第 18 卷 第 1 期
2005 年 2 月

模式识别与人工智能
PR & AI

Vol. 18 No. 1
Feb 2005

综合集成研讨厅专家群体评估结果的可视化*

刘春梅 戴汝为

(中国科学院自动化研究所 人工智能实验室 北京 100080)

摘 要 针对 1992 年钱学森提出的"从定性到定量综合集成研讨厅"体系，本文采用 Isomap 算法将综合集成研讨厅中专家对研讨方案评论意见的多维数据集进行降维. 并将降维后的结果在低维数据空间中进行可视化表示，为综合集成研讨厅体系体现专家思维聚类情况提供了一种较理想的可视化环境.

关键词 综合集成研讨厅，数据可视化，数据降维，Isomap 算法

中图法分类号 TP391.7

Visualization of Experts Evaluation Opinions in the Hall for Workshop of Metasynthetic Engineering

LIU Chun-Mei, DAI Ru-Wei

(*Artificial Intelligence Laboratory, Institute of Automation, Chinese Academy of Sciences, Beijing* 100080)

ABSTRACT

According to the hall for workshop of metasynthetic engineering, which is proposed by Tsien in 1992, this paper applies Isomap algorithm to realize the dimension reduction of the experts' evaluation opinions, and visualize the results in the low dimension space. It provides an ideal environment of the visualization for the hall for workshop of metasynthetic engineering, which is clear to see the state of the clustering of experts' thinking.

Key Words Hall for Workshop of Metasynthetic Engineering, Visualization of the Data, Dimension Reduction, Isomap Algorithm

1 引 言

1990 年钱学森等提出了开放的复杂巨系统的概念，以及处理这类系统的方法论——从定性到定量的综合集成法[1]. 1992 年 3 月钱学森进一步提出了"从定性到定量综合集成研讨厅"体系的思想[2]，其中将专家的定性认识通过建模的方法来提高到定量的认识，专家分析其结果，不断修改模型或其参数直至达到一个满意的结果，这种思想是综合集成研讨厅体系的一个非常重要的思想，而且这种思想的实现是从定性到定量综合集成思想的体现. 本文针对这一过程，将专家对研讨方案评价意见的多维数据组进行降维，并将降维后的结果在低维数据空间中进行可视化表示，通过这种对专家评价意见在低维可视化空间内的可视化表示，可直观观测到专家群体思维的聚类情况，使研讨厅沉浸在可视化环境

* 国家自然科学基金重大资助项目(No. 79990580)
收稿日期：2004－06－25；修回日期：2004－10－21
作者简介 刘春梅，女，1976 年生，博士研究生，主要研究方向为人工智能、模式识别、复杂性科学. E-mail: chunmei.liu@mail.ia.ac.cn. 戴汝为，男，1932 年生，中国科学院院士，主要研究方向为人工智能、模式识别、复杂性科学.

中,从而为综合集成研讨厅体系提供一种理想的可视化环境.

面对大量高维数据,如何把大量高维数据所包含的特征结构在低维空间中展现,实现高维数据的可视化,人们经常面对的问题就是高维数据的降维问题,即发现隐藏在高维数据中有意义的低维结构,高维数据的无序性使其没有明显的空间特征,如何降低数据维数,在低维空间中进行可视化表示来增强人们对这些高维非物理抽象信息的认知,成了问题的关键.传统的降维技术主要有 PCA 和 MDS 方法等,用 PCA 和 MDS 算法实现数据降维的主要特点是映射的低维数据点可以较好地保持高维数据之间的差异性,两者可较好地发现隐藏在高维数据线性空间中的数据结构,但对于高维数据集隐藏的非线性结构(如瑞士卷类型的数据等)处理结果并不理想.对于这种非线性结构高维数据集的降维问题,目前也有很多解决的方法,如 SOM[17]、GTM[18]、Isomap 算法[13] 和 LLE 算法[6] 等,本文采用了 Isomap 算法,Isomap 算法继承了 PCA 和 MDS 主要算法的特征——计算的简单有效性、全局的优化性和渐近收敛性,在数据降维过程中可有效揭示高维数据集隐藏的、内在的、本质的非线性结构,发现高维数据集真正的自由度,目前这种算法应用在图像分析方面有了一定的成果[3,5].

2　专家群体对方案评估结果的可视化

2.1　综合集成研讨厅体系

钱学森提出的"从定性到定量综合集成研讨厅"体系的构思是把专家们和知识库信息系统、各种人工智能系统和快速巨型计算机组织起来成为人一机结合的系统;把逻辑、理性与非逻辑、非理性智能结合起来;把今天世界上千百万人的聪明才智和已经不在世的古人的智慧都综合起来;强调发挥这个体系的整体效应和综合效应.研讨厅体系把人的思维、思维的成果、人的经验、知识、智慧以及各种情报、资料、信息集成起来,从多方面的定性认识上升到定量认识.

综合集成研讨厅的方法是通过议题专家讨论的形式来实现的,对于给出的议题,专家群体根据已有的定量模型、原有的案例和网络资源等,在主持人的指导下进行讨论,进行分析得到自己的观点,再由主持人和专家归纳出一些备选方案,然后专家各自对这些方案进行评估,并以一定的数据形式表示出来,这些多维的数据集蕴含着专家群体对方案评估的异同以及专家思维的聚类情况.我们再对这些数据集进行降维等方法的可视化处理,利用视觉的特点加速人对数据的理解和认识,这样专家群体对方案的评价结果的相异程度和专家群体思维的聚类情况可直观地从可视化结果中观测到.

在研讨厅体系里,专家群体在主持人的指导下对备选方案进行评估,通常情况下这个过程是一个反复的过程,这是因为专家可能对各个方案会持有不同的观点,而研讨的目的是运用群体一致性算法寻求群体思维的一致性,最终形成一个统一的认识,得出最终的决策结果.我们将每次专家对方案评估结果进行可视化,这样对于每次评估我们都会得到一个可视化结果,专家对方案进行多次评估下来,我们就会得到一系列的可视化结果,从这一系列的可视化结果中我们可以观测到专家群体思维一致性的行为过程.对于整个评估过程,我们不仅可以从单次专家群体评估结果的可视化结果中观测到专家群体对方案所持意见的异同,而且还可从整个评估过程中多次专家群体评估结果的可视化结果中观测到专家思维一致性的行为过程,从而为综合集成研讨厅体系提供一种理想的可反映专家群体对方案所持意见异同的可视化环境.

2.2　专家对方案评估结果可视化的实现

在综合集成研讨厅中,将专家对方案评估结果进行可视化表示主要由 4 步完成,如图 1 所示.

步骤 1　专家对方案评估.针对研讨厅的研讨决策问题,根据已有的定量的模型以及原有的案例,专家群体在主持人的指导下进行讨论,选出几种大家认可的方案,然后专家对各个方案进行评估,并以一定的数据形式表示出来,专家对方案评价的异同以及专家思维的聚类情况都蕴含在这些多维数据集中,这也是我们要处理的对象;

步骤 2　评估意见数据预处理.专家对方案的评价意见可根据研讨方案本身的特点采用相应合适的评价方式,如打分制,投票制等,这些方式都可按相应的线性关系转化成百分制,这样采用统一的百分制形式有利于在同一尺度下进行数据的降维,数据的预处理过程就是数据归一化过程;

步骤 3　数据降维.利用数据降维算法,将专家对方案的评价意见数据集进行降维,寻找到可以紧密表达数据集的低维数据空间,本文采用了 Isomap 算法对数据集进行降维;

步骤 4　可视化结果.利用步骤 3 得到的低维

数据,在低维数据空间中进行图表可视化表示,这样可将专家对方案评价的聚类情况直观有力地表示.

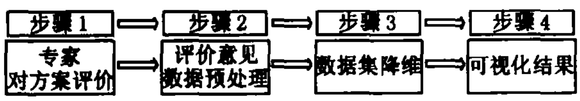


图1 专家群体对方案评估结果可视化的流程图

Fig. 1 Flow chart of the visualization of experts' opinions about scheme

3 Isomap算法

3.1 Isomap算法

面对大量高维数据,如全局气候模式,图像数据,人类基因分布等,这种高维数据的无序性使得其没有明显的空间特征,如何发现隐藏在高维数据中有意义的低维结构,在低维空间中进行可视化表示来增强人们对这些高维非物理抽象信息的认知,实现高维数据的可视化,关键问题就是高维数据的降维问题.

传统的PCA和MDS,是一种简单的有效计算方法,两者可较好地发现隐藏在高维数据线性空间中的结构,对于数据集内在本质的非线性结构处理结果并不理想. Isomap算法结合了PCA和MDS的主要算法的特征——计算有效性、全局的优化性和渐近收敛性,且比较灵活地学习到数据点的非线性结构.它根据高维数据集包含的内在的本质的非线性结构进行点的非线性扩展,用测量距离代替传统方法的欧式距离,较好地揭示了高维数据集的自由度.在Isomap算法中测量距离的计算方法为,对于邻近点用欧式距离来近似计算测量距离;对远点则用一系列近点的欧式距离之和来估算测量距离.这种用测量距离代替传统方法的欧式距离的算法,可更有效地在低维空间紧密表达高维空间的数据,减少降维后损失掉的数据信息,有利于数据的可视化.

3.2 数据集

在确定了降维方法后,将专家对方案评估意见可视化的另一个问题就是怎样获得输入的数据,即如何把这些评估意见转化成可降维的数据.我们的处理方法是根据研讨方案本身的特点对专家评价意见采用相应合适的评价方式,如打分制,投票制等,这些方式都可按相应的线性关系转化成百分制,这样采用统一的百分制形式有利于下一步的数据降维,因此我们要将数据归一化为百分制的形式(或其它的归一化形式).

综合研讨厅中的研讨专家对各个方案的评价意见数据就是我们要处理的对象,这些意见数据可看成高维矢量空间的点,方案个数对应于输入空间的维数,参加研讨的专家人数对应于输入数组数,例如研讨过程中有20个专家评估的30种方案,则相应数据集是20组30维的数据.在确定数据集之后,我们的下一步就要从这些无序高维数据中找到其紧密的低维表达,即在低维空间中找到能够表达专家对方案评估异同关系的紧密表达.

3.3 算法实现

用Isomap算法对数据集降维,主要由四步完成:第一步,决定近邻方式,近邻方式主要是由两种方式,一种是选择k个最近点作为近邻点,另一种是选择距离小于半径r的点作为最近邻点;第二步,构建近邻图,近邻点确定后,通过连接近邻点构建近邻图,近邻图中的弧用相应连接点之间的欧式距离来标记,如果不是近邻点,则两点之间的距离用无穷大来标记,即两点之间无连接关系;第三步,计算节点之间的最短距离,即两点之间的测量距离,方法是用两点之间最近路径的距离之和来近似,寻找最短路径的方法可用图论中的知识,如Floyd算法和Dijkstra算法,来计算节点之间的最短距离,得到相应的测量距离矩阵;第四步,在低维数据空间中,进行可视化表示,方法是结合传统的MDS算法对第三步得到的测量距离矩阵进行降维得到低维空间的数据集,将其进行图表可视化表示.

用Isomap算法对数据集降维的具体步骤如下,设有n个d维数据点集.

1) 确定近邻方式,即确定k值或r值;

2) 对n个数据点进行近邻标记,构建近邻图,得到距离矩阵D_1;

3) 运行Floyd算法来获得测量距离矩阵D_2,它包括了所有点之间的测量距离;

4) 对矩阵D_2用传统的MDS算法计算特征向量,得到p个最大特征值,给出p维空间中的标记点的相应坐标,从而得到p维空间的可视化结果图.

4 实例分析

4.1 实例分析一

下面以一个初步形成的研讨厅体系的专家研讨过程的实例来说明如何用Isomap算法将专家意见进行可视化的.现有研讨厅,参加研讨专家有20位,研讨方案共有20种.

第一步,数据初始化处理.组织专家对研讨方案

进行意见评价,本例直接采用了百分制形式的打分制,输入数据是专家对各个研讨方案的评价意见,输入的维数相应于方案个数,输入数组数为参加研讨的专家人数,专家 20 位,研讨方案 20 种,则输入数据空间是 20 维高维矢量空间,共有 $N = 20$ 组数据,如表 1 所示.

表 1　专家意见 20 维数据集

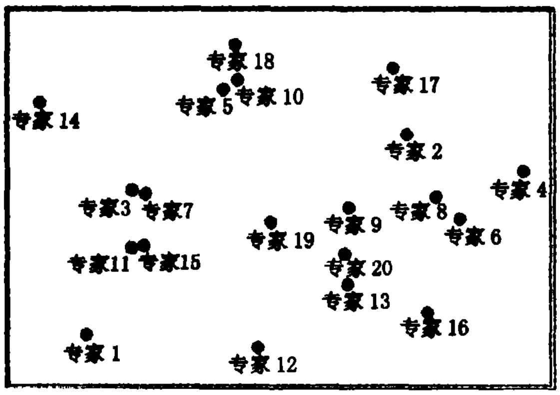
Table 1 Data of experts' opinions

	专家 1	专家 2	专家 3	专家 4	专家 5	专家 6	专家 7	专家 8	专家 9	专家 10	专家 11	专家 12	专家 13	专家 14	专家 15	专家 16	专家 17	专家 18	专家 19	专家 20
方案 1	27	82	46	57	84	2	39	18	59	44	32	64	24	79	2	48	12	66	53	49
方案 2	15	48	24	87	1	86	36	97	48	18	16	77	36	2	40	30	77	41	49	43
方案 3	2	49	29	47	89	65	33	40	70	59	14	59	3	43	89	15	61	5	97	89
方案 4	63	71	24	55	77	7	92	47	4	98	1	18	26	67	28	19	37	98	20	20
方案 5	48	77	5	63	35	58	44	87	36	19	71	99	98	12	10	95	0	4	43	78
方案 6	61	67	87	69	95	64	2	55	18	57	4	30	93	29	86	81	85	73	97	62
方案 7	63	43	75	48	60	26	71	34	52	15	44	33	12	55	48	73	12	53	47	59
方案 8	43	26	60	1	79	4	86	7	23	22	63	46	38	24	89	33	64	59	75	67
方案 9	10	58	20	89	21	17	12	72	41	45	24	8	45	6	13	59	52	67	60	9
方案 10	2	5	62	8	5	9	34	54	74	90	44	50	67	5	28	25	75	58	96	92
方案 11	97	17	44	3	26	13	29	10	87	49	79	72	49	96	93	5	5	46	27	20
方案 12	1	23	17	94	54	78	8	39	91	55	82	53	22	81	37	29	86	80	28	76
方案 13	87	12	89	89	14	17	65	22	35	7	68	87	53	20	61	51	16	3	73	61
方案 14	98	65	83	19	83	55	3	3	3	47	78	40	6	58	92	17	15	26	80	7
方案 15	51	12	8	30	99	51	25	60	27	41	10	74	98	4	36	92	31	46	92	60
方案 16	55	52	50	99	73	80	61	28	9	20	53	11	34	59	41	0	64	67	37	77
方案 17	5	92	0	58	23	71	34	11	74	40	31	29	36	16	6	26	61	11	51	2
方案 18	8	8	60	42	64	34	96	15	20	50	67	74	8	99	58	14	79	67	48	20
方案 19	83	23	35	9	79	28	52	18	36	71	84	69	28	78	31	26	57	90	47	36
方案 20	87	55	84	32	18	91	61	23	1	74	97	63	51	86	39	96	73	44	61	55

第二步,数据降维. 在构建近邻图时,近邻方式采用固定点数的方式 $k = 3$,用 Floyd 算法寻找最短路径,用 MDS 算法构建低维空间的可视化图.

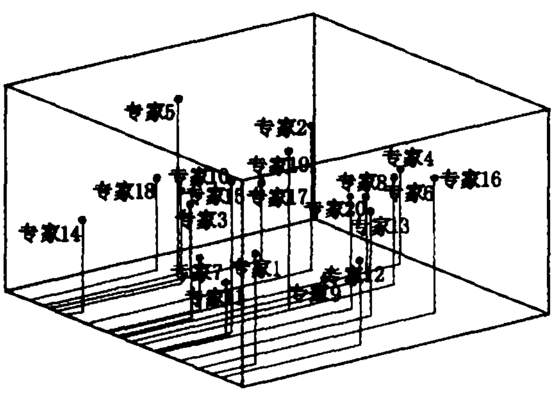
第三步,专家意见可视化结果. 采取了绘图的形式进行显示,如图 2 所示,是将专家评价结果的 20 组 20 维数据进行降维后在低维空间的可视化结果,从图 2(a)中可以看出 20 位专家对方案评价结果的聚类情况,专家 2 和专家 4 对各个方案所持意见相对来说比较相近,而专家 1 和专家 4 对各个方案评价结果相对来说存在着较大的差异,这样专家思维的聚类情况我们可直观地从可视化结果中观测到.

降维后得到的低维空间的可视化图需要注意三个问题:第一,低维空间的可视化图中的轴就其本身是无意义的;第二,图的方向是任意的,将低维空间的可视化图进行旋转,则旋转后的图和原可视化图所要表达的内容是一致的;第三,我们对降维后得到的可视化图上所关心的事情是点和点之间的聚类情况,而每个点的具体位置并不是我们所关心的. 用 Isomap 算法对人脸图降维后得到的二维空间图的坐标轴有明显的物理意义[3],而对于专家意见降维后得到的二维空间图的坐标轴,本文没有给出具体的物理意义,这是由于图像高维数据属于静态数据,通过降维后得到低维空间是根据高维数据结构特征找到的最能紧密表达它的低维空间,这个低维空间不是变化的,因此它的低维空间图可通过观察得到其坐标轴的物理意义;而专家意见属于动态数据,即每次专家对方案评价后,评价意见都会发生一次变化,就会得到一组新的数据集,对每组数据集降维后,得到的低维数据空间是根据高维数据本身内在的特征对其的紧密表达,数据集不同,数据内在的特征也不同,得到的低维空间也就不同,因此得到的低维空间的坐标轴所代表的物理意义也就不能确切给出,而这些都不是我们所关心的,我们所关心的是用低维空间中数据点之间的聚类情况来反映高维数据集的聚类情况. 通过低维可视化图观察专家对各个方案所持意见的聚类情况,展现专家意见是否一致,这才是专家意见进行可视化的目的所在.



(a)专家评价意见在二维空间中的可视化结果

(a) Two-dimensional projection of experts' opinions about scheme



(b)专家评价意见在三维空间中的可视化结果

(b) Three-dimensional projections of experts' opinions about scheme

图 2 专家对方案评估意见可视化结果

Fig. 2 Visualization of experts' opinions about scheme

4.2 实例分析二

数据降维后或多或少都会损失掉原始数据的信息,这里我们用剩余方差[3]衡量对比 Isomap 算法和 MDS 算法对上组专家评估数据进行降维结果,如图 3 所示.从图中可以看出用 Isomap 算法降维到二维和三维时的剩余方差要远小于用 MDS 算法降维后的剩余方差,由此可知,此组数据集用 Isomap 算法对研讨厅中的专家评估意见二维和三维可视化结果要优于 MDS 和 PCA 算法,然而对于动态数据,我们不能凭这一组就说 Isomap 算法对专家评估意见可视化结果要优于 MDS 和 PCA 算法,为了进一步证实这一点,我们以下用多组数据模拟专家评估意见进行了实验分析.

我们由 Isomap 算法过程可知近邻点个数的选取对低维数据是否收敛于其真实结构起着关键的作用,过多的近邻点个数会使降维后的结果失真于其真实结构,而过少的近邻点个数势必会增加计算量,因此需要选择合适的近邻点个数与数据的维数相匹配以使 Isomap 算法降维效果达到最佳状态,因此我们把近邻点的选取和 Isomap 算法与 MDS 算法可视化效果相比较结合起来对于动态数据进行了实验分析.

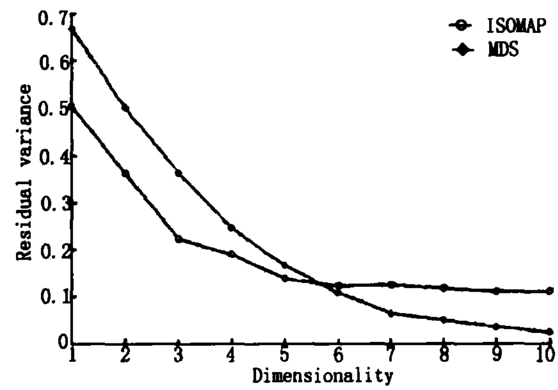


图 3 Isomap 和 MDS 降维结果比较

Fig. 3 Residual variance of Isomap and MDS

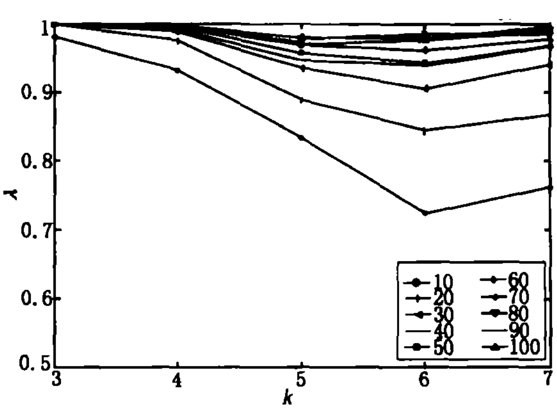


图 4 $k-\lambda$ 图

Fig. 4 $k-\lambda$ Analysis

我们用随机产生的 1 000 组百分制数据来模拟专家对方案评估结果,设参加研讨的专家有 20 名,然后分别对 10～100 种方案进行数据降维分析(由于方案本身种类的限制,我们就分析到 100 种为止).由于 Isomap 算法是基于 MDS 算法基础上改进得到的,这里我们把用 Isomap 算法降维后的剩余方差大于用 MDS 算法降维后的剩余方差作为判定近邻点个数 k 值的依据,使得对于专家评估意见这类动态数据用 Isomap 算法降维结果要优于 MDS 算法,为此我们提出数据收敛判定指标 $\lambda_{ISO-MDS}$,即 $\lambda_{ISO-MDS}=\frac{N_{ISO}}{N_{sum}}$,$N_{ISO}$ 是用 Isomap 降维后的剩余方差大于用 MDS 算法数据组数;N_{SUM} 是总的数据组

数,这里 $N_{SUM}=1\ 000$,从而来确定合适的 k 值. 如图 4 所示,横轴对应近邻个数 k 值,纵轴对应收敛指标 λ,各条折线分别对应 10 ~ 1 000 种方案时的 k-λ 图. 我们可以看到 20 种方案,即 20 维数据对应的折线时,可以看出 $k=4$ 时 λ 值接近 1,这样对于 20 个 20 维数据集,我们选近邻点个数 $k=4$ 就比较合适,这样对于专家评估意见这类动态数据,用 Isomap 算法可视化效果要优于 MDS 算法.

以上我们对维数和近邻点个数选取两者进行了分析,同样我们可通过上述类似的实验方法证明数据组的个数对近邻点也有着和维数对其同样的影响,这里我们就不详细写出其实验过程.

5 结束语

针对 1992 年钱学森提出的"从定性到定量综合集成研讨厅"体系,本文用 Isomap 算法将综合集成研讨厅中专家群体对研讨方案评价意见的多维数据进行降维,将降维后的结果在低维数据空间中进行可视化表示,用研讨实例说明了如何将专家评估结果进行可视化,并对可视化结果进行分析:(1)实现了将综合集成研讨厅专家群体评估结果的可视化;(2)针对专家评估结果的动态数据把 Isomap 算法和传统的 MDS 算法进行了比较分析;(3)对 Isomap 算法降维后得到的低维空间可视化图和动态数据集进行了分析;(4)分析了近邻点个数和数据集的关系,以便最大信息量地展示可视化结果. 实例证明用 Isomap 算法对专家评估结果这类动态数据可较好地将进行数据降维,使得从表面上看来杂乱无章的数据中找到隐藏的规律,并在低维空间中用直观的图形表示,从而为获得十分宝贵的隐知识创造条件,可使我们从可视化结果中观测到杂乱无序的意见数据中所蕴含的专家对方案所持意见的相异情况等信息,利用视觉的特点加速人对专家思维聚类情况的理解和认识,以避免研讨过程出现依赖性思维、僵化思维和发散思维等状况,为辅助决策、解释现象提供强有力的工具,为综合集成研讨厅体系提供了一种较为理想的可视化环境.

参 考 文 献

[1] Qian X S, Yu J Y, Dai R W. A New Discipline of Science—the Study of Open Complex Giant System and Its Methodology. Chinese Journal of Systems Engineering & Electronics, 1993, 4(2): 2—12

[2] Dai R W, Wang J, Tie J. Metasynthesis of Intelligent Systems. Hangzhou: Zhejiang Science & Technology Publishing House. 1995. (in Chinese)
(戴汝为,王珏,田捷. 智能系统的综合集成. 杭州:浙江科学技术出版社,1995)

[3] Tennenbaum J B, de Silva V, Langford J C. A Global Geometric Framework for Nonlinear Dimensionality Reduction. Science, 2000, 290(5500): 2319—2323

[4] Lee J, Lendasse A, Verleysen M. Curvilinear Distance Analysis Versus Isomap. In: Proc of the 10th European Symposium on Artificial Neural Networks. Bruges, Belgium, 2002, 185—192

[5] Pless R. Image Spaces and Video Trajectories: Using Isomap to Explore Video Sequences. In: Proc of the 9th IEEE International Conference on Computer Vision. Nice, France, 2003, Ⅱ: 1433—1440

[6] Roweis S, Saul L. Nonlinear Dimensionality Reduction by Locally Linear Embedding. Science, 2000, 290(5500): 2323—2326

[7] Balasubramanian M, Schwartz E L, Tenenbaum J B, de Silva V, Langford J C. The Isomap Algorithm and Topological Stability. Science, 2002, 295(5552): 7a

[8] Raykar V C. Nonlinear Dimensionality Reduction or Unfolding Manifolds. http://www.cs.umd.edu/~djacobs/CMSC828/manifolds.ppt

[9] Bernstein M, de Silva V, Langford J, Tenenbaum J. Graph Approximations to Geodesics on Embedded Manifolds. Technical Report, Department of Pyschology, Stanford University, Stanford, USA, 2000

[10] de Silva V, Tenenbaum J B. Unsupervised Learning of Curved Manifolds. In: Proc of the MSRI Workshop on Nonlinear Estimation and Classification. New York, USA: Springer-Verlag, 2002

[11] Zha H Y, Zhang Z Y. Isometric Embedding and Continuum ISOMAP. In: Proc of the 12th International Conference on Machine Learning. Washington DC, USA, 2003, 21—24

[12] M'emoli F, Sapiro G. Distance Functions and Geodesics on Points Clouds. Technical Report, 1902, IMA, University of Minnesota, Minnesota, USA, 2002

[13] Costa J, Hero A O. Manifold Learning Using Euclidean K-nearest Neighbor Graphs. In: Proc of IEEE International Conference on Acoustic Speech and Signal Processing. Montreal, Canada, 2004, http://www.eecs.umich.edu/~hero/Preprints/costa_icassp04.pdf

[14] Quist M, Yona G. Distributional Scaling: An Algorithm for Structure-Preserving Embedding of Metric and Nonmetric Spaces. Journal of Machine Learning Research, 2004, 5: 399—430

[15] de Silva V, Tenenbaum J B. Global Versus Local Methods in Nonlinear Dimensionality Reduction. Neural Information Processing Systems, 2003, 15: 705—712

[16] Cormen T H, Leiserson C E, Rivest R L. Introduction to Algorithms. Cambridge, USA: MIT Press, 1990

[17] Agrafiotis D K, Xu H. A Self-Organizing Principle for Learning Nonlinear Manifolds. Proc of the National Academy of Sciences, 2002, 99(25): 15869—15872

[18] Bishop C M, Svensen M, Williams C K I. GTM: The Generative Topographic Mapping. Neural Computation, 1998, 10(1): 215—234