



第二篇 数理逻辑

Mathematics Logic



谓词逻辑

Predicate Logic

问题的提出：（命题逻辑的局限性）

■ 例：苏格拉底论断

□ 前提

■ “所有的人总是要死的”

■ “苏格拉底是人”

□ 结论

■ “所以苏格拉底是要死的”

P

Q

R

$P \wedge Q \rightarrow R$

不是有效推理

■ 命题逻辑中原子命题不可再分



■ 例

□ P_1 : 小张是大学生

□ P_2 : 小李是大学生

□ Q_1 : 2大于3

□ Q_2 : 6大于4

■ 命题逻辑无法反映不同原子命题间的内在共性

■ 解决问题的方法

□ 分析原子命题，分离其主语和谓语

□ 考虑一般和个别，全称和存在

3.1 谓词的概念与表示

■ 定义3.1.1

- 在原子命题中，用来刻划一个个体的性质或个体之间关系的成分称为 **谓词**，刻划一个个体性质的词称为 **一元谓词**；刻划 n 个个体之间关系的词称为 **n 元谓词**

- 常用大写英文字母表示

- 个体

- 能够独立存在的事物
 - 通常用小写英文字母 a 、 b 、 c 、...表示个体常量
 - 用小写英文字母 x 、 y 、 z ...表示任何个体，则称这些字母为 **个体变元**

■ 例 1

(a) 5 是质数 $F(5)$

(b) 张明生于北京 $G(a,b)$

(c) $7=3\times 2$ $H(7,3,2)$

$F(x)$: x 是质数

$G(x, y)$: x 生于 y , a : 张明, b : 北京

$H(x, y, z) : x=y\times z$

谓词 个体词 谓词命名式
(谓词填式)

变元的次序很重要

■ 谓词常量（谓词常元）

- 一个字母代表一特定谓词, 例如F代表“是质数”, 则称此字母为谓词常量

■ 谓词变元

- 若字母代表任意谓词, 则称此字母为谓词变元

■ 论域

- 个体域
- 谓词命名式中个体变元的取值范围
- 空集不能作为论域

3.2 命题函数与量词

■ 谓词命名式 **不是** 命题

- 若谓词是常元
- 个体词是常元
- 谓词命名式才成为一个命题

■ 定义3.2.1

- 由一个谓词常量，一些个体变元组成的表达式称为 **简单命题函数**，表示为 $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 。由一个或若干个简单命题函数以及逻辑联结词组成的命题形式称为 **复合命题函数**，简单命题函数和复合命题函数统称为 **命题函数**
- $n=0$ 时
 - 命题变元

■ 例

□ $A(x)$: x 身体好

$B(x)$: x 学习好

$C(x)$: x 工作好

□ 如果 x 身体不好, 则 x 的学习与工作都不会好复合命题函数

□ $\neg A(x) \rightarrow (\neg B(x) \wedge \neg C(x))$

量词

■ 例

□ “所有的正整数都是素数” $P(a) \wedge P(b)$

□ “有些正整数是素数” $P(a) \vee P(b)$

■ 假设

□ 只有两个正整数 a 和 b

□ 个体域为 $\{a, b\}$

□ $P(x)$: x 是素数

量词

■ 定义3.2.2

□ 设 P 为论域 D 上的一个一元谓词，则

- (1) 命题 $\forall x P(x)$ 的真值为 T ，iff 对 D 上的每一个个体 a ，命题 $P(a)$ 的真值为 T ；
- (2) 命题 $\exists x P(x)$ 的真值为 T ，iff 在 D 上存在个体 a ，使得命题 $P(a)$ 的真值为 T 。

全称量词

- 记作 \forall
- 表示“每个”、“任何一个”、“一切”、“所有的”、“凡是”、“任意的”等
- $\forall x$ 读作“任意 x ”，“所有 x ”，“对一切 x ”
- 量词后边的个体变元，指明对哪个个体变元量化，称为量词后的**指导变元**
- 例
 - 所有人都是要死的
 - $D(x)$: x 是要死的
 - 个体域：所有人构成的集合
 - $\forall x D(x)$

存在量词

- 记作 \exists

- 表示“有些”、“一些”、“某些”、“至少一个”等

- $\exists x$ 读作“存在 x ”，“对某些 x ”或“至少有一 x ”

- 指导变元

- 例

- 有些有理数是整数

- $I(x)$: x 是整数

- 个体域: 有理数集合

- $\exists x I(x)$

全总个体域（全总域）

- 含有量词的命题的真值与论域有关
- 含有量词的命题的表达式的形式与论域有关
- **全总个体域**
 - 宇宙间所有的个体聚集在一起所构成的集合
 - **约定**
 - 除特殊说明外，均使用全总个体域
 - 对个体变化的真正取值范围，用**特性谓词**加以限制

例

- 1) 所有的人都是要死的
- 2) 有的人活百岁以上

$D(x)$: x 是要死的 $G(x)$: x 活百岁以上

■ 个体域 E 为全体人组成的集合

- 1) $\forall x D(x)$
- 2) $\exists x G(x)$

■ 全总个体域

□ 引入特性谓词

□ $M(x)$: x 是人

- 1) $\forall x (M(x) \rightarrow D(x))$
- 2) $\exists x (M(x) \wedge G(x))$

特性谓词添加规则

- 对全称量词, 特性谓词作为条件式之前件加入
- 对存在量词, 特性谓词作为合取项而加入
- 例

(a) 没有不犯错误的人

$F(x)$: x 犯错误 $M(x)$: x 是人

$\neg \exists x (M(x) \wedge \neg F(x))$

(b) 凡是实数, 不是大于零就是等于零或小于零

$R(x)$: x 是实数 $L(x, y)$: $x > y$

$E(x, y)$: $x = y$ $S(x, y)$: $x < y$

$\forall x (R(x) \rightarrow L(x, 0) \vee E(x, 0) \vee S(x, 0))$

3.3 谓词演算的合式公式

■ 个体函数（函词）

□ 例

- 小王比他的父亲高

$T(x, y)$: x 比 y 高 a : 小王

b : 小王的父亲

$T(a, b)$

无法显示个体之间的依赖关系

□ 定义函数

- $f(x)$ = x 的父亲

- $T(a, f(a))$

■ 函词与谓词的区别

□ 函词中的个体变元用个体代入后的结果依然是
个体

■ $f(a)$ =小王的父亲

□ 谓词中的个体变元用确定的个体代入后就变成了
命题

■ $M(x)$: x 是人

■ $M(a)$: 小王是人

□ 函词是论域到论域的映射

■ $f: D \rightarrow D$

□ 谓词是从论域到 $\{T, F\}$ 的映射

■ $M: D \rightarrow \{T, F\}$

项和原子公式

■ 定义3.3.1 项(item)

□ 表示个体

□ 定义

(1) 个体常量是项

(2) 个体变元是项

(3) 如果 f 是一个 $n(n \geq 1)$ 元函词, 其 t_1, t_2, \dots, t_n 都是项, 则 $f(t_1, t_2, \dots, t_n)$ 是项

□ 例

■ a, b, c

■ x, y, z

■ $f(x), g(a, f(y))$

■ 定义3.3.2 原子公式(atom)

□ 定义

- 若 P 是一个 n 元谓词，且 t_1, t_2, \dots, t_n 是项，则 $P(t_1, t_2, \dots, t_n)$ 是原子

□ 命题词也是原子($n=0$)

□ 例

- $P, Q(x), A(x, f(x)), B(x, y, a)$

谓词演算的合式公式(Wff)

■ 也叫谓词公式，简称公式

■ 定义3.3.3

(1)原子公式是合式公式

(2)如果 A 、 B 是合式公式，则 $\neg A$ 、 $(A \wedge B)$ 、 $(A \vee B)$ 、 $(A \rightarrow B)$ 、 $(A \leftrightarrow B)$ 都是合式公式

(3)如果 A 是合式公式， x 是 A 中的任何个体变元，则 $\forall x A$ 和 $\exists x A$ 也是合式公式

(4)有限次地使用规则(1)至(3)求得的公式是合式公式

■ 例

□ P , $(P \rightarrow Q)$, $(Q(x) \wedge P)$, $\exists x(A(x) \rightarrow B(x))$, $\forall x C(x)$

命题符号化

- 谓词逻辑中比较复杂
- 命题的符号表达式与论域有关系
 - 例：每个自然数都是整数
 - 论域 $D=N$
 - $I(x)$: x 是整数
 - $\forall x I(x)$
 - 论域为全总个体域
 - 特性谓词 $N(x)$: x 是自然数
 - $\forall x (N(x) \rightarrow I(x))$

例：将下列命题符号化

(1)所有大学生都喜欢一些歌星。

$S(x)$: x 是大学生, $X(x)$: x 是歌星, $L(x,y)$: x 喜欢 y

$$\forall x(S(x) \rightarrow \exists y(X(y) \wedge L(x,y)))$$

(2)发光的不都是金子。

$P(x)$: x 发光, $G(x)$: x 是金子

$$\neg \forall x(P(x) \rightarrow G(x))$$

$$\text{或者 } \exists x(P(x) \wedge \neg G(x))$$

(3)不是所有的自然数都是偶数。

$N(x)$: x 是自然数, $E(x)$: x 是偶数

$$\neg \forall x(N(x) \rightarrow E(x))$$

$$\text{或者 } \exists x(N(x) \wedge \neg E(x))$$

(4)某些人对食物过敏

$F(x, y)$: x 对 y 过敏, $M(x)$: x 是人, $G(x)$: x 是食物

$$\exists x \exists y (M(x) \wedge G(y) \wedge F(x, y))$$

(5)每个人都有一些缺点

$H(x, y)$: x 有 y , $M(x)$: x 是人, $S(x)$: x 是缺点

$$\forall x (M(x) \rightarrow \exists y (S(y) \wedge H(x, y)))$$

(6)尽管有人聪明,但未必人人聪明

$M(x)$: x 是人, $S(x)$: x 聪明

$$\exists x (M(x) \wedge S(x)) \wedge \neg \forall x (M(x) \rightarrow S(x))$$

练习：将下列命题符号化

- (1) 所有教练员都是运动员；($J(x)$, $L(x)$)
- (2) 某些运动员是大学生；($S(x)$)
- (3) 某些教练员是年老的，但是健壮的；($O(x)$, $V(x)$)
- (4) 金教练虽不年老，但不健壮；(j)
- (5) 不是所有运动员都是教练员；
- (6) 某些大学生运动员是国家选手；($C(x)$)
- (7) 没有一个国家选手不是健壮的；
- (8) 所有老的国家选手都是运动员；
- (9) 没有一位女同志既是国家选手又是家庭妇女；($W(x)$, $H(x)$)
- (10) 有些女同志既是教练员又是国家选手；
- (11) 所有运动员都钦佩某些教练员；($A(x, y)$)
- (12) 有些大学生不钦佩运动员。

练习参考答案

- (1) $\forall x(J(x) \rightarrow L(x))$
- (2) $\exists x(L(x) \wedge S(x))$
- (3) $\exists x(J(x) \wedge O(x) \wedge V(x))$
- (4) $J(j) \wedge \neg O(j) \wedge \neg V(j)$
- (5) $\neg \forall x(L(x) \rightarrow J(x))$ 或者 $\exists x(L(x) \wedge \neg J(x))$
- (6) $\exists x(S(x) \wedge L(x) \wedge C(x))$
- (7) $\neg \exists x(C(x) \wedge \neg V(x))$ 或者 $\forall x(C(x) \rightarrow V(x))$
- (8) $\forall x((C(x) \wedge O(x)) \rightarrow L(x))$
- (9) $\neg \exists x(W(x) \wedge C(x) \wedge H(x))$
- (10) $\exists x(W(x) \wedge J(x) \wedge C(x))$
- (11) $\forall x(L(x) \rightarrow \exists y(J(y) \wedge A(x, y)))$
- (12) $\exists x(S(x) \wedge \forall y(L(y) \rightarrow \neg A(x, y)))$

几个特别的例子

(1) 如果明天 **下雨**，则某些人将被淋湿 **不是个体的性质**

定义命题词 P ：明天下雨， $M(x)$ ： x 是人， $W(x)$ ： x 将被淋湿

$$P \rightarrow \exists x(M(x) \wedge W(x))$$

(2) **有且仅有一个**偶素数

$P(x)$ ： x 是偶素数

$$\exists x(P(x) \wedge \forall y(P(y) \rightarrow x=y)) \quad \text{或者} \quad \exists x(P(x) \wedge \neg \exists y(x \neq y \wedge P(y)))$$

用符号 **$\exists!xP(x)$** 表示有且仅有一个个体满足 P

(3) **顶多只有一台**机器是好的

$P(x)$ ： x 是好机器 $\forall x \forall y(P(x) \wedge P(y) \rightarrow x=y)$

用符号 **$\exists!!xP(x)$** 表示顶多有一个个体满足 P

(4) 如果人都爱美，则漂亮衣服有销路

$M(x)$: x 是人, $L(x)$: x 爱美, $C(x)$: x 是衣服, $B(x)$: x 是漂亮的, $S(x)$: x 有销路

$$\forall x(M(x) \rightarrow L(x)) \rightarrow \forall x(C(x) \wedge B(x) \rightarrow S(x))$$

问题一：前后两个 x 是否指同一个个体？

答：前后两个 x **不是**同一个个体

问题二：若写成如下形式是否正确？

$$\forall x(M(x) \rightarrow L(x)) \rightarrow \forall y(C(y) \wedge B(y) \rightarrow S(y))$$

答：是**正确的**，显然

$$\forall x(M(x) \rightarrow L(x)) \rightarrow \forall x(C(x) \wedge B(x) \rightarrow S(x))$$

$$\Leftrightarrow \forall x(M(x) \rightarrow L(x)) \rightarrow \forall y(C(y) \wedge B(y) \rightarrow S(y))$$

3.4 变元的约束

■ 量词的 **作用域**(**辖域**)

□ **定义**: 在谓词公式中, 量词的作用范围称之为量词的**作用域**, 也叫量词的**辖域**。

□ 例

■ $\forall x A(x)$

□ $\forall x$ 的辖域为 $A(x)$

■ $\forall x ((P(x) \wedge Q(x)) \rightarrow \exists y R(x, y))$

□ $\forall x$ 的辖域是 $((P(x) \wedge Q(x)) \rightarrow \exists y R(x, y))$

□ $\exists y$ 的辖域为 $R(x, y)$

■ $\forall x \exists y \forall z (A(x, y) \rightarrow B(x, y, z)) \wedge C(t)$

$\forall z$ 的辖域

$\exists y$ 的辖域

$\forall x$ 的辖域

自由变元



一般地，

- 如果量词后边只是一个原子谓词公式时，该量词的辖域就是此原子谓词公式。
- 如果量词后边是括号，则此括号所表示的区域就是该量词的辖域。
- 如果多个量词紧挨着出现，则后边的量词及其辖域就是前边量词的辖域。

■ 约束变元

- 如果个体变元 x 在 $\forall x$ 或者 $\exists x$ 的辖域内，则称 x 在此辖域内约束出现，并称 x 在此辖域内是约束变元

■ 自由变元

- 如果个体变元 x 不在任何量词的辖域内，则称 x 是自由出现，并称 x 是自由变元

■ 例

$$\forall x (F(x, y) \rightarrow \exists y P(y)) \wedge Q(z)$$

$F(x, y)$ 中的 x 和 $P(y)$ 中的 y 是约束变元

而 $F(x, y)$ 中的 y 和 $Q(z)$ 中的 z 是自由变元

例：指出下列各公式中的量词辖域及自由变元和约束变元

■ $\forall x \exists y (P(x) \wedge Q(y)) \rightarrow \exists z R(z)$

□ $\forall x$ 的辖域 $\exists y (P(x) \wedge Q(y))$

□ $\exists y$ 的辖域 $P(x) \wedge Q(y)$

□ $\exists z$ 的辖域 $R(z)$

■ $\forall x (P(x, y) \rightarrow \exists y Q(x, y, z)) \wedge S(x, z)$

□ $\forall x$ 的辖域 $P(x, y) \rightarrow \exists y Q(x, y, z)$

其中 x 是约束变元

y 是自由变元

□ $\exists y$ 的辖域 $Q(x, y, z)$

其中 y 是约束变元

x, z 是自由变元

□ $S(x, z)$ 中 x, z 是自由变元

对约束变元和自由变元的几点说明

- 约束变元用什么符号表示无关紧要
 - $\forall xA(x)$ 与 $\forall yA(y)$ 是一样的
- 一个谓词公式如果无自由变元，它就表示一个命题
 - 例： $A(x)$ 表示 x 是个大学生
 - $\exists xA(x)$ 或者 $\forall xA(x)$ 是命题
- 一个 n 元谓词 $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ，若在前边添加 k 个量词，使其中的 k 个个体变元变成约束变元，则变成 $n-k$ 元谓词函数

例

- $P(x, y, z)$ 表示 $x+y > z$
 - 假设论域是整数集, $\forall x \exists y P(x, y, z)$ 表示?
 - “任意给定的整数 x , 都可以找到整数 y , 使得 $x+y > z$ ”。
 - 令 $z=1$, 则 $\forall x \exists y P(x, y, 1)$ 表示?
 - “任意给定的整数 x , 都可以找到整数 y , 使得 $x+y > 1$ ”, ...。
 - $\exists x \forall y P(x, y, 1)$ 表示?

约束变元换名

- 不同个体以相同的符号出现容易产生混淆

- 例

□ $\forall x (F(x, y) \rightarrow \exists y P(y)) \wedge Q(z)$

- 约束变元的换名规则：

1. 对约束变元可以更改名称，改名的范围是：量词后的指导变元以及该量词的辖域内此个体变元出现的各处同时换名。
2. 改名后用的个体变元名称，不能与该量词的辖域内的其它变元名称相同。

例

■ $\forall x (P(x) \rightarrow Q(x, y)) \vee (R(x) \wedge A(x))$

□ x以两种形式出现

□ 对x换名

$$\forall z (P(z) \rightarrow Q(z, y)) \vee (R(x) \wedge A(x))$$

■ $\forall x (P(x, y) \rightarrow \exists y Q(x, y, z)) \wedge S(x, y)$

□ 对x和y换名

□ $\forall u (P(u, v) \rightarrow \exists v Q(u, v, z)) \wedge S(x, y)$

■ 错误

□ $\forall u (P(u, y) \rightarrow \exists z Q(u, z, z)) \wedge S(x, y)$

■ 错误

□ $\forall u (P(u, y) \rightarrow \exists v Q(u, v, z)) \wedge S(x, y)$

■ 正确

自由变元换名

- 自由变元也可以换名
- 此换名叫代入
- 自由变元的代入规则：
 1. 对谓词公式中的自由变元可以作代入。代入时需要同时对公式中出现该变元的每一处，同时作代入
 2. 代入后的变元名称要与公式中的其它变元名称不同

例

■ $\forall x (P(x) \rightarrow Q(x, y)) \vee (R(x) \wedge A(x))$

□ 用 z 代替自由变元 x

□ $\forall x (P(x) \rightarrow Q(x, y)) \vee (R(\mathbf{z}) \wedge A(\mathbf{z}))$

■ $\forall x (P(x, y) \rightarrow \exists y Q(x, y, z)) \wedge S(x, z)$

□ 用 w 和 t 分别代自由变元 x 和 y

□ $\forall x (P(x, \mathbf{t}) \rightarrow \exists y Q(x, y, z)) \wedge S(\mathbf{w}, z)$

3.5 谓词公式的解释

■ **定义3.5.1** 对谓词公式 A 的解释 I 包括以下几点:

1. 指定一个论域 D
2. 对 A 中出现的每一个 n 元函数, 指定一个 D 上的 n 元个体函数常量
3. 对 A 中出现的每一个 n 元谓词, 指定一个 D 上的 n 元谓词常量
4. 对 A 中出现的每一个个体常量及自由变元, 指定 D 中的一个个体常量
5. 对 A 中出现的每一个命题变元 P , 指派一个真值 T 或 F

由此得到一个命题 A_I , 称 A_I 的真值为合适公式 A 在解释 I 下的真值

例

■ 取解释I如下：

□ $D=\{1,2\}$,

□ 定义D上的二元谓词P真值为

$P(1,1): T; \quad P(1,2): F; \quad P(2,1): F; \quad P(2,2): T$

□ 则 $\forall x \exists y P(x,y)$ 和 $\exists y \forall x P(x,y)$ 在解释I下的真值分别为？



$$\forall x \exists y P(x,y)$$

x	y	P(x,y)	$\exists y P(x,y)$	$\forall x \exists y P(x,y)$
1	1	T	T	T
	2	F		
2	1	F	T	
	2	T		



$$\exists y \forall x P(x,y)$$

y	x	P(x,y)	$\forall x P(x,y)$	$\exists y \forall x P(x,y)$
1	1	T	F	F
	2	F		
2	1	F	F	
	2	T		

例

■ 取解释 I 如下:

□ $D=\{1,2\},$

□ 令 $a:1, f(1)=2, f(2)=1$

□ 定义 D 上的谓词 P 和 Q 为

$$P(1): F; \quad P(2): T; \quad Q(1,1):T; \quad Q(1,2):T;$$

$$Q(2,1):F; \quad Q(2,2): F$$

求谓词公式 $\forall x(P(x) \rightarrow Q(f(x), a))$ 在解释 I 下的真值

$$\frac{P(1) \rightarrow Q(f(1), 1)}{T}$$

$$\frac{P(2) \rightarrow Q(f(2), 1)}{T}$$

$\forall x(P(x) \rightarrow Q(f(x), a))$ 在解释 I 下的真值为 T

3.6 谓词公式的永真式

■ 定义

□ 给定谓词公式 A ， E 是其论域，如果在任何解释下公式 A 的真值都为真，则称公式 A 在论域 E 上是永真式。如果不论对什么论域 E ，都使得公式 A 为永真式，则称 A 为永真式。

□ 例： $I(x)$ ： x 是整数， 论域 E 为自然数集合

■ $I(x)$ 在 E 上是永真式

■ $I(x) \vee \neg I(x)$ 是与论域无关的永真式

■ 谓词公式的永假式

■ 谓词公式的可满足式

例：试说明以下公式的类型

1. $\forall x A(x) \rightarrow A(y)$ 永真式
2. $\exists x A(x) \rightarrow A(y)$ 可满足式
3. $A(x) (A(x) : x+6=5)$ 可满足式
4. $\exists x (A(x) \wedge \neg A(x))$ 永假式
5. $\forall x (A(x) \vee B(x)) \rightarrow \forall x A(x) \vee \forall x B(x)$
6. $\exists x (A(x) \wedge B(x)) \leftrightarrow \exists x A(x) \wedge \exists x B(x)$

$$5. \forall x (A(x) \vee B(x)) \rightarrow \forall x A(x) \vee \forall x B(x)$$

解 取解释 I 如下:

$$D = \{1, 2\}$$

$$\begin{array}{cccc} A(1) & A(2) & B(1) & B(2) \\ \hline T & F & F & T \end{array}$$

则在 I 下

$$\begin{array}{cc} \frac{A(1) \vee B(1)}{T} & \frac{A(2) \vee B(2)}{T} \end{array}$$

$$\frac{\forall x (A(x) \vee B(x))}{T}$$

$$\begin{array}{ccc} \frac{\forall x A(x)}{F} & \frac{\forall x B(x)}{F} & \frac{\forall x A(x) \vee \forall x B(x)}{F} \end{array}$$

所以在 I 下 $\forall x (A(x) \vee B(x)) \rightarrow \forall x A(x) \vee \forall x B(x)$ 的真值为假, 该式**不是**永真式

$$6. \exists x (A(x) \wedge B(x)) \leftrightarrow \exists x A(x) \wedge \exists x B(x)$$

解 取解释 I 如下:

$$D = \{1, 2\}$$

$A(1)$	$A(2)$	$B(1)$	$B(2)$
F	T	T	F

或

$A(1)$	$A(2)$	$B(1)$	$B(2)$
T	F	F	T

$$\frac{\exists x A(x) \wedge \exists x B(x)}{T}$$

$$\frac{\exists x (A(x) \wedge B(x))}{F}$$

所以在 I 下 $\exists x (A(x) \wedge B(x)) \leftrightarrow \exists x A(x) \wedge \exists x B(x)$ 的真值为假, 该式**不是**永真式

命题演算的推广

■ 定理3.6.1(代入定理)

- 设 A 是命题逻辑中的永真式，则用谓词逻辑的合适公式代替 A 中的某些命题变元得到的代入实例也是永真式；如果 A 是永假式，则上述代入实例也是永假式

□ 例

- $A(x) \Rightarrow A(x) \vee B(x)$

- $P \Rightarrow P \vee Q$

- $\exists x(A(x) \rightarrow B(x)) \Leftrightarrow \exists x(\neg A(x) \vee B(x))$

- $P \rightarrow Q \Leftrightarrow \neg P \vee Q$

- $\neg(\exists x A(x) \wedge \exists x B(x)) \Leftrightarrow \neg \exists x A(x) \vee \neg \exists x B(x)$

- 摩根律

量词与联词 \neg 的关系

■ 定理3.6.2

$$(1) \neg \exists x A(x) \Leftrightarrow \forall x \neg A(x);$$

$$(2) \neg \forall x A(x) \Leftrightarrow \exists x \neg A(x)。$$

证明 (1) 给定公式 $\neg \exists x A(x) \leftrightarrow \forall x \neg A(x)$ 在论域 D 上的解释 I。若 $\neg \exists x A(x)$ 在 I 下为真，即 $\exists x A(x)$ 为假，那么 D 中的每一个个体 a 皆使 $A(a)$ 为假，即 $\neg A(a)$ 为真，所以 $\forall x \neg A(x)$ 为真。另一方面，若 $\forall x \neg A(x)$ 为真，则 D 中的每一个个体 a 皆使 $\neg A(a)$ 为真，即 $A(a)$ 为假，所以 $\exists x A(x)$ 为假，即 $\neg \exists x A(x)$ 为真。

(2) 利用(1)的结论，我们有：

$$\neg \forall x A(x) \Leftrightarrow \neg \forall x \neg \neg A(x) \Leftrightarrow \neg \neg \exists x \neg A(x) \Leftrightarrow \exists x \neg A(x)$$

例

$$\begin{aligned}\neg \forall x \forall y \exists z (x+z=y) &\Leftrightarrow \exists x \neg \forall y \exists z (x+z=y) \\ &\Leftrightarrow \exists x \exists y \neg \exists z (x+z=y) \\ &\Leftrightarrow \exists x \exists y \forall z \neg (x+z=y) \\ &\Leftrightarrow \exists x \exists y \forall z (x+z \neq y)\end{aligned}$$

量词辖域的扩张和收缩

■ 定理3.6.3

1. $\forall xA(x) \vee P \Leftrightarrow \forall x(A(x) \vee P)$
2. $\forall xA(x) \wedge P \Leftrightarrow \forall x(A(x) \wedge P)$
3. $\exists xA(x) \vee P \Leftrightarrow \exists x(A(x) \vee P)$
4. $\exists xA(x) \wedge P \Leftrightarrow \exists x(A(x) \wedge P)$
5. $P \rightarrow \forall xA(x) \Leftrightarrow \forall x(P \rightarrow A(x))$
6. $P \rightarrow \exists xA(x) \Leftrightarrow \exists x(P \rightarrow A(x))$
7. $\forall xA(x) \rightarrow P \Leftrightarrow \exists x(A(x) \rightarrow P)$
8. $\exists xA(x) \rightarrow P \Leftrightarrow \forall x(A(x) \rightarrow P)$

P 是不含个体变元 x 的谓词公式

证明式1: (逻辑推证)

一方面, 当 P 为 F 时,

$$\begin{aligned}\forall xA(x) \vee P &\Leftrightarrow \forall x(A(x) \vee P) \\ &\Leftrightarrow \forall xA(x)\end{aligned}$$

另一方面, 当 P 为 T 时,

$$\begin{aligned}\forall xA(x) \vee P &\Leftrightarrow \forall x(A(x) \vee P) \\ &\Leftrightarrow T\end{aligned}$$

量词与 \wedge 和 \vee 等联词的关系

■ 定理3.6.4

1. $\forall x(A(x) \wedge B(x)) \Leftrightarrow \forall xA(x) \wedge \forall xB(x)$

2. $\exists x(A(x) \vee B(x)) \Leftrightarrow \exists xA(x) \vee \exists xB(x)$

3. $\exists x(A(x) \wedge B(x)) \Rightarrow \exists xA(x) \wedge \exists xB(x)$

4. $\forall xA(x) \vee \forall xB(x) \Rightarrow \forall x(A(x) \vee B(x))$

证明式1：个体域中每一个体 x ，使得 $A(x) \wedge B(x)$ 为真，等价于对一切 x ， $A(x)$ 是真并且对一切 x ， $B(x)$ 是真

证明式2：由1得 $\forall x(\neg A(x) \wedge \neg B(x)) \Leftrightarrow \forall x\neg A(x) \wedge \forall x\neg B(x)$

即 $\neg \exists x(A(x) \vee B(x)) \Leftrightarrow \neg(\exists xA(x) \vee \exists xB(x))$

故 $\exists x(A(x) \vee B(x)) \Leftrightarrow \exists xA(x) \vee \exists xB(x)$

■ **注意:** 公式3和4不是等价公式, 而是永真蕴含式

■ 例:

□ 给定如下解释

■ $A(x)$: x 是奇数 $B(x)$: x 是偶数

则 $\exists xA(x) \wedge \exists xB(x)$ 为真

$\exists x(A(x) \wedge B(x))$ 为假

所以 $\exists xA(x) \wedge \exists xB(x)$ **不蕴含** $\exists x(A(x) \wedge B(x))$

□ 或

■ $D=\{1,2\}$

■ $A(1): T$ $A(2): F$ $B(1): F$ $B(2): T$

证明式3 $\exists x(A(x) \wedge B(x)) \Rightarrow \exists xA(x) \wedge \exists xB(x)$

证明：假设前件 $\exists x(A(x) \wedge B(x))$ 为真，

则论域中至少有一个个体 a ，使得 $A(a) \wedge B(a)$ 为真，

即 $A(a)$ 和 $B(a)$ 都为真，

所以有 $\exists xA(x)$ 以及 $\exists xB(x)$ 为真，得

$\exists xA(x) \wedge \exists xB(x)$ 为真

所以 $\exists x(A(x) \wedge B(x)) \Rightarrow \exists xA(x) \wedge \exists xB(x)$

证明公式4 $\forall xA(x) \vee \forall xB(x) \Rightarrow \forall x(A(x) \vee B(x))$

证明：由3得

$$\exists x(\neg A(x) \wedge \neg B(x)) \Rightarrow \exists x \neg A(x) \wedge \exists x \neg B(x)$$

$$\exists x \neg(A(x) \vee B(x)) \Rightarrow \neg \forall x A(x) \wedge \neg \forall x B(x)$$

$$\neg \forall x(A(x) \vee B(x)) \Rightarrow \neg(\forall x A(x) \vee \forall x B(x))$$

$$\text{即 } \forall x A(x) \vee \forall x B(x) \Rightarrow \forall x(A(x) \vee B(x))$$

公式4得证。

特别要注意蕴含式的方向，不要搞错

多个量词的量化次序

1. $\forall x \forall y A(x,y) \Leftrightarrow \forall y \forall x A(x,y)$

2. $\forall x \forall y A(x,y) \Rightarrow \exists y \forall x A(x,y)$

3. $\exists y \forall x A(x,y) \Rightarrow \forall x \exists y A(x,y)$

4. $\forall x \exists y A(x,y) \Rightarrow \exists x \exists y A(x,y)$

5. $\forall y \forall x A(x,y) \Rightarrow \exists x \forall y A(x,y)$

6. $\exists x \forall y A(x,y) \Rightarrow \forall y \exists x A(x,y)$

7. $\forall y \exists x A(x,y) \Rightarrow \exists x \exists y A(x,y)$

8. $\exists x \exists y A(x,y) \Leftrightarrow \exists y \exists x A(x,y)$

■ 置换定理

- 设 $A(x_1, x_2, \dots, x_n) \Leftrightarrow B(x_1, x_2, \dots, x_n)$, 而 A 是公式 C 中的子公式, 将 B 替换 C 中之 A (不必每一处) 得 D , 则 $C \Leftrightarrow D$ 。

■ 对偶原理

- 在公式 $A \Leftrightarrow B$ 或 $A \Rightarrow B$ 中, A, B 仅含运算符 \wedge, \vee 和 \neg , 将 A, B 中的全称量词与存在量词互换, \wedge 与 \vee 互换, T 和 F 互换, 得到 A, B 的对偶式 A^*, B^* , 则 $A^* \Leftrightarrow B^*, B^* \Rightarrow A^*$

3.7 谓词演算的推理理论

■ 谓词演算中推理的形式结构

□ 推理的形式结构仍为

$$H_1 \wedge H_2 \wedge \dots \wedge H_n \Rightarrow C$$

若 $H_1 \wedge H_2 \wedge \dots \wedge H_n \rightarrow C$ 是永真式, 则称前提 H_1, H_2, \dots, H_n 逻辑的推出结论 C , 其中 H_1, H_2, \dots, H_n 和 C 都是谓词公式

■ 谓词演算中的推理规则

□ 命题演算中的推理规则, 可在谓词推理理论中应用

■ P 规则、 T 规则、 CP 规则

■ 与量词有关的规则

全称示例规则 US (Universal Specialization)

- 又称全称指定规则
- 作用：去掉全称量词
- 两种形式：

$$\forall x A(x) \Rightarrow A(y)$$

$$\forall x A(x) \Rightarrow A(c)$$

- 使用此规则时要注意：

(1) y 为任意不在 $A(x)$ 中约束出现的个体变元；

(2) c 为任意的个体常元

- 例：设 $A(x,y):x < y$ 考查 $\forall x \exists y A(x,y)$

□ 可得到结论 $\exists y A(z,y)$

□ 但不能得出结论 $\exists y A(y,y)$

存在示例规则ES(Existential Specification)

- 又称存在指定规则
- 作用：去掉存在量词
- 形式： $\exists x A(x) \Rightarrow A(c)$
- 使用此规则时要注意：
 - (1) c 是使 A 为真的特定个体常元；
 - (2) c 不在 $A(x)$ 中出现
 - (3) 如果 $A(x)$ 中有其他自由变元出现，且 x 是随其他自由变元变化的，那么不能使用此规则
- 例：设 $A(x,y): x < y$ ，考查如下推理过程是否正确
$$\forall x \exists y A(x,y)$$
$$\exists y A(z,y)$$
$$A(z,c)$$

存在推广规则EG(Existential Generalization)

- 作用：添加存在量词
- 形式： $A(c) \Rightarrow \exists x A(x)$
- 使用此规则时注意：
 - (1) c 是个体域中某个确定的个体
 - (2) 代替 c 的 x 不能已在 $A(c)$ 中出现
- 例：设 $A(x,y): x < y$ ，对 $\forall x \exists y A(x,y)$ 考查如下推理过程
 - $A(x,c)$
 - $\exists x A(x,x)$
 - 错误

全称推广规则UG(Universal Generalization)

- 作用：添加全称量词
- 形式： $A(y) \Rightarrow \forall x A(x)$
- 使用此规则时注意：
 - (1) y 在 $A(y)$ 中自由出现，且 y 取任何值时 A 均为真
 - (2) x 不在 $A(y)$ 中约束出现
- 例：设 $A(x,y): x < y$ ，考查如下推理过程

$$\exists x A(x,y)$$

$$\forall x \exists x A(x,x)$$

错误

量词四规则的使用限制条件

■ 非常重要

□ ES, US, EG, UG 四条规则都只有在量词的作用域是 **整个公式** 的情况下才能使用

□ 例：考察如下推理过程

$$\forall xP(x) \rightarrow \exists yQ(y)$$

$$\forall xP(x) \rightarrow Q(c) \quad \text{ES}$$

$$\text{或 } P(z) \rightarrow \exists yQ(y) \quad \text{US}$$

错误!

推理举例

1.证明苏格拉底的三段论。

令 $M(x)$: x 是人。 $D(x)$: x 是要死的。 a :苏格拉底。

符号化为:

$$\forall x(M(x) \rightarrow D(x)), M(a) \Rightarrow D(a)$$

- | | |
|--|------------|
| (1) $\forall x(M(x) \rightarrow D(x))$ | P |
| (2) $M(a) \rightarrow D(a)$ | US (1) |
| (3) $M(a)$ | P |
| (4) $D(a)$ | T (2)(3) I |

2.所有自然数都是整数。有些数是自然数。
因此有些数是整数。

$A(x)$: x 是自然数, $B(x)$: x 是整数。

$\forall x(A(x) \rightarrow B(x)), \quad \exists xA(x) \Rightarrow \exists xB(x)$

(1) $\forall x(A(x) \rightarrow B(x))$ P

(2) $\exists xA(x)$ P

(3) $A(c) \rightarrow B(c)$ US (1)

(4) $A(c)$ ES (2)

(5) $B(c)$ T(3)(4) I

(6) $\exists xB(x)$ EG (5)



- | | |
|--|-----------|
| (1) $\forall x(A(x) \rightarrow B(x))$ | P |
| (2) $\exists x A(x)$ | P |
| (3) $A(c)$ | ES(2) |
| (4) $A(c) \rightarrow B(c)$ | US (1) |
| (5) $B(c)$ | T(3)(4) I |
| (6) $\exists x B(x)$ | EG(5) |



3. 不认识错误的人，也不能改正错误。有些诚实的人改正了错误。所以有些诚实的人是认识了错误的人。

设 $A(x)$: x 是认识错误的人。


$B(x)$: x 改正了错误。 $C(x)$: x 是诚实的人。

符号化为：

$$\forall x (\neg A(x) \rightarrow \neg B(x)),$$

$$\exists x (C(x) \wedge B(x)),$$

$$\Rightarrow \exists x (C(x) \wedge A(x))$$


$$\forall x (\neg A(x) \rightarrow \neg B(x)), \exists x (C(x) \wedge B(x)) \Rightarrow \exists x (C(x) \wedge A(x))$$

$$(1) \quad \exists x (C(x) \wedge B(x)) \quad P$$

$$(2) \quad C(c) \wedge B(c) \quad ES \ (1)$$

$$(3) \quad C(c) \quad T \ (2)I$$

$$(4) \quad B(c) \quad T \ (2)I$$

$$(5) \quad \forall x (\neg A(x) \rightarrow \neg B(x)) \quad P$$

$$(6) \quad \neg A(c) \rightarrow \neg B(c) \quad US \ (5)$$

$$(7) \quad \neg \neg A(c) \quad T \ (4)(6) \ I$$

$$(8) \quad A(c) \quad T \ (7) \ E$$

$$(9) \quad C(c) \wedge A(c) \quad T \ (3)(8) \ I$$

$$(10) \quad \exists x (C(x) \wedge A(x)) \quad EG \ (9)$$

观察以下推理过程，指出问题1：

(1) $\exists xP(x) \wedge \exists xQ(x)$	P
(2) $\exists xP(x)$	T(1)I
(3) $\exists xQ(x)$	T(1)I
(4) $P(\underline{c})$	ES(2)
(5) $Q(\underline{c})$	ES(3)
(6) $P(c) \wedge Q(c)$	T(4)(5)I
(7) $\exists x(P(x) \wedge Q(x))$	EG(6)

满足P的特定
个体

c能满足Q?

事实上 $\exists xP(x) \wedge \exists xQ(x) \Rightarrow \exists x(P(x) \wedge Q(x))$ **不成立**

观察以下推理过程，指出问题2:

设 $D(x,y)$ 表示“ x 可被 y 整除”，个体域为
 $\{5,7,10,11\}$ 。

因为 $D(5,5)$ 和 $D(10,5)$ 为真，所以 $\exists xD(x,5)$ 为真。

因为 $D(7,5)$ 和 $D(11,5)$ 为假，所以 $\forall xD(x,5)$ 为假。

有以下推理过程

- | | |
|-----------------------|---------|
| (1) $\exists xD(x,5)$ | P |
| (2) $D(z,5)$ | T(1);ES |
| (3) $\forall xD(x,5)$ | T(2);UG |

因此， $\exists xD(x,5) \Rightarrow \forall xD(x,5)$

4. 一些病人喜欢所有医生。任何病人都不喜欢庸医。
所以没有医生是庸医。

设: $P(x)$: x 是病人, $D(x)$: x 是医生,

$Q(x)$: x 是庸医, $L(x,y)$: x 喜欢 y .

符号化为: $\exists x(P(x) \wedge \forall y(D(y) \rightarrow L(x,y)))$,

$\forall x(P(x) \rightarrow \forall y(Q(y) \rightarrow \neg L(x,y)))$

$\Rightarrow \neg \exists y(D(y) \wedge Q(y))$

$$\exists x (P(x) \wedge \forall y (D(y) \rightarrow L(x, y))) , \forall x (P(x) \rightarrow \forall y (Q(y) \rightarrow \neg L(x, y))) \\ \Rightarrow \neg \exists y (D(y) \wedge Q(y))$$

- | | |
|--|-------------|
| (1) $\exists x (P(x) \wedge \forall y (D(y) \rightarrow L(x, y)))$ | P |
| (2) $P(c) \wedge \forall y (D(y) \rightarrow L(c, y))$ | ES (1) |
| (3) $P(c)$ | T (2) I |
| (4) $\forall y (D(y) \rightarrow L(c, y))$ | T (2) I |
| (5) $\forall x (P(x) \rightarrow \forall y (Q(y) \rightarrow \neg L(x, y)))$ | P |
| (6) $P(c) \rightarrow \forall y (Q(y) \rightarrow \neg L(c, y))$ | US (5) |
| (7) $\forall y (Q(y) \rightarrow \neg L(c, y))$ | T (3) (6) I |
| (8) $D(z) \rightarrow L(c, z)$ | US (4) |
| (9) $Q(z) \rightarrow \neg L(c, z)$ | US (7) |
| (10) $L(c, z) \rightarrow \neg Q(z)$ | T (9) E |
| (11) $D(z) \rightarrow \neg Q(z)$ | T (8)(10) I |
| (12) $\neg D(z) \vee \neg Q(z)$ | T (11) E |
| (13) $\neg (D(z) \wedge Q(z))$ | T (12) E |
| (14) $\forall y \neg (D(y) \wedge Q(y))$ | UG (13) |
| (15) $\neg \exists y (D(y) \wedge Q(y))$ | T (14) E |

练习

$\exists x (A(x) \vee B(x)), \forall x (B(x) \rightarrow \neg C(x)), \forall x C(x) \Rightarrow \exists x A(x)$

(1) $\exists x (A(x) \vee B(x))$ P

(2) $A(c) \vee B(c)$ ES (1)

(3) $\forall x (B(x) \rightarrow \neg C(x))$ P

(4) $B(c) \rightarrow \neg C(c)$ US (3)


(5) $\forall x C(x)$ P

(6) $C(c)$ US (5)

(7) $\neg B(c)$ T (4) (6) I

(8) $A(c)$ T (2) (7) I

(9) $\exists x A(x)$ EG (8)


$$5. \quad \exists x (P(x) \rightarrow Q(x)) \Rightarrow \forall x P(x) \rightarrow \exists x Q(x)$$

$$(1) \quad \forall x P(x) \quad P(\text{附加前提})$$

$$(2) \quad \exists x (P(x) \rightarrow Q(x)) \quad P$$

$$(3) \quad P(c) \rightarrow Q(c) \quad \text{ES (2)}$$

$$(4) \quad P(c) \quad \text{US (1)}$$

$$(5) \quad Q(c) \quad \text{T (3)(4) I}$$

$$(6) \quad \exists x Q(x) \quad \text{EG (5)}$$

$$(7) \quad \forall x P(x) \rightarrow \exists x Q(x) \quad \text{CP}$$

用反证法证明5:

$$\exists x (P(x) \rightarrow Q(x)) \Rightarrow \forall x P(x) \rightarrow \exists x Q(x)$$

- | | | |
|------|---|------------|
| (1) | $\neg(\forall x P(x) \rightarrow \exists x Q(x))$ | P(假设前提) |
| (2) | $\neg(\neg \forall x P(x) \vee \exists x Q(x))$ | T (1) E |
| (3) | $\forall x P(x) \wedge \neg \exists x Q(x)$ | T(2) E |
| (4) | $\forall x P(x)$ | T(3) I |
| (5) | $\neg \exists x Q(x)$ | T(3) I |
| (6) | $\exists x (P(x) \rightarrow Q(x))$ | P |
| (7) | $P(c) \rightarrow Q(c)$ | ES (6) |
| (8) | $P(c)$ | US (4) |
| (9) | $Q(c)$ | T (7)(8) I |
| (10) | $\exists x Q(x)$ | EG (9) |
| (11) | $\neg \exists x Q(x) \wedge \exists x Q(x)$ | T(5)(10) I |

练习

分别用反证法和附加前提法证明：

$$\forall x (A(x) \vee B(x)) \Rightarrow \forall x A(x) \vee \exists x B(x)$$

■ 反证法：

- | | |
|--|--------------|
| (1) $\neg(\forall x A(x) \vee \exists x B(x))$ | P(假设前提) |
| (2) $\neg\forall x A(x) \wedge \neg\exists x B(x)$ | T (1) E |
| (3) $\neg\forall x A(x)$ | T(2) I |
| (4) $\neg\exists x B(x)$ | T(2) I |
| (5) $\exists x \neg A(x)$ | T(3) E |
| (6) $\forall x \neg B(x)$ | T(4) E |
| (7) $\neg A(c)$ | ES (5) |
| (8) $\neg B(c)$ | US (6) |
| (9) $\forall x (A(x) \vee B(x))$ | P |
| (10) $A(c) \vee B(c)$ | US (9) |
| (11) $B(c)$ | T (7) (10) I |
| (12) $\neg B(c) \wedge B(c)$ | T (8) (11) I |

■ 附加前提法:

- | | |
|--|-------------|
| (1) $\neg \forall x A(x)$ | P (附加) |
| (2) $\forall x (A(x) \vee B(x))$ | P |
| (3) $\exists x \neg A(x)$ | T (1) E |
| (4) $\neg A(c)$ | ES (3) |
| (5) $A(c) \vee B(c)$ | US (2) |
| (6) $B(c)$ | T (4) (5) I |
| (7) $\exists x B(x)$ | EG (6) |
| (8) $\neg \forall x A(x) \rightarrow \exists x B(x)$ | CP |
| (9) $\forall x A(x) \vee \exists x B(x)$ | T (8) E |

用推理证明公式:

$$\exists y \forall x A(x, y) \Rightarrow \forall x \exists y A(x, y)$$

- | | | |
|-----|-------------------------------|--------|
| (1) | $\exists y \forall x A(x, y)$ | P |
| (2) | $\forall x A(x, c)$ | ES (1) |
| (3) | $A(z, c)$ | US (2) |
| (4) | $\exists y A(z, y)$ | EG (3) |
| (5) | $\forall x \exists y A(x, y)$ | UG (4) |

推理注意事项:

- 注意使用ES、US、EG、UG的限制条件
- 对于同一个个体变元，既有带 \forall 也有带 \exists 的前提，去量词时，应先去 \exists 后去 \forall ，这样才可以特指同一个个体 **c**
- 添加和删去量词时，该量词必须是公式的最左边的量词，且此量词的前边**无任何符号**，它的辖域作用到公式末尾

(1)	$\forall xP(x) \rightarrow \exists yQ(y)$	P
(2)	$\forall xP(x) \rightarrow Q(b)$	✗ ES(1)
(3)	$P(a) \rightarrow Q(b)$	✗ US(2)

错误的作法

(1)	$\forall xP(x) \rightarrow \exists yQ(y)$	P
(2)	$\neg \forall xP(x) \vee \exists yQ(y)$	T(1) E
(3)	$\exists x \neg P(x) \vee \exists yQ(y)$	T(2) E
(4)	$\exists x \exists y (\neg P(x) \vee Q(y))$	T(3) E
(5)	$\exists y (\neg P(a) \vee Q(y))$	ES(4)
(6)	$\neg P(a) \vee Q(b)$	ES(4)
(7)	$P(a) \rightarrow Q(b)$	T(5) E

正确的作法

(1) $\neg \forall x P(x)$ P
(2) $\neg P(c)$ US(1)

错误的作法

(1) $\neg \forall x P(x)$ P
(2) $\exists x \neg P(x)$ T(1)E
(3) $\neg P(c)$ ES (2)

正确的作法

(1) $\forall x \exists y P(x, y)$ P
(2) $\forall x P(x, c)$ ES(1)

错误的作法

(1) $\forall x \exists y P(x, y)$ P
(2) $\exists y P(a, y)$ US(1)

正确的作法

谓词逻辑的应用

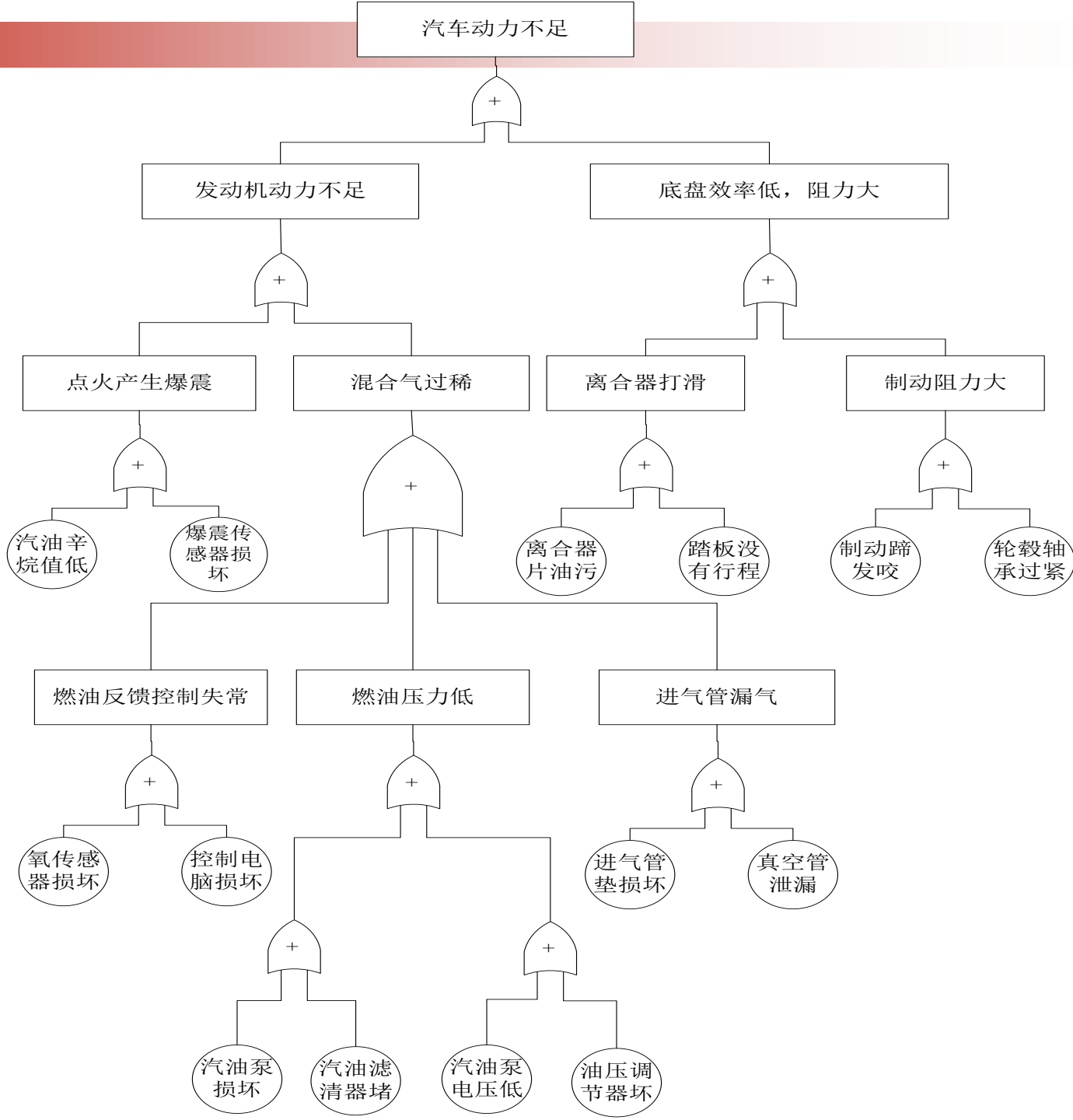
■ 故障树分析法

- 美国贝尔电报公司的电话实验室于**1962**年开发
- 采用逻辑的方法，形象地进行危险的分析工作
- 是安全系统工程的主要分析方法之一

■ 故障树图

- 是一种逻辑因果关系图，它根据元部件状态(基本事件)来显示系统的状态(顶事件)

例：故障树分析法在汽车故障诊断中的应用



谓词逻辑的应用

- 谓词逻辑在设计**PLC**梯形图中使用的研究
 - 张少明, 周名侦. 机电工程技术, 2007(36),1: 78-80
- 基于案例与规则推理的故障诊断专家系统
 - 江志农, 王慧, 魏中青. 计算机工程, 2011(37),1:238-240, 243

3.8 自动定理证明*

- 数理逻辑为自动推理证明奠定了基础
 - 数理逻辑的创始人——亚里士多德
 - 三段论
- 大前提、小前提和 结论三个部分的论证

例：凡人都会死（大前提）
苏格拉底是人（小前提）
所以：苏格拉底会死（结论）



亚里士多德

自动证明的提出



笛卡尔



莱布尼茨

- 笛卡尔、莱布尼茨（17世纪）
 - 萌发了用机械系统实现定理证明的想法
 - 把一类数学问题当作一个整体，建立统一的证明过程，按照规定的程序步骤机械地进行下去，在有限步骤之后判断出定理的正确性

自动证明的发展

- 由于传统的兴趣和应用的價值，初等几何问题的自动求解成为数学机械化的研究焦点。
- 希尔伯特
 - 20世纪初，在他的名著《几何基础》中给出了一条可以对一类几何命题进行判定的定理。
 - 希尔伯特对命题的要求太高，当时仅能解决很少的一类几何定理的机器证明，却是历史上第一个关于某类几何命题的机械化检验方法的定理



希尔伯特

自动证明的发展

■ 塔斯基（波兰）

- 1950年，证明了：“一切初等几何和初等代数范围的命题都可以用机械方法判定”
- 为几何定理的机器证明开拓了一条利用代数方法的途径
- 方法太复杂，即使用高速计算机也证明不了稍难的几何定理



塔斯基

自动证明的发展

■ 纽厄尔,西蒙和肖

- 1956年,发表了论文《逻辑理论机》(LTM)
- 认为LTM不仅是计算机智力的有力证明,也是人类认知本质的证明
- 1957年开发了最早的AI程序设计语言IPL语言
- 1960年,成功地合作开发了“通用问题求解系统”GPS (General Problem Solver)



艾伦.纽厄尔



赫伯特.西蒙

自动证明的发展

■ 美籍华裔王浩

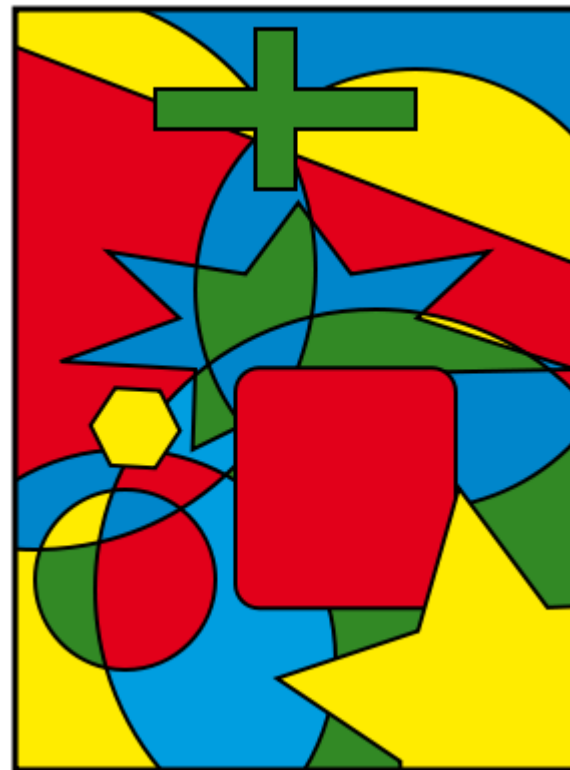
- 第一次明确提出“**走向数学的机械化**”
- 1959年，采用“王浩算法”用计算机证明了罗素、怀海德的巨著《数学原理》中的几百条有关命题逻辑的定理，仅用了 9 分钟
- 宣告了用计算机进行定理证明的可能性
- 在1984年首届自动定理证明大会上获最高奖——“里程碑”奖。



王浩

自动证明的发展

- 1977年，美国年轻的数学家阿佩尔等在高速电子计算机上耗费 1200 小时的计算时间，证明了著名的“四色定理”，人类百年悬而未决的疑问最终被圆满解决了。这一成就轰动一时，成为机器定理证明的一个典范。



属于中国的自动证明方法—吴方法

■ 吴文俊



吴文俊

- 1977年，发表论文《初等几何判定问题与机械化证明》
- 1984年，学术专著《几何定理机器证明的基本原理》
- 1985年，论文《关于代数方程组的零点》发表——**吴文俊消元法**
- 利用中国古典数学的成就，提出具有中国特色的自动证明方法
- 2001年荣获首届国家科学技术最高奖



推理是如何进行的？

- 推理过程多种多样

- 例1:

- 如果今天不下雨，我就去你家
 - 今天没有下雨

- 例2:

- 小王说他下午或者去图书馆或者在家休息
 - 小王没去图书馆

- 计算机如何选择？

消解原理（归结原理）

■ 美国数学家鲁滨逊

提出消解原理（1965年）

基本的出发点：要证明一个命题为真都可以通过证明其否命题为假来得到

将多样的推理规则简化为一个——**消解**（归结）



鲁滨逊

什么叫消解



- 消解只能在仅含否定和析取联接词的公式(子句)间进行
- 必须先把公式化成规范的形式——范式

消解原理

■ 定义3.8.1

□ 原子公式及其否定统称为文字，任何文字的析取式称为子句。

□ 例 $R \vee \neg S$, $P(x) \vee Q(x)$, $\neg A(x, f(x)) \vee Q(x, g(x))$

■ 定义3.8.2

□ 不包含任何文字的子句称为空子句。

■ 由于空子句不含有文字，它不能被任何解释满足，所以**空子句是永假的**，不可满足的。

■ 由子句构成的集合称为子句集。在谓词逻辑中，任何一个谓词公式都可以通过应用等价关系及推理规则化成相应的子句集(主合取范式)。

谓词演算公式化为子句式

□ 步骤:

1. 消去蕴涵符号

用 $\sim A \vee B$ 代换 $A \rightarrow B$

2. 把非号 \sim 移入内层

$$\sim (P \wedge Q) = \sim P \vee \sim Q$$

$$\sim (P \vee Q) = \sim P \wedge \sim Q$$

$$\sim (\forall x)P = (\exists x) \sim P$$

$$\sim (\exists x)P = (\forall x) \sim P$$

3. 对变量标准化

改变变量名，使不同的变量不同名

$$(\forall x)P(x) \vee (\exists x)Q(x)$$

$$(\forall x)P(x) \vee (\exists y)Q(y)$$

4. 消去存在量词(具体化 Skolemizing)，两种情况：

- a) 存在量词不在全称量词的辖域内——用新的个体常量替换受存在量词约束的变元
- b) 存在量词在全称量词的辖域内

Skolem函数，即具体化函数

$$(\forall x)P(x) \vee (\exists y)Q(y) \Rightarrow (\forall x)P(x) \vee Q(a)$$

$$(\forall x_1)(\forall x_2)\dots(\forall x_n)(\exists y)P(x_1, x_2, \dots, x_n, y)$$

$$\Rightarrow (\forall x_1)(\forall x_2)\dots(\forall x_n)P(x_1, x_2, \dots, x_n, f(x_1, x_2, \dots, x_n))$$

5. 化为前束形式

把全称量词提到最外层

前束形:= (前缀) {母式}

↑ ↑

全称量词串 无量词公式

6. 把母式化为合取范式

7. 消去全称量词

8. 消去连词符号 \wedge ，写成子句集

9. 变量分离标准化

10. 改变变量名称，使一个变量符号不出现在一个以上的子句中

什么叫消解

■ 例1:

□ 小王说他下午或者去图书馆或者在家休息

□ 小王没去图书馆

R——小王下午去图书馆

S——小王下午在家休息

$$\left. \begin{array}{l} R \vee S \\ \neg R \end{array} \right\} \Rightarrow S$$

■ 例2:

□ 如果今天不下雨，我就去你家

□ 今天没有下雨

$$\neg P \rightarrow Q \Leftrightarrow P \vee Q$$

$$\neg P$$

怎么利用消解原理进行证明？

- 消解反演
- 通俗的说就是“反证法”
 - 要证命题 A 恒为真，等价于证 $\neg A$ 恒为假
- 证明过程
 - 否定结论 R ，得 $\neg R$ ；
 - 把 $\neg R$ 添加到已知前提集合 F 中去；
 - 把新产生的集合 $\{ \neg R, F \}$ 化成范式；
 - 应用消解原理，不断求消解式，直到得到一个表示矛盾的空子句

消解原理的局限性

- 消解原理推进了用逻辑方法进行机器证明的研究。使得自动定理证明领域发生了质的变化
- 但是
 - 要求把逻辑公式转化为某种范式，丧失了其固有的逻辑蕴含语义
如果一个人发烧、肚子痛，那么很可能是感染了。
$$\forall x (\text{has_fever}(x) \wedge \text{tummy_pain}(x) \rightarrow \text{has_an_infection}(x))$$
$$\neg \text{has_fever}(x) \vee \neg \text{tummy_pain}(x) \vee \text{has_an_infection}(x)$$
 - 表达能力的局限性, 限制了应用范围
 - 后来有许多重要改进：语义归结、锁归结、线性归结等

自动推理证明中的一些问题

■ 尽管取得了许多成就，但仍有许多问题

□ 沃斯，《自动推理：33个基本研究问题》，1988年

□ 列举了关于策略、推理规则、归约、知识表示、逻辑程序设计、情况分析法、归结法、定义的推广或简化、发现新定理、方法的选择以及类比推理等33个问题

□ 例：

- 考虑某给定问题时，使用什么准则来决定采用情况分析法，对这样的方法，使用什么准则来选择所考虑的情况？
- 确定什么性质，自动推理程序有可能发现新定理(而不是证明已有定理)？



小结

本章重点掌握内容：

- 1.各基本概念清楚。
- 2.会命题符号化。
- 3.熟练掌握等价公式和永真蕴涵式。
- 4.熟练掌握谓词逻辑的三种推理方法。