

# 数字图像处理



中南大学自动化学院  
谢斌

**xiebin@csu.edu.cn**



## 第4章图像变换(Image Transform)

4.1 连续傅里叶变换

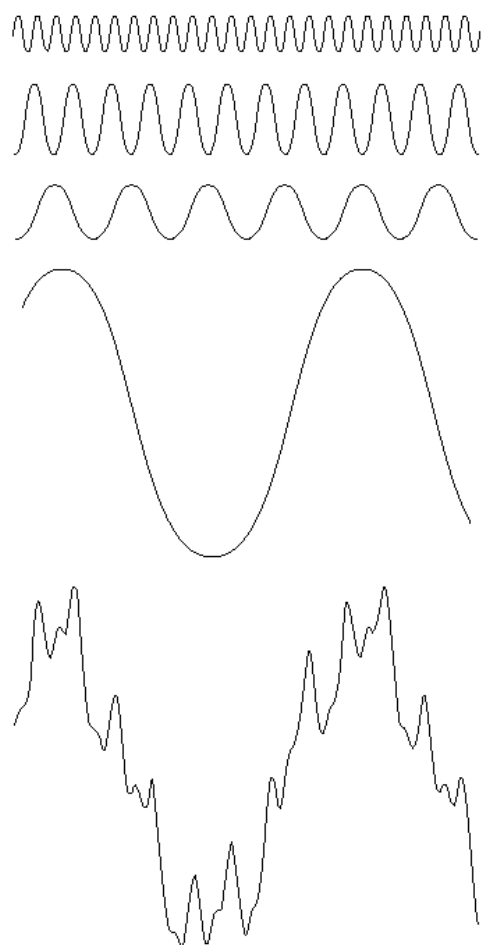
4.2 离散傅里叶变换

4.3 快速傅里叶变换

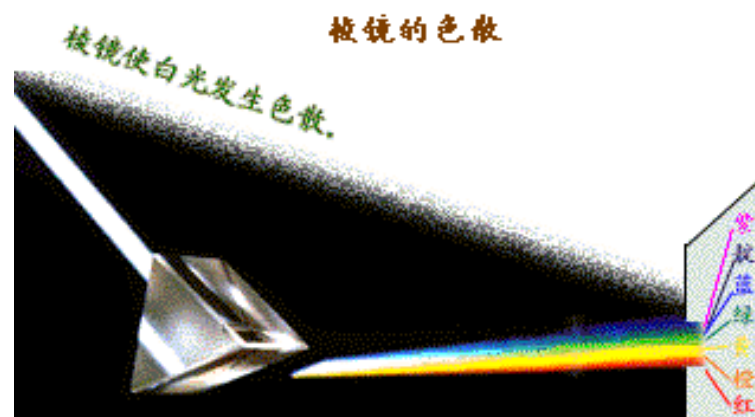
4.4 傅里叶变换的性质

4.5 图像傅里叶变换实例

4.6 其他离散变换



**FIGURE 4.1** The function at the bottom is the sum of the four functions above it. Fourier's idea in 1807 that periodic functions could be represented as a weighted sum of sines and cosines was met with skepticism.





## 一、 图象变换的引入

1. 方法：对图象信息进行变换，使能量保持但重新分配。
2. 目的：有利于加工、处理[滤除不必要信息(如噪声)，加强/提取感兴趣的部分或特征]。

## 二、 方法分类 可分离、正交变换：2D-DFT ， 2D-DCT ， 2D-DHT, 2D-DWT 。

## 三、 用途

1. 提取图象特征（如）：
  - (1) 直流分量： $f(x, y)$ 的平均值= $F(0, 0)$ ；
  - (2) 目标物边缘： $F(u, v)$  高频分量。
2. 图像压缩：正交变换能量集中，对集中（小）部分进行编码。
3. 图象增强：低通滤波，平滑噪声；高通滤波，锐化边缘。



## 4.1 连续傅里叶变换 (Continuous Fourier Transform)

### 1、一维傅立叶变换及其反变换

$$\mathfrak{R}: \quad F(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-j2\pi ux} \, dx$$

$$\mathfrak{R}^{-1}: \quad f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(u) e^{j2\pi ux} \, du$$



## 4.1.1 连续傅里叶变换的定义 (Definition of Continuous Fourier Transform)

这里  $f(x)$  是实函数，它的傅里叶变换  $F(u)$  通常是复函数。 $F(u)$  的实部、虚部、振幅、能量和相位分别表示如下：

- 实部

$$R(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos(2\pi ut) dt \quad (4.3)$$

- 虚部

$$I(u) = -\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sin(2\pi ut) dt \quad (4.4)$$

- 振幅

$$|F(u)| = [R^2(u) + I^2(u)]^{\frac{1}{2}} \quad (4.5)$$



## 4.1.1 连续傅里叶变换的定义 (Definition of Continuous Fourier Transform)

- 能量

$$E(u) = |F(u)|^2 = R^2(u) + I^2(u) \quad (4.6)$$

- 相位

$$\phi(u) = \arctan \frac{I(u)}{R(u)} \quad (4.7)$$

傅里叶变换可以很容易推广到二维的情形。设函数  $f(x,y)$  是连续可积的，且  $f(u,v)$  可积，则存在如下的傅里叶变换对：



## 4.1 连续傅里叶变换的定义 (Definition of Continuous Fourier Transform)

$$\mathbf{F} \{ f(x, y) \} = F(u, v) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{-j2\pi(ux+vy)} dx dy \quad (4.8)$$

$$\mathbf{F}^{-1} \{ F(u, v) \} = f(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(u, v) e^{j2\pi(ux+vy)} du dv \quad (4.9)$$

式中  $u$ 、 $v$  是频率变量。与一维的情况一样，二维函数的傅里叶谱、能量和相位谱为：





## 4.1 连续傅里叶变换的定义 (Definition of Continuous Fourier Transform)

- 傅里叶频谱:

$$|F(u, v)| = [R^2(u, v) + I^2(u, v)]^{\frac{1}{2}} \quad (4.10)$$

- 相位:

$$\phi(u, v) = \arctan \frac{I(u, v)}{R(u, v)} \quad (4.11)$$

- 能量谱:

$$E(u, v) = R^2(u, v) + I^2(u, v) \quad (4.12)$$



## 4.2 离散傅里叶变换 (Discrete Fourier Transform)

函数 $f(x)$ 的一维离散傅里叶变换由下式定义:

$$\mathfrak{R} : F(u) = \sum_{x=0}^{N-1} f(x) e^{-j2\pi ux / N} \quad (4.13)$$

其中,  $u = 0, 1, 2, \dots, N-1$ 。  $F(u)$ 的傅里叶反变换定义为:

$$\mathfrak{R}^{-1} : f(x) = \frac{1}{N} \sum_{u=0}^{N-1} F(u) e^{j2\pi ux / N} \quad (4.14)$$



## 4.2 离散傅里叶变换 (Discrete Fourier Transform)

- 傅里叶频谱:

$$|F(u)| = \sqrt{R^2(u) + I^2(u)}$$

- 相位:

$$\phi(u) = \arctan I(u) / R(u)$$

- 能量谱

$$P(u) = |F(u)|^2 = R^2(u) + I^2(u)$$



## 4.2 离散傅里叶变换 (Discrete Fourier Transform)

同连续函数的傅里叶变换一样，离散函数的傅里叶变换也可推广到二维的情形，其二维离散傅里叶变换定义为：

$$F(u, v) = \frac{1}{N} \sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) e^{-j2\pi(ux+vy)/N} \quad (4.16)$$

式中  $u = 0, 1, \dots, N-1$ ,  $v = 0, 1, \dots, N-1$ 。二维离散傅里叶反变换定义为

$$f(x, y) = \frac{1}{N} \sum_{u=0}^{N-1} \sum_{v=0}^{N-1} F(u, v) e^{j2\pi(ux+vy)/N} \quad (4.17)$$



## 4.2 离散傅里叶变换 (Discrete Fourier Transform)

式中  $x = 0, 1, \dots, N-1$ ,  $y = 0, 1, \dots, N-1$

式中  $u$ 、 $v$  是频率变量。与一维的情况一样，二维函数的离散傅里叶谱、能量和相位谱为：

傅里叶频谱：  $|F(u, v)| = \sqrt{R^2(u, v) + I^2(u, v)}$

相位：  $\phi(u, v) = \arctan \frac{I(u, v)}{R(u, v)}$

能量谱：  $P(u, v) = |F(u, v)|^2 = R^2(u, v) + I^2(u, v)$



## 4.2 离散傅里叶变换 (Discrete Fourier Transform)

- 例4.1 一个简单二维函数的中心谱。

图4.1 (a) 显示了在  $512 \times 512$  像素尺寸的背景上叠加一个  $20 \times 40$  像素尺寸的白色矩形。

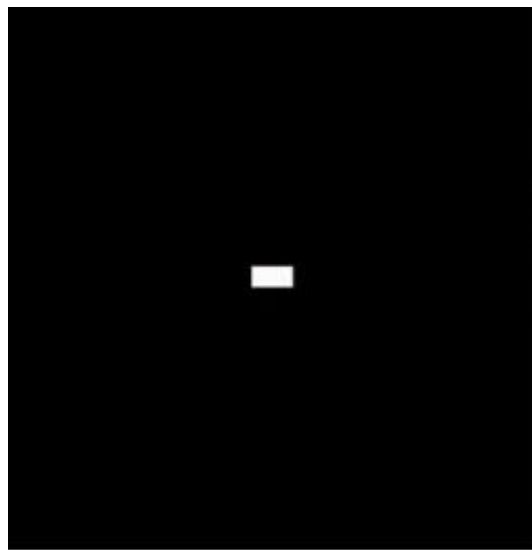
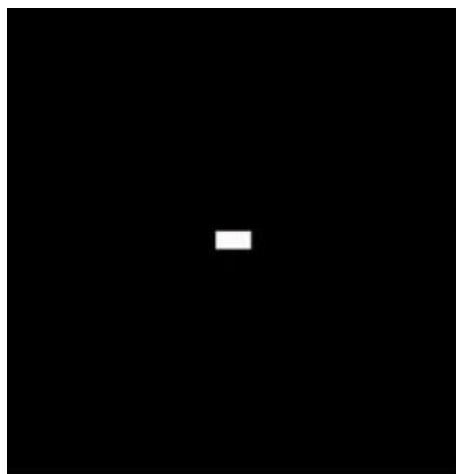


图4.1 (a)

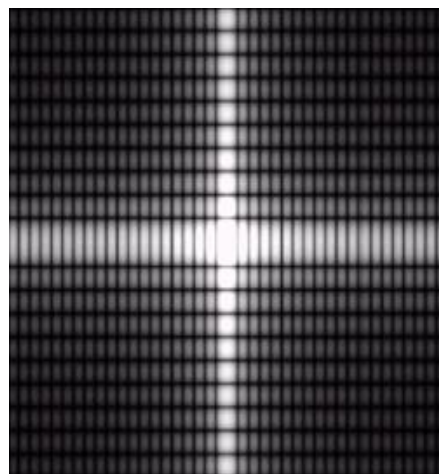


## 4.2 离散傅里叶变换 (Discrete Fourier Transform)

此图像在进行傅里叶变换的计算之前被乘以 $(-1)^{x+y}$ ，从而可以使频率谱关于中心对称，如图4.1 (b) 所示。在图4.1 (b) 中， $u$  方向谱的零点分割恰好是  $v$  方向零点分隔的两倍。



(a)

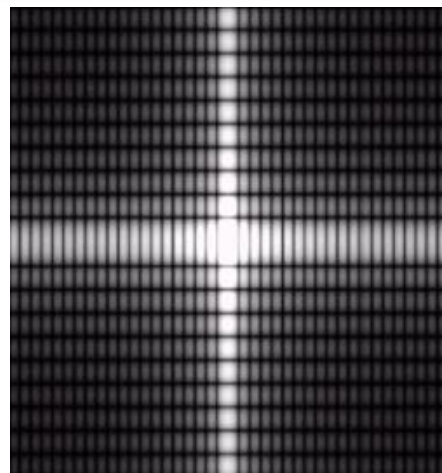
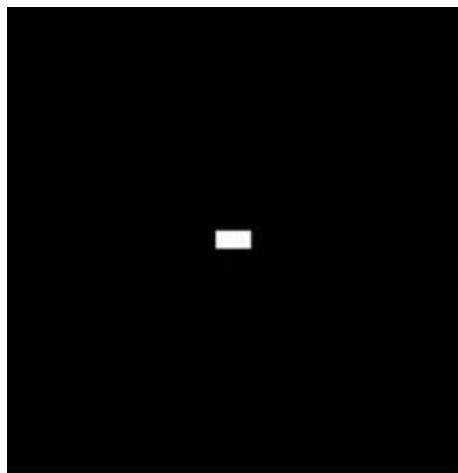


(b)

图4.1 (a) 在大小为  $512 \times 512$  黑色背景上叠加一个尺寸为  $20 \times 40$  的白色矩形的图像，  
(b) 应用了对数变换后显示的中心傅里叶谱



## 4.2 离散傅里叶变换 (Discrete Fourier Transform)



符合图像中1:2的矩形尺寸比例（遵照傅里叶变换4.4.6节的尺度变换性质）。在显示之前频率谱用式（对数处理见前章3.2.2）中的对数变换处理以增强灰度级细节。变换中使用  $c = 0.5$  的值可以降低整体强度。在本章显示的多数傅里叶频率谱都用对数变换进行了相似的处理。





## 4.2 离散傅里叶变换 (Discrete Fourier Transform)

- 例4.2图象的二维离散傅立叶频谱。

%读入原始图象

```
I = imread('i_peppers_gray.bmp');
```

```
imshow(I)
```

%求离散傅立叶频谱

```
J = fftshift(fft2(I));
```

%对原始图象进行二维傅立叶变换，并将其坐标原点移到频谱图中央位置

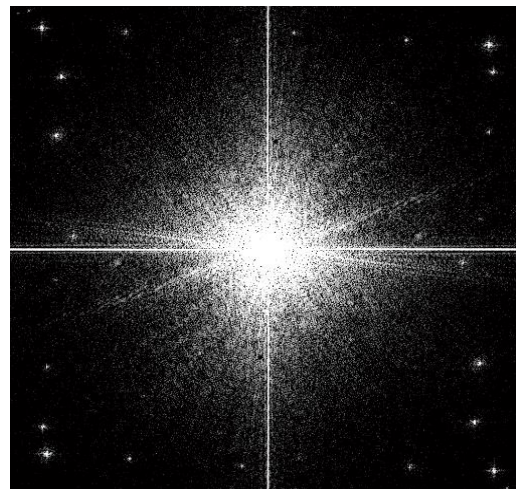
```
figure (2);
```

```
imshow(log(abs(J)),[8,10])
```

其结果如图4.2所示



## 4.2 离散傅里叶变换 (Discrete Fourier Transform)



(a) 原始图像

(b) 离散傅里叶频谱

图4.2 二维图像及其离散傅里叶频谱的显示



## 4.3 快速傅里叶变换(Fast Fourier Transform)

快速傅里叶变换 ( $FFT$ ) 并不是一种新的变换, 它是离散傅里叶变换 ( $DFT$ ) 的一种算法。这种方法是在分析离散傅里叶变换 ( $DFT$ ) 中的多余运算的基础上, 进而消除这些重复工作的思想指导下得到的, 所以在运算中大大节省了工作量, 达到了快速的目的。



## 4.3 快速傅里叶变换(Fast Fourier Transform)

对于一个有限长序列  $\{f(x)\}(0 \leq x \leq N-1)$ , 它的傅里叶变换由下式表示:

$$F(u) = \sum_{n=0}^{N-1} f(x) W_n^{ux} \quad (4.18)$$

令  $W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}}, W_N^{-1} = e^{j\frac{2\pi}{N}}$

因此, 傅里叶变换对可写成下式

$$F(u) = \sum_{x=0}^{N-1} f(x) W_N^{ux} \quad (4.19)$$



## 4.3 快速傅里叶变换(Fast Fourier Transform)

从上面的运算显然可以看出要得到每一个频率分量，需进行  $N$  次乘法和  $N-1$  次加法运算。要完成整个变换需要  $N^2$  次乘法和  $N(N-1)$  次加法运算。当序列较长时，必然要花费大量的时间。

观察上述系数矩阵，发现  $W_N^{ux}$  是以  $N$  为周期的，即

$$W_N^{(u+LN)(x+KN)} = W_N^{ux} \quad (4.21)$$



## 4.4 傅里叶变换的性质(Characteristics of Fourier Transform)

### 4.4.1 可分离性 (Separability)

$$F(u, v) = \frac{1}{N} \sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) e^{-j2\pi(ux+vy)/N}$$

$$F(u, v) = \frac{1}{N} \sum_{x=0}^{N-1} e^{-j2\pi ux/N} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) e^{-j2\pi vy/N}$$

每1列求变换再乘以  $N$

$$F(x, v) = N \left[ \frac{1}{N} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) e^{-j2\pi vy/N} \right] \quad v = 0, 1, \dots, N-1$$

再对  $F(x, v)$  每1行求傅里叶变换

$$F(u, v) = \frac{1}{N} \sum_{x=0}^{N-1} F(x, v) e^{-j2\pi ux/N} \quad u, v = 0, 1, \dots, N-1$$



## 4.4 傅里叶变换的性质(Characteristics of Fourier Transform)

### ● 可分离性 (Divisibility)

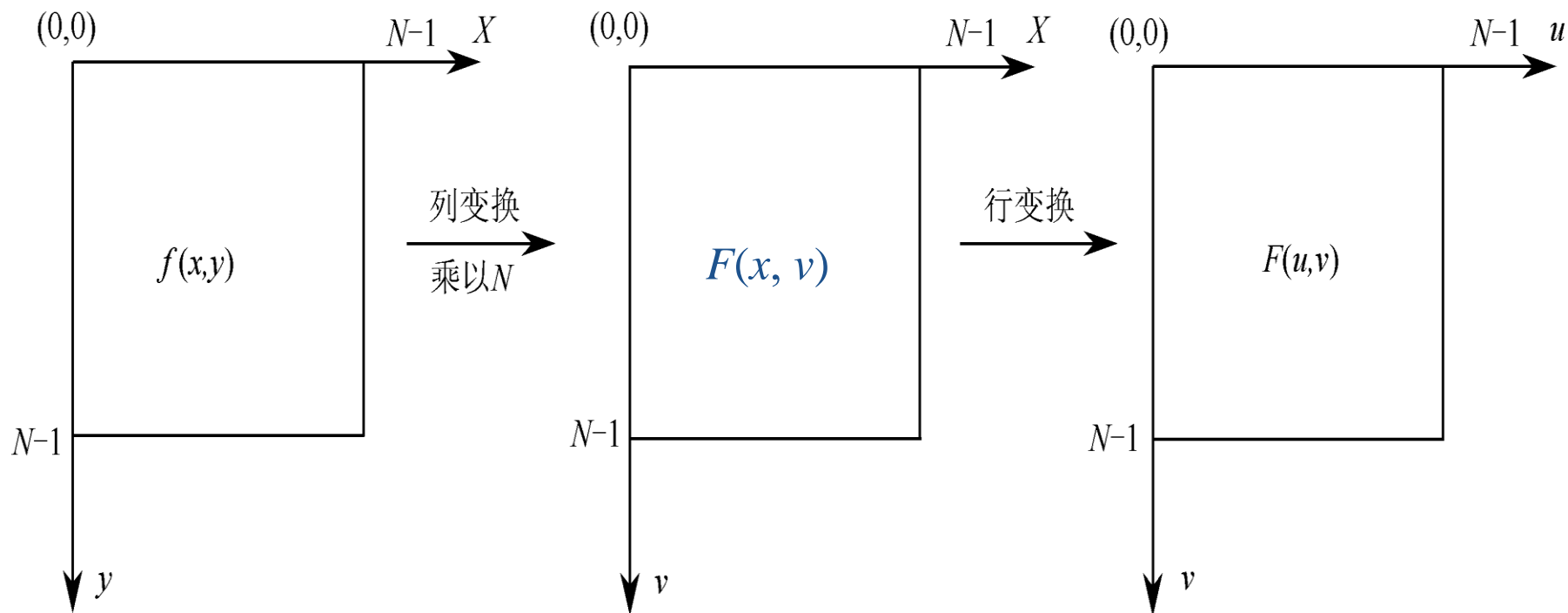


图4.5 由2步1-D变换计算2-D变换



## 4.4 傅里叶变换的性质(Characteristics of Fourier Transform)

$$f(x, y) = \frac{1}{N} \sum_{u=0}^{N-1} \sum_{v=0}^{N-1} F(u, v) e^{j2\pi(ux+vy)/N}$$

$$f(x, y) = \frac{1}{N} \sum_{u=0}^{N-1} e^{j2\pi ux/N} \sum_{v=0}^{N-1} F(u, v) e^{j2\pi vy/N}$$





## 4.4 傅里叶变换的性质(Characteristics of Fourier Transform)

### 4.4.2 平移性质 (Translation)

$$f(x, y) e^{j2\pi(ux_0 + vy_0)/N} \Leftrightarrow F(u - u_0, v - v_0)$$

$$\because -1 = e^{-j\pi} \quad \therefore (-1)^{x+y} = e^{-j\pi(x+y)}$$

$f(x, y)$  与一个指数相乘等于将变换后的频率域中心移到新的位置。

$$f(x - x_0, y - y_0) \Leftrightarrow F(u, v) e^{-j2\pi(ux_0 + vy_0)/N}$$

$f(x, y)$  的平移将不改变频谱的幅值 (amplitude) 。



## 4.4 傅里叶变换的性质(Characteristics of Fourier Transform)

### 4.4.3 周期性和共轭对称性 (Periodicity and Conjugate Symmetry)

傅里叶变换和反变换均以 $N$ 为周期, 即

$$F(u, v) = F(u + N, v) = F(u, v + N) = F(u + N, v + N) \quad (4.29)$$

上式可通过将右边几项分别代入式(4.16)来验证。它表明, 尽管 $F(u, v)$ 有无穷多个 $u$ 和 $v$ 的值重复出现, 但只需根据在任一个周期里的 $N$ 个值就可以从 $F(u, v)$ 得到 $f(x, y)$ 。



## 4.4 傅里叶变换的性质(Characteristics of Fourier Transform)

如果  $f(x, y)$  是实函数, 则它的傅里叶变换具有共轭对成性

$$F(u, v) = F^*(-u, -v) \quad (4.30)$$

$$|F(u, v)| = |F(-u, -v)| \quad (4.31)$$



## 4.4 傅里叶变换的性质(Characteristics of Fourier Transform)

### 4.4.4 旋转性质 (Rotation)

$$f(x, y) \Leftrightarrow F(u, v)$$

$$x = r \cos \theta \quad y = r \sin \theta \quad u = w \cos \phi \quad v = w \sin \phi$$

$$f(r, \theta + \theta_0) \Leftrightarrow F(w, \phi + \theta_0)$$

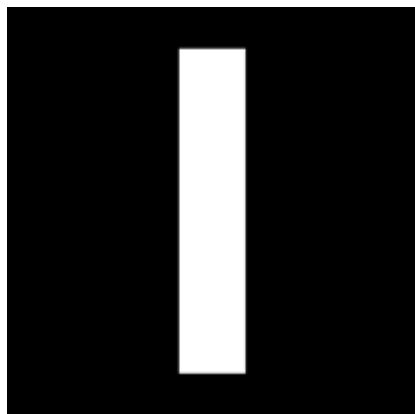
上式表明, 对  $f(x, y)$  旋转一个角度  $\theta_0$

$F(u, v)$  对应于将其傅里叶变换也旋转相同的角度  $\theta_0$

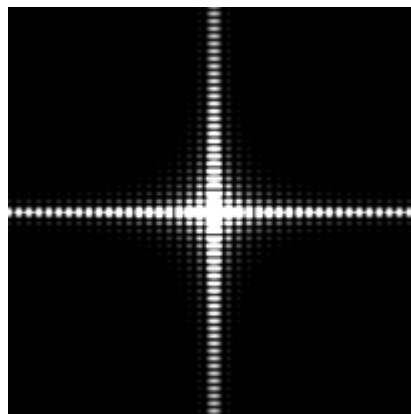


## 4.4 傅里叶变换的性质(Characteristics of Fourier Transform)

- 例4. 4二维离散傅立叶变换的旋转性（具体程序参见书）。



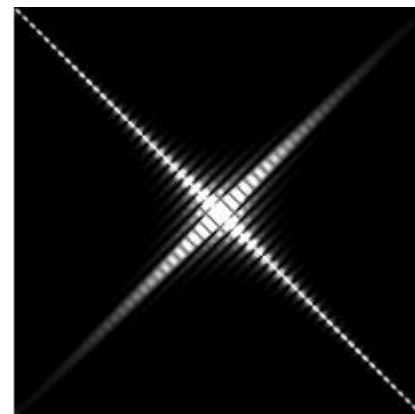
(a) 原始图像



(b) 原图像的傅里叶频谱



(c) 旋转后的图像



(d) 旋转后图像的傅里叶频谱

上例表明，对  $f(x,y)$  旋转一个角度  $\theta_0$  对应于将其傅里叶变换  $F(u,v)$  也旋转相同的角度  $\theta_0$ 。



## 4.4 傅里叶变换的性质(Characteristics of Fourier Transform)

### 4.4.5 分配律 (Distribution Law)

- 分配律(Distribution Law)

根据傅里叶变换对的定义可得到:

$$\mathfrak{R}\{f_1(x, y) + f_2(x, y)\} = \mathfrak{R}\{f_1(x, y)\} + \mathfrak{R}\{f_2(x, y)\} \quad (4.33)$$

上式表明傅里叶变换和反变换对加法满足分配律, 但需注意对乘法则不满足, 一般有:

$$\mathfrak{R}\{f_1(x, y) \cdot f_2(x, y)\} \neq \mathfrak{R}\{f_1(x, y)\} \cdot \mathfrak{R}\{f_2(x, y)\} \quad (4.34)$$



## 4.4 傅里叶变换的性质(Characteristics of Fourier Transform)

### 4.4.6 尺度变换 (Scaling)

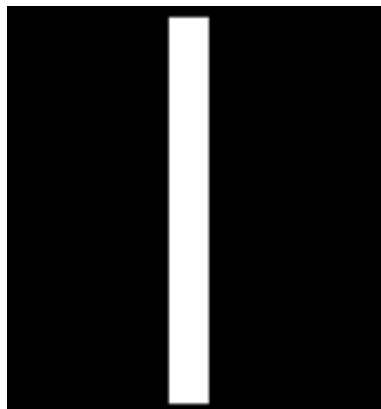
$$af(x, y) \Leftrightarrow aF(u, v)$$

$$f(ax, by) \Leftrightarrow \frac{1}{|ab|} F\left(\frac{u}{a}, \frac{v}{b}\right)$$

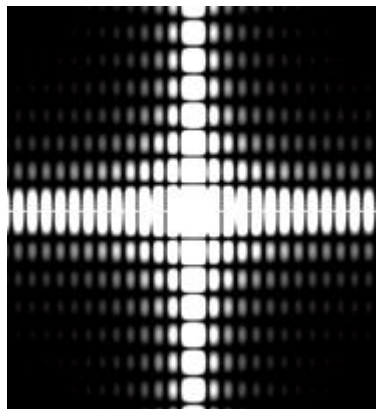


## 4.4 傅里叶变换的性质(Characteristics of Fourier Transform)

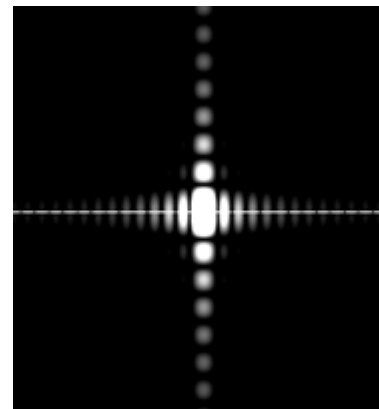
### 【例4.5】比例尺度展宽。



(a) 原始图像



(b) 比例尺度展宽前的频谱



(c) 比例尺度展宽后的频谱  
 $a=0.1$ ,  $b=1$ , 展宽后的频谱





## 4.4 傅里叶变换的性质(Characteristics of Fourier Transform)

### 4.4.7 平均值 (Average Value)

对一个2-D离散函数，其平均值可用下式表示：

$$\bar{f}(x, y) = \frac{1}{N^2} \sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) \quad (4.37)$$

当正反变换采用相同的标度数  $1/N$  时，傅里叶变换域原点的频谱分量为：

$$\begin{aligned} F(0,0) &= \frac{1}{N} \sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) e^{-j \frac{2\pi}{N} (x \cdot 0 + y \cdot 0)} = N \left[ \frac{1}{N^2} \sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) \right] \\ &= N \bar{f}(x, y) \end{aligned}$$



## 4.4 傅里叶变换的性质(Characteristics of Fourier Transform)

两式比较可得：

$$\bar{f}(x, y) = \frac{1}{N} F(0, 0) \quad (4.39)$$

也就是说，频谱的直流成分  $N$  倍于图像平面的亮度平均值。在使用诸如高通滤波器的场合，其  $F(0,0)$  值会衰减，因为图像的亮度在很大程度上受到影响，采用对比度拉伸的方法可以缓和这种衰减。



## 4.4 傅里叶变换的性质(Characteristics of Fourier Transform)

### 4.4.8 卷积定理(Convolution Theorem)

卷积定理是线性系统分析中最重要的一条定理。  
下面先考虑一维傅里叶变换：

$$f(x) * g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(z)g(x-z)dz \Leftrightarrow F(u)G(u) \quad (4.40)$$

同样二维情况也是如此

$$f(x, y) * g(x, y) \Leftrightarrow F(u, v)G(u, v) \quad (4.41)$$



## 4.5 图像傅里叶变换实例(Examples of Fourier Transform Images)

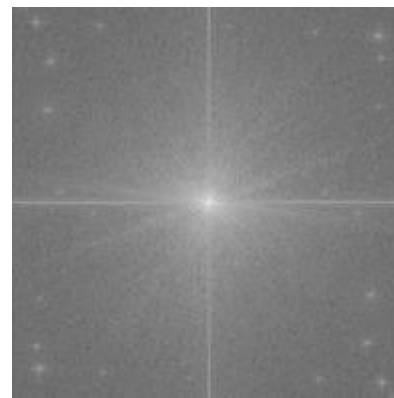
- 例4.6对一副图进行傅里叶变换，求出其频谱图，然后利用平移性质，在原图的基础上乘以 $(-1)^{x+y}$ 求傅里叶变换的频谱图（程序参照例4.2）。



(a) 原图



(b) 频谱图



(c) 中心移到零点的  
频谱图

图4.8二维离散傅里叶变换结果中频率成分分布示意图  
(结果看下)



## 4.5 图像傅里叶变换实例(Examples of Fourier Transform Images)

图4.8 (a) 为原图，对其求傅里叶变换得到图4.8 (b) 傅里叶变换的频谱图，观察频谱图可知，在未平移前，图 (b) 坐标原点在窗口的左上角，即变换后的直流成分位于左上角，而窗口的四角分布低频成分。对原图乘以  $(-1)^{x+y}$  后进行傅里叶变换，观察频谱图 (c) 可知，变换后的坐标原点移至频谱图窗口中央，因而围绕坐标原点是低频，向外是高频。



## 4.5 图像傅里叶变换实例(Examples of Fourier Transform Images)

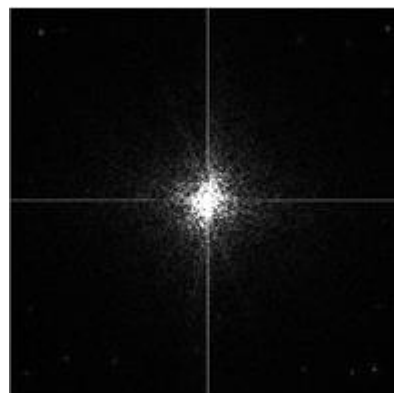
通过例4.6可知，图像的能量主要集中在低频区，即图像的中央位置，而相对的高频区（左上、右上、左下、右下四个角）的幅值很小或接近于0。以后傅里叶变换都进行相似平移处理，将不再重复叙述。

## 4.5 图像傅里叶变换实例(Examples of Fourier Transform Images)

- 例4.7：图4.8（a）乘以一指数，将图像亮度整体变暗，并求其中心移到零点的频谱图（详细程序参加书）。



(a) 变暗后的图



(b) 变暗后中心移到零点的频谱图

图4.9二维离散傅里叶变换结果中频率成分分布示意图



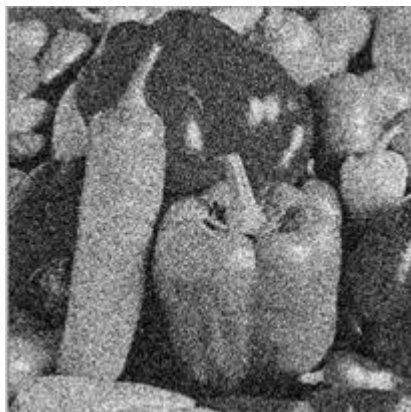
## 4.5 图像傅里叶变换实例(Examples of Fourier Transform Images)

将原图 (a) 函数乘以  $e^{-1}$ ，结果如图4.9 (a) 所示。对其亮度平均变暗后的图像进行傅里叶变换，并将坐标原点移到频谱图中央位置，结果如图4.9 (b) 所示。对比图4.8 (c) 和4.9 (b) 后，可以看出当图片亮度变暗后，中央低频成分变小。故从中可知，中央低频成分代表了图片的平均亮度，当图片亮度平均值发生变化时，对应的频谱图中央的低频成分也发生改变。



## 4.5 图像傅里叶变换实例(Examples of Fourier Transform Images)

- 例4.8：图4.8（a）加入高斯噪声，得出一个有颗粒噪音的图，并求其中心移到零点的频谱图（程序如例4.7）。



（a）有颗粒噪音



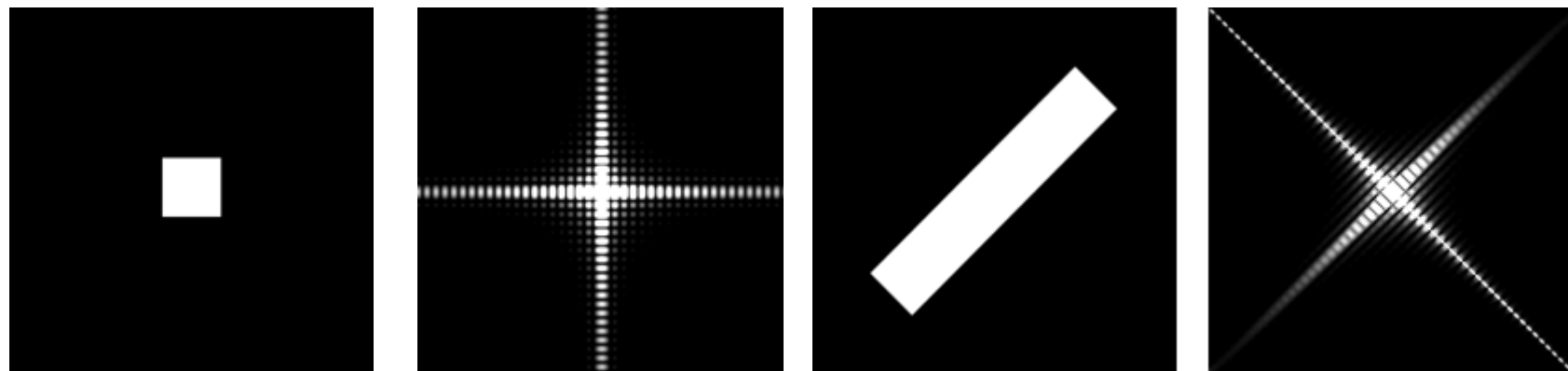
（b）有颗粒噪音中  
心移到零点的频谱图

图4. 10二维离散傅里叶变换结果中频率成分分布示意图



## 4.5 图像傅里叶变换实例(Examples of Fourier Transform Images)

- 例4.9：对中心为一小正方形和以斜长方形求其傅里叶变换的谱分布（程序见例4.4）。



(a) 正方形原图 (b) 正方形的谱分布 (c) 长方形的原始图像 (d) 长方形的谱分布

图4.11傅氏变换谱分布实例



## 4.5 图像傅里叶变换实例(Examples of Fourier Transform Images)

图4.11示出两幅图像经傅氏变换后的频谱分布例子。左边均为原始图像，右边分别是他们变换后的谱分布。图(a)是中心为一小正方形，周边为空；图(c)是中心为斜置的小矩形。谱分布中，最亮区域表示其变换后的幅值最大。对(c)傅里叶变换后中心移到零点后的结果，我们可以发现当长方形旋转了 $45^\circ$ 时，频谱也跟着旋转 $45^\circ$ ，此实例验证了傅里叶变换的旋转性。



## 4.5 图像傅里叶变换实例(Examples of Fourier Transform Images)

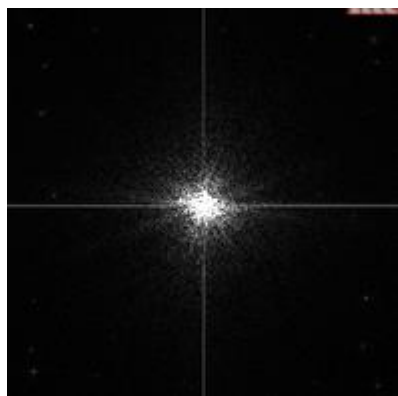
- 例4. 10:对一副图片如图4. 12 (a) 求其幅值谱和相位谱, 并对幅值谱和相位谱分别进行图像构造, 对比其所求结果(详细程序参加书)。



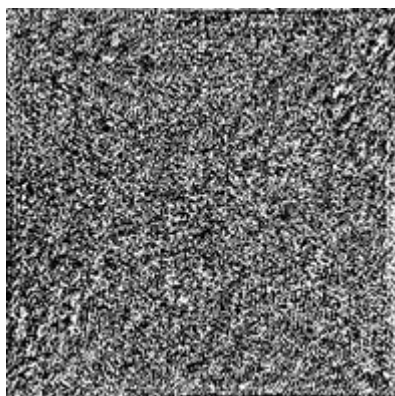
(a) 原图



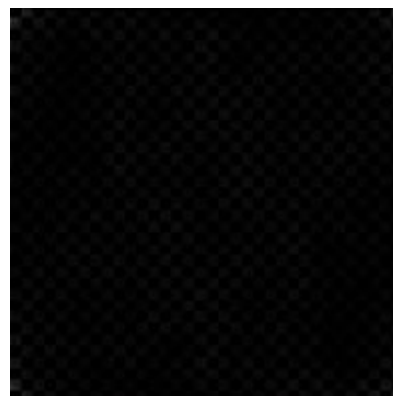
## 4.5 图像傅里叶变换实例(Examples of Fourier Transform Images)



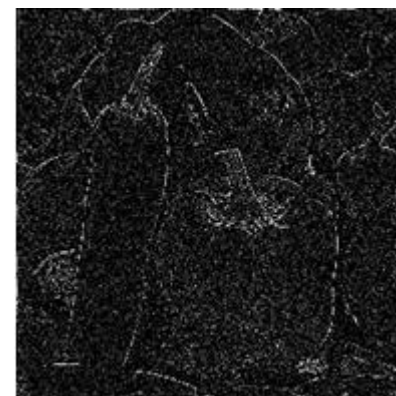
(b) 幅值谱



(c) 相位谱



(d) 幅值谱重构图像



(e) 相位谱重构图像

图4.12傅里叶图像及其傅里叶变换



## 4.5 图像傅里叶变换实例(Examples of Fourier Transform Images)

对图4.12 (a) 进行离散傅里叶变换, 得出幅值谱图 (b), 相位谱图 (d) 及幅值谱重构图像图 (c), 相位谱重构图像图 (e)。从实验结果可以看出, 从幅值谱图像中得到的信息比在相位谱图像中得到的信息多, 但对幅值谱图像重构后, 即忽略相位信息, 将其设为0, 所得到的图像与原始图像相比, 结果差别很大; 而对相位谱图像重构后, 及忽略幅值信息, 将其设为常数, 可以从中看出图像的基本轮廓来。



## 4.6 其他离散变换 (Other Discrete Transform)

图像处理中常用的正交变换除了傅里叶变换外，还有其它变换。在图像处理中常用到的有离散余弦变换、沃尔什等。



## 4.6.1 离散余弦变换(Discrete Cosine Transform)

一维离散余弦变换的定义由下式表示

$$F(0) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{x=0}^{N-1} f(x) \quad (4.43)$$

$$F(u) = \sqrt{\frac{2}{N}} \sum_{x=0}^{N-1} f(x) \cos \frac{(2x+1)u\pi}{2N} \quad (4.44)$$





## 4.6.1 离散余弦变换(Discrete Cosine Transform)

式中  $F(u)$  是第  $u$  个余弦变换系数,  $u$  是广义频率变量,  $u = 1, 2, 3, \dots, N-1$ ;  $f(x)$  是时域  $N$  点实序列.  
一维离散余弦反变换由下式表示

$$f(x) = \sqrt{\frac{1}{N}} F(0) + \sqrt{\frac{2}{N}} \sum_{u=1}^{N-1} F(u) \cos \frac{(2x+1)u\pi}{2N} \quad (4.45)$$



## 4.6.1 离散余弦变换(Discrete Cosine Transform)

显然，式（4.43）、式（4.44）和式（4.45）构成了一维离散余弦变换。

由一维离散余弦变换（1-D DCT）可以很容易推广到二维余弦离散变换，由下式表示：

$$F(0,0) = \frac{1}{N} \sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x,y)$$

$$F(0,\nu) = \frac{\sqrt{2}}{N} \sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x,y) \cdot \cos \frac{(2y+1)\nu\pi}{2N}$$



## 4. 6. 1 离散余弦变换(Discrete Cosine Transform)

$$F(u,0) = \frac{\sqrt{2}}{N} \sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x,y) \cdot \cos \frac{(2x+1)u\pi}{2N}$$

$$F(u,v) = \frac{2}{N} \sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x,y) \cdot \cos \frac{(2x+1)u\pi}{2N} \\ \cdot \cos \frac{(2y+1)v\pi}{2N} \quad (4.46)$$



## 4.6.1 离散余弦变换(Discrete Cosine Transform)

式(4.46)是正变换公式。其中 $f(x, y)$ 是空间域二维向量之元素。 $x, y = 0, 1, 2, \dots, N-1$ ,  $F(u, v)$ 是变换系数阵列之元素。式中表示的阵列为 $N \times N$

二维离散余弦反变换由下式表示:

$$\begin{aligned} f(x, y) = & \frac{1}{N} F(0, 0) + \frac{\sqrt{2}}{N} \sum_{v=1}^{N-1} F(0, v) \cos \frac{(2y+1)v\pi}{2N} \\ & + \frac{\sqrt{2}}{N} \sum_{u=1}^{N-1} F(u, 0) \cos \frac{(2x+1)u\pi}{2N} \\ & + \frac{2}{N} \sum_{u=1}^{N-1} \sum_{v=1}^{N-1} F(u, v) \cos \frac{(2x+1)u\pi}{2N} \cdot \cos \frac{(2y+1)v\pi}{2N} \end{aligned}$$

(4.47)



## 4.6.1 离散余弦变换(Discrete Cosine Transform)

式中的符号意义同正变换式一样。式(4.46)和式(4.47)是离散余弦变换的解析式定义。更为简洁的定义方法是采用矩阵式定义，则一维离散余弦变换的矩阵定义式可写成如下形式

$$[F(u)] = [A][f(x)] \quad (4.48)$$

同理，可得到反变换展开式

$$[f(x)] = [A'] [F(u)] \quad (4.49)$$



## 4.6.1 离散余弦变换(Discrete Cosine Transform)

类似地，二维离散余弦变换也可以写成矩阵式

$$[F(u, v)] = [A][f(x, y)][A']$$

$$[f(x, y)] = [A'] [F(u, v)] [A] \quad (4.50)$$



## 4.6.1 离散余弦变换(Discrete Cosine Transform)

式中  $[f(x,y)]$  是空间域数据阵列,  $[F(u,v)]$  是变换系数阵列,  $[A]$  是系数阵列,  $[A]^T$  变换矩阵  $[A]$  是的转置。

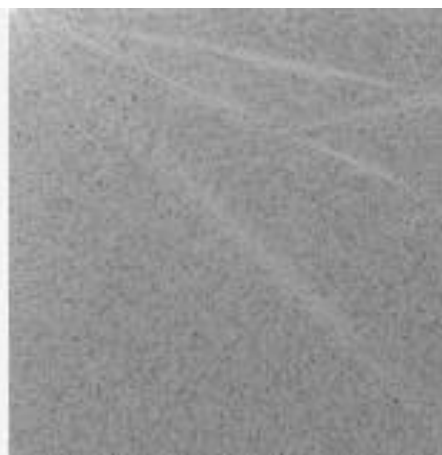
- 例4.11:说明二维余弦正反变换在 *Matlab* 中的实现 (详细程序参见书)。



## 4. 6. 1 离散余弦变换(Discrete Cosine Transform)



(a) 原始图像



(b) 余弦变换系数



(c) 余弦反变换恢复图像

图4. 13二维离散余弦变换





## 4.6.1 离散余弦变换(Discrete Cosine Transform)

由图4.13(b)可知，离散余弦变换具有很强的“能量集中”特性，能量主要集中在左角处，因此在实际图像应用中，能量不集中的地方可在余弦编码中忽略，可通过对mask矩阵变换来实现，即将mask矩阵左上角置1，其余全部置0。然后通过离散余弦反变换后，图像得到恢复，图(c)恢复图像与图(a)原始图像基本相同。



## 4.6.1 离散余弦变换(Discrete Cosine Transform)

- 例4.12：用DCT变换作图象压缩的例子，求经压缩解压后的图象（详细程序参见书），结果如图4.14所示。



(a) 原始图像

(b) 压缩解压后的图像

图4.14 原始图像及其经压缩，解压缩后的图像



## 4.6.2 沃尔什变换(Walsh Transform)

设 $f(x)$ 为一维离散序列，一维离散沃尔什变换表示为：

$$W(u) = \frac{1}{N} \sum_{x=0}^{N-1} f(x) \prod_{i=0}^{n-1} (-1)^{b_i(x)b_{(n-1-i)}(u)} \quad (4.51)$$

式中  $u = 0, 1, 2, \dots, N-1$ ;  $N = 2^n$

沃尔什变换核为：

$$g(x, u) = \frac{1}{N} \prod_{i=0}^{n-1} (-1)^{b_i(x)b_{(n-1-i)}(u)} \quad (4.52)$$



## 4. 6. 2沃尔什变换(Walsh Transform)

式中  $b_k(z)$  是  $z$  的二进制第  $k$  位值, 如  $n=3, N=2^n=8$  时, 若  $z=3$  (二进制表示是 011), 则  $b_0(z)=1, b_1(z)=1, b_2(z)=0$ 。

沃尔什反变换公式为:

$$h(x, u) = \prod_{i=0}^{n-1} (-1)^{b_i(x)b_{(n-1-i)}(u)} \quad (4.54)$$



## 4.6.2 沃尔什变换(Walsh Transform)

从式(4.54)中可以看出,除系数外,沃尔什反变换核与沃尔什正变换核具有相同的形式。所以正变换的算法同样适合于反变换,这对计算机来说,实现起来是非常方便的。

也可以用矩阵表示:

$$W = Gf \quad (4.55)$$

反变换的矩阵表示形式为(忽略系数  $\frac{1}{N}$ ):



## 4. 6. 2沃尔什变换(Walsh Transform)

$$f = GW \quad (4. 56)$$

从一维离散沃尔什变换可以很容易推广到二维情形。  
二维离散沃尔什变换为：

$$W(u, v) = \frac{1}{N} \sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) \prod_{i=1}^{n-1} (-1)^{[b_i(x)b_{(n-i-1)}(u) + b_i(y)b_{n-i-1}(v)]} \quad (4. 57)$$



## 4. 6. 2沃尔什变换(Walsh Transform)

其变换核为:

$$g(x, y, u, v) = \frac{1}{N} \prod_{i=1}^{n-1} (-1)^{[b_i(x)b_{(n-i-1)}(u) + b_i(y)b_{n-i-1}(v)]} \quad (4.58)$$

反变换为:

$$f(x, y, u, v) = \frac{1}{N} \sum_{u=0}^{N-1} \sum_{v=0}^{N-1} \prod_{i=1}^{n-1} (-1)^{[b_i(x)b_{(n-i-1)}(u) + b_i(y)b_{n-i-1}(v)]} \quad (4.59)$$



## 4.6.2 沃尔什变换(Walsh Transform)

所以，二维离散沃尔什变换也可以分成两步一维沃尔什变换来进行。

二维离散沃尔什变换的矩阵表示形式为：

$$W = \frac{1}{N^2} GfG \quad (4.62)$$

式中  $G$  与式 (4.56) 中的含义一样，为沃尔什变换核矩阵。反变换的矩阵形式为

$$f = GWG \quad (4.63)$$





## 4. 6. 2 沃尔什变换(Walsh Transform)

例4. 13求二维数字图像信号  $f = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$  的沃尔什变换。

解

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$



## 4. 6. 2沃尔什变换(Walsh Transform)

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{4^2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{16} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 & -4 \\ 8 & 0 & 0 & -4 \\ 8 & 0 & 0 & -4 \\ 8 & 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} \end{aligned}$$



## 4. 6. 2沃尔什变换(Walsh Transform)

$$= \frac{1}{16} \begin{bmatrix} 32 & 0 & 0 & -16 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



## 小结 (Chapter Summary)

本章主要介绍了数字图像处理中常见的几种变换，首先介绍了傅里叶变换，离散傅里叶变换，快速傅里叶变换的概念，性质和实际应用。其次还介绍了几种离散变换，有离散余弦变换，沃尔什变换。

图像的傅里叶变换是使用最广泛的一种变换，在图像处理中起着关键的作用，也是理解其它变换的基础，可广泛地用于图像特征提取、图像增强等方面。



## 小结 (Chapter Summary)

在图像增强方面虽有着广泛的应用，但由于运算过程中涉及到复数运算，所以在实时系统中很难使用；而离散余弦变换在图像压缩算法中获得了广泛的应用。把傅里叶变换的理论同其物理解释相结合，将有助于解决大多数图像处理问题。

Thank You!