第5章　二元关系

主要内容

5.1 Cartesian积

5.2 关系的概念与表示

5.3 关系的性质

5.4 逆关系和复合关系

5.5 关系的闭包

5.6 有序关系

5.7 相容关系与等价关系

5.8 关系数据库初步

5.1 Cartesian积（笛卡尔积）

- **定义5.1.1**
  - 设$a_1,a_2,\ldots,a_n$是n个元素, 其有序排列用〈$a_1,a_2,\ldots,a_n$〉 表示，称为有序***n*元组**，或简称为***n*元组**。其中a_i称为它的第i个分量
  - 两个元素a_1、a_2组成的序列记作〈a_1,a_2〉, 称为二重(元)组或序偶。a_1和a_2分别称为二元组〈a_1,a_2〉的第一和第二个分量。
    - 〈a,b〉=〈c,d〉 *iff* $a=c$且$b=d$。序偶、二元组
- 二元组中元素的次序是重要的
  - 例：〈2,3〉≠〈3,2〉
- 〈$a_1,a_2,\ldots,a_n$〉=〈$b_1,b_2,\ldots,b_n$〉 *iff* $a_i=b_i$, $1\le i\le n$

笛卡尔积(Cartesian product)

- **定义5.1.2**
  - 设$n\in N$， $A_1,A_2,\ldots,A_n$是n个集合，它们的Cartesian积(直积，叉积)记为$A_1\times A_2\times\ldots\times A_n$，定义为

$$A_1\times A_2\times\ldots\times A_n=\{\langle a_1,a_2,\ldots,a_n\rangle \mid a_i\in A_i\wedge 1\le i\le n\}$$

  - 对一切i, $A_i=A$时, $A_1\times A_2\times\ldots\times A_n$ 可简记为A^n
- 显然$A\times B\neq B\times A$
- 若存在i, $A_i=\Phi$, $A_1\times A_2\times\ldots\times A_n=\Phi$
- 如果所有$A_i(i=1,2,\ldots,n)$都是有限集合，则

$$|A_1\times A_2\times\ldots\times A_n|=|A_1|\cdot|A_2|\cdot|A_3|\ldots|A_n|$$

例

- 设$A=\{a,b\}$, $B=\{1,2,3\}$, $C=\{p,q\}$, $D=\{0\}$, $E=\Phi$

(a) $A\times B=\{\langle a,1\rangle, \langle a,2\rangle, \langle a,3\rangle, \langle b,1\rangle, \langle b,2\rangle, \langle b,3\rangle\}$

(b) $A\times B\times C=\{\langle a,1,p\rangle, \langle a,1,q\rangle, \langle a,2,p\rangle, \langle a,2,q\rangle,$
$\langle a,3,p\rangle, \langle a,3,q\rangle, \langle b,1,p\rangle, \langle b,1,q\rangle,$
$\langle b,2,p\rangle, \langle b,2,q\rangle, \langle b,3,p\rangle, \langle b,3,q\rangle\}$

(c) $C\times D=\{\langle p,0\rangle, \langle q,0\rangle\}$

(d) $D\times(C^2)=D\times\{\langle p,p\rangle, \langle p,q\rangle, \langle q,p\rangle, \langle q,q\rangle\}$
$=\{\langle 0, \langle p,p\rangle\rangle, \langle 0, \langle p,q\rangle\rangle, \langle 0, \langle q,p\rangle\rangle, \langle 0, \langle q,q\rangle\rangle\}$

(e) $D\times C\times C=\{\langle 0, p,p\rangle, \langle 0, p,q\rangle, \langle 0, q,p\rangle, \langle 0, q,q\rangle\}$

(f) $A\times E=\Phi$

定理5.1.1

- 设A、B和C是三个集合，若$C\neq\Phi$,则 $A\subseteq B \Leftrightarrow A\times C\subseteq B\times C \Leftrightarrow C\times A\subseteq C\times B$

证明(1):**必要性：**

设$A\subseteq B$，求证 $A\times C\subseteq B\times C$

任取$<x,y>\in A\times C$

则$x\in A$ 且 $y\in C$

由$A\subseteq B$，得

$x\in B$ 且 $y\in C$

即：

$<x,y>\in B\times C$

所以$A\times C\subseteq B\times C$

综上有$A\subseteq B\Leftrightarrow A\times C\subseteq B\times C$

充分性：

设$A\times C\subseteq B\times C$，求证$A\subseteq B$

任取$x\in A$

$\exists y_0\in C$ 使得$<x, y_0>\in A\times C$

由$A\times C\subseteq B\times C$，得

$<x, y_0>\in B\times C$

即：

$x\in B$

所以$A\subseteq B$

定理5.1.2

- 设A、B、C、D为非空集合，则 $A\times B\subseteq C\times D \Leftrightarrow A\subseteq C \wedge B\subseteq D$

证明：

首先,由$A\times B\subseteq C\times D$ 证明$A\subseteq C \wedge B\subseteq D$.

任取$x\in A$，$y\in B$，所以

$x\in A\wedge y\in B$

$\Leftrightarrow <x,y>\in A\times B$

$\Rightarrow <x,y>\in C\times D$ (由$A\times B\subseteq C\times D$)

$\Leftrightarrow x\in C\wedge y\in D$ 所以, $A\subseteq C \wedge B\subseteq D$.

其次, 由$A\subseteq C$，$B\subseteq D$. 证明$A\times B\subseteq C\times D$

任取$<x,y>\in A\times B$

$<x,y>\in A\times B \Leftrightarrow x\in A\wedge y\in B$

$\Rightarrow x\in C\wedge y\in D$ (由$A\subseteq C$，$B\subseteq D$)

$\Leftrightarrow <x,y>\in C\times D$ 所以， $A\times B\subseteq C\times D$

证毕.

定理5.1.3

(1) $A\times(B\cup C)=(A\times B)\cup(A\times C)$

(2) $(B\cup C)\times A=(B\times A)\cup(C\times A)$

(3) $A\times(B\cap C)=(A\times B)\cap(A\times C)$

(4) $(B\cap C)\times A=(B\times A)\cap(C\times A)$

(5) $A\times(B-C)=(A\times B)-(A\times C)$

(6) $(B-C)\times A=(B\times A)-(C\times A)$

(7) $A\times(B\oplus C)=(A\times B)\oplus(A\times C)$

(8) $(B\oplus C)\times A=(B\times A)\oplus(C\times A)$

证明(1)：任取$<x,y>\in A\times(B\cup C)$

$<x,y>\in A\times(B\cup C)$

$\Leftrightarrow x\in A\wedge y\in B\cup C\Leftrightarrow x\in A\wedge(y\in B\vee y\in C)$

$\Leftrightarrow(x\in A\wedge y\in B)\vee(x\in A\wedge y\in C)$

$\Leftrightarrow<x,y>\in A\times B\vee<x,y>\in A\times C$

$\Leftrightarrow<x,y>\in(A\times B)\cup(A\times C)$

笛卡尔积的应用

- 令A_1={x|x是学号}　A_2={x|x是姓名}　A_3={男,女}
  A_4={x|x是出生日期}　A_5={x|x是班级}　A_6 ={x|x是籍贯}
  - <001，王强，男，1981:02:16，计2001-1，辽宁> $\in A_1 \times A_2 \times A_3 \times A_4 \times A_5 \times A_6$是学生档案数据库的一条信息
  - 学生的档案是$A_1 \times A_2 \times A_3 \times A_4 \times A_5 \times A_6$的一个子集
- 令A={a,b,…,z}是英文字母表，英文单词可以看成*n*元组：
  - at=<a,t>, boy=<b,o,y>, data=<d,a,t,a>, computer=<c,o,m,p,u,t,e,r>
  - at$\in A^2$,boy$\in A^3$,data$\in A^4$,computer$\in A^8$,…
  - 英文词典中的单词集合可以看成是 $A \cup A^2 \cup \ldots \cup A^n$ 的一个子集

5.2 关系的概念与表示

- 关系
  - 一个非常普遍的概念
    - 数值的大于关系、整除关系，人类的父子关系、师生关系、同学关系
  - 例1
    - $A=\{a,b,c,d\}$是某乒乓球队的男队员集合，$B=\{e,f,g\}$是女队员集合. A和B之间的混双配对关系：

$A\times B=\{<x,y>|x\in A\wedge y\in B\}=\{<a,e>,<a,f>,<a,g>,<b,e>,<b,f>,<b,g>,<c,e>,<c,f>,<c,g>,<d,e>,<d,f>,<d,g>\}$

  - 例2
    - 令 $A=\{1,2,3,4\}$, A中元素间的$\leq$关系R：

$R=\{<1,1>,<1,2>,<1,3>,<1,4>,<2,2>,<2,3>,<2,4>,<3,3>,<3,4>,<4,4>\}\subseteq A\times A$

- **定义5.2.1关系**
  - 如果$A_1, A_2, \ldots, A_n$是集合，$R \subseteq A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$，则称$R$是定义在$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$上的$n$元关系；若$R = \Phi$，称$R$为$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$上的空关系；若$R = A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$，称$R$为$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$上的全关系
  - 如果 $R \subseteq A^n$，则称R是A上的n元关系
- **定义5.2.2 二元关系**
  - 设A、B是集合，如果$R \subseteq A \times B$，则称R是一个从A到B的关系，记作：$R: A \to B$；若$R \subseteq A^2$，则称R是A上的二元关系
- 恒等关系
  - A上的恒等关系I_A定义为：

    $I_A \subseteq A \times A$，且$I_A = \{<x,x> | x \in A\}$
  - 例$A=\{1,2,3\}$, 则$I_A = \{<1,1>,<2,2>,<3,3>\}$

- 思考
  - 若R和S都是关系，且R={<1,2>,<1,3>,<2,3>}，S={<1,2>,<1,3>,<2,3>}， R= S？
    - 错误
- 关系的相等
  - R_1是$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$上的$n$元关系,$R_2$是$B_1 \times B_2 \times \ldots \times B_m$上的$m$元关系.那么$R_1=R_2$,当且仅当$n=m$,且对一切$i$,$1 \leq i \leq n$,$A_i=B_i$,并且$R_1$和$R_2$是相等的有序$n$元组集合

- 二元关系简称为***关系***
- $<x,y>\in R \Leftrightarrow xRy$
  - 也称之为x与y有R关系

中缀表示法

后缀表示法

- $<x,y>\notin R \Leftrightarrow x\not R y$
  - 也称之为x与y没有R关系

关系的定义域与值域

- **定义5.2.3** 设R：$A \to B$
  - **定义域**(*domain*)：由所有$<x,y>\in R$的第一个分量组成的集合，称为R的定义域，记作$dom\ R$，即

    $$dom\ R=\{x|\exists y(<x,y>\in R)\}$$

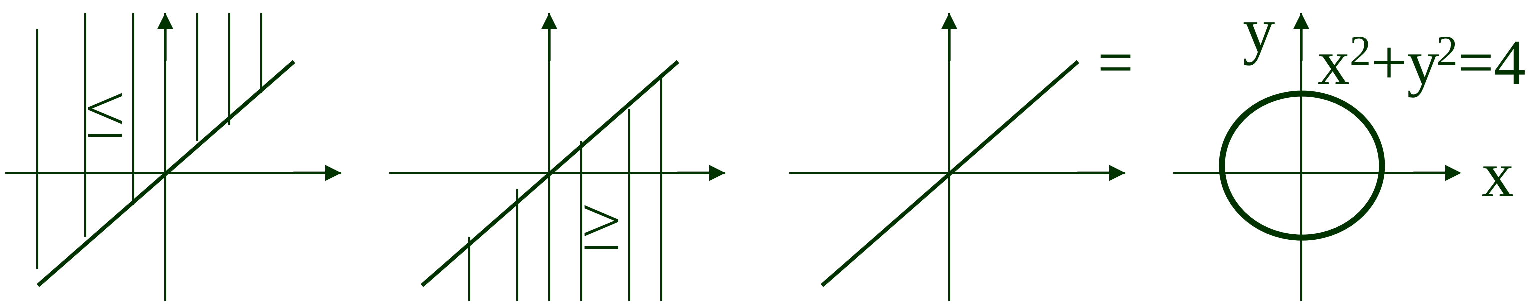
  - **值域**(*range*)：由所有$<x,y>\in R$的第二个分量组成的集合，称为R的值域，记作$ran\ R$，即

    $$ran\ R=\{y|\exists x(<x,y>\in R)\}$$

  - 例：$A=\{1,2,3,4\}$, $R\subseteq A\times A$,
    $R=\{ <1,1>,<1,2>,<1,3>,<2,2>,<2,3>\}$
    - $dom\ R=\{1,2\}$
    - $ran\ R=\{1,2,3\}$

例

- R是实数集合， R上的几个关系



关系矩阵和关系图

- 关系矩阵
  - 有限集合之间的关系可以用矩阵表示
  - 便于用计算机来处理
  - 设$A=\{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$，$B=\{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$是有限集，$R\subseteq A\times B$，$A$到$B$的二元关系$R$可用$m\times n$阶矩阵表示：$\mathrm{M}_R=(\mathrm{r}_{ij})_{m\times n}$，其中

$$r_{ij}=\begin{cases}1, 如果 a_i R b_j \\ 0, 如 a_i \not R b_j\end{cases}$$

则称矩阵$M_R=[r_{ij}]$是R的关系矩阵

例

- $A=\{a_1,a_2\}, B=\{b_1,b_2,b_3\}$
  - R是A到B的关系，$R=\{<a_1,b_1>,<a_2,b_1>,<a_1,b_3>,<a_2,b_2>\}$

$$\begin{array}{c|ccc} & b_1 & b_2 & b_3 \\ \hline a_1 & 1 & 0 & 1 \\ a_2 & 1 & 1 & 0 \end{array} \qquad M_R=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

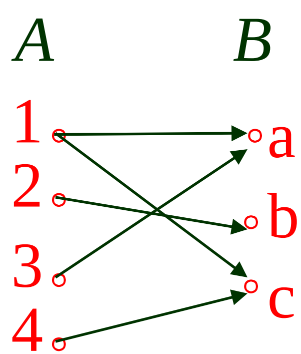
  - S是B上的关系，$S=\{<b_1,b_1>,<b_2,b_1>,<b_1,b_3>,<b_3,b_2>,<b_2,b_2>\}$

$$\begin{array}{c|ccc} & b_1 & b_2 & b_3 \\ \hline b_1 & 1 & 0 & 1 \\ b_2 & 1 & 1 & 0 \\ b_3 & 0 & 1 & 0 \end{array} \qquad M_S=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

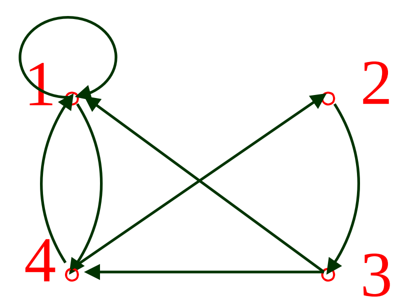
关系图

- 有向图
- 两种情况
  - $R \subseteq A \times B$
  - $R \subseteq A \times A$
- 例：设$A=\{1,2,3,4\}$,$B=\{a,b,c\}$
  - $R \subseteq A \times B$，$R=\{ \langle 1,a \rangle, \langle 1,c \rangle, \langle 2,b \rangle, \langle 3,a \rangle, \langle 4,c \rangle \}$
  - $S \subseteq A \times A$，$S=\{ \langle 1,1 \rangle, \langle 1,4 \rangle, \langle 2,3 \rangle, \langle 3,1 \rangle, \langle 3,4 \rangle, \langle 4,1 \rangle, \langle 4,2 \rangle \}$

G_R:



G_S :



关系的集合运算

- 关系就是集合
- ∩、∪、-、⊕和补运算对关系也适用
- 特别的
  - $\overline{R}=(A\times B)-R$

思考题

- 设A和B分别是n元和m元有限集，则共有多少个不同的A到B的关系？ 2^{mn}
- 设A(和B)都是非空有限集，则A上的空关系、恒等关系和A上(A到B的)全关系的关系图和关系矩阵有何特点。
- 怎样通过关系图和关系矩阵求dom$R$和ran$R$

5.3 关系的性质

- 最重要的一节
- 这里关系都是集合A上的关系
- 关系的性质主要有
  - 自反性
  - 反自反性
  - 对称性
  - 反对称性
  - 传递性
  - 反传递性

自反关系

- **定义5.3.1**
  - 设R是A上的二元关系，如果对于$\forall x\in A$都有$<x,x>\in R$ (xRx)，则称R是A上的自反关系. 即

    R是A上的自反关系$\Leftrightarrow \forall x(x\in A\rightarrow xRx)$
  - 例：$A=\{1,2,3\}$
    - $R_1=\{<1,1>,<2,2>,<3,1>,<1,2>\}$
      - 不是自反关系
    - $R_2=\{<1,1>,<2,2>,<3,3>,<1,2>\}$
      - 自反关系
    - 空关系
      - 不是自反关系
    - 全关系、恒等关系
      - 自反关系

自反关系的特征

- **定理5.3.1**：设R是集合A上的关系，则

  R具有自反性 *iff* $I_A \subseteq R$

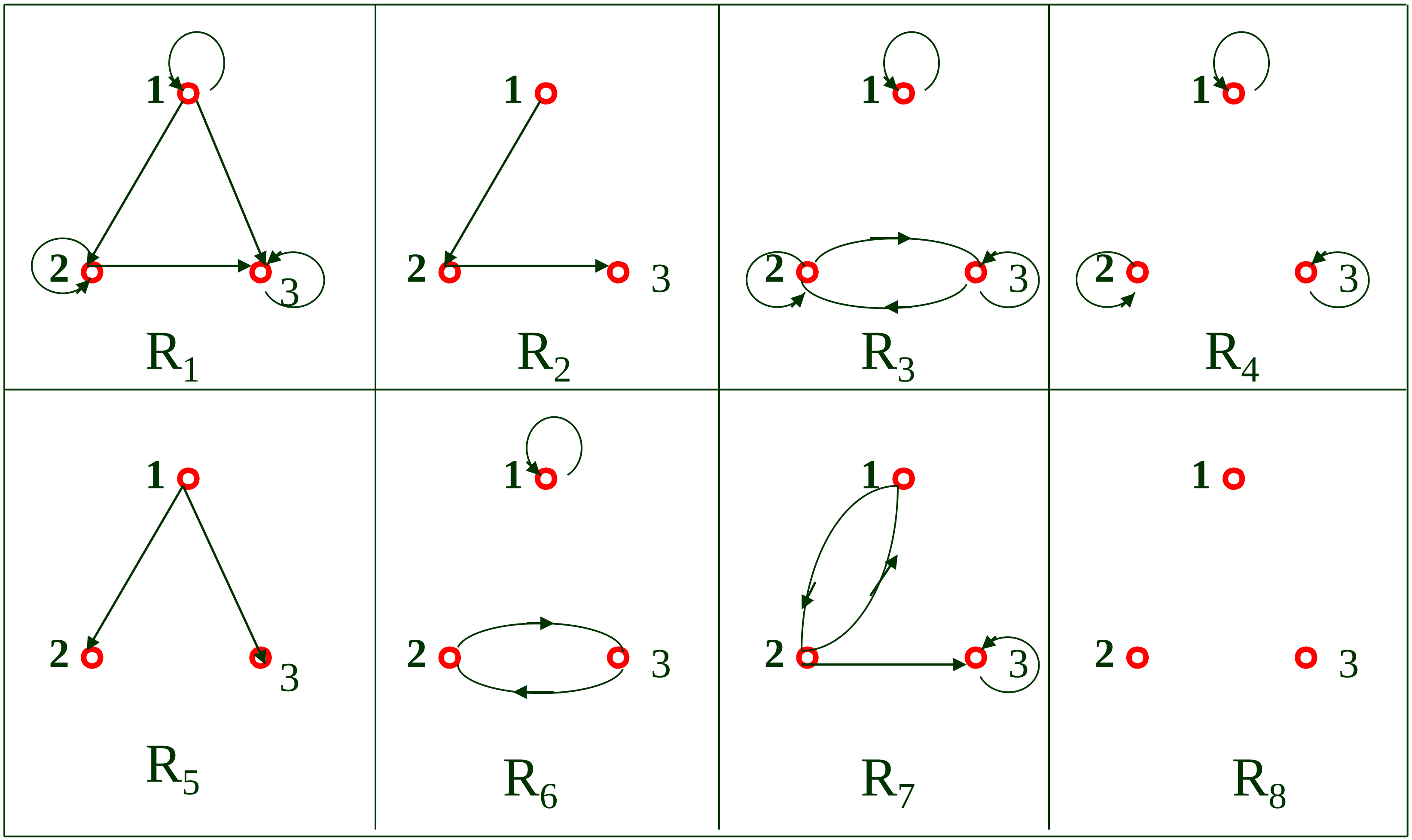
  证明：必要性

  $\forall x \in A$，由R自反知 $<x,x> \in R$，$\therefore$ $I_A \subseteq R$

  充分性

  $\forall x \in A$，由I_A的定义知$<x,x> \in I_A$，$\therefore$ $<x,x> \in R$，即R是自反的
- 自反关系的关系矩阵
  - 主对角线上的所有元素均为1
- 自反关系的关系图
  - 每个结点都有自环线

- 令A={1,2,3}，下列哪些关系是自反的



反自反关系

- **定义5.3.2**
  - 设R是集合A上的关系，如果对于$\forall x\in A$都有$<x,x>\notin R$，则称R为A上的反自反关系。即

R是A上的反自反关系$\Leftrightarrow \forall x(x\in A\rightarrow <x,x>\notin R)$

  - 例：$A=\{1,2,3\}$
    - $S_1=\{<1,1>,<2,2>,<3,1>,<1,2>\}$
      - 不是反自反关系
    - $S_2=\{<1,3>,<2,3>,<3,1>,<1,2>\}$
      - 反自反关系
    - 空关系
      - 反自反关系

反自反关系的特征

- **定理5.3.2：** 设R是集合A上的关系，则

  R具有反自反性 *iff* $I_A \cap R = \Phi$

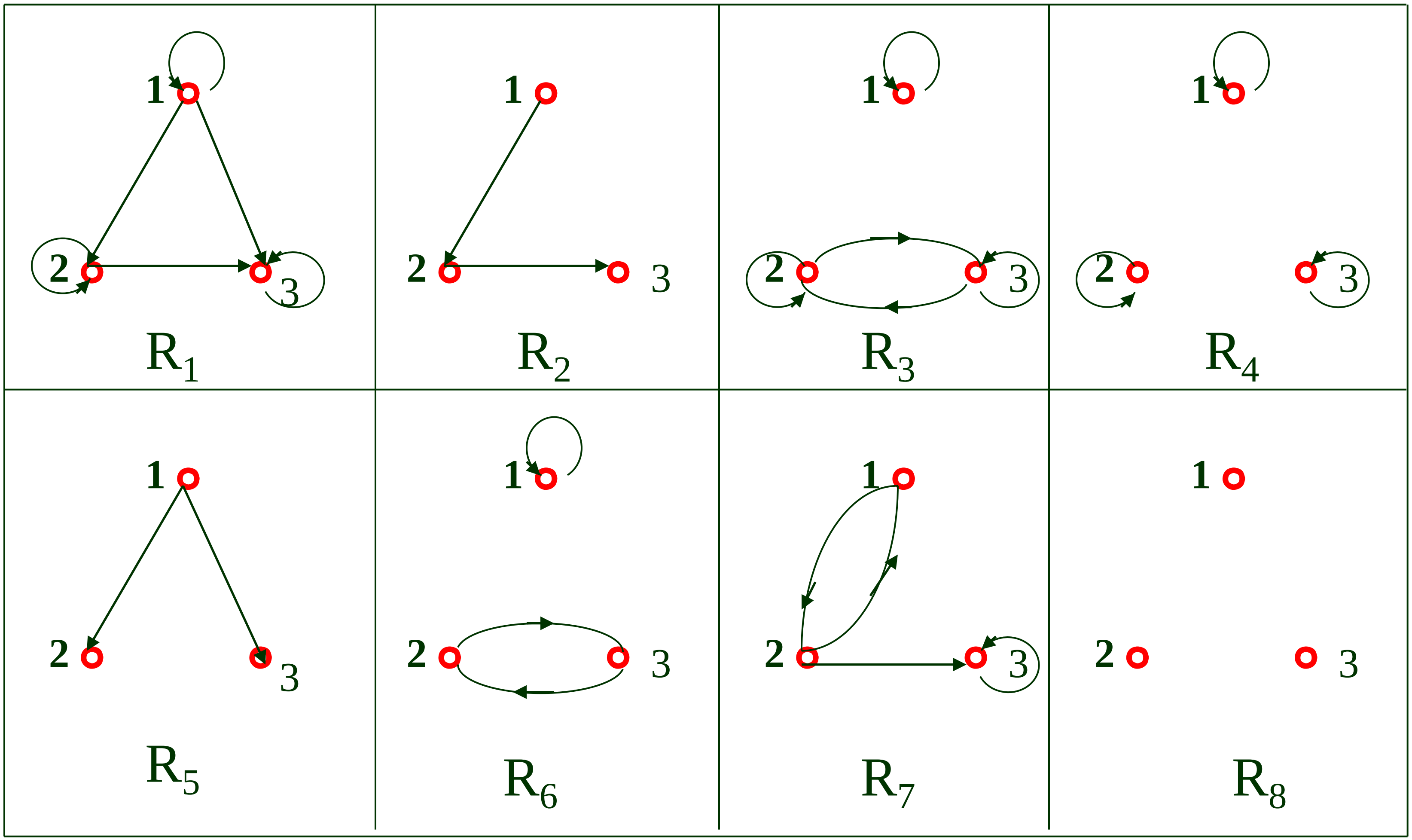
  证明：必要性

  $\forall x \in A$，由R反自反知 $\langle x,x \rangle \notin R$，$\therefore$ $I_A \cap R = \Phi$

  充分性

  假设R不是反自反的，即存在$x \in A$，$\langle x,x \rangle \in R$，则 $\langle x,x \rangle \in I_A \cap R$，与$I_A \cap R = \Phi$矛盾
- 反自反关系的关系矩阵
  - 主对角线上的所有元素均为0
- 反自反关系的关系图
  - 每个结点都没有自环线

- 令A={1,2,3}，下列哪些关系是反自反的



思考题

- 设A是n元有限集
  - 共有多少个A上的不同的自反关系？ 2^{n^2-n}
  - 共有多少个A上的不同的反自反关系？ 2^{n^2-n}
- 是否存在满足下列要求的关系，若有，请给出实例
  - 既自反又反自反 **空集上的空关系**
  - 既不自反又不反自反

对称关系

- **定义5.3.3**
  - 设R是集合A上的关系，若对任何$x, y \in A$,只要有xRy,就必有yRx,则称R为A上的对称关系，即

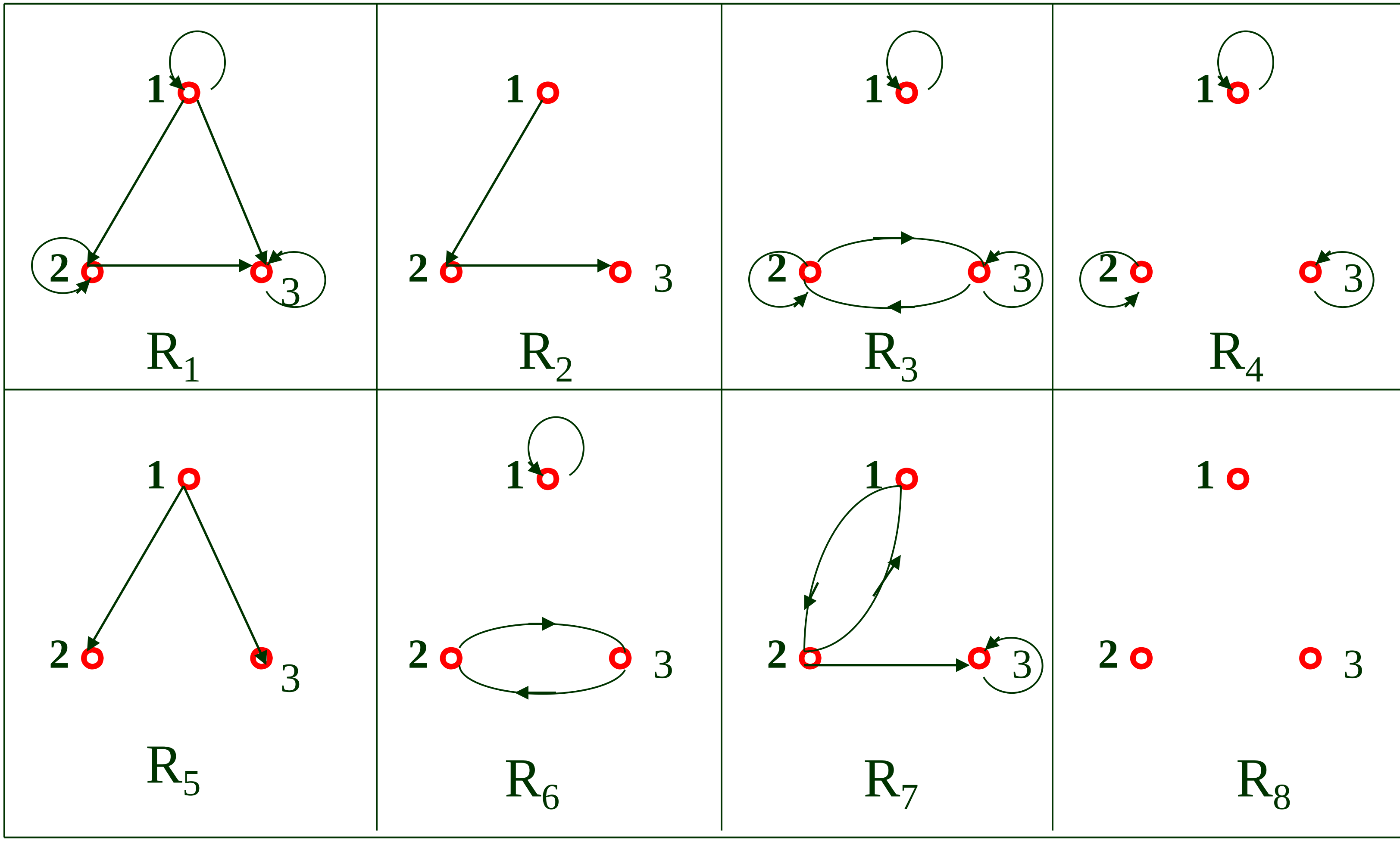
$$R\text{是}A\text{上的对称关系} \Leftrightarrow \forall x \forall y(x \in A \wedge y \in A \wedge xRy \rightarrow yRx)$$

- 例：
  - 邻居关系，朋友关系
  - $A=\{1,2,3\}$
    - $R=\{<1,2>,<2,1>,<1,3>,<3,1>,<1,1>\}$
    - I_A
    - 空关系
    - 全关系

对称关系的特征

- 对称关系的关系矩阵
  - 根据主对角线对称
- 对称关系的关系图
  - 在两个不同的结点之间，若有边的话，则有方向相反的两条边（平行线）

- 令$A=\{1,2,3\}$，下列哪些关系是对称的



反对称关系

- **定义5.3.4**
  - 设R是集合A上的关系,若对$\forall x, y\in A$,如果有xRy,和yRx,就有$x=y$,则称R为A上的反对称关系，即

$$R\text{是}A\text{上的反对称关系}\Leftrightarrow\forall x\forall y((x\in A\wedge y\in A\wedge xRy\wedge yRx)\rightarrow x=y)$$

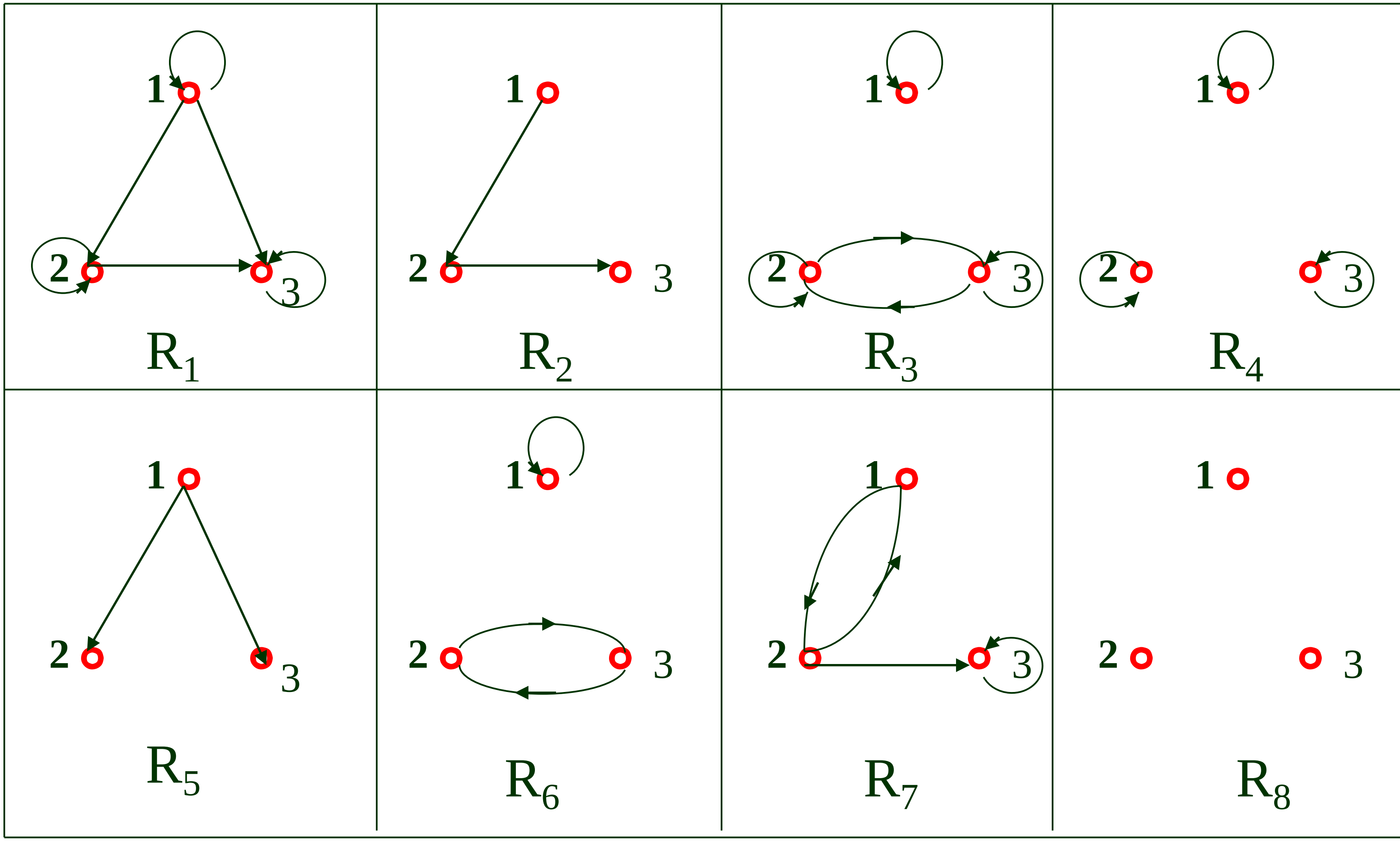
$$\Leftrightarrow\forall x\forall y((x\in A\wedge y\in A\wedge x\neq y\wedge xRy)\rightarrow y\not R x)$$

- 例：$A=\{1,2,3\}$
  - $R_1=\{<1,2>,<2,3>\}$
  - $R_2=\{<1,2>,<2,3>,<3,3>,<1,1>\}$
  - I_A
  - 空关系

反对称关系的特征

- 反对称关系的关系矩阵
  - 以主对角线为对称的两个元素中最多有一个1
- 反对称关系的关系图
  - 两个不同的结点之间最多有一条边

- 令A={1,2,3}，下列哪些关系是反对称的



思考题

- 是否存在满足下列要求的关系，若有，请给出实例
  - 既对称又反对称 I_A
  - 既不对称又不反对称
- 设A是n元有限集
  - 共有多少个A上的不同的对称关系？ $2^n 2^{\frac{n^2-n}{2}} = 2^{\frac{n^2+n}{2}}$
  - 共有多少个A上的不同的反对称关系？ $2^n 3^{\frac{n^2-n}{2}}$
  - 共有多少个A上不同的既对称又反对称的关系？ 2^n

传递关系

- **定义5.3.5**
  - R是A上的关系，对$\forall x,y,z\in A$,如果有xRy,和yRz,就有xRz,则称R为A上的传递关系，即

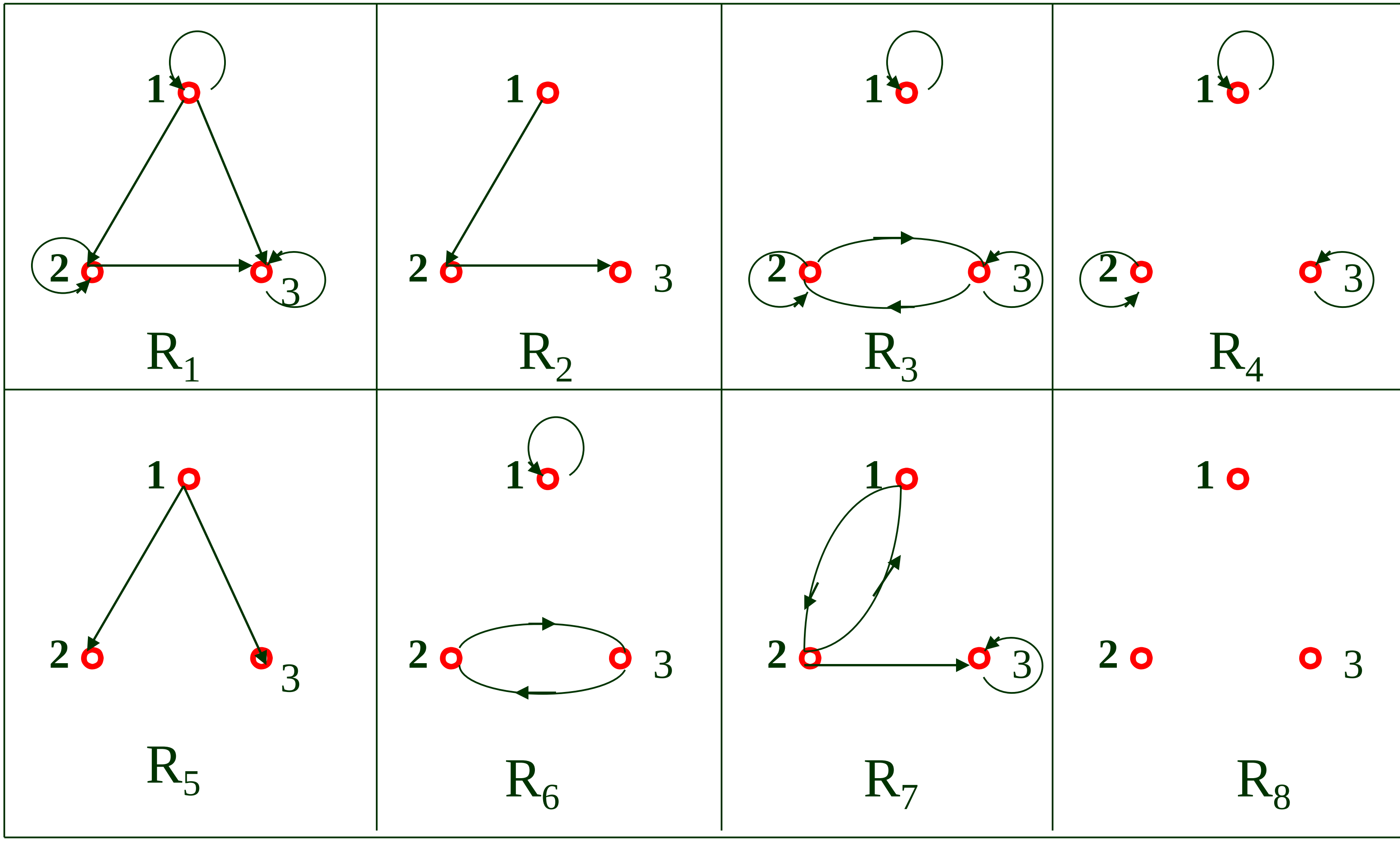
$$R\text{是}A\text{上的传递关系}\Leftrightarrow\forall x\forall y\forall z((x\in A\wedge y\in A\wedge z\in A\wedge xRy\wedge yRz)\rightarrow xRz)$$

- 例
  - $\leq$，$<$，$\subseteq$，$\subset$，$=$，$\Rightarrow$，$\Leftrightarrow$
  - $A=\{1,2,3,4\}$
    - $R_1=\{<4,1>,<2,1>\}$
    - $R_2=\{<4,1>,<1,3>,<4,3>,<2,1>,<2,3>\}$
    - I_A
    - 空关系，全关系

传递关系的特征

- 传递关系的关系矩阵
  - 如果$a_{ij}=1$,且$a_{jk}=1$,则$a_{ik}=1$
- 传递关系的关系图
  - 如果有边$<a,b>$,$<b,c>$,则也有边$<a,c>$

- 令$A=\{1,2,3\}$，下列哪些关系是传递的



反传递关系

- **定义5.3.6**
  - R是A上的关系，对$\forall x,y,z\in A$,如果有xRy,和yRz,就有$<x,z>\notin R$,则称R为A上的反传递关系，即

$$R\text{是}A\text{上的反传递关系}\Leftrightarrow\forall x\forall y\forall z((x\in A\wedge y\in A\wedge z\in A\wedge xRy\wedge yRz)\rightarrow x\not R z)$$

- 例
  - $A=\{1,2,3,4\}$
    - $R_1=\{<4,1>,<2,1>\}$
    - $R_2=\{<4,1>,<1,3>,<2,1>\}$
    - 空关系

练习

- 设R是集合A上的一个自反关系,求证：R是对称和传递的，iff 若$<a,b>,<a,c> \in R$,则$<b,c> \in R$

证明：必要性: 已知R是对称和传递的，

设$<a,b>\in R$，$<a,c>\in R$，(要证明 $<b,c>\in R$)

因为R对称

故$<b,a>\in R$,又R 是传递的，且$<a,c>\in R$

得$<b,c>\in R$

充分性: 已知$\forall a,b,c\in A$，若$<a,b>$，$<a,c> \in R$,则$<b,c> \in R$

先证R对称：$\forall <a,b>\in R$，(要证明 $<b,a>\in R$)

因为R是自反的,所以$<a,a>\in R$，

由$<a,b>\in R$且$<a,a>\in R$，根据已知条件得$<b,a>\in R$，

即R是对称的

再证R传递：$\forall a,b,c\in A$ 设 $<a,b>\in R$，$<b,c>\in R$ (要证明$<a,c>\in R$)

由R对称,得$<b,a>\in R$，

由$<b,a>\in R$且$<b,c>\in R$，根据已知条件得$<a,c>\in R$

所以R是传递的

- 从下列各题给出的备选答案中选出正确的答案，并将其代号填入题后面的括号内。

(1) 设$A=\{0,1,2,3\}$，A上的关系
$R=\{<0,0>,<0,2>,<1,1>,<1,3>,<2,2>,<2,0>,<3,1>\}$，则$R$是

A.自反的　B. 对称的　C. 反对称的　D. 可传递的

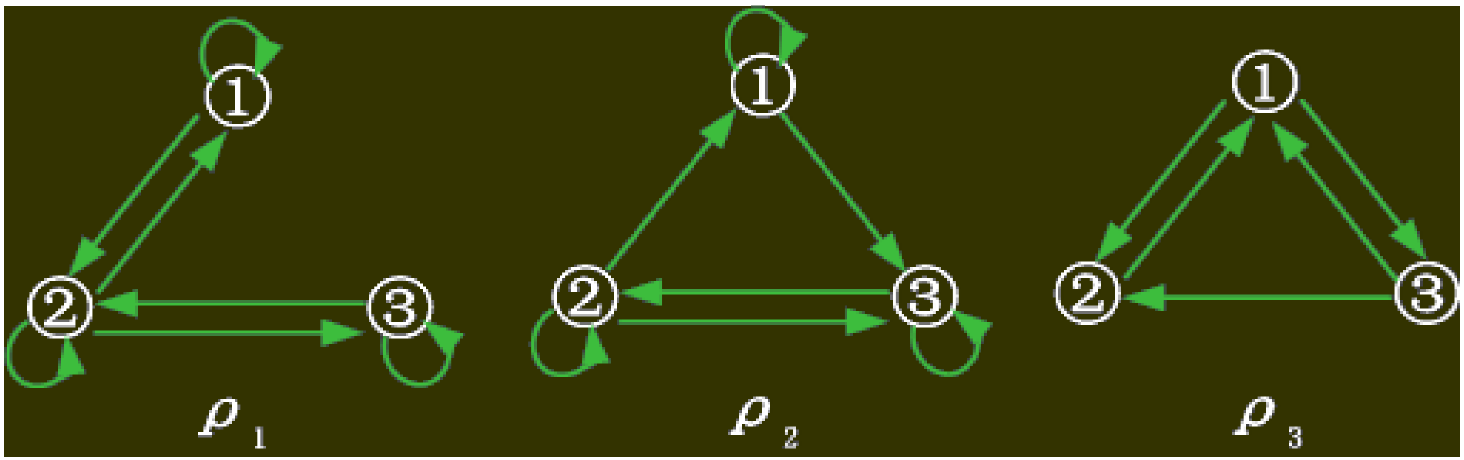
(**B**)

(2) 设R是整数集I上的关系，定义为当且仅当$|i_1-i_2|\leq 10$时，i_1Ri_2，则R是

A.自反的　B. 对称的　C. 反对称的　D. 可传递的

(**A B**)

- 下图给出了{1,2,3}上三个关系的关系图，试对每一个图所表示的关系的性质作出判别，并将选中的性质的代号填入相应的括号内



A. 自反的　B. 对称的　C. 反对称的 D. 传递的　E. 反自反

则ρ_1是（ A、B）

则ρ_2是（　A ）

则ρ_3是（　E ）

思考题

- 关系的性质对于集合运算是否保持封闭？即自反（反自反、对称、反对称、传递）关系的交、并、差、对称差及补关系是否仍是自反（反自反、对称、反对称、传递）的？

R_1,R_2	$R_1 \cap R_2$	$R_1 \cup R_2$	$R_1 - R_2$	$R_1 \oplus R_2$	$\sim R_1$
自反	自反	自反	不自反	不自反	不自反
反自反	反自反	反自反	反自反	反自反	不反自反
对称	对称	对称	对称	对称	对称
反对称	反对称	不反对称	反对称	不反对称	不反对称
传递	传递	不传递	不传递	不传递	不传递

5.4 逆关系和复合关系

- **定义5.4.1** 逆关系
  - 设R是从A到B的二元关系,关系R的逆(或叫R的逆关系)记为R^{-1}(R^c),是一从B到A的二元关系,定义如下:

    $R^{-1}=\{<y,x>|<x,y>\in R\}$
- 例
  - I上的关系“<”的逆是“>”
  - 集合族上的关系$\subseteq$的逆是关系$\supseteq$
  - 空关系的逆是空关系
  - $(A\times B)^{-1}=B\times A$
  - $I_A^{-1}=I_A$
  - $R=\{<1,2>,<2,3>,<3,4>,<4,5>\}$
    - $R^{-1}=\{<2,1>,<3,2>,<4,3>,<5,4>\}$

逆关系的关系图和关系矩阵

- R^{-1}的关系图
  - 将R关系图的所有边的方向颠倒
- R^{-1}的矩阵
  - R矩阵的转置：$M=(M_R)^T$

$$M_R=\begin{bmatrix}1&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&1&1\end{bmatrix}_{3\times4}\qquad M_{R^{-1}}=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&0&0\\1&0&1\\0&1&1\end{bmatrix}_{4\times3}$$

- **定理5.4.1** 设R, S都是从A到B的关系,那么下列各式成立:

1. $(R^{-1})^{-1}=R$
2. $R\subseteq S$ iff $R^{-1}\subseteq S^{-1}$
3. $R=S$ iff $R^{-1}=S^{-1}$
4. $(R\cup S)^{-1} = R^{-1}\cup S^{-1}$
5. $(R\cap S)^{-1} = R^{-1}\cap S^{-1}$
6. $(R-S)^{-1} = R^{-1}-S^{-1}$
7. $(R\oplus S)^{-1} = R^{-1}\oplus S^{-1}$
8. $\overline{R}^{-1} = \overline{R^{-1}}$

- **定理5.4.2** R是A上关系，则

(1) R是对称的，当且仅当 $R^{-1}=R$

(2) R是反对称的，当且仅当 $R\cap R^{-1}\subseteq I_A$

证明：(1) 充分性，已知 $R^{-1}=R$ (证明R对称)

任取$x,y\in A$ 设$\langle x,y\rangle\in R$,则$\langle y,x\rangle\in R^{-1}$,而$R^{-1}=R$

即有$\langle y,x\rangle\in R$，所以R对称

必要性，已知R对称，(证明$R^{-1}=R$)

先证$R^{-1}\subseteq R$，任取$\langle y,x\rangle\in R^{-1}$,则$\langle x,y\rangle\in R$,又$R$对称

所以有$\langle y,x\rangle\in R$，所以$R^{-1}\subseteq R$。

再证$R\subseteq R^{-1}$，任取$\langle x,y\rangle\in R$, 因R对称，所以有

$\langle y,x\rangle\in R$，则$\langle x,y\rangle\in R^{C}$, 所以$R\subseteq R^{-1}$。

综上$R^{-1}=R$

证明(2) 充分性，已知$R \cap R^{-1} \subseteq I_A$，(证明$R$反对称)

任取$x,y \in A$ 设$<x,y> \in R$ 且$<y,x> \in R$，

则$<x,y> \in R$ 且 $<x,y> \in R^{-1}$，

所以$<x,y> \in R \cap R^{-1}$，因为$R \cap R^{-1} \subseteq I_A$

所以$<x,y> \in I_A$，即$x=y$

所以R反对称

必要性，已知R反对称，(证明$R \cap R^{-1} \subseteq I_A$)

任取$<x,y> \in R \cap R^{-1}$

则$<x,y> \in R$ 且 $<x,y> \in R^{-1}$

即$<x,y> \in R$ 且 $<y,x> \in R$

因为R反对称，所以$x=y$

即$<x,y> \in I_A$ 所以$R \cap R^{-1} \subseteq I_A$

复合关系

- 定义5.4.2
  - 设R是从A到B的关系， S是从B到C的关系，则R和S的复合关系是从A到C的关系，用 $(R°S)$表示，可简记为RS，定义为：

$$R \circ S = \{<x,z>|x\in A\wedge z\in C\wedge \exists y(y\in B\wedge <x,y>\in R\wedge <y,z>\in S)\}$$

  - 例
    - R兄妹关系，S母子关系， $R \circ S$舅舅和外甥关系
    - $A=\{1,2,3,4\}$,$B=\{2,3,4\}$,$C=\{1,2,3\}$，R是A到B的关系;S是B到C的关系
      - $R=\{<x,y> \mid x+y=6\}=\{<2,4>,<3,3>,<4,2>\}$
      - $S=\{<y,z> \mid y-z=1\}=\{<2,1>,<3,2>,<4,3>\}$
      - $R \cdot S=\{<2,3>,<3,2>,<4,1>\}$

练习

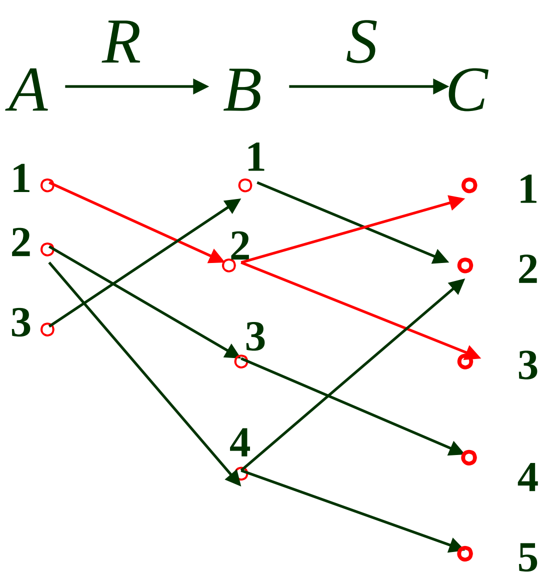
- $A=\{1,2,3\}$ $B=\{1,2,3.4\}$ $C=\{1,2,3,4,5\}$

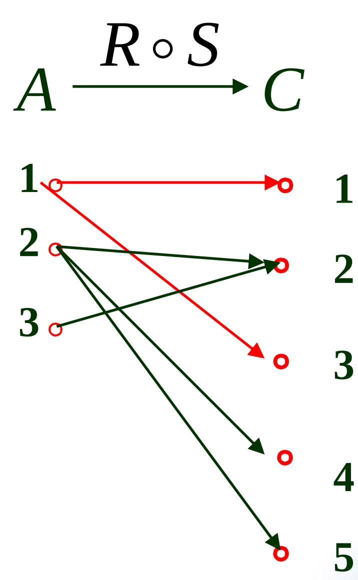
  $R\subseteq A\times B$ $S\subseteq B\times C$

  $R=\{<1,2>,<2,3>,<2,4>,<3,1>\}$

  $S=\{<1,2>,<2,1>,<2,3>,<3,4>,<4,2>,<4,5>\}$ 求

  $R\cdot S=\{<1,1>,<1,3>,<2,4>,<2,2>,<2,5>,<3,2>\}$





- 设$A=\{1,2,3,4,5\}$,R和S都是A上二元关系.如果

$R=\{<1,2>,<3,4>,<2,2>\}$,$S=\{<4,2>,<2,5>,<3,1>,<1,3>\}$

求$R\cdot S$，$S\cdot R$，$(R\cdot S)\cdot R$，$R\cdot(S\cdot R)$，$R\cdot R$，$S\cdot S$

$R\cdot S=\{<1,5>,<3,2>,<2,5>\}$

$S\cdot R=\{<4,2>,<3,2>,<1,4>\}$

不满足交换律

$(R\cdot S)\cdot R=\{<3,2>\}$

$R\cdot(S\cdot R)=\{<3,2>\}$

满足结合律?

$R\cdot R=\{<1,2>,<2,2>\}$

$S\cdot S=\{<4,5>,<3,3>,<1,1>\}$

复合关系的矩阵表达

- 为了讨论复合关系的关系矩阵，引入 0 / 1 矩阵的复合运算
- **定义5.4.3** 设M_R=［a_{ij}］是$n\times m$的 0 / 1 矩阵，M_S=［b_{ij}］是$m\times p$的 0 / 1 矩阵.则$M_{R\cdot S}$=［c_{ij}］$=M_R\cdot M_S$,这里

$$c_{ij}=\begin{cases}1, & \text{若} \bigvee\limits_{1\le k\le m}(a_{ik}=1\wedge b_{kj}=1)\text{为真；}\\ 0, & \text{否则。}\end{cases}$$

∧是逻辑乘,∨是逻辑加

- **定理5.4.3** 设$A=\{a_1, a_2, \ldots a_n\}$, $B=\{b_1, b_2, \ldots b_m\}$, $C=\{c_1, c_2, \ldots c_p\}$, R是从A到B的关系， S是从B到C的关系。则$M_{R\cdot S}=M_R \cdot M_S$
- 例：设 $X=\{1,2\}$, $Y=\{a,b,c\}$, $Z=\{\alpha,\beta\}$, R是X到Y的关系， S是Y到Z的关系， $R=\{<1,a>,<1,b>,<2,c>\}$, $S=\{<a,\beta>,<b,\beta>,<c,\beta>\}$,则

$$M_R=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \qquad M_S=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

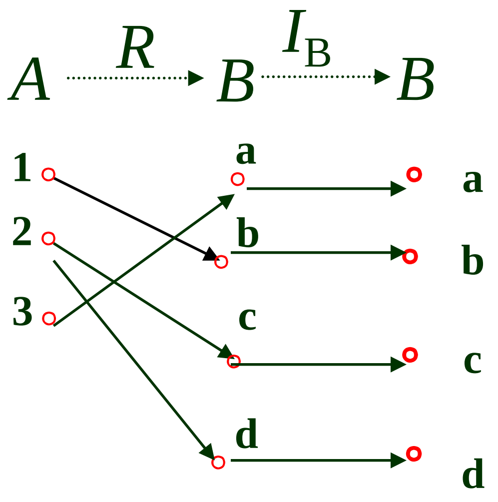
$$M_{R\cdot S}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

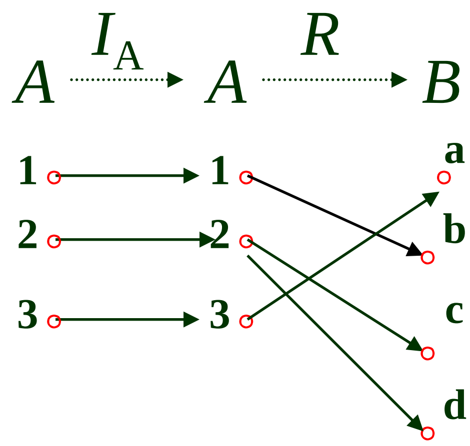
关系复合运算的性质

- **定理5.4.4**
  - 设R是A到B的二元关系,I_A,I_B分别是A和B上的相等关系,则

$$I_A \cdot R=R \cdot I_B=R$$

- 例：令A={1,2,3}, B={a,b,c,d}





- **定理5.4.5**
  - 设R_1是从A到B的关系,R_2和R_3是从B到C的关系,R_4是从C到D的关系,则

1. 若$R_2 \subseteq R_3$ 那么 $R_1R_2 \subseteq R_1R_3$且 $R_2R_4 \subseteq R_3R_4$
2. $R_1(R_2 \cup R_3)=R_1R_2 \cup R_1R_3$
3. $(R_2 \cup R_3)R_4=R_2R_4 \cup R_3R_4$
4. $R_1(R_2 \cap R_3) \subseteq R_1R_2 \cap R_1R_3$
5. $(R_2 \cap R_3)R_4 \subseteq R_2R_4 \cap R_3R_4$
6. $(R_1R_2)^{-1}=R_2^{-1}R_1^{-1}$

证明(1)　　$\forall <a,c> \in R_1R_2$

则$\exists b$，$b \in B$使得 aR_1b 且 bR_2c

$\because R_2 \subseteq R_3$　　$\therefore bR_3c$

即$<a,c> \in R_1R_3$

$\therefore R_1R_2 \subseteq R_1R_3$

类似可证$R_2R_4 \subseteq R_3R_4$

证明(2) 任取$<a,c>\in R_1(R_2\cup R_3)$

$\Leftrightarrow \exists b(b\in B\wedge <a,b>\in R_1\wedge <b,c>\in R_2\cup R_3)$

$\Leftrightarrow \exists b(b\in B\wedge <a,b>\in R_1\wedge (<b,c>\in R_2\vee <b,c>\in R_3))$

$\Leftrightarrow \exists b((b\in B\wedge <a,b>\in R_1\wedge <b,c>\in R_2)\vee$

$\quad (b\in B\wedge <a,b>\in R_1\wedge <b,c>\in R_3))$

$\Leftrightarrow \exists b(b\in B\wedge <a,b>\in R_1\wedge <b,c>\in R_2)\vee$

$\quad \exists b(b\in B\wedge <a,b>\in R_1\wedge <b,c>\in R_3)$

$\Leftrightarrow <a,c>\in R_1R_2\vee <a,c>\in R_1R_3$

$\Leftrightarrow <a,c>\in (R_1R_2)\cup (R_1R_3)$

所以$R_1(R_2\cup R_3)=(R_1R_2)\cup (R_1R_3)$

证明(4) 任取$<a,c>\in R_1\ (R_2\cap R_3)$

$\Leftrightarrow \exists b(b\in B\wedge <a,b>\in R_1\wedge <b,c>\in R_2\cap R_3)$

$\Leftrightarrow \exists b(b\in B\wedge <a,b>\in R_1\wedge (<b,c>\in R_2\wedge <b,c>\in R_3))$

$\Leftrightarrow \exists b((b\in B\wedge <a,b>\in R_1\wedge <b,c>\in R_2)\wedge$

$(b\in B\wedge <a,b>\in R_1\wedge <b,c>\in R_3))$

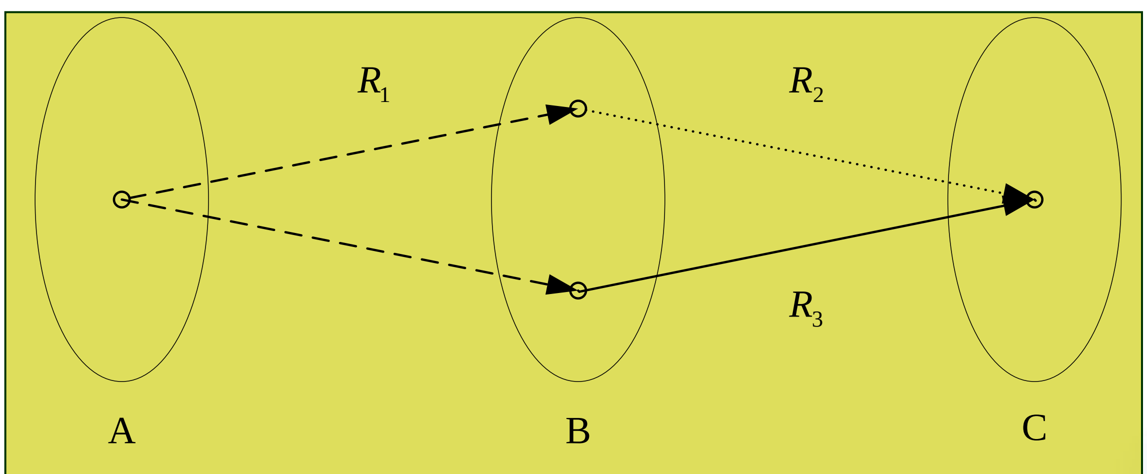
$\Rightarrow \exists b(b\in B\wedge <a,b>\in R_1\wedge <b,c>\in R_2)\wedge$

$\exists b(b\in B\wedge <a,b>\in R_1\wedge <b,c>\in R_3)$

$\Leftrightarrow <a,c>\in R_1R_2\wedge <a,c>\in R_1R_3$

$\Leftrightarrow <a,c>\in (R_1R_2)\cap(R_1R_3)$

所以 $R_1\ (R_2\cap R_3)\subseteq(R_1R_2)\cap(R_1R_3)$



- **定理5.4.6**
  - 设R_1和R_2是由A到B的关系， S_1和S_2是由B到C的关系，若 $R_1 \subseteq R_2$, $S_1 \subseteq S_2$,则 $R_1S_1 \subseteq R_2S_2$
- **定理5.4.7**
  - 设R_1是从A到B的关系,R_2是从B到C的关系,R_3是从C到D的关系,则

$(R_1R_2)R_3=R_1(R_2R_3)$ (复合运算满足结合律)

证明：$\forall <a,d> \in R_1\ (R_2\ R_3)$

$\Leftrightarrow \exists b(b \in B \wedge <a,b> \in R_1 \wedge <b,d> \in R_2\ R_3)$

$\Leftrightarrow \exists b(b \in B \wedge <a,b> \in R_1 \wedge \exists c(c \in C \wedge <b,c> \in R_2 \wedge <c,d> \in R_3))$

$\Leftrightarrow \exists b \exists c(b \in B \wedge <a,b> \in R_1 \wedge (c \in C \wedge <b,c> \in R_2 \wedge <c,d> \in R_3))$

$\Leftrightarrow \exists c \exists b(c \in C \wedge (b \in B \wedge <a,b> \in R_1 \wedge <b,c> \in R_2 \wedge <c,d> \in R_3))$

$\Leftrightarrow \exists c\ (c \in C \wedge \exists b(b \in B \wedge <a,b> \in R_1 \wedge <b,c> \in R_2) \wedge <c,d> \in R_3)$

$\Leftrightarrow \exists c\ (c \in C \wedge <a,c> \in R_1\ R_2) \wedge <c,d> \in R_3)$

$\Leftrightarrow <a,d> \in (R_1\ R_2)\ R_3$

关系R的幂

- 当R是A上的一个关系时,R可与自身合成任意次而形成A上的一个新关系，即

  $RR=R^2$， $R^2R=RR^2=R^3$， …

- **定义5.4.4**
  - 设R是集合A上的二元关系,$n\in N$,那么R的n次幂记为R^n,定义如下:

  (1) $R^0=I_A$

  (2) $R^n=R^{n-1}\cdot R$

- **定理5.4.8** 设R是A上的关系, $m,n\in Z$,那么

  (1) $(R^n)^{-1}=(R^{-1})^n$

  (2) $R^m\cdot R^n=R^{m+n}$

  (3) $(R^m)^n=R^{mn}$

■**定理5.4.9** 设R是n元有限集A上的关系,那么$\exists s,t\in Z$，使$R^s=R^t$而 $0\leq s<t\leq 2^{n^2}$

证明：为方便起见，记 $2^{n^2}=m$

因为总共只有m个定义在n元有限集A上的不同的关系，所以以下$m+1$个R的方幂

$$R^0, R^1, R^2,\ldots, R^m$$

之中，必有相同者。所以存在s和t，$0\leq s<t\leq m$ 使 $R^s=R^t$

鸽巢原理（抽屉原则）

定理5.4.10

- 设R是集合A上的一个二元关系.若$\exists s,t\in Z$, $s<t$, 使$R^s=R^t$.记$p=t-s$,那么

(a) 对所有$i\in Z$, $R^{s+i}=R^{t+i}$

(b) 对所有$k,i\in Z$, $R^{s+kp+i}=R^{s+i}$

(c) 对任意$q\in Z$,皆有$R^q\in\{R^0,R^1,R^2,\ldots,R^{t-1}\}$

证明(a)：i. $i=0$时，$R^s=R^t$

ii. 设$i=n$时，$R^{s+n}=R^{t+n}$

则$i=n+1$时，$R^{s+n+1}=R^{s+n}R=R^{t+n}R=R^{t+n+1}$

得证

证明(b)：　i. i=0时，证明$R^{s+kp}=R^s$

k=0时，$R^s=R^s$

设$k=m$时，$R^{s+mp}=R^s$

则$k=m+1$时，

$R^{s+(m+1)p}=R^{s+mp}R^p=R^sR^p=R^{s+p}=R^{s+t-s}=R^t=R^s$

ii. 设$i=n$时，$R^{s+kp+n}=R^{s+n}$

则$i=n+1$时，

$R^{s+kp+n+1}=R^{s+kp+n}R=R^{s+n}R=R^{s+n+1}$

得证

证明(c)：只需证$q \geq t$时, $R^q \in S$

由$q \geq t \geq s$, 必存在$i,j \in Z$使得$q=s+ip+j$ $(0 \leq j \leq p-1)$

因为 i. $q=t$时，$t=s+1*p+0=s+t-s$

ii. 设$q=n$时，存在i,j使得$n=s+ip+j$ $(0 \leq j \leq p-1)$

则$q=n+1$时, $n+1=s+ip+j+1$, 分两种情况讨论

情况1: $j<p-1$, 则i和$j+1$就是要求的两个数

情况2: $j=p-1$, 则$j+1=p$，$n+1=s+(i+1)p+0$, 即$i+1$和0是要求的两个数

总之，存在$i,j \in Z$使得$q=s+ip+j$ $(0 \leq j \leq p-1)$

由(b)知$R^q=R^{s+ip+j}=R^{s+j}$ 且$j \leq p-1$，则

$s+j \leq s+p-1=s+t-s-1=t-1$即

$R^q=R^{s+j} \in \{R^0,R^1,R^2,\ldots,R^{t-1}\}$

- **定理5.4.11** 设R是集合A上的关系，则
  1. R是传递的 *iff* $R^2 \subseteq R$
  2. R是反传递的 *iff* $R^2 \cap R = \Phi$

证明1：必要性 $\forall <x,y> \in R^2$

$\exists t$, 使得xRt 且 tRy

又R是传递的，所以xRy，即$R^2 \subseteq R$

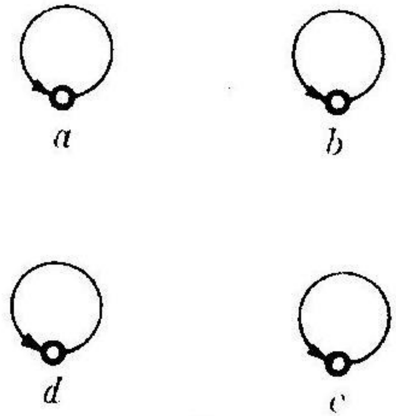
充分性 $\forall x,y,z \in A$,

若xRy 且 yRz，则$<x,z> \in R^2$

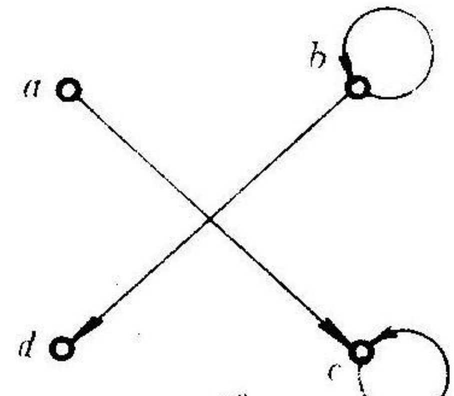
$\because R^2 \subseteq R$，$\therefore <x,z> \in R$， 即R是传递的

例

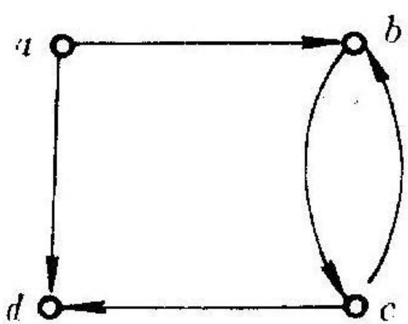
- 设$A=\{a,b,c,d\}$,$R=\{<a,b>,<c,b>,<b,c>,<c,d>\}$
  - 求R^0, R^2, R^3, R^4
  - $R^0=\{<a,a>,<b,b>,<c,c>,<d,d>\}$
  - $R^2=\{<a,c>,<b,b>,<b,d>,<c,c>\}$
  - $R^3=\{<a,b>,<a,d>,<b,c>,<c,b>,<c,d>\}$
  - $R^4=\{<a,c>,<b,b>,<b,d>,<c,c>\}$
- $R^4=R^2$,根据定理3.2—5(c)
  - 对$\forall n\in N$, $R^n\in\{R^0,R^1,R^2,R^3\}$
  - 易证$R^5=R^3$,$R^6=R^4=R^2$
  - 用归纳法可得$R^{2n+1}=R^3$和$R^{2n}=R^2$ $(n\geq 1)$



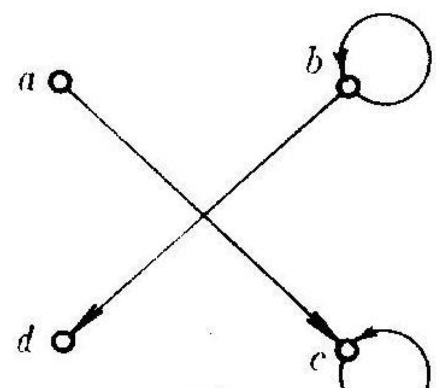
R



R^2



R^3



R^4

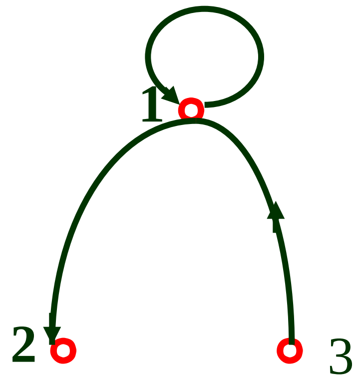
思考题

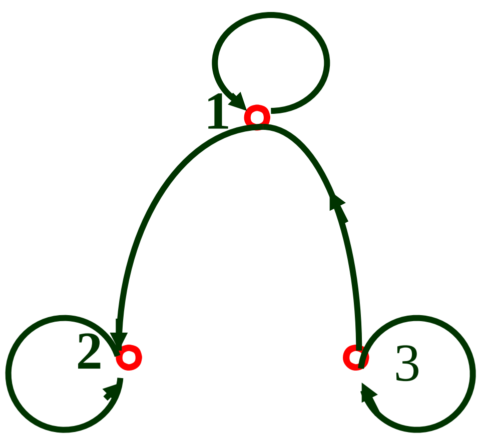
- 关系的性质对于复合运算和逆是否保持封闭？即自反（反自反、对称、反对称、传递）关系的复合关系和逆关系是否仍是自反（反自反、对称、反对称、传递）的？

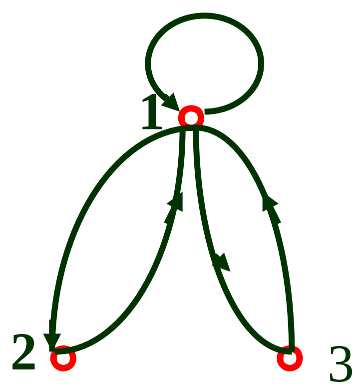
R_1,R_2	$R_1 \cdot R_2$	R_1^{-1}
自反	自反	自反
反自反	不反自反	反自反
对称	不对称	对称
反对称	不反对称	反对称
传递	不传递	传递

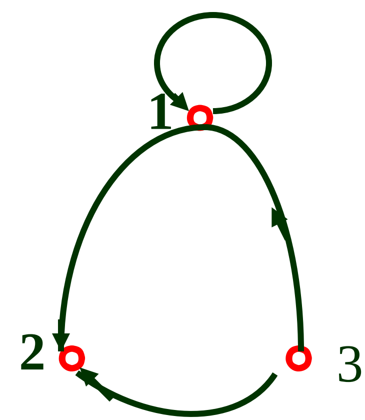
5.5 关系的闭包

- 例









- **定义5.5.1** 设R是A上的二元关系, 若有A上的关系R',满足:

  (i) $R \subseteq R'$

  (ii) R'是自反的(对称的、传递的)

  (iii) 对于任何A上自反(对称、传递)的关系R'', 如果$R \subseteq R''$, 就有$R' \subseteq R''$

  则称R'是R的自反(对称、传递)闭包。记作$r(R)$、($s(R)$)、$t(R)$) (***r***eflexive、***s***ymmetric、***t***ransitive)

- R的自反(对称,传递)闭包是包含R并且具有自反(对称,传递)性质的最小关系

闭包的性质

- **定理5.5.1** 设R是集合A上的二元关系

(a) R是自反的当且仅当$r(R)=R$

(b) R是对称的当且仅当$s(R)=R$

(c) R是传递的当且仅当$t(R)=R$

证明(a)：充分性显然

必要性：由闭包的定义$R\subseteq r(R)$

又$R\subseteq R$，且R是自反的

根据闭包的极小性，有$r(R)\subseteq R$

则$r(R)=R$

闭包的计算

- **定理5.5.2** 设R是非空集A的关系,则

(1) $r(R)=R\cup I_A$

(2) $s(R)=R\cup R^{-1}$

(3) $t(R)=\bigcup_{i=1}^{\infty} R^i = R\cup R^2\cup R^3\cup\cdots$ $\quad R^+=\bigcup_{i=1}^{\infty} R^i$

证明(1): 设$R'=R\cup I_A$.

显然, R'是自反的，且$R'\supseteq R$.

假设R''是A上的自反关系且$R''\supseteq R$.

因R''是自反的,所以$R''\supseteq I_A$,又$R''\supseteq R$,

所以$R''\supseteq R\cup I_A=R'$

所以,$R'=r(R)$. 证毕

证明(2): 设$R' = R \cup R^{-1}$

(i) 显然$R \subseteq R'$

(ii) 又 $(R \cup R^{-1})^{-1} = R^{-1} \cup R = R \cup R^{-1}$

$\therefore$ R'是对称的

(iii)假设R''是A上的对称关系且$R \subseteq R''$

则 $R^{-1} \subseteq R''^{-1}$

$\therefore$ $R' = R \cup R^{-1} \subseteq R''$

综上， $s(R) = R' = R \cup R^{-1}$

证明(3):令$R' = R \cup R^2 \cup R^3 \cup \ldots$,

（只需证明$t(R) \subseteq R'$ 且 $R' \subseteq t(R)$）

(i) 先证$t(R) \subseteq R'$ (利用闭包的极小性)

显然 $R \subseteq R'$

(再证明R'是传递的)

$\forall x,y,z \in A$, 设有$\langle x,y\rangle \in R'$, $\langle y,z\rangle \in R'$,

由R'定义得必存在整数i, j使得

$\langle x,y\rangle \in R^i$, $\langle y,z\rangle \in R^j$, 则

$\langle x,z\rangle \in R^{i+j} \subseteq R'$, 所以$\langle x,z\rangle \in R'$, $\therefore R'$传递

由闭包的极小性可得$t(R) \subseteq R'$

(ii) 再证 $R' \subseteq t(R)$

$\because R \subseteq t(R)$ $\therefore$ $R^2 \subseteq t^2(R) \subseteq t(R)$

则$R^3 = R^2R \subseteq t^2(R)t(R) \subseteq t^2(R) \subseteq t(R) \ldots$

这个过程可以一直进行下去，即得$R^i \subseteq t(R)$

$\therefore$ $R' \subseteq t(R)$

综合(i)(ii) $R' = t(R)$

例

(a) 整数集合I上的关系$<$的自反闭包是$\leq$,对称闭包是关系$\neq$,传递闭包是关系$<$自身

(b) 整数集合I上的关系$\leq$的自反闭包是自身,对称闭包是全域关系,传递闭包是自身

(c) $\neq$的自反闭包是全域关系,对称闭包是$\neq$,$\neq$的传递闭包是全域关系

(d) 空关系的自反闭包是恒等关系,对称闭包和传递闭包是自身

(e) 设R是I上的关系,xRy当且仅当$y=x+1$,那么$t(R)$是关系$<$

- **定理5.5.3** 设R是n元有限集A上的关系,则存在自然数$k \le n$，使得

$$t(R)=\bigcup_{i=1}^{k} R^i$$

证明：显然 $\bigcup_{i=1}^{k} R^i \subseteq t(R)=\bigcup_{i=1}^{\infty} R^i$

只需证 $t(R)=\bigcup_{i=1}^{\infty} R^i \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} R^i$

$\forall a,b \in A$, 若$<a,b> \in t(R)$, 则存在自然数p使得$<a,b> \in R^p$,
即存在序列$x_1,x_2,\ldots,x_{p-1}$满足

$$aRx_1,\ x_1Rx_2,\ldots,\ x_{p-1}Rb$$

若满足上述条件的最小p值大于n，则由于A是有限集，
$\therefore$必存在s,t使得 $x_s=x_t$，其中$0 \le s<t<p$，
因此可得到 $aRx_1,\ x_1Rx_2,\ldots,\ x_sRx_{t+1},\ \ldots,x_{p-1}Rb$
即$<a,b> \in R^{p-(t-s)}$, 与p是最小的假设矛盾

例

- $A=\{1,2,3\}$， A上关系R_1,R_2,R_3,如下：

(1) $R_1=\{<1,2>,<1.3>,<3,2>\}$

(2) $R_2=\{<1,2>,<2.3>,<3,1>\}$

(3) $R_3=\{<1,2>,<2.3>,<3,3>\}$

求它们的传递闭包

解：(1) $R_1^2=\{<1,2>\}$ $R_1^3=\Phi$

$t(R)= R_1 \cup R_1^2 \cup R_1^3= R_1$

(2) $R_2^2=\{<1,3>,<2,1>,<3,2>\}$

$R_2^3=\{<1,1>,<2,2>,<3,3>\}=I_A$

$R_2^4 = R_2^3$

$t(R)= R_2 \cup R_2^2 \cup R_2^3$

闭包的性质

- **定理5.5.4**
  - 设R和S都是集合A上的关系且$R\subseteq S$，则

(a) $r(R)\subseteq r(S)$

(b) $s(R)\subseteq s(S)$

(c) $t(R)\subseteq t(S)$

证明(a)：显然$r(S)$是自反的，

且$R\subseteq S\subseteq r(S)$，

由闭包的极小性可知$r(R)\subseteq r(S)$

闭包的应用

- 例：传递闭包在语法分析中的应用
  - 设有一字母表$V=\{A, B, C, D, e, d, f\}$. 假设文法$G$为(1)$A \to Af$; (2)$B \to Dde$; (3)$C \to e$; (4)$A \to B$; (5)$B \to De$; (6)$D \to Bf$
  - R为定义在V上的二元关系，$(x_i, x_j) \in R$表示从x_i出发用一条规则推出一串字符，使其第一个字母恰好为x_j
  - $t(R)$: 每个字母连续使用文法可能推出的头字符.

$$M_R=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M_{t(R)}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- **定理5.5.5**
  - (a)如果R是自反的,那么$s(R)$和$t(R)$都是自反的
  - (b)如果R是对称的,那么$r(R)$和$t(R)$都是对称的
  - (c)如果R是传递的,那么$r(R)$是传递的

证明(c)：证明R是传递的,那么$r(R)$ 是传递的

$$r^2(R) = (R\cup I_A)^2 = (R\cup I_A)(R\cup I_A)$$

$$= R^2\cup R \cup R \cup I_A$$

$$= R \cup I_A \qquad (\because\ R\text{是传递的，}\ \therefore\ R^2\subseteq R)$$

$$= r(R)$$

$\therefore$ $r(R)$ 是传递的

- **定理5.5.6** 设R是集合A上的二元关系,那么

  (a) $rs(R)=sr(R)$

  (b) $rt(R)=tr(R)$

  (c) $st(R)\subseteq ts(R)$

证明(a)：$\because$ $R\subseteq s(R)$ $\therefore r(R)\subseteq rs(R)$，$sr(R)\subseteq srs(R)$

$\because$ $rs(R)$是对称的（定理5.5.5）

$\therefore$ $srs(R)= rs(R)$

即得$sr(R)\subseteq rs(R)$ 同理可证$rs(R)\subseteq sr(R)$

$\therefore$ $sr(R)=rs(R)$

- 通常将$t(R)$ 记成R^+， $tr(R)$记成R^*， 即

$$t(R)= R^+=R\cup R^2\cup\ldots\cup R^n\cup\ldots=\bigcup_{i=1}^{\infty} R^i$$

$$tr(R)=rt(R) =R^*= R^0\cup R\cup R^2\cup\ldots\cup R^n\cup\ldots=\bigcup_{i=0}^{\infty} R^i$$

5.6 有序关系

- 常遇到的重要关系
- 例
  - 数值的≤、＜、≥、＞关系
  - 集合的⊆、⊂关系
  - 图书馆的图书按书名的字母次序排序
  - 词典中的字(词)的排序
  - 计算机中文件按文件名排序
  - 程序按语句次序执行…….

偏序关系

- **定义5.6.1**
  - 如果集合*A*上的二元关系*R*是自反的,反对称的和传递的,那么称*R*为*A*上的***偏序关系***,或称半序关系称序偶<*A*,*R*>为***偏序集***
- 通常，把偏序关系*R*记作≤,如果<a,b>∈≤,则记作a≤b,读作“a小于等于b”
- ***注意***：定义中的“≤”不是指普通中的实数中的大小关系的≤,而是一般的偏序关系

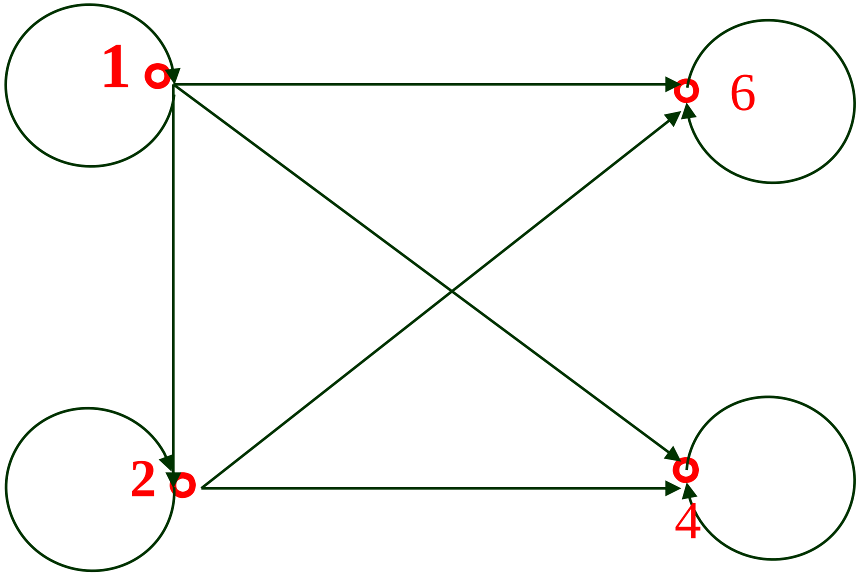
例

- 设集合$A=\{a,b,c\}$,A上的关系

  $R=\{<a,a>,<a,b>,<a,c>,<b,b>,<b,c>,<c,c>\}$,判断$R$是否是偏序关系。 （是）
- 设A是非零自然数集,D_A是A上的整除关系,判断D_A是否是偏序关系 （是）
- 设A是一个集合，则集合的“包含”关系是否是其幂集上的偏序关系 （是）

例

- $A=\{1,2,4,6\}$



拟序关系

- 定义5.6.2
  - 如果集合A上的二元关系R是反自反的和传递的，那么称R为A上的***拟序关系***，称序偶$<A,R>$为***拟序集***（严格偏序）
- 通常，把拟序关系R记作$<$,如果$<a,b>\in<$,则记作$a<b$,读作“a小于b”
- 例
  - 实数集合中的$<$是拟序关系
  - 集合的$\subset$是拟序关系

- **定理5.6.1** 拟序关系是反对称的

  证明：设R是A上的拟序关系

  假设R不是反对称的，则

  $\exists x,y\in A$, $x\neq y$, xRy且yRx，

  由R的传递性得xRx，与R反自反矛盾

  $\therefore$ R反对称

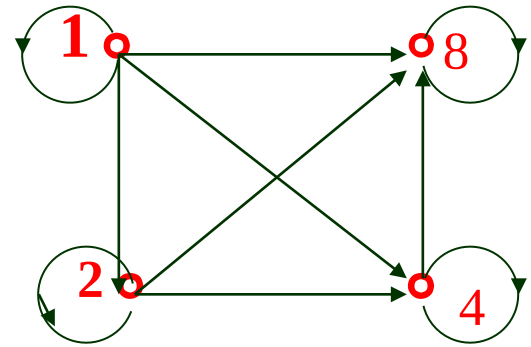
- **定理5.6.2** 在集合A上,

  (a)如果R是一拟序关系,那么$r(R)=R\cup I_A$是偏序关系

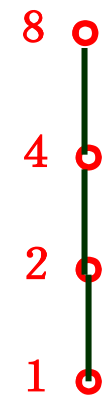
  (b)如果R是一偏序关系,那么$R- I_A$是拟序关系

全序集

- 定义5.6.3 可比较
  - 设$<A,\leq>$是偏序集， $a,b\in A$,如果$a\leq b$或$b\leq a$有一式成立，便称a和b是可比较的



- 定义5.6.4 全序集
  - 线序集
  - 在偏序集$<A,\leq>$中.如果$\forall a,b\in A$, a，b均可比较.那么$\leq$叫做A上的线序关系(或全序关系),这时的序偶$<A,\leq>$叫做线序集或全序集、链.



哈斯图(Hasse)

- 描述偏序集的关系图,可以**简化**为***哈斯图***
- 简化规则
  - 用小圆圈代表元素
  - 如果$x \leq y$,并且$x \neq y$,则将代表y的小圆圈画在代表x的小圆圈的上方
  - 若$x \leq y$，且在A中不存在任何其它元素z，使得$x \leq z$, $z \leq y$ (x是y的直接前辈，或y是x的直接后裔)，则有一条由x到y的连线

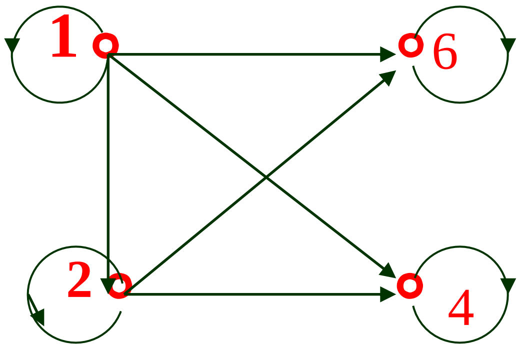
直接前辈/直接后裔

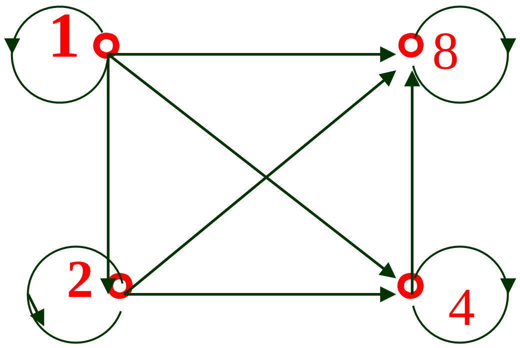
- **定义5.6.5**
  - 设$<A,\leq>$是偏序集， $a,b\in A(a\neq b)$,如果$a\leq b$且不存在$c\in A(c\neq a,b)$使得

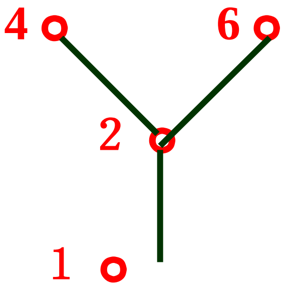
    $$a\leq c \text{和} c\leq b$$

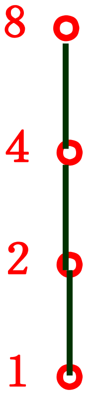
    同时成立。则称a是b的直接前辈(元素)，或称b是a的直接后裔(元素)。

例



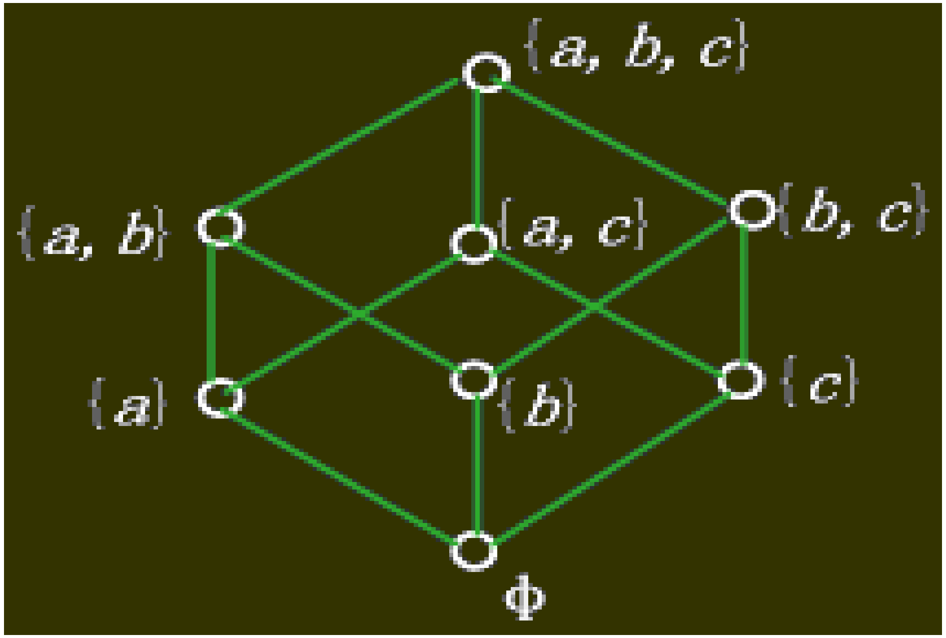


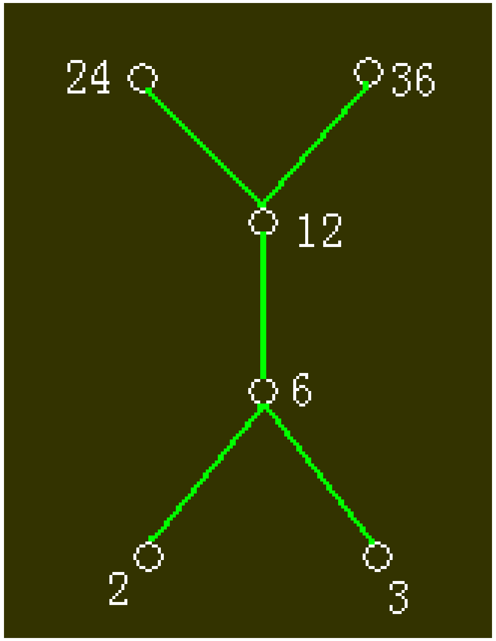




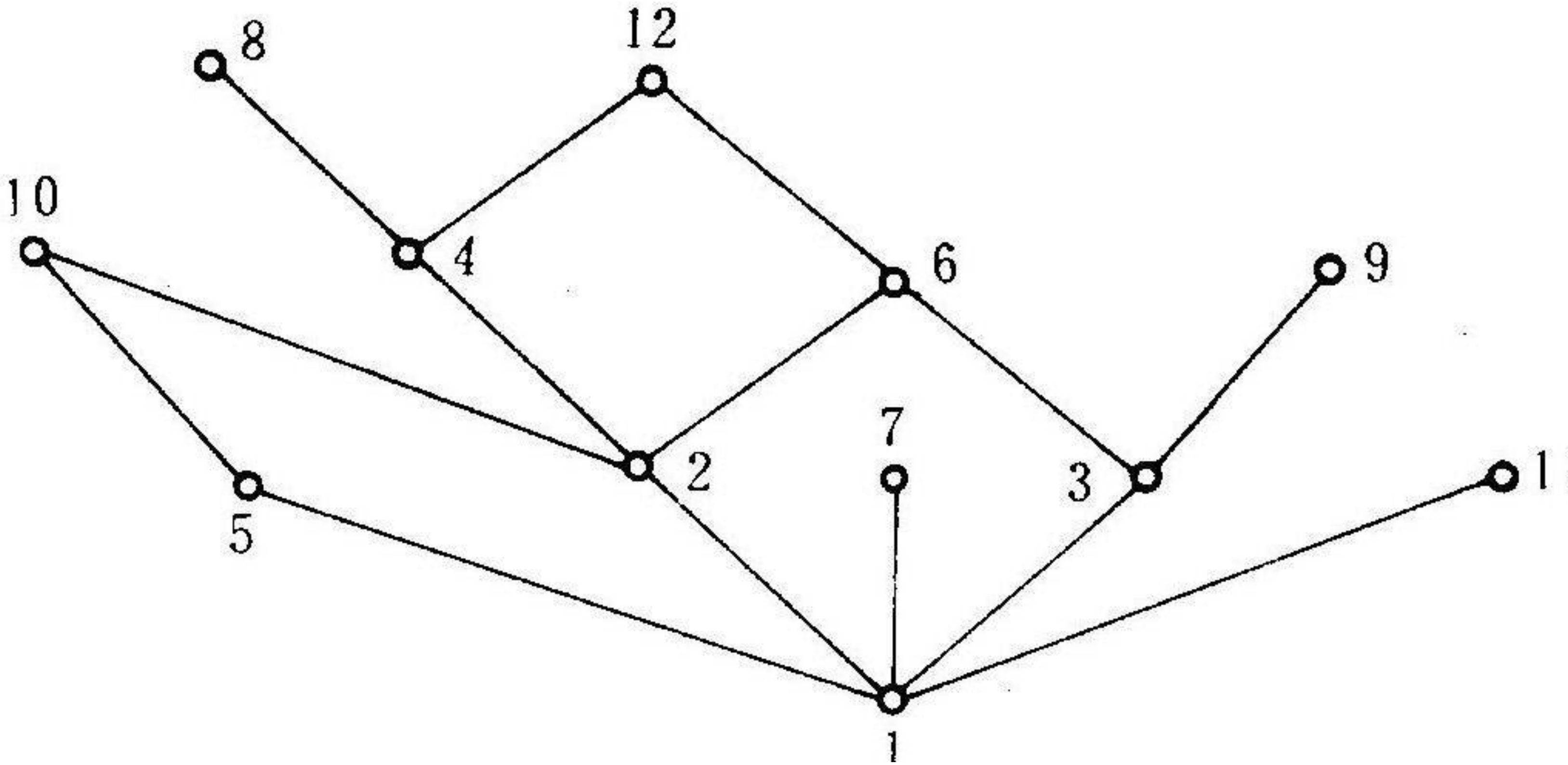
练习

1. 设$A=\{a,b,c\}$，则“$\subseteq$”关系是$\rho(A)$上的偏序关系，则$(\rho(A),R_{\subseteq})$是偏序集,画出其哈斯图
2. 设$A=\{2,3,6,12,24,36\}$,画出$<A$,整除$>$的哈斯图





- A={1,2,...,12},<A,整除>的哈斯图

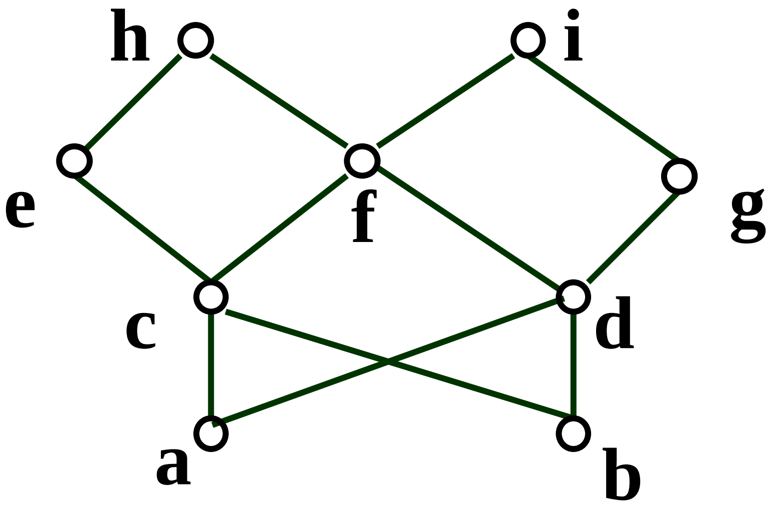


偏序集中的重要元素

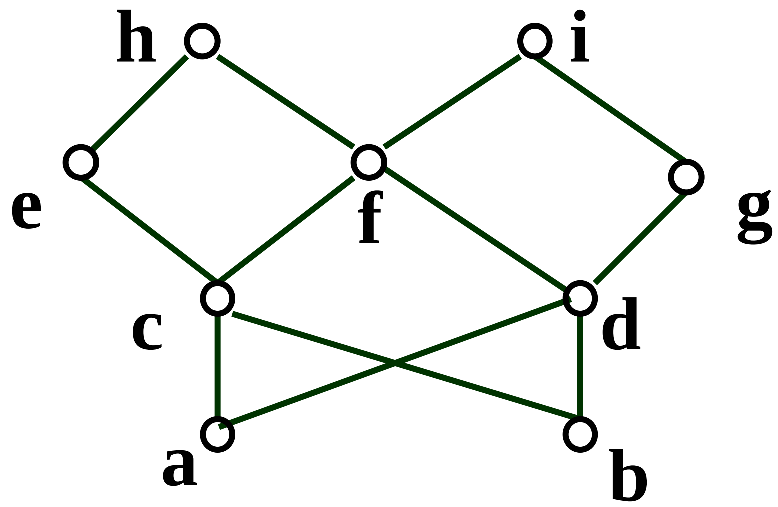
- **定义5.6.6** 极小元与极大元：设$<A,\leq>$是一偏序集合,B是A的非空子集
  - 若存在元素$b\in B$,使得B中***没有***元素x满足$x\neq b$且$x\leq b$,则称b为B的一个***极小元***
  - 若存在元素$b\in B$,使得B中***没有***元素x满足$x\neq b$且$b\leq x$,则称b为B的一个***极大元***
- **定义5.6.7** 最小元与最大元：设$<A,\leq>$是一偏序集合,B是A的非空子集
  - 如存在元素$b\in B$,使得$\forall x\in B$,均有$b\leq x$,则称b为B的***最小元***
  - 如存在元素$b\in B$,使得$\forall x\in B$,均有$x\leq b$,则称b为B的***最大元***

例

- 设$<A; \leq>$的哈斯图如下所示：讨论当B取相应集合时，其最大元,最小元,极大元,极小元



B	极小元	极大元	最小元	最大元
{a,b}	a,b	a,b	无	无
{a,b,c}	a,b	c	无	c



B	极小元	极大元	最小元	最大元
{a,b,c,d}	a,b	c,d	无	无
{b,c,d,f}	b	f	b	f
{a,c,f,i}	a	i	a	i

几点说明

- 对于有限集，极大(小)元总是存在的
- 最大(小)元可能不存在
- 极大(小)元未必是最大(小)元
- 极大(小)元未必是唯一的
- 如果B存在最大(小)元x,则x就是B的极大(小)元
- 孤立点则又是极大元,也是极小元

- **定理5.6.3**
  - 设<A,≤>是一偏序集，且$B \subseteq A$,如果B有最大(最小)元，那么它是唯一的

证明：假设a和b都是B的最大元,

那么$a \le b$和$b \le a$.

则$a=b$

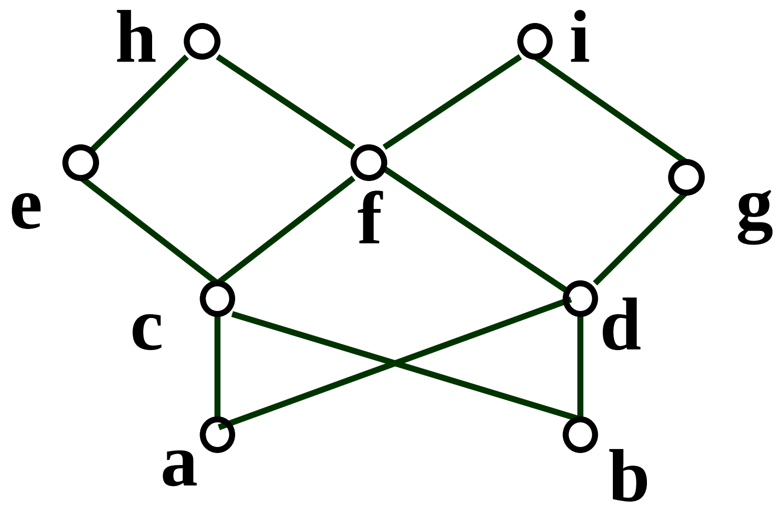
(≤是反对称性的)

类似可证最小元的唯一性

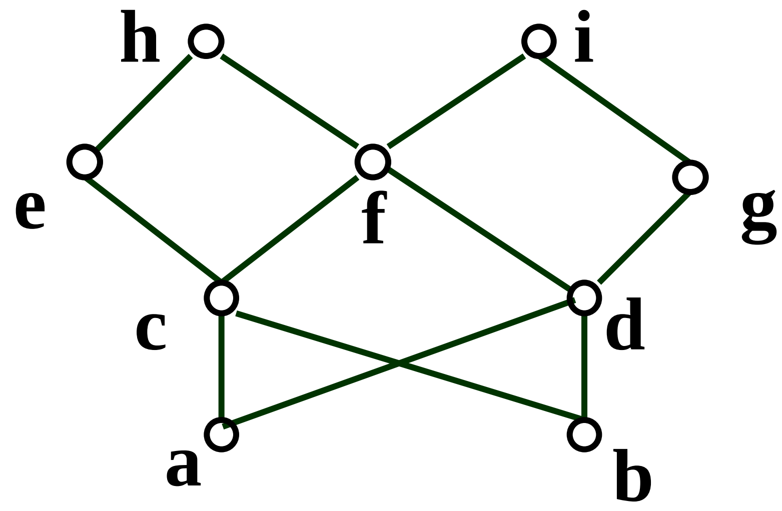
- **定义5.6.8** 上界与下界，上确界与下确界：

设<A,≤>是一偏序集,B是A的子集

- 如存在$a\in A$,使得$\forall x\in B$,均有$x\leq a$,则称B有上界，并称a为B的一个*上界*(Upper Bound)
- 如存在$a\in A$,使得$\forall x\in B$,均有$a\leq x$,则称B有下界，并称a为B的一个 *下界*(Lower Bound)
- 若a是B的上界，并且对B的每一个上界a'皆有$a\leq a'$，则称 a是B的*上确界* (最小上界，Least Upper Bound)，记作lub
- 若a是B的下界，并且对B的每一个下界a'皆有 $a'\leq a$，则称 a是B的 *下确界* (最大下界 ，Greatest Lower Bound)，记作glb



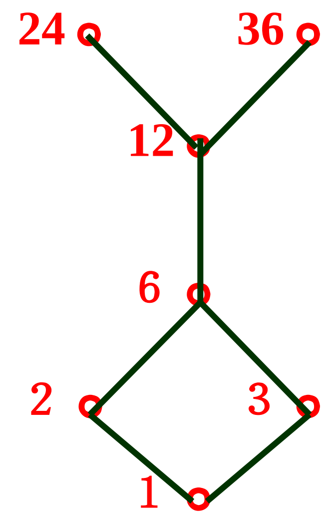
B	上界	下界	上确界	下确界
{a,b}	c,d,e,f,g,h,i	无	无	无
{a,b,c}	c,e,f,h,i	无	c	无



B	上界	下界	上确界	下确界
{a,b,c,d}	f, h,i	无	f	无
{b,c,d,f}	f,h,i	b	f	b
{a,c,f,i}	i	a	i	a

练习

- 给定一偏序关系的Hasse图



B	极小元	极大元	最小元	最大元	上界	上确界	下界	下确界
{2,3}	2,3	2,3	无	无	6,12, 24,36	6	1	1
{1,2,3}	1	2,3	1	无	6,12, 24,36	6	1	1
{6,12,24}	6	24	6	24	24	24	1,2, 3,6	6
A	1	24,36	1	无	无	无	1	1

良序集

- **定义5.6.9**
  - 设$<A,\leq>$是一偏序集,且A的每一非空子集B都有最小元, 则称$<A,\leq>$为良序集
- **定理5.6.4** 设$<A,\leq>$是一偏序集，则$<A,\leq>$是良序集的充分必要条件为：

1. $\leq$是上的全序关系；
2. A的每个非空子集都有极小元

思考题

- 证明或用反例否定下列命题

(1) 每一个偏序关系的逆都是偏序关系

(2) 每一个拟序关系的逆都是拟序关系

(3) 每一个全序关系的逆都是全序关系

(4) 每一个良序关系的逆都是良序关系

有序关系与拓扑排序

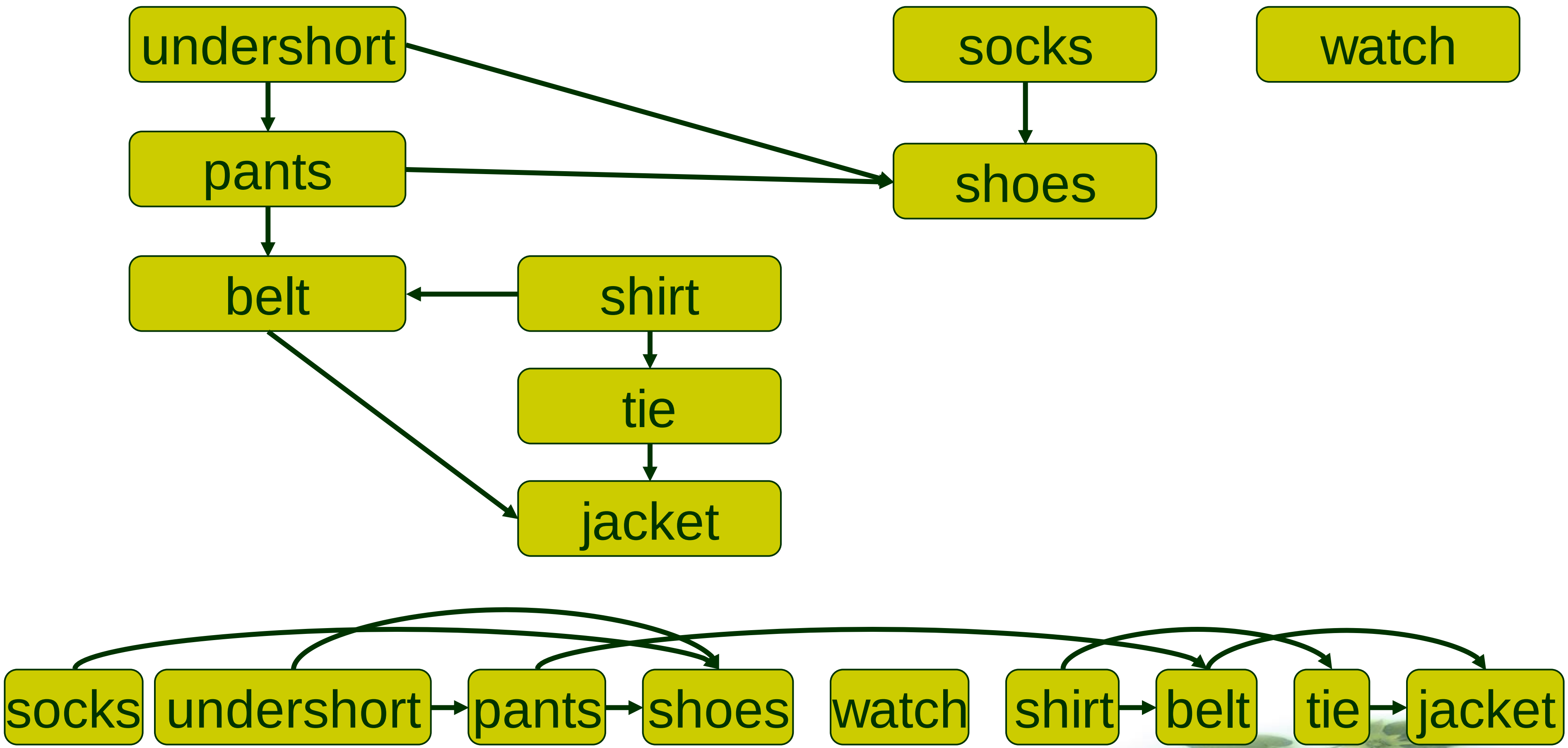
- 有序关系形式化了排序、顺序或排列这个集合的元素的直觉概念
- 有序关系的关系图可对应一个有向无环图(DAG)
- 在图论中，DAG的顶点组成的序列，当且仅当满足下列条件时，称为该图的一个**拓扑排序(Topological sorting)**
  - 每个顶点出现且只出现一次；
  - 若A在序列中排在B的前面，则在图中不存在从B到A的路径

有序关系与拓扑排序

- 拓扑排序是对DAG的顶点的一种排序，它使得如果存在一条从顶点A到顶点B的路径，那么在排序中B出现在A的后面
- DAG经常用于说明事件发生的先后次序
  - 将DAG的每一个顶点对应一个事件，图中存在从A指向B的边表示事件A是事件B的一个前提条件。这样组成的图叫做**AOV**（Activity on Vertex）网。对AOV网进行拓扑排序，每一个排序结果表示一种可行的做事的先后顺序

有序关系与拓扑排序

- 例：早晨穿衣的过程



有序关系与拓扑排序

- DAG拓扑排序算法
  1. 开始时，置图G_1=G，q为空序列；
  2. 如果图G_1是空图，则拓扑排序完成，算法结束，得到的序列q就是图G的一个拓扑排序；
  3. 在图G_1中找到一个没有入边（即入度为0）的顶点v，将v放到序列q的最后（这样的顶点v必定存在，否则图G_1必定有圈；因为图G有圈，故不是DAG）；
  4. 从图G_1中删去顶点v以及所有与顶点v相连的边e（通过将与v邻接的所有顶点的入度减1来实现），得到新的图G_1，转到第二步

5.7 相容关系与等价关系

- **定义5.7.1** 相容关系
  - 如果集合A上的关系R是自反的和对称的,那么称R是相容关系。若aRb，则称a,b是相容的；否则称a,b不相容
  - 例
    - 全关系
    - 恒等关系
    - 非空集合之间的“相交不为空”关系
    - 日常生活中的“同班同学”关系

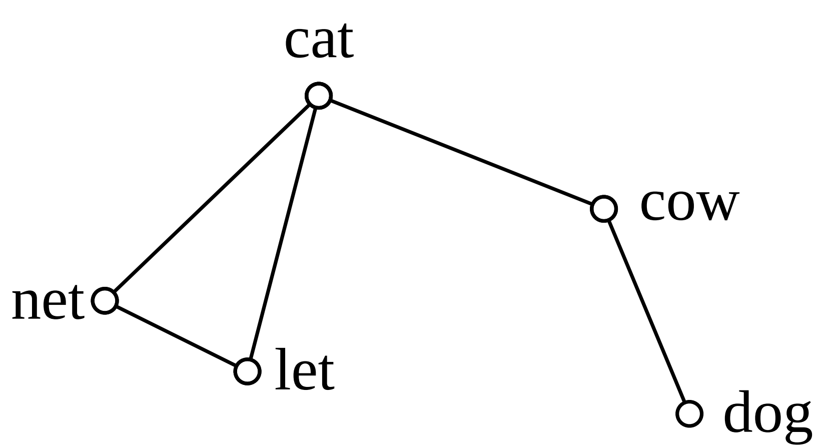
相容关系的简化关系矩阵和关系图

- 相容关系关系矩阵的特点
  - 关系矩阵的主对角线元素都是 1
  - 矩阵对称
  - 可将矩阵用梯形(三角矩阵)表示
- 相容关系关系图的特点
  - 每个结点都有自环线
  - 任两个相容的元素对应的结点间的连线都成对出现
  - 不画自环线，并且把每对有向线改为一条无向边

相容关系的简化关系矩阵和关系图

- 例5.7.1：
  - 设*A*是由五个英文单词组成的集合：*A*={*cat*, *cow*, *dog*, *let*, *net*}，定义*A*上的关系为：*xRy iff* *x*和*y*中含有相同的字母，则*R*是*A*上的相容关系

cow	1			
dog	0	1		
let	1	0	0	
net	1	0	0	1
	cat	*cow*	*dog*	*let*

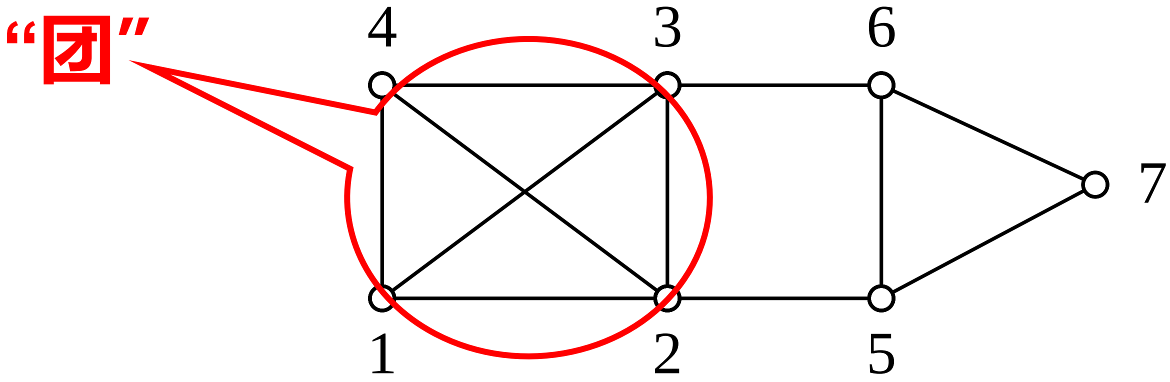


相容类

- **定义5.7.2**
  - 设R是非空集合A上的相容关系， $S \subseteq A$，如果对于S中的任意元素a和b皆有aRb，则称S为一个关于R的相容类。
- **定义5.7.3**
  - 设R是非空集合A上的相容关系， S是一个关于R的相容类。若S不真包含在任何其它的相容类中，则称S是关于R的一个极大相容类。

极大相容类与团

- 例：$A=\{1,2,3,4,5,6,7\}$上的相容关系 R



极大相容类：{1,2,3,4}　{2,5}　{3,6}　{5,6,7}

"团"——极大的完全子图

求极大相容类的算法

1. 列出R的简化关系矩阵，令其中的元素为μ_{ij};
2. R的n级相容类为$\{a_1\}, \{a_2\}, \ldots, \{a_n\}$；
3. 若$n=1$，则终止;
4. 若$n>1$，则$i = n-1$；
5. $A=\{a_j \mid i < j \le n$且$\mu_{ji} =1\}$, ;
6. 对每个第$i+1$级相容类S，若$S \cap A \neq \Phi$，则添加一个新的相容类$\{a_j\} \cup (S \cap A)$；
7. 对已得到的任意两相容类S和S'，若$S' \subseteq S$，则删去S'；这样合并后的相容类称为第i级相容类;
8. 若$i>1$，则$i = i-1$，并转到⑸;
9. 若$i = 1$；则终止全过程。

例

2	1					
3	1	1				
4	1	1	1			
5	0	1	0	0		
6	0	0	1	0	1	
7	0	0	0	0	1	1
	1	2	3	4	5	6

n=7,第 7 级相容类:

{1},{2},{3},{4},{5},{6},{7}

从第 6 列开始扫描， A＝{7}，添加{6,7}，删去{6}和{7}得到 6 级相容类:

{1},{2},{3},{4},{5},{6,7}

对第 5 列， A＝{6,7}，添加 {5,6,7}，删去{5}和{6,7}得到 5 级相容类:

{1},{2},{3},{4},{5,6,7}

对第 4 列， A＝Φ， 4 级相容类与 5 级相容类相同。

对第 3 列， A＝{4,6}，添加 {3,4}及{3,6}，删去{3}和{4}得到 3 级相容类:

{1},{2},{3,4},{3,6},{5,6,7}

对第 2 列， A＝{3,4,5}，添加 {2,3,4}、{2,3}及{2,5}，删去{2}、{2,3}和{3,4}，这样得到 2 级相容类:

{1},{2,3,4},{2,5},{3,6},{5,6,7}

对第 1 列， A＝{2,3,4}，添加 {1,2,3,4}、{1,2}及{1,3}，删去{1}、{1,2}、{1,3}和{2,3,4}，这样得到 1 级相容类，即关于R的所有极大相容类:

{1,2,3,4},{2,5},{3,6},{5,6,7}

等价关系

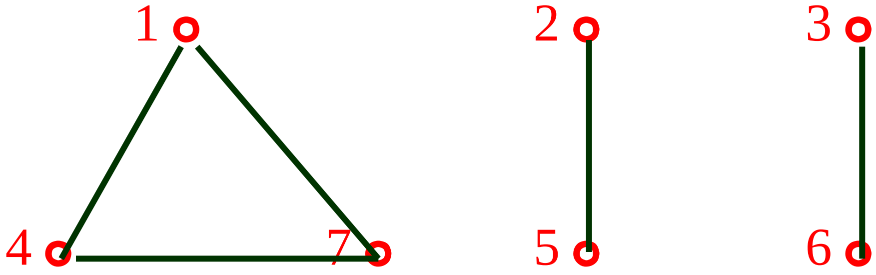
- **定义5.7.4**
  - 如果集合A上的二元关系R是自反的,对称的和传递的,那么称R是等价关系
  - 例
    - 全关系
    - 恒等关系
    - 同学集合A=$\{a,b,c,d,e,f,g\}$,A中的关系R是“住在同一房间”
    - 集合$A=\{1,2,3,4,5,6,7\}$, $R=\{<x,y>|x-y$可被3整除(或$x/3$与$y/3$的余数相同)$\}$
    - 设k是一正整数而$a,b\in Z$.如果对某整数m,$a-b=m\cdot k$,那么a和b是模k等价,写成

$$a\equiv b(\text{mod } k)$$

等价关系的关系矩阵与关系图

- 关系矩阵
  - 可简化为三角矩阵
- 关系图
  - 每一结点都有一自环线（可省略）
  - 如果有从a到b的弧,那么也有从b到a的弧（可画成无向图）
  - 如果从a到c有一条路径,则从a到c有一条弧

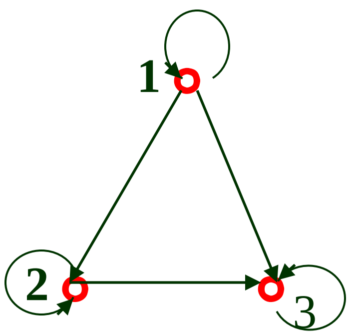
- A={1,2,3,4,5,6,7}, R是模3等价关系，画出其简化关系图



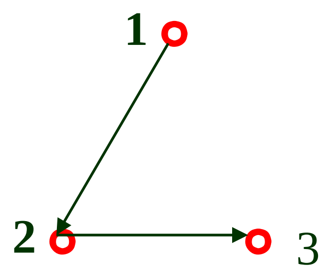
等价关系R的有向图可能由若干个独立子图构成的，每个独立子图都是完全关系图(团)

判断下图中哪些是等价关系

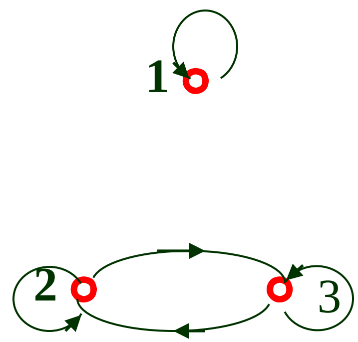
$A=\{1,2,3\}$



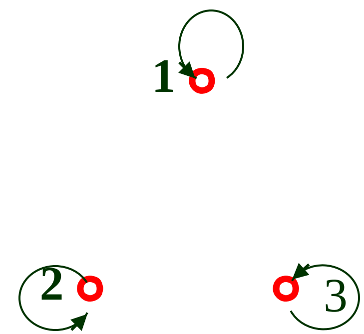
R_1



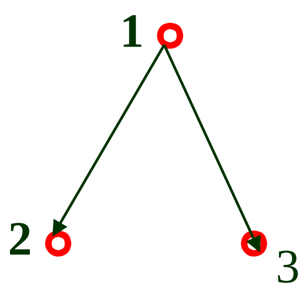
R_2



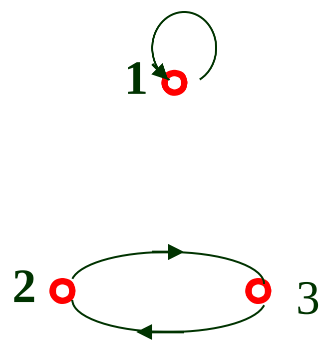
R_3



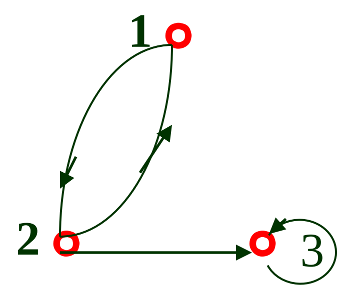
R_4



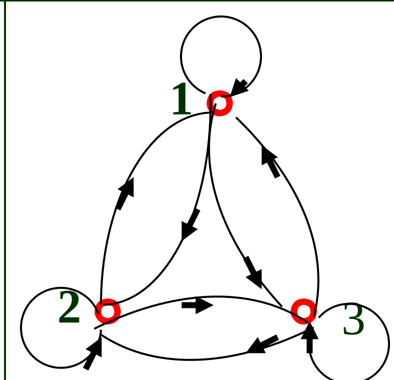
R_5



R_6



R_7



R_8

等价类

- **定义5.7.5**
  - R是A上的等价关系，$a \in A$,由a确定的集合$[a]_R$:

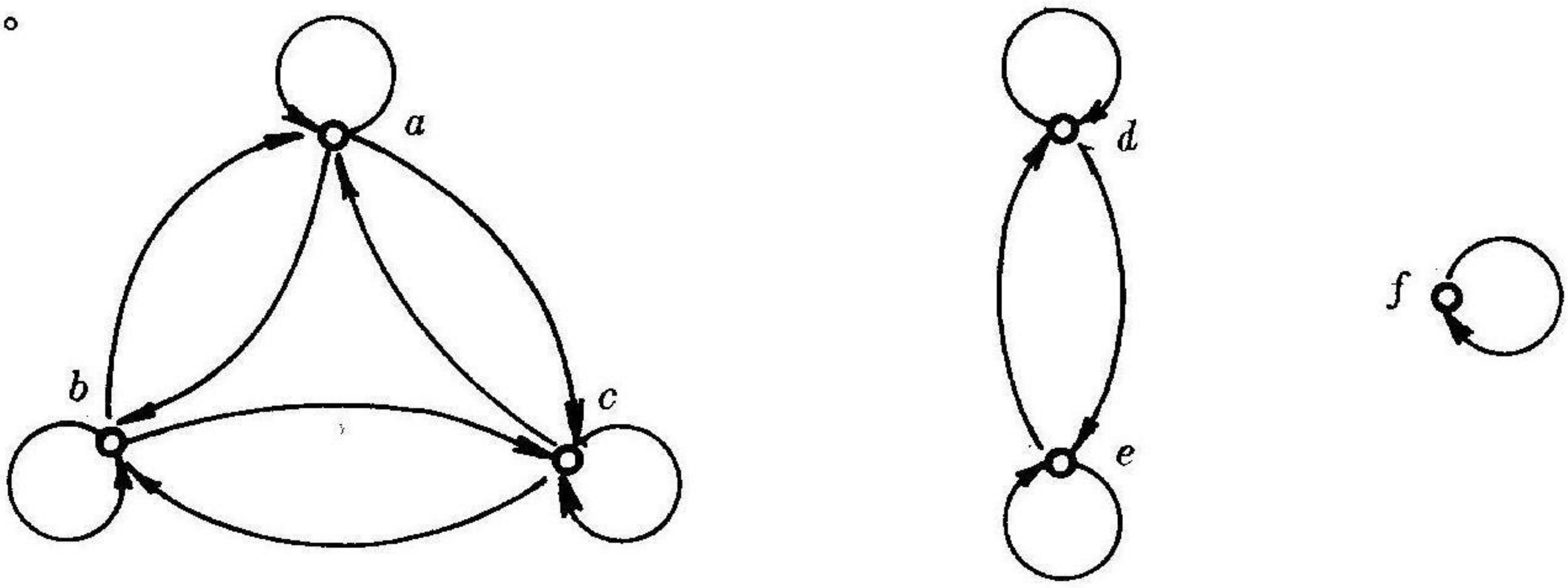
    $$[a]_R=\{x|x \in A \wedge <a,x> \in R\}$$

    称集合$[a]_R$为以a为代表的关于R的等价类,当不强调R时简记为［a］
- 如果等价类个数有限,则R的不同等价类的个数叫做R的秩;
- 等价类［a］$_R \neq \Phi$, $a \in$［a］$_R$

例

- R是Z上模4等价关系
  - $[0]_4=\{\ldots-8,-4,0,4,8,\ldots\}$
  - $[1]_4=\{\ldots-7,-3,1,5,9,\ldots\}$
  - $[2]_4=\{\ldots-6,-2,2,6,10,\ldots\}$
  - $[3]_4=\{\ldots-5,-1,3,7,11,\ldots\}$
- $A=\{a,b,c,d,e,f\}$, $R=\{\langle a,a\rangle,\langle b,b\rangle,\langle c,c\rangle,\langle a,b\rangle,\langle b,a\rangle,\langle a,c\rangle,\langle c,a\rangle,\langle b,c\rangle,\langle c,b\rangle,\langle d,d\rangle,\langle e,e\rangle,\langle d,e\rangle,\langle e,d\rangle,\langle f,f\rangle\}$,
  - $[a]=[b]=[c]=\{a,b,c\}$
  - $[d]=[e]=\{d,e\}$
  - $[f]=\{f\}$
  - 秩是3

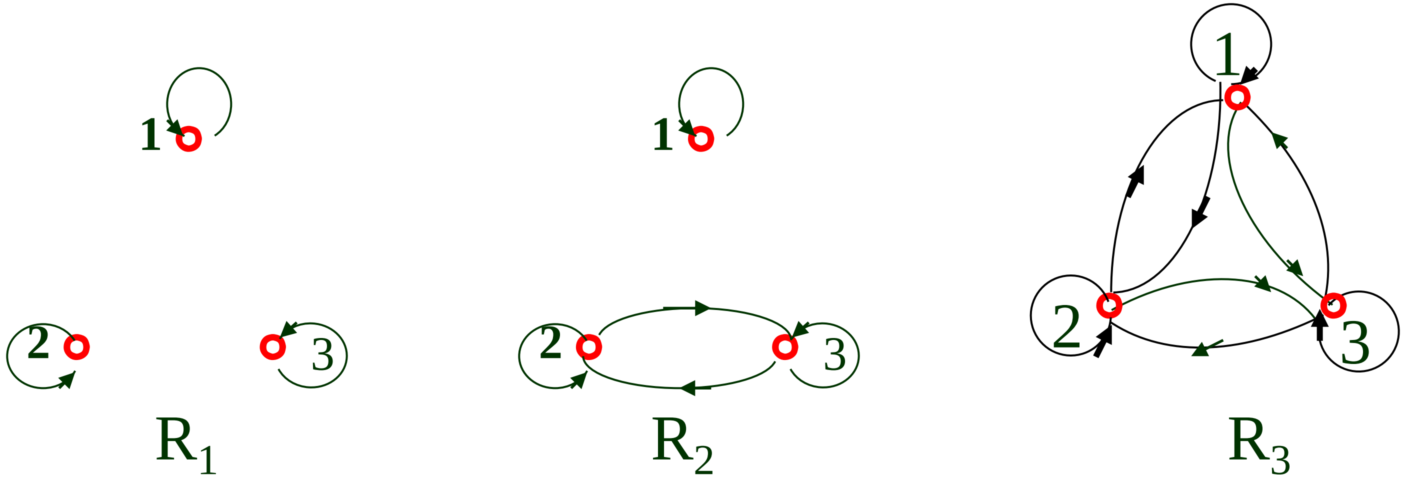
等价关系图求等价类



R图中每个独立子图上的结点，构成一个等价类

练习

- 下述三个等价关系各有几个等价类？说出对应的各个等价类。



等价类的性质

- **定理5.7.1** 设R是非空集合A上的等价关系,

$$aRb \text{ iff } [a]=[b]$$

证明：充分性

$\because a\in[a]=[b]$,即$a\in[b]$, $\therefore aRb$

必要性

$\forall x\in[a]$, 则aRx, $\because R$对称, $\therefore xRa$

又 aRb，且R传递，$\therefore xRb$，即$x\in[b]$

$\therefore [a]\subseteq[b]$，类似可证$[b]\subseteq[a]$

$\therefore [a]=[b]$

定理5.7.2 设R是非空集合A上的等价关系,则

$\pi_R=\{[a] \mid a\in A\}$是集合$A$的划分

证明：因为对任意$a\in A$, $a\in[a]$，故$[a]$非空,

且$\cup[a]=A$

再证对于任意的$a,b\in A$,或者$[a]=[b]$,或者$[a]\cap[b]=\Phi$

若aRb，根据定理5.7.1得$[a]=[b]$

若$<a,b>\notin R$, 假设$[a]\cap[b]\neq\Phi$,

则存在$c\in[a]\cap[b]$,

$\therefore c\in[a]\wedge c\in[b]$,

$\therefore <a,c>\in R$,$<b,c>\in R$,由R对称得

$<c,b>\in R$又由R传递得$<a,b>\in R$, 矛盾

定理得证

思考

- 设R是集合A上的等价关系，$\forall\, a,b\in A$,若 $[a]\cap[b]=\Phi$, 则$\langle a,b\rangle\notin R$

  证明：假设$\langle a,b\rangle\in R$,

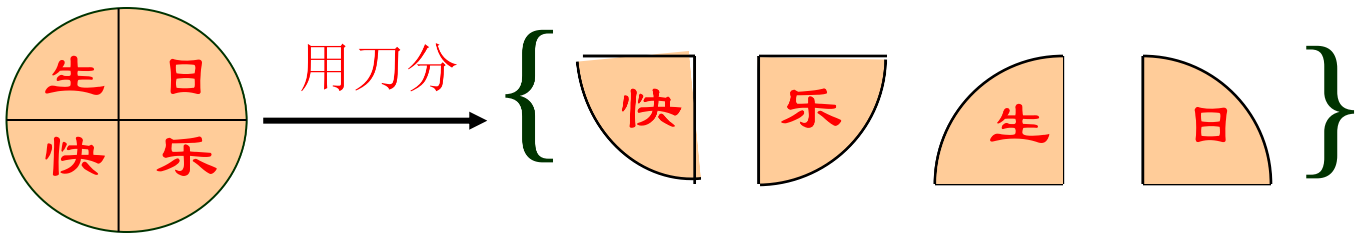
  由等价类定义得$b\in[a]$,

  又$b\in[b]$,

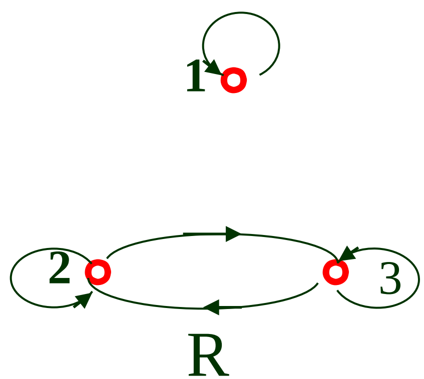
  所以$b\in[a]\cap[b]$，矛盾

商集

- 商”和除法有关
- 比如把一块蛋糕平均分成四份



- 从两种不同的角度看
  - 从算术角度看：1用4除,每份1/4, 就是“商”
    1=1/4+1/4+1/4+1/4
  - 从集合角度看
    用R分



- **定义5.7.6** 设R是非空集合A上的等价关系
  - 由R的所有等价类构成的集合称之为 A关于R的商集，记作A/R,也叫A模R

$$A/R=\{[a]_R \mid a\in A\}$$

- 例$A=\{1,2,3,4\}$
  - A/I_A
    - $A/I_A=\{\{1\},\{2\},\{3\},\{4\}\}$
  - $A/A\times A$
    - $A/A\times A=\{\{1,2,3,4\}\}$
  - $R=\{<1,3>,<2,4>,<3,1>,<4,2>\}\cup I_A$
    - $A/R=\{\{1,3\},\{2,4\}\}$

- **定理5.7.3**
  - 设R_1和R_2是非空集合A上的等价关系,那么$R_1=R_2$当且仅当$A/R_1=A/R_2$

证明：充分性显然

必要性 $\forall<a,b>\in R_1$, 则$a,b\in[a]_{R1}$，

$\because A/R_1=A/R_2$， $\therefore\exists[c]_{R2}\in A/R_2$， 使得$[a]_{R1}=[c]_{R2}$

故$a,b\in[c]_{R2}$， 从而$<a,b>\in R_2$，

$\therefore R_1\subseteq R_2$

类似可证$R_2\subseteq R_1$

所以$R_1=R_2$

- **定理5.7.4** 设π是非空集合A的一个划分,定义A上的二元关系R如下：

  $\forall a,b\in A$, aRb iff a和b属于π中的同一个块

  即 $aRb\Leftrightarrow\exists B(B\in\pi\wedge a\in B\wedge b\in B)$

  则R是A上的等价关系，且$A/R=\pi$

证明：易证R是等价的

只证$A/R=\pi$

先证$\pi\subseteq A/R$，$\forall S\in\pi$, $\forall a\in S$,

若$b\in S$, 由R的定义可知 $b\in[a]$, $\therefore$ $S\subseteq[a]$

另外若$b\in[a]$, 由R的定义, a和b属于π中的同一个块, 而$a\in S$,

所以$b\in S$, 即$[a]\subseteq S$

$\therefore$ $\pi\subseteq A/R$

再证$A/R\subseteq\pi$

$\forall[a]\in A/R$

$\because$ π是A的划分 $\therefore\exists S\in\pi$使得$a\in S$

只需证明$[a]=S$

$\forall b\in[a]$, 有aRb,由R的定义，$b\in S$,

$\therefore[a]\subseteq S$

$\forall b\in S$, $\because a\in S$,由R的定义有aRb，即$b\in[a]$

$\therefore$ $S\subseteq[a]$

所以$[a]=S$

即$A/R\subseteq\pi$

- 定理5.7.2和5.7.3表明
  - 非空集合A上的每个等价关系R，都可唯一地确定A的一个划分A/R， A/R也称为是由R诱导的划分
- 定理5.7.4表明
  - 对集合A的每个划分π， 当把π的每个块作为一个等价类时，就可给出A上的一个等价关系R_π， 并且π即为由R_π确定的A的划分A/R_π， R_π也称为是由π诱导的等价关系
- 例
  - $A=\{a,b,c,d,e\}$
    - $R=\{<a,a>,<a,b>,<a,c>,<b,b>,<b,a>,<b,c>,<c,c>,<c,a>,<c,b>,<d,d>,<d,e>,<e,e>,<e,d>\}$
      - R诱导的划分
        $\pi=\{\{a,b,c\},\{d,e\}\}$
    - $\pi'=\{\{a,b\},\{c\},\{d,e\}\}$,
      - π'诱导出R'
        $R'=\{<a,a>,<a,b>,<b,b>,<b,a>,<c,c>,<d,d>,<d,e>,<e,e>,<e,d>\}$

思考题

- *n*元有限集*A*上共有多少个不同的等价关系？
  - *A*的不同的*k*划分的个数？用$S(n,k)$表示将*n*元集划分成*k*块的方法数

    $$S(n,k)= S(n-1,k-1)+ k*S(n-1,k)$$

    第二类*Stirling*数

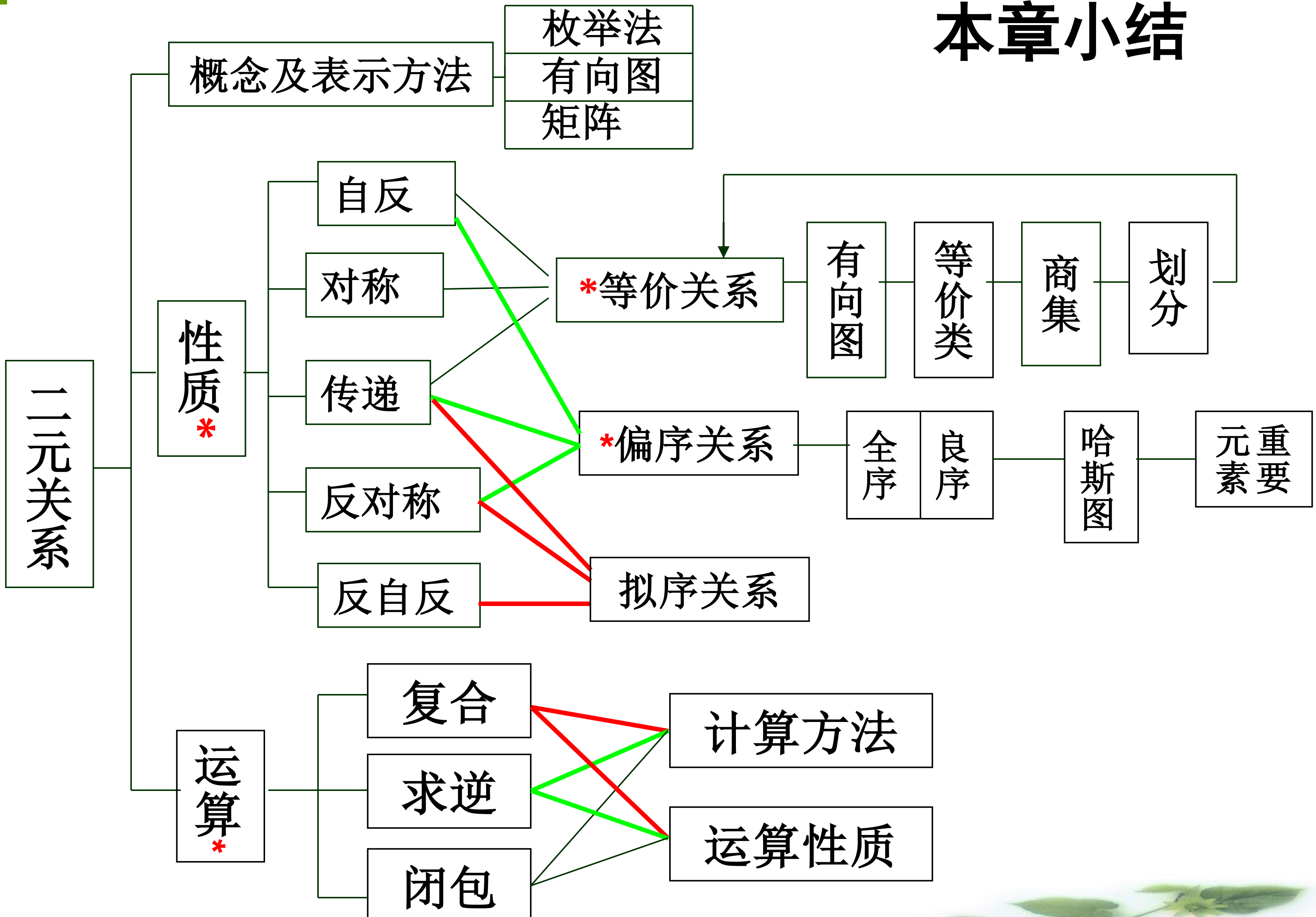
思考题

- 设R是集合A上的关系，证明：

  （1）$sr(R)$是包含R的最小的相容关系；

  （2）$tsr(R)$是包含R的最小的等价关系。

本章小结


二元关系
概念及表示方法
枚举法
有向图
矩阵
性质*
自反
对称
传递
反对称
反自反
*等价关系
有向图
等价类
商集
划分
*偏序关系
全序
良序
哈斯图
元素
重要
拟序关系
运算*
复合
求逆
闭包
计算方法
运算性质