Problem 1. [10 pt] For $x \in \mathbb{R}^m$ and $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, verify the following inequalities and give examples of a nonzero vector or matrix for which equality is achieved.

(a) $\|x\|_\infty \le \|x\|_2 \le \sqrt{m}\,\|x\|_\infty$;

(b) $\frac{1}{\sqrt{n}}\|A\|_\infty \le \|A\|_2 \le \sqrt{m}\,\|A\|_\infty$;

(c) Show the equivalence between induced matrix norms $\|\cdot\|_p$ and $\|\cdot\|_q$ for $1 \le p < q \le \infty$.

(a): 设 $x = (x_1 \cdots x_m)^T$

则 $\|x\|_\infty = \max\limits_{1\le i\le m} |x_i|$

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^m x_i^2} \ge \sqrt{\max_{1\le i\le m} x_i^2} = \max_{1\le i\le m}|x_i| = \|x\|_\infty$$

另一方面:

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^m x_i^2} \le \sqrt{m\cdot \max_{1\le i\le m} x_i^2} = \sqrt{m}\cdot\|A\|_\infty$$

故 $\|x\|_\infty \le \|x\|_2 \le \sqrt{m}\,\|x\|_\infty$

取等示例: $x = (1, 0 \cdots 0)^T$

(b): $$\|A\|_\infty = \max_{\|x\|_\infty \le 1} \|Ax\|_\infty = \max_{1\le i\le m} \sum_{j=1}^n |A_{ij}|$$

取 $x = \frac{1}{\sqrt{n}}(\mathrm{sign}(a_{i1}) \cdots \mathrm{sign}(a_{in}))^T$.

则 $\|Ax\|_2 \ge \frac{\|A\|_\infty}{\sqrt{n}} \Rightarrow \|A\|_2 \ge \frac{\|A\|_\infty}{\sqrt{n}}$

示例: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$ $\quad \|A\|_\infty = n \quad \|A\|_2 = \sqrt{n}$

右边的不等式:

$$\|Ax\|_2 \le \sqrt{m}\,\|Ax\|_\infty \le \sqrt{m}\,\|A\|_\infty\|x\|_\infty \le \sqrt{m}\,\|A\|_\infty\|x\|_2.$$

同时除 $\|x\|_2$. 得 $\|A\|_2 \le \sqrt{m}\,\|A\|_\infty$.

示例: $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$ $\quad \|A\|_\infty = 1 \quad \|A\|_2 = \sqrt{m}$

(c): $\forall p \quad 1 \le p \le \infty$. (向量).

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{m} x_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \geq \|x\|_\infty$$

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{m} x_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \le m^{\frac{1}{p}} \|x\|_\infty \le m\|x\|_\infty$$

故 $\|\cdot\|_p$ 与 $\|\cdot\|_\infty$ 等价

故 $\|\cdot\|_p$ 之间均等价 $(1 \le p \le \infty)$ (向量).

设: $\exists \alpha, \beta$. s.t $\alpha\|x\|_q \le \|x\|_p \le \beta\|x\|_q$.

$$\|A\|_p = \sup_{\|x\|_p=1} \|Ax\|_p \le \beta \sup_{\|x\|_p=1} \|Ax\|_q \le \beta \|A\|_q \sup_{\|x\|_p=1} \|x\|_q \le \frac{\beta}{\alpha}\|A\|_q$$

类似地 $\|A\|_q \le \frac{\beta}{\alpha}\|A\|_p$.

因此 $\|A\|_p$ & $\|A\|_q$ 等价

Problem 2. [10 pt] For each of the following statement, find an example matrix.

(a) a matrix whose singular values are the same as its eigenvalues;

(b) a matrix whose singular values are the same as the absolute values of its eigenvalues (the matrix has at least one negative eigenvalue);

(c) a matrix whose singular values are not the same as the absolute values of its eigenvalues;

(a): $I_n \in \mathbb{R}^{n \times n}$ $\quad I_n = I_n I_n \cdot I_n^T$ 奇异值分解

奇异值: $\{1, 1 \cdots 1\}$

特征值: $\{1, 1 \cdots 1\}$

(b): $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ 奇异值 $\{1, 2\}$

特征值 $\{1, -2\}$

(c): $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 特征值 $\{1\}$

奇异值: $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ & $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$

Theorem I. Given a matrix $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. The singular values of A are denoted as $\{\sigma_i\}_{i=1}^{\min(m,n)}$ with their corresponding left and right singular vectors being $\{u_i\}_{i=1}^{\min(m,n)}$ and $\{v_i\}_{i=1}^{\min(m,n)}$. For any r with $0 \le r \le \min(m,n)$, the matrix A_r as defined,

$$A_r = \sum_{i=1}^{r} u_i \sigma_i v_i^*,$$

satisfies

$$\|A - A_r\|_{\mathrm{F}} = \inf_{\substack{B\in\mathbb{C}^{m\times n}\\ \mathrm{rank}(B)\le r}} \|A - B\|_{\mathrm{F}}.$$

Problem 3. [20 pt] Prove the Theorem I.

课上已证命题：$\|A - A_r\|_2 = \inf_{\substack{B\in\mathbb{C}^{m\times n}\\ \mathrm{rank}(B)\le r}} \|A-B\|_2 = \sigma_{r+1}$

回到 Frobenius 范数的情形

△引理：$A, B \in \mathbb{R}^{m\times n}$. $\mathrm{rank}(B) = k$. 则 $\sigma_{k+i}(A) \le \sigma_i(A-B)$ $\forall i$.

$i=1$ 已证（即上述的命题）.

对于一般的 i

$$\begin{aligned}
\sigma_i(A-B) &= \sigma_i(A-B) + \sigma_1(B - B_k) \\
&= \sigma_1(A - B - (A-B)_{i-1}) + \sigma_1(B - B_k) \\
&\ge \sigma_1(A - B - (A-B)_{i-1} + B - B_k) \\
&= \sigma_1(A - (A-B)_{i-1} - B_k) \\
&\ge \sigma_1(A - A_{k+i-1}) \\
&= \sigma_{k+i}(A)
\end{aligned}$$

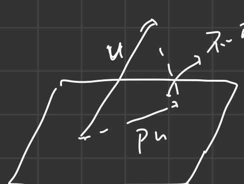
（B_k 类似于 A_k 定义，则 $B_k = B$）

引理得证.

于是 $\|A - A_k\|_F^2 = \sum_{i=k+1}^{r} \sigma_i(A)^2 \le \sum_{i=1}^{r-k} \sigma_i(A-B)^2 \le \|A-B\|_F^2$ □

Problem 4. [15 pt] Let $P \in \mathbb{C}^{m\times m}$ be a nonzero projector. Show that $\|P\|_2 \ge 1$, with equality if and only if P is an orthogonal projector.

$P^2 = P$



不一定垂直

由于 $P \ne 0$，故 $\exists\, v \in \mathbb{C}^m$ s.t. $Pv = v$

$\|Pv\|_2 = \|v\|_2$

$\|P\|_2 = \sup_{\|x\|_2 = 1} \|Px\|_2 \ge \left\|P \frac{v}{\|v\|_2}\right\|_2 = 1$

若 P 正交，则 $P^*=P$. Hermitian 矩阵可对角化，

故特征值与奇异值在相差一个符号的意义下相同

奇异值 $=\sqrt{\sigma(P^*P)}=\sqrt{\sigma(PP)}=\sqrt{\sigma(P)}=|\sigma(P)|$

又 $P\neq 0$ 故 奇异值为 $\{1,0\}$. 故 $\|P\|_2=1$.

若 $\|P\|_2=1$ 下证 P 为正交. 即证 $P^2=P$、$\|P\|_2=1$ 时 P 为对称阵

由 Schur 定理. 任何复矩阵可上三角化.

不妨 P 为上三角矩阵，且 对角元按前面均为0，

后面均为1排列，否则用置换阵左右乘，변换成该形式.

$$P=\left[\begin{array}{ccc:cc} 0 & & *_1 & *_2 & \\ & \ddots & & & \\ & & 0 & & \\ \hdashline & & & 1 & *_3 \\ & & & & \ddots \end{array}\right] \triangleq \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & C \end{bmatrix}$$

$A\in\mathbb{C}^{m_1\times m_1}$

$C\in\mathbb{C}^{m_2\times m_2}$

$m_1+m_2=m$

$$P=P^2=\begin{bmatrix} A^2 & AB \\ 0 & C^2 \end{bmatrix}$$ 则 $A^2=A$ $C^2=C$ $AB=B$.

若 $A\neq 0$.

设 $\max |j-i|=t\neq 0$. 且 A_{ij} $j-i=t$

$A_{ij}\neq 0$.

则 $\forall i=1,\cdots m_1-t$

$$A^2_{i,i+t}=\sum_{k=1}^{m_1}\underline{A_{i,k}\cdot A_{k,i+t}}=\sum_{k=1}^{m_1}0=0.$$

故 $A^2\neq A$ 矛盾

故 $A=0$.

$\triangle$ 对于 C: 设 $C=I+D$

$C^2=C \Rightarrow I^2+2D+D^2=I+D$

$\Rightarrow D^2=-D$

类似 A 的情形可证 (负号不影响矛盾).

$\triangle$ 对于 B. 此时 $A=0$ $C=I$. $AB=B \Rightarrow B=0$.

于是 $P=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$, 为正交投影 $\square$