第二篇 数理逻辑
Mathematics Logic

智能科学与技术系（IST）
Department of Intelligence Sci. & Tech.

数理逻辑

- 逻辑学
  - 研究人的思维形式和规律的科学
  - 根据研究的对象和方法
    - 形式逻辑
    - 辩证逻辑
- 数理逻辑
  - 用数学方法研究推理的规律和形式的科学
  - 推理：由一个或几个判断推出一个新判断的思维形式
  - 数学方法
    - 建立一套表意符号体系，对具体事物进行抽象的形式研究方法
  - 又称符号逻辑
- 两种演算
  - 命题逻辑
  - 谓词逻辑

形式语言与自然语言

- 数理逻辑需建立一套表意符号体系
- 形式语言符号体系
- 自然语言
  - 二义性
    - Double click the mouse, then it'll run.
    - 小王现在不方便接电话，他方便去了
- 建立形式语言符号体系的目的
  - 消除二义性

主要内容

第二章 命题逻辑

- 2.1 命题的概念与表示
- 2.2 逻辑联结词
- 2.3 命题演算的合式公式
- 2.4 等价与蕴涵
- 2.5 功能完备集及其他联接词
- 2.6 对偶与范式
- 2.7 命题演算的推理理论

第三章 谓词逻辑

- 3.1 谓词的概念与表示
- 3.2 命题函数与量词
- 3.3 谓词演算的合式公式
- 3.4 变元的约束
- 3.5 谓词公式的解释
- 3.6 谓词演算的永真式
- 3.7 谓词演算的推理理论
- 3.8 自动推理证明

命题逻辑
Proposition Logic

智能科学与技术系（IST）
Department of Intelligence Sci. & Tech.

2.1 命 题（Proposition）

2.1.1 命题

- **断言**
  - 一个陈述语句
- **命题：具有确定真假含义的陈述句**
  - 命题是一个非真即假(不可兼)的**断言**
  - 如果命题是真
    - 命题的**真值**（Truth Values）为**真**
    - **真命题**
    - 大写字母"T"(1)表示
  - 如果命题是假
    - 命题的**真值**是**假**
    - **假命题**
    - 大写字母"F"(0)表示

例：

- 今天下雪
- 3+3=6
- 2 是偶数而 3 是奇数
- 1+101=110
- 明年的今天会下雨
- 较大的偶数都可表示为两个质数之和

例：

- x+y＞4
- 真好啊!
- x=3
- 你去哪里?
- 0*x=0
- 我正在说谎

- 原子命题(**Primitive proposition**)
  - 由简单陈述句表示的判断
  - 命题逻辑规定：原子命题是不可再分的
- 命题的表示
  - 常用大写英文字母（或带下标）表示
    - **P**表示“雪是白的”
    - **Q**表示“北京是中国的首都”
- 命题变元（命题词）
  - **P**表示任一命题时，**P**就称为命题变元（命题词）
  - 命题词不是命题
  - 命题指具体的陈述句，是有确定的真值
  - 命题变元的真值不定，只当将某个具体命题代入命题变元时，命题变元化为命题，方可确定其真值

- 复合命题(Compound proposition)
  - 一个或几个简单命题用联结词联结所构成的命题
  - 例：“张三学英语和李四学日语”
- 两个特殊的命题词
  - 命题常量
    - T：永远表示真命题
    - F：永远表示假命题
  - T和F的两种含义
    - 命题常量
    - 命题的真值

- 数理逻辑不关心内容
  - 具体的陈述句的真值究竟为什么或在什么环境下是真还是假
- 数理逻辑只关心形式
  - 命题可以被赋予真或假这样的可能性，以及规定了真值后怎样与其他命题发生联系

2.2 逻辑联结词

- 命题和原子命题常可通过一些联结词构成新命题, 这种新命题叫复合命题
- 例:

P: 明天下雪,　　　　Q: 明天下雨

“明天不下雪”　　　　“非P”

“明天下雪并且明天下雨”　　　　“P并且Q”

“明天下雪或者明天下雨”　　　　“P或Q”

1. 否定词┐ （~， negation）

- 设*P*表示命题, 那么“*P*不真”是另一命题, 表示为┐*P*, 叫做*P*的否定, 读做“非*P*”。 如果*P*是假, 则┐*P*是真, 反之亦然。

P	┐*P*
F T	T F

真值表（**Truth Table)**

与自然语言中的“不”，“否”，“非”，“没有”，“未必”等类似

例

(a)　P: 4 是质数。

$\neg P$: 4 不是质数。

(b) Q: 这些都是男同学。

$\neg Q$: 这些不都是男同学。

2. 合取词∧(Conjunction)

- 如果P和Q是命题, 那么“P并且Q”也是一命题, 记为$P \wedge Q$, 称为P和Q的合取, 读做“P与Q”或“P并且Q”。

P	Q	$P \wedge Q$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

例 P: 王华的成绩很好
Q: 王华的品德很好
$P \wedge Q$: 王华的成绩很好并且品德很好。

3. 析取词∨(disjunction)

- 如果P和Q是命题, 则 “P或Q”也是一命题, 记作$P \vee Q$, 称为P和Q的析取, 读做 “P或Q”。

P	Q	$P \vee Q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

例

可兼或

(*a*)今晚我写字或看书

P: 今晚我写字, Q: 今晚我看书。

$P \vee Q$

排斥或

(*b*)选小王或小李当班长

R :选小王当班长，S :选小李当班长

$R \vee S$?

✗

$(R \vee S) \wedge \neg (R \wedge S)$

$(R \wedge \neg S) \vee (\neg R \wedge S)$

4.条件词→(蕴涵，蕴含，implication)

- 如果P和Q是命题, 那么"P蕴含Q"也是命题, 记为$P \to Q$, 称为蕴含式, 读做"如果P, 那么Q"或"P则Q"。运算对象P叫做***前提***, ***假设***或***前件***, 而Q叫做***结论***或***后件***。

P	Q	$P \to Q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

与自然语言中的"如果... 则 ...", "如果... 那么 ...", "只要...就..."等类似

例

(a) P: 天不下雨, Q: 草木枯黄。

$P \rightarrow Q$: 如果天不下雨, 那么草木枯黄。

(b) R: G是正方形, S: G的四边相等。

$R \rightarrow S$: 如果G是正方形, 那么G的四边相等。

(c) W: 桔子是紫色的, V: 大地是不平的。

$W \rightarrow V$: 如果桔子是紫色的, 那么大地是不平的。

因果关系

- 引入→的目的是希望用来描述命题间的推理，表示因果关系
- 使用**P→Q**能描述推理
  - 如果今天是星期二，那么明天是星期天
  - 如果今天是星期一，那么明天是星期天
  - 如果**n > 3**那么**n² > 9(n=4, n=2, n=-4)**
- →与 “如果…那么…”有一致的一面,同时也有与常识不一致的地方
  - 数理逻辑不关心具体命题，只关心推理的形式
  - 人为的规定，对**P**为**F**时**P→Q**的值另作规定也是可以的

蕴含式$P \rightarrow Q$可以用多种方式陈述: ;

"若P, 则Q"

"P是Q的充分条件"

"Q是P的必要条件"

"Q每当P" ;

"P仅当Q"等。

给定命题$P \rightarrow Q$, 我们把$Q \rightarrow P$, $\neg P \rightarrow \neg Q$, $\neg Q \rightarrow \neg P$分别叫做命题$P \rightarrow Q$的**逆命题**, **反命题**和**逆反命题.**

例

令：P：天气好。　　Q：我去公园。

1. 如果天气好，我就去公园。 $P \to Q$
2. 只要天气好，我就去公园。 $P \to Q$
3. 天气好，我就去公园。 $P \to Q$
4. 仅当天气好，我才去公园。 $Q \to P$
5. 只有天气好，我才去公园。 $Q \to P$
6. 我去公园，仅当天气好。 $Q \to P$

5. 双条件词↔（等值，**Biconditional**）

- 如果P和Q是命题, 那么“P等值于Q”也是命题, 记为$P \leftrightarrow Q$, 称为*双条件式*（**等值式**）, 读做“P当且仅当Q”或“P等值于Q”。

$P \leftrightarrow Q$也读做“P是Q的充要条件”。

P	Q	$P \leftrightarrow Q$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

联结词的注意事项

- 要熟练掌握这五个联结词在自然语言中所表示的含义以及它们的真值表的定义
- 特别要注意“或”的二义性，即要区分给定的“或”是“可兼取的或”还是“不可兼取的或”。
- 特别要注意“→”的用法，它既表示“充分条件”也表示“必要条件”，即要弄清哪个作为前件，哪个作为后件
- 联结词的优先级顺序
  - $\neg$，$\wedge$，$\vee$，$\rightarrow$，$\leftrightarrow$

练习：填空

- 已知$P \wedge Q$为T，则P为(   )，Q为(   )
- 已知$P \vee Q$为F，则P为(   )，Q为(   )
- 已知P为F，则$P \wedge Q$为(   )
- 已知P为T，则$P \vee Q$为(   )
- 已知$P \vee Q$为T，且P为F，则Q为(   )
- 已知$P \rightarrow Q$为F，则P为(   )，Q为(   )
- 已知P为F，则$P \rightarrow Q$为(   )
- 已知Q为T，则$P \rightarrow Q$为(   )
- 已知 $\neg P \rightarrow \neg Q$为F，则P为(   )，Q为(   )

2.3 命题演算的合式公式

- 命题变元与命题常元
  - 命题常元
    - 命题
    - 有具体含义 (真值)的
    - 例：“3是素数。”；T；F
  - 命题变元
    - 用大写的英字母如P、Q等表示任何命题
  - 真值指派
    - 解释
    - 将一个命题**常元**赋予命题变元的过程
    - 或者是直接赋给命题变元真值“T”或“F”的过程

注意：命题变元本身**不是**命题，只有给它一个解释，才变成命题。

命题演算的合式公式 (命题公式，**wff**，**well formed formulas**)

- 定义2.3.1：

  (1) 单个命题变元是个合式公式。

  (2) 若A是合式公式，则¬A是合式公式。

  (3) 若A和B是合式公式，则(A∧B)，(A∨B)，(A→B)和(A↔B)都是合式公式。

  (4) 当且仅当有限次地应用(1)，(2)，(3)所得到的含有***命题变元***、***联结词***和***圆括号***的符号串是**合式公式**。

  此外，称逐次使用规则(1)，(2)，(3)的过程中所得到的命题公式为最后构成的命题公式的***子公式***。

- 递归定义
  - (1)——基本项，是递归的基础
  - (2)(3)——递归项，是递推规则
  - (4)——极小化，保证所构造集合的唯一性
- **命题函数**
  - 有n个命题变元的命题公式可用函数$A(P_1,P_2,\ldots,P_n)$的形式表示
  - 其中$P_1,P_2,\ldots,P_n$按字典顺序排列

例

(a) $(P\rightarrow(P\vee Q))$

解 (i) P是命题公式　　根据条款(1)

(ii) Q是命题公式　　根据条款(1)

(iii) $(P\vee Q)$是命题公式　　根据(i)(ii)和条款(3)

(iv) $(P\rightarrow(P\vee Q))$是命题公式　　根据(i)(iii)和条款(3)

例

- 下面的式子是否为合式公式：

  $P \wedge Q$， $P \neg \rightarrow R$， $P \vee Q \wedge R$

- 修改

  $(P \wedge Q)$，$(\neg P \rightarrow R)$，$((P \vee Q) \wedge R)$

- 圆括号的省略规则
  - 最外层的圆括号可以省去
  - 符合联结词优先级顺序的，括号可省去
  - 相同的联结词，按从左至右次序计算时，括号可省去

$$(\neg((P\wedge\neg Q)\vee R)\rightarrow((R\vee P)\vee Q))$$

$$\neg((P\wedge\neg Q)\vee R)\rightarrow((R\vee P)\vee Q)$$

$$\neg(P\wedge\neg Q\vee R)\rightarrow(R\vee P\vee Q)$$

$$\neg(P\wedge\neg Q\vee R)\rightarrow R\vee P\vee Q$$

命题符号化

- 用形式语言所表示的命题公式符号串来表示给定的命题
- 例
  - 他既有理论知识又有实践经验

    P：他有理论知识　　　　Q：他有实践经验

    $$P \wedge Q$$
  - 如果明天不是雨夹雪则我去学校

    P：明天下雨　　Q：明天下雪　　R：我去学校

    $$\neg(P \wedge Q) \rightarrow R$$
  - 如果明天不下雨并且不下雪则我去学校

    $$\neg P \wedge \neg Q \rightarrow R$$

- 如果明天下雨或下雪则我不去学校

$$P \vee Q \rightarrow \neg R$$

- 明天, 我将雨雪无阻一定去学校

$$P \wedge Q \wedge R \vee \neg P \wedge Q \wedge R \vee P \wedge \neg Q \wedge R \vee \neg P \wedge \neg Q \wedge R$$

- 当且仅当明天不下雪并且不下雨时我才去学校

$$\neg P \wedge \neg Q \leftrightarrow R$$

$$P \vee Q \leftrightarrow \neg R$$

- 仅当明天不下雪并且不下雨时我才去学校

$$R \rightarrow \neg P \wedge \neg Q$$

- 说小学生编不了程序, 或说小学生用不了个人计算机, 那是不对的

P：小学生会编程序　　　Q：小学生会用个人计算机

$$\neg (\neg P \vee \neg Q)$$

$$P \wedge Q$$

练习

- 将下列命题符号化
  - 张三**与**李四是表兄弟
  - 张三**或**李四都能做这件事
  - 今晚我在家里看电视**或**去体育场看球赛
  - 今天我上班，除非今天我病了

代入实例

- 定义2.3.2
  - 设A和B是两个命题公式，如果将A中的某些命题变元用命题公式进行代换便可得到B，并且此种代换满足：

    （1）被代换的是命题变元

    （2）如果要代换某个命题变元，则要将该命题变元在A中的一切出现进行代换

    （3）代换必须同时独立进行

  此时称B是A的一个代换实例（代入实例）
  - 例
    - $A(P,Q) = P\rightarrow Q$

      $A(P,Q\wedge\neg R) = P\rightarrow Q\wedge\neg R$
    - $A(P,Q,R,S) = (P\rightarrow Q)\wedge R\wedge(S\rightarrow(P\rightarrow Q))$

      $(P\rightarrow Q)\wedge S\wedge(R\rightarrow(P\rightarrow Q))$，$(\neg P\rightarrow Q)\wedge\neg R\wedge(\neg S\rightarrow(\neg P\rightarrow Q))$

      ~~$P\wedge R\wedge(S\rightarrow P)$~~，~~$(\neg P\rightarrow Q)\wedge R\wedge(R\rightarrow(P\rightarrow Q))$~~

真值指派（解释）

- 定义2.3.3
  - 设$A(P_1,P_2,\ldots,P_n)$是一个命题公式，$P_1,P_2,\ldots,P_n$是出现于其中的全部命题变元。P_i有两种取值可能，$P_1,P_2,\ldots,P_n$有2^n种取值可能，$P_1,P_2,\ldots,P_n$的任何一种取值称为对A(中变元)的一种真值指派（或解释），可记为

    $\mathrm{I}=(P_1{}',P_2{}',\ldots,P_n{}')$，其中$P_i{}'$=0或1
  - 例
    - **A(P,Q,R)=P→(R→Q),**
    - 真值指派 (1,0,1)，(1,1,0)
    - 真值分别为**F**和**T**

真值表

- 定义2.3.4
  - 设$A(P_1,P_2,\ldots,P_n)$是一个命题公式， $P_1,P_2,\ldots,P_n$是出现于其中的全部命题变元。如果有一张表列出了在$P_1,P_2,\ldots,P_n$的所有2^n种真值指派的每一种下，公式A对应的真值，则称此表为公式A的真值表
  - 例

P	Q	$(P\wedge(P\rightarrow Q))\rightarrow Q$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	1

重言式/矛盾式/可满足式

- **定义2.3.5 重言式（*tautology*）/矛盾式（*contradiction*）**
  - $A(P_1,P_2,\ldots,P_n)$ 是含有命题变元$P_1,P_2,\ldots, P_n$的命题公式，如不论对$P_1, P_2 , \ldots, P_n$作任何指派，都使得$A(P_1,P_2,\ldots, P_n)$ 为真(假)，则称之为重言式(矛盾式)，也称之为永真式 (永假式)
  - 例：$\neg P\vee P$和$\neg P\wedge P$
  - 偶然式
    - 不是永真式, 也不是永假式
    - 例：P, $P\wedge Q$
  - 可满足式（*satisfactable formula*）
    - 非矛盾式 $\neg P\vee P$，$P\wedge Q$

- 重言式的证明方法
  - 方法1：列真值表
  - 方法2：公式的等价变换，化简成“T”
  - 方法3：用公式的主析取范式

证明 $(P\wedge(P\rightarrow Q))\rightarrow Q$ 为重言式

P	Q	$(P\wedge(P\rightarrow Q))\rightarrow Q$
0	0	T
0	1	T
1	0	T
1	1	T

重言式的性质

- 如果A是重言式，则¬A是矛盾式
  - 如果A是矛盾式，则¬A是重言式
- 定理2.3.1 如果A，B是重言式，则(A∧B)、(A∨B)也都是重言式
  - 如果A，B是矛盾式，则(A∧B)、(A∨B)也都是矛盾式
- 如果A，B是重言式(A→B)和(A↔B)也都是重言式
  - 如果A，B是矛盾式， (A→B)和(A↔B) 是重言式

代入定理

- 定理2.3.2 (***Rule of Substitution***，代入规则)
  - 重言式的代入实例是重言式
  - 例
    - $(R\wedge Q)\vee\neg(R\wedge Q)$

      $P\vee\neg P$
    - $(R\vee Q)\wedge\neg(R\vee Q)\rightarrow(P\vee Q\rightarrow S\vee Q)$

      $P\wedge\neg P\rightarrow Q$
  - 矛盾式的代入实例是矛盾式吗？
    - **Yes**

2.4 等价与蕴含

- **定义2.4.1 恒等式（等价式，*equivalent*）**
  - 设A: $A(P_1, P_2, ..., P_n)$, B: $B(P_1, P_2,..., P_n)$是两个命题公式，如不论对$P_1, P_2,..., P_n$作任何指派，都使得A和B的真值相同，则称之为A与B**等价**（**恒等，逻辑相等**），记作$\boldsymbol{A \Leftrightarrow B}$，读做"$A$等价于$B$"或"$A$恒等于$B$"
- 定理2.4.1 等价定理：$\boldsymbol{A \Leftrightarrow B}$ 当且仅当 $\boldsymbol{A \leftrightarrow B}$**是重言式**
  - ***注意***："$\leftrightarrow$" 与 "$\Leftrightarrow$" 不同
    - $\leftrightarrow$：逻辑联结词
    - $\Leftrightarrow$：描述两个命题公式之间的关系
    - 若A与B是*wff*，$\boldsymbol{A \leftrightarrow B}$是*wff*，$\boldsymbol{A \Leftrightarrow B}$不是

1	双重否定律	$A \Leftrightarrow \neg\neg A$
2	交换律	$A \vee B \Leftrightarrow B \vee A$
		$A \wedge B \Leftrightarrow B \wedge A$
3	结合律	$(A \vee B) \vee C \Leftrightarrow A \vee (B \vee C)$
		$(A \wedge B) \wedge C \Leftrightarrow A \wedge (B \wedge C)$
4	分配律	$A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$
		$A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$
5	德摩根律	$\neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$
		$\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$
6	幂等律	$A \wedge A \Leftrightarrow A$，　$A \vee A \Leftrightarrow A$
7	吸收律	$A \vee (A \wedge B) \Leftrightarrow A$，　$A \wedge (A \vee B) \Leftrightarrow A$
8	零元律	$A \vee T \Leftrightarrow T$，$A \wedge F \Leftrightarrow F$
9	同一律	$A \vee F \Leftrightarrow A$，　$A \wedge T \Leftrightarrow A$
10	排中律	$A \vee \neg A \Leftrightarrow T$
11	矛盾律	$A \wedge \neg A \Leftrightarrow F$
12	条件等价式	$A \rightarrow B \Leftrightarrow \neg A \vee B$
13	双条件等价式	$A \leftrightarrow B \Leftrightarrow (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$
14	假言易位式	$A \rightarrow B \Leftrightarrow \neg B \rightarrow \neg A$
15	双条件否定等价式	$A \leftrightarrow B \Leftrightarrow \neg A \leftrightarrow \neg B$

常用逻辑恒等式

等价式的证明

- 方法1：列真值表
- 方法2：公式的等价变换

P	Q	P→Q	┐P∨Q
0	0	T	T
0	1	T	T
1	0	F	F
1	1	T	T

置换定理 (*Rule of Replacement*，替换规则)

- 定理2.4.2：设X是合式公式A的子公式，若$X \Leftrightarrow Y$，如果将A中的X用Y来置换，得到的公式记为B，则B与A等价，即$A \Leftrightarrow B$
  - 例：$Q \rightarrow (P \vee (P \wedge Q)) \Leftrightarrow Q \rightarrow P$
- 代入与替换的区别
  - 代入是对命题变元进行取代，替换对子公式
  - 代入必须取代该命题变元的一切出现，替换不用
  - 可用任意*wff*去代换命题变元，只能用与子公式等价的公式去替换
  - 代入实例一般不与原公式等价，替换后的公式必与原公式等价

永真蕴含式(*implication*)

- 定义2.4.2
  - 给定两个命题公式A和B，如果公式$A \rightarrow B$是重言式，则称A**重言(永真)蕴含**B，或简单的说A**蕴含**B，记作$A \Rightarrow B$
- *注意*:
  - “$\Rightarrow$”不是联结词
  - 表示公式间的“永真蕴含”关系
  - 也可看成“推导”关系
  - $A \Rightarrow B$可以理解成由**A可推出B**，即由A为真，可以推出B也为真

- 蕴含式的证明方法
  - 真值表
  - 利用一些基本等价式及蕴涵式进行推导
  - 逻辑推证
    - 假定前件是真, 若能推出后件是真, 则此蕴含式是真
    - 假定后件是假, 若能推出前件是假, 则此蕴含式是真

P	Q	$P \rightarrow Q$
0	0	1
0	1	1
~~1~~	~~0~~	~~0~~
1	1	1

用真值表证明蕴含关系

- 证明：$(P \vee Q) \wedge (P \rightarrow R) \wedge (Q \rightarrow R) \Rightarrow R$

P	Q	R	$(P \vee Q) \wedge (P \rightarrow R) \wedge (Q \rightarrow R)$	$(P \vee Q) \wedge (P \rightarrow R) \wedge (Q \rightarrow R) \rightarrow R$
0	0	0	0	1
0	0	1	0	1
0	1	0	0	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	1
1	0	1	1	1
1	1	0	0	1
1	1	1	1	1

例：证明 $\neg Q \wedge (P \to Q) \Rightarrow \neg P$

方法 1: 设$\neg Q \wedge (P \to Q)$是真

则$\neg Q$, $P \to Q$是真

所以, Q是假,

P是假。

因而$\neg P$是真。

故$\neg Q \wedge (P \to Q) \Rightarrow \neg P$

方法 2: 设$\neg P$是假, 则P是真。以下分情况讨论。

(i) 若Q为真, 则$\neg Q$是假,

所以$\neg Q \wedge (P \to Q)$是假

(ii) 若Q是假, 则$P \to Q$是假

所以$\neg Q \wedge (P \to Q)$是假

故$\neg Q \wedge (P \to Q) \Rightarrow P$

永真蕴含式

1	附加律	$A \Rightarrow A \vee B$， $B \Rightarrow A \vee B$
2	化简律	$A \wedge B \Rightarrow A$， $A \wedge B \Rightarrow B$
3	假言推理	$A \wedge (A \rightarrow B) \Rightarrow B$
4	拒取式	$\neg B \wedge (A \rightarrow B) \Rightarrow \neg A$
5	析取三段论	$\neg A \wedge (A \vee B) \Rightarrow B$， $\neg B \wedge (A \vee B) \Rightarrow A$
6	假言三段论	$(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow C) \Rightarrow (A \rightarrow C)$
7	等价三段论	$(A \leftrightarrow B) \wedge (B \leftrightarrow C) \Rightarrow (A \leftrightarrow C)$
8	构造性二难	$(A \vee C) \wedge (A \rightarrow B) \wedge (C \rightarrow D) \Rightarrow B \vee D$
		$(A \vee \neg A) \wedge (A \rightarrow B) \wedge (\neg A \rightarrow B) \Rightarrow B$
9	破坏性二难	$(\neg B \vee \neg D) \wedge (A \rightarrow B) \wedge (C \rightarrow D) \Rightarrow (\neg A \vee \neg C)$

等价和蕴含的性质

- 等价关系的性质
  - 自反性
    - 任何命题公式A，有$A \Leftrightarrow A$
  - 对称性
    - 若$A \Leftrightarrow B$，则$B \Leftrightarrow A$
  - 传递性
    - 若$A \Leftrightarrow B$且$B \Leftrightarrow C$，则$A \Leftrightarrow C$
- 蕴含关系的性质
  - 自反性
    - 任何命题公式A，有$A \Rightarrow A$
  - 反对称性
    - 若$A \Rightarrow B$且$B \Rightarrow A$，iff $A \Leftrightarrow B$
  - 传递性
    - 若$A \Rightarrow B$且$B \Rightarrow C$，则$A \Rightarrow C$
  - 若$A \Rightarrow B$, $A \Rightarrow C$, 则$A \Rightarrow B \wedge C$

定理2.4.3：设A和B是两个命题公式，那么$A \Leftrightarrow B$ iff $A \Rightarrow B$，且$B \Rightarrow A$

思考：若$A \Rightarrow B$，则$\neg A \Rightarrow \neg B$？

No ! $\neg B \Rightarrow \neg A$

证明

- 若$A \Rightarrow B$, $B \Rightarrow C$则$A \Rightarrow C$

  证明： $A \rightarrow B$永真; $B \rightarrow C$永真, 所以

  $(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow C)$永真

  由公式I_6得$A \rightarrow C$永真, 既$A \Rightarrow C$

- 若$A \Rightarrow B$, $A \Rightarrow C$, 则$A \Rightarrow B \wedge C$

  证明： A是真时, B和C都真, 所以$B \wedge C$也真

  因此$A \rightarrow B \wedge C$永真, 则$A \Rightarrow B \wedge C$

等价变换（等值演算）

- 由已知的等价式按照合理的规则逐步推演出另外一些等价式的过程
  - 反复应用代入定理和置换定理
  - 例1：

$$E_4:\quad P \vee Q \Leftrightarrow Q \vee P$$

$$A \wedge B \vee \neg A \wedge \neg B \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B \vee A \wedge B$$

$$E_{14}:\quad P \rightarrow Q \Leftrightarrow \neg P \vee Q$$

$$(R \vee Q) \rightarrow P \Leftrightarrow \neg (R \vee Q) \vee P$$

例

(a) 证明$P \wedge \neg Q \vee Q \Leftrightarrow P \vee Q$

证明：$P \wedge \neg Q \vee Q$

$\Leftrightarrow Q \vee P \wedge \neg Q$ $\qquad E_4$

$\Leftrightarrow (Q \vee P) \wedge (Q \vee \neg Q)$ $\qquad E_9$

$\Leftrightarrow (Q \vee P) \wedge T$ $\qquad E_{20}$和替换规则

$\Leftrightarrow Q \vee P$ $\qquad E_{19}$

$\Leftrightarrow P \vee Q$ $\qquad E_4$

(*b*) 证明$(P\to Q)\to(Q\vee R)\Leftrightarrow P\vee Q\vee R$

证明：$(P\to Q)\to(Q\vee R)$

$\Leftrightarrow(\neg P\vee Q)\to(Q\vee R)$ E$_{14}$和替换规则

$\Leftrightarrow\neg(\neg P\vee Q)\vee(Q\vee R)$ E$_{14}$

$\Leftrightarrow P\wedge\neg Q\vee(Q\vee R)$ E$_{10}$、E$_{1}$和替换规则

$\Leftrightarrow(P\wedge\neg Q\vee Q)\vee R$ E$_{6}$

$\Leftrightarrow P\vee Q\vee R$ 例 2(*a*)和替换规则

(*c*) 试将语句“情况并非如此:如果他不来, 那么我也不去。”化简。

解： 设P: 他来, Q: 我去

$$\neg(\neg P\rightarrow\neg Q)$$

$\Leftrightarrow\neg(P\vee\neg Q)$ E_{14}和替换规则

$\Leftrightarrow\neg P\wedge Q$ E_{10}，E_1和替换规则

(*d*) 找出$P\rightarrow(P\leftrightarrow Q)\vee R$的仅含∧和¬两种联结词的等价表达式。

$$P\rightarrow(P\leftrightarrow Q)\vee R$$

$$\Leftrightarrow P\rightarrow(P\rightarrow Q)\wedge(Q\rightarrow P)\vee R$$

$$\Leftrightarrow\neg P\vee(\neg P\vee Q)\wedge(\neg Q\vee P)\vee R$$

$$\Leftrightarrow(\neg P\vee\neg P\vee Q)\wedge(\neg P\vee\neg Q\vee P)\vee R$$

$$\Leftrightarrow(\neg P\vee Q)\wedge T\vee R$$

$$\Leftrightarrow\neg P\vee Q\vee R$$

$$\Leftrightarrow\neg(P\wedge\neg Q\wedge\neg R)$$

2.5 功能完备集及其他联结词

- 联结词的扩充
  - 问题的提出：对n个命题变元$P_1 \ldots P_n$来说, 共可定义出多少个联结词? 在那么多联结词中有多少是相互独立的?
  - **4**个新联结词:
    - 与非: $P \uparrow Q \Leftrightarrow \neg (P \wedge Q)$
    - 或非: $P \downarrow Q \Leftrightarrow \neg (P \vee Q)$
    - 排斥或(异或): $P \oplus Q \Leftrightarrow \neg (P \leftrightarrow Q) \Leftrightarrow P \wedge \neg Q \vee \neg P \wedge Q$
    - 蕴含否定(条件否定): $P \xrightarrow{c} Q \Leftrightarrow \neg (P \rightarrow Q)$

Q1：可定义多少个联结词?

- 命题变元和命题联结词可以构成无限多个合式公式
- 把所有的合式公式分类：将等值的公式视为同一类，对于该类合式公式，就可定义一个联结词与之对应

- 一元联结词的个数
  - 一元联结词是联结一个命题变元的
  - 由一个命题变元P可构成4种不等价的命题公式
  - 相应的可定义出**4**个不同的一元联结词

P	f_1	f_2	f_3	f_4
0	0	0	1	1
1	0	1	0	1
	永假	恒等	否定	永真

- 二元联结词的个数
  - 二元联结词联结两个命题变元
  - 由两个命题变元**P**，**Q**可构成**16**种不等价的命题公式
  - 相应的可定义出**16**个不同的二元联结词
- *n*元联结词的个数
  - 对**n**个命题变元$P_1, \ldots, P_n$, 每个P_i有**2**种取值, 从而对$P_1 \ldots P_n$来说共有2^n种取值情形
  - 相应的可定义出2^{2^n}个**n**元联结词

二元运算

P	Q	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}	f_{16}
0	0	0	1	0	0	0	1	1	1	0	0	0	1	1	0	1	1
0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	1	0	1	1	1	0	1
1	0	0	0	0	1	0	0	1	0	1	0	1	1	0	1	1	1
1	1	0	0	0	0	1	0	0	1	0	1	1	0	1	1	1	1
		永假	或非	缊含否定	蕴含否定	合取	P非	Q非	等值	异或	恒等Q	恒等P	与非	蕴含	析取	蕴含	永真
		**	△	△	△	*	*	*	*	△	**	**	△	*	*	*	**

联结词的归约

- Q2：联结词是否都是独立的，或者说能否相互表示
- 定义 2.5.1 设S是一个联结词集合, 若对于任意给定的命题公式，总可以找到一个仅含有S中的联结词的命题公式与之, 则称S是一个***联结词功能完备集***
- 定义 2.5.2 设S是一个联结词功能完备集，若S中的任一联接词都不能用S中的其他联接词等价表示，则称S是一个***极小的联结词功能完备集***

完备集

- 全体联结词的无限集合是完备的
- $\{\neg, \vee, \wedge\}$是完备的联结词集合
- $\{\neg, \vee\}$是联结词的完备集
  - 证明：已知$\{\neg, \vee, \wedge\}$是全功能的，又$P \wedge Q \Leftrightarrow \neg(\neg P \vee \neg Q)$，因此$\wedge$可由$\{\neg, \vee\}$表示，所以$\{\neg, \vee\}$是全功能的
- $\{\neg, \wedge\}$是联结词的完备集
- $\{\neg, \rightarrow\}$是完备集
- $\{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$是完备的

不完备集

- {∨,∧,→, ↔}
- {¬, ↔}
- {∨,∧,→, ↔}
  - 其任何子集都是不完备的
- {¬, ↔}
- {∨,∧}

其他联接词

- 异或
- 与非↑
- 或非↓
- {↑}是完备集
- {↓}是完备集

2.6 对偶与范式

- 定义2.6.1：设有公式A, 其中仅有联结词$\wedge$, $\vee$, $\neg$。在A中将$\wedge$, $\vee$, T , F分别换以$\vee$, $\wedge$, F , T得公式A^*, 则A^*称为A的***对偶公式***
- $(A^*)^* \Leftrightarrow ?$
  - $(A^*)^* \Leftrightarrow A$
- **例**

(a) $A = P \vee F$， $A^* = ?$

$A^* = P \wedge T$

(b) $A = \neg P \vee Q \wedge R$， $A^* = ?$

$A^* = \neg P \wedge (Q \vee R)$

- **定理 2.6.1** 设A和A^*是对偶式。$P_1, P_2, \ldots, P_n$是出现于A和A^*中的所有命题变元, 于是

$$\neg A(P_1,P_2,\ldots,P_n) \Leftrightarrow A^*(\neg P_1,\neg P_2,\ldots,\neg P_n)$$

  - 证明：反复地使用德-摩根定律

$$A(P,Q) \Leftrightarrow P \vee Q, \quad A^*(P,Q) \Leftrightarrow P \wedge Q$$

$$\neg A(P,Q) \Leftrightarrow \neg(P \vee Q) \quad A^*(\neg P, \neg Q) \Leftrightarrow \neg P \wedge \neg Q$$

$$\neg A(P,Q) \Leftrightarrow A^*(\neg P,\neg Q)$$

- ***推论***: $A(\neg P_1,\neg P_2,\ldots,\neg P_n) \Leftrightarrow \neg A^*(P_1,P_2,\ldots,P_n)$

因为 $\neg A(P_1,P_2,\ldots,P_n) \Leftrightarrow A^*(\neg P_1,\neg P_2,\ldots,\neg P_n)$

所以 $A(P_1,P_2,\ldots,P_n) \Leftrightarrow \neg A^*(\neg P1,\neg P2,\ldots,\neg Pn)$

即 $A(P_1,P_2,\ldots,P_n) \leftrightarrow \neg A^*(\neg P_1,\neg P_2,\ldots,\neg P_n)$ 是重言式

则 $A(\neg P_1,\neg P_2,\ldots,\neg P_n) \leftrightarrow \neg A^*(P_1,P_2,\ldots,P_n)$ 是重言式

所以 $A(\neg P_1,\neg P_2,\ldots,\neg P_n) \Leftrightarrow \neg A^*(P_1,P_2,\ldots,P_n)$

- **定理 2.6.2（对偶原理）** 若$A \Leftrightarrow B$, 且A , B为命题变元P_1, P_2,……, P_n及联结词∧ , ∨ , ¬ 构成的公式, 则$A^* \Leftrightarrow B^*$。

证明：因为 $A(P_1,P_2,\ldots,P_n) \Leftrightarrow B(P_1,P_2,\ldots,P_n)$

故 $A(\neg P_1,\neg P_2,\ldots,\neg P_n) \Leftrightarrow B(\neg P_1,\neg P_2,\ldots,\neg P_n)$

而 $A(\neg P_1,\neg P_2,\ldots,\neg P_n) \Leftrightarrow \neg A^*(P_1,P_2,\ldots,P_n)$

$B(\neg P_1,\neg P_2,\ldots,\neg P_n) \Leftrightarrow \neg B^*(P_1,P_2,\ldots,P_n)$

故 $\neg A^*(P_1,P_2,\ldots,P_n) \Leftrightarrow \neg B^*(P_1,P_2,\ldots,P_n)$

所以 $A^*(P_1,P_2,\ldots,P_n) \Leftrightarrow B^*(P_1, P_2,\ldots, P_n)$

- 若$A \Rightarrow B$, 且A , B为命题变元P_1, P_2,……, P_n及联结词∧ , ∨ , ¬ 构成的公式, 则$A^* \Rightarrow B^*$成立吗？如果是，请证明；如果否，为什么？
  - 若$A \Rightarrow B$, 且A , B为命题变元P_1, P_2,……, P_n及联结词∧ , ∨ , ¬ 构成的公式, 则$\boldsymbol{B^* \Rightarrow A^*}$

范 式

- 析取范式和合取范式
  - 范式就是命题公式形式的规范形式
  - 范式中只含有联结词¬、∨和∧
- 基本积、基本和
  - 文字（因子）
    - 原子或原子的否定称为文字
    - 例：P，¬P
    - P与¬P称为互补对
  - 基本积
    - 文字的合取式（短语）
    - P 、¬P 、P∧¬Q、P∧¬Q∧¬R
  - 基本和
    - 文字的析取式（子句）
    - P 、¬P 、P∨¬Q、P∨¬Q∨¬R

主析取范式和主合取范式

- **定义 2.6.2 极小项**
  - 在n个变元的基本积中，若每一个变元与其否定不同时存在,而两者之一必出现一次且仅出现一次，则这种基本积叫***极小项***
  - $P\wedge Q$、$P\wedge\neg Q$、 $\neg P\wedge Q$、 $\neg P\wedge\neg Q$
  - n个变元可构成 2^n个不同的极小项
  - 命题变元看成 1，命题变元的否定看成 0，那么每一极小项对应一个二进制数，因而也对应一个十进制数
  - 把对应的十进制数当作足标，用m_i表示这一项

$m_0 \Leftrightarrow \neg P \wedge \neg Q \wedge \neg R$ ——0 0 0——0

$m_1 \Leftrightarrow \neg P \wedge \neg Q \wedge R$ ——0 0 1——1

$m_2 \Leftrightarrow \neg P \wedge Q \wedge \neg R$ ——0 1 0——2

$m_3 \Leftrightarrow \neg P \wedge Q \wedge R$ ——0 1 1——3

$m_4 \Leftrightarrow P \wedge \neg Q \wedge \neg R$ ——1 0 0——4

$m_5 \Leftrightarrow P \wedge \neg Q \wedge R$ ——1 0 1——5

$m_6 \Leftrightarrow P \wedge Q \wedge \neg R$ ——1 1 0——6

$m_7 \Leftrightarrow P \wedge Q \wedge R$ ——1 1 1——7

一般地，对$P_1, \ldots, P_n$而言，2^n个极小项为：

$$m_0, m_1, m_2, \ldots, m_{2^n-1}$$

- 极小项的性质
  - 合取式
  - 每个极小项m_k只在与其下标对应的真值指派下为T，其余都为F
  - $m_i \wedge m_j \Leftrightarrow F$，$i \neq j$
  - $\vee m_i \Leftrightarrow T$ （$0 \leq i \leq 2^n-1$）
- **定义 2.6.3** 设$P_1, P_2, \ldots, P_n$是n个命题变元，m_{k1}， m_{k2}， …， m_{ks}为关于$P_1, P_2, \ldots, P_n$的极小项（$0 \leq k_1 < k_2 < \ldots < k_s \leq 2^n-1$ ）则称$m_{k1} \vee m_{k2} \vee \ldots \vee m_{ks}$为关于$P_1, P_2, \ldots, P_n$的***主析取范式***，并简记为$\sum k_1$， k_2， …， k_s

设G=(P∧Q)∨(¬P∧R)∨(Q∧R)

P	Q	R	G
0	0	0	0
0	**0**	**1**	**1**
0	1	0	0
0	**1**	**1**	**1**
1	0	0	0
1	0	1	0
1	**1**	**0**	**1**
1	**1**	**1**	**1**

$$\neg P \wedge \neg Q \wedge R \vee \neg P \wedge Q \wedge R \vee P \wedge Q \wedge \neg R \vee P \wedge Q \wedge R$$

$$\Leftrightarrow m_1 \vee m_3 \vee m_6 \vee m_7$$

$$\Leftrightarrow \sum(1,\ 3,\ 6,\ 7)$$

- **定理2.6.3** 假若命题公式$A(P_1, P_2, \ldots, P_n)$不是矛盾式，则必存在且恰好存在一个关于$P_1, P_2, \ldots, P_n$的主析取范式与之等价；且在公式A的真值表中，使A的真值为T的指派所对应的各极小项的析取，即为A的主析取范式
  - 矛盾式的主析取范式是一空公式，用0表示

证明：

存在性：由上页主析取范式的构造过程可证

唯一性：设有两个不同的主析取范式B和C都与A等价

由于B和C不同，即必存在极小项m_i在B中但不在C中，或在C中但不在B中，不妨设其在B中但不在C中。

则在i对应的真值指派下，m_i为T，即B为T，而C为F

与B和C都是A的主析取范式矛盾

唯一性得证

- 用等价变换求主析取范式
  - 先用相应的公式去掉$\rightarrow$和$\leftrightarrow$
  - 用公式的否定公式或摩根律将$\neg$后移到命题变元之前
  - 用分配律、幂等律等公式进行整理，使之成为析取范式$A_1 \vee A_2 \vee \ldots \vee A_n$
  - 为使每个A_i都变成极小项，对缺少变元的A_i补全变元，比如缺变元R，就用$\wedge$联结永真式$(R \vee \neg R)$形式补R
  - 消去重复的极小项，并将极小项按下标由小到大的次序排列

例求$G=\neg(R\to P)\vee(Q\wedge(P\vee R))$主析取范式

$G \Leftrightarrow \neg(R\to P)\vee(Q\wedge(P\vee R))$

$\Leftrightarrow \neg(\neg R\vee P)\vee(Q\wedge P)\vee(Q\wedge R)$

$\Leftrightarrow (\neg P\wedge R)\vee(Q\wedge P)\vee(Q\wedge R)$

$\Leftrightarrow ((\neg P\wedge R)\wedge(\neg Q\vee Q))\vee((Q\wedge P)\wedge(\neg R\vee R))\vee((Q\wedge R)\wedge(\neg P\vee P))$

$\Leftrightarrow (\neg P\wedge Q\wedge R)\vee(\neg P\wedge\neg Q\wedge R)\vee(P\wedge Q\wedge R)\vee(P\wedge Q\wedge\neg R)$

$\Leftrightarrow\sum(1，3，6，7)$

例

证明$\neg P\vee Q$和$P\rightarrow((P\rightarrow Q)\wedge\neg(\neg Q\vee\neg P))$二式逻辑等价。

证 $\neg P\vee Q$

$$\Leftrightarrow\neg P\wedge(Q\vee\neg Q)\vee Q\wedge(P\vee\neg P)$$

$$\Leftrightarrow\neg P\wedge Q\vee\neg P\wedge\neg Q\vee P\wedge Q$$

$$P\rightarrow((P\rightarrow Q)\wedge\neg(\neg Q\vee\neg P))$$

$$\Leftrightarrow\neg P\vee((\neg P\vee Q)\wedge(Q\wedge P))$$

$$\Leftrightarrow\neg P\vee(\neg P\wedge Q\wedge P)\vee(Q\wedge Q\wedge P)$$

$$\Leftrightarrow\neg P\vee P\wedge Q$$

$$\Leftrightarrow\neg P\wedge(Q\vee\neg Q)\vee P\wedge Q$$

$$\Leftrightarrow\neg P\wedge Q\vee\neg P\wedge\neg Q\vee P\wedge Q$$

所以, 二式逻辑等价。

定义 2.6.4 极大项

- 在n个变元的基本和中, 若每一个变元与其否定不同时存在,而两者之一必出现一次且仅出现一次, 则这种基本和叫***极大项***
- $P\vee Q$、$P\vee\neg Q$、 $\neg P\vee Q$、 $\neg P\vee\neg Q$
- n个变元可构成 2^n个不同的极大项
- 命题变元看成 **0**, 命题变元的否定看成 **1**, 那么每一极大项对应一个二进制数, 因而也对应一个十进制数
- 把对应的十进制数当作足标, 用M_i表示这一项

$M_0 \Leftrightarrow P \vee Q \vee R$ ——0 0 0——0

$M_1 \Leftrightarrow P \vee Q \vee \neg R$ ——0 0 1——1

$M_2 \Leftrightarrow P \vee \neg Q \vee R$ ——0 1 0——2

$M_3 \Leftrightarrow P \vee \neg Q \vee \neg R$ ——0 1 1——3

$M_4 \Leftrightarrow \neg P \vee Q \vee R$ ——1 0 0——4

$M_5 \Leftrightarrow \neg P \vee Q \vee \neg R$ ——1 0 1——5

$M_6 \Leftrightarrow \neg P \vee \neg Q \vee R$ ——1 1 0——6

$M_7 \Leftrightarrow \neg P \vee \neg Q \vee \neg R$ ——1 1 1——7

一般地，对$P_1, \ldots, P_n$而言，2^n个极大项为：

$$M_0, M_1, M_2, \ldots, M_{2^n-1}$$

- 极大项的性质
  - 析取式
  - 每个极大项M_k只在与其下标对应的真值指派下为F，其余都为T
  - $M_i \vee M_j \Leftrightarrow T$，$i \neq j$
  - $\wedge M_i \Leftrightarrow F$（$0 \leq i \leq 2^n-1$）
- **定义 2.6.5** 设$P_1,P_2,\ldots,P_n$是n个命题变元，M_{k1}，M_{k2}，…，M_{ks}为关于$P_1,P_2,\ldots,P_n$的极大项（$0 \leq k_1 < k_2 < \ldots < k_s \leq 2^n-1$）则称$M_{k1} \wedge M_{k2} \wedge \ldots \wedge M_{ks}$为关于$P_1,P_2,\ldots,P_n$的***主合取范式，***并简记为$\prod k_1$，$k_2$，…，$k_s$

- 设G=(P∧Q)∨(¬P∧R)∨(Q∧R)

P	Q	R	G
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

$$(P \vee Q \vee R) \wedge (P \vee \neg Q \vee R) \wedge (\neg P \vee Q \vee R) \wedge (\neg P \vee Q \vee \neg R)$$

$$\Leftrightarrow M_0 \wedge M_2 \wedge M_4 \wedge M_5$$

$$\Leftrightarrow \prod(0，2，4，5)$$

- **定理2.6.4** 假若命题公式$A(P_1, P_2, \ldots, P_n)$不是重言式，则必存在且恰好存在一个关于$P_1, P_2, \ldots, P_n$的主合取范式与之等价；且在公式A的真值表中，使A的真值为F的指派所对应的各极大项的合取，即为A的主合取范式
  - 永真公式的主合取范式是一空公式，用1表示

- 用等价变换求主合取范式
  - 先用相应的公式去掉→和↔
  - 用公式的否定公式或摩根律将¬后移到命题变元之前
  - 用分配律、幂等律等公式进行整理，使之成为合取范式$A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n$
  - 为使每个A_i都变成极大项，对缺少变元的A_i补全变元，比如缺变元R，就用$\vee$联结矛盾式$(R \wedge \neg R)$形式补R
  - 消去重复的极大项，并将极大项按下标由小到大的次序排列

例:求$G=\neg(R\rightarrow P)\vee(Q\wedge(P\vee R))$主合取范式

$G \Leftrightarrow \neg(R\rightarrow P)\vee(Q\wedge(P\vee R))$

$\Leftrightarrow \neg(\neg R\vee P)\vee(Q\wedge(P\vee R))$

$\Leftrightarrow (\neg P\wedge R)\vee(Q\wedge(P\vee R))$

$\Leftrightarrow (\neg P\wedge R\vee Q)\wedge (\neg P\wedge R\vee P\vee R)$

$\Leftrightarrow (\neg P\vee Q)\wedge(R\vee Q) \wedge (\neg P\vee P\vee R) \wedge (R\vee P\vee R)$

$\Leftrightarrow (\neg P\vee Q \vee(\neg R\wedge R)) \wedge(R\vee Q) \wedge (P\vee R)$

$\Leftrightarrow (\neg P\vee Q \vee\neg R)\wedge (\neg P\vee Q \vee R) \wedge (P\vee Q \vee R) \wedge$
$(P\vee\neg Q \vee R)$

$\Leftrightarrow\prod(0，2，4，5)$

利用主范式判定公式类型

- 利用主析取范式判定
  - 若公式 $A(P_1, P_2, \ldots, P_n)$的主析取范式包含所有2^n个极小项，则 A是永真式
  - 若A的主析取范式是一空公式且为0，则A是永假式
  - 否则，A为偶然式
- 利用主合取范式判定
  - 若公式 $A(P_1, P_2, \ldots, P_n)$的主合取范式包含所有2^n个极大项，则 A是永假式
  - 若A的主合取范式是一空公式且为1，则A是永真式
  - 否则，A为偶然式

例：求公式A=(Q∧(P→Q))→P的主范式并判定公式的类型

解　(1)求A的主析取范式

$A \Leftrightarrow \neg (Q\wedge(\neg P\vee Q))\vee P$

$\Leftrightarrow \neg Q \vee (P\wedge\neg Q)\vee P$

$\Leftrightarrow (\neg Q\wedge(P\vee\neg P)) \vee(P\wedge\neg Q)\vee(P\wedge(Q\vee\neg Q))$

$\Leftrightarrow (P\wedge\neg Q)\vee(\neg P\wedge\neg Q)\vee(P\wedge\neg Q)\vee(P\wedge Q)\vee(P\wedge\neg Q)$

$\Leftrightarrow (P\wedge Q)\vee(P\wedge\neg Q)\vee(\neg P\wedge\neg Q)$

由此可知A是可满足公式

(2)求A的主合取范式

$A \Leftrightarrow (\neg Q \vee (P \wedge \neg Q)) \vee P$

$\Leftrightarrow P \vee \neg Q$

由前分析和举例可知：

仅需求出公式A的任一种主范式即可判定A的类型

- 主析取范式和主合取范式的关系
  - 一个命题公式的主析取范式和主合取范式紧密相关
  - 在它们的简记式中，代表极小项和极大项的足标是互补的，即两者一起构成0, 1, 2, …, 2^n-1诸数
  - 例
    - $A(P,Q,R)=\Sigma(1,3,5,6,7)\Leftrightarrow\prod(\quad 0,2,4)$
    - $B(P,Q,R,S)=\prod(0,1,3,5,6,7)\Leftrightarrow\Sigma((2,4,8,9,10,11,12,13,14,15)$
  - $\neg m_i\Leftrightarrow M_i$
  - $\neg M_i\Leftrightarrow m_i$

练习

1. 通过主范式判断公式
   $A=(\neg P\vee\neg Q)\rightarrow(P\leftrightarrow\neg Q)$
   是否为重言式或矛盾式?
2. 已知A(P,Q,R)的真值表如右图：求它的主析取和主合取范式。
3. 已知A(P,Q,R)的主析取范式中含有下面极小项m_1, m_3, m_5, m_7写出它的主合取范式及其对应的命题公式

P	Q	R	A
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

Answers

1. 解:

$$A \Leftrightarrow \neg(\neg P \vee \neg Q) \vee ((P \rightarrow \neg Q) \wedge (\neg Q \rightarrow P))$$

$$\Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee ((\neg P \vee \neg Q) \wedge (Q \vee P))$$

$$\Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee ((\neg P \wedge (Q \vee P)) \vee (\neg Q \wedge (Q \vee P)))$$

$$\Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge P) \vee (\neg Q \wedge Q) \vee (\neg Q \wedge P)$$

$$\Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge Q) \vee (\neg Q \wedge P)$$

主析取范式既非空公式，又未包含2^2=4个项，故F不是重言式和矛盾式，只是可满足式

2. A(P,Q,R)的主析取范式:

$A(P,Q,R) \Leftrightarrow m_0 \vee m_3 \vee m_4 \vee m_6 \vee m_7$

$\Leftrightarrow (\neg P \wedge \neg Q \wedge \neg R) \vee (\neg P \wedge Q \wedge R) \vee$

$(P \wedge \neg Q \wedge \neg R) \vee (P \wedge Q \wedge \neg R) \vee (P \wedge Q \wedge R)$

A(P,Q,R)的主合取范式:

$A(P,Q,R) \Leftrightarrow M_1 \wedge M_2 \wedge M_5$

$\Leftrightarrow (P \vee Q \vee \neg R) \wedge (P \vee \neg Q \vee R) \wedge (\neg P \vee Q \vee \neg R)$

3. $A(P,Q,R) \Leftrightarrow M_0 \wedge M_2 \wedge M_4 \wedge M_6$

$\Leftrightarrow (P \vee Q \vee R) \wedge (P \vee \neg Q \vee R) \wedge (\neg P \vee Q \vee R)$

$\wedge (\neg P \vee \neg Q \vee R)$

范式的应用

- 逻辑设计

例1.加法器的设计，有两个n位二进制数a,b相加和为s(s=a+b)，a,b分别写成：

$$a=a_n a_{n-1}\ldots \mathbf{a_i}\ldots a_2 a_1,$$

$$+\quad b=b_n b_{n-1}\ldots \mathbf{b_i}\ldots b_2 b_1$$

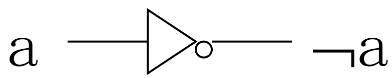
$$s= c_n\, s_n\, s_{n-1}\ldots \mathbf{s_i}\ldots s_2\, s_1$$

其中s_i是第i位a_i、b_i及c_{i-1} (c_{i-1}是第i-1位向第i位的进位) 的和，显然s_i是a_i b_i及c_{i-1}的函数, 写成$s_i(a_i,b_i,c_{i-1})$,它与a_i,b_i,c_{i-1}的关系如下表：

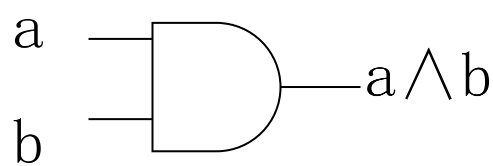
a_i	b_i	c_{i-1}	$s_i(a_i,b_i,c_{i-1})$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

在电路逻辑设计中用如下逻辑部件：

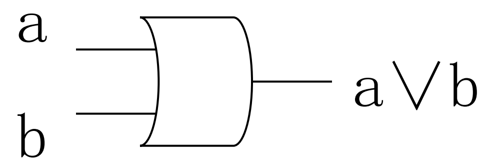
非门



与门



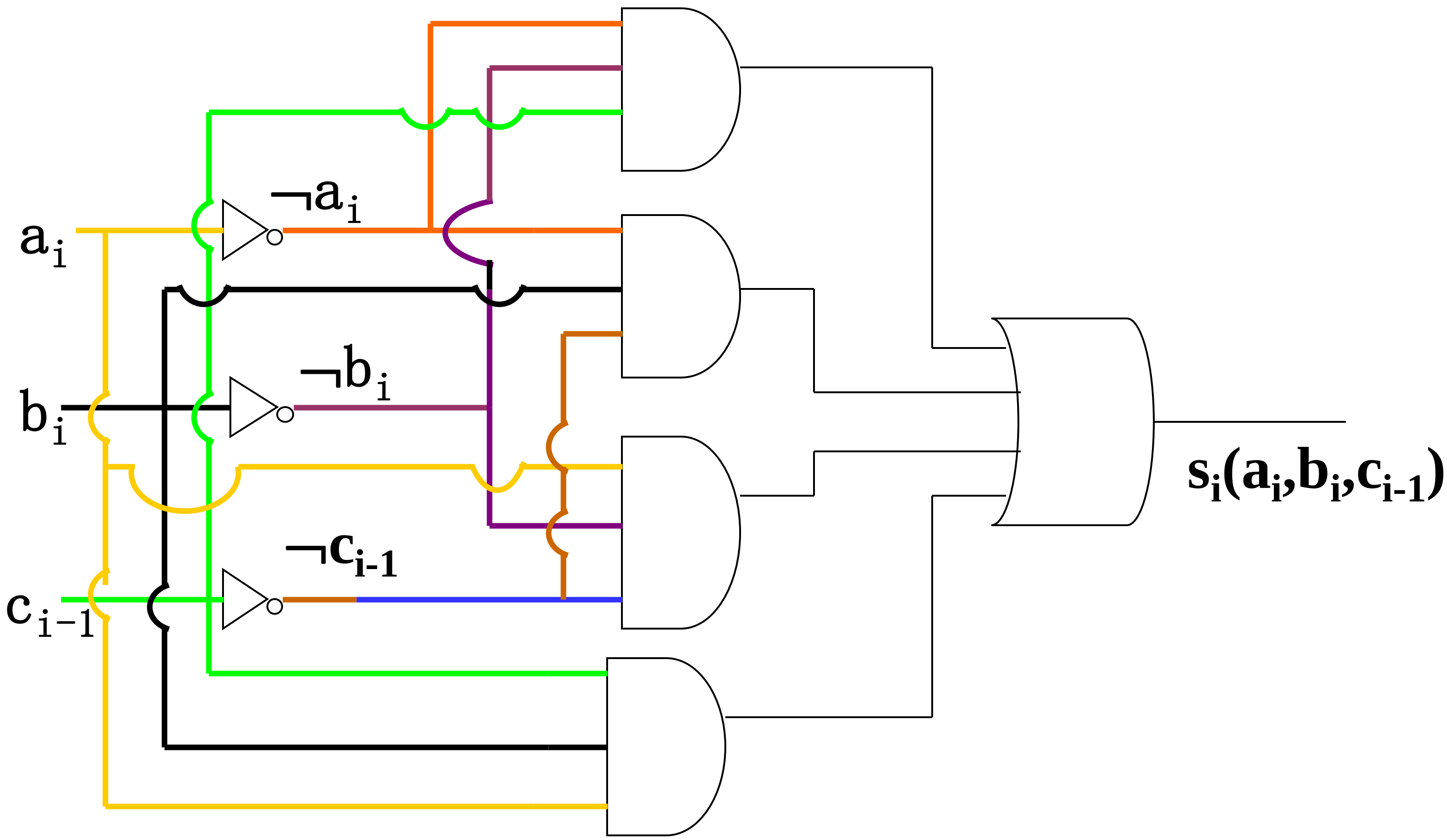
或门



根据前边的表,列出$s_i(a_i,b_i,c_{i-1})$的主析取范式：

$$s_i(a_i,b_i,c_{i-1})=(\neg a_i\wedge\neg b_i\wedge c_{i-1})\vee(\neg a_i\wedge b_i\wedge\neg c_{i-1})\vee$$
$$(a_i\wedge\neg b_i\wedge\neg c_{i-1})\vee(a_i\wedge b_i\wedge c_{i-1})$$

(在指派001、010、100、111时s_i为1)



$$s_i(a_i,b_i,c_{i-1})=(\neg a_i\wedge\neg b_i\wedge c_{i-1})\vee(\neg a_i\wedge b_i\wedge\neg c_{i-1})\vee$$

$$(a_i\wedge\neg b_i\wedge\neg c_{i-1})\vee(a_i\wedge b_i\wedge c_{i-1})$$

例2. 安排课表，教语言课的教师希望将课程安排在第一或第三节；教数学课的教师希望将课程安排在第二或第三节；教原理课的教师希望将课程安排在第一或第二节。如何安排课表，使得三位教师都满意。

令L_1、L_2、L_3分别表示语言课排在第一、第二、第三节。

M_1、M_2、M_3分别表示数学课排在第一、第二、第三节。

P_1、P_2、P_3分别表示原理课排在第一、第二、第三节。

三位教师都满意的条件是:

$(L_1 \vee L_3) \wedge (M_2 \vee M_3) \wedge (P_1 \vee P_2)$ 为真。

将上式写成析取范式(用分配律)得:

$((L_1 \wedge M_2) \vee (L_1 \wedge M_3) \vee (L_3 \wedge M_2) \vee (L_3 \wedge M_3)) \wedge (P_1 \vee P_2)$

$\Leftrightarrow (L_1 \wedge M_2 \wedge P_1) \vee (L_1 \wedge M_3 \wedge P_1) \vee$
$(L_3 \wedge M_2 \wedge P_1) \vee (L_3 \wedge M_3 \wedge P_1) \vee$
$(L_1 \wedge M_2 \wedge P_2) \vee (L_1 \wedge M_3 \wedge P_2) \vee$
$(L_3 \wedge M_2 \wedge P_2) \vee (L_3 \wedge M_3 \wedge P_2)$

可以取$(L_3 \wedge M_2 \wedge P_1)$、$(L_1 \wedge M_3 \wedge P_2)$为T,得到两种排法。

主析取范式的个数

- n=1时
  - 极小项有 2^1=2 个,
    - P , ┐P
  - 一个命题变元能够构成的不同的主析取范式
    - F
    - P
    - ┐P
    - $P \vee$ ┐P
    - 2^2个

- n=2
  - 极小项有 2^2=4 个,
    - $\neg P \wedge \neg Q, \neg P \wedge Q, P \wedge \neg Q, P \wedge Q$
  - 两个命题变元能够构成的不同的主析取范式

2^{2^2}=16 个

$f_1 \Leftrightarrow F$

$f_2 \Leftrightarrow \neg P \wedge \neg Q$

$f_3 \Leftrightarrow \neg P \wedge Q$

$f_4 \Leftrightarrow P \wedge \neg Q$

$f_5 \Leftrightarrow P \wedge Q$

$f_6 \Leftrightarrow \neg P \wedge \neg Q \vee \neg P \wedge Q$

$f_7 \Leftrightarrow \neg P \wedge \neg Q \vee P \wedge \neg Q$

$f_8 \Leftrightarrow \neg P \wedge \neg Q \vee P \wedge Q$

$f_9 \Leftrightarrow \neg P \wedge Q \vee P \wedge \neg Q$

$f_{10} \Leftrightarrow \neg P \wedge Q \vee P \wedge Q$

$f_{11} \Leftrightarrow P \wedge \neg Q \vee P \wedge Q$

$f_{12} \Leftrightarrow \neg P \wedge \neg Q \vee \neg P \wedge Q \vee P \wedge \neg Q$

$f_{13} \Leftrightarrow \neg P \wedge \neg Q \vee \neg P \wedge Q \vee P \wedge Q$

$f_{14} \Leftrightarrow \neg P \wedge Q \vee P \wedge \neg Q \vee P \wedge Q$

$f_{15} \Leftrightarrow \neg P \wedge \neg Q \vee P \wedge \neg Q \vee P \wedge Q$

$f_{16} \Leftrightarrow \neg P \wedge \neg Q \vee \neg P \wedge Q \vee P \wedge \neg Q \vee P \wedge Q$

- n个命题变元
  - 极小项有 2^n 个
  - 不同的主析取范式
    - 2^{2^n} 个(包括F)
  - 不同的主合取范式
    - 2^{2^n} 个(包括T)

2.7 命题演算的推理理论

例

1、如果天不下雨，我就去看电影；我没有去看电影，说明__________

2、如果李敏出差到学校，若王军不生病，则王军一定去看望李敏。如果李敏出差到长沙，那么李敏一定来学校。王军没有生病。所以，____________

3、如果甲是冠军，则乙或丙将得亚军；如果乙得亚军，则甲不能得冠军；如果丁得亚军，丙不能得亚军；事实是甲已得冠军，可知________不能得亚军。

推理规则

- 推理
  - 根据一个或几个已知的判断得出一个新的判断的思维过程
  - 称这些已知的判断为*前提*
  - 得到的新的判断为前提的*有效结论*
- 定义 2.7.1
  - 称$H_1 \wedge H_2 \wedge \ldots \wedge H_n \rightarrow R$为推理的*形式结构*，$H_1$，$H_2$，…,$H_n$是推理的前提（组），$R$为推理的结论。若$H_1 \wedge H_2 \wedge \ldots \wedge H_n \rightarrow R$为重言式（即$H_1 \wedge H_2 \wedge \ldots \wedge H_n \Rightarrow R$），则称从前提组$H_1$，$H_2$，…,$H_n$推出结论$R$的推理正确（或有效），称$R$是$H_1$，$H_2$，…,$H_n$的有效结论或真确结论。否则称推理不正确

如何判断由一个前提集合能否推出某个结论?

- 真值表法
- 等价变换法
- “形式证明”法
  - *形式证明*：一个描述推理过程的命题序列，其中每个命题或者是已知的命题，或者是由某些前提所推得的结论，序列中最后一个命题就是所要求的结论
  - *有效的证明*：如果证明过程中的每一步所得到的结论都是根据推理规则得到的，则这样的证明称作是有效的
  - *有效的结论*：通过有效的证明而得到结论，称作是有效的结论
  - *合理的证明*：一个证明是否有效与前提的真假没有关系。如果所有的前提都是真的，那么通过有效的证明所得到的结论也是真的。这样的证明称作是合理的。
  - *合理的结论*：一个结论是否有效与它自身的真假没有关系。通过合理证明而得到的结论称作合理的结论

推理规则

- P规则（引入前提规则）：在推理过程中，可以随时引入前提。
- T规则（引入结论规则）：在推理过程中，如果前边有一个或几个公式永真蕴涵公式S，则可将S纳入推理过程中。
- 教材64页表2.7.1，2.7.2中的等价式和蕴涵式

例：求证 $P\rightarrow Q$，$Q\rightarrow R$，$P \Rightarrow R$

证明

序号	前提或结论	所用规则	从哪几步得到	所用公式
(1)	P	P		
(2)	$P\rightarrow Q$	P		
(3)	Q	T	(1)(2)	I
(4)	$Q\rightarrow R$	P		
(5)	R	T	(3)(4)	I

例：求证$\neg(P\wedge Q)\wedge(Q\vee R)\wedge\neg R \Rightarrow \neg P$

(1)	$Q\vee R$	P
(2)	$\neg R$	P
(3)	Q	T (1) (2) I
(4)	$\neg(P\wedge Q)$	P
(5)	$\neg P\vee\neg Q$	T (4) E
(6)	$\neg P$	T (3) (5) I

例：用命题逻辑推理方法证明下面推理的有效性

- 如果我学习，那么我数学不会不及格。如果我不热衷于玩朴克，那么我将学习。但是我数学不及格。因此，我热衷于玩朴克。

  解 设 P：我学习。

  Q：我数学及格。

  R：我热衷于玩朴克。

- $P \rightarrow Q$，$\neg R \rightarrow P$，$\neg Q \Rightarrow R$

$P \rightarrow Q,\ \neg R \rightarrow P,\ \neg Q \Rightarrow R$

(1)	$P \rightarrow Q$	P	
(2)	$\neg Q$	P	
(3)	$\neg P$	T (1) (2)	I
(4)	$\neg R \rightarrow P$	P	
(5)	$\neg\neg R$	T (3) (4)	I
(6)	R	T (5)	E

例：求证$P\rightarrow(Q\rightarrow S), \neg R\vee P, Q \Rightarrow R\rightarrow S$

证明

(1)	$P\rightarrow(Q\rightarrow S)$	P
(2)	$\neg P\vee(\neg Q\vee S)$	T (1) E
(3)	$\neg P\vee(S\vee\neg Q)$	T (2) E
(4)	$(\neg P\vee S)\vee\neg Q$	T (3) E
(5)	Q	P
(6)	$\neg P\vee S$	T (4)(5) I
(7)	$P\rightarrow S$	T (6) E
(8)	$\neg R\vee P$	P
(9)	$R\rightarrow P$	T (8) E
(10)	$R\rightarrow S$	T (7)(9) I

练习

- 用形式证明方法证明：

$(P \wedge Q) \rightarrow R$，$\neg R \vee S$，$\neg S \Rightarrow \neg P \vee \neg Q$

（1）	$\neg R \vee S$	P
（2）	$\neg S$	P
（3）	$\neg R$	T(1)(2) I
（4）	$(P \wedge Q) \rightarrow R$	P
（5）	$\neg (P \wedge Q) \vee R$	T(4) E
（6）	$\neg (P \wedge Q)$	T(3)(5) I
（7）	$\neg P \vee \neg Q$	T(6) E

例: $A \to B \wedge C$, $\neg B \vee D$, $(E \to \neg P) \to \neg D$, $B \to A \wedge \neg E \Rightarrow B \to E$

(1) $\neg B \vee D$	P
(2) $B \to D$	T (1) E
(3) $(E \to \neg P) \to \neg D$	P
(4) $D \to \neg(E \to \neg P)$	T (3) E
(5) $B \to \neg(E \to \neg P)$	T (2)(4) I
(6) $B \to \neg(\neg E \vee \neg P)$	T (5) E
(7) $B \to E \wedge P$	T (6) E
(8) $\neg B \vee E \wedge P$	T (7) E
(9) $(\neg B \vee E) \wedge (\neg B \vee P)$	T (8) E
(10) $(\neg B \vee E)$	T (9) I
(11) $B \to E$	T(10) E

证明方法

- 定理常见的形式
  - P当且仅当Q, 如果P, 那么Q
  - $P \to Q$且$Q \to P$, $P \to Q$
- 证明$P \to Q$为真的方法
  - 无义证明法
    - 证明P是假, 那么P→Q是真
  - 平凡证明法
    - 证明Q是真, 那么P→Q是真
  - 直接证明法
  - 间接证明法
    - 附加前提证明法
    - 反证法（归谬法）

附加前提证明法

- 如果要证明的结论是条件式$(R\rightarrow S)$形式，则可以把结论中条件式的前件R作为附加前提，与给定的前提一起推出后件S即可
- 如果$H_1\land H_2\land ...\land H_n\land R\Rightarrow S$，则 $H_1\land H_2\land ...\land H_n \Rightarrow R\rightarrow S$

证明 因为$H_1\land H_2\land ...\land H_n\land R\Rightarrow S$

则 $(H_1\land H_2\land ...\land H_n\land R)\rightarrow S$ 是永真式

即 $\neg(H_1\land H_2\land ...\land H_n\land R)\lor S$ 是永真式

$\neg(H_1\land H_2\land ...\land H_n)\lor\neg R\lor S$ 是永真式

$(H_1\land H_2\land ...\land H_n)\rightarrow(R\rightarrow S)$是永真式

即 $H_1\land H_2\land ...\land H_n \Rightarrow R\rightarrow S$

- 规则CP(Conditional Proof):
  - 如果$H_1 \wedge H_2 \wedge \ldots \wedge H_n \wedge R \Rightarrow S$，则
    $H_1 \wedge H_2 \wedge \ldots \wedge H_n \Rightarrow R \rightarrow S$
- 例
  - $P \rightarrow (Q \rightarrow S), \neg R \vee P, Q \Rightarrow R \rightarrow S$

证明

(1)	R	P(附加前提)
(2)	$\neg R \vee P$	P
(3)	P	T (1)(2) I
(4)	$P \rightarrow (Q \rightarrow S)$	P
(5)	$Q \rightarrow S$	T (3)(4) I
(6)	Q	P
(7)	S	T (5)(6) I
(8)	$R \rightarrow S$	CP

例: $A\to B\wedge C$, $\neg B\vee D$, $(E\to\neg P)\to\neg D$, $B\to A\wedge\neg E \Rightarrow B\to E$

- 直接证明
- 附加前提法

(1) B	P附加
(2) $\neg B\vee D$	P
(3) D	T (1)(2) I
(4) $(E\to\neg P)\to\neg D$	P
(5) $\neg(E\to\neg P)$	T(3)(4) I
(6) $E \wedge P$	T (5) E
(7) E	T (6) I
(8) $B\to E$	CP

例：用形式推理方法证明下面推理的有效性

- 如果体育馆有球赛，青年大街交通就拥挤。在这种情况下，如果小王不提前出发，就会迟到。因此，小王没有提前出发那么若他未迟到的话体育馆就没有球赛

证明　先将命题符号化。

设 P：体育馆有球赛。

Q：青年大街交通拥挤。

R：小王提前出发。

S：小王迟到。

$$P \to Q,\ (Q \land \neg R) \to S \Rightarrow \neg R \to (\neg S \to \neg P)$$

$P \to Q, (Q \wedge \neg R) \to S \Rightarrow \neg R \to (\neg S \to \neg P)$

证明

(1)	$\neg R \wedge \neg S$	P(附加前提)
(2)	$\neg R$	T (1) I
(3)	$\neg S$	T (1) I
(4)	$(Q \wedge \neg R) \to S$	P
(5)	$\neg (Q \wedge \neg R)$	T (3) (4) I
(6)	$\neg Q \vee R$	T (5) E
(7)	$\neg Q$	T (2) (6) I
(8)	$P \to Q$	P
(9)	$\neg P$	T (7) (8) I
(10)	$(\neg R \wedge \neg S) \to \neg P$	CP

反证法（归谬法）

- 主要思想：假设结论不成立，可以推出矛盾的结论(矛盾式)
- **定义2.7.2**
  - 设$H_1,H_2,\ldots,H_n$是命题公式，*若*$H_1 \wedge H_2 \wedge \ldots \wedge H_n$ 是可满足式，则称$H_1,H_2,\ldots H_n$是***相容的***(**一致的**)；如果$H_1 \wedge H_2 \wedge \ldots \wedge H_n$是矛盾式，则称$H_1,H_2,\ldots H_n$是***不相容的***(不一致的)

- 设$\{H_1, H_2, \ldots, H_n\}$是一致的, C是一命题公式, 如果$\{H_1, H_2, \ldots, H_n, \neg C\}$是不一致的, 则能从$H_1, H_2, \ldots, H_n$推出$C$

证明 设$H_1 \wedge H_2 \wedge \ldots \wedge H_n \wedge \neg C$ 是矛盾式，则

$\neg(H_1 \wedge H_2 \wedge \ldots \wedge H_n \wedge \neg C)$是个永真式。

$$\neg(H_1 \wedge H_2 \wedge \ldots \wedge H_n \wedge \neg C) \Leftrightarrow \neg(H_1 \wedge H_2 \wedge \ldots \wedge H_n) \vee C$$

$$\Leftrightarrow (H_1 \wedge H_2 \wedge \ldots \wedge H_n) \rightarrow C$$

所以 $H_1 \wedge H_2 \wedge \ldots \wedge H_n \Rightarrow C$

- 实际上，要证明$H_1 \wedge H_2 \wedge \ldots \wedge H_n \Rightarrow C$，只要证明$H_1 \wedge H_2 \wedge \ldots \wedge H_n \wedge \neg C$蕴含着矛盾式即可，即$H_1 \wedge H_2 \wedge \ldots \wedge H_n \wedge \neg C \Rightarrow R \wedge \neg R$

  - Why?

例 $P \to Q, (\neg Q \vee R) \wedge \neg R, \neg(\neg P \wedge S) \Rightarrow \neg S$

(1)	$\neg\neg S$	P(假设前提)
(2)	S	T (1)E
(3)	$\neg(\neg P \wedge S)$	P
(4)	$P \vee \neg S$	T (3)E
(5)	P	T (2)(4)I
(6)	$P \to Q$	P
(7)	Q	T (5)(6)I
(8)	$(\neg Q \vee R) \wedge \neg R$	P
(9)	$\neg Q \vee R$	T (8)I
(10)	$\neg R$	T (8)I
(11)	R	T (7)(9)I
(12)	$R \wedge \neg R$	T (10)(11)I

例　证明：$R \to \neg Q, R \vee S, S \to \neg Q, P \to Q \Rightarrow \neg P$

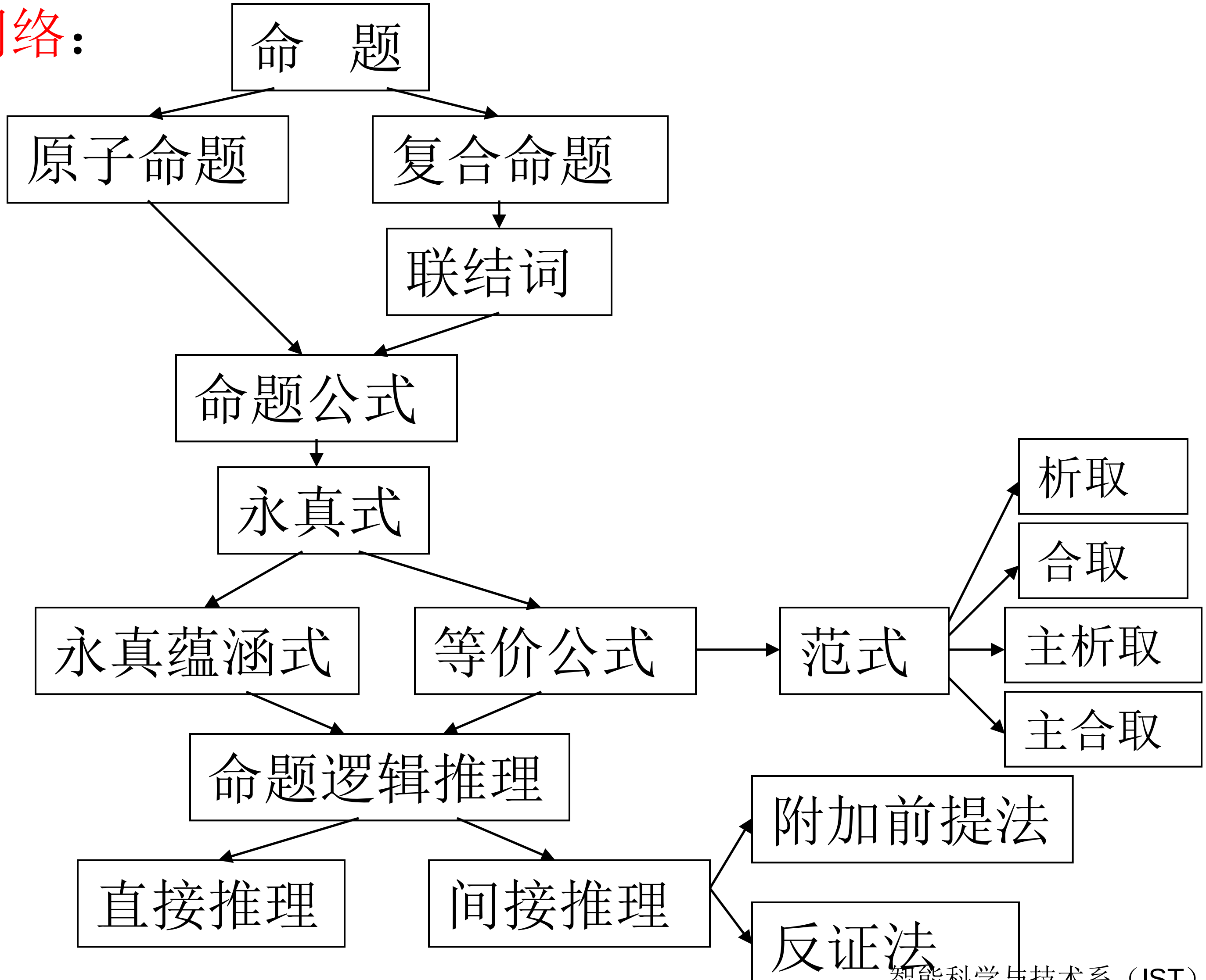
(1)	$\neg(\neg P)$	P(假设前提)
(2)	P	T(1) E
(3)	$P \to Q$	P
(4)	Q	T(1) (2) I
(5)	$R \to \neg Q$	P
(6)	$\neg R$	T(4)(5) I
(7)	$R \vee S$	P
(8)	S	T(6)(7) I
(9)	$S \to \neg Q$	P
(10)	$\neg Q$	T(8)(9) I
(11)	$Q \wedge \neg Q$	T(4)(10) I

命题逻辑的应用

- 孙澈, 李美英. 数理命题逻辑在交流电能计量接线上的研究与应用. 《太原科技》，2003年第1期
- 黄冲.组合优化中的命题逻辑.华中科技大学硕士学位论文，2011
- 李丹菁，陶振麟.在预测控制中使用命题逻辑及其应用. 2001中国控制与决策学术年会论文集， 2001年

命题逻辑小结

知识网络：


命　题
原子命题
复合命题
联结词
命题公式
永真式
析取
合取
永真蕴涵式
等价公式
范式
主析取
主合取
命题逻辑推理
附加前提法
直接推理
间接推理
反证法

学习重点及要求：

- 逻辑联结词
  - 要熟练掌握联结词的真值表定义以及它们在自然语言中的含义
  - 特别注意“∨”和“→”的用法
- 命题符号化
- 掌握永真式的证明方法
  - 真值表
  - 等价变换，化简成 T
  - 主范式
- 掌握永真蕴含式的证明方法
- 掌握等价公式的证明方法
  - 对偶式
- 熟练掌握范式的写法
- 熟练掌握三种推理方法
  - 直接证明
  - 附加前提
  - 反证法