数学分析

qianyue01

版本: 1.0.1 (2021 年 3 月)

目录

第一章 实数理论

1.1 实数的构造

实数的 Dedekind 构造

假设我们已经熟悉自然数、整数和有理数．有理数域$\mathbb{Q}$满足以下公理(下设$x,y,z\in\mathbb{Q}$):

(F)域公理: $(\mathbb{Q},+,\times)$是一个**域**

(F1)加法交换律: $x+y=y+x$;

(F2)加法结合律: $x+(y+z)=(x+y)+z$;

(F3)加法单位元的存在性: $0+x=x$;

(F4)加法逆元的存在性: $x+(-x)=0$;

(F5)乘法交换律: $x\times y=y\times x$;

(F6)乘法结合律: $x\times(y\times z)=(x\times y)\times z$;

(F7)乘法单位元的存在性: $x\times 1=x$;

(F8)乘法逆元的存在性: $x\times(x^{-1})=1(x\neq 0)$;

(F9)乘法分配律: $x\times(y+z)=x\times y+x\times z$.

(O)序公理: $(\mathbb{Q},+,\times,\leq)$是一个有序域

(O1)传递性: $x\leq y,y\leq z\Rightarrow x\leq z$;

(O2)反对称性: $x\leq y,y\leq x\Rightarrow x=y$;

(O3)完全性: $\forall x,y,x\leq y$或$y\leq x$;

(O4)与加法相容: $x\geq y\Rightarrow x+z\geq y+z$;

(O5)与乘法相容: $x\geq 0,y\geq 0\Rightarrow xy\geq 0$.

Archimedes(阿基米德)性质: $\forall x,y,x>0,\exists n\in\mathbb{N}$，使得 $nx=\underbrace{x+x+\cdots+x}_{n个x}>y$.

定义 1.1.1(戴德金分割)**.** 设X是有理数集$\mathbb{Q}$的子集，定义$X'=\mathbb{Q}\backslash X$, 若: (1)$X,X'$均是$\mathbb{Q}$的非空子集 (2)$\forall x\in X,y\in\mathbb{Q},y<x$, 有$y\in X(\forall x\in X,x'\in X',x<x')$ (3)X中无最大元，则称X为有理数集$\mathbb{Q}$的一个**戴德金分割**．我们记所有$\mathbb{Q}$的戴德金分割组成的集合为$\mathcal{D}$.

定义 1.1.2($\mathcal{D}$上的序结构)**.** 设$X,Y,Z\in\mathcal{D}$, 定义序结构如下:

(1)$X=Y$的定义保持不变;

(2)$X\leq Y$: $X\subseteq Y$.

此序结构满足以下性质:

(O1)传递性: $X\leq Y,Y\leq Z\Rightarrow X\leq Z$;

(O2)反对称性: $X\leq Y,Y\leq X\Rightarrow X=Y$;

(O3)完全性: $\forall X,Y,X\leq Y$或$Y\leq X$;

确界存在原理: 设$\mathcal{X}$是一个由戴德金分割组成的有上界的集合，定义$\mathcal{X}$的上确界:

$$M_0=\bigcup_{X\in\mathcal{X}}X$$

证明. 只需证明下面两个命题.

命题 1. $M_0\in\mathcal{D}$.

证明. (1)$M_0, {M_0}'$**均是**$\mathbb{Q}$**的非空子集. 首先,** $M_0\neq\emptyset$**是显然的; 取**$\mathcal{X}$**的一个上界**M**, 则**$\forall X\in\mathcal{X}, X\subseteq M\Rightarrow\bigcup_{X\in\mathcal{X}}X\in M$**, 现任取**$m\notin M$**, 则**$m\notin\bigcup_{X\in\mathcal{X}}X$**, 这就证明了**$\mathbb{Q}\backslash M_0\neq\emptyset$**.**

(2)$\forall x\in X, y\in\mathbb{Q}, y<x$**, 有**$y\in X$**.** 由于$\forall x\in M_0$, $\exists X\in\mathcal{X}$使得$x\in X$, 故任取$y<x$, 都有$y\in X\Rightarrow y\in M_0$.

(3)M_0**中无最大元.** 若不然, 设$x=\max M_0$. 则$\exists X\in\mathcal{X}$使得$x\in X$, 由于X中无最大元, 故存在$x'\in X$使得$x'>x$, 矛盾.

命题 2. M_0是$\mathcal{X}$的最小上界.

证明. M_0是$\mathcal{X}$的一个上界是显然的.任取$\mathcal{X}$的一个上界M, 对任意的$X\in\mathcal{X}$, 都有$X\leq M$即$X\subseteq M$, 故$\bigcup_{X\in\mathcal{X}}X\subseteq M$. 故$M_0\subseteq M$, 原命题得证.

定义 1.1.3($\mathcal{D}$上的加法结构)**.** 设$X,Y,Z\in\mathcal{D}$, 定义$\mathcal{D}$上的加法

$$X+Y\coloneqq\{x+y|x\in X,y\in Y\}$$

此加法结构满足以下性质:

(封闭性)$X+Y\in\mathcal{D}$;

(F1)加法交换律: $X+Y=Y+X$;

(F2)加法结合律: $X+(Y+Z)=(X+Y)+Z$;

(F3)加法单位元的存在性: 定义

$$\bar{0}\coloneqq\{x\in\mathbb{Q}|x<0\}$$

则$\bar{0}+X=X$;

证明. 由定义得$\bar{0}+X=\{x+y|x,y\in\mathbb{Q},x\in X,y<0\}$. 假设$x\in X$, 要证$x\in\bar{0}+X$, 任取使得$x+a\in X$的正有理数$a$, 则$x+a\in X$, $x=x+a+(-a)\in\bar{0}+X$, 得证. 假设$x\in\bar{0}+X$, 要证$x\in X$, 由加法的定义, 必存在正有理数a使得$x+a\in X,(-a)\in\bar{0}$, 故$x\in X$, 得证. 综上有$\bar{0}+X=X$.

(F4)加法逆元的存在性: 定义

$$-X\coloneqq\{y-x|y\in\bar{0},x\in X'\}$$

进而我们可以定义减法

$$Y-X\coloneqq Y+(-X)=\{y-x|y\in Y,x\in X'\}$$

证明. 只需证明下面两个命题.

命题 1. $-X\in\mathcal{D}$.

命题 2. $X+(-X)=\bar{0}$.

证明. $X+(-X)=\{x+y-x'|x\in X,y\in\bar{0},x'\in X'\}$. 事实上, 对任意$-a\in\bar{0}$, 存在$x\in X, x+\frac{a}{2}\in X', -\frac{a}{2}\in\bar{0}$, 则$-a=x+(-\frac{a}{2})-(x+\frac{a}{2})\in X+(-X)$. 对任意$-a\in X+(-X)$, 存在$x\in X,y\in\bar{0},x'\in X'$使得$-a=x+y-x'$. 由于$y\in\bar{0},y+x-x'\in\bar{0}$, 即$-a\in\bar{0}$. 综上$X+(-X)=\bar{0}$得证.

(O4)序关系与加法相容: $X\geq Y\Rightarrow X+Z\geq Y+Z$**.**

定理 1.1.4(Archimedes 性质). 设$X,Y\in\mathcal{D}$, 且$X>\bar{0}$, 则$\exists n\in N$, 使得$nX=\underbrace{X+X+\cdots+X}_{n个X}>Y$.

证明. 任取$x>0,x\in X$和$y'\in Y'$, 则$\exists n\in N$, 使得$nx>y'$. 故$\forall y\in Y,nx>y$, 又$nx\in nX$, 由此可推出$nX\supset Y$.

定义 1.1.5($\mathcal{D}$上的乘法结构). 设$X,Y,Z\in\mathcal{D}$, 定义$\mathcal{D}$上的乘法

$$X\times Y=\begin{cases}\bar{0}, & X=\bar{0}或Y=\bar{0}\\ \{x\times y|x,y\geq 0,x\in X,y\in Y\}\cup\bar{0}, & X>\bar{0},Y>\bar{0}\\ -(X\times(-Y)), & X>\bar{0},Y<\bar{0}\\ -((-X)\times Y), & X<\bar{0},Y>\bar{0}\\ (-X)\times(-Y), & X<\bar{0},Y<\bar{0}\end{cases}$$

此乘法结构满足以下性质:

(封闭性)$X\times Y\in\mathcal{D}$;

证明. 只需证明$X<\bar{0}\Rightarrow -X>\bar{0}$以及$X>\bar{0}\Rightarrow -X<\bar{0}$, 然后将问题简化为故$X,Y>\bar{0}$时的情形即可. 若$X<\bar{0}$, 意味着存在$-a\in\bar{0}$且$-a\notin X$, 故$0<(-\frac{a}{2})-(-a)\in -X$, 即$-X>\bar{0}$. 由加法的性质得$-(-X)=X$, 故$X>\bar{0}\Rightarrow -X<\bar{0}$.

(F5)乘法交换律: $X\times Y=Y\times X$;

证明. $X,Y>\bar{0}$与$X\times Y=\bar{0}$时结论是显然的. 其它情况可转换为$X,Y>\bar{0}$的情况讨论.

(F6)乘法结合律: $X\times(Y\times Z)=(X\times Y)\times Z$;

证明. X,Y,Z中包括$\bar{0}$时结论是显然的. 对$X,Y,Z>\bar{0}$的情况而言, $X\times(Y\times Z)=(X\times Y)\times Z=\{xyz|x,y,z\geq 0,x\in X,y\in Y,z\in Z\}\cup\bar{0}$. 对其它的情况而言只需证明$\big((-X)\times Y\big)=-(X\times Y)=(X\times(-Y))$(根据乘法的定义即可证明).

(F7)乘法单位元的存在性: 定义

$$\bar{1}:=\{x\in\mathbb{Q}|x<1\}$$

则 $\bar{1}\times X=X$;

证明. $X\geq\bar{0}$时结论不难证明. 当$X<\bar{0}$时, $\bar{1}\times X=-\Big(\bar{1}\times(-X)\Big)=-(-X)=X$.

(F8)乘法逆元的存在性: 定义

$$X^{-1}=\begin{cases}\{x\in\mathbb{Q}|\ \exists x'\in X'使得x<(x')^{-1}\}, & X>\bar{0}\\ -(-X)^{-1}, & X<\bar{0}\end{cases}$$

则$X\times X^{-1}=\bar{1}$;

证明. 先对$X>\bar{0}$的情形证明, 易得此时$X^{-1}>0$. $X\times X^{-1}\{x\times y|x,y\geq 0,x\in X,y\in X^{-1}\}\cup\bar{0}$. 任取有理数$0\leq a<1$, 要证明$a\in X\times X^{-1}$. 取$x'\in X'$使得$\frac{1+a}{2}x'\in X$, 则$\frac{1+a}{2}(x')^{-1}\in X^{-1}$, 进而$a\leq(\frac{1+a}{2})^2x'(x')^{-1}\in X\times X^{-1}\Rightarrow a\in X\times X^{-1}$. 而任取$a\in X\times X^{-1}$, 则$a<1$是显然的. 这就证明了$X\times X^{-1}=\bar{1}$. 再考虑$X<\bar{0}$时的情形, $X\times X^{-1}=X\times(-(-X)^{-1})=(-X)\times(-X)^{-1}=\bar{1}$.

(F9)乘法分配律: $X\times(Y+Z)=X\times Y+X\times Z$;

证明. 当X,Y,Z中含有$\bar{0}$时是显然的. 先对$X,Y,Z>\bar{0}$的情形证明, $X\times(Y+Z)=$

$\{x \times (y+z) | x, y, z \geq 0, x \in X, y \in Y, z \in Z\} \cup \bar{0} = X \times Y + X \times Z$. 进而我们可证明 $Y, Z, Y+Z$的正负性(与$\bar{0}$的大小关系)一致的情况.

下面考虑$Y, Z, Y+Z$的正负性不一致的情况, 我们只需证明$X, Y, Z > \bar{0}$且$Y > Z$时有 $X \times (Y-Z) = X \times Y - X \times Z$(甚至由于二者均为正, 我们只考虑正的部分). 注意到$X \times (Y-Z) = \{x \times (y-z') | x, y-z' \geq 0, x \in X, y \in Y, z' \in Z'\}, X \times Y - X \times Z = \{x_1 \times y - x_2 | x_1, y \geq 0, x_1 \in X, y \in Y, x_2 \in (X \times Z)'\}$. 任取$a \in X \times (Y-Z)$, $a \geq 0$, 设$a = x \times (y - z')(x \geq 0, y-z' \geq 0)$, 不妨取$y_1 = y + \varepsilon$使得$y_1 \in Y$, $z_1 = z' + \varepsilon$. 则必存在$x_1 \geq x, x_1 \in X$使得$x_1 \times z_1 \in (X \times Z)'$. 此时$a \leq x_1 \times y_1 - x_1 \times z_1 \in X \times Y - X \times Z$, 故$a \in X \times Y - X \times Z$. 因此$X \times (Y-Z) \subseteq X \times Y - X \times Z$. 任取$b \in X \times Y - X \times Z$, 设$b = x \times y - x'(x, y \geq 0, x' \in (X \times Z)')$, 令$x' = x \times z'$则显然$z' \in Z'$. 则$b = x \times (y - z') \in X \times (Y-Z)$. 因此$X \times Y - X \times Z \subseteq X \times (Y-Z)$. 综上原等式成立.

(O5)序关系与乘法相容: $X \geq \bar{0}, Y \geq \bar{0} \Rightarrow X \times Y \geq \bar{0}$.

定义 1.1.6(实数). 形如戴德金分割X的对象称为**实数**.

注意我们在定义实数之前, 就已经可以通过单位元$\bar{0}, \bar{1}$在$\mathcal{D}$中定义“自然数”、“整数”和“有理数”了(用记号$x_{\mathcal{D}}$表示与x对应的$\mathcal{D}$中的元素):

$$n_{\mathcal{D}} = \{x \in \mathbb{Q} | x < n\} (n \in \mathbb{Z})$$
$$\frac{p}{q}_{\mathcal{D}} = \{x \in \mathbb{Q} | x < \frac{p}{q}\} (p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}^*)$$

不难证明结论: 若$X \in \mathcal{D}$是一个有理数, 则$X' = \mathbb{Q} \backslash X$中有最小元. 我们还可以用戴德金分割表示一些常见的实数(即使我们还没有证明它的存在性):

$$\sqrt{2}_{\mathcal{D}} = \{x \in \mathbb{Q} | x^2 < 2\}$$
$$\mathrm{e}_{\mathcal{D}} = \left\{x \in \mathbb{Q} \middle| \exists n \in \mathbb{N}, \text{使得} x < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right\}$$

实数的公理化构造

我们在定理 1.1.1 中提到了有理数公理, 但显然满足有理数公理的集合不只有有理数集一个(一个直观的例子就是我们刚刚构造的“实数”$\mathcal{D}$), 但我们却可以证明满足实数公理的集合是唯一的, 即任意满足实数公理的集合F都与$\mathcal{D}$同构. 这里的实数公理就是在用戴德金分割构造实数中所列举的$\mathcal{D}$满足的性质, 包括域公理 F1-F9, 序公理 O1-O5, Archimedes 性质和确界存在原理.

在本节之后的讨论中我们当然会使用公理化构造的实数体系, 但戴德金实数以及下面介绍的基本数列定义的实数仍是研究实数的重要工具.

定理 1.1.7(实数的唯一性). 满足实数公理的集合是唯一的.

证明. 设F是一个满足实数公理的集合, 则加法、乘法单位元$0_F, 1_F \in F$. 以此我们可以定义$2_F, 3_F, \cdots, n_F$以及$(-1)_F \coloneqq -(1_F), \cdots (-n)_F (n \in \mathbb{N})$, 这样我们就在$F$中定义了 “整数”. 由于每个非零整数都有乘法逆元, 考虑集合$\{m \times n^{-1} | m, n \in \mathbb{Z}_F, n \neq 0_F\}$, 我们便在$F$中定义了“有理数”$\mathbb{Q}_F$.

考虑$\mathbb{Q}_F$中所有上界子集的上确界, 建立映射

$$f\colon \left\{\mathbb{Q}_F\text{所有有界子集的上确界}\right\} \to \mathcal{D}, m \mapsto X(X \subset \mathbb{Q}_F, X \in \mathcal{D}, \sup X = m)$$
则f是单射，故我们在F中定义了“实数”$\mathcal{D}_F$.
若F中存在$\mathcal{D}_F$外的一个元素x，不妨设$x > 0_F$(否则考虑$-x$)，则只有以下两种可能:

· x大于所有“实数”. 此时x^{-1}小于所有正“实数”，但大于0_F.

· x小于某个正“实数”. 设$A = \{y \in \mathcal{D}_F | y < x\}$，$B = \{y \in \mathcal{D}_F | y > x\}$，则$\sup A$要么是$A$的最大元，要么是$B$的最小元. 如果是$A$的最大元，则$x - \sup A$小于所有正“实数”但大于$0_F$；如果是$B$的最小元，则$\sup A - x$小于所有的正“实数”但大于$0_F$.

然而，不存在小于所有正“实数”但大于0_F的数，因为这与 Archimedes 性质矛盾. 故不存在这样的x. 因此$F = \mathcal{D}_F$，即F与$\mathcal{D}$同构，进而满足实数公理的集合是唯一的.

定义 1.1.8(实数的公理化构造)**.** 实数集$\mathbb{R}$就是满足以下公理的集合(下设$x, y, z \in \mathbb{R}$):

(F)域公理: $(\mathbb{R},+,\times)$是一个域

(F1)加法交换律: $x + y = y + x$;

(F2)加法结合律: $x + (y + z) = (x + y) + z$;

(F3)加法单位元的存在性: $0 + x = x$;

(F4)加法逆元的存在性: $x + (-x) = 0$;

(F5)乘法交换律: $x \times y = y \times x$;

(F6)乘法结合律: $x \times (y \times z) = (x \times y) \times z$;

(F7)乘法单位元的存在性: $x \times 1 = x$;

(F8)乘法逆元的存在性: $x \times (x^{-1}) = 1$;

(F9)乘法分配律: $x \times (y + z) = x \times y + x \times z$.

(O)序公理: $(\mathbb{R},+,\times,\leq)$是一个有序域

(O1)传递性: $x \leq y, y \leq z \Rightarrow x \leq z$;

(O2)反对称性: $x \leq y, y \leq x \Rightarrow x = y$;

(O3)完全性: $\forall x, y, x \leq y$或$y \leq x$;

(O4)与加法相容: $x \geq y \Rightarrow x + z \geq y + z$;

(O5)与乘法相容: $x \geq 0, y \geq 0 \Rightarrow xy \geq 0$.

Archimedes(阿基米德)公理: $\forall x, y, x > 0, \exists n \in \mathbb{N}$，使得 $nx = \underbrace{x + x + \cdots + x}_{n\text{个}x} > y$.

确界存在原理: 非空有上界的实数集必有上确界.

请注意，在严谨地介绍实数的公理体系之后，我们选择**不加证明地适用直观的初等代数知识和技巧**，因为其证明需要很大的篇幅才能写完，而我们仅关注主线内容. 上述“直观”包括但不限于: 0 元是唯一的，$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$，两个实数间一定有一个有理数，$\inf X \leq \sup X$，等等. 我们接下来简单介绍一下实数的幂运算和对数运算. 事实上，在后面的章节中，我们有非常多的时间处理这些技巧.

定义 1.1.9(算术根运算)**.** 设$\alpha \in \mathbb{R}^+, n \in \mathbb{N}^*$，则存在唯一正实数$x$使得$x^n = \alpha$. 我们记$x = \sqrt[n]{\alpha}$.

证明. 戴德金分割$\{x \in \mathbb{Q} | x^n < \alpha\}$满足$\{x \in \mathbb{Q} | x^n < \alpha\}^n = \{x \in \mathbb{Q} | x < \alpha\}$，故其对应要找的实数$x$．不难证明这样的$x$是唯一的．

定义 1.1.10(以实数为指数的幂)**.** 设$\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$且$\alpha > 1$(对于$\alpha < 1$的情况考虑$\alpha^{-1}$即可)，定义$\alpha^\beta = \sup\limits_{b \in \mathbb{Q}, b < \beta} \{\alpha^b\}$.

定义 1.1.11(对数)**.** 设$\alpha, \gamma \in \mathbb{R}^+$且$\alpha > 1$，则存在唯一实数$\beta$使得$\alpha^\beta = \gamma$．定义$\log_\alpha \gamma = \beta$.

实数的 Cantor 构造

在本节的最后，我们介绍一种与 Dedekind 构造不同的另一种直观的实数构造方法，它将每个实数和一个有理数列的极限相对应.

1.2 实数的完备性公理

实数公理中的确界存在原理与本节提到的定理 1.2.1-1.2.8 等价，它们都称为实数的完备性公理. 我们称一个度量空间是**完备的**，当且仅当它的所有**柯西列**收敛于空间之内(参见定理 1.2.8 柯西收敛准则).

定义(数列的极限). 若数列$\{x_n\}$满足：存在实数a，对$\forall\varepsilon>0,\exists N$，当$n>N$时$|x_n-a|<\varepsilon$，则称$\{x_n\}$**收敛**(**收敛于**$a$)或**极限**是$a$，记作：$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$. 若数列$\{x_n\}$不收敛于任何数，称数列$\{x_n\}$**发散**.

定理 1.2.1(确界存在原理). 非空有上界的实数集必有上确界(最小的上界)，非空有下界的实数集必有下确界(最大的下界).

注记. 确界可以用另一种方式等价定义(以上确界为例)：$\sup A=a\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0,\exists x\in A,$使得$a-\varepsilon<x$. 容易验证这个定义和之前的定义是等价的.

定理 1.2.2(Dedekind 分割定理). 如果两个集合A和B满足：(1)$A,B\neq\emptyset$ (2)$A\cup B=\mathbb{R}$ (3)$\forall x\in A,y\in B,x<y$，且$A$中无最大数，则$B$中有最小数.

证明(1.2.1→1.2.2). 由于集合B存在下确界，且A中无最大数，故$\inf B\notin A$，故$\inf B\in B$. 因此B中有最小数.

证明(1.2.2→1.2.1). 考虑非空有上界的实数集A，并令$B=\mathbb{R}\backslash A$. 则：

· 若A中有最大数，则$\sup A=\max A$.

· 若A中无最大数，则根据戴德金分割定理，B中有最小数. 令$b=\min B$，则b是A的一个上界. 若存在A的另一个上界b'使得$b'<b$，那么$b'\in A$. 由于A中无最大数，那么存在$c\in A$使得$c>b'$，与上界的定义矛盾. 故b是A的最小上界，即$b=\sup A$.

定理 1.2.3(单调有界原理). 单调有界的数列一定收敛.

证明(1.2.1→1.2.3). 设$\{x_n\}$单调增加且有上界，那么$\{x_n\}$有上确界，由极限的定义易得$\lim\limits_{x\to\infty}x_n=\sup\{x_n\}$.

定理 1.2.4(闭区间套定理). 若闭区间列$\{[a_n,b_n]\}$满足：(1)$\forall n\in\mathbb{N}^*,[a_{n+1},b_{n+1}]\subseteq[a_n,b_n]$ (即$a_n\leq a_{n+1}\leq b_{n+1}\leq b_n$) (2)$\lim\limits_{n\to\infty}(b_n-a_n)=0$. 则：$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n$，且$\bigcap_{i=1}^{\infty}[a_i,b_i]=\{\lim\limits_{n\to\infty}a_n\}$.

证明(1.2.3→1.2.4). 由单调有界原理得 $\{a_n\},\{b_n\}$均收敛，因此它们收敛到同一极限. 记$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n=c$. 显然，对$\forall n,a_n\leq c,b_n\geq c$，故$c\in\bigcap_{i=1}^{\infty}[a_i,b_i]$. 假设存在$c'$使得$\forall n,a_n\leq c,b_n\geq c$，由夹逼定理得$c'=c$. 故$\bigcap_{i=1}^{\infty}[a_i,b_i]=\{c\}$.

证明(1.2.4→1.2.1). 设S非空有上界. 取S中的一个元素l_1和它的一个上界h_1，构造闭区间列$\{[l_n,h_n]\}$. 取$m_1=\frac{l_1+h_1}{2}$，且对于每个$k\in\mathbb{N}^*$：

· 若m_k是S中的元素，令$l_{k+1}=m_k,h_{k+1}=h_k$；若m_k是S的上界，令$l_{k+1}=l_k,h_{k+1}=m_k$.

· 令$m_{k+1}=\frac{l_{k+1}+h_{k+1}}{2}$.

则可记$\lim\limits_{n\to\infty} l_k = \lim\limits_{n\to\infty} h_k = c$．容易验证$c$就是$S$的上确界，因为$S$中不存在比$c$大的数，$S$的上界中也不存在比$c$小的数．

注记． 闭区间套定理的两个结论实际上是等价的．若$\bigcap_{i=1}^{\infty}[a_i,b_i] = \{\lim\limits_{n\to\infty} a_n\}$成立，由于$\left|a_n - \lim\limits_{n\to\infty} a_n\right| \le |a_n - b_n|$, 也可得出$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$．

定理 1.2.5(有限覆盖原理)**．** 设$\{E_\lambda\}(\lambda\in\Lambda)$是开区间构成的集合，若闭区间$[a,b]\subseteq\bigcup_{\lambda\in\Lambda}E_\lambda$，那么存在$\Lambda$的一个有限子集$\Lambda'$使得$[a,b]\subseteq\bigcup_{\lambda\in\Lambda'}E_\lambda$．（我们称$\{E_\lambda\}(\lambda\in\Lambda)$为$[a,b]$的一个**开覆盖**，称$\{E_\lambda\}(\lambda\in\Lambda')$为$[a,b]$的一个**有限覆盖**)

证明(1.2.4→1.2.5)． 反之，若$[a,b]$不能被有限覆盖，令$m=\frac{a+b}{2}$，则$[a,m]$或$[m,b]$至少有一个不能被有限覆盖，设这个不能被有限覆盖的闭区间为$[a_1,b_1]$．使用二分法递归地构造$[a_2,b_2],[a_3,b_3],\cdots$，使得每个$[a_n,b_n]$都不能被有限覆盖，且$\lim\limits_{n\to\infty}(b_n-a_n)=0$．故可记$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n=c$．由极限的性质得，$\forall\varepsilon$, $\exists n$, 使得$[a_n,b_n]\subseteq U_0(c,\varepsilon)$，因此 $U_0(c,\varepsilon)$不能被有限覆盖．而又有$\exists i$ 使得$c\in E_i=(d,e)(d<c<e)$，故(d,e)可以被有限覆盖，矛盾．故$[a,b]$可被有限覆盖．

注记． 有限覆盖定理仅适用于闭区间，对开区间不成立．考察区间$(0,1)$和一个覆盖$\{[\frac{1}{n},\frac{2}{n}]\}$，我们无法在其中找到有限覆盖．

定理 1.2.6(聚点原理)**．** 有界无穷集合至少有一个聚点．定义x是集合S的一个**聚点**，当且仅当$\forall\varepsilon>0, U_0(x,\varepsilon)\cap S\neq\emptyset$,或$\forall\varepsilon>0, U_0(x,\varepsilon)\cap S$是无限集(这两种表述是等价的)．

证明(1.2.5→1.2.6)． 设S是一个有界无穷集合，且$S\subseteq[a,b]$．反证: 若S没有聚点，则$[a,b]$中的任何一个数都不是S的聚点．即对$\forall x\in[a,b]$，$\exists\delta_x$，使得$U_0(x,\delta_x)\cap S=\emptyset$，即$\mathrm{card}(U(x,\delta_x)\cap S)=1$．考虑开区间集$\{E_\lambda\}(\lambda\in[a,b])$，其中$E_\lambda=U(x,\delta_x)$，故有$[a,b]\subseteq\bigcup_{\lambda\in[a,b]}E_\lambda\Rightarrow S\subseteq\bigcup_{\lambda\in[a,b]}E_\lambda\Rightarrow S$可被$\{E_\lambda\}(\lambda\in[a,b])$的一个有限子集$\{E_\lambda\}(\lambda\in\Lambda')$ 覆盖(其中Λ'的元素个数是有限个)．注意到$\forall\lambda, \mathrm{card}(E_\lambda\cap S)=1\Rightarrow\bigcup_{\lambda\in\Lambda'}(E_\lambda\cap S)$只有有限个元素．这与$S\subseteq\bigcup_{\lambda\in\Lambda'}E_\lambda$矛盾．故$S$至少存在一个聚点．

证明(1.2.4→1.2.6)． 设S是一个有界无穷集合，且$S\subseteq[a,b]$．令$m=\frac{a+b}{2}$，则$[a,m]\cap S$和$[m,b]\cap S$中至少有一个是无限集．使用二分法递归地构造$[a_2,b_2],[a_3,b_3],\cdots$，使得每个$[a_n,b_n]\cap S$都是无限集，且$\lim\limits_{n\to\infty}(b_n-a_n)=0$．故可记$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n=c$．由极限的性质得，$\forall\varepsilon,\exists n$使得$[a_n,b_n]\subset U(c,\varepsilon)\Rightarrow U_0(c,\varepsilon)\cap S$是无限集$\Rightarrow$ c是S的一个聚点．

定理 1.2.7(Bolzano-Weierstrass)**．** 有界数列一定有收敛子列．

证明(1.2.6→1.2.7)． 设$\{x_n\}$是一个有界数列．若$\{x_n\}$仅由有限个数组成，则显然存在一个常值子列．若$\{x_n\}$由无限个数组成，则它存在一个聚点x．令$\varepsilon_k=1/k$，则: 对$n=1$时，$\exists n_1$使得$\left|x_{n_1}-x\right|<\varepsilon_1$．且对于$\forall k\in\mathbb{N}^*,\exists n_{k+1}>n_k$使得$\left|x_{n_{k+1}}-x\right|<\varepsilon_{k+1}$．(因为满足$|x_n-x|<\varepsilon_{k+1}$的$n$总有无限多个)容易验证$\{x_{n_k}\}$是收敛于$x$的子列．

定理 1.2.8(Cauchy 收敛准则)**．** 数列$\{x_n\}$收敛的充分必要条件是: $\forall\varepsilon>0,\exists N$使得当$\forall n,m>N$时$|x_n-x_m|<\varepsilon$．(我们称满足上述性质的数列为**柯西列**或**基本数列**)

证明(1.2.7→1.2.8)． 必要性是显然的，下面证明充分性．首先，$\{x_n\}$是柯西列蕴含着它有界，故有收敛子列$\{x_{n_k}\}$．记其收敛于x，下面证明$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$．由定义可知对$\forall\varepsilon,\exists K$，当$k>K$时$|x_{n_k}-x|<\frac{\varepsilon}{2}$，且$\exists N>n_{k+1}$，使得$\forall n,m>N$有$|x_n-x_m|<\varepsilon/2$．故对$\forall N'>N$，$\exists k$使得$n_k>N'$,且$|x_{n_k}-x|<\frac{\varepsilon}{2}$．因此对$\forall n>N'$有$|x_n-x|\le|x_n-x_{n_k}|+|x_{n_k}-x|=\varepsilon$．故$\{x_n\}$收敛于$x$．

证明(1.2.4→1.2.8)． 必要性是显然的，下面证明充分性．首先，$\{x_n\}$是柯西列蕴含着它有界．考虑三分法构建闭区间套：取它的一个下界l_1和一个上界h_1，并令$c_1=\frac{2l_1+h_1}{3}, d_1=\frac{l_1+2h_1}{3}$．注意到，区间$[l_1,c_1]$和$[d_1,h_1]$至少有一个只包含$\{x_n\}$中有限个元素．(反之则存在足够大的$n,m$使得$|x_n-x_m|\ge\frac{h_1-l_1}{3}$，与柯西列的定义矛盾)且对于每个$k\in\mathbb{N}^*$:

· 若$[l_k,c_k]$只包含$\{x_n\}$中有限个元素，令$l_{k+1}=c_k, h_{k+1}=h_k$；若$[d_k,h_k]$只包含$\{x_n\}$中有限个元素，令$l_{k+1}=l_k, h_{k+1}=d_k$．

· 令$c_{k+1}=\frac{2l_{k+1}+h_{k+1}}{3}, d_{k+1}=\frac{l_{k+1}+2h_{k+1}}{3}$．

则$\{l_k\}$单调增加有上界，$\{h_k\}$单调减少有下界，故它们收敛．由于$(h_{k+1}-l_{k+1})=\frac{2}{3}(h_k-l_k)\to 0$,故可记$\lim\limits_{n\to\infty} h_k=\lim\limits_{n\to\infty} l_k = x$．容易得到$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$,因为由闭区间套的构造方法可得,对于$\forall\varepsilon>0, \{x_n\}\backslash U(x,\varepsilon)$都只包含有限个元素．

证明(1.2.8→1.2.4)． 对于区间列$\{[a_n,b_n]\}$，有$|a_n-a_m|,|b_n-b_m|\le|a_n-b_n|$，又因为$(b_n-a_n)\to 0$,故$\{a_n\},\{b_n\}$是柯西列，因此$\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\lim\limits_{n\to\infty} b_n$．记$\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\lim\limits_{n\to\infty} b_n=c$．显然，对$\forall n, a_n\le c, b_n\ge c$，故$c\in\bigcap_{i=1}^{\infty}[a_i,b_i]$．假设存在$c'$使得$\forall n, a_n\le c, b_n\ge c$，由夹逼定理得$c'=c$．故$\bigcap_{i=1}^{\infty}[a_i,b_i]=\{c\}$．

实数集是不可数集

定义 1.3.1(可数)**．** 设A是无限集合．称A可数(可列)当且仅当存在$A\to\mathbb{N}^*$的单射，即可把A中的每个元素排成一列，使得每个元素都有一个编号．

定理 1.3.2. 若$A_i(i=1,2,3,\cdots)$是可数集，则$\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i$是可数集．即可数个可数集合的并集是可数集．

证明. 设$A_i=\{a_{i1},a_{i2},a_{i3},\cdots\}$，则考虑这种排序方式：$a_{11},a_{12},a_{21},a_{13},a_{22},a_{31},\cdots$能使得$\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i$中的每一个元素都有一个确定的编号．故$\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i$是可数集．

例. 记$A_i=[i,i+1)\cap\mathbb{Q}$．则$A_0$是可数集，因为存在排列：$0,1/2,1/3,2/3,1/4,3/4,\cdots$．故有理数集$\mathbb{Q}=\bigcup_{i\in\mathbb{Z}}A_i$也是可数集．

定理 1.3.3. 实数集是不可数集．

证明. 反之，若实数集可数，记$[0,1]=\{x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots\}$，并考虑$\bigcup_{i=1}^{\infty}U(x_i,2^{-i})$是$[0,1]$的一个覆盖，由有限覆盖定理，其一定有有限覆盖$\bigcup(x_{n_i},2^{-n_i})$．但注意到无论如何取有限覆盖，这些开区间的“区间长度”的和总小于 1，不可能覆盖$[0,1]$，矛盾．

第二章 数列的极限

2.1 数列极限的性质

定义 2.1.1(数列的极限)**.** 若数列$\{x_n\}$满足：存在实数a，对$\forall\varepsilon>0,\exists N$, 当$n>N$时$|x_n-a|<\varepsilon$，则称$\{x_n\}$**收敛**(**收敛于**$a$)或**极限**是$a$，记作：$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$．若数列$\{x_n\}$不收敛于任何数，称数列$\{x_n\}$**发散**．

注记． (1)这种描述数列极限的方式称为$\varepsilon-N$**语言**．不难看出这里的N是依赖于ε的，因此可以说$N=N(\varepsilon)$．注意我们在解决实际问题时并不需要找到满足最合适的N;

(2)数列的极限在描述一种项数趋于无穷时的趋势，改变数列的有限项并不会影响其敛散性;

(3)$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$的另一种等价表述是：对任意$\varepsilon>0$，$\{x_n\}$中都只有有限项在$U(a,\varepsilon)$外;

(4)下列命题都与“数列$\{a_n\}$收敛于a”等价:

- $\forall\varepsilon>0,\exists N$, 使得当$n>N$时，$|a_n-a|\le\varepsilon$;
- $\forall m\in\mathbb{N}^*,\exists N$, 使得当$n>N$时，$|a_n-a|\le\frac{1}{m}$;
- $\forall\varepsilon>0,\exists N$, 使得当$n>N$时，$|a_n-a|<M\varepsilon$($M$是常数);
- $\forall\varepsilon>0,\exists N$, 使得当$n>N$时，$|a_n-a|\le\varepsilon^k$($k>0$，$k$是常数)．

在解决实际问题时，我们常常考虑证明等价命题成立．

例 2.1.1． 证明：$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+\sin n}{n}=1$．

解答． 根据极限的定义，任取$\varepsilon>0$，要使得$|\frac{n+\sin n}{n}-1|<\varepsilon$，即$|\frac{\sin n}{n}|<\varepsilon$，只需$n>\frac{1}{\varepsilon}$即可．故原命题得证．

例 2.1.2． 设$a>1$，证明：$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$．

解答． 任取$\varepsilon>0$，由$\left|\sqrt[n]{a}-1\right|<\varepsilon\Leftarrow\sqrt[n]{a}<1+\varepsilon\Leftrightarrow a<(1+\varepsilon)^n\Leftrightarrow n>\log_{1+\varepsilon}a$可得$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$．

例 2.1.3． 证明：$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$．

解答． 任取$\varepsilon>0$，由$\sqrt[n]{n}-1<\varepsilon\Leftarrow n<(1+\varepsilon)^n\Leftarrow n<\frac{n(n-1)}{2}\varepsilon^2\Leftarrow\frac{n-1}{2}\varepsilon^2>1\Leftarrow n>1+\frac{1}{\varepsilon^2}$. 故当$n>1+\frac{1}{\varepsilon^2}$时$\sqrt[n]{n}-1<\varepsilon$可得$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$．

定理 2.1.2(收敛数列的性质)**.** 收敛数列的简单性质有以下 4 条:

(1)**唯一性**: 收敛数列的极限是唯一的．

(2)**有界性**: 收敛数列一定有界．

(3)**保号性**: 若$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a<b$，那么存在$N$，使得当$n>N$时$a_n<b$．

(4)**保不等式性**: 设$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$, $\lim\limits_{n\to\infty}b_n$存在．$\forall n,a_n\le b_n\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}a_n\le\lim\limits_{n\to\infty}b_n$．值得注意的是，在保不等式性中并不能写作$\forall n,a_n<b_n\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}a_n<\lim\limits_{n\to\infty}b_n$,一个典型的反例是$a_n=\frac{1}{n},b_n=\frac{2}{n}$.

证明． (1)若不然，设$a,b(a<b)$都是收敛数列$\{x_n\}$的极限，那么取$\varepsilon<\frac{b-a}{2}$，则存在$N_1$使得当$n>N_1$时$|x_n-a|<\varepsilon$，存在$N_2$使得当$n>N_2$时$|x_n-b|<\varepsilon$．取$N=\max\{N_1,N_2\}$，则$n>N$时$|x_n-a|<$

$\varepsilon, |x_n - b| < \varepsilon \Rightarrow |a-b| < 2\varepsilon$，这与$\varepsilon < \frac{b-a}{2}$矛盾．故收敛数列的极限是唯一的．
(2)对于$\forall\varepsilon$, 收敛于a的数列中都只有有限多项在$U(a,\varepsilon)$外部，由此可得其有界．
(3)取$\varepsilon = b-a$，则存在N使$n>N$时有$|x_n - a| < \varepsilon \Rightarrow x_n < a+\varepsilon = b$．
(4)若不然，设$a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n > \lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$．取$\varepsilon < \frac{b-a}{2}$，则存在$N_1$使得当$n > N_1$时$|a_n - a| < \varepsilon$，存在$N_2$使得当$n > N_2$时$|a_n - b| < \varepsilon$．取$N = \max\{N_1, N_2\}$，则$n > N$时$|a_n - a| < \varepsilon, |a_n - b| < \varepsilon \Rightarrow a_n > a - \varepsilon > b + \varepsilon > b_n$．这与$a_n \le b_n$矛盾．故$\lim\limits_{n\to\infty} a_n \le \lim\limits_{n\to\infty} b_n$．

在第一章中我们提出了两个重要的用于判定数列收敛的方法: 单调有界原理和 Cauchy 收敛准则:

定理(单调有界原理)**.** 单调有界的数列一定收敛．

例 2.1.4. 证明数列$a_n = \underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}_{n\text{个}\,2}$收敛，并求其极限．

解答. 只需证明$\{a_n\}$单增且有界．由$a_{n+1} = \sqrt{2+a_n}$可得，若$a_n < 2$则$a_{n+1} < 2$，又$a_1 = \sqrt{2} < 2$，从而用归纳法证明了$\{a_n\}$有上界 2．注意到当$a_n < 2$时$a_{n+1}^2 = 2 + a_n > a_n^2$，从而$\{a_n\}$单调增加，故$\{a_n\}$收敛． 对$a_{n+1} = \sqrt{2+a_n}$令$n \to +\infty$得$a = \sqrt{2+a}$($\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{2+a_n} = \sqrt{2+a}$不难证明)，解得$a = 2$．
注记(两边取极限)**.** 例 2.1.4 提供了一种在已知递推式的情况下计算收敛数列极限的方法，就是在递推式两边分别取极限．事实上，若已知$\{a_n\}$收敛，$\{a_n\}$的任意子列(如$\{a_{n+1}\}, \{a_{2n}\}$)均收敛至相同的极限，具体讨论见本章第 4 节．

例 2.1.5. 设数列$\{a_n\}$满足$a_{n+1} = a_n + \frac{1}{a_n}$，证明: $\{a_n\}$发散．
解答. 若不然，假设$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$，则在递推式两边取极限得$a = a + \frac{1}{a}$，方程无解，故$\{a_n\}$一定发散．

定理(Cauchy 收敛准则)**.** 数列$\{x_n\}$收敛的充分必要条件是：$\forall\varepsilon > 0, \exists N$使得当$\forall n, m > N$时$|x_n - x_m| < \varepsilon$．(我们称满足上述性质的数列为**柯西列**或**基本数列**)

定理 2.1.3(Cauchy 收敛准则)**.** 级数$\sum_{n=1}^{\infty} x_n$收敛的充分必要条件是: $\forall\varepsilon > 0, \exists N$使得对任意的自然数$n > N$和$p \in \mathbb{N}^*$都有$\left|\sum_{n+1}^{n+p} x_n\right| < \varepsilon$．
注记(级数). 用记号$\sum_{n=1}^{\infty} x_n$来表示$\lim\limits_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} x_k$，我们称其为**级数**．注意$\sum_{n=1}^{\infty} x_n$有意义当且仅当其收敛．

例 2.1.6. 证明数列$x_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + (-1)^{n-1}\cdot\frac{1}{n}$收敛．
解答. 由于$|x_{n+p} - x_n| = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} + \cdots + (-1)^{p-1}\frac{1}{n+p} \le \frac{1}{n+1}$，故$\{x_n\}$是 Cauchy 列，即$\{x_n\}$收敛．

定义 2.1.4(无穷大量)**.** 设$\{x_n\}$是数列，给出下列定义:

(1)若$\{x_n\}$满足: 对$\forall M > 0, \exists N$, 使得当$n > N$时有$x_n > M$，则称数列$\{x_n\}$是**正无穷大量**，记作: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$;

(2)若$\{x_n\}$满足：对$\forall M>0,\exists N$，使得当$n>N$时有$x_n<-M$，则称数列$\{x_n\}$是**负无穷大量**，记作：$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=-\infty$；

(3)若$\{x_n\}$满足：对$\forall M>0,\exists N$，使得当$n>N$时有$|x_n|>M$，则称数列$\{x_n\}$是**无穷大量**．

注记． 在此规定本文中的一些表述规范：

· 称$\lim\limits_{n\to\infty}x_n<\infty$或$\{x_n\}$**极限存在**当且仅当$\{x_n\}$收敛；

· 称$\{x_n\}$**广义收敛**，若$\{x_n\}$是收敛的或是确定符号的无穷大量；

·在无特殊说明的前提下，我们一般认为极限均为有限数，而极限点可以是有限数，$+\infty$或$-\infty$．

事实上，后续章节中许多涉及数列或函数收敛的命题都对广义收敛的情况同样适用，为节省篇幅不再详述．

例 2.1.7． 证明：数列$\{\frac{n^2+1}{2n}\}$是无穷大量．

解答． 对任意$M>0$，要使$\frac{n^2+1}{2n}>M$，只需$n^2>3nM$，即$n>3M$即可．故原命题得证．

例 2.1.8．设$x_n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}$，证明：数列$\{x_n\}$是无穷大量．

解答． 当$n>2^k$时，做放缩

$$x_n>1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2^k}>1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\cdots+\underbrace{\frac{1}{2^k}+\cdots+\frac{1}{2^k}}_{2^{k-1}\text{个}}>\frac{k}{2}$$

从而要使$x_n>M$，只需$n>2^{2M}$即可．

定义 2.1.5(无穷小量)．若数列$\{x_n\}$满足$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$，则称$\{x_n\}$是**无穷小量**．

定义 2.1.6(无穷大量和无穷小量的阶)．设$\{x_n\},\{y_n\}$是无穷大量(或无穷小量)，若$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=0$，我们称$\{x_n\}$是$\{y_n\}$的**低阶无穷大量**(或**高阶无穷小量**)，记作$x_n=o(y_n)(n\to\infty)$；若存在正数m,M,N使得当$n>N$时有$m\le\left|\frac{x_n}{y_n}\right|\le M$成立，我们称$\{x_n\}$是$\{y_n\}$的同阶无穷大量(或同阶无穷小量)，记作$x_n=O(y_n)(n\to\infty)$；特别地，若$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=1$，记作$x_n\sim y_n(n\to\infty)$．

注记． o,O和$\sim$记号只在讨论极限时有意义．

命题 2.1.7(无穷大量的比较)．设$k>0,\alpha>1$,成立结论：

$$\log n\ll n^k\ll\alpha^n\ll n!\ll n^n(n\to\infty)$$

证明． $n^k\ll\alpha^n\ll n!$的证明见本章练习题 A2．对于最左侧的不等式，任取$\varepsilon>0$，设$y=n^k$，则$\frac{\log n}{n^k}=\frac{1}{k}\frac{\log y}{y}$．由于指数函数的连续性(见第 3 章)，要证$\frac{\log y}{y}\to0(y\to+\infty)$，只需证明$\frac{y}{e^y}\to0(y\to+\infty)$．最右侧的不等式使用放缩$n!<(\frac{n}{2})^n(n\ge6)$即可证明．

2.2 数列极限的运算

定理 2.2.1(极限的四则运算)**.** 设数列$\{a_n\},\{b_n\}$满足$\lim\limits_{n\to\infty} a_n=a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n=b$, 则以下运算成立:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n\pm b_n)=a\pm b$;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n b_n)=ab$;

(3)若$b\neq 0$,且$\forall n, b_n\neq 0$, 则$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\frac{a}{b}$;

证明. (2)注意到$|a_nb_n-ab|=|a_nb_n-a_nb+a_nb-ab|\le |a_n||b_n-b|+|b||a_n-a|$. 设存在正数$M$使得$|a_n|,|b|<M$, 则任取$\varepsilon>0$, 只需令$|a_n-a|,|b_n-b|<\frac{\varepsilon}{2M}$, 就有$|a_nb_n-ab|<\varepsilon$. 故$\lim\limits_{n\to\infty}(a_nb_n)=ab$.

(3)类似(2)的做法,我们有 $\left|\frac{a_n}{b_n}-\frac{a}{b}\right|=\left|\frac{1}{b_nb}\right||a_nb-b_na|=\left|\frac{1}{b_nb}\right||a_nb-ab+ab-b_na|\le\left|\frac{1}{b_n}\right||a_n-a|+|\frac{a}{b_nb}||b_n-b|$. 由于$\left|\frac{1}{b_n}\right|,|\frac{a}{b_nb}|$均有界, 故$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\frac{a}{b}$.

注记(极限的四则运算只适用于有限项)**.** 极限的四则运算公式(加法及乘法)只保证对有限个数使用时正确. 这里的有限个数要求与n(趋于无穷的变量)无关. 考察下面的示例:

(错误的)$1=\lim\limits_{n\to\infty}(n\cdot\frac{1}{n})=\lim\limits_{n\to\infty}(\underbrace{\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\cdots+\frac{1}{n}}_{n\text{个}})=\underbrace{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}+\cdots+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}}_{n\text{个}}=n\cdot 0=0.$

(正确的, 将在后续章节详细介绍)$1=\lim\limits_{n\to\infty}(n\cdot\frac{1}{n})=\lim\limits_{n\to\infty}(\underbrace{\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\cdots+\frac{1}{n}}_{n\text{个}})=n\cdot o(1)=o(n).$

注记(预处理)**.** 在计算极限时, 我们常常先不考虑极限是否存在而是直接运用运算法则, 这种操作也称为**预处理**, 能使极限的计算更加便捷. 原理是对极限运算法则的运用并不改变极限的存在性.

注记(危险! 不定型极限)**.** 极限的四则运算法则可以扩展至广义收敛的情形, 例如设$m>0$, 则成立$m\cdot+\infty=+\infty$, $m^{+\infty}=+\infty$. 然而, 我们无法直接计算$+\infty+(-\infty), 0\cdot\infty, \frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 1^{\infty}, \infty^0$等类型的**不定型极限**. 请注意: 在处理不定型极限时, 预处理操作可能改变极限的存在性和极限的值.

例 2.2.1. 证明: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n^2+2n+1}{n^2-3n-6}=3$.

解答. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n^2+2n+1}{n^2-3n-6}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}{1-\frac{3}{n}-\frac{6}{n^2}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3}{1}=3.$

定理 2.2.2(夹逼定理)**.** 若数列$\{x_n\}$满足: $a_n\le x_n\le b_n$, 且$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n=x$, 则$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x$.

证明. 根据极限的定义即可证明.

注记. 不难看出这里只需要存在N使对$\forall n>N$都有$a_n\le x_n\le b_n$成立即可.

例 2.2.2. 若数列$\{x_n\},\{y_n\}$满足: 存在常数c使得$x_n\le c\le y_n$, 且$\lim\limits_{n\to\infty}(y_n-x_n)=0$, 则$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}y_n=c$.

例 2.2.3. 计算: $\lim\limits_{n\to\infty}(a_1^n+a_2^n+\cdots+a_k^n)^{\frac{1}{n}}$. $(a_1,a_2,\cdots,a_k>0)$

解答. 设$a_M=\max\{a_1,a_2,\cdots a_k\}$. 对数列进行放缩得$a_M\le(a_1^n+a_2^n+\cdots+a_k^n)^{\frac{1}{n}}\le\sqrt[n]{ka_M^n}$, 由于$\lim\limits_{n\to\infty}a_M=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{ka_M^n}=a_M$, 故有$\lim\limits_{n\to\infty}(a_1^n+a_2^n+\cdots+a_k^n)^{\frac{1}{n}}=a_M$.

定理 2.2.4(Cauchy 命题). 若数列$\{a_n\}$满足$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$, 则$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=a$. (其中$a$可以是有限数, $+\infty$或$-\infty$, 下同)

证明. 若a是有限数, 则任取$\varepsilon>0$,. 设$n>N$时,$|a_n-a|<\frac{\varepsilon}{2}$以及$M=|a_1-a|+\cdots+|a_N-a|$, 则$\left|\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}-a\right|<\varepsilon\Leftarrow\frac{|a_1-a|+|a_2-a|+\cdots+|a_n-a|}{n}<\varepsilon\Leftarrow\frac{M+\frac{(n-N)\varepsilon}{2}}{n}<\varepsilon\Leftarrow n>\frac{2M}{\varepsilon}-N$, 故原命题得证. 若$a=+\infty$, 则任取$M>0$, 设$n>N$时有$a_n>2M$并记$M'=a_1+\cdots+a_n$, 故$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}>M\Leftarrow\frac{M'+2M(n-N)}{n}>M\Leftarrow n>2N-\frac{M'}{M}$, 从而$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=+\infty$得证. 对$a=-\infty$的情况证明类似.

注记. Cauchy 命题的逆定理并不成立. 考察$a_n=(-1)^n$, 则$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=0$存在但$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$不存在.

定理 2.2.5(Cauchy 命题). 若正数列$\{a_n\}$满足$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$, 则$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}=a$.

证明. 若$a=0$, 由$\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}<\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$和夹逼定理立即得到$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}=0$. 若$a>0$, 对任意的$\varepsilon>0$, 存在$N$使得$n>N$时有$a_n\in(a-\varepsilon,a+\varepsilon)$, 即$\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_N(a-\varepsilon)^{n-N}}\le\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}\le\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$. 易得右侧极限为$a$, 且由于$(a-\varepsilon)\le\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_N(a-\varepsilon)^{n-N}}\le\frac{a_1+a_2+\cdots+a_N+(n-N)(a-\varepsilon)}{n}$可得$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_N(a-\varepsilon)^{n-N}}=a-\varepsilon$. 故$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}=a$.

注记. 本命题也可以用对数函数的连续性证明.

在定理 2.2.3 和 2.2.4 中, 分别令$x_n=\sum_{i=1}^n a_i$和$x_n=\prod_{i=1}^n a_i$, 便可得到下面的结论:

命题 2.2.6(Cauchy 命题的重要推论) 设$\{a_n\}$是数列, 则有:

(1)若$\lim\limits_{n\to\infty}(a_{n+1}-a_n)=a$, 则$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=a$.

(2)若$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=a$, 则$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=a$.

定理 2.2.7($\frac{0}{0}$型的 Stolz 定理). 设数列$\{a_n\}$和$\{b_n\}$满足$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n=0$, $\{a_n\}$严格单调减少, 以及$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{b_{n+1}-b_n}{a_{n+1}-a_n}=l$. 则$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}=l$.

证明. 任取$\varepsilon>0$, 存在N, 使得$n>N$时有$\frac{b_{n+1}-b_n}{a_{n+1}-a_n}\in(l-\varepsilon,l+\varepsilon)$. 这就有$(a_{n+1}-a_n)(l-\varepsilon)<b_{n+1}-b_n<(a_{n+1}-a_n)(l+\varepsilon)$. 对任意的$n>N$, 再任取$m>n$, 则由于$b_m=b_n+(b_{n+1}-b_n)+\cdots+(b_m-b_{m-1})$, 累加得到$(a_m-a_n)(l-\varepsilon)<b_m-b_n<(a_m-a_n)(l+\varepsilon)$, 即$l-\varepsilon<\frac{b_m-b_n}{a_m-a_n}<l+\varepsilon$. 令$m\to\infty$,则不等式左右两侧同时收敛到$l$, 故$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}=l$.

定理 2.2.8($\frac{*}{\infty}$型的 Stolz 定理). 设数列$\{a_n\}$和$\{b_n\}$满足$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=+\infty$, 且$\{a_n\}$单调增加, 以及$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{b_{n+1}-b_n}{a_{n+1}-a_n}=l$. 则$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}=l$.

证明. 任取$\varepsilon>0$, 存在N, 使得$n>N$时有$\frac{b_{n+1}-b_n}{a_{n+1}-a_n}\in(l-\varepsilon,l+\varepsilon)$. 这就有$(a_{n+1}-a_n)(l-\varepsilon)<b_{n+1}-b_n<(a_{n+1}-a_n)(l+\varepsilon)$. 由于$b_n=b_N+(b_{N+1}-b_N)+\cdots+(b_n-b_{n-1})$, 累加得到$b_N+(a_n-a_N)(l-\varepsilon)<b_n<b_N+(a_n-a_N)(l+\varepsilon)$, 即$\frac{b_N+(a_n-a_N)(l-\varepsilon)}{a_n}<\frac{b_n}{a_n}<\frac{b_N+(a_n-a_N)(l+\varepsilon)}{a_n}$. 令$n\to\infty$, 则不等式左右两侧同时收敛到$l$, 故$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}=l$.

注记. 不难看出定理 2.2.5 和定理 2.2.6 其实是等价的(取倒数即可). 定理 2.2.6 主要用来解决$\frac{\infty}{\infty}$型问题, 因此又称$\frac{\infty}{\infty}$**型的** Stolz **定理**.

例 2.2.4. 设$p>-1$, 证明: $\sum_{k=1}^{n}k^p\sim\frac{n^{p+1}}{p+1}(n\to\infty)$.
解答. 使用 Stolz 定理, 成立

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(p+1)\sum_{k=1}^{n}k^p}{n^{p+1}}\overset{\text{stolz}}{=}\lim_{n\to\infty}\frac{(p+1)(n+1)^p}{(n+1)^{p+1}-n^{p+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(p+1)(n^p+pn^{p-1}+\cdots+1)}{(n^{p+1}+(p+1)n^p+\cdots+1)-n^{p+1}}=1$$

从而原命题得证.

定理 2.2.9(Toeplitz 定理)**.** 设数列$\{a_{nk}\}(k\le n)$满足存在实数a使得$\lim\limits_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}a_{nk}=a$, 且存在常数$C>0$使得$\sum_{k=1}^{n}|a_{nk}|<C$, 数列$\{b_n\}$满足$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=b$, 则有$\lim\limits_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}a_{nk}b_k=ab$.
证明. 令$b'_n=b_n-b$, 则$\lim\limits_{n\to\infty}b'_n=0$. 考虑到$\sum_{k=1}^{n}a_{nk}b_k=\sum_{k=1}^{n}a_{nk}b'_k+\sum_{k=1}^{n}a_{nk}b$, 故只需证明$\lim\limits_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}a_{nk}b'_k=0$即可. 由于$\sum_{k=1}^{n}|a_{nk}|<C$, 故$\sum_{k=1}^{n}a_{nk}b'_k\le\sum_{k=1}^{n}Cb'_k$, 由此得到原命题成立.
注记. 我们可以用 Toeplitz 定理推出 Stolz 定理. 对于$\frac{*}{\infty}$型的 Stolz 定理, 只需令$x_{nk}=\frac{a_{k+1}-a_k}{a_{n+1}-a_1}$, 则$\sum_{k=1}^{n}x_{nk}=1$, 同时令$y_k=\frac{b_{k+1}-b_k}{a_{k+1}-a_k}$即可得出$\sum_{k=1}^{n}x_{nk}y_k=\frac{b_{n+1}-b_1}{a_{n+1}-a_1}$, 故$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}x_{nk}y_k=\lim\limits_{n\to\infty}(1\cdot y_n)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{b_{n+1}-b_n}{a_{n+1}-a_n}$.

2.3 自然对数的底 e 和欧拉常数γ

命题 2.3.1． 数列$x_n=(1+\frac{1}{n})^n$严格单调增加且有界，从而它收敛．

证明． 由于$\frac{x_{n+1}}{x_n}=\frac{(\frac{n+2}{n+1})^{n+1}}{(\frac{n+1}{n})^n}=\frac{(n+2)^{n+1}n^n}{(n+1)^{2n+1}}=\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)^n\frac{n+2}{n+1}>\left(1-\frac{n}{(n+1)^2}\right)\frac{n+2}{n+1}>(1-\frac{1}{n+1})\frac{n+2}{n+1}>1$(运用 Bernoulli 不等式)，可证明$\{x_n\}$严格单调增加．

要证明其有界，引入一个数列$y_n=(1+\frac{1}{n})^{n+1}$，则$\frac{y_n}{y_{n+1}}=\frac{(\frac{n+1}{n})^{n+1}}{(\frac{n+2}{n+1})^{n+2}}=(1+\frac{1}{n^2+2n})^{n+1}\frac{n+1}{n+2}>(1+\frac{n+1}{n^2+2n})\frac{n+1}{n+2}>1$(运用 Bernoulli 不等式)，可证明$\{y_n\}$严格单调减少．由$\{x_n\}$以每一个$y_n$为上界，$\{y_n\}$以每一个$x_n$为下界，故$\{x_n\},\{y_n\}$都有界，从而收敛．

事实上，在定理 2.3.1 的证明中，令$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x$, $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=y$，则有

$$y=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\cdot\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^1=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=x$$

由此得$\{x_n\}$和$\{y_n\}$收敛至同一极限．当然，

定义 2.3.2(自然对数的底e)**．** 定义$\mathrm{e}\coloneqq\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n=\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{n+1}{n})^n$．从而$\mathrm{e}=2.718\ 281\ 828\cdots$．

例 2.3.1． 计算下列极限:

(1)$\lim\limits_{n\to\infty}(1-\frac{1}{n})^n$ (2)$\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{k}{n})^n(k>0)$ (3)$\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2})^n$ (4)$\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n^2})^n$

解答． (1)$\lim\limits_{n\to\infty}(1-\frac{1}{n})^n=\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{n-1}{n})^n=\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n-1})^{-n}=\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n-1})^{-(n-1)}(1+\frac{1}{n-1})=\frac{1}{\mathrm{e}}$.

(2)$\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{k}{n})^n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{(\frac{n}{k})}\right)^{\frac{n}{k}\cdot k}=\mathrm{e}^k$.

(3)由$(1+\frac{1}{n})^n<(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2})^n<(1+\frac{1}{n-1})^n$可得$\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2})^n=\mathrm{e}$.

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n^2})^n=\lim\limits_{n\to\infty}\left((1+\frac{1}{n^2})^{n^2}\right)^{\frac{1}{n}}=\mathrm{e}^0=1$.

命题 2.3.3． $\frac{(n+1)^n}{\mathrm{e}^n}<n!<\frac{(n+1)^{n+1}}{\mathrm{e}^n}$.

证明． 考虑数学归纳法．当$n=1$时，显然有$\frac{2}{\mathrm{e}}<1<\frac{4}{\mathrm{e}}$．若不等式对$n$成立，即$\frac{(n+1)^n}{\mathrm{e}^n}<n!<\frac{(n+1)^{n+1}}{\mathrm{e}^n}$，则对于左侧不等式有$\frac{(n+1)^n}{\mathrm{e}^n}<n!\Rightarrow(n+1)^{n+1}<\mathrm{e}^n(n+1)!\Rightarrow(n+2)^{n+1}=(n+1)^{n+1}(\frac{n+2}{n+1})^{n+1}<e^{n+1}(n+1)!\Rightarrow\frac{(n+2)^{n+1}}{\mathrm{e}^{n+1}}<(n+1)!$．对于右侧不等式有$n!<\frac{(n+1)^{n+1}}{\mathrm{e}^n}\Rightarrow(n+1)!\,e^n<(n+1)^{n+2}\Rightarrow(n+1)!\,e^{n+1}<(n+1)^{n+2}(\frac{n+2}{n+1})^{n+2}=(n+2)^{n+2}\Rightarrow(n+1)!<\frac{(n+2)^{n+2}}{\mathrm{e}^{n+1}}$.

注记． 此命题揭示了自然对数的底e和阶乘$n!$的关系．由此为出发点我们可以得到$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt[n]{n!}}=\mathrm{e}$．更精确地，我们有 **Stirling(斯特林)公式**: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n!}{\sqrt{2\pi n}(\frac{n}{e})^n}=1$，将在后续章节给出证明．

命题 2.3.4(e的等价定义)**．** $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}=\mathrm{e}$.

证明． 首先，$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}<1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots=3$，故其收敛．对于正整数$n$，将$(1+\frac{1}{n})^n$用二项式展开，得到$(1+\frac{1}{n})^n=1+\sum_{k=1}^{n}\mathrm{C}_n^k\frac{1}{n^k}=1+1+\frac{1}{2!}(1-\frac{1}{n})+\frac{1}{3!}(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})+\cdots+\frac{1}{n!}(1-\frac{1}{n})\cdots(1-\frac{n-1}{n})<1+1+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}$，故$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\geq\mathrm{e}$．而又注意到，任取正整数$m$使得$n>m$，我们有$\mathrm{e}>(1+\frac{1}{n})^n=1+1+\frac{1}{2!}(1-\frac{1}{n})+\frac{1}{3!}(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})+\cdots+\frac{1}{n!}(1-\frac{1}{n})\cdots(1-\frac{n-1}{n})>1+1+\frac{1}{2!}(1-\frac{1}{n})+\frac{1}{3!}(1-$

$\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})+\cdots+\frac{1}{m!}(1-\frac{1}{n})\cdots(1-\frac{m-1}{n})$，进而令$n\to\infty$则有$\mathrm{e}\geq 1+1+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{m!}$. 由于对任意的$m$上式均成立，故有$\mathrm{e}\geq\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}$. 综上原命题得证.

命题 2.3.5. 设$\mathrm{e}=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}+\varepsilon_n$，则对任意的$n\in\mathbb{N}^*$成立$\frac{1}{(n+1)!}<\varepsilon_n<\frac{1}{n!n}$.

证明. 左侧不等式是显然的，下面证明右侧的不等式. 对于任意正整数$m>n$，成立

$$\frac{1}{(n+1)!}+\frac{1}{(n+2)!}+\cdots+\frac{1}{m!}<\frac{1}{(n+1)!}\left(1+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\cdots\right)=\frac{1}{(n+1)!}\frac{1}{1-\frac{1}{n+2}}$$
$$=\frac{n+2}{(n+1)!\,(n+1)}<\frac{1}{n!\,n}$$

令$m\to\infty$，即得到$\varepsilon_n\leq\frac{n+2}{(n+1)!(n+1)}<\frac{1}{n!n}$.

定理 2.3.6. 自然对数的底是无理数.

证明. 若不然，设存在$p,q\in\mathbb{N}^*$使得$\mathrm{e}=\frac{p}{q}$，则$q\mathrm{e}=p$为正整数. 任取$n>q$，则$n!\,\mathrm{e}=n!+n!+\frac{n!}{2}+\cdots+1+n!\,(\frac{1}{(n+1)!}+\frac{1}{(n+2)!}+\cdots)$ 也是正整数，从而 $n!\left(\frac{1}{(n+1)!}+\frac{1}{(n+2)!}+\cdots\right)=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}$是正整数. 然而易得等式右边$<\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots=1$，与其是正整数矛盾. 故e是无理数.

命题 2.3.7. 令$c_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\log n$，则$\{c_n\}$收敛.

证明. 借助一个常用的不等式，它可以由不等式$(1+\frac{1}{n})^n<\mathrm{e}<(1+\frac{1}{n})^{n+1}$通过取对数得到:

$$\frac{1}{n+1}<\log\left(1+\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{n}$$

因此，有$c_{n+1}-c_n=\frac{1}{n+1}-\log(1+\frac{1}{n})<0$，故$\{c_n\}$单调减少. 又$\log n<1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}$得$c_n>0$，故$\{c_n\}$收敛.

注记. 从本命题也可看出调和级数$\{c_n\}$是发散的，在练习题中我们有更详细的讨论.

定义 2.3.8(欧拉常数γ). 定义欧拉常数$\gamma\coloneqq\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\log n)$. 从而$\gamma=0.577\,215\cdots$.

例 2.3.2. 计算下列极限:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}(1-\frac{1}{2}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n})$;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{np})(p\in\mathbb{N}^*)$.

解答. 设$c_n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n},\gamma_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\log n$.

(1)当n是偶数时，则有$1-\frac{1}{2}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}=c_n-c_{\frac{n}{2}}=\log n-\log\frac{n}{2}+\gamma_n-\gamma_{\frac{n}{2}}$. 由$\{\gamma_n\}$收敛得$n$是偶数时$\lim\limits_{n\to\infty}(1-\frac{1}{2}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n})=\log 2$. n是奇数时，由$\lim\limits_{n\to\infty}(1-\frac{1}{2}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n})=\lim\limits_{n\to\infty}(1-\frac{1}{2}+\cdots-\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n})=\log 2-0=\log 2$. 故$\lim\limits_{n\to\infty}(1-\frac{1}{2}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n})=\log 2$.

(2)由$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{np}=c_{pn}-c_n=\log p+\gamma_{pn}-\gamma_n$可得$\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{np})=\log p$.

2.4 数列的上极限和下极限

在实数系的完备性公理中我们提到了聚点和极限点的概念. 在研究极限点之前, 先给出一个引理:

引理 2.4.1(单调子列). 任何数列必有单调子列.

证明. 给定无穷数列$\{x_n\}$, 构造集合$G=\{n\in\mathbb{N}^*|\forall i>n, x_i\le x_n\}$, 下面构造一个单调子列$\{x_{n_k}\}$:

若G中只有有限个元素, 设其最大元素为n_1, 则存在$n_2>n_1$使得$x_{n_2}>x_{n_1}$, 而由于$n_2\notin G$, 故存在$n_3>n_2$使得$x_{n_3}>x_{n_2}$, 迭代可得数列$\{n_k\}$使得$\forall k\in\mathbb{N}^*, x_{n_{k+1}}>x_{n_k}$. 故$\{x_{n_k}\}$是(严格)单调增加的.

若G中有无穷多个元素$n_1,n_2,\cdots,n_k,\cdots$, 则$\forall k\in\mathbb{N}^*, x_{n_k}\ge x_{n_{k+1}}$. 故$\{x_{n_k}\}$是单调减少的.

由于单调数列一定广义收敛, 我们立即得到

定理 2.4.2(收敛子列的存在性). 任何数列都有广义收敛的子列. 我们称广义收敛子列的极限为**极限点**.

注记. 实数x是数列$\{x_n\}$的极限点$\Leftrightarrow x$是$\{x_n\}$的聚点.

定理 2.4.3(收敛子列的存在性). 若数列不是无穷大量, 则一定存在收敛子列; 若数列无界, 则一定存在确定符号的无穷大量子列.

证明. 设$\{x_n\}$不是无穷大量, 则一定存在$M>0$使得$\{x_n\}$中有无穷多项绝对值不超过M的项. 这就找到了一个有界子列. 由致密性定理可得$\{x_n\}$一定存在收敛子列.

设$\{x_n\}$无界, 则去除$\{x_n\}$中的任意有限项得到的子列仍然无界. 对$M_1=1$, 存在n_1使得$|x_{n_1}|>1$; 对$M_2=2$, 存在$n_2>n_1$使得$|x_{n_2}|>2$, ..., 对$M_k=k$, 存在$n_k>n_{k-1}$使得$|x_{n_k}|>k$, 继续迭代下去, 就得到了无穷大量子列$\{x_{n_k}\}$. 由于在$\{x_{n_k}\}$中要么有无穷多个正项, 要么有无穷多个负项, 故$\{x_n\}$一定存在确定符号的无穷大量子列.

性质 2.4.4(极限点的唯一性). 广义收敛的数列有唯一极限点, 且所有数列收敛至同一极限; 否则数列的极限点不唯一.

证明. 前半句的结论不难证明. 不妨设存在实数x使得$\lim\limits_{n\to\infty}\{x_n\}=x$. 则任取$\varepsilon>0$, 有$n>N$时$|x_n-x|<\varepsilon$. 对于$\{x_n\}$的子列$\{x_{n_k}\}$, 则有$n_k\ge k$, 故当$k>N$时有$|x_n-x|<\varepsilon$, 原命题得证.

下面证明后半句. 设数列$\{x_n\}$非广义收敛, 若其有一个极限点x是有限数, 给出命题:

命题 1. 存在$\delta>0$, 使得$\{x_n\}$有无限多个数在$U(x,\delta)$外.

证明. 若不然, 则可证明$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x$: 取$\delta_1=1$, 由于$\big(\{x_n\}\cap U(x,\delta)\big)'$元素个数是有限的, 故存在$N_1$使得$n>N_1$时有$x_n\in U(x,\delta_1)$; 同理, 对任意正整数$k$, 令 $\delta_k=1/k$, 则存在N_k使得$n>N_k$时有$x_n\in U(x,\delta_k)$. 这就证明了$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x$, 从而与$x_n$发散矛盾.

此时取$\{x_n\}$在$U(x,\delta)$外的全部元素构成的子列, 则它没有收敛于x的子列, 故一定有异于x的极限点.

若x不是有限数，不妨设$x=+\infty$，则我们有类似的命题:

命题 2 存在$M>0$，使得$\{x_n\}$有无限多个数在$(M,+\infty)$外.

从而也可证明$\{x_n\}$有一个异于x的极限点．综上原性质得证.

定理 2.4.5(最值极限点的存在性)．任何数列都有最大和最小极限点.

证明．取有极限点的数列$\{x_n\}$，记$h_n=\sup\{x_n,x_{n+1},\cdots\}$，下面证明最大极限点就是$\inf\{h_n\}$.

注意到$\{h_n\}$是单调下降的．如果$h_1=+\infty$，即$\{x_n\}$无上界，可得对任意的n都有$h_n=+\infty$(因为去掉任意有限项后数列依然无上界)，从而$\inf\{h_n\}=+\infty$为最大极限点．如果h_1是有限数，记$\inf\{h_n\}=\lim\limits_{n\to\infty}h_n=h$，如果$h=-\infty$，由于$x_n\le h_n$，故$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=-\infty$为唯一极限点.

如果h是有限数，首先找到一个子列以h为极限: 对$\varepsilon_1=1$，存在n_1使得$h+1>h_{n_1}\ge h$，且存在$k_1>n_1$使得$h+1>x_{k_1}\ge h$．对$\varepsilon_2=\frac{1}{2}$，存在$n_2>k_1$使得$h+\frac{1}{2}>h_{n_2}\ge h$，且存在$k_2>n_2$使得$h+\frac{1}{2}>x_{k_2}\ge h$．$\cdots$对$\varepsilon_m=1/m$，存在$n_m>k_{m-1}$使得$h+\frac{1}{m}>h_{n_m}\ge h$，以及$k_m>n_m$使得$h+\frac{1}{m}>x_{k_m}\ge h$. 这样我们就得到单调减少且趋于$h$的数列$\{x_{k_m}\}_{m=1}^{\infty}$．由于$x_n\le h_n$，因此对$\{x_n\}$的任意子列$\{x_{n_k}\}$有$\lim\limits_{k\to\infty}x_{n_k}\le\lim\limits_{k\to\infty}h_{n_k}=h$，因此$h$就是最大的极限点.

定义 2.4.6(上极限与下极限)．定义**上极限**是数列的最大极限点，**下极限**是数列的最小极限点．设数列$\{x_n\}$的上极限是h，下极限是l，记作$\lim\limits_{n\to\infty}\sup x_n=h$或$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}x_n=h$，$\lim\limits_{n\to\infty}\inf x_n=l$或$\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}x_n=l$.

注记．关于数列的上下极限有两个简单的性质:

(1)$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}x_n\ge\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}x_n$;

(2)$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}x_n=\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}x_n\Leftrightarrow\{x_n\}$广义收敛．($\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}x_n\neq\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}x_n\Leftrightarrow\{x_n\}$不广义收敛)

例 2.4.1．求下列数列的上极限和下极限:

(1)$x_n=n^{(-1)^n}$ (2)$x_n=\sin\frac{n\pi}{4}$ (3)$x_n=(-1)^n+\frac{1}{n}$

解答．(1)上极限是$+\infty$，下极限是$-\infty$; (2)上极限是1，下极限是-1; (3)上极限是1，下极限是-1.

定理 2.4.7(上下极限的等价定义)．给定数列$\{x_n\}$和实数h，则以下三个命题等价:

(1)$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}x_n=h$;

(2)定义$h_n=\{x_n,x_{n+1},\cdots\}$，则$h=\inf\{h_n\}=\inf\limits_n\sup\{x_n,x_{n+1},\cdots\}$;

(3)$\forall\varepsilon>0$，$\exists N$，$n>N$时有$x_n<h+\varepsilon$; 且$\forall K$，$\exists n>K$使得$x_n>h-\varepsilon$.

证明．(1)和(2)的等价性已经在定理 2.4.5 证明．只需证明它们和(3)的等价性．命题(3)可以表述为: $\forall\varepsilon>0$，$\{x_n\}$中只有有限多项不小于$h+\varepsilon$，且有无限多项大于$h-\varepsilon$.

假设$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}x_n=h$，要证明(3)成立．首先若存在$\varepsilon_0$使得$\{x_n\}$中有无限多项不小于$h+\varepsilon_0$，则这无限多项构成的子列的所有极限点均不小于$h+\varepsilon_0$，与$h$是$\{x_n\}$的上极限矛盾．若$\{x_n\}$中仅有有限多项大于$h-\varepsilon_0$，显然与存在收敛至$h$的子列矛盾．故(3)成立.

假设(3)成立，要证明$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}x_n=h$．首先说明存在收敛于$h$的子列: 对$\varepsilon_1=1$，存在$N_1$使得$n>N_1$时有$x_n<h+1$，进而存在$k_1>N_1$使得$x_{k_1}>h-1$，即$x_{k_1}\in U(h,1)$; 同理，对$\varepsilon_2=1/2$，存在

$N_2 > k_1$使得$n > N_2$时有$x_n < h + \frac{1}{2}$，进而存在$k_2 > N_2$使得$x_{k_2} > h - \frac{1}{2}$，即$x_{k_1} \in U(h, \frac{1}{2})$；$\cdots$对$\varepsilon_m = 1/m$，存在$N_m > k_{m-1}$使得$n > N_m$时有$x_n < h + \frac{1}{m}$，进而存在$k_m > N_m$使得$x_{k_m} > h - \frac{1}{m}$，即$x_{k_1} \in U(h, \frac{1}{m})$．这样$\{x_{k_m}\}_{m=1}^{\infty}$就是一个收敛于$h$的数列．由于$\{x_n\}$中只有有限多项不小于$h + \varepsilon$，意味着不存在必$h$更大的极限点，即$\overline{\lim\limits_{\mathrm{n} \to \infty}} x_n = h$．

注记．关于命题(3)我们有结论:

(1)当h是$+\infty$或$-\infty$时也有类似于命题(3)的等价命题．例如，当$h = +\infty$时，命题(3)可表述为$\{x_n\}$无上界；当$h = -\infty$时，命题(3)可表述为$\lim\limits_{n \to \infty} x_n = -\infty$．

(2)命题(3)的前后两部分实质上都是不等关系:

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists N$, $n > N$时有$x_n < h + \varepsilon \Leftrightarrow \overline{\lim\limits_{n \to \infty}} x_n \le h$;

$\forall \varepsilon > 0, \forall K$, $\exists n > K$使得$x_n > h - \varepsilon \Leftrightarrow \overline{\lim\limits_{n \to \infty}} x_n \ge h$.

对下极限也有类似的结论．

定理 2.4.8(上下极限的运算规律)**．**设数列$\{a_n\}, \{b_n\}$是数列，则有:

(1)若$c > 0$，则$\overline{\lim\limits_{n \to \infty}}(ca_n) = c\overline{\lim\limits_{n \to \infty}} a_n$，$\underline{\lim\limits_{n \to \infty}}(ca_n) = c\underline{\lim\limits_{n \to \infty}} a_n$；若$c < 0$, $\overline{\lim\limits_{n \to \infty}}(ca_n) = c\underline{\lim\limits_{n \to \infty}} a_n$，$\underline{\lim\limits_{n \to \infty}}(ca_n) = c\overline{\lim\limits_{n \to \infty}} a_n$;

(2)**保不等式性**: $\forall n, a_n \le b_n \Rightarrow \overline{\lim\limits_{n \to \infty}} a_n \le \overline{\lim\limits_{n \to \infty}} b_n, \underline{\lim\limits_{n \to \infty}} a_n \le \underline{\lim\limits_{n \to \infty}} b_n$.

(3)$\underline{\lim\limits_{n \to \infty}} a_n + \underline{\lim\limits_{n \to \infty}} b_n \le \underline{\lim\limits_{n \to \infty}}(a_n + b_n) \le \overline{\lim\limits_{n \to \infty}} a_n + \underline{\lim\limits_{n \to \infty}} b_n \le \overline{\lim\limits_{n \to \infty}}(a_n + b_n) \le \overline{\lim\limits_{n \to \infty}} a_n + \overline{\lim\limits_{n \to \infty}} b_n$;

(4)若$\{a_n\}, \{b_n\}$非负，则$\underline{\lim\limits_{n \to \infty}} a_n \cdot \underline{\lim\limits_{n \to \infty}} b_n \le \underline{\lim\limits_{n \to \infty}}(a_n b_n) \le \overline{\lim\limits_{n \to \infty}} a_n \cdot \underline{\lim\limits_{n \to \infty}} b_n \le \overline{\lim\limits_{n \to \infty}}(a_n b_n) \le \overline{\lim\limits_{n \to \infty}} a_n \cdot \overline{\lim\limits_{n \to \infty}} b_n$.

证明(3)**．**设$\{a_n\}$的子列$\{a_{n_k}\}$满足$\lim\limits_{k \to \infty} a_{n_k} = \overline{\lim\limits_{n \to \infty}} a_n$，则考虑数列$\{b_{n_k}\}$，由于$\forall k, b_{n_k} \ge a_{n_k}$，故可证明$\underline{\lim\limits_{k \to \infty}} b_{n_k} \ge \lim\limits_{k \to \infty} a_{n_k} = \overline{\lim\limits_{n \to \infty}} a_n$，从而$\overline{\lim\limits_{n \to \infty}} b_n \ge \overline{\lim\limits_{n \to \infty}} a_n$．对下极限的证明类似，取$\{b_{n_k}\}$使得$\lim\limits_{k \to \infty} b_{n_k} = \underline{\lim\limits_{n \to \infty}} b_n$即可．

证明(4)**．**先证明$\overline{\lim\limits_{n \to \infty}}(a_n + b_n) \le \overline{\lim\limits_{n \to \infty}} a_n + \overline{\lim\limits_{n \to \infty}} b_n$．取数列$\{n_k\}$使得$\lim\limits_{k \to \infty}(a_{n_k} + b_{n_k}) = \overline{\lim\limits_{n \to \infty}}(a_n + b_n)$，令$h'_n = \sup\{a_n, a_{n+1}, \cdots\}$，$h''_n = \sup\ \{b_n, b_{n+1}, \cdots\}$，则有$h'_{n_k} + h''_{n_k} \ge a_{n_k} + b_{n_k}$．两边取上极限则得到$\overline{\lim\limits_{n \to \infty}} a_n + \overline{\lim\limits_{n \to \infty}} b_n \ge \overline{\lim\limits_{n \to \infty}}(a_n + b_n)$．

再证明$\overline{\lim\limits_{n \to \infty}} a_n + \underline{\lim\limits_{n \to \infty}} b_n \le \overline{\lim\limits_{n \to \infty}}(a_n + b_n)$．取$\{a_n\}$的子列$\{a_{n_k}\}$使得$\lim\limits_{k \to \infty} a_{n_k} = \overline{\lim\limits_{n \to \infty}} a_n$，再取$\{n_k\}$的子列$\{n'_k\}$使得$\{b_{n'_k}\}$收敛，此时成立

$$\overline{\lim_{n \to \infty}}(a_n + b_n) \ge \overline{\lim_{k \to \infty}}(a_{n'_k} + b_{n'_k}) = \overline{\lim_{k \to \infty}} a_{n'_k} + \lim_{k \to \infty} b_{n'_k} \ge \overline{\lim_{n \to \infty}} a_n + \underline{\lim_{n \to \infty}} b_n$$

左边两个不等式的证明以及(5)的证明类似．

注记．若$\{a_n\}$收敛，则成立$\overline{\lim\limits_{n \to \infty}}(a_n + b_n) = \overline{\lim\limits_{n \to \infty}} a_n + \overline{\lim\limits_{n \to \infty}} b_n = \lim\limits_{n \to \infty} a_n + \overline{\lim\limits_{n \to \infty}} b_n$．若$\{a_n\}$收敛且$\{b_n\}$非负，则成立$\overline{\lim\limits_{n \to \infty}}(a_n b_n) = \overline{\lim\limits_{n \to \infty}} a_n \overline{\lim\limits_{n \to \infty}} b_n = \lim\limits_{n \to \infty} a_n \overline{\lim\limits_{n \to \infty}} b_n$．

2.5 本章练习题

1．数列按敛散性分类

数列按照极限是否存在与极限点的性质可大致分为以下几类:

类别		性质
广义收敛		所有子列收敛至同一广义极限点
非广义收敛 (有不同极限点)	有界	仅存在有限极限点
	无界非无穷大量	同时存在有限极限点和无限极限点
	无穷大量	仅存在$+\infty,-\infty$极限点

2．收敛/发散数列的判定方法

(1)**定义法**: 直接猜测数列的极限，然后用极限的定义加以验证.

(2)Cauchy **收敛准则**.

(3)**单调有界原理**: 单调有界数列一定收敛.

(4)**上下极限相等**: 上下极限相等(有限值)的数列一定收敛.

(5)**两边取极限**: 假设数列存在极限，由极限的任意性可直接求解极限或证明极限不存在. 常用于存在递推式的情况.

3．极限的计算方法

(1)**定义法**: 直接猜测数列的极限，然后用极限的定义加以验证.

(2)**初等方法**: 通过极限的四则运算公式和初等技巧解决问题. 常用初等方法有: 换元、不等式(如平均值不等式等)、等式及变换(如常见求和公式、三角恒等变换、根式分母有理化、Abel 变换等)、套用函数、构造和拼凑.

(3)**夹逼定理**: 将数列同时往大和小进行放缩，使它们同时收敛至一个极限值.

(4)**Stolz 定理及相关定理.**

(5)**两边取极限**: 极限和上下极限都具有任意性，常用于存在递推式的情况. (参见例 2.1.4)

题组 A　数列极限的定义、性质和计算, Cauchy 收敛准则

A1． 判断下列结论的是否正确:

(1)若$\{a_n\}$收敛，$\{b_n\}$发散，则$\{a_n+b_n\}$发散;

(2)若$\{a_n\}$收敛，$\{b_n\}$发散，则$\{a_nb_n\}$发散;

(3)若$\{a_{2n}\}$和$\{a_{2n+1}\}$极限相同，则$\{a_n\}$收敛;

(4)若$\{a_{2n}\},\{a_{2n+1}\},\{a_{3n}\}$收敛，则$\{a_n\}$收敛.

A2． 若$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x$，$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=y$，证明:

$$\lim_{n\to\infty}\max\{x_n,y_n\}=\max\{x,y\}\,,\lim_{n\to\infty}\min\{x_n,y_n\}=\min\{x,y\}$$

(借助等式: $\max\{a,b\}=\frac{a+b}{2}+\frac{|a-b|}{2}$)

A3． 用 Cauchy 收敛准则证明数列$\{x_n\}$收敛:

(1)$x_n=\sin 1+\frac{\sin 2}{2!}+\cdots+\frac{\sin n}{n!}$;

(2)$x_n=\frac{\sin 2x}{2(2+\sin 2x)}+\frac{\sin 3x}{3(3+\sin 3x)}+\cdots+\frac{\sin nx}{n(n+\sin nx)}$;

(3)$\{x_n\}$满足递推式: $x_{n+1}=q\sin x_n+a(0<q<1)$.

A4. 称数列$\{x_n\}$为**有界变差数列**, 当且仅当存在常数c使得$\forall n\in\mathbb{N}^*, |x_1-x_2|+|x_2-x_3|+\cdots+|x_{n-1}-x_n|<c$.

(1)证明: 有界变差数列一定收敛;

(2)举出一个不是有界变差数列的收敛数列.

A5. 计算下列极限:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\sin n\sin\frac{1}{n}$ (2) $\lim\limits_{n\to\infty}n^3q^n\ (0<q<1)$ (3) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{q^n}{n!}(q>1)$

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}$ (5) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}(\sqrt[n]{n}-1)$ (6) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt[n]{n!}-\sqrt[n+1]{(n+1)!})$

A6. 设数列$\{a_n\},\{b_n\}$满足$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$, $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=b$, 证明下列极限的性质成立:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\sin a_n=\sin a$;

(2)若$m>0$, 则$\lim\limits_{n\to\infty}m^{a_n}=m^a$;

(3)若$m,a>0,\{a_n\}$是正数列, 则$\lim\limits_{n\to\infty}\log_m a_n=\log_m a$;

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}a_n^m=a^m$;

(5)若$b>0,\{b_n\}$是正数列, 则$\lim\limits_{n\to\infty}{b_n}^{a_n}=b^a$.

A7. 结合极限的定义解决下列问题:

(1)若$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{p_n}{p_1+p_2+\cdots+p_n}=0$, 证明: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{p_1a_n+p_2a_{n-1}+\cdots+p_na_1}{p_1+p_2+\cdots+p_n}=a$.

(2)若$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$, $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=b$, 证明: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_1b_n+a_2b_{n-1}+\cdots+a_nb_1}{n}=ab$.

(3)给定数列$\{a_n\}_{n\geq 0}$, 我们定义一个新数列$\{A_n\}_{n\geq 0}$:

$$A_n=\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\mathrm{C}_n^k a_k$$

(a)若已知$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$, 证明: $\lim\limits_{n\to\infty}A_n=a$.

(b)若已知$\lim\limits_{n\to\infty}A_n$存在, $\{a_n\}$是否一定收敛? 证明你的结论.

A8. 设$\{a_n\}$是数列, 记$S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$. 若$\lim\limits_{n\to\infty}S_n$存在, 且$\{a_{n+1}-a_n\}$严格单调增加, 证明: $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n})=+\infty$.

A9. 用初等方法解决下列问题:

(1)若$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n-a}{x_n+a}=2$, 求$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$;

(2)设数列$\{a_n\}$满足$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$存在, 证明: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=0$;

(3)证明: $p<-1$时级数$\sum_{n=1}^{\infty}n^p$是收敛的;

(4)设$S_n=\frac{1}{a}+\frac{2}{a^2}+\cdots+\frac{n}{a^n}(a>1)$, 求$\lim\limits_{n\to\infty}S_n$;

(5)运用不等式$\frac{k}{n+k}<\log(1+\frac{k}{n})<\frac{k}{n}$, 计算: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1^p}{p+1}\right)\left(1+\frac{2^p}{p+1}\right)\cdots\left(1+\frac{n^p}{p+1}\right)$;

(6)计算$\lim\limits_{n\to\infty}\sin(\pi\sqrt{n^2+1})$的值;

(7)计算$\lim\limits_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}\cos\frac{x}{2^k}$, 并证明 **Vieta 公式**

$$\frac{\pi}{2}=\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}}\cdots}$$

(8)若数列$\{a_n\}$满足$a_1=1,a_{n+1}=\frac{a_n}{(n+1)(a_n+1)}$, 求$\lim\limits_{n\to\infty}n!\,a_n$的值;

(9)设数列$\{y_n\}$满足$y_1 \geq 2, y_{n+1} = y_n^2 - 2$．令$S_n = \frac{1}{y_0} + \frac{1}{y_0 y_1} + \cdots + \frac{1}{y_0 y_1 \cdots y_n}$，求$\lim\limits_{n\to\infty} S_n$．

(10)设$\{a_n\}$是数列，记$A_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$．若$\{A_n\}$收敛，$\{p_n\}$是单调增加的正无穷大量数列．证明：$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{p_1 a_1 + p_2 a_2 + \cdots + p_n a_n}{n} = 0$;

(11)设数列$\{a_n\}$满足$\lim\limits_{n\to\infty} \left(a_n \sum_{i=1}^n a_i^2\right) = 1$，证明：$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[3]{3n}\, a_n = 1$．

题组 B　极限的计算工具：夹逼定理, Stolz 定理, 重要极限

B1． 用放缩法(夹逼定理)计算下列极限:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$　(2) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[3]{n}(\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n})$　(3) $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n})$

(4) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum_{k=n^2}^{(n+1)^2} \frac{1}{\sqrt{k}}$　(5) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} (\frac{1}{\sqrt[k]{n^k+1}} + \frac{1}{\sqrt[k]{n^k-1}})$(6) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} (\sqrt{1+\frac{k}{n^2}} - 1)$

(**分子有理化**是在极限计算中处理根式的重要途径)

B2． 证明：$\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{(2n-1)\,!!}{(2n)!!}\right)^2 = 0$．

B3． 若数列$\{a_n\}$满足$\lim\limits_{n\to\infty} (a_n - a_{n-2}) = a$，求$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{n}$和$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n - \frac{1}{2}a_{n-1} + \frac{1}{4}a_{n-3}}{n}$的值．

B4． 设数列$\{a_n\}$满足$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = a$，在以下条件中分别证明$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$存在；

(2)$\{a_n\}$单调增加；

(3)$\{n|a_{n+1} - a_n|\}$有界．

B5． 用 Stolz 定理解决下列涉及求和的问题:

(1)设数列$\{a_n\}$满足$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{n^\alpha} = 1(\alpha > 0)$, 求$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^{\alpha+1}}(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)$;

(2)设$a > 1$，求$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n}{a^{n+1}}(a + \frac{a^2}{2} + \cdots + \frac{a^n}{n})$．

B6． 用 Stolz 定理解决下列问题:

(1)设数列$\{a_n\}$满足$a_1 > 0, a_{n+1} = a_n + \frac{1}{a_n}$．

(a)求$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{\sqrt{n}}$的值;

(b)求$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}(a_n - \sqrt{2n})}{\log n}$的值．

(c)若将条件改为$a_{n+1}^k = a_n^k + \frac{1}{a_n}$，求$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{\sqrt[k+1]{n}}$的值．

(2)设数列$\{a_n\}$满足$0 < a_1 < \frac{1}{q}$和$a_{n+1} = a_n(1 - qa_n)$，证明：$\lim\limits_{n\to\infty} na_n = \frac{1}{q}$．(提示: Stolz 定理还可以用来处理一些$0 \cdot \infty$类型的极限)

(3)设数列$\{a_n\}$满足$a_1 = 1, a_{n+1} = \frac{1}{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}$, 求$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{\sqrt{\log n}}$的值．

B7． 求$\lim\limits_{n\to\infty} \sin(2\pi n!\,\mathrm{e})$的值．

题组 C　单调收敛原理，极限的任意性

C1． 用单调收敛原理求数列$\{a_n\}$的极限:

(1)$a_1 = A(A > 0), a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + \frac{A}{a_n})$　(2)$a_1 = \sqrt{2}, a_{n+1} = \sqrt{2}^{a_n}$

(3)$a_1 = 1, a_{n+1} = 1 + \frac{1}{a_n}$　(4)$a_1 > 0, a_{n+1} = 1 + \frac{a_n}{1+a_n}$

C2． 设对每个n都有$x_n < 1$和$(1 - x_n)x_{n+1} \geq \frac{1}{4}$, 证明数列$\{x_n\}$收敛并求极限．

C3. 设$\{a_n\},\{b_n\}$是数列，记$a_1=a,b_1=b$．若$a_{n+1}=\frac{a_n+b_n}{2},b_{n+1}=\sqrt{a_nb_n}$，证明：$\{a_n\}$和$\{b_n\}$收敛至同一极限．

C4. 设$\{a_n\},\{b_n\},\{c_n\}$是数列．

(1)记$a_1=a,a_2=b$, 若$n\geq 3$时成立$a_n=\frac{a_{n-1}+a_{n-2}}{2}$, 证明$\{a_n\}$收敛并求极限．

(2)设数列$\{a_n\},\{b_n\},\{c_n\}$满足$a_{n+1}=\frac{b_n+c_n}{2},b_{n+1}=\frac{c_n+a_n}{2},c_{n+1}=\frac{a_n+b_n}{2}$，求这三个数列的极限．

C5. 设数列$\{a_n\}$满足$a_1>0,a_{n+1}=a_n+\frac{n}{a_n}$，证明：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=1$;

(2)数列$\{n(a_n-n)\}$收敛．

题组 D　数列的上极限与下极限

D1. 证明：$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\leq\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}x_n$．

D2. 通过证明上下极限相等证明数列收敛：

(1)证明：若正数列$\{x_n\}$满足$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}x_n\cdot\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\frac{1}{x_n}=1$，则$\{x_n\}$收敛．

(2)设$|p|<|q|$, 数列$\{x_n\},\{y_n\}$满足$y_n=px_n+qx_{n+1}$．证明：若$\{y_n\}$收敛，则$\{x_n\}$收敛．

(3)若数列$\{x_n\}$满足对任意的m,n都有$0\leq x_{n+m}\leq x_n+x_m$，证明：数列$\{\frac{x_n}{n}\}$存在极限．

(4)设数列$\{x_n\}$有界，且$\lim\limits_{n\to\infty}(x_{2n}-2x_n)=A$，证明$\{x_n\}$收敛并求极限．

D3. 设$\{x_n\}$为正数列．证明：

(1) $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}n\left(\frac{1+x_{n+1}}{x_n}-1\right)\geq 1$;

(2) $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\left(\frac{x_1+x_{n+1}}{x_n}\right)^n\geq\mathrm{e}$．

习题提示与解答

第三章 函数的极限和连续性

3.1 函数极限的性质

定义 3.1.1(函数的极限)**.** 设函数$f(x)$在x_0的一个空心邻域$U_0(x_0,\delta_0)(\delta_0>0)$有定义，若存在实数$A$，使得$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，$\forall x\in U_0(x_0,\delta)$都有$|f(x)-A|<\varepsilon$成立，则称函数$f(x)$在$x$趋于$x_0$时收敛至$A$(或在$x_0$处的极限是$A$)，记作$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$或$f(x)\to A(x\to x_0)$.

注记. 关于函数极限做几点解释:

(1)(**重要**)$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$仅要求$f(x)$在$x_0$的一个空心邻域有定义．换句话说，$f(x_0)$可以任意取值，甚至没有定义都是可以的.

(2)与数列极限相似，函数极限刻画一种自变量无限接近于x_0(但不等于x_0)时$f(x)$的取值情况;

(3)这种描述函数极限的方式又称为$\varepsilon-\delta$**语言**．函数极限也包含自变量趋于无穷的情况:

· **自变量趋于$+\infty$的情况**: 设函数$f(x)$在区间$(M,+\infty)$有定义，若存在实数A，使得$\forall\varepsilon>0$，$\exists X,\forall x\in(X,+\infty)$都有$|f(x)-A|<\varepsilon$成立，则称函数$f(x)$在$x$趋于$+\infty$时收敛至$A$(或极限是$A$)，记作$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$或$f(x)\to A(x\to+\infty)$.

· **自变量趋于$-\infty$的情况**: 设函数$f(x)$在区间$(-\infty,-M)$有定义，若存在实数A，使得$\forall\varepsilon>0$，$\exists X,\forall x\in(-\infty,X)$都有$|f(x)-A|<\varepsilon$成立，则称函数$f(x)$在$x$趋于$+\infty$时收敛至$A$(或极限是$A$)，记作$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$或$f(x)\to A(x\to+\infty)$.

· **自变量趋于∞的情况**: 设函数$f(x)$在区间$(-\infty,-M)\cup(M,+\infty)(M>0)$有定义，若存在实数$A$，使得$\forall\varepsilon>0$，$\exists X,\forall x\in(-\infty,X)\cup(X,+\infty)$都有$|f(x)-A|<\varepsilon$成立，则称函数$f(x)$在$x$趋于$\infty$时收敛至$A$(或极限是$A$)，记作$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$或$f(x)\to A(x\to\infty)$.

(4)函数极限也可以推广到函数值趋于无穷的情况，例如自变量趋于有限值x_0，函数值趋于$+\infty$的情况定义如下:

设函数$f(x)$在x_0的一个空心邻域$U_0(x_0,\delta_0)(\delta_0>0)$有定义，若对$\forall M>0$，$\exists\delta>0$，$\forall x\in U_0(x_0,\delta)$都有$f(x)>M$成立，则称函数$f(x)$在$x$趋于$x_0$时的**正无穷大量**，记作$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=+\infty$或$f(x)\to+\infty(x\to x_0)$.

负无穷大量、无穷大量的定义类似．当$f(x)$是收敛的或是确定符号的无穷大量时，也称$f(x)$**广义收敛**.

许多涉及自变量趋于有限数的函数极限的命题在自变量趋于$+\infty,-\infty$或∞的情况下或函数值因变量广义收敛的情况下仍然成立，为节省篇幅后面不再具体讨论.

例 3.1.1. 证明: $\lim\limits_{x\to2}x^4=16$.

解答. 任取$\varepsilon>0$，由$|x^4-16|<\varepsilon\Leftarrow|(x-2)(x^3+2x^2+4x+8)|<\varepsilon\overset{x>1}{\Leftarrow}|x-2|<\frac{\varepsilon}{15}$．故$\lim\limits_{x\to2}x^4=16$.

例 3.1.2. 证明: $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}=\frac{1}{2}$.

解答. 任取$\varepsilon>0$，由于$\left|\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}-\frac{1}{2}\right|<\varepsilon\Leftrightarrow\left|\frac{1}{\sqrt{x}+1}-\frac{1}{2}\right|<\varepsilon\Leftrightarrow\left|\frac{1-\sqrt{x}}{2(\sqrt{x}+1)}\right|<\varepsilon\Leftrightarrow\left|\frac{1-x}{2(\sqrt{x}+1)^2}\right|<\varepsilon\Leftarrow|x-1|<2\varepsilon$. 从而原命题得证.

定理 3.1.2(函数极限的等价定义). 设$f(x)$在$U_0(x_0,\delta_0)(\delta_0>0)$有定义，则$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$的充分必要条件是对于$U_0(x_0,\delta_0)$内任意一个收敛至$x_0$的数列$\{x_n\}$都有$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$.

证明. 必要性. 任取$\varepsilon>0$，存在δ使得$x\in U_0(x_0,\delta)$时有$|f(x)-A|<\varepsilon$，且存在N使得$n>N$时有$x_n\in U_0(x_0,\delta)$，即$|x_n-A|<\varepsilon$，从而原命题得证.

充分性. 若不然，$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\neq A$等价于对$\exists\varepsilon>0$，$\forall\delta>0$，都存在$x\in U_0(x_0,\delta)$使得$|f(x)-A|\geq\varepsilon$，对于$\delta_1=1$取$x_1\in U_0(x_0,1)$使得$|f(x_1)-A|\geq\varepsilon$，对$\delta_2=\frac{1}{2}$取$x_2\in U_0(x_0,\frac{1}{2})$使得$|f(x_2)-A|\geq\varepsilon$，···，对$\delta_k=\frac{1}{k}$取$x_k\in U_0(x_0,\frac{1}{k})$使得$|f(x_k)-A|\geq\varepsilon$，如此得到的数列$\{x_n\}$不收敛至$A$.

有时函数只在$x<x_0$或$x>x_0$时满足极限的定义，我们称此时函数有**单侧极限**. 容易得到**许多极限满足的性质对单侧极限同样适用**，为表述方便后面不再特别说明.

定义 3.1.3(单侧极限). 设函数$f(x)$在x_0的一个左空心邻域$U_0^-(x_0,\delta_0)(\delta_0>0)$有定义，若存在实数$A$，使得$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，$\forall x\in U_0^-(x_0,\delta)$都有$|f(x)-A|<\varepsilon$成立，则称函数$f(x)$在$x_0$处的**左极限是**$A$， 记作$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=A$或$f(x_0^-)=A$. **右极限**的定义类似.

例 3.1.3. 设$f(x)=\frac{1}{1-x}$，则$f(x)$在$x\to 1$的单侧极限是$f(1^+)=-\infty,f(1^-)=+\infty$.

定理 3.1.4. 函数$f(x)$在x_0处极限存在的充要条件是$f(x)$在点x_0处的左右极限存在且相等.

证明. 根据单侧极限的定义即可证明.

由于函数极限可以通过数列极限定义，函数极限也具有和数列极限类似的性质和运算法则.

定理 3.1.5(函数极限的性质). 函数极限的简单性质有以下 4 条:

(1)**唯一性**: 设$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$存在，该极限值是唯一的.

(2)**有界性**: 若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$存在，则存在$\delta>0$使得$f(x)$在$U_0(x,\delta)$有界.

(3)**保号性**: 设$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A<B$，存在$\delta>0$使得$x\in U_0(x_0,\delta)$时有$f(x)<B$.

(4)**保不等式性**: 若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x),\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$存在，且存在$\delta>0$使得$x\in U_0(x,\delta)$时成立$f(x)\leq g(x)$，则$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\leq\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$.

定理 3.1.6(函数极限的四则运算). 设函数$f(x),g(x)$满足$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A,\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=B$，则有:

(1)$\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)\pm g(x))=A\pm B$;

(2)$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)g(x)=AB$;

(3)若$B\neq 0$，且$g(x)\neq 0$，则$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{A}{B}$;

定理 3.1.7(夹逼定理)**.** 若$f(x)$满足：存在$\delta_0>0$使对$\forall x\in U_0(x_0,\delta_0)$有$g(x)\le f(x)\le h(x)$，且$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=\lim\limits_{x\to x_0}h(x)=A$，则$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$.

定理 3.1.8(复合函数的极限)**.** 设函数$f(u)$在$U_0(u_0,\delta_1)$有定义，且$\lim\limits_{u\to u_0}f(u)=A$；$u=u(x)$在$U_0(x_0,\delta_2)$ $(\delta_1,\delta_2>0)$有定义，且当$x\in U_0(x_0,\delta_2)$ 时有$u(x)\in U_0(u_0,\delta_1)$以及$\lim\limits_{x\to x_0}u(x)=u_0$，则$\lim\limits_{x\to x_0}f\big(u(x)\big)=A$.

证明. 由$\lim\limits_{u\to u_0}f(u)=A$得任取$\varepsilon>0$，存在$\delta$使得$u\in U_0(u_0,\delta)$时$|f(u)-A|<\varepsilon$；由$\lim\limits_{x\to x_0}u(x)=u_0$得到存在$\delta'$使得$x\in U_0(x_0,\delta')$时$u(x)\in U_0(u_0,\delta)$，从而$|f\big(u(x)\big)-A|<\varepsilon$. 故原命题得证.

注记. 注意条件中的$x\in U_0(x_0,\delta_2)\Rightarrow u(x)\in U_0(u_0,\delta_1)$不可省略(不能有$u(x)=u_0$成立). 考察下列函数:

$$f(u)=\begin{cases}1,x=0\\0,x\neq 0\end{cases},\qquad u(x)=\begin{cases}x,x\in\mathbb{Q}\\0,x\in\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}\end{cases}$$

注意到有$\lim\limits_{u\to 0}f(u)=1$和$\lim\limits_{x\to 0}u(x)=0$同时成立，但$f(u(x))$在$x\to 0$时没有极限. 若已知$f(u)$是连续函数，我们则可以放宽这个限制.

例 3.1.4. 求极限$\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{x^2+x+1}-1}{x^2+x}$.

解答. 令$u(x)=x^2+x+1$，则$\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{x^2+x+1}-1}{x^2+x}=\lim\limits_{u\to 1}\frac{\sqrt{u}-1}{u-1}=\frac{1}{2}$.

数列极限的判定方法在函数极限的判定中依然适用.

定理 3.1.9(Cauchy 收敛准则)**.** 设$f(x)$在$U_0(x_0,\delta_0)(\delta_0>0)$有定义，则$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$存在的充分必要条件是对$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$，使得对任意的$x_1,x_2\in U_0(x_0,\delta_0)$都有$|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$.

证明. 必要性. 设$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，则任取$\varepsilon>0$，存在$\delta$使得$x\in U_0(x_0,\delta)$时有$|f(x)-A|<\frac{\varepsilon}{2}$，此时对任意的$x_1,x_2\in U_0(x_0,\delta_0)$都有$|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$.

充分性. 任取一个收敛于x_0的数列$\{x_n\}$则成立并任取$\varepsilon>0,\exists\delta>0$，使得$x_1,x_2\in U_0(x_0,\delta_0)$都有$|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$. 又存在$N$，使得$n>N$时有$x_n\in U_0(x_0,\delta_0)$，故可证明$\{f(x_n)\}$是 Cauchy 列，进而$\{f(x_n)\}$收敛. 设$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=A$，下面证明$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$. 事实上，任取$\varepsilon>0$，存在$\delta$使得$x_1,x_2\in U_0(x_0,\delta)$时有$|f(x_1)-f(x_2)|<\frac{\varepsilon}{2}$，且存在$N$使得$n>N$时有$|f(x_n)-A|<\frac{\varepsilon}{2}$和$x_n\in U_0(x_0,\delta)$同时成立，从而对$\forall x\in U_0(x_0,\delta)$，有$|f(x)-A|\le|f(x)-f(x_n)|+|f(x_n)-A|=\varepsilon$. 故命题得证.

定理 3.1.10(单调收敛原理)**.** 设$f(x)$在$U_0^+(x_0,\delta_0)(\delta_0>0)$有定义，并在$U_0^+(x_0,\delta_0)$单调增加，则成立$f(x_0^+)=\inf\{f(x)\colon x\in U_0^+(x_0,\delta_0)\}$；若$f(x)$在$U_0^+(x_0,\delta_0)$单调减少，则$f(x_0^+)=\sup\{f(x)\colon x\in U_0^+(x_0,\delta_0)\}$. (对$f(x_0^-)$的情况同理)

证明. 只证明单调增加且$\inf\{f(x): x\in U_0^+(x_0,\delta_0)\}=A$是有限数的情形，其它情况的证明类似．由条件得$\forall\varepsilon>0$，$\exists x\in U_0^+(x_0,\delta_0)$使得$|f(x)-A|<\varepsilon$成立，则对一切满足$x'\in(x_0,x)$的$x'$都有$|f(x')-A|<\varepsilon$成立，从而证明了$f(x_0^+)=A$．

数列中对于极限点的定义在函数依然适用，并可以定义上极限和下极限．

定义 3.1.11(极限点，上极限与下极限)**.** 设$f(x)$在$U_0(x_0,\delta_0)(\delta_0>0)$有定义，若广义收敛的数列$\{x_n\}$中的项包含于$U_0(x_0,\delta_0)$且满足$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$，则称其极限为$f(x)$在$x\to x_0$时的一个**极限点**．极限点一定存在最大值和最小值，我们分别称其为$x\to x_0$时的**上极限**和**下极限**，记作$\lim\limits_{x\to x_0}\sup f(x)$ $(\overline{\lim\limits_{x\to x_0}}f(x))$，$\lim\limits_{x\to x_0}\inf f(x)(\underline{\lim\limits_{x\to x_0}}f(x))$．

上极限和下极限也有等价定义，以上极限为例，以下三个命题等价(设h是有限数):

(1)$\overline{\lim\limits_{x\to x_0}}f(x)=h$;

(2)定义$h(\delta)=\sup\{f(x): x\in U_0(x_0,\delta)\}$，成立$\lim\limits_{\delta\to 0}h(\delta)=h$;

(3)对$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$，使得$x\in U_0(x_0,\delta)$时有$f(x)<h+\varepsilon$；且$\forall\delta>0$，存在$x\in U_0(x_0,\delta)$使得$f(x)>h-\varepsilon$．

定理 3.1.12. 设$f(x)$在$U_0(x_0,\delta_0)(\delta_0>0)$有定义，则$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$存在的充分必要条件是$\overline{\lim\limits_{x\to x_0}}f(x)=\underline{\lim\limits_{x\to x_0}}f(x)$．

例 3.1.5. 证明: 当$x\to 0$时$f(x)=\sin\frac{1}{x}$的极限不存在．

解答. 取两个数列$\{x_n\}$和$\{x_n'\}$，使得

$$x_n=\frac{1}{2n\pi},x_n'=\frac{1}{2n\pi+\frac{\pi}{2}}(n\in\mathbb{N}^*)$$

容易得到$\{x_n\},\{x_n'\}$均收敛至 0 且有$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0,\lim\limits_{n\to\infty}x_n'=1$，故$\overline{\lim\limits_{x\to x_0}}f(x)\neq\underline{\lim\limits_{x\to x_0}}f(x)$，从而$f(x)$在$x\to 0$的极限不存在．

3.2 函数极限的计算

对函数极限计算的研究除了运算法则以外，还要涉及具体函数极限的计算，尤其是一些**不定型极限**的问题．在讨论之前，先引入在描述函数的无穷小量和无穷大量的一些记号(这些记号在$f(x),g(x)$是有限量时同样可以使用):

· 若$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=0$，我们称在$x\to x_0$时$f(x)$是$g(x)$的**低阶无穷大量**(或**高阶无穷小量**)，记作$f(x)=o(g(x))(x\to x_0)$;

· 若存在正数m,M,δ使得当$x\in U_0(x_0,\delta)$时有$m\le\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right|\le M$成立，我们称在$x\to x_0$时$f(x)$是$g(x)$的**同阶无穷大量**(或**同阶无穷小量**)，记作$f(x)=O(g(x))(x\to x_0)$；特别地，若$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=1$，记作$f(x)\sim g(x)(x\to x_0)$.

以及，我们可以用这些记号描述极限:

$$\lim_{x\to 2}x=O(1),\lim_{x\to 0}x=o(1),\lim_{x\to 0}(1+x)=1+o(1),\lim_{x\to+\infty}(1+x)=x+o(x)\cdots$$

上述公式的共同点是要求表达式含有“O”或“o”标记，此时我们称这种极限的表达方式为**增量公式**．注意极限的增量公式表示法不是唯一的，如在表示$\lim\limits_{x\to 0}(1+x^2)$时，$1+o(1),1+o(x),1+O(x^2)$都是正确的表达式.极限的增量公式满足有限项的加法和乘法运算的规律(它不满足除法运算规律！)，如: $o(x)\pm o(x)=o(x),o(x)\cdot o(x)=o(x^2)$, 等等.

在证明极限的计算法则时，我们曾提过在极限计算时省略对敛散性的判断以便更轻松地运用计算法则，然而在处理不定型极限时却常常不能这么做，因为这样往往会得到错误的答案，例如:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-\mathrm{e}}{x}&=\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}\left[\dfrac{\frac{x}{1+x}-\log(1+x)}{x^2}\right]}{1}=\mathrm{e}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x}{1+x}-\log(1+x)}{x^2}\\&=\mathrm{e}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x}{1+x}-\log(1+x)}{x^2}=\mathrm{e}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{x-\log(1+x)}{x^2}\\&=\mathrm{e}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1-\frac{1}{1+x}}{2x}=\frac{\mathrm{e}}{2}\end{aligned}$$

在上面的计算过程中红色的等式(预处理)当然是错误的，因为如果成立$\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{1+x}=x+O(x^2)$，那么在运用洛必达法则后的分子应该是$1+O(x)-\frac{1}{1+x}$而不是$1-\frac{1}{1+x}$．而如果使用增量公式计算极限，可以得到如下正确结果:

$$\begin{aligned}\cdots=\mathrm{e}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x}{1+x}-\log(1+x)}{x^2}&=\mathrm{e}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{x-x^2+o(x^2)-\log(1+x)}{x^2}\\&=\mathrm{e}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1-2x+o(x)-\frac{1}{1+x}}{2x}=-\frac{\mathrm{e}}{2}\end{aligned}$$

增量公式的主要使用场景就在于此.

定理 3.2.1(第一个重要极限)**.** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$.

证明. 由于当$x\in(0,\frac{\pi}{2})$时，有$\sin x<x<\tan x$成立，故有$\cot x<x<\frac{1}{\sin x}$，进而有$\cos x<\frac{x}{\sin x}<1$．由于对于给定的$a$，成立

$$|\cos x-\cos a|\le\left|2\sin\frac{x+a}{2}\sin\frac{x-a}{2}\right|\le\left|2\sin\frac{x-a}{2}\right|\le|x-a|$$

故$\lim\limits_{x\to a}\cos x=\cos a$，因此对$\cos x<\frac{x}{\sin x}<1$令$x\to 0^+$，则有$\frac{x}{\sin x}\to 1$．由偶函数的性质可得当$x\in(-\frac{\pi}{2},0)$时上述性质亦成立，因此$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$得证．

例 3.2.1． 计算：(1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{\sin x^2}$ (2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(\sin x)}{x}$ ．

解答.

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{\sin x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2}{\sin x^2}\overset{t=x^2}{=}\lim\limits_{t\to 0}\frac{t}{\sin t}=1$．

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(\sin x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(\sin x)}{\sin x}\cdot\frac{\sin x}{x}=1$．

定理 3.2.2(第二个重要极限)**．** $\lim\limits_{x\to+\infty}(1+\frac{1}{x})^x=\mathrm{e}$**.**

证明． 此结论是不难证明的，事实上当$x>1$时，我们有

$$\left(1+\frac{1}{[x]+1}\right)^{[x]}\le\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\le\left(1+\frac{1}{[x]}\right)^{[x]+1}$$

由于不等式左右两边均收敛至e，故$\lim\limits_{x\to+\infty}(1+\frac{1}{x})^x=\mathrm{e}$成立．

例 3.2.2． 计算：(1)