第6章　函数

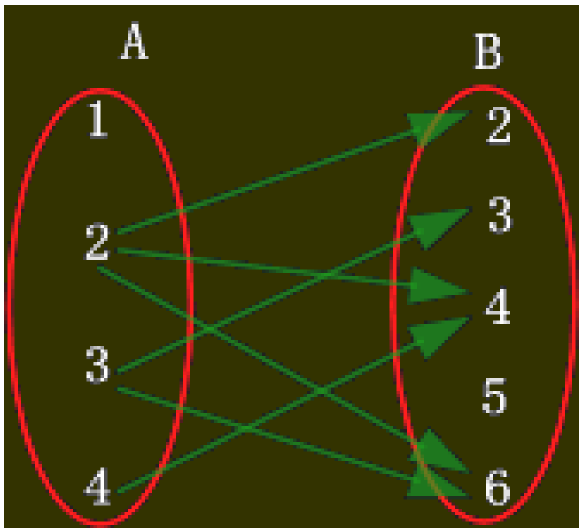
主要内容

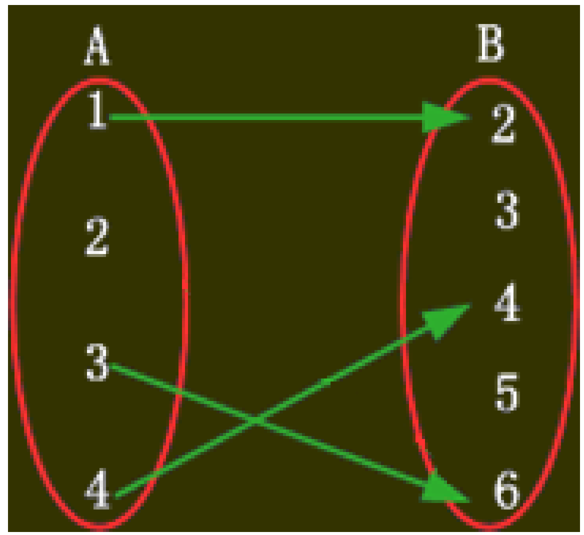
- 6.1 函数的概念
- 6.2 复合函数与逆函数
- 6.3 基数的概念
- 6.4 基数的比较

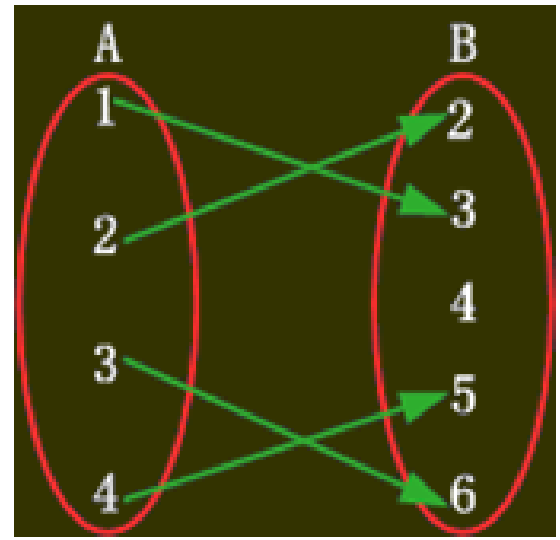
6.1 函数的概念

- **定义6.1.1** 函数
  - 一种特殊的关系
  - 亦称映射或变换
  - 设A和B是非空集合，f是一个从A到B的关系，**如果对于每一个$a \in A$，均存在唯一的$b \in B$，使得$<a,b> \in f$，**则称关系f是由A到B的一个函数。记作$f : A \rightarrow B$。特殊地，当$A = B$时，称f是A上的函数
  - $<x,y> \in f$通常记作$f(x)=y$

例：判断以下关系是否为函数







例

- **例6.1.3** 设E是全集， $A \subseteq E$， 那么A的特征函数X_A是E到$\{0,1\}$的函数：

  $\forall a \in E$，

  $$\chi_A(a) = \begin{cases} 0 & a \notin A \\ 1 & a \in A \end{cases}$$

- 例
  - 设$E=\{a, b, c, d\}$，$A=\{b, d\}$
  - $X_A:E \to \{0, 1\}$

    $X_A=\{<a,0>,<b,1>,<c,0>,<d,1>\}$

- 设A和B是全集E的任意两个子集, 对所有$x\in E$, 下列关系式成立

(a) $\forall x(X_A(x)=0)\Leftrightarrow A=\Phi$

(b) $\forall x(X_A(x)=1)\Leftrightarrow A=E$

(c) $\forall x(X_A(x)\leq X_B(x))\Leftrightarrow A\subseteq B$

(d) $\forall x(X_A(x)=X_B(x))\Leftrightarrow A=B$

(e) $X_{\sim A}(x)=1-X_A(x)$

(f) $X_{A\cap B}(x)=X_A(x)X_B(x)$

(g) $X_{A\cup B}(x)=X_A(x)+X_B(x)-X_{A\cap B}(x)$

(h) $X_{A-B}(x)=X_{A\cap\sim B}(x)=X_A(x)-X_{A\cap B}(x)$

函数的定义域和值域

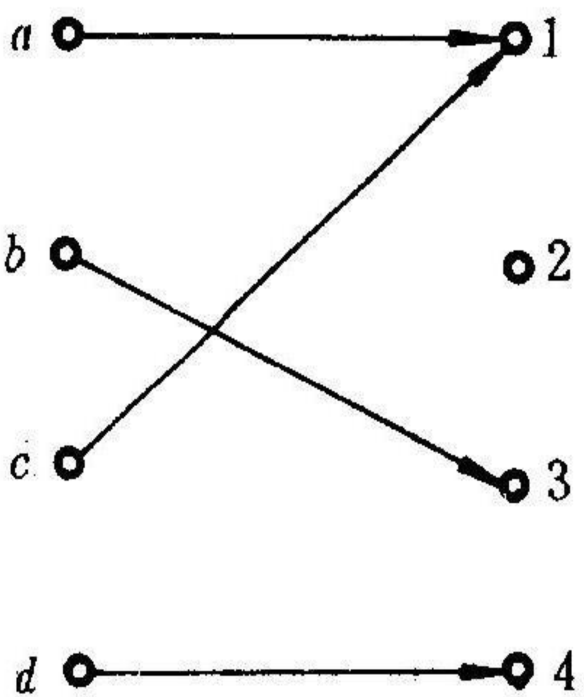
- 设$f: X \to Y$
  - X——f的前域(定义域$dom\ f$)
  - Y —— f的陪域(值域$ran\ f \subseteq Y$)
  - $f(x)=y$
    - x——函数的自变元
    - y——自变元x的函数值，也称为x的像
  - $dom\ f = X$
  - $ran\ f = f(X)$
  - 如果$f(x)=y_1$和$f(x)=y_2$,那么$y_1=y_2$

象(image)与原象(preimage)

- 设 $f: X \to Y$
  - $X' \subseteq X$
  - $f(X') = \{y \mid \exists x(x \in X' \wedge f(x) = y)\} \subseteq Y$
    - 称 $f(X')$ 为 X' 的象
    - 称 X' 为 $f(X')$ 的原象
- 例 $f: N \to N,\ f(x) = 2x.$
  - $A' = N_{偶} = \{0,2,4,6,\ldots\} = \{2k \mid k \in N\}$,
  - $f(A') = \{0,4,8,12,\ldots\} = \{4k \mid k \in N\}$
  - $B' = \{2+4k \mid k \in \mathrm{N}\} = \{2,6,10,14,\ldots\}$,
  - B' 的原象 $= \{1+2\mathrm{k} \mid \mathrm{k} \in \mathrm{N}\} = \{1,3,5,7,\ldots\} = N_{奇}$

例

假定f: $\{a,b,c,d\} \rightarrow \{1,2,3,4\}$



$f(\{a\})=\{1\}$;

$f(\{a,b\})=\{1,3\}$;

$f(\{a,b,c\})=\{1,3\}$;

$ran f=f(\{a,b,c,d\})=\{1,3,4\}$;

定义6.1.2

- 设$f:X\to Y, g:W\to Z$,如果$X=W, Y=Z$,且对每一$x\in X$有$f(x)=g(x)$则称$f=g$.
- 函数相等的定义和关系相等的定义一致
- 必须有相同的前域与陪域和相等的序偶集合
- 例
  - $f:I\to I,\ f(x)=x^2$
  - $g:\{1,2,3\}\to I,\ g(x)=x^2$
  - 是两个不同的函数

- 通常用B^A表示从集合A到集合B的所有函数的集合，读作B上A

$$B^A = \{f \mid f: A \to B\}$$

  - 设$|A|=m$，$|B|=n$，共有多少个A到B的函数？

$$|B^A| = n^m$$

  - 例：设$A=\{a,b,c\}$，$B=\{0,1\}$。则共有 8 个A到B的函数(它们分别是A的 8 个子集的特征函数)，它们是

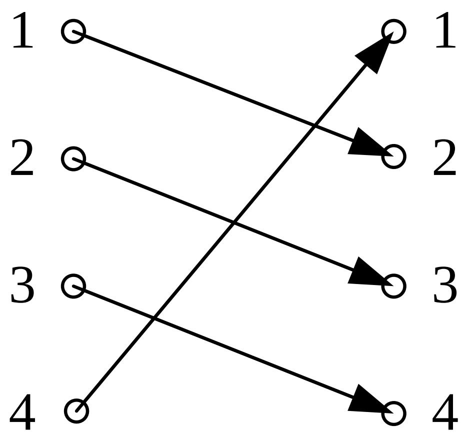
$f_1=\{<a,0>,<b,0>,<c,0>\}$　　$f_2=\{<a,0>,<b,0>,<c,1>\}$

$f_3=\{<a,0>,<b,1>,<c,0>\}$　　$f_4=\{<a,0>,<b,1>,<c,1>\}$

$f_5=\{<a,1>,<b,0>,<c,0>\}$　　$f_6=\{<a,1>,<b,0>,<c,1>\}$

$f_7=\{<a,1>,<b,1>,<c,0>\}$　　$f_8=\{<a,1>,<b,1>,<c,1>\}$

- 函数是特殊的关系，故也可用关系图或关系矩阵来表示函数
  - 例：集合$A=\{1,2,3,4\}$上的函数$f=\{<1,2>,<2,3>,<3,4>,<4,1>\}$



$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

特殊函数类

- 满射、入射和双射
- **定义6.1.3** 设f 是从X到Y的函数
  (a) 如果$x \neq x'$蕴含着$f(x) \neq f(x')$ (即$f(x)=f(x')$, 那么$x=x'$), 那么f 是入射 (*injection*, 单射，一对一的，1-1)
  (b) 如果$f(X)=Y$, 那么f 是满射 (*surjection*, 映上的, *onto*)
  (c) 如果f 既是满射又是入射, 那么f 是双射 (*bijection*, 1-1, *onto*)
  - 双射常称作一一对应，又称集合同构(*set isomorphism*)

- **例6.1.9** 设A和B是两个集合，若存在$b\in B$使得对任意$a\in A$皆有$f(a)=b$，则称f是常函数
  - 一般说来，常函数不是入射，也不是满射(除非B是一个一元集合)。
- **例6.1.10** 设R是一集合X上的等价关系, 函数

$$g:X\to X/R,\ g(x)=[x]_R$$

叫做从X到商集X/R的规范映射.

  - 例 设$X=\{a, b, c, d\}$, $Y=\{0, 1, 2, 3, 4\}$,
    - $f: X\to Y$,
      $f(a)=1, f(b)=0, f(c)=1, f(d)=3$
    - f诱导的X上的等价关系R有等价类
      $\{a, c\}$, $\{b\}$, $\{d\}$
    - 从X到X/R的规范映射
      $g: \{a, b, c, d\}\to\{\{a, c\}, \{b\}, \{d\}\}$
      $g(a)=\{a, c\}$, $g(b)=\{b\}$
      $g(c)=\{a, c\}$, $g(d)=\{d\}$

- **例6.1.11** 设E是全集，则

  $$\forall A \in 2^E, f(A) = X_A$$

  是2^E到$\{0,1\}^E$的双射

- **定理6.1.1** 若f是A到B的函数，其中A和B都是非空有限集，且$\# A = \# B$，那么：f是一个入射 *iff* f是一个满射。

  证明 （1）必要性

  若f是一个入射，则$\# A = \# f(A)$，故$\# f(A) = \# B$，而$f(A)$ B且B是有限集，故$f(A) = B$，因此，f是一个满射。

  （2）充分性

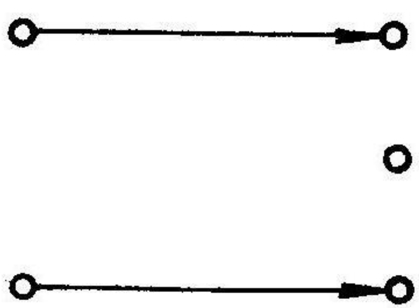
  若f是一个满射，则$f(A) = B$，于是$\# A = \# B = \# f(A)$，因为A是有限集，故f是一个入射。

  - 定理的结论只在有限集的情况下才有效

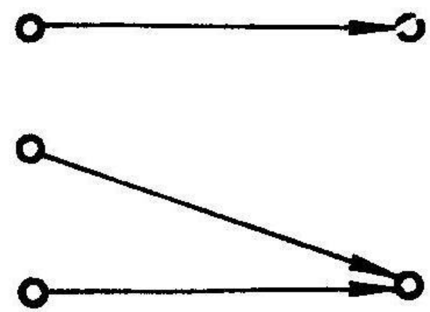
思考题

- 设f是从A到B的函数，$|A|=m$，$|B|=n$
  - 一共有多少个从A到B的入射
  - 一共有多少个从A到B的满射
  - 一共有多少个从A到B的双射
- 答案
  - $m \le n$，P_n^m
  - $m \ge n$，$n!S(m,n)$
  - $m = n$，$n!$

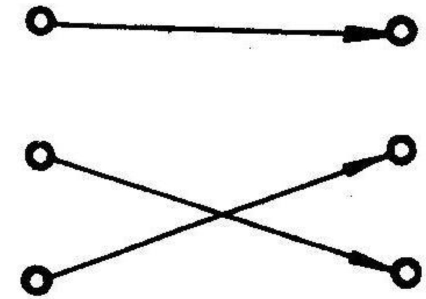
例



(a)



(b)



(c)

A到B存在入射，$|A| \leq |B|$

A到B存在满射，$|A| \geq |B|$

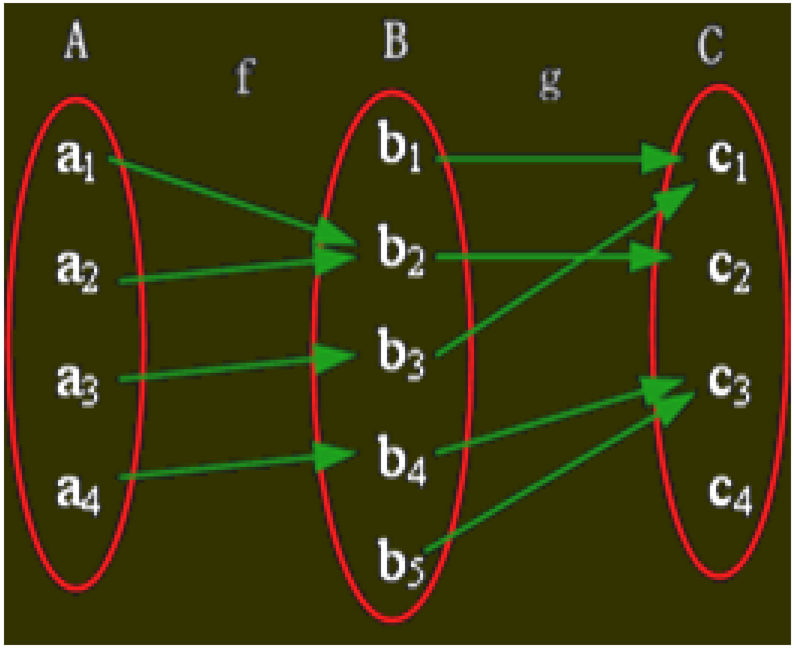
A到B存在双射，$|A| = |B|$，称A和B**等势**

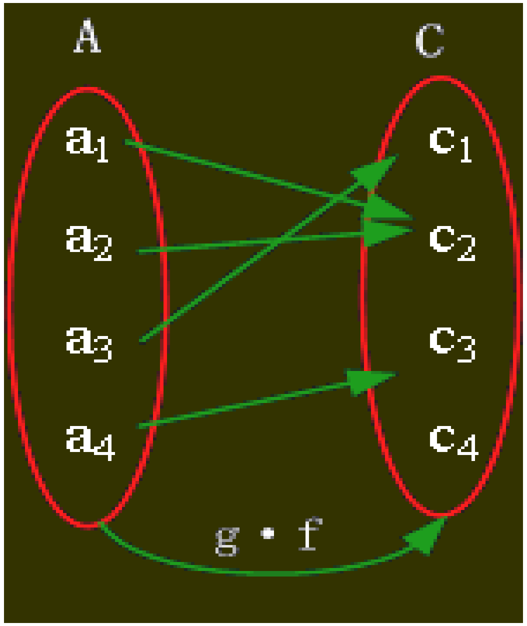
6.2 复合函数与逆函数

- **定理6.2.1**
  - 设$g:X\rightarrow Y$和 $f:Y\rightarrow Z$是函数, 那么从X到Z的复合关系是一个X到Z的函数，记为$f\cdot g$，定义为对一切$x\in X$, $(f\cdot g)(x)=f(g(x))$.
- **注意：** 复合函数$f\cdot g$就是复合关系 $g\cdot f$。要注意的是为了方便，当将其看作复合函数时，在其表示记号中颠倒f和g的位置而写成$f\cdot g$
- **定理6.2.2** 若f是 A到 B的函数，则$f\cdot I_A = I_B\cdot f = f$

例

- 设集合$A=\{a_1,a_2,a_3,a_4\}$, $B=\{b_1,b_2,b_3,b_4,b_5\}$，$C=\{c_1,c_2,c_3,c_4\}$ 函数$f:A\to B$和$g:B\to C$，分别定义为
  - $f=\{<a_1, b_2>, <a_2, b_2>, <a_3, b_3>, <a_4, b_4>\}$,
  - $g=\{<b_1,c_1>, <b_2,c_2>, <b_3,c_1>, <b_4,c_3>, <b_5,c_3>\}$





$g\cdot f=\{<a_1,c_2>,<a_2,c_2>,<a_3,c_1>,<a_4, c_3>\}$

- **定理6.2.3** 函数复合是可结合的. 即f, g和h都是函数, 那么$(f\,g)h=f\,(gh)$.
- **定义6.2.1**
  - 如果对某集合X, $f:X\rightarrow X$, 那么函数f能同自身复合任意次. f的n次复合定义如下:

    (1) $f^{0}(x)=x$

    (2) $f^{n+1}(x)=f\,(f^{n}(x))$, $n\in N$

- **定理6.2.4** 设$g:X\to Y$和$f:Y\to Z$是函数, $f\,g$是复合函数
  (a) 如果f和g是满射, 那么$f\,g$是满射
  (b) 如果f和g是入射, 那么$f\,g$是入射
  (c) 如果f和g是双射, 那么$f\,g$是双射

证明(a):$\forall z\in Z$,

因为f是满射,

$\therefore$存在$y\in Y$, 使得$f(y)=z$

又g是满射, $\therefore$存在$x\in X$, 使$g(x)=y$

于是$f\,g(x)=f(g(x))=f(y)=z$,

即对Z中任一元素都能找到其原像

$\therefore\ f\,g$是满射

证明(b):设$x_1, x_2 \in X$， $x_1 \neq x_2$

$\because g$是入射

$\therefore g(x_1) \neq g(x_2)$

又f 是入射, 且$g(x_1) \neq g(x_2)$

$\therefore f\, g(x_1) \neq f\, g(x_2)$

即$f\, g$是入射

证明(c):因为f 和g是双射,

由(a)和(b)得$f\, g$是满射和入射, 所以$f\, g$是双射

例

(*a*) 设E是偶整数集合, M是奇整数集合. 双射函数f 和 g定义如下:

$g: I \longrightarrow E$, $g(x)=2x$; $f: E \longrightarrow M$, $f(x)=x+1$

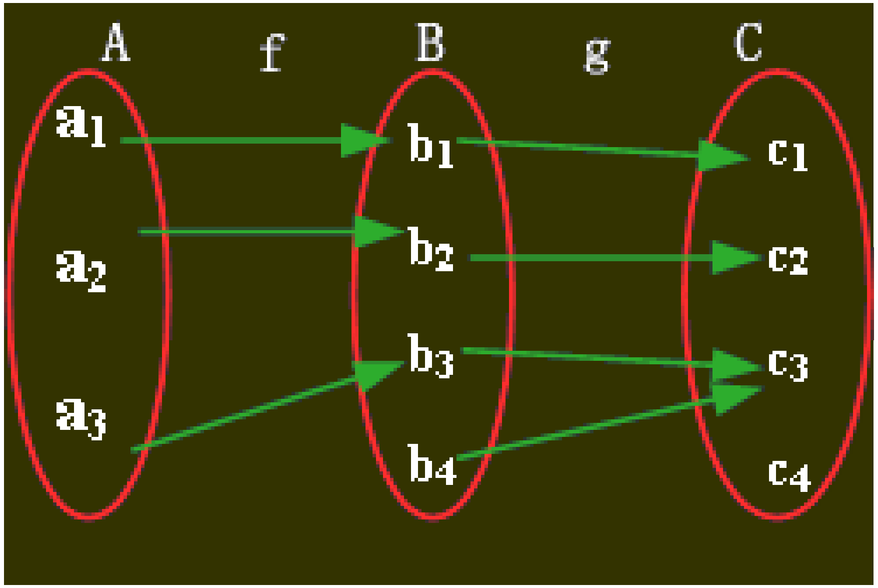
$f\,g: I \longrightarrow M$, $f\,g(x)=2x+1$

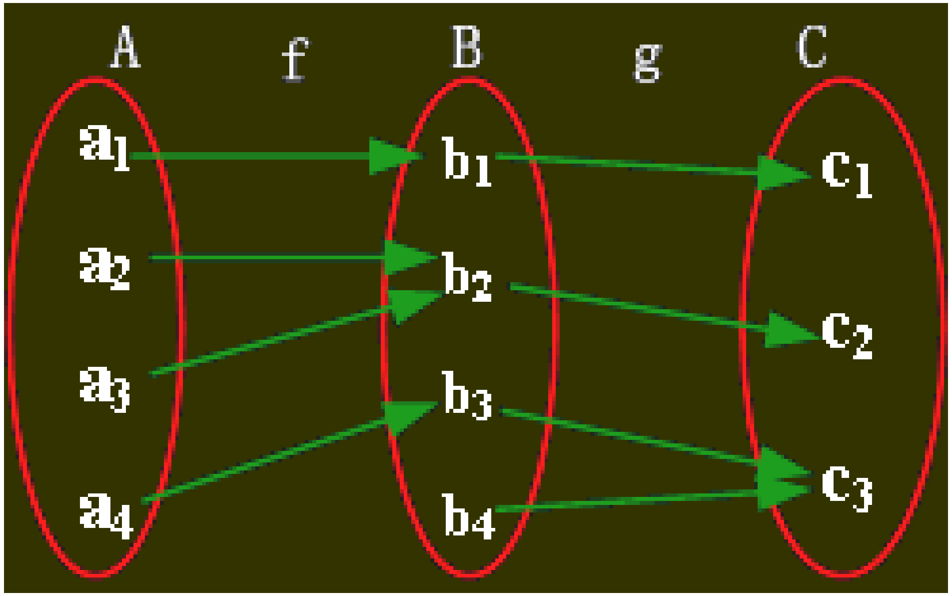
(*b*) $g:[0,1] \longrightarrow [0,1/2]$, $g(x)=x/2$

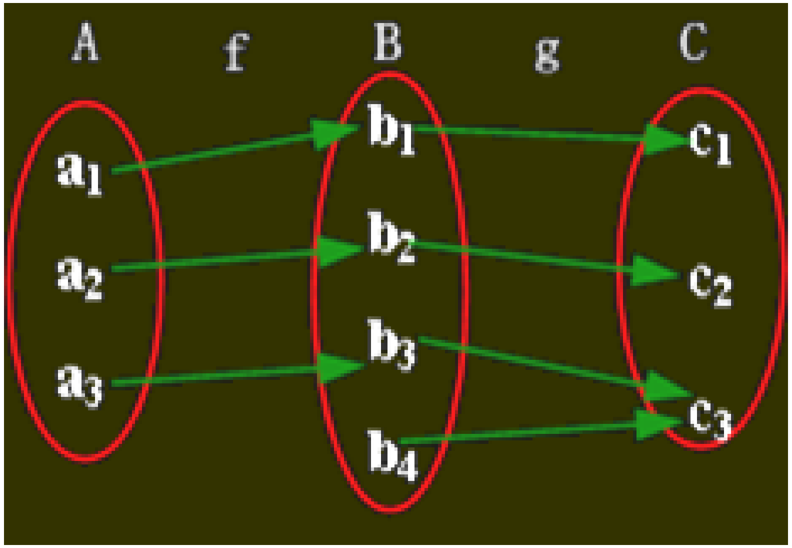
$f:[0, 1/2] \longrightarrow (0,1)$, $f(x)=x+1/4$

$f\,g: [0,1] \longrightarrow (0,1)$, $f\,g(x)=x/2+1/4$

- 定理**6.2.4**的逆命题并不成立







- 定理6.2.5 设g:$X \rightarrow Y$和f :$Y \rightarrow Z$是函数，$f\,g$是复合函数
  (a) 如果$f\,g$是满射, 那么f是满射
  (b) 如果$f\,g$是入射, 那么g是入射
  (c) 如果$f\,g$是双射, 那么f是满射而g是入射

证明(a): $\forall z \in Z$ (只需证明z有原像)

$\because$ f g是X到Z的满射，$\therefore \exists x \in X$, $f\,\mathrm{g}(x)= z$

记y=g(x)，显然$y \in Y$，且f(y)=z，

说明f是满射

证明(b):假若不然，

存在$x_1, x_2 \in X$，$x_1 \neq x_2$，但$g(x_1)=g(x_2)$

则必有$fg(x_1)=fg(x_2)$，与$f\,g$是入射矛盾

逆函数

- 函数的逆关系不一定是函数
- 例
  - $X=\{1, 2, 3\}$, $Y=\{a, b, c\}$

    $f=\{<1, a>, <2, a>, <3, c>\}$ 是函数

    $f^{-1}=\{<a, 1>, <a, 2>, <c, 3>\}$ 不是函数
- **定理6.2.6** 设$f:X\rightarrow Y$是一双射函数, 那么f的逆关系f^{-1}是一双射函数, $f^{-1}:Y\rightarrow X$

- **定理6.2.7** 若f是 A 到 B 的双射，则$f^{-1}\cdot f=I_A$, $f\cdot f^{-1}=I_B$

证明： $\forall x\in A$,

若$f(x)=y$, 则$f^{-1}(y)=x$

则$f^{-1}\cdot f(x)=f^{-1}(f(x))=f^{-1}(y)=x$

所以, $f^{-1}\cdot f=I_A$

类似可证$f\cdot f^{-1}=I_B$

- **定理6.2.8** 若f是 A 到 B 的函数， g是 B 到 A 的函数，且$g\cdot f=I_A$, $f\cdot g=I_B$，则$g = f^{-1}$，$f = g^{-1}$。

证明 我们只证明$g = f^{-1}$，$f = g^{-1}$同理可得

因为I_A和I_B都是双射，这样从$g\cdot f=I_A$可知f是入射，g是满射；

又从$f\cdot g=I_B$可知g是入射，f是满射。也即g和f皆是双射。从而：

$$g = g\cdot I_B = g\cdot(f\cdot f^{-1}) = (g\cdot f)\cdot f^{-1} = I_A\cdot f^{-1} = f^{-1}$$

练习

- 设A={a, b, c, d},B={1, 2, 3, 4}, f , g 和 h 均是由 A 到 B 的函数,这些函数的值域分别为 f(A)={1,2,4}, g (A)={1,3},h(A)= B 这三个函数中,__h___有逆函数。
- 判断以下函数是否有逆函数

(1) $f{:}I\rightarrow I$, $f(i)=3i$ (N)

(2) $g{:}R\rightarrow R$, $f(r)=3r$ (Y)

定义6.2.2

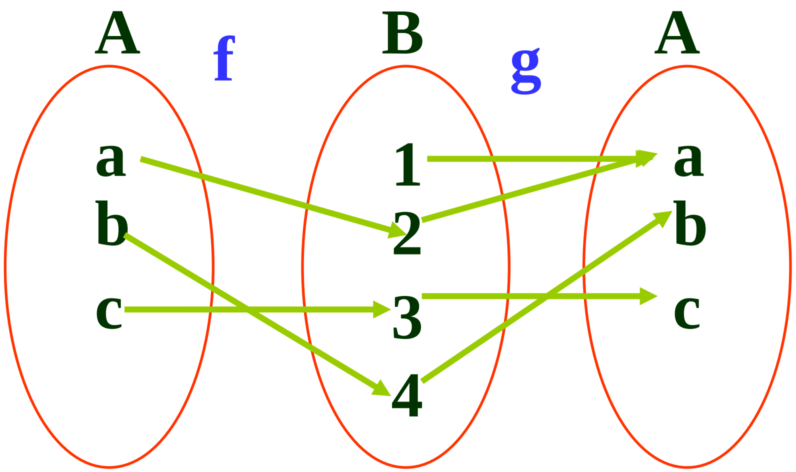
- 设f是 A到 B的函数，若存在 B到 A的函数g使得$g\cdot f=I_A$，则称f是左可逆的，并称g是f的左逆；类似地，若存在 B到 A的函数h使得$f\cdot h=I_B$，则称f是右可逆的，并称h是f的右逆；若f既是左可逆的，又是右可逆的，则称f是可逆的。
- 例：设f_1、f_2、g_1、g_2是四个 Z 上的函数，其中

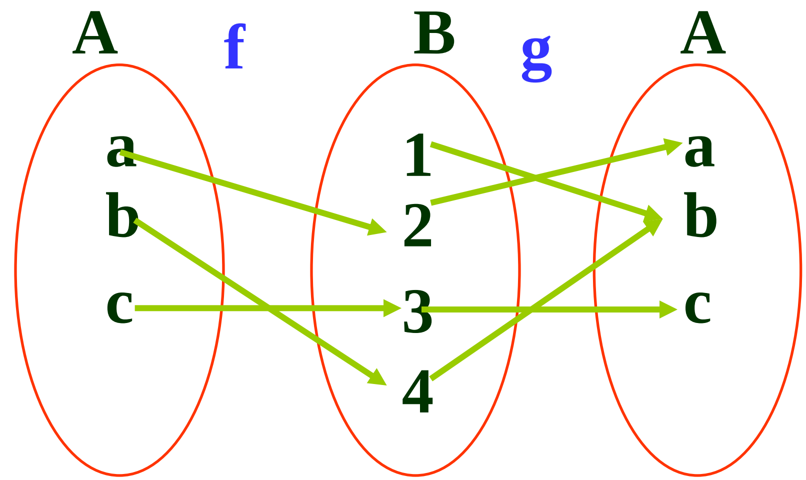
$$f_1(x)=\begin{cases}0 & \text{若}x=0\text{或}1\\ x-2 & \text{若}x\geq 2\end{cases}\qquad f_2(x)=\begin{cases}1 & \text{若}x=0\text{或}1\\ x-2 & \text{若}x\geq 2\end{cases}$$

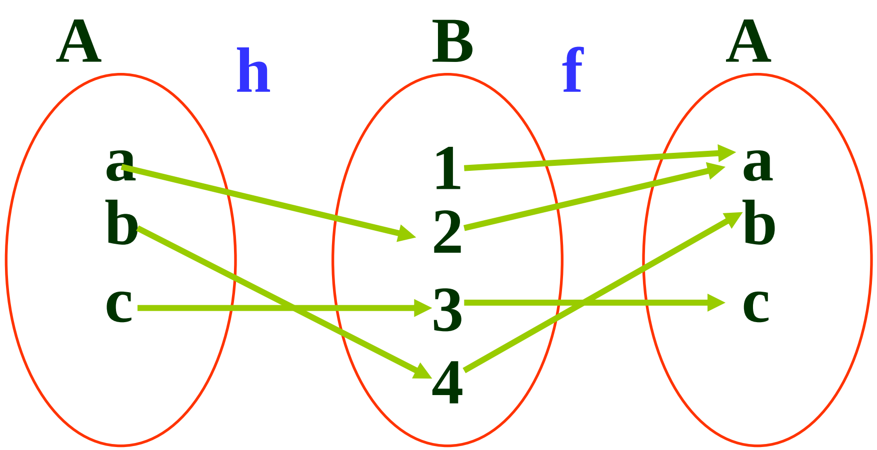
$$g_1(x)=x+2,\qquad g_2(x)=\begin{cases}0 & \text{若}x=0\\ x+2 & \text{若}x\geq 1\end{cases}$$

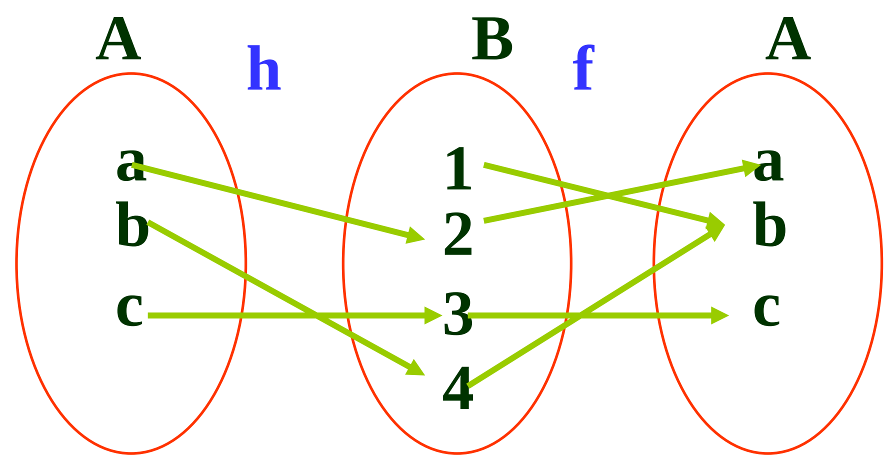
左逆(右逆、逆)不一定存在；也不一定唯一

例


A
f
B
g
A
a
b
c
1
2
3
4
a
b
c


A
f
B
g
A
a
b
c
1
2
3
4
a
b
c


A
h
B
f
A
a
b
c
1
2
3
4
a
b
c


A
h
B
f
A
a
b
c
1
2
3
4
a
b
c

定理6.2.9

(a) f 有左逆元当且仅当f 是入射

(b) f 有右逆元当且仅当f 是满射

(c) f 有左逆元和右逆元当且仅当f 是双射

(d) 如果f有左逆g且有右逆h，那么$g = h = f^{-1}$

证明(a)：必要性： 假设g是f 的左逆元，

$\because gf = I_A, I_A$是双射，

$\therefore f$是入射

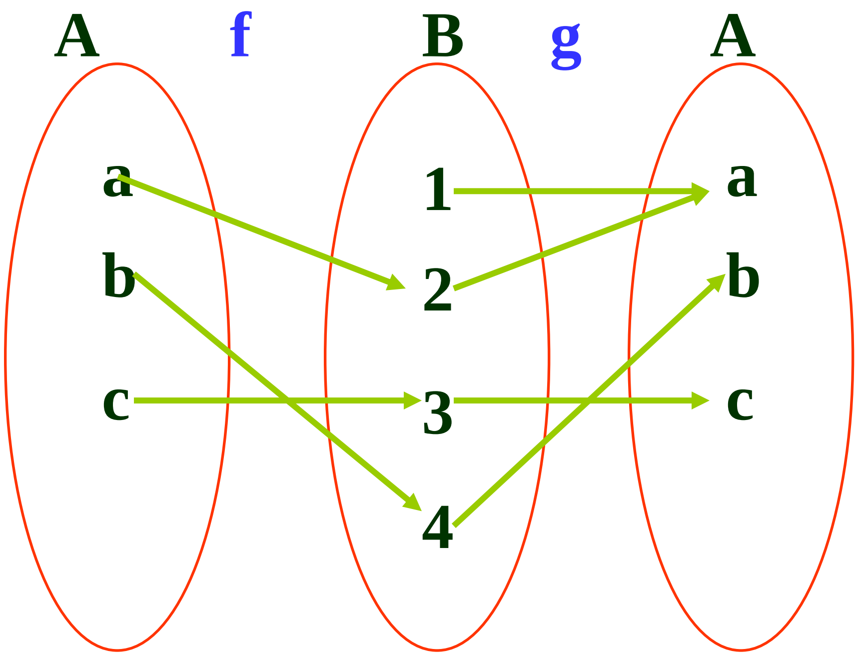
充分性：用构造性证明.

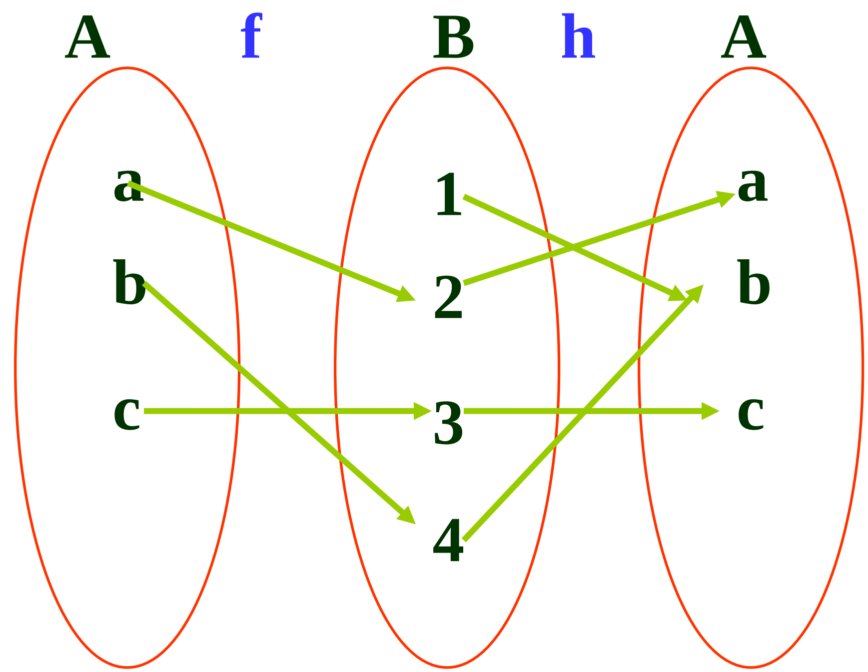
$\because f$是入射， $\therefore \forall y \in f(X)$, 必存在唯一的$x \in X$使$f(x)=y$

选取任意元素$x_0 \in X$, 定义Y到X的函数g如下：

$$g(y) = \begin{cases} x, & y \in f(X), f(x) = y \\ x_0, & y \notin f(X) \end{cases}$$

g是f 的左逆元


A
f
B
g
A
a
b
c
1
2
3
4
a
b
c


A
f
B
h
A
a
b
c
1
2
3
4
a
b
c

证明(b)：必要性： 假设h是f的右逆元,

$\because$ $fh = I_B$, I_B是双射,

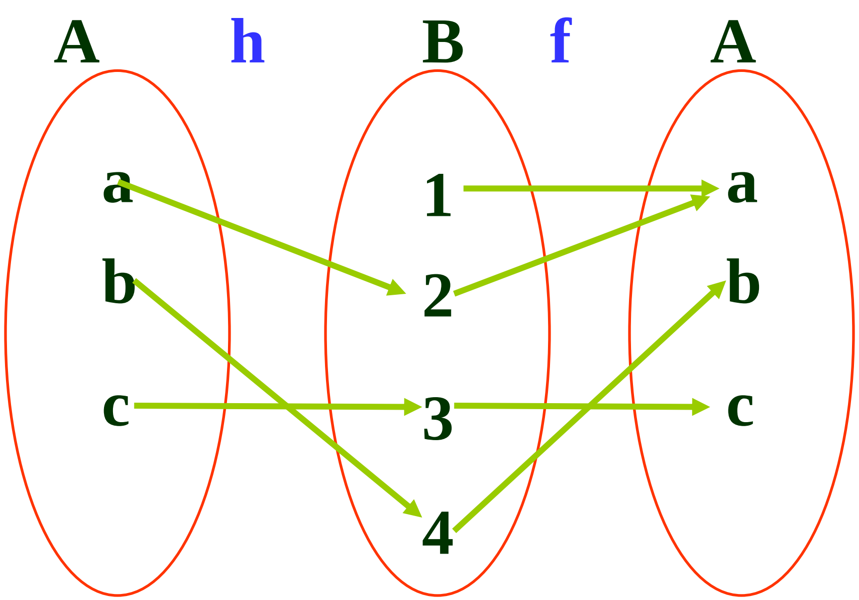
$\therefore$ f是满射

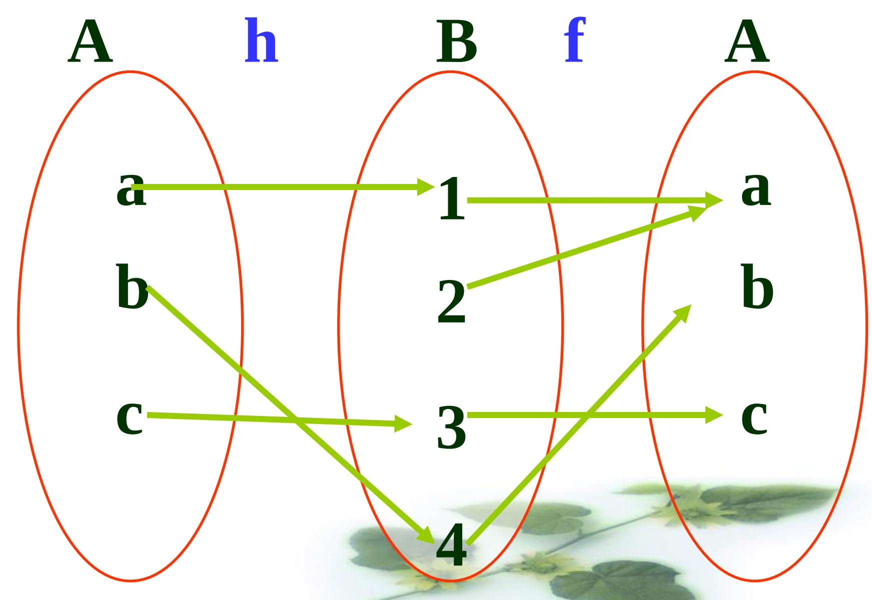
充分性：用构造性证明.

f是满射，构造Y到X的函数h如下:

$$h(y)=x, \text{其中} x\in X \text{且} f(x)=y$$

(若X中有多个元素在f作用下的象为y，则可从中任取一个作为y在h作用下的象)





证明(d)：因为 $g \cdot f = I_A$和$f \cdot h = I_B$

则$g=g \cdot I_B = g \cdot (f \cdot f^{-1}) = (g \cdot f) \cdot f^{-1} = I_A \cdot f^{-1} = f^{-1}$

$h = I_A \cdot h = (f^{-1} \cdot f) \cdot h = f^{-1} \cdot (f \cdot h) = f^{-1} \cdot I_B = f^{-1}$

- 以上定理实质上指出了逆函数的存在性、唯一性与相互性
  - 唯有双射是可逆的，且其逆关系即是它的左逆兼右逆(称为逆函数或反函数)
  - 每个双射的逆函数的唯一的(即是它的逆关系)。
  - 逆函数是相互的，即$(f^{-1})^{-1} = f$

- **定理6.2.10** 若f是A到B的双射， g是B到C的双射。那么

$$(g \cdot f)^{-1} = f^{-1} \cdot g^{-1}$$

证可得明 由条件， $g \cdot f$是A到C的双射。此外，由于

$$(g \cdot f) \cdot (f^{-1} \cdot g^{-1}) = g \cdot (f \cdot f^{-1}) \cdot g^{-1} = g \cdot I_B \cdot g^{-1} = g \cdot g^{-1} = I_C$$

和

$$(f^{-1} \cdot g^{-1}) \cdot (g \cdot f) = f^{-1} \cdot (g^{-1} \cdot g) \cdot f = f^{-1} \cdot I_C \cdot f = f^{-1} \cdot f = I_A$$

可得

$$(g \cdot f)^{-1} = f^{-1} \cdot g^{-1}$$

- 推论
  - 若f是集合A上的双射，$n \in N$，则

    $(f^{-1})^n = (f^n)^{-1}$

这样，我们可定义集合A上的双射的负次方幂为

$f^{-n} = (f^{-1})^n = (f^n)^{-1}$， 其中$n \in N$