最优化技术原理及应用

王冰川
bingcwang@csu.edu.cn
https://intleo.csu.edu.cn/index.html
中南大学自动化学院

非线性方程组

主要参考中国科学院大学Xiao Wang老师PPT内容

主要内容

主要内容

- 非线性方程组

$$r(x) = 0$$

其中，$r(x) = (r_1(x), \ldots, r_n(x))^T, r_i: \Re^n \to \Re$

- 求解非线性方程的技术在动机、分析和实现方面与前面章节中讨论的优化技术有重叠
- 尤其与非线性最小二乘问题密切相关

$$\min \sum_{i=1}^{n} r_i^2(x)$$

- 主要不同之处在于非线性方程组一般具有物理意义，目的是求解方程组而非最小化平方和

Theorem 1

Suppose that $r:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ is continuously differentiable in some convex open set D and that x and $x+p$ are vectors in D. We then have that

$$r(x+p) = r(x) + \int_0^1 J(x+tp)p\,dt \tag{1.1}$$

- 可以通过$J(x)p$近似(1.1)右侧的第二项来定义$r(x_k+p)$的线性模型 $M_k(p)$

$$M_k(p) = r(x_k) + J(x_k)p$$

- 相应地，可以得到牛顿法更新公式

$$M_k(p) = 0 \Longrightarrow p_k = -J(x_k)^{-1}r(x_k)$$

- 当x_k接近方程组的非退化根x^*时，牛顿法能够达到二次收敛速率，其主要的缺点如下：
  - 如果$J(x_k)$ 是奇异的， 甚至难以确定牛顿步
  - 一阶导数信息（雅可比矩阵 J ）可能很难获得
  - 当n很大时，精确地计算牛顿步 p_k 可能成本太高
  - $J(x^*)$ 可能是是奇异的

- 非精确牛顿法可以使用满足如下条件的搜索方向 p_k

$$\|r_k + J_k p_k\| \leq \eta_k \|r_k\|, \eta_k \in [0, \eta], \eta \in [0,1)$$

- 在一般温和条件（mild condition）下，非精确牛顿法产生的$\{x_k\}$将收敛于x^*
  - 如果η_k充分小，则线性收敛
  - 如果$\eta_k \to 0$，超线性收敛
  - 如果$\eta_k = O(r_k)$，二次收敛

- 构建一个近似的雅可比矩阵$J(x)$
- 第k次迭代，使用如下模型

$$M_k(p) = r(x_k) + B_k p$$

- 相应地，$M_k(p) = 0 \Longrightarrow p_k = -B_k^{-1} r(x_k)$
- 根据割线方程更新B_k

$$y_k = B_k s_k, y_k = r(x_{k+1}) - r(x_k), s_k = x_{k+1} - x_k$$

- 最成功的实用算法是Broyden方法，其更新公式为

$$B_{k+1} = B_k + \frac{(y_k - B_k s_k) s_k^T}{s_k^T s_k}$$

- 在mild条件下， Broyden方法超线性收敛

主要内容

1. 局部算法
2. 实用方法
3. 同伦延拓方法
4. 参考资料

- 牛顿法和Broyden方法都是局部方法，需要起点接近最优解
- 通过使用线搜索和信赖域技术可以使它们更加稳健
- 需要定义一个评价函数，其是x的标量函数，表明新的迭代是否比当前迭代更好，即朝着r的根前进
- 最广泛使用的评价函数是平方和函数

$$f(x) = \frac{1}{2}\|r(x)\|^2$$

- 每当$r_k \neq 0$时，牛顿步都是 f的下降方向

主要内容

同伦延拓方法

- 基于牛顿的方法都有一个缺点：它们可能收敛到评价函数局部最小值，而不是$r(x) = 0$的解

- 不同于直接处理$r(x) = 0$，而是建立了一个“简单”的方程组。然后逐渐将简单系统转化为原系统$r(x)$，并跟随解从简单问题转移到原始问题

- 同伦映射函数定义如下

$$H(x, \lambda) = \lambda r(x) + (1 - \lambda)(x - a)$$

- 将参数λ逐渐从 0 增加到 1，最终可以求解 $r(x) = 0$

主要内容

1. 局部算法
2. 实用方法
3. 同伦延拓方法
4. 参考资料



非线性微分方程和积分方程是非线性方程组的丰富来源。 当用有限维非线性方程组表示时，未知向量x是（无限维）解的离散近似

Thanks for the attentions!

Q&A