第四篇 图论

主要内容

- 第七章 无向图
- 第八章 有向图

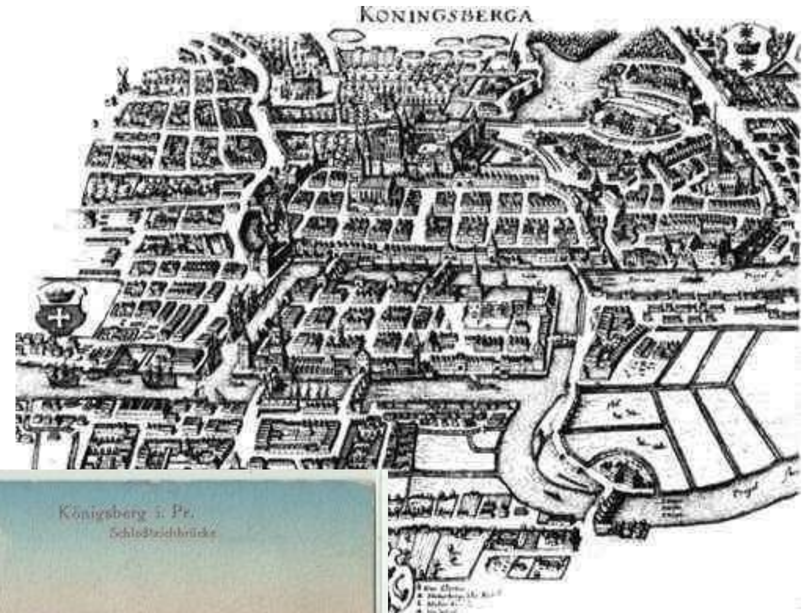
第七章 无向图

主要内容

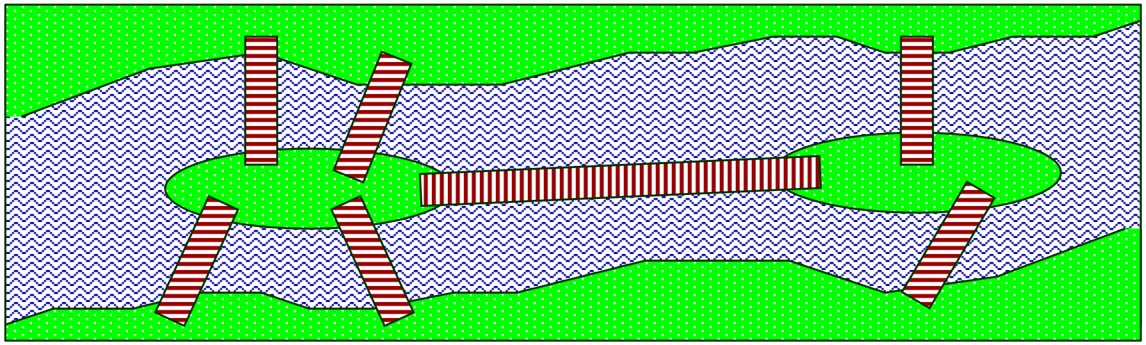
- 7.1 三个古老的问题
- 7.2 若干基本概念
- 7.3 路径、圈及连通性
- 7.4 Euler图和Hamilton图
- 7.5 平面图
- 7.6 图的着色
- 7.7 树与生成树

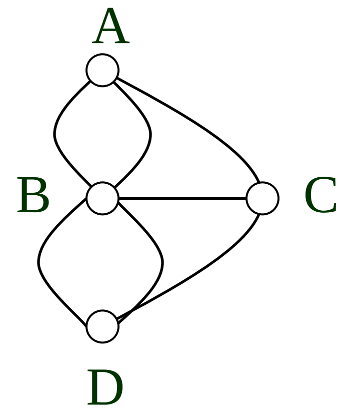
7.1 三个古老的问题——图论的起源

- 第一个图论问题
  - Könisberg’s seven bridge problem(哥尼斯堡七桥问题)



七桥问题与一笔画



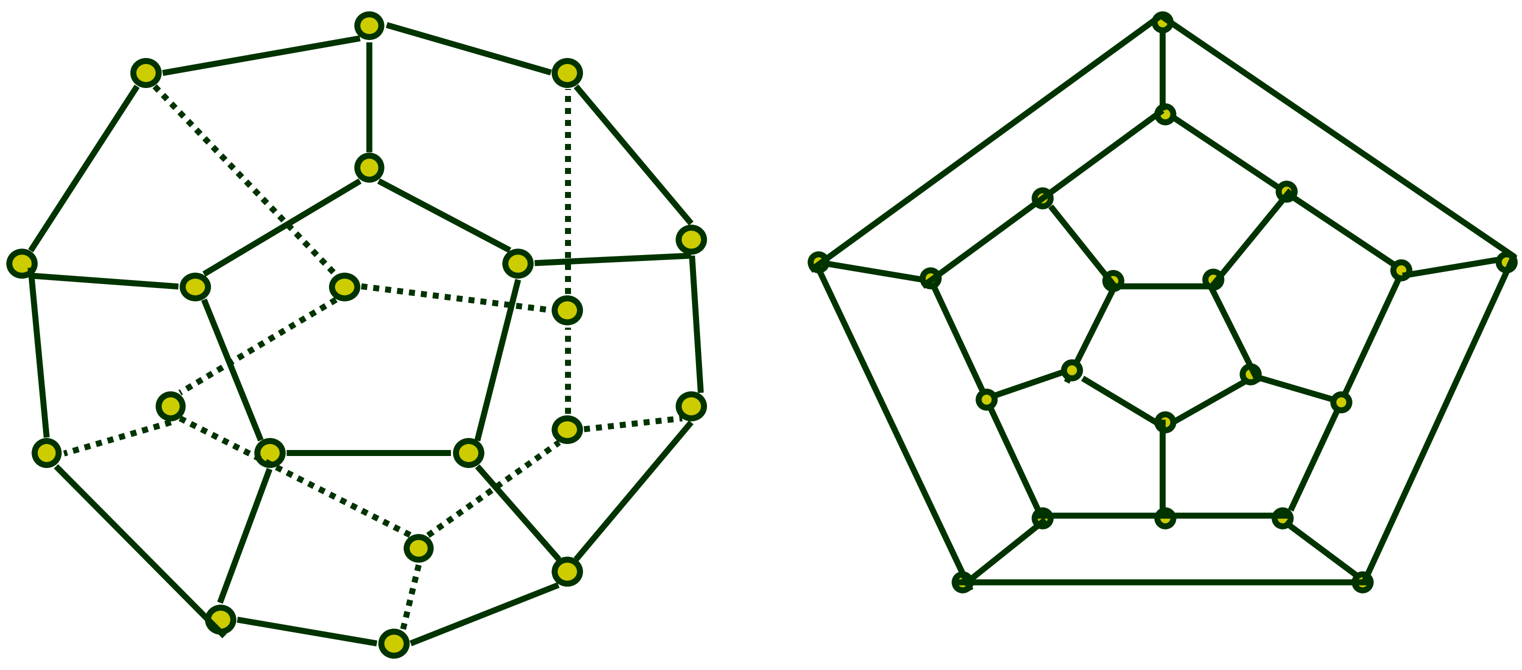


是否可从某处出发经过每座桥恰只一次, 然后再回到起点?

- 瑞士数学家*Euler*在1736年证明此问题无解
- *Euler*——图论之父

环游世界与*Hamilton*问题

- 十二面体的20个顶点代表世界上20个城市，能否从某个城市出发在十二面体上依次经过每个城市恰好一次最后回到出发点？



*Hamilton*圈（环球旅行游戏）

地图着色与四色问题

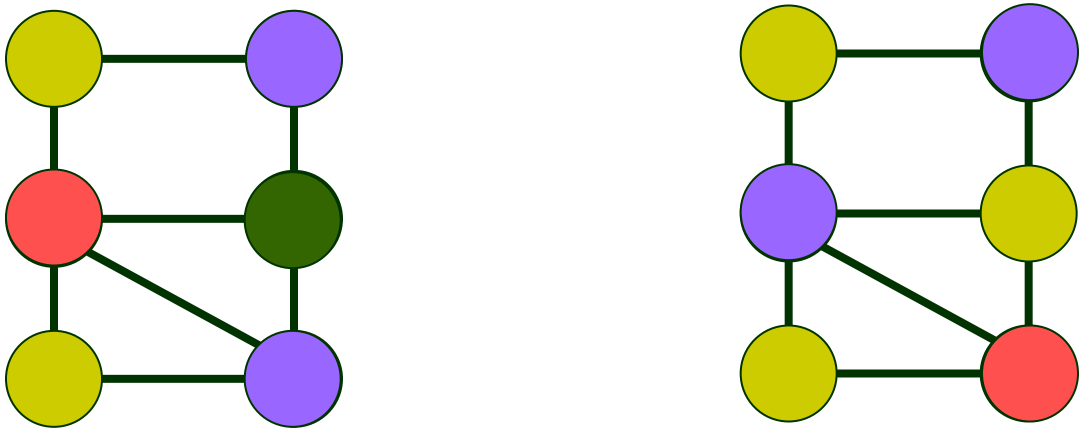
- 任意一张地图，最少需要用多少颜色來着色，才能让相邻的两块涂上不同的颜色？
  - 1852年提出四色猜想
  - 1879年A.Kempe宣布证明了四色定理
  - 1890年Heawood发现Kempe的错误
  - 1976年美国数学家K. Appel及W.Haken在计算机的辅助下解决

图论的应用

- 广播频道与着色问题
  - 当两个广播电台距离太近时，若给它们相同的频道会产生干扰。如何设置每个电台的频道，使得它们既不相互干扰，又使频道总数最少？

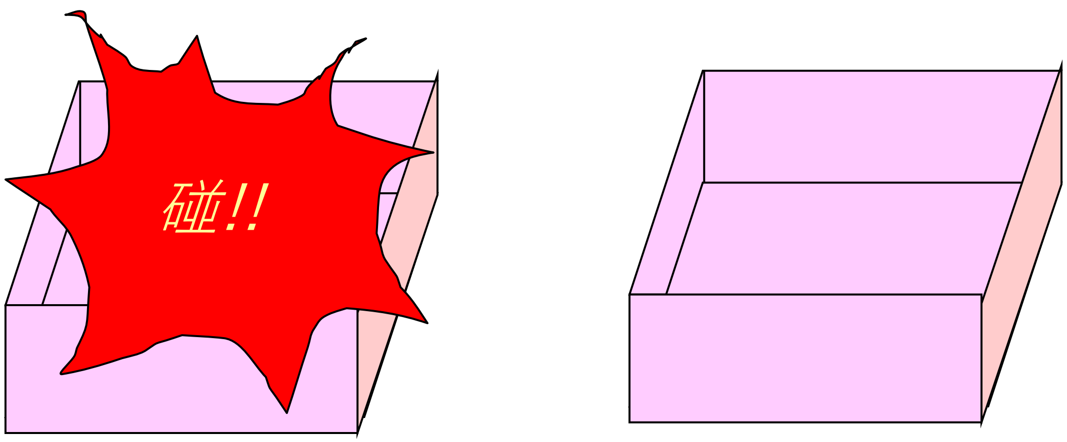
广播频道与着色问题

- 图的点着色(Coloring)

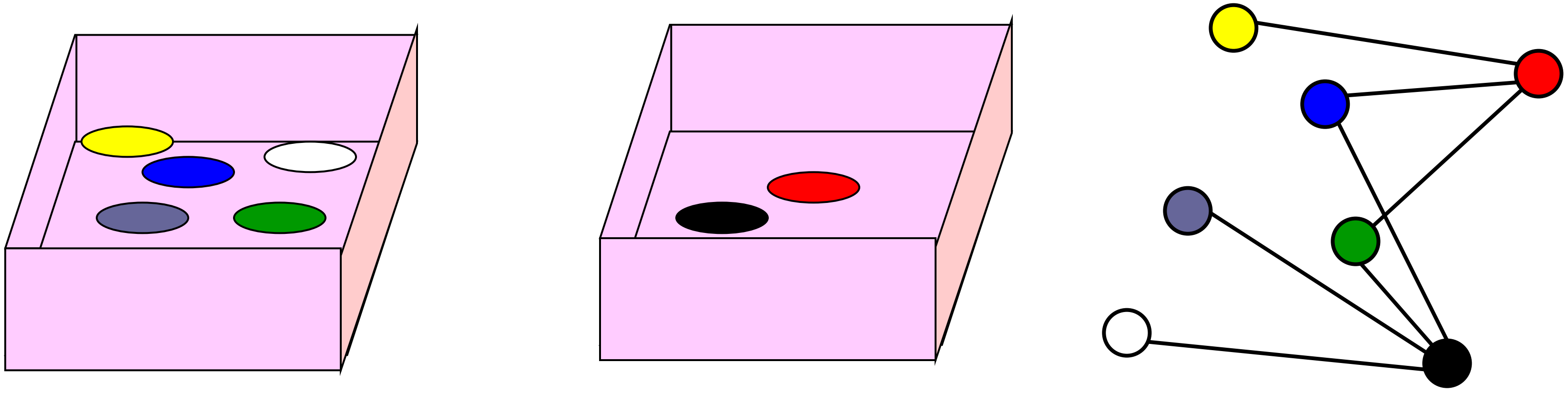


药品存放与无关集

- 化学药品存放问题
  - 某些药品放置太近可能爆炸，有两个实验室，最多能有多少药品能放在一起

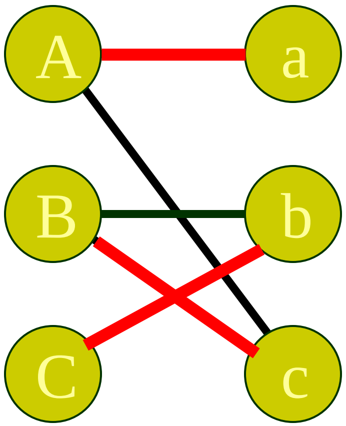


药品存放与无关集



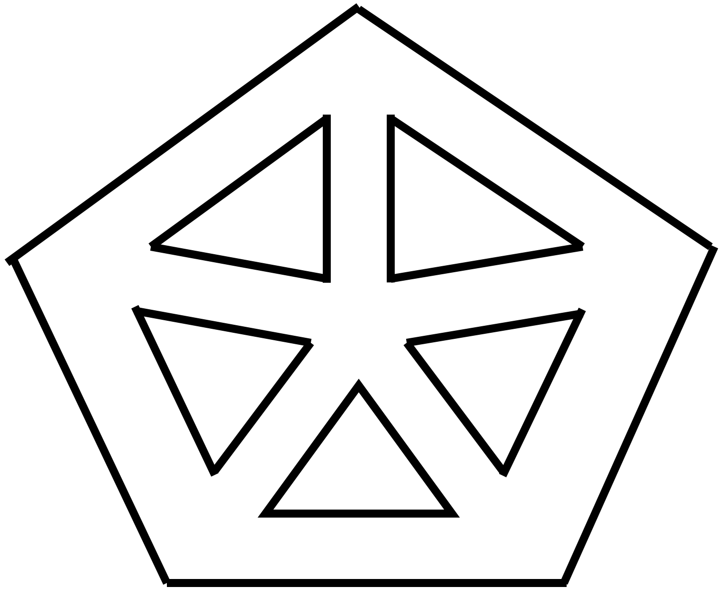
配对问题与匹配(Matching)

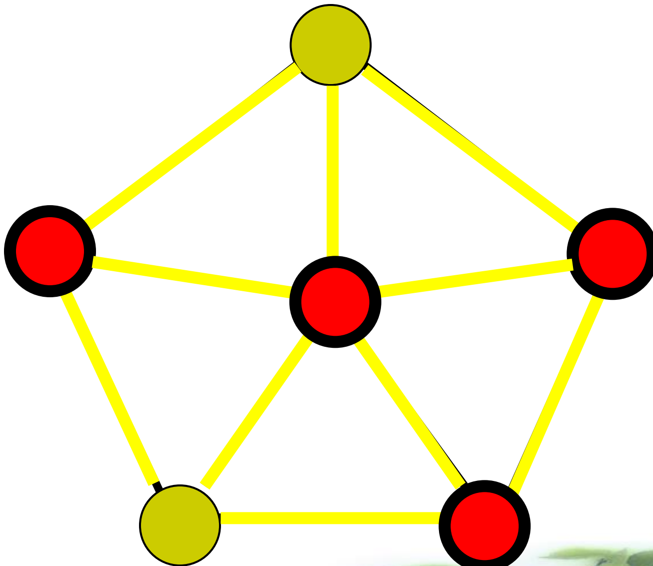
- 配对问题
  - 有一些机器人要分配任务，并不是所有机器人都能够完成所有的任务，要求每个机器人都要分配一项工作，怎么分？



电灯管道与覆盖集(Covering)问题

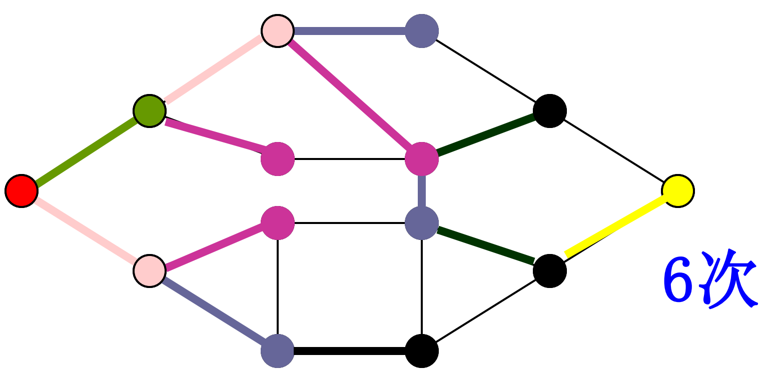
- 电灯管道问题
  - 某座办公大楼平面图如下，每道走廊都装设了电灯，其开关可设于此走廊两端的转角口其中之一。要使安装了开关的转角口越少越好，要怎么安装?

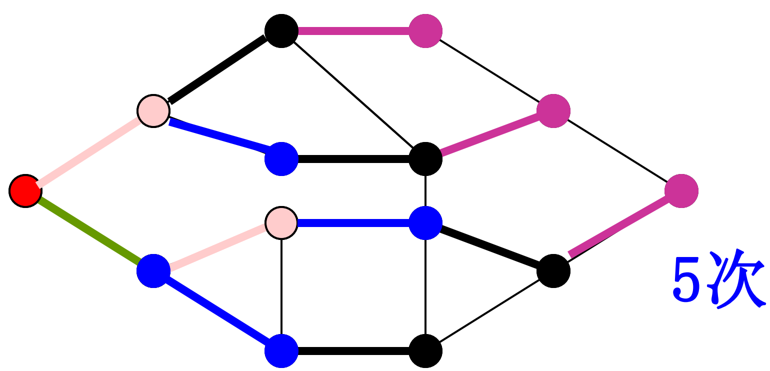




信息流传与广播问题(Broadcasting)

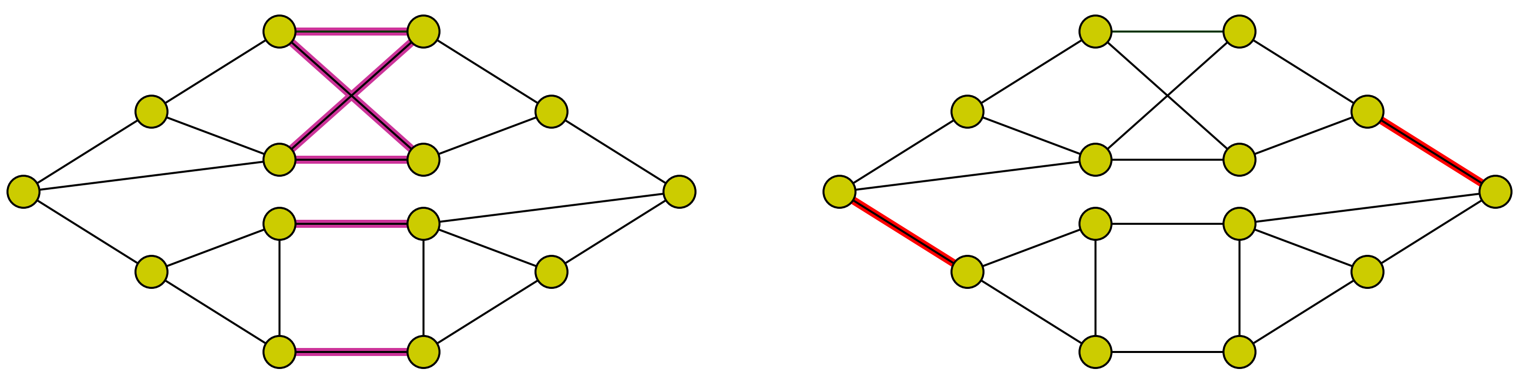
- 信息流传问题
  - 班上有一件事情要宣布，班长想打电話告訴全班。但若他一个个打似乎太慢了。假设一个班有五十人，打一通电话需要一分钟，那总共就需要四十九分钟。但若是他打了第一个电话后，便请第一个同学再打给别人；第二通电话打了之后，又再请第二个同学打给别人；依此类推，但问题是，也许某些同学没有某些同学的电话，那么这时，怎样在最短时间内打完所有电话？





计算机网络与连通度(Connectivity)问题

- 计算机网络断线问题
  - 一公司内有多部计算机并连成网络，我们想知道其网络设计得好不好。考虑若有某线路毁损后，所有的机器是否仍可彼此互通？进一步，讨论该网络设计可保证在同时至多有几条线路毁损后仍互通？

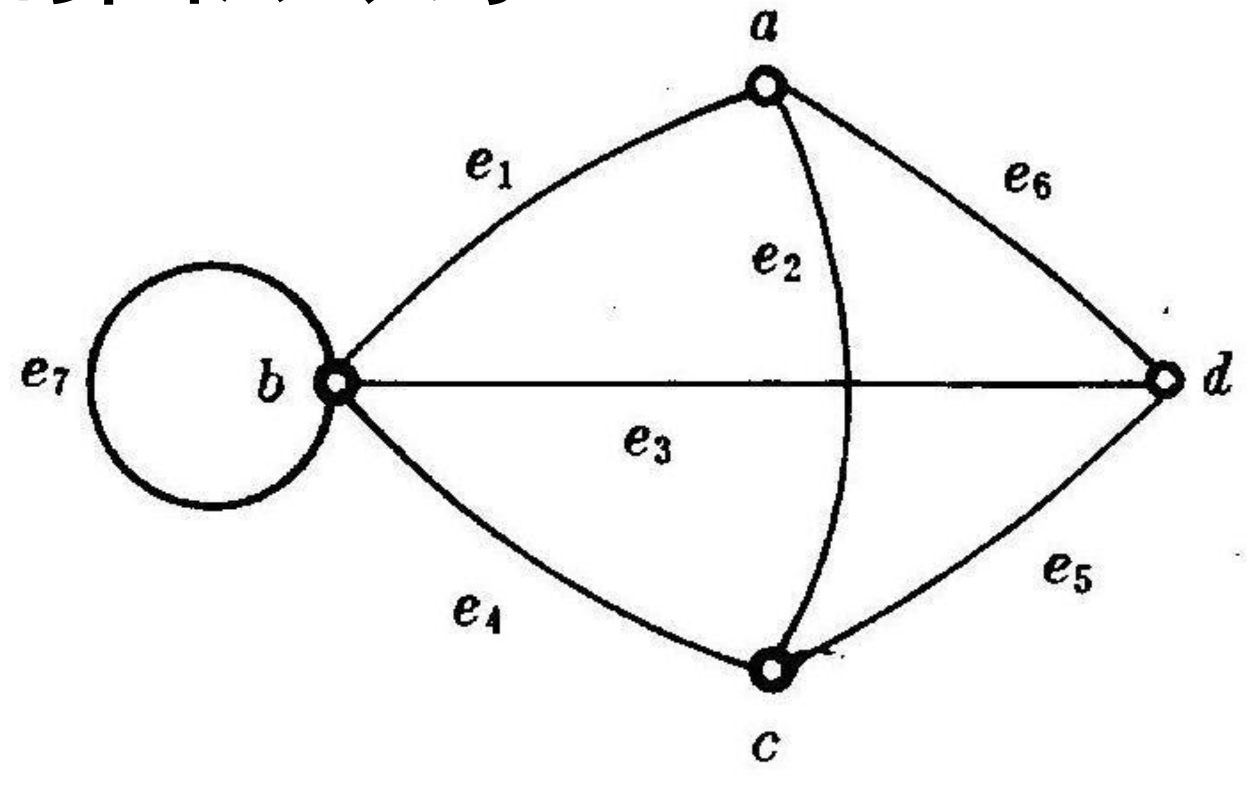


7.2 若干基本概念

- 图

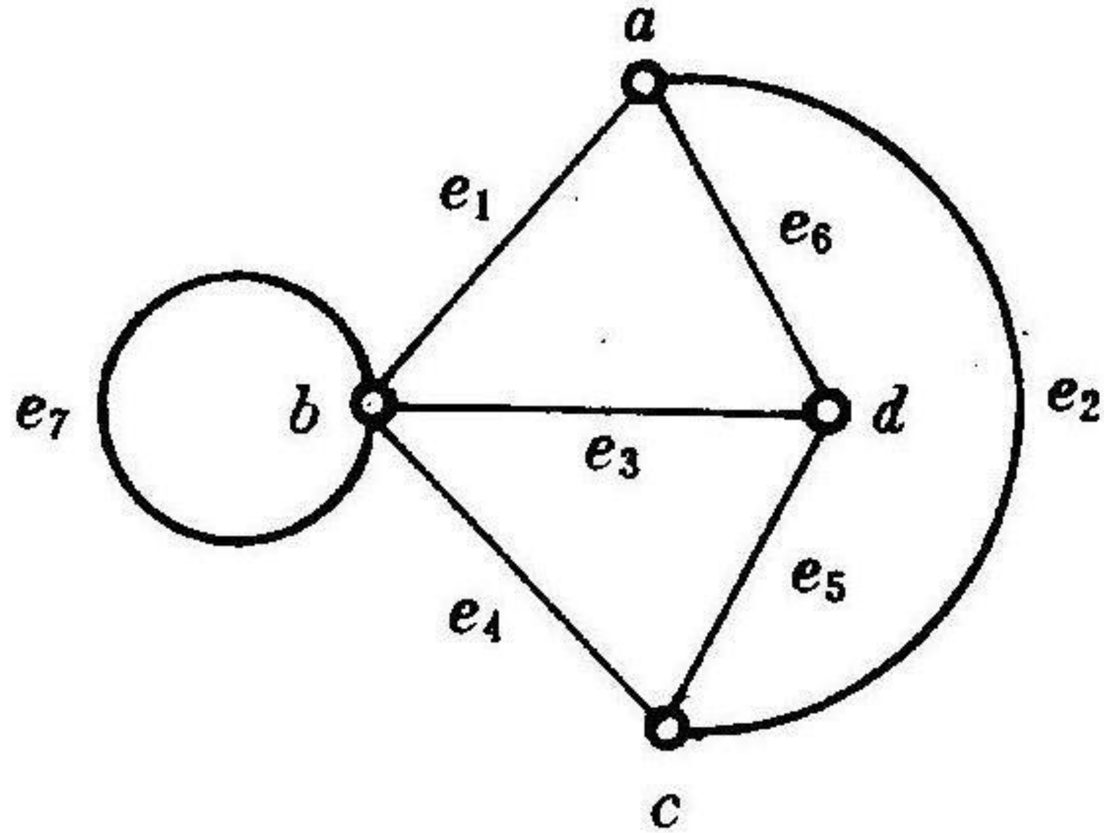
- 定义7.2.1 无向图G是一个二元组$<V, E>$
  - V : vertex set 顶点集
    - 常写作$V(G)$，也称点(*point*)，结点(*node*)，接点(*junction*)
    - 非空有限集
    - 它的元素，习惯上用数字或小写英文字母a,b,c,u,v,w,x,y,z等(或加足标)表示
  - E : edge set 边集合
    - 常写作$E(G)$，也称边(edge)，线(line)，枝(branch)
    - V中元素无序偶的可重集
    - 它的元素，常用字母e(可加足标)表示
    - 边$e=(a,b)$亦记为ab
  - 有的书上将无向图G定义成一个三元组$<V, E, \psi>$，V是顶点集，E是边集，而ψ则是E到V中元素的无序偶之集的一个映射

图的图形表示



(a)

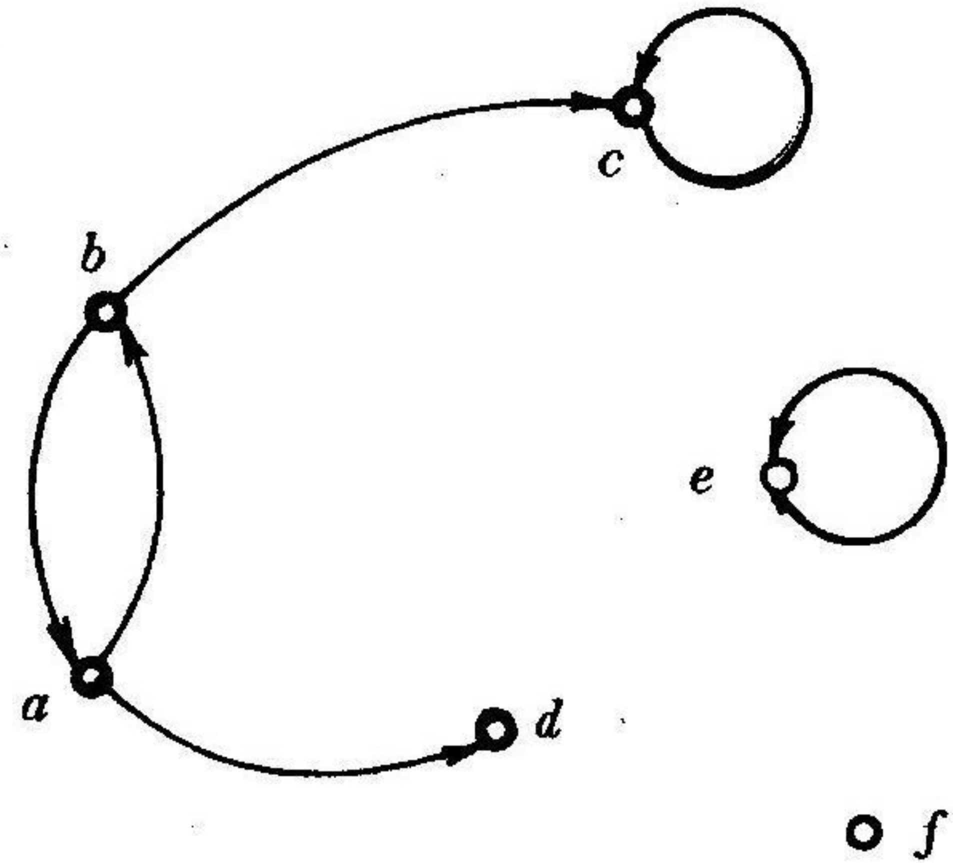
$G=<V,E>=<\{a,b,c,d\},\{(a,b),(a,c),(b,d),(b,c),(d,c),$
$(a,d),(b,b)\}>$



(b)

- 结点偶对可以是有序的,也可以是无序的
- 若边e所对应的偶对$<a,b>$是有序的,则称e是有向边
  - 有向边简称弧,a叫弧e的始点,b叫弧e的终点
- 若边e所对应的偶对(a,b)是无序的,则称e是无向边
- 有向图
- 无向图
- 混合图

例

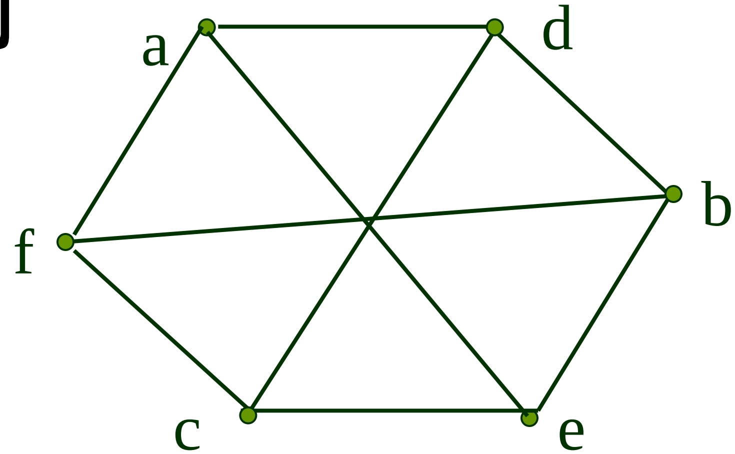


$G'=<V',E'>=<\{a,b,c,d,e,\mathrm{f}\},\{<a,b>,<b,a>,<b,c>,<c,c>,<a,d>,<e,e>\}>$

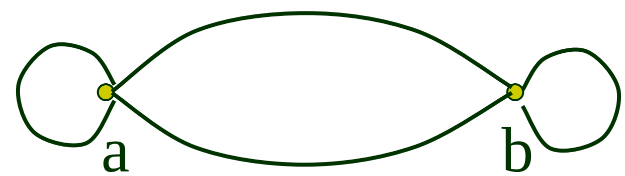
简单图

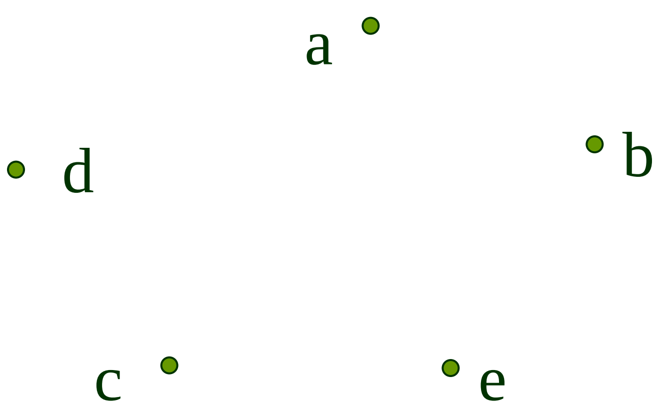
- 只讨论V是有限集的情况
  - 若$\#V(G)=p$，$\#E(G)=q$，则称G是一个$(p.q)$图
  - p称为图G的阶
  - $(1,0)$图——孤立点或平凡图
  - $(p,0)$图$(p\geq 2)$——空图或零图
  - 若$E(G)$是一个普通集合(即每个元素的重度为1)，且$a\in V(G)$，$(a,a)\notin E(G)$，则称图G是一个简单图
    - 线(a,a)叫自环线
    - 表示重度为$i(\geq 2)$的i条线叫做互相平行的
    - 简单图——没有自环线和平行线的图。

例

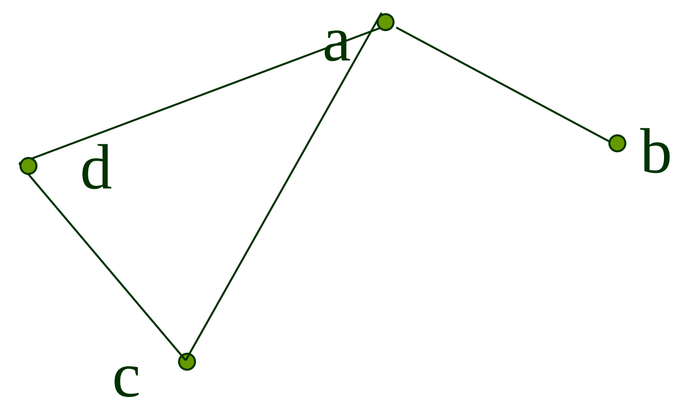


(6,9)图



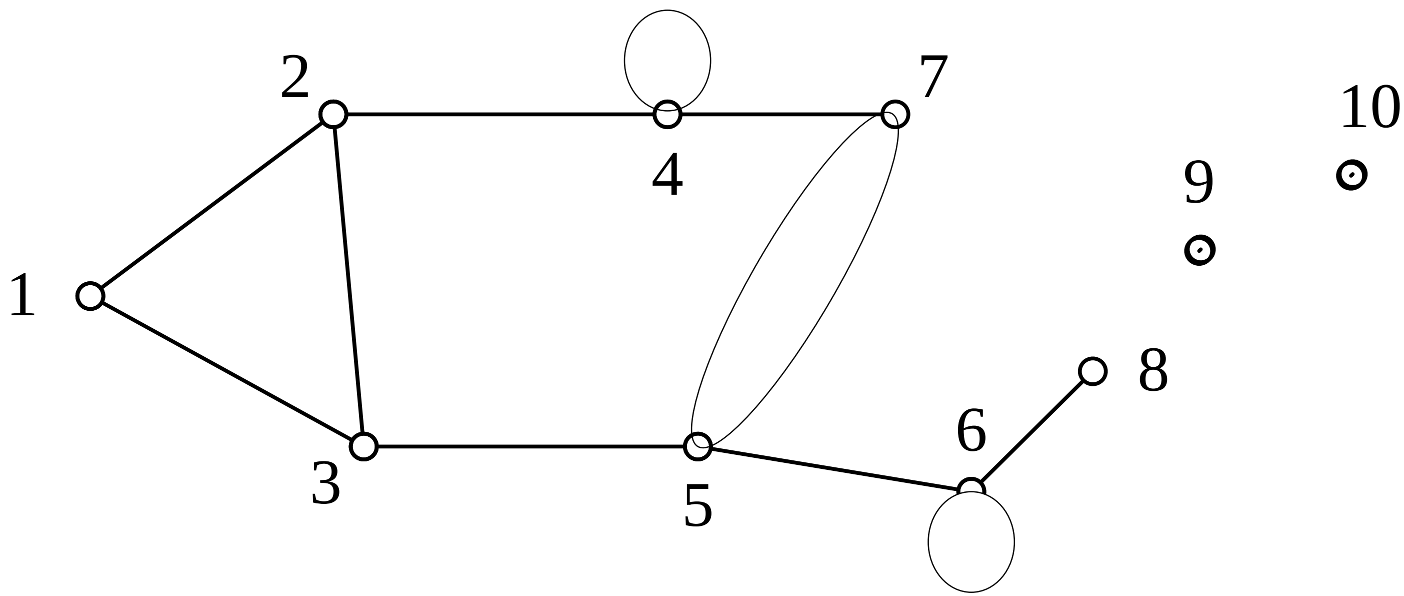


(5,0)图



- 定义7.2.2
  - 设G是一个图，$a,b\in V(G)$。如果$e=(a,b)\in E(G)$，则称a和b是彼此相邻接的，记作$a\ Adj\ b$，又称a(和b)是e的端点或e与a(和b)相关联。而$(a,b)\notin \mathrm{E(G)}$被记作$a\ NAdj\ b$。若边$e_1$和$e_2$有公共端点，则称$e_1$和$e_2$是彼此相邻接的
- 定义7.2.3
  - 与顶点u相关联(即以u为端点)的边的条数叫做u的**度**，用$d(u)$表示
    - 度为0的顶点——图的孤立点
    - 度为1的顶点——图的端点
    - 全由孤立结点构成的图称为**零图**
    - $\Delta(G)$ ——图G中顶点度的最大值
    - $\delta(G)$ ——图G中顶点度的最小值

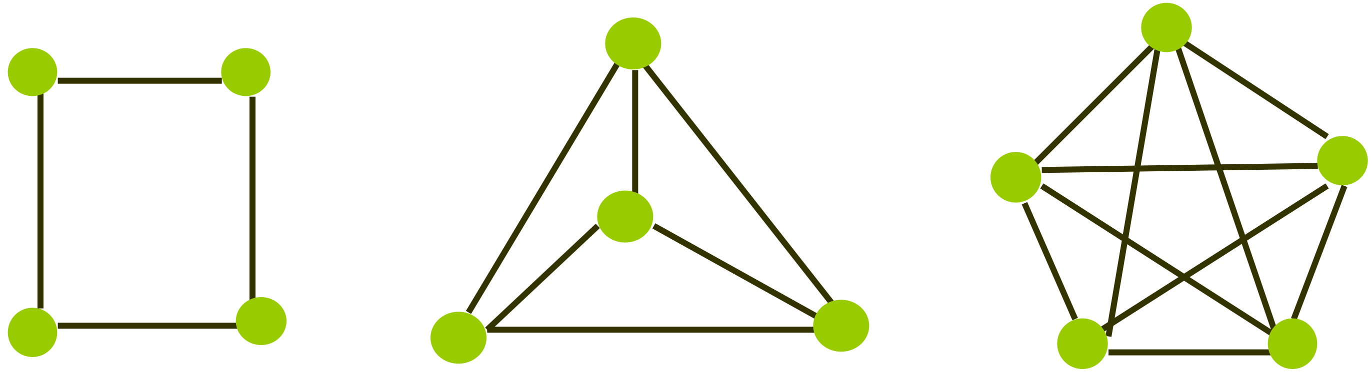
例

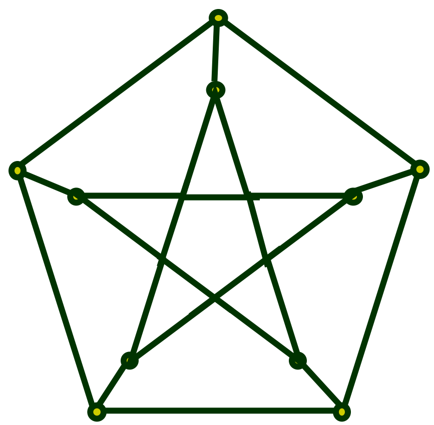


$d(1)=2$，$d(2)=d(3)=3$，$d(4)=d(5)=d(6)=4$，$d(7)=3$，$d(8)=1$，$d(9)=d(10)=0$，$\Delta(G)=4$，$\delta(G)=0$

正则图

- 各结点的度数均相同的图称为正则图,各结点的次数均为k时称为k度正则图
  - 3度正则图又叫三次图

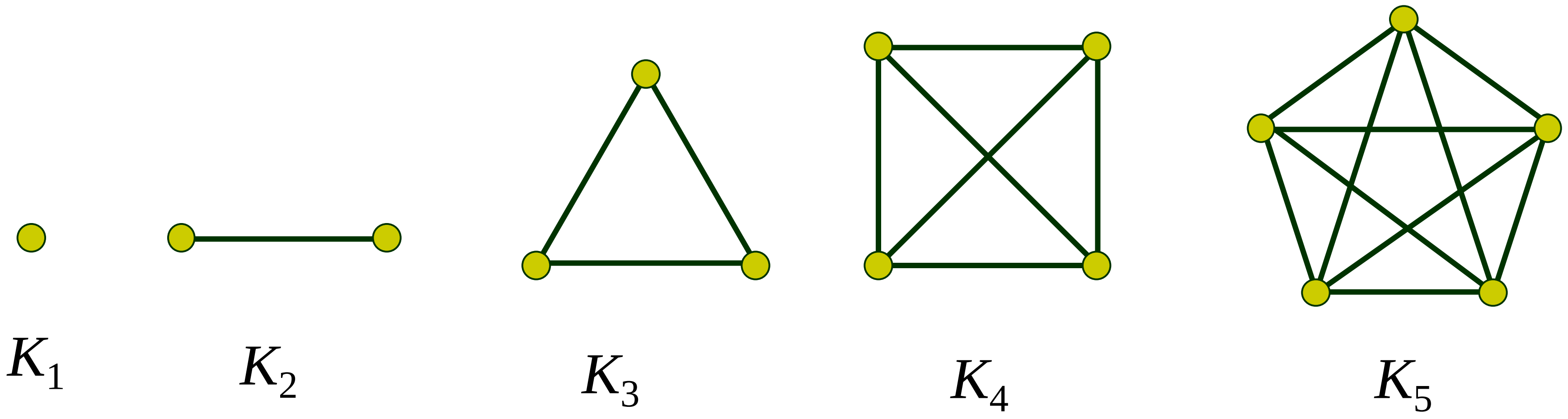




彼得森(Petersen)图

完全图

- p阶p-1度正则图叫做p阶完全图，用 K_p表示



提问：p阶完全图有多少条边?

$$\frac{p(p-1)}{2}$$

握手定理

- 定理7.2.1 设G是一个(p,q)图,它的结点集合,则

$$\sum_{u \in G} d(u) = 2q$$

1. 图中度为奇数的顶点个数有什么特点?
2. 是否存在奇数阶奇数度正则图?

证明 图中顶点度之和是指图中与各个顶点相关联的边数之和，每条边(包括自环线和平行线)都将恰好被计数两次，所以定理成立。

推论1 在图中,次数为奇数的结点必为偶数个

推论2 不存在奇数阶奇数度正则图

思考题

- p阶简单图中顶点的最大度数是多少？
- 证明：在任何$p(p\geq 2)$阶简单图中，至少有两个顶点具有相同的度
- 设G是一个有19条边的图，且图中顶点的度至少是3，那么G的阶最大是多少？
- 说明下面的序列中哪些不可能是图的度序列，哪些不可能是简单图的度序列
  - (1,3,3,3,3,3,4,4,5)
  - (7,6,5,4,3,2,2)
  - (6,6,5,4,3,3,1)
  - (2,4,4,3,3)

子图

- 设G_1和G_2 是两个图

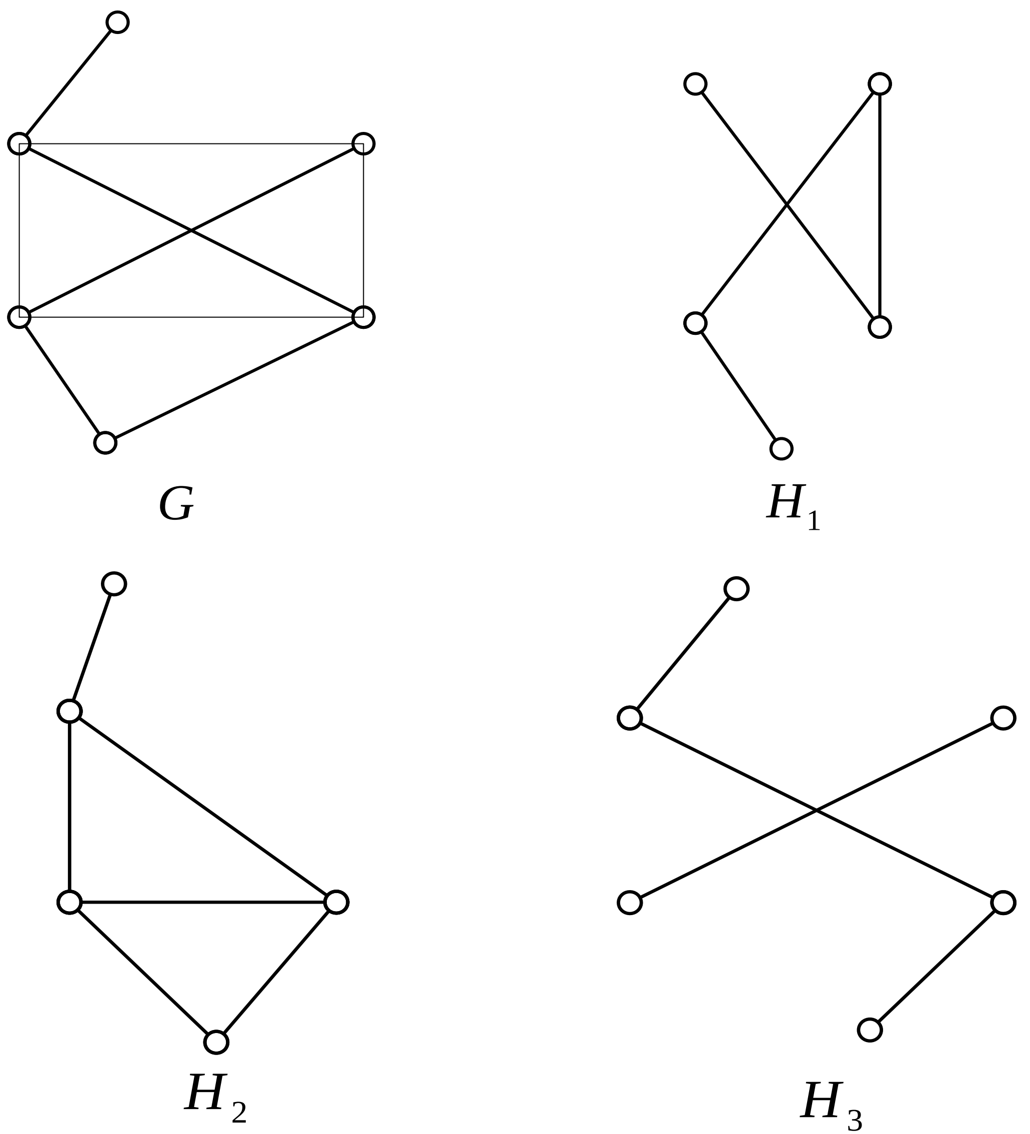
  (1)若$V(G_1) \subseteq V(G_2)$，$E(G_1) \subseteq E(G_2)$，则称G_1是G_2的子图，记作$G_1 \le G_2$;

  (2)若$V_1 = V_2$，$E_1 \subseteq E_2$，则称G_1是G_2的生成子图

  (3)设$W \subseteq V(G)$，所谓由W导致的G的导出子图$\langle W\rangle$是这样一个图：它的顶点集是W，并且连接W中那些在G中原先被连接的顶点偶

  - 即在G中去掉不属于W的顶点以及与它们相关联的边后留下的那部分

例



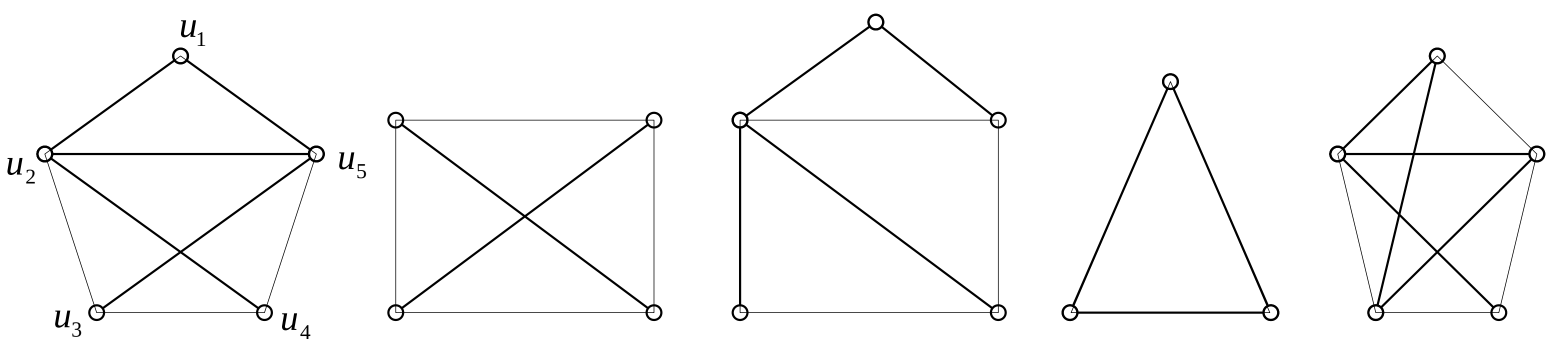
H_1——G的子图

H_2——G的含有五个顶点的导出子图

H_3——G的生成子图

图的运算

- 设$G=<V,E>$是一个图，且$S\subseteq V$，$L\subseteq E$，$u\in V$，$e\in E$，$e'\notin E$
  - $G-S$，$G-u$——导出子图$<V-S>$，$<V-\{u\}>$
  - $G-L$，$G-e$——生成子图$<V, E-L>$，$<V, E-\{e\}>$
  - $G+e'$——$<V, E\cup\{e'\}>$
  - 例

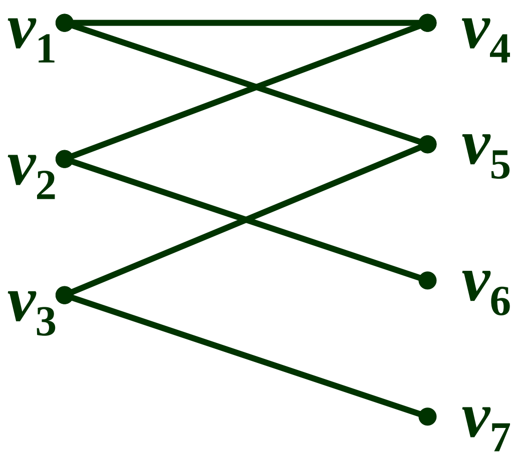


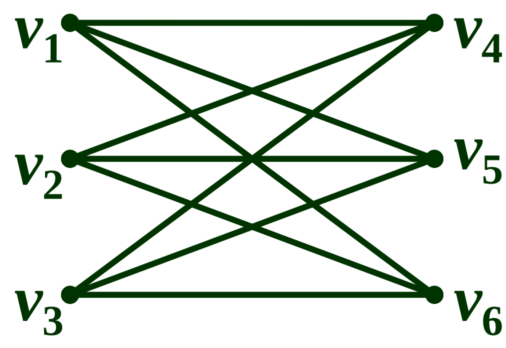
(a) G　(b) $G-u_1$　(c) $G-u_3u_5$　(d) $G-\{u_1,u_2\}$　(e) $G+u_1u_2$

二部图

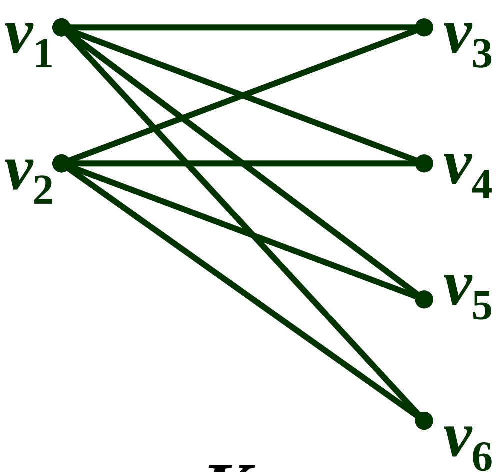
- 定义7.2.4
  - 若无向图G=<V,E>的顶点集合$V(G)$存在一个划分$V(G)=V_1 \cup V_2$,使得< V_1 >和< V_2 >都是空图，则称G为**二部图**或**双图**或**二分图**。类似可定义n部图。
  - 若V_1的每一顶点都与V_2的每一顶点邻接,则称G为完全二部图,记为$K_{m,n}$,这里$m=|V_1|$,$n=|V_2|$
    - 易知$K_{m,n}$,是$(m+n,mn)$图

例





$K_{3,3}$



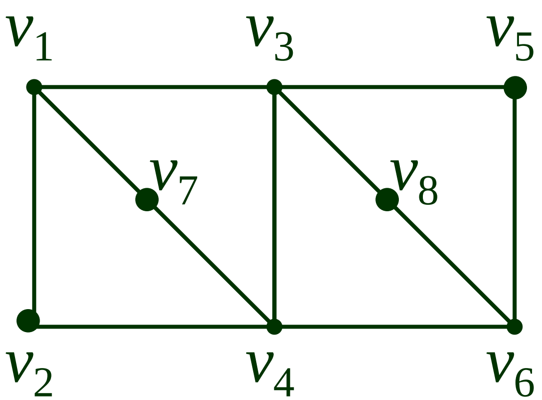
$K_{2,4}$

二部图G

$$\sum_{u \in V_1} d(u) = \sum_{v \in V_2} d(v) = |E|$$

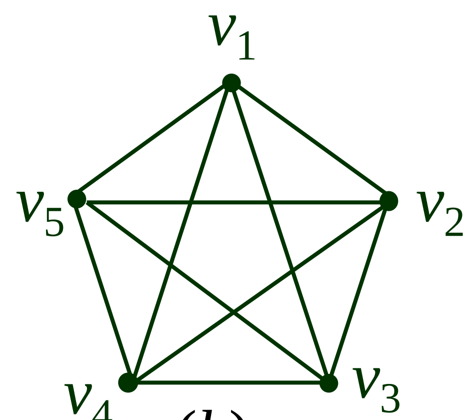
练习

- 下列图中哪些是二部图？

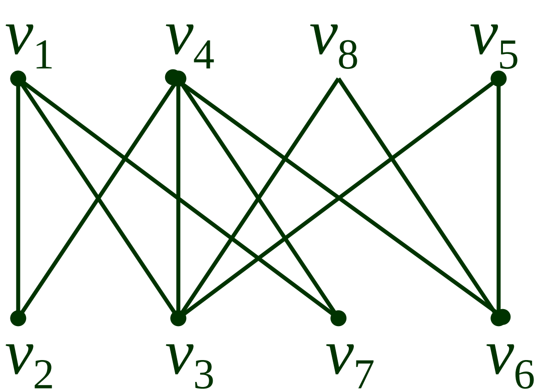


是

(a)



(b)



是

(c)

- 无向图$G=<V,E>$为二部图的充分必要条件为G中所有回路的长度均为偶数

证明： 必要性:若$G =<V,E>$为二部图,$C=(v_0,v_1,v_2,\ldots,v_k,v_0)$为任一回路,不妨设$v_0\in V_1$,则$v_0,v_2,v_4,\ldots\in V_1$,$v_1,v_3,v_5,\ldots\in V_2$,$k$必为奇数,不然,不存在边$(v_k,v_0)$。$C$中共有$k+1$条边,故$C$是偶数长度的回路。

充分性:不妨设G为任何回路长度均为偶数的连通图.取定$v_0\in V$后,定义V的一个划分:

$$V_1 =\{v|d(v_0,v)\text{是偶数}\}(\text{易见}v_0\in X);\ V_2 =V-X$$

用反证法证$V_2(V_1)$中的任二点不相邻接.若$v_i,v_j\in V_2 \wedge (v_i,v_j)\in E$,则$d(v_0,v_i),d(v_0,v_j)$都为奇数,由此推出$G$中有过$v_0,v_i,v_j$的长为奇数的回路的矛盾.

图的同构

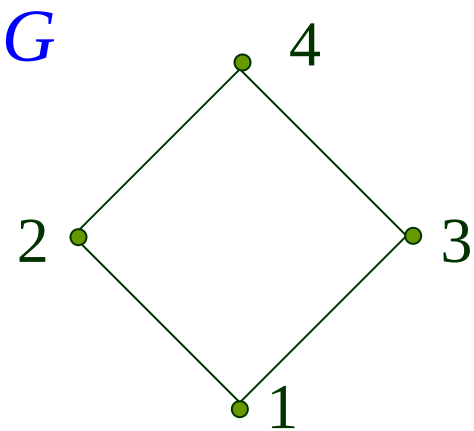
- 定义7.2.5
  - 图G和图H称为同构的，记作$G \cong H$，是指：存在

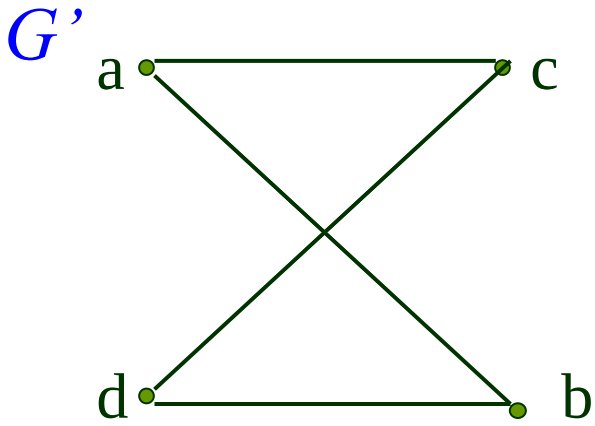
$$f: \quad V(G) \to V(H) \qquad\qquad 1\text{-}1,\text{onto}$$

使得$u,v \in G$，$u\ Adj\ v \quad iff \quad f(u)\ Adj\ f(v)$，即$f$保持邻接关系不变

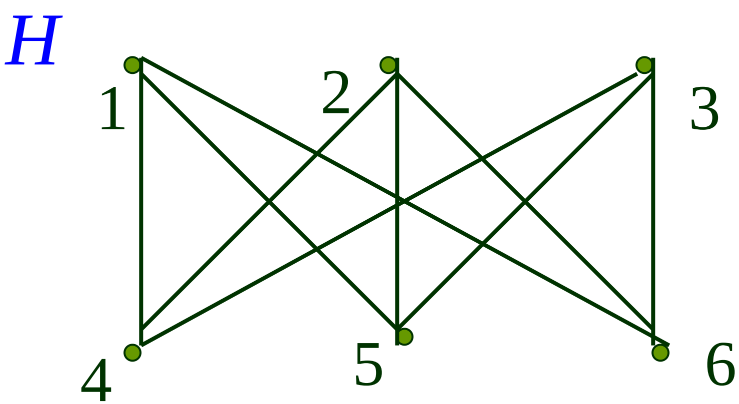
  - 两图同构是相互的: $G \cong G' \Leftrightarrow G' \cong G$.
  - 两图同构时不仅结点之间要有一一对应关系,而且要求这种对应关系保持结点间的邻接关系.

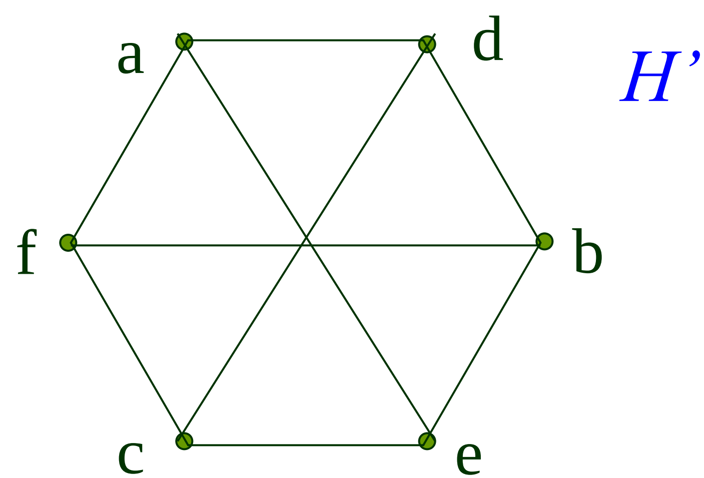
例





f: $V(G) \to V(G')$
$f(1)=a$, $f(2)=b$, $f(3)=c$,
$f(4)=d$
$\forall x,y \in V(G)$, 若x Adj y,
则 $f(x)$ Adj $f(y)$

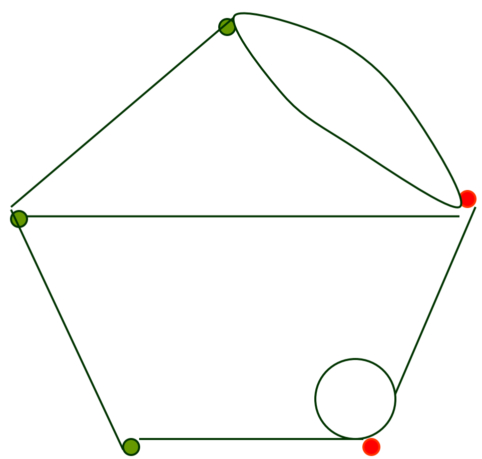




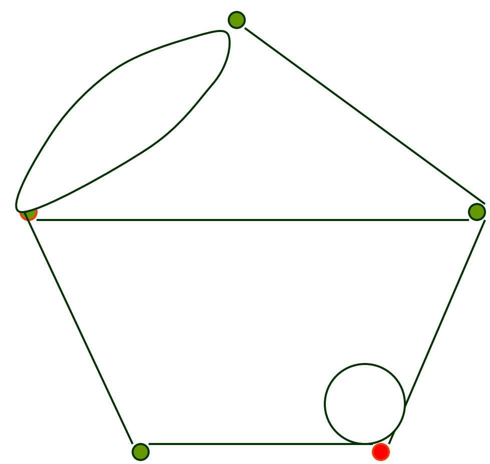
$1\to a, 2\to b, 3\to c,\ 4\to d, 5\to e, 6\to f$

两图同构的必要条件

- 结点数相等
- 边数相等
- 度数相同的结点数相等
- 注意：不是充分条件



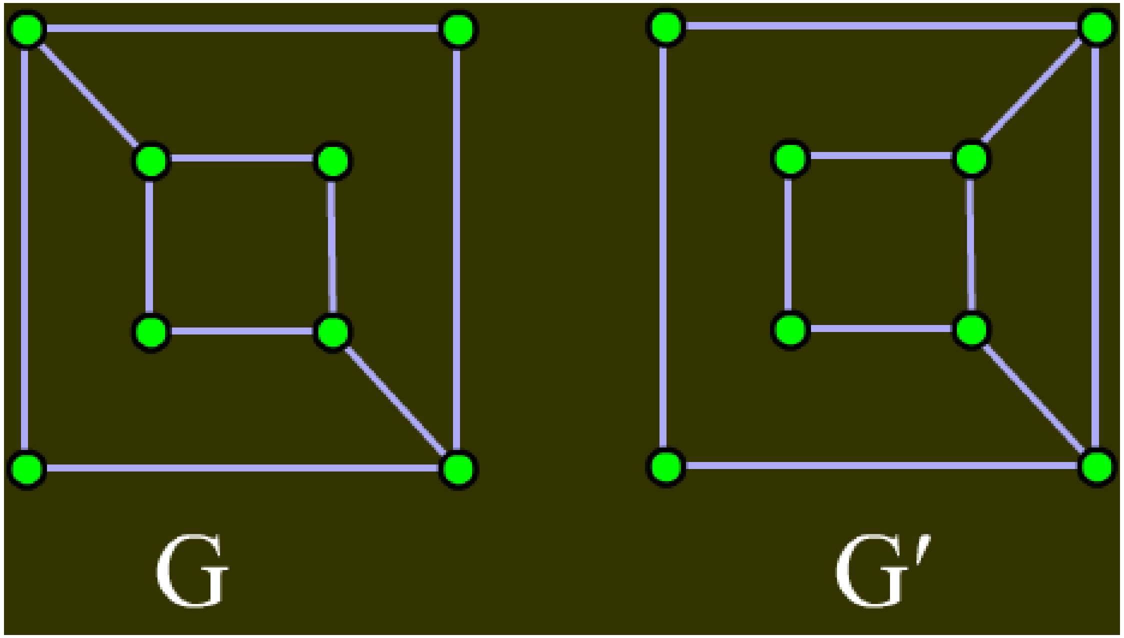
G



G’

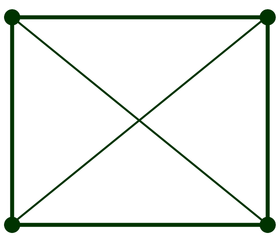
思考题

- 下图中G=（V，E）与G'=（V'，E'）同构吗?



补图

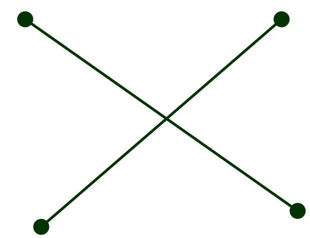
- 定义7.2.6
  - 设G和H是K_p的两个生成子图，若$E(G)\cap E(H)=\Phi$, $E(G)\cup E(H)=E(K_p)$, 则称图H与图G互补,记为$H=G^c$或$H=\sim G$或$H=\overline{G}$



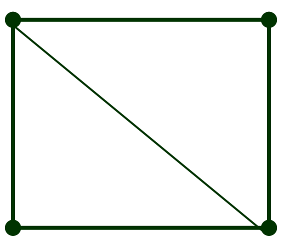
K_4

G

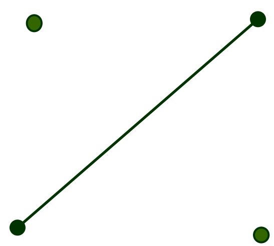
H



G'

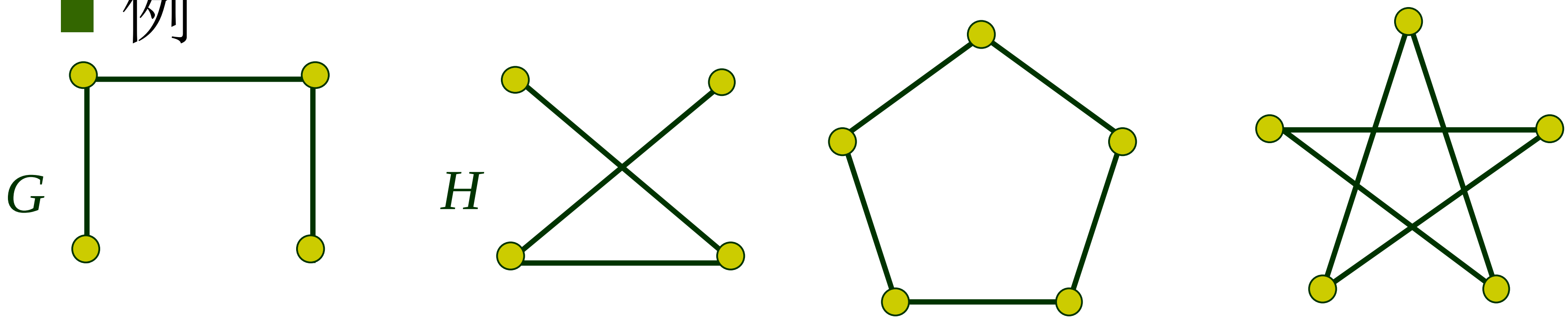


H'



自补图

- 若图H是图G的补图，且$G \cong H$，则称G为自补图
- 例



自补图的阶只可能是$4k$，或$4k+1$

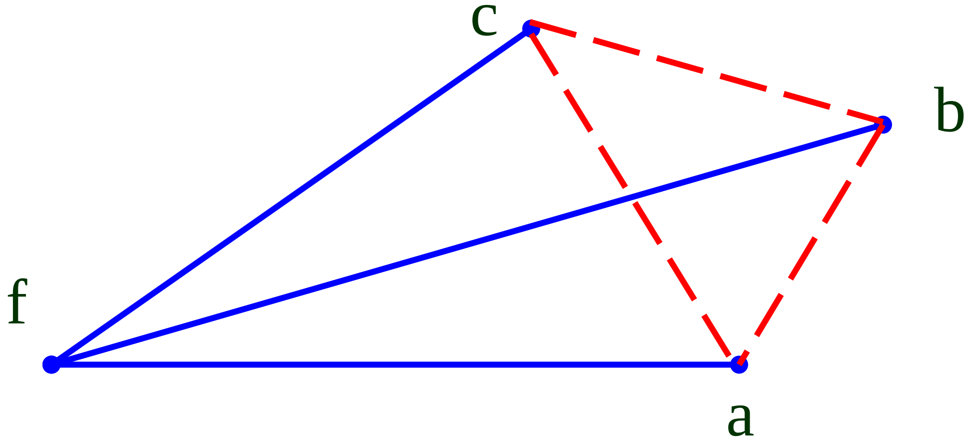
证明：设(n,m)图G是自补图，

则$\sim G$的边数为$n(n-1)/2-m=m$

$\therefore\ n(n-1)=4m$

思考题

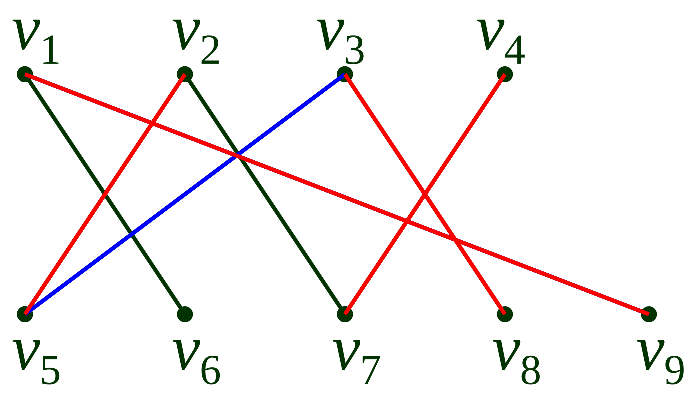
- 用红色和蓝色的笔给 K_6的边着色。对于任何一种随意的涂边方式，总有一个所有边被涂上红色的 K_3，或一个所有边被涂上蓝色的K_3
- 推论:任何6人的人群中,或者有3人互相认识,或者有3人彼此陌生

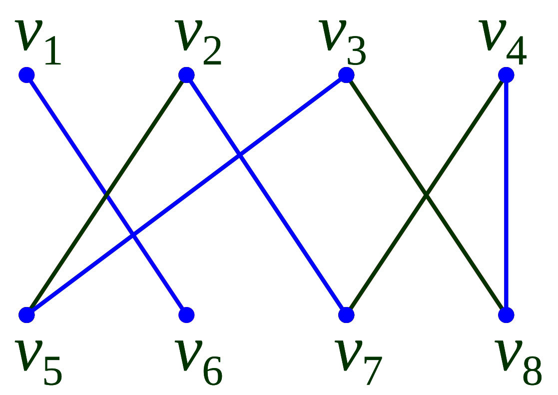


顶点无关集

- 定义7.2.7
  - 图G的顶点无关集(或称孤立集、独立集)S是$V(G)$的非空子集，且 $\forall u,v \in S$， u $NAdj$ v
  - 图G的线无关集(或称一个**匹配**)L是$E(G) \neq \Phi$的非空子集，且$\forall e_1,e_2 \in L$， e_1 $NAdj$ e_2
  - 含有最多边数的匹配称为G的**最大匹配**
  - 包含G的每个顶点的线无关集(即每个顶点的度都为1的生成子图)称为G的一个**1-因子**或一个**完美匹配**
  - 最大匹配与完美匹配均**不唯一**

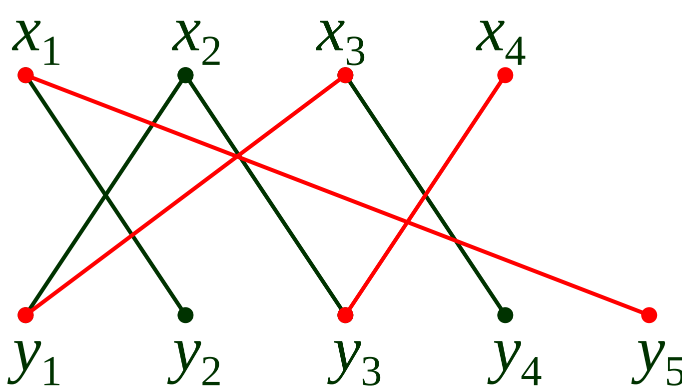
匹配——例





交替链*

- 如果二部图G中的一条链由不属于匹配M的边和属于M的边交替组成,且链的两端点不是M中边的端点,那么称此链为G中关于匹配M的交替链



$x_2y_1x_3y_4$

标记法求交替链*

- 首先把X中所有不是M的边的端点用()加以标记,然后交替进行以下所述的过程I和II。

  I.选一个X的新标记过的结点,比如说x_i,用(x_i)标记不通过在M中的边与x_i邻接且未标记过的Y的所有结点。对所有X的新标记过的结点重复这一过程

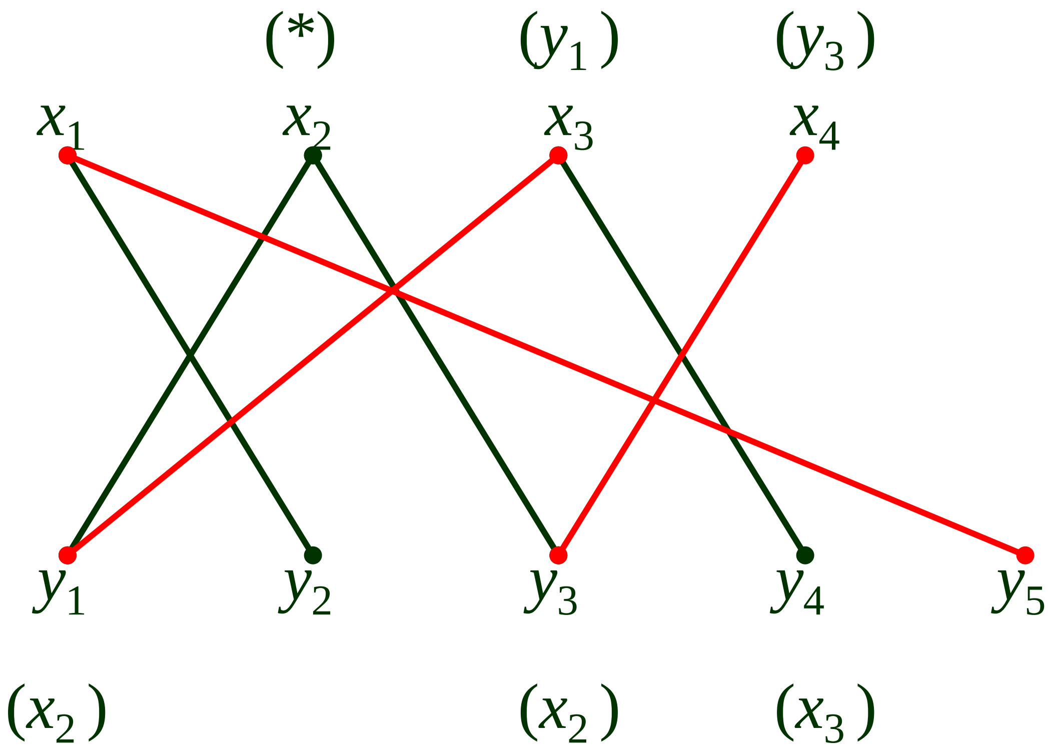
  II.选一个Y的新标记过的结点,比如说y_i,用(y_i)标记通过M的边与y_i邻接且未标记过的X的所有结点。对所有Y的新标记过结点重复这一过程。

(1) 把x_2标记(*)

(2) 从x_2出发,应用过程I,把y_1和y_3标记(x_2)

(3)从y_1出发,应用过程II,把x3标记(y_1)。从y_3出发,应用过程II,把x_4标记(y_3)

(4)从x_3出发,应用过程I,把y_4标记(x_3),因y_4不是M中边的端点,说明已找到了一条交替链,即(x_2,y_1,x_3,y_4)

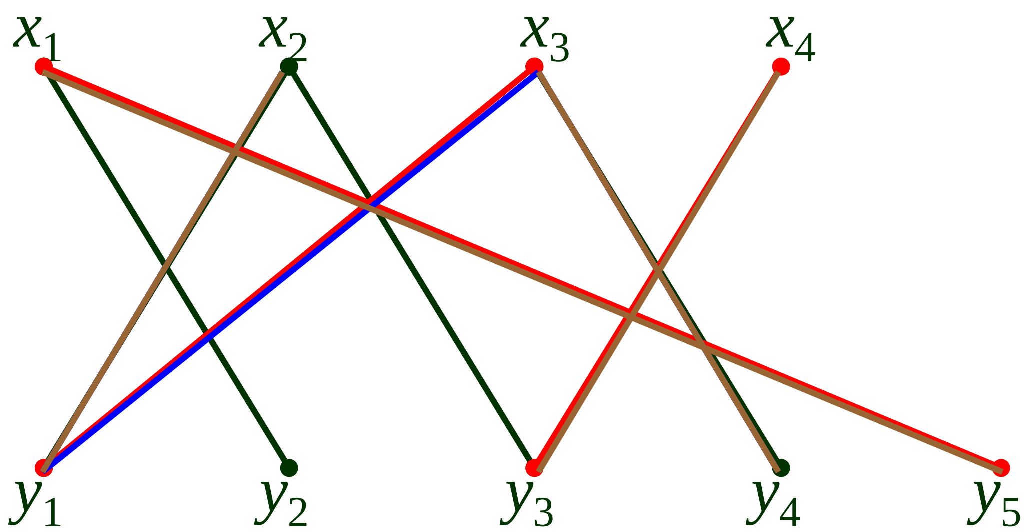


求最大匹配*

- 找出一条关于匹配M的交替链γ
- 把γ中属于M的边从M中删去,而把γ中不属于M的边添到M中,得到一新集合M丶,此M' 也是G的匹配
  - 添入的边自身不相交
  - 添入的边不与M中不属于γ的边相交
- 反复进行这样的过程,直至找不出关于M的交替链为止

例

- 取一个初始匹配M={x_1y_5, x_3y_1, x_4y_3}
- 用标记法从点x_2开始求得一条交替链:γ=($x_2y_1x_3y_4$)
- 用γ调整匹配M:将γ中属于M的边删去并将其中不属于M的其它边添加到M中，形成M'
- 因对M'用标记法只能从y_2开始,但都不能求出M'的任何交替链,故判定M'是一个最大匹配

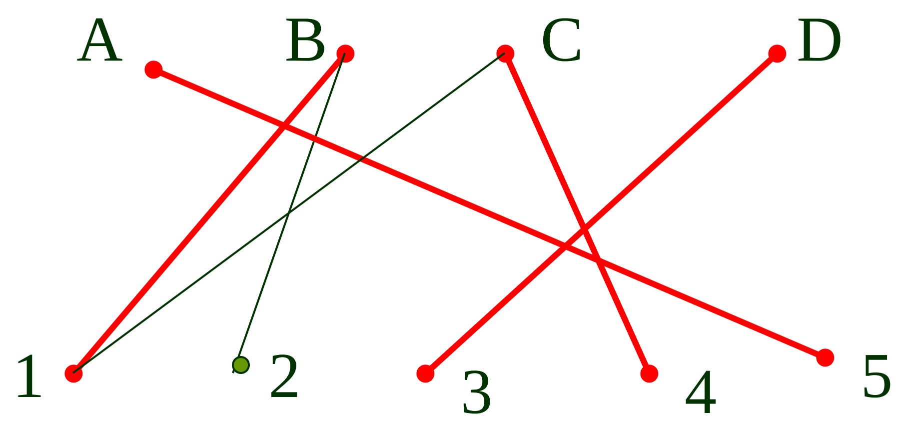


M={x_1y_5, x_3y_1, x_4y_3}

M={x_2y_1, x_1y_5, x_3y_4, x_4y_3}

练习

- 某教研室有4位教师:A,B,C,D.A能教课程5;B能教1,2;C能教1,4;D能教课程3.能否适当分配他们的任务,使4位教师担任4门不同课并且不发生安排教师教他不能教的课的情况?



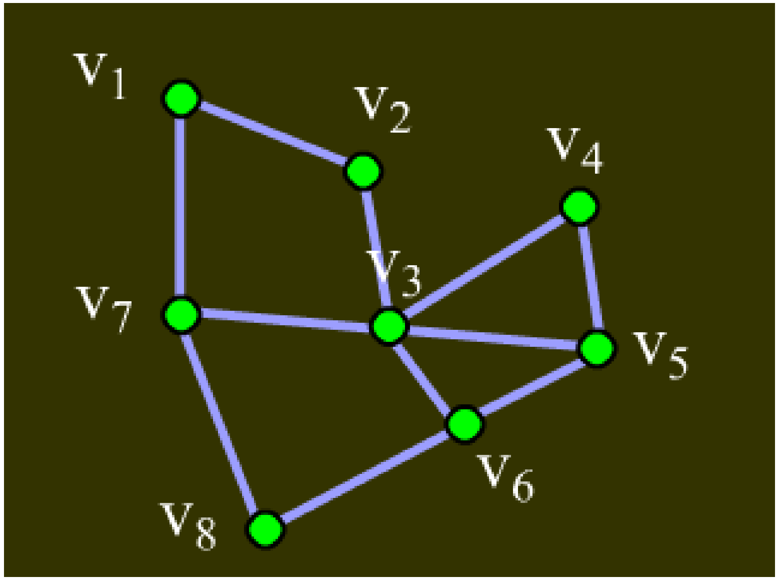
7.3 路径、圈及连通性

- 定义7.3.1

  设$v_i \in G$, $v_i\, Adj\ v_{i+1}(0 \le 0 \le n\text{-}1)$,则：

  - 顶点序列$v_0v_1 \ldots v_n$称为一条v_0到v_n的长度为n的**通道**。若$v_0=v_n$，则称它为**闭通道**
  - 没有重复边的通道称为**迹**，闭迹成为**圈**。
  - 完全没有重复顶点的通道称为**路径**，闭路径称为**初等圈**
  - 通常，用k-通道表示长度为k的通道

例



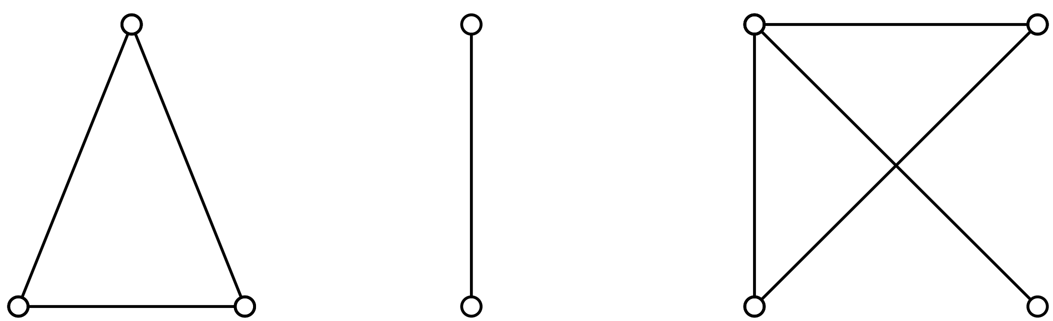
$v_1v_2v_3v_4v_5$是一条4-路径

$v_1v_2v_3v_4v_3$是一条4-通道

$v_1v_2v_3v_4v_5v_6v_3v_7$是一条7-迹

$v_1v_2v_3v_4v_5v_6v_3v_7v_1$是一个圈（闭迹）

- 定义7.3.2 设$G=<V,E>$是图,且v_i、$v_j\in V$。
  - 如果从v_i到v_j存在一条路径,则称v_j从v_i可达。v_i自身认为从v_i可达
  - 图G中,如果任两结点可达,则称图G是连通的(*connected*),称G为**连通图**;
  - 称G的极大连通子图G'(没有包含G'的更大的子图G''是连通的)是G的连通分图(简称分图,或连通支,简称支)。
  - 仅有一个孤立结点的图定义它为连通图



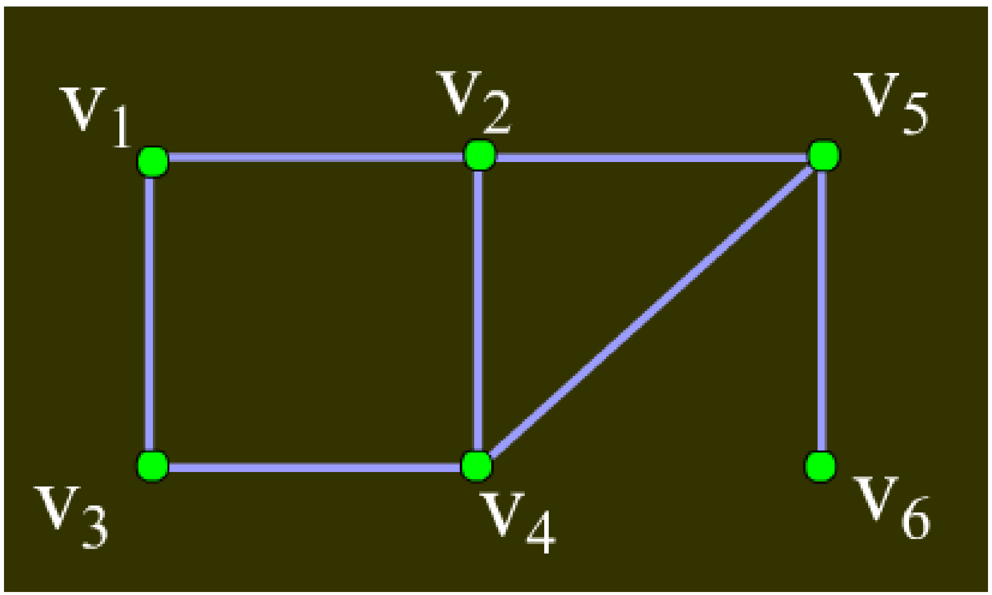
三支图

- 两顶点之间有通道 *iff* 两顶点之间有路径
  - 在一个具有n个结点的简单图$G=<V,E>$中,如果从v_1到v_2有一条通道,则从v_1到v_2有一条长度不大于n-1的路径

证明： 假定从v_1到v_2存在一条通道$(v_1,\ldots,v_i,\ldots,v_2)$, 如果其中有相同的结点$v_k$, 如$(v_1,\ldots,v_i,\ldots,v_k,\ldots,v_k,\ldots,v_2)$, 则删去从$v_k$到$v_k$的这些边,它仍是从$v_1$到$v_2$的路径, 如此反复地进行直至$(v_1,\ldots,v_i,\ldots,v_2)$中没有重复结点为止，得到一条路径。

路径的长度比所经结点数少1,图中共n个结点,故路径长度不超过n-1。

- 在图$G=<V,E>$中,从结点v_i到v_j最短路径的长度叫从v_i到v_j的距离,记为$d(v_i,v_j)$。若从v_i到v_j不存在路径,则$d(v_i,v_j)=\infty$



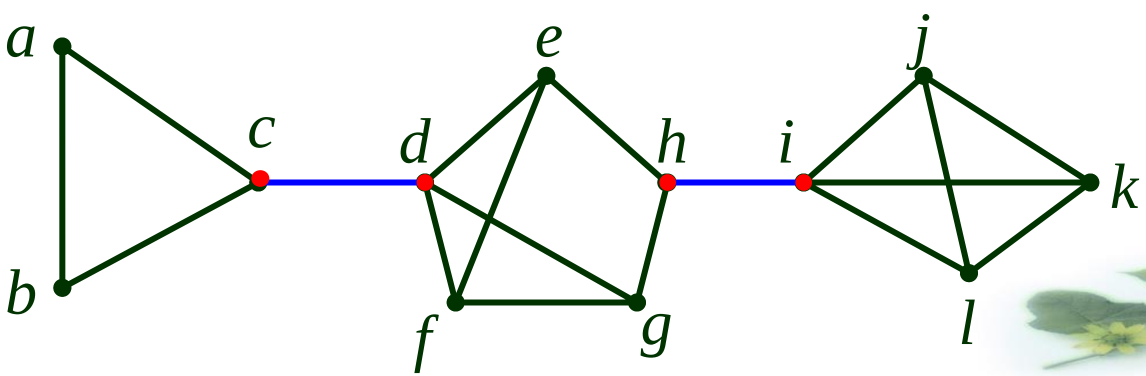
$$d(v_1,v_5)=2$$

$$d(v_1,v_2)=1$$

$$d(v_1,v_6)=3$$

割点和桥

- 定义7.3.3
  - 设图G是连通图，若$S \subset V(G)$，且G-S不连通或为孤立点，则称S为G的**点分离集**(割点集)；若$L \subseteq E(G)$，且G-L不连通，则称L为G的**线分离集**(割边集)；
  - 特殊的，若$u \in V(G)$，且G-u不连通，则称u为G的**割点**(cut-node).若$e \in E(G)$，且G-e不连通，则称u为G的**割边**(cut-edge) **(桥, bridge)**
- G的极大的没有割点的子图称为G的**块**(block)
- G的极大完全子图称为G的**团**(clique)
- G的每条边及每个非割点都恰好属于一个块，而每条边至少属于一个团



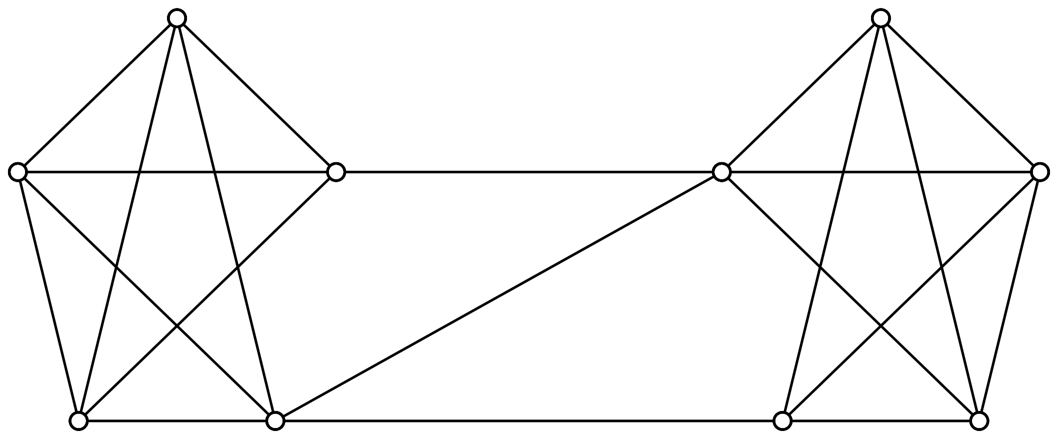
点连通度、线连通度

- 定义7.3.4
  - 设G是简单图，则G的点连通度$\gamma(G)$是使连通图G变成不连通图必须去掉的顶点数；线连通度$\varepsilon(G$）是使连通图G变成不连通图所必须去掉的边数。

$$\gamma(G)=\begin{cases} 0 & G\text{不连通} \\ p-1 & G\text{为完全图} \\ \min\{\# S \mid S\text{是}G\text{的点分离集} & G\text{为连通非完全图} \end{cases}$$

$$\varepsilon(G)=\begin{cases} 0 & G\text{不连通} \\ p-1 & G\text{为完全图} \\ \min\{\# L \mid L\text{是}G\text{的线分离集} & G\text{为连通非完全图} \end{cases}$$

- 例7.3.4



$\gamma(G)=2$，$\varepsilon(G)=3$

- 定理7.3.1
  - 对任何简单连通图G，有

$$\gamma(G)\le\varepsilon(G)\le\delta(G)$$

- 定理7.3.3
  - p阶连通图至少有p -1条边

证明：对p行数学归纳法

(1) p=1时，一阶连通图有0条边

p=2时，二阶连通图有1条边

p=3时，三阶连通图至少有2条边

(2) 假设k阶连通图至少有k -1条边， $k \geq 3$，现考虑k +1阶连通图G，取G中一非割点u，由G的连通性可知$d(u) \geq 1$，而G -u是k阶连通图，它至少有k-1条边，故G至少有k条边

- 定理7.3.2
  - 设$C(G)$表示(p,q)图G的支图数，则有：

$$p - C(G) \le q$$

证明：设$p_1,p_2,...,p_{C(G)}$和$q_1,q_2,...,q_{C(G)}$是G的每一个分图的顶点数和边数

由于各分图都是连通子图，所以有$q_i \ge p_i - 1$

则$\sum q_i \ge \sum (p_i - 1)$，即$q \ge p - C(G)$

思考题

- $(n,n\text{-}1)$连通图至少有一个奇度顶点$(n>1)$
- 若图G恰有两个奇度顶点，则必有连接这两顶点的路径
- 若图G中顶点的最小度数大于等于2，则图G必含圈
- 至少有n条边的n阶图必含圈
- 若图G中顶点的最小度数大于等于k，则G有k长路
- 简单连通非完全图G中，必有顶点u,v,w,使得 u *Adj* v, v *Adj* w, u *NAdj* w
- 若图G不连通，则图G的补图连通

思考题

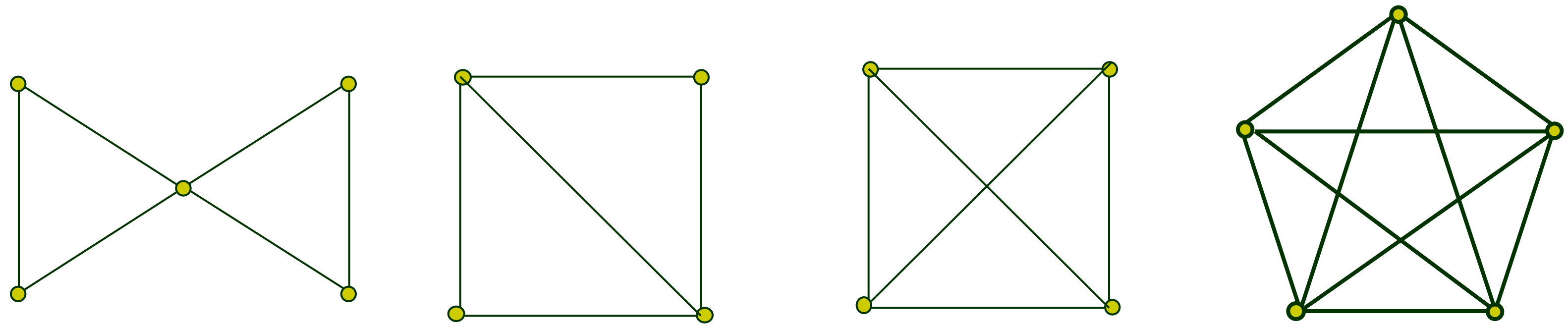
- 顶点x是连通图G的割点，*iff* $\exists u,v\in G$，使得连接u和v的路径都经过x
- 边e是G的桥，*iff* e不包含在G的任一圈中
- 若连通图中每个顶点的度为偶数，则G无桥
- 设G是n阶简单图($n\geq 3$)，如果$\forall u,v\in G$有

$$d(u)+d(v)\geq n-1$$

  那么G是连通的

7.4 *Euler*图和*Hamilton*图

- 定义7.4.1
  - 包含图中所有顶点、所有边的迹叫*Euler*迹，闭的*Euler*迹叫*Euler*圈，恰由*Euler*圈组成的图叫*Euler*图。



- 定理7.4.1
  - 图G为欧拉图 iff G的每一结点的度均为偶数

证明（1）必要性

设图G是Euler图，那么它显然是一个连通图，另一方面，由于图G本身为一闭迹，它每经过一个顶点一次，便经过与之相关联的两条边，因而各顶点的度均为该闭迹经历此顶点的次数的两倍，从而均为偶数。

(2) 充分性

若G连通且每个顶点的度为偶数，那么由7.3节的习题 6. 可知图G必含圈。

设C_1是G的圈，若$C_1=G$，则G是Euler图。

否则考虑图$G_1= G-E(C_1)$，它由若干孤立点及若干非平凡连通支组成，且每个顶点的度为偶数，于是它的每个非平凡支必含圈

任取一个与C_1有公共顶点的圈C_2(由G的连通性，这样的圈必存在)，若$C_1 \cup C_2= G$，则G是Euler图。

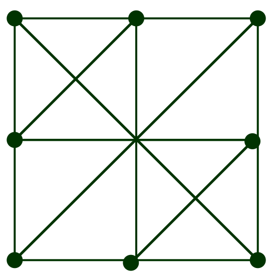
否则考虑图$G_2= G-(\mathrm{E}(C_1)\cup \mathrm{E}(C_2))$，它的每个顶点的度仍为偶数，从$G_2$中取一个与$C_1$或$C_2$有公共顶点的圈$C_3$，再考虑图$G_3= G-(\mathrm{E}(C_1)\cup \mathrm{E}(C_2)\cup \mathrm{E}(C_3))$

如此继续下去，设在第t步我们得到图:

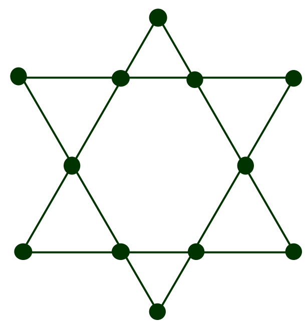
$G-(\mathrm{E}(C_1)\cup \mathrm{E}(C_2)\cup \ldots \cup \mathrm{E}(C_t))$为空图。

这样$G = C_1 \cup C_2\cup \ldots\cup C_t$为Euler图。

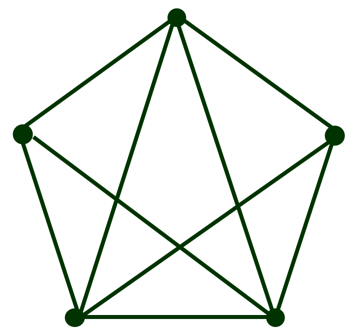
- 推论　图G含Euler迹，*iff* G连通且恰有两个奇度顶点
- 下图中的各图是否可以一笔画出？



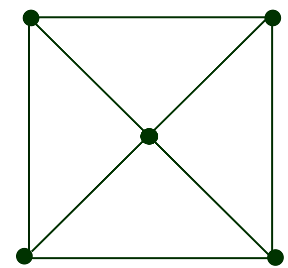
N



Y



Y



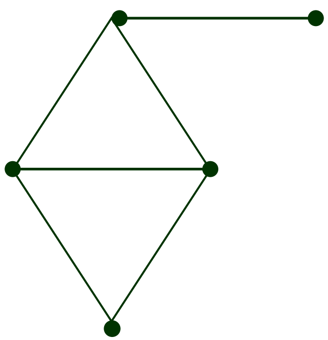
N

思考题

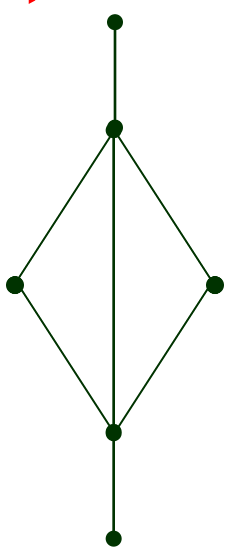
- 有2k个奇度点的连通图至少需要几笔才能画下来？
- 令$C(G)$表示图G的分图数，若G是*Euler*图，则$\forall u \in G$，$C(G-u) \le d(u)/2$

*Hamilton*图

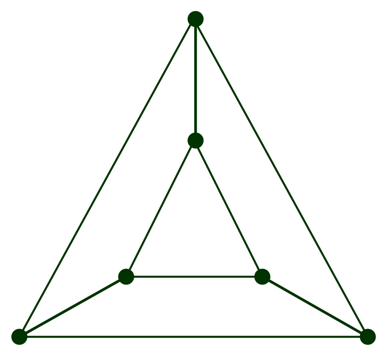
- 定义7.4.2
  - 包含图中所有顶点(恰好一次)的路径叫***Hamilton*路径**，包含图中所有顶点(恰好一次)的圈叫***Hamilton*圈**，含有*Hamilton*圈的图叫***Hamilton*图**



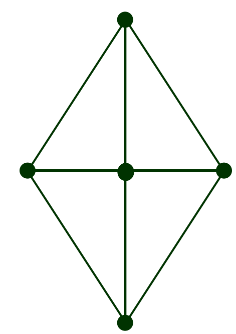
H路



无



H图



H图

*Hamilton*图的充分条件

- 定理7.4.2
  - 设G是p阶简单图($p\geq 3$)，如果$\forall u,v\in G$：

$$d(u)+d(v)\geq p-1$$

那么G中有一条*Hamilton*路径

证明：前面已证这样的图是连通的，故G中任意两点之间有路径，设$P=v_1v_2\ldots v_m$是G中最长的一条路径(长度为m-1)可证明它就是一条*Hamilton*路径，即$m=p$

假若不然，若$m<p$，我们可以按以下方法构造一条m长路径：

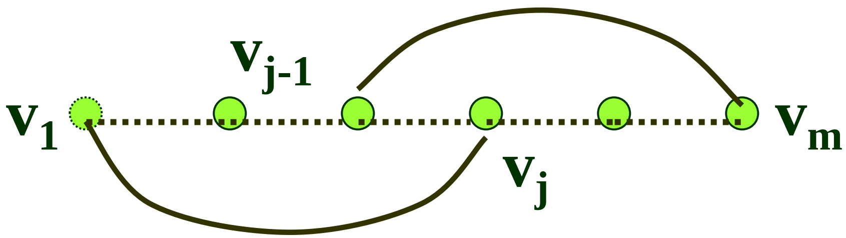
在$m<p$时，由P的最长性可知，v_1，v_m只能与P中的点邻接，分两种情况讨论

情况1：若v_1 *Adj* v_m，则$v_1v_2\ldots v_mv_1$是一个m长的圈

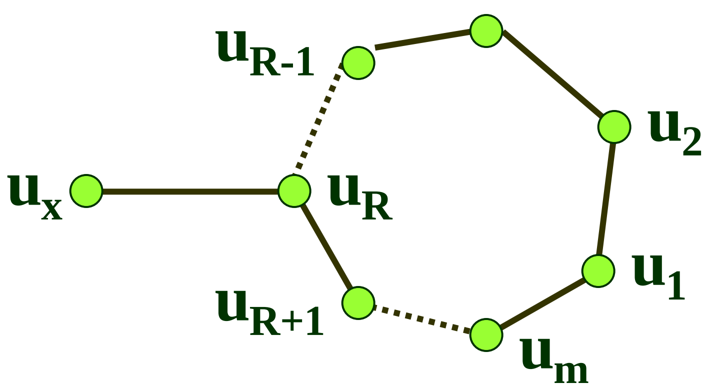
情况2：若v_1 *NAdj* v_m，设v_1只与$v_{i1}, v_{i2}, \ldots v_{ik}$邻接, 其中$2\leq i_j\leq m-1$

那么v_m必与$v_{i1-1}, v_{i2-1}, \ldots v_{ik-1}$之一, 比如说$v_{j-1}$邻接, 否则与$v_m$邻接的顶点不超过$m-1-k$个, 即$d(v_1)+d(v_m)\leq k+m-1-k<p-1$

矛盾



现在已经构造得到一个m长的圈，重新标记图的顶点使这个圈为$u_1u_2...u_mu_1$



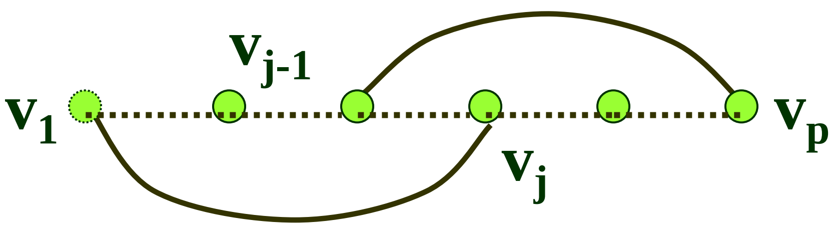
因为G连通，且前面假设$m<p$，所以G中必有一个不属于该圈的顶点u_x与该圈的某一个顶点邻接

于是G有一条m长路径$u_xu_Ru_{R+1}\ldots u_mu_1u_2\ldots u_{R-1}$，与$P$是最长路矛盾

推论

- $\forall u,v\in G$, $d(u)+d(v)\geq p$,那么p阶图G是*Hamilton*图

证明：已证明这样的图中有*Hamilton*路径$P=v_1v_2\ldots v_p$



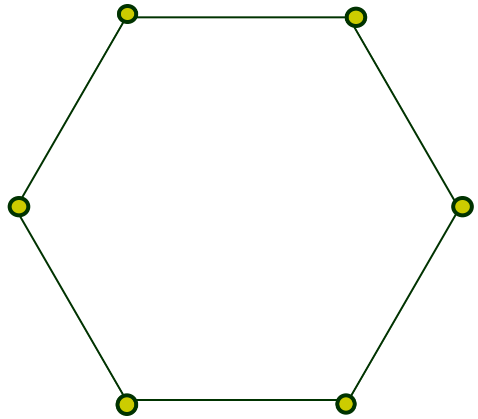
情况1：若v_1 *Adj* v_p， 则$v_1v_2\ldots v_pv_1$是一个*Hamilton*圈

情况2：若v_1 *NAdj* v_p , 设v_1只与v_{i1}, v_{i2} ,… v_{ik}邻接, 其中$2\leq i_j\leq p-1$

那么v_p必与v_{i1-1}, v_{i2-1} ,… v_{ik-1}之一, 比如说v_{j-1}邻接, 否则与v_p邻接的顶点不超过$p-1-k$个, 即$d(v_1)+d(v_p)\leq k+p-1-k<p$

在这种情况下$v_1v_2\ldots v_{j-1}v_p\, v_{p-1}\ldots v_jv_1$是一个*Hamilton*圈

- **注意**：定理7.4.2的条件是充分的但非必要



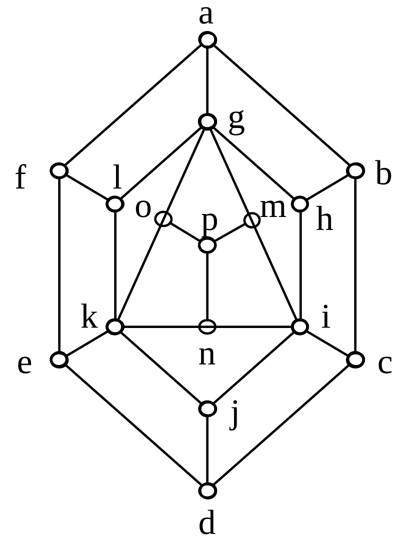
- 推论 在简单无向图中,若每一顶点的度数大于等于于$p/2(p\geq 3)$,则该图是*Hamilton*图

- 例7.4.3 在七天内安排七门课的考试，要求由同一教师主考的两门课不能排在连续的两天。每位教师至多主考四门课。问是否存在这样的安排？

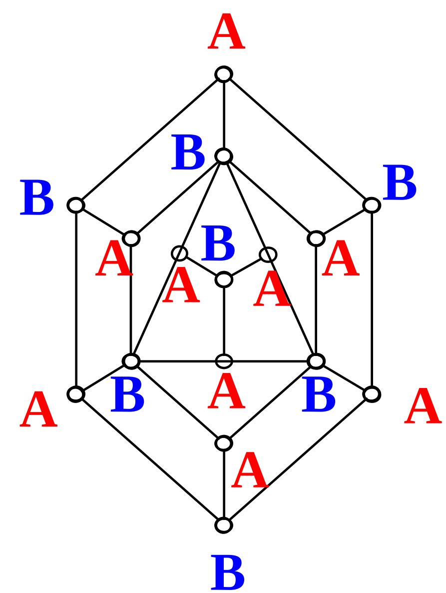
解：用七门考试课程作图G的七个顶点，两个顶点之间连线的条件是：这两个顶点代表的课程不是同一教师主考。这样，图G的每个顶点的度至少是3，所以任何两顶点的度和至少是6，于是存在满足题中要求的安排。

判断*Hamilton*图的方法

- 【方法一】标记法
  - 例7.4.4



(a)



(b)

- 如果图中有*Hamilton*圈，那么它必然交替经过标有*A*的顶点和标有*B*的顶点
- 图中共有九个顶点标有*A*，而仅有七个顶点标有*B*，所以该图中不可能存在*Hamilton*圈(也不可能含有*Hamilton*路径)

【方法二】*Hamilton*图的必要条件

- 定理7.4.3
  - 若$G=<V,E>$是*Hamilton*图,则对V的每个非空真子集S均有:

$$C(G-S)\leq |S|$$

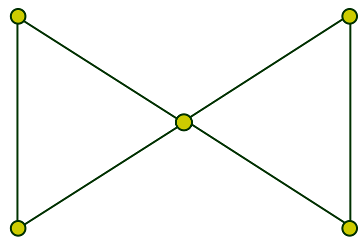
证明：设H是图的一个*Hamilton*圈,则对于S中的任一顶点v_1，$H-v_1$是一条包含G中除v_1外的所有顶点的路径。

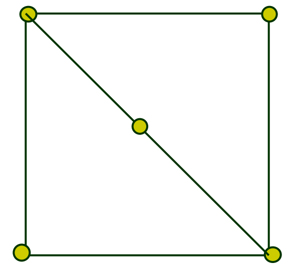
若再取S中的顶点v_2，则$C(H-v_1-v_2)\leq 2$，由数学归纳法原理可得$C(H-S)\leq |S|$

又$H-S$是$G-S$的一个生成子图，故

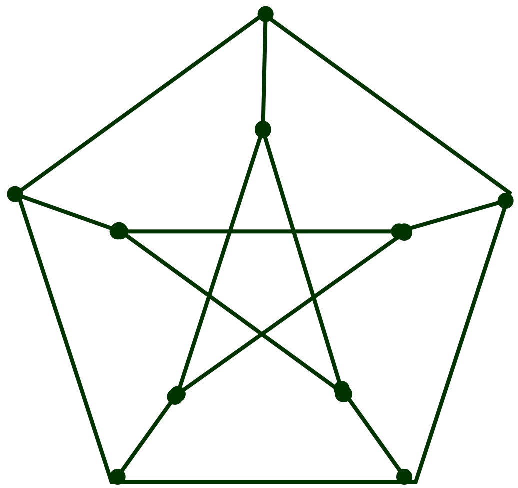
$$C(G-S)\leq C(H-S)\leq |S|$$

例





- **注意**：是必要条件，非充分条件



- 推论 若图$G=\langle V,E\rangle$含有*Hamilton*路径，则对于V的任意一个真子集S，有

$$C(G-S)\le|S|+1$$

思考题

- 若G有度为1的顶点，G是否可能是*Hamilton*图
- 若G有割点，G是否可能是*Hamilton*图
- 若G有桥，G是否可能是*Hamilton*图
- 若$m \neq n$，$K_{m,n}$是否是*Hamilton*图，若$m=n$呢？

解：若$m \neq n$，$K_{m,n}$不是*Hamilton*图

不妨设$m>n$，$|X|=m,|Y|=n$

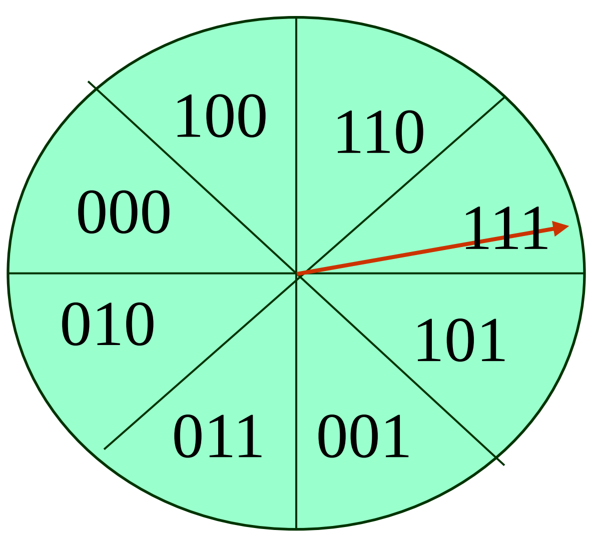
则$\omega(G-Y)=m>|Y|=n$

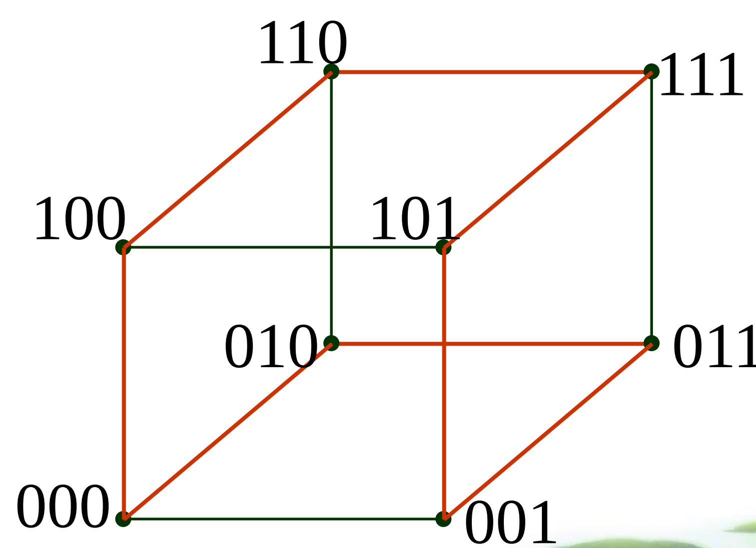
若$m=n$，$K_{m,n}$是*Hamilton*图

任意两点的度数之和为$2n$

*Hamilton*图对编码的一个应用

- 把圆周等分成2^n个扇形,每一扇形代表一个n位二进制串用以表示旋转指针的位置.当n=3时右下图是一例.由于交界附近会出现误差,自然要求相邻二数尽可能接近,即要求相邻二数只有一位不同
- 此问题可归结为求立方图$G=\langle V,E\rangle$,$V=\{000,001,\ldots,111\}$,$\langle ijk,uvw\rangle\in E$当且仅当条件成立,的一条*Hamilton*路.(解存在但不唯一)





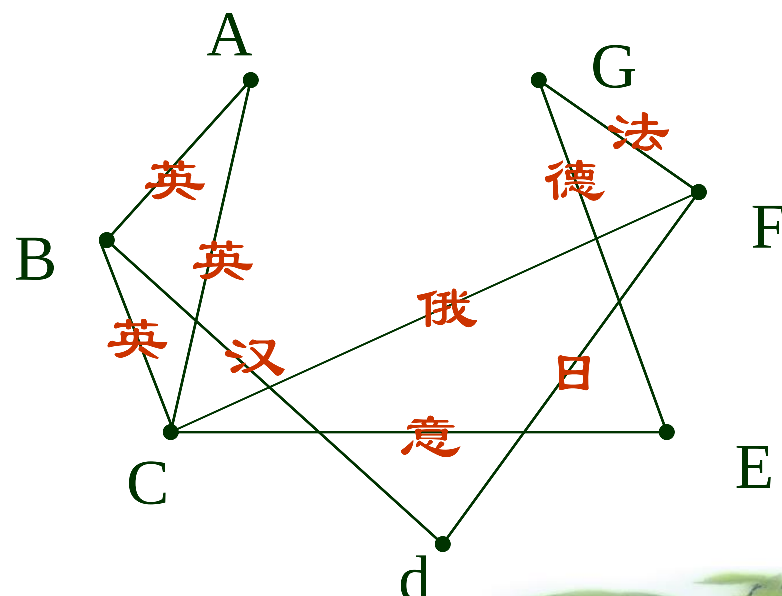
练习

- 已知关于a，b，c，d，e，f和g的下述事实：

  a 讲英语；b 讲英语和汉语；c 讲英语、意大利语和俄语； d 讲日语和汉语；e 讲德国和意大利语； f 讲法语、日语和俄语；g 讲法语和德语

  试问这七个人应如何排座位，才能使每个人都能和他身边的人交谈？

解：结点为客人;会共同语言的2结点相邻接.则问题归结为求此图的一条*Hamilton*回路



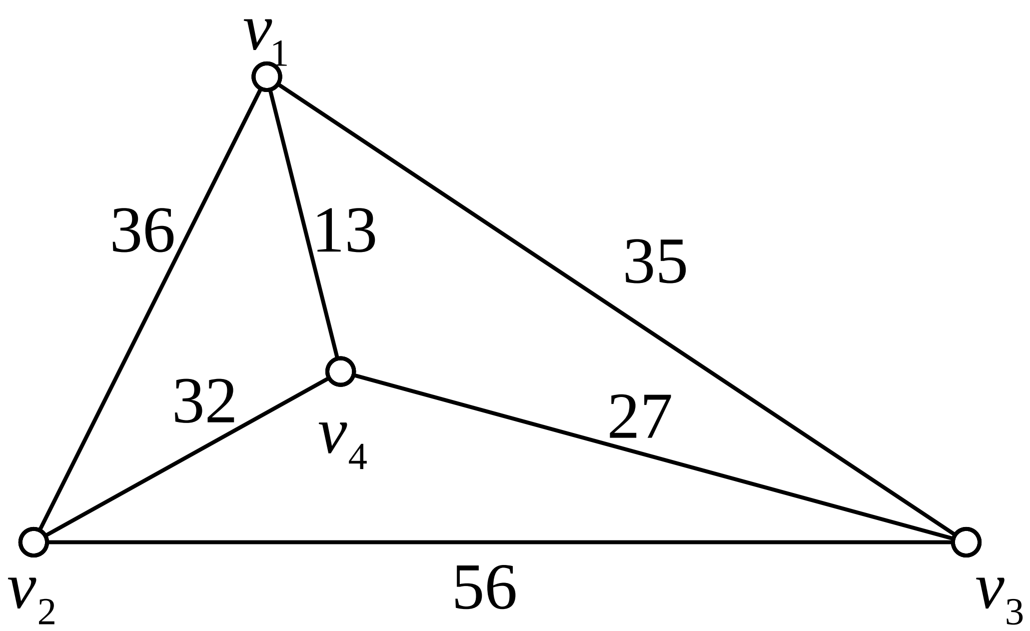
加权图

- 定义7.4.3
  - 在无向图G的每条边上都指定了一个正实数(某些时候，可规定取非负实数)后， G就被称作加权图(也有称网络的)。边上的实数叫做这条边的权，边uv上的权记作 $W(u,v)$
    - W实际上是$E(G)$到正实数之集R^+的函数，称它为图G的权函数
- 定义7.4.4
  - 在加权图G中，如果$u,v,x\in G$，总有

$$W(u,x)+W(x,v)\geq W(u,v)$$

则称W为距离权， G叫距离权加权图，$W(u,v)$叫边uv的长度，图G中通道、迹、路径或圈的长度是指它们所含边的长度之和。

例

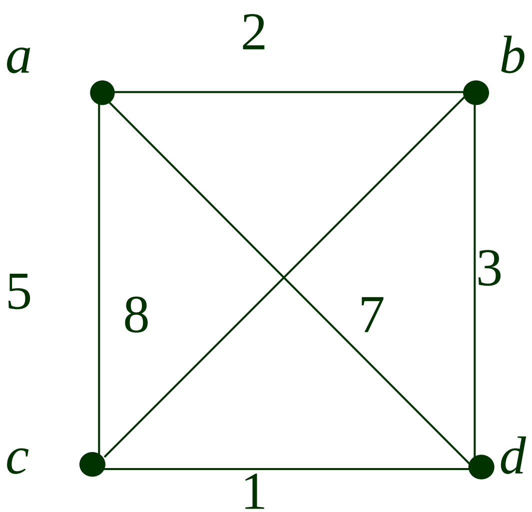


巡回售货员问题(TSP)

- *Traveling Salesman Problem*巡回售货员问题
  - 一个售货员希望去访问n个城市的每一个,开始和结束于v_1城市。每两城市间都有一条直接通路,我们记v_i城市到v_j城市的距离为$W(i,j)$,问题是去设计一个算法,它将找出售货员能采取的最短路径
  - 定义7.4.5
    - 在距离权加权(完全)图中求最短长度的*Hamilton*圈的问题叫巡回售货员问题

TSP问题的复杂性

- 最原始的方法
  - 找出所有可能的旅行路线，从中选取路径长度最短的简单回路



序号	路径	长度
1	$a \to b \to c \to d \to a$	18
2	$a \to b \to d \to c \to a$	11
3	$a \to c \to b \to d \to a$	23
4	$a \to b \to d \to b \to a$	11
5	$a \to d \to b \to c \to a$	23
6	$a \to d \to c \to b \to a$	18

可能的解有$(n-1)!/2$个， $(n-1)!/2>2^{n-2}$， $(n\geq 4)$

NP完全问题(NP_Complete)

- *non-deterministic polynomial* ——非确定性多项式(NP)
- P问题
  - 可以由一个确定型图灵机在多项式表达的时间内解决的问题
- NP问题
  - 在给定肯定解的情况下，可在多项式时间内验证的问题
- NP完全问题
  - NP中“最难”的问题
  - TSP
  - 无法在多项式表达的时间内解决

练习

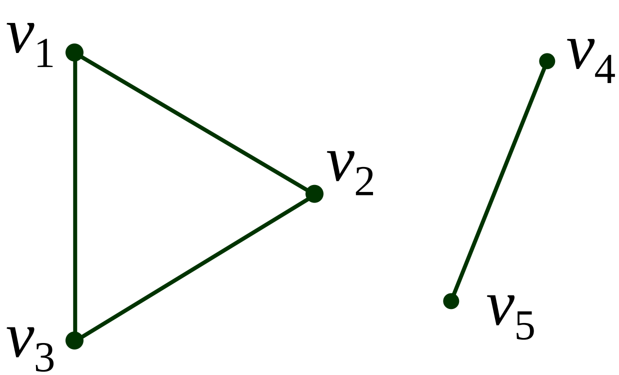
- 请画出满足以下条件的图
  - 是*Euler*图，但不是*Hamilton*图
  - 不是*Euler*图，但是*Hamilton*图
  - 既是*Euler*图，又是*Hamilton*图
  - 既不是*Euler*图，又不是*Hamilton*图

图的矩阵表示

- 设图G=<V,E>是一个简单图，其中V={v_1，v_2，…，v_n}，n阶方阵A=（a_{ij}），称为G的邻接矩阵。其中第i行j列的元素

$$a_{ij}=\begin{cases}0 & v_iv_j\notin E\\ 1 & v_iv_j\in E\end{cases}$$

例 下图的邻接矩阵是：



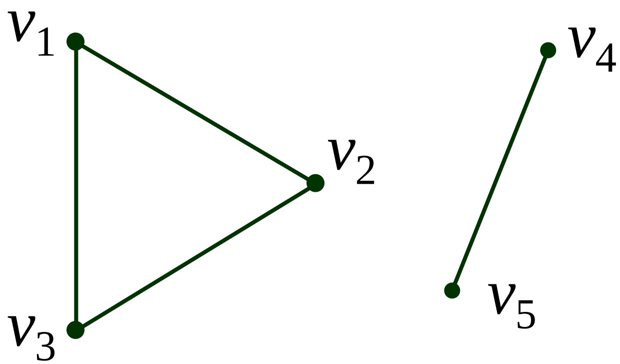
$$A=\begin{array}{c} \\ v_1\\ v_2\\ v_3\\ v_4\\ v_5\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{ccccc}v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5\end{array}\\ \begin{bmatrix}0&1&1&0&0\\1&0&1&0&0\\1&1&0&0&0\\0&0&0&0&1\\0&0&0&1&0\end{bmatrix}\end{array}$$

$A^{(n)}$的元素的意义

- 设G的邻接矩阵为A，则矩阵$A^{(l)}$（l=1，2，…）的第i行j列的元素$a_{ij}^{(l)}$表示图G中连接结点v_i到v_j长度为l的通道的数目

$$a_{ij}^{(2)} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}a_{kj}$$

- 例: 由矩阵的乘法运算，图的邻接矩阵A的各次幂如下:



$$A^2 = A \cdot A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^4 = \begin{bmatrix} 6 & 5 & 5 & 0 & 0 \\ 5 & 6 & 5 & 0 & 0 \\ 5 & 5 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

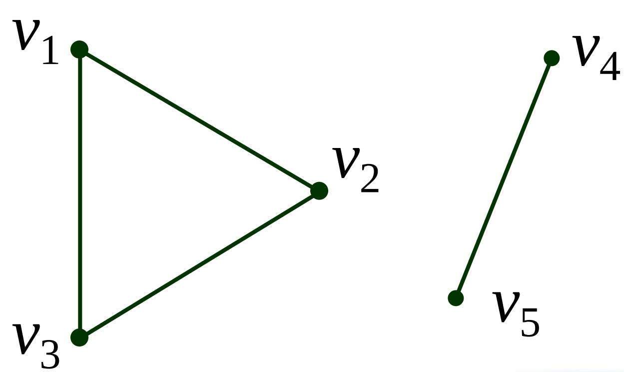
- 利用邻接矩阵可知
  - 判断G中任意两个结点是否相可达
    - 对l=1，2，…，n–1。依次检查$A^{(l)}$的（i，j）项元素 $a_{ij}^{(l)}$（i≠j）是否为0，若都为0，那么结点v_i与v_j不可达，否则v_i与v_j之间有路径
  - 计算结点v_i与v_j之间的距离
    - 若$a_{ij}^{(1)}$，$a_{ij}^{(2)}$，…，$a_{ij}^{(n-1)}$ 中至少有一个不为0，则可断定v_i与v_j可达，使$a_{ij}^{(l)} \neq 0$的最小的 l 即为$d(v_i,v_j)$

- 设图G=<V,E>，其中V={v_1，v_2，…，v_n}，n阶方阵A=（P_{ij}），称为G的可达性矩阵。其中第i行j列的元素

$$P_{ij}=\begin{cases}1 & v_i\text{和}v_j\text{之间有路径}\\ 0 & \text{否则}\end{cases}$$

例 下图的可达性矩阵如下：

$$P=\begin{bmatrix}1&1&1&0&0\\1&1&1&0&0\\1&1&1&0&0\\0&0&0&1&1\\0&0&0&1&1\end{bmatrix}$$



可达性矩阵的计算

- 通过对图G的邻接矩阵A进行运算可得到G的可达性矩阵P。其方法如下：
  1. 由A计算A^2，A^3，…，A^n
  2. 计算$B=A+A^2+\ldots+A^n$
  3. 将矩阵B中非零元素改为1，所得到的矩阵即为可达性矩阵P

练习

- 设图$G=<V,E>$，其中$V=\{v_1，v_2，…，v_n\}$，邻接矩阵

$$
A=\begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{array}
\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}
$$

(1) $d（v_1）=?$ $d（v_2）=?$

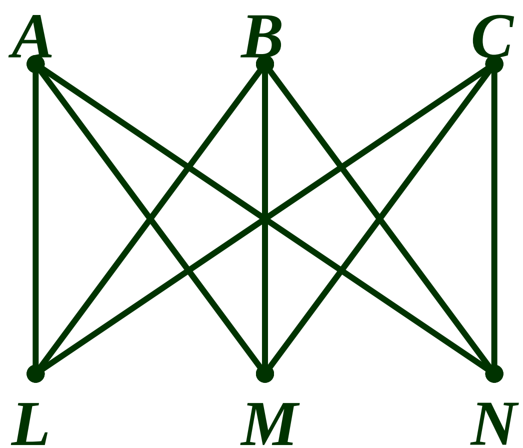
($d（v_1）=2$，$d（v_2）=3$)

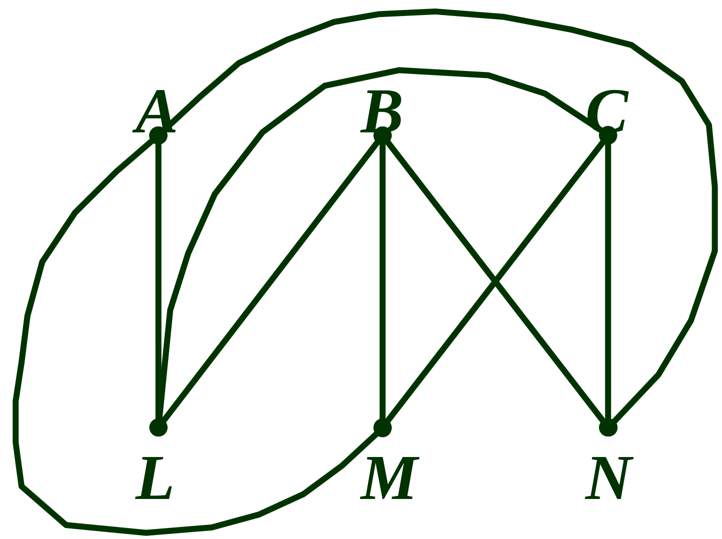
(2) 图G是否完全图？ （N）

(3) v_1到v_2长为3的路有几条？ （4 ）

7.5 平面图

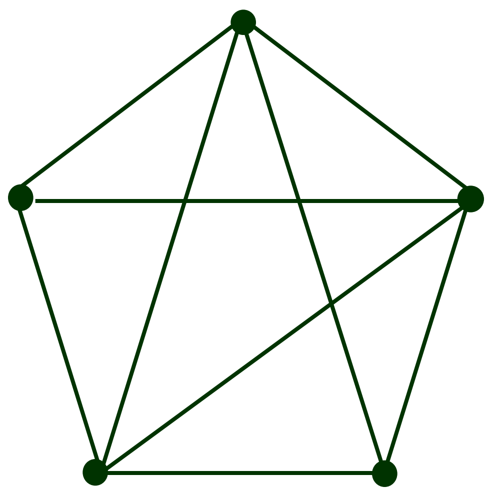
- 一工厂有*A*、*B*、*C*三个车间和*L*、*M*、N三个仓库,因为工作需要车间与仓库间将设专用车道,为了避免车祸,车道最好没有交点,问这可能吗?

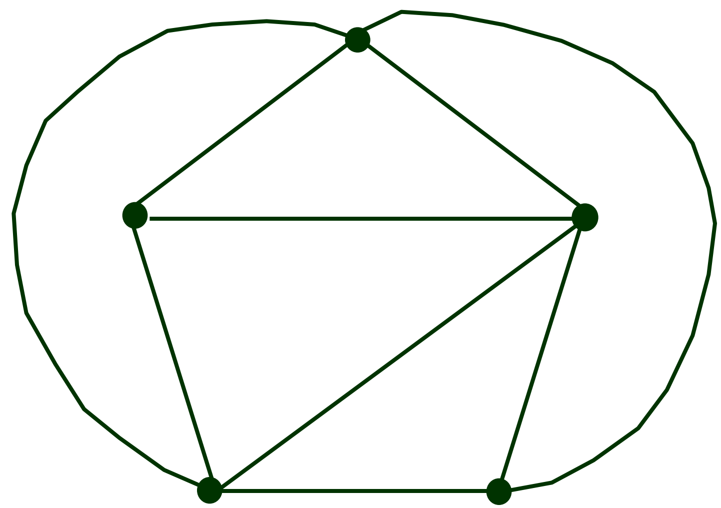




线相交处没有顶点的交叉叫假交叉

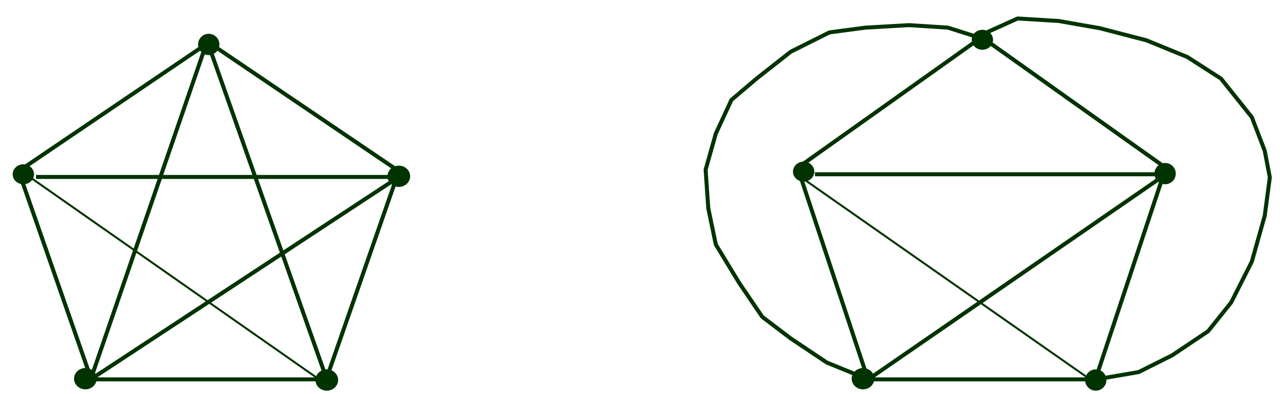
- 一印刷电路板的设计如下图，但现在只剩下一层板子了，能否做到呢？





改变图的连线方式去掉一个图所有假交叉的过程叫平面嵌入

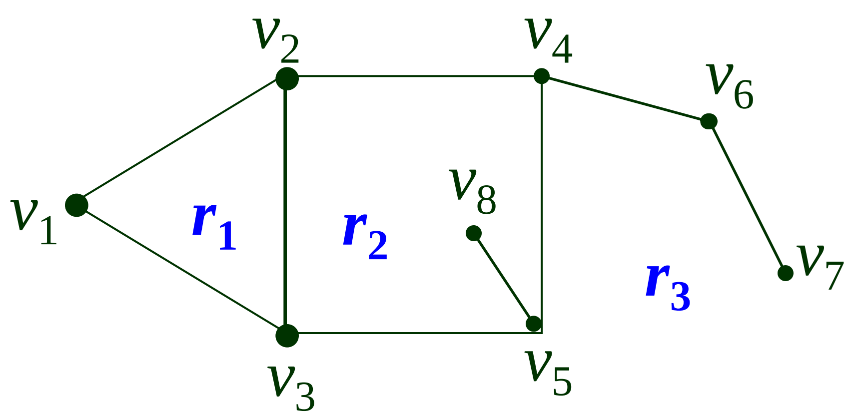
- 定义7.5.1
  - 说一个图是可平面的(planar)，或简单地称其为**平面图**(plane graph)，是指这个图能平面嵌入。一个不可平面的图称为非平面图。
- 定理7.5.1 K_5不是平面图
- 定理7.5.2 $K_{3,3}$不是平面图
- K_5和$K_{3,3}$是两个最简单、但是非常重要的非平面图，称为*Kuratowski*图



称一个图中本质上不能去掉的假交叉个数为图的**交叉数**，交叉数加1叫做这个图的**厚度**(thickness)

平面图的面(face)

- 定义7.5.2
- 也叫区域(region)
- 平面图*G*的面是*G*中的边所包围的区域，它不再被*G*的边分成子区域。其中面积无限的区域称为**无限面**。面积有限的区域称为**有限面**。包围该面的边所构成的闭通道称为这个面的**边界**(Boundary)，它的长度称为该面的**次数**（*deg*(*r*))

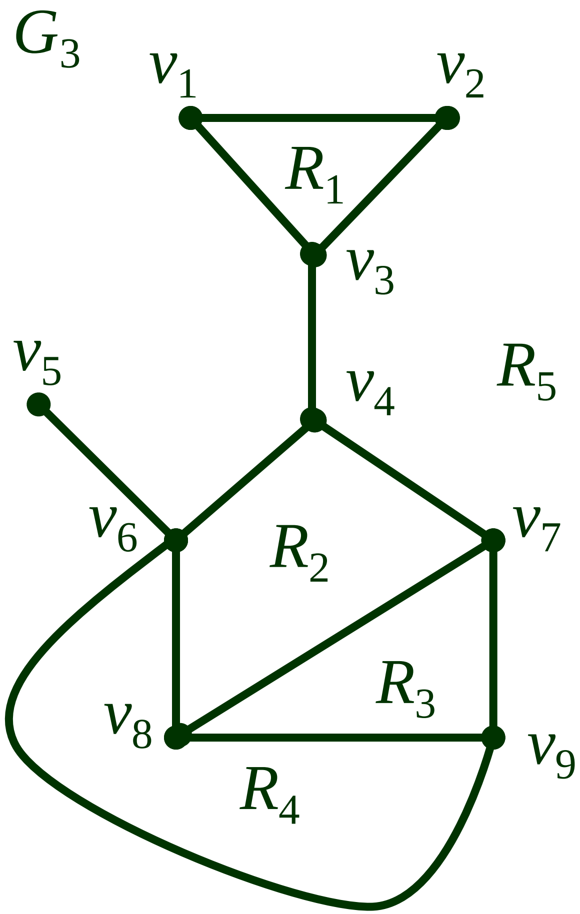


$\boldsymbol{r_1}$的边界：$v_1\,v_2\,v_3\,v_1$ 3次面

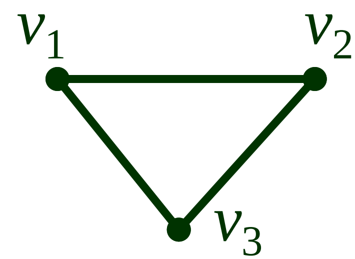
$\boldsymbol{r_2}$的边界：$v_2\,v_4\,v_5\,v_8\,v_5\,v_3\,v_2$ 6次面

$\boldsymbol{r_3}$的边界：$v_1 v_2\,v_4\,v_6\,v_7\;v_6\,v_4\,v_5\,v_3\,v_1$ 9次面

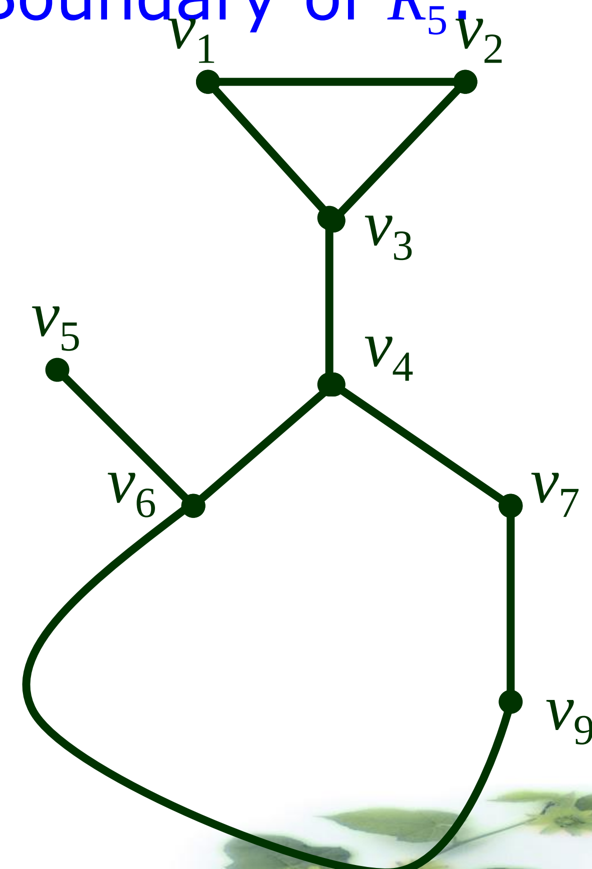
定理7.5.3 **平面图中所有面的次数之和等于边数的两倍**



Boundary of R_1:



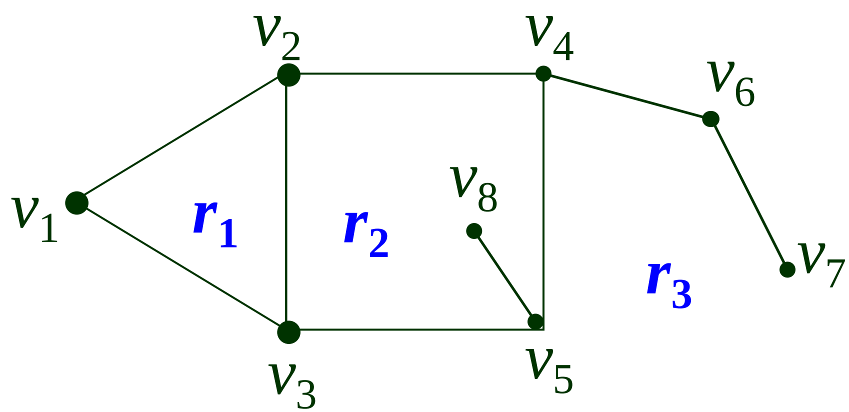
Boundary of R_5:



欧拉公式

- 定理7.5.4(Euler)
  - 对任何连通平面图G，若G有p个顶点，q条边，r个面，则：

$$p-q+r=2$$



证明： 对边数进行归纳。

(i) 当q=0时, 图只有一个顶点没有边,因此,p=1,q=0,r=1,欧拉公式成立。

(ii) 当q=1时,有两种情况:

(1)这条边是自回路,此时p=1,q=1,r=2

(2)这条边不是自回路,此时p=2,q=1,r=1

显然,这两种情况,欧拉公式都成立。

(iii) 设$q=k(p\geq1)$时欧拉公式成立,现考虑有k+1条边，r个面的p阶连通平面图G.分两种情况讨论：

(1) 若G有1度点u，则G-u是一有k条边，r个面的p-1阶连通平面图由归纳假设，有$(p-1)-k+r=2$,即$p-(k+1)+r=2$，欧拉公式成立

(2)若G没有1度点，在有限面的边界中取一边e，则G-e是一有k条边，r-1个面的p阶连通平面图，由归纳假设，有$p-k+(r-1)=2$,即$p-(k+1)+r=2$，欧拉公式成立

总之，欧拉公式对所有有k+1条边的连通平面图成立

思考题

- 若G是无向平面(p,q)图，有$C(G)$个分图，r个面，证明：

$$p - q + r = C(G) + 1$$

- 定理7.5.5 若G是一个有$p(p\geq 3)$个顶点，q条边的简单连通平面图，且每个面的次数都不小于$L(L\geq 3)$，那么

$$q\leq (p-2)\,L/(L-2)$$

证明：有欧拉公式得，图G有$q-p+2$个面，由于每个面的次数不小于L，且所有面的次数之和为$2q$，所以

$$2q\geq L(q-p+2)$$

化简得$q\leq (p-2)\,L/(L-2)$

- 容易证明$(p-2)\,L/(L-2)$是关于L单调下降的
  - 所以对阶大于2的简单平面图可取$L=3$，得到

$$q\leq 3p-6$$

  - 对二部图来说，$L\geq 4$，有

$$q\leq 2p-4$$

- 推论1 K_5是非平面图

  证明：p=5,q=10, 结果$3p-6\geq q$不成立

- 推论2 $K_{3,3}$不是平面图

  证明： p=6,q=9, 结果$2p-4\geq q$不成立

- 推论3 Peterson图不是平面图。
- 推论4 若G是阶不小于11的平面图，则G^c不是平面图。
- 推论5 在任何简单平面图G中，必存在度不超过5的顶点。

- 推论5

证明：用反证法

设(p,q)图G是简单连通平面图，所有顶点的次数不小于6

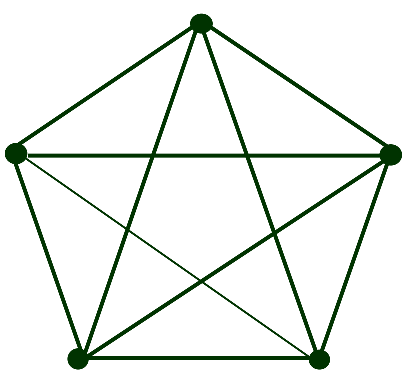
则 $q \le 3p-6$

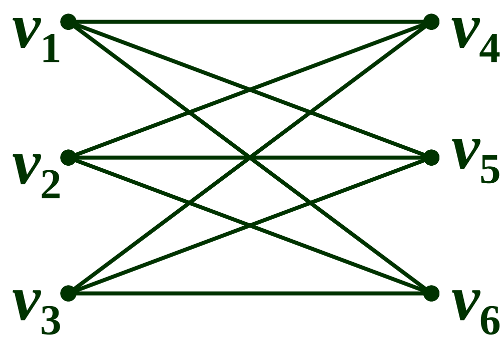
又$2q=\sum d(v) \ge 6p$，即$q \ge 3p$，矛盾

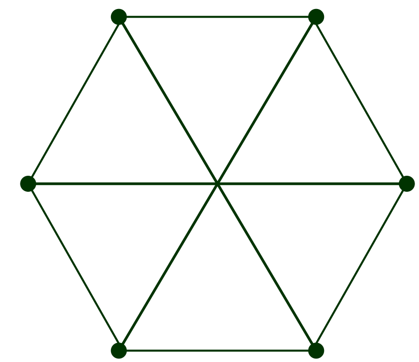
故存在v_0,其次数$d(v_0) \le 5$

库拉托夫斯基(*Kuratowski*)定理

- K_5和$K_{3,3}$称为库拉托夫斯基图

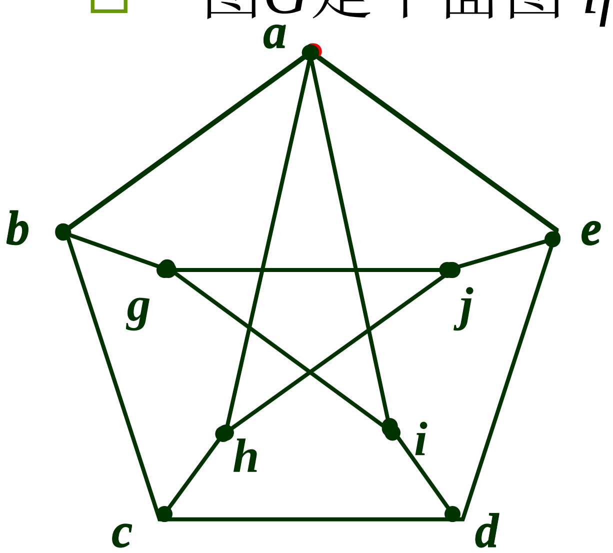


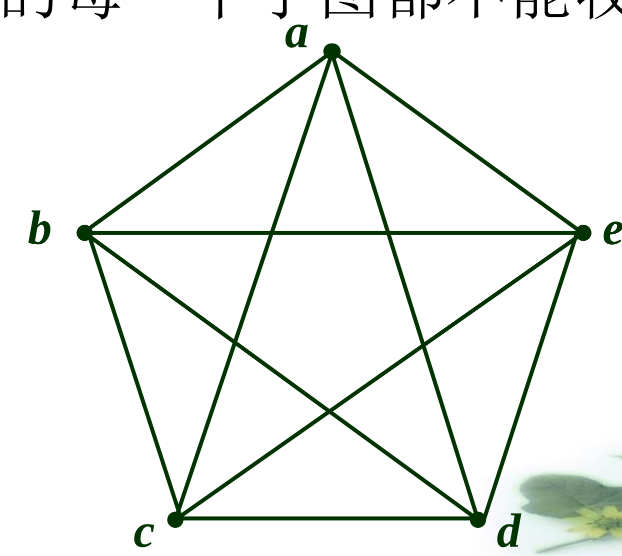




- 波兰数学家Kuratowski于1930年建立的关于图的可平面性的一个充分必要条件
  - 设G是一个图，如下定义G上的一种初等收缩运算：
    1. 从E(G)中删除边uv，用一个新符号w代替u和v在E(G)中的一切出现；
    2. 从V(G)中删除u和v，把w添加到V(G)中

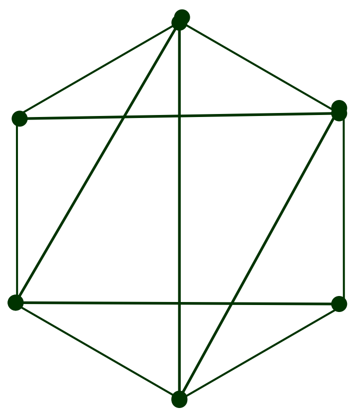
    如果从G出发经过一系列初等收缩运算后得到图G‘，那么便称G收缩到G’
- 定理7.5.6
  - 图G是平面图 *iff* 它的每一个子图都不能收缩到K_5和$K_{3,3}$

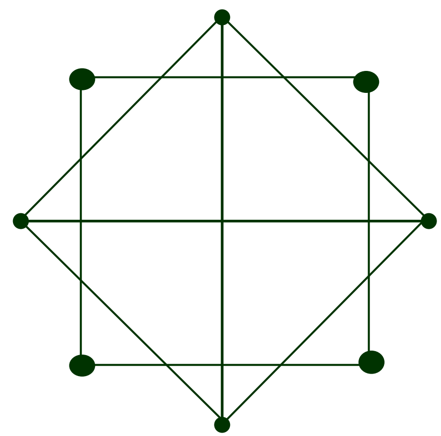


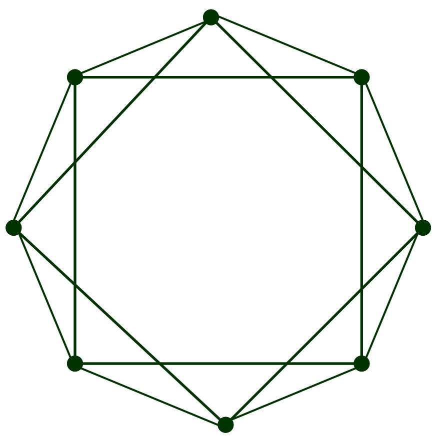


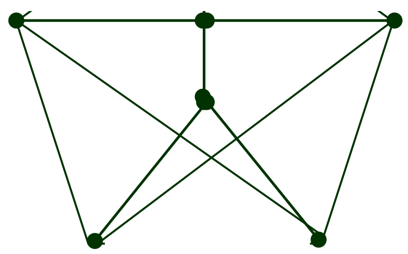
思考题

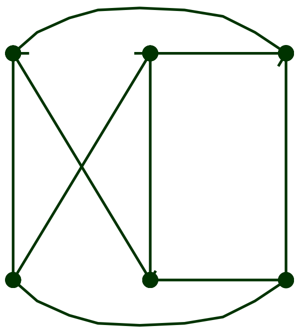
- 以下哪些图可以作平面嵌入











练习

- 证明：顶点数不少于4的简单连通平面图中，至少有3个顶点之度不大于5
- $p(p\geq 3)$个顶点r个面的简单连通平面图中有$r\leq 2p-4$
- 少于30条边的简单平面图至少有一个顶点的度不大于4

7.6 图的着色

- 图的着色有三种类型

I. 图的顶点着色
II. 图的线着色
III. 平面图的面着色
IV. III型着色问题可以转化为I型着色

定义7.6.1 对偶图

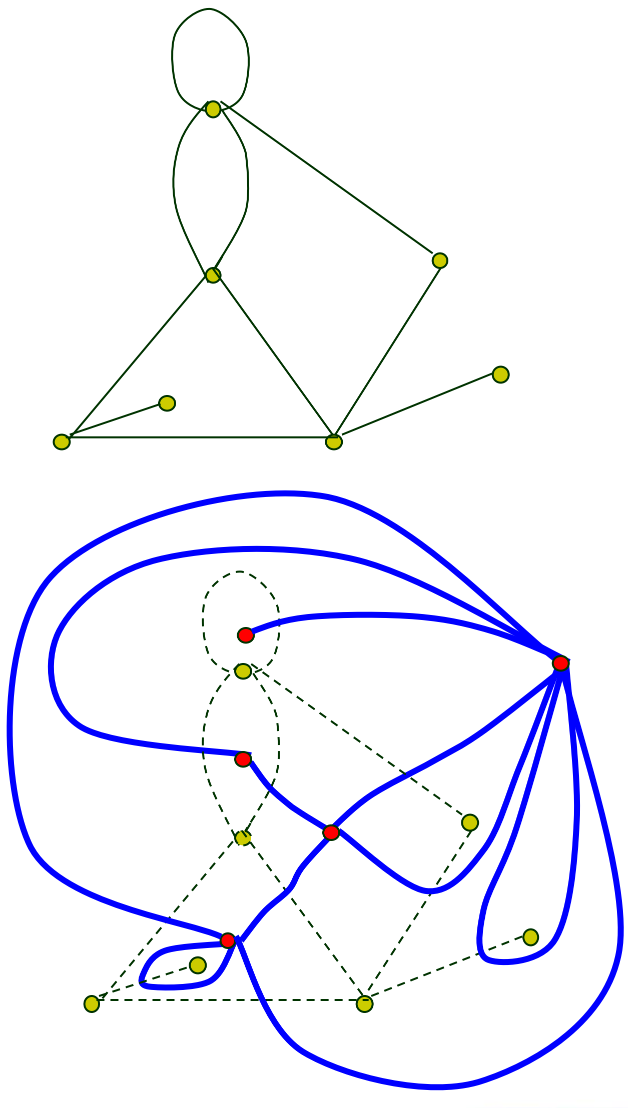
- 将平面图G嵌入平面后，通过以下手续(简称D过程):

(1) 对图G的每个面D_i的内部作一顶点且仅作一顶点v^*_i;

(2)经过每两个面D_i和D_j的每一共同边界e^*_k作一条边$e^*_k=(v^*_i,v_j)$与e_k相交;

(3)当且仅当e_k只是面D_i的边界时,v^*_i恰存在一自回路与e_k相交。

所得的图称为图G的对偶图,记为G



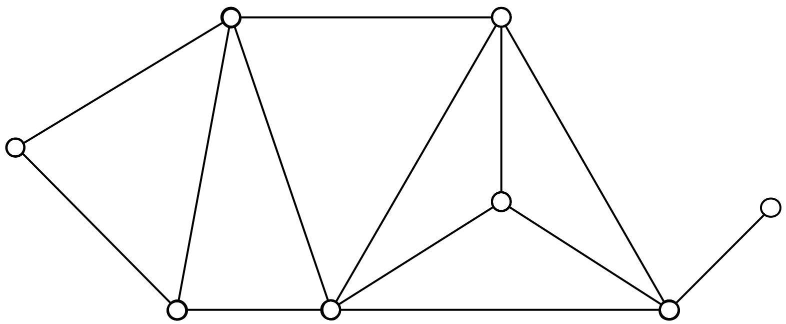
G与G^*的关系

- 平面图G的对偶图G^*是平面图
- 若连通平面图G是(p,q)图，则它有$q-p+2$个面，则G^*是$(q-p+2,\ q)$图，有p个面
- G中面的次数为G^*中面中点的度数
- G的圈对应着G^*的线分离集
- 通过对偶图，面着色可转换为点着色
- 若平面图G的对偶图G^*与G同构，则称G为**自对偶图**。如果(p,q)图是自对偶图，则$q=2(p-1)$

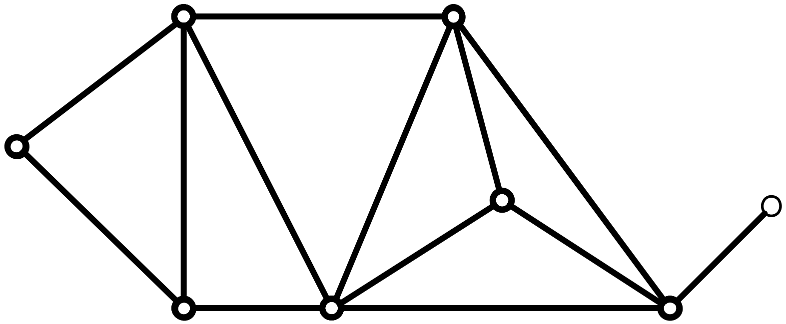
色数

- 定义7.6.2
  - 设S是k种颜色之集，若用S中的全部颜色实现了图G的顶点着色，那么称这种着色为G的一种(顶点)k-着色。使G有k-着色的最小k值叫G的色数，用$\chi(G)$表示。另外，若$k\geq\chi(G)$，则称G是(顶点)k-可着色的
- 定义7.6.3
  - 设S是k种颜色之集，若用S中的全部颜色实现了图G的线着色，那么称这种着色为G的一种线k-着色。使G有线k-着色的最小k值叫G的色指数，用$q(G)$表示。另外，若$k\geq q(G)$，则称G是线k-可着色的

例



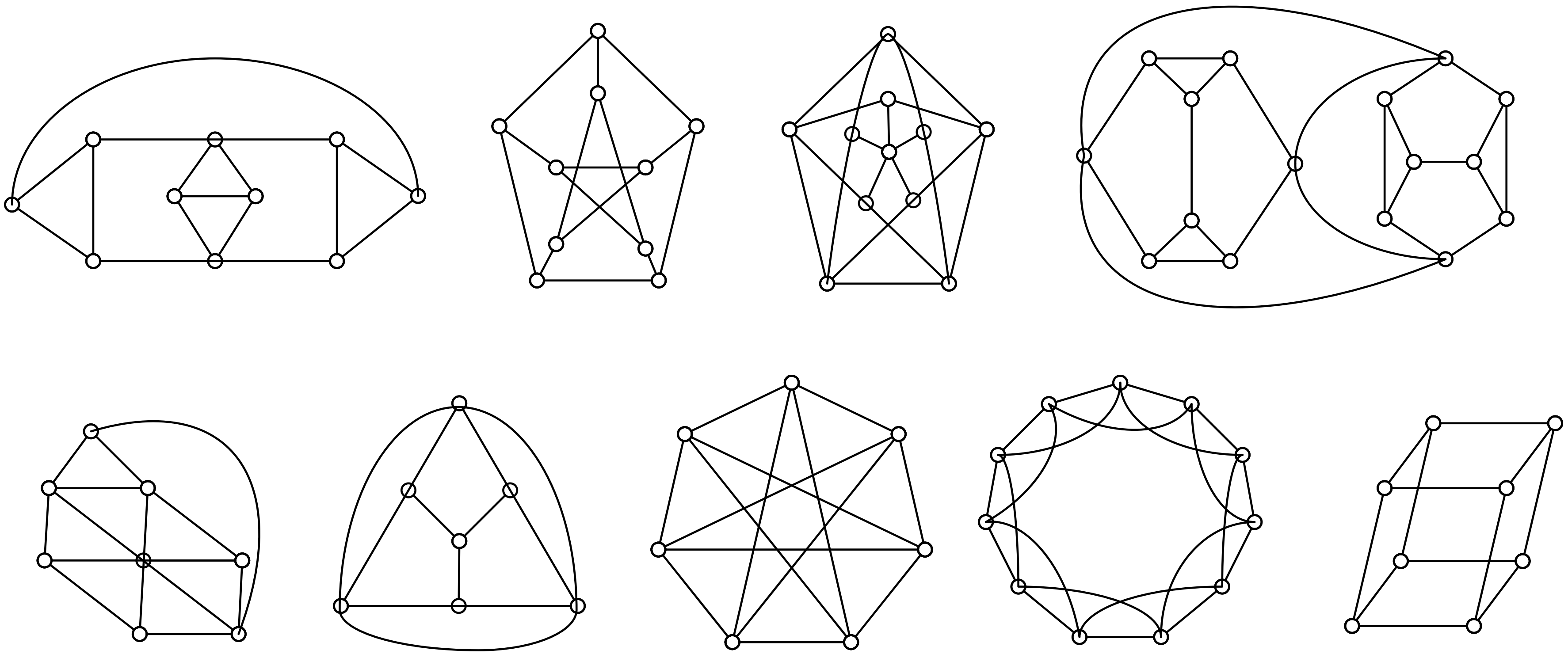
(a)



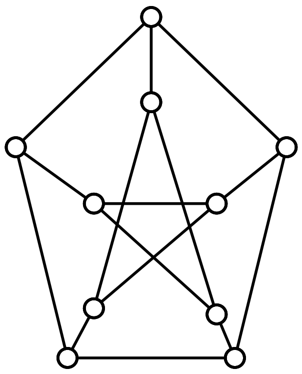
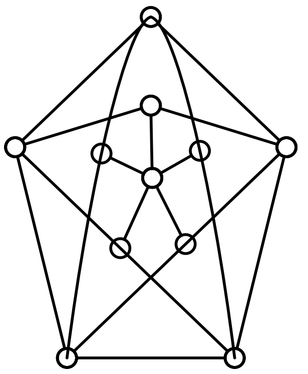
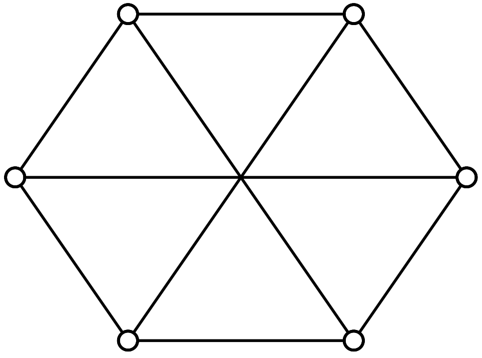
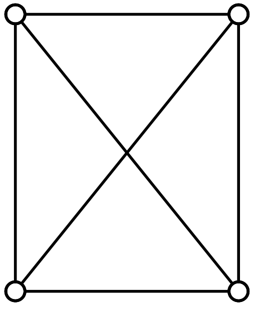
(b)

练习

- 求出下面所示各图的色数



- 求出下面所示各图的色指数

- 定理7.6.1
  - 设S是k种颜色之集，简单地用$\{1,2,\ldots,k\}$表示。如果图G有顶点k-着色，令

$$N_i=\{v \mid v\in G\wedge v\text{着有色}i\}\quad 1\le i\le k$$

那么N_i是G的顶点无关集$(1\le i\le k)$，且$\{N_1，N_2，\ldots，N_k\}$是$V(G)$的一个划分。反之，如果$\{M_1，M_2，\ldots，M_k\}$是$V(G)$的一个划分，且M_i是G的顶点无关集$(1\le i\le k)$，那么图G有顶点k-着色。

证明 因为所给出的是图G的顶点k-着色，所以这k种颜色在着色过程中全被用上，这说明N_i非空$(1\leq i\leq k)$。

按照顶点着色的定义，对任意两个顶点u，$v\in N_i$，因为u和v着有相同的颜色i，故u $NAdj$ v，这说明N_i是顶点无关集$(1\leq i\leq k)$。又若$i\neq j$，则有$N_i\cap N_J=\Phi$(因为一个顶点只能着一种颜色)，且$\cup N_i=V(G)$(因为每一个顶点被着有一种颜色)。故$\{N_1, N_2, \ldots, N_k\}$是$V(G)$的一个划分。

反之，由于M_i是G的顶点无关集$(1\leq i\leq k)$，故对任意两个顶点u，$v\in M_i$，有u $NAdj$ v，这样任一置换：

$$f: \{M_1, M_2, \ldots, M_k\}\rightarrow S$$

都是G的一个顶点k-着色

- 定理7.6.2 设G是一个图，那么$\chi(G)\leq\Delta(G)+1$

证明 显然只需证明定理对连通图成立

【法一】对图G的阶p行数学归纳法：

(1) 〖归纳基础〗

p＝1时，一阶连通图G是平凡图，$\chi(G)$＝1，$\Delta(G)$＝0。所以$\chi(G)\leq\Delta(G)+1$

(2) 〖归纳步骤〗

假设定理对一切k阶连通图成立，k≥1。考虑k+1阶连通图G，取G中一非割点u，则G-u是k阶连通图，由归纳假设有：

$$\chi(G-u)\leq\Delta(G-u)+1$$

因为$\Delta(G-u)\leq\Delta(G)$，所以$\chi(G-u)\leq\Delta(G)+1$，于是G-u是$(\Delta(G)+1)$-可着色的。现在考虑用$\Delta(G)+1$种颜色的全部或部分对G-u进行顶点着色，由于$d(u)\leq\Delta(G)$，故至少有一种颜色未分配给u的邻接顶点，用这种颜色对u进行着色，所以G是$(\Delta(G)+1)$-可着色的，即：

$$\chi(G)\leq\Delta(G)+1$$

根据数学归纳法原理，定理成立。

【法二】简记$\Delta(G)$为Δ，并设$S=\{1,2,\ldots,\Delta,\Delta+1\}$是$\Delta+1$种颜色之集，$u\in G$是$G$中度为$\Delta$的顶点。

今构造G的一个$\Delta+1$着色如下：

用色1着顶点u，因u的度为Δ，故恰有Δ个顶点与它相邻接，用$\{2,3,\ldots,\Delta,\Delta+1\}$中的$\Delta$种颜色对它们进行着色。于是得到图$G$的部分顶点的$\Delta+1$着色。

对于G中已着色的任一顶点v，设它着有色x，因为$d(v)\leq\Delta$，故可用$S-\{x\}$中的全部或部分颜色给v的邻接顶点着色，如此继续下去，可得到G的一个$\Delta+1$着色，故$\chi(G)\leq\Delta(G)+1$

注意

- 定理7.6.2的结果是不能改进的
- 存在一些图使得定理中的等号成立
- 例：
  - 完全图 K_p，$\Delta(K_p)=p-1$，而$\chi(K_p)=p$
  - 令C_k表示恰由一个k-圈组成的图，那么$\Delta(G)=2$，而

$$\chi(C_k)=\begin{cases}2 & \text{当k为偶数}\\ 3 & \text{当k为奇数}\end{cases}$$

> 1941年Brook证明了：使$\chi(G)=\Delta(G)+1$成立的图只有奇圈C_k和完全图 K_p

- 易知：$\chi(G)=1$ *iff* 图G不含边，即图G是平凡图或空图
- 定理7.6.3 设G是至少有一条边的图，那么：$\chi(G)=2$ *iff* 图G不含奇数长的初等圈。

证明 显然只需证明定理对连通图G成立。

(1) 必要性

前面已经提到过，含奇圈的图的色数不小于3，所以必要性显然。

(2) 充分性

设G是一个不含奇圈的连通图，任取$x\in V(G)$，令：

$Y=\{y \mid y\in V(G)$且x,y之间有奇数长度的路径$\}$

$Z=\{y \mid z\in V(G)$且x,z之间有偶数长度的路径$\}\cup\{x\}$

由7.3节的习题 2.可知$\{Y,Z\}$是$V(G)$的一个划分。

倘若存在Y中的两顶点y_1和y_2，y_1 Adj y_2，那么将存在x和y_2之间的一条偶长路径(x和y_1之间的一条奇长路径加上边y_1y_2)，这与$y_2\in Y$矛盾，因此Y是点无关集。同理可证Z也是点无关集。

因此，$\chi(G)=2$。

思考题

- (8,13)简单连通平面图是否可以只用2种颜色着色
- 二部图是否有2-着色

五色定理

- 定理7.6.4 任何平面图均是5-可着色的。
  证明：对图的顶点数作归纳

  (i) 当$n \le 5$时,显然成立

  (ii) 假设k个顶点时成立,考虑$k+1$阶简单连通平面图G.

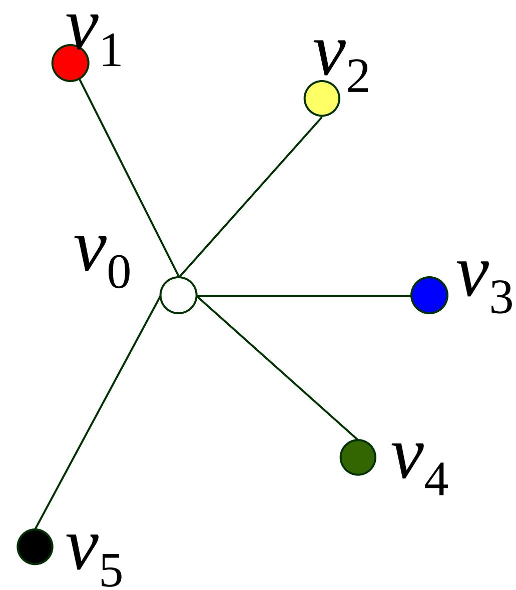
  由定理7.5.5之推论5知图G至少存在一顶点v_0其次数$d(v_0) \le 5$.

  显然G-v_0是k阶简单连通平面图，由归纳假设，可用5种颜色进行着色。

  假设已用红、黄、蓝、 绿、黑5种颜色对G-v_0着好了色，现在考虑对G中顶点v_0的着色

① 若$d(v0)<5$，显然可用它的邻接顶点所着颜色之外的一种颜色对v0进行着色，即G可以用5种颜色着色

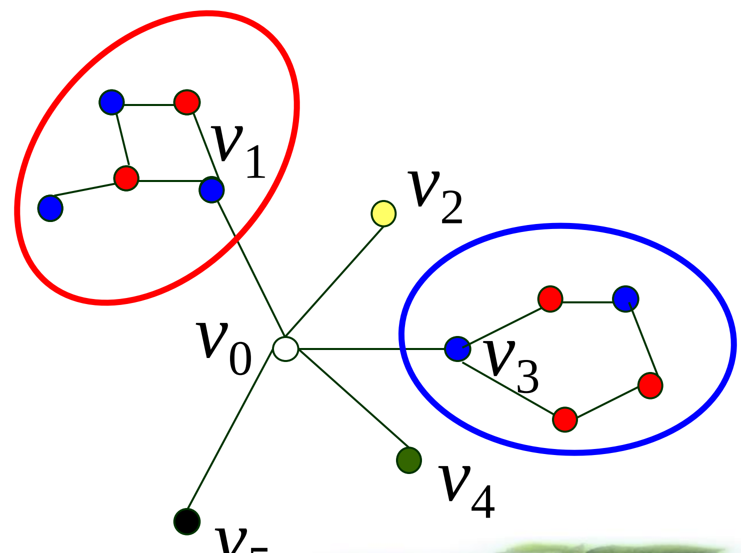
② 若$d(v0)=5$，显然只需要考虑与v0邻接的顶点被着以不同的5种颜色的情况进行讨论



令$W_1=\{x|x\in G$,且x着红色或蓝色$\}$，

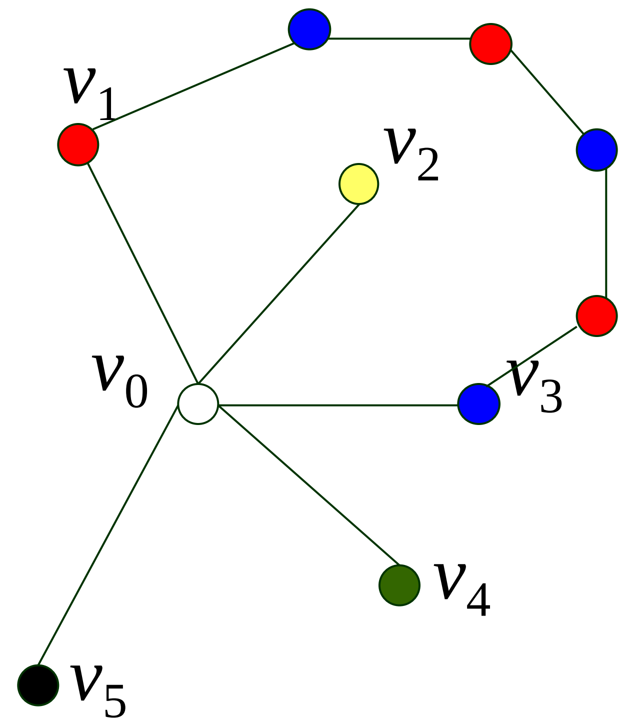
$W_2=\{x|x\in G$,且x着黄色或绿色$\}$，考虑W_1导致的G的导出子图$\langle W_1\rangle$

- 若v_1和v_3分属于$\langle W_1\rangle$的两个不同连通分图，那么将v_1所在分图的红蓝色对调,并不影响图$G-v_0$的正常着色。然后将v_0着上红色,即得图G的正常着色



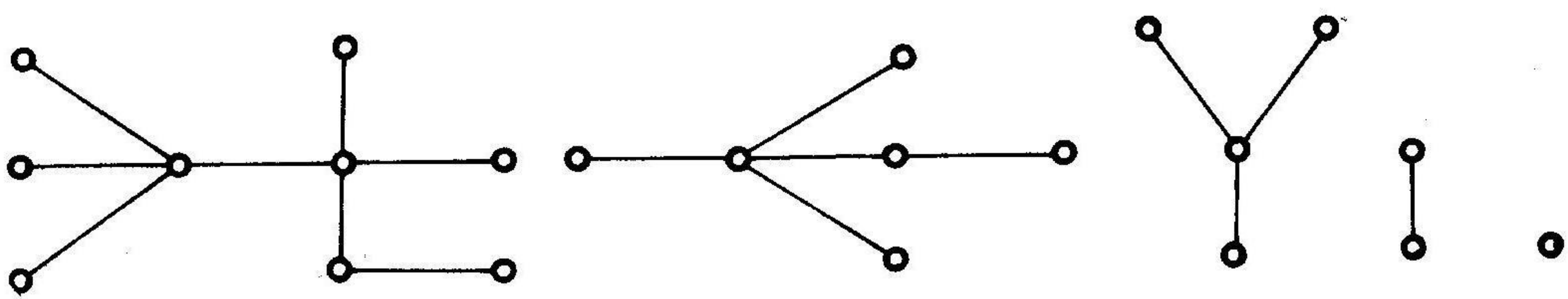
② 若v_1和v_3属于$\langle W_1 \rangle$的同一分图中,则v_1和v_3之间必有一条顶点属于红蓝集的路径P,它加上v_0可构成回路C:(v_0,v_1,P,v_3,v_0)

由于C的存在,将黄绿集分为两个子集,一个在C内,另一个在C外,于是黄绿集的导出子图至少有两个分图,一在C内,一在C外。于是问题转化为①的类型,对黄绿集按①的办法处理,即得图G的正常着色。证毕。



树与生成树

- 定义7.7.1
  - 一个不含圈的(简单)连通图称为树(tree)，以树为支的不连通图称为森林(forest)。树中度为1的顶点称为树叶。



(a)　　(b)　　(c)

- 定理7.7.1 p阶图G为树，*iff* 下列条件之一成立

1. G是$(p,p-1)$无圈图。
2. G是$(p,p-1)$连通图。
3. G的任何两点之间存在唯一一条路径。
4. G的任一边都是桥。
5. G不含圈，但加入任一边后便形成圈。

证明(1)：树$\Rightarrow$(1)，即证p阶无圈图恰有p-1条边

对p作归纳。

(i) p=1时,q=0,显然q=p-1

(ii)假设p=k时命题成立,现证明p=k+1时也成立。

现设k阶无圈连通图恰有k-1条边($k\geq 1$)。我们考虑k+1阶树T。因为T不含圈，故它有度为1的顶点，令$d(u)$＝1，那么T-u是k阶无圈连通图，由归纳假设，它恰有k-1条边。于是T恰有k条边。

证明(2)：(1) $\Rightarrow$(2)，即证(p,p-1)无圈图必连通

假若不然，即G不连通，设C_1，C_2，…，C_k是G的全部k个支，其中$k\geq 2$。用k-1 条边把这些连通支连成连通图G‘，显然G’仍然不含圈，因此G‘是p阶树，由(1)，它恰有p-1条边。于是：

$$(p-1)+(k-1)=p-1$$

得$k=1$，与$k\geq 2$矛盾。

证明(3)：(2) $\Rightarrow$(3)

① 因为G连通，故任何两点之间有路径存在。

② 假若G的某两点u、v之间存在两条不同的路径，那么G必含圈，显然去掉圈中一边e后所得的图G-e仍然连通，且它是(p,p-2)图，这与p阶连通图至少有p-1条边相矛盾。所以G的任何两点之间的路径是唯一的。

证明(4)： (3) $\Rightarrow$(4)，即要证明G连通，且去掉任一边后G便变成不连通图

考虑G的任一边uv，由条件，它是连接顶点u和v的唯一一条路径，去掉它后u、v之间便没有路径了，故G变成了不连通图。

证明(5)： (4) $\Rightarrow$(5)，

① 先证明G不含圈。假若G含圈，那么去掉圈中一边e后所得的图G-e仍然连通，即e不是桥。

② 由G的连通性可直接推知加入任一边后它便形成圈。

证明(6)：(5) $\Rightarrow G$是树，只需证明G连通

任给两顶点u、v，若$uv \in G$，则uv是u、v之间的路径，否则，$G+uv$是一含圈图，故u、v之间应有一条除uv之外的路径。总之，对于任意两顶点u,v，G中存在u,v之间的路径，即G是连通的。

- 树也被称为
  - 最大无圈图
  - 最小连通图

- 定理7.7.2　任一棵阶不小于2的树中至少有两片树叶

证明：若T中每个顶点的次数≥2,则

$$\Sigma d\,(v_{\mathrm{i}})\geq 2p$$

若T中只有一个顶点次数为1,其它顶点次数≥2,则

$$\Sigma d\,(v_{\mathrm{i}})\geq 2(p\text{-}1)+1=2p\text{-}1$$

都与$\Sigma d\,(v_{\mathrm{i}})=2(p\text{-}1)$矛盾。

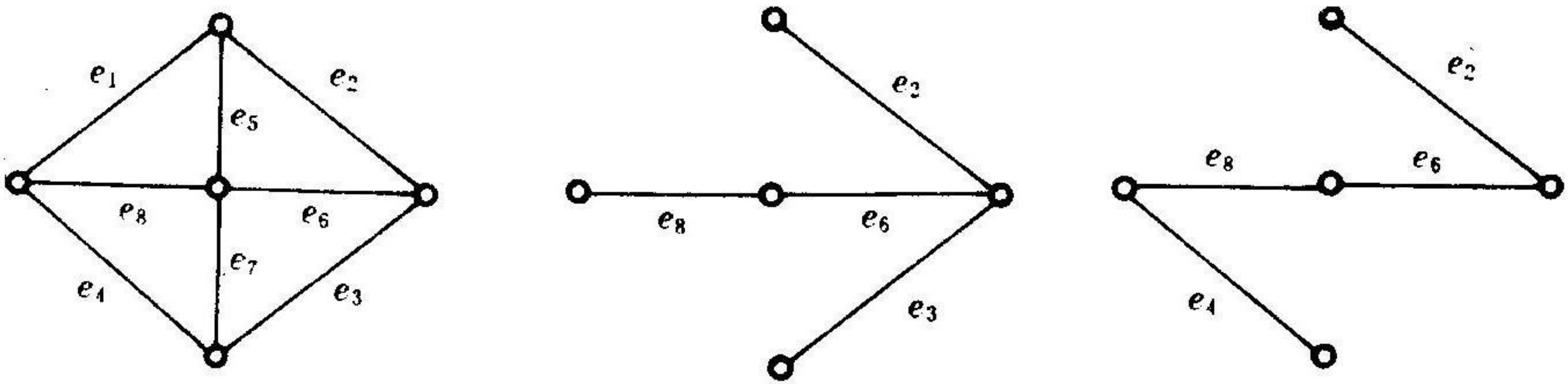
所以,T中至少有两个顶点次数为1。证毕。

思考题

- 设树T有7条边，问T有多少个结点？
- 一棵树有两个2度顶点，一个3 度顶点，三个4 度顶点，则该树有多少片树叶？
- 恰有两片树叶的树有何特征？
- 恰有p-1片树叶的树有何特征？
- 一棵树(或森林)最多需要多少种颜色就可进行着色？
- 设G是一个森林，由3个分图组成，若G有15个结点，问G有多少条边？
- 互不同构的2阶树有几棵？互不同构的4阶树有几棵？

生成树

- 定义7.7.2 给定一个无向图G,若G的一个生成子图T是树,则称T为G的**生成树**或**支撑树**。
- 图G的生成树不是唯一的



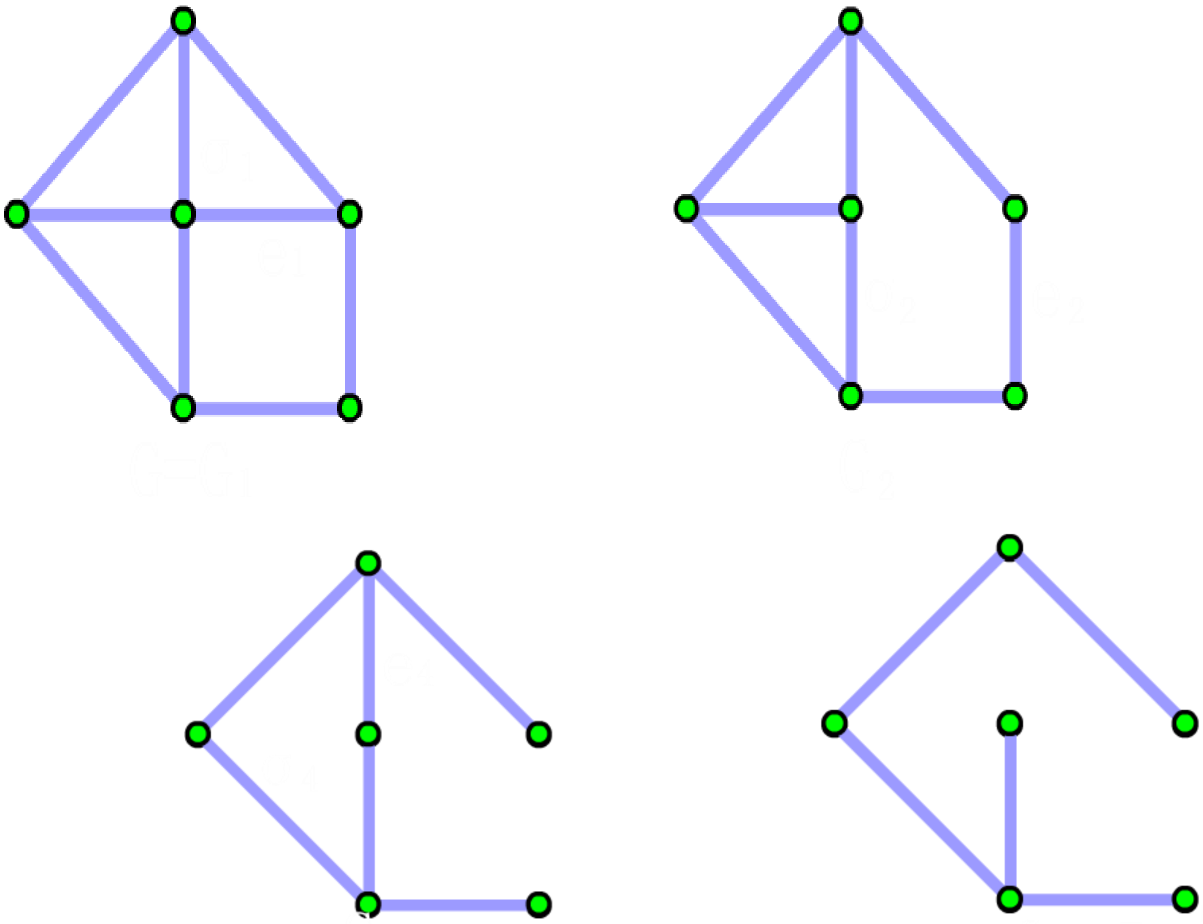
(a)　　(b)　　(c)

- 定理7.7.3 G含生成树，*iff* G连通

证明　必要性显然，现证充分性。考虑连通图G，若它不含圈，那么它本身就是一棵生成树。若它含圈，则去掉圈中一边后所得的图(设为G_1)仍然连通，如果G_1无圈，那么G_1是G的生成树，否则从G_1的某圈中去掉一边后所得的图(设为G_2)仍然连通，如果G_2无圈，那么G_2是G的生成树，否则继续上面的步骤直到打破G的所有圈就得到G的一棵生成树。

构造连通图$G=(V，E)$的生成树的方法

- 破圈法

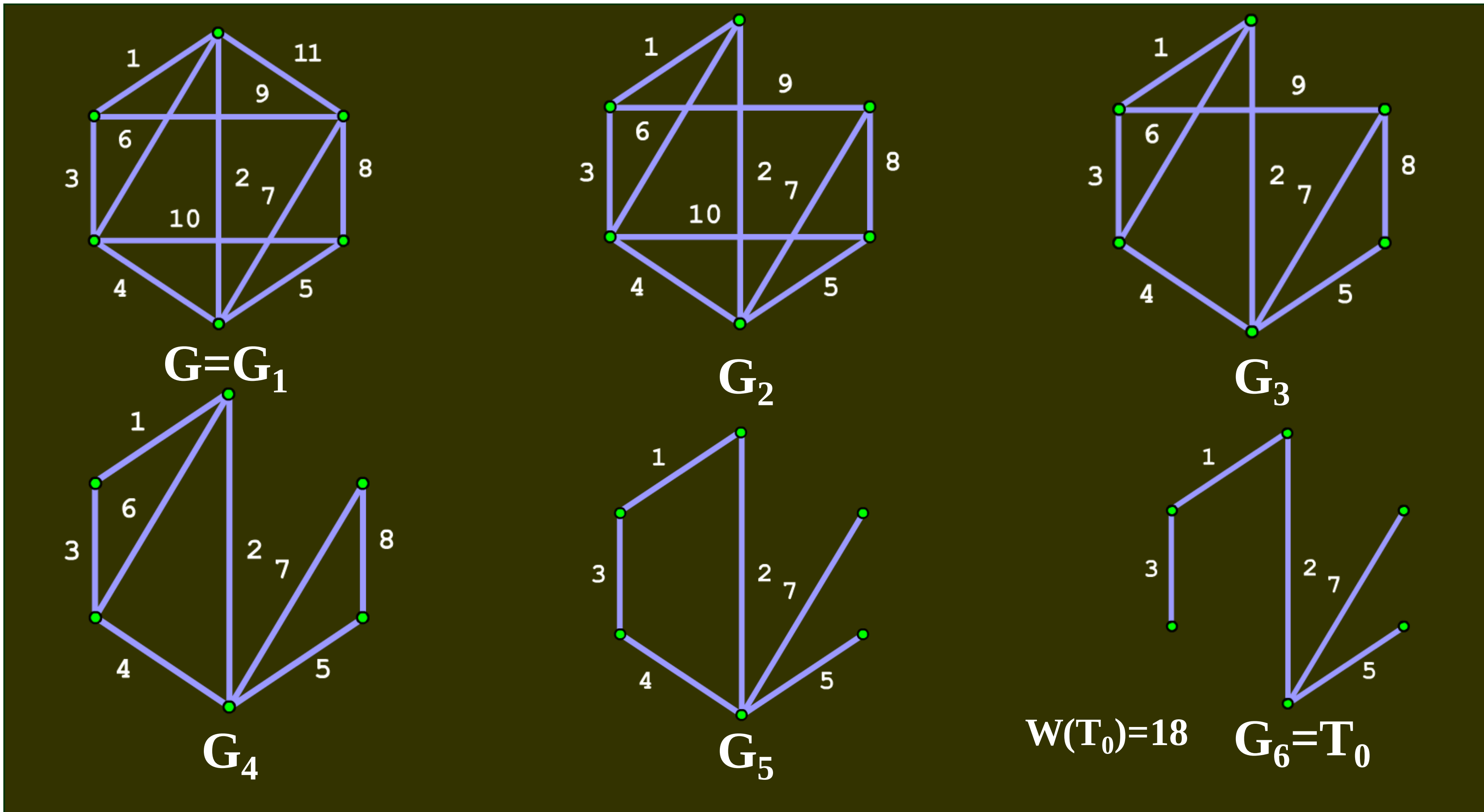


最小生成树

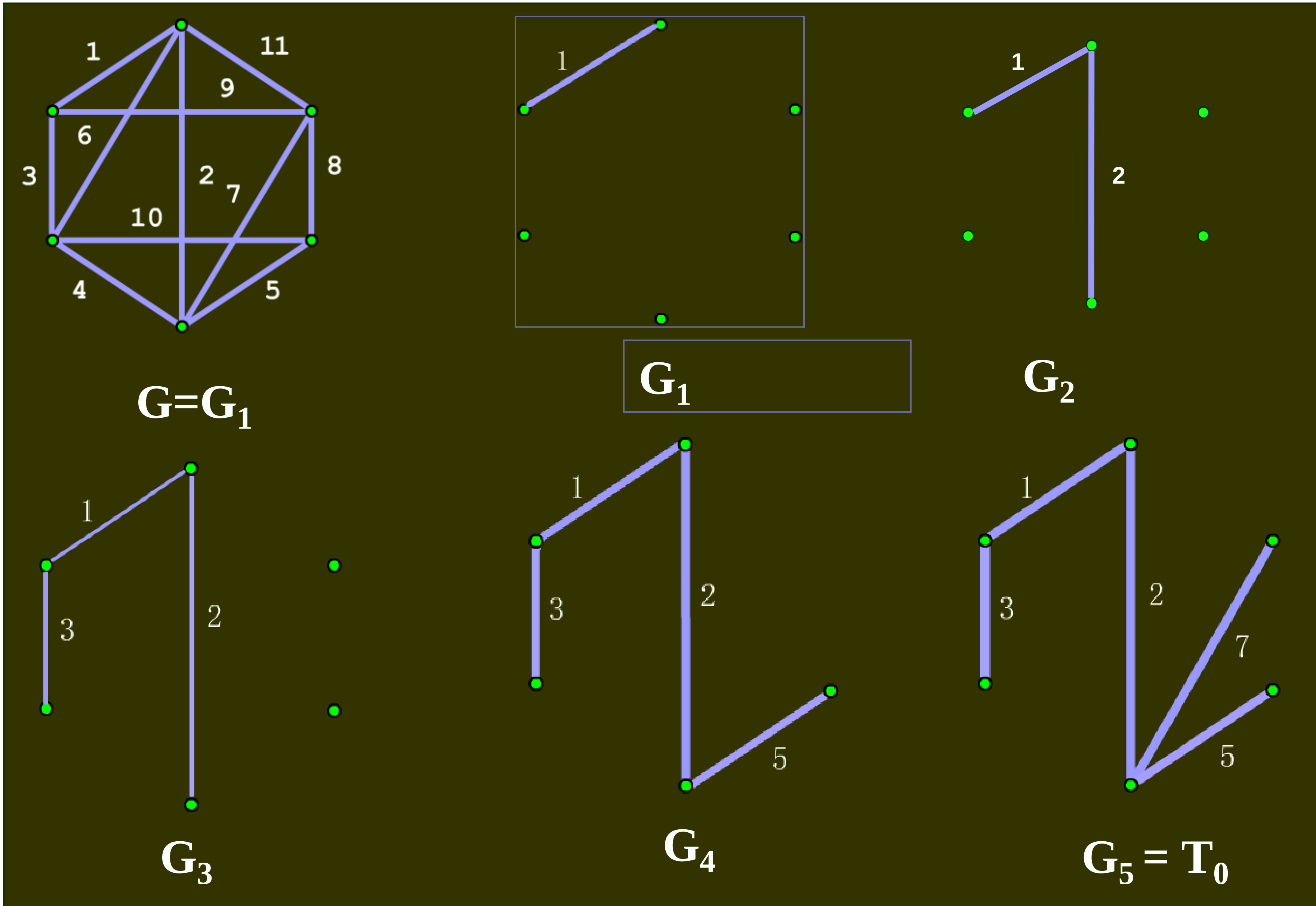
- 设图$G=<V,E,W>$是赋权连通简单无向图,W是E到非负实数的函数,边$<i,j>$的权记为$W(i,j)$。若T是G的生成树,T中树枝的权之和称为T的权,记为 $W(T)=\sum W(i,j)$。所有生成树中具有最小权的生成树称为**最小生成树**
- 定理8.6—9设G是边权全不相同的简单连通图,C是一条简单回路,则C上权最大的边e必定不在G的最小生成树中

求最小生成树方法

- 破环法

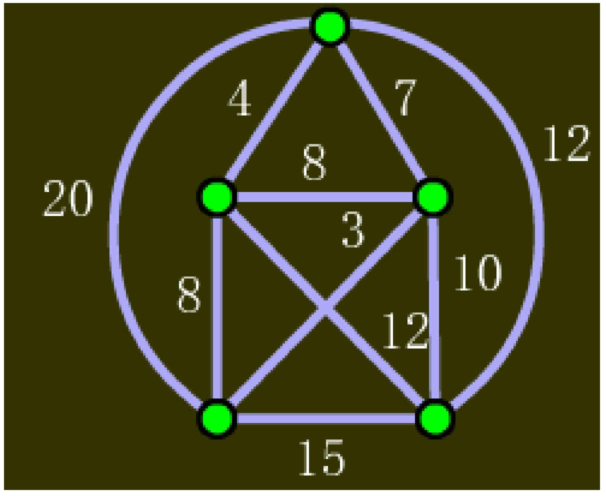


避环法（*Kruskal*算法）



思考题

- 树和森林最多需要多少种颜色来进行点着色？
- 设$p>1$，且d_1，d_2，…，d_p都是正整数，$d_1+d_2+\ldots+d_p=2(p-1)$。请问$d_1$，$d_2$，…，$d_p$是否是一棵树的度序列。
- 画出所有不同构的六阶树
- 下图给出的带权图的最小生成树的权是（）



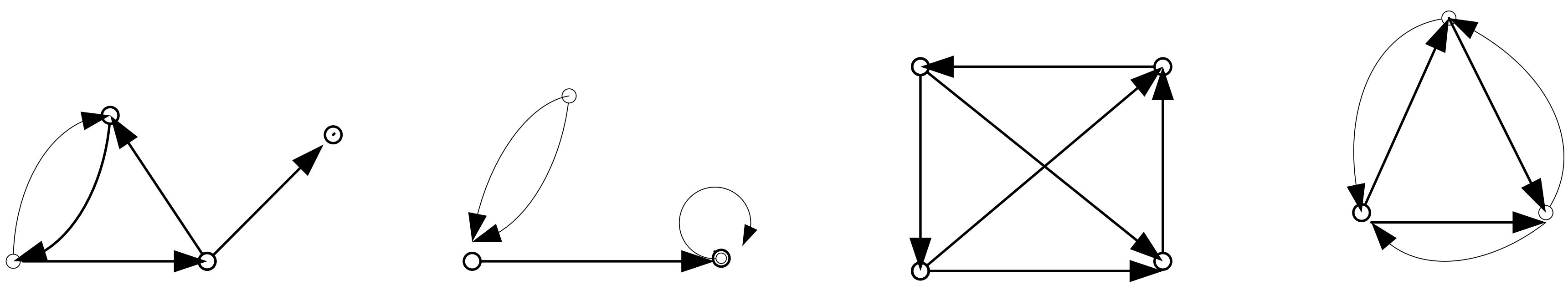
第八章 有向图

8.1 有向图的概念

- 无向图中的概念大都可推广到有向图
- 定义8.1.1
  - 有向图D是一个二元组$<V，E>$，其中V是一非空集合，它的元素称为图的顶点，V称为D的顶点集。E是V中元素**有序偶**的可重集，它的元素叫做图的有向边，或弧(arc)，E称为D的边集。如果$e=<a,b>\in E$，则称a和b邻接(或b邻接于a)，记作$a\ Adj\ b$，顶点a与b分别称为边e的始点与终点。

定义8.1.2

- 设D是一有向图，若$\forall a,b\in D(a\neq b)$，$a\ Adj\ b\Rightarrow b\ NAdj\ a$，则称$D$为单向有向完全图；若$\forall a,b\in D(a\neq b)$，有$a\ Adj\ b$且$b\ Adj\ a$，则称$D$为有向完全图。

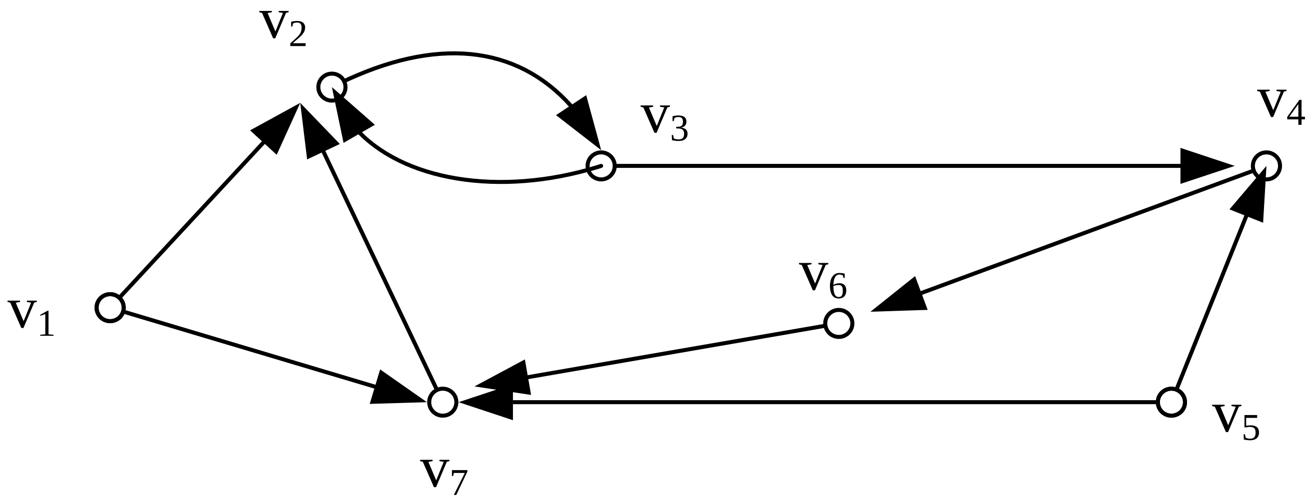


（a）简单有向图　（b）非简单图　（c）四阶单向有向完全图　（d）三阶有向完全图

通道与半通道

- 有向图中，通道、迹、路径、圈等概念完全类似于无向图中的相应概念
- 在序列$v_0v_1v_2…v_n$中
  - 边v_iv_{i+1}是以v_i为始点，v_{i+1}为终点的($0 \le i \le n$-1)，称序列是从v_0到v_n的通道(迹、路径)。
  - 若序列中，或者v_i Adj v_{i+1}，或者v_{i+1} Adj v_i，($0 \le i \le n$-1)，则称它为一条半通道(迹、路径) 。

例



$v_2v_3v_4v_6v_7v_2$ ——圈

$v_4v_6v_7v_2v_3$ ——路径

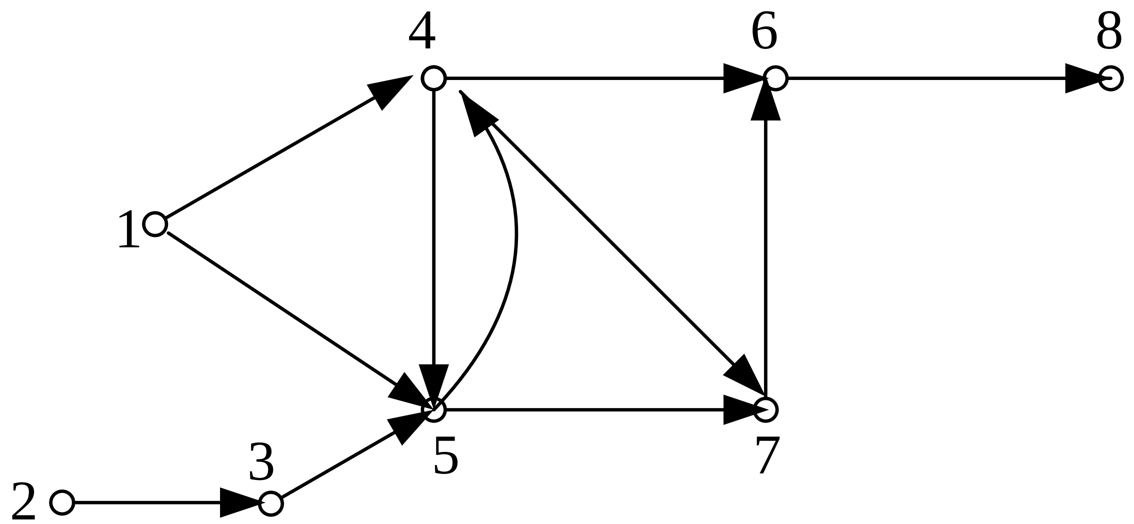
$v_5v_4v_6v_7v_2v_1$ ——半路径

结点的度

- 定义8.1.3
  - 设D是一有向图，u是D的顶点，那么称以u为始点的边数为u的出度，记为$od(u)$；称以u为终点的边数为u的入度，记为$id(u)$。
- 有向图中显然

$$\sum_{u\in D} id(u) = \sum_{u\in D} od(u) = q$$

例



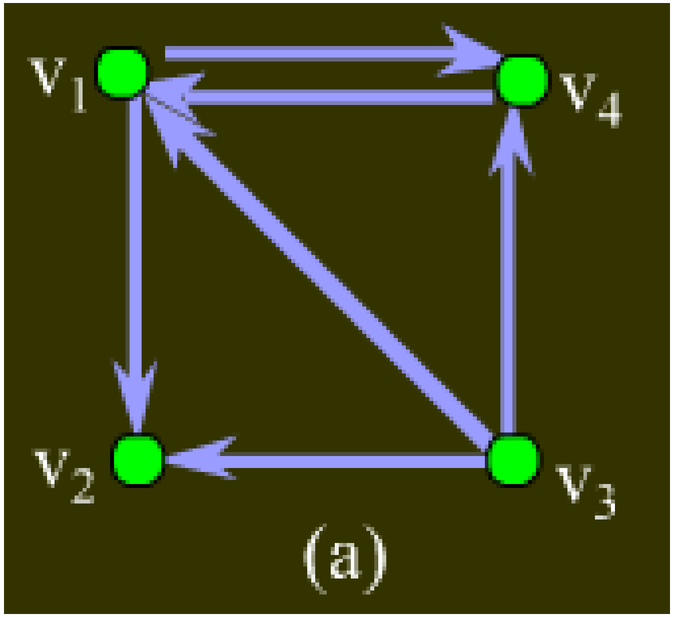
$id(1)=0$， $od(1)=2$，
$id(2)=0$， $od(2)=1$，
$id(3)=1$， $od(3)=1$，
$id(4)=2$， $od(4)=3$，
$id(5)=3$， $od(5)=2$，
$id(6)=2$， $od(6)=1$，
$id(7)=2$， $od(7)=1$，
$id(8)=1$， $od(8)=0$

$$\sum_{u\in D} id(u)=\sum_{u\in D} od(u)=q\;=11$$

8.2 有向图的可达性、连通性和顶点基

- 定义8.2.1
  - 设D是一个有向图，且u，$v \in D$，若存在从顶点u到顶点v的一条路径，便说从顶点u到顶点v是可达的。
  - 可达性是一个有向图(或无向图)的顶点集上的二元关系
    - 自反
    - 传递
    - 一般来说，不是对称的，也不是反对称的
    - 对于无向图，可达性是图的顶点集上的一个等价关系。

例



可达矩阵的计算与无向图相同

$$P=\begin{array}{c}v_1\\v_2\\v_3\\v_4\end{array}\begin{bmatrix}1&1&0&1\\0&0&0&0\\1&1&0&1\\1&1&0&1\end{bmatrix}$$

可达集

- 定义8.2.2
  - 设D是一个有向图，又设$u \in D$，令

    $R(u)=\{v \mid v \in D$且从顶点u到顶点v是可达的$\}$

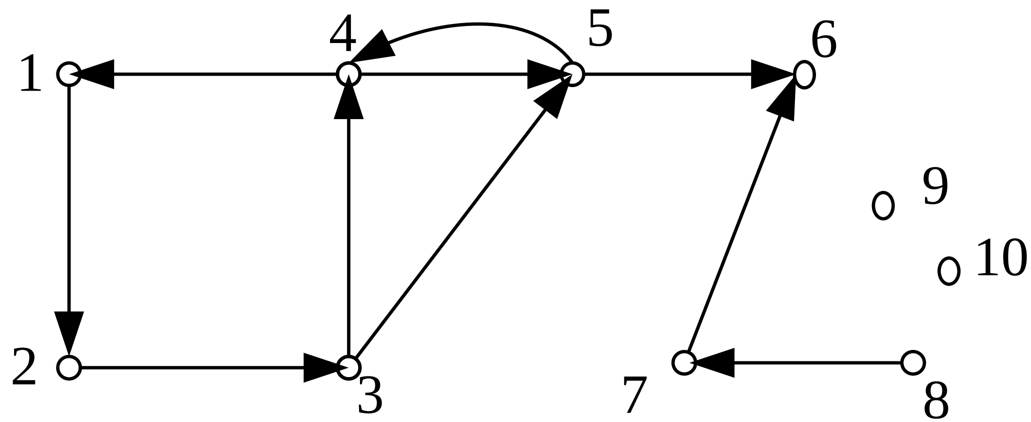
    则称$R(u)$为u的可达集。另若$X \subseteq V(D)$，令

    $R(X)=\{v \mid v \in D$且存在$u \in X$，从顶点u到顶点v是可达的$\}$

    则称$R(X)$是X的可达集
  - 显然

$$R(X)=\bigcup_{u \in X} R(u)$$

例



$R(v_1)=R(v_2)=R(v_3)=R(v_4)=R(v_5)=\{v_1,v_2,v_3,v_4,v_5,v_6\}$,

$R(v_6)=\{v_6\}$,

$R(v_7)=\{v_6,v_7\}$,

$R(v_8)=\{v_6,v_7,v_8\}$,

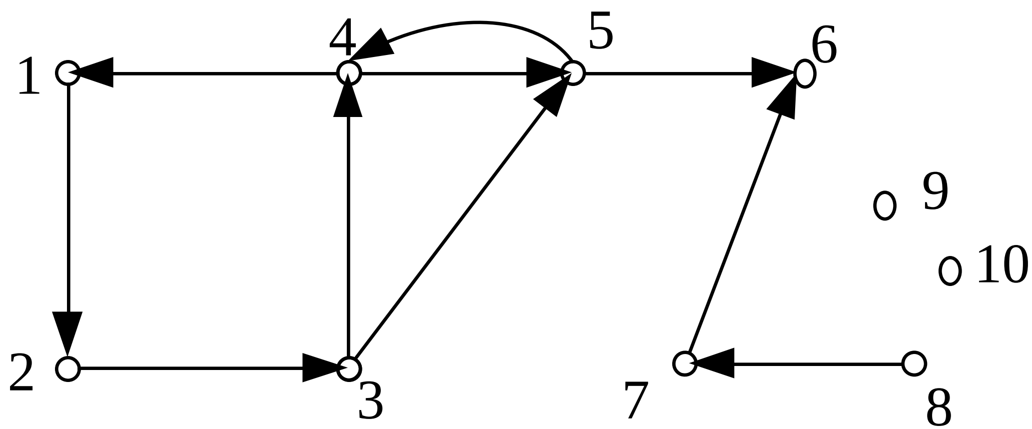
$R(v_9)=\{v_9\}$,

$R(v_{10})=\{v_{10}\}$,

$R(\{v_1,v_8,v_9,v_{10}\})=R(\{v_5,v_8,v_9,v_{10}\})=V(D)$

顶点基

- 定义8.2.3
  - 设D是一个有向图，$B \subseteq V(D)$，若$R(B) = V(D)$，且$\forall B' \subset B$都有$R(B') \subset V$，则称集合B是图D的顶点基

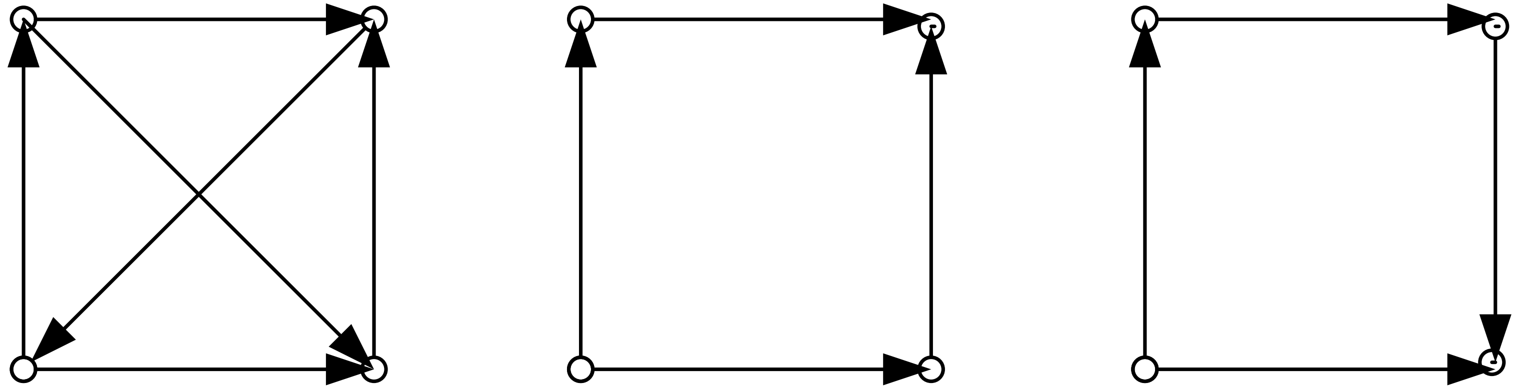


$\{v_1,v_8,v_9,v_{10}\}$，$\{v_2,v_8,v_9,v_{10}\}$，$\{v_3,v_8,v_9,v_{10}\}$，$\{v_4,v_8,v_9,v_{10}\}$，$\{v_5,v_8,v_9,v_{10}\}$

强连通图、弱连通图

- 定义8.2.4
  - 设*D*是一有向图，若∀*u*,*v*∈*D*，从顶点*u*到顶点*v*是可达的，且从顶点*v*到顶点*u*也是可达的，则称*D*是**强连通图**。
  - 若∀ *u*,*v*∈*D*，或者顶点*u*到顶点*v*是可达的，或者从顶点*v*到顶点*u*是可达的，则称*D*是**单向(侧)连通图**。
  - 若不考虑*D*中边的方向，*D*所对应的无向图(称为*D*的基础图)是连通的，即*D*中任意两个顶点之间都存在半通道，则称*D*是**弱连通图**。

例



(a) 强连通

(b) 弱连通 非单向连通

(c) 单向连通

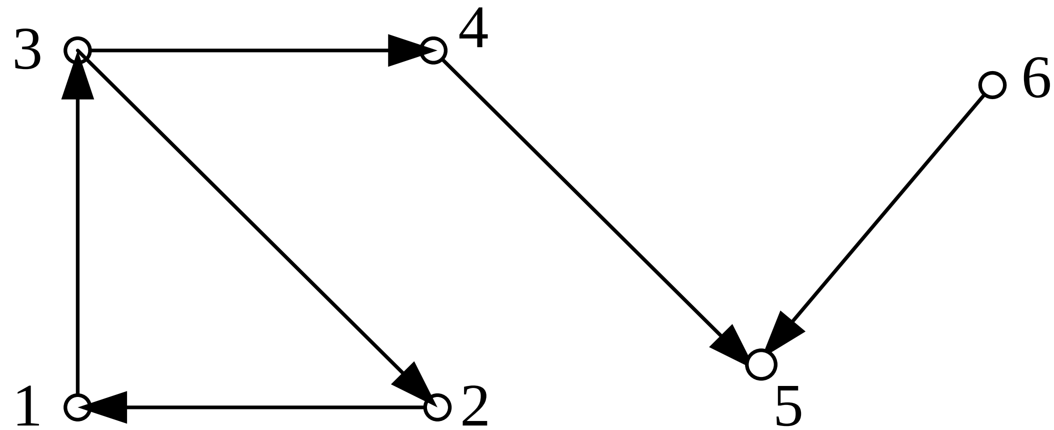
强连通图或单向连通图必是弱连通图

强连通图必是单向连通图

有向图不是弱连通的，必是不连通的

■ 定义8.2.5

□ 有向图D的极大强(单向、弱)连通子图叫D的强(单向、弱)分图



<{1,2,3}>，<{4}>，<{5}>和<{6}>是D的强分图

<{1,2,3,4,5}>和<{5,6}>是D的两个单向分图

D本身是一个弱连通图

- 定理8.2.1
  - 有向图D的诸强分图的顶点集之集形成了$V(D)$的一个划分

证明　只要证明D的每一顶点恰好位于一个强分图中。

任给$u \in D$，设：

$K(u) = \{v \mid v \in D$且u、v之间相互可达$\} =$

$\{v \mid v \in D \wedge u \in R(v) \wedge v \in R(u)\}$

显然由它导出的D的导出子图$\langle K(u) \rangle$是一个包含u的强分图，由此，D的每一顶点位于它的某一强分图中。

现在假定D有顶点x同在D的两个不同的强分图$\langle K(u) \rangle$和$\langle K(v) \rangle$中，那么u、x之间是相互可达的，v、x之间也是相互可达的，从而u、v之间是相互可达的，这与$\langle K(u) \rangle$和$\langle K(v) \rangle$是D的两个不同的强分图这一假定相矛盾。

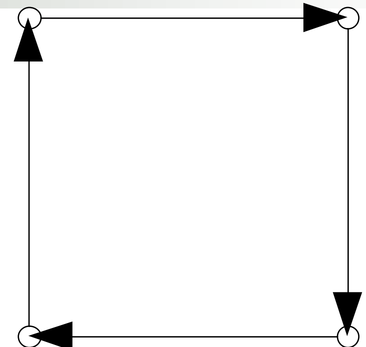
综上，D的每一顶点恰好位于它的一个强分图中。

定理得证。

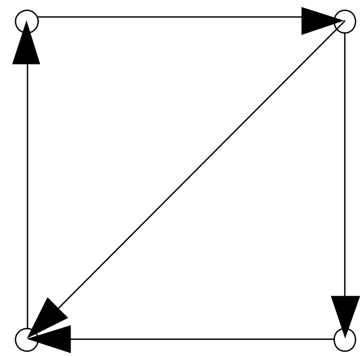
- 定理8.2.1的证明给出了一种求强分图的方法
- 尽管有向图的每一顶点恰好位于一个强分图中，但有向图的边，可能包含也可能不包含在其强分图中
- 如果边<u,v>的两顶点u和v在一个强分图中，则该边也在该强分图中
- 若边<u,v>属于一个强分图，那么边<u,v>必是一个圈的一部分
- 单向分图和弱分图
  - 有向图的每一顶点和每一条边至少属于一个单向分图
  - 有向图的每一顶点和每一条边恰好属于一个弱分图

完全路径

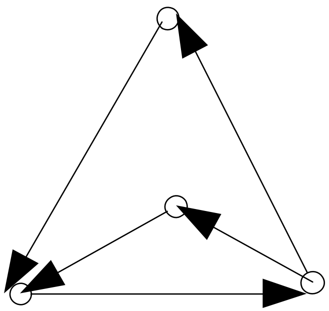
- 定义8.2.6
  - 设D是一个有向图，如果D中一条路径经过D的所有顶点，那么它便叫做D的一条完全路径。同样可以定义完全通道(迹、圈)。
    - 由圈组成的图是强连通的
    - 在任何一个圈上加上一些有向边所得的图也是强连通的
    - 如果一个有向图中存在一个完全圈，那么这个有向图是强连通的
      - 反之不然



（a）



（b）



（c）

定理8.2.2

- 有向图D强连通的充分必要条件是它有一条完全闭通道。

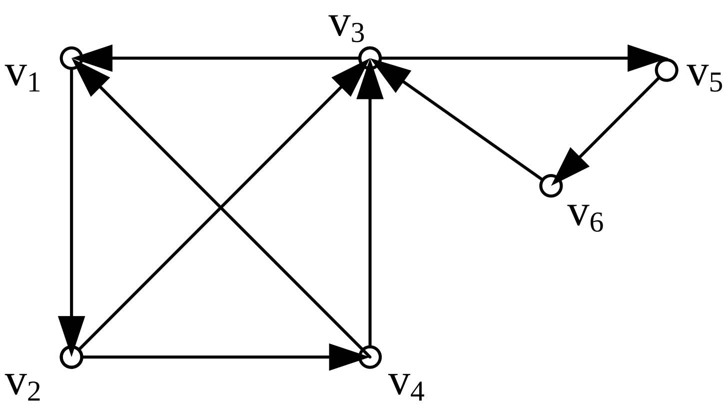
证明（1）充分性

设$v_1v_2\ldots v_tv_1$是D的一条完全闭通道，则$u,v\in D$，由闭通道的完全性可知，必存在i，$j(1\le i,j\le t)$使得$u=v_i$，$v=v_j$，不妨假定$i<j$，这样，$v_iv_{i+1}\ldots v_j$是一条从u到v的通道，$v_jv_{j+1}\ldots v_tv_1\ldots v_{i-1}v_i$是一条从$v$到$u$的通道，这说明从顶点$u$到顶点$v$是可达的，从顶点$v$到顶点$u$也是可达的，故$D$是强连通的。

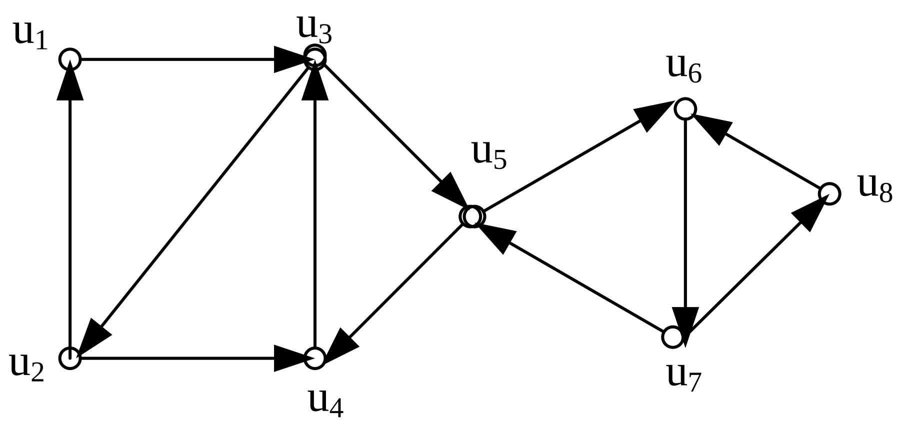
（2）必要性

若D是强连通的，设u_1，u_2，…，u_n为D的全部顶点。那么存在从u_1到u_2的通道P_1，从u_2到u_3的通道P_2，…，从u_{n-1}到u_n的通道P_{n-1}，从u_n到u_1的通道P_n，依P_1，P_2，…，P_n的次序连接这n条通道即得D的一条完全闭通道。

例



D_1



D_2

$v_3v_1v_2v_4v_3v_5v_6v_3$

$u_1u_3u_2u_4u_3u_5u_6u_7u_8u_6u_7u_5u_4u_3u_2u_1$

- 定理8.2.3
  - 有向图D单向连通的充分必要条件是它有一条完全通道

证明（1）充分性

设$v_1v_2\ldots v_t$是D的一条完全通道，则$u,v\in D$，由通道的完全性可知，必存在i，$j(1\le i,j\le t)$使得$u=v_i$，$v=v_j$，这样，若$i<j$，那么$v_iv_{i+1}\ldots v_j$是一条从u到v的通道，若$i>j$，那么$v_jv_{j+1}\ldots v_i$是一条从v到u的通道，这说明或者从顶点u到顶点v是可达的，或者从顶点v到顶点u是可达的，故D是单向连通的。

(2) 必要性

为了证明必要性，需要一条引理：

引理 设有向图D是一个单向连通图，X是$V(D)$的非空子集，那么存在$x \in X$，使得x能通过D的有向边达到X中的每一顶点，即$X \subseteq R(x)$。

证明 对$\#X$行数学归纳法：

(1) 〖归纳基础〗

$\# X = 1$，2时，由单向连通性的定义，引理显然成立。

(2) 〖归纳步骤〗

假设引理在$\#X = k(k \geq 2)$时成立，考虑$V(D)$的$k+1$元子集$X = \{v_1, v_2, \ldots, v_k, v_{k+1}\}$。由归纳假设，存在$v_i \in X - \{v_{k+1}\}$使得$v_i$能达到所有的$v_j$，其中$j \leq k$，如果从$v_i$到$v_{k+1}$是可达的，则取$x = v_i$，否则，由于$D$是单向连通的，$v_{k+1}$到$v_i$是可达的，取$x = v_{k+1}$，这样$x$能通过$D$的有向边达到$X$中的每一顶点。

根据数学归纳法原理，引理得证。

定理必要性的证明：

若n阶有向图D是单向连通的，根据引理，

存在$x_1 \in V(D)$使得x_1能达到$V(D)$中每一顶点，

存在$x_2 \in V(D)-\{x_1\}$使得x_2能达到$V(D)-\{x_1\}$中每一顶点，

…，

存在$x_{n-1} \in V(D)-\{x_1，x_2，…，x_{n-2}\}$使得$x_{n-1}$能达到$V(D)-\{x_1，x_2，…，x_{n-2}\}$中每一顶点。

现在设x_1经过通道P_1达到x_2，

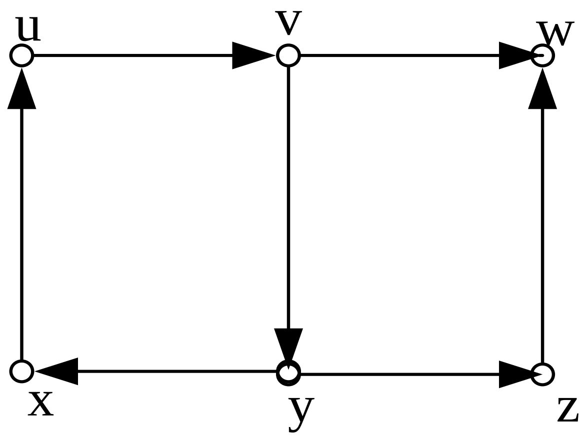
x_2经过通道P_2达到x_3，…，

x_{n-1}经过通道P_{n-1}达到x_n。

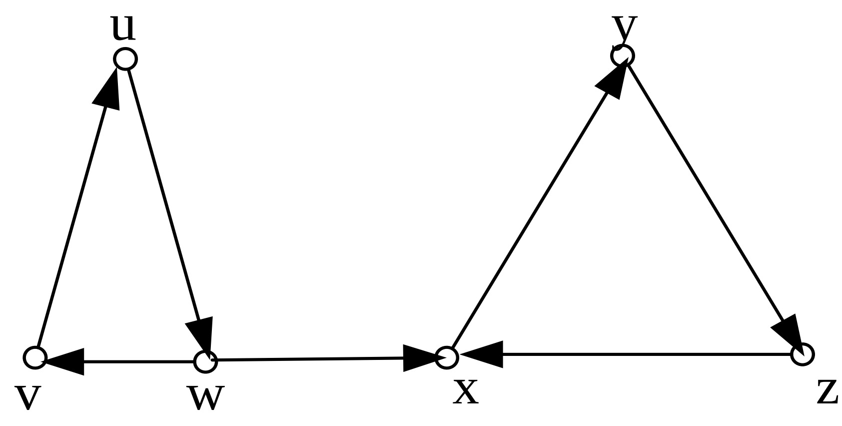
依P_1，P_2，…，P_{n-1}的次序连接这n-1条通道即得D的一条完全通道。

- 定理8.2.4
  - 有向图D弱连通的充分必要条件是它有一条完全半通道。

例



D_1



D_2

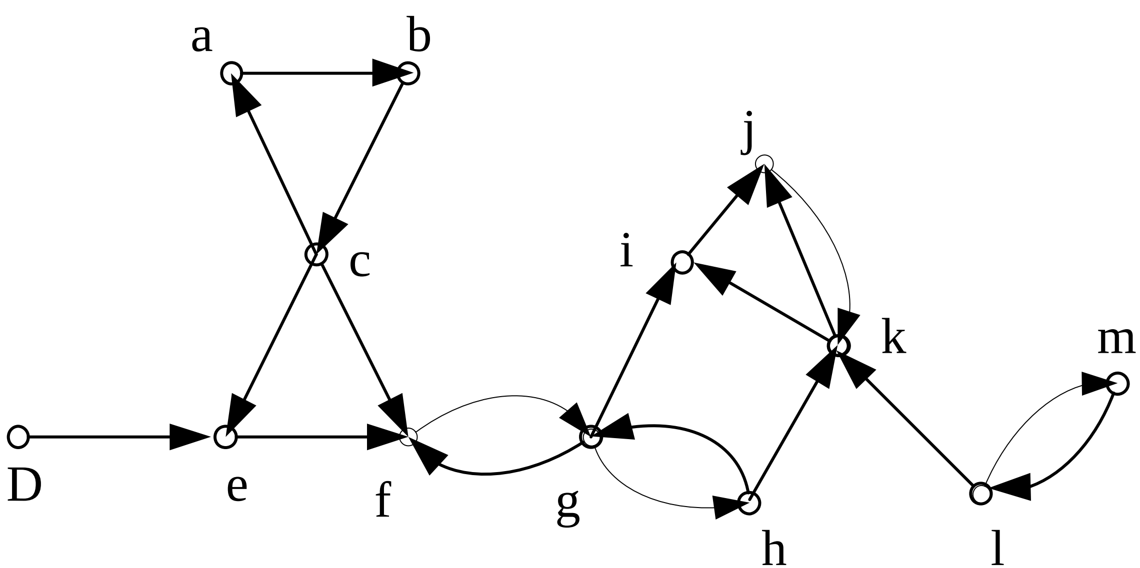
D_1中，$yxuvyzw$是一条完全通道

D_2中，$vuwxyz$是一条完全通道

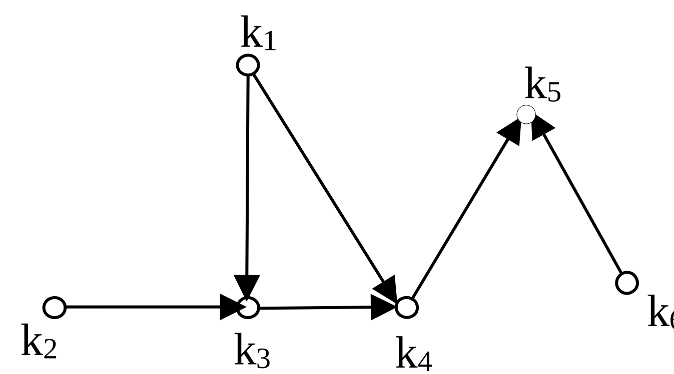
是否强连通？

定义8.2.7

- 设D是一个有向图，K_1，K_2，…，K_p是它的全部p个强分图，那么D的聚图(ConDensation，或称商图)D^*是这样一个有向图：$V(D^*)=\{K_1, K_2, …, K_p\}$，而$K_i$ Adj K_j，当且仅当i≠j并且存在$u \in K_i$和$v \in K_j$使得在D中有u *Adj* v。



(a)



(b)

- 定理8.2.5
  - 如果D是一个有向图，那么它的聚图D^*是一个无圈图

证明　假定在D^*中存在一个圈$K_{i1}K_{i2}\ldots K_{im}K_{i1}$。设在$D$中，$u$是$K_{i1}$的一个顶点，$v$是$K_{i2}$的一个顶点。因为$K_{i1}K_{i2}\ldots K_{im}K_{i1}$是$D^*$中的一个圈，故在$D$中，$u$和$v$是彼此可达的，即它们在同一强分图中，于是$K_{i1}=K_{i2}$，这与圈的定义矛盾。

定理8.2.6

- 每个无圈有向图D有唯一的顶点基：$B=\{u \mid u\in D$ 且 $id(u)=0\}$。

证明　设D的顶点基为B^*，往证$B=B^*$。

显然B中的每个顶点必在B^*中，即$B\subseteq B^*$。下面证明$R(B)=V(D)$，从而$B=B^*$(因为由顶点基的定义，若$B\subset B^*$，则$R(B)\subset V(D)$)。

令$X=V(D)-R(B)$，可以证明$X=\Phi$

假若不然，必存在$x_0\in X$，由X的定义，有$x_0\notin B$，即$id(x_0)>0$。可推知存在$x_1\neq x_0$使得$x_1\ Adj\ x_0$，显然$x_1\notin B$，即$id(x_1)>0$。同样，存在$x_2\neq x_1$、x_0使得$x_2\ Adj\ x_1$，由于D无圈，故此推理可以无限进行下去，矛盾。

推论

- 在无圈有向图中，必存在入度为 0 的顶点。
- 有向图的聚图有唯一的顶点基。

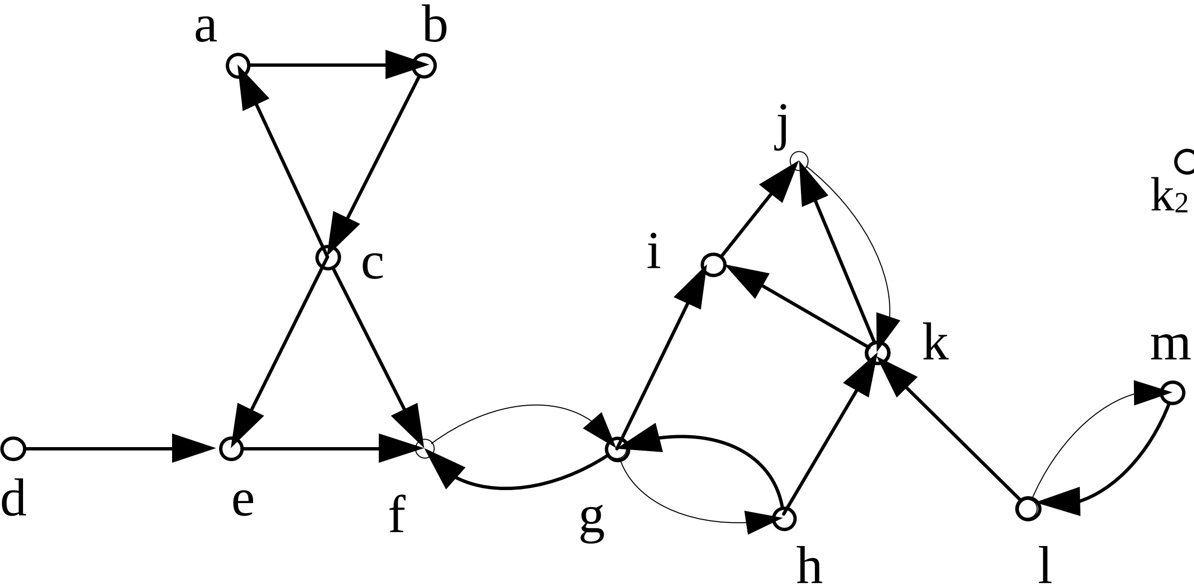
- 定理8.2.7
  - 设D是一个有向图，B^*是D的聚图D^*的唯一顶点基。那么D的顶点基是这样一个顶点集合B：它是从B^*中的每个强分图中各取一个顶点组成的。

证明 显然，D的每个顶点是从B中的某一顶点可达的，即$R(B)=V(D)$。必须证明B是具有这一性质的最小集合。

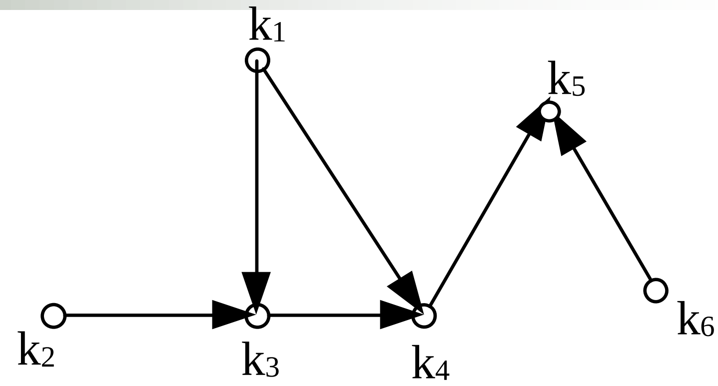
为了证明最小性，只要证明：不存在顶点$v\in B$使得v是从另一顶点$u\in B$可达的。

假若不然，那么在D^*中，从包含u的那个强分图可达到包含v的那个强分图，与B^*的最小性矛盾。

例



(a)



(b)

(b)所示的图D^*的唯一顶点基：{K_1，K_2，K_6}

|K_1|=3，|K_2|=1，|K_6|=2

(a)所示的图D共有3∗1∗2＝6个不同的顶点基：{a,d,l}，{a,d,m}，{b,d,l}，{b,d,m}，{c,d,l}和{c,d,m}

有向图在资源分配中的应用

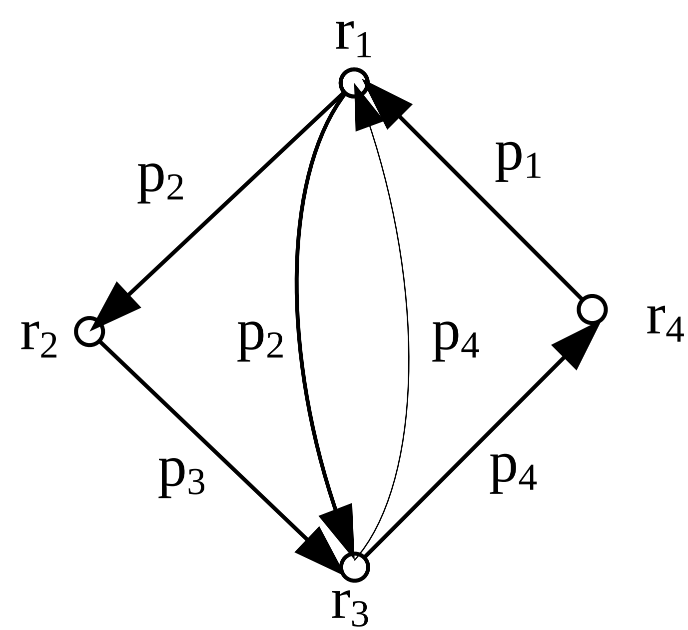
- 很多计算机(网络)系统允许多道程序的执行
- 这些程序共享着计算机系统中的硬件和软件资源
- 操作系统控制这些资源对各用户程序的分配
- 当一个程序要求使用某种资源时，向操作系统发出对这一资源的请求，操作系统必须保证这一请求得到满足。
- 对资源的请求可能会出现循环等待的现象
  - 例如：程序p_1占有着资源r_1并请求使用资源r_2
  - 程序p_2占有着资源r_2并请求使用资源r_1
  - 结果：程序p_1和p_2都不能继续运行——死锁状态
- 避免死锁或者限制它的影响是操作系统的一种功能
- 有向图能够模拟计算机系统中的资源请求，帮助发现和纠正死锁。

- 假定程序的一切资源请求必须在该程序完成执行之前得到满足，若资源请求暂时得不到满足，则程序控制着已占有的资源等待这一请求得到满足

- 令$P_t=\{p_1, p_2, \ldots, p_m\}$表示计算机系统在时刻$t$执行的程序集。设$A_t \subseteq P_t$是一活动程序集，或者说是在时刻$t$已经分配得到了一部分它们所请求的资源的程序集。又设$R_t=\{r_1, r_2, \ldots, r_n\}$是系统在时刻$t$的资源集。那么系统资源分配图$G_t=<R_t, E>$是一个有向图，它表示在时刻$t$系统的资源分配状况，其中$E=\{<r_i, r_j> \mid$在$A_t$中存在一个占有着资源$r_i$并请求使用资源$r_j$的程序$\}$。

例

- 令$R_t = \{r_1, r_2, r_3, r_4\}$，$A_t = \{p_1, p_2, p_3, p_4\}$，而程序占有与请求资源的情况为：
  - p_1占有着资源r_4且请求使用r_1
  - p_2 占有着资源r_1且请求使用r_2和r_3
  - p_3 占有着资源v_2且请求使用r_3
  - p_4 占有着资源r_3且请求使用r_1和r_4



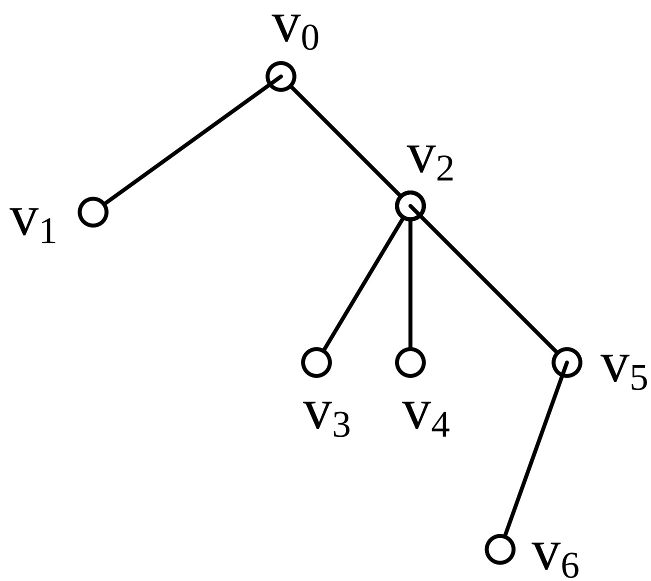
时刻t的系统资源分配图

可以证明，计算机系统在时刻*t*处于死锁状态的充分必要条件是：系统资源分配图 G_t包含有非平凡的强分图。

8.3 根树及其应用

- 有向树
- 定义8.3.1
  - 恰有一个入度为 0 的顶点，其余顶点的入度均为 1 的弱连通有向图称为根树。在根树中，入度为 0 的顶点称作树根，出度为 0 的顶点称作树叶，出度大于 0 的顶点称作分支点，从根至某顶点的距离称为该顶点的级，所有顶点的级的最大值称为该根树的高度。
- 与无向图中的树一样，p阶根树有p-1条边

例



树根：v_0

树叶：v_1,v_3,v_4,v_6

分支点：v_0,v_2,v_5

v_0的级： 0

v_1和v_2的级： 1

v_3,v_4和v_5的级： 2

v_6的级： 3

根树的高度： 3

约定：总把树根画在上方，所有有向边的方向都由上而下，省略箭头

- 定义8.3.2
  - 根树是按以下规则构成的有向图：
    1. 平凡图是根树，其顶点称作该根树的根
    2. 设m是一正整数，$T_i = <V_i,E_i>$是以r_i为根的根树(i=1,2,…,m)，并且V_1、V_2、…、V_m两两互不相交，$r_0 \notin V_i$(i=1,2,…,m)。那么称有向图$<V;E>$是以r_0为根的根树，并且称T_1、T_2、…、T_m为T的子树，其中$V = \{r_0\} \cup V_1 \cup V_2 \cup \ldots \cup V_m$，

       $E = \{<r_0,r_1>,<r_0,r_2>,\ldots,<r_0,r_m>\} \cup E_1 \cup E_2 \cup \ldots \cup E_m$。
  - 显然，定义8.3.1与定义8.3.2是等价的

定理8.3.1

- 设v_0是有向图D的入度为 0 的顶点。D是以v_0为根的根树当且仅当从v_0到D的任意顶点都恰好有一条路径。

证明（1）必要性

若D是以v_0为根的根树，任取D的一顶点$v \neq v_0$。

一方面，由D的弱连通性可知，必存在从v_0到v的半路径，设其为$P = v_0 v_1 v_2 \ldots v_{t-1} v_t$(其中$v_t = v$)。

因为$id(v_0) = 0$，所以$v_0\ Adj\ v_1$；

而$id(v_1) = 1$，所以$v_1\ Adj\ v_2$；

依次，可归纳证明$v_{i-1}\ Adj\ v_i (i=1,2,\ldots,t)$，即$P$为从$v_0$到$v$的路径。

另一方面，若从v_0到v有两条路径P_1和P_2，则至少有一个P_1和P_2的公共顶点的入度大于 1 ，这与D是根树矛盾。

（2）充分性

显然D是弱连通的。

对于D的任一顶点$v \neq v_0$，由于存在从v_0到v的路径，故$id(v) \geq 1$。

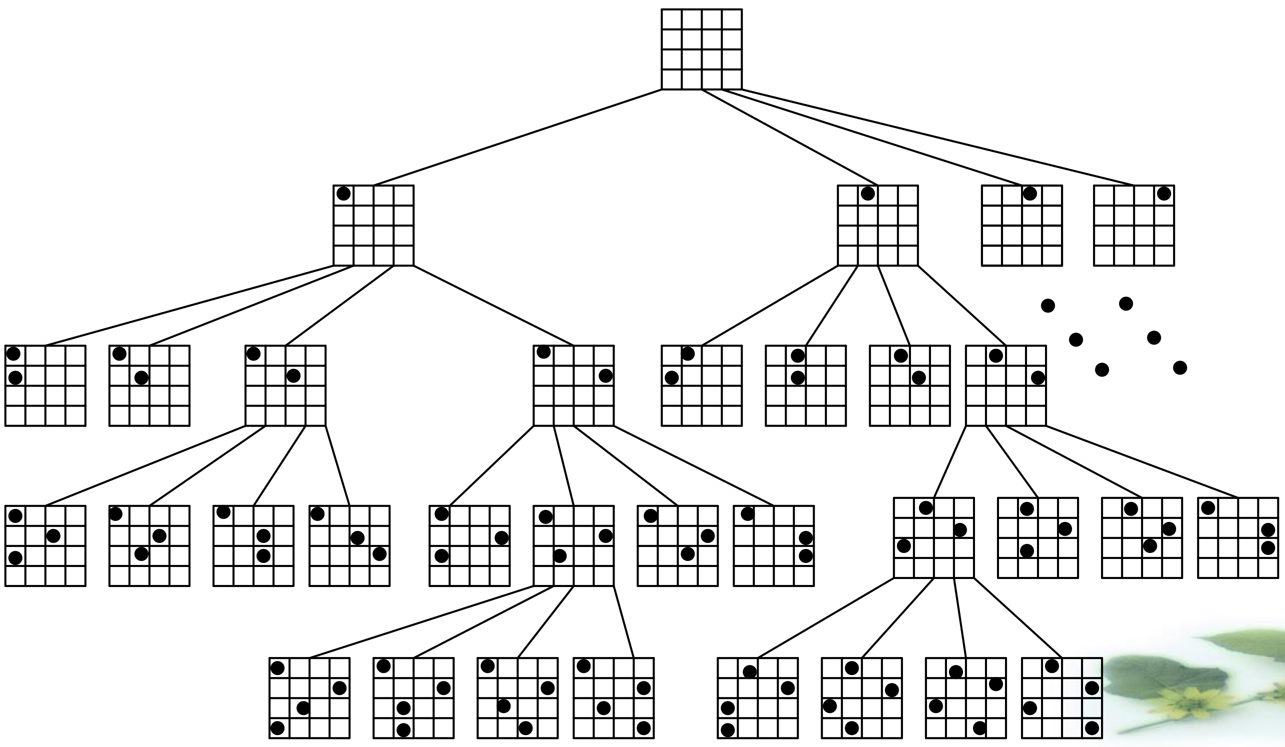
另一方面，若$id(v) > 1$，则至少存在两个顶点v_1与v_2和v邻接

这样，只要将从v_0到v_1与v_2的两条路径均延长至v便得到两条从v_0到v的路径，与条件矛盾。

这就证明了D是以v_0为根的根树。

m元根树

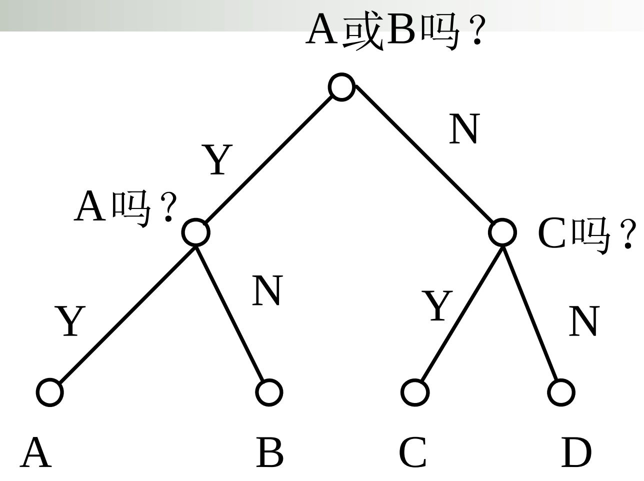
- 定义8.3.3 设T为根树。
  1. 若$max\{od(u)|u\in T\}=m$，则称T为m元根树。
  2. 如果对于m元根树T的每个顶点u皆有$od(u)=0$或$od(u)=m$，则称T为完全m元根树。
- 例：四皇后问题



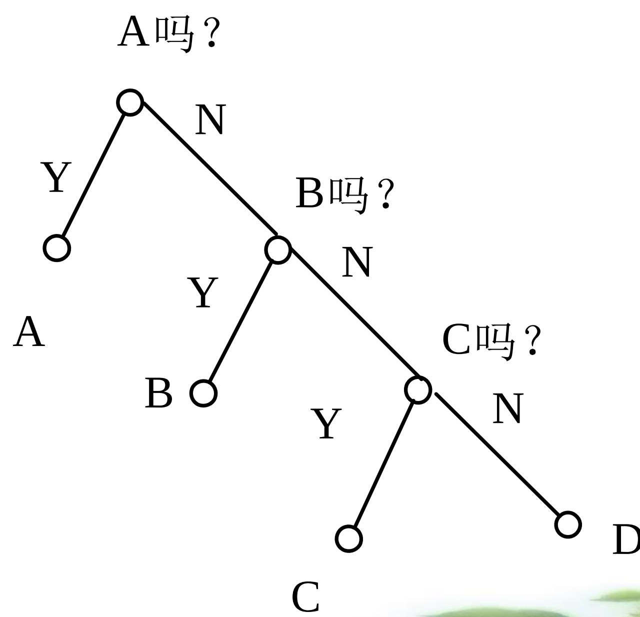
- 完全二元根树在计算机科学中非常有意义
- 可用来研究算法的效率
- 定义8.3.4
  - 设V是以v_0为根的二元根树T的全体树叶组成的集合，W是V到R_+的函数，则称<T;W>为叶加权二元(根)树。对于T的任意树叶v，称$W(v)$为v的权，并称$\sum W(v)\, d(v_0,v)$为<T;W>的叶加权路径长度，其中$d(v_0,v)$为v_0到v的距离。
  - 简单地说，所谓叶加权二元树就是对二元根树的每一片树叶指定一个正实数

例

- 如果用树叶表示字母或符号，用分支点表示判断，用权表示字母或符号出现的频度，则叶加权路径长度就表示算法的平均执行时间
- 例：
  - 图 (a)和(b)表示了识别*A*,*B*,*C*,*D*四个符号的两个算法
  - *A*,*B*,*C*,*D*的出现频度分别为0.5,0.3,0.05,0.15
  - 图(a)的叶加权路径长度为2
  - 图(b)的叶加权路径长度为1.7
  - 因此图(b)表示的算法优于图(a)表示的算法。



（a）



（b）

最优叶加权二元树

- 定义8.3.5
  - 设$<T;W>$是叶加权二元树。如果对任一叶加权二元树$<T';W'>$，只要对于任意正实数r，T和T'中权等于r的叶的数目相同，就有$<T; W>$的叶加权路径长度不大于$<T';W'>$的叶加权路径长度，则称$<T;W>$为最优叶加权二元树
- 求某问题的最佳算法归结为求最优叶加权二元树
- *Huffman*算法是一种求最优叶加权二元树的有效方法
  - *David Huffman*提出

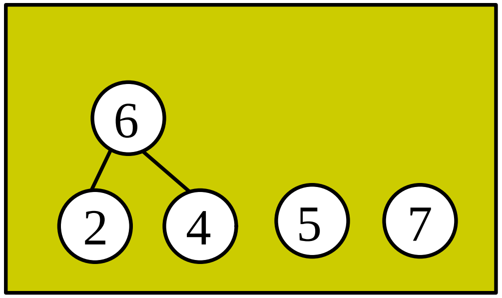
*Huffman*算法

- 求权分别为w_1，w_2，…，w_t的最优叶加权二元树

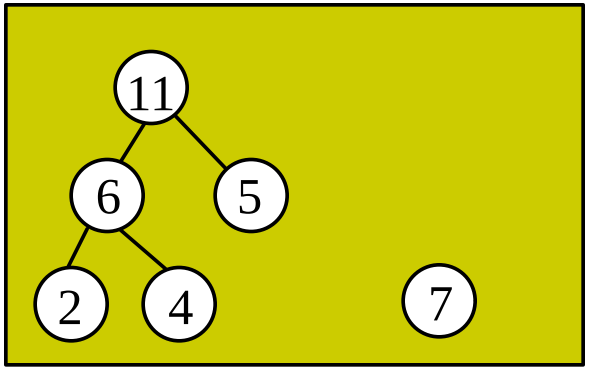
1. 根据给定的t个权值w_1，w_2，…，w_t构成t棵根树组成的集合$F=\{T_1, T_2, \ldots, T_t\}$，其中每棵$T_i$仅有一个顶点：带权值$w_i$的树根。
2. 在F中选取两棵树根的权值最小的根树作为子树构造得一棵新的根树，且该根树的根的权值为其两棵子树的根的权值之和。
3. 在F中删除这两棵根树，同时将新构造的根树加入F中。
4. 重复步骤(2)和(3)，直到F中只含一棵树为止。这棵树就是最优叶加权二元树

例

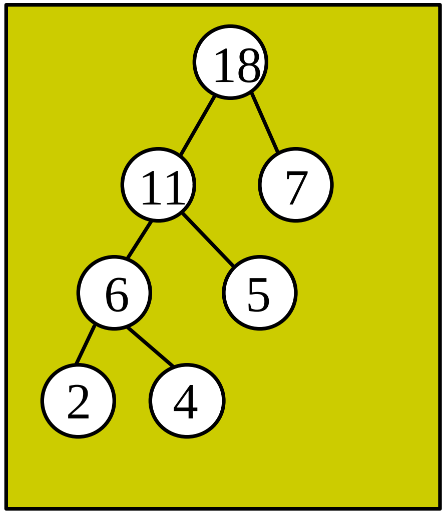
- 求权分别为7,5,2,4的最优叶加权二元树



(1)



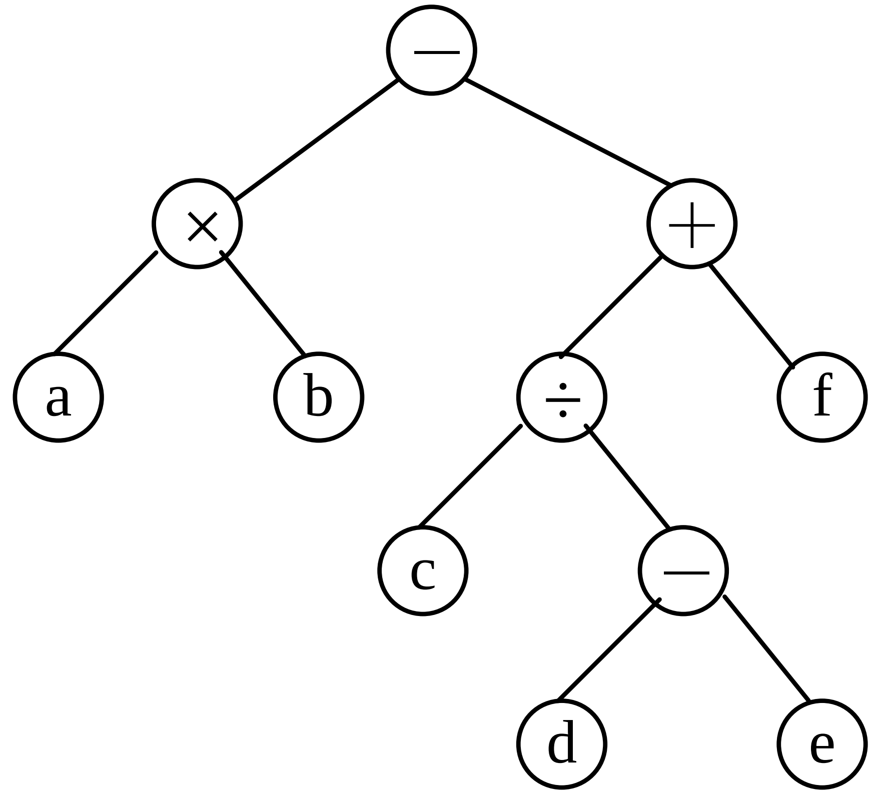
(2)



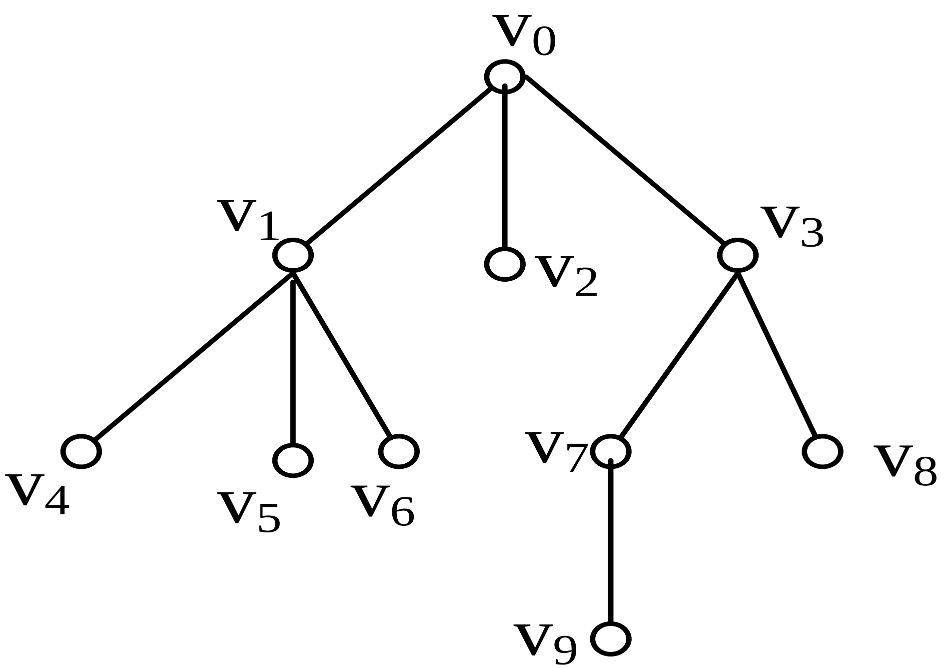
(3)

二元有序根树

- 定义8.3.6
  - 为每一个分支点的所有子树规定了次序的根树称为有序根树
  - 约定，在图示有序根树时，总是把树根画在上方，并规定同一分支点的子树的次序从左到右排列
  - 例：用有序根树表示算术表达式
    - $a \times b - (c \div (D - e) + f)$



- 借用家族树的名称来称呼有序根树的顶点



v_1、v_4、v_7和v_9分别是v_0、v_1、v_3和v_7的长子

v_1和v_2皆是v_3的兄长

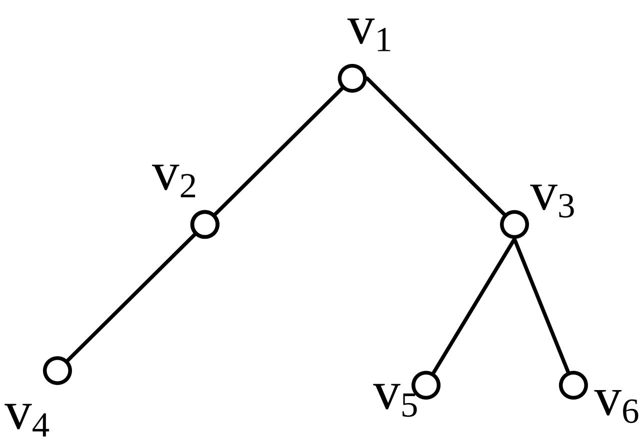
v_2是v_1的大弟， v_3是v_2的大弟

v_1和v_2分别是v_4等的父亲与叔父

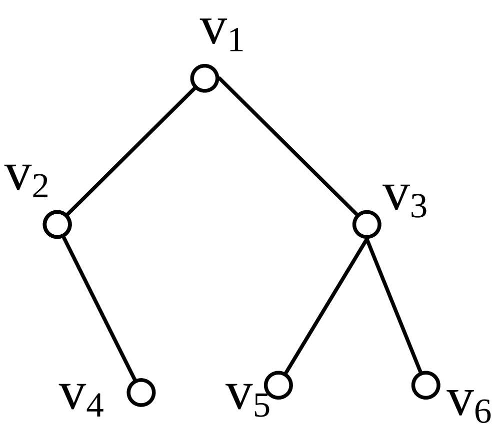
v_4和v_7是堂兄弟

二元定位有序根树

- 定义8.3.7
  - 为每个分支点的所有子树规定了位置的有序根树称为定位有序根树
- 用得最多的定位有序根树是二元定位有序根树，称为二叉树



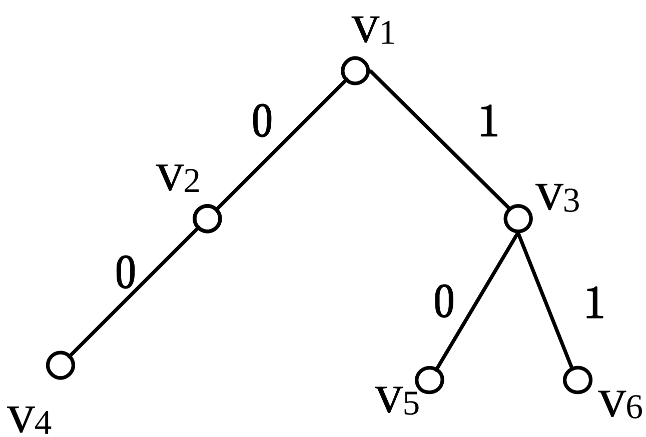
(a)



(b)

二叉树与前缀码

- 在二叉树中，可用字母表{0,1}上的字符串唯一地表示每一个顶点：
  - 用空串ε表示根；若用β表示某内部顶点，则分别用β_0和β_1表示它的左儿子和右儿子。这样，每个顶点都有了唯一的编码表示，并且不同顶点的编码表示不同



v_1——ε

v_2—— 0

v_3——1

v_4——00

v_5——10

v_6——11

- 通信中,我们常用5位0、1序列表示一个英文字母($26 < 2^5$)
- 各字母的使用频率不同，定长的序列浪费空间
  - *e*,*t*用得频繁
  - *q*和*z*用得稀少
- 用较短序列去表示使用频繁的字母
- 用较长的序列去表示用得稀少的字母

Question

- 00表示e，01表示t，0001表示q
- 收到信息串0001时，传递的内容是e？t？还是q?
- 解决方案
  - 前缀码

前缀码与完全二叉树

- 定义8.3.8
  - 二叉树全体树叶的编码表示的集合称为该二叉树的前缀编码
  - 前缀码序列中，没有一个序列是另一序列的前缀
  - 例：{000,001,01,10,11}
- 在完全二元树中，把每一结点的引出左枝记上0，右枝记上1，从根到每一片树叶所经过边的记号串集合构成前缀码
- 以符号的出现频度作为权的最优叶加权完全二叉树的前缀编码，即*Huffman*编码

例

- 八个符号的出现频度分别为0.2,0.19,0.18,0.17, 0.15,0.1,0.005,0.005和$2^{-1},2^{-2},2^{-3},2^{-4},2^{-5},2^{-6},2^{-7},2^{-7}$时的Huffman编码及压缩效果