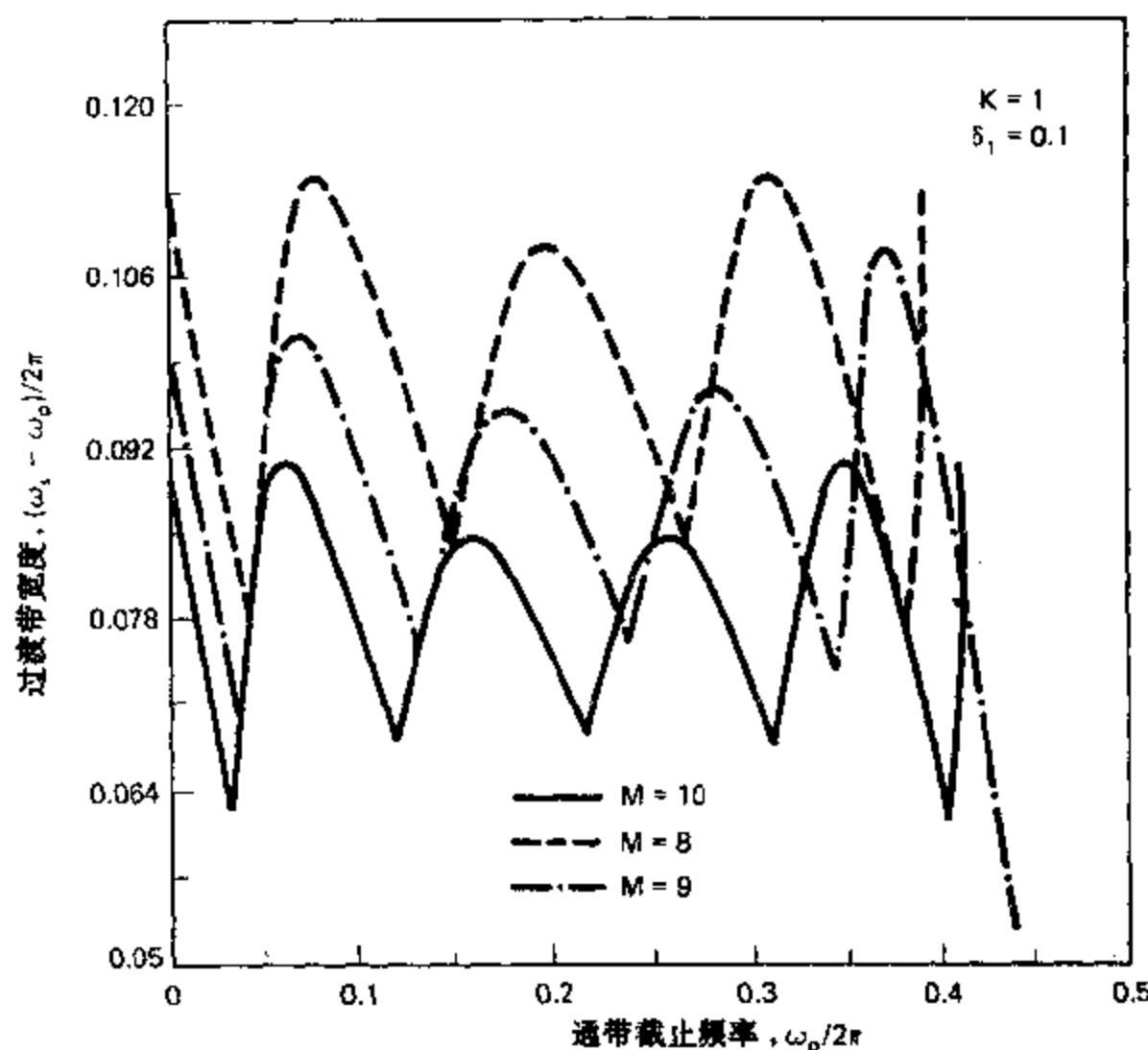


图 7.49 最佳逼近低通滤波器的过渡带宽度与截止频率的关系曲线。

赫尔曼等人(Herrmann et al. 1973)对等波纹低通滤波器逼近的各种参数 $M, \delta_1, \delta_2, \omega_p$ 和 ω_s 之间的关系进行了大量的计算研究，后来凯泽(Kaiser 1974)得出了一种能反映这些参数之间关系的简化公式：

$$M = \frac{-10 \log_{10}(\delta_1 \delta_2) - 13}{2.324 \Delta\omega}, \quad (7.134)$$

其中 $\Delta\omega = \omega_s - \omega_p$ 。通过在可以比较情况下($\delta_1 = \delta_2 = \delta$)对式(7.134)与凯泽窗法设计公式(式(7.93))的比较看出， M 值给定时最佳逼近可以使逼近误差有 5dB 的改善。等波纹滤波器的另一个重要优点是 δ_1 和 δ_2 不要求相等，而不像窗函数法所要求的那样。

7.7 FIR 等波纹逼近举例

FIR 滤波器最佳等波纹逼近的帕克斯-麦克莱伦算法可以用于设计众多类型的 FIR 滤波器。在这一节中我们将给出几个例子来说明最佳逼近的一些特性，并指出这种设计方法所提供的极大灵活性。

7.7.1 低通滤波器

对于低通滤波器我们再次逼近曾在例 7.5, 7.6, 7.7 和 7.11 中用到的那组技术指标。这样就可以在相同的低通滤波器指标下来比较所有的主要设计方法，该指标要求 $\omega_p = 0.4\pi$, $\omega_s = 0.6\pi$ 和 $\delta_1 = 0.01$, $\delta_2 = 0.001$ 。与窗函数法不同，帕克斯-麦克莱伦算法可以在加权函数的参数 $K = \delta_1/\delta_2 = 10$ 固定的情况下调整通带和阻带的不同逼近误差。

将上述技术指标代入式(7.134)并作舍入处理，可以得出估计值 $M = 26$ ，这是达到技术指标所必须的 M 值。图 7.50(a), (b) 和 (c) 分别表示 $M = 26$, $\omega_p = 0.4\pi$ 和 $\omega_s = 0.6\pi$ 时最佳滤波器的冲激响应、对数幅度和逼近误差。图 7.50(c) 表示被加权的逼近误差

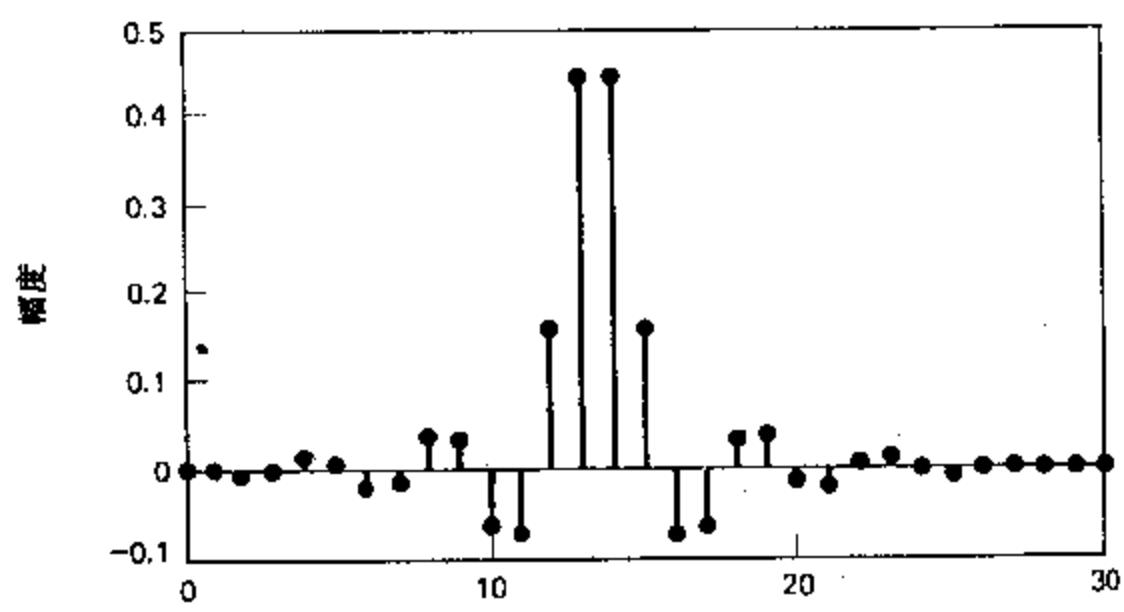
$$E_A(\omega) = \frac{E(\omega)}{W(\omega)} = \begin{cases} 1 - A_c(e^{j\omega}), & 0 \leq \omega \leq \omega_p, \\ 0 - A_c(e^{j\omega}), & \omega_s \leq \omega \leq \pi, \end{cases} \quad (7.135)$$

而不是设计算法公式中所用的加权误差。除了通带误差应该除以 10 外，加权误差应与图 7.50(c) 中的误差相同^{*}。逼近误差的交错点在图 7.50(c) 中是很清楚的。在通带中有 7 个交错点而在阻带中有 8 个，总共 15 个交错点，因为 I 型 (M 为偶数) 滤波器 $L = M/2$ ，且 $M = 26$ ，所以交错点的最少个数是 $(L+2) = (26/2+2) = 15$ 。因此，图 7.50 所示的滤波器是 $M = 26$, $\omega_p = 0.4\pi$ 和 $\omega_s = 0.6\pi$ 时的最佳滤波器。但是，图 7.50(c) 表示，滤波器未能满足通带和阻带误差的原始技术要求。（通带和阻带中的最大误差分别为 0.0116 和 0.00116。）这样，为了满足或超过技术指标，我们必须将 M 增大到 27。

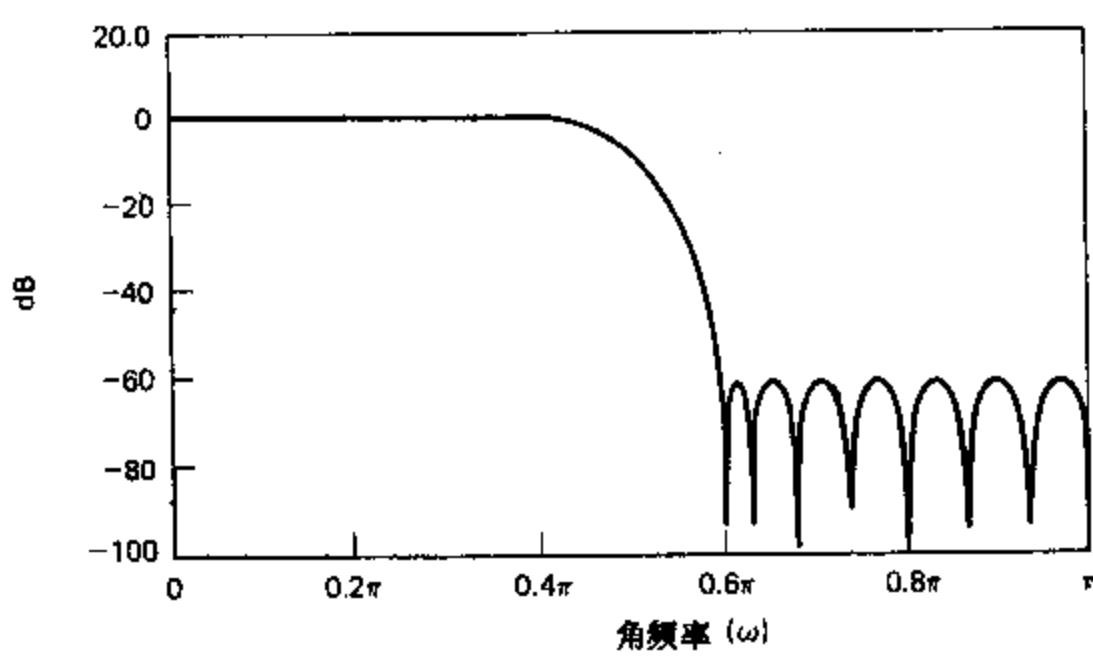
$M = 27$ 时的滤波器响应函数如图 7.51 所示。此时的通带和阻带逼近误差略小于给定值。（通带和阻带中的最大逼近误差分别为 0.0092 和 0.00092。）在这种情况下通带中也有 7 个交错点，阻带中也有 8 个，总共 15 个交错点。请注意，由于 $M = 27$ ，因此这是一个 II 型系统，而对于 II 型系统，隐含的逼近多项式的阶次是 $L = (M-1)/2 = (27-1)/2 = 13$ 。所以，交错点的最少个数仍为 15。还应注意，II 型系统约束其系统函数有一个零点在 $z = -1$ 或 $\omega = \pi$ 处。这一点从图 7.51(b) 和 (c) 中显然可见。

如果将本例的结果与例 7.11 的结果作一比较就会发现，凯泽窗法要求 $M = 38$ 以满足或超过技术指标，而帕克斯-麦克莱伦法只要求 $M = 27$ 。之所以会有这种不同之处是因为窗函数法在通带和阻带中产生基本上相等的最大误差，而帕克斯-麦克莱伦法可以对不同频带的误差进行不同的加权。

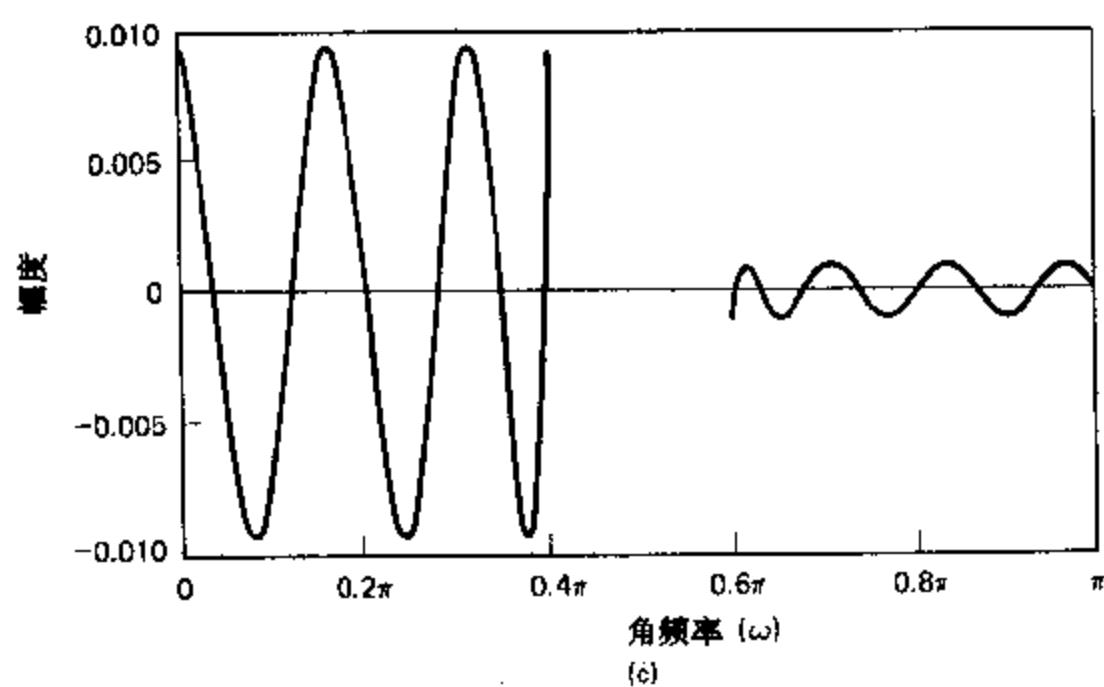
* 对于选频滤波器来说，因为在通带中 $A_c(e^{j\omega}) = 1 - E(\omega)$ ，在阻带中 $A_c(e^{j\omega}) = -E(\omega)$ ，所以用未加权逼近误差也可以方便地表现出通带和阻带的特性。



(a)



(b)



(c)

图 7.50 $\omega_p = 0.4\pi, \omega_s = 0.6\pi, K = 10$ 和 $M = 26$ 时的最佳 I 型 FIR 低通滤波器.
(a) 冲激响应, (b) 对数幅度, (c) 逼近误差(未加权的).

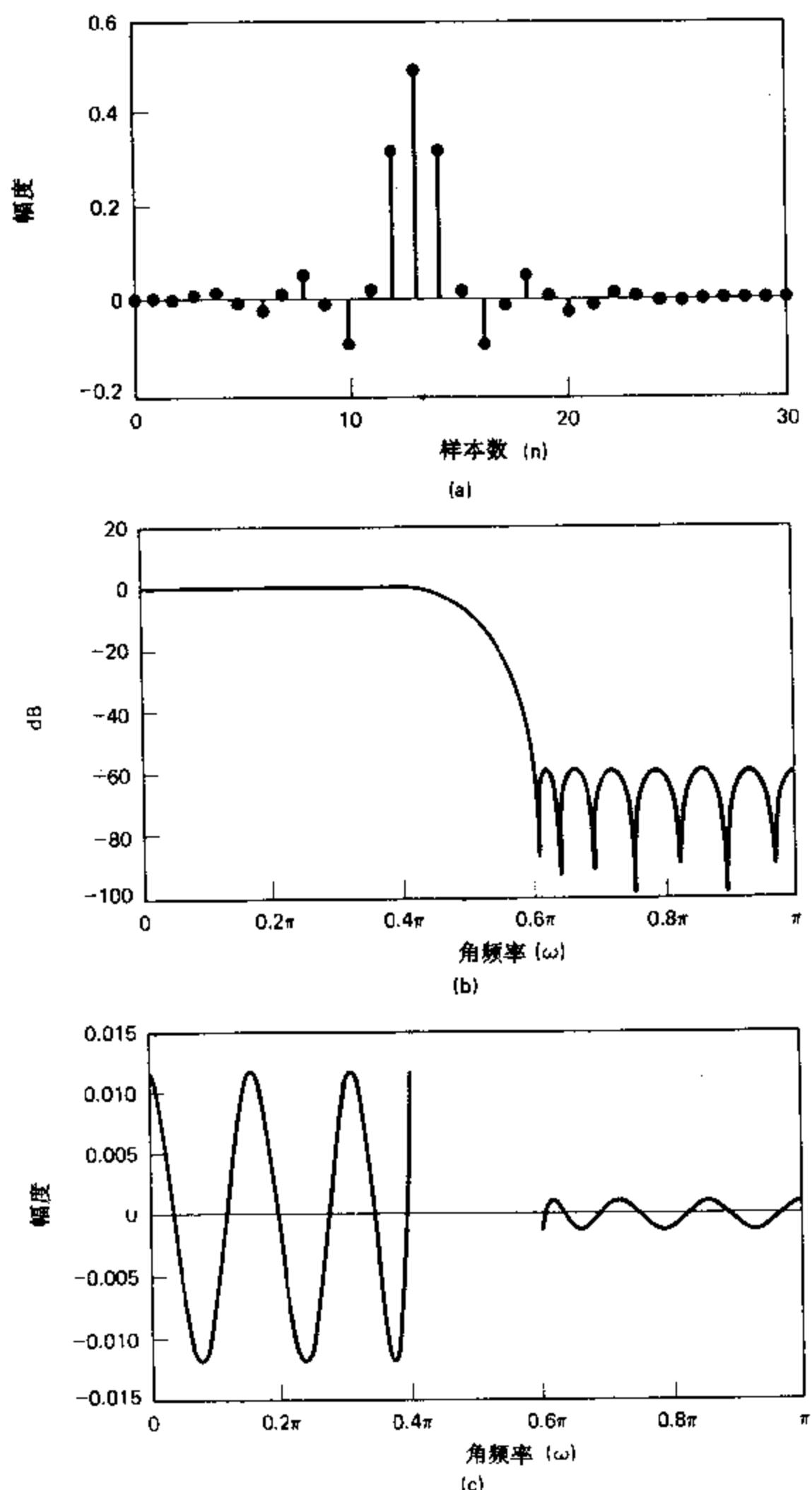


图 7.51 $\omega_p=0.4\pi, \omega_r=0.6\pi, K=10$ 和 $M=27$ 时的最佳 I 型 FIR 低通滤波器.
 (a) 冲激响应, (b) 对数幅度, (c) 逼近误差(未加权的).

7.7.2 零阶保持器的补偿

在许多情况下都需要设计用于如图 7.52 所示系统中的离散时间滤波器, 即该滤波器用于处理一个样本序列 $x[n]$ 以得到序列 $y[n]$, 然后将它输入到 D/A 转换器和连续时间低通滤波器(逼近理想 D/C 转换器)中, 以便重构连续时间信号 $y_c(t)$. 正如在 3.7 节中所讨论的, 这样一个系统是对连续时间信号进行离散时间滤波之系统的一部分. 在 3.7.4 节中我们曾表明, 如果 D/A 转换器在整个采样周期 T 中能保持其输出为常量, 则输出 $y_c(t)$ 的傅里叶变换是

$$Y_c(j\Omega) = H_r(j\Omega)H_o(j\Omega)H(e^{j\Omega T})X(e^{j\Omega T}), \quad (7.136)$$

其中 $H_r(j\Omega)$ 是增益为 1 和截止频率为 π/T 的低通重构滤波器的频率响应, 并且

$$H_o(j\Omega) = \frac{\sin(\Omega T/2)}{\Omega/2} e^{-j\Omega T/2} \quad (7.137)$$

是 D/A 转换器零阶保持器的频率响应. (请注意 $H_r(j\Omega)$ 的增益可为 1, 因为 $H_r(j\Omega)$ 的增益在 $\Omega=0$ 处为 T .) 在 3.7.4 节我们曾指出, 对 $H_o(j\Omega)$ 的补偿可以并入连续时间重构滤波器中; 即 $H_r(j\Omega)$ 可以用

$$\tilde{H}_r(j\Omega) = \frac{\Omega T/2}{\sin(\Omega T/2)} H_r(j\Omega) \quad (7.138)$$

来代替, 这样离散时间滤波器 $H(e^{j\Omega T})$ 的作用不会由于零阶保持器而产生失真. 另一种方法是通过设计一个滤波器 $\tilde{H}(e^{j\Omega T})$ 使得

$$\tilde{H}(e^{j\Omega T}) = \frac{\Omega T/2}{\sin(\Omega T/2)} H(e^{j\Omega T}). \quad (7.139)$$

而把补偿加入到离散时间滤波器中. 如果我们将所要求的频率响应简单定义为

$$\tilde{H}_d(e^{j\omega}) = \begin{cases} \frac{\omega/2}{\sin(\omega/2)}, & 0 \leq \omega \leq \omega_p, \\ 0, & \omega_s \leq \omega \leq \pi. \end{cases} \quad (7.140)$$

则可很容易地用帕克斯-麦克莱伦算法设计有 D/A 补偿的低通滤波器.

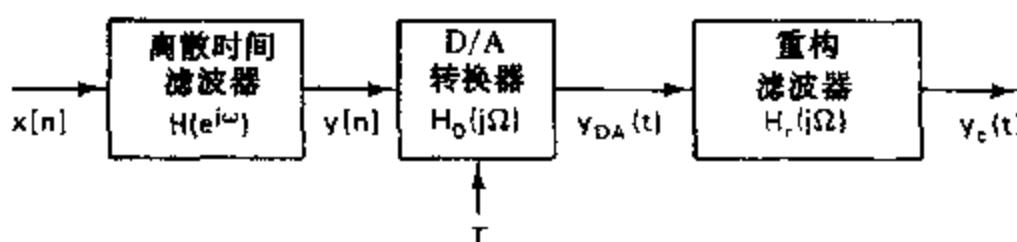


图 7.52 由于 D/A 转换器的影响而对离散时间滤波器的预补偿.

图 7.53 表示这种滤波器的响应函数, 其技术指标仍为 $\omega_p = 0.4\pi$, $\omega_s = 0.6\pi$, $\delta_1 = 0.01$

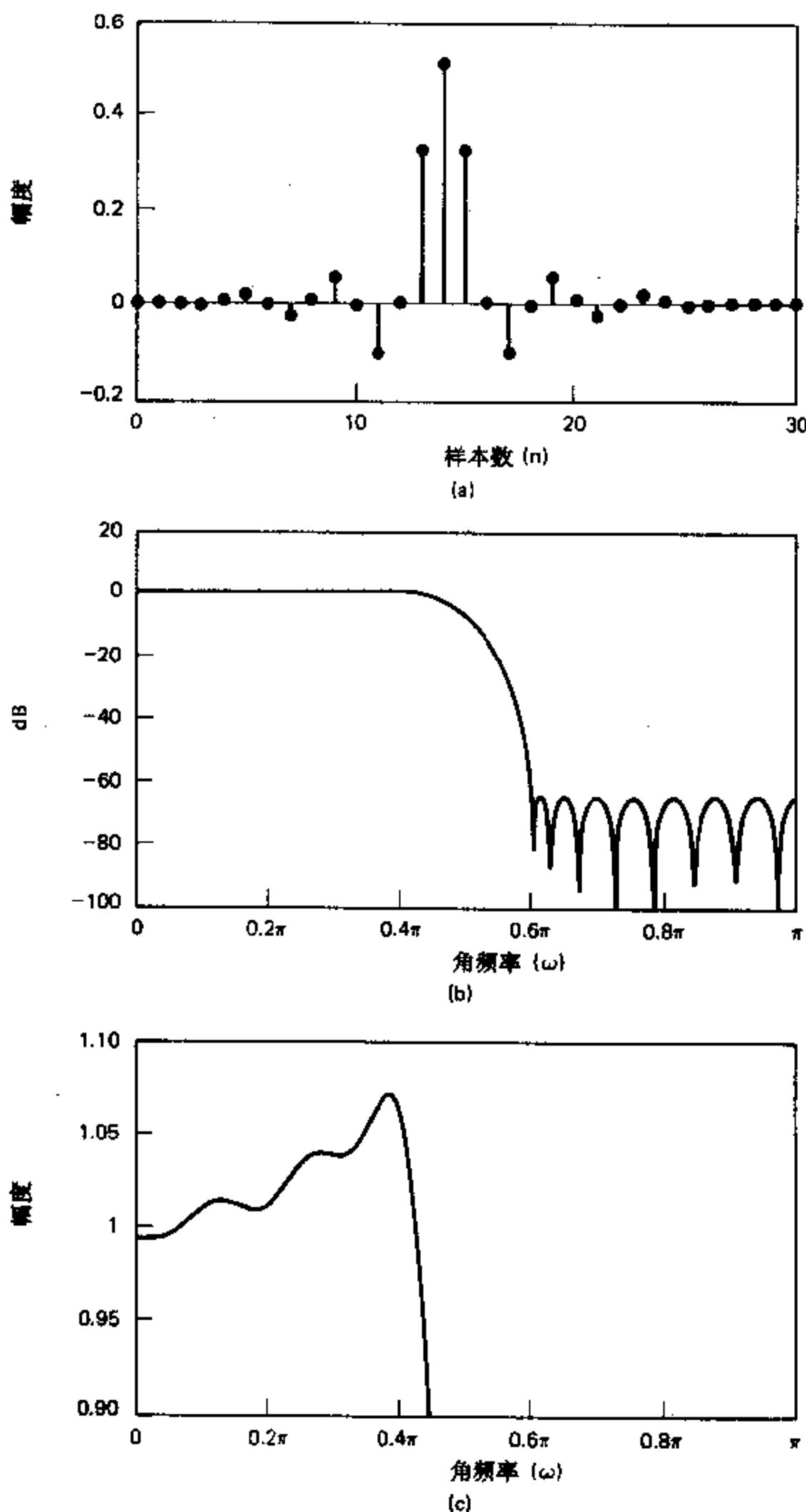


图 7.53 当 $\omega_p = 0.4\pi$, $\omega_t = 0.6\pi$, $K = 10$ 和 $M = 28$ 时的最佳 D/A 补偿低通滤波器。
 (a) 冲激响应, (b) 对数幅度, (c) 通带中的幅度响应.

和 $\delta_2=0.001$. 此时若维持先前的恒定增益, 则用 $M=28$ 而不是 $M=27$ 就可以满足技术指标. 这样我们基本上可以无代价地将 D/A 转换器的补偿包括在系统内, 使得滤波器的有效通带更加平坦. (为了强调通带的倾斜特性, 图 7.53(c) 表示出通带的幅度响应, 而不是像在其它 FIR 举例的频率响应图中的逼近误差.)

7.7.3 带通滤波器

7.6 节集中讨论了只有两个逼近频带的低通最佳 FIR 滤波器的情况. 然而, 带通和带阻滤波器要求有三个逼近频带, 为了设计这类滤波器就需要将 7.6 节的结论推广到多频带情况. 因而要求我们进一步研究在这种更一般的情况下交错点定理的含义和逼近多项式的性质. 首先我们记得, 所论述的交错点定理并没有对不相交逼近区间的个数提出任何限制. 因此最佳逼近交错点的最少个数仍然是 $(L+2)$. 但是由于有更多的频带边缘点, 所以多频带滤波器的交错点可以多于 $(L+3)$ 个. (习题 7.31 说明了这个问题.) 这意味着 7.6.1 节中证明的一些论点在多频带情况下不成立. 例如, $A_c(e^{j\omega})$ 的局部极大或极小点不必都在逼近区间内. 因此, 在过渡区内会出现局部极值点, 并且在逼近区中不要求逼近是等波纹的.

为了说明这一点, 让我们来研究所要求的频率响应

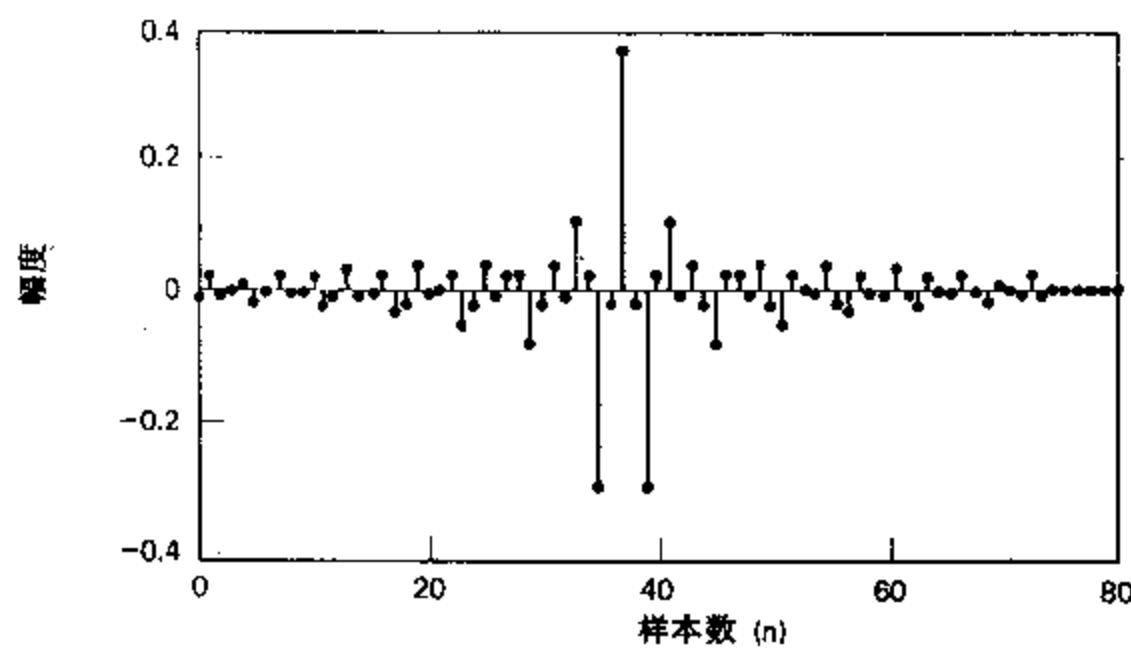
$$H_d(e^{j\omega}) = \begin{cases} 0, & 0 \leq \omega \leq 0.3\pi, \\ 1, & 0.35\pi \leq \omega \leq 0.6\pi, \\ 0, & 0.7\pi \leq \omega \leq \pi, \end{cases} \quad (7.141)$$

以及误差加权函数

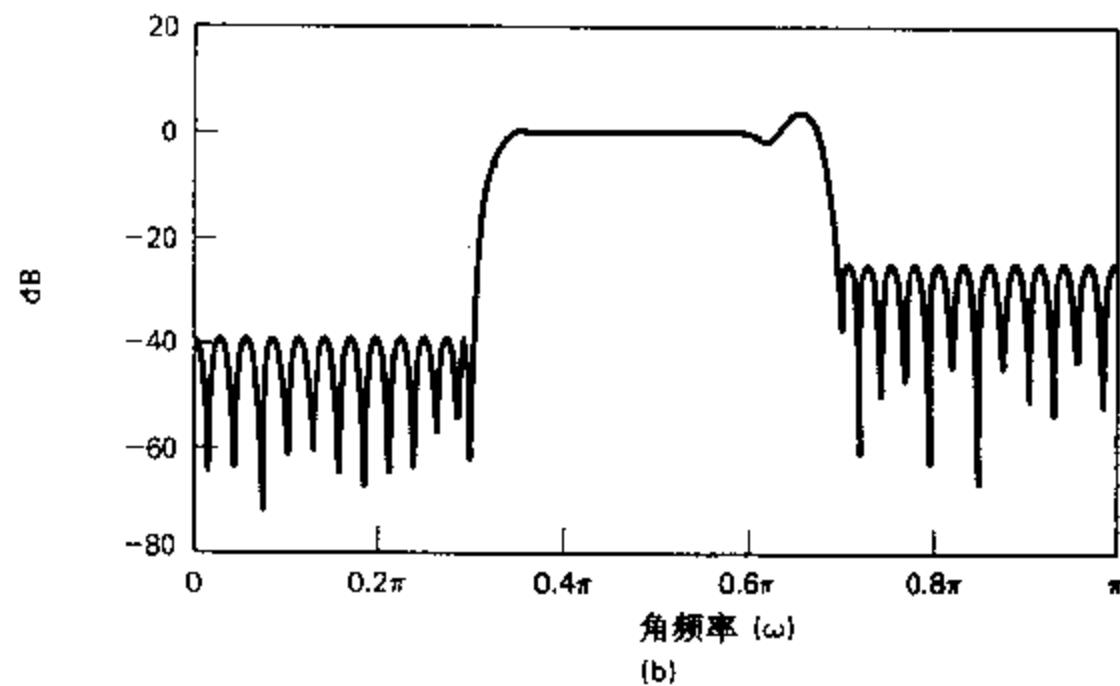
$$W(\omega) = \begin{cases} 1, & 0 \leq \omega \leq 0.3\pi, \\ 1, & 0.35\pi \leq \omega \leq 0.6\pi, \\ 0.2, & 0.7\pi \leq \omega \leq \pi. \end{cases} \quad (7.142)$$

滤波器冲激响应的长度取为 $M+1=75$. 图 7.54 表示所得滤波器的响应函数. 我们首先注意到, 由第二个逼近频段到第三个逼近频段的过渡区不再是单调的. 但是, 在这个未加限制的区域中选用两个局部极值点不会违反交错点定理. 由于 $M=74$, 则滤波器是 I 型系统, 并且隐含的逼近多项式的阶次为 $L=M/2=74/2=37$. 这样, 交错点定理要求至少有 $L+2=39$ 个交错点. 这一点在表示未加权逼近误差的图 7.54(c) 中显而易见, 每个频带中均有 13 个交错点, 总共有 39 个.

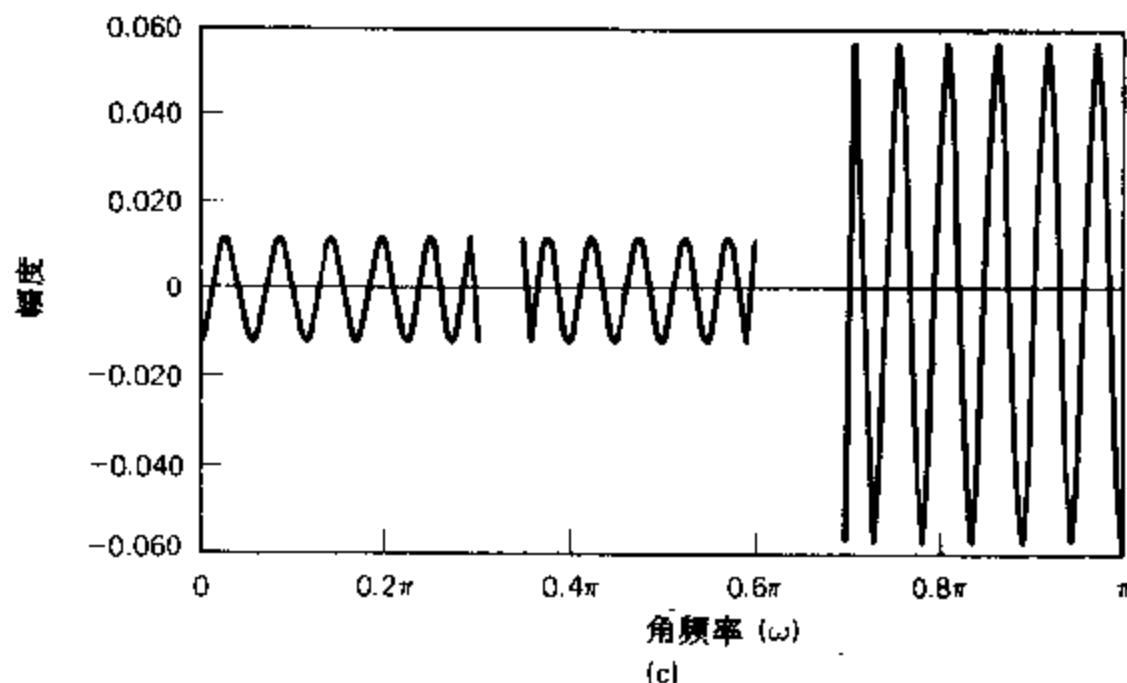
图 7.54 所示的这种逼近在交错点定理的意义上是最佳的, 但是它们可能并不适用于某一具体的滤波应用. 通常, 不保证多频带滤波器的过渡区是单调的. 因为, 帕克斯-麦克莱伦算法对这些区域完全未加限制. 若为了满足具体选择的滤波器参数而要得出这样一种响应时, 一般可以通过系统地改变一个或多个频带边缘频率、冲激响应长度或误差加权函数, 以及重新设计滤波器等多种方法来得到可以接受的过渡区.



(a)



(b)



(c)

图 7.54 当 $M=74$ 时的最佳 FIR 带通滤波器。(a) 冲激响应, (b) 对数幅度, (c) 逼近误差(未加权的).

7.8 IIR 和 FIR 数字滤波器的评价

这一章涉及到线性时不变离散时间系统的设计方法. 我们讨论了无限长和有限长冲

激响应滤波器的多种设计方法.人们自然会产生这样一些问题:什么样的系统是最好的?是 IIR 还是 FIR?为什么给出这么多不同的设计方法?哪一种方法能得出最好的结果?正如在任何一个工程设计问题中那样,一般不可能准确地回答什么是最好的.我们之所以讨论了 IIR 和 FIR 滤波器的各种设计方法,是因为没有哪一种类型的滤波器、也没有哪一种设计方法能对所有的情况都是最好的.

选择 IIR 还是 FIR 滤波器取决于每种类型滤波器的优点在设计问题中的重要性.例如 IIR 滤波器具有可以用完整的设计公式来设计各种选频滤波器的优点.这就是说,一旦规定了选用哪种已知的逼近方法(即巴特沃兹、切比雪夫或椭圆逼近),则可以直接把技术指标代入一组设计方程来计算满足技术条件的滤波器阶次,并得出数字滤波器的系数(或极点和零点).这种简便地设计方法使得人们可以很容易地通过人工计算(若需要的话)来设计 IIR 滤波器,并且直接得出 IIR 滤波器设计的非迭代计算程序.

这些方法只限于设计选频滤波器,并只允许用于规定了幅度响应的场合.如果要得到其它形状的幅度响应,或需要逼近预定的相位响应或群延迟响应,则需要用算法设计法.迪克斯基(Deczky)推导出的方法是已经导出的 IIR 系统算法设计法中的代表.

对于 FIR 滤波器不存在完整的设计方程.虽然可以直接用窗函数法,但为了满足预定的技术指标有可能需要作一些迭代.与窗函数法相比,帕克斯-麦克莱伦算法可以得出较低阶的滤波器,这两种方法都可以在个人计算机和工作站上实现.虽然原则上有可能只用计算器和连续时间滤波器设计参数的图表来设计选频 IIR 离散时间滤波器.但是,为了简化设计过程而付出的代价是损失了得到各种可能的滤波器响应的灵活性.用完整的公式来设计 IIR 滤波器只限于低通、高通、带通和带阻少数几种滤波器.另外,这些逼近方法通常没有考虑滤波器的相位响应;即假设基本的连续时间滤波器是最小相位的.因此,虽然我们可以用相当简单的计算方法来得到幅度响应很好的椭圆低通滤波器,但是群延迟响应将会非常差,特别是在频带边缘处.

与此相反,FIR 滤波器可以有精确的(广义)线性相位.而且,窗函数法和大多数算法设计法都有可能逼近比较任意的频率响应特性,但所遇到的困难要比在低通滤波器设计中遇到的稍大一些.此外,FIR 滤波器的设计问题要比 IIR 设计问题有更多的可控之处,因为对 FIR 滤波器有适用于各种实际情况的最佳理论.无线性相位要求的 FIR 滤波器的设计技术已经由陈和帕克斯(Chen and Parks, 1987)、帕克斯和伯鲁斯(Parks and Burrus, 1987)以及许斯勒和斯蒂芬(Schüssler and Steffen, 1988)给出.

最后,在实现数字滤波器时还要考虑经济问题.通常将硬件的复杂性、芯片的面积或计算速度等作为衡量经济问题的因素.这些因素或多或少地直接与满足给定指标所需的滤波器阶次有关.如果我们不考虑相位问题,一般说来用 IIR 滤波器就能最有效地满足给定的幅度响应技术指标.但是在许多情况下,用 IIR 滤波器来得到线性相位若需增加额外成本也非常值得的,而且在如抽取或内插之类的应用中,FIR 滤波器可以与 IIR 滤波器同样有效.在拉宾、凯泽、赫尔曼和多兰(Rabiner, Kaiser, Herrmann and Dolan, 1974)的论文中已经给出了有关计算效率问题的详细考虑.

因此,在设计数字滤波器时必须权衡考虑许多因素.显然,应从工程应用的角度来考虑问题,如技术指标的计算公式、实现设计的方法、完成设计所用的计算设备和设计软件等,应该根据这些因素来作出最后的选择.

7.9 小结

在这一章中我们研究了无限长和有限长冲激响应数字滤波器的各种设计方法。重点放在所要求滤波器特性的频域技术指标上，因为这是在实际中最普遍的情况。我们的目的是给出可能用于离散时间滤波器设计的各种方法的概貌，并给出一些方法的有关细节，使它们可以直接使用而无需进一步参考离散时间滤波器设计的浩瀚文献。所以我们的大部分注意力放在比较成熟的冲激响应不变法和双线性变换法上，而只简要地讨论了 FIR 滤波器的算法设计法，因为后一种方法在实际中较少用到。对于 FIR 滤波器，我们详细地讨论了滤波器设计的窗函数法和帕克斯-麦克莱伦算法设计法。

本章最后对如何选用这两类数字滤波器的问题作了一些讨论。这一讨论的要点是，方法的选择并不总是直接了当的，可能取决于许多因素，很难对其量化或从普遍的意义上加以论述。但是，我们从本章和第六章中应清楚地认识到，数字滤波器的特性在设计和实现中都有很大的灵活性。这种灵活性使它有可能实现在许多情况下用模拟滤波器很难实现的较复杂的信号处理方案。

习题

7.1 考虑一个冲激响应为 $h_c(t)$ 的连续时间系统，其系统函数为

$$H_c(s) = \frac{s+a}{(s+a)^2+b^2},$$

(a) 用冲激响应不变法求离散时间系统的 $H_1(z)$ ，使得 $h_1[n] = h_c(nT)$ 。

(b) 用阶跃响应不变法求离散时间系统的 $H_2(z)$ ，使得 $s_2[n] = s_c(nT)$ ，其中

$$s_2[n] = \sum_{k=-\infty}^n h_2[k] \text{ 和 } s_c(t) = \int_{-\infty}^t h_c(\tau) d\tau.$$

(c) 求系统 1 的阶跃响应 $s_1[n]$ 和系统 2 的冲激响应 $h_2[n]$ 。请判定 $h_2[n] = h_1[n] = h_c(nT)$ 以及 $s_1[n] = s_2[n] = s_c(nT)$ 成立吗？

7.2 假设 $H_c(s)$ 在 $s=s_0$ 处有一个 r 阶极点，使得 $H_c(s)$ 可以表示成

$$H_c(s) = \sum_{k=1}^r \frac{A_k}{(s-s_0)^k} + G_c(s),$$

式中 $G_c(s)$ 只有一阶极点。

(a) 给出由 $H_c(s)$ 来求常数 A_k 的公式。

(b) 得出利用 s_0 和 $g_c(t)$ 来表示的冲激响应 $h_c(t)$ 的表示式，其中 $g_c(t)$ 为 $G_c(s)$ 的拉普拉斯反变换。

(c) 假设我们定义 $h[n] = T_d h_c(nT_d)$ 是一个离散时间滤波器的冲激响应，利用(b)的结果写出该系统函数 $H(z)$ 的表达式。

(d) 给出一种由 $H_c(s)$ 得到 $H(z)$ 的直接方法。

7.3 假设我们已知频率响应为 $H_c(j\omega)$ 的一个连续时间低通滤波器，使得

$$\begin{aligned} 1 - \delta_1 &\leq H_c(j\Omega) \leq 1 + \delta_1, & |\Omega| &\leq \Omega_p, \\ |H_c(j\Omega)| &\leq \delta_2, & |\Omega| &\geq \Omega_s. \end{aligned}$$

利用如下双线性变换可以由 $H_c(s)$ 得出一组离散时间低通滤波器：

$$H(z) = H_c(s) \Big|_{s=(2/T_d)[(1-z^{-1})/(1+z^{-1})]},$$

其中 T_d 为变量。

(a) 设 Ω_p 是固定的, 求对于离散时间系统, 使得通带的截止频率为 $\omega_p = \pi/2$ 的 T_d .

(b) 将 Ω_p 固定, 给出 ω_p 作为 $0 < T_d < \infty$ 之函数的曲线.

(c) 将 Ω_p 和 Ω_c 均固定, 给出过渡区 $\Delta\omega = (\omega_p - \omega_p)$ 作为 $0 < T_d < \infty$ 之函数的曲线.

- 7.4 某一离散时间低通滤波器是将冲激响应不变法用于一个连续时间巴特沃兹滤波器而设计出来的. 该连续时间滤波器的幅度平方函数为

$$|H_c(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + (\Omega/\Omega_c)^{2N}}.$$

该离散时间系统的技术指标与例 7.3 中的相同, 即,

$$0.89125 \leq |H(e^{j\omega})| \leq 1, \quad 0 \leq |\omega| \leq 0.2\pi,$$

$$|H(e^{j\omega})| \leq 0.17783, \quad 0.3\pi \leq |\omega| \leq \pi.$$

假定如在例 7.3 中那样, 混叠不是一个严重的问题. 也就是说设计连续时间巴特沃兹滤波器, 以满足由要求的离散时间滤波器所确定的通带和阻带指标.

- (a) 画出连续时间巴特沃兹滤波器频率响应 $|H_c(j\Omega)|$ 之幅度的容限界, 使得用冲激响应不变法 (即 $h[n] = T_d h_c(nT_d)$) 后所得出的离散时间滤波器将满足给定的设计指标. 不必像例 7.3 中那样假设 $T_d = 1$.
- (b) 求整数阶次 N 和量 $T_d \Omega_c$, 使得连续时间巴特沃兹滤波器可以完全满足在(a)中所确定的在通带边缘处的技术指标.
- (c) 注意若 $T_d = 1$, 则你在(b)中的答案必须给出在例 7.3 中得出的 N 和 Ω_c 值. 利用这种观点求出当 $T_d \neq 1$ 时的系统函数 $H_c(s)$, 并说明由冲激响应不变法 ($T_d \neq 1$) 得出的系统函数 $H(z)$ 与式 (7.19) 给出的结果 ($T_d = 1$ 时) 相同.

- 7.5 我们常希望用冲激响应不变法或双线性不变法来设计一个离散时间滤波器, 该滤波器可以满足如下技术指标:

$$\begin{aligned} 1 - \delta_1 &\leq |H(e^{j\omega})| \leq 1 + \delta_1, & 0 \leq |\omega| \leq \omega_p, \\ |H(e^{j\omega})| &\leq \delta_2, & \omega_p \leq |\omega| \leq \pi. \end{aligned} \tag{P7.5-1}$$

由于历史的原因, 绝大多数的连续时间滤波器的设计公式、表格或曲线通常均用通带的峰值增益为 1 来规定技术指标, 即

$$\begin{aligned} 1 - \delta_1 &\leq |H_c(j\Omega)| \leq 1, & 0 \leq \Omega \leq \Omega_p, \\ |H_c(\Omega)| &\leq \delta_2, & \Omega_p \leq \Omega. \end{aligned} \tag{P7.5-2}$$

拉宾、凯泽、赫尔曼和多兰 (Rabiner, Kaiser, Herrmann, and Dolan, 1974) 曾给出了十分有用的用这种形式规定的连续时间滤波器的设计曲线.

- (a) 为了使用这种表格和曲线来设计峰值增益为 $(1 + \delta_1)$ 的离散时间滤波器, 必须将该离散时间滤波器的技术指标转换成式 (P7.5-2) 形式的技术指标. 用 $(1 + \delta_1)$ 除以离散时间滤波器的技术指标就可以实现这种转换. 利用这种方法求用 δ_1 和 δ_2 来表示 δ_1 和 δ_2 的表示式.
- (b) 在例 7.3 中我们曾经设计了一个最大通带增益为 1 的离散时间滤波器. 这个滤波器可以用乘以常数 $(1 + \delta_1)$ 的方法转换成满足式 (P7.5-1) 中技术指标的滤波器. 求所需要的 δ_1 值和与该例对应的 δ_2 值, 并用式 (7.19) 求新滤波器的系统函数的系数.
- (c) 对于例 7.4 中的滤波器重复 (b).

- 7.6 考虑一个连续时间系统, 其系统函数为

$$H_c(s) = \frac{1}{s}.$$

这个系统被称为积分器, 因为输出 $y_c(t)$ 与输入 $x_c(t)$ 之间有如下关系:

$$y_c(t) = \int_{-\infty}^t x_c(\tau) d\tau.$$

假设某一离散时间系统是将双线性变换法用于 $H_c(s)$ 而得到的.

- (a) 所得离散时间系统的系统函数 $H(z)$ 是什么? 冲激响应 $h[n]$ 是什么?
- (b) 如果 $x[n]$ 为输入, 且 $y[n]$ 为所得离散时间系统的输出. 请写出输入和输出满足的差分方程. 在用这个差分方程来实现该离散时间系统时, 你预料会有什么问题?
- (c) 求出该系统频率响应 $H(e^{j\omega})$ 的表达式. 画出当 $0 \leq |\omega| \leq \pi$ 时该离散时间系统的幅度和相位. 将它们与连续时间积分器之频率响应 $H_c(j\Omega)$ 的幅度和相位作一比较. 在什么条件下可以认为该离散时间“积分器”是连续时间积分器的良好逼近?

现在考虑一个连续时间系统, 其系统函数是

$$G_c(s) = s$$

这个系统称为微分器, 因为它的输出是输入的导数. 假设某一离散时间系统是将双线性变换用于 $G_c(s)$ 而得到的.

- (d) 所得离散时间系统的系统函数 $G(z)$ 是什么? 冲激响应 $g[n]$ 是什么?
- (e) 求出该系统频率响应 $G(e^{j\omega})$ 的表达式. 画出当 $0 \leq |\omega| \leq \pi$ 时该离散时间系统的幅度和相位. 将它们与连续时间微分器之频率响应 $G_c(j\Omega)$ 的幅度和相位作一比较. 在什么条件下可以认为该离散时间“微分器”是连续时间微分器的良好逼近.

(f) 连续时间积分器和微分器完全是互为可逆的. 对于它们的离散时间逼近也同样正确吗?

7.7 一个连续时间滤波器有冲激响应 $h_c(t)$, 其频率响应幅度为

$$|H_c(j\Omega)| = \begin{cases} |\Omega|, & |\Omega| < 10\pi, \\ 0, & |\Omega| > 10\pi, \end{cases}$$

用该滤波器作为设计离散时间滤波器的原型. 所得离散时间系统用于图 P7.7 的配置中对连续时间信号 $x_c(t)$ 进行滤波.

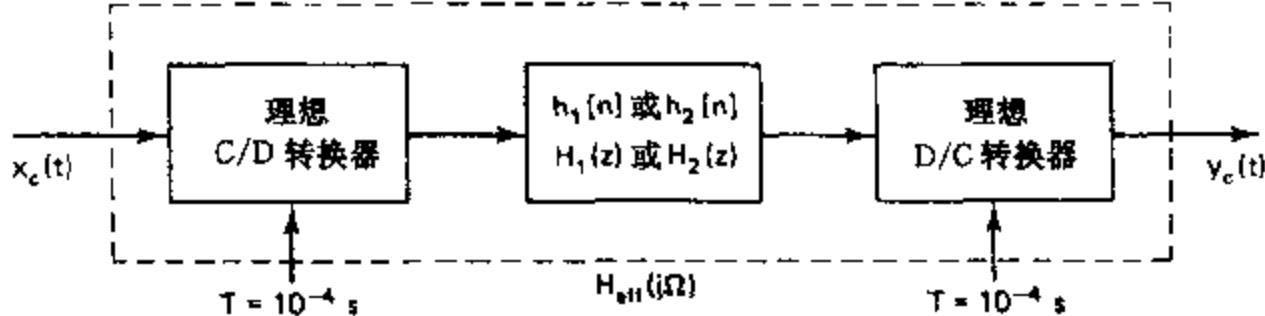


图 P7.7

- (a) 冲激响应为 $h_1[n]$ 和系统函数为 $H_1(z)$ 的某一离散时间系统是利用取 $T_d=0.01$ 的冲激响应不变法由原型连续时间系统而得到的, 即 $h_1[n]=0.01h_c(0.01n)$. 给出当这一离散时间系统用于图 P7.7 中时, 全部有效频率响应 $H_{eff}(j\Omega)=Y_c(j\Omega)/X_c(j\Omega)$ 的幅度图.
- (b) 另外, 假设冲激响应为 $h_2[n]$ 和系统函数为 $H_2(z)$ 的某一离散时间系统是利用取 $T_d=2$ 的双线性变换由原型连续时间系统而得到的, 即

$$H_2(z) = H_c(s) |_{s=(1-e^{-T_d})/(1+e^{-T_d})}.$$

请给出当这一离散时间系统用于图 P7.7 中时, 全部有效频率响应 $H_{eff}(j\Omega)$ 的幅度图.

7.8 某一离散时间系统的系统函数为

$$H(z) = \frac{2}{1-e^{-0.2}z^{-1}} - \frac{1}{1-e^{-0.4}z^{-1}}.$$

- (a) 假设这个离散时间系统是用取 $T_d=2$ 的冲激响应不变法来设计的, 即 $h[n]=2h_c(2n)$, 其中 $h_c(t)$ 为实数. 求出一个连续时间滤波器的 $H_c(s)$, 它可以作为设计的基础. 你的答案是唯一的吗? 如果不是, 则求出另一个系统函数 $H_c(s)$.
- (b) 假设 $H(z)$ 可用取 $T_d=2$ 的双线性变换法得出. 求可以作为设计基础的 $H_c(s)$. 你的答案是唯一的吗? 如果不是, 则求出另一个系统函数 $H_c(s)$.

7.9 冲激响应不变法和双线性变换法是设计离散时间滤波器的两种方法。这两种方法都是将一个连续时间系统函数 $H_c(s)$ 变换成一个离散时间系统函数 $H(z)$ 。回答下列问题，指出哪一种方法或二者均能够得出要求的结果？

- (a) 最小相位连续时间系统的所有极点和零点均在左半 s 平面上，如果将一个最小相位连续时间系统变换成一个离散时间系统，哪一种方法将得出最小相位离散时间系统？
- (b) 如果连续时间系统是一个全通系统，则它的极点将在左半平面 s_k 处，而它的零点将在所对应的右半平面的 $-s_k$ 处。哪一种方法将得出全通离散时间系统？
- (c) 哪一种设计方法可以保证

$$H(e^{j\omega})|_{\omega=0} = H_c(j\Omega)|_{\Omega=0}$$

- (d) 如果连续时间系统是一个带阻滤波器，哪一种方法会得出离散时间带阻滤波器？
- (e) 假设 $H_1(z), H_2(z)$ 和 $H(z)$ 分别是 $H_{c1}(s), H_{c2}(s)$ 和 $H_c(s)$ 的变换型式。哪一种设计方法可以保证，只要当 $H_c(s) = H_{c1}(s)H_{c2}(s)$ 时就有 $H(z) = H_1(z)H_2(z)$ ？
- (f) 假定 $H_1(z), H_2(z)$ 和 $H(z)$ 分别是 $H_{c1}(s), H_{c2}(s)$ 和 $H_c(s)$ 的变换型式。哪一种设计方法可以保证，只要当 $H_c(s) = H_{c1}(s) + H_{c2}(s)$ 时就有 $H(z) = H_1(z) + H_2(z)$ ？
- (g) 假设两个连续时间系统函数满足条件

$$\frac{H_{c1}(j\Omega)}{H_{c2}(j\Omega)} = \begin{cases} e^{-j\pi/2}, & \Omega > 0, \\ e^{j\pi/2}, & \Omega < 0. \end{cases}$$

如果 $H_1(z)$ 和 $H_2(z)$ 分别是 $H_{c1}(s)$ 和 $H_{c2}(s)$ 的变换型式，哪一种设计会得出满足下式的离散时间系统：

$$\frac{H_1(e^{j\omega})}{H_2(e^{j\omega})} = \begin{cases} e^{-j\pi/2}, & 0 < \omega < \pi, \\ e^{j\pi/2}, & -\pi < \omega < 0? \end{cases}$$

(这类系统被称为“90 度分相器”)

7.10 具有系统函数 $H(z)$ 的离散时间滤波器是把具有系统函数 $H_c(s)$ 的连续时间滤波器经过变换而设计出的。设计要求

$$H(e^{j\omega})|_{\omega=0} = H_c(j\Omega)|_{\Omega=0}$$

- (a) 若用冲激响应不变法设计该滤波器，上述条件能成立吗？如果能， $H_c(j\Omega)$ 必须满足什么条件（如果有的话）？
- (b) 若用双线性变换法设计该滤波器，上述条件能成立吗？如果能， $H_c(j\Omega)$ 必须满足什么条件（如果有的话）？

7.11 在例 7.3 中用冲激响应不变法来设计低通滤波器，所得出的系统函数是

$$H(z) = \frac{0.2871 - 0.4466z^{-1}}{1 - 1.2971z^{-1} + 0.6949z^{-2}} + \frac{-2.1428 + 1.1455z^{-1}}{1 - 1.0691z^{-1} + 0.3699z^{-2}} + \frac{1.8557 - 0.6303z^{-1}}{1 - 0.9972z^{-1} + 0.2570z^{-2}}.$$

- (a) 画出用 2 阶环节的并联形式来实现该系统的信号流图。
- (b) 画出用直接形式 I 和直接形式 II 来实现该系统的信号流图。
- (c) 画出作为 2 阶环节的级联形式来实现该系统的信号流图。

(注意：这部分需要用到多项式求根的计算机程序。)

7.12 在例 7.4 中曾用双线性变换法设计出一个低通滤波器，所得出的系统函数是

$$H(z) = \frac{0.0007378(1+z^{-1})^6}{(1-1.2686z^{-1}+0.7051z^{-2})(1-1.0106z^{-1}+0.3583z^{-2})} \times \frac{1}{(1-0.9044z^{-1}+0.2155z^{-2})}.$$

- (a) 画出用 2 阶环节的级联形式来实现该系统的信号流图。
- (b) 画出用直接形式 I 和直接形式 II 来实现该系统的信号流图。
- (c) 画出用 2 阶环节的并联形式来实现该系统的信号流图。（注意：这部分需要冗长的计算以求出

部分分式展开式,应当用计算机程序来辅助完成.)

- 7.13 如果一个线性时不变连续时间系统具有有理系统函数,则它的输入和输出满足常规的常系数线性差分方程.在模拟这类系统时的标准方法是用有限差分来逼近微分方程中的导数.特别是,因为对于连续可微函数 $y_c(t)$,

$$\frac{dy_c(t)}{dt} = \lim_{T \rightarrow 0} \left[\frac{y_c(t) - y_c(t-T)}{T} \right],$$

这似乎是合理的,因为如果 T “足够小”,当我们用 $[y_c(t) - y_c(t-T)]/T$ 来代替 $dy_c(t)/dt$ 时,应当得到一个好的逼近.

虽然这个简单的方法在连续时间系统的模拟中可能是有用的,但是在滤波器的应用中它并不总是一种设计离散时间系统的有用方法.为了了解用差分方程逼近微分方程的影响,我们来研究一个具体的例子是有益的,假设一个连续时间系统的系统函数是

$$H_c(s) = \frac{A}{s+c},$$

其中 A 和 c 为常数.

- (a) 证明该系统的输入 $x_c(t)$ 和输出 $y_c(t)$ 满足微分方程

$$\frac{dy_c(t)}{dt} + cy_c(t) = Ax_c(t).$$

- (b) 计算当 $t=nT$ 时的微分方程,并且进行替代

$$\frac{dy_c(t)}{dt} \Big|_{t=nT} \approx \frac{y_c(nT) - y_c(nT-T)}{T},$$

也就是用一阶反向差分来代替一阶导数.

- (c) 定义 $x[n] = x_c(nT)$ 和 $y[n] = y_c(nT)$.用这一定义和(b)的结果求联系 $x[n]$ 和 $y[n]$ 的差分方程,并求所得离散系统的系统函数 $H(z) = Y(z)/Z(z)$.

- (d) 证明,对于这个例子

$$H(z) = H_c(s) \Big|_{s=(1-z^{-1})/T},$$

也就是证明 $H(z)$ 可用如下映射由 $H_c(s)$ 直接求得:

$$s = \frac{1-z^{-1}}{T}.$$

(可以证明,如果高阶导数可由重复使用一阶反向差分来逼近,则对于高阶系统(d)的结果也成立.)

- (e) 利用(d)的映射,求出由 s 平面上的 Ω 轴映射到 z 平面上的圆线.并求左半 s 平面相对应的 z 平面区域.若具有系统函数 $H_c(s)$ 的连续时间系统是稳定的,则用一阶反向差分逼近所得出的离散时间系统也是稳定的吗?该离散时间系统的频率响应是原连续时间系统频率响应的准确复现吗? T 的选择对稳定性和频率响应有何影响?

- (f) 假设用一阶正向差分逼近一阶微分,即

$$\frac{dy_c(t)}{dt} \Big|_{t=nT} \approx \frac{y_c(nT+T) - y_c(nT)}{T}.$$

求由 s 平面到 z 平面所对应的映射,并且用这一映射重复(e).

- 7.14 考虑一个具有有理系统函数 $H_c(s)$ 的线性实不变连续时间系统,输入 $x_c(t)$ 和输出 $y_c(t)$ 满足常规的常系数线性微分方程.模拟这类系统的一种方法是利用数值计算方法对微分方程积分.在这个习题中我们将表明,如果使用梯形积分公式,则这一方法等同于用双线性变换法将连续时间系统函数 $H_c(s)$ 变换为离散时间系统函数 $H(z)$.

为了说明这一点,考虑连续时间系统函数

$$H_c(s) = \frac{A}{s+c},$$

式中 A 和 c 为常数, 对应的微分方程是

$$\dot{y}_c(t) + cy_c(t) = Ax_c(t),$$

式中

$$\dot{y}_c(t) = \frac{dy_c(t)}{dt}.$$

(a) 证明 $y_c(nT)$ 可用 $\dot{y}_c(t)$ 表示成

$$y_c(nT) = \int_{(nT-T)}^{nT} \dot{y}_c(\tau) d\tau + y_c(nT-T).$$

在这个方程中的定积分表示在从 $(nT-T)$ 到 nT 的区间上函数 $\dot{y}_c(t)$ 下方的面积。图 P7.14 表示函数 $\dot{y}_c(t)$ 和一个划阴影线的梯形区域, 该区域的面积近似为曲线下方的面积。这种对积分的逼近方法称为梯形逼近法。显然, T 越接近零这种逼近就越好。利用这种逼近方法求用 $y_c(nT-T)$, $\dot{y}_c(nT)$ 和 $\dot{y}_c(nT-T)$ 来表示 $y_c(nT)$ 的表示式。

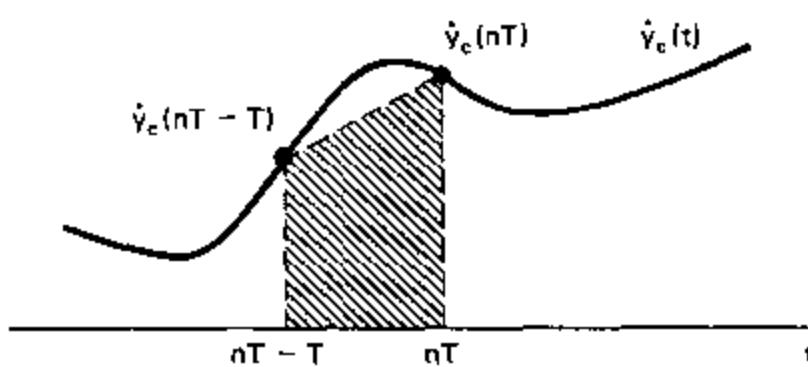


图 P7.14

(b) 利用该微分方程求 $\dot{y}_c(nT)$ 的表示式, 并且将这个表示式代入在(a)中得出的表示式。

(c) 定义 $x[n] = x_c(nT)$ 和 $y[n] = y_c(nT)$, 利用这个定义和(b)的结果, 求联系 $x[n]$ 和 $y[n]$ 的差分方程, 并求所得离散时间系统的系统函数 $H(z) = Y(z)/Z(z)$ 。

(d) 证明, 对于这个例子

$$H(z) = H_c(s) \Big|_{s=(2/T)[(1-z^{-1})/(1+z^{-1})]},$$

也就是证明 $H(z)$ 可用双线性变换法由 $H_c(s)$ 直接求得。(对于高阶微分方程, 重复将梯形积分用于输出的高阶导数将得出与具有有理系统函数的一般连续时间系统相同的结论。)

7.15 在这个习题中我们研究一种称为自相关函数不变法的滤波器设计方法。考虑一个具有冲激响应 $h_c(t)$ 和系统函数 $H_c(s)$ 的稳定连续时间系统。该系统的自相关函数定义为

$$\phi_c(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} h_c(t)h_c(t+\tau) dt,$$

并且对于实冲激响应很容易证明, $\phi_c(\tau)$ 的拉普拉斯变换是 $\Phi_c(s) = H_c(s)H_c(-s)$ 。同样, 考虑一个具有冲激响应 $h[n]$ 和系统函数 $H(z)$ 的离散时间系统。离散时间系统的自相关函数定义为

$$\phi[m] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]h[n+m],$$

并且对于实冲激响应, $\Phi(z) = H(z)H(z^{-1})$ 。

自相关函数不变法意味着, 使该离散时间系统的自相关函数等于一个连续时间系统采样后的自相关函数, 以此来定义一个离散时间滤波器, 即

$$\phi[m] = T_d \phi_c(mT_d), \quad -\infty < m < \infty,$$

当 $H_c(s)$ 是一个有理函数、在 $s_k (k=1, 2, \dots, N)$ 处有 N 个一阶极点并有 $M < N$ 个零点时, 对于自相关函数不变法, 特提出如下设计步骤:

1. 得出 $\Phi_c(s)$ 的部分分式展开式, 形式为

$$\Phi_c(s) = \sum_{k=1}^N \left(\frac{A_k}{s-s_k} + \frac{B_k}{s+s_k} \right).$$

2. 形成 z 变换

$$\Phi(z) = \sum_{k=1}^N \left(\frac{T_d A_k}{1-e^{j\omega_n T_d} z^{-1}} + \frac{T_d B_k}{1-e^{-j\omega_n T_d} z^{-1}} \right).$$

3. 求 $\Phi(z)$ 的极点和零点, 并且由 $\Phi(z)$ 在单位圆内的极点和零点构成最小相位系统函数 $H(z)$.

(a) 确认在所提出的设计方法中的每一个步骤, 也就是证明所得离散时间系统的自相关函数的采样形式. 为了证明该方法, 一种有用的办法是将它用于一个一阶系统, 其冲激响应为

$$h_c(t) = e^{-\alpha t} u(t)$$

且系统函数为

$$H_c(s) = \frac{1}{s+\alpha}.$$

(b) $|H(e^{j\omega})|^2$ 和 $|H_c(j\Omega)|^2$ 之间的联系是什么? 哪一种频率响应的函数对于自相关函数不变法是合适的?

(c) 在步骤 3 中得出的系统函数是唯一的吗? 若不是, 请说明如何得出另外的自相关函数不变离散时间系统.

7.16 假定已知一理想低通离散时间滤波器, 其频率响应为

$$H(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & |\omega| < \pi/4, \\ 0, & \pi/4 < |\omega| \leq \pi. \end{cases}$$

我们想要通过对冲激响应 $h[n]$ 的处理由这一原型推导出新的滤波器.

(a) 绘出对冲激响应为 $h_1[n] = h[2n]$ 之系统的频率响应 $H_1(e^{j\omega})$ 的曲线.

(b) 绘出系统频率响应 $H_2(e^{j\omega})$ 的曲线, 该系统的冲激响应是

$$h_2[n] = \begin{cases} h[n/2], & n = 0, \pm 2, \pm 4, \dots, \\ 0, & \text{其它.} \end{cases}$$

(c) 绘出系统频率响应 $H_3(e^{j\omega})$ 的曲线, 该系统的冲激响应是 $h_3[n] = e^{jn\pi} h[n] = (-1)^n h(n)$.

7.17 考虑一个连续时间低通滤波器 $H_c(s)$, 其通带和阻带的指标为

$$\begin{aligned} 1 - \delta_1 &\leq |H_c(j\Omega)| \leq 1 + \delta_1, & |\Omega| &\leq \Omega_p, \\ |H_c(j\Omega)| &\leq \delta_2, & \Omega_r &\leq |\Omega| \leq \pi. \end{aligned}$$

用如下变换将这个滤波器变换成为一个低通离散时间滤波器 $H_1(z)$:

$$H_1(z) = H_c(s) \Big|_{s=(1-z^{-1})/(1+z^{-1})},$$

并且用另一种下述变换将同样的连续时间滤波器变换成为一个高通离散时间滤波器:

$$H_2(z) = H_c(s) \Big|_{s=(1+z^{-1})/(1-z^{-1})}.$$

(a) 确定连续时间低通滤波器的通带截止频率 Ω_p 和离散时间低通滤波器的通带截止频率 ω_{p1} 之间的关系.

(b) 确定连续时间低通滤波器的通带截止频率 Ω_p 和离散时间高通滤波器的通带截止频率 ω_{p2} 之间的关系.

(c) 确定离散时间低通滤波器的通带截止频率 ω_{p1} 和离散时间高通滤波器的通带截止频率 ω_{p2} 之间的关系.

(d) 图 P7.17 中的网络描述了一种实现系统函数为 $H_1(z)$ 的离散时间低通滤波器的方法. 系数 A, B, C 和 D 均为实数. 对这些系数如何进行修改以得到一个实现系统函数为 $H_2(z)$ 的离散时间高通滤波器的网络?

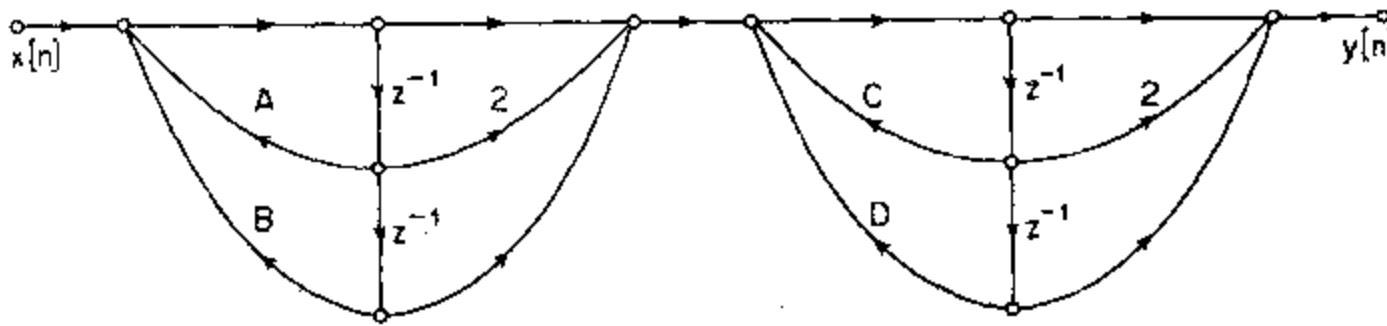


图 P7.17

7.18 系统函数为 $H(z)$ 和冲激响应为 $h[n]$ 的一个离散时间系统有频率响应

$$H(e^{j\theta}) = \begin{cases} A, & |\theta| < \theta_c, \\ 0, & \theta_c < |\theta| \leq \pi, \end{cases}$$

其中 $0 < \theta_c < \pi$. 通过变换 $Z = -z^2$, 将这个滤波器转换成一个新滤波器, 即

$$H_1(z) = H(Z) |_{Z=-z^2} = H(-z^2).$$

(a) 求原低通系统 $H(Z)$ 的频率变量 θ 与新系统 $H_1(z)$ 的频率变量 ω 之间的关系式.

(b) 画出新滤波器频率响应 $H_1(e^{j\omega})$ 的图形, 并认真加以标记.

(c) 求用 $h[n]$ 表示 $h_1[n]$ 的关系式.

(d) 假设 $H(Z)$ 可用如下差分方程组来实现:

$$\begin{aligned} g[n] &= x[n] - a_1g[n-1] - b_1f[n-2], \\ f[n] &= a_2g[n-1] + b_2f[n-1], \\ y[n] &= c_1f[n] - c_2g[n-1], \end{aligned}$$

式中 $x[n]$ 为系统的输入, $y[n]$ 为系统的输出. 确定对于变换后的系统可以实现 $H_1(z) = H(-z^2)$ 的差分方程组.

7.19 考虑通过下述变换由有理系统函数为 $H_c(s)$ 的一个连续时间滤波器来设计一个系统函数为 $H(z)$ 的离散时间滤波器:

$$H(z) = H_c(s) |_{s=\beta[(1-e^{-\alpha})/(1+e^{-\alpha})]},$$

其中 α 为非零整数, β 为实数.

(a) 若 $\alpha > 0$, β 取何值时可以由一个具有有理系统函数 $H_c(s)$ 的稳定因果连续时间滤波器得出一个具有有理系统函数 $H(z)$ 的稳定因果离散时间滤波器?

(b) 若 $\alpha < 0$, β 取何值时可以由一个具有有理系统函数 $H_c(s)$ 的稳定因果连续时间滤波器得出一个具有有理系统函数 $H(z)$ 的稳定因果离散时间滤波器?

(c) 当 $\alpha = 2$ 和 $\beta = 1$ 时, 确定 s 平面上的 $j\Omega$ 轴将映射成 z 平面上的什么圆线?

(d) 假设连续时间滤波器是一个稳定的低通滤波器, 其通带频率响应满足

$$1 - \delta_1 \leq |H_c(j\Omega)| \leq 1 + \delta_1, \quad |\Omega| \leq 1.$$

如果该离散时间系统 $H(z)$ 是用取 $\alpha = 2$ 和 $\beta = 1$ 的上述变换而得出的, 求在区间 $|\omega| \leq \pi$ 中使得

$$1 - \delta_1 \leq |H(e^{j\omega})| \leq 1 + \delta_1$$

的 ω 值.

7.20 离散时间高通滤波器可用如下变换由一个连续时间低通滤波器求得:

$$H(z) = H_c(s) |_{s=(1+z^{-1})/(1-z^{-1})},$$

(a) 证明上述变换将 s 平面上的 $j\Omega$ 轴映射成 z 平面上的单位圆.

(b) 证明, 如果 $H_c(s)$ 是一个所有极点均在左半 s 平面上的有理函数, 则 $H(z)$ 将是所有极点均在 z 平面单位圆内的有理函数.

(c) 假设要求的高通离散时间滤波器的技术指标为

$$|H(e^{j\omega})| \leq 0.01, \quad |\omega| \leq \pi/3,$$

$$0.95 \leq |H(e^{j\omega})| \leq 1.05, \quad \pi/2 \leq |\omega| \leq \pi.$$

求连续时间低通滤波器的技术指标,使得用上述变换可以得出所要求的高通离散时间滤波器.

- 7.21 令 $H_{lp}(Z)$ 表示一个离散时间低通滤波器的系统函数,这一系统的实现可用线性信号流图来表示,该流图由图 P7.21(a) 所示的加法器、增益因子和单位延迟等单元组成. 我们希望实现一个低通滤波器,它通过改变某一个参数就可以改变截止频率. 这里提出的方法是用图 P7.21(b) 中所示的网络来代替表示 $H_{lp}(Z)$ 的信号流图中的每一个单位延迟单元,其中 α 为实数且 $|\alpha| < 1$.

- (a) 当用图 P7.21(b) 的网络来代替在实现 $H_{lp}(Z)$ 的网络中的每一个单位延迟分支时,令 $H(z)$ 表示所得滤波器的系统函数. 证明 $H(z)$ 和 $H_{lp}(Z)$ 是通过一个 Z 平面到 z 平面的映射联系起来的.
- (b) 如果 $H(e^{j\omega})$ 和 $H_{lp}(e^{j\theta})$ 是两个系统的频率响应,求频率变量 ω 和 θ 之间的关系. 画出当 $\alpha = 0, \pm 0.5$ 时 ω 作为 θ 的函数的曲线,并证明 $H(e^{j\omega})$ 是一个低通滤波器. 如果 θ_p 是原低通滤波器 $H_{lp}(Z)$ 的通带截止频率,求新滤波器 $H(z)$ 的截止频率 ω_p 作为 α 和 θ_p 的函数的方程式.

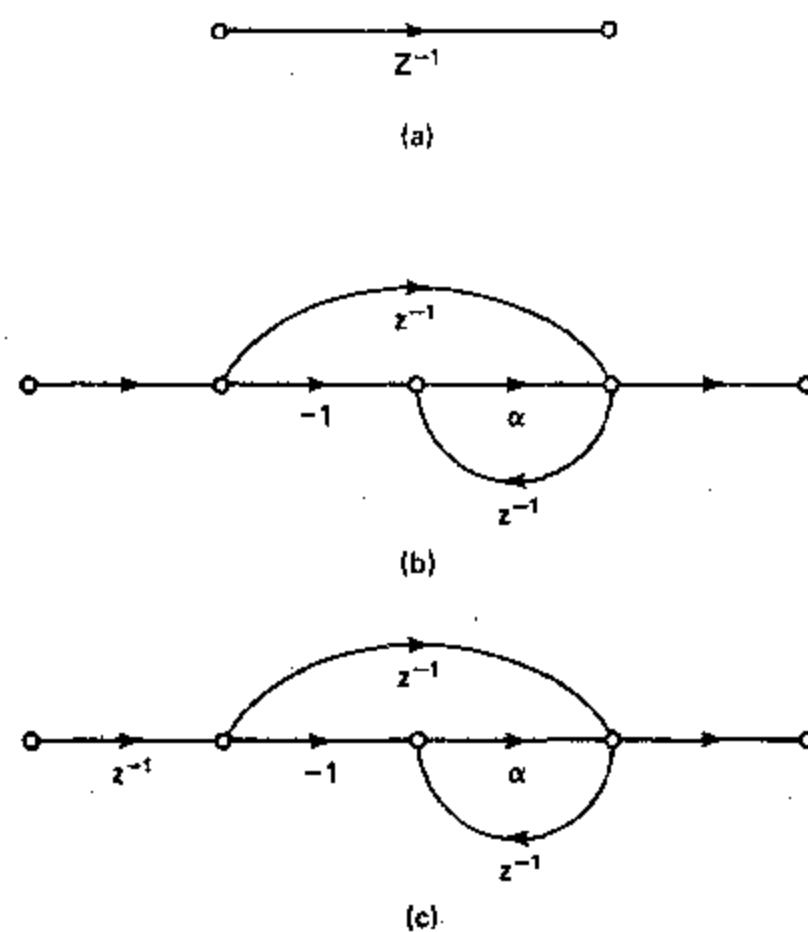


图 P7.21

(c) 假设原低通滤波器有系统函数

$$H_{lp}(Z) = \frac{1}{1 - 0.9Z^{-1}}.$$

画出实现 $H_{lp}(Z)$ 的流图,并画出实现 $H(z)$ 的流图, $H(z)$ 是用图 P7.21(b) 中的网络来代替第一个流图中的单位延迟单元而得到的. 所得到的网络对应于一个可以计算的差分方程吗?

- (d) 如果 $H_{lp}(Z)$ 对应于一个用直接形式实现的 FIR 系统,那么该流图可以得出一个可以计算的差分方程吗? 若 FIR 系统 $H_{lp}(Z)$ 是线性相位的,所得系统 $H(z)$ 也是线性相位的吗? 如果 FIR 系统具有长度为 $(M+1)$ 个样本的冲激响应,则变换后的系统冲激响应的长度是多少?
- (e) 为了避免在(c)中出现困难,建议将图 P7.21(b) 的网络与图 P7.21(c) 绘出的单位延迟单元级联. 当用图 P7.21(c) 的网络代替每一个单位延迟单元时,重复(a)的分析. 求将 θ 作为 ω 的函数的方程,并证明,若 $H_{lp}(e^{j\theta})$ 是一个低通滤波器,则 $H(e^{j\omega})$ 不是一个低通滤波器.

- 7.22 若给定基本的滤波器组件(硬件或计算机子程序),有时可能重复使用它来实现一个具有锐截止频率响应特性的新滤波器.有一种方法是将该滤波器与自身级联两次或更多次,但是很容易证明,尽管阻带误差是平方的(若误差小于1,则总误差将减小),但是这种方法将增加通带逼近误差.另一种由杜基(Tukey,1977)提出的方法示于图 P7.22-1 的方框图中.杜基称这种方法为“加倍”法.

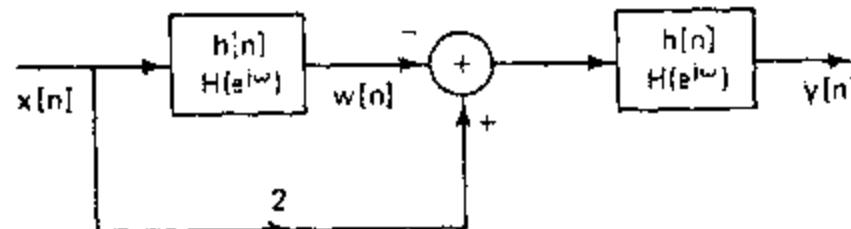


图 P7.22-1

- (a) 假定基本系统具有对称的有限长冲激响应,即

$$h[n] = \begin{cases} h[-n], & -L \leq n \leq L, \\ 0, & \text{其它.} \end{cases}$$

确定整个冲激响应 $g[n]$ 是否是(i)FIR 的;(ii)对称的.

- (b) 假设 $H(e^{j\omega})$ 满足下列逼近误差指标:

$$\begin{aligned} (1-\delta_1) \leq H(e^{j\omega}) \leq (1+\delta_1), \quad 0 \leq \omega \leq \omega_p, \\ -\delta_2 \leq H(e^{j\omega}) \leq \delta_2, \quad \omega_p \leq \omega \leq \pi. \end{aligned}$$

如果基本系统具有这些指标,可以证明整个系统的频率响应 $G(e^{j\omega})$ 满足如下形式的指标:

$$\begin{aligned} A \leq G(e^{j\omega}) \leq B, \quad 0 \leq \omega \leq \omega_p, \\ C \leq G(e^{j\omega}) \leq D, \quad \omega_p \leq \omega \leq \pi. \end{aligned}$$

求利用 δ_1 和 δ_2 表示的 A, B, C 和 D . 如果 $\delta_1 \ll 1$ 且 $\delta_2 \ll 1$, 则 $G(e^{j\omega})$ 近似得最大通带和阻带逼近误差是多少?

- (c) 正如(b)中所求出的,杜基的加倍法减小了通带逼近误差,但是增加了阻带误差.凯泽和哈明(Kaiser and Hamming,1977)推广了该加倍法,使得通带和阻带同时得到改善,它们把自己得出的方法称为“锐化法”.使通带和阻带同时得到改善的最简单锐化系统如图 P7.22-2 所示.再次假设该基本系统的冲激响应与(a)中给出的相同.对于图 P7.22-2 的系统重复(b).

- (d) 假定基本系统是非因果的.如果该基本系统的冲激响应是一个因果线性相位 FIR 系统,使得

$$h[n] = \begin{cases} h[M-n], & 0 \leq n \leq M, \\ 0, & \text{其它.} \end{cases}$$

则图 P7.22-1 和 P7.22-2 中的系统应当如何修改?可以使用哪种类型的(I, II, III 或 IV)因果线性相位 FIR 系统?对于图 P7.22-1 和 P7.22-2 中的系统,冲激响应 $g[n]$ 的长度是多少(利用 L 表示)?

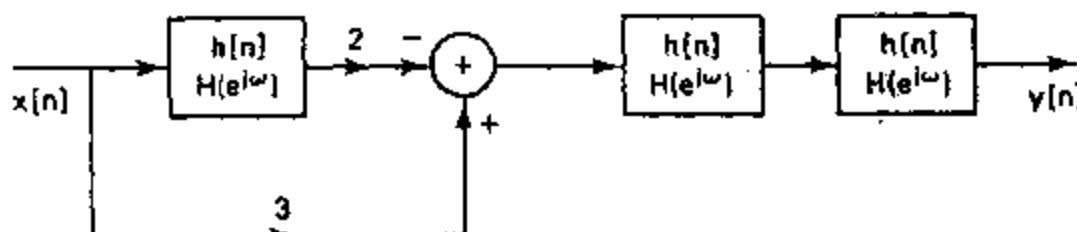


图 P7.22-2

- 7.23 令 $h_d[n]$ 表示一个理想的所要求系统的冲激响应,对应的频率响应为 $H_d(e^{j\omega})$,还令 $h[n]$ 和 $H(e^{j\omega})$ 分别表示对于该理想系统的 FIR 逼近的冲激响应和频率响应.假设当 $n < 0$ 和 $n > M$ 时,

$h[n]=0$. 我们希望选择冲激响应的 $(M+1)$ 个样本以使频率响应的均方误差为最小, 该误差定义为

$$\epsilon^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |H_d(e^{j\omega}) - H(e^{j\omega})|^2 d\omega.$$

- (a) 利用帕斯瓦尔关系式并借助序列 $h_d[n]$ 和 $h[n]$ 来表示误差函数.
 - (b) 利用(a)的结果, 求可使 ϵ^2 最小的 $h[n]$ 值 ($0 \leq n \leq M$).
 - (c) 在(b)中确定的 FIR 滤波器可用加窗的方法求得. 这就是说, 可以用一定的有限长序列 $\omega[n]$ 乘以所要求的无限长序列 $h_d[n]$ 而得到 $h[n]$. 求所需要的窗 $\omega[n]$ 使得最优冲激响应为 $h[n] = \omega[n]h_d[n]$.
- 7.24 理想离散时间希尔伯特变换器是一个对于 $0 < \omega < \pi$ 引入 -90 度 ($-\pi/2$ 弧度) 相移、而对 $-\pi < \omega < 0$ 引入 $+90$ 度 ($+\pi/2$ 弧度) 相移的系统. 对于 $0 < \omega < \pi$ 和 $-\pi < \omega < 0$, 频率响应的幅度为常量 (单位 1). 这类系统也称为理想 90 度移相器.
- (a) 给出一个理想离散时间希尔伯特变换器的理想频率响应 $H_d(e^{j\omega})$ 的方程, 该变换器还包括稳定(非零)群延迟. 画出该系统对于 $-\pi < \omega < \pi$ 的相位响应曲线.
 - (b) 可用哪种类型(I, II, III 或 N)的 FIR 线性相位系统来逼近(a)中的理想希尔伯特变换器?
 - (c) 假设我们要用窗函数法设计一个逼近理想希尔伯特变换器的线性相位系统. 若 FIR 系统是, 当 $n < 0$ 和 $n > M$ 时 $h_d[n] = 0$, 请利用(a)中给出的 $H_d(e^{j\omega})$ 求理想冲激响应 $h_d[n]$.
 - (d) 当 $M=21$ 时该系统的延迟是多少? 若采用矩形窗, 请画出在这种情况下 FIR 逼近的频率响应之幅度曲线.
 - (e) 当 $M=20$ 时该系统的延迟是多少? 若采用矩形窗, 请画出在这种情况下 FIR 逼近的频率响应之幅度曲线.

7.25 在 7.4.1 节中提出的常用窗函数均可以利用矩形窗来表示. 这一特性可以用来得出巴特利特窗和包括哈明、汉宁及布莱克曼窗在内的提升余弦窗族的傅里叶变换表示式.

- (a) 证明式(7.77b)定义的 $(M+1)$ 点巴特利特窗可以表示成两个较短矩形窗的卷积. 用这一事实证明, $(M+1)$ 点巴特利特窗的傅里叶变换是

$$W_B(e^{j\omega}) = e^{-j\omega M/2} \left(\frac{\sin(\omega M/4)}{\sin(\omega/2)} \right)^2 \quad M \text{ 为偶数},$$

或

$$W_B(e^{j\omega}) = e^{-j\omega M/2} \left(\frac{\sin[\omega(M+1)/4]}{\sin(\omega/2)} \right) \left\{ \frac{\sin[\omega(M-1)/4]}{\sin(\omega/2)} \right\} \quad M \text{ 为奇数}.$$

- (b) 很容易看出, 由式(7.77c)至式(7.77e)定义的 $(M+1)$ 点提升余弦窗均可以表示成

$$w[n] = [A + B\cos(2\pi n/M) + C\cos(4\pi n/M)]w_R[n],$$

式中 $w_R[n]$ 是 $(M+1)$ 点矩形窗. 用这个关系式求一般提升余弦窗的傅里叶变换.

- (c) 利用适当选择的 A, B 和 C 以及(b)中得出的结果, 画出汉宁窗傅里叶变换的幅度曲线.

7.26 我们希望用凯泽窗函数法设计一个具有广义线性相位的离散时间滤波器, 它满足如下技术指标:

$$\begin{aligned} |H(e^{j\omega})| &\leq 0.01, & 0 \leq \omega \leq 0.25\pi, \\ 0.95 \leq |H(e^{j\omega})| &\leq 1.05, & 0.35\pi \leq \omega \leq 0.6\pi, \\ |H(e^{j\omega})| &\leq 0.01, & 0.65\pi \leq \omega \leq \pi. \end{aligned}$$

- (a) 对于满足以上技术指标的滤波器, 求冲激响应的最小长度 $(M+1)$ 的值, 以及凯泽窗参数 β 的值.

- (b) 该滤波器的延迟是多少?

- (c) 确定使用凯泽窗的理想冲激响应 $h_d[n]$.

7.27 考虑一个多频带滤波器的如下频率响应:

$$H_d(e^{j\omega}) = \begin{cases} e^{-j\omega M/2}, & 0 \leq |\omega| < 0.3\pi, \\ 0, & 0.3\pi \leq |\omega| < 0.6\pi, \\ 0.5e^{-j\omega M/2}, & 0.6\pi \leq |\omega| \leq \pi. \end{cases}$$

- (a) 该滤波器的延迟是多少?
(b) 求理想冲激响应 $h_d[n]$.
(c) 确定 FIR 滤波器所满足的一组逼近误差技术指标, 即确定在下式中的参数 $\delta_1, \delta_2, \delta_3, B, C, \omega_{p1}, \omega_{r1}, \omega_{r2}$ 和 ω_{p2} :

$$\begin{aligned} B - \delta_1 &\leq |H(e^{j\omega})| \leq B + \delta_1, & 0 \leq \omega \leq \omega_{p1}, \\ |H(e^{j\omega})| &\leq \delta_2, & \omega_{r1} \leq \omega \leq \omega_{r2}, \\ C - \delta_3 &\leq |H(e^{j\omega})| \leq C + \delta_3, & \omega_{p2} \leq \omega \leq \pi. \end{aligned}$$

7.28 考虑用帕克斯-麦克莱伦算法设计一个低通线性相位 FIR 滤波器. 利用交错点定理说明在通带和阻带逼近区之间的“不在乎”区域中逼近必须单调地减小. [提示: 证明三角多项式的所有局部极大点和极小点必须在通带中或在阻带中以满足交错点定理.]

7.29 图 P7.29 表示一个离散时间 FIR 系统的频率响应 $A_e(e^{j\omega})$, 该系统的冲激响应是:

$$h_e[n] = \begin{cases} h_e[-n], & -L \leq n \leq L, \\ 0, & \text{其它.} \end{cases}$$

- (a) 证明 $A_e(e^{j\omega})$ 不能对应于由帕克斯-麦克莱伦算法产生的 FIR 滤波器, 该滤波器的通带边缘频率为 $\pi/3$, 阻带边缘频率为 $2\pi/3$, 且在通带和阻带中误差加权函数为 1. 并详细解释其理由.
[提示: 交错点定理表明, 最佳逼近是唯一的.]
(b) 根据图 P7.29 和 $A_e(e^{j\omega})$ 不能对应于一个最佳滤波器的论述, 对于 L 值可以得出什么结论?

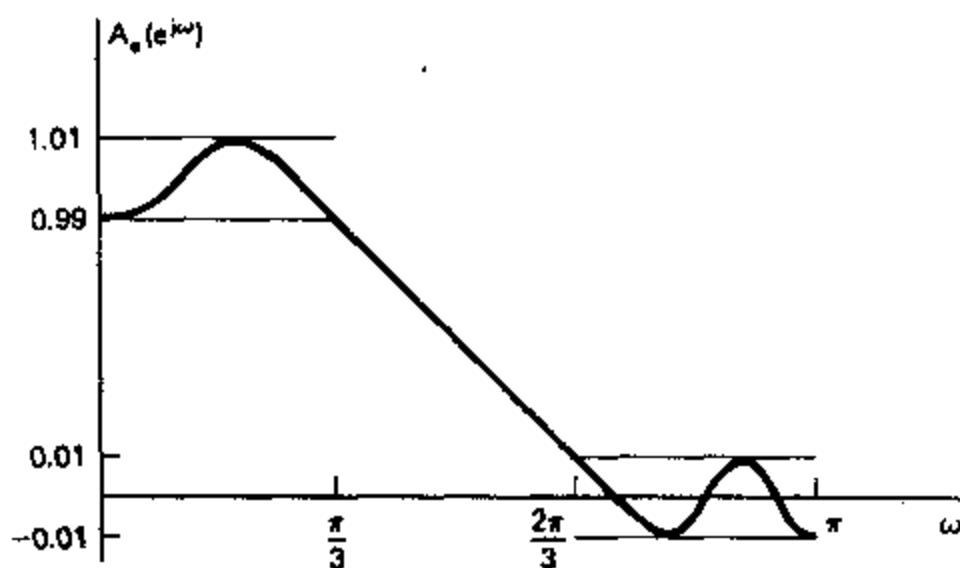


图 P7.29

7.30 用帕克斯-麦克莱伦算法设计一个最佳等波纹 FIR 线性滤波器. 其频率响应的幅度示于图 P7.30 中. 通带中的最大逼近误差为 $\delta_1=0.0531$, 且阻带中的最大逼近误差为 $\delta_2=0.085$. 通带和阻带截止频率分别为 $\omega_p=0.4\pi$ 和 $\omega_r=0.58\pi$.

- (a) 这是什么类型(I, II, III 或 IV)的线性相位系统? 并请解释其理由.
(b) 在优化中使用的误差加权函数 $W(\omega)$ 是什么?
(c) 仔细画出加权逼近误差的曲线, 即画出

$$E(\omega) = W(\omega)[H_d(e^{j\omega}) - A_e(e^{j\omega})].$$

- (注意, 图 P7.30 已表示出 $|A_e(e^{j\omega})|$.)
(d) 系统冲激响应的长度是多少?
(e) 如果这个系统是因果的, 则它能具有的最小延迟是多少?

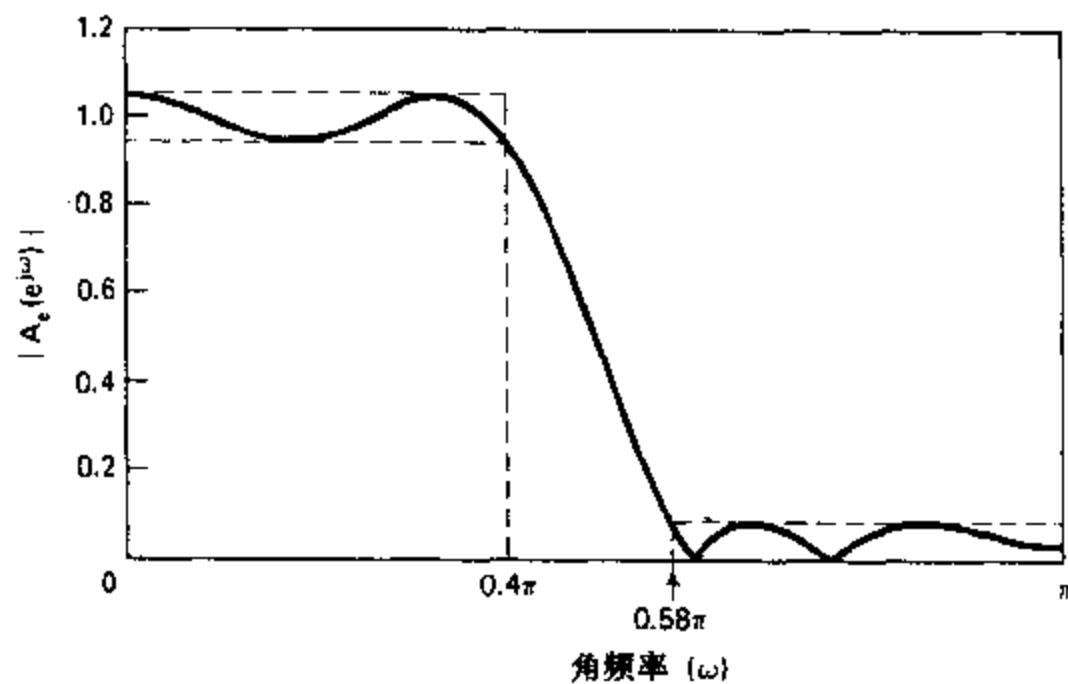


图 P7.30

(f) 在 z 平面上尽可能精确地画出系统函数 $H(z)$ 的零点.

- 7.31 考虑用帕克斯-麦克莱伦算法设计一个 I 型带通线性相位 FIR 滤波器, 其冲激响应的长度是 $M+1=2L+1$. 回想一下, 对 I 型系统频率响应的形式为 $H(e^{j\omega})=A_e(e^{j\omega})e^{-j\omega M/2}$, 并且帕克斯-麦克莱伦算法可以求出可使如下误差函数的最大值达到最小的函数 $A_e(e^{j\omega})$:

$$E(\omega)=W(\omega)[H_d(e^{j\omega})-A_e(e^{j\omega})], \quad \omega \in F,$$

式中 F 是区间 $0 \leq \omega \leq \pi$ 上的一个闭子集, $W(\omega)$ 是加权函数, 且 $H_d(e^{j\omega})$ 是定义在逼近区间 F 上所要求的频率响应. 某一带通滤波器的容限图示于图 P7.31 中.

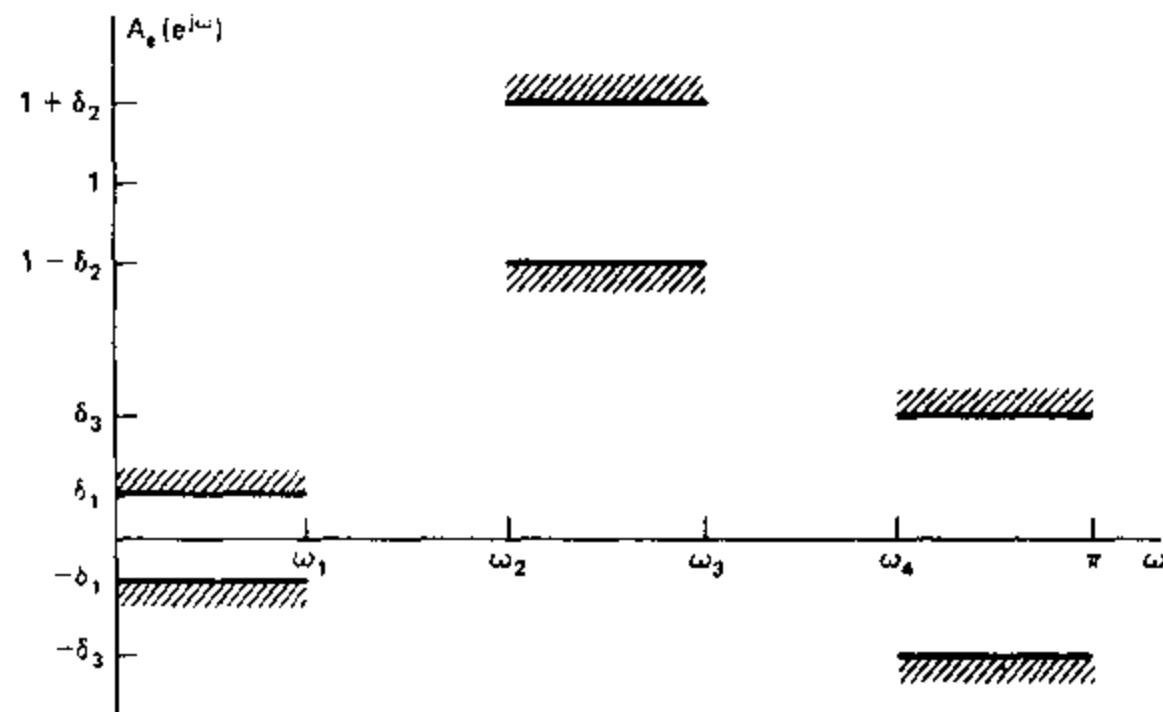


图 P7.31

- (a) 对于容限图 P7.31, 给出所要求频率响应 $H_d(e^{j\omega})$ 的方程式.
 (b) 对于容限图 P7.31, 给出加权函数 $W(\omega)$ 的方程式.
 (c) 对于最佳滤波器, 误差函数之交错点的最少个数是多少?
 (d) 对于最佳滤波器, 误差函数之交错点的最多个数是多少?
 (e) 画出一个“典型的”加权误差函数 $E(\omega)$ 的曲线, 该函数能够作为一个最佳带通滤波器(取 $M=$

14) 的误差函数. 假设有最多个数的交错点.

- (f) 现在假设, $M, \omega_1, \omega_2, \omega_3$, 加权函数和所要求的函数均保持不变, 但是 ω_4 增大使得过渡带 ($\omega_4 - \omega_3$) 也增大. 对于这些新指标的最佳滤波器必须有比与原指标相联系的最佳滤波器要小的最大逼近误差吗? 详细说明其理由.
- (g) 在低通滤波器的情况下, $A_s(e^{j\omega})$ 的所有局部极小点和极大点必然出现在逼近频带 $\omega \in F$ 中. 它们不能出现在“不在乎”的频带中. 在低通的情况下, 在逼近带中出现的极小点和极大点必须是误差的交错点. 证明在带通滤波器的情况下这一点不一定正确. 具体讲, 用交错点定理证明: (i) $A_s(e^{j\omega})$ 的局部极大点和极小点不限于在逼近频带中; (ii) 在逼近频带中的局部极大点和极小点不必要是交错点.

7.32 考虑图 P7.32 所示的系统.

1. 假设当 $|\Omega| \geq \pi/T$ 时 $X_c(j\Omega) = 0$, 并且 $H_r(j\Omega)$ 表示理想低通重构滤波器, 使得

$$H_r(j\Omega) = \begin{cases} 1, & |\Omega| < \pi/T, \\ 0, & |\Omega| > \pi/T. \end{cases}$$

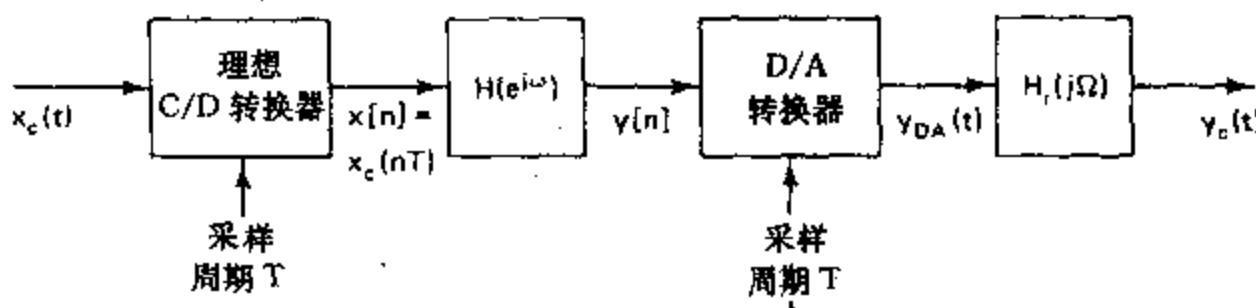


图 P7.32

2. D/A 转换器有一个内置零阶保持电路, 因此

$$y_{DA}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y[n] h_0(t-nT),$$

式中 $h_0(t)$ 为

$$h_0(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < T, \\ 0, & \text{其它.} \end{cases}$$

(我们忽略在 D/A 转换器中的量化.)

3. 图 P7.32 中的第 2 个系统是一个具有频率响应 $H(e^{j\omega})$ 的线性相位 FIR 离散时间系统.

我们想要利用帕克斯-麦克莱伦算法设计该 FIR 系统, 以便补偿掉零阶保持系统的影响.

- (a) 输出的傅里叶变换为 $Y_c(j\Omega) = H_{eff}(j\Omega)X_c(j\Omega)$, 求利用 $H(e^{j\omega T})$ 和 T 表示 $H_{eff}(j\Omega)$ 的表示式.

- (b) 如果线性相位 FIR 系统是, 当 $n < 0$ 和 $n > 51$ 时 $h[n] = 0$, 并且 $T = 10^{-4}s$, 则在 $x_c(t)$ 和 $y_c(t)$ 之间的总时间延迟(单位 ms)是多少?

- (c) 假设当 $T = 10^{-4}s$ 时我们希望有效频率响应在以下容限范围内是等波纹的(同时在通带和阻带中):

$$0.99 \leq |H_{eff}(j\Omega)| \leq 1.01, \quad |\Omega| \leq 2\pi(1000),$$

$$|H_{eff}(j\Omega)| \leq 0.01, \quad 2\pi(2000) \leq |\Omega| \leq 2\pi(5000).$$

我们希望通过设计一个包括补偿零阶保持在内的最佳线性相位滤波器(用帕克斯-麦克莱伦算法)来实现这一点. 给出应当使用的理想频率响应 $H_d(e^{j\omega})$ 的方程. 求出应当使用的加权函数 $W(\omega)$ 并作图. 绘出所得出的“典型”频率响应 $H(e^{j\omega})$ 的曲线.

- (d) 如何修改你在(c)中的结果, 使其包括对重构滤波器 $H_r(j\Omega)$ 的幅度补偿, 已知该滤波器在

$\Omega = 2\pi(5000)$ 以上增益为零,且具有倾斜的通带?

- 7.33 一个离散时间信号经过低通滤波器过滤后常常如图 P7.33-1 所示的那样被欠采样或抽取。在这种应用中往往希望滤波器是线性相位 FIR 滤波器,但是如果图 P7.33-1 中的低通滤波器有一个很窄的过渡带,则 FIR 系统将具有一个很长的冲激响应,因此计算每个输出样本就需要大量的乘法和加法运算。

在这个习题中,我们将研究图 P7.33-1 所示系统的多级实现的优点。当 ω_s 很小并且抽取因子 M 很大时这种实现方法是特别有用的。一种通用的多级实现绘于图 P7.33-2 中。它的基本思路是,在前面几级低通滤波器中使用较宽的过渡带,因此减少了在这几级中所需要的滤波器冲激响应的长度。当进行抽取时信号样本数就减少了,并且我们可以逐渐地减小对抽取后信号过滤的滤波器过渡带的宽度。用这种方式就可以减少实现抽取器所需要的总计算次数。

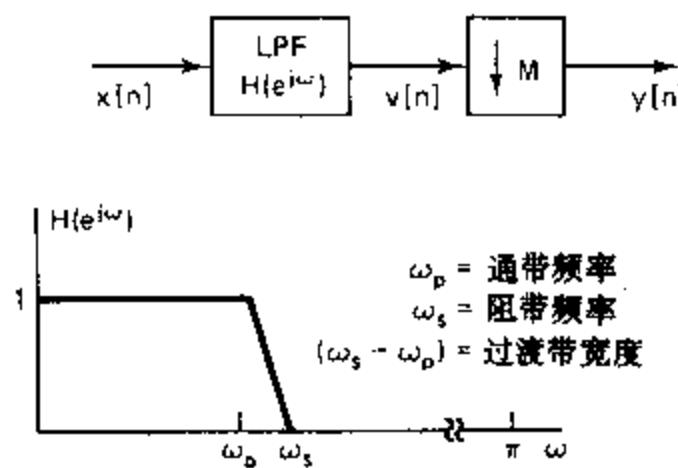


图 P7.33-1

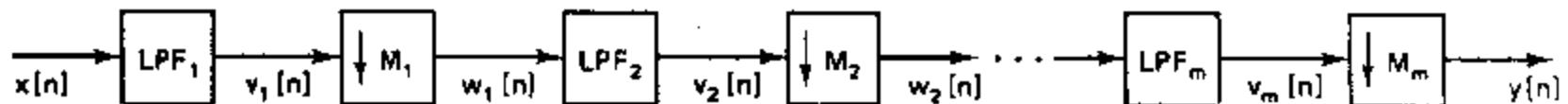


图 P7.33-2

- (a) 如果图 P7.33-1 中抽取的结果没有出现混叠,最大允许的抽取因子 M 是多少(用 ω_s 表示)?
 (b) 在图 P7.33-1 所示系统中,令 $M=100$, $\omega_s=\pi/100$ 和 $\omega_p=0.9\pi/100$. 若 $x[n]=\delta[n]$, 请绘出 $V(e^{j\omega})$ 和 $Y(e^{j\omega})$ 的图形.

现在考虑当 $M=100$ 时抽取器的二级实现,如图 P7.33-3 所示,其中 $M_1=50, M_2=2, \omega_{p1}=0.9\pi/100, \omega_{s2}=0.9\pi/2$ 以及 $\omega_{s1}=\pi/2$. 我们必须选择 ω_{s1} 或等效地选择 LPF₁ 的过渡带($\omega_{s1}-\omega_{p1}$),使得二级实现得到与单级抽取器同样的等效通带和阻带频率。(我们没有考虑在过渡带中频率响应的形状细节,但二个系统在过渡带中均应当有单调下降的频率响应.)

- (c) 对于一个任意的 ω_{s1} 值和输入 $x[n]=\delta[n]$,绘出图 P7.33-3 所示二级抽取器的 $V_1(e^{j\omega})$, $W_1(e^{j\omega}), V_2(e^{j\omega})$ 和 $Y(e^{j\omega})$.
 (d) 求使得该二级抽取器得到与 (b) 中的单级系统一样的等效通带和阻带截止频率的 ω_{s1} 的最大值.

除了非零过渡带宽度以外,低通滤波器与理想低通滤波器在通带和阻带逼近误差 δ_p 和 δ_s 上也必定不同。假设使用线性相位等波纹 FIR 逼近,由式(7.134)可得,对于最佳低通滤波器

$$N \approx \frac{-10\log_{10}(\delta_p \delta_s) - 13}{2.324 \Delta \omega} + 1, \quad (\text{P7.33})$$

其中 N 是冲激响应的长度, $\Delta \omega = \omega_s - \omega_p$ 是低通滤波器的过渡带。式(P7.33)提供了对抽取器的两种实现进行比较的基础。(当用凯泽窗函数法来设计滤波器时,可用式(7.93)代替式(P7.33)来估计冲激响应的长度。)

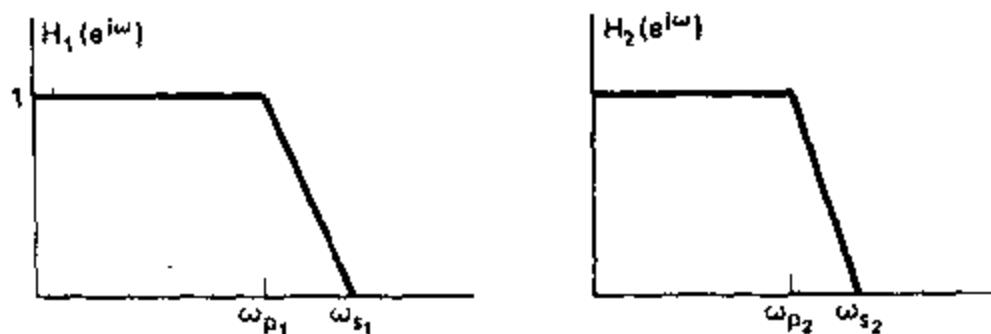
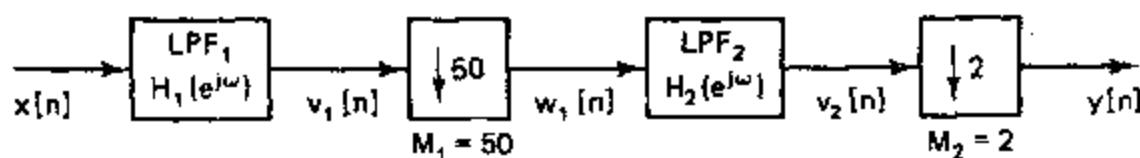


图 P7.33-3

- (e) 对于在单级实现中的低通滤波器,假设 $\delta_p = 0.01$ 和 $\delta_s = 0.001$. 计算其冲激响应长度 N , 并求出计算每个输出样本所需的乘法次数. 应利用线性相位 FIR 系统冲激响应的对称性. (注意, 在这种抽取的应用中, 只需要计算每个输出的第 M 个样本, 即压缩器与 FIR 系统的乘法交换.)
- (f) 利用(d)中求出的 ω 值, 分别计算在图 P7.33-3 所示二级抽取器中 LPF_1 和 LPF_2 的冲激响应长度 N_1 和 N_2 . 求在二级抽取器中计算每个输出样本所需的全部乘法次数.
- (g) 如果将逼近误差指标 $\delta_p = 0.01$ 和 $\delta_s = 0.001$ 同时用于二级抽取器中的两个滤波器, 则总的通带波纹可能要大于 0.01, 因为这二级的通带波纹可能会得到加强, 即 $(1 + \delta_p)(1 + \delta_s) > (1 + \delta_p)$. 为了对此进行补偿, 可以设计二级实现中的每个滤波器通带波纹只有单级实现的一半. 因此, 对于二级抽取器中的每个滤波器均假设 $\delta_p = 0.005$ 和 $\delta_s = 0.001$. 分别计算 LPF_1 和 LPF_2 的冲激响应长度 N_1 和 N_2 , 并求出计算每个输出样本所需要的全部乘法次数.
- (h) 对于二级抽取器中的滤波器还必须降低阻带逼近误差的技术指标吗?
- (i) 选做. 将 $M_1 = 50$ 和 $M_2 = 2$ 结合在一起也可能不会使计算每个输出样本所需的全部乘法为最少. 使得 $M_1 M_2 = 100$, 整数 M_1 和 M_2 的其它可能选择是什么? 求使得计算每个输出样本所需的乘法次数为最少的 M_1 和 M_2 值.

7.34 在本习题中我们来推导设计最小相位离散时间滤波器的一种方法. 这类滤波器的全部零点和极点均在单位圆内(或上). (在此题中允许零点在单位圆上.) 让我们首先考虑将 I 型线性相位 FIR 等波纹低通滤波器转换成最小相位系统的问题. 如果 $H(e^{j\omega})$ 是一个 I 型线性相位滤波器的频率响应, 则

1. 所对应的冲激响应 $h[n]$ 为实数, 并且

$$h[n] = \begin{cases} h[M-n], & 0 \leq n \leq M, \\ 0, & \text{其它}, \end{cases}$$

其中 M 为偶整数.

2. 由(1)得, $H(e^{j\omega}) = A_r(e^{j\omega})e^{-jn_0}$, 其中 $A_r(e^{j\omega})$ 为实数且 $n_0 = M/2$ 为整数.
3. 通带波纹为 δ_1 , 即在通带中 $A_r(e^{j\omega})$ 在 $(1 + \delta_1)$ 和 $(1 - \delta_1)$ 之间振荡. (见图P7.34-1).
4. 阻带波纹为 δ_2 , 即在阻带中 $-\delta_2 \leq A_r(e^{j\omega}) \leq \delta_2$, 且 $A_r(e^{j\omega})$ 在 $-\delta_2$ 和 $+\delta_2$ 之间振荡 (见图 P7.34-1).

赫尔曼和许斯勒(Herrmann and Schüssler, 1970a)曾提出如下方法, 将这种线性相位系统转换成具有系统函数 $H_{\min}(z)$ 和单位样本响应 $h_{\min}[n]$ 的最小相位系统. (在本题中, 我们假设最小相

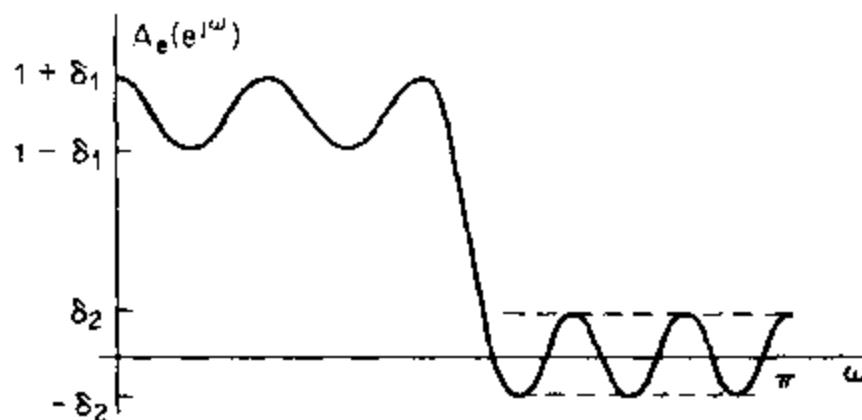


图 P7.34-1

位系统可以有在单位圆上的零点。)

步骤 A: 产生一个新序列

$$h_1[n] = \begin{cases} h[n], & n \neq n_0, \\ h[n_0] + \delta_2, & n = n_0 \end{cases}$$

步骤 B: 确认对于某些 $H_2(z), H_3(z)$ 可以表示成

$$H_1(z) = z^{-n_0} H_2(z) H_2(1/z) = z^{-n_0} H_3(z)$$

式中 $H_2(z)$ 的所有极点和零点均在单位圆内或单位圆上, 且 $h_2[n]$ 为实数。

步骤 C: 定义

$$H_{\min}(z) = \frac{H_2(z)}{\sqrt{1 + \delta_2}}$$

分母的常量 $\sqrt{1 + \delta_2}$ 使通带归一化, 因此所得频率响应 $H_{\min}(e^{j\omega})$ 将在 1 上下振荡。

(a) 证明如果 $h_1[n]$ 像步骤 A 中那样选择, 则 $H_1(e^{j\omega})$ 可以写成

$$H_1(e^{j\omega}) = e^{-jn_0} H_3(e^{j\omega}),$$

式中 $H_3(e^{j\omega})$ 对所有的 ω 值均为实数和非负。

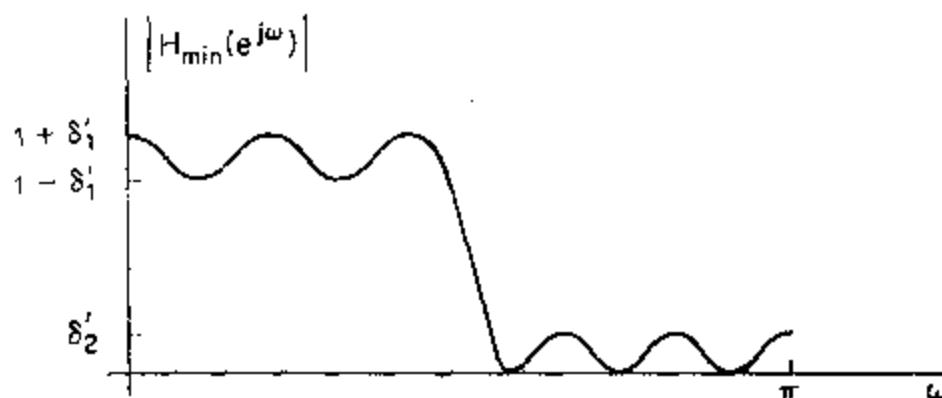


图 P7.34-2

(b) 如果像在(a)中所证明的那样 $H_3(e^{j\omega}) \geq 0$, 证明存在一个 $H_2(z)$, 使得

$$H_3(z) = H_1(z) H_2(1/z),$$

其中 $H_2(z)$ 是最小相位的, $h_2[n]$ 为实数 (即证明步骤 B)。

(c) 通过计算 δ'_1 和 δ'_2 表明, 新滤波器 $H_{\min}(e^{j\omega})$ 是一个等波纹低通滤波器 (也就是表明它的幅度特性是图 P7.34-2 中所示的形式). 新冲激响应 $h_{\min}[n]$ 的长度是多少?

(d) 在(a), (b) 和(c) 中曾假设我们从 I 型 FIR 线性相位滤波器开始. 如果去掉线性相位的限制, 这种方法还正确吗? 如果使用 II 型 FIR 线性相位系统, 这种方法是否仍正确?

7.35 假设我们有一个计算机程序, 当已知 $L, F, W(\omega)$ 和 $H_d(e^{j\omega})$ 时可以求出使下式达到最小的一组系数 $a[n], n=0, 1, \dots, L$:

$$\max_{\omega \in F} \left\{ \left| W(\omega)[H_d(e^{j\omega}) - \sum_{n=0}^L a[n] \cos \omega n] \right| \right\}.$$

我们已经证明,这个优化问题的解表示一个非因果 FIR 零相位系统,其冲激响应满足 $h_r[n] = h_r[-n]$. 若将 $h_r[n]$ 延迟 L 个样本,则可以得到一个因果的 I 型 FIR 线性相位系统,其频率响应为

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j\omega M/2} \sum_{n=0}^L a[n] \cos \omega n = \sum_{n=0}^{2L} h[n] e^{-j\omega n},$$

式中冲激响应与系数 $a[n]$ 有如下关系:

$$a[n] = \begin{cases} 2h[M/2-n], & 1 \leq n \leq L, \\ h[M/2], & n=0, \end{cases}$$

且 $M=2L$ 为系统函数多项式的阶次[冲激响应的长度为 $(M+1)$].

如果我们将加权函数 $W(\omega)$ 和要求的频率响应 $H_d(e^{j\omega})$ 作适当修改,则利用现在的程序就可以设计其它三型(I, II 和 IV)线性相位 FIR 滤波器. 为了说明如何实现这一点,必须将频率响应表示式变成程序所用的标准形式.

(a) 假设我们想要设计一个因果的 I 型 FIR 线性相位系统,使得当 $n=0, 1, \dots, M$ 时 $h[n] = h[M-n]$, 其中 M 为奇整数. 证明该型系统的频率响应可以表示成

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j\omega M/2} \sum_{n=1}^{(M+1)/2} b[n] \cos \omega \left(n - \frac{1}{2} \right),$$

并且求系数 $b[n]$ 和 $h[n]$ 之间的关系式.

(b) 证明,若得出用 $\tilde{b}[n]$ ($n=0, 1, \dots, (M-1)/2$) 表示 $b[n]$ ($n=1, 2, \dots, (M+1)/2$) 的表示式,则可以将和式

$$\sum_{n=1}^{(M+1)/2} b[n] \cos \omega \left(n - \frac{1}{2} \right)$$

写成

$$\cos(\omega/2) \sum_{n=0}^{(M-1)/2} \tilde{b}[n] \cos \omega n$$

[提示: 应当仔细地对待用 $\tilde{b}[n]$ 来表示 $b[n]$. 也可以利用三角恒等式 $\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} \cos(\alpha + \beta)$

$$+ \frac{1}{2} \cos(\alpha - \beta).$$

(c) 如果我们想要用给定的程序来设计已知 $F, W(\omega)$ 和 $H_d(e^{j\omega})$ 时的 I 型系统(M 为奇数), 证明如何利用 $M, F, W(\omega)$ 和 $H_d(e^{j\omega})$ 求出 $\tilde{L}, \tilde{F}, \tilde{W}(\omega)$ 和 $\tilde{H}_d(e^{j\omega})$, 使得若利用 $\tilde{L}, \tilde{F}, \tilde{W}(\omega)$ 和 $\tilde{H}_d(e^{j\omega})$ 来运行该程序, 则可以用得出的那组系数求出所要求 I 型系统的冲激响应.

(d) 对于 II 和 IV 型有理线性相位 FIR 系统重复(a)至(c), 其中 $h[n] = -h[M-n]$. 对于这种情况你必须证明 II 型系统(M 为偶数)的频率响应可以表示为

$$\begin{aligned} H(e^{j\omega}) &= e^{-j\omega M/2} \sum_{n=1}^{M/2} c[n] \sin \omega n \\ &= e^{-j\omega M/2} \sin \omega \sum_{n=0}^{(M-2)/2} \tilde{c}[n] \cos \omega n, \end{aligned}$$

而对 IV 型系统(M 为奇数),

$$\begin{aligned} H(e^{j\omega}) &= e^{-j\omega M/2} \sum_{n=1}^{(M+1)/2} d[n] \sin \omega \left(n - \frac{1}{2} \right) \\ &= e^{-j\omega M/2} \sin(\omega/2) \sum_{n=0}^{(M-1)/2} \tilde{d}[n] \cos \omega n. \end{aligned}$$

和(b)中一样,有必要通过三角恒等式 $\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} \sin(\alpha + \beta) + \frac{1}{2} \sin(\alpha - \beta)$ 用 $\tilde{c}[n]$ 来表示

$c[n]$ 以及用 $\tilde{d}[n]$ 来表示 $d[n]$. 麦克莱伦和帕克斯(McClellan and Parks, 1973) 以及拉宾和戈尔德(Rabiner and Gold, 1975) 给出了在本习题中所提出的有关问题的细节.

- 7.36 在这个习题中我们来研究得出实现变量截止线性相位滤波器的一种方法. 假定已知用帕克斯-麦克莱伦法设计出一个零相位滤波器, 它的频率响应为

$$A_e(e^{j\theta}) = \sum_{k=0}^L a_k (\cos \theta)^k,$$

因此它的系统函数可以表示成

$$A_e(z) = \sum_{k=0}^L a_k \left(\frac{z+z^{-1}}{2} \right)^k,$$

其中 $e^{j\theta} = z$. (对于原系统使用 Z , 而对于由原系统的变换得到的系统使用 z .)

- (a) 利用系统函数的上述表达式, 画出用系统 a_k 的乘法、加法和具有系统函数 $(z+z^{-1})/2$ 的基本系统来实现该系统的方框图或流图.
 (b) 该系统冲激响应的长度是多少? 把这个系统与 L 个样本的延迟级联起来, 可以使整个系统成为因果的吗? 将这个延迟分散成一些单位延迟, 这样网络的各个部分将是因果的.
 (c) 假设我们用如下替换由 $A_e(z)$ 得出一个新的系统函数:

$$B_e(z) = A_e(z) |_{(z+z^{-1})/2 = a_0 + a_1[(z+z^{-1})/2]}.$$

利用(b)中的流图, 画出实现系统函数 $B_e(z)$ 的系统流图. 这个系统的冲激响应的长度是多少? 如像(b)中那样, 对该网络作一修正使得整个系统以及网络的各部分均为因果的.

- (d) 如果 $A_e(e^{j\omega})$ 是原滤波器的频率响应, $B_e(e^{j\omega})$ 是变换后滤波器的频率响应, 求 θ 和 ω 之间的关系式.
 (e) 原最佳滤波器的频率响应如图 P7.36 所示. 对于这种情况, $a_1 = 1 - a_0$ 和 $0 \leq a_0 \leq 1$. 说明频率响应 $B_e(e^{j\omega})$ 是如何随 a_0 的改变而变化的.
 [提示: 画出 $A_e(e^{j\omega})$ 和 $B_e(e^{j\omega})$ 作为 $\cos \theta$ 和 $\cos \omega$ 之函数的图形. 在变换后的通带和阻带中有最小-最大加权逼近误差的意义上, 所得变换后滤波器还是最佳的吗?]

- (f) 选做. 对于 $a_1 = 1 + a_0$ 和 $-1 \leq a_0 \leq 0$ 的情况, 重复(e).

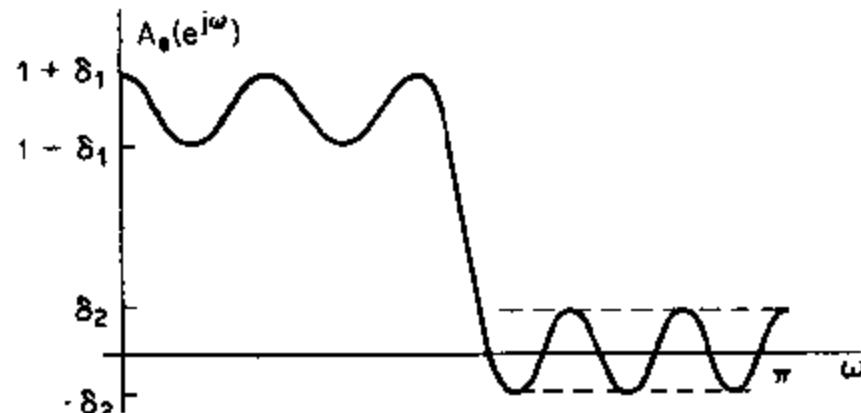


图 P7.36

第八章 离散傅里叶变换

8.0 引言

在第二章和第四章中我们讨论了利用傅里叶变换和 z 变换来表示序列和线性时不变系统的方法。对于有限长序列，可以得出另外一种傅里叶表示，称为离散傅里叶变换(DFT)。DFT本身是一个序列，而不是一个连续变量的函数，它相应于对信号的傅里叶变换进行频率的等间隔取样的样本。作为序列的傅里叶表示，DFT除了在理论上十分重要外，在实现各种数字信号处理算法中还起着核心作用，这是因为存在着计算DFT的高效算法。我们将在第九章中详细论述这些算法，并在第十一章和第十二章中讨论DFT的多种应用。

虽然可以从几种不同的观点来推导和解释一个有限长序列的DFT表示，但是我们还是以周期序列和有限长序列之间的关系为基础进行论述。首先考虑周期序列的傅里叶级数表示。尽管这个表示式本身很重要，但是我们通常仍十分关注将傅里叶级数的结果用于有限长序列的表示上。这可以通过构造一个每个周期都与有限长序列相等的周期序列来实现。我们将会看到，周期序列的傅里叶级数表示相当于有限长序列的DFT。因而，我们的作法是，首先定义周期序列的傅里叶表示，并研究这种表示的性质，然后基本上重复同样的推导方式，这里假定要表示的序列是有限长序列。这种对于DFT的定义方法着重强调了DFT表示式基本固有的周期性，并保证在DFT的应用中不会忽略这种周期性。

8.1 周期序列的表示：离散傅里叶级数

若考察一个周期为 N 的周期^{*}序列 $\tilde{x}[n]$ ，则对于任意整数 r ，有 $\tilde{x}[n] = \tilde{x}[n+rN]$ 。与连续时间周期信号相类似，这一序列可表示为傅里叶级数，该级数相当于成谐波关系的复指数序列之和，也就是说，复指数序列的频率是与周期序列 $\tilde{x}[n]$ 有关的基频($2\pi/N$)的整数倍。这些周期复指数 $e_k[n]$ 的形式为

$$e_k[n] = e^{j(2\pi/N)kn} = e_k[n+rN], \quad (8.1)$$

式中 k 为整数，且傅里叶级数表示式具有形式**

$$\tilde{x}[n] = \frac{1}{N} \sum_k \tilde{X}[k] e^{j(2\pi/N)kn}. \quad (8.2)$$

一个连续时间周期信号的傅里叶级数表示，通常需要无穷多个成谐波关系的复指数，而对于任何周期为 N 的离散时间信号的傅里叶级数，只需要 N 个成谐波关系的复指数。

* 今后每当需要清楚区分周期序列和非周期序列时，我们就用波纹号~表示周期序列。

** 为了方便起见，在式(8.2)中乘了一个常数 $1/N$ 。它也可以放在 $\tilde{X}[k]$ 的定义式中。

要了解这一点,应当注意到在式(8.1)中成谐波关系的复指数 $e_k[n]$ 对于相差为 N 的 k 值均是相同的,即 $e_0[n] = e_N[n], e_1[n] = e_{N+1}[n]$. 概括地说,即

$$e_k[n] = e_{k+N}[n], \quad (8.3)$$

这里 l 是一个整数. 因此,一组 N 个周期复指数 $e_0[n], e_1[n], \dots, e_{N-1}[n]$ 可以定义所有其它的周期复指数,其频率是 $(2\pi/N)$ 的整数倍. 这样,一个周期序列 $\tilde{x}[n]$ 的傅里叶级数表示只需包含 N 个这样的复指数,所以它具有如下形式:

$$\tilde{x}[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}[k] e^{j(2\pi/N)kn}. \quad (8.4)$$

为了从周期序列 $\tilde{x}[n]$ 中得出傅里叶级数的系数序列 $\tilde{X}[k]$,我们将利用复指数序列集的正交性. 给式(8.4)的两边均乘以 $e^{-j(2\pi/N)rn}$,并且从 $n=0$ 到 $n=N-1$ 求和,则可以得到

$$\sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}[n] e^{-j(2\pi/N)rn} = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}[k] e^{j(2\pi/N)(k-r)n}. \quad (8.5)$$

交换等号右边求和的先后次序,式(8.5)就成为

$$\sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}[n] e^{-j(2\pi/N)rn} = \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}[k] \left[\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} e^{j(2\pi/N)(k-r)n} \right]. \quad (8.6)$$

下述等式表示复指数的正交性:

$$\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} e^{j(2\pi/N)(k-r)n} = \begin{cases} 1, & k - r = mN, m \text{ 为整数}, \\ 0, & \text{其它.} \end{cases} \quad (8.7)$$

证明该等式是很容易的(见习题 8.3). 将它代入式(8.6)中括号内的求和运算,可得出

$$\sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}[n] e^{-j(2\pi/N)rn} = \tilde{X}[r]. \quad (8.8)$$

这样通过以下关系式就可以由 $\tilde{x}[n]$ 求出式(8.4)中的傅里叶级数的系数 $\tilde{X}[k]$:

$$\tilde{X}[k] = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}[n] e^{-j(2\pi/N)kn}. \quad (8.9)$$

注意由式(8.9)给出的序列 $\tilde{X}[k]$ 是周期为 N 的周期序列,即 $\tilde{X}[0] = \tilde{X}[N], \tilde{X}[1] = \tilde{X}[N+1]$. 概括地讲,对于任意整数 k ,有 $\tilde{X}[k] = \tilde{X}[N+k]$.

可以把傅里叶级数的系数看作是一个有限长的序列,对于 $k=0, \dots, (N-1)$, 其值由式(8.9)给出, k 为其它数时,其值为零;也可以把它看作是一个对于所有的 k 均由式(8.9)定义的周期序列. 很清楚,以上两种解释都是可以接受的,因为在式(8.4)中我们只用到对于 $0 \leq k \leq (N-1)$ 的 $\tilde{X}[k]$ 值. 把傅里叶级数的系数 $\tilde{X}[k]$ 当作是一个周期序列的优点是,对于周期序列的傅里叶级数表示,在时域和频域之间存在着对偶性. 式(8.9)和式(8.4)在一起就是一个分析/综合对,称为一个周期的离散傅里叶级数(DFS)表示式. 为了表示方便,常常利用复数量 W_N 来写这两个式子. W_N 定义为

$$W_N = e^{-j(2\pi/N)}. \quad (8.10)$$

使用 W , DFS 分析/综合对可表示为

$$\text{分析式: } \tilde{X}[k] = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}[n] W_N^{kn}, \quad (8.11)$$

$$\text{综合式: } \tilde{x}[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}[k] W_N^{-kn}, \quad (8.12)$$

式中 $\tilde{X}[k]$ 和 $\tilde{x}[n]$ 均为周期序列. 有时我们会发现,使用记号

$$\tilde{x}[n] \xleftrightarrow{\text{DFS}} \tilde{X}[k] \quad (8.13)$$

来表示关系式(8.11)和(8.12)是很方便的.下面的例子将说明式(8.11)和式(8.12)的用途.

例 8.1

设 $\tilde{x}[n]$ 为周期冲激串

$$\tilde{x}[n] = \sum_{r=-\infty}^{\infty} \delta[n+rN]. \quad (8.14)$$

因为对于 $0 \leq n \leq N-1$, $\tilde{x}[n] = \delta[n]$, 所以利用式(8.11)求出 $\tilde{x}[n]$ 的 DFS 系数为

$$\tilde{X}[k] = \sum_{n=0}^{N-1} \delta[n] W_N^{kn} = 1. \quad (8.15)$$

在这种情况下,对于所有的 k 值 $\tilde{X}[k]$ 均相同.于是,将式(8.15)代入式(8.12)可以得出表示式

$$\tilde{x}[n] = \sum_{r=-\infty}^{\infty} \delta[n+rN] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} W_N^{-kn} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} e^{j(2\pi/N)kn}, \quad (8.16)$$

这就是式(8.7)所示的正交性关系,只是在形式上稍有不同.

例 8.1 利用对复指数求和得出一个有用的周期冲激串的表示式,其中所有的复指数均有相同的幅值和相位,并且当整数 n 为 N 的倍数时它们的取值加在一起为 1,而当 n 为其它所有的整数时它们加在一起为零(即式(8.14)的周期冲激串).下面一个例子稍微复杂一点.

例 8.2

本例中 $\tilde{x}[n]$ 为图 8.1 中所示的序列,其中周期是 $N=10$.由式(8.11),

$$\tilde{X}[k] = \sum_{n=0}^{N-1} W_{10}^{kn} = \sum_{n=0}^{9} e^{-j(2\pi/10)kn}. \quad (8.17)$$



图 8.1 需要计算其傅里叶级数表示的周期序列(周期为 $N=10$).

这一有限求和有闭合形式

$$\tilde{X}[k] = \frac{1 - W_{10}^{5k}}{1 - W_{10}^k} = e^{-j(4\pi k/10)} \frac{\sin(\pi k/2)}{\sin(\pi k/10)}. \quad (8.18)$$

图 8.2 为周期序列 $\tilde{X}[k]$ 的幅值和相位的示意图.

式(8.11)中的周期序列 $\tilde{X}[k]$ 可以简便地解释为 $\tilde{x}[n]$ 的一个周期的傅里叶变换的等间隔样本.为了得出这个关系,令 $x[n]$ 表示 $\tilde{x}[n]$ 的一个周期,即

$$x[n] = \begin{cases} \tilde{x}[n], & 0 \leq n \leq N-1, \\ 0, & \text{其它,} \end{cases} \quad (8.19)$$

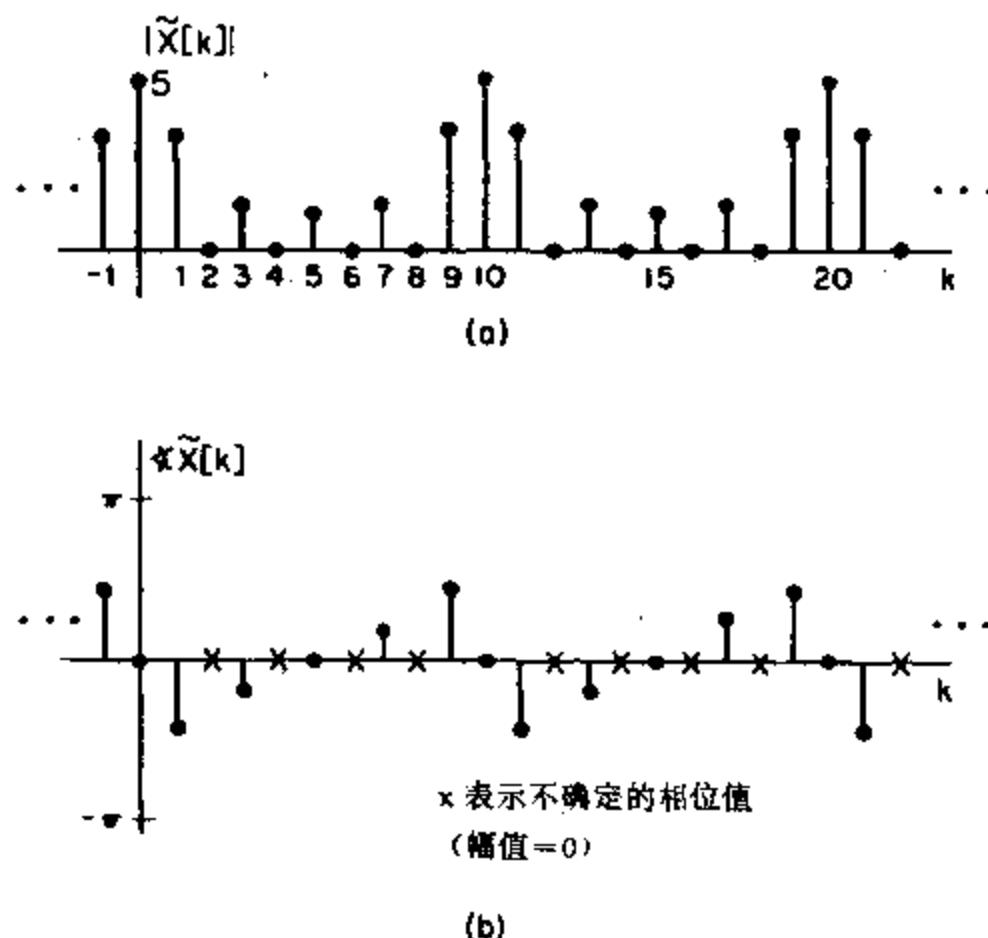


图 8.2 图 8.1 所示序列的傅里叶级数之系数的幅值和相位.

如图 8.3 所示, 因为当 $0 \leq n \leq N-1$ 时 $x[n] = \tilde{x}[n]$, 否则, $x[n] = 0$, 所以有

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}[n] e^{-j\omega n}. \quad (8.20)$$

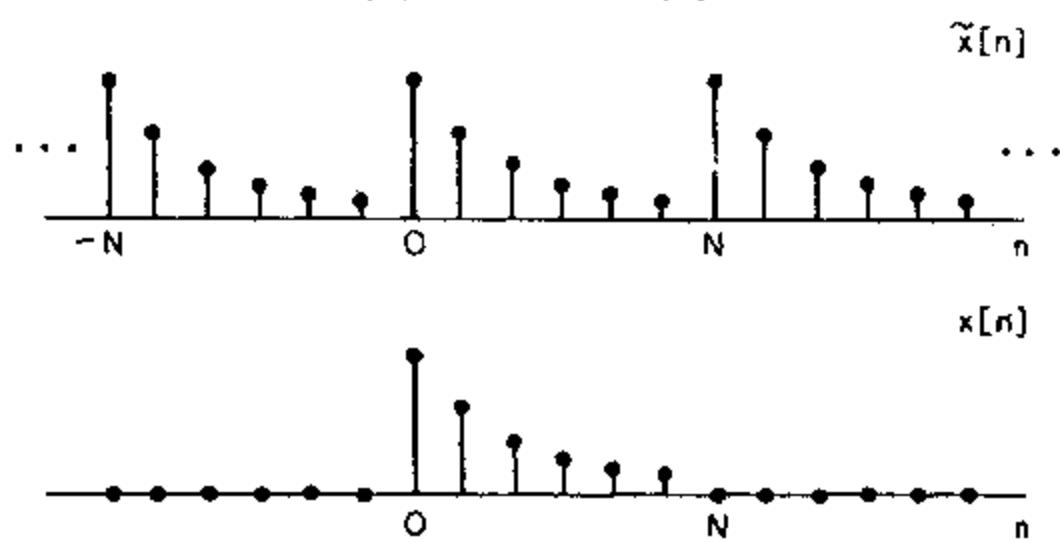


图 8.3 有限长序列 $x[n]$ 在一个周期内等于周期序列 $\tilde{x}[n]$, 其余则为零.

比较式(8.20)和式(8.11), 可以看出

$$\tilde{X}[k] = X(e^{j\omega}) \Big|_{\omega=2\pi k/N}. \quad (8.21)$$

这相当于在 $\omega=0$ 到 $\omega=2\pi$ 的范围内, 以 $2\pi/N$ 的频率间隔在 N 个等间隔的频率上对傅里叶变换进行采样.

例 8.3

为了举例说明傅里叶级数系数和一个周期的傅里叶变换之间的关系, 我们再次研究图 8.1 所示的序列 $\tilde{x}[n]$. 图 8.1 中的序列 $\tilde{x}[n]$ 的一个周期为

$$x[n] = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq 4, \\ 0, & \text{其它.} \end{cases} \quad (8.22)$$

$\tilde{x}[n]$ 的一个周期的傅里叶变换是

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^4 e^{-jn\omega} = e^{-j2\omega} \frac{\sin(5\omega/2)}{\sin(\omega/2)}. \quad (8.23)$$

可以证明,若将 $\omega = 2\pi k/10$ 代入式(8.23),则式(8.21)对本例也成立,并将这一结果与式(8.18)作一比较。在图 8.4 中概略画出了 $X(e^{j\omega})$ 的幅值和相位。应当注意,相位在 $X(e^{j\omega})=0$ 处是不连续的。图 8.5 表明,在图 8.2(a)和(b)中的序列分别对应于图 8.4 (a)和(b)中的采样值,在图 8.5 中将图 8.2 和 8.4 重叠在一起。

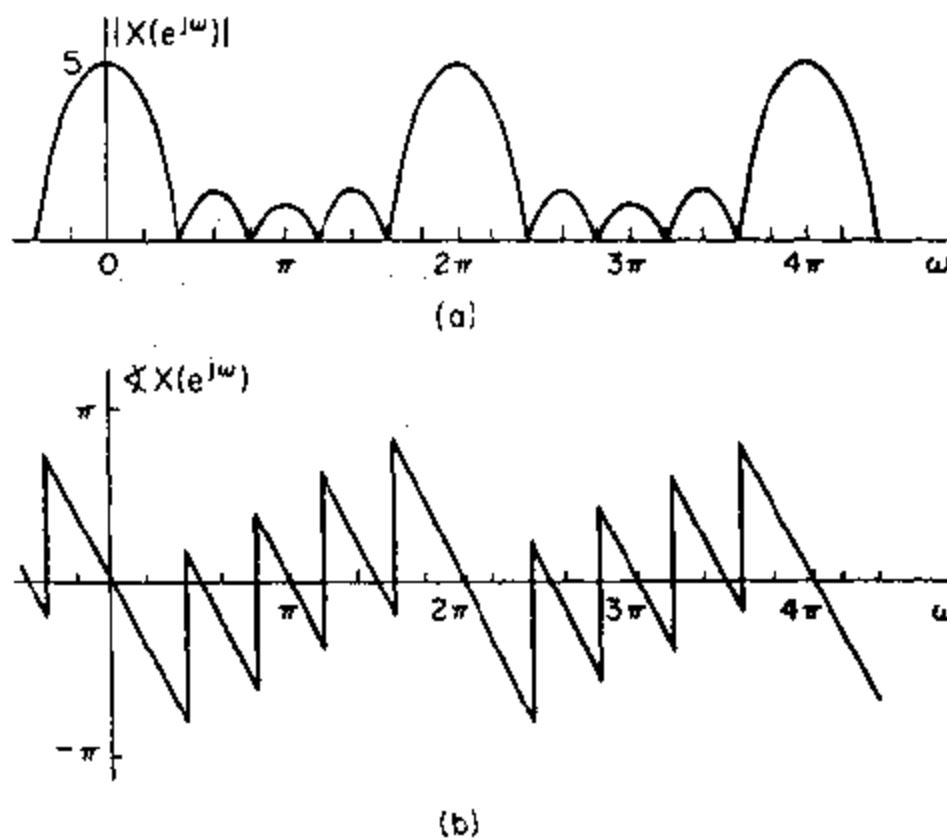


图 8.4 对图 8.1 所示序列的一个周期作傅里叶变换的幅值和相位。

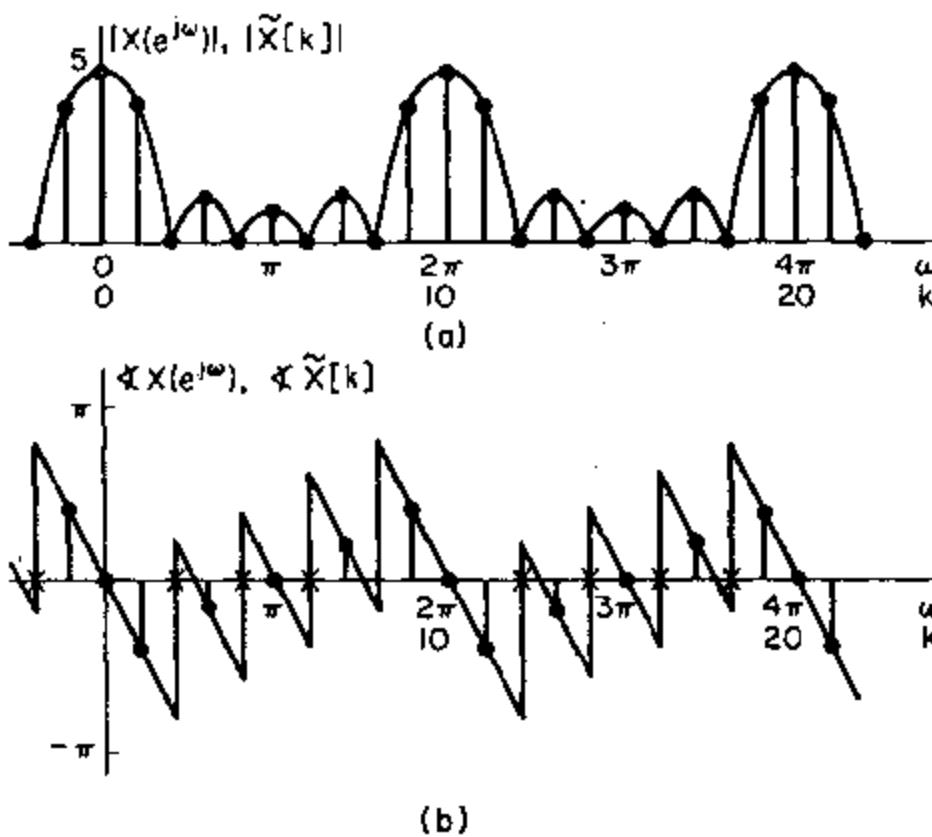


图 8.5 图 8.2 和图 8.4 的重叠图,它表明可以把一个周期序列的 DFS 系数看作是一个周期的傅里叶变换的采样。

8.2 离散傅里叶级数的性质

正如连续时间信号的傅里叶级数、傅里叶变换和拉普拉斯变换,以及离散时间非周期

序列的傅里叶变换和 z 变换一样, 离散傅里叶级数的某些性质对于它在信号处理问题中的成功使用至关重要。本节我们将总结这些重要性质, 许多基本性质与 z 变换和傅里叶变换相似, 这一点并不奇怪。但是, 我们将明确地指出那些由于 $\tilde{x}[n]$ 和 $\tilde{X}[k]$ 二者都具有的周期性所引起的一些重要差别。另外, 在 DFS 表示式中时域和频域之间存在着完全的对偶性, 而在序列的傅里叶变换和 z 变换的表示式中这一点却不存在。

8.2.1 线性

考虑两个周期序列 $\tilde{x}_1[n]$ 和 $\tilde{x}_2[n]$, 其周期均为 N , 若

$$\tilde{x}_1[n] \xleftrightarrow{\text{DFS}} \tilde{X}_1[k] \quad (8.24a)$$

和

$$\tilde{x}_2[n] \xleftrightarrow{\text{DFS}} \tilde{X}_2[k] \quad (8.24b)$$

则

$$a\tilde{x}_1[n] + b\tilde{x}_2[n] \xleftrightarrow{\text{DFS}} a\tilde{X}_1[k] + b\tilde{X}_2[k]. \quad (8.25)$$

这一线性性质可以由式(8.11)和式(8.12)直接得出。

8.2.2 序列的移位

如果周期序列 $\tilde{x}[n]$ 具有傅里叶系数 $\tilde{X}[k]$, 则 $\tilde{x}[n-m]$ 是 $\tilde{x}[n]$ 移位后的形式, 且

$$\tilde{x}[n-m] \xleftrightarrow{\text{DFS}} W_N^{km} \tilde{X}[k]. \quad (8.26)$$

这个性质的证明在习题 8.4 中考虑。任何大于周期 N 的移位 m (即 $m \geq N$), 在时域上都无法与 $m = m_1 + m_2 N$ 的较短的移位 m_1 区分开来, 其中 m_1 和 m_2 均为整数, 且 $0 \leq m_1 \leq N-1$ 。(说明这一点的另一种方式是, $m_1 = m \pmod{N}$, 或等效地 m_1 是 m 被 N 除的余数。) 利用 m 的表示式很容易证明, $W_N^{km} = W_N^{k m_1}$ 。也就是说, 在时域上移位的不确定性也必定会在频域的表示式中显示出来。

由于周期序列的傅里叶级数的系数序列也是一个周期序列, 类似的结果也可以用于傅里叶系数的移位, 若它为整数 l , 则有

$$W_N^{-l} \tilde{x}[n] \xleftrightarrow{\text{DFS}} \tilde{X}[k-l]. \quad (8.27)$$

应当注意到在式(8.26)和(8.27)中指数符号的差别。

8.2.3 对偶性

因为连续时间的傅里叶分析和综合方程式之间极为相似, 所以在时域和频域之间存在着对偶性。对于非周期信号的离散时间傅里叶变换并不存在类似的对偶性, 这是由于非周期信号和它的傅里叶变换是两类十分不同的函数。自然, 非周期离散时间信号是非周期序列, 而它的傅里叶变换总是连续频率变量的周期函数。

由式(8.11)和(8.12)我们可以看出, DFS 分析式和综合式的差别仅在于一个 $1/N$ 因子和 W_N 指数的符号。另外, 周期序列和它的 DFS 系数为同类函数, 均为周期序列。特别是, 考虑到因子 $1/N$ 以及式(8.11)和式(8.12)之间指数符号的差别, 由式(8.12)可得

$$N\tilde{x}[-n] = \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}[k] W_N^{kn}, \quad (8.28)$$

或者将 n 和 k 互换, 有

$$N\tilde{x}[-k] = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{X}[n] W_N^{kn}. \quad (8.29)$$

我们看到, 式(8.29)与式(8.11)相似. 换句话说, 周期序列 $\tilde{X}[k]$ 的 DFS 系数序列是 $N\tilde{x}[-k]$, 即倒序后的原周期序列并乘以 N . 该对偶性概括如下: 若

$$\tilde{x}[n] \xleftrightarrow{\text{DFS}} \tilde{X}[k], \quad (8.30a)$$

则

$$\tilde{X}[n] \xleftrightarrow{\text{DFS}} N\tilde{x}[-k]. \quad (8.30b)$$

8.2.4 对称性

正如我们在 2.8 节中对傅里叶变换所讨论的, 一个周期序列的 DFS 表示式有一些重要的对称特性. 与第二章中推导的做法类似, 这些特性的推导将留作习题(见习题 8.5). 所得结果作为性质 9—17 列于 8.3 节的表 8.1 中.

8.2.5 周期卷积

设 $\tilde{x}_1[n]$ 和 $\tilde{x}_2[n]$ 为两个周期均为 N 的周期序列, 它们的离散傅里叶级数的系数分别记为 $\tilde{X}_1[k]$ 和 $\tilde{X}_2[k]$. 如果将其相乘

$$\tilde{X}_3[k] = \tilde{X}_1[k]\tilde{X}_2[k], \quad (8.31)$$

则以 $\tilde{X}_3[k]$ 为傅里叶级数系数的周期序列 $\tilde{x}_3[n]$ 为

$$\tilde{x}_3[n] = \sum_{m=0}^{N-1} \tilde{x}_1[m]\tilde{x}_2[n-m]. \quad (8.32)$$

这个结果并不意外, 因为先前有关变换的知识告诉我们, 频域函数的乘积对应于时域函数的卷积, 并且式(8.32)看上去很像卷积和. 式(8.32)对 $\tilde{x}_1[m]$ 和 $\tilde{x}_2[n-m]$ 乘积进行求和, 其中 $\tilde{x}_2[n-m]$ 是将 $\tilde{x}_2[n]$ 时间反转并移位, 和非周期离散卷积相同. 但是式(8.32)中的序列均为周期的, 周期为 N , 求和只在一个周期上进行. 式(8.32)表示的卷积称为周期卷积. 正如非周期卷积一样, 周期卷积是可交换的, 即

$$\tilde{x}_3[n] = \sum_{m=0}^{N-1} \tilde{x}_2[m]\tilde{x}_1[n-m]. \quad (8.33)$$

为了说明由式(8.31)给出的 $\tilde{X}_3[k]$ 是与式(8.32)给出的 $\tilde{x}_3[n]$ 相对应的傅里叶系数序列, 我们首先把 DFS 分析式(8.11)用于式(8.32), 得

$$\tilde{X}_3[k] = \sum_{n=0}^{N-1} W_N^{kn} \left(\sum_{m=0}^{N-1} \tilde{x}_1[m]\tilde{x}_2[n-m] \right), \quad (8.34)$$

交换求和次序后, 上式变为

$$\tilde{X}_3[k] = \sum_{m=0}^{N-1} \tilde{x}_1[m] \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}_2[n-m] W_N^{kn}. \quad (8.35)$$

对 n 的内求和是移位序列 $x_2[n-m]$ 的 DFS. 因此由 8.2.2 节的移位特性, 可得

$$\sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}_2[n-m] W_N^{kn} = W_N^{km} \tilde{X}_2[k],$$

上式代入式(8.35), 有

$$\tilde{X}_3[k] = \sum_{m=0}^{N-1} \tilde{x}_1[m] W_N^{km} \tilde{X}_2[k] = \left(\sum_{m=0}^{N-1} \tilde{x}_1[m] W_N^{km} \right) \tilde{X}_2[k] = \tilde{X}_1[k] \tilde{X}_2[k]. \quad (8.36)$$

总之,

$$\sum_{m=0}^{N-1} \tilde{x}_1[m] \tilde{x}_2[n-m] \xrightarrow{\text{卷积}} \tilde{X}_1[k] \tilde{X}_2[k]. \quad (8.37)$$

周期序列的周期卷积对应于与之相应的傅里叶级数系数序列的乘积。

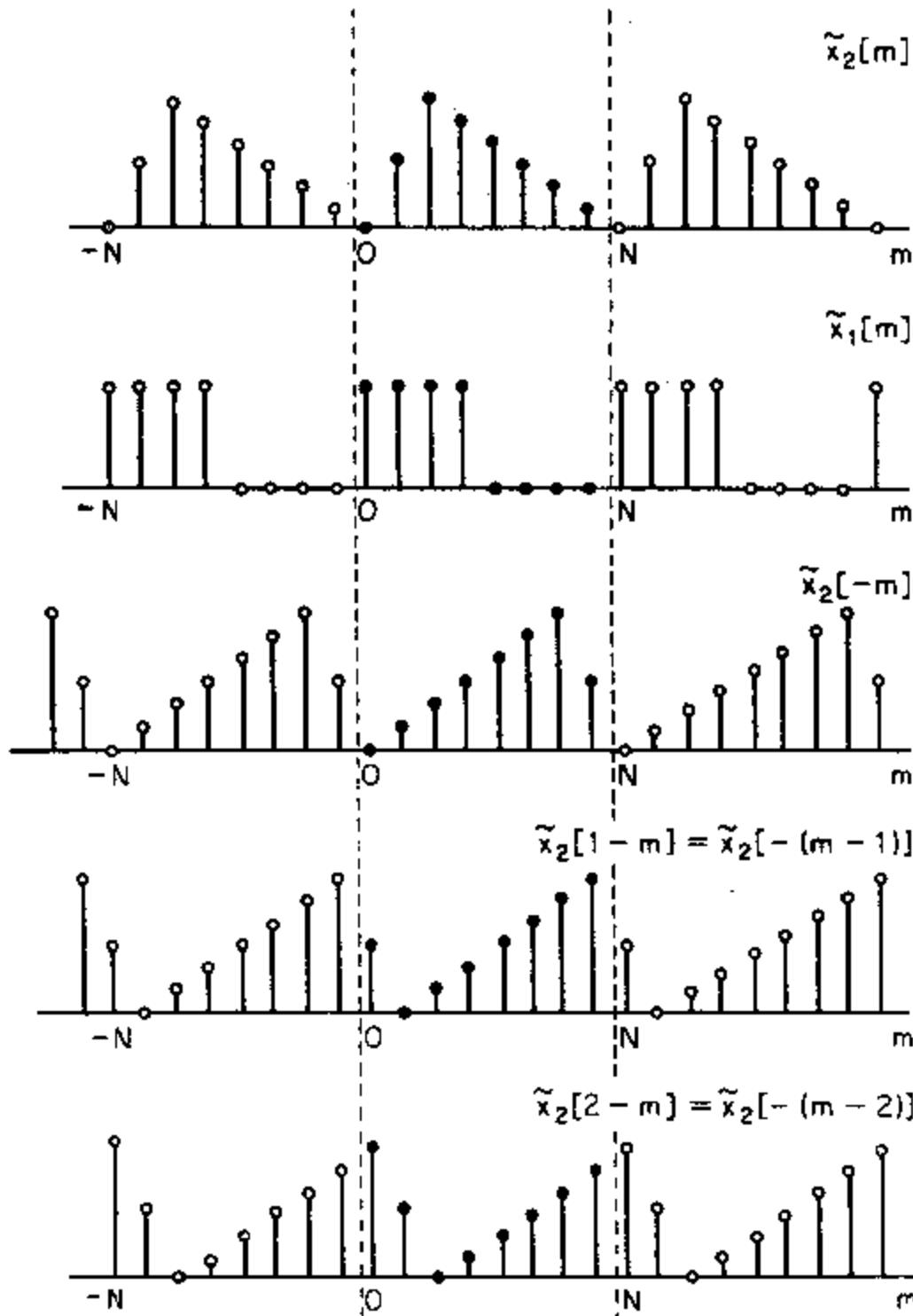
因为周期卷积与非周期卷积有些不同,这就有必要研究一下计算式(8.32)的详细步骤。首先注意到式(8.32)要求进行 $\tilde{x}_1[m]$ 和 $\tilde{x}_2[n-m] = \tilde{x}_2[-(m-n)]$ 的乘积,将其当作 m 的函数, n 为定值。这与非周期卷积相同,但有以下两点主要差别:

1. 在有限区间 $0 \leq m \leq N-1$ 上求和;
2. 对于在区间 $0 \leq m \leq N-1$ 以外的 m 值, $\tilde{x}_2[n-m]$ 的值在该区间上周期地重复。

下面的例子将说明这些细节。

例 8.4

图 8.6 举例说明形成与式(8.32)对应的两个周期序列的周期卷积的过程,在图中



我们示出了序列 $\tilde{x}_2[m]$, $\tilde{x}_1[m]$, $\tilde{x}_2[-m]$, $\tilde{x}_2[1-m]=\tilde{x}_2[-(m-1)]$ 和 $\tilde{x}_2[2-m]=\tilde{x}_2[-(m-2)]$. 例如, 为了计算当 $n=2$ 时式(8.32)中的 $\tilde{x}_3[n]$, 我们把 $\tilde{x}_1[m]$ 与 $\tilde{x}_2[2-m]$ 相乘, 然后对于 $0 \leq m \leq N-1$, 将乘积项 $\tilde{x}_1[m]\tilde{x}_2[2-m]$ 求和, 从而得出 $\tilde{x}_3[2]$. 随着 n 的改变, 序列 $\tilde{x}_2[n-m]$ 适当移位, 对于 $0 \leq n \leq N-1$ 的每一个值, 计算式(8.32). 应当注意到, 由于周期性, 当序列 $\tilde{x}_2[n-m]$ 移向右边或左边时, 离开两条虚线之间的区间一端的值又会重新出现在另一端. 因为 $\tilde{x}_3[n]$ 的周期性, 没有必要继续计算式(8.32)在区间 $0 \leq n \leq N-1$ 之外的值.

对偶定理(8.2.3节)指出, 若时间和频率交换一下, 我们将得到一个与前面几乎相同的结果. 这就是说, 若周期序列

$$\tilde{x}_3[n] = \tilde{x}_1[n]\tilde{x}_2[n], \quad (8.38)$$

其中 $\tilde{x}_1[n]$ 和 $\tilde{x}_2[n]$ 均为周期序列(周期为 N), 则 $\tilde{x}_3[n]$ 的离散傅里叶级数的系数为

$$\tilde{X}_3[k] = \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} \tilde{X}_1[l]\tilde{X}_2[k-l], \quad (8.39)$$

等于 $\tilde{X}_1[k]$ 和 $\tilde{X}_2[k]$ 的周期卷积乘以 $1/N$. 这一结果也可以通过将式(8.39)给出的 $\tilde{X}_3[k]$ 代入傅里叶级数关系式(8.12)而得到 $\tilde{x}_3[n]$ 来加以证明.

8.3 周期序列 DFS 表示的性质汇总

下面将 8.2 节中所讨论的离散傅里叶级数表示的性质汇总于表 8.1 中.

表 8.1

周期序列(周期为 N)	DFS 的系数(周期为 N)
1. $\tilde{x}[n]$	$\tilde{X}[k]$ (周期为 N 的周期序列)
2. $\tilde{x}_1[n], \tilde{x}_2[n]$	$\tilde{X}_1[k], \tilde{X}_2[k]$ (周期为 N 的周期序列)
3. $a\tilde{x}_1[n]+b\tilde{x}_2[n]$	$a\tilde{X}_1[k]+b\tilde{X}_2[k]$
4. $\tilde{X}[n]$	$N\tilde{x}[-k]$
5. $\tilde{x}[n-m]$	$W_N^{km}\tilde{X}[k]$
6. $W_N^{km}\tilde{x}[n]$	$\tilde{X}[k-m]$
7. $\sum_{m=0}^{N-1} \tilde{x}_1[m]\tilde{x}_2[n-m]$ (周期卷积)	$\tilde{X}_1[k]\tilde{X}_2[k]$
8. $\tilde{x}_1[n]\tilde{x}_2[n]$	$\frac{1}{N} \sum_{t=0}^{N-1} \tilde{X}_1[t]\tilde{X}_2[k-t]$ (周期卷积)
9. $\tilde{x}^*[n]$	$\tilde{X}^*[-k]$
10. $\tilde{x}^*[-n]$	$\tilde{X}^*[k]$
11. $\Re(\tilde{x}[n])$	$\tilde{X}_e[k] = \frac{1}{2}(\tilde{X}[k]+\tilde{X}^*[-k])$
12. $j\Im(\tilde{x}[n])$	$\tilde{X}_o[k] = \frac{1}{2}(\tilde{X}[k]-\tilde{X}^*[-k])$
13. $\tilde{x}_e[n] = \frac{1}{2}(\tilde{x}[n]+\tilde{x}^*[-n])$	$\Re(\tilde{X}[k])$
14. $\tilde{x}_o[n] = \frac{1}{2}(\tilde{x}[n]-\tilde{x}^*[-n])$	$j\Im(\tilde{X}[k])$

续表 8.1

周期序列(周期为 N)	DFS 的系数(周期为 N)
性质 15—17 只适用于 $x[n]$ 为实数的情况	
15. 对称性质	$\begin{cases} X[k] = \bar{X}[-k] \\ \Re(X[k]) = \Re(\bar{X}[-k]) \\ \Im(X[k]) = -\Im(\bar{X}[-k]) \\ X[k] = \bar{X}[-k] \\ \angle X[k] = -\angle \bar{X}[-k] \end{cases}$
16. $\tilde{x}_r[n] = \frac{1}{2}(x[n] + x[-n])$	$\Re(X[k])$
17. $\tilde{x}_i[n] = \frac{1}{2}(x[n] - x[-n])$	$j \Im(X[k])$

8.4 周期信号的傅里叶变换

正如 2.7 节中所讨论的,一个序列的傅里叶变换一致收敛要求该序列是绝对可加的,均方收敛要求该序列是平方可加的,周期序列均不满足这两个条件,因为当 $n \rightarrow \pm\infty$ 时序列不趋近于零.然而,正像我们在 2.7 节中简要讨论的,若序列能表示成复指数的和,则它可以具有形式如式(2.131)的傅里叶变换表示,即可以看作是一个冲激串.类似地,将周期信号的离散傅里叶级数表示归并入傅里叶变换的框架内常常是有益的.如将周期信号的傅里叶变换看作是频域的脉冲幅值正比于序列的 DFS 系数的一个脉冲串,就可以实现这一点.特别是,如果 $\tilde{x}[n]$ 是周期的,周期为 N ,并且所对应的离散傅里叶级数的系数为 $\tilde{X}[k]$,则 $\tilde{x}[n]$ 的傅里叶变换定义为脉冲串

$$\tilde{X}(e^{j\omega}) \triangleq \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{2\pi}{N} \tilde{X}[k] \delta\left(\omega - \frac{2\pi k}{N}\right). \quad (8.40)$$

注意,因为 $\tilde{X}[k+N] = \tilde{X}[k]$,所以 $\tilde{X}(e^{j\omega})$ 必然是周期的,周期为 2π ,并且脉冲间的间隔是 $2\pi/N$ 的整数倍,其中 N 为整数.为了证明由式(8.40)定义的 $\tilde{X}(e^{j\omega})$ 是周期序列 $\tilde{x}[n]$ 的傅里叶变换表示,我们把式(8.40)代入傅里叶反变换式(2.112),即

$$\frac{1}{2\pi} \int_{0-}^{2\pi-} \tilde{X}(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{0-}^{2\pi-} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{2\pi}{N} \tilde{X}[k] \delta\left(\omega - \frac{2\pi k}{N}\right) e^{j\omega n} d\omega. \quad (8.41)$$

回想一下在计算傅里叶反变换时,因为被积分函数 $\tilde{X}(e^{j\omega}) e^{j\omega n}$ 是周期的,且周期为 2π ,所以我们可以在长度为 2π 的任意区间上积分.在式(8.41)中积分限写作 $0-$ 和 $2\pi-$,这意味着积分是从正好在 $\omega=0$ 之前开始,到正好在 $\omega=2\pi$ 之前结束.这种积分限是比较方便的,因为它们包括了在 $\omega=0$ 处的脉冲,而不包括在 $\omega=2\pi$ 处的脉冲.交换积分和求和的先后次序,得

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{0-}^{2\pi-} \tilde{X}(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega &= \frac{1}{N} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \tilde{X}[k] \int_{0-}^{2\pi-} \delta\left(\omega - \frac{2\pi k}{N}\right) e^{j\omega n} d\omega \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}[k] e^{j(2\pi/N)kn}. \end{aligned} \quad (8.42)$$

得出式(8.42)最后的形式是由于在 $\omega=0-$ 至 $\omega=2\pi-$ 的区间内只包括对应于 $k=0, 1, \dots, N-1$ 的脉冲.

$\dots, (N-1)$ 的脉冲.

比较式(8.42)和式(8.12), 式(8.42)等号右边与式(8.12)所示的 $\tilde{x}[n]$ 的傅里叶表示完全相同. 因此, 式(8.40)中脉冲串的傅里叶反变换正是所要的周期信号 $\tilde{x}[n]$.

虽然周期序列的傅里叶变换在通常意义下是不收敛的, 但是引入了冲激函数后, 我们可以将周期序列纳入傅里叶变换分析的框架内. 这种方法在第二章中也曾使用过, 得出如像双边常数序列或通常的双边正弦或余弦序列之类的其它不可加序列的傅里叶变换表示. 尽管离散傅里叶级数表示适用于大多数场合, 但是式(8.40)的傅里叶变换表示有时可得出比较简单或简洁的表示式, 并且可使分析简化.

8.5 对傅里叶变换采样

在这一节中我们讨论非周期序列和周期序列之间的一般关系, 前者具有傅里叶变换 $X(e^{j\omega})$ 的形式, 后者的 DFS 系数对应于 $X(e^{j\omega})$ 在频率上等间隔的采样. 我们将会发现, 在本章后面讨论离散傅里叶变换及其性质时, 这一关系是非常重要的.

考虑一个非周期序列 $\tilde{x}[n]$, 其傅里叶变换为 $X(e^{j\omega})$, 且假定序列 $\tilde{X}[k]$ 是通过对 $X(e^{j\omega})$ 在 $2\pi k/N$ 频率处采样得到的, 即

$$\tilde{X}[k] = X(e^{j\omega})|_{\omega=(2\pi/N)k} = X(e^{j(2\pi/N)k}). \quad (8.43)$$

因为傅里叶变换是 ω 的周期函数, 周期为 2π , 所以得出的序列是 k 的周期函数, 周期为 N . 同样, 因为傅里叶变换等于 z 变换在单位圆上的值, 所以 $\tilde{X}[k]$ 也可以由在单位圆的 N 个等间隔的点上对 $X(z)$ 采样而得到. 这样有,

$$\tilde{X}[k] = X(z)|_{z=e^{j(2\pi/N)k}} = X(e^{j(2\pi/N)k}). \quad (8.44)$$

在图 8.7 中绘出了 $N=8$ 时的这些采样点.

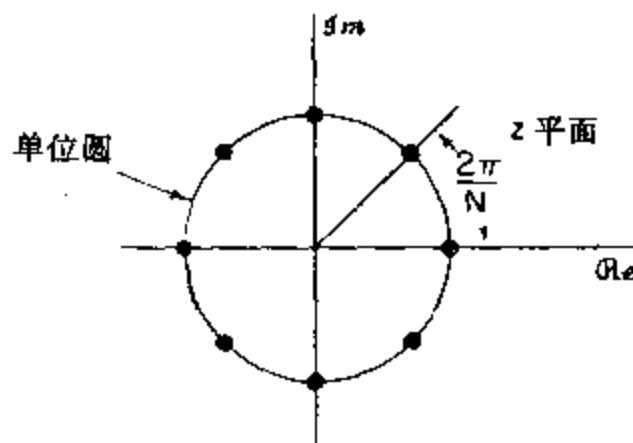


图 8.7 在单位圆上对 $X(z)$ 进行采样的点, 从而得出周期序列 $\tilde{X}[k]$ ($N=8$).

我们看到, 样本序列 $\tilde{X}[k]$ 是周期序列, 周期为 N , 它可以是一个序列 $\tilde{x}[n]$ 的离散傅里叶级数的系数序列. 为了得到这个序列, 我们可以简单地将 $\tilde{X}[k]$ 代入式(8.12):

$$\tilde{x}[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}[k] e^{-j\omega n}. \quad (8.45)$$

因为我们已经假定存在 $x[n]$ 的傅里叶变换, 所以 $X(e^{j\omega})$ 为

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m] e^{-j\omega m}. \quad (8.46)$$

将式(8.46)代入式(8.45), 然后将所得出的 $\tilde{X}[k]$ 的表示式代入式(8.45), 于是得

$$\tilde{x}[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \left[\sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m] e^{-j(2\pi/N)km} \right] W_N^{-kn}, \quad (8.47)$$

交换求和先后次序,上式成为

$$\tilde{x}[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m] \left[\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} W_N^{-k(n-m)} \right]. \quad (8.48)$$

由式(8.7)或式(8.16)可知,式(8.48)括号中的项可看作例 8.1 中周期脉冲串的傅里叶级数表示,特别是,

$$\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} W_N^{-k(n-m)} = \sum_{r=-\infty}^{\infty} \delta[n-m+rN] \quad (8.49)$$

和由此得出的

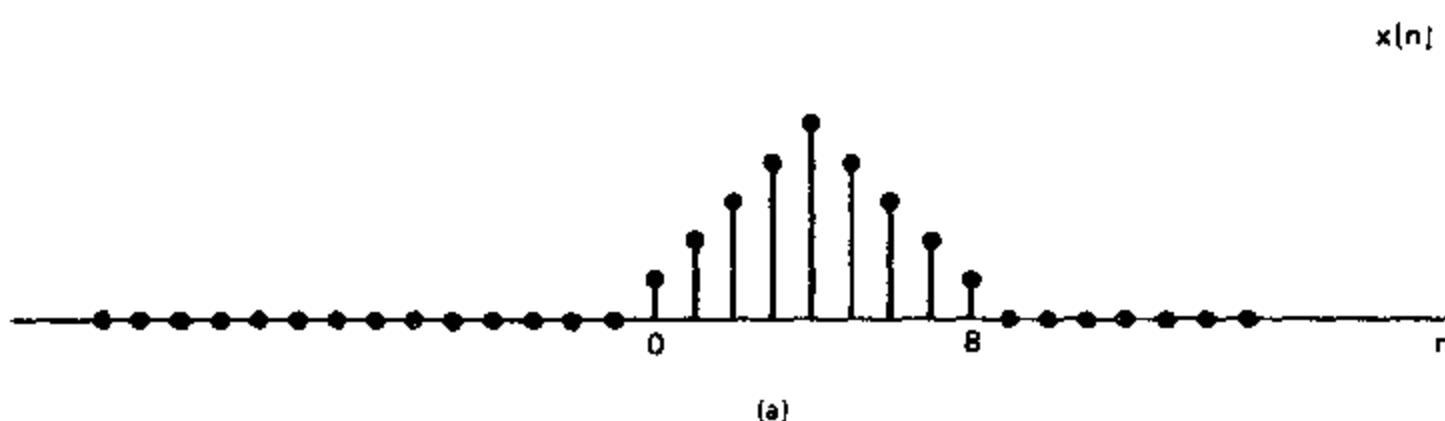
$$\tilde{x}[n] = x[n] * \sum_{r=-\infty}^{\infty} \delta[n+rN] = \sum_{r=-\infty}^{\infty} x[n+rN], \quad (8.50)$$

式中 * 表示非周期卷积。就是说, $\tilde{x}[n]$ 是周期序列, 因为它是 $x[n]$ 与一个周期单位冲激串的非周期卷积的结果。这样, 与 $\tilde{X}[k]$ 对应的周期序列 $\tilde{x}[n]$ 是把无数多个平移后的 $x[n]$ 加在一起而形成的, $\tilde{X}[k]$ 是对 $X(e^{j\omega})$ 采样而得到的。移位可以是 N 的正整数和负整数倍, N 为序列 $\tilde{X}[k]$ 的周期。图 8.8 举例说明了这一点。在图 8.8 的例子中, $x[n]$ 为长度为 9 的序列, 在式(8.50)中 $N=12$ 。结果, 延迟后的 $x[n]$ 序列没有重叠在一起, 并且周期序列 $\tilde{x}[n]$ 的一个周期就是 $x[n]$ 。这与 8.1 节中的讨论相符, 在那里我们曾证明了一个周期序列的傅里叶级数系数就是一个周期上的傅里叶变换的样本值。在图 8.9 中使用相同的序列 $x[n]$, 但此时 $N=7$ 。在这种情况下平移后的 $x[n]$ 序列相互重叠, 可是 $\tilde{x}[n]$ 的一个周期不再与 $x[n]$ 的周期相同。然而, 在这两种情况下式(8.43)仍然成立, 也就是说, 在这两种情况下, $\tilde{x}[n]$ 的 DFS 系数都是 $x[n]$ 的傅里叶变换在频率为 $2\pi/N$ 整数倍的等间隔点上的采样值。这一讨论使我们联想起在第三章中有关采样的讨论。不同的是, 这里我们是在频域上采样, 而不是在时域上。但是, 数学表示大体上是十分相似的。

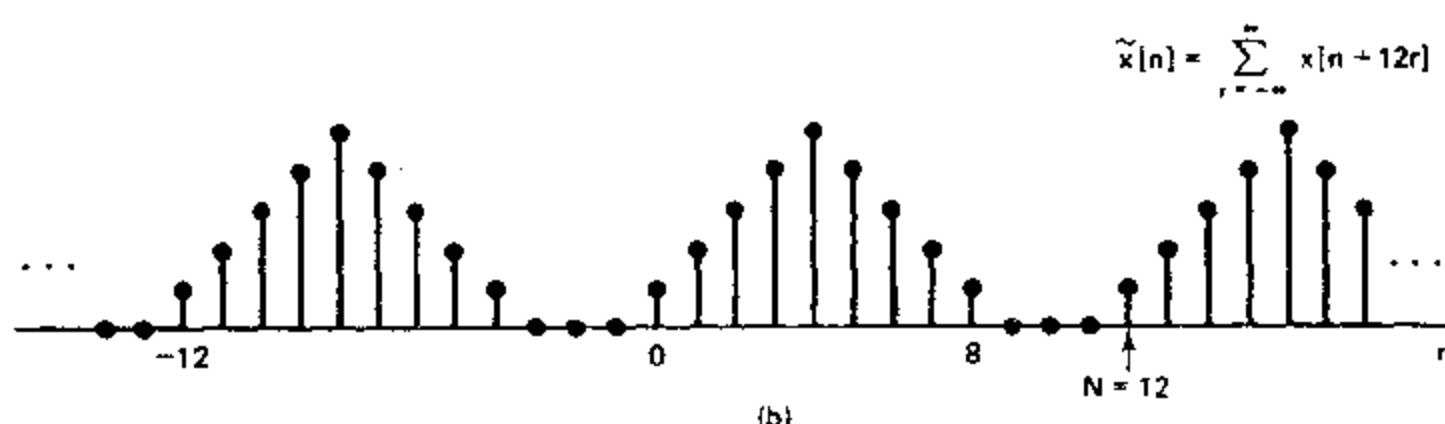
对于在图 8.8 中的例子, 原来的序列 $x[n]$ 可以从 $\tilde{x}[n]$ 中抽取出一个周期而恢复。同样, 傅里叶变换 $X(e^{j\omega})$ 也可以从频率上以 $2\pi/12$ 等间隔的采样来恢复。与之相反, 在图 8.9 中的 $x[n]$ 不能用取出 $\tilde{x}[n]$ 一个周期的方法来恢复, 同样, 如果采样间隔只有 $2\pi/7$, $X(e^{j\omega})$ 也不能由它的采样来恢复。实际上, 对于图 8.8 中所说明的情况, 已经用足够小的间隔(在频率上)对 $x[n]$ 的傅里叶变换采样, 以便能够由这些样本来恢复该变换, 而图 8.9 表示一种对傅里叶变换欠采样的情况。在图 8.9 所示欠采样的情况下, $x[n]$ 和 $\tilde{x}[n]$ 的一个周期之间的关系可以认为是在时域产生混叠的一种形式, 基本上等同于频域的混叠(在第三章中曾讨论过), 它是由时域的欠采样所引起的。显然, 只要 $x[n]$ 为有限长, 时域混叠就可避免, 正如信号的傅里叶变换只要是带宽有限的, 其频域混叠也可以避免。

这段讨论强调了几个重要的概念, 它们将在本章的后续部分中起着重要的作用。我们已经看到, 可以把一个非周期序列 $x[n]$ 的傅里叶变换的采样看作是通过将 $x[n]$ 周期重复而得到的一个周期序列 $\tilde{x}[n]$ 的 DFS 系数。如果 $x[n]$ 为有限长, 并且我们取其傅里叶变换足够多的等间隔采样值(特别是, 个数大于或等于 $x[n]$ 的长度), 则傅里叶变换是可以由这些采样值来恢复的, 同样 $x[n]$ 可以由如下关系来恢复:

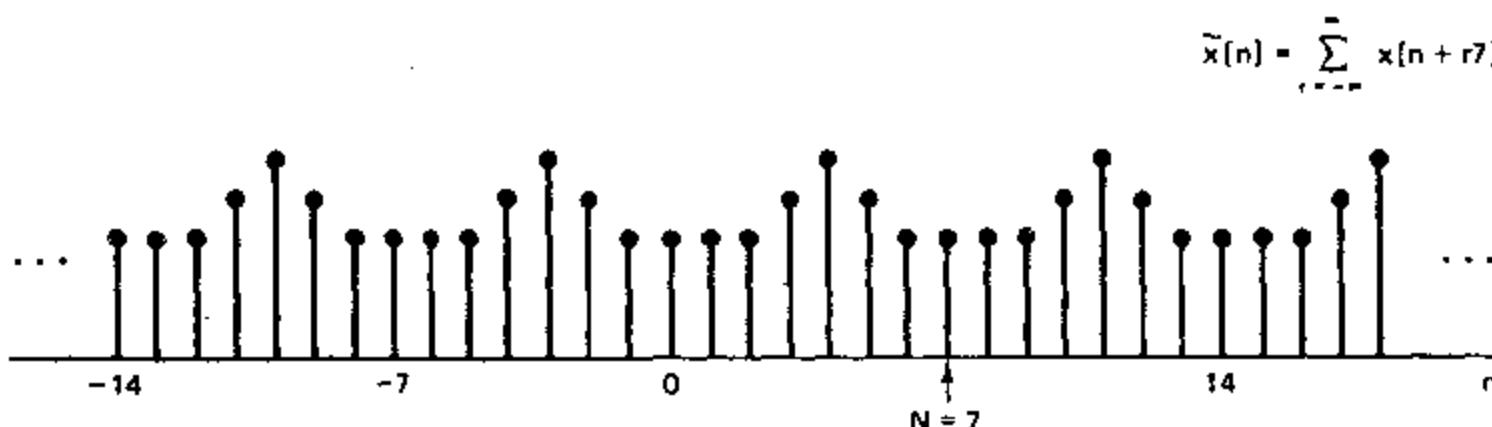
$$x[n] = \begin{cases} \tilde{x}[n], & 0 \leq n \leq N-1, \\ 0, & \text{其它.} \end{cases} \quad (8.51)$$



(a)



(b)

图 8.8 (a)有限长序列 $x[n]$. (b)对于取 $N=12$ 时对 $x[n]$ 的傅里叶变换采样的周期序列 $\tilde{x}[n]$.图 8.9 对应于取 $N=7$ 时对图 8.8(a)中的 $x[n]$ 的傅里叶变换采样的周期序列 $\tilde{x}[n]$.

可以推导出 $X(e^{j\omega})$ 及其采样 $\tilde{X}[k]$ 之间的直接关系——对于 $X(e^{j\omega})$ 的内插公式(见习题 8.8). 然而, 以上讨论的基本点是, 如果 $x[n]$ 为有限长, 就没有必要知道在所有频率处的 $X(e^{j\omega})$ 值. 若给出一个有限长序列 $x[n]$, 就能按式(8.50)形成一个周期序列, 也就能用傅里叶级数来表示. 另外, 若给出傅里叶系数 $\tilde{X}[k]$, 我们就可以求出 $\tilde{x}[n]$, 然后利用式(8.51)得到 $x[n]$. 当利用傅里叶级数以这种方式来表示有限长序列时, 就将它称为离散傅里叶变换(DFT). 在推导、讨论和应用 DFT 时应记住, 通过傅里叶变换的采样值来表示, 实际上是用一个周期序列来表示有限长序列, 该周期序列的一个周期正是我们要表示的有限长序列.

8.6 有限长序列的傅里叶表示: 离散傅里叶变换

在这一节我们用公式来描述上一节末所建议的观点. 首先, 我们来研究一个有 N 个样本的有限长序列 $x[n]$, 在 $0 \leq n \leq N-1$ 之外 $x[n]=0$. 在许多情况下, 我们都假设一个

序列长度为 N , 即使它的长度为 $M \leq N$. 在这种情况下, 我们只是认为最后 $(N-M)$ 个样本值为零. 对于每一个长度为 N 的有限长序列, 我们总可以与一个周期序列 $\tilde{x}[n]$ 联系起来, $\tilde{x}[n]$ 由下式给出:

$$\tilde{x}[n] = \sum_{r=-\infty}^{\infty} x[n+rN]. \quad (8.52a)$$

有限长序列 $x[n]$ 可以通过式(8.51)由 $\tilde{x}[n]$ 来恢复, 即

$$x[n] = \begin{cases} \tilde{x}[n], & 0 \leq n \leq N-1, \\ 0, & \text{其它.} \end{cases} \quad (8.52b)$$

由 8.4 节使我们想到, $\tilde{x}[n]$ 的 DFS 系数是 $x[n]$ 的傅里叶变换的采样(频率间隔为 $2\pi/N$). 因为假定 $x[n]$ 为有限长 N , 所以对于不同的 r 值, 在 $x(n+rN)$ 各项之间没有重叠. 这样, 式(8.52a)可以写成另一种形式

$$\tilde{x}[n] = x[(n \bmod N)]. \quad (8.53)$$

为了方便起见, 我们用符号 $((n))_N$ 表示 (n) 以 N 为模. 利用这种符号, 式(8.53)可以表示为

$$\tilde{x}[n] = x[((n))_N]. \quad (8.54)$$

注意, 只有当 $x[n]$ 的长度小于或等于 N 时, 式(8.54)才与式(8.52)等价. 有限长序列 $x[n]$ 是由 $\tilde{x}[n]$ 取出一个周期而得到的, 如式(8.52b).

将式(8.53)形象化的一种非正式且有用的方式是, 可以想像成把有限长序列 $x[n]$ 缠绕在一个周长等于序列长度的圆柱体上. 如果重复地转动圆柱体的圆周, 我们就会看到有限长序列周期地重复着. 利用这种解释, 用一个周期序列来表示有限长序列就相当于把该序列围绕着这种圆柱体缠绕. 使用式(8.51)可以把从周期序列恢复有限长序列形象化地变成把圆柱体展开并将它铺平, 以便使序列显示在线性时间轴上, 而不是在循环(以 N 为模的)时间轴上.

正如在 8.1 节中所定义的, 周期序列 $\tilde{x}[n]$ 的离散傅里叶级数的系数 $\tilde{X}[k]$ 本身是一个周期为 N 的周期序列. 为了保持时域和频域之间的对偶性, 我们将把与有限长序列相联系的傅里叶系数选取为与 $\tilde{X}[k]$ 的一个周期相对应的有限长序列. 这个有限长序列 $X[k]$ 与 DFS 系数 $\tilde{X}[k]$ 有如下关系:

$$X[k] = \begin{cases} \tilde{X}[k], & 0 \leq k \leq N-1, \\ 0, & \text{其它.} \end{cases} \quad (8.55)$$

和

$$\tilde{X}[k] = X[(k \bmod N)] = X[((k))_N]. \quad (8.56)$$

由 8.1 节知, $\tilde{X}[k]$ 和 $\tilde{x}[n]$ 由下式相联系:

$$\tilde{X}[k] = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}[n] W_N^{nk}, \quad (8.57)$$

$$\tilde{x}[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}[k] W_N^{-kn}. \quad (8.58)$$

因为在式(8.57)和(8.58)中的求和只涉及零到 $(N-1)$ 这一区间, 所以由式(8.51)至式(8.58)可得

$$X[k] = \begin{cases} \sum_{n=0}^{N-1} x[n]W_N^{kn}, & 0 \leq k \leq N-1, \\ 0, & \text{其它,} \end{cases} \quad (8.59)$$

$$x[n] = \begin{cases} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k]W_N^{-kn}, & 0 \leq n \leq N-1, \\ 0, & \text{其它.} \end{cases} \quad (8.60)$$

通常 DFT 的分析式和综合式为

$$\text{分析式: } X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]W_N^{kn}, \quad (8.61)$$

$$\text{综合式: } x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k]W_N^{-kn}. \quad (8.62)$$

就是说,这意味着如下事实:对于在区间 $0 \leq k \leq N-1$ 之外的 k , $X[k]=0$. 而且,对于在区间 $0 \leq n \leq N-1$ 之外的 n , $x[n]=0$,但这一点并不总是明显地说出来. 称式(8.61)为分析式,称式(8.62)为综合式. 由式(8.61)和式(8.62)所表示的 $x[n]$ 和 $X[k]$ 之间的关系有时记作

$$x[n] \xleftrightarrow{\text{DFT}} X[k]. \quad (8.63)$$

对于有限长序列用式(8.61)和式(8.62)的形式来改写式(8.11)和式(8.12),并没有消除固有的周期性. 如同 DFS 一样,DFT $X[k]$ 等于周期的傅里叶变换 $X(e^{j\omega})$ 的采样,并且若对于在区间 $0 \leq n \leq N-1$ 之外的 n 值来计算式(8.62),其结果并不为零,而是 $x[n]$ 的周期延拓. 固有的周期性总是存在的. 虽然有时候它使我们感到棘手,有时候对我们有用,但是将它完全忽略掉将要引起麻烦. 在定义 DFT 表示式时,我们仅仅认为,我们感兴趣的 $x[n]$ 值只是在区间 $0 \leq n \leq N-1$ 内,因为 $x[n]$ 在该区间之外的确为零,并且认为所感兴趣的 $X[k]$ 值也只是在区间 $0 \leq k \leq N-1$ 内,因为在式(8.62)中只需要这些值.

例 8.5

为了说明有限长序列的 DFT,考虑图 8.10(a)所示 $x[n]$. 在确定 DFT 时,我们可以将 $x[n]$ 看作是一个长度 $N \geq 5$ 的任意有限长序列. 设想 $x[n]$ 为长度 $N=5$ 的序列,周期序列 $\tilde{x}[n]$ 如图 8.10(b)所示, $\tilde{x}[n]$ 的 DFS 与 $x[n]$ 的 DFT 相对应. 因为在图 8.10(b)中的序列在区间 $0 \leq n \leq N-1$ 上为常数值,所以可以得出

$$\begin{aligned} \tilde{X}[k] &= \sum_{n=0}^{N-1} e^{-j(2\pi k/N)n} = \frac{1-e^{-j2\pi k}}{1-e^{-j(2\pi k/N)}} \\ &= \begin{cases} N, & k=0, \pm N, \pm 2N, \dots, \\ 0, & \text{其它,} \end{cases} \end{aligned} \quad (8.64)$$

也就是说,只有在 $k=0$ 和 $k=N$ 的整数倍处才有非零的 DFS 系数 $\tilde{X}[k]$ 值(这些所有的非零系数表示相同的复指数频率). 这些 DFS 系数如图 8.10(c)所示. 而且图 8.10(c)所表示的是傅里叶变换的幅值 $|X(e^{j\omega})|$. 很清楚, $\tilde{X}[k]$ 就是 $X(e^{j\omega})$ 在频率 $\omega_k = 2\pi k/N$ 处样本序列. 按照式(8.55), $x[n]$ 的 5 点 DFT 对应于抽取 $\tilde{X}[k]$ 的一个周期而得到的有限长序列. 这样, $x[n]$ 的 5 点 DFT 如图 8.10(d)所示.

如果我们考虑将 $x[n]$ 换成长度 $N=10$ 的序列,则基本的周期序列如图 8.11(b)所

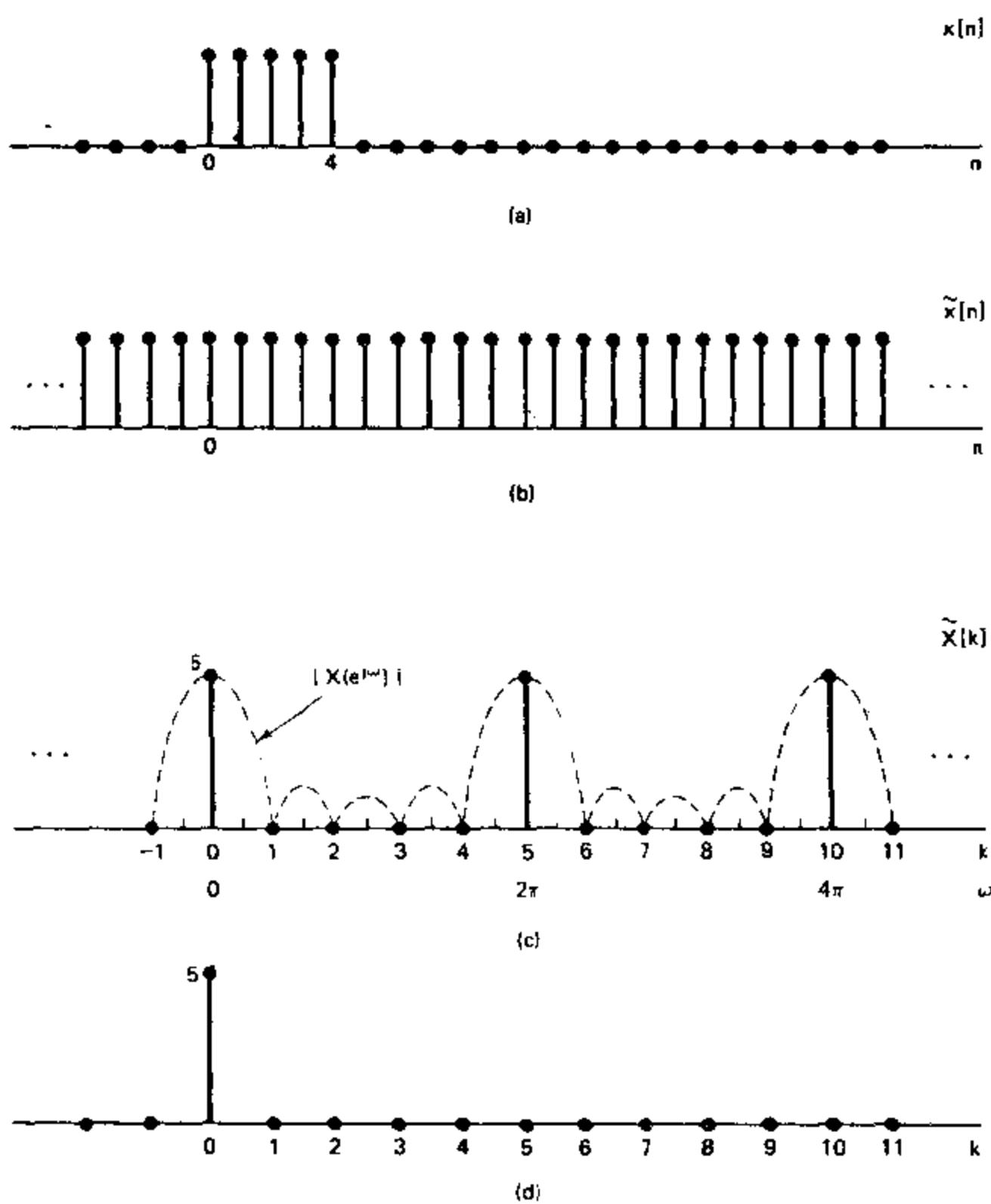


图 8.10 DFT 的举例说明. (a) 有限长序列 $x[n]$. (b) 由 $x[n]$ 形成的周期 $N=5$ 的周期序列. (c) 对应于 $\tilde{x}[n]$ 的傅里叶级数系数 $\tilde{X}[k]$. (为了着重说明傅里叶级数的系数是傅里叶变换的采样, 也画出了 $|X(e^{j\omega})|$). (d) $x[n]$ 的 DFT.

示, 它正是例 8.2 中所用到的周期序列. 因此, $\tilde{X}[k]$ 正如在图 8.2 和图 8.5 中所画的那样, 而且图 8.11(c)和图 8.11(d)所示的 10 点 DFT $X[k]$ 是 $\tilde{X}[k]$ 的一个周期.

通过式(8.51)和式(8.54)联系起来的有限长序列 $x[n]$ 和周期序列 $\tilde{x}[n]$ 之间的差别似乎很小, 因为利用这两个方程式可以直接从一个构造出另一个. 然而在研究 DFT 的性质以及改变 $x[n]$ 对 $X[k]$ 的影响时, 这种差别是很重要的. 这一点在下一节讨论 DFT 表示的性质时将变得很明显.

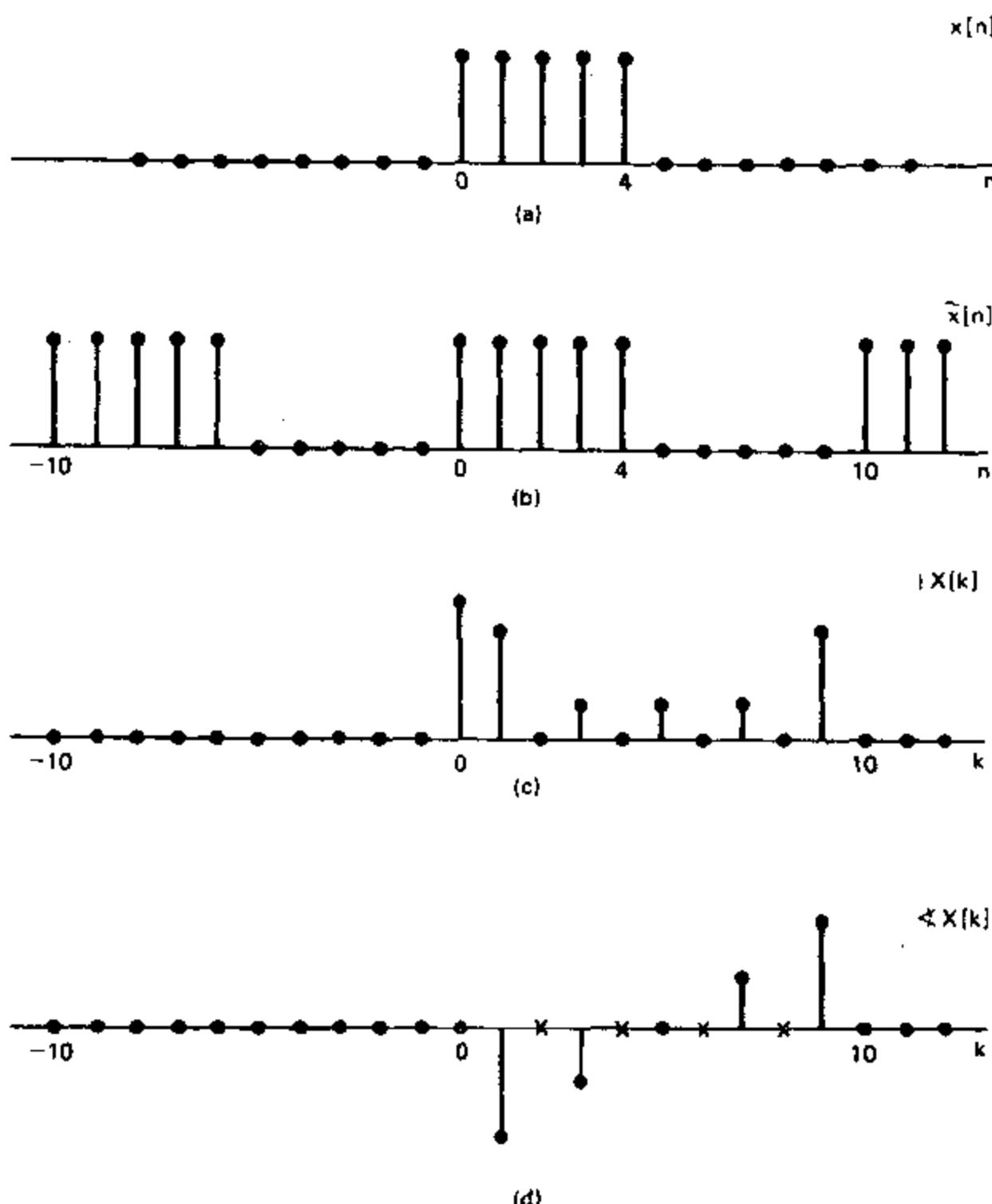


图 8.11 DFT 的举例说明。(a) 有限长序列 $x[n]$ 。(b) 由 $x[n]$ 形成的周期 $N=10$ 的周期序列 $\tilde{x}[n]$ 。(c) DFT 的幅值。(d) DFT 的相位。(\times 表示不确定的值。)

8.7 离散傅里叶变换的性质

这一节我们来研究有限长序列 DFT 的一些性质。我们的讨论类似于 8.2 节对于周期序列的讨论。但是，这里特别侧重于有限长的假定与有限长序列 DFT 表示的隐含周期性之间的相互影响。

8.7.1 线性

如果两个有限长序列 $x_1[n]$ 和 $x_2[n]$ 线性组合如下：

$$x_3[n] = ax_1[n] + bx_2[n], \quad (8.65)$$

则 $x_3[n]$ 的 DFT 为

$$X_3[k] = aX_1[k] + bX_2[k]. \quad (8.66)$$

显然,若 $x_1[n]$ 的长度为 N_1 ,且 $x_2[n]$ 的长度为 N_2 ,则 $x_3[n]$ 的最大长度为 $N_3 = \max[N_1, N_2]$.因此,它们的 DFT 必须按 $N \geq N_3$ 来计算.例如,若 $N_1 < N_2$,则 $X_1[k]$ 为序列 $x_1[n]$ 增加 $(N_2 - N_1)$ 个零点后的 DFT.也就是说,它的 N_2 点 DFT 是

$$X_1[k] = \sum_{n=0}^{N_2-1} x_1[n] W_{N_2}^{kn}, \quad 0 \leq k \leq N_2 - 1, \quad (8.67)$$

且 $x_2[n]$ 的 N_2 点 DFT 是

$$X_2[k] = \sum_{n=0}^{N_2-1} x_2[n] W_{N_2}^{kn}, \quad 0 \leq k \leq N_2 - 1. \quad (8.68)$$

总之,若

$$x_1[n] \xleftrightarrow{\text{DFT}} X_1[k] \quad (8.69a)$$

且

$$x_2[n] \xleftrightarrow{\text{DFT}} X_2[k], \quad (8.69b)$$

则

$$ax_1[n] + bx_2[n] \xleftrightarrow{\text{DFT}} aX_1[k] + bX_2[k], \quad (8.70)$$

式中每个序列及其离散傅里叶变换的长度均等于 $x_1[n]$ 和 $x_2[n]$ 中的最大长度.当然,大于该长度的 DFT 也可以计算,只要给两个序列增加零值采样点即可.

8.7.2 序列的循环移位

按照 2.9.2 节的规则及表 2.2 中的性质 2,如果 $X(e^{j\omega})$ 是 $x[n]$ 的傅里叶变换,则 $e^{-j\omega m} X(e^{j\omega})$ 是时间移位序列 $x[n-m]$ 的傅里叶变换.换句话说,在时域 m 点的移位(m 为正对应于时间延迟,而 m 为负则对应于时间超前)相当于在频域给傅里叶变换乘以线性相位因子 $e^{-j\omega m}$.在 8.2.2 节中我们曾讨论过一个周期序列的 DFS 系数所对应的性质,特别是,若一个周期序列 $\tilde{x}[n]$ 具有傅里叶级数系数 $\tilde{X}[k]$,则移位后的序列 $\tilde{x}[n-m]$ 的傅里叶级数系数为 $e^{-j(2\pi k/N)m} \tilde{X}[k]$.现在我们来研究对应于用线性相位因子 $e^{-j(2\pi k/N)m}$ 乘以有限长序列 $x[n]$ 的 DFT 系数的时域中的运算.特别是,令 $x_1[n]$ 表示一有限长序列,该序列的 DFT 是 $e^{-j(2\pi k/N)m} X[k]$,即

$$x[n] \xleftrightarrow{\text{DFT}} X[k] \quad (8.71)$$

且

$$x_1[n] \xleftrightarrow{\text{DFT}} X_1[k] = e^{-j(2\pi k/N)m} X[k]. \quad (8.72)$$

因为 N 点 DFT 表示一个长度为 N 的有限长序列,所以 $x[n]$ 和 $x_1[n]$ 在区间 $0 \leq n \leq N-1$ 以外必须为零.因此 $x_1[n]$ 不能由 $x[n]$ 的一个简单的移位来得到.正确的结果可以直接由 8.2.2 节的结果得出,而且把 DFT 看作是周期序列 $x_1[((n))_N]$ 的傅里叶级数之系数.特别是,由式(8.53)和(8.56)可得

$$\tilde{x}[n] = x[((n))_N] \xleftrightarrow{\text{DFT}} \tilde{X}[k] = X[((k))_N] \quad (8.73)$$

同样,我们可以定义一个周期序列 $\tilde{x}_1[n]$ 为

$$\tilde{x}_1[n] = x_1[((n))_N] \xleftrightarrow{\text{DFT}} \tilde{X}_1[k] = X_1[((k))_N], \quad (8.74)$$

根据定义,式中

$$X_1[k] = e^{-j(2\pi k/N)m} X[k]. \quad (8.75)$$

因此, $\tilde{x}_1[n]$ 的离散傅里叶级数的系数是

$$\tilde{X}_1[k] = e^{-j[2\pi((k))_N/N]m} X[((k))_N]. \quad (8.76)$$

注意

$$e^{-j[2\pi((k))_N/N]m} = e^{-j(2\pi k/N)m}. \quad (8.77)$$

也就是说,因为对于 k 和 m , $e^{-j(2\pi k/N)m}$ 均是周期的,且周期为 N ,所以我们可以省去记号 $((k))_N$. 这样,式(8.76)成为

$$\tilde{X}_1[k] = e^{-j(2\pi k/N)m} \tilde{X}[k], \quad (8.78)$$

所以由 8.2.2 节可得

$$\tilde{x}_1[n] = \tilde{x}[n-m] = x[((n-m))_N]. \quad (8.79)$$

于是,其 DFT 由式(8.75)给出的有限长序列 $x_1[n]$ 为

$$x_1[n] = \begin{cases} \tilde{x}_1[n] = x[((n-m))_N], & 0 \leq n \leq N-1, \\ 0, & \text{其它.} \end{cases} \quad (8.80)$$

式(8.79)和(8.80)告诉我们如何构造 $x_1[n]$. 当 $m = -2$ 时其步骤如图 8.12 所示. 特别是,如图 8.12(b)所示,我们从 $x[n]$ 来构造周期序列 $\tilde{x}[n] = x[((n))_N]$. 然后按照式(8.79)将 $\tilde{x}[n]$ 移位 m 而得到 $\tilde{x}_1[n] = \tilde{x}[n-m]$, 如图 8.12(c)所示. 最后利用式(8.80), 我们提取 $\tilde{x}_1[n]$ 的一个周期得出 $x_1[n]$, 如图 8.12(d)所示.

比较图 8.12(a)和(d)清楚地表明 $x_1[n]$ 并不相当于 $x[n]$ 的一个线性移位,而且在事实上两个序列均限制在 0 到 $(N-1)$ 的区间内. 参照图 8.12 我们看出,可以用将 $x[n]$ 移位的方法产生 $x_1[n]$, 只要当一个序列值离开区间 0 到 $(N-1)$ 的一端时,就让该值进入这个区间的另一端即可. 在 8.6 节中我们曾建议,可以通过展示围绕在圆周正好等于 N 点的一个圆柱体上的 $x[n]$ 来说明如何从有限长序列产生周期序列 $\tilde{x}[n]$. 如果我们反复转动圆柱体的圆周,则所看到的序列就是周期序列 $\tilde{x}[n]$. 这样周期序列 $\tilde{x}[n]$ 的线性移位相当于圆柱体的旋转. 在有限长序列和 DFT 的有关论述中,把这样一种移位称为在区间 $0 \leq n \leq N-1$ 内的循环移位或者序列的旋转.

总之,DFT 的循环移位性质是

$$x[((n-m))_N], \quad 0 \leq n \leq N-1 \quad \xleftrightarrow{\mathcal{DFT}} e^{-j(2\pi k/N)m} X[k] \quad (8.81)$$

8.7.3 对偶性

由于 DFT 与 DFS 有着十分密切的联系,因此我们可以预见到 DFT 将表现出类似于在 8.2.3 节讨论 DFS 所具有的对偶性质. 事实上,从式(8.61)和式(8.62)可知,分析式和综合式之间只差因子 $1/N$ 以及 W_N 的幂指数的符号.

DFT 对偶性的推导可以很容易地通过揭示 DFT 和 DFS 之间的关系来进行,如同我们在推导循环移位性质时所作的那样. 为此,考虑 $x[n]$ 及其 DFT $X[k]$,且构造周期序列

$$\tilde{x}[n] = x[((n))_N], \quad (8.82a)$$

$$\tilde{X}[k] = X[((k))_N], \quad (8.82b)$$

从而

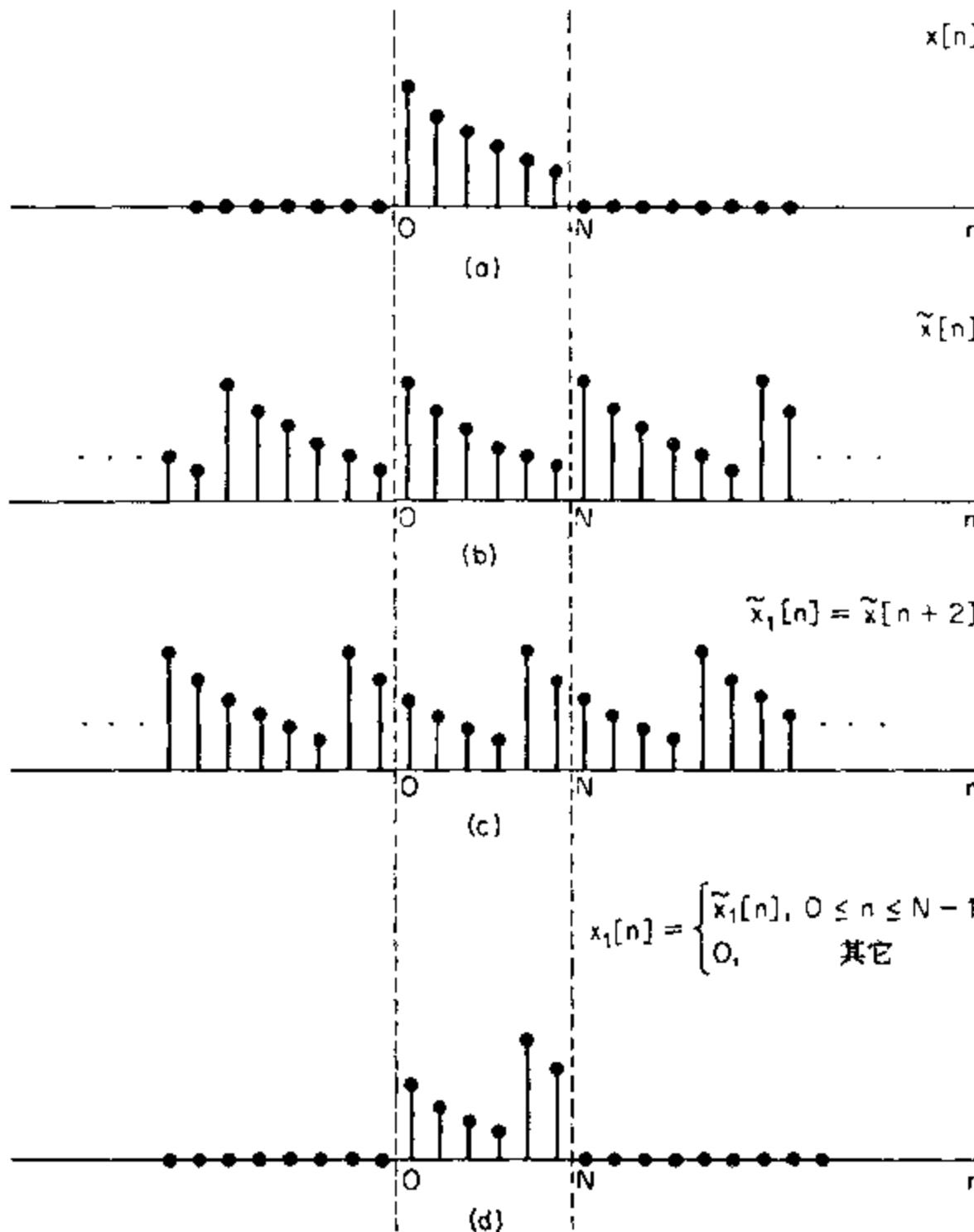


图 8.12 有限长序列的循环移位. 相当于用一个线性相位因子乘以该序列的 DFT 在时域产生的结果.

$$\tilde{x}[n] \xleftrightarrow{\text{DFS}} \tilde{X}[k]. \quad (8.83)$$

由式(8.30)给出的对偶性, 得

$$\tilde{X}[n] \xleftrightarrow{\text{DFS}} N\tilde{x}[-k]. \quad (8.84)$$

如果我们定义周期序列 $\tilde{x}_1[n] = \tilde{X}[n]$, 它的一个周期是有限长序列 $x_1[n] = X[n]$, 则 $\tilde{x}_1[n]$ 的 DFS 系数是 $\tilde{X}_1[k] = N\tilde{x}[-k]$. 因此 $x_1[n]$ 的 DFT 是

$$X_1[k] = \begin{cases} N\tilde{x}[-k], & 0 \leq k \leq N-1, \\ 0, & \text{其它}, \end{cases} \quad (8.85)$$

或者等效地

$$X_1[k] = \begin{cases} Nx[((-k))_N], & 0 \leq k \leq N-1, \\ 0, & \text{其它}. \end{cases} \quad (8.86)$$

因此,对于 DFT,对偶性可以表述为:若

$$x[n] \xleftrightarrow{\text{DFT}} X[k], \quad (8.87\text{a})$$

则

$$X[n] \xleftrightarrow{\text{DFT}} Nx[((-k))_N], \quad 0 \leq k \leq N-1. \quad (8.87\text{b})$$

序列 $Nx[((-k))_N]$ 就是 $Nx[k]$ 将变量反转且以 N 为模。正如以 N 为模移位的情况,利用下面的周期序列可以很好地表现以 N 为模把变量反转的实际过程。

例 8.6

为了说明式(8.87)中的对偶关系,我们来研究一下例 8.5 中的序列 $x[n]$ 。图 8.13(a)表示有限长序列 $x[n]$,图 8.13(b)和 8.13(c)分别对应于 10 点 DFT $X[k]$ 的实部和虚部。通过简单地重新标定水平轴,可得 $x_1[n] = X[n]$,如图 8.13(d)和图 8.13(e)所示。根据式(8.87)的对偶关系,(复数值)序列 $X[n]$ 的 10 点 DFT 就是图 8.13(f)中所示的序列。

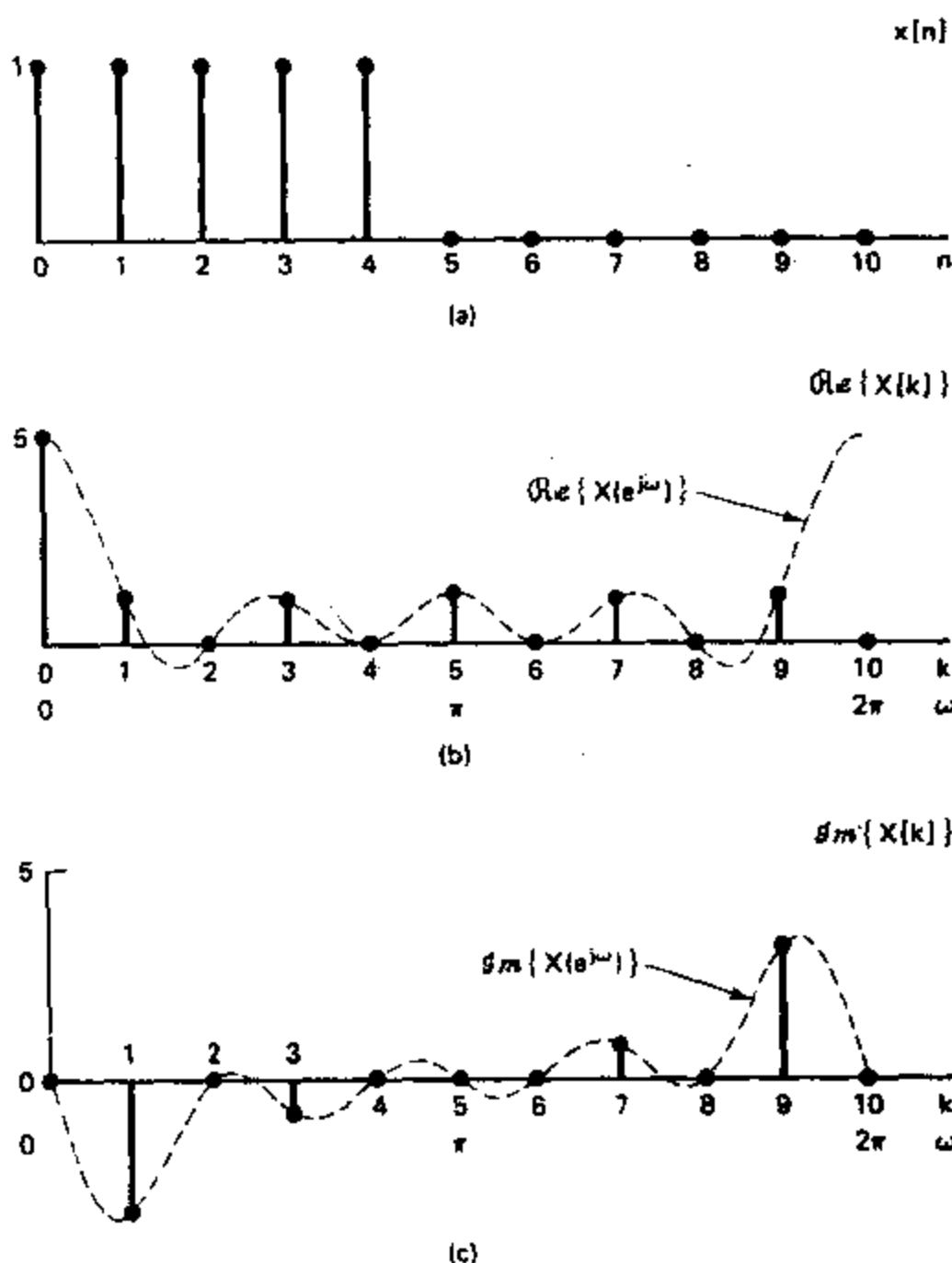


图 8.13 对偶性举例。(a) 为实有限长序列 $x[n]$ 。(b) 和 (c) 分别对应 DFT $X[k]$ 的实部和虚部。

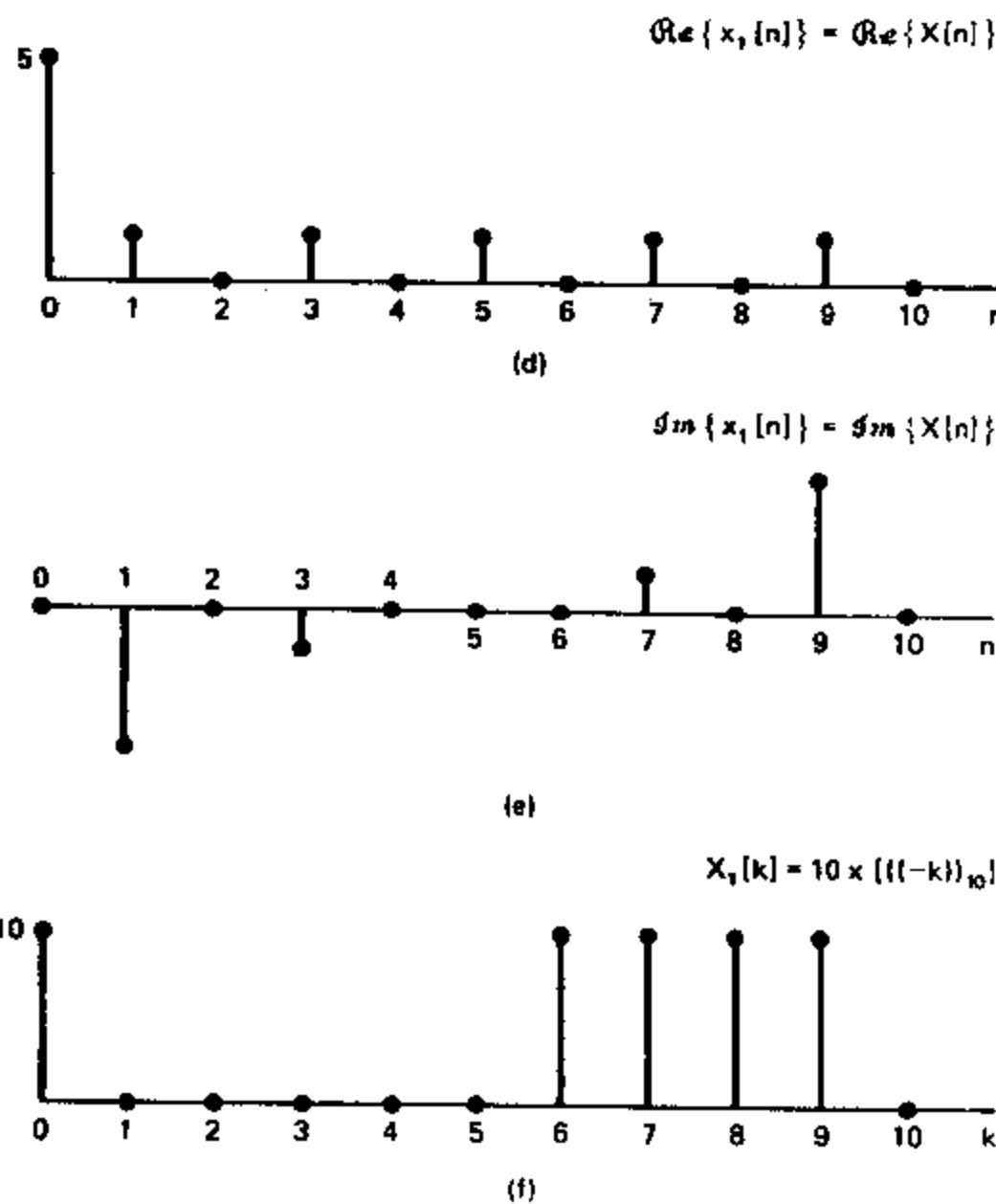


图 8.13(续) (d)和(e)分别为对偶序列 $x_1[n]=X[n]$ 的实部和虚部, (f)为 $x_1[n]$ 的 DFT.

8.7.4 对称性

因为 $x[n]$ 的 DFT 等同于周期序列 $\tilde{x}[n]=x[((n))_N]$ 的 DFS 系数, 所以与 DFT 有关的对称性可以由 8.3 节表 8.1 中总结的 DFS 的对称性推理得出. 特别是利用式(8.82)并同时考虑到表 8.1 中的性质 9 和性质 10, 有

$$x^*[n] \xleftrightarrow{\text{DFS}} X^*[((-k))_N], \quad 0 \leq n \leq N-1, \quad (8.88)$$

和

$$x^*[((-n))_N] \xleftrightarrow{\text{DFS}} X^*[k], \quad 0 \leq n \leq N-1. \quad (8.89)$$

表 8.1 中的性质 11 至 14 指出, 一个周期序列可分解为一个共轭对称序列和一个共轭反对称序列之和. 这一点提示我们, 有限长序列 $x[n]$ 可分解为两个长度为 N 的有限长序列, 一个对应于 $\tilde{x}[n]$ 中的一个周期的共轭对称分量, 另一个对应于 $\tilde{x}[n]$ 中的一个周期的共轭反对称的分量. 我们把 $x[n]$ 的这两个分量分别记作 $x_{ep}[n]$ 和 $x_{op}[n]$. 这样通过

$$\tilde{x}[n] = x[((n))_N] \quad (8.90)$$

和

$$\tilde{x}_e[n] = \frac{1}{2} (\tilde{x}[n] + \tilde{x}^*[-n]) \quad (8.91)$$

以及

$$\tilde{x}_o[n] = \frac{1}{2} \{\tilde{x}[n] - \tilde{x}^*[-n]\}, \quad (8.92)$$

我们定义 $x_{ep}[n]$ 和 $x_{op}[n]$ 为

$$x_{ep}[n] = \tilde{x}_e[n], \quad 0 \leq n \leq N-1, \quad (8.93)$$

$$x_{op}[n] = \tilde{x}_o[n], \quad 0 \leq n \leq N-1. \quad (8.94)$$

或者等效地

$$x_{ep}[n] = \frac{1}{2} \{x[(n)_N] + x^*[((-n))_N]\}, \quad 0 \leq n \leq N-1, \quad (8.95a)$$

$$x_{op}[n] = \frac{1}{2} \{x[(n)_N] - x^*[((-n))_N]\}, \quad 0 \leq n \leq N-1, \quad (8.95b)$$

同时 $x_{ep}[n]$ 和 $x_{op}[n]$ 均为有限长序列, 即在区间 $0 \leq n \leq N-1$ 之外它们均为零. 因为对于 $0 \leq n \leq N-1$, $((-n))_N = (N-n)$ 且 $((n))_N = n$, 所以我们也可以将式(8.95)表示为

$$x_{ep}[n] = \frac{1}{2} \{x[n] + x^*[N-n]\}, \quad 1 \leq n \leq N-1, \quad (8.96a)$$

$$x_{ep}[0] = \mathcal{R}\epsilon\{x[0]\}, \quad (8.96b)$$

$$x_{op}[n] = \frac{1}{2} \{x[n] - x^*[N-n]\}, \quad 1 \leq n \leq N-1, \quad (8.96c)$$

$$x_{op}[0] = j \mathcal{I}\epsilon\{x[0]\}. \quad (8.96d)$$

方程的这种形式比较方便, 因为它避免了变量以 N 为模的运算.

显然, $x_{ep}[n]$ 和 $x_{op}[n]$ 不等于由式(2.133)定义的 $x_e[n]$ 和 $x_o[n]$. 但是, 可以证明(见习题 8.28)

$$x_{ep}[n] = \{x_e[n] + x_e[n-N]\}, \quad 0 \leq n \leq N-1 \quad (8.97)$$

和

$$x_{op}[n] = \{x_o[n] + x_o[n-N]\}, \quad 0 \leq n \leq N-1. \quad (8.98)$$

换句话说, 将 $x_e[n]$ 和 $x_o[n]$ 在区间 $0 \leq n \leq N-1$ 中混叠在一起可产生 $x_{ep}[n]$ 和 $x_{op}[n]$. 序列 $x_{ep}[n]$ 和 $x_{op}[n]$ 分别称为 $x[n]$ 的周期共轭对称分量和周期共轭反对称分量. 当 $x_{ep}[n]$ 和 $x_{op}[n]$ 是实序列时, 分别称为周期偶分量和周期奇分量. 注意, 序列 $x_{ep}[n]$ 和 $x_{op}[n]$ 不是周期序列, 但是它们是有限长序列, 分别等于周期序列 $\tilde{x}_e[n]$ 和 $\tilde{x}_o[n]$ 的一个周期.

式(8.95)和(8.96)是利用 $x[n]$ 来定义 $x_{ep}[n]$ 和 $x_{op}[n]$. 反之也可以利用 $x_{ep}[n]$ 和 $x_{op}[n]$ 来表示 $x[n]$, 其关系式可以由式(8.91)和式(8.92)得出. 先把 $\tilde{x}[n]$ 表示为

$$\tilde{x}[n] = \tilde{x}_e[n] + \tilde{x}_o[n]. \quad (8.99)$$

这样

$$x[n] = \tilde{x}[n] = \tilde{x}_e[n] + \tilde{x}_o[n], \quad 0 \leq n \leq N-1. \quad (8.100)$$

把式(8.100)与式(8.93)和(8.94)结合在一起, 可得

$$x[n] = x_{ep}[n] + x_{op}[n]. \quad (8.101)$$

换言之, 当加入式(8.96)时, 由此可得式(8.101)的结果. 现在可以直接得出与表 8.1 中性质 11 至 14 有关的 DFT 的对称性. 特别是

$$\mathcal{R}\epsilon\{x[n]\} \xleftrightarrow{\mathcal{DFT}} X_{ep}[k], \quad (8.102)$$

$$j \mathcal{I}\epsilon\{x[n]\} \xleftrightarrow{\mathcal{DFT}} X_{op}[k], \quad (8.103)$$

$$x_{ep}[n] \xleftrightarrow{\text{DFT}} \Re\{X[k]\}, \quad (8.104)$$

$$x_{op}[n] \xleftrightarrow{\text{DFT}} j \Im\{X[k]\}. \quad (8.105)$$

8.7.5 循环卷积

在 8.2.5 节中我们曾证明两个序列的 DFS 系数乘积对应于序列的周期卷积。这里我们先考虑两个有限长序列 $x_1[n]$ 和 $x_2[n]$, 长度均为 N , 其中 DFT 分别为 $X_1[k]$ 和 $X_2[k]$, 我们希望求出序列 $x_3[n]$, 其 DFT 为 $X_3[k] = X_1[k]X_2[k]$. 为了求出 $x_3[n]$, 我们可以使用 8.2.5 节的结果。具体地说, $x_3[n]$ 对应于 $\tilde{x}_3[n]$ 的一个周期, $\tilde{x}_3[n]$ 由式(8.32)给出。这样

$$x_3[n] = \sum_{m=0}^{N-1} \tilde{x}_3[m] \tilde{x}_3[n-m], \quad 0 \leq n \leq N-1 \quad (8.106)$$

或者等效地

$$x_3[n] = \sum_{m=0}^{N-1} x_1[((m))_N] x_2[((n-m))_N], \quad 0 \leq n \leq N-1. \quad (8.107)$$

因为对于 $0 \leq m \leq N-1$, $((m))_N = m$, 所以式(8.107)可以写成

$$x_3[n] = \sum_{m=0}^{N-1} x_1[m] x_2[((n-m))_N], \quad 0 \leq n \leq N-1. \quad (8.108)$$

式(8.106)和式(8.108)不同于在一些重要场合由式(2.39)定义的 $x_1[n]$ 和 $x_2[n]$ 的线性卷积。在线性卷积中, 计算序列 $x_3[n]$ 的值包括用一个时间反转且线性移位的序列来乘以另一个序列, 然后对于所有的 m 将乘积 $x_1[m]x_2[n-m]$ 加在一起。为了得到卷积序列依次的值, 其中一个序列要相对另一个依次进行移位。对于由式(8.108)表示的卷积则不同, 它需将第二个序列循环地作时间反转, 且相对于第一个序列循环地移位。由于这个原因, 按照式(8.108)把两个有限长序列结合在一起的运算称为循环卷积。更准确地说, 把式(8.108)称为 N 点循环卷积, 它清楚地规定两个序列的长度均为 N (或小于 N)、并且以 N 为模进行移位。有时, 把利用式(8.108)构成序列 $x_3[n]$ ($0 \leq n \leq N-1$)的运算记作

$$x_3[n] = x_1[n] \textcircled{N} x_2[n]. \quad (8.109)$$

因为 $x_3[n]$ 的 DFT 是 $X_3[k] = X_1[k]X_2[k]$, 并且还因为 $X_1[k]X_2[k] = X_2[k]X_1[k]$, 所以勿须进一步分析就可以得出

$$x_3[n] = x_2[n] \textcircled{N} x_1[n], \quad (8.110)$$

或者更明确一些, 为

$$x_3[n] = \sum_{m=0}^{N-1} x_2[m] x_1[((n-m))_N]. \quad (8.111)$$

这就是说, 循环卷积与线性卷积一样, 是可交换运算次序的。

由于循环卷积正是周期卷积, 因此例 8.4 和图 8.6 也正好说明循环卷积。但是, 如果我们利用循环移位的概念, 就不必构造出基本的周期序列。这一点会在下面的例子中加以说明。

例 8.7

8.7.2 节的结果提供了一个循环卷积的例子。设 $x_2[n]$ 是一个长度为 N 的有限长序列, 且

$$x_1[n] = \delta[n - n_0], \quad (8.112)$$

其中 $0 < n_0 < N$. 很清楚, $x_1[n]$ 可以认为是有限长序列

$$x_1[n] = \begin{cases} 0, & 0 \leq n \leq n_0, \\ 1, & n = n_0, \\ 0, & n_0 < n \leq N-1. \end{cases} \quad (8.113)$$

$x_1[n]$ 的 DFT 是

$$X_1[k] = W_N^{kn_0}. \quad (8.114)$$

如果我们形成乘积

$$X_3[k] = W_N^{kn_0} X_2[k], \quad (8.115)$$

则由 8.7.2 节可以看出, 对应于 $X_3[k]$ 的有限长序列是在区间 $0 \leq n \leq N-1$ 中将序列 $x_2[n]$ 向右边旋转 n_0 个采样点后的序列. 也就是说, 序列 $x_2[n]$ 与一个延迟的单位冲激序列的循环卷积就是在区间 $0 \leq n \leq N-1$ 中把序列 $x_2[n]$ 加以旋转. 作为一个例子, 图 8.14 示出了 $N=5$ 且 $n_0=1$ 时的情况. 图中先绘出了序列 $x_2[m]$ 和 $x_1[m]$, 然后绘出了

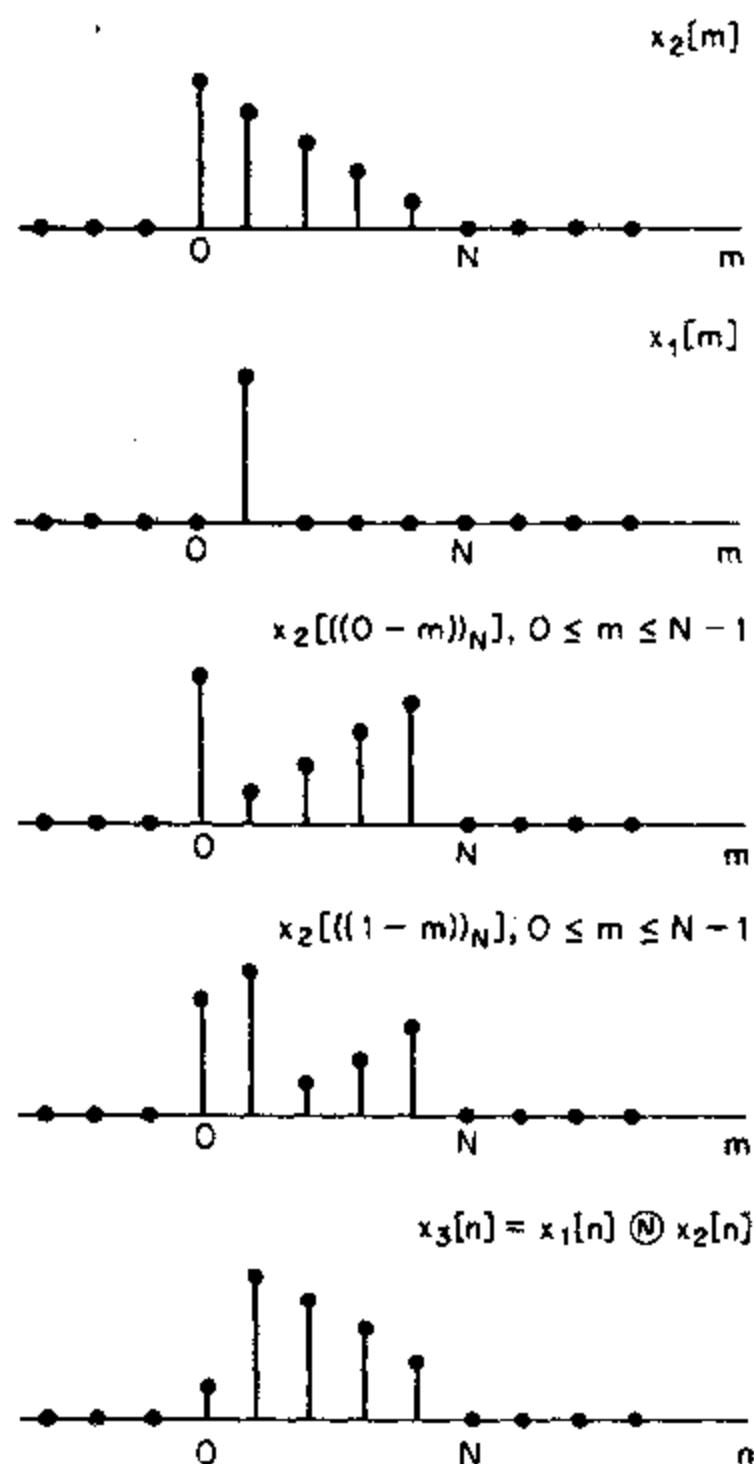


图 8.14 有限长序列 $x_2[n]$ 和一个延迟的冲激序列的循环卷积.

序列 $x_2[((0-m))_N]$ 和 $x_2[((1-m))_N]$. 由这两种情况可以清楚地看出, $x_2[n]$ 与一个延迟的单位冲激序列的循环卷积的结果就是将 $x_2[n]$ 循环移位. 图中最后一个序列是 $x_3[n]$, 即 $x_1[n]$ 和 $x_2[n]$ 循环卷积的结果.

例 8.8

这是循环卷积的另一个例子. 令

$$x_1[n] = x_2[n] = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq L-1 \\ 0, & \text{其它.} \end{cases} \quad (8.116)$$

若 $N=L$, 则 N 点 DFT 为

$$X_1[k] = X_2[k] = \sum_{n=0}^{N-1} W_N^{kn} = \begin{cases} N, & k=0, \\ 0, & \text{其它.} \end{cases} \quad (8.117)$$

如果我们将 $X_1[k]$ 和 $X_2[k]$ 直接相乘, 得

$$X_3[k] = X_1[k]X_2[k] = \begin{cases} N^2, & k=0, \\ 0, & \text{其它.} \end{cases} \quad (8.118)$$

由此可得

$$x_3[n] = N, \quad 0 \leq n \leq N-1. \quad (8.119)$$

这个结果绘在图 8.15 中. 显然, 由于序列 $x_2[((n-m))_N]$ 是对于 $x_1[m]$ 旋转, 则乘积 $x_1[m]x_2[((n-m))_N]$ 的和始终等于 N .

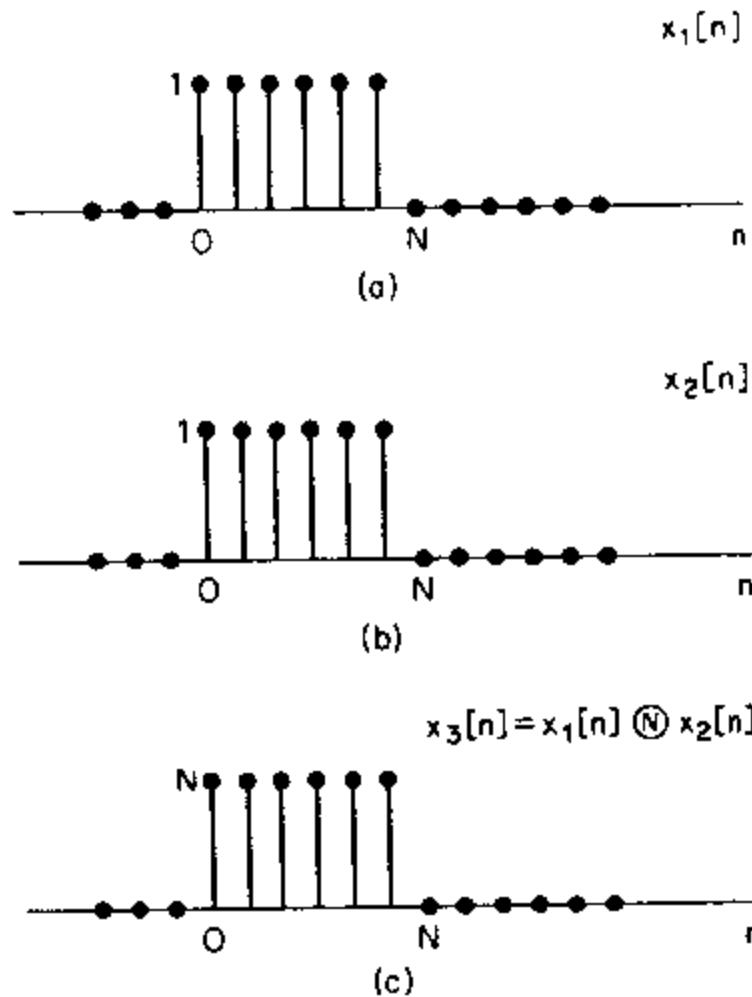


图 8.15 两个长为 N 的常数序列的 N 点循环卷积.

当然也可以把 $x_1[n]$ 和 $x_2[n]$ 看作是 $2L$ 点序列, 只要给它们增补 L 个零即可. 若我们计算增长序列的 $2L$ 点循环卷积, 就得到图 8.16 所示序列. 可以看出它等于有限长序列 $x_1[n]$ 和 $x_2[n]$ 的线性卷积. 我们将在 8.9 节中更详细地讨论这个重要的结果.

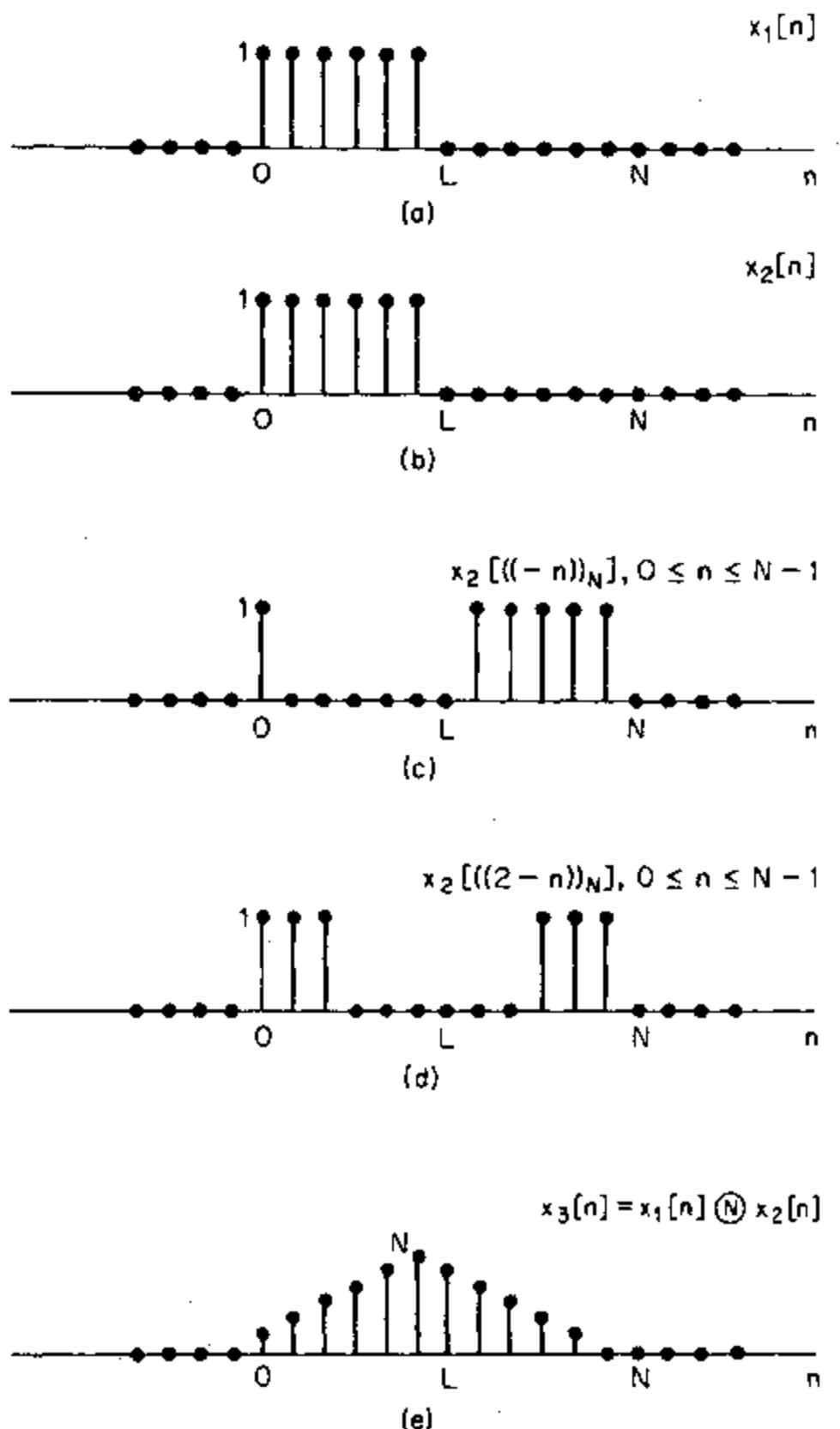


图 8.16 两个长为 L 的常数序列的 $2L$ 点循环卷积.

循环卷积的性质可以表示为

$$x_1[n] \otimes x_2[n] \xleftrightarrow{\text{DFT}} X_1[k]X_2[k]. \quad (8.120)$$

考虑到 DFT 关系的对偶性,自然两个 N 点序列乘积的 DFT 等于它们对应的离散傅里叶变换的循环卷积. 具体地说,若 $x_3[n] = x_1[n]x_2[n]$, 则 $X_3[k]$ 为

$$X_3[k] = \frac{1}{N} \sum_{t=0}^{N-1} X_1[t]X_2[((k-t))_N] \quad (8.121)$$

或

$$x_1[n]x_2[n] \xleftrightarrow{\text{DFT}} \frac{1}{N} X_1[k] \otimes X_2[k]. \quad (8.122)$$

8.8 离散傅里叶变换的性质汇总

8.7节所讨论的离散傅里叶变换的性质汇总在表8.2中。注意，这里所给出全部性质的表示均规定 $x[n], 0 \leq n \leq N-1$ 和 $X[k], 0 \leq k \leq N-1$ 。在此区间之外 $x[n]$ 和 $X[k]$ 均为零。

• 表 8.2

有限长序列(长度为 N)	N 点 DFT(长度为 N)
1. $x[n]$	$X[k]$
2. $x_1[n], x_2[n]$	$X_1[k], X_2[k]$
3. $ax_1[n] + bx_2[n]$	$aX_1[k] + bX_2[k]$
4. $X[n]$	$Nx[((-k))_N]$
5. $x[((n-m))_N]$	$W_N^{km}X[k]$
6. $W_N^{-n}x[n]$	$X[((k-n))_N]$
7. $\sum_{m=0}^{N-1} x_1[m]x_2[((n-m))_N]$	$X_1[k]X_2[k]$
8. $x_1[n]x_2[n]$	$\frac{1}{N} \sum_{\ell=0}^{N-1} X_1(\ell)X_2[((k-\ell))_N]$
9. $x^*[n]$	$X^*((-k))_N$
10. $x^*((-n))_N$	$X^*[k]$
11. $\Re(x[n])$	$X_{rp}[k] = \frac{1}{2}\{X[((k))_N] + X^*(((-k))_N)\}$
12. $j\Im(x[n])$	$X_{ip}[k] = \frac{1}{2}\{X[((k))_N] - X^*(((-k))_N)\}$
13. $x_{rp}[n] = \frac{1}{2}\{x[n] + x^*((-n))_N\}$	$\Re(X[k])$
14. $x_{ip}[n] = \frac{1}{2}\{x[n] - x^*((-n))_N\}$	$j\Im(X[k])$
性质 15—17 只适用于 $x[n]$ 为实数的情况。	$\begin{cases} X[k] = X^*((-k))_N \\ \Re(X[k]) = \Re(X^*((-k))_N) \\ \Im(X[k]) = -\Im(X^*((-k))_N) \\ X[k] = X^*((-k))_N \\ \angle(X[k]) = -\angle(X^*((-k))_N) \end{cases}$
15. 对称性质	$\begin{aligned} & x_{rp}[n] = \frac{1}{2}\{x[n] + x^*((-n))_N\} \\ & x_{ip}[n] = \frac{1}{2}\{x[n] - x^*((-n))_N\} \end{aligned}$
	$\begin{aligned} & \Re(X[k]) \\ & j\Im(X[k]) \end{aligned}$

8.9 用离散傅里叶变换实现线性卷积

在第九章我们将证明，对于计算一个有限长序列的离散傅里叶变换已有高效的算法。通常将它们总称为快速傅里叶变换(FFT)算法。利用这些算法，在计算上可以通过如下步骤高效地实现两个序列的卷积。

1. 计算两个序列 $x_1[n]$ 和 $x_2[n]$ 的 N 点离散傅里叶变换 $X_1[k]$ 和 $X_2[k]$ 。
2. 取 $0 \leq k \leq N-1$ 计算乘积 $X_3[k] = X_1[k]X_2[k]$ 。
3. 计算 $X_3[k]$ 的 DFT 得到序列 $x_3[n] = x_1[n] \otimes x_2[N]$ 。

在大多数的应用中我们关心的是实现两个序列的线性卷积，也就是希望实现一个线

性不变系统。例如，对语音波形或雷达信号之类的序列进行滤波，或者计算这类信号的自相关函数时确实是这样。正如我们在 8.8 节中所看到的，离散傅里叶变换的乘积相当于序列的循环卷积。为了得到线性卷积，我们必须保证循环卷积具有线性卷积的效果。例 8.8 最后的讨论已经暗示出如何做到这一点。现在我们进行比较详细地讨论。

8.9.1 两个有限长序列的线性卷积

考虑一个 L 点长的序列 $x_1[n]$ 和另一个 P 点长的序列 $x_2[n]$ ，假定我们想要通过线性卷积将这两个序列结合在一起从而得出第三个序列

$$x_3[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_1[m]x_2[n-m]. \quad (8.123)$$

图 8.17(a)画出一个典型序列 $x_1[m]$ ，图 8.17(b)绘出对于几个 n 值的典型序列 $x_2[n-m]$ 。显然，只要当 $n < 0$ 和 $n > L+P-2$ 时，乘积 $x_1[m]x_2[n-m]$ 对所有的 m 均为零。因此， $(L+P+1)$ 是序列 $x_3[n]$ 的最大长度，这一点可以由一个长度为 L 的序列和一个长度为 P 的序列的线性卷积而得出。

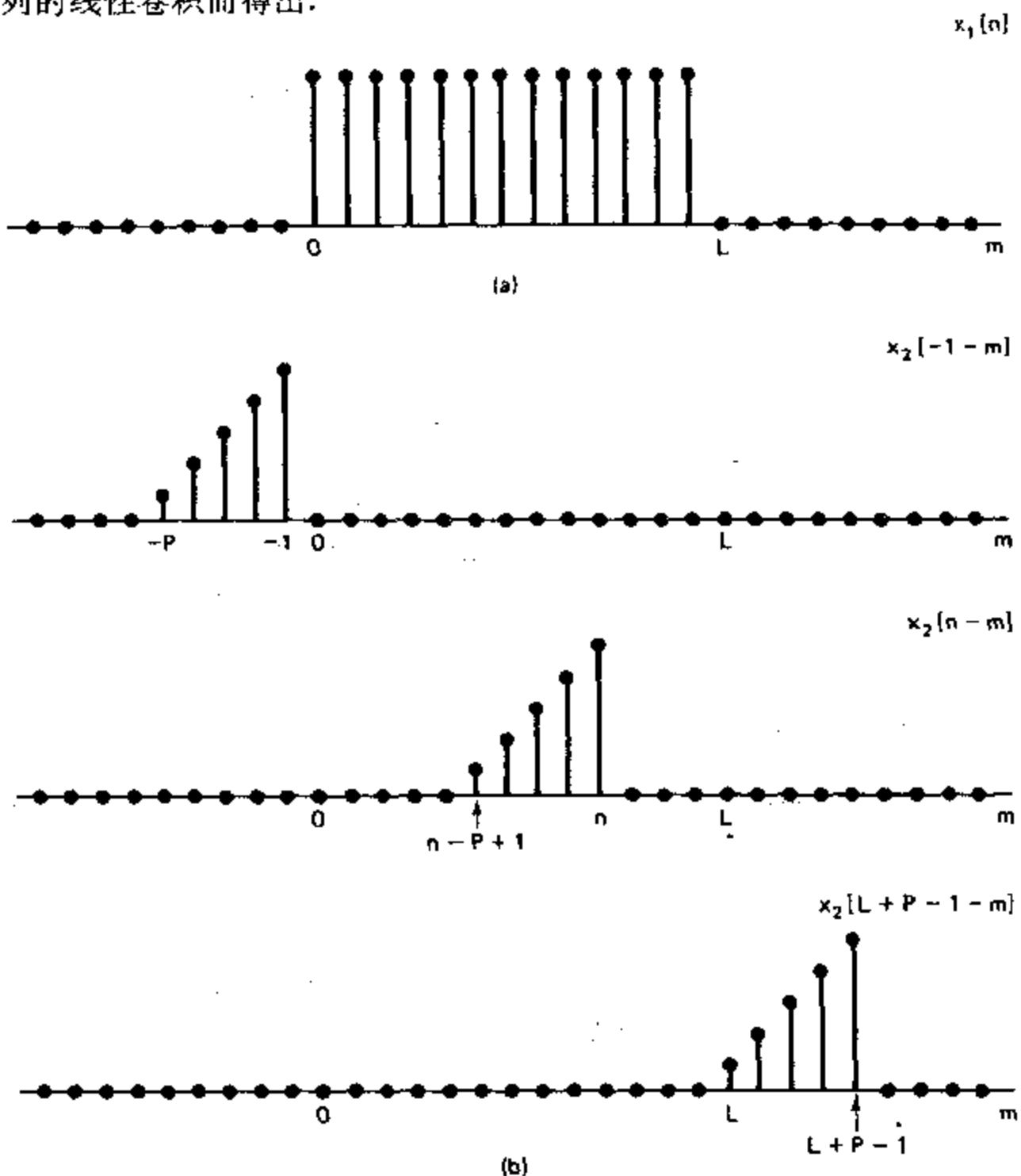


图 8.17 两个有限长序列之线性卷积的示例，结果表明当 $n \leq -1$ 和 $n \geq L+P-1$ 时 $x_3[n] = 0$ 。(a)有限长序列 $x_1[n]$ 。(b)对于几个 n 值的 $x_2[n-m]$ 。

8.9.2 循环卷积作为带有混叠的线性卷积

正如我们从例 8.7 和例 8.8 中所看到的, 对应于两个 N 点 DFT 的乘积的循环卷积是否与对应的有限长序列的线性卷积相同取决于和有限长序列的长度有关的 DFT 的长度。对于循环卷积和线性卷积之间相互关系的一种十分有用的解释是利用时间混叠的概念。鉴于这种解释对于理解循环卷积是非常重要的和有益的, 我们将用几种方式来加以论述。

在 8.5 节中我们看到, 如果对一个序列 $x[n]$ 的傅里叶变换 $X(e^{j\omega})$ 在频率 $\omega_k = 2\pi k/N$ 处采样, 则得到对应于周期序列

$$\tilde{x}[n] = \sum_{r=-\infty}^{\infty} x[n+rN]. \quad (8.124)$$

之 DFS 系数的序列。从关于 DFT 的讨论中可以看出: 有限长序列

$$X[k] = \begin{cases} X(e^{j(2\pi k/N)}), & 0 \leq k \leq N-1, \\ 0, & \text{其它}, \end{cases} \quad (8.125)$$

是由式(8.124)表示的 $\tilde{x}[n]$ 的一个周期 $x_p[n]$ 的 DFT, $x_p[n]$ 为

$$x_p[n] = \begin{cases} \tilde{x}[n], & 0 \leq n \leq N-1, \\ 0, & \text{其它}. \end{cases} \quad (8.126)$$

显然, 如果 $x[n]$ 的长度小于等于 N , 则不会产生时间混叠, 且 $x_p[n] = x[n]$ 。但是, 若 $x[n]$ 的长度大于 N , 则对于一些或全部 n , $x_p[n]$ 可能不等于 $x[n]$ 。因此, 我们以后将用下标 p 来表示从一个采样后的傅里叶变换的 DFT 得到的周期序列的一个周期。如果明确知道无时间混叠, 则下标 p 可以省去。

式(8.123)中的序列 $x_3[n]$ 的傅里叶变换为

$$X_3(e^{j\omega}) = X_1(e^{j\omega})X_2(e^{j\omega}). \quad (8.127)$$

若我们定义一个 DFT 为

$$X_3[k] = X_3(e^{j(2\pi k/N)}), \quad 0 \leq k \leq N-1, \quad (8.128)$$

则由式(8.127)和式(8.128)显然可见, $X_3[k]$ 也可表示为

$$X_3[k] = X_1(e^{j(2\pi k/N)})X_2(e^{j(2\pi k/N)}), \quad 0 \leq k \leq N-1, \quad (8.129)$$

因此

$$X_3[k] = X_1[k]X_2[k]. \quad (8.130)$$

这就是说, 作为 $X_3[k]$ 之 DFT 的序列 $x_{3p}[n]$ 为

$$x_{3p}[n] = \begin{cases} \sum_{r=-\infty}^{\infty} x_3[n+rN], & 0 \leq n \leq N-1, \\ 0, & \text{其它}, \end{cases} \quad (8.131)$$

并且由式(8.130)得

$$x_{3p}[n] = x_1[n] \otimes x_2[n]. \quad (8.132)$$

因此, 两个有限长序列的循环卷积等于根据式(8.131)有时间混叠的两个序列的线性卷积。

应当注意, 若 N 大于 L 或 P , 则 $X_1[k]$ 和 $X_2[k]$ 可以完全表示 $x_1[n]$ 和 $x_2[n]$, 但是只有当 N 大于或等于序列 $x_3[n]$ 的长度时, 才可能对于全部 n 有 $x_{3p}[n] = x_3[n]$ 。正如我们

在 8.9.1 节中所指出的,如果 $x_1[n]$ 的长度为 L , $x_2[n]$ 的长度为 P , 则 $x_3[n]$ 的最大长度为 $(L+P+1)$. 因此, 若 DFT 的长度 N 满足 $N \geq L+P+1$, 则对应于 $X_1[k]X_2[k]$ 的循环卷积等于 $X_1(e^{j\omega})X_2(e^{j\omega})$ 对应的线性卷积.

例 8.9

根据上面的讨论, 例 8.8 的结果是很容易理解的. 注意, $x_1[n]$ 和 $x_2[n]$ 是两个完全相同的常数序列, 长度 $L=P=6$, 如图 8.18(a) 所示. $x_1[n]$ 和 $x_2[n]$ 的线性卷积长度为 $L+P-1=11$, 且具有三角形包络, 如图 8.18(b) 所示. 图 8.18(c) 和 (d) 表示 $N=6$ 时

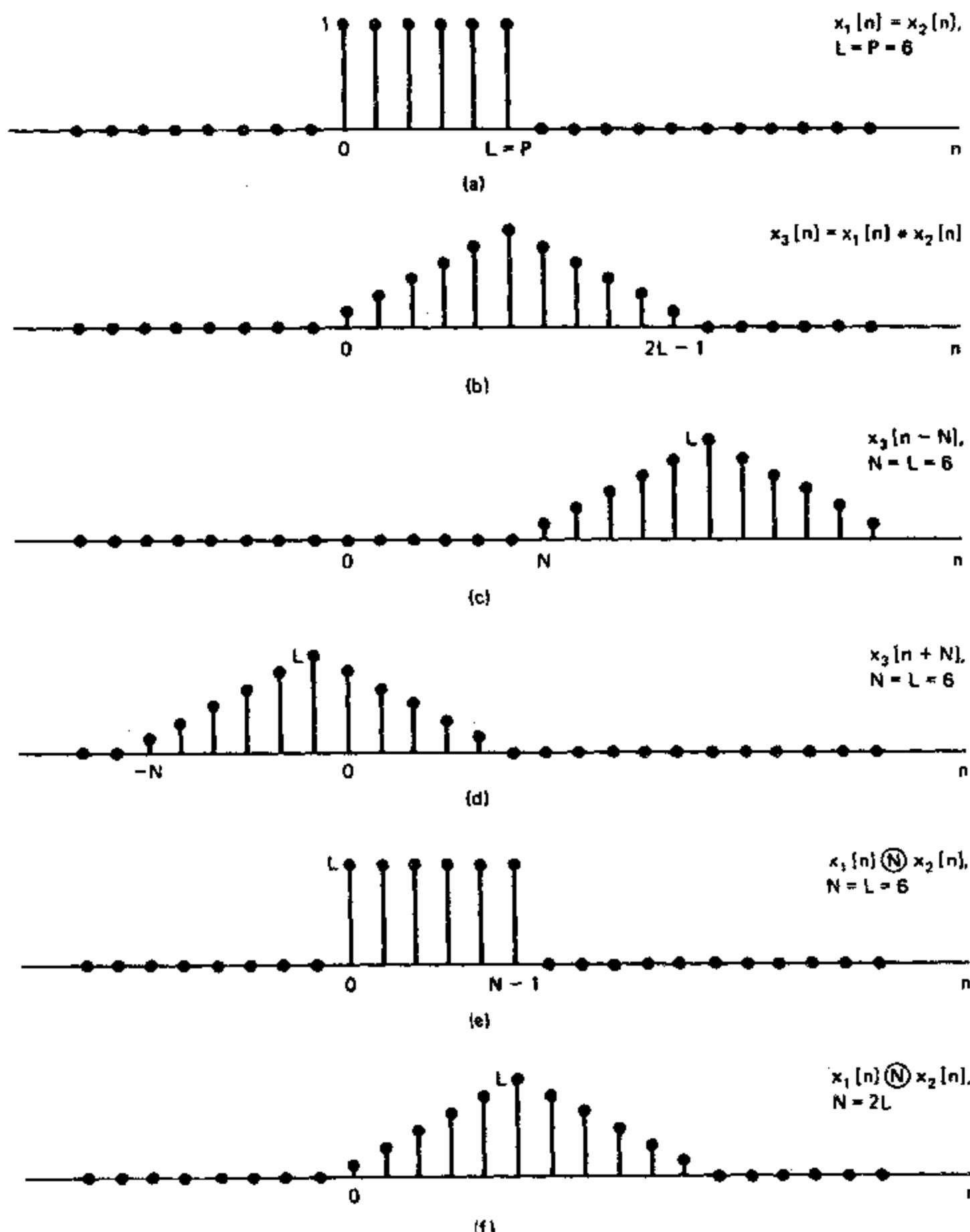


图 8.18 举例说明循环卷积等同于有混叠的线性卷积. (a) 参与卷积的序列 $x_1[n]$ 和 $x_2[n]$. (b) $x_1[n]$ 和 $x_2[n]$ 的线性卷积. (c) 对于 $N=6$ 的序列 $x_3[n-N]$. (d) 对于 $N=6$ 的序列 $x_3[n+N]$. (e) $x_1[n] \oplus x_2[n]$, 它等于 (b), (c) 和 (d) 在区间 $0 \leq n \leq 5$ 上的和. (f) $x_1[n] \oplus x_2[n]$.

的 $x_3[n-N]$ 和 $x_3[n+N]$, $x_1[n]$ 和 $x_2[n]$ 的 N 点循环卷积可以利用式(8.131)来计算。这一点正如图 8.18(e)(取 $N=L=6$)和图 8.18(f)(取 $N=2L=12$)所示。需要注意, 当 $N=L=6$ 时, 只有 $x_3[n]$ 和 $x_3[n+N]$ 对最后的结果有贡献; 而当 $N=2L=12$ 时, 仅 $x_3[n]$ 对最后的结果有贡献。由于线性卷积的长度为 $(2L-1)$, 所以当 $N=2L$ 时其循环卷积结果与线性卷积的结果对全部 $0 \leq n \leq N-1$ 均相同。事实上, 对于 $N=2L-1=11$ 的情况这也是完全正确的。

正如例 8.9 中所指出的, 在两个有限长序列的循环卷积中, 若 $N \geq L+P-1$, 则时间混叠可以避免。显然, 如果 $N=L=P$, 则循环卷积的全部序列值可以完全与线性卷积的值不同。但是, 若 $P < L$, 则 L 点循环卷积的部分序列值将会等于线性卷积所对应的值。为了表示出这一点, 用时间混叠来解释是十分有用的。

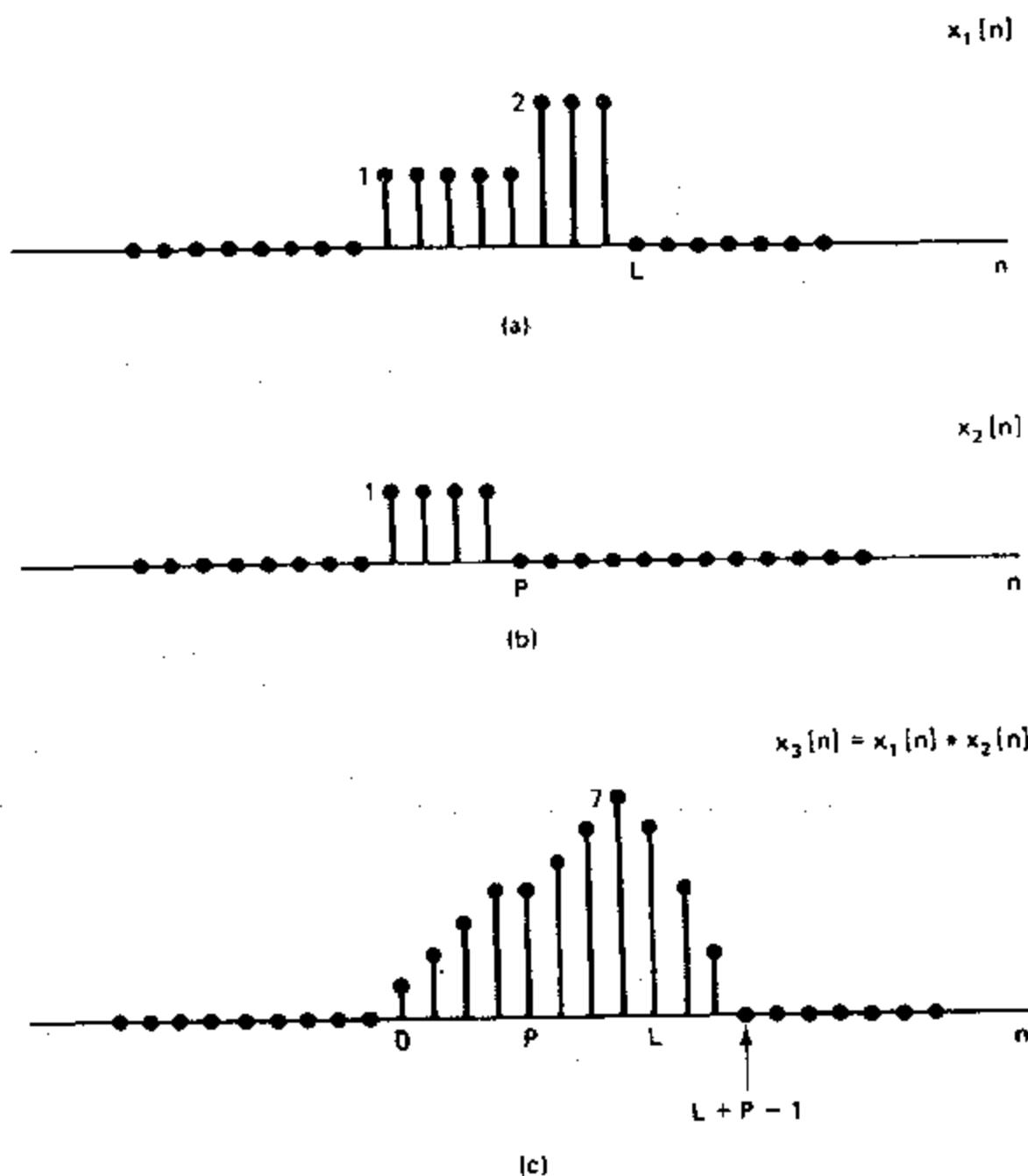


图 8.19 两个有限长序列的线性卷积举例。

考虑两个有限长序列 $x_1[n]$ 和 $x_2[n]$, 其长度分别为 L 和 P , 如图 8.19(a)和图 8.19(b)所示, 其中 $P < L$ 。首先让我们来研究一下 $x_1[n]$ 和 $x_2[n]$ 的 L 点循环卷积, 查看在循环卷积中哪些序列值等于线性卷积得到的值, 而哪些序列值不等于。 $x_1[n]$ 和 $x_2[n]$ 的线性卷积是一个长度为 $(L+P-1)$ 的有限长序列, 如图 8.19(c)所示。为了确定 L 点循环卷积, 利用式(8.131)和式(8.132), 有

$$x_{3r}[n] = \begin{cases} x_1[n] \otimes x_2[n] = \sum_{r=-\infty}^{\infty} x_3[n+rL], & 0 \leq n \leq L-1, \\ 0, & \text{其它.} \end{cases} \quad (8.133)$$

图 8.20(a)表示当 $r=0$ 时在式(8.133)中的项,而图 8.20(b)和图 8.20(c)则分别表示为 $r=+1$ 和 $r=-1$ 时的项。从图 8.20 清晰可见,在区间 $0 \leq n \leq N-1$ 上, $x_{3r}[n]$ 只受 $x_3[n]$ 和 $x_3[n+L]$ 的影响。

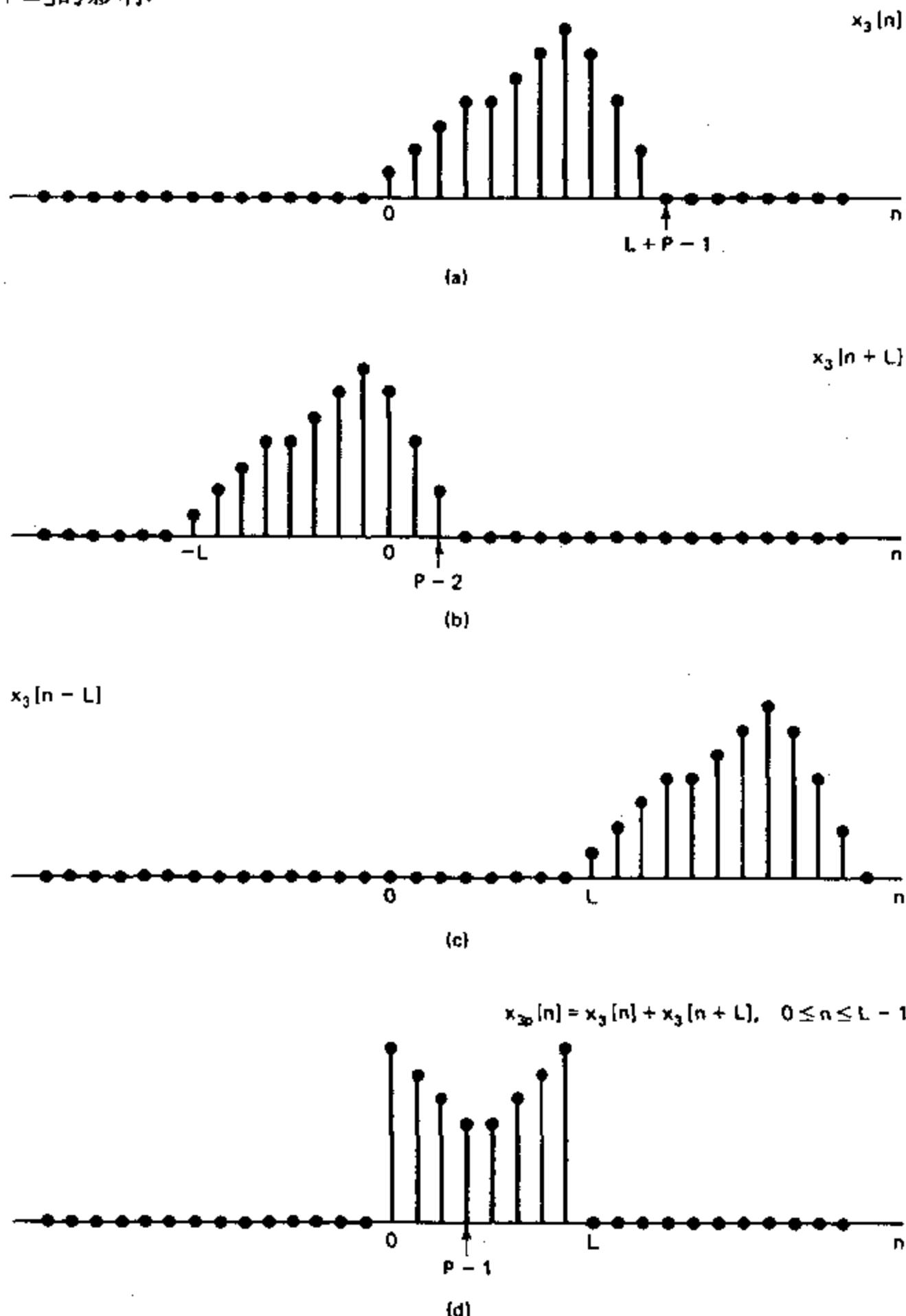


图 8.20 对于图 8.19 所示的两个序列 $x_1[n]$ 和 $x_2[n]$ 之循环卷积(循环卷积可以解释为线性卷积加上混叠)。

总之,只要当 $P < L$ 时,只有项 $x_3[n+L]$ 在区间 $0 \leq n \leq L-1$ 产生混叠。更明确地说,

当这些项相加在一起时, $x_3[n+L]$ 的最后 $(P-1)$ 个点, 即从 $n=0$ 到 $n=P-2$, 将加在 $x_3[n]$ 的最初 $(P-1)$ 个点上, 而 $x_3[n]$ 的最后 $(P-1)$ 个点, 即从 $n=L$ 到 $n=L+P-2$, 将被丢掉。这样截取 $0 \leq n \leq L-1$ 的部分就形成了 $x_{3p}[n]$ 。由于 $x_3[n+L]$ 的 $(P-1)$ 个点的值等于 $x_3[n]$ 的最后 $(P-1)$ 个点的值, 所以我们可以用另一种观点来看待形成循环卷积 $x_{3p}[n]$ 的过程, 即通过线性卷积加上用 $x_3[n]$ 的从 $n=L$ 到 $n=L+P-2$ 的 $(P-1)$ 个值加在 $x_3[n]$ 的最初 $(P-1)$ 个值上的混叠来形成。图 8.21 说明当取 $P=4$ 和 $L=8$ 时的这一

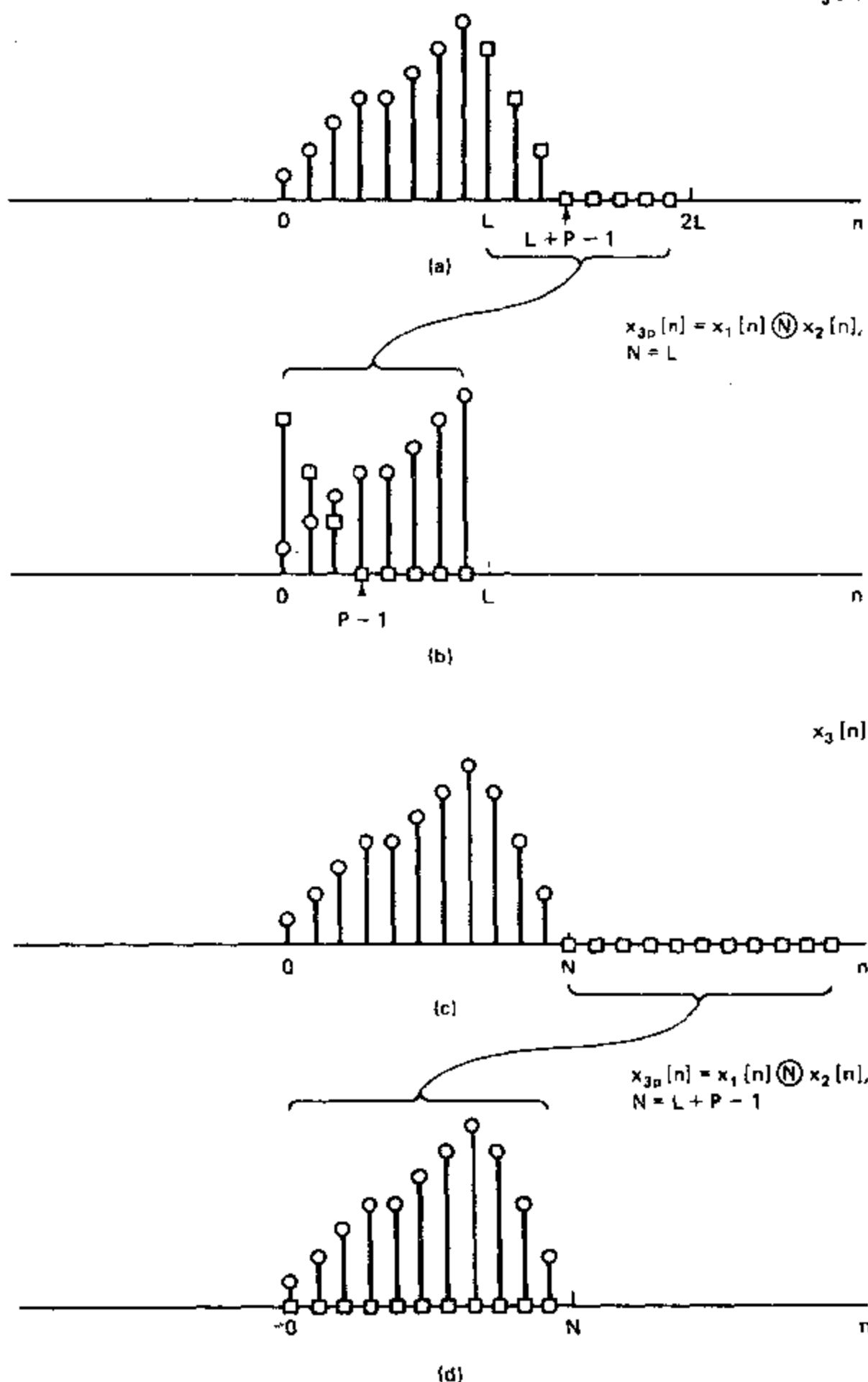


图 8.21 举例说明循环卷积的结果如何产生“卷绕”(wraps around), (a)和(b) $N=L$, 则混叠的“尾部”(tail)重叠在最初 $(P-1)$ 点上, (c)和(d) $N=(L+P-1)$, 则不产生重叠。

过程. 图 8.21(a)表示线性卷积 $x_3[n]$, 对于 $n \geq L$ 的点用空心方块符号来标记. 注意, 对于 $n \geq L$ 只有 $(P-1)$ 个点非零. 图 8.21(b)表示利用“ $x_3[n]$ 的自身卷绕”来形成 $x_{3p}[n]$. 最初的 $(P-1)$ 点有时间混叠掺入, 而其余的从 $n = P-1$ 到 $n = L-1$ 个点(即最后 $L-P+1$ 点)不受破坏, 也就是等于用线性卷积所得到的那些点的值.

由以上讨论可知, 如果循环卷积的长度相对于序列 $x_1[n]$ 和 $x_2[n]$ 的长度足够长的话, 就可以避免非零值的混叠, 在这种情况下, 循环卷积就等于线性卷积. 具体讲, 若对于刚才考虑的情况, $x_3[n]$ 以 $N \geq L+P-1$ 的周期重复, 则不会产生非零的重叠. 图 8.21(c) 和图 8.21(d)举例说明这种情况, 此时 $P=4, L=8$, 且 $N=11$.

8.9.3 用 DFT 实现线性时不变系统

以上的讨论集中在从循环卷积得到线性卷积的方法上. 因为线性时不变系统可以用卷积来实现, 这就意味着循环卷积(可用 8.9 节开头所建议的步骤来完成)可以用于实现这类系统. 要了解如何作到这一点, 我们首先考虑一个 L 点输入序列 $x[n]$ 和一个 P 点冲激响应 $h[n]$. 这两个序列的线性卷积 $y[n]$ 是长度为 $(L+P-1)$ 的有限长序列. 因此, 正如在 8.9.2 节中所讨论的, 要使循环卷积等于线性卷积, 循环卷积的长度至少为 $(L+P-1)$ 点. 循环卷积可以通过 $x[n]$ 和 $h[n]$ 的 DFT 相乘来完成. 由于我们希望该乘积表示 $x[n]$ 和 $h[n]$ 的线性卷积的 DFT, 该 DFT 的长度为 $(L+P-1)$, 因此我们所要计算的 DFT 也必须有同样长度, 即 $x[n]$ 和 $h[n]$ 必须加长, 而加长部分的序列值为零. 这种作法通常称为补零.

这种作法使两个有限长序列的线性卷积的计算可用离散傅里叶变换来完成, 也就是说, 其输入也为有限长序列的 FIR 系统的输出可以用 DFT 来计算. 在许多应用场合(如语音波形滤波), 输入信号在一些实际情况下是无限长的. 尽管理论上我们可以贮存全部波形, 紧接着对于大量点数实行上面所讨论的利用 DFT 的方法, 但是通常要计算这样一个 DFT 是不现实的. 另外对于这种滤波方法, 只有当采集完全部的输入样本后才能计算出滤波后的样本. 一般说来, 我们总希望在处理过程中避免这种很长的延时. 这两个问题的解决办法是用块卷积, 此时把被滤波的信号分割成长度为 L 的段. 然后每段信号就可以与有限长冲激响应进行卷积, 并且用一种适当的方法把滤波后的信号段衔接在一起. 每一块的线性滤波可用 DFT 来实现.

为了举例说明这一过程, 并且得出把滤波后的信号段连接在一起的方法, 我们来研究如图 8.22 所画示长度为 P 的冲激响应 $h[n]$ 和信号 $x[n]$. 以下我们假设, 对于 $n < 0$, $x[n] = 0$, 并且 $x[n]$ 的长度要比 P 大许多. 序列 $x[n]$ 可以表示成长度为 L 的平移有限长序列之和, 即

$$x[n] = \sum_{r=0}^{\infty} x_r[n-rL], \quad (8.134)$$

式中

$$x_r[n] = \begin{cases} x[n+rL], & 0 \leq n \leq L-1, \\ 0, & \text{其它.} \end{cases} \quad (8.135)$$

图 8.23(a)表示出对于图 8.22 中的 $x[n]$ 的分割方法. 注意, 每段中的第一个样本均在 $n = 0$ 处, 然而, $x_r[n]$ 的第零个样本是序列 $x[n]$ 的第 rL 个样本. 这一点如图 8.23(a)所示. 该图中画出了在它们平移后位置上的序列段.

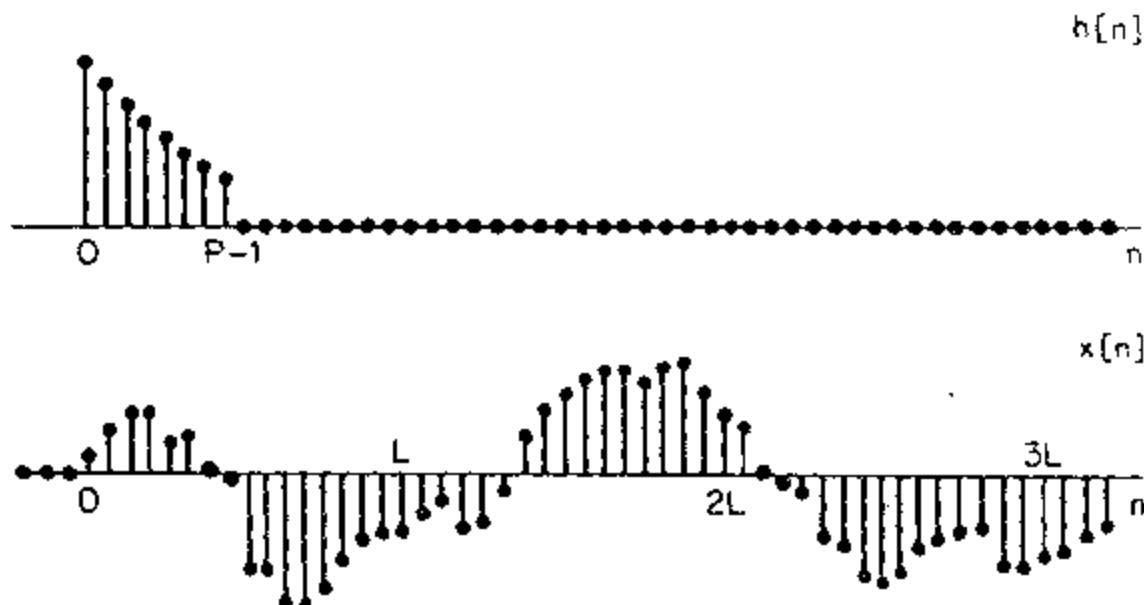


图 8.22 有限长冲激响应 $h[n]$ 和要过滤的未定义长度的信号 $x[n]$.

因为卷积是一种线性时不变运算, 所以有

$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{r=0}^{\infty} y_r[n - rL], \quad (8.136)$$

式中

$$y_r[n] = x_r[n] * h[n]. \quad (8.137)$$

由于序列 $x_r[n]$ 只有 L 个非零点, 并且 $h[n]$ 的长度为 P , 因此每一项 $y_r[n] = x_r[n] * h[n]$ 的长度为 $(L+P-1)$. 这样, 线性卷积 $x_r[n] * h[n]$ 可用 N 点 DFT 按照上面介绍的步骤来计算, 其中 $N \geq L+P-1$. 因为每个输入段的开头与相邻段相隔 L 点, 并且每个滤波后的序列段的长度为 $(L+P-1)$, 所以滤波后的序列段的非零点将重叠 $(P-1)$ 点, 并且这些重叠样本必须参与式(8.136)要求的求和运算. 这一点如图 8.23(b) 所示, 图中表示出滤波后的序列段 $y_r[n] = x_r[n] * h[n]$. 正如输入波形是由将图 8.23(a) 中的延迟波形相加而重构的一样, 滤波后的结果 $x[n] * h[n]$ 是由将图 8.23(b) 中示出的滤波后延迟的序列段相加而形成的. 这种由滤波后的序列段形成滤波后输出序列的方法, 通常称为重叠相加法, 这是因为滤波后的序列段相互有重叠, 并且相加在一起形成输出序列. 之所以发生重叠, 是因为每个序列段与冲激响应的线性卷积通常大于序列段长度. 块卷积的重叠相加法没有受 DFT 和循环卷积的制约. 很显然, 唯一的要求是计算较小的卷积, 并将结果适当组合.

另外一种块卷积方法通常称为重叠保留法. 这种方法相应于实现一个 P 点冲激响应 $h[n]$ 与一个 L 点的序列段 $x_r[n]$ 的 L 点循环卷积, 然后确认出在该循环卷积中对应于线性卷积的那一部分. 最后将所得出的输出序列段“补在一起”形成输出. 特别是, 我们曾指出过, 如果一个 L 点序列与一个 P 点序列 ($P < L$) 作循环卷积, 则最后结果中的第一个 $(P-1)$ 点是不正确的, 而其余点等于我们执行一个线性卷积所应该得到的. 因此, 我们可以将 $x[n]$ 分为长度为 L 的序列段, 使得每个输入段与先前的序列段重叠 $(P-1)$ 点. 也就是说, 我们定义序列段 $x_r[n]$ 为

$$x_r[n] = x[n + r(L-P+1) - P+1], \quad 0 \leq n \leq L-1, \quad (8.138)$$

和前面一样, 式中我们已经定义了每个序列段的时间原点是在该序列段的起始点处, 而

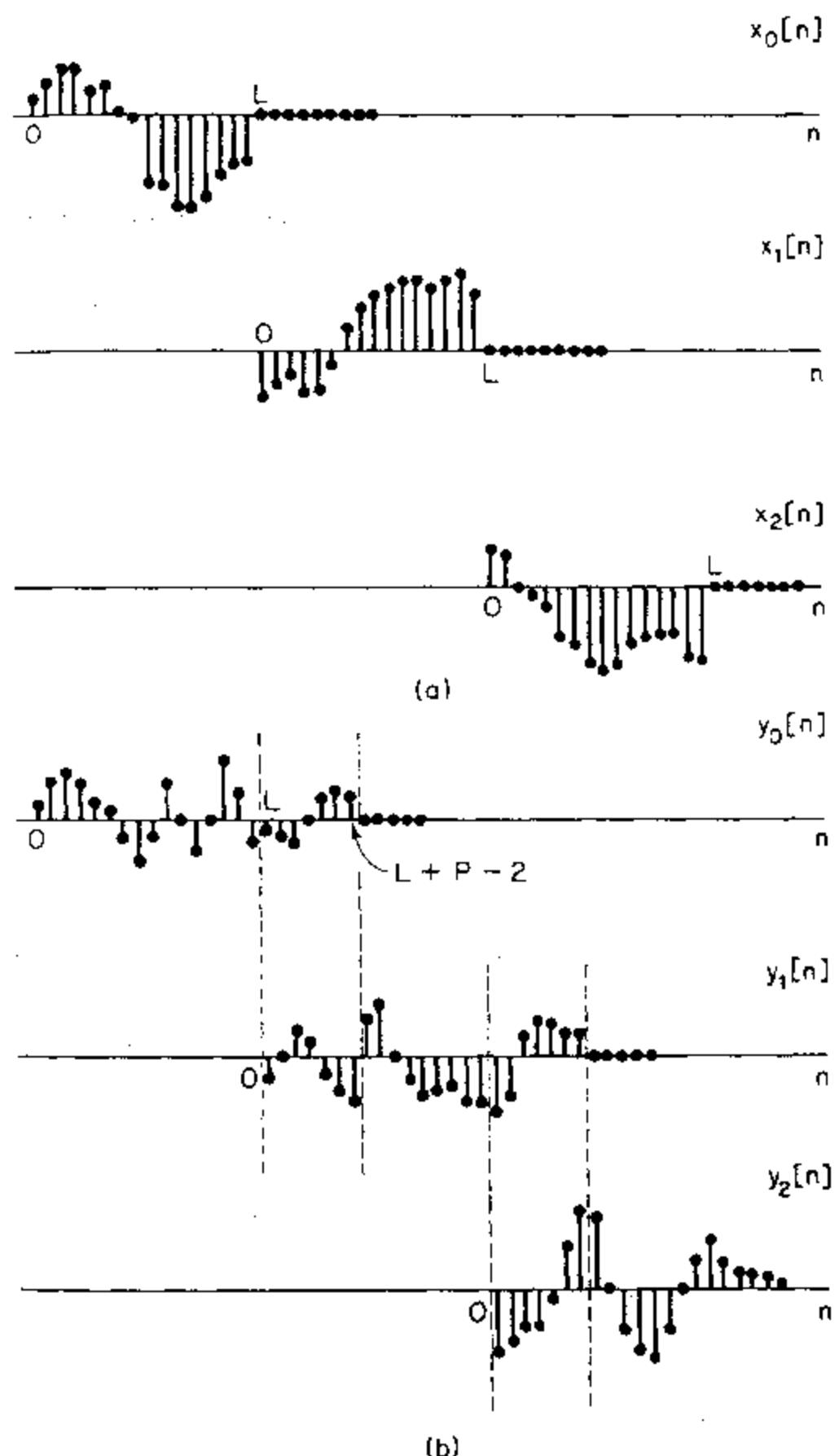


图 8.23 (a) 把图 8.22 中的 $x[n]$ 分解为长度为 L 的不重叠序列段. (b) 每段与 $h[n]$ 卷积的结果.

不是在 $x[n]$ 的原点, 这种分段的方法绘于图 8.24(a)中. 每个序列段与 $h[n]$ 的循环卷积记作 $y_{rp}[n]$, 多加的下标 p 表示 $y_{rp}[n]$ 是已经产生了时间混叠的循环卷积的结果. 在图 8.24(b)中绘出了这些序列. 每个输出序列段在区间 $0 \leq n \leq P-2$ 中的部分是必须去掉的. 最后把来自后续序列段的其余样本邻接起来构成最终的滤波输出. 这就是

$$y[n] = \sum_{r=0}^{\infty} y_r[n - r(L-P+1) + P-1], \quad (8.139)$$

其中

$$y_r[n] = \begin{cases} y_{rp}[n], & P-1 \leq n \leq L-1, \\ 0, & \text{其它.} \end{cases} \quad (8.140)$$

这种方法称为重叠保留法,因为输入序列段有重叠,所以每个接续的输入序列段包括有 $(L-P+1)$ 个新点,并且从先前的序列段保留下 $(P-1)$ 个点.

如何利用块卷积的重叠相加法和重叠保留法可能不容易立刻就明白.在第九章中我

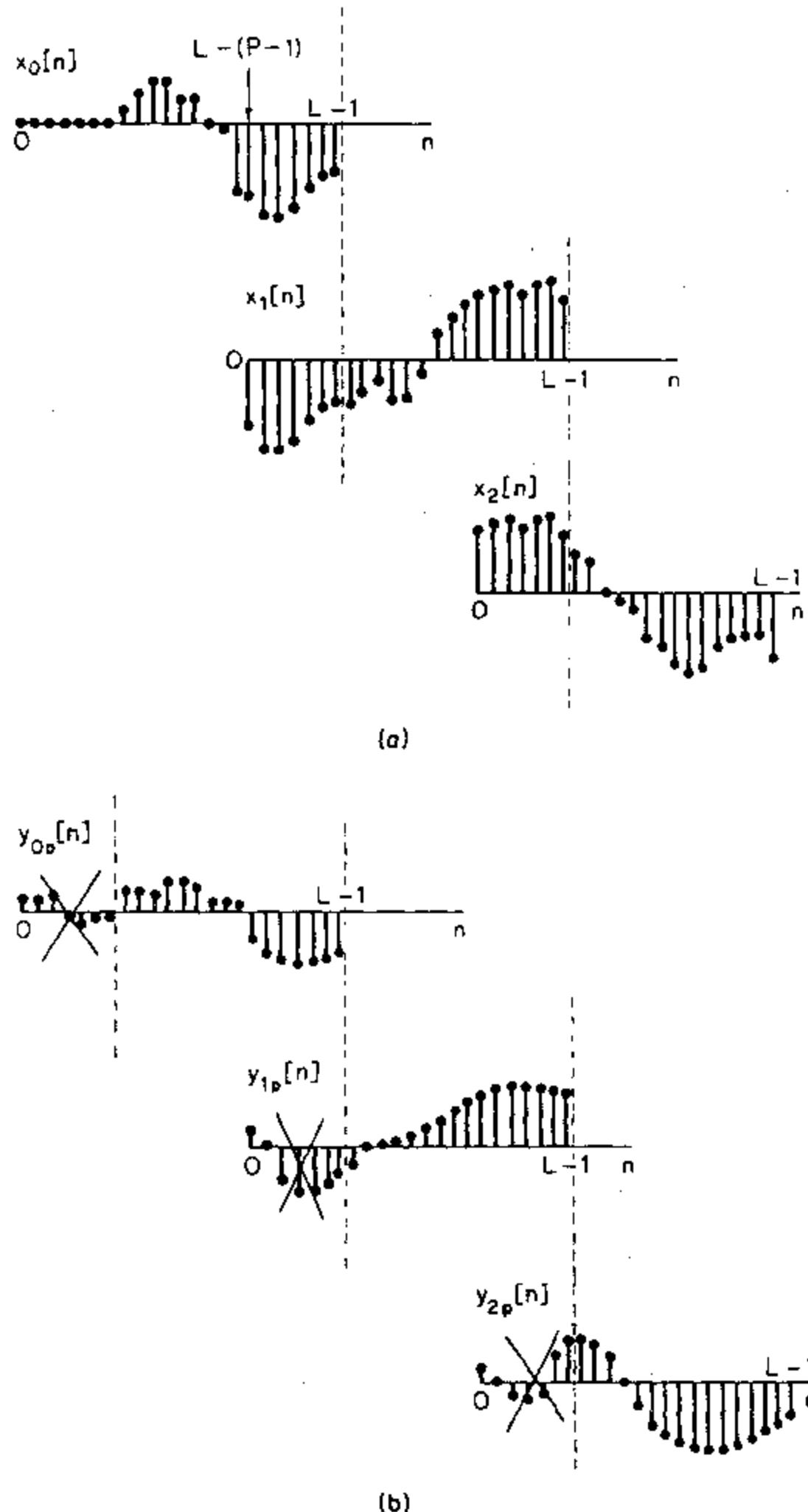


图 8.24 (a) 将图 8.22 中的 $x[n]$ 分解为相互重叠的长度为 L 的序列段. (b) 每段与 $h[n]$ 卷积的结果. 图中表示出为了得出线性卷积对过滤后的每段序列应当去掉的部分.

们将研究计算 DFT 的高效算法. 这些算法统称为快速傅里叶变换(FFT), 是十分有效的算法, 对于平坦的适当长度(数量级为 25 或 30)的 FIR 冲激响应, 用 DFT 来计算块卷积可能要比直接计算线性卷积更有效. 当然, 确定长度 P 以使 DFT 方法更加有效与进行计算可利用的硬件和软件有关. (参见 Stockham, 1966 和 Helms, 1967.)

8.10 小 结

在这一章中, 我们讨论了有限长序列的傅里叶表示. 这种表示称为离散傅里叶变换(DFT), 它以周期序列的离散傅里叶系数的表示为基础. 通过定义一个周期序列(该周期序列中, 每个周期都等于某有限长序列), DFT 就等于一个周期中的离散傅里叶系数. 因为这个基本周期性的重要性, 我们首先研究了离散傅里叶系数表示的性质, 然后利用有限长序列来解释这些性质. 一个重要的结论是, DFT 的值等于在单位圆等间隔点上 z 变换的采样值. 这也就引起了在解释 DFT 性质时对时间混叠的关注. 当研究循环卷积以及它和线性卷积的关系时广泛地用到这一概念. 本章的最后部分讨论了如何利用 DFT 来实现一个有限长冲激响应与一个长度相等的输入信号之间的线性卷积.

DFT 通常是具有如下形式的一类有限长正交变换表示的最广泛使用的例子:

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} A[k] \phi_k[n], \quad (8.141)$$

$$A[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \phi_k^*[n], \quad (8.142)$$

其中序列 $\phi_k[n]$ 与其它序列之间正交. 另外的例子还包括了在其它众多变换中的余弦变换和哈特利(Hartley)变换.

习 题

8.1 假设 $x_c(t)$ 是一个周期的连续时间信号, 其周期为 1ms, 它的傅里叶系数为

$$x_c(t) = \sum_{k=-9}^9 a_k e^{j(2\pi kt/10^{-3})}.$$

对于 $|k| > 9$, 傅里叶系数 a_k 为零. 以采样间隔 $T = \frac{1}{6} \times 10^{-3}$ s 对 $x_c(t)$ 采样得到 $x[n]$:

$$x[n] = x_c\left(\frac{n10^{-3}}{6}\right).$$

- (a) $x[n]$ 是周期的吗? 如果是, 周期为多少?
- (b) 采样率是否高于奈奎斯特采样率, 也就是说 T 是否充分小而可以避免混叠?
- (c) 利用 a_k 求出 $x[n]$ 的离散傅里叶系数.

8.2 设 $\tilde{x}[n]$ 是一个周期为 N 的周期序列, $\tilde{x}[n]$ 还是一个周期为 $3N$ 的周期序列. 令 $\tilde{X}[k]$ 表示作为周期为 N 的周期序列的 $\tilde{x}[n]$ 的 DFS 系数, $\tilde{X}_3[k]$ 表示作为周期为 $3N$ 的周期序列的 $\tilde{x}[n]$ 的 DFS 系数.

- (a) 用 $\tilde{X}[k]$ 表示出 $\tilde{X}_3[k]$.
- (b) 用公式计算 $\tilde{X}[k]$ 和 $\tilde{X}_3[k]$, 当 $\tilde{x}[n]$ 为图 P8.2 中给定的序列时, 证明你在(a)中得出的结果.

8.3 在推导 DFS 的分析式(8.11)中我们用到等式(8.7). 为了证明这个等式, 我们分别考虑 $k-r=mN$ 和 $k-r \neq mN$ 这两种条件.

$\tilde{x}[n], N=2$



图 P8.2

(a) 当 $k-r=mN$ 时, 证明 $e^{j(2\pi/N)(k-r)n}=1$, 并由此式证明

$$\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} e^{j(2\pi/N)(k-r)n} = 1, \quad k-r=mN.$$

因为在(8.7)式中 k 和 r 均为整数, 所以可用 $k-r=\ell$ 进行替换, 并且考虑到求和式

$$\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} e^{j(2\pi/N)\ell n} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} [e^{j(2\pi/N)\ell}]^n.$$

因为这是几何级数中有限项的求和, 可写成闭合形式

$$\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} [e^{j(2\pi/N)\ell}]^n = \frac{1 - e^{j(2\pi/N)\ell N}}{1 - e^{j(2\pi/N)\ell}}. \quad (\text{P8.3})$$

(b) ℓ 取何值时, 式(P8.3)右边为不定式, 即分子和分母均为零?

(c) 由(b)的结果证明: 当 $k-r \neq mN$ 时,

$$\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} e^{j(2\pi/N)(k-r)n} = 0.$$

8.4 在 8.2.2 节中我们曾叙述过如下性质:

若

$$\tilde{x}_1[n] = \tilde{x}[n-m],$$

则

$$\tilde{X}_1[k] = W_N^{km} \tilde{X}[k],$$

式中 $\tilde{X}[k]$ 和 $\tilde{X}_1[k]$ 分别为 $\tilde{x}[n]$ 和 $\tilde{x}_1[n]$ 的 DFS 系数. 本题中我们来证明这一性质.

(a) 利用式(8.11)并作适当的变量替换, 证明 $\tilde{X}_1[k]$ 可表示成

$$\tilde{X}_1[k] = W_N^{km} \sum_{r=-m}^{N-1-m} \tilde{x}[r] W_N^{kr}. \quad (\text{P8.4-1})$$

(b) 式(P8.4-1)中的求和可写为

$$\sum_{r=-m}^{N-1-m} \tilde{x}[r] W_N^{kr} = \sum_{r=-m}^{-1} \tilde{x}[r] W_N^{kr} + \sum_{r=0}^{N-1-m} \tilde{x}[r] W_N^{kr}. \quad (\text{P8.4-2})$$

利用 $\tilde{x}[r]$ 和 W_N^{kr} 均是周期的这一事实, 证明

$$\sum_{r=-m}^{-1} \tilde{x}[r] W_N^{kr} = \sum_{r=N-m}^{N-1} \tilde{x}[r] W_N^{kr}. \quad (\text{P8.4-3})$$

(c) 由在(a)和(b)中得出的结果, 证明

$$\tilde{X}_1[k] = W_N^{km} \sum_{r=0}^{N-1} \tilde{x}[r] W_N^{kr} = W_N^{km} \tilde{X}[k].$$

8.5 (a) 在表 8.1 中我们列出了许多周期序列离散傅里叶级数的对称性质, 下面我们重新列出其中的几个. 试证明下列每个性质均是正确的. 证明中你可以利用离散傅里叶级数的定义和表中列出的任何性质(如在证明性质 3 中可利用性质 1 和 2).

序列	离散傅里叶级数
1. $\tilde{x}^* [n]$	$\tilde{X}^* [-k]$
2. $\tilde{x}^* [-n]$	$\tilde{X}^* [k]$
3. $\Re \{\tilde{x}(n)\}$	$\tilde{X}_r[k]$
4. $j \Im_m \{\tilde{x}(n)\}$	$\tilde{X}_o[k]$

(b) 由在(a)中证明过程的性质, 证明对于一个实周期序列 $\tilde{x}[n]$, 下列离散傅里叶级数的对称性质成立:

- $\Re\{X[k]\} = \Re\{X[-k]\}$
 - $\Im\{X[k]\} = -\Im\{X[-k]\}$
 - $|X[k]| = |X[-k]|$
 - $\angle X[k] = -\angle X[-k]$

8.6 (a) 图 P8.6-1 表示两个周期 $N=7$ 的周期序列 $\tilde{x}_1[n]$ 和 $\tilde{x}_2[n]$. 求序列的 $\tilde{y}_1[n]$, 使其 DFS 等于 $\tilde{x}_1[n]$ 的 DFS 和 $\tilde{x}_2[n]$ 的 DFS 的乘积, 即

$$\hat{Y}_1[k] = \hat{X}_1[k]\hat{X}_2[k]$$



图 P8. 6-1

(b) 图 P8.6-2 表示一个周期序列 $\tilde{x}_1[n]$, 其周期 $N=7$. 求序列 $\tilde{y}_2[n]$, 使其 DFS 等于 $\tilde{x}_1[n]$ 的 DFS 和 $\tilde{x}_3[n]$ 的 DFS 的乘积, 即

$$\tilde{Y}_2[k] = \tilde{X}_1[k]\tilde{X}_3[k]$$



图 P8.6-2

8.7 图 P8.7 画出几个不同的周期序列 $x[n]$ 。这些序列可用傅里叶级数表示为

$$\tilde{x}[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] e^{j(2\pi/N)kn}$$

- (a) 哪一个序列可通过选择时间起始点使所有的 $X[k]$ 为实数?
 (b) 哪一个序列可通过选择时间起始点使所有的 $X[k]$ 为虚数 (k 为 N 的整数倍时除外)?
 (c) 哪一个序列有 $X[k] = 0, k = \pm 2, \pm 4, \pm 6, \dots$?

8.8 在 8.5 节我们曾指出,可以推导出 $X(e^{j\omega})$ 和 $\tilde{X}[k]$ 之间的直接关系式,其中 $\tilde{X}[k]$ 是周期序列的 DFS 系数,而 $X(e^{j\omega})$ 是一个周期的傅里叶变换.因为 $\tilde{X}[k]$ 对应于 $X(e^{j\omega})$ 的样本,所以这一关系式

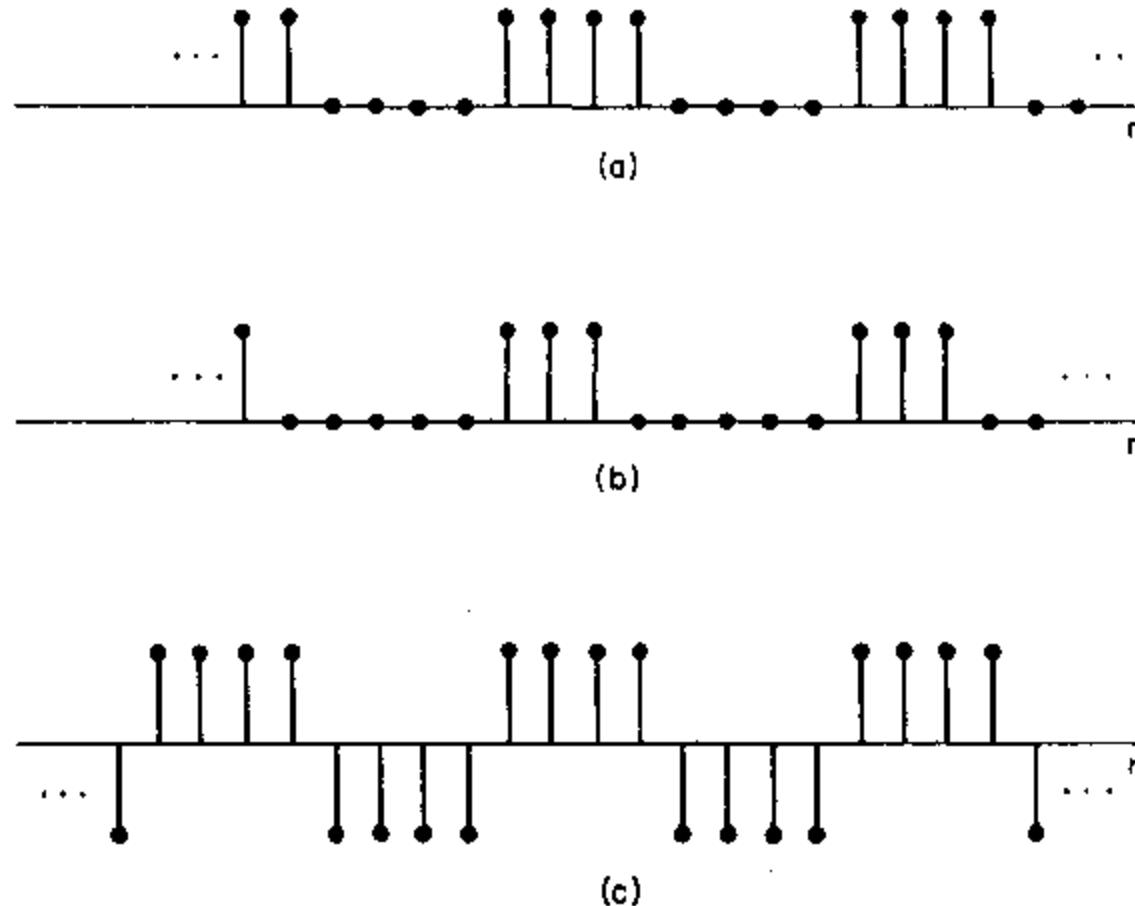


图 P8.7

相当于一个内插公式.

要得出所希望的关系式,有一种方法是以 8.5 节的讨论和式(8.48),以及 2.9.7 节的调制性质为基础的,其步骤如下:

1. 用 $\tilde{X}[k]$ 代表 $\tilde{x}[n]$ 的 DFS 系数, 把 $\tilde{x}[n]$ 的傅里叶变换表示成一个冲激串.
 2. 由式(8.51), $x[n]$ 可以表示成 $x[n] = \tilde{x}[n]w[n]$, 其中 $w[n]$ 是一个适当的有限长窗.
 3. 由 2.9.7 节可知, 因为 $x[n] = \tilde{x}[n]w[n]$, 所以 $X(e^{j\omega})$ 可以表示为 $\tilde{X}(e^{j\omega})$ 和 $W(e^{j\omega})$ 的(周期)卷积.

经过上述步骤的详细推导,证明 $X(e^{j\omega})$ 可以表示成

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{N} \sum_k \tilde{X}[k] \frac{\sin[(\omega N - 2\pi k)/2]}{\sin\{[\omega - (2\pi k/N)]/2\}} e^{-j[(N-1)/2](\omega - 2\pi k/N)}.$$

并说明上式求和的极限.

- 8.9 考虑由式 $x[n] = \alpha^n u[n]$ 给出的序列 $x[n]$. 周期序列 $\tilde{x}[n]$ 由 $x[n]$ 用下列方式构成:

$$\tilde{x}[n] = \sum_{r=-\infty}^{\infty} x[n+rN].$$

- (a) 求 $x[n]$ 的傅里叶变换 $X(e^{j\omega})$.
 (b) 求 $\tilde{x}[n]$ 的离散傅里叶级数 $\tilde{X}[k]$.
 (c) $\tilde{X}[k]$ 与 $X(e^{j\omega})$ 有何联系?

- 8.10 考虑一个长度为 N 的有限长序列 $x[n]$, 即, 在 $0 \leq n \leq N-1$ 之外

$$x[n]=0.$$

$X(e^{j\omega})$ 表示 $x[n]$ 的傅里叶变换, $\bar{X}[k]$ 表示由 $X(e^{j\omega})$ 的 64 个等间隔样本构成的序列, 即

$$\hat{X}[k] = X(e^{j\omega})|_{\omega=2\pi k/54}.$$

已知在 $0 \leq k \leq 63$ 范围内, $\hat{X}[32] = 1$, 而其余值均为零.

- (a) 如果序列长度 $N=64$, 按照给定的信息求出序列 $x[n]$. 说明答案是否是唯一的. 如果是, 请解释清楚原因. 如果不是, 请给出第二种不同的选择.

(b) 如果序列的长度 $N=192=3 \times 64$, 求序列 $x[n]$, 使其在 $0 \leq k \leq 63$ 的范围内, $\tilde{X}[32]=1$ 而其余值为零. 说明答案是否是唯一的. 如果是, 请解释清楚原因. 如果不是, 请给出第二种不同的选择.

- 8.11 计算下列每一个长度为 N (N 为偶数) 的有限长序列的 DFT:

- (a) $x[n] = \delta[n]$
 (b) $x[n] = \delta[n - n_0], \quad 0 \leq n_0 \leq N-1$
 (c) $x[n] = \begin{cases} 1, & n \text{ 为偶数}, 0 \leq n \leq N-1 \\ 0, & n \text{ 为奇数}, 0 \leq n \leq N-1 \end{cases}$
 (d) $x[n] = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq N/2-1 \\ 0, & N/2 \leq n \leq N-1 \end{cases}$
 (e) $x[n] = \begin{cases} a^n, & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$

8.12 考虑复序列

$$x[n] = \begin{cases} e^{j\omega_0 n}, & 0 \leq n \leq N-1, \\ 0, & \text{其它.} \end{cases}$$

- (a) 求 $x[n]$ 的傅里叶变换 $X(e^{j\omega})$.
 (b) 求有限长序列 $x[n]$ 的 N 点 DFT $X[k]$.
 (c) 对于 $\omega_0 = 2\pi k_0/N$, 其中 k_0 为整数的情况, 求 $x[n]$ 的 DFT.

8.13 用 10kHz 的采样率对一个连续时间信号进行采样, 并计算出 1024 个样本点的 DFT. 求两个谱样本点之间的频率间隔, 并证明你的答案是正确的.

8.14 一个有限长序列的 DFT 对应于它的 z 变换在单位圆上的样本. 例如, 一个 10 点序列 $x[n]$ 的 DFT 对应于 $X(z)$ 在如图 P8.14-1 所示的 10 个等间隔点处的样本. 我们希望求出 $X(z)$ 在如图 P8.14-2 所示的圆线上的等间隔的样本, 也就是说, 我们要得出

$$X(z)|_{z=0.5e^{j(2\pi k/10 + \pi/10)}}.$$

证明如何修正 $x[n]$ 以得到一个序列 $x_1[n]$, 使其 DFT 与 $X(z)$ 的所希望的样本相对应.

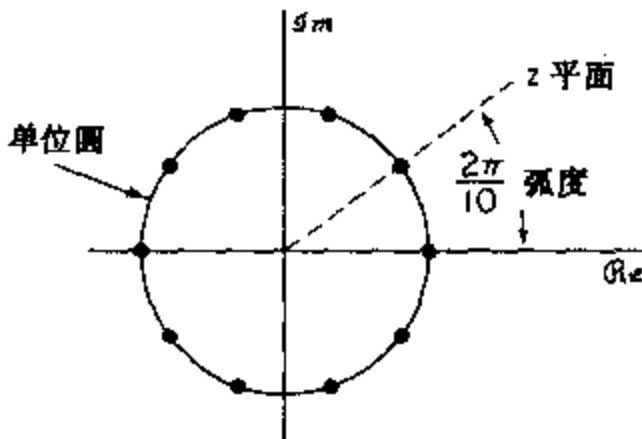


图 P8.14-1

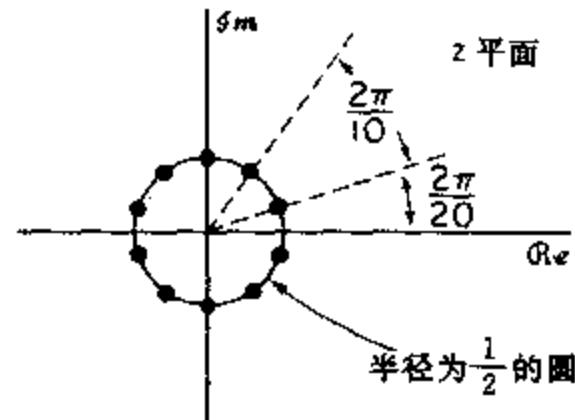


图 P8.14-2

8.15 $x[n]$ 表示一个长度为 N 的有限长序列. 证明

$$x[((-n))_N] = x[((N-n))_N].$$

8.16 图 P8.16 表示一个有限长序列 $x[n]$. 画出由下式规定的序列 $x_1[n]$ 和 $x_2[n]$ 的草图:

$$x_1[n] = x[((n-2))_4], \quad 0 \leq n \leq 3.$$

$$x_2[n] = x[((-n))_4], \quad 0 \leq n \leq 3.$$

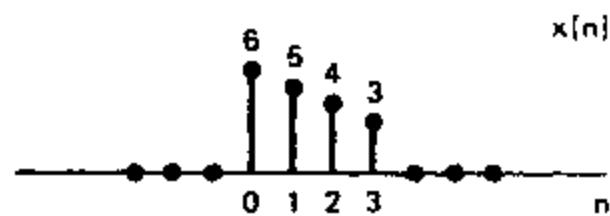


图 P8.16

8.17 一个长度为 8 的有限长序列 $x[n]$, 其 8 点 DFT $X[k]$ 如图 P8.17-1 所示. 另一个长度为 16 的新序列 $y[n]$ 定义为

$$y[n] = \begin{cases} x[n/2], & n \text{ 为偶数}, \\ 0, & n \text{ 为奇数}. \end{cases}$$

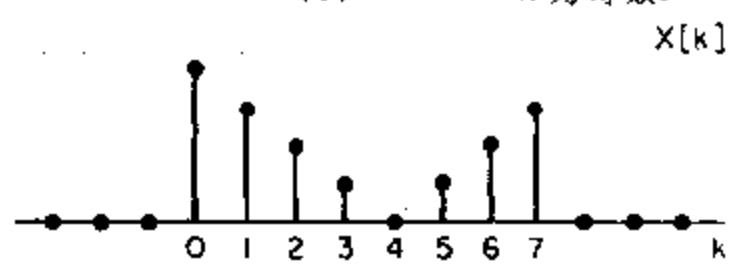


图 P8.17-1

从图 P8.17-2 中所列出的序列中选出大致与 $y[n]$ 的 16 点 DFT 对应的序列图.

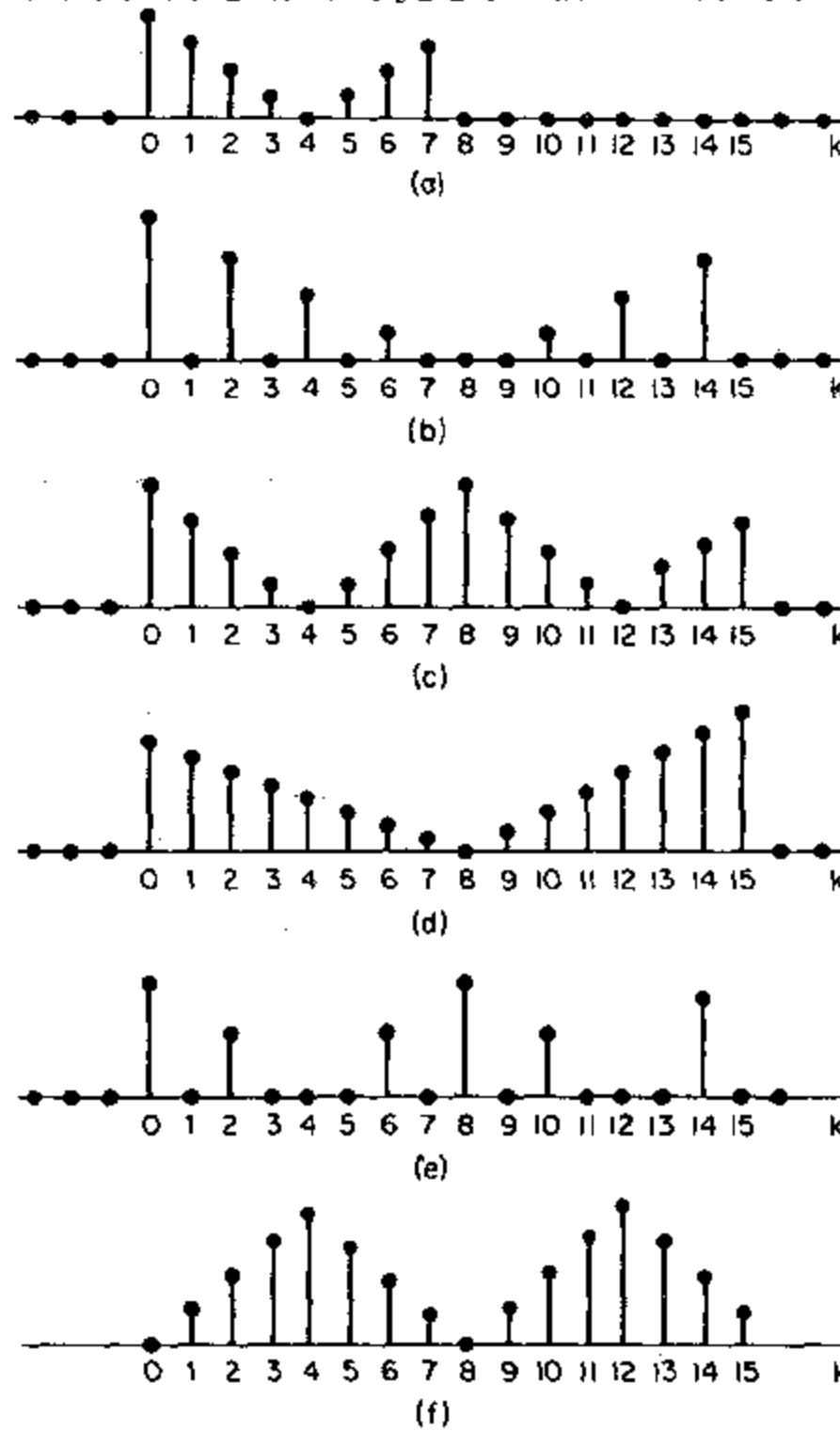


图 P8.17-2

- 8.18 考虑图 P8.18 中的有限长序列 $x[n]$. 令 $X(z)$ 为 $x[n]$ 的 z 变换. 如果我们在 $z=e^{j(2\pi/4)k}, k=1,2,3$ 处对 $X(z)$ 采样, 则可得到

$$X[k] = X(z) |_{z=e^{j(2\pi/4)k}} \quad k=0,1,2,3.$$

画出作为 $X(k)$ 的 IDFT 而得出的序列 $x_1[n]$ 的草图.

- 8.19 研究一个长度为 N 的有限长序列 $x[n]$, 如图 P8.19-1 所示(实线表明序列在 0 和 $N-1$ 之间取值的包络). 两个长度为 $2N$ 的有限长序列 $x_1[n]$ 和 $x_2[n]$ 由如图 P8.19-2 所示的 $x[n]$ 构成, 并由下式给出:

$$x_1[n] = \begin{cases} x[n], & 0 \leq n \leq N-1, \\ 0, & \text{其它}, \end{cases}$$



图 P8.18

$$x_2[n] = \begin{cases} x[n], & 0 \leq n \leq N-1, \\ -x[n-N], & N \leq n \leq 2N-1, \\ 0, & \text{其它.} \end{cases}$$

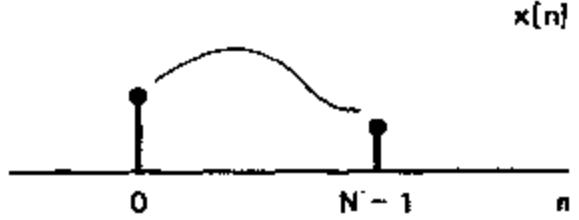
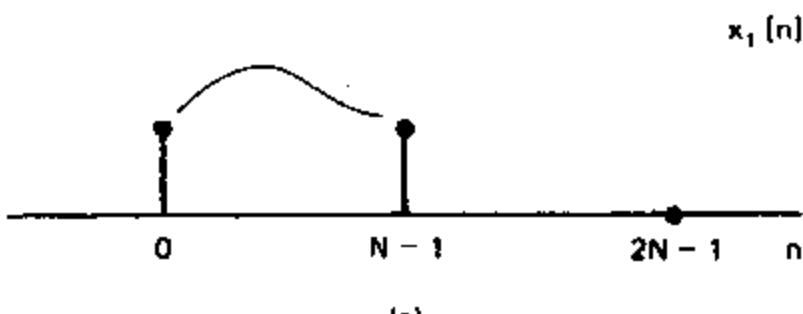
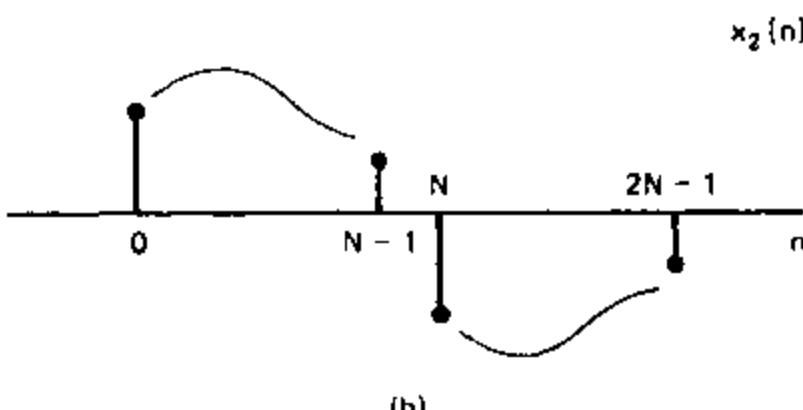


图 P8.19-1



(a)



(b)

图 P8.19-2

$x[n]$ 的 N 点 DFT 用 $X[k]$ 表示, $x_1[n]$ 和 $x_2[n]$ 的 $2N$ 点 DFT 分别用 $X_1[k]$ 和 $X_2[k]$ 表示.

(a) 说明若 $X[k]$ 已知, 能否得出 $X_2[k]$? 请详细叙述你的理由.

(b) 确定由 $X_1[k]$ 得出 $X[k]$ 的最简单可行的关系式.

- 8.20 设 $X(e^{j\omega})$ 为序列 $x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$ 的傅里叶变换, 令 $y[n]$ 表示一个长度为 10 的有限长序列, 即 $y[n] = 0, n < 0$ 和 $y[n] = 0, n \geq 10$. $y[n]$ 的 10 点 DFT 用 $Y[k]$ 表示, 它对应于 $X(e^{j\omega})$ 的 10 个等间隔样本, 即 $Y[k] = X(e^{j2\pi k/10})$. 求 $y[n]$.

- 8.21 考虑一个长度为 P 的有限长序列 $x[n]$, 也就是说, 当 $n < 0$ 和 $n \geq P$ 时 $x[n] = 0$. 我们希望在 N 个等间隔频率处

$$\omega_k = \frac{2\pi k}{N}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1.$$

计算傅里叶变换的样本. 确定并说明只利用一个 N 点 DFT 在下列两种情况下计算傅里叶变换的 N 个样本的步骤:

(a) $N > P$;

(b) $N < P$ [提示: 考虑将时间混叠加在 $x[n]$ 上].

- 8.22 研究 20 点有限长序列 $x[n]$, 使得在 $0 \leq n \leq 19$ 之外 $x[n] = 0$, 并且令 $X(e^{j\omega})$ 表示 $x[n]$ 的傅里叶变

换.

(a) 如果希望通过计算一个 M 点 DFT 来求出在 $\omega = 4\pi/5$ 处的 $X(e^{j\omega})$, 请确定最小可能的数 M 并提出一种用最小的 M 求出在 $\omega = 4\pi/5$ 处之 $X(e^{j\omega})$ 的方法.

(b) 如果希望通过计算一个 L 点 DFT 来求出在 $\omega = 10\pi/27$ 处的 $X(e^{j\omega})$, 请确定最小可能的数 L 并提出一种用最小的 L 求出 $X(e^{j10\pi/27})$ 的方法.

8.23 考虑实有限长序列 $x[n]$, 其傅里叶变换为 $X(e^{j\omega})$, DFT 为 $X[k]$. 若

$$\text{Im}\{X[k]\} = 0, \quad k=0, 1, \dots, N-1,$$

则我们是否可以得出结论:

$$\text{Im}\{X(e^{j\omega})\} = 0, \quad -\pi \leq \omega \leq \pi?$$

如果你认为可以, 请详细说明原因. 如果你认为不可以, 请举出一个与结论相反的例子.

8.24 研究图 P8.24 中的有限长序列 $x[n]$. $x[n]$ 的 4 点 DFT 用 $X[k]$ 表示. 绘出序列 $y[n]$ 的图形, 其 DFT 为

$$Y[k] = W_4^{nk} X[k].$$



图 P8.24

8.25 两个 8 点序列 $x_1[n]$ 和 $x_2[n]$ 如图 P8.24 所示, 其 DFT 分别为 $X_1[k]$ 和 $X_2[k]$. 试确定 $X_1[k]$ 和 $X_2[k]$ 之间的关系式.

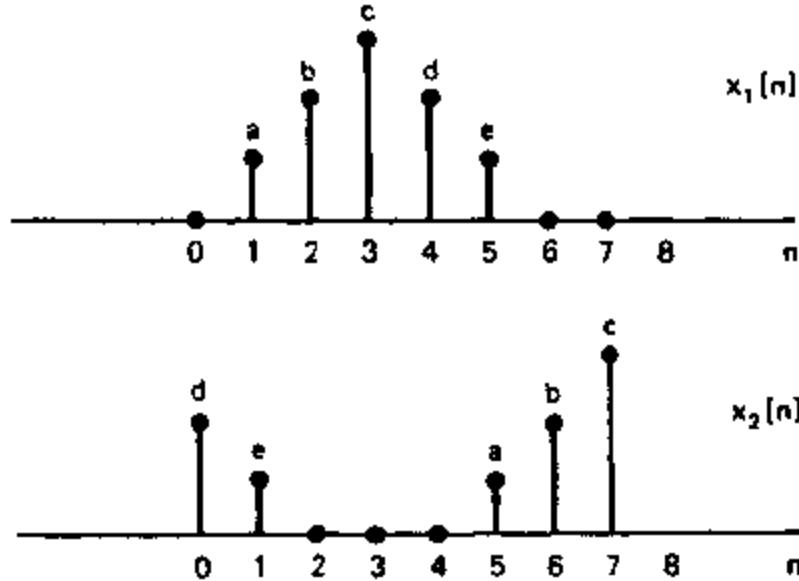


图 P8.25

8.26 设 $X[k]$ 表示 N 点序列 $x[n]$ 的 N 点 DFT.

(a) 证明: 若 $x[n]$ 满足关系式

$$x[n] = -x[N-1-n],$$

则 $X[0] = 0$. 分别考虑 N 为偶数和 N 为奇数时的情况.

(b) 证明: 若 N 为偶数且

$$x[n] = x[N-1-n],$$

则 $X[N/2] = 0$.

8.27 一个实序列 $x[n]$ 的偶部定义为

$$x_e[n] = \frac{x[n] + x[-n]}{2}.$$

假定 $x[n]$ 是一个有限长序列, 且限定当 $n < 0$ 和 $n \geq N$ 时 $x[n] = 0$. 令 $X[k]$ 表示 $x[n]$ 的 N 点

DFT.

- (a) $\{X[k]\}$ 是 $x_e[n]$ 的 DFT 吗?
- (b) 求出利用 $x[n]$ 表示的 $\{X[k]\}$ 的 IDFT.

8.28 在第二章中, 序列 $x[n]$ 的共轭对称分量和共轭非对称分量分别定义为

$$x_e[n] = \frac{1}{2}(x[n] + x^*[-n]),$$

$$x_o[n] = \frac{1}{2}(x[n] - x^*[-n]).$$

在 8.7.4 节中我们可以很方便地将一个有限长为 N 的序列的周期共轭对称分量和非周期共轭非对称分量分别定义为

$$x_{ep}[n] = \frac{1}{2}\{x[((n))_N] + x^*[((-n))_N]\}, \quad 0 \leq n \leq N-1,$$

$$x_{op}[n] = \frac{1}{2}\{x[((n))_N] - x^*[((-n))_N]\}, \quad 0 \leq n \leq N-1.$$

(a) 证明: $x_{ep}[n]$ 与 $x_e[n]$ 之间以及 $x_{op}[n]$ 与 $x_o[n]$ 之间有如下关系:

$$x_{ep}[n] = (x_e[n] + x_e[n-N]), \quad 0 \leq n \leq N-1.$$

$$x_{op}[n] = (x_o[n] + x_o[n-N]), \quad 0 \leq n \leq N-1.$$

(b) 设 $x[n]$ 是一个长度为 N 的序列, 通常不能由 $x_{ep}[n]$ 得出 $x_e[n]$, 也不能由 $x_{op}[n]$ 得出 $x_o[n]$.

证明: 若认为 $x[n]$ 是一个长度为 N 的序列, 但是当 $n > N/2$ 时 $x[n] = 0$, 则可以由 $x_{ep}[n]$ 得出 $x_e[n]$, 且可由 $x_{op}[n]$ 得出 $x_o[n]$.

8.29 考虑如图 P8.29 所示的实有限长序列 $x[n]$.

(a) 简略画出有限长序列 $y[n]$ 的图形, 其 6 点 DFT 为

$$Y[k] = W_6^k X[k],$$

式中 $X[k]$ 为 $x[n]$ 的 6 点 DFT.

(b) 简略画出有限长序列 $w[n]$ 的图形, 其 6 点 DFT 为

$$W[k] = \Re\{X[k]\}.$$

(c) 简略画出有限长序列 $q[n]$ 的图形, 其 3 点 DFT 为

$$Q[k] = X[2k], \quad k = 0, 1, 2.$$



图 P8.29

8.30 图 P8.30 表示两个有限长序列. 绘出它们 6 点循环卷积的图形.

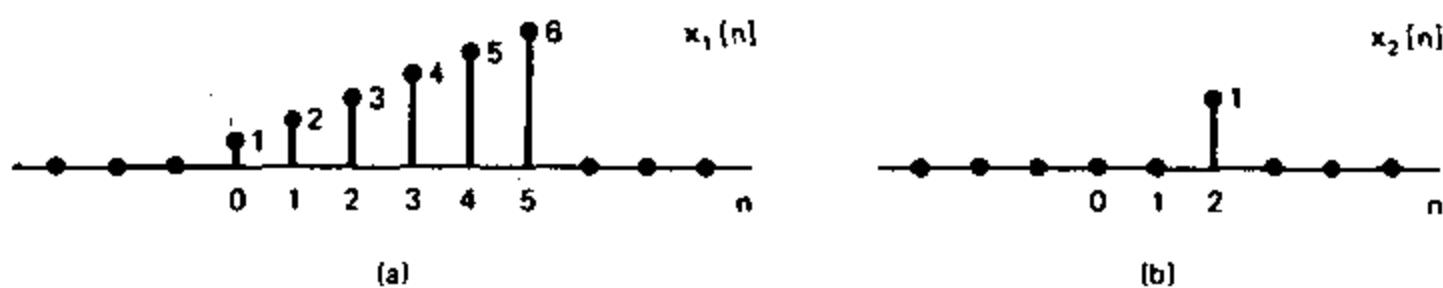


图 P8.30

8.31 图 P8.31 表示两个有限长序列. 分别绘出当 $N=6$ 和 $N=10$ 时它们的 N 点循环卷积的图形.

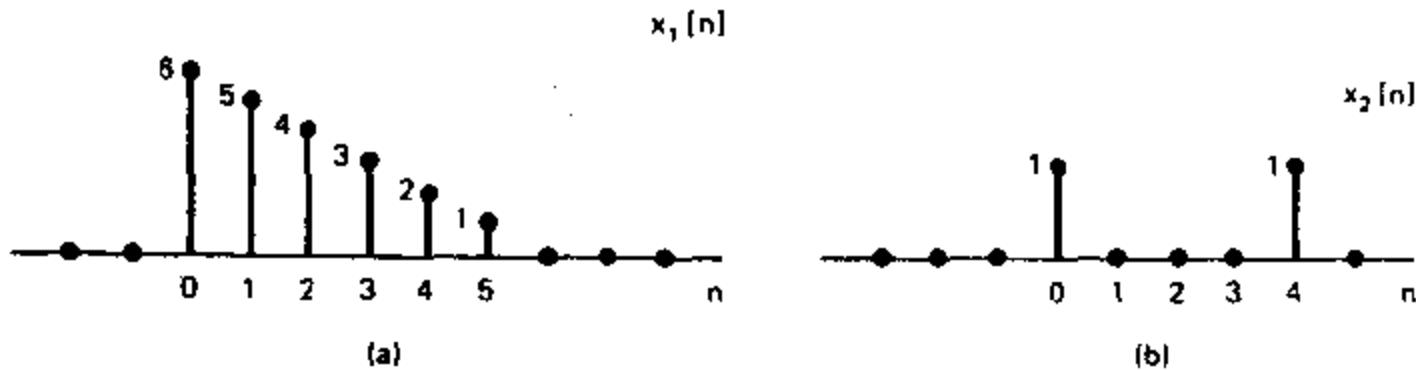


图 P8.31

8.32 假设我们有两个 4 点序列 $x[n]$ 和 $h[n]$, 表示式如下:

$$\begin{aligned}x[n] &= \cos\left(\frac{\pi n}{2}\right), & n=0,1,2,3, \\h[n] &= 2^n, & n=0,1,2,3.\end{aligned}$$

- (a) 计算 4 点 DFT $X[k]$.
- (b) 计算 4 点 DFT $H[k]$.
- (c) 直接作循环卷积计算 $y[n] = x[n] \circledast h[n]$.
- (d) 利用将 $x[n]$ 和 $h[n]$ 的 DFT 相乘, 然后求其 IDFT 的方法, 计算(c)中的 $y[n]$.

8.33 求一个序列 $x[n]$, 它全部能满足下述三个条件:

条件 1: $x[n]$ 的傅里叶变换有如下形式:

$$X(e^{j\omega}) = 1 + A_1 \cos \omega + A_2 \cos 2\omega,$$

其中 A_1 和 A_2 为某未知常数.

条件 2: 当 $n=2$ 时所算出的序列 $x[n] * \delta[n-3]$ 的值为 5.

条件 3: 对于图 P8.33 所示 3 点序列 $w[n]$, 当 $n=2$ 时 $w[n]$ 和 $x[n-3]$ 的 8 点循环卷积的结果等于 11, 即

$$\sum_{m=0}^7 w[m] x[((n-3-m))_8] |_{n=2} = 11.$$

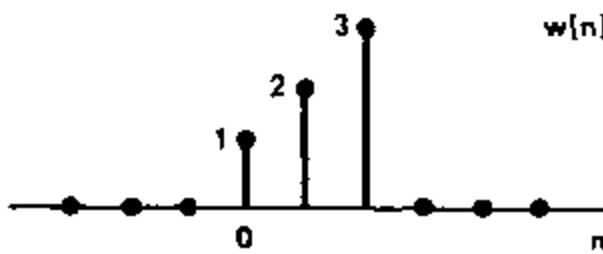


图 P8.33

8.34 考虑有限长序列

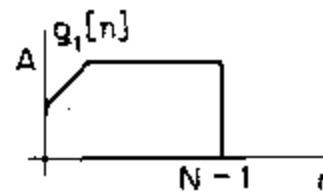
$$x[n] = 2\delta[n] + \delta[n-1] + \delta[n-3].$$

我们对该序列实行下列运算:

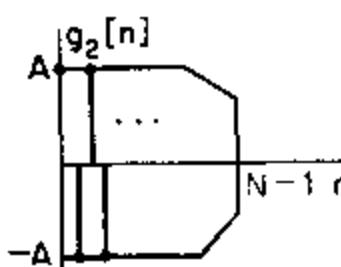
- (i) 计算 5 点 DFT $X[k]$.
 - (ii) 计算 $Y[k] = X[k]^2$ 的 IDFT 得出序列 $y[n]$.
 - (a) 求对于 $n=0,1,2,3,4$ 时的序列 $y[n]$.
 - (b) 如果在(i)(ii)两步中用 N 点 DFT, 我们如何选择 N 使得当 $0 \leq n \leq N-1$ 时 $Y[n] = x[n] * x[n]?$
- 8.35 研究有限长序列 $x[n]$, 当 $n < 0$ 和 $n \geq N$ 时其值为零, 其中 N 为偶数. $x[n]$ 的 z 变换用 $X(z)$ 表示. 表 P8.35-1 列出了由 $x[n]$ 得到的 7 个序列. 表 P8.35-2 列出了由 $X(z)$ 得到的 9 个序列. 对于表 P8.35-1 中的每一个序列找出其在表 P8.35-2 中对应的 DFT. 所考虑的变换长度必须大于或等于序列 $g_k[n]$ 的长度. 为了说明问题起见, 只假设 $x[n]$ 可以用在图 P8.35 中所示的包络来表示.

表 P8. 35-1

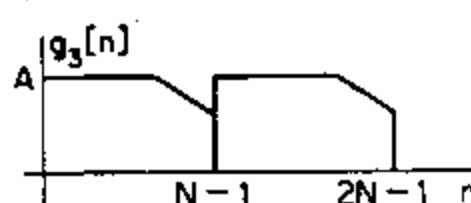
$$g_1[n] = x[N-1-n]$$



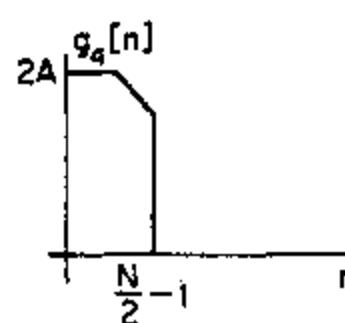
$$g_2[n] = (-1)^n x[n]$$



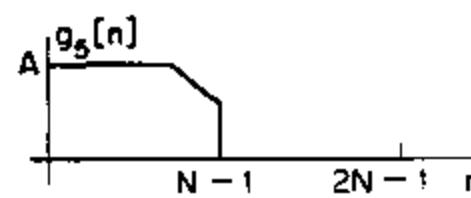
$$g_3[n] = \begin{cases} x[n], & 0 \leq n \leq N-1, \\ x[n-N], & N \leq n \leq 2N-1, \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$



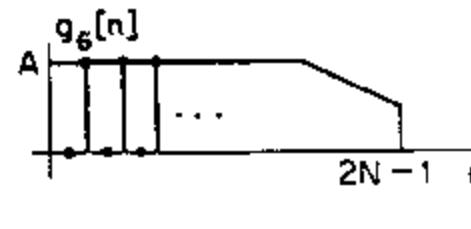
$$g_4[n] = \begin{cases} x[n] + x[n+N/2], & 0 \leq n \leq N/2-1, \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$



$$g_5[n] = \begin{cases} x[n], & 0 \leq n \leq N-1, \\ 0, & N \leq n \leq 2N-1, \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$



$$g_6[n] = \begin{cases} x[n/2], & n \text{ 为偶数}, \\ 0, & n \text{ 为奇数} \end{cases}$$



$$g_7[n] = x(2n)$$

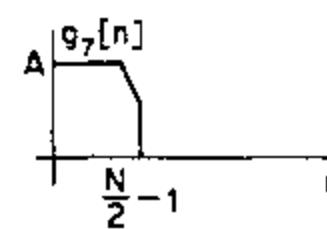


表 P8. 35-2

$$H_1[k] = X(e^{j2\pi k/N})$$

$$H_2[k] = X(e^{j2\pi k/2N})$$

$$H_3[k] = \begin{cases} 2X(e^{j2\pi k/2N}), & k \text{ 为偶数} \\ 0, & k \text{ 为奇数} \end{cases}$$

$$H_4[k] = X(e^{j2\pi k/(2N-1)})$$

$$H_5[k] = 0.5 \{ X(e^{j2\pi k/N}) + X(e^{j2\pi(k+N/2)/N}) \}$$

$$H_6[k] = X(e^{j4\pi k/N})$$

$$H_7[k] = e^{j2\pi k/N} X(e^{-j2\pi k/N})$$

$$H_8[k] = X(e^{j(2\pi/N)(k+N/2)})$$

$$H_9[k] = X(e^{-j2\pi k/N})$$

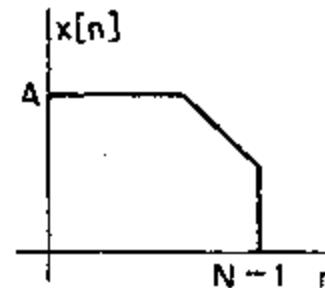


图 P8. 35

8.36 设 $x[n]$ 为一个 N 点序列, 且 $X[k]$ 是其 N 点 DFT. 由式(8.59)和(8.60)说明

$$\sum_{n=0}^{N-1} |x[n]|^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |X[k]|^2.$$

以上通常称为对于 DFT 的帕斯瓦尔关系式.

8.37 $x[n]$ 是一个长度为 10 的实有限长序列, 并且在从 0 到 9 的区间内其值为非零, 即

$$x[n] = 0, \quad n < 0, n \geq 10,$$

$$x[n] \neq 0, \quad 0 \leq n \leq 9.$$

$X(e^{j\omega})$ 表示 $x[n]$ 的傅里叶变换, $X[k]$ 表示 $x[n]$ 的 10 点 DFT.

请确定 $x[n]$, 使得 $X[k]$ 对于全部的 k 为实数, 并且

$$X(e^{j\omega}) = A(\omega)e^{j\alpha\omega}, \quad |\omega| < \pi,$$

式中 $A(\omega)$ 为实数, α 是一个非零实常数.

8.38 $x[n]$ 是一个长度为 N 的实非负有限长序列, 也就是说, 对于 $0 \leq n \leq N-1$, $x[n]$ 为实数和非负的, 否则均为零. $x[n]$ 的 N 点 DFT 是 $X[k]$, 且 $x[n]$ 的傅里叶变换为 $X(e^{j\omega})$.

试确定下面的每一种表述是正确的还是错误的. 如果你认为是正确的, 请详述原因. 如果认为是不正确的, 请给出一个这种表述不成立的例子.

(a) 若 $X(e^{j\omega})$ 可用下述形式表示:

$$X(e^{j\omega}) = B(\omega)e^{j\alpha\omega},$$

其中 $B(\omega)$ 是实数, 且 α 为实常数, 则 $X[k]$ 可表示成

$$X[k] = A[k]e^{j\gamma k},$$

式中 $A[k]$ 为实数, 且 γ 为实常数.

(b) 若 $X[k]$ 可表示为

$$X[k] = A[k]e^{j\gamma k},$$

其中 $A[k]$ 为实数, 且 γ 为实常数, 则 $X(e^{j\omega})$ 可表示成如下形式:

$$X(e^{j\omega}) = B(\omega)e^{j\alpha\omega},$$

式中 $B(\omega)$ 为实数, 且 α 为实常数.

8.39 图 P8.39 给出两个序列 $x_1[n]$ 和 $x_2[n]$, 其中

$$x_1[n] = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq 99, \\ 0, & \text{其它.} \end{cases}$$

$$x_2[n] = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq 9, \\ 0, & \text{其它.} \end{cases}$$

(a) 求线性卷积 $x_1[n] * x_2[n]$, 并作图.

(b) 求 100 点循环卷积 $x_1[n] \circledcirc_{100} x_2[n]$, 并作图.

(c) 求 110 点循环卷积 $x_1[n] \circledcirc_{110} x_2[n]$, 并作图.

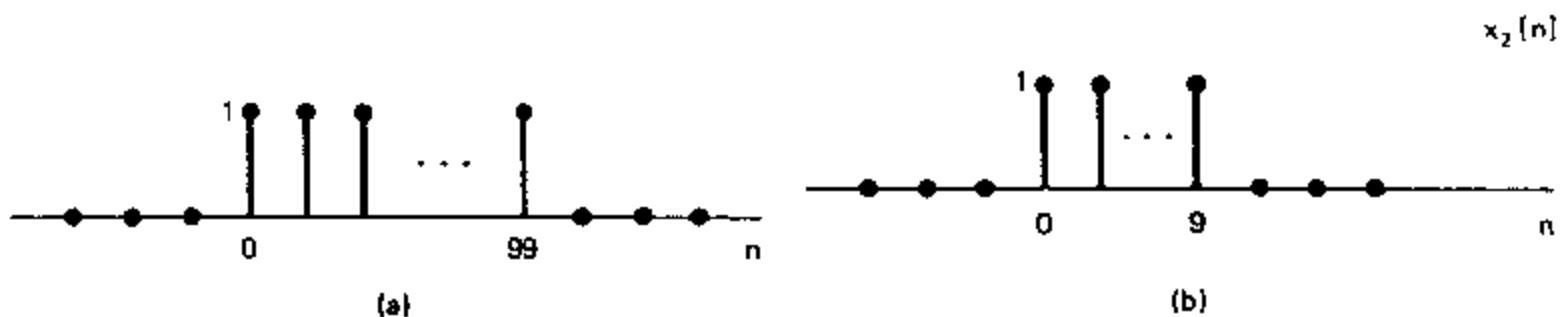


图 P8.39

8.40 有两个有限长序列 $x_1[n]$ 和 $x_2[n]$, 其值在区间 $0 \leq n \leq 99$ 之外为零, 它们进行循环卷积形成一个

新的序列 $y[n]$, 即

$$y[n] = x_1[n] \odot x_2[n] = \sum_{k=0}^{\infty} x_1[k] x_2[((n-k))_{100}], \quad 0 \leq n \leq 99.$$

若 $x_1[n]$ 只有当 $10 \leq n \leq 99$ 时才为非零, 试确定一组可保证 $y[n]$ 等于 $x_1[n]$ 和 $x_2[n]$ 的线性卷积的 n 值.

- 8.41 考虑两个有限长序列 $x[n]$ 和 $h[n]$, 并有在区间 $0 \leq n \leq 49$ 之外 $x[n] = 0$ 和在区间 $0 \leq n \leq 9$ 之外 $h[n] = 0$.

(a) 在 $x[n]$ 和 $h[n]$ 的线性卷积中最多有多少项可能取非零值?

(b) $x[n]$ 和 $h[n]$ 的 50 点循环卷积为

$$x[n] \circledast h[n] = 10, \quad 0 \leq n \leq 49$$

$x[n]$ 和 $h[n]$ 的线性卷积的前 5 点是

$$x[n] * h[n] = 5, \quad 0 \leq n \leq 4$$

求出线性卷积 $x[n] * h[n]$ 尽可能多的点.

- 8.42 研究两个有限长序列 $x[n]$ 和 $y[n]$. 当 $n < 0, n \geq 40$ 和 $9 < n < 30$ 时 $x[n]$ 为零, 并且为 $n < 10$ 和 $n > 19$ 时 $y[n]$ 为零, 如图 P8.42 所示.

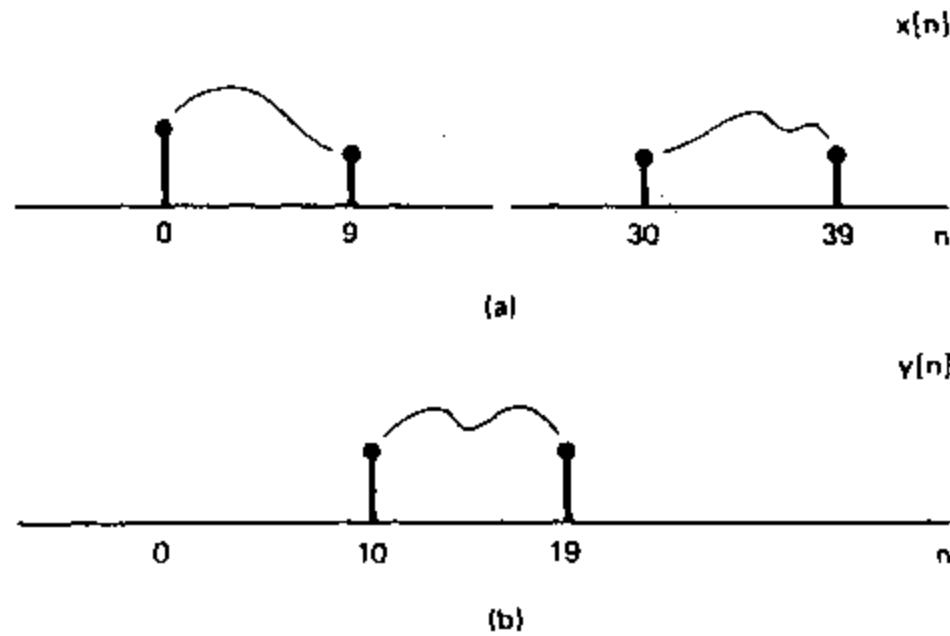


图 P8.42

令 $w[n]$ 表示 $x[n]$ 和 $y[n]$ 的线性卷积, 令 $g[n]$ 表示 $x[n]$ 和 $y[n]$ 的 40 点循环卷积:

$$w[n] = x[n] * y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] y[n-k],$$

$$g[n] = x[n] \circledast y[n] = \sum_{k=0}^{39} x[k] y[((n-k))_{40}].$$

(a) 求可使 $w[n]$ 为非零的 n 值.

(b) 求可由 $g[n]$ 得出 $w[n]$ 的 n 值. 清楚地说明在 $g[n]$ 中 n 取哪些数时 $w[n]$ 的这些值会出现.

- 8.43 $x[n]$ 和 $y[n]$ 是两个长度为 256 的正实值有限长序列, 即

$$x[n] > 0, \quad 0 \leq n \leq 255$$

$$y[n] > 0, \quad 0 \leq n \leq 255$$

$$x[n] = y[n] = 0, \quad \text{其它.}$$

$r[n]$ 表示 $x[n]$ 和 $y[n]$ 的线性卷积. $R(e^{j\omega})$ 表示 $r[n]$ 的傅里叶变换. $R_s[k]$ 表示 $R(e^{j\omega})$ 的 128 个等间隔样本, 即

$$R_s[k] = R(e^{j\omega})|_{\omega=2\pi k/128}, \quad k = 0, 1, \dots, 127.$$

若已知 $x[n]$ 和 $y[n]$, 我们希望尽可能有效地求出 $R_s[k]$. 只有列于图 P8.43 中的模型可以利用.

与每种模型相关的成本如下:

模型 I 和 II:	免费
模型 III:	10
模型 IV:	50
模型 V:	100

适当地把其中的一个或几个连接起来,构造一个输入为 $x[n]$ 和 $y[n]$ 、输出为 $R_s[k]$ 的系统。应当考虑的重要问题是:(a)系统能否工作,并且(b)它的有效性如何?我们认为总成本越低,则越有效。

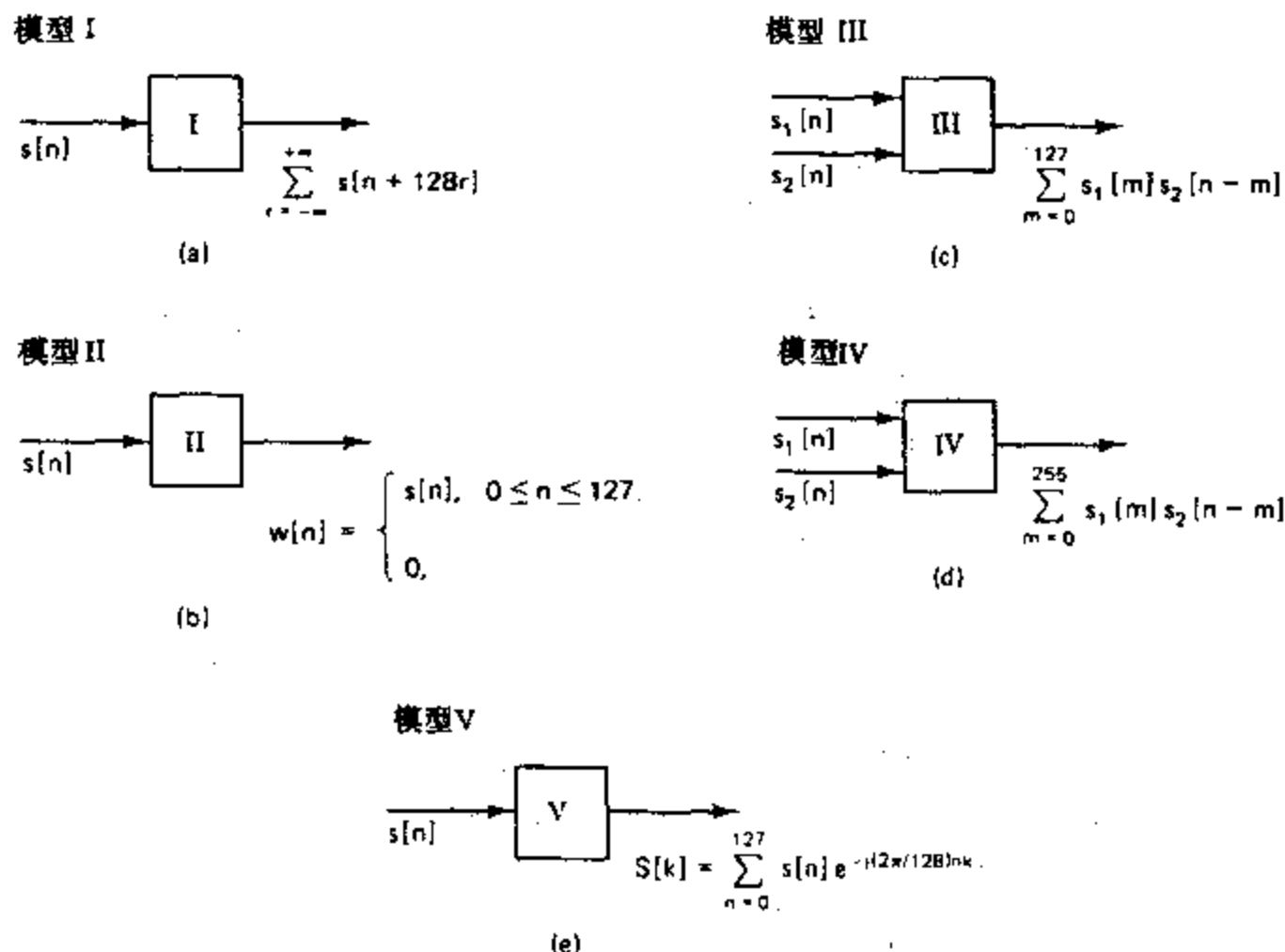


图 P8.43

8.44 两个长度为 8 的有限长序列 $h_1[n]$ 和 $h_2[n]$ 示于图 P8.44 中,它们之间有循环平移的关系。

- (a) 说明 8 点 DFT 的幅度是否相等。
- (b) 我们希望构造一个 FIR 低通滤波器,并且必须用 $h_1[n]$ 或 $h_2[n]$ 作为冲激响应。在下列论述中哪一个是正确的?

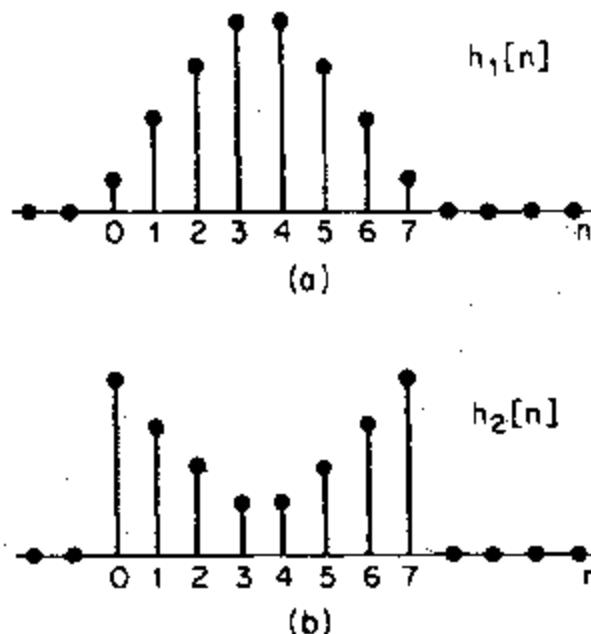


图 P8.44

- (i) $h_1[n]$ 是一个比 $h_2[n]$ 好的低通滤波器.
- (ii) $h_2[n]$ 是一个比 $h_1[n]$ 好的低通滤波器.
- (iii) 作为低通滤波器它们大体上同样好(或同样坏).

哪一种冲激响应能使所对应的频率响应更好地逼近低通滤波器? 或者二者都一样.

- 8.45 $y[n]$ 是系统函数为 $H(z) = 1/(z - bz^{-1})$ 的稳定 LTI 系统的输出, 其中 b 是一个已知常数. 我们希望通过 $y[n]$ 进行一定的运算来恢复输入信号 $x[n]$.

这里提出以下步骤从数据 $y[n]$ 中恢复部分 $x[n]$:

1. 利用 $y[n], 0 \leq n \leq N-1$ 计算 $y[n]$ 的 N 点 DFT $Y[k]$.
2. 按照下式构造 $V[k]$:

$$V[k] = (V_N^{-k} - bW_N^k)Y[k]$$

3. 计算 $V[k]$ 的 IDFT 得出 $v[n]$.

在 $n=0, 1, \dots, N-1$ 的范围内 n 取何值可保证

$$x[n] = v[n]?$$

- 8.46 曾有人提出一种修正的离散傅里叶变换法(MDFT)(Vernet, 1971), 用以计算在单位圆上 z 变换的样本, 这些样本偏离用 DFT 计算出的样本. 具体讲, 用 $X_M[k]$ 表示 $x[n]$ 的 MDFT,

$$X_M[k] = X(z)|_{z=e^{j[2\pi k/N + \pi/N]}}, \quad k=0, 1, 2, \dots, N-1.$$

假设 N 为偶数.

- (a) 序列 $x[n]$ 的 N 点 MDFT 对应于序列 $x_M[n]$ 的 N 点 DFT. $x_M[n]$ 很容易由 $x[n]$ 构造出来. 请利用 $x[n]$ 求出 $x_M[n]$.
- (b) 若 $x[n]$ 为实数, 则 DFT 的全部点不都是独立的, 因为 DFT 是共轭对称的, 即对于 $0 \leq k \leq N-1$, $X[k] = X^*[((-k))_N]$. 同样, 若 $x[n]$ 是实数, 在 MDFT 中的全部点也不都是独立的. 当 $x[n]$ 为实数时, 试确定在 $X_M[k]$ 中各点之间的关系.
- (c) (i) 令 $R[k] = X_M[2k]$; 即 $R[k]$ 包含 $X_M[k]$ 中偶数点. 利用你在(b)中的答案, 证明 $X_M[k]$ 可以由 $R[k]$ 来恢复.
(ii) $R[k]$ 可以看作是 $N/2$ 点序列 $r[n]$ 的 $N/2$ 点 MDFT. 求出将 $r[n]$ 直接与 $x[n]$ 连系在一起的简单表示式.

按照(b)和(c)部分的结果, 要计算实序列 $x[n]$ 的 N 点 MDFT, 可以首先由 $x[n]$ 构成 $r[n]$, 然后计算 $r[n]$ 的 $N/2$ 点 MDFT. 下面两部分直接表明, MDFT 可以用于实现线性卷积.

- (d) 考虑三个长度均为 N 的序列 $x_1[n], x_2[n]$ 和 $x_3[n]$. 令 $X_{1M}[k], X_{2M}[k]$ 和 $X_{3M}[k]$ 分别表示这三个序列的 MDFT. 若

$$X_{3M}[k] = X_{1M}[k]X_{2M}[k]$$

则可利用 $x_1[n]$ 和 $x_2[n]$ 来表示 $x_3[n]$. 你的表示式必须是对于 $x_1[n]$ 和 $x_2[n]$ 的“组合”进行单求和的形式, 与循环卷积有同样的(但不是完全相等的)型式.

- (e) 为了方便起见, 把(d)的结果称为修正循环卷积. 如果对于 $n \geq N/2$, 序列 $x_1[n]$ 和 $x_2[n]$ 均为零, 证明 $x_1[n]$ 和 $x_2[n]$ 的修正循环卷积等于 $x_1[n]$ 和 $x_2[n]$ 的线性卷积.

- 8.47 在编码理论的一些应用中需要计算两个 63 点序列 $x[n]$ 和 $h[n]$ 的 63 点循环卷积. 假设可供使用的计算器器件只有乘法器、加法器和计算 N 点 DFT 的处理器(限制 N 为 2 的某次幂).

- (a) 可以利用一系列的 64 点 DFT, IDFT 以及重叠相加法来计算 $x[n]$ 和 $h[n]$ 的 63 点循环卷积. 需要多少次 DFT? [提示: 可将每个 63 点序列看作是一个 32 点序列和一个 31 点序列之和.]
- (b) 确定一种算法, 它可以用二次 128 点的 DFT 和一次 128 点的 IDFT 算出 $x[n]$ 和 $h[n]$ 的 63 点循环卷积.
- (c) 我们也可以用先在时域计算 $x[n]$ 和 $h[n]$ 的线性卷积、然后将结果混叠在一起的方法, 来计算

$x[n]$ 和 $h[n]$ 的 63 点循环卷积。若使用乘法，上面三种方法中哪一种是最有效的？哪一种是最无效的？（假定 1 次复数乘法需要 4 次实数乘法，且 $x[n]$ 和 $h[n]$ 均为实数。）

- 8.48 我们希望实现一个 10000 点的序列与一个 100 点长的 FIR 冲激响应的线性卷积。这个卷积是利用长度为 256 的 DFT 和 IDFT 来实现的。

- 如果利用重叠相加法，对于全部的 10000 点序列完成卷积需要最少多少次 256 点 DFT 和最少多少次 256 点的 IDFT？详细说明理由。
- 如果利用重叠保留法，对于全部的 10000 点序列完成卷积需要最少多少次 256 点 DFT 和最少多少次 256 点的 IDFT？详细说明理由。
- 我们将会在第九章中知道，当 N 为 2 的幂时，一个 N 点 DFT 或 IDFT 需要 $(N/2)\log_2 N$ 次复数乘法和 $N\log_2 N$ 次复数加法。对于在(a)和(b)中所考虑的同样滤波器和冲激响应的长度，比较在重叠相加法、重叠保留法和直接卷积法中所需要的算术运算(乘法和加法)的次数。

- 8.49 我们想要用一个冲激响应为 50 个样本长的 FIR 滤波器对一个很长的数据串滤波，并且希望用重叠保留技术通过 DFT 来实现这一滤波。

1. 输入数据段必须重叠 V 个样本。

2. 从每段的输出我们必须抽取 M 个样本，以使当这些样本从每段中抽出相接在一起时，所得到的序列正是所希望的滤波后的输出。

假设输入序列长为 100 个样本点，且 DFT 的长度为 128($=2^7$)点，还假定循环卷积的输出序列的序号为 0 到 127。

- 求 V 。
- 求 M 。
- 确定所抽取的 M 点样本的起始和终止的序号，即要与先前一段的结果相接在一起，确定从循环卷积中抽取哪 128 点？

- 8.50 在实际中常常会出现的一个问题是，用一个线性时不变系统对信号 $x[n]$ 进行滤波，而系统的输出是受到畸变的信号 $y[n]$ 。我们希望通过 $y[n]$ 处理来恢复原始信号 $x[n]$ 。理论上，将 $y[n]$ 通过一个逆滤波器就可从 $y[n]$ 中恢复出 $x[n]$ ，而该逆滤波器的系统函数应等于原畸变滤波器系统函数的倒数。

假设畸变是由一个 FIR 滤波器引起的，其冲激响应为

$$h[n] = \delta[n] - \frac{1}{2}\delta[n-n_0]$$

式中 n_0 为正整数，也就是说，对 $x[n]$ 的干扰是在延时 n_0 处出现的一个回波。

- 求冲激响应 $h[n]$ 的 z 变换 $H(z)$ 和 N 点 DFT $H[k]$ 。设 $N=4n_0$ 。
- 令 $H_r(z)$ 表示逆滤波器系统函数， $h_r[n]$ 为所对应的冲激响应。求 $h_r[n]$ 。它是一个 FIR 滤波器或 IIR 滤波器吗？ $h_r[n]$ 的长度是多少？
- 如果我们试图利用一个长度为 N 的 FIR 滤波器来实现该逆滤波器，并且假定 FIR 滤波器的 N 点 DFT 为

$$G[k] = 1/H[k], \quad k=0, 1, \dots, N-1$$

则 FIR 滤波器的冲激响应 $g[n]$ 是什么？

- 用其 DFT $G[k]=1/H[k]$ 的 FIR 滤波器来实现逆滤波器似乎是很好的。于是有人可能会认为，FIR 畸变滤波器有 N 点 DFT $H[k]$ ，并且串联的 FIR 滤波器有 N 点 DFT $G[k]=1/H[k]$ ，因为对于全部的 k ， $G[k]H[k]=1$ ，所以我们已经实现了一个全通无畸变滤波器。简要说明这种说法的错误之处。
- 试完成 $g[n]$ 和 $h[n]$ 的卷积，并且确定如何能用其 N 点 DFT $G[k]=1/H[k]$ 的 FIR 滤波器很好地实现逆滤波。

第九章 离散傅里叶变换的计算

9.0 引言

离散傅里叶变换(DFT)在离散时间信号处理算法和系统的分析、设计及实现中起着十分重要的作用。第二章和第八章中所讨论的傅里叶变换和离散傅里叶变换的基本性质使得我们在傅氏域中来分析和设计系统非常方便。同样重要的是，已经有了用显式计算DFT的各种有效算法。因此，在离散时间系统的许多实际应用中DFT是十分重要的一部分。

正如在第八章中所讨论的，DFT就是以等间隔频率对傅里叶变换进行采样的样本。所以，计算N点DFT对应于在N个等间隔频率 $\omega_k = 2\pi k/N$ 处，即在z平面单位圆的N个点上计算傅里叶变换的N个样本。在这一章中，我们将讨论计算DFT值的几种方法。本章主要介绍对于N点DFT的数学计算特别有效的算法。概括地说，把这些有效算法统称为快速傅里叶变换(FFT)算法，我们将在9.3~9.6节中讨论。为了取得最高的效率，FFT算法必须计算DFT的所有N个值。而当我们只需要计算在 $0 \leq \omega \leq 2\pi$ 范围内的一部分频率上的DFT值时，可能其它的一些算法更加灵活有效，尽管这些算法在计算DFT的全部值时不具有FFT算法那么高的效率。这类算法中的代表就是将在9.2节中讨论的戈泽尔(Goertzel)算法和将在9.7.2节中讨论的线性调频变换算法。

度量某一实现方法或算法的复杂性和有效性有许多方式，而最终评价同时取决于可以利用的技术和打算应用的场合。我们将用算术乘法和加法的次数来作为计算复杂性的度量。这种度量方法使用起来很简单，如果在通用计算机或专用微处理机上来实现这些算法，则乘法和加法的次数就直接与计算速度有关。但是，有时其它的度量方法更合适。例如，在常用的VLSI实现时，芯片的面积往往是最重要的考虑因素，而芯片的面积有可能与算法的运算次数没有直接的关系。

若采用乘法和加法，FFT类算法的计算效率要比其它相近算法高出几个数量级。事实上由于FFT的高效率，以至于在许多情况下使得实现卷积最有效的方法成为首先计算参与卷积之序列的变换，然后将它们的变换相乘，最后计算这些变换乘积的逆变换。这一技术的细节曾在8.8节中讨论过。与这一点似乎矛盾的一个方面是，一些计算DFT(或者更一般地计算一组傅里叶变换的样本)的算法(将在9.7节中简要介绍)之所以能提高计算效率，是从利用卷积来重新改写傅里叶变换计算式出发，并藉此利用与卷积有关的高效计算方法来实现傅里叶变换的计算。这表明能够用DFT的相乘来实现卷积，其中DFT的实现是首先将它们表示成卷积，然后利用高效的算法来实现相应的卷积。虽然从表面上看这似乎是十分矛盾的，但是在9.7节中将会看到，在某些情况下这是一种十分合理的方法，并且完全不矛盾。

9.1 离散傅里叶变换的高效计算

正如第八章中所定义的,一个长度为 N 的有限长序列的 DFT 为

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] W_N^{kn}, \quad k=0,1,\dots,N-1, \quad (9.1)$$

式中 $W_N = e^{-j(2\pi/N)}$. 离散傅里叶反变换(IDFT)为

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] W_N^{-kn}, \quad n=0,1,\dots,N-1. \quad (9.2)$$

在式(9.1)和式(9.2)中, $x[n]$ 和 $X[k]$ 均可以是复数. 因为在式(9.1)和(9.2)中仅在 W_N 指数上差一个符号, 并相差一个比例因子 $1/N$, 所以有关式(9.1)计算步骤的讨论稍加修改就可以直接用于式(9.2). (参见习题 9.1.)

为了建立一个讨论 DFT 计算参考框架, 让我们首先研究一下式(9.1)DFT 方程的直接计算法. 由于 $x[n]$ 可能是复数, 所以, 若我们直接用式(9.1)作为计算公式, 则计算 DFT 每一个值就需要 N 次复数乘法和 $(N-1)$ 次复数加法. 因此, 计算全部的 N 个值总共需要 N^2 次复数乘法和 $N(N-1)$ 次复数加法. 若用实数运算来表示式(9.1), 可以得到

$$\begin{aligned} X[k] = & \sum_{n=0}^{N-1} [(\operatorname{Re}\{x[n]\} \operatorname{Re}\{W_N^{kn}\} - \operatorname{Im}\{x[n]\} \operatorname{Im}\{W_N^{kn}\}) \\ & + j(\operatorname{Re}\{x[n]\} \operatorname{Im}\{W_N^{kn}\} + \operatorname{Im}\{x[n]\} \operatorname{Re}\{W_N^{kn}\})], \\ & k=0,1,\dots,N-1, \end{aligned} \quad (9.3)$$

上式表明, 每个复数乘法需要 4 次实数乘法和 2 次实数加法, 并且每个复数加法需要 2 次实数加法. 所以, 对于每一个 k 值, 直接计算 $X(k)$ 就需要 $4N$ 次实数乘法和 $(4N-2)$ 次实数加法. *因为必须计算对于 N 个不同 k 值的 $X[k]$, 所以序列 $x[n]$ 的离散傅里叶变换的直接计算法需要 $4N^2$ 次实数乘法和 $N(4N-2)$ 次实数加法. 除了式(9.3)要求的乘法和加法之外, 通用计算机或专用硬件来作 DFT 数字计算还需求储存和读取 N 个复数输入序列值 $x[n]$ 以及复系数 W_N^{kn} 值的设备. 由于计算的总次数以及所需的时间大致上正比于 N^2 , 显然当 N 值很大时用直接法计算 DFT 所需要的算术运算的次数就非常大. 正是这个原因, 我们才十分关注能减少乘法和加法次数的计算方法.

改善 DFT 计算效率的大多数方法均利用了 W_N^{kn} 的对称性和周期性. 具体讲有:

1. $W_N^{k(N-n)} = W_N^{-kn} = (W_N^{kn})^*$, 复共轭对称性;
2. $W_N^{kn} = W_N^{k(n+N)} = W_N^{(k+N)n}$, 对 n 和 k 的周期性. 举一个例子来说明. 利用第一个性质, 即隐含的余弦和正弦函数的对称性, 我们可以将式(9.3)的和式中含有 n 和 $(N-n)$ 的项组合在一起. 例如,

$$\begin{aligned} & \operatorname{Re}\{x[n]\} \operatorname{Re}\{W_N^{kn}\} + \operatorname{Re}\{x[N-n]\} \operatorname{Re}\{W_N^{k(N-n)}\} \\ & = (\operatorname{Re}\{x[n]\} + \operatorname{Re}\{x[N-n]\}) \operatorname{Re}\{W_N^{kn}\} \end{aligned}$$

并且

* 在整个讨论中, 有关计算次数的数字只是近似的. 例如, 与 W_N^0 相乘, 实际上并不需要作一次乘法. 尽管如此, 包括这种情况的乘法在内而得出的计算复杂性的估计仍然是相当精确的, 可以用于两种不同类型算法间的比较.

$$\begin{aligned}
 &= \mathcal{I}_m\{x[n]\} \mathcal{I}_m\{W_N^{kn}\} - \mathcal{I}_m\{x[N-n]\} \mathcal{I}_m\{W_N^{k(N-n)}\} \\
 &= -(\mathcal{I}_m\{x[n]\} - \mathcal{I}_m\{x[N-n]\}) \mathcal{I}_m\{W_N^{kn}\}
 \end{aligned}$$

对于式(9.3)中的其它项可作类似的组合. 这样, 乘法的次数大约可以减少 1/2. 我们还可以利用如下事实: 对于乘积 kn 的某些值, 正弦和余弦函数取值为 1 或 0, 因此就可以省略掉这些乘法. 尽管如此, 这种减少仍然使我们面临着正比于 N^2 的大量计算. 值得庆幸的是, 可以利用第二个性质, 即复序列 W_N^k 的周期性, 而获得计算量的显著减少.

同时利用序列 W_N^k 的对称性和周期性的计算算法在高速数字计算出现的年代之前很长时间已为人们所知. 在那时, 任何既便仅能减少手工计算量一半的方法也是很受欢迎的. 黑德曼(Heideman et al., 1984)已经追溯 FFT 的原由早在 1805 年始于高斯. 朗奇(Runge, 1905)以及后来的丹尼尔森和兰佐斯(Danielson and Lanczos, 1942)曾论述过计算量大体上正比于 $N \log N$ 而不是 N^2 的算法*. 但是, 当 N 的值很小时, 这种差别并不很重要. 在这种情况下手工计算还是可行的. 大约直到 1965 年, 人们才普遍注意到显著减少计算量的可行性, 当时库利和图基(Cooley and Tukey, 1965)发表了一种计算离散傅里叶变换的算法, 当 N 为一个组合数, 即 N 是两个或多个整数的乘积时, 该算法是行之有效的. 这篇论文的发表掀起了研究将离散傅里叶变换用于信号处理的高潮, 导致发现了一大批高效的计算算法. 总起来说, 全部这类算法被人们称为快速傅里叶变换, 或 FFT.

FFT 算法是基于可以将一个长度为 N 的序列的离散傅里叶变换逐次分解为较短的离散傅里叶变换来计算这一基本原理的. 这一原理产生了许多不同的算法, 但它们在计算速度上均取得了大致相当的改善. 在本章中我们集中讨论两类基本的 FFT 算法. 第一类称为按时间抽取的 FFT 算法, 它的命名来自如下事实: 在把原计算安排成较短变换的过程中, 序列 $x[n]$ (通常看作是一个时间序列)可逐次分解为较短的子序列. 第二类称为按频率抽取的 FFT 算法, 因为在这类算法中是将离散傅里叶变换系数序列 $X[k]$ 分解为较短的子序列.

在这一章中我们还要研究几种计算离散傅里叶变换的算法. 这类算法在效率上各不相同, 但是均比式(9.3)的直接计算法使用较少的乘法和加法次数. 我们首先在下一节中讨论戈泽尔(Goertzel, 1958)算法, 它的计算量正比于 N^2 , 具有比直接法要小的比例常数. 戈泽尔算法的主要优点之一是, 它不只限于计算 DFT, 实际上对于计算任何所需要的一组频率样本均有效.

在 9.3~9.6 节中我们将仔细讨论 FFT 算法, 它的计算量正比于 $N \log N$. 当采用算术运算次数来比较时, 这类算法要比戈泽尔算法有效得多, 但是它主要适用于计算全部的 DFT 值. 我们并不打算毫无遗漏地讲解所有的这类算法, 而是只想仔细讨论几个较常用的方案来举例说明所有这类算法共用的一般原理.

在 9.7 节中我们将讨论以采用卷积来构成计算 DFT 公式的算法. 最后, 在 9.8 节中我们研究在 DFT 计算中运算量化的影响.

* 对于与 FFT 有关的研究结果之发展史的总结见库利等人(Cooley et al. 1967)的论文.

9.2 戈泽尔算法

戈泽尔(Geortzel, 1958)算法是一个如何利用序列 W_N^{kn} 的周期性来减少计算量的例子。为了推导这一算法, 我们首先注意到

$$W_N^{-kn} = e^{j(2\pi/N)Nk} = e^{j2\pi k} = 1. \quad (9.4)$$

当然, 这是 W_N^{-kn} 周期性的直接结果。因为式(9.4), 所以我们可以用 W_N^{-kn} 乘以式(9.1)的右边而不影响该式。因此,

$$X[k] = W_N^{-kn} \sum_{r=0}^{N-1} x[r] W_N^{kr} = \sum_{r=0}^{N-1} x[r] W_N^{-k(N-r)}. \quad (9.5)$$

为了联想到最终的结果, 定义序列

$$y_k[n] = \sum_{r=-\infty}^{\infty} x[r] W_N^{-k(n-r)} u[n-r]. \quad (9.6)$$

由式(9.5)和式(9.6), 以及当 $n < 0$ 和 $n \geq N$ 时 $x[n] = 0$ 的事实, 可得

$$X[k] = y_k[n]|_{n=N}. \quad (9.7)$$

式(9.6)可以解释为, 有限长序列 $x[n]$, $0 \leq n \leq N-1$, 与序列 $W_N^{-kn} u[n]$ 的离散卷积。所以, $y_k[n]$ 可以看作是冲激响应为 $W_N^{-kn} u[n]$ 的系统对有限长输入 $x[n]$ 的响应。 $X[k]$ 就是 $n=N$ 时的输出值。

图 9.1 中绘出了具有冲激响应为 $W_N^{-kn} u[n]$ 的系统, 其中已经假设初始松弛条件。因为通常的输入 $x[n]$ 和系数 W_N^{-k} 均为复数, 所以利用图 9.1 的系统来计算 $y_k[n]$ 的每个新的值需要 4 次实数乘法和 4 次实数加法。为了计算 $y_k[N] = X[k]$, 必须计算所有的 $y_k[1], y_k[2], \dots, y_k[N-1]$ 值, 因此利用图 9.1 中的系统作为一种计算算法来计算特定 k 值下的 $X[k]$ 时, 需要 $4N$ 次实数乘法和 $4N$ 次实数加法。所以, 这种方法比直接法稍差一些。但是, 图 9.1 的方法避免了计算或贮存系数 W_N^{kn} , 因为已通过图 9.1 所示的递推过程计算出了这些量。

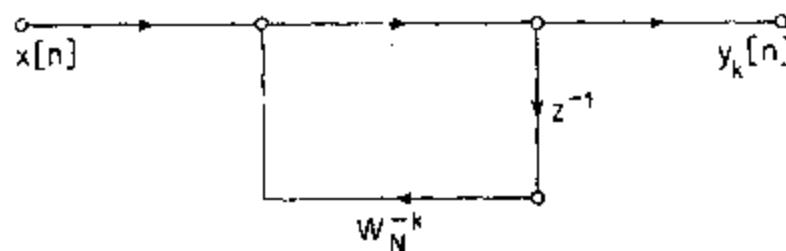


图 9.1 $X[k]$ 的一阶复递推计算流图。

保持这种简化而将乘法次数再减少一半是可能的。为了看出如何才能做到这一点, 我们注意到图 9.1 所示系统的系统函数是

$$H_k(z) = \frac{1}{1 - W_N^{-k} z^{-1}}. \quad (9.8)$$

用因子 $(1 - W_N^k z^{-1})$ 乘以 $H_k(z)$ 的分子和分母, 可得

$$H_k(z) = \frac{1 - W_N^k z^{-1}}{(1 - W_N^{-k} z^{-1})(1 - W_N^k z^{-1})}$$

$$= \frac{1 - W_N^k z^{-1}}{1 - 2\cos(2\pi k/N)z^{-1} + z^{-2}}. \quad (9.9)$$

图 9.2 所示的信号流图就对应于式(9.9)的系统.

若输入为复数,由于系数是实数并且因子 -1 不必算作一次乘法,所以实现该系统的极点只需要每个样本作 2 次实数乘法. 和一阶系统的情况相同,对于复输入,实现极点需要每个样本作 4 次实数加法. 因为我们只须使该系统处于可以计算出 $y_k[n]$ 的状态,所以实现系统函数的零点所要求的与 $(-W_N^k)$ 作复数相乘就不必在差分方程的每一步迭代中都进行,只需在第 N 次迭代后完成. 这样,全部的计算量是:对于极点作 $2N$ 次实数乘法和 $4N$ 次实数加法,加上对于零点作 4 次实数乘法和 4 次实数加法. 因此,总计算量是 $2(N+2)$ 次实数乘法和 $4(N+1)$ 次实数加法,所需要的实数乘法次数大约是直接法的一半. 在这种比较有效的方法中,仍然保持着只需计算和贮存 $\cos(2\pi k/N)$ 和 W_N^k 这些系数的优点. 系数 W_N^k 已在图 9.2 所示的递推公式的迭代中再次被隐含地计算出了.

为了说明利用这种网络的另一个优点,我们研究一下如何计算 $x[n]$ 的 z 变换在单位圆上位于共轭位置的值,即计算 $X[k]$ 和 $X[N-k]$. 可以直接证明,计算 $X[N-k]$ 所要求的图 9.2 形式的网络与计算 $X[k]$ 所要求的图 9.2 中的网络有完全相同的极点,但前者零点的系数与后者零点的系数是复共轭的关系(见习题 9.2). 因为仅在最后的迭代中实现零点,所以,可以利用极点所要求的 $2N$ 次乘法和 $4N$ 次加法来计算两个 DFT 值. 这样,当利用戈策尔算法来计算离散傅里叶变换所有的 N 个值时,所需要的实数乘法次数大约为 N^2 ,并且实数加法次数大约为 $2N^2$. 尽管这比直接计算离散傅里叶变换要有效得多,但是计算量仍然正比于 N^2 .

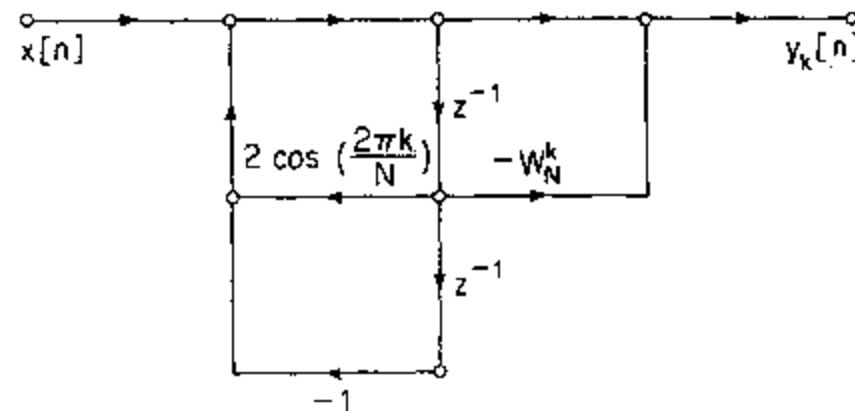


图 9.2 $X[k]$ 的二阶递推计算流图(戈泽尔算法).

无论是在直接法中还是戈泽尔法中,我们并不需要去计算全部 N 个 k 值的 $X[k]$. 的确,因为由图 9.2 形式的具有适当系数的递推系统可以计算出每一个 DFT 值,所以我们可以计算任意 M 个 k 值的 $X[k]$. 在这种情况下,总计算量正比于 NM . 当 M 很小时,戈泽尔法和直接法都是可取的;但是如前所述,当 N 为 2 的整幕时还有计算量正比于 $N \log_2 N$ 的算法. 因此,当 M 小于 $\log_2 N$ 时,无论戈泽尔算法或直接法实际上都是最有效的方法,但是当需要计算 $X[k]$ 的全部 N 个值时,下面将要研究的按时间抽取算法的效率约为直接法或戈泽尔算法的 $(N/\log_2 N)$ 倍.

9.3 按时间抽取的 FFT 算法

当计算 DFT 时,把整个计算逐次分解成较短的 DFT 计算将会显著地提高效率. 在这一过程中, 我们将同时利用复指数 $W_N^k = e^{-j(2\pi/N)kn}$ 的对称性和周期性. 这些算法是以将序列 $x[n]$ 逐次分解为较短的子序列为基础上的, 我们称这类算法为按时间抽取算法.

通过研究 N 为 2 的整数幂、即 $N=2^n$ 的这种特殊情况, 可以最方便地证明按时间抽取算法的原理. 因为 N 为偶整数, 所以我们可以将 $x[n]$ 分解成两个($N/2$)点^{*}序列来计算 $X[k]$, 其中一个序列由 $x[n]$ 的偶数点组成, 而另一个序列则由 $x[n]$ 的奇数点组成. 由于 $X[k]$ 为

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] W_N^{nk}, \quad k=0, 1, \dots, N-1, \quad (9.10)$$

并且将 $x[n]$ 分解为偶数点和奇数点, 因此可得到

$$X[k] = \sum_{n \text{ even}} x[n] W_N^{nk} + \sum_{n \text{ odd}} x[n] W_N^{nk}, \quad (9.11)$$

或者, 对于偶数 n 用变量 $n=2r$ 代替, 对于奇数 n 用变量 $n=2r+1$ 代替, 有

$$\begin{aligned} X[k] &= \sum_{r=0}^{(N/2)-1} x[2r] W_N^{2rk} + \sum_{r=0}^{(N/2)-1} x[2r+1] W_N^{(2r+1)k} \\ &= \sum_{r=0}^{(N/2)-1} x[2r] (W_N^2)^{rk} + W_N^k \sum_{r=0}^{(N/2)-1} x[2r+1] (W_N^2)^{rk}. \end{aligned} \quad (9.12)$$

因为

$$W_N^2 = e^{-2j(2\pi/N)} = e^{-j2\pi/(N/2)} = W_{N/2}. \quad (9.13)$$

所以, $W_N^k = W_{N/2}$. 因此式(9.12)可以写作

$$\begin{aligned} X[k] &= \sum_{r=0}^{(N/2)-1} x[2r] W_{N/2}^{rk} + W_N^k \sum_{r=0}^{(N/2)-1} x[2r+1] W_{N/2}^{rk} \\ &= G[k] + W_N^k H[k]. \end{aligned} \quad (9.14)$$

在式(9.14)中的每一个和式可以看作是一个($N/2$)点 DFT, 第一个和式是原序列偶数点的($N/2$)点 DFT, 而第二个和式是原序列奇数点的($N/2$)点 DFT. 虽然标号 k 遍取 N 个值, $k=0, 1, \dots, N-1$, 但是因为 $G[k]$ 和 $H[k]$ 都是周期为 $N/2$ 的 k 的周期函数, 所以每一个和式只需计算 k 取 0 至 $(N/2)-1$ 之间的值. 计算出两个 DFT 后, 按照式(9.14)将二者组合成 N 点 DFT $X[k]$. 图 9.3 绘出了当 $N=8$ 时的这一计算过程. 在该图中使用了信号流图的规定, 这些我们曾在第六章中表示差分方程时介绍过. 这就是说, 进入一个节点的支路相加后就得到该节点的变量. 当支路上没有标明系数时, 就假定该支路的传输比为 1. 对于其它支路而言, 一个支路的传输比为 W_N 的整数次幂.

在图 9.3 中计算了两个 4 点 DFT, $G[k]$ 表示偶数点的 4 点 DFT, 而 $H[k]$ 表示奇数点的 4 点 DFT. $H[0]$ 乘以 W_N^0 并与 $G[0]$ 相加就得到 $X[0]$. $H[1]$ 乘以 W_N^1 再加 $G[1]$ 就

* 当讨论 FFT 算法时, 我们交替使用“样本”和“点”这两个词来表示序列值. 同样, 我们也可把一个长度为 N 的序列称为 N 点序列, 把一个长度为 N 的序列的 DFT 称为 N 点 DFT.

得到 $X[1]$. 式(9.14)表明, 要计算 $X[4]$, 我们应当用 W_N^4 乘以 $H[4]$ 并加上 $G[4]$. 但是, 因为 $G[k]$ 和 $H[k]$ 都是周期为 4 的 k 的周期函数, 所以 $H[4]=H[0]$, $G[4]=G[0]$. 因此, $X[4]$ 可以用 $H[0]$ 乘以 W_N^4 再加上 $G[0]$ 得到. 如图 9.3 所示, 类似地可以得到 $X[5]$, $X[6]$ 和 $X[7]$ 的值.

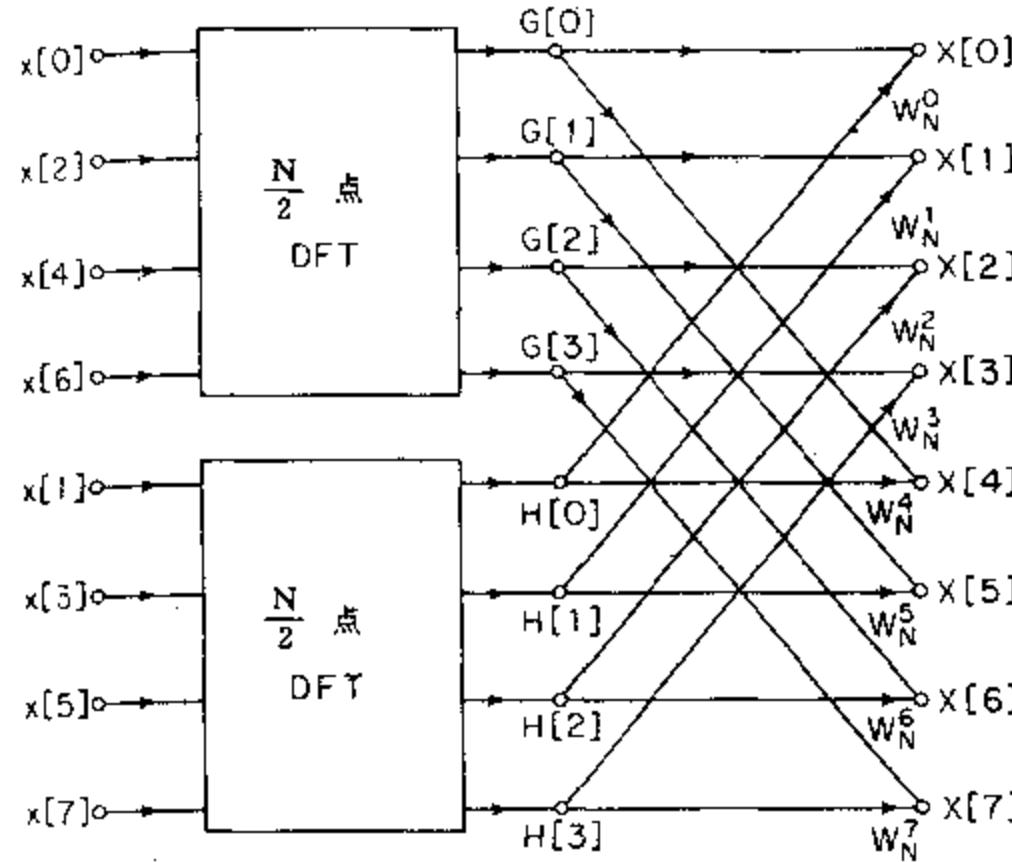


图 9.3 把一个 N 点 DFT 计算分解为两个 $(N/2)$ 点 DFT 计算的按时间拍取信号流图.

对于按照式(9.14)安排的计算, 我们可以将其所需要的乘法和加法次数与直接计算 DFT 所需要的加以比较. 前面已经看出, 对于没有利用对称性的直接计算, 需要 N^2 次复数乘法和加法*. 通过比较, 式(9.14)需要计算 2 个 $(N/2)$ 点 DFT, 而如果用直接法计算 $(N/2)$ 点 DFT 则需要 $2(N/2)^2$ 次复数乘法和大约 $2(N/2)^2$ 次复数加法. 然后必须将两个 $(N/2)$ 点 DFT 组合在一起, 对应于第二个和式乘以 W_N^k 需要 N 次复数乘法, 而对应于把乘积加到第一个和式上需要 N 次复数加法. 因此, 若对于所有的 k 值计算式(9.14)至多要求 $N+2(N/2)^2$ 或 $N+N^2/2$ 次复数乘法和复数加法. 很容易证明, 当 $N>2$ 时, $N+N^2/2$ 将会小于 N^2 .

式(9.14)相当于将原来的 N 点计算分解为两个 $(N/2)$ 点 DFT 计算. 若 $N/2$ 为偶数 (N 等于 2 的幂次时就是这样), 则我们可以认为计算式(9.14)中的每一个 $(N/2)$ 点 DFT 可以通过将式(9.14)中的每个和式分解成 2 个 $(N/4)$ 点 DFT 来进行, 然后再把它们组合在一起得到 $(N/2)$ 点 DFT. 这样, 式(9.14)中的 $G[k]$ 可表示成

$$G[k] = \sum_{r=0}^{(N/2)-1} g[r] W_{N/2}^{rk} = \sum_{\ell=0}^{(N/4)-1} g[2\ell] W_{N/2}^{2\ell k} + \sum_{\ell=0}^{(N/4)-1} g[2\ell+1] W_{N/2}^{(2\ell+1)k} \quad (9.15)$$

或

$$G[k] = \sum_{\ell=0}^{(N/4)-1} g[2\ell] W_{N/4}^{k\ell} + W_{N/2}^k \sum_{\ell=0}^{(N/4)-1} g[2\ell+1] W_{N/4}^{k\ell}. \quad (9.16)$$

* 为了简便起见, 我们假定 N 较大, 因此 $(N-1)$ 可以近似为 N .

同样, $H[k]$ 应当表示为

$$H[k] = \sum_{\ell=0}^{(N/4)-1} h[2\ell]W_{N/4}^{\ell k} + W_{N/2}^k \sum_{\ell=0}^{(N/4)-1} h[2\ell+1]W_{N/4}^{\ell k}. \quad (9.17)$$

所以, 将序列 $g[2\ell]$ 和 $g[2\ell+1]$ 的 $(N/4)$ 点 DFT 组合在一起, 可以得到 $(N/2)$ 点 DFT $G[k]$. 同样, 将序列 $h[2\ell]$ 和 $h[2\ell+1]$ 的 $(N/4)$ 点 DFT 组合起来, 就可以得到 $(N/2)$ 点 DFT $H[k]$. 因此, 如果按照式(9.16)和式(9.17)来计算图 9.3 中的 4 点 DFT, 则计算将按照图 9.4 所示的那样进行. 若将图 9.4 的计算流图插入到图 9.3 所示的流图中去, 则我们就可以得到图 9.5 所示的完整流图, 图中因为可利用 $W_{N/2} = W_N^2$ 这一性质, 所以已用 W_N 的幂而不是 $W_{N/2}$ 的幂来表示系数.

对于举例用到的 8 点 DFT, 已经将计算简化为 2 点 DFT 的计算. 例如, $x[0]$ 和 $x[4]$ 的 2 点 DFT 绘于图 9.6 中. 将图 9.6 的计算再插到图 9.5 流图中去, 就可以得到计算 8 点 DFT 的完整流图, 如图 9.7 所示.

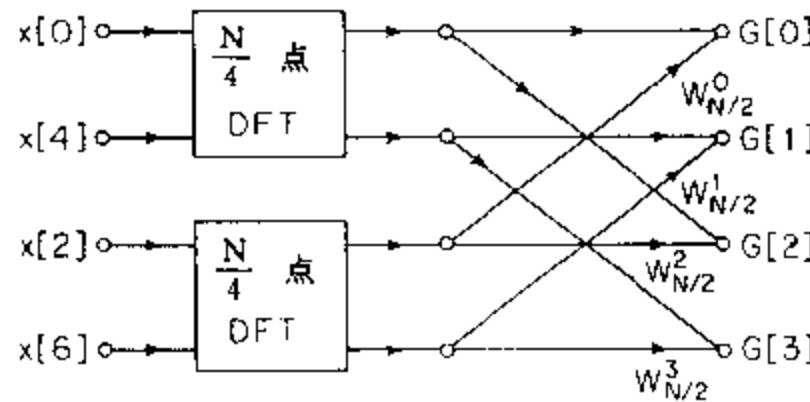


图 9.4 按时间抽取将 $(N/2)$ 点 DFT 的计算分解为 2 个 $(N/4)$ 点 DFT 来计算的流图 ($N=8$).

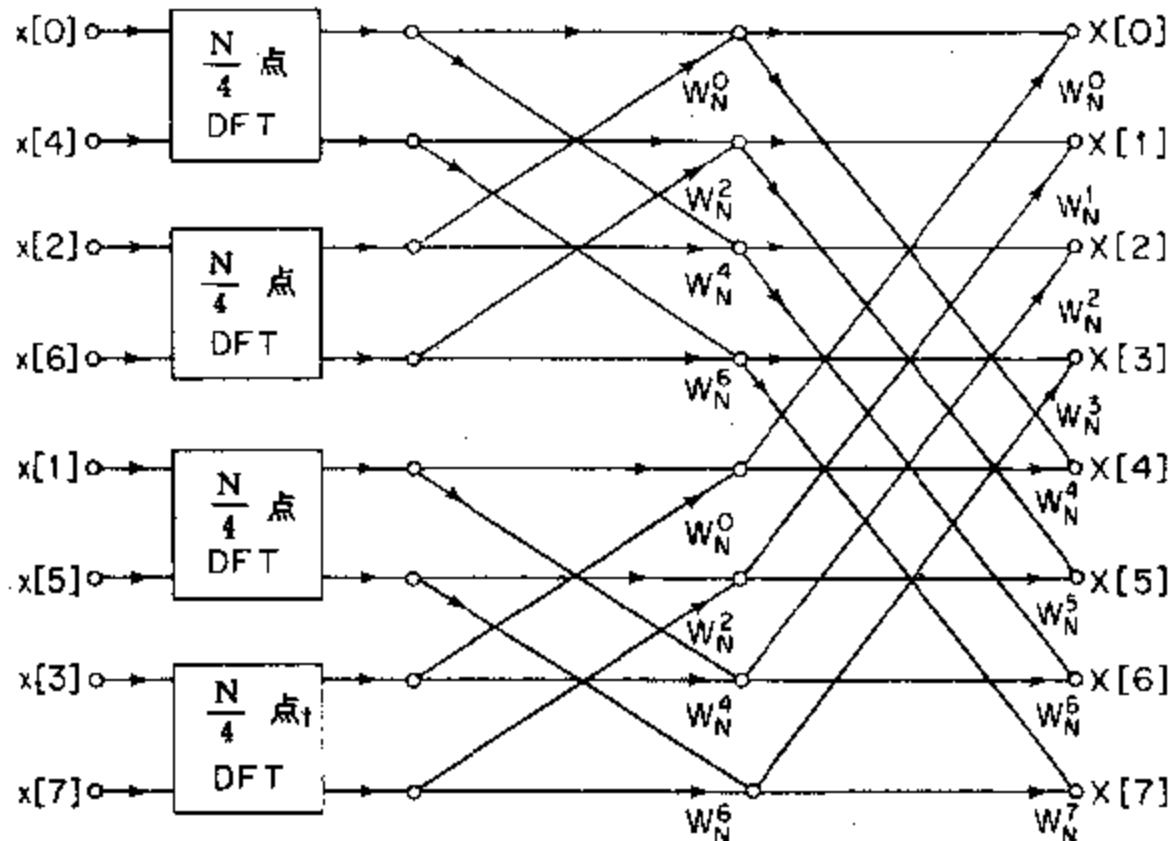


图 9.5 将图 9.4 代入图 9.3 的结果.

对于更一般的情况, 但 N 似为 2 的幂次时, 我们应当将式(9.16)和式(9.17)中的 $(N/4)$ 点变换分解为 $(N/8)$ 点变换, 继续进行下去一直到只剩下 2 点变换为止. 这需要作

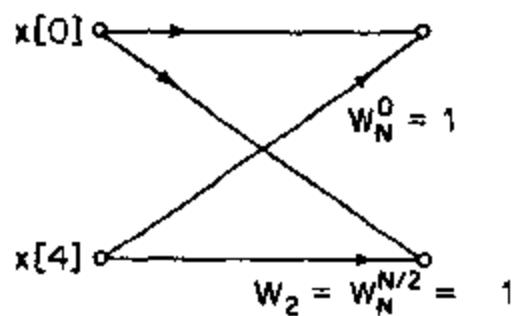


图 9.6 两点 DFT 的流图.

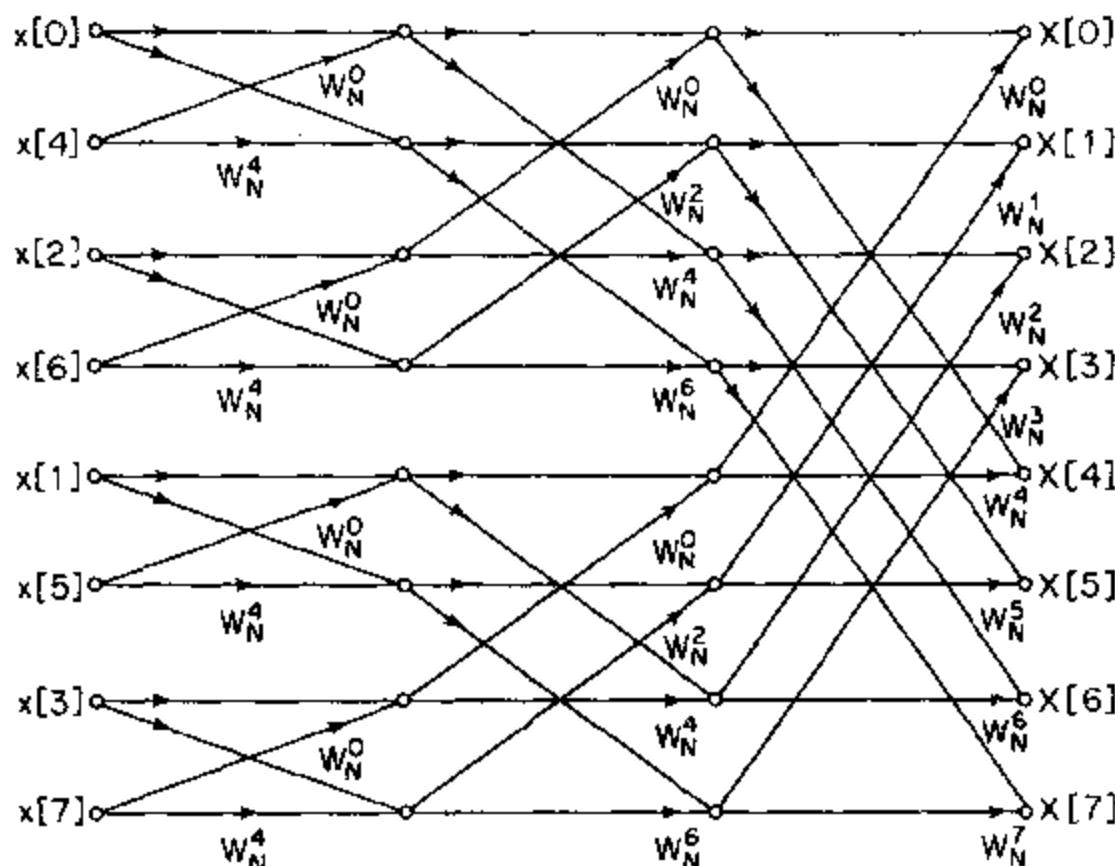


图 9.7 按时间抽取将 8 点 DFT 计算完全分解的流图.

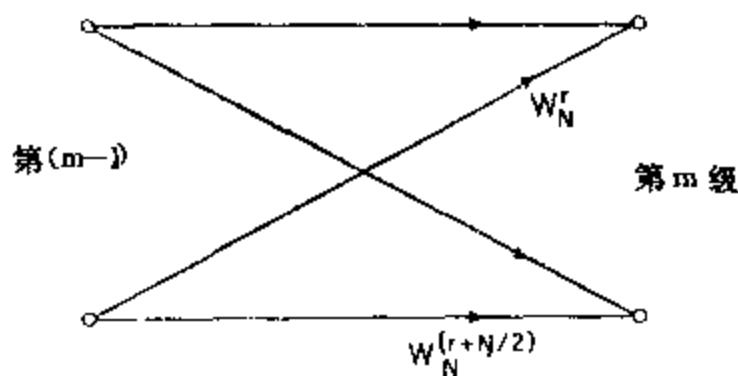


图 9.8 在图 9.7 中基本蝶形计算流图.

v 级的这种运算, 其中 $v = \log_2 N$. 以前我们曾求得, 当一个 N 点的变换最初分解成 2 个 ($N/2$) 点变换时, 所要求的复数乘法和加法次数为 $N + 2(N/2)^2$. 当 $(N/2)$ 点的变换分解为 $(N/4)$ 点变换时, 则用 $N/2 + 2(N/4)^2$ 代替因子 $(N/2)^2$, 这样所要求的全部计算次数为 $N + N + 4(N/4)^2$ 次复数乘法和加法. 若 $N = 2^v$, 这样最多可以分解 $v = \log_2 N$ 次, 所以这种分解全部完成之后, 复数乘法和加法的次数等于 $N \log_2 N$.

图 9.7 所示的流图很清楚地表现出了这种运算过程. 若计算一下转输比为 W_N^r 的支路数目, 我们就会注意到每一级有 N 次复数乘法和 N 次复数加法. 因为一共有 $\log_2 N$ 级, 所以全部有 $N \log_2 N$ 次复数乘法和加法. 这就是我们前面曾提到过的可以显著节省计算量的情况. 例如, 若 $N = 2^{10} = 1024$, 则 $N^2 = 2^{20} = 1048576$ 而 $N \log_2 N = 10240$, 减少了不止 2 个数量级!

利用系数 W_N^r 的对称性和周期性可以进一步减少图 9.7 所示流图的计算量. 首先我

们注意到图 9.7 从某一级到下一级的过程中, 基本的计算是图 9.8 的形式, 即用先前一级的一对数值求得这一级的一对数值, 其中系数总是 W_N 的幂次, 而其指数总要相差 $N/2$. 由于流图的形状像蝴蝶, 因此这种基本的运算称为蝶形计算. 因为

$$W_N^{N/2} = e^{-j(2\pi/N)N/2} = e^{-j\pi} = -1, \quad (9.18)$$

所以因子 $W_N^{+N/2}$ 可以写成

$$W_N^{+N/2} = W_N^{N/2} W_N = -W_N. \quad (9.19)$$

根据这一点, 图 9.8 的蝶形计算可以简化成图 9.9 所示的形式, 它只需要一次复数乘法而不是两次. 利用图 9.9 所示的基本流图来代替图 9.8 形式的蝶形图, 我们可以由图 9.7 得到图 9.10 的流图. 特别是, 复数乘法的次数已经比图 9.7 中所需的次数减少一半.

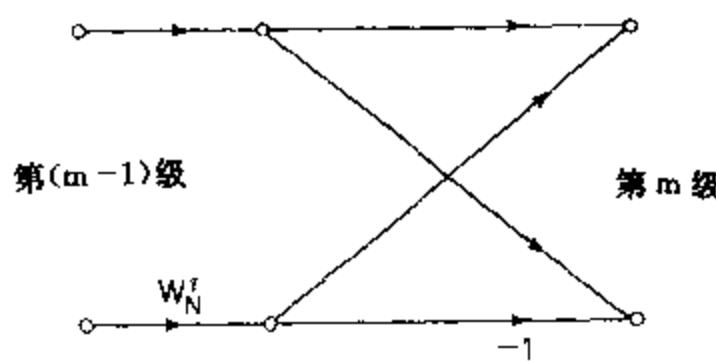


图 9.9 只需要一次复数乘法的简化蝶形计算流图.

9.3.1 同址计算

图 9.10 所示流图描述了计算离散傅里叶变换的一种算法. 在图 9.10 的流图中特别重要的是连接节点的支路和每个支路的传输比. 只要节点间的连接和连接的传输比维持不变, 则无论在流图中的诸节点如何重新排列, 它始终表示相同的计算. 图 9.10 中特定形式的流图来自如下算法的推导过程: 首先将原始序列分成偶数点和奇数点, 然后用同样方式不断地分成越来越短的子序列. 这一推导的一种有益的附带结果是, 该流图除了证明对于计算离散傅里叶变换的一种有效方法外, 还提出存贮原始数据以及存贮中间各列计算结果的有效方式.

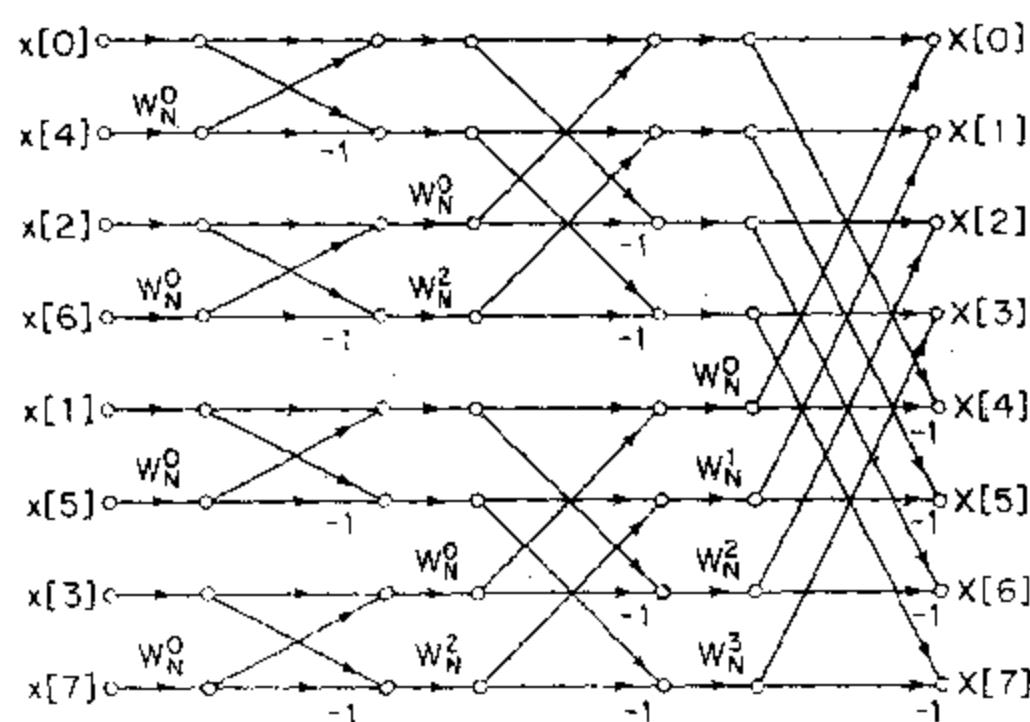


图 9.10 用图 9.9 所示蝶形计算实现 8 点 DFT 的流图.

为了证明这一点, 我们特别注意到: 按照图 9.10, 每一级计算均需要一组 N 个复数, 并通过图 9.9 形式的基本蝶形计算把它们转换成下一组的 N 个复数. 这种过程重复 $v = \log_2 N$ 次, 最后得到所要求的离散傅里叶变换. 当实现图 9.10 中描述的计算时, 我们可以想像使用两列(复数的)存贮寄存器, 一列存贮要计算的数, 另一列存贮计算中要用到的数据. 例如, 当计算图 9.10 中的第一列时, 第一组存贮寄存器应当存放输入数据, 而第二组存贮寄存器应当存放第一级计算出的结果. 因为图 9.10 的有效性与输入数存放的顺序无关, 所以我们用与在图 9.10 中出现的同样顺序(从上到下)来排列该组复数. 把从第 m 级计算得出的复数序列记作 $X_m[\ell]$, 其中 $\ell=0, 1, \dots, N-1$, 且 $m=1, 2, \dots, v$. 此外, 为了方便起见, 我们把输入样本集记为 $X_0[\ell]$. 对于第 m 级计算, 可以认为 $X_{m-1}[\ell]$ 是输入列, $X_m[\ell]$ 是输出列. 这样, 对于图 9.10 中所示的 $N=8$ 的情况, 有

$$\begin{aligned} X_0[0] &= x[0] \\ X_0[1] &= x[4] \\ X_0[2] &= x[2] \\ X_0[3] &= x[6] \\ X_0[4] &= x[1] \\ X_0[5] &= x[5] \\ X_0[6] &= x[3] \\ X_0[7] &= x[7] \end{aligned} \tag{9.20}$$

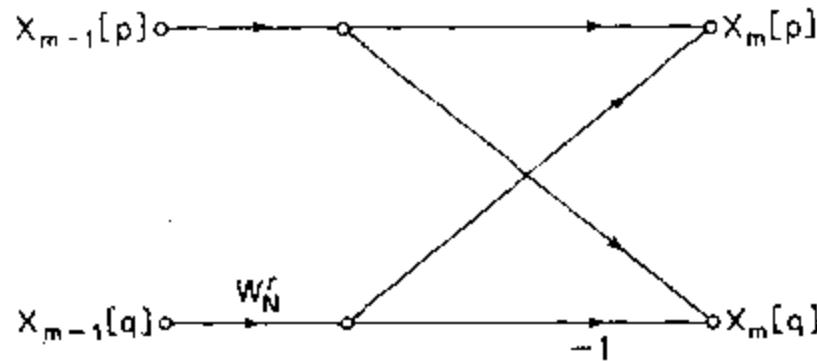


图 9.11 式(9.21)的流图.

利用这种表示法, 可将图 9.9 中蝶形计算的输入和输出标记为图 9.11 所示的那样, 并有相应的方程

$$X_m[p] = X_{m-1}[p] + W_N X_{m-1}[q], \tag{9.21a}$$

$$X_m[q] = X_{m-1}[p] - W_N X_{m-1}[q]. \tag{9.21b}$$

在式(9.21)中, p, q 和 r 从一级到另一级是不同的, 其变化规律很容易从图 9.10 以及式(9.11)、式(9.14)和式(9.16)中得出. 从图 9.10 和图 9.11 中可以清楚地看出, 要计算第 m 列的 p 和 q 位置上的复数节点值, 只需要第 $(m-1)$ 列在 p 和 q 位置上的复数节点值. 因此, 若将 $X_m[p]$ 和 $X_m[q]$ 分别存放在原存放 $X_{m-1}[p]$ 和 $X_{m-1}[q]$ 的同一存贮寄存器中, 则实现全部计算实际上只需要一列存贮 N 个复数的寄存器. 这种计算通常称为同址计算. 图 9.10(或图 9.7)代表同址计算, 这是因为我们已经把流图中位于同一水平线上的节点与相同位置的寄存器联系起来, 并且使两列之间的计算由输入节点和输出节点是水平相邻的蝶形计算组成.

为了实现以上讨论的同址计算,输入序列不能按照原来的先后顺序存贮(或至少不能这样读取),而应如图 9.10 的流图中所示那样.事实上,这种输入数据存贮和读取的次序称为倒位序.为了证明该术语的含义,我们注意到,对于已经讨论过的 8 点流图,只需用三位二进制码来标注整个数据.如果用二进制形式写出式(9.20)中的标号,就会得到如下一组式子:

$$\begin{aligned} X_0[000] &= x[000] \\ X_0[001] &= x[100] \\ X_0[010] &= x[010] \\ X_0[011] &= x[110] \\ X_0[100] &= x[001] \\ X_0[101] &= x[101] \\ X_0[110] &= x[011] \\ X_0[111] &= x[111] \end{aligned} \quad (9.22)$$

若 (n_2, n_1, n_0) 为序列 $x[n]$ 中标号的二进制表示,则序列值 $x[n_2, n_1, n_0]$ 存放在数列 $X_0[n_0, n_1, n_2]$ 的位置上.这就是说,要确定 $x[n_2, n_1, n_0]$ 在输入序列中的位置,我们必须将标号 n 的位序颠倒.

为了通过连续检查代表数据标号的码位而将一个数据序列排成正常顺序,首先让我们研究一下图 9.12 所表示的过程.如果数据标号的最高位是零,则 $x[n]$ 就属于已排序数列的上半部分;否则 $x[n]$ 属于下半部分.其次,通过检查次高位,就可排出上半部和下半部子序列的顺序,依次类推.

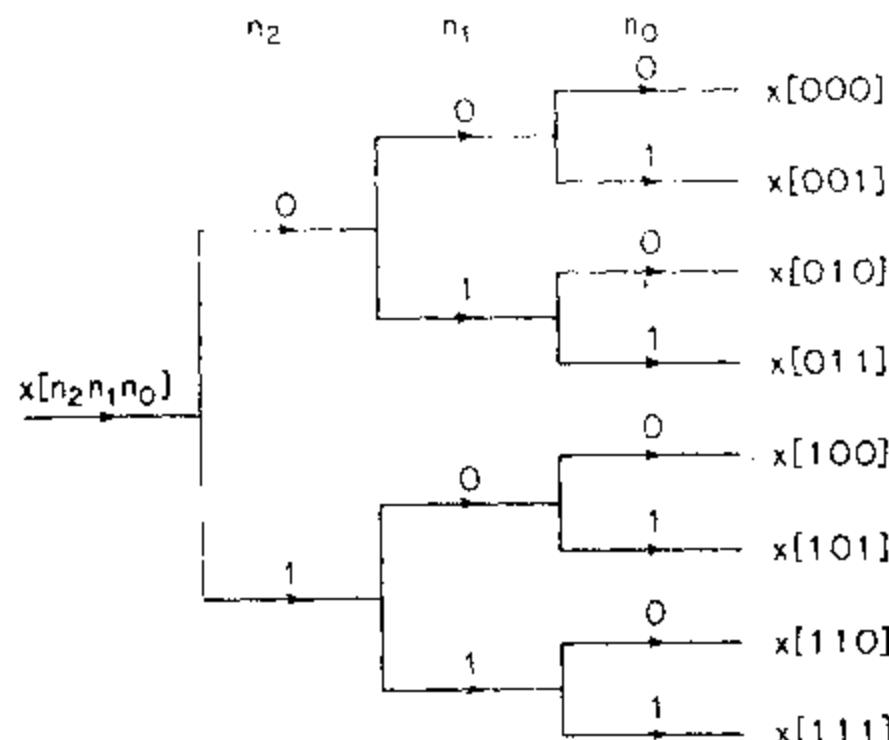


图 9.12 描述正常排序的树状图.

为了证明为什么倒位序对于同址计算是必须的,回顾一下得出图 9.7 和图 9.10 的过程.序列 $x[n]$ 首先分为偶序号样本和奇序号样本两部分,前者出现在图 9.13 的上半部分,后者出现在下半部分.通过检查序号 n 中的最低位 $[n_0]$ 就可实现数据的这种划分.若最低位为零,则序列值对应于偶序号的样本,因此将出现在数列 $X_0[\ell]$ 的上半部分;若最低位为 1,则序列值对应于奇序号的样本,因此将出现在数列 $X_0[\ell]$ 的下半部分.然后,通

过检查标号 n 中的次低位就可把偶序号和奇序号的子序列再分成偶序号部分和奇序号部分。首先研究一下偶序号的子序列，若次低位为 0，则序列值是子序列中的某个偶序号项；若次低位为 1，则序列值在这个子序列中具有奇序号。对于由原来奇序号的序列值构成的子序列执行同样的过程。这种过程重复进行直到得出 N 个长度为 1 的子序列为止。图 9.13 的树状图绘出了将数据划分为偶序号子序列和奇序号子序列的过程。

图 9.12 和图 9.13 的树状图基本上相同，只是对于正常排列我们从左到右检查表示序号的二进制数码；而对于自然得出图 9.7 和图 9.10 的排列方式，我们从右到左以相反的次序来检查数码，导致倒位排序。因此，序列 $x[n]$ 之所以需要倒位排序是由于 DFT 的计算逐次分解为较短的 DFT 计算以得到如图 9.7 和图 9.10 所示的形式所致。

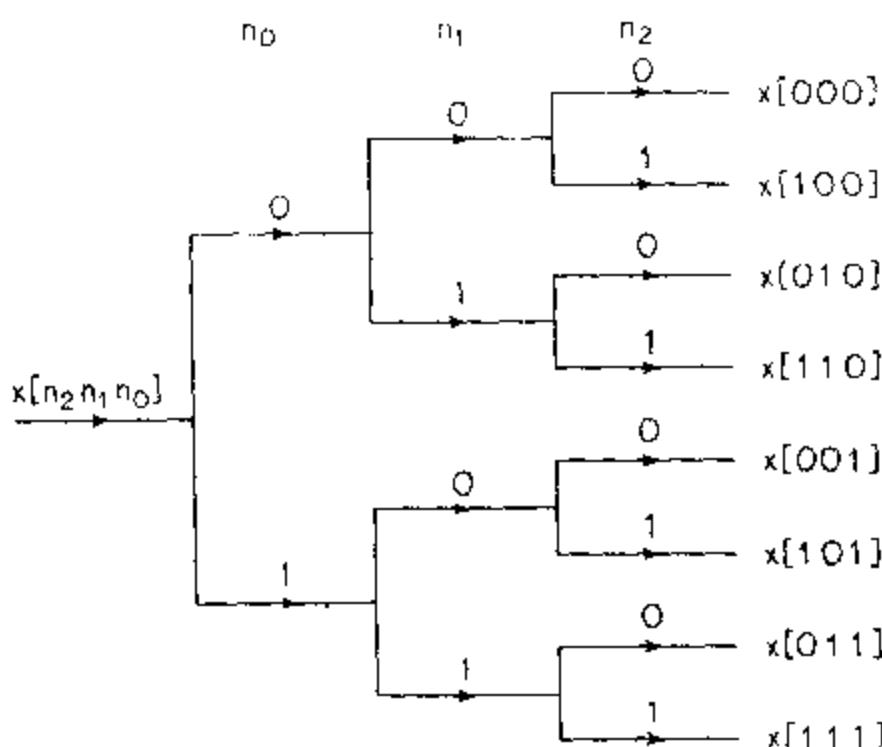


图 9.13 描述倒位排序的树状图。

9.3.2 其它形式

虽然按照在图 9.10 中出现的节点的顺序来存贮每级计算的结果是合理的，但是却完全没有必要这样作。无论图 9.10 的节点如何重新排列，只要支路的传输比不变，则最后结果总是代表 $x[n]$ 的离散傅里叶变换的一种有效计算，只是数据读取和存贮的次序将会改变。从以上的讨论显然可见，如果我们把节点与一列复数寄存器的标号联系起来，则只有当重新排列节点使得每个蝶形计算的输入节点和输出节点呈水平相邻时才可以得到对应于同址计算的流图。否则需要两列复数寄存器。自然，图 9.10 就是这样排列的。另一种排列方式如图 9.14 所示。在这种情况下输入序列是正常位序，而 DFT 序列是倒位序。图 9.14 可以由图 9.10 得出，过程如下：在图 9.10 中与 $x[4]$ 水平相邻的全部节点和与 $x[1]$ 水平相邻的全部节点互换。同样，在图 9.10 中与 $x[6]$ 水平相邻的全部节点和与 $x[3]$ 水平相邻的全部节点互换。与 $x[0], x[2], x[5]$ 和 $x[7]$ 水平相邻的诸节点不变。这样所得到的图 9.14 中的流图就对应于最初由库利和图基(Cooley and Tukey, 1965)提出的按时间抽取算法的形式。

图 9.10 和图 9.14 之间的唯一差别是节点的排序不同。支路的传输比(W_N 的各次幂)维持不变。当然，也存在着许多其它可能的排序。但是，从计算的观点看大多数都没

有多大的意义。试举一个例子，假设诸节点的输入和输出均按正常位序排列，这种形式的流图示于图 9.15 中。但是在这种情况下，因为蝶形结构在第一级后就不能继续存在，所以就无法实现同址计算。这样，完成图 9.15 所示的计算就需要两列长度为 N 的复数寄存器。

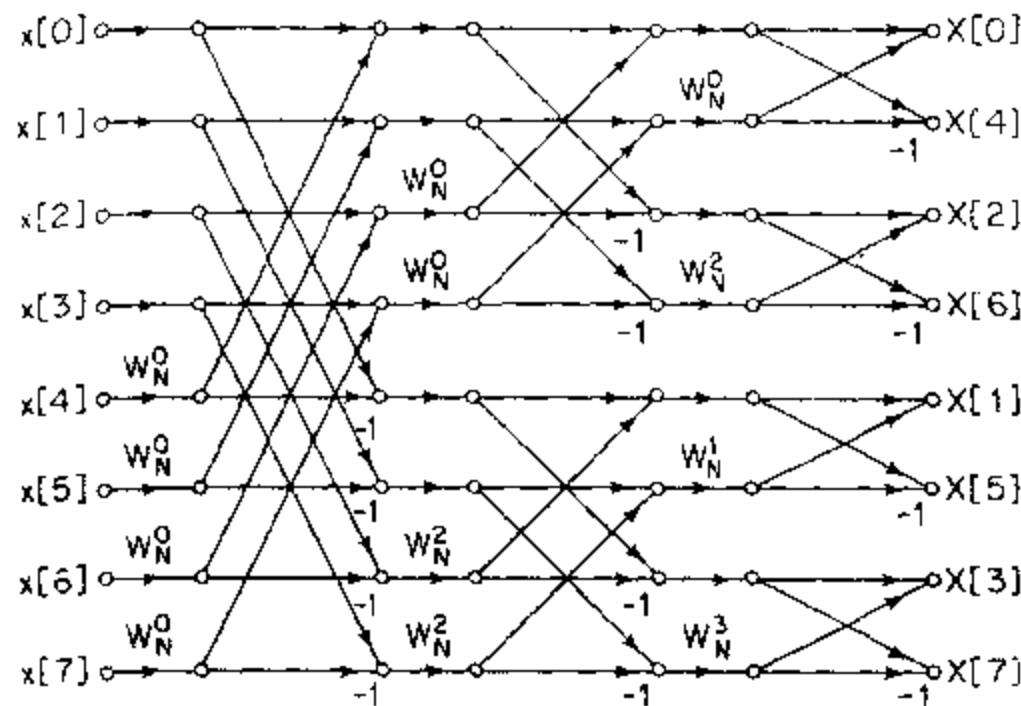


图 9.14 将图 9.10 重新排列成输入为正常位序而输出为倒位序。

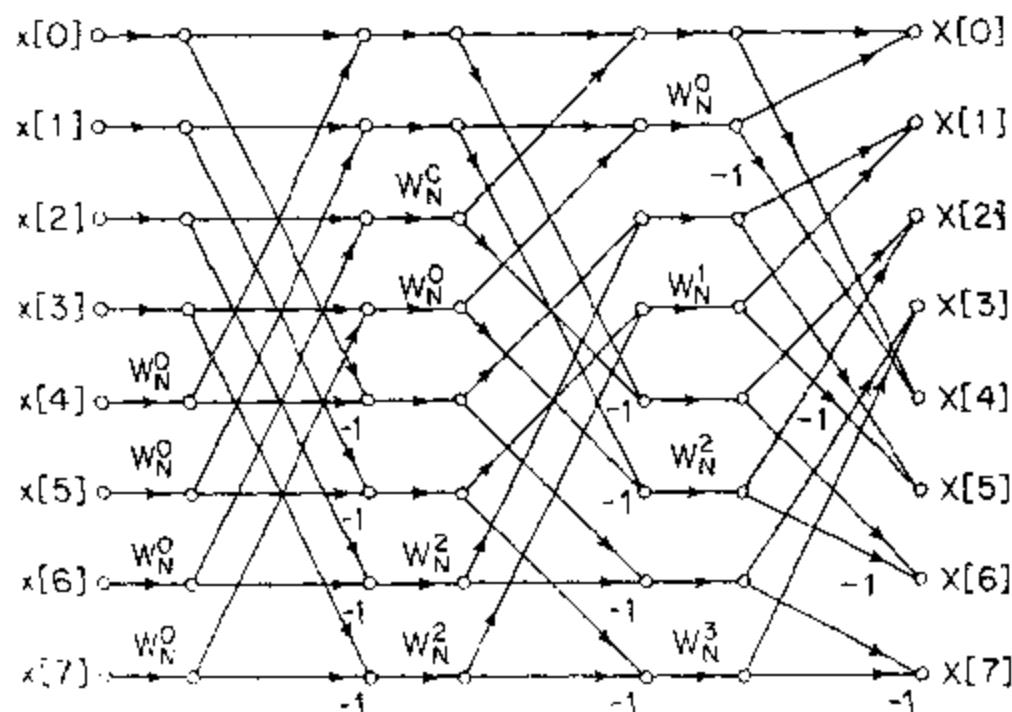


图 9.15 图 9.10 的输入和输出均为正常位序的重新排列。

在实现图 9.10、9.14 和 9.15 所示的计算时，显然不能按顺序来读取中间各列的数。因此，对于较快的计算速度，复数必须存放在随机存储器中。例如，在图 9.10 中由输入数据列计算第一列时，每个蝶形计算的两个输入都是相邻的节点变量，并且可以认为存放在相邻的存储位置上。由第一列计算第二个中间列时，蝶形计算的两个输入端间隔两个存储位置；由第二中间列计算第三中间列时，蝶形计算的两个输入端间隔四个存储单元。如果 $N > 8$ ，对于第四级蝶形计算两输入端间隔为 8，第五级为 16，等等。最后(第 v)一级的间隔

为 $N/2$.

在图 9.14 中, 情况是类似的, 由输入数据计算第一列时我们用间隔为 4 的数据, 由第一列计算第二列时我们用间隔为 2 的输入数据, 最后在计算最后一列时我们用相邻的数据. 虽然不难构思一种简单的算法来修正存取图 9.10 或图 9.14 流图中数据的标号寄存器的内容, 但是数据不是按顺序存取的, 所以十分需要随机存取存贮器. 在图 9.15 的流图中, 数据不按顺序存取, 计算也不是同址的, 对数据标号的方案比上面的两种情况均复杂得多. 因此, 这种结构没有明显的优点.

即使同址计算不可能, 但某些形式仍有优点. 当没有随机存取存贮器时, 如图 9.16 所示重新排列图 9.10 中的流图是特别有用的. 这种流图代表最初由辛格尔顿(Singleton, 1969)提出的按时间抽取算法. (有关用串行存贮器的程序, 参见 DSP Committee, 1976.) 首先应当指出, 在这个流图中输入是倒位序, 而输出是正常位序. 这种流图的重要特点是, 对每一级来说几何形状完全相同; 只有支路的传输比从一级到另一级有变化. 这样可能使存取数据按顺序进行. 首先我们假设有 4 个独立的磁盘文件(或者 4 个地址按顺序的存贮器, 如像磁带机), 并假定输入序列(为倒位序)的前一半存放在一个文件中, 而后一半存放在第二个文件中. 接着该序列可以按顺序从文件 1 和 2 中存取, 并且将结果按顺序写入文件 3 和文件 4 中, 新数列的前一半写入文件 3, 而后一半写入文件 4. 然后在计算下一级时, 文件 3 和文件 4 成为输入, 而输出写入文件 1 和 2. 对于 v 级中的每一级均如此重复进行. 这一算法在计算很长序列的 DFT 时是很有用的.

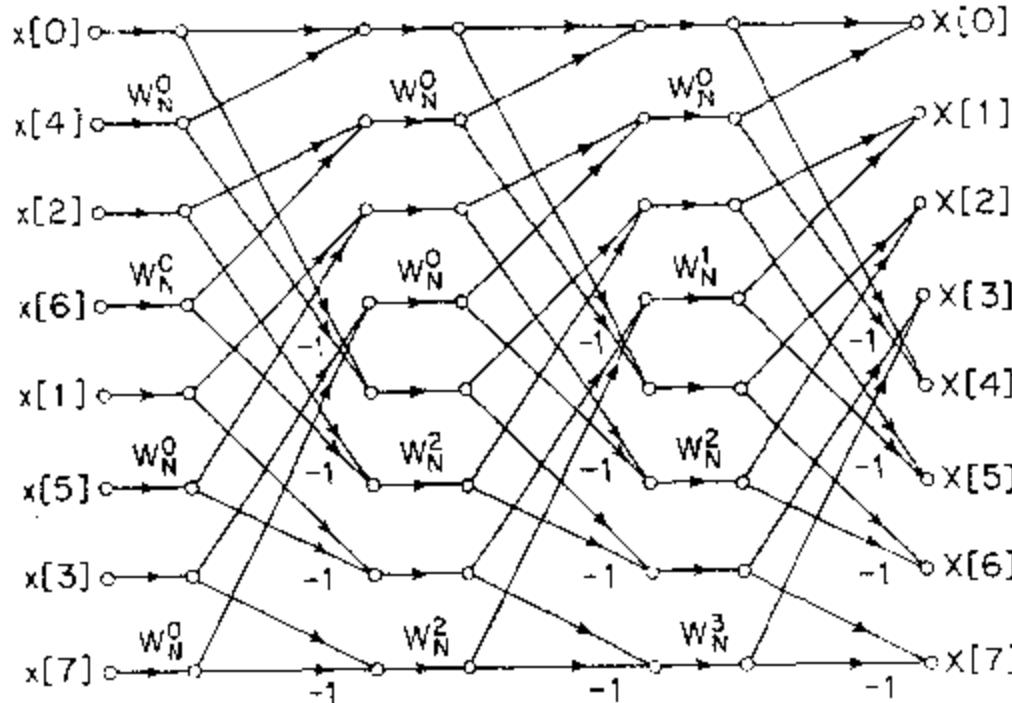


图 9.16 图 9.10 的重新排列, 对于每一级具有相同的几何形状, 因此可以顺序读取和存贮数据.

9.4 按频率抽取的 FFT 算法

按时间抽取的 FFT 算法完全是以把输入序列 $x[n]$ 分成越来越短的子序列这种 DFT 计算的分解为基础的. 另外, 我们也可以考虑用同样的方式把输出序列 $x[k]$ 分成越来越短的子序列. 以这种处理方式为基础的 FFT 算法通常称为按频率抽取算法.

为了推导出这类 FFT 算法, 我们再次只限于讨论 N 为 2 的幂次的情况, 并且考虑分

别计算偶序号频率样本和奇序号频率样本. 因为 $X[k]$ 为

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] W_N^{nk}, \quad k=0, 1, \dots, N-1, \quad (9.23)$$

所以其偶序号频率样本是

$$X[2r] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] W_N^{n(2r)}, \quad r=0, 1, \dots, (N/2)-1, \quad (9.24)$$

上式可表示成

$$X[2r] = \sum_{n=0}^{(N/2)-1} x[n] W_N^{2nr} + \sum_{n=N/2}^{N-1} x[n] W_N^{2nr}. \quad (9.25)$$

替换在式(9.25)中第二个和式的变量, 可以得到

$$X[2r] = \sum_{n=0}^{(N/2)-1} x[n] W_N^{2nr} + \sum_{n=0}^{(N/2)-1} x[n+(N/2)] W_N^{2r[n+(N/2)]}. \quad (9.26)$$

最后, 由于 W_N^{2nr} 的周期性, 有

$$W_N^{2r[n+(N/2)]} = W_N^{2rn} W_N^{rN} = W_N^{2rn} \quad (9.27)$$

并且因为 $W_N^2 = W_{N/2}$, 所以式(9.26)可以表示为

$$X[2r] = \sum_{n=0}^{(N/2)-1} (x[n] + x[n+(N/2)]) W_{N/2}^{rn}, \quad r=0, 1, \dots, (N/2)-1. \quad (9.28)$$

式(9.28)是把前一半和后一半输入序列加在一起得到的 $(N/2)$ 点序列的 $(N/2)$ 点 DFT. 把输入序列的两半部分加在一起代表时间混叠, 这与只计算偶序号频率样本时我们对 $x[n]$ 的傅里叶变换进行了减抽样这一事实相一致.

现在我们可以考虑求得奇序号频率样本:

$$X[2r+1] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] W_N^{n(2r+1)}, \quad r=0, 1, \dots, (N/2)-1. \quad (9.29)$$

和前面一样, 可将式(9.29)重新写成

$$X[2r+1] = \sum_{n=0}^{(N/2)-1} x[n] W_N^{n(2r+1)} + \sum_{n=N/2}^{N-1} x[n] W_N^{n(2r+1)}. \quad (9.30)$$

在式(9.30)中第二个和式的另一种形式是

$$\begin{aligned} \sum_{n=N/2}^{N-1} x[n] W_N^{n(2r+1)} &= \sum_{n=0}^{(N/2)-1} x[n+(N/2)] W_N^{n+(N/2)(2r+1)} \\ &= W_N^{(N/2)(2r+1)} \sum_{n=0}^{(N/2)-1} x[n+(N/2)] W_N^{n(2r+1)} \\ &= - \sum_{n=0}^{(N/2)-1} x[n+(N/2)] W_N^{n(2r+1)}, \end{aligned} \quad (9.31)$$

其中我们已经用到 $W_N^{(N/2)2r} = 1$ 和 $W_N^{(N/2)} = -1$. 将式(9.31)代入式(9.30)并将两个和式合并, 得

$$X[2r+1] = \sum_{n=0}^{(N/2)-1} (x[n] - x[n+(N/2)]) W_N^{n(2r+1)} \quad (9.32)$$

或者, 因为 $W_N^2 = W_{N/2}$, 有

$$X[2r+1] = \sum_{n=0}^{(N/2)-1} (x[n] - x[n+(N/2)]) W_N^n W_{N/2}^{rn}, \quad r=0, 1, \dots, (N/2)-1. \quad (9.33)$$

式(9.33)是从输入序列的前一半中减去后一半然后乘以 W_N^n 所得到之序列的 $(N/2)$ 点 DFT。因此, 根据式(9.28)和式(9.33)以及 $g[n] = x[n] + x[n+N/2]$ 和 $h[n] = x[n] - x[n+N/2]$, DFT 的计算为: 首先形成序列 $g[n]$ 和 $h[n]$, 然后计算 $h[n]W_N^n$, 最后分别计算这两个序列的 $(N/2)$ 点 DFT, 就得到偶序号输出样本和奇序号输出样本。图 9.17 举例说明对于一个 8 点 DFT 的情况由式(9.28)和式(9.33)所建议的方法。

当用类似于推导按时间抽取算法所采用的方式逐步进行时, 我们注意到, 由于 N 是 2 的整数幂则 $N/2$ 为偶数, 因此可以通过计算偶序号输出点和奇序号输出点来分别计算这些 $(N/2)$ 点 DFT。正如导出式(9.28)和式(9.33)所用的方法一样, 可以首先将每个 $(N/2)$ 点 DFT 的输入点的前半部分和后半部分合在一起, 然后再计算 $(N/4)$ 点 DFT。对于 8 点的例子, 用这种方法得出的流图如图 9.18 所示。在该例中, 8 点 DFT 已经简化为 2 点 DFT 的计算。如前所述, 它可以通过将两个输入值相加和相减来实现。这样, 图 9.18 中的 2 点 DFT 可以用图 9.19 所示的计算来代替, 因此 8 点的 DFT 可以用图 9.20 绘出的算法来完成。

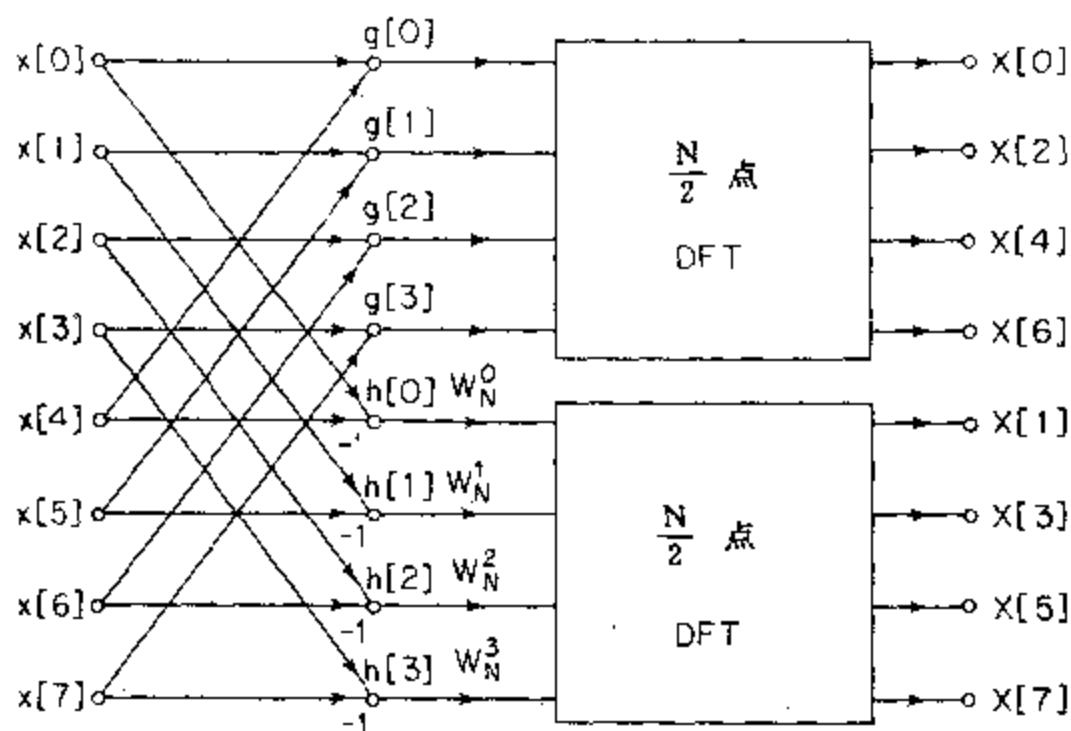


图 9.17 将一个 N 点 DFT 计算分解为两个 $(N/2)$ 点 DFT 计算的按频率抽取流图 ($N=8$)。

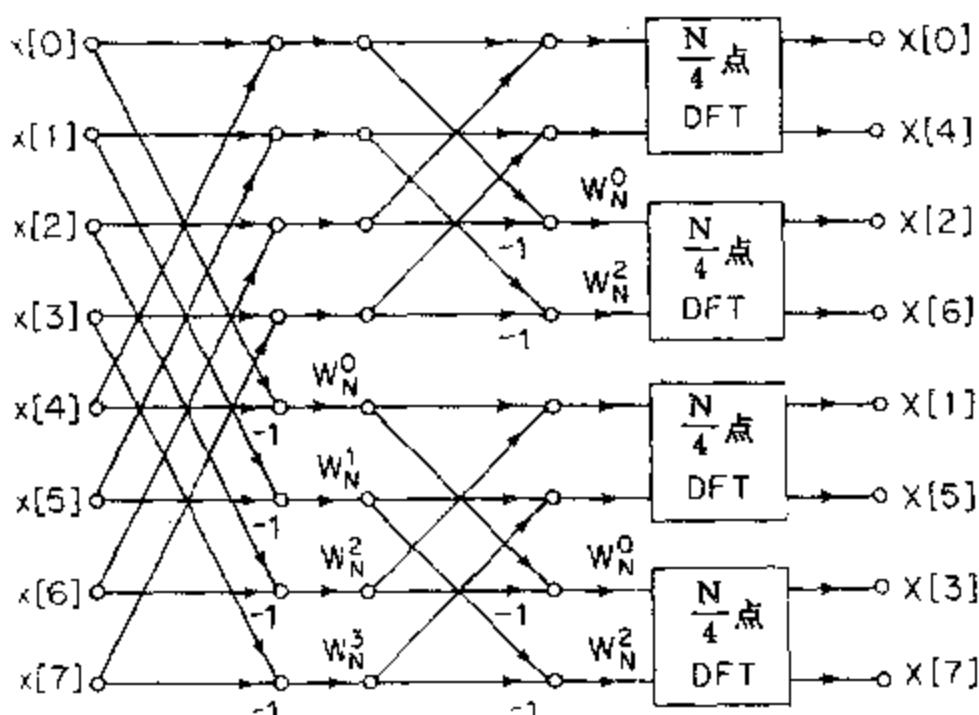


图 9.18 将一个 8 点 DFT 分解成 4 个 2 点 DFT 计算的按频率抽取流图。

计算一下在图 9.20 中算术运算的次数, 并推广至 $N=2^v$ 的情况, 我们可以看出, 图

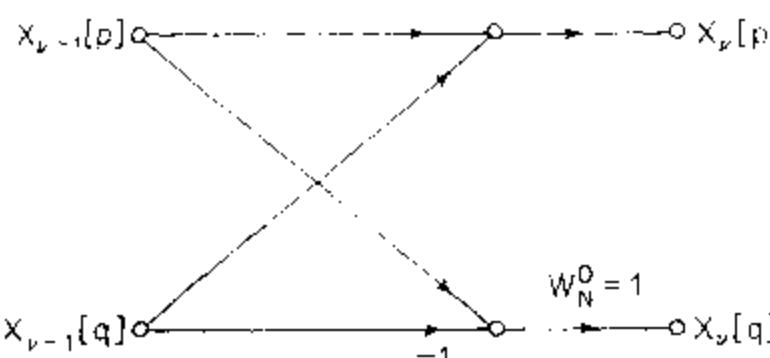


图 9.19 按频率抽取分解方法的最后一级中所要求的典型 2 点 DFT 的流图.

9.20 的计算需要 $(N/2)\log_2 N$ 次复数乘法和 $N\log_2 N$ 次复数加法. 因此, 对于按频率抽取算法和按时间抽取算法, 总的计算量是相同的.

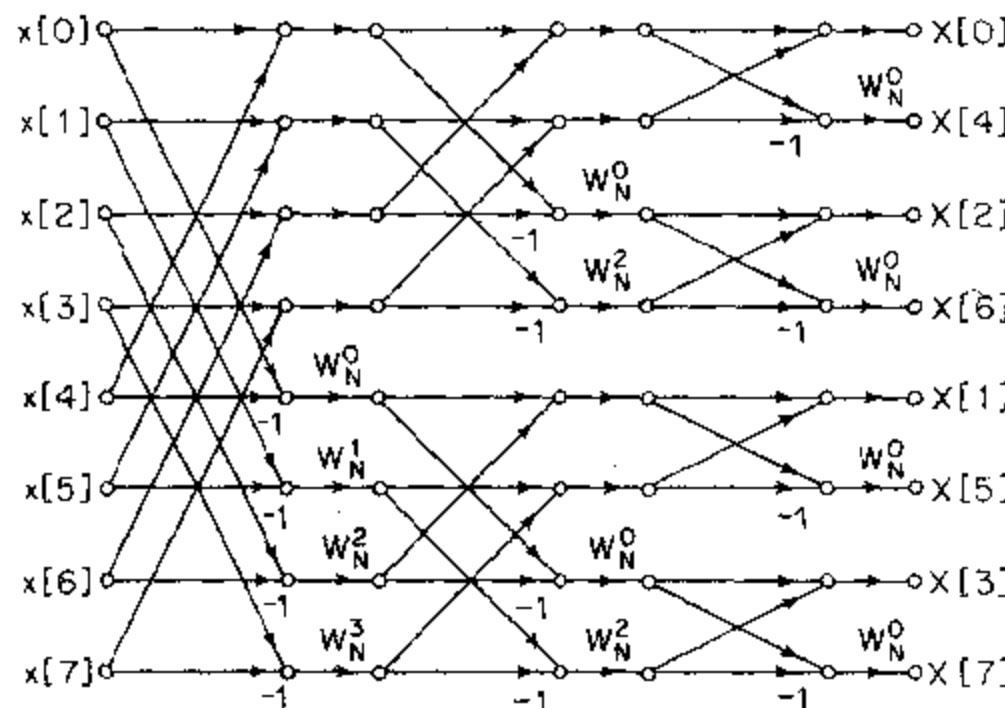


图 9.20 一个 8 点 DFT 计算按频率抽取完全分解的流图.

9.4.1 同址计算

图 9.20 所示流图示出了一种以按频率抽取为基础的 FFT 算法, 将这一流图与根据按时间抽取推导出的流图加以比较, 我们可以看出它们的许多相似之处以及不同之处. 当然, 如像按时间抽取那样, 只要图 9.20 中用适当的传输比将同样的节点相互连接起来, 图 9.20 的流图就对应于同一离散傅里叶变换的计算, 而与如何画出该流图无关. 换句话说, 图 9.20 的流图不依赖于任何有关存放输入序列值次序的假设. 但是, 正如对按时间抽取算法所作的那样, 我们可以把图 9.20 流图中相继的垂直节点解释为所对应的在数字存储器中相继的存储寄存器. 在这种情况下, 图 9.20 所示流图以正常位序的输入序列开始, 而给出倒位序的输出 DFT. 虽然蝶形计算与按时间抽取算法中的不同, 但是基本计算仍然是蝶形计算的形式. 然而, 因为计算上的蝶形特点, 所以图 9.20 的流图就可以看作是离散傅里叶变换的一种同址计算.

9.4.2 其它形式

通过对在 9.3.2 节中推导出的按时间抽取的形式进行转置可以得到各种按频率抽取算法的其它形式. 如果我们把由计算的第 m 级得出的复数列记作 $X_m[\ell]$, 其中 $\ell=0, 1, \dots, N-1$ 和 $m=1, 2, \dots, v$, 则图 9.21 所示的基本蝶形计算有如下形式:

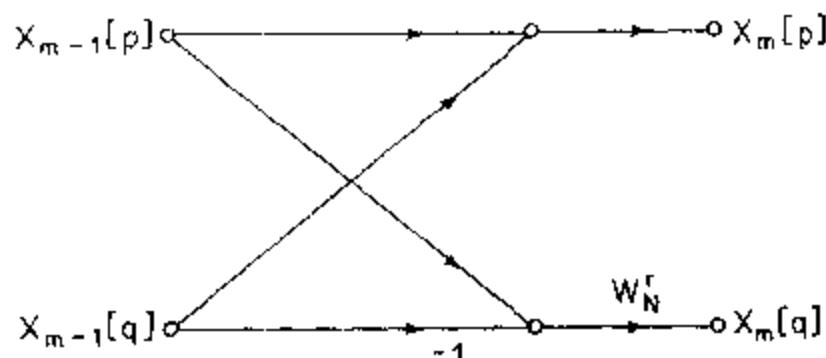


图 9.21 图 9.20 中所要求的典型蝶形计算的流图.

$$X_m[p] = X_{m-1}[p] + X_{m-1}[q], \quad (9.34a)$$

$$X_m[q] = (X_{m-1}[p] - X_{m-1}[q])W_N^r. \quad (9.34b)$$

比较图 9.11 和 9.21 或式(9.21)和式(9.34)可以看出,对于这两类 FFT 算法它们的蝶形计算是显然不同的.但是我们也注意到图 9.11 和 9.21 的基本蝶形流图之间、以及图 9.10 和 9.20 的 FFT 流图之间的相似之处.具体讲,图 9.20 和图 9.21 可分别通过对图 9.10 和图 9.11 将信号流反向并且将输入和输出互换而得到.这就是说,若用第六章的术语,图 9.20 就是图 9.10 中流图的转置,而图 9.21 就是图 9.11 的转置.因为 FFT 流图有多个输入和输出节点,所以转置定理不能直接用于这种情况.尽管如此,图 9.10 和图 9.20 中流图的输入/输出特性相同是确定的.这一点可以通过式(9.34)的蝶形方程由输出数列开始反向求解而得到证明.(习题 9.6 给出了证明这一结果的要点.)更一般地讲,对于每一个按时间抽取的 FFT 算法,的确存在一个按频率抽取的 FFT 算法,它们都相应于将流图中的输入和输出互换并且将所有箭头的方向反向.

这个结果意味着 9.3 节的所有流图均有按频率抽取之类的算法与之对应.当然,这也对应于如前所述的能够重新排列流图的节点而不改变最终结果这一事实.

将转置方法用于图 9.14 就得到图 9.22.在这个流图中,输出是正常位序,而输入是倒位序.另外,图 9.15 所示流图的转置是图 9.23 的流图,图中输入和输出均是正常位序.如同图 9.15 的情况,这种流图不符合同址计算.

图 9.16 的转置如图 9.24 所示.图 9.24 的每一级都有同样的几何形状,正如前面所讨论的,当使用按顺序的数据存贮器计算很长的变换时这一性质是十分有用的.

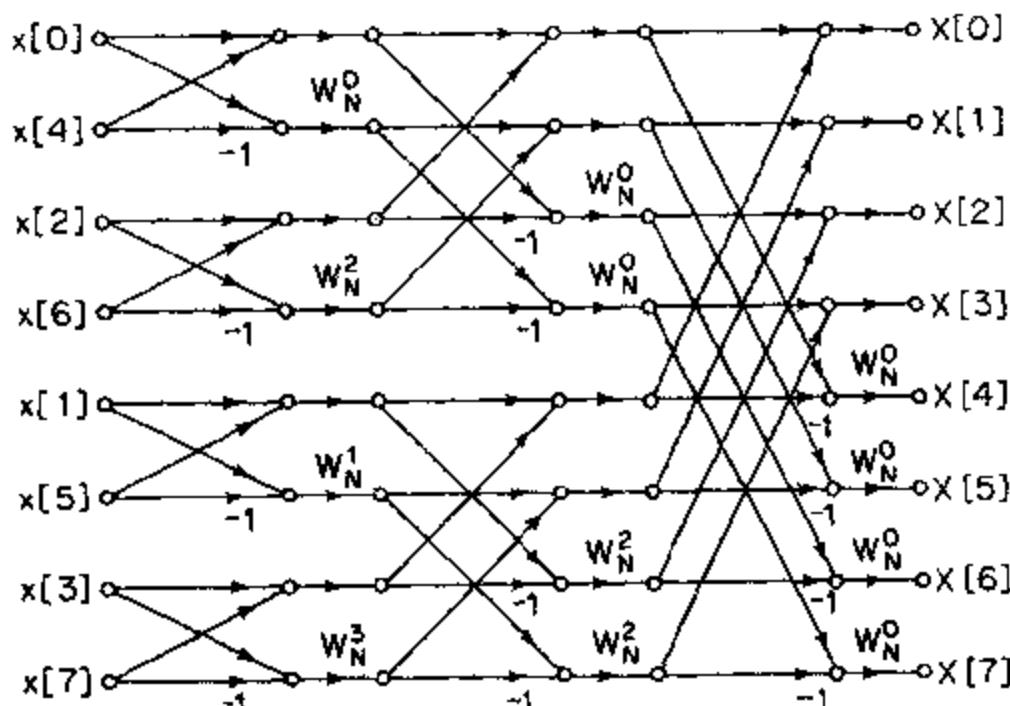


图 9.22 由图 9.20 所得出的按频率抽取 DFT 算法的流图.输入为倒位序,输出为正常位序(图 9.14 的转置).

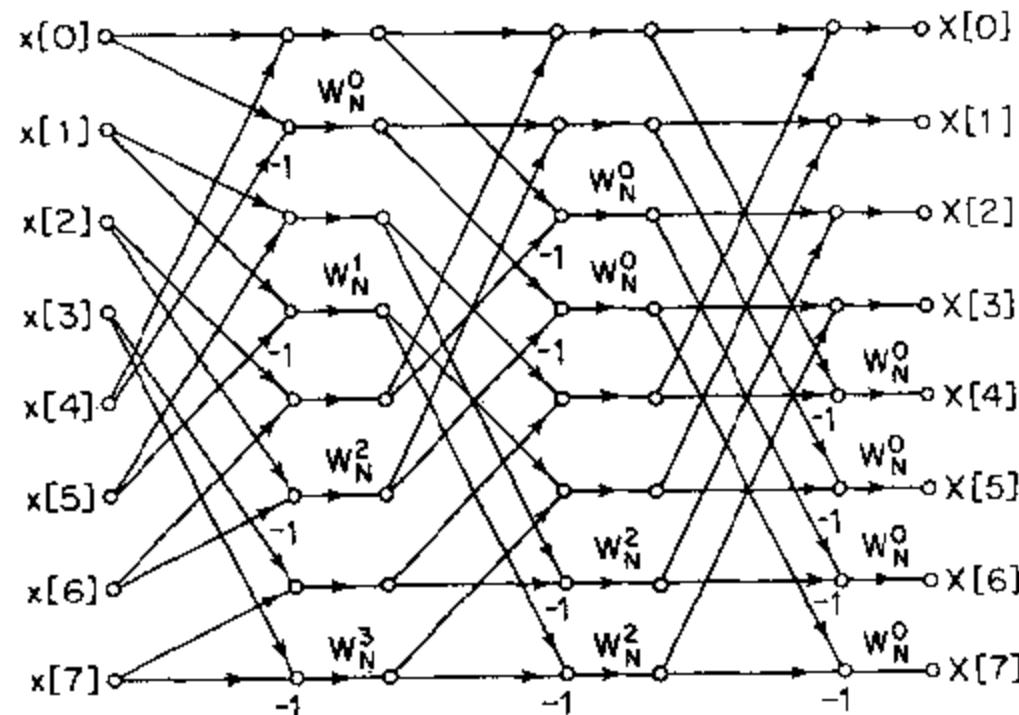


图 9.23 图 9.20 的重新排列, 输入和输出均为正常位序(图 9.15 的转置).

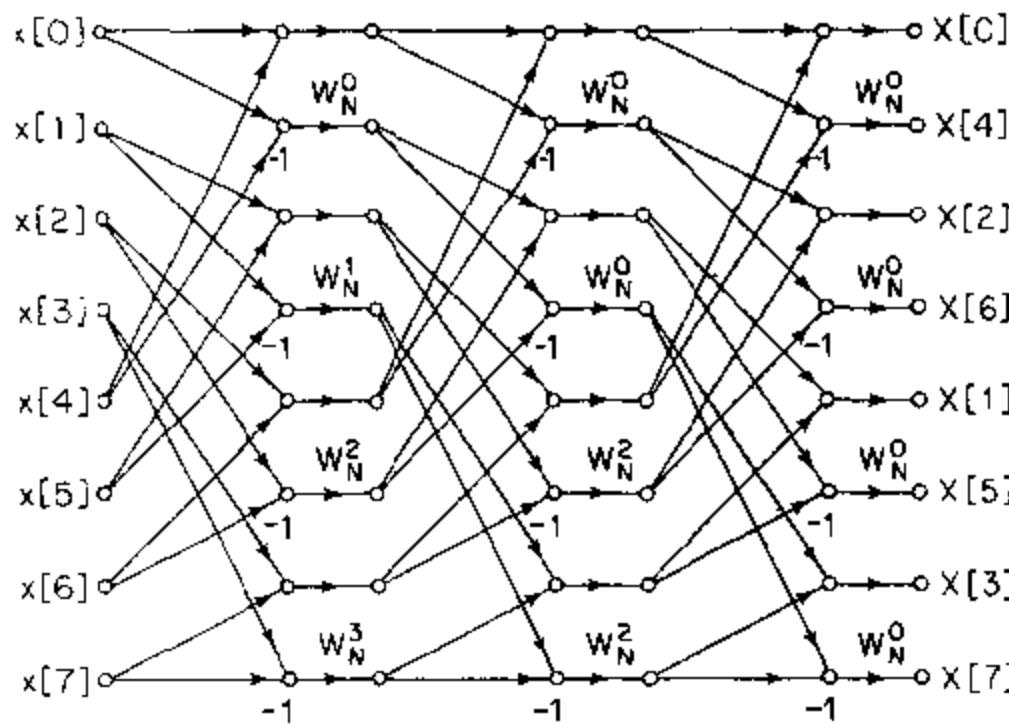


图 9.24 重新排列图 9.20 使每一级都有相同的几何形状,因此可以读取
和存贮按顺序的数据(图 9.16 的转置).

9.5 FFT 算法的实现

我们已经讨论了高效计算离散傅里叶变换的基本原理. 在讨论中我们倾向于采用信号流图表示法, 而不是详细地写出这种流图所代表的方程式, 我们已经给出了对于特定 N 值的一些流图. 但是, 通过研究如像图 9.10 对于某一特定 N 值的流图, 就可以明白如何构造一个适用于任何 $N = 2^n$ 的通用计算算法.

从前面几节对流图的研究中可以清楚地看出在任何 FFT 算法中都有一些重要的考虑因素. 其中一个就是在中间数列中数据的读取和存贮问题. 另一个是, 一旦获得了合适的数据, 如何实际实现蝶形计算. 虽然, 前几节的流图的确抓住了它们所描述的 FFT 算法的本质, 但是在实现一个给定的算法时必须考虑与这两个基本因素有关的许多细节问题. 这一节我们将讨论一些有关细节. 我们的重点放在 N 为 2 的幂次的算法上, 但是所讨论

的多数内容也适用于一般情况.为了举例说明问题,我们集中讨论图 9.10 的按时间抽取算法.9.5.3 节包括可以实现图 9.10 的按时间抽取算法和图 9.20 的按频率抽取算法的 FORTRAN 程序.这两个程序均利用了本节所讨论的原理.

9.5.1 标号排列

在图 9.10 所示的算法中,输入必须是倒位序,这样才能实现同址计算.由此得到的 DFT 则是正常位序.通常,输入序列不是倒位序的,因此实现图 9.10 的第一步就是将输入序列排列成倒位序.正如从图 9.10 和式(9.22)所能看出来的,倒位序的排列可以同址进行,这是因为样本只是成对地互换,即给定标号的样本与由倒位序标号所要求的位置上的样本互换.这可以很容易地用同址方式来实现,首先数出一个用正常位序的标号和另一个用倒位序的标号,然后将正常位序标号和倒位序标号所限定的两个位置上的数据简单地互换即可.这一点在 9.5.3 节的图 9.25 中列出的 FORTRAN 程序里已经表明.只要输入是倒位序的,我们就可以进行第一级计算.在这种情况下,蝶形的输入都是数列 $X_0[\cdot]$ 的相邻节点值.在第二级中蝶形的输入相隔为 2.在第 m 级中蝶形的输入相隔为 2^{m-1} .第 m 级中的系数是 $W_N^{(N/2^m)}$ 的幂次,并且若蝶形计算从图 9.10 所示流图的顶部开始则要求是正常位序.上面的论述规定了在给定的级中数据必须存取的方式,当然它与具体实现的流图有关.例如,在图 9.14 的第 m 级中,蝶形的间隔是 2^{m-n} ,并且在这种情况下要求系数为倒位序.正如前面所讨论的,输入是正常位序,但是输出是倒位序,所以通常需要利用一个正常位序计数器和一个倒位序计数器把输出排列成正常位序.

一般说来,如果我们考虑在 9.3 节和 9.4 节中所有的流图,则我们会看到,每一种算法都有自己所特有的排序问题.一种具体算法的选择取决于许多因素.利用同址计算的算法具有高效使用存贮器的优点.但是也有两个缺点:一个是要求存贮器是随机存贮器而不是顺序存贮器,另一个是输入序列或输出序列必须为倒位序.此外,根据选取的是按时间抽取算法还是按频率抽取算法,以及输入或输出是倒位序,决定于存取系数是按正常位序还是按倒位序.如果不用随机存取存储器,而用顺序存贮器,正如我们已经指出的,一些快速傅里叶变换算法就用顺序存贮器,但是输入或输出必须为倒位序.虽然,这种算法的流图可以排列成使其输入、输出和系数均为正常位序,但是实现这些算法所要求的标号排列的结构就很复杂,需要 2 倍的随机存取存贮器.因此,使用这些算法就表现不出什么优越性.

图 9.10、9.14、9.20 和 9.22 所示的同址 FFT 算法是最常用的算法.如果一个序列只作一次变换,则倒位序排列就必须在输入端或在输出端来实现.但是,在某些情况下先对一个序列进行离散傅里叶变换,然后对其结果作一些修改后再计算离散傅里叶反变换.例如,当利用离散傅里叶变换通过块卷积实现 FIR 数字滤波器时,先对一段输入序列的 DFT 乘以滤波器冲激响应的 DFT,然后对所得结果作离散傅里叶反变换,得出滤波器的一段输出.同样,当利用离散傅里叶变换计算自相关函数或互相关函数时,首先对序列进行变换,并将其 DFT 相乘,然后再对乘积作反变换.当两个变换用这种方式级联在一起时,有可能适当地选择 FFT 算法来避免倒位序的运算.例如,在用 DFT 实现 FIR 数字滤波器时,我们可以选择一种直接变换的算法,它利用正常位序的数据,而给出倒位序的 DFT.这样一来,既可以利用基于按时间抽取算法与图 9.14 相对应的流图,也可以利用基

于按频率抽取算法与图 9.20 相对应的流图。这两种形式的差别是，按时间抽取形式要求倒位序的系数，而按频率抽取形式则要求正常位序的系数。

在使用这两种算法时，变换均为倒位序。因此，当利用 DFT 作块卷积时，若已用倒位序存贮了滤波器冲激响应的 DFT，则两个 DFT 之间可以简单地按照已存贮的顺序点点相乘。对于 IDFT，我们可以选取一种算法形式，使其要求输入数据为倒位序，并能给出正常位序的结果。这里无论是以按时间抽取算法为基础的图 9.10 所示流图，还是以按频率抽取算法为基础的图 9.22 所示流图均可以使用。但是，图 9.10 利用正常位序的系数，而图 9.22 则要求倒位序的系数。如果对于正变换选取按时间抽取的算法形式，则对于反变换应当选取按频率抽取的算法形式，要求系数为倒位序。同样，对于正变换选取按频率抽取算法则对于反变换应当选取按时间抽取算法，可以使用正常位序系数。

9.5.2 系数

我们已经看到，系数 W_N^r 可以要求是倒位序，也可以是正常位序。无论哪一种情况，都必须贮存一个能够查阅到所需要的全部数值的数表，或者当需要时必须能够计算出所需要的数值。前一种方式具有速度快的优点，但是需要额外的存贮器。从流图中可以看出，我们需要 $r=0, 1, \dots, (N/2)-1$ 时的 W_N^r 。这样，对于 W_N^r 值的一个完整数表，需要 $(N/2)$ 个复数存贮寄存器^{*}。在算法要求系数为倒位序的情况下，我们可以简单地按倒位序存贮该数表。

虽然当需要时计算系数可节省存贮器，但是没有存贮一个查阅表效率高。如果系数是需要计算的，则通常利用递推公式是最有效的。在给定的任何一级，所需要的系数都是复数 W_N^q 的幂次，其中 q 与算法和级数有关。因此，若系数要求是正常位序，则可使用递推公式

$$W_N^\ell = W_N^0 \cdot W_N^{\ell-1} \quad (9.35)$$

从第 $(\ell-1)$ 个系数得到第 ℓ 个系数。显然，要求倒位序系数的算法就不适用于这种方法。应当注意，式(9.35)实质上是习题 6.4 的耦合形式振荡器。当使用有限精度的算术算法时，在这个差分方程的迭代过程中就产生误差。所以，通常需要重新设置预定点上的值（如 $W_N^{N/4} = -j$ ），以使误差在允许范围之内。

9.5.3 实现 FFT 的 FORTRAN 程序

列于图 9.25 中的 FORTRAN 程序说明了如何实现图 9.10 的按时间抽取算法。这个程序基本上类似于最初由库利等人(1967)给出的程序，是 2 的整幕按时间抽取 FFT 算法的一种简单的表述。虽然它不是一个高效的或通用的实现方式，但是它的简捷结构表明了前面讨论过的许多原理。这个程序可与图 9.10 的流图表示一起使用，以便了解 FFT 算法的基本原理。虽然这个程序在效率上不是最佳的，但是它只需要 $(N/2)\log_2 N$ 次复数乘法。FORTRAN 程序清楚地表现出 FFT 算法的许多代数运算结构。（应当注意，FORTRAN 程序的标号范围是从 1 到 N ，而不是像我们在全部讨论中所假设的从 0 到 $(N-1)$ 。）

* 若利用对称性，则可减少这个数目，但是增加了读取所需要数值的复杂性。

1).)这一简单结构很容易变换为其它程序语言*.

```
C FORTRAN SUBROUTINE FOR DECIMATION-IN-TIME FFT ALGORITHM
C X IS AN N=2 ** NU POINT COMPLEX ARRAY THAT INITIALLY
C CONTAINS THE INPUT AND FINALLY CONTAINS THE DFT.
C
SUBROUTINE DITFFT(X,NU)                                01
COMPLEX X(1024),U,W,T                                02
N=2 ** NU                                              03
NV2=N/2                                                04
NM1=N-1                                                05
PI=3.14159265358979                                 06
C * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * *
J=1                                                    07
DO 7 I=1,NM1                                         08
  IF(I.GE.J) GO TO 5                                 09
    T=X(J)
    X(J)=X(I)
    X(I)=T
5   K=NV2                                              13
6   IF(K.GE.J) GO TO 7                               14
    J=J-K
    K=K/2                                              16
    GO TO 6                                           17
7   J=J+K                                             18
C * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * *
DO 20 L=1,NU                                         19
  LE=2 ** L                                         20
  LE1=LE/2                                         21
  U=(1.0,0.0)                                       22
  W=CMPLX(COS(PI/FLOAT(LE1)), -SIN(PI/FLOAT(LE1))) 23
  DO 20 J=1,LE1                                     24
    DO 10 I=J,N,LE                                   25
      IP=I+LE1                                      26
      T=X(IP)*U                                    27
      X(IP)=X(I)-T                                28
10      X(I)=X(I)+T                                29
20      U=U*W                                       30
C * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * *
RETURN                                              31
END                                                 32
```

图 9.25 对于图 9.10 的按时间抽取算法的 FORTRAN 程序。

在图 9.25 所示程序中第 03 到 06 条语句是关于子程序的初始化。倒位排列是通过使用一个倒位计数器来完成的。第 07 条到 18 条语句是有关使倒位计数器递增和排列输入序列的指令。图 9.10 的结构体现在第 19 条到 30 条嵌套的循环语句中。在蝶形计算中所

* 许多有效和灵活的用 FORTRAN 语言编写的 FFT 程序可以在 DSP Committee(1979)中找到。其它有关用 FORTRAN 语言编写的优秀 FFT 程序可见伯鲁斯和帕克(Burrus and Parks, 1985)以及普雷尔斯等人(Press et al., 1986)的论文。用 C 语言编写的 FFT 程序可在普雷尔斯等人(Press et al., 1988)的论文中找到。

要求的系数(W_N 的幂次)递推地产生. 变量 U 代表系数乘法器. 第 30 条语句按照式(9.35)递推地计算这些系数. 这个程序完成图 9.10 所表示的全部 $(N/2)\log_2 N$ 次乘法. 程序并未跳过与 W_N^0 的乘法运算; 也就是说, 在第 27 条语句中无论系数是否为 1, 都要执行乘法运算. 将第一级没有乘法的计算分开执行可明显地节省 $N/2$ 次乘法. 但是这需要一个单独的循环, 因而就破坏了程序的紧凑性.

图 9.26 给出由图 9.20 表明的按频率抽取算法的 FORTRAN 程序. 与图 9.25 一样, 列出这个程序主要是为了说明按频率抽取算法的结构, 这并不意味着它是一个最优的程序, 因为尽管乘法运算中有一些是与 W_N^0 相乘, 但还是执行了全部的 $(N/2)\log_2 N$ 次乘法. 在这个程序中从第 05 到 16 条语句实现第 v 级运算, 而第 17 到 30 条语句实现将倒位序输出排列成正常位序.

```

C FORTRAN SUBROUTINE FOR DECIMATION-IN-FREQUENCY ALGORITHM
C   X IS AN N=2 ** NU POINT COMPLEX ARRAY THAT INITIALLY
C   CONTAINS THE INPUT, AND FINALLY CONTAINS THE DFT.
C
      SUBROUTINE DIFFFT(X,NU)                               01
      COMPLEX X(1024),U,W,T                               02
      N=2 ** NU                                         03
      PI=3.14159265358979                                04
C * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * *
      DO 20 L=1,NU                                      05
      LE=2 ** (NU+1-L)                                    06
      LE1=LE/2                                         07
      U=(1.,0.)                                         08
      W=CMPLX(COS(PI/FLOAT(LE1)), -SIN(PI/FLOAT(LE1))) 09
      DO 20 J=1,LE1                                     10
          DO 10 I=J,N,LE                                 11
              IP=I+LE1                                    12
              T=X(I)+X(IP)                            13
              X(IP)=(X(I)-X(IP)) * U                14
10          X(I)=T                                     15
20          U=U * W                                    16
C * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * *
      NV2=N/2                                         17
      NM1=N-1                                         18
      J=1                                              19
      DO 30 I=1,NM1                                    20
          IF(I.GE.J) GO TO 25                         21
              T=X(J)                                    22
              X(J)=X(I)                            23
              X(I)=T                                24
25      K=NV2                                         25
26      IF(K.GE.J) GO TO 30                         26
          J=J-K                                         27
          K=K/2                                         28
          GO TO 26                                    29
30      J=J+K                                         30
C * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * *
      RETURN                                         31
      END                                             32

```

图 9.26 对于图 9.20 的按频率抽取算法的 FORTRAN 程序.

9.6 复合数 N 的 FFT 算法

以上讨论已经说明了在 N 为 2 的幂次(即 $N=2^n$)这种重要的特殊情况下,按时间抽取和按频率抽取算法的基本原理。虽然在这种情况下可以得出如像在图 9.25 和图 9.26 中所列出的十分简单的程序,但无法保证总是处理长度为 2 的幂次的序列。一般地说,如果 N 可以表示成若干因子的乘积,那么就可以实现离散傅里叶变换的高效计算。虽然由抽取的概念可得出 2 的幂次的算法,但是这一概念在这里就不易普遍推广。因此在本节中我们将采用一种比较正规的方法。

9.6.1 库利-图基算法

正如我们已经指出的,若将 DFT 计算分解为较短的 DFT 计算,就能得到高效的 DFT 算法。对于许多类型的计算,这都是一种推导高效算法的标准方法,也是构成全部 FFT 算法基础的基本原理。为了正式导出这种方法,首先假设序列的长度可表示成两个因子的乘积,即

$$N=N_1N_2. \quad (9.36)$$

我们知道,在推导 $N=2^n$ 的按时间抽取和按频率抽取算法的过程中,第一步是将输入序列或输出序列分解成两个序列。此时我们将 N 表示作 $N=2(N/2)$ 。利用标号映射(index maps)的概念可以正规地进行序列分解,库利和图基(Cooley and Tukey, 1965)在他们的算法的最初表述中曾用到这一概念,而且伯勒斯(Burrus, 1988)为了统一大部分 FFT 算法也用到这一概念。假设标号 n 和 k 表示为

$$n=N_2n_1+n_2, \quad \begin{cases} 0 \leq n_1 \leq N_1-1, \\ 0 \leq n_2 \leq N_2-1. \end{cases} \quad (9.37a)$$

$$k=k_1+N_1k_2, \quad \begin{cases} 0 \leq k_1 \leq N_1-1, \\ 0 \leq k_2 \leq N_2-1. \end{cases} \quad (9.37b)$$

很容易证明,当 n_1 和 n_2 在给定范围内遍取所有可能的值时, N 为从 0 到 $(N-1)$ 的全部可能值且不重复。对于频率标号 k 也一样。利用这些标号映射,可将 DFT 表示成两个标号 k_1 和 k_2 的函数。把式(9.37)代入

$$X[k]=\sum_{n=0}^{N-1}x[n]W_N^{kn}, \quad 0 \leq k \leq N-1, \quad (9.38)$$

得

$$\begin{aligned} X[k] &= X[k_1+N_1k_2] \\ &= \sum_{n_2=0}^{N_2-1} \sum_{n_1=0}^{N_1-1} x[N_2n_1+n_2] W_N^{(k_1+N_1k_2)(N_2n_1+n_2)} \\ &= \sum_{n_2=0}^{N_2-1} \sum_{n_1=0}^{N_1-1} x[N_2n_1+n_2] W_{N_2}^{N_2k_1n_1} W_N^{k_2n_2} W_{N_1}^{N_1k_2n_2} W_{N_1}^{N_1N_2k_2n_1} \end{aligned} \quad (9.39)$$

因为 $W_N^{N_2k_1n_1}=W_{N_1}^{k_1n_1}$, $W_{N_1}^{N_1k_2n_2}=W_{N_2}^{k_2n_2}$, 以及 $W_{N_1}^{N_1N_2k_2n_1}=1$, 所以式(9.39)可以写成

$$X[k_1+N_1k_2]=\sum_{n_2=0}^{N_2-1} \left[\left(\sum_{n_1=0}^{N_1-1} x[N_2n_1+n_2] W_{N_1}^{k_1n_1} \right) W_N^{k_2n_2} \right] W_{N_2}^{k_2n_2}, \quad (9.40)$$

其中 $0 \leq k_1 \leq N_1 - 1$ 且 $0 \leq k_2 \leq N_2 - 1$.

为了解释式(9.40), 可以将输入标号映射的作用设想为把输入的一维序列映射成一个二维序列, 该序列可以表示成一个 n_1 和 n_2 的二维数列, 其中 n_1 和 n_2 分别代表数列的列和行. 然后我们可以把式(9.40)的内括号看作是 N_2 行的 N_1 点 DFT 的集合, 即

$$G[n_2, k_1] = \sum_{n_1=0}^{N_1-1} x[(N_2 n_1 + n_2)] W_N^{k_1 n_1}, \quad \begin{cases} 0 \leq k_1 \leq N_1 - 1, \\ 0 \leq n_2 \leq N_2 - 1. \end{cases} \quad (9.41)$$

注意, 因为不再需要输入序列, 所以 N_1 点的行 DFT 可以作为原始的信号样本贮存在原输入数列位置上; 也就是说, 这些行 DFT 可以同址完成. 这组行 DFT 与因子 $W_N^{k_1 n_2}$ 相乘得到

$$\tilde{G}[n_2, k_1] = W_N^{k_1 n_2} G[n_2, k_1], \quad \begin{cases} 0 \leq k_1 \leq N_1 - 1, \\ 0 \leq n_2 \leq N_2 - 1. \end{cases} \quad (9.42)$$

以上运算也可以同址完成. 在式(9.40)和式(9.42)中的因子 $W_N^{k_1 n_2}$ 称为旋转因子. 如果对这些因子来说不是这样, 则式(9.40)将是一个二维 DFT. 在 9.6.2 节中我们将会看到, 对于 N_1 和 N_2 的某些值旋转因子可以省去.

最后, 式(9.40)中的外和式可以看作是数列各列的 N_2 点 DFT 的集合, 即

$$X[k_1 + N_1 k_2] = \sum_{n_2=0}^{N_2-1} \tilde{G}[n_2, k_1] W_{N_2}^{k_2 n_2}, \quad \begin{cases} 0 \leq k_1 \leq N_1 - 1, \\ 0 \leq k_2 \leq N_2 - 1. \end{cases} \quad (9.43)$$

各个列 DFT, $X[k_1 + N_1 k_2]$, 可以再次贮存在与输入列数据 $\tilde{G}[n_2, k_1]$ 同样的位置上. 这样, 计算可以全部同址完成. 虽然输入可以按照式(9.37a)的标号映射进入数列, 但是输出的 DFT 值必须按照式(9.37b)从数列中取出. 下面的例子说明对于 $N = 2^n$ 这种大家熟悉的情况如何用这种方式来考查 FFT.

例 9.1

假设 N 可被 2 整除, 因此我们可以选择 $N_1 = 2$ 且 $N_2 = N/2$. 当 $0 \leq k_1 \leq 1$ 和 $0 \leq k_2 \leq (N/2 - 1)$ 时,

$$X[k_1 + 2k_2] = \sum_{n_2=0}^{(N/2)-1} \left[\left(\sum_{n_1=0}^1 x[(N/2)n_1 + n_2] W_N^{k_1 n_1} \right) W_N^{k_2 n_2} \right] W_{N/2}^{k_2 n_2}, \quad (9.44)$$

输入的二维数列表示是

n_1	0	1
n_2	$x[0]$	$x[N/2]$
0	$x[1]$	$x[N/2+1]$
1	\vdots	\vdots
$N/2-1$	$x[N/2-1]$	$x[N-1]$

我们看到, 数列的第一列 ($n_1 = 0$) 是输入序列的前一半, 而第二列 ($n_1 = 1$) 是输入序列的后一半. 把这两列抽取出来并连接在一起就可以按顺序重新排列输入序列. 现在行

DFT 是 2 点 DFT, 它可以表示成

$$G[n_2, k_1] = x[n_2] + (-1)^{k_1} x[N/2+n_2], \quad \begin{cases} 0 \leq k_1 \leq 1, \\ 0 \leq n_2 \leq (N/2)-1. \end{cases} \quad (9.45)$$

这些 2 点 DFT 不需要乘法. 行变换的二维数列为

n_2	k_1	0	1
0	0	$G[0,0]$	$G[0,1]$
1	0	$G[1,0]$	$G[1,1]$
\vdots		\vdots	\vdots
$(N/2)-1$	0	$G[(N/2)-1,0]$	$G[(N/2)-1,1]$

乘以旋转因子后, 数列成为

n_2	k_1	0	1
0	0	$G[0,0]$	$G[0,1]$
1	0	$G[1,0]$	$G[1,1]$
\vdots		\vdots	\vdots
$(N/2)-1$	0	$G[(N/2)-1,0]$	$G[(N/2)-1,1]$

其中

$$\tilde{G}[n_2, k_1] = W_N^{k_1 n_2} G[n_2, k_1], \quad \begin{cases} 0 \leq k_1 \leq 1, \\ 0 \leq n_2 \leq (N/2)-1. \end{cases} \quad (9.46)$$

最后, 我们计算各列的 $(N/2)$ 点变换

$$X[k_1 + 2k_2] = \sum_{n_2=0}^{(N/2)-1} \tilde{G}[n_2, k_1] W_N^{k_1 n_2}, \quad \begin{cases} 0 \leq k_1 \leq 1, \\ 0 \leq k_2 \leq (N/2)-1, \end{cases} \quad (9.47)$$

因此输出二维数列是

k_2	k_1	0	1
0	0	$X[0]$	$X[1]$
1	0	$X[2]$	$X[3]$
\vdots		\vdots	\vdots
$(N/2)-1$	0	$X[N-2]$	$X[N-1]$

因为我们已同址完成了计算, 所以 DFT 的值具有由输入标号映射所规定的排序, 而不是由输出标号映射所规定的排序. 这就是说, 如果我们用与输入在数列中相同的排列次序(列向)提取 DFT 值, 则我们首先得到偶序号值, 然后得到奇序号值. 图 9.27 中绘出了当 $N=16$ 时本例所采用的运算流图. 图 9.27 中的第一级与图 9.20 按频率抽取的流图中第一级的形式相同. 如前所述, 若 $N=2^e$, 则 $N/2$ 同样可被 2 整除, 因此我们

可以连续地将变换分解至 2 点 DFT，对于 $N=8$ 的完整流图如图 9.20 所示。实际上这个流图应当代替图 9.27 的 16 点 DFT 中标记为 $(N/2)$ 点 DFT 的方块部分。

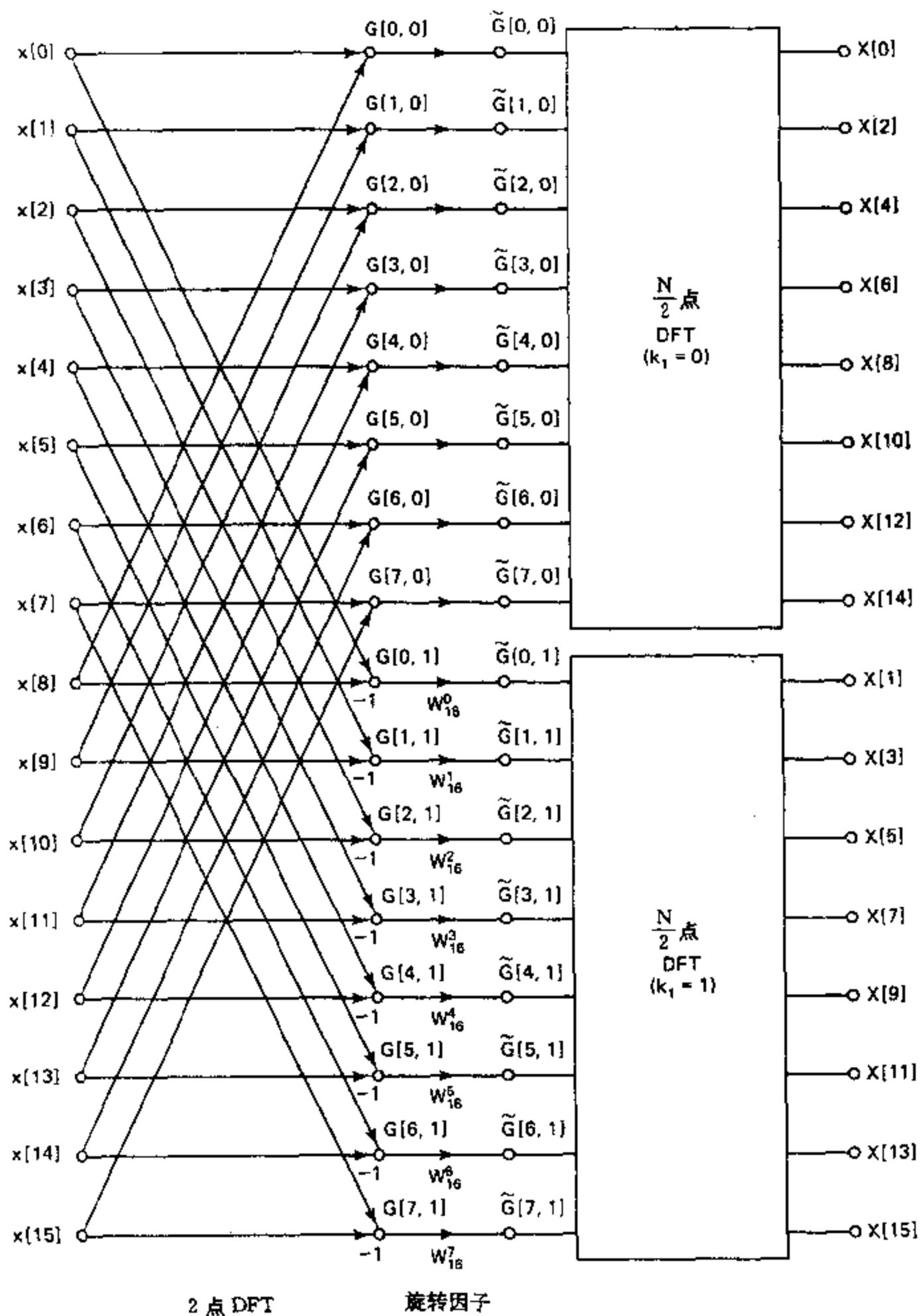


图 9.27 将一个 N 点 DFT 分解成二个 $(N/2)$ 点 DFT 的流图 ($N=16$)。

如果在例 9.1 中选择 $N_1=N/2$ 且 $N_2=2$ ，则我们应当得到 DFT 按时间抽取分解的第一级。换句话说，我们可以将标号映射定义为

$$n = n_1 + N_1 n_2, \quad \begin{cases} 0 \leq n_1 \leq N_1 - 1, \\ 0 \leq n_2 \leq N_2 - 1, \end{cases} \quad (9.48a)$$

$$k = N_2 k_1 + k_2, \quad \begin{cases} 0 \leq k_1 \leq N_1 - 1, \\ 0 \leq k_2 \leq N_2 - 1. \end{cases} \quad (9.48b)$$

在这种情况下,若选择 $N_1=2$ 且 $N_2=N/2$ 则可以得出按时间抽取算法;若选择 $N_1=N/2$ 且 $N_2=2$,则可得出按频率抽取算法.以式(9.37)或式(9.38)给出的标号映射为基础的算法都涉及到利用旋转因子作为较短的 DFT 之间的中间运算.因为库利和图基(Cooley and Tukey, 1965)发表的原始算法就是这种形式,所以人们就把这类算法称为库利-图基算法.

在得出式(9.40)的推导过程中,没有提出对 N_1 和 N_2 的假设. N_1 和 N_2 或其中之一都能有其它的因子.通常,高效算法都要求 N 为如下形式的复合数:

$$N = N_1 N_2 \cdots N_v. \quad (9.49)$$

在这种情况下,对于输入和输出序列我们可以定义更加复杂的多维标号映射.在 $N=2^v$ 的情况下,将计算重复分解到 2 点变换可以得出如下形式的 DFT 完全分解的多维标号映射:

$$n = 2^{v-1} n_1 + \cdots + 2 n_{v-1} + n_v, \quad (9.50a)$$

$$k = k_1 + 2 k_2 + \cdots + 2^{v-1} k_v. \quad (9.50b)$$

此时,因为标号 n_i 和 k_i 不是 0 就是 1,所以我们可看出,若输入为正常位序,则同址计算将得出倒位序的输出;反之亦然.

如果 $N=R^v$,即 N 为相同因子的乘积,则所对应的 FFT 算法称为基 R 算法.如果输入是正常位序,则输出将为基 R 数系中的倒数字序.当这些因子不完全相同时,所对应的 FFT 算法称为混合基算法.

计算 DFT 所需要的全部乘法次数的公式对于比较各种算法是十分有用的.为了能得出这样一个能适用于一般情况的公式,我们定义 $\mu(N)$ 为计算一个 N 点 DFT 所需要的乘法次数.对于二个因子の場合,总的乘法次数是很容易确定的.行变换需要 $N_2 \mu(N_1)$ 次乘法;旋转因子需要 $N_1 N_2 = N$ 次乘法;而最后的列变换需要 $N_1 \mu(N_2)$ 次乘法.所以,全部的乘法次数是

$$\mu(N) = N_2 \mu(N_1) + N_1 \mu(N_2) + N = N \left(\frac{\mu(N_1)}{N_1} + \frac{\mu(N_2)}{N_2} + 1 \right). \quad (9.51)$$

如果 N 有如式(9.49)中所示的 v 个因子,则通过重复使用式(9.51)可以证明:将变换重複分解为相继較短的变换来计算 DFT 所需要的全部乘法次数为

$$\mu(N) = N \left(\sum_{i=1}^v \frac{\mu(N_i)}{N_i} + (v-1) \right). \quad (9.52)$$

上式说明标号映射可以使我们减少计算量,但是这并没有说明问题的全部.如果用直接法来计算較短的变换,则对于每个 N_i 点变换就需要 N_i^2 次乘法.根据这一假设,库利和图基(1965)证明,当 $N=3^v$ 时所需要的计算量最小.但是,某些长度的短变换就不需要 N_i^2

次乘法。例如,我们已经指出,2点变换就不需要乘法。如果我们记住,2点DFT不需要乘法,并且在按频率抽取算法的最后一级中均用 W_N^0 相乘,则对于 $N=2^v$ 的情况,式(9.52)将给出正确的结果。这样由式(9.52)可以算出全部计算为 $N(v-1)$ 次乘法,它们均为旋转因子所致。若我们记得在任一级中有一半的旋转因子为 1,则无论对于按时间抽取算法还是按频率抽取算法,正确的结果是 $N(v-1)/2$,这一点从图 9.10 或图 9.20 中显然可见*。

从前面的讨论中我们可以看出,减少计算量的一种方法是,设法得到一种高效算法,它能用少于 N^2 次乘法来实现较短的 N 点变换。正如我们将在 9.7.1 节中所能看到的,这是一个重要的通用原则。下一个例子表明,含有因子 4 的算法具有特别诱人的实现方式。

例 9.2

考虑当 N 含有因子 4 的情况,我们可以选择 $N_1=4$ 且 $N_2=N/4$ 。回到式(9.40),可以看出第一级是执行 $(N/4)$ 个 4 点变换。因为 $W_4=-j$,所以对于 $k_1=0,1,2,3$ 和 $n_2=0,1,\dots,(N/4)-1$,4 点变换有如下形式:

$$\begin{aligned} G[n_2, k_1] = & x[n_2] + (-j)^{k_1} x[(N/4)+n_2] \\ & + (-1)^{k_1} x[(N/2)+n_2] \\ & + (j)^{k_1} x[(3N/4)+n_2] \end{aligned} \quad (9.53)$$

从式(9.53)可知,因为通过交换实部和虚部就可以实现与 $\pm j$ 的相乘,所以对于 4 点 DFT 就不需要乘法。

与式(9.53)对应的 4 点蝶形计算如图 9.28 所示,图 9.29 给出了当 $N=16$ 时根据式(9.40)得出的完整流图。在该图中我们只画出了第一级中的一个 4 点 DFT,否则该图将会十分繁杂。此外我们没有表示出每一个 4 点 DFT 的乘法器,因为它们均如图 9.28 所示。可以看出,在用二级 4 点 DFT 来实现 16 点 DFT 的计算中,对于旋转因子总共只需要 12 次复数乘法,如图 9.29 所示。我们也可以用 4 级 2 点 DFT 来实现 16 点 DFT。在这种情况下,对于旋转因子来说总共需要 24 次复数乘法。

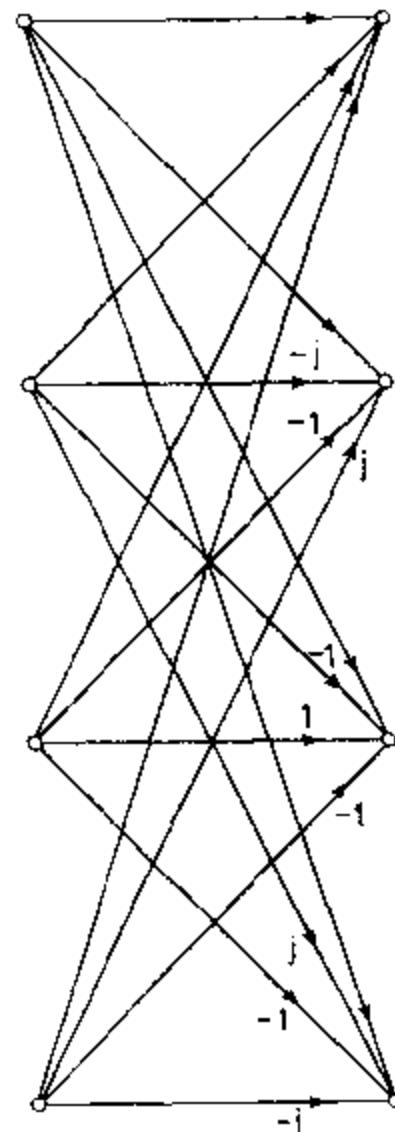


图 9.28 4 点 DFT 的蝶形图。

例 9.2 表明,当 $N=4^v$ 时利用 v 级 4 点蝶形计算而不是 $2v$ 级 2 点蝶形计算可以显著节省计算量。这是因为级数减少一半,因而旋转因子的乘法次数也减少了一半。显然,在短 DFT 中减少旋转因子的数目而不增加乘法次数也是减少全部乘法次数的一种有效方法。因为长度为 8 的变换只用几次乘法就可以直接实现,所以对于 $N=2^v$ 的情况许多高效算法可以通过利用尽可能多的因子 8 而得到,同时也可用因子 4 或因子 2 来完成。根据这一原理的计算机程序由伯格兰(Bergland, 1968)提出并收录在 DSP Committee(1979)中可供使用。

* 在前面的讨论中我们曾得出总计算次数为 $Nv/2$,但是其中包括了在输出端用 W_N^0 的 $N/2$ 次复数乘法。

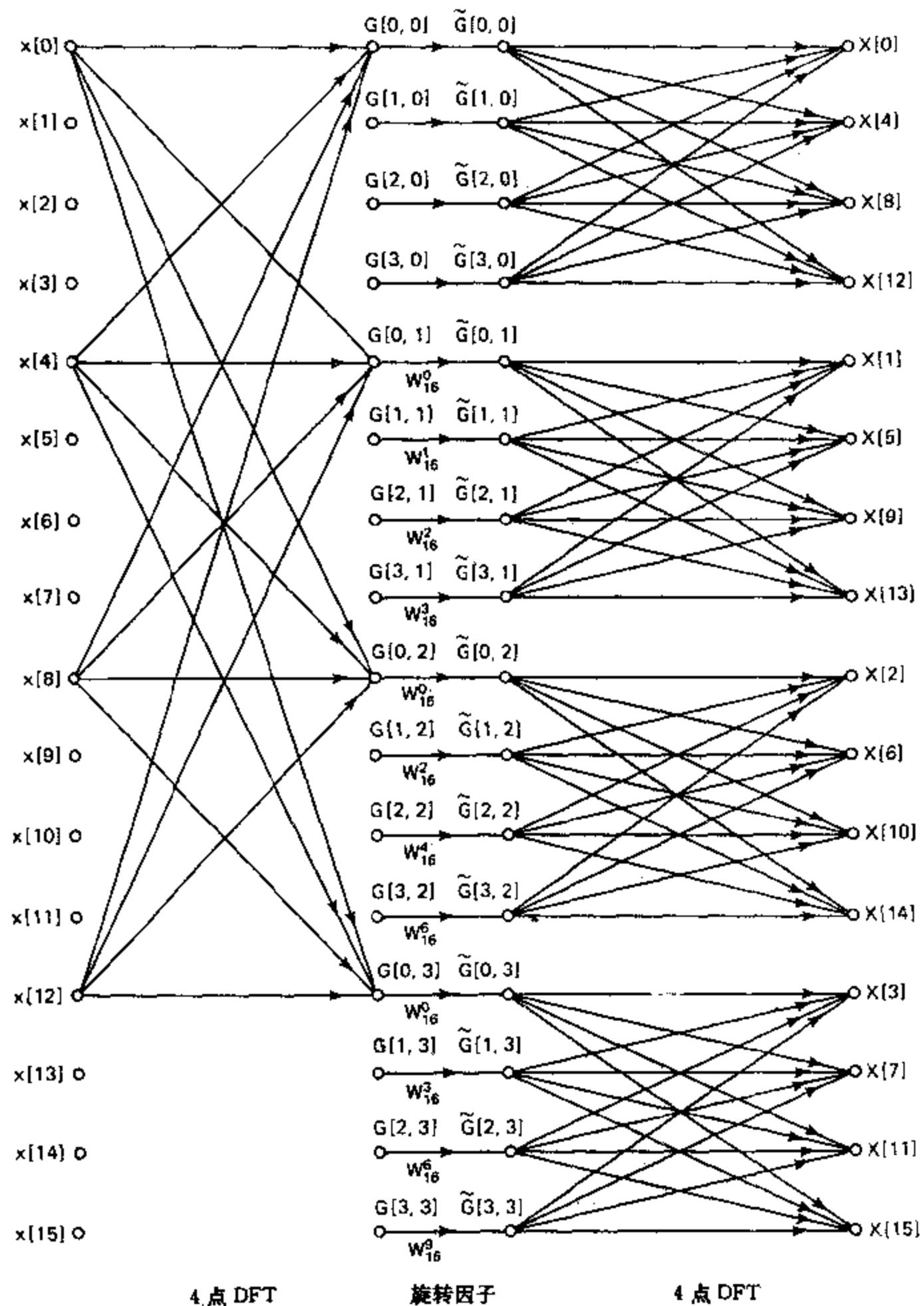


图 9.29 当 $N=16$ 时使用因子 4 的 DFT 流图.

通过对库利-图基 FFT 算法的讨论可以清楚地看出, 将 DFT 计算简单地分解为许多长度较短的 DFT 可以十分显著地减少计算量. 我们还看到某些长度的计算有明显地优点, 它们不需要作乘法, 并可以减少旋转因子乘法的次数. 现在让我们来研究一下如何完全消除掉旋转因子.

9.6.2 素因子算法

为了消除旋转因子需要定义如下形式的标号映射:

$$n=((An_1+Bn_2))_N, \quad \begin{cases} 0 \leq n_1 \leq N_1-1, \\ 0 \leq n_2 \leq N_2-1, \end{cases} \quad (9.54a)$$

$$k=((Ck_1+Dk_2))_N, \quad \begin{cases} 0 \leq k_1 \leq N_1-1, \\ 0 \leq k_2 \leq N_2-1, \end{cases} \quad (9.54b)$$

式中如同第八章一样, $((\cdot))_N$ 表示以 N 为模的标号计算.

我们已经知道, 常数 $A=N_2$, $B=C=1$ 和 $D=N_1$ 给出式(9.37)的映射, 而常数 $A=D=1$, $B=N_1$ 和 $C=N_2$ 给出式(9.48)的映射. 在这种情况下, 标号映射从未超过 N , 因此以 N 为模的约化是多余的. 这几种映射得出了当 N_1 和 N_2 取任意值时式(9.40)的库利-图基分解. 但是, 若 N_1 和 N_2 互为素数时(即没有共同的因子), 则在式(9.54)中选择不同的常数可以完全消除这些旋转因子. 具体讲, 我们必须选择式(9.54)中的常数 A, B, C 和 D 使得在 0 到 $N-1$ 之间的 n 和 k 值只出现一次, 则旋转因子即可消失, 即

$$W_N^{(An_1+Bn_2)(Ck_1+Dk_2)} = W_{N_1}^{k_1 n_1} W_{N_2}^{k_2 n_2}.$$

这就要求 $((AC))_N=N_2$, $((BD))_N=N_1$, 且 $((AD))_N=((BC))_N=0$. 求解能满足这些限制条件的一组系数涉及到利用中国余数定理. 有关这一问题和其它必要的数论概念的讨论会使我们更加深入地了解快速 DFT 算法这一论题, 但在这里展开讨论却有些不太适宜. 可是, 能满足唯一性条件和消除旋转因子的一组系数是(Burrus, 1977, 1988)

$$A=N_2 \quad \text{和 } B=N_1, \quad (9.55a)$$

$$C=N_2((N_2^{-1}))_{N_1} \quad \text{和 } D=N_1((N_1^{-1}))_{N_2}, \quad (9.55b)$$

式中 $((N_2^{-1}))_{N_1}$ 表示以 N_1 为模约化的 N_2 的乘法逆. (例如, 若 $N_1=4$ 和 $N_2=3$, 则 $((3^{-1}))_4=3$, 因为 $((3 \cdot 3))_4=1$.) 由于这种选择(它不是唯一的), DFT 可以表示成

$$\begin{aligned} & X[((N_2((N_2^{-1}))_{N_1}k_1 + N_1((N_1^{-1}))_{N_2}k_2))_N] \\ &= \sum_{n_2=0}^{N_2-1} \left[\sum_{n_1=0}^{N_1-1} x[((N_2n_1 + N_1n_2))_N] W_{N_1}^{k_1 n_1} \right] W_{N_2}^{k_2 n_2}, \end{aligned} \quad (9.56)$$

式中 $0 \leq k_1 \leq N_1-1$ 和 $0 \leq k_2 \leq N_2-1$. 现在我们可以把一维 DFT 表示成一个没有插入旋转因子的二维 DFT. 吉德(Good, 1985)曾给出了这种形式的算法. 因为要求 N_1 和 N_2 必须互为素数, 所以形式为式(9.26)的算法称为素因子算法. 由于消除了旋转因子乘法, 所以行和列的变换可以按各自的次序进行, 并且总的乘法次数由式(9.52)给出, 但除去 $(v-1)$ 这一项. 这样一来, 若在实现 N_1 点 DFT 时给定相同的效率, 则式(9.56)要比式(9.40)少 $N(v-1)$ 次复数乘法.

例 9.3

设 $N=12$, 所以我们可以选取互素因子 $N_1=4$ 和 $N_2=3$. (因子本身不需要是素数.) 利用式(9.54)和式(9.55)我们得出标号映射为

$$n = ((3n_1 + 4n_2))_{12}, \quad \begin{cases} 0 \leq n_1 \leq 3, \\ 0 \leq n_2 \leq 2, \end{cases} \quad (9.57a)$$

$$k = ((9k_1 + 4k_2))_{12}, \quad \begin{cases} 0 \leq k_1 \leq 3, \\ 0 \leq k_2 \leq 2, \end{cases} \quad (9.57b)$$

对于 $0 \leq k_1 \leq 3$ 和 $0 \leq k_2 \leq 2$, 可得到表达式

$$X[((9k_1 + 4k_2))_{12}] = \sum_{n_2=0}^2 \left[\sum_{n_1=0}^3 x[((3n_1 + 4n_2))_{12}] W_4^{k_1 n_1} \right] W_3^{k_2 n_2}. \quad (9.58)$$

输入的二维数列表示是

n_1	0	1	2	3
n_2	$x[0]$	$x[3]$	$x[6]$	$x[9]$
0	$x[4]$	$x[7]$	$x[10]$	$x[1]$
1	$x[8]$	$x[11]$	$x[2]$	$x[5]$

对于这些标号映射以模 12 来约化是必要的, 这样可使 n 和 k 的有效值维持在 0 和 11 之间. 各行的 4 点变换得出如下表示:

k_1	0	1	2	3
n_2	$G[0,0]$	$G[0,1]$	$G[0,2]$	$G[0,3]$
0	$G[1,0]$	$G[1,1]$	$G[1,2]$	$G[1,3]$
1	$G[2,0]$	$G[2,1]$	$G[2,2]$	$G[2,3]$

其中

$$G[n_2, k_1] = \sum_{n_1=0}^3 x[((3n_1 + 4n_2))_{12}] W_4^{k_1 n_1}. \quad (9.59)$$

因为没有旋转因子, 所以从列变换

$$X[((9k_1 + 4k_2))_{12}] = \sum_{n_2=0}^2 G[n_2, k_1] W_3^{k_2 n_2}. \quad (9.60)$$

得出最终的数列为

k_1	0	1	2	3
k_2	$X[0]$	$X[9]$	$X[6]$	$X[3]$
0	$X[4]$	$X[1]$	$X[10]$	$X[7]$
1	$X[8]$	$X[5]$	$X[2]$	$X[11]$

图 9.30 表示该例的一个完整流图. 因为如图 9.28 所示的 4 点 DFT 不需要乘法, 而图 9.31 所示的 3 点 DFT 需要 4 次复数乘法, 所以这种算法只需要 16 次复数乘法. 库

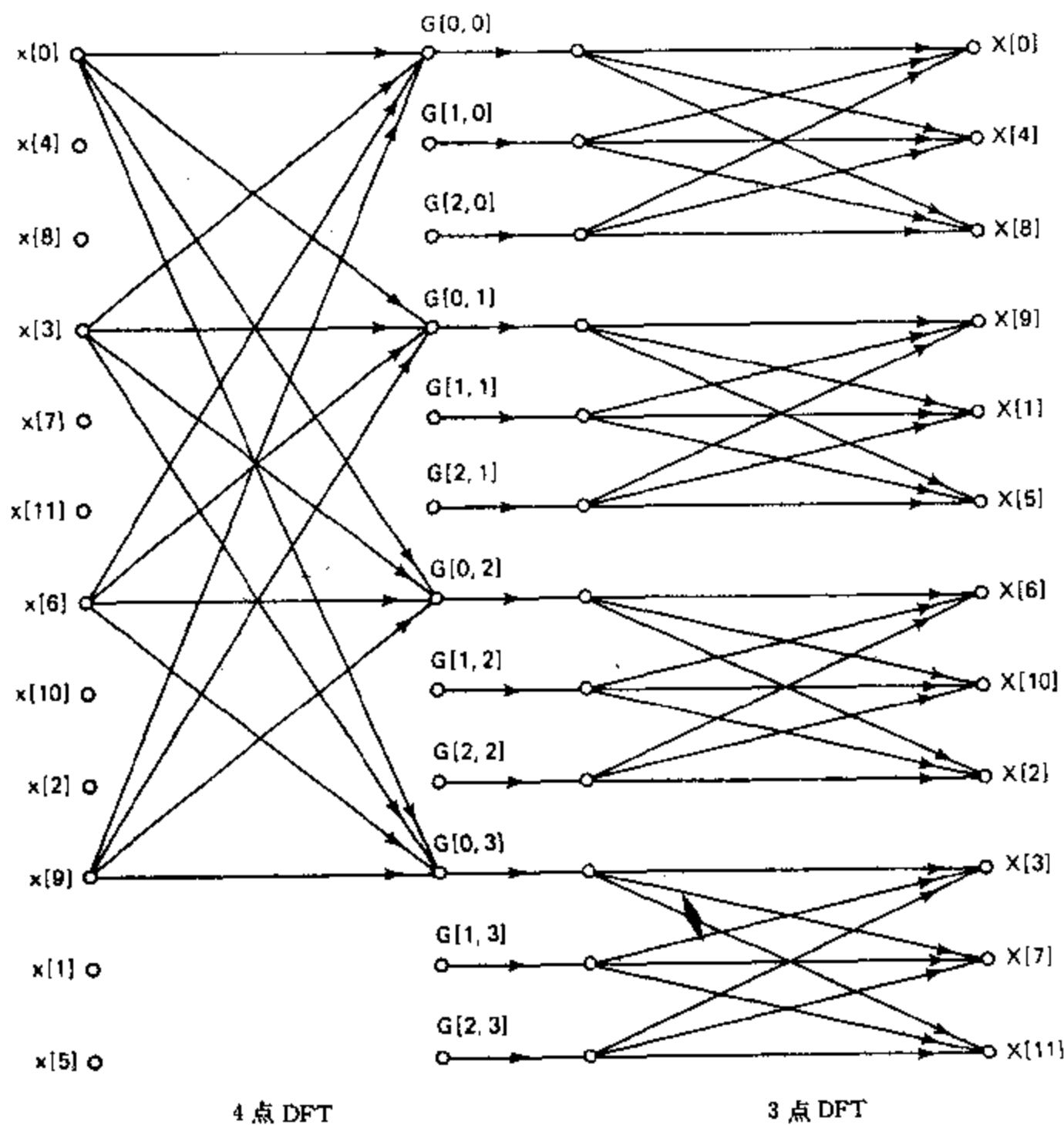


图 9.30 $N=12$ 时素因子算法的流图.

利-图基算法具有与图 9.30 一样的结构,但是对于来自于 4 点变换和 3 点变换之间的这些旋转因子,它需要作额外的 9 次乘法. 可以看出,对于素因子算法无论是输入序列还是输出序列都不是正常位序.

用素因子算法消除了旋转因子乘法,但付出的代价是算法的标号排列和编程变得更加复杂. 与基 2 或基 4 库利-图基算法相比,后者使用单个蝶形(没有乘法)及高度嵌套的程序结构,而素因子算法对于每个因子均要求不同的蝶形并且用一次取一个因子的方式是最容易编程的. 正如例 9.3 所示,标号排列是比较复杂的. 素因子算法的 FORTRAN 子程序以及有关编程细节的讨论由科尔巴和帕克斯(Kolba and Parks, 1977)以及伯

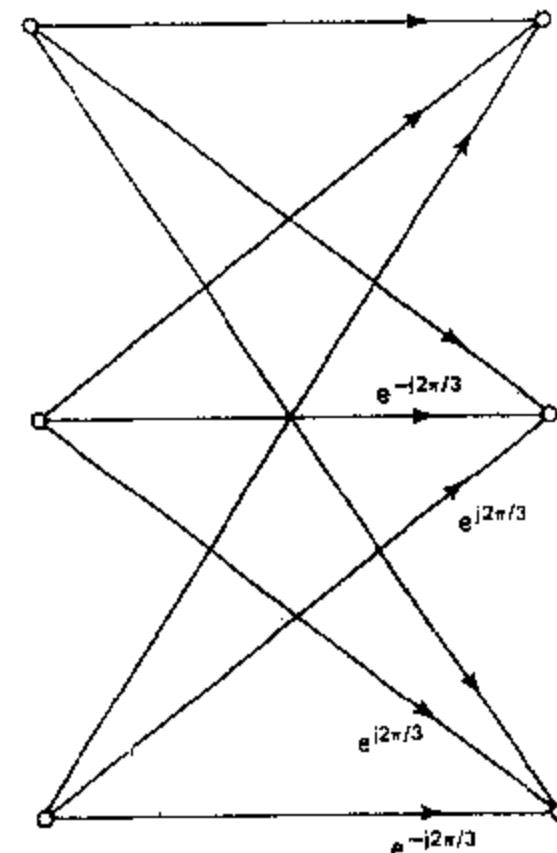


图 9.31 图 9.30 中使用的 3 点 DFT 流图.

鲁斯和帕克斯(Burrus and Parks, 1985)给出.

如果对于每个互素因子所要的短长度 DFT(蝶形)均有高效算法,就可极大地提高素因子算法的价值.在下一节中将简要讨论进一步减少计算量的关键问题.

9.7 用卷积实现 DFT

因为 FFT 惊人的高效性,人们常常通过计算两个互相卷积的序列的 DFT 及其乘积的 IDFT 来实现卷积运算,其中使用 FFT 算法来计算正向和反向 DFT. 与此相反,并且看上去显然(当然实际上并不)是一种矛盾的作法,人们有时喜欢首先把 DFT 的计算转换为卷积来进行. 我们已经在戈泽尔算法中见到这样一个例子,并且许多其它较复杂的算法也以这种方法为基础.

9.7.1 威诺格拉德傅里叶变换算法概述

威诺格拉德(Winograd, 1978)曾提出并推导一种通常称为威诺格拉德傅里叶变换算法(WFTA),该算法利用多项式乘法或与之等效的卷积实现了 DFT 的高效计算. WFTA 使用与 9.6.2 节中所讨论的素因子算法同样的序号排列方式. 如前所述,这种序号排列方式允许将 DFT 分解为长度为互素数的许多短长度的 DFT. 然后把短 DFT 转变为周期卷积. 拉德(Rader, 1968)曾提出一种当输入样本数为素数时把 DFT 转化成卷积的方法,但是这种方法的应用尚等待着计算周期卷积的高效方法的出现. 威诺格拉德将上面的各种方法与计算循环卷积的高效算法合为一体,形成了一种计算 DFT 的新方法. 因为推导计算短卷积高效算法的技术是以像用于多项式的中国余数定理的高等数论概念为基础的,所以我们在这里不介绍其细节. 有关 WFTA 细节全面深入地讨论可见麦克莱伦和拉德(McClellan and Rader, 1979)、布莱赫特(Blahut, 1985)及伯鲁斯(Burrus, 1988)的论文.

使用 WFTA 方法时,对于一个 N 点 DFT 所需要的乘法次数正比于 N ,而不是 $N \log N$. 虽然这种方法可以得出在使乘法次数最少方面最优的算法,但是与 FFT 相比加法次数却明显增加. 因此,WFTA 最适用于乘法运算要比加法运算慢得多的场合,如像通常遇到的定点数字算术运算的情况. 但是,在乘法和累加为一体的处理器中,库利-图基或素因子算法常常是比较好的. WFTA 的另一个缺点是标号排列比较复杂,不可能同址计算,而且对于不同 N 值,算法的主要结构也各不相同.

因此,虽然从作为衡量 DFT 计算(利用乘法)所能达到的有效程度为基准来看,WFTA 是非常重要的,但是在确定实现 DFT 计算的软件或硬件的速度和有效性时,往往其它因素占主导地位.

9.7.2 线性调频变换算法

以把 DFT 表示成卷积为基础的另一种算法称为线性调频变换算法(CTA). 这种算法虽然在减少计算复杂性方面不是最优的,但是在许多应用场合,特别是当实现一个固定的预先给定的冲激响应进行卷积的技术时,它是十分有用的. CTA 也比 FFT 具有更广泛

的适应性,因为它可以用于计算在单位圆上傅里叶变换的任意一组等间隔样本。

为了推导出线性调频变换算法,令 $x[n]$ 表示一个 N 点序列, $X(e^{j\omega})$ 表示其傅里叶变换。我们来研究计算 $X(e^{j\omega})$ 的 M 个样本,这些样本在单位圆上以等角度间隔排列,如图 9.32 所示,即在如下频率处:

$$\omega_k = \omega_0 + k\Delta\omega, \quad k=0,1,\dots,M-1, \quad (9.61)$$

其中起始频率 ω_0 和频率增量 $\Delta\omega$ 可任意选取。(对于 DFT 的特殊情况, $\omega_0=0, M=N$ 和 $\Delta\omega=2\pi/N$ 。)与这个通常的频率样本集相对应的傅里叶变换是

$$(e^{j\omega_k}) = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j\omega_k n}, \quad k=0,1,\dots,M-1, \quad (9.62)$$

或者,若定义 W 为

$$W = e^{-j\Delta\omega} \quad (9.63)$$

且利用式(9.61),有

$$X(e^{j\omega_k}) = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j\omega_0 n} W^{nk}. \quad (9.64)$$

为了将 $X(e^{j\omega_k})$ 表示成一个卷积,我们利用等式

$$nk = \frac{1}{2} [n^2 + k^2 - (k-n)^2] \quad (9.65)$$

可将式(9.64)表示为

$$X(e^{j\omega_k}) = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j\omega_0 n} W^{n^2/2} W^{k^2/2} W^{-(k-n)^2/2}. \quad (9.66)$$

若令

$$g[n] = x[n] e^{-j\omega_0 n} W^{n^2/2}, \quad (9.67)$$

则可以得出

$$X(e^{j\omega_k}) = W^{k^2/2} \left(\sum_{n=0}^{N-1} g[n] W^{-(k-n)^2/2} \right), \quad k=0,1,\dots,M-1. \quad (9.68)$$

为了能把式(9.68)看作是一个线性时不变系统的输出,我们在式(9.68)中用 n 代替 k 和用 k 代替 n ,得到较熟悉的形式

$$X(e^{j\omega_n}) = W^{n^2/2} \left(\sum_{k=0}^{N-1} g[k] W^{-(n-k)^2/2} \right), \quad n=0,1,\dots,M-1. \quad (9.69)$$

在式(9.69)的形式中, $X(e^{j\omega_n})$ 相当于序列 $g[n]$ 与序列 $W^{-n^2/2}$ 的卷积,然后乘以序列 $W^{n^2/2}$ 。用独立变量 n 标注的输出序列是频率样本序列 $X(e^{j\omega_n})$ 。根据这一解释,式(9.69)的计算过程绘于图 9.33 中。可以认定序列 $W^{-n^2/2}$ 是频率线性增加的复指数序列。在雷达系

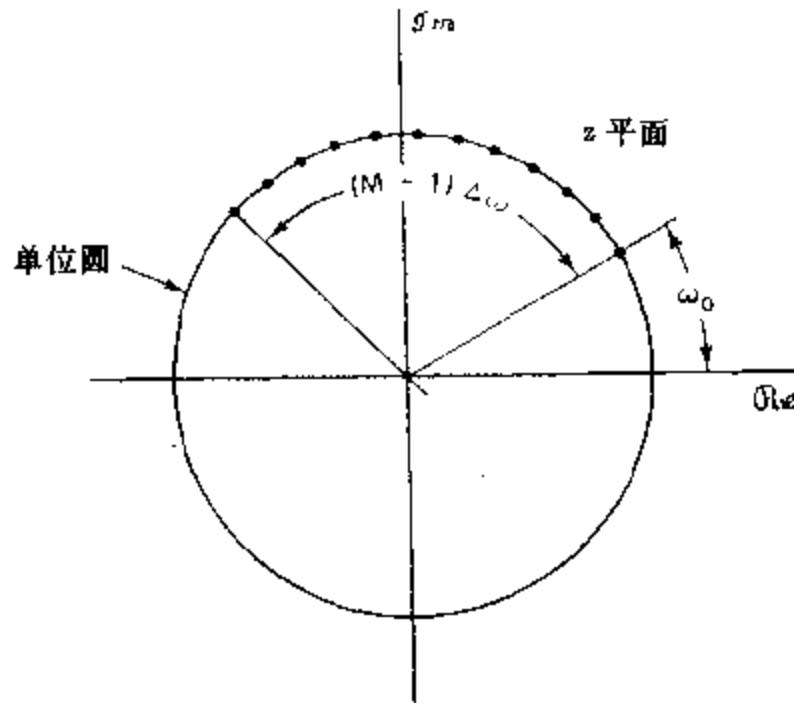


图 9.32 线性调频变换的频率样本。

统中,这种信号称为线性调频信号,所以该方法取名为线性调频变换.在雷达和声纳信号处理中常常用与图 9.33 类似的系统作脉冲压缩(Skolnik,1980).

为了计算式(9.69)表示的傅里叶变换的样本,我们只需要计算图 9.33 的系统在一个有限区间上的输出.在图 9.34 中绘出了序列 $g[n], W^{-n^2/2}$ 和 $g[n] * W^{-n^2/2}$.因为 $g[n]$ 是有限长的,所以在区间 $n=0, 1, \dots, M-1$ 上得出 $g[n] * W^{-n^2/2}$ 只用到序列 $W^{-n^2/2}$ 的有限部分,具体讲是从 $n=-(N-1)$ 到 $n=M-1$ 的部分.让我们定义 $h[n]$ 为

$$h[n] = \begin{cases} W^{-n^2/2}, & -(N-1) \leq n \leq M-1, \\ 0, & \text{其它,} \end{cases} \quad (9.70)$$

如图 9.35 所示,利用卷积过程的图形表示,很容易证明:

$$g[n] * W^{-n^2/2} = g[n] * h[n], \quad n=0, 1, \dots, M-1 \quad (9.71)$$

因此,在图 9.33 所示系统中的无限长冲激响应 $W^{-n^2/2}$ 可用图 9.35 的有限长冲激响应来代替.新的系统如图 9.36 所示,其中 $h[n]$ 由式(9.70)表示,频率样本 $X(e^{j\omega_n})$ 由下式给出:

$$X(e^{j\omega_n}) = y[n], \quad n=0, 1, \dots, M-1. \quad (9.72)$$

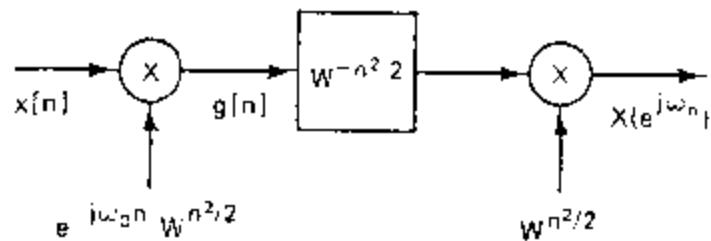


图 9.33 线性调频变换算法的方框图.

利用图 9.36 所示方法计算频率样本有许多潜在的优点.总的说来,不像 FFT 算法那样要求 $N=M$,并且 N 或 M 均不要求是合成数(Composite Numbers).事实上,如果需要的话,它们可以是素数.此外,参数 ω_0 是任意的.这种比 FFT 更广泛的适应性并不排除计算的高效性,因为可以利用 FFT 算法以及 8.9 节所介绍的计算卷积的技术高效地实现图 9.36 中的卷积.正如在 8.9 节中所讨论的,为了使循环卷积当 $0 \leq n \leq M-1$ 时等于 $g[n] * h[n]$,FFT 的长度必须大于 $(M+N-1)$.另外 FFT 的长度可以是任意的,例如它可以取作 2 的幂次.我们十分有趣地注意到,用于计算隐含在线性调频变换算法中的卷积的 FFT 算法可以是威诺格拉德类型的.这些算法本身利用卷积去实现 DFT 计算.

在图 9.36 所示系统中, $h[n]$ 是非因果的,而对于某些实时的实现,为了得到一个因果系统必须对 $h[n]$ 加以修正.因为 $h[n]$ 是有限长的,所以这种修正很容易完成,只需把 $h[n]$ 延迟 $(N-1)$ 就可得到一个因果冲激响应

$$h_1[n] = \begin{cases} W^{-(n-N+1)^2/2}, & n=0, 1, \dots, M+N-2 \\ 0, & \text{其它.} \end{cases} \quad (9.73)$$

因为在输出端的线性调频解调因子和输出信号也均延迟 $(N-1)$ 个样本,所以傅里叶变换值为

$$X(e^{j\omega_n}) = y_1[n+N-1], \quad n=0, 1, \dots, M-1 \quad (9.74)$$

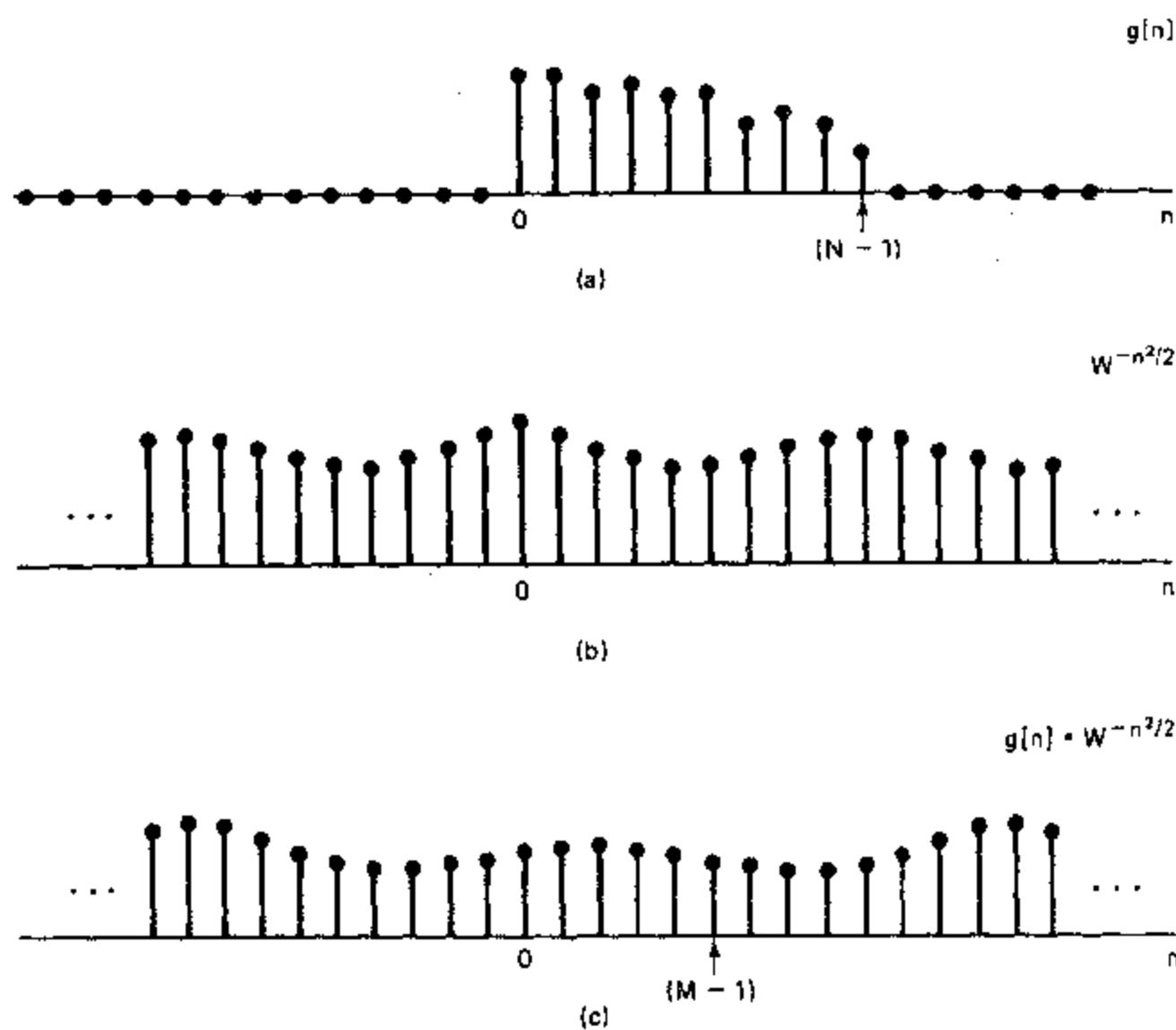


图 9.34 在线性调频变换算法中所用到的序列. 注意, 实际上所涉及到的序列是复数值.

(a) $g[n] = x[n]e^{-j\omega_0 n}W^{-n^2/2}$, (b) $W^{-n^2/2}$, (c) $g[n] * W^{-n^2/2}$.

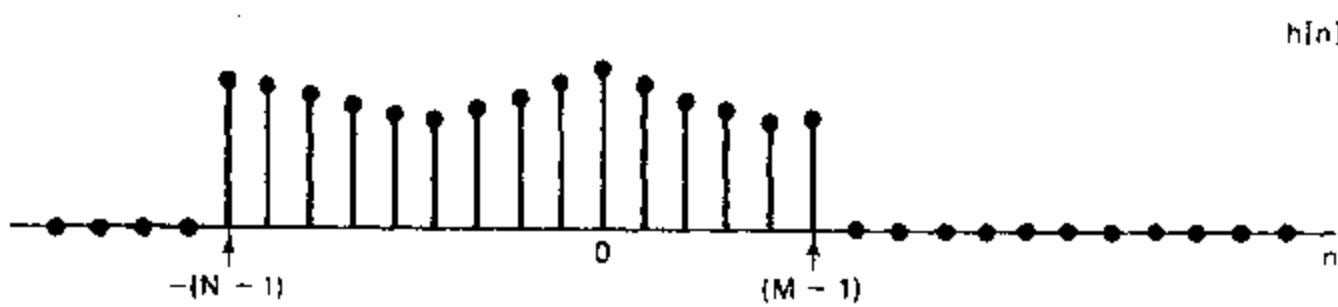


图 9.35 FIR 线性调频滤波器的支撑区. 注意, 由式(9.70)给出的 $h[n]$ 为复数.

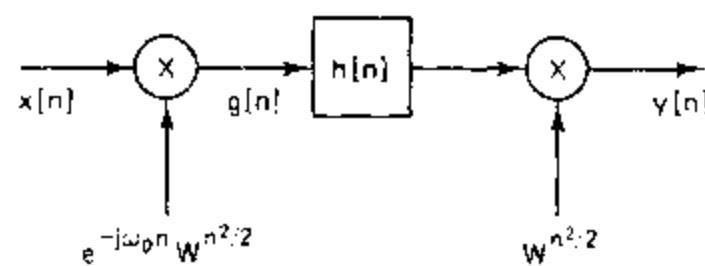


图 9.36 有限长冲激响应的线性调频变换系统的方框图.

为了得到一个因果系统而对图 9.36 所示系统加以修正, 可得出图 9.37 所示的因果系统。图 9.37 所示系统的优点在于: 它涉及到输入信号(受到某一线性频率调制率的调制)和一个固定的、因果的冲激响应的卷积。如像电荷耦合器件(CCD)和声表面波器件之类的技术对于实现与固定的预先规定的冲激响应的卷积特别有用。这些器件可以用于实现 FIR 滤波器, 该滤波器在制造时就由电极的几何形状确定了它的冲激响应。休斯等人(Hewes et al., 1979)在用 CCD 器件实现线性调频变换算法时使用了类似的方法。

当要计算的频率样本与 DFT 一致时, 线性调频变换算法可以进一步简化。在这种情况下, $\omega_0=0$ 和 $W=e^{-j2\pi/N}$, 所以 $\omega_n=2\pi n/N$ 。这时可以很方便地对图 9.37 所示系统加以修正。特别是, 令 $\omega_0=0$ 和 $W=e^{-j2\pi/N}=W_N$, 并且考虑将一个附加的单位延迟加到图 9.37 所示的冲激响应上。若 N 为偶数, 则 $W_N^N=e^{j2\pi}=1$, 因此

$$W_N^{-(n-N)^2/2} = W_N^{-n^2/2}. \quad (9.75)$$

所以, 此时的系统如图 9.38 所示, 其中

$$h_2[n] = \begin{cases} W_N^{-n^2/2}, & n=0, 1, 2, \dots, M+N-1, \\ 0, & \text{其它.} \end{cases} \quad (9.76)$$

在这种情况下, 调制 $x[n]$ 的线性调频信号和调制 FIR 滤波器输出的线性调频信号是相同的, 并且

$$X(e^{j2\pi n/N}) = y_2[n+N], \quad n=0, 1, \dots, M-1. \quad (9.77)$$

布鲁斯坦(Bluestein, 1970)首次提出了与线性调频变换算法类似的算法, 他曾证明, 对于 $\Delta\omega=2\pi/N$ 和 N 为某整数的平方的情况, 可以递推地实现图 9.37 所示的系统(见习题 9.20)。拉宾等人(Rabiner et al., 1969)归纳提出了在 z 平面上的螺旋曲线上计算等角度间隔的 z 变换样本的算法。这种线性调频变换更一般的形式称为线性调频 z 变换算法(CZT)。我们称作线性调频变换算法的计算方法是线性调频 z 变换算法的一种特殊情况。

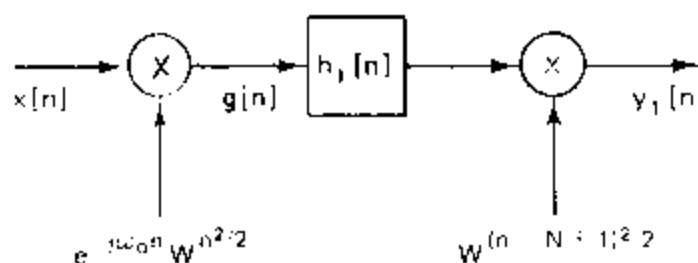


图 9.37 因果有限长冲激响应的线性调频变换系统的方框图。

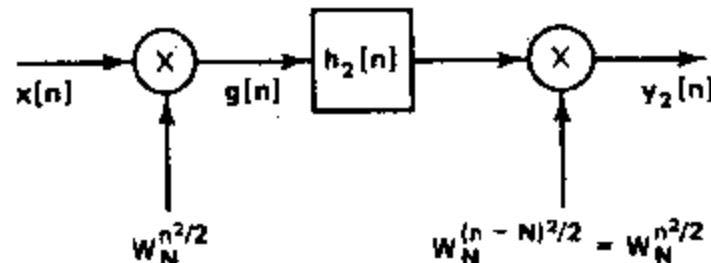


图 9.38 得出 DFT 样本的线性调频变换系统的方框图。

9.8 离散傅里叶变换计算中有限寄存器长度的影响

因为在数字滤波和谱分析中广泛地用到离散傅里叶变换,所以了解在 DFT 计算中有限寄存器长度的影响是十分重要的。但是,如像数字滤波器的情况一样,精确分析这种影响是很困难的,为了达到计算离散傅里叶变换时选取合适的寄存器长度的目的,通常进行简化分析就可以满足要求。我们将要论述的分析方法类似于在 6.8 和 6.9 节中所采用的形式。具体讲,我们将采用线性噪声模型来分析运算舍入问题,该模型通过在计算算法中产生舍入现象的每个点上插入一个加性噪声(additive noise)源而得到。此外,为了简化分析过程,我们将作一系列的假设。我们得出的一些结果将导出几种简化但有用的可以估计运算舍入所产生之影响的方法。虽然分析是对舍入而言,但是通常可以很容易地将结果加以修正而用于截尾的情况。

我们已经看到,对于 DFT 的计算有许多不同的算法结构。但是它们的相似之处是,都把计算分解成一些连续的短长度 DFT。结果,在不同类的算法中舍入噪声的影响是非常相似的。因此,虽然我们只考虑基 2 按时间抽取算法,但是我们得出的结果也可以作为其它形式算法的代表。我们首先来研究直接法计算 DFT 关系式中的舍入噪声。这将会建立一种分析模式并提供一种比较 FFT 噪声性能的基准。

9.8.1 在 DFT 的直接法计算中量化的分析离散傅里叶变换由下式定义:

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]W_N^{kn}, \quad k=0, 1, \dots, N-1, \quad (9.78)$$

式中 $W_N = e^{-j(2\pi/N)}$ 。虽然通常用 FFT 来计算式(9.78),但是在一些场合(例如,当只需要计算少数 k 值时),最合理的方法是将式(9.78)中的乘积直接累加起来。分析这一计算过程中的量化效应是十分简单的,我们可以由它入手来分析 DFT 计算过程中的量化效应。

我们注意到,对于一个给定的 k 值,式(9.78)完全类似于当 n 固定时的卷积和表示式

$$y[n] = \sum_{m=0}^{N-1} h[m]x[n-m] \quad (9.79)$$

在这种情况下,复数量 W_N^{kn} 起着冲激响应的作用。 $X[k]$ 看作是输出, $x[n]$ 是输入。这样,对于直接法计算 DFT 可以用类似于 6.9.4 节的分析,并考虑到在这种情况下的误差是复数序列。因为戈泽尔算法计算 DFT 是作为二阶离散时间系统的输出,所以可用类似的方式进行戈泽尔算法的噪声分析。

图 9.39 的流图描述了定点运算时直接计算 $X[k]$ 的一种方法。在该图中 $X'[k]$ 表示 DFT 的有限精度计算结果, $F[k]$ 表示计算第 k 个值产生的误差。复数量 $\epsilon[n, k]$ 表示由于对乘积 $x[n]W_N^{kn}$ 作舍入出现的误差。可以看出,这些复数误差直接加到输出端上,因此

$$F[k] = \sum_{n=0}^{N-1} \epsilon[n, k]. \quad (9.80)$$

乘积 $x[n]W_N^{kn}$ 为

$$x[n]W_N^{kn} = \Re\{x[n]\}\cos\left(\frac{2\pi}{N}kn\right) + \Im\{x[n]\}\sin\left(\frac{2\pi}{N}kn\right).$$

$$+j\left[\Re(x[n])\cos\left(\frac{2\pi}{N}kn\right) + \Im(x[n])\sin\left(\frac{2\pi}{N}kn\right)\right]. \quad (9.81)$$

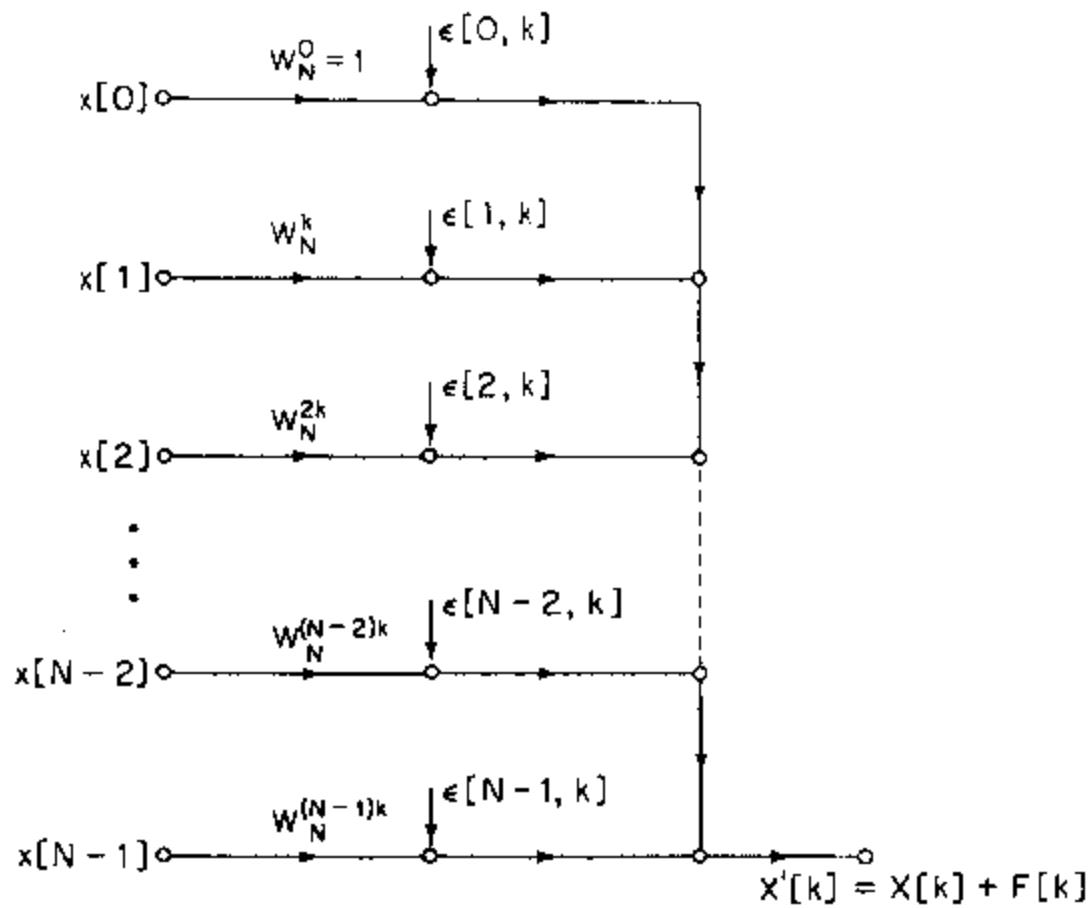


图 9.39 DFT 计算中定点舍入噪声的线性噪声模型.

由于是有限精度定点运算,可以将舍入后的复数乘积表示为

$$\begin{aligned} Q[x[n]W_N^{nk}] &= \Re(x[n])\cos\left(\frac{2\pi}{N}kn\right) + \epsilon_1[n,k] + \Im(x[n])\sin\left(\frac{2\pi}{N}kn\right) \\ &\quad + \epsilon_2[n,k] + j\left(\Re(x[n])\cos\left(\frac{2\pi}{N}kn\right) + \epsilon_3[n,k]\right) \\ &\quad - j\left(\Re(x[n])\sin\left(\frac{2\pi}{N}kn\right) + \epsilon_4[n,k]\right). \end{aligned} \quad (9.82)$$

这就是说,每个实数乘法都产生舍入误差*.为了简化 $X'[k]$ 中误差方差的计算,我们假设每个实数乘法产生的误差有下列性质:

1. 误差是在 $-(1/2) \times 2^{-B}$ 到 $(1/2) \times 2^{-B}$ 区间上均匀分布的随机变量,这里将数表示作 $(B+1)$ 位带符号的小数,与 6.7 节中定义的一样.因此每个噪声源的方差为 $2^{-2B}/12$.
2. 误差互相之间不相关.
3. 所有的误差均与输入不相关,因此与输出也不相关.

对复数乘法作舍入产生的误差的均值为零.因为复数误差 $\epsilon[n,k]$ 的平方幅度是

$$|\epsilon[n,k]|^2 = (\epsilon_1[n,k] + \epsilon_2[n,k])^2 + (\epsilon_3[n,k] + \epsilon_4[n,k])^2, \quad (9.83)$$

所以 $|\epsilon[n,k]|^2$ 的平均值为

$$\mathcal{E}\{|\epsilon[n,k]|^2\} = 4 \cdot \frac{2^{-2B}}{12} = \frac{1}{3} \cdot 2^{-2B} \quad (9.84)$$

* 应注意,我们已经假定系数 w_N^{nk} 是精确表示的.对这些系数量化产生的影响将在 9.8.4 节中讨论.

输出误差的均方幅度是

$$\mathcal{E}\{|F[k]|^2\} = \sum_{n=0}^{N-1} \mathcal{E}\{|\epsilon[n,k]|^2\} = \frac{N}{3} 2^{-2B} \quad (9.85)$$

如像在实现 FIR 滤波器的直接形式中那样, 输出噪声正比于 N^* . 如果使用双倍长度的累加器, 我们只要先计算误差的实部, 接着将其量化, 然后计算误差的虚部, 接着再将其量化, 就可把实部和虚部中的舍入噪声化简为一个噪声源. 在这种情况下, 输出噪声由式 (9.85) 给出, 并取 $N=1$.

由于使用实现 FIR 滤波器的定点直接形式, 所以直接法计算 DFT 受到动态范围的限制. 从式(9.78)可以看出, 若 $|x(n)| < 1$, 则有

$$|X[K]| \leq \sum_{n=0}^{N-1} |x[n]| < N, \quad k=0, 1, \dots, N-1 \quad (9.86)$$

若要不出现溢出, 则要求 $|X(k)| < 1$. 如果

$$\sum_{n=0}^{N-1} |x[n]| < 1. \quad (9.87)$$

就可保证这一点. 因此, 在最坏的情况下, 我们可能需要将输入除以 N , 以防止溢出. 例如, 序列 $x[n]=1 (0 \leq n \leq N-1)$ 有如下离散傅里叶变换:

$$X[k] = \begin{cases} N, & k=0, \\ 0, & \text{其它.} \end{cases} \quad (9.88)$$

另一方面, 即使式(9.87)不满足, $|X[k]|$ 也可能小于 1. 例如, 考虑序列 $x[n]=A\delta[n]$, 其 DFT 为 $X[k]=A (0 \leq k \leq N-1)$. 若 $1/N < A < 1$, 则式(9.87)不满足, 但是 $|X[k]|=A < 1$.

有关动态范围问题有许多解决办法. 我们可以把输入除以 N , 但这样却增加了输出端的噪声-信号比. 我们也可以使用块浮点方法, 一旦出现溢出就用 2 除. 或者采用实际上可以将溢出忽略的浮点运算. 对于一类 FFT 算法我们将考察所有的这些解决办法. 此外, 我们还将对由于系数值量化引入的误差作出评估.

9.8.2 定点 FFT 算法中量化效应的分析

量化效应的细节取决于所使用的具体 FFT 算法. 最常用的算法是基 2 算法, 所要求的变换长度是 2 的整数幂. 下面讨论的绝大部分内容均利用基 2 算法的按时间抽取形式来说明. 但是所得结果只需作少量修正即可以用于按频率抽取的形式. 另外, 用于基 2 算法误差分析的多数方法也可以用于其它算法的分析.

描述当 $N=8$ 时按时间抽取算法的流图绘于图 9.10 中, 现在重绘于图 9.40 中. 这个图的一些关键环节也是其它所有的标准基 2 算法所共同的. 计算 DFT 需用 $v=\log_2 N$ 级. 在每一级中新数列的 N 个数均由先前数列中的两个元素线性组合在一起而产生. 第 v 级数列就是所要求的 DFT. 对于基 2 按时间抽取算法, 基本的 2 点 DFT 计算(使用旋转因子)的表示式为

$$X_m[p] = X_{m-1}[p] + W_N X_{m-1}[q], \quad (9.89a)$$

* 请注意, 式(9.85)是一个保守的估计, 因为某些乘法(如与 W_N 相乘)可以不产生误差.

$$X_m[q] = X_{m-1}[p] - W_N X_{m-1}[q]. \quad (9.89b)$$

这里下标 m 和 $(m-1)$ 分别表示第 m 级数列和第 $(m-1)$ 级数列, p 和 q 表示在每个数列中数的位置。(应注意, $m=0$ 指输入数列, 而 $m=v$ 指输出数列。) 图 9.41 绘出了表示该蝶形计算的流图。

对于基 2 按频率抽取算法, 蝶形计算的形式有些不同, 它的基本计算式是

$$X_m[p] = X_{m-1}[p] + X_{m-1}[q], \quad (9.90a)$$

$$X_m[q] = (X_{m-1}[p] - X_{m-1}[q])W_N. \quad (9.90b)$$

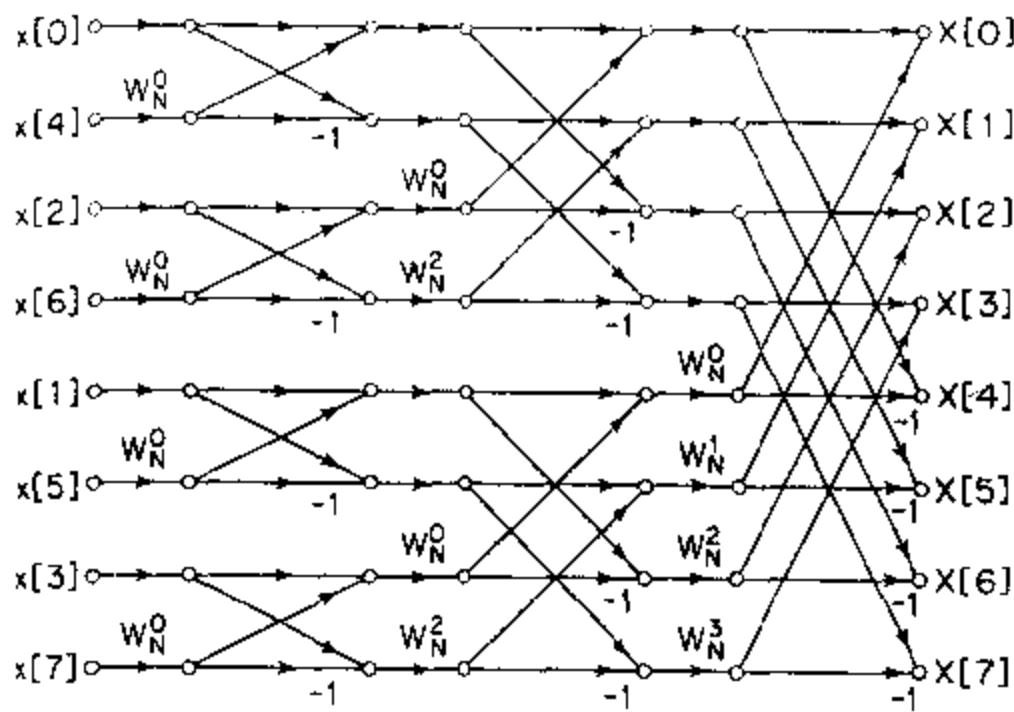


图 9.40 按时间抽取 FFT 算法的流图。

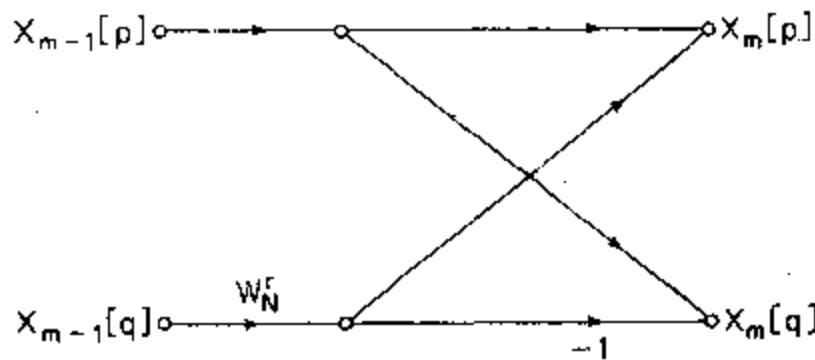


图 9.41 按时间抽取的蝶形计算。

在每一级均进行 $N/2$ 次单独的蝶形计算以产生下一级数列。整数 r 随着 p, q 和 m 的变化而改变, 它取决于所用 FFT 算法的具体形式。庆幸的是, 我们的分析与 r 变化的具体方式没有关系。而且, 用以确定如何对整个第 m 级数列进行标号的有关 P, q 和 m 之间的具体关系对于分析并不重要。由于不同的蝶形形式, 所以对于按时间抽取和按频率抽取的分析细节也略有不同, 但是得出的基本结果没有多大变化。在分析中假定蝶形计算为对应于按时间抽取的由式(9.89)所描述的形式。

我们把每个定点乘法运算与一个加性噪声发生器联系在一起建立舍入噪声的模型。当分析舍入噪声效应时, 由于使用这种模型, 图 9.41 所示的蝶形将由图 9.42 所示的蝶形来代替。记号 $\epsilon[m, q]$ 清楚地表明, 这个量代表在由第 $(m-1)$ 级数列计算第 m 级数列的第 q 个元素与一个复系数相乘的结果进行量化时所产生的误差。

因为我们假设在一般情况下 FFT 的输入均为复序列, 所以每次相乘的结果也是复数, 因此与前一节所讨论的情况完全相同, 实际上它由 4 个实数乘法组成. 我们再次采用 9.8.1 节的噪声源统计模型. 因为 4 个噪声序列中的每一个均为不相关的零均值白噪声, 并且具有相同的方差, 如同式(9.48), 有

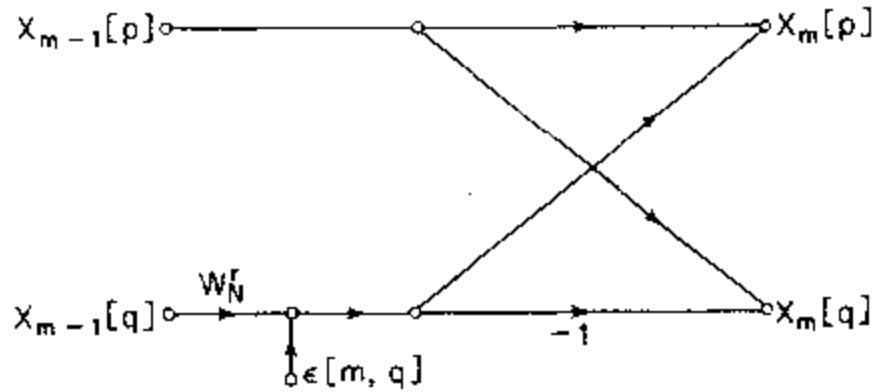


图 9.42 在按时间抽取的蝶形计算中定点舍入噪声的线性噪声模型.

$$\mathcal{E}\{|e[m, q]|^2\} = \frac{1}{3} \cdot 2^{-2B} = \sigma_B^2. \quad (9.91)$$

为了确定在任何输出节点上输出噪声的均方值, 我们必须考虑传至该节点的每个噪声源的贡献. 从图 9.40 的流图可以看出以下几点:

1. 从流图中任一节点到相连接的任一其它节点的传输函数均与单位幅度的复常数相乘(因为每个支路的传输比或者为 1, 或者为 W_N 的整数次幂).
2. 每个输出节点均与流图中的 7 个蝶形相连接. (一般情况下, 每个输出节点应当与 $(N-1)$ 个蝶形相连接. 例如, 图 9.43(a) 绘出了除去不与 $X[0]$ 相连接的蝶形后所有蝶形构成的流图, 而图 9.43(b) 绘出了除去不与 $X[2]$ 相连接的蝶形后所有蝶形构成的流图.)

这两点结论可以推广到 N 为 2 的任意次幂的情况.

由第一点结论可知, 由每个基元噪声源产生的输出噪声分量幅度的均方值相同, 均为 σ_B^2 . 每个输出节点的全部输出噪声等于传播到该节点的噪声之和. 因为我们假设所有的噪声源之间均不相关, 所以输出噪声幅度的均方值等于传播到该节点的噪声源数目的 σ_B^2 倍. 每一个蝶形至多引入一个复噪声源, 因此, 由第二结论可知, 最多有 $(N-1)$ 个噪声源的噪声传播至每个输出节点. 事实上, 并不是所有的蝶形都产生舍入噪声, 因为一些蝶形(如在第一级和第二级中的所有蝶形)只涉及到与 1 相乘. 但是, 如果假定每个蝶形均有舍入发生, 则我们可以把所得结果作为输出噪声的上限. 根据这一假设, 在第 k 个 DFT 值 $F[k]$ 的计算中, 输出噪声的均方值为

$$\mathcal{E}\{|F[k]|^2\} = (N-1)\sigma_B^2, \quad (9.92)$$

当 N 较大时, 可近似为

$$\mathcal{E}\{|F[k]|^2\} \approx N\sigma_B^2. \quad (9.93)$$

按照这一结果, 输出噪声的均方值正比于变换的点数 N . 将 N 加倍或在 FFT 中增加另外一级的影响是, 将输出噪声的均方值加倍. 在习题 9.24 中, 当我们并没有给只涉及到与 1 或 j 相乘的那些蝶形中插入噪声源时, 研究如何对上面的结果作出修正. 请注意, 对于 FFT 算法, 长度加倍的累加器并不能帮助我们减少舍入噪声, 因为在每一级的输出端蝶

形计算的输出必须存贮在 $(B+1)$ 位的寄存器中.

在实现定点运算的 FFT 算法时, 我们必须保证没有溢出. 由式(9.89)可得

$$\max(|X_{m-1}[p]|, |X_{m-1}[q]|) \leq \max(|X_m[p]|, |X_m[q]|) \quad (9.94)$$

以及

$$\max(|X_m[p]|, |X_m[q]|) \leq 2\max(|X_{m-1}[p]|, |X_{m-1}[q]|). \quad (9.95)$$

(见习题 9.23.) 式(9.94)表明, 最大幅度不是逐级递减的. 如果 FFT 的输出幅度小于 1, 则在每个数列中各节点的幅度必小于 1, 也就是说, 在任一数列中均不会出现溢出*.

为了把这一限制表示成输入序列的幅度上限, 回忆 9.8.1 节可知, 条件

$$|x[n]| < \frac{1}{N}, \quad 0 \leq n \leq N-1, \quad (9.96)$$

是保证

$$|X[k]| < 1, \quad 0 \leq k \leq N-1. \quad (9.97)$$

的必要和充分条件. 因此, 要保证算法的每一级均无溢出发生, 式(9.96)是充分条件.

为了得出 FFT 算法输出噪声-信号比的解析表示式, 考虑输入为相邻序列值互不相关的序列, 即白噪声输入信号. 仍然假定输入序列的实部和虚部是不相关的, 而且各部的幅度密度在 $-1/(\sqrt{2}N)$ 和 $1/(\sqrt{2}N)$ 之间是均匀分布的. (注意, 这个信号满足式(9.96).) 因此, 复输入序列的均方幅度为

$$\mathcal{E}\{|x[n]|^2\} = \frac{1}{3N^2} = \sigma_x^2. \quad (9.98)$$

输入序列的 DFT 是

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]W^{kn}, \quad (9.99)$$

在上述有关输入序列的假设条件下, 由上式可以证明:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}\{|X[k]|^2\} &= \sum_{n=0}^{N-1} \mathcal{E}\{|x[n]|^2\} |W^{kn}|^2 \\ &= N\sigma_x^2 = \frac{1}{3N}. \end{aligned} \quad (9.100)$$

同时利用式(9.93)和式(9.100), 可得

$$\frac{\mathcal{E}\{|F[k]|^2\}}{\mathcal{E}\{|X[k]|^2\}} = 3N^2\sigma_B^2 = N^22^{-2B}. \quad (9.101)$$

按照式(9.101), 噪声-信号比随 N^2 的增加而增大, 或者每一级增加 1 倍. 这就是说, 若 N 增大一倍, 相当于给 FFT 又附加了一级, 则要维持同样的噪声-信号比, 就必须使寄存器的长度增加 1 位. 实际上, 输入信号为白噪声的假设在这里并不是关键的. 对于各种其它的输入信号, 噪声-信号比仍然正比于 N^2 , 只是比例常数有所不同.

式(9.95)提供了另一种改变信号比例的方法. 因为从上一级到下一级最大幅度至多增加一倍, 所以只要有 $|x[n]| < 1$ 并且在每一级的输入端加入 $1/2$ 的衰减就可防止溢出. 在这种情况下输出将不是如式(9.78)定义的 DFT, 而是该 DFT 的 $1/N$ 倍. 虽然均方输

* 实际上应当利用数据的实部和虚部而不是幅度来讨论溢出. 但是, $|x| < 1$ 意味着 $|\operatorname{Re}(x)| < 1$ 和 $|\operatorname{Im}(x)| < 1$, 若以实部和虚部为基础调整比例因子, 只能使允许的信号电平有少量增加.

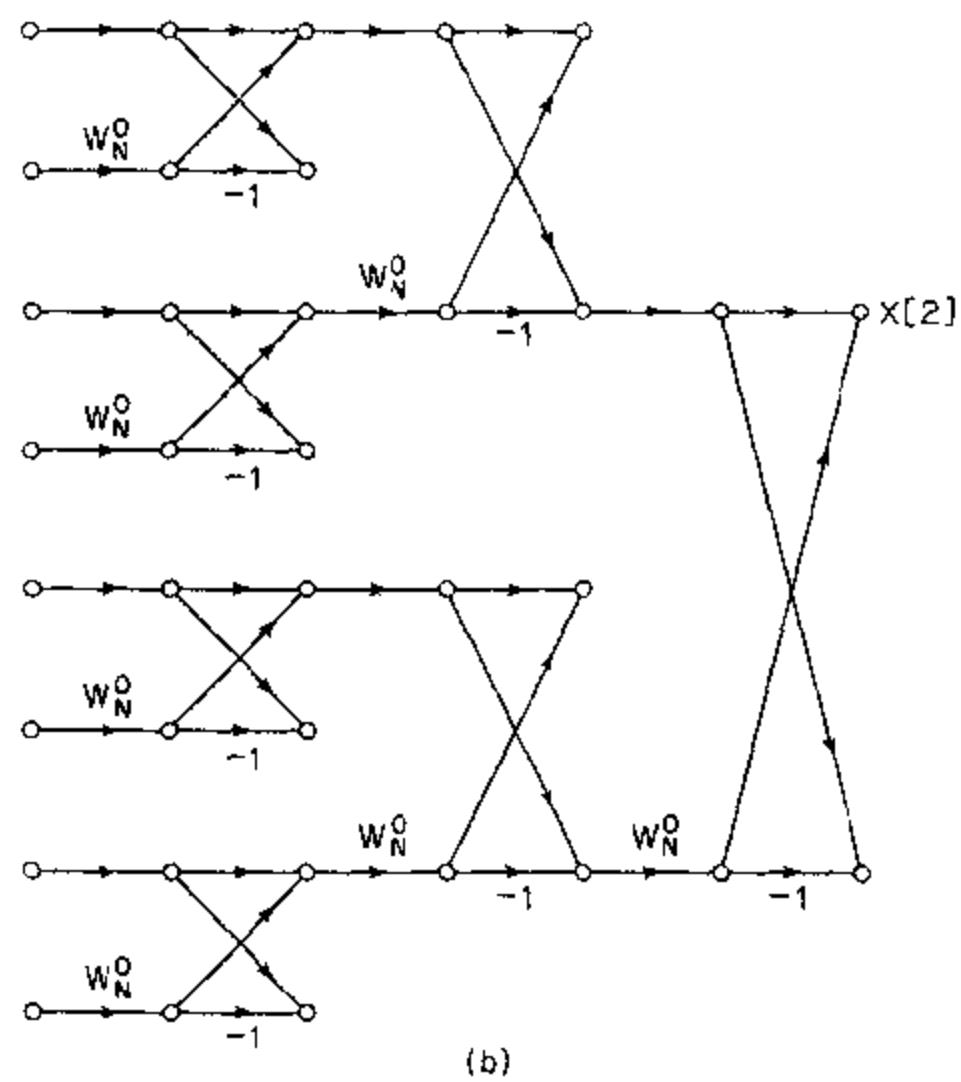
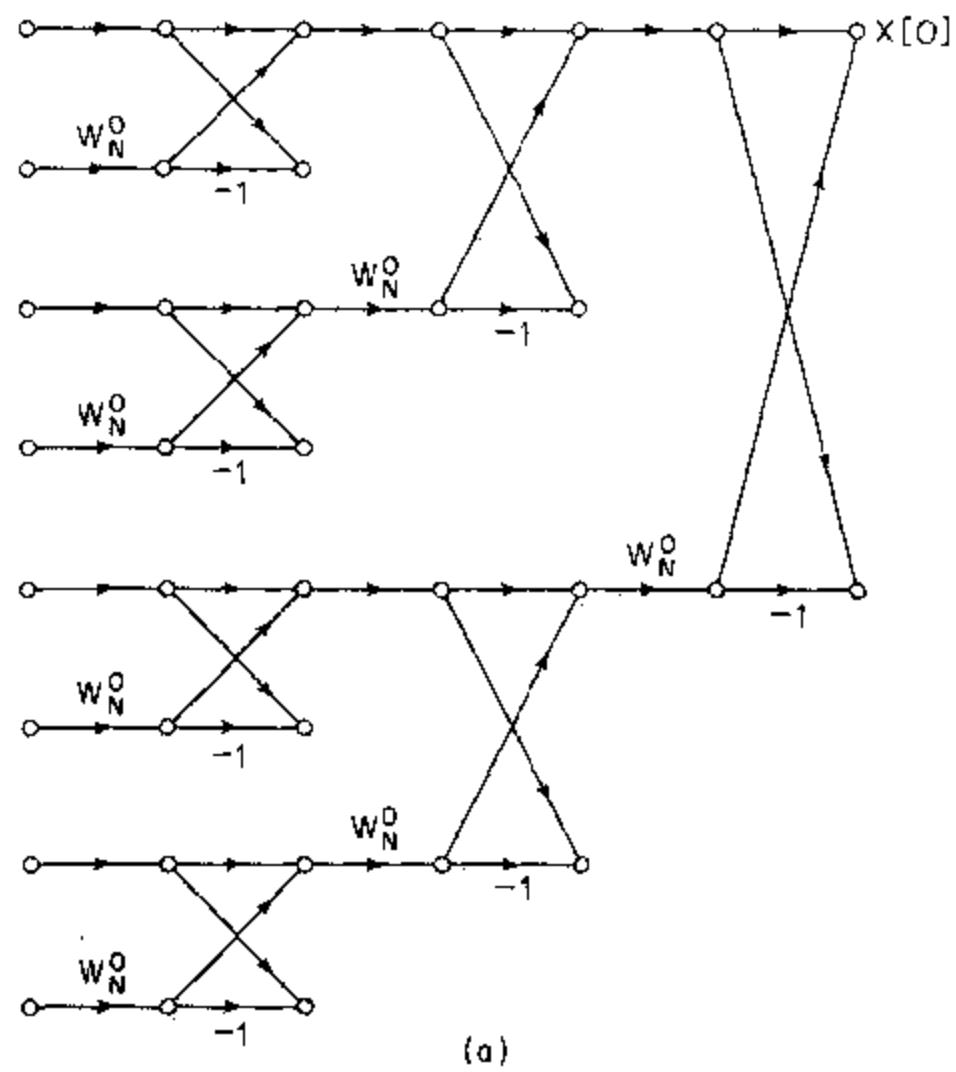


图 9.43 (a) 对 $X[0]$ 有影响的蝶形, (b) 对 $X[2]$ 有影响的蝶形.

出信号是没有引入比例因子时输出的 $1/N$ 倍,但是输入信号幅度可以增大 N 倍而不引起溢出.对于白噪声输入信号,这就意味着可以假设其实部和虚部都是在区间 $[-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}]$ 上的均匀分布,因此 $|x[n]| < 1$.所以,若用 2 除 v 次,则(对于白噪声输入信号)所能得到的 DFT 幅度平方的最大期望值与式(9.100)给出的相同.但是,输出噪声级将比式(9.93)得出的要小得多,因为由 FFT 最初几级引入的噪声将被在后面几级数列中加入的比例因子所衰减.具体来说,若在每个蝶形的输入端均加入 $1/2$ 的比例因子,则图 9.42 的蝶形就修改成为图 9.44 的蝶形,在该图中每个蝶形均与两个噪声源有联系.如前所述,我们仍假设这些噪声源的实部和虚部是不相关的,并且与其它噪声源也不相关,另外实部和虚部在 $-(1/2) \times 2^{-B}$ 和 $+(1/2) \times 2^{-B}$ 之间为均匀分布.因此,和前面一样,有

$$\mathcal{E}\{|e[m, q]|^2\} = \sigma_B^2 = \frac{1}{3} \cdot 2^{-2B} = \mathcal{E}\{|e[m, p]|^2\}. \quad (9.102)$$

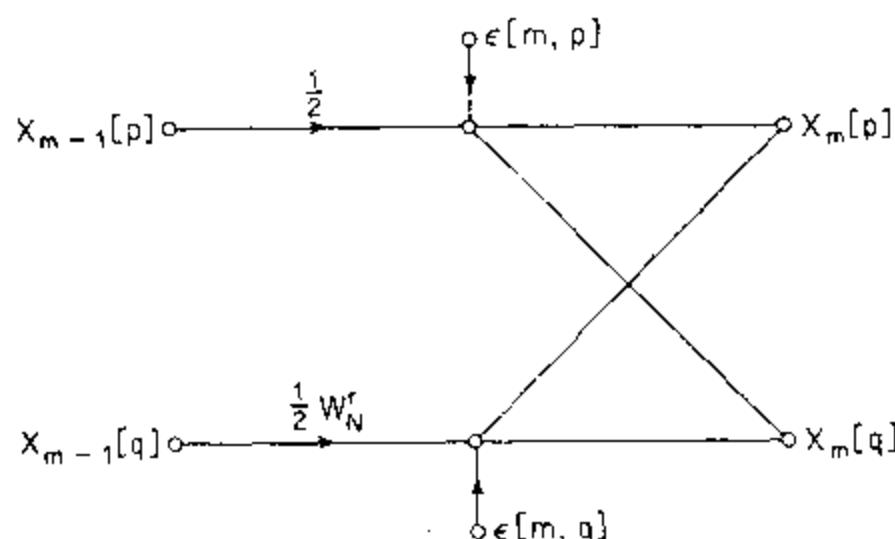


图 9.44 表示比例因子乘法器和有关定点,舍入噪声的蝶形结构.

因为各噪声源之间均不相关,所以在各输出节点处噪声的均方幅度仍然是流图中各噪声源的贡献之和.但是有一点与上述情况不同,每个噪声源经历整个流图时所受到的衰减与该噪声源最初所在的数列有关.起始于第 m 列的噪声源传播至输出端时要乘以幅值为 $(1/2)^{v-m-1}$ 的复常数.通过考察图 9.40 可以看出,对于 $N=8$ 的情况,每个输出节点与下列蝶形相连接:

- 起始于第 $(v-1)$ 列的 1 个蝶形,
- 起始于第 $(v-2)$ 列的 2 个蝶形,
- 起始于第 $(v-3)$ 列的 4 个蝶形,等等.

对于 $N=2^v$ 的一般情况,每个输出节点与起始于第 m 列的 2^{v-m-1} 个蝶形相连接,因而也就与 2^{v-m} 个噪声源相连接.所以,在每个输出节点处,噪声的均方幅度为

$$\begin{aligned} \mathcal{E}\{|F[k]|^2\} &= \sigma_B^2 \sum_{m=0}^{v-1} 2^{v-m} \cdot (0.5)^{2v-m-2} \\ &= \sigma_B^2 \sum_{m=0}^{v-1} (0.5)^{v-m-2} \\ &= \sigma_B^2 \cdot 2 \sum_{k=0}^{v-1} 0.5^k \\ &= 2\sigma_B^2 \frac{1-0.5^v}{1-0.5} = 4\sigma_B^2(1-0.5^v). \end{aligned} \quad (9.103)$$

当 N 较大时,假设 0.5^v (即 $1/N$)与 1 相比可以忽略,则

$$\mathcal{E}\{|F[k]|^2\} \cong 4\sigma_b^2 = \frac{4}{3} \cdot 2^{-2B}, \quad (9.104)$$

上式比所有的比例因子都加到输入数据上时所得出的噪声方差要小得多.

现在我们可以将式(9.104)和式(9.100)联立,得出在逐级改变比例和输入为白噪声情况下的输出噪声-信号比,有

$$\frac{\mathcal{E}\{|F[k]|^2\}}{\mathcal{E}\{|X[k]|^2\}} = 12N\sigma_b^2 = 4N \cdot 2^{-2B}, \quad (9.105)$$

这个结果正比于 N 而不是 N^2 . 对式(9.105)的一种解释是,输出噪声-信号比随 N 而增加,相当于每一级增加半个码位,该结果首次由韦尔奇(Welch, 1969)得出. 特别还应当注意,白噪声信号的假设在分析中并不是必不可少的. 每增加一级输出,噪声-信号比就相当于增加半个码位,这一基本结论对于其它许多信号也成立,只是在式(9.105)中的常数因子与信号形式有关.

我们还应当注意,导致噪声-信号比随 N 增大而增加的主要原因是,当信号逐级通过时,信号电平会逐渐减小(这是限制溢出所要求的). 按照式(9.104)可知,在最后一列只有很小的噪声(只有一位或两位),由于改变比例的作用大部分噪声被移位移掉了.

在前面的讨论中我们已经假设采用直接定点计算,也就是说,只允许预先设置衰减,而不允许在溢出检验的基础上重新调整比例. 显然,如果使用只能作直接定点计算的硬件或可编程设备,我们应当在每一列加入 $1/2$ 的衰减,而不是在输入列用一个大的衰减.

避免溢出的第三种方法是利用块浮点(block-floating point)运算. 在这种方法中由于限制 $|x[n]| < 1$, 将原始数列归一化到计算机字的最左边; 计算按定点运算进行,只是在每次加法之后不进行溢出检验. 如果查出有溢出,则用 2 除全部数列并继续进行计算. 为了确定最后整个数列的比例因子,要算出必需用 2 除的次数. 输出噪声-信号比密切依赖于发生溢出的次数以及计算中是哪一级发生溢出的. 溢出发生的位置和时间由所变换的信号而决定,因此,为了分析在 FFT 的块浮点实现中的噪声-信号比,我们必须知道输入信号.

正如我们已经知道的,有可能找出一种不要求改变比例的输入信号,也可能找出一种需要用 N 除就可以防止溢出的输入信号. 可以预料,输入信号为白噪声的情况是在这两种极端情况之间的一个例子,也就是说,在每一级都改变比例并不总是必要的. 这一点可以用一些实验结果加以证明.

图 9.45 说明输出的噪声-信号比对 N 的依赖关系. 该图给出了当使用舍入运算时,对于白噪声输入信号的块浮点变换,输出噪声-信号比的实验测量值(Oppenheim and Weinstein, 1972). 为了进行比较,图中还绘出了式(9.85)表示的定点噪声-信号比的理论曲线. 我们看到,对于这个输入信号,特别当变换的长度较大时,块浮点比定点优越一些. 当 $N=2048$ 时,对于块浮点的噪声-信号比约为定点的 $1/8$, 表示有 3 位的改善.

图 9.45 还给出了当使用截尾而不是舍入时,块浮点变换的结果如何变化的实验结果. 截尾时的噪声-信号比一般略高于舍入时的情况. 噪声-信号比随 N 增加的速率似乎与舍入时的情况大致相同.

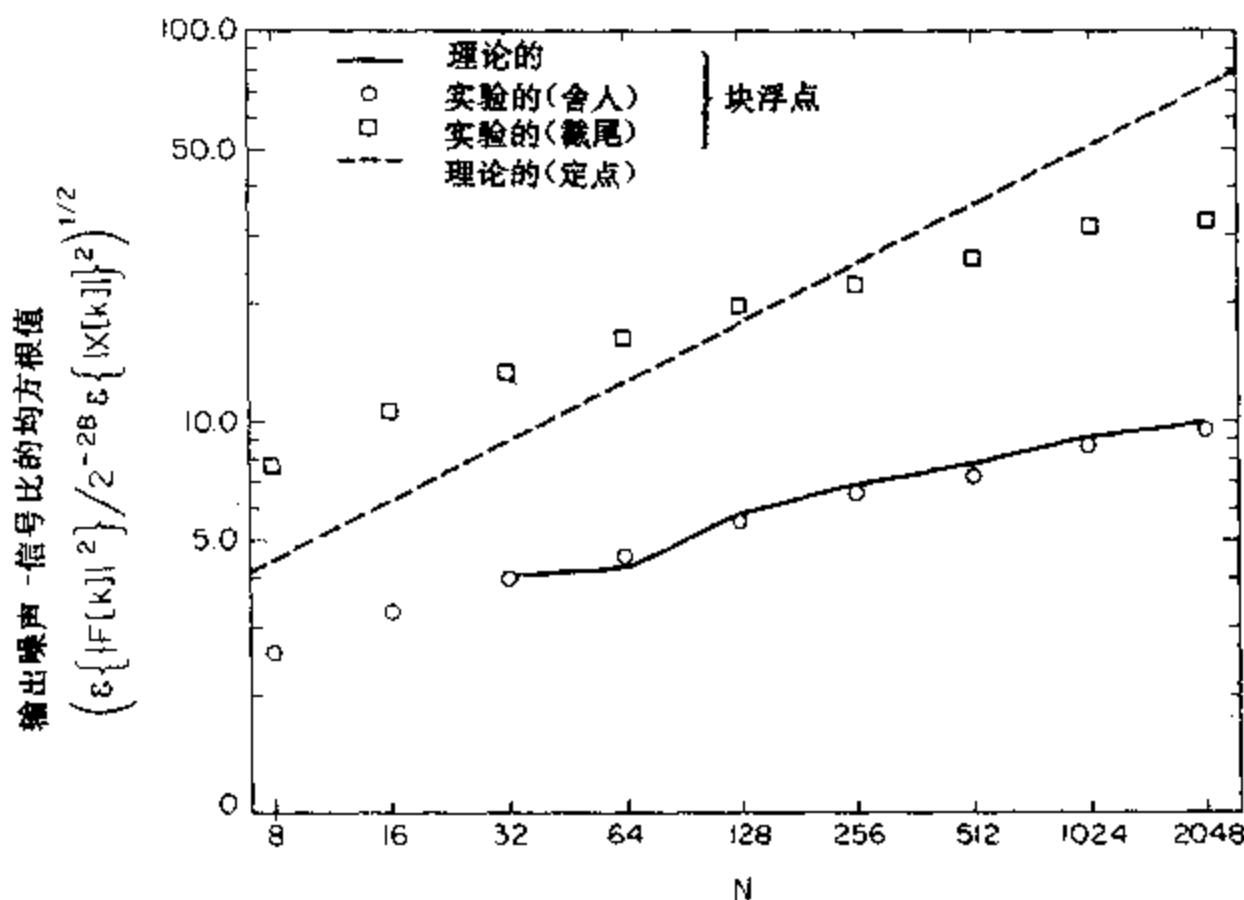


图 9.45 对于按时间抽取 FFT 算法的块浮点实现的实验输出噪声-信号比.

9.8.3 浮点 FFT 算法中量化效应小结

以上分析表明,当确定定点实现 FFT 算法的噪声-信号比时改变比例是避免溢出的主要方法. 因此,浮点运算应当能改善性能. 金特尔曼和桑德(Gentleman and Sande, 1966)、温斯坦(Weinstein, 1969)、以及凯内克和刘(Kaneko and Liu, 1970)等人从理论和实验上分析了浮点舍入对 FFT 的影响. 这些研究表明,因为不再需要改变比例,所以与定点运算相比,其噪声-信号比随 N 的增加而大幅度地减小.

例如,温斯坦(Weinstein, 1969a)从理论上证明,对于 $N = 2^n$ 的情况,噪声-信号比正比于 v ,而不像定点运算那样正比于 N . 因此,将 v 增大 4 倍(即把 N 提高到原来的 4 次方)只能把噪声-信号比增加 1 位. 为了从实验上证明这一结论,有必要当尾数值正好等于 $(1/2) \times 2^{-B}$ 时随机地进行上入或下舍. 对于正常的舍入,噪声-信号比的改变大约正比于 v^2 .

9.8.4 在 FFT 中系数量化的影响

正如实现数字滤波器那样,快速傅里叶变换算法的实现需要使用量化了的系数. 虽然系数量化的性质原本是非统计性的,但是利用粗略的统计分析可以得出一些有用的结果(见 Oppenheim and Weinstein, 1972). 在这种分析中给每个系数加上跳动起伏,也就是说,每个系数均由它的真值加上一个白噪声序列来代替. 虽然由量化造成的系数误差的详细影响不同于由跳动起伏所造成的,但是有理由预计,两种误差的幅度大致上是相当的. 所得到的结果是,输出误差的均方幅度与输出信号的均方值之比等于 $(v/6) \times 2^{-B}$.

虽然这不能十分精确地预测在 FFT 算法中由于系数量化造成的误差,但是对于粗略地估计误差是十分有益的. 经过实验证明了的主要结论是,噪声-信号比随 N 的增大而十

分缓慢地增加,正比于 $v = \log_2 N$,所以若将 N 加倍只能引起噪声-信号比的轻微增加.

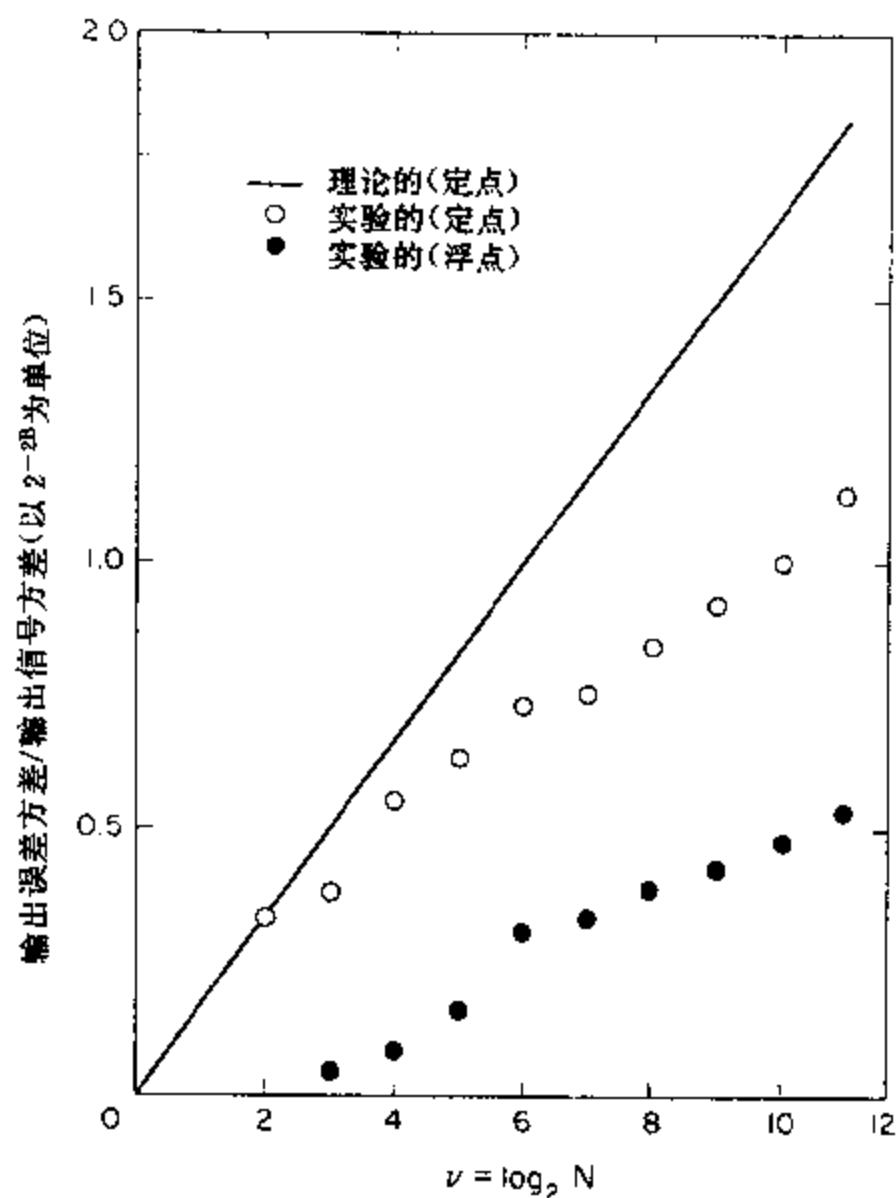


图 9.46 FFT 计算中由于系数量化造成的误差.

图 9.46 反映出实验所得出的结果,图中的量值是输出误差的均方幅度与输出信号的均方值之比的 2^{28} 倍. 理论曲线也绘于图中,圆圈表示定点情况下实测的输出误差-信号比值. 实测值一般在理论曲线之下. 实验结果与理论结果相比,它们相差均未超过一倍,并且由于误差-信号比相差一倍只相当于在输出误差中有半位的差别,所以看起来这种分析可以合理精确地估计出系数误差的影响. 实验结果大约随 v 线性地增加,但斜率比分析所给出的要小一些.

在这些实验中假设使用定点运算. 但是因为块浮点 FFT 通常采用定点系数,所以这些结果也适用于块浮点情况. 对于浮点情况如果作一些简单的修正,就可以得出类似的结果. 除了相差一个常数因子之外,浮点和定点的结果是一样的. 在图 9.46 中黑点表示的浮点情况下的实验结果比定点情况下的实验结果稍低.

9.9 小结

在这一章中我们研究了计算离散傅里叶变换的方法并且已经看到如何利用复因子 $e^{-j(2\pi/N)kn}$ 来提高 DFT 计算的效率.

我们论述了 DFT 表示的戈泽尔算法和直接算法,因为在不需要计算全部 N 个 DFT

值的情况下这些方法是十分重要的.但是,我们重点阐述快速傅里叶变换(FFT)算法.我们比较详细地讨论了按时间抽取和按频率抽取类的 FFT 算法.讨论的大部分细节是关于要求 N 为 2 的幂次的算法,因为这些算法容易理解并且编程简单.作为这些基本算法和编程技术的示例给出了两个 FORTRAN 程序.

本章中还介绍了标号映射的概念,作为了解 N 为复合数情况下更通用的 FFT 算法的基础. 还讨论了如像 4 和 8 这些因子的特殊优点,并且概括地讨论了当 N 的因子是互素数时所导出的素因子算法.

本章中还简要论述了利用卷积作为计算 DFT 的基础. 概述了威诺格拉德傅里叶变换算法, 较详细地讨论了线性调频变换算法.

本章最后一节集中讨论了 DFT 计算中量化的影响. 利用线性噪声模型证明, DFT 计算的噪声-信号比随序列长度的不同而改变, 这取决于如何设置比例因子. 我们还简要讨论了浮点表示的作用.

在本章中我们的主要目标是提出 DFT 高效计算的基本原理. 我们的方法是利用 FFT 算法的例子来说明这些基本原理, 因此大部分讨论直接涉及到实现 FFT 算法的细节. 在本章讨论的基础上, 读者应当能够看懂其它 FFT 程序或者在特定计算环境下所编写的新程序.

习 题

9.1 假设有一个计算机程序可用来计算如下 DFT：

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j(2\pi/N)kn}, \quad k=0, 1, \dots, N-1,$$

即,程序的输入是序列 $x[n]$,而输出是 $DFTX[k]$. 证明如何将输入和/或输出序列重新安排,使得该程序也可用来计算 IDFT;

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] e^{j(2\pi/N)kn}, \quad k=0,1,\dots,N-1,$$

即,程序的输入应当是 $X[k]$ 或与 $X[k]$ 有简单联系的一个序列,而输出应当是 $x[n]$ 或与 $x[n]$ 有简单联系的一个序列,有好几种可能的方法:

9.2 在 9.2 节中我们利用 $W_N^{-kN}=1$ 推导出由有限长序列 $X[n]$ ($n=0,1,\dots,N-1$) 计算一个指定 DFT 值 $X[k]$ 的递推算法:

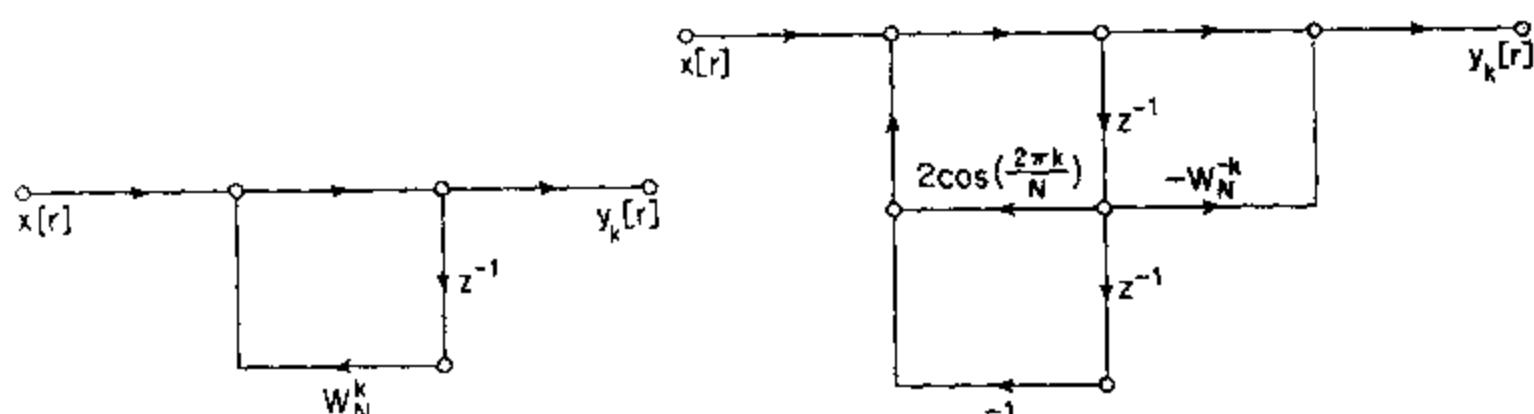


图 P9.2-1

图 P9. 2-2

(a) 利用 $W_N^N = W_N^{N\bar{N}} = 1$, 证明 $X[N-k]$ 可作为图 P9.2-1 所描述的差分方程经 N 次迭代后输出而求得. 也就是说, 证明

$$X[N-k] = y_k[N].$$

(b) 证明 $X[N-k]$ 也等于图 P9.2-2 所示差分方程经 N 次迭代后的输出. 注意, 图 P9.2-2 的系统与图 9.2 的系统有相同的极点, 但是实现图 P9.2-2 中复零点所要求的系统是图 9.2 中对应系数的复共轭, 即 $W_N^{-k} = (W_N^k)^*$.

9.3 图 P9.3 给出 $N=8$ 时按时间抽取 FFT 算法的流图表示. 粗线指出从样本 $x[7]$ 到 DFT 样本 $X[2]$ 的一条路径.

- (a) 沿着图 P9.3 中粗线所示路径的“增益”是多少?
- (b) 在流图中始于 $X[7]$ 且止于 $X[2]$ 的路径有多少条? 在一般情况下这个结果是否也正确, 即, 在每个输入样本和每个输出样本之间有多少条路径?
- (c) 现在考虑 DFT 样本 $X[2]$. 沿着图 P9.3 所示流图中的路径, 证明每个输入样本都对输出的 DFT 样本有适量的贡献, 即证明

$$X[2] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j(2\pi/N)2n}.$$

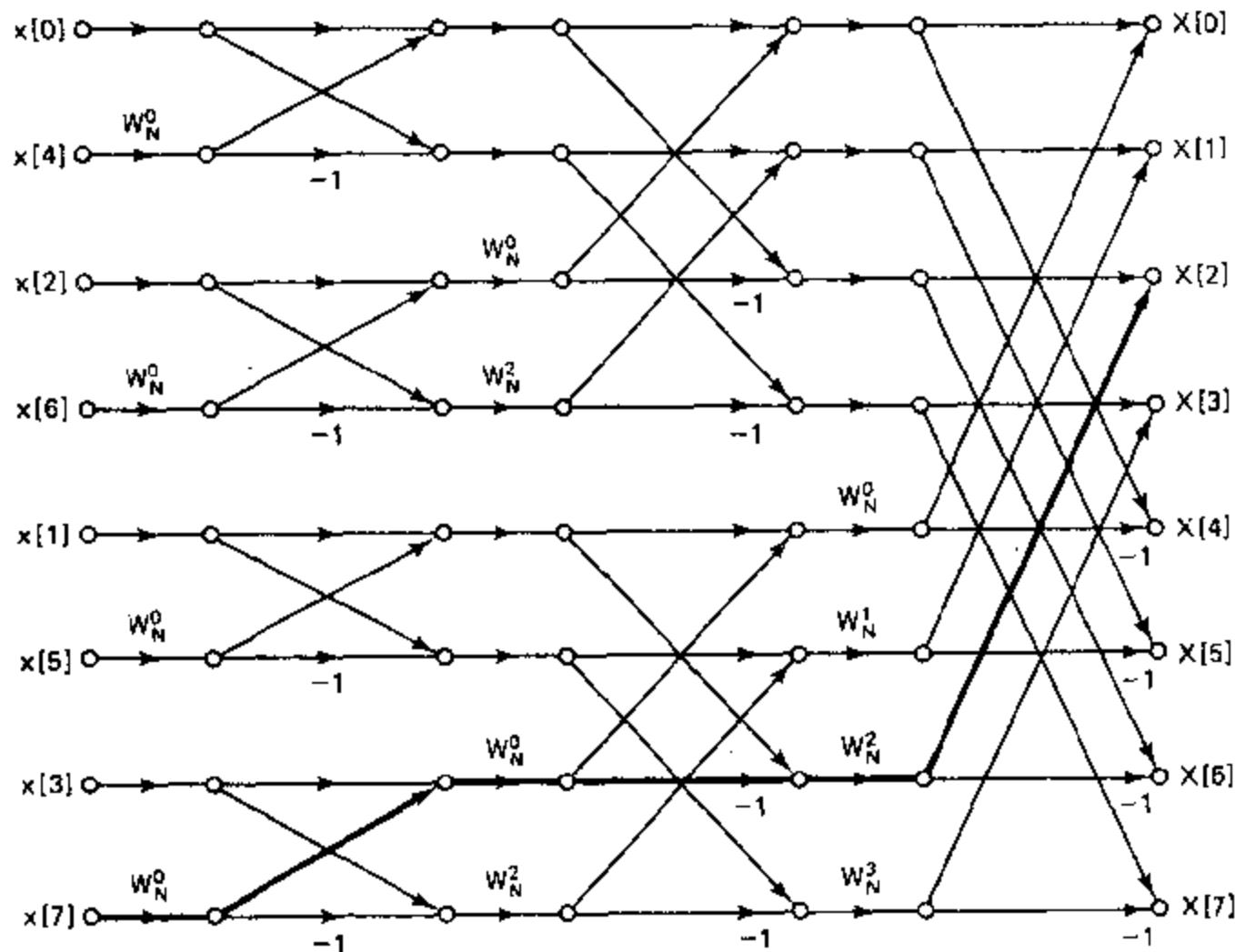


图 P9.3

9.4 图 P9.4 表示一个 8 点按时间抽取 FFT 算法的流图. 令序列 $x[n]$ 的 DFT 是 $X[k]$. 在图 P9.4 的流图中, $A[\cdot]$, $B[\cdot]$, $C[\cdot]$ 和 $D[\cdot]$ 表示分开的不同数列, 这些数列连续的标号与流图中所标出的节点有相同的顺序.

- (a) 说明如何将序列 $x[n]$ 的元素放在 $A[r]$ 中, $r=0, 1, \dots, 7$. 还说明如何将 DFT 序列中的元素从数列 $D[r]$, $r=0, 1, \dots, 7$ 中取出.
- (b) 如果输入序列为 $x[n] = (-W_N)^n$, $n=0, 1, \dots, 7$, 不用求出中间数列 $B[\cdot]$ 和 $C[\cdot]$ 的值而求出数列 $D[r]$, $r=0, 1, \dots, 7$ 的值, 并作图.

(c) 如果输出傅里叶变换为 $X[k]=1, k=0, 1, \dots, 7$, 求序列 $C[r], r=0, 1, \dots, 7$. 并作图.

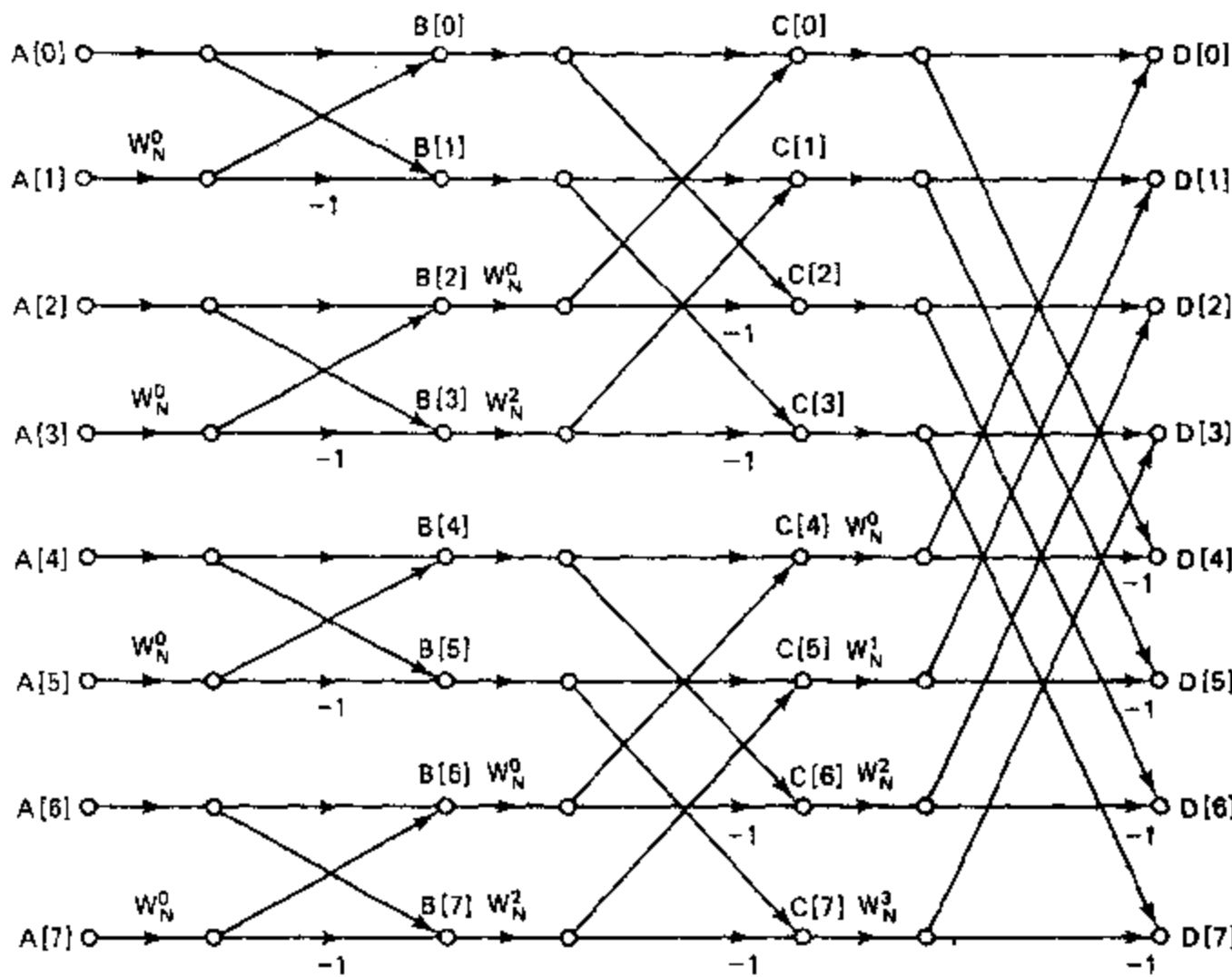


图 P9.4

9.5 画出 16 点基 2 按时间抽取 FFT 算法的一种流图. 用 W_{16} 的幂次来标出所有的乘法器, 并且标出任何传输比等于 -1 的支路. 用输入序列和 DFT 序列的适当值分别标出输入和输出节点, 求执行流图运算所需要的实乘法次数和实加法次数.

9.6 在 9.4.2 节中曾断言, 一个 FFT 算法流图的转置仍然是一个 FFT 算法的流图. 本习题的目的就是对基 2FFT 算法推导出这一结论.

(a) 按时间抽取基 2FFT 算法的基本蝶形图绘于图 P9.6-1 中. 这个流图表示如下方程:

$$X_m[p] = X_{m-1}[p] + X_{m-1}[q], \\ X_m[q] = (X_{m-1}[p] - X_{m-1}[q])W_N^r.$$

从这些方程入手, 证明利用图 P9.6-2 所示的蝶形图可由 $X_m[p]$ 和 $X_m[q]$ 计算出 $X_{m-1}[p]$ 和 $X_{m-1}[q]$.

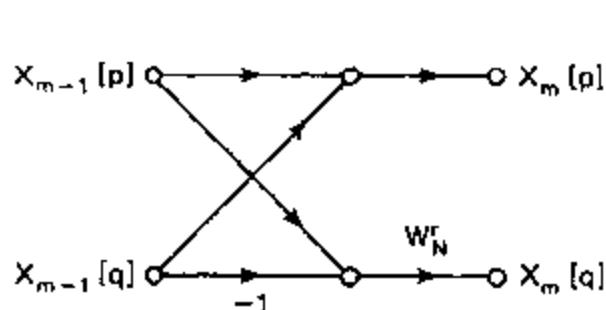


图 P9.6-1

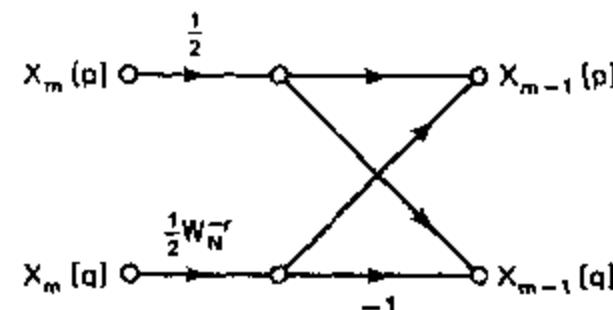


图 P9.6-2

(b) 在图 9.20 的按频率抽取算法中, $X_r[r], r=0, 1, \dots, N-1$ 为倒位序排列的 DFT $X[k]$, 而第零号 $X_0[r]=x[r], r=0, 1, \dots, N-1$ 为正常位序排列的输入序列. 如果图 9.20 中的每个蝶形都

用图 P9.6-2 形式的适当蝶形来代替，则所得结果就是由 DFT $X[k]$ （倒位序）来计算序列 $x[n]$ （正常位序）的流图。画出当 $N=8$ 时所得结果的流图。

(c) 在(b)中得出的流图表示一种 IDFT 算法，即，计算下式的算法：

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] W_N^{-kn}, \quad n=0, 1, \dots, N-1.$$

对(b)中所得流图加以修改，使其可计算 DFT

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] W_N^{kn}, \quad k=0, 1, \dots, N-1.$$

而不是 IDFT。

(d) 可以看出，(c)的结果就是图 9.20 按频率抽取算法的转置，它等同于图 9.10 所示的按时间抽取算法。是否可得出结论，对于每一种按时间抽取算法（如图 9.14~9.16），必有一种按频率抽取算法（它是按时间抽取算法的转置）与之对应，反之亦然？请说明原因。

9.7 在许多应用中（如计算频率响应或内插），十分关心计算一个短序列“经补零后”的 DFT。在这种情况下可用一种特殊的（修剪）FFT 算法来提高计算效率（Markel, 1971）。在这个习题中我们来研究当输入序列的长度为 $M \leq 2^\mu$ ，而 DFT 的长度为 $N = 2^\nu$ ($\mu < \nu$) 时，如何对基 2 按频率抽取算法进行修剪。

(a) 画出当 $N=16$ 时按频率抽取基 2FFT 算法的完整流图，合理地标示出全部的分支。

(b) 假设输入序列的长度为 $M=2$ ，即，仅当 $n=0$ 和 $n=1$ 时 $x[n] \neq 0$ 。画出一个对于 $N=16$ 的新流图，说明非零输入样本是如何传送到输出 DFT 的，也就是说，除去或修剪掉在(a)的流图中代表零输入运算的所有分支。

(c) 在(b)中位于计算的前三级中所有的蝶形均由图 P9.7 所示的半蝶形来代替，而在最后一级中所有的蝶形仍用规范形式。对于输入序列的长度为 $M \leq 2^\mu$ 且 DFT 的长度为 $N = 2^\nu$ ($\mu < \nu$) 的一般情况，求可以使用修剪的蝶形的级数，并求用修剪的 FFT 算法计算 M 点序列的 N 点所需要的复数乘法的次数。用 v 和 μ 来表示你的答案。

(d) 选做：修改图 9.26 的程序使之包括修剪算法。

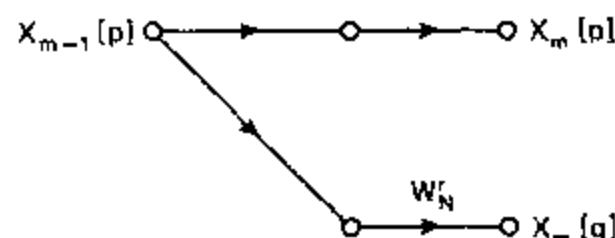


图 P9.7

9.8 在 9.3 节中已证明，若 N 可被 2 整除，则 N 点 DFT 可表示成

$$X[k] = G[k] + W_N^k H[k], \quad 0 \leq k \leq N-1. \quad (\text{P9.8-1})$$

其中 $G[k]$ 是如下偶序号样本序列的 $N/2$ 点 DFT：

$$g[n] = x[2n], \quad 0 \leq n \leq (N/2)-1,$$

且 $H[k]$ 是如下奇序号样本序列的 $N/2$ 点 DFT：

$$h[n] = x[2n+1], \quad 0 \leq n \leq (N/2)-1.$$

当 $N = 2^\nu$ 时，重复使用这种分解方法可以得出按时间抽取 FFT 算法，对于 $N=8$ 的情况绘于图 9.10 中。正如我们所看到的，这类算法需要与旋转因子 W_N^k 作复数乘法。拉德和布伦纳（Rader and Brenner, 1976）曾推导出一种新算法，它的乘法器系数均为纯虚数，这样只需要 2 次实数乘法，而不需要实数加法。在这一算法中，式 (P9.8-1) 由如下方程式来代替：

$$X[0] = G[0] + F[0], \quad (\text{P9.8-2a})$$

$$X[N/2] = G[0] - F[0], \quad (\text{P9. 8-2b})$$

$$X[k] = G[k] - \frac{1}{2} j \frac{F[k]}{\sin(2\pi k/N)}, \quad k \neq 0, N/2. \quad (\text{P9. 8-2c})$$

在这种情况下, $F[k]$ 是如下序列的 $N/2$ 点 DFT:

$$f[n] = x[2n+1] - x[2n-1] + Q,$$

其中

$$Q = \frac{2}{N} \sum_{n=0}^{(N/2)-1} x[2n+1]$$

是一个只需要计算一次的量.

(a) 证明 $F[0] = H[0]$, 因此式(P9. 8-2a)和式(P9. 8-2b)给出相同的结果, 如当 $k=0$ 和 $N/2$ 时式(P9. 8-1)那样.

(b) 证明, 对于 $k=1, 2, \dots, (N/2)-1$, 有

$$F[k] = H[k]W_N^k (W_N^{-k} - W_N^k)$$

利用这一结果得出式(P9. 8-2c). 为什么我们必须用不同的方程来计算 $X[0]$ 和 $X[N/2]$?

(c) 当 $N=2^n$ 时, 我们可以重复使用式(P9. 8-2)得出一种完整的按时间抽取的 FFT 算法. 求出作为 N 的函数计算实乘法次数和实加法次数的公式. 在按照式(P9. 8-2c)计数运算次数时应利用其对称性和周期性, 但不要排除“微不足道的”与 $\pm j/2$ 的乘法.

(d) 拉德和布伦纳(Rader and Brenner, 1976)表明, 根据式(P9. 8-2)的 FFT 算法具有“较差的噪声特性”. 请解释为什么这可能是对的.

9.9 杜哈梅尔和霍尔曼(Duhamel and Hollman, 1984)以及杜哈梅尔(Duhamel, 1986)曾提出一种称为分裂基(split-radix)FFT 或 SRF FFT 的修正 FFT 算法. 分裂基算法的流图与基 2 算法的流图相似, 但是它需要的实数乘法要少一些. 在本习题中我们来说明计算一个长为 N 的序列 $x[n]$ 的 DFT $X[k]$ 之 SRF FFT 算法的原理.

(a) 证明 $X[k]$ 的偶序号项可表示成对于 $k=0, 1, \dots, (N/2)-1$ 的 $N/2$ 点 DFT

$$X[2k] = \sum_{n=0}^{(N/2)-1} (x[n] + x[n+N/2]) W_N^{2kn}$$

(b) 证明 DFT $X[k]$ 的奇序号项可表示成对于 $k=0, 1, \dots, (N/4)-1$ 的 $N/4$ 点 DFT

$$X[4k+1] = \sum_{n=0}^{(N/4)-1} ((x[n] - x[n+N/2]) - j(x[n+N/4] - x[n+3N/4])) W_N^n W_N^{4kn}$$

$$X[4k+3] = \sum_{n=0}^{(N/4)-1} ((x[n] - x[n+N/2]) + j(x[n+N/4] - x[n+3N/4])) W_N^n W_N^{4kn}$$

(c) 图 P9. 9 中的流图表示对一个 16 点变换的这种 DFT 分解. 重新画出这一流图, 用恰当的乘法器系数标出每一个支路.

(d) 当用 SRF FFT 方法计算图 P9. 9 中其它的 DFT 时, 求实现 16 点变换所需要的实数乘法次数. 将这个次数与实现一个 16 点基 2 按频率抽取算法所需要的实数乘法次数作一比较. 在这两种情况下均假设与 W_N^0 的乘法可省去.

9.10 在实现一种 FFT 算法时, 利用规范形式或耦合形式的振荡器递推地产生 W_N 的幂往往是很有效的. 在本习题中我们来研究当 $N=2^n$ 时的一种基 2 按时间抽取算法. 图 9.10 绘出当 $N=8$ 时的这种算法, 并且图 9.25 是对于任意 N 实现该算法的 FORTRAN 程序.

为了有效地产生这些系数, 应当逐级地改变振荡器的频率. 假设数列的编号是从 0 到 $v=\log_2 N$, 因此有初始输入序列的数列是第零列, 而 DFT 是第 v 列. 当计算某一给定级的蝶形运算时, 所有要求相同系数的蝶形在得到新系数之前都计算出来. 在给全部数列标号时我们假定数列中的数据存储在编号从 0 到 $(N-1)$ 依次排列的复数寄存器中. 下面的所有问题都是关于从第 $(m-1)$ 号数列来计算第 m 号数列, 其中 $1 \leq m \leq v$. 答案应当用 m 表示.

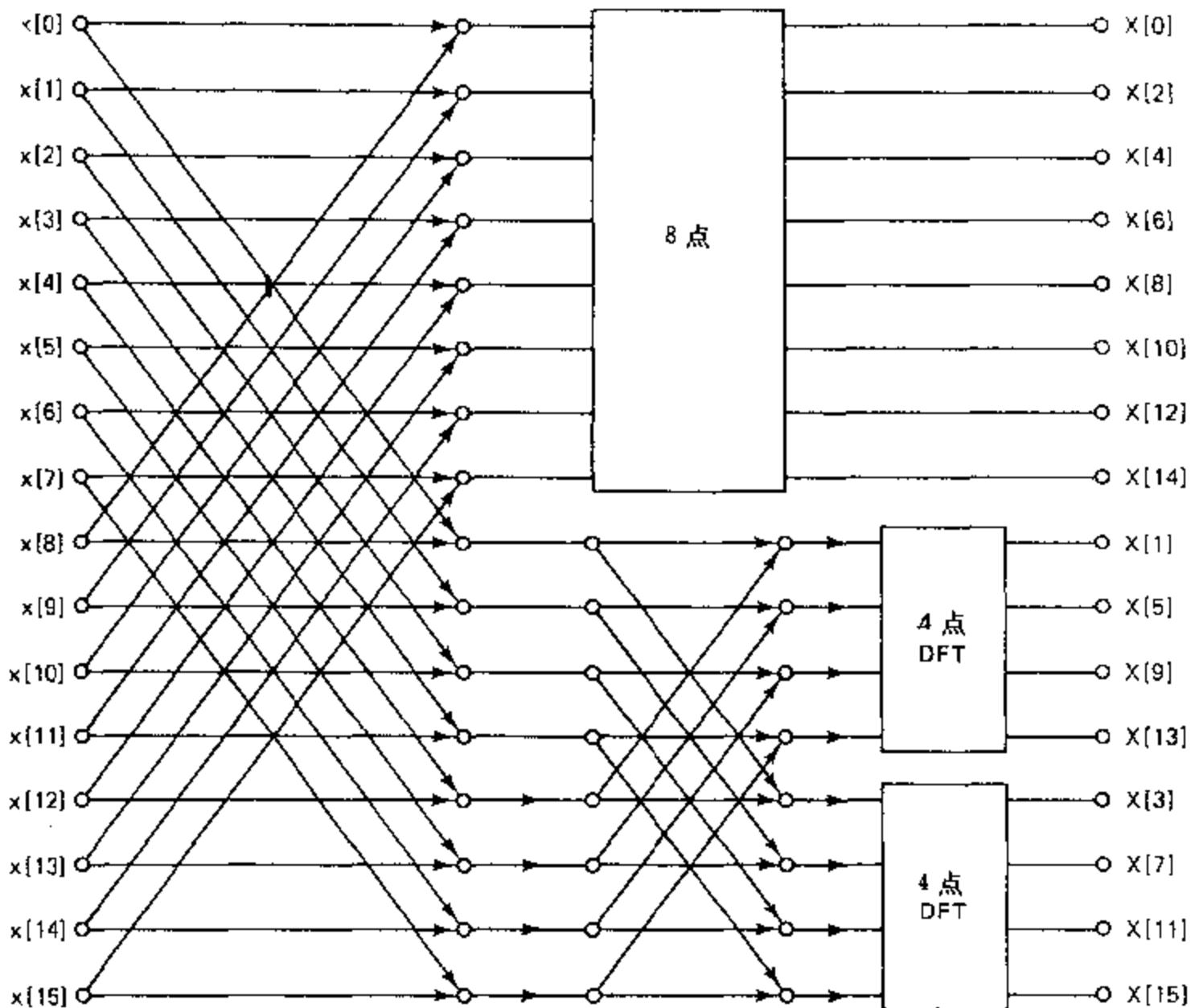


图 P9.9

- (a) 在第 m 级中应当计算多少个蝶形？在第 m 级中需要多少个不同的系数？
 - (b) 产生系数所用的振荡器的频率是什么？即在重复计算之前可以迭代多少次？
 - (c) 假设使用耦合形式振荡器来产生 W_N 的各次幂，在振荡器的差分方程中的系数是什么？
 - (d) 在第 m 级中一个蝶形的两个复输入点的数列位置间相隔多少？
 - (e) 使用相同系数的各蝶形之第一个数列位置的地址之间相隔多少？
- 9.11 用图 9.25 中的 FORTRAN 程序实现图 9.10 所画出的按时间抽取 FFT 算法。
- (a) 程序共有 v 级计算。哪一个程序变量标示出计算的级数？
 - (b) 哪一个程序变量对应于将一个蝶形的两个输入之间间隔开来？
 - (c) 指出执行基本蝶形计算的指令行号。
 - (d) 指出实现输入倒位序的指令行号。
 - (e) 做哪些简单地修改就可使该程序计算 IDFT？
- 9.12 用图 9.26 中的 FORTRAN 程序实现图 9.20 绘出的按频率抽取 FFT 算法。
- (a) 程序共有 v 级计算。哪一个程序变量标出计算的级数？
 - (b) 哪一个程序变量对应于将一个蝶形的两个输入之间间隔开来？
 - (c) 指出执行基本蝶形计算的指令行号。
 - (d) 指出实现输入倒位序的指令行号。
 - (e) 做哪些简单的修改就可用该程序计算 IDFT？
- 9.13 计算 DFT 通常需要作复数乘法。考虑乘积 $X + jY = (A - jB)(C + jD) = (AC - BD) + j(BC + AD)$ 。在这个式子中，1 次复数乘法需要 4 次实数乘法和 2 次实数加法。证明利用算法
- $$X = (A - B)D + (C - D)A,$$

$$Y = (A - B)D + (C + D)B.$$

可用 3 次实数乘法和 5 次加法完成 1 次复数乘法.

- 9.14 在计算 DFT 中,有必要使一个复数与另一个复值为 1 的复数相乘,即 $(X + jY)e^{j\theta}$. 显然,这样一种复数乘法只改变该复数的幅角,而不改变其幅值. 正是这个原因,有时把乘以复数 $e^{j\theta}$ 的乘法称为旋转. 在 DFT 或 FFT 算法中可能需要许多不同的幅角 θ 值,但是我们可能并不希望将 $\sin\theta$ 和 $\cos\theta$ 所需要的值都贮存作一个数表,而用幂级数计算这些函数都需要许多次乘法和加法. 若使用沃尔德(Volder, 1959)给出的 CORDIC 算法,则可用将加法,二进制移位和由一个小表来查表相结合的方法来高效地计算乘积 $(X + jY)e^{j\theta}$.

- (a) 定义 $\theta_i = \arctan(2^{-i})$, 证明任何幅角 $0 < \theta < \pi/2$ 可表示成

$$\theta = \sum_{i=0}^{M-1} a_i \theta_i + \epsilon = \hat{\theta} + \epsilon,$$

其中 $a_i = \pm 1$, 且误差 ϵ 的界限为

$$|\epsilon| \leq \arctan(2^{-M}).$$

- (b) 可以事先将幅角 θ 算出并储存在一个长度为 M 的小数表中,找出一种算法用以得到序列 $\{a_i\}$ ($i = 0, 1, \dots, M-1$),使得 $a_i = \pm 1$. 当 $M = 11$ 时,用你的算法计算表示幅角 $\theta = 100\pi/512$ 的序列 $\{a_i\}$.

- (c) 利用(a)的结果证明,递推

$$\begin{aligned} X_0 &= X, \\ Y_0 &= Y, \\ X_i &= X_{i-1} - a_{i-1} Y_{i-1} 2^{-i+1}, \quad i = 1, 2, \dots, M, \\ Y_i &= Y_{i-1} + a_{i-1} X_{i-1} 2^{-i+1}, \quad i = 1, 2, \dots, M, \end{aligned}$$

将产生复数

$$(X_M + jY_M) = (X + jY)G_M e^{j\hat{\theta}},$$

其中 $\hat{\theta} = \sum_{i=0}^{M-1} a_i \theta_i$, G_M 是实正数且与 θ 无关. 这就是说,原始的复数以幅角 $\hat{\theta}$ 在复平面中旋转,且幅值由常数 G_M 确定.

- (d) 求作为 M 函数的放大常数 G_M .

- 9.15 我们知道,FFT 算法可以看作是称之为蝶形的计算单元间的一种互连. 例如,对基 2 按频率抽取 FFT 算法的蝶形如图 P9.15-1 所示. 该蝶形取两个复数作为输入而产生两个复数作为输出. 它的实现需要一次与 W_N 的复数乘法,其中 r 是取决于算法流图中蝶形位置的整数,因为复数乘法器的系数为 $W_N = e^{j\theta}$,所以可以用在习题 9.14 中讨论的 CORDIC 旋转子算法来有效地实现复数乘法. 可惜的是,虽然 CORDIC 旋转子算法可以获得要求的幅角变化,但同时也引入了一个依赖于幅角 θ 的固定放大系数. 因此,如果用 CORDIC 旋转子算法来实现与 W_N 相乘,则图 P9.15-1 的蝶形将被图 P9.15-2 的蝶形所代替,其中 G 代表 CORDIC 旋转子的固定放大因子.(我们假设在逼近旋转幅角时没有误差.)如果在按频率抽取 FFT 算法流图中的每个蝶形都用图 P9.15-2 的蝶形代替,则我们得到一种修正的 FFT 算法,当 $N = 8$ 时该算法的流图如图 P9.15-3 所示. 这个修正算法的输出却不是所要求的 DFT.

- (a) 证明该修正的 FFT 算法的输出是 $Y[k] = W[k] \cdot X[k]$, 其中 $X[k]$ 是输入序列 $x[n]$ 的正确 DFT, 而 $W[k]$ 是 G, N 和 k 的函数.
- (b) 希望序列 $W[k]$ 服从一种特别简单的规则. 请找出该规则并指出它与 G, N 和 k 的依赖关系.
- (c) 假设我们想通过对输入序列 $x[n]$ 作预处理来补偿修正 FFT 算法的影响. 请找出一种是由 $x[n]$ 得到序列 $\hat{x}[n]$ 的方法,使得若 $\hat{x}[n]$ 为修正 FFT 算法的输入,则输出将是原始 $x[n]$ 的正确 DFT $X[k]$.

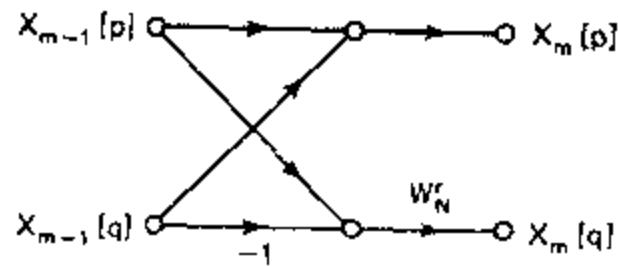


图 P9.15-1

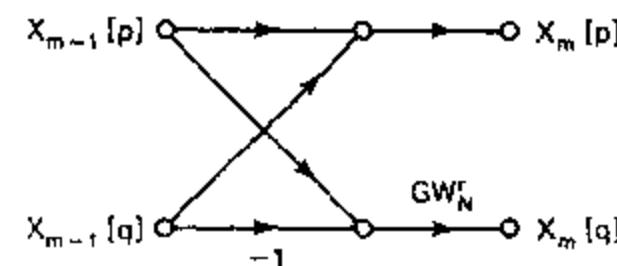


图 P9.15-2

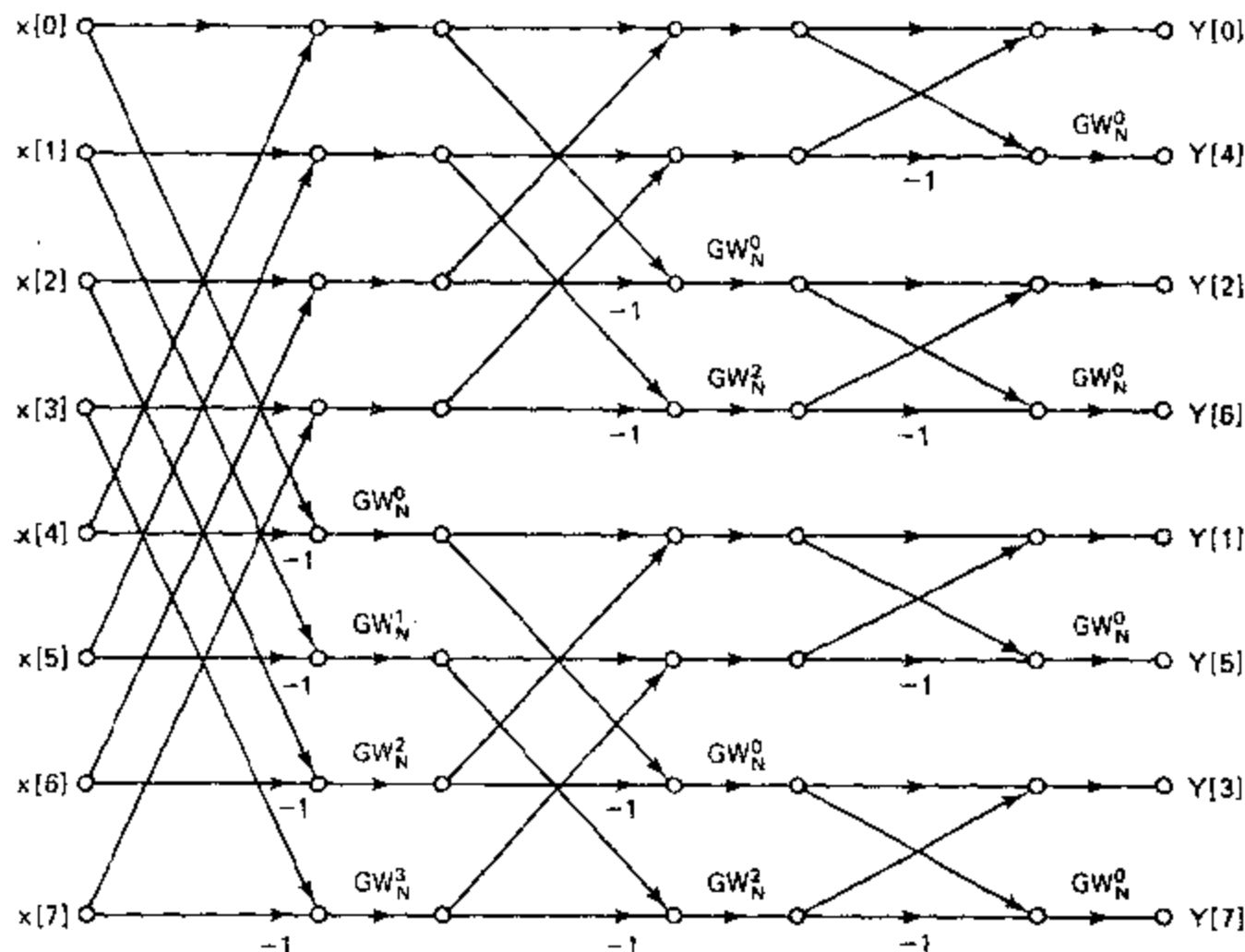


图 P9.15-3

- 9.16** 在例 9.3 中, 我们研究了一个 12 点素因子 FFT 算法, 并将 N 表示作乘积 $N=N_1N_2$, 这里 $N_1=4$ 和 $N_2=3$.
- 利用式(9.54)和式(9.55)求当 $N_1=3$ 和 $N_2=4$ 时对于 n 和 k 的标号映射.
 - 利用(a)中所得出的标号映射, 求 $X[k]$ 的素因子分解.
 - 画出(b)中求出的 12 点素因子分解的流图.
- 9.17** 在 9.3 节中推导出对于基 2, 即 $N=2^n$ 的按时间抽取 FFT 算法. 类似的方法也可以得出当 $N=3^n$ 的基 3 算法.
- 画出利用 DFT 的 3×3 分解的 9 点按时间抽取 FFT 算法流图.
 - 当 $N=3^n$ 时用基 3 按时间抽取 FFT 算法来计算一个 N 点复序列的 DFT 需要多少次与 W_N 的幂相乘的复数乘法?
 - 当 $N=3^n$ 时对基 3 按时间抽取算法能否使用同址运算?
- 9.18** 本习题涉及有限长序列 z 变换样本的有效计算问题. 利用线性调频变换算法, 给出计算在半径为 0.5、起始角为 $-\pi/6$ 和终止角为 $2\pi/3$ 的圆弧上均匀相间的 25 点 $X(z)$ 值的步骤. 序列长度为 100 个样本.

- 9.19 当 N 为偶数时, N 点序列 $x[n] = e^{-j(\pi/N)n^2}$ 的 N 点 DFT 是

$$X[k] = \sqrt{N} e^{-jn/4} e^{j(\pi/N)k^2}.$$

求 $2N$ 点序列 $y[n] = e^{-j(\pi/N)n^2}$ 的 $2N$ 点 DFT(设 N 为偶数).

- 9.20 布鲁斯坦(Bluestein, 1970)曾证明, 若 $N = M^2$, 则线性调频变换算法具有递推实现方法.

(a) 证明 DFT 可表示成如下卷积:

$$X[k] = h^*[k] \sum_{n=0}^{N-1} (x[n]h^*[n])h[k-n],$$

其中“*”号表示复共轭, 且

$$h[n] = e^{j(\pi/N)n^2}, \quad -\infty < n < \infty.$$

(b) 证明所要求的 $X[k]$ 值(即对于 $k=0, 1, \dots, N-1$ 的值)也可以通过计算(a)的卷积(取 $k=N, N+1, \dots, 2N-1$)而得出.

(c) 利用(b)的结果证明, 当 $k=N, N+1, \dots, 2N-1$ 时 $X[k]$ 也等于图 P9.20 所示系统的输出, 其中 $\hat{h}[k]$ 是有限长序列

$$\hat{h}[k] = \begin{cases} e^{j(\pi/N)k^2}, & 0 \leq k \leq 2N-1, \\ 0, & \text{其它.} \end{cases}$$

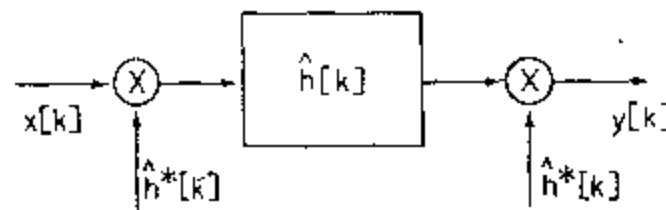


图 P9.20

(d) 已知 $N=M^2$, 证明对应于冲激响应 $\hat{h}[k]$ 的系统函数是

$$\begin{aligned} \hat{H}(z) &= \sum_{k=0}^{2N-1} e^{j(\pi/N)k^2} z^{-k} \\ &= \sum_{r=0}^{M-1} e^{j(\pi/N)r^2} z^{-r} \frac{1-z^{-2M^2}}{1-e^{j(2\pi/M)r} z^{-M}}. \end{aligned}$$

[提示: 将 k 表示成 $k=r-tM$.]

(e) 在(d)中得出的 $\hat{H}(z)$ 表达式给出了 FIR 系统的一种递推实现方法. 请画出这一实现方法的流图.

(f) 利用(e)的结果, 求计算全部 N 个要求的 $X[k]$ 值所需要的复数乘法和加法的总次数. 将这个次数与直接计算 $X[k]$ 所需要的次数作一比较.

- 9.21 在计算离散傅里叶变换戈策尔算法中, 将 $X[k]$ 当作 $y_k[N]$ 来计算, 即

$$X[k] = y_k[N],$$

式中 $y_k[N]$ 是图 P9.21 所示网络的输出. 考虑用舍入的定点运算来实现戈策尔算法. 假设寄存器长度为 B 位再加上一个符号位, 并且假设在加法之前将乘积舍入. 还假定舍入噪声源是相互独立的.

(a) 若 $x[n]$ 为实数, 画出有限精度计算 $X[k]$ 实部和虚部的线性噪声模型的流图. 假设与 ± 1 相乘不产生舍入噪声.

(b) 计算 $X[k]$ 实部和虚部二者舍入噪声的方差.

- 9.22 考虑用舍入定点运算的 DFT 直接计算法. 假设寄存器长度为 B 位再加上一个符号位(即总长为 $B+1$ 位), 并假设由任何实数乘法引入的舍入噪声和由任何其它的实数乘法所引入的舍入噪声不相关. 若 $x[n]$ 为实数, 求每个 DFT 值 $X[k]$ 的实部和虚部二者中舍入噪声的方差.

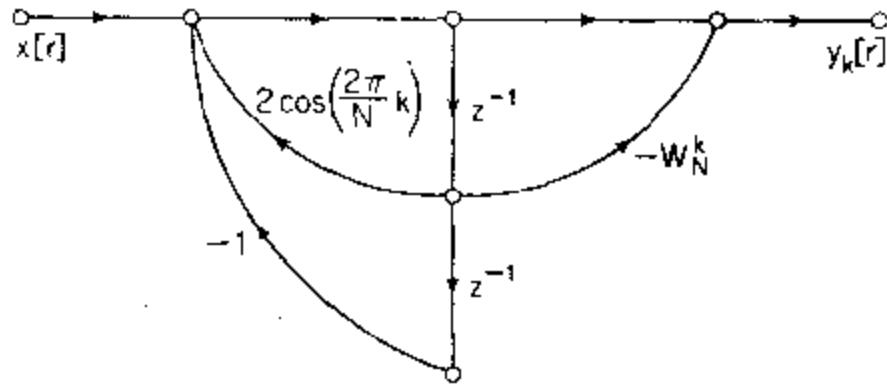


图 P9.21

9.23 当执行按时间抽取 FFT 算法时基本的蝶形计算是

$$X_m[p] = X_{m-1}[p] + W_N^m X_{m-1}[q],$$

$$X_m[q] = X_{m-1}[p] - W_N^m X_{m-1}[q].$$

在用定点运算来实现计算时,通常假定改变所有数的比例使其小于 1. 因此,为了避免溢出,必须保证由蝶形计算所得出的实数不大于 1.

(a) 证明,如果我们要求

$$|X_{m-1}[p]| < \frac{1}{2} \text{ 和 } |X_{m-1}[q]| < \frac{1}{2},$$

则溢出就不会在蝶形计算中出现,即

$$|\operatorname{Re}\{X_m[p]\}| < 1, \quad |\operatorname{Im}\{X_m[p]\}| < 1,$$

和

$$|\operatorname{Re}\{X_m[q]\}| < 1, \quad |\operatorname{Im}\{X_m[q]\}| < 1.$$

(b) 在实际中,比较容易且最方便的方法是要求

$$|\operatorname{Re}\{X_{m-1}[p]\}| < \frac{1}{2}, \quad |\operatorname{Im}\{X_{m-1}[p]\}| < \frac{1}{2},$$

和

$$|\operatorname{Re}\{X_{m-1}[q]\}| < \frac{1}{2}, \quad |\operatorname{Im}\{X_{m-1}[q]\}| < \frac{1}{2}.$$

为了保证在按时间抽取蝶形计算中不出现溢出,这些条件充分吗? 请说明原因.

9.24 在推导定点基 2 按时间抽取 FFT 算法的噪声-信号比计算公式时,假设每个输出节点都与 $(N-1)$ 个蝶形计算相连接,每个蝶形计算对输出噪声方差的贡献是 $\sigma_B^2 = \frac{1}{3} \cdot 2^{-2B}$. 但是当 $W_N = \pm 1$ 或 $\pm j$ 时,所作的乘法事实上没有误差. 因此,若考虑到这种情况,而对 9.8.2 节导出的结果加以修正,就可以得到一种减少不利因素的量化噪声影响的估计.

- (a) 对于 9.8.2 节中讨论的按时间抽取算法,对于每一级求出涉及到与 ± 1 或 $\pm j$ 相乘的蝶形个数.
- (b) 若在输入端就完成了所有改变比例的工作,在这种情况下利用(a)的结果来修正输出噪声方差的估计式(9.92),还应得出与式(9.101)对应的在输出端噪声-信号比的修正表达式.
- (c) 对于每一级的输出都衰减一半的情况重复(a)和(b),即推导对应于输出噪声方差式(9.104)和输出噪声-信号比式(9.105)的修正表达式,假设与 ± 1 和 $\pm j$ 相乘不产生误差.

9.25 在 9.8.2 节中我们研究了图 9.10 按时间抽取 FFT 算法的噪声分析. 对于图 9.20 的按频率抽取算法试进行类似的分析,当在计算的输入端设置比例因子且在每一级也设置 $1/2$ 的比例因子时,得出输出噪声方差和噪声-信号比的计算式.

9.26 考虑用一种系数已量化的 FFT 算法来计算 DFT 的问题. 令 $X[k]$ 是序列 $x[n]$ 所要求的 DFT, 并且令 $\tilde{X}[k]$ 是系数 W_N 已被量化的某一按时间抽取 FFT 算法的输出. 假设系数已经量化, 但在

FFT 算法中的乘法和加法不产生误差

(a) 证明输出 $\hat{X}[k]$ 可表示为

$$\hat{X}[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] Q_n = X[k] + F[k],$$

其中

$$Q_n = \prod_{i=1}^v (W_N^i + \delta_i) \text{ 且 } \prod_{i=1}^v W_N^i = W_N^v.$$

(b) 假定系数 W_N^r 舍入为 B 位再加上一个符号位(总共 $B+1$ 位),而且系数误差的实部和虚部互不相关且为均匀分布. 证明量 δ_i 的方差是

$$\sigma_\delta^2 = \frac{2^{-2B}}{6}.$$

(c) 误差 $F[k]$ 可以表示成

$$F[k] = \hat{X}[k] - X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] (Q_n - W_N^r), \quad k=0, 1, \dots, N-1.$$

证明因子 $(Q_n - W_N^r)$ 可以表示为

$$(Q_n - W_N^r) = \sum_{i=0}^v \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^v W_N^{r_j} + \text{高阶项}$$

(d) 若忽略高阶项并假设置 δ_i 间互不相关, 证明 $F[k]$ 的方差是

$$\sigma_F^2 = \left(\frac{2v}{6}\right) 2^{-2B} \sum_{n=0}^{N-1} |x[n]|^2.$$

(e) 利用帕斯瓦尔定理, 对于 DFT 证明

$$\frac{\sigma_F^2}{(1/N) \sum_{n=0}^{N-1} |X[k]|^2} = \left(\frac{2v}{6}\right) 2^{-2B}.$$

9.27 已知一长度为 627 的有限长序列 $x[n]$ (即, 当 $n < 0$ 和 $n > 626$ 时, $x[n] = 0$), 且有计算任何长度为 $N = 2^v$ 的序列之 DFT 的 FFT 程序可供使用.

对于某一给定序列我们想在如下频率处计算离散时间傅里叶变换的样本:

$$\omega_k = \frac{2\pi}{627} + \frac{2\pi}{256}, \quad k=0, 1, \dots, 255.$$

说明如何由 $x[n]$ 得出一个新序列 $y[n]$, 使得可以将所提供的 FFT 程序用于 $y[n]$, 在 v 尽可能小的情况下得出所要求频率的样本.

9.28 长度 $L = 500$ 的有限长信号(对于 $n < 0$ 和 $n > L-1$, $x[n] = 0$)是用每秒 10 000 个样本的采样率对某一连续时间信号采样而得到的. 我们希望在有效频率间隔为 50Hz 或更小的 N 个等间隔点 $X_k = (0.8)e^{j2\pi k/N}$ ($0 \leq k \leq N-1$) 处计算 $x[n]$ 之 z 变换的样本.

(a) 若 $N = 2^v$, 确定 N 的最小值.

(b) 当 N 为(a) 所求出的值时, 求一个长度为 N 的序列 $y[n]$, 使得其 DFT $Y[k]$ 等于所要求的 $x[n]$ 之 z 变换的样本.

9.29 假设有限长序列 $x[n]$ 有 N 点 DFT $X[k]$, 并且还假设该序列满足对称条件

$$x[n] = -x[((n+N/2))_N], \quad 0 \leq n \leq N-1,$$

式中 N 为偶数, $x[n]$ 为复数.

(a) 证明, 当 $k=0, 2, \dots, N-2$ 时 $X[k]=0$.

(b) 说明如何只用一个 $N/2$ 点 DFT 外加少量的额外计算来计算奇序号 DFT 值 $X[k]$, $k=1, 3, \dots, N-1$.

- 9.30 考虑一个 N 点序列 $x[n]$, 其 DFT 为 $X[k], k=0, 2, \dots, N-1$. 下面的算法只用一个 $N/2$ 点 DFT (N 为偶数) 来计算偶序号 DFT 值 $X[k], k=0, 2, \dots, N-2$.

1. 用时间混叠构成序列 $y[n]$, 即

$$y[n] = \begin{cases} x[n] + x[n+N/2], & 0 \leq n \leq N/2-1, \\ 0, & \text{其它.} \end{cases}$$

2. 计算 $Y[r], r=0, 1, \dots, (N/2)-1$, $y[n]$ 的 $N/2$ 点 DFT.

3. $X[k]$ 的偶序号值为 $X[k] = Y[k/2], k=0, 2, \dots, N-2$.

(a) 证明上述算法可以得出所要求的结果.

(b) 假设我们用下式由序列 $x[n]$ 构造一个有限长序列 $y[n]$:

$$y[n] = \begin{cases} \sum_{r=-\infty}^{\infty} x[n+rM], & 0 \leq n \leq M-1, \\ 0, & \text{其它.} \end{cases}$$

确定 M 点 DFT $Y[k]$ 与 $x[n]$ 的傅里叶变换 $X(e^{j\omega})$ 之间的关系. 证明(a)的结果是(b)的结果的一种特殊情况.

(c) 推导一种类似于(a)的算法, 只用一个 $N/2$ 点 DFT (N 为偶数) 来计算奇序号 DFT 值 $X[k], k=1, 3, \dots, N-1$.

- 9.31 假设有 1 个 DFT 程序, 可用来计算复序列的 DFT. 如果我们想要计算一个实序列的 DFT 则我们可以简单地将虚部设置为零, 而直接使用该程序. 但是, 可以利用实序列 DFT 的对称性来减少计算量.

(a) 令 $x[n]$ 是长度为 N 的实序列, 且 $X[k]$ 是其 DFT, 它的实部和虚部分别记作 $X_R[k]$ 和 $X_I[k]$

$$X[k] = X_R[k] + jX_I[k].$$

证明若 $x[n]$ 为实数, 则当 $k=1, 2, \dots, N-1$ 时 $X_R[k] = X_R[N-k]$ 和 $X_I[k] = -X_I[N-k]$.

(b) 考虑两个实序列 $x_1[n]$ 和 $x_2[n]$, 其 DFT 分别为 $X_1[k]$ 和 $X_2[k]$. 令 $g[n]$ 是复序列 $g[n] = x_1[n] + jx_2[n]$, 其对应的 DFT 为 $G[k] = G_R[k] + jG_I[k]$. 如像式(8.96)所定义的, 令 $G_{OR}[k], G_{ER}[k], G_{OI}[k]$ 和 $G_{EI}[k]$ 分别表示 $G[k]$ 实部的奇部和偶部以及 $G[k]$ 虚部的奇部和偶部. 具体讲, 对于 $1 \leq k \leq N-1$,

$$G_{OR}[k] = \frac{1}{2} \{G_R[k] - G_R[N-k]\},$$

$$G_{ER}[k] = \frac{1}{2} \{G_R[k] + G_R[N-k]\},$$

$$G_{OI}[k] = \frac{1}{2} \{G_I[k] - G_I[N-k]\},$$

$$G_{EI}[k] = \frac{1}{2} \{G_I[k] + G_I[N-k]\},$$

并且 $G_{OR}[0] = G_{OI}[0] = 0, G_{ER}[0] = G_R[0], G_{EI}[0] = G_I[0]$. 求利用 $G_{OR}[k], G_{ER}[k], G_{OI}[k]$ 和 $G_{EI}[k]$ 的 $X_1[k]$ 和 $X_2[k]$ 的表示式.

(c) 假设 $N=2^n$, 并且可用一个基 2 FFT 程序来计算 DFT. 在以下两种情况下求出计算 $X_1[k]$ 和 $X_2[k]$ 两者所需要实数乘法次数和实数加法次数: (i) 使用该程序两次(同时将输入序列的虚部设为零)分别计算两个复 N 点 DFT $X_1[k]$ 和 $X_2[k]$; (ii) 使用(b)中提出的方法, 它只需要计算一次 N 点 DFT.

(d) 假定我们只有一个实 N 点序列 $x[n]$, 其中 N 为 2 的幂. 令 $x_1[n]$ 和 $x_2[n]$ 是两个实 $N/2$ 点序列 $x_1[n] = x[2n]$ 和 $x_2[n] = x[2n+1]$, 其中 $n=0, 1, \dots, (N/2)-1$. 借助 $(N/2)$ 点 DFT $X_1[k]$ 和 $X_2[k]$ 求 $X[k]$.

(e) 利用(b), (c) 和 (d) 的结果提出只用一次 $N/2$ 点 FFT 算法来计算实 N 点序列 $x[n]$ 的 DFT

的方法. 求用这种方法所需要的实数乘法和实数加法的次数. 将这一结果与利用一次设虚部为零的 N 点 FFT 算法来计算 $X[k]$ 所需要的次数作一比较.

- 9.32 在这个习题中我们研究只用一次 N 点 DFT 算法来计算 4 个实对称或反对称 N 点序列之 DFT 的一种方法. 因为我们只考虑有限长序列, 所以正如在 8.7.4 节中定义的那样, 可以用对称和反对称清楚地表明周期对称和周期反对称. 令 $x_1[n], x_2[n], x_3[n]$ 和 $x_4[n]$ 分别表示 4 个长度为 N 的实序列, 并且令 $X_1[k], X_2[k], X_3[k]$ 和 $X_4[k]$ 表示所对应的 DFT. 我们首先假定 $x_1[n]$ 和 $x_2[n]$ 是对称的, 而 $x_3[n]$ 和 $x_4[n]$ 是反对称的, 即, 对于 $n=0, 1, \dots, N-1$,

$$\begin{aligned}x_1[n] &= x_1[N-n], & x_2[n] &= x_2[N-n], \\x_3[n] &= -x_3[N-n], & x_4[n] &= -x_4[N-n],\end{aligned}$$

和 $X_3[0]=X_4[0]=0$.

- (a) 定义 $y_1[n]=x_1[n]+x_3[n]$, 并且令 $Y_1[k]$ 表示 $y_1[n]$ 的 DFT. 求如何能由 $Y_1[k]$ 来恢复 $X_1[k]$ 和 $X_2[k]$?
- (b) 若(a)中定义的 $y_1[n]$ 是一个实序列, 并有对称部分 $x_1[n]$ 和反对称部分 $x_3[n]$. 同样, 我们定义实序列 $y_2[n]=x_2[n]+x_4[n]$, 并且令 $Y_2[n]$ 是复序列

$$y_2[n]=y_1[n]+jy_2[n].$$

首先求如何由 $Y_3[k]$ 来计算 $Y_1[k]$ 和 $Y_2[k]$, 然后利用(a)的结果证明, 如何由 $Y_3[k]$ 得到 $X_1[k], X_2[k], X_3[k]$ 和 $X_4[k]$.

- (b) 的结果表明, 我们只用一次 N 点 DFT 计算就可以同时算出 4 个实序列的 DFT, 其中两个序列是对称的, 而另外两个是反对称的. 现在来研究所有 4 个序列均为对称的情况, 即对于 $n=0, 1, \dots, N-1$,

$$x_i[n]=x_i[N-n], \quad i=1, 2, 3, 4.$$

- (c) 考虑一个实对称序列 $x_3[n]$. 证明序列

$$u_3[n]=x_3[((n+1))_N]-x_3[((n-1))_N]$$

是一个反对称序列, 即当 $n=1, 2, \dots, N-1$ 时

$$u_3[n]=-u_3[N-n], \text{ 且 } u_3[0]=0.$$

- (d) 令 $U_3[k]$ 表示 $u_3[n]$ 的 N 点 DFT. 求利用 $X_3[k]$ 表示 $U_3[k]$ 的表示式.

- (e) 利用(c)的方法, 我们构成实序列 $y_1[n]=x_1[n]+u_3[n]$, 其中 $x_1[n]$ 是 $y_1[n]$ 的对称部分, 而 $u_3[n]$ 是 $y_1[n]$ 的反对称部分. 求如何由 $Y_1[k]$ 来恢复 $X_1[k]$ 和 $X_3[k]$?

- (f) 现在令 $y_2[n]=y_1[n]+jy_2[n]$, 其中对于 $n=0, 1, \dots, N-1$,

$$y_1[n]=x_1[n]+u_3[n], \quad y_2[n]=x_2[n]+u_4[n],$$

以及

$$u_3[n]=x_3[((n+1))_N]-x_3[((n-1))_N],$$

$$u_4[n]=x_4[((n+1))_N]-x_4[((n-1))_N],$$

求如何由 $Y_3[k]$ 得出 $X_1[k], X_2[k], X_3[k]$ 和 $X_4[k]$. (注意, $X_3[0]$ 和 $X_4[0]$ 不能由 $Y_3[k]$ 来恢复, 并且当 N 为偶数时, $X_3[N/2]$ 和 $X_4[N/2]$ 也不能由 $Y_3[k]$ 来恢复.)

- 9.33 令 $x[n]$ 和 $h[n]$ 是两个实有限长序列, 使得

$$x[n]=0, \quad \text{当 } n \text{ 在区间 } 0 \leq n \leq L-1 \text{ 之外时;}$$

$$h[n]=0, \quad \text{当 } n \text{ 在区间 } 0 \leq n \leq P-1 \text{ 之外时.}$$

我们希望计算序列 $y[n]=x[n]*h[n]$, 这里“*”号表示常规卷积.

- (a) 序列 $y[n]$ 的长度是多少?

- (b) 当直接计算卷积和时, 计算 $y[n]$ 全部的非零样本需要多少次实数乘法? 下述等式可能有用:

$$\sum_{k=1}^N k = \frac{N(N+1)}{2}.$$

- (c) 说出用 DFT 来计算 $y[n]$ 全部非零样本的方法. 求用 L 和 P 表示的 DFT 和 IDFT 的最小长度.
- (d) 假设 $L=P=N/2$, 其中 $N=2^v$ 是 DFT 的长度. 求利用(c)的方法计算 $y[n]$ 所有非零值时所需实乘法次数的计算公式, 假设用基 2FFT 算法来计算 DFT. 利用这个公式计算 N 的最小值, 在这种情况下 FFT 方法比直接计算卷积和需要较少的实数乘法.
- 9.34 在 8.8.3 节中我们曾表明, 线性时不变滤波可以用以下步骤来实现: 先把输入信号分成有限长的信号段, 然后用 DFT 来实现这些信号段的循环卷积. 曾讨论过的两种方法称为重叠相加法和重叠保留法. 如果用一个 FFT 算法来计算 DFT, 则这些分段的方法计算每个输出样本所需要的复数乘法要比直接计算卷积和来得少.
- (a) 假设复输入序列 $x[n]$ 是有限长的, 且复冲激响应 $h[n]$ 有 7 个样本, 因此只有当 $0 \leq n \leq P-1$ 时 $h[n] \neq 0$. 还假设用重叠保留法且利用由基 2FFT 算法实现的长度 $L=2^v$ 的 DFT 来计算输出. 请给出计算每个输出样本所需要的复数乘法次数的计算式, 且该式为 v 和 P 的函数.
- (b) 假设冲激响应的长度为 $P=500$. 利用(a)得出的计算公式并使用重叠保留法, 绘出每个输出样本的乘法次数作为 v 之函数的曲线 ($v \leq 20$). v 为何值时乘法次数最少? 比较用 FFT 的重叠保留法计算每个输出样本所需的复数乘法次数与直接计算卷积和所需要的每个输出样本的复数乘法次数.
- (c) 证明, 当 FFT 很长时, 计算每个输出样本的复数乘法次数大约为 v . 因此, 超出一定的 FFT 长度, 重叠保留法就没有直接法来得效率高. 若 $P=500$, 则 v 为何值时直接法将更有效?
- (d) 假定 FFT 的长度是冲激响应长度的两倍(即 $L=2P$), 且 $L=2^v$. 利用(a)得出的公式, 求 P 的最小值, 使得用 FFT 的重叠保留法所用的复乘法次数比直接卷积法来得少.
- 9.35 某一线性时不变系统的输入和输出满足如下差分方程:
- $$y[n] = \sum_{k=0}^N a_k y[n-k] + \sum_{k=0}^M b_k x[n-k].$$
- 假设可用一 FFT 程序来计算长度 $N=2^v$ 的任何有限长序列的 DFT. 试提出一种方法, 它可以用提供的 FFT 程序来计算
- $$H(e^{j(2\pi/5)2^k}) \quad \text{对于 } k=0, 1, \dots, 512,$$
- 其中 $H(z)$ 是该系统的系统函数.
- 9.36 假设我们要在一个 16 位计算机上计算两个十分长的数(可能有几千位长)的乘积. 在本习题中就来研究用 FFT 完成此事的一种方法.
- (a) 令 $p(x)$ 和 $q(x)$ 分别为两个多项式
- $$p(x) = \sum_{i=0}^{L-1} a_i x^i, \quad q(x) = \sum_{i=0}^{M-1} b_i x^i.$$
- 证明多项式 $r(x) = p(x)q(x)$ 的系数可用循环卷积计算.
- (b) 说明如何用基 2FFT 程序计算 $r(x)$ 的系数. 假定 $L+M=2^v$ (v 为某些整数). $(L+M)$ 的值为多少幂次时可使这种方法比直接计算法更有效?
- (c) 现在假设要计算两个十分长的正整数 u 和 v 的乘积. 证明它们的乘积可用多项式乘法来计算, 并且给出一种用 FFT 算法来计算该乘积的一种算法. 如果 u 是一个 8000 位的数, 且 v 是一个 1000 位的数, 用这种方法计算乘积 $u \cdot v$ 需要大约多少次实数乘法和加法.
- (d) 定性讨论在实现(c)的算法中有限精度运算的影响.
- 9.37 一个长度为 N 的序列 $x[n]$ 的离散哈特利(Hartley)变换(DHT)定义为
- $$X_H[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] H_N[nk], \quad k=0, 1, \dots, N-1, \quad (\text{P9.37-1})$$

式中

$$H_N[a] = C_N[a] + S_N[a],$$

和

$$C_N[a] = \cos(2\pi a/N), \quad S_N[a] = \sin(2\pi a/N).$$

虽然最初哈特利在 1942 年提出该方法是针对连续时间的情况，但是哈特利变换也具有对离散时间情况十分有用和引人注目的特性 (Bracewell, 1983, 1984)。具体讲，由式 (P9. 37-1) 清楚地表明，一个实序列的 DHT 也是一个实序列。DHT 也具有卷积性质，并且有计算该卷积的快速算法。

与 DFT 完全相似，DHT 也具有在使用中必须考虑的隐含周期性。这就是说，如果认为 $x[n]$ 是一个有限长序列，使得当 $n < 0$ 和 $n > N-1$ 时 $x[n] = 0$ ，则可以构成一个周期序列

$$\tilde{x}[n] = \sum_{r=-\infty}^{\infty} x[n+rN]$$

这样 $x[n]$ 仅仅是 $\tilde{x}[n]$ 的一个周期。周期序列 $\tilde{x}[n]$ 可以用离散哈特利级数 (DHS) 来表示，DHS 也看作是只集中在周期序列的一个周期内的 DHT。

(a) DHS 的分析方程式定义为

$$\tilde{X}_H[k] = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}[n] H_N[nk]. \quad (\text{P9. 37-2})$$

证明 DHS 的系数也构成一个周期为 N 的周期序列，即

$$\tilde{X}_H[k] = \tilde{X}_H[k+N] \quad \text{对于所有 } k.$$

(b) 证明序列 $H_N[nk]$ 也是正交的，即

$$\sum_{n=0}^{N-1} H_N[nk] H_N[mk] = \begin{cases} N, & ((n))_N = ((m))_N, \\ 0, & \text{其它.} \end{cases}$$

利用这一性质和式 (P9. 37-2) 的 DHS 分析式证明 DHS 综合式为

$$\tilde{x}[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}_H[k] H_N[nk]. \quad (\text{P9. 37-3})$$

注意，DHT 只是一个周期内的 DHS 系数，同样 DHT 综合 (逆) 方程式等于 DHS 综合方程式 (P9. 37-3)，只是我们仅抽取了 $\tilde{x}[n]$ 的一个周期，即 DHT 综合式为

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_H[k] H_N[nk], \quad n = 0, 1, \dots, N-1. \quad (\text{P9. 37-4})$$

用式 (P9. 37-1) 和式 (P9. 37-4) 分别作为 DHT 分析关系式和综合关系式的定义，我们现在继续推导有限长离散时间信号这种表示的一些有用性质。

(c) 证明 $H_N[a] = H_N[a+N]$ ，并证明 $H_N[a]$ 的下列有用性质：

$$\begin{aligned} H_N[a+b] &= H_N[a] C_N[b] + H_N[-a] S_N[b] \\ &= H_N[b] C_N[a] + H_N[-b] S_N[a]. \end{aligned}$$

(d) 考虑一个循环移位序列 $x_1[n]$ ，它定义为

$$x_1[n] = \begin{cases} \tilde{x}[n-n_0] = x[((n-n_0))_N], & n = 0, 1, \dots, N-1, \\ 0, & \text{其它.} \end{cases} \quad (\text{P9. 37-5})$$

换句话说， $x_1[n]$ 是从移位周期序列 $\tilde{x}[n-n_0]$ 中抽取一个周期而得到的序列。利用 (c) 中证明的等式，证明移位周期序列的 DHS 系数是

$$\tilde{x}[n-n_0] \xrightarrow{\text{DHT}} \tilde{X}_H[k] C_N[n_0 k] + \tilde{X}_H[-k] S_N[n_0 k]. \quad (\text{P9. 37-6})$$

由此我们得出结论，有限长循环移位序列的 DHT 是

$$x[((n-n_0))_N] \xrightarrow{\text{DHT}} X_H[k] C_N[n_0 k] + X_H[-k] S_N[n_0 k]. \quad (\text{P9. 37-7})$$

(e) 假设 $x_3[n]$ 是两个 N 点序列 $x_1[n]$ 和 $x_2[n]$ 的 N 点循环卷积，即

$$x_3[n] = x_1[n] \otimes x_2[n]$$

$$= \sum_{m=0}^{N-1} x_1[m]x_2[((n-m))_N], \quad n=0,1,\dots,N-1. \quad (\text{P9.37-8})$$

将 DHT 用于式(P9.37-8)的两边,并利用式(P9.37-7)证明:对于 $k=0,1,\dots,N-1$,

$$\begin{aligned} X_{H3}[k] &= \frac{1}{2}X_{H1}[k](X_{H2}[k]+X_{H2}[((-k))_N]) \\ &\quad + \frac{1}{2}X_{H1}[((-k))_N](X_{H2}[k]-X_{H2}[((-k))_N]) \end{aligned} \quad (\text{P9.37-9})$$

这就是所要求的卷积性质.

注意,与 DFT 可以用来计算线性卷积的方式相同,DHT 也可以用来计算线性卷积. 虽然由 $X_{H1}[k]$ 和 $X_{H2}[k]$ 计算 $X_{H3}[k]$ 需要的计算量与用 $X_1[k]$ 和 $X_2[k]$ 计算 $X_3[k]$ 的相同,但是 DHT 的计算所需要的实乘法次数只是 DFT 计算所需的一半.

- (f) 假设我们要计算一个 N 点序列 $x[n]$ 的 DHT,并且有可用的程序来计算 N 点 DFT. 给出一种由 $X[k]$ 得到 $X_H[k]$ ($k=0,1,\dots,N-1$) 的方法.
- (g) 假定我们要计算一个 N 点序列 $x[n]$ 的 DFT,并且有可用的程序来计算 N 点 DHT. 给出一种由 $X_H[k]$ 得到 $X[k]$ ($k=0,1,\dots,N-1$) 的方法.
- (h) 通过将 $x[n]$ 分解为它的偶序号点和奇序号点并且用(c)中得出的等式,根据按时间抽取原理推导一种快速 DHT 算法.

第十章 离散希尔伯特变换

10.0 引言

通常,要了解一个序列傅里叶变换的特性需要有关实部和虚部或者幅度和相位在 $-\pi < \omega < \pi$ 所有频率范围内的全部知识。但是我们已经知道,在一定条件下傅里叶变换会有一些特殊性质。例如,在2.8节中我们曾看到,如果 $x[n]$ 是实数,则它的傅里叶变换是共轭对称的,即 $X(e^{j\omega}) = X^*(e^{-j\omega})$ 。由此可以得出,对实序列,当 $0 \leq \omega \leq \pi$ 时 $X(e^{j\omega})$ 的特性也表示为 $-\pi \leq \omega \leq 0$ 时 $X(e^{j\omega})$ 的特性。同样,从5.4节中也看到,在最小相位的限制条件下傅里叶变换的幅度和相位不是相互独立的,也就是说,幅度特性决定着相位特性,而相位特性也决定着幅度特性,相差一个比例因子。在8.5节中我们还曾指出,对于有限长为 N 的序列, $X(e^{j\omega})$ 在 N 个等间隔频率处的特性决定了在所有频率处 $X(e^{j\omega})$ 的特性。

在这一章中我们将看到,序列因果性的限制条件意味着傅里叶变换实部和虚部之间有唯一性关系。复函数的实部和虚部之间的这种关系除了用于信号处理之外,还出现在许多其它领域中,人们通常将这种关系称为希尔伯特变换关系。除了导出因果序列傅里叶变换的这些关系之外,我们还要推导对于DFT和具有单边傅里叶变换之序列的有关结果。此外,在10.3节中我们还将指出如何利用希尔伯特变换来解释最小相位序列幅度和相位之间的关系。

虽然在这一章中我们用直观的方法来说明问题,但应清楚地认识到希尔伯特关系原本是从解析函数的性质得出来的(见习题10.1)。在离散时间信号和系统的数学表达式中用到的复函数一般都具有良好的特性。除了有少数例外,我们所关注的 z 变换均具有良好的定义域,在该定义域上幂级数是绝对收敛的。因为幂级数可表示其收敛域内的解析函数,所以可知, z 变换是在其收敛域内的解析函数。根据解析函数的定义,这意味着在收敛域内的每一点上 z 变换的导数都有定义。另外,解析性意味着 z 变换及其所有的导数在收敛域内都是连续函数。

解析函数的性质表示对 z 变换在其收敛域内的特性有一些较强的限制。因为傅里叶变换是在单位圆上计算的 z 变换,所以这些限制也约束着傅里叶变换的特性。其中的一个限制是,实部和虚部必须满足柯西-黎曼条件,该条件建立了解析函数实部和虚部偏导数之间的联系(例如,见Churchill and Brown, 1984)。另一个限制是柯西积分定理,该定理表明可以利用解析域边界上的函数值表示解析域中每一处的复函数值。根据这些解析函数的关系,可以在一定条件下推导出收敛域内的一个闭合围线上 z 变换的实部和虚部之间明显的积分关系。在数学文献中常常将这些关系称为泊松公式。在系统理论的文献中人们又称其为希尔伯特变换关系。

我们并不是采用以上刚刚讨论过的数学方法,而是通过揭示如下事实推导出希尔伯特变换关系式:因果序列之 z 变换的实部和虚部在单位圆上是该序列的偶数部分和奇数部分的变换(见表2.1中的性质5和6)。正如我们将要指出的,因果序列可以完全用它的

偶数部分来表示,这也说明原始序列的 z 变换可以完全由它在单位圆上的实部来表示.这一论点除了表明因果序列可以利用其在单位圆上的实部来表示它的 z 变换外,还说明在一定条件下,一个序列可利用其在单位圆上的幅度来表示它的 z 变换.

解析信号是连续时间信号处理中一个十分重要的概念.解析信号是只有正频率的傅里叶变换的复时间(解析)函数.严格讲,不能把复序列看作是解析的,因为它是一个整数变量的函数.但是,用类似于前面章节中所描述的方法,可以得出频谱在单位圆的 $-\pi < \omega < 0$ 上为零的复序列的实部和虚部之间的关系.也可以用类似的方法推出一个周期序列或等效推出一个有限长序列的离散傅里叶变换的实部和虚部间的关系.在这个意义上“因果性”条件就是表示周期序列在每个周期的后半部分均为零.

因此,在这一章中将用因果性的观点来寻找一个函数的偶分量和奇分量之间的关系,或等效地找出其变换的实部和虚部之间的关系.我们将把这种方法用于 4 种情况:第一种情况,对于当 $n < 0$ 时值为零的序列 $x[n]$,求得其傅里叶变换 $X(e^{j\omega})$ 的实部和虚部之间的关系.第二种情况,得出周期序列、或等效地得出长度为 N 但最后 $(N/2)-1$ 个点为零的有限长序列的 DFT 之实部和虚部间的关系.第三种情况,在 $n < 0$ 时傅里叶变换的对数之反变换为零的条件下,得出傅里叶变换的对数之实部和虚部之间的关系.导出傅里叶变换对数的实部和虚部之间的关系相当于找到了 $X(e^{j\omega})$ 的幅度和相位之间的关系.最后一种情况,推导出其傅里叶变换在每个周期的后半部分为零的复序列之实部和虚部之间的关系,该傅里叶变换可看作是 ω 的周期函数.

10.1 因果序列傅里叶变换实部和虚部的充分性

任何序列都可以表示成一个偶序列和一个奇序列之和.具体讲,若用 $x_e[n]$ 和 $x_o[n]$ 分别表示 $x[n]$ 的偶部和奇部*,则

$$x[n] = x_e[n] + x_o[n], \quad (10.1)$$

其中

$$x_e[n] = \frac{x[n] + x[-n]}{2} \quad (10.2)$$

和

$$x_o[n] = \frac{x[n] - x[-n]}{2}. \quad (10.3)$$

式(10.1)~(10.3)可用于任意序列,无论该序列是否为因果的,也无论它是否为实数.但是,如果 $x[n]$ 是因果的,即当 $n < 0$ 时 $x[n] = 0$,则可从 $x_e[n]$ 中恢复 $x[n]$ 或从 $x_o[n]$ 中恢复 $x[n](n \neq 0)$.例如考虑因果序列 $x[n]$ 以及它的偶分量和奇分量,如图 10.1 所示.因为 $x[n]$ 是因果的,所以当 $n < 0$ 时 $x[n] = 0$,且 $n > 0$ 时 $x[-n] = 0$.因此,除了在 $n = 0$ 处外, $x[n]$ 和 $x[-n]$ 的非零部分不会重叠.由于这个原因,从式(10.2)和(10.3)可得

$$x[n] = 2x_e[n]u[n] - x_e[0]\delta[n] \quad (10.4)$$

* 如果 $x[n]$ 是实数,则在式(10.2)和(10.3)中的 $x_e[n]$ 和 $x_o[n]$ 就分别是在第二章中所研究的 $x[n]$ 之偶部和奇部.若 $x[n]$ 是复数,为了讨论方便起见,我们仍然定义 $x_e[n]$ 和 $x_o[n]$ 如同在式(10.2)和(10.3)中一样,它们并不对应于如第二章中所研究的复序列之共轭对称部分和共轭反对称部分.

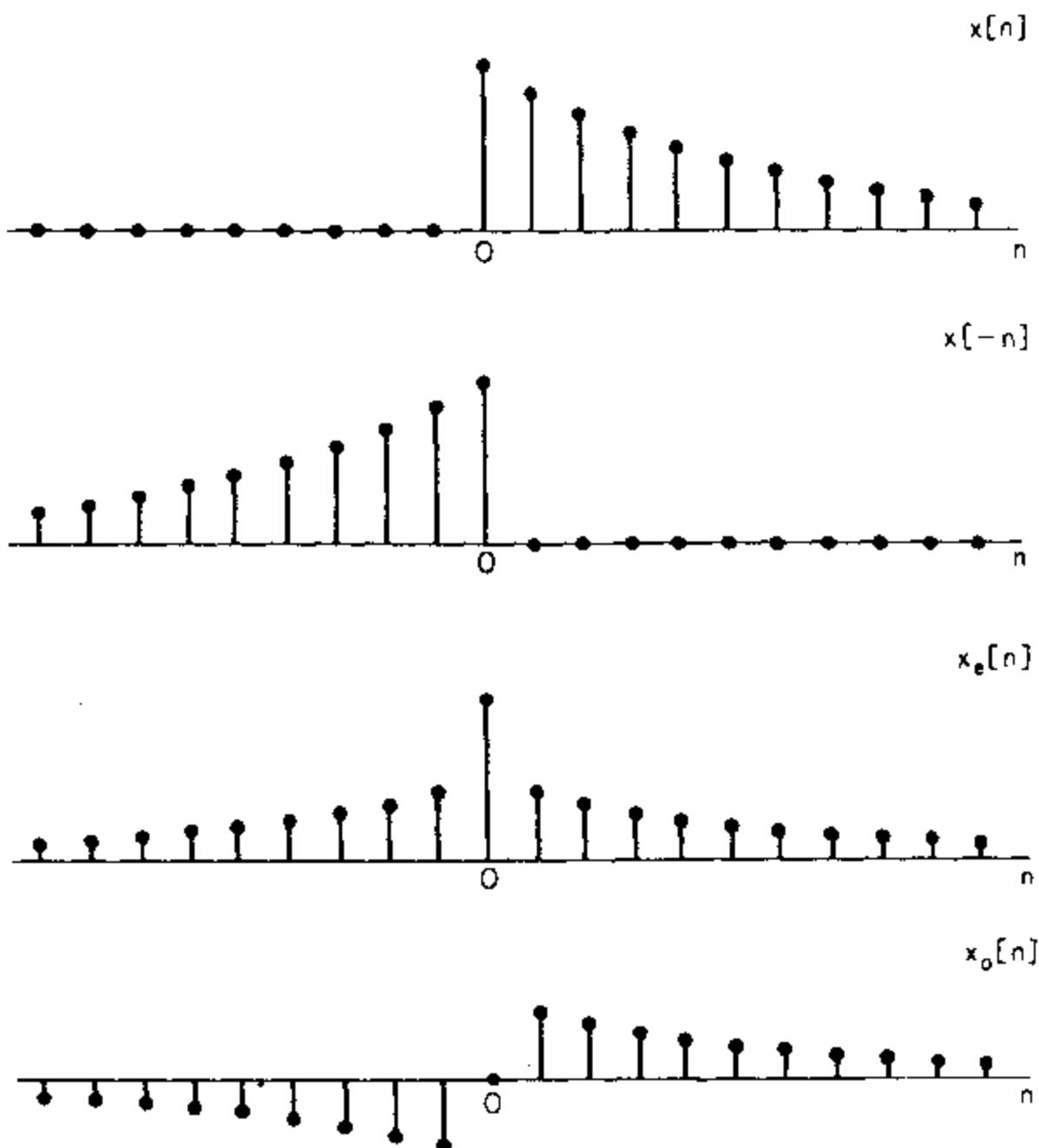


图 10.1 实因果序列的偶部和奇部.

和

$$x[n] = 2x_e[n]u[n] + x[0]\delta[n]. \quad (10.5)$$

从图 10.1 中很容易看出,以上关系式成立. 应当注意, $x[n]$ 由 $x_e[n]$ 完全确定. 另一方面, 由于 $x_e[0]=0$, 则我们可以从 $x_e[n]$ 中恢复 $x[n]$ ($n=0$ 时除外).

若 $x[n]$ 也是稳定的即绝对可和的, 则它的傅里叶变换存在. 我们把 $x[n]$ 的傅里叶变换记作

$$X(e^{j\omega}) = X_R(e^{j\omega}) + jX_I(e^{j\omega}), \quad (10.6)$$

式中 $X_R(e^{j\omega})$ 和 $X_I(e^{j\omega})$ 分别是 $X(e^{j\omega})$ 的实部和虚部. 如果 $x[n]$ 是实序列, 则我们记得, $X_R(e^{j\omega})$ 是 $x_e[n]$ 的傅里叶变换, 而 $jX_I(e^{j\omega})$ 是 $x_o[n]$ 的傅里叶变换. 因此, 对于一个因果和稳定的实序列, $X_R(e^{j\omega})$ 就完全确定了 $X(e^{j\omega})$, 如果已知 $X_R(e^{j\omega})$, 则我们可用以下步骤求出 $X(e^{j\omega})$:

1. 求 $X_R(e^{j\omega})$ 的傅里叶反变换 $x_e[n]$;
2. 用式(10.4)求 $x[n]$;
3. 求 $x[n]$ 的傅里叶变换 $X(e^{j\omega})$.

这种合成方法可以用解析的方法来解释, 以便得出用 $X_R(e^{j\omega})$ 直接表示 $X_I(e^{j\omega})$ 的一

般关系式. 由式(10.4), 复卷积定理以及 $x[0]=x[0]$ 这一事实可得

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X_R(e^{j\theta}) U(e^{j(\omega-\theta)}) d\theta - x[0], \quad (10.7)$$

其中 $U(e^{j\omega})$ 是单位阶跃序列的傅里叶变换. 如 2.7 节中所指出的, 虽然单位阶跃序列既不是绝对可和的, 也不是平方可和的, 但是它可以用如下傅里叶变换来表示:

$$U(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \pi \delta(\omega - 2\pi k) + \frac{1}{1 - e^{-j\omega}} \quad (10.8)$$

或者, 因为 $1/(1 - e^{-j\omega})$ 项可以写作

$$\frac{1}{1 - e^{-j\omega}} = \frac{1}{2} - \frac{j}{2} \cot\left(\frac{\omega}{2}\right), \quad (10.9)$$

所以式(10.8)可以变为

$$U(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \pi \delta(\omega - 2\pi k) + \frac{1}{2} - \frac{j}{2} \cot\left(\frac{\omega}{2}\right). \quad (10.10)$$

利用式(10.10)可将式(10.7)表示成

$$\begin{aligned} X(e^{j\omega}) &= X_R(e^{j\omega}) + jX_I(e^{j\omega}) \\ &= X_R(e^{j\omega}) + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X_R(e^{j\theta}) d\theta - \frac{j}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X_R(e^{j\theta}) \cot\left(\frac{\omega-\theta}{2}\right) d\theta - x[0]. \end{aligned} \quad (10.11)$$

令式(10.11)中的实部和虚部相等, 并注意到

$$x[0] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X_R(e^{j\theta}) d\theta, \quad (10.12)$$

我们可以得出如下关系式

$$X_I(e^{j\omega}) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X_R(e^{j\theta}) \cot\left(\frac{\omega-\theta}{2}\right) d\theta. \quad (10.13)$$

按照同样的步骤, 用式(10.5)可以由 $X_I(e^{j\omega})$ 和 $x[0]$ 得出 $x[n]$. 这一过程导出了用 $X_I(e^{j\omega})$ 求出 $X_R(e^{j\omega})$ 的方程

$$X_R(e^{j\omega}) = x[0] + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X_I(e^{j\theta}) \cot\left(\frac{\omega-\theta}{2}\right) d\theta. \quad (10.14)$$

式(10.13)和(10.14)称为离散希尔伯特变换关系式, 对于一个因果和稳定的实序列之傅里叶变换的实部和虚部均成立. 当 $\omega-\theta=0$ 时, 由于被积函数是奇异的, 所以以上两式的积分在此时也就不合理. 因此, 必须小心地计算这些积分以便得到一致的有限结果. 若把积分当作柯西主值就可以正式地完成上面的积分. 这样, 式(10.13)成为

$$X_I(e^{j\omega}) = -\frac{1}{2\pi} \mathcal{P} \int_{-\pi}^{\pi} X_R(e^{j\theta}) \cot\left(\frac{\omega-\theta}{2}\right) d\theta \quad (10.15)$$

且式(10.14)为

$$X_R(e^{j\omega}) = x[0] + \frac{1}{2\pi} \mathcal{P} \int_{-\pi}^{\pi} X_I(e^{j\theta}) \cot\left(\frac{\omega-\theta}{2}\right) d\theta, \quad (10.16)$$

式中符号 \mathcal{P} 表示积分的柯西主值. 例如, 在式(10.15)中柯西主值的含义是

$$\begin{aligned} X_I(e^{j\omega}) &= -\frac{1}{2\pi} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\int_{\omega+\epsilon}^{\pi} X_R(e^{j\theta}) \cot\left(\frac{\omega-\theta}{2}\right) d\theta \right. \\ &\quad \left. + \int_{-\pi}^{\omega-\epsilon} X_R(e^{j\theta}) \cot\left(\frac{\omega-\theta}{2}\right) d\theta \right]. \end{aligned} \quad (10.17)$$

式(10.17)表示通过 $-\cot(\omega/2)$ 和 $X_R(e^{j\omega})$ 的周期卷积可求得 $X_I(e^{j\omega})$,而在奇异点 $\theta=\omega$ 的邻域要特别小心.同样,式(10.16)涉及到 $\cot(\omega/2)$ 和 $X_I(e^{j\omega})$ 的周期卷积.

在式(10.15)(或等效地,式(10.17))的卷积积分中所涉及到的两个函数如图10.2所示.式(10.17)中的极限存在,这是因为函数 $\cot[(\omega-\theta)/2]$ 在奇异点 $\theta=\omega$ 是反对称的,可在奇异点周围对称地求取极限.

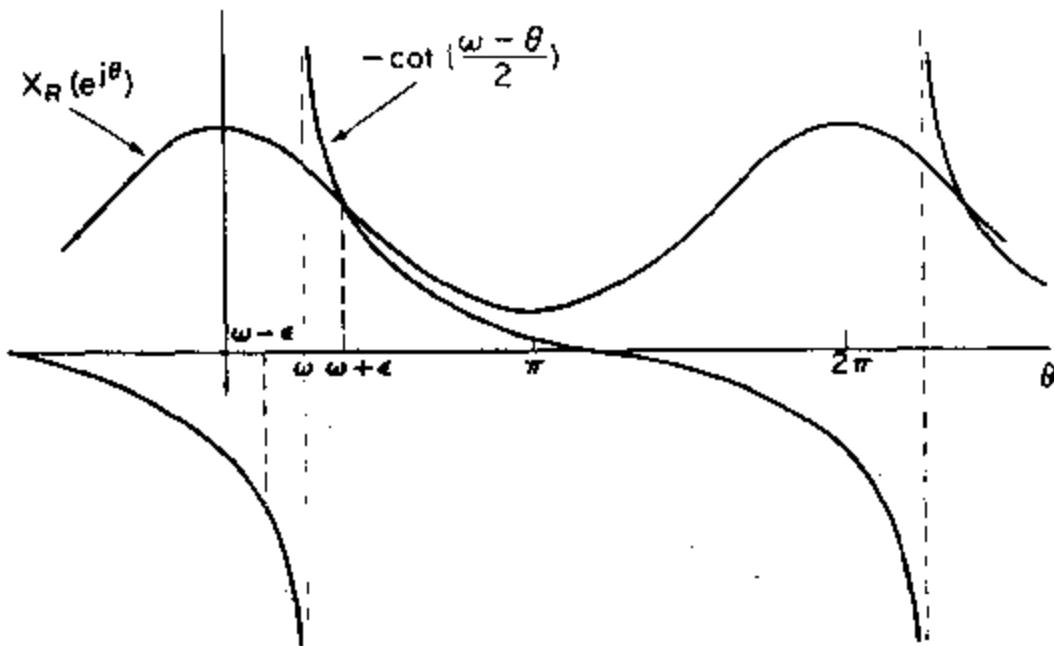


图 10.2 把希尔伯特变换解释作周期卷积.

归纳以上讨论可以看出,一个因果和稳定的实序列之傅里叶变换的实部可以完全决定其收敛域内每一处的 z 变换.这一点可由如下事实看出:通过刚才所使用的方法可以由 $X_R(e^{j\omega})$ 求出 $X(e^{j\omega})$,然后通过解析延拓(非正式地讲,这意味着令 $e^{j\omega}=z$),可以由 $X(e^{j\omega})$ 求得 $X(z)$.利用式(10.4)和4.6节的复卷积定理也可以得出由 $X_R(e^{j\omega})$ 直接计算 $X(z)$ 的关系式.这一比较通用的关系式是

$$X(z)=\frac{1}{2\pi j} \oint_C X_R(v) \left(\frac{z+v}{z-v} \right) \frac{dv}{v}, \quad (10.18)$$

式中积分变量 $v=e^{j\theta}$,即假定 $X_R(e^{j\theta})$ 完全已知,闭合围线 C 是 v 平面上的单位圆.因为假设 $x[n]$ 是一个因果和稳定的序列,所以 $X(z)$ 的这个表达式至少对于 $|z| \geq 1$ 成立.同样,利用 $X_I(e^{j\omega})$ 可将 $X(z)$ 表示为

$$X(z)=\frac{1}{2\pi j} \oint_C X_I(v) \left(\frac{z+v}{z-v} \right) \frac{dv}{v} + x[0], \quad (10.19)$$

式中 C 仍是单位圆.

当 $X_R(e^{j\omega})$ 可以表示为 $e^{j\omega}$ 的有理函数式时,式(10.18)特别有用,因为可以用柯西留数定理来计算这个围线积分.当留数可以被求出时,其运算过程一般说来要比计算式(10.15)容易得多.

例 10.1

令 $X_R(e^{j\omega})$ 由下式给出:

$$X_R(e^{j\omega})=\frac{1-\alpha\cos\omega}{1-2\alpha\cos\omega+\alpha^2}, \quad |\alpha|<1, \quad (10.20)$$

且 α 为实数.为了利用式(10.18)求出 $X(z)$,我们首先把 $X_R(e^{j\omega})$ 写作 $e^{j\omega}$ 的一个有理函

数：

$$X_R(e^{j\omega}) = \frac{1 - \alpha(e^{j\omega} + e^{-j\omega})/2}{(1 - \alpha e^{-j\omega})(1 - \alpha e^{j\omega})}. \quad (10.21)$$

然后令 $e^{j\omega} = v$, 并代入式(10.18), 则可得出

$$X(z) = \frac{1}{2\pi j} \oint_C \frac{(1 - \alpha(v + v^{-1})/2)(z + v)}{(1 - \alpha v^{-1})(1 - \alpha v)(z - v)v} dv, \quad (10.22)$$

其中 C 是单位圆。为了表示出被积函数的极点, 我们可以将方程写作

$$X(z) = \frac{1}{2\pi j} \oint_C \frac{[v - \alpha(v^2 + 1)/2](z + v)}{(v - \alpha)(1 - \alpha v)(z - v)v} dv. \quad (10.23)$$

被积函数的极点如图 10.3 所示。从图中可以看出, 只有在 $v=0$ 和 $v=\alpha$ 处的极点是在单位圆内。因此, 利用留数定理我们得到

$$\begin{aligned} X(z) &= \frac{-(\alpha/2)z}{-\alpha z} + \frac{[\alpha - \alpha(\alpha^2 + 1)/2](z + \alpha)}{(1 - \alpha^2)(z - \alpha)\alpha} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{z + \alpha}{z - \alpha} = \frac{z}{z - \alpha} = \frac{1}{1 - \alpha z^{-1}}. \end{aligned} \quad (10.24)$$

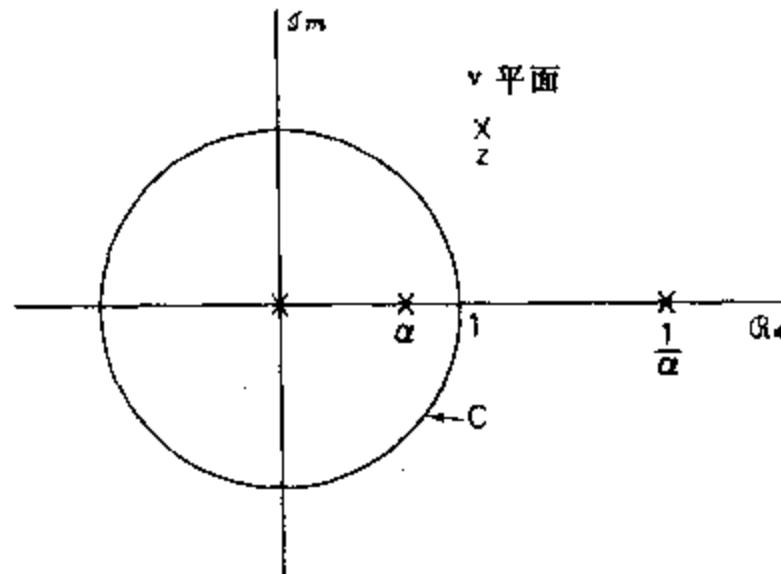


图 10.3 例 10.1 中的极点位置, 在该例中利用围线积分由 z 变换的实部来计算该 z 变换。

若假设 $z \geq 1$, 则可以导出式(10.24); 但是我们注意到, 式(10.23)中被积函数的解析域是 $|\alpha| < |v| < \min(|z|, |\alpha^{-1}|)$, 并且对于包括 $v=0$ 和 $v=\alpha$ 处极点但不包括 $v=z$ 和 $v=\alpha^{-1}$ 处极点的所有闭合围线, 式(10.23)的积分值都相同。这样, 我们就由 z 变换在单位圆上的实部直接求出了在区域 $|z| > |\alpha|$ 内每一处的 z 变换。对 z 变换求反变换得到 $x[n]$

$$x[n] = \alpha^n u[n]. \quad (10.25)$$

例 10.2

让我们继续研究由式(10.20)给出的函数 $X_R(e^{j\omega})$, 但是这一次我们先求 $x_r[n]$, 然后通过式(10.4)求 $x[n]$ 。首先利用 $e^{j\omega}$ 把 $X_R(e^{j\omega})$ 表示为

$$X_R(e^{j\omega}) = \frac{1 - (\alpha/2)(e^{j\omega} + e^{-j\omega})}{1 - \alpha(e^{j\omega} + e^{-j\omega}) + \alpha^2}, \quad |\alpha| < 1. \quad (10.26)$$

接着, 利用解析延拓, 即用 z 代换 $e^{j\omega}$, 可得

$$X_R(z) = \frac{1 - (\alpha/2)(z + z^{-1})}{1 - \alpha(z + z^{-1}) + \alpha^2} \quad (10.27)$$

$$= \frac{z - (\alpha/2)(z^2 + 1)}{(z - \alpha)(1 - \alpha z)}. \quad (10.28)$$

因为我们从傅里叶变换 $X_R(e^{j\omega})$ 开始, 然后将它延伸到 z 平面从而求得 $X_R(z)$, 所以 $X_R(z)$ 的 ROC 当然包括单位圆, 并且它的界限在单位圆内由 $z=\alpha$ 处的极点给出, 在单位圆外由 $z=1/\alpha$ 处的极点给出.

现在我们希望由式(10.28)求出 $x_e[n]$, 即 $X_R(z)$ 的 z 反变换. 利用式(4.67), 有

$$x_e[n] = \frac{1}{2\pi j} \oint_C X_R(z) z^{n-1} dz, \quad (10.29)$$

上式中, 例如, 可将 C 取作单位圆. 当 $n \geq 1$ 时, 式(10.29)中的被积函数在被积函数的围线内有一个极点, 并且(经过少量的代数运算)所对应的积分值是

$$x_e[n] = \frac{1}{2} \alpha^n, \quad n \geq 1. \quad (10.30)$$

当 $n=0$ 时被积函数有两个极点, 计算出留数后可得

$$x_e[n] = 1, \quad n=0. \quad (10.31)$$

因为 $x_e[n] = x_e[-n]$, 所以式(10.30)和(10.31)可完全决定 $x_e[n]$. 由式(10.4)则可得出

$$x[n] = \alpha^n u[n] \quad (10.32)$$

和

$$X(z) = \frac{1}{1 - \alpha z^{-1}}, \quad |z| > |\alpha|. \quad (10.33)$$

10.2 有限长序列的充分性定理

在 10.1 节中我们曾指出, 实序列的因果性或单边性意味着对该序列的傅里叶变换有一些严格的限制. 前一节的结果当然可以用于有限长因果序列, 但由于有限长的特性局限性更强, 所以一个有限长序列的傅里叶变换有可能受到更多的限制. 下面将会看到的确如此.

我们曾介绍过, 有限长序列可以用离散傅里叶变换来表示, 这是一种可以利用的有限长性质. 因为 DFT 涉及到求和而不是积分, 所以就没有不合理的积分问题.

由于 DFT 实际上是周期序列的一种表示, 因此我们所得出的任何结果都以周期序列的相应结果为基础. 确实, 在推导所要求的有限长序列的希尔伯特变换关系式时, 应当牢记 DFT 所固有的周期性. 因此, 我们将首先研究周期的情况, 然后讨论如何将它用于有限长的情况.

考虑一个周期为 N 的周期序列 $\tilde{x}[n]$, 它与长度为 N 的有限长序列的关系为

$$\tilde{x}[n] = x[((n))_N]. \quad (10.34)$$

和 10.1 节中一样, $\tilde{x}[n]$ 在一个周期内可以表示成一个偶序列和一个奇序列之和, 即

$$\tilde{x}[n] = \tilde{x}_e[n] + \tilde{x}_o[n], \quad n=0, 1, \dots, (N-1), \quad (10.35)$$

式中

$$\tilde{x}_e[n] = \frac{\tilde{x}[n] + \tilde{x}[-n]}{2}, \quad n=0, 1, \dots, (N-1), \quad (10.36a)$$

和

$$\tilde{x}_o[n] = \frac{\tilde{x}[n] - \tilde{x}[-n]}{2}, \quad n=0, 1, \dots, (N-1). \quad (10.36b)$$

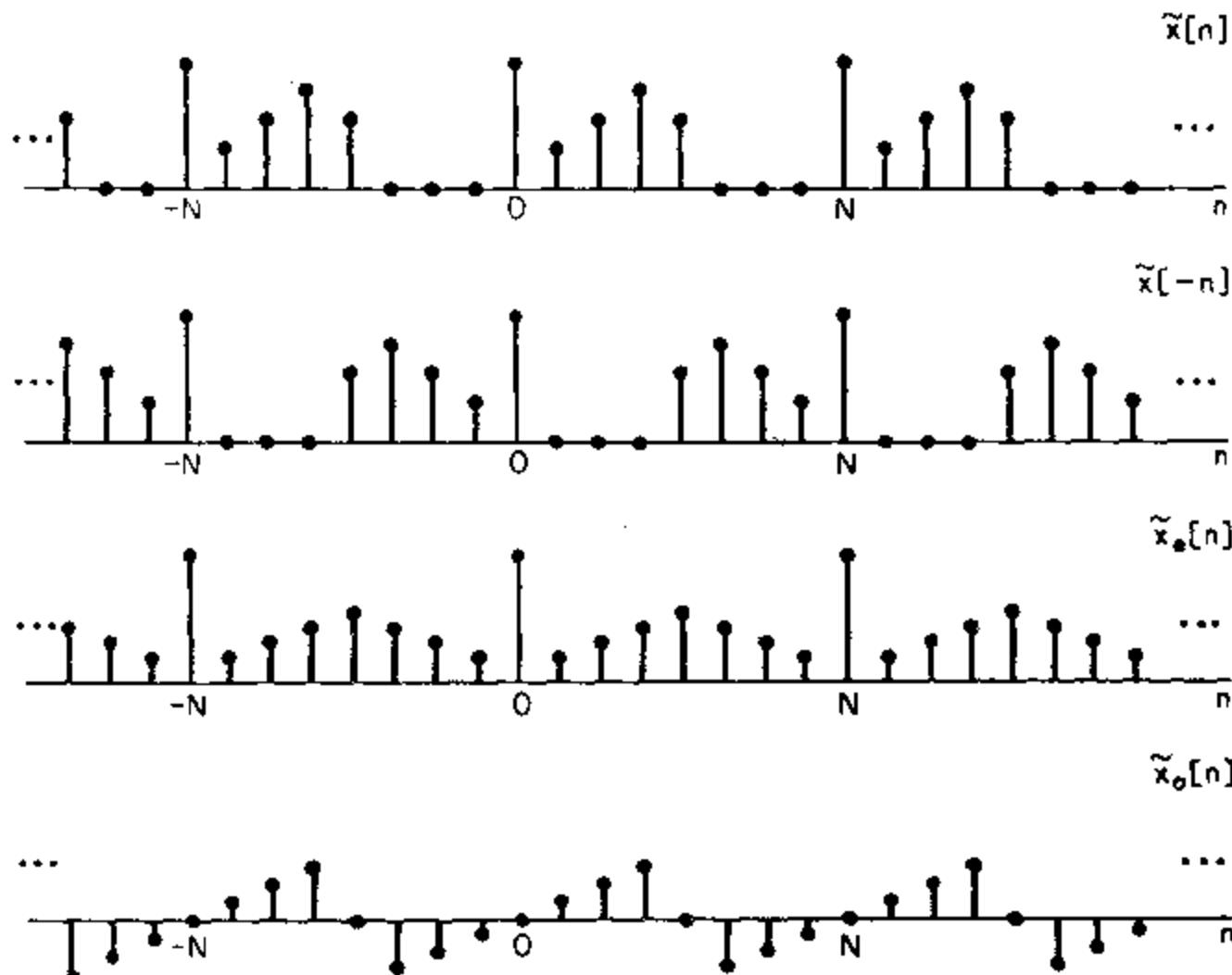


图 10.4 周期 $N=8$ 的“周期因果的”实周期序列的偶部和奇部.

当然,在 10.1 节中所使用的意义上,一个周期序列不可能是因果的.但是,我们可以定义一个“周期因果的”周期序列为,当 $N/2 < n < N$ 时 $\tilde{x}[n] = 0$. 这就是说, $\tilde{x}[n]$ 在后半周期上为零. 本书以后均假设 N 为偶数, N 为奇数的情况会在习题 10.8 中考虑. 应当注意,由于 $\tilde{x}[n]$ 具有周期性,所以当 $-N/2 < n < 0$ 时,有 $\tilde{x}[n] = 0$. 对于有限长序列,这个限定表示,虽然认为序列长度为 N ,但最后 $(N/2)-1$ 个点实际上为零. 图 10.4 中给出一个周期性因果序列及其偶部和奇部($N=8$)的例子. 因为 $\tilde{x}[n]$ 在每个周期的后半部均为零,所以 $\tilde{x}[-n]$ 则在每个周期的前半部为零. 因此,除了 $n=0$ 和 $n=N/2$ 外, $\tilde{x}[n]$ 和 $\tilde{x}[-n]$ 的非零部分之间没有重叠. 这样,对于“因果”周期序列,

$$\tilde{x}[n] = \begin{cases} 2\tilde{x}_e[n], & n=1, 2, \dots, (N/2)-1, \\ \tilde{x}_e[n], & n=0, N/2, \\ 0, & n=(N/2)+1, \dots, N-1, \end{cases} \quad (10.37)$$

和

$$\tilde{x}_e[n] = \begin{cases} 2\tilde{x}_o[n], & n=1, 2, \dots, (N/2)-1, \\ 0, & n=(N/2)+1, \dots, N-1. \end{cases} \quad (10.38)$$

如果我们定义 $\tilde{u}_N[n]$ 为周期序列

$$\tilde{u}_N[n] = \begin{cases} 1, & n=0, N/2, \\ 2, & n=1, 2, \dots, (N/2)-1, \\ 0, & n=(N/2)+1, \dots, N-1, \end{cases} \quad (10.39)$$

则当 N 为偶数时, $\tilde{x}[n]$ 可以表示成

$$\tilde{x}[n] = \tilde{x}_e[n]\tilde{u}_N[n] \quad (10.40)$$

和

$$\tilde{x}[n] = \tilde{x}_o[n]\tilde{u}_N[n] + x[0]\delta[n] + x[N/2]\delta[n-(N/2)], \quad (10.41)$$

其中 $\delta[n]$ 是周期为 N 的周期性单位冲激序列。这样, 序列 $\tilde{x}[n]$ 可以由 $\tilde{x}_e[n]$ 完全恢复。另一方面, $\tilde{x}_o[n]$ 在 $n=0$ 和 $n=N/2$ 处始终为零, 因此只有当 $n \neq 0$ 和 $n \neq N/2$ 时才能由 $\tilde{x}_o[n]$ 恢复 $\tilde{x}[n]$ 。

如果 $\tilde{x}[n]$ 是周期为 N 的实周期序列, 其离散傅里叶级数为 $\tilde{X}[k]$, 则 $\tilde{X}[k]$ 的实部 $X_R[k]$ 是 $\tilde{x}_e[n]$ 的 DFS, 且 $j\tilde{X}_I[k]$ 是 $\tilde{x}_o[n]$ 的 DFS。这样, 式(10.40)和(10.41)意味着, 对于一个周期为 N 并且在上面所定义的意义上是因果的周期序列, $\tilde{X}[k]$ 可以从它的实部或(几乎)从它的虚部得以恢复。同样, $\tilde{X}_I[k]$ 可由 $X_R[k]$ 推出, 而 $X_R[k]$ 也(几乎)能由 $\tilde{X}_I[k]$ 求出。

具体讲, 假设 $X_R[k]$ 已知, 则 $\tilde{X}_I[k]$ 可以按下列步骤求出:

1. 用 DFS 合成式计算 $\tilde{x}_e[n]$.

$$\tilde{x}_e[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_R[k] e^{j(2\pi/N)kn}. \quad (10.42)$$

2. 用式(10.40)计算 $\tilde{x}[n]$.

3. 用 DFS 分解式计算 $\tilde{X}[k]$.

$$\tilde{X}[k] = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}[n] e^{-j(2\pi/N)kn} = \tilde{X}_R[k] + j\tilde{X}_I[k] \quad (10.43)$$

与 10.1 节所讨论的一般因果情况不同, 因为式(10.42)和(10.43)可以用 FFT 算法精确高效地计算出来, 所以上面所概括的步骤可以在计算机上实现。

为了得出 $X_R[k]$ 和 $\tilde{X}_I[k]$ 之间明确的关系式, 我们可解析地执行以上步骤。由式(10.40)和(8.39)得

$$\begin{aligned} \tilde{X}[k] &= \tilde{X}_R[k] + j\tilde{X}_I[k] \\ &= \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} X_R[m] U_N[k-m], \end{aligned} \quad (10.44)$$

也就是说, $\tilde{X}[k]$ 是 $\tilde{x}_e[n]$ 的 DFS $\tilde{X}_R[k]$ 和 $\tilde{N}[n]$ 的 DFS $U_N[k]$ 的周期卷积。可以证明 $\tilde{u}_N[n]$ 的 DFS 为(见习题 10.7)

$$\tilde{U}_N[k] = \begin{cases} N, & k=0, \\ -j2\cot(\pi k/N), & k \text{ 为奇数}, \\ 0, & k \text{ 为偶数}, \end{cases} \quad (10.45)$$

如果我们定义

$$\tilde{V}_N[k] = \begin{cases} -j2\cot(\pi k/N), & k \text{ 为奇数}, \\ 0, & k \text{ 为偶数}, \end{cases} \quad (10.46)$$

则式(10.44)可以表示成

$$\tilde{X}[k] = \tilde{X}_R[k] + \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} \tilde{X}_R[m] \tilde{V}_N[k-m]. \quad (10.47)$$

因此

$$j\tilde{X}_I[k] = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} \tilde{X}_R[m] \tilde{V}_N[k-m], \quad (10.48)$$

上式就是周期性因果序列的 DFS 之实部和虚部间的关系式. 同样, 由式(10.41)开始我们可以得出

$$\tilde{X}_R[k] = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} j\tilde{X}_I[m] \tilde{V}_N[k-m] + \tilde{x}[0] + (-1)^k \tilde{x}[N/2]. \quad (10.49)$$

式(10.48)和(10.49)表明了周期序列 $\tilde{x}[n]$ 的 DFS 表达式之实部和虚部间的关系. 如果将 $\tilde{x}[n]$ 看作是有限长序列 $x[n]$ 的周期重复, 如式(10.34)所示, 则

$$x[n] = \begin{cases} \tilde{x}[n], & 0 \leq n \leq N-1, \\ 0, & \text{其它.} \end{cases} \quad (10.50)$$

若 $x[n]$ 具有“周期因果”的性质, 并且周期为 N (即当 $n < 0$ 和 $n > N/2$ 时 $x[n] = 0$), 则以上讨论的全部结果都可用于 $x[n]$ 的离散傅里叶变换. 换句话说, 我们可以从式(10.48)和(10.49)中去掉“~”号, 从而得 DFT 关系式为

$$j\tilde{X}_I[k] = \begin{cases} \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} X_R[m] V_N[k-m], & 0 \leq k \leq N-1, \\ 0, & \text{其它.} \end{cases} \quad (10.51)$$

和

$$\tilde{X}_R[k] = \begin{cases} \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} j\tilde{X}_I[m] V_N[k-m] + x[0] + (-1)^k x[N/2], & 0 \leq k \leq N-1, \\ 0, & \text{其它.} \end{cases} \quad (10.52)$$

应当注意, 由式(10.46)给出的序列 $V_N[k-m]$ 是以 N 为周期的序列, 因此我们不必担心式(10.51)和(10.52)中 $((k-m))_N$ 的计算. 式(10.51)和(10.52)是我们所要求的实序列之 N 点 DFT 的实部和虚部间的关系式, 该序列的实际长度小于或等于 $(N/2)+1$ (N 为偶数). 这些方程均为循环卷积, 例如式(10.51)可以通过以下步骤高效地计算:

1. 计算 $X_R[k]$ 的反 DFT 得出序列

$$x_{ep}[n] = \frac{x[n] + x[((-n))_N]}{2}, \quad 0 \leq n \leq N-1. \quad (10.53)$$

2. 由下式计算 $x[n]$ 的周期奇部

$$x_{op}[n] = \begin{cases} x_{ep}[n], & 0 < n < N/2, \\ -x_{ep}[n], & N/2 < n \leq N-1, \\ 0, & \text{其它.} \end{cases} \quad (10.54)$$

3. 计算 $x_{op}[n]$ 的 DFT 得出 $jX_i[k]$.

请注意, 如果我们在步骤 2 中不是计算 $x[n]$ 的奇部, 而是计算

$$x[n] = \begin{cases} x_{ep}[0], & n=0, \\ 2x_{ep}[n], & 0 < n < N/2, \\ x_{ep}[N/2], & n=N/2, \\ 0, & \text{其它,} \end{cases} \quad (10.55)$$

则所得序列的 DFT 应当是 $x[n]$ 的完整 DFT $X[k]$.

10.3 幅度与相位间的关系

到目前为止, 我们已集中讨论了一个序列的傅里叶变换之实部和虚部间的关系. 我们常常对傅里叶变换的幅度和相位间的关系很感兴趣, 在这一节中我们就来研究这些函数存在唯一性关系的条件. 虽然从表面上看似乎实部与虚部间的关系就表示幅度和相位间的关系, 但实际上并不如此. 5.4 节中的例 5.10 清楚地表明了这一点. 那个例子中的两个系统函数 $H_1[z]$ 和 $H_2[z]$ 假定对应于因果的稳定系统, 因此 $H_1(e^{j\omega})$ 的实部和虚部间的关系表现为式(10.15)和(10.16)的希尔伯特变换关系, $H_2(e^{j\omega})$ 的实部和虚部也同样如此. 但是, $\angle H_1(e^{j\omega})$ 不能由 $|H_1(e^{j\omega})|$ 得出, 因为 $H_1(e^{j\omega})$ 和 $H_2(e^{j\omega})$ 虽具有相同的幅度, 但其相位却不同.

序列 $x[n]$ 之傅里叶变换实部和虚部间的希尔伯特变换关系是以 $x[n]$ 的因果性为基础的. 如果将因果性施加在由 $x[n]$ 导出的序列 $\hat{x}[n]$ 上, 该序列的傅里叶变换 $\hat{X}(e^{j\omega})$ 这是 $x[n]$ 的傅里叶变换之对数, 则我们可以得到幅度和相位间的希尔伯特变换关系. 具体讲, 我们定义 $\hat{x}[n]$ 使得

$$x[n] \xrightarrow{\mathcal{F}} X(e^{j\omega}) = |X(e^{j\omega})| e^{j\arg[X(e^{j\omega})]}, \quad (10.56a)$$

$$\hat{x}[n] \xrightarrow{\mathcal{F}} \hat{X}(e^{j\omega}), \quad (10.56b)$$

式中

$$\hat{X}(e^{j\omega}) = \log[X(e^{j\omega})] = \log|X(e^{j\omega})| + j\arg[X(e^{j\omega})]. \quad (10.57)$$

序列 $\hat{x}[n]$ 通常称为 $x[n]$ 的复倒谱, 其缘由将在第十二章中详细地加以推导. 由于需要计算复值函数的对数, 因而式(10.57)也需要仔细地加以说明. 这些问题都将在第十二章中详细讨论.

如果 $\hat{x}[n]$ 是因果的, 则 $\hat{X}(e^{j\omega})$ 的实部和虚部分别为 $\log|X(e^{j\omega})|$ 和 $\arg[X(e^{j\omega})]$, 且它们之间的关系符合式(10.15)和(10.16), 即

$$\arg[X(e^{j\omega})] = -\frac{1}{2\pi} \mathcal{P} \int_{-\pi}^{\pi} \log|X(e^{j\theta})| \cot\left(\frac{\omega-\theta}{2}\right) d\theta \quad (10.58)$$

和

$$\log|X(e^{j\omega})| = \hat{x}[0] + \frac{1}{2\pi} \mathcal{P} \int_{-\pi}^{\pi} \arg[X(e^{j\theta})] \cot\left(\frac{\omega-\theta}{2}\right) d\theta, \quad (10.59a)$$

其中,式(10.59a)中的 $\hat{x}[0]$ 等于

$$\hat{x}[0] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \log |X(e^{j\omega})| d\omega. \quad (10.59b)$$

虽然对于这一点还不是十分清楚,但在第十二章中我们将会知道,5.6节中所定义的最小相位条件,即 $X(z)$ 的全部极点和零点均在单位圆内,可保证复倒谱的因果性。因此5.6节中的最小相位条件和复倒谱的因果性条件是从不同角度所得出的相同的约束条件。请注意,若 $\hat{x}[n]$ 是因果的,则 $\arg[X(e^{j\omega})]$ 可以通过式(10.58)由 $\log |X(e^{j\omega})|$ 完全确定;但是由式(10.59)完全确定 $\log |X(e^{j\omega})|$ 不但需要相位 $\arg[X(e^{j\omega})]$,还需要量 $\hat{x}[0]$ 。若 $\hat{x}[0]$ 是未知的,则确定的 $\log |X(e^{j\omega})|$ 只是相差一个相加的常数,或等效地说,确定的 $|X(e^{j\omega})|$ 只是相差一个相乘的(增益)常数。

复倒谱的最小相位或因果性并不是保证傅里叶变换的幅度和相位间唯一性关系的唯一限制条件。作为另外一种限制条件的例子,已经证明(Hayes et al., 1980),如果一个序列是有限的并且它的 z 变换没有互为共轭倒数对的零点,则序列(当然也包括其傅里叶变换的幅度)可以由其傅里叶变换的相位来唯一确定,只相差一个比例因子。

10.4 复序列的希尔伯特变换关系

至此,我们已经研究了因果序列的傅里叶变换和周期序列的离散傅里叶变换的希尔伯特变换关系,其中周期序列在每个周期的后半部分为零的意义上是“周期因果的”。在这一节中我们研究可以通过离散卷积将其实部和虚部联系起来的复序列,这种离散卷积类似于在前几节中推导出的希尔伯特变换关系。当把带通信号表示成复信号时,在某种意义上此复信号完全类似于连续时间信号理论中的解析信号,这些希尔伯特变换关系是非常有用的。

如同前面所讨论的,可以用因果性或单边性的概念为基础来推导希尔伯特变换关系。因为我们十分关心建立复序列的实部和虚部之间的关系,所以可把单边性的概念用于序列的傅里叶变换。当然不能要求在 $\omega < 0$ 区域内的傅里叶变换为零,因为它必须是周期的。可是我们可以假设序列的傅里叶变换在每个周期后半部均为零,也就是说,它的 z 变换在单位圆的下半部分($-\pi \leq \omega < 0$)为零。这样,若 $x[n]$ 表示某序列,且 $X(e^{j\omega})$ 是它的傅里叶变换,则要求

$$X(e^{j\omega}) = 0, \quad -\pi \leq \omega < 0. \quad (10.60)$$

(我们也可以假设当 $0 < \omega \leq \pi$ 时 $X(e^{j\omega})$ 为零。)与 $X(e^{j\omega})$ 相对应的序列 $x[n]$ 必须是复数,因为若 $x[n]$ 为实数,则 $X(e^{j\omega})$ 必须是共轭对称的,即 $X(e^{j\omega}) = X^*(e^{-j\omega})$ 。所以,可将 $x[n]$ 表示成

$$x[n] = x_r[n] + jx_i[n], \quad (10.61)$$

式中 $x_r[n]$ 和 $x_i[n]$ 为实序列。在连续时间信号理论中相对照的信号是解析函数,因此称之为解析信号。虽然对于序列而言解析性没有正规的意义,但尽管如此,我们仍然将该术语用于其傅里叶变换为单边的复序列。

如果 $X_r(e^{j\omega})$ 和 $X_i(e^{j\omega})$ 分别表示实序列 $x_r[n]$ 和 $x_i[n]$ 的傅里叶变换,则

$$X(e^{j\omega}) = X_r(e^{j\omega}) + jX_i(e^{j\omega}), \quad (10.62a)$$

由此可得

$$X_r(e^{j\omega}) = \frac{1}{2}[X(e^{j\omega}) + X^*(e^{-j\omega})], \quad (10.62b)$$

和

$$jX_i(e^{j\omega}) = \frac{1}{2}[X(e^{j\omega}) - X^*(e^{-j\omega})]. \quad (10.62c)$$

请注意,式(10.62c)给出 $jX_i(e^{j\omega})$ 的表达式,它是虚数信号 $jx_i[n]$ 的傅里叶变换.还应注意, $X_r(e^{j\omega})$ 和 $X_i(e^{j\omega})$ 通常均为复值函数,而且复变换 $X_r(e^{j\omega})$ 和 $jX_i(e^{j\omega})$ 所起的作用分别类似于前几节中因果序列的偶部和奇部所起的作用.但是, $X_r(e^{j\omega})$ 是共轭对称的,即 $X_r(e^{j\omega}) = X_r^*(e^{-j\omega})$.类似地, $jX_i(e^{j\omega})$ 是共轭反对称的,即 $jX_i(e^{j\omega}) = -jX_i^*(e^{-j\omega})$.

图 10.5 给出了一个复序列 $x[n] = x_r[n] + jx_i[n]$ 的复单边傅里叶变换和实序列 $x_r[n]$ 、 $x_i[n]$ 相应的双边傅里叶变换的例子.图中用画图的方法表明了式(10.62)包含的抵消作用.

如果当 $-\pi \leq \omega < 0$ 时 $X(e^{j\omega})$ 为零,则 $X(e^{j\omega})$ 和 $X^*(e^{-j\omega})$ 的非零部分之间没有重叠.因此, $X(e^{j\omega})$ 既可以由 $X_r(e^{j\omega})$ 也可以由 $X_i(e^{j\omega})$ 来恢复.因为假设 $X(e^{j\omega})$ 在 $\omega = \pm\pi$ 处为零,所以 $X(e^{j\omega})$ 可以由 $jX_i(e^{j\omega})$ 完全恢复.这与 10.2 节的情况不同,在该节中因果序列也可以由其奇部恢复,但在端点处除外.

特别是,

$$X(e^{j\omega}) = \begin{cases} 2X_r(e^{j\omega}), & 0 \leq \omega < \pi, \\ 0, & -\pi \leq \omega < 0, \end{cases} \quad (10.63)$$

以及

$$X(e^{j\omega}) = \begin{cases} 2jX_i(e^{j\omega}), & 0 \leq \omega < \pi, \\ 0, & -\pi \leq \omega < 0. \end{cases} \quad (10.64)$$

我们可以利用上式之一直接得出 $X_r(e^{j\omega})$ 和 $X_i(e^{j\omega})$ 之间的关系:

$$X_i(e^{j\omega}) = \begin{cases} -jX_r(e^{j\omega}), & 0 < \omega < \pi, \\ jX_r(e^{j\omega}), & -\pi \leq \omega < 0. \end{cases} \quad (10.65)$$

或

$$X_i(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega})X_r(e^{j\omega}), \quad (10.66a)$$

其中

$$H(e^{j\omega}) = \begin{cases} -j, & 0 < \omega < \pi, \\ j, & -\pi < \omega < 0. \end{cases} \quad (10.66b)$$

通过比较图 10.5(c) 和 10.5(d) 就可说明式(10.66).现在, $X_i(e^{j\omega})$ 是 $x[n]$ 的虚部 $x_i[n]$ 的傅里叶变换, $X_r(e^{j\omega})$ 和 $x[n]$ 的实部 $x_r[n]$ 的傅里叶变换.因此,按照式(10.66),可以让 $x_r[n]$ 通过一个频率响应为 $H(e^{j\omega})$ (由式(10.66b)给出) 的线性时不变离散时间系统而得到 $x_i[n]$.这个频率响应有单位幅度,对于 $0 < \omega < \pi$ 有一 $\pi/2$ 的相位角,而对于 $-\pi < \omega < 0$ 有 $+\pi/2$ 的相位角.这样的系统称为理想 90° 移相器.换一种说法,如果我们考虑对一个序列进行某种运算,则 90° 移相器也称为希尔伯特变换器.由式(10.66)可得

$$X_r(e^{j\omega}) = \frac{1}{H(e^{j\omega})}X_i(e^{j\omega}) = -H(e^{j\omega})X_i(e^{j\omega}). \quad (10.67)$$

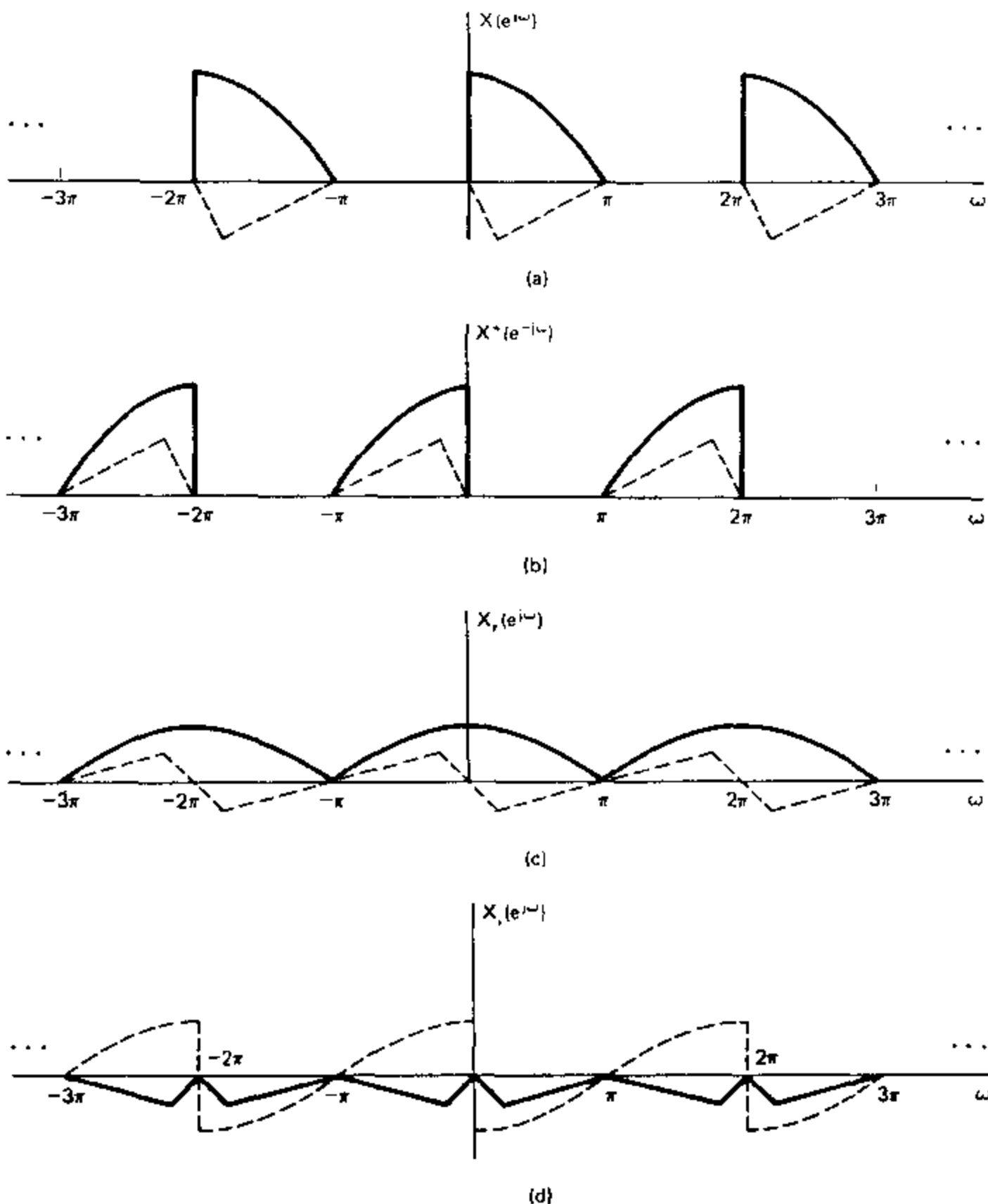


图 10.5 举例说明单边傅里叶变换的分解。(实线表示实部,虚线表示虚部。)

因此,也可以利用一个 90° 移相器由 $x_i[n]$ 得出 $-x_r[n]$.

与式(10.66b)给出的频率响应 $H(e^{j\omega})$ 相对应的 90° 移相器的冲激响应 $h[n]$ 是

$$h[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^0 j e^{j\omega n} d\omega - \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi j e^{j\omega n} d\omega$$

或

$$h[n] = \begin{cases} \frac{2 \sin^2(\pi n/2)}{\pi}, & n \neq 0, \\ 0, & n = 0. \end{cases} \quad (10.68)$$

该冲激响应如图 10.6 所示. 利用式(10.66)和(10.67), 我们得到表达式

$$x_r[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h[n-m]x_i[m] \quad (10.69a)$$

和

$$x_i[n] = - \sum_{m=-\infty}^{\infty} h[n-m]x_r[m]. \quad (10.69b)$$

式(10.69)就是所要求的离散时间解析信号之实部和虚部间的希尔伯特变换关系.

图 10.7 表示如何利用离散时间希尔伯特变换器系统来产生只由一对实信号组成的复解析信号.

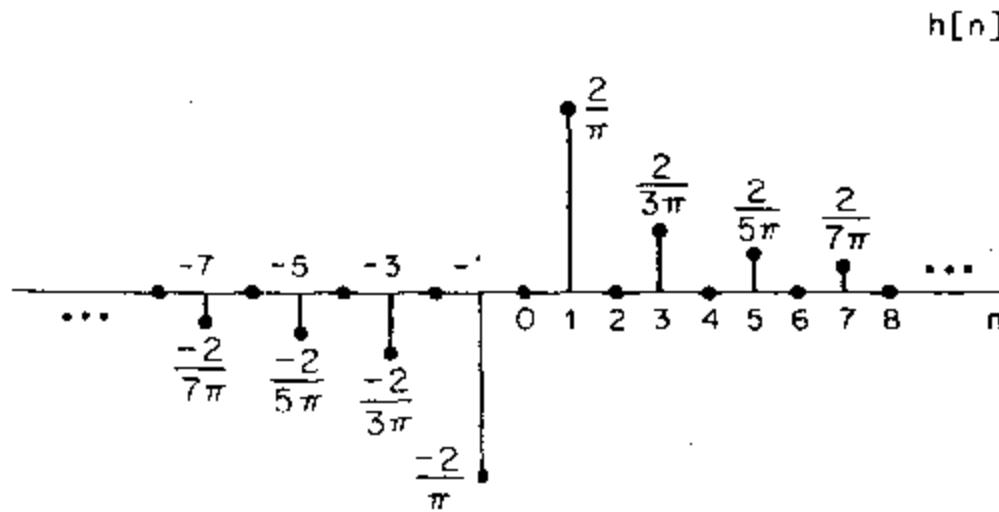


图 10.6 理想希尔伯特变换器或 90°移相器的冲激响应.

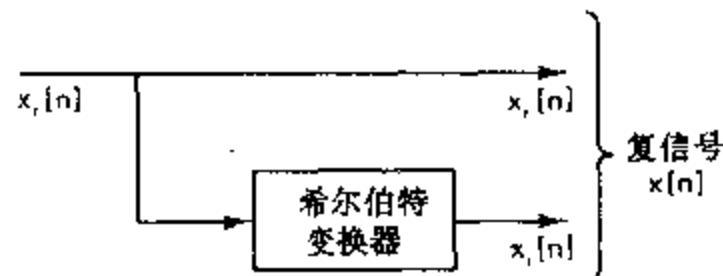


图 10.7 产生具单边博里叶变换的复序列的方框图.

10.4.1 希尔伯特变换器的设计

由式(10.68)所给出的希尔伯特变换器的冲激响应不是绝对可和的. 因此,

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]e^{-j\omega n} \quad (10.70)$$

只是在均方意义下才收敛为式(10.66b). 所以, 理想希尔伯特变换器与理想低通滤波器和理想带限微分器都并列为有价值的理论概念, 它们都相当于非因果系统, 并且其系统函数只在有限的条件下才存在.

当然, 我们可以对理想希尔伯特变换器进行逼近. 利用窗函数法或等波纹逼近法就能设计出对具有恒定群延迟的 FIR 滤波器的逼近. 这些逼近能精确实现 90°相移并具有因果 FIR 系统所要求的线性相位分量. 这里我们将通过用凯泽窗设计希尔伯特变换器的例子来说明这类逼近的性质.

例 10.3

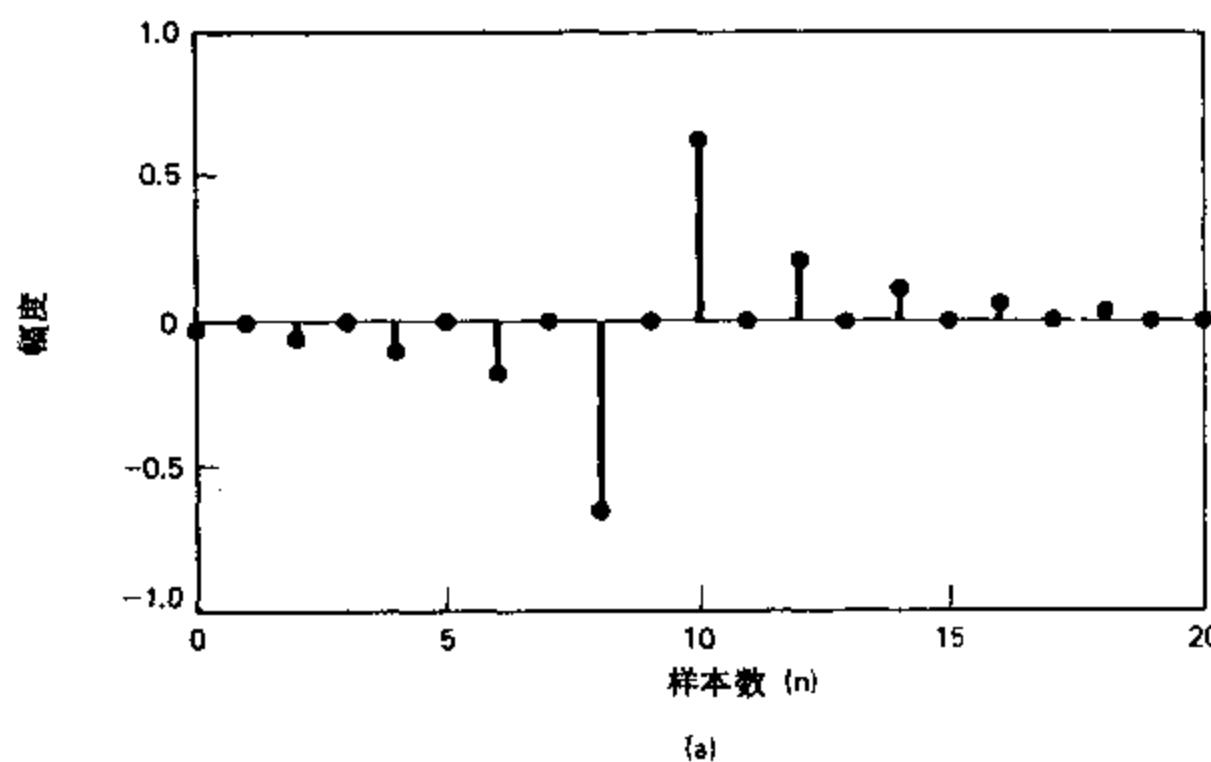
一个 M 阶(长度为 $M+1$)FIR 离散希尔伯特变换器的凯泽窗逼近应当为如下形式

$$h[n] = \begin{cases} \frac{I_o\{\beta(1 - [(n-n_d)/n_d]^2)^{1/2}\}}{I_o(\beta)} \left\{ \frac{2 \sin^2[\pi(n-n_d)/2]}{n-n_d} \right\}, & 0 \leq n \leq M, \\ 0, & \text{其它,} \end{cases} \quad (10.71)$$

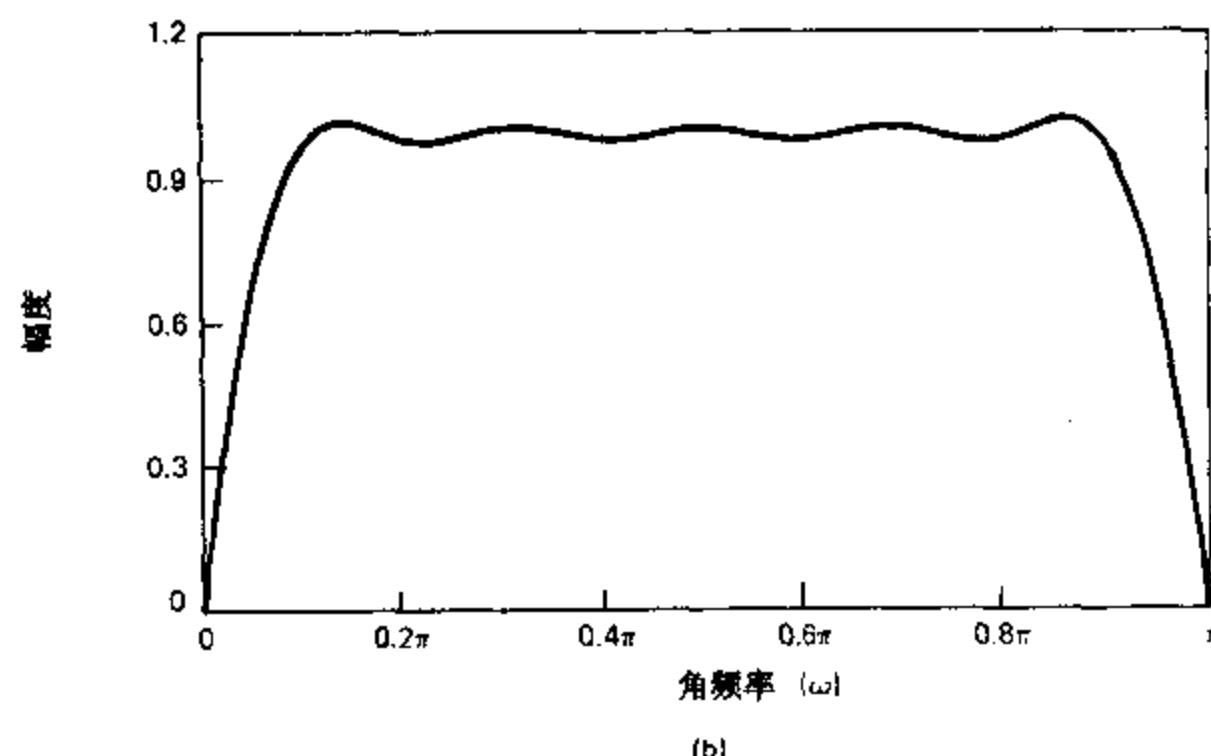
式中 $n_d = M/2$. 正如在 5.7.3 节中所讨论的, 若 M 为偶数, 则系统是一个 II 型 FIR 广义线性相位系统.

图 10.8(a) 表示冲激响应, 图 10.8(b) 表示频率响应的幅度, 其中 $M=18$ 且 $\beta=2.629$. 因为 $h[n]$ 满足对称条件, 即 $0 \leq n \leq M$ 时 $h[n] = -h[M-n]$, 所以相位正好等于 90° 再加上一个线性分量, 该分量对应于 $n_d=18/2=9$ 个样本的延迟, 即

$$\angle H(e^{j\omega}) = -\frac{\pi}{2} + 9\omega, \quad 0 < \omega < \pi. \quad (10.72)$$



(a)



(b)

图 10.8 利用凯泽窗设计的 FIR 希尔伯特变换器的(a)冲激响应, 和(b)幅度响应. ($M=18$ 和 $\beta=2.629$.)

从图 10.8(b)可以看出, 正如 II 型 FIR 系统所要求的, 频率响应在 $z=1$ 和 $z=-1$ ($\omega=0$

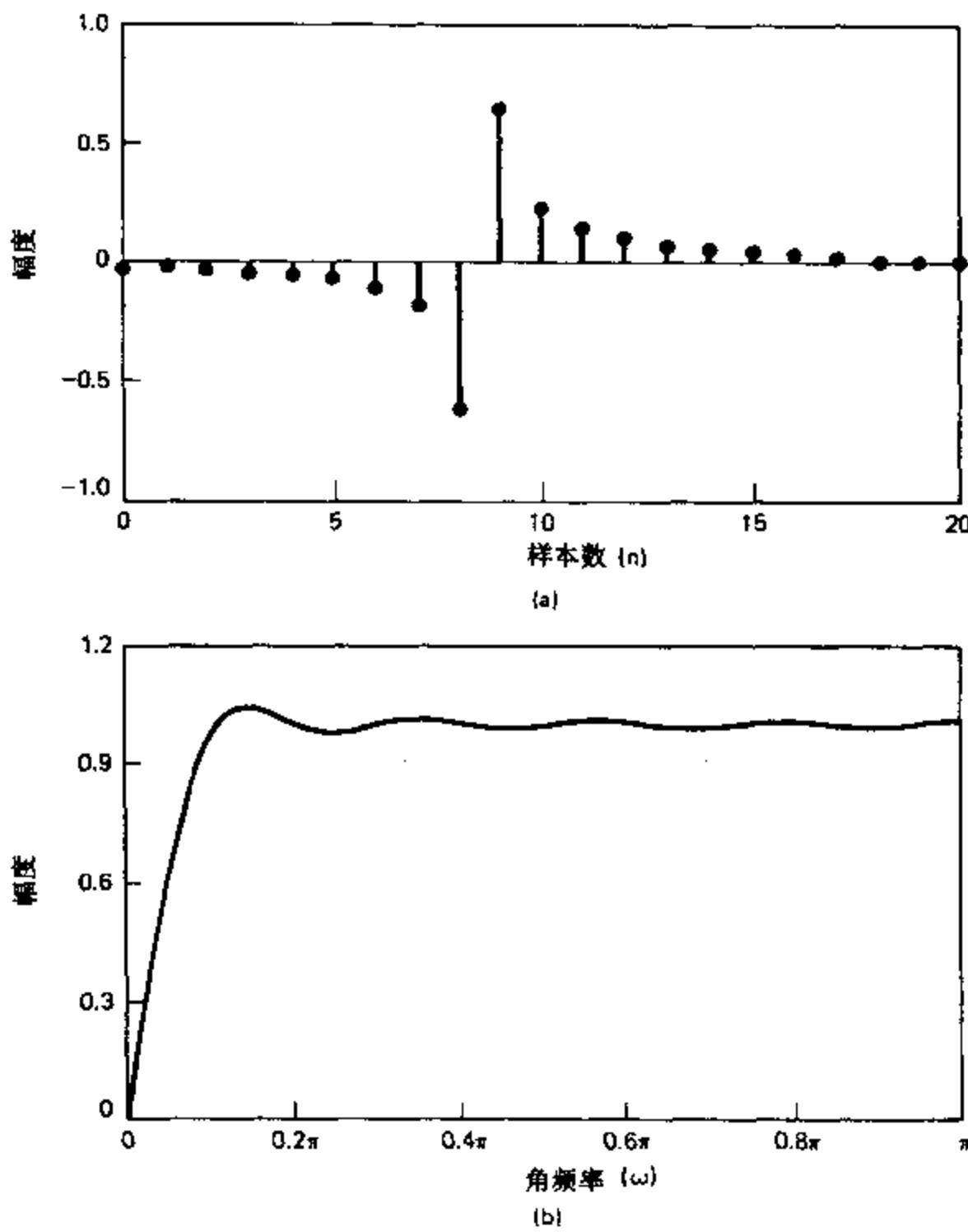


图 10.9 利用凯泽窗设计的 FIR 希尔伯特变换器的(a)冲激响应,和(b)幅度响应. ($M=17$ 且 $\beta=2.44$.)

0 和 $\omega=\pi$) 处为零. 因此,除了在某个中间段 $\omega_L < |\omega| < \omega_H$ 之外幅度响应不能十分接近于 1 .

若 M 是一个奇整数, 则我们得到如图 10.9 所示的 II 型系统, 其中 $M=17$ 且 $\beta=2.44$. 对于 II 型系统, 频率响应只需要在 $z=1$ ($\omega=0$) 处为零. 因此在 $\omega=\pi$ 附近的频率上可以得到恒定幅度响应的良好近似. 相位响应在所有的频率上正好为 90° 加上一个对应于 $n_d=17/2=8.5$ 个样本延迟的线性相位分量, 即

$$\angle H(e^{j\omega}) = -\frac{\pi}{2} - 8.5\omega. \quad (10.73)$$

比较图 10.8(a)和图 10.9(a)可以看出, 当 $\omega=\pi$ 处不需要逼近恒定幅度时, II 型 FIR 希尔伯特变换器在计算上明显优于 IV 型系统. 这是因为对于 II 型系统来说, 冲激响应的偶序号样本正好为零. 因此若在两种情况下都利用反对称性, 则要计算出每个输出样本, $M=17$ 的系统需要 8 次乘法, 而 $M=18$ 的系统只需要 5 次乘法.

对于具有等波纹幅度逼近和精确 90° 相位的 I 型和 N 型 FIR 线性相位希尔伯特变换器的逼近,可以用 7.7 节所描述的帕克-麦克莱伦算法设计,当设计同样长度的滤波器时,该方法与窗函数法相比可使幅度逼近误差进一步减小(Rabiner and Schafer, 1974).

I 型和 N 型 FIR 系统的相位精确性好坏是人们将它们用于逼近希尔伯特变换器时所考虑的衡量指标. IIR 系统在逼近一个希尔伯特变换器时,一定有一些相位响应误差及幅度响应误差. 设计 IIR 希尔伯特变换器最成功的方法是设计一个“相位分裂器”,它由两个全通系统组成,这两个系统的相位响应在 $0 < |\omega| < \pi$ 频段的某一部分上相差近 90° . 这样的系统可以用双线性变换法来设计,该方法将一个连续时间相位分裂系统转换成一个离散时间系统. 有关该系统的例子,请参见戈尔德等人(Gold et al., 1970)的论文.

图 10.10 给出了一个 90° 相位分裂系统. 如果 $x_r[n]$ 表示实输入信号,且 $x_i[n]$ 是它的希尔伯特变换,则复序列 $x[n] = x_r[n] + jx_i[n]$ 的傅里叶变换在 $-\pi \leq \omega < 0$ 上恒等于零,即在 z 平面单位圆的下半部上 $X(z)$ 为零. 在图 10.7 的系统中,我们是利用希尔伯特变换器由 $x_r[n]$ 产生信号 $x_i[n]$. 而在图 10.10 中,则通过两个系统 $H_1(e^{j\omega})$ 和 $H_2(e^{j\omega})$ 来处理 $x_r[n]$. 如果图 10.10 中的 $H_1(e^{j\omega})$ 和 $H_2(e^{j\omega})$ 是两个相位响应相差 90° 的全通系统,则复信号 $y[n] = y_r[n] + jy_i[n]$ 的傅里叶变换在 $-\pi \leq \omega < 0$ 上也为零. 另外,因为相位分裂系统是全通的,所以 $|Y(e^{j\omega})| = |X(e^{j\omega})|$. $Y(e^{j\omega})$ 和 $X(e^{j\omega})$ 的相位将差一个 $H_1(e^{j\omega})$ 和 $H_2(e^{j\omega})$ 的共同相位分量.

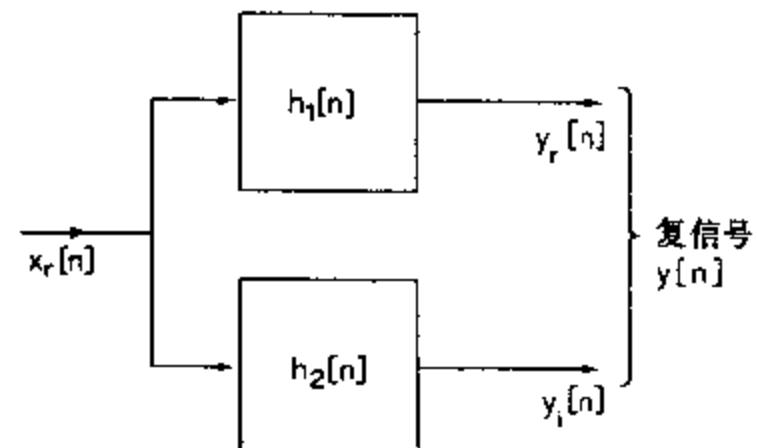


图 10.10 全通相位分裂法的方框图,此方法可产生具单边傅里叶变换的复序列.

10.4.2 带通信号的表示

解析信号的许多应用与窄带通信信号有关. 在这些应用中,为了方便起见,有时常用低通信号来表示带通信号. 我们先考虑复低通信号

$$x[n] = x_r[n] + jx_i[n],$$

式中 $x_i[n]$ 是 $x_r[n]$ 的希尔伯特变换,且

$$X(e^{j\omega}) = 0, \quad -\pi \leq \omega < 0.$$

傅里叶变换 $X_r(e^{j\omega})$ 和 $jX_i(e^{j\omega})$ 分别如图 10.11(a) 和 10.11(b) 所示,最终的变换 $X(e^{j\omega}) = X_r(e^{j\omega}) + jX_i(e^{j\omega})$ 如图 10.11(c). (实线为实部,虚线为虚部.) 现在考虑序列

$$s[n] = x[n]e^{j\omega_r n} = s_r[n] + js_i[n], \quad (10.74)$$

其中 $s_r[n]$ 和 $s_i[n]$ 是实序列. 它所对应的傅里叶变换是

$$S(e^{j\omega}) = X(e^{j(\omega - \omega_r)}), \quad (10.75)$$

如图 10.11(d) 所示. 将式(10.62) 用于 $S(e^{j\omega})$ 得到方程

$$S_r(e^{j\omega}) = \frac{1}{2}[S(e^{j\omega}) + S^*(e^{-j\omega})], \quad (10.76a)$$

$$jS_i(e^{j\omega}) = \frac{1}{2}[S(e^{j\omega}) - S^*(e^{-j\omega})]. \quad (10.76b)$$

在图 10.11 的例子中, 图 10.11(e)和(f)分别表示 $S_r(e^{j\omega})$ 和 $jS_i(e^{j\omega})$. 由图中可以直接看出, 若 $\Delta\omega < |\omega| \leq \pi$ 且 $\omega_c + \Delta\omega < \pi$ 时 $X_r(e^{j\omega}) = 0$, 则 $S(e^{j\omega})$ 是一个单边带通信信号, 使得除在区间 $\omega_c < \omega < \omega_c + \Delta\omega$ 之外 $S(e^{j\omega}) = 0$. 正如图 10.11 的例子所表明的, 用式(10.61)和(10.62)可以证明, $S_i(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega})S_r(e^{j\omega})$, 或者换句话说, $s_i[n]$ 是 $s_r[n]$ 的希尔伯特变换.

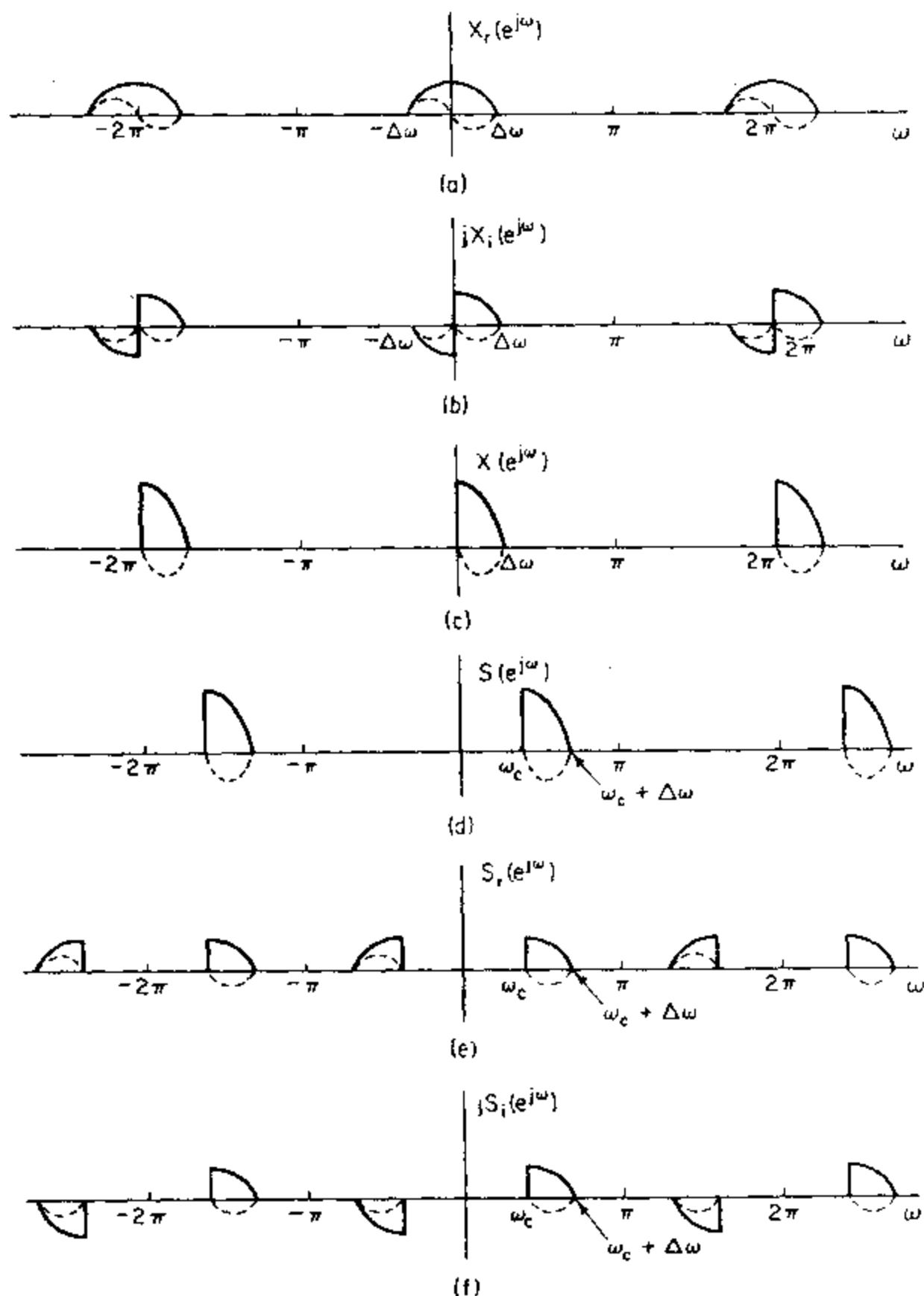


图 10.11 带通信号的傅里叶变换.(实线为实部,虚线为虚部.) (请注意,在(b)和(f)部分表示函数 $jX_i(e^{j\omega})$ 和 $jS_i(e^{j\omega})$, 这里 $X_i(e^{j\omega})$ 和 $S_i(e^{j\omega})$ 分别是 $x_i[n]$ 和 $S_i[n]$ 的希尔伯特变换之傅里叶变换.)

复信号也可以通过其幅度和相位来表示, 即 $x[n]$ 可以表示成

$$x[n] = A[n]e^{j\theta[n]}, \quad (10.77a)$$

其中

$$A[n] = (x_r^2[n] + x_i^2[n])^{1/2} \quad (10.77b)$$

且

$$\phi[n] = \arctan\left(\frac{x_i[n]}{x_r[n]}\right). \quad (10.77c)$$

因此,由式(10.74)和(10.77)可以将 $s[n]$ 表示为

$$s[n] = (x_r[n] + jx_i[n])e^{j\omega_c n} \quad (10.78a)$$

$$= A[n]e^{j(\omega_c n + \phi[n])}, \quad (10.78b)$$

由此我们可以得出表达式

$$s_r[n] = x_r[n]\cos\omega_c n - x_i[n]\sin\omega_c n \quad (10.79a)$$

或

$$s_r[n] = A[n]\cos(\omega_c n + \phi[n]) \quad (10.79b)$$

以及

$$s_i[n] = x_r[n]\sin\omega_c n + x_i[n]\cos\omega_c n \quad (10.80a)$$

或

$$s_i[n] = A[n]\sin(\omega_c n + \phi[n]). \quad (10.80b)$$

式(10.79a)和(10.80a)分别如图 10.12(a)和 10.12(b)所示. 这些图说明了如何由一个实低通信号形成复带通(单边带)信号.

式(10.79)和(10.80)就是复低通信号 $x[n]$ 的实部和虚部对一般复带通信号 $s[n]$ 的时域表示. 通常, 用这种复数表示方法来描述一个实带通信号是很方便的. 例如, 式(10.79a)提供了一种利用一个“同相”分量 $x_r[n]$ 和一个“正交”(90° 相移)分量 $x_i[n]$ 在时间域表示实带通信号的方法. 的确如图 10.11(e)所示, 式(10.79a)可以表示其傅里叶变换对于通带中心不是共轭对称的实带通信号(或滤波器的冲激响应)(如像形式为 $x_r[n]\cos\omega_c n$ 之类的信号).

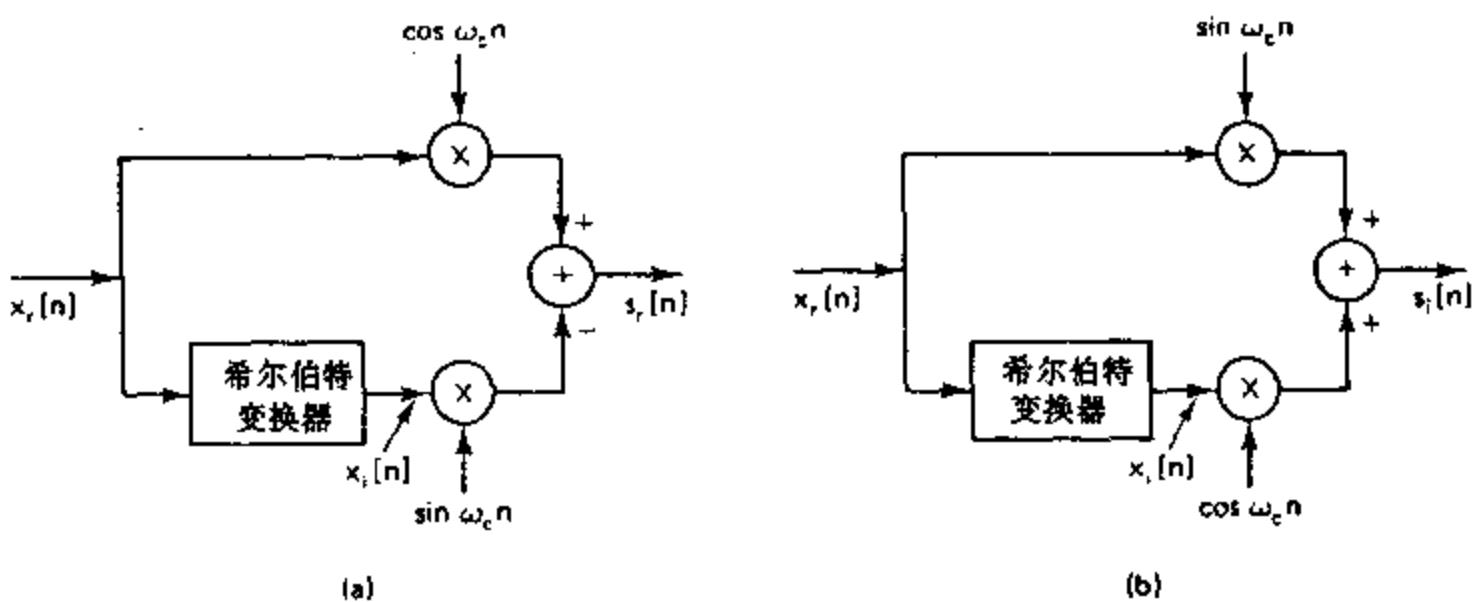


图 10.12 利用式(10.79a)和(10.80a)得到单边带信号的方框图.

从式(10.79)和(10.80)的形式以及图 10.12 清楚可见,一般的带通信号都具有正弦的形式,它的幅度和相位均受到调制. 序列 $A[n]$ 称为包络, $\phi[n]$ 称为相位. 这种窄带信号表示法可用于表示各种幅度、相位调制系统. 图 10.11 就是说明单边带调制的一个例子. 如果我们把实信号 $s_r[n]$ 看作是低通实信号 $x_r[n]$ 作为输入时由单边带调制所得到的结

果,则图 10.12(a)表示该单边带调制系统的实现方案.在频率分割多路传输中单边带调制系统是很有用的,因为它可以表示一个具有最小带宽的实带通信号.

10.4.3 带通采样

解析信号的另一个重要用途表现在对带通信号的采样中.第三章中我们曾看到,通常如果一个连续时间信号具有带限傅里叶变换,并且当 $|\Omega| \geq \Omega_N$ 时 $S_c(j\Omega) = 0$, 则在采样率满足不等式 $2\pi/T \geq 2\Omega_N$ 的条件下该信号可以完全由它的样本来表示.证明这个结果的关键是避免 $S_c(j\Omega)$ 的副本之间产生重叠,这些副本构成了样本序列的离散时间傅里叶变换.带通连续时间信号的傅里叶变换有这样一个特点,即当 $0 \leq |\Omega| \leq \Omega_c$ 和 $|\Omega| \geq \Omega_c + \Delta\Omega$ 时 $S_c(j\Omega) = 0$.因此,它的带宽或支撑域的确只是 $2\Delta\Omega$,而不是 $2(\Omega_c + \Delta\Omega)$,并且若用适当的采样方法,则区域 $-\Omega_c \leq \Omega \leq \Omega_c$ 可以用 $S_c(j\Omega)$ 之非零部分的许多映像互不重叠地填充起来.利用带通信号的复数表示可以使问题大大简化.

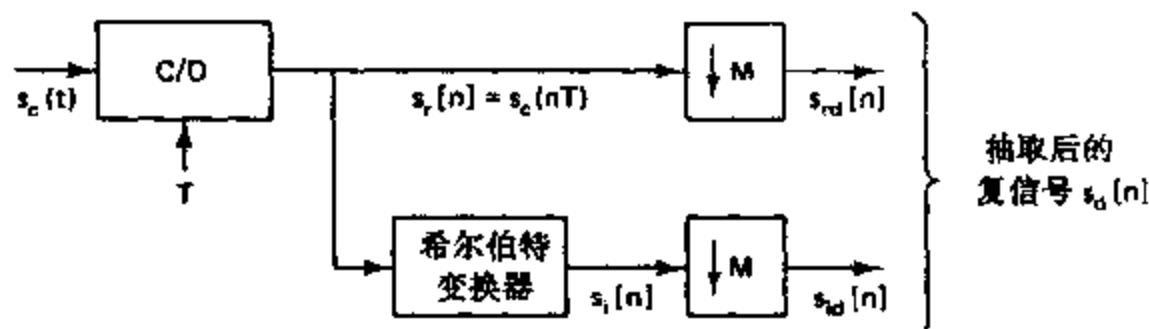


图 10.13 通过等效复带通信号的抽取而用低采样率对实带通信号进行采样的系统.

作为一个示例,考虑图 10.13 的系统和图 10.14(a)所示信号.输入信号的最高频率是 $\Omega_c + \Delta\Omega$,如图 10.14(a)所示.如果严格按照奈奎斯特采样率 $2\pi/T = 2(\Omega_c + \Delta\Omega)$ 对该系统进行采样,则所得到的样本序列 $s_r[n] = s_c(nT)$ 具有如图 10.14b 所示的傅里叶变换 $S_r(e^{j\omega})$.若用一个离散时间希尔伯特变换器,则我们可以形成复序列 $s[n] = s_r[n] + js_i[n]$,它的傅里叶变换是图 10.14(c)中的 $S(e^{j\omega})$. $S(e^{j\omega})$ 非零区域的宽度是 $\Delta\omega = (\Delta\Omega)T$.如果定义 M 为小于或等于 $2\pi/\Delta\omega$ 的最大整数,则 $S(e^{j\omega})$ 的 M 个拷贝应当填入区间 $-\pi < \omega < \pi$ 中.(在图 10.14(c)的例子中 $2\pi/\Delta\omega = 5$.)这样 $s[n]$ 的采样率可用图 10.13 所示的抽取方法来减少,因此得到减速率复序列 $s_d[n] = s_{rd}[n] + js_{id}[n] = s[Mn]$,它的傅里叶变换是

$$S_d(e^{j\omega}) = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} S(e^{j[(\omega - 2\pi k)/M]}). \quad (10.81)$$

图 10.14(d)表示在式(10.81)中当 $M=5$ 时的 $S_d(e^{j\omega})$.在图 10.14(d)中清楚地表示出 $S(e^{j\omega})$ 以及改变了频率坐标比例和经过变换的两个 $S(e^{j\omega})$ 拷贝.显然已经避免了混叠,并且重构原采样实带通信号所必须的全部信息都保留在离散时间的频率区间 $-\pi < \omega \leq \pi$ 中.用于 $s_d[n]$ 的复滤波器可以用进一步带限、幅度补偿或相位补偿等有效方法来对这种信息进行变换,或者为了传输或数字存储可以对复信号进行编码.这类处理用低采样率进行,自然这也是降低采样率的原因.

通过以下步骤可理想地重构原始实带通信号 $s_r[n]$:

1. 用因子 M 扩展复序列,得

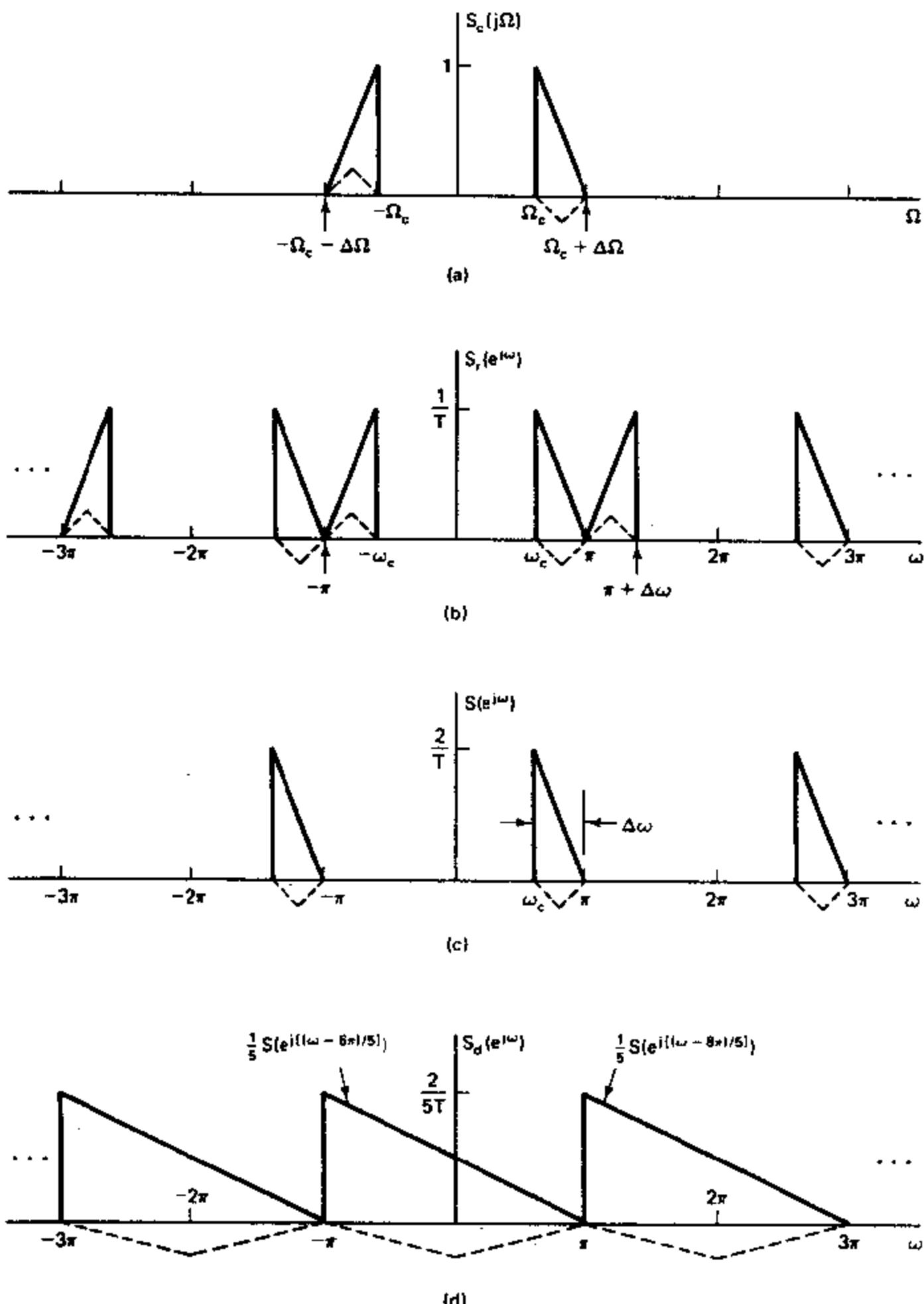


图 10.14 利用图 10.13 的系统对一个带通信号减速率采样的例子。(a) 连续时间带通信号的傅里叶变换。(b) 采样后信号的傅里叶变换。(c) 由(a)中信号导出的复带通离散时间信号的傅里叶变换。(d) 抽取后的(c)中复带通信号的傅里叶变换。(实线表示实部,虚线表示虚部。)

$$s_e[n] = \begin{cases} s_{rd}[n/M] + j s_{id}[n/M], & n=0, \pm M, \pm 2M, \dots, \\ 0, & \text{其它。} \end{cases} \quad (10.82)$$

2. 用冲激响应为 $h_i[n]$ 和频率响应为 $H_i(e^{j\omega})$ 的理想带通滤波器对信号 $s_e[n]$ 滤波, 其中

$$H_i(e^{j\omega}) = \begin{cases} 0, & -\pi < \omega < \omega_c, \\ M, & \omega_c < \omega < \omega_c + \Delta\omega, \\ 0, & \omega_c + \Delta\omega < \omega < \pi. \end{cases} \quad (10.83)$$

(在我们的例子中, $\omega_c + \Delta\omega = \pi$.)

3. 得出 $s_r[n] = \Re\{s_e[n] * h_i[n]\}$.

作为一个有益的练习, 对于图 10.14 的例子绘出傅里叶变换 $S_e(e^{j\omega})$ 的图形, 并证明式 (10.83) 的滤波器的确可以恢复 $s[n]$.

另一个有益的练习是研究其单边傅里叶变换等于 $S_e(j\Omega)$ ($\Omega \geq 0$) 的一个复连续时间信号. 可以证明, 对这样一个信号可以用 $2\pi/T = \Delta\Omega$ 的采样率采样, 从而直接得到复序列 $s_d[n]$.

10.5 小结

在这一章中我们讨论了复序列的实部和虚部之间以及傅里叶变换的实部和虚部之间的各种关系. 这些关系总称为希尔伯特变换关系.

我们用以推导所有这些希尔伯特变换关系式的方法是利用基本的因果性原理, 该原理允许一个序列或函数可以由它的实部来恢复. 本章指出, 对于一个因果序列, 其傅里叶变换的实部和虚部可以通过卷积型积分联系起来. 另外, 对于序列的复倒谱是因果的、或(等效地)其 z 变换的极点和零点都在单位圆内(最小相位条件)的这种特殊情况, 傅里叶变换的幅度和相位之对数互为希尔伯特变换对. 在第十二章中还将更详细地揭示这一结果.

本章推导了满足修正的因果性约束条件的周期序列希尔伯特变换关系, 和其傅里叶变换在单位圆的下半部为零的复序列之希尔伯特变换关系. 还讨论了如何将复解析信号应用于带通信号的表示以及如何对带通信号进行有效采样的问题.

习题

10.1 令 $x[n]$ 是一个实因果序列, 且 $|x[n]| < \infty$. $x[n]$ 的 z 变换是

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x[n]z^{-n},$$

它是变量 z^{-1} 的泰勒级数, 并且在以 $z=0$ 为中心的某一圆域之外处处收敛于一个解析函数. (收敛域包括 $z=\infty$ 点, 事实上 $X(\infty)=x[0]$.) $X(z)$ 是解析函数(在其收敛域上)的论述意味着对函数 $X(z)$ 有很强的限制(见 Churchill and Brown, 1984). 具体讲, 它的每个实部和虚部均满足拉普拉斯方程, 并且实部和虚部之间由柯西-黎曼方程联系起来. 当 $x[n]$ 为有限值因果实序列时, 我们将利用这些性质由其实部来求 $X(z)$.

令这一序列的 z 变换为

$$X(z) = X_R(z) + jX_I(z),$$

其中 $X_R(z)$ 和 $X_I(z)$ 是 z 的实值函数. 假设当 $z = \rho e^{j\omega}$ 时, $X_R(z)$ 为

$$X_R(\rho e^{j\omega}) = \frac{\rho + a \cos \omega}{\rho}, \quad a \text{ 为实数,}$$

还假定除 $z=0$ 处外, $X(z)$ 处处解析, 求出 $X(z)$ (作为 z 的显函数). 我们同时利用下列两种方法来实现上述目标.

(a) 方法 1, 频域: 利用 $X(z)$ 的实部和虚部必须在 $X(z)$ 的每个解析处满足柯西-黎曼方程这一事实. 柯西-黎曼方程如下:

1. 在直角坐标中,

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial y}, \quad \frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{\partial U}{\partial y},$$

其中, $z=x+jy$ 和 $X(x+jy)=U(x,y)+jV(x,y)$.

2. 在极坐标中,

$$\frac{\partial U}{\partial \rho} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial V}{\partial \omega}, \quad \frac{\partial V}{\partial \rho} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial U}{\partial \omega},$$

其中 $z=\rho e^{j\omega}$ 和 $X(\rho e^{j\omega})=U(\rho, \omega)+jV(\rho, \omega)$.

因为我们知道 $U=X_R$, 所以可对这些方程积分求出 $V=X_I$ 并由此得出 X . (注意, 必须正确地处理积分常数.)

(b) 方法 2, 时域: 序列 $x[n]$ 可以表示为 $x[n]=x_e[n]+x_o[n]$, 其中 $x_e[n]$ 是实偶序列, 其傅里叶变换为 $X_R(e^{j\omega})$, 而序列 $x_o[n]$ 是实奇序列, 其傅里叶变换为 $jX_I(e^{j\omega})$. 求 $x_e[n]$, 并利用因果性求 $x_o[n]$, 从而求出 $x[n]$ 和 $X(z)$.

10.2 考虑一个序列 $x[n]$, 其离散时间傅里叶变换为 $X(e^{j\omega})$. $x[n]$ 为实值因果序列, 且

$$\Re\{X(e^{j\omega})\}=2-2\cos\omega.$$

求 $\Im\{X(e^{j\omega})\}$.

10.3 此题涉及到时域和频域的限制.

(a) 考虑一个序列 $x[n]$ 和它的离散时间傅里叶变换 $X(e^{j\omega})$. 已知:

$x[n]$ 为实值和因果的,

$$\Re\{X(e^{j\omega})\}=\frac{5}{4}-\cos\omega.$$

求与已知条件相符的序列 $x[n]$.

(b) 考虑一个序列 $x[n]$ 和它的离散时间傅里叶变换 $X(e^{j\omega})$. 已知:

$x[n]$ 为实序列,

$x[0]=0$,

$x[1]>0$,

$$|X(e^{j\omega})|^2=\frac{5}{4}-\cos\omega.$$

求与已知条件相符的两个不同序列 $x_1[n]$ 和 $x_2[n]$.

10.4 由式(10.4)开始并用 4.6 节的复卷积定理推导式(10.18).

10.5 若 $h[n]$ 是一个实稳定序列, 且 $n>0$ 时有 $h[n]=0$, 推导在单位圆内用 $\Re\{H(e^{j\omega})\}$ 表示的 $H(z)$ 之积分表示式.

10.6 在 10.1 节中我们曾看到, 单位圆外的 z 变换完全由它在单位圆上的虚部值和 $x[0]$ 的值来决定.

(a) 由式(10.5)开始并利用 4.6 节的复卷积定理推导式(10.19).

(b) 利用式(10.19)和围线积分方法, 当 $x[0]=1$ 和

$$X_I(e^{j\omega})=\frac{-\alpha\sin\omega}{1+\alpha^2-2\alpha\cos\omega}$$

时求 $X(z)$.

10.7 对于序列

$$\tilde{u}_N[n] = \begin{cases} 1, & n=0, \dots, N/2, \\ 2, & n=1, 2, \dots, N/2-1, \\ 0, & n=N/2+1, \dots, N-1, \end{cases}$$

证明其离散傅里叶级数的系数序列是

$$U_N[k] = \begin{cases} N, & k=0, \\ -j2\cot(\pi k/N), & k \text{ 为奇数}, \\ 0, & k \text{ 为偶数}. \end{cases}$$

[提示:求序列]

$$u_N[n] = 2u[n] - 2u[n-N/2] - \delta[n] + \delta[n-N/2]$$

的 z 变换,并对其采样得到 $\bar{U}[k]$.]

- 10.8 考虑一个长度为 N 的实值有限长序列 $x[n]$. 具体讲,当 $n < 0$ 和 $n > N-1$ 时 $x[n] = 0$, 其中 N 为奇整数. 令 $X[k]$ 表示 $x[n]$ 的 M 点 DFT ($M \geq N$), 即

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j(2\pi/M)kn}, \quad k=0, 1, \dots, M-1.$$

$X[k]$ 的实部记作 $X_R[k]$.

- (a) 求可以使 $X[k]$ 由 $X_R[k]$ 唯一确定的用 N 表示的最小 M 值.
(b) 若取 M 满足(a)中所定条件, 则 $X[k]$ 可以表示成 $X_R[k]$ 与一个序列 $U_M[k]$ 的循环卷积. 求 $U_M[k]$.
- 10.9 考虑一个复序列 $x[n] = x_r[n] + jx_i[n]$, 其中 $x_r[n]$ 和 $x_i[n]$ 分别为实部和虚部. 序列 $x[n]$ 的 z 变换 $X(z)$ 在单位圆的下半部为零, 即对于 $\pi \leq \omega \leq 2\pi$, $X(e^{j\omega}) = 0$. $x[n]$ 的实部为

$$x_r[n] = \begin{cases} 1/2, & n=0, \\ -1/4, & n=\pm 2, \\ 0, & \text{其它.} \end{cases}$$

求 $X(e^{j\omega})$ 的实部和虚部.

- 10.10 考虑一个复序列 $h[n] = h_r[n] + jh_i[n]$, 其中 $h_r[n]$ 和 $h_i[n]$ 都是实序列, 并且令 $H(e^{j\omega}) = H_R(e^{j\omega}) + jH_I(e^{j\omega})$ 表示 $h[n]$ 的傅里叶变换, 其中 $H_R(e^{j\omega})$ 和 $H_I(e^{j\omega})$ 分别是 $H(e^{j\omega})$ 的实部和虚部.

令 $H_{ER}(e^{j\omega})$ 和 $H_{OK}(e^{j\omega})$ 分别表示 $H_R(e^{j\omega})$ 的偶部和奇部, 并且令 $H_{EI}(e^{j\omega})$ 和 $H_{OI}(e^{j\omega})$ 分别表示 $H_I(e^{j\omega})$ 的偶部和奇部. 此外, 令 $H_A(e^{j\omega})$ 和 $H_B(e^{j\omega})$ 表示 $h_r[n]$ 之傅里叶变换的实部和虚部, 并且令 $H_C(e^{j\omega})$ 和 $H_D(e^{j\omega})$ 表示 $h_i[n]$ 之傅里叶变换的实部和虚部. 用 $H_{ER}(e^{j\omega})$, $H_{OK}(e^{j\omega})$, $H_{EI}(e^{j\omega})$ 和 $H_{OI}(e^{j\omega})$ 表示 $H_A(e^{j\omega})$, $H_B(e^{j\omega})$, $H_C(e^{j\omega})$ 和 $H_D(e^{j\omega})$.

- 10.11 令 $\mathcal{H}\{\cdot\}$ 表示(理想的)希尔伯特变换运算:

$$\mathcal{H}\{x[n]\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] h[n-k],$$

其中 $h[n]$ 为

$$h[n] = \begin{cases} \frac{2\sin^2(\pi n/2)}{\pi n}, & n \neq 0, \\ 0, & n=0. \end{cases}$$

证明理想希尔伯特变换算子具有如下性质:

(a) $\mathcal{H}\{\mathcal{H}\{x[n]\}\} = -x[n]$

(b) $\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \mathcal{H}\{x[n]\} = 0$ [提示: 用帕斯瓦尔定理.]

(c) $\mathcal{H}\{x[n] * y[n]\} = \mathcal{H}\{x[n]\} * y[n] = x[n] * \mathcal{H}\{y[n]\}$, 其中 $x[n]$ 和 $y[n]$ 为任意序列.

- 10.12 求下列序列的希尔伯特变换 $x_i[n] = \mathcal{H}\{x_r[n]\}$:

- (a) $x_r[n] = \cos \omega_0 n$
 (b) $x_r[n] = \sin \omega_0 n$
 (c) $x_r[n] = \frac{\sin(\omega_0 n)}{\pi n}$

10.13 冲激响应为

$$h[n] = \begin{cases} \frac{2\sin^2(\pi n/2)}{\pi n}, & n \neq 0, \\ 0, & n = 0, \end{cases}$$

的理想希尔伯特变换器有输入 $x_r[n]$ 和输出 $x_i[n] = x_r[n] * h[n]$, 其中 $x_r[n]$ 是离散时间随机信号.

- (a) 求用 $h[n]$ 和 $\phi_{x_r x_r}[m]$ 表示的自相关序列 $\phi_{x_i x_i}[m]$ 的表达式.
 (b) 求互相关序列 $\phi_{x_r x_i}[m]$ 的表达式. 证明在这种情况下 $\phi_{x_r x_i}[m]$ 是 m 的奇函数.
 (c) 求复解析信号 $x[n] = x_r[n] + jx_i[n]$ 之自相关函数的表达式.
 (d) 求(c)中复信号的功率谱 $P_{xx}(\omega)$.

10.14 理想希尔伯特变换器(90 度移相器)有频率响应(在一个周期上)

$$H(e^{j\omega}) = \begin{cases} -j, & \omega > 0, \\ j, & \omega < 0. \end{cases}$$

图 P10.14-1 表示 $H(e^{j\omega})$, 图 P10.14-2 表示截止频率为 $\omega_c = \pi/2$ 的理想低通滤波器 $H_{lp}(e^{j\omega})$ 的频率响应. 显然这些频率响应很相似, 均有间隔为 π 的间断点.

- (a) 求用 $H_{lp}(e^{j\omega})$ 表示 $H(e^{j\omega})$ 的关系式. 解这个方程, 用 $H(e^{j\omega})$ 来表示 $H_{lp}(e^{j\omega})$.

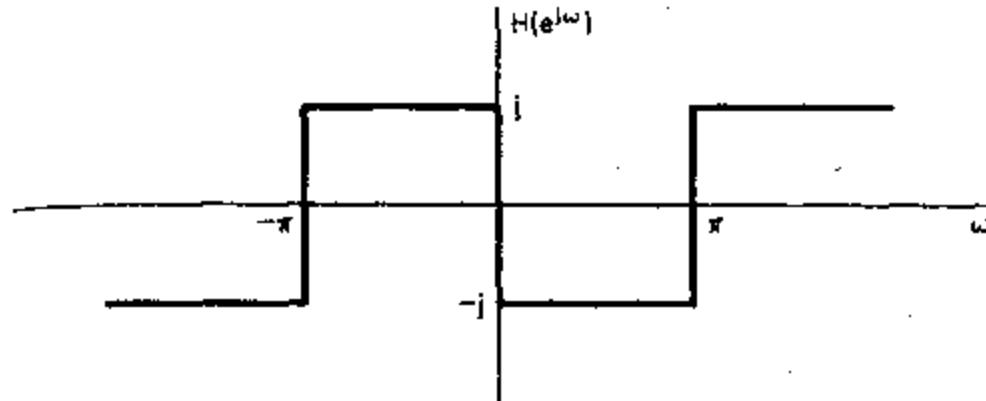


图 P10.14-1

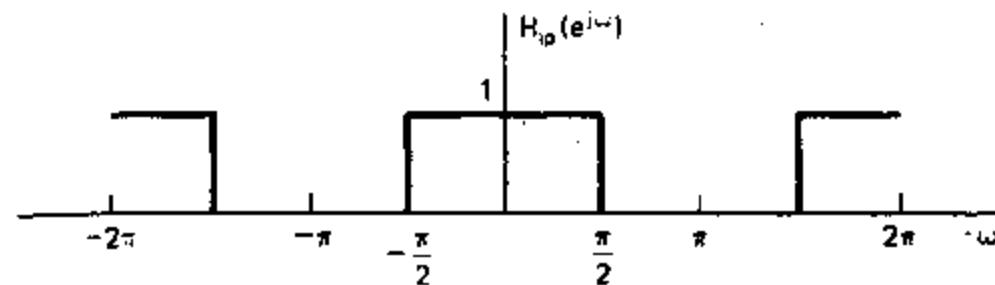


图 P10.14-2

- (b) 利用(a)中的关系式得出用 $h_{lp}[n]$ 表示 $h[n]$ 的表达式和用 $h[n]$ 表示 $h_{lp}[n]$ 的表达式.
 在(a)和(b)中得出的关系式是以零相位理想系统的定义为基础的, 但是对于广义线性相位的非理想系统来说, 类似的关系式也成立.
 (c) 利用(b)的结果求逼近希尔伯特变换器的因果 FIR 系统之冲激响应与逼近低通滤波器的因果 FIR 系统之冲激响应之间的关系式, 它们都是用如下方法设计出的: (1)结合适当的线性相位; (2)确定对应的理想冲激响应; (3)乘以长度为 $(M+1)$ 个样本的相同窗函数, 即用第七章中讨论的窗函数法. (如果必要的话, 可以分别考虑 M 为偶数和 M 为奇数的情况.)
 (d) 对于例 10.3 中希尔伯特变换器的逼近, 画出相应的低通滤波器频率响应的幅度曲线.

10.15 在 10.4.3 节中我们曾讨论过一种对带通连续时间信号采样的有效方法, 该信号的傅里叶变换

使

$$S_c(j\Omega) = 0, \quad \text{当 } |\Omega| \leq \Omega_c \text{ 及 } |\Omega| \geq \Omega_c + \Delta\Omega \text{ 时.}$$

在那段讨论中曾假设起始用采样频率 $2\pi/T = 2(\Omega_c + \Delta\Omega)$, 即避免混叠的最低可能频率对信号进行采样. 带通信号采样方法如图 10.13 所示. 形成具有单边傅里叶变换 $S_c(e^{j\omega})$ 的复带通离散时间信号 $s[n]$ 之后, 以抽取因子 M 对复信号进行抽取, 假定 M 是小于或等于 $2\pi/(\Delta\Omega T)$ 的最大整数.

- (a) 通过图 10.14 给出的例子证明, 如果量 $2\pi/(\Delta\Omega T)$ 对于所选择的起始采样率不是一个整数, 则所得抽取后的信号 $s_d[n]$ 将有一些非零长度的区域, 在该区域上其傅里叶变换 $S_d(e^{j\omega})$ 恒等于零.
- (b) 应当如何选择起始采样频率 $2\pi/T$, 求出的抽取因子 M 才能使得图 10.13 所示系统所抽取序列 $s_d[n]$ 的傅里叶变换 $S_d(e^{j\omega})$ 没有混叠, 并且不存在一个其值为零的非零长度区间?

10.16 在 10.4.3 节中我们曾讨论过对带通连续时间信号进行采样的一种有效方法, 该信号的傅里叶变换使

$$S_c(j\Omega) = 0, \quad \text{当 } |\Omega| \leq \Omega_c \text{ 及 } |\Omega| \geq \Omega_c + \Delta\Omega \text{ 时.}$$

带通信号采样方法如图 10.13 所示. 在 10.4.3 节的末尾给出了重构原始采样信号 $s_r[n]$ 的方法. 在图 10.13 中的原始连续时间信号 $s_r(t)$ 当然可以通过对 $s_r[n]$ 进行理想带限内插(理想 D/C 转换)来重构. 图 P10.16-1 表示由抽取的复信号重构一个实连续时间带通信号的系统方框图. 图 P10.16-1 中的复带通滤波器 $H_i(e^{j\omega})$ 具有式(10.83)给出的频率响应.

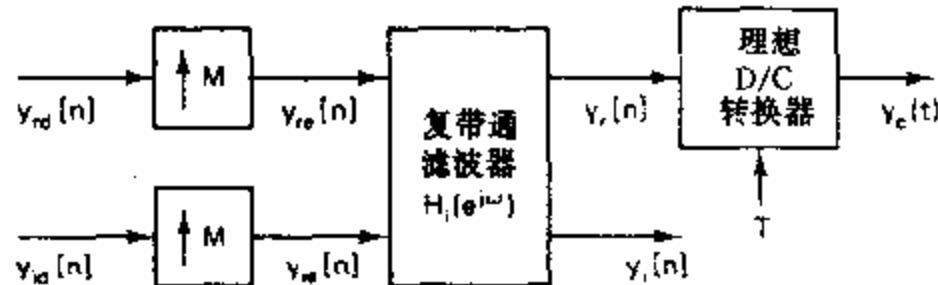


图 P10.16-1

- (a) 利用图 10.14 所示例子证明, 如果重构系统的输入是 $y_{rd}[n] = s_{rd}[n]$ 和 $y_{id}[n] = s_{id}[n]$, 则图 P10.16-1 的系统将重构原始实带通信号(即 $y_c(t) = s_r(t)$).
- (b) 求图 P10.16-1 中复带通滤波器的冲激响应 $h_i[n] = h_r[n] + jh_i[n]$.
- (c) 画出图 P10.16-1 所示系统更详细的方框图, 图中只有实数运算. 省去图中计算最终输出所不需要的任何部分.
- (d) 现在考虑在图 10.13 的系统和图 P10.16-1 的系统之间放置一个复线性实不变系统, 如图 P10.16-2 所示. 图中系统的频率响应用 $H(e^{j\omega})$ 表示. 如果要求

$$Y_c(j\Omega) = H_{eff}(j\Omega)S_c(j\Omega),$$

其中

$$H_{eff}(j\Omega) = \begin{cases} 1, & \Omega_c < |\Omega| < \Omega_c + \Delta\Omega/2, \\ 0, & \text{其它.} \end{cases}$$

应如何选择 $H(e^{j\omega})$?

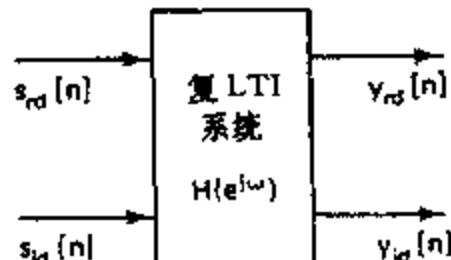


图 P10.16-2

第十一章 利用离散傅里叶变换的信号傅里叶分析

11.0 引言

在第八章我们推导出离散傅里叶变换(DFT)作为有限长信号的傅里叶表示。因为DFT可以用显式来计算，所以在包括滤波和谱分析在内的信号处理应用的广泛领域中它起着核心作用。本章简要介绍如何用DFT来进行信号的傅里叶分析。在第十二章中将讨论实现一种通常称为同态信号处理的非线性滤波技术中DFT的用法。

在显式计算傅里叶变换的算法和应用中，人们所希望的离散时间傅里叶变换是理想化的，而真正可以计算的却是DFT。对于有限长信号，DFT可以给出离散时间傅里叶变换的频域样本，但是对这一采样过程的本质还必须能清楚地加以理解和说明。例如在8.8节中所研究的用DFT相乘而不是傅里叶变换来实现线性滤波或卷积时，需要作循环卷积，此时要特别注意应该能保证其结果等于线性卷积。此外，在许多滤波和谱分析的应用中，信号本来并不是有限长的。正如我们所要讨论的，这种DFT要求的有限长度信号和实际的无限长信号之间的不一致性可以通过加窗、块处理及依时傅里叶变换的方法完全或近似地给予调节。

11.1 利用DFT的信号傅里叶分析

DFT的主要应用之一就是分析连续时间信号的频率成分。例如，我们在11.5.1节中将要讨论，在语音的分析和处理中语音信号的频率分析对于音腔谐振的辨识与建模特别有用。在11.5.2节将要介绍的另一个例子是多卜勒雷达系统，在这个系统中用发射信号和接收信号之间的频移来表示目标的速度。

把DFT用于连续时间信号的基本步骤如图11.1所示。当连续时间信号转换为一个序列时，需要加入抗混叠滤波器以便消除混叠的影响，或者将它减小到最低程度。需要用 $w[n]$ 乘以 $x[n]$ ，即作加窗处理，这是DFT要求有限长度的必然结果。在许多有趣的实际场合， $s_c(t)$ 很长，甚至无限长，自然 $x[n]$ 也如此（如像语音和音乐的情况）。因此，在计算DFT之前，需将有限长度的窗 $w[n]$ 加到 $x[n]$ 上。图11.2说明了图11.1中的信号之傅里

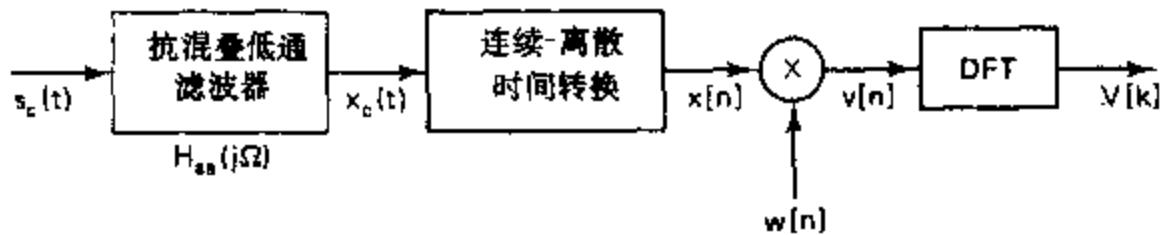


图11.1 连续时间信号的离散时间傅里叶分析的处理步骤。

叶变换。具体讲，图11.2(a)表示一个连续时间谱，它在高频区有逐渐减小的拖尾，而不是带限的。图中窄的尖锐谱峰还表明存在着一些窄带信号的能量。图11.2(b)表示抗混叠滤波器的频率响应。正如图11.2(c)所指出的，得出的连续时间傅里叶变换 $X_c(j\Omega)$ 几乎不包

含有 $S_e(j\Omega)$ 在滤波器截止频率以上部分的有用信息. 因为 $H_{aa}(j\Omega)$ 不可能是理想的, 所以输入信号在通带和过渡带的傅里叶频率成分也将受到滤波器频率响应的影响.

$x_e(t)$ 向样本序列 $x[n]$ 的转换, 可在频域上用周期重复和频率归一化来表示, 即

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{T} \sum_{r=-\infty}^{\infty} X_e\left(j \frac{\omega}{T} + j \frac{2\pi r}{T}\right), \quad (11.1)$$

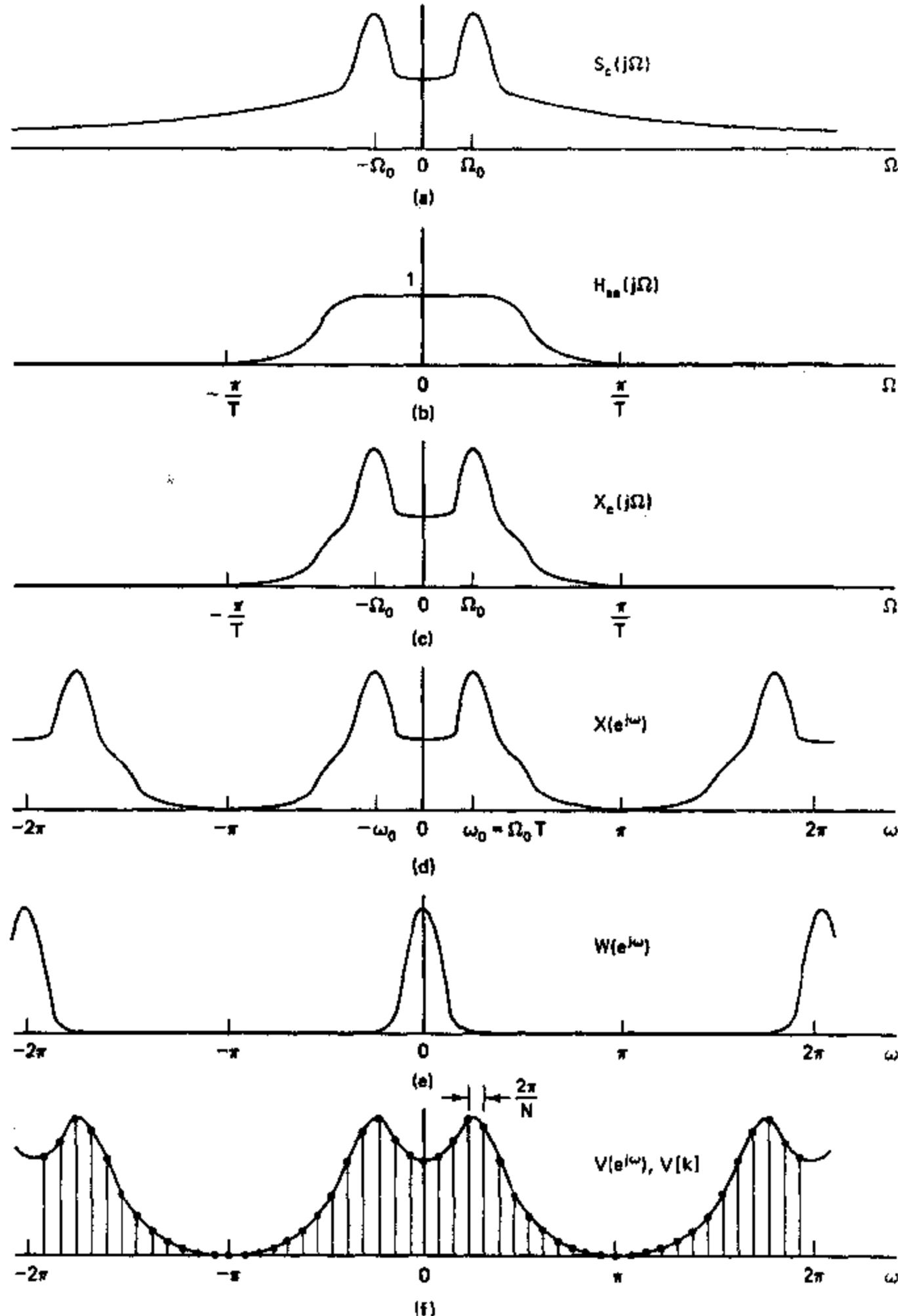


图 11.2 图 11.1 所示系统中傅里叶变换的说明. (a) 连续时间输入信号的傅里叶变换. (b) 抗混叠滤波器的频率响应. (c) 抗混叠滤波器输出的傅里叶变换. (d) 采样信号的傅里叶变换. (e) 窗序列的傅里叶变换. (f) 加窗信号段的傅里叶变换和用 DFT 样本得到的频率样本.

如图 11.2(d)所示. 由于实际实现中抗混叠滤波器不可能在阻带有无限衰减, 因此可以预见, 式(11.1)中的项会有一些非零重叠, 即混叠. 但是用一个高质量的连续时间滤波器, 或者使用如在 3.7.5 节所讨论过的初始过采样、接着通过十分有效的低通滤波和抽取, 均可以将这一误差减小到可以忽略的程度. 如果 $x[n]$ 是数字信号, 则图 11.1 的 A/D 转换可以合并到第二个系统中去, 但仍会引入量化误差. 正如我们在第三章中已经看到的, 这种误差可以作为噪声序列加到 $x[n]$ 上. 这种噪声也可以通过精细的量化而忽略不计.

如前所述, 因为 DFT 的输入信号必须是有限长的, 所以通常是用有限长窗 $w[n]$ 乘以序列 $x[n]$, 它在频域上表现为周期卷积, 即

$$V(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\theta})W(e^{j(\omega-\theta)})d\theta. \quad (11.2)$$

图 11.2(e)表示一种典型窗序列的傅里叶变换. 注意, 我们总是假设主瓣集中在 $\omega=0$ 附近. 若在 n 的某一范围内 $w[n]$ 为非零常数, 则称其为矩形窗. 但是, 我们将会看到, 有充分的理由使窗函数在其边缘处呈拖尾状. 如像巴特利特窗、哈明窗、汉宁窗、布莱克曼窗及凯泽窗等窗函数的性质已在第七章且将在 11.2 节中讨论. 从这一点上必然会看到, $W(e^{j\omega})$ 与 $X(e^{j\omega})$ 的卷积将对 $X(e^{j\omega})$ 中的尖峰和不连续点起平滑作用. 在图 11.2(f)中, 这种现象用连续的曲线表示出来.

图 11.1 中最后的运算是 DFT. 加窗后序列的 DFT 为

$$V[k] = \sum_{n=0}^{N-1} v[n]e^{-j(2\pi/N)kn}, \quad k=0, 1, \dots, N-1, \quad (11.3)$$

式中假定窗的长度 L 小于或等于 DFT 的长度 N . 有限长序列 $v[n]$ 的 DFT, $V[k]$, 对应于 $v[n]$ 的傅里叶变换的等间隔采样, 即

$$V[k] = V(e^{j\omega})|_{\omega=2\pi k/N}. \quad (11.4)$$

图 11.2(f)还说明 $V[k]$ 是 $V(e^{j\omega})$ 的样本. 因为 DFT 相邻频率间的间隔为 $2\pi/N$, 且归一化离散时间频率变量和连续时间频率变量之间的关系是 $\omega=\Omega T$, 所在 DFT 的频率对应于由下式给出的连续时间频率 Ω_k :

$$\Omega_k = \frac{2\pi k}{NT}. \quad (11.5)$$

许多商用实时谱分析仪就是基于图 11.1 和图 11.2 中所包含的原理. 然而, 由上面的讨论可以清楚地看出, 利用加窗采样信号段的 DFT 来解释输入信号的连续时间傅里叶变换, 会受到许多因素的影响. 考虑到这些因素, 在对输入信号滤波和采样时必须十分小心. 此外, 要能够正确地解释所得出的结果, 必须清楚地理解在 DFT 中固有的时域加窗和频域采样的影响. 对于后面的讨论, 我们假设抗混叠滤波和连续时间到离散时间的转换工作均已完成, 并可不再考虑. 在下一节我们特别集中讨论由 DFT 所带来的加窗和频域采样的影响. 虽然我们选择正弦信号作为所讨论的典型例子, 但是所讨论到的大部分问题均具有普遍性.

11.2 正弦信号的 DFT 分析

正弦信号 $A \cos(\omega_0 n + \phi)$ 的离散时间傅里叶变换是在 $\pm \omega_0$ 处的一对冲激函数 (以 2π 为周期重复). 当利用 DFT 分析正弦信号时, 加窗和频谱采样有着重要的影响. 我们在 11.2.1 节中将会看到, 加窗使得理论的傅里叶表示中的冲激函数平滑或展宽, 因此很难精确定频率. 加窗也降低了对频率上十分靠近的正弦信号的分辨能力. DFT 固有的频谱采样有可能给出正弦信号真实谱的错误导向或不准确的频谱图. 这种影响将在 11.2.2 节中讨论.

11.2.1 加窗的影响

让我们来研究一个由两个正弦分量之和组成的连续时间信号, 即

$$s_c(t) = A_0 \cos(\Omega_0 t + \theta_0) + A_1 \cos(\Omega_1 t + \theta_1), \quad -\infty < t < \infty. \quad (11.6)$$

假定采样是理想的, 没有混叠和量化误差, 这样我们可以得到离散时间信号

$$x[n] = A_0 \cos(\omega_0 n + \theta_0) + A_1 \cos(\omega_1 n + \theta_1), \quad -\infty < n < \infty, \quad (11.7)$$

式中 $\omega_0 = \Omega_0 T$, 且 $\omega_1 = \Omega_1 T$. 在图 11.1 中加窗后的序列 $v[n]$ 则为

$$v[n] = A_0 w[n] \cos(\omega_0 n + \theta_0) + A_1 w[n] \cos(\omega_1 n + \theta_1). \quad (11.8)$$

为了得到 $v[n]$ 的傅里叶变换, 我们可以利用复指数将式(11.8)展开, 并利用 2.9.2 节中式(2.142)中的频率平移性质. 具体讲, 可将 $v[n]$ 写成

$$\begin{aligned} v[n] = & \frac{A_0}{2} w[n] e^{j\theta_0} e^{j\omega_0 n} + \frac{A_0}{2} w[n] e^{-j\theta_0} e^{-j\omega_0 n} \\ & + \frac{A_1}{2} w[n] e^{j\theta_1} e^{j\omega_1 n} + \frac{A_1}{2} w[n] e^{-j\theta_1} e^{-j\omega_1 n}, \end{aligned} \quad (11.9)$$

由上式及式(2.142), 就可得到加窗序列的傅里叶变换为

$$\begin{aligned} V(e^{j\omega}) = & \frac{A_0}{2} e^{j\theta_0} W(e^{j(\omega-\omega_0)}) + \frac{A_0}{2} e^{-j\theta_0} W(e^{j(\omega+\omega_0)}) \\ & + \frac{A_1}{2} e^{j\theta_1} W(e^{j(\omega-\omega_1)}) + \frac{A_1}{2} e^{-j\theta_1} W(e^{j(\omega+\omega_1)}). \end{aligned} \quad (11.10)$$

根据式(11.10), 加窗信号的傅里叶变换包含重复出现在频率 $\pm \omega_0$ 和 $\pm \omega_1$ 处的以及按组成该信号的每个复指数的复振幅换算的窗函数的傅里叶变换.

例 11.1

让我们研究图 11.1 的系统, 特别是对于采样率 $1/T = 10\text{kHz}$ 、矩形窗长度为 64, 以及 $A_0 = 1, A_1 = 0.75$ 的具体情况下的 $W(e^{j\omega})$ 和 $V(e^{j\omega})$. 考虑到方便起见, 选择 $\theta_0 = \theta_1 = 0$. 为了说明基本特性, 我们有意只给出傅里叶变换的幅度.

图 11.3(a)画出了 $|W(e^{j\omega})|$, 而图 11.3(b), (c), (d) 和 (e) 分别画出了对于式(11.6)中的 Ω_0 和 Ω_1 或等效地式(11.7)中的 ω_0 和 ω_1 取几个不同值时的 $|V(e^{j\omega})|$ 的图形. 在图 11.3(b)中 $\Omega_0 = (2\pi/6) \times 10^4$ 和 $\Omega_1 = (2\pi/3) \times 10^4$, 或等效地, $\omega_0 = 2\pi/6$ 和 $\omega_1 = 2\pi/3$. 在图 11.3(c)~(e)中这些频率逐渐靠近. 对于图 11.3(b)中的参数, 每个分量的频率和振幅是比较清楚的. 具体讲, 从式(11.10)可以看出, 由于 $W(e^{j\omega})$ 有一个高度为 64 的峰, 并且在 ω_0 和 ω_1 处 $W(e^{j\omega})$ 的副本之间没有重叠, 因此在 ω_0 处将会有

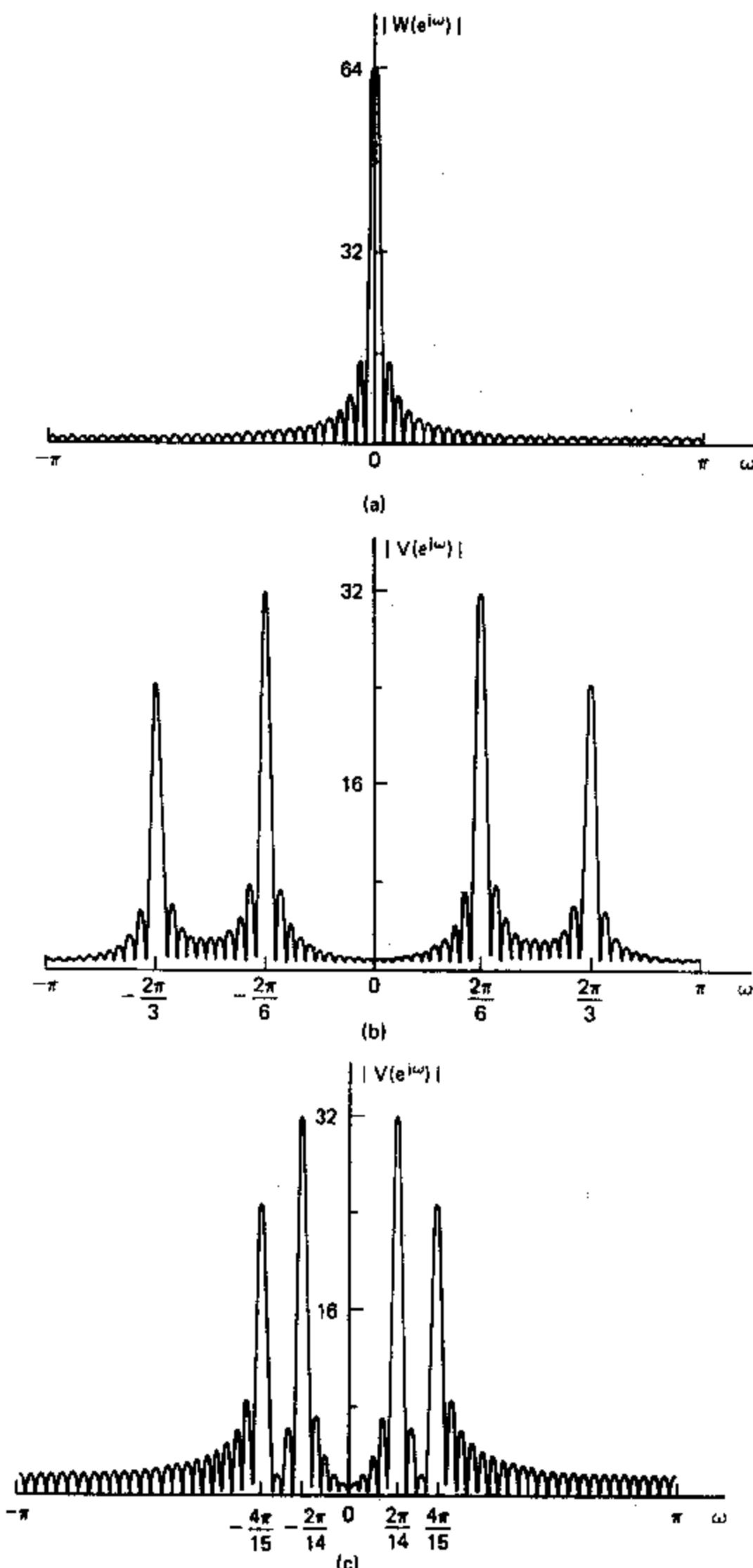


图 11.3 加矩形窗之余弦的傅里叶分析示例. (a) 窗的傅里叶变换. (b)~(e)当频率间隔逐渐减小时加窗余弦的傅里叶变换. (b) $\Omega_0=(2\pi/6)\times 10^4$, $\Omega_1=(2\pi/3)\times 10^4$. (c) $\Omega_0=(2\pi/14)\times 10^4$, $\Omega_1=(4\pi/15)\times 10^4$. 高度为 $32A_0$ 的峰, 在 ω_1 处有一高度为 $32A_1$ 的峰. 在图 11.3(b) 中, 两个峰大约在

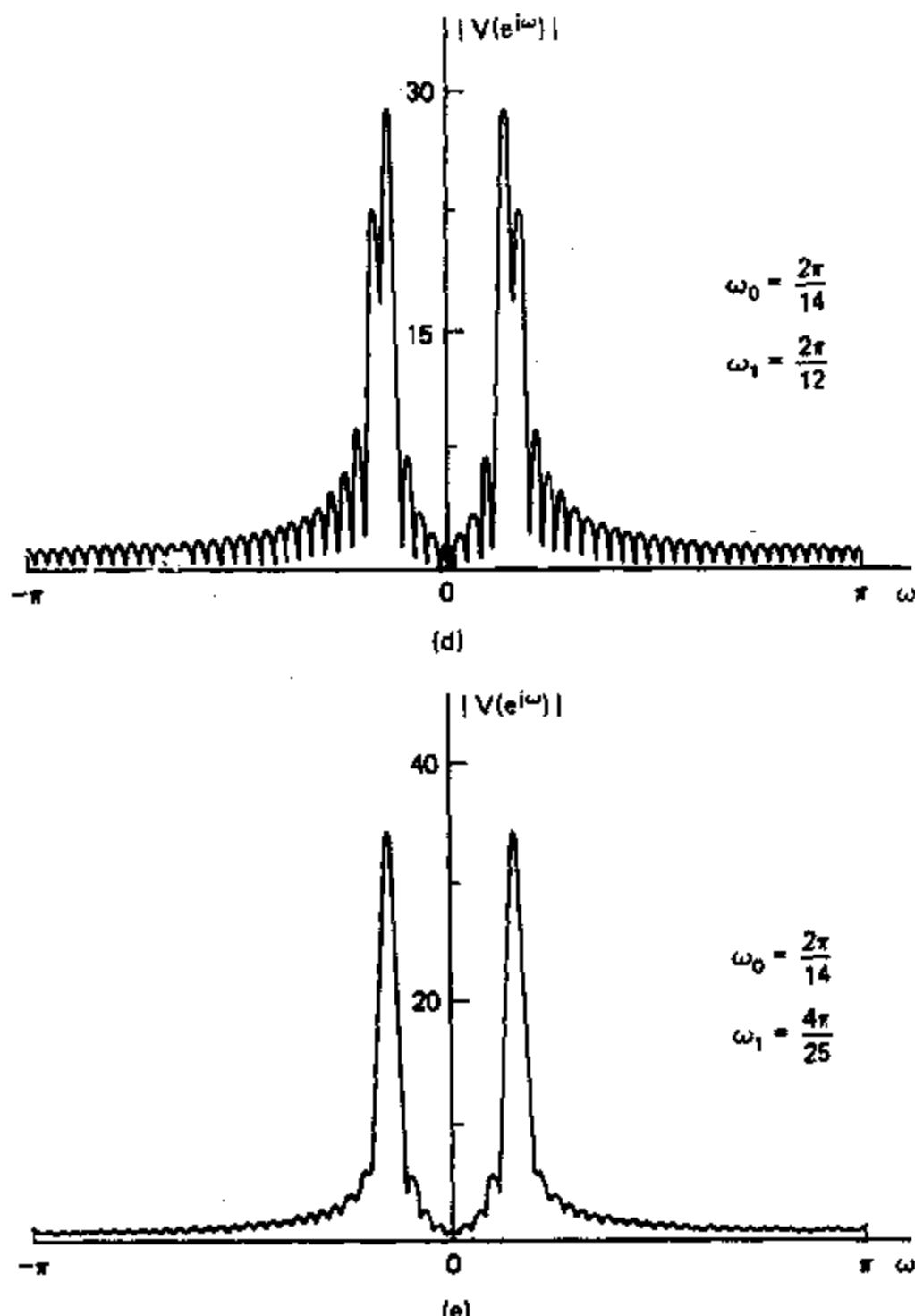


图 11.3(续) (d) $\Omega_0 = (2\pi/14) \times 10^4$, $\Omega_1 = (2\pi/12) \times 10^4$. (e) $\Omega_0 = (2\pi/14) \times 10^4$, $\Omega_1 = (4\pi/25) \times 10^4$.

$\omega_0 = 2\pi/6$ 和 $\omega_1 = 2\pi/3$ 处, 其高度之间有正确的比例. 图 11.3(c) 中在 ω_0 和 ω_1 处窗的副本之间有较多重叠, 然而两个可区分的峰仍存在, 在 $\omega = \omega_0$ 处谱的幅度受到在频率 ω_1 处正弦信号振幅的影响, 反之亦然. 这种相互影响称为泄漏: 由于窗函数引入的谱平滑作用, 使得在一个频率处的分量泄漏到相邻的另一个分量中去. 图 11.3(d) 表示泄漏很大的情况. 要注意, 加入异相的旁瓣将如何降低峰的高度. 图 11.3(e) 中在 ω_0 和 ω_1 处谱窗之间的重叠十分明显, 使得在图(b)–(d) 中可以看到的两个峰合并成一个. 换句话说, 由于这个窗的影响, 使得与图 11.3(e) 对应的两个频率在频谱中成为不可分辨的.

作为对信号加窗后的结果, 分辨率降低和发生泄漏是对频谱的两种主要影响. 分辨率主要受 $W(e^{j\omega})$ 主瓣宽度的影响, 而泄漏的程度则取决于 $W(e^{j\omega})$ 的主瓣和旁瓣的相对幅度. 在第七章有关滤波器设计的论述中, 我们曾指出, 主瓣的宽度和相对旁瓣幅度主要取决于窗的长度 L 和窗的形状(拖尾的大小). 矩形窗的傅里叶变换为

$$W_r(e^{j\omega}) = \sum_{N=0}^{L-1} e^{-j\omega N} = e^{-j\omega(L-1)/2} \frac{\sin(\omega L/2)}{\sin(\omega/2)}, \quad (11.11)$$

当长度给定时,它的主瓣最窄,但是在所有经常使用的窗函数中它的旁瓣幅度最大.正如在第七章中所定义的,凯泽窗为

$$w_K[n] = \begin{cases} \frac{I_0[\beta(1 - [(n-\alpha)/\alpha]^2)^{1/2}]}{I_0(\beta)}, & 0 \leq n \leq L-1, \\ 0, & \text{其它}, \end{cases} \quad (11.12)$$

式中 $\alpha = (L-1)/2$ 且 $I_0(\cdot)$ 为第一类零阶修正贝塞尔函数.(注意,式(11.12)中的记号与式(7.89)中的稍有差别.在式(11.12)中 L 表示窗的长度,而在式(7.89)中设计滤波器窗的长度记作 $M+1$.)从滤波器设计问题中我们已经看出,这种窗有两个参数 β 和 L ,它们可以用于在主瓣宽度和相对旁瓣幅度之间进行折衷.(应当记得,当 $\beta=0$ 时凯泽窗就变为矩形窗.)主瓣宽度 Δ_m 定义为在中央的两个过零交点之间的对称距离.相对旁瓣高度 A_u 定义为以 dB 计的主瓣幅度与最大旁瓣幅度之比.图 11.4 为图 7.32 的重复,它表示凯泽窗在不同长度和不同 β 值时的傅里叶变换.在设计用于谱分析的凯泽窗时,我们总希望能事先给定所要求的 A_u 值并确定所要求的 β 值.图 11.4(c)表明相对旁瓣幅度基本上与窗的长度无关,因而只取决于 β .这一点已由凯泽和谢弗(1980)证实,他们得到作为 A_u 函数的 β 之最小二乘近似表示式如下:

$$\beta = \begin{cases} 0, & A_u < 13.26, \\ 0.76609(A_u - 13.26)^{0.4} + 0.09834(A_u - 13.26), & 13.26 < A_u < 60, \\ 0.12438(A_u + 6.3), & 60 < A_u < 120. \end{cases} \quad (11.13)$$

使用由式(11.13)得到的 β 值所给出的窗,其 A_u 的实际值在 $13.26 < A_u < 120$ 范围内与所希望的值之差小于 0.36%. (注意,值 13.26 是矩形窗的相对旁瓣幅度,当 $\beta=0$ 时凯泽窗降为矩形窗.)

图 11.4(c)还表明,主瓣宽度与窗的长度成反比.主瓣宽度、相对旁瓣幅度和窗长度之间的折衷关系可以用如下近似关系式表示:

$$L \approx \frac{24\pi(A_u + 12)}{155\Delta_m} + 1 \quad (11.14)$$

上式也是由凯泽和谢弗(1980)给出的.

当确定一个具有所要求的主瓣宽度和相对旁瓣幅度的凯泽窗时,式(11.12)、(11.13)和(11.14)是必须用的.对于给定的 A_u 和 Δ_m 值,设计一个窗仅需要由式(11.13)计算 β ,由式(11.14)计算 L ,然后用式(11.12)和在第七章中给出的 $I_0(\cdot)$ 的子程序来计算窗.本章其余的许多例子均用凯泽窗.哈里斯(1978)还研究了其它谱分析窗.

11.2.2 谱采样的影响

正如前面所提到的,加窗序列 $v[n]$ 的 DFT 给出了 $V(e^{j\omega})$ 在 N 个等间隔的离散时间域频率 $\omega_k = 2\pi k/N, k=0, 1, \dots, N-1$ 处,或等效地在连续时间域频率 $\Omega_k = (2\pi k)/(NT), k=0, 1, \dots, N-1$ 处的样本.由 DFT 引入的谱采样有时可能导致错误的结果.对于这种情况,我们最好通过举例来加以说明.

例 11.2

首先我们来研究一下与例 11.1 中图 11.3(c)相同参数的情况,即在式(11.8)中 $A_0=1, A_1=0.75, \omega_0=2\pi/14$ 和 $\omega_1=4\pi/15, w[n]$ 是长度为 64 的矩形窗.这样

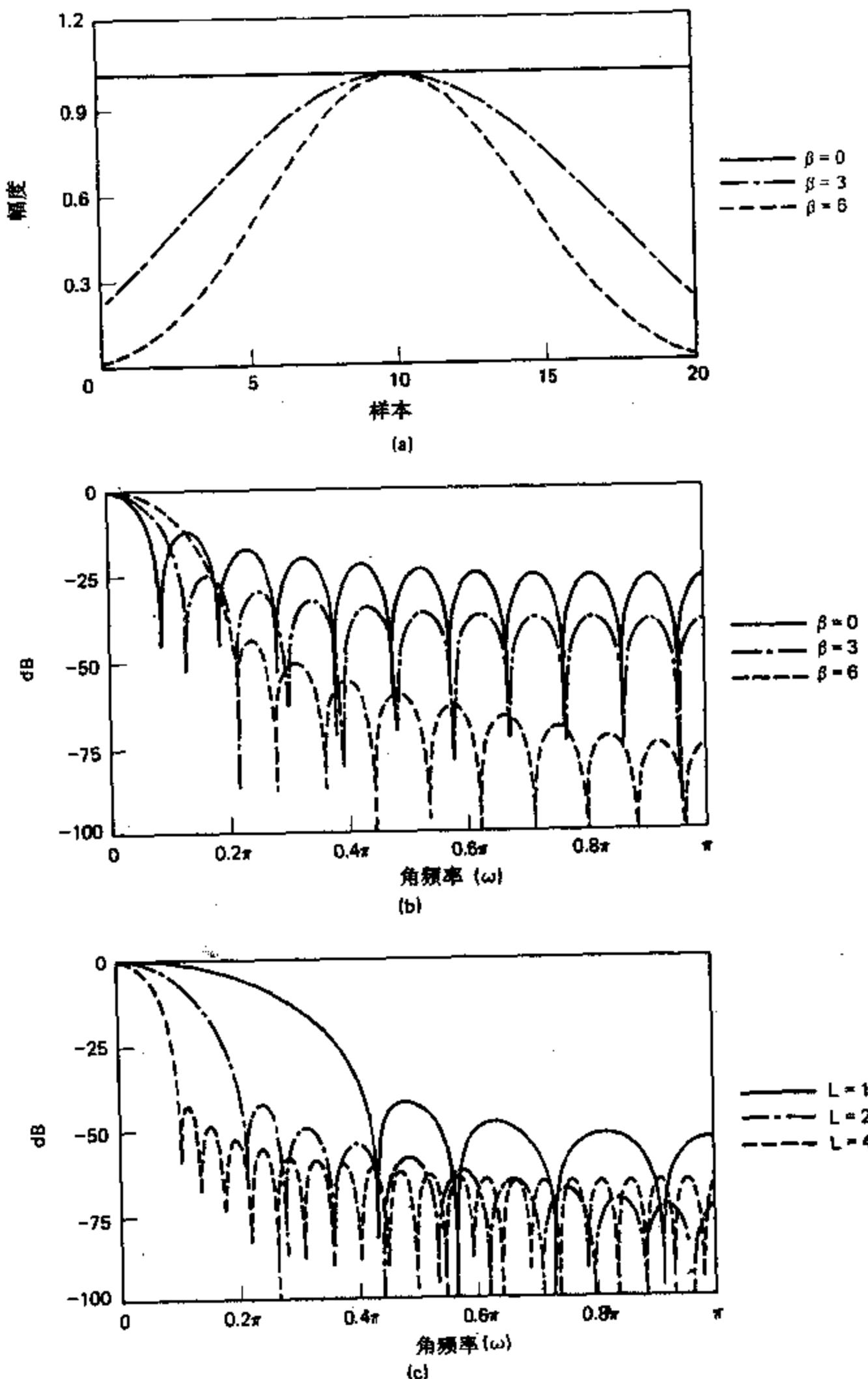


图 11.4 (a) $\beta=0, 3, 6$ 和 $L=21$ 的凯泽窗. (b) 与(a)中的窗对应的傅里叶变换.
(c) 取 $\beta=6$ 及 $L=11, 21$ 和 41 的凯泽窗的傅里叶变换.

$$v[n] = \begin{cases} \cos\left(\frac{2\pi}{14}n\right) + 0.75\cos\left(\frac{4\pi}{15}n\right), & 0 \leq n \leq 63, \\ 0, & \text{其它.} \end{cases} \quad (11.15)$$

图 11.5(a)绘出了加窗序列 $v[n]$. 图 11.5(b),(c),(d)和(e)分别表示长度为 $N=64$ 的 DFT 的相应实部、虚部、幅度和相位. 图 11.5(f)表示 $|V(e^{j\omega})|$, 与图 11.3(c)相对应, 但

是为了与图 11.5(d)的 DFT 比较而画出了从 $\omega=0$ 到 $\omega=2\pi$ 的图.

在图 11.5(b)~(e)中,水平(频率)轴用 DFT 的标号或频率样本数 k 来标注. 值 $k=32$ 对应于 $\omega=\pi$ 或相当于 $\Omega=\pi/T$. 正如通常表示一个时间序列之 DFT 的约定那样,

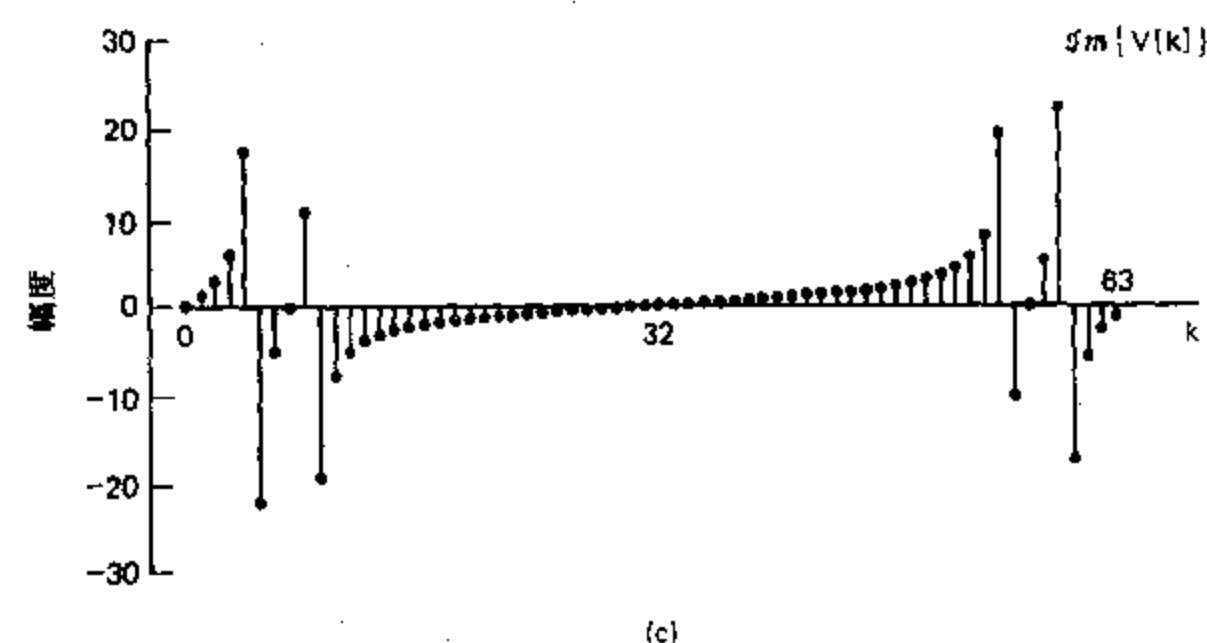
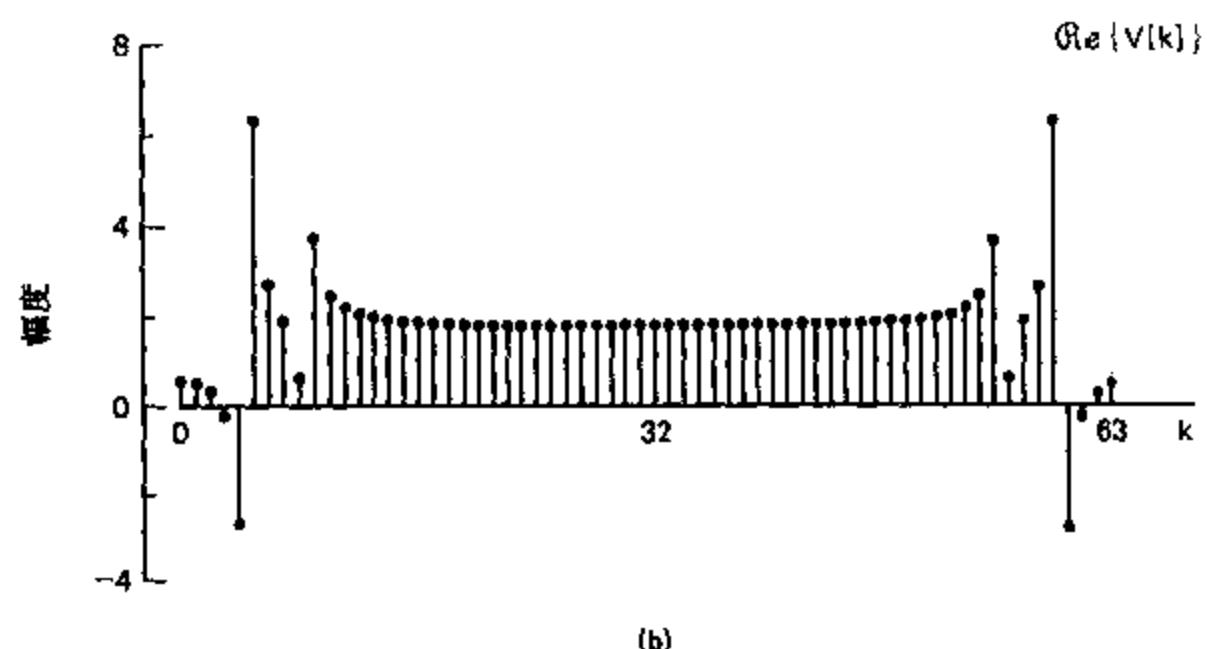
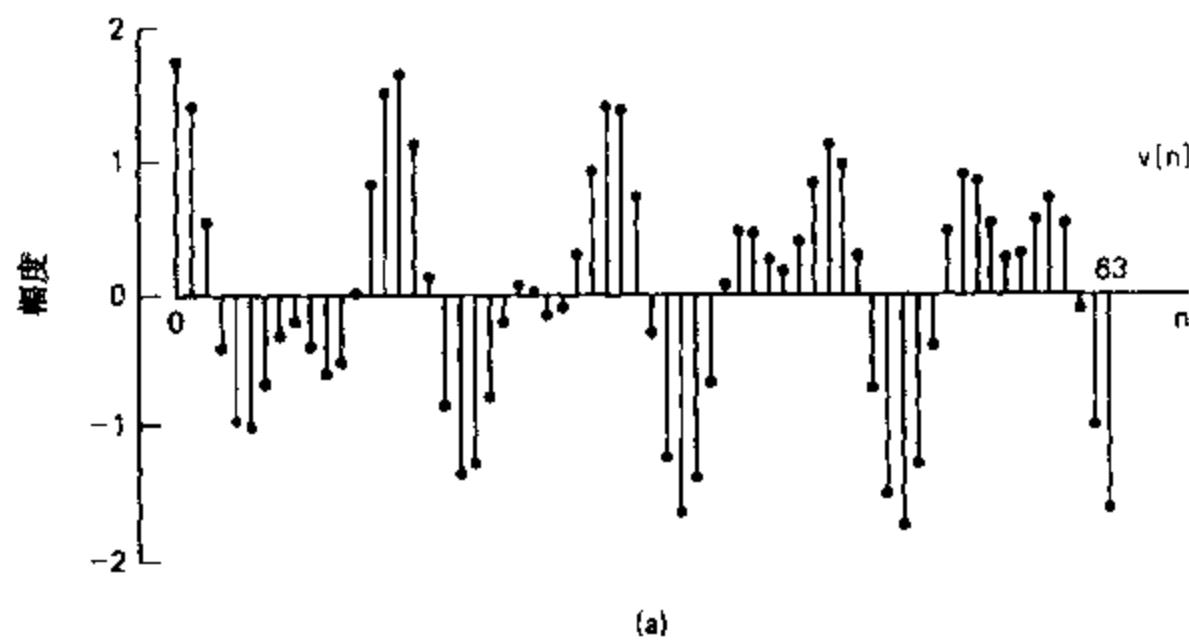
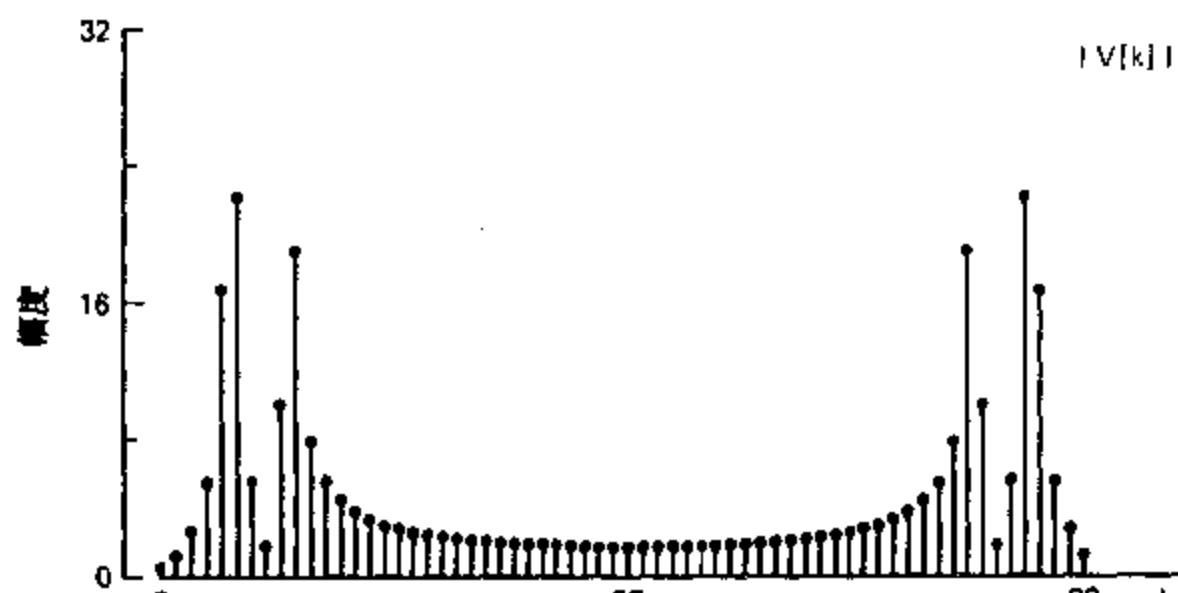
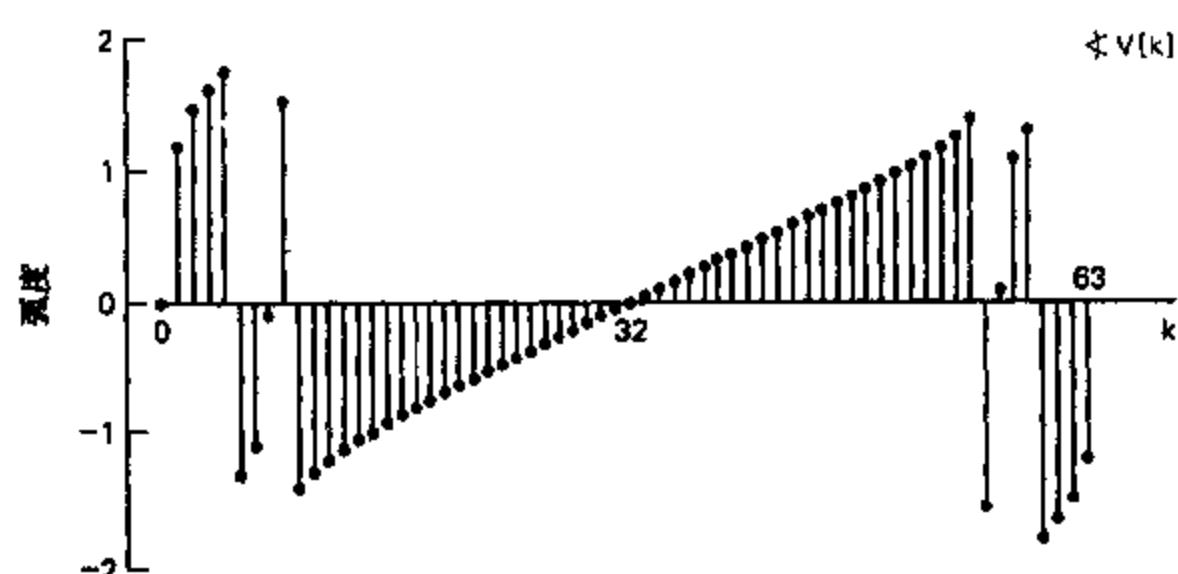


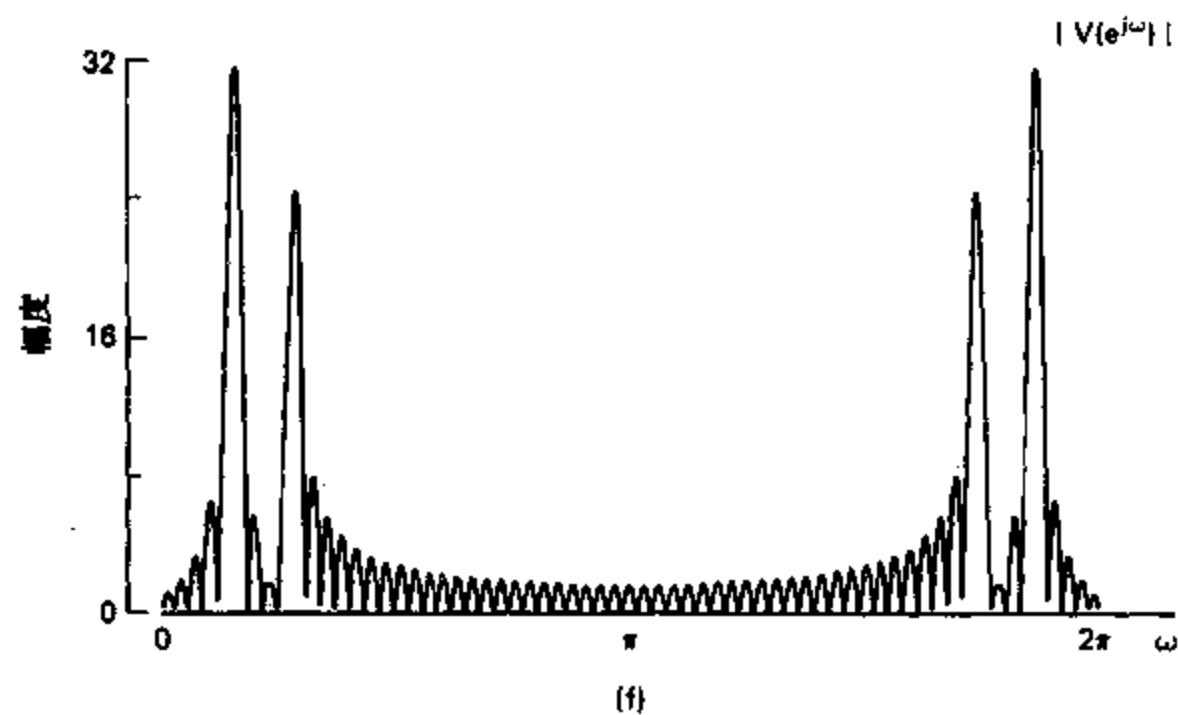
图 11.5 加了矩形窗的余弦序列及其离散傅里叶变换. (a) 加窗的信号. (b) DFT 的实部. (c) DFT 的虚部.



(d)



(e)



(f)

图 11.5(续) (d) DFT 的幅度, (e) DFT 的相位, (f) 离散时间傅里叶变换的幅度.

给出在 $k=0$ 到 $k=N-1$ 范围内的 DFT 值, 相当于给出在 0 到 2π 的频率范围内离散时间傅里叶变换的样本值. 由于离散时间傅里叶变换的固有周期性, 这一范围内的前一半对应于正的连续时间频率, 即 Ω 从零到 π/T ; 后一半对应于负的频率, 即 Ω 从 $-\pi/T$ 到零; 应注意到实部和幅度的偶周期对称性, 以及虚部和相位的奇周期对称性.

图 11.5(d) 中 DFT 的幅值相当于图 11.5(f) 中画出的频谱幅度的样本,正如所料,它集中在输入信号的两个正弦分量的频率 $\omega = 2\pi/7.5$ 和 $\omega = 2\pi/14$ 的周围.具体讲,频率 $\omega_1 = 4\pi/15 = 2\pi(8.533\cdots)/64$ 位于 $k=8$ 到 $k=9$ 所对应的 DFT 样本之间.同样,频率 $\omega_0 = 2\pi/14 = 2\pi(4.5714\cdots)/64$ 位于 $k=4$ 到 $k=5$ 所对应的 DFT 样本之间.注意,图 11.5(f) 中谱峰的频率位置处于从 DFT 得到的谱样本之间.通常,DFT 中峰的位置不一定与傅里叶变换中峰的真正频率位置相重合,这是因为真正的谱峰可以位于谱样本之间.因此,通过对图 11.5(f) 与图 11.5(d) 的比较,显而易见,在 DFT 中峰的相对幅度不一定能确切反映真实谱峰的相对幅度.

例 11.3

现在让我们选取与图 11.3(d) 相对应的参数,则

$$v[n] = \begin{cases} \cos\left(\frac{2\pi}{16}n\right) + 0.75\cos\left(\frac{2\pi}{8}n\right), & 0 \leq n \leq 63, \\ 0, & \text{其它}, \end{cases} \quad (11.16)$$

如图 11.6(a) 所示,也选用 $N=L=64$ 的矩形窗.这与上面的例子非常相似,不同的是在这种情况下余弦函数的频率与两个 DFT 的频率完全重合.具体讲,频率 $\omega_1 = 2\pi/8 = 2\pi/64$ 完全对应于 $k=8$ 的 DFT 样本,并且频率 $\omega_0 = 2\pi/16 = 2\pi/64$ 完全对应于 $k=4$ 的 DFT 样本.

这个例子中 $v[n]$ 的 64 点 DFT 的幅值如图 11.6(b) 所示,它对应于 $|V(e^{j\omega})|$ (绘于图 11.6(c) 中) 在间隔为 $2\pi/64$ 的各频率处的样本值.虽然这个例子的信号参数与例 11.2 非常相似,但是 DFT 的形状却完全不同.特别是,在本例中 DFT 在信号的两个正弦分量的频率处有两根很高的谱线,而在其它的 DFT 值处没有频率分量.事实上,图 11.6(b) 中 DFT 的这种“干净”的外形主要是由谱的采样而得到的一种假象.比较图 11.6(b) 和(c) 后我们可以看出,之所以出现图 11.6(b) 的这种干净外形,是因为对于这种参数的选择,傅里叶变换在 DFT 的采样频率处,除与 $k=4, 8, 56$ 和 60 对应的频率外,其它值完全为零.虽然图 11.6(a) 的信号几乎在所有的频率处都有明显的值,但由图 11.6(c) 显然可见,由于谱的采样,我们在 DFT 中却无法见到这些.

为了进一步说明这一点,让我们用补零的方法将式(11.16) 中的 $v[n]$ 扩展为一个 128 点的序列.所对应的 128 点 DFT 如图 11.7 所示.这种细化的谱采样,使得在另一些频率处存在的幅值就显露出来了.

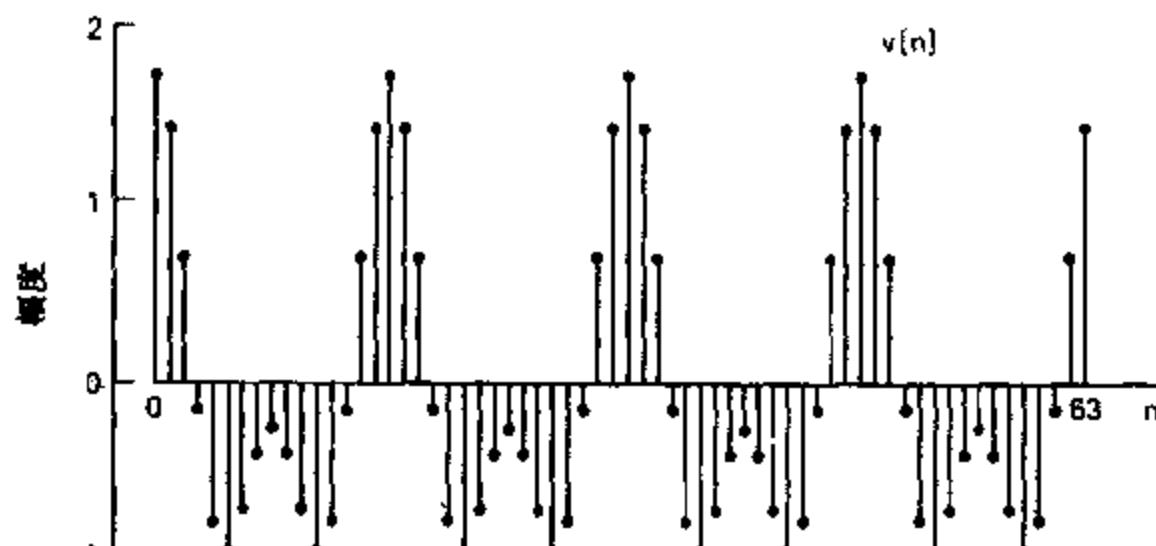
图 11.5、11.6 和 11.7 中的窗均为矩形窗.在以下的一组例子中我们将说明选择不同窗所带来的影响.

例 11.4

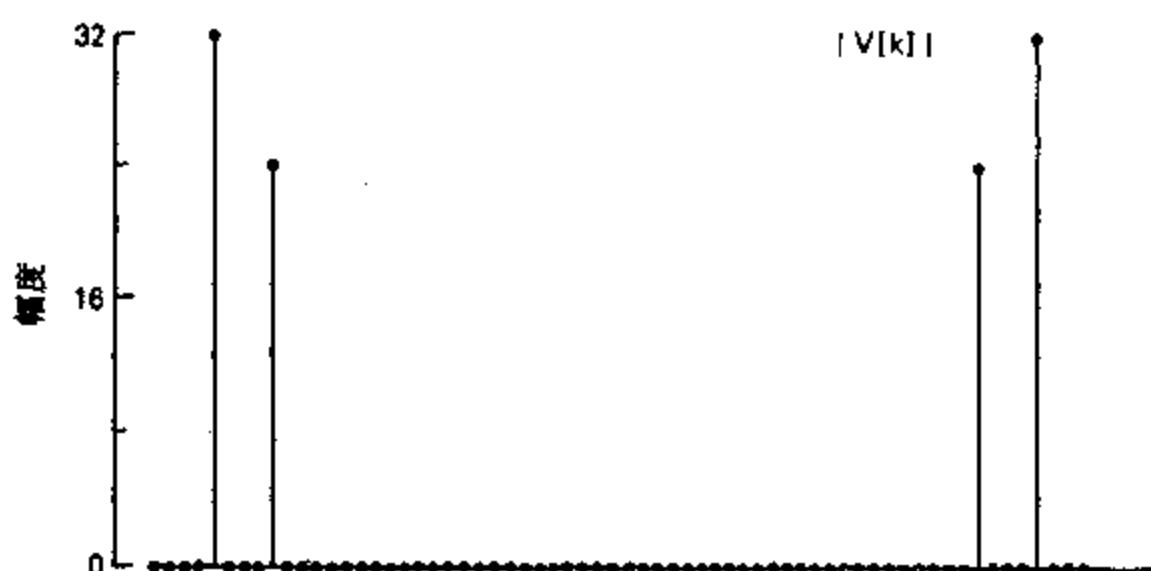
让我们回到例 11.1 给出的频率、振幅和相位参数上,但是使用凯泽窗,因此有

$$v[n] = w_K[n] \cos\left(\frac{2\pi}{14}n\right) + 0.75w_K[n] \cos\left(\frac{4\pi}{15}n\right), \quad (11.17)$$

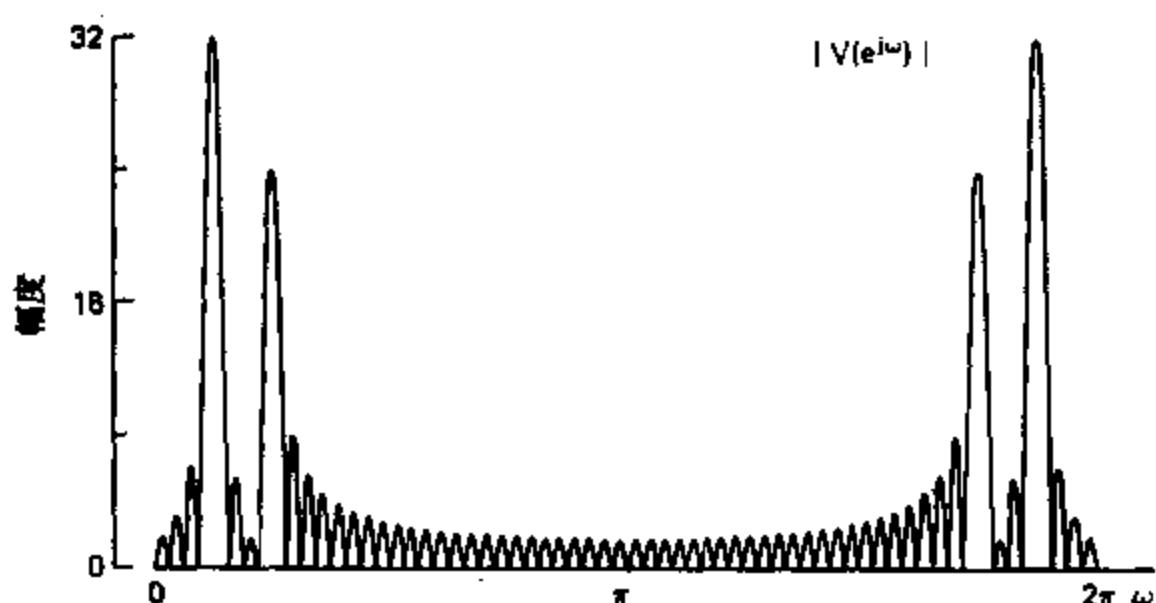
式中 $w_K[n]$ 是由式(11.12)给出的凯泽窗.我们选取凯泽窗参数 $\beta = 5.48$,此时按照式(11.13)将会得到相对旁瓣幅度 $A_s = -40$ dB 的窗.图 11.8(a) 表示加了一个长度为



(a)



(b)



(c)

图 11.6 两个正弦之和的离散傅里叶分析, 在这种情况下, 除了与两个正弦分量对应的频率之外, 在其它 DFT 频率处的傅里叶变换皆为零. (a) 加窗的信号, (b) DFT 的幅度, (c) 离散时间傅里叶变换的幅度 ($|V(e^{j\omega})|$).

$L=64$ 的窗后的序列 $v[n]$. 图 11.8(b) 表示所对应的 DFT 的幅值. 从式(11.15)可以看出, 两个频率之间的差为 $\omega_1 - \omega_0 = 2\pi/7.5 - 2\pi/14 = 0.389$. 由式(11.14)可以得到

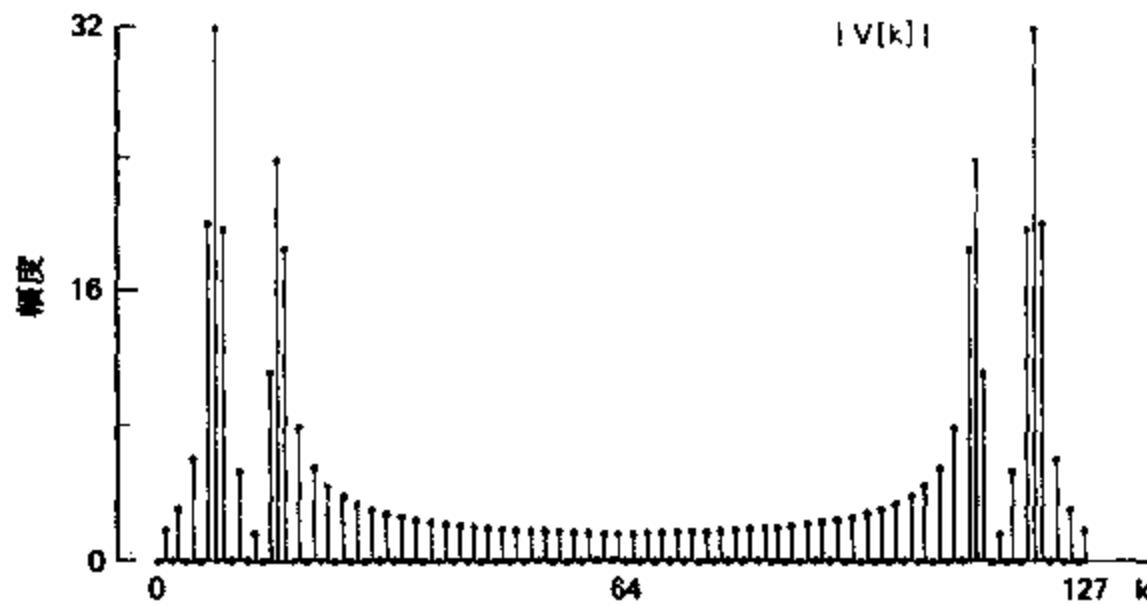


图 11.7 与图 11.6 中同一信号的 DFT,但是频率样本数增加一倍.

$L=64$ 和 $\beta=5.48$ 的凯泽窗的傅里叶变换的主瓣宽度为 $\Delta_m=0.401$. 这样,两个中心位于 ω_0 和 ω_1 的 $W_k(e^{j\omega})$ 之副本的主瓣在两个频率之间的频率区间上仅有很少的重叠. 这一点在图 11.8(b)中已很明显,从图上我们看到两个频率分量可以清楚地加以分辨.

图 11.8(c)表示用 $L=32$ 和 $\beta=5.48$ 的凯泽窗乘以相同的信号. 因为窗的长度只有原来的一半,可以预计该窗的傅里叶变换的主瓣宽度将增加一倍,图 11.8(d)证实了这一点. 具体讲,式(11.13)和(11.14)证实,对于 $L=32$ 和 $\beta=5.48$, 主瓣宽度为 $\Delta_m=0.815$. 此时该窗的傅里叶变换的两个副本在两个余弦频率之间的范围内完全重叠,我们看不到两个可以区分开来的峰.

除图 11.7 中给出的示例之外,在前面的所有例子中,DFT 的长度 N 均等于窗的长度 L . 图 11.7 中在计算 DFT 之前给窗序列补零以便能得到频率等分较密的傅里叶变换. 但是我们必须认识到,补零并不能提高分辨率,分辨率只取决于窗的长度和形状. 下面的例子将说明这一点.

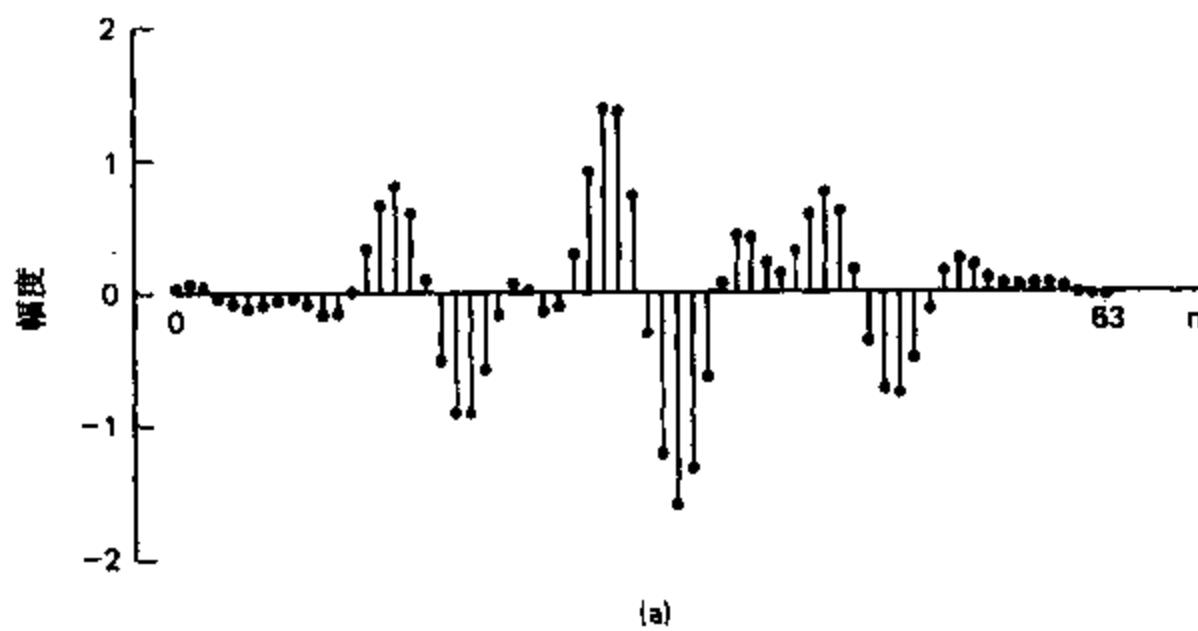


图 11.8 加凯泽窗的离散傅里叶分析.(a) $L=64$ 的加窗序列.

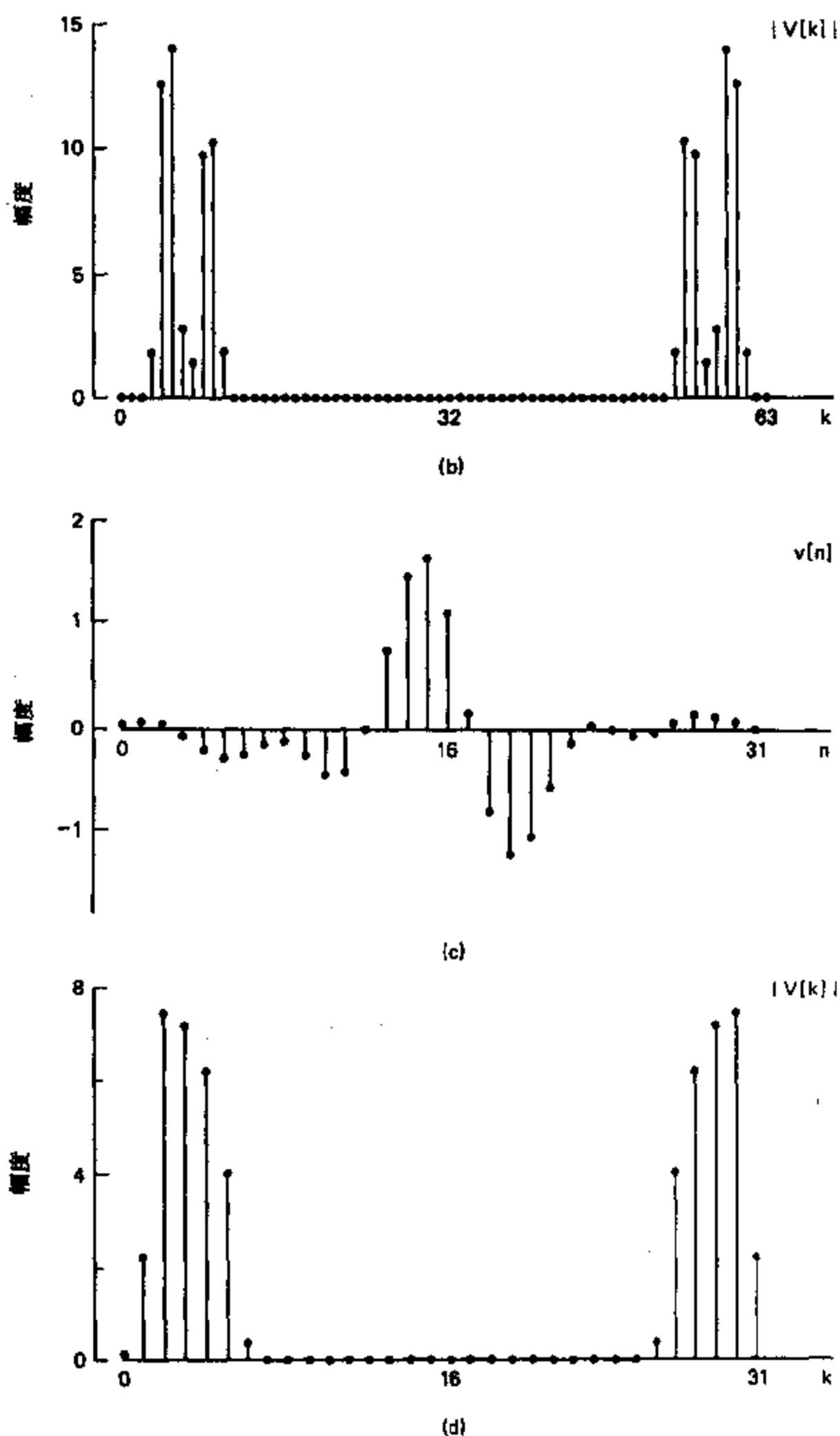


图 11.8(续) (b) $L=64$ 的 DFT 的幅度, (c) $L=32$ 的加窗序列, (d) $L=32$ 的 DFT 的幅度.

例 11.5

在这个例题中我们用 $L=32$ 和 $\beta=5.48$ 的凯泽窗重复例 11.4, 但是改变了 DFT 的长度. 图 11.9(a)表示 $N=L=32$ 时 DFT 的幅度, 与图 11.8(d)相同. 图 11.9(b),

(c), (d)也表示 $L=32$ 时 DFT 的幅度,只是 DFT 的长度分别为 $N=64, N=128$ 和 $N=1024$. 与例 11.3 类似,对 32 点序列补零可得到傅里叶变换较密的谱采样. 图 11.9 中每个 DFT 幅度图的基本包络都相同. 所以,用补零的方法增加 DFT 的长度并不能改变两个正弦频率分量的分辨率,但是可改变频率样本的间距.

要完全表示一个长度为 L 的序列, L 点的 DFT 就足够了,因为原序列可以由它完全恢复. 然而,正如我们在前面的例子中所看到的,简单查看 L 点 DFT 能够导致错误的解释. 正是这个原因,人们常常使用补零的方法,这样可以对频谱充分地过采样,因此能很容易地将一些重要的特性表现出来. 随着大量地时域补零或频域过采样,在 DFT 值之间作简单的内插(即线性内插)就可以给出相当精确的傅里叶频谱图,它可以用以估计谱峰的位置和幅度.

图 11.10 表示用 64 点凯泽窗时,例 11.4 中信号的 1024 点 DFT. 比较该图与图 11.8(b)可以看出,1024 点的 DFT 对于精确定确定加窗傅里叶变换的谱峰的位置是十分有效的. 而且在图 11.10 中两个峰的幅度非常接近于 0.75 与 1 的比值.

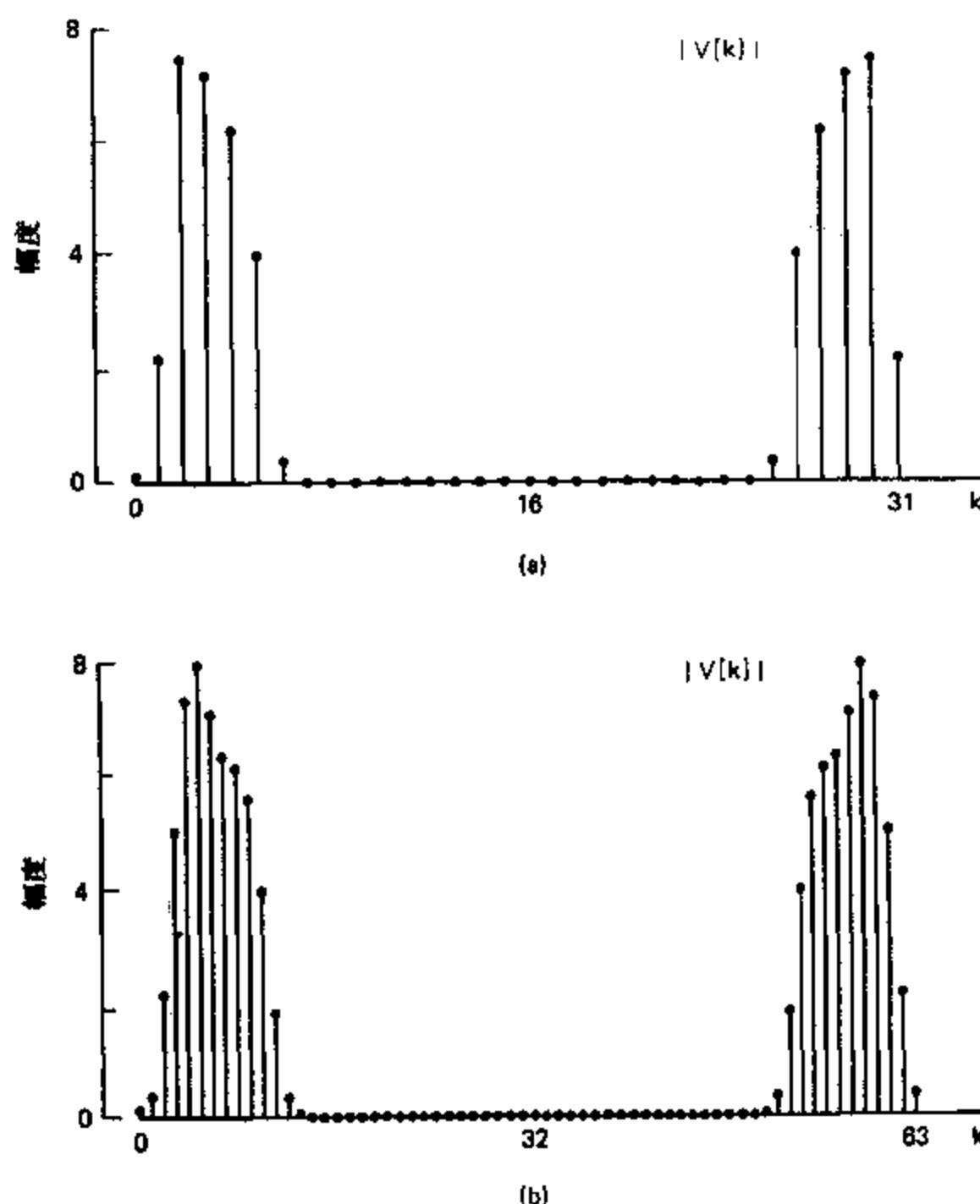


图 11.9 举例说明对于长度 $L=32$ 的凯泽窗 DFT 长度的影响. (a) $N=32$ 时 DFT 的幅度.
(b) $N=64$ 时 DFT 的幅度.

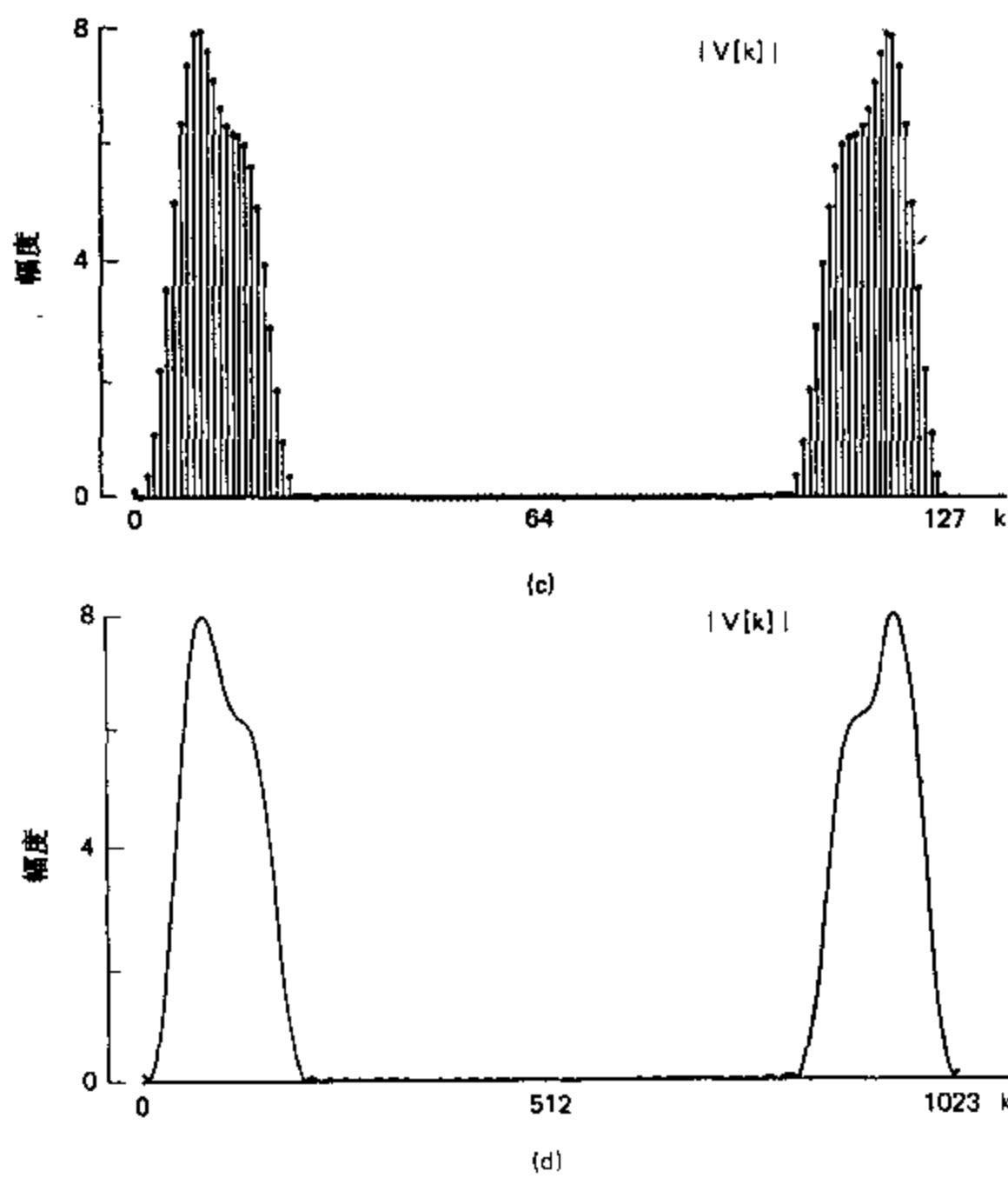


图 11.9(续) (c) $N=128$ 时 DFT 的幅度, (d) $N=1024$ 时 DFT 的幅度。(对 DFT 值作线性内插得到一条平滑曲线。)

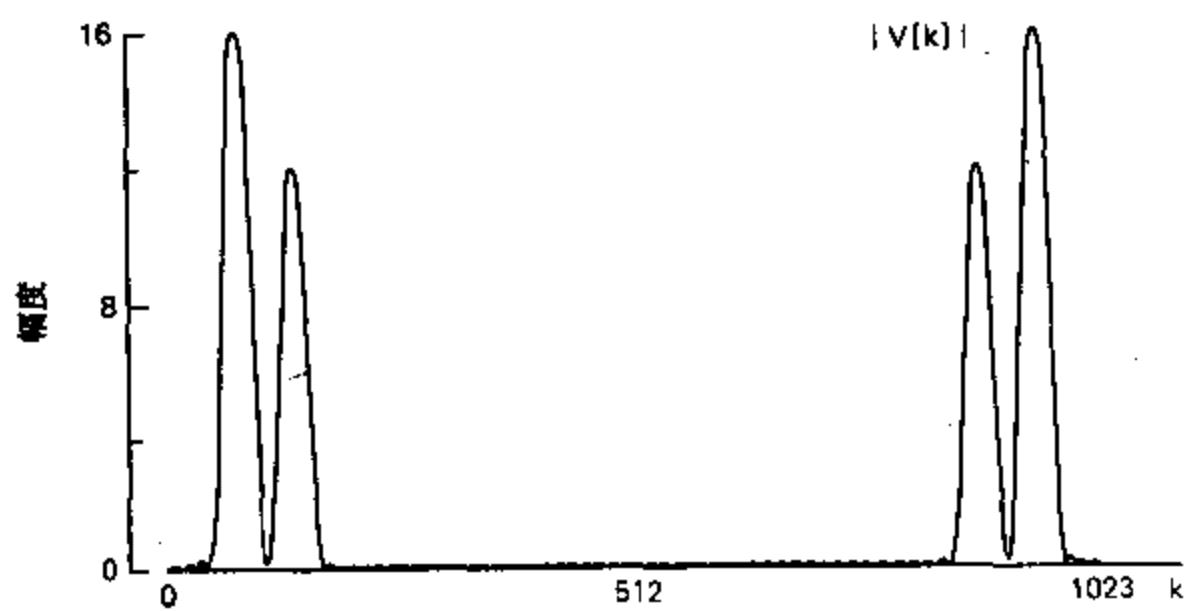


图 11.10 举例说明当 $N \gg L$ 时 DFT 的计算,用线性内插得到一条平滑曲线($N=1024, L=64$).

11.3 依时傅里叶变换

上一节说明如何使用 DFT 得到一个由正弦分量组成的信号之频率表示。在讨论中我们假定余弦函数的频率不随时间而变化，因此无论窗多么长，从窗的开始到结束，信号的特性应当是相同的。但是，在正弦信号模型的实际应用中，信号的特性（振幅、频率和相位）常常随时间而改变。例如，用来描述雷达、声纳、语音和数据通信的信号就需要这种类型的非平稳信号模型。要描述这类信号，单一的 DFT 估计是不够的，因此我们得出依时傅里叶变换的概念，也称短时傅里叶变换^{*}。

一个信号 $x[n]$ 的依时傅里叶变换定义为

$$X[n, \lambda] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[n+m]w[m]e^{-j\lambda m}, \quad (11.18)$$

式中 $w[n]$ 是一个窗序列。在依时傅里叶表示中，一维序列 $x[n]$ 是单个离散变量的函数，它转换为一个离散的时间变量 n 和连续的频率变量 λ 的二维函数^{**}。注意，依时傅里叶变换对于 λ 是以 2π 为周期的周期函数，因此我们只需要考虑 λ 在区间 $0 \leq \lambda < 2\pi$ 上，或长度为 2π 的其它区间上的值。

式(11.18)可以看作 $x[n+m]$ 通过窗 $w[m]$ 的傅里叶变换。窗有一个平稳的起始点，并且当 n 改变时信号滑动着通过窗，这样对于每一个 n 值，可以看到信号的一段不同部分。对于一个线性调频（即“瞬时频率”为 $2\omega_0 n$ ）的信号

$$x[n] = \cos(\omega_0 n^2), \omega_0 = 2\pi \times 7.5 \times 10^{-6}, \quad (11.19)$$

在图 11.11 中示出了这种情况。正如我们在第九章有关线性调频变换算法的介绍中所看到的，这种类型的信号通常称为线性调频脉冲。典型的有，在式(11.18)中的 $w[m]$ 在 $m=0$ 附近有有限长度，因此 $X[n, \lambda]$ 表现出依赖于时间 n 的信号频率特性。例如，在图 11.12 中我们给出式(11.19)和图 11.11 所示信号的依时傅里叶变换的幅度图，其中 $w[m]$ 是一个长度为 400 的哈明窗。该图称为谱图（spectrogram），垂直轴为频率（ λ ），水平轴为时间（ n ）。依时傅里叶变换的幅度用加黑的曲线表示。在图 11.12 中可清楚地看到频率是随着时间线性增长的。

因为 $X[n, \lambda]$ 是 $x[n+m]w[m]$ 的离散时间傅里叶变换，所以如果窗至少有一个非零样本，则依时傅里叶变换就是可逆的。具体讲，由傅里叶变换的合成方程式(2.112)，

$$x[n+m]w[m] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X[n, \lambda] e^{j\lambda m} d\lambda, \quad -\infty < m < \infty, \quad (11.20)$$

若 $w[0] \neq 0^{***}$ ，由上式可得

- * 有关依时傅里叶变换更深入的讨论可在多种参考文献中找到，其中包括 Allen and Rabiner (1977), Rabiner and Schafer (1978), Crochiere and Rabiner (1983)，以及 Nawab and Quatieri (1988) 的论文。
- ** 我们用 λ 表示依时傅里叶变换的频率变量，以区别用 ω 表示的传统离散时间傅里叶变换的频率变量。我们使用方、圆括号混合的记号 $X[n, \lambda]$ 以提示大家 n 是一个离散变量，而 λ 是一个连续变量。
- *** 因为 $X[n, \lambda]$ 是对于 λ 的以 2π 为周期的周期函数，所以在式(11.20)和(11.21)中的积分可以在长度为 2π 的任意区间上进行。

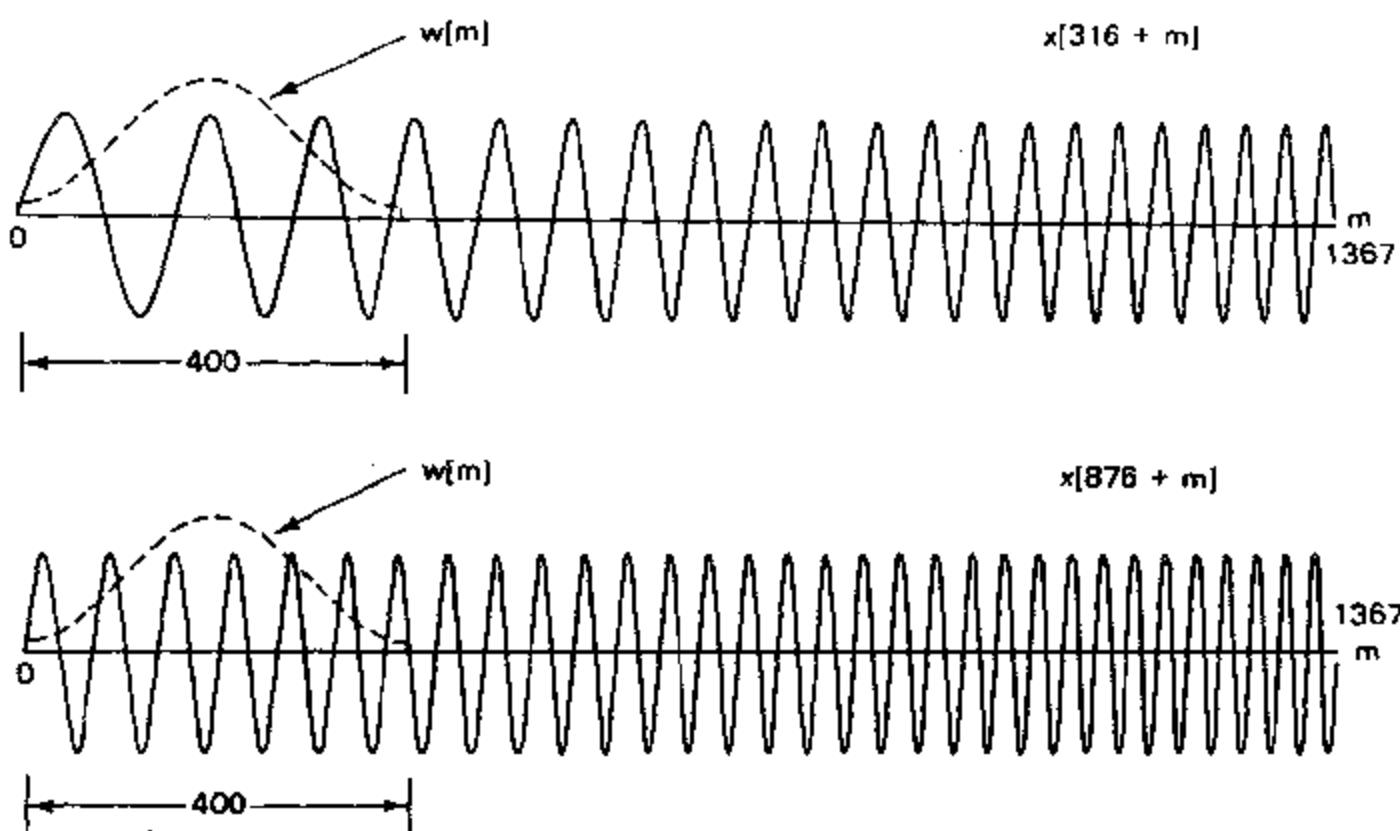


图 11.11 加窗的两段线性调频信号 $x[n] = \cos(2\pi \times 7.5 \times 10^{-6}n^2)$. 当 $n=316$ 时 $X[n, \lambda]$ 是前部信号曲线乘以窗函数的离散傅里叶变换. $X[876, \lambda]$ 是后部信号曲线与窗函数相乘的离散傅里叶变换.

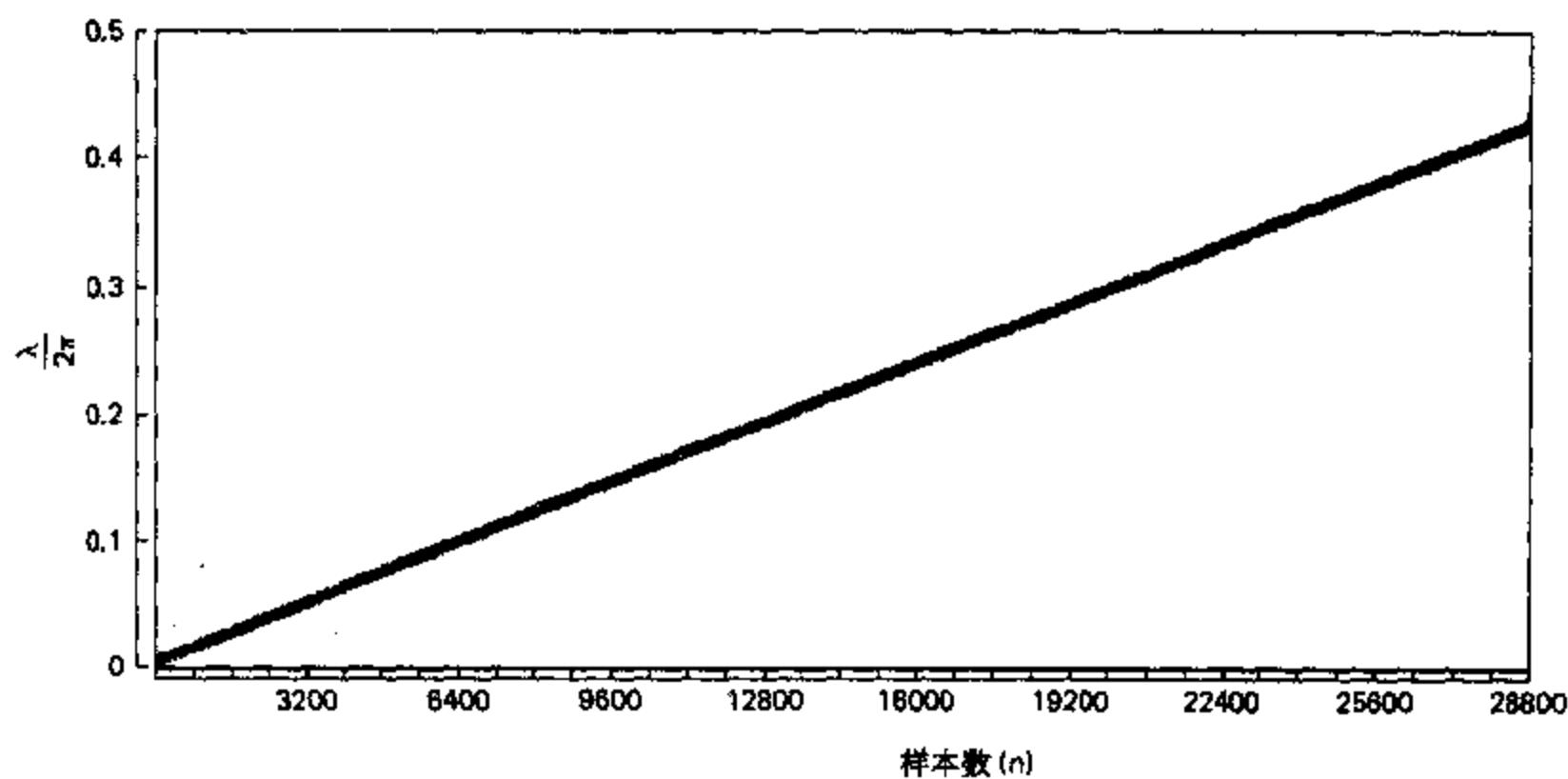


图 11.12 使用长度为 400 的哈明窗时 $x[n] = \cos(2\pi \times 7.5 \times 10^{-6}n^2)$ 的依时傅里叶变换的幅度.

$$x[n] = \frac{1}{2\pi w[0]} \int_0^{2\pi} X[n, \lambda] d\lambda. \quad (11.21)$$

很清楚, 利用式(11.20)以同样的方式不但可以恢复与非零窗样本相乘的单个样本 $x[n]$, 而且可以恢复与非零窗样本相乘的其它所有样本.

重新安排式(11.18)中的求和顺序可以得出依时傅里叶变换的另外一种有用的表达式. 如果在式(11.18)中我们作一替换 $m' = n + m$, 则 $X[n, \lambda]$ 可以写为

$$X[n, \lambda] = \sum_{m'=-\infty}^{\infty} x[m'] w[-(n-m')] e^{j\lambda(n-m')}. \quad (11.22)$$

式(11.22)可以解释为卷积

$$X[n, \lambda] = x[n] * h_\lambda[n], \quad (11.23a)$$

式中

$$h_\lambda[n] = w[-n] e^{j\lambda n}. \quad (11.23b)$$

由式(11.23a)可知,当 λ 固定时,依时傅里叶变换是 n 的函数,它可以看作是一个冲激响应为 $h_\lambda[n]$,或等效地,频率响应为

$$H_\lambda(e^{j\omega}) = W(e^{j(\lambda-\omega)}). \quad (11.24)$$

的线性时不变滤波器的输出.

通常将正时间部分为非零的窗称为非因果窗,因为用式(11.18)计算 $X[n, \lambda]$ 需要用到不同的随着 n 变化的样本. 等效地,用线性滤波来解释,冲激响应 $h_\lambda[n] = w[-n] e^{j\lambda n}$ 就是非因果的.

在式(11.18)的定义中,窗的时间原点保持固定,将信号平移通过窗的有效区间. 实际上就是重新定义傅里叶分析的时间原点在信号的第几个样本处. 另外一种可能是随着 n 的变化将窗平移,而保持傅里叶分析的时间原点固定在信号的最初时间原点处. 由此可以得出依时傅里叶变换的另一个定义,形式为

$$\overset{\vee}{X}[n, \lambda] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m] w[m-n] e^{-j\lambda m}. \quad (11.25)$$

很容易证明,式(11.18)和(11.25)两种定义之间的关系为

$$\overset{\vee}{X}[n, \lambda] = e^{-j\lambda n} X[n, \lambda]. \quad (11.26)$$

当我们考虑用DFT得出依时傅里叶变换对于 λ 的样本时,式(11.18)的定义实际上是很方便的,因为若 $w[m]$ 在 $0 \leq m \leq (L-1)$ 范围内为有限长,则 $x[n+m]w[n]$ 也为有限长. 另一方面,式(11.25)的定义对于用滤波器组来解释傅里叶分析时也有一定的优越性. 由于我们主要关心DFT的应用,因此我们将以式(11.18)为基础进行讨论.

11.3.1 窗的影响

在依时傅里叶变换中窗的主要目的是限制被变换序列的所在范围,以便可以合理地认为谱特性在窗的持续时间内是平稳的. 信号的特性变化越快,则窗应当越短. 正如我们在11.2节中所看到的,随着窗变短,频率分辨率则降低. 当然,对于 $X[n, \lambda]$,窗的确也有同样影响. 另一方面,当窗的长度减小时,时间分辨能力将增强. 因此,选择窗的长度应在频率分辨率和时间分辨率之间进行折衷.

通过假设信号 $x[n]$ 有一个常规的离散时间傅里叶变换 $X(e^{j\omega})$ 可以看出窗对于依时傅里叶变换性质的影响. 首先设窗对于所有的 m 均为1,也就是假设没有加窗. 然后由式(11.18)得

$$X[n, \lambda] = X(e^{j\lambda}) e^{j\lambda n}. \quad (11.27)$$

当然,一个典型的用于谱分析的窗应递减至零,以便只选取信号的一部分作分析. 如像在

11.2 节所讨论的,选择窗的长度和形状,应当使窗的傅里叶变换在频率上比信号的傅里叶变换中的变化要窄.图 11.13(a)给出了一种典型窗的傅里叶变换图.

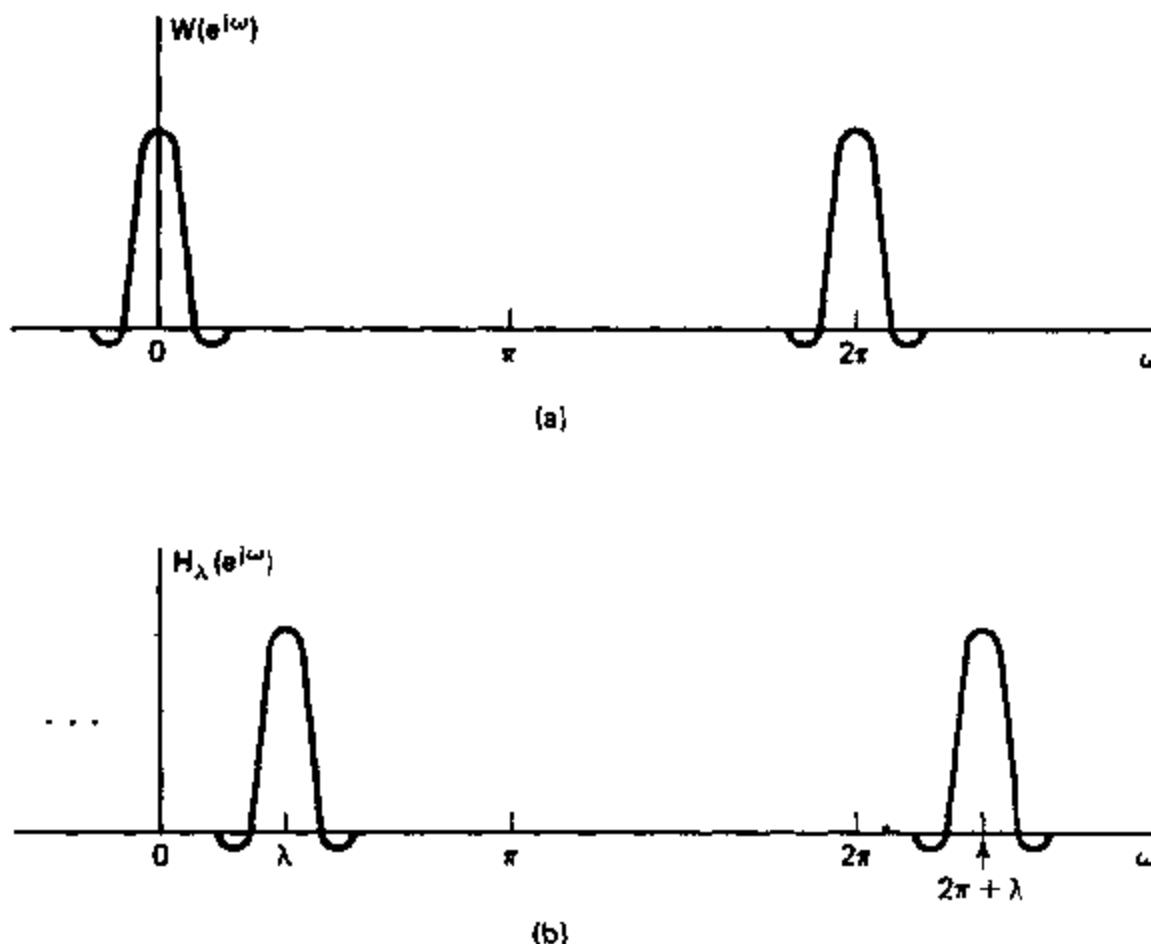


图 11.13 (a) 在依时傅里叶分析中窗的傅里叶变换. (b) 用于依时傅里叶分析的等效带通滤波器.

如果我们研究 n 固定时的依时傅里叶变换,则从傅里叶变换的性质可得

$$X[n, \lambda] = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{j\theta n} X(e^{j\theta}) W(e^{j(\lambda-\theta)}) d\theta, \quad (11.28)$$

这就是信号平移后的傅里叶变换与窗的傅里叶变换的卷积.上式与式(11.2)相似,但是在式(11.2)中我们假设信号相对于窗没有连续的平移.这里我们对每一个 n 值计算一次傅里叶变换.在 11.2 节中我们看到,分辨两个窄带信号分量的能力取决于窗的傅里叶变换主瓣的带宽,而一个分量泄漏到相邻另一个分量中去的程度决定于相对旁瓣幅度.

在式(11.23)和(11.24)的线性滤波解释中, $W(e^{j\omega})$ 通常具有如图 11.13(a)所示的低通特性,因此 $H_\lambda(e^{j\omega})$ 就是一个通带中心位于 $\omega = \lambda$ 处的带通滤波器,如图 11.13(b)所示.显然,这个滤波器的通带宽度近似等于窗的傅里叶变换之主瓣的宽度.抑制相邻频率分量的程度取决于相对旁瓣幅度.

以上的讨论表明,如果我们用依时傅里叶变换来得到一个信号的频谱的依时估计,最好用递减的窗以降低旁瓣,并且用尽可能长的窗以改善频率分辨率.我们将在 11.5 节研究一些例子.但是在此之前,我们首先讨论在用显式计算依时傅里叶变换时 DFT 的用法.

11.3.2 时间采样和频率采样

用显式计算 $X[n, \lambda]$ 只有对一组有限多个 λ 值才能进行,这就相当于在频域对依时傅

里叶变换进行采样。正如有限长信号完全可以用离散时间傅里叶变换的样本来表示一样，如果在式(11.18)中窗为有限长，则不确定长度的信号可以通过依时傅里叶变换的样本来表示。例如，设窗长为 L 并且起始样本在 $m=0$ 处，即

$$w[m]=0 \quad 0 \leq m \leq L-1 \text{ 区间以外.} \quad (11.30)$$

如果对 $X[n, \lambda]$ 在 N 个等间隔的频率 $\lambda_k = 2\pi k/N$ 处采样，且 $N \geq L$ ，那么由采样后的依时傅里叶变换仍可以恢复原来的序列。具体讲，若定义 $X[n, k]$ 为

$$X[n, k] = X[n, 2\pi k/N] = \sum_{m=0}^{L-1} x[n+m]w[m]e^{-j(2\pi/N)km}, \quad 0 \leq k \leq N-1, \quad (11.30)$$

则 $X[n, k]$ 是加窗序列 $x[n+m]w[m]$ 的 DFT。利用 IDFT，有

$$x[n+m]w[m] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[n, k]e^{j(2\pi/N)km}, \quad 0 \leq m \leq L-1. \quad (11.31)$$

由于假设对于 $0 \leq m \leq L-1$ ，窗 $w[m] \neq 0$ ，则可以利用式

$$x[n+m] = \frac{1}{Nw[m]} \sum_{k=0}^{N-1} X[n, k]e^{j(2\pi/N)km}, \quad 0 \leq m \leq L-1, \quad (11.32)$$

在从 n 到 $(n+L-1)$ 的区间内恢复序列值，式中假定对于 $0 \leq m \leq L-1$ ，窗 $w[m] \neq 0$ 。重要的是，窗为有限长度，并且我们至少取 λ 维的样本与窗的非零样本一样多，即 $N \geq L$ 。虽然式(11.29)对应于一个非因果窗，我们也可以使用一个因果窗，即对于 $-(L-1) \leq m \leq 0$ ， $w[m] \neq 0$ ，或对称窗，也就是对于 $|m| \leq (L-1)/2$ (L 为奇数)， $w[m] = w[-m]$ 。在式(11.30)中之所以使用非因果窗只是为了使我们的分析更方便些，因为很自然地可以作出如下解释：采样后的依时傅里叶变换可作为以样本 n 为起始的加窗序列的 DFT。

由于式(11.30)相当于把式(11.18)对 λ 进行采样，因此它也相当于把式(11.22)和(11.23)对 λ 进行采样。特别是，式(11.30)可以重新写为

$$X[n, k] = x[n] * h_k[n], \quad 0 \leq k \leq N-1, \quad (11.33a)$$

式中

$$h_k[n] = w[-n]e^{j(2\pi/N)kn}. \quad (11.33b)$$

式(11.33)可以看作是一组 N 个滤波器，如图 11.14 所示，其中第 k 个滤波器的频率响应为

$$H_k(e^{j\omega}) = W(e^{j[(2\pi k/N)-\omega]}). \quad (11.34)$$

我们的讨论表明，若将 $X[n, \lambda]$ 或 $X[n, k]$ 对时间 n 采样，则可以在 $-\infty < n < \infty$ 内重构 $x[n]$ 。具体讲，利用式(11.32)我们可以由 $X[n_0, k]$ 在区间 $n_0 \leq n \leq n_0 + L - 1$ 上重构该信号，也

可以由 $X[n_0 + L, k]$ 在区间 $n_0 + L \leq n \leq n_0 + 2L - 1$ 上重构该信号，等等。这样，由同时在频率维和时间维采样的依时傅里叶变换完全可以重构 $x[n]$ 。通常对于如式(11.29)表示的窗的支撑区，我们定义这种采样的依时傅里叶变换为

$$X[rR, k] = X[rR, 2\pi k/N] = \sum_{m=0}^{L-1} x[rR+m]w[m]e^{-j(2\pi/N)km}, \quad (11.35)$$

这里 r 和 k 为整数，并有 $-\infty < r < \infty$ 和 $0 \leq k \leq N-1$ 。为了进一步简化所用的符号，定义

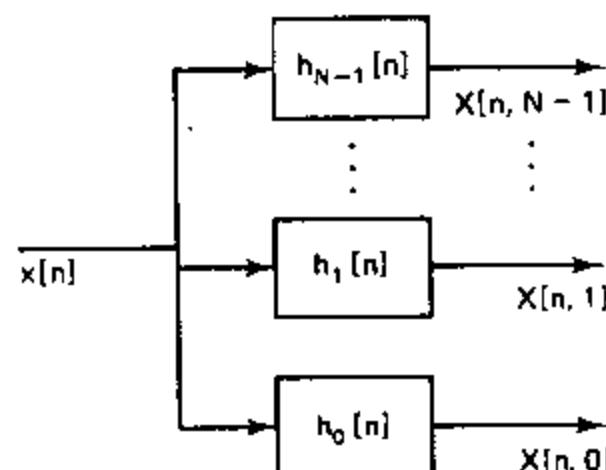


图 11.14 依时傅里叶变换的滤波器组表示。

$$X_r[k] = X[rR, k] = X[rR, \lambda_k], \quad -\infty < r < \infty, \quad 0 \leq k \leq N-1, \quad (11.36)$$

式中 $\lambda_k = 2\pi k/N$. 这一表达式清楚地说明, 采样依时傅里叶变换就是加窗信号序列

$$x_r[m] = x[rR+m]w[m], \quad -\infty < r < \infty, \quad 0 \leq m \leq L-1 \quad (11.37)$$

的 N 点 DFT 序列. 图 11.15 表示在 $N=10$ 和 $R=3$ 的情况下, 对应于 $X[n, \lambda]$ 在 (n, λ) 平面上的各条线和采样点的栅格图. 正如我们已经证明的, 由这样一个二维离散表示有可能唯一地重构原始信号.

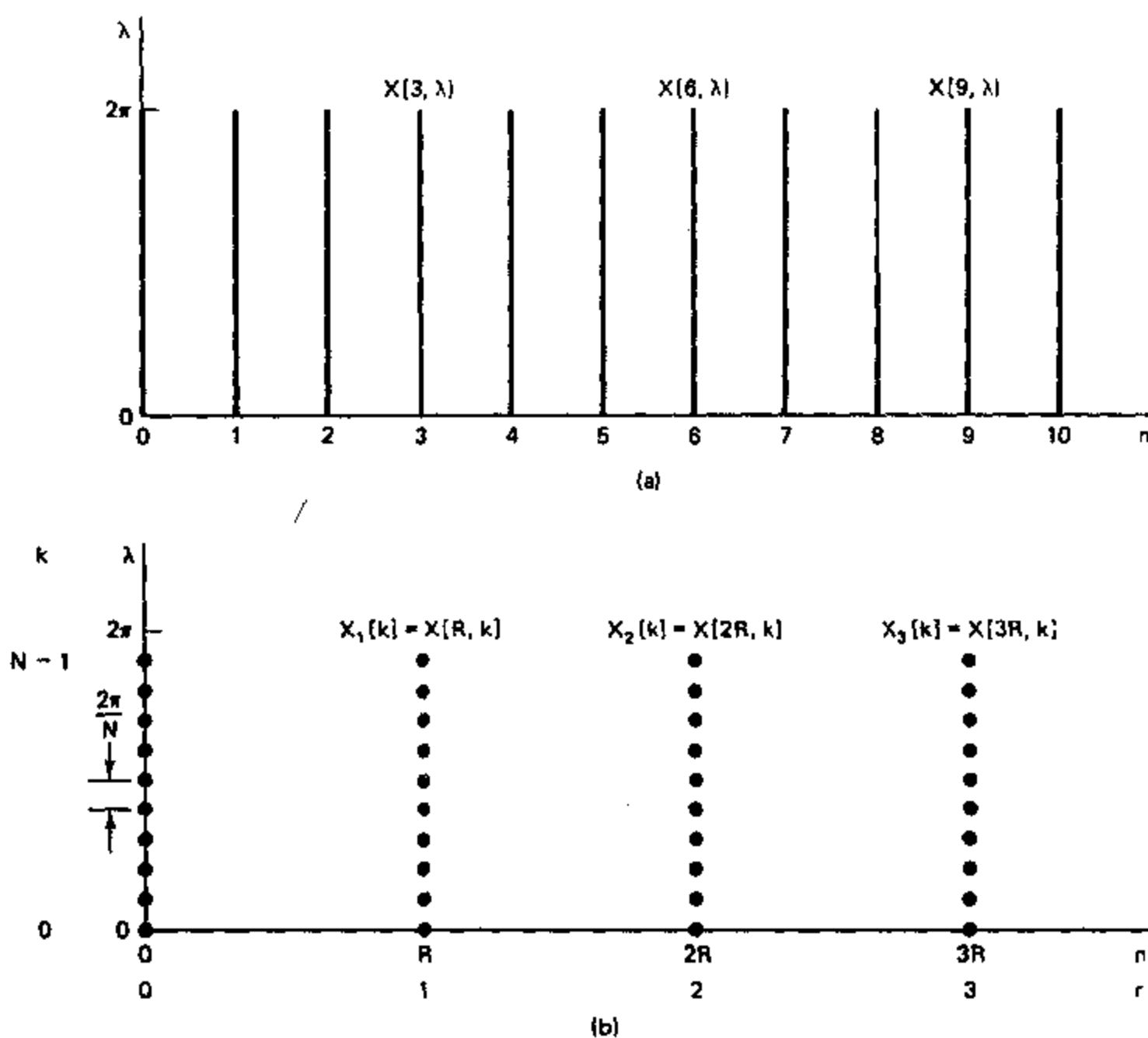


图 11.15 $N=10$ 和 $R=3$ 时, 采样的依时傅里叶变换在 (n, λ) 平面上采样点的栅格图.

式(11.35)涉及到如下整数型参数: 窗的长度 L ; 在频率维中的样本数或 DFT 的长度 N ; 以及在时间维中的采样区间 R . 然而并不是任意选择这些参数都能完全重构信号. 选择 $L \leq N$ 保证我们可以由块变换(Block transform) $X_r[k]$ 来重构加窗信号段 $x_r[m]$. 若 $R < L$ 则信号段有重叠; 但是若 $R > L$, 则信号的一些样本就用不上, 这样由 $X_r[k]$ 也就不能重构信号. 因此, 通常采样的三个参数应当满足关系式 $N \geq L \geq R$. 应当注意, 在采样的依时傅里叶变换表示中每批 R 点信号样本用 N 个复数表示. 正如上面证明过的, 对于 $N=L=R$ 的特殊情况, 由采样的依时傅里叶变换可以完全重构信号. 在这种情况下, 一个实信号的 N 个样本可以用 N 个实数来表示, 并且这是对于一个任意选择的信号我们所

希望能达到的最小表示.

可以用另一种方式理解依时傅里叶变换在时间维采样. 回想一下当 λ 固定、或等效地 k 固定时, 依时傅里叶变换是一个一维序列, 它就是频率响应如式(11.24)所示带通滤波器的输出. 因此可以预见, 表示每个频率的序列采样率可以减小到 $2\pi/\Delta_m$ 分之一, 其中 Δ_m 是窗的傅里叶变换主瓣的宽度. 这种看法可能会遇到在时间维混叠的问题, 因为任何有限长窗的傅里叶变换都不是一个理想滤波器的响应. 但是, 上面根据块处理观点的看法清楚地表明, 我们完全可以由时间采样和频率采样依时傅里叶变换重构原始信号. 从线性滤波观点较详细的分析表明, 混叠失真可以在重构过程中去除掉. 这一点将在习题 11.19 中研究, 更详细的讨论见 Rabiner and Schafer (1978) 以及 Crochiere and Rabiner (1983) 的文献.

11.4 利用依时傅里叶变换的块卷积

依时傅里叶变换的一种用法是将它作为用频域修正来处理一个离散时间信号的基础. 这可以通过以下步骤来完成: 首先计算一个依时傅里叶变换的表达式, 然后对该表达式加以修正, 最后重构一个离散时间信号. 这种方法广泛用于数字语音编码, 在该情况下, 并不对语音信号的样本进行量化, 而是对采样的依时傅里叶变换进行量化和编码, 以用于传输和贮存. 讨论这类应用会使我们离题太远, 但是这种对于离散时间信号的块处理技术在第八章中已作介绍. 当时我们讨论的是, 用 DFT 来实现一个有限长冲激响应与不确定长度之输入信号的卷积问题. 利用 11.3 节的定义和概念, 对于这种实现线性时不变系统的方法可以有一种有用的解释.

假设当 $n < 0$ 时 $x[n] = 0$, 并且假定对于 $R = L$ 和一个矩形窗来计算依时傅里叶变换. 换句话说, 采样了的依时傅里叶变换 $X_r[k]$ 包括一组输入序列段

$$x_r[m] = x[rL+m], \quad 0 \leq m \leq L-1 \quad (11.38)$$

的 N 点 DFT. 因为包括了信号 $x[n]$ 的每个样本, 并且每批数据之间没有重叠, 所以有

$$x[n] = \sum_{r=0}^{\infty} x_r[n-rL]. \quad (11.39)$$

现在假设定义一个新的依时傅里叶变换

$$Y_r[k] = H[k]X_r[k], \quad 0 \leq k \leq N-1, \quad (11.40)$$

式中 $H[k]$ 是一个很长单位样本序列 $h[n]$ 的 N 点 DFT, 且当 $n < 0$ 和 $n > P-1$ 时 $h[n] = 0$. 若我们计算 $Y_r[k]$ 的 IDFT, 可得

$$y_r[m] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} Y_r[k] e^{j(2\pi/N)km} = \sum_{\ell=0}^{N-1} x_r[\ell] h[((m-\ell))_N]. \quad (11.41)$$

这表明, $y_r[m]$ 是 $h[m]$ 和 $x_r[m]$ 的 N 点循环卷积. 因为 $h[m]$ 长为 P , 有 P 个样本, $x_r[m]$ 长为 L , 有 L 个样本, 所以由 8.8 节的讨论可知: 若 $N \geq L+P-1$, 则在区间 $0 \leq m \leq L+P-2$ 上 $y_r[m]$ 将等于 $h[m]$ 和 $x_r[m]$ 的线性卷积; 在该区间以外, $y_r[m]$ 将为零. 由此可得, 如果我们按照

$$y[n] = \sum_{r=0}^{\infty} y_r[n-rL] \quad (11.42)$$

来构造一个输出信号 $y[n]$, 则 $y[n]$ 是一个冲激响应 $h[n]$ 的线性时不变系统的输出. 刚才叙述的方法正是块卷积的重叠相加法. 在 8.8 节中讨论过的重叠保留法也可归于依时傅里叶变换的范畴.

仅由该例就可看出: 频域表示一般都提供了很大的灵活性. 在第十二章中, 我们将看到利用依时傅里叶变换进行离散时间信号处理的另一个例子.

11.5 非平稳信号的傅里叶分析

在 11.4 节中我们研究了如何用依时傅里叶变换来实现线性滤波的一个简单例子. 在这类应用中, 我们十分关注是否有可能由修正的依时傅里叶变换重构一个修正的信号, 而对谱的分辨率不是太关心. 另一方面, 依时傅里叶变换的概念大概是最广泛地用作获得非平稳离散时间信号谱估计的各种技术的一个框架, 并且在这些应用中, 谱的分辨率、时间变化以及其它一些问题是最重要的.

非平稳信号是一种信号特性随时间变化的信号, 例如, 一些振幅、频率或相位随时间变化的正弦分量. 正如我们将在 11.5.1 节中对于语音信号以及将在 11.5.2 节中对于多卜勒雷达信号所要说明的, 依时傅里叶变换常常可以给出有关信号特性如何随时间变化的有用描述.

当我们把依时傅里叶分析用于一个采样了的信号时, 11.1 节对于计算每个 DFT 的全部讨论均成立. 换句话说, 对于信号的每一段 $x_i[n]$, 通过在 11.1 节中叙述的方法能把采样依时傅里叶变换 $X_i[k]$ 与原来的连续时间信号的傅里叶变换联系在一起. 此外, 如果我们要将依时傅里叶变换用于固定(即非时变)参数的正弦信号, 则 11.2 节的讨论也可以用于我们计算的每个 DFT. 当信号频率不随时间改变时, 人们可能会想到依时傅里叶变换只在频率维以 11.2 节所描述的方式变化, 但是这只有在十分特殊的情况下才成立. 例如, 如果信号是周期为 N_p 的周期信号, 且 $L = \ell_0 N_p$, 以及 $R = r_0 N_p$ (其中 ℓ_0 和 r_0 为整数), 也就是窗正好包括 ℓ_0 个周期并且在两次计算 DFT 之间窗正好移动 r_0 个周期, 则依时傅里叶变换在时间维将是不变的. 通常, 即使信号完全是周期的, 当不同段的波形平移到分析窗中时所产生的相位关系改变也会导致依时傅里叶变换在时间维变化. 然而, 对于平稳信号若我们用一个在两端递减至零的窗, 则从一段信号到另一段信号时, 幅度 $|X_i[k]|$ 只有轻微的改变, 而大多数复数依时傅里叶变换的变化表现在相位上.

11.5.1 语音信号的依时傅里叶分析

语音是由激励一个声管、即声道而产生的, 该声道的一端靠近嘴唇, 另一端靠近声门. 有三种基本类型的语音:

- 浊音是由打开和关闭声门引起的准周期气流脉冲激励声道而产生的.
- 摩擦音是由在声道某处形成一个缩颈并且迫使气流通过该缩颈产生湍流, 由此形成一个类似噪声的激励而产生的.
- 爆破音是在完全关闭声道后并形成一定的压力, 然后突然将它释放而产生的.

对于语音信号模型的详细讨论以及依时傅里叶变换的应用可在如像 Flanagan (1972), Rabiner and Schafer (1978), O'Shaughnessy (1987) 及 Parsons (1986) 的著作中找到.

12.9.1 节将讨论一种较详细的语音信号解析模型。在这里我们注意到，对于一个固定的声道形状，语音的模型可以看作是一个线性时不变系统（声道）在浊音时对准周期脉冲串的响应，或在清音时对宽带噪声的响应。声道是一个其特性由自己的自然频率所决定的声传输系统，该自然频率称为谐振峰，与其频率响应中的谐振点相对应。在正常的语音中，当舌和唇产生语音的姿态时，声道随时间相当慢地改变其形状，这样其模型可以当作一个慢速时变的滤波器，该滤波器将其频率响应特性强加在激励谱上。图 11.16 中给出了一个典型的语音波形。

从这段有关语音产生过程的简要叙述中可看出语音的确是非平稳信号。但是，正如图 11.16 中表明的，可假定语音信号的特性在 30 或 40ms 量级的时间范围内基本保持不变。显然，语音信号的频率范围上限可达 15kHz 或更高，但是即使当带宽限制到低于 3kHz 附近的频率时语音仍是较容易听懂的。例如，商用电话系统通常限制最高传输频率在 3~4kHz 范围。对于数字电话通信系统标准采样率为 8000 样本/秒。用这样的采样率，40ms 的时间区间将覆盖 320 个样本。

图 11.16 说明该波形是由一串准周期浊音语音段与夹杂着类似噪声的清音语音段所组成的。这幅图提示我们，如果窗长 L 不是太长，则信号的特性从信号段的开始到结束将不会有明显改变。这样，一个加窗语音段的 DFT 应当表现出该信号的频率特性。例如，若窗的长度足够长使得我们可以将谐波分辨出来，则某一段加窗浊音的 DFT 应当在那个区间内位于信号基频的整数倍处出现一系列谱峰。通常这就要求窗覆盖波形的几个周期。若窗太短，则谐波将无法分辨，但是总的谱的形状仍然是明显的。这是在频率分辨率和时间分辨率之间进行折衷的典型情况，在非平稳信号的分析中这是必要的。如果窗太长，则信号的特性从窗的这头到那头可能会有很大变化；如果窗太短，则会牺牲窄带分量的分辨率。以下的讨论将说明这一折衷情况。

图 11.17(a)给出了在图 11.16 中所示句子的依时傅里叶变化的谱图。在谱图的下方也给出了在相同时间坐标比例下的时间波形。更具体讲，图 11.17(a)是一个宽带谱图。宽带谱图表示是利用在时间上比较短的窗得出的。它的特点是频域分辨率低，而时域分辨率高。频率轴用连续时间频率标示。由于信号的采样率为 16,000 样本/秒，则可得出频率 $\lambda = \pi$ 对应于 8kHz。图 11.17(a)中使用的具体窗是宽 6.7ms（对应于 $L = 108$ ）的哈明窗。 R 的值为 $R = 16$ ，代表 1ms 的时间增量。在水平方向上移动横向通过谱图的宽暗条对应于声道的谐振频率，正如我们看到的，它随着时间而变化。谱图在垂直方向的条纹形状是由于波形中浊音部分的准周期性质所致，比较一下波形图和谱图中的变化就会很清楚。因为分析窗的长度大约是波形的一个周期长，当窗沿时间轴滑动时，它交替地覆盖波形的高能量段和低能量段，所以在图中浊音期间就会产生垂直的条纹。

在窄带依时傅里叶分析中使用较长的窗可得到较高的频率分辨率，同时相应地降低时间分辨率。图 11.17(b)就体现了这样一种窄带分析。在这种情况下窗为宽 45ms 的哈明窗。这对应于 $L = 720$ 。 R 的值为 $R = 16$ 。

以上讨论只是略为提到依时傅里叶变换在语音的分析和处理中之所以非常重要的众多原因。的确，这一概念被直接和间接地作为语声分析和许多基本语音处理应用的基础，如数字编码、噪声和混响的消除、语音识别、说话人的证实和识别等等。出于本书目的，我们的讨论仅仅是一个简介性的说明。

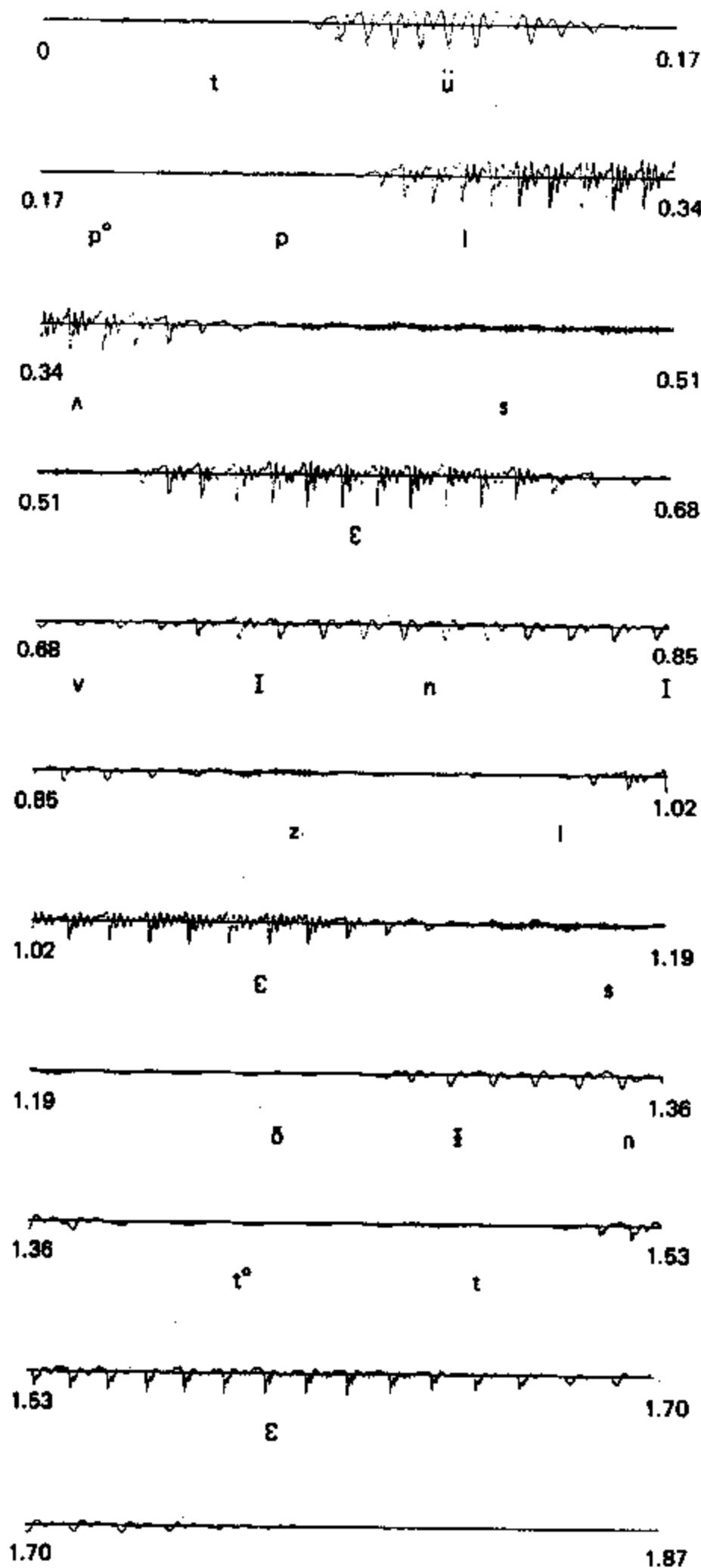


图 11.16 “Two plus seven is less than ten”发音的波形. 每条线持续 0.17s. 波形下方标注出时间校准了的音素符号.

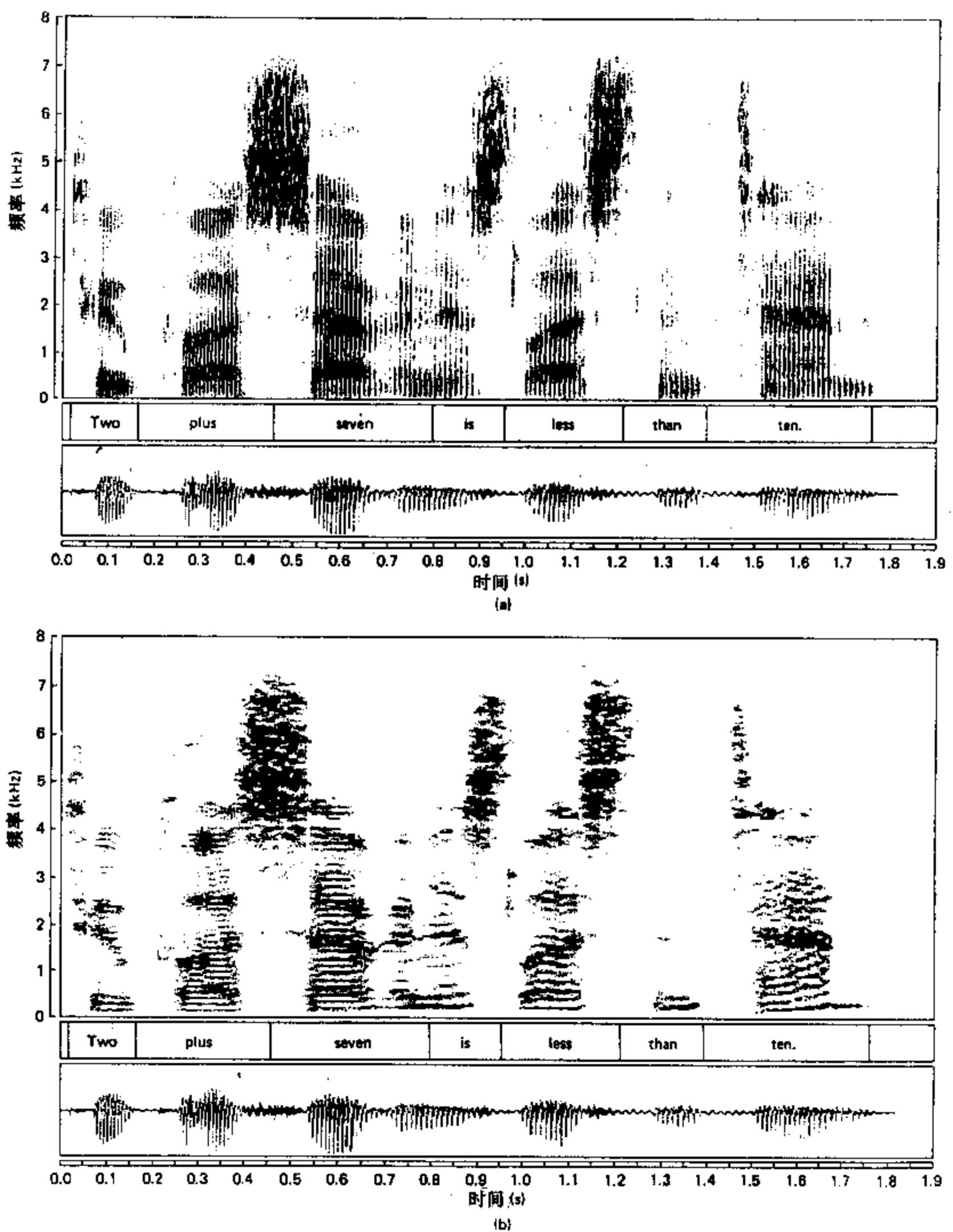


图 11.17 (a) 图 11.16 中波形的宽带谱图, (b) 窄带谱图.

11.5.2 雷达信号的依时傅里叶分析

依时傅里叶变换发挥着重要作用的另一个应用领域是雷达信号分析。一个典型的雷达系统由以下几部分组成：

- 天线，同时用于发射和接收。
- 发射机，它产生需要的微波频段信号。在我们的讨论中，假设这个信号是正弦脉冲。虽然这是一般的情况，但也可以应用其它信号，这取决于具体的雷达目标和设计方法。
- 接收机，它放大和检测从天线对准的目标反射回来的发射脉冲的回波。

在这样一个雷达系统中，发射的正弦信号以光速传播，经目标反射，并以光速回到天线，因此有一个从天线至目标往返传播的时间延迟。如果我们假设发射信号是一个形式为 $\cos(\Omega_0 t)$ 的正弦脉冲，且从天线到目标的距离为 $\rho(t)$ ，则接收到的信号是如下脉冲

$$s(t) = \cos[\Omega_0(t - 2\rho(t)/c)], \quad (11.43)$$

式中 c 为光速。若目标相对于天线没有运动，则 $\rho(t) = \rho_0$ ，其中 ρ_0 为距离。因为在发射脉冲和接收脉冲之间的时延为 $2\rho_0/c$ ，所以时延的测量可用于估计距离。但是，如果 $\rho(t)$ 不是常量，则接收信号是一个调角的正弦信号，并且相位差同时包含着目标对于天线的距离和相对运动的信息。具体讲，让我们用泰勒级数展开来表示该时变距离，为

$$\rho(t) = \rho_0 + \dot{\rho}_0 t + \frac{1}{2!} \ddot{\rho}_0 t^2 + \dots, \quad (11.44)$$

其中 ρ_0 为标称距离， $\dot{\rho}_0$ 为速度， $\ddot{\rho}_0$ 为加速度等等。假定目标以恒定速度（即 $\ddot{\rho}_0 = 0$ ）运动，并且将式(11.44)代入式(11.43)得

$$s(t) = \cos[(\Omega_0 - 2\Omega_0 \dot{\rho}_0/c)t - 2\Omega_0 \rho_0/c]. \quad (11.45)$$

在这种情况下，接收信号的频率不同于发射信号的频率，相差为多普勒频率，它定义为

$$\Omega_d = -2\Omega_0 \dot{\rho}_0/c. \quad (11.46)$$

这样，时延仍可用于估计距离，并且若我们能够确定多普勒频率，就可确定目标相对于天线的速度。

在实际场合，接收信号通常很微弱，这样在式(11.45)中应当加入一个噪声项。为了简化这一节的分析，我们忽略噪声的影响。而且，在大多数雷达系统中，式(11.45)的信号在检测过程中应当将频率移到一个较低的标称频率上去。然而，即使 $s(t)$ 解调到一个较低的中心频率上，多普勒频移仍满足式(11.46)。

为了将依时傅里叶分析用于这种信号，我们首先把信号限带于一个包括所期望的多普勒频移的频带上，然后以一个适当的采样周期 T 对所得信号采样，由此得到一个离散时间信号，形式为

$$x[n] = \cos[(\omega_0 - 2\omega_0 \dot{\rho}_0/c)n - 2\omega_0 \rho_0/c], \quad (11.47)$$

式中 $\omega_0 = \Omega_0 T$ 。在许多情况下，目标运动要比我们所假设的复杂得多，需要在式(11.44)中加入高阶项，因此在接收信号中会产生更为复杂的角度调制。表示回波频率的这种较复杂变化的另一种方式是使用加窗的依时傅里叶变换，这种窗应该足够短以保证恒定多普勒频移的假设在整个窗的时间间隔内均有效，但是当两个或者更多的运动目标产生的多普勒频移的回波信号在接收机叠加在一起时，窗又不能太短而失去了所需要的分辨率。

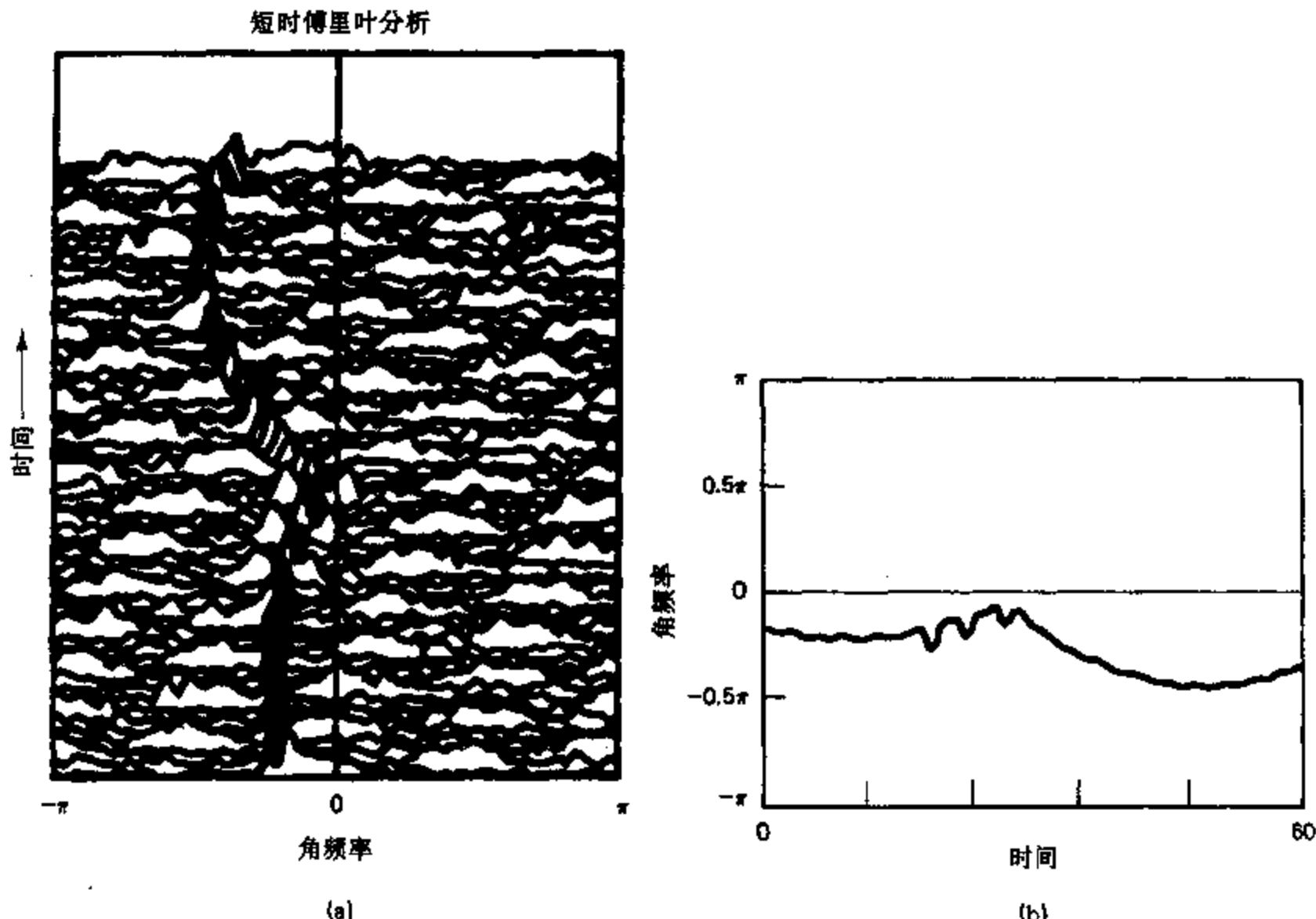


图 11.18 多普勒雷达信号的依时傅里叶分析举例。(a)多普勒雷达信号的傅里叶变换序列。(b)通过选择依时傅里叶变换中最大峰所估计出的多普勒频率。

多普勒雷达信号的依时傅里叶分析的一个例子如图 11.18 所示(见 Schafer et al., 1979). 雷达数据已经经过预处理去掉了低速的多普勒频移, 留下了在图 11.18 中表现出的变化. 依时傅里叶变换的窗为 $N=L=64$ 和 $\beta=4$ 的凯泽窗. 在这幅图中, 以垂直轴表示时间(向上为增加), 水平轴表示频率*, 绘出了 $|X[k]|$ 的曲线. 在这种情况下, 把逐次的 DFT 分靠近地画在一起. 使用消隐算法得出依时傅里叶变换的二维图. 在中心线的左方有一个高峰, 它沿着一条平滑的路径运动着通过时间-频率平面. 这对应于一个速度以某种规则方式变化着的运动目标. 在依时傅里叶变换中其它的宽峰是由噪声和在雷达术语中称为杂波的假回波信号所致. 可能产生这样一种多普勒频率变化的运动实例是以恒速运动但围绕自身纵向旋转的火箭的运动. 运动着通过依时傅里叶变换的峰可能对应着来自火箭上尾翼的反射, 该尾翼的运动由于火箭的旋转而交替地朝向和离开天线. 图 11.18(b) 表示作为时间函数的多普勒频率的估计. 这个估计是通过简单地确定每个 DFT 中最大峰的位置而得出的. 本书封面的插图就是用仿真信号所作的一个例子. 应当注意到当多普勒频率超过采样率的一半时混叠所造成的影响.

* 该图从图中心到左端线为负频率, 从图中心到右端线为正频率. 这可以通过计算 $(-1)^n x[n]$ 的 DFT 而得到. 并且应注意需恰当地将 DFT 标号的原点平移到 $k=N/2$ 处. 另一方面, 也可以先计算 $x[n]$ 的 DFT, 然后重新加标号.

11.6 平稳随机信号的傅里叶分析：周期图

在前面几节中我们已经讨论和举例说明了对于平稳(无时变)参数的正弦信号以及如像语音和雷达的非平稳信号的傅里叶分析。在信号可以用正弦信号之和、或由周期脉冲串激励的线性系统作为其模型的场合，利用傅里叶变换、加窗和线性系统理论可以方便、自然地对有限长信号段的傅里叶变换作解释。但是，对于如像在 11.5.1 节浊音例示中酷似噪声那样的信号，最好用随机信号作为其模型。

正如我们在 2.10 节所讨论的以及在附录 A 中所示，当产生信号的过程对于一个合理的确定性模型过分复杂时，随机过程常常用作信号的模型。典型的是，当输入到一个线性时不变系统的信号可以用平稳随机过程作为模型时，输入和输出的许多基本特性可以适当地用如像均值(直流电平)、方差(平均功率)、自相关函数、或功率密度谱这类平均性质的参量来表示。因此我们特别感兴趣的是，对于一个已知信号如何估计这些参量。正如在附录 A 中所讨论的，由一个有限长数据段而得出的平稳随机过程均值的典型估计是样本均值，定义为

$$\hat{m}_x = \frac{1}{L} \sum_{n=0}^{L-1} x[n]. \quad (11.48)$$

同样，方差的典型估计是样本方差，定义为

$$\hat{\sigma}_x^2 = \frac{1}{L} \sum_{n=0}^{L-1} (x[n] - \hat{m}_x)^2. \quad (11.49)$$

样本均值和样本方差分别是无偏的和渐进无偏的估计器，即 \hat{m}_x 的期望值是真实均值 m_x ，并且当 L 趋近于 ∞ 时 $\hat{\sigma}_x^2$ 的期望值趋近于真实方差 σ_x^2 。另外，它们都是一致估计器，也就是说，它们随着 L 的增加而得到改善，因为当 L 趋近 ∞ 时，它们的估计方差趋近于零。

在本章的其余部分我们将研究用 DFT 估计一个随机信号的功率谱^{*}。我们将看到，有两种估计功率谱的基本方法。在这一节中我们推导的一种方法是所谓的周期图分析，它是以有限长信号段的直接傅里叶变换为基础。将在 11.7 节推导的第二种方法是首先估计出自相关序列，然后计算这个估计的傅里叶变换。在这两种情况下，我们均对获得无偏一致估计器特别感兴趣。遗憾的是，对这种估计器的分析是非常困难的，通常只能进行近似的分析。即使近似的分析也已超出了这本教材的范围，我们只能以定性的方式给出这种分析结果。在 Blackman and Tukey (1958), Hannan (1960), Jenkins and Watts (1968), Koopmanns (1974)，以及 Kay (1988) 的论著中给出了详细的讨论。

11.6.1 周期图

让我们来研究估计一个连续时间信号 $s_c(t)$ 之功率谱密度 $P_{ss}(\Omega)$ 的问题。功率谱估计的直观方法已在图 11.1 中提出，并且与 11.1 节中的讨论有关，我们现在假设输入信号 $s_c(t)$ 是一个平稳随机信号。反混叠低通滤波器产生一个新的平稳随机信号，它的功率谱是带宽有限的，以便使得对该信号采样没有混叠。这样 $x[n]$ 是一个平稳离散时间随机信号，它的功率谱密度在反混叠滤波器带宽范围内正比于 $P_{ss}(\Omega)$ ，即

* 功率谱一词常常可与较准确的术语功率密度谱一词交换使用。

$$P_{xx}(\omega) = \frac{1}{T} P_s \left(\frac{\omega}{T} \right), \quad |\omega| < \pi, \quad (11.50)$$

式中我们已经假定反混叠滤波器的截止频率为 π/T , 且 T 是采样周期。(对于随机信号采样的更多考虑见习题 11.8.) 因此, 由 $P_{xx}(\omega)$ 的合理估计将给出 $P_s(\Omega)$ 的合理估计。图 11.1 中的窗 $w[n]$ 选取 $x[n]$ 的一段有限长信号(L 个样本), 记作 $v[n]$ 。它的傅里叶变换为

$$V(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{L-1} w[n]x[n]e^{-j\omega n}. \quad (11.51)$$

考虑作为一种功率谱估计的量

$$I(\omega) = \frac{1}{LU} |V(e^{j\omega})|^2, \quad (11.52)$$

其中常数 U 是预先考虑到在谱估计中为了消除偏差而进行归一化所需要的。当窗 $w[n]$ 为矩形窗序列时, 这种功率谱的估计器称为周期图。如果窗不是矩形的, 则称为修正周期图。显然, 周期图具有一些功率谱的基本性质, 它是非负的, 并且对于实信号它是频率的实偶函数。另外, 可以证明(习题 11.11)

$$I(\omega) = \frac{1}{LU} \sum_{m=-L+1}^{L-1} c_{vv}[m] e^{-j\omega m}, \quad (11.53)$$

其中

$$c_{vv}[m] = \sum_{n=0}^{L-1} x[n]w[n]x[n+m]w[n+m]. \quad (11.54)$$

我们注意到, 对于有限长序列 $v[n] = w[n]x[n]$, 序列 $c_{vv}[m]$ 是一个非周期相关序列。因此, 事实上周期图是加窗数据序列的非周期相关函数的傅里叶变换。

周期图的显式计算只有在离散频率上才能进行。从式(11.51)和(11.52)可以看出, 如果 $w[n]x[n]$ 的傅里叶变换用其 DFT 来代替, 则可以得到 DFT 频率 $\omega_k = 2\pi k/N$ 在 $k=0, 1, \dots, N-1$ 处的样本。具体讲, 周期图的样本由下式给出

$$I(\omega_k) = \frac{1}{LU} |V[k]|^2, \quad (11.55)$$

式中 $V[k]$ 是 $w[n]x[n]$ 的 N 点 DFT。如果我们希望选取 N 大于窗的长度 L , 则应当对序列 $w[n]x[n]$ 适当地补零。

若一个随机信号有非零均值, 则它的功率谱在零频率处有一个脉冲。如果该均值相当大, 那么这个量将在谱估计中起主导作用, 使得小振幅、低频成份会被泄漏所掩盖。因此, 在实际中常常使用式(11.48)来估计均值, 并且在计算功率谱估计前, 从随机信号中减去得出的值估计。虽然样本均值只是零频分量的一个近似的估计, 但是将它从信号中减去往往会使得在其相邻频率处得到更好的估计。

11.6.2 周期图的性质

认识到对于 w 的每一个值 $I(\omega)$ 都是一个随机变量, 就可确定功率谱周期图估计的固有性质。通过计算 $I(\omega)$ 的均值和方差, 我们可以确定估计是否是有偏的, 是否是一致的。

由式(11.53)可得 $I(\omega)$ 的期望值为

$$\mathcal{E}\{I(\omega)\} = \frac{1}{LU} \sum_{m=-L+1}^{L-1} \mathcal{E}\{c_{vv}[m]\} e^{-j\omega m}. \quad (11.56)$$

$c_{vv}[m]$ 的期望值可以表示为

$$\begin{aligned}\mathcal{E}\{c_{ww}[m]\} &= \sum_{n=0}^{L-1} \mathcal{E}\{x[n]w[n]x[n+m]w[n+m]\} \\ &= \sum_{n=0}^{L-1} w[n]w[n+m]\mathcal{E}\{x[n]x[n+m]\}. \end{aligned} \quad (11.57)$$

由于我们假定 $x[n]$ 是平稳的, 所以

$$\mathcal{E}\{x[n]x[n+m]\} = \phi_{xx}[m], \quad (11.58)$$

并且式(11.57)可以改写为

$$\mathcal{E}\{c_{ww}[m]\} = c_{ww}[m]\phi_{xx}[m], \quad (11.59)$$

式中 $c_{ww}[m]$ 是窗的非周期自相关函数, 即

$$c_{ww}[m] = \sum_{n=0}^{L-1} w[n]w[n+m]. \quad (11.60)$$

由式(11.56)、(11.59)和傅里叶变换的调制/加窗性质(2.9.7节), 可得

$$\mathcal{E}\{I(\omega)\} = \frac{1}{2\pi LU} \int_{-\pi}^{\pi} P_{xx}(\theta) C_{ww}(e^{j(\omega-\theta)}) d\theta, \quad (11.61)$$

其中 $C_{ww}(e^{j\omega})$ 是窗的非周期自相关函数的傅里叶变换, 即

$$C_{ww}(e^{j\omega}) = |W(e^{j\omega})|^2. \quad (11.62)$$

按照式(11.61), (修正)周期图是功率谱的有偏估计, 因为 $\mathcal{E}\{I(\omega)\}$ 不等于 $P_{xx}(\omega)$. 确实我们可以看到, 真实功率谱与数据窗的非周期自相关函数的傅里叶变换的卷积结果会产生偏差. 如果增加窗的长度, 可以预计 $W(e^{j\omega})$ 应当更加集中在 $\omega=0$ 附近, 这样 $C_{ww}(e^{j\omega})$ 看上去就愈像一个周期脉冲串. 如果正确选取比例因子 $1/(LU)$, 则当 $W(e^{j\omega})$ 趋近于一个周期脉冲串时, $\mathcal{E}\{I(\omega)\}$ 应当趋近于 $P_{xx}(\omega)$. 通过选择归一化常数 U 就可以调整幅度大小, 可使

$$\frac{1}{2\pi LU} \int_{-\pi}^{\pi} |W(e^{j\omega})|^2 d\omega = \frac{1}{LU} \sum_{n=0}^{L-1} (w[n])^2 = 1, \quad (11.63)$$

或

$$U = \frac{1}{L} \sum_{n=0}^{L-1} (w[n])^2. \quad (11.64)$$

若将 $w[n]$ 的最大值归一化到 1, 则对于矩形窗我们应当选取 $U=1$, 而对其他数据窗, 要求 U 的值为 $0 < U < 1$. 另一方面, 归一化也可以并入 $w[n]$ 的幅度中. 总之, 若恰当地归一化, 则(修正)周期图是渐近无偏的, 也就是说, 当窗的长度增加时, 偏差趋近于零.

为了检验周期图是否为一致估计, 或当窗的长度增加时成为一个一致估计, 必须研究周期图方差的特性. 即使在最简单的情况下, 要得出周期图方差的表达式也是非常困难的. 但是已经证明(见 Jenkins 和 Watts, 1968), 在一个很宽的条件范围内, 当窗的长度增加时, 有

$$\text{var}[I(\omega)] \approx P_{xx}^2(\omega). \quad (11.65)$$

这就是说, 周期图估计的方差与我们估计的功率谱的大小近似相等. 因此, 由于方差并不随着窗长度的增加而渐渐趋近于零, 所以周期图就不是一个一致估计.

刚才讨论的功率谱周期图估计的性质如图 11.9 所示, 图中给出了使用窗长度 $L=16, 64, 256$ 和 1024 的矩形窗时白噪声的周期图估计. 序列 $x[n]$ 是由伪随机数发生器得到的, 该发生器的输出幅度已调整到使 $|x[n]| \leq \sqrt{3}$. 一个好的随机数发生器能产生一个幅度均匀分布、并且样本与样本之间的相关性很小的输出序列. 在这种情况下, 随机数发生器的功率谱可以 $P_{xx}(\omega) = \sigma_x^2 = 1$ (对于所有 ω) 作为其模型. 对于 4 种矩形窗中的每一

种,均取归一化常数 $U=1$,而且对于 $N=1024$ 在频率 $\omega_k=2\pi k/N$ 处利用 DFT 来计算周期图,也就是

$$I[k]=I(\omega_k)=\frac{1}{L}|V[k]|^2=\frac{1}{L}\left|\sum_{n=0}^{L-1}w[n]x[n]e^{-j(2\pi/N)kn}\right|^2. \quad (11.66)$$

在图 11.19 中,为了表现其特点,用直线将 DFT 的值连接起来. 我们注意到,随着窗长度 L 的增加,谱估计的起伏加剧. 要明白这一点,只要回想一下,虽然我们把周期图方法看作是一种谱估计的直接计算方法,但是我们已经看到,实际上是对式(11.54)的相关函数的估计作傅里叶变换得到周期图的. 图 11.20 画出一个加窗序列 $x[n]w[n]$ 及其平移形式 $x[n+m]w[n+m]$,正如在式(11.54)中所要求的. 从这幅图中我们看到,计算一个具体的相关滞后值 $c_{rr}[m]$,要涉及到 $L-m-1$ 个信号值. 这样,当 m 接近于 L 时,在计算中只涉及到少数几个 $x[n]$ 值,并且可以预料,相关序列的估计对于 m 的这些值将是非常不准确的,并因此还将表现为在 m 的相邻值之间该估计值会显著变化. 另一方面,当 m 较小时将涉及到很多样本,并且 $c_{rr}[m]$ 随 m 的变化程度应当不是很大. 取大 m 值时的变化程度在傅里叶变换中将表现为在所有频率处的起伏,因此,取大的 L 值时周期图的估计就趋向于随频率迅速变化. 确实可以证明(见 Jenkins and Watts, 1986),若 $N=L$,则在 DFT 的频率 $2\pi k/N$ 处周期图的估计是不相关的. 因为随着 N 的增大 DFT 的频率变得更加靠近,这一特性与我们要得到好的功率谱估计的目标是不一致的. 我们总希望得到一个没有由估计过程引起随机变化的平滑谱估计. 这可以通过把多个独立的周期图估计进行平均以减小起伏来完成.

11.6.3 周期图的平均

巴特利特(1953)首先广泛地研究了谱估计中周期图的平均. 后来,当计算 DFT 的快速算法提出之后,韦尔奇(1970)把这类计算算法与数据窗 $w[n]$ 的使用结合在一起导出了对修正周期图进行平均的方法. 在周期图平均中先把一个数据序列 $x[n]$ ($0 \leq n \leq Q-1$) 分成长度为 L 个样本的序列段,并对每段加上长度为 L 的窗;即我们构成序列段

$$x_r[n]=x[rR+n]w[n], \quad 0 \leq n \leq L-1. \quad (11.67)$$

若 $R < L$,则序列段有重叠,而当 $R = L$ 时序列段为邻接. 注意, Q 表示可用数据的长度. 全部序列段的数量取决于 R 、 L 和 Q 的值及其相互关系. 特别是,当 K 为满足 $(K-1)R + (L-1) \leq Q-1$ 式最大的整数时,会有 K 个全长序列段. 第 r 个序列段的周期图为

$$I_r(\omega)=\frac{1}{LU}|X_r(e^{j\omega})|^2. \quad (11.68)$$

每个 $I_r(\omega)$ 都具有上面所论述的周期图的性质. 周期图平均包括对 K 个周期图的估计 $I_r(\omega)$ 一起求平均;也就是构成时间平均周期图,定义为

$$\bar{I}(\omega)=\frac{1}{K}\sum_{r=0}^{K-1}I_r(\omega). \quad (11.69)$$

为了分析 $\bar{I}(\omega)$ 的偏差和方差,让我们取 $L=R$ 以便使序列段不重叠,并且假设对于 $m > L$, $\phi_{xx}[m]$ 很小,这就是说在 L 以外的信号样本近似为不相关的. 其次,有理由假定周期图 $I_r(\omega)$ 是同分布的独立随机变量. 在这一假设下, $\bar{I}(\omega)$ 的期望值为

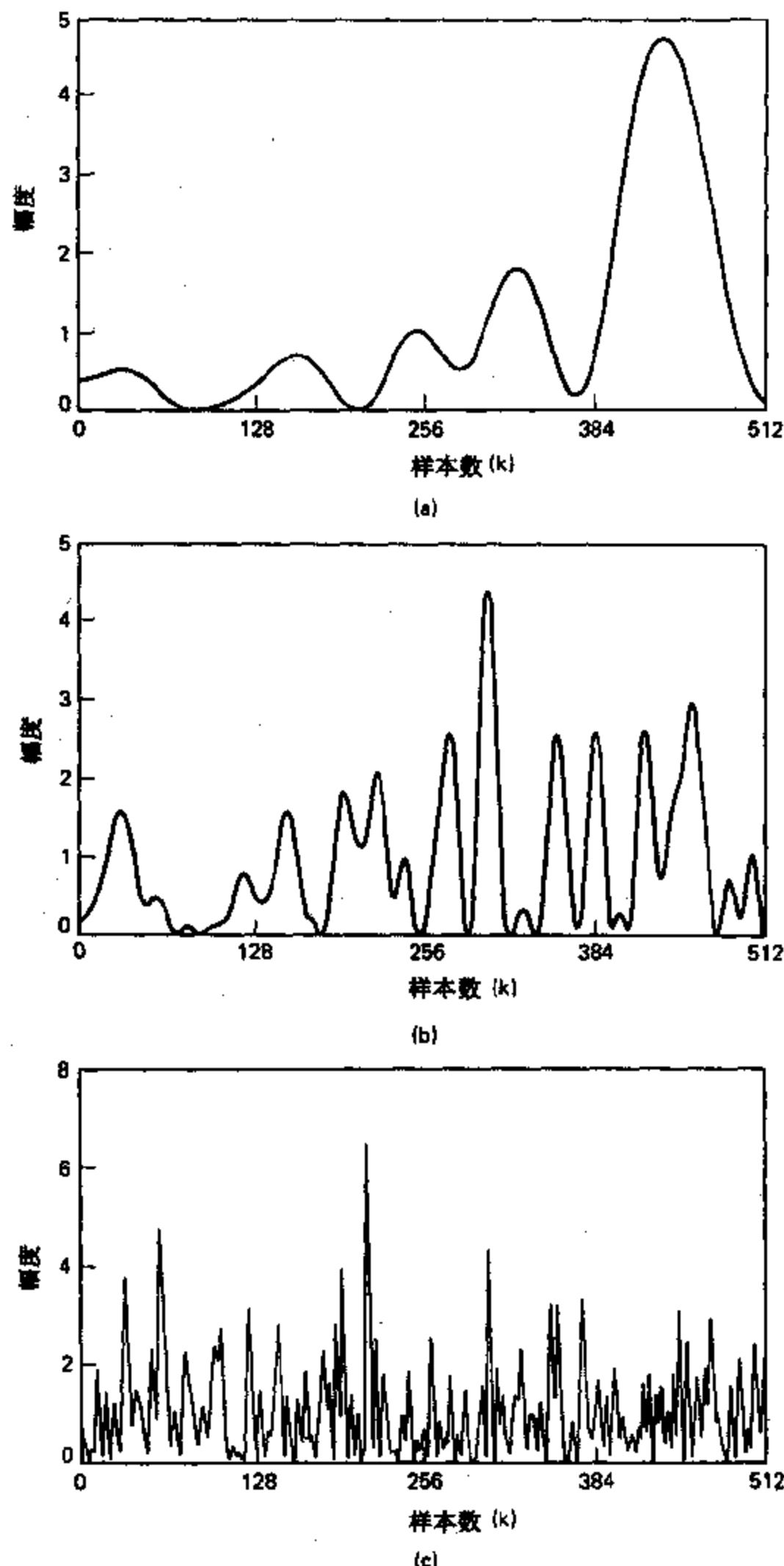


图 11.19 伪随机白噪声序列的周期图. (a) 窗长 $L=16$ 且 DFT 长度 $N=1024$. (b) $L=64$ 和 $N=1024$. (c) $L=256$ 和 $N=1024$.

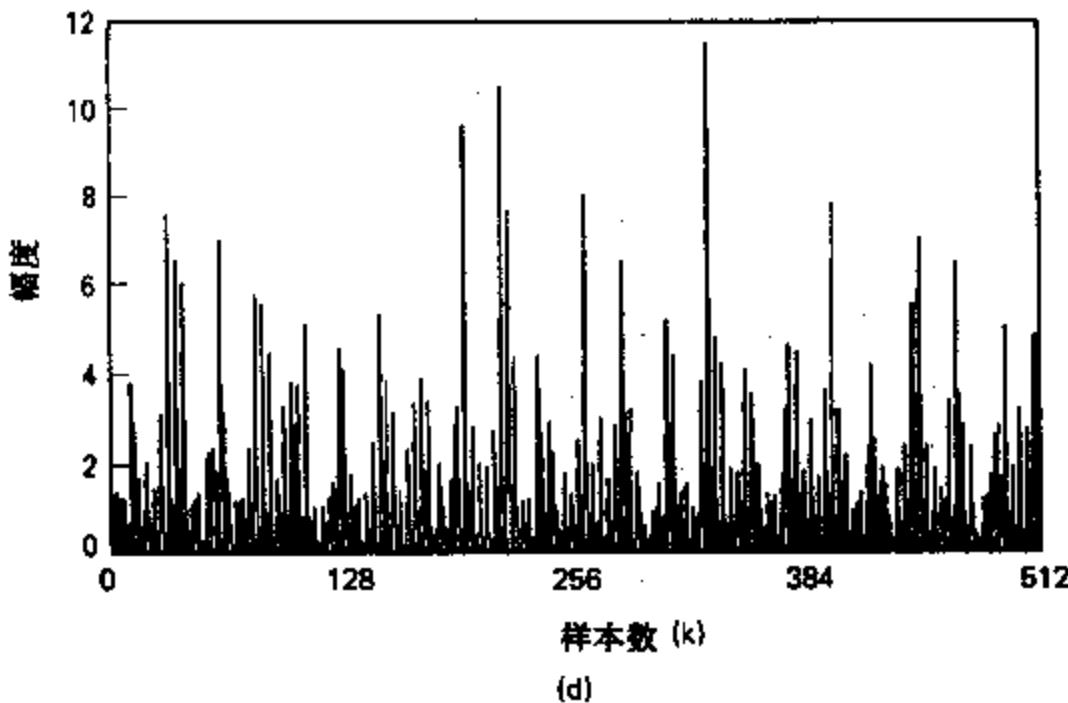


图 11.19(续) (d) $L=1024$ 和 $N=1024$.

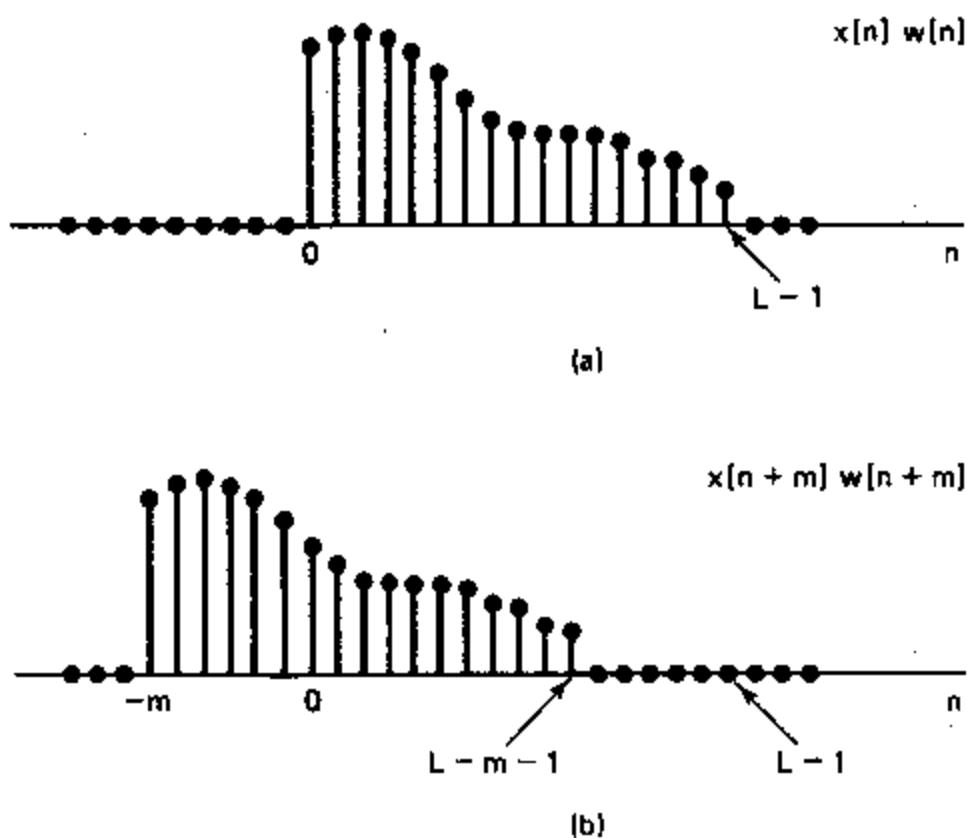


图 11.20 在式(11.54)中所涉及到序列的表示.

(a) 有限长序列, (b) 对于 $m>0$ 的平移序列.

$$\mathcal{E}\{\bar{I}(\omega)\} = \frac{1}{K} \sum_{r=0}^{K-1} \mathcal{E}\{I_r(\omega)\}, \quad (11.70)$$

或者,由于我们假设这些周期图是独立的和同分布的,因此

$$\mathcal{E}\{\bar{I}(\omega)\} = \mathcal{E}\{I_r(\omega)\} \text{ 对于任意 } r \text{ 值.} \quad (11.71)$$

由式(11.61)可得

$$\mathcal{E}\{\bar{I}(\omega)\} = \mathcal{E}\{I_r(\omega)\} = \frac{1}{2\pi LU} \int_{-\pi}^{\pi} P_{xx}(\theta) C_{ww}(e^{j(\omega-\theta)}) d\theta, \quad (11.72)$$

式中 L 为窗的长度. 当窗 $w[n]$ 是矩形窗时, 平均周期图法称为巴特利特法, 并且在这种情况下可以证明

$$c_{ww}[m] = \begin{cases} L - |m|, & |m| \leq (L-1), \\ 0, & \text{其它}, \end{cases} \quad (11.73)$$

以及

$$c_{ww}(e^{j\omega}) = \left(\frac{\sin(\omega L/2)}{\sin(\omega/2)} \right)^2. \quad (11.74)$$

这就是说,平均周期图谱估计的期望值是真实功率谱与三角形序列 $c_{ww}[n]$ 的卷积, $c_{ww}[n]$ 可以作为矩形窗之自相关函数. 因此, 平均周期图也是功率谱的有偏估计.

为了分析方差我们利用如下事实: K 个独立同分布随机变量之和的方差是每个独立随机变量之方差的 $1/K$ 倍(见 Papoulis, 1984). 所以, 平均周期图的方差为

$$\text{var}[\bar{I}(\omega)] = \frac{1}{K} \text{var}[I_r(\omega)], \quad (11.75)$$

或者由式(11.65)可得

$$\text{var}[\bar{I}(\omega)] \approx \frac{1}{K} P_{xx}^2(\omega). \quad (11.76)$$

因此, $\bar{I}(\omega)$ 的方差反比于被平均的周期图的个数, 并且随着 K 的增加, 方差趋近于零.

从式(11.74)可以看出, 当序列段 $x_r[n]$ 的长度 L 增大时 $C_{ww}(e^{j\omega})$ 的主瓣宽度减小, 因此由式(11.72)可知, $\mathcal{E}\{\bar{I}(\omega)\}$ 也就更接近于 $P_{xx}(\omega)$. 但是, 对于固定的全部数据长度 Q , 序列段总的个数(设 $L=R$)为 Q/L , 因此随着 L 的增加 K 减小. 相应地由式(11.76)可知, $\bar{I}(\omega)$ 的方差将会增加. 这样, 如同统计估计问题中的典型情况一样, 对于固定的数据长度需要在偏差和方差之间进行折衷. 然而, 当数据长度 Q 增大时, 就能允许 L 和 K 同时增大, 因此随着 Q 接近于 ∞ , $\bar{I}(\omega)$ 的偏差和方差均可接近于零. 所以, 周期图平均可给出 $P_{xx}(\omega)$ 的渐近无偏一致估计.

以上的讨论假定在计算依时周期图时使用非重叠的矩形窗. 如果使用不同形状的窗, 韦尔奇(1970)曾证明平均周期图的方差仍然具有如式(11.76)给出的特性. 韦尔奇还研究了重叠窗的情况, 并证明如果重叠为二分之一窗的长度, 由于序列段的数目加倍, 则方差能进一步减小几乎可到二分之一. 但是过多的重叠不会继续使方差减小, 因为当重叠增加时序列段的独立性将越来越差.

11.6.4 用 DFT 计算平均周期图

如同周期图一样, 只有在离散频率处才能用显式计算出平均周期图. 因为计算 DFT 可以利用快速傅里叶变换算法, 所以对于某个适当选取的 N , 取频率 $\omega_k = 2\pi k/N$, 是一种十分方便和广泛使用的选择. 从式(11.69)可以看出, 如果用 $x_r[n]$ 的 DFT 来替换式(11.68)中 $x_r[n]$ 的傅里叶变换, 则可以得出在 DFT 频率 $\omega_k = 2\pi k/N, k=0, 1, \dots, N-1$ 处 $\bar{I}(\omega)$ 的样本. 具体讲, 若用 $X_r[k]$ 表示 $x_r[n]$ 的 DFT, 有

$$I_r[k] = I_r(\omega_k) = \frac{1}{LU} |X_r[k]|^2, \quad (11.77a)$$

$$\bar{I}_r[k] = \bar{I}_r(\omega_k) = \frac{1}{K} \sum_{r=0}^{K-1} I_r[k]. \quad (11.77b)$$

我们将把 $I_r(2\pi k/N)$ 记作序列 $I_r[k]$, 把 $\bar{I}_r(2\pi k/N)$ 记作序列 $\bar{I}_r[k]$. 按照式(11.77)取归一化因子 LU , 并对加窗数据段的 DFT 进行平均, 在 N 个等间隔的频率处来计算功率

谱的平均周期图估计. 这种功率谱估计的方法提供了一种在谱估计的分辨率和方差之间进行折衷处理的非常方便的手段. 用第九章中讨论过的快速傅里叶变换算法来计算是非常简便和有效的. 这种方法与将在 11.7 节中讨论的其它方法比较而言, 其最重要的优点是它的谱估计值总是非负的.

11.6.5 周期图分析举例

功率谱分析是信号建模的有用工具, 它也可用于信号检测, 特别是发现采样信号中的隐蔽周期性. 作为平均周期图方法应用的一个例子, 我们来研究

$$x[n] = A \cos(\omega_0 n + \theta) + e[n], \quad (11.78)$$

其中 θ 是 0 到 2π 之间均匀分布的随机变量, $e[n]$ 是零均值白噪声序列, 其功率谱近似为常量, 即对于所有的 ω , $P_{ee}(\omega) = \sigma_e^2$. 在这种形式的信号模型中余弦常常是希望的分量, 而 $e[n]$ 是一个不希望的噪声分量. 在实际的信号检测问题中我们往往十分关心余弦信号的功率比噪声功率小的情况. 可以证明(见习题 11.9), 在频率的一个周期上, 这个信号的功率谱为

$$P_{xx}(\omega) = \frac{A^2 \pi}{2} [\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)] + \sigma_e^2, \quad \text{对于 } |\omega| \leq \pi. \quad (11.79)$$

由式(11.72)和(11.79)可得, 平均周期图的期望值是

$$\mathcal{E}\{\bar{I}(\omega)\} = \frac{A^2}{4LU} [C_{w\bar{e}}(e^{j(\omega-\omega_0)}) + C_{\bar{e}w}(e^{j(\omega+\omega_0)})] + \sigma_e^2. \quad (11.80)$$

图 11.21 和 11.22 表明平均周期图法对于如式(11.78)所示信号的用法, 其中取 $A = 0.5$, $\omega_0 = 2\pi/21$ 和 $\sigma_e^2 = 1$. 噪声分量的均值为零. 图 11.21 绘出了序列 $x[n]$ 的 101 个样本. 因为噪声分量的最大振幅为 $\sqrt{3}$, 所以不能明显看到在序列 $x[n]$ 中的余弦分量. 图 11.22 表示对于幅度为 1(因此 $U=1$)并且长度 $L=1024, 256, 64$ 和 16 的矩形窗功率谱的

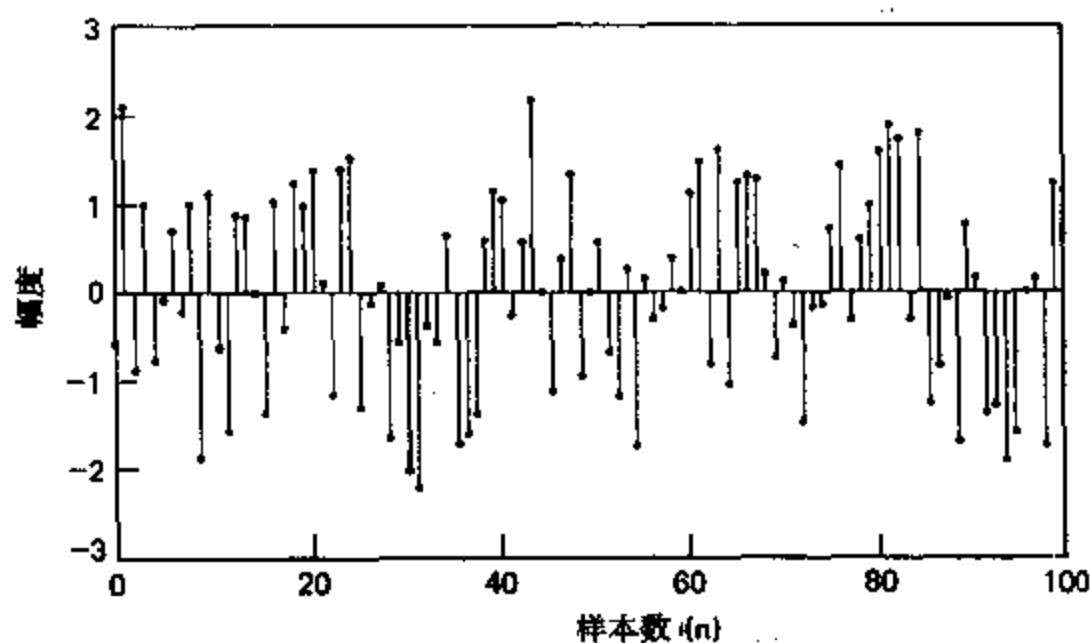


图 11.21 如式(11.78)给出的带有白噪声的余弦序列.

平均周期图估计值, 在所有情况下记录数据的总长度 $Q=1024$. 除了图 11.22(a)之外, 窗之间有二分之一窗长的重叠. 图 11.22(a)是全部记录数据的周期图, 图 11.22(b), (c)和(d)分别绘出对于 $K=7, 31$ 和 127 个数据段的平均周期图. 在所有的情况下均用 1024 点

DFT 计算在频率 $\omega_1 = 2\pi k/1024$ 处的平均周期图. 因此, 频率 $\omega_0 = 2\pi/21$ 位于 DFT 频率 $\omega_{48} = 2\pi \times 48/1024$ 和 $\omega_{49} = 2\pi \times 49/1024$ 之间.

当利用这些功率谱的估计值来检测余弦分量的存在和/或频率时, 我们可以搜索谱估计中的最大峰, 并且将它们的大小与其余的谱估计值进行比较. 利用式(11.74)和(11.80), 得到在频率 ω_0 处平均周期图的期望值为

$$\mathcal{E}\{\bar{I}(\omega_0)\} = \frac{A^2 L}{4} + \sigma_e^2. \quad (11.81)$$

这样, 如果要让由于余弦分量造成的峰超出平均周期图的变化量, 则在这种特殊的情况下, 我们必须选取 L 使 $A^2 L / 4 \gg \sigma_e^2$. 这点如图 11.22(a) 所示, 其中对于记录数据长度 Q , 应使 L 尽可能的大. 我们看到, 由于 $L=1024$ 使得矩形窗自相关函数的傅里叶变换的主瓣很窄, 因此能够分辨开频率十分靠近的正弦信号. 应当注意, 对于这个例子的参数, 平均周期图在频率 $2\pi/21$ 处的谱峰幅度值接近但不等于所期望的值 65°. 我们还看到平均周期图中幅度大于 10 的其它谱峰. 显然, 如果余弦信号的振幅 A 只减小一半, 很可能它的峰就与周期图中的固有起伏混淆了.

当保持记录数据长度不变时, 要减小这种起伏, 可以使用较短的窗并且对更多的数据段进行平均. 图 11.22 的(b), (c) 和(d) 部分就说明了这一点. 应注意, 若所用的数据段越多, 则谱估计的方差就越小, 但是由于是余弦信号, 根据式(11.81), 峰的幅度也减小. 回想一下, 对于伪随机噪声发生器, 其模型的理想功率谱对所有频率均为一个常数 ($\sigma_e^2=1$). 在图 11.22(d) 中窗很短, 因此谱估计的起伏减小, 但是由于是余弦信号则谱峰很宽. 如果窗长再稍微短一点, 来自负频率分量的谱泄漏将造成在低频区没有别的谱峰.

这个例子证实, 平均周期图提供了一种在谱估计分辨率和降低方差之间进行折衷的直接了当的方法. 虽然这个例子的主题是噪声中正弦信号的检测, 但是平均周期图也可以用于信号建模. 图 11.22 的谱估计结果清楚地表明, 形式如式(11.78)的信号模型以及该模型的大多数参数都能够从平均周期图功率谱的估计中估计出来.

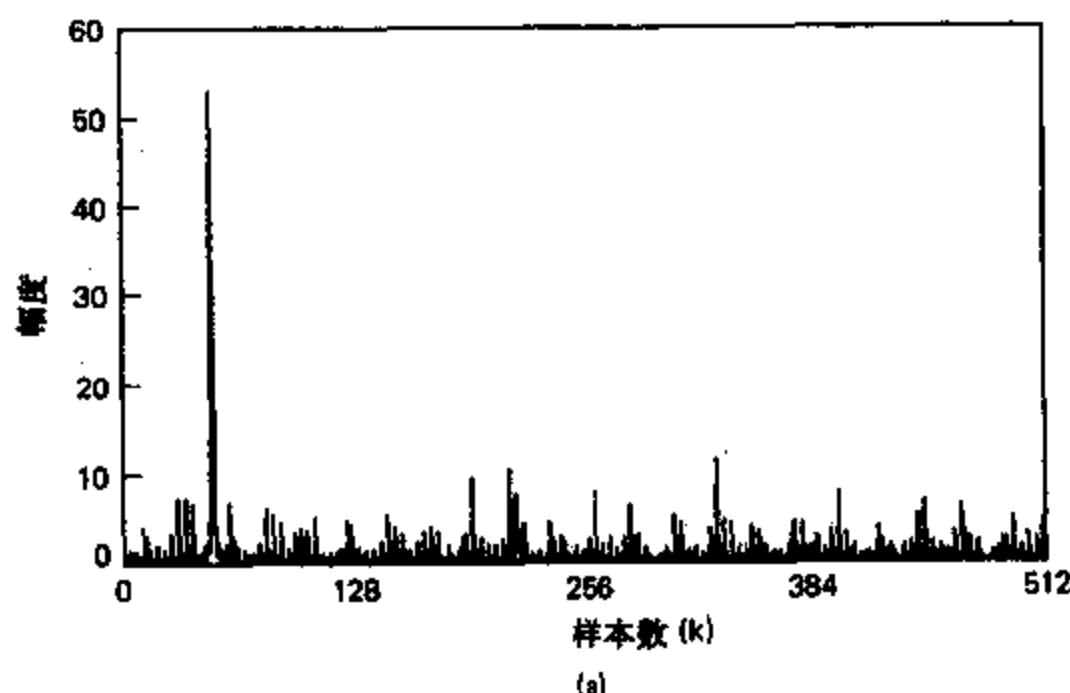


图 11.22 长度 $Q=1024$ 的信号之平均周期图举例. (a) 窗长 $L=Q=1024$ (只有一段) 的周期图.

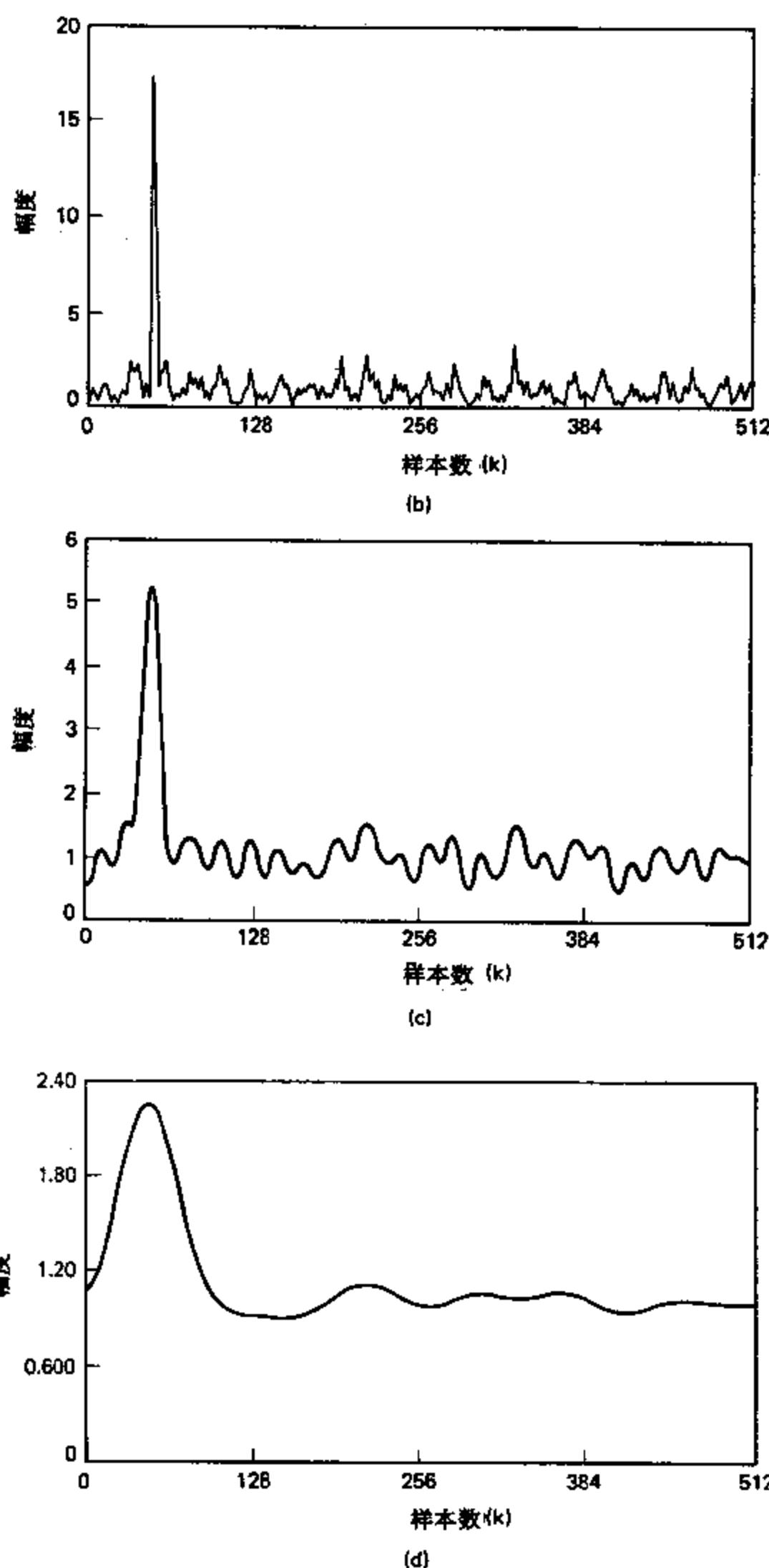


图 11.22(续) (b) $K=7$ 和 $L=256$ (重叠 $L/2$)，(c) $K=31$ 和 $L=64$ ，(d) $K=127$ 和 $L=16$ 。

11.7 利用自相关序列估计的随机信号谱分析

上一节我们研究了将周期图作为随机信号功率谱的一种直接估计方法. 周期图或平均周期图作为一种直接估计方法, 是在可以直接受出随机信号样本的傅里叶变换的意义上来说的. 另一种方法是根据功率谱是自相关函数的傅里叶变换这一事实, 首先估计自相关函数 $\phi_{xx}[m]$, 然后计算这个估计值的傅里叶变换. 在这一节我们将揭示这种方法的一些重要特性, 并说明如何用 DFT 去实现它.

让我们像以前一样, 假设已知一随机信号的一段有限记录. 这段序列记作

$$v[n] = \begin{cases} x[n], & 0 \leq n \leq Q-1, \\ 0, & \text{其它.} \end{cases} \quad (11.82)$$

考虑自相关序列的估计为

$$\hat{\phi}_{xx}[m] = \frac{1}{Q} c_{vv}[m], \quad (11.83)$$

其中, 由于 $c_{vv}[-m] = c_{vv}[m]$,

$$c_{vv}[m] = \sum_{n=0}^{Q-1} v[n]v[n+m] = \begin{cases} \sum_{n=0}^{Q-|m|-1} x[n]x[n+|m|], & |m| \leq Q-1, \\ 0, & \text{其它,} \end{cases} \quad (11.84)$$

对应于 $x[n]$ 加矩形窗序列段的非周期相关函数.

为了确定自相关序列这种估计的性质, 我们来研究随机变量 $\hat{\phi}_{xx}[m]$ 的均值和方差. 从式(11.83)和(11.84)可得

$$\mathcal{E}\{\hat{\phi}_{xx}[m]\} = \frac{1}{Q} \sum_{n=0}^{Q-|m|-1} \mathcal{E}\{x[n]x[n+|m|]\} = \frac{1}{Q} \sum_{n=0}^{Q-|m|-1} \phi_{xx}[m], \quad (11.85)$$

并且因为平稳随机过程 $\phi_{xx}[m]$ 与 n 无关,

$$\mathcal{E}\{\hat{\phi}_{xx}[m]\} = \begin{cases} \left(\frac{Q-|m|}{Q}\right) \phi_{xx}[m], & |m| \leq Q-1, \\ 0, & \text{其它.} \end{cases} \quad (11.86)$$

由式(11.86)可以看出, 因为 $\mathcal{E}\{\hat{\phi}_{xx}[m]\}$ 不等于 $\phi_{xx}[m]$, 所以 $\hat{\phi}_{xx}[m]$ 是 $\phi_{xx}[m]$ 的有偏估计, 但是若 $|m| \ll Q$, 则偏差很小. 还可以看出, 对于 $|m| \leq Q-1$, 自相关序列的一种无偏估计器是

$$\check{\phi}_{xx}[m] = \left(\frac{1}{Q-|m|}\right) c_{vv}[m], \quad (11.87)$$

也就是说, 如果我们用滞后乘积的求和中非零项的个数, 而不是用数据记录中全部样本的个数来除, 则该估计器就是无偏的.

即使作了使问题简化的假设, 自相关函数估计的方差仍然是很难计算的. 但是对于 $\phi_{xx}[m]$ 和 $\hat{\phi}_{xx}[m]$ 的方差近似计算式可以在 Jenkins and Watts(1968)的著作中找到. 为了达到我们在这里的目的, 对式(11.84)作一观察就足够了, 可以看出当 $|m|$ 接近于 Q 时, 在自相关估计的计算中涉及到的 $x[n]$ 样本越来越少, 因此可以预计自相关估计的方差将随着 $|m|$ 的增大而增加. 在周期图的情况下, 这种增加的方差影响到所有频率处的谱估计值, 因为在周期图的计算中隐含地涉及到全部的自相关滞后值. 但是在用显式计算自相关

估计时,我们可以自由选择包括在功率谱估计中的那些相关滞后值.因此,我们定义功率谱估计

$$S(\omega) = \sum_{m=-(M-1)}^{M-1} \phi_{xx}[m] w_c[m] e^{-j\omega m}, \quad (11.88)$$

式中 $w_c[m]$ 是一个长为 $(2M-1)$ 的对称窗,它加在估计出的自相关函数上.当 $x[n]$ 为实数时,我们要求自相关序列和窗的乘积是一个偶序列,以使功率谱估计为 ω 的实偶函数,所以相关窗必须是一个偶序列.通过限制相关窗的长度使 $M \ll Q$,这样就只包括那些方差小的自相关估计值.

在频域最容易理解对自相关序列加窗来减小功率谱估计的方差的机理.从式(11.53)、(11.54)和(11.84)可得,对于 $0 \leq n \leq (Q-1)$ 若取 $w[n]=1$,即一个矩形窗,周期图就是自相关估计 $\phi_{xx}[m]$ 的傅里叶变换,也就是

$$\phi_{xx}[m] = \frac{1}{Q} c_m[m] \leftrightarrow \frac{1}{Q} |V e^{j\omega}|^2 = I(\omega). \quad (11.89)$$

因此,由式(11.88)可知,谱估计 $S(\omega)$ 是如下卷积

$$S(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} I(\theta) W_c(e^{j(\omega-\theta)}) d\theta. \quad (11.90)$$

从式(11.90)我们看到,把窗 $w_c[m]$ 加在自相关估计上的影响是,将周期图与自相关窗的傅里叶变换进行卷积.这将有平滑周期图谱估计剧烈起伏的作用.相关窗越短,谱估计越平滑,反之亦然.

功率谱 $P_{xx}(\omega)$ 是一个频率的非负函数,根据定义,周期图和平均周期图自动具有这种性质.可是,由式(11.90)显而易见,对于 $S(\omega)$,非负性是不能保证的,除非我们进一步增加条件

$$W_c(e^{j\omega}) \geq 0, \quad \text{对于 } -\pi < \omega \leq \pi. \quad (11.91)$$

三角形(巴特利特)窗的傅里叶变换可以满足这个条件,但是矩形窗、汉宁窗、哈明窗和凯泽窗则不满足该条件.所以,虽然后面的这些窗具有比三角形窗更低的旁瓣,但是谱的泄漏可能造成在谱的小幅值范围内出现负的谱估计值.

平滑周期图的期望值为

$$\begin{aligned} \mathcal{E}\{S(\omega)\} &= \sum_{m=-(M-1)}^{M-1} \mathcal{E}\{\phi_{xx}[m]\} w_c[m] e^{j\omega m} \\ &= \sum_{m=-(M-1)}^{M-1} \phi_{xx}[m] \left(\frac{Q-|m|}{Q} \right) w_c[m] e^{j\omega m}. \end{aligned} \quad (11.92)$$

若 $Q \gg M$,则在式(11.92)中可以忽略 $(Q-|m|)/Q$ 项*,从而得到

$$\mathcal{E}\{S(\omega)\} \cong \sum_{m=-(M-1)}^{M-1} \phi_{xx}[m] w_c[m] e^{-j\omega m} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_{xx}(\theta) W_c[e^{j(\omega-\theta)}] d\theta. \quad (11.93)$$

因此,加窗的自相关估计会导致功率谱的有偏估计.正如平均周期图那样,在谱的分辨率与减小谱估计的方差之间进行折衷是可能的.假设数据记录的长度固定,若我们愿意接受对于靠近的窄带谱分量有较低的分辨率,则可以得到较小的方差,或者,若我们能够接受较大的方差,则可以得到较高的分辨率.如果我们可以较长时间地随意观察信号(即增加数据记录的长度 Q),则可以同时改善分辨率和方差.若相关窗是归一化的,即

* 更准确地说,我们可以定义一个有效的关系 $w_r[m] = w_c[m](Q-|m|)/Q$.

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} W_c(e^{j\omega}) d\omega = 1 = w_c[0], \quad (11.94)$$

则谱估计 $S(\omega)$ 是渐近无偏的. 在这种归一化下, 随着 Q 与相关窗长度的同时增加, 相关窗的傅里叶变换接近于一个周期脉冲串, 并且式(11.93)的卷积将会与 $P_{xx}(\omega)$ 相同.

已经证明(见 Jenkins and Watts, 1968), $S(\omega)$ 的方差为如下形式:

$$\text{var}[S(\omega)] \approx \left(\frac{1}{Q} \sum_{m=-(M-1)}^{M-1} w_c^2[m] \right) P_{xx}^2(\omega). \quad (11.95)$$

比较式(11.95)与周期图在式(11.65)中的相应结果可以得出结论: 要减小谱估计的方差, 应当选择 M 和尽量满足式(11.91)条件的窗的形状, 使得因子

$$\left(\frac{1}{Q} \sum_{m=-(M-1)}^{M-1} w_c^2[m] \right) \quad (11.96)$$

尽可能地小. 习题 11.17 涉及到计算几种常用窗的这一方差缩减因子.

根据自相关函数估计的傅里叶变换来估计功率谱相对于平均周期图法来说是另一种很好的方法. 这并不是说它在任何一般的意义上都好, 这种方法只是具有不同的特点, 并且有不同的实现方式. 在一些场合, 可能希望同时计算自相关序列和功率谱的估计, 在这种情况下应当很自然地使用本节的方法. 习题 11.13 讨论了由平均周期图确定自相关估计的问题.

11.7.1 利用 DFT 计算相关函数和功率谱估计

我们正在研究的功率谱估计方法需要求自相关估计

$$\hat{\phi}_{xx}[m] = \frac{1}{Q} \sum_{n=0}^{Q-1-m} x[n]x[n+|m|], \quad (11.97)$$

其中 $|m| \leq M-1$. 因为 $\hat{\phi}_{xx}[-m] = \hat{\phi}_{xx}[m]$, 所以只需要对 m 的非负值, 即 $0 \leq m \leq M-1$ 来计算式(11.97). 如果我们观察到 $\hat{\phi}_{xx}[m]$ 是有限长序列 $x[n]$ 和 $x[-n]$ 的非周期离散卷积, 则可以方便地使用 DFT 及其相关的快速算法来计算 $\hat{\phi}_{xx}[m]$. 若我们计算出 $x[n]$ 的 N 点 DFT $X[k]$, 并且乘以 $X^*[k]$, 可得 $|X[k]|^2$, 它相当于有限长序列 $x[n]$ 和 $x[((-n))_N]$ 的循环卷积, 即循环自相关. 正如我们在 8.8 节中的讨论所指出并在习题 11.14 中所得出的, 用值为零的样本加长序列 $x[n]$, 并使循环自相关在区间 $0 \leq m \leq M-1$ 上等于所要求的非周期自相关应当是可能的.

要想知道对于 DFT 如何来选取 N , 我们来研究一下图 11.23. 图 11.23(a)绘出了 m 取某一个正值时的两个序列 $x[n]$ 和 $x[n+m]$. 图 11.23(b)绘出了在与 $|X[k]|^2$ 对应的循环自相关中所涉及到的序列 $x[n]$ 和 $[((n+m))_N]$. 显然, 如果当 $0 \leq m \leq M-1$ 时 $x[((n+m))_N]$ 不卷绕并且与 $x[n]$ 重叠, 则循环自相关对于 $0 \leq m \leq M-1$ 将等于 $Q\hat{\phi}_{xx}[m]$. 由图 11.23(b)可知, 无论 $N - (M-1) \geq Q$ 还是 $N \geq Q + M - 1$, 都属于这种情况.

总之, 我们可以用如下步骤来计算对于 $0 \leq m \leq M-1$ 的 $\hat{\phi}_{xx}[m]$:

1. 用 $(M-1)$ 个零样本加长 $x[n]$ 形成一个 N 点序列.
2. 计算 N 点 DFT

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-j(2\pi/N)kn}, \quad k=0, 1, \dots, N-1.$$

3. 计算

$$|X[k]|^2 = X[k]X^*[k], \quad k=0,1,\dots,N-1.$$

4. 计算 $|X[k]|^2$ 的 IDFT 得

$$\tilde{c}_{xx}[m] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |X[k]|^2 e^{-j(2\pi/N)km}, \quad m=0,1,\dots,N-1.$$

5. 用 Q 除所得序列, 得到自相关估计

$$\hat{\phi}_{xx}[m] = \frac{1}{Q} \tilde{c}_{xx}[m], \quad m=0,1,\dots,M-1.$$

这是所要求的自相关值的集合, 对于负的 m 值它可以对称地进行延拓.

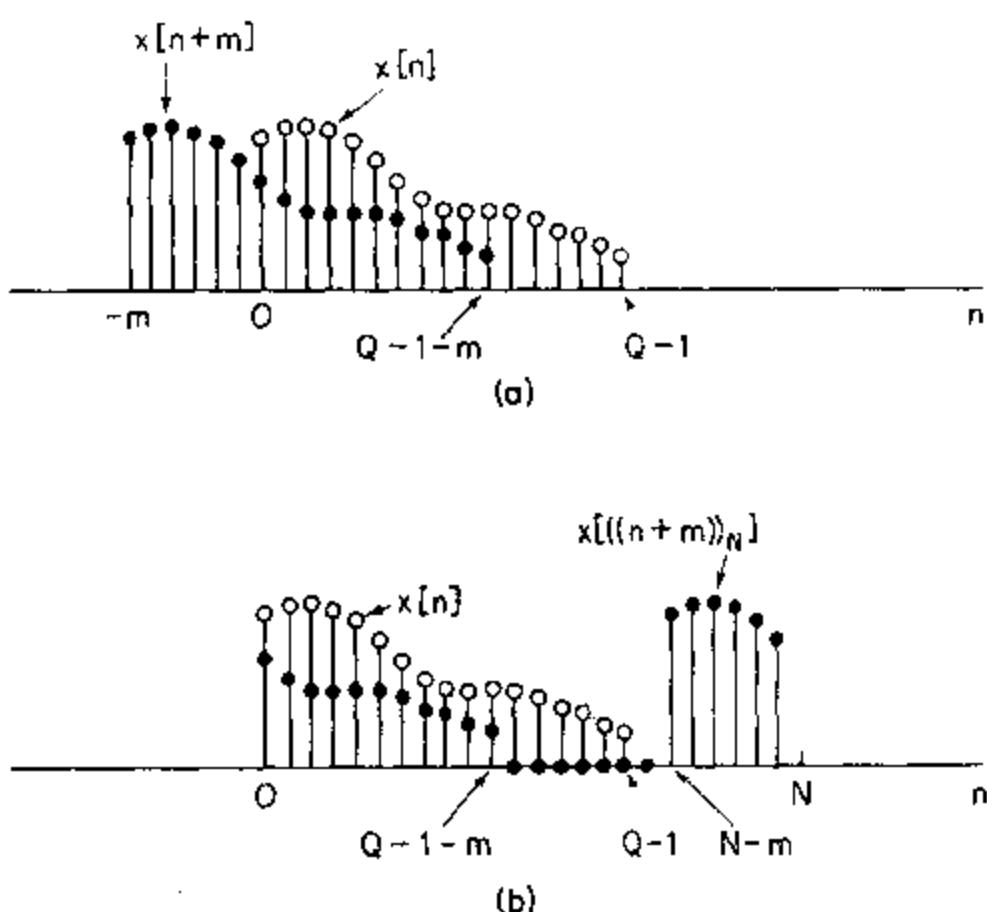


图 11.23 循环自相关的计算. (a) 长为 Q 的有限长序列 $x[n]$ 和 $x[n+m]$.
(b) 如在循环相关中的 $x[n]$ 和 $x[((n+m))_N]$.

若 M 很小, 则简单地直接计算式(11.97)还是比较有效的. 在这种情况下, 全部计算量与 $Q \times M$ 成正比. 可是, 如果用第九章中讨论过的 FFT 算法并取 $N \geq Q+M-1$, 来计算这一步骤中的 DFT, 则全部计算量近似地与 $N \log_2 N$ (N 为 2 的幂)成正比. 因此, 对于充分大的 M 值, 利用 FFT 比直接计算式(11.97)更有效. 得失相当的准确 M 值将取决于 DFT 计算的具体实现方式, 但是, 如像由斯托克姆(Stockham, 1966)所证明的那样, 这个值很可能小于 100.

我们应当记得, 为了减小自相关序列或者由其估计出的功率谱的估计方差, 必须用大的记录长度 Q 值. 在这种情况下, 要有效地计算由上面介绍的步骤所要求的($N=Q+M-1$)点 DFT, 可能是不方便或者是不现实的. 但是, 由于 M 通常比 Q 小得多, 此时可以用类似于在 8.8 节所讨论过的, 对一个有限长冲激响应和一个长度不定的输入序列进行卷积所用的方法, 对序列 $x[n]$ 分段. 拉德(Rader, 1970)曾提出一种特别有效且灵活的方法, 该方法利用了许多实序列之 DFT 的性质以减少所需要的计算量. 这一方法的推导是习题 11.15 的基本内容.

一旦计算出自相关估计, 通过构造有限长序列

$$s[m] = \begin{cases} \hat{\phi}_{xx}[m]w_c[m], & 0 \leq m \leq M-1, \\ 0, & M \leq m \leq N-M, \\ \hat{\phi}_{xx}[N-m]w_c[N-m], & N-M+1 \leq m \leq N-1, \end{cases} \quad (11.98)$$

式中 $w_c[m]$ 是对称相关窗, 就能够计算在频率 $\omega_k=2\pi k/N$ 处的功率谱估计 $S(\omega)$ 的样本. 因此 $s[m]$ 的 DFT 为

$$S[k] = S(\omega)|_{\omega=2\pi k/N}, \quad k=0, 1, \dots, N-1, \quad (11.99)$$

其中 $S(\omega)$ 是如式(11.88)所定义的加窗自相关序列的傅里叶变换. 注意, 只要方便和可能, 应选取 N 尽可能大, 这样可以得到 $S(\omega)$ 在相互十分靠近的频率处的样本. 但是, 频率分辨率总是由窗 $w_c[m]$ 的长度和形状所决定的.

11.7.2 以自相关序列的估计为基础的功率谱估计举例

在第三章中我们曾假设由量化引入的误差是一个白噪声随机过程. 我们可以利用本节的方法通过估计量化噪声的自相关序列和功率谱来检验这个假设的正确性.

作为一个例子, 考虑图 11.24 中所描述的实验. 以 10kHz 的采样率对经过低通滤波后的语音信号 $x_c(t)$ 进行采样, 得到一个样本序列 $x[n]$. (虽然 A/D 转换器已将样本量化到 12 比特, 从本实验的目的出发, 我们假定没有对样本量化.) 样本重新定标, 使得 $|x[n]| \leq 16000$. 首先用一个 8 比特的线性量化器对这些样本量化, 并且计算相应的误差序列 $e[n] = Q[x[n]] - x[n]$, 如图 11.24 所示. 图 11.25(a)绘出了 400 个接续的语音信号样本, 而图 11.25(b)绘出了相应的误差序列. (为了作图方便起见, 用直线将样本连接起来.) 对这两幅图的观察和比较可以加强我们对前面所采用的模型的信念, 但是量化噪声谱的平坦性只有通过估计功率谱才能得以证实.

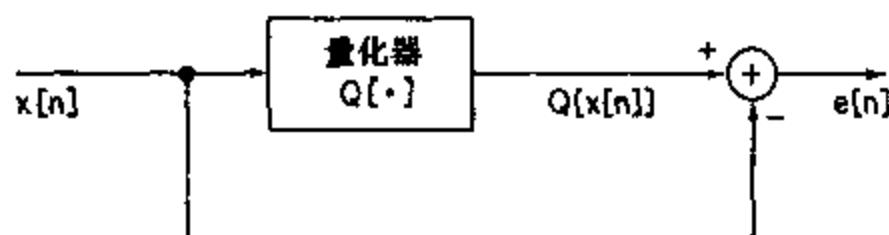
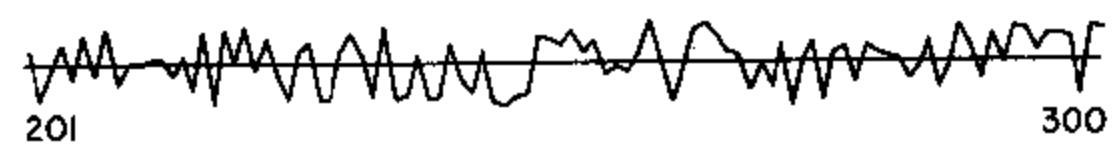
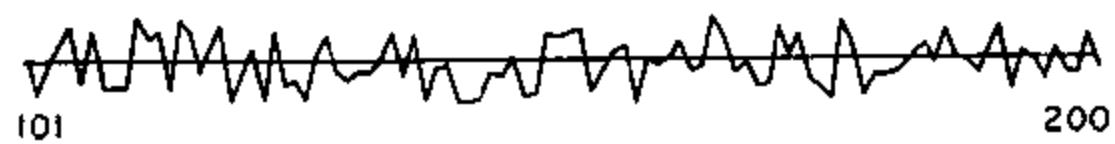
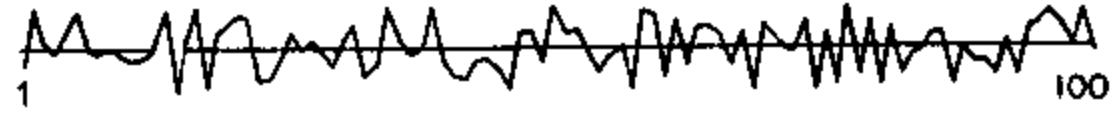
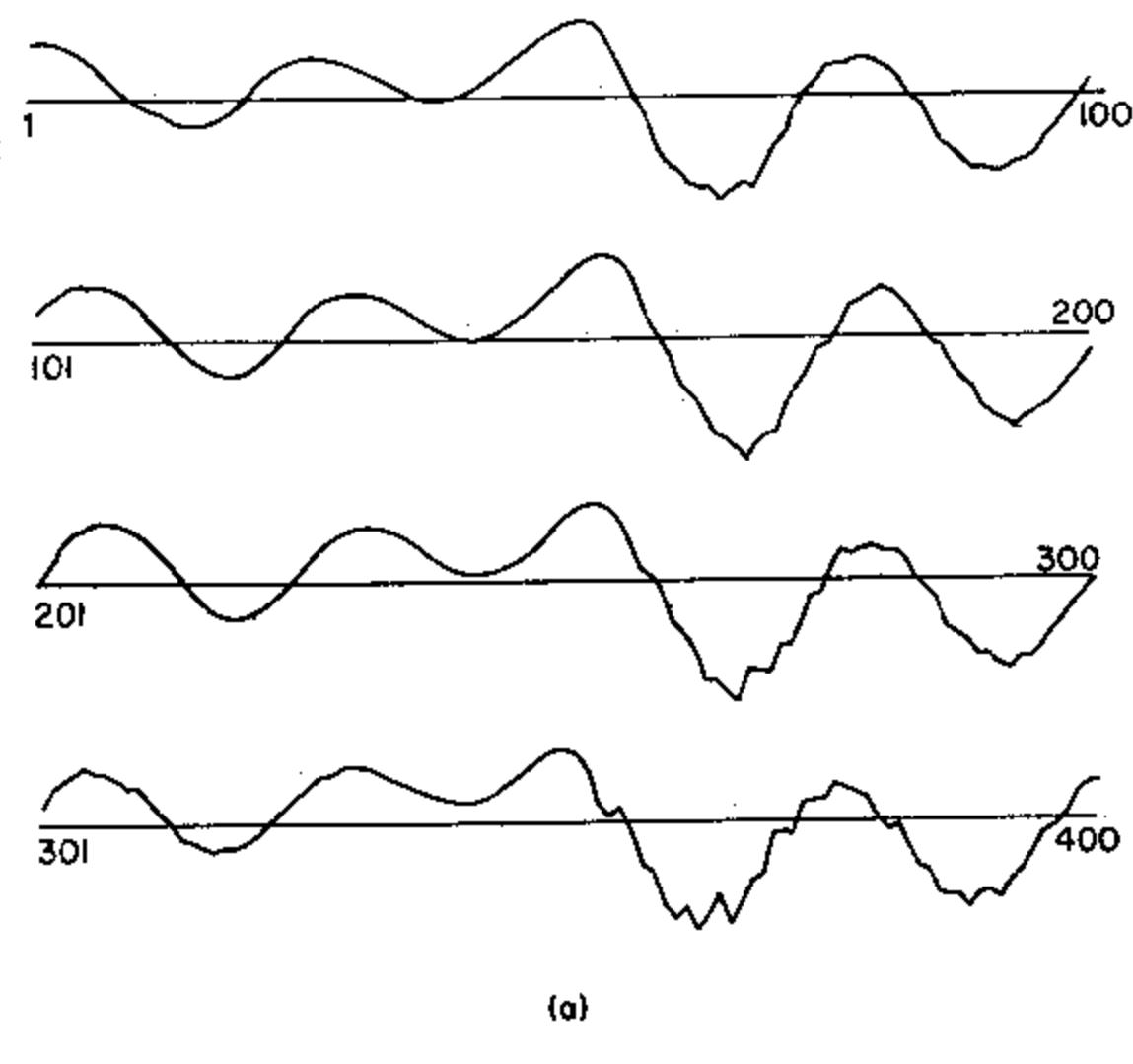


图 11.24 获得量化噪声序列的过程.

图 11.26 表示对于长度为 $Q=2000$ 个样本的记录的归一化自相关和功率谱的估计. 当 $M=512$ 时, 在计算自相关序列估计之前, 要先估计噪声序列的均值并将其减去. 用 $\hat{\phi}_{ee}[0]$ 除所得到的自相关估计就能得出归一化估计 $\hat{\rho}_{ee}[m] = \hat{\phi}_{ee}[m]/\hat{\phi}_{ee}[0]$, 如图 11.26(a) 和 (c) 所示. 注意, 归一化自相关在 $m=0$ 处为 1.0, 而在别处则很小. 的确对于 $1 \leq m \leq 512$, $-0.0548 \leq \hat{\rho}_{ee}[m] \leq 0.0579$. 这一结果看上去与我们有关误差序列在样本间不相关的假设相一致.

正如在 11.7.1 节所讨论的, 通过对归一化的自相关加一个巴特利特窗, 并取 $M=512$ 来估计功率谱. 结果以 dB 计, 如图 11.26(b) 所示, 它表现出在 0dB(白噪声的归一化功率谱值) 上下十分无规则的起伏. 一种较平滑的估计如图 11.26(d) 所示. 在这种情况下使用了 $M=50$ 的巴特利特窗. 将图 11.26(b) 与图 11.26(d) 作一比较, 可以清楚地看出, 所得结果的平滑是以牺牲分辨率为代价的. 由图 11.26(d) 可知, 对于所有频率, 谱估计值均在 -1.097dB 和 $+1.631\text{dB}$ 之间. 因此, 这再次促使我们相信, 白噪声模型对于这种量



(b)

图 11.25 (a) 语音波形, (b) 对应的 8 比特量化噪声(相对于图(a)放大 66 倍). 每条线相应于 100 个接续的样本,为了作图方便起见将它们用直线连接起来.

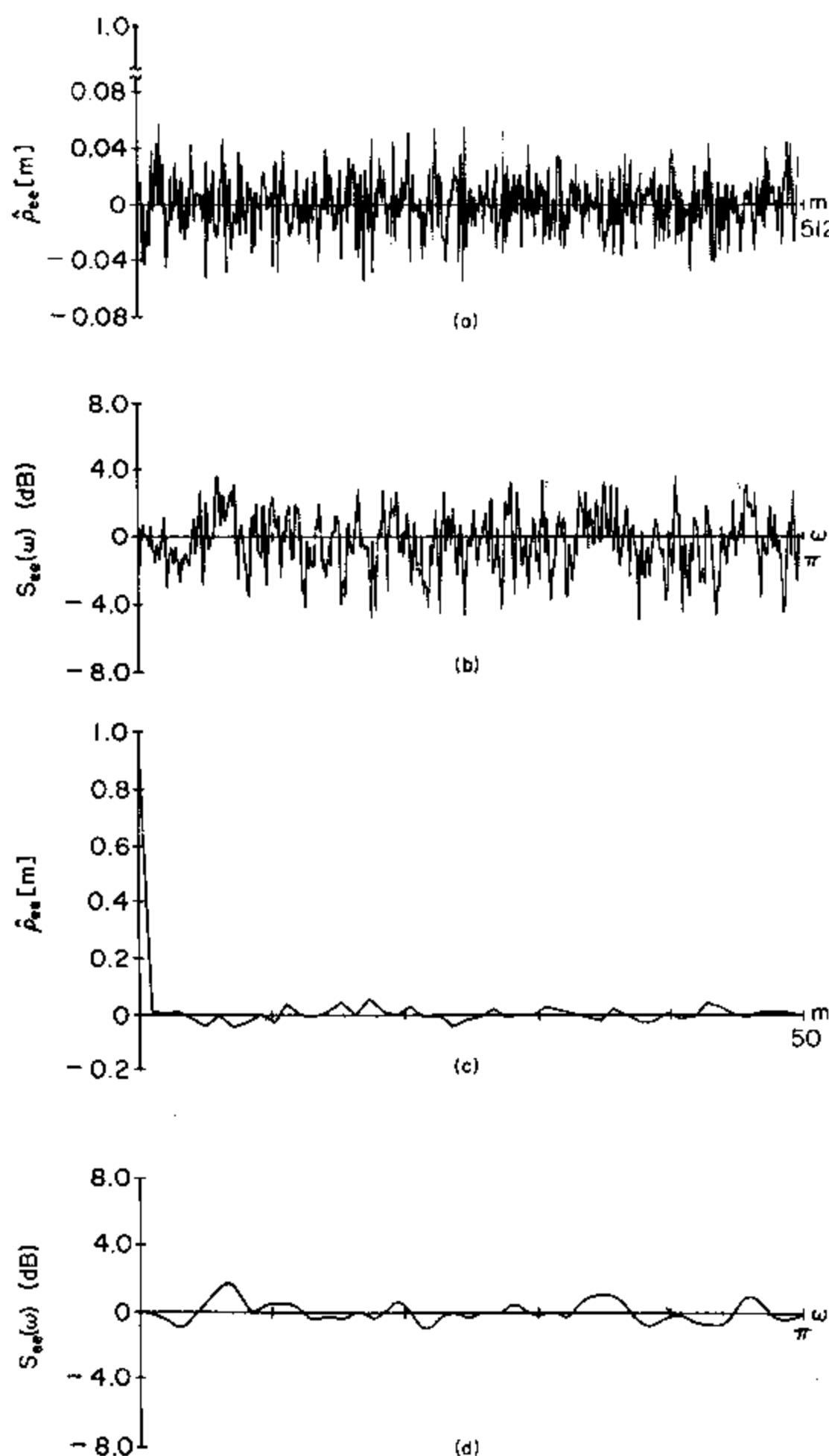


图 11.26 (a) 对于 8 比特量化噪声的归一化自相关估计,记录长度 $Q=2000$. (b) 用 $M=512$ 的巴特利特窗时的功率谱估计. (c) 归一化自相关估计, $0 \leq m \leq 50$. (d) 用 $M=50$ 的巴特利特窗时的功率谱估计.

化情况是合适的.

虽然我们已经定量地计算出自相关和功率谱的估计,但是我们对于这些量的解释还只是定性的. 现在有理由提出问题,若 $e[n]$ 确定一个白噪声过程,那么自相关应当多么

小? 为了给出这类问题的定量答案, 应当计算我们估计值的置信区间, 并且利用统计判决理论。(对于一些白噪声的检测问题请参阅 Jenkins and Watts 1968 年的著作.) 然而在许多情况下, 这种附加的统计处理是不必要的. 一种通常可行的处理方法是, 只要观察到在除 $m=0$ 以外的其它各处, 归一化自相关均很小, 就可以使人心十分放心和满意了.

本章最重要的结论之一是, 如果增加记录长度, 则平稳随机过程的自相关和功率谱估计应当得到改善. 图 11.27 就说明了这一点, 它与图 11.26 相对应, 只是将 Q 增加到

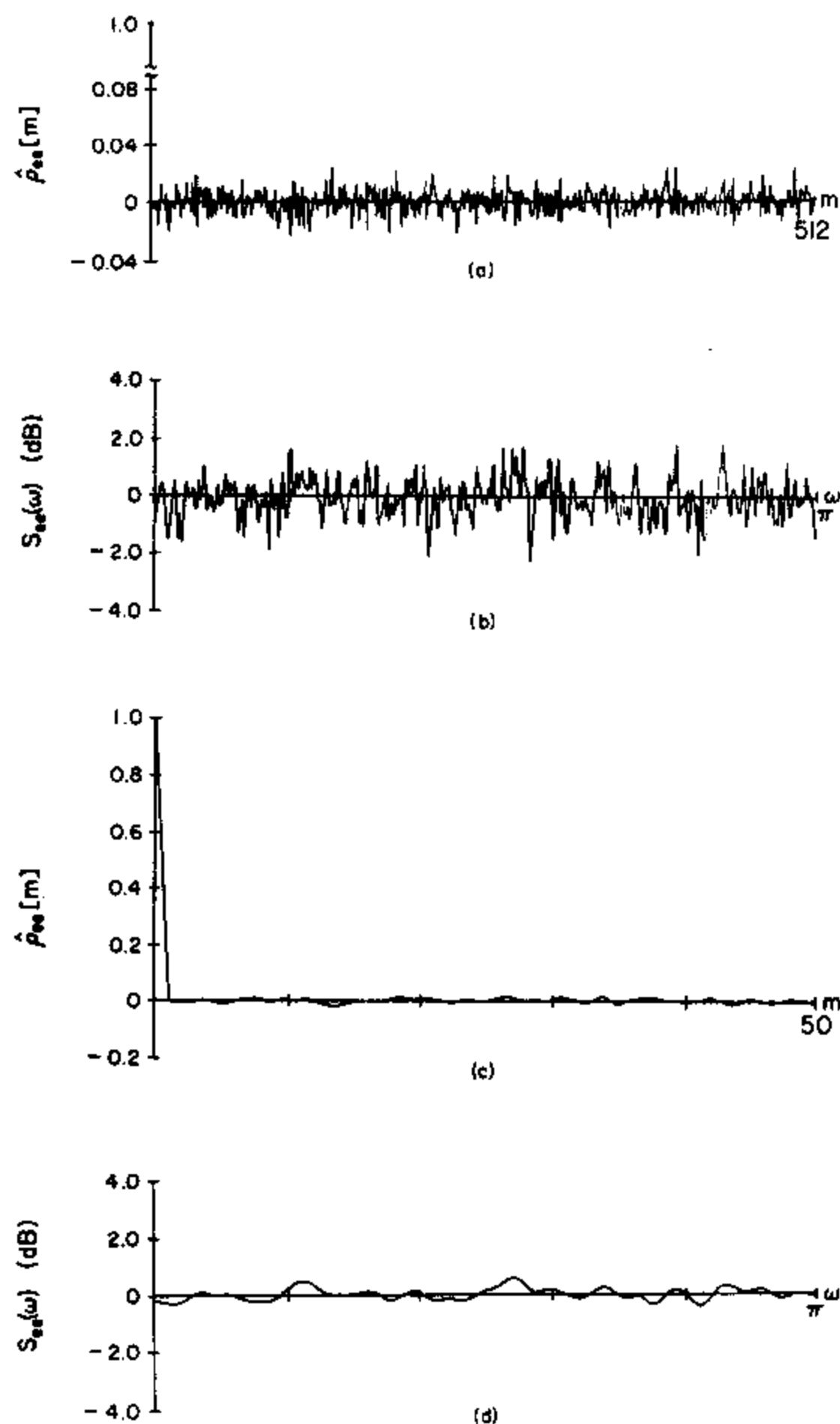


图 11.27 (a) 对于 8 比特量化噪声的归一化自相关估计, 记录长度 $Q=14000$. (b) 用 $M=512$ 的巴特利特窗时的功率谱估计. (c) 归一化自相关估计, $0 \leq m \leq 50$. (d) 用 $M=50$ 的巴特利特窗时的功率谱估计.

14000 个样本。回想一下，自相关估计的方差正比于 $1/Q$ 。因此， Q 从 2000 增加到 14000 应当使估计方差减小大约 7 倍。由式(11.96)我们注意到，谱估计的方差也可以预计有类似的减少。分别比较图 11.26(b)和(d)与图 11.27(b)和(d)也可以明显看出这一点。

在第三章中我们曾表明，只要量化台阶很小，白噪声模型就是合理的。当比特数很小时，这个条件就不满足了。为了观察对量化噪声谱的影响，现只用 8 个量化阶或 3 比特来重复前面的实验。图 11.28 表示对图 11.25(a)中所示语音波形段进行 3 比特量化时的量化误差。注意，部分误差波形看上去非常像原来的语音波形，可以预料到，这一点将反映在功率谱的估计中。

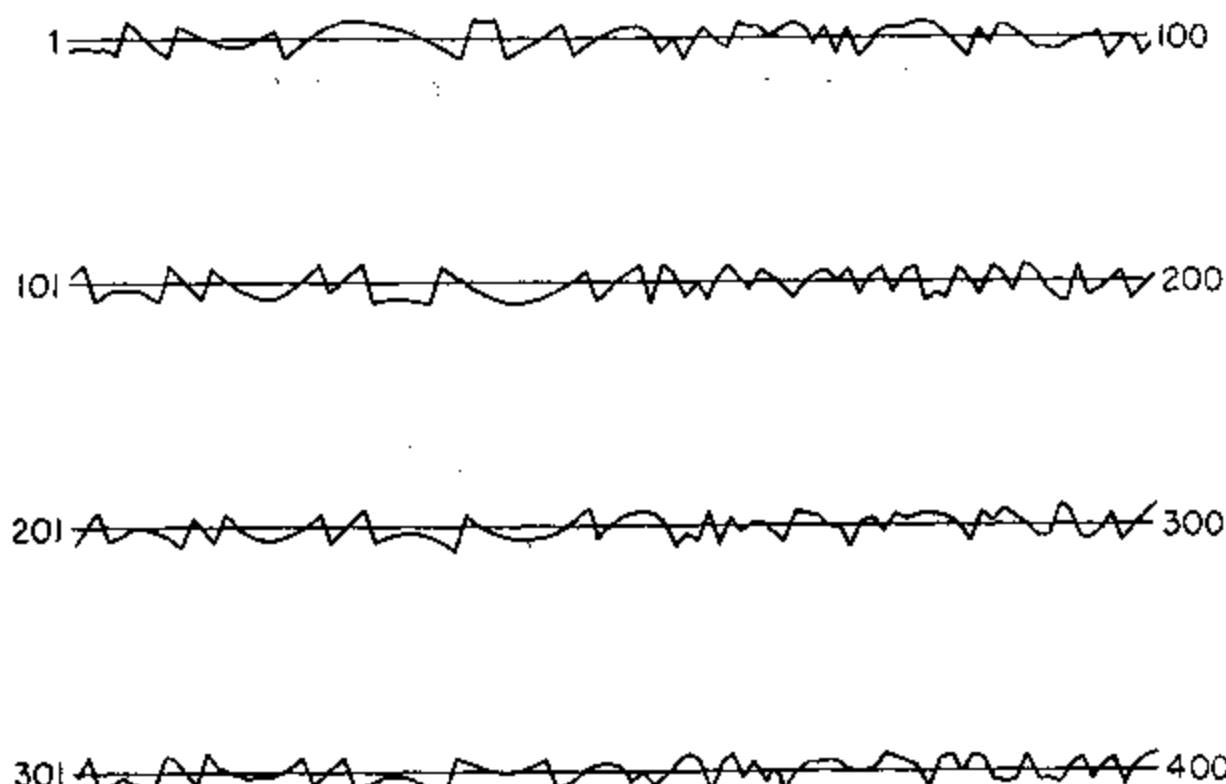


图 11.28 对于 3 比特量化的量化误差波形。(与图 11.25(a)中所示原始信号的比例相同。)

图 11.29 表示，对于 14000 个样本的记录长度，当 3 比特量化时误差序列的自相关和功率谱估计。在这种情况下，由图 11.29(a)和图 11.29(c)所示的自相关与理想的白噪声自相关序列相距甚远。

图 11.29(b)和(d)表示对于巴特利特窗，分别取 $M=512$ 及 $M=50$ 时的功率谱估计。在这种情况下，谱显然不是平坦的。（事实上，它趋向于具有通常语音谱的形状。）因此，在这种情况下，对于量化噪声的白噪声模型只能看作是相当粗糙的近似。

这个例子说明，我们应当有信心将自相关和功率谱的估计经常用于理论化模型中。特别是，我们已经表明第三章中的一些基本假设的有效性，并且已指出对于很粗糙的量化这些假设为何失效。这只是一个比较简单但很有用的例子，它说明本章的方法为何经常在实际中被采用。

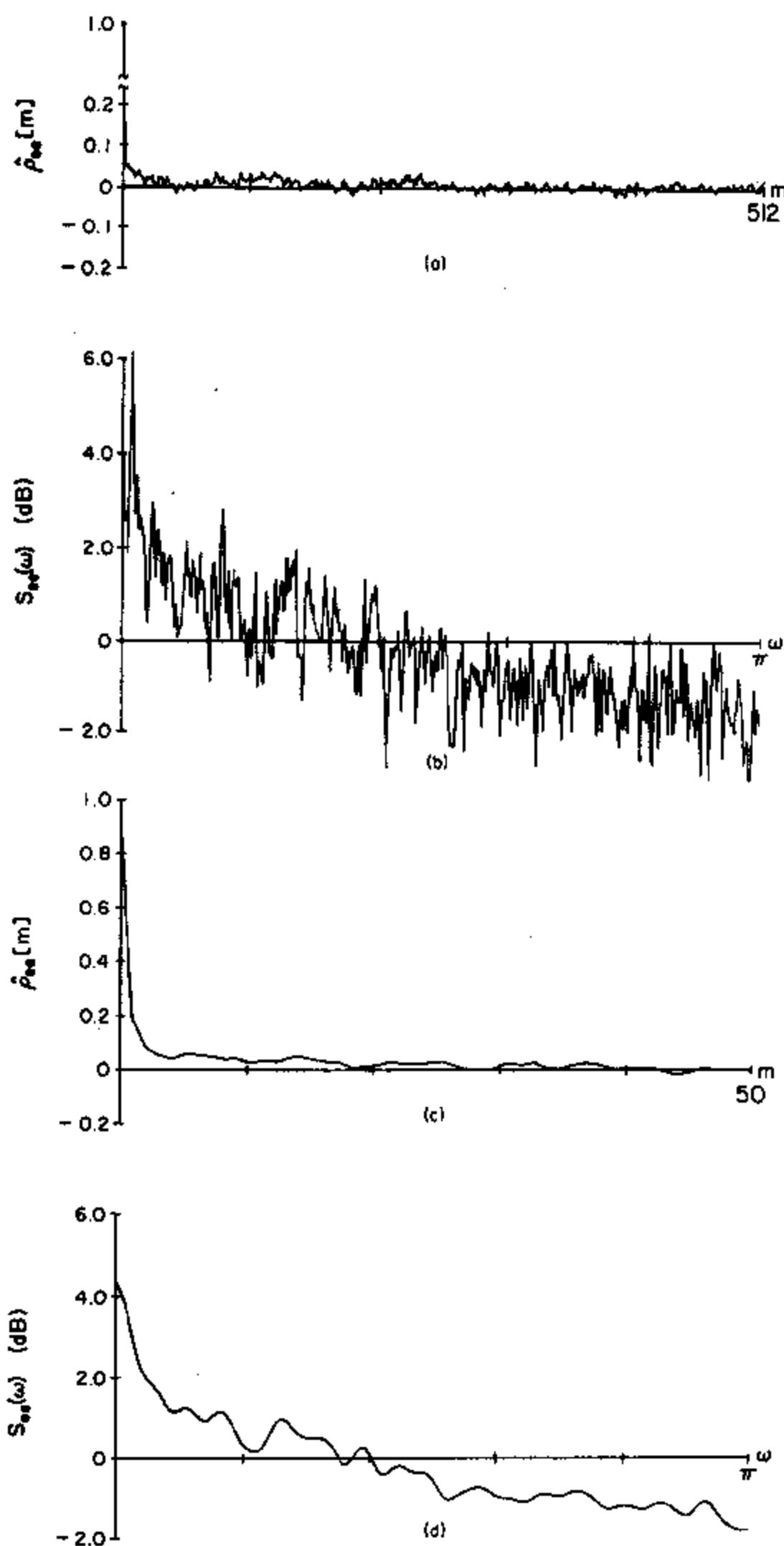


图 11.29 (a) 对于 3 比特量化噪声的归一化自相关估计,记录长度 $Q=14000$. (b) 用 $M=512$ 的
巴特利特窗时的功率谱估计. (c) 归一化自相关估计, $0 \leq m < 50$. (d) 用 $M=50$ 的巴特
利特窗时的功率谱估计.

11.8 小结

在信号处理中,重要的应用领域之一是信号的谱分析.由于 FFT 在计算上的高效率,连续时间或离散时间信号谱分析的许多技术都直接或间接地利用了 DFT. 在这一章中,我们揭示和说明了这些技术中的一部分.

通过分析正弦信号的诸多方面,我们能够最透彻地理解与谱分析有关的许多问题.由于利用 DFT 需要有限长信号,所以在分析之前必须加窗.对于正弦信号,在 DFT 中观察到的谱峰宽度与窗长有关,随着窗长度增加,谱峰将会变尖.因此,随着窗变短,在谱估计中分辨相互靠近的正弦信号的能力将变差.另外,由于使用 DFT 而造成在谱分析中所固有的独特影响与谱的采样有关.具体讲,因为只有在那些采样频率处才能计算谱,所以若在结果分析中不仔细,则所观察到的谱可能使我们得出错误的结论.例如,频谱中的一些重要特性可能在采样的频谱中没有直接显露出来.为了避免这一点,可以用以下两种方法中的任何一种来增加 DFT 的长度,从而减小谱样本间的间距:一种是对加窗序列补零,但是保持谱的分辨率不变;另一种是增加加在数据上窗的长度和 DFT 的长度,这将会提高分辨率.

在平稳数据的谱分析中增加窗的长度和提高分辨率一般是有益的;而对于时变数据,通常总希望保持窗的长度足够短,以使在窗的持续时间内信号的特性近似平稳.这就导致提出了依时傅里叶变换的概念,实际上它就是当信号序列滑动通过一有限长的窗时所得到的一列傅里叶变换.对依时傅里叶变换的一种普遍而有用的解释是,将它作为一组滤波器,每个滤波器的频率响应均对应于窗的傅里叶变换,其中心频率平移到一个 DFT 的频率处.依时傅里叶变换无论是在信号滤波中作为一个中间步骤,还是用来分析和解释如像语音和雷达信号之类的时变信号,都有重要的作用.非平稳信号的谱分析一般涉及到在时间分辨率和频率分辨率之间的折衷.具体讲,我们在时间上跟踪谱特征的能力随着分析窗长度的减小而增强.但是,分析窗越短将使得频率分辨率越差.

在平稳随机信号的分析中,DFT 也起着重要的作用.估计随机信号功率谱的一种直观方法是,计算一段信号之 DFT 的平方幅度.所得到的估计,称为周期图,是渐近无偏的.周期图估计的方差并不随着信号段长度的增加而减小至零,因此它不是一个好的估计.但是通过把可以利用的信号序列分成较短的信号段并且平均与之相关的周期图,就可以得到一个性能良好的估计.另外一种方法是首先估计自相关函数.它既可以直接计算,也可以利用 DFT 来计算.如果在用 DFT 之后再对自相关估计加窗,则最后结果就是一个好的谱估计,称为平滑周期图.

习题

- 11.1 一个时间连续的实信号 $x_c(t)$, 带宽限制在 5kHz 以下, 即对于 $|\Omega| > 2\pi(500)$, $X_c(j\Omega) = 0$. 以每秒 10000 个样本的采样率对信号 $x_c(t)$ 进行采样, 得到一个序列 $x[n] = x_c(nT)$, 其中 $T = 10^{-4}$. 计算当 $N = 1000$ 个 $x[n]$ 的样本时, N 点 DFT $X[k]$.
- (a) 在 $X[k]$ 中, $k=150$ 与什么连续频率相对应?

(b) 在 $X[k]$ 中, $k=800$ 与什么连续频率相对应?

- 11.2 一个连续时间信号 $x_c(t)$ 带宽限制在 5Hz , 即对于 $|\Omega| \geq 2\pi(5000)$, $X_c(j\Omega) = 0$. 以周期 T 对 $x_c(t)$ 采样, 得到序列 $x[n] = x_c(nT)$. 为了检验信号的谱特性, 我们利用要求 $N = 2^v$ (v 为整数) 的计算机程序来计算 $x[n]$ 的一段 N 个样本的 N 点 DFT.

试确定 N 的最小值以及采样率的范围

$$F_{\min} < \frac{1}{T} < F_{\max}$$

以便避免混叠并使 DFT 值之间的有效间隔小于 5Hz , 即以小于 5Hz 的间隔分隔等效的连续时间频率, 且在这些频率处来计算傅里叶变换.

- 11.3 考虑一个持续时间为 100ms 的有限连续时间实信号 $x_c(t)$. 假设这个信号有一个带限的傅里叶变换, 使得当 $|\Omega| \geq 2\pi(10000)\text{rad/s}$ 时 $X_c(j\Omega) = 0$, 即假设混叠可以忽略不计. 我们想要在区间 $0 \leq \Omega \leq 2\pi(10000)$ 上以 5Hz 为间隔计算 $X_c(j\Omega)$ 的样本. 这可以用 4000 点的 DFT 来实现. 具体讲, 我们希望得到一个 4000 点的序列 $x[n]$, 它的 4000 点 DFT 与 $X_c(j\Omega)$ 之间有如下关系:

$$X[k] = \alpha X_c(j2\pi \cdot 5 \cdot k), \quad k = 0, 1, \dots, 2000,$$

式中 α 是一个已知的标量因子. 为了得到一个 4000 点序列, 并且该序列的 DFT 能给出所要求的 $X_c(j\Omega)$ 样本, 特提出三种方法.

方法 1: 以采样周期 $T = 25\mu\text{s}$ 对 $x_c(t)$ 采样, 即我们计算序列

$$x_1[n] = \begin{cases} x_c(nT), & n = 0, 1, \dots, 3999, \\ 0, & \text{其它.} \end{cases}$$

的 DFT $X_1[k]$. 因为 $x_c(t)$ 的时间限制在 100ms , 所以 $x_1[n]$ 是一个长度为 4000 ($100\text{ms}/25\mu\text{s}$) 的有限长序列.

方法 2: 以 $T = 50\mu\text{s}$ 的采样周期对 $x_c(t)$ 采样. 由于 $x_c(t)$ 的时间限制在 100ms , 因此所得序列只有 $2000(100\text{ms}/50\mu\text{s})$ 个非零样本, 即

$$x_2[n] = \begin{cases} x_c(nT), & n = 0, 1, \dots, 1999, \\ 0, & \text{其它.} \end{cases}$$

换句话说, 要对序列“补充”零样本以产生一个要计算其 4000 点 DFT $X_2[k]$ 的 4000 点序列.

方法 3: 以 $T = 50\mu\text{s}$ 的采样周期对 $x_c(t)$ 采样, 与方法 2 类似. 用所得到的 2000 点序列构成如下序列 $x_3[n]$:

$$x_3[n] = \begin{cases} x_c(nT), & 0 \leq n \leq 1999, \\ x_c((n-2000)T), & 2000 < n < 3999, \\ 0, & \text{其它.} \end{cases}$$

计算这个序列的 4000 点 DFT.

对于每一种方法, 确定每个 4000 点 DFT 与 $X_c(j\Omega)$ 有何关系. 针对一个“典型的”傅里叶变换 $X_c(j\Omega)$, 大致上指出这种关系. 用显式说明哪一种或几种方法可以给出所希望的 $X_c(j\Omega)$ 的样本.

- 11.4 用 20000 样本/秒的采样率对一个连续时间有限长信号 $x_c(t)$ 采样, 形成一个在区间 $0 \leq n \leq 999$ 上为非零的 1000 点有限长序列 $x[n]$. 对于这个问题, 假定连续时间信号也是带宽有限的, 使得当 $|\Omega| \geq 2\pi(10000)$ 时 $X_c(j\Omega) = 0$, 即假定可以忽略的混叠干扰在采样中发生了. 还假定有一种计算 1000 点 DFT 和 IDFT 的装置或程序可供使用.

(a) 如果 $X[k]$ 表示序列 $x[n]$ 的 1000 点 DFT, $X[k]$ 与 $X_c(j\Omega)$ 有何关系? DFT 样本间的有效频率间隔是什么?

为了在区间 $|\Omega| \leq 2\pi(5000)$ 上得到傅里叶变换 $X_c(j\Omega)$ 的展开, 从 1000 点 DFT $X[k]$ 开始, 提出如下步骤:

第一步: 构成新的 1000 点 DFT

$$W[k] = \begin{cases} X[k], & 0 \leq k \leq 250, \\ 0, & 251 \leq k \leq 749, \\ X[k], & 750 \leq k \leq 999. \end{cases}$$

第二步：计算 $W[k]$ 的 1000 点 DFT，得到 $w[n], n=0, 1, \dots, 999$.

第三步：以 2 为因子抽取序列 $w[n]$ 并且用 500 个接续的零样本将其加长，得到序列

$$y[n] = \begin{cases} w[2n], & 0 \leq n \leq 499, \\ 0, & 500 \leq n \leq 999. \end{cases}$$

第四步：计算 $y[n]$ 的 1000 点 DFT，得到 $Y[k]$.

(b) 以上步骤的设计者断言

$$Y[k] = aX_e(j2\pi \cdot 10 \cdot k), \quad k = 0, 1, \dots, 500,$$

其中 a 是一个比例常数。这一断言正确吗？如果不正确，请说明原因。

11.5 由式(11.18)定义的依时傅里叶变换有如下性质：

- (a) 线性：若 $x[n] = ax_1[n] + bx_2[n]$ ，则 $X[n, \lambda] = aX_1[n, \lambda] + bX_2[n, \lambda]$ 。
- (b) 平移性：若 $y[n] = x[n - n_0]$ ，则 $Y[n, \lambda] = X[n - n_0, \lambda]$ 。
- (c) 调制性：若 $y[n] = e^{j\omega_0 n}x[n]$ ，则 $Y[n, \lambda] = e^{j\omega_0 n}X[n, \lambda - \omega_0]$ 。
- (d) 共轭对称性：若 $x[n]$ 是实数，则 $X[n, \lambda] = X^*[n, -\lambda]$ 。

11.6 设 $y[n]$ 是输入为 $x[n]$ 的一个线性时不变 FIR 系统的输出，即

$$y[n] = \sum_{k=0}^M h[k]x[n-k].$$

(a) 试得出线性系统输出的依时傅里叶变换 $Y[n, \lambda]$ 和输入的依时傅里叶变换 $X[n, \lambda]$ 之间的关系式。

(b) 证明，若与 M 相比窗足够长，则有下式成立：

$$Y[n, \lambda] \approx H(e^{j\lambda})X[n, \lambda],$$

式中 $H(e^{j\lambda})$ 是线性系统的频率响应。

11.7 以 16000 样本/秒(16kHz)的采样率对一个语音信号采样，在如 11.3 节所描述的信号依时傅里叶分析中使用一个 20ms 长的窗，在各次 DFT 的计算之间使窗超前 40 个样本。假定每个 DFT 的长度是 $N = 2^n$ 。

- (a) 在由窗选出的每段语音信号中有多少样本？
- (b) 什么是依时傅里叶分析的“帧率”(frame rate)，即每秒完成多少次 DFT 运算？
- (c) 能够从依时傅里叶变换重构原始输入信号的 DFT 的最小长度 N 是什么？
- (d) DFT 样本间的间隔(以 Hz 为单位)是多少？

11.8 设 $x_e(t)$ 是一个连续时间平稳随机信号，有相关函数

$$\phi_e(\tau) = \mathcal{E}\{x_e(t)x_e(t+\tau)\}$$

和功率密度谱

$$P_e(\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi_e(\tau) e^{-j\Omega\tau} d\tau.$$

考虑一个离散时间平稳随机信号 $x[n]$ ，它是以采样周期 T 对 $x_e(t)$ 采样而得到的，即 $x[n] = x_e(nT)$ 。

(a) 证明 $x[n]$ 的自相关序列 $\phi[m]$ 为

$$\phi[m] = \phi_e(mT).$$

(b) 连续时间随机信号的功率密度谱与离散时间随机信号的功率密度谱之间的关系是什么？

(c) 必须在什么条件下，下式才能成立

$$P(\omega) = \frac{1}{T} P_e\left(\frac{\omega}{T}\right), \quad |\omega| < \pi?$$

- 11.9 在 11.6.5 节中, 我们研究过一个正弦白噪声的功率谱估计. 在本题中我们将确定这样一个信号的真实功率谱. 假设

$$x[n] = A \cos(\omega_0 n + \theta) + e[n],$$

式中 θ 是 0 到 2π 均匀分布的随机变量, 且 $e[n]$ 是互不相关的零均值随机变量序列, 同时与 θ 也不相关. 换句话说, 余弦分量有一个随机选择的相位, 而 $e[n]$ 代表白噪声.

- (a) 证明: 对于上面的假设, $x[n]$ 的自相关函数为

$$\phi_{xx}[m] = \mathcal{E}\{x[n]x[m+n]\} = \frac{A^2}{2} \cos(\omega_0 m) + \sigma_e^2 \delta[m],$$

其中 $\sigma_e^2 = \mathcal{E}\{(e[n])^2\}$.

- (b) 由(a)的结果证明, 在一个周期的频率范围内 $x[n]$ 的功率谱是

$$P_{xx}(\omega) = \frac{A^2 \pi}{2} [\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)] + \sigma_e^2, \quad |\omega| \leq \pi.$$

- 11.10 考虑一个长度为 N 个样本的离散时间信号 $x[n]$, 它是通过对一个平稳、白的、零均值连续时间信号采样而得到的. 因此

$$\mathcal{E}\{x[n]x[m]\} = \sigma_x^2 \delta[n-m],$$

$$\mathcal{E}\{x[n]\} = 0.$$

假设我们计算有限长序列 $x[n]$ 的 DFT, 从而得到 $X[k]$, $k = 0, 1, \dots, N-1$.

- (a) 试确定 $|X[k]|^2$ 的方差.

- (b) 求 DFT 值之间的互相关, 即求出 k 和 r 的函数 $\mathcal{E}\{X[k]X^*[r]\}$.

- 11.11 一个离散时间随机信号 $x[n]$ 的周期图由式(11.52)定义为

$$I(\omega) = \frac{1}{LU} |V(e^{j\omega})|^2,$$

式中 $V(e^{j\omega})$ 是有限长序列 $v[n] = w[n]x[n]$ 的离散时间傅里叶变换, 同时 $w[n]$ 是一个长度为 L 的有限长窗序列, 而且 U 是一个归一化常数.

证明: 周期图也等于 $v[n]$ 的非周期相关序列之傅里叶变换的 $1/LU$ 倍, 即

$$I(\omega) = \frac{1}{LU} \sum_{n=-(L-1)}^{L-1} c_{vv}[n] e^{-j\omega n},$$

其中 $c_{vv}[n]$ 为

$$c_{vv}[n] = \sum_{m=0}^{L-1} v[n]v[n+m].$$

- 11.12 一个限带连续时间信号具有一个限带功率谱, 也就是当 $|\Omega| \geq 2\pi(10^4)$ rad/s 时功率谱为零. 以 20000 样本/秒的采样率在 10s 的时间范围内对信号采样. 用 11.6.3 节所论述的平均周期图法来估计该信号的功率谱.

- (a) 数据记录的长度 Q (样本的个数) 是多少?

- (b) 如果用基 2FFT 程序计算周期图, 若我们希望在间隔不大于 10Hz 的等间隔频率处得出功率谱的估计, 则最小长度 N 为多少?

- (c) 假设信号段长度 L 等于(b)中的 FFT 长度 N , 若信号段不重叠, 可以有多少段?

- (d) 假定我们希望把谱估计的方差减小到 $1/10$, 且仍维持(b)部分中的频率间隔. 试给出这样做的两种方法. 这两种方法得出的结果相同吗? 如果不同, 请说明它们如何不同.

- 11.13 假设用 11.6.3 节中讨论的平均周期图法得出一个信号之功率谱的估计. 即, 功率谱估计是

$$\bar{I}(\omega) = \frac{1}{K} \sum_{r=0}^{K-1} I_r(\omega),$$

这里用式(11.67)和(11.68), 由 L 点信号段计算 K 个周期图 $I_r(\omega)$. 我们定义一个自相关函数的估计为 $\bar{I}(\omega)$ 的傅里叶反变换, 即

$$\hat{\phi}[m] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} I(\omega) e^{j\omega m} d\omega.$$

(a) 证明 $\mathcal{E}\{\hat{\phi}[m]\} = \frac{1}{LU} c_{xx}[m] \phi_{xx}[m]$,

其中 L 是信号段长度; U 是式(11.64)给出的归一化因子; $c_{xx}[m]$ 是加在信号段上的窗之非周期相关函数,由式(11.62)给出.

(b) 在周期图平均的应用中,通常用 FFT 算法来计算在 N 个等间隔频率处的 $I(\omega)$,即

$$I[k] = I(2\pi k/N), \quad k=0,1,\dots,N-1.$$

式中 $N \geq L$. 假设我们通过计算 $I[k]$ 的 IDFT 来计算自相关函数的估计,即

$$\hat{\phi}_p[m] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} I[k] e^{j(2\pi/N)km}, \quad m=0,1,\dots,N-1.$$

试得出 $\mathcal{E}\{\hat{\phi}_p[m]\}$ 的表示式.

(c) 如何选择 N 使得

$$\mathcal{E}\{\hat{\phi}_p[m]\} = \mathcal{E}\{\hat{\phi}[m]\}, \quad m=0,1,\dots,L-1.$$

11.14 考虑一个有限长序列,使得当 $n < 0$ 和 $n \geq L$ 时 $x[n] = 0$. 令 $X[k]$ 为序列 $x[n]$ 的 N 点 DFT, 其中 $N > L$. 定义 $c_{xx}[m]$ 为 $x[n]$ 的非周期自相关函数,即

$$c_{xx}[m] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] x[n+m].$$

定义 $\tilde{c}_{xx}[m]$ 为

$$\tilde{c}_{xx}[m] = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} |X[k]|^2 e^{j(2\pi/N)kn}, \quad m=0,1,\dots,N-1.$$

(a) 如果我们要求

$$c_{xx}[m] = \tilde{c}_{xx}[m], \quad 0 \leq m \leq L-1.$$

试确定对于 DFT,能够使用的 N 的最小值.

(b) 如果我们要求

$$c_{xx}[m] = \tilde{c}_{xx}[m], \quad 0 \leq m \leq M-1,$$

其中 $M < L$, 试确定对于 DFT,能够使用的 N 的最小值.

11.15 研究一下自相关估计的计算

$$\hat{\phi}_{xx}[m] = \frac{1}{Q} \sum_{n=0}^{Q-1} x[n] x[n+|m|], \quad (P11.15-1)$$

式中 $x[n]$ 为一个实序列. 当需要用式(11.88)估计功率密度谱时,因为 $\hat{\phi}_{xx}[-m] = \hat{\phi}_{xx}[m]$, 所以只须对 $0 \leq m \leq M-1$ 计算式(P11.15-1)就可以得到当 $-(M-1) \leq m \leq M-1$ 时的 $\hat{\phi}_{xx}[m]$.

(a) 当 $Q \gg M$ 时, 利用单一的 FFT 算式计算 $\hat{\phi}_{xx}[m]$ 可能是不合适的. 在这种情况下, 将 $\hat{\phi}_{xx}[m]$ 表示为基于较短序列的相关估计的和则很方便. 证明: 若 $Q = KM$,

$$\hat{\phi}_{xx}[m] = \frac{1}{Q} \sum_{i=0}^{K-1} c_i[m], \quad (P11.15-2)$$

式中对于 $0 \leq m \leq M-1$,

$$c_i[m] = \sum_{n=0}^{M-1} x_i[n+iM] x[n+iM+m]. \quad (P11.15-3)$$

(b) 证明: 通过 N 点循环卷积

$$\tilde{c}_i[m] = \sum_{n=0}^{N-1} x_i[n] y_i[((n+m))_N], \quad (P11.15-4)$$

其中序列 $x_i[n]$ 和 $y_i[n]$ 为

$$x_i[n] = \begin{cases} x[n+iM], & 0 \leq n \leq M-1, \\ 0, & M \leq n \leq N-1, \end{cases} \quad (\text{P11.15-5})$$

和

$$y_i[n] = x[n+iM], \quad 0 \leq n \leq N-1, \quad (\text{P11.15-6})$$

可以得到相关序列 $c_i[m]$. 对于 $0 \leq m \leq M-1$, 使 $c_i[m] = \tilde{c}_i[m]$ 的 N (用 M 表示) 的最小值是什么?

- (c) 说明计算 $\phi_{xx}[m]$, $0 \leq m \leq M-1$, 的步骤, 其中涉及到计算 $2K$ 个实序列的 N 点 DFT 和一个 N 点 IDFT. 若用基 2FFT, 当 $0 \leq m \leq N-1$ 时计算 $\phi_{xx}[m]$ 需要多少次复数乘法?
(d) 对(c)中得出的计算步骤必须作哪些修改才能计算互相关估计

$$\hat{\phi}_{xy}[m] = \frac{1}{Q} \sum_{n=0}^{Q-|m|-1} x[n]y[n+m], \quad -(M-1) \leq m \leq M-1, \quad (\text{P11.15-7})$$

式中 $x[n]$ 和 $y[n]$, $0 \leq n \leq Q-1$, 是已知实序列?

- (e) 拉德(Rader, 1970)已证明, 当计算自相关估计 $\hat{\phi}_{xx}[m]$, $0 \leq m \leq M-1$ 时, 若 $N=2M$, 则可以显著节省计算量. 证明: 由式(P11.15-6)定义的序列段 $y_i[n]$ 的 N 点 DFT 可以表示为

$$Y_i[k] = X_i[k] + (-1)^k X_{i+1}[k], \quad k = 0, 1, \dots, N-1. \quad (\text{P11.15-8})$$

说明计算 $\hat{\phi}_{xx}[m]$, $0 \leq m \leq M-1$, 的步骤, 它涉及到计算 K 个 N 点 DFT 和一个 N 点 IDFT. 若用基 2FFT, 确定在这种情况下复数乘法的总次数.

11.16 对称巴特利特窗出现在功率谱估计的许多方面. 它定义为

$$w_B[m] = \begin{cases} 1 - |m|/M, & |m| \leq M-1, \\ 0, & \text{其它.} \end{cases} \quad (\text{P11.16-1})$$

对于如 11.7 节所讨论的, 通过对一个估计的自相关函数加窗来得出功率谱的估计, 巴特利特窗是特别有吸引力的. 这是因为它的傅里叶变换是非负的, 可以保证平滑的谱估计在所有频率处都是非负的.

- (a) 证明式(P11.16-1)定义的巴特利特窗是序列 $(u[n] - u[n-M])$ 的非周期自相关函数.
(b) 由(a)的结果证明巴特利特窗的傅里叶变换为

$$W_B(e^{j\omega}) = \frac{1}{M} \left[\frac{\sin(\omega M/2)}{\sin(\omega/2)} \right]^2, \quad (\text{P11.16-2})$$

显然它是非负的.

- (c) 叙述一种能产生其它具有非负傅里叶变换的有限窗序列的方法.

11.17 在 11.7 节中我们已经证明, 通过对自相关序列加窗可以得到平滑的功率谱估计. 还表明(见式(11.95)平滑谱估计的方差为

$$\text{var}[S(\omega)] \approx F P_{xx}^2(\omega),$$

式中方差比因子或方差缩减因子 F 为

$$F = \frac{1}{Q} \sum_{m=-M+1}^{M-1} (w_B[m])^2 = \frac{1}{2\pi Q} \int_{-\pi}^{\pi} |W_B(e^{j\omega})|^2 d\omega.$$

正如在 11.7 节中所讨论的, Q 是序列 $x[n]$ 的长度, 且 $(2M-1)$ 是加在自相关估计上的对称窗 $w_B[m]$ 的长度. 这样, 若 Q 固定, 通过调整加在相关函数上的窗之形状和长度可以减小平滑谱估计的方差.

在该题中我们将证明, F 随着窗长度的减小而减小, 但是从前面第七章中有关窗的讨论中我们还知道, $W_B(e^{j\omega})$ 的主瓣宽度随着窗长度的减小而增加, 因此分辨两个邻近频率分量的能力也随着窗宽度的减小而降低. 这样, 在减小方差和提高分辨率之间有着一个折衷的问题. 在该题中我们将研究对于如下常用窗的这种折衷问题.

矩形窗

$$w_R[m] = \begin{cases} 1, & |m| \leq M-1, \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

巴特利特(三角形)窗

$$w_B[m] = \begin{cases} 1 - |m|/M, & |m| \leq M-1, \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

汉宁/哈明窗

$$w_H[m] = \begin{cases} \alpha + \beta \cos[\pi m / (M-1)], & |m| \leq M-1, \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

(对于汉宁窗, $\alpha = \beta = 0.5$, 而对于哈明窗, $\alpha = 0.54$ 和 $\beta = 0.46$.)

(a) 求出以上每个窗的傅里叶变换, 即计算 $W_R(e^{j\omega})$, $W_B(e^{j\omega})$, 及 $W_H(e^{j\omega})$. 画出每个傅里叶变换作为 ω 的函数的草图.

(b) 对于以上每个窗, 证明当 $M \gg 1$ 时下表中的各项近似正确.

窗的名称	近似主瓣宽度	近似方差比(F)
矩形窗	$2\pi/M$	$2M/Q$
巴特利特窗	$4\pi/M$	$2M/(3Q)$
升余弦窗	$3\pi/M$	$2M(\alpha^2 + \beta^2/2)/Q$

- 11.18 在 11.3 节中我们定义了信号 $x[n]$ 的依时傅里叶变换, 对于固定的 n , 它等效于序列 $x[n+r]w[r]$ 的常规离散时间傅里叶变换, 其中 $w[r]$ 是一个窗序列. 对于序列 $x[n]$ 定义一个依时相关函数也是很有用的, 使得当 n 固定时, 它的常规傅里叶变换是依时傅里叶变换幅度的平方. 具体讲, 依时自相关函数定义为

$$c[n, m] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |X[n, \lambda]|^2 e^{jm\lambda} d\lambda, \quad (\text{P11.18-1})$$

式中 $X[n, \lambda]$ 由式(11.18)定义.

(a) 证明

$$c[n, m] = \sum_{r=-\infty}^{\infty} x[n+r]w[r]x[m+n+r]w[m+r], \quad (\text{P11.18-2})$$

即对于固定的 n , $c[n, m]$ 是序列 $x[n+r]w[r]$, $-\infty < r < \infty$, 的非周期自相关函数.

(b) 证明当 n 固定时, 依时自相关函数是 m 的偶函数, 并且利用这一事实求出等效表示式

$$c[n, m] = \sum_{r=-\infty}^{\infty} x[r]x[r-m]h_m[n-r], \quad (\text{P11.18-3})$$

式中

$$h_m[r] = w[-r]w[-(m+r)]. \quad (\text{P11.18-4})$$

(c) 对于固定的 m 和 $-\infty < n < \infty$, 窗 $w[r]$ 必须满足什么条件才能通过因果运算, 利用式 (P11.18-4) 来计算 $c[n, m]$?

(d) 假设 $w[-r]$ 为

$$w[-r] = \begin{cases} a', & r \geq 0, \\ 0, & r < 0. \end{cases} \quad (\text{P11.18-5})$$

为了计算第 m 个自相关滞后值, 求出冲激响应 $h_m[r]$, 并求相应的系统函数 $H_m(z)$. 由系统函数, 画出对于式(P11.18-5)所示窗计算第 m 个自相关滞后值 $c[n, m]$ ($-\infty < n < \infty$) 的一个因果系统的方框图.

(e) 对于

$$w[-r] = \begin{cases} r\alpha', & r \geq 0, \\ 0, & r < 0. \end{cases} \quad (\text{P11.18-6})$$

重复(d).

11.19 有时可用一组滤波器来实现依时傅里叶分析,即使在使用 FFT 方法时,滤波器组解释仍可以提供一种很有用的见解.本题就是研究滤波器组解释.这种解释的基础在于如下事实:当 λ 固定时,由式(11.18)定义的依时傅里叶变换就是一个序列,它可以看作是滤波和调制运算结合在一起的结果.

(a) 证明,若线性时不变系统的冲激响应是 $h_0[n] = w[-n]$, 则 $X(n, \lambda)$ 是图 P11.19-1 所示系统的输出. 另外证明,如果 λ 固定,图 P11.19-1 中的整个系统的特性如同一个线性时不变系统,并确定等效的 LTI 系统的冲激响应和频率响应.

(b) 若假定在图 P11.19-1 中 λ 固定, 证明对于典型的窗序列和固定的 λ , 序列 $s[n] = \overset{\vee}{X}[n, \lambda]$ 具有一个低通的离散时间傅里叶变换. 并证明,对于典型的窗序列, 图 P11.19-1 中的整个系统是一个中心在 $\omega = \lambda$ 处的带通滤波器.

(c) 图 P11.19-2 给出一组为 N 个的带通滤波器通道, 每个通道的实现如图 P11.19-1 所示. 各通道的中心频率为 $\lambda_k = 2\pi k/N$, 且 $h_0[n] = w[-n]$ 是低通滤波器的冲激响应. 证明单路输出 $y_k[n]$ 是依时傅里叶变换(在 λ 维上)的样本. 并证明总输出是 $y[n] = w[0]x[n]$, 即证明由采样的依时傅里叶变换, 图 P11.19-2 所示系统可以完全重构输出信号(差一个标量因子).

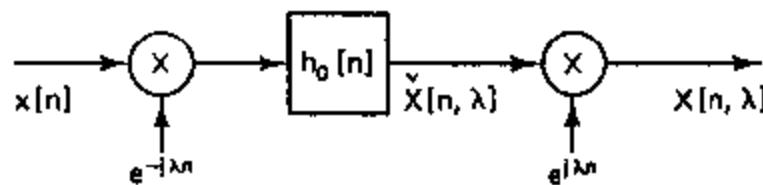


图 P11.19-1

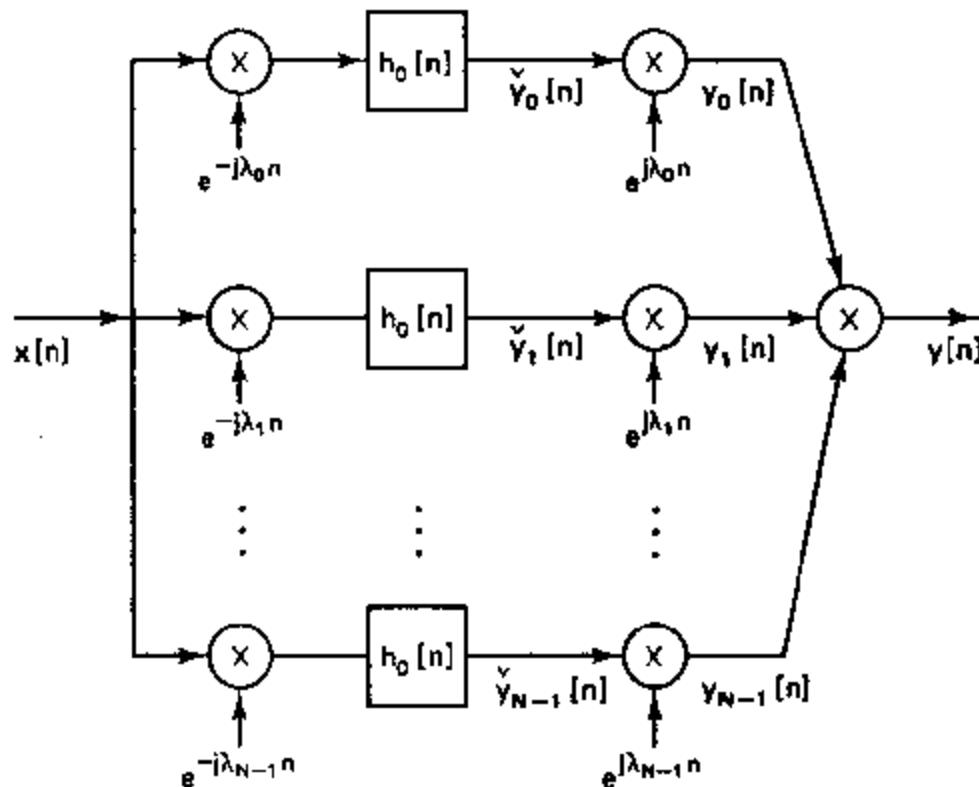


图 P11.19-2

图 P11.19-2 的系统将单个输入序列 $x[n]$ 转换成 N 个序列, 因此每秒钟的总样本数增加为 N 倍. 正如(b)中所示, 对于典型的窗序列, 通道信号 $y_k[n]$ 有低通傅里叶变换. 这样, 如图 P11.19-3 所示, 降低这些信号的采样率应当是可能的. 特别是, 如果采样率降低到 $R = N$ 分之

一, 每秒钟的总样本数与 $x[n]$ 相同. 在这种情况下, 称滤波器组是临界采样的(见 Crochier 和 Rabiner, 1983). 由抽取的通道信号重构原始信号需要如图所示的内插. 显然, 我们关心的是如何能很好地由系统重构原始输入信号 $x[n]$.

(d) 对于图 P11.19-3 所示系统, 证明输出的常规离散时间傅里叶变换由下式给出:

$$Y(e^{j\omega}) = \frac{1}{R} \sum_{l=0}^{R-1} \sum_{k=0}^{N-1} G_0(e^{j(\omega-\lambda_k)}) H_0(e^{j(\omega-\lambda_k-2\pi l/R)}) X(e^{j(\omega-2\pi l/R)}),$$

式中 $\lambda_k = 2\pi k/N$. 这个表达式清楚地表明, 混叠是由通道信号 $y[n]$ 的抽取而造成的. 由这个表达式可以确定使 $H_0(e^{j\omega})$ 和 $G_0(e^{j\omega})$ 同时满足的一个关系或一组关系, 它可以消除混叠, 并且使 $y[n] = x[n]$.

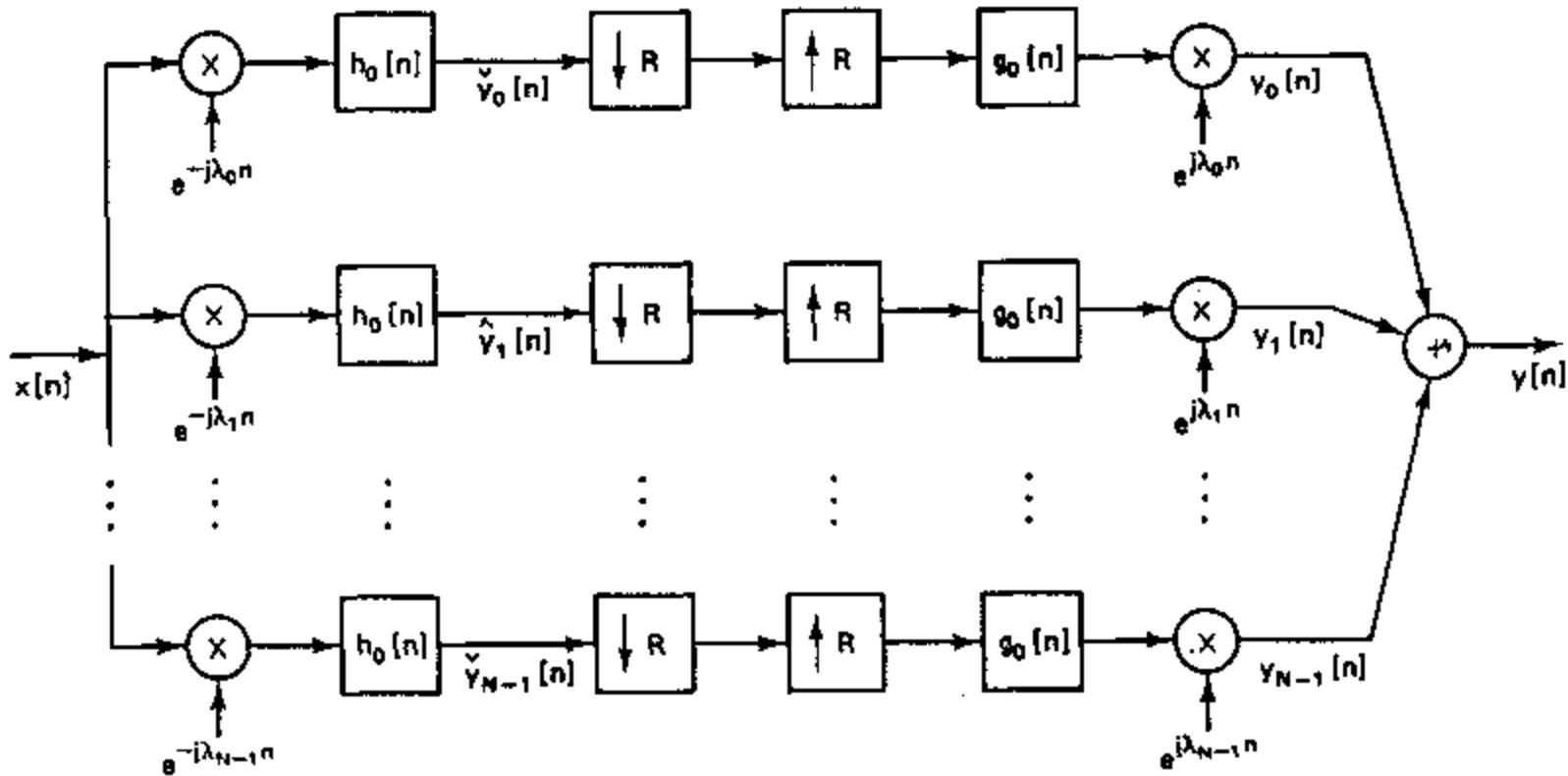


图 P11.19-3

(e) 假设 $R=N$, 并且低通滤波器的频率响应是一个理想低通滤波器, 其频率响应为

$$H_0(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & |\omega| < \pi/N, \\ 0, & \pi/N < |\omega| \leq \pi. \end{cases}$$

对于这个频率响应 $H_0(e^{j\omega})$, 确定是否能够找出内插滤波器 $G_0(e^{j\omega})$ 的频率响应, 使其满足(d) 中推导出的条件. 若可以, 则求 $G_0(e^{j\omega})$.

(f) 选做题: 当低通滤波器的频率响应 $H_0(e^{j\omega})$ ($w[-n]$ 的傅里叶变换) 是非理想的, 并且在区间 $|\omega| < 2\pi/N$ 上为非零时, 请揭示完全重构的可能性.

(g) 证明图 P11.19-3 之系统的输出是

$$y[n] = N \sum_{r=-\infty}^{\infty} x[n-rN] \sum_{l=-\infty}^{\infty} g_0[n-lR] h_0[lR+rN-n].$$

由这个表达式, 确定 $h_0[n]$ 和 $g_0[n]$ 可以同时满足的一个关系或一组关系, 它可以使 $y[n] = x[n]$.

(h) 假设 $R=N$ 并且低通滤波器的冲激响应是

$$h_0[n] = \begin{cases} 1, & -(N-1) \leq n \leq 0, \\ 0, & \text{其它.} \end{cases}$$

对于这个冲激响应 $h_0[n]$, 确定是否可能找出内插滤波器的冲激响应 $g_0[n]$, 使得在(f) 中推导出的条件得以满足. 若可以, 则求出 $g_0[n]$.

(i) 选做题: 当低通滤波器的冲激响应 $h_0[n] = w[-n]$ 是一个长度大于 N 的递减窗时, 揭示完全重

构的可能性.

- 11.20 考虑一个如图 P11.20 所示的稳定线性时不变系统, 其中输入 $x[n]$ 假定是均值为零、方差为 σ_x^2 的白噪声. 假设该系统有系统函数

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{1 - \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}},$$

则输入和输出满足如下常系数差分方程:

$$y[n] = \sum_{k=1}^N a_k y[n-k] + \sum_{k=0}^M b_k x[n-k].$$

如果所有的 a_k 都为零, 则称 $y[n]$ 是一个滑动平均(MA)线性随机过程. 如果除 $b_0 \neq 0$ 之外所有的 b_k 均为零, 则 $y[n]$ 称为自回归(AR)线性随机过程. 如果 N 和 M 均为非零值, 则 $y[n]$ 是一个自回归滑动平均(ARMA)线性随机过程.

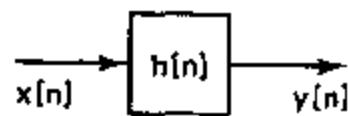


图 P11.20

- (a) 利用线性系统的冲激响应 $h[n]$ 表示 $y[n]$ 的自相关.
- (b) 用(a)的结果并利用系统的频率响应来表示出 $y[n]$ 的功率密度谱.
- (c) 证明一个 MA 过程的自相关序列 $\phi_{yy}[n]$ 只有在区间 $|m| < M$ 上是非零的.
- (d) 对一个 AR 过程, 求出其自相关序列的通用表示式.
- (e) 证明: 若 $b_0=1$, 则一个 AR 过程的自相关函数满足如下差分方程:

$$\begin{aligned}\phi_{yy}[0] &= \sum_{k=1}^N a_k \phi_{yy}[k] + \sigma_x^2, \\ \phi_{yy}[m] &= \sum_{k=1}^N a_k \phi_{yy}[m-k], \quad m \geq 1.\end{aligned}$$

- (f) 利用(e)的结果以及 $\phi_{yy}[m]$ 的对称性, 证明

$$\sum_{k=1}^N a_k \phi_{yy}[|m-k|] = \phi_{yy}[m], \quad m = 1, 2, \dots, N.$$

可以证明, 若已知 $\phi_{yy}[m], m = 0, 1, \dots, N$, 我们总可以唯一地解出该随机过程模型的 a_k 和 σ_x^2 . 这些值可用于(b)的结果中, 以得出 $y[n]$ 的功率密度谱表示式. 这个方法是许多参数谱估计技术的基础. (对于这些方法的深入讨论可参阅 Gardner, 1988; Kay, 1988; Marple, 1987 的著作.)

第十二章 倒谱分析和同态解卷积

12.0 引言

在先前的几章中我们讨论和说明了各种线性信号处理方法. 在这一章里, 我们将介绍一类非线性技术, 称之为倒谱分析和同态解卷积. 在某些应用中, 这些方法已经证明是非常有效和特别有用的. 此外, 它还进一步表明, 离散时间信号处理技术能提供极大的灵活性和强大的处理能力.

1963 年, 博格特(Bogert)、希利(Healy)和图基(Tukey)发表了一篇文章, 使用了异乎寻常的标题“对于回波时间序列的倒频率分析: 倒谱, 伪自协方差, 互倒谱和倒相位分裂.”他们观察到, 一个包含有回波信号的功率谱, 其对数有一个附加的由回波造成的周期分量, 因此功率谱对数的傅里叶变换应当在回波延时处出现一个峰. 他们改变了词“spectrum”中一些字母的顺序, 把这个函数称为倒谱(cepstrum), 因为“总的说来, 我们发现我们自己总是用习惯上用于时域的方法进行频域上的运算”. 博格特等人陆续定义了许多词汇用以描述这一新的信号处理技术, 可是只有倒谱这个词被广泛地使用.

大约在同一时期, 奥本海姆(1967, 1969a)提出了一类称为同态系统的新系统. 虽然在经典的意义上它是非线性的, 但是这些系统满足广义的叠加原理, 即输入信号和它们对应的响应可以通过具有类似于加法的相同代数性质的运算叠加(组合)在一起. 同态滤波的概念是非常通用的, 但只是对乘和卷积的组合运算才进行了最广泛地研究, 因为许多信号模型涉及到这类运算. 一个信号变换到它的倒谱就是同态变换, 并且倒谱的概念是同态系统理论的基础部分, 该系统用于处理通过卷积组合起来的信号.

自从引入了倒谱, 已证明倒谱的概念和同态系统在信号分析中很有用, 并且已经在处理语音信号(Oppenheim, 1969b; Schafer and Rabiner, 1970), 地震信号(Ulrych, 1971; Tribolet, 1979), 生物医学信号(Senmoto and Childers, 1972), 旧的录音信号(Stockham et al., 1975), 及声纳信号(Reut et al., 1985)中获得了成功的应用. 这一章将详细讨论与倒谱和以同态滤波为基础的解卷积有关的性质和计算问题. 许多这方面的概念将在 12.9 节通过语音处理方面的应用来加以说明.

12.1 复倒谱的定义

考虑一个稳定序列 $x[n]$, 其 z 变换用极坐标形式表示为

$$X(z) = |X(z)| e^{j\angle X(z)}, \quad (12.1)$$

式中 $|X(z)|$ 和 $\angle X(z)$ 分别为复数 $X(z)$ 的幅度和幅角. 因为 $x[n]$ 是稳定的, 所以 $X(z)$ 的收敛域包括单位圆, 且 $x[n]$ 的傅里叶变换存在并等于 $X(e^{j\omega})$. 与 $x[n]$ 对应的复倒谱定义

为一个稳定序列 $\hat{x}[n]^*$, 它的 z 变换是

$$\hat{X}(z) = \log[X(z)]. \quad (12.2)$$

虽然在定义复倒谱时, 对数可以用任何底数, 但是通常使用自然对数(底为 e), 并且在以后的全部讨论中都假定使用它. 如式(12.1)所示的复数量 $X(z)$ 的对数定义为

$$\log[X(z)] = \log[|X(z)|e^{j\angle X(z)}] = \log|X(z)| + j\angle X(z). \quad (12.3)$$

因为在复数的极坐标表示中, 幅角仅在 2π 的整数倍范围内是单值的, 所以式(12.3)的虚部还没能给出很好的定义. 后面我们将简要地说明这个问题, 当前我们先假设已选定了某一种合适的定义.

如果 $\log[X(z)]$ 可以表示为一个如下形式的收敛幂级数

$$\hat{X}(z) = \log[X(z)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{x}[n]z^{-n}, \quad |z| = 1, \quad (12.4)$$

则复倒谱存在, 也就是说 $\hat{X}(z) = \log[X(z)]$ 必须具有稳定序列 z 变换的全部性质. 特别是, $\log[X(z)]$ 的幂级数表示的收敛域必须具有如下形式:

$$r_R < |z| < r_L, \quad (12.5)$$

式中 $0 < r_R < 1$ 和 $r_L > 1$. 若当前就是这种情况, 则幂级数的系数序列 $\hat{x}[n]$ 就对应于 $x[n]$ 的复倒谱, 并且由如下反 z 变换积分给出:

$$\hat{x}[n] = \frac{1}{2\pi j} \oint_C \log[X(z)] z^{n-1} dz, \quad (12.6)$$

其中积分围线是在收敛域内. 由于我们要求 $\hat{x}[n]$ 是稳定的, 因此收敛域应包括单位圆, 并且用傅里叶反变换可将复倒谱表示为

$$\begin{aligned} \hat{x}[n] &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \log[X(e^{j\omega})] e^{j\omega n} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [\log|X(e^{j\omega})| + j\angle X(e^{j\omega})] e^{j\omega n} d\omega. \end{aligned} \quad (12.7)$$

复倒谱这个术语使我们给出的更通用的定义与博格特等人(Bogert et al., 1963)提出的倒谱的原始定义区别开来. 在这段上下文中使用复数意味着在定义中使用了复对数. 它并不意味着倒谱必须是一个复数序列. 的确, 正如不久我们将会看到的, 我们所选择的复对数定义保证了一个实序列的复倒谱也是一个实序列.

与复倒谱相对照, 一个信号的倒谱 $c_x[n]$ (有时称为实倒谱) 定义为傅里叶变换幅度之对数的傅里叶反变换, 即

$$c_x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \log|X(e^{j\omega})| e^{j\omega n} d\omega. \quad (12.8)$$

因为傅里叶变换的幅度是实数和非负的, 所以在定义式(12.8)中的对数时不需要作特殊的考虑. 通过比较式(12.8)和(12.7)我们看到, $c_x[n]$ 是 $\hat{X}(e^{j\omega})$ 之实部的傅里叶反变换. 因此 $c_x[n]$ 等于 $\hat{x}[n]$ 的共轭对称部分, 即

$$c_x[n] = \frac{\hat{x}[n] + \hat{x}^*[n]}{2}. \quad (12.9)$$

倒谱在许多应用中是十分有用的, 因为它与 $X(e^{j\omega})$ 的相位无关, 所以计算起来要比复倒谱

* 在稍微更一般的复倒谱定义中, 不需要限制 $x[n]$ 和 $\hat{x}[n]$ 是稳定的. 然而, 利用这个限制可以通过比在一般情况下更简单的符号表示法来说明一些重要的概念.

容易得多.但由于它只是基于傅里叶变换的幅度,因此是不可逆的,即 $x[n]$ 不能由 $c_x[n]$ 来恢复.虽然复倒谱计算起来稍微困难一些,但是它是可逆的.因为复倒谱是一个比倒谱更为通用的概念,而且倒谱的性质可以由式(12.9)从复倒谱的性质中推导出来,所以在这一章中我们着重讨论复倒谱.

由于种种原因,在定义和计算复倒谱时所遇到的附加困难是值得的.首先,由式(12.3)可以看出,复对数具有产生一个实部和虚部分别为 $\log |X(e^{j\omega})|$ 和 $\angle X(e^{j\omega})$ 的新的傅里叶变换的效果.这样,若复倒谱是因果的,我们就可以得出这两个量之间的希尔伯特变换关系.我们将在 12.6.1 节中进一步讨论这一点,特别是将看到它是如何与最小相位序列联系在一起的.其次,在 12.2 节的推导中,在定义对卷积组合信号进行广义线性滤波的系统时,复倒谱所起的作用更能让我们体会到定义复倒谱的初衷.

12.2 同态解卷积

12.2.1 广义叠加原理

正如对线性系统所阐明的那样,叠加原理要求:若 T 是系统变换,则对于任意两个输入 $x_1[n]$ 和 $x_2[n]$ 以及任意标量 c 有

$$T\{x_1[n] + x_2[n]\} = T\{x_1[n]\} + T\{x_2[n]\} \quad (12.10a)$$

和

$$T\{cx_1[n]\} = cT\{x_1[n]\}. \quad (12.10b)$$

为了推广这个原理,我们用 \square 表示几个输入彼此组合的运算法则(如相加、相乘、卷积等),用 $:$ 表示输入与标量组合的运算法则.类似地用 \circ 表示几个系统输出彼此组合的运算法则,用 \cdot 表示输出与标量组合的运算法则.这样,若用 H 表示系统变换,则可把式(12.10)推广为

$$H\{x_1[n] \square x_2[n]\} = H\{x_1[n]\} \circ H\{x_2[n]\} \quad (12.11a)$$

和

$$H\{c : x_1[n]\} = c \cdot H\{x_1[n]\}. \quad (12.11b)$$

图 12.1 画出了这类系统,我们说该系统服从输入运算 \square 和输出运算 \circ 的广义叠加原理.满足这一广义叠加原理的系统称为同态系统,这是因为它们可以用输入和输出信号空间之间的代数线性(同态)映射来表示.显然,线性系统是一种 \square 和 \circ 都是相加、且 $:$ 和 \cdot 都是相乘的特殊情况.

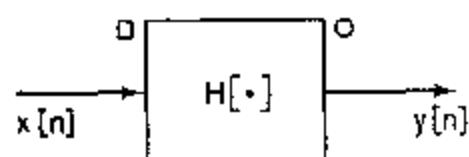


图 12.1 满足广义叠加原理的系统的表示法,其中输入运算为 \square ,输出运算为 \circ ,以及线性变换为 H .

可以证明(Oppenheim, 1967, 1969a),任何同态系统均可以分解为三个同态系统的级联,如图 12.2 所示,第一个系统只取决于输入运算 \square ,最后一个系统只取决于输出运算 \circ ,而中间系统相当于一个线性系统.系统 $D_n[\cdot]$ 称为与输入运算 \square 有关的特征系统,而

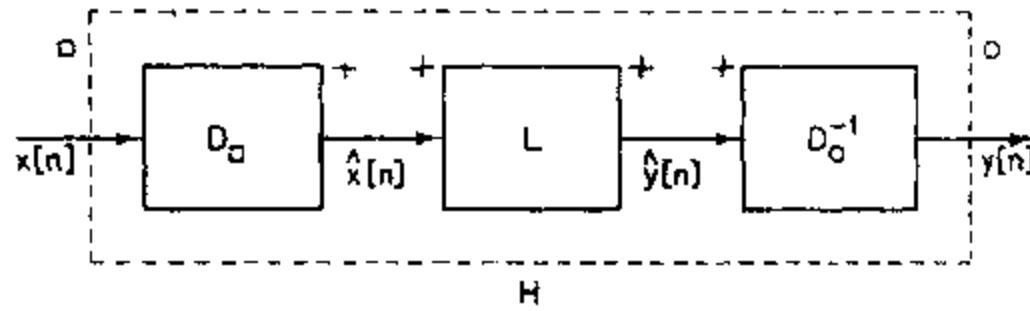


图 12.2 同态系统的规范表示。

$D_o^{-1}[\cdot]$ 是 $D_o[\cdot]$ 的逆，称为与输出运算 \circ 有关的特征系统。图 12.2 中的全部分解称为同态系统的规范表示。我们将会发现，它在将同态系统用于解卷积时是非常有用的。

12.2.2 对于卷积的特征系统

图 12.3 表示一类对于卷积服从广义叠加原理系统的规范表示。具体讲，若输入是

$$x[n] = x_1[n] * x_2[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1[k] x_2[n-k], \quad (12.12)$$

则相应的输出是

$$y[n] = y_1[n] * y_2[n], \quad (12.13)$$

其中 $y_1[n]$ 和 $y_2[n]$ 分别为系统对于 $x_1[n]$ 和 $x_2[n]$ 的响应。利用图 12.3 所示系统来除去或改变卷积中的一个分量称为同态解卷积。

在图 12.3 的规范系统中的第一个系统是对于卷积的特征系统。它是一个将卷积作为输入运算而相加作为输出运算的同态系统，因此有

$$x[n] = x_1[n] * x_2[n],$$

那么就有

$$\hat{x}[n] = \hat{x}_1[n] + \hat{x}_2[n].$$

特别是，可选择 $D_*[\cdot]$ 使得 $\hat{x}[n]$ 为 $x[n]$ 的复倒谱，即

$$\hat{X}(z) = \log[X(z)]. \quad (12.14)$$

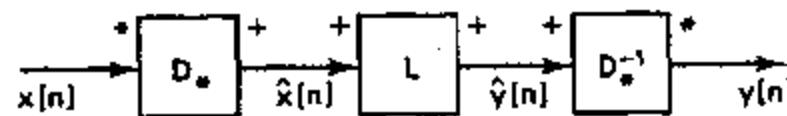


图 12.3 将卷积作为输入和输出运算的同态系统的规范形式。

正如在 12.3 节中将要讨论的，如果当 $X(z) = X_1(z)X_2(z)$ 时所定义的复倒谱是恰当的，则

$$\begin{aligned} \hat{X}(z) &= \log[X(z)] = \log[X_1(z)] + \log[X_2(z)] \\ &= \hat{X}_1(z) + \hat{X}_2(z) \end{aligned} \quad (12.15)$$

和

$$\hat{x}[n] = \hat{x}_1[n] + \hat{x}_2[n]. \quad (12.16)$$

这样，系统 $D_*[\cdot]$ 满足广义叠加原理，并且把卷积作为在输入端叠加的运算，而把相加作为在输出端叠加的运算。

在 12.1 节中定义复倒谱的那些运算与图 12.4(a) 所示方框图里表示的运算相同。 z

变换、复对数和反 z 变换的级联可以看作是特征系统 $D_*[\cdot]$ 的一种表示。因为我们在本章中假设所有的序列及其复倒谱都是稳定的，与之相关的 z 变换在它们的收敛域中总是包括单位圆，因此图12.4中的 z 变换也可以用式(12.7)中的傅里叶变换给出。这三种基本分量变换均是同态的，并且对应的输入和输出运算在图12.4(a)中已标出。 z 变换把卷积映射成相乘，复对数把相乘转换为相加，而反变换是在通常意义上的线性变换。

图12.3所示级联中的第三个系统是对于卷积的特征系统的逆。因此，它的输入必须是其输出的复倒谱，即

$$y[n] = D_*^{-1}[\hat{y}[n]]. \quad (12.17)$$

这意味着，若 $\hat{Y}(z)$ 是 $D_*^{-1}[\cdot]$ 的输入的 z 变换，则输出的 z 变换是

$$Y(z) = \exp[\hat{Y}(z)]. \quad (12.18)$$

如果输入到 $D_*^{-1}[\cdot]$ 的是两个复倒谱之和， $\hat{y}[n] = \hat{y}_1[n] + \hat{y}_2[n]$ ，则输出是 $y[n] = y_1[n] * y_2[n]$ 。这可以从式(12.18)得出，因为

$$\begin{aligned} \exp[\hat{Y}_1(z) + \hat{Y}_2(z)] &= \exp[\hat{Y}_1(z)] \cdot \exp[\hat{Y}_2(z)] \\ &= Y_1(z)Y_2(z). \end{aligned} \quad (12.19)$$

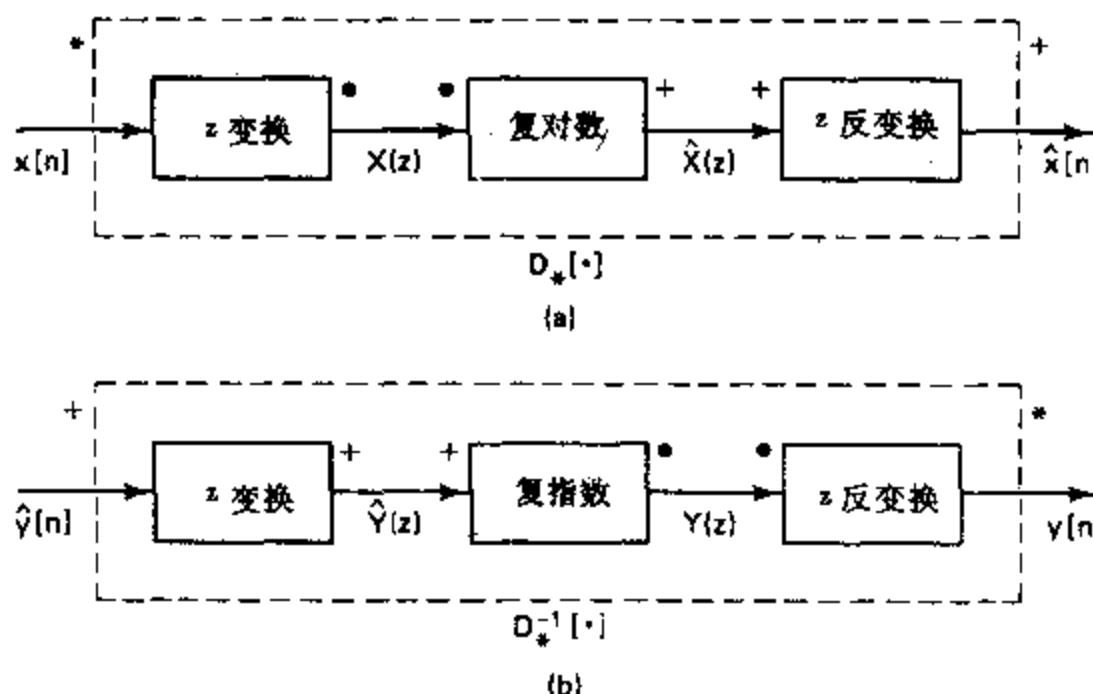


图12.4 (a) 对于卷积的特征系统和(b)它的逆特征系统的表示。

定义卷积逆特征系统的基本运算绘于图12.4(b)中。在这种情况下， z 变换的线性特性把倒谱之和变为变换之和，复指数把相加映射为相乘，而反变换把相乘映射为卷积。

12.2.3 基于广义叠加原理的解卷积

图12.3绘出了将卷积作为输入和输出运算的同态系统的规范表示图。正如所讨论的，系统 $D_*[\cdot]$ 和 $D_*^{-1}[\cdot]$ 只取决于特定类别的同态系统，即取决于输入和输出运算均为卷积的系统。系统 L 是一个在通常意义上的线性系统。

为了说明这类同态系统在解卷积中的作用，让我们来研究作为两个分量卷积的信号，即

$$x[n] = x_1[n] * x_2[n]. \quad (12.20)$$

例如， $x_2[n]$ 可能是一个稳定的线性时不变系统的冲激响应，它的影响正是我们想要去掉

的,也就是说,我们希望从 $x[n]$ 中恢复 $\dot{x}_1[n]$. $\dot{x}_2[n]$ 的复倒谱是 $x_1[n]$ 和 $x_2[n]$ 的复倒谱之和,即

$$\dot{x}[n] = \dot{x}_1[n] + \dot{x}_2[n]. \quad (12.21)$$

如果我们对于图 12.3 中的线性系统 L 找出一种选择,使得当它的输入是 $\dot{x}[n] = \dot{x}_1[n] + \dot{x}_2[n]$ 时,其输出是

$$\dot{y}[n] = \dot{x}_1[n], \quad (12.22)$$

则图 12.3 中整个系统的输出将是

$$y[n] = x_1[n]. \quad (12.23)$$

换句话说,若线性系统把 $\dot{x}_2[n]$ 从式(12.21)的相加组合中完全除去,则也就把 $x_2[n]$ 从式(12.20)的卷积组合中完全除去.

虽然原则上任何线性系统均可用作图 12.3 中的系统 L ,但是在实际应用中已证明,线性频率不变类系统对于解卷积是最有用的.对于这类系统,输出序列 $\dot{y}[n]$ 和输入序列 $\dot{x}[n]$ 有如下形式的关系:

$$\dot{y}[n] = \ell[n] \dot{x}[n]. \quad (12.24)$$

同样,输出的傅里叶变换与输入的傅里叶变换通过如下周期卷积联系起来:

$$\hat{Y}(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \hat{X}(e^{j\theta}) L(e^{j(\omega-\theta)}) d\theta, \quad (12.25)$$

式中 $L(e^{j\omega})$ 是 $\ell[n]$ 的傅里叶变换.当 $\dot{x}_1[n]$ 和 $\dot{x}_2[n]$ 严格地或者近似地具有非重叠支撑区时,这类系统特别有用.例如,假设当 $n \geq n_0$ 时 $\dot{x}_1[n] = 0$,且当 $n < n_0$ 时 $\dot{x}_2[n] = 0$,则频率不变线性滤波器

$$\ell[n] = \begin{cases} 1, & n < n_0, \\ 0, & n \geq n_0, \end{cases} \quad (12.26)$$

可以把 $\dot{x}_2[n]$ 从 $\dot{x}[n]$ 中除去,乘下 $\dot{y}[n] = \dot{x}_1[n]$.

在这一点上,我们回想起博格特等人(1963)提出的问题:“总的说来,我们发现我们自己总是用习惯上用于时域的方法进行频域上的运算”.的确,频率不变线性系统完全以时不变系统作用在时间函数上的方式作用在傅里叶变换的对数上.鉴于这个原因,博格特等人把频率不变线性系统称为“倒滤波器”(lifter),并且把“倒频率”(quefrency)这一名词与倒谱的时间独立变量联系在一起.

在本章的其余部分,我们将看到如何应用同态解卷积的许多例子.在某些情况下,有可能把复倒谱的分量完全分开.而在另一些情况下,只能够大致分开.但是,要进一步实现这些想法,我们必须首先仔细研究复倒谱的性质,还必须研究复倒谱的计算方法,也就是系统 $D, [\cdot]$ 的实现.

12.3 复对数的性质

因为复对数在复倒谱的定义中起着关键作用,所以了解它的定义和性质是很重要的.回想一下,如果一个序列之 z 变换的对数有如同式(12.4)的幂级数表示,则它就有一个复倒谱,该式中我们特别说明收敛域包括单位圆.这意味着,傅里叶变换

$$\hat{X}(e^{j\omega}) = \log |X(e^{j\omega})| + j \angle X(e^{j\omega}) \quad (12.27)$$

必须是一个 ω 的连续周期函数,因此 $\log|X(e^{j\omega})|$ 和 $\arg X(e^{j\omega})$ 也必须都是 ω 的连续函数. 如果 $X(z)$ 在单位圆上没有零点,则 $\log|X(e^{j\omega})|$ 的连续性是可以保证的,因为已经假设 $X(e^{j\omega})$ 在单位圆上是解析的. 但是,正如我们在 5.3 节中所讨论的, $\arg X(e^{j\omega})$ 是不明确的,因为对每个 ω 都可以增加 2π 的任意整数倍,并且 $\arg X(e^{j\omega})$ 的连续性取决于对它是如何规定的.

图 12.5 中举例说明了 $\arg X(e^{j\omega})$ 以及也必然涉及到的复对数的唯一性和解析性问题. 在图 12.5(a) 中我们绘出了一条连续相位曲线 $\arg[X(e^{j\omega})]$. 图 12.5(b) 绘出了 $\text{ARG}[X(e^{j\omega})]$, 它对应于图 12.5(a) 中相位曲线的主值,通常是用正切函数子程序得到的. 根据定义

$$-\pi < \text{ARG}[X(e^{j\omega})] \leq \pi \quad (12.28)$$

和

$$\arg[X(e^{j\omega})] = \text{ARG}[X(e^{j\omega})] + 2\pi r(\omega), \quad (12.29)$$

式中 $r(\omega)$ 取合适的整数值,以使由连续曲线得到的相位主值“无卷绕”.

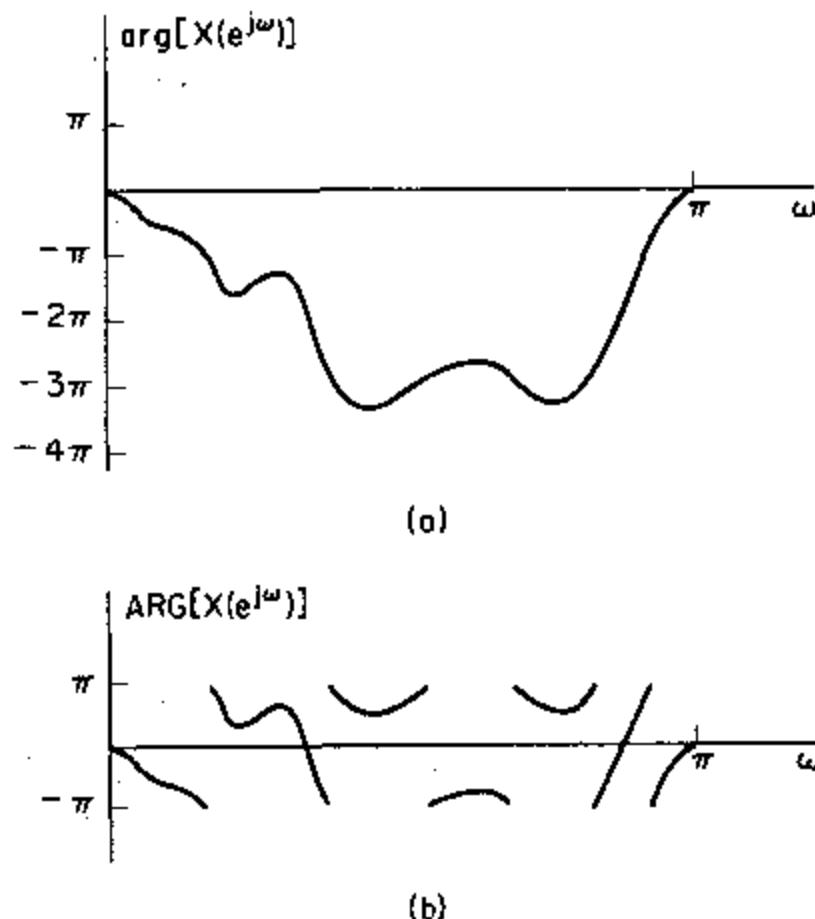


图 12.5 (a) 一个在单位圆上计算的 z 变换之典型相位曲线. (b) (a) 中相位的主值.

因为 $\text{ARG}[X(e^{j\omega})]$ 可以是不连续的,所以一般它不满足连续性的要求. 因此有必要明确地规定式(12.27)中的 $\arg X(e^{j\omega})$ 与连续相位曲线 $\arg[X(e^{j\omega})]$ 一样. 特别应当注意,若 $X(z) = X_1(z)X_2(z)$, 则

$$\arg[X(e^{j\omega})] = \arg[X_1(e^{j\omega})] + \arg[X_2(e^{j\omega})]. \quad (12.30)$$

而对于 $\text{ARG}[X(e^{j\omega})]$, 类似的加法性质却不存在,即

$$\text{ARG}[X(e^{j\omega})] \neq \text{ARG}[X_1(e^{j\omega})] + \text{ARG}[X_2(e^{j\omega})] \quad (12.31)$$

所以,为了使 $\hat{X}(e^{j\omega})$ 是解析的并具有如下性质: 若 $X(e^{j\omega}) = X_1(e^{j\omega})X_2(e^{j\omega})$, 则

$$\hat{X}(e^{j\omega}) = \hat{X}_1(e^{j\omega}) + \hat{X}_2(e^{j\omega}), \quad (12.32)$$

我们必须定义 $\hat{X}(e^{j\omega})$ 为

$$\hat{X}(e^{j\omega}) = \log|X(e^{j\omega})| + j\arg[X(e^{j\omega})]. \quad (12.33)$$

当 $x[n]$ 为实数时, 通常总是规定 $\arg[X(e^{j\omega})]$ 是 ω 的奇周期函数. 由于 $\arg[X(e^{j\omega})]$ 是 ω 的奇函数, 且 $\log|X(e^{j\omega})|$ 是 ω 的偶函数, 所以可以保证复倒谱 $\hat{x}[n]$ 为实数.

以上对由于复对数而出现的问题所概括的方法可通过黎曼平面的概念进行较正式地推导(Churchill and Brown, 1984). 另一种定义傅里叶变换或 z 变换之复对数的方法是, 假设连续复对数是通过对其导数进行积分而得到的. 如果我们假设有一单值可微的复对数, 则

$$\frac{d\hat{X}(z)}{dz} = \frac{d}{dz}\{\log[X(z)]\} = \frac{1}{X(z)} \frac{dX(z)}{dz}. \quad (12.34)$$

若 $x[n]$ 是一个稳定的序列($X(z)$ 的收敛域包括单位圆), 则 $X(e^{j\omega})$ 及其导数 $X'(e^{j\omega})$ 均存在, 并且是 ω 的连续函数. 所以单位圆上的对数微分在单位圆上的值为

$$\hat{X}'(e^{j\omega}) = \frac{X'(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})} = \hat{X}_R(e^{j\omega}) + j\hat{X}_I(e^{j\omega}), \quad (12.35)$$

式中记号一撇“'”表示对 ω 求导数. 由式(12.23), 有

$$\hat{X}'_I(e^{j\omega}) = \frac{d}{d\omega}\{\arg[X(e^{j\omega})]\}, \quad (12.36)$$

而且因为

$$X(e^{j\omega}) = X_R(e^{j\omega}) + jX_I(e^{j\omega}), \quad (12.37)$$

我们可以得到

$$\hat{X}'_I(e^{j\omega}) = \frac{d}{d\omega}\{\arg[X(e^{j\omega})]\} = \frac{X_R(e^{j\omega})X'_I(e^{j\omega}) - X_I(e^{j\omega})X'_R(e^{j\omega})}{X_R^2(e^{j\omega}) + X_I^2(e^{j\omega})}. \quad (12.38)$$

因此, 通过如下积分可求出 $\arg[X(e^{j\omega})]$:

$$\arg[X(e^{j\omega})] = \int_0^\omega \frac{X_R(e^{j\theta})X'_I(e^{j\theta}) - X_I(e^{j\theta})X'_R(e^{j\theta})}{X_R^2(e^{j\theta}) + X_I^2(e^{j\theta})} d\theta. \quad (12.39)$$

注意, 条件

$$\arg[X(e^{j\omega})]_{\omega=0} = 0 \quad (12.40)$$

在式(12.39)中是隐含的, 从而保证 $\arg[X(e^{j\omega})]$ 是一个 ω 的奇函数.

我们之所以仔细研究复对数有两个原因. 第一, 充分地了解复对数会使我们对正规计算的正确性充满信心. 第二, 在复对数定义中表现出的不确定问题是一个重要的计算上的问题. 这些问题将在 12.7 节中详细研究.

12.4 复倒谱的另一种表示

到目前为止我们已经定义复倒谱为 $\hat{X}(z) = \log[X(z)]$ 级数表示式中的系数序列, 并且当由 $\hat{X}(z)$ 和 $\hat{X}(e^{j\omega})$ 来确定 $\hat{x}[n]$ 时, 我们还分别给出了式(12.6)和(12.7)中的积分公式, 其中我们认为 $\arg[X(e^{j\omega})]$ 是连续的(无卷绕的)相位函数 $\arg[X(e^{j\omega})]$. 对数导数可以用来推导出复倒谱的其它关系, 而这些关系并不明显地涉及到复对数. 若假定 $\log[X(z)]$ 是解析的, 则

$$\hat{X}'(z) = \frac{\hat{X}'(z)}{X(z)}, \quad (12.41)$$

式中记号一撇“'”表示对 z 的导数. 由表 4.2 中性质 4 可知, $z\hat{X}'(z)$ 是 $-nx[n]$ 的 z 变换, 即

$$-nx[n] = \frac{1}{2\pi j} \oint_C z \hat{X}'(z) z^{n-1} dz. \quad (12.42)$$

因此, 由式(12.41),

$$-nx[n] = \frac{1}{2\pi j} \oint_C \frac{z\hat{X}'(z)}{X(z)} z^{n-1} dz, \quad (12.43)$$

其中 C 表示在 $\hat{X}(z)$ 收敛域中的一条闭合围线(如单位圆). 对 $\dot{x}[n]$ 求解, 得

$$\dot{x}[n] = \frac{-1}{2\pi j n} \oint_C \frac{z\hat{X}'(z)}{X(z)} z^{n-1} dz, \quad n \neq 0. \quad (12.44)$$

根据定义

$$\dot{x}[0] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \hat{X}(e^{j\omega}) d\omega. \quad (12.45)$$

可以求出 $\dot{x}[0]$ 的值. 因为 $\hat{X}(e^{j\omega})$ 的虚部是 ω 的奇函数, 所以式(12.45)成为

$$\dot{x}[0] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \log |X(e^{j\omega})| d\omega. \quad (12.46)$$

从式(12.41)开始, 我们还可以推导出 $x[n]$ 和 $\dot{x}[n]$ 所满足的差分方程. 将式(12.41)变换形式并且乘以 z , 得到

$$zX'(z) = z\hat{X}'(z) \cdot X(z). \quad (12.47)$$

上式的反 z 变换为

$$nx[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} kx[k]x[n-k]. \quad (12.48)$$

等式两边分别除以 n , 得

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\frac{k}{n} \right) \dot{x}[k]x[n-k] \quad n \neq 0. \quad (12.49)$$

因此, 信号及其复倒谱满足非线性差分方程. (等效地, 特征系统 $D, [\cdot]$ 的输入和输出也满足这个非线性差分方程.) 在一定的条件下, $\dot{x}[n]$ 和 $x[n]$ 之间的这个隐式可以变换形式成为在计算中能使用的递推公式. 这种类型的公式将在 12.6 节中讨论.

12.5 指数序列的复倒谱

如果序列 $x[n]$ 由复指数序列之和组成, 则它的 z 变换 $X(z)$ 是一个 z 的有理函数. 这样的序列对于分析来说既有用又合理. 在这一节中我们将研究稳定序列 $x[n]$ 的复倒谱, 该序列的 z 变换有如下形式:

$$X(z) = \frac{Az^r \prod_{k=1}^{M_r} (1-a_k z^{-1}) \prod_{k=1}^{M_o} (1-b_k z)}{\prod_{k=1}^{N_r} (1-c_k z^{-1}) \prod_{k=1}^{N_o} (1-d_k z)}, \quad (12.50)$$

式中 $|a_k|, |b_k|, |c_k|$ 和 $|d_k|$ 均小于 1, 因此因式 $(1-a_k z^{-1})$ 和 $(1-c_k z^{-1})$ 对应于在单位圆内的 M_r 个零点和 N_r 个极点, 而因式 $(1-b_k z)$ 和 $(1-d_k z)$ 对应于单位圆外的 M_o 个零点和

N_r 个极点。这样的 z 变换是稳定的指数序列之和组成的序列所特有的。在没有极点的特殊情况下（即式(12.50)的分母为 1），相应的序列 $x[n]$ 是一个长度为 $(M_o + M_i + 1)$ 的有限长序列。

如果计算出 $\log[X(z)]$ ，使得式(12.15)和(12.16)成立，则式(12.50)中的乘积项可以变成对数项之和：

$$\begin{aligned} \hat{X}(z) = & \log(A) + \log(z^r) + \sum_{k=1}^{M_i} \log(1-a_k z^{-1}) + \sum_{k=1}^{M_o} \log(1-b_k z) \\ & - \sum_{k=1}^{N_i} \log(1-c_k z^{-1}) - \sum_{k=1}^{N_o} \log(1-d_k z). \end{aligned} \quad (12.51)$$

对于实序列， A 为实数。若 A 是正数，则第一项 $\log(A)$ 一般只对 $\hat{x}[0]$ 有贡献。具体讲（见习题 12.15），有

$$\hat{x}[0] = \log|A|. \quad (12.52)$$

若 A 是负数，则要确定 $\log|A|$ 项对复倒谱的贡献是比较困难的。 z^r 项只对应于序列 $x[n]$ 的延迟或超前。若 $r=0$ ，则这一项就从式(12.51)中消失了。但是若 $r \neq 0$ ，则无卷绕相位函数 $\arg[X(e^{j\omega})]$ 将包含一个斜率为 r 的线性项。所以，由于 $\arg[X(e^{j\omega})]$ 被定义为 ω 的奇周期函数并且对于 $|\omega| < \pi$ 是连续的，这个线性相位项将迫使 $\arg[X(e^{j\omega})]$ 在 $\omega = \pm\pi$ 处不连续，并且 $X(z)$ 在单位圆上将不再是解析的。虽然 A 为负数且（或） $r \neq 0$ 的情况在形式上是可以容许的，但是这样做似乎没有什么实际上的优点，因为若令形式如式(12.50)的两个变换相乘，我们就无法确定 A 或 r 每个分量贡献究竟有多大。这与在通常的线性滤波中两个均有直流电平的信号相加的情况相类似。因此，在实际中这个问题是可以避免的，只要确定出 A 的代数符号和 r 的值，然后改变输入使其 z 变换具有如下形式：

$$X(z) = \frac{|A| \prod_{k=1}^{M_i} (1-a_k z^{-1}) \prod_{k=1}^{M_o} (1-b_k z)}{\prod_{k=1}^{N_i} (1-c_k z^{-1}) \prod_{k=1}^{N_o} (1-d_k z)}. \quad (12.53)$$

类似地，式(12.51)成为

$$\begin{aligned} \hat{X}(z) = & \log|A| + \sum_{k=1}^{M_i} \log(1-a_k z^{-1}) + \sum_{k=1}^{M_o} \log(1-b_k z) \\ & - \sum_{k=1}^{N_i} \log(1-c_k z^{-1}) - \sum_{k=1}^{N_o} \log(1-d_k z). \end{aligned} \quad (12.54)$$

除我们已经讨论过的 $\log|A|$ 项外，式(12.54)中的其它所有各项都有 $\log(1-\alpha z^{-1})$ 和 $\log(1-\beta z)$ 的形式。记住，这些因式代表在收敛域（包括单位圆）内的 z 变换，我们可以得出它们的幕级数展开式

$$\log(1-\alpha z^{-1}) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n} z^{-n}, \quad |z| > |\alpha|, \quad (12.55)$$

$$\log(1-\beta z) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta^n}{n} z^n, \quad |z| < |\beta^{-1}|. \quad (12.56)$$

利用以上两式可以看出，对于具有如同式(12.53)之 z 变换的信号来说， $\hat{x}[n]$ 的一般形式为

$$\hat{x}[n] = \begin{cases} \log |A|, & n=0, \\ -\sum_{k=1}^{M_i} \frac{a_k^n}{n} + \sum_{k=1}^{N_i} \frac{c_k^n}{n}, & n>0, \\ \sum_{k=1}^{M_o} \frac{b_k^{-n}}{n} - \sum_{k=1}^{N_o} \frac{d_k^{-n}}{n}, & n<0. \end{cases} \quad (12.57)$$

应当注意,对于有限长序列的特殊情况,式(12.57b)和(12.57c)中的第二项将消失.式(12.57)说明复倒谱具有如下一般性质:

性质 1: 复倒谱的下降速度至少像 $1/|n|$ 一样快. 具体讲,

$$|\hat{x}[n]| < C \left| \frac{\alpha^n}{n} \right|, \quad -\infty < n < \infty,$$

式中 C 为常数, α 等于 $|a_k|$, $|b_k|$, $|c_k|$ 和 $|d_k|$ 中的最大值. 这一性质也可以由式(12.44)导出.

性质 2: 即使 $x[n]$ 为有限长, $\hat{x}[n]$ 也是无限长的.

性质 3: 若 $x[n]$ 为实数, 则 $\hat{x}[n]$ 也为实数.

性质 1 和 2 可以直接由式(12.57)得出. 以前我们曾经提到过性质 3, 它的根据是: 当 $x[n]$ 为实数时, $\log|X(e^{j\omega})|$ 是偶函数, 而 $\arg[X(e^{j\omega})]$ 是奇函数, 因此

$$\hat{X}(e^{j\omega}) = \log|X(e^{j\omega})| + j\arg[X(e^{j\omega})]$$

的反变换为实数. 为了根据本节的内容来证明性质 3, 我们注意到, 若 $x[n]$ 是实数, 则极点和零点是复共轭对. 因此, 对于式(12.57)中每个形式为 α^n/n 的复数项必定存在一个复共轭项 $(\alpha^*)^n/n$, 所以它们的和将为实数.

12.6 最小相位和最大相位序列

正如在第五章中讨论过的, 最小相位序列是一个因果和稳定的实序列, 它的极点和零点均在单位圆内. 注意, $\log[X(z)]$ 在 $X(z)$ 的极点和零点处均有奇异点. 因为我们要求 $\log[X(z)]$ 的收敛域包括单位圆以使 $\hat{x}[n]$ 为稳定的, 还因为因果序列有一个形式为 $r_R < |z|$ 的收敛域, 所以可以得出: 若当 $n < 0$ 时 $\hat{x}[n] = 0$, 则 $\log[X(z)]$ 在单位圆上或单位圆外可以没有奇异点. 反之, 若 $\hat{X}(z) = \log[X(z)]$ 的全部奇异点均在单位圆内, 则对于 $n < 0$ 有 $\hat{x}[n] = 0$. 因为 $\hat{X}(z)$ 的奇异点是 $X(z)$ 的极点和零点, 所以当且仅当 $X(z)$ 的极点和零点在单位圆内时, $x[n]$ 的复倒谱是因果的(对于 $n < 0$, $\hat{x}[n] = 0$). 换句话说, 当且仅当 $x[n]$ 的复倒谱是因果的, $x[n]$ 才是一个最小相位序列.

对于指数序列或有限长序列的情况, 通过研究式(12.57)就很容易看出这一点. 显然, 若所有的 b_k 和 d_k 为零, 即没有一个极点或零点在单位圆外或单位圆上, 则(12.57c)中的各项均为零. 于是, 复倒谱的另一个性质是

性质 4: 当且仅当 $x[n]$ 为最小相位, 即 $X(z)$ 的所有极点和零点均在单位圆内时, 对于 $n < 0$ 复倒谱 $\hat{x}[n] = 0$.

所以, 复倒谱的因果性等效于最小相位滞后、最小群延迟以及最小能量延迟这些代表最小相位序列特性的性质.

最大相位序列是其所有的极点和零点均在单位圆外的稳定序列. 因此, 最大相位序列

是左边序列，并且通过类似的论证还可以得出，最大相位序列的复倒谱也是左边序列。于是，复倒谱的又一个性质是

性质 5：当且仅当 $x[n]$ 为最大相位，即 $X(z)$ 的所有极点和零点均在单位圆外时，对于 $n > 0$ 复倒谱 $\hat{x}[n] = 0$ 。

对于指数组列或有限长序列，很容易证明复倒谱的这个性质，只要注意到，若所有的 c_k 和 a_k 均为零（即在单位圆外没有极点或零点），则式(12.57b)表明对于 $n > 0$ 有 $\hat{x}[n] = 0$ 。

12.6.1 希尔伯特变换关系

在第十章中我们曾表明，一个序列的因果性（或另一方面，反因果性）在其傅里叶变换上加了很强的限制。如像我们在 10.3 节所讨论的，当把因果性用于倒谱及其傅里叶变换时，因果性意味着一个最小相位信号之傅里叶变换的对数幅度和相位满足希尔伯特变换关系。具体来说，回想一下，任意实因果序列的傅里叶变换几乎完全由傅里叶变换的实部或虚部来决定。对于实序列的复倒谱， $\log |X(e^{j\omega})|$ 是 $\hat{X}(e^{j\omega})$ 的实部，而 $\arg[X(e^{j\omega})]$ 是其虚部。这样，如果 $\hat{x}[n]$ 是因果的，即 $x[n]$ 是最小相位的，则我们可以得到 $\log |X(e^{j\omega})|$ 与 $\arg[X(e^{j\omega})]$ 之间的希尔伯特变换关系。的确，可将式(10.15)和(10.16)直接用于 $\hat{X}(e^{j\omega})$ 从而得出式(10.58)和(10.59)。但是，重温下述 10.1 节中方法的推导步骤，并使用本章的术语是很有启发作用的。

首先注意到，倒谱 $c_x[n]$ 是 $\log |X(e^{j\omega})|$ 的傅里叶反变换，即

$$c_x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \log |X(e^{j\omega})| e^{j\omega n} d\omega. \quad (12.58)$$

而且由式(12.9)知，对于实序列，按式(12.58)定义的倒谱是复倒谱的偶数部分，即

$$c_x[n] = \frac{\hat{x}[n] + \hat{x}[-n]}{2}. \quad (12.59)$$

所以，若 $\hat{x}[n]$ 是因果的，则 $\hat{x}[n]$ 可以通过频率不变线性滤波从 $c_x[n]$ 来恢复，即

$$\hat{x}[n] = c_x[n] \ell_{\min}[n], \quad (12.60a)$$

式中

$$\ell_{\min}[n] = 2u[n] - \delta[n]. \quad (12.60b)$$

从式(12.60)的频域表示可以得出所要求的希尔伯特变换关系。具体讲，经过与 10.1 节相同的分析后得出方程

$$\arg[X(e^{j\omega})] = \frac{1}{2\pi} \mathcal{P} \int_{-\pi}^{\pi} \log |X(e^{j\theta})| \cot\left(\frac{\omega - \theta}{2}\right) d\theta, \quad (12.61a)$$

$$\log |X(e^{j\omega})| = \hat{x}[0] + \frac{1}{2\pi} \mathcal{P} \int_{-\pi}^{\pi} \arg[X(e^{j\theta})] \cot\left(\frac{\omega - \theta}{2}\right) d\theta. \quad (12.61b)$$

上式当然与式(10.58)和(10.59a)相同。注意，若没有 $\hat{x}[0]$ 的先验知识，则只能由 $\arg[X(e^{j\omega})]$ 求出相差某一常数倍的 $|X(e^{j\omega})|$ 。

式(12.60)指出，若已知 $x[n]$ 为最小相位，如何只从倒谱，也就是从对数幅度来计算复倒谱。图 12.6 绘出在这些条件下一个计算复倒谱的系统方框图。

重复最小相位序列的希尔伯特变换关系的推导，并作少量修改，就可以得到最大相位序列之傅里叶变换的对数幅度和相位间的一对希尔伯特变换关系。在这种情况下，复倒谱与倒谱的关系为

$$\hat{x}[n] = c_x[n] \ell_{\max}[n], \quad (12.62a)$$

式中

$$\ell_{\max}[n] = 2u[-n] - \delta[n]. \quad (12.62b)$$

相应的希尔伯特变换关系的推导可以用非常相似的方式进行，其细节概括在习题 12.18 中。

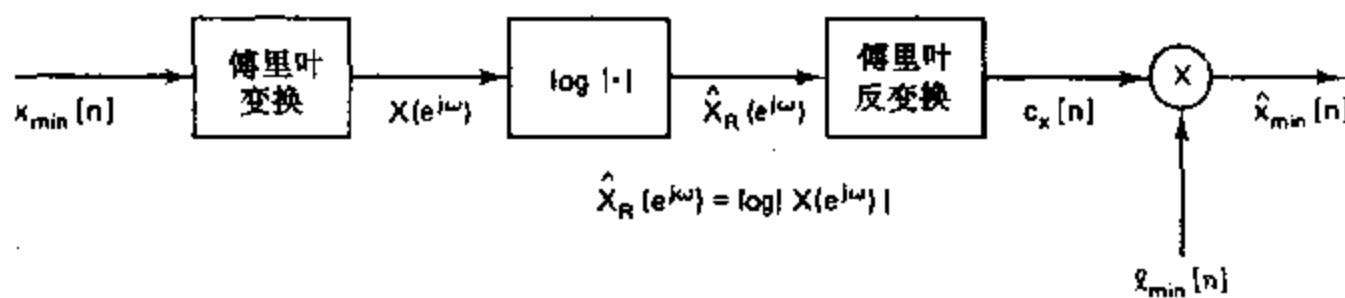


图 12.6 对于最小相位输入, 系统 $D.[\cdot]$ 的实现.

12.6.2 用同态滤波进行最小相位/全通分解

如果 $x[n]$ 是混合相位, 则图 12.6 所示输入为 $x[n]$ 且由式(12.60b)给出 $\ell_{\min}[n]$ 之系统可产生最小相位序列的倒谱, 该序列具有与 $x[n]$ 相同的傅里叶变换幅度。若使用如式(12.62b)给出的 $\ell_{\max}[n]$, 则系统输出将是最大相位序列的倒谱, 该序列具有与 $x[n]$ 相同的傅里叶变换幅度。

正如在 5.6 节中所讨论的, 任何非最小相位因果序列均可表示为

$$x[n] = x_{\min}[n] * x_{ap}[n], \quad (12.63)$$

其中 $x_{\min}[n]$ 是一个最小相位序列, 使得

$$|X(e^{j\omega})| = |X_{\min}(e^{j\omega})|, \quad (12.64)$$

而 $x_{ap}[n]$ 是一个全通序列, 使得

$$|X_{ap}(e^{j\omega})| = 1.$$

通过如图 12.6 的处理, 我们可以得到复倒谱 $\hat{x}_{\min}[n]$ 。复倒谱 $\hat{x}_{ap}[n]$ 可以通过从 $\hat{x}[n]$ 中减去 $\hat{x}_{\min}[n]$ 的方法由 $\hat{x}[n]$ 求得, 即

$$\hat{x}_{ap}[n] = \hat{x}[n] - \hat{x}_{\min}[n].$$

为了求出 $x_{\min}[n]$ 和 $x_{ap}[n]$, 我们对 $\hat{x}_{\min}[n]$ 和 $\hat{x}_{ap}[n]$ 进行 D^{-1} 变换。

虽然以上所提出的求取 $x_{\min}[n]$ 和 $x_{ap}[n]$ 的方法在理论上是正确的, 但是在其实现中仍需要明确求出复倒谱。如果我们只对求出 $x_{\min}[n]$ 和 $x_{ap}[n]$ 感兴趣, 则可以避免复倒谱的计算, 并且不需要与之相联系的相位无卷绕。基本的思路体现在图 12.7 的方框图中。这个系统以下式为基础:

$$X_{ap}(e^{j\omega}) = \frac{X(e^{j\omega})}{X_{\min}(e^{j\omega})}. \quad (12.65a)$$

因此, $X_{ap}(e^{j\omega})$ 的幅度是

$$|X_{ap}(e^{j\omega})| = \frac{|X(e^{j\omega})|}{|X_{\min}(e^{j\omega})|} = 1 \quad (12.65b)$$

并且

$$\text{d}X_{ap}(e^{j\omega}) = \text{d}X(e^{j\omega}) - \text{d}X_{min}(e^{j\omega}). \quad (12.65c)$$

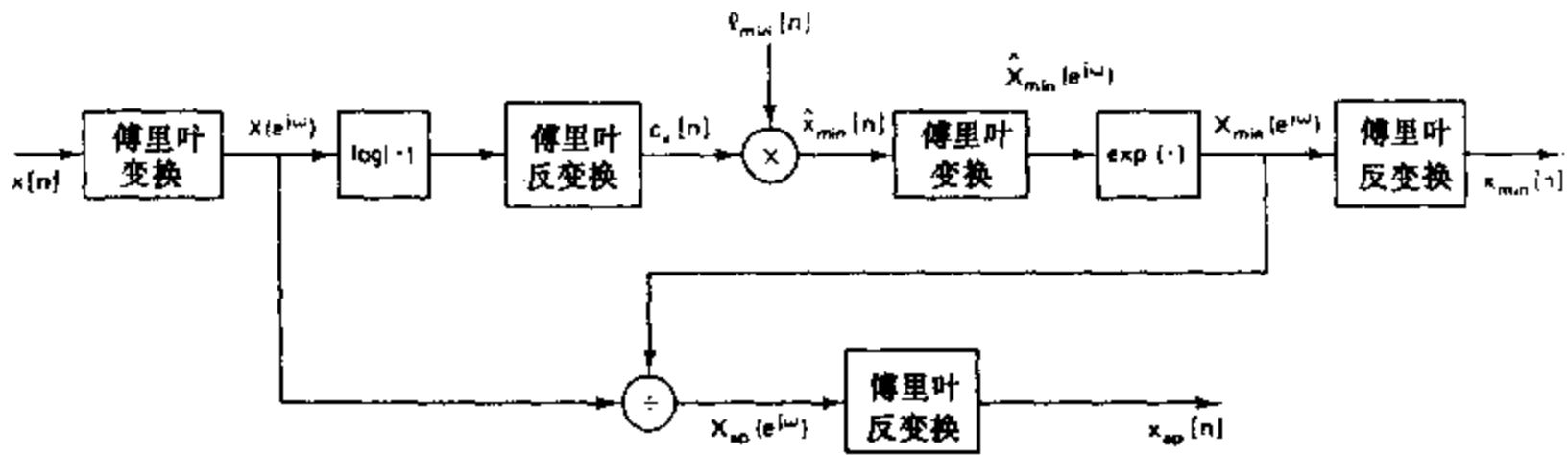


图 12.7 使用同态滤波把一个序列分成最小相位分量和全通分量.

因为 $x_{ap}[n]$ 是作为 $e^{j\text{d}X_{ap}(e^{j\omega})}$ ($|X_{ap}(e^{j\omega})| = 1$) 的傅里叶反变换而求出的, 所以只需要知道或者标明在 2π 的整数倍以内, 式(12.65c)中每一个相位函数的值. 虽然作为图 12.7 中所指明方法的一个必然结果, $\text{d}X_{min}(e^{j\omega})$ 将是无卷绕的相位函数, 但是 $\text{d}X(e^{j\omega})$ 可以 2π 为模来计算.

12.6.3 D. 的递推实现

对于最小相位序列, 可以将差分方程(12.49)重新安排而得到 $\dot{x}[n]$ 的递推公式. 因为对于最小相位序列, 当 $n < 0$ 时同时有 $\dot{x}[n] = 0$ 和 $x[n] = 0$, 所以式(12.49)为

$$\begin{aligned} x[n] &= \sum_{k=0}^n \left(\frac{k}{n} \right) \dot{x}[k] x[n-k], \quad n > 0, \\ &= \dot{x}[n] x[0] + \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{k}{n} \right) \dot{x}[k] x[n-k]. \end{aligned} \quad (12.66)$$

求解 $\dot{x}[n]$ 得到递推公式

$$\dot{x}[n] = \begin{cases} 0, & n < 0, \\ \frac{x[n]}{x[0]} - \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{k}{n} \right) \dot{x}[k] \frac{x[n-k]}{x[0]}, & n > 0. \end{cases} \quad (12.67)$$

可以证明 $\dot{x}[0]$ 的值为(见习题 12.15)

$$\dot{x}[0] = \log(A) = \log(x[0]). \quad (12.68)$$

因此, 对于最小相位信号, 式(12.67)和(12.68)构成一个系统 $D_*[\cdot]$ 的表示. 由式(12.67)还可以得出, 系统 $D_*[\cdot]$ 对于最小相位输入表现为一个因果系统, 即在 n_0 时刻的输出只取决于 $n \leq n_0$ 时的输入, 其中 n_0 是任意的(见习题 12.21). 类似地, 式(12.66)和(12.68)代表逆特征系统 $D_*^{-1}[\cdot]$.

对于最大相位信号, 当 $n > 0$ 时 $\dot{x}[n] = 0$, 且 $x[n] = 0$. 因此在这种情况下, 式(12.49)成为

$$x[n] = \sum_{k=n}^0 \left(\frac{k}{n} \right) \dot{x}[k] x[n-k], \quad n < 0,$$

$$=\dot{x}[n]x[0]+\sum_{k=n+1}^0\left(\frac{k}{n}\right)\dot{x}[k]x[n-k]. \quad (12.69)$$

求解 $\dot{x}[n]$, 我们有

$$\dot{x}[n]=\begin{cases} \frac{x[n]}{x[0]}-\sum_{k=n+1}^0\left(\frac{k}{n}\right)x[k]\frac{x[n-k]}{x[0]}, & n<0, \\ \log(x[0]), & n=0, \\ 0, & n>0. \end{cases} \quad (12.70)$$

式(12.70)和(12.69)作为最大相位输入时特征系统及其逆特征系统的表示.

12.6.4 用同态滤波进行最小相位/最大相位分解

通常, 如果一个信号的 z 变换没有在单位圆上的极点或零点, 则它可以表示为

$$X(z)=X_{mn}(z)\cdot X_{mx}(z), \quad (12.71)$$

式中 $X_{mn}(z)$ 为最小相位, 而 $X_{mx}(z)$ 为最大相位. 等效地, $x[n]$ 可以表示为

$$x[n]=x_{mn}[n]*x_{mx}[n], \quad (12.72)$$

并且所对应的复倒谱是

$$\dot{x}[n]=\dot{x}_{mn}[n]+\dot{x}_{mx}[n]. \quad (12.73)$$

应当注意, 式(12.72)中 $x[n]$ 的表示显然不同于式(12.63)中的表示. 特别是两个最小相位序列是不同的, 即 $x_{mn}[n]\neq x_{mn}[n]$. 从上面的性质可以看出, $x_{mn}[n]$ 和 $x_{mx}[n]$ 能够通过同态滤波解卷积从 $x[n]$ 中提取出来. 具体讲, 我们规定 $\dot{x}_{mn}[n]$ 为

$$\dot{x}_{mn}[n]=\ell_{mn}[n]\dot{x}[n], \quad (12.74a)$$

式中

$$\ell_{mn}[n]=u[n]. \quad (12.74b)$$

类似地, 我们规定 $\dot{x}_{mx}[n]$ 为

$$\dot{x}_{mx}[n]=\ell_{mx}[n]\dot{x}[n], \quad (12.75a)$$

其中

$$\ell_{mx}[n]=u[-n-1]. \quad (12.75b)$$

显然, $x_{mn}[n]$ 和 $x_{mx}[n]$ 可以作为逆特征系统 $D_{*}^{-1}[n]$ 的输出分别由 $\dot{x}_{mn}[n]$ 和 $\dot{x}_{mx}[n]$ 求出. 式(12.72)的分解所需要的运算示于图 12.8 中. 这种方法已由史密斯和巴恩韦尔(Smith and Barnwell, 1986)用于滤波器组的设计中, 它把一个序列因式分解为最小相位部分和最大相位部分. 注意, 我们已任意地把 $\dot{x}[0]$ 所有的值赋给 $\dot{x}_{mn}[n]$, 同时令 $\dot{x}_{mx}[0]=0$. 很清楚, 因为总的要求是 $\dot{x}_{mn}[0]+\dot{x}_{mx}[0]=\dot{x}[0]$, 所以也可以有其它的组合.

对于有限长序列, 12.6.3 节的递推公式可与表示式(12.71)结合起来得到一个很有意义的结果. 具体讲, 尽管有限长序列的复倒谱可以无限延伸, 但是我们可以证明, 对于一个长度为 N 的输入序列, 只需要 N 个 $\dot{x}[n]$ 的样本来确定 $x[n]$. 为了看清这一点, 考虑式(12.71)的 z 变换, 其中

$$X_{mn}(z)=A\prod_{k=1}^{M_1}(1-a_kz^{-1}), \quad (12.76a)$$

$$X_{mx}(z)=\prod_{k=1}^{M_2}(1-b_kz), \quad (12.76b)$$

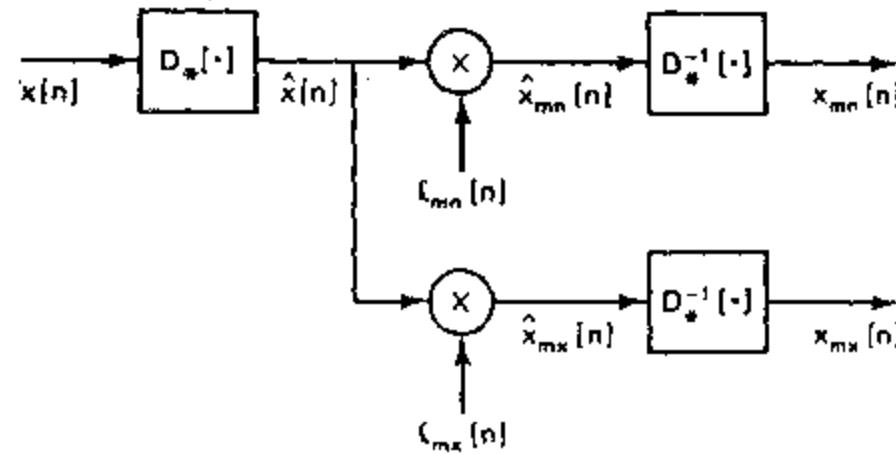


图 12.8 用同态滤波将一个序列分解成最小相位部分和最大相位部分.

并取 $|a_k| < 1$ 和 $|b_k| < 1$. 因此, $x[n]$ 具有式(12.72)的形式, 其中在区间 $0 \leq n \leq M_i$ 以外 $x_{mn}[n] = 0$, 而在区间 $-M_o \leq n \leq 0$ 以外 $x_{mx}[n] = 0$. 这样, 在区间 $-M_o \leq n \leq M_i$ 上序列 $x[n]$ 是非零的. 利用上面的递推公式, 可以写出

$$x_{mn}[n] = \begin{cases} 0, & n < 0, \\ e^{x[0]}, & n = 0, \\ \dot{x}[n]\hat{x}_{mn}[0] + \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right) \dot{x}[k]x_{mn}[n-k], & n > 0, \end{cases} \quad (12.77)$$

和

$$x_{mx}[n] = \begin{cases} \dot{x}[n] + \sum_{k=n+1}^0 \left(\frac{k}{n}\right) \dot{x}[k]x_{mx}[n-k], & n < 0, \\ 1, & n = 0, \\ 0, & n > 0. \end{cases} \quad (12.78)$$

显然, 我们需要 M_i+1 个 $\dot{x}[n]$ 的值来计算 $x_{mn}[n]$, 以及 M_o 个 $\dot{x}[n]$ 的值来计算 $x_{mx}[n]$. 所以只需要无限长序列 $\dot{x}[n]$ 的 M_i+M_o+1 个值就可以完全恢复有限长序列 $x[n]$.

12.7 特征系统 $D_*(\cdot)$ 的实现

到目前为止, 我们有关复倒谱的讨论已涉及到定义、性质和其它的理论问题. 而复倒谱的应用还需要我们提出准确而有效的计算方法. 在前面的全部讨论中均隐含着输入信号傅里叶变换的复对数满足唯一性和连续性的假设. 如果用以上所得出的数学表示作为计算复倒谱的基础, 或等效地作为实现系统 $D_*(\cdot)$ 的基础, 那么我们还必须处理计算傅里叶变换和复对数的问题.

12.7.1 用复对数实现

借助于傅里叶变换, 系统 $D_*(\cdot)$ 可以用下列方程表示:

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n}, \quad (12.79a)$$

$$\hat{X}(e^{j\omega}) = \log[X(e^{j\omega})], \quad (12.79b)$$

$$\dot{x}[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \hat{X}(e^{j\omega})e^{jn\omega} d\omega. \quad (12.79c)$$

这些方程对应于图 12.4(a)所示的三个系统的级联，并取 $z = e^{j\omega}$. 正如当时所注意到的，三个系统中的每一个都是具有适当输入和输出运算的同态系统.

因为数字计算机只能完成有限的计算，所以仅限于有限输入序列，并且也只能在有限个点上计算出傅里叶变换. 这也就是说，我们必须使用离散傅里叶变换而不是用傅里叶变换. 因此，可用如下可实现的算式来代替式(12.79):

$$X[k] = X(e^{j\omega})|_{\omega=(2\pi/N)k} = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j(2\pi/N)kn} \quad (12.80a)$$

$$\hat{X}[k] = \log[X(e^{j\omega})]|_{\omega=(2\pi/N)k} = \log(X[k]) \quad (12.80b)$$

$$\hat{x}_p[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \hat{X}[k] e^{j(2\pi/N)kn} \quad (12.80c)$$

在图 12.9(a)中绘出了这些运算，而实现逆系统所对应的运算绘于图 12.9(b)中.

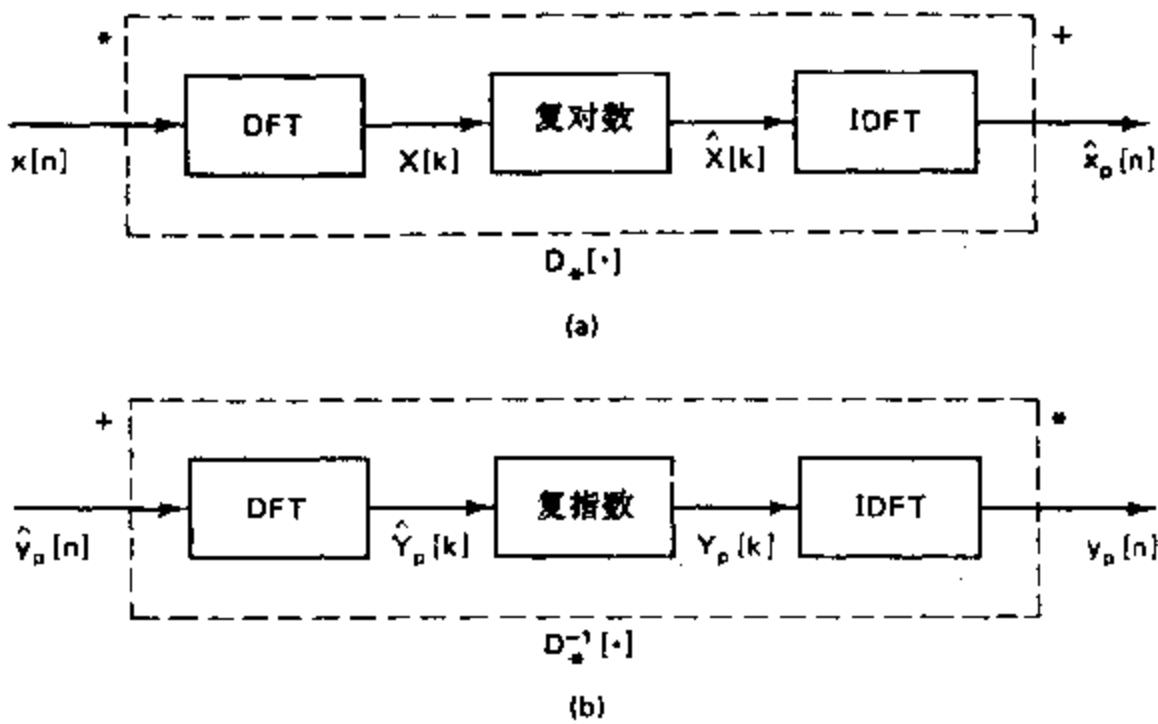


图 12.9 利用 DFT 的近似实现方框图. (a) 对于卷积的特征系统. (b) (a)的逆系统.

式(12.80b)中假设傅里叶变换的采样可与连续复对数的计算互换，即我们假设， $X[k]$ 可以用 FFT 算法计算，然后由 $X[k]$ 可以算出 $\log[X(e^{j\omega})]$ 的样本. 根据这个假设，由第八章中推导出的 z 变换采样定理可以得出， $\hat{x}_p[n]$ 与所要求的 $\hat{x}[n]$ 之间的关系为

$$\hat{x}_p[n] = \sum_{r=-\infty}^{\infty} \hat{x}[n+rN]. \quad (12.81)$$

因为复倒谱通常为无限长序列，所以 $\hat{x}_p[n]$ 就是 $\hat{x}[n]$ 经时间混叠后的形式. 但是在 12.5 节的性质 1 中我们注意到， $\hat{x}[n]$ 的衰减比指数序列快得多，因此可以预计到，随着 N 的增加，近似程度会越来越好. 通过给输入序列补零的方法一般可以增加傅里叶变换之复对数的采样率，这样，在复倒谱的计算中就不会出现严重的时间混叠.

在列出式(12.80)和(12.81)时我们已经假设 $\hat{X}[k]$ 代表连续复对数的采样. 因此我们应当考虑从 DFT(即 $X[k]$)来计算 $\arg[X(e^{j\omega})]$ 样本的一些方法. 一种简单的算法是根据以 2π 为模时对相位的计算，即

$$-\pi < \text{ARG}(X[k]) \leq \pi, \quad (12.82)$$

上式可以用大多数计算机中都具有的标准反正切子程序求出。这个采样了的相位主值是“无卷绕的”，以便得到连续相位曲线的样本，而如果存在线性相位项，则在计算 $\hat{x}_p[n]$ 之前就应除去。例如，考虑一个有限长因果输入序列，它的傅里叶变换是

$$\begin{aligned} X(e^{j\omega}) &= \sum_{n=0}^M x[n]e^{-j\omega n} \\ &= Ae^{-j\omega M_0} \prod_{k=1}^{M_1} (1-a_k e^{-j\omega}) \prod_{k=1}^{M_2} (1-b_k e^{j\omega}), \end{aligned} \quad (12.83)$$

式中 $|a_k|$ 和 $|b_k|$ 小于 1, $M = M_0 + M_1$, A 为正数且 $M_0 = 3$. 图 12.10(a) 中给出了这种形式的一个序列的连续相位曲线。黑点表示在 $\omega = (2\pi/N)k$ 处(设 N 为偶数)的样本值。图 12.10(b) 绘出了主值及其由输入序列的 DFT 计算出的样本值。有一种计算无卷绕主值相位的方法是根据如下关系式：

$$\arg(X[k]) = \text{ARG}(X[k]) + 2\pi r[k], \quad (12.84)$$

其中 $r[k]$ 表示整数，由它决定在频率 $\omega_k = 2\pi k/N$ 处给主值加上适当倍数的 2π 值。图 12.10(c) 表示从图 12.10(b) 得到图 12.10(a) 所要求的 $2\pi r[k]$ 值。这个例子提出了由 $\text{ARG}(X[k])$ 计算 $r[k]$ 的如下算法，起始令 $r[0] = 0$ ：

1. 若 $\text{ARG}(X[k]) - \text{ARG}(X[k-1]) > 2\pi - \epsilon_1$, 则 $r[k] = r[k-1] - 1$;
2. 若 $\text{ARG}(X[k]) - \text{ARG}(X[k-1]) < -(2\pi - \epsilon_1)$, 则 $r[k] = r[k-1] + 1$;
3. 否则, $r[k] = r[k-1]$;
4. 当 $1 \leq k \leq N/2$ 时, 重复步骤 1—3.

$r[k]$ 确定后，可以用式(12.48)计算当 $0 \leq k \leq N/2$ 时的 $\arg(X[k])$ 。利用对称性就可以得出当 $N/2 < k \leq N-1$ 时 $\arg(X[k])$ 的值。

如果 $\text{ARG}(X[k])$ 的样本靠得足够近以致可以检测间断点，则上述算法效果良好。参数 ϵ_1 是考虑到主值相位邻近样本间差值的大小总是小于 2π 时所设的一个容限。若 ϵ_1 太大，则会给出并不存在的间断点。若 ϵ_1 太小，则该算法将会丢失落在迅速变化的无卷绕相位函数 $\arg[X(e^{j\omega})]$ 的两个相邻样本间的间断点。显然，通过增加 N 来增加 DFT 的采样率有助于改善正确检测间断点，从而可正确计算 $\arg(X[k])$ 。如果 $\arg[X(e^{j\omega})]$ 变化迅速，则可以预计， $\hat{x}[n]$ 衰减没有当 $\arg[X(e^{j\omega})]$ 变化较慢时来得那样快。因此，对于迅速变化的相位， $\hat{x}[n]$ 的混叠是一个较大的问题。增大 N 的值就减小了复倒谱的混叠，而且也就增加了能够使 $X[k]$ 的相位无卷绕的可能。

在许多实际情况下，由于不可能或做不到取足够大的 N 值，所以我们刚才提出的简单算法会失效。往往对于一个给定 N 值的混叠是可以接受的，但是不能可靠地检测出主值间断点。特里博利特(Tribolet, 1977)提出了一种修正算法，该算法同时利用相位的主值和相位的导数来计算无卷绕的相位。同上面一样，式(12.84)给出在频率 $\omega_k = (2\pi/N)k$ 处一组容许的值，并且力图确定 $r[k]$ 。假设我们已知在所有 k 值处相位的导数

$$\arg(X[k]) = \frac{d}{d\omega} \arg[X(e^{j\omega})] \Big|_{\omega=2\pi k/N}.$$

(计算这些相位导数的样本的方法将在 12.7.2 节中推导。)为了计算 $\arg(X[k])$ ，现在进一步假定 $\arg(X[k-1])$ 是已知的。这样， $\arg(X[k])$ 的估计 $\widetilde{\arg}(X[k])$ 定义为

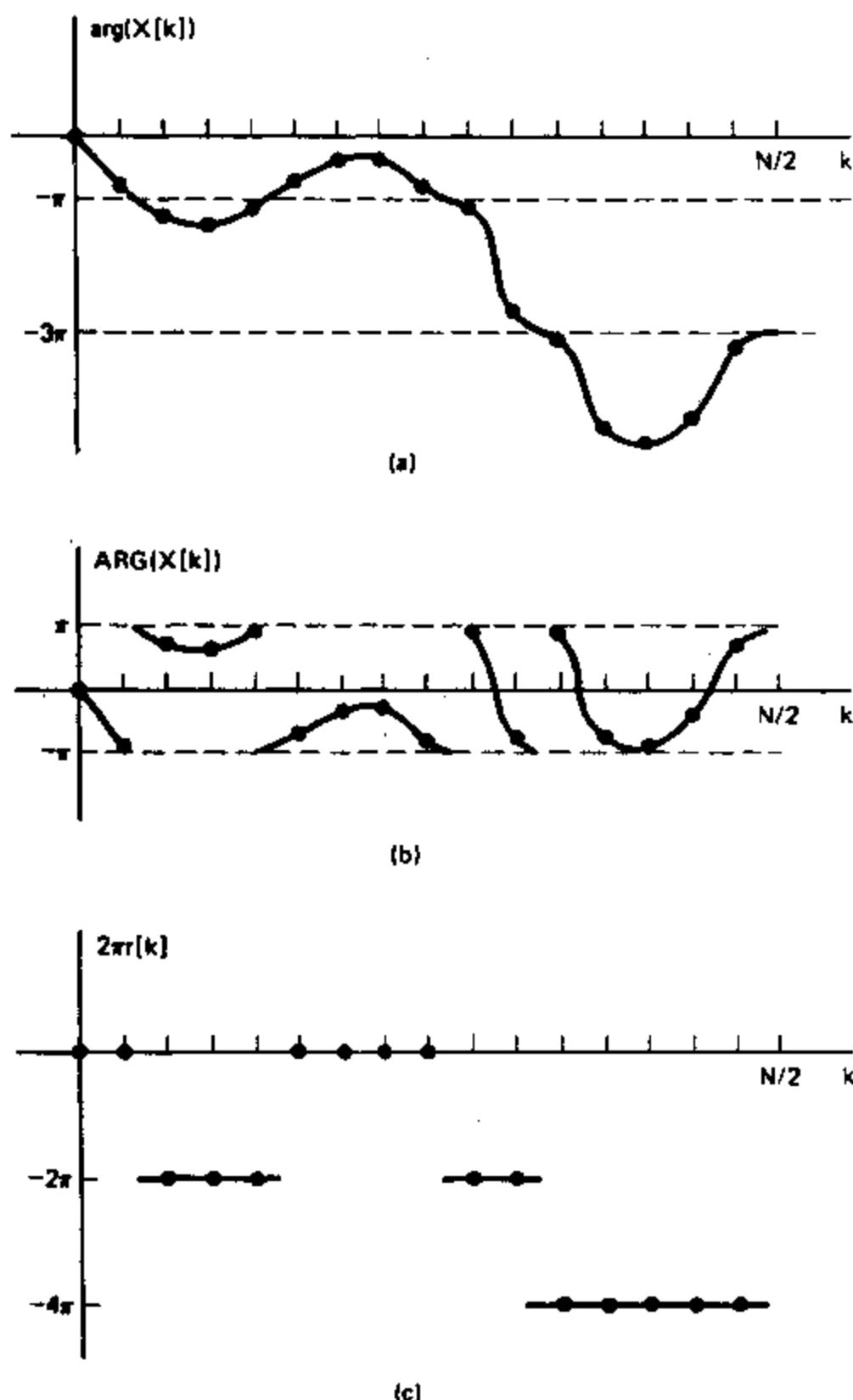


图 12.10 (a) $\arg[X(e^{j\omega})]$ 的样本. (b) (a) 部分的主值. (c) 由 ARG 得出 \arg 所需的校正序列.

$$\tilde{\arg}(X[k]) = \arg(X[k-1]) + \frac{\Delta\omega}{2} \{ \arg'(X[k]) + \arg'(X[k-1]) \}. \quad (12.85)$$

把梯形数值积分用于计算相位导数的样本就可得到式(12.85). 如果对于某个 ε_2 值, 存在一个整数 $r[k]$ 使得

$$|\tilde{\arg}(X[k]) - \text{ARG}(X[k]) - 2\pi r[k]| < \varepsilon_2 < \pi, \quad (12.86)$$

我们就称这个估计是一致的. 很清楚, 随着数值积分步长 $\Delta\omega$ 的减小, 估计值会得到改善. 首先, 如同由 DFT 所给出的, 取 $\Delta\omega = 2\pi/N$. 如果某一整数 $r[k]$ 不能满足式(12.86), 则 $\Delta\omega$ 的取值就减半, 并且用这一新步长计算 $\arg(X[k])$ 的新估计值. 然后用新的估计值来计算式(12.86). 利用数值积分越来越精确地计算 $\arg(X[k])$ 的估计值, 直到存在某一整数 $r[k]$ 能够满足式(12.86)为止. 最后, 在式(12.84)中使用所得到的 $r[k]$ 来计算 $\arg(X[k])$. 算出之后, 利用这个无卷绕的相位来计算 $\arg(X[k+1])$, 依此类推. 特里博

利特算法已用 FORTRAN 编程,可供使用(DSP Committee, 1979).

12.7.2 用对数的导数实现

可以推导出以对数的导数为基础的一种数学表示,作为用显式计算复对数的另一种方法.对于实序列, $\hat{X}(e^{j\omega})$ 的导数可以用等效的形式表示为

$$\hat{X}'(e^{j\omega}) = \frac{d\hat{X}(e^{j\omega})}{d\omega} = \frac{d}{d\omega} \log |\hat{X}(e^{j\omega})| + j \frac{d}{d\omega} \arg[\hat{X}(e^{j\omega})] \quad (12.87a)$$

和

$$\hat{X}'(e^{j\omega}) = \frac{\hat{X}'(e^{j\omega})}{\hat{X}(e^{j\omega})}, \quad (12.87b)$$

式中撇号“'”表示对 ω 求导数.因为 $x[n]$ 的傅里叶变换是

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\omega n}, \quad (12.88)$$

所以它对 ω 的导数为

$$X'(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-jnx[n]) e^{-j\omega n}, \quad (12.89)$$

也就是说, $X'(e^{j\omega})$ 是 $-jnx[n]$ 的傅里叶变换.同样, $\hat{X}'(e^{j\omega})$ 是 $-jnx[n]$ 的傅里叶变换.因此,对于 $n \neq 0$, $\hat{x}[n]$ 可以由下式确定:

$$\hat{x}[n] = \frac{-1}{2\pi nj} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{X'(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})} e^{j\omega n} d\omega, \quad n \neq 0. \quad (12.90)$$

$\hat{x}[0]$ 的值可以由 $X(e^{j\omega})$ 幅值的对数来确定,为

$$\hat{x}[0] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \log |X(e^{j\omega})| d\omega. \quad (12.91)$$

式(12.88)–(12.91)利用 $x[n]$ 和 $nx[n]$ 的傅里叶变换来表示复倒谱,因此没有明显地涉及到无卷绕的相位.对于有限长序列,可以用 DFT 计算这些变换,由此可以得出相应的方程

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j(2\pi/N)kn} = X(e^{j\omega})|_{\omega=(2\pi/N)k}, \quad (12.92a)$$

$$X'[k] = -j \sum_{n=0}^{N-1} nx[n] e^{-j(2\pi/N)kn} = X'(e^{j\omega})|_{\omega=(2\pi/N)k}, \quad (12.92b)$$

$$\hat{x}_{dp}[n] = -\frac{1}{jnN} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{X'[k]}{X[k]} e^{j(2\pi/N)kn}, \quad 1 \leq n \leq N-1, \quad (12.92c)$$

$$\hat{x}_{dp}[0] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \log |X[k]|, \quad (12.92d)$$

式中下标 d 表示使用对数导数,下标 p 提醒我们 DFT 计算中固有的周期性.由于利用了式(12.92),我们可以避免计算复对数的问题,但是因为

$$\hat{x}_{dp}[n] = \frac{1}{n} \sum_{r=-\infty}^{\infty} (n+rN) \hat{x}[n+rN], \quad (12.93)$$

使得所付出的代价是产生较严重的混叠.因此,若假设采样的相位曲线是准确计算出的,则我们可预计到,对于给定的 N 值,式(12.80c)中的 $\hat{x}_p[n]$ 比式(12.92c)中的 $\hat{x}_{dp}[n]$ 会更好地逼近 $\hat{x}[n]$.

对于其傅里叶变换为式(12.83)的有限长序列,可以证明

$$M_o = \frac{-1}{2\pi j} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{X'(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})} d\omega. \quad (12.94)$$

利用 IDFT 邻近该表示式得

$$M_{op} = \frac{-1}{jN} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{X'[k]}{X[k]}. \quad (12.95)$$

通常, M_{op} 将不是一个整数,但是当 N 较大时可以预计, M_o 趋近于 $X(z)$ 在单位圆外的零点个数 M_o .

另一个关于计算连续复对数需要说明的问题,与 A 的符号以及由因子 $e^{-j\omega M_o}$ 所引起的线性相位分量有关. A 的符号很容易确定,因为它与 $X[k]$ 在 $k=0$ 处的符号相同. M_o 的值可以从 $\text{ARG}(X[k])$ 中加上修正项 $r[k]$ 后的结果来确定,因为对于实序列 $x[n]$,从式(12.83)可得

$$\arg[X(e^{j\omega})] = -M_o\pi, \quad (12.96)$$

并且若采样率足够高,则有

$$r[N/2-1] \approx \frac{-M_o}{2}. \quad (12.97)$$

这个线性相位分量可从无卷绕的相位中减去,而且若 $X[0]$ 是负的,在计算相位之前就应改变 DFT 样本的符号,从而使 A 为正数.

最后,回想一下,对于相位无卷绕的特里博利特算法需要用到相位的导数.从式(12.87)可得,对于有限长序列,在频率 $\omega_k = 2\pi k/N$ 处的相位导数完全可以用下式计算:

$$\begin{aligned} \arg'(X[k]) &= \text{Im}\{X[k]\} \\ &= \text{Im}\left\{\frac{X'[k]}{X[k]}\right\}. \end{aligned} \quad (12.98)$$

特别是, $\arg'(X[k])$ 为 $-jnx[n]$ 的 DFT 与 $x[n]$ 的 DFT 之比的虚部.当然,这些 DFT 都可以用 N 点 FFT 算法来计算.以上计算是特里博利特算法的第一步.接下来在该算法的自适应积分部分中所涉及到的相位导数的计算,可通过直接计算位于基本 DFT 频率 $\omega_k = 2\pi k/N$ 之间的所需要频率处的 DFT 来完成.为了高效地计算在该算法的自适应积分部分中所需要的少量傅里叶变换值,可以利用 9.2 节中所讨论的戈泽尔算法.

12.7.3 最小相位序列的最小相位实现

在最小相位输入的特殊情况下,简化的数学表示如图 12.6 所示.以使用 DFT 为基础代替图 12.6 中的傅里叶变换,可以由下式来实现:

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j(2\pi/N)kn}, \quad (12.99a)$$

$$c_{xp}[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \log |X[k]| e^{j(2\pi/N)kn}. \quad (12.99b)$$

在这种情况下倒谱是有混叠的,即

$$c_{xp}[n] = \sum_{r=-\infty}^{\infty} c_x[n+rN]. \quad (12.100)$$

根据图 12.6,为了从 $c_{xp}[n]$ 计算复倒谱,可以写出

$$\hat{x}_{ep}[n] = \begin{cases} c_{xp}[n], & n=0, N/2, \\ 2c_{xp}[n], & 1 \leq n < N/2, \\ 0, & N/2 < n \leq N-1. \end{cases} \quad (12.101)$$

显然 $\hat{x}_{ep}[n] \neq \hat{x}_p[n]$, 因为它是 $\hat{x}[n]$ 混叠后的偶数部分, 而不是 $\hat{x}[n]$ 本身的偶数部分. 尽管如此, 当 N 很大时, 可以预计 $\hat{x}_{ep}[n]$ 是 $\hat{x}[n]$ 的合理逼近. 同样地, 若 $x[n]$ 是最大相位, 则复倒谱的近似值可以由下式求得

$$\hat{x}_{cp}[n] = \begin{cases} c_{xp}[n], & n=0, N/2, \\ 0, & 1 \leq n < N/2, \\ 2c_{xp}[n], & N/2 < n \leq N-1. \end{cases} \quad (12.102)$$

在最小相位序列或最大相位序列的情况下, 我们还有递推公式(12.66)–(12.70)可以作为特征系统以及它的逆系统的可能实现方案. 当输入序列很短或要求的复倒谱样本很少时, 这些公式是非常有用的. 当然, 使用这些公式时没有混叠误差.

图 12.7 和图 12.8 的系统分别对应于最小相位/全通序列的分解以及最小相位/最大相位序列的分解, 它们可以近似地用图 12.9 所示对于理想系统 $D_+[\cdot]$ 和 $D_-^{-1}[\cdot]$ 的近似实现来代替.

12.7.4 多项式求根

12.5 节提出了另一种不涉及到相位无卷绕问题的复倒谱计算方法. 如果序列 $x[n]$ 为有限长, 则在式(12.50)中只剩下分子部分, 因此它的 z 变换是一个 z^{-1} 的多项式. 可以对这个表示式求解, 用数值多项式求根算法解其系数就是序列 $x[n]$ 的多项式, 从而得出分别位于单位圆内和单位圆外的零点 a_k 和 $1/b_k$. 然后由式(12.57)可以计算出复倒谱为

$$\hat{x}[n] = \begin{cases} \log |A|, & n=0, \\ -\sum_{k=1}^{M_p} \frac{a_k^n}{n}, & n>0, \\ \sum_{k=1}^{M_o} \frac{b_k^{-n}}{n}, & n<0. \end{cases} \quad (12.103)$$

当 $N=M_o+M_p+1$ 很小时, 这种计算方法特别有效. 斯泰格利茨和迪金森(Steiglitz and Dickinson, 1982)曾研究过这种方法, 并且报道, 对高达 $N=256$ 阶的多项式成功地进行了求根运算. 这种方法的优点是, 没有混叠, 并且不会错误地检测出或未检测出相位的间断点. 这种方法还可以用于检查涉及到相位无卷绕的倒谱计算.

12.7.5 使用指数加权

对一个序列进行指数加权, 可用以避免或减少在计算复倒谱时所遇到的问题. 序列 $x[n]$ 的指数加权定义为

$$w[n] = \alpha^n x[n]. \quad (12.104)$$

对应的 z 变换是

$$W(z) = X(\alpha^{-1}z). \quad (12.105)$$

如果 $X(z)$ 的收敛域为 $r_R < |z| < r_L$, 则 $W(z)$ 的收敛域是 $|\alpha|r_R < |z| < |\alpha|r_L$, 并且 $X(z)$

的极点和零点沿径向移动 $|\alpha|$ 倍;也就是说,若 z_0 是 $X(z)$ 的一个极点或零点,则 $z_0\alpha$ 是对应的 $W(z)$ 的极点或零点.

指数加权的一个重要性质是可与卷积互易.这就是说,如果 $x[n]=x_1[n]*x_2[n]$ 且 $w[n]=\alpha^n x[n]$,则

$$W(z)=X(\alpha^{-1}z)=X_1(\alpha^{-1}z)X_2(\alpha^{-1}z), \quad (12.106)$$

因此

$$\begin{aligned} w[n] &= (\alpha^n x_1[n]) * (\alpha^n x_2[n]) \\ &= w_1[n] * w_2[n]. \end{aligned} \quad (12.107)$$

这样,在计算复倒谱时,

$$\begin{aligned} \hat{W}(z) &= \log[W(z)] \\ &= \log[W_1(z)] + \log[W_2(z)]. \end{aligned} \quad (12.108)$$

指数加权可以多种方式用于倒谱计算.例如,在计算复倒谱时,对于 $X(z)$ 在单位圆上的极点或零点要特别小心.可以证明(Carslaw, 1952),因子 $\log(1-e^{j\theta}e^{-j\omega})$ 的傅里叶级数为

$$\log(1-e^{j\theta}e^{-j\omega}) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{j\theta n}}{n} e^{-jn\omega}, \quad (12.109)$$

因此,该项对复倒谱的贡献是 $(e^{j\theta n}/n)u[n-1]$.但是,对数幅度是无限的,而相位是不连续的,它在 $\omega=\theta$ 处有 π 弧度的跳变.这就出现了我们总想避免的计算上的明显困难.由于 $0<\alpha<1$ 的指数加权,所有的极点和零点就会沿径向向内移动.因此,在单位圆上的极点或零点将会移到单位圆内.

作为另外一个例子,考虑一个非最小相位的信号 $x[n]$.如果选取 α 使得 $|z_{\max}\alpha|<1$,其中 z_{\max} 表示模最大的零点的位置,则指数加权后的信号 $w[n]=\alpha^n x[n]$ 就可以转变为一个最小相位序列.

另一种有趣的指数加权的用法是在没有相位无卷绕问题时计算复倒谱.假设 $X(z)$ 没有在单位圆上的极点和零点,则有可能找到一个指数加权因子 α ,使得在构成 $W(z)=X(\alpha^{-1}z)$ 时 $X(z)$ 的极点或零点越过单位圆,由于 $W(z)$ 的收敛域包括单位圆,有

$$\hat{w}[n]=\alpha^n \hat{x}[n]. \quad (12.110)$$

现在,假定我们计算 $x[n]$ 和 $w[n]$ 的倒谱,而不是复倒谱. $c_x[n]$ 为

$$c_x[n]=\frac{\hat{x}[n]+\hat{x}[-n]}{2} \quad (12.111a)$$

并且由式(12.110),

$$c_w[n]=\frac{\hat{w}[n]+\hat{w}[-n]}{2}=\frac{\alpha^n \hat{x}[n]+\alpha^{-n} \hat{x}[-n]}{2}. \quad (12.111b)$$

从式(12.111)可得

$$\hat{x}[n]=\frac{2(c_x[n]-\alpha^n c_w[n])}{1-\alpha^{2n}}, \quad n \neq 0. \quad (12.112)$$

因为 $c_x[n]$ 和 $c_w[n]$ 分别可以由 $\log|X(e^{j\omega})|$ 和 $\log|W(e^{j\omega})|$ 来计算,所以我们就有了不用计算 $X(e^{j\omega})$ 的相位而计算出复倒谱的基础. $X(z)$ 的极点和零点离开单位圆越远,则在选择 α 时就有更大的灵活性.这种方法的突出困难是,需要保证指数加权不会使得根越过单

位圆. 这就可能要求 α 的值接近于 1, 在这种情况下, 当 n 很小时, 式(12.112)的分母可能会非常小.

12.8 同态滤波举例

以上几节中我们讨论了对于通过卷积组合在一起的信号的倒谱分析和同态滤波在理论和计算方面的问题. 本节将进一步给出有关以上讨论的例子. 我们的方法是考虑一个相对简单的信号模型, 该信号只涉及到有理 z 变换, 因此可以得到完全的解析结果, 并且可将此结果与利用 DFT 所计算出的结果作一比较. 在 12.9 节中我们将说明在语音处理这种比较现实的实际应用中的倒谱分析和同态滤波.

12.8.1 信号模型

本节自始至终我们均研究一个离散时间信号 $x[n]$, 它是两个分量的卷积, 即

$$x[n] = v[n] * p[n], \quad (12.113a)$$

或者在 z 变换域,

$$X(z) = V(z)P(z). \quad (12.113b)$$

我们选择 $p[n]$ 为如下形式:

$$p[n] = \delta[n] + \beta\delta[n - N_0] + \beta^2\delta[n - 2N_0], \quad (12.114)$$

则它的 z 变换是

$$P(z) = 1 + \beta z^{-N_0} + \beta^2 z^{-2N_0} = \frac{1 - \beta^3 z^{-3N_0}}{1 - \beta z^{-N_0}}. \quad (12.115)$$

$p[n]$ 可能相当于一个多径通道的冲激响应, 或者相当于能产生间隔为 N_0 和 $2N_0$ 的多个回波的其它系统. 选取分量 $v[n]$ 为二阶系统的响应, 使得

$$V(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1}}{(1 - re^{j\theta} z^{-1})(1 - re^{-j\theta} z^{-1})}. \quad (12.116)$$

在时域, $v[n]$ 可以表示为

$$v[n] = b_0 w[n] + b_1 w[n-1], \quad (12.117)$$

式中

$$w[n] = \frac{r^n}{4\sin^2\theta} \{ \cos(\theta n) - \cos[\theta(n+2)] \} u[n], \quad \theta \neq 0, \pi. \quad (12.118)$$

图 12.11 绘出了对于具体的参数组 $b_0 = 0.98$, $b_1 = 1$, $\beta = r = 0.9$, $\theta = \pi/6$ 和 $N_0 = 15$, z 变换 $X(z) = V(z)P(z)$ 的极零点图. 图 12.12 绘出了对于这些参数的信号 $v[n]$, $p[n]$ 和 $x[n]$. 在图 12.12 中可以看出, 类似脉冲的信号 $v[n]$ 与冲激串 $p[n]$ 的卷积可得出由 $v[n]$ 的延迟副本(回波)重叠在一起的一个序列.

这个信号模型是许多模型的一种简化形式, 这些模型用于包括通信系统、语音处理、声纳及地震数据分析等在内的多种场合中信号的分析和处理. 在通信中, 式(12.113)的 $v[n]$ 可以表示通过一个多径通道的信号, $x[n]$ 表示接收到的信号, 而 $p[n]$ 表示通道的冲激响应. 在语音处理中, $v[n]$ 应表示声门脉冲形状以及人们声道的谐振作用的综合影响, 而 $p[n]$ 则表示在发浊音时(如元音)声音激励的周期性(Flanagan, 1972; Rabiner and

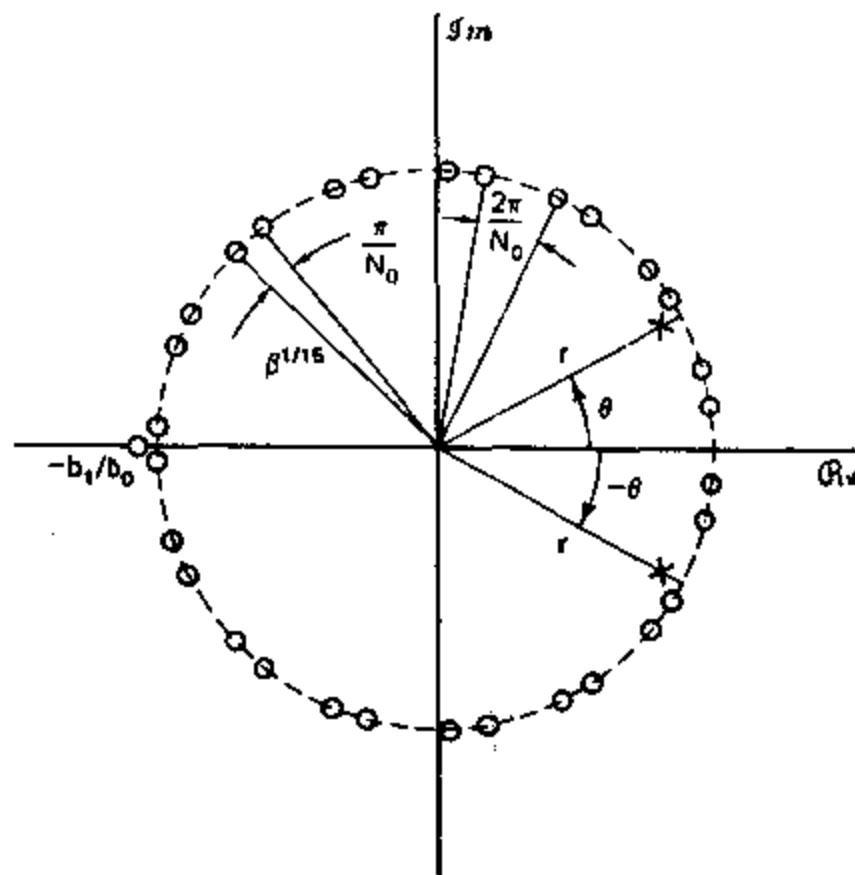


图 12.11 对于图 12.12 中举例信号的 z 变换 $X(z)=V(z)P(z)$ 的极零点图.

Schafer, 1978). 式(12.116)只包括一个谐振, 而在通常的语音模型中分母一般应包括至少十个复极点. 进行地震数据分析时, $v[n]$ 应表示由于炸药爆炸或者类似的扰动在地球中传播的声脉冲波形. 冲激脉冲分量 $p[n]$ 则表示在具有不同传播特性的地层间边界的反射. 在这一模型的实际应用中, $p[n]$ 应当有比我们在式(12.114)中所假定的更多的冲激脉冲, 并且它们应当是不等间隔的. 另外, 分量 $V(z)$ 一般应包括更多的零点, 并且在模型中常常不包括极点(Ulrych, 1971; Trbolet, 1979; Robinson and Treitel, 1980).

虽然上面定义的模型要比通常在实际问题中使用的模型简单得多, 但是我们将会看到, 这个简单的模型将展现出具有有理 z 变换的信号之倒谱的全部重要性质.

12.8.2 复倒谱的解析计算

为了解析地确定 $x[n]$ 的复倒谱 $\hat{x}[n]$, 我们使用如下关系:

$$\hat{x}[n] = \hat{v}[n] + \hat{p}[n], \quad (12.119a)$$

$$\hat{X}(z) = \hat{V}(z) + \hat{P}(z), \quad (12.119b)$$

式中

$$\hat{X}(z) = \log[X(z)], \quad (12.120a)$$

$$\hat{V}(z) = \log[V(z)], \quad (12.120b)$$

和

$$\hat{P}(z) = \log[P(z)]. \quad (12.120c)$$

为了确定 $\hat{v}[n]$, 我们可以直接利用 12.5 节中的结果. 特别是, 要用式(12.50)的形式来表示 $V(z)$, 我们首先必须注意到, 对于图 12.12 中具体的信号 $x[n]$, $V(z)$ 的极点在单位圆内, 而零点在单位圆外($r=0.9$ 且 $b_0/b_1=0.98$), 因此按照式(12.50)我们把 $V(z)$ 写作

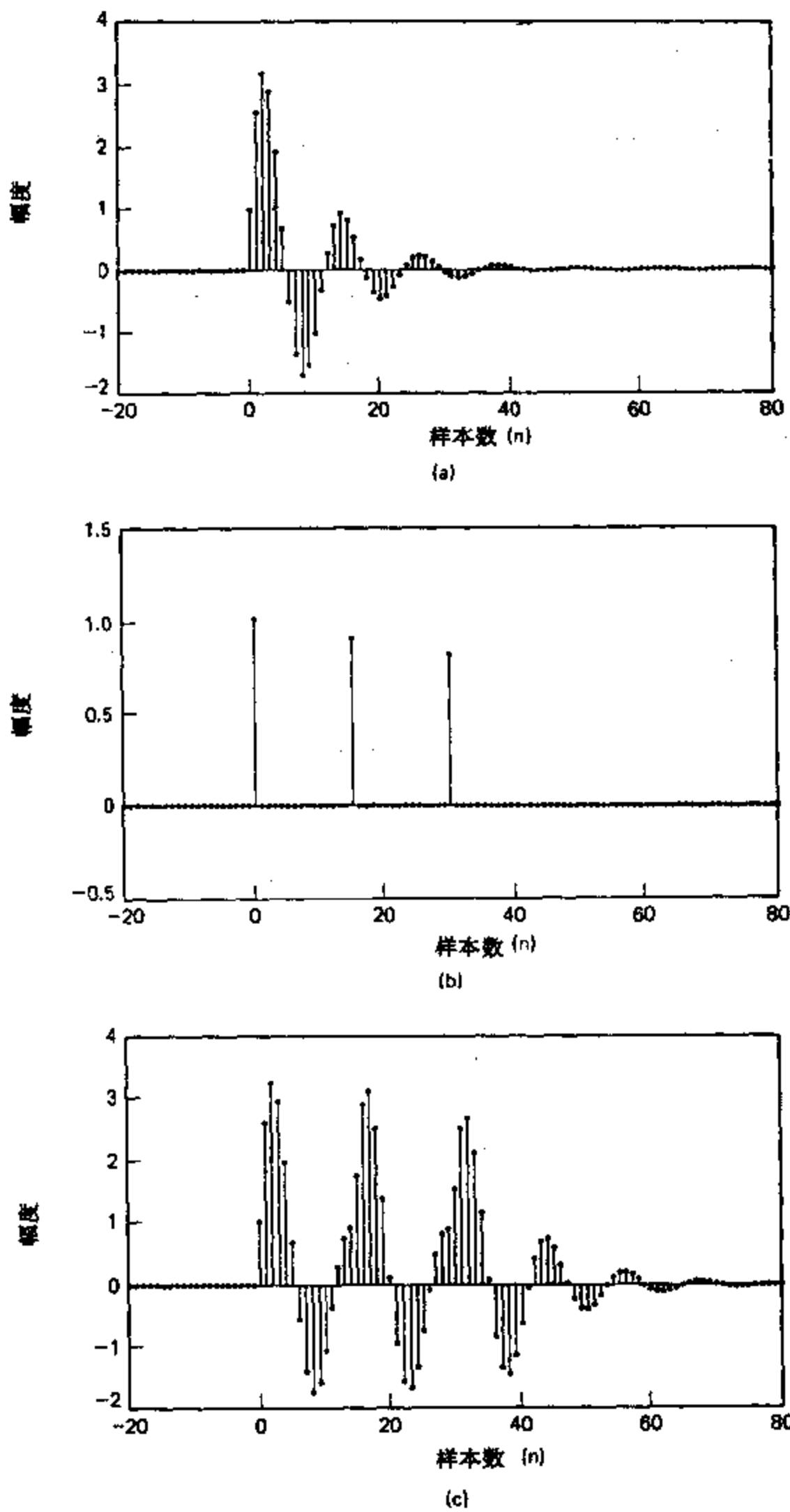


图 12.12 与图 12.11 的极零点图相对应的序列 $v[n]$, $p[n]$ 和 $x[n]$.

$$V(z) = \frac{b_1 z^{-1} [1 + (b_0/b_1)z]}{(1 - re^{j\theta}z^{-1})(1 - re^{-j\theta}z^{-1})}. \quad (12.121)$$

正如在 12.5 节中所讨论的, 因子 z^{-1} 给无卷绕相位增添了一个线性分量, 它将使得

$\hat{v}[n]$ 的傅里叶变换在 $\omega=\pm\pi$ 处不连续, 所以 $\hat{V}(z)$ 在单位圆上将不是解析的. 为了避免这个问题, 我们可以将 $v[n]$ (因此也有 $x[n]$) 平移一个样本间隔的时间, 从而我们代之以计算 $v[n+1]$ 的复倒谱, 自然也就计算了 $x[n+1]$ 的复倒谱. 如果 $x[n]$ 或 $v[n]$ 经过复倒谱的一些处理后是可以再合成的, 则我们可以先记住这个时间平移, 然后在最后输出时将其补偿掉.

由于用 $v[n+1]$ 来代替 $v[n]$, 并且因此用 $zV(z)$ 来代替 $V(z)$, 我们现在认为 $V(z)$ 有如下形式:

$$V(z) = \frac{b_1[1 + (b_0/b_1)z]}{(1 - re^{j\theta}z^{-1})(1 - re^{-j\theta}z^{-1})}, \quad (12.122)$$

由式(12.57)可以直接写出 $\hat{v}[n]$ 为

$$\hat{v}[0] = \log b_1, \quad (12.123a)$$

$$\hat{v}[n] = \frac{1}{n}[(re^{j\theta})^n + (re^{-j\theta})^n], \quad n > 0, \quad (12.123b)$$

$$\hat{v}[n] = \frac{1}{n} \left(\frac{-b_0}{b_1} \right)^{-n}, \quad n < 0. \quad (12.123c)$$

为了确定 $\hat{p}[n]$, 我们可以计算 $\hat{P}(z)$ 的反 z 变换, 而由式(12.115)可得 $\hat{P}(z)$ 为

$$\hat{P}(z) = \log(1 - \beta^3 z^{-3N_0}) - \log(1 - \beta z^{-N_0}), \quad (12.124)$$

式中, 对于我们的例子 $\beta=0.9$, 因此 $|\beta|<1$. 确定式(12.124)的反 z 变换的一种方法是利用 $\hat{P}(z)$ 的幂级数展开. 具体讲, 由于 $|\beta|<1$,

$$\hat{P}(z) = - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\beta^{3k}}{k} z^{-3N_0 k} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\beta^k}{k} z^{-N_0 k}, \quad (12.125)$$

由上式可得 $\hat{p}[n]$ 为

$$\hat{p}[n] = - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\beta^{3k}}{k} \delta[n - 3N_0 k] + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\beta^k}{k} \delta[n - N_0 k]. \quad (12.126)$$

求出 $\hat{p}[n]$ 的另一种方法是利用习题 12.29 中推导出的性质.

由式(12.119a)可知, $x[n]$ 的复倒谱是

$$\hat{x}[n] = \hat{v}[n] + \hat{p}[n], \quad (12.127)$$

其中 $\hat{v}[n]$ 和 $\hat{p}[n]$ 分别由式(12.123)和(12.126)给出. 序列 $\hat{v}[n]$ 、 $\hat{p}[n]$ 和 $\hat{x}[n]$ 如图 12.13 所示.

$x[n]$ 的倒谱 $c_x[n]$ 是 $\hat{x}[n]$ 的偶部, 即

$$c_x[n] = \frac{1}{2}(\hat{x}[n] + \hat{x}[-n]) \quad (12.128)$$

且

$$c_x[n] = c_v[n] + c_p[n]. \quad (12.129)$$

由式(12.123),

$$\begin{aligned} c_v[n] &= \log(b_1) \delta[n] + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k (b_0/b_1)^{-k}}{2k} (\delta[n-k] + \delta[n+k]) \\ &\quad + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{r^k \cos(k\theta)}{k} (\delta[n-k] + \delta[n+k]). \end{aligned} \quad (12.130a)$$

且由式(12.126),

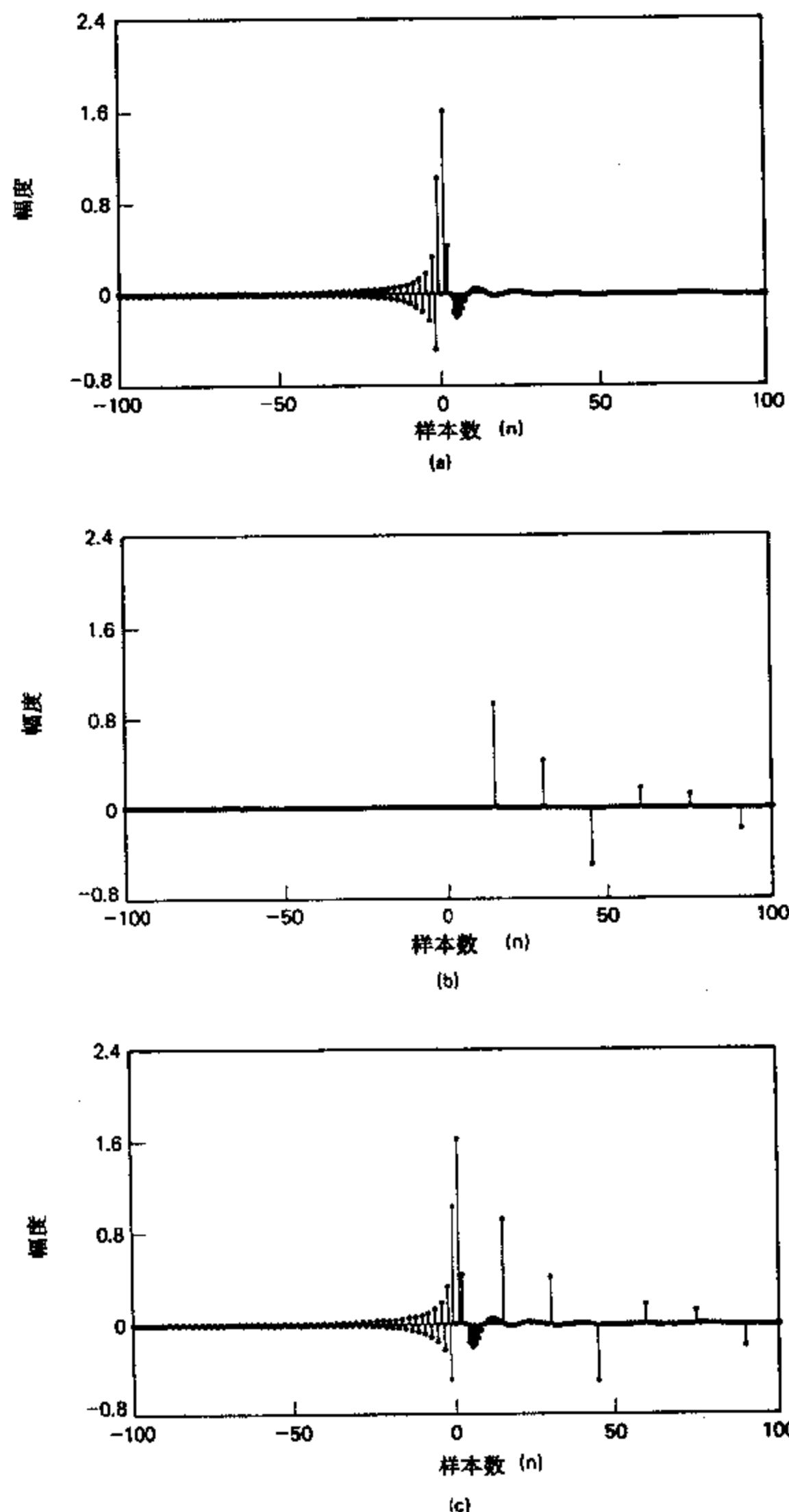


图 12.13 序列 $\hat{v}[n]$, $\hat{p}[n]$ 和 $\hat{x}[n]$.

$$c_p[n] = -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\beta^{3k}}{k} \{ \delta[n - 3N_0k] + \delta[n + 3N_0k] \}$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\beta^k}{k} \{ \delta[n - N_0 k] + \delta[n + N_0 k] \}. \quad (12.130b)$$

对于本例,序列 $c_v[n]$, $c_p[n]$ 和 $c_x[n]$ 如图 12.14 所示.

12.8.3 用 DFT 计算倒谱

在图 12.13 和图 12.14 中我们给出了复倒谱,以及计算 12.8.2 节中得出的解析表示式所对应的倒谱. 在多数应用中我们没有信号的解析表示式,因此我们也就不能解析地确定 $\hat{x}[n]$ 或 $c_x[n]$. 在这一节中将举例说明如何用 DFT 计算 $x[n]$ 的复倒谱和倒谱.

为了按照图 12.9(a)那样用 DFT 来计算复倒谱或倒谱,要求输入是有限长的. 这样,对于在 12.8.1 节中所讨论的信号模型来说, $x[n]$ 必须被截断. 在本节所讨论的例子中, 对图 12.12(c) 中的信号 $x[n]$ 截取 $N = 1024$ 个样本, 并且把 1024 点 DFT 用于图 12.9(a) 的系统来计算信号的复倒谱和倒谱. 图 12.15 给出了在复倒谱计算中所涉及到的傅里叶变换. 图 12.15(a) 表示图 12.12 所示 $x[n]$ 的 1024 个样本之 DFT 幅值的对数, 并且在图中将 DFT 样本连接起来以示出有限长输入序列傅里叶变换的形状. 图 12.15(b) 表示相位的主值. 应当注意当相位超过 $\pm\pi$ 并以 2π 为模卷绕时的不连续性. 图 12.15(c) 示出按 12.7.1 节讨论的方法所得出的连续“无卷绕”的相位曲线. 正如在 12.8.2 节中所提到的, 仔细比较图 12.15(b) 和 12.15(c), 显而易见, 线性相位分量已经除去, 因此无卷绕相位曲线在 0 和 π 处是连续的. 这样, 图 12.15(c) 的无卷绕相位对应于 $x[n+1]$ 而不是 $x[n]$.

图 12.15(a) 和图 12.15(c) 分别对应于复倒谱傅里叶变换之实部和虚部的计算. 因为图 12.15(a) 的函数是以 2π 为周期的偶函数, 且图 12.15(c) 的函数是以 2π 为周期的奇函数, 所以只表示出 $0 \leq \omega \leq \pi$ 的频率范围. 查看图 12.15(a) 和图 12.15(c) 中的曲线, 我们注意到它们大致呈现出快变化的周期(在频域上的)分量叠加在变化较慢的分量上的样子. 事实上, 周期变化的分量对应于 $\hat{P}(e^{j\omega})$, 而变化较慢的分量对应于 $\hat{V}(e^{j\omega})$.

在图 12.16(a) 中我们已表示出 DFT 复对数的傅里叶反变换, 即时间混叠后的复倒谱 $\hat{x}_p[n]$. 应注意在 $N_0 = 15$ 的整数倍处的那些冲激. 这些冲激是由 $p[n]$ 造成的, 它们对应于在 DFT 的对数中观察到的快变化周期分量. 我们还看到, 因为输入信号不是最小相位的, 所以当 $n < 0$ 时复倒谱不为零*.

由于在计算 DFT 时用的点数很多, 因此时间混叠复倒谱与使用式(12.123)、(12.126) 和 (12.127) 计算得出的正确值相差很小, 计算这些式子时所用的参数都是产生图 12.12 中的输入信号时所用到的那些特定值.

对于这个例子的时间混叠倒谱 $c_{xp}[n]$ 如图 12.16(b) 所示. 正如复倒谱一样, 在 15 的整数倍处的冲激很明显, 它们对应于傅里叶变换幅度之对数的周期分量.

正如在 12.8.1 节中所提到的, 信号 $v[n]$ 与如 $p[n]$ 那样的冲激串的卷积是一种包含有回波的信号模型. 因为 $x[n]$ 是 $v[n]$ 和 $p[n]$ 的卷积, 所以通过查看 $x[n]$ 往往很不容易检测出回波时间. 然而, 在倒谱域中 $p[n]$ 的作用是作为加性冲激串而存在的, 因此回波的存在与否以及它的位置往往就比较明显. 博格特(Bogert et al., 1963) 等人提议将倒谱用

* 当使用 DFT 得到图 12.15(a) 和 12.15(c) 的傅里叶反变换时, 与 $n < 0$ 有关的值通常出现在区间 $N/2 < n \leq N-1$ 中. 习惯上, 时间序列总表示为以 $n=0$ 为中心, 因此我们已相应地重新排列了 $\hat{x}_p[n]$.

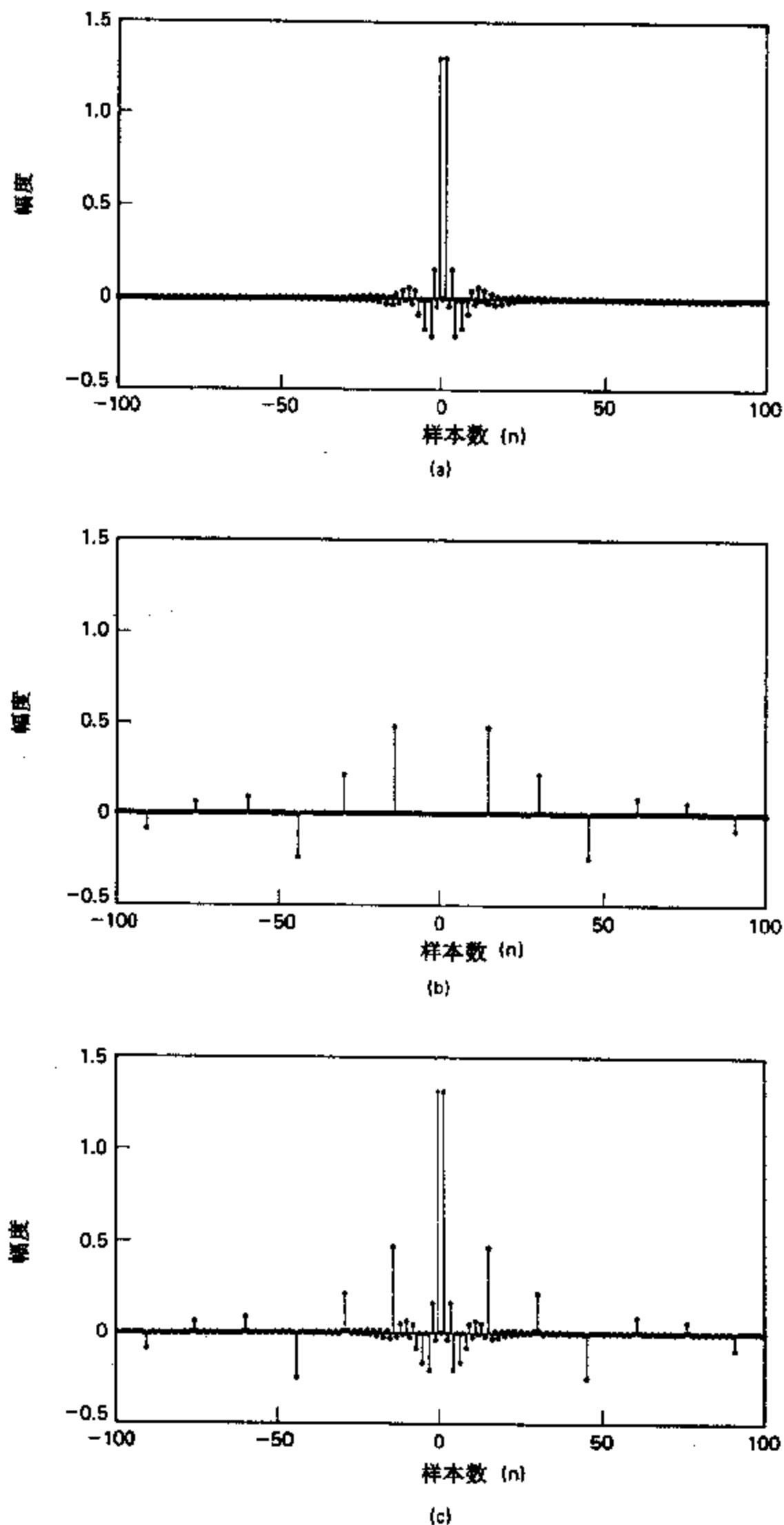


图 12.14 序列 $c_v[n]$, $c_p[n]$ 和 $c_r[n]$.

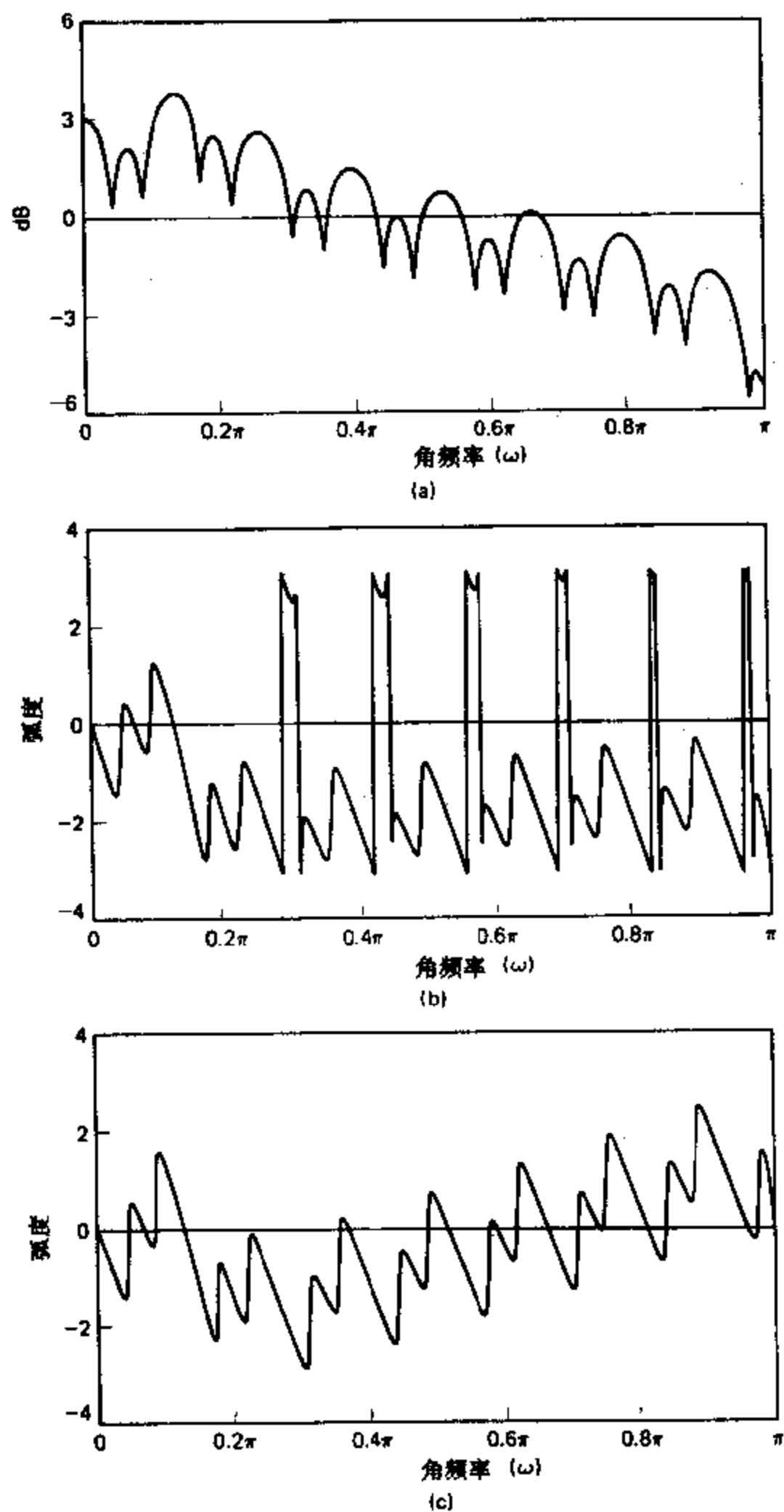


图 12.15 图 12.12 中所示 $x[n]$ 的傅里叶变换. (a) 对数幅度. (b) 相位的主值. (c) 从(b)中除去线性相位分量后的连续“无卷绕”相位. 用直线连接各 DFT 样本.

作检测回波的工具, 其出发点就是基于这一观点. 后来, 诺尔(Noll, 1967)使用同一思想作

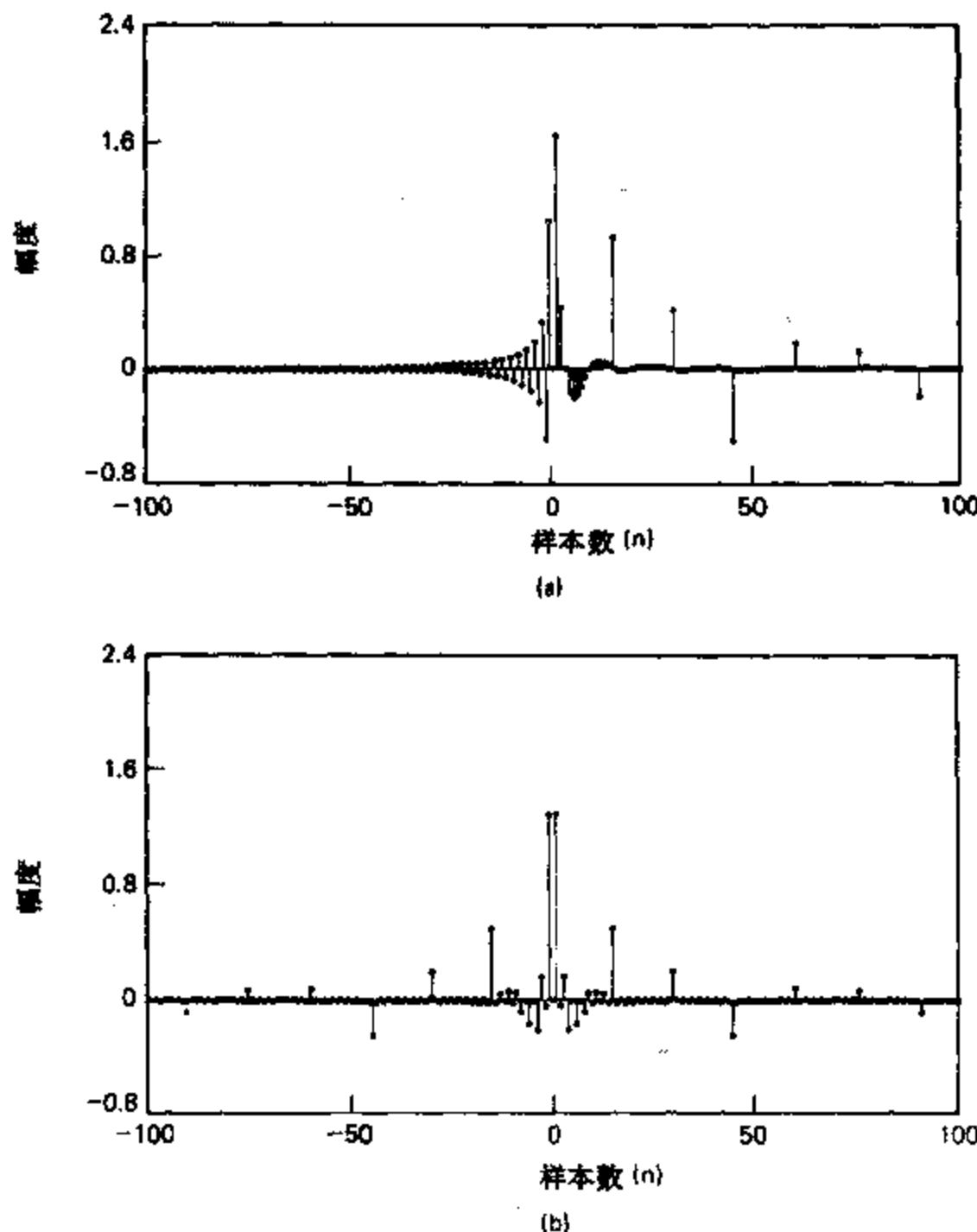


图 12.16 (a) 图 12.12(c)所示序列的复倒谱 $\hat{x}_p[n]$. (b) 图 12.12(c)所示序列的倒谱 $c_x[n]$.

为检测语音信号中音调的基础.

12.8.4 同态滤波

对于 12.8.3 节中的例子, 复对数的慢变化分量, 以及复倒谱的“低时”(low-time)部分, 主要都是由 $v[n]$ 引起的. 相应地, 复对数的较快变化分量和复倒谱的“高时”(high-time)部分主要是由 $p[n]$ 引起的. 这就提示我们, $x[n]$ 中的两个卷积分量可以通过对傅里叶变换的对数进行线性滤波而区分开来, 或者如像 12.2 节所讨论过的, 复倒谱分量可以通过时间门, 也就是频率不变线性滤波而区分开来.

图 12.17(a)示出了当对一个信号的傅里叶变换之复对数进行频率不变滤波以区分一个卷积的分量时所涉及到的运算. 这就是定义为同态解卷积技术的运算. 频率不变线性滤波器可以通过频域中的卷积, 或者如像在图 12.17(b)中所指出的, 通过在时域的相乘来实现. 图 12.18(a)表示对于恢复 $v[n]$ 的近似值所要求的一个低通频率不变线性系统的时间响应. 图 12.18(b)表示对于恢复 $p[n]$ 的近似值所需要的一个高通频率不变线性系统的时间响应.

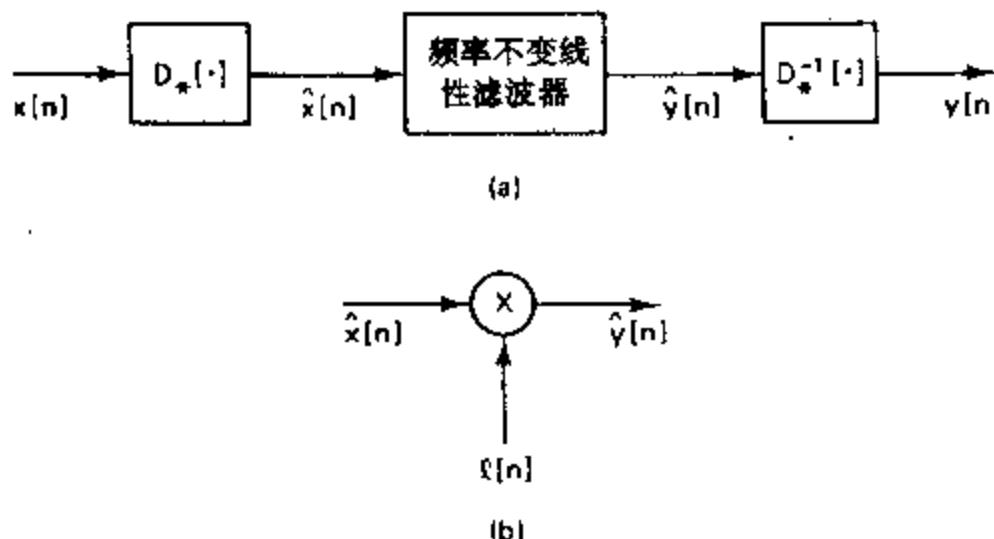


图 12.17 (a) 同态解卷积系统, (b) 频率不变滤波的时域表示.

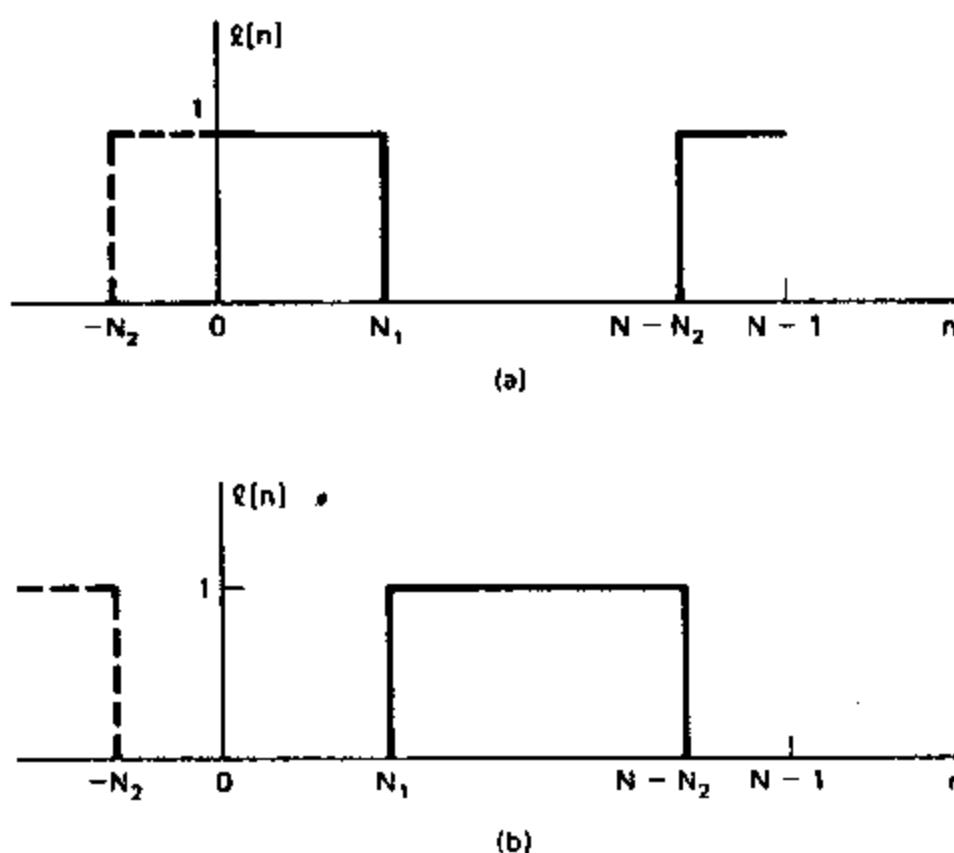


图 12.18 对于同态解卷积频率不变线性系统的时间响应. (a) 低通系统. (b) 高通系统.
(实线表示用 DFT 实现时序列 $l[n]$ 的包络. 虚线表示周期延拓.)

图 12.19 表示低通频率不变滤波的结果. 在图 12.19(a)和(b)中变化较快的曲线是输入信号傅里叶变换的复对数, 也就是复倒谱的傅里叶变换. 在图 12.19(a)和(b)中的慢变化曲线分别是 $\hat{y}[n]$ 傅里叶变换的实部和虚部. 此时, 频率不变线性系统 $l[n]$ 如图 12.18(a)的形式, 并取 $N_1 = 14$, $N_2 = 14$ 以及使用长度为 $N = 1024$ 的 DFT 来实现图 12.17 的系统. 图 12.19(c)表示相应的输出 $y[n]$. 这个序列与通过同态解卷积得出的 $v[n]$ 近似. 为了把 $y[n]$ 和 $v[n]$ 联系起来, 回想起在计算无卷绕的相位时除去了一个线性相位分量, 这相当于 $v[n]$ 的一个采样时间的移位. 因此, 在图 12.19(c)中的 $y[n]$ 近似相当于由同态解卷积得到的 $v[n+1]$. 这种类型的滤波已成功地用于语音处理中来恢复声道响应信息(Oppenheim, 1969b; Schafer and Rabiner, 1970)以及地震信号分析中恢复地震子波(Ulrych, 1971; Tribolet, 1979).

图 12.20 给出了高通频率不变滤波的结果. 图 12.20(a)和(b)中的快变化曲线分别

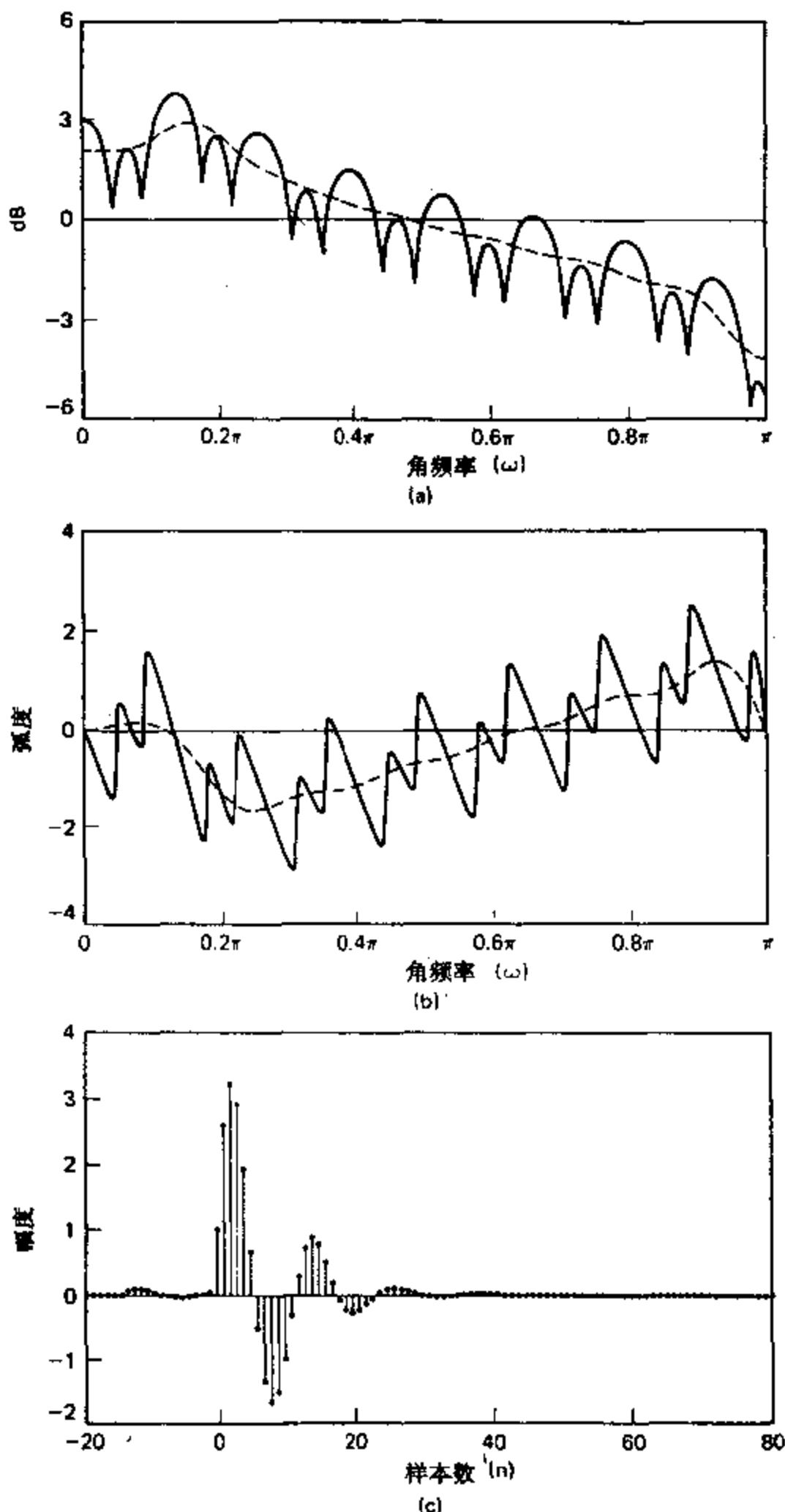


图 12.19 图 12.17 所示系统中低通频率不变线性滤波的说明. (a) 图 12.18(a) 中 $N_1=14$ 和 $N_2=14$ 的低通频率不变系统之输入(实线)和输出(虚线)的傅里叶变换的实部. (b) $N_1=14$ 和 $N_2=14$ 的低通频率不变系统之输入(实线)和输出(虚线)的傅里叶变换的虚部. (c) 与图 12.12(c) 的输入对应的输出序列 $y[n]$.

是 $\hat{y}[n]$ 傅里叶变换的实部和虚部, 此时频率不变线性系统 $I[n]$ 为图 12.18(b) 的形式, 并取 $N_1=14$ 和 $N_2=512$ (即除去负时间部分). 另外, 该系统用 1024 点的 DFT 来实现. 图 12.20(c) 表示相应的输出 $y[n]$, 这个序列与由同态解卷积得到的 $p[n]$ 相近似. 对照利用

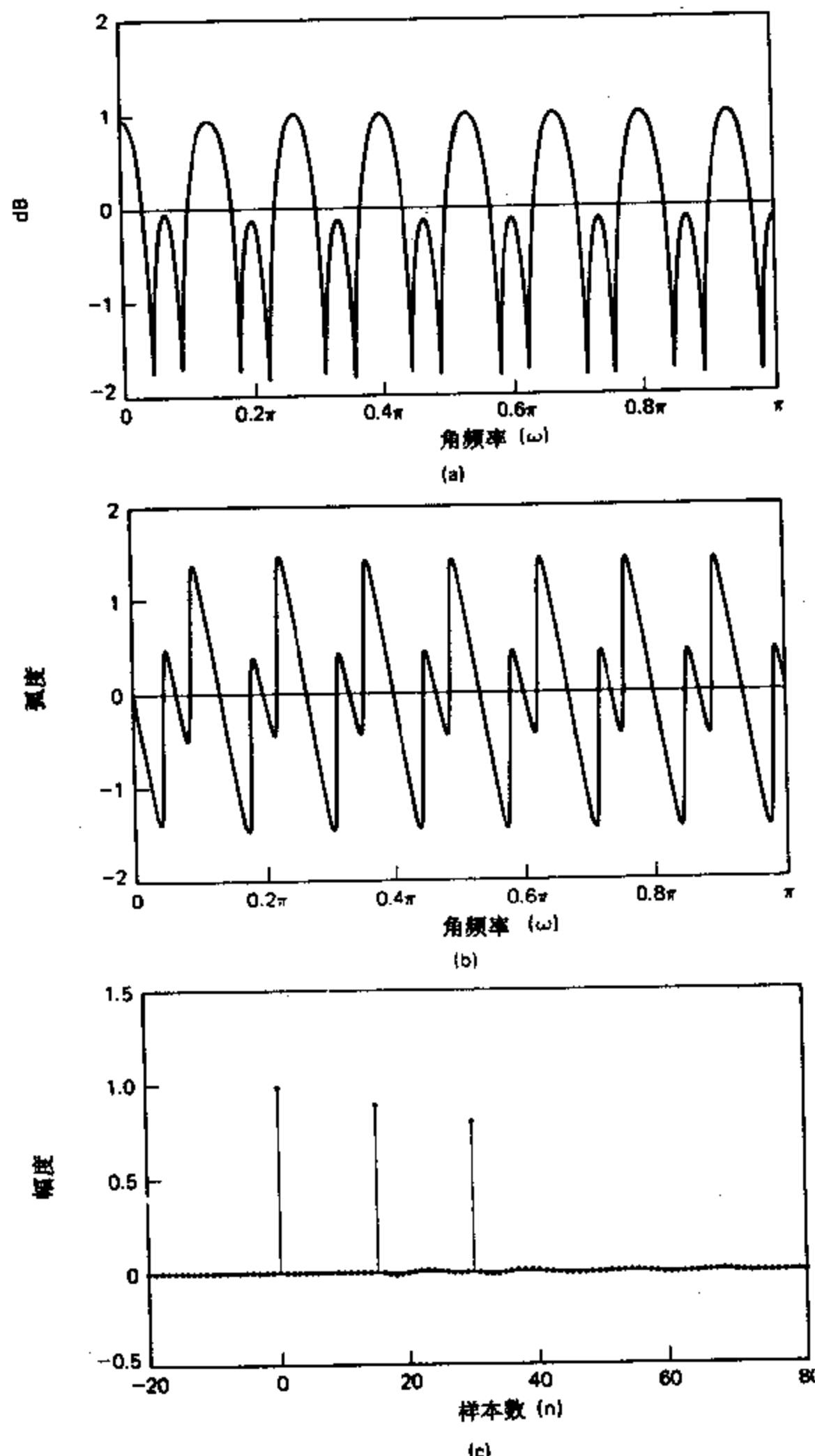


图 12.20 图 12.17 所示系统中高通频率不变线性滤波的说明。(a) 图 12.18(b) 中 $N_1 = 14$ 和 $N_2 = 512$ 的高通频率不变系统之输出的傅里叶变换的实部。(b) 与(a)相同条件下得到的虚部。(c) 与图 12.12 的输入对应的输出序列 $y[n]$.

倒谱来检测回波或周期性,这种方法力图得到可以说明 $v[n]$ 的重复副本之位置和大小的冲激串.

12.8.5 最小相位分解

在 12.6 节我们曾讨论过, 同态解卷积可用于将一个信号分解为最小相位和全通分量, 或者最小相位和最大相位分量。我们将把这些技术用于 12.8.1 节的信号。具体讲, 对于例题中的那些参数, 输入的 z 变换是

$$X(z) = V(z)P(z) = \frac{(0.98+z^{-1})(1+0.9z^{-15}+0.81z^{-30})}{(1-0.9e^{j\pi/6}z^{-1})(1-0.9e^{-j\pi/6}z^{-1})} \quad (12.131)$$

首先, 我们可以把 $X(z)$ 写作一个最小相位 z 变换和另一个全通 z 变换的乘积, 即

$$X(z) = X_{min}(z)X_{ap}(z), \quad (12.132)$$

其中

$$X_{min}(z) = \frac{(1+0.98z^{-1})(1+0.9z^{-15}+0.81z^{-30})}{(1-0.9e^{j\pi/6}z^{-1})(1-0.9e^{-j\pi/6}z^{-1})} \quad (12.133)$$

和

$$X_{ap}(z) = \frac{0.98+z^{-1}}{1+0.98z^{-1}}. \quad (12.134)$$

利用第四章的部分分式展开法可以求出序列 $x_{min}[n]$ 和 $x_{ap}[n]$, 并且使用 12.5 节的幂级数技术可求得对应的复倒谱 $\dot{x}_{min}[n]$ 和 $\dot{x}_{ap}[n]$ (见习题 12.27)。另外, 用 12.6.2 节讨论的运算方法可以由 $\dot{x}[n]$ 完全求出 $\dot{x}_{min}[n]$ 和 $\dot{x}_{ap}[n]$, 正如在图 12.7 中所给出的。如果用 DFT 实现图 12.7 中的特征系统, 则这种分解只是近似的。但是, 若 DFT 的长度很长, 则近似误差会很小。图 12.21(a) 表示当使用 1024 点的 DFT 计算时 $x[n]$ 的复倒谱, 同时也从 $v[n]$ 中除去了一个采样时间的延迟, 因此相位在 π 处是连续的。图 12.2(b) 表示最小相位分量的复倒谱 $\dot{x}_{min}[n]$, 而图 12.2(c) 表示全通分量的复倒谱 $\dot{x}_{ap}[n]$, 它们都是通过图 12.7 的运算, 并且按照图 12.9(a) 实现 $D_+[\cdot]$ 的方式得到的。

按照图 12.9(b) 所示, 利用 DFT 来实现系统 $D_+^{-1}[\cdot]$, 可以近似给出最小相位分量和全通分量, 分别如图 12.22(a) 和 12.22(b) 所示。因为 $P(z)$ 的全部零点都在单位圆内, 所以 $P(z)$ 的全部零点均包括在最小相位 z 变换中, 或者等效地说, $p[n]$ 完全包括在 $\dot{x}_{min}[n]$ 中。这样, 最小相位分量就由 $v[n]$ 的最小相位分量的延迟且幅度加权的副本所组成。因此, 图 12.22(a) 的最小相位分量与图 12.12 中所示的输入很相似。由式(12.134) 可以证明, 全通分量为

$$x_{ap}[n] = 0.98\delta[n] + 0.0396(-0.98)^{n-1}u[n-1]. \quad (12.135)$$

图 12.22(b) 的结果十分接近于当 n 值很小时的这一理想结果, 此时序列幅度值很大。这个例子说明了由鲍曼(Bauman, 1985) 等人已经用于电声换能器的响应分析和特性研究中的分解技术。一种类似的技术也可以用于如像在数字滤波器设计中所需要的幅度平方函数的因式分解中(见习题 12.28)。

作为另一种最小相位/全通分解, 我们可以把 $X(z)$ 表示成一个最小相位 z 变换和一个最大相位 z 变换的乘积, 即

$$X(z) = X_{ma}(z)X_{mx}(z), \quad (12.136)$$

其中

$$X_{ma}(z) = \frac{(1+0.9z^{-15}+0.81z^{-30})}{(1-0.9e^{j\pi/6}z^{-1})(1-0.9e^{-j\pi/6}z^{-1})} \quad (12.137)$$

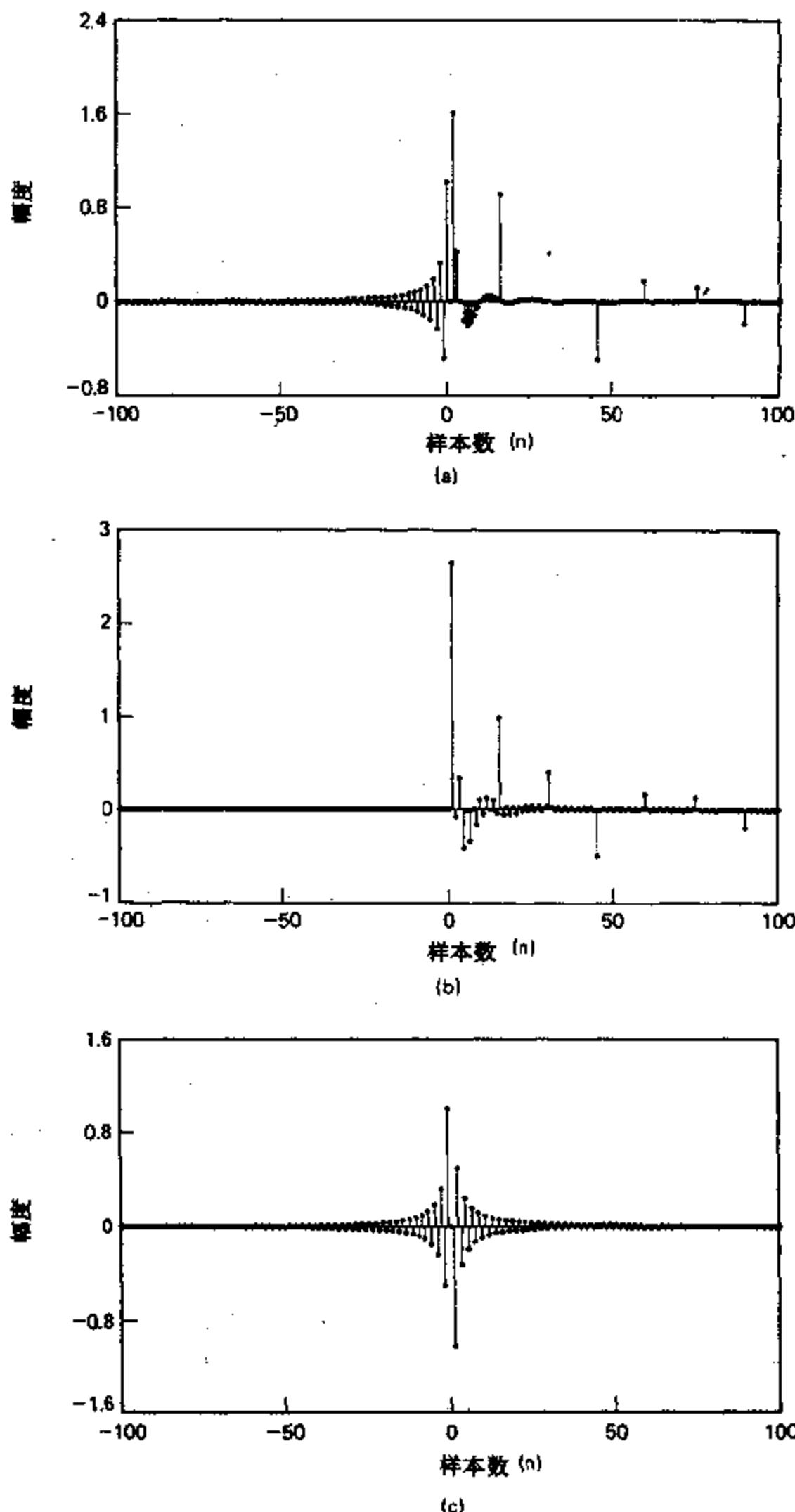


图 12.21 (a) $x[n] = x_{min}[n] * x_{ap}[n]$ 的复倒谱, (b) $x_{min}[n]$ 的复倒谱, (c) $x_{ap}[n]$ 的复倒谱.

$$X_{\text{ex}}(z) = 0.98 + z^{-1}. \quad (12.138)$$

利用第四章的部分分式展开法可以求出序列 $x_{mn}[n]$ 和 $x_{mx}[n]$, 并且利用 12.5 节的幂级数技术可以求出对应的复倒谱 $\hat{x}_{mn}[n]$ 和 $\hat{x}_{mx}[n]$ (见习题 12.27). 另外, 用 12.6.4 节

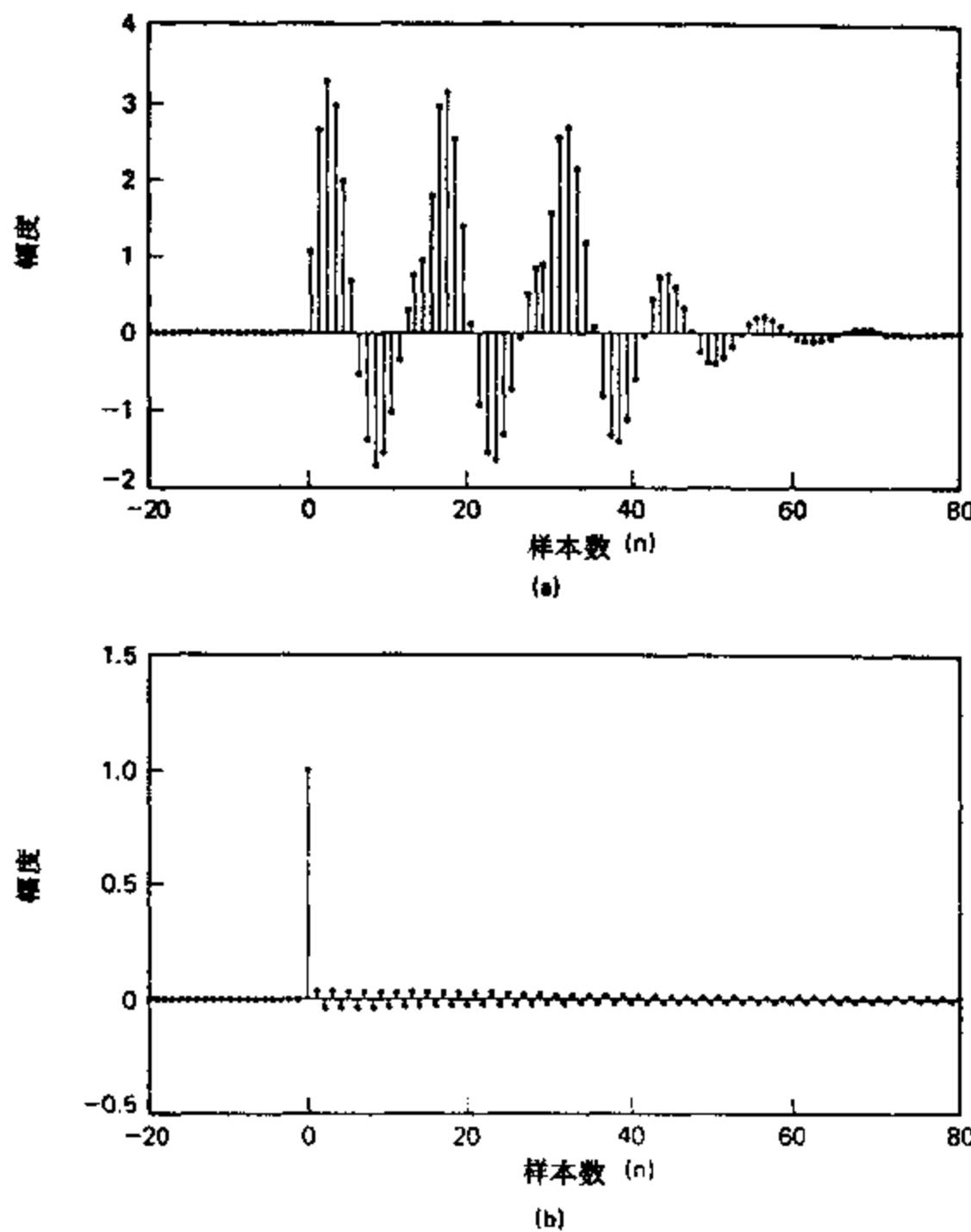


图 12.22 (a) 最小相位输出, (b) 按照图 12.7 中所述方式得到的全通输出.

讨论的运算方法可由 $\hat{x}[n]$ 完全求出 $\hat{x}_{mn}[n]$ 和 $\hat{x}_{mx}[n]$, 这就是曾在图 12.8 中所描绘的, 其中

$$\hat{x}_{mn}[n] = u[n] \quad (12.139)$$

和

$$\hat{x}_{mx}[n] = u[-n-1]. \quad (12.140)$$

也就是说, 最小相位序列现在由复倒谱的正时间部分来定义, 而最大相位部分由复倒谱的负时间部分来定义. 如果用 DFT 来实现图 12.8 中的特征系统, 则复倒谱的负时间部分就位于 DFT 区间的后半部分. 在这种情况下, 由于时间混叠, 只能近似区分最小相位分量和最大相位分量. 但是通过选择足够大的 DFT 长度, 可以使时间混叠误差很小. 图 12.21(a)给出了用 1024 点 DFT 计算出的 $x[n]$ 的复倒谱. 图 12.23 表示, 用式(12.137)和(12.138)以及如图 12.9(b)所示用 DFT 来实现的逆特征系统, 由图 12.21(a)的复倒谱得出的两个输出序列. 如前所述, 因为 $\hat{p}[n]$ 完全包含在 $\hat{x}_{mn}[n]$ 中, 所以相应的输出 $x_{mn}[n]$ 由最小相位序列的延迟且幅度加权的副本所组成, 并且看上去它与输入序列也十分相似. 然而, 认真比较图 12.22(a)和 12.23(a)可以看出, $x_{mn}[n] \neq x_{ms}[n]$. 由式(12.138)可知,

最大相位序列是

$$x_m[n] = 0.98\delta[n] + \delta[n-1]. \quad (12.141)$$

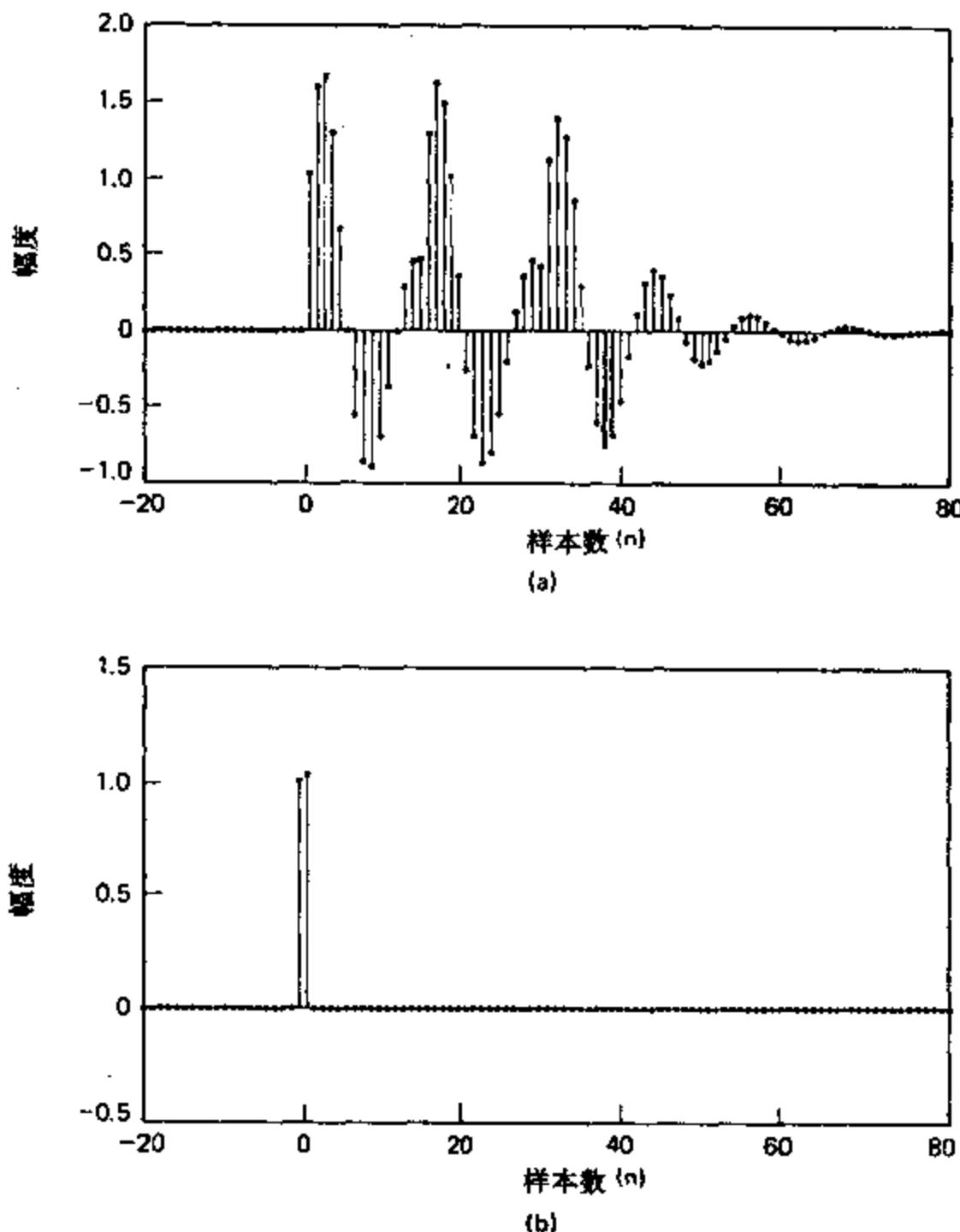


图 12.23 由图 12.8 中所示系统得出的(a) 最小相位输出,(b) 最大相位输出.

图 12.23(b)非常接近这一理想结果。(注意,移位是为了在相位无卷统计算中除去线性相位.)最小相位/最大相位分解技术已由史密斯和巴恩韦尔(Smith and Barnwell, 1986)用于语音分析和编码中完全重构滤波器组的设计与实现上.

12.8.6 推广

12.8.5 节中的例子认为,与一个冲激串卷积的简单复指数信号可以产生一串复指数信号的延迟且幅度加权的副本.这个模型表明了复倒谱和同态滤波的许多特点.

特别是,在与语音、通信和地震等应用相联系的许多更一般的模型中,合适的信号是由两个分量的卷积组成的.一个分量具有 $v[n]$ 的特性,特别是其傅里叶变换在频率上变化很慢;另一个分量具有 $p[n]$ 的特性,即傅里叶变换在频率上变化很快或呈准周期状态的某些回波信号或冲激串.这样,两种分量的贡献能在复倒谱或倒谱中区分开来.另外,复倒谱或倒谱应包括位于回波延迟整数倍处的冲激串.所以,同态滤波可以用来区分信号的

卷积分量,或者倒谱可以用于检测回波延迟.下一节我们将说明在语音分析的应用中,这些复倒谱一般特性的用途.

12.9 在语音处理中的应用

倒谱技术已经十分成功地用于语音分析.可以将以上的理论分析和在 12.8 节补充的例子以比较直接的方式推广到这一应用中,这一节主要讨论这方面的问题.

12.9.1 语音的模型

正如我们在 11.5.1 节中主要论述的,与声道激励的不同形式相对应的语音有三种基本类型.具体有:

- 浊音是声门张开和闭合引起的准周期脉冲气流激励声道而产生的声音;
- 摩擦音是先在声道某处形成一缩颈,然后迫使气流通过该缩颈形成湍流,产生一种类似噪声的激励而发出的声音;
- 爆破音是先把声道完全闭合,在闭合处后面形成压力,然后突然将压力释放而产生的声音.

在每一种情况下,语音信号都是由一个宽带激励来激励声道系统(声传输系统)而产生的.声道随时间十分缓慢地改变其形状,因此可将它看作是一个慢时变滤波器,该滤波器把其频率响应特性强加在激励的频谱上.声道的特性由它的自然频率(即所谓的共振峰)来表示,这些自然频率与它的频率响应中的谐振点相对应.

如果我们假设激励源和声道的形状是相互独立的,则可以构造出图 12.24 的离散时间模型作为采样的语音波形的一种表示.在这个模型中,假定语音信号的样本是一个时变离散时间系统的输出,该系统作为声道系统谐振的模型.系统激励的模式在周期脉冲和随机噪声之间转换,它取决于所要产生的声音的类型.

因为在连续的语音中,声道改变形状相当慢,所以有理由假设模型中的离散时间系统在 10ms 量级的时间间隔内,其性质是固定不变的.因此,离散时间系统在每个这样的时间间隔内可以用 IIR 系统的冲激响应,或频率响应,或一组系数来表征其特性.具体讲,声道系统函数的模型可以取如下形式:

$$V(z) = \frac{\sum_{k=0}^K b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^P a_k z^{-k}} \quad (12.142)$$

或等效地

$$V(z) = \frac{Az^{-K_0} \prod_{k=1}^{K_0} (1 - \alpha_k z^{-1}) \prod_{k=1}^{K_n} (1 - \beta_k z)}{\prod_{k=1}^{[P/2]} (1 - r_k e^{j\theta_k} z^{-1}) (1 - r_k e^{-j\theta_k} z^{-1})}, \quad (12.143)$$

其中量 $r_k e^{j\theta_k}$ 是声道的复自然频率,当然它取决于声道的形状,因此是时变的. $V(z)$ 的零点是考虑到有限长声门脉冲波形以及在产生鼻浊音和摩擦音时由于声道的缩颈而引起的传输零点.这类零点常常没有包括在模型内,因为仅仅从语音波形很难估计出它们的位置,

而且还因为已经证明(Atal and Hanauer, 1971),如果在只考虑声道谐振点所需要的极点数目之外加入额外的极点,我们就可以用无零点的模型来准确描述语音信号谱的形状. 在我们的分析中之所以包括了零点,是因为对于准确表示语音的复倒谱来说这是必须的. 注意,有可能包括位于单位圆外的零点.

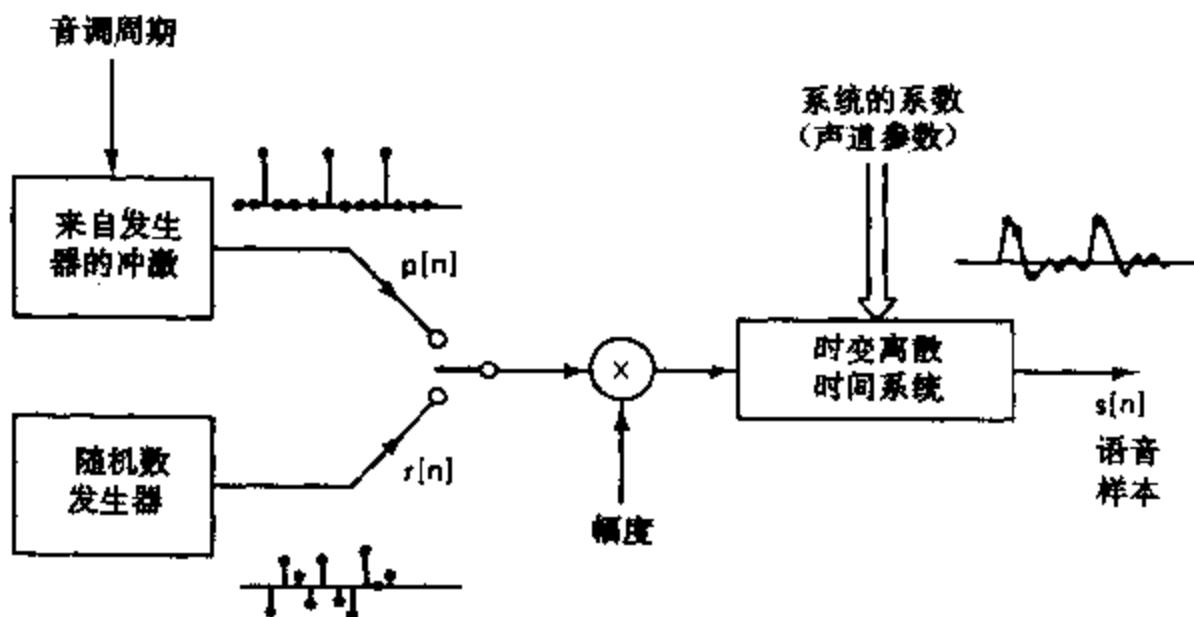


图 12.24 产生语音的离散时间模型.

声道系统由一个激励序列 $p[n]$ 来激励, 当建立浊音模型时该序列是一个冲激串, 而当建立如像摩擦音和爆破音之类的清音模型时该序列就是一个伪随机噪声序列.

语音处理的许多基本问题可简化成图 12.24 所示模型的参数估计问题. 这些参数如下:

- 式(12.142)中 $V(z)$ 的系数或式(12.143)中极点和零点的位置;
- 声道系统的激励模式, 即周期冲激串或随机噪声;
- 激励信号的振幅;
- 语音激励的周期(若语音是周期的).

如果假设在一个短的时间间隔内模型是有效的, 则同态解卷积可以用于这些参数的估计, 因此一小段长度为 L 个样本的采样语音信号可以看作是如下卷积形式:

$$s[n] = v[n] * p[n], \quad 0 \leq n \leq L-1, \quad (12.144)$$

式中 $v[n]$ 是声道的冲激响应, $p[n]$ 可以是周期的(对于浊音)也可以是随机噪声(对于非浊音). 显然, 由于脉冲发生在分析区间开始之前并且结束在分析区间结束之后, 因此式(12.144)的模型在该区间的两端是不成立的. 为了减小在区间的端点处模型的“不连续性”的影响, 可令语音信号 $s[n]$ 与两端平滑地递减到零的窗 $w[n]$ 相乘. 这样, 同态解卷积系统的输入是

$$x[n] = w[n]s[n]. \quad (12.145)$$

首先让我们来研究一下浊音的情况. 如果与 $v[n]$ 的变化相比 $w[n]$ 变化很慢, 则分析可明显简化, 只要假设

$$x[n] = v[n] * p_w[n], \quad (12.146)$$

其中

$$p_w[n] = w[n]p[n]. \quad (12.147)$$

(见 Oppenheim and Schafer, 1968.) 不用这一假设而进行详细的分析, 也可以得出基本相

同的结论(Verhelst and Steenhaut, 1986). 对于浊音, $p[n]$ 是如下形式的冲激串:

$$p[n] = \sum_{k=0}^{M-1} \delta[n - kN_0], \quad (12.148)$$

因此

$$p_w[n] = \sum_{k=0}^{M-1} w[kN_0] \delta[n - kN_0], \quad (12.149)$$

其中我们已假定音调周期为 N_0 , 并且所用的窗覆盖了 M 个周期.

$x[n]$, $v[n]$ 和 $p_w[n]$ 的复倒谱之间的关系为

$$\hat{x}[n] = \hat{v}[n] + \hat{p}_w[n]. \quad (12.150)$$

为了得到 $\hat{p}_w[n]$, 我们定义一个序列

$$w_{N_0}[k] = \begin{cases} w[kN_0], & k = 0, 1, \dots, M-1, \\ 0, & \text{其它}, \end{cases} \quad (12.151)$$

它的傅里叶变换为

$$P_w(e^{j\omega}) = \sum_{k=0}^{M-1} w[kN_0] e^{-jk\omega} = W_{N_0}(e^{j\omega N_0}). \quad (12.152)$$

因此, $P_w(e^{j\omega})$ 和 $\hat{P}_w(e^{j\omega})$ 都是周期的, 其周期为 $2\pi/N_0$, 而且 $p_w[n]$ 的复倒谱是

$$\hat{p}_w[n] = \begin{cases} \hat{w}_{N_0}[n/N_0], & n = 0, \pm N_0, \pm 2N_0, \dots, \\ 0, & \text{其它}. \end{cases} \quad (12.153)$$

由浊音信号的周期性引起的复对数的周期性, 在复倒谱中表现为间隔是 N_0 个样本(音调周期)整数倍的冲激. 如果序列 $w_{N_0}[n]$ 是最小相位的, 则当 $n < 0$ 时 $\hat{P}_w[n]$ 将为零. 否则, 无论正值或负值时 $\hat{P}_w[n]$ 将是间隔为 N_0 的冲激函数. 在两种情况下我们均会发现, $\hat{P}_w[n]$ 在 $|n| \geq N_0$ 的区间内对 $\hat{x}[n]$ 有贡献.

由 $V(z)$ 复对数的幂级数展开可以证明, $v[n]$ 对复倒谱的贡献是

$$\hat{v}[n] = \begin{cases} \sum_{k=1}^{K_0} \frac{\beta_k^{-n}}{n}, & n < 0, \\ \log |A|, & n = 0, \\ - \sum_{k=1}^{K_0} \frac{\alpha_k^n}{n} + \sum_{k=1}^{\lfloor P/2 \rfloor} \frac{2r_k^n}{n} \cos(\theta_k n), & n > 0. \end{cases} \quad (12.154)$$

如同 12.8.1 节中的比较简单的例子一样, 式(12.143)中的 z^{-K_0} 项表示线性相位因子, 该项已在求出无卷绕相位和复倒谱时被除去. 因此, 式(12.154)中的 $\hat{v}[n]$ 更准确地说, 应是 $v[n+K_0]$ 的复倒谱.

从式(12.154)我们可以看出, 声道响应对复倒谱的贡献覆盖了 $-\infty < n < \infty$ 全部范围, 但是集中在原点附近. 我们也注意到, 因为声道的谐振点由位于单位圆内的极点表示, 所以当 $n < 0$ 时它们对复倒谱的贡献为零.

12.9.2 语音同态解卷积举例

对于用 10000 样本/秒采样的语音, 音调周期 N_0 的范围大约是从 25 个样本(对于高音调语音)一直到 150 个样本(对于很低音调的语音). 因为复倒谱 $\hat{v}[n]$ 的声道分量衰减很快, 所以 $\hat{p}_w[n]$ 的峰比 $\hat{v}[n]$ 突出. 换句话说, 在复对数中声道分量是慢变化的, 而激励分量是快变化的. 图 12.25 举例说明了这一点. 图 12.25(a) 表示一段加了哈明窗的语音,

而图 12.25(b)表示图(a)中信号的 DFT 的复对数(对数幅值和无卷绕相位)^{*}. 注意, 快变化(几乎是周期性的)分量是由 $p_w[n]$ 引起的, 而慢变化分量是由 $v[n]$ 引起的. 这些特性均表现在图 12.25(c)的复倒谱中, 它的表现形式是在大约 8ms(输入语音段的周期)整数倍处由 $p_w[n]$ 造成的冲激和在 $|nT| < 5\text{ms}$ 的区域内由 $\hat{v}[n]$ 产生的样本.

和前一节一样, 可用频率不变滤波来分离语音信号卷积模型的分量. 用复对数的低通

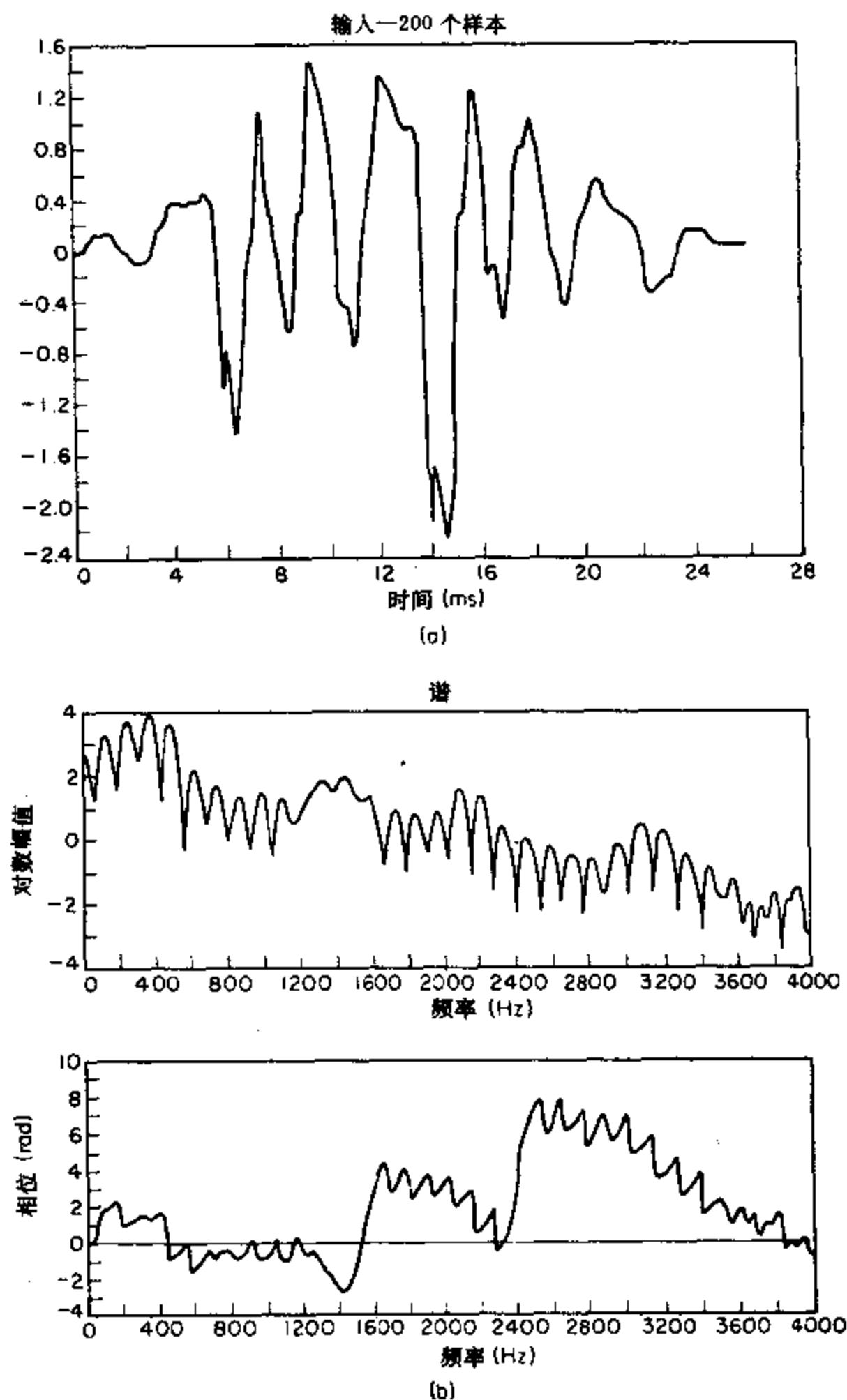


图 12.25 (a) 加有哈明窗的语音段. (b) (a)的离散傅里叶变换的复对数.

* 在本节所有的图中, 为了作图方便起见, 已把所有序列的样本连接起来.

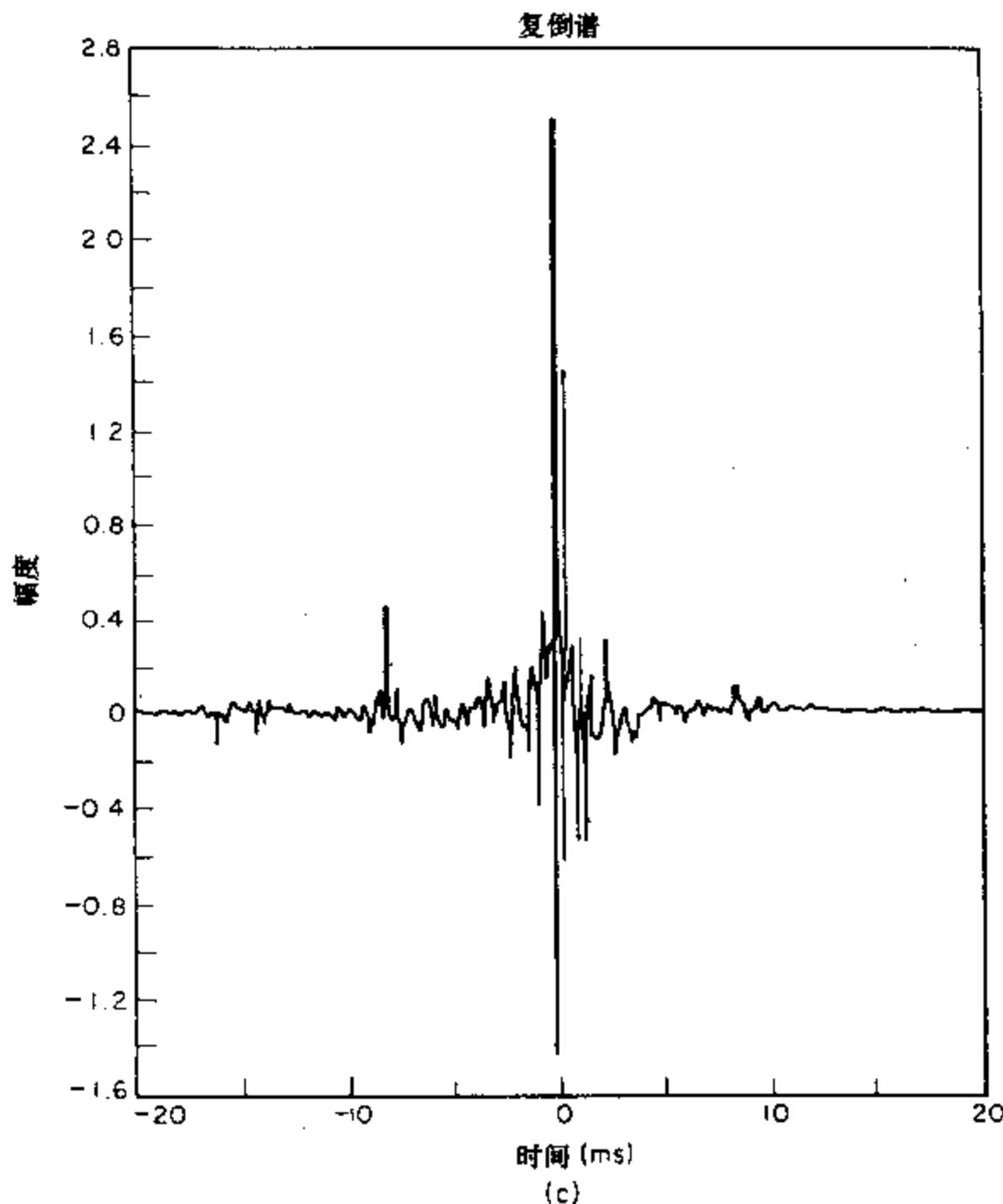


图 12.25(续) (c) (a) 的复倒谱.

滤波来恢复 $v[n]$ 的近似值, 用高通滤波来得到 $p_w[n]$. 图 12.26 给出一个例子(Oppenheim et al., 1968). 图 12.26(a) 表示一个元音的 256 个样本, 这段语音乘以哈明窗, 并且如图 12.9(a) 所示用 DFT 来计算其复倒谱. 复倒谱示于图 12.26(b) 中. 图 12.26(c) 是 $p_w[n]$ 的近似值, 它是通过将如图 12.18(b) 所示 $N_1=40$ 和 $N_2=40$ 的对称高通频率不变滤波器加到复倒谱上而得到的. 另一方面, 图 12.26(d) 表示 $v[n]$ 的近似值, 它是利用如图 12.18(a) 所示的低通频率不变滤波器得到的, 其 N_1 和 N_2 值同前. 在上述两种情况下, 逆特征系统是用 1024 点 DFT 如图 12.9(b) 所示来实现的. 最后, 为了说明解卷积的有效性, 图 12.26(e) 给出图(d) 所示序列与出现在图(c) 的峰点处的等幅冲激串相卷积的结果. 正如我们比较图 12.26(a) 和 (e) 所看出的, 重构的波形十分接近于原始信号.

12.9.3 估计语音模型的参数

虽然同态解卷积可以成功地用于分离一段语音波形的各分量, 但是在许多语音处理的应用中, 我们只关心如何估计在语音信号参数表示中的那些参数. 因为语音信号的特性随时间变化较慢, 所以通常在大约 10ms 的时间间隔内估计图 12.24 的模型参数. 在这种情况下, 第十一章讨论的依时傅里叶变换可作为依时同态分析的基础. 例如, 查看所选出的大约每 100 个样本的语音段可能就足以确定(浊音的或非浊音的)模型激励的模式以及

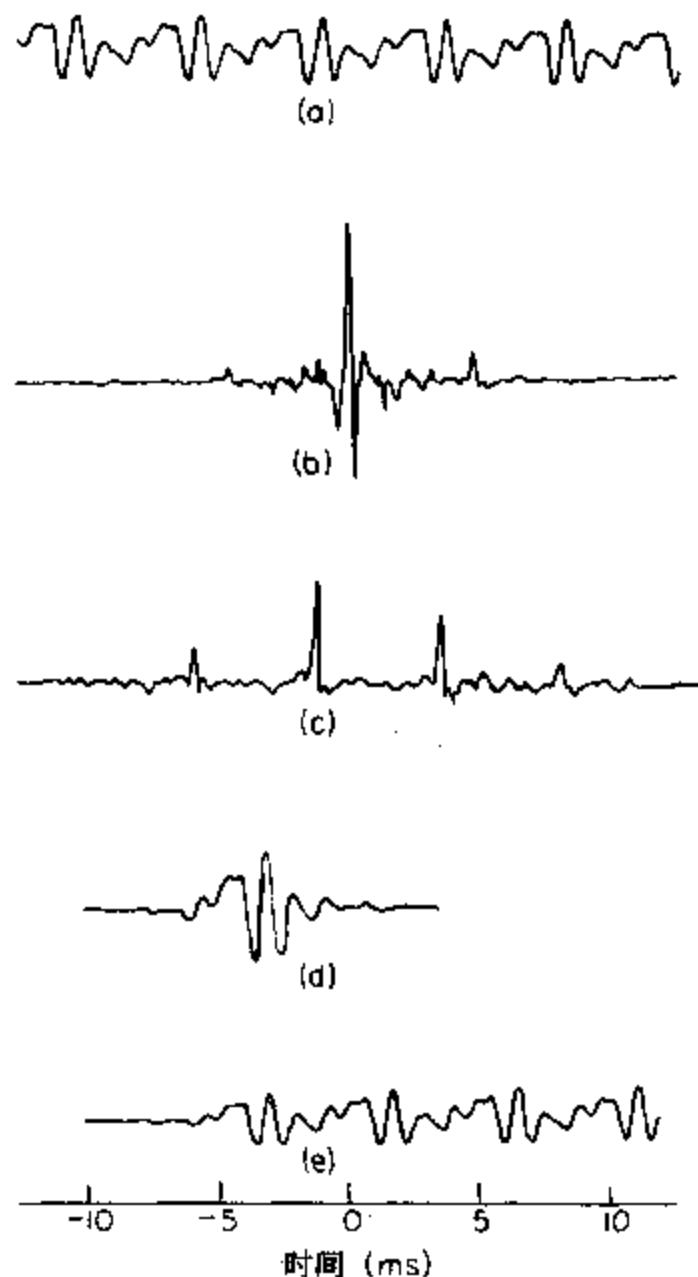


图 12.26 (a) 一段元音波形. (b) (a)的复倒谱. (c) 恢复出的激励函数 $p_w[n]$. (d) 恢复出的声道冲激响应 $v[n]$.
(e) 利用(d)的冲激响应和由(d)测量出的音调周期合成出的语音.

浊音的音调周期. 或者我们可能希望去跟踪声道谐振点(共振峰)的变化. 对于这类问题, 使用倒谱可以避免难度大的相位计算, 因为它只要求傅里叶变换幅度的对数. 由于倒谱是复倒谱的偶部, 所以我们在前面的讨论中指出, $c_x[n]$ 的低时部分应当对应于语音段傅里叶变换对数幅度的慢变化分量, 而对于浊音来说倒谱应当包含音调周期整数倍处的冲激. 图 12.27 给出了一个例子.

图 12.27(a)表示用倒谱估计语音参数时涉及到的运算. 图 12.27(b)给出浊音的一个典型结果. 加窗后的语音信号记作 A, $\log |X[k]|$ 记作 C, 以及倒谱 $c_r[n]$ 记作 D. 在倒谱大约 8ms 处的峰表示这段语音是浊音, 周期约为 8ms. 截取把在 8ms 以下利用截取由频率不变低通滤波得到的平滑谱或者谱包络记作 E, 并且重叠在 C 上. 对于图 12.27(c)所示的清音来说, 情况类似, 所不同的是, 输入语音段中激励分量的随机性引起了在 $\log |X[k]|$ 中快变化的随机分量, 而不是周期分量. 这样, 在倒谱中低时分量和先前一样对应于声道系统函数. 但是, 因为在 $\log |X[k]|$ 中的快变化不是周期的, 所以在倒谱中不会出现很强的谱峰. 因此, 倒谱中在通常音调周期的范围内谱峰的有无, 可以作为一种很好的浊音/清音检测器和音调周期估计器. 在清音情况下, 低通频率不变滤波的结果与在浊音情况下类似. 所得到的平滑谱包络的估计为 E 所示.

在语音分析的应用中,图 12.27(a)的运算重复地用于连续的各段语音波形。语音段的长度必须仔细选择。如果段太长,则语音信号的特性在语音段的时间内变化将太大。如果段太短,就没有足够长的信号来得出有关周期性的显著标志。通常取段的长度约为语信

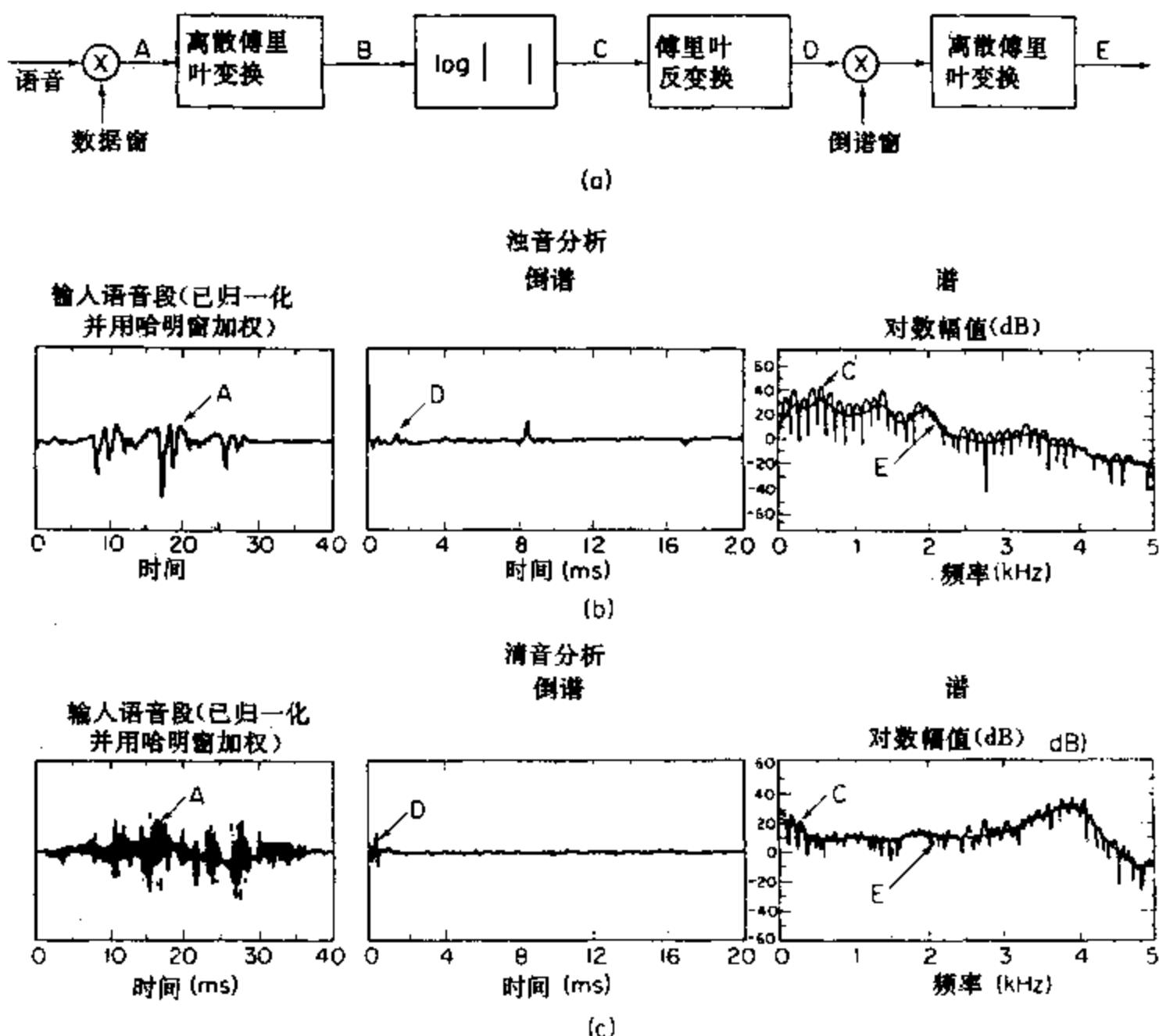


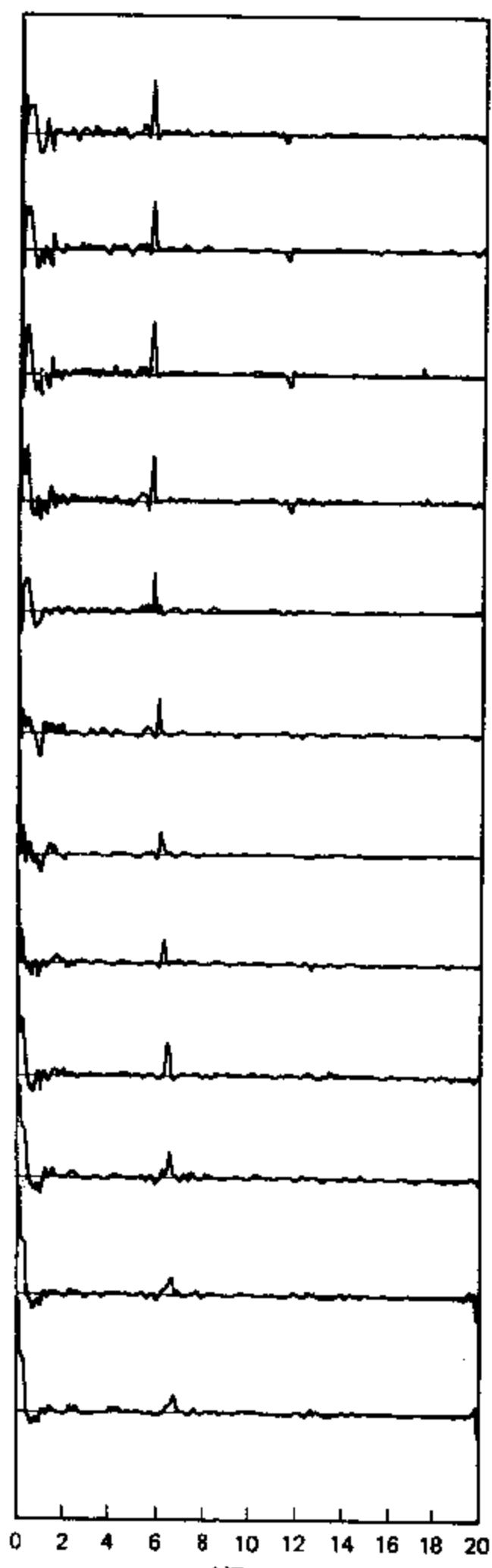
图 12.27 (a) 语音信号倒谱分析的系统。(b) 对浊音的分析。(c) 对清音的分析。

号平均音调周期的 3~4 倍。图 12.28 给出了如何将倒谱用于音调检测和声道谐振频率估计的一个例子。图 12.28(a)表示对于所选取的 20ms 长语音波形段而计算出的倒谱序列。语音段的全部倒谱序列都存在着显著的谱峰,它说明该段语音全部都是浊音。倒谱谱峰的位置表明每个相应的时间区间内音调周期的值。图 12.28(b)表示对数幅度谱以及相应的平滑谱,它们重叠在一起。用直线把利用渐近峰选算法得到的声道谐振点的估计值连接起来。(见 Schafer and Rabiner, 1970.)

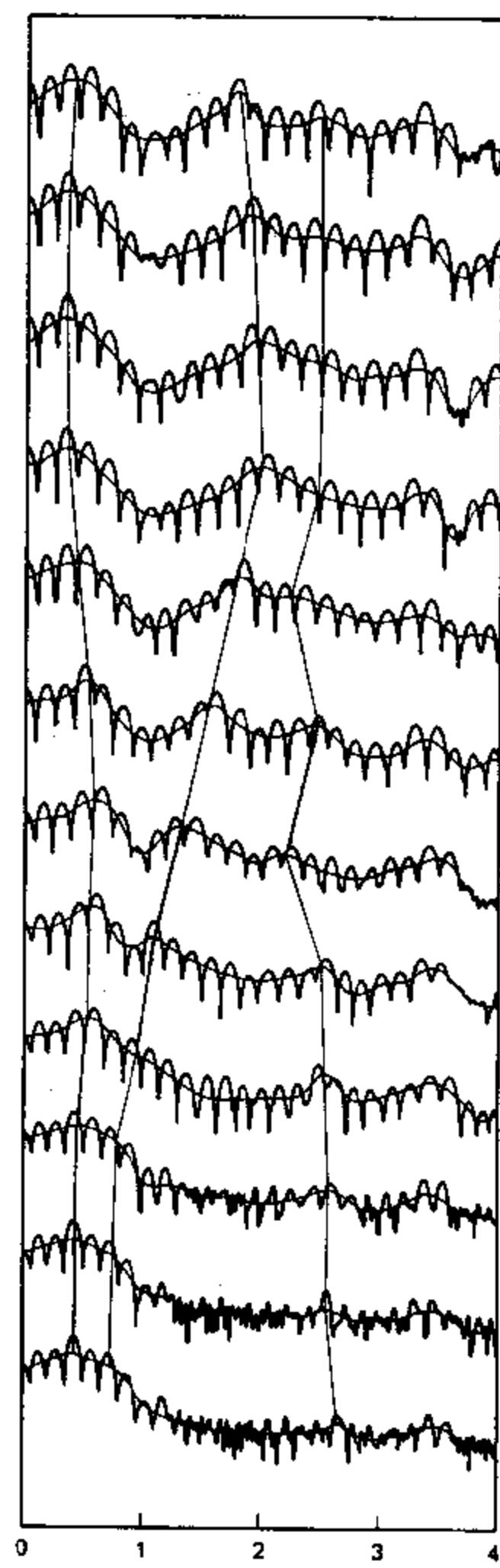
12.9.4 应用

正如前面所指出的,倒谱分析方法已在语音处理问题中获得了广泛的应用。最成功地应用之一是音调检测(Noll, 1967)。该方法还成功地用于对语音信号低比特率编码的语音分析/综合系统(Oppenheim, 1969b; Schafer and Rabiner, 1970)。

语音的倒谱表示也已经相当成功地用于和语音处理有关的模式识别问题中,如像讲话人的辨识(Atal, 1976),讲话人的确认(Furui, 1981)和语音识别(Davis and Mermel-



(a)



(b)

图 12.28 对于连续浊音段的(a)倒谱和(b)对数谱

stein, 1980) 等. 虽然线性预测分析技术是获得语音模型中声道分量表示最常用的方法, 但是对于在模式识别问题中的应用, 线性预测模型的表示常常变换为倒谱的表示 (Schroeder, 1981; Juang et al., 1987). 这种变换将在习题 12.32 中研究.

12.10 小结

在本章中我们讨论了倒谱分析和同态解卷积技术. 我们主要侧重于复倒谱的定义和性质, 以及在复倒谱计算中的一些实际问题. 用理想化的例子来说明如何使用倒谱分析和同态解卷积来分离卷积分量. 最后还较详细地讨论了倒谱分析技术在语音处理问题中的应用, 作为将这种技术用于实际问题的一个示例.

习题

12.1 下列每一种运算或系统都是同态的, 并指明了输入运算. 请确定各输出运算.

系统定义 $T\{x[n]\}$	输入运算
(a) $y[n] = 2x[n]$	加法
(b) $y[n] = 2x[n]$	乘法
(c) $X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n}$	加法
(d) $X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n}$	卷积
(e) $X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n}$	乘法
(f) $y[n] = (x[n])^2$	乘法
(g) $y[n] = x[n] $	乘法
(h) $y[n] = e^{x[n]}$	加法
(i) $y[n] = e^{x[n]}$	乘法

- 12.2 (a) 考虑一个离散时间系统, 它在通常意义上是线性的. 如果当输入为 $x[n]$ 时, $y[n] = T\{x[n]\}$ 是输出, 则零信号 $\mathbf{0}[n]$ 是可以加在 $x[n]$ 上的信号, 使得 $T\{x[n] + \mathbf{0}[n]\} = y[n] + T\{\mathbf{0}[n]\} = y[n]$. 对于通常的线性系统, 什么是零信号?
 (b) 考虑一个同态离散时间系统 $y[n] = T\{x[n]\}$, 它用乘法作为同时连接输入和输出信号的运算. 该系统的零信号是什么, 即什么是信号 $\mathbf{0}[n]$ 使得 $T\{x[n] * \mathbf{0}[n]\} = y[n] * T\{\mathbf{0}[n]\} = y[n]$?
 (c) 考虑一个同态离散时间系统 $y[n] = T\{x[n]\}$, 它用卷积作为同时连接输入和输出信号的运算. 什么是该系统的零信号, 即什么是信号 $\mathbf{0}[n]$ 使得 $T\{x[n] * \mathbf{0}[n]\} = y[n] * T\{\mathbf{0}[n]\} = y[n]$?

12.3 研究下列系统.

$$\begin{aligned} \text{傅里叶变换: } X(e^{j\omega}) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-jn\omega} \\ n \text{ 次幂: } y[n] &= (x[n])^n \\ \text{调制器: } y[n] &= g[n]x[n] \end{aligned}$$

(a) 这些系统中哪些可以是同态系统? 如果是, 说明输入和输出的运算, 并且画出如图 12.2 的相应规范解卷积.

(b) 同态系统的串联是否是同态系统? 说明保证同态系统的串联是同态系统的一般条件. [提示: 考虑将上述系统串联在一起.]

12.4 一个离散时间系统由如下输入/输出关系定义:

$$y[n] = (x[n])^\gamma,$$

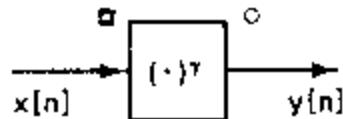


图 P12.4

式中 γ 为实数. 这个系统如图 12.4 所示. 如果假设 $(x[n])^\gamma$ 可被唯一地定义, 你能否求出运算 \square , \circ , \cdot 和 \circlearrowleft 使得

$$(a \square x_1[n] \square b \square x_2[n])^\gamma = a \square (x_1[n])^\gamma \circ b \square (x_2[n])^\gamma?$$

如果不行, 请解释原因.

12.5 考虑图 P12.5 所示的系统, 其中 S_1 是一个 LTI 系统, 其冲激响应为 $h_1[n]$, S_2 是一个以卷积作为输入和输出运算的同态系统, 即变换 $T_2\{\cdot\}$ 满足

$$T_2\{w_1[n] * w_2[n]\} = T\{w_1[n]\} * T_2\{w_2[n]\}.$$

假定输入 $x[n]$ 的复倒谱为 $\hat{x}[n] = \delta[n] + \delta[n-1]$. 求出 $h_1[n]$ 的一个闭合形式表示式, 使得输出量是 $y[n] = \delta[n]$.

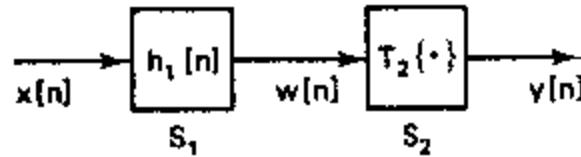


图 P12.5

12.6 如果我们认为传统线性系统的目的是从加性联合中分离出信号, 则图 P12.6 所示系统的目的是什么? 系统 L_1 和 L_2 表示传统线性系统.

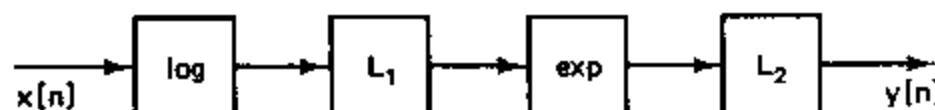


图 P12.6

12.7 令 $x_1[n]$ 和 $x_2[n]$ 代表两个序列, $\hat{x}_1[n]$ 和 $\hat{x}_2[n]$ 为它们相应的复倒谱. 如果 $x_1[n] * x_2[n] = \delta[n]$, 试确定 $\hat{x}_1[n]$ 和 $\hat{x}_2[n]$ 之间的关系.

12.8 考虑一类稳定的实序列, 其 z 变换有如下形式:

$$X(z) = |A| \frac{\prod_{k=1}^{M_1} (1 - a_k z^{-1}) \prod_{k=1}^{M_2} (1 - b_k z)}{\prod_{k=1}^{N_1} (1 - c_k z^{-1}) \prod_{k=1}^{N_2} (1 - d_k z)},$$

式中 $|a_k|, |b_k|, |c_k|, |d_k| < 1$. 令 $\hat{x}[n]$ 代表 $x[n]$ 的复倒谱.

(a) 假设对于所有的 n 有 $\hat{x}[n] = 0$, 求 $x[n]$.

(b) 设 $y[n] = x[-n]$, 利用 $\hat{x}[n]$ 求 $\hat{y}[n]$.

(c) 如果 $x[n]$ 是因果的, 它也是最小相位的吗? 说明理由.

(d) 假设 $x[n]$ 是一个有限长序列, 使得

$$X(z) = |A| \prod_{k=1}^{M_1} (1 - a_k z^{-1}) \prod_{k=1}^{M_2} (1 - b_k z),$$

式中 $|a_k| < 1$ 和 $|b_k| < 1$. 函数 $X(z)$ 有单位圆内和单位圆外的零点. 假定我们希望确定 $y[n]$ 使得 $|Y(e^{j\omega})| = |X(e^{j\omega})|$ 并且 $Y(z)$ 没有在单位圆外的零点. 实现这一目标的一种方法如图 P12.8 所示. 求所需要的序列 $\ell[n]$. 图 P12.8 所示系统的一种可能应用是通过把图 P12.8 的变换用于系统函数分母的系数序列, 使得一个不稳定系统稳定化.

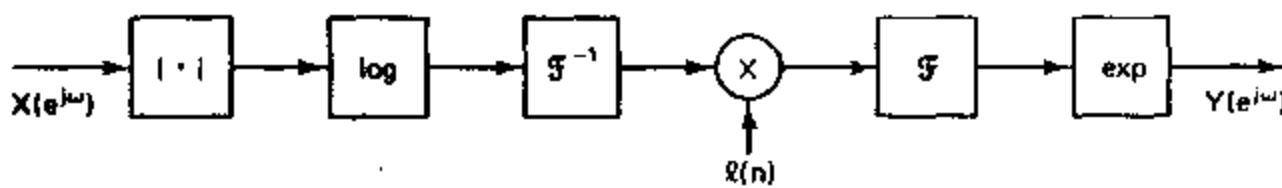


图 P12.8

- 12.9** 在研究卷积同态系统的实现中, 我们把注意力集中到具有式(12.53)形式的有理 z 变换的输入信号上. 如果一个输入序列 $x[n]$ 具有有理 z 变换, 但是或者有一个负增益常数, 或者有用式(12.53)不能表示的适量延迟, 则通过把 $x[n]$ 适当地平移并且乘以 -1 , 我们可以得到式(12.53)形式的 z 变换. 然后就可能用式(12.54)来计算复倒谱.

假设 $x[n] = \delta[n] - 2\delta[n-1]$, 并且定义 $y[n] = ax[n-r]$, 其中 $a = \pm 1$ 且 r 为整数. 求使得 $Y(z)$ 为式(12.53)所示形式的 a 和 r , 然后再求 $\hat{y}[n]$.

- 12.10** 在 12.5 节中我们曾指出, 计算复倒谱之前, 应当从无卷绕相位曲线中除去线性相位的贡献. 本题就涉及到, 由于在式(12.50)中有因子 z^r 而没有除去线性相位分量的影响.

具体讲, 假定在图 12.4(a)中卷积特征系统的输入是 $x[n] = \delta[n+r]$. 证明正式应用图 12.4(a)中的运算是会得出

$$\hat{x}[n] = \begin{cases} r \frac{\cos(\pi n)}{n}, & n \neq 0, \\ 0, & n = 0. \end{cases}$$

从这一结果可以清楚看到除去相位中的线性相位分量的优点, 因为当 r 较大时这个分量将支配复倒谱.

- 12.11** 假设 $s[n]$ 的 z 变换是

$$S(z) = \frac{\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1 - \frac{1}{4}z\right)}{\left(1 - \frac{1}{3}z^{-1}\right)\left(1 - \frac{1}{5}z\right)}.$$

试确定 $ns[n]$ 的 z 变换的极点位置, 在 $|z|=0$ 或 ∞ 处的极点除外.

- 12.12** 假定 $y[n]$ 的复倒谱是 $\hat{y}[n] = \hat{s}[n] + 2\delta[n]$. 利用 $s[n]$ 求 $y[n]$.
- 12.13** 确定 $x[n] = 2\delta[n] - 2\delta[n-1] + 0.5\delta[n-2]$ 的复倒谱. 如果需要的话, 你可以将 $x[n]$ 移位或改变其符号.
- 12.14** 假设稳定序列 $x[n]$ 的 z 变换为

$$X(z) = \frac{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}{1 + \frac{1}{2}z},$$

并假定稳定序列 $y[n]$ 有复倒谱 $\hat{y}[n] = \hat{x}[-n]$, 其中 $\hat{x}[n]$ 是 $x[n]$ 的复倒谱. 求 $y[n]$.

- 12.15** 在第四章中已经表明, 如果当 $n < 0$ 时 $x[n] = 0$, 则

$$x[0] = \lim_{z \rightarrow \infty} X(z).$$

这个结果称为右边序列的初始值定理.

- (a) 证明对于左边序列, 即当 $n > 0$ 时 $x[n] = 0$ 的序列, 有相似的结果.
(b) 用初始值定理证明, 如果 $x[n]$ 是最小相位序列, 则 $\dot{x}[0] = \log(x[0])$.
(c) 用初始值定理证明, 如果 $x[n]$ 是最大相位序列, 则 $\dot{x}[0] = \log(x[0])$.
(d) 用初始值定理证明, 当 $X(z)$ 由式(12.53)给出时, 则 $\dot{x}[0] = \log|A|$. 这个结果与(b)和(c)的结果一致吗?

12.16 考虑一个序列 $x[n]$, 具有复倒谱 $\dot{x}[n]$, 使得 $\dot{x}[n] = -\dot{x}[-n]$, 试确定量

$$E = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x^2[n].$$

12.17 研究一个稳定的、偶双边实序列 $h[n]$, $h[n]$ 的傅里叶变换对于所有的 ω 均为正值, 即

$$H(e^{j\omega}) > 0, \quad -\pi < \omega \leq \pi.$$

假定 $h[n]$ 的 z 变换存在, 没有假定 $H(z)$ 是有理的.

- (a) 证明存在一个最小相位信号 $g[n]$, 使得

$$H(z) = G(z)G(z^{-1}),$$

式中 $G(z)$ 是序列 $g[n]$ 的 z 变换, 它具有当 $n < 0$ 时 $g[n] = 0$ 的性质. 分别用显式说明 $h[n]$ 和 $g[n]$ 之间, 即 $h[n]$ 和 $g[n]$ 的倒谱之间的关系.

- (b) 已知一稳定信号 $s[n]$, 具有有理 z 变换

$$S(z) = \frac{(1-2z^{-1})(1-\frac{1}{2}z^{-1})}{(1-4z^{-1})(1-\frac{1}{3}z^{-1})}.$$

定义 $h[n] = s[n] * s[-n]$. 利用 $S(z)$ 求 $G(z)$ ($G(z)$ 与(a)中相同).

- (c) 考虑图 P12.17 中的系统, 其中 $\ell[n]$ 定义为

$$\ell[n] = u[n-1] + (-1)^n u[-n-1].$$

确定 $x[n]$ 的最一般的条件, 使得对所有的 n 有 $y[n] = x[n]$.

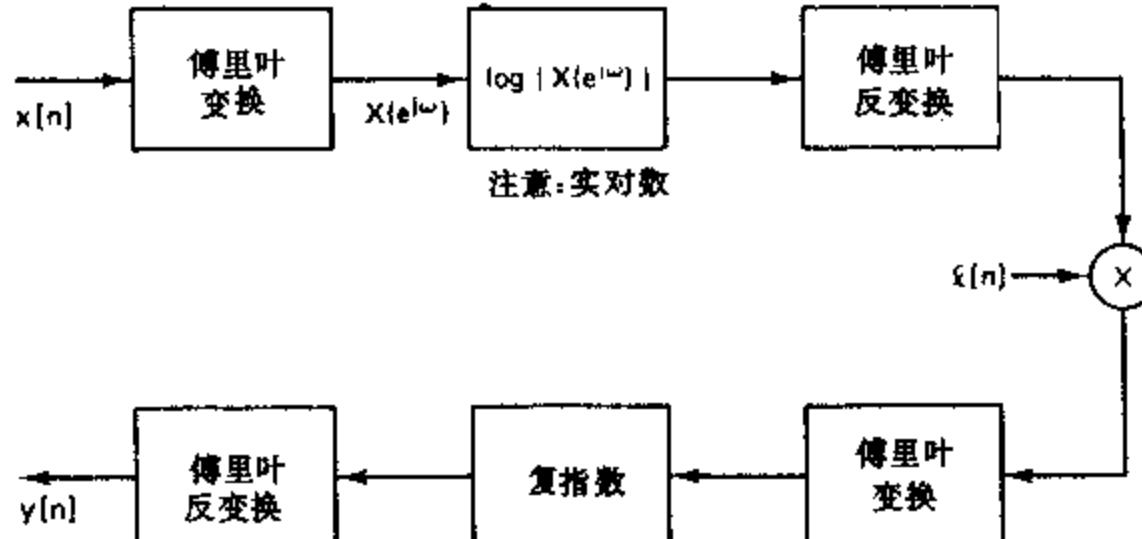


图 P12.17

12.18 研究一个最大相位信号 $x[n]$.

- (a) 证明最大相位信号的复倒谱 $\dot{x}[n]$ 与它的倒谱 $c_x[n]$ 之间有如下关系:

$$\dot{x}[n] = c_x[n] \mathcal{L}_{\max}[n],$$

式中 $\mathcal{L}_{\max}[n] = 2u[-n] - \delta[n]$.

- (b) 利用(a)中的关系式证明

$$\arg\{X(e^{j\omega})\} = \frac{1}{2\pi} \oint_{-\pi}^{\pi} \log|X(e^{j\theta})| \cot\left(\frac{\omega-\theta}{2}\right) d\theta.$$

- (c) 还证明

$$\log |X(e^{j\omega})| = \hat{x}[0] - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \arg\{X(e^{j\theta})\} \cot\left(\frac{\omega - \theta}{2}\right) d\theta.$$

- 12.19 考虑一个有傅里叶变换 $X(e^{j\omega})$ 和复倒谱 $\hat{x}[n]$ 的序列 $x[n]$. 新的信号 $y[n]$ 由同态滤波得到, 其中

$$\hat{y}[n] = \{\hat{x}[n] - \hat{x}[-n]\}u[n-1].$$

- (a) 证明 $y[n]$ 是一个最小相位序列.
 (b) $Y(e^{j\omega})$ 的相位是什么?
 (c) 求出 $\arg[Y(e^{j\omega})]$ 和 $\log|Y(e^{j\omega})|$ 之间的关系.
 (d) 如果 $x[n]$ 是最小相位的, $y[n]$ 与 $x[n]$ 有何关系?
- 12.20 式(12.67)和(12.70)是递推关系式, 它们可以用来计算当输入序列分别是最小相位和最大相位时 $\hat{x}[n]$ 的复倒谱.

- (a) 用式(12.67)递推地计算序列 $x[n] = a^n u[n]$ 的复倒谱, 其中 $|a| < 1$.
 (b) 用式(12.70)递推地计算序列 $x[n] = \delta[n] - a\delta[n+1]$ 的复倒谱, 其中 $|a| < 1$.

- 12.21 式(12.67)表示序列 $x[n]$ 和它的复倒谱 $\hat{x}[n]$ 之间的递推关系. 由式(12.67)证明, 对于最小相位输入, 特征系统 $D_z[\cdot]$ 相当于一个因果系统; 也就是证明, 对于最小相位输入, 当 $k \leq n$ 时 $\hat{x}[n]$ 只取决于 $x[k]$.

- 12.22 叙述计算一个因果序列 $x[n]$ 的准确步骤, 对于该序列有

$$X(z) = -z^3 \frac{(1 - 0.95z^{-1})^{2/5}}{(1 - 0.9z^{-1})^{7/13}}.$$

- 12.23 设 $\text{ARG}\{X(e^{j\omega})\}$ 表示 $X(e^{j\omega})$ 的相位主值, $\arg\{X(e^{j\omega})\}$ 表示 $X(e^{j\omega})$ 的连续相位. 假设对 $\text{ARG}\{X(e^{j\omega})\}$ 在频率 $\omega_k = 2\pi k/N$ 处采样得到 $\text{ARG}\{X[k]\} = \text{ARG}\{X(e^{j(2\pi/N)k})\}$, 如图 P12.23 所示. 假设对于所有的 k , $|\arg\{X[k]\} - \arg\{X[k-1]\}| < \pi$, 则对于 $0 \leq k \leq 10$, 求出如式(12.84)中的序列 $r[k]$ 以及 $\arg\{X[k]\}$, 并作图.

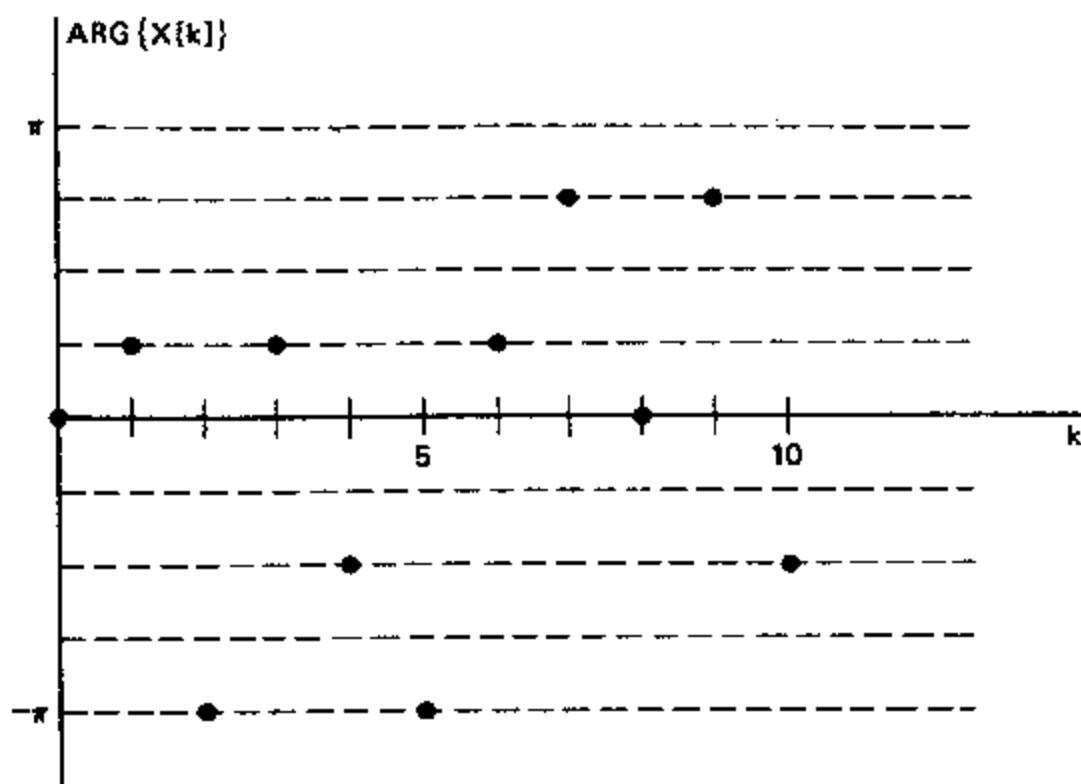


图 P12.23

- 12.24 序列

$$h[n] = \delta[n] + a\delta[n-n_0]$$

是含有回波的系统之冲激响应的简化模型.

- (a) 求这个序列的复倒谱 $\hat{h}[n]$. 画出该结果的草图.
 (b) 求倒谱 $c_h[n]$ 并画草图.

(c) 假设复倒谱的近似值是利用 N 点 DFT 按照式(12.80)计算出的. 对于 $n_0=N/6$ 的情况, 求近似值 $\hat{h}_p[n]$ ($0 \leq n \leq N-1$) 的闭合形式表示式. 假设相位无卷绕可以精确地实现. 如果 N 不能被 n_0 整除, 结果将如何?

(d) 当用式(12.99)计算时, 对于倒谱的近似值 $c_{rp}[n]$ ($0 \leq n \leq N-1$) 重复(c).

(e) 如果在倒谱近似值 $c_{rp}[n]$ 中利用最大的冲激来检测回波延迟 n_0 的值, N 必须取多大才能避免模糊? 假设用这个 N 值可以实现精确的相位无卷绕.

12.25 设 $x[n]$ 是一个有复倒谱为 $\hat{x}[n]$ 的有限长最小相位序列, 并定义另一个序列

$$y[n] = \alpha^* x[n]$$

它有复倒谱 $\hat{y}[n]$.

(a) 若 $0 < \alpha < 1$, 与 $\hat{x}[n]$ 相关的 $\hat{y}[n]$ 怎样?

(b) 应当如何选 α , 使 $y[n]$ 是不太长的最小相位序列?

(c) 应当如何选 α , 使得若线性相位项在计算复倒谱前除去, 则对于 $n > 0$, $\hat{y}[n] = 0$?

12.26 研究一个最小相位序列 $x[n]$, 其 z 变换为 $X(z)$ 且复倒谱为 $\hat{x}[n]$. 通过关系式

$$\hat{y}[n] = (\alpha^* - 1)\hat{x}[n]$$

定义一个新的复倒谱. 求 z 变换 $Y(z)$. 这个结果也是最小相位吗?

12.27 12.8.5 节中包括了对于一个最小相位序列与另一个序列的卷积, 如何利用复倒谱得到两种不同的分解的例子. 在该例中

$$X(z) = \frac{(0.98+z^{-1})(1+0.9z^{-15}+0.81z^{-30})}{(1-0.9e^{j\pi/6}z^{-1})(1-0.9e^{-j\pi/6}z^{-1})},$$

(a) 在第一种分解中, $X(z) = X_{min}(z)X_{ap}(z)$, 式中

$$X_{min}(z) = \frac{(1+0.98z^{-1})(1+0.9z^{-15}+0.81z^{-30})}{(1-0.9e^{j\pi/6}z^{-1})(1-0.9e^{-j\pi/6}z^{-1})}$$

和

$$X_{ap}(z) = \frac{(0.98+z^{-1})}{(1+0.98z^{-1})}.$$

利用对数项的幂级数展开式求复倒谱 $\hat{x}_{min}[n]$, $\hat{x}_{ap}[n]$ 和 $\hat{x}[n]$. 画出这些序列的图形, 并分别与图 12.21 中的图形加以比较.

(b) 在第二种分解中, $X(z) = X_{mn}(z)X_{mx}(z)$, 式中

$$X_{mn}(z) = \frac{(1+0.9z^{-15}+0.81z^{-30})}{(1-0.9e^{j\pi/6}z^{-1})(1-0.9e^{-j\pi/6}z^{-1})},$$

和

$$X_{mx}(z) = (0.98+z^{-1}).$$

利用对数项的幂级数展开式求复倒谱, 并证明 $\hat{x}_{mn}[n] \neq \hat{x}_{min}[n]$, 但是 $\hat{x}[n] = \hat{x}_{mn}[n] + \hat{x}_{mx}[n]$ 与(a)中的一样. 注意,

$$(1+0.9z^{-15}+0.81z^{-30}) - \frac{(1-(0.9)^3z^{-45})}{(1-0.9z^{-15})}.$$

12.28 设 $x[n]$ 是一个序列, 有 z 变换 $X(z)$ 和复倒谱 $\hat{x}[n]$. $X(z)$ 的幅度平方函数为

$$V(z) = X(z)X^*(1/z^*).$$

因为 $V(e^{j\omega}) = |X(e^{j\omega})|^2 \geq 0$, 所以能够计算与 $V(z)$ 对应的复倒谱 $\hat{v}[n]$ 而不用使相位无卷绕.

(a) 求出复倒谱 $\hat{v}[n]$ 和复倒谱 $\hat{x}[n]$ 之间的关系式.

(b) 用倒谱 $c_x[n]$ 来表示复倒谱 $\hat{v}[n]$.

(c) 求序列 $d[n]$ 使得

$$\hat{x}_{min}[n] = d[n]\hat{v}[n]$$

是最小相位序列 $x_{min}[n]$ 的复倒谱, 对 $x_{min}[n]$ 有

$$|X_{\min}(e^{j\omega})|^2 = V(e^{j\omega}).$$

(d) 假设 $X(z)$ 由式(12.53)给出, 利用(c)的结果和式(12.57)求最小相位序列的复倒谱, 并且进行反向计算, 求 $X_{\min}(z)$.

在(d)中所用到的技术通常可以用来得到一个幅度平方函数的最小相位因式分解.

12.29 设 $\hat{x}[n]$ 是 $x[n]$ 的复倒谱, 定义一个序列 $x_r[n]$ 为

$$x_r[n] = \begin{cases} x[n/N], & n=0, \pm N, \pm 2N, \dots, \\ 0, & \text{其它.} \end{cases}$$

证明 $x_r[n]$ 的复倒谱由下式给出:

$$\hat{x}_r[n] = \begin{cases} \hat{x}[n/N], & n=0, \pm N, \pm 2N, \dots, \\ 0, & \text{其它.} \end{cases}$$

12.30 假设 $s[n] = h[n] * g[n] * p[n]$, 其中 $h[n]$ 是一个最小相位序列, $g[n]$ 是一个最大相位序列, 且 $p[n]$ 为

$$p[n] = \sum_{k=0}^4 \alpha_k \delta[n - kn_0],$$

式中 α_k 和 n_0 未知. 提出一种将 $h[n]$ 从 $s[n]$ 中分离出来的方法.

12.31 在语音分析、综合和编码中, 语音信号通常可以在一个短时间间隔内用一线性时不变系统的响应作为其模型, 对于浊音, 该系统由在一串等间隔的脉冲间转换的冲激来激励, 而对于清音则由一个宽带随机噪声源来激励. 为了用同态解卷积来分离语音模型的分量, 令语音信号 $s[n] = v[n] * p[n]$ 乘以窗序列 $w[n]$ 得到 $x[n] = s[n]w[n]$. 为了简化分析, $x[n]$ 可以近似为

$$x[n] = (v[n] * p[n]) * w[n] \approx v[n] * (p[n] * w[n]) = v[n] * p_w[n],$$

式中 $p_w[n] = p[n]w[n]$, 如式(12.147).

(a) 试给出 $p[n]$ 、 $v[n]$ 和 $w[n]$ 的一个例子, 可以使上面的假设成为一种大致上的近似.

(b) 估计激励参数(浊音/清音判定和浊音的脉冲间隔)的一种方法是计算语音 $x[n]$ 加窗后的实倒谱 $c_x[n]$, 如图 P12.31 中所示. 对于 12.9.1 节的模型, 用复倒谱 $\hat{x}[n]$ 来表示 $c_x[n]$. 你如何利用 $c_x[n]$ 来估计激励参数.

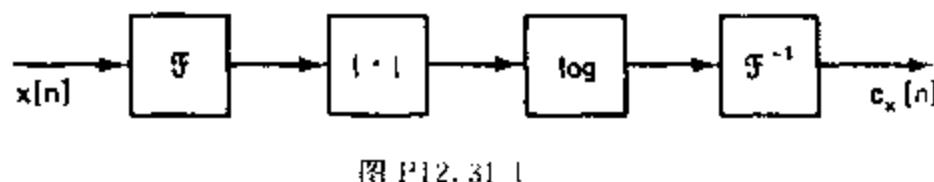


图 P12.31-1

(c) 假设我们用“平方”运算来代替对数运算, 则所得出的系统如图 P12.31-2 所画出的那样. 是否能够用新“倒谱” $q_x[n]$ 来估计激励参数? 请解释原因.

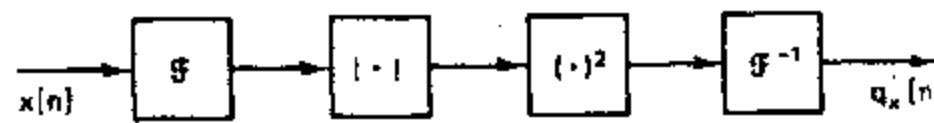


图 P12.31-2

12.32 考虑一个稳定的线性不变系统, 其冲激响应为 $h[n]$ 且全极点系统函数为

$$H(z) = \frac{G}{1 - \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}}.$$

这样的全极点系统产生于线性预测分析, 我们感兴趣的是直接由 $H(z)$ 的系数来计算复倒谱.

(a) 求 $\hat{h}[0]$.

(b) 证明

$$h[n] = a_n + \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{k}{n} \right) h[k] a_{n-k}, \quad n \geq 1.$$

利用在(a)和(b)中的关系式,可以不用使相位无卷绕并且不用求解 $H(z)$ 分母的根来计算复倒谱。

12.33 对于回波来说,比习题 12.24 中的系统稍微现实些的模型是图 P12.33 所示系统。该系统的冲激响应是

$$h[n] = \delta[n] + \alpha g[n - n_0],$$

式中 $\alpha g[n]$ 是回波路径的冲激响应。

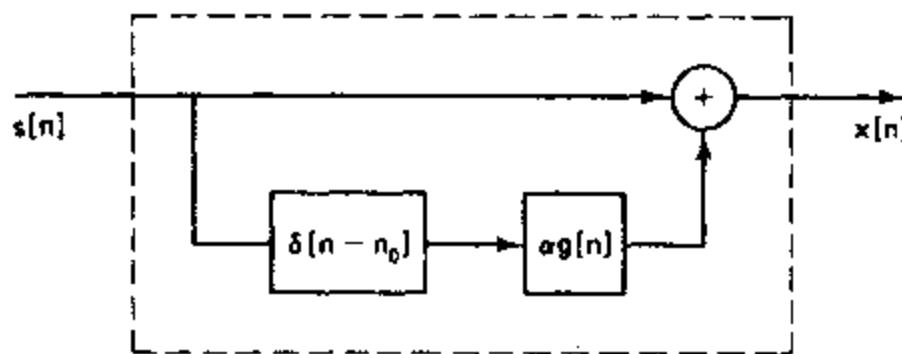


图 P12.33

(a) 假定

$$\max_{-\pi < \omega < \pi} |\alpha G(e^{j\omega})| < 1,$$

证明复倒谱 $\hat{h}[n]$ 有如下形式:

$$\hat{h}[n] = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{\alpha^k}{k} g_k[n - kn_0],$$

并且求利用 $g[n]$ 的 $g_k[n]$ 表达式。

(b) 对于(a)的条件,当 $g[n] = \delta[n]$ 时,求复倒谱 $\hat{h}[n]$ 并绘草图。

(c) 对于(a)的条件,当 $g[n] = \alpha^n u[n]$ 时,求复倒谱 $\hat{h}[n]$ 并绘草图。 α 和 a 必须满足什么条件才能应用(a)的结果。

(d) 对于(a)的条件,当 $g[n] = a_0 \delta[n] + a_1 \delta[n - n_1]$ 时,求复倒谱 $\hat{h}[n]$ 并画草图。 α, a_0, a_1 和 n_1 必须满足什么条件才能应用(a)的结果。

附录 A 随机信号

在本附录中我们汇集和总结了一些与随机信号表示有关的结论，并给出了有关的符号表示。在这里我们并不想对随机过程理论的困难之处和复杂的数学问题进行详细地讨论。虽然我们的方法不是很严谨，但是我们总结了若干重要结论以及隐含在推导中所作的数学假设。

A.1 离散时间随机过程

随机信号数学表示中的基本概念就是随机过程。当我们把随机过程作为离散时间信号的模型来讨论时，假定读者已经熟悉如像随机变量、概率分布和平均等概率论中的这些基本概念。需要进一步了解概率论基础知识的读者可参阅在参考文献目录中所列出的任何一部基本的教研书。

在实际信号处理的应用中利用随机过程模型时，我们总是把一个具体的序列当作全部样本序列中的一个。若给定一个离散时间信号，相对应的随机过程的构成，即基本概率规律通常是不知道的，必须设法从中推导出来。可以对该过程的构成作出合理的假设，或者从一个典型样本序列的有限序列段中估计出某一随机过程表示的性质。

通常，一个随机过程是一簇带有序号的随机变量 $\{x_n\}$ 。随机变量簇的特性由一组概率分布函数来描述，该分布函数往往可能是序号 n 的函数。对于离散时间信号，当用到把一个随机过程作为一个模型的概念时，序号 n 总是与时间有关。一个随机变量 x_n 可以用如下的概率分布函数来描述：

$$P_{x_n}(x_n, n) = \text{Probability}[x_n \leq x_n], \quad (\text{A.1})$$

式中 x_n 表示随机变量，而 x_n 是 x_n 的一个具体值^{*}。如果 x_n 取连续值，则等效地用概率密度函数描述为：

$$p_{x_n}(x_n, n) = \frac{\partial P_{x_n}(x_n, n)}{\partial x_n} \quad (\text{A.2})$$

或

$$P_{x_n}(x_n, n) = \int_{-\infty}^{x_n} p_{x_n}(x, n) dx. \quad (\text{A.3})$$

一个随机过程的两个随机变量 x_n 和 x_m 之间的相互关联性用联合概率分布函数

$$P_{x_n, x_m}(x_n, n, x_m, m) = \text{Probability}[x_n \leq x_n \text{ 和 } x_m \leq x_m] \quad (\text{A.4})$$

和联合概率密度

$$p_{x_n, x_m}(x_n, n, x_m, m) = \frac{\partial^2 P_{x_n, x_m}(x_n, n, x_m, m)}{\partial x_n \partial x_m} \quad (\text{A.5})$$

* 在本附录中，用黑体表示随机变量，正常体表示概率函数的哑元变量。

来表示.

如果两个随机变量中任何一个变量的取值情况不影响另一个变量的概率密度, 则称它们是统计独立的. 若随机变量 $\{x_n\}$ 是统计独立的, 则有

$$P_{x_n, x_m}(x_n, x_m, m) = P_{x_n}(x_n, n), P_{x_m}(x_m, m). \quad (\text{A. 6})$$

一个随机变量的完全描述要求能逐一表明全部可能的联合概率分布. 正如我们已经指出的, 这些概率分布函数可能都是时间序号 n 的函数. 在所有概率函数对于时间起始点的平移均为独立的情况下, 该随机过程称为平稳的. 例如, 平稳过程的二阶分布函数满足

$$P_{x_{n+k}, x_{m+k}}(x_{n+k}, n+k, x_{m+k}, m+k) = P_{x_n, x_m}(x_n, n, x_m, m). \quad (\text{A. 7})$$

在离散时间信号处理的许多应用中, 如果一个具体的信号可以看作是一个随机过程的样本序列, 则该随机过程就可以作为这类信号的模型. 虽然这类信号的细节是不可预测的——这使得确定性方法不适用于该类信号的表示——但是该集合的某些平均特性则可以由随机过程的已知概率规律来确定. 这些平均特性虽然还是不完全的, 但常常可以作为这类信号的一种有用的特征表示.

A. 2 平 均

利用如像均值和方差之类的平均量来描述随机变量的特征往往是很有效的. 因为一个随机过程是一组带有序号的随机变量, 所以我们也可以用组成随机过程的随机变量的统计平均来描述随机过程的特征. 这类平均称为集合平均. 我们首先来讨论几种平均以及它们的定义.

A. 2.1 定义

一个随机过程的平均或均值定义为

$$m_{x_n} = \mathcal{E}\{x_n\} = \int_{-\infty}^{\infty} x p_{x_n}(x, n) dx, \quad (\text{A. 8})$$

其中 \mathcal{E} 表示数学期望. 通常, 均值(期望值)可以与 n 有关. 此外, 如果 $g(\cdot)$ 是一个单值函数, 则 $g(x_n)$ 就是一个随机变量, 并且随机变量的集合 $\{g(x_n)\}$ 定义了一个新的随机过程. 为了计算这个新随机过程的平均, 我们可以导出新随机变量的概率分布, 或者可以证明

$$\mathcal{E}\{g(x_n)\} = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) p_{x_n}(x, n) dx. \quad (\text{A. 9})$$

如果随机变量是离散的, 则积分就变成对随机变量所有可能的值求和, 即 $\mathcal{E}\{g(x)\}$ 有如下形式:

$$\mathcal{E}\{g(x_n)\} = \sum_x g(x) p_{x_n}(x, n). \quad (\text{A. 10})$$

在我们对两个(或更多个)随机过程之间的关系感兴趣的场合, 必须考虑两个随机变量的集合 $\{x_n\}$ 和 $\{y_m\}$. 例如, 两个随机变量函数的期望值定义为

$$\mathcal{E}\{g(x_n, y_m)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x, y) p_{x_n, y_m}(x, n, y, m) dx dy, \quad (\text{A. 11})$$

式中 $p_{x_n, y_m}(x_n, n, y_m, m)$ 是随机变量 x_n 和 y_m 的联合概率密度.

平均中有几个简单性质特别有用. 很容易证明:

1. $\mathcal{E}\{\mathbf{x}_n + \mathbf{y}_m\} = \mathcal{E}\{\mathbf{x}_n\} + \mathcal{E}\{\mathbf{y}_m\}$, 即, 和的平均等于平均的和;

2. $\mathcal{E}\{a\mathbf{x}_n\} = a\mathcal{E}\{\mathbf{x}_n\}$, 即, 一个常数与 \mathbf{x}_n 相乘的平均等于该常数乘以 \mathbf{x}_n 的平均.

一般说来, 两个随机变量乘积的平均并不等于各自平均的乘积. 然而, 如果它们相等, 则称这两个随机变量是线性独立的或不相关的. 这就是说, 若

$$\mathcal{E}\{\mathbf{x}_n \mathbf{y}_m\} = \mathcal{E}\{\mathbf{x}_n\} \cdot \mathcal{E}\{\mathbf{y}_m\}, \quad (\text{A. 12})$$

则 \mathbf{x}_n 和 \mathbf{y}_m 是线性独立的. 从式(A. 11)和(A. 12)很容易看出, 线性独立的充分条件是

$$p_{\mathbf{x}_n, \mathbf{y}_m}(x_n, n, y_m, m) = p_{\mathbf{x}_n}(x_n, n) \cdot p_{\mathbf{y}_m}(y_m, m). \quad (\text{A. 13})$$

但是, 可以证明, 式(A. 13)是一种比式(A. 12)更为严格的有关独立性的表述. 如上所述, 满足式(A. 13)的随机变量称为统计独立的. 如果对于所有的 n 和 m 值式(A. 13)均成立, 则称随机过程 $\{\mathbf{x}_n\}$ 和 $\{\mathbf{y}_m\}$ 是统计独立的. 统计独立的随机过程也是线性独立的, 但是线性独立的随机过程并不意味着也是统计独立的.

由式(A. 9)至(A. 11)可以看出, 平均一般是时间的函数. 但在平稳过程的情况下, 却不是这样. 对于平稳过程来说, 组成该过程的所有随机变量的均值均相同, 也就是说, 一个平稳过程的均值是一个常数, 简记作 m_x . 除了如式(A. 8)定义的随机过程的均值外, 还有几个平均量在信号处理的范畴内是特别重要的. 下面将给出它们的定义. 为了符号上方便起见, 我们假设概率分布是连续的. 对于离散随机过程, 利用式(A. 10)就可以得出相应的定义.

\mathbf{x}_n 的均方值是 $|\mathbf{x}_n|^2$ 的平均, 即

$$\mathcal{E}\{|\mathbf{x}_n|^2\} = \text{均方} = \int_{-\infty}^{\infty} |x|^2 p_{\mathbf{x}_n}(x, n) dx. \quad (\text{A. 14})$$

有时也把均方值称作平均功率.

\mathbf{x}_n 的方差是 $[\mathbf{x}_n - m_{\mathbf{x}}]$ 的均方值, 即

$$\text{var}[\mathbf{x}_n] = \mathcal{E}\{(|\mathbf{x}_n - m_{\mathbf{x}}|)^2\} = \sigma_{\mathbf{x}}^2. \quad (\text{A. 15})$$

因为和的平均等于平均的和, 所以很容易证明, 式(A. 15)可以写作

$$\text{var}[\mathbf{x}_n] = \mathcal{E}\{|\mathbf{x}_n|^2\} - |m_{\mathbf{x}}|^2. \quad (\text{A. 16})$$

通常, 均方值和方差都是时间的函数, 但是对于平稳过程它们均为常量.

均值、均方值和方差等都是一种简单的平均, 它们只能提供有关随机过程的一小部分信息. 更加有用的平均是自相关序列, 它定义为

$$\begin{aligned} \phi_{xx}[n, m] &= \mathcal{E}\{\mathbf{x}_n \mathbf{x}_m^*\} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_n x_m^* p_{\mathbf{x}_n, \mathbf{x}_m}(x_n, n, x_m, m) dx_n dx_m, \end{aligned} \quad (\text{A. 17})$$

式中 * 表示复共轭. 一个随机过程的自协方差序列定义为

$$\gamma_{xx}[n, m] = \mathcal{E}\{(\mathbf{x}_n - m_{\mathbf{x}})(\mathbf{x}_m - m_{\mathbf{x}})^*\} \quad (\text{A. 18})$$

它可以写成

$$\gamma_{xx}[n, m] = \phi_{xx}[n, m] - m_{\mathbf{x}} m_{\mathbf{x}}^*. \quad (\text{A. 19})$$

应当注意, 通常自相关和自协方差都是二维序列, 即为两个变量的函数.

自相关序列是随机过程在不同时间的值之间相关性的度量. 在这个意义上, 它部分地描述了一个随机信号随时间变化的程度. 两个不同随机信号之间相关性的度量可以由互相关序列得出. 如果 $\{\mathbf{x}_n\}$ 和 $\{\mathbf{y}_m\}$ 是两个随机过程, 它们的互相关为

$$\begin{aligned}\phi_{xy}[n, m] &= \mathcal{E}\{\mathbf{x}_n \mathbf{y}_m^*\} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xy^* p_{x_n, y_m}(x, n, y, m) dx dy,\end{aligned}\quad (\text{A. 20})$$

其中 $p_{x_n, y_m}(x, n, y, m)$ 是 \mathbf{x}_n 和 \mathbf{y}_m 的联合概率密度. 互协方差函数定义为

$$\begin{aligned}\gamma_{xy}[n, m] &= \mathcal{E}\{(\mathbf{x}_n - m_{x_n})(\mathbf{y}_m - m_{y_m})^*\} \\ &= \phi_{xy}[n, m] - m_{x_n} m_{y_m}^*.\end{aligned}\quad (\text{A. 21})$$

正如我们已经指出的,一个随机过程的统计特性通常是随时间变化的. 但是一个平稳随机过程是用稳定条件(equilibrium condition)来描述其特征,在该条件下其统计特性不随时间原点的平移而变化. 这意味着一阶概率分布是与时间无关的. 类似地,全部的联合概率函数也不随时间原点的平移而变化,即二阶联合概率分布只取决于时间差($m-n$). 一阶平均,如均值和方差,与时间无关;二阶平均,如自相关函数,仅与时间差($m-n$)有关. 因此,对于平稳过程来说,我们可以得出,

$$m_x = \mathcal{E}\{\mathbf{x}_n\}, \quad (\text{A. 22})$$

$$\sigma_x^2 = \mathcal{E}\{|(\mathbf{x}_n - m_x)|^2\} \quad (\text{A. 23})$$

与 n 无关,若我们用 m 表示时间差,则

$$\phi_{xx}[n+m, n] = \phi_{xx}[m] = \mathcal{E}\{\mathbf{x}_{n+m} \mathbf{x}_n^*\}. \quad (\text{A. 24})$$

这就是说,一个平稳随机过程的自相关序列是一个一维序列,是时间差 m 的函数.

在许多场合我们会遇到在严格的意义上并不平稳的随机过程,即它们的概率分布不是时不变的,但是式(A. 22)至(A. 24)仍然成立. 这类随机过程称为是广义平稳的.

A. 2. 2 时间平均

在信号处理领域中,信号的一个集合这种提法是一个方便的数学概念,它允许我们在它们的表示中可以利用概率论. 但是从实用的意义上来说,我们宁可处理单个序列而不愿去处理一个无限的信号集合. 例如,我们可能希望从该集合内某一单个信号的测量中推导出随机过程表示的概率规律或某些平均量. 当概率分布与时间无关时,我们可能凭直觉感到某一单个样本序列很长一段的幅值分布应当近似地等于概率密度. 类似地,单个序列大量样本的算术平均应当十分接近该随机过程的均值. 为了把这些直觉的看法公式化,我们定义一个随机过程的时间平均为

$$\langle \mathbf{x}_n \rangle = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{2L+1} \sum_{n=-L}^L \mathbf{x}_n. \quad (\text{A. 25})$$

同样,定义时间自相关序列为

$$\langle \mathbf{x}_{n+m} \mathbf{x}_n^* \rangle = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{2L+1} \sum_{n=-L}^L \mathbf{x}_{n+m} \mathbf{x}_n^*. \quad (\text{A. 26})$$

可以证明,或 $\{\mathbf{x}_n\}$ 是一个有限均值的平稳过程,则上面的极限存在. 正如式(A. 25)和(A. 26)所定义的,这些时间平均量是无限多个随机变量的函数,并且它们自身就完全可以看作是一个随机变量. 但是,在已知具有遍历性的条件下,式(A. 25)和(A. 26)中的时间平均等于常量,这就意味着几乎全部可能的样本序列的时间平均也等于同样的常量,而且它

们等于相应的集合平均^{*}. 因此, 当 $-\infty < n < \infty$ 时对于任何单个样本序列 $\{x[n]\}$, 有

$$\langle x[n] \rangle = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{2L+1} \sum_{n=-L}^L x[n] = \mathcal{E}\{\mathbf{x}_n\} = m_x \quad (\text{A.27})$$

和

$$\langle x[n+m]x^*[n] \rangle = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{2L+1} \sum_{n=-L}^L x[n+m]x^*[n] = \mathcal{E}\{\mathbf{x}_{n+m}\mathbf{x}_n^*\} = \phi_{xx}[m]. \quad (\text{A.28})$$

时间平均算子 $\langle \cdot \rangle$ 具有与集合平均算子 $\mathcal{E}\{\cdot\}$ 相同的性质. 这样, 在随机变量 \mathbf{x}_n 和它在某一样本序列中的值 $x[n]$ 之间, 我们一般就不加区别. 例如, 表示式 $\mathcal{E}\{x[n]\}$ 应当写成 $\mathcal{E}\{\mathbf{x}_n\} = \langle x[n] \rangle$. 通常, 把时间平均等于集合平均的随机过程称为遍历过程.

在实际中常常假设已知的序列是遍历随机过程的一个样本序列, 所以可以由某一个序列来计算平均量. 当然, 一般我们无法计算式(A.27)和(A.28)中的极限, 但是量

$$\hat{m}_x = \frac{1}{L} \sum_{n=0}^{L-1} x[n], \quad (\text{A.29})$$

$$\hat{\sigma}_x^2 = \frac{1}{L} \sum_{n=0}^{L-1} |x[n] - \hat{m}_x|^2, \quad (\text{A.30})$$

和

$$\langle x[n+m]x^*[n] \rangle_L = \frac{1}{L} \sum_{n=0}^{L-1} x[n+m]x^*[n] \quad (\text{A.31})$$

或类似的量常常用于计算均值、方差和自相关的估计值. \hat{m}_x 和 $\hat{\sigma}_x^2$ 分别称为样本均值和样本方差. 从有限的一段数据来估计一个随机过程的平均量是统计学中的一个问题, 我们在第十一章中已简要地涉及到一些.

A.3 相关序列和协方差序列的性质

相关函数和协方差函数的一些有用性质可以用一种简洁的方式根据定义来得出. 这些性质就在这一节中给出.

考虑两个实平稳随机过程 $\{\mathbf{x}_n\}$ 和 $\{\mathbf{y}_n\}$, 它们的自相关、自协方差、互相关和互协方差分别为

$$\phi_{xx}[m] = \mathcal{E}\{\mathbf{x}_{n+m}\mathbf{x}_n^*\}, \quad (\text{A.32})$$

$$\gamma_{xx}[m] = \mathcal{E}\{(\mathbf{x}_{n+m} - m_x)(\mathbf{x}_n - m_x)^*\}, \quad (\text{A.33})$$

$$\phi_{xy}[m] = \mathcal{E}\{\mathbf{x}_{n+m}\mathbf{y}_n^*\}, \quad (\text{A.34})$$

$$\gamma_{xy}[m] = \mathcal{E}\{(\mathbf{x}_{n+m} - m_x)(\mathbf{y}_n - m_y)^*\}, \quad (\text{A.35})$$

式中 m_x 和 m_y 分别是两个随机过程的均值. 下列性质很容易由定义经简单推演而得出.

性质 1:

$$\gamma_{xx}[m] = \phi_{xx}[m] - |m_x|^2 \quad (\text{A.36a})$$

$$\gamma_{xy}[m] = \phi_{xy}[m] - m_x m_y^* \quad (\text{A.36b})$$

从式(A.19)和(A.21)就可以直接推导出这些结果. 它们表明, 对于零均值过程, 相关序列和协方差序列是相同的.

* 更准确的表述是, 随机变量 $\langle \mathbf{x}_n \rangle$ 和 $\langle \mathbf{x}_{n+m}\mathbf{x}_n^* \rangle$ 的均值分别等于 m_x 和 $\phi_{xx}[m]$, 并且它们的方差为零.

性质 2:

$$\phi_{xx}[0] = E[|\mathbf{x}_n|^2] = \text{均方值} \quad (\text{A. 37a})$$

$$\gamma_{xx}[0] = \sigma_x^2 = \text{方差} \quad (\text{A. 37b})$$

性质 3:

$$\phi_{xx}[-m] = \phi_{xx}^*[m] \quad (\text{A. 38a})$$

$$\gamma_{xx}[-m] = \gamma_{xx}^*[m] \quad (\text{A. 38b})$$

$$\phi_{xy}[-m] = \phi_{yx}^*[m] \quad (\text{A. 38c})$$

$$\gamma_{xy}[-m] = \gamma_{yx}^*[m] \quad (\text{A. 38d})$$

性质 4:

$$|\phi_{xy}[m]|^2 \leq \phi_{xx}[0]\phi_{yy}[0] \quad (\text{A. 39a})$$

$$|\gamma_{xy}[m]|^2 \leq \gamma_{xx}[0]\gamma_{yy}[0] \quad (\text{A. 39b})$$

特别是,

$$|\phi_{xx}[m]| \leq \phi_{xx}[0] \quad (\text{A. 40a})$$

$$|\gamma_{xx}[m]| \leq \gamma_{xx}[0] \quad (\text{A. 40b})$$

性质 5: 若 $\mathbf{y}_n = \mathbf{x}_{n-n_0}$, 则

$$\phi_{yy}[m] = \phi_{xx}[m], \quad (\text{A. 41a})$$

$$\gamma_{yy}[m] = \gamma_{xx}[m]. \quad (\text{A. 41b})$$

性质 6: 对于许多随机过程来说, 如果它们在时间上相隔较远, 则其随机变量可以成为不相关的. 若这一点成立, 则有

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \gamma_{xx}[m] = 0, \quad (\text{A. 42a})$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \phi_{xx}[m] = |m_x|^2, \quad (\text{A. 42b})$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \gamma_{xy}[m] = 0, \quad (\text{A. 42c})$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \phi_{xy}[m] = m_x m_y^*. \quad (\text{A. 42d})$$

上述结论的本质是, 相关和协方差都是有限能量序列, 当 m 值很大时它们趋于零, 所以我们常常能够利用它们的傅里叶变换或 z 变换来表示这些序列.

A. 4 随机信号的变换表示

虽然一个随机信号的傅里叶变换和 z 变换不存在, 但是这样一个信号的自协方差和自相关序列却是非周期序列, 而它们的这些变换往往存在. 对于一个线性时不变系统, 当输入是一个随机信号时, 这些平均量的谱表示在描述系统的输入/输出关系时起着重要的作用. 因此, 研究相关序列和协方差序列的性质, 以及它们对应的傅里叶变换和 z 变换是十分有益的.

让我们定义 $\Phi_{xx}(e^{j\omega})$, $\Gamma_{xx}(e^{j\omega})$, $\Phi_{xy}(e^{j\omega})$ 和 $\Gamma_{xy}(e^{j\omega})$ 分别为 $\phi_{xx}[m]$, $\gamma_{xx}[m]$, $\phi_{xy}[m]$ 和 $\gamma_{xy}[m]$ 的傅里叶变换. 由式(A. 36)可得

$$\Phi_{xx}(e^{j\omega}) = \Gamma_{xx}(e^{j\omega}) + 2\pi|m_x|^2\delta(\omega), \quad |\omega| < \pi, \quad (\text{A. 43a})$$

和

$$\Phi_{xy}(e^{j\omega}) = \Gamma_{xy}(e^{j\omega}) + 2\pi m_x m_y^* \delta(\omega), \quad |\omega| < \pi. \quad (\text{A. 43b})$$

在零均值过程中(即 $m_x = 0$ 和 $m_y = 0$), $\Phi_{xx}(e^{j\omega}) = \Gamma_{xx}(e^{j\omega})$ 和 $\Phi_{xy}(e^{j\omega}) = \Gamma_{xy}(e^{j\omega})$.

由傅里叶反变换公式可得

$$\gamma_{xx}[m] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Gamma_{xx}(e^{j\omega}) e^{jm\omega} d\omega, \quad (\text{A. 44a})$$

$$\phi_{xx}[m] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Phi_{xx}(e^{j\omega}) e^{jm\omega} d\omega, \quad (\text{A. 44b})$$

因而,自然有

$$\mathcal{E}\{|x[n]|^2\} = \phi_{xx}[0] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Phi_{xx}(e^{j\omega}) d\omega, \quad (\text{A. 45a})$$

$$\sigma_x^2 = \gamma_{xx}[0] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Gamma_{xx}(e^{j\omega}) d\omega. \quad (\text{A. 45b})$$

可以很方便地定义量 $P_{xx}(\omega)$ 为

$$P_{xx}(\omega) = \Phi_{xx}(e^{j\omega}), \quad (\text{A. 46})$$

在这种情况下,式(A. 45)可以表示为

$$\mathcal{E}\{|x[n]|^2\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_{xx}(\omega) d\omega, \quad (\text{A. 47a})$$

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_{xx}(\omega) d\omega - |m_x|^2. \quad (\text{A. 47b})$$

因此,对于 $-\pi \leq \omega \leq \pi$, $P_{xx}(\omega)$ 的面积正比于信号的平均功率. 事实上,正如我们在 2.10 节中所讨论的, $P_{xx}(\omega)$ 在一个频段上的积分正比于在那个频段内信号的功率. 正是由于这个原因,函数 $P_{xx}(\omega)$ 称为功率密度谱,或简称为功率谱. 当 $P_{xx}(\omega)$ 是一个与 ω 无关的常量时,称这个随机信号为白过程或白噪声. 当 $P_{xx}(\omega)$ 在某一频段上为常量并且在其它频段上为零时,我们把它称为带限白噪声.

由式(A. 38b)可知, $P_{xx}(\omega)$ 总为实数,并且对于实随机过程有 $\phi_{xx}[m] = \phi_{xx}[-m]$, 所以 $P_{xx}(\omega)$ 既为实数,又为偶数,即

$$P_{xx}(\omega) = P_{xx}(-\omega). \quad (\text{A. 48})$$

另外一个重要的性质是,功率密度谱是非负的. 这一点曾在 2.10 节讨论过.

互功率密度谱定义为

$$P_{xy}(\omega) = \Phi_{xy}(e^{j\omega}). \quad (\text{A. 49})$$

这个函数通常是复数,并且由式(A. 38c)可得

$$P_{xy}(\omega) = P_{yx}^*(\omega). \quad (\text{A. 50})$$

如果 $\phi_{xx}[m]$ 和 $\phi_{xy}[m]$ 的 z 变换存在,且除了别的条件外,还满足一个条件,即随机过程为零均值,那么式(A. 47)、(A. 48)和(A. 50)就可以推广出 z 变换的性质. 具体讲,式(A. 47)对应于如下性质:

性质 1:

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{2\pi j} \oint_C \Phi_{xx}(z) z^{-1} dz, \quad (\text{A. 51})$$

式中 C 是在 $\Phi_{xx}(z)$ 的收敛域中的一条逆时针闭合围线. 式(A. 48)和(A. 50)对应于以下性质:

性质 2:

$$\Phi_{xx}(z) = \Phi_{xx}^*(1/z^*) \quad (\text{A. 52a})$$

$$\Phi_{xy}(z) = \Phi_{yx}^*(1/z^*) \quad (\text{A. 52b})$$

由于 $\phi_{xx}[m]$ 是双边、对称的,因此可以得出 $\Phi_{xx}(z)$ 的收敛域应当为如下形式:

$$R_a < |z| < \frac{1}{R_a}$$

对于 $\Phi_{xx}(z)$ 是一个 z 的有理函数这种重要情况,式(A. 52)意味着 $\Phi_{xx}(z)$ 的极点和零点必须以复共轭倒数对的形式出现. z 变换表示的主要优点是,对于如像式(A. 51)那样的积分,可以利用留数定理来计算.

附录 B 连续时间滤波器

在 7.1 节和 7.2 节中讨论过,设计 IIR 数字滤波器的方法是以可以利用的现有连续时间滤波器的设计方法为基础的。在这个附录中我们主要总结在第七章中提出的几类低通滤波器逼近的特性,已有关于这几类滤波器更详细的讨论(见 Guillemin, 1957; Weinberg, 1975; 以及 Parks and Burrus, 1987)。在 Zverev(1967)的著作中有各种设计图表和公式,并且已有根据模拟滤波器逼近方法对 IIR 数字滤波器进行计算机辅助设计的许多计算机程序可供利用(例如,可参阅 Gray and Markel, 1976; DSP Committee, 1979; 以及 Mersereau et al., 1984)。

B. 1 巴特沃兹低通滤波器

巴特沃兹低通滤波器是利用其幅度响应在通带内最平坦这种性质来定义的。对于一个 N 阶低通滤波器,它意味着幅度平方函数的前 $(2N-1)$ 阶导数在 $\Omega=0$ 处皆为零。另一个性质是,在通带和阻带内,其幅度响应都是单调的。连续时间巴特沃兹低通滤波器的幅度平方函数有如下形式

$$|H_c(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + (j\Omega/j\Omega_c)^{2N}}. \quad (\text{B.1})$$

这一函数的曲线概况绘于图 B.1 中。

当式(B.1)中的参量 N 增加时,滤波器的特性曲线变得更加尖锐;这就是说,曲线在通带的更多部分接近于 1,并且在阻带中更快地接近于零,尽管式(B.1)的特性幅度平方函数在截止频率 Ω_c 处总是等于 $1/2$ 。图 B.2 表明巴特沃兹滤波器的特性曲线与参数 N 有关。

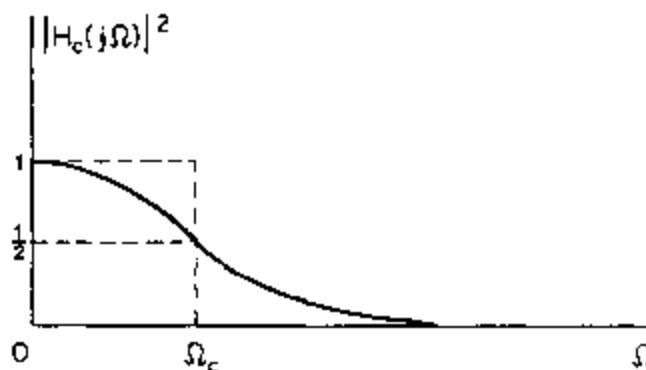


图 B.1 连续时间巴特沃兹滤波器的幅度平方曲线。

我们从式(B.1)中的幅度平方函数可以看出, $H_c(s)H_c(-s)$ 一定为如下形式:

$$H_c(s)H_c(-s) = \frac{1}{1 + (s/j\Omega_c)^{2N}}. \quad (\text{B.2})$$

因此,分母多项式的根(幅度平方函数的极点)位于

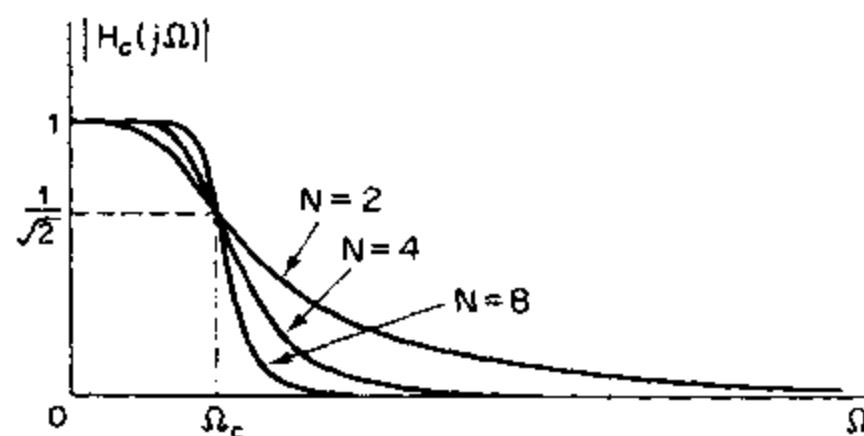


图 B.2 巴特沃兹滤波器的幅度特性曲线与阶次 N 的关系.

$$s_k = (-1)^{1/2N} (j\Omega_c) = \Omega_c e^{(j\pi/2N)(2k+N-1)}, \quad k = 0, 1, \dots, 2N-1. \quad (\text{B.3})$$

这样，在 s 平面上半径为 Ω_c 的圆周上有 $2N$ 个等分排列的极点，这些极点对于虚轴对称分布，但没有一个极点落在虚轴上，并且当 N 为奇数时有一个极点位于实轴上，而当 N 为偶数时则没有。在圆周上相邻极点间的角度为 π/N 弧度。例如，对于 $N=3$ ，极点相间 $\pi/3$ 弧度，或 60 度，如图 B.3 所示。为了确定用巴特沃兹幅度平方函数所描述的模拟滤波器的系统函数，我们必须对 $H_c(s)H_c(-s)$ 进行因式分解。幅度平方函数的极点总是成对出现的，也就是说，如果在 $s=s_k$ 处有一个极点，则在 $s=-s_k$ 处也必然有一个极点。因此，要由幅度平方函数构造 $H_c(s)$ ，我们应当从每对极点中选取一个极点。为了得到一个稳定和因果的滤波器，应当选取位于 s 平面上的左半平面上的极点。

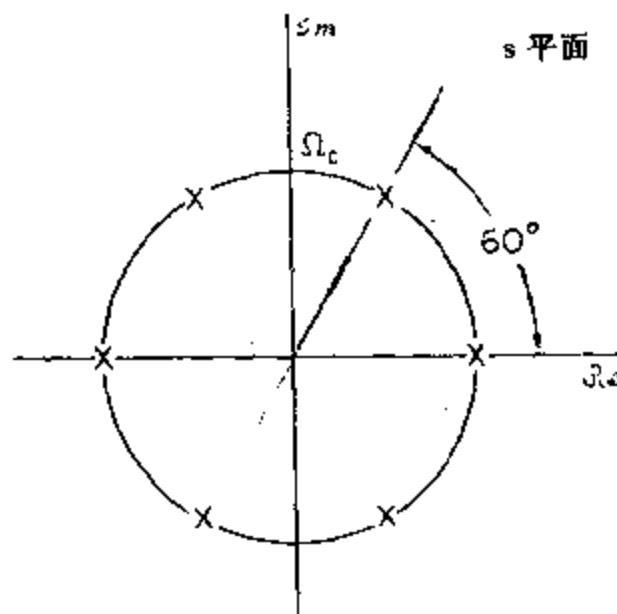


图 B.3 一个三阶巴特沃兹滤波器在 s 平面上极点的位置.

B.2 切比雪夫滤波器

在巴特沃兹滤波器中，幅度响应在通带和阻带内都是单调下降的。因此，若滤波器的技术要求是用最大通带和阻带的逼近误差来给出的话，那么，在靠近通带低频端和阻带截止频率以上的部分都会超出技术指标。一种比较有效的途径是使逼近误差均匀地分布于通带或阻带内，或同时在通带和阻带内都均匀分布，这样往往可以降低所要求的滤波器阶次。通过选择一种具有等波纹特性而不是单调特性的逼近方法可以实现这一点。切比雪夫

型滤波器就具有这种性质:其频率响应的幅度既可以在通带中是等波纹的,而在阻带中是单调的(称为Ⅰ型切比雪夫滤波器),也可以在通带中是单调的,而在阻带中是等波纹的(称为Ⅱ型切比雪夫滤波器).Ⅰ型切比雪夫滤波器如图B.4所示.该型滤波器的幅度平方函数是

$$|H_c(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1+\epsilon^2 V_N^2(\Omega/\Omega_c)}, \quad (\text{B.4})$$

式中 $V_N(x)$ 为 N 阶切比雪夫多项式, 定义为

$$V_N(x) = \cos(N \cos^{-1} x). \quad (\text{B.5})$$

例如, 当 $N=0$ 时, $V_0(x)=1$; 当 $N=1$ 时, $V_1(x)=\cos(\cos^{-1} x)=x$; 当 $N=2$ 时, $V_2(x)=\cos(2\cos^{-1} x)=2x^2-1$, 以此类推.

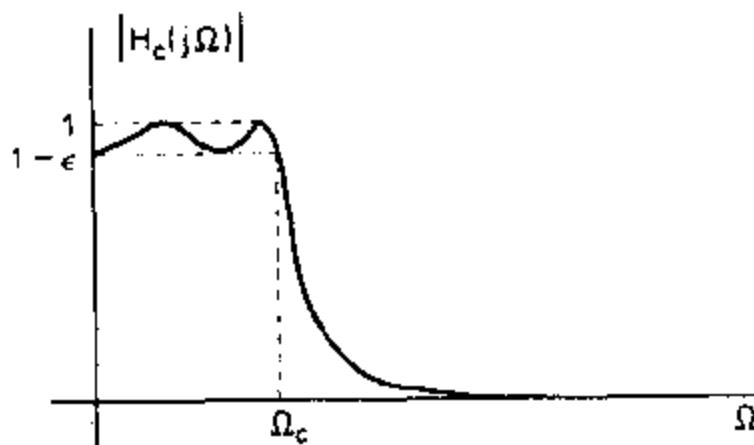


图 B.4 Ⅰ型切比雪夫低通滤波器的逼近.

从定义切比雪夫多项式的式(B.5)可以直接得出由 $V_N(x)$ 和 $V_{N-1}(x)$ 求 $V_{N+1}(x)$ 的递推公式. 将三角恒等式代入式(B.5), 得

$$V_{N+1}(x) = 2xV_N(x) - V_{N-1}(x). \quad (\text{B.6})$$

从式(B.5)我们注意到, 当 $0 < x < 1$ 时 $V_N^2(x)$ 在 0 和 1 之间变化; 当 $x > 1$ 时, $\cos^{-1} x$ 是虚数, 所以 $V_N(x)$ 像双曲余弦一样单调地增加. 参考式(B.4), $|H_c(j\Omega)|^2$ 对于 $0 \leq \Omega/\Omega_c \leq 1$, 呈现出在 1 和 $1/(1+\epsilon^2)$ 之间的波动; 而对于 $\Omega/\Omega_c > 1$ 单调地减小. 需要用三个参量来确定该滤波器: ϵ , Ω_c 和 N . 在典型的设计中, 用容许的通带波纹来确定 ϵ , 而用希望的通带截止频率来确定 Ω_c . 然后选择合适的阶次 N , 以使阻带的技术要求得到满足.

切比雪夫滤波器的极点在 s 平面上呈椭圆分布. 参考图 B.5, 该椭圆用两个圆来定义, 它们的直径分别等于椭圆短轴和长轴. 短轴的长度等于 $2a\Omega_c$, 其中

$$a = \frac{1}{2}(\alpha^{1/N} - \alpha^{-1/N}), \quad (\text{B.7})$$

式中

$$\alpha = \epsilon^{-1} + \sqrt{1+\epsilon^{-2}}. \quad (\text{B.8})$$

长轴的长度等于 $2b\Omega_c$, 其中

$$b = \frac{1}{2}(\alpha^{1/N} + \alpha^{-1/N}). \quad (\text{B.9})$$

为了求出切比雪夫滤波器在椭圆上极点的位置, 我们首先要这样确定, 在大圆和小圆上以等角度 π/N 等间隔排列的那些点; 这些点对于虚轴呈对称分布, 并且没有一个点落在虚

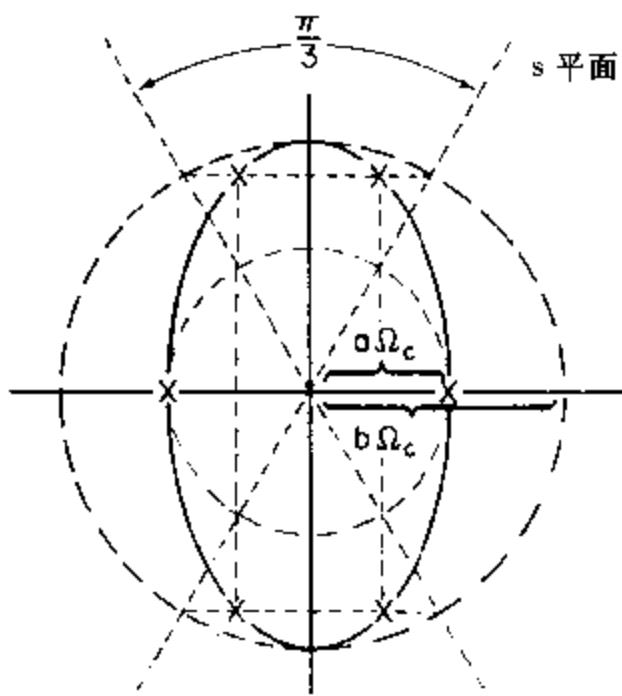


图 B.5 三阶 I 型切比雪夫低通滤波器的极点位置。

轴上；但当 N 为奇数时要有一个点落在实轴上，而当 N 为偶数时，就都不会落在实轴上。大圆和小圆上的这种划分方式完全与确定式(B.3)中巴特沃兹滤波器极点位置的圆周划分方式一样。切比雪夫滤波器的极点落在椭圆上，其纵坐标由相应的大圆上点的纵坐标来表示，其横坐标由相应的小圆上点的横坐标来表示。图 B.5 中绘出了当 $N=3$ 时的极点分布。

I 型切比雪夫低通滤波器可以通过一种变换与 I 型切比雪夫滤波器联系起来。具体讲，如果在式(B.4)中我们将 $\epsilon^2 V_N^2(\Omega/\Omega_c)$ 项用其倒数来替换，并且把 $V_N^2(\cdot)$ 的自变量也用其倒数来代替，则可以得到

$$|H_c(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + [\epsilon^2 V_N^2(\Omega_c/\Omega)]^{-1}}. \quad (\text{B.10})$$

这就是 II 型切比雪夫低通滤波器的解析形式。设计 I 型切比雪夫滤波器的一种方法是：首先设计 I 型切比雪夫滤波器，然后再利用上述的变换即可。

B.3 椭圆滤波器

如果我们像在切比雪夫滤波器的情况下那样，使得误差均匀分布于整个通带或整个阻带，而不是像巴特沃兹滤波器那样，只允许误差在通带内单调地增加，那么，就可能用一个较低阶的滤波器来满足设计要求。我们注意到，在 I 型切比雪夫逼近和巴特沃兹逼近中，阻带误差随频率单调减小，如果我们使阻带误差均匀地分布于阻带内，则会导致进一步改进的可能性。这样就可以提出一种低通滤波器的逼近方法，如图 B.6 所示。确实可以证明(Papoulis, 1957)，在给定 Ω_p , δ_1 和 δ_2 的值，而使过渡带 $(\Omega_t - \Omega_p)$ 尽可能小的意义上来说，这种逼近方式(即在通带和阻带内等波纹)是在给定滤波器阶次 N 时所能得到的最好结果。

这种逼近称为椭圆滤波器，它有如下形式：

$$|H_c(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + \epsilon^2 U_N^2(\Omega)}, \quad (\text{B.11})$$

式中 $U_N(\Omega)$ 是雅可比椭圆函数。为了在通带和阻带内均得到等波纹误差，椭圆滤波器必须既有极点又有零点。正如从图 B.6 所能看出的，这一滤波器在 s 平面上的 $j\Omega$ 轴上有零点。有关椭圆滤波器设计的讨论，即使只是肤浅的，也超出了本附录的范围。对于更详细的讨论，读者可参阅由 Guillemin (1957), Storer (1957), Gold and Rader (1969)，以及 Parks and Burrus (1987) 编写的教科书。

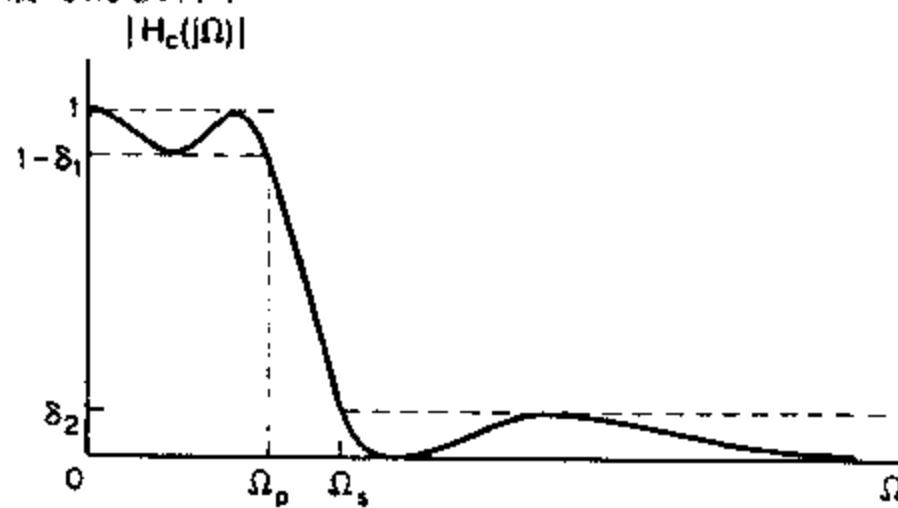


图 B.6 同时在通带和阻带内的等波纹逼近。

参 考 文 献

这个参考文献目录包括在本书中所参考的全部书籍和论文,以及另外一些在信号处理的研究中通常感兴趣的著作。这些信息包含在两种目录表中。第一种目录表以作者姓名的字母为序,它给出了作者的全名、论著题目和有关的出版信息。本书中的全部参考文献均可以在此目录表中找到。第二种目录表包括了第一种目录表中的全部条目,并把它们分门别类——从一般的题目(如数学和系统理论的基础知识)到更专门的论题,它们与在本书中所覆盖的章节内容或主要研究领域相吻合。在专题目录表中的符号◆表示通常参考的教科书。

按作者姓名的字母顺序排列的参考文献目录

- Ahlfors, L. V., *Complex Analysis*, 3rd ed., McGraw-Hill Book Company, New York, 1979.
- Allen, J. B., and Rabiner, L. R., "A Unified Approach to Short-Time Fourier Analysis and Synthesis," *Proc. IEEE*, Vol. 65, pp. 1558—1564, Nov. 1977.
- Andrews, H. C., and Hunt, B. R., *Digital Image Restoration*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1977.
- Antoniou, A., *Digital Filters: Analysis and Design*, McGraw-Hill Book Company, New York, 1979.
- Arsac, J., *Fourier Transforms and the Theory of Distributions*, translated by Allen Nussbaum and Gretchen C. Heim, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1966.
- Atal, B. S., "Automatic Recognition of Speakers from Their Voices," *Proc. IEEE*, Vol. 64, No. 4, pp. 460—475, April 1976.
- Atal, B. S., and Hanauer, S. L., "Speech Analysis and Synthesis by Linear Prediction of the Speech Wave," *J. Acoustical Society of America*, Vol. 50, pp. 637—655, Aug. 1971
- Barnes, C. W., and Fam, A. T., "Minimum Norm Recursive Digital Filters That Are Free of Overflow Limit Cycles," *IEEE Trans. on Circuits and Systems*, Vol. CAS-24, pp. 569—574, Oct. 1977.
- Bartlett, M. S., *An Introduction to Stochastic Processes with Special Reference to Methods and Applications*, Cambridge University Press, Cambridge, 3rd ed., 1978.
- Bauman, P. D., Lipshitz, S. P., and Vanderkooy, J., "Cepstral Analysis of Electro-acoustic Transducers," *Proc. 1985 International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, Tampa, FL, pp. 1832—1835, Mar. 1985.
- Bennett, W. R., "Spectra of Quantized Signals," *Bell System Technical J.*, Vol. 27, pp. 446—472, 1948.
- Bergland, G. D., "A Fast Fourier Transform Algorithm Using Base 8 Iterations," *Mathematics of Computation*, Vol. 22, pp. 275—279, April 1968.
- Berkhout, A. J., "On the Minimum Phase Criterion of Sampled Signals," *IEEE Trans. Geoscience Electronics*, Vol. GE-11, No. 4, pp. 186—198, Oct. 1973.
- Birkhoff, G., and Rota, G., *Ordinary Differential Equations*, 3rd ed., John Wiley and Sons, New York, 1978.
- Black, H. S., *Modulation Theory*, Van Nostrand, New York, 1953.
- Blackman, R. B., *Linear Data-Smoothing and Prediction in Theory and Practice*, Addison-Wesley Publishing Company, Reading, MA, 1965.
- Blackman, R. B., and Tukey, J. W., *The Measurement of Power Spectra*, Dover Publications, New York, 1958.

- Blahut, R. E., *Fast Algorithms for Digital Signal Processing*, Addison-Wesley Publishing Company, Reading, MA, 1985.
- Bluestein, L. I., "A Linear Filtering Approach to the Computation of Discrete Fourier Transform," *IEEE Trans. Audio Electroacoustics*, Vol. AU-18, pp. 451—455, Dec. 1970.
- Bogert, B. P., Healy, M. J. R., and Tukey, J. W., "The Querency Alanysis of Time Series for Echoes: Cepstrum, Pseudo-autocovariance, Cross-Cepstrum, and Saphe Cracking," *Proc. Symposium Time Series Analysis*, M. Rosenblatt, Ed., John Wiley and Sons, New York, pp. 209—243, 1963.
- Box, G. E. P., and Jenkins, G. M., *Time Series Analysis Forecasting and Control*, Holden-Day, San Francisco, 1970.
- Bracewell, R. N., "The Discrete Hartley Transform," *J. Optical Society of America*, Vol. 73, pp. 1832—1835, Dec. 1983.
- Bracewell, R. N., "The Fast Hartley Transform," *Proc. IEEE*, Vol. 72, No. 8, pp. 1010—1018, Aug. 1984.
- Bracewell, R. N., *The Fourier Transform and Its Applications*, 2nd ed. revised, McGraw-Hill Book Company, New York, 1986.
- Brigham, E. O., *The Fast Fourier Transform and Its Applications*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1988.
- Burrus, C. S., "Index Mappings for Multidimensional Formulation of the DFT and Convolution," *IEEE Trans. on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, Vol. ASSP-25, pp. 239—242, June 1977.
- Burrus, C. S., "Efficient Fourier Transform and Convolution Algorithms," in *Advanced Topics in Signal Processing*, J. S. Lim and A. V. Oppenheim, Eds., Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1988.
- Burrus, C. S., and Parks, T. W., *DFT/FFT and Convolution Algorithms Theory and Implementation*, John Wiley and Sons, New York, 1985.
- Carlson, B. A., *Communications Systems*, 2nd ed., McGraw-Hill Book Company, New York, 1975.
- Carslaw, H. S., *Introduction to the Theory of Fourier's Series and Integrals*, 3rd ed., Dover Publications, New York, 1952.
- Castleman, K. R., *Digital Image Processing*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1979.
- Cavanagh, J. F., *Digital Computer Arithmetic: Design and Implementation*, McGraw-Hill Book Company, New York, 1984.
- Chan, D. S. K., and Rabiner, L., "Theory of Roundoff Noise in Cascade Realizations of Finite Impulse Response Digital Filters," *Bell System Technical J.*, Vol. 52, No. 3, pp. 329—345, Mar. 1973a.
- Chan, D. S. K., and Rabiner, L., "An Algorithm for Minimizing Roundoff Noise in Cascade Realizations of Finite Impulse Response Digital Filters," *Bell System Technical J.*, Vol. 52, No. 3, pp. 347—355, Mar. 1973b.
- Chan, D. S. K., and Rabiner, L., "Analysis of Quantization Errors in the Direct Form for Finite Impulse Response Digital Filters," *IEEE Trans. Audio Electroacoustics*, Vol. AU-21, pp. 354—366, Aug. 1973c.
- Chen, C., *Introduction to Linear System Theory*, Holt, Rinehart and Winston, New York, 1970.
- Chen, X., and Parks, T. W., "Design of FIR Filters in the Complex Domain," *IEEE Trans. on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, Vol. ASSP-35, pp. 144—153, 1987.
- Cheney, E. W., *Introduction to Approximation Theory*, McGraw-Hill Book Company, New York, 1966.
- Chow, Y., and Cassignol, E., *Linear Signal Flow Graphs and Applications*, John Wiley and Sons, New York, 1962.
- Christian, E., and Eisenmann, E., *Filter Design Tables and Graphs*, John Wiley and Sons, 1966.
- Churchill, R. V., and Brown, J. W., *Introduction to Complex Variables and Applications*, 4th ed., McGraw-Hill Book Company, New York, 1984.
- Cizek, V., "Discrete Hilbert Transform," *IEEE Trans. Audio Electroacoustics*, Vol. AU-18, No. 4, pp. 340—343, Dec. 1970.
- Claasen, T. A. C. M., Mecklenbrauker, W. F. G., and Peek, J. B. H., "Second-Order Digital Filter with Only One Magnitude-Truncation Quantizer and Having Practically No Limit Cycles," *Electronics Letters*, Vol. 9, No. 2, pp. 531—532, Nov. 1973.

- Clements, M. A., and Pease, J., "On Causal Linear Phase IIR Digital Filters," *IEEE Trans. on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, Vol. ASSP-3, Mar. 1989.
- Constantinides, A. G., "Spectral Transformations for Digital Filters," *Proc. IEE*, Vol. 117, No. 8, pp. 1585—1590, Aug. 1970.
- Cooley, J. W., Lewis, P. A. W., and Welch, P. D., "Historical Notes on the Fast Fourier Transform," *IEEE Trans. Audio Electroacoustics*, Vol. AU-15, pp. 76—79, June 1967.
- Cooley, J. W., and Tukey, J. W., "An Algorithm for the Machine Computation of Complex Fourier Series," *Mathematics of Computation*, Vol. 19, pp. 297—301, Apr. 1965.
- Cooper, G. R., and McGillem, C. D., *Methods of Signal and System Analysis*, Holt, Rinehart and Winston, New York, 1967.
- Crochiere, R. E., "Digital Ladder Structures and Coefficient Sensitivity," *IEEE Trans. Audio Electroacoustics*, Vol. AU-20, pp. 240—246, Oct. 1972.
- Crochiere, R. E., and Oppenheim, A. V., "Analysis of Linear Digital Networks," *Proc. IEEE*, Vol. 63, pp. 581—595, April 1975.
- Crochiere, R. E., and Rabiner, L. R., *Multirate Digital Signal Processing*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1983.
- Cruz, J. B., and Van Valkenburg, M. E., *Signals in Linear Circuits*, Houghton Mifflin Company, Boston, 1974.
- Daniels, R. W., *Approximation Methods for Electronic Filter Design*, McGraw-Hill Book Company, New York, 1974.
- Danielson, G. C., and Lanczos, C., "Some Improvements in Practical Fourier Analysis and Their Application to X-Ray Scattering from Liquids," *J. Franklin Inst.*, Vol. 233, pp. 365—380, 435—452, April and May 1942.
- Davenport, W. B., *Probability and Random Processes: An Introduction for Applied Scientists and Engineers*, McGraw-Hill Book Company, New York, 1970.
- Davis, S. B., and Mermelstein, P., "Comparison of Parametric Representations for Monosyllabic Word Recognition in Continuously Spoken Sentence," *IEEE Trans. on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, Vol. ASSP-28, No. 4, pp. 357—366, Aug. 1980.
- Deczky, A. G., "Synthesis of Recursive Digital Filters Using the Minimum P Error Criterion," *IEEE Trans. Audio Electroacoustics*, Vol. AU-20, pp. 257—263, Oct. 1972.
- Dreke, A. W., *Fundamentals of Applied Probability Theory*, McGraw-Hill Book Company, New York, 1967.
- DSP Committee, IEEE ASSP, Eds., *Selected Papers in Digital Signal Processing II*, IEEE Press, New York, 1976.
- DSP Committee, IEEE ASSP, Eds., *Programs for Digital Signal Processing*, IEEE Press, New York, 1979.
- Dudgeon, D. E., and Mersereau, R. M., *Two-Dimensional Digital Signal Processing*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1984.
- Duhamel, P., "Implementation of 'Split-Radix'FFT Algorithms for Complex, Real, and Real-Symmetric Data," *IEEE Trans. on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, Vol. ASSP-34, pp. 285—295, April 1986.
- Duhamel, P., and Hollmann, H., "Split Radix FFT Algorithm," *Electronics Letters*, Vol. 20, pp. 14—16, Jan. 5, 1984.
- Dym, H., and McKean, H. P., *Fourier Series and Integrals*, Academic Press, New York, 1972.
- Ebert, P. M., Mazo, J. E., and Taylor, M. C., "Overflow Oscillations in Digital Filters," *Bell System Technical J.*, Vol. 48, pp. 2999—3020, 1969.
- Feller, W., *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*, 3rd ed., Vol. 1, 1968, 2nd edition Volume 2 1981, John Wiley and Sons, New York.
- Fettweis, A., "Wave Digital Filters: Theory and Practice," *Proc. IEEE*, Vol. 74, No. 2, pp. 270—327, Feb. 1986.
- Flanagan, J. L., *Speech Analysis, Synthesis and perception*, 2nd ed., Springer-Verlag, New York, 1972.
- Flanagan, J. L., Coker, C. H., Rabiner, L. R., Schafer, R. W., Umeda, N., "Synthetic Voices for Computers," *IEEE Spectrum*, Vol. 7, pp. 22—45, 1970.

- Fletcher, R., and Powell, M. J. D., "A Rapidly Convergent Descent Method for Minimization," *Computer J.*, Vol. 6, No. 2, pp. 163-168, 1963.
- Freeman, H., *Discrete-Time Systems*, John Wiley and Sons, New York, 1965.
- Furui, S., "Cepstral Analysis Technique for Automatic Speaker Verification," *IEEE Trans. on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, Vol. ASSP-29, No. 2, pp. 254-272, April 1981.
- Gabel, R. A., and Roberts, R. A., *Signals and Linear Systems*, John Wiley and Sons, New York, 3rd edition 1987.
- Gardner, W. A., *Statistical Spectral Analysis: A Nonprobabilistic Theory*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1988.
- Gel'fand, I. M., et al., *Generalized Functions*, 5 vols., translated by E. Saletan et al., Academic Press, New York, 1964-1968.
- Gentleman, W. M., and Sande, G., "Fast Fourier Transforms for Fun and Profit," in *Proc. 1966 Fall Joint Computer Conf.*, AFIPS Conf. Proc., Vol. 29, pp. 563-578, Spartan Books, Washington, DC, 1966.
- Goertzel, G., "An Algorithm for the Evaluation of Finite Trigonometric Series," *American Math. Monthly*, Vol. 65, pp. 34-35, Jan. 1958.
- Gold, B., and Rader, C. M., *Digital Processing of Signals*, McGraw-Hill Book Company, New York, 1969.
- Gold, B., Oppenheim, A. V., and Rader, C. M., "Theory and Implementation of the Discrete Hilbert Transform," *Proc. Symp. Computer Processing in Communications*, Vol. 19, Polytechnic Press, New York, 1970.
- Golden, R. M., and Kaiser, J. F., "Design of Wideband Sampled-Data Filters," *Bell System Technical J.*, Vol. 43, No. 4, Pt. 2, pp. 1533-1545, July 1964.
- Good, I. J., "The Interaction Algorithm and Practical Fourier Analysis," *J. Royal Stat. Soc.*, Vol. B-20, pp. 361-372, 1958.
- Gray, A. H., and Markel, J. D., "Digital Lattice and Ladder Filter Synthesis," *IEEE Trans. Acoustics, Speech, and Signal Processing*, Vol. ASSP-21, pp. 491-500, Dec. 1973.
- Gray, A. H., and Markel, J. D., "A Normalized Digital Filter Structure," *IEEE Trans. on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, Vol. ASSP-23, pp. 258-277, June 1975.
- Gray, A. H., and Markel, J. D., "A Computer Program for Designing Digital Elliptic Filters," *IEEE Trans. on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, Vol. ASSP-24, pp. 529-538, Dec. 1976.
- Grenander, U., and Rosenblatt, M., *Statistical Analysis of Stationary Time Series*, John Wiley and Sons, New York, 1957.
- Griffin, D., and Lim, J. S., "Signal Estimation from Modified Short-Time Fourier Transform," *IEEE Trans. on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, Vol. ASSP-32, pp. 236-243, April 1984.
- Grossman, S. I., *Calculus Part 2*, Academic Press, New York, 1982.
- Guillemin, E. A., *Synthesis of Passive Networks*, John Wiley and Sons, New York, 1957.
- Guillemin, E. A., *Theory of Linear Physical Systems*, John Wiley and Sons, New York, 1963.
- Hamming, R. W., *Digital Filters*, 3rd ed., Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1988.
- Hannan, E. J., *Time Series Analysis*, Methuen and Company, London, 1960.
- Harris, F. J., "On the Use of Windows for Harmonic Analysis with the Discrete Fourier Transform," *Proc. IEEE*, Vol. 66, pp. 51-83, Jan. 1978.
- Hayes, M. H., Lim, J. S., and Oppenheim, A. V., "Signal Reconstruction from Phase and Magnitude," *IEEE Trans. on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, Vol. ASSP-28, No. 6, pp. 672-680, Dec. 1980.
- Haykin, S. S., *Communication Systems*, John Wiley and Sons, New York, 2nd ed., 1983.
- Haykin, S. S., *Adaptive Filter Theory*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1986.
- Heideman, M. T., Johnson, D. H., and Burrus, C. S., "Gauss and the History of the Fast Fourier Transform," *IEEE ASSP Magazine*, Vol. 1, No. 4, pp. 14-21, Oct. 1984.
- Helms, H. D., "Fast Fourier Transform Method of Computing Difference Equations and Simulating Filters," *IEEE*

- Trans. Audio Electroacoustics*, Vol. 15, No. 2, pp. 85—90, 1967.
- Herrmann, O., "On the Design of Nonrecursive Digital Filters with Linear Phase," *Elec. Lett.*, Vol. 6, No. 11, pp. 328—329, 1970.
- Herrmann, O., Rabiner, L. R., and Chan, D. S. K., "Practical Design Rules for Optimum Finite Impulse Response Lowpass Digital Filters," *Bell System Technical J.*, Vol. 52, No. 6, pp. 769—799, July-Aug. 1973.
- Herrmann, O., and Schüssler, W., "Design of Nonrecursive Digital Filters with Minimum Phase," *Elec. Lett.*, Vol. 6, No. 11, pp. 329—330, 1970a.
- Herrmann, O., and Schüssler, W., "On the Accuracy Problem in the Design of Nonrecursive Digital Filters," *Arch. Electronik Übertragungstechnik*, Vol. 24, pp. 525—526, 1970b.
- Hewes, C. R., Broderson, R. W., and Buss, D. D., "Applications of CCD and Switched Capacitor Filter Technology," *Proc. IEEE*, Vol. 67, No. 10, pp. 1403—1415, Oct. 1979.
- Hildebrand, F. B., *Finite Difference Equations and Simulation*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1968.
- Hildebrand, F. B., *Introduction to Numerical Analysis*, 2nd ed., McGraw-Hill Book Company, New York, 1973.
- Hildebrand, F. B., *Advanced Calculus for Applications*, 2nd ed., Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1976.
- Hnatek, E. R., *A User's Handbook of D/A and A/D Converters*, John Wiley and Sons, New York, 1976.
- Hofstetter, E., Oppenheim, A. V., and Siegel, J., "On Optimum Nonrecursive Digital Filters," *Proc. 9th Allerton Conf. Circuit System Theory*, Oct. 1971.
- Huelsman, L. P., and Allen, P. E., *Introduction to the Theory and Design of Active Filters*, McGraw-Hill Book Company, New York, 1980.
- Hwang, S. Y., "On Optimization of Cascade Fixed Point Digital Filters," *IEEE Trans. on Circuits and Systems*, Vol. CAS-21, No. 1, pp. 163—166, Jan. 1974.
- Jackson, L., "An Analysis of Limit Cycles Due to Multiplicative Rounding in Recursive Digital Filters," *Proc. 7th Allerton Conf. Circuit System Theory*, pp. 69—78, 1969.
- Jackson, L. B., "On the Interaction of Roundoff Noise and Dynamic Range in Digital Filters," *Bell System Technical J.*, Vol. 49, pp. 159—184, Feb. 1970a.
- Jackson, L. B., "Roundoff-Noise Analysis for Fixed-Point Digital Filters Realized in Cascade or Parallel Form," *IEEE Trans. Audio Electroacoustics*, Vol. AU-18, pp. 107—122, June 1970b.
- Jackson, L. B., *Digital Filters and Signal Processing*, Kluwer Academic Publishers, Hingham, MA, 1986.
- Jayant, N. S., and Noll, P., *Digital Coding of Waveforms*, Prentice Hall, Englewood Cliffs NJ, 1984.
- Jenkins, G. M., and Watts, D. G., *Spectral Analysis and Its Applications*, Holden-Day, San Francisco, 1968.
- Johnson, D. E., *Introduction to Filter Theory*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1976.
- Johnson, D. E., Johnson, J. R., and Moore, H. P., *A Handbook of Active Filters*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1980.
- Jolley, L. B. W., *Summation of Series*, Dover, New York, 1961.
- Juang, B.-H., Rabiner, L. R., and Wilpon, J. G., "On the Use of Bandpass Lifting in Speech Recognition," *IEEE Trans. on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, Vol. ASSP-35, No. 7, pp. 947—954, July 1987.
- Jury, E. I., *Sampled-Data Control Systems*, John Wiley and Sons, New York, 1958.
- Jury, E. I., *Theory and Application of the z-Transform Method*, John Wiley and Sons, New York, 1964.
- Kailath, T., *Linear Systems*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1980.
- Kaiser, J. F., "Digital Filters," Chap. 7 in *System Analysis by Digital Computer*, F. F. Kuo and J. F. Kaiser, Eds., John Wiley and Sons, New York, 1966.
- Kaiser, J. F., "Nonrecursive Digital Filter Design Using the I_0 -Sinh Window Function," *Proc. 1974 IEEE International Symp. on Circuits and Systems*, San Francisco, pp. 20—23, April 1974.

- Kaiser, J. F., and Hamming, R. W., "Sharpening the Response of a Symmetric Nonrecursive Filter by Multiple Use of the Same Filter," *IEEE Trans. on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, Vol. ASSP-25, No. 5, pp. 415—422, Oct. 1977.
- Kaiser, J. F., and Schafer, R. W., "On the Use of the I_0 -Sinh Window for Spectrum Analysis," *IEEE Trans. on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, Vol. ASSP-28, No. 1, pp. 105—107, Feb. 1980.
- Kan, E. P. F., and Aggarwal, J. K., "Error Analysis of Digital Filters Employing Floating Point Arithmetic," *IEEE Trans. Circuit Theory*, Vol. CT-18, pp. 678—686, Nov. 1971.
- Kaneko, T., and Liu, B., "Accumulation of Roundoff Error in Fast Fourier Transforms," *J. Assoc. Comput. Mach.*, Vol. 17, pp. 637—654, Oct. 1970.
- Kay, S. M., *Modern Spectral Estimation Theory and Application*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1988.
- Kay, S. M., and Marple, S. L., "Spectrum Analysis: A Modern Perspective," *Proc. IEEE*, Vol. 69, pp. 1380—1419, Nov. 1981.
- Kelly, J. L. Jr., and Lochbaum, C., "Speech Synthesis," *Proc. Stockholm Speech Communications Seminar*, R. I. T., Stockholm, Sweden, Sept. 1962.
- Knowles, J. B., and Olcayto, E. M., "Coefficient Accuracy and Digital Filter Response," *IEEE Trans. Circuit Theory*, Vol. CT-15, pp. 31—41, Mar. 1968.
- Knuth, D. E., *The Art of Computer Programming, Seminumerical Algorithms*, 2nd ed., Addison-Wesley Publishing Co., Reading, MA, 1981.
- Kolba, D. P., and Parks, T. W., "A Prime Factor FFT Algorithm Using High Speed Convolution," *IEEE Trans. on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, Vol. ASSP-25, pp. 281—294, Aug. 1977.
- Koopmans, L. H., *Spectral Analysis of Time Series*, Academic Press, New York, 1974.
- Lam, H. Y.-F., *Analog and Digital Filters. Design and Realization*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1979.
- Lathi, B. P., *Signals, Systems and Communication*, John Wiley and Sons, New York, 1965.
- Lighthill, M. J., *Introduction to Fourier Analysis and Generalized Functions*, Cambridge University Press, Cambridge, 1958.
- Lim, J. S., *Two-Dimensional Digital Signal Processing*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1989.
- Lim, J. S., and Oppenheim, A. V., Eds., *Advanced Topics in Signal Processing*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1988.
- Liu, B., "Effect of Finite Word Length on the Accuracy of Digital Filters: A Review," *IEEE Trans. Circuit Theory*, Vol. CT-18, pp. 670—677, Nov. 1971.
- Liu, B., and Kaneko, T., "Error Analysis of Digital Filters Realized in Floating-Point Arithmetic," *Proc. IEEE*, Vol. 57, pp. 1735—1747, Oct. 1969.
- Liu, C. L., and Liu, J. W. S., *Linear System Analysis*, McGraw-Hill Book Company, New York, 1975.
- Liu, B., and Peled, A., "Heuristic Optimization of the Cascade Realization of Fixed Point Digital Filters," *IEEE Trans. on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, Vol. ASSP-23, pp. 464—473, 1975.
- Macovski, A., *Medical Image Processing*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1983.
- Makhoul, J., "Linear Prediction: A Tutorial Review," *Proc. IEEE*, Vol. 62, pp. 561—580, April 1975.
- Markel, J. D., "FFT Pruning," *IEEE Trans. Audio and Electroacoustics*, Vol. AU-19, pp. 305—311, Dec. 1971.
- Markel, J. D., and Gray, A. H., Jr., *Linear Prediction of Speech*, Springer-Verlag, New York, 1976.
- Marple, S. L., *Digital Spectral Analysis with Applications*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1987.
- Martinez, H. G., and Parks, T. W., "Design of Recursive Digital Filters with Optimum Magnitude and Attenuation Poles on the Unit Circle," *IEEE Trans. on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, Vol. ASSP-26, pp. 150—156, 1978.
- Mason, S., and Zimmermann, H. J., *Electronic Circuits, Signals and Systems*, John Wiley and Sons, New York, 1960.

- McClellan, J. H., and Parks, T. W., "A Unified Approach to the Design of Optimum FIR Linear Phase Digital Filters," *IEEE Trans. Circuit Theory*, Vol. CT-20, pp. 697—701, November 1973.
- McClellan, J. H., Parks, T. W., and Rabiner, L. R., "A Computer Program for Designing Optimum FIR Linear Phase Digital Filters," *IEEE Trans. Audio Electroacoustics*, Vol. AU-21, pp. 506—526, Dec. 1973.
- McClellan, J. H., and Rader, C. M., *Number Theory in Digital Signal Processing*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1979.
- McGillem, C. D., and Cooper, G. R., *Continuous and Discrete Signal and System Analysis*, Holt, Rinehart and Winston, New York, 1974.
- Mersereau, R. M., Schafer, R. W., Barnwell, T. P., and Smith, D. L., "A Digital Filter Design Package for PCs and TMS320s," *Proc. MIDCON*, Dallas, TX, 1984.
- Mills, W. L., Mullis, C. T., and Roberts, R. A., "Digital Filter Realizations Without Overflow Oscillations," *IEEE Trans. on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, Vol. ASSP-26, pp. 334—338, Aug. 1978.
- Morse, P. M., and Feshbach, H., *Methods of Theoretical Physics*, McGraw-Hill Book Company, New York, 1953.
- Mullis, C. T., and Roberts, R. A., "Synthesis of Minimum Roundoff Noise Fixed Point Digital Filters," *IEEE Trans. Circuits and Systems*, Vol. CAS-23, pp. 551—562, Sept. 1976.
- Nawab, S. N., and Quatieri, T. F., "Short-Time Fourier Transform," in *Advanced Topics in Signal Processing*, J. S. Lim and A. V. Oppenheim, Eds., Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1988.
- Noll, A. M., "Cepstrum Pitch Determination," *J. Acoustical Society of America*, Vol. 41, pp. 293—309, Feb. 1967.
- Nyquist, H., "Certain Topics in Telegraph Transmission Theory," *AIEE Trans.*, pp. 617—644, 1928.
- Oetken, G., Parks, T. W., and Schüssler, H. W., "New Results in the Design of Digital Interpolators," *IEEE Trans. on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, Vol. ASSP-23, pp. 301—309, June 1975.
- Oppenheim, A. V., "Generalized Superposition," *Information Control*, Vol. 11, Nos. 5—6, pp. 528—536, Nov.-Dec. 1967.
- Oppenheim, A. V., "Generalized Linear Filtering," Chap. 8 in *Digital Processing of Signals*, B. Gold and C. M. Rader, Eds., McGraw-Hill Book Company, New York, 1969a.
- Oppenheim, A. V., "A Speech Analysis-Synthesis System Based on Homomorphic Filtering," *J. Acoustical Society of America*, Vol. 45, pp. 458—465, Feb. 1969b.
- Oppenheim, A. V., "Realization of Digital Filters Using Block-Floating-Point Arithmetic," *IEEE Trans. Audio Electroacoustics*, Vol. AU-18, pp. 130—136, Jan. 1970.
- Oppenheim, A. V., Ed., *Applications of Digital Signal Processing*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1978.
- Oppenheim, A. V., and Johnson, D. H., "Discrete Representation of Signals," *Proc. IEEE*, Vol. 60, No. 6, pp. 681—691, June 1972.
- Oppenheim, A. V., and Schafer, R. W., "Homomorphic Analysis of Speech," *IEEE Trans. Audio Electroacoustics*, Vol. AU-16, No. 2, pp. 221—226, June 1968.
- Oppenheim, A. V., and Schafer, R. W., *Digital Signal Processing*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1975.
- Oppenheim, A. V., Schafer, R. W., and Stockam, T. G., Jr., "Nonlinear Filtering of Multiplied and Convolved Signals," *Proc. IEEE*, Vol. 56, No. 8, pp. 1264—1291, Aug. 1968.
- Oppenheim, A. V., and Weinstein, C. J., "Effects of Finite Register Length in Digital Filtering and the Fast Fourier Transform," *Proc. IEEE*, pp. 957—976, Aug. 1972.
- Oppenheim, A. V., and Willsky, A. S., with I. T. Young, *Signals and Systems*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1983.
- O'Shaughnessy, D., *Speech Communication, Human and Machine*, Addison-Wesley Publishing Company, Reading, MA, 1987.

- Papoulis, A., "On the Approximation Problem in Filter Design," *IRE Conv. Record*, Pt. 2, pp. 175—185, 1957.
- Papoulis, A., *The Fourier Integral and Its Applications*, McGraw-Hill Book Company, New York, 1962.
- Papoulis, A., *Systems and Transforms with Applications in Optics*, McGraw-Hill Book Company, New York, 1968.
- Papoulis, A., *Signal Analysis*, McGraw-Hill Book Company, New York, 1977.
- Papoulis, A., *Circuits and Systems*, Holt, Rinehart and Winston, New York, 1980.
- Papoulis, A., *Probability, Random Variables and Stochastic Processes*, 2nd ed., McGraw-Hill Book Company, New York, 1984.
- Parks, T. W., and Burrus, C. S., *Digital Filter Design*, John Wiley, New York, 1987.
- Parks, T. W., and McClellan, J. H., "Chebyshev Approximation for Nonrecursive Digital Filters with Linear Phase," *IEEE Trans. Circuit Theory*, Vol. CT-19, pp. 189—194, Mar. 1972a.
- Parks, T. W., and McClellan, J. H., "A Program for the Design of Linear Phase Finite Impulse Response Filters," *IEEE Trans. Audio Electroacoustics*, Vol. AU-20, No. 3, pp. 195—199, Aug. 1972b.
- Parsons, T., *Voice and Speech Processing*, McGraw-Hill Book Company, New York, 1986.
- Parzen, E., *Modern Probability Theory and Its Applications*, John Wiley and Sons, New York, 1960.
- Parzen, E., *Stochastic Processes*, Holden-Day, San Francisco, 1962.
- Peled, A., and Liu, B., *Digital Signal Processing: Theory, Design and Implementation*, John Wiley and Sons, New York, 1976.
- Phillips, C. L., and Nagle, H. T., Jr., *Digital Control System Analysis and Design*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1984.
- Pratt, W., *Digital Image Processing*, John Wiley and Sons, New York, 1978.
- Press, W. H., Flannery, B. P., Teukolsky, S. A., and Vetterling, W. T., *Numerical Recipes*, Cambridge University Press, Cambridge, 1986.
- Press, W. H., Flannery, B. P., Teukolsky, S. A., and Vetterling, W. T., *Numerical Recipes in C*, Cambridge University Press, Cambridge, 1988.
- Proakis, J. G., and Manolakis, D. G., *Introduction to Digital Signal Processing*, Macmillan Publishing Company, New York, 1988.
- Rabiner, L. R., "The Design of Finite Impulse Response Digital Filters Using Linear Programming Techniques," *Bell System Technical J.*, pp. 1177—1198, July-Aug. 1972a.
- Rabiner, L. R., "Linear Program Design of Finite Impulse Response (FIR)Digital Filters," *IEEE Trans. on Audio and Electroacoustics*, Vol. Av-20, No. 4, pp. 280—288, Oct. 1972b.
- Rabiner, L. R., and Gold, B., *Theory and Application of Digital Signal Processing*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1975.
- Rabiner, L. R., Graham, N. Y., and Helms, H. D., "Linear Programming Design of IIR Digital Filters with Arbitrary Magnitude," *IEEE Trans. on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, Vol. ASSP-22, pp. 117—123, April 1974.
- Rabiner, L. R., Kaiser, J. F., Herrmann, O., and Dolan, M. T., "Some Comparisons Between FIR and IIR Digital Filters," *Bell System Technical J.*, Vol. 53, No. 2, pp. 305—331, Feb. 1974.
- Rabiner, L. R., McClellan, J. H., and Parks, T. W., "FIR Digital Filter Design Techniques Using Weighted Chebyshev Approximation," *Proc. IEEE*, Vol. 63, pp. 595—610, April 1975.
- Rabiner, L. R., and Rader, C. M., Eds., *Digital Signal Processing*, IEEE Press, New York, 1972.
- Rabiner, L. R., and Schafer, R. W., "On the Behavior of Minimax FIR Digital Hilbert Transformers," *Bell System Technical J.*, Vol. 53, No. 2, pp. 361—388, Feb. 1974.
- Rabiner, L. R., and Schafer, R. W., *Digital Processing of Speech Signals*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1978.
- Rabiner, L. R., Schafer, R. W., and Rader, C. M., "The Chirp z-Transform Algorithm," *IEEE Trans. Audio Electroacoustics*, Vol. AU-17, pp. 86—92, June 1969.
- Rader, C. M., "Discrete Fourier Transforms When the Number of Data Samples Is Prime", *Proc. IEEE*, Vol. 56, pp.

- 1107—1108, June 1968.
- Rader, C. M., "An Improved Algorithm for High-Speed Autocorrelation with Applications to Spectral Estimation," *IEEE Trans. Audio Electroacoustics*, Vol. AU-18, pp. 439—441, Dec. 1970.
- Rader, C. M., and Brenner, N. M., "A New Principle for Fast Fourier Transformation," *IEEE Trans. on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, Vol. ASSP-25, pp. 264—265, June 1976.
- Rader, C. M., and Gold, B., "Digital Filter Design Techniques in the Frequency Domain," *Proc. IEEE*, Vol. 55, pp. 149—171, Feb. 1967.
- Ragazzini, J. R., and Franklin, G. F., *Sampled Data Control Systems*, McGraw-Hill Book Company, New York, 1958.
- Rainville, E. D., *The Laplace Transform: An Introduction*, Macmillan Publishing Company, New York, 1963.
- Rao, S. K., and Kailath, T., "Orthogonal Digital Filters for VLSI Implementation," *IEEE Trans. Circuits and Systems*, Vol. CAS-31, No. 11, pp. 933—945, Nov. 1984.
- Reut, Z., Pace, N. G., and Heaton, M. J. P., "Computer Classification of Sea Beds by Sonar," *Nature*, Vol. 314, pp. 426—428, Apr. 4, 1985.
- Richards, M. A., "Applications of Deczky's Program for Recursive Filter Design to the Design of Recursive Decimators," *IEEE Trans. on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, Vol. ASSP-30, pp. 811—814, Oct. 1982.
- Roberts, R. A., and Mullis, C. T., *Digital Signal Processing*, Addison-Wesley Publishing Company, Reading, MA, 1987.
- Robinson, E. A., and Durram, T. S., *Geophysical Signal Processing*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1985.
- Robinson, E. A., and Treitel, S., *Geophysical Signal Analysis*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1980.
- Runge, C., "Über die Zerlegung Empirisch Gegebener Periodischer Functionen in Sinuswellen," *Z. Math. Physik*, Vol. 48, pp. 443—456, 1903; Vol. 53, pp. 117—123, 1905.
- Sandberg, I. W., "Floating-Point-Roundoff Accumulation in Digital Filter Realization," *Bell System Technical J.*, Vol. 46, pp. 1775—1791, Oct. 1967.
- Schaefer, R. T., Schafer, R. W., and Mersereau, R. M., "Digital Signal Processing for Doppler Radar Signals," *Proc. 1979 IEEE Int. Conf. on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, pp. 170—173, 1979.
- Schafer, R. W., and Rabiner, L. R., "System for Automatic Formant Analysis of Voiced Speech," *J. Acoustical Society of America*, Vol. 47, No. 2, Pt. 2, pp. 634—648, Feb. 1970.
- Schafer, R. W., and Rabiner, L. R., "A Digital Signal Processing Approach to Interpolation," *Proc. IEEE*, Vol. 61, pp. 692—702, June 1973.
- Schmid, H., *Electronic Analog/Digital Conversions*, John Wiley and Sons, New York, 1976.
- Schroeder, M. R., "Direct (Nonrecursive) Relations Between Cepstrum and Predictor Coefficients," *IEEE Trans. on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, Vol. ASSP-29, No. 2, pp. 297—301, April 1981.
- Schüssler, H. W., and Steffen, P., "Some Advanced Topics in Filter Design," in *Advanced Topics in Signal Processing*, J. S. Lim and A. V. Oppenheim, Eds., Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1988.
- Schwartz, M., *Information Transmission, Modulation and Noise: A Unified Approach to Communications Systems*, 3rd ed., McGraw-Hill Book Company, New York, 1980.
- Senmoto, S., and Childers, D. G., "Adaptive Decomposition of a Composite Signal of Identical Unknown Wavelets in Noise," *IEEE Trans. on Systems, Man, and Cybernetics*, Vol. SMC-2, No. 1, p. 59, Jan. 1972.
- Shannon, C. E., "Communication in the Presence of Noise," *Proc. IRE*, pp. 10—12, Jan. 1949.
- Siebert, W. M., *Circuits, Signals, and Systems*, McGraw-Hill Book Company, New York, 1986.
- Singleton, R. C., "A Method for Computing the Fast Fourier Transform with Auxiliary Memory and Limited High-Speed Storage," *IEEE Trans. Audio Electroacoustics*, Vol. AU-15, pp. 91—97, June 1967.
- Singleton, R. C., "An Algorithm for Computing the Mixed Radix Fast Fourier Transform," *IEEE Trans. Audio Electroacoustics*, Vol. AU-17, pp. 93—103, June 1969.
- Skolnik, M. I., *Introduction to Radar Systems*, 2nd ed., McGraw-Hill Book Company, New York, 1980.

- Slepian, D., Landau, H. T., and Pollack, H. O., "Prolate Spheroidal Wave Functions, Fourier Analysis, and Uncertainty Principle (I and II)," *Bell System Technical J.*, Vol. 40, No. 1, pp. 43-80, Jan. 1961.
- Smith, M. J. T., and Barnwell, T. P. III, "Exact Reconstruction Techniques for Tree-Structured Subband Coders," *IEEE Trans. on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, Vol. ASSP-34, pp. 434-441, June 1986.
- Stearns, S. D., and David, R. A., *Signal Processing Algorithms*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1988.
- Steiglitz, K., "The Equivalence of Analog and Digital Signal Processing," *Information and Control*, Vol. 8, No. 5, pp. 455-467, Oct. 1965.
- Steiglitz, K., "Computer-Aided Design of Recursive Digital Filters," *IEEE Trans. Audio Electroacoustics*, Vol. AU-18, June 1970.
- K. Steiglitz and B. Dickinson, "Phase Unwrapping by Factorization," *IEEE Trans. on Acoustics, Speech and Signal Processing*, Vol ASSP-30, pp. 984-991, 1982.
- Stockham, T. G., Jr., "High Speed Convolution and Correlation," *1966 Spring Joint Computer Conference, AFIPS Proc.*, Vol. 28, pp. 229-233, 1966.
- Stockham, T. G., Jr., Cannon, T. M., and Ingebretsen, R. B., "Blind Deconvolution Through Digital Signal Processing" *Proc. IEEE*, Vol. 63, pp. 678-692, April 1975.
- Storer, J. E., *Passive Network Synthesis*, McGraw-Hill Book Company, New York, 1957.
- Strum, R. D., and Kirk, D. E., *First Principles of Discrete Systems and Digital Signal Processing*, Addison-Wesley Publishing Company, Reading, MA, 1988.
- Thomas, G. B., Jr., and Finney, R. L., *Calculus and Analytic Geometry*, 6th ed., Addison-Wesley Publishing Company, Reading, MA, 1984.
- Thomas, J. B., *An Introduction to Statistical Communication Theory*, John Wiley and Sons, New York, 1969.
- Tretter, S. A., *Introduction to Discrete-Time Signal Processing*, John Wiley and Sons, New York, 1976.
- Tribolet, J. M., "A New Phase Unwrapping Algorithm," *IEEE Trans. on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, Vol. ASSP-25, No. 2, pp. 170-177, April 1977.
- Tribolet, J. M., *Seismic Applications of Homomorphic Signal Processing*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1979.
- Tukey, J. W., *Exploratory Data Analysis*, Addison-Wesley Publishing Company, Reading, MA, 1977.
- Ulrych, T. J., "Application of Homomorphic Deconvolution to Seismology," *Geophys.*, Vol. 36, No. 4, pp. 650-660, Aug. 1971.
- Vaidyanathan, P. P., "A Unified Approach to Orthogonal Digital Filters and Wave Digital Filters, Based on LBR Two-Pair Extraction," *IEEE Trans. Circuits and Systems*, Vol. CAS-32, pp. 673-686, July 1985.
- Verhelst, W., and Steenhaut, O., "A New Model for the Short-Time Complex Cepstrum of Voiced Speech," *IEEE Trans. on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, Vol. ASSP-34, No. 1, pp. 43-51, Feb. 1986.
- Vernet, J. L., "Real Signals Fast Fourier Transform: Storage Capacity and Step Number Reduction by Means of an Odd Discrete Fourier Transform," *Proc. IEEE*, pp. 1531-1532, Oct. 1971.
- Volder, J. E., "The CORDIC Trigonometric Computing Technique," *IRE Trans. Electronic Computers*, Vol. EC-8, pp. 330-334, Sept. 1959.
- Weinberg, L., *Network Analysis and Synthesis*, R. E. Kreiger, Huntington, NY, 1975.
- Weinstein, C. J., "Roundoff Noise in Floating Point Fast Fourier Transform Computation," *IEEE Trans. Audio Electroacoustics*, Vol. AU-17, pp. 209-215, Sept. 1969.
- Weinstein, C. J., and Oppenheim, A. V., "A Comparison of Roundoff Noise in Floating Point and Fixed Point Digital Filter Realizations," *Proc. IEEE*, Vol. 57, pp. 1181-1183, June 1969.
- Welch, P. D., "A Fixed-Point Fast Fourier Transform Error Analysis," *IEEE Trans. Audio Electroacoustics*, Vol. AU-

- 17, pp. 153—157, June 1969.
- Welch, P. D., "The Use of the Fast Fourier Transform for the Estimation of Power Spectra," *IEEE Trans. Audio Electroacoustics*, Vol. AU-15, pp. 70—73, June 1970.
- Widrow, B., "A Study of Rough Amplitude Quantization by Means of Nyquist Sampling Theory," *IRE Trans. Circuit Theory*, Vol. CT-3, pp. 266—276, Dec. 1956.
- Widrow, B., "Statistical Analysis of Amplitude-Quantized Sampled-Data Systems," *AIEE Trans. (Applications and Industry)*, Vol. 81, pp. 555—558, Jan. 1961.
- Winograd, S., "On Computing the Discrete Fourier Transform," *Mathematics of Computation*, Vol. 32, No. 141, pp. 175—199, Jan. 1978.
- Wozencraft, J. M., and Jacobs, I. M., *Principles of Communication Engineering*, John Wiley and Sons, New York, 1965.
- Zemanian, A. H., *Distribution Theory and Transform Analysis; An Introduction to Generalized Functions, with Applications*, McGraw-Hill Book Company, New York, 1965.
- Zverev, A. I., *Handbook of Filter Synthesis*, John Wiley and Sons, New York, 1967.

按专题排列的参考文献目录

离散时间信号处理的应用

- ◆ Andrews and Hunt(1977)
- ◆ Atal(1976)
- ◆ Atal and Hanauer(1971)
- ◆ Castleman(1979)
- ◆ Flanagan(1972)
- Flanagan, Coker, Rabiner, Schafer, and Umeda(1970)
- ◆ Jayant and Noll(1984)
- ◆ Macovski(1983)
- Makhoul(1975)
- ◆ Markel and Gray(1976)
- ◆ Oppenheim(1978)
- ◆ O'Shaughnessy(1987)
- ◆ Parsons(1986)
- ◆ Pratt(1978)
- ◆ Rabiner and Schafer(1978)
- ◆ Robinson and Durrani(1985)
- ◆ Robinson and Treitel(1980)
- ◆ Skolnik(1980)

基础知识和基础数学

- ◆ Ahlfors(1979)
- ◆ Birkhoff and Rota(1978)
- ◆ Cheney(1966)
- ◆ Churchill and Brown(1984)
- ◆ Gel'fand et al. (1964-1968)
- ◆ Grossman(1982)
- ◆ Hildebrand(1968, 1973, 1976)
- ◆ Jolley(1961)
- ◆ Morse and Feshbach(1953)
- ◆ Thomas and Finney(1984)
- ◆ Zemanian(1965)

差分方程和滤波器结构

- ◆ Chow and Cassignol(1962)
- Clements and Pease (1989)
- Crochiere(1972)
- Crochiere and Oppenheim(1975)
- Fettweis(1986)
- Gray and Markel(1973, 1975)
- Kaiser and Hamming(1977)
- Kelly and Lochbaum(1962)
- Rao and Kailath(1984)
- Vaidyanathan(1985)

数字信号处理

- ◆ Blackman(1965)
- ◆ DSP Committee(1976, 1979)
- ◆ Oppenheim and Schafer(1975)
- ◆ Peled and Liu(1976)

- ◆ Dudgeon and Mersereau(1984)
- ◆ Freeman(1965)
- ◆ Gold and Rader(1969)
- ◆ Hamming(1988)
- ◆ Haykin(1986)
- ◆ Jackson(1986)
- ◆ Lim(1989)
- ◆ Lim and Oppenheim(1988)
- 离散傅里叶变换**
- Bergland(1968)
- ◆ Blahut(1985)
- Bluestein(1970)
- Bracewell(1983,1984)
- Cooley, Lewis, and Welch(1967)
- Danielson and Lanczos(1942)
- Duhamel(1986)
- Duhamel and Hollmann(1984)
- Gentleman and Sande(1966)
- Goertzel(1958)
- Good(1958)
- Heideman, Johnson, and Burrus(1984)
- Helms(1967)
- Hewes, Broderson, and Buss(1979)
- Kolba and Parks(1977)
- Markel(1971)
- 滤波器设计(连续时间)**
- ◆ Christian and Eisenmann(1966)
- ◆ Daniels(1974)
- ◆ Guillemin(1957)
- ◆ Huelsman and Allen(1980)
- ◆ Johnson(1976)
- ◆ Johnson, Johnson, and Moore(1980)
- 滤波器设计(离散时间)**
- ◆ Antoniou(1979)
- Chen and Parks(1987)
- Constantinides(1970)
- Deczky(1972)
- Fletcher and Powell(1963)
- Golden and Kaiser(1964)
- Gray and Markel(1976)
- Herrmann(1970)
- Herrmann, Rabiner, and Chan(1973)
- Herrmann and Schüssler(1970a,1970b)
- ◆ Proakis and Manolakis(1988)
- ◆ Rabiner and Gold(1975)
- ◆ Rabiner and Rader(1972)
- ◆ Roberts and Mullis(1987)
- ◆ Stearns and David(1988)
- ◆ Strum and Kirk(1988)
- ◆ Tretter(1976)
- ◆ Tukey(1977)
- ◆ Brigham(1988)
- Burrus(1977,1988)
- ◆ Burrus and Parks(1985)
- Cooley and Tukey(1965)
- ◆ McClellan and Rader(1979)
- ◆ Press, Flannery, Teukolsky, and Vetterling(1986,1988)
- Rabiner, Schafer, and Rader(1969)
- Rader(1968)
- Rader and Brenner(1976)
- Runge(1903)
- Singleton(1967,1969)
- Stockham(1966)
- Vernet(1971)
- Volder(1959)
- Winograd(1978)
- ◆ Lam(1979)
- ◆ Papoulis(1957)
- ◆ Storer(1957)
- ◆ Weinberg(1975)
- ◆ Zverev(1967)
- Mersereau, Schafer, Barnwell, and Smith(1984)
- ◆ Parks and Burrus(1987)
- Parks and McClellan(1972a,1972b)
- Rabiner(1972a,1972b)
- Rabiner, Graham, and Helms(1974)
- Rabiner, Kaiser, Herrmann, and Dolan(1974)
- Rabiner, McClellan, and Parks(1975)
- Rader and Gold(1967)

- Hofstetter, Oppenheim, and Siegel(1971) Richards(1982)
 Kaiser(1966, 1974) Schüssler and Steffen(1988)
 Martinez and Parks(1978) Slepian, Landau, and Pollack(1961)
 McClellan and Parks(1973) Steiglitz(1970)
 McClellan, Parks, and Rabiner(1973)
- 傅里叶级数和傅里叶变换, 拉普拉斯变换及 z 变换**
- ◆ Arsac(1966) ◆ Jury(1964)
 - ◆ Bracewell(1986) ◆ Lighthill(1958)
 - ◆ Carslaw(1952) ◆ Papoulis(1962)
 - ◆ Dym and McKean(1972) ◆ Rainville(1963)
- 希尔伯特变换**
- Berkhout(1973) Hayes, Lim, and Oppenheim(1980)
 - Cizek(1970) Rabiner and Schafer(1974)
 - Gold, Oppenheim, and Rader(1970)
- 同态系统**
- Bauman, Lipshitz, and Vanderkooy Schafer and Rabiner(1970)
 (1985) Schroeder(1981)
 - Bogert, Healy, and Tukey(1963) Senmoto and Childers(1972)
 - Davis and Mermelstein(1980) Smith and Barnwell(1986)
 - Furui(1981) Steiglitz and Dickinson(1982)
 - Juang, Rabiner, and Wilpon(1987) Stockham, Cannon, and
 Noll(1967) Ingebretsen(1975)
 - Oppenheim(1967, 1969a, 1969b) Tribolet(1977)
 - Oppenheim and Schafer(1968) ◆ Tribolet(1979)
 - Oppenheim, Schafer, and Stockham(1968) Ulrych(1971)
 - Reut, Pace, and Heaton(1985) Verhelst and Steenhaut(1986)
- 量化效应**
- Barnes and Farn(1977) Liu(1971)
 - Bennett(1948) Liu and Kaneko(1969)
 - ◆ Cavanagh(1984) Liu and Peled(1975)
 - Chan and Rabiner(1973a, 1973b, 1973c) Mills, Mullis, and Roberts(1978)
 - Claasen, Mecklenbrauker, and Peek(1973) Mullis and Roberts(1976)
 - Ebert, Mazo, and Taylor(1969) Oppenheim(1970)
 - Hwang(1974) Oppenheim and Weinstein(1972)
 - Jackson(1969, 1970a, 1970b) Sandberg(1967)
 - Kan and Aggarwal(1971) Weinstein(1969)
 - Kaneko and Liu(1970) Weinstein and Oppenheim(1969)
 - ◆ Knuth(1981) Welch(1969)
 - Knowles and Olcayto(1968) Widrow(1956, 1961)
- 随机信号和概率论**
- ◆ Davenport(1970) ◆ Papoulis(1984)

- ◆ Drake(1967) ◆ Parzen(1960)
- ◆ Feller(1981) ◆ Parzen(1962)
- 采样和多速率信号处理**
- ◆ Crochiere and Rabiner(1983) Schafer and Rabiner(1973)
- ◆ Hnatek(1976) ◆ Schmid(1970)
- Nyquist(1928) Shannon(1949)
- Oetken, Parks, and Schüssler(1975) Steiglitz(1965)
- Oppenheim and Johnson(1972)
- 信号和系统**
- ◆ Black(1953) ◆ Gabel and Roberts(1987)
- ◆ Carlson(1975) ◆ Guillemin(1963)
- ◆ Chen(1970) ◆ Haykin(1983)
- ◆ Cooper and McGillem(1967) ◆ Jury(1958)
- ◆ Cruz and Van Valkenburg(1974) ◆ Kailath(1980)
- ◆ Lathi(1965) ◆ Papoulis(1980)
- ◆ Liu and Liu(1975) ◆ Phillips and Nagle(1984)
- ◆ Mason and Zimmermann(1960) ◆ Ragazzini and Franklin(1958)
- ◆ McGillem and Cooper(1974) ◆ Schwartz(1980)
- ◆ Oppenheim and Willsky(1983) ◆ Siebert(1986)
- ◆ Papoulis(1968) ◆ Thomas(1969)
- ◆ Papoulis(1977) ◆ Wozencraft and Jacobs(1965)
- 谱分析**
- Allen and Rabiner(1977) Kaiser and Schafer(1980)
- ◆ Bartlett(1978) ◆ Kay(1988)
- ◆ Blackman and Tukey(1958) Kay and Marple(1981)
- ◆ Box and Jenkins(1970) ◆ Koopmanns(1974)
- ◆ Gardner(1988) ◆ Marple(1987)
- ◆ Grenander and Rosenblatt(1957) Nawab and Quatieri(1988)
- Griffin and Lim(1984) Rader(1970)
- ◆ Hannan(1960) Schaefer, Schafer, and Mersereau(1979)
- Harris(1978) Welch(1970)
- ◆ Jenkins and Watts(1968)

姓名译名对照表

Aggarwal	阿加沃	Johnson	约翰逊
Andrews	安德鲁斯	Kaiser	凯泽
Barnwell	巴恩韦尔	Kan	卡恩
Bartlett	巴特利特	Kaneko	凯内克
Bauman	鲍曼	Kay	凯依
Blackman	布莱克曼	Kelly	凯利
Bluestein	布鲁斯坦	Knuth	克努特
Bogert	博格特	Lagrange	拉格朗日
Burrus	伯鲁斯	Laurent	劳伦
Butterworth	巴特沃兹	L'Hopital	洛比塔尔
Castleman	卡斯特尔曼	Lim	利姆
Cauchy-Riemann	柯西-黎曼	Lochbaum	洛赫鲍姆
Chan	钱	Macovski	马科夫斯基
Chebyshev	切比雪夫	Marple	马布尔
Claasen	克拉森	Mason	梅森
Clements	克莱门茨	Mersereau	默塞里尤
Cooley-Tukey	库利-图基	Noll	诺尔
Davenport	达文波特	Nyquist	奈奎斯特
Dehner	德内尔	Papoulis	帕普里斯
Dickison	迪金森	Parks-McClellan	帕克斯-麦克莱伦
Dirac	狄拉克	Parseval	帕斯瓦尔
Doppler	多普勒	Pease	皮斯
Dudgeon	达吉恩	Peled	皮莱德
Durrani	杜拉尼	Pythagorean	毕达哥拉斯
Ebert	埃伯特	Poison	泊松
Fourier	傅里叶	Rabiner	拉宾
Gentleman	金特尔曼	Rader	拉德
Gibbs	吉布斯	Richards	理查德
Goertzel	戈泽尔	Robiner	罗宾纳
Gold	戈尔德	Robinson	罗宾逊
Good	古德	Sandbery	桑德伯格
Grossman	格罗斯曼	Schafer	谢弗
Hamming	哈明	Schussler	舒斯特
Hanning	汉宁	Schussler	施密德
Hartley	哈特利	Smith	史密斯
Haykin	海金	Steiglitz	斯泰格利茨
Herrmann	赫尔曼	Tribolet	特里博利特
Hewes	休斯	Tukey	图基
Hilbert	希尔伯特	Weinberg	温伯格
Hnatek	赫纳特克	Weinstein	温斯坦
Huang	黄	Welch	韦尔奇
Hunt	亨特	Widrow	威德洛
Jackson	杰克逊	Winograd	威诺格拉德
Jacobi	雅可比		

汉英名词对照索引

二画

二进制数系统 Binary number system 96, 120, 272

三画

广义线性相位 Generalized linear phase 207

四画

无限冲激响应 Indefinite impulse response (IIR) 24, 174

支路 Branch 247

互相关 Cross-correlation 52

切比雪夫滤波器 Chebyshev filter 345, 349

中国余数定理 Chinese remainder theorem 511

内插 Interpolation 71, 87

巴特沃兹逼近 Butterworth approximation 349, 687

巴特沃兹滤波器 Butterworth filter 339, 687

双边 z 变换 Bilateral z -transformation 123

双边序列 Two-sided sequence 132

五画

正弦序列 Sinusoidal sequence 10

功率密度谱 Power density spectrum 52, 294

功率谱估计 Power spectrum estimation 612

可加性 Additivity property 14

平均周期图 Average periodogram 605

加权序列 Weighting sequence 133

加性噪声模型 Additive noise model 98, 276

加窗 Windowing 367

对称性 Symmetry property 40

对偶性 Duality property 47

六画

吉布斯现象 Gibbs phenomenon 38

共轭反对称序列 Conjugate-antisymmetric sequence 40

有限冲激响应 Finite impulse response (FIR) 24

有限输入有限输出 Bounded-input bounded-output (BIBO) 16

有理系统函数 Rational system function 175

同态系统 Homomorphic system 632

因果序列 Causal sequence 23

自协方差序列 Autocovariance sequence 51

自相关序列 Autocorrelation sequence 51

自相关函数 Autocorrelation function 51

后向差分系统 Backward difference system 15, 24

全极点格型系统 All-pole lattice system 266

全通滤波器 Allpass filter 193

多项式求根 Polynomial rooting 653

多频带滤波器 Multiband filter 33

冲激响应 Impulse response 16

交错点定理 Alternation theorem 388

并联型结构 Parallel form structure 253

收敛 Convergence 36, 124

七画

抗混叠滤波器 Anti-aliasing filter 92

块卷积 Block convolution 460

极限环 Limit cycle 309

连续时间模拟信号 Continuous-time analog signal 6

连续时间模拟信号处理 Continuous-time analog signal processing 64, 73, 91

时不变系统 Time-invariant system 15

围线积分 Contour integration 149

级联型结构 Cascade form structure 250, 260

位倒序 Bit-reversed order 490

希尔伯特变换 Hilbert transform 546

系统函数 System function 167, 169

补零 Zero padding 460

八画

抽取 Decimation 85

奈奎斯特采样定理 Nyquist sampling theorem 68

非因果系统 Noncausal system 15

依时傅里叶变换 Time-dependent Fourier trans-

form 589	(DFT) 514
舍入噪声 Roundoff noise 291	部分分式展开 Partial fraction expansion 48, 137
采样 Sampling 64	递推差分方程 Recursive difference equation 126
周期卷积 Periodic convolution 47, 152	浮点表示 Floating-point representation 121, 273
卷积定理 Convolution theorem 46	流图倒置 Flow graph reversal 257
单边z变换 One-side z-transform 155	十一画
单位冲激函数 Unit impulse function 8	基R算法 Radix-R algorithm 508
单位样本序列 Unit sample sequence 8	累加器系统 Accumulator system 14, 24
单位圆 Unit circle 124	移不变系统 Shift-invariant system 15
线性卷积 Linear convolution 449	符号位 Sign bit 95
线性相位 Linear phase 169	旋转因子 Twiddle factor 505
线性调频变换算法 Chirp transform algorithm (CTA) 574	混合基算法 Mixed-radix algorithm 508
九画	混叠 Aliasing 67
按时间抽取的 FFT 算法 Decimation-in-time FFT algorithm 485	随机信号 Random signal 49
按频率抽取的 FFT 算法 Decimation-in-frequency FFT algorithm 494	减采样 Downsampling 82
带阻滤波器 Bandstop filter 33	十二画
带限信号 Bandlimited signal 170	量化 Quantization 93, 95
带通滤波器 Bandpass filter 33	最佳逼近 Optimum approximation 385
标号映射 Index map 504	锐截止滤波器 Sharp cutoff filter 104~106
相位响应 Phase response 167	短时傅里叶变换 Short-time Fourier transform 589
复卷积定理 Complex convolution theorem 151	傅里叶变换 Fourier transform 34
复倒谱 Complex cepstrum 639	傅里叶变换对 Fourier transform pair 147
修正周期图 Modified periodogram 603	循环卷积 Circular convolution 449
信号重构 Signal reconstruction 170	十三画
信号流图 Signal flow graph 247	零阶保持滤波器 Zero-order-hold filter 93
信噪比 Signal-to-noise ratio 100	频域表示 Frequency domain representation 30, 66
差分方程 Difference equation 25	频率采样系统 Frequency sampling system 256, 321
前向差分系统 Forward difference system 15, 24	频率响应 Frequency response 30
语音合成 Speech synthesis 1	频谱 Spectrum 34
十画	数字信号处理 Digital signal processing 1
素因子算法 Prime factor algorithm 511	数字滤波器 Digital filter 333
特征函数 Eigenfunction 30, 46	溢出振荡 Overflow oscillation 312
特征值 Eigenvalue 30, 46	群延迟 Group delay 169
倒谱分析 Cepstrum analysis 632	十四画
高通滤波器 Highpass filter 33, 168	模拟信号 Analog signal 6
离散时间滤波器 Discrete-time filter 32	稳定系统 Stable system 16
离散傅里叶级数 Discrete Fourier series (DFS) 426	
离散傅里叶变换 Discrete Fourier transform	

箝位 Clipping 96,273
谱图 Spectrogram 589
十五画
横向滤波器 Transversal filter 259
增采样 Upsampling 85

其它
N 点循环卷积 N-point circular convolution 449
Z 平面 Z-plane 124
Z 变换 Z-transform 123
Z 变换算子 Z-transform operator 123