

板凳龙运动轨迹模型的分析研究

蔡志杰^{1,2,3}

(1. 复旦大学 数学科学学院, 上海 200433; 2. 上海市现代应用数学重点实验室, 上海 200433;
3. 非线性数学模型与方法教育部重点实验室, 上海 200433)

摘 要: 对浙闽地区的一种传统地方民俗文化活动——板凳龙进行分析研究, 建立龙头运动的常微分方程模型、龙身和龙尾运动的递推模型和调头曲线模型. 板凳龙在行进过程中可能发生碰撞, 本文建立了板凳碰撞的判别模型, 给出了相应的判别条件, 并在各板凳不碰撞的情况下, 确定最小螺距和龙头的最大速度.

关键词: 板凳龙; 等距螺线; 常微分方程模型; 碰撞

中图分类号: O29

文献标志码: A

文章编号: 2095-3070(2025)01-0025-08

DOI: 10.19943/j.2095-3070.jmmia.2025.01.03

1 问题的提出

2024 年“高教社杯”全国大学生数学建模竞赛 A 题对板凳龙进行研究^[1]. 板凳龙是浙闽地区的传统地方民俗文化活动. 某板凳龙由 223 节板凳组成, 其中第 1 节为龙头, 后面 221 节为龙身, 最后 1 节为龙尾. 赛题要求建立板凳龙运动轨迹的数学模型, 并在板凳龙不发生碰撞的前提下, 确定盘入螺线的最小螺距. 此外, 要求在各把手的速度均不超过 2 m/s 的情况下, 确定龙头的最大行进速度.

2 舞龙队的盘入路径

等距螺线是一个点匀速离开一个固定点, 同时以固定的角速度绕该固定点转动所产生的轨迹, 又称为阿基米德螺线, 其极坐标方程为

$$\rho = \frac{a}{2\pi}\theta, \quad (1)$$

其中, a 表示螺距.

记第 i 条板凳前把手处中心位置为 $P_i (i=0, 1, 2, \dots, n)$, 其极坐标为 (ρ_i, θ_i) , 相应的直角坐标为 (x_i, y_i) , 其中 $i=0$ 表示龙头, $i=n$ 表示龙尾, $i=1, 2, \dots, n-1$ 表示龙身. 设前把手均位于等距螺线上, 则

$$\rho_i = \frac{a}{2\pi}\theta_i. \quad (2)$$

记时刻 t 龙头前把手位于 $\theta_0(t)$, 龙头的运动速度为 v_0 , 则

$$v_0^2 = \left(\frac{dx_0}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy_0}{dt}\right)^2 = \frac{a^2}{4\pi^2}(1+\theta_0^2)\left(\frac{d\theta_0}{dt}\right)^2. \quad (3)$$

考虑到盘入时, 随着时间 t 的推移, $\theta(t)$ 减小, 因此

收稿日期: 2024-11-27

通讯作者: 蔡志杰, E-mail: zhijiecai@163.com

引用格式: 蔡志杰. 板凳龙运动轨迹模型的分析研究[J]. 数学建模及其应用, 2025, 14(1): 25-32.

CAI Z J. Analysis and study on the motion trajectory models of bench loong(in Chinese)[J]. Mathematical Modeling and Its Applications, 2025, 14(1): 25-32.

$$\frac{d\theta_0}{dt} = -\frac{2\pi v_0}{a\sqrt{1+\theta_0^2}}, \quad (4)$$

求解得到

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} [\theta_0(t)\sqrt{1+\theta_0^2(t)} + \ln(\theta_0(t) + \sqrt{1+\theta_0^2(t)})] \\ &= -\frac{2\pi v_0}{a}t + \frac{1}{2} [\theta_0(0)\sqrt{1+\theta_0^2(0)} + \ln(\theta_0(0) + \sqrt{1+\theta_0^2(0)})], \end{aligned} \quad (5)$$

其中, $\theta_0(0)$ 为初始时刻龙头前把手的位置.

记第 i 条板凳的前把手与后把手的距离为 $l_i (i=0, 1, 2, \dots, n)$, 则

$$l_i^2 = \frac{a^2}{4\pi^2} [\theta_{i+1}^2 + \theta_i^2 - 2\theta_i\theta_{i+1}\cos(\theta_{i+1} - \theta_i)]. \quad (6)$$

对式(6)求导可得

$$\frac{d\theta_{i+1}}{dt} = \frac{\theta_{i+1}\cos(\theta_{i+1} - \theta_i) - \theta_i + \theta_i\theta_{i+1}\sin(\theta_{i+1} - \theta_i)}{\theta_{i+1} - \theta_i\cos(\theta_{i+1} - \theta_i) + \theta_i\theta_{i+1}\sin(\theta_{i+1} - \theta_i)} \frac{d\theta_i}{dt}. \quad (7)$$

而

$$|v_i| = \frac{a}{2\pi} \sqrt{1+\theta_i^2} \left| \frac{d\theta_i}{dt} \right|, \quad (8)$$

从而

$$|v_{i+1}| = \frac{|\theta_{i+1}\cos(\theta_{i+1} - \theta_i) - \theta_i + \theta_i\theta_{i+1}\sin(\theta_{i+1} - \theta_i)|}{|\theta_{i+1} - \theta_i\cos(\theta_{i+1} - \theta_i) + \theta_i\theta_{i+1}\sin(\theta_{i+1} - \theta_i)|} \sqrt{\frac{1+\theta_{i+1}^2}{1+\theta_i^2}} |v_i|. \quad (9)$$

3 板凳碰撞模型

舞龙队在行进过程中, 不相邻龙身之间不能碰撞.

如图 1 所示, 记 P_i 到 S_iT_i 的距离为 d_i , 到 R_iS_i 的距离为 w_i , 则板凳 $Q_iR_iS_iT_i$ 各顶点的坐标分别为

$$x_i^Q = x_i + \frac{l_i + d_i}{l_i}(x_{i+1} - x_i) + \frac{w_i}{l_i}(y_{i+1} - y_i), \quad (10)$$

$$y_i^Q = y_i + \frac{l_i + d_i}{l_i}(y_{i+1} - y_i) - \frac{w_i}{l_i}(x_{i+1} - x_i), \quad (11)$$

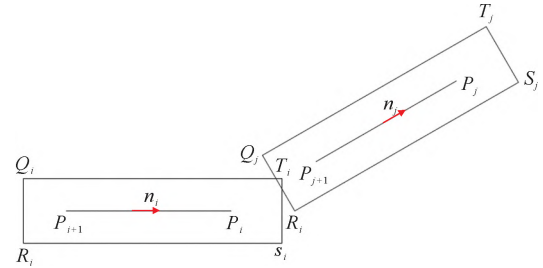


图 1 不相邻板凳碰撞的示意图

$$x_i^R = x_i + \frac{l_i + d_i}{l_i}(x_{i+1} - x_i) - \frac{w_i}{l_i}(y_{i+1} - y_i), \quad (12)$$

$$y_i^R = y_i + \frac{l_i + d_i}{l_i}(y_{i+1} - y_i) + \frac{w_i}{l_i}(x_{i+1} - x_i), \quad (13)$$

$$x_i^S = x_i - \frac{d_i}{l_i}(x_{i+1} - x_i) - \frac{w_i}{l_i}(y_{i+1} - y_i), \quad (14)$$

$$y_i^S = y_i - \frac{d_i}{l_i}(y_{i+1} - y_i) + \frac{w_i}{l_i}(x_{i+1} - x_i), \quad (15)$$

$$x_i^T = x_i - \frac{d_i}{l_i}(x_{i+1} - x_i) + \frac{w_i}{l_i}(y_{i+1} - y_i), \quad (16)$$

$$y_i^T = y_i - \frac{d_i}{l_i}(y_{i+1} - y_i) - \frac{w_i}{l_i}(x_{i+1} - x_i). \quad (17)$$

对任意两条不相邻的板凳 $C_i: Q_iR_iS_iT_i$ 和 $C_j: Q_jR_jS_jT_j (j \neq i-1, i, i+1)$, 由于不会出现一条板凳完全落在另一条板凳中间的情况, 因而 C_i 与 C_j 不碰撞的充分必要条件是 C_i 上任意一条边(记为 AB)与 C_j 上任意一条边(记为 CD)不相交. 令 $A(x_A, y_A), B(x_B, y_B), C(x_C, y_C), D(x_D, y_D)$, 则线段 AB 及 CD 的参数方程分别为

$$x = x_A + p_i t, \quad y = y_A + q_i t, \quad 0 \leq t \leq 1, \quad (18)$$

$$x = x_C + p_j s, \quad y = y_C + q_j s, \quad 0 \leq s \leq 1, \quad (19)$$

其中:

$$p_i = x_B - x_A, \quad q_i = y_B - y_A; \quad (20)$$

$$p_j = x_D - x_C, \quad q_j = y_D - y_C. \quad (21)$$

求线段 AB 与 CD 的交点

$$\begin{cases} x_A + p_i t = x_C + p_j s, \\ y_A + q_i t = y_C + q_j s. \end{cases} \quad (22)$$

当 $\Delta = p_j q_i - p_i q_j \neq 0$ 时, 存在唯一交点

$$\begin{cases} t = \frac{p_j (y_C - y_A) - q_j (x_C - x_A)}{\Delta}, \\ s = \frac{p_i (y_C - y_A) - q_i (x_C - x_A)}{\Delta}. \end{cases} \quad (23)$$

若 $0 \leq s, t \leq 1$, AB 与 CD 不相交, 否则 AB 与 CD 相交.

当 $\Delta = 0$ 时, 若 $p_j (y_C - y_A) = q_j (x_C - x_A)$, $p_i (y_C - y_A) = q_i (x_C - x_A)$, AB 与 CD 重合, 否则 AB 与 CD 平行.

当 AB 与 CD 重合时, 再确定点 A 与点 B 是否在线段 CD 上, 以及点 C 和点 D 是否在线段 AB 上.

考察点 A 是否在线段 CD 上.

当 $p_j \neq 0$ 时,

$$x_A = x_C + p_j s, \quad (24)$$

得到

$$s = \frac{x_A - x_C}{p_j}. \quad (25)$$

若 $0 \leq s \leq 1$, 则点 A 在线段 CD 上; 否则点 A 不在线段 CD 上.

当 $p_j = 0$ 时, $q_j \neq 0$,

$$y_A = y_C + q_j s, \quad (26)$$

得到

$$s = \frac{y_A - y_C}{q_j}. \quad (27)$$

若 $0 \leq s \leq 1$, 则点 A 在线段 CD 上; 否则点 A 不在线段 CD 上.

4 板凳龙盘入的最终时刻及盘入螺线的最小螺距

由第 2 节和第 3 节, 从初始时刻开始计算每秒板凳龙各把手的位置, 由此确定各板凳的 4 个顶点, 判断各板凳是否碰撞. 如果不碰撞, 继续计算下一秒板凳龙各把手的位置; 如果碰撞, 则上一秒板凳龙的位置即为所求.

这种方法得到的结果不够精确. 比较好的方法是, 对龙头的极角用二分法, 判断每个龙头极角所对应的整个板凳龙是否碰撞, 得到最终龙头极角为 $\theta_0(T)$, 由此可得对应的时间为

$$T = \frac{a}{4\pi v_0} [(\theta_0(0)\sqrt{1+\theta_0^2(0)} + \ln(\theta_0(0) + \sqrt{1+\theta_0^2(0)})) - (\theta_0(T)\sqrt{1+\theta_0^2(T)} + \ln(\theta_0(T) + \sqrt{1+\theta_0^2(T)}))]. \quad (28)$$

由于龙头越盘入到里面, 越容易碰撞, 因此, 仅需考虑龙头位于盘入螺线与调头空间的交点开始向外绕一圈, 板凳龙是否发生碰撞. 而螺距越小, 越容易碰撞, 因此, 可以采用二分法确定最小螺距.

5 调头曲线

盘出螺线与盘入螺线关于螺线中心呈中心对称, 其极坐标方程为

$$\rho = \frac{a}{2\pi}(\theta + \pi). \quad (29)$$

记调头空间的半径为 r , 两段圆弧的圆心分别为 $O_i(u_i, v_i)$, 半径分别为 $r_i (i=1, 2)$, 则盘入螺线与调头空间交点的极角为

$$\theta_1 = \frac{2\pi r}{a}, \quad (30)$$

单位法向量为

$$\mathbf{n}_1 = \frac{1}{\sqrt{1+\theta_1^2}}(-(\sin \theta_1 + \theta_1 \cos \theta_1), \cos \theta_1 - \theta_1 \sin \theta_1). \quad (31)$$

于是, 第 1 段圆弧的圆心坐标 (u_1, v_1) 为

$$\begin{cases} u_1 = r \cos \theta_1 - \frac{r_1}{\sqrt{1+\theta_1^2}}(\sin \theta_1 + \theta_1 \cos \theta_1), \\ v_1 = r \sin \theta_1 + \frac{r_1}{\sqrt{1+\theta_1^2}}(\cos \theta_1 - \theta_1 \sin \theta_1). \end{cases} \quad (32)$$

同理, 第 2 段圆弧的圆心坐标 (u_2, v_2) 为

$$\begin{cases} u_2 = -r \cos \theta_1 + \frac{r_2}{\sqrt{1+\theta_1^2}}(\sin \theta_1 + \theta_1 \cos \theta_1), \\ v_2 = -r \sin \theta_1 - \frac{r_2}{\sqrt{1+\theta_1^2}}(\cos \theta_1 - \theta_1 \sin \theta_1). \end{cases} \quad (33)$$

由于两段圆弧相切, 所以 $|O_1 O_2| = r_1 + r_2$, 从而

$$r_1 + r_2 = \frac{r \sqrt{1+\theta_1^2}}{\theta_1}. \quad (34)$$

当第 1 段圆弧半径是第 2 段圆弧半径的 k 倍, 即 $r_1 = k r_2$ 时,

$$\begin{cases} r_1 = \frac{k r \sqrt{1+\theta_1^2}}{\theta_1 (k+1)}, \\ r_2 = \frac{r \sqrt{1+\theta_1^2}}{\theta_1 (k+1)}. \end{cases} \quad (35)$$

如图 2 所示, P_1 和 P_2 分别为盘入螺线和盘出螺线与调头空间的交点, O_1 和 O_2 分别为调头曲线两段圆弧的圆心, B 为两段圆弧的切点, \mathbf{l}_1 和 \mathbf{l}_2 分别为点 P_1 和点 P_2 的切向. 由 $O_1 P_1 \parallel O_2 P_2$, 所以 $\angle P_1 O_1 B = \angle P_2 O_2 B$, 记为 θ , 则调头曲线的长度为

$$L = \frac{r \theta \sqrt{1+\theta_1^2}}{\theta_1}. \quad (36)$$

对任意给定的调头曲线, O'_1 和 O'_2 分别为调头曲线两段圆弧的圆心, B' 为两段圆弧的切点. 由于 $r_1 + r_2$ 是定值, 与 k 无关, 所以 $O_1 O'_1 = O_2 O'_2$, 因此 $O_1 O'_1 O'_2 O_2$ 是平行四边形, 于是 $\angle P_1 O_1 B = \angle P_1 O'_1 B'$, $\angle P_2 O_2 B = \angle P_2 O'_2 B'$, 从而, 调头曲线的长度为

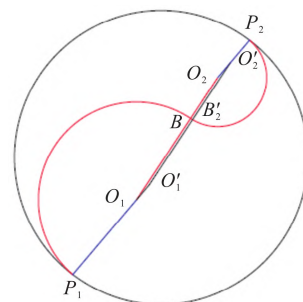


图 2 调头曲线

$$L' = \frac{r\theta\sqrt{1+\theta_1^2}}{\theta_1}, \quad (37)$$

与 k 无关.

6 盘出路径

盘出时, 龙头前把手的极角满足方程

$$\frac{d\theta_0}{dt} = \frac{2\pi v_0}{a\sqrt{1+\theta_0^2}}, \quad (38)$$

其解为

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left[\theta_0(t) \sqrt{1+\theta_0^2(t)} + \ln(\theta_0(t) + \sqrt{1+\theta_0^2(t)}) \right] \\ &= \frac{2\pi v_0}{a} t + \frac{1}{2} \left[\theta_0(0) \sqrt{1+\theta_0^2(0)} + \ln(\theta_0(0) + \sqrt{1+\theta_0^2(0)}) \right], \end{aligned} \quad (39)$$

其中, $\theta_0(0)$ 为初始时刻龙头前把手的位置.

类似于盘入路径, 采用递推法由前一条板凳前把手的位置确定后一条板凳前把手的位置. 记盘入螺线与调头曲线交点的极角为 θ_1 ; 盘出螺线与调头曲线交点的极角为 θ_2 ; 第 1 段圆弧起始点和结束点相对于圆心的极角分别为 φ_1 和 ψ_1 ; 第 2 段圆弧起始点和结束点相对于圆心的极角分别为 ψ_2 和 φ_2 .

情形 1 第 i 条板凳前把手位于盘入螺线上

第 $i+1$ 条板凳前把手也位于盘入螺线上, 由方程

$$\theta_{i+1}^2 + \theta_i^2 - 2\theta_i\theta_{i+1}\cos(\theta_{i+1} - \theta_i) = \frac{4\pi^2 l_i^2}{a^2} \quad (40)$$

求得 θ_{i+1} .

情形 2 第 i 条板凳前把手位于第 1 段圆弧上

假设第 $i+1$ 条板凳前把手也位于第 1 段圆弧上, 则

$$\theta_{i+1} = \theta_i + 2\arcsin \frac{l_i}{2r_1}. \quad (41)$$

若 $\theta_{i+1} \leq \varphi_1$, 则第 $i+1$ 条板凳前把手确实位于第 1 段圆弧上; 若 $\theta_{i+1} > \varphi_1$, 则第 $i+1$ 条板凳前把手位于盘入螺线上, 由方程

$$\left(\frac{a}{2\pi} \theta_{i+1} \cos \theta_{i+1} - (u_1 + r_1 \cos \theta_i) \right)^2 + \left(\frac{a}{2\pi} \theta_{i+1} \sin \theta_{i+1} - (v_1 + r_1 \sin \theta_i) \right)^2 = l_i^2 \quad (42)$$

求得 θ_{i+1} .

情形 3 第 i 条板凳前把手位于第 2 段圆弧上

假设第 $i+1$ 条板凳前把手也位于第 2 段圆弧上, 则

$$\theta_{i+1} = \theta_i - 2\arcsin \frac{l_i}{2r_2}. \quad (43)$$

若 $\theta_{i+1} \geq \psi_2$, 则第 $i+1$ 条板凳前把手确实位于第 2 段圆弧上; 若 $\theta_{i+1} < \psi_2$, 假设第 $i+1$ 条板凳前把手位于第 1 段圆弧上, 由方程

$$[(u_1 + r_1 \cos \theta_{i+1}) - (u_2 + r_2 \cos \theta_i)]^2 + [(v_1 + r_1 \sin \theta_{i+1}) - (v_2 + r_2 \sin \theta_i)]^2 = l_i^2 \quad (44)$$

求得 θ_{i+1} .

若 $\theta_{i+1} \leq \varphi_1$, 则第 $i+1$ 条板凳前把手确实位于第 1 段圆弧上; 若 $\theta_{i+1} > \varphi_1$, 则第 $i+1$ 条板凳前把手位于盘入螺线上, 由方程

$$\left(\frac{a}{2\pi} \theta_{i+1} \cos \theta_{i+1} - (u_2 + r_2 \cos \theta_i) \right)^2 + \left(\frac{a}{2\pi} \theta_{i+1} \sin \theta_{i+1} - (v_2 + r_2 \sin \theta_i) \right)^2 = l_i^2 \quad (45)$$

求得 θ_{i+1} .

情形 4 第 i 条板凳前把手位于盘出螺线上

假设第 $i+1$ 条板凳前把手也位于盘出螺线上, 则由方程

$$(\theta_{i+1} + \pi)^2 - 2(\theta_i + \pi)(\theta_{i+1} + \pi) \cos(\theta_{i+1} - \theta_i) + (\theta_i + \pi)^2 = \frac{4\pi^2 l_i^2}{a^2} \quad (46)$$

求得 θ_{i+1} .

若 $\theta_{i+1} \geq \theta_2$, 则第 $i+1$ 条板凳前把手确实位于盘出螺线上; 若 $\theta_{i+1} < \theta_2$, 假设第 $i+1$ 条板凳前把手位于第 2 段圆弧上, 由方程

$$\left[(u_2 + r_2 \cos \theta_{i+1}) - \frac{a}{2\pi}(\theta_i + \pi) \cos \theta_i \right]^2 + \left[(v_2 + r_2 \sin \theta_{i+1}) - \frac{a}{2\pi}(\theta_i + \pi) \sin \theta_i \right]^2 = l_i^2 \quad (47)$$

求得 θ_{i+1} . 若 $\theta_{i+1} \geq \phi_2$, 则第 $i+1$ 条板凳前把手确实位于第 2 段圆弧上; 若 $\theta_{i+1} < \phi_2$, 假设第 $i+1$ 条板凳前把手位于第 1 段圆弧上, 由方程

$$\left[(u_1 + r_1 \cos \theta_{i+1}) - \frac{a}{2\pi}(\theta_i + \pi) \cos \theta_i \right]^2 + \left[(v_1 + r_1 \sin \theta_{i+1}) - \frac{a}{2\pi}(\theta_i + \pi) \sin \theta_i \right]^2 = l_i^2 \quad (48)$$

求得 θ_{i+1} . 若 $\theta_{i+1} \leq \varphi_1$, 则第 $i+1$ 条板凳前把手确实位于第 1 段圆弧上; 若 $\theta_{i+1} > \varphi_1$, 则第 $i+1$ 条板凳前把手位于盘入螺线上, 由方程

$$\left[\frac{a}{2\pi} \theta_{i+1} \cos \theta_{i+1} - \frac{a}{2\pi}(\theta_i + \pi) \cos \theta_i \right]^2 + \left[\frac{a}{2\pi} \theta_{i+1} \sin \theta_{i+1} - \frac{a}{2\pi}(\theta_i + \pi) \sin \theta_i \right]^2 = l_i^2 \quad (49)$$

求得 θ_{i+1} .

7 龙头的最大行进速度

对每个龙头速度计算整个板凳龙的最大速度, 用二分法确定龙头的最大行进速度.

另一种方法是对龙头的行进速度为 1 m/s 的情形, 计算行进过程中板凳龙的最大行进速度, 记为 v_{\max}^0 . 则使得整个板凳龙的最大行进速度恰好为 2 m/s 的龙头速度 v_{\max} 满足

$$\frac{v_{\max}}{1} = \frac{2}{v_{\max}^0}, \quad (50)$$

即龙头的最大行进速度为

$$v_{\max} = \frac{2}{v_{\max}^0}. \quad (51)$$

8 其他方法

本文建立了板凳龙运动轨迹模型, 给出了板凳碰撞的判别方法, 并确定了若干最优参数值. 赛题的各个子问题有不同的解决方法, 本节简要介绍这些方法.

8.1 盘入路径

由极坐标曲线长度公式, 龙头沿盘入螺线从极角 θ_1 运动到 θ_2 ($\theta_1 > \theta_2$), 则行走距离为

$$s = \int_{\theta_2}^{\theta_1} \sqrt{\rho_0^2 + \left(\frac{d\rho_0}{dt} \right)^2} d\theta = \frac{a}{4\pi} \left[\theta \sqrt{1 + \theta^2} + \ln(\theta + \sqrt{1 + \theta^2}) \right] \Big|_{\theta_2}^{\theta_1}. \quad (52)$$

龙头的运动速度为 v_0 , 于是

$$v_0 t = \frac{a}{4\pi} \left[\theta \sqrt{1 + \theta^2} + \ln(\theta + \sqrt{1 + \theta^2}) \right] \Big|_{\theta_0(t)}^{\theta_0(0)}. \quad (53)$$

这与常微分方程模型的结果(5)一致.

记

$$s_{\max} = \int_0^{\theta_0(0)} \sqrt{\rho_0^2 + \left(\frac{d\rho_0}{dt} \right)^2} d\theta = \frac{a}{4\pi} \left[\theta_0(0) \sqrt{1 + \theta_0^2(0)} + \ln(\theta_0(0) + \sqrt{1 + \theta_0^2(0)}) \right] \quad (54)$$

表示龙头盘入的最大距离, 相应的最大时间为

$$t_{\max} = \frac{s_{\max}}{v_0} = \frac{a}{4\pi v_0} \left[\theta_0(0) \sqrt{1 + \theta_0^2(0)} + \ln(\theta_0(0) + \sqrt{1 + \theta_0^2(0)}) \right]. \quad (55)$$

注意到 s 是单调增加的, 在不考虑碰撞的情况下, 当 $0 \leq t \leq t_{\max}$ 或 $0 \leq s \leq s_{\max}$ 时, 方程(5)存在唯一解.

8.2 舞龙队的位置

如图 3 所示, 由余弦定理得

$$\begin{aligned} l_i^2 &= \rho_i^2 + \rho_{i+1}^2 - 2\rho_i\rho_{i+1}\cos(\theta_{i+1} - \theta_i) \\ &= \frac{a^2}{4\pi^2}[\theta_i^2 + \theta_{i+1}^2 - 2\theta_i\theta_{i+1}\cos(\theta_{i+1} - \theta_i)], \quad (56) \end{aligned}$$

与式(6)一致.

8.3 板凳龙的运动速度

如图 4 所示, 记第 i 条板凳的前后把手分别为 $P_i(x_i, y_i)$ 和 $P_{i+1}(x_{i+1}, y_{i+1})$, 两个把手之间的距离为 l_i , 则沿板凳前进方向的单位向量为

$$\begin{aligned} \mathbf{n}_i &= \frac{\overrightarrow{P_{i+1}P_i}}{|\overrightarrow{P_{i+1}P_i}|} \\ &= \frac{1}{l_i}(\theta_i \cos \theta_i - \theta_{i+1} \cos \theta_{i+1}, \theta_i \sin \theta_i - \theta_{i+1} \sin \theta_{i+1}). \quad (57) \end{aligned}$$

P_i 的速度向量为

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_i &= \left(\frac{dx_i}{dt}, \frac{dy_i}{dt} \right) \\ &= \frac{a}{2\pi} \frac{d\theta_i}{dt} (\cos \theta_i - \theta_i \sin \theta_i, \sin \theta_i + \theta_i \cos \theta_i), \quad (58) \end{aligned}$$

其沿板凳前进方向的速度分量为

$$\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{n}_i = \frac{a}{2\pi l_i} \frac{d\theta_i}{dt} [\theta_i - \theta_{i+1} \cos(\theta_{i+1} - \theta_i) - \theta_{i+1} \theta_i \sin(\theta_{i+1} - \theta_i)]. \quad (59)$$

同理可得 P_{i+1} 沿板凳前进方向的速度分量为

$$\mathbf{v}_{i+1} \cdot \mathbf{n}_i = \frac{a}{2\pi l_i} \frac{d\theta_{i+1}}{dt} [\theta_i \cos(\theta_{i+1} - \theta_i) - \theta_{i+1} - \theta_{i+1} \theta_i \sin(\theta_{i+1} - \theta_i)]. \quad (60)$$

板凳运动是刚体运动, 所以两个把手沿板凳前进方向的速度分量相等, 即

$$\frac{d\theta_{i+1}}{dt} = \frac{\theta_i - \theta_{i+1} \cos(\theta_{i+1} - \theta_i) - \theta_{i+1} \theta_i \sin(\theta_{i+1} - \theta_i)}{\theta_i \cos(\theta_{i+1} - \theta_i) - \theta_{i+1} - \theta_{i+1} \theta_i \sin(\theta_{i+1} - \theta_i)} \frac{d\theta_i}{dt}, \quad (61)$$

与式(7)一致. 再由式(8)可得式(9).

8.4 板凳碰撞模型

8.4.1 中轴线距离判别法

C_i 与 C_j 不碰撞的充分必要条件是 C_i 的 4 个顶点均在板凳 C_j 的外面, 同时 C_j 的 4 个顶点也均在板凳 C_i 的外面.

如图 5 所示, 点 P 在矩形 $ABCD$ 外面的充分必要条件是

$$|PM| > \frac{1}{2}|AB| \text{ 或 } |PN| > \frac{1}{2}|AD|, \quad (62)$$

其中: $|PM|$ 为点 P 到中线 GH 的距离; $|PN|$ 为点 P 到中线 EF 的距离. 这就是中轴线距离判别法.

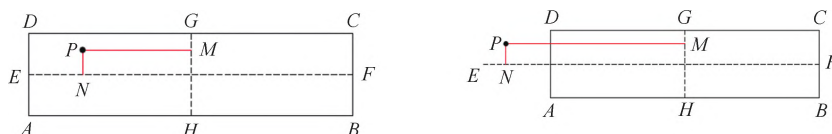


图 5 中轴线距离判别法

8.4.2 面积判别法

如图 6 所示, 分别连接点 P 与 A 、 B 、 C 、 D , 则点 P 在矩形 $ABCD$ 外面的充分必要条件是

$$S_{\triangle PAB} + S_{\triangle PBC} + S_{\triangle PCD} + S_{\triangle PDA} > S_{ABCD}, \quad (63)$$

其中, S 表示面积.

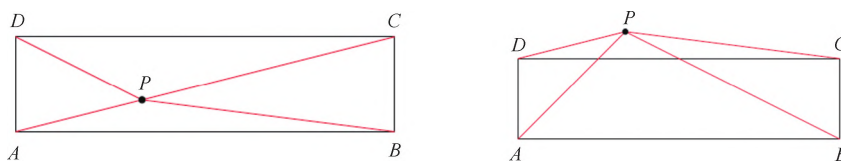


图 6 面积判别法

8.4.3 分离轴判别法

还可以用分离轴判别法来判断两个矩形 $ABCD$ 和 $A'B'C'D'$ 是否碰撞. 如图 7 所示, 对某条给定的直线 l , 过 A 、 B 、 C 、 D 和 A' 、 B' 、 C' 、 D' 分别作到直线 l 的投影. 如果 A 、 B 、 C 、 D 的投影区间与 A' 、 B' 、 C' 、 D' 的投影区间不相交, 则矩形 $ABCD$ 与 $A'B'C'D'$ 不碰撞.

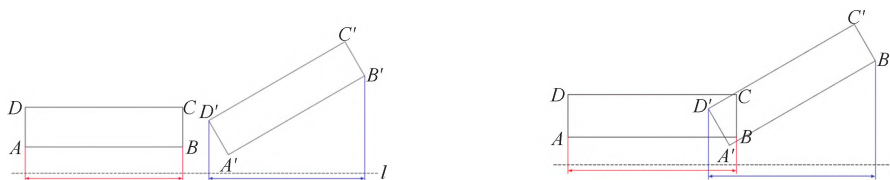


图 7 分离轴判别法

参考文献

- [1] 全国大学生数学建模竞赛组委会. 2024 “高教社杯”全国大学生数学建模竞赛赛题[EB/OL]. [2024-09-05]. https://www.mcm.edu.cn/html_cn/node/a0c1fb5c31d43551f08cd8ad16870444.html.

Analysis and Study on the Motion Trajectory Models of Bench Loong

CAI Zhijie^{1,2,3}

(1. School of Mathematical Sciences, Fudan University, Shanghai 200433, China;

2. Shanghai Key Laboratory of Contemporary Applied Mathematics, Shanghai 200433, China;

3. Key Laboratory of Nonlinear Mathematical Models and Methods of Ministry of Education, Shanghai 200433, China)

Abstract: In this paper, bench loong, a traditional local cultural activity in Zhejiang and Fujian provinces, are studied. The ordinary differential equation model for the movement of the head, a recursive model for the movement of the bodies and tail, and a turning curve model are established. During the procession of the bench loong, collisions may occur. In this paper, discriminant model for bench collisions is presented, and the corresponding criteria are given. Meanwhile, under the situation of non-collision between the benches, the minimum pitch and the maximum speed of the head are determined.

Key words: bench loong; equidistant spiral; ordinary differential equation model; collision

作者简介

蔡志杰(1968—), 男, 博士, 教授, 博士生导师, 应用数学专业, 主要研究方向是工业应用数学、应用偏微分方程.