·简讯·

本刊《数学思维中常用的思维方法》一文得到钱学森院士的赞赏与评价

近接广东华南师范大学教科所傅学顺教授来函，称本刊 1994 年第 2 期发表的一等奖征文《数学思维中常用的思维方法》一文，作者傅学顺与王屏山把此文作为他们合著的书——《数学思维方法》的绪论。最近得到钱学森院士的赞赏与评价。现在，我们遵照傅学顺同志的意见，将钱老对该文与该书的评价刊登于下：

傅学顺教授：

您 10 月 1 日国庆节来信及所赐尊作《数学思维方法》都收到，对此我很感谢！

近日来我只读了此书绪论，认为说得很实在，不是高不可测的空谈。它对提高我国高中数学教学可以有很大的作用，是高中数学教师的必读的书。为此我建议此书再版时，书名似可改为《中学生的数学思维方法》。这样也会引起家长们的注意，尊作将成为畅销书了！那您对培养 21 世纪的人才将起极大的推动，功在千古了！

此意当否？请教。　　此致

敬礼！

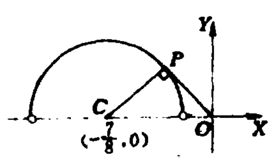
钱学森

1995.11.12

解　设 $w=\frac{z-z_1}{z-z_2}=\frac{z-2}{z+3}$（整体处理），则 $z=\frac{3w+2}{1-w}$。由题设知 $|z|=1$，所以 $\frac{|3w+2|}{|1-w|}=1$，即

$$|3w+2|=|1-w|\Rightarrow|3w+2|^2=|w-1|^2$$
$$\Rightarrow(3w+2)(\overline{3w+2})=(w-1)(\overline{w-1})$$
$$\Rightarrow(8w\bar{w}+7w+7\bar{w}+3=0$$
$$\Rightarrow w\bar{w}+\frac{7}{8}w+\frac{7}{8}\bar{w}+\frac{49}{64}=-\frac{3}{8}+\frac{49}{64}$$
$$\Rightarrow|w+\frac{7}{8}|=\frac{5}{8}。$$

这说明复数 w 对应点的轨迹为以 $(-\frac{7}{8},0)$ 为圆心，$\frac{5}{8}$ 为半径的圆的上半部分，从该圆位置可知 $\Phi\in(\frac{\pi}{2},\pi)$（如图）。



过原点 O 作该半圆切线 OP，点 P 对应的复数 w 的辐角主值最小，即 $\angle XOP=\Phi$ 的最小值，由 $|OC|=\frac{7}{8}$，$|CP|=\frac{5}{8}$，可知，$\sin\angle COP=\frac{5}{7}$，所以 Φ 的最小值为 $\pi-\arcsin\frac{5}{7}$。

例 5 与例 7 都是转化为轨迹问题求解，可以发挥熟知的解析几何知识的优势，这两个例题的实质也正是解析几何中的一类伴随曲线。

例 8　设复数 $z=\cos\theta+i\sin\theta(0<\theta<\pi)$，$w=\frac{1-(\bar{z})^4}{1+z^4}$，已知 $|w|=\frac{\sqrt{3}}{3}$，$\arg w<\frac{\pi}{2}$，求 θ。（1993 年全国高考试题（理）28）

解　$\because|z|=1$，　$z\bar{z}=1$，$w=\frac{1-(\bar{z})^4}{1+z^4}$，

$$\therefore\quad w\bar{w}=\frac{1-(\bar{z})^4}{1+z^4}\cdot\frac{1-(z)^4}{1+(\bar{z})^4}$$
$$=\frac{1-(\bar{z})^4-z^4+(z\bar{z})^4}{1+(\bar{z})^4+z^4+(z\bar{z})^4}$$
$$=\frac{2-(\bar{z}^4+z^4)}{2+(\bar{z}^4+z^4)}=\frac{2-2\cos4\theta}{2+2\cos4\theta}$$
$$=\frac{1-\cos4\theta}{1+\cos4\theta}=\mathrm{tg}^2 2\theta。$$

即　$|w|^2=\mathrm{tg}^2 2\theta$，　所以 $\mathrm{tg}2\theta=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$，

但　$0<\theta<\pi$，　$0<2\theta<2\pi$，

$\therefore$　$2\theta=\frac{\pi}{6}$，$\frac{5}{6}\pi$，$\frac{7}{6}\pi$，或 $\frac{11}{6}\pi$，

于是 $\theta=\frac{\pi}{12}$，$\frac{5}{12}\pi$，$\frac{7}{12}\pi$，或 $\frac{11}{12}\pi$。

$\because$　$0\leqslant\arg w<\frac{\pi}{2}$，

经检验可知，$\frac{5}{12}\pi$，$\frac{11}{12}\pi$ 不合条件。

$\therefore$　$\theta=\frac{\pi}{12}$，$\frac{7}{12}\pi$ 为所求。