自习社

概率论课后习题详解

版本号：1.0

自习社研究部编

目录

第一章

习题 1.1

（由于第一节文字较多且原答案较丰富，所以直接复制过来了...）

1. 略；

2. 设 ω_i 表示"出现 i 点"（$i=1,2,\cdots,6$），则

（1）样本点为 $\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4,\omega_5,\omega_6$；样本空间为 $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4,\omega_5,\omega_6\}$，

（2）$A=\{\omega_2,\omega_4,\omega_6\}$；$B=\{\omega_3,\omega_6\}$.

（3）$\overline{A}=\{\omega_1,\omega_3,\omega_5\}$，表示"出现奇数点"；$\overline{B}=\{\omega_1,\omega_2,\omega_4,\omega_5\}$，表示"出现的点数不能被3整除"；$A\cup B=\{\omega_2,\omega_3,\omega_4,\omega_6\}$，表示"出现的点数能被2或3整除"；$AB=\{\omega_6\}$，表示"出现的点数能被2整除且能被3整除"；$\overline{A\cup B}=\{\omega_1,\omega_5\}$，表示"出现的点数既不能被2整除也不能被3整除".

3.（1）设 ω_i 表示"点数之和等于 i"（$i=3,4,\cdots,18$），则

$\Omega=\{\omega_3,\omega_4,\cdots,\omega_{18}\}$；

$A=\{\omega_{11},\omega_{12},\cdots,\omega_{18}\}$；$B=\{\omega_3,\omega_4,\cdots,\omega_{14}\}$.

（2）设 ω_{ijk} 表示"出现号码为 i,j,k"（$i,j,k=1,2,\cdots,5,\ i\neq j\neq k$），则

$\Omega=\{\omega_{123},\omega_{124},\omega_{125},\omega_{134},\omega_{145},\omega_{135},\omega_{234},\omega_{235},\omega_{245},\omega_{345}\}$

$C=\{\omega_{123},\omega_{124},\omega_{125},\omega_{134},\omega_{145}\}$.

4.（1）$A_1A_2\cdots A_n$；

（2）$\overline{A_1A_2\cdots A_n}$ 或 $\overline{A_1}\cup\overline{A_2}\cup\cdots\cup\overline{A_n}$；

（3）$\overline{A_1}A_2\cdots A_n\cup A_1\overline{A_2}\cdots A_n\cup\cdots\cup A_1A_2\cdots\overline{A_n}$

（4）$A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n$ 或 $\overline{\overline{A_1}\,\overline{A_2}\cdots\overline{A_n}}$.

习题 1.2

1.

（1） 自己看书，关系是 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(A)=P(A)$

（2） 自己看书

2. $\because A\cap B=0\ \therefore A\cap\overline{B}=A, \therefore P(A\overline{B})=0.4$

3. $\because P(A\cup B)=P(A)+P(B)+P(AB)=0.3$

$P(A)=0.1, P(AB)=0, \therefore P(B)=0.2$

4. $P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-p(AB)-p(BC)-p(AC)+P(ABC)=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-0-0-\frac{1}{4}+0=0.75$

5. $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=0.8+0.6-0.48=0.92$

习题 1.3

1. 自己看书

2. $P = \frac{C_{13}^5 C_{13}^3 C_{13}^3 C_{13}^2}{C_{52}^{13}} = 0.01293$

3. $P = \frac{C_9^1 \cdot A_8^6 + C_9^1 \cdot C_6^1 \cdot A_7^5}{C_9^1 \cdot 10^6} = 0.0605$

4. $P = \frac{C_{95}^{50} \cdot + C_{95}^{49} \cdot C_5^1 \cdot}{C_{100}^{50}} = 0.181$

5. 直白的说，夫妇中任何一个人身边一定坐着两个人，而只要他妻子出现在两侧即可，就是 P=$\frac{2}{9}$

   还可以说，我们可以给座位号标上 1-10，那么总共有A_{10}^{10}中排列，而夫妇在一起的情况有两种，一个 1 一个 10 或者是其他，1 个 1 一个 10 共有$2 \times A_8^8$可能；其他情况是$2 \times A_9^9$，故$P = \frac{2 \times (A_8^8 + A_9^9)}{A_{10}^{10}} = \frac{2}{9}$

6. 由几何概型可得

   通过计算面积，可得 p=$\frac{3}{4}$

习题 1.4

1. 自己看书

2. 解：$\mathrm{p(B|A)} = \frac{P(AB)}{P(A)} = 0.95, \mathrm{p}(\mathrm{B}|\bar{A}) = \frac{P(\bar{A}B)}{P(\bar{A})} = 0.8, \mathrm{p}(\bar{B}|\mathrm{A}) = \frac{P(A\bar{B})}{P(A)} = 0.05, \mathrm{p}(\bar{B}|\bar{A}) = \frac{P(\overline{AB})}{P(\bar{A})} = 0.2$

3. 解：$\mathrm{P(A)} = 0.8, \mathrm{P(B)} = 0.2, \mathrm{p(B|A)} = \frac{P(AB)}{P(A)} = 0.15, \mathrm{p(A|B)} = \frac{P(AB)}{P(B)} = 0.6,$

   $\mathrm{P(AB)} = 0.12, \mathrm{P(C)} = 0.4, \mathrm{p(C|A)} = \frac{P(AC)}{P(A)} = 0.4, \mathrm{p}(\bar{A}|\bar{B}) = \frac{P(\bar{A}\bar{B})}{P(\bar{B})} = 0.15, \mathrm{P(AC)} = 0.32$

4. 解：$\mathrm{P(A)} = \frac{C_4^1}{C_{10}^1} = 0.4, P(B) = \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{9} = \frac{2}{15}, \mathrm{p(C)} = \frac{6}{10} \cdot \frac{4}{9} = \frac{4}{15}$， $P(D) = P(B) \cdot \frac{2}{8} = \frac{1}{30}$

5. 解：p=$\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{3}{7} \cdot \frac{4}{8} = \frac{3}{70}$

习题 1.5

1. （1）—（6）略；（7）先验概率就是这件事没发生之前你去计算他的概率；后验概率就是这件事发生了你去校正他的概率。

2. 解：$\mathrm{p} = (\mathrm{X} = 1,2,3,4$ 概率同$)\frac{1}{4} \cdot \left(0 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) = \frac{13}{48}$

3. 解：设 A 为硬币是正品，T 为扔 r 次每次均出现国徽，则$p(A|T)=\frac{P(AT)}{P(T)}=$

$$\frac{P(T|A)P(A)}{P(T|A)P)(A)+P(T|A)P(A)}=\frac{\frac{1}{2^r}\cdot\frac{m}{m+n}}{\frac{1}{2^r}\cdot\frac{m}{m+n}+\frac{n}{m+n}}=\frac{m}{m+n\cdot 2^r}$$

习题 1.6

1. 略
2. 解：p=$0.9*0.8*0.7+0.1*0.8*0.7+0.9*0.2*0.7+0.9*0.8*0.3=0.902$
3. 解：$p=0.3+0.7*0.2*0.2=0.328$
4. 解：p=$\frac{1}{5}+\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{3}+\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{4}=\frac{3}{5}$
5. 解：设 A 为飞机被击落，X 为飞机被击中次数。

$$P\{X=0\}=0.6\times0.5\times0.3=0.09$$

$$P\{X=1\}=0.4\times0.5\times0.3+0.6\times0.5\times0.3+0.6\times0.5\times0.7=0.36$$

$$P\{X=2\}=0.4\times0.5\times0.3+0.4\times0.5\times0.7+0.6\times0.5\times0.7=0.41\quad P\{X=3\}=0.14$$

则 $P(A)=0.2P\{X=1\}+0.6P\{X=2\}+P\{X=3\}=0.458$

6. 设做出正确决策为事件 A,做出正确决策的人数为 X 则$P\{X=k\}=C_9^k 0.7^k 0.3^{9-k}$，

$$P(A)=P\{X\ge 5\}=0.901$$

7. 即$1-(1-p)^n\ge p,1-p\ge(1-p)^n,n\ge1$，至少一次

习题一

一．填空题

1. 解：$\because A\cap B=\bar{A}\cap\bar{B}\quad\therefore A与B为两个对立事件$

$$\therefore A\cup B=\Omega，AB=\phi$$

2. 解：$(\bar{A}\cup B)\cap(A\cup B)=B\quad(A\cup\bar{B})\cap(\bar{A}\cup\bar{B})=\bar{B}$

$$B\cap\bar{B}=\phi$$

$$\therefore 原式=0$$

3. 解：$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(BC)-P(AC)+P(ABC)=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{16}-\frac{1}{16}=\frac{5}{8}$

$$P=1-\frac{5}{8}=\frac{3}{8}$$

二．选择题

1. 解：$\because P(A)=P(A|B)$ $\therefore$ A 与 B 之间没有关系，即事件 A 与事件 B 相互独立
2. $\because$ A, B 为两个互逆的事件， $\therefore P(A|B)=P(B|A)=0$
3. 若事件 A 与事件 B 相互独立，则$P(A|B)+P(\overline{A}|\bar{B})=P(A)+P(\overline{A})=1,$ *符合条件*

三．计算题

1. $P=\frac{C_5^2+C_5^1C_2^1C_4^1C_3^1}{C_{10}^4}=\frac{13}{21}$

2. (1)解：有两个实根的情况下，则$p^2-4q\geq 0,$由几何概型可得 $p=\frac{13}{24}$ （2）在（1）

   的条件下，多出$q\geq 0,$由几何概型解出 p=$\frac{1}{48}$

3. 解：设第一段长为 X，第二段长为 Y，第三段为 L-X-Y
   由三角形三边关系可得
   X+Y$\geq 1-X-Y, X+L-X-Y>Y, Y+L-X-Y>X$
   即$\begin{cases} x+y>\frac{l}{2} \\ x<\frac{l}{2} \\ y<\frac{l}{2} \end{cases}$
   由几何概型得 p=0.25

4. 解：p=$\frac{C_{18}^1\cdot C_{17}^1\cdot C_2^1+C_{18}^1\cdot C_2^1\cdot C_1^1}{C_{20}^3}=0.089$

5. 解：$p=\frac{C_{96}^3}{C_{100}^3}\cdot 0.01^3+\frac{C_{96}^2\cdot C_4^1}{C_{100}^3}\cdot 0.01^2\cdot 0.95^1+\frac{C_{96}^1\cdot C_4^2}{C_{100}^3}\cdot 0.01^1\cdot 0.95^2+\frac{C_4^3}{C_{100}^3}\cdot 0.95^3=$

   0.8629

6. 设事件 A(X=k)表示甲取 k 时大于乙数，事件 T 为甲取得的数大于乙取得的数，那么

   $$P(T)=\frac{1}{5}[P(A(X=2))+P(A(X=4))+P(A(X=6))+P(A(X=8))+P(A(X=10))]$$

   $$=\frac{1}{5}[\frac{1}{5}+\frac{2}{5}+\frac{3}{5}+\frac{4}{5}+\frac{5}{5}]=\frac{15}{25}=0.6$$

7. 设击沉潜水艇为事件 A,击中导弹数目为 X,则

   $P\{X=0\}=\frac{1}{6^4}=\frac{1}{1296}, P\{X=1\}=C_4^1\frac{5}{6}\frac{1}{6^3}=\frac{20}{6^4}=\frac{5}{324}$ ，则

   $P(A)=1-P(\bar{A})=1-[P\{X=0\}+\frac{3}{5}P\{X=1\}]=\frac{1283}{1296}$ ，（这里为什么是$\frac{3}{5}$而不

   是$\frac{1}{2}$是在已经击中的情况下，击伤的概率为$\frac{3}{5}$ ）

8.

   （1）

已知$P(A|B)>P(A|\bar{B}),$则$\frac{P(AB)}{P(B)}>\frac{P(A\bar{B})}{P(\bar{B})}=\frac{P(A)-P(AB)}{1-P(B)}\Rightarrow P(AB)>P(A)P(B)$

要证

$$P(B\mid A)>P(B\mid \bar{A})\Rightarrow \frac{P(AB)}{P(A)}>\frac{P(B\bar{A})}{P(\bar{A})}=\frac{P(B)-P(AB)}{1-P(A)}\Rightarrow \text{即证}P(AB)>P(A)P(B)$$

证毕。

（2） $$P(A\mid B)=P(A\mid \bar{B})\Leftrightarrow \frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{P(A\bar{B})}{P(\bar{B})}=\frac{P(A)-P(AB)}{1-P(B)}$$

$$\Leftrightarrow P(AB)=P(A)P(B)\Leftrightarrow A\text{、}B\text{独立}$$

第二章

习题 2.1

1.
（1）引入随机变量，使我们可以研究一个随机试验中的所有可能结果，特别是随机事件数有可列个数非常多或连续取值以至于无限时。
（2）若随机变量 X 所取的可能值是有限个或无限个可列个，则 X 称为离散型随机变量；若随机变量 X 所取的可能值不能逐个列举出来，则 X 为非离散型随机变量（连续型离散变量仅为其中一部分）。

2. $P\{X=k\}=q^{k-1}p,k=1,2...,\text{其中}q=1-p$

3.
（1）

X	0	1	2	3	4
P	0.4	0.24	0.144	0.0864	0.1296

（2） P（X≤ 2）=0.4+0.24+0.144=0.784

4. .a=0.1

X	1	2	3	4
P	0.1	0.2	0.3	0.4

习题 2.2

1.
（1）为了更好地掌握某区间内的概率分布情况。
（2）

定义：X 是一个随机变量，x 是任意实数，函数

$$F(x)=P\{X\le x\},(-\infty<x<\infty)$$

称为随机变量 X 的分布函数。

此时要将 x 放在整个数轴上进行讨论。（特点自己感受吧…）

（3）性质：

[1]有界性：$0\le F(x)\le 1$

[2] $\lim_{x\to-\infty}F(x)=F(-\infty)=0,\ \lim_{x\to+\infty}F(x)=F(+\infty)=1$

[3]单调性：F(x)是单调不减函数。

[4]F（x）是右连续的。

[5]对每个 a，P{X=a}=F(a)-F（a-0）

（4）$F(x)=\sum P\{X\le x\}$

2. 是（2）区间的分布函数（由题目 1 中（3）中分布函数的四个性质判断）

3.

（1） $F(x)=\begin{cases}0, x<0\\ \frac{1}{3}, 0\le x<1\\ \frac{1}{2}, 1\le x<2\\ 1, x\ge 2\end{cases}$

（2） $P\{X\le\frac{1}{2}\}=\frac{1}{3}$

（3） $P\{\frac{1}{2}<X\le\frac{3}{2}\}=\frac{1}{6}$

（4） $P\{1\le X\le 2\}=\frac{2}{3}$

习题 2.3

1. （1） 略

（2） n 是随机试验的总次数，P 是单次发生某事件的概率

2.

设至少需要 n 次，记每次抽出 0 的概率为 p，则

$$P=0.1$$

记事件 A 为 0 至少出现一次

$$A\sim B(n,p), P(A)=C_n^1 p(1-p)^{n-1}\ge 0.9$$

$$解得 n\ge 22$$

3. P（至少两次击中目标）=1-$C_{5000}^{1}(0.001)(1-0.001)^{5000-1}$-$C_{5000}^{0}(1-0.001)^{5000}$=0.95964

4.

(1)（属于超几何分布，通式 $P\{X=k\}=\frac{C_4^k C_{16}^{6-k}}{C_{20}^6}, k=0,1,2,3,4$ ）

X	0	1	2	3	4
P	0.2066	0.4508	0.2817	0.0578	0.0031

(2)（属于二项式分布，通式为$P\{X=k\}=C_{20}^{k}0.2^{k}\times 0.8^{20-k}, k=0,1,2,3,4,5,6$ ）

X	0	1	2	3	4	5	6
P	0.2621	0.3932	0.2458	0.089	0.0154	0.0015	0.0001

5. 用二项分布计算

$$P=C_{300}^{4}(0.01)^{4}(1-0.01)^{300-4}=0.168031355$$

用·泊松分布计算

$$\lambda=np=3$$

$$P=\frac{3^{4}e^{-3}}{4!}=0.168031355$$

相对误差：5%

6. $P=C_5^3(0.3)^3(1-0.3)^2+C_5^4(0.3)^4(1-0.3)^1+C_5^5(0.3)^5=0.16308$

习题 2.4

1.

（1） 定义：

对于随机变量 X 的分布函数 F(x)，存在非负函数 f(x)，使对于任意实数 x，有

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

则称 X 为连续型随机变量，其中 f(x)为 X 的概率密度函数。

几何意义：分布函数的值表示概率密度函数图像中小于等于该值的左侧包裹的面积图像（说直白点就是小于等于该值的概率，非说成几何就是这样），密度函数相当于概率密度函数图像中等于该值长度为 1 矩形的面积

（2） 性质：（P63 下—P64 上）

[1] f（x）≥ 0

[2] $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=1$

[3] 对于任意实数 x1，x2(x1≤ x2)，P{x1<X≤x2}=F(x2)-F(x1)=$\int_{x1}^{x2} f(x)dx$

[4] 若 f（x）在点 x 处连续，则有$F'(x)=f(x)$

[5] 对于连续型随机变量 X 来说，因为其分布函数 F（x）是连续的，所以

P{X=a}=F（a）-F（a-0）=0

（3）均匀分布特点：X 落在平均分布的区间内的任意等长度的子区间内的可能性是相同的。

（4） 指数分布特点：无记忆性

应用背景：作为某些等待时间的概率分布。

无记忆性：如果一个随机变量呈指数分布

当$s,t \geq 0$时有$P(T>s+t|T>t)=P(T>s)$

即，如果 T 是某一元件的寿命，已知元件使用了 t 小时，它总共使用至少$s+t$小时的条件概率，与从开始使用时算起它使用至少 s 小时的概率相等。

（5） 正态分布：可见 P68 页下。

标准正态分布：$\mu=0$，$\sigma=1$，特点不详叙

标准正态分布是正态分布的一个特殊情况。

（6） 3σ 原则为

数值分布在（μ-σ,μ+σ)中的概率为 0.6827

数值分布在（μ-2σ,μ+2σ)中的概率为 0.9545

数值分布在（μ-3σ,μ+3σ)中的概率为 0.9973

可以认为，Y 的取值几乎全部集中在（μ-3σ,μ+3σ)区间内，超出这个范围的可能性仅占不到 0.3%.

（7） 标准正态分布函数分位点：

设随机变量 X~N（0,1），若

P（X>u_a）=a

则称u_a为此正态分布的**上 a 分位数**

即

1-$\phi(u_a)$ =a

$\phi(u_a)$=1-a

2.

（1）$\int_0^{+\infty} Ae^{-3x}\,dx=1$，解得 A=3

（2）P{X>0.1}=$\int_{0.1}^{+\infty} 3e^{-3x}\,dx$=0.7480

（3）F(x)=$\begin{cases} 0(x<0) \\ 1-e^{-3x}(x\geq 0) \end{cases}$

3.

（1）由：$\lim_{x\to+\infty} F(x)=1$和$\lim_{x\to+0} F(x)=0$解得 **A=1,B=-1**

（2）f(x)=$\begin{cases} 0(x\le 0) \\ xe^{-\frac{x^2}{2}}(x>0) \end{cases}$

（3）P=F(2)-F(1)=0.4712

4. 设汽车刚开走是在t_0时刻，下一辆车到达时刻为t_0+5，乘客到达汽车站的时刻假定为 X，X 服从（t0，t0+5）的均匀分布，则有：

$$F(x)=\begin{cases} \frac{1}{5}(t_0<x<t_0+5) \\ 0,其他 \end{cases}$$

$$P\{t0+2<X\le t0+5\}=\int_{t0+2}^{t0+5}\frac{1}{5}dt=0.6$$

5. 设三个都不能使用 1000h 以上为事件 A，至少有一个能使用 1000h 以上为事件 B

$$P(B)=1-P(A)=1-(\int_0^{1000} f(x)dx)^3=0.638$$

6. 先写出概率密度函数，

$$f(x)=\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-1)^2}{2\times 4}},-\infty<x<\infty$$

$$F(5)=\int_{-\infty}^{5} f(x)dx=0.9772$$

$$P\{0<X\le 1.6\}=\int_0^{1.6} f(x)dx=0.3049$$

$$P\{|X-1|\le 2\}=P\{-1\le X\le 3\}=\int_{-1}^{3} f(x)dx=0.3049$$

7. 设 x 为获奖分数线，列出下列公式，

$$P\{X\ge x\}=P\{\frac{X-65}{10}\ge\frac{x-65}{10}\}=1-\Phi(\frac{x-65}{10})=0.1$$

查表解得

$$x=78$$

8.

（1） $P\{X<89\}=P\{\frac{X-90}{0.5}<-2\}=\Phi(-2)=0.02275$

（2） 要求

$$P\{X\ge 80\}\ge 0.99\Rightarrow P\{X<80\}<0.01$$

则

$$P\{\frac{X-d}{0.5}<2(80-d)\}<0.01$$

查表可以解得，$d\ge 81.1635$

习题 2.5

1.

（1）$Y = Y_i$ 时，得到所有满足$Y_i = g(X)$的X集合(不妨设为$X_1, X_2 ... X_n$)，那么

$$P\{Y = Y_i\} = \sum_{i=1}^{n} P\{X = X_i\}$$

（2）

法一：利用下面的公式先求 Y 的分布函数

$$F_Y(Y \le y) = F_X(g(x) \le y) \quad ,$$

然后求导得密度函数 $f_Y(y)$

法二：若 g（x）是严格单调函数，X 具有概率密度 $f_X(x), -\infty < x < \infty$ 又设 $g(x)$ 处处可导且有 $g'(x) > 0$ (或恒有 $g'(x) < 0$)，则 $Y = g(X)$ 是连续型随机变量，其概率密度为：

$$f_Y(y) = \begin{cases} f_X\big(h(y)\big)|\mathrm{h}'(\mathrm{y})\ ’\ |，\alpha < y < \beta \\ 0, 其他 \end{cases}$$

其中$\alpha = \min\{g(-\infty)，g(\infty)\}$，$\beta = \max\{g(-\infty)，g(\infty)\}$，h(y)是 g(x)的反函数。

（3）服从，详见 P79 页下例 2.5.6

2.

Y	0	1	4	9
P	1/5	7/30	1/5	11/30

3. 用上面 T1（2）中方法二得：

当 c>0 时，$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{c(b-a)}, ca + d \le y \le cb + d, \\ 0, 其他 \end{cases}$

当 c<0 时，$f_Y(y) = \begin{cases} -\frac{1}{c(b-a)}, cb + d \le y \le ca + d, \\ 0, 其他 \end{cases}$

4. 先写出，

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

（1）取了绝对值，实际上就是相当于正的部分乘了 2 倍，即

$$f_Y(y) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}}，y > 0 \\ 0, 其他 \end{cases}$$

（2）利用公式，

$$f_Y(y)=\begin{cases} f_X(h(y))|h'(y)'| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(\ln y)^2}{2}}\cdot\frac{1}{y},\ 0<y<+\infty \\ 0,\text{其他} \end{cases}$$

5. $F_Y(y)=P\{Y<y\}=P\{1-2|X|<y\}=P\{X<-\frac{1-y}{2}\text{或}X>\frac{1-y}{2}\}=$

$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}[\int_{-\infty}^{\frac{y-1}{2}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx+\int_{\frac{1-y}{2}}^{\infty}e^{-\frac{x^2}{2}}dx]$ ，求导，得

$$f_Y(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}[\frac{1}{2}e^{-\frac{(\frac{y-1}{2})^2}{2}}+\frac{1}{2}e^{-\frac{(\frac{y-1}{2})^2}{2}}]$$

$$f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(y-1)^2}{8}},y\le 1\\ 0,y>1\end{cases}$$

6. $X'=-\frac{1}{Y^2}$, 在 $(-\infty,0),(0,\infty)$ 上单调，所以可以套用公式：

$$f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{\pi(1+\frac{1}{y^2})}\frac{1}{y^2}=\frac{1}{\pi(1+y^2)},y<0\\ \text{当}x\to\infty,f_Y(y)=0,\text{不妨填}\frac{1}{\pi(1+0^2)},y=0\\ \frac{1}{\pi(1+\frac{1}{y^2})}\frac{1}{y^2}=\frac{1}{\pi(1+y^2)},y>0\end{cases}$$

（以下解释请慎信，完全为了按照答案解释，有更好说法欢迎私戳） $y=0$ 时，这个地方本应该是 0，但是概率密度函数趴，少一两个点，换一两个点也没影响，所以不如让整个表达式看起来连续，所以 $f_Y(y)=\frac{1}{\pi(1+y^2)},-\infty<y<\infty$

习题二

一、填空题

1. 直接套吧， $F(x_0)-F(x_0-0)$

2. $F(1)-F(0)=\frac{1}{4}$

3. 先列出式子，

$$P\{\frac{1}{2}<x<\frac{5}{2}\}=P\{x=1,2\}=\frac{3}{4}A$$

又因为

$$A(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16})=1$$

解得

$$A=\frac{16}{15}$$

$$所以P\{\frac{1}{2}<x<\frac{5}{2}\}=P\{x=1,2\}=0.8$$

4. F(x)单调不减，函数 F(x)右连续，且 F（-∞）=0，F（+∞）=1

5. 不变。$g(\sigma)=P\{|X-a|<\sigma\}=P\{|\frac{X-a}{\sigma}|<1\}=\Phi(1)-\Phi(-1)$,与$\sigma$无关

6. 0.5。（因为整个图像关于 x=1 对称）

二、计算题

1.

X	0	1	2
P	$\frac{C_{13}^3}{C_{15}^3}=\frac{22}{35}$	$\frac{C_2^1C_{13}^2}{C_{15}^3}=\frac{12}{35}$	$\frac{C_2^2C_{13}^1}{C_{15}^3}=\frac{1}{35}$

2.

X	1	2	3
P	0.6	$0.4\times0.6=0.24$	1-0.6-0.24=0.16

3.

（1）$C_5^2(0.1)^2(0.9)^3=0.0729$

（2）$C_5^3(0.1)^3(0.9)^2+C_5^4(0.1)^4(0.9)^1+(0.1)^5=0.00856$

（3） $1-C_5^4(0.1)^4(0.9)^1-(0.1)^5$ =0.99954

（4）$1-(0.9)^5$ =0.40951

4. P{X=k}=$(\frac{1}{4})^{k-1}\times\frac{3}{4},(k=1,2,3, \ldots\ldots)$

5. 用泊松分布计算,则$\lambda=$ np=3，P=$\frac{3^4e^{-3}}{4!}$ =0.168031355

6. 无实根则

$$16X^2-16(X+2)<0\Rightarrow\frac{1}{2}<X<\frac{7}{2}$$

又由题得：

$$f（x）=\begin{cases}e^{-x}，x>0\\0，其他\end{cases}$$

$$P=\int_{1/2}^{7/2}f(x)dx=1-e^{-2}$$

7. 有题目可以列出方程式，

$$\int_2^3 f(x)dx=P=2\int_1^2 f(x)dx$$

且 P=$\int_1^3 f(x)dx$=1

解得

$$\begin{cases} A=\dfrac{1}{3} \\ B=\dfrac{1}{6} \end{cases}$$

8.

（1）证明：

F（-a）=$\int_{-\infty}^{-a} f(x)dx$=$\int_{\infty}^{a} f(-x)d(-x)$=$\int_{a}^{+\infty} f(x)dx = 1-\mathrm{F(a)}$

F（-a）=$\int_{a}^{+\infty} f(x)dx = \int_{0}^{+\infty} f(x)dx - \int_{0}^{a} f(x)dx = \frac{1}{2} - \int_{0}^{a} f(x)dx$

（2）$P\{|X|>a\}=2P\{X>a\}=2[1-F(a)]$

（3）$P\{|X|<a\}=1-2[1-F(a)]=2F(a)-1$

9.先求出$a=\dfrac{1}{9}$，然后对应于$Y=2(X-2)^2$列表，

X	0	2	8	18
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{11}{36}$	$\frac{1}{9}$

10. 因为$I=\sqrt{\dfrac{W}{2}}, I'=\dfrac{1}{2\sqrt{2W}}$单调，且

$$f_I(i)=\begin{cases} \dfrac{1}{2}, \quad 9<i<11 \\ 0, 其他 \end{cases}$$

$$F_W(w)=\begin{cases} \dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2\sqrt{2w}}=\dfrac{1}{4\sqrt{2w}}, 162<w<242 \\ 0, 其他 \end{cases}$$

11. $y=x^3, f_Y(y)=\begin{cases} f_X(\sqrt[3]{y})\dfrac{1}{3y^{\frac{2}{3}}}=\dfrac{1}{3ay^{\frac{2}{3}}}, 0<y<a^3 \\ 0, 其他 \end{cases}$，

12. 合格率表达式为

$$P\{|X-\mu|\le m\}=P\{|\frac{X-\mu}{\sigma}|\le\frac{m}{\sigma}\}=\Phi(\frac{m}{\sigma})-\Phi(-\frac{m}{\sigma})=2\Phi(\frac{m}{\sigma})-1=0.95$$

$$\Phi(\frac{m}{\sigma})=0.975=\Phi(1,96)\Rightarrow m=1.96\sigma$$

第三章

习题 3.1

1. 不是，我们来看，过了分界线 $x+2y=1$，分布函数 $F(x,y)$ 就从 0 变为 1，那么可以说，

   所有的 x,y 都满足 $x+2y=1$，那么这就不叫二元随机变量了，实质上只有一个随机变量，所以不是二维随机变量的联合分布函数。
2. 证明：他是不是二维随机变量的概率密度函数，首先我们确认他是不是概率密度函数，证明条件需要（参考 P90 的 4 个性质）:（1）非负性;（2）归一性;（3）对概率的计算;（4）连续性

   （1） 首先非负性很好确认，不加详述。

   （2） 归一性：$\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\iint\limits_D \frac{2g(\sqrt{x^2+y^2})}{\pi\sqrt{x^2+y^2}}dxdy=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{\infty}\frac{g(r)}{r}rdr=1$

   （3） 这点，如果我们认为他是，那他就会有这个性质，无法证伪。

   （4） 我们看 $g(x)$ 可以从 0 积到无穷远，那么根据可积的判断条件（连续或者有限个

   第一类间断点），判断 $g(x)$ 连续，那么 $f(x,y)$ 也连续

   所以可以是二维随机变量的概率密度函数。

（整个证明并不严谨，从性质出发并不好，欢迎有好办法私戳）

3. 如下

Y\X	0	1	2	3
0	0	0	$\frac{C_3^2}{C_7^4}=\frac{3}{35}$	$\frac{C_2^1}{C_7^4}=\frac{2}{35}$
1	0	$\frac{C_3^1C_2^1}{C_7^4}=\frac{6}{35}$	$\frac{C_3^2C_2^1C_2^1}{C_7^4}=\frac{12}{35}$	$\frac{C_2^1}{C_7^4}=\frac{2}{35}$
2	$1/C_7^4=\frac{1}{35}$	$\frac{C_3^1C_2^1}{C_7^4}=\frac{6}{35}$	$\frac{C_3^2}{C_7^4}=\frac{3}{35}$	0

4. $Y=|X-(3-X)|=|2X-3|$

Y\X	0	1	2	3	P_Y
1	0	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	0	$\frac{3}{4}$

3	$\frac{1}{8}$	0	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$
P_X	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	

5. $f_{Z=|X-Y|}(Z)=\begin{cases}\int_0^{1-z} f_{X,Y}(Z+Y,Y)dy=\int_0^{1-z}dy=1-z, X>Y\\ \int_0^{1-z} f_{X,Y}(X,Z+Y)dx=\int_0^{1-z}dx=1-z, X\le Y\end{cases}=\begin{cases}1-z, 0\le z\le 1\\ 0,其他\end{cases}$

6. 首先计算这个正方形域的面积：边长为a，面积为a^2，那

（1） $f(X,Y)=\frac{1}{a^2},(|x|+|y|\le\frac{a}{\sqrt{2}})$

（2）

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dy=\begin{cases}\int_{-\frac{a}{\sqrt{2}}-x}^{\frac{a}{\sqrt{2}}+x}f(x,y)dy=\frac{\sqrt{2}a+2x}{a^2},-\frac{a}{\sqrt{2}}\le x<0\\ \int_{-\frac{a}{\sqrt{2}}+x}^{\frac{a}{\sqrt{2}}-x}f(x,y)dy=\frac{\sqrt{2}a-2x}{a^2},0\le x\le\frac{a}{\sqrt{2}}\\ 0,其他\end{cases}=\begin{cases}\frac{\sqrt{2}a-2|x|}{a^2},|x|\le\frac{a}{\sqrt{2}}\\ 0,|x|>\frac{a}{\sqrt{2}}\end{cases}$$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dx=\begin{cases}\frac{\sqrt{2}a-2|y|}{a^2},|y|\le\frac{a}{\sqrt{2}}\\ 0,|y|>\frac{a}{\sqrt{2}}\end{cases}$$

习题 3.2

1. 如下

（1） 横着顺着累加就可以了

	0	1	2	3
P_Y	$\frac{8}{27}$	$\frac{12}{27}=\frac{4}{9}$	$\frac{6}{27}=\frac{2}{9}$	$\frac{1}{27}$

	1	2	3
P_X	$\frac{3}{27}=\frac{1}{9}$	$\frac{18}{27}=\frac{2}{3}$	$\frac{6}{27}=\frac{2}{9}$

（2）

$X=1,Y$

$X=1,Y$	0	1	2	3
$P_{Y\mid X=1}$	$\frac{2}{3}$	0	0	$\frac{1}{3}$

$Y=0,X$

$Y=0,X$	1	2	3
$P_{X\mid Y=0}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	0

（3） $P\{X=3\mid Y=2\}=0, P\{Y=2\mid X=3\}=0$

2. $f_X=\int_{-x}^{x} f(x,y)dy=2x, 0<x<1$ ， $f_y=\int_{|y|}^{1} f(x,y)dx=1-|y|, -1<y<1$ 。那么

$$f_{Y|X}(y\mid x)=\frac{f(x,y)}{f_x(x)}=\begin{cases}\frac{1}{2x}, -x<y<x，\ 0<x<1\\ 0, 其他\end{cases}$$

$$f_{X|Y}(x\mid y)=\frac{f(x,y)}{f_y(y)}=\begin{cases}\frac{1}{1-|y|}, -x<y<x，\ 0<x<1\\ 0, 其他\end{cases}$$

3. $f_X(x)=\int_{x}^{1} f(x,y)dy=\int_{x}^{1} f_{X|Y}(x\mid y)f_Y(y)dy=\int_{x}^{1}15x^2ydy=\frac{15}{2}(x^2-x^4)$

$P(X>\frac{1}{2})=\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{15}{2}(x^2-x^4)dx=\frac{47}{64}$

习题 3.3

1.

Y\X	2	5	8	P_Y
0.4	0.15	0.3	0.35	0.8
0.8	0.05	0.12	0.03	0.2
P_X	0.2	0.42	0.38	

不独立，例子 $P(y=0.4,x=2)=0.15\neq P(y=0.4)P(x=2)$

2.

（1） $f(x,y)=\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}=0.0001e^{-0.01(x+y)}, f_X(x)=0.01e^{-0.01x}, f_Y(y)=0.01e^{-0.01y}$

$f_X(x)f_Y(y)=f(x,y)$ ，相互独立

（2） $P\{X>120,Y>120\}=1-F(120,120)=2e^{-1.2}-e^{-2.4}$ （答案错了）

3.

（1） 均匀分布，这又是一块面积，所以我们先来算面积，$S=2\int_0^1\sqrt{x}dx=\frac{4}{3}$，那么

$$f(x,y)=\frac{1}{\frac{4}{3}}=\begin{cases}\frac{3}{4},0\le x\le 1,y^2\le x\\ 0,其他\end{cases}$$

（2） $f_X(x)=\int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}}f(x,y)dy=\frac{3}{2}\sqrt{x},0\le x\le 1$

$f_Y(y)=\int_{y^2}^{1}f(x,y)dx=\frac{3}{4}(1-y^2),-1\le y\le 1$

$f(x,y)\ne f_X(x)f_Y(y)$，所以不独立

（3） $P(X<\frac{1}{2})=\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{3}{2}\sqrt{x}dx=\frac{1}{2^{\frac{3}{2}}}$， $P(Y<\frac{1}{2})=\int_{-1}^{\frac{1}{2}}\frac{3}{4}(1-y^2)dy=\frac{27}{32}$

$P(X<\frac{1}{2},Y<\frac{1}{2})=\frac{3}{4}S'=\frac{3}{4}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{8}$

（S'指的是满足条件的面积，为$2\int_0^{\frac{1}{4}}\sqrt{x}dx$ ）

习题 3.4

1.

如下

$Z=X+Y$	2	3	4
$P_{Z=X+Y}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

2. 如下

$Z=\max\{X,Y\}$	0	1
$P_{Z=\max\{X+Y\}}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$

3. $f_{Z=X+Y}(z)=\begin{cases}\int_0^z f_X(z-y)f_Y(y)dy=e^{-\frac{1}{3}z}-e^{-\frac{1}{2}z},z>0\\ 0,z\le 0\end{cases}$

4. $Z=\min\{X_1,X_2,X_3,X_4\}$，其中 X_1,X_2,X_3,X_4 相互独立，那么

$$P(Z\geq 180)=P^4(X_i\geq 180)=(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\frac{180-160}{\sqrt{202}}}^{\infty}e^{-\frac{x^2}{2}}dx)^4=0.00063$$

习题三

1.

（1） $\iint f(x,y)dxdy=a\int_0^1 dx\int_0^2(3x^2+xy)dy=3a=1, a=\frac{1}{3}$

（2） 当 $x<0$或$y<0$ 时，$F(x,y)=0$；

当 $0\leq x\leq 1, 0\leq y\leq 2$ $F(X,Y)=\frac{1}{3}\int_0^x dx\int_0^y f(x,y)dxdy=\frac{x^3y}{3}+\frac{1}{12}x^2y^2$

当 $0\leq x\leq 1, y>2$ 时，$F(x,y)=\int_0^x dx\int_0^2\frac{1}{3}(3x^2+xy)dy=\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{3}x^2$

当 $x>1, 0\leq y\leq 2$ 时，$F(x,y)=\int_0^y dy\int_0^1\frac{1}{3}(3x^2+xy)dx=\frac{y}{3}+\frac{1}{12}y^2$

当 $x>1, y>2$ 时，$F(x,y)=\int_0^2 dy\int_0^1\frac{1}{3}(3x^2+xy)dx=1$

（3） 通过画图我们可以确定积分区域嘛 $P(X+Y\leq 1)=\int_0^1 dx\int_0^{1-x}\frac{1}{3}(3x^2+xy)dy=\frac{7}{72}$

$$P(X+Y\leq 2.3)=\int_0^{0.3}dx\int_0^2 f(x,y)dy+\int_{0.3}^1 dx\int_0^{2.3-x}f(x,y)dy=\frac{6}{125}+0.6918=0.7398$$

2.

（1）

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{(b-a)(d-c)}，& a<x<b, c<x<d\\ 0，其他\end{cases}，f_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{b-a}, a<x<b\\ 0，其他\end{cases}, f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{d-c}, c<x<d\\ 0，其他\end{cases}$$

（2） 相互独立

3.

（1） $f(x,y)=\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x\partial y}=(\ln 3)^2 3^{-x-y}, x\geq 0, y\geq 0$

$f_X(x)=\begin{cases}\int_0^{\infty}f(x,y)dy=\ln 3\times 3^{-x}, x\geq 0\\ 0, x<0\end{cases}$ 同理，

$f_Y(y)=\begin{cases}\int_0^{\infty}f(x,y)dx=\ln 3\times 3^{-y}, y\geq 0\\ 0, y<0\end{cases}$，

（2） 2 $F_X(x)=\int_{-\infty}^x f_X(x)dx=1-3^{-x}, F_Y(y)=1-3^{-y}, F(x,y)=F_X(x)\cdot F_Y(y)$，独立

4. （1） $f_X=\begin{cases}\frac{1}{2},0\le x\le 2\\ 0,其他\end{cases}$, $f_Y=\begin{cases}\frac{1}{2},0\le y\le 2\\ 0,其他\end{cases}$, $f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{4},0\le x\le 2,0\le y\le 2\\ 0,其他\end{cases}$

（2） 因为本来就是均匀分布，就是一块面积，所以我们只要算符合要求的面积即可

$$P\{X+Y\le\frac{3}{2}\}=\frac{\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}\times\frac{3}{2}}{4}=\frac{9}{32}$$

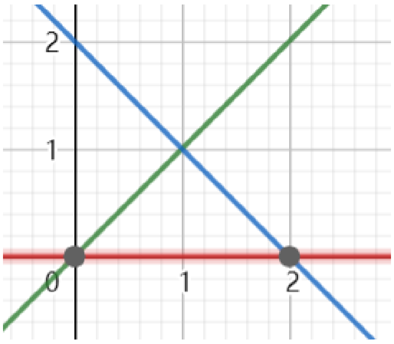
5. 我们可以列表格

（1） （先把已知为 0 的填进去，再把剩下的通过计算填入）

Y\X	-1	0	1	P_Y
0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
1	0	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$
P_X	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	

（2） 不独立，举个例子，$P(X=-1.Y=0)=\frac{1}{4}\ne P(X=-1)P(Y=0)$

6. 如右图



（1） 首先，$f(x,y)=\begin{cases}1,y<x<2-y,y>0\\ 0,其他\end{cases}$ 那么，

$$f_X(x)=\int f(x,y)dy=\begin{cases}x,0<x<1\\ 2-x,1\le x<2\\ 0,其他\end{cases}$$

$$f_Y(y)=\int f(x,y)dx=\begin{cases}2-y-y=2-2y,0\le y\le 1\\ 0,\ 其他\end{cases}$$

（2） $$f_{X|Y}(x|y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}=\begin{cases}\frac{1}{2-2y},y<x<2-y,0\le y\le 1\\ 0,其他\end{cases}$$

$$f_{Y|X}(y|x=1.5)=\begin{cases}\frac{f(x=1.5,y)}{f_X(x=1.5)}=2,0<y<\frac{1}{2}\\ 0,其他\end{cases}$$

（3） 不独立，因为 $f(x,y)\ne f_X(x)f_Y(y)$

（4） $P(0.1<Y\le 0.4|x=1.5)=\int_{0.1}^{0.4}f_{Y|X}(y|x=1.5)dy=0.6$

（5） $F_{X|Y}(x|y)=\int_{-\infty}^{x} f_{X|Y}(x|y)dx=\begin{cases} 0，x<y \\ \dfrac{x-y}{2-2y}, y\le x<2-y \\ 1，x\ge 2-y \end{cases}$

7. 首先我们要确定 A、B、C 的值，$F(\infty,\infty)=A(B+\dfrac{\pi}{2})(C+\dfrac{\pi}{2})=1$

$F(-\infty,y)=A(B-\dfrac{\pi}{2})(C+\arctan\dfrac{y}{3})=0$ $F(x,-\infty)=A(B+\arctan\dfrac{x}{2})(C-\dfrac{\pi}{2})=0$，

可以解出来 $B=\dfrac{\pi}{2},C=\dfrac{\pi}{2},A=\dfrac{1}{\pi^2}$

（1） $f(x,y)=\dfrac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x\partial y}=\dfrac{1}{\pi^2}\dfrac{\frac{1}{2}}{1+\frac{x^2}{4}}\dfrac{\frac{1}{3}}{1+\frac{y^2}{9}}=\dfrac{6}{\pi^2(4+x^2)(9+y^2)}$

（2） $f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy=\dfrac{2}{\pi(4+x^2)}$,同理，$f_Y(y)=\dfrac{3}{\pi(9+y^2)}$

8. （1） $\iint f(x,y)dxdy=1,\dfrac{A}{2}=1,A=2$

（2）$F(X,Y)=\int_{-\infty}^{y}dy\int_{-\infty}^{x} f(x,y)dx=\begin{cases}(1-e^{-2x})(1-e^{-y}),x>0,y>0 \\ 0,其他\end{cases}$

（3）令 $Z=X-Y$,

$$f_{Z=X-Y}(z)=\int_{-\infty}^{\infty} f(y+z,y)dy=\int_{\max\{-z,0\}}^{\infty} 2e^{-2z-3y}dy=\frac{2}{3}e^{-2z-3\max\{0,-z\}}=\begin{cases}\dfrac{2}{3}e^{z},z<0 \\ \dfrac{2}{3}e^{-2z}z\ge 0\end{cases}$$

$P(X\le Y)=P(Z\le 0)=\int_{-\infty}^{0} f(z)dz=\dfrac{2}{3}$ （也可以直接

$\int_0^{\infty}dy\int_0^{y}2e^{-2x-y}dx=\dfrac{2}{3}$）

9.

（1） $\iint\limits_D f(x,y)dxdy=1,8k=1,k=\dfrac{1}{8}$

（2） $P(X<1,Y<3)=\int_0^1 dx\int_2^3\dfrac{1}{8}(6-x-y)dy=\dfrac{3}{8}$

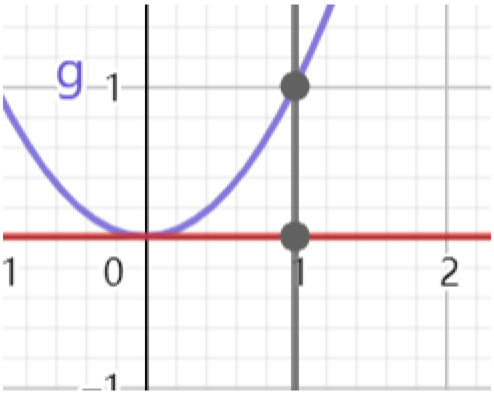
（3） $P\{X<1.5\}=\int_0^{1.5}dx\int_2^4 f(x,y)dy=\dfrac{27}{32}$

（4） （这里没有通过求 $Z=X+Y$ 的方法是因为实测有点麻烦，所以直接算吧）

$P\{X+Y\le 4\}=\int_0^2 dx\int_2^{4-x}\dfrac{1}{8}(6-x-y)dy=\dfrac{2}{3}$

10.

（1） $f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{2}(e^{-\frac{y}{2}}),0<x<1,y>0\\ 0,\text{其他}\end{cases}$



（2）即 $P(4X^2-4Y\geq 0)=P(X^2\geq Y)$,如图，那么 $P\{X^2\geq Y\}=\int_0^1 dx\int_0^{\sqrt{x}}\frac{1}{2}e^{-\frac{y}{2}}dy=12e^{-\frac{1}{2}}-7\approx 0.278$

11.

（1） $\iint\limits_D C(R-\sqrt{x^2+y^2})dxdy=1,\frac{R^3\pi}{3}C=1,C=\frac{3}{\pi R^3}$

（2） $P\{X^2+Y^2\leq r^2\}=\iint\limits_{D'} f(x,y)dxdy=3\frac{r^2}{R^2}-2\frac{r^3}{R^3}$

12.（题目印刷有问题， $f_Y(y)\to f(x,y)$ ） $f_X(x)=\begin{cases}\int_{-1}^{1}\frac{1}{4}(1+xy)dy=\frac{1}{2},|x|<1\\ 0,|x|\geq 1\end{cases}$ 同理 $f_Y(y)=\begin{cases}\int_{-1}^{1}\frac{1}{4}(1+xy)dx=\frac{1}{2},|y|<1\\ 0,|y|\geq 1\end{cases}$ $f(x,y)\neq f_X(x)f_Y(y)$，所以 X 与 Y 不独立，

$$F_{U=X^2}(U\leq u)=F_X(-\sqrt{u}\leq X\leq\sqrt{u})=\begin{cases}0,u<0\\ \frac{1+\sqrt{u}}{2}-\frac{1-\sqrt{u}}{2}=\sqrt{u},\quad 0\leq u\leq 1\\ 1,u>1\end{cases}$$ 同理，

$$F_{V=Y^2}(V\leq v)=F_X(-\sqrt{v}\leq Y\leq\sqrt{v})=\begin{cases}0,v<0\\ \frac{1+\sqrt{v}}{2}-\frac{1-\sqrt{v}}{2}=\sqrt{v},\quad 0\leq v\leq 1\\ 1,v>1\end{cases}$$ 那么

$$F_{U=X^2,V=Y^2}(U\leq u,V\leq v)=F_{X,Y}(-\sqrt{u}\leq X\leq\sqrt{u},-\sqrt{v}\leq Y\leq\sqrt{v})$$

$$=\begin{cases} 0, u\le 0\text{或}v\le 0 \\ \int_{-\sqrt{u}}^{\sqrt{u}} dx\int_{-\sqrt{v}}^{\sqrt{v}} f(x,y)dy=\sqrt{uv}, 0<u<1, 0<v<1 \\ \int_{-1}^{1} dx\int_{-\sqrt{v}}^{\sqrt{v}} f(x,y)dy=\sqrt{v}, u\ge 1, 0<v<1 \\ \sqrt{u}, v\ge 1, 0<u<1 \\ 1, v\ge 1, u\ge 1 \end{cases}$$

，因为 $F_{U,V}(u,v)=F_U(u)F_V(v)$，

所以 X^2、Y^2 独立。

13. $f_{Z=X+2Y}(z)=\int_{-\infty}^{\infty} f(z-2y,y)dy=\begin{cases}\int_0^{\frac{z}{2}} 2e^{-z}dy=ze^{-z}，z>0 \\ 0，z\le 0\end{cases}$，那么

$$F(Z)=\begin{cases}1\text{-}e^{-z}\text{-}ze^{-z}, z>0 \\ 0, z\le 0\end{cases}$$

14. 咱们先写出联合分布，$f(x,y)=\begin{cases}2, 0<x<1, 0<y<x \\ 0,\text{其他}\end{cases}$

（1） $f_{Z=XY}(z)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{|y|}f(\frac{z}{y},y)dy=\begin{cases}\int_z^{\sqrt{z}} 2\frac{1}{y}dy=-\ln z, 0<z<1 \\ 0,\text{其他}\end{cases}$

（2） $f_{Z=\frac{Y}{X}}(z)=\int_{-\infty}^{\infty}|x|f(x,xz)dx=\begin{cases}\int_z^1 2xdx=1, 0<z<1 \\ 0,\text{其他}\end{cases}$

15. 这里我们首先要注意到，X、Y 并不独立（$P\{X\ge 0,Y\ge 0\}\ne P\{X\ge 0\}P\{Y\ge 0\}$）

$P\{\max\{(X,Y)\ge 0\}=1-P\{X<0,Y<0\}$ 我们可以列表格

（$\frac{a}{b}$是原来有的数据，a/b是计算出来的 ）

X\Y	$Y<0$	$Y\ge 0$	P_X
$X<0$	$2/7$	$1/7$	$3/7$
$X\ge 0$	$1/7$	$\frac{3}{7}$	$\frac{4}{7}$
P_Y	$3/7$	$\frac{4}{7}$	

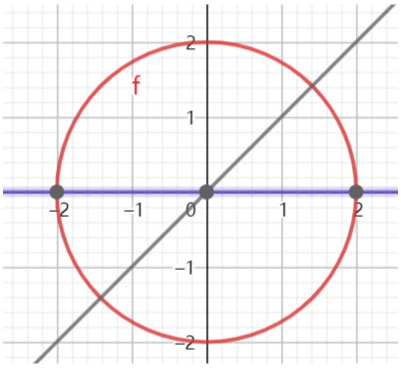
所以 $P\{\max(X,Y)\ge 0\}=1-\frac{2}{7}=\frac{5}{7}$

16. 直接选用答案给的表

X\Y	1	2	3	P_X
1	$\frac{1}{9}$	0	0	$\frac{1}{9}$
2	$2\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$	0	$\frac{3}{9}$
3	$2\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{2}{9}$	$2\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{5}{9}$
P_Y	$\frac{5}{9}$	$\frac{3}{9}$	$\frac{1}{9}$	

$P\{\xi=\eta\}=\frac{1}{9}+\frac{1}{9}+\frac{1}{9}=\frac{1}{3}$

17.



（1） 这里主要需要画图， $P\{Y>0\,|\,Y>X\}=\frac{3}{4}$

（2） 从图中我们可以看出，满足条件的就是第一、二、四象限，则 $P\{M>0\}=\frac{1}{4}$

18.

（1） $C_n^m p^m (1-p)^{n-m}$

（2） $P\{x=n\}=\frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!}$, $P\{y=m\,|\,x=n\}=C_n^m p^m(1-p)^{n-m}$, $0\le m\le n$, n=0, 1, 2. 则

$$P\{x=n,y=m\}=P\{y=m\,|\,x=n\}P\{x=n\}=C_n^m p^m(1-p)^{n-m}\frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!},0\le m\le n,n=0,1,2\ldots$$

19. $$f_{Z=\frac{X}{Y}}(z)=\int_{\max\{1000,\frac{1000}{z}\}}^{\infty}|y|\,f_X(zy)f_Y(y)dy=\frac{10^6}{2z^2}\frac{1}{(\max\{1000,\frac{1000}{z}\})^2}=\begin{cases}\frac{1}{2z^2},z\ge1\\ \frac{1}{2},0<z<1\\ 0,其他\end{cases}$$

20.

（1） $P\{X=2\,|\,Y=2\}=\frac{0.05}{P\{Y=2\}}=\frac{1}{5}$ $P\{Y=3\,|\,X=0\}=\frac{1}{3}$

（2） 这个就一个一个列出来趴

$P\{V=0\}=0$

$P\{V=1\}=0.01+0.01+0.02=0.04$

$P\{V=2\}=0.01+0.03+0.05+0.04+0.03=0.16$

$P\{V=3\}=0.01+0.02+0.04+...+0.05=0.28$

$p\{V=4\}=0.24$

$P\{V=5\}=0.28$

（3） 同上，

$P\{U=0\}=(\text{第一列和第一行总和})=0.28$

$P\{U=1\}=(\text{除去第一行第一列的第二行和第二列的总和})=0.3$

$P\{U=2\}=(\text{除去上面的第三行和第三列的总和})=0.25$

$P\{U=3\}=0.17$

（4） 还是直接找就行啦

$P\{W=0\}=0$

$P\{W=1\}=0.02$

$P\{W=2\}=0.06$

$P\{W=3\}=0.13$

$P\{W=4\}=0.19$

$P\{W=5\}=0.24$

$P\{W=6\}=0.19$

$P\{W=7\}=0.12$

$P\{W=8\}=0.05$

第四章

习题 4.1

1. $\frac{1}{2}$ $\frac{5}{4}$ 4

$$E(X)=(-1)\times\frac{1}{8}+0\times\frac{1}{2}+1\times\frac{1}{8}+2\times\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$$

$$E(X^2)=(-1)^2\times\frac{1}{8}+0\times\frac{1}{2}+1^2\times\frac{1}{8}+2^2\times\frac{1}{4}=\frac{5}{4}$$

$$E(2X+3)=2E(X)+3=4$$

2. 4.125

易知，$3\le X\le 5$，

X	3	4	5
P	$\left(\frac{1}{2}\right)^3\times 2=\frac{1}{4}$	$C_3^2\left(\frac{1}{2}\right)^2\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times 2=\frac{3}{8}$	$C_4^2\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{3}{8}$
对 P 的注释	A、B 都可能连胜三场	前三场有一个人赢了两场 $C_3^2\left(\frac{1}{2}\right)^2\times\frac{1}{2}$，第四场这个人也要赢，再乘 $\frac{1}{2}$，而 A、B 都可能是这个人，所以再乘 2	前四场每个人各赢了 2 场，而第五场不能结果都会结束

$$E(X)=3\times\frac{1}{4}+4\times\frac{3}{8}+5\times\frac{3}{8}=4.125$$

3. 0.4、0.1、0.5

可以列出三个方程，
$$\begin{aligned}&p_1+p_2+p_3=1\\&E(X)=-p_1+p_3=0.1\\&E(X^2)=p_1+p_3=0.9\end{aligned}$$

可以解得，$\mathrm{p}_1=0.4,p_2=0.1,p_3=0.5$

4. 答案

首先设 X 为故障的天数

X	0	1	2	≥3
P(X)	$0.8^5=0.32768$	$C_5^1 0.2\times 0.8^4=0.4096$	$C_5^2 0.2^2\times 0.8^3=0.2048$	$1-0.32768-0.4096$ $-0.2048=0.05792$

$$E(X)=P(X=0)\times 10+P(X=1)\times 5-P(X\geq 3)\times 2=5.20896$$

5. 答案

(1)

X	0	1	2	3（不遇到红灯）
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$

(2) $E\left(\frac{1}{1+X}\right)=\frac{1}{2}\times 1+\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{8}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{8}\times\frac{1}{4}=\frac{67}{96}$

6.

(1) $E(U)=E(2X+3Y+1)=2E(X)+3\ E(Y)+1=10+33+1=44$

(2) $E(V)=E(YZ-4X)=E(YZ)-4E(X)=E(Y)E(Z)-4\ E(X)=88-20=68$

7. 独立

$$\Rightarrow E(XY)=E(X)E(Y)$$

$$E(X)=\int_0^1 x\cdot 2xdx=\frac{2}{3}$$

$$E(Y)=\int_5^{\infty} y\cdot e^{-(y-5)}dy=6$$

$$E(XY)=4$$

8. 证明：

$$E(X)=\sum_{k=0}^{\infty}kP(X=k)$$

$$P(X\geq k)=\sum_{j=k}^{\infty}P(X=j)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}P(X\geq k)=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=k}^{\infty}P(X=j)=\sum_{k=0}^{\infty}kP(X=k)=E(X)$$

（因为这里在 P(X=k)时一共出现了 k 次，所以上述等式成立）

习题 4.2

1. 扫码给了 0.301、0.322，不准确

X	0	1	2	3
P	$\frac{9}{12}=\frac{3}{4}$	$\frac{3}{12}\times\frac{9}{11}=\frac{9}{44}$	$\frac{3}{12}\times\frac{2}{11}\times\frac{9}{10}=\frac{9}{220}$	$\frac{3}{12}\times\frac{2}{11}\times\frac{1}{10}=\frac{1}{220}$

$$E(X)=\frac{9}{44}\times 1+\frac{9}{220}\times 2+\frac{1}{220}\times 3=\frac{3}{10}$$

$$E(X^2)=\frac{9}{44}\times 1+\frac{9}{220}\times 4+\frac{1}{220}\times 9=\frac{9}{22}$$

$$D(X)=E(X^2)-E(X)^2=\frac{9}{22}-\frac{9}{100}=\frac{351}{1100}$$

2. 如下，

$$D(XY)=E(X^2Y^2)-E(XY)^2=E(X^2)E(Y^2)-E(X)^2E(Y)^2=[D(X)+E(X)^2][D(Y)+E(Y)^2]$$

$$-E(X)^2E(Y)^2=D(X)D(Y)+D(X)E(Y)^2+D(Y)E(X)^2$$

3. 如下，$E(X)=0,D(X)=4,E(Y)=2,D(Y)=\frac{4}{3}$

$$E(XY)=E(X)E(Y)=0$$

$$D(X+Y)=D(X)+D(Y)=\frac{16}{3}$$

$$D(2X-3Y)=4D(X)+9D(Y)=28$$

4. f(x)的概率密度为 $\mathrm{f}(x)=1,-\frac{1}{2}<x<\frac{1}{2}$

$$E(Y)=\int_0^{\frac{1}{2}} g(x)f(x)dx=\int_0^{\frac{1}{2}}\ln xdx=-\frac{1}{2}\ln 2-\frac{1}{2}$$

$$E(Y^2)=\int_0^{\frac{1}{2}}\ln^2\mathrm{x}d\mathrm{x}=\frac{1}{2}\ln^2 2+\ln 2+1$$

$$D(Y)=E(Y^2)-E(Y)^2=\frac{1}{4}\ln^2 2+\frac{1}{2}\ln 2+\frac{3}{4}$$

5. 如下， $E(X)$ 不存在， $D(X)$ 不存在

若存在， $E(X)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x}{\pi(1+x^2)}dx,$ 不绝对收敛，所以不存在；同理 $D(X)$ 不存在

（这里我们复习下连续随机变量的数学期望定义：）

设连续型随机变量 X 的概率密度为 f(x)，若积分

$$\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$$

绝对收敛，则称积分 $\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$ 的值为随机变量 X 的数学期望，记为 E（X）.

6. （扫码答案不对） T_i 满足 $f_{T_i}(t)=\frac{1}{5}e^{-\frac{t}{5}},t>0$

$$f_{T=T_1+T_2}(\mathrm{t})=\int_{-\infty}^{\infty} f_{T_1}(t-t_2)f_{T_2}(t_2)dt_2=\int_0^t\frac{1}{25}e^{-\frac{x+t-x}{5}}dx=\frac{1}{25}te^{-\frac{t}{5}},\mathrm{t}\ge 0$$

$$E(T)=\int_0^{\infty}\frac{1}{25}t^2e^{-\frac{1}{5}t}dt=10,\quad D(T)=E(T^2)-E(T)^2=150-100=50$$

假设发生事件 A 的概率为 p，则

X	0	1
P	1-P	P

$$E(X)=P,D(X)=E(X^2)-E(X)^2=P(1-P)\le\frac{1}{4}$$

习题 4.3

1. $Cov(3X-2Y+1,X+4Y-3)=Cov(3X-2Y,X+4Y-3)+Cov(1,X+4Y-3)$

$=Cov(3X-2Y,X+4Y)+Cov(3X-2Y,-3)+Cov(1,X+4Y)+Cov(1,-3)$

$=Cov(3X,X)+Cov(3X,4Y)+Cov(-2Y,X)+Cov(-2Y,4Y)+Cov(3X,-3)+Cov(-2Y,-3)$
$+Cov(1,X)+Cov(1,4Y)+Cov(1,-3)$

$=3D(X)+10Cov(X,Y)-8D(Y)-8Cov(X,1)+10Cov(Y,1)-3Cov(1,1)$

已知：$Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=-1$，

$D(X)=2,D(Y)=3,Cov(X,1)=E(X)-E(X)E(1)=0=Cov(Y,1),Cov(1,1)=0$

所以上述表达式$\Rightarrow 3\times 2+10\times(-1)-8\times 3=$-28

2.

$P(X=k)=C_n^k(\frac{1}{2})^n$，$E(X)=E(Y)=\frac{\mathrm{n}}{2}$（概率相同）

$E(XY)=E(X(\mathrm{n}-X))=nE(X)-E(X^2)$，

其中，

$$E(X^2)=\sum_{i=0}^{n}i^2C_n^i(\frac{1}{2})^n=\sum_{i=1}^{n}i^2C_n^i(\frac{1}{2})^n$$

$$=\sum_{i=1}^{n}i^2\frac{n}{i}C_{n-1}^{i-1}(\frac{1}{2})^n=\sum_{i=1}^{n}inC_{n-1}^{i-1}(\frac{1}{2})^n=\sum_{i=2}^{n}(i-1)nC_{n-1}^{i-1}(\frac{1}{2})^n+\sum_{i=1}^{n}nC_{n-1}^{i-1}(\frac{1}{2})^n$$

$$=\sum_{i=2}^{n}n(n-1)C_{n-2}^{i-2}(\frac{1}{2})^n+\sum_{i=1}^{n}nC_{n-1}^{i-1}(\frac{1}{2})^n=n(n-1)2^{n-2}(\frac{1}{2})^n+n2^{n-1}(\frac{1}{2})^n$$

$$=\frac{n(n-1)}{4}+\frac{n}{2}=\frac{n(n+1)}{4}$$

所以，$E(XY)=\frac{n^2}{2}-\frac{n(n+1)}{4}=\frac{n^2-n}{4}$，$D(X)=E(X^2)-E(X)^2=\frac{n(n+1)}{4}-\frac{n^2}{4}=\frac{n}{4}=D(Y)$

$$\rho_{XY}=\frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}=\frac{E(XY)-E(X)E(Y)}{D(X)}=\frac{\frac{n^2-n}{4}-\frac{n^2}{4}}{\frac{n}{4}}=\text{-1}$$

3. 如下

(1) 事件 A、B 独立 $\Leftrightarrow P(AB)=P(A)P(B)\Leftrightarrow \rho=0$

(2) 即证明

$$P(AB)-P(A)P(B)\le\sqrt{P(A)[1-P(A)]P(B)[1-P(B)]}$$
$$P(A)^2P(B)^2-2P(A)P(B)P(AB)+P(AB)^2\le P(A)^2P(B)^2-P(A)P(B)^2-P(A)^2P(B)+P(A)P(B)$$
$$P(AB)^2\le[1-P(B)-P(A)+2P(AB)]P(A)P(B)$$

4. $f(x)=\begin{cases}0, x\le 0\\ \frac{1}{2\pi}, 0<x<2\pi,\\ 0, x\ge 2\pi\end{cases}$

$$Cov(Y,Z)=Cov(\sin X,\sin X\cos a+\cos X\sin a)$$

$$=\cos aD(\sin X)+\sin aCov(\sin X,\cos X)$$

其中，$D(Y)=D(\sin x)=E(\sin^2 x)-E(\sin x)^2=\int_0^{2\pi}\frac{\sin^2 x}{2\pi}dx-(\int_0^{2\pi}\frac{\sin x}{2\pi}dx)^2=\frac{1}{2}$

$$D(Z)=D(\sin(x+a))=E(\sin^2(x+a))-E(\sin(x+a))^2=\int_0^{2\pi}\frac{\sin^2(x+a)}{2\pi}dx-(\int_0^{2\pi}\frac{\sin(x+a)}{2\pi}dx)^2=\frac{1}{2}$$

$$Cov(\sin X,\cos X)=E(\sin X\cos X)-E(\sin X)E(\cos X)$$

$$=\int_0^{2\pi}\frac{\sin x\cos x}{2\pi}dx-\int_0^{2\pi}\frac{\sin x}{2\pi}dx\int_0^{2\pi}\frac{\cos x}{2\pi}dx=0$$

所以，$Cov(Y,Z)=\frac{1}{2}\cos a,\rho_{YZ}=\frac{\frac{1}{2}\cos a}{\frac{1}{2}}=\cos a$

当 $a=\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}$ 时，Y、Z 不相关，但也不独立；$a\ne\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}$ 时，Y、Z 相关

5. $\rho_{XY}=0\Rightarrow Cov(X,Y)=0\Rightarrow E(XY)=E(X)E(Y)$

而 $E(X)=P(A),E(Y)=P(B),E(AB)=P(AB)$

$\Rightarrow P(XY)=P(X)P(Y)\Rightarrow$ 相互独立

6. 设这同一分布的数学期望为 $E(x)$,方差为 $D(x)$,则 $D(X)=nD(x),D(Y)=nD(x)$,

$$Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=n^2E(x^2)-n^2E(x)^2=n^2D(x)$$

$$\rho_{XY}=\frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}=n$$

习题 4.4

1. $P(|X-\mu|\geq 3\sigma)\leq\frac{\sigma^2}{9\sigma^2}=\frac{1}{9}$

2. 令 $U=X-Y$，则 $E(U)=E(X)-E(Y)=0$，

$$D(U)=D(X)+D(Y)-2Cov(X,Y)=D(X)+D(Y)-2\rho_{XY}\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}=4+1-2=3$$

$$P(|U-\mu|\geq 6)\leq\frac{\sigma^2}{36}=\frac{1}{12}$$

3. 条件可以转换为 $\lim\limits_{n\to\infty}D(\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i^2)=\lim\limits_{n\to\infty}D(\bar{X}_n^2)=0$ ，要证 $\{\mathrm{X}_n\}$ 服从大数定理，即

$\lim\limits_{n\to\infty}P\{|\bar{X}_n-a_n|<\varepsilon\}=1$，即 $\lim\limits_{n\to\infty}\bar{X}_n-a_n=0$

4. 设总发生故障的设备台数为 X，则

$$P(X\geq 2)=P(\frac{X-400\times 0.02}{\sqrt{400\times 0.02\times 0.98}}\geq\frac{2\text{-}8}{\sqrt{8\times 0.16\times 6}}=\text{-}\frac{5}{4}\sqrt{3})=\varphi(x\geq\text{-}\frac{5}{4}\sqrt{3})=\varphi(x\leq\frac{5}{4}\sqrt{3})$$

$$=\Phi(\frac{5}{4}\sqrt{3})=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\frac{5}{4}\sqrt{3}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt=0.9845$$

5. 设应供 A 瓦电力，其中工作的机床数目为 X，那么要求

$$P(X\leq A)=P(\frac{X-200\times 0.6}{\sqrt{200\times 0.6\times 0.4}}\leq\frac{A-120}{4\sqrt{3}})=\Phi(\frac{A-120}{4\sqrt{3}})=99.9\%$$

$\Phi(\frac{A-120}{4\sqrt{3}})=99.9\%=\Phi(3.175)$, $A=142$ (这里我是根据答案套的)

6. 利用 Chebyshev 不等式，设 A 是抛掷的次数，X 是正面朝上的次数，则

$$P(|X-0.5A|\leq 0.1A)=1-\frac{\sigma^2}{(0.1A)^2}\geq 0.9,\quad \sigma^2=A\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\leq 10^{-3}A^2, A\geq 250$$

利用中心极限定理，那么

$$P(0.4A\leq X\leq 0.6A)=P(-\frac{1}{5}\sqrt{A}\leq\frac{X-0.5A}{0.5\sqrt{A}}\leq\frac{1}{5}\sqrt{A})=\Phi(\frac{1}{5}\sqrt{A})-\Phi(-\frac{1}{5}\sqrt{A})=2\Phi(\frac{1}{5}\sqrt{A})\text{-}1\geq 0.9$$

$\Phi(\frac{1}{5}\sqrt{A})\geq 0.95=\Phi(1.65)$, $A\geq 68$（由答案靠近）

习题四

一． 填空题

1. $D(2X-Y)=4D(X)+D(Y)=36$

2. 标准差为$\sqrt{np(1-p)}$， $p=\frac{1}{2}$时，标准差最大，为 5

3. $E[(X-1)(X-2)]=E(X^2-3X+2)=E(X^2)-3E(X)+2=D(X)+E(X)^2-3\lambda+2$

$\lambda+\lambda^2-3\lambda+2=1$ $\lambda=1$

二. 计算题

1.

（1） $P=\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\iint\limits_D f(x)f(y)dxdy=\iint\limits_D \frac{1}{8\pi}e^{-\frac{x^2+y^2}{8}}dxdy=e^{-\frac{1}{8}}-e^{-\frac{1}{2}}$

（2） $E(Z)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\sqrt{x^2+y^2}\frac{e^{-\frac{x^2+y^2}{8}}}{8\pi}dxdy=\sqrt{2\pi}$

2.

（1） $E(|X-Y|)=\int_0^1\int_0^1|x-y|f(x)f(y)dxdy=\int_0^1\int_0^1|x-y|dxdy=\frac{1}{3}$

（2） $E(|X-Y|)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|x-y|f(x)f(y)dxdy$

$=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|x-y|\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}dxdy=2\iint\limits_{x\geq y}(x-y)\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}dxdy$

$\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}re^{-\frac{r^2}{2}}rdr\int_{-\frac{3}{4}\pi}^{\frac{1}{4}\pi}(\cos\theta-\sin\theta)d\theta=\frac{2}{\sqrt{\pi}}$

3.

（1） $E(X)=-(a+0.1)+0+(0.4+c)=0.2, a-c=0.1$

$$P(Y\leq 0|X\leq 0)=\frac{P(Y=0,X=0)+P(Y=-1,X=0)+P(Y=0,X=-1)+P(Y=-1,X=-1)}{P(X=0)+P(X=-1)}$$

$=\frac{a+b+0.1}{a+b+0.2}=0.5, a+b=0,$（不理解，这里和答案有出入）又因为

$a+b+c+0.6=1, a+b+c=0.4$，由上述三式得，$a=0.2, b=0.1, c=0.1$

（2）

Z	-2	-1	0	1	2
P	0.2	0.1	0.3	0.3	0.1

（3） $P(X=Z)=P(Y=0)=0.4$

4. $p=P(X>\frac{\pi}{3})=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}\frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}dx=\frac{1}{2}$ ，

Y	0	1	2	3	4
P	$(1-p)^4$	$C_4^1 p(1-p)^3$	$C_4^2 p^2(1-p)^2$	$C_4^3 p^3(1-p)$	p^4

$E(Y^2)=C_4^1 p(1-p)^3+4\times C_4^2 p^2(1-p)^2+9\times C_4^3 p^3(1-p)+16\times p^4=5$

5.

X	1	2	...	n
P	p	$(1-p)p$		$(1-p)^{n-1}p$

$$E(X)=\sum_{k=1}^{\infty}k(1-p)^{k-1}p=-p[\sum_{k=1}^{\infty}(1-p)^k]^{'}=-p(\frac{1}{p}-1)^{'}=\frac{1}{p},$$

$$D(X)=E(X^2)-E(X)^2=\sum_{k=1}^{\infty}k^2(1-p)^{k-1}p-\frac{1}{p^2}=-p[\sum_{k=1}^{\infty}k(1-p)^k]^{'}-\frac{1}{p^2}$$

$$-p[\sum_{k=1}^{\infty}(k+1)(1-p)^k-(1-p)^k]^{'}-\frac{1}{p^2}=-p\{-[\sum_{k=1}^{\infty}(1-p)^{k+1}]^{'}-\sum_{k=1}^{\infty}(1-p)^k\}^{'}-\frac{1}{p^2}=\frac{1-p}{p^2}$$

6. 我们可以假设，工人修完某一台机，这台机器是第 k 个（在因为发生故障概率相同，所以在哪一台机器是均匀分布的），那么走向下一台机器的距离为

$$E(Z_k)=\begin{cases}\sum_{i=2}^{n}(i-1)\frac{1}{n}=\frac{n-1}{2}, k=1\\ \sum_{i=1}^{k-1}(k-i)\frac{1}{n}+\sum_{i=k+1}^{n}(i-k)\frac{1}{n}=\frac{k^2}{n}-\frac{n+1}{n}k+\frac{n+1}{2}, 1<k<n=\frac{k^2}{n}-\frac{n+1}{n}k+\frac{n+1}{2}, 1\le k\le n\\ \sum_{i=1}^{n-1}(n-i)\frac{1}{n}=\frac{n-1}{2}, k=n\end{cases}$$

$$E(Z)=E(E(Z_k))a=\frac{1}{n}[\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{n}-\frac{n+1}{n}k+\frac{n+1}{2}]a=\frac{1}{3}(n-\frac{1}{n})a$$

7.

（1）

$$P(X\geq 96)=P(\frac{X-72}{\sigma}\geq\frac{24}{\sigma})=1-\Phi(\frac{24}{\sigma})=0.023,\Phi(\frac{24}{\sigma})=0.977=\Phi(2.00),\sigma=12$$

$$P(60\leq X\leq 84)=P(-1\leq\frac{X-72}{12}\leq 1)=\Phi(1)-\Phi(-1)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-1}^{1}e^{-\frac{t^2}{2}}dt=0.6826$$

$$P(Y=K)=C_{100}^{k}0.6826^{k}\times 0.3174^{100-k},k=0,1...100$$

（2） $E(Y)=np=68.26,D(X)=np(1-p)=21.6657$

8.

（1） $E(X)=\int_{-\infty}^{0}\frac{1}{2}xe^{x}dx+\int_{0}^{+\infty}\frac{1}{2}xe^{-x}dx=0$（也因为 f（x）关于 y 轴对称）

$$D(X)=E(X^2)-0=\int_{-\infty}^{0}\frac{1}{2}x^2e^{x}dx+\int_{0}^{+\infty}\frac{1}{2}x^2e^{-x}dx=2$$

（2） $Cov(X,|X|)=E(X|X|)-E(X)E(|X|)=E(X|X|)$

令$Z=X|X|$，那么z=$\begin{cases}-x^2,x<0\\ x^2,x\geq 0\end{cases}$,z与x是单调的，可以套用P78的公式

$$f_Z(z)=\begin{cases}f_X(-\sqrt{-z})\frac{1}{2\sqrt{-z}}=\frac{1}{4\sqrt{-z}}e^{-\sqrt{-z}}z<0\\ f_X(\sqrt{z})\frac{1}{2\sqrt{z}}=\frac{1}{4\sqrt{z}}e^{-\sqrt{z}}z\geq 0\end{cases}$$（对称分布），那么

$Cov(X,|X|)=E(Z)=0$，不相关。

（3） 首先我们得知道$f_{Y=|X|}(y)$,易得$f_{Y=|X|}(y)=\begin{cases}e^{-y},y\geq 0\\ 0,y<0\end{cases}$ 所以

$f_X(x)f_{|X|}(|x|)=\frac{1}{2}e^{-2|x|}\neq f_{X|X|}(x|x|)$，不独立

（写在最后：在本题里，X、$|X|$显然是有关联的，所以$Z=X|X|$用的是一个x ，但是X、$|X|$的分布却不同，所以造成上述结果）

9. $Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=\int_{-\pi}^{\pi}\sin\theta\cos\theta d\theta-\int_{-\pi}^{\pi}\sin\theta d\theta\times\int_{-\pi}^{\pi}\cos\theta d\theta=0$，不

相关

$E(XY)=0=E(X)E(Y)$，不独立

10.

（1） 如下

X+Y	0	1	2	3
P	0.10	0.40	0.35	0.15

（2） $E(Z)=0+\sin\frac{\pi}{2}\times 0.4+\sin\pi\times 0.35+\sin\frac{3}{2}\pi\times 0.15=0.25$

（3）

X	0	1	2
P	0.25	0.45	0.3
Y	0	1	
P	0.5	0.5	

$$E(X)=1.05, D(X)=E(X^2)-E(X)^2=1.65-1.05^2=0.5475$$

$$E(Y)=0.5, D(Y)=E(Y^2)-E(Y)^2=0.5-0.5^2=0.25$$

$$Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=0.2\times 1+2\times 0.15-(1\times 0.45+2\times 0.3)\times(1\times 0.5)=-0.025$$

$$\rho_{XY}=\frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{D(X)D(Y)}}=-0.0676$$

11.

（1） $E(Z)=\frac{1}{3}E(X)+\frac{1}{2}E(Y)=\frac{5}{6}$，（答案给 $\frac{1}{3}$）

$$D(Z)=\frac{1}{9}D(X)+\frac{1}{4}D(Y)+2\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}Cov(X,Y)=1+4+\frac{1}{3}\rho_{XY}\sqrt{D(X)D(Y)}=5+\frac{1}{3}\times(-\frac{1}{2})\times 3\times 4=3$$

（2）

$$Cov(X,Z)=E(XZ)-E(X)E(Z)=E[X(\frac{X}{3}+\frac{Y}{2})]-\frac{5}{6}=\frac{E(X^2)}{3}+\frac{E(XY)}{2}-\frac{5}{6}$$

$$=\frac{D(X)+E(X)^2}{3}+\frac{Cov(X,Y)+E(X)E(Y)}{2}-\frac{5}{6}=0, \rho_{XZ}=0$$

（3） $E(XZ)=\frac{5}{6}=E(X)E(Z)$,相互独立

12.

（1） $E(X)=\int_{-\infty}^{\infty}xf(x)dx=\frac{8}{3}a+\frac{56}{3}b+6c=2$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 2a + 6b + 2c = 1$$

$$P(1 < X < 3) = \int_1^3 f(x)dx = \frac{3}{2}a + \frac{5}{2}b + c = \frac{3}{4}$$

解得，$a = \frac{1}{4}, b = -\frac{1}{4}, c = 1$

（2） $D(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \int_0^4 x^2 f(x)dx - 4 = \frac{2}{3}$

（3） $E(Y) = \int_0^4 e^x f(x)dx = \frac{(e^2-1)^2}{4}$,

$$D(Y) = E(Y^2) - E(Y)^2 = \int_0^4 e^{2x} f(x)dx - E(Y)^2 = \frac{(e^4+1)^2}{16} - \frac{(e^2-1)^4}{16} = \frac{1}{4}e^2(e^2-1)^2$$

13.

（1）

(X_1, X_2)	(0,0)	(0,1)	(1,0)
P	0.1	0.1	0.8

（2） $D(X_1) = p(1-p) = 0.8 \times 0.2 = 0.16, D(X_2) = p(1-p) = 0.09$

$$Cov(X_1, X_2) = E(X_1X_2) - E(X_1)E(X_2) = -0.8 \times 0.1 = -0.08$$

$$\rho_{X_1X_2} = \frac{-0.08}{0.4 \times 0.3} = -\frac{2}{3}$$

14.（完全不会，求教）

15. $f_X(x) = \int_0^2 f(x,y)dy = \frac{x+1}{4}$， $E(X) = \int_0^2 xf_X(x)dx = \frac{7}{6}$，

$$D(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \int_0^2 x^2 f_X(x)dx - \frac{49}{36} = \frac{11}{36}$$,同理，

$$f_Y(y) = \frac{y+1}{4}, E(Y) = \frac{7}{6}, D(Y) = \frac{11}{36}$$

$$Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = \int_0^2 dx \int_0^2 \frac{1}{8}xy(x+y)dy - E(X)^2 = -\frac{1}{36}$$，

$$\rho_{XY} = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}} = \frac{-\frac{1}{36}}{\frac{11}{36}} = -\frac{1}{11}$$

$$D(X+Y) = D(X) + D(Y) + 2Cov(X,Y) = \frac{20}{36} = \frac{5}{9}$$

16.

（1） 都服从 $f(x) = e^{-x}$ 分布

$$F_X(x)=\int_0^x e^{-x}dx=1-e^{-x}\quad,\quad F_V(v)=1-[1-F_X(v)][1-F_Y(v)]=1-e^{-2v}\quad,$$

$f_V(v)=(F_V(v))'=2e^{-2v}\ \ v>0$， $f_V(v)=0\ \ v\le 0$

（2） $F_U(u)=F_X(u)F_Y(u)=(1-e^{-u})^2,\ f_U(u)=2e^{-u}-2e^{-2u},u>0$

$$E(U+V)=E(U)+E(V)=\int_{-\infty}^{\infty}uf_U(u)du+\int_{-\infty}^{\infty}vf_V(v)dv=2$$

17. 设治愈人数为 X，则

（1） $P(X>75)=P(\frac{X-80}{\sqrt{100\times 0.8\times 0.2}}>\frac{75-80}{4})=\Phi(1.25)=0.8944$

（2） $P(X>75)=P(\frac{X-70}{\sqrt{100\times 0.7\times 0.3}}>\frac{75-70}{\sqrt{21}})=1-\Phi(\frac{5}{\sqrt{21}})=0.1399$

18.

（1） $P(X=K)=C_{100}^k 0.2^k\times 0.8^{100-k},k=0,1,2...100$

（2） $P(14\le X\le 30)=P(-\frac{6}{4}\le\frac{X-0.2\times 100}{\sqrt{0.2\times 100\times 0.8}}\le\frac{10}{4})=\Phi(2.5)-\Phi(-1.5)=0.927$

19. 设要有 A 条外线才能满足，X 为需要使用外线通话的电话，则

$$P(X\le A)=P(\frac{X-200\times 0.05}{\sqrt{200\times 0.05\times 0.95}}\le\frac{A-10}{\sqrt{9.5}})=\Phi(\frac{A-10}{\sqrt{9.5}})=0.9=\Phi(1.3),A=14$$

20. $P(T>350)=P(\frac{T-30\times 10}{\sqrt{30}\times\sqrt{10^2}}>\frac{50}{10\sqrt{30}})=1-\Phi(\frac{5}{\sqrt{30}})=0.18$（答案 0.1814，计算机不强，谅解谅解）

21. 如下

（1） 设 X 为相加的误差综合，

$$P(-15\le X\le 15)=P(-\frac{3}{\sqrt{5}}\le\frac{X-0}{\sqrt{1500}\times\sqrt{\frac{1}{12}}}\le\frac{3}{\sqrt{5}})=\Phi(\frac{3}{\sqrt{5}})-\Phi(-\frac{3}{\sqrt{5}})=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\frac{3}{\sqrt{5}}}^{\frac{3}{\sqrt{5}}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt=0.82$$

那么，$P(|X|>15)=1-0.82=0.18$

（2） 设最多可有 A 个数相加，

$$P(-10<X<10)=P(-10\sqrt{\frac{12}{A}}<\frac{X}{\sqrt{\frac{A}{12}}}<10\sqrt{\frac{12}{A}})=2\Phi(10\sqrt{\frac{12}{A}})-1=0.9$$

$$\Phi(10\sqrt{\frac{12}{A}})=0.95=\Phi(1.65),A=443$$

第五章

习题 5.1

1. $\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i=3.59, S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2=2.881$

2. 因为μ 未知，所以（2）（5）并不能通过统计数据可得，所以不是统计量，其他四个都是

3. $f(x_1,x_2,x_3,x_4)=\prod_{i=1}^{4}\frac{1}{\theta^4}e^{-\frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{4}x_i}, x_i>0; f(x_1,x_2,x_3,x_4)=0, x_i\le 0$

4. $E(\bar{X})=\mu=\frac{a+b}{2}, D(\bar{X})=\frac{\sigma^2}{n}=\frac{(b-a)^2}{12n}$

5. $F^*_{(x)}=\begin{cases}0, & x\le 1\\ \frac{1}{8}, & 1<x\le 2\\ \frac{3}{8}, & 2<x\le 3\\ \frac{6}{8}, & 3<x\le 4\\ \frac{7}{8}, & 4<x\le 5\\ 1, & x>5\end{cases}$

6. 如下

	[335,340)	[340,345)	[345,350)	[350,355)	[355,360)
计数	3	9	22	14	2

图就不画了

习题 5.2

1.
   (1) 查表
   (2) 查表

2.
   (1) $\frac{X_1-X_2}{\sqrt{X_3^2+X_4^2}}\sim\frac{N(0,2)}{\sqrt{\chi^2(2)}}=\frac{N(0,1)}{\sqrt{\frac{\chi^2(2)}{2}}}=t(2)$

(2) $\dfrac{\sqrt{n-1}X_1}{\sqrt{\sum_{i=2}^{n}X_i^2}} \sim \dfrac{N(0,1)}{\sqrt{\dfrac{\chi^2(n-1)}{n-1}}} = t(n-1)$

(3) $\dfrac{(n-3)\sum_{i=1}^{3}X_i^2}{3\sum_{i=4}^{n}X_i^2} \sim \dfrac{(n-3)\chi^2(3)}{3\chi^2(n-3)} = F(3,n-3)$

3. 查表，$E(\chi^2(n)) = n, D(\chi^2(n)) = 2n$

4. $P(\sum_{i=1}^{10}X_i^2 > 1.44) = P(\chi^2(10) > \dfrac{1.44}{0.09} = 16) = 0.1$

5. $2X_1 - X_2 \sim N(0,10), 3X_3 + 4X_4 \sim N(0,50), Y = 10a\chi_a{}^2(1) + 50b\chi_b{}^2(1) = \chi^2(2), a = \dfrac{1}{10}, b = \dfrac{1}{50}$

公式里 $\chi_a^2(1)$，$\chi_b^2(1)$ 不同，故两者系数都必须为 1，和才是 χ^2 分布

6. $T = \dfrac{4(X-2)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{4}Y_i^2}} \sim \dfrac{4N(0,1)}{\sqrt{4\chi^2(4)}} = \dfrac{N(0,1)}{\sqrt{\dfrac{\chi^2(4)}{4}}} = t(4), P(|T| > t_0 = t_{\frac{a}{2}}(4)) = a = 0.01, t_0 = 4.6041$

习题 5.3

1. $E(\bar{X}) = \lambda, D(\bar{X}) = \dfrac{\lambda}{n}, E(S^2) = \lambda$ （详细的证明见书 P162 下例 5.1.5）

2.

（1） $P(\bar{X} > 13) = P(\dfrac{\bar{X}-12}{2/\sqrt{5}} > \dfrac{\sqrt{5}}{2}) = 1 - \Phi(\dfrac{\sqrt{5}}{2}) \approx 0.1314$

（2） $P\{X > 10\} = P\{\dfrac{X-12}{2} > -1\} = 1 - \Phi(-1) = 0.8413$，

$P\{X_{\min} > 10\} = P^5\{X > 10\} = 0.4215$

3.

（1） $\dfrac{nS_n^2}{\sigma^2} = \dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$

（2） $\dfrac{\bar{X}-\mu}{S_n/\sqrt{n-1}} = \dfrac{\bar{X}-\mu}{\sqrt{S^2/n}} = \dfrac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$

（3） $\frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1), (\frac{X-\mu}{\sigma})^2 \sim \chi^2(1) \Rightarrow \sum_{i=1}^{n}(\frac{X-\mu}{\sigma})^2 \sim \chi^2(n)$

4. $P(|\bar{X}-\mu|>3)=1-P(-3 \le \bar{X}-\mu \le 3)=1-P(-\frac{3}{2} \le \frac{\bar{X}-\mu}{20/\sqrt{100}} \le \frac{3}{2})=1-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\frac{3}{2}}^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{x^2}{2}}dx=0.1336$

5. $P(\sum_{i=1}^{15} X_i^2 > 3.999)=P(\sum_{i=1}^{15}\frac{X_i^2}{0.4^2} > 24.99375)=P(Y>24.99375), Y \sim \chi^2(15) \Rightarrow P=0.05$

6. $P(\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} > \frac{39 \times 5.6}{4})=P(Y>54.6)=0.05,$ 这里 $Y \sim \chi^2(39)$

习题五

1.

（1） $P\{X_1=x_1 \dots X_n=x_n\}=\frac{\lambda^{\sum_{i=1}^{n}x_i}}{\prod_{i=1}^{n}x_i!}e^{-n\lambda}$

（2） $P\{X_1=x_1 \dots X_n=x_n\}=p^{\sum_{i=1}^{n}x_i}(1-p)^{n^2-\sum_{i=1}^{n}x_i}\prod_{i=1}^{n}C_n^{x_i}$

2. $t(n)=\frac{N(0,1)}{\sqrt{\frac{\chi^2(n)}{n}}}, t^2(n)=\frac{\chi^2(1)}{\frac{\chi^2(n)}{n}}=F(1,n)$

3. $\bar{X} \sim N(\mu,\frac{\sigma^2}{n}), X_{n+1}-\bar{X} \sim N(0,\frac{n+1}{n}\sigma^2), (X_{n+1}-\bar{X})\sqrt{\frac{n}{n+1}} \sim N(0,\sigma^2),$ 所 以

$$T=\frac{X_{n+1}-\bar{X}}{S}\sqrt{\frac{n}{n+1}} \sim \frac{N(0,\frac{\sigma^2}{n})\sqrt{n}}{S}=\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}=t(n-1)$$

4. $\alpha(\bar{X}-a)+\beta(\bar{Y}-b) \sim \alpha N(0,\frac{\sigma^2}{m})+\beta N(0,\frac{\sigma^2}{n}) \sim N(0,(\frac{\alpha^2}{m}+\frac{\beta^2}{n})\sigma^2)$

$$\frac{\alpha(\bar{X}-a)+\beta(\bar{Y}-b)}{\sigma\sqrt{\frac{\alpha^2}{m}+\frac{\beta^2}{n}}} \sim N(0,1)$$,

$$\frac{mS_1^2}{\sigma^2}=\frac{(m-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(m-1),\frac{nS_2^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)\Rightarrow\frac{mS_1^2+nS_2^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(m+n-2)$$ 所以

$$\frac{\alpha(\bar{X}-a)+\beta(\bar{Y}-b)}{\sigma\sqrt{\frac{\alpha^2}{m}+\frac{\beta^2}{n}}}\Bigg/\sqrt{\frac{mS_1^2+nS_2^2}{\sigma^2}\Big/m+n-2}\sim\frac{N(0,1)}{\sqrt{\frac{\chi^2(m+n-2)}{m+n-2}}}=t(m+n-2)$$

5. 不会
6. 不会
7. （题目表述有一定问题，没有解释 $X_i,5<i<n$ 的情况，但可以做题）

$$Y=(\frac{n-5}{5})\frac{\sum_{i=1}^{5}X_i^2}{\sum_{i=6}^{n}X_i^2}\sim\frac{\frac{\chi^2(5)}{5}}{\frac{\chi^2(n-5)}{n-5}}\sim F(5,n-5)$$

8. $P(1.4<\bar{X}<5.4)=P(-\frac{\sqrt{n}}{3}<\frac{\bar{X}-3.4}{6/\sqrt{n}}<\frac{\sqrt{n}}{3})\geq 0.95\quad \frac{\sqrt{n}}{3}\geq z_{0.025},n\geq 34.57,n\geq 35$

9.

（1） $\bar{X}-\mu\sim N(0,\frac{\sigma^2}{n})=\frac{\sigma}{\sqrt{n}}N(0,1),Y=|\bar{X}-\mu|^2\sim\frac{\sigma^2}{n}\chi^2(1)=\chi^2(\frac{\sigma^2}{n})=\chi^2(\frac{4}{n})$

$$E(\chi^2(\frac{4}{n}))=\frac{4}{n}\leq 0.1,n\geq 40$$

（2） $P(|\bar{X}-\mu|\leq 0.1)=P(-\frac{\sqrt{n}}{20}\leq\frac{\bar{X}-\mu}{2/\sqrt{n}}\leq\frac{\sqrt{n}}{20})\geq 0.95,$可得

$$\frac{\sqrt{n}}{20}\geq 1.96,n\geq 1536.64,n\geq 1537$$

10.

（1） 已知 $\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{20}(X_i-\mu)^2\sim\chi^2(20)$，则 $P(10.9\leq\chi^2(20)\leq 37.6)=0.94$

（2） 已知 $\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{20}(X_i-\bar{X})^2=\frac{(n-1)}{\sigma^2}S^2\sim\chi^2(19)$，

$P(11.7\leq\chi^2(19)\leq 38.6)=0.895$（计算结果直接摘录于答案）

11. $P(50.8 \le \bar{X} \le 53.8) = P(-\frac{8}{7} \le \frac{\bar{X}-52}{6.3/\sqrt{36}} \le \frac{12}{7}) = 0.83$

12. $P(|\bar{X}-80|>3) = P(|\frac{\bar{X}-80}{20/10}|>\frac{3}{2}) = 1 - P(-\frac{3}{2} \le \frac{\bar{X}-80}{20/10} \le \frac{3}{2}) = 0.134$

13. $P(|\bar{X}-\bar{Y}|>0.3) = P(|\frac{\bar{X}-\bar{Y}-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{9}{10}+\frac{9}{15}}}|>\frac{\sqrt{6}}{10}) = 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\frac{\sqrt{6}}{10}}^{\frac{\sqrt{6}}{10}} e^{-\frac{x^2}{2}}dx = 0.806$

14. 同上，$P(|\bar{X}-\bar{Y}|>0.4) = P(|\frac{\bar{X}-\bar{Y}-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{9}{20}+\frac{9}{25}}}|>\frac{4}{9}) = 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\frac{4}{9}}^{\frac{4}{9}} e^{-\frac{x^2}{2}}dx = 0.657$

15.

（1） $P(|\bar{X}-\mu|>1) = P(|\frac{\bar{X}-\mu}{2/\sqrt{5}}|>\frac{\sqrt{5}}{2}) = 0.264$

（2）（这题目我为什么不算最大值、最小值的概率密度函数？因为正态分布的分布函数不好算）

$P\{X \le 15\} = P\{\frac{X-12}{2} \le \frac{3}{2}\} = 0.9332, P\{\max > 15\} = 1 - P^5\{X \le 15\} = 0.2923$

$P\{X < 10\} = P\{\frac{X-12}{2} < 1\} = 0.8413, P\{\min < 10\} = P^5\{X < 10\} = 0.4216$ （与答案不同）

16. 我们首先应该将前 n 项和后 n 项合并（可以合并的理由是本身也是独立的），令

$X_i + X_{i+n} = Y_i \sim N(2\mu, 2\sigma^2), i = 1 \dots n$，则原来的 $\bar{X} = \frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{2n} X_i$, 则 $2\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} Y_i}{n} = \bar{Y}$, 则

$$E\{\sum_{i=1}^{n}(X_i + X_{n+i} - 2\bar{X})^2\} = E\{(n-1)\frac{\sum_{i=1}^{n}(Y_i-\bar{Y})^2}{n-1}\} = (n-1)2\sigma^2 = 2(n-1)\sigma^2$$

17.

（1） $P(\frac{S^2}{\sigma^2} \le 2.041) = P(\frac{(16-1)\times S^2}{\sigma^2} \le 30.615) = P(Y \le 30.615)$, 其中 $Y \sim \chi^2(15)$

则 $P(Y \le 30.615) = 0.01$ （直接摘录于答案）

（2） $D(S^2) = D(\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2) = \frac{1}{(n-1)^2}D[\sigma^2\sum_{i=1}^{n}(\frac{X_i-\mu-(\bar{X}-\mu)}{\sigma})^2] = \frac{\sigma^4}{(n-1)^2}D[\sum_{i=1}^{n}(Y_i-\bar{Y})^2$

其中，$Y_i \sim N(0,1)$, 则原式

$$=\frac{\sigma^4}{(n-1)^2}D[\sum_{i=1}^{n}Y_i^2-n\bar{Y}^2]=\frac{\sigma^4}{(n-1)^2}[D(\sum_{i=1}^{n}Y_i^2)+n^2D(\bar{Y}^2)-nCov(\sum_{i=1}^{n}Y_i^2,\bar{Y}^2)]$$

其中

$$D(\sum_{i=1}^{n}Y_i^2)=2n,n^2D(\bar{Y}^2)=\frac{n^2}{n}=n,nCov(\sum_{i=1}^{n}Y_i^2,\bar{Y}^2)=n[E(\bar{Y}^2\sum_{i=1}^{n}Y_i^2)-E(\sum_{i=1}^{n}Y_i^2)E(\bar{Y}^2)]$$

$$=n[nE(\bar{Y}^2\,\bar{Y^2})]$$

18.

（1） $Y=2\lambda X$ 单调，可以套用公式计算概率密度函数，

$$f_Y(y)=\begin{cases}f_X(h(y))\,|\,h'(y)|=\frac{1}{2}e^{-\frac{y}{2}},y>0\\ 0,y\le 0\end{cases}$$

（2） 其实也就是 $2n\lambda\bar{X}=\sum_{i=1}^{n}Y_i\sim\chi^2(2n)$,由于$\chi^2(n)$具有可加性，所以猜测证明

$Y_i\sim\chi^2(2)$，我们翻到 P270 页找到

$$\chi^2(n):f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma(n/2)}x^{\frac{n}{2}-1}e^{-\frac{x}{2}},x>0\\ 0,\text{其他}\end{cases},n=2,f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}},x>0\\ 0,\text{其他}\end{cases}$$

，正是Y_i的分布，所以$Y_i\sim\chi^2(2)$， $2n\lambda\bar{X}=\sum_{i=1}^{n}Y_i\sim\chi^2(2n)$ （$\Gamma(n)=(n-1)!,n\text{是整数}$）

19. 书上 P173 定理 5.3.2 提到过 $\bar{X}$、S^2 相互独立 $D(T)=D(\bar{X}^2)+\frac{1}{n^2}D(S^2)$, 其中

$$\bar{X}\sim N(0,\frac{1}{n})=\frac{1}{\sqrt{n}}N(0,1),S^2\sim\frac{1}{n-1}t(n-1)$$ 则

$$D(T)=\frac{1}{n^2}D(\chi^2(1))+\frac{1}{n^2(n-1)^2}D(t(n-1))=\frac{2}{n^2}+\frac{\frac{n-1}{n-3}}{n^2(n-1)^2}=\frac{1}{n^2}(2+\frac{1}{(n-1)(n-3)})$$

第六章

习题 6.1

1. $\hat{\mu}=\frac{\sum_{i=1}^{5} x_i}{5}=52.84$ （答案有误），$\hat{\sigma}^2=\frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5}(x_i-\overline{x})^2=0.1304$

2. 服从正态分布的话，其实矩估计值我们已经知道了，同上，$\hat{\mu}=\frac{\sum_{i=1}^{5} x_i}{5}=2809.4$,

$\hat{\sigma}^2=\frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5}(x_i-\overline{x})^2=1170.64$

3. 服从均匀分布：

（1） 未知参数只有两个，所以需要两阶：

$$\mu_1=E(X)=\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx=\int_{\theta_1}^{\theta_1+\theta_2}\frac{xdx}{\theta_2}=\frac{2\theta_1+\theta_2}{2}, A_1=\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}=\overline{X}$$

$$\mu_2=E(X^2)=\int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx=\int_{\theta_1}^{\theta_1+\theta_2}\frac{x^2dx}{\theta_2}=\frac{3\theta_1^2+3\theta_1\theta_2+\theta_2^2}{3},$$

$$A_2=\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i^2}{n}=E(X^2)=D(X)+E(X)^2=S_n^2+\overline{X}^2$$

连立方程，$\begin{cases}\mu_1=A_1\\ \mu_2=A_2\end{cases}$

解得，$\hat{\theta}_1=\overline{X}-\sqrt{3}S_n, \hat{\theta}_2=2\sqrt{3}S_n$

（2） $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{\theta_2}, \theta_1<x<\theta_1+\theta_2, \\ 0, 其他\end{cases}$ $L(x_i;\theta_1,\theta_2)=\frac{1}{\theta_2^n}$ ，

$\ln L(\theta_2)=-n\ln\theta_2, \frac{d\ln L(\theta_2)}{d\theta_2}=-\frac{n}{\theta_2}$，不存在导数为 0

但是，我们从极大似然法的定义来看，要使 $L(\theta_2)$ 最大，则 θ_2 尽量小，又因为

$\theta_2+\theta_1\geq\max\{x_1,x_2...x_n\}$， $\theta_1\leq\min\{x_1,x_2...x_n\}$ ，所以

$\hat{\theta}_2+\hat{\theta}_1=\max\{x_1,x_2...x_n\}$，$\hat{\theta}_1=\min\{x_1,x_2...x_n\}$，即 $\hat{\theta}_1=X_{(1)},\hat{\theta}_2=X_{(n)}-X_{(1)}$

4. 仅有一个参数

（1） $\mu_1=\int_{-\infty}^{\infty}xf(x)dx=\frac{\theta+1}{\theta+2},A_1=\bar{X}\Rightarrow\hat{\theta}=\frac{1-2\bar{X}}{\bar{X}-1}$

（2） $L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i;\theta)=(\theta+1)^n(\prod_{i=1}^{n}x_i)^{\theta},\ln L(\theta)=n\ln(\theta+1)+\theta\sum_{i=1}^{n}\ln x_i$

$$\frac{d\ln L(\theta)}{d\theta}=\frac{n}{\theta+1}+\sum_{i=1}^{n}\ln x_i=0,\theta=-1-\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\ln x_i}$$ （与答案不同）

5. （摘抄书本 187 页）

$$\mathrm{f(x)}=\begin{cases}\frac{1}{2\theta} & ,-\theta<x<\theta\\ 0, \text{其他} & \end{cases}$$

$$L(x_i;\theta)=\frac{1}{(2\theta)^n}$$

$$\ln L(\theta)=-n\ln 2\theta,\frac{d\ln L(\theta)}{d\theta}=-\frac{n}{\theta}$$ ，不存在导数为 0

但是，我们从极大似然法的定义来看，要使 $L(\theta)$ 最大，则 θ 尽量小，又因为

$\theta\ge\max\{|x_1|,|x_2|...|x_n|\}$ ，所以 $\hat{\theta}=\max\{|x_1|,|x_2|...|x_n|\}$

习题 6.2

1. 仅有一个参数

（1） $\mu_1=\int_0^1 xf(x;\theta)dx=\frac{1+2\theta}{4}=\bar{X},\hat{\theta}=\frac{4\bar{X}-1}{2}=2\bar{X}-\frac{1}{2}$

（2） $E(4\bar{X}^2)=E[(2\bar{X})^2]=D(2\bar{X})+E(2\bar{X})^2>(\theta+\frac{1}{2})^2>\theta^2$，不是无偏估计

2. $\mu_1=\int_0^{\infty}xf(x)dx=\theta,\therefore\hat{\theta}=\bar{X}$ ，（第二题摘与浙大版 159 页）

$$Z=\min\{X_1,X_2,...X_n\}$$

$$F(Z)=F_{\min}(x;\theta)=1-\prod_{i=1}^{n}(1-\int_0^x \frac{1}{\theta}e^{-\frac{x}{\theta}}dx)=1-e^{-\frac{nx}{\theta}}$$

$$f(Z)=\frac{dF_{\min}(x)}{dx}=\frac{n}{\theta}e^{-\frac{nx}{\theta}}, \quad x>0$$

$$E(nZ)=nE(Z)=n\cdot\frac{\theta}{n}=\theta$$

3. 如下，

$$\mu_1 \sim N(\frac{1}{5}\mu+\frac{3}{10}\mu+\frac{1}{2}\mu, \frac{1}{25}\sigma^2+\frac{9}{100}\sigma^2+\frac{1}{4}\sigma^2)=N(\mu, \frac{38}{100}\sigma^2)$$

$$\mu_2 \sim N(\mu, \frac{25}{72}\sigma^2)$$

$$\mu_2 \sim N(\mu, \frac{7}{18}\sigma^2)$$

由上面可知，μ_2最有效

4. $F_{\max}(X)=\frac{x^3}{\theta^3}, f_{\max}(X)=\frac{3x^2}{\theta^3}; F_{\min}(X)=1-(1-\frac{x}{\theta})^3=\frac{x^3}{\theta^3}-3\frac{x^2}{\theta^2}+3\frac{x}{\theta}, f_{\min}(x)=\frac{3x^2}{\theta^3}-6\frac{x}{\theta^2}+3\frac{1}{\theta}$

$$Y=\frac{4}{3}\max\{X_1,X_2,X_3\}, E(Y)=\frac{4}{3}\int_0^{\theta} x\cdot\frac{3x^2}{\theta^3}dx=\theta$$

$$Z=4\min\{X_1,X_2,X_3\}, E(Z)=4\int_0^{\theta} x(\frac{3x^2}{\theta^3}-6\frac{x}{\theta^2}+3\frac{1}{\theta})dx=\theta$$

，都是无偏估计

$$D(Y)=\frac{16}{9}D(\max\{X_1,X_2,X_3\})=\frac{16}{9}[E(\max{}^2\{X_1,X_2,X_3\})-E(\max\{X_1,X_2,X_3\})^2]=\frac{1}{15}\theta^2$$

$$D(Z)=16D(\min\{X_1,X_2,X_3\})=16[E(\min{}^2\{X_1,X_2,X_3\})-E(\min\{X_1,X_2,X_3\})^2]=\frac{3}{5}\theta^2$$

所以$\frac{4}{3}\max\{X_1,X_2,X_3\}$ 更有效

5. （法一，用别的已证明的）$Y=\frac{12}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2=12S^2$是$12\sigma^2$的无偏估计，而

$\sigma^2=\frac{1}{12}\theta^2$，所以 Y 是$\sigma^2$的无偏估计，那相合也是肯定的，因为用了已经证明了的。

（法二：自己写）

$$Y=\frac{12}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2=\frac{12}{n-1}(\sum_{i=1}^{n}X_i^2-n\bar{X}^2), E(Y)=\frac{12}{n-1}[E(\sum_{i=1}^{n}X_i^2)-nE(\bar{X}^2)]$$

$$=\frac{12}{n-1}[\sum_{i=1}^{n}(\sigma^2+\mu^2)-n(\frac{\sigma^2}{n}+\mu^2)]=12\sigma^2=\theta^2$$

要证相合性，就是$\lim\limits_{n\to\infty} P\{|\frac{12}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2-\theta^2|<\varepsilon\}=1$，就要往辛钦大数定律凑，

构造$Z_i=\frac{12n}{n-1}(X_i-\bar{X})^2$，目标是证明$E(Z_i)=\theta^2$则大功告成，但是因为$\bar{X}$的存在工作不好开展，所以我不会……

习题 6.3

（本篇里面答案的值直接摘录于标准答案，如果有错实在抱歉，还请联系我）

1. 首先我们确认含锡量是不是越少越好，所以是单侧置信区间，置信区间是$(0,\bar{X}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_a)$，绝对误差不超过 2.5，就是$\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_a\le 2.5, n\ge(\frac{4}{2.5}z_a)^2=6.88$，最小值 n 为 7（答案给 10 是按双侧置信区间来的，这个仁者见之）

2. μ的置信区间是$(\bar{X}-\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\frac{a}{2}}(16-1),\bar{X}+\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\frac{a}{2}}(16-1))$,即$(2.6895,2.7205)$

   σ^2的置信区间是$(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{a}{2}}(n-1)},\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{a}{2}}(n-1)})$，即(4.59e-4, 0.00201)（与答案严重不符）

3. 已知方差，$\bar{X}=14.95$，方差已知，置信区间$(\bar{X}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}Z_{\frac{a}{2}},\bar{X}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}Z_{\frac{a}{2}})$，即$(14.8,15.2)$

4. 如下

   （1） $(\bar{X}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}Z_{\frac{a}{2}},\bar{X}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}Z_{\frac{a}{2}})\Rightarrow(19,87,20.15)$

   （2） $(\bar{X}-\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\frac{a}{2}},\bar{X}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}t_{\frac{a}{2}})\Rightarrow(19,87,20.17)$

5. 已知方差，套用左边的公式，即$(\bar{X}-\bar{Y}-z_{\frac{a}{2}}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}},\bar{X}-\bar{Y}+z_{\frac{a}{2}}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}})$，

   $(-0.899,0.019)$

6. 比较两个样本的，预计使用 F 模型，套用左边最后一个模型，

   $(\frac{S_X^2}{S_Y^2}\frac{1}{F_{\frac{a}{2}}(n_1-1,n_2-1)},\frac{S_X^2}{S_Y^2}\frac{1}{F_{1-\frac{a}{2}}(n_1-1,n_2-1)})$，$(0.2217,3.6008)$

7. 含锡量越小越好，又是单侧置信上限，所以是 $\bar{X}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}Z_a$，即 183.3515

习题 6.4

1. 就同上（题目的上面那道例题），$\hat{p}_1=\frac{1}{2a}(-b-\sqrt{b^2-4ac}),\hat{p}_2=\frac{1}{2a}(-b+\sqrt{b^2-4ac}$

其中，$a=n+(z_{\frac{a}{2}})^2,b=-[2n\bar{x}+(z_{\frac{a}{2}})^2],c=n\bar{x}^2$，带入即可。

2. 同上
3. 同上

习题六

1.

（1） 一个参数，就只用算一阶矩，$\mu_1=\sum_{i=0}^{3}iP(i)=3-4\theta$，$A_1=\bar{X}=2,\therefore\hat{\theta}=\frac{1}{4}$

（2） $L(\theta)=(1-2\theta)^4\cdot[2\theta(1-\theta)]^2\cdot\theta^2\cdot\theta^2=4\theta^6(1-\theta)^2(1\text{-}2\theta)^4$，

$\ln L(\theta)=\ln 4+6\ln\theta+2\ln(1-\theta)+4\ln(1-2\theta),$

$$\frac{d\ln L(\theta)}{d\theta}=\frac{6}{\theta}-\frac{2}{1-\theta}-\frac{8}{1-2\theta}=0\Rightarrow\theta=\frac{7\pm\sqrt{13}}{12},\text{要求}\frac{d^2\ln L(\theta)}{d\theta^2}=-\frac{6}{\theta^2}-\frac{2}{(1-\theta)^2}-\frac{16}{(1-2\theta)^2}<0$$

则，$\theta=\frac{7-\sqrt{13}}{12}$

2. 这 话 的 意 思 就 是 极 大 似 然 法 ， 平 均 数 为 λ ，

$$L(\lambda)=\prod_{i=1}^{50}P(x=i)=\prod_{i=1}^{50}\frac{\lambda^{x_i}}{x_i!}e^{-\lambda}=\frac{\lambda^{\sum_{i=1}^{50}x_i}}{2^{10}\times(3!)^2\times(4!)}e^{-50\lambda},\ln L(\lambda)=\sum_{i=1}^{50}x_i\ln\lambda-50\lambda-\ln C$$

$$\frac{d\ln L(\lambda)}{d\lambda}=\frac{\sum_{i=1}^{50}x_i}{\lambda}-50=0,\hat{\lambda}=\bar{x}=1$$

3.

（1） $L(\theta)=\theta^{2N_1}\cdot[2\theta(1-\theta)]^{N_2}\cdot(1-\theta)^{2N_3}=2^{N_2}\theta^{2N_1+N_2}\cdot(1-\theta)^{N_2+2N_3}$，

$\ln L(\theta)=N_2\ln 2+(2N_1+N_2)\ln\theta+(N_2+2N_3)\ln(1-\theta)$

$$\frac{d\ln L(\theta)}{d\theta}=\frac{2N_1+N_2}{\theta}-\frac{N_2+2N_3}{1-\theta}=0,\hat{\theta}=\frac{2N_1+N_2}{2(N_1+N_2+N_3)}$$

（2） 带入，得 λ=0.335

4. 两个参数，所以需要列两个方程

$$\mu_1=np,A_1=\bar{X}$$

$$\mu_2=E(X^2)=D(X)+E(X)^2=np(1-p)+n^2p^2,A_2=\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i^2}{n}=\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2+n\bar{X}^2}{n}=S_n^2+\bar{X}^2$$

连立方程，得，$\hat{p}=1-\frac{S_n^2}{\bar{X}}$， $\hat{N}=\frac{\bar{X}}{\hat{p}}$

5. 若 $p=0or1$，那么 $P(X=x)=0,$ 不满足归一化条件，所以不可能

（1） 矩估计：仅有一个参数，$\mu_1=\sum_{k=1}^{\infty}kp(1-p)^{k-1}=\frac{1}{p}=\bar{X},\hat{p}=\frac{1}{\bar{X}}$

（2） $L(p)=p^n(1-p)^{\sum_{i=1}^{n}x_i-n},\ln L(p)=n\ln p+(\sum_{i=1}^{n}x_i-n)\ln(1-p)$

$$\frac{d\ln L(p)}{dp}=\frac{n}{p}-\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i-n}{1-p}=0,\hat{p}=\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}x_i}$$

6. $L(\theta)=\theta^N\cdot(1-\theta)^{n-N},\ln L(\theta)=N\ln\theta+(n-N)\ln(1-\theta)$

$$\frac{d\ln L(\theta)}{d\theta}=\frac{N}{\theta}-\frac{n-N}{1-\theta}=0,\hat{\theta}=\frac{N}{n}$$

7. $E(\frac{1}{n}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\sum_{i=1}^{n}|X_i-1|)=\frac{1}{n}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\cdot 2\int_0^{\infty}\frac{nx}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}dx=\frac{1}{n}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\cdot\frac{2\sigma n}{\sqrt{2\pi}}=\sigma$

8. 这里题目我自行补充一下，Y 与 X 同方差，那么

$$S^2=\frac{1}{n+m-2}[\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2+\sum_{i=1}^{m}(Y_i-\bar{Y})^2]=\frac{1}{n+m-2}[(n-1)S_X^2+(m-1)S_Y^2]$$

其中 S_X^2、S_Y^2 都是 σ^2 的无偏估计，那么 S^2 就是 $\frac{1}{n+m-2}[(n-1)\sigma^2+(m-1)\sigma^2]=\sigma^2$ 的无偏估计。

9. $E(\bar{X})=\lambda,E(\bar{X}^2)=D(\bar{X})+E(\bar{X})^2=\frac{n\lambda}{n^2}+\lambda^2\Rightarrow\lambda^2=E(\bar{X}^2)-\frac{E(\bar{X})}{n}$ 即 $\bar{X}^2-\frac{\bar{X}}{n}$

是 λ^2 的无偏估计。

10.

（1）　不会

（2）　$\mu = E[(\bar{X})^2 - CS^2] = E(\bar{X}^2) - CE(S^2) = D(\bar{X}) + E(\bar{X})^2 - C(n-1)\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n} + \mu^2$

11. $E(k\bar{X} + (1-k)S^2) = kE(\bar{X}) + (1-k)E(S^2) = k\lambda + (1-k)\lambda = \lambda$

12. $E(Z) = aE(S_1^2) + bE(S_2^2) = a\sigma^2 + b\sigma^2 = \sigma^2$，又因为 X、Y 分布独立，所以 S_1^2、S_2^2 独立，不妨设 $D(S_1^2) = D(S_2^2) = \alpha^2$，所以

$D(Z) = a^2 D(S_1^2) + b^2 D(S_2^2) = (a^2 + b^2)\alpha^2$, 在 $a = b = \frac{1}{2}$ 时最小

13.

（1）　$T_1 = (m-1)S_X^2 + (n-1)S_Y^2, \frac{T_1}{\sigma^2} = \frac{(m-1)S_X^2}{\sigma^2} + \frac{(n-1)S_Y^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(m-1) + \chi^2(n-1) = \chi^2(m+n-2)$

$$T_2 = \sum_{i=1}^{m}(X_i - \bar{X} + \bar{X} - \mu)^2 + \sum_{i=1}^{n}(Y_i - \bar{Y} + \bar{Y} - \mu)^2$$

$$= \sum_{i=1}^{m}[(X_i - \bar{X})^2 + (\bar{X} - \mu)^2] + \sum_{i=1}^{n}[(Y_i - \bar{Y})^2 + (\bar{Y} - \mu)^2] = T_1 + m(\bar{X} - \mu)^2 + n(\bar{Y} - \mu)^2$$

,其中，展开的乘积项 $\sum_{i=1}^{m} 2(X_i - \bar{X}) \cdot (\bar{X} - \mu) = 2(\bar{X} - \mu)(\sum_{i=1}^{m} X_i - m\bar{X}) = 0$,Y 同理

下面处理非 T_1 项，即 $\frac{m(\bar{X} - \mu)^2 + n(\bar{Y} - \mu)^2}{\sigma^2} = (\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{m}})^2 + (\frac{\bar{Y} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}})^2 = \chi^2(2)$，

所以 $\frac{T_2}{\sigma^2} \sim \chi^2(m+n-2) + \chi^2(2) = \chi^2(m+n)$

（2）　由（1）中信息以及 $E[\chi^2(n)] = n$　可得 $C_1 = \frac{1}{n+m-2}, C_2 = \frac{1}{n+m}$　，

（3）　$D(T_1^*) = \frac{1}{(m+n-2)^2} \cdot 2(m+n-2) = \frac{2}{m+n-2} > \frac{2}{m+n}$，所以 T_2^* 更优。

14.

（1）　$\frac{T}{\sigma^2} = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} + \sum_{i=n+1}^{2n} \frac{(X_i - \mu)^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1) + \chi^2(n) = \chi^2(2n-1)$

（2） $P[\chi^2_{1-\frac{a}{2}}(2n-1)<\frac{T}{\sigma^2}<\chi^2_{\frac{a}{2}}(2n-1)]\geq 1-a,\therefore \sigma^2\in(\frac{T}{\chi^2_{\frac{a}{2}}(2n-1)},\frac{T}{\chi^2_{1-\frac{a}{2}}(2n-1)})$

15. σ 已知，直接套公式，置信区间长度为 $\frac{2\sigma}{\sqrt{n}}Z_{\frac{a}{2}}\leq L, n\geq(\frac{2\sigma}{L}Z_{\frac{a}{2}})^2$

16. 同上题，$\frac{2\sigma}{\sqrt{n}}Z_{\frac{a}{2}}=0.658, Z_{\frac{a}{2}}=\frac{0.658\times 10}{4}=1.645, a=0.1, 1-a=0.9$

17.

（1） $X=e^Y, Y\sim N(\mu,1), E(X)=\int_{-\infty}^{\infty}e^y\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(y-\mu)^2}{2}}dy=\frac{e^\mu}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{y-\mu}e^{-\frac{(y-\mu)^2}{2}}d(y-\mu)$

$=\frac{e^\mu}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{y-\frac{y^2}{2}}dy=\frac{e^\mu}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{(y-1)^2+1}{2}}dy=\frac{e^{\mu+\frac{1}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{(y-1)^2}{2}}d(y-1)=e^{\mu+\frac{1}{2}}$

（2） $\bar{Y}=\frac{\sum_{i=1}^{4}\ln X_i}{4}=0,\therefore \mu$的置信区间$(-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}Z_{\frac{a}{2}},\frac{\sigma}{\sqrt{n}}Z_{\frac{a}{2}})$,即$(-0.98,0.98)$ （与答案不同）

（3） 题目说让我们利用上述结果，那我们就用呗，$(e^{-0.98+\frac{1}{2}},e^{0.98+\frac{1}{2}})=(0.619,4.393)$

18. $Y=D(\frac{X^2}{\sigma^2})=D(\frac{(X-\mu)^2}{\sigma^2}-2\mu\frac{X}{\sigma^2}+\frac{\mu^2}{\sigma^2})=D(\frac{(X-\mu)^2}{\sigma^2}-2\mu\frac{X}{\sigma^2})$ ，其中，

$\frac{(X-\mu)^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(1),\quad X\sim N(\mu,\sigma^2)$

19. 不会
20. 如下：

（1） 套公式，这里 σ^2 未知，就套 $(\bar{x}-\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\frac{a}{2}}(n-1),\bar{x}+\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\frac{a}{2}}(n-1))$，为

$(2.196, 2.230)$ （与答案不同）

（2） 套公式，这里 μ 未知，$(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{a}{2}}(n-1)},\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{a}{2}}(n-1)})$，即 $(1.73\times10^{-4}, 2.65\times10^{-3})$

21. 这里不知道 σ^2，套 $(\bar{x}-\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\frac{a}{2}}(n-1),\bar{x}+\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\frac{a}{2}}(n-1))$，$(750.5,849,5)$

22. 同上，得 $(170.44,173.57)$

23. 同上，$\bar{X}=1147$，$S=87.06$ 得 $(1084.72,1209.28)$（与答案偏差在于小数位的取选）

24. 同上，$(30.868,31.252)$

25. 一万户指的是大样本的意思，那么很没有道理的利用书上 P150 页 4.4.3 第一段：“这种随机变量往往近似的服从正态分布”的一句话，我们也不妨假设其满足正态分布，那就好做了。区间估计为

26. 这就是没给 μ、σ^2，可以算出，$\bar{X}=69.8, S^2=36.43$

（1） $(\bar{X}-\frac{S}{\sqrt{16}}t_{\frac{a}{2}}(15), \bar{X}-\frac{S}{\sqrt{16}}t_{\frac{a}{2}}(15))$, 即 (66. 59, 73. 03) （小数保存不同）

（2） $(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{a}{2}}(n-1)}, \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{a}{2}}(n-1)})$，取根号后，即 $(4.46,9.34)$ （显然不同）

27. 标准差已知，那么 $(\bar{X}-\bar{Y}-z_{\frac{a}{2}}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}, \bar{X}-\bar{Y}+z_{\frac{a}{2}}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}})$, 即$(-6.04,-5.96)$

28. $\bar{X}=130, S_X^2=58, \bar{Y}=135, S_Y^2=11.2$，$S_W=5.36$, 那么() $(-12.98, 2.98)$

29. 同上 28 题，得 $(-0.002, 0.006)$（直接摘录于答案）

30. σ^2 未知，$\bar{x}-\frac{S}{\sqrt{n}}t_a(n-1)$，即 40527（直接摘录）

31. σ^2 已知，所以单侧置信下限为 $\bar{X}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_a$，即 409.88，置信上限 $\bar{X}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_a$，即 420.12

32. 我唯一的想法就是,，近似服从正态分布.......这样

$$\frac{\bar{X}-\lambda}{\lambda/\sqrt{100}} \sim N(0,1)，\text{则} -Z_{0.01} < \frac{\bar{X}-\lambda}{\lambda/10} < Z_{0.01}, \text{计算得} \frac{\bar{X}}{\frac{Z_{0.01}}{10}+1} < \lambda < \frac{\bar{X}}{\frac{-Z_{0.01}}{10}+1}, \text{即} 3.24<\lambda<5.22$$

标准答案给的是 $(3.56, 4, 49)$ （欢迎会的同学私戳）

第七章

习题 7.2

1. 假设：$H_0:\mu=4.55$（无显著变化）；$H_1:\mu\neq4.55$（显著变化）。则拒绝域为

$P(|\frac{\overline{x}-4.55}{0.108/\sqrt{5}}|\geq z_{\frac{a}{2}})=a$，其中 $z_{\frac{a}{2}}=1.96$，$|\frac{\overline{x}-4.55}{0.108/\sqrt{5}}|$=3.93>$z_{\frac{a}{2}}$，拒绝 $H_0:\mu=4.55$

所以有显著变化。

2. 同上，假设：$H_0:\mu=1277$（无明显偏差）；$H_1:\mu\neq 1277$（有明显偏差）。则拒绝域为 $P(|\frac{\overline{x}-1277}{S/\sqrt{5}}|\geq t_{\frac{a}{2}}(4))=a$，其中 $t_{\frac{a}{2}}(4)=2.7764$，$|\frac{\overline{x}-1277}{S/\sqrt{5}}|$=3.37>$t_{\frac{a}{2}}(4)$，拒绝 $H_0:\mu=1277$，所以有明显偏差。（和标准答案有明显差别）

3. 假设：$H_0:\sigma^2=\sigma_0^2$（无显著变化）；$H_1:\sigma^2\neq\sigma_0^2$（有显著变化）拒绝域为 $\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}>\chi^2_{\frac{a}{2}}(n-1)\cup\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}<\chi^2_{1-\frac{a}{2}}(n-1)$，其中 $\chi^2_{\frac{a}{2}}(n-1)=54.437$，$\chi^2_{1-\frac{a}{2}}(n-1)=21.336$，$\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}=51.84$，不在拒绝域内，所以接受 $H_0:\sigma^2=\sigma_0^2$，无显著变化

4. 同题 2，假设：$H_0:\mu<215$（未达到预期效果）；$H_1:\mu\geq 215$（达到效果）。则拒绝域为 $\frac{\overline{x}-215}{S/\sqrt{16}}\geq t_a(15)$ 其中 $t_a(15)=1.7531$，$\frac{\overline{x}-215}{S/\sqrt{16}}$=-2.14$<t_a(15)$，接受 $H_0:\mu<215$，所以未达到效果。

5. 假设：$H_0:\sigma^2=\sigma_0^2$（没有变劣）；$H_1:\sigma^2>\sigma_0^2$（变劣）拒绝域为 $\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}>\chi^2_a(n-1)$，其中 $\chi^2_a(n-1)=24.996$，$\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}=45.9>\chi^2_a(n-1)$，在拒绝域内，所以拒绝 $H_0:\sigma^2=\sigma_0^2$，显著变劣

习题 7.3

1. 假设：$H_0:\mu_1-\mu_2=0;H_1:\mu_1-\mu_2\neq 0$，拒绝域

$|\frac{\overline{X}-\overline{Y}}{\sqrt{\frac{4}{5}+\frac{6}{5}}}|\geq Z_{\frac{a}{2}}$，$|\frac{\overline{X}-\overline{Y}}{\sqrt{\frac{4}{5}+\frac{6}{5}}}|=1.84<Z_{\frac{a}{2}}=1.96$，所以接受 $H_0:\mu_1-\mu_2=0$，没有差异

2. 假设：$H_0:\mu_1-\mu_2=0;H_1:\mu_1-\mu_2\neq 0$，拒绝域

$|\frac{\bar{X}-\bar{Y}}{S_w\sqrt{\frac{1}{6}+\frac{1}{5}}}|\geq t_{\frac{a}{2}}(9)$，$|\frac{\bar{X}-\bar{Y}}{S_w\sqrt{\frac{1}{6}+\frac{1}{5}}}|=1.237<t_{\frac{a}{2}}(9)=3.2498$，所以接受

$H_0:\mu_1-\mu_2=0$，没有差异

3. 假设：$H_0:\sigma_1^2<\sigma_2^2;H_1:\sigma_1^2\geq\sigma_2^2$，拒绝域

$\frac{S_1^2}{S_2^2}>F_a(m-1,n-1)$，$F_a(m-1,n-1)$=3.48，$\frac{S_1^2}{S_2^2}$=0.10813<$F_a(m-1,n-1)$ ，所以接受$H_0:\sigma_1^2<\sigma_2^2$，新生女婴体重的方差冬季的比夏季的小。

4.

（1） 假设：$H_0:\sigma_1^2=\sigma_2^2;H_1:\sigma_1^2\neq\sigma_2^2$，拒绝域

$\frac{S_1^2}{S_2^2}>F_{\frac{a}{2}}(m-1,n-1)$或者$\frac{S_1^2}{S_2^2}<F_{1-\frac{a}{2}}(m-1,n-1)$，其中

$F_{\frac{a}{2}}(m-1,n-1)=5.82, F_{1-\frac{a}{2}}(m-1,n-1)=\frac{1}{F_{\frac{a}{2}}(n-1,m-1)}=0.172, \frac{S_1^2}{S_2^2}=2.02$，

不在拒绝域内，所以接受$H_0:\sigma_1^2=\sigma_2^2$，无显著差异

（2） 说方差无变化，就是说σ_1^2=σ_2^2=σ^2，假设：$H_0:\mu_1-\mu_2=0;H_1:\mu_1-\mu_2\neq 0$，

拒绝域$|\frac{\bar{X}-\bar{Y}}{S_w\sqrt{\frac{1}{7}+\frac{1}{7}}}|\geq t_{\frac{a}{2}}(12)$，$|\frac{\bar{X}-\bar{Y}}{S_w\sqrt{\frac{1}{7}+\frac{1}{7}}}|=2.46>t_{\frac{a}{2}}(12)=2.1788$，所以拒绝

$H_0:\mu_1-\mu_2=0$，有显著变化

5. 假设：$H_0:\sigma_1^2\leq\sigma_2^2;H_1:\sigma_1^2>\sigma_2^2$，拒绝域

$\frac{S_1^2}{S_2^2}>F_a(m-1,n-1)$，$F_a(m-1,n-1)$=1.61，$\frac{S_1^2}{S_2^2}$=1.6<$F_a(m-1,n-1)$ ，所以接受

$H_0:\sigma_1^2\leq\sigma_2^2$

习题 7.4

1.　（本题中列表的方法采用了浙大版教材中的方法，有兴趣可以参阅）按题意需检验假设 $H_0: P(X=i)=\frac{1}{6}, i=1\ldots6$ ，列一个表

X	f_i	P_i	nP_i	f_i^2/np_i
1	8	$1/6$	10	6.4
2	8	$1/6$	10	6.4
3	12	$1/6$	10	14.4
4	11	$1/6$	10	12.1
5	9	$1/6$	10	8.1
6	12	$1/6$	10	14.4

$\chi^2=\sum_{i=1}^{6}\frac{f_i^2}{np_i}-n=1.8$，$\chi_a^2(6-1)=11.07\geq\chi^2$，接受 $H_0: P(X=i)=\frac{1}{6}, i=1\ldots6$，则这颗骰子均匀、对称。

2.　按题意需检验假设

$$H_0: P(X=k)=\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}, k=1\ldots6$$

首先咱们先给 λ 做极大似然估计，$\hat{\lambda}=\overline{x}=\frac{\sum_{i=0}^{7} f(n_i)n_i}{100}=1$

X	f_i	P_i	nP_i	f_i^2/np_i
0	36	$\frac{\lambda^0 e^{-\lambda}}{0!}=\frac{1}{e}$	36.79	35.23
1	40	$\frac{1}{e}$	36.79	43.49
2	19	$\frac{1}{2e}$	18.39	19.63
3	2	$\frac{1}{3!\ e}$	8.03	3.11

4	0	$\frac{1}{4!\ e}$		
5	2	$\frac{1}{5!\ e}$		
6	1	$\frac{1}{6!\ e}$		
≥ 7	0	$1-\frac{1}{e}\sum_{i=0}^{6}\frac{1}{i!}$		

$\chi^2=\sum_{i=1}^{4}\frac{f_i^2}{np_i}-n=1.46$，$\chi_a^2(100-1-1)=\frac{1}{2}(z_a+\sqrt{195})^2\geq\chi^2$，接受

$H_0:P(X=k)=\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!},k=1...6$，则一页的错误个数服从泊松分布。

习题七

1. 假设$H_0:\mu\leq 30;H_1:\mu>30$，（这里在选取$H_0$时候想想:把不符合要求的当作符合要求的问题比把符合要求的舍弃问题更大，所以应该避免前一种错误，即避免在$H_0:\mu\leq 30$的时候拒绝，认为$\mu>30$）σ未知，则拒绝域为

   $\frac{\bar{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}>t_a(n-1),\frac{\bar{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}=-1.73<t_a(n-1)=2.015$，所以拒绝$H_0:\mu\leq 30$，有理由接受符合要求。

2. 假设$H_0:\mu=66;H_1:\mu\neq 66$，$\sigma$其实是未知的，因为你不知道生病的影响，则拒绝域为$|\frac{\bar{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}|>t_{\frac{a}{2}}(n-1),\frac{\bar{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}=2.066<t_{\frac{a}{2}}(n-1)=2.1315$，所以接受$H_0:\mu=66$，可以断定脉搏的速度没有变化。衡量他有没有恢复，不仅要看平均的频率，还要看稳定性。假设$H_0:\sigma=5;H_1:\sigma\neq 5$，则接受域为$\chi^2_{1-\frac{a}{2}}(n-1)\leq\chi^2=\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}\leq\chi^2_{\frac{a}{2}}(n-1)$，

   $5.629\leq\chi^2\leq 26.119,\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$=21.0　所以接受$H_0:\sigma=5$，可以断定脉搏的稳定性没有变化。综上，身体已经恢复到受伤前状态。

3.

（1） σ^2已知，则μ的双侧置信区间为$(\bar{X}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\frac{a}{2}},\bar{X}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\frac{a}{2}})$，即$(2.11,2.14)$

（2） 不在上面的置信区间内，所以认为平均长度与μ_0=2.15有明显差异。

4.

（1） σ^2已知，则单侧上限为$\bar{X}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_a=69.6$

（2） $\mu=72$不在$a=0.05$的置信区间内，所以认为明显低于一般健康成年男子。

5. σ_1^2、σ_2^2已知，假设：$H_0:\mu_1-\mu_2=0;H_1:\mu_1-\mu_2\neq 0;$则拒绝域为

$|\frac{\bar{X}-\bar{Y}}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}}|\geq z_{\frac{a}{2}},|\frac{\bar{X}-\bar{Y}}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}}|=2.39<z_{\frac{a}{2}}=2.57$，则接受$H_0:\mu_1-\mu_2=0$，含灰率平均值没有显著差异。

6. σ_1^2、σ_2^2未知，$\sigma_1^2=\sigma_2^2$，假设：$H_0:\mu_1-\mu_2>0;H_1:\mu_1-\mu_2\leq 0;$则拒绝域为

$\frac{\bar{X}-\bar{Y}}{S_w\sqrt{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}}}\leq -t_a(\mathrm{m+n-2})$，$\frac{\bar{X}-\bar{Y}}{S_w\sqrt{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}}}=10.8>-t_a(\mathrm{m+n-2})\approx -z_a=-1.64$，则接受

$H_0:\mu_1-\mu_2>0$，甲方案明显高于乙种方案。

7. 假设：$H_0:\sigma_1^2=\sigma_2^2;H_1:\sigma_1^2\neq\sigma_2^2$ 则接受域为

$F_{1-\frac{a}{2}}(m-1,n-1)\leq\frac{S_1^2}{S_2^2}\leq F_{\frac{a}{2}}(m-1,n-1)$（为什么我在这里会写接受域？因为这是接受域比拒绝域好写一点，看个人意愿，标准是拒绝域），即

$F_{1-\frac{a}{2}}(m-1,n-1)\leq\frac{S_1^2}{S_2^2}\leq F_{\frac{a}{2}}(m-1,n-1)$，（这里我没有查到

$F_{0.025}(49,51),F_{0.975}(49,51)$的值，遂直接套用答案），拒绝$H_0:\sigma_1^2=\sigma_2^2$，认为有差异。

8.

（1） 拒绝域：$|\frac{\bar{X}-5}{4/2}|>\mathrm{Z}_{\frac{a}{2}}$,即$\bar{X}<1.08$或$\bar{X}>8.92$

（2） 第二类错误即$\mu=6,1.08<\bar{X}<8.92$ 即$P(-2.46<\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}<1.46)=0.92$

9. 我们先来算假设的接受域（其实就是置信区间）$(\mu_0-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\frac{a}{2}},\mu_0+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\frac{a}{2}})$，然后在

$\mu=\mu_1<\mu_0$ 时，

$$P(\mu_0-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\frac{a}{2}}<\bar{X}<\mu_0-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\frac{a}{2}})=P(\frac{\mu_0-\mu_1}{\sigma/\sqrt{n}}-z_{\frac{a}{2}}<\frac{\bar{X}-\mu_1}{\sigma/\sqrt{n}}<\frac{\mu_0-\mu_1}{\sigma/\sqrt{n}}+z_{\frac{a}{2}})$$

$$=\Phi(\frac{\mu_0-\mu_1}{\sigma/\sqrt{n}}+z_{\frac{a}{2}})-\Phi(\frac{\mu_0-\mu_1}{\sigma/\sqrt{n}}-z_{\frac{a}{2}})$$

（为什么和答案不一样？）答案对假设检验问题的接受域认为是$(\mu_0-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_a,\infty)$ （其实就是根据了后面的情况，默认如果$\mu\neq\mu_0$,那就是$\mu<\mu_0$，笔者觉得这样是不合理的）

10. 这里实际上是给了一个暗含的东西（笔者觉得这样不好）$H_0:\mu\geq 20;H_1:\mu<20$ 内马尔接受域$\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\geq -z_a$，$\bar{X}\geq\mu-\frac{z_a}{\sqrt{n}}\sigma$ 犯第二类错误 $\mu\leq 18$，在接受域内

$\bar{X}\geq\mu_1-\frac{z_a}{\sqrt{n}}\sigma$，（这里加注$\mu_1$指的是这个$\mu_1\geq 20$ ）

$$P(\frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\geq\frac{\mu_1-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}-z_a)\leq 0.025,\frac{\mu_1-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}-z_a\geq z_\beta,n\geq(\frac{z_a+z_\beta}{\mu_1-\mu_0}\sigma)^2\geq 24.01，n\geq 25$$

（这里加注μ_0指的是这个$\mu_0\leq 18$ ）

11. 犯第一类错误的概率应该是在$\mu=1$时，却$\bar{X}>1,P(\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}>0)=\frac{1}{2}$ 。而第二类错误就是在$\mu=2$时，在接受域$\bar{X}\leq 1$ ，$P(\frac{\bar{X}-2}{1/3}\leq\frac{1-2}{1/3})=\Phi(-3)=0.0013$

12. 按题意需检验假设

H_0:服从该指数分布，列一个表

A_i	f_i	P_i	nP_i	f_i^2/np_i
$A_1(0\leq t\leq 100)$	121	0.393	117.9	124.18
$A_2(100<t\leq 200)$	78	0.239	71.7	84.85

$A_3(200<t\le 300)$	43	0.145	43.5	42.5
$A_4(t>300)$	58	0.223	66.9	50.28

$\chi^2=\sum_{i=1}^{4}\frac{f_i^{\,2}}{np_i}-n=1.81$， $\chi_a^2(4-1)=7.815\ge\chi^2$，接受 H_0:服从该指数分布

13. 列一个表

A_i	f_i	P_i	nP_i	$f_i^{\,2}/np_i$
$A_1(X=0)$	1	$\frac{1}{56}$	2(和下面合并)	
$A_2(X=1)$	31（合并前） 32（合并后）	$\frac{15}{56}$	30（合并前） 32（合并后）	32
$A_3(X=2)$	55	$\frac{15}{28}$	60	50.42
$A_4(X=3)$	25	$\frac{5}{28}$	20	31.25

$\chi^2=\sum_{i=1}^{3}\frac{f_i^{\,2}}{np_i}-n=1.67$， $\chi_a^2(3-1)=5.991\ge\chi^2$，接受 H_0:红球个数为 5

第八章

习题 8.1

1. $\hat{b}=\frac{L_{XY}}{L_{XX}}=0.058,\hat{a}=\overline{y}-\hat{b}\overline{x}=24.628$，$\hat{Y}=24.628+0.058x$

2. 同上，$\hat{Y}=0.1426+0.8662x$

3.

（1） 先求一些数据， $L_{XX}=438,L_{XY}=-1643,L_{YY}=6278$,那么

$$\hat{b}=\frac{L_{XY}}{L_{XX}}=\text{-}3.751,\hat{a}=\overline{y}-\hat{b}\overline{x}=480.1945,\quad \hat{Y}=480.1945\text{-}3.751x$$

（2） $\hat{\sigma}^2=\frac{1}{n-2}(L_{YY}-\hat{b}L_{xY})=19.1845$

4.

（1） 假设：$H_0: b=0; H_1: b\neq 0;$ 那么利用 T 检验去求拒绝域：

$$|T|\geq t_{\frac{a}{2}}(n-2), |T|=\frac{|\hat{b}|}{\hat{\sigma}^*}\sqrt{L_{xx}}=17.92>t_{\frac{a}{2}}(n-2)=3.7074$$,回归效果显著

（2） 为了对 b 进行估计，我们直接选用 P246 页定理 8.1.1 中（4）：

$t=\frac{\hat{b}-b}{\hat{\sigma}}\sqrt{L_{xx}}\sim t(n-2)$，则通过计算，$\mathrm{b}\in(\mathrm{b}_0-\frac{t_{0.025}(8-2)\hat{\sigma}}{\sqrt{L_{xx}}}, \mathrm{b}_0+\frac{t_{0.025}(8-2)\hat{\sigma}}{\sqrt{L_{xx}}})$

即 $(-4.2631,-3.2389)$

（3） 这里就直接套用 P248 页下面的结论，

$$Y\in(\hat{Y}_0-t_{\frac{a}{2}}(n-2)\cdot\hat{\sigma}\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{(x_0-\overline{x})^2}{L_{xx}}}, \hat{Y}_0+t_{\frac{a}{2}}(n-2)\cdot\hat{\sigma}\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{(x_0-\overline{x})^2}{L_{xx}}})$$

$\hat{Y}_0=198.8695, t_{\frac{a}{2}}(6)=2.4469, \hat{\sigma}=4.3800$ 代入得 $\mathrm{Y}\in(187.1582, 210.5808)$

5. 套用 P246 页公式，$\hat{b}\sim N(b,\frac{\sigma^2}{L_{xx}})$,那么 $\bar{\hat{b}}\sim N(b,\frac{\sigma^2}{L_{xx}n})$，置信区间

$$(b-\frac{\sigma/\sqrt{L_{xx}}}{\sqrt{n}}z_{\frac{a}{2}}, b+\frac{\sigma/\sqrt{L_{xx}}}{\sqrt{n}}z_{\frac{a}{2}})$$,即

（1） 同上，先求一些数据，

$\overline{x}=0.543, \overline{Y}=20.771, L_{xx}=0.532, L_{xY}=6.678, L_{YY}=84.034$，则

$\hat{b}=\frac{L_{XY}}{L_{XX}}=12.55, \hat{a}=\overline{y}-\hat{b}\overline{x}=13.96$，$\hat{Y}=13.96+12.55x$

（2） $\hat{\sigma}^{*2}=\frac{1}{7\text{-}2}(L_{YY}-\hat{b}L_{xY})=0.045$

（3） 利用简单的 t 检验 $|T|\geq t_{\frac{a}{2}}(n-2), |T|=\frac{|\hat{b}|}{\hat{\sigma}^*}\sqrt{L_{xx}}=43.15>t_{\frac{a}{2}}(n-2)=2.5706$，

回归效果显著

（4） $(\hat{a}+\hat{b}x-\delta(x), \hat{a}+\hat{b}x-\delta(x)), \delta(x)=t_{\frac{a}{2}}(n-2)\cdot\hat{\sigma}^*\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{(x_0-\overline{x})^2}{L_{xx}}}=0.584,$

区间为 $(19.651, 20.819)$（与答案的误差都来源于对小数位数的选取）

习题 8.2

1. $\ln Y=\ln a-\frac{b}{x}$, 令$Y'=\ln Y, x'=\frac{1}{x}, a'=\ln a, b'=-b$，则$Y'=a'+b'x'$ ，对表格数据进行处理，最后得$\hat{Y}=1.73e^{-\frac{0.146}{x}}$
2. $\ln Y=\ln a+\mathrm{bt}$, 令$Y'=\ln Y, Y'=a+bt$，对数据 Y 进行处理，然后即可得

   $\hat{y}'=5.9665-0.2179t$
3. $\frac{1}{y}=b+\frac{a}{x}$, 则$y'=\frac{1}{y}, x'=\frac{1}{x}$即可。

习题 8.3

1. 提出假设：$H_0:\mu_1=\mu_2=\mu_3$ ，（这里详细的数据处理我就不做了，我利用 excel 帮大家检查一下答案好了）$F=3.188<F_{0.05}(3,9)=3.862$，认为没有显著差异
2. 同上，$F=5.004>F_{0.05}(2,13)=3.885$，有差异
3. $F=1.17<F_{0.1}(4,20)=2.25$，没有显著差异

习题 8.4

1. 提出假设：$H_{01}:\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=0; H_{02}:\beta_1=\beta_2=\beta_3=0;$

   $F_A=0.917<F_{Aa}=5.14; F_B=0.43<F_{Ba}=4.76$,所以都没有显著差异。
2. $F_A=0.405<F_{Aa}=3.84; F_B=0.449<F_{Ba}=4.46$,所以都没有显著差异。
3. $F_A=70.047>F_{Aa}=5.143; F_B=21.924>F_{Ba}=4.757$,所以都没有显著差异。

习题八

略（同质化过于严重，笔者实在不想做了）