最优化技术原理及应用

王冰川
bingcwang@csu.edu.cn
https://intleo.csu.edu.cn/index.html
中南大学自动化学院

关于老师

基本信息

姓名： *王冰川*

邮箱： *bingcwang@csu.edu.cn*

研究方向： *系统建模与优化，演化计算，电池管理系统*

课题组

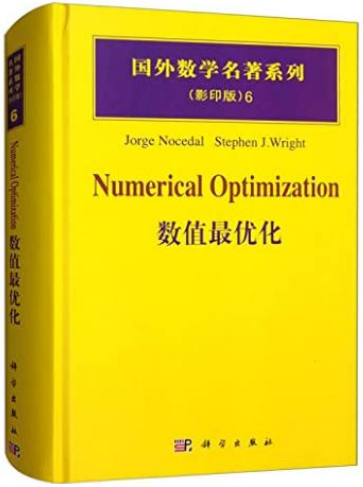
目前在**王勇**教授领衔的**中南大学智能学习与优化实验室**工作 https://intleo.csu.edu.cn/

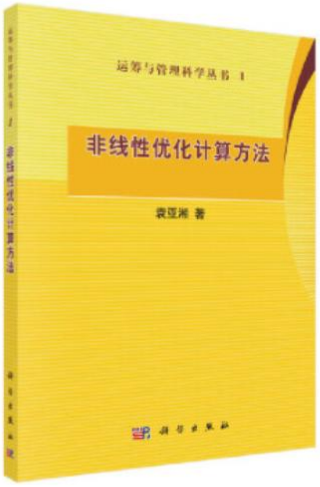
为什么选修这门课?

现阶段对最优化的理解是什么?

课程主要内容

- 第1章 概述
- 第2章 无约束优化基础
- 第3章 线搜索方法
- 第4章 信赖域方法
- 第5章 共轭梯度法
- 第6章 齐次牛顿法

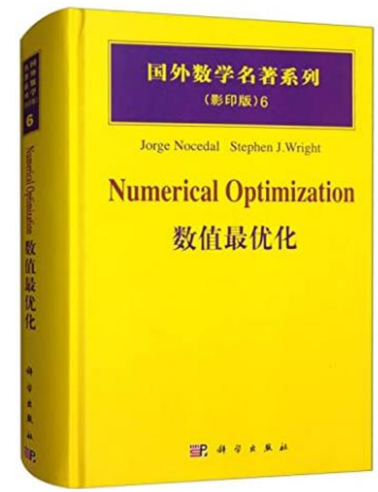


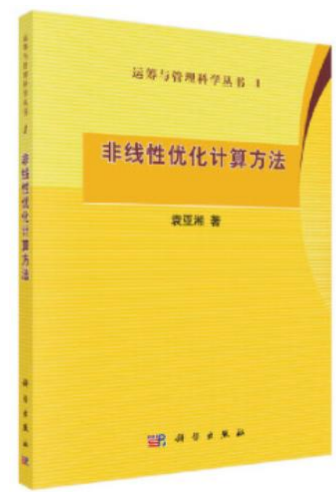


主要参考书目

课程主要内容

- 第7章 大规模无约束优化
- 第8章 最小二乘问题及方法
- 第9章 非线性方程组
- 第10章 约束优化
- 第11章 非线性约束优化方法
- 第12章 二次规划

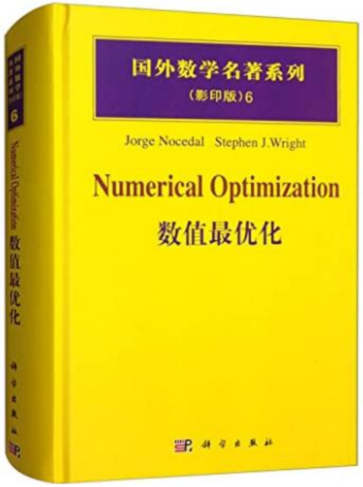


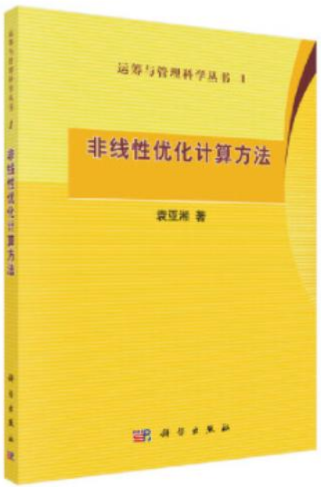


主要参考书目

课程主要内容

- 第13章 惩罚和增广拉格朗日方法
- 第14章 序列二次规划
- 第15章 内点法
- 第16章 智能优化方法





主要参考书目

考核方式	考核内容	成绩比例（%）
考勤	课堂考勤	20%
报告	分组报告	20%
期末考试	课堂所学知识	60%

- 课堂考勤以提问为主
- 报告分组暂定5人或者3人一组，讲解一篇主题相符的论文或者课程设计
- 期末考试（闭卷）

冯康（1920年9月9日－1993年8月17日），浙江绍兴人，出生于江苏省南京市，数学家、中国有限元法创始人、计算数学研究的奠基人和开拓者，中国科学院院士，中国科学院计算中心创始人、研究员、博士生导师。

1944年冯康毕业于国立中央大学；1945年在复旦大学数学物理系担任助教；1946年到清华大学任物理系助教；1951年转任数学系助教；1951年调到中国科学院数学研究所，担任助理研究员，后在苏联斯捷克洛夫数学研究所进修；1957年调入中国科学院计算技术研究所；

1965年发表了名为《基于变分原理的差分格式》的论文，这篇论文被国际学术界视为中国独立发展“有限元法”的重要里程碑；1978年起任中国科学院计算中心主任；1980年当选为中国科学院院士；

1997年冯康的“哈密尔顿系统辛几何算法”获得国家自然科学奖一等奖

概述

参考中国科学院大学Xiao Wang老师PPT内容

主要内容

1 数学描述

2 例子

3 分类

4 凸性（convexity）

5 优化算法

6 参考资料

主要内容

1. 数学描述
2. 例子
3. 分类
4. 凸性（convexity）
5. 优化算法
6. 参考资料

- 从数学上来说，优化是在受约束条件下，最大化/最小化目标函数
- 方便起见，数学符号定义如下：
  - $\boldsymbol{x}$ 表示由变量组成的一组向量，也被称作未知量/参数
  - f 表示目标函数，我们主要考虑单目标优化
  - c_i 代表第i个约束函数，可以是不等式/等式约束
- 优化通常被称为数学规划（Mathematical Programming）

数学描述

- 一般来说，一个优化问题可以描述成如下标准形式：

$$\min_{x \in \Re^n} f(x)$$

$$\text{subject to} \quad c_i = 0, i \in \{1, \dots, p\}$$

$$c_i \geq 0, i \in \{p+1, \dots, q\}$$

- p是等式约束的个数， q是约束条件的个数

主要内容

例子

某化工公司有2个工厂F_1, F_2和十几个零售网点$R_1, R_2, \dots, R_{12}$。每个工厂F_i每周生产某种化工产品α_i吨。已知每个零售店 R_j 的对该产品的每周需求量为 b_j 吨。将一种产品从工厂 F_i 运送到零售店 R_j 的成本为 c_{ij}。确定有多少产品从每个工厂运送到每个销售点，以满足所有要求并最小化成本。

例子

$$\min \sum_{ij} c_{ij} x_{ij}$$

subject to $$\sum_{j=1}^{12} x_{ij} \le \alpha_i , i = 1,2$$

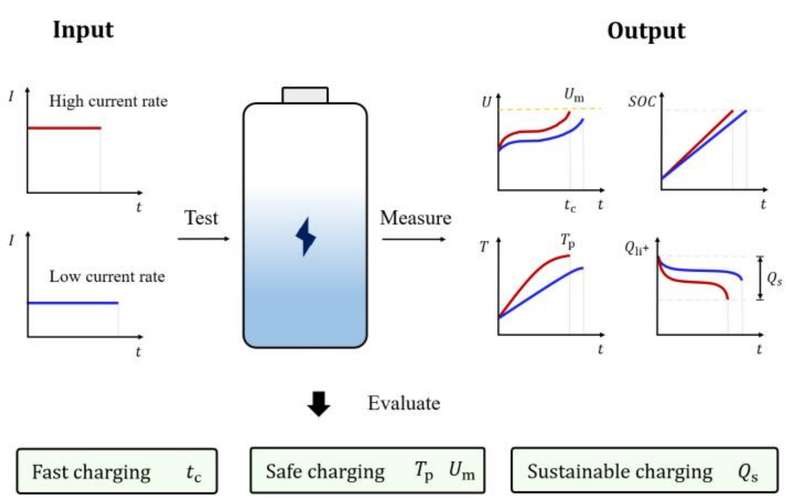
$$\sum_{i=1}^{2} x_{ij} \ge b_j , j = 1, \dots , 12$$

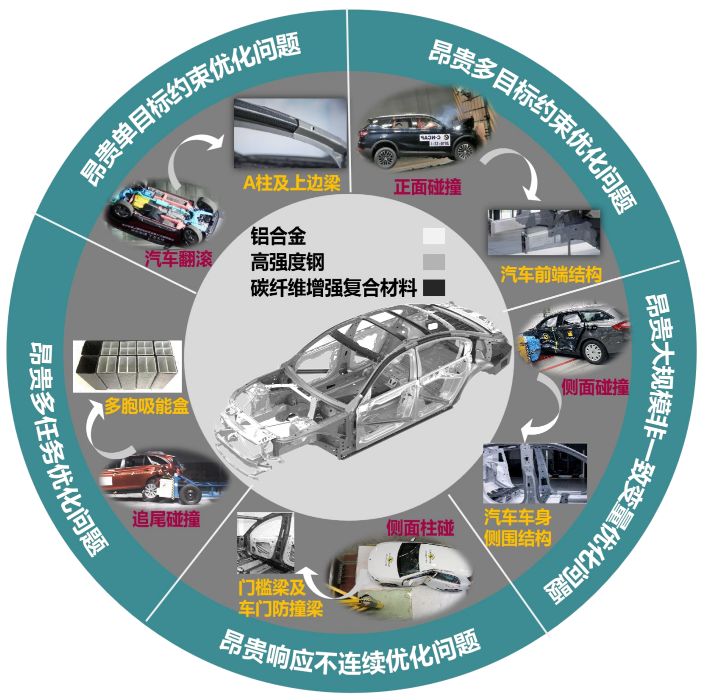
$$x_{ij} \ge 0, i = 1,2, j = 1, \dots , 12$$

一个典型的线性规划问题

例子

- 锂离子电池充电优化
- 锂离子电池参数估计
- 汽车轻量化





主要内容

分类

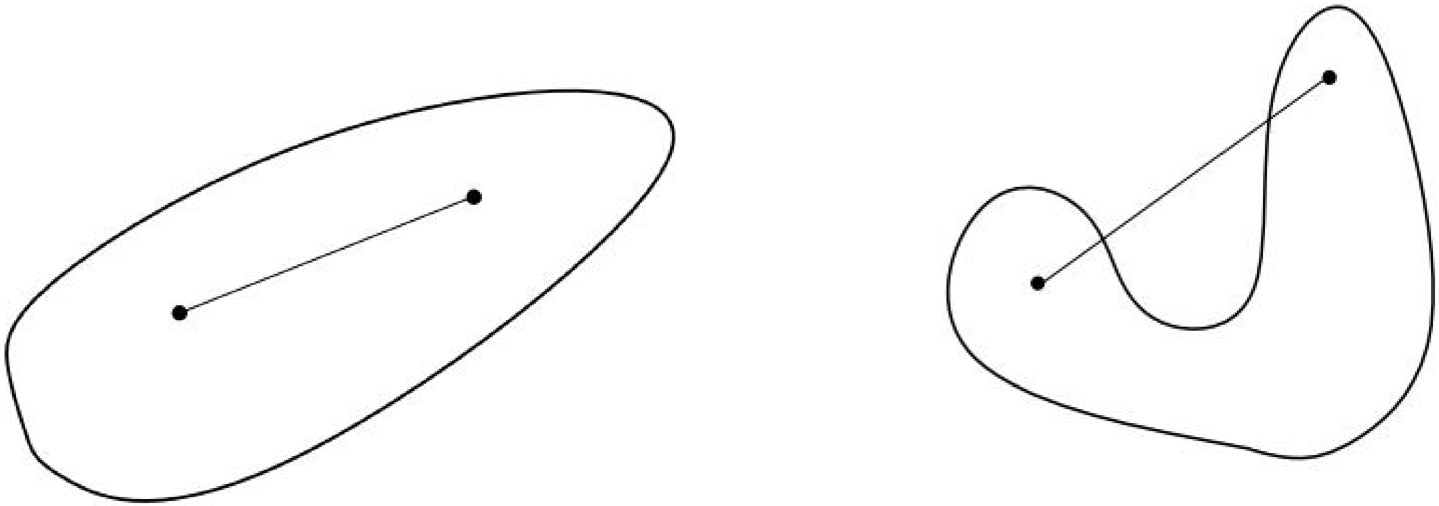
根据目标函数和约束条件的性质（线性/非线性、凸/非凸）、变量规模（大/小）、函数的平滑度（可微/不可微）等等， 优化问题可以进行如下分类：

- 连续优化/不连续优化
- 约束优化/无约束优化
- 随机优化/确定性优化
- 凸优化/非凸优化
- 单目标优化/多目标优化
- 。。。

主要内容

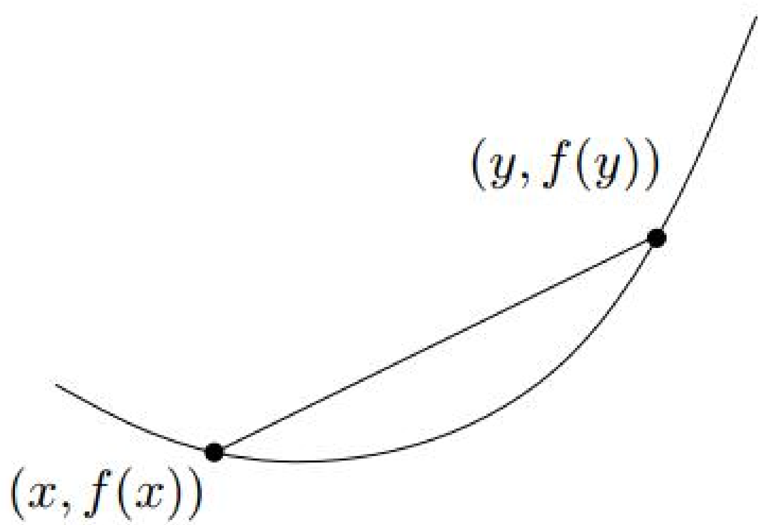
1. 数学描述
2. 例子
3. 分类
4. 凸性（convexity）
5. 优化算法
6. 参考资料

凸集合：$S \in \Re^n$,集合中任意两个元素$x \in S, y \in S$满足$\alpha x + (1-\alpha)y \in S$,其中$\alpha \in [0,1]$



凸函数：$f: S \in \Re^n \to \Re$, f是凸函数的充要条件：

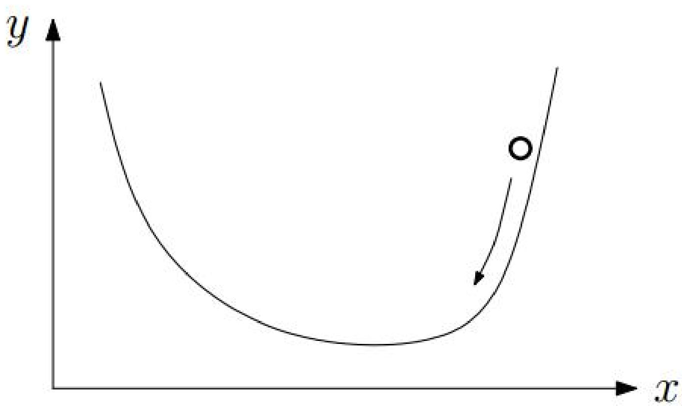
$$\forall x, y \in S, \alpha \in [0,1], f(\alpha x + (1-\alpha)y) \le \alpha f(x) + (1-\alpha) f(y)$$

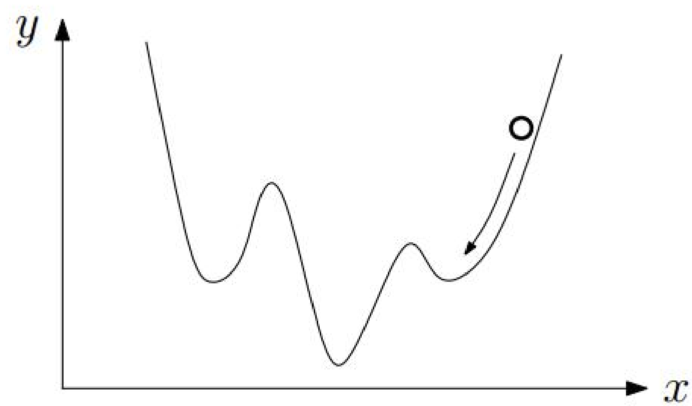


严格凸函数、凹函数

凸性

凸优化问题：可行域为凸集合(Ω)，目标函数为凸函数的优化问题





凸优化问题的局部最优就是全局最优解

x^*是凸优化问题的局部最优，则对于可行域内的任意一个解y,有$f(y) \geq f(x^*)$:

- 由于局部最优性， $z \in \Omega \cap \aleph, f(z) \geq f(x^*)$;
- 由于可行域的凸性，x和y的连线也在可行域内；
- 在$\Omega \cap \aleph$中的连线上选择一个不等于x^*的解： $z = \alpha y + (1-\alpha)x^*$
- 凸函数性质：$f(z) \leq \alpha f(y) + (1-\alpha) f(x^*) = f(x^*) + \alpha(f(y) - f(x^*))$
- 因为$f(z) \geq f(x^*)$，所以$\alpha(f(y) - f(x^*)) \geq 0$，即$f(y) - f(x^*)$

主要内容

- 数值优化算法是一类迭代算法，给定初始解x,进行一系列迭代，最终得到满意的解：

$$x_k \to x_{k+1}, k = 1,2, \ldots$$

- 不同优化算法的主要区别在于如何进行迭代，也就是产生下一个解
- 迭代过程中使用的信息：$f(x_k)$和$c_i(x_k)$，或者其一阶/二阶导师信息
- 有些算法会用到之前的累计信息（CMAES）

数值优化算法的评价指标

- 鲁棒性：对一类问题有效，对有噪声扰动的问题有效
- 复杂度：时间复杂度/空间复杂度
- 精度：准确性

这些评价指标冲突：例如 收敛速度和存储需求之间、鲁棒性和速度之间的权衡，这些都是数值优化的核心问题

主要内容

1. 数学描述
2. 例子
3. 分类
4. 凸性（convexity）
5. 优化算法
6. 参考资料

参考资料

- Jorge Nocedal and Stephen J. Wright, Numerical Optimization, second edition, Springer, 2006.
- Stephen Boyd and Lieven Vandenberghe, Convex Optimization, Cambridge University Press, 2004.
- https://www.syscop.de/teaching/ws2022/numerical-optimization