无向图有关的定理

1. 握手定理

设G是一个(p,q)图,它的结点集合,则：



1. 二部图的充要条件

无向图G=<V,E>为二部图的充要条件为G中所有回路的长度均为偶数。

1. 自补图的阶数

自补图的阶只可能是4k或4k+1。

1. 点、线连通度之间的大小关系

对任何简单连通图G ，有：γ(G)≤ε(G)≤δ(G)

1. 连通图的最小边数

p阶连通图至少有p -1条边。即：q≥p-1(用数学归纳法证明)

推广:q≥p-C(G)，C(G)是连通支的数量

1. (n,n-1)连通图至少有两个端点(n>1)。
2. 如何判断是否含圈
3. 若图G中顶点的最小度数大于等于2，则图G必含圈。(证明用最长路径性质:最长路径的端点只能与路径上的点邻接)
4. 不含圈的最长路径一定有两个端点。
5. 至少有n条边的n阶图必含圈。(把端点和孤立点去掉，则可以利用1)的结论证明)
6. 最长路径的最小长度

若图G中顶点的最小度数大于等于k，则G有k长路。即：一张图的最长路径的最小长度k≥δ(G)(证明用最长路径的性质)

1. 补图的连通性

若图G不连通，则图G的补图连通。(证明补图的任意连通:根据u、v顶点的相对位置分两种情况讨论)

1. 一个顶点是割点的充要条件

顶点x是连通图G的割点，iff ∃u,v∈G，使得连接u和v的路径都经过x

1. 一条边是桥的充要条件

边e是G的桥，iff e不包含在G的任一圈中。

1. 若连通图中每个顶点的度为偶数，则G无桥。(每个顶点的度为偶数则必含圈(度数均≥2),由于是连通图，则每个圈必有公共顶点(否则便会出现由不同圈构成的连通支),因此每一条边都在某个圈内,所以G无桥)
2. 连通图的充分条件

设G是n阶简单图(n≥3)，如果∀u,v∈G有d(u)+d(v) ≥n-1

则：G是连通的。(用反证法证明，假设不连通，则从两个连通支取两个顶点，这两个点的度数和≤n-2与题设矛盾)

1. 欧拉图判定的充要条件

图G为欧拉图, iff G的每一结点的度均为偶数。

推论一:

图G含Euler迹, iff G连通且恰有两个奇度顶点。

推论二:

令C(G)表示图G的分图数，若G是Euler图，则∀u∈G，

C(G-u)≤d (u)/2

1. Hamilton图的充分条件

1) Hamilton路径存在的充分条件

设G是p阶简单图(p≥3)，如果∀u,v∈G: d(u)+d(v)≥p-1

那么G中有一条Hamilton路径。

2) Hamilton图存在的充分条件: ∀u,v∈G: d(u)+d(v)≥p

推论: 在简单无向图中,若每一顶点的度数大于等于p/2(p≥3) ,则该图是Hamilton图。

1. Hamilton图的必要条件

若G=<V,E>是Hamilton图,则对V的每个非空真子集S均有:

C(G-S)≤｜S｜

事实上：若G=<V,E>存在Hamilton路径,则对V的每个非空真子集S均有:

C(G-S)≤｜S｜+1

(证明: Hamilton圈任意去一个顶点变成Hamilton路径，证明Hamilton路径的结论，则分去掉的点是否是端点讨论即可)

1. 平面图所有面的次数之和=边数的两倍=度数之和
2. 平面图的欧拉公式：

对任意连通平面图G,若G由p个顶点，q条边，r个面。

则：(对q进行数学归纳从而证明)

推广：若G是无向平面(p,q)图，有C(G)个分图，r个面，

则：p – q + r= C(G) + 1

1. 一个连通图是平面图的必要条件：

若G是一个有p(p≥3)个顶点，q条边的简单连通平面图，且每个面的次数都不小于L(L≥3)。

那么

(证明用平面图的欧拉定理，和每个面的次数之和=2q)

推论：(1) 对阶大于2的简单平面图：q≤ 3p-6 (min(L)=3)

(2)对二部图来说：q≤ 2p-4 (min(L)=4)

1. 在任何简单平面图G中，必存在度不超过5的顶点
2. 库拉托夫斯基(Kuratowski)定理(平面图的充要条件)

图G是平面图 iff 它的每一个子图都不能收缩到和

1. 图G的一个顶点无关集的划分，对应一种(顶点)k-着色
2. 设G是一个图，那么χ(G)≤Δ(G)+1(证明由阶数n进行归纳证明)

χ(G)=Δ(G)+1只有两种图:奇圈图和完全图

1. 二色定理(能用两种颜色着色的充要条件)

设Ｇ是至少有一条边的图，那么：χ(Ｇ)＝2 iff 图Ｇ不含奇数长的初等圈(必要性易证，充分性通过构造一个顶点无关集的二划分，即二部图从而证明)

1. 五色定理

所有平面图都是5-可着色的。

1. p阶图为树的5个等价条件

·G是(p,p-1)无圈图。

·G是(p,p-1)连通图。

·G的任何两点之间存在唯一一条路径。

·G的任一边都是桥。

·G不含圈，但加入任一边后便形成圈。