第三篇 集 合 论
Set Theory

主要内容

- 第4章 集合
  - 4.1 集合的概念与表示
  - 4.2 集合的运算
  - 4.3 Venn氏图及容斥原理
  - 4.4 集合的划分
  - 4.5 自然数集与数学归纳法
- 第5章 二元关系
- 第6章 函数

第4章 集合（Set）

4.1 集合的概念与表示

- 集合的概念
  - 又称为类、族或搜集
  - 是数学中最基本的概念之一
  - 不可精确定义
  - 集合的描述
    - 笼统地说，一些可以互相区分的任意对象(统称为元素)聚集在一起形成的整体就叫做集合，用大写的英文字母表示，如A，B,…
    - 这些对象就是这个集合的元素(或称成员)，一般用小写字母表示，如a，b ,…
  - 集合中的元素**不计次序**
    - $\{a,b,c,a\}=\{c,b,a,d\}$
  - 集合中的元素**不计重度**
    - $\{x,y,x\} =\{x,y\} =\{x,x,x,y\}$

- 元素与集合的关系
  - a是集合A的一个元素, 则记为$a \in A$，读做“a属于A”, 或说“a在A中”
  - a不是集合A的一个元素, 则记为$a \notin A$，读做“a不属于A”, 或说“a不在A中”
  - 集合的元素可以是一个集合
    - 例：$A=\{a,b,c,\{a,b\}\}$

    则$\{a,b\} \in A$且$\{a,b\} \subseteq A$

集合的基数

- **定义4.1.1** 设A是一个集合。
  1. 用｜A｜或#A表示A含有的元素的个数，称做A的基数，或阶。
  2. 若#A =0，则称为空集；否则称为非空集。
  3. 若#A为一非负整数，则称A为有限集；否则称为无限集。
  - 例：
    - $A=\{a, b\}$, $|A|=2$
    - $|\{A\}|=1$
- 显然，空集是不含有任何元素的有限集，常用符号Φ 表示；另外，习惯上称基数为n的非空有限集为n元(或n阶)集合。

集合间的关系

- **定义4.1.2 全集**
  - 恒用E表示，是指包含了讨论中涉及的全体元素的特殊集合
    - 全集也是有相对性的，不同的问题有不同的全集，即使是同一个问题也可以有不同的全集
- **定义4.1.3** 集合相等
  - 两个集合A和B相等, 即$A=B$, 当且仅当它们有相同的成员

$$A = B \Leftrightarrow \forall x(x \in A \leftrightarrow x \in B)$$

$$\Leftrightarrow \forall x(x \in A \rightarrow x \in B) \wedge \forall x(x \in B \rightarrow x \in A)$$

否则，用$A \neq B$表示集合A和B不相等，即$A \neq B$

$$\Leftrightarrow \neg \forall x(x \in A \leftrightarrow x \in B)$$

- **定义4.1.4** 设A和B是集合,
  - 如果A的每一元素是B的一个元素, 那么A是B的 *子集*,也称B是A的母集(或称扩集)，记为$A \subseteq B$, 读做“B包含A”或“A包含于B”,即

$$A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x(x \in A \rightarrow x \in B)$$

集合间的关系

- **定义4.1.5**
  - 如果$A\subseteq B$且$A\neq B$, 那么称A是B的***真子集***,记作$A\subset B$, 读作 “B真包含A”或 “A真包含于B”,即

$$A\subset B\Leftrightarrow A\subseteq B\wedge A\neq B$$

$$\Leftrightarrow\forall x(x\in A\to x\in B)\wedge\neg\forall x(x\in A\leftrightarrow x\in B)$$

$$\Leftrightarrow\forall x(x\in A\to x\in B)\wedge(\neg\forall x(x\in A\to x\in B)\vee\neg\forall x(x\in B\to x\in A))$$

$$\Leftrightarrow(\forall x(x\in A\to x\in B)\wedge\neg\forall x(x\in A\to x\in B))\vee(\forall x(x\in A\to x\in B)\wedge\neg\forall x(x\in B\to x\in A))$$

$$\Leftrightarrow\forall x(x\in A\to x\in B)\wedge\exists x(x\in B\wedge x\notin A)$$

集合间的关系

- **定理4.1.1**设A和B是集合, $A=B$当且仅当$A\subseteq B$和$B\subseteq A$（$\subseteq$的反对称性）

证明：

$$A=B\Leftrightarrow A\subseteq B\wedge B\subseteq A$$

$$\Leftrightarrow\forall x(x\in A\rightarrow x\in B)\wedge\forall x(x\in B\rightarrow x\in A)$$

$$\Leftrightarrow\forall x((x\in A\rightarrow x\in B)\wedge(x\in B\rightarrow x\in A))$$

$$\Leftrightarrow\forall x(x\in A\leftrightarrow x\in B)$$

集合的表示

- 列举法
  - 将集合中的元素一一列出，写在大括号内
  - A={1, 2, 3, 4}， B={a,b,c,d}， {…,-4,-2,0,2,4,…}
- 描述法（指定原理）
  - 用谓词公式描述元素的共同属性
  - 一般形式：
    - S={a|P(a)}表示a∈S当且仅当P(a)是真
    - A={a|a∈I∧0＜a∧a＜5}, {a|a∈I∧1≤a≤50}
  - A={x|P(x)}， B={x|Q(x)}
    - 若P(x)⇔Q(x)，则A = B
    - 若P(x)⇒Q(x)，则A ⊆ B

集合的表示

- 递归法

(1) 基础条款(简称基础)

  - 已知哪些元素属于集合

(2) 归纳条款(简称归纳)

  - 一般为一些递推规则

(3) 极小性条款(简称极小性)

  - 断言一个事物仅能有限次应用基础和归纳条款构成
  - 其它形式

(i) 集合*S*是满足基础和归纳条款的最小集合

(ii) 如果*T*是*S*的子集, 使T满足基础和归纳条款, 那么*T*=S

例 1

- 如果论述域是整数I, 那么能为3 整除的正整数集合S的谓词定义如下:

$$S = \{x \mid x > 0 \wedge \exists y(x = 3y)\}$$

同样集合能归纳地定义如下: ;

(1) (基础)$3 \in S$, ;

(2) (归纳)如果$x \in S$和$y \in S$, 那么$x+y \in S$, ;

(3) (极小性)S的元素都是由有限次应用条款1和2得出的。

字母表与串

- 设Σ表示一个有限的非空的符号(字符)集合、我们称Σ为字母表。由字母表Σ中有限个字符拼接起来的符号串叫做字母表Σ上的一个字(或叫串)
  - 例

    (*a*) 如果Σ={*a*,*b*, ..., *z*}, 那么is, then都是Σ上的字

    (*b*) 如果Σ={你, 我, 人, 工, ..., 是}, 那么“你是工人”是Σ上的串

    (*c*) 如果Σ={*a*, *b*, ..., *z*,_}　, 这里“_”是代表空白。那么that_was_long_ago是Σ上的串, 习惯上印成that was long ago

    (*d*) 如果Σ={0,1}, 那么000,010,011010等都是Σ上的串

- x是Σ上的一个字, 如果$x=a_1a_2...a_n$, （$n\in N$, $1\le i\le n$, $a_i\in\Sigma$）, 那么x中的符号个数n称为x的长度, 记为$\|x\|$
- 长度为0的串叫做*空串*，记为Λ
- x和y都是在Σ上的符号串，x**连结**(或叫**并置, 毗连**)y, 记为xy
  - $x=a_1a_2...a_n$，$y=b_1b_2...b_m$ 则 $xy=a_1a_2...a_nb_1b_2...b_m$
  - $x=\Lambda$则 $xy=y$
- $z=xy$
  - x是z的**词头**, y是z的**词尾**
  - 如果$x\neq z$, 称x为**真词头**
  - 如果$y\neq z$,称y为**真词尾**
  - 如果$w=xyz$, 则y是w的**子串**, 如果$y\neq w$,称y为**真子串**

- 设Σ是一个字母表, Σ上的*非空串*的集合Σ^+定义如下：
  - (1) (基础)如果$a \in \Sigma$, 那么$a \in \Sigma^+$;
  - (2) (归纳)如果$x \in \Sigma^+$且$a \in \Sigma$, 那么$ax \in \Sigma^+$
  - (3) (极小性)所有集合Σ^+的元素仅能由有限次应用条款1和2构成。
- 集合Σ^+包含长度为1, 2, 3, ...的串, 所以是无限集合。然而, 在Σ^+中没有一个串包含无限数目的符号, 这是极小性条款限制的结果
- **例：** $\Sigma=\{a,b\}$
  - $\Sigma^+=\{a,b, aa,ab,ba,bb,aaa,aab,...\}$

- 设Σ是字母表, Σ上的所有有限符号串的集合Σ*定义如下：
  (1) (基础)　$\Lambda \in \Sigma^*$　。
  (2) (归纳)如果$x \in \Sigma^*$和$a \in \Sigma$, 那么$ax \in \Sigma^*$。
  (3) (极小性)所有集合Σ*的元素, 仅能有限次应用条款1和条款2构成。
- $\Sigma^* = \Sigma^+ \cup \{\Lambda\}$
- 例
  - $\Sigma = \{a,b\}$, $\Sigma^* = \{\Lambda, a, b, aa, ab, \ldots\}$

- **例 :**算术表达式集合
  - 设集合仅包含整数，一元运算+和-， 二元运算+、 -、 *、/

(1) (基础) 如果$D=\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$和$x \in D^+$, 那么$x$是一算术表达式。

(2) (归纳) 如果x和y都是算术表达式, 那么

(i) $(+x)$ 是一算术表达式

(ii) $(-x)$ 是一算术表达式

(iii) $(x+y)$是一算术表达式

(iv) $(x-y)$是一算术表达式

(v) $(x*y)$是一算术表达式

(vi) (x/y) 是一算术表达式

(3) (极小性)一个符号序列是一算术表达式当且仅当它能由有限次应用条款1和2得到

集合的比较运算

- **定理4.1.2** 设A、B和C是任意三个集合，则有

(1) $\Phi \subseteq A$

(2) $A \subseteq E$

(3) $A \subseteq A$ （$\subseteq$的自反性）

(4) 若$A \subseteq B$且$B \subseteq C$, 则$A \subseteq C$（$\subseteq$的传递性）

(5) 若$A \subset B$且$B \subset C$, 则$A \subset C$

(6) 若$A=B$, 则$B = A$

(7) 若$A=B$且$B = C$, 则$A = C$

证明：

(1) $\forall x$,

$x \in \Phi$ 永假, 所以 $x \in \Phi \rightarrow x \in A$是真

$\therefore \Phi \subseteq A$

(2) $\forall x$,

$x \in E$永真, 所以$x \in A \rightarrow x \in E$ 是真

$\therefore A \subseteq E$

(4) 若$A \subseteq B$且 $B \subseteq C$

则对$\forall x \in E$

$x \in A \Rightarrow x \in B$

$\Rightarrow x \in C$

即 $A \subseteq C$

得证

练习

- 设$A=\{a,\{a\},\{a,b\},\{\{a,b\},c\}, \{\Phi\}\}$判断下面命题的真值

(1) $\{a\}\in A$ (2) $\{\Phi\}\subseteq A$

(3) $\{\Phi\}\in A$ (4) $\{a\}\subseteq\{\{a,b\},c\}$

(5) $\{\{a\}\}\subseteq A$ (6) $\{a,b\}\in\{\{a,b\},c\}$

(7) $\{\{a,b\}\}\subseteq A$ (8) $\{a,b\}\subseteq\{\{a,b\},c\}$

(9) $\{c\}\subseteq\{\{a,b\},c\}$ (10) $(\{c\}\subseteq A)\rightarrow(a\in\Phi)$

幂集

- **定义4.1.6** A是集合， 由A的所有子集构成的集合， 称之为A的***幂集***。记作$P(A)$或2^A
  - $P(A)=\{B \mid B\subseteq A\}$
  - 例

    (*a*) $A=\Phi$

    $P(A)=\{\Phi\}$

    (*b*) $A=\{a,b\}$

    $P(A)=\{\Phi, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$
  - A是任意自然数集合
    - $A\in P(A)$
    - $\Phi\in P(A)$

幂集

- **定理4.1.3** 设 A 是有限集，则

$$2^{|A|} = |2^A|$$

- 幂集元素的编码
  - 例： $A=\{a,b,c\}$
  - $P(A)=\{\Phi,\{a\},\{b\},\{c\},\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\},\{a,b,c\}\}$
  - 八个子集分别表示成：$S_0, S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6, S_7$
  - 下标写成二进制形式：$S_{000}, S_{001}, S_{010}, S_{011}, S_{100}, S_{101}, S_{110}, S_{111}$

Φ	$\{c\}$	$\{b\}$	$\{b,c\}$	$\{a\}$	$\{a,c\}$	$\{a,b\}$	$\{a,b,c\}$
S_{000}	S_{001}	S_{010}	S_{011}	S_{100}	S_{101}	S_{110}	S_{111}

  - $A=\{a,b,c,d\}$
    - $S_9=?$

      $S_9=\{a,d\}$
    - $\{a,c,d\}=?$

      $\{a,c,d\}=S_{1011}=S_{11}$

练习

- 设$A=\{\Phi\}$， $B=P(P(A))$，则以下哪些是真命题?

(1) $\Phi \in B$　(2)$\Phi \subseteq B$　(3)$\{\Phi\} \in B$

(4) $\{\Phi\} \subseteq B$　(5)$\{\{\Phi\}\} \in B$　(6)$\{\{\Phi\}\} \subseteq B$

解： $P(A)=\{\Phi, \{\Phi\}\}$

$$B=\{\Phi, \{\Phi\}, \{\{\Phi\}\}, \{\Phi, \{\Phi\}\}\}$$

罗素悖论

- 1901年罗素(Bertrand Russell)提出
  - 不存在集合$S=\{A|A$是集合，且$A\notin A\}$

    证明：假设S是一个集合，则以下两种情况有且仅有一种出现：

    (1) $S\notin S$，这时由S的定义知$S\in S$

    (2) $S\in S$，这时由S的定义知$S\notin S$

    总之，恒有

    $$S\in S \ \ \mathit{iff} \ \ S\notin S$$

    矛盾，所以S不可能是一个集合
  - 一个“集合”，如S，它能导致矛盾，称为**非良定的**

4.2 集合的运算

- **定义4.2.1** 设A和B是集合

  (a) A和B的并记为$A\cup B$

  $A\cup B=\{x|x\in A\vee x\in B\}$　　　$x\in A\cup B\Leftrightarrow x\in A\vee x\in B$

  (b) A和B的交记为$A\cap B$

  $A\cap B=\{x|x\in A\wedge x\in B\}$　　　$x\in A\cap B\Leftrightarrow x\in A\wedge x\in B$

  (c) A和B的差, 或B关于A的相对补, 记为A-B

  $A-B=\{x|x\in A\wedge x\notin B\}$　　　$x\in A-B\Leftrightarrow x\in A\wedge x\notin B$

  (d) A和B对称差,记为$A\oplus B$

  $A\oplus B = \{x|x\in A\bigtriangledown x\in B\}$　　　$x\in A\oplus B\Leftrightarrow x\in A\bigtriangledown x\in B$

例

- **例4.2.1** 若取E＝{0,1,2,3,4,5}，A＝{1,2,4}及B＝{2,5}，则有：

$A\cup B=\{1,2,4,5\}$，　$A\cap B=\{2\}$，　$A-B=\{1,4\}$，

$A\oplus B=\{1,4,5\}$，　$A^{c}=\{0,3,5\}$，　$B^{c}=\{0,1,3,4\}$。

- **例4.2.2** 设Σ是一个字母表，用Σ^n表示Σ上全体长度为n的串组成的集合($n\in Z$)，则：

$\Sigma^*=\Sigma^0\cup\Sigma^1\cup\Sigma^2\cup\ldots\ldots=$

$\Sigma^+=\Sigma^*-\{\varepsilon\}=\Sigma^1\cup\Sigma^2\cup\ldots\ldots=$

- **定义4.2.2** 如果A和B是集合, $A \cap B = \Phi$, 那么称A和B是不相交的。如果C是一个集合的族, 使C的任意两个不同元素都不相交, 那么C是(两两)不相交集合的族
  - 例：四个集合：{1,2,3}、{4}、{5,6}和{7,8,9,10}是两两互不相交的
- **定理4.2.1** 设A、B和C是三个集合，则有

  (1) $A \subseteq A \cup B$， $B \subseteq A \cup B$；

  (2) $A \cap B \subseteq A$， $A \cap B \subseteq B$；

  (3) $A - B \subseteq A$；

  (4) 若$A \subseteq B$，则$B^c \subseteq A^c$；

  (5) 若$A \subseteq C$且$B \subseteq C$，则$A \cup B \subseteq C$；

  (6) 若$A \subseteq B$且$A \subseteq C$，则$A \subseteq B \cap C$。

- **定理4.2.2** 设A、B、C和D是四个集合，且$A \subseteq B$，$C \subseteq D$，则

  (1) $A \cup C \subseteq B \cup D$；

  (2) $A \cap C \subseteq B \cap D$。

- **定理4.2.3** 设A和B是两个集合，则下面三个关系式互相等价。

  (1) $A \subseteq B$；

  (2) $A \cup B = B$；

  (3) $A \cap B = A$。

集合运算的基本恒等式

- 集合的并和交运算是可交换和可结合的
  - 对任意集合A、B和C

(*a*) $A \cup B = B \cup A$;

(*b*) $A \cap B = B \cap A$;

(*c*) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$;

(*d*) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$;

证明

- 证明两集合相等的问题
- 方法一：等价变换

证明：

$(a)\ \forall x$

$$x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A \vee x \in B$$
$$\Leftrightarrow x \in B \vee x \in A$$
$$\Leftrightarrow x \in B \cup A$$
$$\therefore A \cup B = B \cup A$$

$(c)\ \forall x$

$$x \in A \cup (B \cup C) \Leftrightarrow x \in A \vee x \in (B \cup C)$$
$$\Leftrightarrow x \in A \vee (x \in B \vee x \in C)$$
$$\Leftrightarrow (x \in A \vee x \in B) \vee x \in C$$
$$\Leftrightarrow x \in (A \cup B) \vee x \in C$$
$$\Leftrightarrow x \in (A \cup B) \cup C$$
$$\therefore A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$$

集合运算的基本恒等式

- 分配律: 对任意集合A、B和C有

$(a)\ A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$

$(b)\ A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$

证明： $(a)\ \forall x$

$x\in A\cup(B\cap C)$

$\Leftrightarrow x\in A\vee x\in(B\cap C)$

$\Leftrightarrow x\in A\vee(x\in B\wedge x\in C)$

$\Leftrightarrow(x\in A\vee x\in B)\wedge(x\in A\wedge x\in C)$

$\Leftrightarrow(x\in A\cup B)\wedge(x\in A\cup C)$

$\Leftrightarrow x\in(A\cup B)\cap(A\cup C)$

$\therefore A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$

集合运算的基本恒等式

- 设A、B、C和D是论域E的任意子集合, 那么下列断言是真:

  (a) $A \cup A = A$;(幂等律)

  (b) $A \cap A = A$; (幂等律)

  (c) $A \cup \Phi = A$;(同一律)

  (d) $A \cap \Phi = \Phi$;(零律)

  (e) $A - \Phi = A$;

  (f) $A - B \subseteq A$;

  (g) 如果$A \subseteq B$和$C \subseteq D$, 那么, $(A \cup C) \subseteq (B \cup D)$;

  (h) 如果$A \subseteq B$和$C \subseteq D$, 那么, $(A \cap C) \subseteq (B \cap D)$;

  (i) $A \subseteq A \cup B$;

  (j) $A \cap B \subseteq A$;

  (k) 如果$A \subseteq B$, 那么, $A \cup B = B$;

  (l) 如果$A \subseteq B$, 那么, $A \cap B = A$

证明

(*g*)如果$A \subseteq B$和$C \subseteq D$, 那么, $(A \cup C) \subseteq (B \cup D)$

- 属于证明两集合的包含关系的问题
  - 方法一：定义

证明： $\forall x$

$x \in A \cup C$

即$x \in A \vee x \in C$

若$x \in A$，则因为$A \subseteq B$， $\therefore x \in B$

则$x \in B \cup D$

若$x \in C$，则因为$C \subseteq D$， $\therefore x \in D$

则$x \in B \cup D$

$\therefore x \in B \cup D$

得$(A \cup C) \subseteq (B \cup D)$

$(i)\ A \subseteq A \cup B$

方法二：等价变换

证明： $\forall x$

$$x \in A$$

$$\Rightarrow x \in A \vee x \in B$$

$$\Leftrightarrow x \in A \cup B$$

$$\therefore A \subseteq A \cup B$$

(k)如果$A \subseteq B$, 那么, $A \cup B = B$

- 两集合相等的问题
  - 方法二：证明左边包含右边且右边包含左边

证明：

一方面：因为$A \subseteq B$, 又$B \subseteq B$ 根据(g)得$A \cup B \subseteq B \cup B$, 但$B \cup B = B$, 因此$A \cup B \subseteq B$

另一方面：由(i)得$B \subseteq A \cup B$

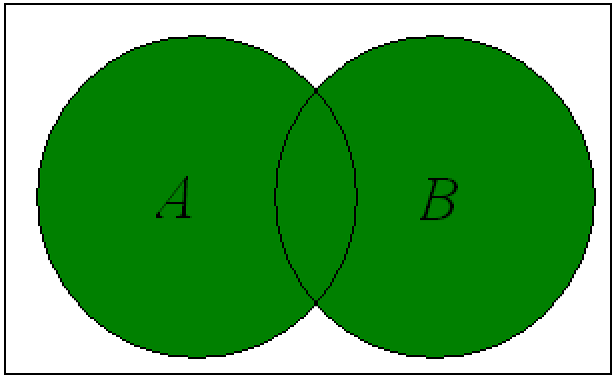
$\therefore A \cup B = B$

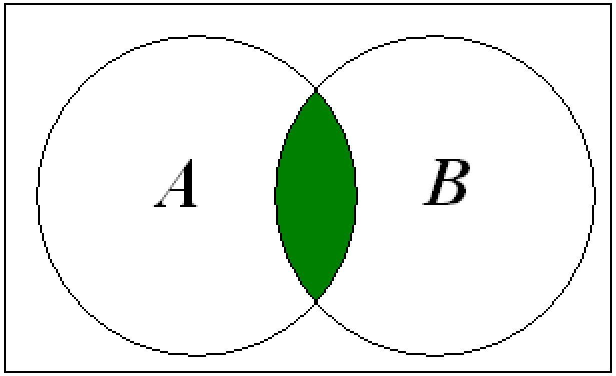
- 推论

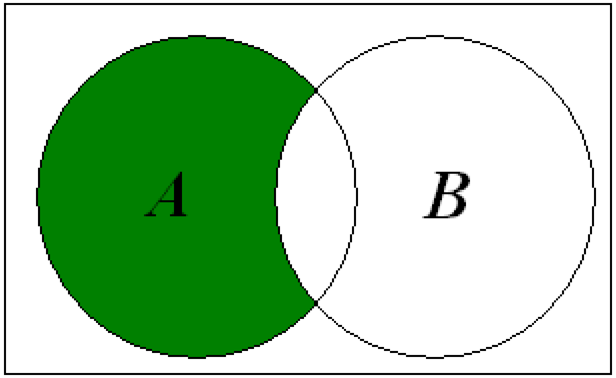
$(a)\ A \cup E = E \qquad (b) A \cap E = A$

4.3 Venn氏图及容斥原理

- 文氏图（ Venn diagram ）





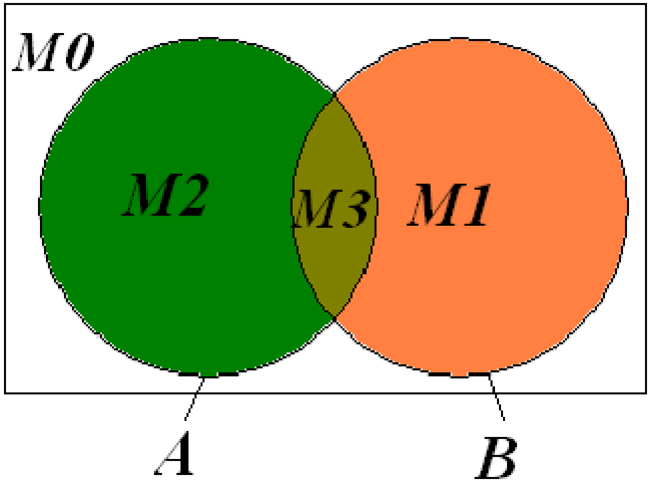


$A \cup B$

$A \cap B$

$A - B = A - A \cap B$

容斥原理



$$\left.\begin{aligned} M_0 &= \overline{A} \cap \overline{B} \\ M_1 &= \overline{A} \cap B \\ M_2 &= A \cap \overline{B} \\ M_3 &= A \cap B \end{aligned}\right\}$$

由A和B生成的最小集合

$$\begin{aligned} |A \cup B| &= |M_1| + |M_2| + |M_3| \\ &= |B| - |A \cap B| + |A| - |A \cap B| + |A \cap B| \\ &= |A| + |B| - |A \cap B| \end{aligned}$$

容斥原理

- **定理 4.3.1** 设A和B都是有限集合

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

$$|A \cap B| \leq \min(|A|, |B|)$$

$$|A \oplus B| = |A| + |B| - 2|A \cap B|$$

$$|A - B| \geq |A| - |B|$$

$$|P(A)| = 2^{|A|}$$

例

- 在20名青年有10名是公司职员,12名是学生,其中5名既是职员又是学生,问有几名既不是职员,又不是学生?

解 设职员和学生的集合分别是A和B。

由已知条件$|A|=10$, $|B|=12$, $|A\cap B|=5$

$|A\cup B|=|A|+|B|-|A\cap B|=10+12-5=17$

则

$$|\overline{A\cup B}|=|U|-|A\cup B|=20-17=3$$

$\therefore$有3名既不是职员又不是学生

- 三个集合的容斥定理
  - $|A\cup B\cup C|=|A|+|B|+|C|-|A\cap B|-|A\cap C|-|B\cap C|+|A\cap B\cap C|$
- 例：某研究所有170名职工，其中120人会英语，80人会法语，60人会日语，50人会英语和法语，25人会英语和日语，30人会法语和日语，10人会英语、日语和法语。问有多少人不会这三种语言？

解：令U为全集，E、F、J分别为会英语、法语和日语人的集合

$|U|=170$，$|E|=120$，$|F|=80$，$|J|=60$，$|E\cap F|=50$，$|E\cap J|=25$，$|F\cap J|=30$，$|E\cap F\cap J|=10$

$|E\cup F\cup J|=|E|+|F|+|J|-|E\cap F|-|E\cap J|-|F\cap J|+|E\cap F\cap J|$

$= 120+80+60-50-25-30+10=165$

$|U-(E\cup F\cup J)|=170-165=5$　即有5人不会这三种语言

容斥原理

- **定理4.3.2** 设 $A_1, A_2, \ldots, A_n$是n个有限集，则

$$\left|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n\right| = \sum_{1\le i\le n} |A_i| - \sum_{1\le i<j\le n} |A_i \cap A_j| +$$

$$\sum_{1\le i<j<k\le n} |A_i \cap A_j \cap A_k| + \ldots + (-1)^{n-1}\left|A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n\right|$$

4.4 集合的划分

- **定义4.4.1** 划分
  - 给定非空集合A和非空集合族$\pi=\{A_1,A_2,\ldots,A_m\}$,如果

  (i) $A= A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_m$

  (ii) $A_i\cap A_j=\Phi$ 或$A_i=A_j(i,j=1,2,\ldots,m)$

  称集合族π为集合A的一个***划分*****(分割)**
  - 划分的元素A_i称为划分π的***块***(Block)
  - 如果划分是有限集合,则不同块的个数即$\#\pi$叫划分的***秩***
- **定义4.4.2** 覆盖
  - 给定非空集合A和非空集合族$\pi=\{A_1,A_2,\ldots,A_m\}$,如果

  $$A= A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_m$$

  称集合族π为集合A的一个***覆盖***

关于集合的划分的理解

- 划分中的每一块是非空的
- 划分中的任意两块没有公共元素
- A的一个划分耗尽了A中的所有元素
- 例
- 设$S=\{1,2,3\}$
  - $A=\{\{1,2\},\{2,3\}\}$
  - $B=\{\{1\},\{1,2\},\{1,3\}\}$
  - $C=\{\{1\},\{2,3\}\}$
  - $D=\{\{1,2,3\}\}$ 最小（粗）划分
  - $E=\{\{1\},\{2\},\{3\}\}$ 最大（细）划分
  - $F=\{\{1\},\{1,2\}\}$

交叉划分

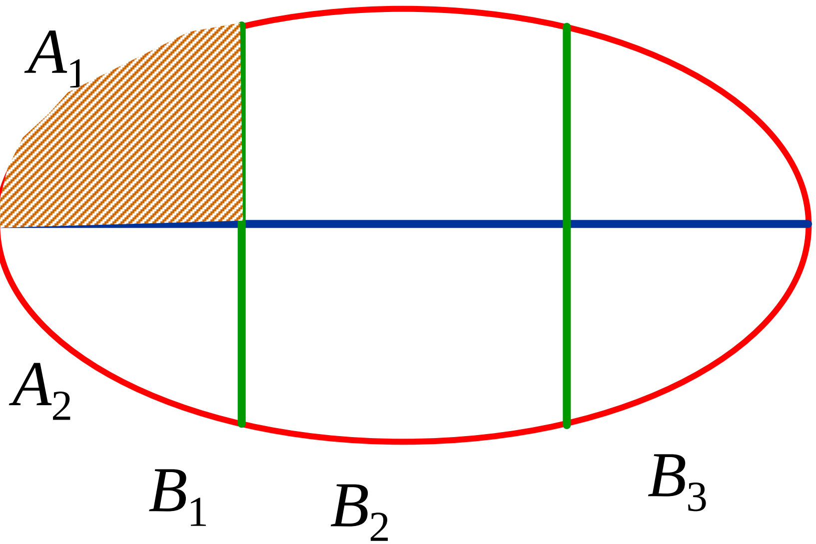
- **定义4.4.3**
  - 若$\pi_1 = \{A_1, A_2, \ldots, A_r\}$和$\pi_2 = \{B_1, B_2, \ldots, B_t\}$是集合$A$的两个不同划分，则称所有使$A_i \cap B_j \neq \Phi$者(i=1,2,…,r；j=1,2,…,t)组成之集π:

$$\pi = \{S \mid S \subseteq \mathrm{A} \wedge S \neq \Phi \wedge \exists i \exists j(A_i \in \pi_1 \wedge B_j \in \pi_2 \wedge S = A_i \cap B_j)\}$$

为π_1和π_2的交叉划分。

交叉划分

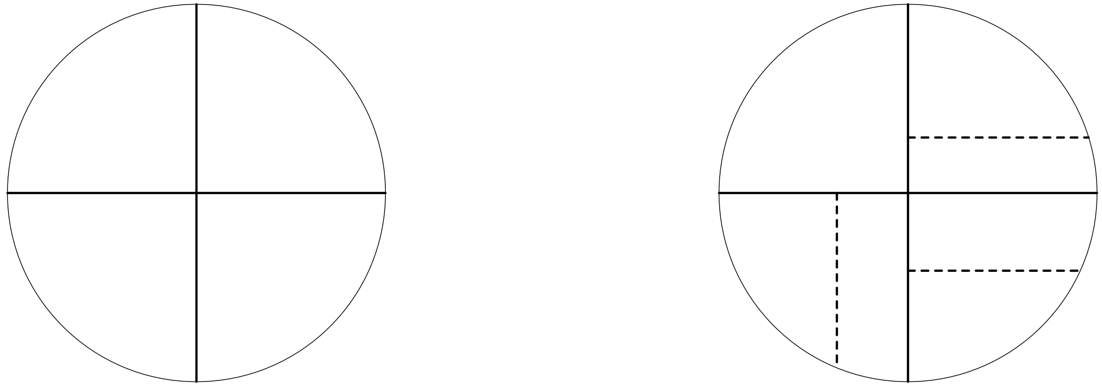
- **例4.4.3** 设集合 A 表示某个单位全体具有高级职称的职工之集
  - 划分$\pi_1=\{A_1, A_2\}$
    - A_1——集合 A 中的男职工之集
    - A_2——集合 A 中的女职工之集
  - 划分$\pi_2=\{B_1, B_2, B_3\}$
    - B_1——集合B中的老年职工之集
    - B_2——集合B中的中年职工之集
    - B_3——集合B中的青年职工之集



- **定理4.4.1** 集合 A 的划分π_1和π_2的交叉划分是集合 A 的划分。

集合的划分

- **定义4.4.4**
  - 若$\pi_1=\{A_1, A_2,\ldots, A_r\}$和$\pi_2=\{B_1, B_2,\ldots, B_t\}$是集合$A$的两个划分，若对于每一个$A_i\in\pi_1$都存在$B_j\in\pi_2$使得$A_i\subseteq B_j$，则称$\pi_1$精分$\pi_2$，或称$\pi_1$是$\pi_2$的加细。若$\pi_1$精分$\pi_2$且存在$A_i\in\pi_1$和$B_j\in\pi_2$使得$A_i\subset B_j$(即$\pi_1\neq\pi_2$)，则称$\pi_1$真精分$\pi_2$



(a) (b)

集合的划分

- **定理4.4.2** 集合 A 的划分π_1和π_2的交叉划分精分π_1和π_2

证明：设$\pi_1 = \{A_1, A_2, \ldots, A_r\}, \pi_2 = \{B_1, B_2, \ldots, B_t\}$，并设$\pi_1$和$\pi_2$的交叉划分为$\pi$。

则对任意 $S \in \pi$，必有 $A_i \in \pi_1$和 $B_j \in \pi_2$使得 $S = A_i \cap B_j$，显然 $S \subseteq A_i$， $S \subseteq B_j$，即π精分π_1和π_2 。

第二类Stirling数

- 给定集合的划分并不是唯一的
- 有多少种不同的方法将一n元集合划分成若干个块？
- **定义4.4.5**
  - 将一n元集划分成k块的方法数称为第二类*Stirling*数，用$S(n,k)$表示
  - 对于任意的自然数n，当$k>n$时，有$S(n,k)=0$，且$S(n,1)=1$，$S(n,n)=1$

第二类Stirling数

- **定理4.4.3**
  - $S(n,2) = 2^{n-1}-1$，其中$n \geq 2$
- **定理4.4.4**
  - $S(n,k) = S(n-1,k-1)+k \cdot S(n-1,k)$，其中$2<k<n$

证明 设$A=\{a_1,a_2,\ldots,a_{n-1},a_n\}$是一$n$元集合。我们注视$A$中元素$a_n$在$A$的$k$—划分中的情况，

情况1： a_n单独构成一块，则$\{a_1,a_2,\ldots,a_{n-1}\}$必须划分成$k$-1块，其方法数为$S(n-1,k-1)$；

情况2： a_n与其它元素一起构成一块。则$\{a_1,a_2,\ldots,a_{n-1}\}$必须划分成$k$块， a_n可加入其中的任一块，共有$k \cdot S(n-1,k)$种方法。

总之，$S(n,k) = S(n-1,k-1)+k \cdot S(n-1,k)$。

4.5 自然数集与数学归纳法

- 自然数的定义
  - 公理化方法
  - 构造化方法
- 应用后继集合的概念归纳定义
- **定义 4.5.1** 设A是任意集合, A的*后继集合*记为A^+, 定义为

$$A^+ = A \cup \{A\}$$

称A^+为A的后继的同时，也常说A是A^+的前趋

- **例**
  - (a) $\{a,b\}$的后继集合：$\{a,b\} \cup \{\{a,b\}\} = \{a,b,\{a,b\}\}$
  - (b) $\{\Phi\}$的后继集合：$\{\Phi\} \cup \{\{\Phi\}\} = \{\Phi,\{\Phi\}\}$

- **定理4.5.1** 设 A 是一个集合，则

(1) $\Phi^{+}=\{\Phi\}$;

(2) $\{\Phi\}^{+}=\{\Phi,\{\Phi\}\}$;

(3) $A\in A^{+}$;

(4) $A\subseteq A^{+}$;

(5) $A^{+}\neq\Phi$ 。

自然数

- 自然数集合
  - 1908年Zermelo

Φ ,{Φ },{{Φ }},{{{Φ }}},……

  - Von Neumann的方案

$0=\Phi$ ， $1=0^+=\{\Phi\}$ ， $2=1^+=\{\Phi,\{\Phi\}\}$…

- **定义4.5.2** 自然数N是如下集合：

(1) (基础) $0 \in N$，这里 $0=\Phi$ 。

(2) (归纳)如果$n\in N$, 那么$n^+\in N$

(3) (极小性)如果$A\subseteq N$且满足条款1和2，那么$A=N$

- 自然数系统满足以下Peano公理

(1) $0 \in N$,

(2) 如果$n \in N$, 则恰存在一个n的后继者$n^+ \in N$,

(3) 0 不是任何自然数的后继者, ;

(4) 如果$n^+ = m^+$, 那么$n = m$,

(5) 如果A是N的子集, 使,

(i) $0 \in A$; ;

(ii) 如果$n \in A$, 那么$n^+ \in A$

那么, $A = N$

归纳证明

- **定理4.5.3** 第一数学归纳法原理
  - 设$P(n)$是定义于I上的一项谓词，n_0为一给定整数，为了证明$\forall n\geq n_0$，$P(n)$皆为真，只需证明：

(1) $P(n_0)$为真；

(2) $\forall k\geq n_0$，若$P(k)$ 为真，则$P(k^+)$也为真

证明： 令$A=\{n| n\in N$ 且 $P(n+n_0)$为真$\}$

往证在题设(1)和(2)成立时，$A=N$

显然 $A\subseteq N$，且

归纳变量

i. 由(1)知：$0\in A$

ii. 由(2)知：如果$n\in A$, 那么$n'\in A$

由归纳原理$A=N$

- 第一数学归纳法证明步骤
  (1) 归纳基础：直接验证$n=n_0$时，命题为真
  (2) 归纳步骤：对任意整数$k\geq n_0$，设$n=k$时命题为真（归纳假设），证明当$n=k+1$时命题也为真
- 例
  - 证明对所有$n\in N$，$\sum_{i=0}^{n} i=\frac{n(n+1)}{2}$

证明：

(1) $n=0$时 $0=\sum_{i=0}^{0} i=\frac{0(0+1)}{2}=0$

(2) 设$n=k$时，$\sum_{i=0}^{k} i=\frac{k(k+1)}{2}$

则$n=k+1$时，$\sum_{i=0}^{k+1} i=\sum_{i=0}^{k} i+k+1=\frac{k(k+1)}{2}+k+1=\frac{(k+1)(k+2)}{2}$

例：设i_0是一整数，令$S=\{i|\ i\in I$ 且 $i\geq i_0\}$，证明：对于S的任一非空子集J，皆存在$j_0\in J$使得对于任意的$j\in J$有$j_0\leq j$（称j_0为J的最小元）

注意：由于J可能是无限集合，因此不能直接对$|J|$进行归纳

证明：任取$m\in J$，令$A=\{j|\ j\in J$ 且 $j\leq m\}$，则$A\subseteq J$，$|A|\leq m-i_0+1$，又$m\in A$知$A\neq\Phi$，且若A有最小元a，显然a必是J的最小元，故只需证A有最小元。

(1)当$|A|=1$时，A中仅一个元素m，它就是A的最小元

(2)设$|A|=k$时($k\geq1$)，命题成立，考虑$|A|=k+1$时的情况，设$A=\{j_1, j_2,\ldots, j_k, j_{k+1}\}$，由于$\{j_1, j_2,\ldots, j_k\}$是$k$元集合，由归纳假设得它有最小元，设为$j'$，则当$j'\leq j_{k+1}$时，$j'$是最小元，否则$j_{k+1}$是最小元。总之，$A$存在最小元。

命题得证。

考虑下面的证明过程并指出问题

1. 证明：若n为自然数，则$n+1=n$.

"**证明**"：对任意的$k\in N$，假定$n=k$时命题为真，即$k+1=k$. 从而$(k+1)+1=k+1$，即当$n=k+1$时命题也真. 由第一数学归纳法，命题得证.

2. 证明世界上所有的人都同岁.

"**证明**"：设世界上有n个人.

(1) 当$n=1$时，因为只有一个人，他和自己同岁，所以命题为真

(2) 因为$n=1$的情况已经证明过了，所以假定对任意的自然数$k>1$，当$n=k$时命题为真，现考虑$k+1$个人，不妨设为$a_1, a_2, \ldots, a_k, a_{k+1}$.根据假定，$a_1, a_2, \ldots, a_k$同岁，$a_2, \ldots, a_k, a_{k+1}$同岁，所以$a_1, a_2, \ldots, a_k, a_{k+1}$都与$a_2$同岁.即$n=k+1$时命题也真.由第一数学归纳法，命题得证

■**定理4.5.4** 第二数学归纳法原理

- 设$P(n)$是定义于I上的一项谓词，n_0为一给定整数，为了证明$\forall n \geq n_0$， $P(n)$皆为真，只需证明：

  (1) $P(n_0)$为真；

  (2) $\forall\ n \geq n_0$， 若$k= n_0, n_0+1, \ldots, n$时$P(k)$皆为真，则$P(n^+)$也为真

证明： 令$J=\{n \mid n \in I\ ，\ n \geq n_0$ 且 $P(n)$为假$\}$

往证在题设(1)和(2)成立时， $J=\Phi$

假若不然，已证J必有最小元j_0.

由(1)知： $n_0 \notin J$.故$j_0> n_0$,从而当$k= n_0, n_0+1, \ldots, j_0 -1$时$P(k)$皆为真，由(2)知， $P(j_0)$为真，与$j_0 \in J$矛盾.

- **例：** 有数目相等的两堆棋子, 两人轮流从任一堆里取几颗棋子, 但不能不取也不能同时在两堆里取。规定凡取得最后一颗者胜。求证后取者可以必胜。

证明 对每堆棋子数目n作归纳证明。为了便于叙述, 设甲为先取者, 乙为后取者。

n=1时, 甲必须在某堆中取一颗。于是另一堆中的一颗必为乙所得, 乙胜。

设$n<k$时, 后取者胜。 现证$n=k$时也是后取者胜。

设第一轮甲在某堆先取r颗, $0<r\le k$。 乙在另一堆中也取r颗。则：

(1) 若$r<k$, 经过两人各取一次之后, 两堆都只有k-r颗, $k-r<k$, 现在又是甲先取, 根据归纳假设乙胜。

(2) 若$r=k$, 显然是乙胜。证毕

练习

- 证明：对于任意$n\geq 8$，必存在非负整数s和t，使得$n=3s+5t$
- *Fibonacci*数列定义为

$$F_0=0,\ F_1=1,\ F_{n+2}=F_{n+1}+F_n (n\in N)$$

证明：若$n\geq 1$，则 $((1+\sqrt{5})/2)^{n-2}\leq F_n\leq((1+\sqrt{5})/2)^{n-1}$