



# 高等数学 A2

浙江理工大学期中试题汇编

(答案册)

学校: \_\_\_\_\_

专业: \_\_\_\_\_

班级: \_\_\_\_\_

姓名: \_\_\_\_\_

学号: \_\_\_\_\_

(此为 2022 年 第二版 )

## 目录

1 浙江理工大学 2020—2021 学年第 2 学期《高等数学 A2》期中答案.....	1
2 浙江理工大学 2018—2019 学年第 2 学期《高等数学 A2》期中答案.....	3
3 浙江理工大学 2017—2018 学年第 2 学期《高等数学 A2》期中答案.....	5
4 浙江理工大学 2016—2017 学年第 2 学期《高等数学 A2》期中答案.....	8
5 浙江理工大学 2015—2016 学年第 2 学期《高等数学 A2》期中答案.....	11
6 浙江理工大学 2014—2015 学年第 2 学期《高等数学 A2》期中答案.....	13
7 浙江理工大学 2013—2014 学年第 2 学期《高等数学 A2》期中答案.....	15
8 浙江理工大学 2012—2013 学年第 2 学期《高等数学 A2》期中答案.....	19
9 浙江理工大学 2011—2012 学年第 2 学期《高等数学 A2》期中答案.....	21
10 浙江理工大学 2010-2011 学年第 2 学期《高等数学 A2》期中答案.....	23
11 浙江理工大学 2009-2010 学年第 2 学期《高等数学 A2》期中答案.....	25
12 浙江理工大学 2006-2007 学年第 2 学期《高等数学 A2》期中答案.....	27
13 浙江理工大学 2005-2006 学年第 2 学期《高等数学 A2》期中答案.....	28

# 1 浙江理工大学 2020—2021 学年第 2 学期《高等数学 A2》期中答案

一 选择题 (本题共 6 小题, 每小题 4 分, 共 24 分)

1 D      2 A      3 D      4 B      5 A      6 C

二 填空题 (本题共 6 小题, 每小题 4 分, 共 24 分)

1  $(-7, -6, 8)$       2  $\frac{4}{\sqrt{29}}$       3  $dx + 2\ln 2 dy$

4  $\frac{1}{\sqrt{4(\ln 2)^2 + 1}}(-2\ln 2 + 1)$       5  $-2$       6  $\int_0^1 dx \int_x^1 f(x, y) dy$

三 计算题 (本题共 6 小题, 每小题 8 分, 共 48 分. 应写出必要的演算过程及文字说明, 直接写答案零分)

1

解. 切线方程:

$$\begin{cases} (-2)(x-1) + 4(y-1) + 4(z-1) = 0 \\ 2(x-1) - 3(y-1) + 5(z-1) = 0 \end{cases}$$

即:

$$\begin{cases} -x + 2y + 2z = 3 \\ 2x - 3y + 5z = 4 \end{cases}$$

切线方向为  $(-1, 2, 2) \times (2, -3, 5) = (16, 9, -1)$ ,

故法平面为:

$$16(x-1) + 9(y-1) - (z-1) = 0.$$

2

解. 令  $G(x, y, z) = F(x + y + z, x^2 + y^2 + z^2)$ , 由隐函数定理,  $z_x = -\frac{G_x}{G_z}$ , 又由复合函数求导法则,  $G_x = F_1 + 2F_2x$ ,  $G_z = F_1 + 2F_2z$ . 故

$$z_x = -\frac{F_1 + 2F_2x}{F_1 + 2F_2z}.$$

3

解. 考虑 Lagrange 函数  $L(x, y, z, \lambda) = x - 2y + 2z + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 1)$ .  $L$  的临界点由下面的方程组决定:

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x} = 1 + 2\lambda x = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y} = -2 + 2\lambda y = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial z} = 2 + 2\lambda z = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} = x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0. \end{cases}$$

由前三个方程得:  $x = -\frac{1}{2\lambda}, y = \frac{1}{\lambda}, z = -\frac{1}{\lambda}$ . 代入最后一个方程得:  $\frac{9}{4\lambda^2} = 1$ . 所以  $\lambda = \pm\frac{3}{2}$ . 所以可能的极值点为:  $(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}), (\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$ .  $f$  在这两点的取值分别为:  $-3$  和  $3$ . 注意该问题的几何意义是求使平面  $x - 2y + 2z = C$  与单位球面相交的  $C$  的极值, 由该几何意义知  $C$  有一个极大值, 一个极小值, 所以该条件极值问题的极大值为  $3$ , 极小值为  $-3$ .  $\square$

4

解.

$$\iint_D \frac{\sin x}{x} dx dy = \int_0^\pi \left( \int_{\pi-x}^\pi \frac{\sin x}{x} dy \right) dx$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^{\pi} \sin x dx \\
&= 2.
\end{aligned}$$

5

解. 用平行于  $xOy$  平面的平面截  $\Omega$ , 可知:

$$\begin{aligned}
V &= \iiint_{\Omega} 1 dx dy dz \\
&= \int_1^2 (\text{直角边边长为 } z \text{ 的直角三角形的面积}) dz \\
&= \int_1^2 \frac{1}{2} z^2 dz \\
&= \frac{7}{6}
\end{aligned}$$

6

解. 记  $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 - ax \leq 0\}$ , 则所求面积为:

$$\begin{aligned}
S &= \iint_D \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} dx dy \\
&= \iint_D \sqrt{1 + \frac{x^2}{x^2 + y^2} + \frac{y^2}{x^2 + y^2}} dx dy \\
&= \sqrt{2} \iint_D dx dy \\
&= \sqrt{2} \pi \cdot \frac{a^2}{4}.
\end{aligned}$$

四 (本题 4 分)

证明. 对于任意一个方向  $(u, v)$ , 极限  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(tu, tv) - f(0, 0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{u^3}{u^2 + v^2} = \frac{u^3}{u^2 + v^2}$  存在, 故沿  $(u, v)$  的方向导数存在, 第一个结论得证. 特别地, 分别令  $(u, v) = (1, 0), (u, v) = (0, 1)$  得  $f_x(0, 0) = 1, f_y(0, 0) = 0$ . 下证  $f$  在  $(0, 0)$  处不可微, 若可微, 由定义, 必有  $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{f(x, y) - f_x(0, 0)x - f_y(0, 0)y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0$ . 代入  $f, f_x, f_y$  表达式, 得:

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{x^3/(x^2 + y^2) - x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{-xy^2}{(x^2 + y^2)^{3/2}} = 0$$

又当  $(x, y)$  沿  $l = \{(x, y) \mid y = kx\}$  趋近零时, 有:

$$\lim_{l \ni (x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{-xy^2}{(x^2 + y^2)^{3/2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-k^2 x^3}{(1 + k^2)^{3/2} |x|^3},$$

该极限当  $k \neq 0$  时显然不存在 (左右极限不等), 故矛盾, 故  $f$  在  $(0, 0)$  处不可微.  $\square$

## 2 浙江理工大学 2018—2019 学年第 2 学期《高等数学 A2》期中答案

一 选择题（本题共 5 小题，每小题 4 分，共 20 分）

1 A      2 A      3 D      4 B      5 C

二 填空题（本题共 5 小题，每小题 4 分，共 20 分）

$$1 \quad (1, 2, 3) \quad 2 \quad 4f''_{11} + \frac{4}{y} f''_{12} + \frac{1}{y^2} f''_{22} \quad 3 \quad (1, 1, 2)$$

$$4 \quad (1, 1, 1) \quad 5 \quad dz = (y + \frac{1}{y})dx + (x - \frac{x}{y^2})dy$$

三 计算题（本题共 6 小题，每小题 8 分，共 48 分。应写出必要的演算过程及文字说明，直接写答案零分）

1、解 由题意知过  $L_1$  上的点  $(1, 2, 3)$  (1 分)

$L_1$  的方向向量为  $\vec{s}_1 = (1, 0, -1)$ ， $L_2$  的方向向量为  $\vec{s}_2 = (2, 1, 1)$ ，设平面  $\pi$  的法向量为

$\vec{n}$ ，则  $\vec{n} \perp \vec{s}_1$ ， $\vec{n} \perp \vec{s}_2$  垂直 (3 分)

故可取

$$\vec{n} = \vec{s}_1 \times \vec{s}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (1, -3, 1) \quad (6 \text{ 分})$$

于是平面  $\pi$  的方程为  $x - 3y + z + 2 = 0$  (8 分)

2、解：  $\begin{cases} y^2 - u_x v - u v_x = 0 \\ 2x - u_x + v_x = 0 \end{cases}$ , (3 分)

$$u_x = \frac{y^2 + 2xu}{u + v}; \quad v_x = \frac{y^2 - 2xv}{u + v}; \quad (3 \text{ 分})$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = e^{u+v} \frac{2[x(u-v) + y^2]}{u+v}. \quad (2 \text{ 分})$$

3、  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{\sqrt{2-e^{xy}} - 1} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{1-e^{xy}} (\sqrt{2-e^{xy}} + 1) = -1 \cdot 2 = -2$  (8 分)

4、解： 由题意，作拉格朗日函数

$$L(x, y, z, \lambda) = xyz + \lambda(xy + yz + xz - 6), \quad (3 \text{ 分})$$

解方程组

$$\begin{cases} yz + \lambda(y + z) = 0, \\ xz + \lambda(x + z) = 0, \\ xy + \lambda(y + x) = 0, \end{cases} \quad (3 \text{ 分})$$

得  $x = y = z = \sqrt{2}$ ，这是唯一可能的极值点. 因由问题本身可知最大值一定存在，所以最大值就在这个可能的极值点处取得， $f$  的最大值为  $V = 2\sqrt{2}$ . (2 分)

5、

$$\text{解 } \frac{\partial z}{\partial x} = f'_1 \cdot e^x \sin y + f'_2 \cdot 2x \quad (3 \text{ 分})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= e^x \cos y \cdot f'_1 + e^x \sin y (f''_{11} \cdot e^x \cos y + f''_{12} \cdot 2y) + 2x (f''_{21} \cdot e^x \cos y + f''_{22} \cdot 2y) \\ &= f''_{11} \cdot e^{2x} \sin y \cos y + 2f''_{12} \cdot e^x (y \sin y + x \cos y) + 4f''_{22} \cdot xy + f'_1 \cdot e^x \cos y \end{aligned} \quad (8 \text{ 分})$$

$$6、\text{解 } x^2 + y^2 = 2y \Rightarrow r = 2 \sin \theta \quad (2 \text{ 分})$$

$$x^2 + y^2 = 4y \Rightarrow r = 4 \sin \theta \quad (2 \text{ 分})$$

$$y - \sqrt{3}x = 0 \Rightarrow \theta_2 = \frac{\pi}{3}$$

$$x - \sqrt{3}y = 0 \Rightarrow \theta_1 = \frac{\pi}{6} \quad (2 \text{ 分})$$

$$\therefore \iint_D (x^2 + y^2) dx dy = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} d\theta \int_{2\sin\theta}^{4\sin\theta} r^2 \cdot r dr = 15 \left( \frac{\pi}{2} - \sqrt{3} \right) \quad (2 \text{ 分})$$

四、证明题

$$1、\text{证 } x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = x[y + F(u) + xF'(u) \frac{\partial u}{\partial x}] + y[x + xF'(u) \frac{\partial u}{\partial y}]$$

$$= x[y + F(u) - \frac{y}{x} F'(u)] + y[x + F'(u)]$$

$$= xy + xF(u) + xy = z + xy$$

2、证 设  $F(x, y, z) = \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} - \sqrt{a}$ ，则曲面在点  $(x, y, z)$  处的一个法向量

$$\vec{n} = \left( \frac{1}{2\sqrt{x}}, \frac{1}{2\sqrt{y}}, \frac{1}{2\sqrt{z}} \right)$$

在曲面上任取一点  $M(x_0, y_0, z_0)$ ，则曲面在点  $M$  处的切平面方程为

$$\frac{1}{2\sqrt{x_0}}(x - x_0) + \frac{1}{2\sqrt{y_0}}(y - y_0) + \frac{1}{2\sqrt{z_0}}(z - z_0) = 0$$

$$\text{即 } \frac{x}{\sqrt{x_0}} + \frac{y}{\sqrt{y_0}} + \frac{z}{\sqrt{z_0}} = \sqrt{x_0} + \sqrt{y_0} + \sqrt{z_0} = \sqrt{a}$$

化为截距式得

$$\frac{x}{\sqrt{ax_0}} + \frac{y}{\sqrt{ay_0}} + \frac{z}{\sqrt{az_0}} = 1$$

所以截距之和为

$$\sqrt{ax_0} + \sqrt{ay_0} + \sqrt{az_0} = \sqrt{a}(\sqrt{x_0} + \sqrt{y_0} + \sqrt{z_0}) = a$$

### 3 浙江理工大学 2017—2018 学年第 2 学期《高等数学 A2》期中答案

一 选择题 (本题共 6 小题, 每小题 4 分, 共 24 分)

1 D      2 A      3 C      4 C      5 C      6 B

二 填空题 (本题共 6 小题, 每小题 4 分, 共 24 分)

1  $(1, 2, -3)$       2  $(\frac{4}{5}, -\frac{3}{5})$       3  $y'' - 2y' + y = 0$

4  $\frac{5}{4}$       5 2      6  $\frac{4}{3}$

三 计算题 (本题共 5 小题, 每小题 8 分, 满分 40 分)

1 解: 可得特征方程  $r^2 + 2r - 3 = 0$ , 解得  $r_1 = 1, r_2 = -3$

$\therefore$  非齐次的通解 = 齐次的通解 + 非齐次的特解,

$$\therefore y'' + 2y' - 3y = e^{-3x}$$

$\therefore \lambda$  为特征方程的一个根

$$\therefore \text{设 } y^* = Axe^{-3x}$$

$$y' = Ae^{-3x} - 3Axe^{-3x}$$

$$y'' = -3Ae^{-3x} - 3Ae^{-3x} + 9Axe^{-3x} = -6Ae^{-3x} + 9Axe^{-3x}$$

$$9Axe^{-3x} - 6Ae^{-3x} + 2(Ae^{-3x} - 3Axe^{-3x}) - 3Axe^{-3x} = e^{-3x}, \text{ 解得 } A = -\frac{1}{4}$$

$$\therefore y^* = -\frac{1}{4}xe^{-3x}$$

$$\therefore y \text{ 的通解为 } C_1e^{-3x} + C_2e^x - \frac{1}{4}xe^{-3x}$$

2 解: 设点  $P$  为  $(x_0, y_0, z_0)$

$$F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 14$$

$$F_x = 2x \quad F_y = 2y \quad F_z = 2z$$

$$\therefore \text{可取 } \vec{n} = (x_0, y_0, z_0)$$

$$\text{又 } \therefore \vec{n} \parallel (1, -2, 3)$$

$$\begin{cases} \frac{x_0}{1} = \frac{y_0}{-2} = \frac{z_0}{3} \\ x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = 14 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_0 = 1 \\ y_0 = -2 \\ z_0 = 3 \end{cases} \text{ or } \begin{cases} x_0 = -1 \\ y_0 = 2 \\ z_0 = -3 \end{cases}$$

$$\therefore P_1(1, -2, 3), \quad \vec{n} = (1, -2, 3)$$

$$\textcircled{1} \text{ 得? : } 1 \cdot (x-1) - 2 \cdot (y+2) + 3 \cdot (z-3) = 0$$

$$\text{即 } x - 2y + 3z - 14 = 0$$

(?处填写为 $\pi_1$ )

$$P_2(-1, 2, -3), \quad \vec{n} = (1, -2, 3)$$

$$\textcircled{2} \text{ 得? : } 1 \cdot (x+1) - 2 \cdot (y-2) + 3 \cdot (z+3) = 0$$

$$\text{即 } x - 2y + 3z + 14 = 0$$

(?处填写为 $\pi_2$ )

3、解：法一：方程两边同关于  $x$  求偏导， $z$  看作  $x$  的函数， $y$  看作常数。

$$2x + 2z \cdot \frac{\partial z}{\partial x} - 4 \frac{\partial z}{\partial x} = 0 \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x}{2-z}$$

$$\text{同理可得：} \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{2-z}$$

$$\text{法二：令 } F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 4z$$

$$F_x = 2x, F_y = 2y, F_z = 2z - 4$$

$$\therefore \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z} = \frac{x}{2-z}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z} = \frac{y}{2-z}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial \left( \frac{x}{2-z} \right)}{\partial y} = \frac{0 - x \cdot \left( -\frac{\partial z}{\partial y} \right)}{(2-z)^2} = \frac{xy}{(2-z)^3}$$

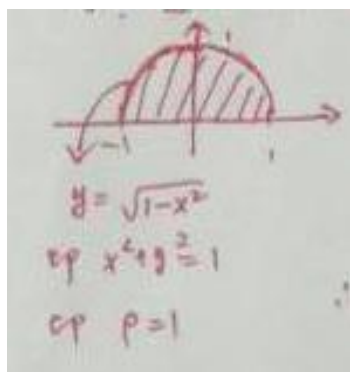
4、解：选用极坐标（ $\because \ln(x^2 + y^2 + 1)$  无论关于  $x$  还是  $y$  都积不出）

$$\textcircled{1} \ln(x^2 + y^2 + 1) = \ln(\rho^2 + 1)$$

$$\textcircled{2} dx dy = \rho d\rho d\theta$$

$$\textcircled{3} D, \begin{cases} 0 \leq \theta \leq \pi \\ 0 \leq \rho \leq 1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} I &= \int_0^\pi d\theta \int_0^1 \ln(\rho^2 + 1) \rho d\rho \\ &= \frac{1}{2} \int_0^\pi d\theta \int_0^1 \ln(\rho^2 + 1) d(\rho^2 + 1) \\ \therefore &= \frac{\pi}{2} \cdot \left[ (\rho^2 + 1) \cdot \ln(\rho^2 + 1) \right]_0^1 - \int_0^1 1 d(\rho^2 + 1) \\ &= \frac{\pi}{2} (2 \ln 2 - 1) \end{aligned}$$





$$5、解: \left. \begin{array}{l} z = x^2 \rightarrow \text{绕} z \text{轴} \rightarrow z = x^2 + y^2 \\ z = 2 - x^2 \rightarrow \text{绕} z \text{轴} \rightarrow z = 2 - x^2 - y^2 \end{array} \right\} \Rightarrow x = y \text{面投影区域: } x^2 + y^2 \leq 1$$

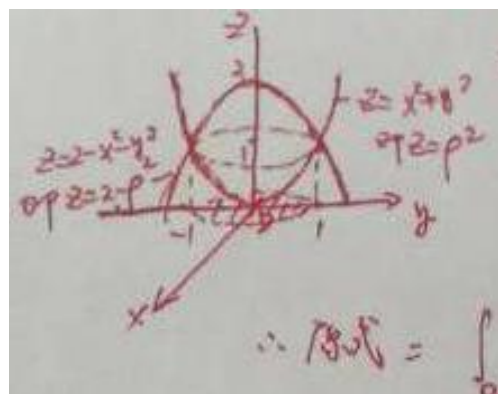
选用柱面坐标法,  $(\sqrt{x^2 + y^2} = \rho, dv = \rho d\rho d\theta dz)$

$$\textcircled{1} \text{投影: 得 } D_{\rho\theta}: \rho \leq 1 \text{ 即 } \begin{cases} 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ 0 \leq \rho \leq 1 \end{cases}$$

$$\textcircled{2} \text{投影: 得 } z \text{ 从 } z = \rho^2 \text{ 进, 从 } z = 2 - \rho^2 \text{ 出}$$

$$\therefore \rho^2 \leq z \leq 2 - \rho^2$$

$$\begin{aligned} \therefore \text{原式} &= \int_{D_{\rho\theta}} \int_{\rho^2}^{2-\rho^2} \rho dz) \rho d\rho d\theta \\ &= \int_{D_{\rho\theta}} \int \rho^2 \cdot (2 - \rho^2 - \rho^2) d\rho d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 (2\rho^2 - 2\rho^4) d\rho \\ &= 2\pi \cdot \left(\frac{2}{3} - \frac{2}{5}\right) \\ &= \frac{8}{15}\pi \end{aligned}$$



四 应用题 (本题满分 6 分)

$$\text{解: 设 } L(x, y, z) = 8x^2 + 4yz - 16z + 600 + \lambda(4x^2 + y^2 + 4z^2 - 16)$$

$$\text{令 } \begin{cases} L_x = 16x + 8x\lambda = 0 & \Rightarrow \textcircled{1} x = 0; \textcircled{2} \lambda = -2 \\ L_y = 4z + 2\lambda y = 0 & \Rightarrow \lambda = \frac{-2z}{y} \\ L_z = 4y - 16 + 8\lambda z = 0 & \Rightarrow \lambda = \frac{4-y}{2z} \\ L_\lambda = 4x^2 + y^2 + 4z^2 - 16 = 0 \end{cases}$$

$$\text{由 } \lambda = \frac{-2z}{y} = \frac{4-y}{2z} \Rightarrow 4z^2 = y^2 - 4y$$

$$\begin{aligned} \textcircled{1} x = 0, 4z^2 = y^2 - 4y \quad & \text{代入 } 4x^2 + y^2 + 4z^2 - 16 = 0 \Rightarrow y = 4, y = -2 \\ \Rightarrow z = 0, z = \pm\sqrt{3} \quad & \Rightarrow \text{拐点 } (0, 4, 0), (0, -2, \sqrt{3}), (0, -2, -\sqrt{3}) \end{aligned}$$

$$\textcircled{2} \lambda = -2 \Rightarrow z = y, y - 4 - 4z = 0 \Rightarrow y = z = -\frac{4}{3}, x = \pm\frac{4}{3}$$

$$\Rightarrow \text{拐点 } \left(-\frac{4}{3}, -\frac{4}{3}, -\frac{4}{3}\right), \left(\frac{4}{3}, -\frac{4}{3}, -\frac{4}{3}\right)$$

$$T_1(0, 4, 0) = 600$$

$$\min: T_2(0, -2, +\sqrt{3}) = 600 - 24\sqrt{3} \quad T_4\left(-\frac{4}{3}, -\frac{4}{3}, -\frac{4}{3}\right) = 614.2$$

$$\max: T_3(0, -2, -\sqrt{3}) = 600 + 24\sqrt{3} \quad T_5\left(+\frac{4}{3}, -\frac{4}{3}, -\frac{4}{3}\right) = 614.2$$

(勘误: 将 614.2 改为 614.2̄, 即循环小数, 两个都要改)

五 证明题 (本题满分 6 分)

$$(1) \text{解: 设 } F(x, y, z) = \frac{x}{z} - \varphi\left(\frac{y}{z}\right)$$

$$F_x = \frac{1}{z} \quad F_y = -\varphi' \frac{1}{z} \quad F_z = -\frac{x}{z^2} + \varphi' \frac{y}{z^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z} = \frac{-z}{\varphi' y - x} \quad \frac{\varphi z}{\varphi y} = -\frac{F_y}{F_z} = \frac{z\varphi'}{\varphi' y - x}$$

$$\therefore x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = 2$$

(勘误: 将 “2” 改为 “z” )

解(2): 在(1)的基础上同时对  $x$  求偏导

$$\frac{\partial z}{\partial x} + x \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + y \frac{\partial^2 z}{\partial z \partial x} = \frac{\partial z}{\partial x} \Rightarrow \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{y}{x} \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$$

在(1)的基础上同时对  $y$  求偏导

$$x \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial z}{\partial y} + y \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial z} = \frac{\partial z}{\partial y} \Rightarrow \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{x}{y} \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$$

$$\therefore \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \left( \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right)^2$$

#### 4 浙江理工大学 2016—2017 学年第 2 学期《高等数学 A2》期中答案

一 选择题 (本题共 6 小题, 每小题 4 分, 满分 24 分)

1 C      2 C      3 D      4 C      5 D      6 D

二 填空题 (本题共 6 小题, 每小题 4 分, 满分 24 分)

1  $e^2 dx + 2e^2 dy$ ;

2  $\begin{cases} x = -2t + 1 \\ y = t + 1 \\ z = 3t + 1 \end{cases}$  (点不唯一);

3  $2\sqrt{3}$

4  $\cos \alpha = \frac{2}{\sqrt{21}}, \cos \beta = \frac{-4}{\sqrt{21}}, \cos \gamma = \frac{1}{\sqrt{21}}$

5  $(1, 2, 2)$

6  $\int_0^1 dy \int_{ey}^e f(x, y) dx$

三、解答题（本题共 5 小题，每小题 6 分，满分 30 分）

1

解:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f'_1 \cdot (-1) + f'_2 \cdot ye^x$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= -(f''_{11} \cdot 1 + f''_{12} \cdot e^x) + e^x \cdot f'_2 + ye^x \cdot (f''_{21} \cdot 1 + f''_{22} \cdot e^x) \\ &= -f''_{11} + (y-1)e^x f''_{12} + ye^{2x} f''_{22} + e^x f'_2 \end{aligned}$$

2

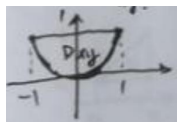
$$\begin{aligned} \text{解: } I &= \frac{1}{2} \iint_D (x^2 + y^2) d\sigma = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\Theta \int_0^2 \rho^2 \rho d\rho \\ &= \pi \frac{\rho^4}{4} \Big|_0^2 = 4\pi \end{aligned}$$

3 联立  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$  与  $z^2 = 2x$ , 消去  $z$  得:  $(x-1)^2 + y^2 = 1$  或  $\rho = 2\cos\theta$ .

$$\text{围成区域 } D_{xy}, z_x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, z_y = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} = \sqrt{1 + \frac{x^2}{x^2 + y^2} + \frac{y^2}{x^2 + y^2}} = \sqrt{2}$$

$$\text{所以面积 } A = \iint_{D_{xy}} \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} dx dy = \iint_{D_{xy}} \sqrt{2} dx dy = \sqrt{2} S_{D_{xy}} = \sqrt{2}\pi.$$

4 作图如下:



$$\Rightarrow I = \int_{-1}^1 dx \int_{x^2}^1 dy \int_0^{\sqrt{x^2 + y^2}} f(x, y, z) dz$$

5 即  $\frac{x}{z} = \ln z - \ln y$ .

$$\text{令 } F(x, y, z) = \frac{x}{z} - \ln z + \ln y, \text{ 得: } F_x = \frac{1}{z}, F_y = \frac{1}{y}, F_z = -\frac{x}{z^2} - \frac{1}{z}.$$

$$\therefore \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z} = \frac{\frac{1}{z}}{-\frac{x}{z^2} - \frac{1}{z}} = \frac{z}{x+z}, \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z} = \frac{\frac{1}{y}}{-\frac{x}{z^2} - \frac{1}{z}} = \frac{z^2}{xy+yz}$$

四 综合题（第 1、2 题每题 7 分，第 3、4 题每题 4 分，共 22 分）

1 设切点  $(x_0, y_0, \frac{x_0^2 + y_0^2}{2})$ .

$$\text{令 } F(x, y, z) = x^2 + y^2 - 2z, \text{ 得: } F_x = 2x, F_y = 2y, F_z = -2. \text{ 取 } \vec{n} = (x_0, y_0, -1).$$

$$\begin{cases} 6x + 2y \cdot \frac{dy}{dx} + 2z \cdot \frac{dz}{dx} = 0 \\ 4x + 2y \cdot \frac{dy}{dx} - 4 \cdot \frac{dz}{dx} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{dy}{dx} = 4 \\ \frac{dz}{dx} = -1 \end{cases} \Rightarrow \vec{T} = (1, -4, 1).$$

$$\because \vec{n} \cdot \vec{T} = 0, \therefore x_0 = -1 - 4y_0. \text{ ①}$$

$$\text{又 } \because \text{切平面方程: } x_0 \cdot (x - x_0) + y_0 \cdot (y - y_0) - (z - \frac{x_0^2 + y_0^2}{2}) = 0, \text{ 且过 } (1, -1, -1)$$

$$\therefore x_0 - x_0^2 - y_0 - y_0^2 + 1 + \frac{x_0^2 + y_0^2}{2} = 0 \quad ②$$

$$\text{由①和②解得: } \begin{cases} x_0 = 3 \\ y_0 = -1 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x_0 = -\frac{13}{17} \\ y_0 = -\frac{1}{17} \end{cases}$$

$$\therefore \text{切平面方程为: } 3x - y - z - 5 = 0 \text{ 或 } 13x + y + 7z + 5 = 0$$

(拓展题说明: 将拓展题部分的“曲线”二字改为“曲面”)

拓展题解答:

$$\text{根据上面给的思路可解得: } \vec{n} = (x_0, y_0, -1), \quad \vec{T} = (1, 1, 2).$$

$$\text{由 } \vec{n} \perp \vec{T} \text{ 且切平面过点 } (1, -1, -1) \text{ 得: } \begin{cases} x_0 = 1 \\ y_0 = 1 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x_0 = 3 \\ y_0 = -1 \end{cases}$$

$$\therefore \text{切平面方程为: } x + y - z - 1 = 0 \text{ 或 } 3x - y - z - 5 = 0$$

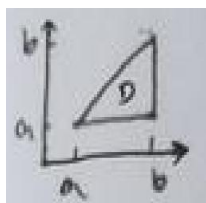
$$2 \text{ 利润 } R = px - cx = (p - c_0 + k \ln x) \cdot x = [(1 - ak)p + k \ln M - c_0] \cdot M \cdot e^{-ap}$$

$$\text{令 } \frac{dR}{dp} = (1 - ak) \cdot M \cdot e^{-ap} - aM[(1 - ak)p + k \ln M - c_0] \cdot e^{-ap} = 0$$

$$\text{得唯一驻点: } p = \frac{-ak \ln M + ak - 1 - ac_0}{a(1 - ak)} \text{ 即为所求.}$$

(说明: 本题与第 8 套试题 2012-2013 学年的第五道建模题一样。页数为 P29)

$$3 \text{ 作图如下:} \quad \text{处理左式: 想到交换积分次序} \Rightarrow \int_a^b dy \int_y^b f(y) dx$$



$$= \int_a^b f(y)(b - y) dy$$

$$= \int_a^b f(x)(b - x) dx$$

4 任意取曲面上一点  $(x_0, y_0, z_0)$

$$\text{令 } F(x, y, z) = \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} - \sqrt{a}.$$

$$\text{则 } F_x = \frac{1}{2\sqrt{x}}, F_y = \frac{1}{2\sqrt{y}}, F_z = \frac{1}{2\sqrt{z}}.$$

$$\text{法向量: } \vec{n} = \left( \frac{1}{\sqrt{x_0}}, \frac{1}{\sqrt{y_0}}, \frac{1}{\sqrt{z_0}} \right),$$

$$\text{点向式写出切平面: } \frac{1}{\sqrt{x_0}}(x - x_0) + \frac{1}{\sqrt{y_0}}(y - y_0) + \frac{1}{\sqrt{z_0}}(z - z_0) = 0.$$

$$\text{即 } \frac{x}{\sqrt{x_0}} + \frac{y}{\sqrt{y_0}} + \frac{z}{\sqrt{z_0}} - \sqrt{a} = 0$$

$$x \text{ 轴上截距: } p = \sqrt{ax_0}, \quad y \text{ 轴上截距: } q = \sqrt{ay_0}, \quad z \text{ 轴上截距: } r = \sqrt{az_0},$$

$$\text{则 } p + q + r = \sqrt{a} \cdot (\sqrt{x_0} + \sqrt{y_0} + \sqrt{z_0}) = \sqrt{a} \cdot \sqrt{a} = a,$$

得证。

## 5 浙江理工大学 2015—2016 学年第 2 学期《高等数学 A2》期中答案

一、选择题 (本题共 6 小题, 每小题 4 分, 满分 24 分)

1. A; 2. C; 3. A; 4. D; 5. A; 6. A

二、填空题 (本题共 5 小题, 每小题 4 分, 满分 20 分)

1.  $x - 3y + z + 2 = 0$ ;

2.  $\frac{x-2}{\sqrt{2}} = \frac{y-\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{z-\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ ;  $\frac{x-2}{4} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-4}{-1}$ ; 3. 51;

4.  $\frac{\sqrt{6}}{2}(dx - dy)$ ;

5.  $\int_0^2 dx \int_0^{1-x} f(x, y) dy$

三、解答题 (本题共 7 小题, 每小题 6 分, 满分 42 分)

1. 解 将直线  $l$  的方程改写成一般式:  $\begin{cases} x - y - 1 = 0, \\ y + z - 1 = 0. \end{cases}$  过  $l$  的平面束方程为

$$(x - y - 1) + \lambda(y + z - 1) = 0, \text{ 即 } x + (\lambda - 1)y + \lambda z - (1 + \lambda) = 0.$$

由向量  $(1, \lambda - 1, \lambda)$  与  $(1, -1, 2)$  垂直得  $\lambda = -2$ . 从而  $l_0$  的方程为

$$\begin{cases} x - 3y - 2z + 1 = 0, \\ x - y + 2z - 1 = 0, \end{cases} \text{ 即 } \begin{cases} x = 2y, \\ z = -\frac{1}{2}(y - 1). \end{cases}$$

设  $l_0$  绕  $y$  轴旋转一周所得的曲面为  $S$ ,  $(x, y, z)$  为  $S$  上的任意一点, 则改点由  $l_0$  上的一点

$(x_0, y_0, z_0)$  绕  $y$  轴旋转而得, 于是有关系:  $y = y_0$ ,

$$x^2 + z^2 = x_0^2 + z_0^2 = (2y_0)^2 + \left[-\frac{1}{2}(y_0 - 1)\right]^2 = 4y^2 + \frac{1}{4}(y - 1)^2,$$

从而得  $S$  的方程为  $4x^2 - 17y^2 + 4z^2 + 2y - 1 = 0$ .

2. 解  $u_x = -\frac{xu + yv}{x^2 + y^2}, v_x = \frac{uy - xv}{x^2 + y^2}, u_y = \frac{xv - yu}{x^2 + y^2}, v_y = -\frac{xu + yv}{x^2 + y^2}$ . (书 90 页例 3.)

3. 解 切线方程:  $\frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{0} = \frac{z-1}{-1},$

法平面方程:  $(x-1) - (z-1) = 0$ , 或  $x - z = 0$ . (书 99 页例 5)

4. 解 设  $D_1 = \{0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x\}, D_2 = \{0 \leq x \leq 1, x \leq y \leq 1\}$ , 则

$$\begin{aligned}
\iint_D e^{\max\{x^2, y^2\}} dx dy &= \iint_{D_1} e^{\max\{x^2, y^2\}} dx dy + \iint_{D_2} e^{\max\{x^2, y^2\}} dx dy \\
&= \iint_{D_1} e^{x^2} dx dy + \iint_{D_2} e^{y^2} dx dy = \int_0^1 dx \int_0^x e^{x^2} dy + \int_0^1 dy \int_y^1 e^{y^2} dx \\
&= \int_0^1 x e^{x^2} dx + \int_0^1 y e^{y^2} dy = e - 1.
\end{aligned}$$

5. 解 投影区域为  $D_{xy} = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1\}$ . 柱面坐标

$\Omega = \{\rho^2 \leq z \leq \sqrt{2-\rho^2}, 0 \leq \rho \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$ , 于是

$$\begin{aligned}
\iiint_{\Omega} z dv &= \iiint_{\Omega} z \rho d\rho d\theta dz = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \rho d\rho \int_{\rho^2}^{\sqrt{2-\rho^2}} z dz \\
&= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \rho (2 - \rho^2 - \rho^4) d\rho = \frac{7}{12} \pi.
\end{aligned}$$

6. 解  $z_x = z_u + z_v, z_y = -2z_u + az_v, z_{xx} = z_{uu} + 2z_{uv} + z_{vv}, z_{yy} = 4z_{uu} - 4az_{uv} + a^2 z_{vv},$

$z_{xy} = -2z_{uv} + (a-2)z_{uv} + az_{vv}$ . 将上述结果代入原方程, 整理的

$$(10+5a) z_{uv} + (6+a-a^2) z_{vv} = 0.$$

依题意  $a$  应满足:  $10+5a \neq 0, 6+a-a^2 = 0$ , 解得  $a = 3$ .

#### 四、应用题 (本题 10 分)

解 记雪堆体积为  $V$ , 侧面积为  $S$ , 则

$$V = \int_0^{h(t)} dz \iint_{D_z} dx dy = \frac{\pi}{4} h^3(t), \text{ 其中 } D_z: x^2 + y^2 \leq \frac{1}{2} [h^2(t) - h(t)z],$$

$$\begin{aligned}
S &= \iint_{D_0} \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} dx dy = \iint_{D_0} \sqrt{1 + \frac{16(x^2 + y^2)}{h^2(t)}} dx dy \\
&= \frac{2\pi}{h(t)} \int_0^{\frac{h(t)}{\sqrt{2}}} \sqrt{h^2(t) + 16\rho^2} \rho d\rho = \frac{13\pi}{12} h^2(t), \text{ 其中 } D_0: x^2 + y^2 \leq \frac{1}{2} h^2(t),
\end{aligned}$$

$$\text{由题意知 } \frac{dV}{dt} = -0.9S, \text{ 从而 } \begin{cases} \frac{dh}{dt} = -\frac{13}{10} \\ h(0) = 130 \end{cases} \Rightarrow h(t) = -\frac{13}{10}t + 130, \text{ 令 } h(t) \rightarrow 0, \text{ 得 } t = 100(h),$$

因此高度为 130 厘米的雪堆全部融化所需的时间为 100 小时.

五、证明题（本题共 2 小题，第 1 小题 4 分，第 2 小题 6 分，满分 10 分）

$$1. \min\{f(x, y)\} \iint_D g(x, y) d\sigma \leq \iint_D f(x, y) g(x, y) d\sigma \leq \max\{f(x, y)\} \iint_D g(x, y) d\sigma,$$

$$\text{即 } \min\{f(x, y)\} \leq \frac{\iint_D f(x, y) g(x, y) d\sigma}{\iint_D g(x, y) d\sigma} \leq \max\{f(x, y)\}$$

$$\text{从而至少存在 } (\xi, \eta), \text{ 使得 } f(\xi, \eta) = \frac{\iint_D f(x, y) g(x, y) d\sigma}{\iint_D g(x, y) d\sigma}.$$

2. 证明 (1) 因  $|xy \sin \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}| \leq |xy|$ , 所以  $\lim_{x \rightarrow 0, y \rightarrow 0} f(x, y) = 0 = f(0, 0)$ , 从而  $f(x, y)$  在

$(0, 0)$  处连续. 因为  $f(x, 0) = f(0, y) = 0$ , 所以  $f_x(0, 0) = f_y(0, 0) = 0$ .

$$(1) \text{ 当 } (x, y) \neq (0, 0) \text{ 时, } f_x(x, y) = y \sin \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} - \frac{x^2 y}{\sqrt{(x^2 + y^2)^3}} \cos \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

当点  $P(x, y)$  沿射线  $y = |x|$  趋于  $(0, 0)$  时,

$$\lim_{(x, |x|) \rightarrow (0, 0)} f_x(x, y) = \lim_{x \rightarrow 0} (|x| \sin \frac{1}{\sqrt{2}|x|} - \frac{|x|^3}{2\sqrt{2}|x|^3} \cos \frac{1}{\sqrt{2}|x|})$$

极限不存在, 所以  $f_x(x, y)$  在点  $(0, 0)$  处不连续. 同样可得  $f_y(x, y)$  在点  $(0, 0)$  处不连续.

(2) 令  $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ , 则

$$|\frac{\Delta f - f_x(x, y)\Delta x - f_y(x, y)\Delta y}{\rho}| = |\frac{\Delta x \Delta y}{\rho} \sin \frac{1}{\rho}| \leq |\Delta x| \xrightarrow{\rho \rightarrow 0} 0,$$

所以  $f(x, y)$  在  $(0, 0)$  处可微.

## 6 浙江理工大学 2014—2015 学年第 2 学期《高等数学 A2》期中答案

一 选择题（本题共 6 小题，每小题 4 分，共 24 分）

1 C      2 D      3 B      4 B      5 C      6 A

二 填空题（本题共 6 小题，每小题 4 分，共 24 分）

$$1 \quad \begin{cases} 9x+8y-7z-21=0 \\ 5x-3y+3z-9=0 \end{cases} \quad 2 \quad x+y+z-3=0 \quad 3 \quad 4dx+4dy$$

$$4 \quad \left(-\frac{1}{2\sqrt{2}}, \frac{1}{2\sqrt{2}}, 0\right) \quad 5 \quad \frac{\pi}{4} \quad 6 \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin \varphi d\varphi \int_0^1 f(r \sin \varphi \sin \theta, r \cos \varphi) r^2 dr$$

三 计算题（本题共 6 小题，每小题 6 分，共 36 分。应写出必要的演算过程及文字说明，直接写答案零分）

$$1 \text{ 解: } \frac{\partial z}{\partial x} = f - \frac{y}{x} f' - \frac{y}{x^2} \varphi', \quad \frac{\partial z}{\partial y} = f' + \frac{1}{x} \varphi'$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{y^2}{x^3} f'' + \frac{2y}{x^3} \varphi' + \frac{y^2}{x^4} \varphi'', \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\frac{y}{x^2} f'' - \frac{1}{x^2} \varphi' - \frac{y}{x^3} \varphi'', \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{1}{x} f'' + \frac{1}{x^2} \varphi''$$

$$\therefore x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

2 解法一：方程组两边关于 x 求导，把 y、z 看作 x 的函数

$$\begin{cases} \frac{dz}{dx} = 1 \cdot f + x \cdot f' \cdot \left(1 + \frac{dy}{dx}\right) \\ F_x \cdot 1 + F_y \cdot \frac{dy}{dx} + F_z \cdot \frac{dz}{dx} = 0 \end{cases} \text{ 解得: } \frac{dz}{dx} = \frac{f \cdot F_y + x f' \cdot F_y - x f' \cdot F_x}{F_y + x f' \cdot F_z}.$$

解法二：  $z = xf(x+y) \Rightarrow dz = (f + xf')dx + xf'dy$  ( $f$  可微)

$$F(x, y, z) = 0 \Rightarrow F_x dx + F_y dy + F_z dz = 0 \quad (F \text{ 可微})$$

$$\text{解得: } \frac{dz}{dx} = \frac{f \cdot F_y + x f' \cdot F_y - x f' \cdot F_x}{F_y + x f' \cdot F_z}.$$

$$3 \text{ 解: } \vec{n} = (4, 6, 2) \Rightarrow \vec{e}_{\vec{n}} = \left(\frac{2}{\sqrt{14}}, \frac{3}{\sqrt{14}}, \frac{1}{\sqrt{14}}\right)$$

$$\nabla u(1, 1, 1) = \left(\frac{6x}{z\sqrt{6x^2+8y^2}}, \frac{8y}{z\sqrt{6x^2+8y^2}}, -\frac{\sqrt{6x^2+8y^2}}{z^2}\right) \Big|_{(1,1,1)} = \left(\frac{6}{\sqrt{14}}, \frac{8}{\sqrt{14}}, -\sqrt{14}\right)$$

$$\therefore \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} \Big|_{(1,1,1)} = \nabla u(1, 1, 1) \cdot \vec{e}_{\vec{n}} = \frac{11}{7}.$$

$$4 \text{ 书本 P146, 例 4} \quad V = \frac{16}{3} R^3.$$

$$5 \text{ 解: } \iint_D \frac{1+xy}{1+x^2+y^2} dx dy = \iint_D \frac{1}{1+x^2+y^2} dx dy \stackrel{\text{极坐标}}{=} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^1 \frac{\rho}{1+\rho^2} d\rho = \frac{\ln 2}{2}.$$

$$6 \text{ 解: 原式} \stackrel{\text{截面法}}{=} \int_1^2 dz \iint_{D_z} (x^2 + y^2 + z^2) dx dy = \int_1^2 \left[ \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{z}} \rho^2 \cdot \rho d\rho \right] dz + \int_1^2 z^2 \cdot S_{D_z} dz$$



$$= \int_1^2 \frac{\pi}{2} z^2 dz + \int_1^2 \pi z^3 dz = \frac{59}{12} \pi.$$

#### 四 数学建模题 (8 分)

(1) 解: 令  $\begin{cases} R_x = 14 - 8y - 4x = 0 \\ R_y = 32 - 8x - 20y = 0 \end{cases}$  解得唯一驻点:  $\left(\frac{3}{2}, 1\right)$

$$R_{xx} = -4, R_{xy} = -8, R_{yy} = -20 \Rightarrow AC - B^2 > 0, A < 0$$

所以  $\left(\frac{3}{2}, 1\right)$  为极大值点, 也是最大值点, 即电台广告 1.5 万元, 报纸广告 1 万元。

(2) 构造  $L(x, y, \lambda) = 15 + 14x + 32y - 8xy - 2x^2 - 10y^2 + \lambda(x + y - 15)$

$$\text{令 } \begin{cases} L_x = 14 - 8y - 4x + \lambda \\ L_y = 32 - 8x - 20y + \lambda \\ L_\lambda = x + y - 1.5 = 0 \end{cases} \text{ 解得唯一驻点: } \left(0, \frac{3}{2}\right) \text{ 即为所求, 即电台广告 0 万元, 报纸广}$$

告 1.5 万元。

#### 五 证明题 (本题共 2 小题, 每小题 4 分, 共 8 分)

(1) 证: 设  $F(x, y, z) = xy - xf(z) - yg(z)$

$$F_x = y - f(z), F_y = x - g(z), F_z = -xf' - yg' \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z} = \frac{y - f(z)}{xf' + yg'}, \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z} = \frac{x - g(z)}{xf' + yg'}$$

$$\therefore [x - g(z)] \frac{\partial z}{\partial x} = [y - f(z)] \frac{\partial z}{\partial y}.$$

(2) 证: 左 =  $\int_0^a f(x) dx \cdot \int_0^a f(x) dx = \int_0^a f(x) dx \cdot \int_0^a f(y) dy = \int_0^a \int_0^a f(x) f(y) dx dy$   
 $= \int_0^a dx \int_x^a f(x) f(y) dy + \int_0^a dy \int_y^a f(x) f(y) dx = \int_0^a \left[ f(x) \int_x^a f(y) dy \right] dx + \int_0^a \left[ f(y) \int_y^a f(x) dx \right] dy$   
 = 右.

### 7 浙江理工大学 2013—2014 学年第 2 学期《高等数学 A2》期中答案

(说明: 本套试卷解答题及以后的题目解析有两个版本的答案)

#### 一 选择题 (本题共 6 小题, 每小题 4 分, 共 24 分)

1 B      2 A      3 D      4 B      5 C      6 C

#### 二 填空题 (本题共 6 小题, 每小题 4 分, 共 24 分)

1  $(\pm 1, 2, 2)$ ;      2  $(1, 1, 2)$ ;      3  $\int_0^2 dy \int_{\frac{y}{2}}^y f(x, y) dx + \int_2^4 dy \int_{\frac{y}{2}}^2 f(x, y) dx$ ;

$$4 \quad 4dx - 2dy; \quad 5 \quad f(x+t) - f(x-t); \quad 6 \quad 0$$

三 计算题（本题共 6 小题，每小题 6 分，共 36 分。应写出必要的演算过程及文字说明，直接写答案零分）

1 版本一：解：  $\frac{\partial z}{\partial x} = f'_1 \cdot (-1) + f'_2 \cdot ye^x$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= -(f''_{11} \cdot 1 + f''_{12} \cdot e^x) + f'_2 \cdot e^x + ye^x (f''_{21} \cdot 1 + f''_{22} \cdot e^x) \\ &= -f''_{11} + (y-1)e^x f''_{12} + ye^{2x} f''_{22} + f'_2 \cdot e^x \end{aligned}$$

版本二：解：设  $u = y - x, v = ye^x$ ，则  $\frac{\partial z}{\partial x} = -f'_u + ye^x f'_v$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} (-f'_u + ye^x f'_v) \\ &= -f''_{uu} - e^x f''_{uv} + ye^x (f''_{vu} + e^x f''_{vv}) + e^x f'_v \\ &= -f''_{uu} + e^x (y-1) f''_{uv} + ye^{2x} f''_{vv} + e^x f'_v \end{aligned}$$

2 版本一：解：设  $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 3$ ，则  $F_x = 2x, F_y = 2y, F_z = 2z$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z} = -\frac{x}{z}, \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z} = -\frac{y}{z}, \frac{\partial z}{\partial x} \Big|_{(1,1,1)} = -1, \frac{\partial z}{\partial y} \Big|_{(1,1,1)} = -1$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \Big|_{(1,1,1)} = \frac{x}{z^2} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} \Big|_{(1,1,1)} = -1$$

版本二：解：方程两边对  $x$  变量求偏导，得  $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x}{z}$ ；对  $y$  变量求偏导，得  $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y}{z}$ ；

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left( -\frac{x}{z} \right) = \frac{xz_y}{z^2} = -\frac{xy}{z^3}, \text{ 故 } \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \Big|_{(1,1,1)} = -1.$$

3 版本一：解：

$$\text{gradu}(1,0,1) = \left( \frac{1}{x + \sqrt{y^2 + z^2}}, \frac{1}{x + \sqrt{y^2 + z^2}} \cdot \frac{y}{\sqrt{y^2 + z^2}}, \frac{1}{x + \sqrt{y^2 + z^2}} \cdot \frac{z}{\sqrt{y^2 + z^2}} \right) \Big|_{(1,0,1)} = \left( \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2} \right)$$

$$\vec{e}_{AB} = \left( \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3} \right)$$

$$\frac{\partial u}{\partial AB} \Big|_{(1,0,1)} = \text{gradu}(1,0,1) \cdot \vec{e}_{AB} = \frac{1}{2}$$

版本二：解：函数  $u = \ln(x + \sqrt{y^2 + z^2})$  在点  $A(1, 0, 1)$  处可微，且

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_A = \frac{1}{x + \sqrt{y^2 + z^2}} \Big|_{(1,0,1)} = \frac{1}{2}; \quad \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_A = \frac{1}{x + \sqrt{y^2 + z^2}} \cdot \frac{y}{\sqrt{y^2 + z^2}} \Big|_{(1,0,1)} = 0;$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_A = \frac{1}{x + \sqrt{y^2 + z^2}} \cdot \frac{z}{\sqrt{y^2 + z^2}} \Big|_{(1,0,1)} = \frac{1}{2}$$

而  $\vec{l} = \overrightarrow{AB} = (2, -2, 1)$ , 所以  $\vec{l}^\circ = (\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$ , 故在 A 点沿  $\vec{l} = \overrightarrow{AB}$  方向导数为:

$$\left. \frac{\partial u}{\partial l} \right|_A = \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_A \cdot \cos \alpha + \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_A \cdot \cos \beta + \left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_A \cdot \cos \gamma = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} + 0 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{2}.$$

4 版本一: 解:  $I \stackrel{\text{轮换对称性}}{=} \iint_D y^2 dx dy = \frac{1}{2} \iint_D (x^2 + y^2) dx dy \stackrel{\text{极坐标}}{=} \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 \rho^2 \cdot \rho d\rho = 4\pi$

版本二:  $D: 0 \leq \theta \leq 2\pi \quad 0 \leq r \leq 2$ ,

$$\therefore \iint_D x^2 dx dy = \iint_D r^3 \cos^2 \theta dr d\theta = \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta d\theta \int_0^2 r^3 dr = 4\pi$$

5 版本一: 解:  $I = \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2) dV \stackrel{\text{截面法}}{=} \int_1^2 \left( \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{2z}} \rho^2 \cdot \rho d\rho \right) dz = \frac{14}{3} \pi$

版本二:  $I \stackrel{\text{柱面坐标}}{=} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{2}} dr \int_1^2 r^3 dz + \int_0^{2\pi} d\theta \int_{\sqrt{2}}^2 dr \int_{\frac{1}{2}r^2}^2 r^3 dz = \frac{14}{3} \pi$

6 版本一: 解:  $I = \iiint_{\Omega} \frac{dV}{(1+x+y+z)^3} = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} \frac{1}{(1+x+y+z)^3} dz = \frac{1}{2} \ln 2 - \frac{5}{16}$

版本二:  $I = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} \frac{dz}{(1+x+y+z)^3}$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \left[ \frac{1}{(1+x+y)^2} - \frac{1}{4} \right] dy$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 \left( \frac{1}{x+1} - \frac{3-x}{4} \right) dx = \frac{1}{2} \ln 2 - \frac{5}{16}$$

四 应用题 (8 分)

版本一:

(1)  $z$  在点  $M(x, y)$  处梯度方向  $\text{grad} z = (-4x, -2y)$  处增长率最大, 最大增长率为

$$|\text{grad} z|_M = 2\sqrt{4x^2 + y^2}$$

(2) 若记  $f(x, y) = 4x^2 + y^2$ , 则题意要求  $f(x, y)$  在条件  $2x^2 + y^2 = 1000$  约束下的最大

值，为此做拉格朗日函数

$$F(x, y) = 4x^2 + y^2 + \lambda(2x^2 + y^2 - 1000)$$

$$\begin{cases} F_x = 8x + 4\lambda x = 0 \\ F_y = 2y + 2\lambda y = 0 \\ 2x^2 + y^2 = 1000 \end{cases}$$

可得

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ y_1 = 10\sqrt{10} \end{cases} \begin{cases} x_2 = 0 \\ y_2 = -10\sqrt{10} \end{cases} \begin{cases} x_3 = 10\sqrt{5} \\ y_3 = 0 \end{cases} \begin{cases} x_4 = -10\sqrt{5} \\ y_4 = 0 \end{cases}$$

$$F(x_1, y_1) = F(x_2, y_2) = 1000, \quad F(x_3, y_3) = F(x_4, y_4) = 2000, \quad \text{故所求点为 } (\pm 10\sqrt{5}, 0)$$

版本二：

解：（1）函数沿梯度方向 $(-4x, -2y)$ 增长率最大，最大增长率为梯度的模  $2\sqrt{4x^2 + y^2}$  .

$$(2) \text{ 构造 } L(x, y, \lambda) = 4x^2 + y^2 + \lambda(2x^2 + y^2 - 1000)$$

$$\begin{cases} L_x = 8x + 4\lambda x = 0 \\ L_y = 2y + 2\lambda y = 0 \\ L_\lambda = 2x^2 + y^2 - 1000 = 0 \end{cases} \quad \text{解得} \quad \begin{cases} (0, \pm 10\sqrt{10}) \rightarrow L = 1000 \\ (\pm 10\sqrt{5}, 0) \rightarrow L = 2000 \end{cases} \quad \checkmark$$

所以该点为  $(\pm 10\sqrt{5}, 0)$

五 证明题（本题共 2 小题，每小题 4 分，共 8 分）

（1）

版本一：

$$\text{证：} \quad \frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u} = \frac{y}{x^2 + y^2} \cdot 1 - \frac{x}{x^2 + y^2} \cdot 1 = \frac{y - x}{x^2 + y^2} = \frac{-v}{u^2 + v^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v} = \frac{y}{x^2 + y^2} \cdot 1 - \frac{x}{x^2 + y^2} \cdot (-1) = \frac{y + x}{x^2 + y^2} = \frac{u}{u^2 + v^2}$$

$$\therefore \frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{u - v}{u^2 + v^2}$$

版本二：

$$(1) \quad \frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} = \frac{\frac{1}{y}}{1 + \frac{x^2}{y^2}} \cdot 1 + \frac{-\frac{x}{y^2}}{1 + \frac{x^2}{y^2}} \cdot 1 = \frac{y - x}{x^2 + y^2} = -\frac{v}{u^2 + v^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v} = \frac{\frac{1}{y}}{1 + \frac{x^2}{y^2}} \cdot 1 + \frac{-\frac{x}{y^2}}{1 + \frac{x^2}{y^2}} \cdot (-1) = \frac{y+x}{x^2+y^2} = \frac{u}{u^2+v^2}$$

所以,  $\frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{u-v}{u^2+v^2}$  等式成立。

(2) 两个答案给的解法一模一样, 故在此只选择一个保留。

$$\text{证: } \int_a^b dx \int_a^x f(y) dy \stackrel{\text{交换积分次序}}{=} \int_a^b dy \int_y^b f(y) dx = \int_a^b f(y)(b-y) dy = \int_a^b f(x)(b-x) dx$$

## 8 浙江理工大学 2012—2013 学年第 2 学期《高等数学 A2》期中答案

一 选择题 (本题共 6 小题, 每小题 4 分, 满分 24 分)

1 B; 2 B; 3 C; 4 D; 5 D; 6 A.

二 填空题 (本题共 6 小题, 每小题 4 分, 满分 24 分)

1  $2\sqrt{3}$ ; 2  $\frac{1}{3}; \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)$ ; 3  $z+xy$ ; 4  $-\frac{1}{2}$ ; 5 2; 6  $\frac{64}{3}\pi$ .

三 计算题 (本题共 5 小题, 每小题 6 分, 满分 30 分)

1  $du = f_x dx + f_z dz$  .....(2 分),

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy \text{ .....(3 分), } \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{1-y\varphi'}, \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\varphi}{1-y\varphi'} \text{ .....(5 分)}$$

$$du = \left( f_x + \frac{f_z}{1-y\varphi'} \right) dx + \frac{f_z \cdot \varphi'}{1-y\varphi'} dy \text{ .....(6 分)}$$

2  $\frac{\partial z}{\partial y} = x^4 \cdot f'_1 + x^2 \cdot f'_2$  .....(2 分)

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = 4x^3 \cdot f'_1 + 2x \cdot f'_2 + x^4 \cdot y \cdot f''_{11} - y \cdot f''_{22} \text{ .....(6 分)}$$

3  $\iint_D \arctan \frac{y}{x} dx dy = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_1^2 \theta \rho d\rho d\theta = \frac{3}{64} \pi^2$  .....(6 分)

4 在等式两边同时在 D 上取二重积分, 即

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_D xy dx dy - \iint_D \left( \iint_D f(x, y) dx dy \right) dx dy \text{ .....(3 分)}$$

因此,  $\iint_D f(x,y)dxdy = \frac{1}{8}$  ..... (5 分)

所以,  $f(x,y) = xy + \frac{1}{8}$ . .....(6 分)

5 旋转曲面的方程为:  $y^2 + z^2 = 2x$ , .....(2 分)

$$\iiint_{\Omega} (y^2 + z^2)dv = \int_0^8 dx \iint_D (y^2 + z^2)d\sigma \quad D: y^2 + z^2 \leq 2x, \dots\dots(4 \text{ 分})$$

$$= \int_0^8 dx \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{2x}} \rho^3 d\rho = \frac{1024}{3}\pi \dots\dots(6 \text{ 分})$$

#### 四 综合题 (本题满分 8 分)

解: 设切平面的切点为  $\left(x_0, y_0, \frac{x_0^2 + y_0^2}{2}\right)$  ..... (1 分), 则  $\vec{n} = (x_0, y_0, -1)$  ..... (2 分),

有切平面方程为:  $x_0x + y_0y - z - \frac{x_0^2 + y_0^2}{2} = 0$ ; ..... (3 分)

曲线方程组两边关于  $x$  求导, 有  $\frac{dz}{dx} = \frac{5x^4 - 3x}{z + 2}$ ,  $\frac{dy}{dx} = -\frac{6x + 5x^4z}{2y + yz}$  ... (4 分)

于是有切向量  $\vec{T} = (1, 1, 2)$ ; ..... (5 分)

因为  $\vec{n} \cdot \vec{T} = 0$ , 即  $x_0 + y_0 - 2 = 0$  ..... (6 分)

且  $(1, -1, -1)$  位于切平面上, 即  $x_0 - y_0 + 1 - \frac{x_0^2 + y_0^2}{2} = 0$ , 解得  $x_0 = 1, y_0 = 1$  或

$x_0 = 3, y_0 = -1$  ..... (7 分)

因此所求切平面方程为:  $x + y - z - 1 = 0$  或  $3x - y - z - 5 = 0$  ..... (8 分)

#### 五 建模题 (本题满分 7 分)

见书本 P117, 例 9.

六 证明题 (本题共 2 小题, 第 1 小题 4 分, 第 2 小题 3 分, 满分 7 分)

$$(1) \quad \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -a \frac{\partial z}{\partial u} + a \frac{\partial z}{\partial v}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = a^2 \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} - 2a^2 \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + a^2 \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}$$

$$\Rightarrow a^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 4a^2 \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v}, \quad \text{因为 } a \neq 0, \text{ 所以 } \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} = 0 \dots\dots\dots (4 \text{ 分})$$

$$(2) \quad \int_a^b dx \int_a^x (x-y)^{n-2} f(y) dy = \int_a^b dy \int_y^b (x-y)^{n-2} f(y) dx \dots\dots\dots (3 \text{ 分})$$

$$= \frac{1}{n-1} \int_a^b (b-y)^{n-1} f(y) dy$$

## 9 浙江理工大学 2011—2012 学年第 2 学期《高等数学 A2》期中答案

一 选择题（本题共 6 小题，每小题 4 分，满分 24 分）

1 B; 2. C; 3. A; 4. D; 5. B. 6. A.

二 填空题（本题共 6 小题，每小题 4 分，满分 24 分）

1  $\frac{7\sqrt{3}}{3}$ ;                      2  $-5$ ;                      3  $\frac{1}{3}; \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)$

4  $-2 \text{ or } 3, 3 \text{ or } -2$ ;              5  $\int_1^2 dy \int_y^{y^2} f(x, y) dx$ ;              6  $\frac{1}{3}$

三 计算题（本题共 5 小题，前 4 小题每题 6 分，第五题 12 分，满分 36 分）

1  $u_x = \frac{y}{z} x^{\frac{y}{z}-1}, \dots\dots(1 \text{ 分}), \quad u_y = \frac{1}{z} x^{\frac{y}{z}} \ln x, \dots\dots(2 \text{ 分}), \quad u_z = -\frac{y}{z^2} x^{\frac{y}{z}} \ln x, \dots\dots(3 \text{ 分})$

$$du = \frac{y}{z} x^{\frac{y}{z}-1} dx + \frac{1}{z} x^{\frac{y}{z}} \ln x dy - \frac{y}{z^2} x^{\frac{y}{z}} \ln x dz. \dots\dots(6 \text{ 分})$$

2  $z_x = 2xf_1' + yf_2' + 2xg' \dots\dots\dots(2 \text{ 分})$

$$z_{xy} = 2x[f_{11}''(-2y) + f_{12}''x] + [f_{21}''(-2y) + f_{22}''x]y + f_2' + 2xg'' \dots\dots\dots(4 \text{ 分})$$

$$= -4xyf_{11}'' + 2(x^2 - y^2)f_{12}'' + xyf_{22}'' + f_2' + 4xyg'' \dots\dots\dots(6 \text{ 分})$$

3 在等式两边同时在 D 上取二重积分，即

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_D \sqrt{1-x^2-y^2} dx dy - \iint_D \left(\frac{8}{\pi} \iint_D f(x, y) dx dy\right) dx dy \dots\dots(3 \text{ 分})$$

$$\text{因此, } \iint_D f(x, y) dx dy = \frac{\pi}{12} - \frac{1}{9} \dots\dots\dots (5 \text{ 分})$$

$$\text{所以, } f(x, y) = \sqrt{1-x^2-y^2} + \frac{8}{9\pi} - \frac{2}{3}. \dots\dots\dots(6 \text{ 分})$$

4 旋转曲面的方程为:  $y^2 + z^2 = 2x$ ,  $\dots\dots(2 \text{ 分})$

$$\iiint_{\Omega} (y^2 + z^2) dv = \int_0^8 dx \iint_D (y^2 + z^2) d\sigma \quad D: y^2 + z^2 \leq 2x, \dots\dots(4 \text{ 分})$$

$$= \int_0^8 dx \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{2}x} \rho^3 d\rho = 336\pi \dots\dots (6 \text{ 分})$$

5 (1) 消去  $z$  得  $2x^2 + 2y^2 + x + y - 2 = 0$ . .....(1 分)

故所求投影直线为  $\begin{cases} 2x^2 + 2y^2 + x + y - 2 = 0 \\ z = 0 \end{cases}$  ..... (3 分)

(2) 在  $(-1, -1, 2)$  处切向量为  $\vec{s} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2x & 2y & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}_{(-1, -1, 2)} = (-3, 3, 0)$  ..... (2 分)

则切线方程为:  $\frac{x+1}{-1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-2}{0}$  ..... (3 分)

法平面方程为:  $x - y = 0$  ..... (4 分)

(3) 原点到  $\Gamma$  上任一点  $(x, y, z)$  的距离为:  $d = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$  ..... (1 分)

引入拉格朗日函数  $L = x^2 + y^2 + z^2 + \lambda(x^2 + y^2 - z) + \mu(x + y + 2z - 2)$  ..... (2 分)

解方程组  $\begin{cases} L_x = 2x + 2\lambda x + \mu = 0 \\ L_y = 2y + 2\lambda y + \mu = 0 \\ L_z = 2z - \lambda + 2\mu = 0 \\ x^2 + y^2 - z = 0 \\ x + y + 2z - 2 = 0 \end{cases}$  ..... (3 分)

得  $\begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = \frac{1}{2} \\ z = \frac{1}{2} \end{cases}$  或  $\begin{cases} x = -1 \\ y = -1 \\ z = 2 \end{cases}$  ..... (4 分)

代入目标函数, 比较得最大值与最小值分别为  $\sqrt{6}$  和  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ . ..... (5 分)

四 (本题满分 6 分) 解: (1) 点  $(0, 0)$  连续。.....2 分

(2)  $f'_x(0,0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(\Delta x, 0) - f(0,0)}{\Delta x} = 0$ ,

$f'_y(0,0) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(0, \Delta y) - f(0,0)}{\Delta y} = 0$ , .....4 分

但不可微。 .....6 分



五 (1) 令  $F(x, y, z) = f(x - ay, z - by)$ , 则

$$F'_x(x, y, z) = f'_1, F'_y(x, y, z) = -af'_1 - bf'_2, F'_z(x, y, z) = f'_2 \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

由于  $aF'_x + F'_y + bF'_z = 0$ , 因此曲面的切平面恒与方向数为  $(l, m, n) = (a, 1, b)$  的直线相平行。.....4 分

$$(2) \left[ \int_0^a f(x) dx \right]^2 = \iint_D f(x)f(y) dx dy \quad (D: 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq a) \quad \dots\dots\dots 1 \text{ 分}$$

$$= \iint_{D_1} f(x)f(y) dx dy + \iint_{D_2} f(x)f(y) dx dy \quad \dots\dots\dots 3 \text{ 分}$$

$$= 2 \iint_{D_1} f(x)f(y) dx dy \quad \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

$$(D_1: 0 \leq x \leq a, x \leq y \leq a, D_2: 0 \leq y \leq a, y \leq x \leq a)$$

## 10 浙江理工大学 2010-2011 学年第 2 学期《高等数学 A2》期中答案

一 选择题 (本题共 7 小题, 每小题 4 分, 共 28 分)

1 D      2 B      3 A      4 C      5 C      6 C      7 D

二 填空题 (本题共 5 小题, 每小题 4 分, 共 20 分)

$$1 \quad yx^{y-1}dx + x^y \ln x dy; \quad 2 \quad \frac{1}{2}; \quad 3 \quad \frac{1}{3}; \quad 4 \quad -5; \quad 5 \quad \frac{\pi}{3}$$

三 计算题 (本题共 5 小题, 每小题 6 分, 共 30 分。应写出必要的演算过程及文字说明, 直接写答案零分)

$$1 \quad \frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 - 3y^2, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -6y$$

$$2 \quad \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{z}{xz - z}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\frac{\partial z}{\partial x}(xz - x) - z \left( z + x \frac{\partial z}{\partial x} - 1 \right)}{(xz - x)^2} = \frac{2z(z - 1) - z^3}{x^2(z - 1)^3}$$

$$3 \quad \boxed{\iint_D \ln(1 + x^2 + y^2) d\sigma = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^1 \ln(1 + \rho^2) \rho d\rho = \frac{\pi}{4} [2 \ln 2 - 1]}$$

$$4 \quad \boxed{\frac{\partial z}{\partial y} = 2xyf'_1 + x^2f'_2, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 4x^2y^2f''_{11} + 4x^3yf''_{12} + x^4f''_{22} + 2xf'_1}$$

$$5 \quad \boxed{\iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dx dy = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2 \cos \theta} \rho \cdot \rho d\rho = \frac{32}{9}}$$

四 (本题 8 分)

(1) 因为  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0)$ , 所以连续。

(2)  $f'_x(0,0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(\Delta x, 0) - f(0,0)}{\Delta x} = 0$ , 同理  $f'_y(0,0) = 0$

$$\Delta z = f(\Delta x, \Delta y) - f(0,0) = \frac{\Delta x \Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}}, \text{ 若可微,}$$

$$\Delta z = f'_x(0,0)\Delta x + f'_y(0,0)\Delta y + o(\rho), \text{ 而}$$

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0,0)} \frac{\Delta z - f'_x(0,0)\Delta x - f'_y(0,0)\Delta y}{\rho} = \lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0,0)} \frac{\Delta x \Delta y}{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \text{ 不存在, 所以不可微.}$$

五 (本题 6 分)

解 方程  $x^2 - 6xy + 10y^2 - 2yz - z^2 + 18 = 0$  两端分别关于  $x$  和  $y$  求偏导数, 得

$$2x - 6y - 2y \frac{\partial z}{\partial x} - 2z \frac{\partial z}{\partial x} = 0, \quad \textcircled{1}$$

$$-6x + 20y - 2z - 2y \frac{\partial z}{\partial y} - 2z \frac{\partial z}{\partial y} = 0. \quad \textcircled{2}$$

$$\text{令 } \begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial z}{\partial y} = 0, \end{cases} \text{ 得 } \begin{cases} x - 3y = 0, \\ -3x + 10y - z = 0, \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} x = 3y, \\ z = y. \end{cases}$$

将上式代入  $x^2 - 6xy + 10y^2 - 2yz - z^2 + 18 = 0$ , 可得

$$\begin{cases} x = 9, \\ y = 3, \\ z = 3 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x = -9, \\ y = -3, \\ z = -3. \end{cases}$$

对①两端分别关于  $x$  和  $y$  求偏导数, 有  $2 - 2y \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2 \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 - 2z \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0$ ,

$$-6 - 2 \frac{\partial z}{\partial x} - 2y \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - 2 \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} - 2z \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0.$$

对②两端关于  $y$  求偏导数, 有  $20 - 2 \frac{\partial z}{\partial y} - 2 \frac{\partial z}{\partial y} - 2y \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - 2 \left( \frac{\partial z}{\partial y} \right)^2 - 2z \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$ , 所以

$$A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \Big|_{(9,3)} = \frac{1}{6}, B = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \Big|_{(9,3)} = -\frac{1}{2}, C = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \Big|_{(9,3)} = \frac{5}{3},$$

故  $AC - B^2 = \frac{1}{36} > 0$ . 又  $A = \frac{1}{6} > 0$ , 从而点  $(9, 3)$  是函数  $z(x, y)$  的极小值点, 极小值为  $z(9, 3) = 3$ .

类似地, 由

$$A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \Big|_{(-9,-3)} = -\frac{1}{6}, B = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \Big|_{(-9,-3)} = \frac{1}{2}, C = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \Big|_{(-9,-3)} = -\frac{5}{3},$$

可知  $AC - B^2 = \frac{1}{36} > 0$ . 又  $A = -\frac{1}{6} < 0$ , 所以点  $(-9, -3)$  是函数  $z(x, y)$  的极大值点, 极大值为

$$z(-9, -3) = -3.$$

六 证明题 (本题共 2 小题, 每小题 4 分, 共 8 分)

$$1 \quad Q \quad \frac{\partial z}{\partial x} = yx^{y-1}, \frac{\partial z}{\partial y} = x^y \ln x \Rightarrow \frac{x}{y} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{\ln x} \frac{\partial z}{\partial y} = 2z$$

$$2 \quad Q \quad z = f(\xi, \eta), \xi = x^2 - y^2, \eta = 2xy,$$

$$\therefore \frac{\partial f}{\partial x} = 2x \frac{\partial f}{\partial \xi} + 2y \frac{\partial f}{\partial \eta}, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 4x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2} + 8xy \frac{\partial^2 f}{\partial \xi \partial \eta} + 4y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} + 2 \frac{\partial f}{\partial \xi}$$

$$\text{同理 } \frac{\partial f}{\partial y} = -2y \frac{\partial f}{\partial \xi} + 2x \frac{\partial f}{\partial \eta}, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 4y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2} - 8xy \frac{\partial^2 f}{\partial \xi \partial \eta} + 4x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} - 2 \frac{\partial f}{\partial \xi}, \text{ 所以}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

## 11 浙江理工大学 2009-2010 学年第 2 学期《高等数学 A2》期中答案

一 选择题（本题共 7 小题，每小题 4 分，共 28 分）

1 D 2 C 3 D 4 C 5 A 6 A 7 C

二 填空题（本题共 5 小题，每小题 4 分，共 20 分）

$$1 \quad -e^{\cos xy} \sin xy (y dx + x dy) \quad 2 \quad (0, 0) \quad 3 \quad 3x + z - 1 = 0$$

$$4 \quad \frac{1}{2}(1 - e^{-4}) \quad 5 \quad -4$$

三 计算题（本题共 3 小题，每小题 8 分，共 24 分。应写出必要的演算过程及文字说明，直接写答案零分）

$$1 \quad \frac{\partial z}{\partial x} = 2xf'_1 + yf'_2 \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 4xyf''_{11} + 2(x^2 + y^2)f''_{12} + xyf''_{22} + f'_2$$

$$2 \quad I = \int_{-6}^4 dy \int_{\frac{y^2}{2}}^{12-y} (x+y) dx - \int_{-4}^2 dy \int_{\frac{y^2}{2}}^{4-y} (x+y) dx = \frac{8156}{15}$$

$$3 \quad I = \int_0^{\frac{R}{2}} z^2 dz \iint_{D_{z_1}} dx dy + \int_{\frac{R}{2}}^R z^2 dz \iint_{D_{z_2}} dx dy = \int_0^{\frac{R}{2}} z^2 \pi (2Rz - z^2) dz + \int_{\frac{R}{2}}^R z^2 \pi (R^2 - z^2) dz$$

$$= \frac{59}{480} \pi R^5$$

四 (9 分)

添加辅助线  $L'$ :  $y = 0$ ,  $x$  从  $\pi$  到 0

$$\text{因为 } \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = [2y \sin(x + y^2) + 3] - [2y \sin(x + y^2) + 2] = 1$$

由格林公式，则原式

$$= \int_{L+L'} - \int_{L'} = - \iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy - \int_{\pi}^0 \cos x dx = - \iint_D dx dy - 0 = - \int_0^{\pi} \sin x dx = -2$$

五 (9 分)

设  $S': \begin{cases} z = h \\ x^2 + y^2 \leq h^2 \end{cases}$  取上侧，运用高斯公式，

$$\begin{aligned} I &= \iint_{S+S'} (y^2 - z) dy dz + (z^2 - x) dz dx + (x^2 - y) dx dy - \iint_{S'} (y^2 - z) dy dz + (z^2 - x) dz dx + (x^2 - y) dx dy \\ &= \iiint_{\Omega} (0 + 0 + 0) dv - \left( \iint_{D_{xy}} (x^2 - y) dx dy \right) = - \iint_{D_{xy}} x^2 dx dy = -4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^h (\rho \cos \theta)^2 \rho d\rho \\ &= -\frac{\pi}{4} h^4 \end{aligned}$$

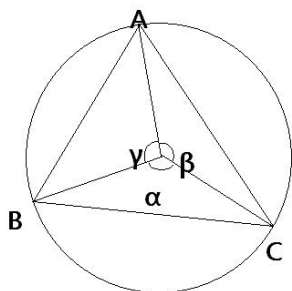
六 证明题 (本题共 2 小题，每小题 5 分，共 10 分)

$$1 \quad \frac{\partial u}{\partial x} = f'(r) \frac{x}{r}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = f'(r) \frac{y}{r}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \left( f''(r) \frac{x^2}{r^2} + f'(r) \frac{y^2}{r^3} \right) + \left( f''(r) \frac{y^2}{r^2} + f'(r) \frac{x^2}{r^3} \right) = f''(r) + f'(r) \frac{1}{r}$$

$$\iint_{s^2+t^2 \leq x^2+y^2} \frac{1}{1+s^2+t^2} ds dt = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^r \frac{1}{1+\rho^2} \rho d\rho = \pi \ln(1+r^2)$$

2



$$\alpha + \beta + \gamma = 2\pi, 0 < \alpha, \beta, \gamma < \pi, \text{ 半径为 } R$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} R^2 (\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma)$$

$$\text{构造拉格朗日函数: } L(\alpha, \beta, \gamma, \lambda) = \frac{1}{2} R^2 (\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma) + \lambda (\alpha + \beta + \gamma - 2\pi)$$

$$\text{由 } \begin{cases} L'_\alpha = 0 \\ L'_\beta = 0 \\ L'_\gamma = 0 \\ L'_\lambda = 0 \end{cases} \text{ 可得唯一驻点: } \alpha = \beta = \gamma = \frac{2}{3}\pi, \text{ 即为所求。}$$

## 12 浙江理工大学 2006-2007 学年第 2 学期《高等数学 A2》期中答案

一 填空题 (本题共 5 小题, 每小题 4 分, 共 20 分)

1  $e^{\sin xy} \cdot \cos xy \cdot (ydx + xdy)$ ;      2  $2z$ ;      3  $2x + y - 4 = 0$ ;      4  $-18\pi$

二 选择题 (本题共 5 小题, 每小题 5 分, 共 25 分)

1 D      2 B      3 D      4 B      5 C

三 1  $\frac{\partial z}{\partial x} = f_1' \cdot 2x + f_2' \cdot y$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= 2x \left[ f_{11}'' \cdot 2y + f_{12}'' \cdot x \right] + \left[ f_{21}'' \cdot 2y + f_{22}'' \cdot x \right] y + f_2' \\ &= 4xyf_{11}'' + 2(x^2 + y^2)f_{12}'' + xyf_{22}'' + f_2' \end{aligned}$$

2 由  $x^2 + y^2 + z^2 - xyz = 0$  确定  $z = z(x, y)$ , 方程两边同时对  $x, y$  求偏导, 解得

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{yz - 2x}{2z - xy}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{xz - 2y}{2z - xy}.$$

四 1  $\int_0^2 dx \int_x^2 e^{-y^2} dy = \int_0^2 dy \int_0^y e^{-y^2} dx = \int_0^2 ye^{-y^2} dy = \frac{1}{2}(1 - e^{-4}).$

2  $\iint_D y dx dy = \int_{-2}^0 dx \int_0^2 y dy - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} d\theta \int_0^{2\sin\theta} \rho \sin\theta \cdot \rho d\rho = 4 - \frac{\pi}{2}.$

3 取半球体的对称轴为  $z$  轴, 原点取在球心, 又设球半径为  $a$ , 则半径体所占的空间闭区域:  $\Omega = \{(x, y, z): x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2, z \geq 0\}$ , 显然, 质心在  $z$  轴上, 故  $\bar{x} = \bar{y} = 0$ ,

$$\begin{aligned} \bar{z} &= \frac{1}{M} \iiint_{\Omega} z \rho dv = \frac{1}{V} \iiint_{\Omega} z dv = \frac{2}{3} \pi a^3 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi \sin\varphi d\varphi \int_0^a r^3 dr = \frac{3}{8}a, \quad \text{故质心为} \\ &\left(0, 0, \frac{3}{8}a\right). \end{aligned}$$

五 设水箱的长、宽、高分别为  $x, y, z$ , 则表面积为  $S = xy + 2(x + y)z$  且  $xyz = a^3$ , 知

$$S = xy + 2a^3 \left( \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right), x > 0, y > 0, \quad \text{令} \begin{cases} \frac{\partial S}{\partial x} = y - \frac{2a^3}{x^2} = 0 \\ \frac{\partial S}{\partial y} = x - \frac{2a^3}{y^2} = 0 \end{cases}, \quad \text{解得唯一驻点} \left( \sqrt[3]{2a}, \sqrt[3]{2a} \right).$$

根据问题的实际意义,  $S(x, y)$  的最小值一定在区域  $D$  的内部取到, 而函数在  $D$  内只有唯

一驻点, 故  $x = y = \sqrt[3]{2a}$  也为最小值点, 从而  $x = y = \sqrt[3]{2a}(m), z = \frac{1}{2}\sqrt[3]{2a}(m)$  时, 表面积最小。

六

$$P = \frac{-y}{4x^2 + y^2}, Q = \frac{x}{4x^2 + y^2}, \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{y^2 - 4x^2}{(4x^2 + y^2)^2} = \frac{\partial Q}{\partial x}, (x, y) \neq (0, 0), \text{ 作足够小的椭圆}$$

$$C: \begin{cases} x = \frac{\delta}{2} \cos \theta \\ y = \delta \sin \theta \end{cases}, \theta \in [0, 2\pi], \text{ 取逆时针方向。由格林公式 } \int_{L-C} \frac{xdy - ydx}{4x^2 + y^2} = 0, \text{ 即得}$$

$$I = \int_L \frac{xdy - ydx}{4x^2 + y^2} = \int_C \frac{xdy - ydx}{4x^2 + y^2} = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \frac{\delta^2}{\delta^2} d\theta = \pi$$

### 13 浙江理工大学 2005-2006 学年第 2 学期《高等数学 A2》期中答案

一 选择题 (本题共 7 小题, 每小题 4 分, 共 28 分)

1 C    2 A    3 A    4 B    5 C    6 C    7 D

二 填空题 (本题共 5 小题, 每小题 4 分, 共 20 分)

1 (0, 0)    2  $x + 2y - 4 = 0$     3 2

4  $\iint_D \sqrt{1 + x^2 + y^2} d\sigma$     5  $2\pi$

三 (本题满分 6 分)

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f'_1 \cdot 2x + f'_2 \cdot y + g' \cdot 2x, \quad \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = f'_1 \cdot (-2y) + f'_2 \cdot x + g' \cdot 2y, \quad \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -4xyf''_{11} + 2(x^2 - y^2)f''_{12} + xyf''_{22} + f'_2 + 4xyg'' \quad \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

四 计算下列二重积分 (每小题 6 分, 满分 12 分)

$$1 \quad I = \iint_{D_1} \cos(x + y) dx dy + \iint_{D_2} -\cos(x + y) dx dy \quad \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx \int_0^{\frac{\pi}{2}-x} \cos(x + y) dy - \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx \int_{\frac{\pi}{2}-x}^{\frac{\pi}{2}} \cos(x + y) dy \quad \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin x) dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-1 + \cos x) dx = \pi - 2. \quad \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

$$2 \quad I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^1 r \ln(1 + r^2) dr \quad \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

$$= \frac{\pi}{4} \int_0^1 \ln(1 + r^2) d(r^2 + 1) \quad \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

$$= \frac{\pi}{2} \ln 2 - \frac{\pi}{4} \int_0^1 2r dr = \frac{\pi}{2} \ln 2 - \frac{\pi}{4}. \quad \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

五 计算下列三重积分（每小题 7 分，满分 14 分）

$$1 \quad \iiint_{\Omega} \sqrt{x^2 + y^2} \cdot z dv = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 d\rho \int_0^{2-\rho \sin \theta} \rho \cdot z \rho dz \quad \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

$$\begin{aligned} &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 \frac{1}{2} \rho^2 (2 - \rho \sin \theta)^2 d\rho \\ &= \int_0^{2\pi} \left( \frac{16}{3} - 8 \sin \theta + \frac{16}{5} \sin^3 \theta \right) d\theta \quad \dots\dots\dots 6 \text{ 分} \\ &= \frac{208}{15} \pi. \quad \dots\dots\dots 7 \text{ 分} \end{aligned}$$

$$2 \quad \Omega \text{ 关于 } xoz \text{ 平面对称, } y \text{ 关于 } y \text{ 是奇函数, 知 } \iiint_{\Omega} y dv = 0, \text{ 故}$$

$$\iiint_{\Omega} (y + z) dv = \iiint_{\Omega} y dv + \iiint_{\Omega} z dv = \iiint_{\Omega} z dv \quad \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

$$\begin{aligned} &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_0^1 \rho \cos \varphi \cdot \rho^2 \sin \varphi d\rho \\ &= 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{4} \cos \varphi \sin \varphi d\varphi \quad \dots\dots\dots 6 \text{ 分} \\ &= \frac{\pi}{8}. \quad \dots\dots\dots 7 \text{ 分} \end{aligned}$$

六（本题满分 6 分）

$$D: (x-1)^2 + y^2 \leq 1, \quad \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

$$S = \iint_D \sqrt{1 + (z_x)^2 + (z_y)^2} d\sigma = \sqrt{2} \iint_D d\sigma \quad \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

$$= \sqrt{2} \pi \quad \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

七（本题满分 8 分）

$$\begin{aligned} I &= \oint_L e^x (1 - \cos y) dx - e^x (y - \sin y) dy \\ &= \oint_L e^x (1 - \cos y) dx + e^x \sin y dy + \oint_L -e^x y dy \quad \dots\dots\dots 2 \text{ 分} \\ &= \oint_L -e^x y dy = -\int_{OA} e^x y dy - \int_{AB} e^x y dy - \int_{BO} e^x y dy \quad \dots\dots\dots 4 \text{ 分} \\ &= -\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^x \sqrt{\sin x} d(\sqrt{\sin x}) - \int_{\frac{\pi}{4}}^0 e^x \sqrt{\cos x} d(\sqrt{\cos x}) - \int_1^0 y dy \\ &= -\frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^x \cos x dx + \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{4}}^0 e^x \sin x dx - \int_1^0 y dy = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4} e^{\frac{\pi}{4}}. \quad \dots\dots\dots 8 \text{ 分} \end{aligned}$$

八（本题满分 6 分）

$$\text{因为 } \int_a^b f(x) dx \cdot \int_a^b \frac{1}{f(x)} dx = \int_a^b f(x) dx \cdot \int_a^b \frac{1}{f(y)} dy = \iint_D \frac{f(x)}{f(y)} dx dy \quad \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

$$\int_a^b f(x)dx \cdot \int_a^b \frac{1}{f(x)}dx = \int_a^b f(y)dx \cdot \int_a^b \frac{1}{f(x)}dy = \iint_D \frac{f(y)}{f(x)}dxdy \quad \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

所以  $2 \int_a^b f(x)dx \cdot \int_a^b \frac{1}{f(x)}dx = \iint_D \left( \frac{f(y)}{f(x)} + \frac{f(x)}{f(y)} \right) dxdy \geq 2 \iint_D dxdy = 2(b-a)^2,$

因此  $\int_a^b f(x)dx \cdot \int_a^b \frac{1}{f(x)}dx \geq (b-a)^2. \quad \dots\dots 6 \text{ 分}$