

# 基于动态搜索的“板凳龙”运动状态及路线研究

## 摘要

板凳龙作为浙闽地区的一种传统民俗活动，以其高观赏性和舞龙队的协调配合著称。本文针对板凳龙表演的三个阶段——盘入、调头和盘出，通过分析舞龙队的行进路线及各节板凳之间的几何关系，建立了运动模型和行进路线优化模型。采用多种优化方法，对舞龙队在不同条件下的运动状态以及行进路线进行研究。

**针对问题一：**构建盘入运动模型。首先，根据盘入路线为等距螺线的特征，建立极坐标系。针对龙头位置，建立有关极角的微分方程，利用微积分及二分法求解龙头前把手的极坐标，继而利用余弦定理，递推求解相邻板凳的位置关系，获得各把手的位置函数。通过对位置函数求导，得到相应的速度函数。最终，将极坐标转换为直角坐标，求得各把手在各时刻的位置和速度，结果详见表2，表3和result1.xlsx。

**针对问题二：**构建碰撞检测模型。首先，证明最易发生碰撞的区间为最内圈与其外侧一圈的板凳，缩小检测范围。随后，确定碰撞条件为：内圈板凳顶点与外圈板凳把手连线的距离小于板凳宽度的一半（0.15m），并通过几何关系算出距离函数，判断该函数的最小值是否小于0.15m以确定碰撞是否发生。最后，采用动态搜索策略，先用变步长搜索确定时间范围，再进行二分搜索，确定首次碰撞的准确时间。我们得到停止盘入时间为412.473838s，此时各把手的位置和速度详见表4和result2.xlsx。

**针对问题三：**构建最短螺距的单目标优化模型。其中目标函数和决策变量为螺距大小。在约束条件方面，基于板凳的几何参数和问题二中的参数限定螺距范围，基于盘入运动模型确定龙头前把手进入调头空间的时间，并利用碰撞检测模型判断进入调头空间前是否发生碰撞，建立相应约束。在优化求解过程中，对比后选用粒子群算法求解板间最小距离，并结合变步长搜索求得最短螺距为0.450337m。

**针对问题四：**基于问题一的模型，构建调头运动模型。首先证明在给定条件下，调头曲线长度为常数，无法进一步减小。随后，将调头路线划分为四个部分，通过几何关系求解出各部分的曲线方程。沿用问题一的推导方法，首先求解龙头前把手位置函数，再通过递推关系和求导计算其余把手的位置函数和速度函数。我们对调头空间附近的递推进行了详细的分类讨论，并给出了相应的递推方程。最终，将极坐标转换为直角坐标，求得各板凳把手在各时刻的位置和速度，详见表5，表6和result4.xlsx。

**针对问题五：**在调头运动模型的基础上，构建各把手最大速度的优化模型。首先，通过比例转换，将目标转化为在龙头速度仍为1m/s的条件下，求解各把手在所有时刻的最大速度。随后，基于问题四的速度规律及物理规律确定最大速度出现的大致时间范围，接着通过大步长搜索确定了最大速度出现的区间为[14s,15s]。由于函数在该区间内呈单峰性，应用三分搜索算法进一步精确定位最大速度。最后，通过比例关系还原龙头的最大速度，得到龙头最大速度约为1.246266m/s。

**关键字：**板凳龙 等距螺线 动态搜索 粒子群算法 单目标优化

# 一、问题重述

## 1.1 问题背景

作为一项国家级非遗传统民俗活动，“板凳龙”可谓匠心独运之作。精美的龙身制作，壮观的演出形式都赋予了“板凳龙”极高的技术难度和观赏价值。一条“板凳龙”通常由“龙头”，“龙尾”和上百节“龙身”组成，长达上百米。表演时，舞龙队一般沿螺线形向螺线中心盘入，在一定范围的调头空间内完成调头，再换方向逆时针盘出。在此期间，需要保持整个舞龙队型的完整，相邻“龙身”之间不能发生碰撞，行进速度越快，占地面积越小，则效果越佳。

然而由于舞龙队通常人数众多，队伍较长，往往难以确保“板凳龙”的完美呈现。因此为了能够给观众提供最佳演出，需要研究舞龙队盘入、调头、盘出线路和行进速度等相关参数。

## 1.2 问题提出

基于上述背景，要求建立数学模型解决下列问题。

一条板凳龙由 223 节板宽均为 0.3m 的板凳组成，其中包含 1 节龙头（板长 3.41m），221 节龙身（板长 2.20m），1 节龙尾（板长 2.20m）。每节板凳上均有两个孔，孔径（孔的直径）为 5.5cm，孔的中心距离最近的板头 27.5cm。

**问题一：**舞龙队以螺线第 16 圈 A 点处为起点，龙头前把手行进速度保持速度为 1m/s 情况下，沿螺距为 0.55m 的等距螺线顺时针盘入，据此计算出从初始时刻至第 300s，每秒龙头前把手、龙尾前后把手以及各节龙身前把手的位置与速度。

**问题二：**在问题一的条件下，为了避免在不断盘入过程中任意两节板凳发生碰撞，舞龙队需要在某时刻停止继续盘入，给出停止盘入时刻。并且计算出此时刻各把手的位置和速度。

**问题三：**舞龙队从顺时针盘入到逆时针盘出需要经过调头过程。给定一个以螺线中心为圆心，直径为 9m 的圆形调头空间，在保证龙头前把手进入圆形调头空间前，板凳间不发生碰撞的条件下，求解满足要求的最小螺距。

**问题四：**在给定的调头路径及约束条件下，判断是否能够优化调头路径，使得调头曲线长度变短。以开始调头时间为零时刻，给出从 -100s 到 100s，每秒各把手的位置和速度。

**问题五：**沿着问题四的调头路径行进过程中，龙头速度保持不变。在保证各把手速度均不超过 2m/s 的条件下，确定龙头的最大行进速度。

## 二、问题分析

### 2.1 问题一

问题一的核心是构建一个运动模型，以确定板凳龙沿螺旋路径运动时各个把手在各时刻的位置和速度。由等距螺线的特征，我们可以建立极坐标系简化计算。鉴于龙头前把手的速度为常量，可依据速度公式推导龙头前把手的位置随时间变化的函数表达式。

在此基础上，考虑相邻把手之间的几何关系，构建各把手位置坐标的递推关系，并对时间求导，就能获得各把手速度的递推公式。基于龙头前把手的位置变化函数及递推关系，可以进一步递推出其他所有板凳在任意时刻的位置和速度。由于计算过程在极坐标系中完成，最终需要将结果转换为直角坐标系下的相应坐标。求解过程可以使用二分搜索法完成模型实现。

### 2.2 问题二

问题二中需要确定碰撞发生的判定条件。根据问题一中的各把手极角变化结果及刚体运动的物理规律，可初步确定最可能发生碰撞的区域，从而缩小检测范围。接着，利用相邻板凳之间的几何关系，计算在指定范围内的两板凳间最小距离。结合碰撞的物理定义，确定两板凳间的安全距离阈值。当最小距离小于该阈值时，即可判定发生碰撞。在求解过程中可以使用以变步长搜索为基础的动态搜索方法确定首次发生碰撞的区间。在该区间内使用二分搜索法，得到精度较高的停止插入时间。

### 2.3 问题三

问题三中需要构建一个优化模型，求解螺距的最小值。首先，需明确优化模型的约束条件。根据问题一中在已知螺距下的计算结果及板凳的几何特性，可以缩小符合条件的螺距范围。通过计算龙头前把手到达调头空间边界的时刻，确定进入调头空间的最小螺距。在此过程中，还需利用问题二中的碰撞检测模型，确保在进入调头空间前未发生碰撞。模型求解采用变步长遍历的方法，逐步缩小步长以提高计算精度，结合启发式算法优化最短距离的计算过程。

### 2.4 问题四

问题四是在问题一模型基础上的扩展。基于题目提供的调头路径条件，通过几何相关知识可判断是否存在最优路径。由于路径较为复杂，可将其视作由四段曲线构成，并通过几何关系求解其中两段圆弧的参数方程。延续问题一的建模方式，先求出龙头前把手的每秒位置变化函数，再通过递推关系求解其余把手的位置函数。递推关系的求解需要区分相邻把手位于相同或不同曲线上的情况，速度的计算也需遵循类似的方法。

## 2.5 问题五

问题五的目的是建立一个优化模型，求解最大速度。首先需要在问题四的基础上，计算全过程中各把手的最大速度。其次需要对问题四的结果进行分析，结合物理规律，缩小搜索范围。最后依据速度最大值函数的特征，采用适当的算法求解最大速度。

### 三、模型假设

1. 忽略外力因素：外部阻力对板凳龙的运动无影响。
2. 忽略把手粗细，认为把手是理想无厚度的几何连接点：把手粗细只有 0.055m，与题中其余长度相比，可忽略不计。
3. 忽略板凳厚度，认为每一张板凳都平行于地面：由于题目未给出板凳厚度，而其尺度较小，因此可忽略不计，进而所有的板凳都平行于地而且在同一高度。
4. 每节板凳和连接的把手是刚体，不会发生形变：板凳和把手的长度、宽度等尺寸保持不变，各部分的相对位置不随时间变化。

### 四、符号说明

表 1 符号说明

符号	说明	单位
$d$	螺距	m
$t$	时间	s
$l$	某块板凳两孔中轴线的距离	m
$(x_i, y_i)$	编号为 $i$ 的把手的直角坐标表示	(m, m)
$(r_i, \theta_i)$ (盘入和盘出曲线)	编号为 $i$ 的把手的极坐标表示	(m, rad)
$\theta_i$ (调头曲线)	编号为 $i$ 的把手的参数表示	rad
$v_i$	编号为 $i$ 的把手速度大小	m/s
$l_i$	编号为 $i$ 的板凳前后把手所在直线	
$A_i$	编号为 $i$ 的板凳外侧前顶点	
$B_i$	编号为 $i$ 的板凳外侧后顶点	
$d_A(t, i, j)$	$t$ 时刻点 $A_i$ 到 $l_j$ 的距离	m
$d_B(t, i, j)$	$t$ 时刻点 $B_i$ 到 $l_j$ 的距离	m

### 5.1.1 盘入运动模型的建立

对于该螺线形盘入的运动模型，我们不妨考虑极坐标系进行求解。在极坐标系下，龙头前把手对应的极径  $r_0$  和极角  $\theta_0$  满足以下关系：

$$r_0 = \frac{d}{2\pi}\theta_0$$

其中， $d = 0.55\text{m}$  为螺距。

在极坐标系下，我们可以根据速度公式得出龙头前把手的速度  $v_0$ ：

$$|v_0| = \frac{d}{2\pi} |\dot{\theta}_0| \sqrt{1 + \dot{\theta}_0^2} \quad (1)$$

其中  $\dot{\theta}_0 < 0$  为极角速度， $v_0 = 1\text{m/s}$  为常量。通过分离变量，上述微分方程可变为：

$$-\frac{d}{2\pi} \sqrt{1 + \theta_0^2} d\theta_0 = v_0 dt$$

将上式两边分别积分，可得：

$$\begin{aligned} \frac{4\pi v_0 t}{d} &= 32\pi \sqrt{1 + (32\pi)^2} + \ln \left( 32\pi + \sqrt{1 + (32\pi)^2} \right) \\ &\quad - \theta_0 \sqrt{1 + \theta_0^2} - \ln \left( \theta_0 + \sqrt{1 + \theta_0^2} \right) \end{aligned} \quad (2)$$

我们已知初始时刻龙头前把手位于螺线第 16 圈 A 点处，即  $\theta_0(t=0) = 32\pi$ ，又因为该方程右边为关于  $\theta_0$  的单调函数，所以我们便可以解得  $\theta_0(t)$ ，即为龙头前把手随时间变化的位置函数。

由于题目中给出的坐标系为直角坐标系，因此我们需要将极坐标系转化为直角坐标系内的相应坐标，公式如下：

$$x_0 = r_0 \cos \theta_0 = \frac{d\theta_0}{2\pi} \cos \theta_0$$

$$y_0 = r_0 \sin \theta_0 = \frac{d\theta_0}{2\pi} \sin \theta_0$$

由于已知相邻板凳之间存在一定的几何关系，因此我们可以利用几何关系和龙头前把手的位置函数，通过递推关系求出其余各节板凳相应位置的坐标以及速度。

我们仍在极坐标系下考虑相邻板凳间的几何关系：从龙头前把手开始依次用0, 1, 2, … 给各个把手编号，设编号为n的把手极坐标为 $(r_n, \theta_n)$ 。同样，通过极径和极角的关系，有：

$$r_n = \frac{d}{2\pi} \theta_n$$

以编号为n和n+1的两个把手为例，在如图2所示的三角形中运用余弦定理可得

$$l^2 = r_n^2 + r_{n+1}^2 - 2r_n r_{n+1} \cos(\theta_{n+1} - \theta_n)$$

其中l为板凳上两孔之间距离：

$$l = \begin{cases} 2.86m, & \text{若 } n = 0 \\ 1.65m, & \text{若 } n \geq 1 \end{cases}$$

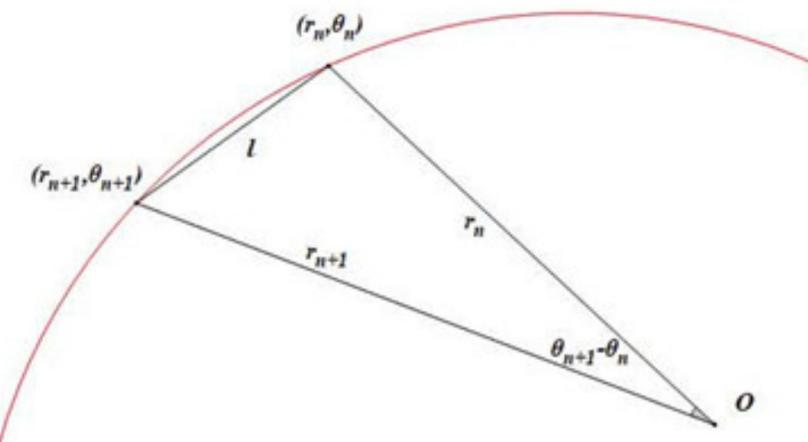


图2 相邻把手几何关系示意图

将极径和极角关系代入可得：

$$\left(\frac{2\pi l}{d}\right)^2 = \theta_n^2 + \theta_{n+1}^2 - 2\theta_n \theta_{n+1} \cos(\theta_{n+1} - \theta_n) \quad (3)$$

通过该递推关系式与 $\theta_0(t)$ 的函数表达式即可得到 $\theta_n(t)$ 的函数表达式。同样由于我们所要求的为直角坐标系里的相应坐标，通过下列坐标变换：

$$x_n = r_n \cos \theta_n = \frac{d}{2\pi} \theta_n \cos \theta_n$$

$$y_n = r_n \sin \theta_n = \frac{d}{2\pi} \theta_n \sin \theta_n$$

便可求得任意时刻舞龙队的位置坐标。

对于速度的求解，我们将(3)式两边分别对时间求导，整理后可得角速度的递推关系：

$$\frac{\dot{\theta}_{n+1}}{\dot{\theta}_n} = -\frac{2\theta_n - 2\theta_{n+1} \cos(\theta_{n+1} - \theta_n) - 2\theta_n \theta_{n+1} \sin(\theta_{n+1} - \theta_n)}{2\theta_{n+1} - 2\theta_n \cos(\theta_{n+1} - \theta_n) + 2\theta_n \theta_{n+1} \sin(\theta_{n+1} - \theta_n)}$$

通过上文(1)式可以求得  $\dot{\theta}_0$ ，因此可以得出编号  $n+1$  的龙身速度  $v_{n+1}$ ：

$$v_{n+1} = \frac{d}{2\pi} |\dot{\theta}_{n+1}| \sqrt{1 + \theta_{n+1}^2} \quad (4)$$

### 5.1.2 盘入运动模型的求解

根据前文所述的计算方法，我们通过二分搜索法解方程(2)，求得从初始时刻至 300s 内每秒钟龙头前把手的位置信息。

接着我们通过极角的递推关系式(3)和速度表达式(4)求出在给定的时间范围内，每秒龙身各节把手的位置坐标以及速度。表 2 和表 3 中是部分龙身把手的相应求解结果（保留小数点后六位），全部把手的位置及速度见表格文件 result1.xlsx。

表 2 部分把手坐标随时间变化情况

	0 s	60 s	120 s	180 s	240 s	300 s
龙头 x (m)	8.800000	5.799209	-4.084887	-2.963609	2.594494	4.420274
龙头 y (m)	0.000000	-5.771092	-6.304479	6.094780	-5.356743	2.320429
第 1 节龙身 x (m)	8.363824	7.456758	-1.445473	-5.237118	4.821221	2.459489
第 1 节龙身 y (m)	2.826544	-3.440399	-7.405883	4.359627	-3.561949	4.402476
第 51 节龙身 x (m)	-9.518732	-8.686317	-5.543149	2.890455	5.980011	-6.301346
第 51 节龙身 y (m)	1.341137	2.540108	6.377946	7.249289	-3.827758	0.465829
第 101 节龙身 x (m)	2.913983	5.687116	5.361939	1.898795	-4.917371	-6.237722
第 101 节龙身 y (m)	-9.918311	-8.001384	-7.557638	-8.471614	-6.379874	3.936008
第 151 节龙身 x (m)	10.861726	6.682312	2.388757	1.005154	2.965378	7.040740
第 151 节龙身 y (m)	1.828753	8.134544	9.727411	9.424751	8.399721	4.393013
第 201 节龙身 x (m)	4.555102	-6.619664	-10.627210	-9.287720	-7.457151	-7.458662
第 201 节龙身 y (m)	10.725118	9.025570	1.359848	-4.246673	-6.180726	-5.263384
龙尾 (后) x (m)	-5.305444	7.364557	10.974348	7.383895	3.241051	1.785033
龙尾 (后) y (m)	-10.676584	-8.797992	0.843473	7.492371	9.469336	9.301164

表3 部分手速度随时间变化情况

	0 s	60 s	120 s	180 s	240 s	300 s
龙头 (m/s)	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000
第 1 节龙身 (m/s)	0.999971	0.999961	0.999945	0.999917	0.999859	0.999709
第 51 节龙身 (m/s)	0.999742	0.999662	0.999538	0.999331	0.998941	0.998065
第 101 节龙身 (m/s)	0.999575	0.999453	0.999269	0.998971	0.998435	0.997302
第 151 节龙身 (m/s)	0.999448	0.999299	0.999078	0.998727	0.998115	0.996861
第 201 节龙身 (m/s)	0.999348	0.999180	0.998935	0.998551	0.997894	0.996574
龙尾 (后) (m/s)	0.999311	0.999136	0.998883	0.998489	0.997816	0.996478

通过对求解结果分析，我们可以得到以下规律：

- 如图 3 所示，龙头前把手的位置关于时间均匀分布在螺线上，符合题目中龙头前把手速度恒为  $v_0 = 1\text{m/s}$  的条件。

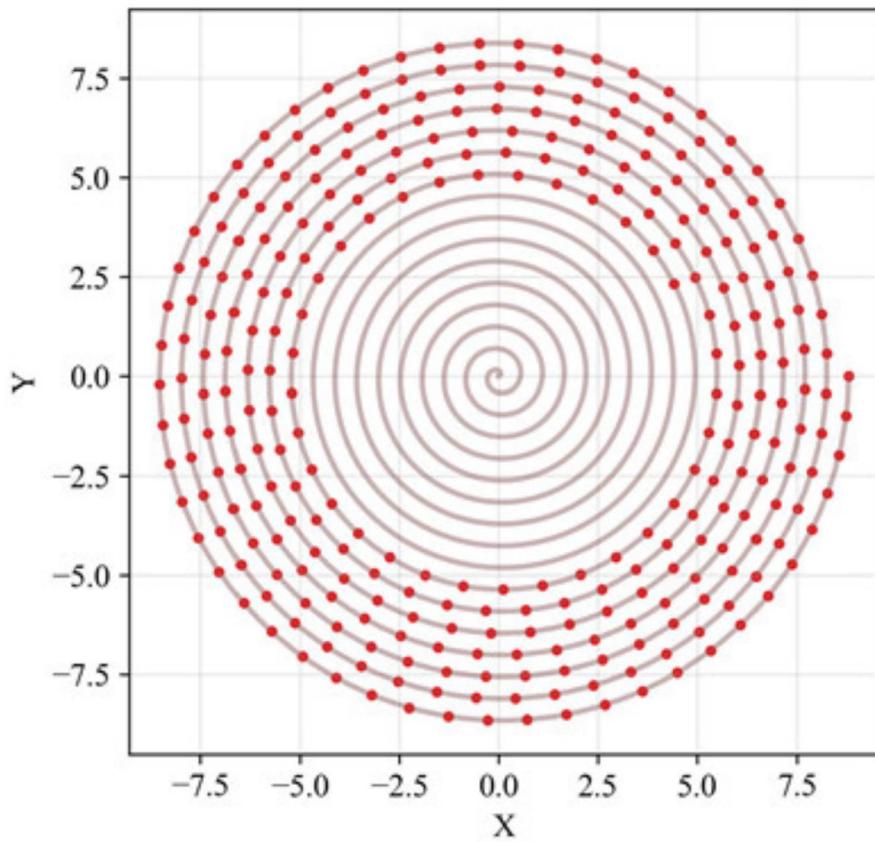


图3  $t = 0\text{s}$  至  $t = 300\text{s}$  龙头前把手位置

- 各把手坐标随时间变化不断在正负之间波动，体现了舞龙队的螺旋轨迹特征。
- 如图 4 所示，随着时间增加，各节龙身把手以及龙尾速度均在减小，且龙身把手位置

越靠后（即  $n$  越大），速度减少得越多。这也符合物理运动学规律，因为板凳龙越靠近外侧，轨迹就会越接近一条直线，各节的速度也就会越来越接近。

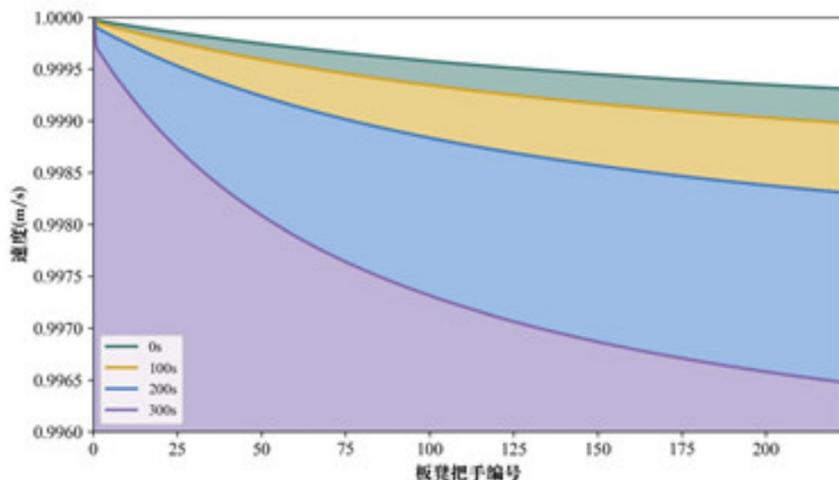


图 4 不同时刻下板凳龙把手的速度情况

- 若作出极角的变化图像（如图 5 所示），我们可以发现越靠内圈的把手，极角变化速度越快。这是因为越靠内圈，把手的运动半径就越小，为了保持相同的速度，极角的变化率就会变快。这也验证了我们建立的模型的合理性。

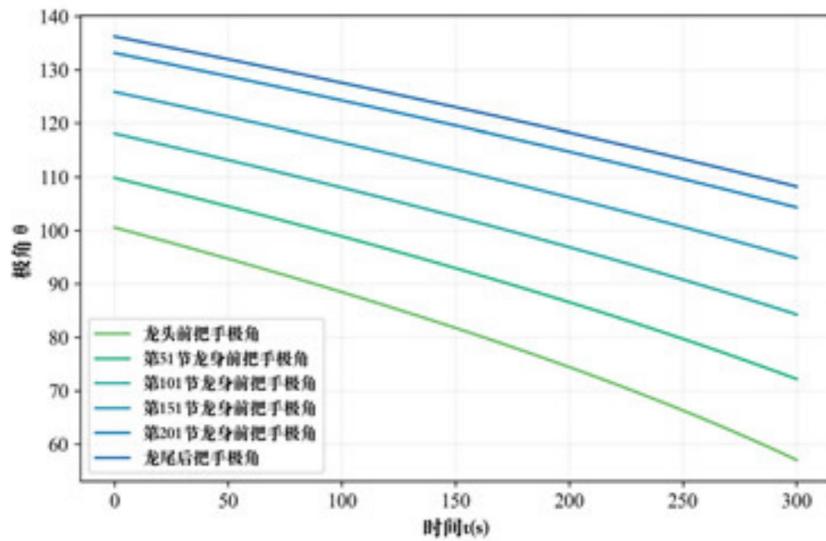


图 5  $t = 0\text{s}$  至  $t = 300\text{s}$  部分把手的极角变化情况

## 5.2 问题二模型的建立与求解

### 【模型准备】

本题需要给出舞龙队的停止点入时间，也就是要判定第一次碰撞发生的时间。考虑到螺旋线的几何特征以及问题一中得出的各把手极角变化情况，我们不妨假设“碰撞一定先发生于龙头所在的最内圈和其外侧相邻的一圈”从而缩小碰撞检测区域，提高模型检测效率。

#### 下面是对该假设的证明：

正如我们在问题一中所作的分析（如图 5 所示），内圈板凳的极角变化速度更快，这意味着在同一时间内，内圈板凳的角度变化比外圈板凳更大。

由于内圈和外圈板凳之间的相对角度变化更大，它们之间的相对位置变化也更快。也就是说，内圈板凳相对外圈板凳更快地靠近或远离它们原本的相对位置。而碰撞条件是两个板凳之间的距离小于某个安全阈值，显然内圈板凳的极角变化更快，它们在绕中心点旋转时，更可能相对外圈板凳迅速靠近。当内圈板凳的角度变化足够大时，它们与外圈板凳的间距就会快速缩短，从而更容易达到碰撞阈值。

而且龙头相较于龙身和龙尾更长，所以它的角更靠近外侧，也就更容易与外圈发生碰撞。因此我们的假设成立，即可以将模型的检测范围缩小至龙头所在的最内圈和其外侧相邻的一圈。

### 5.2.1 碰撞检测模型的建立

设内圈编号为  $i$  的板凳前把手坐标为  $(x_i, y_i)$ ，则其后把手坐标为  $(x_{i+1}, y_{i+1})$ 。不妨设与之发生碰撞的外圈板凳的前把手编号为  $j$ ，其坐标  $(x_j, y_j)$ ，后把手坐标为  $(x_{j+1}, y_{j+1})$ 。由于任意前后两块板凳都是重叠的，因此  $i$  和  $j$  还应满足  $i \leq j - 2$ 。

编号为  $j$  的板凳前后把手所在直线  $l_j$  的解析式为：

$$\frac{x - x_j}{x_{j+1} - x_j} = \frac{y - y_j}{y_{j+1} - y_j}$$

化简得：

$$l_j : y = \frac{y_{j+1} - y_j}{x_{j+1} - x_j} x + \frac{x_{j+1} y_j - x_j y_{j+1}}{x_{j+1} - x_j}$$

接着我们需要求解内圈编号为  $i$  的板凳靠近外圈的两个顶点的坐标，设其坐标为  $A_i(x_{A_i}, y_{A_i})$  和  $B_i(x_{B_i}, y_{B_i})$ 。为了简化表达，我们通过题目给定的板凳参数，记孔中心与最近的板头距离为  $a = 0.275\text{m}$ ，与板凳上下两边距离为  $b = 0.15\text{m}$ ，如图 6 所示。

顶点  $(x_{A_i}, y_{A_i})$  存在如图 6 所示的几何关系。图中，角  $\alpha_i$  满足：

$$\sin \alpha_i = \frac{-\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}}$$
$$\cos \alpha_i = \frac{-\Delta x}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}}$$

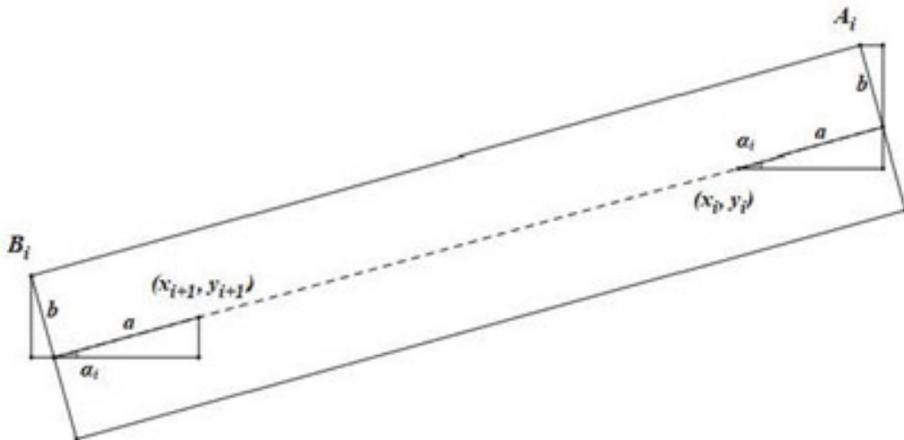


图 6 编号为  $i$  的板凳几何关系示意图

其中  $\Delta x = x_{i+1} - x_i, \Delta y = y_{i+1} - y_i$ 。因此通过几何关系，我们可以求出该顶点的坐标：

$$\begin{aligned} x_{A_i} &= x_i + a \cos \alpha_i - b \sin \alpha_i \\ y_{A_i} &= y_i + a \sin \alpha_i + b \cos \alpha_i \end{aligned} \quad (5)$$

同理可得另一个顶点的坐标：

$$\begin{aligned} x_{B_i} &= x_{i+1} - a \cos \alpha_i - b \sin \alpha_i \\ y_{B_i} &= y_{i+1} - a \sin \alpha_i + b \cos \alpha_i \end{aligned} \quad (6)$$

于是我们以编号为  $i$  的板凳的两个顶点到编号为  $j$  的板凳前后把手所在直线  $l_j$  的距离  $d_A, d_B$  为判定函数。通过点到直线距离公式求出两个函数表达式：

$$\begin{aligned} d_A(t, i, j) &= \frac{|(y_{j+1} - y_j)x_{A_i} - (x_{j+1} - x_j)y_{A_i} + x_{j+1}y_j - x_jy_{j+1}|}{\sqrt{(x_{j+1} - x_j)^2 + (y_{j+1} - y_j)^2}} \\ d_B(t, i, j) &= \frac{|(y_{j+1} - y_j)x_{B_i} - (x_{j+1} - x_j)y_{B_i} + x_{j+1}y_j - x_jy_{j+1}|}{\sqrt{(x_{j+1} - x_j)^2 + (y_{j+1} - y_j)^2}} \end{aligned}$$

若  $d_A$  或  $d_B$  中任意一个函数值小于安全阈值即  $b$ ，则我们可以判定两个板凳间发生碰撞。此时舞龙队需停止盘入。至此，本题中的碰撞判断模型已全部建立完毕。

### 5.2.2 碰撞检测模型的求解

根据假设，我们只需要在最内圈以及其外侧相邻一圈间，运用碰撞检测模型，就能判断舞龙队是否发生碰撞。首先从龙头开始遍历最内圈的板凳（即模型中编号为  $i$  的板凳），再找到与其相邻一圈离它最近的第一个板凳以及其前后各两张板凳（即模型中编号为  $j$  的板凳），运用碰撞检测公式检查板凳之间的距离。如果任意一对板凳的最小距离小于 0.15m，则认为发生了碰撞。

题目所要求的舞龙队盘入的终止时刻即为板凳第一次发生碰撞的时刻。我们设计了一个以变步长搜索为基础的动态搜索过程。其过程如下：

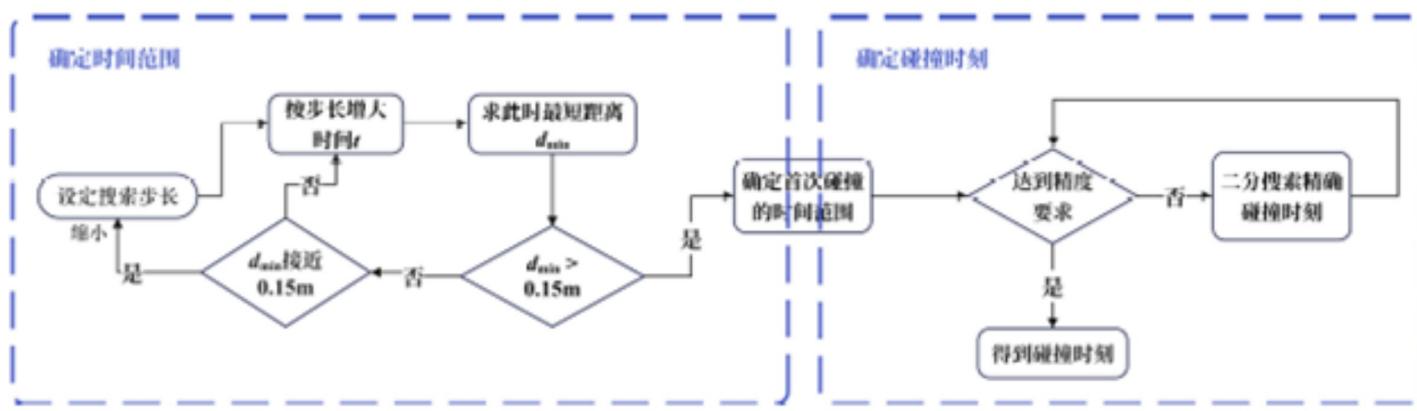


图 7 问题二求解流程图

**Step 1:** 确定首次碰撞的大致时间范围。由于板凳间的距离整体随时间  $t$  的增大有减小趋势且变化连续，我们先以较大的步长（1s），从某一较早时刻开始，判断每个时刻是否发生碰撞，同时关注板凳间的最小距离。当最小距离逐渐接近 0.15m 时，逐渐适当地缩小搜索步长。当首次遇到某个时刻发生碰撞，我们便能够确定首次碰撞时刻的所在区间。

**Step 2:** 确定首次碰撞的精确时刻。对于 Step1 中确定的时间区间，我们在其中使用二分搜索法，以逐步提高所求时刻精度，直至满足题目要求。

通过上述算法，我们成功求解出在题目所给条件下，即螺距保持为 0.55m 时，在  $t = 412.473838s$  会发生第一次碰撞，且碰撞发生在龙头与其外侧的板凳间，因此舞龙队的停止盘入时间应为 412.473838s。表 4 是此时刻龙头前把手、部分龙身前把手，以及龙尾前后把手的位置坐标与速度表格。全部把手的位置和速度信息见表格文件 result2.xlsx。

表 4 终止时刻各节龙身坐标和速度

	横坐标 x(m)	纵坐标 y(m)	速度 (m/s)
龙头	1.209931	1.942784	1.000000
第 1 节龙身	-1.643792	1.753399	0.991551
第 51 节龙身	1.281201	4.326588	0.976858
第 101 节龙身	-0.536246	-5.880138	0.974550
第 151 节龙身	0.968840	-6.957479	0.973608
第 201 节龙身	-7.893161	-1.230764	0.973096
龙尾 (后)	0.956217	8.322736	0.972938

### 5.2.3 碰撞检测模型的验证

求解结束后，我们作出了  $t = 412.473838s$  时板凳龙状态的模拟图像，如图8。不难发现，此时龙头的外侧前顶点  $A_0$  恰要与外侧板凳相撞，正处于临界情况，而整条龙其他位置均未有碰撞出现。这验证了我们的答案，也证实了模型准备中的假设。

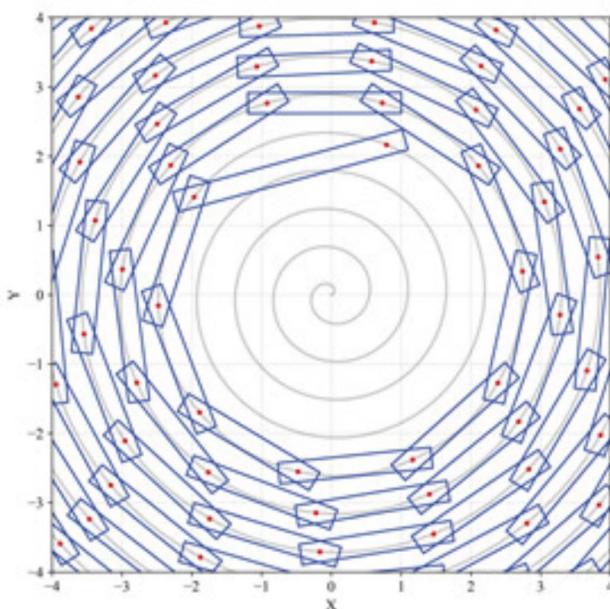


图8 停止盘入时刻板凳龙碰撞情况

我们还绘制了图9所示图像（红色虚线为  $y = 0.15m$ ），描绘了最内圈板凳的外侧顶点距其外一圈板凳中心线的最短距离与时间  $t$  的关系。

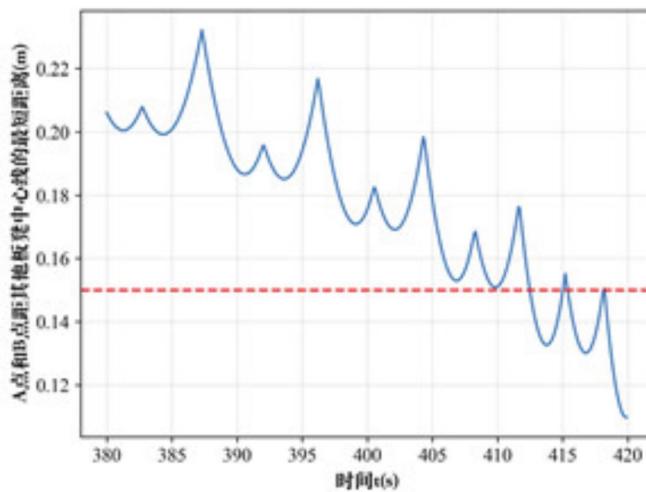


图9 最内圈板凳的外侧顶点距其他板凳中心线的最短距离与时间  $t$  的关系

可见该距离随时间整体呈下降趋势，但处于不断波动。在时间  $t$  大约为 412s 时，该距离第一次降至 0.15m，表明此时发生了第一次碰撞，这与我们的求解结果相吻合。

## 5.3 问题三模型的建立与求解

### 5.3.1 最短螺距优化模型的建立

我们先建立调头空间的几何模型，以螺线中心  $O$  点为圆心，半径为  $r_{\min} = 4.5\text{m}$  的圆的方程为  $r = r_{\min}$ 。

根据要求，本题需要建立一个单目标优化模型，在进入给定的调头空间（即圆  $O$ ）前保证不发生碰撞的情况下，最小化螺距  $d$ 。其中决策变量为螺距  $d$ 。

**目标函数：**

$$\min_d d$$

**约束条件：**

- 螺距  $d$  取值范围：

鉴于每块板凳宽  $0.3\text{m}$ ，且把手中心均位于行进螺线上，因此容易得出螺距  $d$  的下界： $0.3\text{m}$ 。由问题二可知，当  $d = 0.55\text{m}$  时，舞龙队会在第 412 秒左右发生第一次碰撞，此时龙头前把手坐标为  $(1.209931, 1.942784)$ ，显然在圆  $O$  内。由于该碰撞为  $d = 0.55\text{m}$  第一次碰撞，说明在舞龙队到达调头范围前并未发生过碰撞，因此可将  $0.55\text{m}$  设为螺距  $d$  的上界。即  $d$  的取值范围为  $[0.30\text{m}, 0.55\text{m}]$ ：

$$0.30 \leq d \leq 0.55$$

- 进入调头空间时间  $t_0$ ：

运用问题一中建立的盘入运动模型，调整螺距  $d$  的取值，即可得到龙头前把手任意时刻的坐标  $(r_0(t), \theta_0(t))$ 。当龙头前把手按照路线进入调头空间时，时间  $t_0$  满足：

$$r_0(t_0) = r_{\min}$$

- 在进入调头空间前板凳间不发生碰撞：

根据在问题二提出的碰撞模型，调整螺距  $d$ ，我们可以判断在任意时刻  $t$ ，最内圈的任意板凳是否与其相邻一圈的板凳发生碰撞。由问题二可知，第一次碰撞会发生在最内圈与其外圈一层的相邻板凳之间，因此为了保证不发生碰撞，需要保证最内圈任意板凳外侧的前顶点  $A_i$  和后顶点  $B_i$  到其相邻一圈任意板凳的前后把手所在直线  $l_j$  的距离  $d_A$  和  $d_B$  大于安全阈值  $0.15\text{m}$ 。

$$\min_{\substack{t \in [0, t_0] \\ i, j}} \min\{d_A(t, i, j), d_B(t, i, j)\} > 0.15\text{m} \quad (7)$$

因此，我们确定螺距  $d$  的单目标优化模型为

$$\begin{aligned} & \min_d \\ \text{s.t. } & \begin{cases} 0.30m \leq d \leq 0.55m, \\ r_0(t_0) = r_{\min}, \\ \min_{t \in [0, t_0]} \min_{i,j} \{d_A(t, i, j), d_B(t, i, j)\} > 0.15m. \end{cases} \end{aligned}$$

### 5.3.2 最短螺距优化模型的求解

对于螺距优化问题，我们可以采用逐步优化的方法。确保优化过程中始终满足约束条件是一个难点，我们结合了变步长搜索和粒子群优化（PSO）算法来求在  $[0, t_0]$  的时间范围内，最内圈任意板凳外侧前后两个顶点到任意龙身中心线  $l_n$  最短距离，即

$$\min_{t \in [0, t_0]} \min_{i,j} \{d_A(t, i, j), d_B(t, i, j)\}$$

以确保优化过程中始终满足约束条件。下面是算法的具体步骤：

**Step 1:** 从螺距的下界  $d = 0.30m$  开始，以较大的步长 ( $0.01m$ ) 逐步增加螺距  $d$ 。对于每一个  $d$ ，根据  $t_0$  与  $d$  的关系式，求出  $t_0$ 。

**Step 2:** 计算在时间范围  $[0, t_0]$  内以及给定的该螺距下，是否满足(7)式。如果满足条件，则进入 **Step 3**；否则，继续增加螺距。同时关注(7)式左侧的值，当其接近  $0.15m$  时，适当地缩小搜索步长。

**Step 3:** 在当前确定的螺距范围内，进一步用更短的步长，逐步增加螺距  $d$ ，检查其是否满足(7)式。若满足，则缩小搜索范围及步长，重复 **Step 3**，直至结果精确到 6 位小数。

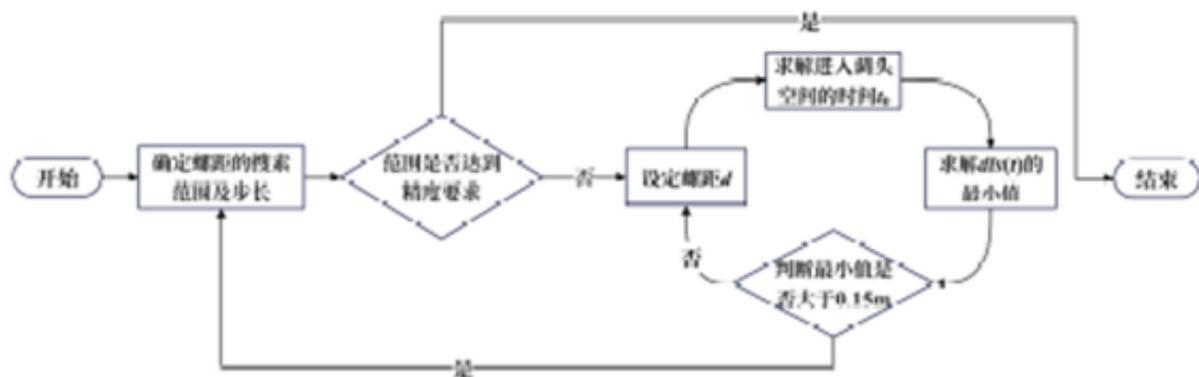


图 10 问题三求解流程图

其中，在 Step 2 寻找最短距离时，就是要求如下函数  $dis(t)$  在  $t \in [0, t_0]$  上的最小值：

$$dis(t) = \min_{i,j} \min \{d_A(t, i, j), d_B(t, i, j)\}$$

鉴于目标函数的复杂性，我们采用了启发式搜索算法。在算法选择上，我们初步考虑了两种优化算法：模拟退火以及粒子群算法。然而经过我们的尝试以及对于函数  $dis(t)$  的性质探究后，发现模拟退火并不适用于该函数的最小值求解，因为该函数局部极小值过多且函数峰值过大，使得算法很容易陷入局部极小值附近，难以越过“能量障碍”，因此我们选用了更高效的粒子群优化算法求解。与模拟退火算法相比，粒子群优化算法全局搜索能力强，能避免高峰障碍（见 [1]），每个粒子不仅会基于自身的经验，还会根据全局最优解进行调整速度，从而避免陷入局部最小值。

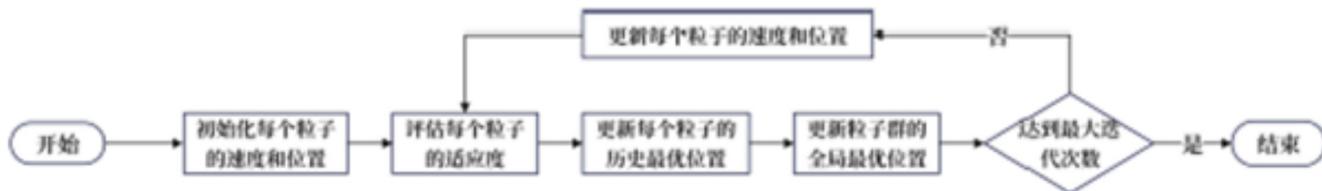


图 11 粒子群 (PSO) 算法流程图

图11是粒子群算法的一般流程图。在该问题中，我们设置初始参数设为：粒子数量(40)，最大迭代次数(50)，惯性权重(0.8)，个体认知权重(0.5)，群体社会权重(0.5)，用函数  $dis(t)$  衡量粒子适应度，并顺利得到函数  $dis(t)$  在  $t \in [0, t_0]$  上的最小值。

根据以上算法步骤，我们最终求出：在保证龙头前把手能够进入调头空间且板凳龙不发生碰撞的情况下，最小螺距  $d_{\min} = 0.450337\text{m}$ 。

### 5.3.3 最短螺距优化模型的验证

我们设定螺距  $d = 0.450337\text{m}$  (即  $d_{\min}$ )，通过验证约束条件的实验，来证明我们所建立的优化模型的合理性。图12和图13展示了  $d = d_{\min}$  时，利用粒子群优化算法找到的函数  $dis(t)$  最小值 (图中 \* 号标注)，以及该算法的收敛过程。

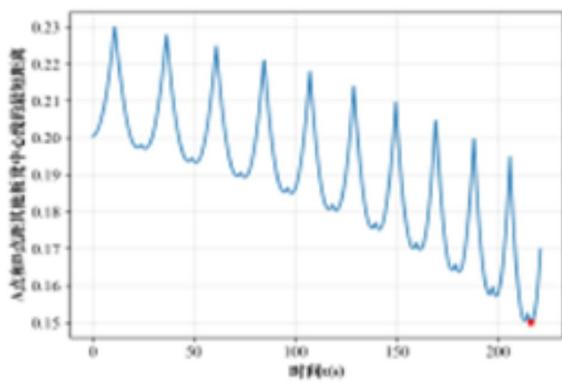


图 12  $dis(t)$  函数图像及最小值

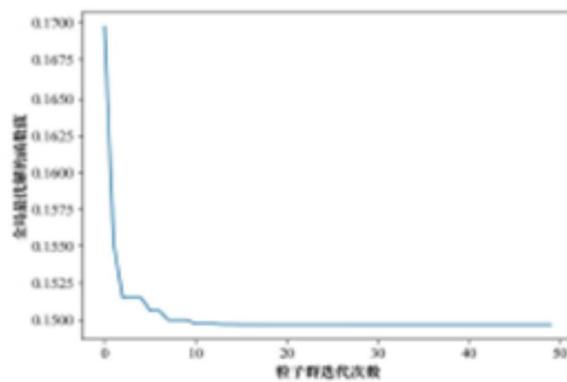


图 13 粒子群算法收敛过程

通过图12的函数图像，可以发现在最小螺距  $d_{\min}$  的情况下， $dis(t)$  恰好略大于安全阈值 0.15m，因此满足了约束条件“在龙头进入调头空间前不会发生碰撞”。

通过图13，可以看出粒子群算法在前10次迭代中就已经快速收敛到一个较优解。并且10次迭代后函数值趋于平稳，最终收敛到略大于0.15m的约束条件。经过多次实验，我们发现粒子群算法在求解不同螺距 $d$ 下的最短距离时，均表现出良好的收敛性和稳定性。这再一次证明了我们选择粒子群算法的合理性。

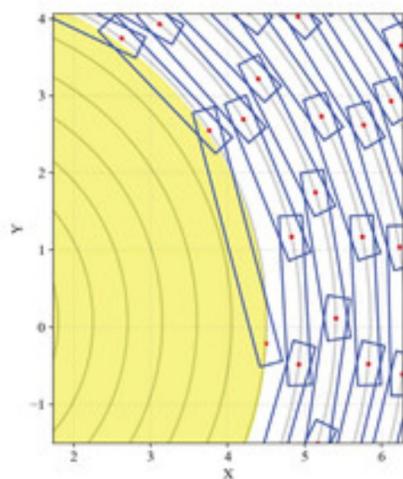


图14 最小螺距下龙头进入调头空间的状态

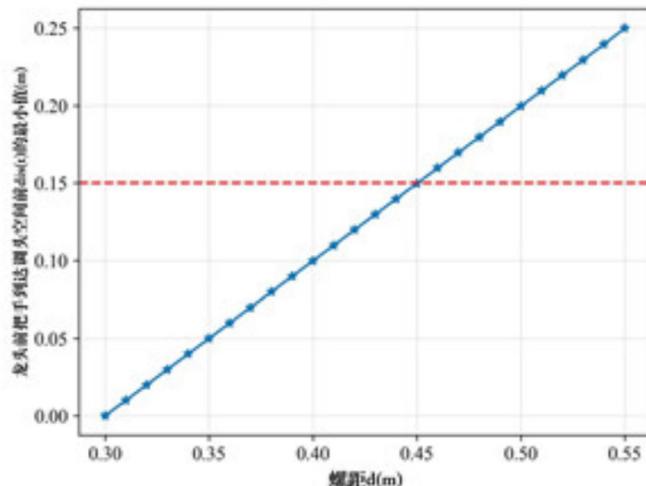


图15  $dis(t)$  最小值随螺距 $d$ 变化图像

图14是在最小螺距 $d_{\min}$ 情况下，龙头前把手恰好进入调头空间时附近的板凳状态情况。我们可以发现在此状态下，龙头后顶点刚好快要与外圈发生碰撞，从图像上验证了对于不能发生碰撞的约束条件，同时也验证了最小螺距 $d_{\min}$ 的正确性以及我们选用的相关算法的合理性。

接着，我们还绘制出了 $dis(t)$ 的最小值关于螺距 $d$ 的函数图像，如图15所示（红色虚线为 $y = 0.15m$ ）。从图中可以看出， $dis(t)$ 在龙头前把手进入调头空间前的最小值随螺距 $d$ 增大而单调增加，且呈较明显的线性关系。这表明变步长搜索并不会遗漏满足要求的更小螺距，证明了我们算法选择的合理性。

## 5.4 问题四模型的建立与求解

### 5.4.1 调头曲线路径几何模型

我们根据题目中所给定条件，建立调头路径几何模型，如图16所示。

其中盘入螺线与第一段圆弧 $\widehat{BD}$ 相切于点 $B$ ，切线为 $l$ ；盘出螺线与第二段圆弧 $\widehat{DF}$ 相切于点 $F$ ，切线为 $m$ 。圆弧 $\widehat{BD}$ 的圆心为 $O_1$ ，圆弧 $\widehat{DF}$ 圆心为 $O_2$ ，两圆弧相切于点 $D$ 。需要注意这两段圆弧的半径之比不一定是 $2:1$ ，而是可以任意选取。我们发现 $B, D, F$ 三点共线，从而调头曲线长度之和 $\widehat{BD} + \widehat{DF}$ 为定值，无法调整。

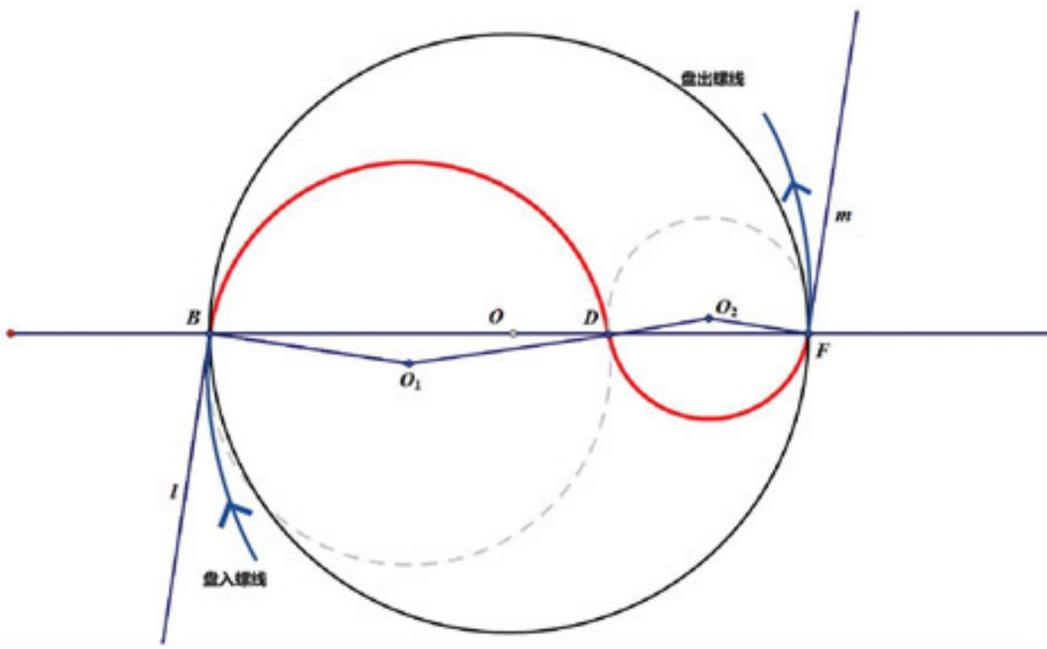


图 16 调头曲线示意图

**证明 1** 直线  $l$  与直线  $m$  关于点  $O$  中心对称, 故  $l \parallel m$ 。又因为  $B$  和  $F$  是圆的切点, 所以  $\angle O_1 Bl = \angle O_2 Fm = \pi/2$ , 因此  $O_1 B \parallel O_2 F$ 。

$D$  是两段圆弧的公切点,  $O_1, D, O_2$  共线, 因此由内错角相等,  $\angle BO_1 D = \angle DO_2 F$ 。

注意到  $\triangle O_1 BD$  和  $\triangle O_2 DF$  都是等腰三角形, 所以  $\angle O_1 DB = \angle O_2 DF$ , 因此  $B, D, F$  三点共线, 也就是说  $BD + DF$  为定值, 由相似可知  $O_1 D + O_2 D$  也是定值。

由于圆心角  $\angle BO_1 D$  和  $\angle DO_2 F$  相等, 弧  $\widehat{BD}$  和弧  $\widehat{DF}$  的长度之和为定值。

#### 5.4.2 调头运动模型的建立

##### 【模型准备】

首先, 我们要求解调头曲线的轨迹方程。为了方便计算, 我们将从  $-100\text{s}$  至  $100\text{s}$  舞龙队经过的路径分为四块, 如图17所示

- 曲线  $P$ : 调头空间前的盘入螺线区。
- 曲线  $M$ : 调头空间内, 弧  $\widehat{BD}$
- 曲线  $N$ : 调头空间内, 弧  $\widehat{DF}$
- 曲线  $Q$ : 调头空间后的盘出螺线区。

由于已经确定调头曲线不可调整, 我们可以根据相应几何关系如图17所示求出相关点的坐标, 从而方便我们在运动模型中建立运动方程。

根据题意, 记螺距为  $d_1 = 1.7\text{m}$ , 调头空间半径仍为  $r_{\min} = 4.5\text{m}$ 。圆  $O_1$  半径  $BO_1$  (记为  $R_1$ ) 是圆  $O_2$  半径  $FO_2$  (记为  $R_2$ ) 的两倍, 且  $\triangle BO_1 D \sim \triangle FO_2 D$ 。同时, 易得  $BD + DF = 2r$ , 结合相似, 我们可以求出  $BD = 6\text{m}$ ,  $DF = 3\text{m}$ 。

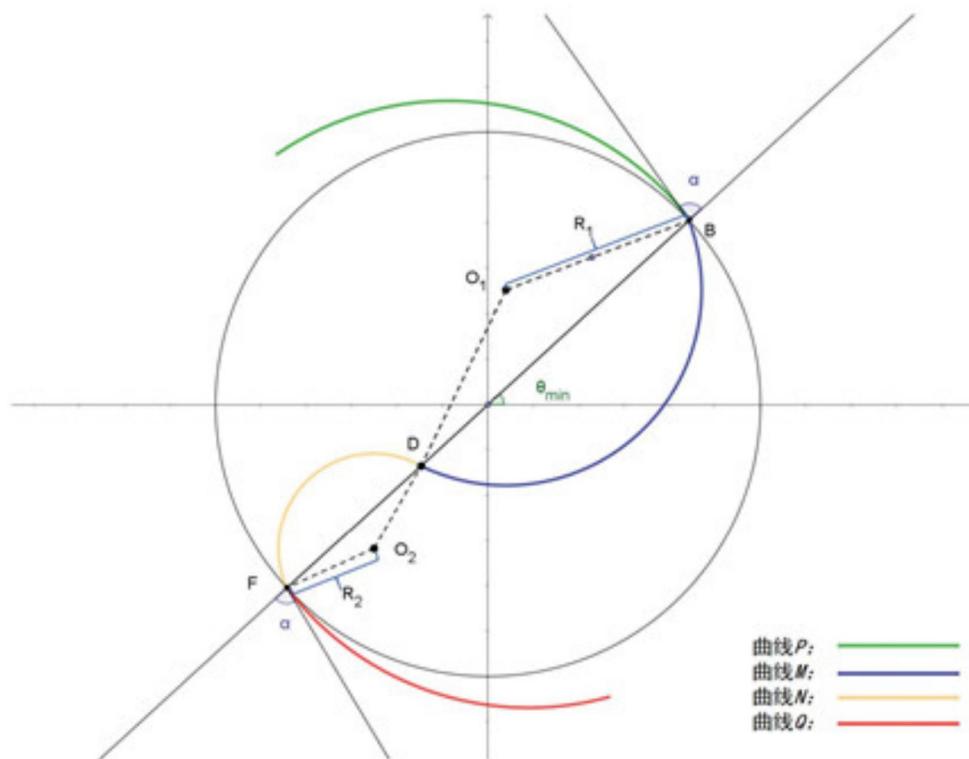


图 17 板凳龙调头路径几何模型以及区域划分

当龙头前把手恰好进入调头空间内的时候，其所对应的极角最小。记此时龙头前把手坐标为 $(r_{\min}, \theta_{\min})$ 。根据极坐标与极角的关系，有

$$\theta_{\min} = 2\pi \cdot \frac{r_{\min}}{d}$$

同时，为了计算龙头前把手运动轨迹，我们还需要知道龙头前把手进入调头空间，以及盘出调头空间时的速度方向。因此需要知道调头空间半径所在直线 $OB$ 与盘入螺线切线 $l$ 的夹角大小 $\alpha$ 。由于盘入螺线与盘出螺线的中心对称性，直线 $n$ 与盘出螺线切线 $m$ 的夹角大小也为 $\alpha$ 。

根据相切关系以及运动方程，我们可以得到关于 $\alpha$ 的以下关系式：

$$\tan \alpha = \left. \frac{r_{\min} d\theta}{dr} \right|_{r=r_{\min}} = \theta_{\min}$$

因此，我们可以得到 $\alpha$ 的表达式：

$$\alpha = \arctan \theta_{\min}$$

代入相关数值计算，可得 $\theta_{\min} \approx 5.294118\pi, \alpha \approx 0.480885\pi$ 。

根据几何关系，我们便可以推导出圆心 $O_1, O_2$ 坐标：

$$O_1 : (r_{\min} \cos \theta_{\min} - R_1 \sin (\theta_{\min} + \alpha), r_{\min} \sin \theta_{\min} + R_1 \cos (\theta_{\min} + \alpha))$$

$$O_2 : (-r_{\min} \cos \theta_{\min} + R_2 \sin (\theta_{\min} + \alpha), -r_{\min} \sin \theta_{\min} - R_2 \cos (\theta_{\min} + \alpha))$$

我们设编号  $i$  的把手与轨迹圆心  $O$  连线和  $x$  轴正方向所成角度为  $\theta_i - k \cdot 2\pi (k \in \mathbb{N})$ , 其中  $\theta_i \in [\theta_{\min} - \alpha - \pi/2, \theta_{\min} + \alpha - \pi/2]$ 。

因此可列出第一段弧  $\widehat{BD}$  参数方程如下:

$$\begin{aligned} x &= x_{o_1} + R_1 \cos \theta_i \\ y &= y_{o_1} + R_1 \sin \theta_i \end{aligned} \quad (8)$$

第二段弧  $\widehat{DF}$  参数方程如下:

$$\begin{aligned} x &= x_{o_2} - R_2 \cos \theta_i \\ y &= y_{o_2} - R_2 \sin \theta_i \end{aligned} \quad (9)$$

此外易得盘出螺线的方程如下:

$$r = \frac{d}{2\pi}(\theta + \pi)$$

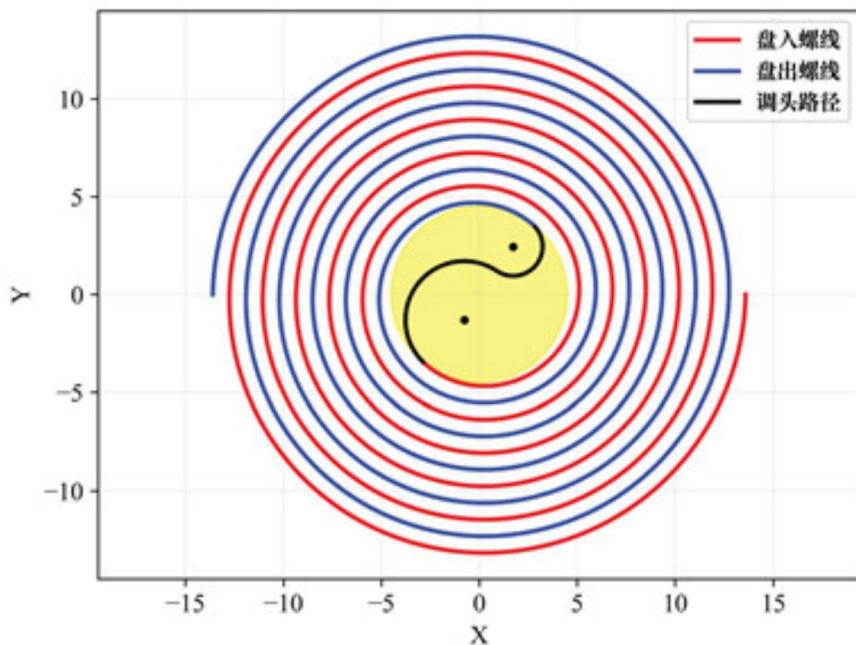


图 18 板凳龙调头路径示意图

### 【龙头前把手调头运动模型】

我们考虑时刻  $t$  时, 龙头前把手位置。为了能够更清晰的表示龙头前把手的运动, 我们需要首先求出龙头前把手进入各曲线的时间点。

依题, 我们设开始调头为零时刻, 因此进入曲线  $M$  的时刻为  $t = 0$ 。由于龙前把手速度为  $v_0 = 1\text{m/s}$ , 且:

$$\widehat{BD} = \frac{6\alpha}{\sin \alpha}, \widehat{DF} = \frac{9\alpha}{\sin \alpha}$$

则龙头前把手进入曲线  $N$  的时刻为  $t_N = \frac{6\alpha}{\sin \alpha}$  s, 进入曲线  $Q$  的时刻为  $t_Q = \frac{9\alpha}{\sin \alpha}$  s。

由此对于  $t \in [-100s, 100s]$ , 我们根据前把手所处不同曲线分别建立位置模型。

- $t \in [-100s, 0s]$ : 此时龙头前把手位于曲线  $P$  内, 其运动轨迹依然为等距螺线, 与问题一条件相同。因此, 可以通过模型一中的方法求解位置。
- $t \in [0s, t_N]$ : 此时龙头前把手位于曲线  $M$  内, 其运动轨迹为弧  $\widehat{BD}$ , 可以通过参数方程(8)求解。
- $t \in [t_N, t_Q]$ : 此时龙头前把手位于曲线  $N$  内, 其运动轨迹为弧  $\widehat{DF}$ , 可以通过参数方程(9)求解。
- $t \in [t_Q, 100s]$ : 此时龙头前把手位于曲线  $Q$  内, 运动轨迹同样为等距螺线, 可用模型一中方法求解。

### 【龙身及龙尾调头运动模型】

在求解龙身及龙尾的运动模型时, 我们仍然递推方法。但需要注意的是, 在调头的过程中, 可能会出现前后两个把手不在同一曲线上。

由于板凳长小于 3m, 因此相邻把手必定在相邻曲线或同一曲线上。

对于编号为  $n$  的把手, 我们只需要判断其与三个分界点的距离  $D$  与其前后把手之间距离  $l$  的大小关系。其中当  $n = 0$  时,  $l = 2.96m$ ;  $n \in \{1, 2, \dots, 223\}$  时,  $l = 1.75m$ 。若  $D > l$ , 则说明编号为  $n+1$  与  $n$  的两个把手位于同一曲线上。反之, 则说明二者位于不同曲线。但是需要特别注意, 因为螺距比较小, 所以对于编号为  $n$  的把手在曲线  $Q$  上的情况不能使用这种判别方法, 正确的判别方法是: 若  $D > l$  或  $\theta_n > \theta_{\min}$ , 则说明二者位于同一曲线上, 反之则位于不同曲线上。

### 位置递推关系推导

- 编号为  $n$  与  $n+1$  的两个把手位于同一曲线上。

位于曲线  $P$ : 与问题一相同, 可套用模型一中的递推公式:

$$\left(\frac{2\pi l}{d}\right)^2 = \theta_n^2 + \theta_{n+1}^2 - 2\theta_n\theta_{n+1} \cos(\theta_{n+1} - \theta_n)$$

其中  $\theta_{n+1}$  的求解范围为:  $[\theta_n, \theta_n + \pi]$ 。

位于曲线  $Q$ : 与问题一类似, 仍然套用该递关系, 但由于盘出螺线与盘入螺线成中心对称, 需要将递推公式里的  $\theta_n$  替换为  $\theta_n + \pi$ , 将  $\theta_{n+1}$  替换为  $\theta_{n+1} + \pi$ 。其中  $\theta_{n+1}$  的求解范围为:  $[\theta_n - \pi, \theta_n]$

位于曲线  $M$ : 直接计算  $\theta_{n+1} = \theta_n + \Delta\theta$ , 其中  $\Delta\theta = 2 \arcsin(l/2R_1)$ 。

位于曲线  $N$ : 直接计算  $\theta_{n+1} = \theta_n - \Delta\theta$ , 其中  $\Delta\theta = 2 \arcsin(l/2R_2)$

- 编号为  $n$  与  $n+1$  的两个把手位于相邻曲线上。

位于曲线  $P$  和曲线  $M$ :

通过求解方程:

$$(x_n - x)^2 + (y_n - y)^2 = l^2 \quad (10)$$

其中， $x = \frac{d}{2\pi}\theta_{n+1} \cos \theta_{n+1}$ ,  $y = \frac{d}{2\pi}\theta_{n+1} \sin \theta_{n+1}$ ,  $\theta_{n+1}$  求解范围为： $[\theta_{\min}, \theta_{\min} + \pi]$

位于曲线  $M$  和曲线  $N$ :

通过求解方程：

$$(x_n - x_{0_1} - R_1 \cos \theta_{n+1})^2 + (y_n - y_{0_1} - R_1 \sin \theta_{n+1})^2 = l^2 \quad (11)$$

其中， $\theta_{n+1}$  求解范围为： $[\theta_{\min} - \alpha - \pi/2, \theta_{\min} + \alpha - \pi/2]$

位于曲线  $N$  和曲线  $Q$ :

通过求解方程：

$$(x_n - x_{0_2} + R_2 \cos \theta_{n+1})^2 + (y_n - y_{0_2} + R_2 \sin \theta_{n+1})^2 = l^2 \quad (12)$$

其中， $\theta_{n+1}$  求解范围为： $[\theta_{\min} - \alpha - \pi/2, \theta_{\min} + \alpha - \pi/2]$

### 速度递推关系推导

龙头前把手的速度恒为  $v_0 = 1\text{m/s}$ ，但是为了方便后续计算，我们需要先计算  $\dot{\theta}_0$ ：

- $t \in [-100\text{s}, 0\text{s}]$ : 此时龙头前把手位于曲线  $P$  内，其运动轨迹依然为等距螺线，与问题一条件相同。因此，可以直接用模型一中的(1)式求解  $\dot{\theta}_0$ 。
- $t \in [0\text{s}, t_N]$ : 此时龙头前把手位于曲线  $M$  内，其运动轨迹为弧  $\widehat{BD}$ ，有  $\dot{\theta}_0 = -v_0/R_1$ 。
- $t \in [t_N, t_Q]$ : 此时龙头前把手位于曲线  $N$  内，其运动轨迹为弧  $\widehat{DF}$ ，有  $\dot{\theta}_0 = v_0/R_2$ 。
- $t \in [t_Q, 100\text{s}]$ : 此时龙头前把手位于曲线  $Q$  内，运动轨迹同样为等距螺线，可用模型一中方法求解。但是需要注意，需要将(1)式中的  $\theta_0$  替换为  $\theta_0 + \pi$ ，而且  $\dot{\theta}_0 > 0$ ，因此在去绝对值的时候不需要添负号。

然后递推得到其余把手速度：

- 编号为  $n$  与  $n+1$  的两个把手位于同一曲线上。

位于曲线  $P$ : 与问题一相同，可套用模型一中的递推公式：

$$\frac{\dot{\theta}_{n+1}}{\dot{\theta}_n} = -\frac{2\theta_n - 2\theta_{n+1} \cos(\theta_{n+1} - \theta_n) - 2\theta_n \theta_{n+1} \sin(\theta_{n+1} - \theta_n)}{2\theta_{n+1} - 2\theta_n \cos(\theta_{n+1} - \theta_n) + 2\theta_n \theta_{n+1} \sin(\theta_{n+1} - \theta_n)} \quad (13)$$

从而得出编号  $n+1$  的把手速度  $v_{n+1}$ ：

$$v_{n+1} = \frac{d}{2\pi} |\dot{\theta}_{n+1}| \sqrt{1 + \theta_{n+1}^2} \quad (14)$$

位于曲线  $Q$ : 与问题一类似，但是要将(13)式和(14)式中的所有  $\theta_n$  替换为  $\theta_n + \pi$ ，所有  $\theta_{n+1}$  替换为  $\theta_{n+1} + \pi$ 。

位于曲线  $M$  或曲线  $N$ : 因为处在同一段圆弧上，所以有

$$v_{n+1} = v_n, \dot{\theta}_{n+1} = \dot{\theta}_n$$

- 编号为  $n$  与  $n+1$  的两个把手位于相邻曲线上。

位于曲线  $P$  和曲线  $M$ : 将(10)式两边同时对时间求导, 整理得  $\dot{\theta}_{n+1} = \frac{2\pi A}{d B}$ , 其中

$$A = (x_n - \frac{d}{2\pi} \theta_{n+1} \cos \theta_{n+1}) \dot{x}_n + (y_n - \frac{d}{2\pi} \theta_{n+1} \sin \theta_{n+1}) \dot{y}_n$$

$$B = (x_n - \frac{d}{2\pi} \theta_{n+1} \cos \theta_{n+1})(\cos \theta_{n+1} - \theta_{n+1} \sin \theta_{n+1}) \\ + (y_n - \frac{d}{2\pi} \theta_{n+1} \sin \theta_{n+1})(\sin \theta_{n+1} + \theta_{n+1} \cos \theta_{n+1})$$

$$\dot{x}_n = v_n \sin \theta_n$$

$$\dot{y}_n = -v_n \cos \theta_n$$

因此

$$v_{n+1} = \frac{d}{2\pi} |\dot{\theta}_{n+1}| \sqrt{1 + \theta_{n+1}^2}$$

位于曲线  $M$  和曲线  $N$ : 将(11)两边同时对时间求导, 整理得

$$\dot{\theta}_{n+1} = -\frac{1}{R_1} \frac{(x_n - x_{O_1} - R_1 \cos \theta_{n+1}) \dot{x}_n + (y_n - y_{O_1} - R_1 \sin \theta_{n+1}) \dot{y}_n}{(x_n - x_{O_1} - R_1 \cos \theta_{n+1}) \sin \theta_{n+1} - (y_n - y_{O_1} - R_1 \sin \theta_{n+1}) \cos \theta_{n+1}}$$

其中  $\dot{x}_n = v_n \sin \theta_n$ ,  $\dot{y}_n = -v_n \cos \theta_n$ 。因此  $v_{n+1} = |\dot{\theta}_{n+1}| R_1$ 。

位于曲线  $N$  和曲线  $Q$ : 将(12)两边同时对时间求导, 整理得

$$\dot{\theta}_{n+1} = \frac{1}{R_2} \frac{(x_n - x_{O_2} + R_2 \cos \theta_{n+1}) \dot{x}_n + (y_n - y_{O_2} + R_2 \sin \theta_{n+1}) \dot{y}_n}{(x_n - x_{O_2} + R_2 \cos \theta_{n+1}) \sin \theta_{n+1} - (y_n - y_{O_2} + R_2 \sin \theta_{n+1}) \cos \theta_{n+1}}$$

其中  $\dot{x}_n = v_n \cos \beta_n$ ,  $\dot{y}_n = v_n \sin \beta_n$ ,  $\beta_n = \theta_n + \arctan(\theta_n + \pi)$ 。因此  $v_{n+1} = |\dot{\theta}_{n+1}| R_2$ 。

#### 5.4.3 调头运动模型的求解

对于龙头把手在盘入螺线及盘出螺线上运动时, 其位置与速度的求解方式与模型一相同, 可以运用二分搜索法分别求出龙头前把手在曲线  $P$  和曲线  $Q$  上每秒钟其位置信息。对于龙头前把手位于调头空间内, 即曲线  $M$  和曲线  $N$  上的情况, 我们则通过求解参数方程得到其每秒钟的位置信息。图19展示了龙头前把手在  $t \in [-100, 100]$  时间范围内的路径。

对于龙身以及龙尾部分, 我们仍根据龙头前把手数据递归计算得到相应位置和速度。由于调头路径的复杂性, 需要首先判断相邻把手在不同时间点所属路径。再按照位置推导关系中所给出的分类求解方程, 在给定求解范围内, 逐步更新各把手的角度和坐标。表 5 和表 6 是从  $t = -100s$  至  $t = 100s$  时部分时刻以及部分把手的位置与速度表格。全部把手每秒的位置速度信息见表格文件 result4.xlsx。

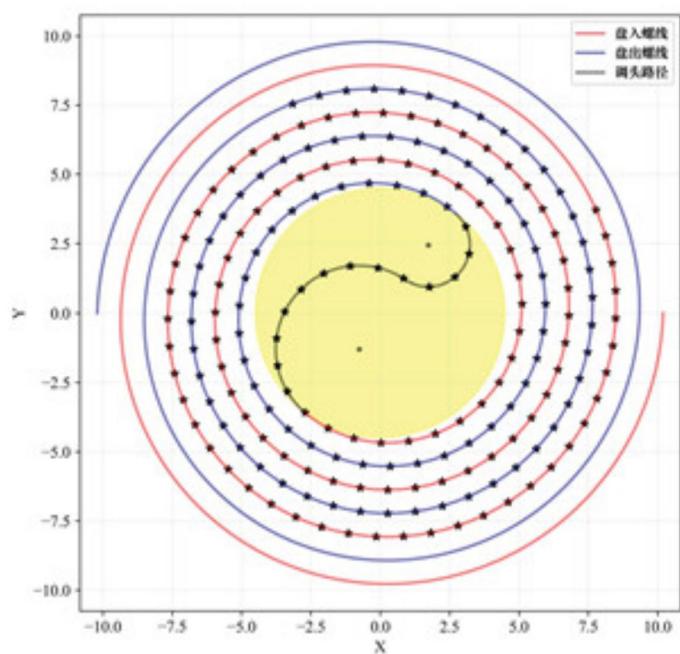


图 19  $t = -100\text{ s}$  至  $t = 100\text{ s}$  之间龙头前把手的位置

表 5 调头过程中各节龙身坐标随时间变化情况

	-100 s	-50 s	0 s	50 s	100 s
龙头 x (m)	7.778034	6.608301	-2.711856	1.332696	-3.157229
龙头 y (m)	3.717164	1.898865	-3.591078	6.175324	7.548511
第 1 节龙身 x (m)	6.209273	5.366911	-0.063534	3.862265	-0.346890
第 1 节龙身 y (m)	6.108521	4.475403	-4.670888	4.840828	8.079166
第 51 节龙身 x (m)	-10.608038	-3.629945	2.459962	-1.671385	2.095033
第 51 节龙身 y (m)	2.831491	-8.963800	-7.778145	-6.076713	4.033787
第 101 节龙身 x (m)	-11.922761	10.125787	3.008493	-7.591816	-7.288774
第 101 节龙身 y (m)	-4.802378	-5.972247	10.108539	5.175487	2.063875
第 151 节龙身 x (m)	-14.351032	12.974784	-7.002789	-4.605165	9.462513
第 151 节龙身 y (m)	-1.980993	-3.810357	10.337482	-10.386988	-3.540357
第 201 节龙身 x (m)	-11.952942	10.522508	-6.872842	0.336952	8.524374
第 201 节龙身 y (m)	10.566998	-10.807425	12.382609	-13.177610	8.606933
龙尾 (后) x (m)	-1.011059	0.189809	-1.933627	5.859094	-10.980157
龙尾 (后) y (m)	-16.527573	15.720588	-14.713128	12.612894	-6.770006

表 6 调头过程中各节龙身速度随时间变化情况

	-100 s	-50 s	0 s	50 s	100 s
龙头 (m/s)	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000
第 1 节龙身 (m/s)	0.999904	0.999762	0.998687	1.000363	1.000124
第 51 节龙身 (m/s)	0.999346	0.998642	0.995134	0.949935	1.003966
第 101 节龙身 (m/s)	0.999091	0.998248	0.994448	0.948482	1.096263
第 151 节龙身 (m/s)	0.998944	0.998047	0.994156	0.948038	1.095306
第 201 节龙身 (m/s)	0.998849	0.997925	0.993994	0.947823	1.094933
龙尾 (后) (m/s)	0.998817	0.997885	0.993944	0.947760	1.094833

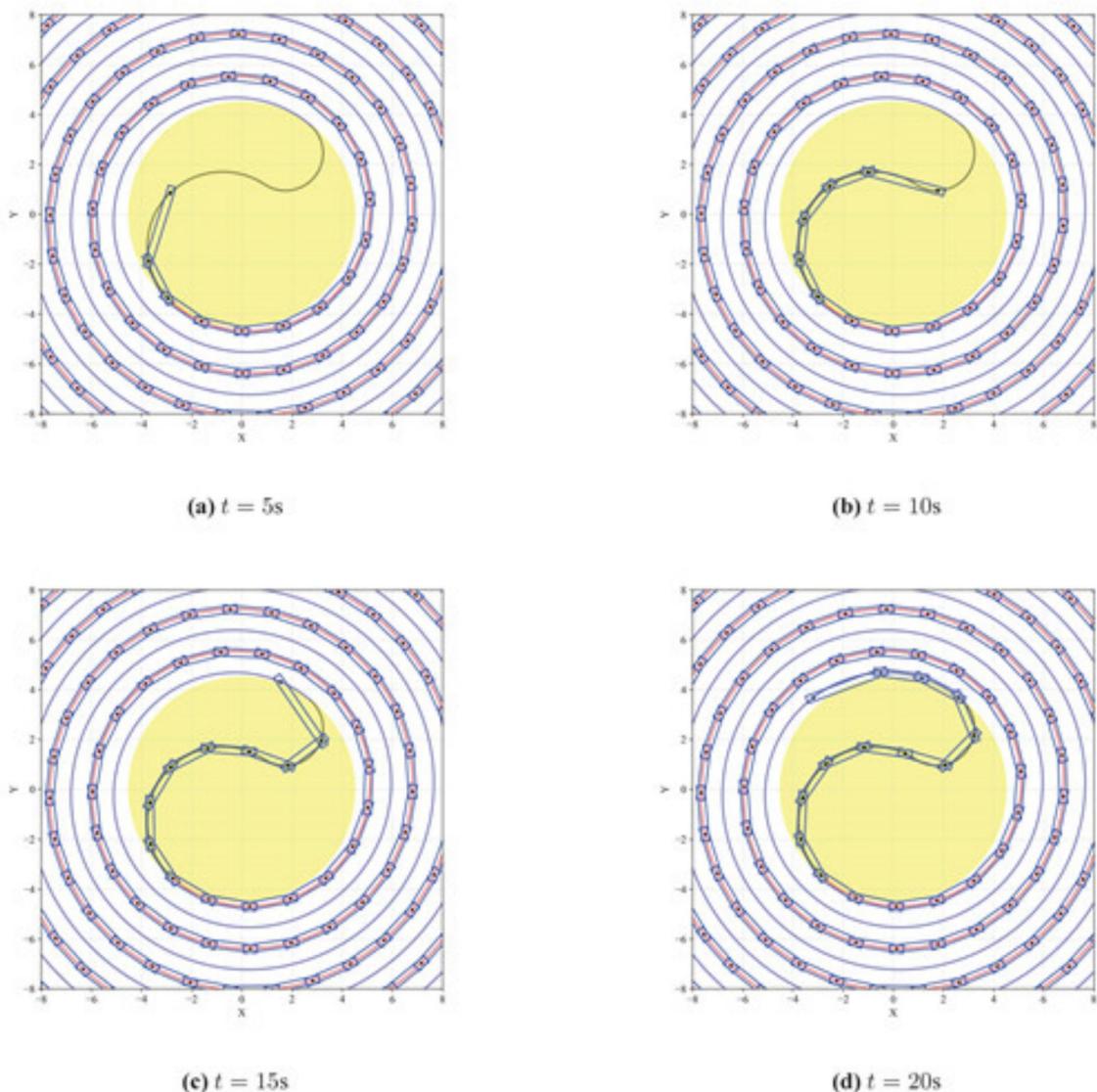


图 20 调头过程中不同时刻板凳龙示意图

#### 5.4.4 调头运动模型的验证

使用以上模型求得各时刻每个龙把手的位置与速度后，我们需要简单验证其合理性。

首先，通过使用电脑绘图，可以从视觉上验证位置的正确性。图20是用我们所求坐标绘制的不同时刻板凳龙状态示意图，可以发现板凳龙的把手均按照预定曲线移动，在直观上证实了我们所求坐标的正确性。

其次，我们采用数值微分法，通过选取小时间间隔（如0.01s），计算把手前后位移，再据此计算出平均速度，在时间间隔趋于0的情况下，该平均速度应收敛于我们使用求导算出的速度。通过与我们利用模型求得的结果对比，可以看出二者之间确实差异较小。利用不同的速度求解方式，我们再一次验证了所求得相关数据的准确性以及所建立模型的合理性。并且相较于直接通过把手位置信息和速度公式求解速度，我们选取的模型能够直接得到更加精确的瞬时速度。

通过对各时刻各节把手的速度分析，我们发现未进入调头空间时，各把手的速度最大值出现在龙头前把手处，这与我们模型一中得出的结论相符。而在龙头前把手进入调头空间后，各把手的速度最大值出现变化。我们发现，在第14s时，速度最大值出现了短暂的突增。我们猜测是由于龙头开始进入盘出螺线，路径的曲率半径出现较大变化。通过对每时刻舞龙队状态的可视化，我们可以发现在第14s附近，龙头前把手开始进入曲线N，符合我们的猜想。对速度最大值的分析将会对下一问模型的建立有所帮助。

### 5.5 问题五模型建立与求解

#### 5.5.1 最大速度计算模型的建立

题目要求全过程中，所有人的速度不能超过2m/s，求龙头前把手的最大行进速度 $v_{\max}$ 。注意到在相同位置上，所有把手的速度都成一定比例，也就是说，若龙头的速度从原来的 $v_0 = 1\text{m/s}$ 变为 $v_{\max}$ ，那么在相同位置上，所有把手的速度都会变为原来的 $v_{\max}/v_0$ 倍。所以在 $v_0 = 1\text{m/s}$ 时，所有把手速度的最大值一定是

$$\max_n v_n = \frac{2\text{m/s}}{v_{\max}/v_0}$$

因此，只要我们借助问题四的模型，求出 $v_0 = 1\text{m/s}$ 时所有把手速度的最大值，就可以算出问题五龙头前把手最大行进速度 $v_{\max}$ 。

根据要求，本题需要建立一个单目标优化模型，在板凳龙行进的全过程中，最大化速度 $v_n(t)$ 。其中决策变量为时间 $t$ 。

目标函数：

$$\max_{t,n} v_n(t)$$

约束条件：

- **时间  $t$  的取值范围：**观察问题四得到的各把手的速度数据，不难发现：当  $t \leq 0$  时，速度的最大值一定出现在龙头，恒为  $v_0$ ；而当  $t > 0$  时，速度的最大值一开始出现在龙头，后面随着  $t$  的增大，整体呈现向龙尾方向移动的趋势。而且在  $t = 14\text{s} \sim 15\text{s}$  附近（也就是龙头在  $F$  点附近时），速度的最大值突然出现一个极大值。在这之后，速度的最大值整体呈现缓慢变大的趋势。  
因此，我们只需要在龙头在  $F$  点附近和龙尾在  $F$  点附近时计算速度的最大值即可（经计算，该时间间隔为  $t = 376\text{s} \sim 384\text{s}$ ）。

$$t \in [13\text{s}, 16\text{s}] \cup [376\text{s}, 384\text{s}]$$

$$n \in \{0, 1, 223\}$$

因此，我们确定所有把手速度最大值的单目标优化模型为

$$\begin{aligned} & \max_{t,n} v_n(t) \\ \text{s.t. } & \begin{cases} t \in [13\text{s}, 16\text{s}] \cup [376\text{s}, 384\text{s}], \\ n \in \{0, 1, 223\}. \end{cases} \end{aligned}$$

### 5.5.2 最大速度计算模型的求解

目标时间范围内  $t \in [13\text{s}, 16\text{s}] \cup [376\text{s}, 384\text{s}]$ ，我们以先以  $0.1\text{s}$  为步长计算不同时刻下所有把手的最大速度，并比较每个时刻的最大速度。结果表明，所有把手最大速度的最大值出现在  $t \in [14\text{s}, 15\text{s}]$  区间内。

通过分析该区间内最大速度的函数变化趋势，我们发现在该时间范围内，把手最大速度的函数图像呈单峰特征，即先增后减。根据此函数性质，我们选用了三分搜索法 [2] 进一步精确查找在该时间范围内把手的最大速度。

下面是三分搜索法的具体步骤以及示意图：

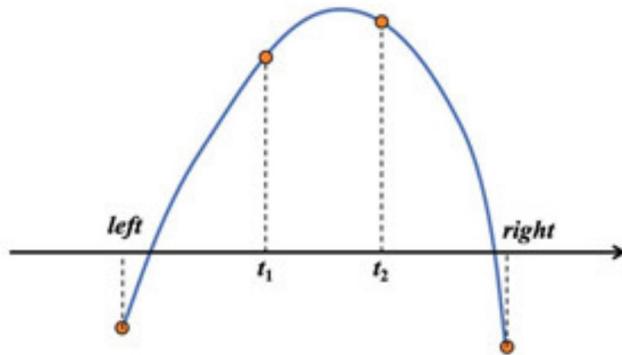


图 21 三分搜索法示意图

**Step 1:** 初始化参数。设定初始搜索区间为  $[14\text{s}, 15\text{s}]$

**Step 2:** 计算两个中间点：根据当前区间  $[left, right]$ ，计算两个三分点：

$$t_1 = \frac{2 \times left + right}{3}, \quad t_2 = \frac{left + 2 \times right}{3}$$

分别计算在这两个时间点上的所有把手速度的最大值  $\max_n v_n(t_1)$  和  $\max_n v_n(t_2)$ 。

**Step 3:** 比较中间点的函数值：

- 如果  $\max_n v_n(t_1) < \max_n v_n(t_2)$ ，则极大值位于区间  $[t_1, right]$ ，更新  $left = t_1$ ；
- 如果  $\max_n v_n(t_1) > \max_n v_n(t_2)$ ，则极大值位于区间  $[left, t_2]$ ，更新  $right = t_2$ 。

**Step 4:** 迭代过程：重复步骤 2 和步骤 3，逐步缩小搜索区间，直到区间的长度小于预设的精度  $\epsilon = 10^{-8}$ ，即  $|right - left| < \epsilon$ 。

**Step 5:** 求解结果：在最后的迭代结束时，计算最终得到的中点  $t_f = \frac{left + right}{2}$  对应的所有把手速度  $v_n(t_f)$ 。根据最小速度限制公式计算龙头前把手的最大速度：

$$v_{\max} = \frac{2 \text{ m/s}}{\max_n \frac{v_n(t_f)}{v_0}}$$

**Step 6:** 输出结果：输出最大行进速度  $v_{\max}$ ，并验证在此速度下所有把手的速度均不超过 2m/s。

经计算，我们得出在  $t \approx 14.47997148s$  时， $\max_n v_n(t)$  达到其最大值 1.60479338m/s。故题目所求结果为  $v_{\max} \approx 1.246266m/s$ 。

### 5.5.3 最大速度优化模型的验证

通过将所有把手最大速度随时间的变化可视化（图22）后，我们可以发现显然在 14s 附近出现了所有把手的最大速度，并且出现在靠近龙头部分。这验证了我们在利用三分法求解速度最大值时选定的时间范围的合理性。

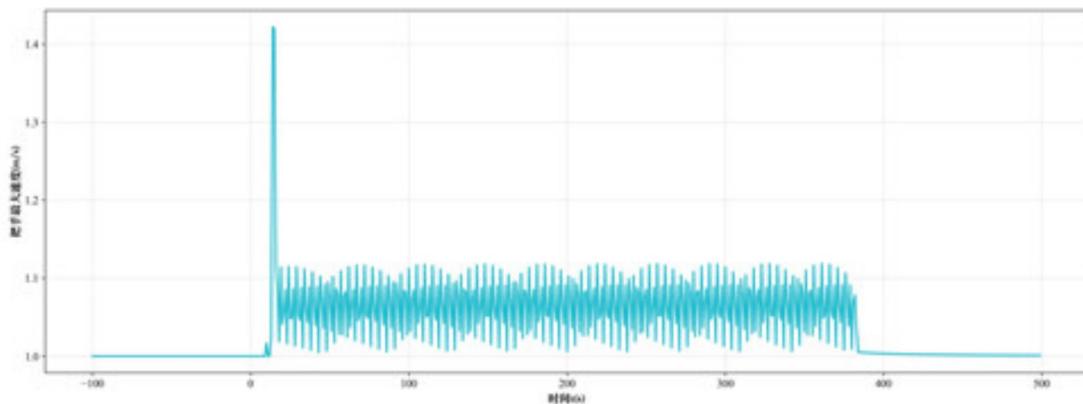


图 22  $t = -100s$  至  $t = 500s$  把手速度最大值

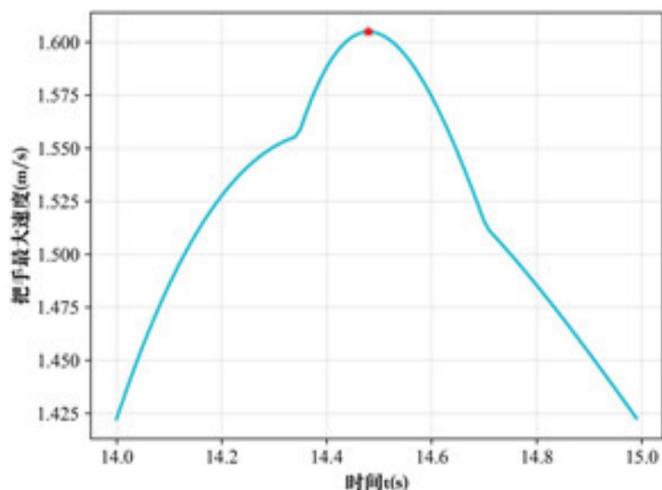


图 23  $t = 14\text{s}$  至  $t = 15\text{s}$  把手速度最大值

通过画出第  $14\text{s}$  至第  $15\text{s}$  的所有把手最大速度函数图像（图23，\*号标注为求得的最大值），我们验证了在该范围区间内使用三分搜索法的合理性，即该函数在给定定义域内仅存在一个极大值，且函数图像呈现先增后减趋势。

## 六、模型的评价

### 6.1 模型的优点

- 模型建立过程中，问题二通过完整证明合理假设，缩小了求解范围，简化了相关模型；问题四中，对于龙把手不同位置情况进行详细的分类讨论。问题五中，通过巧妙转化求解目标，同样简化了相关模型。
- 模型求解过程中，通过二分法、粒子群算法、三分搜索法等算法进行优化，并且对比了不同优化方式的适配与各个模型的适配度，从而选择最优的求解方式，提高求解效率以及结果的精确度。
- 每个模型都通过不同方式对于最后的求解结果进行验证与分析。

### 6.2 模型的缺点

- 在碰撞检测方法中，并未充分考虑碰撞时物体的物理特性可能会带来的影响。

## 参考文献

- [1] Meetu Jain, Vibha Saihjpal, Narinder Singh, and Satya Bir Singh. An overview of variants and advancements of pso algorithm. *Applied Sciences*, 12(17):8392, 2022.
- [2] Manpreet Singh Bajwa, Arun Prakash Agarwal, and Sumati Manchanda. Ternary search algorithm: Improvement of binary search. In *2015 2nd International Conference on Computing for Sustainable Global Development (INDIACoM)*, pages 1723–1725. IEEE, 2015.

## 附录 A 支撑材料文件列表

表 7 文件列表

文件名	说明
dragon.py	问题一至问题三计算位置与速度
dragon2.py	问题四至问题五计算位置与速度
problem1_1.py	问题一计算位置
problem1_2.py	问题一计算速度
problem2_1.py	问题二求解碰撞时刻
problem2_2.py	问题二计算碰撞时刻的位置和速度
problem3.py	问题三求解最小螺距
problem4_1.py	问题四计算位置
problem4_2.py	问题四计算速度
problem5.py	问题五求解全局把手最大速度
result1.xlsx	问题一所有时间所有把手的位置与速度
result2.xlsx	问题二碰撞时所有把手的位置与速度
result4.xlsx	问题四所有时间所有把手的位置与速度

## 附录 B 支撑材料的所有 Python 代码

```
1 """
2 文件名: dragon.py
3 用途: 第1-3问板凳龙模型(无调头)
4 """
5 import numpy as np
6 import pandas as pd
7 import matplotlib.pyplot as plt
8 from math import *
9 from matplotlib.font_manager import FontProperties
10
11 ben_wid = 0.3 # 板凳宽度(m)
12 ben_len_head = 3.41 # 龙头板长(m)
13 ben_len = 2.20 # 龙身及龙尾板长度(m)
14 hole_dis = 0.275 # 孔离板头距离(m)
15 hole_dia = 0.055 # 孔的直径(m)
16 dra_len = 223 # 板凳个数
17
18 font = FontProperties(fname="/System/Library/Fonts/Supplemental/Times New Roman.ttf")
```

```

19 font2 = FontProperties(fname="/System/Library/Fonts/Supplemental/Songti.ttc")
20
21
22 class Dragon():
23
24     def __init__(self, d=0.55, v0=1, theta0=32 * pi): # d为螺距(m), v0为龙头前把手速度(m/s)
25
26         self.d = d # 螺距(m)
27         self.v0 = v0 # 龙头前把手速度(m/s)
28         self.theta0 = theta0 # 0时刻龙头前把手角度
29
30         self.ang = None # 把手角度列表
31         self.pos = None # 把手坐标列表
32         self.vol = None # 把手速度列表
33
34         self.time = None # 当前时间
35
36     # 设定时间t(s)
37     def set_time(self, t, need_vol=False):
38
39         self.time = t # 更新当前时间
40
41         # 求解龙头前把手位置
42         theta_n = self.head_pos(t)
43         self.ang = [theta_n]
44         self.pos = [(self.arc_x(theta_n), self.arc_y(theta_n))]
45
46         if need_vol:
47             self.vol = [self.v0]
48             d_theta_n = -2 * pi * self.v0 / (self.d * (1 + theta_n**2)**0.5)
49
50         # 求解龙身及龙尾前把手、龙尾后把手位置
51         for n in range(223):
52             if n != 0:
53                 theta_n = self.next_pos(theta_n)
54             else:
55                 theta_n = self.next_pos(theta_n, is_head=True)
56                 self.ang.append(theta_n)
57                 self.pos.append((self.arc_x(theta_n), self.arc_y(theta_n)))
58
59             if need_vol:
60                 theta_n0 = self.ang[n]
61                 theta_n1 = self.ang[n + 1]
62
63                 par1 = 2 * theta_n0 - 2 * theta_n1 * cos(theta_n1 - theta_n0) - 2 * theta_n0 *
64                 theta_n1 * sin(theta_n1 - theta_n0)

```

```

    theta_n1 * sin(theta_n1 - theta_n0)
65
66     d_theta_n1 = -(par1 / par2) * d_theta_n
67
68     v = self.d / (2 * pi) * abs(d_theta_n1) * (1 + theta_n1**2)**0.5
69     self.vol.append(v)
70
71     d_theta_n = d_theta_n1
72
73     # 判断是否碰撞
74     def judge_col(self):
75         dis_min = 1 # 最短距离(m)
76
77         # 找到距龙头一圈外的第一个板凳
78         i_max = 0
79         while self.ang[i_max] - self.ang[0] <= 2 * pi:
80             i_max += 1
81
82         for i in range(0, i_max + 1):
83
84             l_i = 2.86 if i == 0 else 1.65
85
86             # 找到距第1个板凳一圈外的第一个板凳j0
87             j0 = i_max
88             while self.ang[j0] - self.ang[i] <= 2 * pi:
89                 j0 += 1
90
91             # 遍历j0及前后各两个板凳
92             # 判断是否相碰
93             for j in range(j0 - 2, j0 + 3):
94                 l_j = 1.65
95                 delta_xi = self.pos[i + 1][0] - self.pos[i][0]
96                 delta_yi = self.pos[i + 1][1] - self.pos[i][1]
97                 delta_xj = self.pos[j + 1][0] - self.pos[j][0]
98                 delta_yj = self.pos[j + 1][1] - self.pos[j][1]
99
100                s = - delta_yi / l_i # sin(alpha)
101                c = - delta_xi / l_i # cos(alpha)
102
103                x1 = self.pos[i][0] + hole_dis * c - (ben_wid / 2) * s
104                y1 = self.pos[i][1] + hole_dis * s + (ben_wid / 2) * c
105                x2 = self.pos[i + 1][0] - hole_dis * c - (ben_wid / 2) * s
106                y2 = self.pos[i + 1][1] - hole_dis * s + (ben_wid / 2) * c
107
108                dis1 = abs(delta_yj * x1 - delta_xj * y1 + self.pos[j + 1][0] * self.pos[j][1] -
109                           self.pos[j][0] * self.pos[j + 1][1]) / l_j
110                dis2 = abs(delta_yj * x2 - delta_xj * y2 + self.pos[j + 1][0] * self.pos[j][1] -

```

```

    self.pos[j][0] * self.pos[j + 1][1]) / l_j
110
111     if dis1 <= 0.15 or dis2 <= 0.15:
112         return True, min(dis1, dis2)
113
114     dis_min = min(dis_min, dis1, dis2)
115
116     return False, dis_min
117
118 # 判断龙头前把手到外圈板凳的最短距离
119 def min_dis(self, t):
120
121     self.set_time(t)
122     dis_min = 1 # 最短距离(m)
123
124     # 找到距龙头一圈外的第一个板凳
125     j0 = 0
126     while self.ang[j0] - self.ang[0] <= 2 * pi:
127         j0 += 1
128
129     l_i = 2.86
130     for j in range(j0 - 2, j0 + 3):
131         l_j = 1.65
132         delta_xi = self.pos[1][0] - self.pos[0][0]
133         delta_yi = self.pos[1][1] - self.pos[0][1]
134         delta_xj = self.pos[j + 1][0] - self.pos[j][0]
135         delta_yj = self.pos[j + 1][1] - self.pos[j][1]
136
137         s = - delta_yi / l_i # sin(alpha)
138         c = - delta_xi / l_i # cos(alpha)
139
140         x1 = self.pos[0][0] + hole_dis * c - (ben_wid / 2) * s
141         y1 = self.pos[0][1] + hole_dis * s + (ben_wid / 2) * c
142         x2 = self.pos[1][0] - hole_dis * c - (ben_wid / 2) * s
143         y2 = self.pos[1][1] - hole_dis * s + (ben_wid / 2) * c
144
145         dis1 = abs(delta_yj * x1 - delta_xj * y1 + self.pos[j + 1][0] * self.pos[j][1] -
146                     self.pos[j][0] * self.pos[j + 1][1]) / l_j
147         dis2 = abs(delta_yj * x2 - delta_xj * y2 + self.pos[j + 1][0] * self.pos[j][1] -
148                     self.pos[j][0] * self.pos[j + 1][1]) / l_j
149
150         dis_min = min(dis_min, dis1, dis2)
151
152     # 求解相碰时间及此时龙头前把手距中心的距离
153     def time_col(self):

```

```
154
155     time = 0
156
157     # 设定初始状态
158     self.set_time(time)
159
160     while not self.judge_col()[0]:
161         time += 1
162         self.set_time(time)
163
164     return time, self.arc_r(self.ang[0]) # 龙头前把手离中心距离
165
166     # 求解龙头前把手到达调头空间的时间
167     def arr_time(self):
168         return binary_search(self.if_arrive, 0, 421, incre=True)
169
170     # 打印板凳龙状态(无板凳)
171     def print_status(self):
172
173         theta = np.linspace(0, 20 * 2 * pi, 1500)
174         x = self.d / (2 * pi) * theta * np.cos(theta)
175         y = self.d / (2 * pi) * theta * np.sin(theta)
176
177         x_lst = [ben_pos[0] for ben_pos in self.pos]
178         y_lst = [ben_pos[1] for ben_pos in self.pos]
179
180         plt.figure()
181         plt.plot(x, y, color='black', linewidth=2, alpha=0.5)
182         plt.scatter(x_lst, y_lst, color='red', marker='.')
183
184         plt.xlabel('X')
185         plt.ylabel('Y')
186
187         plt.grid(True, alpha=0.3)
188         plt.show()
189
190     # 打印板凳龙图像(有板凳)
191     def print_img(self, save_pth=None, magn=None, show=True, circle=False):
192
193         # save_pth 保存路径, 默认不保存
194         # magn 是否放大中心, 默认不放大
195
196         a = hole_dis
197         b = ben_wid / 2
198
199         # 初始化图像
200         plt.figure(figsize=(8, 8))
```

```

201
202     # 绘制把手
203     theta = np.linspace(0, 16 * 2 * pi, 1500)
204     x = self.d / (2 * pi) * theta * np.cos(theta)
205     y = self.d / (2 * pi) * theta * np.sin(theta)
206
207     x_lst = [ben_pos[0] for ben_pos in self.pos]
208     y_lst = [ben_pos[1] for ben_pos in self.pos]
209
210     plt.plot(x, y, color='black', linewidth=2, alpha=0.2)
211     plt.scatter(x_lst, y_lst, color='red', marker=',')
212
213     # 绘制板凳
214     for i in range(223):
215
216         li = 2.86 if i == 0 else 1.65
217
218         delta_xi = self.pos[i + 1][0] - self.pos[i][0]
219         delta_yi = self.pos[i + 1][1] - self.pos[i][1]
220
221         s = -delta_yi / li # sin(alpha)
222         c = -delta_xi / li # cos(alpha)
223
224         x1 = self.pos[i][0] + a * c - b * s
225         y1 = self.pos[i][1] + a * s + b * c
226         x2 = self.pos[i + 1][0] - a * c - b * s
227         y2 = self.pos[i + 1][1] - a * s + b * c
228         x3 = self.pos[i + 1][0] - a * c + b * s
229         y3 = self.pos[i + 1][1] - a * s - b * c
230         x4 = self.pos[i][0] + a * c + b * s
231         y4 = self.pos[i][1] + a * s - b * c
232
233         rect = [(x1, y1), (x2, y2), (x3, y3), (x4, y4)]
234
235         x, y = zip(*rect)
236         plt.plot(x + (x[0],), y + (y[0],), 'b-')
237
238     if circle:
239         circle = plt.Circle((0, 0), 4.5, color='yellow', fill=True, alpha=0.5)
240         plt.gca().add_artist(circle)
241
242     # 设置图形属性
243     plt.xlabel('X', fontproperties=font, size=12)
244     plt.ylabel('Y', fontproperties=font, size=12)
245
246     plt.xticks(fontproperties=font, size=12)
247     plt.yticks(fontproperties=font, size=12)

```

```

248
249     # 放大区域
250     if magn is not None:
251         plt.xlim(-magn, magn)
252         plt.ylim(-magn, magn)
253
254     # 显示图形
255     # plt.axis('equal') # 设置坐标轴等比例
256     plt.grid(True, alpha=0.3) # 显示网格
257     if save_pth:
258         plt.savefig(save_pth, dpi=300)
259     if show:
260         plt.show()
261     plt.close()
262
263     # (辅助函数) 求解龙头前把手角度
264     def head_pos(self, t):
265         par1 = self.theta0 * (1 + self.theta0**2)**0.5
266         par2 = log(self.theta0 + (1 + self.theta0**2)**0.5)
267         par3 = 4 * pi * self.v0 * t / self.d
268
269         def fn(x):
270             return par1 + par2 - par3 - x * (1 + x**2)**0.5 - log(x + (1 + x**2)**0.5)
271
272         return binary_search(fn, 0, self.theta0, incre=False)
273
274     # (辅助函数) 判断龙头前把手是否进入调头空间
275     def if_arrive(self, t):
276         ang = self.head_pos(t)
277         if self.arc_r(ang) <= 4.5:
278             return 1
279         else:
280             return -1
281
282     # (辅助函数) 求解龙身及龙尾把手角度
283     def next_pos(self, theta_n, is_head=False): # theta_n为前一把手角度
284         l = 2.86 if is_head else 1.65 # 两孔距离(m)
285         paral = (2 * pi * l / self.d)**2
286
287         def fn(x):
288             return theta_n**2 + x**2 - 2 * theta_n * x * cos(x - theta_n) - paral
289
290         return binary_search(fn, theta_n, theta_n + pi, incre=True)
291
292     # (辅助函数) 角度转换为x坐标
293     def arc_x(self, arc):
294         return self.d / (2 * pi) * arc * cos(arc)

```

```
295
296     # (辅助函数) 角度转换为y坐标
297     def arc_y(self, arc):
298         return self.d / (2 * pi) * arc * sin(arc)
299
300     # (辅助函数) 角度转换为半径
301     def arc_r(self, arc):
302         return self.d / (2 * pi) * arc
303
304
305     # 二分搜索函数
306     def binary_search(fn, lb, ub, incre, eps=1e-8):
307
308         cur = (lb + ub) / 2
309
310         while ub - lb > eps:
311
312             cur_res = fn(cur)
313
314             # 若函数递增
315             if incre:
316                 if cur_res < 0:
317                     lb = cur
318                 elif cur_res > 0:
319                     ub = cur
320
321             # 若函数递减
322             else:
323                 if cur_res > 0:
324                     lb = cur
325                 elif cur_res < 0:
326                     ub = cur
327
328             cur = (lb + ub) / 2
329
330         return cur
331
332
333     # 临时测试函数
334     def test():
335         dragon = Dragon()
336         dragon.set_time(412)
337         dragon.print_img(magn=4)
338
339
340     if __name__ == '__main__':
341         test()
```

```
1 """
2 文件名: dragon2.py
3 用途: 第4-5问板凳龙模型(含调头)
4 """
5
6 """
7 请注意
8 本文档中所有把手角度均为 · 二元组 ·
9 第一个数 表示 所在曲线(1/2/3/4)
10 第二个数 表示 极角
11 """
12
13 import numpy as np
14 import pandas as pd
15 import matplotlib.pyplot as plt
16 import matplotlib.patches as patches
17 from math import *
18 from matplotlib.font_manager import FontProperties
19 import os
20
21 font = FontProperties(fname="/System/Library/Fonts/Supplemental/Times New Roman.ttf")
22 font2 = FontProperties(fname="/System/Library/Fonts/Supplemental/Songti.ttc")
23
24 ben_wid = 0.3 # 板凳宽度(m)
25 ben_len_head = 3.41 # 龙头板长(m)
26 ben_len = 2.20 # 龙身及龙尾板长度(m)
27 hole_dis = 0.275 # 孔离板头距离(m)
28 hole_dia = 0.055 # 孔的直径(m)
29 dra_len = 223 # 板凳个数
30
31 d = 1.7 # 螺距(m)
32 r = 4.5 # 调头空间半径(m)
33
34 theta = 2 * pi * r / d # 图中theta角
35 alpha = atan(theta) # 图中alpha角
36
37 R1 = 3 / sin(alpha) # 大圆半径
38 R2 = 3 / (2 * sin(alpha)) # 小圆半径
39
40 # 大圆圆心坐标
41 O1x = r * cos(theta) - R1 * sin(theta + alpha)
42 O1y = r * sin(theta) + R1 * cos(theta + alpha)
43
44 # 小圆圆心坐标
45 O2x = -r * cos(theta) + R2 * sin(theta + alpha)
```

```
46 02y = -r * sin(theta) - R2 * cos(theta + alpha)
47
48 # 盘入切点坐标
49 x1 = d / (2 * pi) * theta * cos(theta)
50 y1 = d / (2 * pi) * theta * sin(theta)
51
52 # 盘出切点坐标
53 x3 = -x1
54 y3 = -y1
55
56 # 两圆切点坐标
57 x2 = x1 / 3 + x3 * 2 / 3
58 y2 = y1 / 3 + y3 * 2 / 3
59
60
61 class Dragon():
62
63     def __init__(self, v0=1): # v0为龙头前把手速度(m/s)
64
65         self.d = d # 螺距(m)
66         self.v0 = v0 # 龙头前把手速度(m/s)
67
68         self.ang = None # 把手角度列表
69         self.pos = None # 把手坐标列表
70         self.vol = None # 把手速度列表
71
72         self.time = None # 当前时间
73
74     # 设定时间t(s)
75     def set_time(self, t, need_vol=False):
76
77         self.time = t # 更新当前时间
78
79         # 求解龙头前把手位置
80         theta_n = self.head_pos(t)
81         self.ang = [theta_n]
82         self.pos = [(self.arc_x(theta_n), self.arc_y(theta_n))]
83
84         # 求解龙身及龙尾前把手、龙尾后把手位置
85         for n in range(223):
86             if n != 0:
87                 theta_n = self.next_pos(theta_n)
88             else:
89                 theta_n = self.next_pos(theta_n, is_head=True)
90             self.ang.append(theta_n)
91             self.pos.append((self.arc_x(theta_n), self.arc_y(theta_n)))
92
```

```

93     # 求解各把手速度
94     if need_vol == False:
95         return
96
97     # 求解龙头前把手速度
98     if self.ang[0][0] == 1:
99         d_theta = -2 * pi * self.v0 / d / sqrt(1 + self.ang[0][1] ** 2)
100    elif self.ang[0][0] == 2:
101        d_theta = - self.v0 / R1
102    elif self.ang[0][0] == 3:
103        d_theta = self.v0 / R2
104    elif self.ang[0][0] == 4:
105        d_theta = 2 * pi * self.v0 / d / sqrt(1 + (self.ang[0][1] + pi) ** 2)
106    self.vol = [self.v0]
107    d_theta_1 = d_theta
108
109    # 求解龙身及龙尾前把手、龙尾后把手速度
110    for n in range(223):
111        l = 2.86 if n == 0 else 1.65
112        theta1 = self.ang[n][1]
113        theta2 = self.ang[n + 1][1]
114        (x1, y1) = self.pos[n]
115        (x2, y2) = self.pos[n + 1]
116
117        # 前一把手位于盘入螺线(当前把手位于盘入螺线)
118        if self.ang[n][0] == 1:
119            par1 = theta1 - theta2 * cos(theta2 - theta1) - theta1 * theta2 * sin(theta2 -
120                theta1)
120            par2 = theta2 - theta1 * cos(theta2 - theta1) + theta1 * theta2 * sin(theta2 -
121                theta1)
121            d_theta1 = -par1 / par2 * d_theta
122            self.vol.append(self.d / (2 * pi) * abs(d_theta1) * sqrt(1 + theta2 ** 2))
123
124        # 前一把手位于大圆圆弧
125        elif self.ang[n][0] == 2:
126
127            # 当前把手位于大圆圆弧
128            if self.ang[n + 1][0] == 2:
129                d_theta1 = d_theta
130                self.vol.append(self.vol[n])
131
132            # 当前把手位于盘入螺线
133            elif self.ang[n + 1][0] == 1:
134                x1d = self.vol[n] * sin(theta1)
135                y1d = -self.vol[n] * cos(theta1)
136                par1 = (x1 - d / (2 * pi) * theta2 * cos(theta2)) * x1d + (y1 - d / (2 * pi)
137                    * theta2 * sin(theta2)) * y1d

```

```

137         par2 = (x1 - d / (2 * pi) * theta2 * cos(theta2)) * (cos(theta2) - theta2 *
138             sin(theta2)) + (y1 - d / (2 * pi) * theta2 * sin(theta2)) * (sin(theta2)
139             + theta2 * cos(theta2))
140         d_theta1 = 2 * pi / d * par1 / par2
141         self.vol.append(self.d / (2 * pi) * abs(d_theta1) * sqrt(1 + theta2 ** 2))
142
143
144     # 前一把手位于小圆圆弧
145     elif self.ang[n][0] == 3:
146
147         # 当前把手位于小圆圆弧
148         if self.ang[n + 1][0] == 3:
149             d_theta1 = d_theta
150             self.vol.append(self.vol[n])
151
152
153     # 当前把手位于大圆圆弧
154     elif self.ang[n + 1][0] == 2:
155         x1d = self.vol[n] * sin(theta1)
156         y1d = -self.vol[n] * cos(theta1)
157         par1 = (x1 - O1x - R1 * cos(theta2)) * x1d + (y1 - O1y - R1 * sin(theta2)) *
158             y1d
159         par2 = (x1 - O1x - R1 * cos(theta2)) * sin(theta2) - (y1 - O1y - R1 *
160             sin(theta2)) * cos(theta2)
161         d_theta1 = -par1 / (R1 * par2)
162         self.vol.append(abs(d_theta1) * R1)
163
164
165     # 前一把手位于盘出螺线
166     elif self.ang[n][0] == 4:
167
168         # 当前把手位于盘出螺线
169         if self.ang[n + 1][0] == 4:
170             theta1, theta2 = theta1 + pi, theta2 + pi
171             par1 = theta1 - theta2 * cos(theta2 - theta1) - theta1 * theta2 * sin(theta2 -
172                 theta1)
173             par2 = theta2 - theta1 * cos(theta2 - theta1) + theta1 * theta2 * sin(theta2 -
174                 theta1)
175             d_theta1 = -par1 / par2 * d_theta
176             self.vol.append(self.d / (2 * pi) * abs(d_theta1) * sqrt(1 + theta2 ** 2))
177             theta1, theta2 = theta1 - pi, theta2 - pi
178
179
180     # 当前把手位于小圆圆弧
181     elif self.ang[n + 1][0] == 3:
182         beta = theta1 + atan(theta1 + pi)
183         x1d = self.vol[n] * cos(beta)
184         y1d = self.vol[n] * sin(beta)
185         par1 = (x1 - O2x + R2 * cos(theta2)) * x1d + (y1 - O2y + R2 * sin(theta2)) *
186             y1d
187         par2 = (x1 - O2x + R2 * cos(theta2)) * sin(theta2) - (y1 - O2y + R2 *

```

```

    sin(theta2)) * cos(theta2)
177     d_theta1 = par1 / (R2 * par2)
178     self.vol.append(abs(d_theta1) * R2)
179
180     d_theta = d_theta1
181
182 # 打印板凳龙状态(无板凳)
183 def print_status(self):
184
185     # 计算盘入盘出螺线
186     ang = np.linspace(theta, 10 * 2 * pi, 1000)
187     xx1 = d / (2 * pi) * ang * np.cos(ang)
188     yy1 = d / (2 * pi) * ang * np.sin(ang)
189     xx2 = -xx1
190     yy2 = -yy1
191
192     plt.figure(figsize=(8, 8))
193
194     # 绘制盘入盘出螺线
195     plt.plot(xx1, yy1, color='red', linewidth=2, label='盘入螺线', alpha=0.5)
196     plt.plot(xx2, yy2, color='blue', linewidth=2, label='盘出螺线', alpha=0.5)
197     plt.plot([], [], color='black', linewidth=2, label='调头路径', alpha=0.5)
198
199     # 绘制调头空间
200     circle = plt.Circle((0, 0), 4.5, color='yellow', fill=True, alpha=0.4)
201     plt.gca().add_artist(circle)
202
203     # 绘制两圆圆心
204     # plt.scatter(O1x, O1y, color='black', marker='.', alpha=0.5)
205     # plt.scatter(O2x, O2y, color='black', marker='.', alpha=0.5)
206
207     # 绘制调头路径
208     arc1 = patches.Arc((O1x, O1y), width=R1 * 2, height=R1 * 2, theta1=np.rad2deg(theta -
209         alpha - pi / 2), theta2=np.rad2deg(theta + alpha - pi / 2), color='black',
210         linewidth=2, alpha=0.5)
211     plt.gca().add_patch(arc1)
212
213     arc2 = patches.Arc((O2x, O2y), width=R2 * 2, height=R2 * 2, theta1=np.rad2deg(theta -
214         alpha + pi / 2), theta2=np.rad2deg(theta + alpha + pi / 2), color='black',
215         linewidth=2, alpha=0.5)
216     plt.gca().add_patch(arc2)
217
218     x_lst = [ben_pos[0] for ben_pos in self.pos]
219     y_lst = [ben_pos[1] for ben_pos in self.pos]
220
221     plt.scatter(x_lst, y_lst, color='black', marker='.')

```

```
219     plt.axis('equal')
220     plt.xlabel('X', fontproperties=font, size=12)
221     plt.ylabel('Y', fontproperties=font, size=12)
222     plt.xticks(fontproperties=font, size=12)
223     plt.yticks(fontproperties=font, size=12)
224
225     plt.grid(True, alpha=0.3)
226     plt.show()
227
228 # 打印板凳龙图像(有板凳)
229 def print_img(self, save_pth=None, magn=None, show=True):
230
231     # save_pth 保存路径, 默认不保存
232     # magn 是否放大中心, 默认不放大
233     # show 是否展示, 默认展示
234
235     # 初始化图像
236     plt.figure(figsize=(8, 8))
237
238     # 计算盘入盘出螺线
239     ang = np.linspace(theta, 10 * 2 * pi, 1000)
240     xx1 = d / (2 * pi) * ang * np.cos(ang)
241     yy1 = d / (2 * pi) * ang * np.sin(ang)
242     xx2 = -xx1
243     yy2 = -yy1
244
245     # 绘制盘入盘出螺线
246     plt.plot(xx1, yy1, color='red', linewidth=2, label='盘入螺线', alpha=0.5)
247     plt.plot(xx2, yy2, color='blue', linewidth=2, label='盘出螺线', alpha=0.5)
248     plt.plot([], [], color='black', linewidth=2, label='调头路径', alpha=0.5)
249
250     # 绘制调头空间
251     circle = plt.Circle((0, 0), 4.5, color='yellow', fill=True, alpha=0.4)
252     plt.gca().add_artist(circle)
253
254     # 绘制两圆圆心
255     # plt.scatter(O1x, O1y, color='black', marker='.', alpha=0.5)
256     # plt.scatter(O2x, O2y, color='black', marker='.', alpha=0.5)
257
258     # 绘制调头路径
259     arc1 = patches.Arc((O1x, O1y), width=R1 * 2, height=R1 * 2, theta1=np.rad2deg(theta -
260                         alpha - pi / 2), theta2=np.rad2deg(theta + alpha - pi / 2), color='black',
261                         linewidth=2, alpha=0.5)
262     plt.gca().add_patch(arc1)
263
264     arc2 = patches.Arc((O2x, O2y), width=R2 * 2, height=R2 * 2, theta1=np.rad2deg(theta -
265                         alpha + pi / 2), theta2=np.rad2deg(theta + alpha + pi / 2), color='black',
```

```
    linewidth=2, alpha=0.5)
263 plt.gca().add_patch(arc2)
264
265 # 绘制把手
266 x_lst = [ben_pos[0] for ben_pos in self.pos]
267 y_lst = [ben_pos[1] for ben_pos in self.pos]
268
269 plt.scatter(x_lst, y_lst, color='black', marker='.')
270
271 # 绘制板凳
272 a = hole_dis
273 b = ben_wid / 2
274
275 for i in range(223):
276
277     li = 2.86 if i == 0 else 1.65
278
279     delta_xi = self.pos[i + 1][0] - self.pos[i][0]
280     delta_yi = self.pos[i + 1][1] - self.pos[i][1]
281
282     s = -delta_yi / li # sin(alpha)
283     c = -delta_xi / li # cos(alpha)
284
285     x1 = self.pos[i][0] + a * c - b * s
286     y1 = self.pos[i][1] + a * s + b * c
287     x2 = self.pos[i + 1][0] - a * c - b * s
288     y2 = self.pos[i + 1][1] - a * s + b * c
289     x3 = self.pos[i + 1][0] - a * c + b * s
290     y3 = self.pos[i + 1][1] - a * s - b * c
291     x4 = self.pos[i][0] + a * c + b * s
292     y4 = self.pos[i][1] + a * s - b * c
293
294     rect = [(x1, y1), (x2, y2), (x3, y3), (x4, y4)]
295
296     x, y = zip(*rect)
297     plt.plot(x + (x[0],), y + (y[0],), 'b-')
298
299 # 设置图形属性
300 plt.xlabel('X', fontproperties=font, size=12)
301 plt.ylabel('Y', fontproperties=font, size=12)
302
303 plt.xticks(fontproperties=font, size=12)
304 plt.yticks(fontproperties=font, size=12)
305
306 # 放大区域
307 if magn is not None:
308     plt.xlim(-magn, magn)
```

```

309     plt.ylim(-magn, magn)
310
311     # 显示图形
312     # plt.axis('equal') # 设置坐标轴等比例
313     plt.grid(True, alpha=0.3)
314     if save_pth:
315         plt.savefig(save_pth, dpi=300)
316     if show:
317         plt.show()
318     plt.close()
319
320     # 保存板凳龙图像
321     def save_imgs(self, start_t, end_t, save_pth="photos2", magn=8):
322         for time in np.arange(start_t, end_t + 1, 1):
323             print("time = ", time)
324             self.set_time(time)
325             self.print_img(os.path.join(save_pth, f"{time}.png"), magn=magn, show=False)
326
327     # (辅助函数) 求解龙头前把手角度
328     def head_pos(self, t):
329
330         # 位于盘入螺线
331         if t <= 0:
332             par1 = theta * (1 + theta**2)**0.5
333             par2 = log(theta + (1 + theta**2)**0.5)
334             par3 = 4 * pi * self.v0 * t / self.d
335
336             def fn(x):
337                 return par1 + par2 - par3 - x * (1 + x**2)**0.5 - np.log(x + (1 + x**2)**0.5)
338
339             return 1, binary_search(fn, theta, theta * 2, incre=False)
340
341         # 位于大圆圆弧
342         elif t < 6 * alpha / (sin(alpha) * self.v0):
343             theta_n = theta + alpha - pi / 2 - self.v0 * t / R1
344             return 2, theta_n
345
346         # 位于小圆圆弧
347         elif t < 9 * alpha / (sin(alpha) * self.v0):
348             theta_n = theta - alpha - pi / 2 + self.v0 * (t - 2 * alpha * R1 / self.v0) / R2
349             return 3, theta_n
350
351         # 位于盘出螺线
352     else:
353         par1 = theta * (1 + theta**2)**0.5
354         par2 = log(theta + (1 + theta**2)**0.5)
355         par3 = 4 * pi * self.v0 * (t - 2 * alpha * (R1 + R2) / self.v0) / self.d

```

```

356
357     def fn(x):
358         return x * (1 + x**2)**0.5 + np.log(x + (1 + x**2)**0.5) - par1 - par2 - par3
359
360     return 4, binary_search(fn, theta, theta * 20, incre=True) - pi
361
362 # (辅助函数) 龙头前把手路径图
363 def head_img(self):
364
365     # 计算盘入盘出螺线
366     ang = np.linspace(theta, 6 * 2 * pi, 1000)
367     x1 = d / (2 * pi) * ang * np.cos(ang)
368     y1 = d / (2 * pi) * ang * np.sin(ang)
369     x2 = -x1
370     y2 = -y1
371
372     plt.figure(figsize=(8, 8))
373
374     # 绘制盘入盘出螺线
375     plt.plot(x1, y1, color='red', linewidth=2, label='盘入螺线', alpha=0.5)
376     plt.plot(x2, y2, color='blue', linewidth=2, label='盘出螺线', alpha=0.5)
377     plt.plot([], [], color='black', linewidth=2, label='调头路径', alpha=0.5)
378
379     # 绘制调头空间
380     circle = plt.Circle((0, 0), 4.5, color='yellow', fill=True, alpha=0.4)
381     plt.gca().add_artist(circle)
382
383     # 绘制两圆圆心
384     plt.scatter(01x, 01y, color='black', marker='.', alpha=0.5)
385     plt.scatter(02x, 02y, color='black', marker='.', alpha=0.5)
386
387     # 绘制调头路径
388     arc1 = patches.Arc((01x, 01y), width=R1 * 2, height=R1 * 2, theta1=np.rad2deg(theta -
389         alpha - pi / 2), theta2=np.rad2deg(theta + alpha - pi / 2), color='black',
390         linewidth=2, alpha=0.5)
391     plt.gca().add_patch(arc1)
392
393     arc2 = patches.Arc((02x, 02y), width=R2 * 2, height=R2 * 2, theta1=np.rad2deg(theta -
394         alpha + pi / 2), theta2=np.rad2deg(theta + alpha + pi / 2), color='black',
395         linewidth=2, alpha=0.5)
396     plt.gca().add_patch(arc2)
397
398     x = []
399     y = []
400
401     for t in np.arange(-100, 101):
402         ang = self.head_pos(t)

```

```

399     x.append(self.arc_x(ang))
400     y.append(self.arc_y(ang))
401
402     plt.scatter(x, y, marker='*', color='black')
403
404     plt.axis('equal')
405     plt.xlabel('X', fontproperties=font, size=12)
406     plt.ylabel('Y', fontproperties=font, size=12)
407     plt.xticks(fontproperties=font, size=12)
408     plt.yticks(fontproperties=font, size=12)
409
410     plt.legend(prop=font2)
411     plt.grid(True, alpha=0.2)
412     # plt.savefig("Figure_8.png")
413     plt.show()
414
415     # (辅助函数) 求解龙身及龙尾把手角度
416     def next_pos(self, theta_n, is_head=False): # theta_n为前一把手角度
417
418         l = 2.86 if is_head else 1.65 # 两孔距离(m)
419
420         # 前一把手位于盘入螺线 (当前把手位于盘入螺线)
421         if theta_n[0] == 1:
422             theta_n = theta_n[1]
423             pari = (2 * pi * l / self.d)**2
424
425             def fn(x):
426                 return theta_n**2 + x**2 - 2 * theta_n * x * cos(x - theta_n) - pari
427
428             return 1, binary_search(fn, theta_n, theta_n + pi, incre=True)
429
430         # 前一把手位于大圆圆弧
431         elif theta_n[0] == 2:
432             xn = self.arc_x(theta_n)
433             yn = self.arc_y(theta_n)
434
435             # 当前把手位于盘入螺线
436             if dist((xn, yn), (x1, y1)) <= l:
437
438                 def fn(x):
439                     pari = d / (2 * pi) * x * np.cos(x)
440                     par2 = d / (2 * pi) * x * np.sin(x)
441                     return (xn - pari)**2 + (yn - par2)**2 - l**2
442
443                 return 1, binary_search(fn, theta_n[1], theta_n[1] + pi, incre=True)
444
445         # 当前把手位于大圆圆弧

```

```

446     else:
447         delta_theta = 2 * asin(1 / (2 * R1))
448         return 2, theta_n[1] + delta_theta
449
450     # 前一把手位于小圆圆弧
451     elif theta_n[0] == 3:
452         xn = self.arc_x(theta_n)
453         yn = self.arc_y(theta_n)
454
455     # 当前把手位于大圆圆弧
456     if dist((xn, yn), (x2, y2)) <= 1:
457
458         def fn(x):
459             par1 = xn - O1x - R1 * np.cos(x)
460             par2 = yn - O1y - R1 * np.sin(x)
461             return par1**2 + par2**2 - l**2
462
463         return 2, binary_search(fn, theta - alpha - pi / 2, theta + alpha - pi / 2,
464                                incre=True)
465
466     # 当前把手位于小圆圆弧
467     else:
468         delta_theta = 2 * asin(1 / (2 * R2))
469         return 3, theta_n[1] - delta_theta
470
471     # 前一把手位于盘出螺线
472     elif theta_n[0] == 4:
473         xn = self.arc_x(theta_n)
474         yn = self.arc_y(theta_n)
475
476     # 当前把手位于小圆圆弧
477     if dist((xn, yn), (x3, y3)) <= 1 and theta_n[1] <= theta:
478
479         def fn(x):
480             par1 = xn - O2x + R2 * np.cos(x)
481             par2 = yn - O2y + R2 * np.sin(x)
482             return par1**2 + par2**2 - l**2
483
484         return 3, binary_search(fn, theta - alpha - pi / 2, theta + alpha - pi / 2,
485                                incre=False)
486
487     # 当前把手位于盘出螺线
488     else:
489         theta_n = theta_n[1]
490         par1 = (2 * pi * l / self.d)**2
491
492         def fn(x):

```

```
491         return (theta_n + pi)**2 + (x + pi)**2 - 2 * (theta_n + pi) * (x + pi) *
492             cos(x - theta_n) - par1
493
494     return 4, binary_search(fn, theta_n - pi, theta_n, incre=False)
495
496     # (辅助函数) 角度转换为x坐标
497     def arc_x(self, arc):
498
499         # 位于盘入螺线
500         if arc[0] == 1:
501             return self.d / (2 * pi) * arc[1] * cos(arc[1])
502
503         # 位于大圆圆弧
504         elif arc[0] == 2:
505             return O1x + R1 * cos(arc[1])
506
507         # 位于小圆圆弧
508         elif arc[0] == 3:
509             return O2x - R2 * cos(arc[1])
510
511         # 位于盘出螺线
512         elif arc[0] == 4:
513             return self.d / (2 * pi) * (arc[1] + pi) * cos(arc[1])
514
515     # (辅助函数) 角度转换为y坐标
516     def arc_y(self, arc):
517
518         # 位于盘入螺线
519         if arc[0] == 1:
520             return self.d / (2 * pi) * arc[1] * sin(arc[1])
521
522         # 位于大圆圆弧
523         elif arc[0] == 2:
524             return O1y + R1 * sin(arc[1])
525
526         # 位于小圆圆弧
527         elif arc[0] == 3:
528             return O2y - R2 * sin(arc[1])
529
530         # 位于盘出螺线
531         elif arc[0] == 4:
532             return self.d / (2 * pi) * (arc[1] + pi) * sin(arc[1])
533
534     # 二分搜索函数
535     def binary_search(fn, lb, ub, incre, eps=1e-8):
```

```

537     cur = (lb + ub) / 2
538
539     while ub - lb > eps:
540
541         cur_res = fn(cur)
542
543         # 若函数递增
544         if incre:
545             if cur_res < 0:
546                 lb = cur
547             elif cur_res > 0:
548                 ub = cur
549
550         # 若函数递减
551         else:
552             if cur_res > 0:
553                 lb = cur
554             elif cur_res < 0:
555                 ub = cur
556
557         cur = (lb + ub) / 2
558
559     return cur
560
561 # 求两点间距离
562 def dist(p1, p2):
563     return ((p1[0] - p2[0])**2 + (p1[1] - p2[1])**2)**0.5
564
565
566 # 临时测试函数
567 def test():
568     dragon = Dragon()
569     dragon.set_time(300)
570     dragon.print_img(magn=8)
571
572
573 if __name__ == '__main__':
574     test()

```

```

1 """
2 文件名: problem1_1.py
3 用途: 求解0~300s各把手位置
4 """
5 from dragon import *
6
7 col_0 = ['龙头x (z)', '龙头y (z)']

```

```

8 for i in range(1, 222):
9     col_0.append(f'第{i}节龙身x (m)')
10    col_0.append(f'第{i}节龙身y (m)')
11 col_0.extend(['龙尾x (m)', '龙尾y (m)', '龙尾 (后) x (m)', '龙尾 (后) y (m)'])
12
13 data = {'': col_0}
14
15 dragon = Dragon()
16
17 for time in range(301):
18
19     if time % 10 == 0:
20         print(f"已求解{time}s")
21
22     dragon.set_time(time)
23
24     xy_lst = []
25     for x, y in dragon.pos:
26         xy_lst.append(x)
27         xy_lst.append(y)
28
29     data[f'{time} s'] = xy_lst
30
31 df = pd.DataFrame(data)
32 df.to_csv('result1_pos.csv', index=False)

```

```

1 """
2 文件名: problem1_2.py
3 用途: 求解0-300s各把手速度
4 """
5 from dragon import *
6
7 col_0 = ['龙头 (m/s)']
8 for i in range(1, 222):
9     col_0.append(f'第{i}节龙身 (m/s)')
10    col_0.extend(['龙尾 (m/s)', '龙尾 (后) (m/s)'])
11
12 data = {'': col_0}
13
14 dragon = Dragon()
15
16 for time in range(301):
17
18     if time % 10 == 0:
19         print(f"已求解{time}s")
20

```

```
21     dragon.set_time(time, need_vol=True)
22
23     data[f'{time} s'] = dragon.vol
24
25 df = pd.DataFrame(data)
26 df.to_csv('result1_vol.csv', index=False)
```

```
1 """
2 文件名: problem2_1.py
3 用途: 变步长求解碰撞时刻
4 """
5 from dragon import *
6
7 dragon = Dragon()
8
9 def check_col(start, end, step):
10     for time in np.arange(start, end, step):
11         dragon.set_time(time)
12         coll = dragon.judge_col()
13         print("time = ", time, " if_collision = ", coll[0], " min_dis = ", coll[1])
14
15 check_col(412, 413, 0.1)
```

```
1 """
2 文件名: problem2_2.py
3 用途: 求解碰撞时刻各把手的位置和速度
4 """
5 from dragon import *
6
7 col_time = 412.47383777 # 碰撞时刻(s)
8
9 dragon = Dragon()
10 dragon.set_time(col_time, need_vol=True)
11
12 col_0 = ['龙头']
13 for i in range(1, 222):
14     col_0.append(f'第{i}节龙身')
15 col_0.extend(['龙尾', '龙尾(后)'])
16
17 data = {'': col_0}
18
19 data['横坐标x (m)'] = [ben_pos[0] for ben_pos in dragon.pos]
20 data['纵坐标y (m)'] = [ben_pos[1] for ben_pos in dragon.pos]
21 data['速度 (m/s)'] = dragon.vol
22
23 df = pd.DataFrame(data)
```

```
24 df.to_csv('result2_all.csv', index=False)
```

```
1 """
2 文件名: problem3.py
3 用途: 求解龙头前把手能进入调头空间的最小螺距
4 """
5 from dragon import *
6 from sko.PSO import PSO
7
8
9 def min_pitch(start, end, step, fig1=False, fig2=False):
10
11     for d in np.arange(start, end, step):
12         dragon = Dragon(d=d)
13         time = dragon.arr_time()
14         print(f'当前螺距为{d}m')
15
16         pso = PSO(func=dragon.min_dis, n_dim=1, pop=40, max_iter=50, lb=0, ub=time, w=0.8,
17                    c1=0.5, c2=0.5)
18         pso.run()
19         dist = pso.gbest_y
20         print('best_x is ', pso.gbest_x, 'best_y is', pso.gbest_y)
21
22     # 作图1
23     if fig1:
24         xx = np.linspace(0, time, 1000)
25         yy = np.array([dragon.min_dis(x) for x in xx])
26         plt.figure()
27         plt.plot(xx, yy)
28         plt.plot(pso.gbest_x, pso.gbest_y, '*r')
29         plt.xlabel('时间t(s)', fontproperties=font2, size=12)
30         plt.ylabel('A点和B点距其他板凳中心线的最短距离', fontproperties=font2, size=12)
31         plt.xticks(fontproperties=font, size=12)
32         plt.yticks(fontproperties=font, size=12)
33         plt.savefig("Figure_4.png", dpi=300)
34         plt.show()
35
36     # 作图2
37     if fig2:
38         plt.figure(figsize=(7, 5))
39         plt.plot(pso.gbest_y_hist)
40         plt.xlabel('粒子群迭代次数', fontproperties=font2, size=12)
41         plt.ylabel('全局最优解的函数值', fontproperties=font2, size=12)
42         plt.xticks(fontproperties=font, size=12)
43         plt.yticks(fontproperties=font, size=12)
44         plt.savefig("Figure_6.png", dpi=300)
```

```
44     plt.show()
45
46     if dist > 0.15:
47         break
48
49
50 if __name__ == '__main__':
51     min_pitch(0.45, 0.46, 0.001)
```

```
1 """
2 文件名: problem4_1
3 用途: 求解-100-100s各把手的位置
4 """
5 from dragon2 import *
6
7 col_0 = ['龙头x (m)', '龙头y (m)']
8 for i in range(1, 222):
9     col_0.append(f'第{i}节龙身x (m)')
10    col_0.append(f'第{i}节龙身y (m)')
11 col_0.extend(['龙尾x (m)', '龙尾y (m)', '龙尾(后) x (m)', '龙尾(后) y (m)'])
12
13 data = {'': col_0}
14
15 dragon = Dragon()
16 for time in np.arange(-100, 101, 1):
17
18     if time % 10 == 0:
19         print(f"已求解到{time}s")
20
21     dragon.set_time(time)
22     xy_lst = []
23     for x, y in dragon.pos:
24         xy_lst.append(x)
25         xy_lst.append(y)
26
27     data[f"{time} s"] = xy_lst
28
29 df = pd.DataFrame(data)
30 df.to_csv('result4_pos.csv', index=False)
```

```
1 """
2 文件名: problem4_2.py
3 用途: 求解-100-100s各把手的速度
4 """
5 from dragon2 import *
```

```

7 col_0 = ['龙头 (m/s)']
8 for i in range(1, 222):
9     col_0.append(f'第{i}节龙身 (m/s)')
10 col_0.extend(['龙尾 (m/s)', '龙尾 (后) (m/s)'])
11
12 data = {'': col_0}
13
14 dragon = Dragon()
15 for time in np.arange(-100, 101, 1):
16
17     if time % 10 == 0:
18         print(f"已求解到{time}s")
19
20     dragon.set_time(time, need_vol=True)
21
22     data[f"{time} s"] = dragon.vol
23
24 df = pd.DataFrame(data)
25 df.to_csv('result4_vol.csv', index=False)

```

```

1 """
2 文件名: problem5.py
3 用途: 求解全局把手最大速度
4 """
5 from dragon2 import *
6
7 dragon = Dragon()
8
9
10 # 求某时刻的最大速度
11 def max_vt(time):
12     dragon.set_time(time, need_vol=True)
13     return max(dragon.vol)
14
15
16 # 求某时间段内的最大速度
17 def max_v(start, end, step, save_pth=None):
18
19     glo_max_v = 0 # 全局最大速度
20     max_time = 0 # 最大速度对应时间
21
22     for time in np.arange(start, end, step):
23         dragon.set_time(time, need_vol=True)
24         cur_max_v = max(dragon.vol)
25
26         if cur_max_v > glo_max_v:

```

```

27     glo_max_v = cur_max_v
28     max_time = time
29
30     print("time = ", time, " max_v = ", cur_max_v)
31
32 print(glo_max_v, max_time)
33
34 plt.figure(figsize=(20, 7))
35
36 xx = np.arange(start, end, step)
37 yy = [max_vt(x) for x in xx]
38 plt.plot(xx, yy, color="#00C5D7", linewidth=2)
39
40 plt.xlabel('时间t(s)', fontproperties=font2, size=12)
41 plt.ylabel('把手最大速度(m/s)', fontproperties=font2, size=12)
42 plt.xticks(fontproperties=font, size=12)
43 plt.yticks(fontproperties=font, size=12)
44
45 plt.grid(True, alpha=0.3)
46 if save_pth:
47     plt.savefig(save_pth, dpi=300)
48 plt.show()
49
50
51 # 三分搜索算法(求极大值)
52 def ternary_search(fn, lb, ub, eps=1e-8):
53
54     while ub - lb >= eps:
55
56         margin = (ub - lb) / 3
57
58         x1 = lb + margin
59         x2 = ub - margin
60
61         if fn(x1) <= fn(x2):
62             lb = x1
63         else:
64             ub = x2
65
66     return (lb + ub) / 2
67
68
69 # 三分搜索法求最大速度
70 def main(save_pth=None, show=True):
71
72     t = ternary_search(max_vt, 14, 15)
73     f_t = max_vt(t)

```

```
74
75     print(t, f_t)
76
77     if show:
78         plt.figure()
79
80         xx = np.arange(14, 15, 0.01)
81         yy = [max_vt(x) for x in xx]
82         plt.plot(xx, yy, color="#00A7E3", linewidth=2)
83
84         plt.plot(t, f_t, marker='*', color='red')
85
86         plt.xlabel('时间t(s)', fontproperties=font2, size=12)
87         plt.ylabel('把手最大速度(m/s)', fontproperties=font2, size=12)
88         plt.xticks(fontproperties=font, size=12)
89         plt.yticks(fontproperties=font, size=12)
90
91         plt.grid(True, alpha=0.3)
92         if save_pth is not None:
93             plt.savefig(save_pth, dpi=300)
94         plt.show()
95
96
97 if __name__ == '__main__':
98     main(save_pth="Figure_10.png")
```